

POLITECNICO DI TORINO

Laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica



Tesi di Laurea Magistrale

Modellazione cinematica e dinamica di un veicolo cingolato in ambiente Matlab

Relatori:
Prof. Enrico GALVAGNO
Ing. Luca DIMAURO
Ing. Simone VENTURINI

Candidato:
Matteo FAVARETTO

Anno accademico 2023/2024

Abstract

L'obiettivo di questa tesi è sviluppare un modello capace di simulare la cinematica e la dinamica di un veicolo cingolato. Sono state analizzate tre configurazioni di veicoli cingolati, rispettivamente con tre, cinque e sette road wheels. Il focus del lavoro è stato creare un modello che fornisca risultati realistici senza aumentare eccessivamente la complessità computazionale. A tal fine, è stata esclusa l'analisi dei terreni deformabili, concentrandosi su un terreno rigido e limitando lo studio alla dinamica longitudinale e verticale del veicolo, con la dinamica laterale lasciata a futuri sviluppi.

Le equazioni necessarie per descrivere la cinematica e la dinamica del veicolo cingolato sono state derivate e risolte attraverso un approccio matriciale implementato in Matlab/Simulink. Il modello è stato testato su due tipi di terreno rigido: un percorso piano e uno con profilo sinusoidale. Le prove principali considerate includono il test di Coast-Down, l'applicazione di uno step di coppia motrice e la marcia a velocità costante.

Il modello configurato a cinque road è stato validato replicando la configurazione standard del toolkit ATV (Adams Tracked Vehicle) integrato nel software Adams Car, e i risultati ottenuti sono stati confrontati per valutarne accuratezza e affidabilità. Il modello permette di analizzare grandezze fondamentali durante la marcia del veicolo, come velocità, accelerazioni, forze, scuotimenti, beccheggio, tensioni del cingolo e scorrimenti, evidenziando l'influenza delle variazioni nei parametri del veicolo su tali grandezze.

Indice dei contenuti

Indice delle figure.....	III
Indice delle tabelle.....	XIV
1. Introduzione.....	1
2. Descrizione del veicolo cingolato oggetto di studio.....	3
2.1 Configurazione geometrica del veicolo cingolato.....	3
2.2 Caratteristiche fisiche.....	5
3. Modellazione del veicolo cingolato.....	9
3.1 Ipotesi ed assunzioni.....	9
3.2 Modello di sospensione semplificato.....	9
3.3 Powertrain.....	13
3.4 Cinematica del veicolo.....	13
3.5 Cinematica del cingolo.....	20
3.6 Modellazione del cingolo.....	21
3.7 Contatto cingolo-terreno.....	24
3.8 Coppia di attrito al perno.....	26
4. Modello statico.....	28
4.1 Diagrammi di corpo libero ed equazioni di equilibrio statico.....	28
4.2 Sistema di equazioni risolvente.....	34
4.3 Soluzione del sistema con approccio matriciale.....	36
4.4 Calcolo della tensione statica del cingolo nota la forza di tensionamento.....	41
4.5 Analisi dei risultati del modello statico.....	42
5. Modello dinamico.....	59
5.1 Diagrammi di corpo libero ed equazioni dinamiche.....	59
5.2 Sistema di equazioni risolvente.....	71
5.3 Soluzione del sistema con approccio matriciale.....	78
5.4 Condizioni iniziali del problema.....	87
5.5 Modello Simulink.....	88
6. Simulazioni.....	97
6.1 Strada piana.....	97
6.2 Profilo stradale sinusoidale.....	116
7. Estensione del modello ad un veicolo cingolato con un numero N di road wheels e un numero n di ruote di supporto.....	135
7.1 Cinematica del veicolo.....	135

7.2	Modellazione del cingolo	139
7.3	Modello statico	140
7.4	Modello dinamico	145
8.	Modello con cinque road wheels.....	158
8.1	Caratteristiche veicolo cingolato	158
8.2	Modellazione cingolo	166
8.3	Modello statico	167
8.4	Modello dinamico	169
8.5	Validazione modello	189
9.	Modello con sette road wheels	228
9.1	Caratteristiche veicolo cingolato	228
9.2	Modellazione cingolo	232
9.3	Modello statico	233
9.4	Modello dinamico	236
9.5	Simulazioni.....	266
10.	Conclusioni e sviluppi futuri	302
11.	Appendice.....	303
11.1	Tool calcolo catena	303
11.2	Realizzazione animazione	312
11.3	Descrizione funzione analisi statica	318
12.	Bibliografia.....	320

Indice delle figure

Figura 2.1 - Configurazione geometrica (veicolo cingolato con tre road wheels).....	4
Figura 2.2 - Rappresentazione ruote e cingolo realizzata tramite il tool calcolo catena in ambiente Matlab (veicolo cingolato con tre road wheels).....	5
Figura 2.3 - Sistema ad un grado di libertà verticale.....	8
Figura 3.1 - Schema di sospensione a bracci longitudinali	10
Figura 3.2 - Modello di sospensione semplificato	11
Figura 3.3 - Congruenza traslazioni verticali (veicolo cingolato con tre road wheels).....	13
Figura 3.4 - Velocità di traslazione verticale del punto di attacco 1 (veicolo cingolato con tre road wheels)	14
Figura 3.5 - Velocità di traslazione verticale del punto di attacco 2 (veicolo cingolato con tre road wheels)	15
Figura 3.6 - Velocità di traslazione verticale del punto di attacco 3 (veicolo cingolato con tre road wheels)	15
Figura 3.7 - Accelerazioni puntuali tensioner wheel (veicolo cingolato con tre road wheels).....	16
Figura 3.8 - Accelerazioni puntuali sprocket wheel (veicolo cingolato con tre road wheels)	17
Figura 3.9 - Accelerazioni puntuali road wheel 1 (veicolo cingolato con tre road wheels).....	18
Figura 3.10 - Accelerazioni puntuali road wheel 2 (veicolo cingolato con tre road wheels)	19
Figura 3.11 - Accelerazioni puntuali road wheel 3 (veicolo cingolato con tre road wheels)	19
Figura 3.12 - Suddivisione tratti del cingolo (veicolo cingolato con tre road wheels)	21
Figura 3.13 - Distribuzione del penso del cingolo (veicolo cingolato con tre road wheels)	23
Figura 3.14 - Forza longitudinale vs Scorrimento longitudinale.....	25
Figura 3.15 - Rappresentazione forze longitudinali (veicolo cingolato con tre road wheels)	25
Figura 3.16 - Coppia di attrito al perno su generica ruota.....	26
Figura 3.17 - Coppia di attrito al perno [1]	27
Figura 4.1 - Diagramma di corpo libero della sprocket wheel in statica (veicolo cingolato con tre road wheels).....	29
Figura 4.2 - Diagramma di corpo libero della ruota di supporto in statica (veicolo cingolato con tre road wheels).....	30
Figura 4.3 - Diagramma di corpo libero della tensioner wheel in statica (veicolo cingolato con tre road wheels).....	30
Figura 4.4 - Diagramma di corpo libero della road wheel 1 in statica (veicolo cingolato con tre road wheels).....	31
Figura 4.5 - Diagramma di corpo libero della road wheel 2 in statica (veicolo cingolato con tre road wheels).....	32
Figura 4.6 - Diagramma di corpo libero della road wheel 3 in statica (veicolo cingolato con tre road wheels).....	32

Figura 4.7 - Diagramma di corpo libero della massa sospesa in statica (veicolo cingolato con tre road wheels)	33
Figura 4.8 - Forze verticali a terra normalizzate (veicolo cingolato con tre road wheels) 40	
Figura 4.9 - Distribuzione di tensione lungo il cingolo	42
Figura 4.10 - Forze verticali a terra normalizzate (veicolo cingolato con tre road wheels con tensionamento nullo)	43
Figura 4.11 - Forze verticali a terra normalizzate (effetto forza di tensionamento) nel veicolo cingolato con tre road wheels	44
Figura 4.12 - Forze verticali a terra normalizzate vs Forza di tensionamento normalizzata (veicolo cingolato con tre road wheels)	45
Figura 4.13 - Scuotimento baricentro vs Forza di tensionamento normalizzata (veicolo cingolato con tre road wheels)	46
Figura 4.14 - Rigidezza equivalente normalizzata vs Forza di tensionamento normalizzata (veicolo cingolato con tre road wheels)	47
Figura 4.15 - Reazioni vincolari verticali vs Forza di tensionamento normalizzata (veicolo cingolato con tre road wheels)	47
Figura 4.16 - Configurazione geometrica (veicolo cingolato con tre road wheels simmetrico).....	48
Figura 4.17 - Distribuzione forze a terra (veicolo cingolato con tre road wheels simmetrico).....	50
Figura 4.18 - Forze verticali a terra normalizzate (veicolo cingolato con tre road wheels simmetrico).....	51
Figura 4.19 - Configurazione geometrica (veicolo cingolato con tre road wheels con baricentro spostato verso l'anteriore).....	52
Figura 4.20 - Forze verticali a terra normalizzate (veicolo cingolato con tre road wheels con baricentro spostato verso l'anteriore).....	54
Figura 4.21 - Diagramma corpo libero massa sospesa (veicolo cingolato con tre road wheels con coppia applicata aggiuntiva).....	55
Figura 4.22 - Angolo di beccheggio vs Coppia applicata (veicolo cingolato con tre road wheels)	56
Figura 4.23 - Rigidezza a beccheggio vs Forza di tensionamento normalizzata (veicolo cingolato con tre road wheels)	56
Figura 5.1 - Diagramma corpo libero sprocket wheel in dinamica (veicolo cingolato con tre road wheels)	60
Figura 5.2 - Diagramma corpo libero ruota di supporto in dinamica (veicolo cingolato con tre road wheels)	61
Figura 5.3 - Diagramma corpo libero tensioner wheel in dinamica (veicolo cingolato con tre road wheels)	62
Figura 5.4 - Diagramma corpo libero road wheel 1 in dinamica (veicolo cingolato con tre road wheels)	64
Figura 5.5 - Diagramma corpo libero road wheel 2 in dinamica (veicolo cingolato con tre road wheels)	65
Figura 5.6 - Diagramma corpo libero road wheel 3 in dinamica (veicolo cingolato con tre road wheels)	66
Figura 5.7 - Diagramma corpo libero massa sospesa in dinamica (veicolo cingolato con tre road wheels)	67

Figura 5.8 - Diagramma di corpo libero del tratto 2 del cingolo in dinamica (veicolo cingolato con tre road wheels).....	68
Figura 5.9 - Diagramma di corpo libero del tratto 4 del cingolo in dinamica (veicolo cingolato con tre road wheels).....	69
Figura 5.10 - Diagramma di corpo libero del tratto 5 del cingolo in dinamica (veicolo cingolato con tre road wheels).....	69
Figura 5.11 - Diagramma di corpo libero del tratto 7 del cingolo in dinamica (veicolo cingolato con tre road wheels).....	70
Figura 5.12 - Diagramma di corpo libero del tratto 9 del cingolo in dinamica (veicolo cingolato con tre road wheels).....	70
Figura 5.13 - Diagramma di corpo libero del tratto 10 del cingolo in dinamica (veicolo cingolato con tre road wheels).....	71
Figura 5.14 - Schema modello Simulink.....	89
Figura 5.15 - Schema regolatore PID.....	92
Figura 5.16 - Rappresentazione grandezze caratteristiche di un controllore.....	94
Figura 5.17 - Velocità di avanzamento veicolo vs Tempo (Taratura K_P).....	95
Figura 5.18 - Velocità di avanzamento veicolo vs Tempo (risposta del sistema ad un target di step di velocità).....	96
Figura 6.1 - Profilo stradale (strada piana).....	97
Figura 6.2 - Accelerazione longitudinale vs Tempo (prova di Coast-Down su strada piana con veicolo cingolato con tre road wheels).....	98
Figura 6.3 - Velocità di avanzamento veicolo vs Tempo (prova di Coast-Down su strada piana con veicolo cingolato con tre road wheels).....	99
Figura 6.4 - Velocità angolare sprocket wheel vs Tempo (prova di Coast-Down su strada piana con veicolo cingolato con tre road wheels).....	99
Figura 6.5 - Forze verticali a terra vs Tempo (prova di Coast-Down su strada piana con veicolo cingolato con tre road wheels).....	100
Figura 6.6 - Forze longitudinali vs Tempo (prova di Coast-Down su strada piana con veicolo cingolato con tre road wheels).....	101
Figura 6.7 - Rappresentazione tensioni del cingolo (veicolo cingolato con tre road wheels).....	102
Figura 6.8 - Tensioni dei vari tratti del cingolo vs Tempo (prova di Coast-Down su strada piana con $F = 0.3m_{tot}g$ con veicolo cingolato con tre road wheels).....	102
Figura 6.9 - Tensioni dei vari tratti del cingolo vs Tempo (prova di Coast-Down su strada piana con $F = 0.6m_{tot}g$ con veicolo cingolato con tre road wheels).....	103
Figura 6.10 - Scuotimento baricentro vs Tempo (prova di Coast-Down su strada piana con veicolo cingolato con tre road wheels).....	104
Figura 6.11 - Accelerazione verticale vs Tempo (prova di Coast-Down su strada piana con veicolo cingolato con tre road wheels).....	104
Figura 6.12 - Angolo di beccheggio vs Tempo (prova di Coast-Down su strada piana con veicolo cingolato con tre road wheels).....	105
Figura 6.13 - Scorrimento longitudinale durante (prova di Coast-Down su strada piana con veicolo cingolato con tre road wheels).....	106
Figura 6.14 - Creazione segnale coppia motrice su Simulink.....	106
Figura 6.15 - Coppia motrice applicata alla sprocket wheel vs Tempo (veicolo cingolato con tre road wheels).....	107

Figura 6.16 - Accelerazione longitudinale vs Tempo (Step di coppia motrice su strada piana con veicolo cingolato con tre road wheels)	108
Figura 6.17 – Velocità di avanzamento veicolo vs Tempo (Step di coppia motrice su strada piana con veicolo cingolato con tre road wheels)	108
Figura 6.18 - Velocità angolare sprocket wheel vs Tempo (Step di coppia motrice su strada piana con veicolo cingolato con tre road wheels)	109
Figura 6.19 - Forze verticali a terra vs Tempo (Step di coppia motrice su strada piana con veicolo cingolato con tre road wheels).....	110
Figura 6.20 - Forze longitudinali vs Tempo (Step di coppia motrice su strada piana con veicolo cingolato con tre road wheels).....	110
Figura 6.21 - Rappresentazione tensioni del cingolo (veicolo cingolato con tre road wheels)	111
Figura 6.22 - Tensioni dei tratti del cingolo vs Tempo (Step di coppia motrice su strada piana con $F = 0.3m_{tot}g$ con veicolo cingolato con tre road wheels)	112
Figura 6.23 - Tensioni dei tratti del cingolo vs Tempo (Step di coppia motrice su strada piana con $F = 0.6m_{tot}g$ con veicolo cingolato con tre road wheels)	113
Figura 6.24 - Scuotimento baricentro vs Tempo (Step di coppia motrice su strada piana con veicolo cingolato con tre road wheels).....	114
Figura 6.25 - Angolo di beccheggio vs Tempo (Step di coppia motrice su strada piana con veicolo cingolato con tre road wheels).....	114
Figura 6.26 - Accelerazione verticale vs Tempo (Step di coppia motrice su strada piana con veicolo cingolato con tre road wheels).....	115
Figura 6.27 - Scorrimento longitudinale vs Tempo (Step di coppia motrice su strada piana con veicolo cingolato con tre road wheels).....	115
Figura 6.28 - Profilo stradale sinusoidale	117
Figura 6.29 - Accelerazione longitudinale vs Tempo (prova di Coast-Down su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con tre road wheels)	118
Figura 6.30 - Velocità longitudinale veicolo vs Tempo (prova di Coast-Down su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con tre road wheels)	118
Figura 6.31 - Velocità angolare sprocket wheel vs Tempo (prova di Coast-Down su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con tre road wheels)	119
Figura 6.32 - Forze verticali a terra vs Tempo (prova di Coast-Down su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con tre road wheels).....	120
Figura 6.33 - Forze longitudinali vs Tempo (prova di Coast-Down su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con tre road wheels).....	120
Figura 6.34 - Rappresentazione tensioni del cingolo (veicolo cingolato con tre road wheels)	121
Figura 6.35 - Tensioni dei tratti del cingolo vs Tempo (prova di Coast-Down su profilo stradale sinusoidale con $F = 0.3m_{tot}g$ con veicolo cingolato con tre road wheels)	122
Figura 6.36 - Tensioni dei tratti del cingolo vs Tempo (prova di Coast-Down su profilo stradale sinusoidale con $F = 0.6m_{tot}g$ con veicolo cingolato con tre road wheels)	123
Figura 6.37 - Scuotimento baricentro vs Tempo (prova di Coast-Down su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con tre road wheels).....	123
Figura 6.38 - Accelerazione verticale vs Tempo (prova di Coast-Down su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con tre road wheels).....	124
Figura 6.39 - Angolo di beccheggio vs Tempo (prova di Coast-Down su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con tre road wheels).....	124

