



**Politecnico  
di Torino**

**Politecnico di Torino**

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica

A.a. 2023/2024

Sessione di Laurea Dicembre 2024

# **Modellazione high-fidelity di un cuscinetto ellittico deformabile per riduttori armonici**

Relatori:

Prof. Massimo Sorli  
Ph.D Andrea De Martin  
Ph.D Antonio Carlo Bertolino  
Ing. Roberto Guida

Candidato:

Marco Massarella



# Abstract

I riduttori armonici rappresentano una particolare categoria di riduttori, attraverso i quali è possibile ottenere elevati rapporti di riduzione e giochi ridotti. Inoltre, offrono il vantaggio di avere ingombri ristretti, grazie all'interazione di tre componenti posizionati coassialmente. Questi sono il Wave Generator, la Flexspline e la Circular Spline. Grazie a queste qualità vengono impiegati maggiormente nei settori della robotica e dell'aerospazio.

Al fine di aggirare i costi legati alla produzione del prodotto e grazie alla possibilità di ottenere una elevata quantità di dati, è necessario poter simulare il comportamento dei riduttori armonici tramite modelli high-fidelity. In quest'ottica si inserisce questo lavoro di tesi, il quale va a integrare un progetto preesistente di modellazione di un riduttore armonico. Nello specifico, si è andato ad aggiornare il modello di Wave Generator ideale con un modello high-fidelity di un cuscinetto ellittico deformabile.

Un primo modello simula la deformazione del cuscinetto da circolare ad ellittico, con lo scopo di ottenere le condizioni iniziali del secondo modello sviluppato. Questo implementa la rotazione del cuscinetto, ed è quello utilizzato per andare ad aggiornare il comportamento del Wave Generator durante la rotazione del riduttore ellittico completo.

L'interazione dei componenti è stata implementata con l'utilizzo di sistemi molla-smorzatore che vanno a interagire tra loro. Nello specifico, la ralla interna del cuscinetto è ipotizzata idealmente ellittica. Questa va a interagire con le sfere, le quali sono modellate con dei sistemi molla-smorzatore per lo scambio di forze con le ralle, e con lo sviluppo delle equazioni dinamiche per la loro rotazione. Le sfere, a loro volta, interagiscono con la ralla esterna, modellata con dei sistemi molla-smorzatore per lo scambio di forze all'interno della ralla, e come una trave deformabile per la sua deformazione flessionale.

# Indice

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Indice</b> .....  | <b>iv</b> |
| <b>Elenco delle figure</b> .....   | <b>vi</b> |
| <b>Elenco delle tabelle</b> .....  | <b>ix</b> |
| <b>Introduzione</b> .....  | <b>1</b>  |
| <b>1 Modello di deformazione del cuscinetto</b> .....                                  | <b>3</b>  |
| 1.1 Punti di contatto sfera-ralla interna.....   | 5         |
| 1.2 Forza di contatto della sfera.....   | 8         |
| 1.3 Posizione angolare della sfera.....  | 10        |
| 1.4 Interazione tra settori adiacenti di ralla esterna .....                           | 10        |
| 1.5 Punti di contatto sfera-ralla esterna.....   | 12        |
| 1.6 Deformazione della ralla esterna.....  | 13        |
| <b>2 Modello di rotazione del cuscinetto</b> .....                                     | <b>16</b> |
| 2.1 Posizioni dei punti di contatto sfera-ralla interna .....                          | 16        |
| 2.2 Velocità dei punti di contatto sfera-ralla interna .....                           | 17        |
| 2.3 Forza di contatto della sfera.....   | 18        |
| 2.4 Posizione angolare della sfera.....  | 19        |
| 2.5 Forze e coordinate della ralla esterna.....  | 23        |
| <b>3 Inserimento del modello del cuscinetto in quello del riduttore completo</b> ..... | <b>25</b> |
| 3.1 Equilibrio dei punti di contatto sfera-ralla esterna.....                          | 25        |
| 3.2 Deformazione della ralla esterna.....  | 27        |
| <b>4 Risultati della simulazione di deformazione del cuscinetto</b> .....              | <b>30</b> |
| 4.1 Deformazione dei punti di contatto.....  | 31        |
| 4.2 Deformazione della ralla esterna.....  | 35        |
| 4.3 Forze scambiate.....   | 37        |
| <b>5 Risultati della simulazione di rotazione del cuscinetto</b> .....                 | <b>39</b> |
| 5.1 Rotazione delle sfere.....   | 41        |
| 5.2 Rotazione dei punti di contatto .....  | 44        |
| 5.3 Rotazione della ralla esterna .....  | 46        |
| 5.4 Forze scambiate.....   | 48        |
| <b>6 Modello di riduttore armonico preesistente</b> .....                              | <b>50</b> |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 6.1      | Angoli e dimensioni .....  | 50        |
| 6.2      | Interazione WG-FS .....  | 51        |
| 6.3      | Contatto denti adiacenti .....   | 51        |
| 6.4      | Torsione FS e FS ellisse – circolare .....                                   | 52        |
| 6.5      | Tooth meshing e Interazione FS-CS .....                                      | 53        |
| 6.6      | Coppia FS-CS .....   | 55        |
| 6.7      | Equilibri alla traslazione .....   | 55        |
| <b>7</b> | <b>Risultati della simulazione di rotazione del riduttore completo .....</b> | <b>57</b> |
| 7.1      | Interfaccia tra Wave Generator e Flexspline .....                            | 59        |
|          | <b>Conclusioni e sviluppi futuri .....</b>                                   | <b>63</b> |
|          | <b>Bibliografia .....</b>  | <b>64</b> |

# Elenco delle figure

|   |    |
|---|----|
| Figura 1.1 Cuscinetto indeformato.....  | 3  |
| Figura 1.2 Velocità di deformazione del cuscinetto .....  | 4  |
| Figura 1.3 Deformazione del cuscinetto .....  | 4  |
| Figura 1.4 Zoom defromazione - Sinistra: zoom a $t = 0$ ms. Destra: zooma a $t = 5$ ms .....  | 5  |
| Figura 1.5 Sistema di riferimento e deformazione (il disegno in figura non rappresenta il sistema reale, riporta la deformazione accentuata con lo scopo di far apprezzare i parametri coinvolti) ..... | 5  |
| Figura 1.6 Posizione angolare del punto di contatto .....   | 6  |
| Figura 1.7 Angolo normale all'ellisse.....  | 8  |
| Figura 1.8 Implementazioen della forza di contatto della sfera .....  | 9  |
| Figura 1.9 Modelli molla-smorzatore tra segmenti adiacenti di ralla esterna.....  | 11 |
| Figura 1.10 Angoli tra segmenti adiacenti di ralla esterna.....   | 11 |
| Figura 1.11 Diagramma di corpo libero di un segmento di ralla esterna .....   | 13 |
| Figura 1.12 Raggio della ralla esterna linearizzato in condizioni indeformate .....   | 14 |
| Figura 1.13 Raggio della ralla esterna linearizzato in condizioni deformate.....  | 14 |
| Figura 2.1 Coordinate di un punto sulla ralla interna .....   | 17 |
| Figura 2.2 Velocità di un punto sulla ralla interna .....   | 18 |
| Figura 2.3 Diagramma di corpo libero di una sfera .....   | 20 |
| Figura 2.4 Interpolazione lineare del coefficiente d'attito.....  | 22 |
| Figura 2.5 Velocità assolute di una sfera.....  | 23 |
| Figura 3.1 Settore di applicazione delle forze della flexspline .....   | 26 |
| Figura 3.2 Diagramma di corpo libero di un segmento di ralla esterna con flexspline .....   | 26 |
| Figura 3.3 Trave incastrata soggetta a carico distribuito $q$ .....   | 27 |
| Figura 3.4 Settore di deformazione della ralla esterna.....   | 28 |
| Figura 4.1 Modello in ambiente Matlab/Simulink per la deformazione del cuscinetto.....  | 30 |
| Figura 4.2 Deformazione dei punti di contatto sfera-ralle .....   | 32 |
| Figura 4.3 Dettaglio di deformazione dei punti di contatto sfera-ralle .....  | 32 |
| Figura 4.4 Ascissa dei punti di contatto sfera-ralla esterna.....   | 33 |
| Figura 4.5 Ascissa dei punti di contatto sfera-ralla esterna.....   | 34 |
| Figura 4.6 Posizione angolare dei punti di contatto sfera-ralla esterna .....   | 34 |
| Figura 4.7 Andamenti di sfere simmetriche .....   | 35 |
| Figura 4.8 Deformazione della ralla esterna .....   | 36 |

|  |    |
|--|----|
| Figura 4.9 Cuscinetto completo deformato.....  | 36 |
| Figura 4.10 Forza di contatto tra le sfere e le ralle durante la deformazione.....                   | 37 |
| Figura 4.11 Forza tra settori adiacenti di ralla esterna.....  | 38 |
| Figura 5.1 Modello in ambiente Matlab/Simulink per la rotazione del cuscinetto.....                  | 40 |
| Figura 5.2 Posizione angolare del centro delle sfere durante la rotazione.....                       | 41 |
| Figura 5.3 Velocità angolare delle sfere rispetto al centro del cuscinetto.....                      | 42 |
| Figura 5.4 Dettaglio di velocità angolare delle sfere rispetto al centro del cuscinetto.....         | 43 |
| Figura 5.5 Velocità angolare delle sfere rispetto al proprio centro.....                             | 43 |
| Figura 5.6 Dettaglio di velocità angolare delle sfere rispetto al proprio centro.....                | 44 |
| Figura 5.7 Andamenti dei punti di contatto tra le sfere e le ralle.....                              | 45 |
| Figura 5.8 Andamento dei punti di contatto tra la sfera 1 e le ralle.....                            | 45 |
| Figura 5.9 Rotazione dei punti di contatto tra le sfere e le ralle.....                              | 46 |
| Figura 5.10 Rotazione della ralla esterna.....   | 47 |
| Figura 5.11 Rotazione del cuscinetto.....  | 47 |
| Figura 5.12 Forza di contatto tra le sfere e le ralle durante la rotazione.....                      | 48 |
| Figura 5.13 Forza di contatto tra la sfera 1 e le ralle durante la rotazione.....                    | 49 |
| Figura 5.14 Forza tra settori adiacenti di ralla esterna.....  | 49 |
| Figura 6.1 Modello in ambiente Matlab/Simulink per la rotazione del riduttore armonico completo..... | 50 |
| Figura 6.2 Blocco Angoli and dimensioni.....   | 51 |
| Figura 6.3 Blocco Interazione WG-FS.....   | 51 |
| Figura 6.4 Blocco Contatto denti adiacenti FS.....   | 52 |
| Figura 6.5 Blocco $F_{i+1,c}$ .....  | 52 |
| Figura 6.6 Torsione FS.....  | 53 |
| Figura 6.7 Blocco FS ellisse - circolare.....  | 53 |
| Figura 6.8 Blocco Tooth meshing.....   | 54 |
| Figura 6.9 Blocco Interazione FS-CS.....   | 54 |
| Figura 6.10 Blocco Profilo destro.....   | 54 |
| Figura 6.11 Blocco Coppia FS-CS.....   | 55 |
| Figura 6.12 Blocco Equilibrio alla tralazione orizzontale dente FS.....                              | 55 |
| Figura 6.13 Equilibrio alla tralazione verticale dente FS.....                                       | 56 |
| Figura 7.1 Modello in ambiente Matlab/Simulink per la rotazione del riduttore armonico completo..... | 57 |
| Figura 7.2 Blocco Wave Generator.....  | 59 |

|  |    |
|--|----|
| Figura 7.3 Interfaccia tra Wave Generator e Flexspine.....                       | 59 |
| Figura 7.4 Zoom sul contatto - Interfaccia tra Wave Generator e Flexspine .....  | 60 |
| Figura 7.5 Zoom sul distacco - Interfaccia tra Wave Generator e Flexspine .....  | 60 |
| Figura 7.6 Interazione tra Wave Generator e Flexspline.....                      | 61 |
| Figura 7.7 Zoom sul contatto - Interazione tra Wave Generator e Flexspline ..... | 62 |
| Figura 7.8 Zoom sul distacco - Interazione tra Wave Generator e Flexspline ..... | 62 |



# Elenco delle tabelle

|  |    |
|--|----|
| Tabella 1.1 Parametri geometrici del cuscinetto .....  | 3  |
| Tabella 4.1 Parametri utilizzati nella simulazione di deformazione del cuscinetto .....              | 31 |
| Tabella 5.1 Parametri utilizzati nella simulazione di rotazione del cuscinetto .....                 | 41 |
| Tabella 7.1 Parametri utilizzati nella simulazione di rotazione del riduttore armonico completo..... | 58 |

# Introduzione

I riduttori armonici rappresentano una delle molteplici categorie di riduttori attraverso i quali è possibile ridurre la velocità di rotazione da un albero in ingresso a uno di uscita. Le caratteristiche di questi particolari riduttori, a differenza di altri più comuni, sono la possibilità di ottenere un elevato rapporto di trasmissione e una quasi totale assenza di giochi, con il vantaggio di ingombro e peso ridotti. Queste qualità li rendono particolarmente adatti a essere utilizzati in contesti quali la robotica e i servoattuatori in generale.

Le caratteristiche appena descritte sono possibili grazie alla particolare architettura dei riduttori armonici; questi sono realizzati con tre componenti:

- **Wave Generator:** è composto da una camma ellittica inserita all'interno di un cuscinetto ellittico deformabile;
- **Flexspline:** ruota dentata a denti esterni calettata al Wave Generator;
- **Circular Spline:** ruota dentata che ingrana con la Flexspline;

L'obiettivo di questo progetto di tesi è andare a sviluppare un modello high-fidelity di un cuscinetto ellittico deformabile (Wave Generator) da andare ad inserire in un modello preesistente di un riduttore armonico completo. Nel modello preesistente il Wave Generator è modellato come un elemento ellittico ideale infinitamente rigido. In questo modo si va ad aggiungere un ulteriore grado di complessità e dettaglio nel modello.

La possibilità di simulare il comportamento di un riduttore armonico tramite un modello multibody permette di ottenere numerosi dati sul funzionamento di questi organi meccanici abbattendo i costi legati alla produzione del componente. Inoltre, è possibile andare a creare algoritmi di diagnostica e prognostica grazie ai dati raccolti.

Sono stati sviluppati due modelli del cuscinetto; il primo permette di simularne la deformazione e ottenere le condizioni iniziali per il secondo modello, il quale ne simula la rotazione. In entrambi i modelli le interazioni tra i vari componenti sono state modellate come dei sistemi molla-smorzatore che scambiano delle forze.

Il lavoro riportato nei prossimi capitoli può essere sintetizzato come segue:

- **Modello di deformazione del cuscinetto:** descrizione analitica delle interazioni presenti tra i singoli componenti del cuscinetto e delle teorie applicate durante la fase di deformazione;
- **Modello di rotazione del cuscinetto:** descrizione analitica delle interazioni presenti tra i singoli componenti del cuscinetto e delle teorie applicate durante la fase di rotazione;
- **Inserimento del modello del cuscinetto in quello del riduttore completo:** descrizione analitica delle modifiche effettuate per adattare il modello di rotazione del cuscinetto a essere inserito all'interno del modello di riduttore preesistente;
- **Risultati della simulazione di deformazione del cuscinetto:** presentazione del modello di deformazione del cuscinetto sviluppato e dei risultati ottenuti dalla simulazione;

- **Risultati della simulazione di rotazione del cuscinetto:** presentazione del modello di rotazione del cuscinetto sviluppato e dei risultati ottenuti dalla simulazione;
- **Modello di riduttore armonico preesistente:** descrizione qualitativa dei blocchi utilizzati nel modello di riduttore armonico preesistente;
- **Risultati della simulazione di rotazione del riduttore completo:** analisi dei risultati ottenuti dalla simulazione del riduttore armonico completo dopo aver aggiornato il Wave Generator.

# 1 Modello di deformazione del cuscinetto

In questo capitolo si descrivono le interazioni tra i componenti del cuscinetto in fase di deformazione e la loro implementazione nel modello in ambiente Matlab/Simulink. Il sistema non è in rotazione ed è inizialmente in uno stato indeformato circolare, riportato in Figura 1.1 e schematizzato in Tabella 1.1. Lo spessore della ralla interna non è riportato, in quanto questa è ipotizzata ideale e il suo spessore non risulta rilevante per il caso di studio.

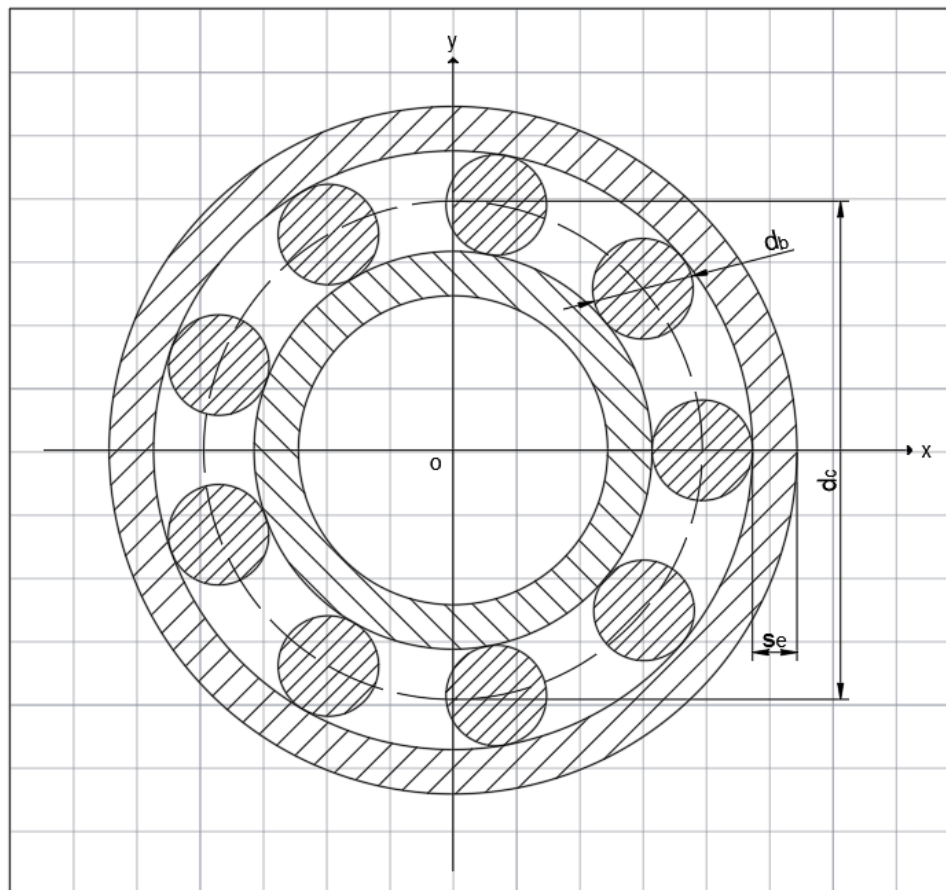


Figura 1.1 Cuscinetto indeformato

Tabella 1.1 Parametri geometrici del cuscinetto

| Parametro | Descrizione                       | Valore   |
|-----------|-----------------------------------|----------|
| $d_c$     | Diametro primitivo del cuscinetto | 39,32 mm |
| $d_b$     | Diametro delle sfere              | 7,94 mm  |
| $n_b$     | Numero di sfere                   | 9        |
| $s_e$     | Spessore della ralla esterna      | 7,02 mm  |

L'obiettivo del modello è simulare l'inserimento di una camma ellittica all'interno del cuscinetto e ottenere le coordinate dei punti di contatto tra sfera e ralla esterna alla fine dell'inserimento. A tal fine viene data in input al modello la velocità deformazione con un andamento sinusoidale tale da ottenere la deformazione finale desiderata al tempo  $t = 5 \text{ ms}$ :

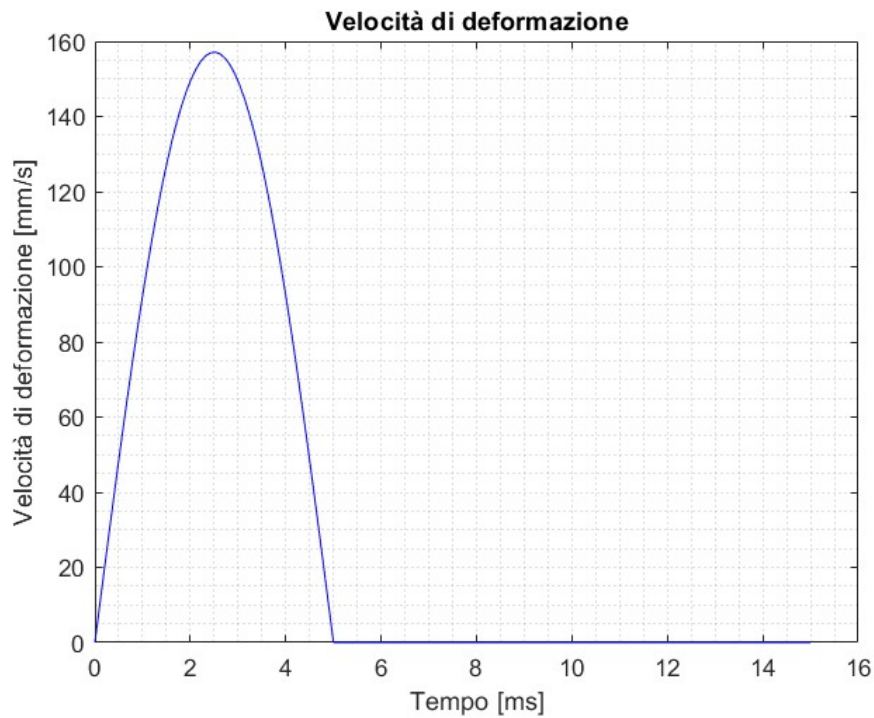


Figura 1.2 Velocità di deformazione del cuscinetto

Integrando la velocità di deformazione si ottiene la deformazione stessa, la quale corrisponde all'eccentricità dell'ellisse. Questa viene poi saturata al valore massimo di  $w_0 = 0,5 \text{ mm}$ :

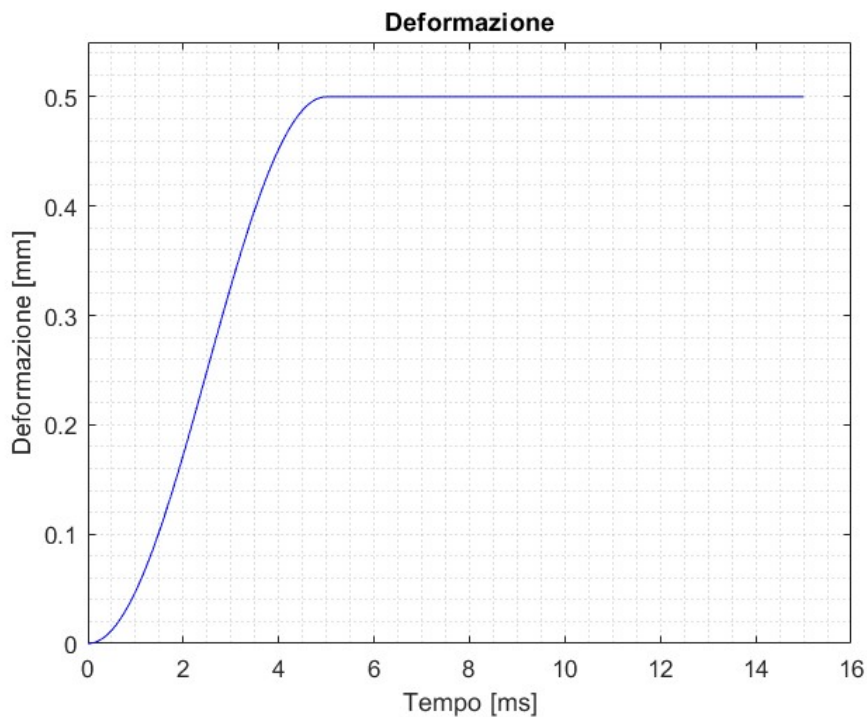


Figura 1.3 Deformazione del cuscinetto

Come si nota dai particolari in Figura 1.4, l'andamento della velocità di deformazione scelto è tale da generare una deformazione continua e con derivata continua:

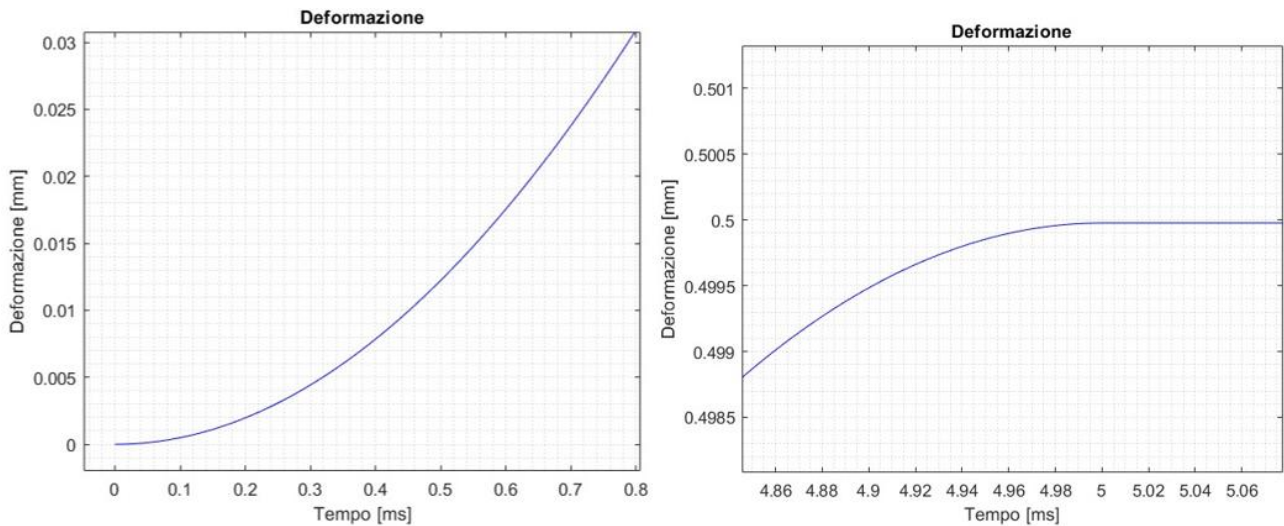


Figura 1.4 Zoom defromazione - Sinistra: zoom a  $t = 0$  ms. Destra: zooma a  $t = 5$  ms

La deformazione va ad agire in modo diretto sulla ralla interna, considerata come un'ellisse ideale, che scambia delle forze di contatto con le sfere. A loro volta le sfere scambiano la stessa forza di contatto con la ralla esterna. Per ogni punto di contatto tra sfera e ralla esterna sono presenti due ulteriori forze derivanti dalla compressione o estensione della ralla. Infatti, si può considerare che ogni punto di contatto appartenga ad un concio di ralla che interagisce con due concii a esso adiacenti, contenti a loro volta un ulteriore punto di contatto ciascuno. Nel momento in cui due concii adiacenti si avvicinano nasce una forza di compressione e viceversa una forza di trazione. La modellazione di queste interazioni sarà descritta nel dettaglio nei prossimi paragrafi.

## 1.1 Punti di contatto sfera-ralla interna

La ralla interna viene modellata come un'ellisse ideale, pertanto le coordinate dei punti di contatto con la sfera posso essere ricavate utilizzando le formule matematiche relative all'ellisse senza dover implementare equazioni dinamiche.

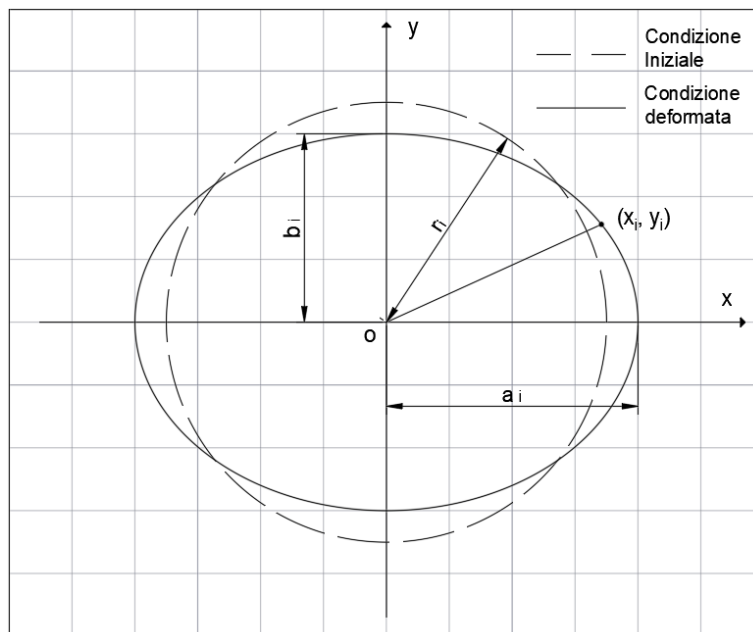


Figura 1.5 Sistema di riferimento e deformazione (il disegno in figura non rappresenta il sistema reale, riporta la deformazione accentuata con lo scopo di far apprezzare i parametri coinvolti)

In primo luogo, è necessario definire un sistema di riferimento in cui calcolare le coordinate. Per semplicità è stato scelto un sistema con origine nel centro del cuscinetto e assi  $x$  e  $y$  ortogonali all'asse di rotazione del cuscinetto. La deformazione è applicata in modo da avere il semiasse maggiore dell'ellisse coincidente con l'asse  $x$  e quello minore coincidente con l'asse  $y$ , come riportato in Figura 1.5.

Con il sistema di riferimento così definito si calcolano le coordinate dei punti dell'ellisse come segue:

$$\begin{cases} x_i = a_i \cdot \cos \theta \\ y_i = b_i \cdot \sin \theta \end{cases}$$

In cui:

- $a_i$  è il semiasse maggiore dell'ellisse;
- $b_i$  è il semiasse minore dell'ellisse;
- $\theta$  è la posizione angolare del punto  $x$ - $y$ , definito nullo in corrispondenza dell'asse  $x$  e positivo con senso di rotazione antiorario;

Per quanto riguarda i semiassi dell'ellisse, questi si calcolano sommando e sottraendo la deformazione al raggio indeformato della ralla interna:

$$\begin{cases} a_i = r_i + w_0 \\ b_i = r_i - w_0 \end{cases}$$

L'angolo  $\theta$  è quello del punto di contatto tra la sfera e la ralla interna. In condizioni indeformate corrisponde all'angolo del centro della sfera  $\theta_b$ , mentre progressivamente che la ralla si deforma da circolare a ellittica i due angoli tendono a divergere:

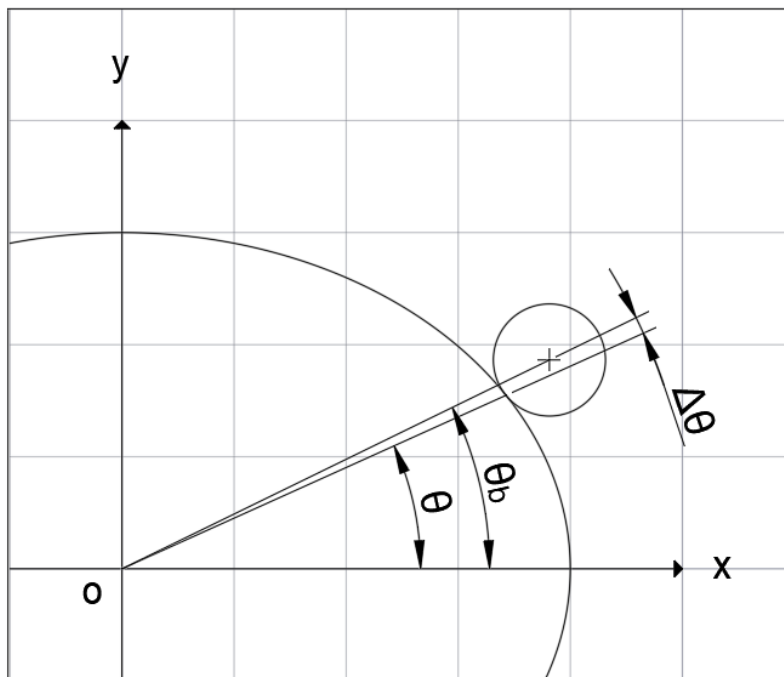


Figura 1.6 Posizione angolare del punto di contatto

Per il caso di studio sono presenti piccole deformazioni, quantificabili attraverso il valore dell'eccentricità dell'ellisse. Per la ralla interna, in cui la deformazione incide maggiormente rispetto alla ralla esterna a causa dei semiassi più piccoli, si calcola come:

$$e_i = \frac{c_i}{a_i}$$

In cui:

$$c_i = \sqrt{a_i^2 - b_i^2}$$

Rappresenta la semi distanza focale.

