POLITECNICO DI TORINO

Corso di laurea magistrale in ingegneria matematica
LM-44

Tesi di laurea

Interazione dinamica tra pantografo e catenaria

Relatori

Prof. Stefano MARCHESIELLO

Prof. Dario ANASTASIO

Candidato

Davide ARNAUDO

304655

Marzo 2025

Sommario

The supply of electric current to a train does not always occur in an efficient manner. Knowing the dynamic interaction between the pantograph and the catenary can be useful to understand some reasons that determine a decrease in efficiency. In fact, some phenomena inherent to this interaction, such as the loss of contact between the pantograph and the contact wire and the slackening of the droppers, are among the major causes of this loss of efficiency. The dynamic interaction between the pantograph and the catenary can be represented through different mathematical models. In this work, through the modeling of the system with modal analysis, we will try to understand how the main phenomena of energy dissipation arise. We will therefore try to understand which parameters will need to be intervened on to limit these phenomena, based on the speed at which the train moves.

Sommario

La fornitura di corrente elettrica ad un treno non avviene sempre in maniera efficiente. Conoscere l'interazione dinamica tra il pantografo e la catenaria può essere utile per comprendere alcune ragioni che determinano una diminuzione di efficienza. Infatti, alcuni fenomeni inerenti a quest'interazione, come la perdita di contatto tra il pantografo e il filo di contatto e lo slackening dei pendini, sono tra i maggiori responsabili di questa perdita di efficienza.
L'interazione dinamica tra il pantografo e la catenaria può essere rappresentata attraverso diversi modelli matematici. In questo lavoro, attraverso la modellizzazione del sistema con l'analisi modale, si cercherà di comprendere come insorgono i principali fenomeni di dissipazione energetica. Si cercherà quindi di comprendere su quali parametri occorrerà intervenire per limitare questi fenomeni, in base alla velocità con cui si muove il treno.

Ringraziamenti

Indice

Elenco delle figure

Capitolo 1

Introduzione

L'interazione dinamica tra il pantografo e la catenaria gioca un ruolo chiave nell'efficienza della trasmissione di energia elettrica a un treno.
La catenaria è composta da due fili: la fune portante (posta superiormente) e il filo di contatto (posto inferiormente). Essi sono collegati per mezzo di pendini, che si comportano come mezzi elastici (lunghezza estensibile), e bracci di regolazione (detti anche pali di sostegno), che dividono il sistema in campate assunte di lunghezza uniforme L.
Filo e fune possono essere trattati come travi appoggiate-appoggiate di Eulero-Bernoulli (quindi con spostamenti verticali nulli e momenti nulli agli estremi). Le sezioni di filo sono modellizzate come elementi continui, cioè la massa è uniformemente distribuita su tutta la loro lunghezza.
Il pantografo si modellizza invece come un sistema a elementi discreti, in cui una o più masse concentrate sono tra loro separate tramite molle e smorzatori.

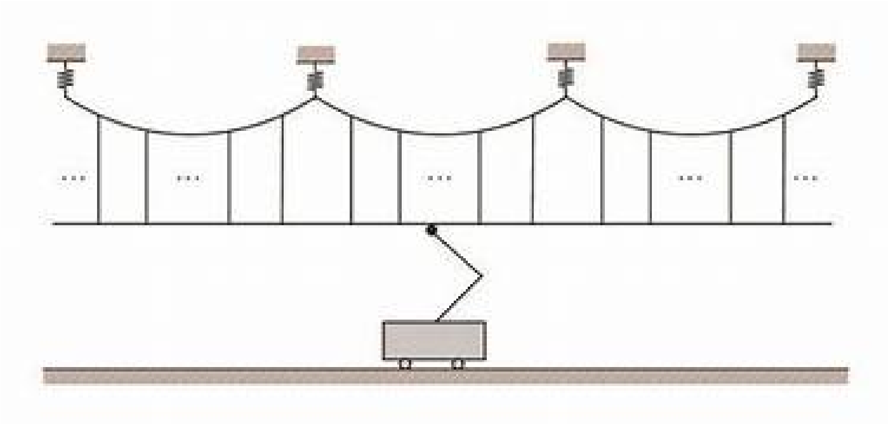

Figura 1.1: Un esempio di un sistema composto da catenaria (fune portante,pendini,bracci di regolazione e filo di contatto) e pantografo. Al di sotto vi è un carrello che rappresenta un convoglio ferroviario

In questo lavoro si rappresenterà l'interazione dinamica tra pantografo e catenaria attraverso la formulazione di un modello matematico basato sull'analisi modale. Si esamineranno inoltre alcuni fenomeni che determinano un'usura precoce dei componenti della catenaria, come lo "slackening" dei pendini e la "perdita di contatto" tra il pantografo e il filo di contatto.
Infine, si cercherà di comprendere quali siano i parametri responsabili di questi due fenomeni e come bisogna variarli per ottenere una miglior efficienza del sistema.

1.0.1 Struttura dell'elaborato

Si inizierà con la formulazione di un modello matematico che rappresenti l'interazione tra il pantografo e la catenaria semplice (composta dal solo filo di contatto).
In seguito, attraverso la ricerca della soluzione mediante una rappresentazione modale, si andranno a definire le matrici di massa, smorzamento e rigidezza che regolano il sistema di ODE (equazioni differenziali ordinarie).
Fatto ciò, verrà utilizzato il metodo penalty per la definizione del termine noto (tempo-dipendente) del sistema.
In seguito, verrà analizzato e utilizzato un robusto metodo di implementazione della soluzione nel tempo.
Prima di procedere con alcuni esempi, verrà introdotta la deformazione statica del sistema, in risposta alla sua forza peso.
Verranno analizzati esempi con pantografo a 1,2 e infine 3 gradi di libertà e si cercherà di comprendere quali siano i parametri responsabili della stabilità o meno del sistema (pretensionamento del filo di contatto, velocità del pantografo, masse

dei gradi di libertà, rigidezze interne al pantografo, precarico ecc.).
Infine, verrà studiato il sistema completo (aggiunta dei pendini e della fune portante), focalizzando in particolare l'attenzione sui pendini.
Si precisa infine che tutti i grafici presenti nell'elaborato sono stati ottenuti come output mediante simulazioni sul software MATLAB.

1.1 Approcci intrapresi e rispettive criticità emerse

La modellizzazione dell'interazione dinamica tra il pantografo e la catenaria è stata ampiamente proposta e trattata nella letteratura scientifica. Sono diverse (e talvolta contrastanti tra loro) le ipotesi in base alle quali si sono formulati modelli matematici in grado di descrivere il fenomeno. In particolare, gli aspetti su cui si è prestata maggior attenzione sono:

- la rappresentazione matematica della catenaria (sia il filo di contatto che la fune portante);
- modalità di contatto tra pantografo e catenaria;
- gestione di un pendino rotto.

Il sistema che rappresenta l'evoluzione nel tempo dell'interazione dinamica tra il pantografo e la catenaria è il seguente:

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{F} \tag{1.1}$$

dove $\boldsymbol{M}$,$\boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{K}$ sono rispettivamente le matrici di massa, smorzamento, e rigidezza, $\boldsymbol{F}$ il termine forzante e $\dot{\boldsymbol{u}}$ e $\ddot{\boldsymbol{u}}$ rispettivamente le derivate prima e seconda rispetto al tempo del vettore degli spostamenti $\boldsymbol{u}$.

1.1.1 La rappresentazione matematica della catenaria

Il filo di contatto e la fune portante si possono rappresentare come elementi continui in cui la loro massa è uniformemente distribuita lungo la loro lunghezza. Assumendo che entrambi si comportino come travi appoggiate-appoggiate e siano liberi di vibrare, i principali modelli matematici che rappresentano la loro dinamica sono i seguenti:

- Modello FEM (o modello agli elementi finiti)[1]: il filo/fune vengono discretizzati in N elementi infinitesimi contigui. Ciascuno di questi elementi è costituito da 2 nodi, i quali hanno al massimo tre gradi di libertà di movimento (assiale, flessionale e rotazionale). In totale ogni elemento è costituito da 6 GDL. Le matrici del sistema sono simmetriche. Tuttavia, poichè ogni elemento ha libertà di movimento diversa rispetto agli elementi contigui e il punto di contatto tra il pantografo e il filo varia nel tempo, le matrici risultano essere dipendenti dal tempo. Dunque, nonostante abbia un'elevata precisione e sia in grado di gestire le non linearità del sistema, questo metodo risulta particolarmente oneroso a livello computazionale.

- Rappresentazione modale [2]: il filo e la fune vengono rappresentati attraverso una combinazione lineare dei modi propri di vibrare (questi sono delle sinusoidi che soddisfano le condizioni al bordo). La dimensione delle matrici è dipendente dal numero di modi che si considerano. Il troncamento modale ha il difetto di omettere tutte le onde che si propagano lungo i fili oltre una certa frequenza. Tuttavia, le matrici non risultano dipendenti dal tempo. Quindi, nonostante la minor precisione, questo metodo risulta più facile da implementare: proprio per questo,infatti, verrà utilizzato in questo lavoro.

1.1.2 Modalità di contatto tra il pantografo e la catenaria

La trasmissione di energia elettrica al treno avviene grazie al costante contatto fisico presente tra il pantografo e il filo di contatto. Questo contatto è garantito da una forza verso l'alto applicata inferiormente al pantografo definita precarico. Tuttavia, dato che il pantografo "striscia" lungo il filo, innescando una risposta dinamica di quest'ultimo, il contatto talvolta può temporaneamente saltare. La perdita di contatto determina la formazione di un arco elettrico tra i componenti coinvolti che è responsabile di un'usura precoce degli stessi [1]. Il contatto può essere rappresentato in due modi:

- Posizione della parte superiore del pantografo coincidente con quella del filo in quel punto (metodo constraint). Questo metodo, se da una parte presenta il vantaggio di accoppiare il sistema pantografo con quello della catenaria, dall'altra ha il grosso svantaggio di non essere in grado gestire le perdite di contatto, che nella realtà possono avvenire.

- Presenza di una rigidezza tra la parte superiore del pantografo e il filo di contatto, indice della penetrazione del pantografo nel filo (metodo penalty). Questo metodo ammette la perdita di contatto, ma la stima del valore di questa rigidezza risulta assai arduo. Infatti, questa non può essere nè troppo modesta (in quanto la perdita di contatto sarebbe molto frequente) nè troppo intensa (in quanto determinerebbe un'eccessiva risposta dinamica della catenaria, con l'instaurarsi di onde armoniche che si propagano con frequenza troppo elevata).

1.1.3 Gestione dello slackening

I pendini collegano il filo di contatto con la fune portante e in genere sono disposti in maniera equidistante lungo una campata. Essi si comportano come mezzi elastici e sono soggetti a trazione, in risposta alla flessione verso il basso del filo di contatto dovuta al proprio peso. Tuttavia, se sono soggetti ad una forte compressione, essi possono andare incontro a slackening. Matematicamente, questo si può esprimere in due modi [3]:

- Rimozione del contributo del pendino in slackening dalla matrice di rigidezza: metodo realistico, ma col difetto che la matrice di rigidezza diventa tempo-dipendente.

- Aggiunta del contributo del pendino in slackening al termine forzante: metodo più astratto, ma più facile da implementare a livello computazionale.

Capitolo 2

Interazione pantografo-filo di contatto

2.1 Catenaria semplice

L'equazione della catenaria semplice (che, in questo caso, è costituita solo dal filo di contatto) può essere scritta nella maniera seguente [2]:

$$\mu \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 W(x,t)}{\partial x^4} - T \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} = \lambda(t)\delta(x - vt) \tag{2.1}$$

Questa equazione rappresenta una trave in flessione soggetta ad una forzante in moto secondo il modello di Eulero-Bernoulli. Se si assume che il pantografo si rappresenti come un sistema discreto a due gradi di libertà, la dinamica delle sue due masse può essere scritta nella maniera seguente [4]:

$$m_1 \frac{d^2 Z_1(t)}{dt^2} + c_1\left(\frac{dZ_1(t)}{dt} - \frac{dZ_2(t)}{dt}\right) + k_1(Z_1(t) - Z_2(t)) = -\lambda(t) \tag{2.2}$$

$$m_2 \frac{d^2 Z_2(t)}{dt^2} + c_1\left(\frac{dZ_2(t)}{dt} - \frac{dZ_1(t)}{dt}\right) + c_2 \frac{dZ_2(t)}{dt} + k_1(Z_2(t) - Z_1(t)) + k_2 Z_2(t) = F_0 \tag{2.3}$$

Si elenca ora il significato di tutti i parametri:

- F_0 $[N]$, è il "precarico" e serve a mantenere il contatto tra il pantografo e la catenaria;
- μ $[\frac{kg}{m}]$ è la densità lineare del filo di contatto;

- EI $[Nm^2]$ è il prodotto tra il modulo di Young E $[\frac{N}{m^2}]$ e il momento d'inerzia relativo all'area trasversale del filo I $[m^4]$; tale quantità prende il nome di rigidezza flessionale;
- $T[N]$ è il pretensionamento meccanico del filo;
- $m_i, k_i, c_i, i = 1{,}2$ sono le masse, rigidezze e smorzamenti che riguardano il sistema pantografo;
- $Z_i(t), i = 1{,}2$ sono le coordinate verticali dei due GDL(gradi di libertà) del pantografo;
- $W(x,t)$ è la coordinata verticale del filo di contatto;
- infine, $\lambda(t)$ è la "forza di contatto" che si scambiano la massa superiore del pantografo e il filo di contatto.

In virtù della presenza del termine $\lambda(t)$, i due sistemi (quello del filo di contatto e quello del pantografo) non possono essere risolti separatamente. Attraverso il metodo di separazione delle variabili, è possibile rappresentare $W(x,t)$ come:

$$W(x,t) = \sum_{j=1}^{N} \phi_j(x)\eta_j(t) \tag{2.4}$$

dove le $\phi_j(x)$ vengono dette forme modali o autofunzioni e devono soddisfare le condizioni al contorno $W(0,t) = W(L,t) = \frac{\partial^2 W(0,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 W(L,t)}{\partial x^2} = 0$, mentre le $\eta_j(t)$ vengono dette coordinate modali. In virtù delle condizioni al bordo, è possibile rappresentare $\phi_j(x)$ come $\sin(\frac{j\pi x}{L})$. L'equazione del filo assume quindi la seguente forma [2]:

$$\begin{aligned} &\mu \textstyle\sum_{j=1}^{N} \sin(\frac{j\pi x}{L})\frac{d^2\eta_j(t)}{dt^2} + EI \textstyle\sum_{j=1}^{N} (\frac{j\pi}{L})^4 \sin(\frac{j\pi x}{L})\eta_j(t) + T \textstyle\sum_{j=1}^{N} (\frac{j\pi}{L})^2 \sin(\frac{j\pi x}{L})\eta_j(t) \\ &= \lambda(t)\delta(x - vt) \end{aligned} \tag{2.5}$$

Se ora si moltiplica l'equazione per $\sin(\frac{i\pi x}{L})$ (con i intero e $1 \leq i \leq N$) e poi si integra tra 0 e L, si ottengono N equazioni della forma:

$$\begin{aligned} &\mu \int_0^L \sin(\frac{i\pi x}{L})[\sum_{j=1}^{N} \sin(\frac{j\pi x}{L})\frac{d^2\eta_j(t)}{dt^2}]dx + EI \int_0^L \sin(\frac{i\pi x}{L})[\sum_{j=1}^{N}(\frac{j\pi}{L})^4 \sin(\frac{j\pi x}{L})\eta_j(t)]dx \\ &+ T \int_0^L \sin(\frac{i\pi x}{L})[\sum_{j=1}^{N}(\frac{j\pi}{L})^2 \sin(\frac{j\pi x}{L})\eta_j(t)]dx = \lambda(t) \int_0^L \sin(\frac{i\pi x}{L})\delta(x - vt)dx \end{aligned} \tag{2.6}$$

Calcolando ora gli integrali e assumendo che $\sin(\frac{i\pi x}{L})\sin(\frac{j\pi x}{L}) = 0$, con $1 < j < N$ e $j \neq i$ e sapendo che $\int_0^L \sin(\frac{i\pi x}{L})\delta(x - vt)dx = \sin(\frac{i\pi vt}{L})$ e $\int_0^L \sin^2(\frac{i\pi x}{L})dx = \frac{L}{2}$, le N equazioni risultanti diventano [2]:

$$\mu\frac{L}{2}\frac{d^2\eta_i(t)}{dt^2} + EI\frac{L}{2}(\frac{i\pi}{L})^4\eta_i(t) + T\frac{L}{2}(\frac{i\pi}{L})^2\eta_i(t) = \sin(\frac{i\pi vt}{L})\lambda(t) \tag{2.7}$$