Figura 6.40 - Scorrimento longitudinale vs Tempo (prova di Coast-Down su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con tre road wheels).....	125
Figura 6.41 - Coppia motrice applicata alla sprocket wheel vs Tempo (veicolo cingolato con tre road wheels).....	125
Figura 6.42 - Accelerazione longitudinale vs Tempo (Step di coppia motrice su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con tre road wheels).....	126
Figura 6.43 - Velocità longitudinale veicolo vs Tempo (Step di coppia motrice su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con tre road wheels).....	127
Figura 6.44 - Velocità angolare sprocket wheel vs Tempo (Step di coppia motrice su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con tre road wheels).....	127
Figura 6.45 - Forze verticali a terra vs Tempo (Step di coppia motrice su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con tre road wheels)	128
Figura 6.46 - Forze longitudinali vs Tempo (Step di coppia motrice su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con tre road wheels)	128
Figura 6.47 - Rappresentazione tensioni del cingolo (veicolo cingolato con tre road wheels).....	129
Figura 6.48 - Tensioni dei tratti del cingolo vs Tempo (Step di coppia motrice su profilo stradale sinusoidale con $F = 0.3m_{tot}g$ con veicolo cingolato con tre road wheels).....	130
Figura 6.49 - Tensioni dei tratti del cingolo vs Tempo (Step di coppia motrice su profilo stradale sinusoidale con $F = 0.6m_{tot}g$ con veicolo cingolato con tre road wheels).....	131
Figura 6.50 - Scuotimento baricentro vs Tempo (Step di coppia motrice su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con tre road wheels)	131
Figura 6.51 - Angolo di beccheggio vs Tempo (Step di coppia motrice su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con tre road wheels)	132
Figura 6.52 - Accelerazione verticale vs Tempo (Step di coppia motrice su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con tre road wheels)	133
Figura 6.53 - Scorrimento longitudinale vs Tempo (Step di coppia motrice su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con tre road wheels).....	134
Figura 7.1 - Configurazione geometrica generica (veicolo cingolato con N road wheels)	135
Figura 7.2 - Congruenza traslazioni verticali degli N assali (veicolo cingolato con N road wheels).....	136
Figura 7.3 - Velocità di traslazione verticale punto di attacco i-esimo se $x_{C,RW,i} > d_{CG}$.	137
Figura 7.4 - Velocità di traslazione verticale punto di attacco i-esimo se $x_{C,RW,i} < d_{CG}$.	137
Figura 7.5 - Accelerazioni puntuali road wheel i-esima se $x_{C,RW,i} > d_{CG}$	138
Figura 7.6 - Accelerazioni puntuali road wheel i-esima se $x_{C,RW,i} < d_{CG}$	139
Figura 7.7 - Distribuzione peso del cingolo (veicolo cingolato con N road wheels)	140
Figura 7.8 - Diagramma di corpo libero della sprocket wheel in statica (veicolo cingolato con N road wheels).....	140
Figura 7.9 - Diagramma di corpo libero ruota di supporto i-esima (veicolo cingolato con N road wheels).....	141
Figura 7.10 - Diagramma di corpo libero della tensioner wheel in statica (veicolo cingolato con N road wheels).....	142
Figura 7.11 - Diagramma di corpo libero della road wheel 1 in statica (veicolo cingolato con N road wheels).....	143

Figura 7.12 - Diagramma corpo libero road wheel i -esima in statica (veicolo cingolato con N road wheels)	143
Figura 7.13 - Diagramma corpo libero road wheel N in statica (veicolo cingolato con N road wheels)	144
Figura 7.14 - Diagramma corpo libero massa sospesa in statica (veicolo cingolato con N road wheels)	145
Figura 7.15 - Diagramma corpo libero sprocket wheel in dinamica (veicolo cingolato con N road wheels)	146
Figura 7.16 - Diagramma corpo libero ruota di supporto i -esima in dinamica (veicolo cingolato con N road wheels).....	147
Figura 7.17 - Diagramma corpo libero tensioner wheel in dinamica (veicolo cingolato con N road wheels)	148
Figura 7.18 - Diagramma corpo libero road wheel 1 in dinamica (veicolo cingolato con N road wheels)	149
Figura 7.19 - Diagramma corpo libero road wheel i -esima (con $i \neq 1$ e $i \neq N$) in dinamica se $x_{C,RW,i} > d_{CG}$ (veicolo cingolato con N road wheels).....	150
Figura 7.20 - Diagramma corpo libero road wheel i -esima (con $i \neq 1$ e $i \neq N$) in dinamica se $x_{C,RW,i} < d_{CG}$ (veicolo cingolato con N road wheels).....	151
Figura 7.21 - Diagramma corpo libero road wheel N in dinamica (veicolo cingolato con N road wheels)	152
Figura 7.22 - Diagramma corpo libero massa sospesa in dinamica (veicolo cingolato con N road wheels)	153
Figura 7.23 - Diagramma di corpo libero del tratto di cingolo tra road wheel N e sprocket wheel (veicolo cingolato con N road wheels)	154
Figura 7.24 - Diagramma di corpo libero del tratto di cingolo tra sprocket wheel e ruota di supporto n (veicolo cingolato con N road wheels).....	155
Figura 7.25 - Diagramma di corpo libero del tratto di cingolo k -esimo tra due ruote di supporto consecutive (veicolo cingolato con N road wheels).....	155
Figura 7.26 - Diagramma di corpo libero del tratto di cingolo k -esimo tra la ruota di supporto 1 e la tensioner wheel (veicolo cingolato con N road wheels).....	156
Figura 7.27 - Diagramma di corpo libero del tratto di cingolo k -esimo tra la tensioner wheel e la road wheel 1 (veicolo cingolato con N road wheels).....	156
Figura 7.28 - Diagramma di corpo libero del tratto di cingolo k -esimo tra due road wheel consecutive (veicolo cingolato con N road wheels).....	157
Figura 8.1 - Rappresentazione ruote e cingolo realizzata tramite il tool calcolo catena in ambiente Matlab (veicolo cingolato con cinque road wheels).....	159
Figura 8.2 - Rigidezza torsionale nell'intorno dell'origine (modello ATV)	161
Figura 8.3 - Equivalenza tra spostamento angolare e spostamento lineare verticale.....	161
Figura 8.4 - Equivalenza tra velocità angolare e velocità lineare verticale	164
Figura 8.5 - Suddivisione dei tratti del cingolo (veicolo cingolato con cinque road wheels)	166
Figura 8.6 - Confronto reazioni vincolari verticali vs Forza di tensionamento (Simulink vs ATV, con $K_{RS} = 0.5$).....	190
Figura 8.7 - Confronto reazioni vincolari verticali vs Forza di tensionamento (Simulink vs ATV, con $K_{RS} = 0.25$)	191

Figura 8.8 - Coppie applicate alla sprocket wheel vs Tempo (veicolo cingolato con cinque road wheels).....	192
Figura 8.9 - Velocità di avanzamento veicolo (figura in alto) e accelerazione longitudinale (figura in basso) vs Tempo (effetto coppia resistente) nel veicolo cingolato con cinque road wheels.....	193
Figura 8.10 - Velocità di avanzamento veicolo (figura in alto) e accelerazione longitudinale (figura in basso) vs Tempo (effetto attrito al perno) nel veicolo cingolato con cinque road wheels.....	194
Figura 8.11 - Velocità di avanzamento veicolo (figura in alto) e velocità angolare sprocket wheel (figura in basso) vs Tempo (effetto raggio sprocket equivalente) nel veicolo cingolato con cinque road wheels.....	195
Figura 8.12 - Velocità di avanzamento veicolo (figura in alto) e velocità angolare sprocket wheel (figura in basso) vs Tempo (effetto scorrimento soglia) nel veicolo cingolato con cinque road wheels.....	196
Figura 8.13 - Scorrimento longitudinale vs Tempo (effetto scorrimento soglia) nel veicolo cingolato con cinque road wheels.....	196
Figura 8.14 - Scuotimento baricentro (figura in alto) e angolo di beccheggio (figura in basso) vs Tempo (veicolo cingolato con cinque road wheels).....	197
Figura 8.15 - Accelerazione verticale vs Tempo (veicolo cingolato con cinque road wheels).....	198
Figura 8.16 - Rappresentazione tensioni del cingolo (modello Matlab-Simulink con veicolo cingolato con cinque road wheels).....	199
Figura 8.17 - Tensioni dei tratti del cingolo vs Tempo (modello Matlab-Simulink con veicolo cingolato con cinque road wheels).....	199
Figura 8.18 - Tensioni dei tratti del cingolo vs Tempo (modello ATV).....	200
Figura 8.19 - Tensioni dei tratti del cingolo vs Tempo (Simulink vs ATV).....	201
Figura 8.20 - Forze verticali a terra (figura in alto) e Forze longitudinali (figura in basso) vs Tempo (veicolo cingolato con cinque road wheels).....	202
Figura 8.21 - Potenza dissipata per resistenza all'avanzamento del cingolo vs Tempo (veicolo cingolato con cinque road wheels).....	203
Figura 8.22 - Potenze dissipate per attrito al perno vs Tempo (veicolo cingolato con cinque road wheels).....	204
Figura 8.23 - Potenze dissipate per attrito coulombiano al perno vs Tempo (veicolo cingolato con cinque road wheels).....	205
Figura 8.24 - Potenze dissipate per smorzamento viscoso al perno vs Tempo (veicolo cingolato con cinque road wheels).....	206
Figura 8.25 - Confronto potenze vs Tempo (veicolo cingolato con cinque road wheels).....	207
Figura 8.26 - Profilo stradale sinusoidale.....	208
Figura 8.27 - Profilo stradale sinusoidale (rappresentazione alternativa).....	209
Figura 8.28 - Velocità di avanzamento veicolo vs Tempo (Strada sinusoidale con velocità costante) con veicolo cingolato con cinque road wheels.....	210
Figura 8.29 - Velocità angolare sprocket wheel vs Tempo (Strada sinusoidale con velocità costante) con veicolo cingolato con cinque road wheels.....	211
Figura 8.30 - Accelerazione longitudinale vs Tempo (Strada sinusoidale con velocità costante) con veicolo cingolato con cinque road wheels.....	211

Figura 8.31 - Scuotimento baricentro vs Tempo su strada sinusoidale con velocità 5 m/s (figura in alto a sinistra), 10 m/s (figura in alto a destra) e 15 m/s (figura in basso a sinistra) con veicolo cingolato con cinque road wheels.....	212
Figura 8.32 - Scuotimento baricentro vs Spazio su strada sinusoidale con velocità 5 m/s (figura in alto a sinistra), 10 m/s (figura in alto a destra) e 15 m/s (figura in basso a sinistra) con veicolo cingolato con cinque road wheels.....	213
Figura 8.33 - Scuotimento baricentro vs Spazio (Strada sinusoidale con velocità costante) con veicolo cingolato con cinque road wheels.....	213
Figura 8.34 - Accelerazione verticale vs Tempo su strada sinusoidale con velocità 5 m/s (figura in alto a sinistra), 10 m/s (figura in alto a destra) e 15 m/s (figura in basso a sinistra) con veicolo cingolato con cinque road wheels.....	214
Figura 8.35 - Angolo di beccheggio vs Tempo su strada sinusoidale con velocità 5 m/s (figura in alto a sinistra), 10 m/s (figura in alto a destra) e 15 m/s (figura in basso a sinistra) con veicolo cingolato con cinque road wheels.....	215
Figura 8.36 - Angolo di beccheggio vs Spazio su strada sinusoidale con velocità 5 m/s (figura in alto a sinistra), 10 m/s (figura in alto a destra) e 15 m/s (figura in basso a sinistra) con veicolo cingolato con cinque road wheels.....	215
Figura 8.37 - Angolo di beccheggio vs Spazio (strada sinusoidale con velocità costante) con veicolo cingolato con cinque road wheels.....	216
Figura 8.38 - Profilo stradale sinusoidale (analisi risposta in frequenza).....	217
Figura 8.39 - Velocità di avanzamento veicolo vs Tempo (rampa di velocità su profilo stradale sinusoidale) con veicolo cingolato con cinque road wheels.....	217
Figura 8.40 - Accelerazione verticale vs Tempo (rampa di velocità su profilo stradale sinusoidale) con veicolo cingolato con cinque road wheels	218
Figura 8.41 - Modulo (figura in alto), fase (figura in centro) e funzione di coerenza (figura in basso) della risposta in frequenza (accelerazione verticale su spostamento stradale) con veicolo cingolato con cinque road wheels.....	219
Figura 8.42 - Modulo (figura in alto), fase (figura in centro) e funzione di coerenza (figura in basso) della risposta in frequenza (accelerazione verticale su spostamento stradale) con veicolo cingolato con cinque road wheels nell'intervallo 0-10 Hz.....	220
Figura 8.43 - Spettrogramma output (accelerazione verticale) con veicolo cingolato con cinque road wheels.....	221
Figura 8.44 - Spettrogramma input (spostamento profilo stradale) con veicolo cingolato con cinque road wheels	222
Figura 8.45 - Modulo (figura in alto), fase (figura in centro) e funzione di coerenza (figura in basso) della risposta in frequenza (accelerazione verticale su spostamento stradale) con veicolo cingolato con cinque road wheels (con smorzamento ridotto) nell'intervallo 0-10 Hz	223
Figura 8.46 - Accelerazione verticale vs Tempo (rampa di velocità su profilo stradale sinusoidale) con veicolo cingolato con cinque road wheels (con smorzamento ridotto)..	224
Figura 8.47 - Accelerazione verticale vs Tempo (rampa di velocità su profilo stradale sinusoidale) Simulink vs ATV.....	225
Figura 8.48 - Modulo della risposta in frequenza (accelerazione verticale su spostamento stradale) nel modello ATV nell'intervallo 0-10 Hz.....	226
Figura 8.49 - Spettrogramma output (accelerazione verticale) nel modello ATV	227

Figura 9.1 - Rappresentazione ruote e cingolo realizzata tramite il tool calcolo catena in ambiente Matlab (veicolo cingolato con sette road wheels).....	229
Figura 9.2 - Suddivisione dei tratti del cingolo (veicolo cingolato con sette road wheels)	232
Figura 9.3 - Profilo stradale (strada piana).....	266
Figura 9.4 - Accelerazione longitudinale vs Tempo (prova di Coast-Down su strada piana con veicolo cingolato con sette road wheels)	267
Figura 9.5 - Velocità di avanzamento veicolo vs Tempo (prova di Coast-Down su strada piana con veicolo cingolato con sette road wheels)	267
Figura 9.6 - Velocità angolare sprocket wheel vs Tempo (prova di Coast-Down su strada piana con veicolo cingolato con sette road wheels)	268
Figura 9.7 - Forze verticali a terra vs Tempo (prova di Coast-Down su strada piana con veicolo cingolato con sette road wheels).....	269
Figura 9.8 - Forze longitudinali vs Tempo (prova di Coast-Down su strada piana con veicolo cingolato con sette road wheels).....	269
Figura 9.9 - Rappresentazione tensioni del cingolo (veicolo cingolato con sette road wheels).....	270
Figura 9.10 - Tensioni dei vari tratti del cingolo vs Tempo (Prova di Coast-Down su strada piana con $F = 0.12m_{tot}g$ con veicolo cingolato con sette road wheels).....	270
Figura 9.11 - Tensioni dei vari tratti del cingolo vs Tempo (Prova di Coast-Down su strada piana con $F = 0.24m_{tot}g$ con veicolo cingolato con sette road wheels).....	271
Figura 9.12 - Scuotimento baricentro vs Tempo (prova di Coast-Down su strada piana con veicolo cingolato con sette road wheels).....	272
Figura 9.13 - Angolo di beccheggio vs Tempo (prova di Coast-Down su strada piana con veicolo cingolato con sette road wheels).....	272
Figura 9.14 - Accelerazione verticale vs Tempo (prova di Coast-Down su strada piana con veicolo cingolato con sette road wheels).....	273
Figura 9.15 - Scorrimento longitudinale vs Tempo (prova di Coast-Down su strada piana con veicolo cingolato con sette road wheels)	273
Figura 9.16 - Coppia motrice applicata alla sprocket wheel vs Tempo (veicolo cingolato con sette road wheels)	274
Figura 9.17 - Accelerazione longitudinale vs Tempo (Step di coppia motrice su strada piana con veicolo cingolato con sette road wheels)	275
Figura 9.18 - Velocità di avanzamento veicolo vs Tempo (Step di coppia motrice su strada piana con veicolo cingolato con sette road wheels)	275
Figura 9.19 - Velocità angolare sprocket wheel vs Tempo (Step di coppia motrice su strada piana con veicolo cingolato con sette road wheels)	276
Figura 9.20 - Forze verticali a terra vs Tempo (Step di coppia motrice su strada piana con veicolo cingolato con sette road wheels).....	277
Figura 9.21 - Forze longitudinali vs Tempo (Step di coppia motrice su strada piana con veicolo cingolato con sette road wheels).....	277
Figura 9.22 - Rappresentazione delle tensioni del cingolo (veicolo cingolato con sette road wheels).....	278
Figura 9.23 - Tensioni dei tratti del cingolo vs Tempo (Step di coppia motrice su strada piana con $F = 0.12m_{tot}g$ con veicolo cingolato con sette road wheels).....	279
Figura 9.24 - Tensioni dei tratti del cingolo vs Tempo (Step di coppia motrice su strada piana con $F = 0.24m_{tot}g$ con veicolo cingolato con sette road wheels).....	280

Figura 9.25 - Scuotimento baricentro vs Tempo (Step di coppia motrice su strada piana con veicolo cingolato con sette road wheels).....	281
Figura 9.26 - Angolo di beccheggio vs Tempo (Step di coppia motrice su strada piana con veicolo cingolato con sette road wheels).....	281
Figura 9.27 - Accelerazione verticale vs Tempo (Step di coppia motrice su strada piana con veicolo cingolato con sette road wheels).....	282
Figura 9.28 - Scorrimento longitudinale vs Tempo (Step di coppia motrice su strada piana con veicolo cingolato con sette road wheels).....	283
Figura 9.29 - Profilo stradale sinusoidale	284
Figura 9.30 - Accelerazione longitudinale vs Tempo (prova di Coast-Down su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con sette road wheels)	285
Figura 9.31 - Velocità longitudinale veicolo vs Tempo (prova di Coast-Down su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con sette road wheels)	285
Figura 9.32 - Velocità angolare sprocket wheel vs Tempo (prova di Coast-Down su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con sette road wheels)	286
Figura 9.33 - Forze verticali a terra vs Tempo (prova di Coast-Down su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con sette road wheels).....	286
Figura 9.34 - Forze longitudinali vs Tempo (prova di Coast-Down su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con sette road wheels).....	287
Figura 9.35 - Rappresentazione delle tensioni del cingolo (veicolo cingolato con sette road wheels)	288
Figura 9.36 - Tensioni dei tratti del cingolo vs Tempo (prova di Coast-Down su profilo stradale sinusoidale con $F = 0.12m_{tot}g$ con veicolo cingolato con sette road wheels)..	288
Figura 9.37 - Tensioni dei tratti del cingolo vs Tempo (prova di Coast-Down su profilo stradale sinusoidale con $F = 0.24m_{tot}g$ con veicolo cingolato con sette road wheels)..	289
Figura 9.38 - Scuotimento baricentro vs Tempo (prova di Coast-Down su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con sette road wheels).....	290
Figura 9.39 - Angolo di beccheggio vs Tempo (prova di Coast-Down su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con sette road wheels).....	290
Figura 9.40 - Accelerazione verticale vs Tempo (prova di Coast-Down su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con sette road wheels).....	291
Figura 9.41 - Scorrimento longitudinale vs Tempo (prova di Coast-Down su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con sette road wheels)	292
Figura 9.42 - Coppia motrice applicata alla sprocket wheel vs Tempo (veicolo cingolato con sette road wheels)	292
Figura 9.43 - Accelerazione longitudinale vs Tempo (Step di coppia motrice su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con sette road wheels)	293
Figura 9.44 - Velocità longitudinale veicolo vs Tempo (Step di coppia motrice su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con sette road wheels)	294
Figura 9.45 - Velocità angolare sprocket wheel vs Tempo (Step di coppia motrice su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con sette road wheels)	294
Figura 9.46 - Forze verticali a terra vs Tempo (Step di coppia motrice su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con sette road wheels).....	295
Figura 9.47 - Forze longitudinali vs Tempo (Step di coppia motrice su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con sette road wheels).....	295
Figura 9.48 - Rappresentazione delle tensioni del cingolo (veicolo cingolato con sette road wheels)	296