Sostituendo si ottiene:

$$e_i = \frac{\sqrt{a_i^2 - b_i^2}}{a_i} = 0,35$$

Il caso in cui l'eccentricità è pari a zero è quello di una circonferenza. Per cui, tantopiù il valore è piccolo minore è la deformazione.

Inoltre, non essendoci una relazione diretta tra la deformazione  $w_0$ , l'angolo  $\theta_b$  e  $\Delta\theta = \theta_b - \theta$ , è stata fatta l'ipotesi che i due angoli  $\theta$  e  $\theta_b$  possono essere considerati coincidenti, trascurando  $\Delta\theta$ . È ora possibile calcolare le coordinate dei punti di contatto utilizzando l'angolo del centro della sfera:

$$\begin{cases} x_i = a_i \cdot \cos \theta_b \\ y_i = b_i \cdot \sin \theta_b \end{cases}$$

Il calcolo dell'angolo  $\theta_b$  sarà trattato nel dettaglio nel paragrafo 1.3.

Con le stesse ipotesi è possibile calcolare anche le velocità in questi punti attraverso la velocità di deformazione  $w_{0,d}$  e l'angolo  $\theta_b$ :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = w_{0,d} \cdot \cos \theta_b \\ \dot{y}_i = -w_{0,d} \cdot \sin \theta_b \end{cases}$$

Una volta ottenute le coordinate dei punti di contatto è necessario calcolare l'angolo normale all'ellisse  $\alpha_{N,i}$  in quei punti, il quale descrive la direzione in cui viene scambiata la forza di contatto tra sfera e ralle. Così come per il caso precedente, in condizioni indeformate questo coincide con l'angolo  $\theta_b$ , mentre per un'ellisse avrà un valore diverso.



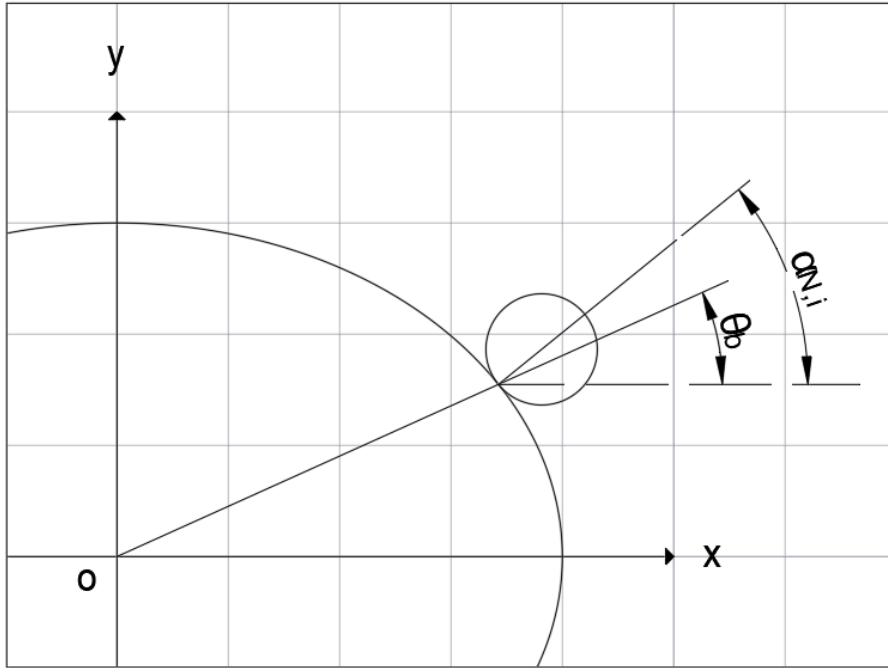


Figura 1.7 Angolo normale all'ellisse

Per il calcolo di  $\alpha_{N,i}$  è sufficiente implementare la seguente formula, una volta ottenute le coordinate  $x_i$  e  $y_i$ :

$$\alpha_{N,i} = \arctan \frac{a_i^2 \cdot y_i}{b_i^2 \cdot x_i}$$

## 1.2 Forza di contatto della sfera

Dal punto di vista della forza scambiata con le ralle, la sfera viene modellata come un sistema molla-smorzatore. Per quanto riguarda la forza data dalla rigidezza, questa è ottenuta applicando la teoria del contatto Hertziano, per cui il suo modulo si calcola come segue ([1]):

$$F_{bk} = k_b \cdot \delta_b^\gamma \cdot h(\delta_b)$$

In cui:

- $k_b$  la rigidezza della sfera;
- $\delta_b$  è l'allungamento o accorciamento della sfera rispetto alla condizione indeformata;
- $\gamma$  è un esponente che nel caso di cuscinetto a sfera vale  $\frac{3}{2}$ ;
- $h(\delta_b)$  è una funzione che dipende da  $\delta_b$ , definita in seguito;

Per quanto riguarda  $\delta_b$ , bisogna ricavare la distanza tra i punti di contatto con la ralla interna  $(x_i, y_i)$  e la ralla esterna  $(x_e, y_e)$  e sottrarre il diametro della sfera in condizioni indeformate  $d_b$ , in modo da calcolare la compressione o il distacco dalle ralle della sfera:

$$\delta_b = \sqrt{(x_e - x_i)^2 + (y_e - y_i)^2} - d_b$$

Nel cuscinetto reale la sfera può essere soggetta solamente a compressione; infatti, se le due ralle si allontanano di una distanza maggiore del diametro della sfera ci sarà il distacco tra la sfera stessa e una delle due ralle. Per questo è necessario inserire nel calcolo di  $F_b$  la funzione  $h(\delta_b)$  così definita:

$$h(\delta_b) = \begin{cases} 1, & \delta_b < 0 \\ 0, & \delta_b \geq 0 \end{cases}$$

In questo modo si esclude nell'implementazione il caso di forza di trazione, data dall'allontanamento delle ralle, ponendo a zero la forza di contatto.

Per semplicità, nel modello non è stata inserita una funzione vera e propria, ma un blocco *Switch* che implementa quanto descritto. È visibile in Figura 1.8 evidenziato da un'area viola, e la sua funzione è restituire uno nel caso di input (collegamento centrale) positivo e zero viceversa. Il funzionamento è opposto a quanto descritto a causa del blocco *Gain* che moltiplica per  $-1$ , inserito per ottenere forze positive.

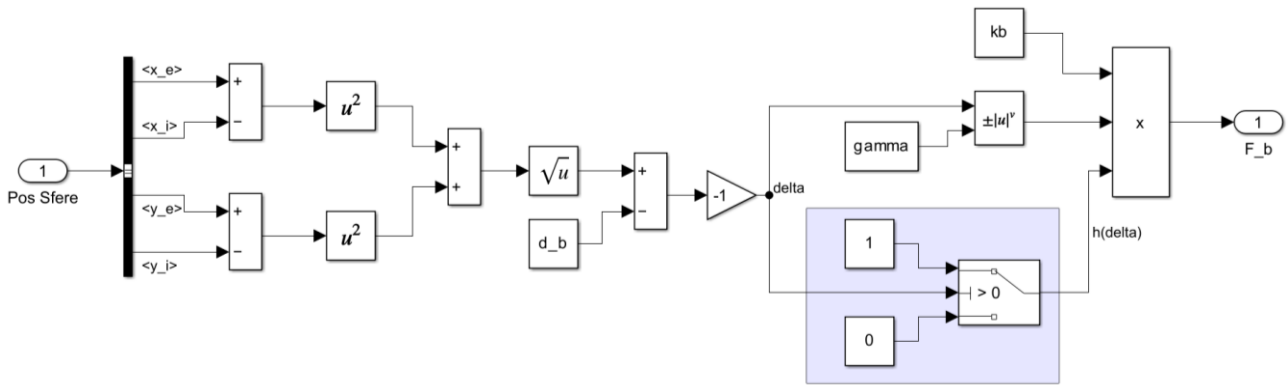


Figura 1.8 Implementazione della forza di contatto della sfera

Dopo aver calcolato il modulo della forza è possibile ricavare le componenti lungo gli assi  $x$  e  $y$  utilizzando l'angolo  $\alpha_{N,i}$  descritto nel paragrafo 1.2:

$$\begin{cases} F_{bk,x} = F_b \cdot \cos \alpha_{N,i} \\ F_{bk,y} = F_b \cdot \sin \alpha_{N,i} \end{cases}$$

A questo punto, per ottenere le componenti della forza completa, è necessario sommare il contributo dello smorzamento lungo gli assi  $x$  e  $y$  e sommarlo alle componenti date dalla rigidità:

$$\begin{cases} F_{b,x} = F_{bk,x} + F_{bc,x} \\ F_{b,y} = F_{bk,y} + F_{bc,y} \end{cases}$$

Per calcolare le componenti di forza dello smorzamento  $c_b$  si procede attraverso le velocità dei punti di contatto tra la sfera e le ralle. Per la ralla interna il calcolo è stato descritto nel paragrafo 1.1, mentre per la ralla esterna sarà descritto nel paragrafo 1.5:

$$\begin{cases} F_{bc,x} = \max((\dot{x}_i - \dot{x}_e) \cdot c_b; F_{bk,x}) \\ F_{bc,y} = \max((\dot{y}_i - \dot{y}_e) \cdot c_b; F_{bk,y}) \end{cases}$$

È necessario saturare i valori calcolati con il modello dello smorzatore con le componenti date dalla rigidità. Questo per evitare, nel caso di urti tra la sfera e le ralle, picchi della forza data dallo smorzamento non corrispondenti alla realtà causate da elevate differenze di velocità tra i due corpi nell'istante del contatto.

Una volta ottenute le componenti della forza lungo gli assi si procede a calcolare il modulo della forza completa:

$$F_b = \sqrt{F_{b,x}^2 + F_{b,y}^2}$$

### 1.3 Posizione angolare della sfera

Nel modello di deformazione del cuscinetto le sfere vengono modellate come delle molle prive di massa. Per ricavare la posizione dei loro centri, quindi, si procede in modo cinematico. Ipotizzando che la deformazione totale della sfera sia ripartita in modo analogo sui due punti di contatto con la ralla interna ed esterna, è possibile calcolare il centro della sfera come punto medio tra questi due punti:

$$x_b = \frac{x_i + x_e}{2}$$

$$y_b = \frac{y_i + y_e}{2}$$

Una volta ottenute le coordinate del centro della sfera si calcola la posizione angolare come:

$$\theta'_b = \arctan \frac{y_b}{x_b}$$

Il calcolo dell'arcotangente in ambiente Simulink è fatto tramite il blocco *atan2*, il quale restituisce valori compresi tra  $-\pi$  e  $\pi$ . Sarà quindi necessario riportare i valori ottenuti tra 0 e  $2\pi$ , sommando  $2\pi$  in caso di valore negativo e prendendo il valore stesso se positivo:

$$\theta_b = \begin{cases} \theta'_b + 2\pi, & \theta'_b < 0 \\ \theta'_b, & \theta'_b \geq 0 \end{cases}$$

### 1.4 Interazione tra settori adiacenti di ralla esterna

Durante la deformazione la distanza tra due punti di contatto adiacenti sulla ralla esterna si modifica rispetto alla condizione circolare. Ciò comporta che nel caso di allontanamento dei punti si crei una forza di trazione, e viceversa nel caso di avvicinamento si sviluppi una forza di compressione.

Per implementare questo fenomeno, i settori di ralla esterna tra un punto di contatto e i due punti adiacenti sono stati modellati come dei sistemi molla-smorzatore. Il punto di contatto  $i$  si interfaccia con i due punti adiacenti  $i + 1$  e  $i - 1$  attraverso le rigidezze  $k_{i+1}$  e  $k_{i-1}$  e gli smorzamenti  $c_{i+1}$  e  $c_{i-1}$ :

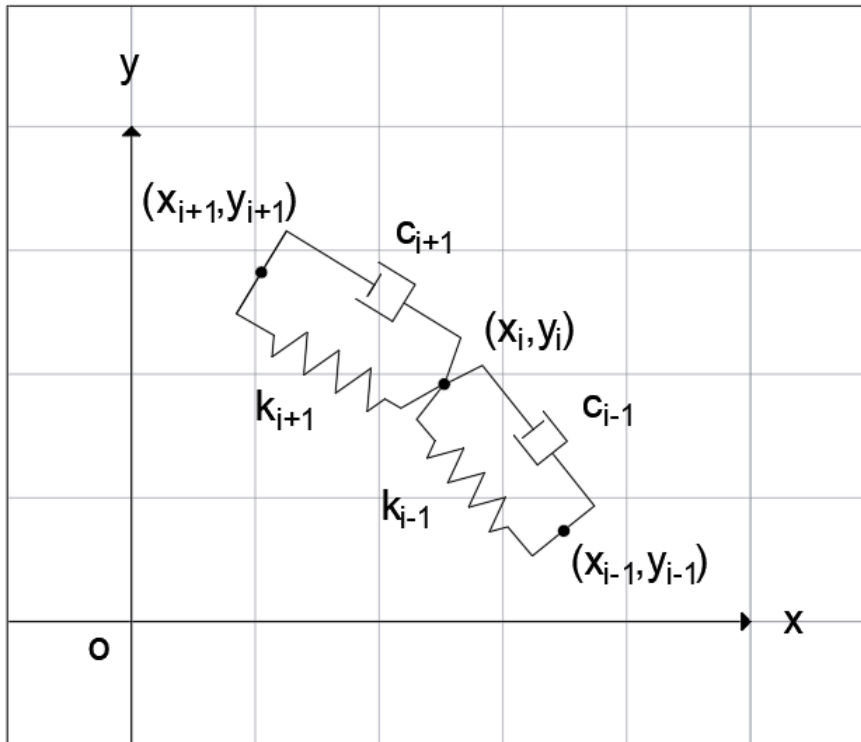


Figura 1.9 Modelli molla-smorzatore tra segmenti adiacenti di ralla esterna

I due sistemi molla-smorzatore scambiano due forze  $F_{i+1}$  e  $F_{i-1}$  le cui direzioni sono pari a quelle delle congiungenti tra il punto  $i$  e i punti  $i + 1$  e  $i - 1$  rispettivamente. Queste direzioni sono descritte dagli angoli  $\varepsilon_{i+1}$  e  $\varepsilon_{i-1}$  e possono essere calcolate come segue:

$$\varepsilon_{i+1} = \arctan\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}\right)$$

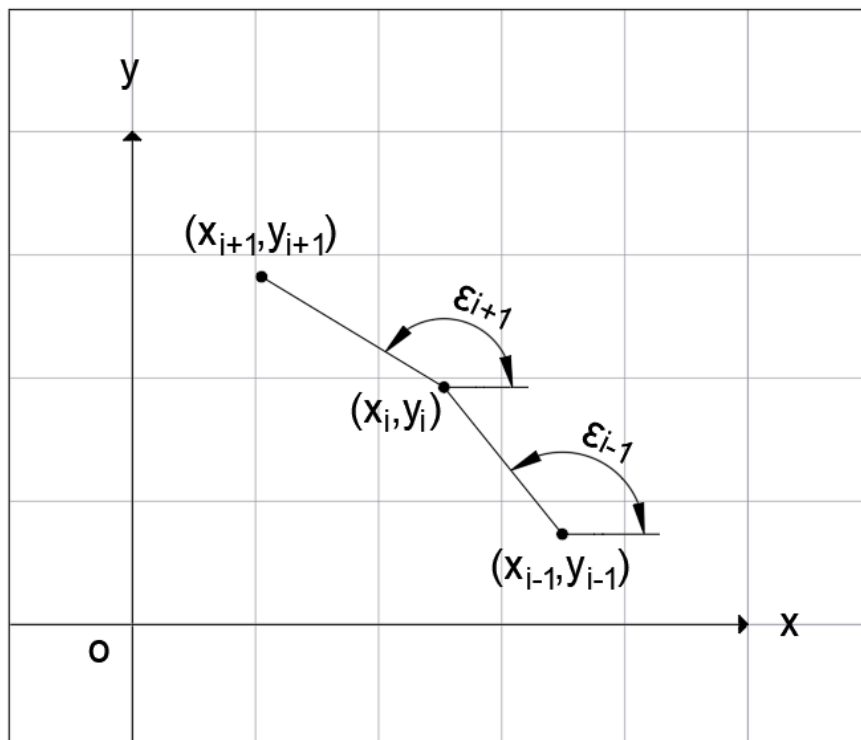


Figura 1.10 Angoli tra segmenti adiacenti di ralla esterna

Una volta riportato il valore dell'angolo tra 0 e  $2\pi$  si ottiene  $\varepsilon_{i-1}$  scalando di un indice il vettore  $\varepsilon_{i+1}$ . Ossia la seconda componente di  $\varepsilon_{i+1}$  diventa la prima di  $\varepsilon_{i-1}$  e così via fino ad ottenere il vettore completo. Infatti, la direzione tra un punto  $i$  e il precedente è pari a quella tra il punto  $i - 1$  e il suo successivo, quindi non è necessario ripetere il calcolo.

A partire dalle posizioni e velocità dei punti di contatto tra sfera e ralla esterna si calcolano quattro grandezze per ogni punto  $i$ :

- avvicinamento/allontanamento  $\delta_{i+1}$ : differenza tra la distanza del punto  $i$  e del punto successivo in condizioni deformate e condizioni circolari (indeformate);
- avvicinamento/allontanamento  $\delta_{i-1}$ : differenza tra la distanza del punto  $i$  e del punto precedente in condizioni deformate e condizioni circolari (indeformate);
- velocità di avvicinamento/allontanamento  $\dot{\delta}_{i+1}$ : velocità con cui il punto  $i$  e il successivo si stanno avvicinando/allontanando;
- velocità di avvicinamento/allontanamento  $\dot{\delta}_{i-1}$ : velocità con cui il punto  $i$  e il precedente si stanno avvicinando/allontanando;

Nel dettaglio

$$\begin{cases} \delta_{i+1} = \sqrt{(x_i - x_{i+1})^2 + (y_i - y_{i+1})^2} - \delta_0 \\ \delta_{i-1} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} - \delta_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\delta}_{i+1} = (\dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i) \cdot \cos(\varepsilon_{i+1}) + (\dot{y}_{i+1} - \dot{y}_i) \cdot \sin(\varepsilon_{i+1}) \\ \dot{\delta}_{i-1} = (\dot{x}_{i-1} - \dot{x}_i) \cdot \cos(\varepsilon_{i-1}) + (\dot{y}_{i-1} - \dot{y}_i) \cdot \sin(\varepsilon_{i-1}) \end{cases}$$

Si ottengono quindi le due forze tra i segmenti di ralla adiacenti pari a:

$$\begin{cases} F_{i+1} = k_{i+1} \cdot \delta_{i+1} + c_{i+1} \cdot \dot{\delta}_{i+1} \\ F_{i-1} = k_{i-1} \cdot \delta_{i-1} + c_{i-1} \cdot \dot{\delta}_{i-1} \end{cases}$$

Una volta calcolati i moduli delle forze è possibile scomporli lungo gli assi  $x - y$ :

$$\begin{cases} F_{i+1,x} = F_{i+1} \cdot \cos \varepsilon_{i+1} \\ F_{i+1,y} = F_{i+1} \cdot \sin \varepsilon_{i+1} \\ F_{i-1,x} = -F_{i-1} \cdot \cos \varepsilon_{i-1} \\ F_{i-1,y} = -F_{i-1} \cdot \sin \varepsilon_{i-1} \end{cases}$$

## 1.5 Punti di contatto sfera-ralla esterna

Per ricavare le velocità e le posizioni dei punti di contatto tra sfera e ralla esterna bisogna ricavare le equazioni di equilibrio dinamico per la traslazione lungo gli assi  $x$  e  $y$ . Prendendo in considerazione il diagramma di corpo libero presente in Figura 1.11 e ipotizzando che tutte le forze presenti siano applicate nel punto di contatto è possibile scrivere le due equazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} m_i \cdot \ddot{x}_{e,i} &= F_{b,x} + F_{i+1,x} + F_{i-1,x} \\ m_i \cdot \ddot{y}_{e,i} &= F_{b,y} + F_{i+1,y} + F_{i-1,y} \end{aligned}$$

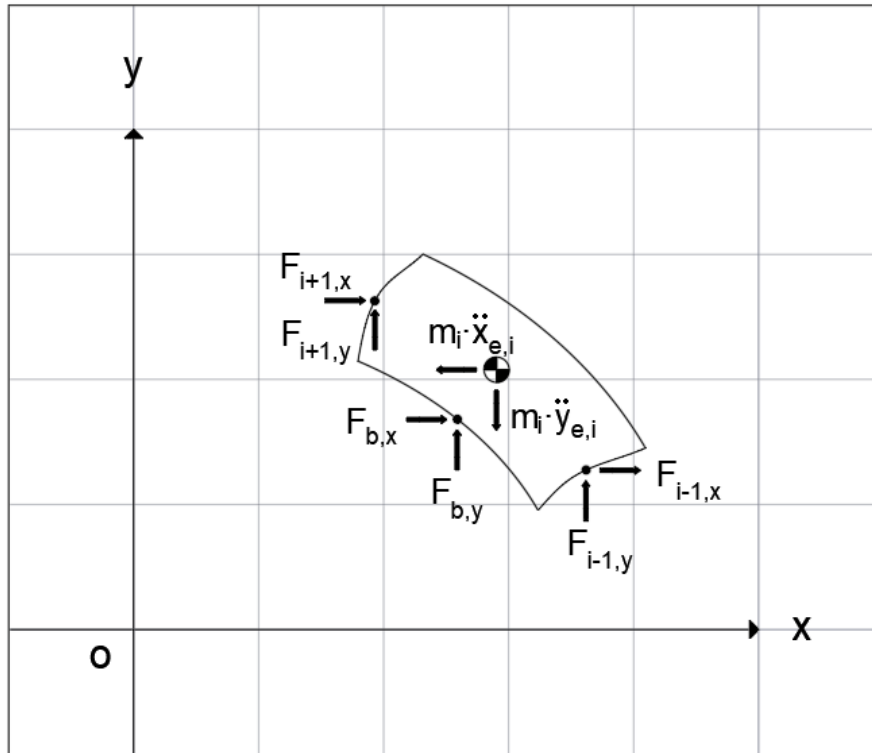


Figura 1.11 Diagramma di corpo libero di un segmento di ralla esterna

Per quanto riguarda la massa  $m_i$  del segmento di ralla preso in considerazione è stato ipotizzato che la massa totale della ralla esterna  $m_{e,tot}$  sia equamente distribuita tra tutti i segmenti di ralla compresi tra due punti di contatto. Essendo il numero di segmenti uguale al numero di sfere del cuscinetto  $n_b$  si ricava la massa del segmento  $i$  come:

$$m_i = \frac{m_{e,tot}}{n_b}$$

Una volta ricavate le componenti dell'accelerazione si calcolano le velocità per integrazione. Le condizioni iniziali sono nulle, dato che il cuscinetto al tempo iniziale  $t = 0$  s è fermo.

In modo analogo si calcolano le posizioni dei punti di contatto integrando le velocità. In questo caso le condizioni iniziali sono date dalle posizioni delle sfere nelle condizioni indeformate. La prima sfera si trova in corrispondenza dell'asse  $x$  e le altre sono equi spaziate lungo la circonferenza indeformata.

## 1.6 Deformazione della ralla esterna

I calcoli descritti fino a questo momento riguardano esclusivamente i punti di contatto delle sfere con le ralle. In questo paragrafo si analizzerà la deformazione della ralla esterna tra un punto di contatto e l'altro, con l'obiettivo di modellare tutte le componenti del cuscinetto durante la fase di deformazione.

Nel caso di cuscinetto indeformato, ogni segmento di ralla tra due punti di contatto è un settore circolare di raggio  $R_{e,0}$ , ossia il raggio della ralla esterna in condizioni indeformate. Linearizzando la circonferenza come in Figura 1.12, si ottiene un raggio della ralla costante.

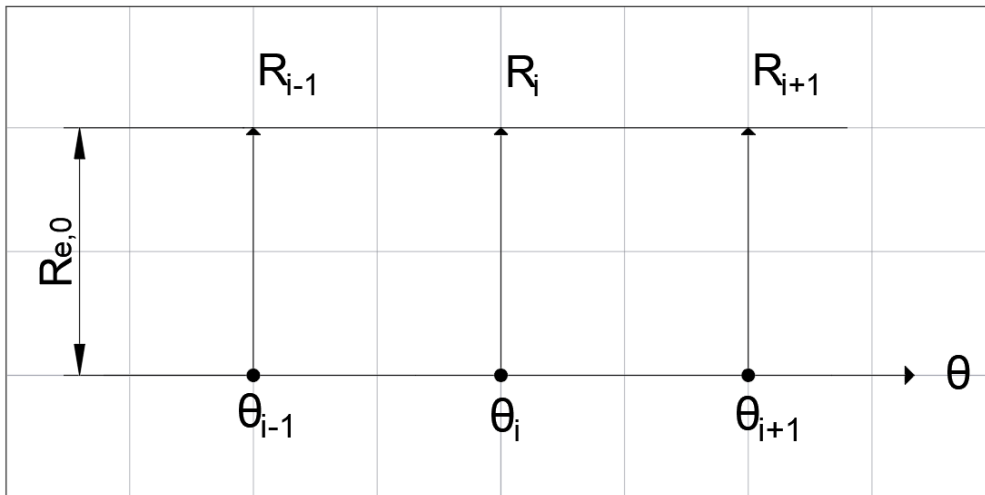


Figura 1.12 Raggio della ralla esterna linearizzato in condizioni indeformate

Durante la fase di deformazione i raggi nei punti di contatto saranno, in generale, diversi da  $R_{e,0}$  e diversi tra loro. Per descrivere la deformazione in un segmento di ralla è stato scelto di calcolare il generico raggio  $R(P)$  nel punto  $P$  come media pesata tra i due raggi dei due punti di contatto che delimitano il segmento in esame:

$$R_p = \frac{R_1 \cdot b + R_2 \cdot a}{a + b}$$

In cui:

- $R_1$  è il raggio del primo punto di contatto;
- $R_2$  è il raggio del secondo punto di contatto;
- $a$  è la distanza del punto  $P$  dal primo punto di contatto;
- $b$  è la distanza del punto  $P$  dal secondo punto di contatto;

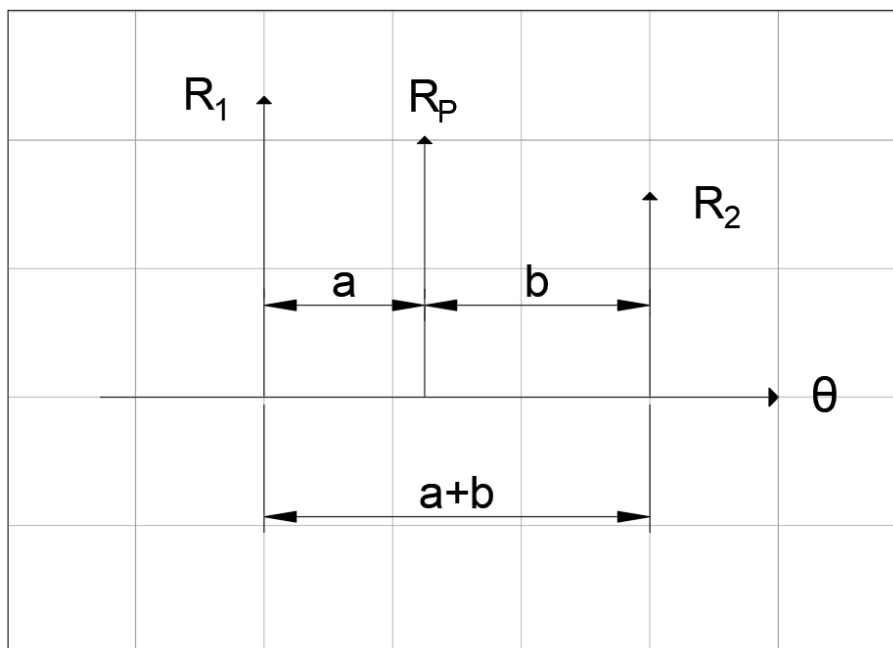


Figura 1.13 Raggio della ralla esterna linearizzato in condizioni deformate

Il calcolo viene fatto per un numero  $N$  di punti di discretizzazione equi spaziat per ogni segmento di ralla. Il primo punto di contatto del segmento è compreso tra i punti di discretizzazione, mentre il secondo è escluso. In questo modo si evita di includere due volte i punti di contatto, in quanto il secondo punto del generico segmento di ralla  $i$  è anche il primo punto del segmento  $i + 1$ .

Una volta ottenuto il raggio nel punto  $P$  si calcolano le coordinate  $(x_P, y_P)$  tramite la posizione angolare  $\theta_P$ :

$$x_P = R_P \cdot \cos \theta_P$$

$$y_P = R_P \cdot \sin \theta_P$$

Per quanto riguarda la posizione angolare dei punti, questa viene ricavata andando a creare un vettore di  $N$  punti equi spaziat con estremi le posizioni angolari dei due punti di contatto che delimitano il segmento di ralla. In questo modo i punti in cui si calcola il raggio e quelli in cui si calcola la posizione angolare coincideranno, e sarà possibile applicare le formule precedenti.

Concatenando i vettori di coordinate di ogni segmento si ottengono i vettori delle coordinate della ralla esterna completa.

Per la posizione angolare del primo punto di contatto, ossia il punto iniziale del primo segmento e il punto finale dell'ultimo segmento, è necessario eseguire un controllo sul suo valore prima di procedere con i calcoli appena descritti. Infatti, nel calcolo della posizione angolare delle sfere il valore ottenuto è sempre compreso tra  $0$  e  $2\pi$ . Questo fa sì che la posizione angolare del primo punto oscilli tra  $0$  e  $2\pi$  a causa della deformazione.

Per ottenere gli estremi del vettore di discretizzazione corretti del primo segmento è necessario verificare che l'angolo non sia prossimo a  $2\pi$ , e in caso positivo andare a sottrarre  $2\pi$ . Analogamente, per l'ultimo segmento è necessario verificare che l'angolo non sia prossimo a  $0$ , e in caso positivo andare a sommare  $2\pi$ .



## 2 Modello di rotazione del cuscinetto

Dopo aver implementato la deformazione del cuscinetto si è creato un ulteriore modello in cui simulare la rotazione dopo la deformazione. Le condizioni iniziali del sistema sono quelle alla fine della deformazione, e l'input del modello è la velocità di rotazione della ralla interna, solidale a un ipotetico motore che fornisce potenza al sistema.

Il movimento della ralla interna genera delle forze sulle sfere, che a loro volta inizieranno a ruotare intorno al centro del cuscinetto e contemporaneamente intorno al loro centro. Il moto della ralla interna e delle sfere deforma anche la ralla esterna, modellata come fissa.

In questo capitolo si descrive la modellazione di questi fenomeni e il modo in cui sono stati implementati nel modello Simulink.

### 2.1 Posizioni dei punti di contatto sfera-ralla interna

Analogamente a quanto fatto nel modello di deformazione del cuscinetto, anche nel modello di rotazione la ralla interna è modellata come un'ellisse ideale ed è possibile ricavare le coordinate dei punti di contatto con le sfere applicando le formule relative all'ellisse.

Il sistema di riferimento utilizzato per definire le coordinate è lo stesso di quello del modello di deformazione; quindi, ha origine al centro del cuscinetto e assi  $x$  e  $y$  ortogonali all'asse di rotazione del cuscinetto. Tuttavia, a causa della rotazione i semiassi dell'ellisse non coincideranno più con gli assi  $x$ - $y$  e non sarà possibile applicare in modo diretto il calcolo delle coordinate.