Ora è possibile scrivere il sistema in forma matriciale come:

$$\boldsymbol{M}\frac{d^2\boldsymbol{y}}{dt^2} + \boldsymbol{C}\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{F} \tag{2.8}$$

$\boldsymbol{M}$,$\boldsymbol{C}$ e$\boldsymbol{K}$ sono rispettivamente le matrici di massa, smorzamento e rigidezza. Sono tutte e tre matrici quadrate di dimensione $N + 2$. In particolare, assumendo di prendere N=5, $\boldsymbol{y}$,$\boldsymbol{M}$,$\boldsymbol{K}$,$\boldsymbol{C}$e$\boldsymbol{F}$ risultano della seguente forma:

- $\boldsymbol{y}$= $\begin{bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \\ \eta_3(t) \\ \eta_4(t) \\ \eta_5(t) \\ Z_1(t) \\ Z_2(t) \end{bmatrix}$;

- $\boldsymbol{M}$= $\begin{bmatrix} \mu\frac{L}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu\frac{L}{2} & & & & & \\ 0 & 0 & \mu\frac{L}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu\frac{L}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu\frac{L}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}$;

- $\boldsymbol{K}$= $\begin{bmatrix} \frac{L}{2}(\frac{\pi}{L})^2[EI(\frac{\pi}{L})^2 + T] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{2}(\frac{5\pi}{L})^2[EI(\frac{5\pi}{L})^2 + T] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_1 & -k_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_1 & k_1 + k_2 \end{bmatrix}$

  dove ... = $\frac{L}{2}(\frac{i\pi}{L})^2[EI(\frac{i\pi}{L})^2 + T]$ per i = 2,3,4;

- $\boldsymbol{C}$= $\begin{bmatrix} \alpha M_{1,1}+\beta K_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha M_{1,1}+\beta K_{5,5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 & -c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_1 & c_1+c_2 \end{bmatrix}$;

- $\boldsymbol{F}$= $\begin{bmatrix} \lambda(t)\sin(\frac{\pi vt}{L}) \\ \lambda(t)\sin(\frac{2\pi vt}{L}) \\ \lambda(t)\sin(\frac{3\pi vt}{L}) \\ \lambda(t)\sin(\frac{4\pi vt}{L}) \\ \lambda(t)\sin(\frac{5\pi vt}{L}) \\ -\lambda(t) \\ F_0 \end{bmatrix}$.

Per quanto riguarda gli smorzamenti modali (C_{ii}), essi vengono presi proporzionali sia alle masse modali $M_{i,i}$ che alle rigidezze modali $K_{i,i}$ per $i = 1...N$ per mezzo di due coefficienti α e β tali che: $C_{i,i} = \alpha M_{i,i} + \beta K_{i,i}$ [2]. Nelle simulazioni che verranno effettuate, si prenderà $\alpha = 0.0125$ e $\beta = 0.0001$ [5].

2.2 Il metodo penalty

Vi sono due alternative mediante cui è possibile rappresentare il termine $\lambda(t)$:

- la prima consiste nel prendere la coordinata verticale della massa superiore del pantografo coincidente con quella del filo di contatto, assumendo che non vi sia perdita di contatto tra essi (approccio utilizzato in [5];
- la seconda,invece, assume che tra il filo e la massa superiore vi sia un sistema molla-smorzatore (rigidezza k_h e smorzamento c_h) ed è ammessa la perdita di contatto.

Quest'ultima ipotesi è alla base del metodo penalty, con cui verranno effettuate tutte le successive simulazioni. Il metodo penalty afferma che il termine $\lambda(t)$ può essere rappresentato come somma di un termine proporzionale a k_h (rigidezza penalty) e di un altro proporzionale a c_h (smorzamento penalty), attraverso la seguente formula [3]:

$$\begin{aligned} &\lambda(t) = k_h[Z_1(t) - W(vt,t)] + c_h[\frac{\partial Z_1(t)}{\partial t} - \frac{\partial W(vt,t)}{\partial t}]...se...Z_1(t) > W(vt,t) \\ &\lambda(t) = 0...se...Z_1(t) \leq W(vt,t). \end{aligned} \tag{2.9}$$

La seconda espressione indica l'annullamento della forza in caso di perdita di contatto.
Ricordando che $W(vt,t) = \sum_{i=1}^{N} \sin(\frac{i\pi vt}{L})\eta_i(t)$, il termine $\lambda(t)$ avrà la seguente rappresentazione [6]:

$$\begin{aligned}
&\lambda(t) = k_h[Z_1(t) - \sum_{i=1}^{N} \sin(\frac{i\pi vt}{L})\eta_i(t)] + c_h[\frac{\partial Z_1(t)}{\partial t} - \sum_{i=1}^{N} \sin(\frac{i\pi vt}{L})\frac{\partial \eta_i(t)}{\partial t} \\
&- \sum_{i=1}^{N} (\frac{i\pi v}{L}) \cos(\frac{i\pi vt}{L})\eta_i(t)] ...se... Z_1(t) > W(vt,t) \\
&\lambda(t) = 0...se...Z_1(t) \leq W(vt,t).
\end{aligned} \tag{2.10}$$

2.3 L'implementazione in tempo tramite il metodo di Newmark

L'approccio di Newmark per l'implementazione di questo sistema di ODE nel tempo è uno dei metodi che garantisce stabilità forte e consistenza.
Si consideri l'equazione 2.8 : si pone $\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = \dot{\boldsymbol{y}}$ e $\frac{d^2\boldsymbol{y}}{dt^2} = \ddot{\boldsymbol{y}}$. Partendo da uno sviluppo di Taylor e definendo $\boldsymbol{y}_{i+1}$ l'espressione della soluzione all'istante $i+1$,$\dot{\boldsymbol{y}}_{i+1}$ la derivata prima e $\ddot{\boldsymbol{y}}_{i+1}$ la derivata seconda rispetto al tempo, si può affermare che:

$$\boldsymbol{y}_{i+1} = \boldsymbol{y}_i + h\dot{\boldsymbol{y}}_i + \frac{h^2}{2}\ddot{\boldsymbol{y}}_i \tag{2.11}$$

$$\dot{\boldsymbol{y}}_{i+1} = \dot{\boldsymbol{y}}_i + h\ddot{\boldsymbol{y}}_i \tag{2.12}$$

Tuttavia, il metodo di Newmark va a correggere gli ultimi termini, i quali rimarranno proporzionali rispettivamente a h^2 e h e andranno a dipendere anche da $\ddot{\boldsymbol{y}}_{i+1}$, in una somma pesata con $\ddot{\boldsymbol{y}}_i$ per mezzo di due coefficienti γ e β. I nuovi sviluppi risultano quindi:

$$\boldsymbol{y}_{i+1} = \boldsymbol{y}_i + h\dot{\boldsymbol{y}}_i + h^2(\frac{1}{2} - \beta)\ddot{\boldsymbol{y}}_i + h^2\beta\ddot{\boldsymbol{y}}_{i+1} \tag{2.13}$$

$$\dot{\boldsymbol{y}}_{i+1} = \dot{\boldsymbol{y}}_i + h(1-\gamma)\ddot{\boldsymbol{y}}_i + h\gamma\ddot{\boldsymbol{y}}_{i+1} \tag{2.14}$$

In questo caso, si prendono come valori dei parametri introdotti $\gamma = \frac{1}{2}$ e $\beta = \frac{1}{4}$. Sostituendo nell'equazione 2.8 l'espressione di $\boldsymbol{y}_{i+1}$ e $\dot{\boldsymbol{y}}_{i+1}$, è possibile ricavare l'espressione di $\ddot{\boldsymbol{y}}_{i+1}$.Infatti, risulta:

$$[\boldsymbol{M} + \gamma h\boldsymbol{C} + \beta h^2 \boldsymbol{K}]\ddot{\boldsymbol{y}}_{i+1} = \boldsymbol{F}_{i+1} - \boldsymbol{C}[\dot{\boldsymbol{y}}_i + (1-\gamma)h\ddot{\boldsymbol{y}}_i] - \boldsymbol{K}[\boldsymbol{y}_i + h\dot{\boldsymbol{y}}_i + (\frac{1}{2} - \beta)h^2\ddot{\boldsymbol{y}}_i] \tag{2.15}$$

Se si definiscono come $\dot{\tilde{\boldsymbol{y}}}_{i+1}$ e $\tilde{\boldsymbol{y}}_{i+1}$ le espressioni a destra dell'uguale, rispettivamente moltiplicate per $\boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{K}$, ogni iterazione del metodo si articola nel seguente modo [7]:

- 1) si definisce $\dot{\tilde{\boldsymbol{y}}}_{i+1} = \dot{\boldsymbol{y}}_i + (1-\gamma)h\ddot{\boldsymbol{y}}_i$ e $\tilde{\boldsymbol{y}}_{i+1} = \boldsymbol{y}_i + h\dot{\boldsymbol{y}}_i + (\frac{1}{2} - \beta)h^2\ddot{\boldsymbol{y}}_i$;
- 2) si calcola $\boldsymbol{F}_{i+1}$ in funzione di $\dot{\tilde{\boldsymbol{y}}}_{i+1}$ e $\tilde{\boldsymbol{y}}_{i+1}$;
- 3) si risolve $[\boldsymbol{M} + \gamma h\boldsymbol{C} + \beta h^2 \boldsymbol{K}]\ddot{\boldsymbol{y}}_{i+1} = \boldsymbol{F}_{i+1} - \boldsymbol{C}\dot{\tilde{\boldsymbol{y}}}_{i+1} - \boldsymbol{K}\tilde{\boldsymbol{y}}_{i+1}$;
- 4) si correggono i termini $\tilde{\boldsymbol{y}}_{i+1}$ e $\dot{\boldsymbol{y}}_{i+1}$ aggiungendo i termini proporzionali a $\ddot{\boldsymbol{y}}_{i+1}$: $\dot{\boldsymbol{y}}_{i+1} = \dot{\tilde{\boldsymbol{y}}}_{i+1} + h\gamma\ddot{\boldsymbol{y}}_{i+1}$ e $\boldsymbol{y}_{i+1} = \tilde{\boldsymbol{y}}_{i+1} + h^2\beta\ddot{\boldsymbol{y}}_{i+1}$.

2.4 Deformazione statica

Oltre alla deformazione dovuta all'interazione dinamica col pantografo, il filo di contatto è anche soggetto ad una deformazione statica dovuta al proprio peso. Ovviamente, essa è costante nel tempo e dipende solo dallo spazio. Quindi, se si definisce $W_s(x)$ la deformazione del filo dovuta la proprio peso e g l'accelerazione di gravità, l'equazione da cui si può ottenere l'espressione della deformazione statica del filo di contatto è la seguente [5]:

$$EI\frac{d^4W_s(x)}{dx^4} - T\frac{d^2W_s(x)}{dx^2} = -\mu g \tag{2.16}$$

Ponendo $\frac{\partial^2 W_s(x)}{\partial x^2} = y$, è possibile ottenere la soluzione risolvendo l'equazione in due step. Nel primo, in cui abbiamo una ODE del 2° ordine in y, è necessario porre le condizioni al bordo $y(x=0)=0$ e $y(x=L)=0$. Ottenuta l'espressione di y, è ancora necessario integrare due volte in x per ottenere l'espressione di W_s, tenendo conto delle condizioni al bordo $W_s(x=0) = W_s(x=L) = 0$. Svolgendo i calcoli,l'espressione che si trova è la seguente:

$$W_s(x) = \frac{\mu g x(x-L)}{2T} - \frac{EI\mu g}{T^2}(\frac{e^{\sqrt{\frac{T}{EI}}(x-L)} + e^{-\sqrt{\frac{T}{EI}}x}}{1 + e^{-\sqrt{\frac{T}{EI}}L}} - 1) \tag{2.17}$$

Quindi, la deformazione totale è la somma tra $W(x,t)$ e $W_s(x)$.

Come si può osservare, la deformazione statica ha un profilo pressochè parabolico, in quanto il secondo termine è una combinazione lineare di esponenziali negative, oltre che ad avere T^2 a denominatore. Inotre, più il filo è pretensionato, meno si deforma a causa del proprio peso.

2.5 Esempio con pantografo a un grado di libertà

In questa sezione si studia la variazione della forza di contatto $\lambda(t)$ e della deformazione del filo in corrispondenza della posizione del pantografo. Come primo esempio si prende un pantografo a un grado di libertà. Occorre specificare che in questo primo esempio le matrici di massa, rigidezza e smorzamento hanno dimensione $(N+1)*(N+1)$ e $\boldsymbol{F}_{N+1} = -\lambda(t) + F_0$. I parametri sono i seguenti [6]:

- massa del pantografo $m = 3kg$;
- densità lineare del filo di contatto $\mu = 1.35\frac{kg}{m}$;
- pretensionamento meccanico del filo $T = 20kN$;
- rigidezza flessionale del filo $EI = 135Nm^2$;
- precarico (forzante verso l'alto a cui è soggetta la massa del pantografo) $F_0 = 50N$;
- rigidezza penalty (tra il filo di contatto e la massa del pantografo) $k_h = 5 \cdot 10^4 \frac{N}{m}$;
- smorzamento penalty $c_h = 5 \cdot 10^2 \frac{Ns}{m}$;
- rigidezza tra massa e treno $k_1 = 1\frac{N}{m}$;
- smorzamento tra massa e treno $c_1 = 1\frac{Ns}{m}$;
- lunghezza sezione del filo di contatto $L = 60m$;
- velocità del pantografo $V = 60\frac{m}{s}$;
- numero di modi utilizzati $N = 200$;
- passo di discretizzazione spaziale $\delta x = 0.25m$;
- passo di discretizzazione temporale $\delta t = 10^{-5}s$.

Effettuando la simulazione senza considerare la deformazione statica $W_s(x)$, si ottengono i seguenti risultati:

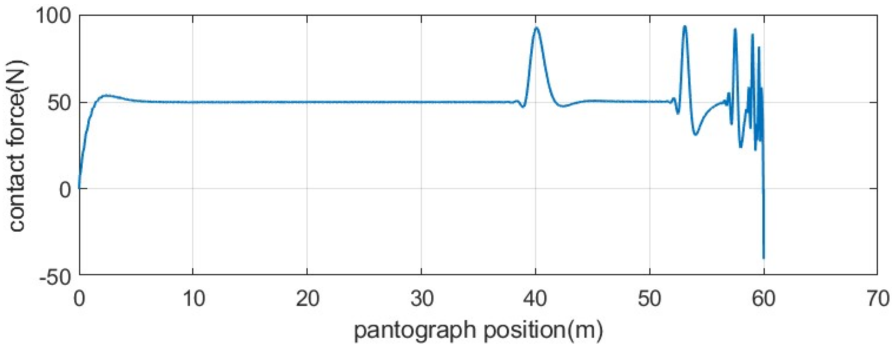

Figura 2.1: Variazione della forza di contatto in corrispondenza della posizione del pantografo(velocità 216 km/h) senza considerare la deformazione statica

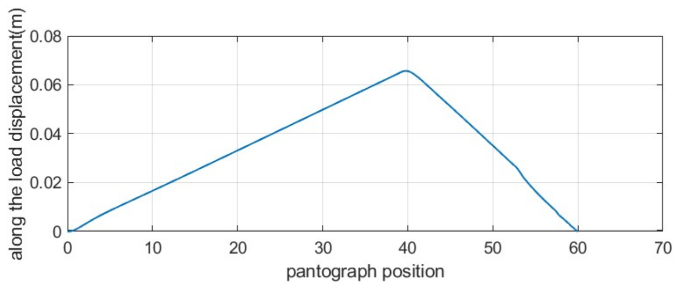

Figura 2.2: Spostamento verticale del filo in corrispondenza della posizione del pantografo senza considerare la deformazione statica

Invece, se si aggiunge anche la statica, gli output che si ottengono sono i seguenti:

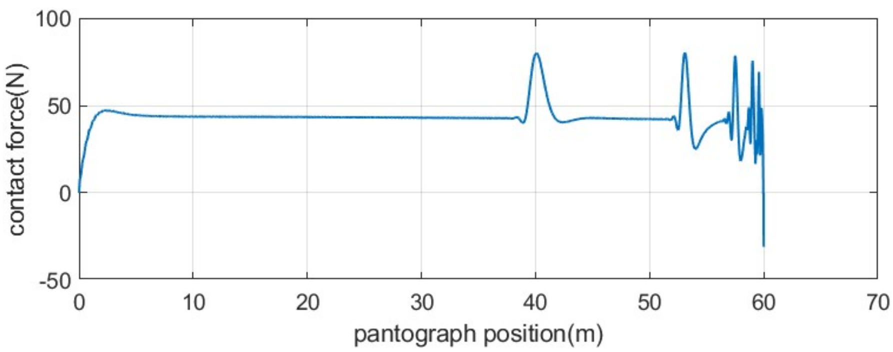

Figura 2.3: Variazione della forza di contatto in corrispondenza della posizione del pantografo con la deformazione statica inclusa

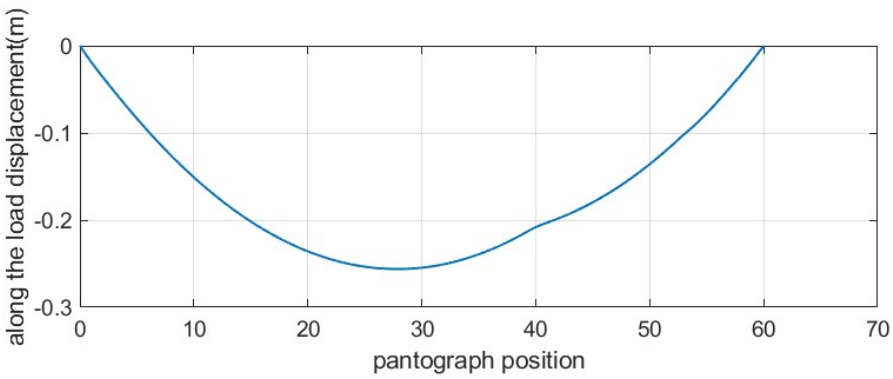

Figura 2.4: Spostamento verticale del filo in corrispondenza della posizione del pantografo con la deformazione statica inclusa

Da come si può osservare, in entrambi i casi $\lambda(t)$ segue un andamento pressochè costante per tutta la sezione del filo, con l'influenza della statica che la abbassa di 7/8 N. Le uniche oscillazioni significative che presenta la forza di contatto si trovano in prossimità della fine della campata: questo perchè il pantografo, muovendosi, genera un'onda che si propaga fino a fine campata e poi si riflette. Quest'onda, quindi, si scontra con il pantografo, determinando una sovrapposizione di armoniche.
Si prova ora a settare a 0 il precarico F_0 e osservare il comportamento di λ, con e senza statica:

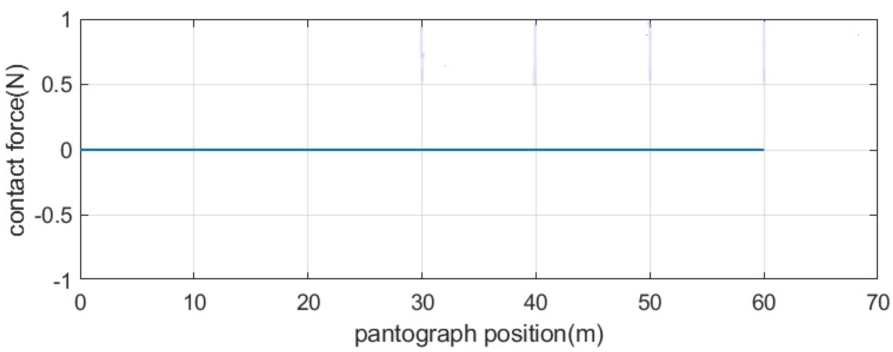

Figura 2.5: Variazione della forza di contatto in corrispondenza della posizione del pantografo con precarico applicato nullo e senza considerare la deformazione statica

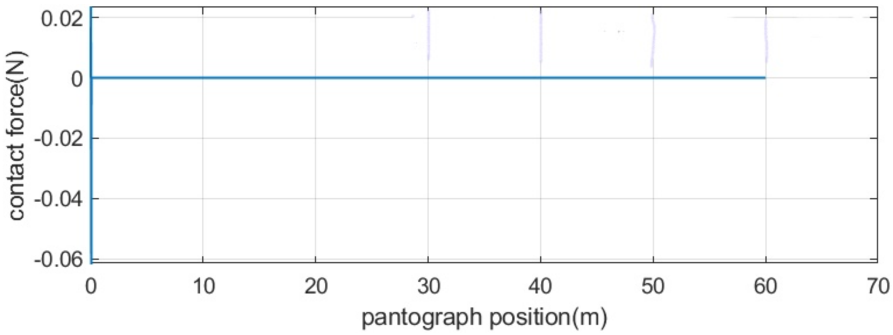

Figura 2.6: Variazione della forza di contatto in corrispondenza della posizione del pantografo con precarico applicato nullo e considerando la deformazione statica

Come si può osservare, in questo caso la deformazione statica del filo di contatto è quasi del tutto ininfluente, se non con una lieve perturbazione iniziale. L'assenza del precarico determina la perdita di contatto tra il filo e il pantografo, in quanto non vi è nessuna forza che spinge su quest'ultimo.
Si assume ora che il pantografo si stia muovendo a una velocità molto bassa (36 km/h, mentre il precarico è fissato nuovamente a regime a 50 N):

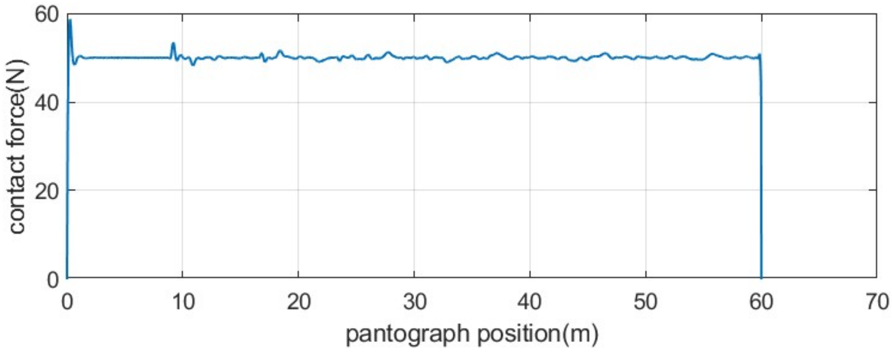

Figura 2.7: Variazione della forza di contatto in corrispondenza della posizione del pantografo (velocità 36 km/h) senza considerare la deformazione statica

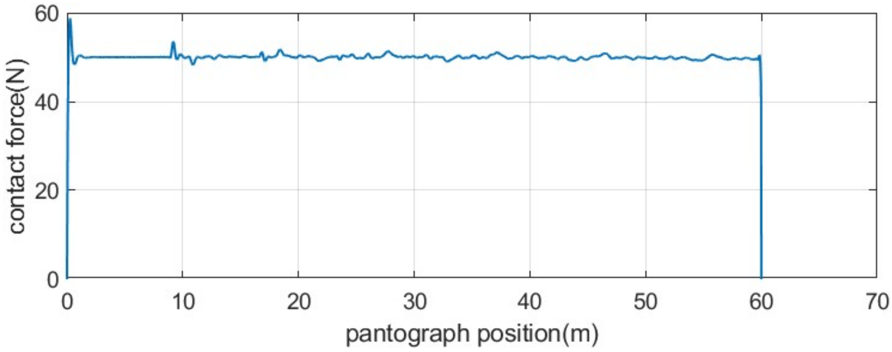

Figura 2.8: Variazione della forza di contatto in corrispondenza della posizione del pantografo(velocità 36 km/h) considerando la deformazione statica

Si prova ora a vedere qual è l'influenza della statica se si assume che il pantografo si muova ad una velocità molto elevata (300 km/h).

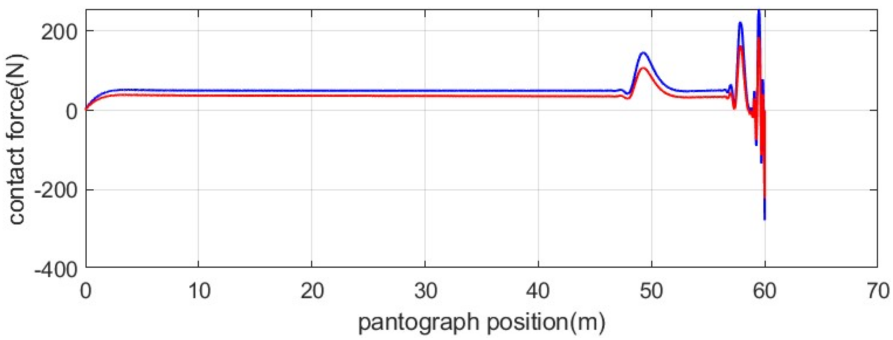

Figura 2.9: Variazione della forza di contatto in corrispondenza della posizione del pantografo(velocità 300 km/h) omettendo (linea blu) e considerando (linea rossa) la deformazione statica

Da quest' ultimo caso è possibile osservare come la deformazione statica influisca sempre di più all'aumentare della velocità del pantografo: infatti, se nel primo caso i due grafici sono quasi sovrapponibili, nel secondo differiscono per $13/14N$, addirittura il doppio rispetto al primo caso esaminato (con velocità di 216 km/h). Inoltre, un altro fatto che si può notare è che la deformazione statica smorza le oscillazioni di $\lambda(t)$ laddove sono più nette (in particolare a fine campata).

2.5.1 Il ruolo del pretensionamento nell'interazione tra il pantografo e il filo di contatto

Verranno ora riportati i risultati inerenti ad una modifica del pretensionamento, sia omettendo la statica, sia considerandola. Nel primo caso il pretensionamento verrà dimezzato a $10kN$, mentre nel secondo caso verrà incrementato a $30kN$. La velocità viene riportata a 216 km/h. In entrambi i casi si riportano sia la variazione della forza di contatto $\lambda(t)$ sia la deformazione del filo di contatto in corrispondenza della posizione del pantografo. In ogni grafico è inoltre presente un confronto con il caso di partenza (con $T = 20kN$, linea di colore rosso).

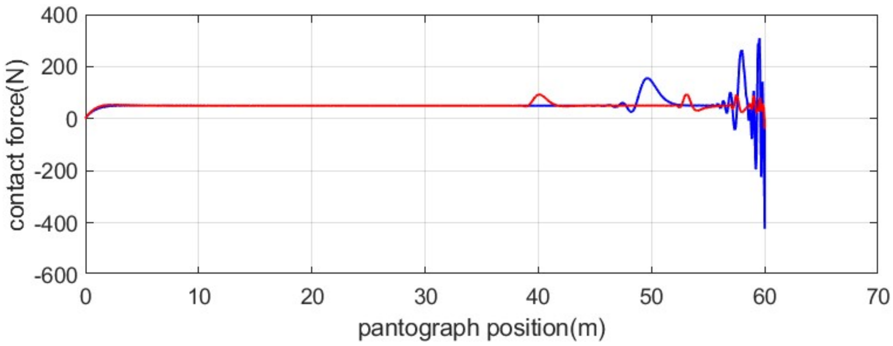

Figura 2.10: Variazione della forza di contatto applicando un pretensionamento al filo di $10kN$(in blu) confrontata con il caso standard di $20kN$(in rosso),senza considerare la statica

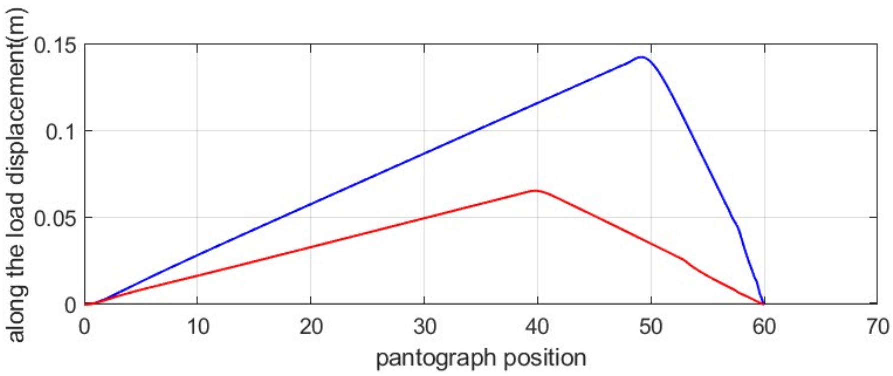

Figura 2.11: Deformazione del filo in corrispondenza della posizione del pantografo,pretensionamento $10kN$(blu) confrontata al caso standard di $20kN$ (rosso),trascurando la statica

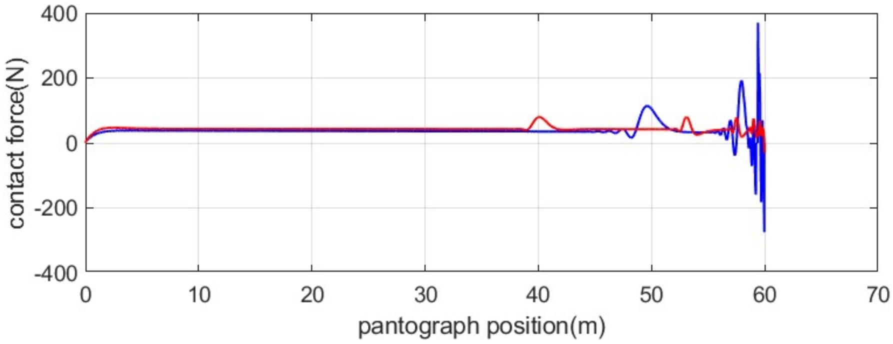

Figura 2.12: Variazione della forza di contatto applicando un pretensionamento al filo di $10kN$,considerando anche la statica(blu),confrotata con il caso di partenza(rosso)

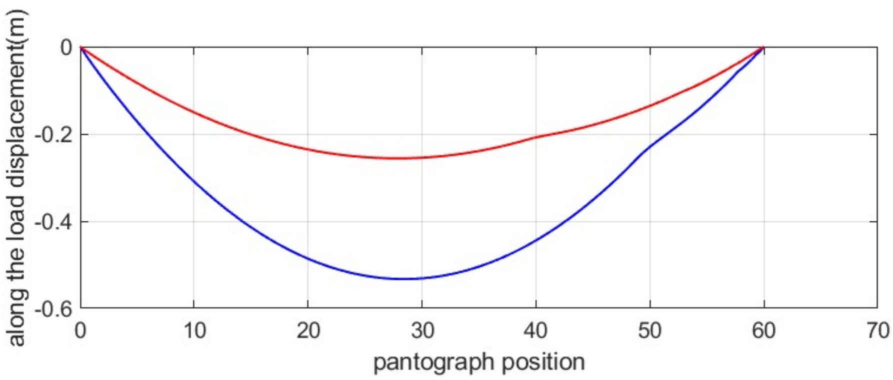

Figura 2.13: Deformazione del filo in corrispondenza della posizione del pantografo, pretensionamento $10kN$, statica inclusa(blu),confrontata con il caso di partenza(rosso)

Da come si osserva, la statica fa deformare il filo di contatto circa il doppio, se si dimezza il pretensionamento di esso.