Figura 9.49 - Tensioni dei tratti del cingolo vs Tempo (Step di coppia motrice su profilo stradale sinusoidale con $F = 0.12m_{tot}g$ con veicolo cingolato con sette road wheels) ..	297
Figura 9.50 - Tensioni dei tratti del cingolo vs Tempo (Step di coppia motrice su profilo stradale sinusoidale con $F = 0.24m_{tot}g$ con veicolo cingolato con sette road wheels) ..	298
Figura 9.51 - Scuotimento baricentro vs Tempo (Step di coppia motrice su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con sette road wheels)	299
Figura 9.52 - Angolo di beccheggio vs Tempo (Step di coppia motrice su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con sette road wheels)	299
Figura 9.53 - Accelerazione verticale vs Tempo (Step di coppia motrice su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con sette road wheels)	300
Figura 9.54 - Scorrimento longitudinale vs Tempo (Step di coppia motrice su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con sette road wheels).....	301
Figura 11.1 - Esempio di circonferenze intersecanti	303
Figura 11.2 - Possibili rette tangenti ad una coppia di circonferenze.....	306
Figura 11.3 - Risoluzione problema simbolico	306
Figura 11.4 - Sostituzione variabili	307
Figura 11.5 - Esclusione prime due rette tangenti	308
Figura 11.6 - Esclusione terza retta tangente.....	308
Figura 11.7 - Segmento tangente corretto	309
Figura 11.8 - Arco del cingolo.....	310
Figura 11.9 - Rappresentazione cingolo completo	311
Figura 11.10 - Rappresentazione cingolo completo con i nodi centrali di ogni pattino...	312

Indice delle tabelle

Tabella 2.1 - Quote geometriche dei centri ruota (veicolo cingolato con tre road wheels)..	4
Tabella 2.2 - Raggi delle ruote (veicolo cingolato con tre road wheels).....	4
Tabella 2.3 - Massa dei componenti (veicolo cingolato con tre road wheels)	5
Tabella 2.4 - Momenti d'inerzia dei componenti (veicolo cingolato con tre road wheels) ..	6
Tabella 2.5 - Rigidezze delle sospensioni (veicolo cingolato con tre road wheels)	6
Tabella 2.6 - Coefficienti di smorzamento delle sospensioni (veicolo cingolato con tre road wheels)	7
Tabella 3.1 - Caratteristiche fisiche cingolo (veicolo cingolato con tre road wheels).....	22
Tabella 4.1 - Risultati analisi statica (veicolo cingolato con tre road wheels)	39
Tabella 4.2 - Forze verticali a terra (veicolo cingolato con tre road wheels)	40
Tabella 4.3 - Risultati dell'analisi statica (veicolo cingolato con tre road wheels con tensionamento nullo)	42
Tabella 4.4 - Forze verticali a terra (veicolo cingolato con tre road wheels con tensionamento nullo)	43
Tabella 4.5 - Quote geometriche dei centri ruota (veicolo cingolato con tre road wheels simmetrico).....	49
Tabella 4.6 - Raggi delle ruote (veicolo cingolato con tre road wheels simmetrico)	49
Tabella 4.7 - Risultati analisi statica (veicolo cingolato con tre road wheels simmetrico)	50
Tabella 4.8 - Forze verticali a terra (veicolo cingolato con tre road wheels simmetrico) ..	51
Tabella 4.9 - Quote geometriche dei centri ruota (veicolo cingolato con tre road wheels con baricentro spostato verso l'anteriore).....	52
Tabella 4.10 - Risultati analisi statica (veicolo cingolato con tre road wheels con baricentro spostato verso l'anteriore).....	53
Tabella 4.11 - Forze verticali a terra (veicolo cingolato con tre road wheels con baricentro spostato verso l'anteriore).....	54
Tabella 8.1 - Quote geometriche dei centri ruota (veicolo cingolato con cinque road wheels)	158
Tabella 8.2 - Raggi delle ruote (veicolo cingolato con cinque road wheels)	159
Tabella 8.3 - Massa dei componenti (veicolo cingolato con cinque road wheels)	160
Tabella 8.4 - Momenti d'inerzia dei componenti (veicolo cingolato con cinque road wheels)	160
Tabella 8.5 - Rigidezze delle sospensioni (veicolo cingolato con cinque road wheels)...	162
Tabella 8.6 - Coefficienti di smorzamento delle sospensioni (veicolo cingolato con cinque road wheels)	165
Tabella 8.7 - Frequenze fondamentali eccitate durante le simulazioni.....	209
Tabella 9.1 - Quote geometriche dei centri ruota (veicolo cingolato con sette road wheels)	228
Tabella 9.2 - Raggi delle ruote (veicolo cingolato con sette road wheels).....	229
Tabella 9.3 - Massa dei componenti (veicolo cingolato con sette road wheels)	230

Tabella 9.4 - Momenti d'inerzia dei componenti (veicolo cingolato con sette road wheels)	230
Tabella 9.5 - Rigidezze delle sospensioni (veicolo cingolato con sette road wheels)	230
Tabella 9.6 - Coefficienti di smorzamento delle sospensioni (veicolo cingolato con sette road wheels).....	232

1. Introduzione

Un veicolo cingolato è un mezzo che utilizza cingoli al posto delle ruote per spostarsi. I cingoli sono costituiti da una serie di piastre metalliche o in gomma, collegate tra loro come una catena. Questo sistema di locomozione offre una migliore aderenza e stabilità rispetto alle ruote, soprattutto su terreni irregolari o in situazioni dove la trazione è difficile da mantenere.

I veicoli cingolati offrono un'elevata mobilità, percorribilità e capacità di carico su terreni estremamente difficili, come sabbia, fango morbido e neve fresca, terreni sui quali i veicoli a ruote non possono operare altrettanto efficacemente (Hohl, 2007). Questi terreni presentano proprietà fisiche e meccaniche altamente variabili, influenzate notevolmente dalle condizioni climatiche.

Sebbene i veicoli cingolati condividano con i veicoli gommati elementi di sospensione simili, come molle e ammortizzatori, la presenza del cingolo introduce una complessità significativa. Nei modelli esistenti per la dinamica di marcia dei veicoli cingolati, il cingolo è stato modellato in vari modi: in alcuni casi come una fascia flessibile continua, inestensibile o estensibile con rigidità longitudinale costante, in altri come un sistema di maglie rigide interconnesse con perni rigidi o boccole di gomma elastica (McCullough, 1986; Galway, 1991; Galway e Wong, 1992).

Nei modelli di dinamica di marcia dei veicoli cingolati esistenti, sono state fatte varie assunzioni sulle distribuzioni della tensione del cingolo, che vanno dalla tensione costante del cingolo, attraverso un aumento o una diminuzione a passi costanti della tensione del cingolo tra le ruote portanti, fino alla tensione del cingolo variabile in modo continuo (Bennet e Penny, 1984).

Un limite significativo dei modelli dinamici attuali dei veicoli cingolati è l'assunzione che il terreno sia rigido e non deformabile, con test di validazione condotti prevalentemente su superfici rigide con ostacoli discreti o profili casuali.

Nello studio della dinamica dei veicoli cingolati sono ampiamente utilizzati i modelli matematici, infatti, Banerjee, Balamurugan e Krishnakumar (2015) svilupparono un modello matematico dettagliato per la dinamica di avanzamento di un veicolo cingolato completo, composto da diciassette gradi di libertà (DOF), con sospensioni idro-gas a braccio oscillante. Questo modello rappresenta uno strumento generico ed efficiente per la progettazione delle sospensioni dei veicoli cingolati.

Un altro approccio alla modellazione dei veicoli cingolati è rappresentato dai modelli a singolo corpo rigido, utilizzati spesso per simulazioni rapide su terreni soffici.

La modellazione accurata delle forze di interazione terreno-cingolo è cruciale in questi modelli, poiché determina l'accuratezza delle previsioni della dinamica del veicolo.

Tra le forze più rilevanti vi sono quelle di trazione e la reazione di supporto fornita dal terreno.

L'obiettivo di questa tesi è proporre un modello semplificato rispetto a quelli precedentemente citati, capace di simulare la cinematica e la dinamica di un veicolo

cingolato. Data la natura semplificata del modello, sarà necessario adottare diverse ipotesi semplificative.

Nel modello proposto, si esclude l'analisi dei terreni deformabili, concentrandosi esclusivamente sul caso di terreno rigido. Inoltre, viene considerata solo la dinamica longitudinale e verticale del veicolo cingolato, mentre l'analisi della dinamica laterale viene lasciata a futuri sviluppi.

Pur limitando i casi applicativi, il modello proposto si distingue per la sua natura "smart", che consente di ottenere risultati realistici senza introdurre una complessità di calcolo elevata.

Tale scopo è stato conseguito ricavando tutte le equazioni necessarie a descrivere la cinematica e la dinamica del veicolo cingolato e sviluppando successivamente il modello nell'ambiente Matlab-Simulink.

Per risolvere un sistema dinamico complesso, come quello relativo alla marcia di un veicolo cingolato, è necessario utilizzare strumenti software in grado di gestire le equazioni differenziali che descrivono il comportamento del sistema. In questo contesto, Matlab-Simulink rappresenta una soluzione ideale, in quanto consente di modellare, simulare e analizzare sistemi dinamici in modo efficiente.

Il modello è stato testato su due tipi di terreno rigido: un percorso piano e uno con profilo sinusoidale. Le prove principali considerate includono il test di Coast-Down, l'applicazione di uno step di coppia motrice e la marcia a velocità costante.

Il modello permette di analizzare grandezze fondamentali durante la marcia del veicolo, come velocità, accelerazioni, forze, scuotimenti, beccheggio, tensioni del cingolo e scorrimenti, evidenziando l'influenza delle variazioni nei parametri del veicolo su tali grandezze.

2. Descrizione del veicolo cingolato oggetto di studio

Questo lavoro si concentra sull'analisi della dinamica longitudinale di un veicolo cingolato dotato di tre road wheels, una tensioner wheel, una sprocket wheel e una ruota di supporto. Poiché la dinamica laterale non viene considerata, si assume che il veicolo presenti simmetria geometrica e di carico su entrambi i lati del cingolo, il che consente di considerare, per semplicità, un solo lato del cingolo, con le caratteristiche geometriche e fisiche concentrate su di esso.

Il telaio del veicolo è considerato come un unico corpo rigido con la massa concentrata nel suo baricentro.

L'ingresso di coppia è applicato direttamente sulla sprocket wheel, la quale è una ruota dentata fissata al telaio e collegata tramite la trasmissione all'albero motore. I denti della ruota dentata sono collegati ai perni dei segmenti del cingolo e impongono il movimento tramite contatto.

La tensioner wheel, anch'essa fissata al telaio, ha la funzione di regolare la tensione del cingolo, determinando quanto strettamente o liberamente esso si avvolge attorno alle ruote. In concreto, attraverso un pistoncino su cui viene applicata una determinata forza, la tensioner wheel può essere traslata orizzontalmente, permettendo di regolare la tensione del cingolo in base alle diverse esigenze operative.

Ciascuna road wheels è collegata alla cassa veicolo mediante sospensioni a braccia longitudinali oscillanti composte da una molla con caratteristiche di rigidità a centro ruota, da un ammortizzatore con caratteristiche di smorzamento a centro ruota e da un braccio perfettamente orizzontale, in modo che uno scuotimento della ruota non implichi anche uno spostamento longitudinale rispetto alla condizione di riposo.

La ruota di supporto, fissata al telaio, ha il compito di evitare un eccessivo affondamento della parte superiore del cingolo, infatti, la sua presenza è fondamentale per sostenere il peso del cingolo.

Il cingolo è composto da una serie di pattini connessi mediante connettori. Tuttavia, per semplicità, nel modello proposto non è stato dettagliatamente rappresentato nella sua struttura complessa.

Il veicolo cingolato ha quattro gradi di libertà, le coordinate generalizzate del sistema sono:

- 1) x_{CG} : traslazione longitudinale del baricentro;
- 2) z_{CG} : scuotimento del baricentro;
- 3) θ : angolo di beccheggio (con centro di beccheggio nel baricentro);
- 4) s_{rel} : traslazione assiale del cingolo relativa al veicolo.

2.1 Configurazione geometrica del veicolo cingolato

La configurazione geometrica del veicolo cingolato è rappresentata in Figura 2.1. In Tabella 2.1 sono riportate le quote geometriche dei centri ruota, relative a un sistema di riferimento con origine nel centro della sprocket wheel.

Tabella 2.1 - Quote geometriche dei centri ruota (veicolo cingolato con tre road wheels)

RUOTA	x_c [m]	z_c [m]
Sprocket wheel	0	0
Tensioner wheel	5	0.019
Road wheel 1	4	-0.570
Road wheel 2	2.350	-0.570
Road wheel 3	0.700	-0.570
Ruota di supporto	2.500	0.150

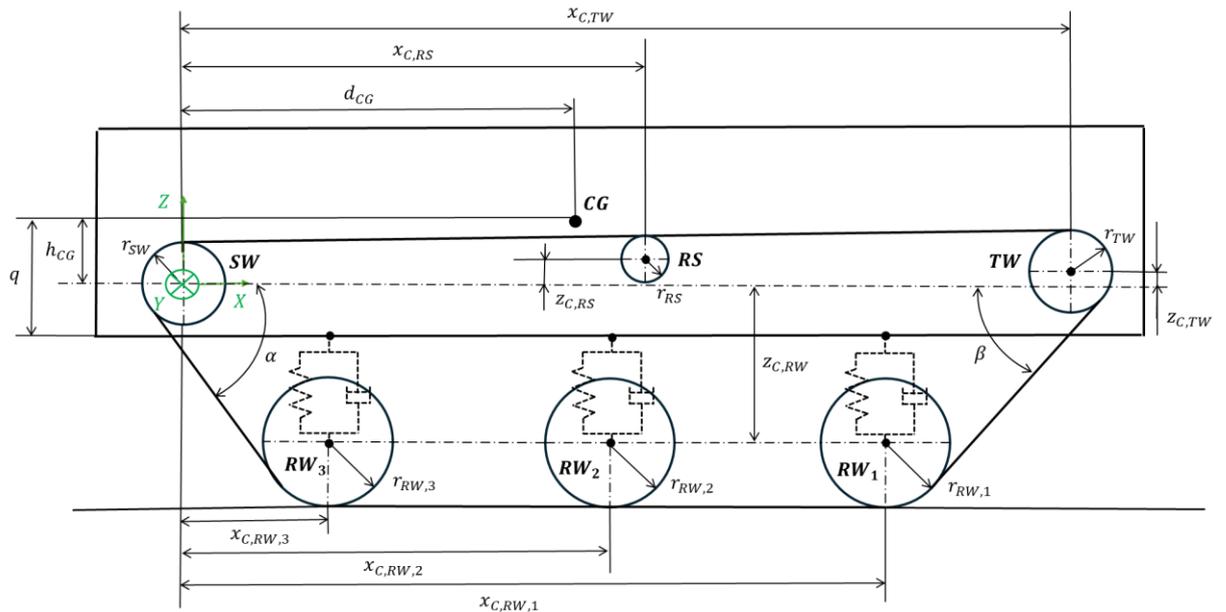


Figura 2.1 - Configurazione geometrica (veicolo cingolato con tre road wheels)

Nel veicolo cingolato la posizione del baricentro è spostata verso l'assale posteriore, infatti, si ha $d_{CG} = 2.250 \text{ m}$.

La quota verticale del baricentro rispetto alla sprocket wheel è pari a $h_{CG} = 0.4 \text{ m}$, mentre la distanza verticale del baricentro dai punti di attacco delle sospensioni al telaio è $q = 0.6 \text{ m}$.

I raggi di ciascuna ruota sono mostrati in Tabella 2.2:

Tabella 2.2 - Raggi delle ruote (veicolo cingolato con tre road wheels)

RUOTA	r [m]
Sprocket wheel	0.260
Tensioner wheel	0.250
Road wheel 1	0.330
Road wheel 2	0.330
Road wheel 3	0.330
Ruota di supporto	0.115

Conoscendo la posizione dei centri ruota di tutte le ruote e il loro raggio è possibile realizzare l'intero cingolo tramite il tool descritto nell'appendice, si possono quindi ricavare gli angoli di inclinazione α e β dei tratti inclinati del cingolo:

$$\alpha = 43.6^\circ$$

$$\beta = 34.4^\circ$$

I valori di α e β per semplicità verranno assunti costanti una volta che verrà applicato il peso del veicolo cingolato e la forza di tensionamento, in accordo con l'ipotesi di piccole oscillazioni della massa sospesa nell'intorno della configurazione di equilibrio del sistema.

In Figura 2.2 è rappresentata la configurazione geometrica delle ruote e del cingolo, realizzata in ambiente Matlab tramite il tool calcolo catena descritto nell'appendice.