Con riferimento alla Figura 2.1, in un generico istante di tempo  $t$  la ralla ha ruotato di un angolo

$$\theta_i = \int_0^t \omega_i \cdot dt$$

Il punto  $P$  di cui si vogliono calcolare le coordinate è descritto dalla posizione angolare  $\theta_P$ . Si definisce la differenza tra la posizione del punto  $P$  e la rotazione della ralla come

$$\varphi_0 = \theta_P - \theta_i$$

A questo punto si utilizza  $\varphi_0$  per andare a calcolare le coordinate  $x_0$  e  $y_0$  del punto  $P_0$  su un'ellisse con semiasse maggiore coincidente all'asse  $x$ :

$$\begin{cases} x_0 = a_i \cdot \cos \varphi_0 \\ y_0 = b_i \cdot \sin \varphi_0 \end{cases}$$

In cui:

- $a_i$  è il semiasse maggiore dell'ellisse calcolato come somma tra il raggio della ralla indeformata  $r_i$  e la deformazione applicata  $w_0$ :

$$a_i = r_i + w_0$$

- $b_i$  è il semiasse minore dell'ellisse calcolato come differenza tra il raggio della ralla indeformata  $r_i$  e la deformazione applicata  $w_0$ :

$$b_i = r_i - w_0$$

Una volta ottenute le coordinate  $(x_0, y_0)$  si calcola l'angolo  $\varphi$  come

$$\varphi = \arctan \frac{y_0}{x_0}$$

È necessario riportare l'angolo calcolato tra 0 e  $2\pi$ . In seguito, si calcolano le coordinate reali del punto  $P$  andando a ruotare il vettore di coordinate  $(x_0, y_0)$  dell'angolo  $\alpha = \theta_p - \varphi$ :

$$\begin{cases} x_i = x_0 \cdot \cos \alpha - y_0 \cdot \sin \alpha \\ y_i = y_0 \cdot \cos \alpha + x_0 \sin \alpha \end{cases}$$

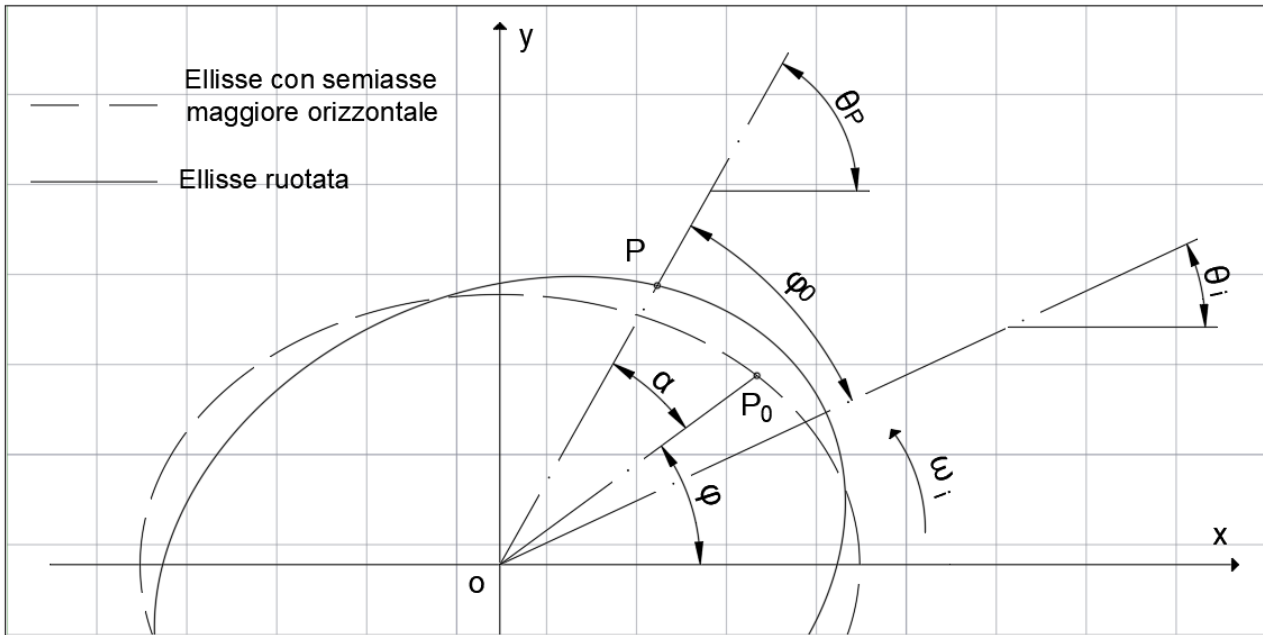


Figura 2.1 Coordinate di un punto sulla ralla interna

Per lo stesso motivo non è possibile calcolare in modo diretto l'angolo normale all'ellisse nel punto  $P$ , ma è necessario calcolarlo prima nel punto di coordinate  $(x_0, y_0)$  e riportarlo tra 0 e  $2\pi$ . Sommando la posizione angolare  $\theta_i$  si ottiene l'angolo corretto  $\alpha_{N,i}$

Eseguendo il calcolo per ogni punto di contatto tra sfera e ralla interna di posizione angolare  $\theta$ , di cui verrà descritto il calcolo nel paragrafo 2.3, si ottengono le coordinate e i relativi angoli normali all'ellisse di tutti i punti di contatto.

Così come fatto per il modello di deformazione, è stato ipotizzato che l'angolo che descrive il centro della sfera coincida con l'angolo del punto di contatto.

## 2.2 Velocità dei punti di contatto sfera-ralla interna

Dopo aver calcolato le posizioni dei punti di contatto tra le sfere e la ralla interna è necessario eseguire il calcolo delle velocità in quei punti. In primo luogo, ipotizzando che ci sia contatto tra la sfera e la ralla interna, la velocità sarà coincidente con quella della ralla stessa. Conoscendo il valore istantaneo della velocità angolare della ralla  $\omega_i$ , essendo l'input del modello, e calcolando il raggio istantaneo del punto tramite le coordinate calcolate in precedenza:

$$r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$$

È possibile calcolare la velocità tangenziale, ossia perpendicolare al raggio  $r_i$ :

$$v_t = r_i \cdot \omega_i$$

A questo punto, conoscendo gli angoli  $\alpha_{N,i}$  e  $\theta_b$  calcolati in precedenza, è possibile scomporre la velocità tangenziale e ottenere la velocità normale al punto considerato:

$$v_n = v_t \cdot \sin(\alpha_{N,i} - \theta_b)$$

Infine, è possibile scomporre la velocità normale nelle componenti lungo gli assi  $x$  e  $y$ :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = v_n \cdot \cos \alpha_{N,i} \\ \dot{y}_i = v_n \cdot \sin \alpha_{N,i} \end{cases}$$

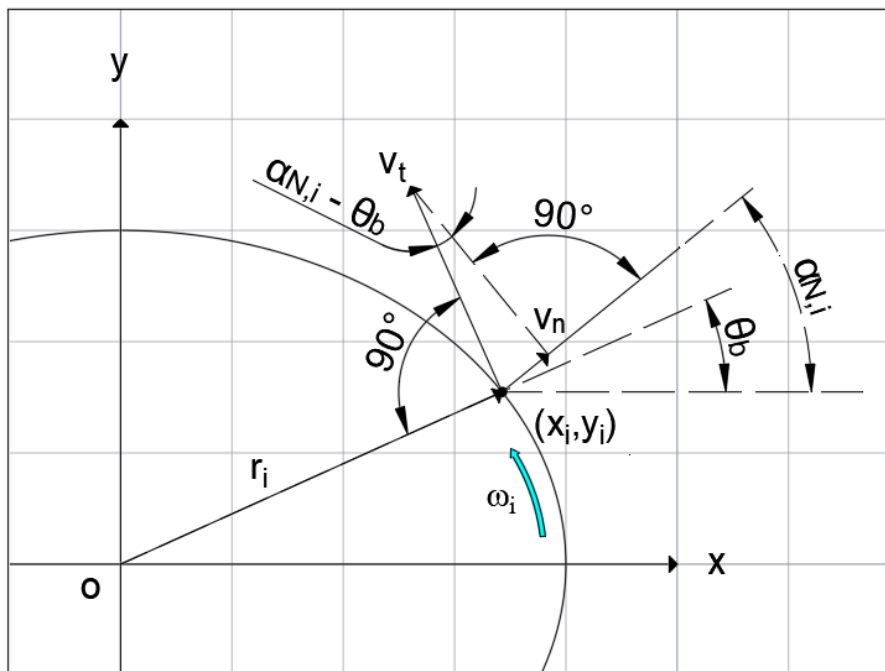


Figura 2.2 Velocità di un punto sulla ralla interna

## 2.3 Forza di contatto della sfera

Il calcolo della forza di contatto che la sfera scambia con le ralle è analogo a quello implementato nel modello di deformazione. Le ipotesi che la sfera sia modellata come un sistema molla-smorzatore e il modulo della forza dato dalla rigidità sia ricavato applicando la teoria del contatto Hertziano restano valide, per cui la forza si calcola allo stesso modo come segue:

$$F_{bk} = k_b \cdot \delta_b^\gamma \cdot h(\delta_i)$$

In cui:

- $k_b$  la rigidità della sfera;
- $\delta_b$  è l'allungamento o accorciamento della sfera rispetto alla condizione indeformata;

- $\gamma$  è un esponente che nel caso di cuscinetto a sfera vale  $\frac{3}{2}$ ;
- $h(\delta_b)$  è una funzione che vale 0 o 1 per escludere lo scambio di forza di trazione sulla sfera nel caso di distacco delle ralle dalla sfera stessa;

Il calcolo dei fattori presenti nella formula è lo stesso descritto nel paragrafo 1.2:

$$\delta_b = \sqrt{(x_e - x_i)^2 + (y_e - y_i)^2} - d_b$$

$$h(\delta_b) = \begin{cases} 1, & \delta_b < 0 \\ 0, & \delta_b \geq 0 \end{cases}$$

Una volta ottenuto il modulo della forza dato dalla rigidezza è possibile scomporlo nelle componenti lungo gli assi  $x$  e  $y$  tramite l'angolo normale all'ellisse:

$$\begin{cases} F_{bk,x} = F_b \cdot \cos \alpha_{N,i} \\ F_{bk,y} = F_b \cdot \sin \alpha_{N,i} \end{cases}$$

Vengono ora calcolate le componenti lungo gli assi  $x$  e  $y$  della forza data dallo smorzamento  $c_b$ :

$$\begin{cases} F_{bc,x} = \max((\dot{x}_i - \dot{x}_e) \cdot c_b; F_{bk,x}) \\ F_{bc,y} = \max((\dot{y}_i - \dot{y}_e) \cdot c_b; F_{bk,y}) \end{cases}$$

Sommando le due componenti di rigidezza e smorzamento si ottiene la forza completa scomposta lungo gli assi  $x$  e  $y$ :

$$\begin{cases} F_{b,x} = F_{bk,x} + F_{bc,x} \\ F_{b,y} = F_{bk,y} + F_{bc,y} \end{cases}$$

Infine, si procede al calcolo del modulo:

$$F_b = \sqrt{F_{b,x}^2 + F_{b,y}^2}$$

## 2.4 Posizione angolare della sfera

Nel modello di rotazione del cuscinetto è stata implementata la dinamica di ogni singola sfera per ricavarne la posizione angolare. Nella Figura 2.3 è riportato il diagramma di corpo libero di una sfera, in cui è possibile vedere che le forze in gioco sono due forze di attrito con le ralle causate dalla velocità relativa nel punto di contatto tra la sfera e la ralla. Inoltre, avendo dotato la sfera di una massa  $M_b$ , si sviluppa una forza di inerzia causata dall'accelerazione  $\ddot{s}$  del baricentro. Questa è applicata nel baricentro della sfera e agente in direzione circonferenziale e ha modulo pari a  $M_b \cdot \ddot{s}$ . Infine, si sviluppa una coppia di inerzia a causa dell'accelerazione angolare della sfera intorno al suo centro di modulo  $I_b \cdot \ddot{\theta}_b$ , in cui  $I_b$  è il momento di inerzia polare della sfera.

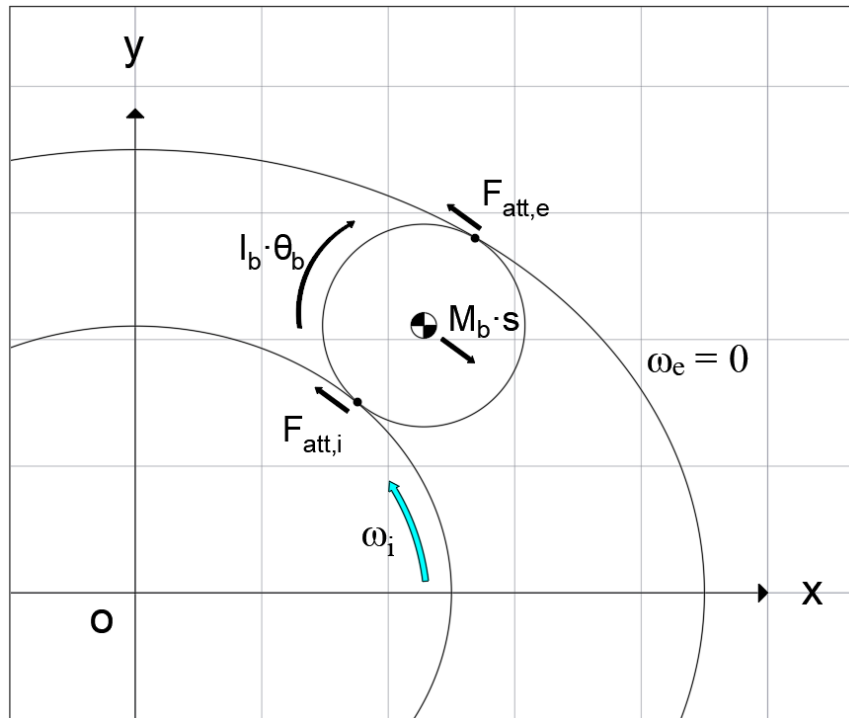


Figura 2.3 Diagramma di corpo libero di una sfera

Per quanto riguarda le forze di attrito, sono state implementate con il modello di attrito Coulombiano. Pertanto, una generica forza di attrito agente tra due corpi in contatto è calcolabile come:

$$F_{att} = \mu \cdot F_N$$

In cui:

- $\mu$  è il coefficiente della forza di attrito. È distinto in coefficiente di attrito statico e dinamico a seconda se è presente o meno velocità relativa tra i corpi;
- $F_N$  è la forza normale alla superficie di contatto dei corpi;

Nel caso della forza di attrito tra sfera e ralla, la forza normale alla superficie di contatto coincide con la forza  $F_b$  descritta nel paragrafo 2.3.

Per quanto riguarda il coefficiente di attrito, sono stati distinti due valori pari a:

- $\mu_s = 0,1$  coefficiente di attrito statico;
- $\mu_d = 0,02$  coefficiente di attrito dinamico;

Per scegliere quale valore del coefficiente utilizzare bisogna calcolare la velocità relativa tra sfera e ralle. La ralla esterna è modellata come fissa, per cui la velocità relativa coincide la velocità del punto di contatto della sfera con la ralla esterna, il cui calcolo verrà descritto nel dettaglio di seguito:

$$v_{rel,e} = v_{b,e}$$

Per la ralla interna bisogna sottrarre alla velocità della ralla nel punto di contatto la velocità della sfera:

$$v_{rel,i} = \omega_i \cdot r_i - v_{b,i}$$

In cui:

- $\omega_i$  è la velocità angolare della ralla interna data come input al sistema;
- $r_i$  è il raggio della ralla interna nel punto di contatto. Essendo la ralla ellittica bisogna calcolarlo per ogni punto come:

$$r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$$

- $v_{b,i}$  è la velocità del punto di contatto della sfera con la ralla interna, il calcolo verrà descritto nel dettaglio di seguito;

Una volta ottenute le velocità relative si procede a calcolare i due coefficienti di attrito per i punti di contatto della sfera con le ralle. In entrambi i casi si procede come descritto in [2]:

$$\mu(v_{rel}) = \begin{cases} -sign(v_{rel}) \cdot \mu_d, & |v_{rel}| > v_d \\ -sign(v_{rel}) \cdot [\mu_d + m_{att} \cdot (|v_{rel}| - v_s)], & v_s < |v_{rel}| \leq v_d \\ -sign(v_{rel}) \cdot \mu_s, & |v_{rel}| < v_s \end{cases}$$

In cui:

- $v_d$  è la velocità oltre la quale il coefficiente di attrito assume il valore del coefficiente di attrito dinamico. Il suo valore è  $v_d = 1000 \text{ mm/s}$ ;
- $v_s$  è la velocità al di sotto della quale il coefficiente di attrito assume il valore del coefficiente di attrito statico. Il suo valore è  $v_s = 100 \text{ mm/s}$ ;

La funzione  $sign(v_{rel})$  è la funzione segno e assume i seguenti valori:

$$sign(v_{rel}) = \begin{cases} -1, & v_{rel} < 0 \\ 0, & v_{rel} = 0 \\ 1, & v_{rel} > 0 \end{cases}$$

La sua funzione è assegnare a  $\mu$  il segno opposto di quello della velocità. Infatti, essendo la forza di contatto della sfera sempre positiva per come è implementato il calcolo, la forza sarà sempre diretta in modo opposto alla velocità relativa.

Per valori intermedi di velocità relative si procede interpolando linearmente il valore della velocità con quello dell'attrito. Come si osserva in Figura 2.4, è possibile calcolare un generico coefficiente d'attrito  $\mu$  avendo una generica velocità  $|v_{rel}|$  in input tramite l'equazione della retta:

$$\mu = \mu_d + m_{att} \cdot (|v_{rel}| - v_s)$$

In cui:

$$m_{att} = \frac{\Delta\mu}{\Delta v} = \frac{\mu_s - \mu_d}{v_s - v_d}$$

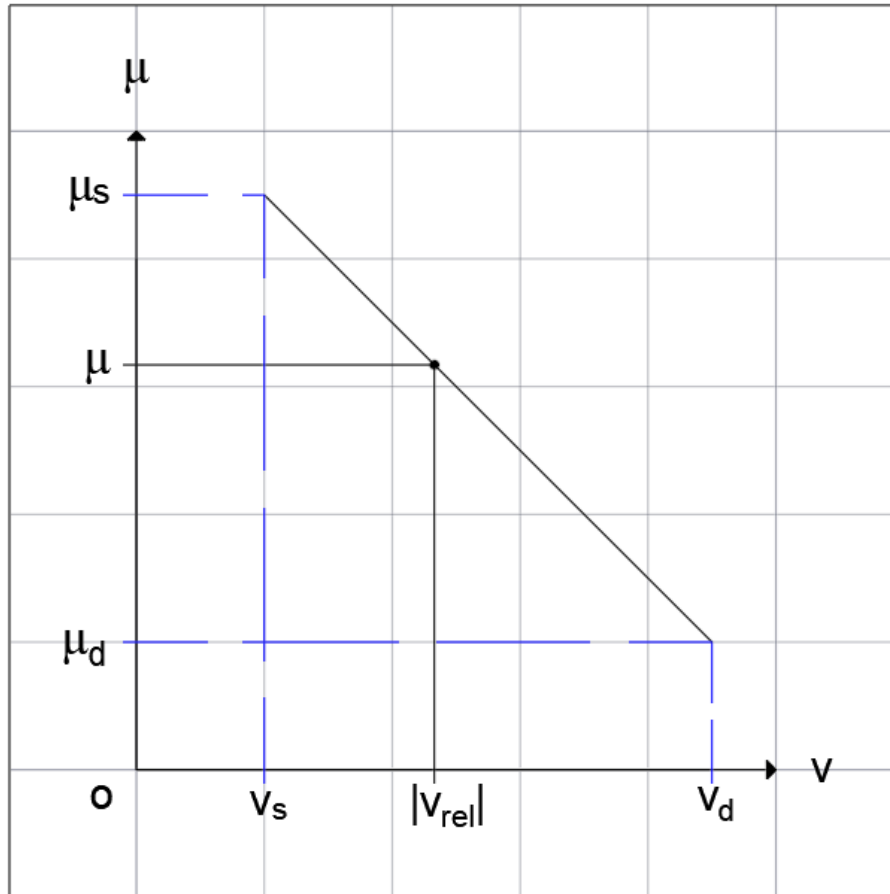


Figura 2.4 Interpolazione lineare del coefficiente d'attrito

Una volta ottenuti entrambi i coefficienti di attrito è sufficiente andare a moltiplicarli per la forza di contatto per ottenere i moduli delle due forze di attrito. Le direzioni sono sempre perpendicolari alla forza di contatto, quindi in direzione circonferenziale.

Per valutare la posizione angolare del centro della sfera è implementato l'equilibrio alla traslazione in direzione circonferenziale. In riferimento al diagramma di corpo libero descritto in precedenza si ottiene:

$$M_b \cdot \ddot{s} = F_b \cdot \mu_i + F_b \cdot \mu_e = F_{att,i} + F_{att,e}$$

In cui  $\ddot{s}$  è l'accelerazione in direzione circonferenziale del centro della sfera. Andandola ad integrare una volta si ottiene la velocità in direzione circonferenziale del centro della sfera. Dividendo ora per la distanza del centro della sfera dall'origine degli assi si ottiene la velocità di rotazione della sfera intorno al centro del cuscinetto:

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{s}}{r_{cs}}$$

La distanza delle sfere dall'origine degli assi non è costante durante la rotazione, per cui bisogna calcolarla per ogni sfera a partire dalle coordinate dei punti di contatto con le ralle. Ipotizzato che la deformazione della sfera sia ripartita in modo analogo tra i due punti di contatto si ottiene:

$$r_{cs} = \sqrt{\left(\frac{x_e + x_i}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_e + y_i}{2}\right)^2}$$

In seguito, integrando la velocità di rotazione si ottiene la posizione angolare rispetto al centro del cuscinetto.

Oltre all'equazione di equilibrio alla traslazione è necessario implementare l'equilibrio alla rotazione della sfera intorno al proprio centro per ricavare le velocità dei punti di contatto con le ralle. Dal diagramma di corpo libero si ottiene:

$$I_b \cdot \ddot{\theta}_b = (F_{att,e} - F_{att,i}) \cdot r_b$$

In cui  $\ddot{\theta}_b$  è l'accelerazione angolare della sfera intorno al proprio centro. Integrandola una volta si ottiene la velocità di rotazione della sfera intorno al proprio centro. Ipotizzando che il raggio della sfera sia uguale al raggio in condizioni indeformate, si calcola la velocità dei punti di contatto rispetto al centro della sfera andando a moltiplicare la velocità di rotazione per il raggio:

$$v_{cont,cs} = \dot{\theta}_b \cdot r_b$$

È ora possibile andare a calcolare le velocità assolute dei punti di contatto rispetto al centro del cuscinetto andando a sommare e sottrarre la velocità del centro della sfera  $\dot{s}$  per il punto di contatto interno ed esterno rispettivamente:

$$\begin{cases} v_{b,i} = v_{cont,cs} + \dot{s} \\ v_{b,e} = v_{cont,cs} - \dot{s} \end{cases}$$

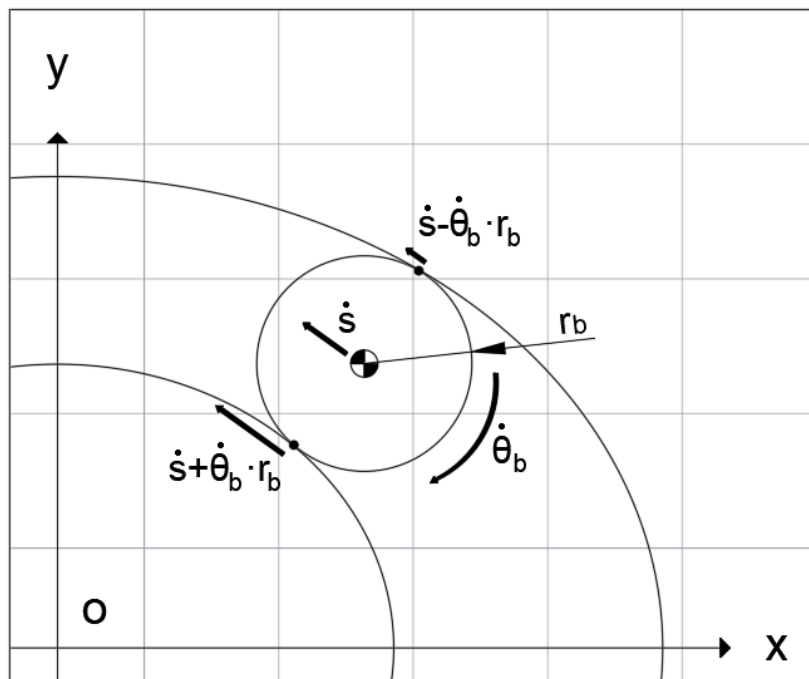


Figura 2.5 Velocità assolute di una sfera

## 2.5 Forze e coordinate della ralla esterna

Per quanto riguarda le forze scambiate tra i segmenti adiacenti della ralla esterna, il calcolo delle coordinate dei punti di contatto con la sfera e la deformazione della ralla, l'implementazione è analoga rispetto al modello di deformazione del cuscinetto.

Infatti, l'interazione tra due settori adiacenti di ralla è implementata anche in questo caso come un sistema molla-smorzatore che scambia una forza diretta lungo la congiungente dei due punti di



contatto. Le deformazioni sono calcolate a partire dalla condizione indeformata del cuscinetto, ossia la forma circolare. Una volta calcolati i moduli delle forze vengono scomposti lungo gli assi  $x - y$ . I calcoli sono riportati nel dettaglio nel paragrafo 1.4.

Per il calcolo dei punti di contatto tra la sfera e la ralla esterna sono implementate le stesse equazioni di equilibrio dinamico descritte nel paragrafo 1.5, ossia due equazioni di equilibrio alla traslazione lungo gli assi  $x$  e  $y$ . Considerando le componenti delle forze descritte finora, si ricavano le accelerazioni dei punti. Integrando una volta si ottengono le velocità dei punti di contatto. Le condizioni iniziali dell'integrazione sono nulle, in quanto le sfere sono ferme nell'istante iniziale della simulazione.

Integrando le velocità si ottengono le posizioni dei punti di contatto. In questo caso, le condizioni iniziali sono le posizioni dei punti di contatto dopo la deformazione e sono ricavate dal modello di deformazione del cuscinetto.

Per le coordinate dei punti della ralla esterna compresi tra due punti di contatto, il calcolo è analogo a quanto fatto per il modello di deformazione e descritto nel paragrafo 1.6. Si tratta, quindi, di implementare la media pesata nei punti di discretizzazione tra due punti di contatto adiacenti per andare a ricavare il raggio in quei punti. In seguito, conoscendone la posizione angolare, ricavarne le coordinate.

## 3 Inserimento del modello del cuscinetto in quello del riduttore completo

Dopo aver modellato in modo indipendente la rotazione del cuscinetto, questa è stata inserita nel modello di rotazione del riduttore armonico. Si è andata a sostituire la vecchia implementazione del wave generator, fornendo al modello un ulteriore grado di dettaglio. Di seguito vengono riportate le modifiche effettuate al modello del cuscinetto per renderlo compatibile al modello completo.

In primo luogo, i punti di cui sono state calcolate le coordinate con la deformazione della ralla (paragrafo 2.4) sono posizionati sulla pista esterna, quindi a contatto con le sfere. I punti di interesse nel modello completo sono quelli all'interfaccia wave generator-flexspline, per cui è stato sommato lo spessore della ralla nel calcolo dei raggi dei punti di contatto, ipotizzando la ralla rigida, per ottenere la deformazione della superficie esterna della ralla di coordinate  $(x_{WG}, y_{WG})$ .

### 3.1 Equilibrio dei punti di contatto sfera-ralla esterna

Il cuscinetto è inserito all'interno della flexspline, per cui nascono delle forze scambiate all'interfaccia wave generator-flexspline che si oppongono alla deformazione del cuscinetto stesso. Il calcolo di queste forze, descritto nel dettaglio in [3], viene implementato tramite un sistema molla-smorzatore in corrispondenza di ogni dente della flexspline:

$$F_{WG-FSi} = K_{WG-FSi} \cdot [(x_{WG} - x_i) \cdot \cos(\alpha_{Ni}) + (y_{WG} - y_i) \cdot \sin(\alpha_{Ni})] + c_{WG-FSi} \cdot [(\dot{x}_{WG} - \dot{x}_i) \cdot \cos(\alpha_{Ni}) + (\dot{y}_{WG} - \dot{y}_i) \cdot \sin(\alpha_{Ni})]$$

In cui:

- $K_{WG-FSi}$  è la rigidezza dell'*i*-esimo dente;
- $c_{WG-FSi}$  è lo smorzamento dell'*i*-esimo dente;
- $x_i$  è l'ascissa dell'*i*-esimo punto della flexspline;
- $y_i$  è l'ordinata dell'*i*-esimo punto della flexspline;
- $x_{WG}$  è l'ascissa dell'*i*-esimo punto del wave generator;
- $y_{WG}$  è l'ordinata dell'*i*-esimo punto del wave generator;
- $\alpha_{Ni}$  è l'angolo normale alla superficie di contatto tra il wave generator e la flexspline;

Essendo presente un numero di denti pari a  $Z_{FS} = 200$ , ci sono altrettante forze scomposte nelle componenti lungo gli assi  $x$  e  $y$ , con un totale di due vettori di 200 elementi l'uno:

$$\begin{cases} F_{WG-FSi,x} = F_{WG-FSi} \cdot \cos(\alpha_{Ni}) \\ F_{WG-FSi,y} = F_{WG-FSi} \cdot \sin(\alpha_{Ni}) \end{cases}$$

La posizione angolare dei denti, e quindi del punto di applicazione delle forze, è descritto dal vettore

$$\psi = \arctan\left(\frac{y_i}{x_i}\right)$$

Per considerare l'interazione tra wave generator e flexspline è necessario inserire le forze appena descritte all'interno delle equazioni di equilibrio alla traslazione del punto di contatto tra sfera e ralla esterna. Tuttavia, essendoci solo nove sfere, bisogna ripartire le forze tra i diversi punti di contatto. A

tal fine, è stato ipotizzato che la forza grava su un punto se ricade all'interno del settore formato dai punti intermedi tra il punto di contatto stesso e i due punti adiacenti:

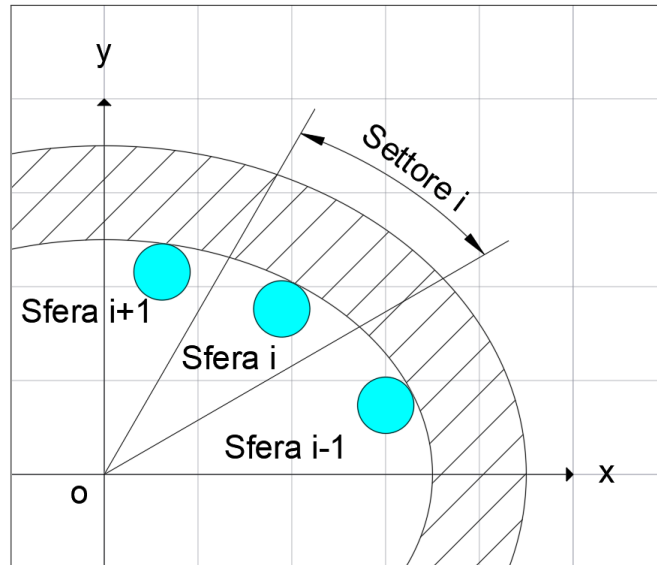


Figura 3.1 Settore di applicazione delle forze della flexspline

Dopo aver verificato su quale settore va ad agire ogni forza, sono implementate due sommatorie per ogni punto di contatto, una per le componenti lungo  $x$  e una per quelle lungo  $y$ . In questo modo si sommano algebricamente le componenti delle forze agenti sullo stesso punto di contatto. È ora possibile inserire la sommatoria all'interno delle equazioni di equilibrio alla traslazione, con riferimento al nuovo diagramma di corpo libero della ralla esterna:

$$m_i \cdot \ddot{x}_{e,i} = F_{b,x} + F_{i+1,x} + F_{i-1,x} - \Sigma F_{WG-FSi,x}$$

$$m_i \cdot \ddot{y}_{e,i} = F_{b,y} + F_{i+1,y} + F_{i-1,y} - \Sigma F_{WG-FSi,y}$$

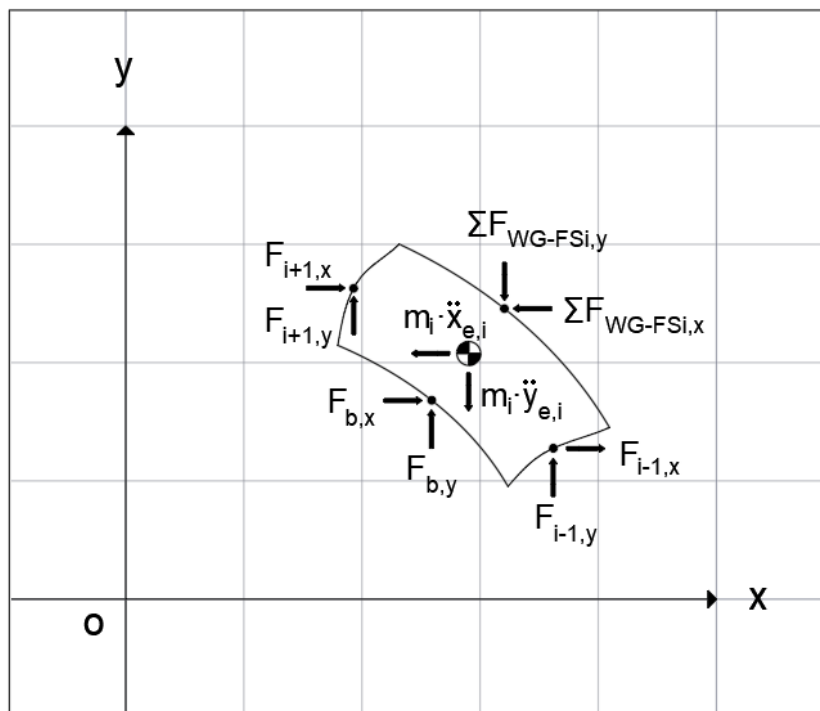


Figura 3.2 Diagramma di corpo libero di un segmento di ralla esterna con flexspline

## 3.2 Deformazione della ralla esterna

Le forze scambiate tra wave-generator e flexspline, oltre a influenzare le equazioni di equilibrio descritte nel paragrafo 3.1, influiscono anche sulla deformazione della ralla tra due punti di contatto. Per tenere conto di questo fenomeno è applicato il principio di sovrapposizione degli effetti tra il calcolo dei raggi come media pesata rispetto agli estremi nei punti di contatto (paragrafo 2.4) e la deformazione di una trave incastrata agli estremi e soggetta a carico distribuito  $q$ . Nel caso di studio della ralla esterna, gli incastrati coincidono con i punti di contatto sfera-ralla, mentre il carico distribuito è ottenuto andando a dividere la sommatoria delle forze provenienti dalla flexspline che agiscono nel settore delimitato tra due punti di contatto e la lunghezza del settore stesso. Il calcolo della sommatoria delle forze è analogo a quello descritto nel capitolo precedente, con la differenza che in questo caso i settori sono delimitati dai punti di contatto stessi e non dai punti intermedi. Inoltre, la sommatoria è eseguita sul modulo della forza, e non sulle componenti lungo gli assi, perché questa è sempre diretta perpendicolarmente alla ralla.