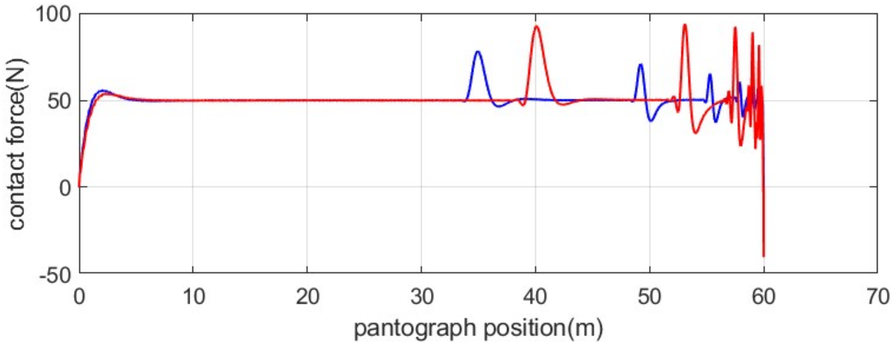

Figura 2.14: Variazione della forza di contatto applicando un pretensionamento al filo di $30kN$, omettendo la statica(blu), confrontata con il caso di partenza (rosso)

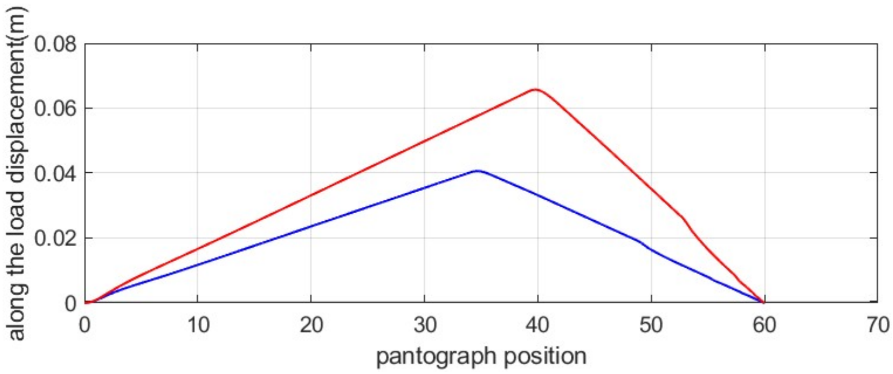

Figura 2.15: Deformazione del filo in corrispondenza della posizione del pantografo, pretensionamento $30kN$ e statica non inclusa (blu), confrontata con il medesimo caso di $20kN$(rosso)

In questo caso, si nota come un maggior pretensionamento anticipi la posizione di massima deformazione del filo, oltre a ridurre l'altezza di quest'ultima (nel caso analogo precedente con $T = 10kN$ era invece posticipata). Invece, la forza di contatto risulta più stabile e con minori oscillazioni.

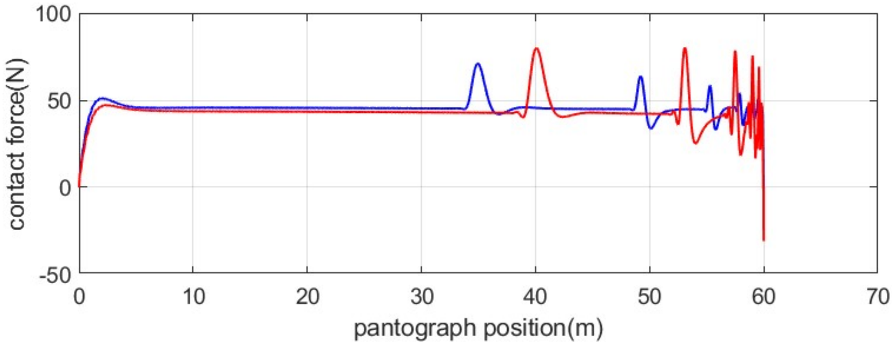

Figura 2.16: Variazione della forza di contatto applicando un pretensionamento al filo di $30kN$,statica inclusa (blu), confrontata con il caso di $20kN$ (rosso)

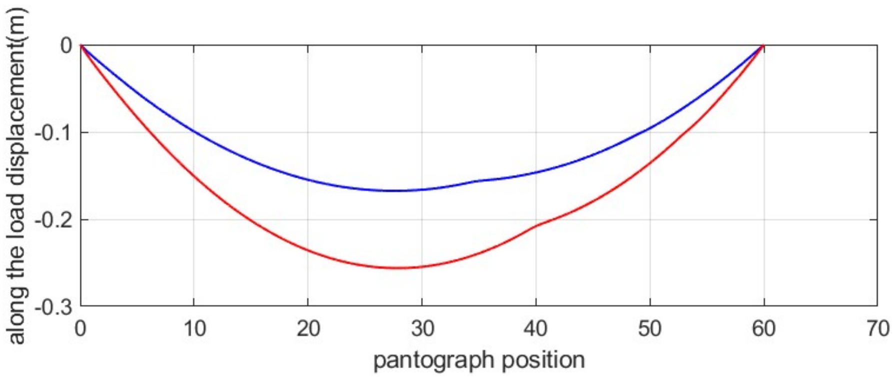

Figura 2.17: Deformazione del filo in corrispondenza della posizione del pantografo, pretensionamento $30kN$, statica inclusa

Come è possibile osservare da queste simulazioni, il pretensionamento gioca un ruolo chiave sulla stabilità della forza di contatto quando il pantografo raggiunge la fine della campata. In questo tratto, infatti, il pantografo si "scontra" con le onde di riflessione che tornando indietro, vanno a sovrapporsi con l'onda che si propaga alla stessa velocità del pantografo ed è situata in corrispondenza di quest'ultimo. Più il pretensionamento è elevato, meno l'oscillazione è netta. Quest'ultimo, infatti, si oppone alle deformazioni del filo (com'è possibile vedere dai grafici sulla deformazione) quando è sottoposto a sollecitazioni meccaniche.

2.5.2 Estensione della simulazione a due campate

Si aggiunge ora una seconda campata di filo di contatto, con l'obiettivo di osservare il comportamento di $\lambda(t)$ quando il pantografo attraversa la fine di una campata.

Verranno riportati sia il caso senza la statica sia il caso con essa inclusa. Infine, il pretensionamento viene mantenuto a 30 kN e la velocità a 216 km/h.

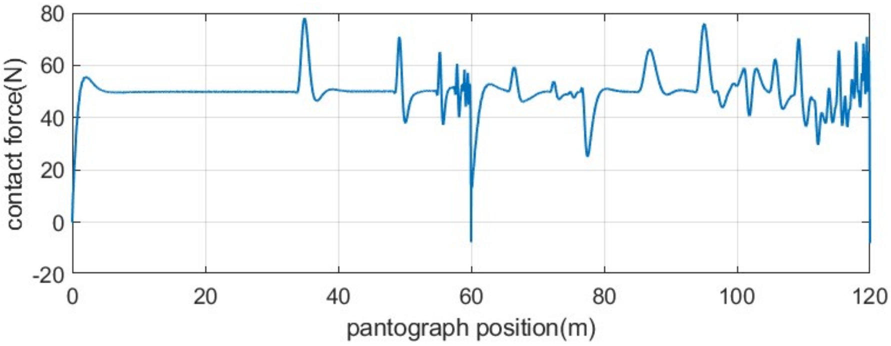

Figura 2.18: Variazione della forza di contatto, senza includere la statica e aggiungendo una seconda campata di filo

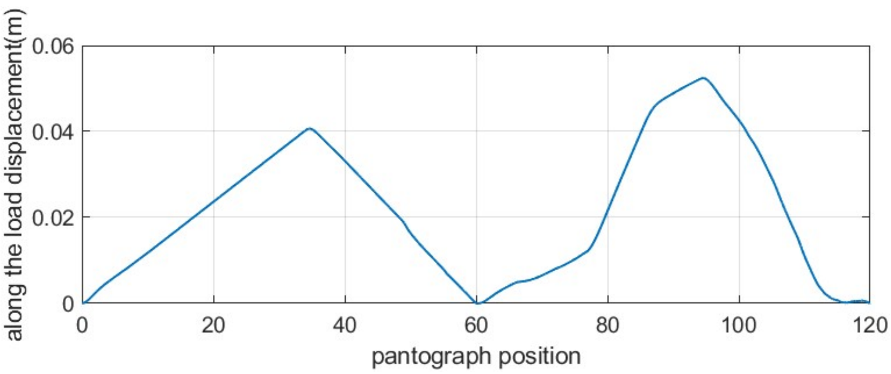

Figura 2.19: Deformazione del filo in corrispondenza della posizione del pantografo, senza includere la statica e aggiungendo una seconda campata di filo

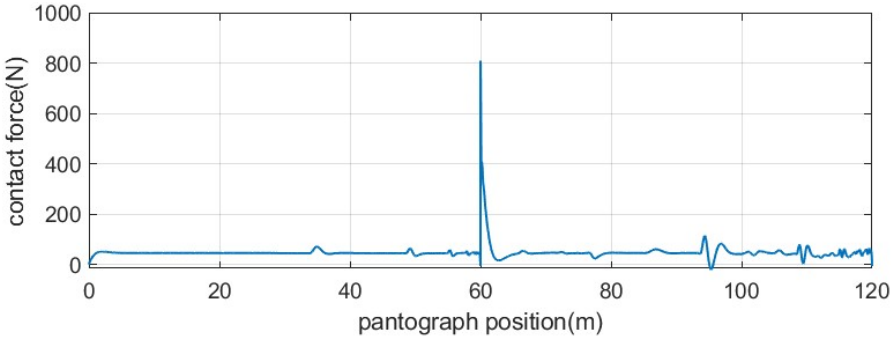

Figura 2.20: Variazione della forza di contatto,includendo la statica e aggiungendo una seconda campata di filo

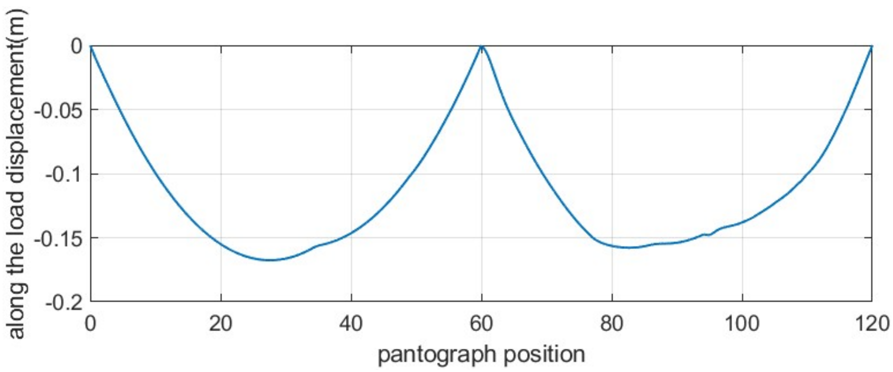

Figura 2.21: Deformazione del filo in corrispondenza della posizione del pantografo, includendo la statica e aggiungendo una seconda campata di filo

In entrambi i casi, la forza di contatto presenta maggiori oscillazioni quando il pantografo attraversa la seconda campata: questo perchè il numero di onde di riflessione che si sovrappongono aumenta sempre di più. Inoltre, vi è un comportamento "critico" nel mezzo delle due campate, che consiste in una temporanea perdita di contatto nel caso senza la statica e in un'"esplosione" in alto nel caso con la statica. Nella realtà, tra le campate, sono presenti dei pali di sostegno (detti anche bracci di regolazione), i quali hanno una certa elasticità. Tuttavia, in questa simulazione, la presenza dei pali di sostegno e le loro rispettive molle è stata omessa, spiegando così i risultati ottenuti .
Dando invece uno sguardo alle deformazioni, in entrambi i casi, nella seconda campata il massimo/minimo si trova più in alto rispetto alla prima campata: il motivo è sempre legato alle maggiori onde di riflessione che si sovrappongono.

2.6 Esempio con pantografo a due gradi di libertà

Implementato l'esempio base, si cerca ora di aumentare la complessità aggiungendo un grado di libertà al pantografo. I nuovi parametri sono i seguenti [4]:

- massa superiore del pantografo $m_1 = 9kg$;
- massa inferiore del pantografo $m_2 = 17kg$;
- densità lineare del filo di contatto $\mu = 1.068\frac{kg}{m}$;
- pretensionamento del filo $T = 15kN$;
- momento flessionale del filo $EI = 150Nm^2$;
- precarico (forzante verso l'alto a cui è soggetta la massa inferiore del pantografo) $F_0 = 70N$;
- rigidezza penalty (tra il filo di contatto e la massa del pantografo) $k_h = 5 \cdot 10^4 \frac{N}{m}$;
- smorzamento penalty $c_h = 5 \cdot 10^2 \frac{Ns}{m}$;
- rigidezza tra massa superiore e inferiore $k_1 = 7000\frac{N}{m}$;
- rigidezza tra massa inferiore e treno $k_2 = 0\frac{N}{m}$;
- smorzamento tra massa superiore e inferiore $c_1 = 30\frac{Ns}{m}$;
- smorzamento tra massa inferiore e treno $c_2 = 130\frac{Ns}{m}$;
- lunghezza campata del filo di contatto $L = 20m$;
- velocità del pantografo $V = 115$ km/h;
- numero di modi considerati $N = 200$;
- passo di discretizzazione spaziale $\delta x = 0.04m$;
- passo di discretizzazione temporale $\delta t = 6.6 \cdot 10^{-5}s$.

Le prime simulazioni verranno effettuate assumendo che il pantografo parta dalla posizione di $x = 2m$ e arrivi alla posizione di $x = 18m$ [4].

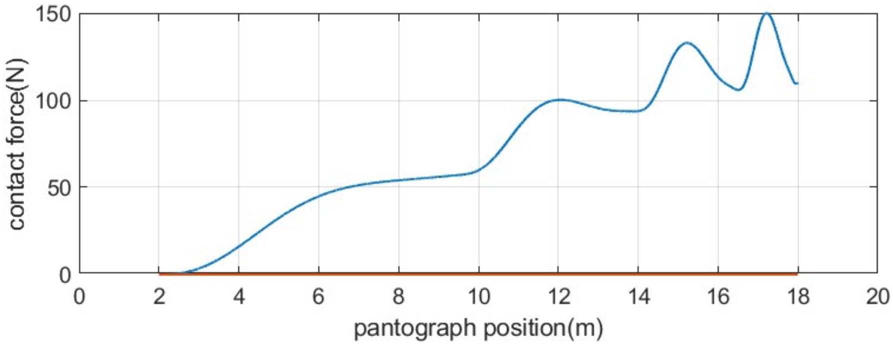

Figura 2.22: Andamento della forza di contatto senza includere la deformazione statica (la linea rossa tra 2 e 18 metri evidenzia l'intervallo entro cui è stata eseguita la simulazione)

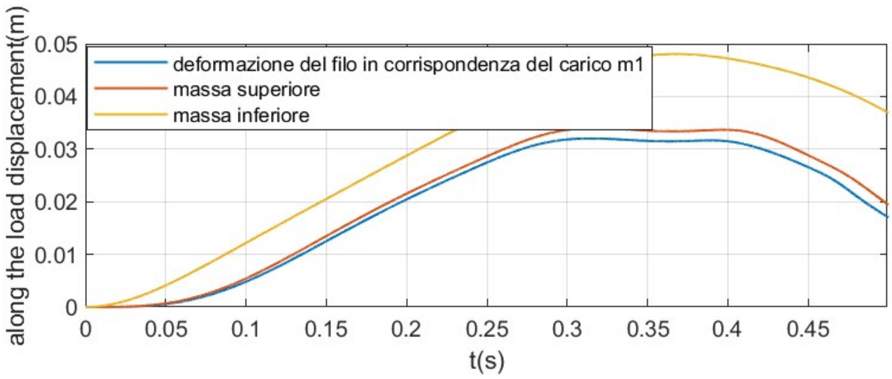

Figura 2.23: Spostamento verticale del filo in corrispondenza della posizione del pantografo, variazione della posizione della massa superiore e inferiore

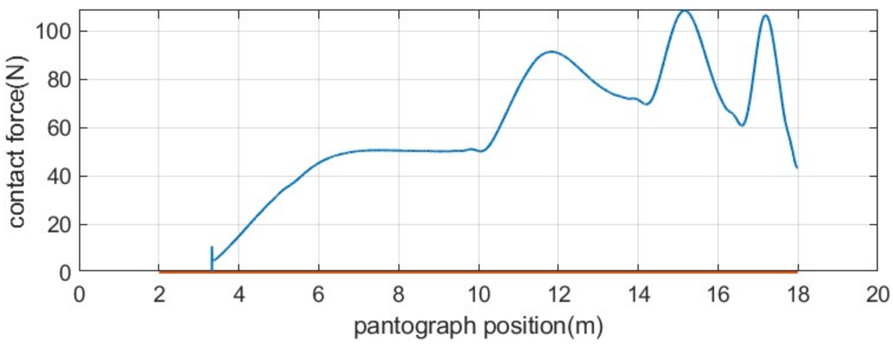

Figura 2.24: Andamento della forza di contatto includendo la deformazione statica (la linea rossa tra 2 e 18 metri evidenzia l'intervallo entro cui è stata eseguita la simulazione)