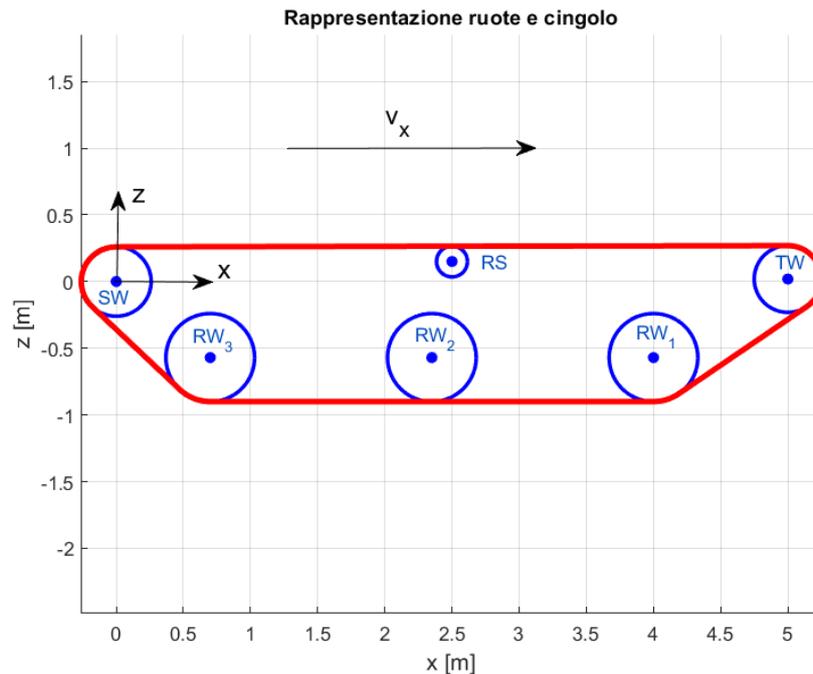


Figura 2.2 - Rappresentazione ruote e cingolo realizzata tramite il tool calcolo catena in ambiente Matlab (veicolo cingolato con tre road wheels)

L'origine del sistema di riferimento è posta in corrispondenza del centro della sprocket wheel, l'asse x è positivo verso destra mentre l'asse z è positivo verso l'alto.

2.2 Caratteristiche fisiche

In Tabella 2.3 sono riportate le masse complessive di ciascun componente costituente il modello di veicolo cingolato, da cui è possibile ricavare la massa totale del veicolo:

Tabella 2.3 - Massa dei componenti (veicolo cingolato con tre road wheels)

COMPONENTE	Massa [kg]
Massa sospesa	16000
Sprocket wheel	110
Tensioner wheel	100
Road wheels	270
Ruota di supporto	20
Cingolo	2139
TOTALE	18639

I momenti di inerzia di ciascun componente sono riportati in Tabella 2.4:

Tabella 2.4 - Momenti d'inerzia dei componenti (veicolo cingolato con tre road wheels)

MOMENTI D'INERZIA		
Grandezza	Valore	Unità di misura
$I_{y,CG}$	48500	$kg \cdot m^2$
I_{SW}	0.30	$kg \cdot m^2$
I_{TW}	0.30	$kg \cdot m^2$
I_{RW}	0.50	$kg \cdot m^2$
I_{RS}	0.13	$kg \cdot m^2$

Le rigidità delle sospensioni sono:

Tabella 2.5 - Rigidità delle sospensioni (veicolo cingolato con tre road wheels)

RIGIDITÀ		
Grandezza	Valore	Unità di misura
k_1	$50 \cdot 10^4$	N/m
k_2	$50 \cdot 10^4$	N/m
k_3	$50 \cdot 10^4$	N/m

Si considera un veicolo cingolato con ammortizzatori tarati secondo un criterio di smorzamento ottimo valutato per un sistema di mono-sospensione ad un grado di libertà verticale, con l'obiettivo di minimizzare l'accelerazione della massa sospesa. La sua applicazione ad un sistema cingolato potrebbe risultare un po' forzata; pertanto, la sua validità verrà verificata mediante le simulazioni. Per il momento viene utilizzata per avere un valore di riferimento, facilmente calcolabile, per la taratura degli ammortizzatori.

Si ricava la massa totale sostenuta dalla sospensione $m_{s,tot}$:

$$m_{s,tot} = m_s + m_{SW} + m_{RS} + m_{TW} + m_{cin,SW} + m_{cin,RS} + m_{cin,TW} \quad (2.1)$$

Dove:

- m_s [kg] : massa sospesa;
- m_{SW} [kg] : massa della sprocket wheel;
- m_{TW} [kg] : massa della tensioner wheel;
- m_{RS} [kg] : massa della ruota di supporto;
- $m_{cin,SW}$ [kg] : massa del tratto di cingolo sostenuto dalla sprocket wheel;
- $m_{cin,RS}$ [kg] : massa del tratto di cingolo sostenuto dalla ruota di supporto;
- $m_{cin,TW}$ [kg] : massa del tratto di cingolo sostenuto dalla tensioner wheel.

Si calcola la rigidità verticale equivalente del veicolo k_{tot} , pari al parallelo di tutte le molle:

$$k_{tot} = \sum_{i=1}^3 k_i \quad (2.2)$$

Dove:

- $k_i \left[\frac{N}{m} \right]$: rigidezza della molla dell'i-esimo assale.

Si calcola lo smorzamento ottimo totale $c_{ott,tot}$:

$$c_{ott,tot} = \sqrt{\frac{m_{s,tot} k_{tot}}{2}} \quad (2.3)$$

Si può quindi ricavare lo smorzamento di un singolo assale ripartendo lo smorzamento totale sul numero di ammortizzatori:

$$c_i = c_{ott,i} = \frac{c_{ott,tot}}{N_{damp}} \quad (2.4)$$

Dove:

- $c_i \left[\frac{N \cdot s}{m} \right]$: coefficiente di smorzamento dell'ammortizzatore dell'i-esimo assale;
- $N_{damp} [-]$: è il numero di ammortizzatori (in questo caso pari a 3).

I coefficienti di smorzamento delle sospensioni sono:

Tabella 2.6 - Coefficienti di smorzamento delle sospensioni (veicolo cingolato con tre road wheels)

COEFFICIENTI DI SMORZAMENTO		
Grandezza	Valore	Unità di misura
c_1	$3.85 \cdot 10^4$	$N \cdot s/m$
c_2	$3.85 \cdot 10^4$	$N \cdot s/m$
c_3	$3.85 \cdot 10^4$	$N \cdot s/m$

Nell'ipotesi di sistema da un grado di libertà verticale, vengono calcolati la deformata statica del sistema sospensione e la sua frequenza naturale.

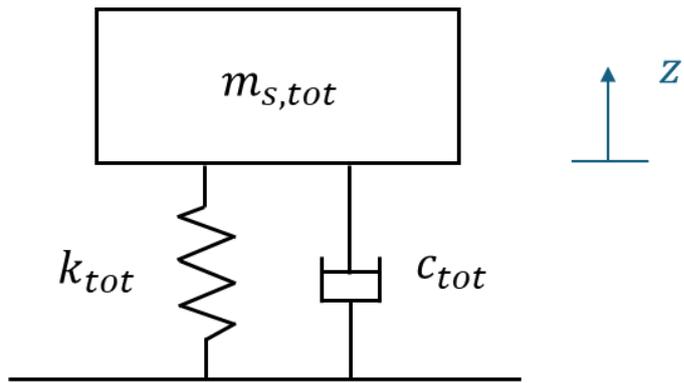


Figura 2.3 - Sistema ad un grado di libertà verticale

La deformata statica z_{stat} vale:

$$z_{stat} = \frac{m_{s,tot}g}{k_{tot}} = 0.116 \text{ m} \quad (2.5)$$

La frequenza naturale f_n verticale vale:

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{tot}}{m_{s,tot}}} = 1.46 \text{ Hz} \quad (2.6)$$

3. Modellazione del veicolo cingolato

3.1 Ipotesi ed assunzioni

Nel modello descritto sono state assunte le seguenti ipotesi:

- Simmetria geometrica e di carico sui due lati del cingolo in modo che abbia una configurazione identica sui due lati;
- Condizione di allineamento del vincolo inferiore delle ruote a contatto con il terreno (siamo nel caso di terreno rigido), dunque, le tensioni del tratto di cingolo tra due road wheels consecutive si sono supposte orizzontali;
- Contatto cingolo-terreno discretizzato in un numero finito di contatti puntuali, pari al numero di road wheels;
- Le road wheels rimangono sempre a contatto con il terreno (il distacco delle ruote da terra non è previsto ma si effettua la verifica della potenziale perdita di contatto monitorando il carico verticale scambiato con la strada);
- Cingolo infinitamente rigido;
- Ruote rigide;
- Si trascura la resistenza aerodinamica dato che le velocità sono basse;
- La forza di tensionamento F applicata alla tensioner wheel è nota;
- Le ruote a contatto con il terreno sono vincolate tramite dei cuscinetti (modellati con un termine di attrito viscoso e uno di tipo coulombiano), avendo scelto un modello di attrito coulombiano al perno a tangente iperbolica si trascura il suo effetto nell'analisi statica, dove la velocità relativa è nulla; inoltre, nella statica non ho coppia d'inerzia e forze di trazione, questo mi porta ad avere una coppia resistente nulla sulle ruote e sulle ruote di supporto e quindi tensione costante lungo tutta la catena.

3.2 Modello di sospensione semplificato

La sospensione a braccia longitudinali oscillanti è un tipo di sistema di sospensione utilizzato in veicoli cingolati, come carri armati e altri mezzi militari. Questo sistema è progettato per migliorare la mobilità e la stabilità del veicolo su terreni accidentati, distribuendo in modo efficace le forze e gli impatti che il veicolo subisce durante la marcia.

I componenti principali di questo sistema sospensivo sono:

- 1) Braccia longitudinali oscillanti: Queste braccia sono montate longitudinalmente rispetto al veicolo e sono libere di oscillare attorno da un punto di rotazione. Il movimento oscillatorio consente alle ruote di adattarsi alle variazioni del terreno, garantendo che il cingolo rimanga sempre a contatto con il suolo.
- 2) Punto di rotazione: Sono i punti di attacco della sospensione al telaio, ovvero sono i punti attorno i quali le braccia oscillano.

- 3) Molle e ammortizzatori: Le molle e gli ammortizzatori sono componenti fondamentali nei sistemi di sospensione dei veicoli e in altre applicazioni ingegneristiche, contribuendo a garantire comfort, stabilità e controllo. Le molle sono elementi meccanici che immagazzinano e rilasciano energia elastica quando vengono compressi o estesi. Gli ammortizzatori sono dispositivi che smorzano e controllano i movimenti oscillatori della massa sospesa, dissipando l'energia sotto forma di calore. Gli ammortizzatori limitano il movimento della massa sospesa, riducendo le oscillazioni e garantendo un contatto costante tra le ruote e la superficie stradale.
- 4) Road wheels: Sono montate sulle braccia longitudinali e sostengono il cingolo. Queste ruote seguono il profilo del terreno, contribuendo alla distribuzione uniforme del peso e migliorando la trazione.

Quando il veicolo si muove su terreni irregolari, le ruote di supporto sollecitano le braccia longitudinali, che oscillano attorno ai punti di attacco al telaio. Questo movimento permette alle ruote di adattarsi alle variazioni del terreno, mantenendo il cingolo in costante contatto con il suolo. Le molle e gli ammortizzatori lavorano sinergicamente per assorbire e dissipare le forze generate dagli impatti con gli ostacoli, riducendo le sollecitazioni trasmesse al telaio del veicolo e migliorando così la stabilità e il comfort.

In Figura 3.1 è rappresentato un tipico schema di sospensione a bracci longitudinali, in questo caso la rigidità della sospensione è fornita da una barra di torsione.

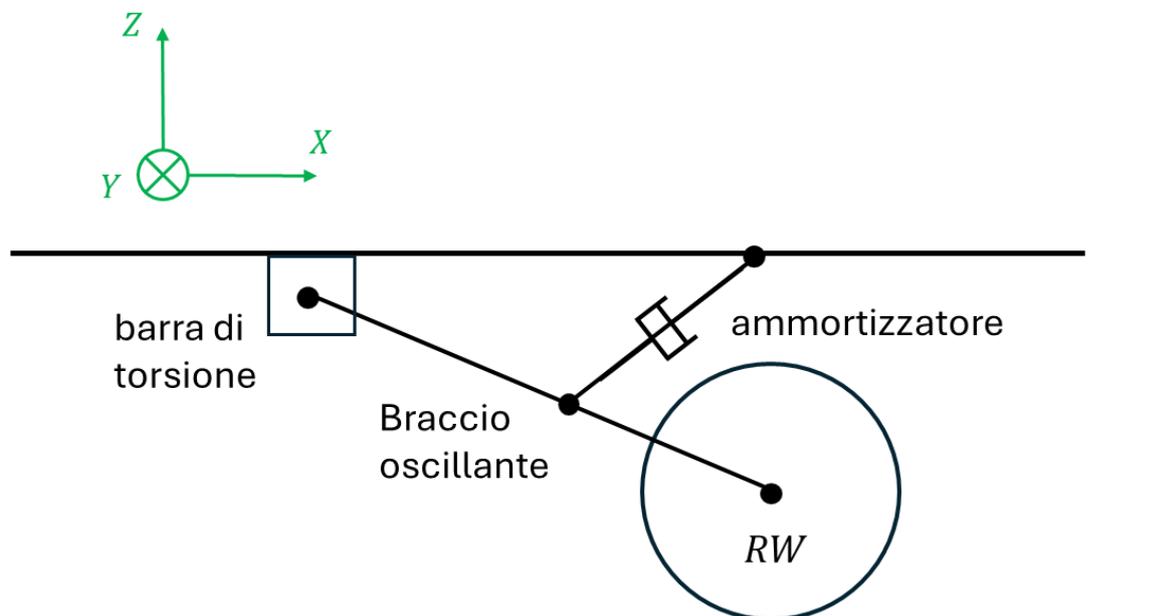


Figura 3.1 - Schema di sospensione a bracci longitudinali

In questo modello, si ipotizza che la molla e l'ammortizzatore abbiano rispettivamente caratteristiche di rigidità e di smorzamento a centro ruota e che il braccio sia perfettamente orizzontale in modo che uno scuotimento della ruota non implichi anche uno spostamento longitudinale rispetto alla condizione di riposo.

In sostanza, per piccoli spostamenti, l'arco descritto dal punto estremo del braccio longitudinale può essere approssimato come un movimento puramente verticale.

Di conseguenza, al fine di semplificare la modellazione, le caratteristiche torsionali di rigidità e smorzamento di una sospensione reale sono state sostituite da rigidità e smorzamento lineari. Questo porta a considerare il punto di attacco delle sospensioni al telaio come posizionato direttamente sopra la road wheel.

Per poter ipotizzare che la sospensione sia equivalente ad una guida prismatica verticale con rigidità e smorzamento concentrati a centro ruota, è necessario che il braccio longitudinale sia sufficientemente lungo e che lavori nell'intorno di una configurazione orizzontale. In questo modo il grado di libertà longitudinale è inibito, quindi, il centro ruota delle road wheels non si può spostare in direzione longitudinale rispetto al telaio del veicolo.

In Figura 3.2 è rappresentato lo schema semplificato di un'unità di sospensione riferita ad una i -esima road wheel. Lo scuotimento si assume positivo verso l'alto.

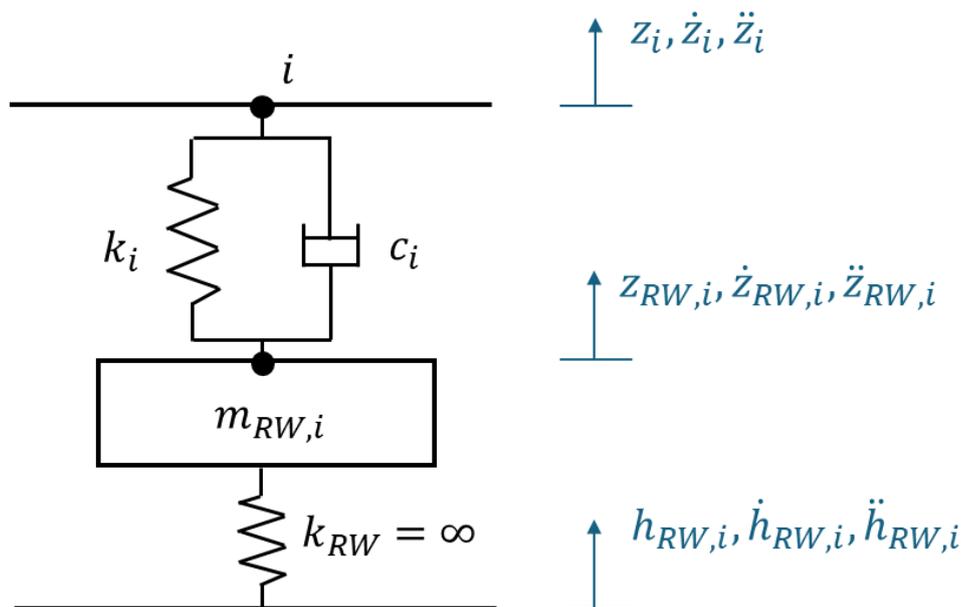


Figura 3.2 - Modello di sospensione semplificato

La forza elastica di una molla è descritta dalla Legge di Hooke, che stabilisce che la forza esercitata da una molla è direttamente proporzionale alla sua deformazione. La formula matematica che rappresenta questa legge è:

$$F_{k,i} = -k_i \Delta z_i \quad (3.1)$$

Dove:

- $F_{k,i}$ [N] : forza elastica esercitata dalla molla;
- k_i $\left[\frac{N}{m}\right]$: costante elastica della molla;
- Δz_i [m] : deformazione della molla.

Il segno meno all'interno dell'equazione sta ad indicare che la forza elastica è in verso opposto alla deformazione.

La deformazione della molla è descritta dalla equazione 3.2:

$$\Delta z_i = z_i - z_{RW,i} \quad (3.2)$$

Dove:

- $z_i [m]$: scuotimento del punto di attacco al telaio dell'unità sospensiva riferita all'i-esima road wheel;
- $z_{RW,i} [m]$: scuotimento del centro ruota dell'i-esima road wheel.