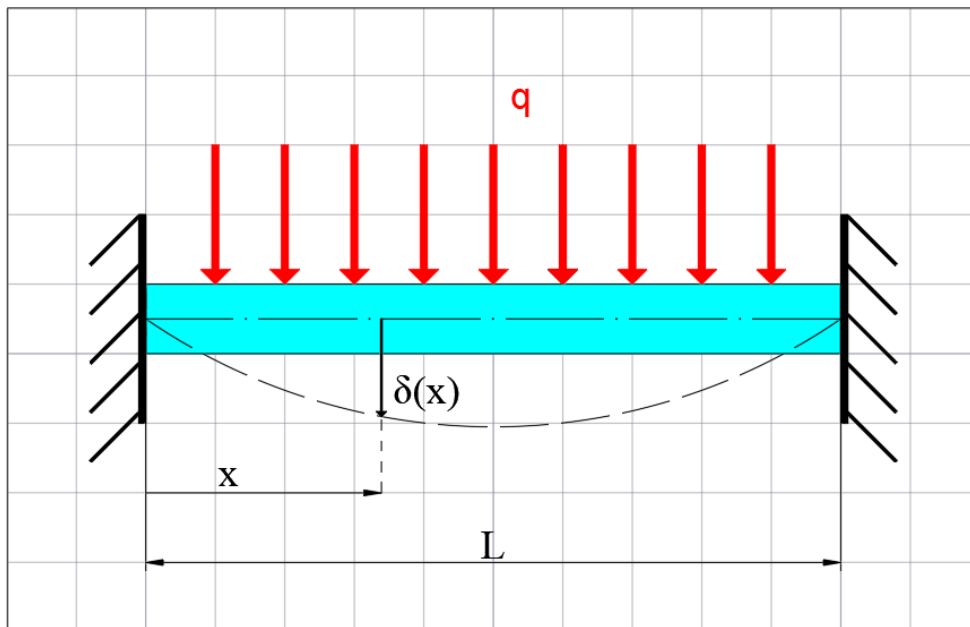


Figura 3.3 Trave incastrata soggetta a carico distribuito  $q$

Applicando la teoria della trave e facendo riferimento alla Figura 3.3, in generale si può scrivere la freccia della trave come ([4]):

$$\delta(x) = \frac{q \cdot x^2}{24 \cdot E \cdot I} \cdot (L - x)^2, \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

In cui:

- $x$  è la distanza del punto di cui si vuole calcolare la freccia dall'incastrato più vicino;
- $E$  è il modulo elastico del materiale;
- $I$  è il momento di inerzia della sezione;
- $L$  è la lunghezza della trave

Nel caso di studio il materiale utilizzato è acciaio, per cui il modulo elastico è pari a:

$$E = 210 \text{ GPa}$$

Per quanto riguarda il momento d'inerzia, è stata adottata l'ipotesi semplificativa che la sezione della trave sia rettangolare con base di lunghezza pari al diametro della sfera e altezza pari allo spessore della ralla esterna. Si ottiene così il momento d'inerzia pari a:

$$I = \frac{d_b \cdot s_e^3}{12}$$

La lunghezza della trave e la posizione del punto sono dati di input angolari. Infatti, si hanno a disposizione la posizione angolare  $\psi$  in cui calcolare la freccia e gli angoli dei punti di contatto sfera-ralla, da cui si ottiene la lunghezza angolare del settore di ralla come:

$$\Delta\theta = \theta_{fin} - \theta_{in}$$

È necessario eseguire dei controlli sia su  $\psi$  che su  $\theta_{fin}$  a causa del salto tra  $2\pi$  e  $0$  in corrispondenza dell'asse  $x$ . Per quanto riguarda  $\theta_{fin}$ , nel caso in cui questo sia minore di  $\theta_{in}$ , bisogna sommarli  $2\pi$ . Per il controllo su  $\psi$ , nel caso si verifichi la condizione appena descritta e contemporaneamente sia  $\psi$  minore di  $\theta_{fin}$  prima di avergli sommato  $2\pi$ , allora bisogna sommare  $2\pi$  anche a  $\psi$ .

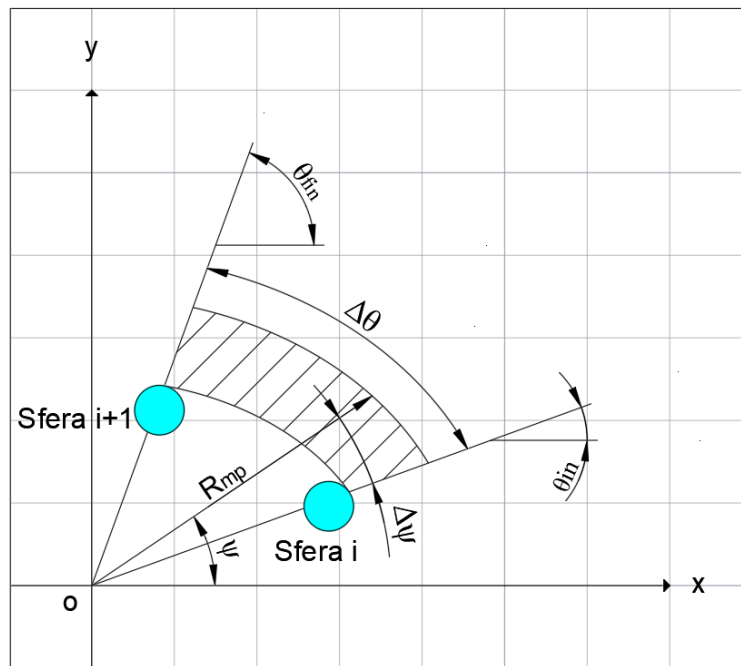


Figura 3.4 Settore di deformazione della ralla esterna

Dopo aver eseguito i controlli necessari, si possono riscrivere alcuni termini presenti nel calcolo della freccia utilizzando le posizioni angolari ricevute in input e il raggio del punto di posizione angolare  $\psi$  calcolato utilizzando la media pesata dei raggi dei punti di contatto  $R_{mp}(\psi)$  (paragrafo 2.4). Per non appesantire la trattazione questo viene riportato solo come  $R_{mp}$  senza dipendenza da  $\psi$ . In particolare, si può scrivere:

$$L = \Delta\theta \cdot R_{mp}$$

$$q = \frac{\Sigma F_{WG-FSi}}{L} = \frac{\Sigma F_{WG-FSi}}{\Delta\theta \cdot R_{mp}}$$

$$x = \min(\theta_{fin} - \psi, \psi - \theta_{in}) \cdot R_{mp} = \Delta\psi \cdot R_{mp}$$

In questo modo si calcola la distanza angolare rispetto all'incastro più vicino. Riscrivendo la formula si ottiene:

$$\delta(\psi) = \frac{\left(\frac{\sum F_{WG-FSi}}{\Delta\theta \cdot R_{mp}}\right) \cdot (\Delta\psi \cdot R_{mp})^2}{24 \cdot E \cdot I} \cdot (\Delta\theta \cdot R_{mp} - \Delta\psi \cdot R_{mp})^2$$

Semplificando:

$$\delta(\psi) = \frac{\left(\frac{\sum F_{WG-FSi}}{\Delta\theta}\right) \cdot \Delta\psi^2}{24 \cdot E \cdot I} \cdot (\Delta\theta - \Delta\psi)^2 \cdot R_{mp}^3$$

La forza proveniente dalla flexspline è sempre positiva, in quanto nel caso di compressione tra wave generator e flexspline si ottiene una forza di modulo positivo. Il caso di allontanamento dei due componenti è modellato con il distacco dei due, quindi una forza pari a zero, e non la generazione di forze di trazione. La stessa modellazione è implementata nel calcolo della forza di contatto tra sfera e ralle, ed è descritta nel dettaglio nel paragrafo 1.2.

Ciò comporta che la freccia sia sempre positiva, per cui si calcola il raggio alla posizione angolare  $\psi$  ottenuto dalla sovrapposizione degli effetti come:

$$R(\psi) = R_{mp}(\psi) - \delta(\psi)$$

È ora possibile calcolare le coordinate del punto del wave generator di posizione angolare  $\psi$  all'interfaccia con la flexspline come segue:

$$\begin{cases} x_{WG}(\psi) = R(\psi) \cdot \cos(\psi) \\ y_{WG}(\psi) = R(\psi) \cdot \sin(\psi) \end{cases}$$

## 4 Risultati della simulazione di deformazione del cuscinetto

Il modello di deformazione del cuscinetto è stato sviluppato in ambiente Matlab/Simulink e implementa le equazioni descritte nel capitolo 1. L'obiettivo del modello è simulare la deformazione del cuscinetto da una forma inizialmente circolare ad una ellittica. L'input del modello è la deformazione stessa, implementata da una rampa saturata al valore massimo  $w_0$ . L'output principale è dato dai due vettori contenenti le coordinate lungo  $x$  e lungo  $y$  dei punti di contatto tra sfera e ralla esterna. Sono presenti altri output, sia di coordinate di ulteriori punti notevoli che delle forze scambiate tra i componenti, i quali saranno presentati nei paragrafi successivi.

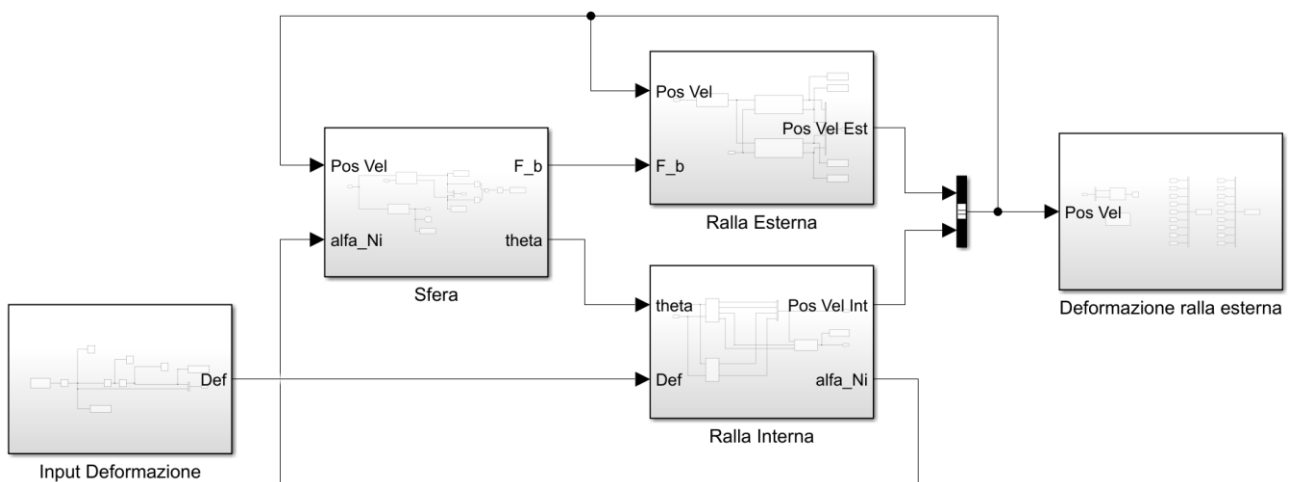


Figura 4.1 Modello in ambiente Matlab/Simulink per la deformazione del cuscinetto

Essendo il modello in una fase di sviluppo iniziale, i valori utilizzati per i parametri, in particolare le rigidzze e gli smorzamenti, non rappresentano quelli del cuscinetto reale. Per questo motivo, i risultati non sono accurati dal punto di vista quantitativo, tuttavia i loro andamenti possono essere considerati corretti.

Il modello è costituito da quattro blocchi principali:

- **Ralla Interna:** riceve in input la deformazione e la posizione angolare dei centri delle sfere e restituisce in output le coordinate dei punti di contatto tra sfera e ralla interna e i relativi angoli normali all'ellisse. Implementa le equazioni descritte nel paragrafo 1.1;
- **Sfera:** riceve in input le coordinate dei punti di contatto della sfera con le ralle e i relativi angoli normali all'ellisse. Restituisce in output le posizioni angolari dei centri delle sfere e le forze di contatto tra le sfere e le ralle. Implementa le equazioni descritte nei paragrafi 1.2 e 1.3;
- **Ralla esterna:** riceve in input le forze di contatto tra le sfere e le ralle e restituisce in output le coordinate dei punti di contatto tra sfera e ralla esterna. Implementa le equazioni descritte nei paragrafi 1.4 e 1.5;
- **Deformazione ralla esterna:** riceve in input le coordinate dei punti di contatto della sfera con le ralle calcola la deformazione della ralla esterna. L'output non è utilizzato nei restanti blocchi

del modello, ma solamente salvato nel Workspace di Matlab. Implementa le equazioni descritte nel paragrafo 1.6;

I parametri di simulazione impostati sono i seguenti:

- tempo di simulazione: 0.015 s;
- solver: ode45;
- max step size:  $1 \cdot 10^{-5}$  s;

Nella realtà la deformazione del cuscinetto avviene quasi istantaneamente, per cui è stata utilizzata una rampa per l'input di deformazione con pendenza, ossia velocità di deformazione, elevata. Il tempo totale di simulazione è pari a circa tre volte il tempo necessario ad ottenere la forma ellittica finale. Essendo la deformazione piccola, anche il tempo di simulazione risulta ridotto, e di conseguenza è opportuno utilizzare un passo di integrazione ristretto.

La Tabella 4.1 riporta i valori dei parametri utilizzati nel modello. La simulazione è stata effettuata con processore AMD® Ryzen™ 5 5600H @3.30 GHz e memoria RAM di 16 Gb di velocità 3200 MHz con un tempo di simulazione di circa un minuto.

Tabella 4.1 Parametri utilizzati nella simulazione di deformazione del cuscinetto

| Parametro    | Descrizione  | Valore                 |
|--------------|--|------------------------|
| $m_{e, tot}$ | Massa della ralla esterna  | 1 kg                   |
| $K_b$        | Rigidezza delle sfere  | $1,89 \cdot 10^8$ N/m  |
| $c_b$        | Smorzamento delle sfere  | 0,01 Ns/m              |
| $K_{ralla}$  | Rigidezza dei settori adiacenti di ralla                         | $5 \cdot 10^9$ N/m     |
| $c_{ralla}$  | Smorzamento dei settori adiacenti di ralla                       | $1 \cdot 10^{-2}$ Ns/m |
| N            | Numero di punti di discretizzazione dei settori di ralla esterna | 40                     |

## 4.1 Deformazione dei punti di contatto

Uno degli obiettivi del modello di deformazione del cuscinetto è ottenere le coordinate dei punti di contatto tra le sfere e la ralla esterna, dopo aver deformato completamente la ralla interna, in modo da poterle utilizzare come condizioni iniziali nel modello di rotazione del cuscinetto.

I risultati della deformazione sono riportati in Figura 4.2 e Figura 4.3, in cui sono presenti solo i punti di contatto uniti da un segmento e i centri delle sfere. In primo luogo, si può verificare che i punti di contatto tra sfera e ralle si trovino effettivamente lungo due ellissi, ricavati matematicamente in ambiente Matlab dopo la simulazione, di semiassi pari a

$$\begin{cases} a_i = \frac{d_i}{2} + w_0 \\ b_i = \frac{d_i}{2} - w_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_e = \frac{d_e}{2} + w_0 \\ b_e = \frac{d_e}{2} - w_0 \end{cases}$$



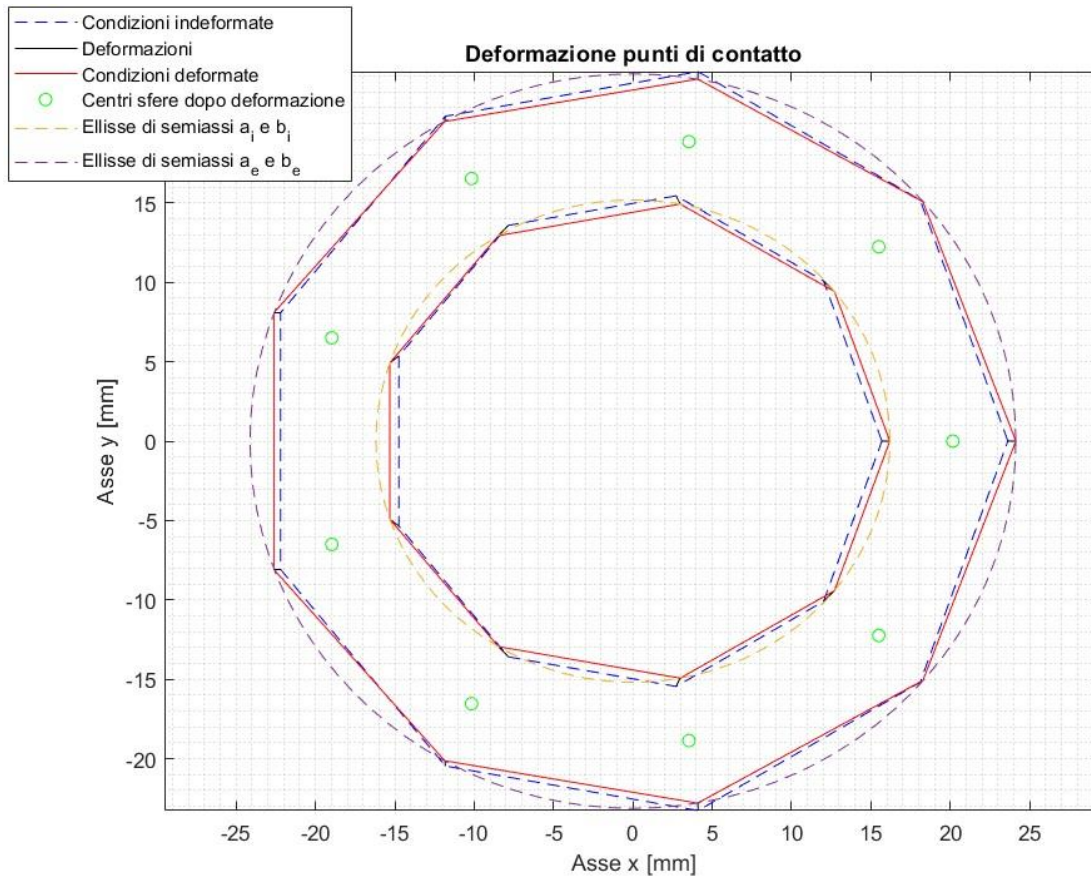


Figura 4.2 Deformazione dei punti di contatto sfera-ralle

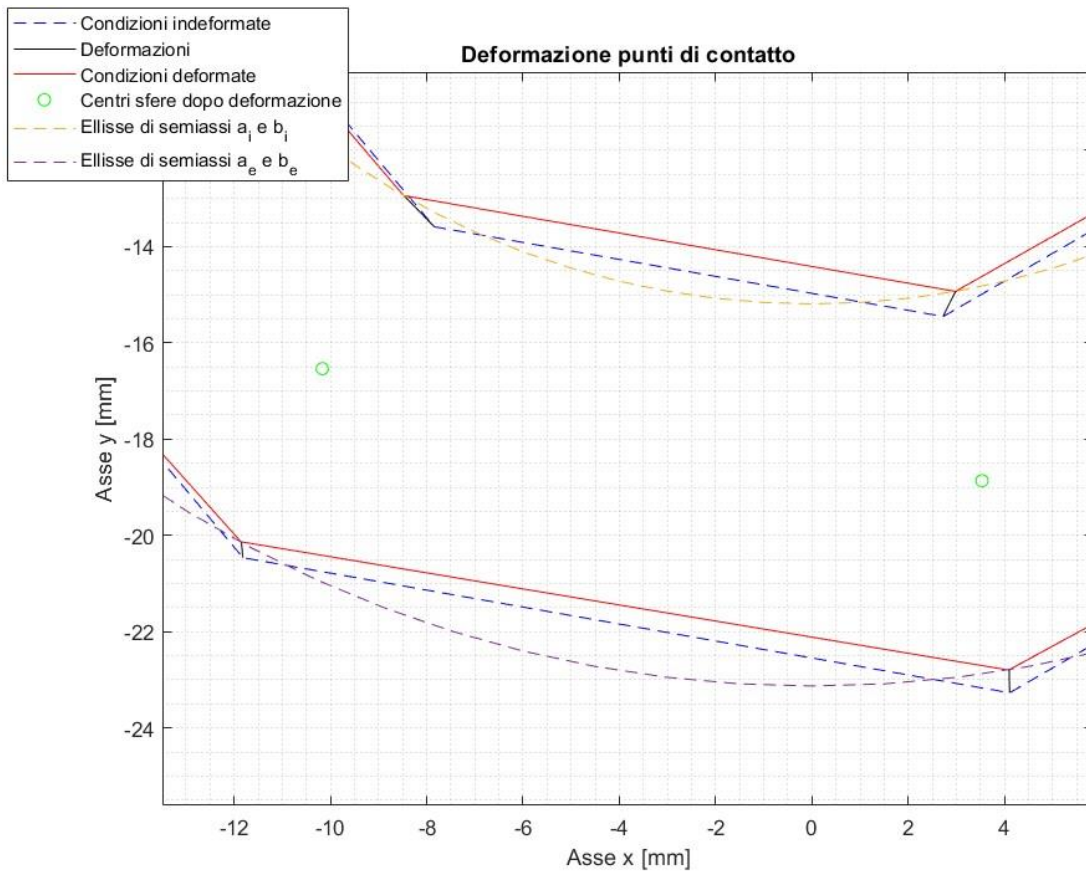


Figura 4.3 Dettaglio di deformazione dei punti di contatto sfera-ralle

Inoltre, la posizione dei punti di contatto tra le sfere e la ralla esterna è coerente rispetto a quelli con la ralla interna. Infatti, quando i punti sulla ralla interna sono esterni rispetto alla condizione indeformata, lo sono anche quelli sulla ralla esterna, e viceversa. I centri delle sfere si spostano di conseguenza, essendo ricavati cinematicamente come punto medio tra i due punti di contatto.

Andando a plottare nel dettaglio le ascisse e le ordinate dei punti di contatto tra le sfere e la ralla esterna si nota in primo luogo che la deformazione della ralla interna, nei primi cinque millisecondi circa, genera un andamento delle coordinate simile a quello della deformazione. La pendenza e l'ampiezza dello spostamento dipendono dalla posizione della singola sfera rispetto agli assi  $x$ - $y$ . Inoltre, sia nella fase di deformazione che in quella successiva si nota un'oscillazione delle coordinate dovuta alle numerose ed elevate rigidzze modellate nel sistema, limitata dalla presenza degli smorzamenti. Andando a guardare la scala dei diagrammi, si nota che sono oscillazioni piccole rispetto alle dimensioni di cuscinetto.

Una visione più chiara degli spostamenti dei punti di contatto si ha andando a plottare la loro posizione angolare. Indipendentemente dalla posizione della sfera rispetto agli assi, si nota una netta distinzione tra la fase di deformazione, in cui si ha uno spostamento massimo di circa  $0,5^\circ$ , e le successive oscillazioni del sistema di ampiezza minore. Fa eccezione la prima sfera, in quanto, trovandosi sull'asse  $x$ , subisce la deformazione prevalentemente lungo questo asse generando una variazione della posizione angolare circa nulla.

### Ascissa dei punti di contatto sfera-ralla esterna

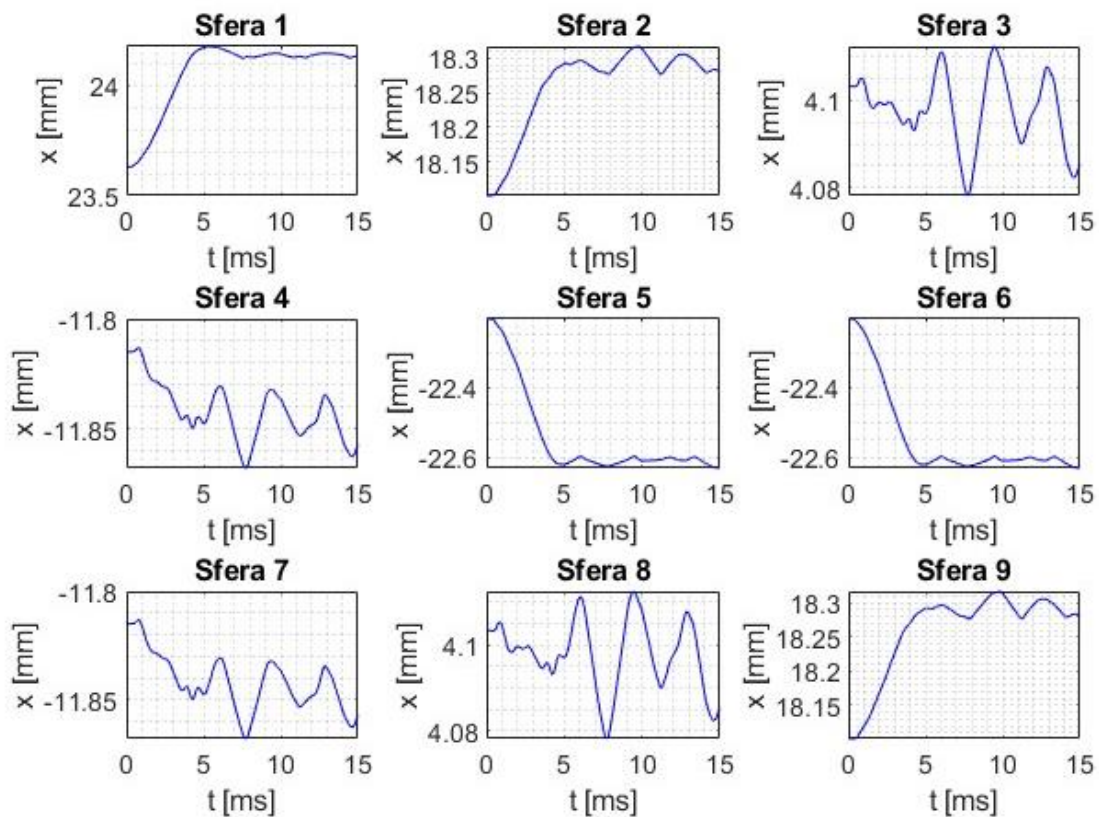


Figura 4.4 Ascissa dei punti di contatto sfera-ralla esterna

### Ordinata dei punti di contatto sfera-ralla esterna

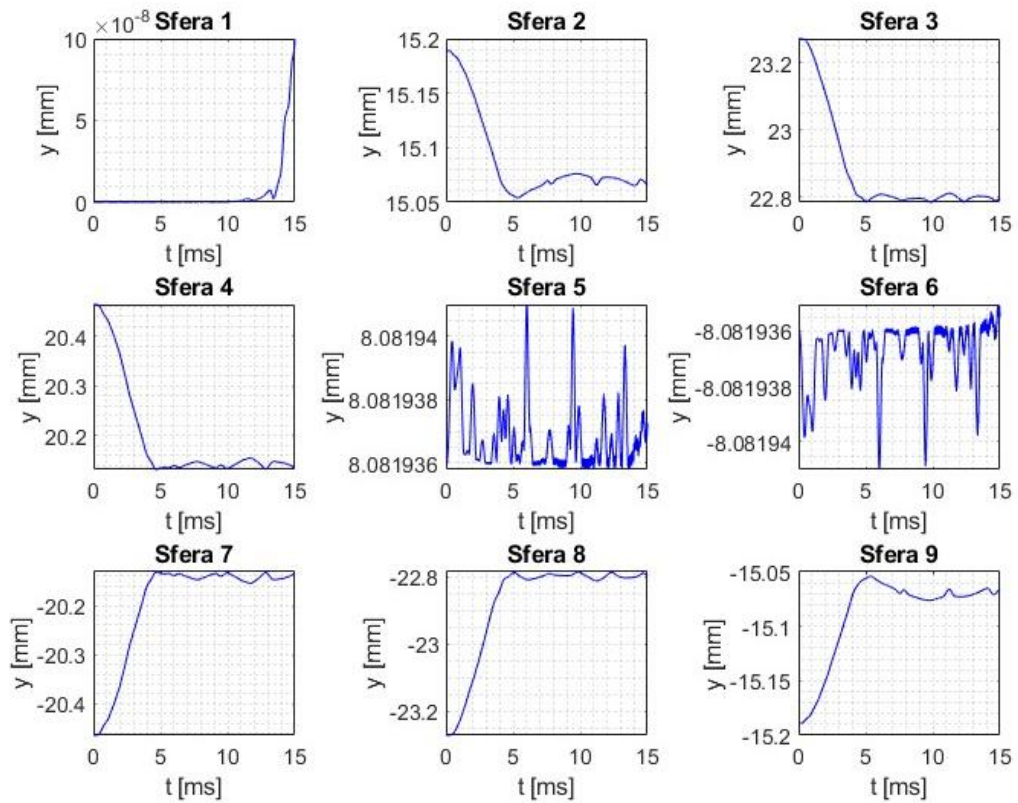


Figura 4.5 Ascissa dei punti di contatto sfera-ralla esterna

### Posizione angolare dei punti di contatto sfera-ralla esterna

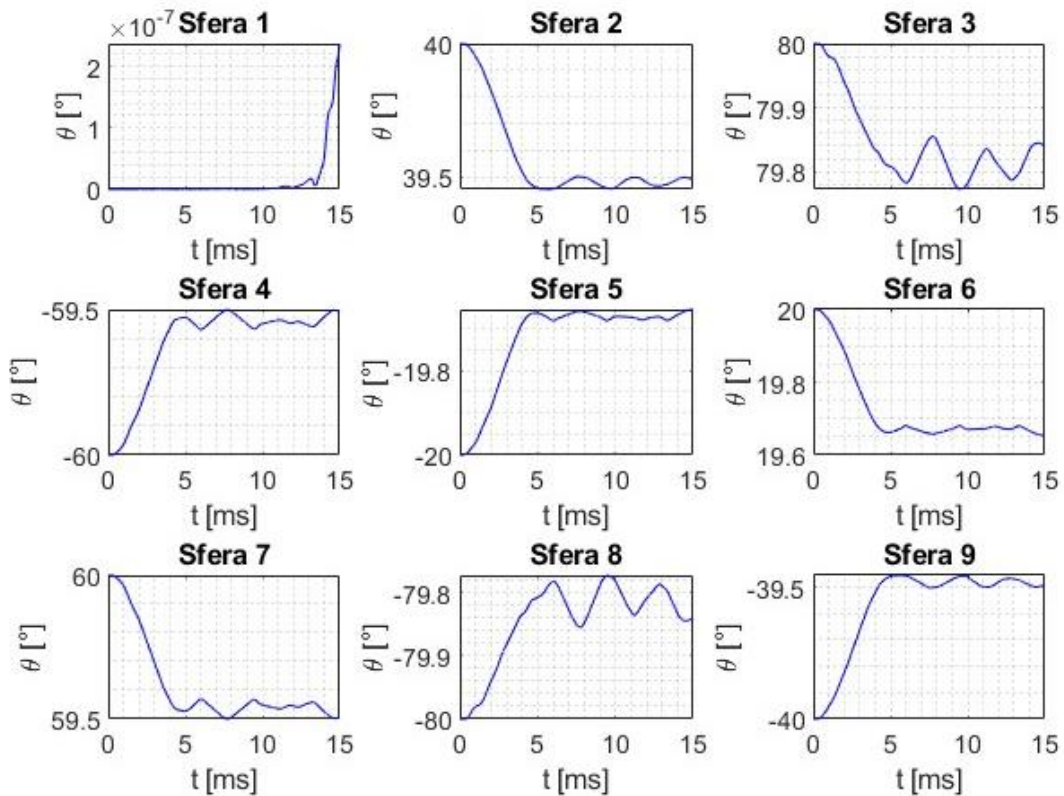


Figura 4.6 Posizione angolare dei punti di contatto sfera-ralla esterna

Inoltre, è possibile verificare che la deformazione del cuscinetto è simmetrica osservando gli andamenti delle coppie di sfere simmetriche rispetto all'asse  $x$ , quindi le coppie 2-9, 3-8 ecc. Di seguito sono riportati i moduli delle posizioni angolari delle sfere simmetriche, evidenziando andamenti sovrapposti per tutte le coppie di sfere.