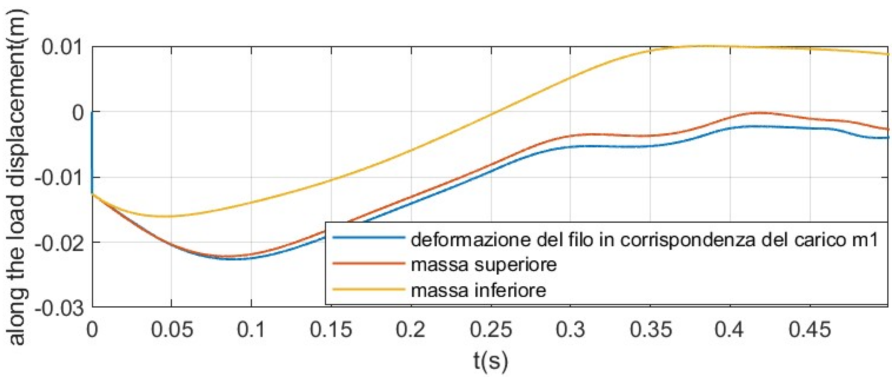

Figura 2.25: Spostamento verticale del filo in corrispondenza della posizione del pantografo,variazione della posizione della massa superiore e inferiore, includendo la deformazione statica

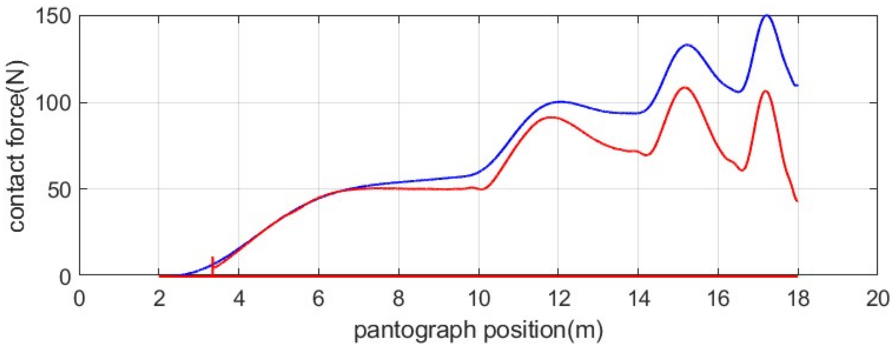

Figura 2.26: Confronto tra la variazione della forza di contatto trascurando la deformazione statica (in blu) e considerandola (in rosso). La retta di colore rosso scuro da 2 a 18 evidenzia l'intervallo entro cui si è svolta la simulazione

Come si può osservare, la deformazione statica, in questo caso, influisce sensibilmente sia su $\lambda(t)$ e sia sulla deformazione del filo di contatto e sullo spostamento delle due masse, soprattutto verso fine campata: infatti, nel primo caso $\lambda(t)$ arriva a sfiorare i $150N$ e la massa inferiore sfiora i 5 cm di altezza, mentre nel secondo caso $\lambda(t)$ supera di poco i $100N$ e la massa inferiore raggiunge soltanto 1 cm di altezza. Infine, si può osservare che, in entrambe le simulazioni, la massa inferiore del pantografo sale più in alto rispetto a quella superiore: infatti, non è stato imposto alcun vincolo affinchè le masse mantengano la propria posizione.

2.6.1 Simulazioni per velocità più elevate (v=200/300 km/h)

Si estende ora la simulazione all'intera campata (0-20 m) e si imposta la velocità del pantografo prima a 200 km/h e poi a 300 km/h. Inizialmente non si considera la deformazione statica. I risultati ottenuti sono i seguenti:

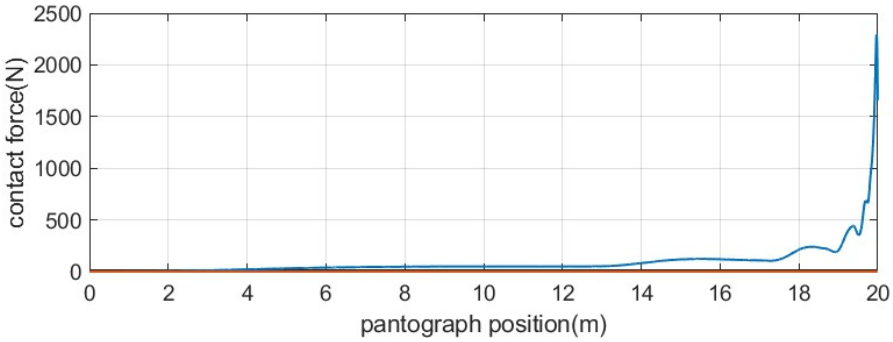

Figura 2.27: Variazione della forza di contatto $\lambda(t)$ per $v = 200$ km/h (in blu) e senza considerare la deformazione statica

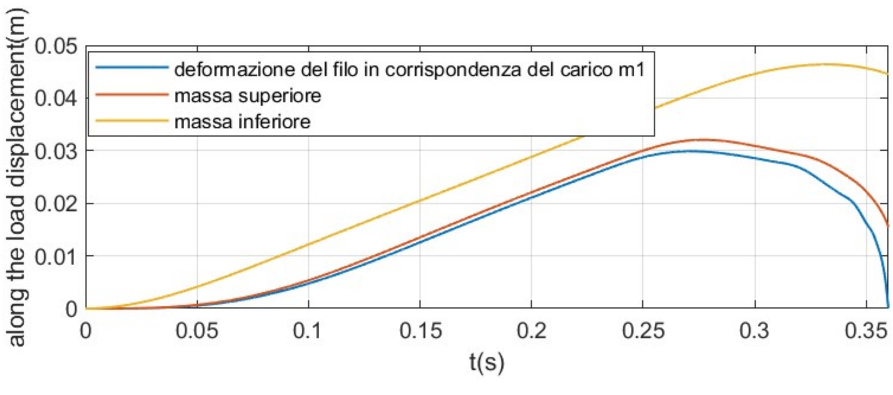

Figura 2.28: Deformazione del filo in corrispondenza della posizione del pantografo e spostamento verticale delle due masse per $v = 200$ km/h

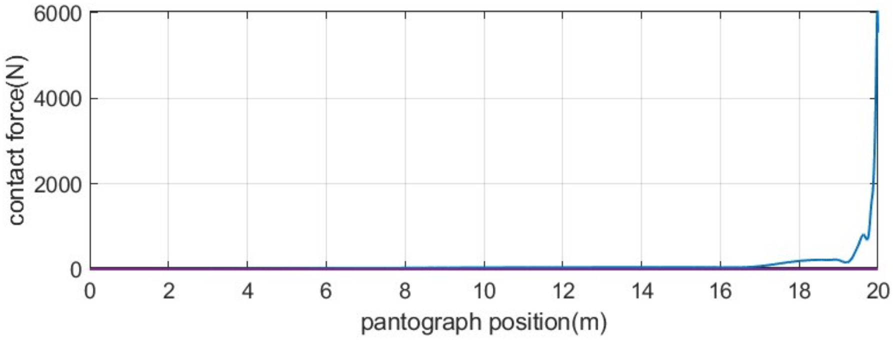

Figura 2.29: Variazione della forza di contatto $\lambda(t)$ per $v = 300$ km/h (in blu) e senza considerare la deformazione statica

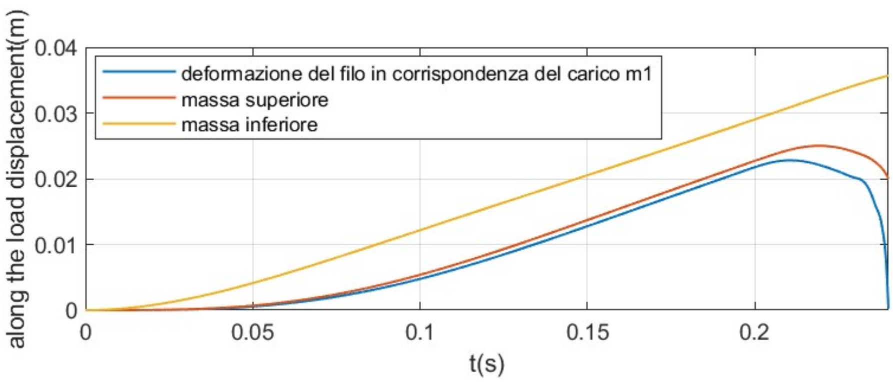

Figura 2.30: Deformazione del filo in corrispondenza della posizione del pantografo e spostamento verticale delle due masse per $v = 300$ km/h

Da come si può osservare, aumentando la velocità del pantografo, aumenta anche il picco della forza di contatto $\lambda(t)$ nei pressi della fine della campata. Questo fenomeno si spiega in virtù del maggior numero di onde di riflessione che si generano a fine campata se il pantografo si muove più velocemente. La posizione verticale del filo a fine campata, infatti, è data dalla sovrapposizione di tutte queste onde di riflessione.
Si prova ora ad includere anche la deformazione statica e ad osservare che cosa succede:

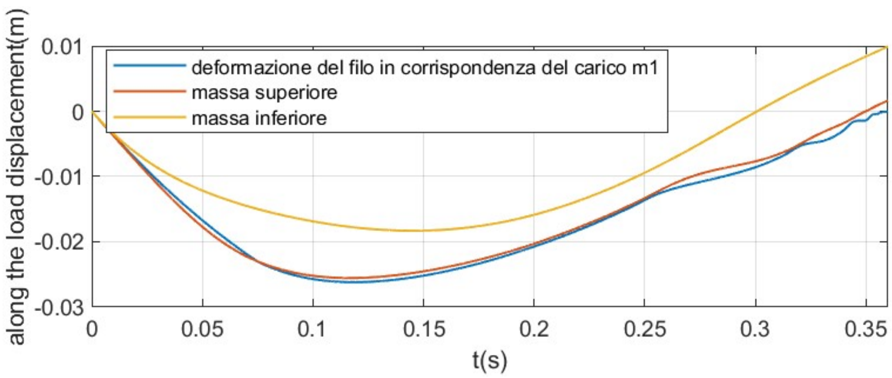

Figura 2.31: Deformazione del filo in corrispondenza della posizione del pantografo e spostamento verticale delle due masse per $v = 200 km/h$,considerando anche la deformazione statica del filo di contatto

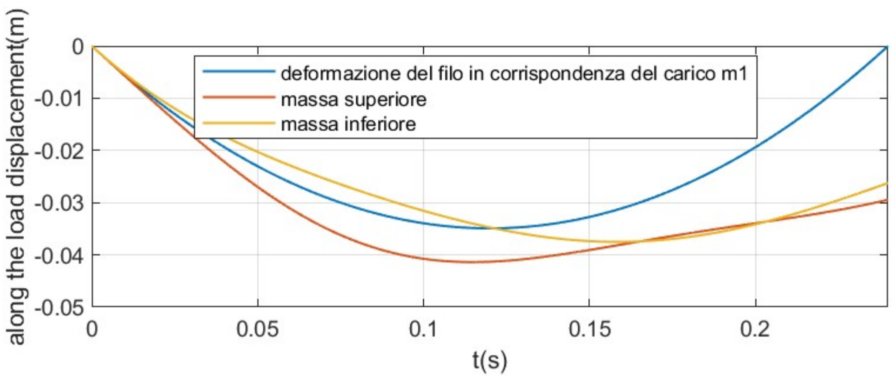

Figura 2.32: Deformazione del filo in corrispondenza della posizione del pantografo e spostamento verticale delle due masse per $v = 300 km/h$,considerando anche la deformazione statica del filo di contatto

Com'è possibile osservare, in entrambi i casi vi è una perdita di contatto tra il pantografo e il filo di contatto (la massa superiore è posizionata sotto il filo), soltanto iniziale nel caso di $v = 200$ km/h, mentre per $v = 300$ km/h è totale.

2.7 Esempio con pantografo a tre gradi di libertà

Si cerca ora di aumentare ulteriormente la complessità dell'esempio aggiungendo un ulteriore GDL al pantografo, tra la massa inferiore (m_2) e il treno. Si introducono quindi i nuovi parametri m_3,c_3 e k_3. Rispetto al capitolo 2.6, i nuovi parametri e i parametri che cambiano valore sono:

- $m_3 = 13kg$;

- $c_3 = 160\frac{Ns}{m}$;

- $k_3 = 0N$;

- $k_2 = 7000N$.

In questo caso, le matrici di massa, smorzamento e rigidezza hanno dimensione $(N+3)*(N+3)$ e il blocco della matrice di rigidezza inerente al pantografo ha la seguente forma: $\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix}$.

Anche il blocco della matrice di smorzamento assume la forma analoga (con i rispettivi coefficienti c_1,c_2,c_3). Anche in questo caso, si riportano di seguito i grafici della forza di contatto, della deformazione del filo in corrispondenza della posizione del pantografo e della posizione verticale occupata dalle tre masse nel tempo. Anche in questo caso, si assume inizialmente che il pantografo parta dalla posizione $x = 2m$ e arrivi a $x = 18m$ (nei grafici a seguire, l'intervallo entro cui avviene la simulazione è evidenziato in rosso).

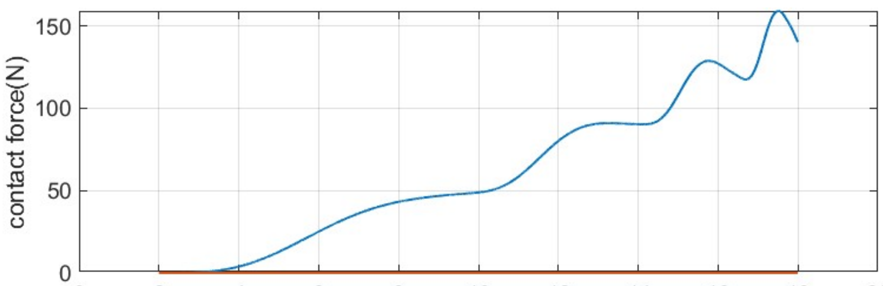

Figura 2.33: Variazione della forza di contatto senza includere la deformazione statica

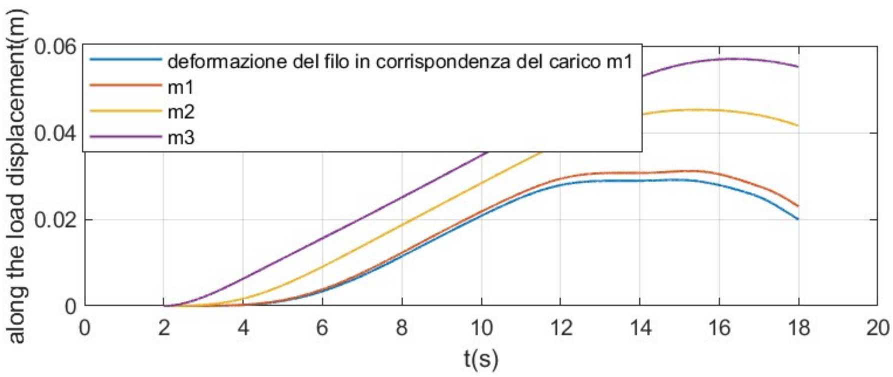

Figura 2.34: Deformazione del filo in corrispondenza della posizione del pantografo,trascurando la deformazione statica

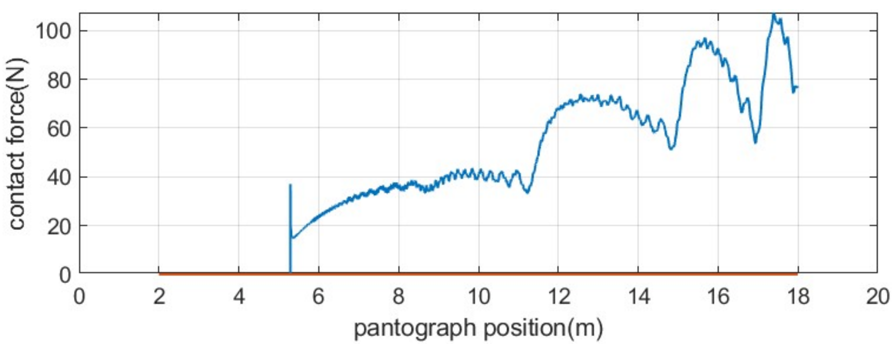

Figura 2.35: Variazione della forza di contatto includendo la deformazione statica

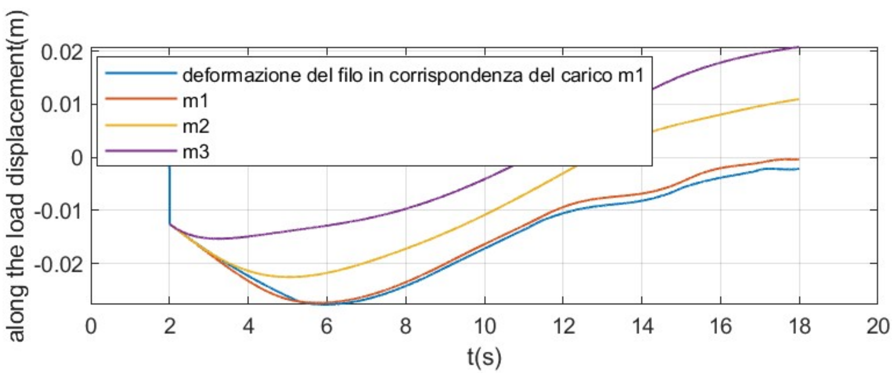

Figura 2.36: Deformazione del filo in corrispondenza della posizione del pantografo, includendo la deformazione statica

Anche in questo caso, la deformazione statica tende a limitare lo spostamento verso l'alto delle tre masse e l'allontanamento della massa di mezzo (m_2) e inferiore (m_3) dal filo. Stesso comportamento dell'esempio a 2 GDL anche per la forza di contatto. Tuttavia, occorre precisare che, includendo anche la statica, rispetto al caso a 2 GDL, $\lambda(t)$ presenta delle piccole oscillazioni locali.