Si ipotizza che le road wheel siano infinitamente rigide quindi si ha che lo scuotimento del centro ruota dell'i-esima road wheel è pari alla traslazione verticale del profilo stradale:

$$z_{RW,i} = h_{RW,i} \quad (3.3)$$

Si ottiene quindi la seguente relazione:

$$F_{k,i} = -k_i(z_i - h_{RW,i}) \quad (3.4)$$

La forza di smorzamento generata da un ammortizzatore è generalmente proporzionale alla velocità relativa tra i due estremi dell'ammortizzatore (tipicamente tra il pistone e il cilindro). La relazione per una i-esima road wheel può essere espressa come:

$$F_{d,i} = -c_i \Delta \dot{z}_i \quad (3.5)$$

Dove:

- $F_{d,i} [N]$: forza di smorzamento;
- $c_i \left[\frac{N \cdot s}{m} \right]$: coefficiente di smorzamento;
- $\Delta \dot{z}_i \left[\frac{m}{s} \right]$: velocità relativa.

La velocità relativa si può descrivere come:

$$\Delta \dot{z}_i = \dot{z}_i - \dot{z}_{RW,i} \quad (3.6)$$

Dove:

- $\dot{z}_i \left[\frac{m}{s} \right]$: velocità di traslazione verticale del punto di attacco al telaio dell'unità sospensiva dell'i-esima road wheel;
- $\dot{z}_{RW,i} \left[\frac{m}{s} \right]$: velocità di traslazione verticale del centro ruota dell'i-esima road wheel.

Avendo ipotizzato che le road wheels siano infinitamente rigide si ha che la velocità di traslazione verticale del centro ruota dell'*i*-esima road wheel è pari alla velocità di traslazione verticale del profilo stradale:

$$\dot{z}_{RW,i} = \dot{h}_{RW,i} \quad (3.7)$$

Si ottiene quindi:

$$F_{d,i} = -c_i(\dot{z}_i - \dot{h}_{RW,i}) \quad (3.8)$$

3.3 Powertrain

Per quanto riguarda il sistema propulsivo del veicolo cingolato si considera un ingresso di coppia motrice direttamente applicato alla sprocket wheel, si trascura quindi qualsiasi effetto dovuto al motore e al sistema di trasmissione.

Ulteriori sviluppi del modello potrebbero riguardare l'aumentare il livello di dettaglio della descrizione del powertrain.

3.4 Cinematica del veicolo

3.4.1 Equazioni di congruenza traslazione verticale

Per caratterizzare la cinematica di sospensione, al fine di calcolare la forza elastica esercitata, è necessario descrivere le traslazioni verticali dei punti di attacco delle sospensioni al telaio in funzione della traslazione verticale del baricentro z_{CG} e del beccheggio θ :

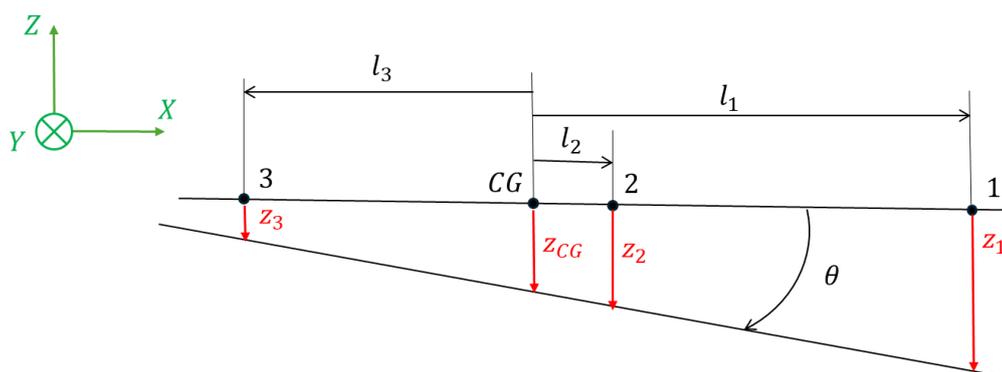


Figura 3.3 - Congruenza traslazioni verticali (veicolo cingolato con tre road wheels)

$$\begin{aligned} z_1 &= z_{CG} - l_1 \cdot \tan \theta \\ z_2 &= z_{CG} - l_2 \cdot \tan \theta \\ z_3 &= z_{CG} + l_3 \cdot \tan \theta \end{aligned} \quad (3.9)$$

Con:

$$l_1 = x_{C,RW,1} - d_{CG}$$

$$l_2 = x_{C,RW,2} - d_{CG}$$

$$l_3 = d_{CG} - x_{C,RW,3}$$

(3 . 10)

3.4.2 Equazioni di congruenza velocità di traslazione verticale

Per il calcolo della forza smorzante esercitata dall'ammortizzatore, è necessario ricavare le velocità di traslazione verticale dei punti di attacco della sospensione al telaio $\dot{z}_1, \dot{z}_2, \dot{z}_3$ in funzione della velocità di traslazione verticale del baricentro \dot{z}_{CG} e della velocità di oscillazione di beccheggio $\dot{\theta}$:

- Punto di attacco 1

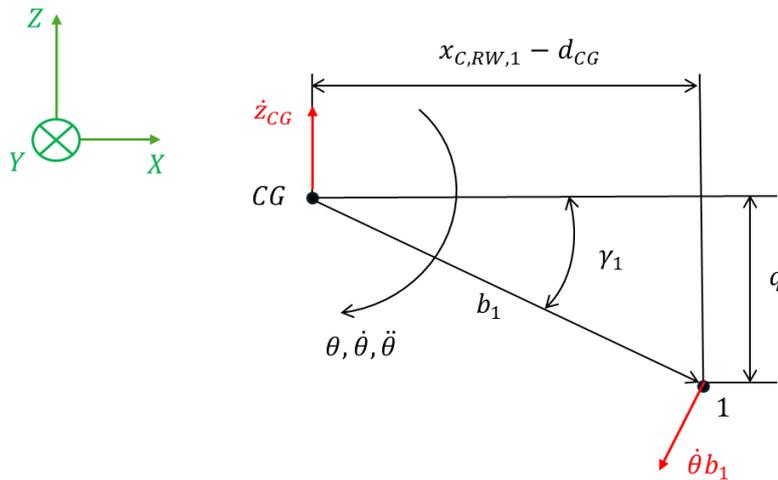


Figura 3.4 - Velocità di traslazione verticale del punto di attacco 1 (veicolo cingolato con tre road wheels)

La velocità di traslazione verticale del punto di attacco 1 è:

$$\dot{z}_1 = \dot{z}_{CG} - \dot{\theta} b_1 \cos \gamma_1$$

(3 . 11)

Dove:

$$b_1 = \sqrt{q^2 + (x_{C,RW,1} - d_{CG})^2}$$

$$\gamma_1 = \tan^{-1} \frac{q}{(x_{C,RW,1} - d_{CG})}$$

(3 . 12)

- Punto di attacco 2

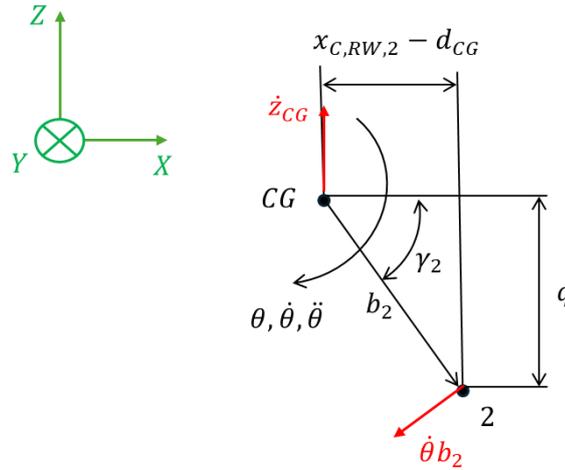


Figura 3.5 - Velocità di traslazione verticale del punto di attacco 2 (veicolo cingolato con tre road wheels)

La velocità di traslazione verticale del punto di attacco 2 è:

$$\dot{z}_2 = \dot{z}_{CG} - \dot{\theta} b_2 \cos \gamma_2 \quad (3.13)$$

Dove:

$$b_2 = \sqrt{q^2 + (x_{C,RW,2} - d_{CG})^2}$$

$$\gamma_2 = \tan^{-1} \frac{q}{(x_{C,RW,2} - d_{CG})} \quad (3.14)$$

- Punto di attacco 3

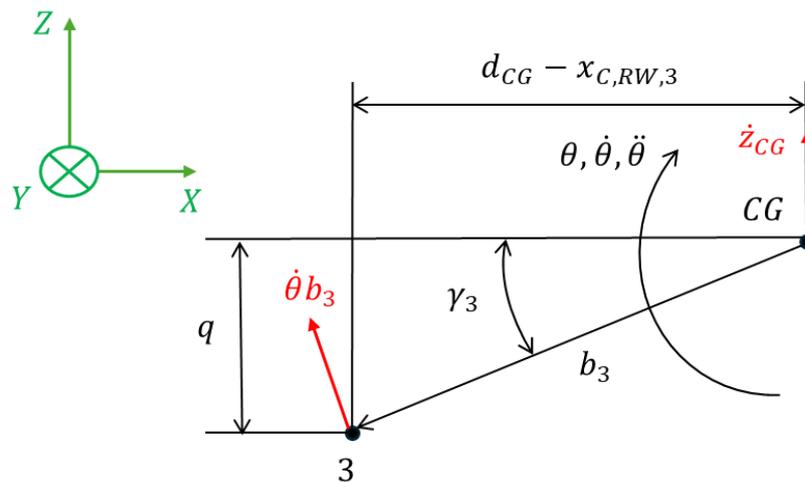


Figura 3.6 - Velocità di traslazione verticale del punto di attacco 3 (veicolo cingolato con tre road wheels)

La velocità di traslazione verticale del punto di attacco 3 è:

$$\dot{z}_3 = \dot{z}_{CG} + \dot{\theta} b_3 \cos \gamma_3 \quad (3.15)$$

Dove:

$$b_3 = \sqrt{q^2 + (d_{CG} - x_{C,RW,3})^2}$$

$$\gamma_3 = \tan^{-1} \frac{q}{(d_{CG} - x_{C,RW,3})} \quad (3.16)$$

3.4.3 Equazioni di congruenza accelerazioni longitudinali e verticali

A questo punto, è necessario definire le accelerazioni puntuali del centro di ciascuna ruota, ad eccezione della ruota di supporto, per il calcolo delle forze d'inerzia. Nel caso della tensioner wheel e della sprocket wheel, l'accelerazione dipende dai moti di beccheggio e scuotimento della massa sospesa. Durante il moto circolare associato al beccheggio, si manifestano due componenti di accelerazione: un'accelerazione tangenziale, dovuta alla variazione della velocità angolare, e un'accelerazione centripeta, correlata al movimento circolare della ruota stessa. Questi contributi sono fondamentali per determinare con precisione le forze d'inerzia in gioco.

Le accelerazioni puntuali dei centri-ruota in funzione delle accelerazioni longitudinali e verticali del baricentro, rispettivamente \ddot{x}_{CG} e \ddot{z}_{CG} , del quadrato della velocità e dell'accelerazione del moto di beccheggio, rispettivamente $\dot{\theta}^2$ e $\ddot{\theta}$, sono:

- Tensioner wheel

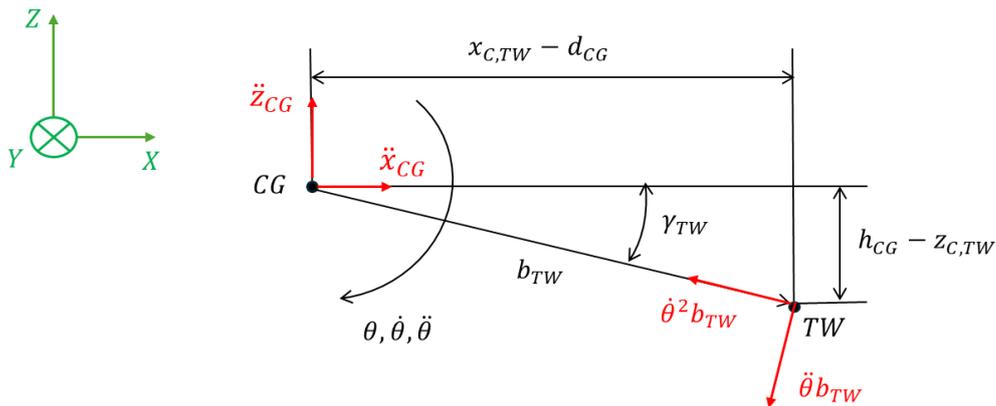


Figura 3.7 - Accelerazioni puntuali tensioner wheel (veicolo cingolato con tre road wheels)

L'accelerazione longitudinale della tensioner wheel è:

$$\ddot{x}_{TW} = \ddot{x}_{CG} - \ddot{\theta} b_{TW} \sin \gamma_{TW} - \dot{\theta}^2 b_{TW} \cos \gamma_{TW} \quad (3.17)$$

L'accelerazione verticale della tensioner wheel è:

$$\ddot{z}_{TW} = \ddot{z}_{CG} - \ddot{\theta} b_{TW} \cos \gamma_{TW} + \dot{\theta}^2 b_{TW} \sin \gamma_{TW} \quad (3.18)$$

Dove:

$$b_{TW} = \sqrt{(h_{CG} - z_{c,TW})^2 + (x_{c,TW} - d_{CG})^2}$$

$$\gamma_{TW} = \tan^{-1} \frac{(h_{CG} - z_{c,TW})}{(x_{c,TW} - d_{CG})} \quad (3.19)$$

- Sprocket wheel

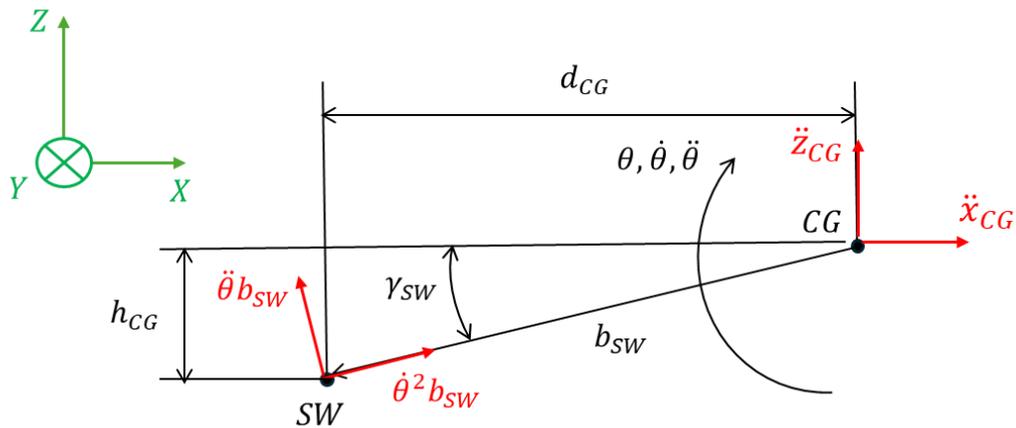


Figura 3.8 - Accelerazioni puntuali sprocket wheel (veicolo cingolato con tre road wheels)

L'accelerazione longitudinale della sprocket wheel è:

$$\ddot{x}_{SW} = \ddot{x}_{CG} - \ddot{\theta} b_{SW} \sin \gamma_{SW} + \dot{\theta}^2 b_{SW} \cos \gamma_{SW} \quad (3.20)$$

L'accelerazione verticale della sprocket wheel è:

$$\ddot{z}_{SW} = \ddot{z}_{CG} + \ddot{\theta} b_{SW} \cos \gamma_{SW} + \dot{\theta}^2 b_{SW} \sin \gamma_{SW} \quad (3.21)$$

Dove:

$$b_{SW} = \sqrt{h_{CG}^2 + d_{CG}^2}$$

$$\gamma_{SW} = \tan^{-1} \frac{h_{CG}}{d_{CG}} \quad (3.22)$$

Nel caso delle road wheels, la situazione varia tra la componente longitudinale e quella verticale dell'accelerazione. La sospensione può essere modellata come un'asta infinitamente rigida lungo la direzione longitudinale; di conseguenza, l'accelerazione longitudinale dei centri ruota delle road wheels coincide con l'accelerazione longitudinale dei punti di attacco della sospensione al telaio. D'altra parte, la componente verticale dell'accelerazione dei centri ruota delle road wheels coincide con l'accelerazione verticale del profilo stradale in corrispondenza delle road wheels, poiché si assume che le ruote siano rigide. Questo approccio consente di semplificare il modello, concentrandosi sull'interazione tra il veicolo e il terreno.