### Andamenti di sfere simmetriche

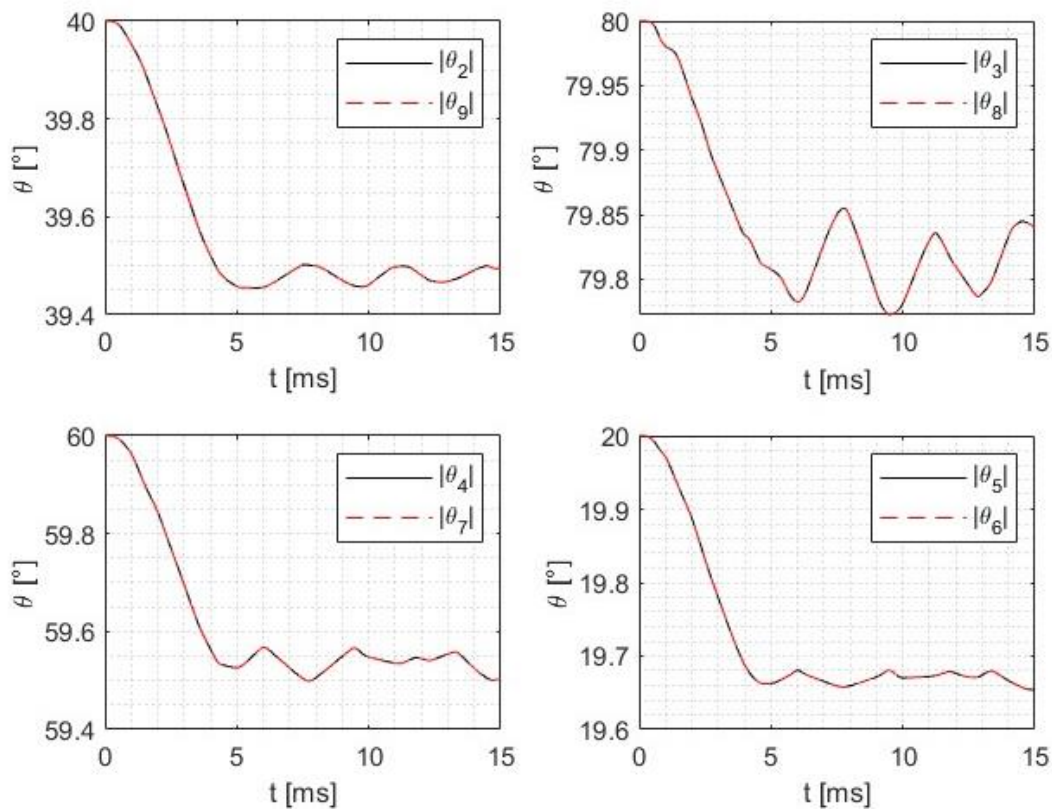


Figura 4.7 Andamenti di sfere simmetriche

## 4.2 Deformazione della ralla esterna

In questo paragrafo vengono riportati i risultati della simulazione per quanto riguarda la deformazione della ralla esterna del cuscinetto. Come spiegato nel dettaglio nel paragrafo 1.6, i dati di input necessari sono le coordinate dei punti di contatto tra le sfere e la ralla esterna, non essendoci forze applicate al cuscinetto.

La Figura 4.8 riporta la ralla esterna dopo aver applicato completamente la deformazione e i punti di contatto tra le sfere e la ralla stessa. Si nota come la deformazione risulti coerente rispetto ai punti di contatto, trovandosi interna rispetto alle condizioni indeformate quando i punti sono interni e viceversa.

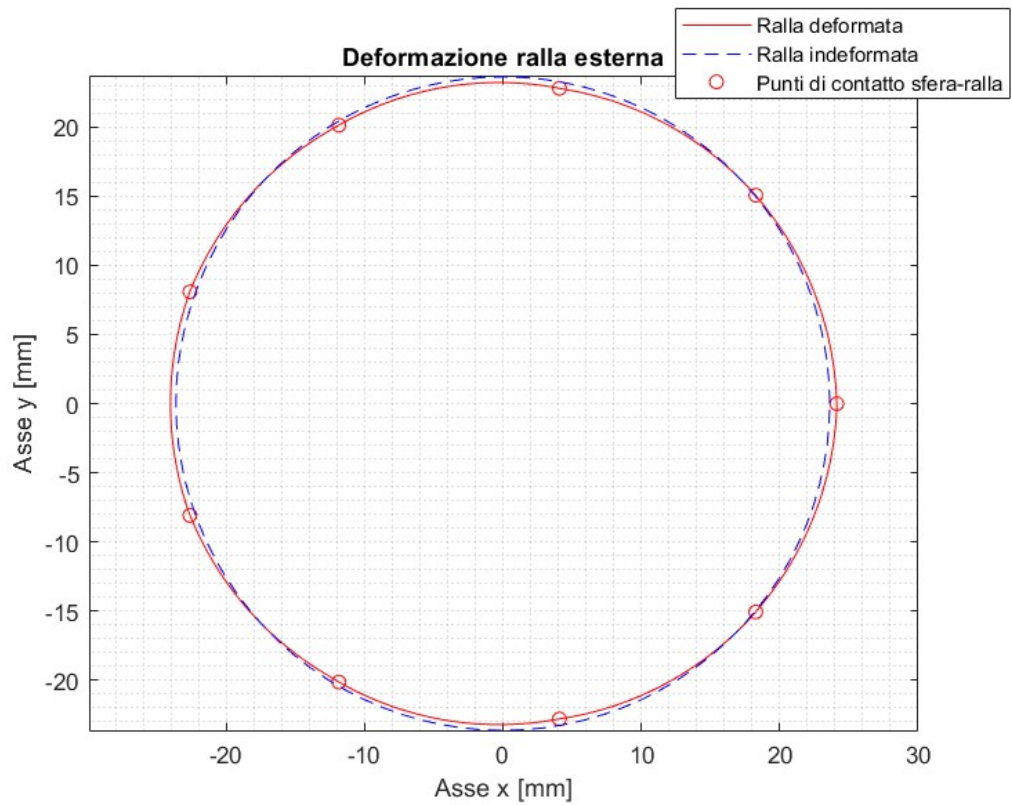


Figura 4.8 Deformazione della ralla esterna

Unendo alla deformazione della ralla esterna appena riportata quella della ralla interna ottenuta matematicamente in ambiente Matlab dopo la simulazione e la posizione dei centri delle sfere, si ottiene la rappresentazione del cuscinetto completo.

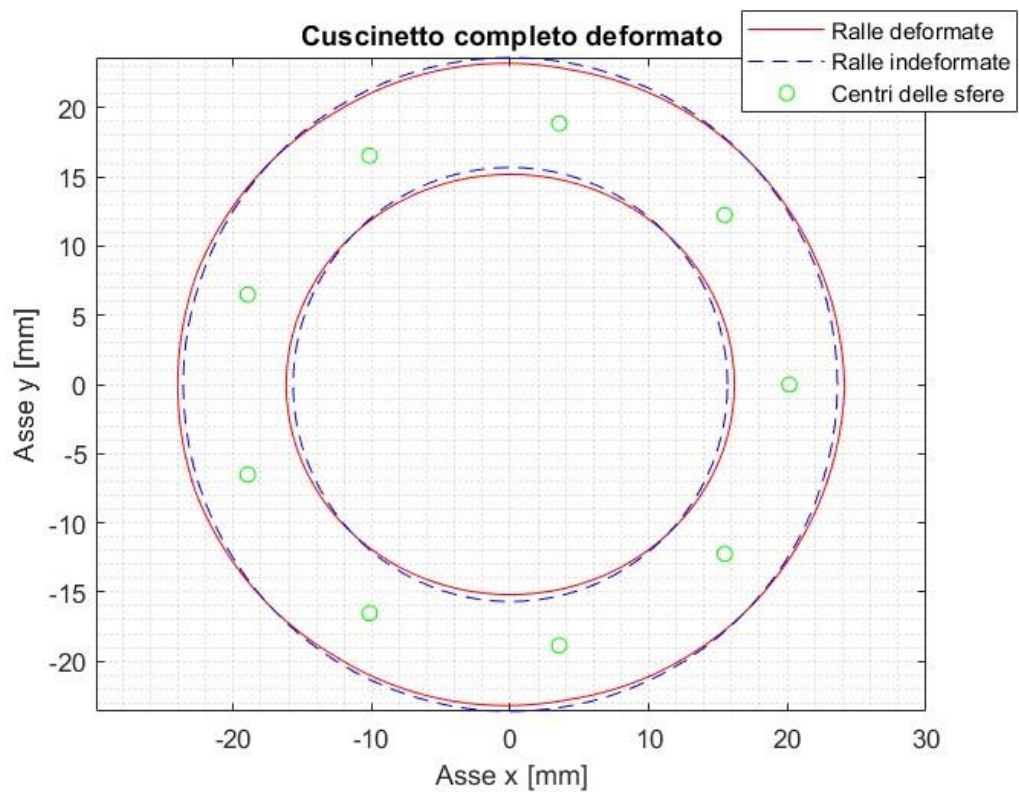


Figura 4.9 Cuscinetto completo deformato

### 4.3 Forze scambiate

L'ultima analisi effettuata è quella sulle forze scambiate tra i componenti del sistema. In particolare, quelle tra le sfere e le ralle e quelle tra i settori adiacenti di ralla esterna.

Per quanto riguarda la forza di contatto della sfera, dalla Figura 4.10 si nota un comportamento oscillatorio tra zero e un valore di picco, con assenza di valori negativi a causa della modellazione del distacco tra la sfera e una delle ralle descritta nel paragrafo 1.2. Osservando l'andamento medio, risulta sempre presente una forza di compressione su tutte le sfere. Ciò è confermato anche dagli andamenti delle forze tra i settori adiacenti di ralla, i quali, nonostante le oscillazioni, hanno un andamento medio sempre positivo, ossia di trazione. Ciò significa che le sfere vanno a comprimersi contro la ralla, la quale si oppone agli spostamenti generando forze di trazione.

Di seguito sono riportati gli andamenti delle forze appena descritti. Si ricorda che nonostante sia riportata una scala nei grafici, gli andamenti sono da considerarsi qualitativi e non corretti dal punto di vista quantitativo.

#### Forza di contatto sfera-ralla

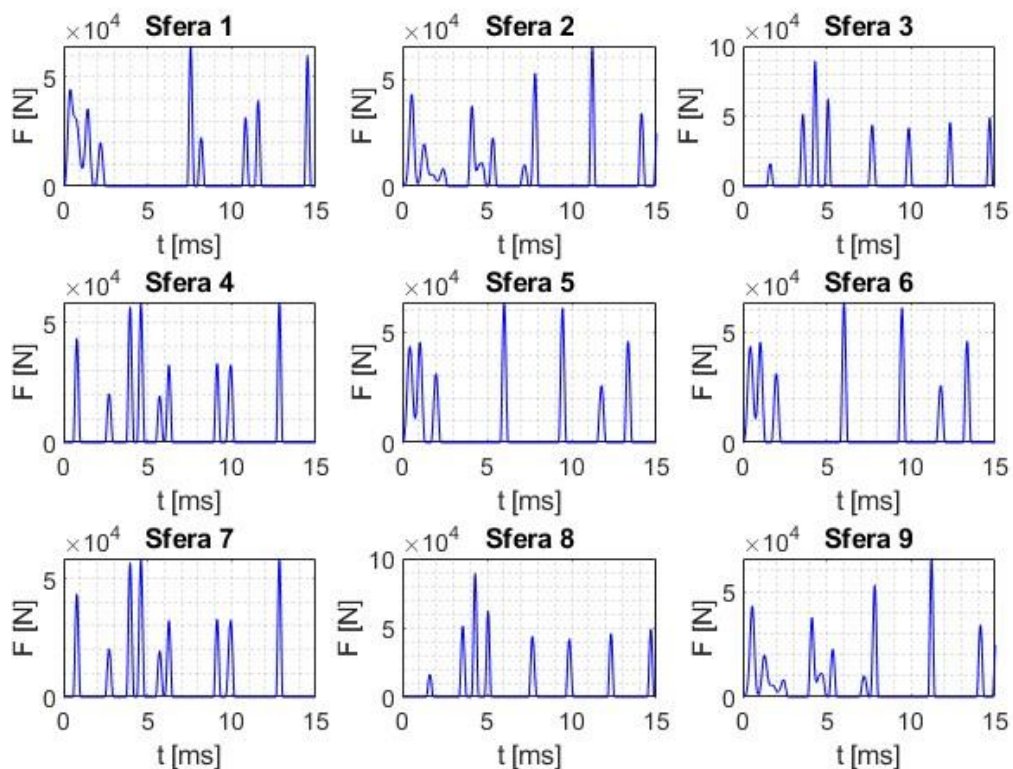


Figura 4.10 Forza di contatto tra le sfere e le ralle durante la deformazione

## Forza dei settori adiacenti di ralla

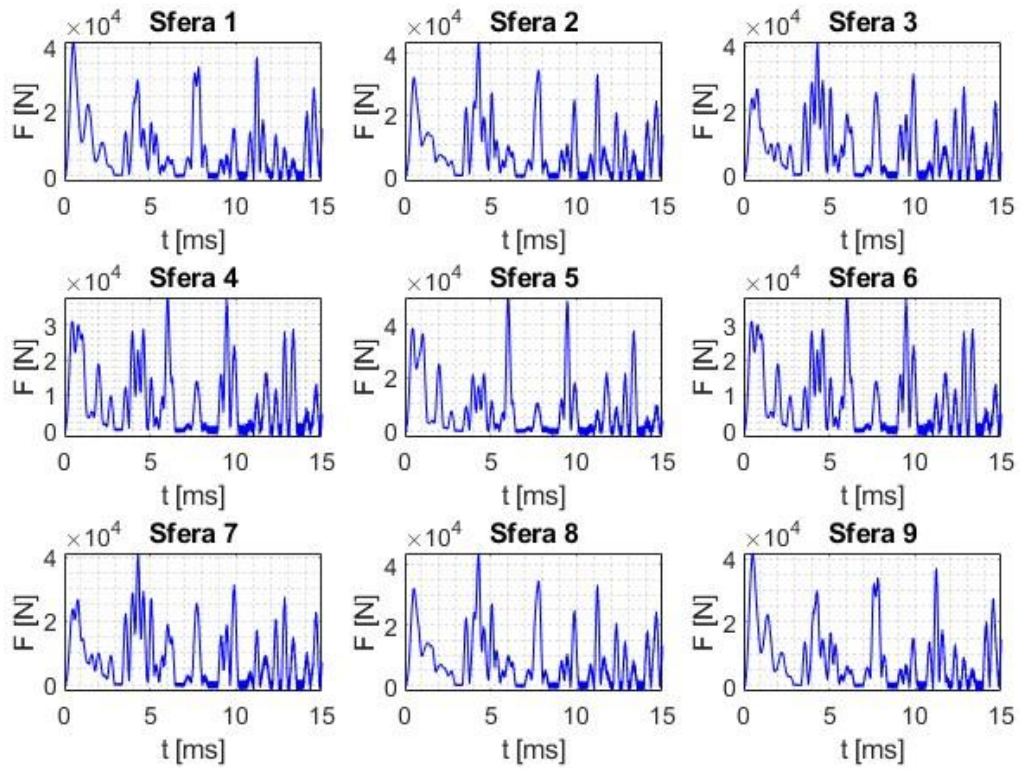
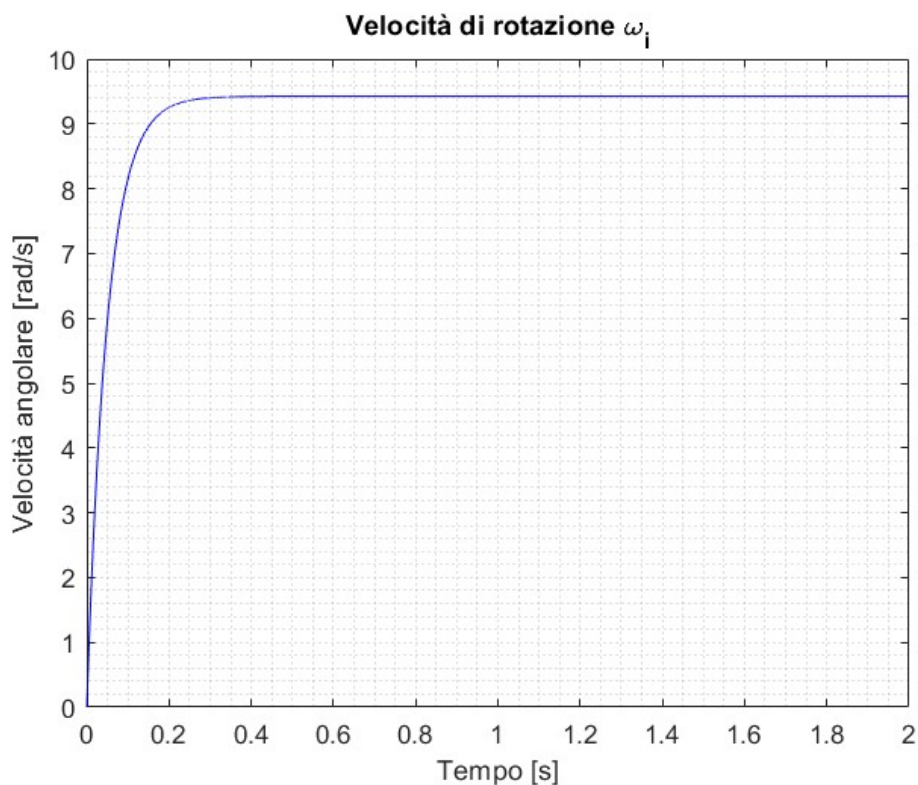


Figura 4.11 Forza tra settori adiacenti di ralla esterna

## 5 Risultati della simulazione di rotazione del cuscinetto

Il modello di rotazione del cuscinetto è stato sviluppato in ambiente Matlab/Simulink e implementa le equazioni descritte nel capitolo 2. L'obiettivo del modello è simulare la rotazione del cuscinetto in seguito alla deformazione ellittica. L'input del modello è la velocità di rotazione della ralla interna, solidale a un ipotetico albero collegato a un motore che fornisce potenza al sistema, fornita come una funzione crescente da zero a  $3\pi \text{ rad/s}$ :



Vengono inoltre fornite le coordinate dei punti di contatto tra le sfere e la ralla esterna in seguito alla deformazione. Quest'ultime sono state ricavate dal modello di deformazione e salvate in due variabili  $x\_in.mat$  e  $y\_in.mat$ , le quali vengono caricate nel workspace una volta avviata la simulazione. In questo modo non è necessario lanciare il modello di deformazione ogni qual volta si voglia avviare la simulazione di rotazione, a meno che non si modifichino dei parametri per la deformazione.

Considerando che il modello va a sostituire il blocco del wave generator all'interno del modello del riduttore armonico completo, l'output principale è dato dalle coordinate di tutti i punti della ralla esterna deformata e non più solamente dai punti di contatto con le sfere come accadeva per il modello di deformazione. Questo e altri output sono riportati nei paragrafi successivi.



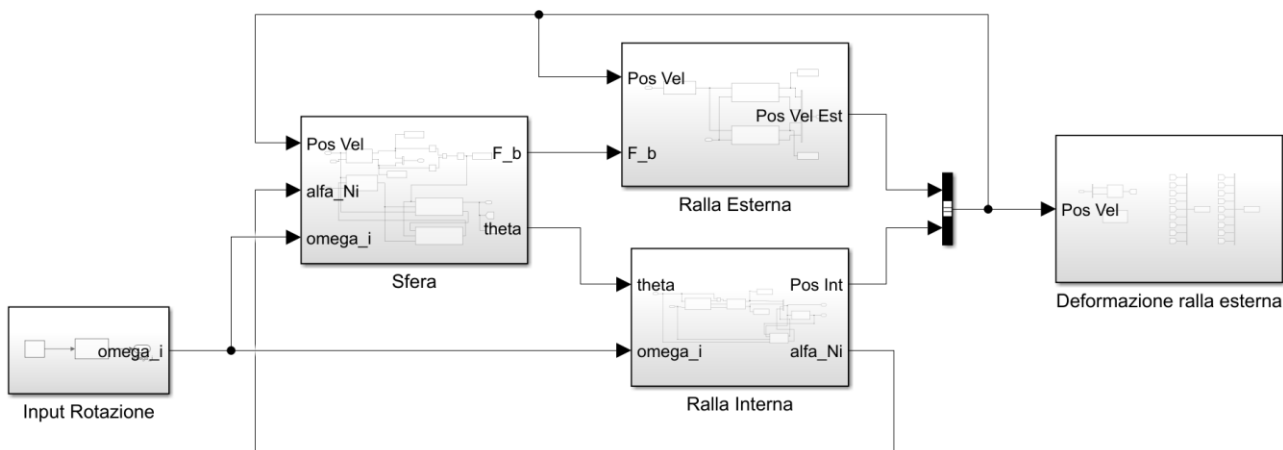


Figura 5.1 Modello in ambiente Matlab/Simulink per la rotazione del cuscinetto

Analogamente a quanto accade per la deformazione, essendo anche questo modello in una fase di sviluppo iniziale, i valori utilizzati per i parametri, in particolare le rigidzze e gli smorzamenti, non rappresentano quelli del cuscinetto reale. Per questo motivo, i risultati non sono accurati dal punto di vista quantitativo, tuttavia i loro andamenti possono essere considerati corretti.

Il modello è costituito da quattro blocchi principali:

- **Ralla Interna:** riceve in input la velocità di rotazione  $\omega_i$  e la posizione angolare dei centri delle sfere e restituisce in output le coordinate dei punti di contatto tra sfera e ralla interna e i relativi angoli normali all'ellisse. Implementa le equazioni descritte nel paragrafo 2.1;
- **Sfera:** riceve in input le coordinate dei punti di contatto della sfera con le ralle e i relativi angoli normali all'ellisse. Restituisce in output le posizioni angolari dei centri delle sfere e le forze di contatto tra le sfere e le ralle. Implementa le equazioni descritte nei paragrafi 2.2 e 2.3;
- **Ralla esterna:** riceve in input le forze di contatto tra le sfere e le ralle e restituisce in output le coordinate dei punti di contatto tra sfera e ralla esterna. Implementa parte di quanto descritto nel paragrafo 2.4;
- **Deformazione ralla esterna:** riceve in input le coordinate dei punti di contatto della sfera con le ralle calcola la deformazione della ralla esterna. L'output non è utilizzato nei restanti blocchi del modello, ma solamente salvato nel Workspace di Matlab. Implementa la restante parte del paragrafo 2.4;

I parametri di simulazione impostati sono i seguenti:

- tempo di simulazione: 0.52 s;
- solver: ode14x;
- fixed-step size:  $1 \cdot 10^{-7}$  s;

Avendo implementato la dinamica delle sfere, è stato necessario ridurre il passo di integrazione per ottenere dei risultati corretti dal punto di vista numerico e senza divergenza dei calcoli, con conseguente aumento dei tempi di simulazione.

La Tabella 5.1 riporta i valori dei parametri utilizzati nel modello. La simulazione è stata effettuata con processore AMD® Ryzen™ 5 5600H @3.30 GHz e memoria RAM di 16 Gb di velocità 3200 MHz.

Tabella 5.1 Parametri utilizzati nella simulazione di rotazione del cuscinetto

| Parametro    | Descrizione  | Valore                               |
|--------------|--|--------------------------------------|
| $m_{e, tot}$ | Massa della ralla esterna  | 1 kg                                 |
| $K_b$        | Rigidezza delle sfere  | $1,89 \cdot 10^7$ N/m                |
| $c_b$        | Smorzamento delle sfere  | 0,01 Ns/m                            |
| $K_{ralla}$  | Rigidezza dei settori adiacenti di ralla                         | $5 \cdot 10^9$ N/m                   |
| $c_{ralla}$  | Smorzamento dei settori adiacenti di ralla                       | $1 \cdot 10^{-2}$ N·s/m              |
| $\omega_i$   | Velocità di rotazione della ralla interna                        | 317,301 rad/s                        |
| $N$          | Numero di punti di discretizzazione dei settori di ralla esterna | 40                                   |
| $v_s$        | Velocità limite per attrito statico                              | 100 mm/s                             |
| $v_d$        | Velocità limite per attrito dinamico                             | 1000 mm/s                            |
| $\mu_s$      | Coefficiente di attrito statico                                  | 0,1                                  |
| $\mu_d$      | Coefficiente di attrito dinamico                                 | 0,02                                 |
| $M_b$        | Massa della sfera  | 0,1 kg                               |
| $I_b$        | Momento di inerzia polare della sfera                            | $63,04 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$ |

## 5.1 Rotazione delle sfere

I primi elementi di cui vengono analizzati gli spostamenti sono le sfere. Queste sono messe in movimento dalla rotazione a velocità costante della ralla interna, che genera delle forze di attrito sulle sfere. Avendo queste una massa, e quindi un'inerzia, si genera un transitorio in cui le sfere accelerano nella rotazione sia rispetto al centro del cuscinetto che rispetto al proprio centro. Esaurito il transitorio, le sfere avanzano con un andamento lineare e simile per tutte le sfere.

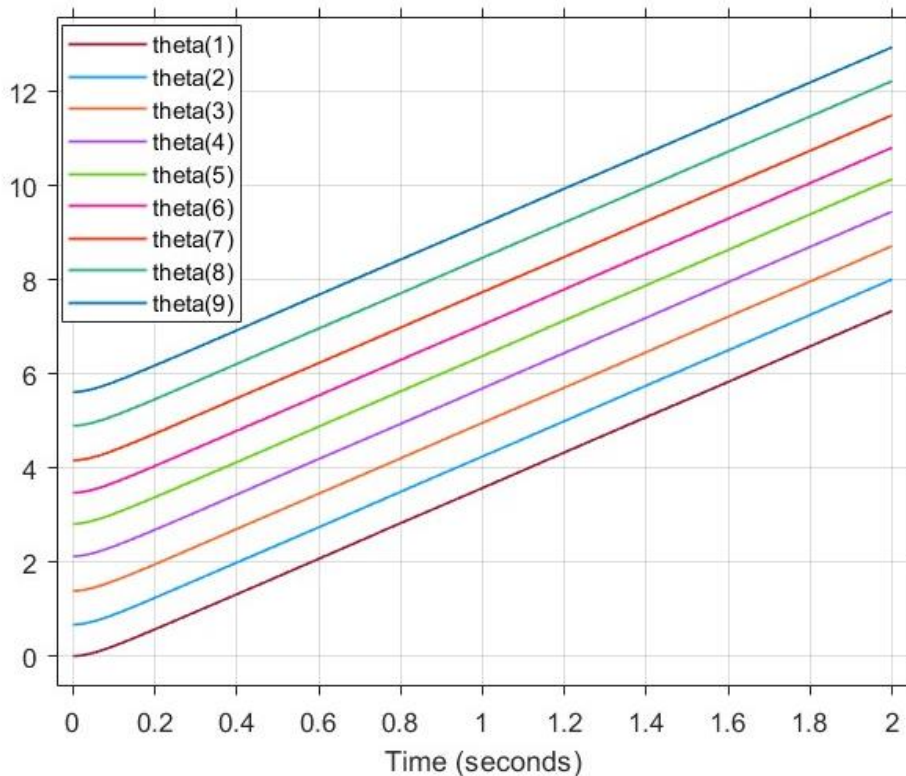


Figura 5.2 Posizione angolare del centro delle sfere durante la rotazione

Nella Figura 5.2 sono riportate le posizioni angolari dei centri delle sfere, in cui si nota nella fase iniziale il comportamento transitorio di accelerazione e successivamente l'avanzamento costante. È possibile osservare che la distanza angolare tra le sfere si mantiene costante per tutta la simulazione. Infatti, andando a osservare l'andamento della velocità angolare del centro delle sfere rispetto all'origine degli assi in Figura 5.3 si nota che, una volta esaurito il transitorio iniziale, le sfere mantengono una velocità circa costante. Guardando nel dettaglio in Figura 5.4 so nota come in realtà le velocità oscillino tra un valore minimo e uno massimo, circa coincidenti per tutte le sfere, ma raggiunti in istanti temporali differenti.

Un andamento analogo a quello appena descritto è presente anche nella velocità di rotazione delle sfere rispetto al proprio centro (Figura 5.5 e Figura 5.6). In questo caso, le oscillazioni hanno un'ampiezza maggiore, ma il periodo dell'oscillazione è analogo e di circa 0,55 s. Il fenomeno appena descritto è causato dall'aumento e dalla diminuzione periodica della distanza tra le sfere e l'origine degli assi, per via dell'eccentricità dell'ellisse, utilizzata nel calcolo delle velocità angolari delle sfere.