2.7.1 Simulazioni per velocità più elevate(v=200/300 km/h)

Come per il caso a 2 GDL, si estendono ora le simulazioni sull'intera campata (0-20 m [4]) e si incrementa la velocità, prima fissandola a 200 km/h e poi a 300 km/h. In tutti i grafici che riportano forze di contatto, l'intervallo spaziale entro cui si svolge la simulazione è evidenziato in rosso. Nel primo caso, si ottiene:

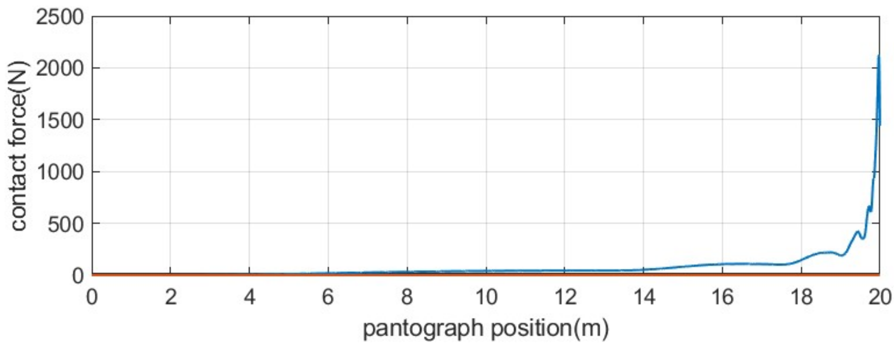

Figura 2.37: Variazione della forza di contatto $\lambda(t)$ per $v = 200$ km/h, senza considerare la deformazione statica

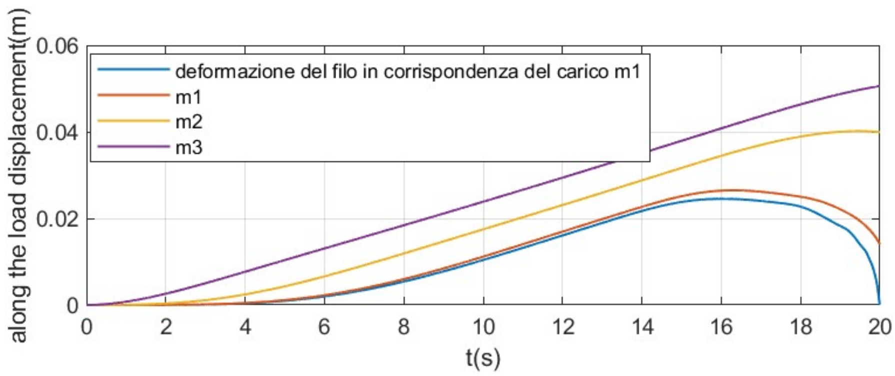

Figura 2.38: Deformazione del filo in corrispondenza della posizione del pantografo e spostamento verticale delle tre masse.

Includendo anche la statica si ottiene:

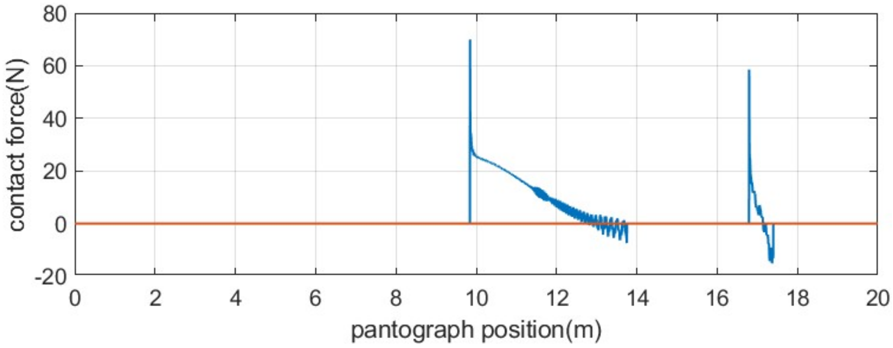

Figura 2.39: Variazione della forza di contatto $\lambda(t)$ per $v = 200$ km/h, includendo la deformazione statica

Come nel caso con pantografo a due gradi di libertà, anche qui, includendo la statica, si ripresenta il fenomeno della perdita di contatto, in maniera ancora più evidente rispetto al caso precedente. Come proposto al termine della precedente sezione, si vanno ora ad effettuare delle variazioni di parametri al fine di rendere più rigido il sistema pantografo. Da ora in avanti, il dominio di simulazione è evidenziato in blu. Per prima cosa, si va ad aumentare il pretensionamento del filo di contatto:

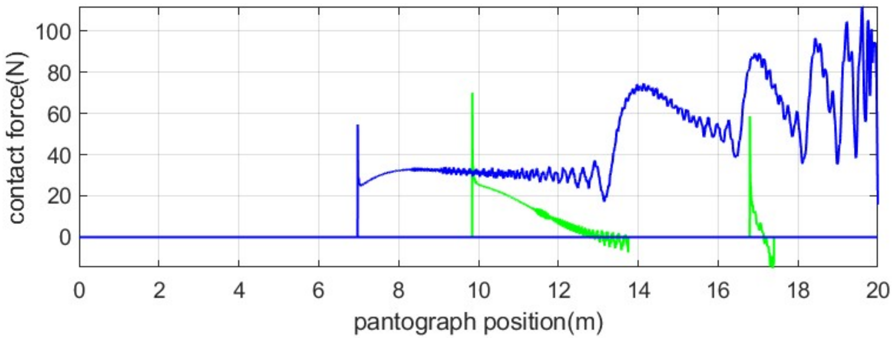

Figura 2.40: Variazione della forza di contatto $\lambda(t)$ con $v = 200$ km/h e pretensionamento del filo raddoppiato a 30 kN (in blu), confrontata con il caso di partenza(in verde).

Si vanno ora ad incrementare le rigidezze k_1 e k_2 da 7000 N a 15000 N:

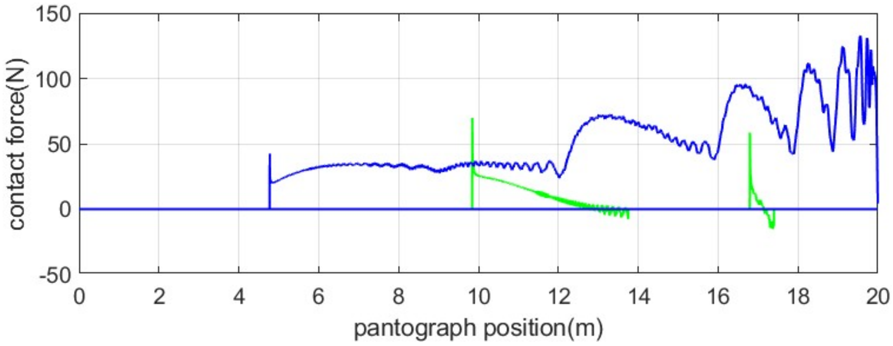

Figura 2.41: Variazione della forza di contatto $\lambda(t)$ con $v = 200$ km/h, pretensionamento del filo raddoppiato a 30 kN e rigidezze k_1 e k_2 incrementate a 15 kN (in blu), confrontata con il caso di partenza (in verde).

Infine, si vanno a diminuire le tre masse m_1,m_2 e m_3 rispettivamente a 1kg,5kg e 5 kg, ottenendo:

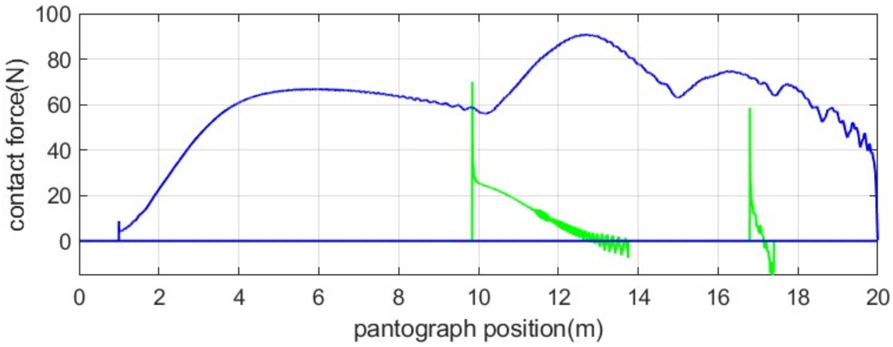

Figura 2.42: Variazione della forza di contatto $\lambda(t)$ con $v = 200$ km/h, pretensionamento del filo raddoppiato a 30 kN, rigidezze k_1 e k_2 incrementate a 15 kN e m_1, m_2, m_3 ridotte rispettivamente a 1kg,5kg,5kg (in blu), confrontata con il caso di partenza (in verde).

Come è possibile osservare, attraverso questa serie di modifiche, si è riusciti a limitare sempre di più la perdita di contatto. Con questi stessi parametri, si prova ora ad incrementare la velocità del pantografo a 300 km/h:

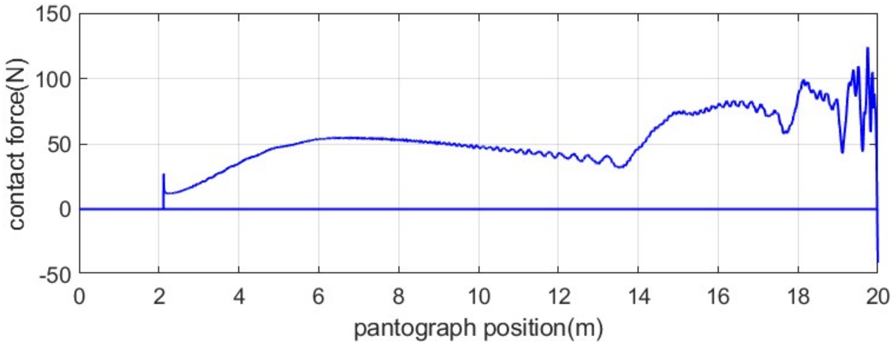

Figura 2.43: Variazione della forza di contatto $\lambda(t)$ con $v = 300$ km/h e gli stessi parametri precedenti

Com'è possibile osservare, l'incremento della velocità è uno dei fattori che contribuisce ad estendere nello spazio la perdita di contatto.
Dato che la perdita di contatto è un fenomeno che determina un'usura più veloce del filo, è necessario prescrivere dei valori di soglia (cioè da non superare) per la velocità del pantografo in base ai parametri che lo caratterizzano (masse dei gradi di libertà e rigidezze).

Capitolo 3

Interazione dinamica tra il pantografo e la catenaria completa

3.1 Le equazioni del sistema

Introducendo i pendini e la fune portante, sarà necessario aggiungere al sistema di equazioni precedente un'altra equazione che descriva l'evoluzione della dinamica della fune portante durante il passaggio del pantografo. Inoltre, in entrambe le equazioni dei due fili, è necessario aggiungere il contributo dei pendini,i quali hanno massa m_{12} (uniformemente distribuita lungo la loro lunghezza) e rigidezza k_{12} [2]. La fune portante, a sua volta, avrà un sua rigidezza flessionale EI_1, un pretensionamento T_1 e una densità lineare μ_1 (con EI_2,T_2 e μ_2 verranno indicati i corrispettivi valori del filo di contatto). Verranno indicate inoltre con $W_m(x,t)$ e $W_c(x,t)$ gli spostamenti verticali della fune portante e del filo di contatto. Indicando con N_d il numero dei pendini e ipotizzando che il pantografo sia un sistema discreto a due gradi di libertà, il nuovo sistema di equazioni sarà il seguente [2][4]:

$$\mu_1 \frac{\partial^2 W_m(x,t)}{\partial t^2} + EI_1 \frac{\partial^4 W_m(x,t)}{\partial x^4} - T_1 \frac{\partial^2 W_m(x,t)}{\partial x^2} + \sum_{h=1}^{N_d} [m_{12} \frac{\partial^2 W_m(x,t)}{\partial t^2} + \\ k_{12}(W_m(x,t) W_c(x,t))] \delta(x - x_h) = 0 \tag{3.1}$$

$$\mu_2 \frac{\partial^2 W_c(x,t)}{\partial t^2} + EI_2 \frac{\partial^4 W_c(x,t)}{\partial x^4} - T_2 \frac{\partial^2 W_c(x,t)}{\partial x^2} + \sum_{h=1}^{N_d} [m_{12} \frac{\partial^2 W_c(x,t)}{\partial t^2} + k_{12}(W_c(x,t) - W_m(x,t))]\delta(x - x_h) = \lambda(t)\delta(x - vt) \tag{3.2}$$

$$m_1 \frac{d^2 Z_1(t)}{dt^2} + c_1 (\frac{dZ_1(t)}{dt} - \frac{dZ_2(t)}{dt}) + k_1(Z_1(t) - Z_2(t)) = -\lambda(t) \tag{3.3}$$

$$m_2 \frac{d^2 Z_2(t)}{dt^2} + c_1 (\frac{dZ_2(t)}{dt} - \frac{dZ_1(t)}{dt}) + k_1(Z_2(t) - Z_1(t)) + c_2 \frac{dZ_2(t)}{dt} + k_2(t) Z_2(t) = F_0 \tag{3.4}$$

Come per il caso precedente, $W_m(x,t)$ e $W_c(x,t)$ vengono espressi attraverso il metodo della separazione delle variabili, per cui:

$$W_m(x,t) = \sum_{i=1}^{N} \phi_i(x)\eta_i(t) \tag{3.5}$$

$$W_c(x,t) = \sum_{i=N+1}^{2N} \phi_{i-N}(x)\eta_i(t) \tag{3.6}$$

In questo caso, quindi, le matrici di massa, rigidezza e smorzamento avranno dimensione $(2N+2)*(2N+2)$. Le forme modali che approssimano le condizioni agli estremi della campata $W_*(x=0) = W_*(x=L) = 0$ e $\frac{\partial^2 W_*}{\partial x^2}(x=0) = \frac{\partial^2 W_*}{\partial x^2}(x=L) = 0$ (con $* = m, c$) sono $\sin(\frac{i\pi x}{L})$ [2]. Moltiplicando quindi le prime 2 equazioni per $\sin(\frac{i\pi x}{L})$ per $i = 1...N$ e integrando tra 0 e L, operando allo stesso modo come nel capitolo 1 risulta:

$$\mu_1 \frac{L}{2} \frac{d^2\eta_i(t)}{dt^2} + (\frac{i\pi}{L})^4 \frac{L}{2} EI_1 \eta_i(t) + (\frac{i\pi}{L})^2 \frac{L}{2} T_1 \eta_i(t) + \sum_{h=1}^{N_d} [m_{12} \sin^2(\frac{i\pi x_h}{L}) \frac{d^2\eta_i(t)}{dt^2} + k_{12} \sin^2(\frac{i\pi x_h}{L})(\eta_i(t) - \eta_{i+N}(t))] = 0 \tag{3.7}$$

$$\mu_2 \frac{L}{2} \frac{d^2\eta_{i+N}(t)}{dt^2} + (\frac{i\pi}{L})^4 \frac{L}{2} EI_2 \eta_{i+N}(t) + (\frac{i\pi}{L})^2 \frac{L}{2} T_2 \eta_{i+N}(t) + \sum_{h=1}^{N_d} [m_{12} \sin^2(\frac{i\pi x_h}{L}) \frac{d^2\eta_{i+N}(t)}{dt^2} + k_{12} \sin^2(\frac{i\pi x_h}{L})(\eta_{i+N}(t) - \eta_i(t))] = \lambda(t) \tag{3.8}$$

A questo punto, si possono definire le nuove matrici di massa $\boldsymbol{M}$,smorzamento $\boldsymbol{C}$ e rigidezza $\boldsymbol{K}$. Per cui:

- $\boldsymbol{M}= \begin{bmatrix} ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1\frac{L}{2}+m_{12}\sin^2(\frac{i\pi x_h}{L}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_2\frac{L}{2}+m_{12}\sin^2(\frac{i\pi x_h}{L}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix};$

- $\boldsymbol{K}= \begin{bmatrix} ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L}{2}(\frac{i\pi}{L})^2[(\frac{i\pi}{L})^2EI_1+T_1] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{2}(\frac{i\pi}{L})^2[(\frac{i\pi}{L})^2EI_2+T_2] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_1 & -k_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_1 & k_1+k_2 \end{bmatrix};$

- $\boldsymbol{C}= \begin{bmatrix} ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0125M_{i,i}+0.0001K_{i,i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 & -c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_1 & c_1+c_2 \end{bmatrix}.$

Ovviamente, in tutte queste 3 matrici, i blocchi dove sulla diagonale compaiono i pedici 1 o 2 hanno dimensione $N*N$ Tuttavia, oltre a queste tre matrici, vi sono altre N_d matrici di rigidezza $\boldsymbol{K_h}$ relative ai pendini ($h=1...N_d$) che hanno la seguente forma:

- $\boldsymbol{K_h}= \begin{bmatrix} ... & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{12}\sin^2(\frac{i\pi x_h}{L}) & 0 & 0 & -k_{12}\sin^2(\frac{i\pi x_h}{L}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_{12}\sin^2(\frac{i\pi x_h}{L}) & 0 & 0 & k_{12}\sin^2(\frac{i\pi x_h}{L}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

La matrice di rigidezza totale sarà quindi $\boldsymbol{K} + \sum_{h=1}^{N_d} \boldsymbol{K_h}$.