- Road wheel 1

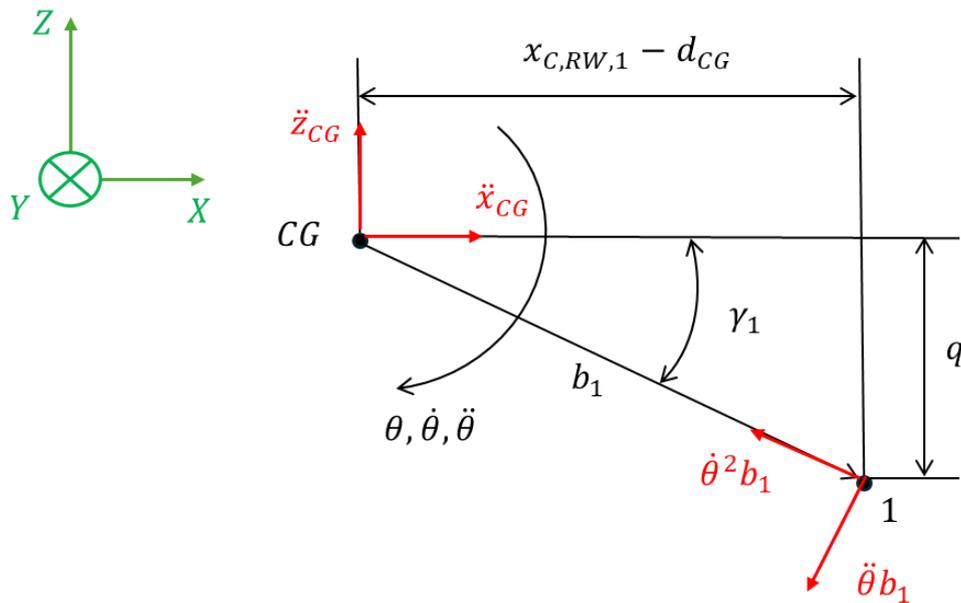


Figura 3.9 - Accelerazioni puntuali road wheel 1 (veicolo cingolato con tre road wheels)

L'accelerazione longitudinale della road wheel 1 è:

$$\ddot{x}_{RW,1} = \ddot{x}_1 = \ddot{x}_{CG} - \ddot{\theta} b_1 \sin \gamma_1 - \dot{\theta}^2 b_1 \cos \gamma_1 \quad (3.23)$$

L'accelerazione verticale della road wheel 1 è:

$$\ddot{z}_{RW,1} = \ddot{h}_{RW,1} \quad (3.24)$$

- Road wheel 2

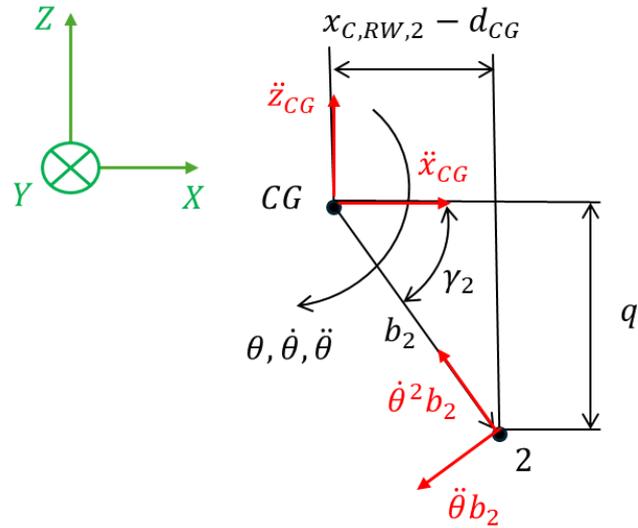


Figura 3.10 - Accelerazioni puntuali road wheel 2 (veicolo cingolato con tre road wheels)

L'accelerazione longitudinale della road wheel 2 è:

$$\ddot{x}_{RW,2} = \ddot{x}_2 = \ddot{x}_{CG} - \ddot{\theta} b_2 \sin \gamma_2 - \dot{\theta}^2 b_2 \cos \gamma_2 \quad (3.25)$$

L'accelerazione verticale della road wheel 2 è:

$$\ddot{z}_{RW,2} = \ddot{h}_{RW,2} \quad (3.26)$$

- Road wheel 3

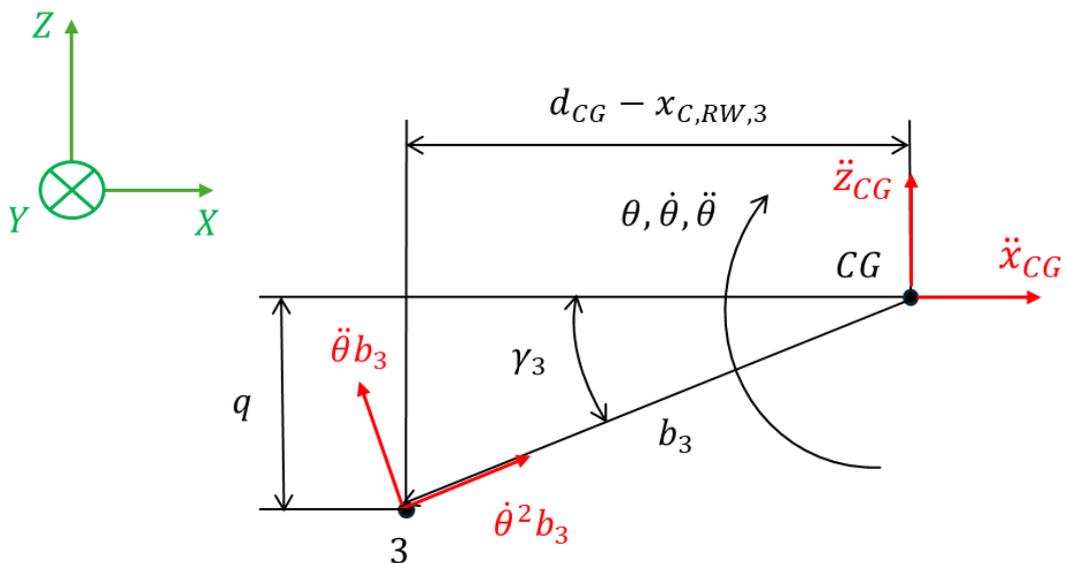


Figura 3.11 - Accelerazioni puntuali road wheel 3 (veicolo cingolato con tre road wheels)

L'accelerazione longitudinale della road wheel 3 è:

$$\ddot{x}_{RW,3} = \ddot{x}_3 = \ddot{x}_{CG} - \ddot{\theta}b_3 \sin \gamma_3 + \dot{\theta}^2 b_3 \cos \gamma_3 \quad (3.27)$$

L'accelerazione verticale della road wheel 3 è:

$$\ddot{z}_{RW,3} = \ddot{h}_{RW,3} \quad (3.28)$$

3.5 Cinematica del cingolo

In questa sezione viene descritta la cinematica del cingolo, in cui sono presenti le relazioni tra la singola sprocket wheel, il cingolo e le ruote condotte (la tensioner wheel, le road wheels e la ruota di supporto).

La sprocket wheel è una ruota dentata sulla quale ingrana il cingolo, perciò, vale il vincolo cinematico descritto in 3.29:

$$\dot{s}_{rel} = \omega_{SW} r_{SW} \quad (3.29)$$

Dove:

- $\dot{s}_{rel} \left[\frac{m}{s} \right]$: velocità assiale del cingolo relativa al veicolo;
- $\omega_{SW} \left[\frac{rad}{s} \right]$: velocità di rotazione della sprocket wheel;
- $r_{SW} [m]$: raggio della sprocket wheel.

Mentre per le ruote condotte si ipotizza di essere in puro rotolamento, quindi, vale:

$$\dot{s}_{rel} = \omega_c r_c \quad (3.30)$$

Dove:

- $\omega_c \left[\frac{rad}{s} \right]$: velocità di rotazione della generica ruota condotta;
- $r_c [m]$: raggio della generica ruota condotta.

Da cui si possono ricavare la velocità angolare di ciascuna ruota condotta in funzione della velocità angolare della sprocket wheel e del rapporto tra i raggi:

$$\omega_c = \omega_{SW} \frac{r_{SW}}{r_c} \quad (3.31)$$

Per le accelerazioni valgono relazioni analoghe:

$$\begin{aligned}\ddot{s}_{rel} &= \dot{\omega}_{SW} r_{SW} \\ \ddot{s}_{rel} &= \dot{\omega}_c r_c\end{aligned}\tag{3.32}$$

Dove:

- $\ddot{s}_{rel} \left[\frac{m}{s^2} \right]$: accelerazione assiale del cingolo relativa al veicolo;
- $\dot{\omega}_{SW} \left[\frac{rad}{s^2} \right]$: accelerazione angolare della sprocket wheel;
- $\dot{\omega}_c \left[\frac{rad}{s^2} \right]$: accelerazione angolare della generica ruota condotta.

3.6 Modellazione del cingolo

Per semplificare il modello, il cingolo non verrà analizzato in modo dettagliato, in quanto ciò comporterebbe un significativo aumento della complessità computazionale. Pertanto, non saranno considerate le interazioni tra i singoli pattini del cingolo. Invece, il cingolo sarà suddiviso in diverse sezioni, che possono appartenere a due categorie principali:

- 1) Cingolo avvolto attorno alle ruote;
- 2) Segmenti di cingolo tra due ruote.

Questa semplificazione permetterà di ridurre la complessità del calcolo mantenendo un livello adeguato di accuratezza.

La numerazione dei tratti di cingolo per convenzione parte dal tratto di cingolo avvolto attorno alla road wheel 3 e poi prosegue in senso orario, come mostrato in Figura 3.12.

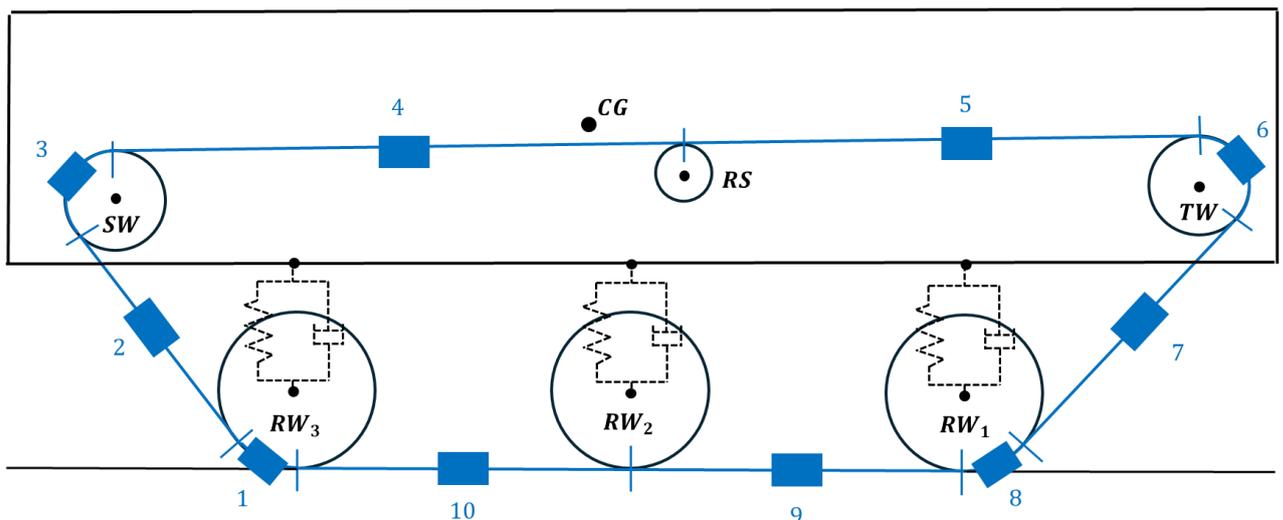


Figura 3.12 - Suddivisione tratti del cingolo (veicolo cingolato con tre road wheels)

Il cingolo è costituito da 91 pattini, ognuno dei quali è collegato da due connettori, quindi, ciascun tratto di cingolo sarà dotato di una massa pari alla somma della massa dei pattini e dei connettori presenti in quel tratto.

Conoscendo la massa di un pattino insieme ai due connettori, è possibile calcolare la massa totale del cingolo:

Tabella 3.1 - Caratteristiche fisiche cingolo (veicolo cingolato con tre road wheels)

CARATTERISTICHE FISICHE CINGOLO		
Grandezza	Valore	Unità di misura
Massa di un pattino più due connettori	23.5	<i>kg</i>
Numero pattini	91	–
Massa totale cingolo	2139	<i>kg</i>

Una volta nota la massa totale del cingolo, tramite lo strumento descritto nell'appendice è possibile ricavare la lunghezza totale del cingolo e la lunghezza di ogni tratto, perciò, è possibile calcolare la massa di un tratto *i*-esimo del cingolo:

$$m_{cin,i} = m_{cin,tot} \frac{l_{cin,i}}{l_{cin,tot}} \quad (3.33)$$

Dove:

- $m_{cin,i}$ [*kg*] : massa del tratto *i*-esimo di cingolo;
- $m_{cin,tot}$ [*kg*] : massa totale del cingolo;
- $l_{cin,i}$ [*m*] : lunghezza del tratto di cingolo *i*-esimo;
- $l_{cin,tot}$ [*m*] : lunghezza totale del cingolo.

Il cingolo, essendo dotato di massa, eserciterà un contributo inerziale, oltre a generare una forza peso verticale che dovrà essere considerata nel calcolo.

Per tenere conto dell'inerzia dei tratti di cingolo avvolti attorno alle ruote, si procederà ad incrementare il momento d'inerzia della ruota corrispondente. Invece, per i segmenti di cingolo che collegano due ruote, il contributo inerziale sarà rappresentato da una massa concentrata posizionata nel punto centrale del segmento. Dunque, nei segmenti di cingolo che collegano due ruote, la tensione potrà variare per effetto della forza d'inerzia del tratto di cingolo considerato.

Il peso del cingolo ha effetti differenti a seconda della sua posizione. Nei tratti in cui il cingolo è sospeso da terra, il suo peso grava sui perni della sprocket wheel, della tensioner wheel e della ruota di supporto. Al contrario, il tratto di cingolo a contatto con il terreno non influisce sui perni delle road wheels, ma agisce esclusivamente nel modello di interazione cingolo-terreno. Per quanto riguarda il peso del cingolo a contatto con il terreno, ipotizzando che il contatto cingolo-terreno sia discretizzato in un numero finito di punti di contatto, corrispondente al numero di road wheels, il contributo di peso dei tratti di cingolo tra due road wheels consecutive viene suddiviso equamente tra di esse, applicando tale peso direttamente in corrispondenza delle road wheels.

Il peso dei tratti di cingolo grava sulle varie ruote secondo la suddivisione descritta in 3.34:

$$m_{cin,SW} = m_{cin,1} + m_{cin,2} + m_{cin,3} + \frac{m_{cin,4}}{2}$$

$$\begin{aligned}
m_{cin,RS} &= \frac{m_{cin,4}}{2} + \frac{m_{cin,5}}{2} \\
m_{cin,TW} &= \frac{m_{cin,5}}{2} + m_{cin,6} + m_{cin,7} + m_{cin,8} \\
m_{cin,RW,1} &= \frac{m_{cin,9}}{2} \\
m_{cin,RW,2} &= \frac{m_{cin,9}}{2} + \frac{m_{cin,10}}{2} \\
m_{cin,RW,3} &= \frac{m_{cin,10}}{2}
\end{aligned}
\tag{3.34}$$

In Figura 3.13 viene illustrata la distribuzione del peso del cingolo lungo tutto il veicolo.

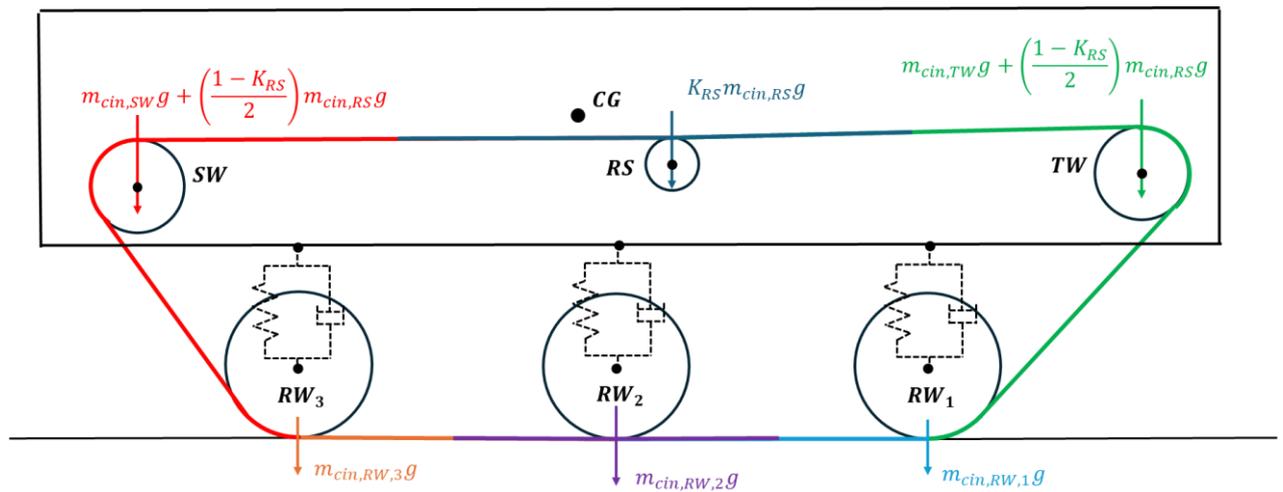


Figura 3.13 - Distribuzione del peso del cingolo (veicolo cingolato con tre road wheels)

3.6.1 Ruote di supporto

Le ruote di supporto sono modellate nel seguente modo:

- Ipotesi di puro rotolamento con il cingolo;
- Presentano una coppia di attrito al perno;
- Hanno inerzia rotazionale (si assume che siano dei dischi con una certa massa).

La sprocket wheel e la tensioner wheel sopportano l'intero peso, rispettivamente, dei tratti di cingolo indicati in rosso e in verde in Figura 3.13, mentre, la ruota di supporto sostiene solo una parte del peso tratto di cingolo indicato in blu. La quota di peso che non grava sulla ruota di supporto, è dunque sostenuta dalla tensioner wheel e dalla sprocket wheel.

La quota di peso che grava sulla ruota di supporto è espressa tramite 3.35, in questo calcolo si considera solo la componente statica, mentre la componente dinamica, dovuta all'accelerazione verticale, viene trascurata:

$$V_{RS} = K_{RS}(m_{cin,RS} \cdot g) + m_{RS} \cdot g
\tag{3.35}$$

Dove:

- V_{RS} [N] : reazione vincolare verticale sul perno della ruota di supporto;
- K_{RS} [-] : coefficiente di ripartizione del peso del cingolo sulla ruota di supporto, è funzione della tensione del cingolo, di default si considera un $K_{RS} = 0.5$;
- $m_{cin,RS}$ [kg] : massa del cingolo sostenuto della ruota di supporto;
- m_{RS} [kg] : massa della ruota di supporto.

3.7 Contatto cingolo-terreno

Se la tensione del cingolo non è troppo elevata ed il terreno è sufficientemente rigido, si può dimostrare che il carico sul terreno si distribuisce in larga misura sotto le ruote stradali, dunque, il contatto distribuito tra i cingoli e il terreno è stato discretizzato in un numero di aree di contatto pari al numero di ruote, come ipotizzato anche da Maclaurin (2007a, 2007b) e da Yugang e Guangjun (2009).

Nel caso di terreni duri, la trazione è generata principalmente dall'attrito. Pertanto, per calcolare con precisione le forze di interazione terreno-cingolo su questi terreni, è fondamentale conoscere lo scorrimento longitudinale, il coefficiente di attrito e la forza normale applicata (Kitano e Kuma, 1977).

Avendo ipotizzato un contatto cingolo-terreno discretizzato in un numero finito di contatti puntuali, pari al numero di road wheels, si è trascurato l'attrito con il terreno dei tratti di cingolo tra due road wheels consecutive.