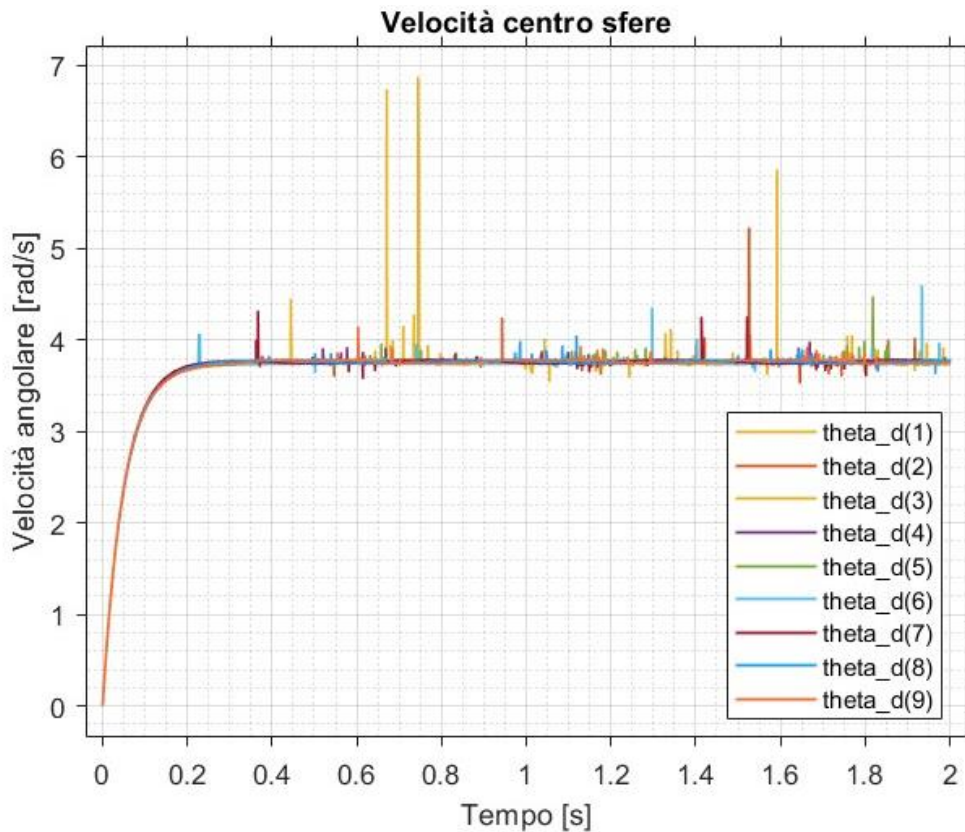


Figura 5.3 Velocità angolare delle sfere rispetto al centro del cuscinetto

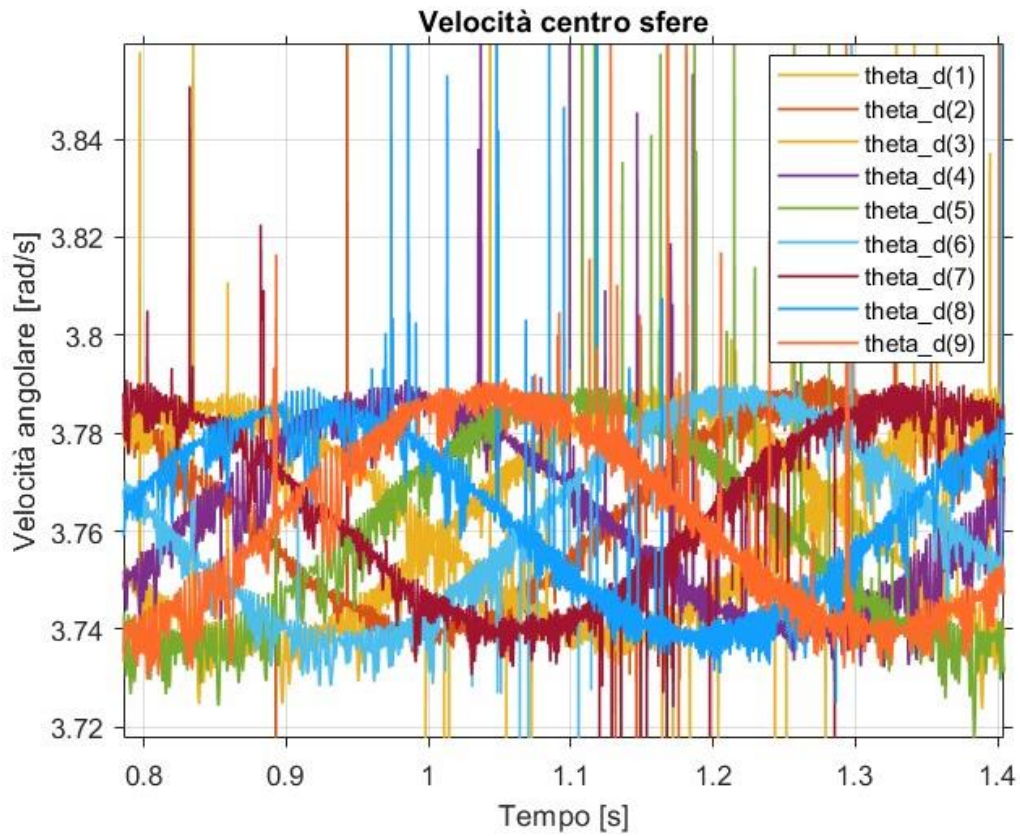


Figura 5.4 Dettaglio di velocità angolare delle sfere rispetto al centro del cuscinetto

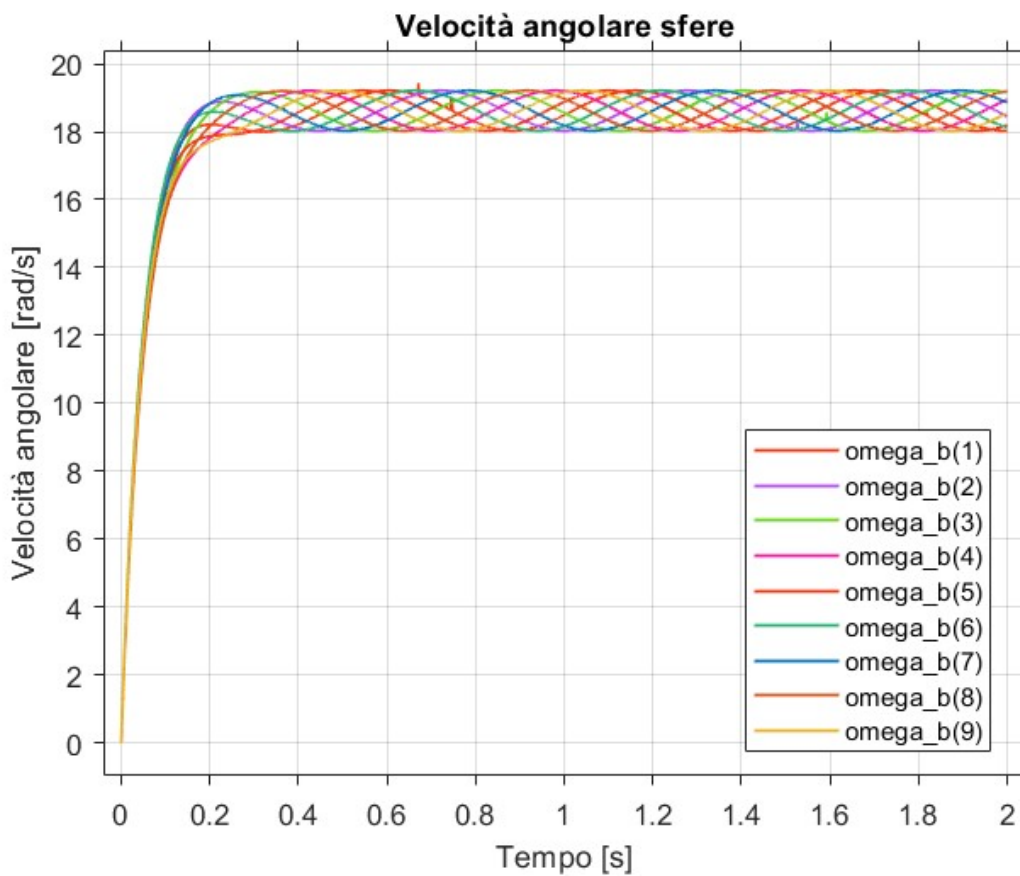


Figura 5.5 Velocità angolare delle sfere rispetto al proprio centro

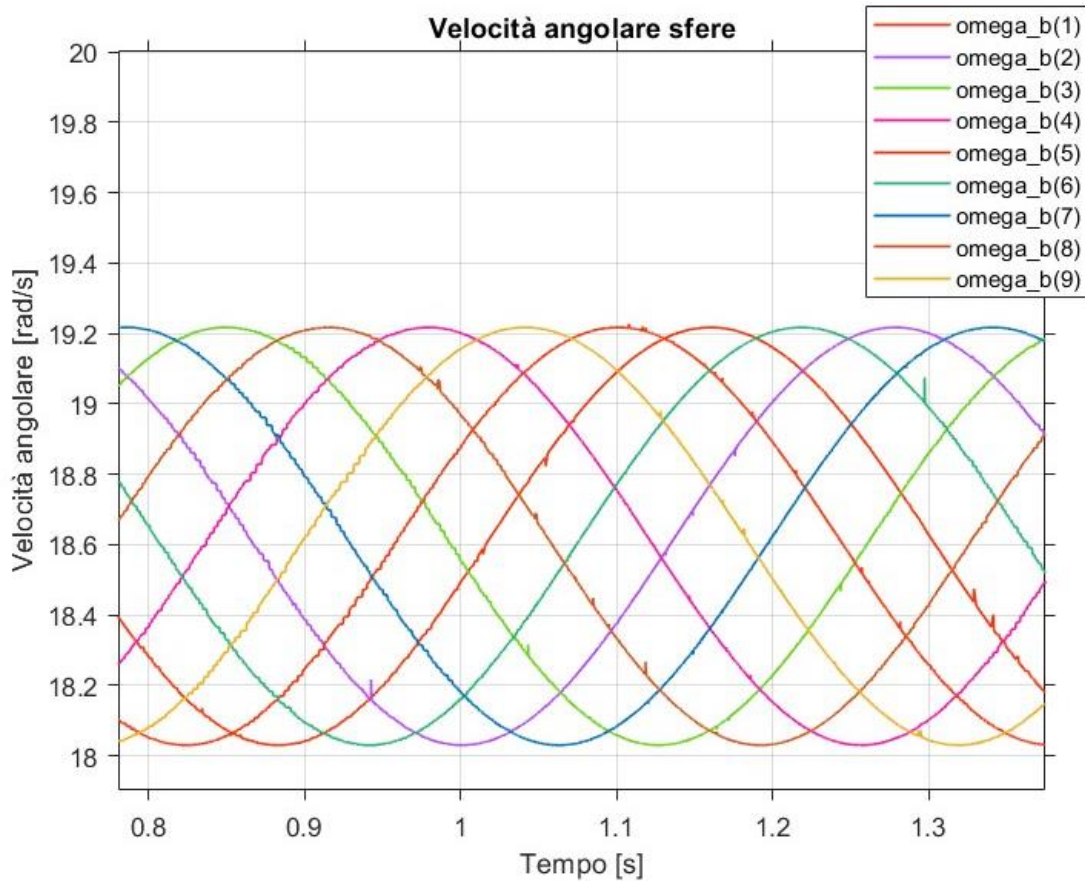


Figura 5.6 Dettaglio di velocità angolare delle sfere rispetto al proprio centro

## 5.2 Rotazione dei punti di contatto

Dopo aver descritto il moto delle sfere, vengono analizzati gli spostamenti dei punti di contatto tra le sfere stesse e le ralle. Dalla Figura 5.2 si è visto come il transitorio copra una parte ristretta del moto delle sfere, per cui gli andamenti riportati di seguito possono essere considerati a regime. Si osserva che, essendo la velocità di rotazione della ralla interna ( $3\pi \text{ rad/s}$  a regime) maggiore di quella dei centri delle sfere ( $\sim 3,8 \text{ rad/s}$  a regime), ci sia strisciamento tra la ralla interna e le sfere. Di conseguenza, a causa della forma ellittica, le sfere siano periodicamente allontanate e avvicinate all'origine degli assi, causando l'andamento trilobato riportato. Si nota che gli andamenti sono qualitativamente gli stessi ma con posizioni angolari differenti.

Nella Figura 5.8 è riportato nel dettaglio il caso della prima sfera. In primo luogo, si può osservare come l'andamento dei punti di contatto sulla ralla interna sia leggermente più regolare rispetto a quelli sulla ralla esterna, in quanto il primo è ricavato in modo cinematico da un'ellisse ideale, mentre il secondo è ottenuto dall'integrazione delle equazioni della dinamica dei sistemi molla-smorzatore. La posizione del centro della sfera è ottenuta come punto medio tra i due punti di contatto, di conseguenza segue lo stesso andamento dei punti sfera-ralla esterna, ma attenuato, per cui risulta più simile a quello della ralla interna. Si precisa che nel modello di deformazione il centro della sfera era ottenuto in modo analogo come media tra i punti di contatto interni ed esterni e utilizzato in modo diretto per ricavare la posizione angolare della sfera. In questo caso, invece, la posizione angolare della sfera è ottenuta dalle forze scambiate con le ralle e la posizione del suo centro è ricavata di conseguenza.

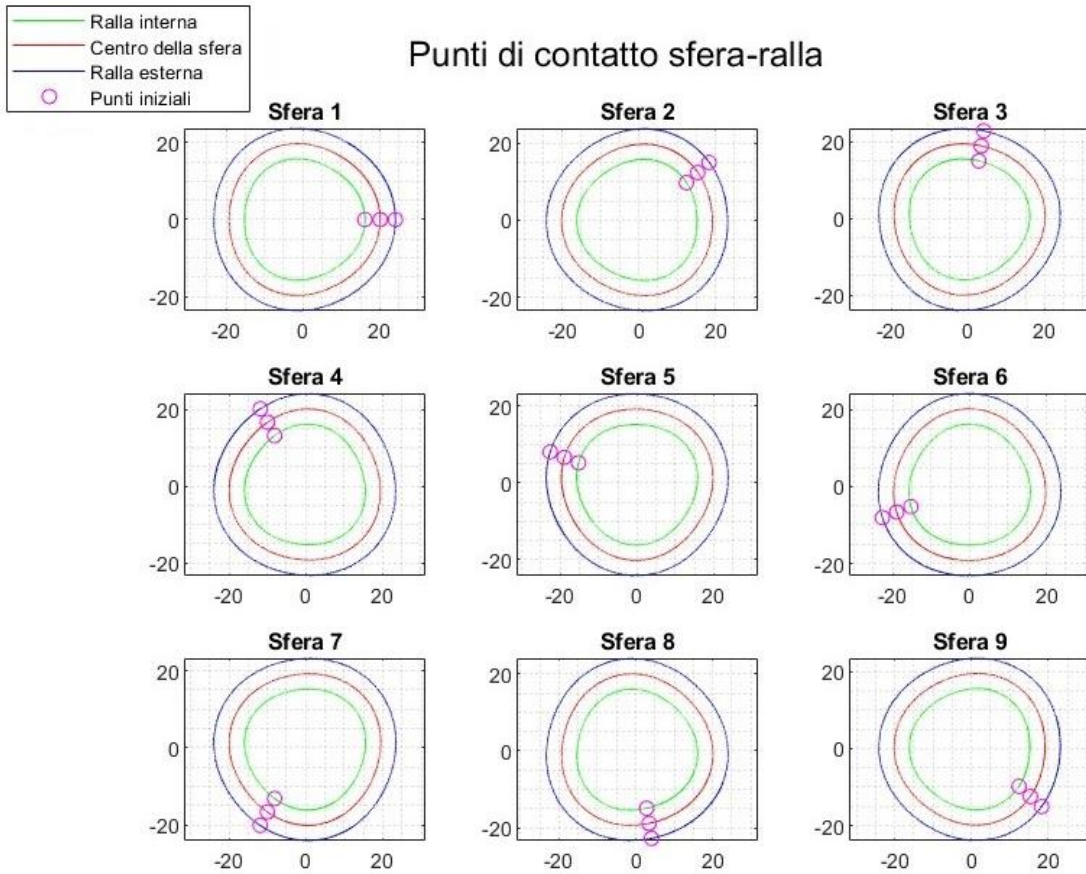


Figura 5.7 Andamenti dei punti di contatto tra le sfere e le ralle

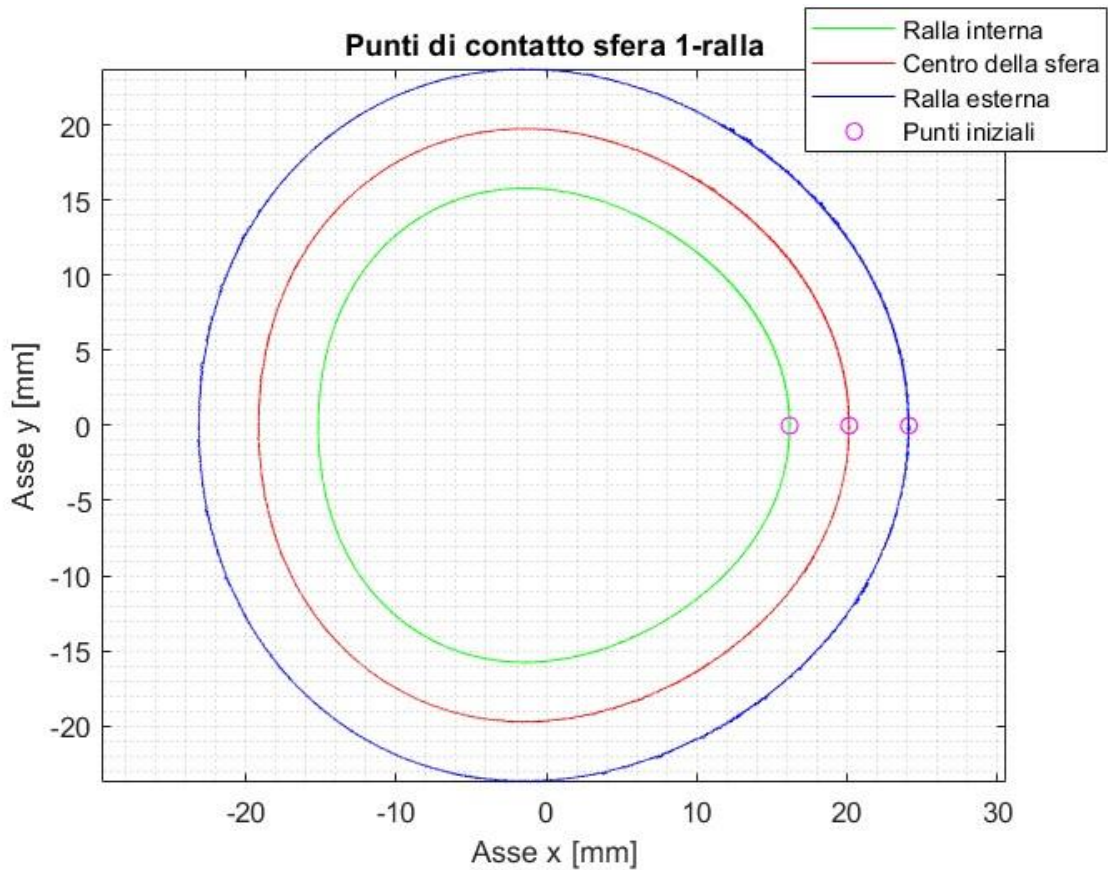


Figura 5.8 Andamento dei punti di contatto tra la sfera 1 e le ralle

Finora sono stati analizzati gli andamenti dei punti di contatto tra una singola sfera e le ralle. La Figura 5.9 riporta, invece, tutti i punti di contatto in due istanti temporali differenti. In particolare, sono presenti i punti al tempo  $t_1 = 0\text{ s}$  e  $t_2 = 0,3\text{ s}$ . Si nota come al tempo  $t_1$  le posizioni siano quelle ricavate dopo la deformazione come in Figura 4.2, con la prima sfera prossima all'asse  $x$  e le altre all'incirca equi spaziate lungo l'ellisse. Al tempo  $t_2$  è avvenuta una rotazione dei punti di contatto e lo spostamento angolare è circa uguale per tutte le sfere. Ciò fa riferimento a quanto già riportato nel paragrafo 5.1 con la Figura 5.2, in cui è possibile osservare che corrispondenza del tempo  $0,3\text{ s}$  i centri delle sfere hanno ruotato di poco meno di  $1\text{ rad}$ . La Figura 5.9 riporta un segmento di pendenza  $1\text{ rad}$ , e si nota come i punti di contatto della prima sfera abbiano ruotato di una quantità di poco inferiore.

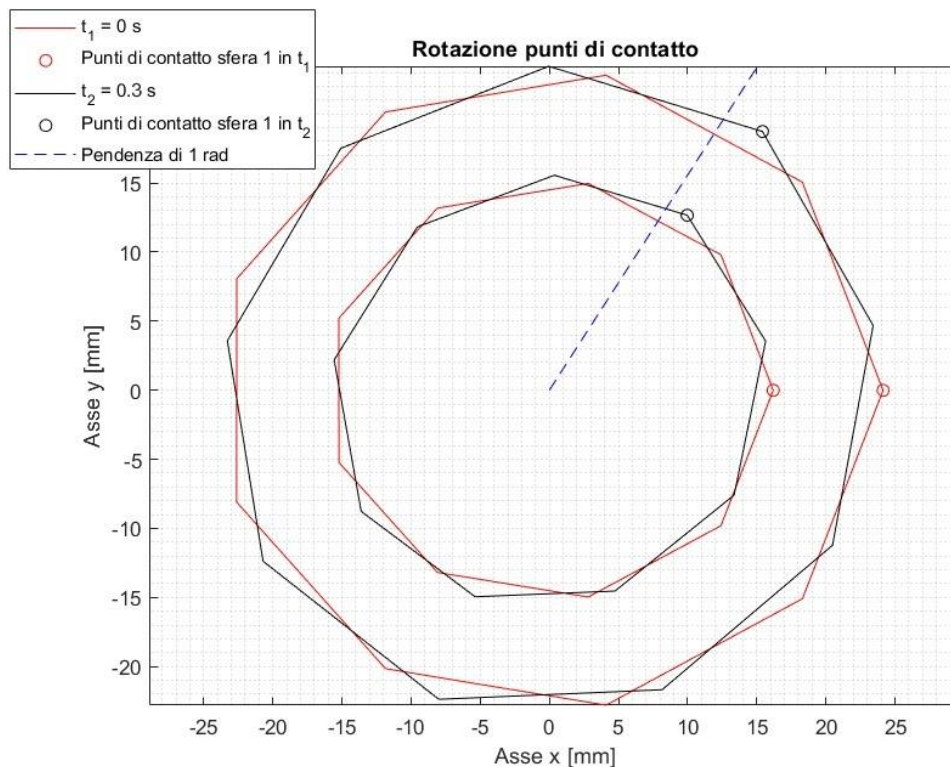


Figura 5.9 Rotazione dei punti di contatto tra le sfere e le ralle

### 5.3 Rotazione della ralla esterna

Viene ora riportata in Figura 5.10 la rotazione della ralla esterna. I punti di contatto, il cui moto è riportato nel paragrafo 5.2, sono identificati da un quadrato nel caso della prima sfera e da un cerchio per le altre sfere. Analogamente a quanto accadeva per la deformazione del cuscinetto, anche per la rotazione le coordinate della ralla tra due punti di contatto dipendono solo dalle posizioni dei punti stessi, non essendo presenti ulteriori forze.

Anche in questo caso, così come per la Figura 5.9, è riportata la ralla in due istanti di tempo  $t_1 = 0\text{ s}$  e  $t_2 = 0,3\text{ s}$ . Pertanto, quanto detto per la rotazione dei punti di contatto è valido anche per la rotazione della ralla esterna: al tempo  $t_1$  le posizioni sono quelle ricavate dopo la deformazione come in Figura 4.8, con la ralla deformata circa uguale a un'ellisse con semiassse maggiore sull'asse  $x$ ; al tempo  $t_2$  la rotazione è di poco inferiore a  $1\text{ rad}$ , coerentemente con quanto riportato nella Figura 5.2.

In aggiunta, la deformazione della ralla esterna tra i punti di contatto risulta coerente con la posizione di quest'ultimi anche dopo la rotazione. In questo caso non sono riportate le condizioni indeformate per non appesantire la figura; tuttavia, facendo riferimento alla ralla al tempo  $t_1$  si nota che, quando due punti di contatto adiacenti sono interni rispetto alle condizioni al tempo  $t_1$ , anche la ralla risulta interna e viceversa.

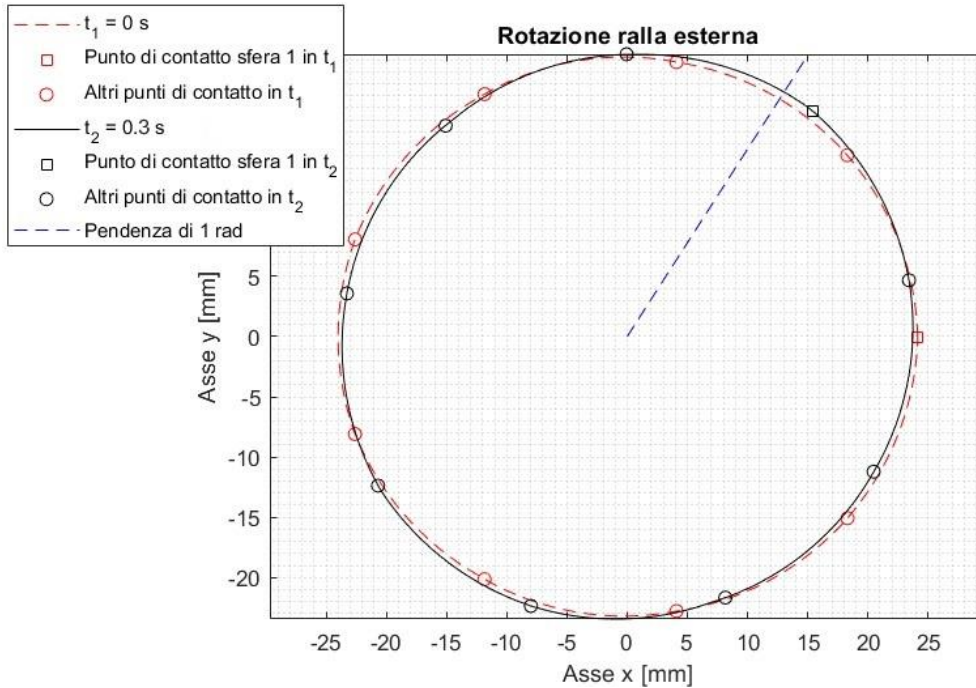


Figura 5.10 Rotazione della ralla esterna

Unendo alla deformazione della ralla esterna appena riportata quella della ralla interna ottenuta matematicamente in ambiente Matlab dopo la simulazione e la posizione dei centri delle sfere, si ottiene la rappresentazione del cuscinetto completo.

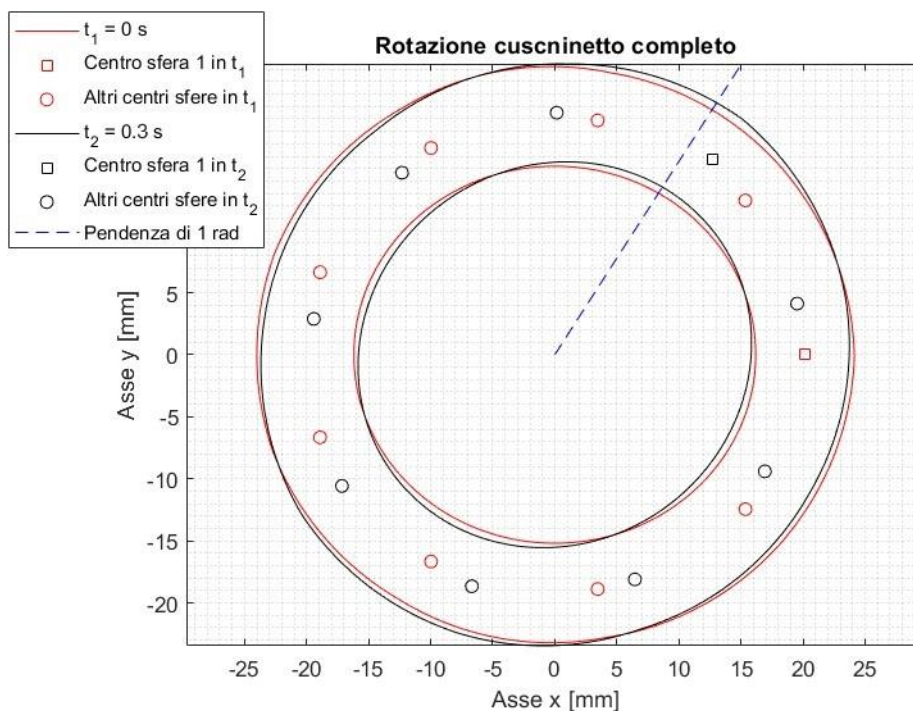


Figura 5.11 Rotazione del cuscinetto



## 5.4 Forze scambiate

In questo paragrafo si analizzano le forze scambiate tra i componenti del sistema durante la rotazione, ossia quelle tra le sfere e le ralle e quelle tra i settori adiacenti di ralla esterna. Si ricorda che nonostante sia riportata una scala nei grafici, gli andamenti sono da considerarsi qualitativi e non corretti dal punto di vista quantitativo.

Per quanto riguarda la forza di contatto della sfera, dalla Figura 5.12 si nota un andamento periodico del suo modulo, con oscillazioni tra un valore medio circa nullo e un valore medio di picco. Il segno è sempre positivo per come è stato implementato il calcolo della forza, mentre il modulo maggiore di zero evidenzia uno stato di compressione delle sfere durante la rotazione. In Figura 5.13 è presente nel dettaglio l'andamento della forza di contatto tra la sfera 1 e le ralle.

### Forza di contatto sfera-ralla

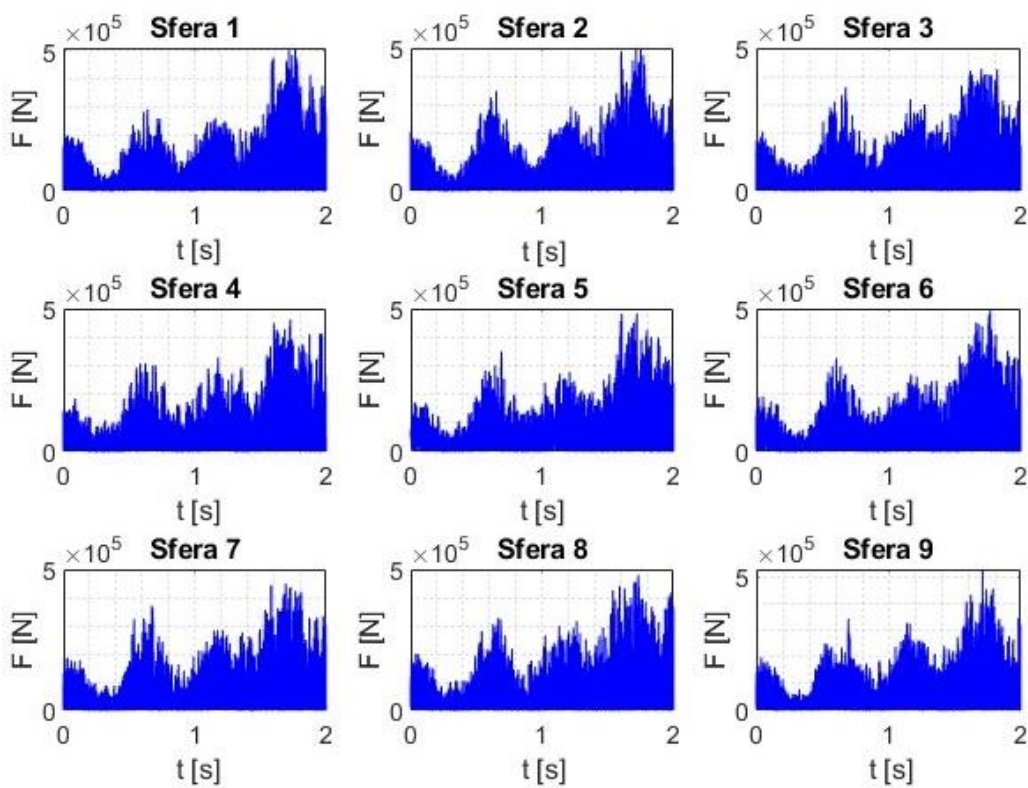


Figura 5.12 Forza di contatto tra le sfere e le ralle durante la rotazione

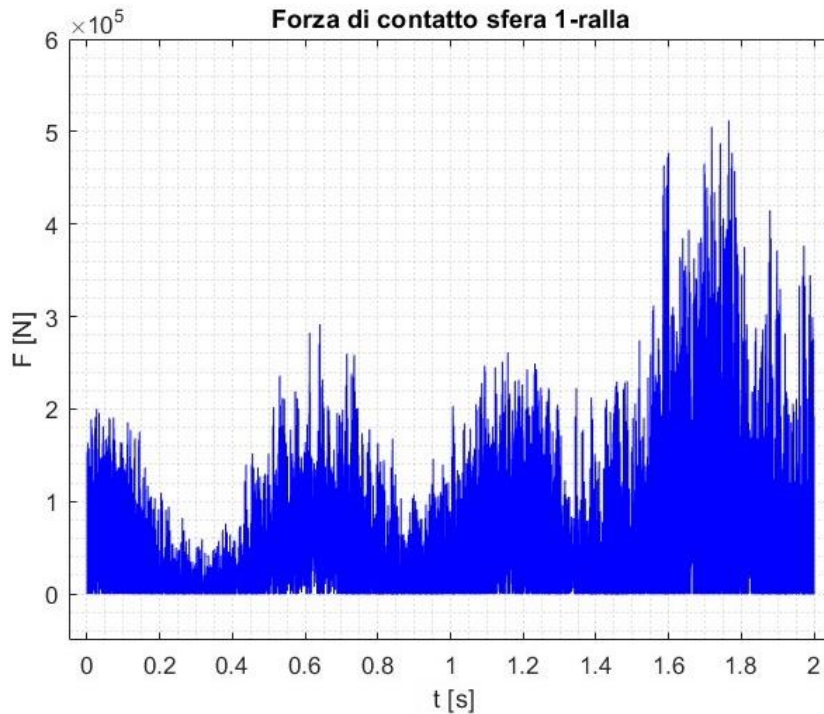


Figura 5.13 Forza di contatto tra la sfera 1 e le ralle durante la rotazione

Per quanto riguarda la forza tra settori adiacenti di ralla esterna, dalla Figura 5.14 si nota anche in questo caso un andamento periodico di frequenza analoga a quella della forza di contatto e delle velocità di rotazione delle sfere. Il segno è sempre positivo, pertanto è presente uno stato di trazione nella ralla durante la rotazione. Ciò è coerente con l'andamento della forza di contatto e dello stato di compressione delle sfere, in quanto le sfere vanno a comprimersi contro la ralla, la quale si oppone agli spostamenti generando forze di trazione.