3.1.1 Il termine noto

Per quanto riguarda la definizione della forza di contatto $\lambda(t)$, viene nuovamente utilizzato il metodo penalty. Per cui, definedo $\boldsymbol{F}$ il vettore termine noto, che è dipendente dal tempo, per $i = 1...N$ si ha:

$$\boldsymbol{F}_i(t) = 0 \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{F}_{i+N}(t) = \sin(\frac{i\pi vt}{L})k_h[Z_1(t) - \sum_{j=1}^{N} \sin(\frac{j\pi vt}{L})\eta_{j+N}(t)]+ \\ &\sin(\frac{i\pi vt}{L})c_h[\frac{\partial Z_1(t)}{\partial t} - \sum_{j=1}^{N} \sin(\frac{j\pi x}{L})\frac{\partial \eta_{j+N}(t)}{\partial t} - \sum_{j=1}^{N} (\frac{j\pi v}{L}) \cos(\frac{j\pi vt}{L})\eta_{j+N}(t)] \end{aligned} \tag{3.10}$$

(se non c'è perdita di contatto, altrimenti questi termini sono tutti nulli);

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{F}_{2N+1}(t) = -k_h[Z_1(t) - \sum_{j=1}^{N} \sin(\frac{j\pi vt}{L})\eta_{j+N}(t)] - c_h[\frac{\partial Z_1(t)}{\partial t} - \\ &\sum_{j=1}^{N} \sin(\frac{j\pi x}{L})\frac{\partial \eta_{j+N}(t)}{\partial t} - \sum_{j=1}^{N} (\frac{j\pi v}{L}) \cos(\frac{j\pi vt}{L})\eta_{j+N}(t)] \end{aligned} \tag{3.11}$$

(se non c'è perdita di contatto, altrimenti questo termine è nullo);

$$\boldsymbol{F}_{2N+2}(t) = F_0. \tag{3.12}$$

.

3.2 Lo slackening

In molte catenarie, i pendini sono progettati per lavorare solo se sono sottoposti a trazione (ossia se sono sottoposti ad un allungamento): la deformazione statica del filo di contatto, infatti, fa sì che la distanza tra quest'ultimo e la fune portante sia sempre maggiore della lunghezza dei pendini a riposo.
Tuttavia, il passaggio del pantografo può determinare il fenomeno opposto. In corrispondenza della posizione del pantografo, infatti, il filo di contatto viene "spinto" verso l'alto a causa del precarico. Quando la posizione orizzontale del pantografo coincide con quella di un pendino, può succedere che la distanza in quel punto tra

il filo di contatto e la fune portante sia inferiore alla lunghezza del pendino a riposo. Il pendino viene quindi sottoposto ad una compressione. Tuttavia, in questo caso,il pendino perde irreversibilmente la sua natura elastica: pertanto, nella matrice di rigidezza complessiva, il suo contributo verrà a mancare per tutto il resto della simulazione.
Il fenomeno appena descritto viene definito "slackening". Dato che un pendino può andare in slackening solo in seguito al passaggio del pantografo, la matrice di rigidezza complessiva sarà dipendente dal tempo. Tuttavia, questo fatto impedirebbe di implementare la risoluzione del sistema nel tempo con il metodo di Newmark, poichè valido solo se le matrici di massa,rigidezza e smorzamento sono costanti (indipendenti dal tempo). Per rimediare a ciò, il contributo del pendino andato in slackening, invece che sottratto dalla matrice di rigidezza, viene sommato al termine noto. Il sistema da implementare è quindi:

$$\boldsymbol{M}\frac{d^2\boldsymbol{y}(t)}{dt^2}+\boldsymbol{C}\frac{d\boldsymbol{y}(t)}{dt}+(\boldsymbol{K}+\sum_{h=1}^{N_d}\boldsymbol{K_h})\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{F}(t) \tag{3.13}$$

Supponiamo quindi che all'istante t il pantografo attraversi la posizione x_h e il corrispondente pendino vada in slackening. La nuova equazione del sistema all'istante $t+1$ sarà [3]:

$$\boldsymbol{M}\frac{d^2\boldsymbol{y}(t+1)}{dt^2}+\boldsymbol{C}\frac{d\boldsymbol{y}(t+1)}{dt}+(\boldsymbol{K}+\sum_{h=1}^{N_d}\boldsymbol{K_h})\boldsymbol{y}(t+1)=\boldsymbol{F}(t+1)+\boldsymbol{K_h}\boldsymbol{y}(t+1) \tag{3.14}$$

Avendo ciascuna matrice $\boldsymbol{K_h}$ le ultime due colonne e le ultime due righe uguali a 0, entrambi i termini $\boldsymbol{F}_{2N+1}$ e $\boldsymbol{F}_{2N+2}$, inerenti alle equazioni che descrivono il moto delle masse del pantografo, non saranno affetti dal contributo di $\boldsymbol{K_h}$.

3.2.1 Un esempio di slackening

Si vedrà ora un esempio di interazione tra un pantografo (rappresentato da un sistema discreto a due gradi di libertà) e la catenaria completa (filo di contatto più fune portante e i pendini). I parametri che riguardano il pantografo e il filo di contatto, così come i passi di discretizzazione spaziale e temporale e il numero di modi, sono i medesimi dell'esempio del capitolo 2.6. I valori della rigidezza penalty k_h e dello smorzamento penalty c_h sono sempre quelli fin'ora utilizzati. Si elencano in seguito i nuovi parametri, inerenti la fune portante e i pendini (che nell'esempio trattato saranno 2) [4]:

- densità lineare della fune portante $\mu_1 = 0.6\frac{kg}{m}$;
- pretensionamento della fune portante $T_1 = 15kN$;

- momento flessionale della fune portante $EI_1 = 0Nm^2$;

- massa dei pendini $m_{12} = 0.14kg$;

- rigidezza dei pendini $k_{12} = 10^5 \frac{N}{m}$;

- posizione primo pendino $5.5m$;

- posizione secondo pendino $14.5m$;

- distanza a riposo tra la fune portante e il filo di contatto $d = 1m$.

Si ipotizza ora che la lunghezza dei due pendini coincida con la distanza tra i due fili a riposo, ossia 1m. Ipotizzando inoltre che il pantografo si muova ad una velocità di 200 km/h, a fine simulazione si ottiene:

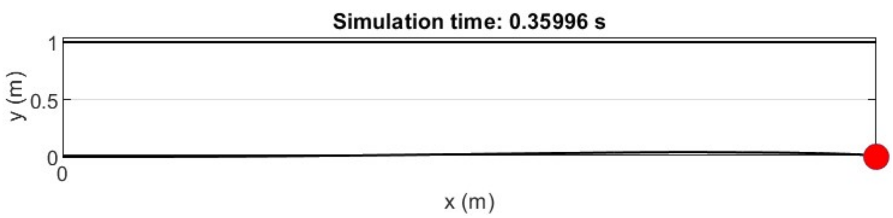

Figura 3.1: Profilo di una campata di filo di contatto e fune portante appena attraversata dal pantografo

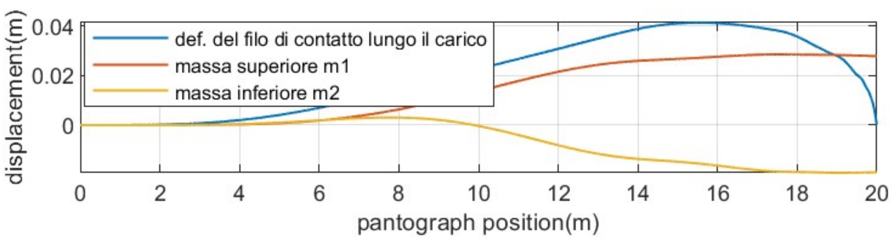

Figura 3.2: Deformazione del filo di contatto in corrispondenza della posizione del pantografo e oscillazione verticale delle due masse

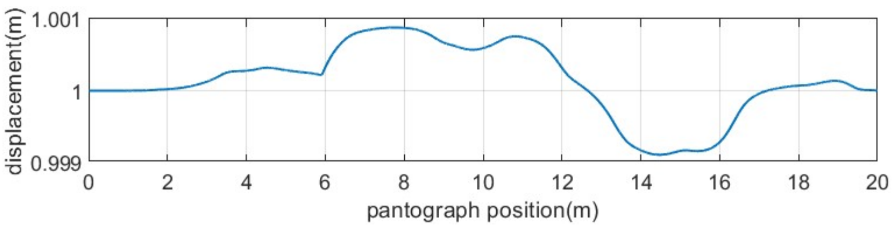

Figura 3.3: Deformazione della fune portante in corrispondenza della posizione del pantografo

Ci si trova in un caso di slackening: i pendini sono stati sottoposti ad una compressione tale da perdere temporaneamente la loro natura elastica. Infatti, come si nota dalle figure 3.2 e 3.3, mentre il filo di contatto si deforma in funzione di come oscilla verticalmente il pantografo, la fune portante segue un profilo a sé, abbastanza altalenante. Infatti, i pendini trasmettono la deformazione dal filo di contatto alla fune portante e, in caso di slackening, la trasmissione è temporaneamente interrotta. Si prova ora ad incrementare la velocità fino a 250 km/h:

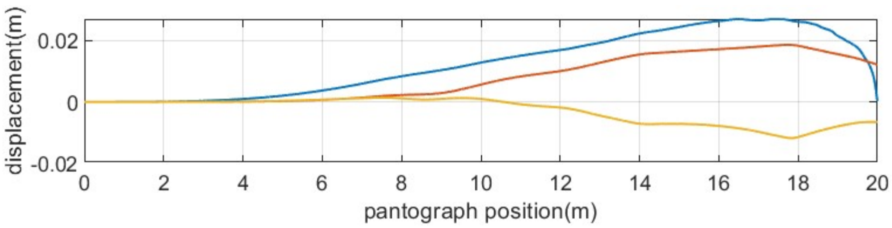

Figura 3.4: Deformazione del filo di contatto in corrispondenza della posizione del pantografo e oscillazione verticale delle due masse per $v = 250$ km/h

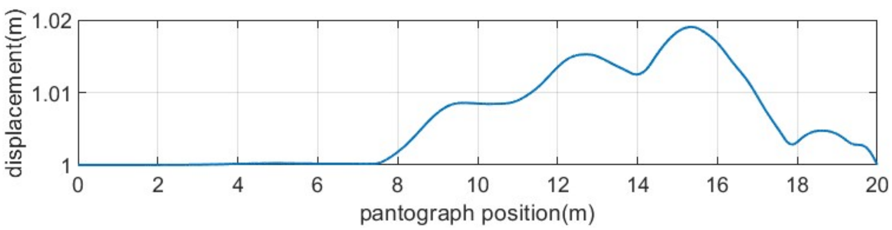

Figura 3.5: Deformazione della fune portante in corrispondenza della posizione del pantografo per $v = 250$ km/h: un altro caso di slackening

Come si può osservare, inizialmente va in slackening il primo pendino, in quanto la fune portarte inizia a deformarsi soltanto in prossimità di $x = 8$ m. Dopo di che, la deformazione non è assolutamente come quella del filo e presenta diverse oscillazioni (4/5 massimi e minimi locali): infatti, è andato in slackening il secondo pendino. Se la velocità viene incrementata ulteriormente a 300 kmh, quello che si riscontra è quasi analogo:

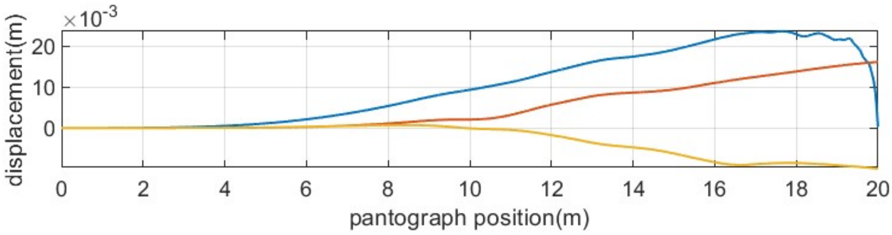

Figura 3.6: Deformazione del filo di contatto in corrispondenza della posizione del pantografo e oscillazione verticale delle due masse per $v = 300$ km/h

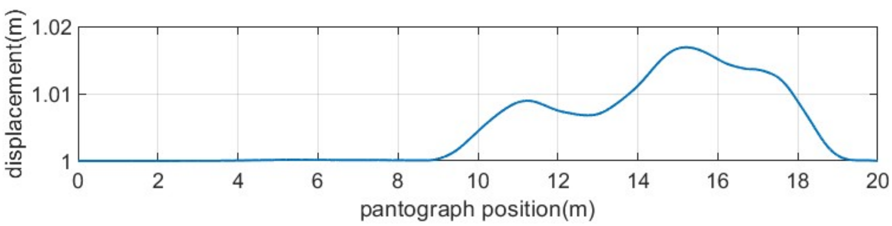

Figura 3.7: Deformazione della fune portante in corrispondenza della posizione del pantografo per $v = 300$ km/h.