Oltre al contributo della forza normale applicata, è necessario tenere in considerazione anche il peso del tratto di cingolo a contatto con il terreno.

Per ogni segmento di contatto le forze longitudinali sono calcolate tramite la funzione tangente iperbolica:

$$F_{x,i} = \mu_{cingolo-terreno} (F_{z,i} + m_{cin,i}g) \tanh\left(\frac{3\sigma}{\sigma_{F,max}}\right) \quad (3.36)$$

Dove:

- $F_{x,i}$ [N] : forza longitudinale agente sull'i-esima road wheels;
- $F_{z,i}$ [N] : reazione vincolare verticale a terra in corrispondenza dell'i-esima road wheels;
- $m_{cin,i}g$ [N] : quota peso del cingolo relativa all'i-esima road wheels;
- $\mu_{cingolo-terreno} = 0.8$ è il coefficiente di attrito cingolo-terreno;
- $\sigma = \frac{\omega_{SW} r_{SW} - v_{veicolo}}{v_{veicolo}}$ è lo scorrimento longitudinale;
- $\sigma_{F,max} = 0.2$ è il valore di soglia dello scorrimento longitudinale, che può essere tarato in funzione delle caratteristiche del contatto cingolo-terreno.

Dunque, al variare dello scorrimento longitudinale le forze longitudinali hanno l'andamento mostrato in Figura 3.14. Nel caso in cui i valori di scorrimento siano positivi, si è in fase di trazione, mentre, al contrario, quando i valori di scorrimento sono negativi, si è in fase di frenata.

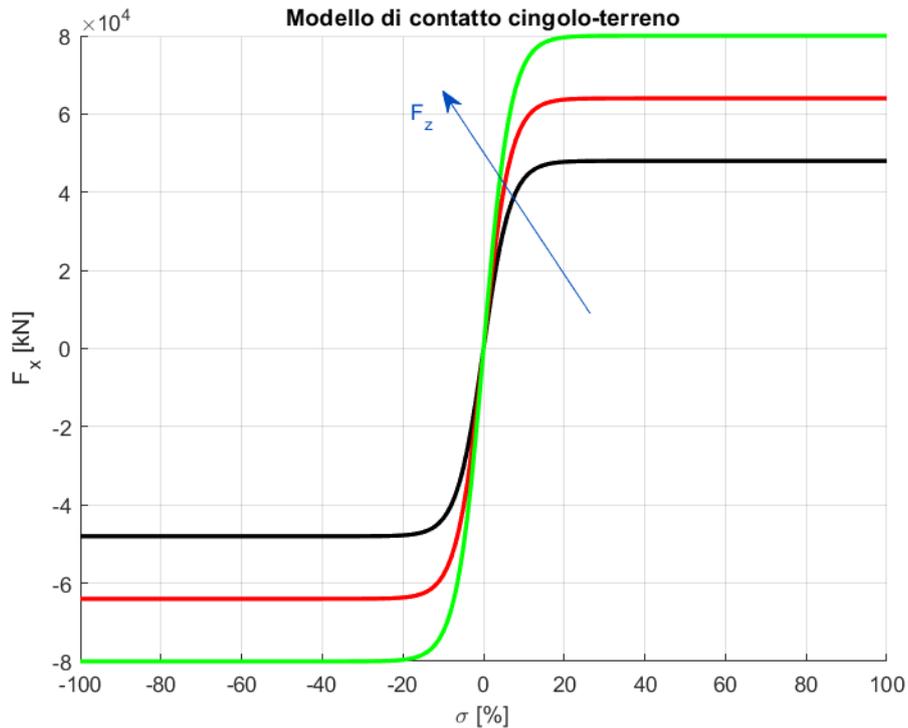


Figura 3.14 - Modello di contatto cingolo-terreno

Nella modellazione è stato assunto che le ruote rimangano costantemente a contatto con il terreno, escludendo quindi la possibilità di un loro distacco. Tuttavia, nei casi in cui la dinamica imporrebbe un distacco delle ruote dal suolo, si prevede che queste rimangano aderenti al terreno, impostando però la forza verticale pari a zero.

Nella letteratura si trovano modelli più dettagliati dell'interazione tra cingolo e terreno, capaci di prevedere sia la resistenza al movimento del cingolo sia lo sforzo di trazione, in relazione alle proprietà del suolo (Wong, 2010). Tuttavia, per semplicità, si è scelto di utilizzare un modello di base che impiega il minor numero possibile di parametri, pur mantenendo un buon livello di approssimazione del fenomeno fisico.

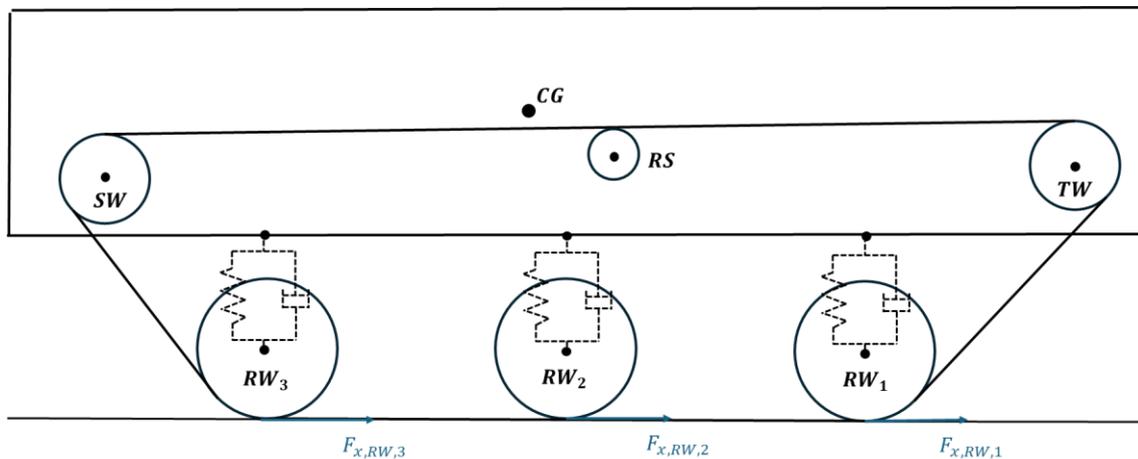


Figura 3.15 - Rappresentazione forze longitudinali (veicolo cingolato con tre road wheels)

3.8 Coppia di attrito al perno

Un altro aspetto da considerare in ogni ruota è la forza di attrito al perno F_a , essa non è centrata rispetto alla ruota, perciò, produrrà un momento attorno al centro in verso opposto rispetto al verso di rotazione della ruota. Questo genera una coppia di attrito al perno C_a .

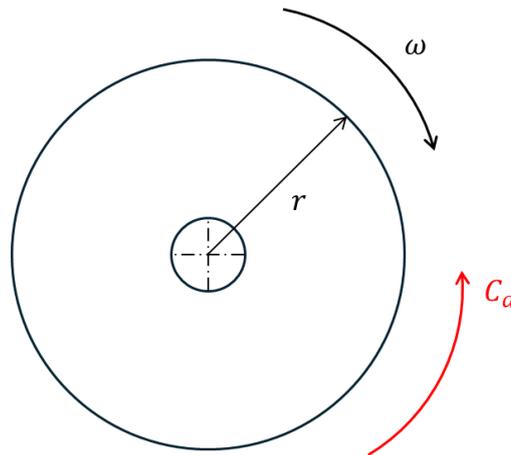


Figura 3.16 - Coppia di attrito al perno su generica ruota

Nel contesto del funzionamento a regime di un sistema, per descrivere la relazione tra il coefficiente di attrito e la velocità di scorrimento tra due superfici in contatto, è opportuno adottare un modello di attrito che consideri due aspetti fondamentali: l'attrito coulombiano e l'attrito viscoso. Il primo aspetto, l'attrito coulombiano, non dipende dalla velocità di scorrimento, ma esclusivamente dalla forza normale scambiata tra i due corpi in contatto. Il secondo aspetto, l'attrito viscoso, è influenzato dalle proprietà fisiche del lubrificante impiegato. La presenza del lubrificante e le sue proprietà, come la viscosità, determinano un incremento del coefficiente di attrito e, conseguentemente, della forza di attrito con l'aumentare della velocità di scorrimento tra le superfici.

Per semplificare il calcolo in prima battuta consideriamo che la componente coulombiana della forza di attrito sia costante e valutata a partire dalla forza normale alla superficie del caso statico.

Al fine di descrivere la variazione di segno della coppia di attrito al variare del verso di rotazione della ruota verrà usata la funzione tangente iperbolica, essa permette di esprimere la variazione di segno senza introdurre una discontinuità.

La relazione della coppia di attrito al perno è:

$$C_a = F_{N,stat} \rho_p \tanh(3\omega/\omega_{th}) + c_{perno} \omega = C_{a0} \tanh(3\omega/\omega_{th}) + c_{perno} \omega \quad (3.37)$$

Dove:

- $C_a [N \cdot m]$: coppia di attrito al perno;
- $F_{N,stat} [N]$: forza normale alla superficie nel caso statico;

- $\rho_p = r_p \sin(\text{atan}(\mu))$ è il raggio del cerchio di attrito nel perno;
- $\mu = 0.05$ è il coefficiente di attrito dinamico di Coulomb (acciaio su acciaio lubrificato);
- $r_p = 0.05 \text{ m}$ è il raggio del perno;
- $c_{perno} = 1 \frac{N \cdot m}{rad/s}$ è il coefficiente di smorzamento viscoso del perno;
- $\omega \left[\frac{rad}{s} \right]$: velocità di rotazione della ruota;
- $\omega_{th} = 0.2 \text{ rad/s}$ è la velocità di soglia.

L'equilibrio dei momenti sul perno sarà espresso dalla

$$C = F \cdot \rho = R \cdot \rho \quad (3.2)$$

Tale equilibrio varrà identicamente anche per tutte le possibili direzioni della forza F (vedi figura 3.9).

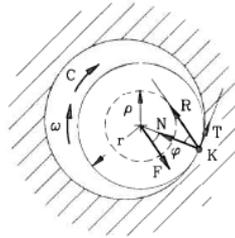


Figura 3.9

Il braccio ρ può essere determinato sapendo che la reazione R è la somma di una componente tangenziale T e di una componente normale N diretta verso il centro del perno, ed è quindi inclinata rispetto ad N dell'angolo di attrito φ . Per questo motivo si vede facilmente che

$$\rho = r \sin \varphi \quad (3.3)$$

Figura 3.17 - Coppia di attrito al perno [1]

4. Modello statico

Il primo step dell'analisi prevede la realizzazione di un modello statico in Matlab, mirato a esaminare il comportamento del veicolo cingolato in condizioni di velocità nulla e sotto l'effetto di una forza di tensionamento applicata. Nell'analisi statica si ipotizza di essere nel caso di strada piana. In regime statico, il grado di libertà associato alla traslazione orizzontale è inibito, lasciando così al sistema due gradi di libertà: la traslazione verticale del baricentro e il beccheggio.

Ci sono due coordinate generalizzate:

- 1) Posizione verticale del baricentro della massa sospesa z_{CG} ;
- 2) Angolo di beccheggio θ .

Come sistema di riferimento si utilizza una terna cartesiana destrorsa, l'asse x è positivo verso destra, l'asse z è positivo verso l'alto e l'asse y è positivo nel verso entrante.

Verrà studiato ogni singolo componente del veicolo cingolato mediante l'approccio basato sulle equazioni della dinamica di Newton:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad (4.1)$$

Dove:

- \vec{F} [N]: risultante delle forze agenti sul corpo;
- m [kg]: massa del corpo;
- \vec{a} [$\frac{m}{s^2}$]: accelerazione a cui è soggetto il corpo.

Trovandoci nel caso statico si ha che $\vec{a} = 0$, quindi, la risultante delle forze agenti sul corpo dev'essere nulla:

$$\vec{F} = 0 \quad (4.2)$$

4.1 Diagrammi di corpo libero ed equazioni di equilibrio statico

In questa sezione vengono descritti i vari diagrammi di corpo libero con le relative equazioni di equilibrio statico, ci saranno tre equazioni di equilibrio (traslazione orizzontale, traslazione verticale e rotazionale) per ogni ruota e per la massa sospesa.

Per ogni ruota non viene considerato l'equilibrio rotazionale, poiché la tensione è costante lungo l'intero cingolo. Questo avviene perché la coppia di attrito al perno è stata modellata in modo da non generare perdite quando il veicolo è fermo.

Nei diagrammi di corpo libero sono presenti le seguenti forze:

- V [N]: reazione vincolare verticale al perno;
- O [N]: reazione vincolare orizzontale al perno;
- F [N]: forza di tensionamento;
- T [N]: tensione del cingolo;
- F_k [N]: forza elastica esercitata dalla sospensione;
- F_z [N]: forza verticale al terreno;
- mg [N]: forza peso.

I diagrammi di corpo libero dei diversi componenti costituenti il veicolo sono:

- Sprocket wheel

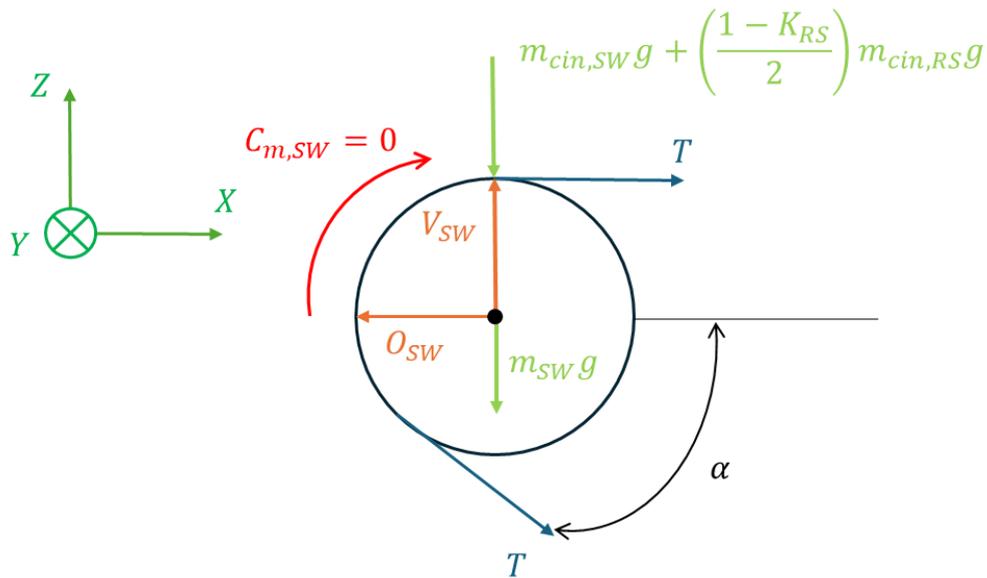


Figura 4.1 - Diagramma di corpo libero della sprocket wheel in statica (veicolo cingolato con tre road wheels)

Essendo in statica, la coppia applicata sulla sprocket wheel è nulla $C_{m,SW} = 0$. Nel diagramma di corpo libero è presente anche il peso del cingolo sostenuto dalla sprocket wheel, dato che si va a scaricare sul perno.

Equilibrio orizzontale:

$$T + T \cos \alpha - O_{SW} = 0 \quad (4.3)$$

Equilibrio verticale:

$$V_{SW} - T \sin \alpha - m_{SW} g - m_{cin,SW} g - \left(\frac{1 - K_{RS}}{2} \right) m_{cin,RS} g = 0 \quad (4.4)$$

- Ruota di supporto

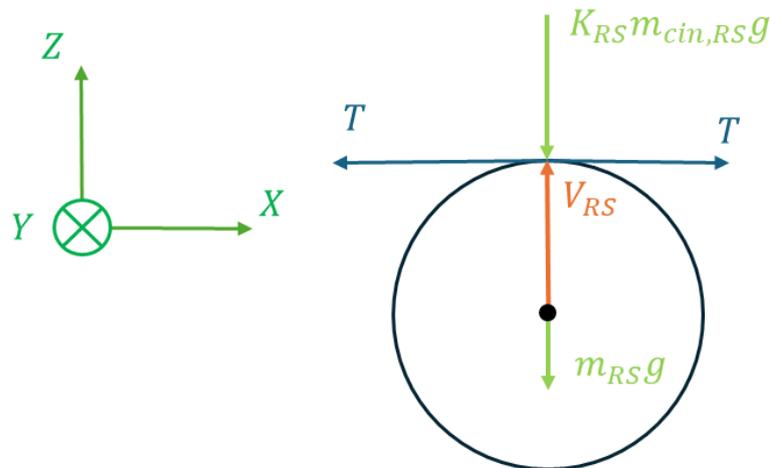


Figura 4.2 - Diagramma di corpo libero della ruota di supporto in statica (veicolo cingolato con tre road wheels)

Essendo che la distribuzione del peso del cingolo è disaccoppiata rispetto al problema statico, la reazione vincolare verticale V_{RS} non è un'incognita.

Equilibrio orizzontale:

$$T - T = 0 \quad (4.5)$$

Equilibrio verticale:

$$V_{RS} - K_{RS}m_{cin,RS}g - m_{RS}g = 0 \quad (4.6)$$

- Tensioner wheel

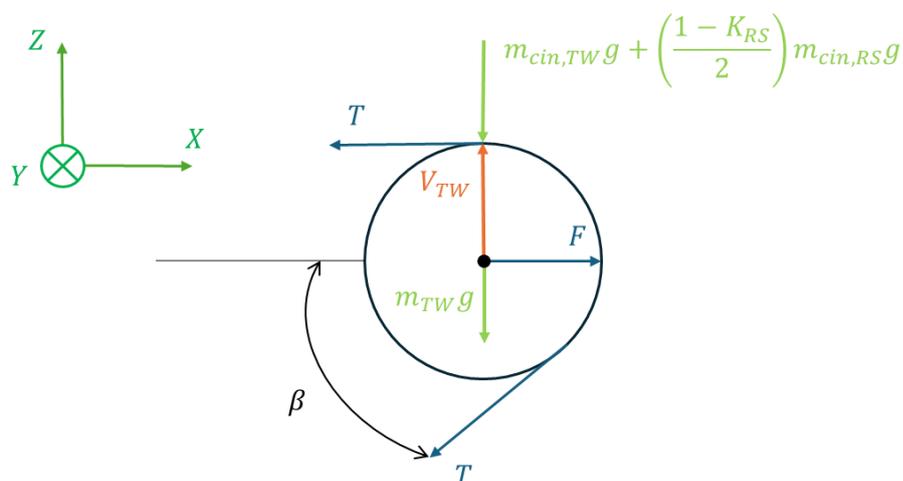


Figura 4.3 - Diagramma di corpo libero della tensioner wheel in statica (veicolo cingolato con tre road wheels)

Nel diagramma di corpo libero viene considerato anche il peso del cingolo sostenuto dalla tensioner wheel, poiché questo peso si scarica direttamente sul perno.