### Forza dei settori adiacenti di ralla

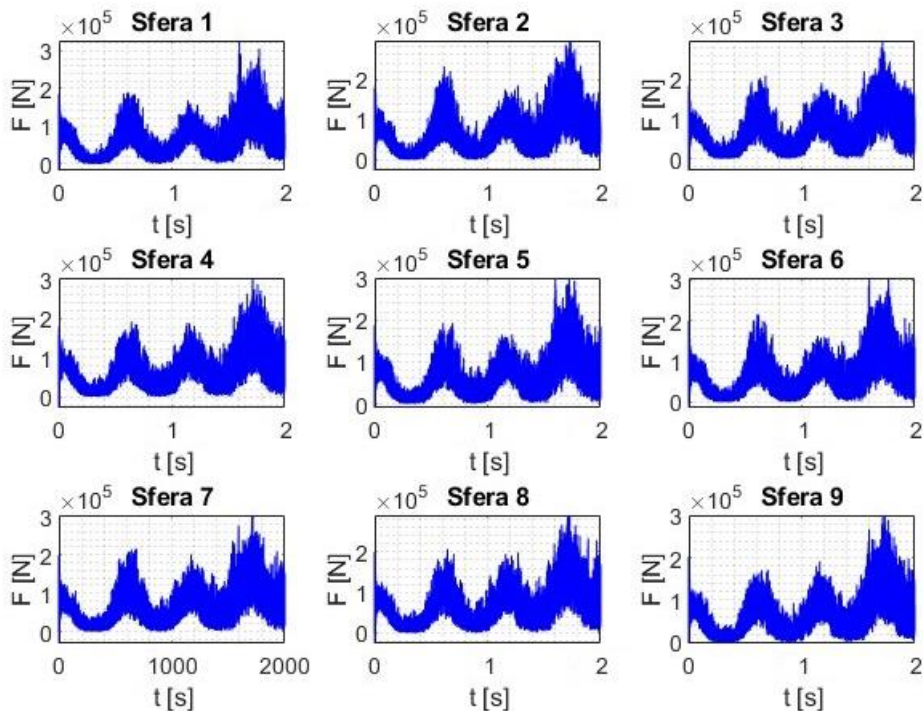


Figura 5.14 Forza tra settori adiacenti di ralla esterna

# 6 Modello di riduttore armonico preesistente

Il modello del riduttore armonico fornito ha l'obiettivo di simulare il comportamento di un riduttore reale e ottenere dati utili senza la necessità di avere realmente a disposizione il componente stesso. È stato sviluppato in ambiente Matlab/Simulink, ed è composto da diversi blocchi che modellano i diversi organi coinvolti.

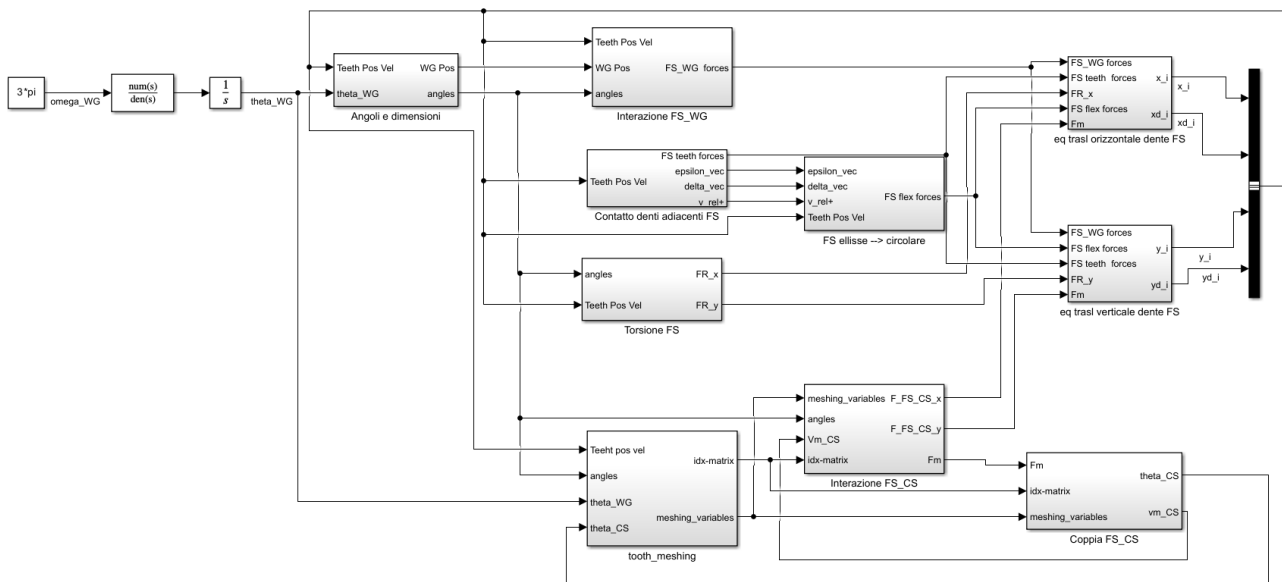


Figura 6.1 Modello in ambiente Matlab/Simulink per la rotazione del riduttore armonico completo

L'input del modello è la velocità di rotazione  $\omega_{WG}$ , la quale rappresenta la velocità angolare di un ipotetico albero di ingresso al riduttore. In un sistema reale questo sarebbe collegato ad un motore, che fornisce potenza al sistema, e necessita di dover ridurre la propria velocità di rotazione. Questa dipenderebbe dalla caratteristica del motore e dalla coppia resistente dell'ipotetico utilizzatore posto a valle del riduttore. Per semplicità, nel caso di studio è stata ipotizzata una velocità di rotazione costante moltiplicata per una funzione di trasferimento, in modo da avere una velocità in ingresso graduale e non creare brusche variazioni potenzialmente problematiche al modello.

## 6.1 Angoli e dimensioni

Il primo blocco descritto è *Angoli e dimensioni*, il quale simula il comportamento di un wave generator ideale, ossia ellittico e quindi infinitamente rigido. Non essendoci deformazioni, vengono implementate le formule descrittive delle ellissi. L'output del blocco è rappresentato dalle coordinate dei punti di contatto tra wave generator e flexspline in corrispondenza dei denti di quest'ultima, e dall'angolo normale all'ellisse del wave generator in questi punti.

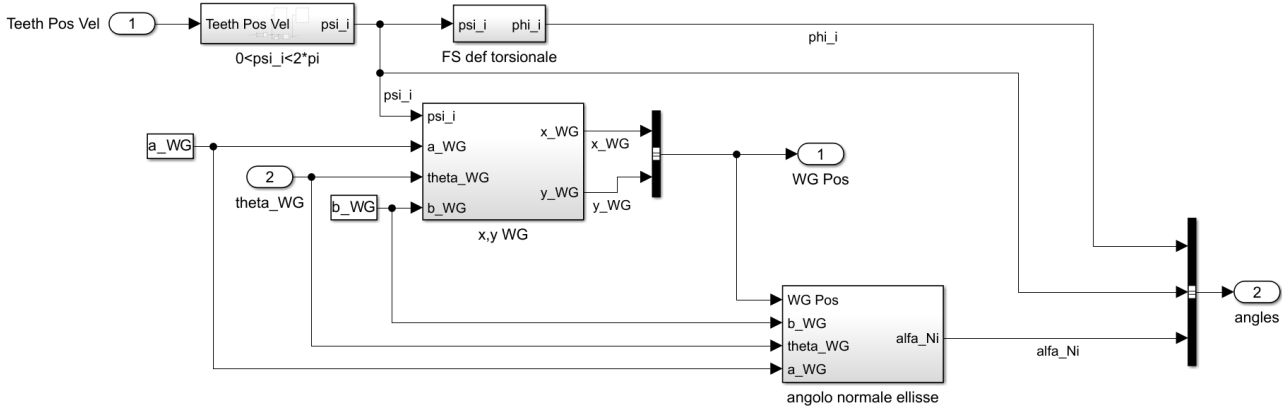


Figura 6.2 Blocco Angoli and dimensioni

## 6.2 Interazione WG-FS

Nel blocco *Interazione WG-FS* è implementato il calcolo della forza di contatto tra wave generator e flexspline tramite la modellazione di un sistema molla-smorzatore per ogni punto di contatto. È necessario inserire in input le coordinate della flexspline in questi punti, i quali vengono calcolati successivamente. Pertanto, alla prima iterazione saranno utilizzate le condizioni iniziali inserite, ossia le coordinate dei punti in seguito alla deformazione data dall'inserimento del wave generator all'interno della flexspline; alla seconda iterazione si utilizzano le coordinate calcolate alla prima iterazione e così via. È necessario saturare il valore della forza data dallo smorzamento al valore della forza data dalla rigidezza. Questo in quanto, essendo un contatto tra due corpi differenti, in caso di urto nell'istante in cui i corpi entrano a contatto si avrebbe una forza causata dalle velocità relative molto elevata, quando nella realtà questa non si manifesta. Per evitare picchi nel valore delle forze e, di conseguenza calcoli inesatti, si limita il valore di questa componente della forza di contatto. L'output del blocco è rappresentato da due vettori contenenti le forze di contatto, uno con le componenti lungo l'asse  $x$  e uno con quelle lungo l'asse  $y$ , ottenute dalla scomposizione lungo l'angolo normale all'ellisse.

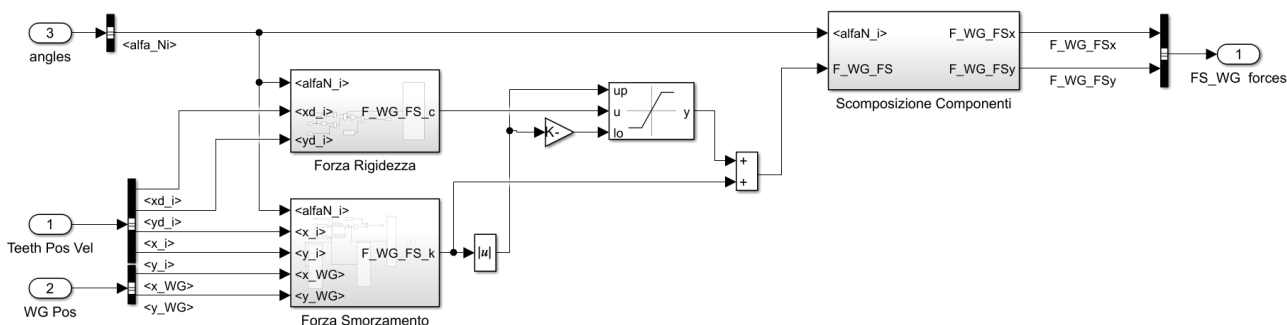


Figura 6.3 Blocco Interazione WG-FS

## 6.3 Contatto denti adiacenti

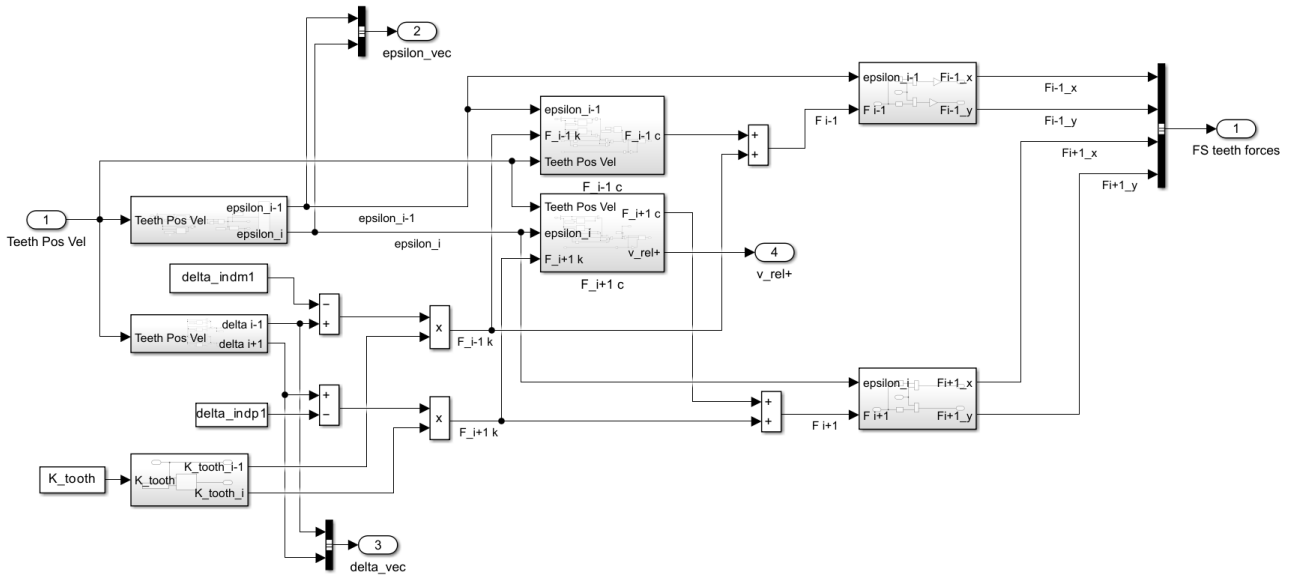


Figura 6.4 Blocco Contatto denti adiacenti FS

Il blocco *Contatto denti adiacenti FS* simula le forze scambiate all'interno della flexspline. In particolare, la posizione di ogni dente viene individuata da una coppia di coordinate; ogni dente scambia con gli altri due adiacenti una coppia di forze, ottenute tramite una coppia di modelli molla-smorzatore. In primo luogo vengono calcolati gli allungamenti (o accorciamenti) tra due denti tramite la differenza tra le distanze istantanee dei denti e quelle in condizioni indeformate. Questi valori vengono moltiplicati per le rigidità, ottenendo le relative forze.

In Figura 6.5 è riportato l'interno del blocco  $F_{i+1,c}$ , in cui è implementato il calcolo della forza dovuto allo smorzamento. In questo caso non bisogna limitare la forza in quanto, trattandosi di un contatto fittizio, ossia inteno al corpo e non un vero contatto tra corpi diversi, non può esistere un urto. Il calcolo è analogo per il blocco  $F_{i-1,c}$ . In seguito le forze sono scomposte lungo gli assi  $x$  e  $y$  tramite gli angoli  $\epsilon_i$  e  $\epsilon_{i-1}$ , i quali identificano gli angoli delle congiugenti di due denti adiacenti.

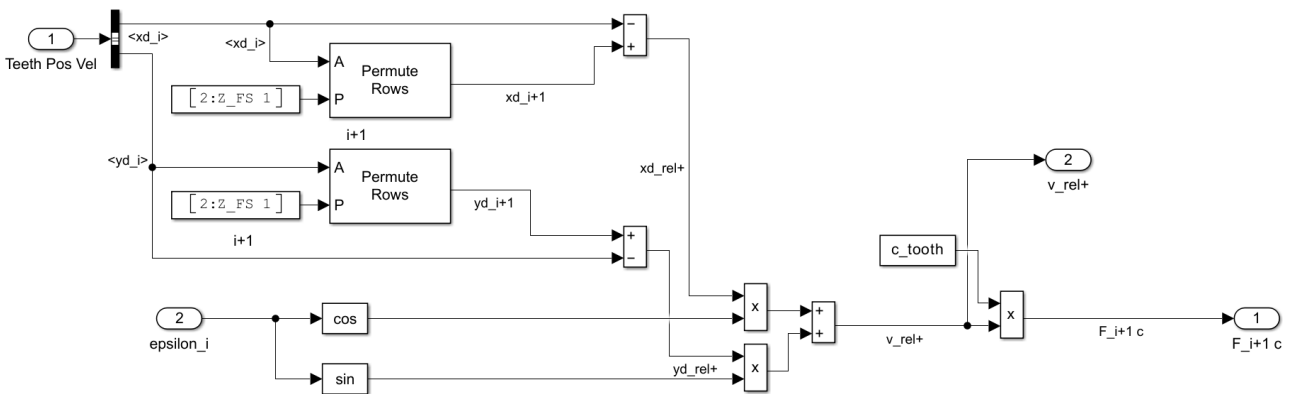


Figura 6.5 Blocco  $F_{i+1,c}$

## 6.4 Torsione FS e FS ellisse – circolare

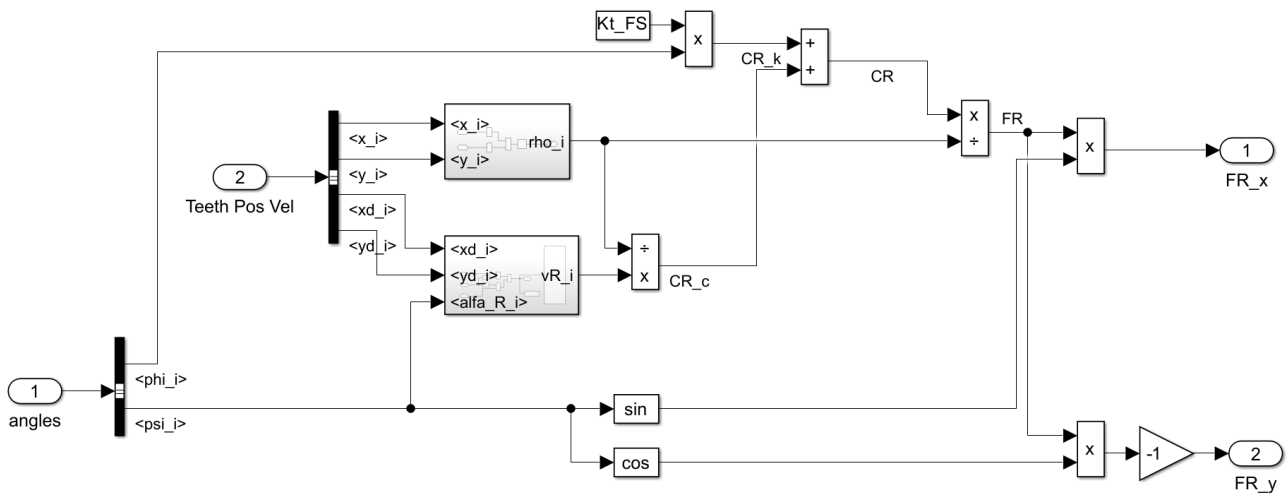


Figura 6.6 Torsione FS

Nel blocco *Torsione FS* viene introdotta una rigidezza torsionale che va ad opporsi alla rotazione della flexspline. Infatti, nel caso di studio, la flexspline è fissa, mentre la circular spline è libera di ruotare e rappresenta l'output fisico del riduttore. La coppia torsionale è data da un modello molla-smorzatore, con un contributo di rigidezza e un contributo di smorzamento.

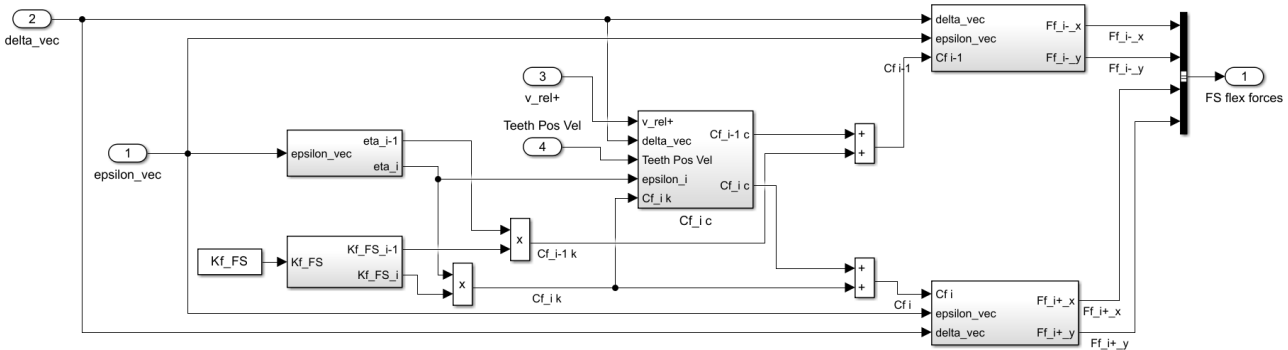


Figura 6.7 Blocco FS ellisse - circolare

Nel blocco *FS ellisse – circolare* è implementata una coppia di richiamo flessionale per far sì che i denti tendano a ritornare alla loro posizione indeformata dopo aver subito una flessione. Infatti, senza l'aggiunta di questa coppia, la flexspline si comporterebbe come una catena che va ad appoggiarsi sul wave generator senza opporsi alla desformazione. Il modello utilizzato per il calcolo della coppia è anche in questo caso un sistema molla-smorzatore.

## 6.5 Tooth meshing e Interazione FS-CS

Il primo blocco analizzato che fa riferimento alla presenza della circular spline è *Tooth meshing*, inserito per individuare i denti in presa tra la flexspline e la circular spline. Questo avviene quando uno dei punti con cui viene discretizzato il profilo di uno dei denti della flexspline si trova in una condizione di interferenza con il profilo della circular spline. Il calcolo è eseguito separatamente per il profilo destro e quello sinistro del dente della flexspline.

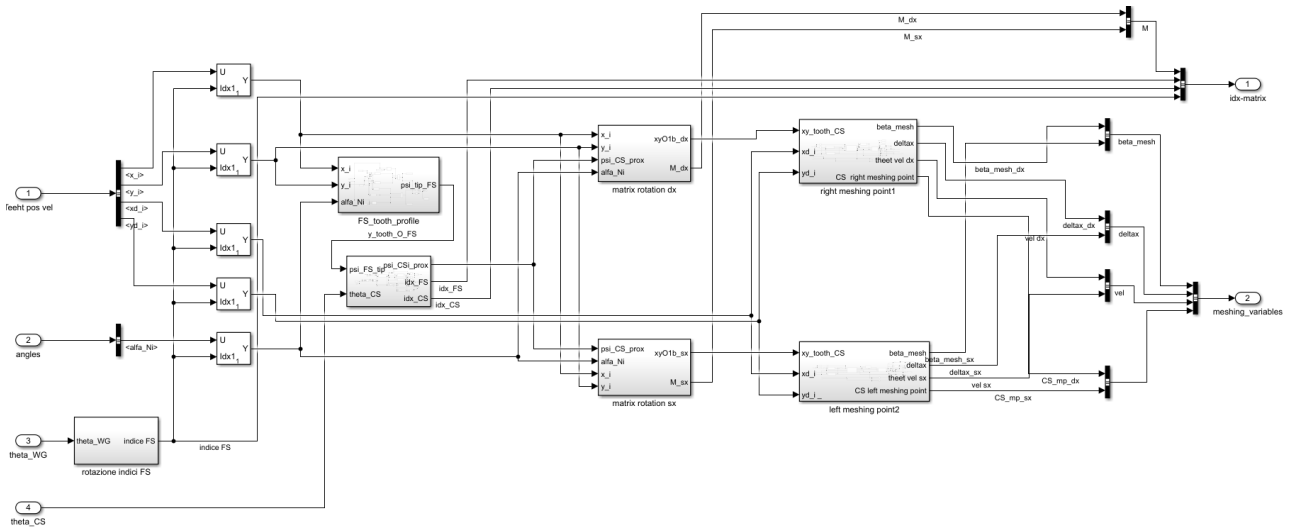


Figura 6.8 Blocco Tooth meshing

Dopo aver individuato i denti in presa vengono eseguiti i calcoli per ottenere le forze di contatto tra la flexspline e la circular spline nel blocco *Interazione FS-CS*. Questo viene eseguito separatamente per il profilo destro e sinistro e il modello utilizzato è un sistema molla molla-smorzatore, con necessità di saturare la forza data dallo smorzamento essendoci contatto tra due corpi distinti. In un primo blocco viene eseguito il calcolo delle forze, le quali vengono scomposte in un secondo blocco lungo gli assi  $x$  e  $y$ .

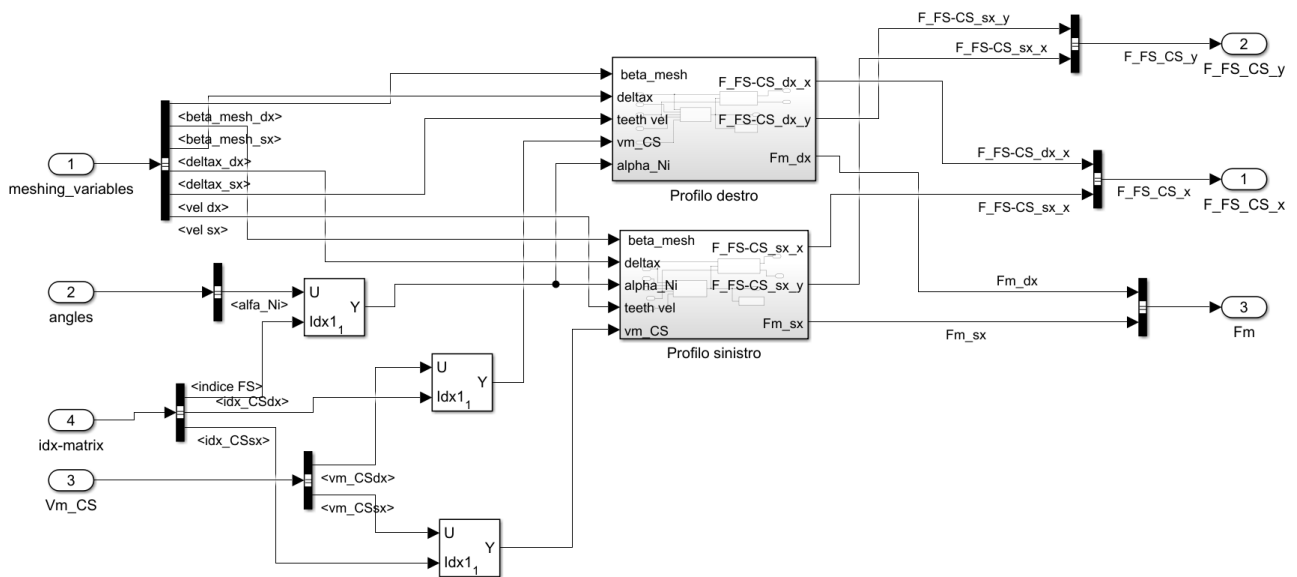


Figura 6.9 Blocco Interazione FS-CS

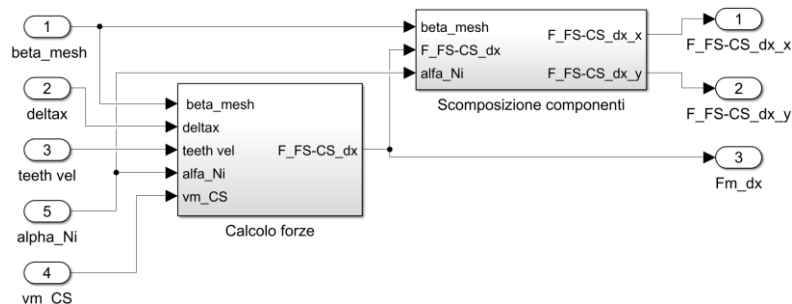


Figura 6.10 Blocco Profilo destro

## 6.6 Coppia FS-CS

L'ultimo blocco riguardante la circular spline riguarda *Coppia FS-CS*, in cui vengono calcolate la coppia e successivamente la velocità angolare della circular spline. In questo caso si utilizzano le forze calcolate nel blocco *Interazione FS-CS* e le posizioni dei denti calcolate nel blocco *Tooth meshing* per ottenere la coppia risultante sulla circular spline. Di seguito, implementando l'equilibrio alla rotazione intorno al centro della circular spline e dividendo per il suo momento di inerzia polare, si ottiene la sua accelerazione angolare. Per successive integrazioni si calcola la velocità angolare e la posizione angolare della circular spline.

Il blocco non ha segnali in output utilizzati in modo diretto nel modello, ma vengono solamente calcolate grandezze utili per analizzarne gli andamenti e, in generale, il comportamento del riduttore.

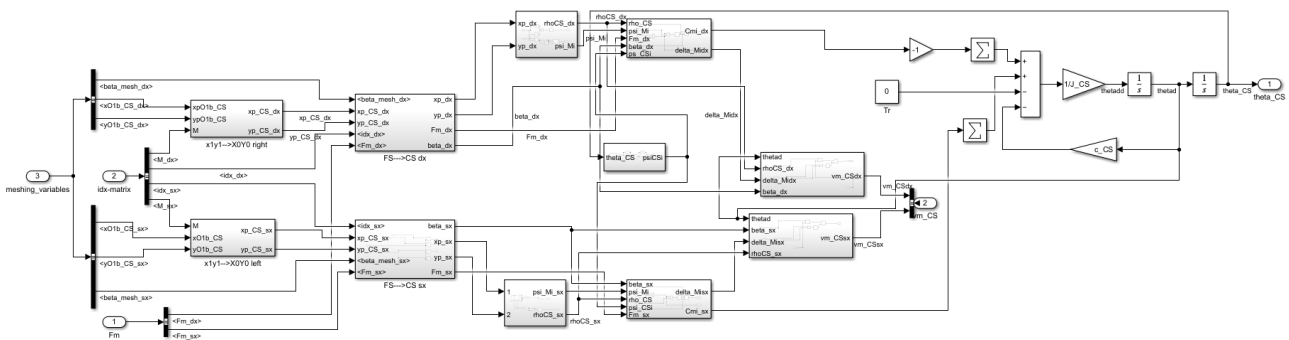


Figura 6.11 Blocco Coppia FS-CS

## 6.7 Equilibri alla traslazione

Una volta ottenute tutte le forze agenti sulla flexspline, è possibile implementare due equilibri alla traslazione, uno in direzione  $x$  e uno in direzione  $y$ , in modo tale da ottenere le velocità e gli spostamenti dei denti. In primo luogo, si sommano o sottraggono le componenti lungo  $x$  di tutte le forze calcolate in precedenza; in seguito, si divide per la massa del dente e si ottiene la sua accelerazione. Per integrazioni successive si ottengono le velocità e le posizioni dei denti. Si procede analogamente lungo  $y$ .

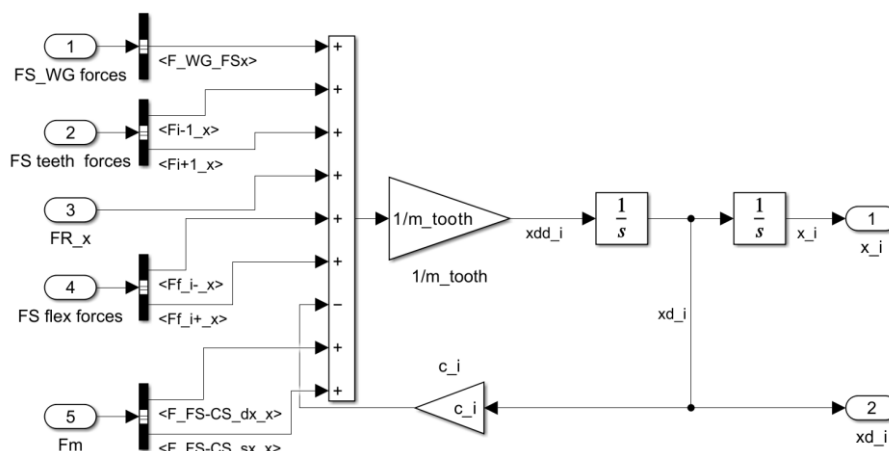


Figura 6.12 Blocco Equilibrio alla traslazione orizzontale dente FS



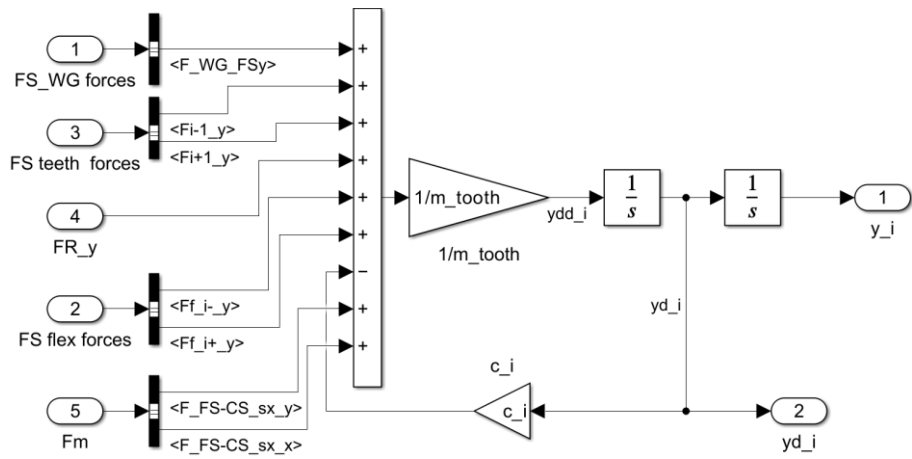


Figura 6.13 Equilibrio alla tralazione verticale dente FS

# 7 Risultati della simulazione di rotazione del riduttore completo

Il modello del riduttore armonico completo è stato ottenuto a partire dal modello preesistente descritto nel capitolo 6, andando ad aggiornare il blocco del wave generator con il modello di rotazione del cuscinetto, dopo aver apportato le modifiche descritte nel capitolo 3.