Diminuendo invece la velocità del pantografo a 150 km/h, si ottiengono esiti abbastanza simili al caso di 200 km/h:

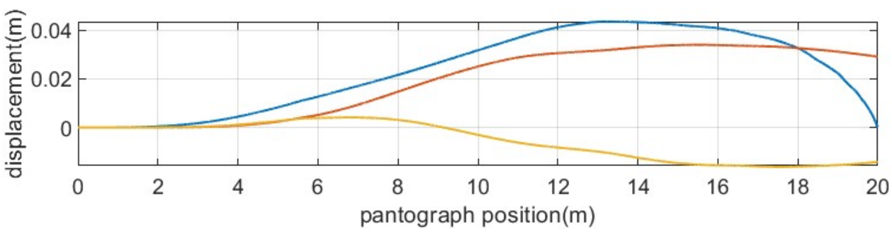

Figura 3.8: Deformazione del filo di contatto in corrispondenza della posizione del pantografo e oscillazione verticale delle due masse per $v = 150$ km/h

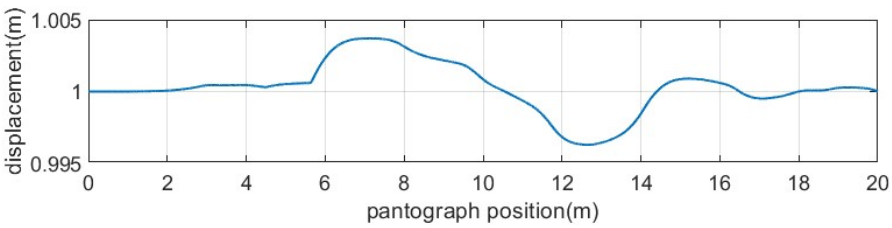

Figura 3.9: Deformazione della fune portante in corrispondenza della posizione del pantografo per $v = 150$ km/h

3.2.2 Esempio con pendini di lunghezza leggermente ridotta

Compreso ora che aumentare la velocità del pantografo (così come diminuirla) non sia una soluzione all'impedimento dello slackening, si prova ora a ridurre la lunghezza dei pendini a 0.998 m. Supponendo che il pantografo si muova nuovamente a 200 km/h, si ottiene la seguente configurazione:

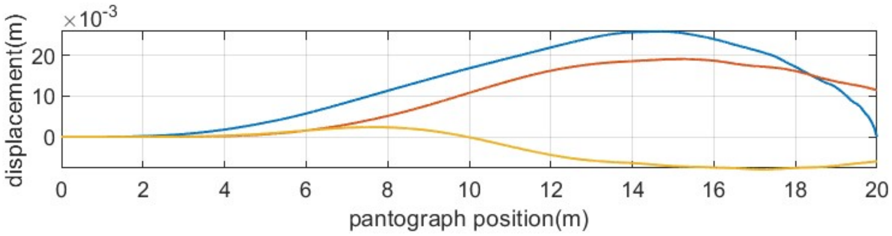

Figura 3.10: Deformazione del filo di contatto in corrispondenza della posizione del pantografo e oscillazione verticale delle due masse

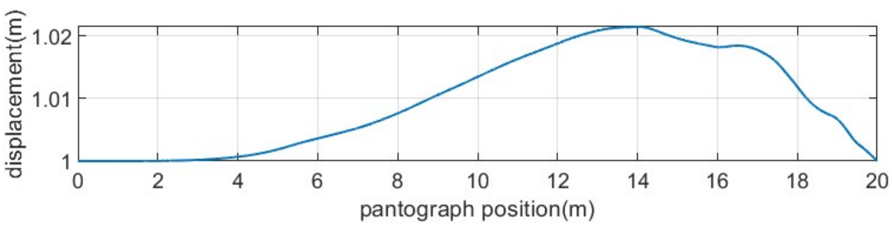

Figura 3.11: Deformazione della fune portante in corrispondenza della posizione del pantografo

Come si può osservare, in questo caso, la deformazione della fune portante può sovrapporsi quasi del tutto a quella del filo: il leggero ritardo con cui si deforma la fune è solamente dovuto al fatto che la trasmissione della deformazione dal filo alla fune richiede un certo instante temporale. Si riporta inoltre il grafico inerente alla variazione della forza elastica esercitata dai pendini. Se si definiscono $\lambda_{p1}(t)$ e $\lambda_{p2}(t)$ le forze interne ai pendini e $\delta W(x_1, t)$ e $\delta W(x_2, t)$ i rispettivi allungamenti,esse si esprimono nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \lambda_{p1}(t) &= k_{12}\delta W(x_1, t) + m_{12}g + \mu_2 g\frac{L}{2} \\ \lambda_{p2}(t) &= k_{12}\delta W(x_2, t) + m_{12}g + \mu_2 g\frac{L}{2} \end{aligned} \tag{3.15}$$

dove $m_{12}g$ è la forza di reazione del pendino verso l'alto in risposta al peso proprio,mentre l'ultimo termine indica che ognuno dei due pendini regge mezzo filo. Dato che m_{12} è molto contenuta (solo 0.14 kg, corrispondente a circa 1.375 N), le forze interne praticamente coincidono con le forze elastiche.

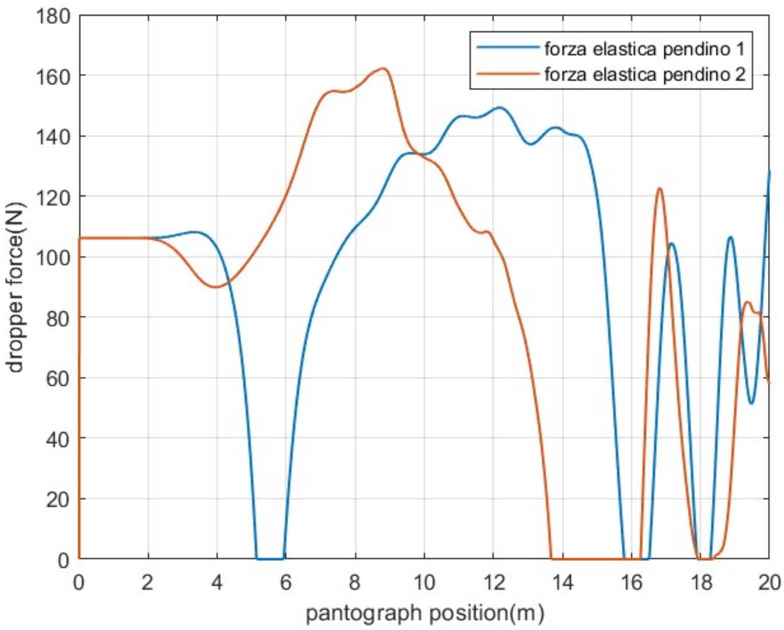

Figura 3.12: Variazione della forza elastica dei pendini, in corrispondenza della posizione del pantografo

Da come si nota, si è riuscito a ridurre notevolmente lo slackening. Inoltre, le forze elastiche presentano i minimi assoluti quando il pantografo attraversa rispettivamente x_1 e x_2, spingendo verso l'alto e,quindi, comprimendo i rispettivi pendini. L'allungamento a cui sono sottoposti i pendini è stato così calcolato:

$$\delta W(x_h, t) = W_m(x_h, t) - W_c(x_h, t) \tag{3.16}$$

ovviamente con $h = 1{,}2$, $x_1 = 5.5m$ e $x_2 = 14.5m$. Se si incrementa la velocità a 250 km/h abbiamo invece:

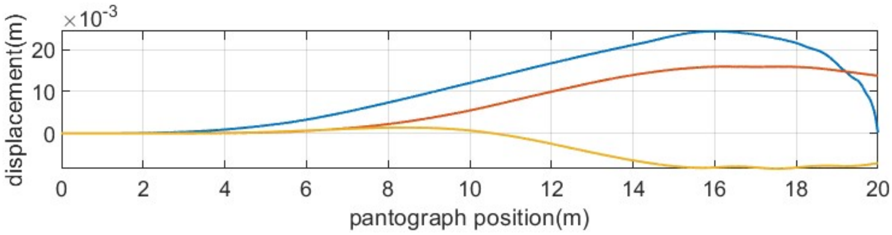

Figura 3.13: Deformazione del filo di contatto in corrispondenza della posizione del pantografo e oscillazione verticale delle due masse per $v = 250$ Km/h

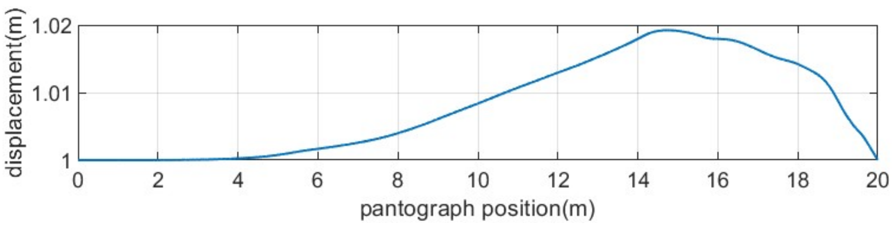

Figura 3.14: Deformazione della fune portante in corrispondenza della posizione del pantografo per $v = 250$ km/h

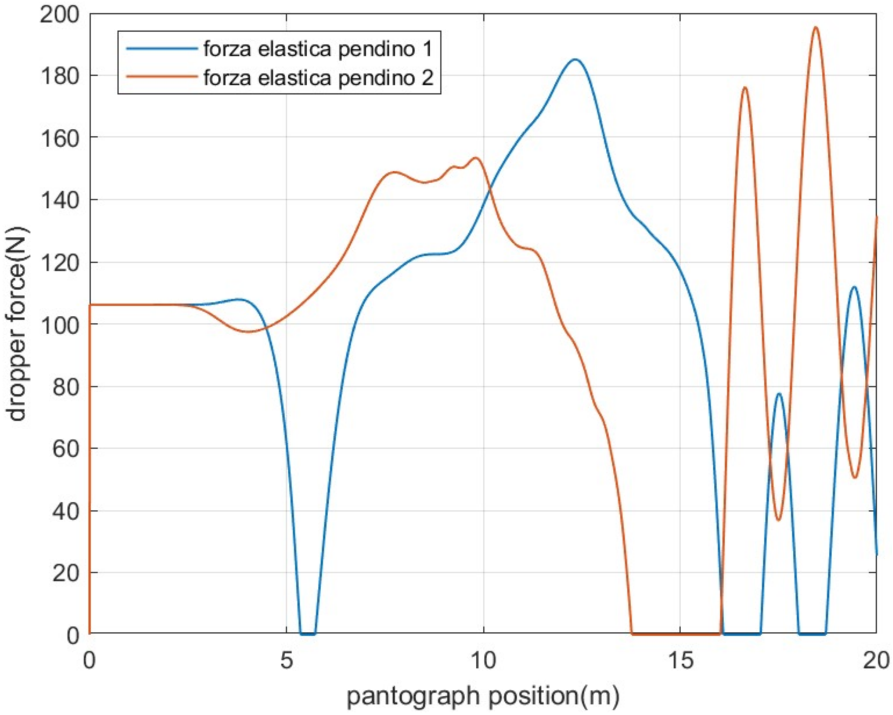

Figura 3.15: Variazione della forza elastica dei pendini, in corrispondenza della posizione del pantografo

Per $v = 300$ km/h si ha invece:

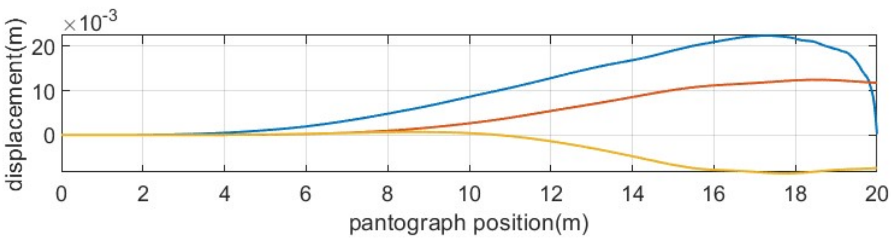

Figura 3.16: Deformazione del filo di contatto in corrispondenza della posizione del pantografo e oscillazione verticale delle due masse per $v = 300$ Km/h

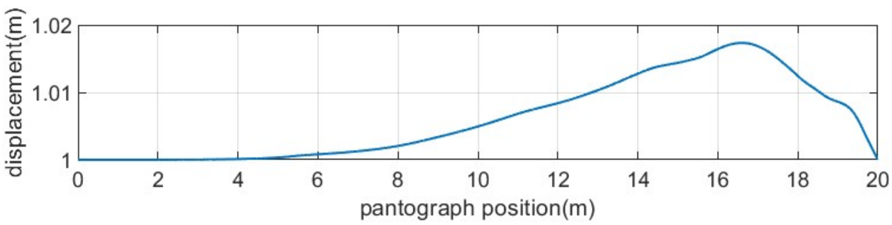

Figura 3.17: Deformazione della fune portante in corrispondenza della posizione del pantografo per $v = 300$ km/h

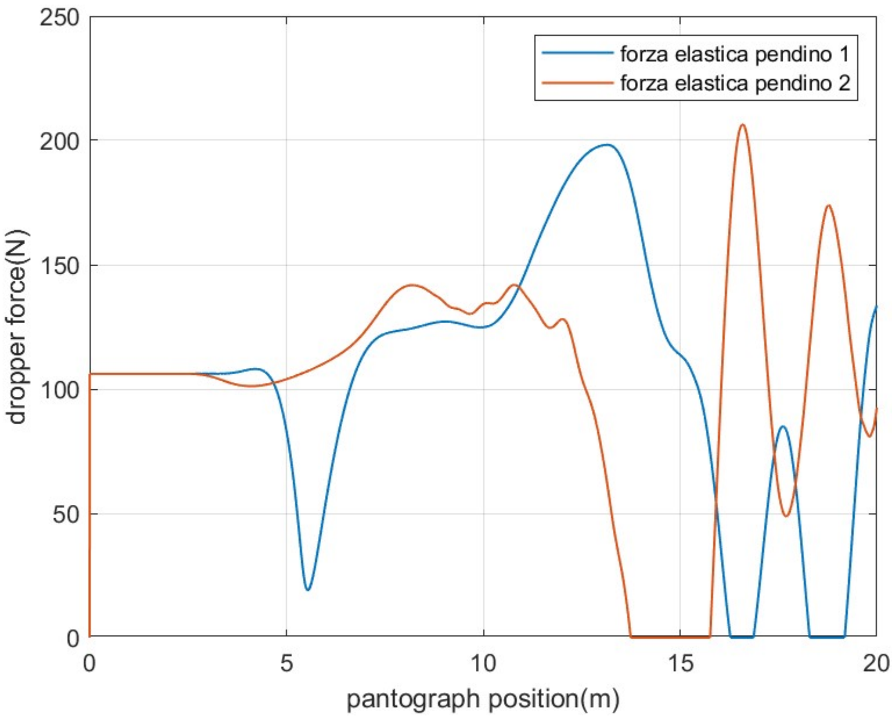

Figura 3.18: Variazione della forza elastica dei pendini, in corrispondenza della posizione del pantografo

Si può infine osservare che, in tutti i grafici inerenti ai pendini, sono presenti nette oscillazioni della forza a fine campata: ciò è determinato nuovamente dalle onde di riflessione.

Capitolo 4

Conclusioni

Questo lavoro si è proposto di trovare delle soluzioni per ridurre il rischio dell'insorgere di fenomeni usuranti, come la perdita di contatto e lo slackening, quando un treno si muove ad alta velocità (in particolare tra i 200 e i 300 km/h). In particolare, come si è potuto osservare, per ridurre la perdita di contatto occorre:

- aumentare il pretensionamento meccanico del filo di contatto, in quanto si oppone alla sua deformazione;
- incrementare le rigidezze tra i GDL del pantografo, per limitare l'oscillazione di quest'ultimi;
- diminuire le masse dei GDL del pantografo, per ridurre la sua inerzia.

Invece, per prevenire lo slackening, occorre:

- aumentare la rigidezza dei pendini, per ridurne la compressione;
- ridurre la lunghezza minima dei pendini al di sotto della quale non si possono più comprimere, per resistere al meglio alla spinta verso l'alto combinata tra il pantografo e le onde di riflessione.

Si precisa infine che lo smorzamento penalty c_h è stato introdotto per rappresentare la forza di attrito che si innesca con lo strisciamento del pantografo sul filo di contatto.

Bibliografia

[1] D.Anastasio. «Studio dell'interazione dinamica tra pantografo e catenaria tramite l'implementazione di un modello non lineare agli elementi finiti». Tesi di laurea mag. Politecnico di Torino, 2016 (cit. alle pp. 3, 4).

[2] S.Sorrentino D.Anastasio A.Fasana S.Marchesiello. «Distributed parameter and finite element models for wave propagation in railway contact lines». In: *Journal of Sound and Vibration* (2017) (cit. alle pp. 4, 6–9, 35, 36).

[3] F.J. Fuenmayor S.Gregori M.Tur A.Pedrosa J.E.Tarancon. «A modal coordinate catenary model for the real-time simulation of the pantograph-catenary dynamic interaction». In: *Finit Elements in Analysis and Design* (2019) (cit. alle pp. 5, 9, 39).

[4] B.Simeon M.Arnold. «Pantograph and catenary dynamics: a benchmark problem and its numerical solution». In: *Applied numerical mathematics* (2000) (cit. alle pp. 6, 23, 31, 35, 39).

[5] A.Germinario. «Sviluppo di un modello semi-analitico per l'analisi dell'interazione dinamica tra pantografo e catenaria». Tesi di laurea mag. Politecnico di Torino, 2021 (cit. alle pp. 9, 11).

[6] A. Collina S. Bruni. «Numerical Simulation of Pantograph-Overhead Equipment Interaction». In: *Vehicle System Dynamics* (2002) (cit. alle pp. 10, 12).

[7] M. Géradin D. J. Rixen. *Mechanical Vibrations:Theory and Application to Structural Dynamics*. John Wiley Sons,Ltd., 2015. Cap. Direct Time-Integration Methods, pp. 12–15 (cit. a p. 11).