L'obiettivo del modello è simulare la rotazione dell'intero riduttore, pertanto le condizioni iniziali sono quelle dei componenti dopo la deformazione e con velocità di rotazione nulla. Analogamente al modello di rotazione del solo cuscinetto, l'input della simulazione è la velocità di rotazione della ralla interna, fornita come una costante pari a  $\omega_i$ , solidale a un ipotetico albero collegato a un motore che fornisce potenza al sistema.

Considerando il sistema reale, l'output principale del modello è la velocità di rotazione della circular spline, tuttavia per quanto sviluppato in questa tesi verrà analizzato in primis il comportamento del wave generator e la sua interazione con la flexspline.

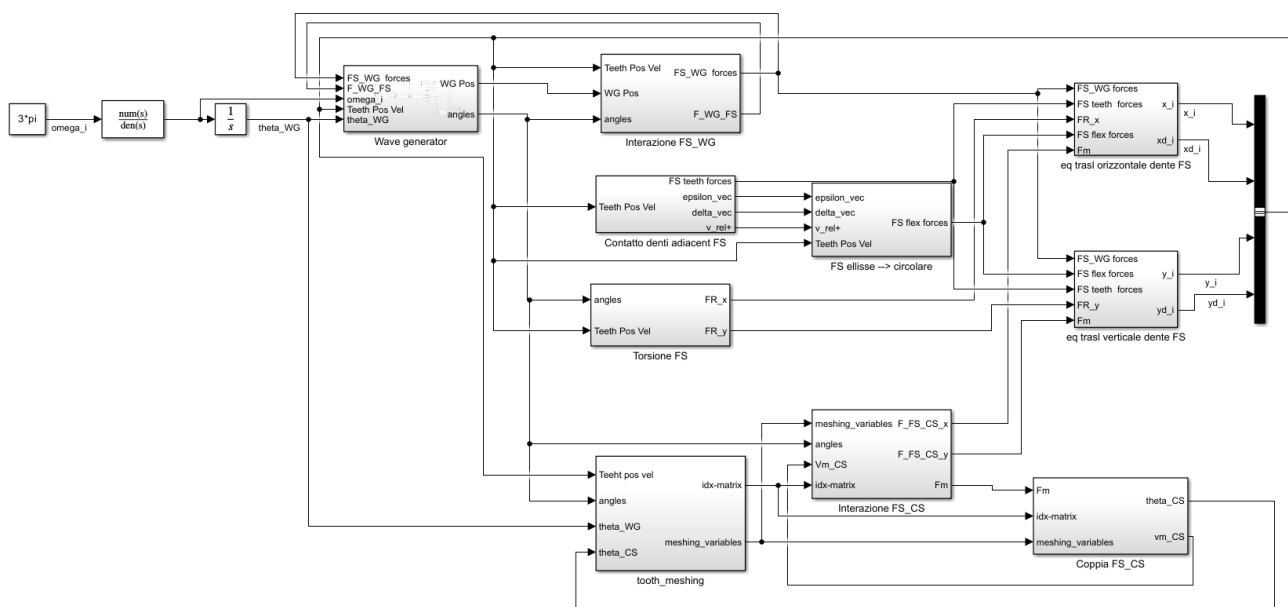


Figura 7.1 Modello in ambiente Matlab/Simulink per la rotazione del riduttore armonico completo

Analogamente a quanto accadeva per la deformazione e la rotazione del cuscinetto, essendo anche questo modello in una fase di sviluppo iniziale, i valori utilizzati per i parametri, in particolare le rigidzze e gli smorzamenti, non rappresentano quelli del riduttore armonico reale. Per questo motivo, i risultati non sono accurati dal punto di vista quantitativo, tuttavia i loro andamenti possono essere considerati corretti.

I parametri di simulazione impostati sono i seguenti:

- tempo di simulazione: 0.5 s;
- solver: ode14x;
- fixed-step size:  $1 \cdot 10^{-7}$  s;

La Tabella 7.1 Tabella 5.1 riporta i valori dei parametri utilizzati nel modello. La simulazione è stata effettuata con processore AMD® Ryzen™ 5 5600H @3.30 GHz e memoria RAM di 16 Gb di velocità 3200 MHz.

Tabella 7.1 Parametri utilizzati nella simulazione di rotazione del riduttore armonico completo

| Parametro    | Descrizione  | Valore                               |
|--------------|--|--------------------------------------|
| $m_{e, tot}$ | Massa della ralla esterna  | 1 kg                                 |
| $K_b$        | Rigidezza delle sfere  | $1,89 \cdot 10^7$ N/m                |
| $c_b$        | Smorzamento delle sfere  | 0,01 Ns/m                            |
| $K_{ralla}$  | Rigidezza dei settori adiacenti di ralla                         | $5 \cdot 10^9$ N/m                   |
| $c_{ralla}$  | Smorzamento dei settori adiacenti di ralla                       | $1 \cdot 10^{-2}$ N·s/m              |
| $\omega_i$   | Velocità di rotazione della ralla interna                        | 317,301 rad/s                        |
| $N$          | Numero di punti di discretizzazione dei settori di ralla esterna | 40                                   |
| $v_s$        | Velocità limite per attrito statico                              | 100 mm/s                             |
| $v_d$        | Velocità limite per attrito dinamico                             | 1000 mm/s                            |
| $\mu_s$      | Coefficiente di attrito statico                                  | 0,1                                  |
| $\mu_d$      | Coefficiente di attrito dinamico                                 | 0,02                                 |
| $M_b$        | Massa della sfera  | 0,1 kg                               |
| $I_b$        | Momento di inerzia polare della sfera                            | $63,04 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$ |
| $K_{WG-FS}$  | Rigidezza del contatto tra wave generator e flexspline           | $8,6 \cdot 10^7$ N/m                 |
| $c_{WG-FS}$  | Smorzamento del contatto tra wave generator e flexspline         | $1 \cdot 10^{-2}$ N·s/m              |
| $K_{f,FS}$   | Rigidezza flessionale della flexspline                           | 344 Nm/rad                           |
| $c_{f,FS}$   | Smorzamento flessionale della flexspline                         | $1 \cdot 10^{-2}$ Nms/rad            |
| $K_{tooth}$  | Rigidezza tra denti adiacenti della flexspline                   | $4,3 \cdot 10^9$ N/m                 |
| $c_{tooth}$  | Smorzamento tra denti adiacenti della flexspline                 | $1 \cdot 10^{-2}$ Ns/m               |
| $K_{FS-CS}$  | Rigidezza del contatto tra flexspline e circular spline          | $4,3 \cdot 10^7$ N/m                 |
| $c_{FS-CS}$  | Smorzamento del contatto tra flexspline e circular spline        | $1 \cdot 10^{-2}$ N·s/m              |

Prima di analizzare i risultati della simulazione è riportata parte dell'implementazione effettuata per l'aggiornamento del blocco di wave generator. Questo si compone di cinque blocchi fondamentali, il cui cuore è costituito da *Bearing* e *Coordinate WG*. Questi riprendono il modello di rotazione del cuscinetto con le modifiche descritte nel capitolo 3. I nuovi blocchi inseriti riguardano la scomposizione delle forze provenienti dal contatto WG-FS per essere utilizzate nel calcolo dell'equilibrio alla traslazione della ralla esterna e nel calcolo della deformazione data dal carico distribuito.

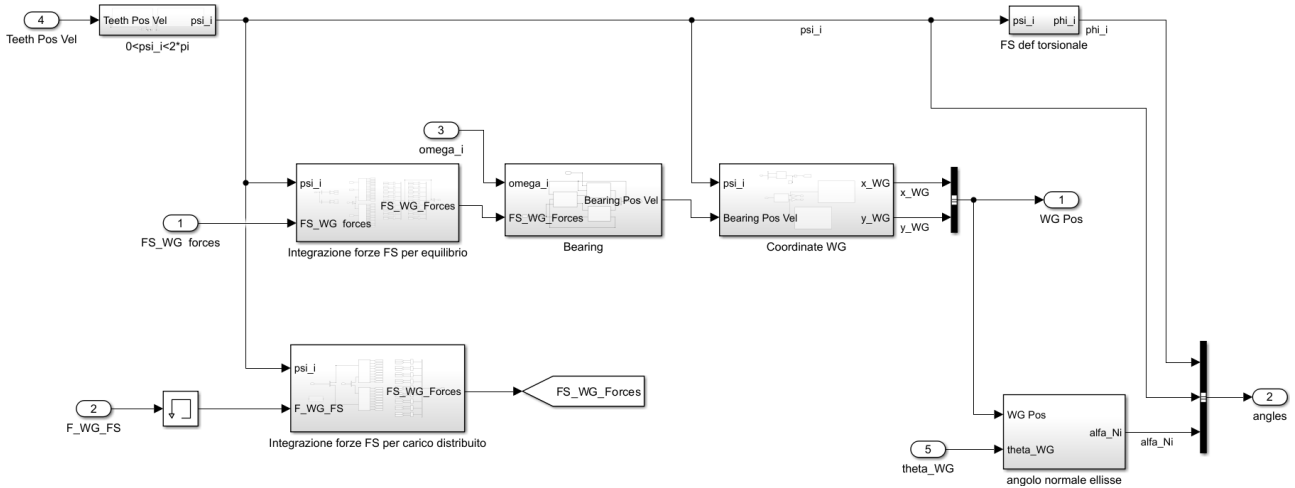


Figura 7.2 Blocco Wave Generator

## 7.1 Interfaccia tra Wave Generator e Flexspline

L'analisi degli spostamenti e delle sole forze scambiate all'interno del wave generator, ossia del cuscinetto, sono state già effettuate nel capitolo 5. Pertanto, in questo paragrafo si analizza il comportamento all'interfaccia tra il wave generator e la flexspline.

Nella Figura 7.3 si nota come la flexspline, inizialmente circolare, sia deformata a contatto con il wave generator e ne segua il profilo. In particolare, facendo riferimento alla Figura 7.4 (zoom in alto a destra), si osserva come il contatto tra i due componenti è in realtà una compenetrazione, con il wave generator esterno alla flexspline. Questa compenetrazione è necessaria per generare forze di contatto nella modellazione molla – smorzatore. Al contrario, nelle zone in alto a sinistra e in basso a destra c'è assenza di contatto, osservabile meglio nella Figura 7.5 (zoom in alto a sinistra). In questo caso è la flexspline ad essere esterna al wave generator, con conseguente assenza di forze di contatto.

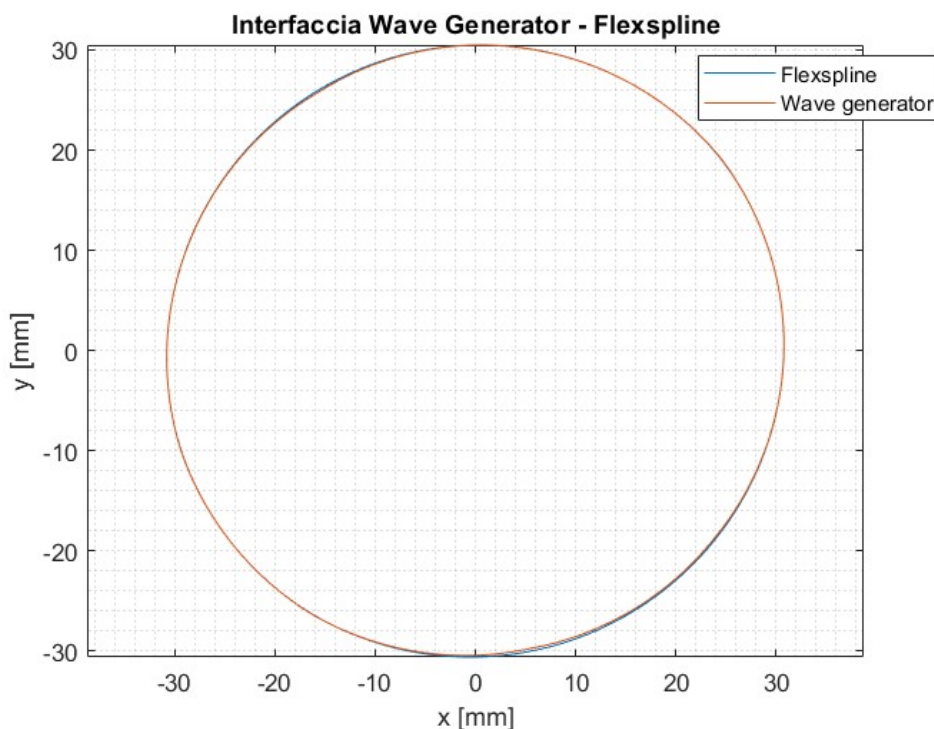


Figura 7.3 Interfaccia tra Wave Generator e Flexspline

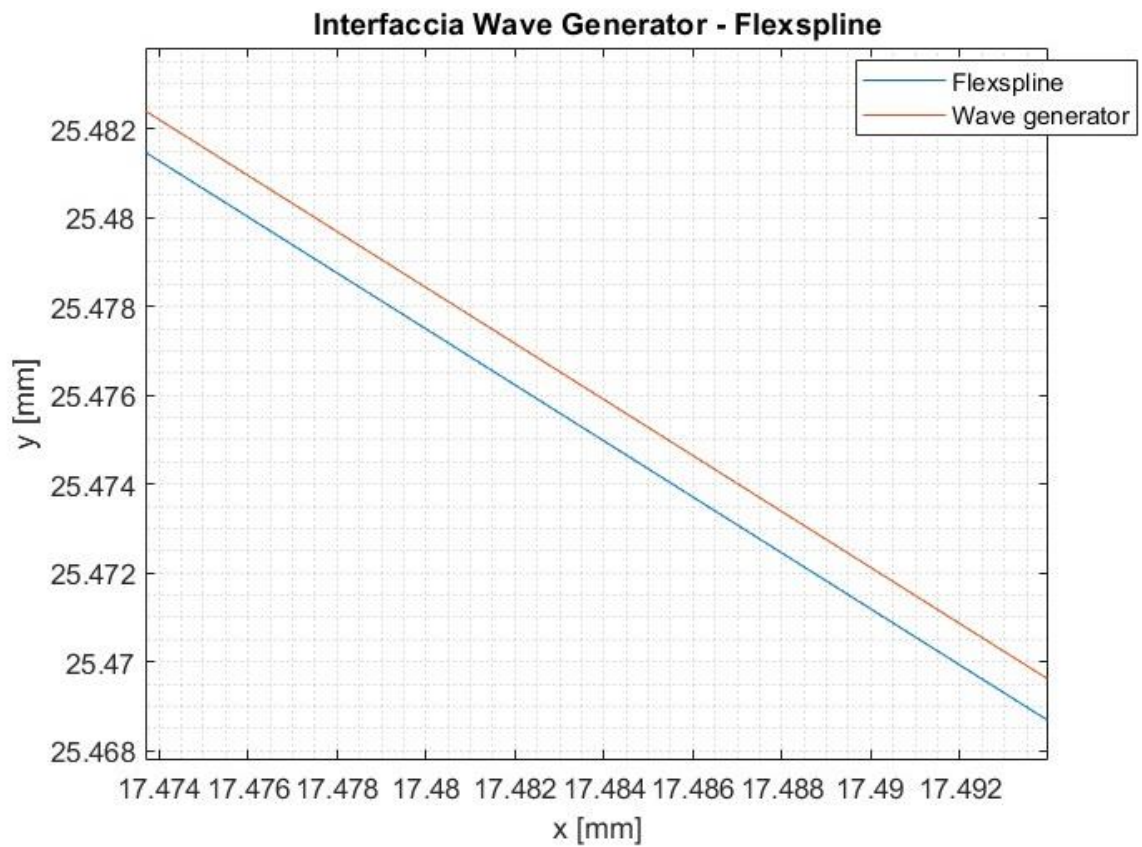


Figura 7.4 Zoom sul contatto - Interfaccia tra Wave Generator e Flexspline

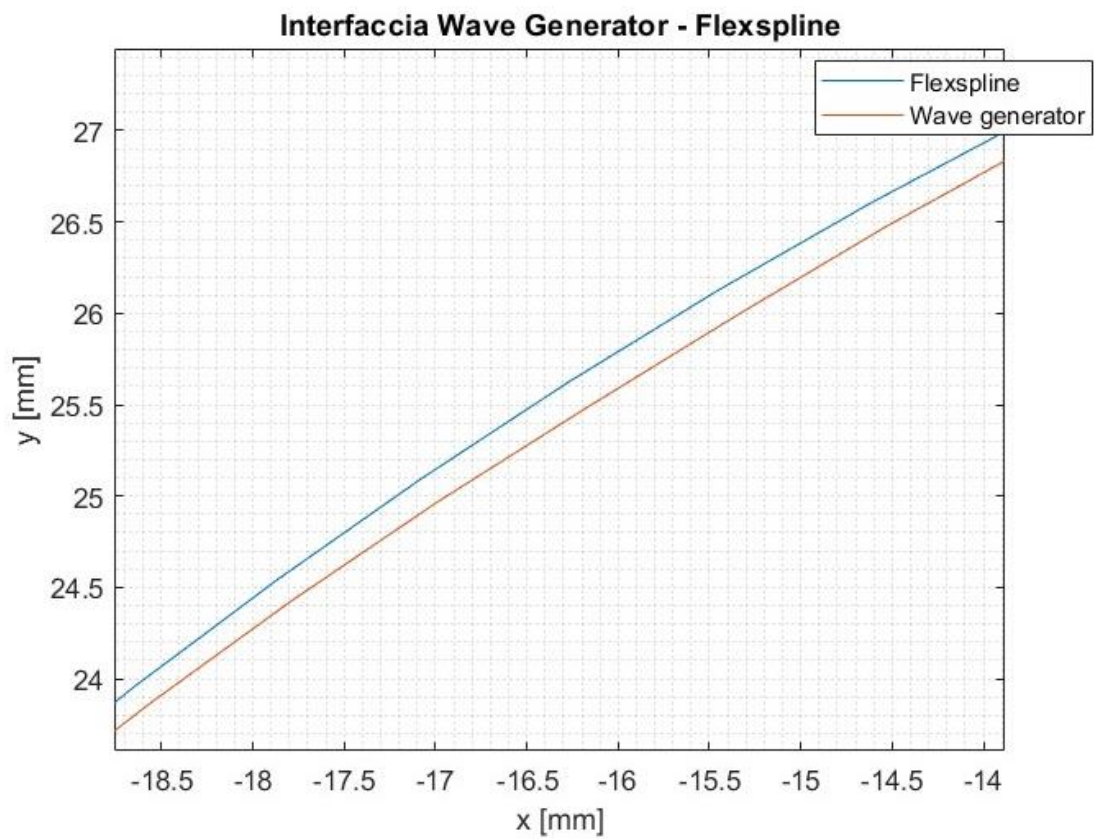


Figura 7.5 Zoom sul distacco - Interfaccia tra Wave Generator e Flexspline

Nella Figura 7.6 sono riportate le stesse condizioni analizzate in precedenza, ma invece della sola interfaccia è presente la ralla completa e le sue condizioni indeformate. Valgono le analoghe considerazioni sul contatto e sul distacco delle superfici; tuttavia, in questo caso si osserva come queste condizioni siano coerenti rispetto a quelle indeformate. Infatti, quando la ralla è esterna rispetto alle sue condizioni indeformate, l'interfaccia del wave generator è esterno alla flexspline (contatto) e viceversa (distacco). È riportato un dettaglio di ciò nella Figura 7.7 e nella Figura 7.8.

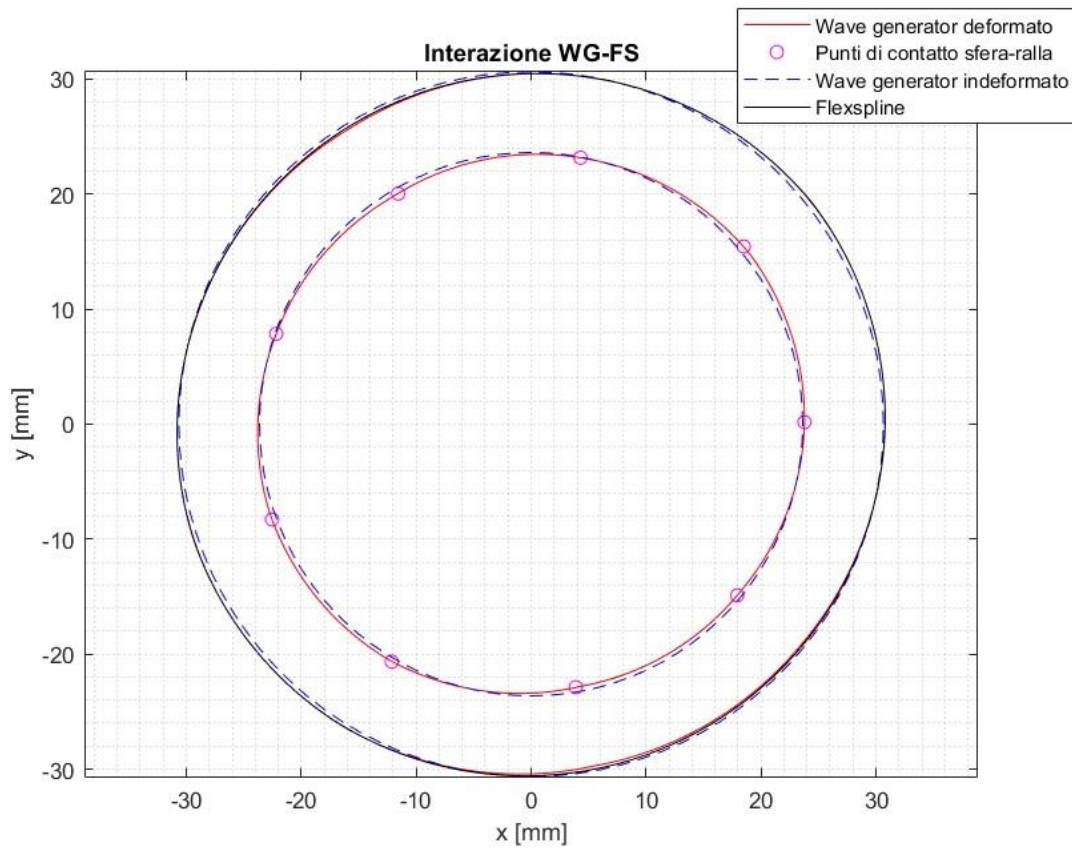


Figura 7.6 Interazione tra Wave Generator e Flexspline

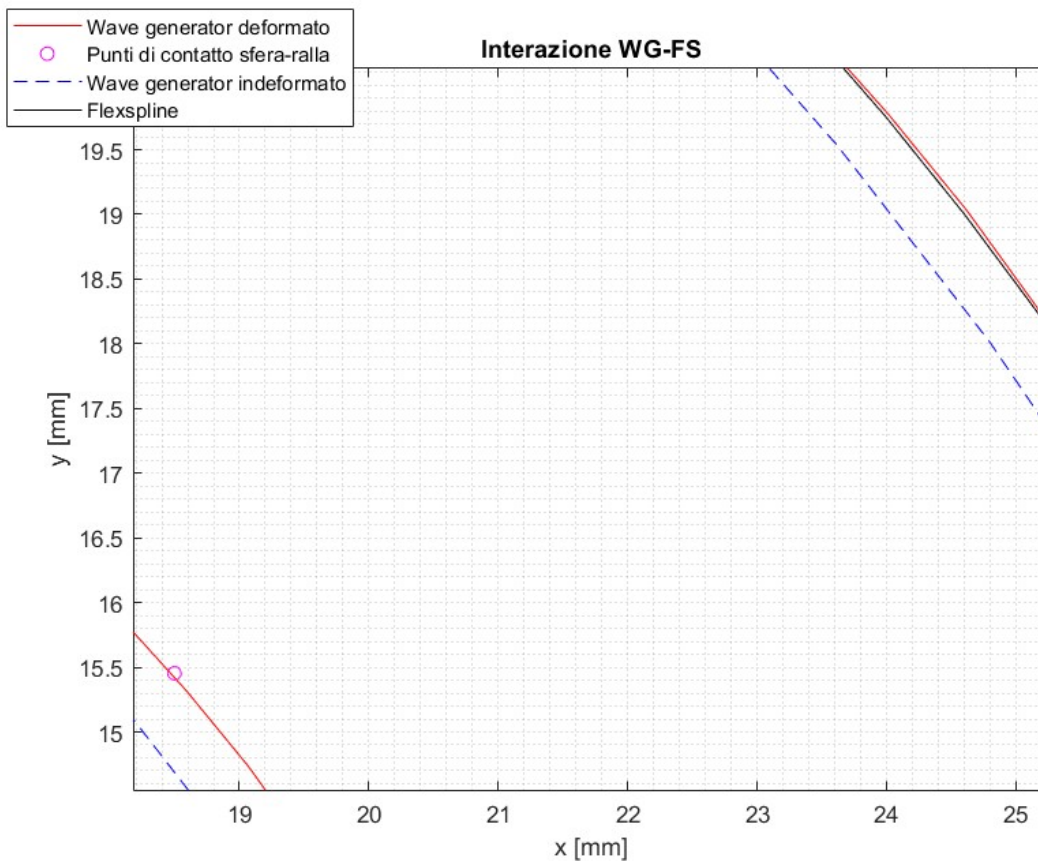


Figura 7.7 Zoom sul contatto - Interazione tra Wave Generator e Flexspline

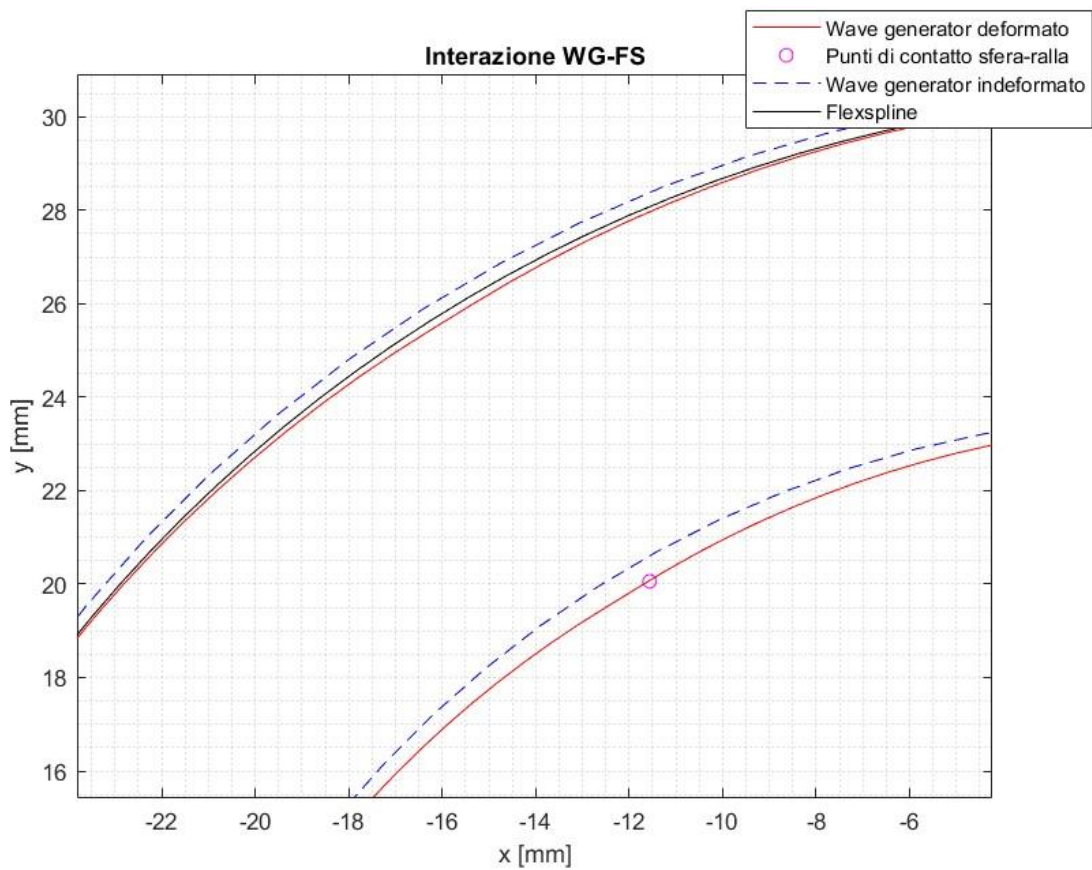


Figura 7.8 Zoom sul distacco - Interazione tra Wave Generator e Flexspline

# Conclusioni e sviluppi futuri

Il Wave Generator è un componente essenziale nel funzionamento di un riduttore armonico, e pertanto in un modello multibody di riduttore è necessario simularne ogni suo componente. In primo luogo, è stata eseguita la descrizione analitica delle interazioni tra i componenti del cuscinetto implementate durante la fase di deformazione. Questa è necessaria per andare a ricavare le coordinate, a deformazione completa, dei punti di contatto tra le sfere e la ralla esterna. In seguito, si sono descritte analiticamente le interazioni tra i componenti del cuscinetto durante la sua rotazione. È stato inserito un livello di dettaglio in questa fase con l'implementazione delle equazioni dinamiche di ogni singola sfera.

È stato necessario riadattare il modello di rotazione al fine di essere utilizzato come Wave Generator nel modello di riduttore completo, implementando anche la deformazione della ralla esterna tra i punti di contatto con le sfere.

In seguito, sono stati riportati i risultati delle simulazioni di deformazione e rotazione effettuate, prestando particolare attenzione alle posizioni dei punti di contatto sfera-ralle prima, e della ralla esterna completa poi. A seguire, sono stati riportati gli andamenti delle forze di contatto e delle forze interne alla ralla esterna. Particolare attenzione va posta sulla coerenza dei risultati ottenuti rispetto alla posizione della ralla interna, essendo questa l'input dei modelli e unico componente del cuscinetto ottenuto tramite formule matematiche e non ricavato dalle interazioni degli altri componenti.

L'ultimo passo del lavoro di tesi è stato, dopo aver descritto il modello di riduttore completo preesistente, aggiornarne il blocco Wave Generator. I risultati ottenuti dimostrano come il modello implementato soddisfi gli obiettivi prefissati, e come tutti i componenti del riduttore abbiano comportamenti coerenti rispetto alla ralla interna.

Tutti i modelli presentati in questo lavoro di tesi necessiteranno di un tuning dei valori di rigidità e smorzamenti al fine di ottenere dei risultati corretti non solo dal punto di vista qualitativo, ma anche quantitativo.



# Bibliografia

- [1] Chintamani Mishra, Arun Kumar Samantaray, Goutam Chakraborty. *Ball bearing defect models: A study of simulated and experimental fault signatures*. [https://www.researchgate.net/publication/316345222\\_Ball\\_bearing\\_defect\\_models\\_A\\_study\\_of\\_simulated\\_and\\_experimental\\_fault\\_signatures?enrichId=rgreq-952b67d0a7bd5bcd8da77d79c64fa3f0-XXX&enrichSource=Y292ZXJQYWdlOzMxNjM0NTIyMjtBUzo3OTcyNDIzMTk0NTAxMTJAMTU2NzA4ODc4OTA4MA%3D%3D&el=1\\_x\\_3&esc=publicationCoverPdf](https://www.researchgate.net/publication/316345222_Ball_bearing_defect_models_A_study_of_simulated_and_experimental_fault_signatures?enrichId=rgreq-952b67d0a7bd5bcd8da77d79c64fa3f0-XXX&enrichSource=Y292ZXJQYWdlOzMxNjM0NTIyMjtBUzo3OTcyNDIzMTk0NTAxMTJAMTU2NzA4ODc4OTA4MA%3D%3D&el=1_x_3&esc=publicationCoverPdf), 2017
- [2] Fang Yang, Mingyang Song, Xiqiang Ma, Nan Guo and Yujun Xue. *Research on H7006C Angular Contact Ball Bearing Slipping Behavior under Operating Conditions*. <https://doi.org/10.3390/lubricants11070298>, 2023
- [3] Salvatore Sartorio, *Sviluppo di un modello multibody di un riduttore armonico*. Tesi di laurea magistrale, Politecnico di Torino, 2022/2023
- [4] Calcolo freccia trave incastrata - Nunzio Grieco - Calcoli. (s.d.). Nunzio Grieco. <https://www.nunziogrieco.it/calcolo-freccia-trave-incastrata/>