Equilibrio orizzontale:

$$F - T - T \cos \beta = 0 \quad (4.7)$$

Equilibrio verticale:

$$V_{TW} - T \sin \beta - m_{TW}g - m_{cin,TW}g - \left(\frac{1 - K_{RS}}{2}\right) m_{cin,RS}g = 0 \quad (4.8)$$

- Road wheel 1

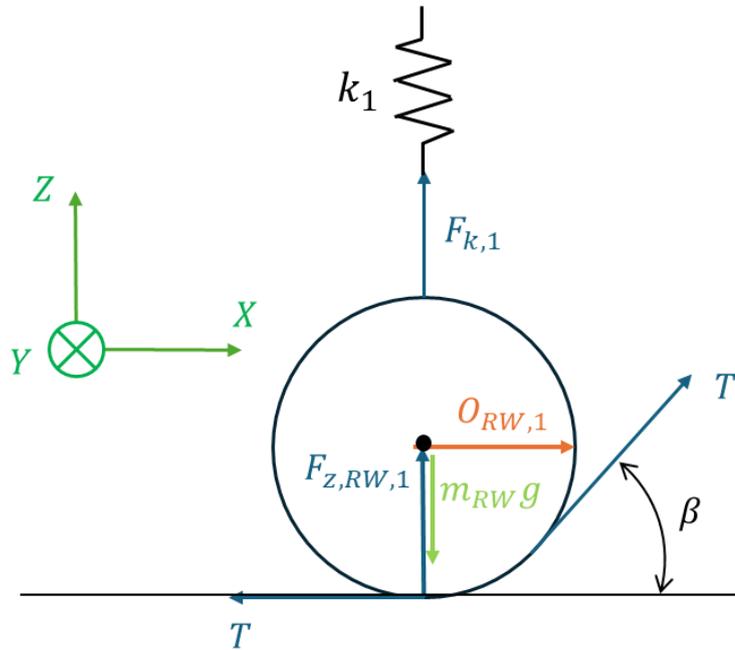


Figura 4.4 - Diagramma di corpo libero della road wheel 1 in statica (veicolo cingolato con tre road wheels)

Equilibrio orizzontale:

$$T \cos \beta + O_{RW,1} - T = 0 \quad (4.9)$$

Equilibrio verticale:

$$T \sin \beta + F_{z,RW,1} + F_{k,1} - m_{RW}g = 0 \quad (4.10)$$

- Road wheel 2

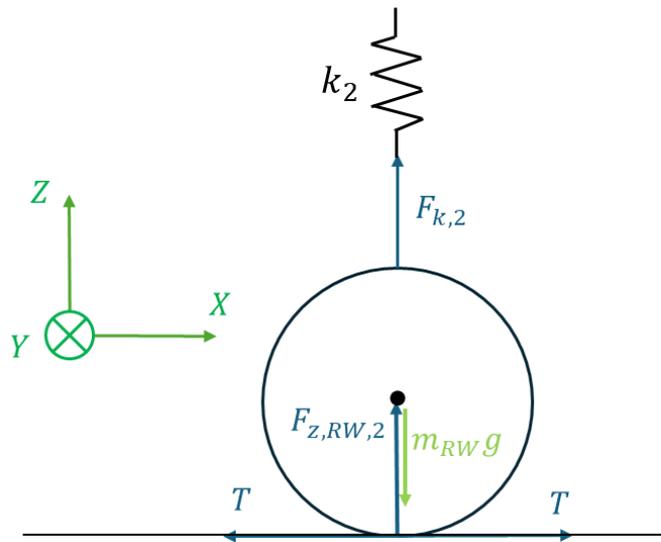


Figura 4.5 - Diagramma di corpo libero della road wheel 2 in statica (veicolo cingolato con tre road wheels)

Nella ruota centrale non si manifesta una reazione vincolare orizzontale sul perno, poiché le tensioni applicate ai due estremi della ruota sono uguali e perfettamente orizzontali. Questo risultato è valido sotto l'ipotesi assunta di una strada piana e rigida.

Equilibrio orizzontale:

$$T - T = 0 \quad (4.11)$$

Equilibrio verticale:

$$F_{z,RW,2} + F_{k,2} - m_{RW}g = 0 \quad (4.12)$$

- Road wheel 3

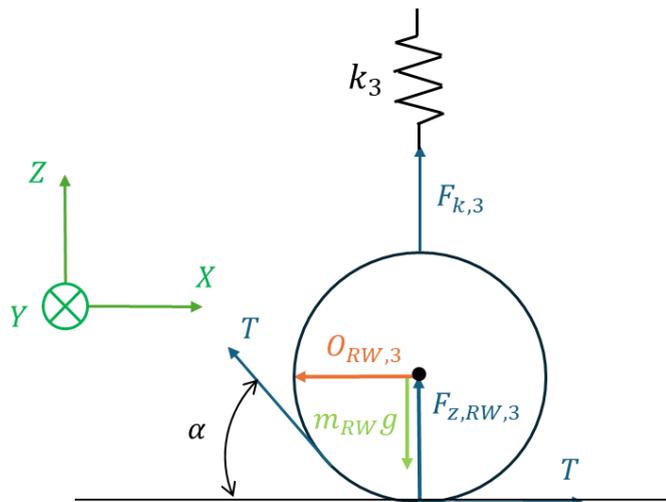


Figura 4.6 - Diagramma di corpo libero della road wheel 3 in statica (veicolo cingolato con tre road wheels)

Equilibrio orizzontale:

$$T - T \cos \alpha - O_{RW,3} = 0 \quad (4.13)$$

Equilibrio verticale:

$$T \sin \alpha + F_{z,RW,3} + F_{k,3} - m_{RW}g = 0 \quad (4.14)$$

- Massa sospesa

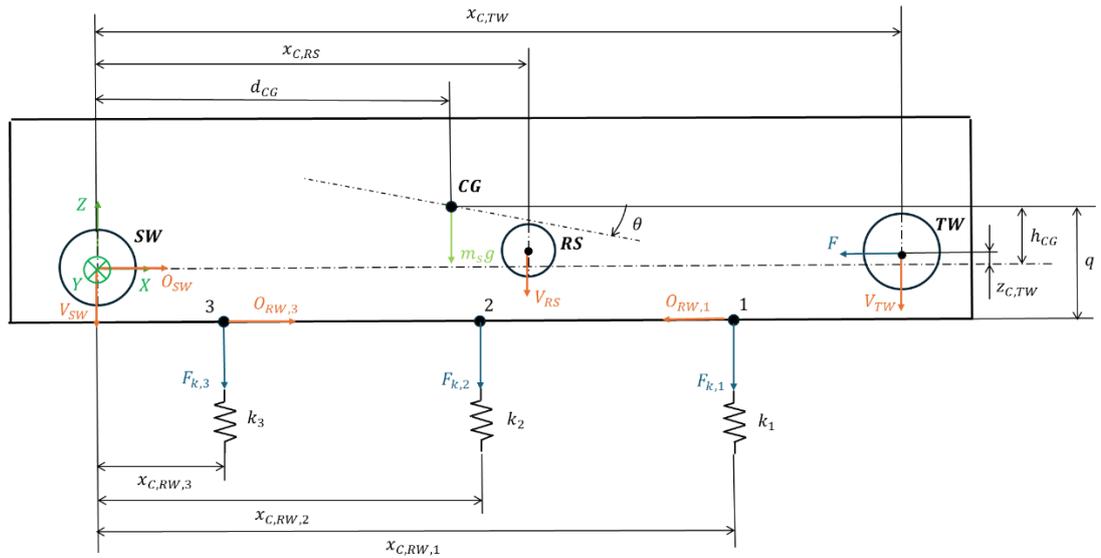


Figura 4.7 - Diagramma di corpo libero della massa sospesa in statica (veicolo cingolato con tre road wheels)

Equilibrio orizzontale:

$$O_{SW} + O_{RW,3} - O_{RW,1} - F = 0 \quad (4.15)$$

Equilibrio verticale:

$$-V_{TW} - V_{SW} - V_{RS} - F_{k,1} - F_{k,2} - F_{k,3} - m_s g = 0 \quad (4.16)$$

Equilibrio rotazionale intorno a CG:

$$\begin{aligned} & -V_{SW}d_{CG} - O_{SW}h_{CG} + V_{TW}(x_{C,TW} - d_{CG}) + V_{RS}(x_{C,RS} - d_{CG}) + F(h_{CG} - z_{C,TW}) + \\ & + O_{RW,1}q - O_{RW,3}q + F_{k,1}(x_{C,RW,1} - d_{CG}) + F_{k,2}(x_{C,RW,2} - d_{CG}) - F_{k,3}(d_{CG} - x_{C,RW,3}) = 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

4.2 Sistema di equazioni risolvente

Per risolvere il problema si mettono a sistema le equazioni di equilibrio, ad eccezione dell'equilibrio orizzontale della road wheel 2 e delle equazioni di equilibrio della ruota di supporto. Questo perché l'equilibrio orizzontale della road wheel 2 e quello della ruota di supporto sono un'identità, mentre, l'equilibrio verticale della ruota di supporto non contiene incognite.

- 1) $(1 + \cos \alpha)T - O_{SW} = 0$
- 2) $V_{SW} - T \sin \alpha - m_{SW}g - m_{cin,SW}g - \left(\frac{1-K_{RS}}{2}\right)m_{cin,RS}g = 0$
- 3) $F - (1 + \cos \beta)T = 0$
- 4) $V_{TW} - T \sin \beta - m_{TW}g - m_{cin,TW}g - \left(\frac{1-K_{RS}}{2}\right)m_{cin,RS}g = 0$
- 5) $T \cos \beta + O_{RW,1} - T = 0$
- 6) $T \sin \beta + F_{z,RW,1} + F_{k,1} - m_{RW}g = 0$
- 7) $F_{z,RW,2} + F_{k,2} - m_{RW}g = 0$
- 8) $T - T \cos \alpha - O_{RW,3} = 0$
- 9) $T \sin \alpha + F_{z,RW,3} + F_{k,3} - m_{RW}g = 0$
- 10) $O_{SW} + O_{RW,3} - O_{RW,1} - F = 0$
- 11) $-V_{TW} - V_{SW} - V_{RS} - F_{k,1} - F_{k,2} - F_{k,3} - m_s g = 0$
- 12) $-V_{SW}d_{CG} - O_{SW}h_{CG} + V_{TW}(x_{C,TW} - d_{CG}) + V_{RS}(x_{C,RS} - d_{CG}) + F(h_{CG} + z_{C,TW}) + O_{RW,1}q - O_{RW,3}q + F_{k,1}(x_{C,RW,1} - d_{CG}) + F_{k,2}(x_{C,RW,2} - d_{CG}) + F_{k,3}(d_{CG} - x_{C,RW,3}) = 0$

(4.18)

Si inseriscono le relazioni delle forze elastiche delle sospensioni, essendo nel caso di terreno piano si ha che $h_{RW,1} = h_{RW,2} = h_{RW,3} = 0$:

- 1) $(1 + \cos \alpha)T - O_{SW} = 0$
- 2) $V_{SW} - T \sin \alpha - m_{SW}g - m_{cin,SW}g - \left(\frac{1-K_{RS}}{2}\right)m_{cin,RS}g = 0$
- 3) $F - (1 + \cos \beta)T = 0$
- 4) $V_{TW} - T \sin \beta - m_{TW}g - m_{cin,TW}g - \left(\frac{1-K_{RS}}{2}\right)m_{cin,RS}g = 0$
- 5) $T \cos \beta + O_{RW,1} - T = 0$
- 6) $T \sin \beta + F_{z,RW,1} + k_1 z_1 - m_{RW}g = 0$
- 7) $F_{z,RW,2} + k_2 z_2 - m_{RW}g = 0$
- 8) $T - T \cos \alpha - O_{RW,3} = 0$
- 9) $T \sin \alpha + F_{z,RW,3} + k_3 z_3 - m_{RW}g = 0$
- 10) $O_{SW} + O_{RW,3} - O_{RW,1} - F = 0$
- 11) $-V_{TW} - V_{SW} - V_{RS} - k_1 z_1 - k_2 z_2 - k_3 z_3 - m_s g = 0$

$$\begin{aligned}
12) \quad & -V_{SW}d_{CG} - O_{SW}h_{CG} + V_{TW}(x_{C,TW} - d_{CG}) + V_{RS}(x_{C,RS} - d_{CG}) + F(h_{CG} + \\
& -z_{C,TW}) + O_{RW,1}q - O_{RW,3}q + k_1z_1(x_{C,RW,1} - d_{CG}) + k_2z_2(x_{C,RW,2} - d_{CG}) + \\
& -k_3z_3(d_{CG} - x_{C,RW,3}) = 0
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Sostituisco le espressioni delle traslazioni verticali dei punti di attacco delle sospensioni al telaio:

$$\begin{aligned}
1) \quad & (1 + \cos \alpha)T - O_{SW} = 0 \\
2) \quad & V_{SW} - T \sin \alpha - m_{SW}g - m_{cin,SW}g - \left(\frac{1-K_{RS}}{2}\right)m_{cin,RS}g = 0 \\
3) \quad & F - (1 + \cos \beta)T = 0 \\
4) \quad & V_{TW} - T \sin \beta - m_{TW}g - m_{cin,TW}g - \left(\frac{1-K_{RS}}{2}\right)m_{cin,RS}g = 0 \\
5) \quad & T \cos \beta + O_{RW,1} - T = 0 \\
6) \quad & T \sin \beta + F_{z,RW,1} + k_1z_{CG} - k_1l_1 \tan \theta - m_{RW}g = 0 \\
7) \quad & F_{z,RW,2} + k_2z_{CG} - k_2l_2 \tan \theta - m_{RW}g = 0 \\
8) \quad & T - T \cos \alpha - O_{RW,3} = 0 \\
9) \quad & T \sin \alpha + F_{z,RW,3} + k_3z_{CG} + k_3l_3 \tan \theta - m_{RW}g = 0 \\
10) \quad & O_{SW} + O_{RW,3} - O_{RW,1} - F = 0 \\
11) \quad & -V_{TW} - V_{SW} - V_{RS} - (k_1 + k_2 + k_3)z_{CG} + (k_1l_1 + k_2l_2 - k_3l_3) \tan \theta + \\
& -m_s g = 0 \\
12) \quad & -V_{SW}d_{CG} - O_{SW}h_{CG} + V_{TW}(x_{C,TW} - d_{CG}) + V_{RS}(x_{C,RS} - d_{CG}) + F(h_{CG} + \\
& -z_{C,TW}) + O_{RW,1}q - O_{RW,3}q + [k_1(x_{C,RW,1} - d_{CG}) + k_2(x_{C,RW,2} - d_{CG}) + \\
& + k_3(x_{C,RW,3} - d_{CG})]z_{CG} + [-k_1l_1(x_{C,RW,1} - d_{CG}) - k_2l_2(x_{C,RW,2} - d_{CG}) + \\
& + k_3l_3(x_{C,RW,3} - d_{CG})] \tan \theta = 0
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Riformulo:

$$\begin{aligned}
1) \quad & -(1 + \cos \alpha)T + O_{SW} = 0 \\
2) \quad & -\sin \alpha T + V_{SW} = m_{SW}g + m_{cin,SW}g + \left(\frac{1-K_{RS}}{2}\right)m_{cin,RS}g \\
3) \quad & (1 + \cos \beta)T = F \\
4) \quad & -\sin \beta T + V_{TW} = m_{TW}g + m_{cin,TW}g + \left(\frac{1-K_{RS}}{2}\right)m_{cin,RS}g \\
5) \quad & (\cos \beta - 1)T + O_{RW,1} = 0 \\
6) \quad & \sin \beta T + F_{z,RW,1} + k_1z_{CG} - k_1l_1 \tan \theta = m_{RW}g \\
7) \quad & F_{z,RW,2} + k_2z_{CG} - k_2l_2 \tan \theta = m_{RW}g \\
8) \quad & (1 - \cos \alpha)T - O_{RW,3} = 0 \\
9) \quad & \sin \alpha T + F_{z,RW,3} + k_3z_{CG} + k_3l_3 \tan \theta = m_{RW}g \\
10) \quad & O_{SW} - O_{RW,1} + O_{RW,3} = F \\
11) \quad & V_{TW} + V_{SW} + (k_1 + k_2 + k_3)z_{CG} - (k_1l_1 + k_2l_2 - k_3l_3) \tan \theta = -V_{RS} - m_s g
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
12) & -V_{SW}d_{CG} + (x_{C,TW} - d_{CG})V_{TW} - O_{SW}h_{CG} + O_{RW,1}q - O_{RW,3}q + \\
& + [k_1(x_{C,RW,1} - d_{CG}) + k_2(x_{C,RW,2} - d_{CG}) + k_3(x_{C,RW,3} - d_{CG})]z_{CG} + \\
& + [-k_1l_1(x_{C,RW,1} - d_{CG}) - k_2l_2(x_{C,RW,2} - d_{CG}) + k_3l_3(x_{C,RW,3} - d_{CG})] \tan \theta = \\
& = -F(h_{CG} - z_{C,TW}) - V_{RS}(x_{C,RS} - d_{CG})
\end{aligned} \tag{4.21}$$

In totale ci sono undici incognite, indicate nelle equazioni da un colore rosso:

- $T, V_{SW}, V_{TW}, O_{SW}, O_{RW,1}, O_{RW,3}, F_{z,RW,1}, F_{z,RW,2}, F_{z,RW,3}, z_{CG}, \tan \theta$.

4.3 Soluzione del sistema con approccio matriciale

Si prosegue riscrivendo il sistema nella seguente forma:

$$Ax = b \tag{4.22}$$

Dove:

- x è il vettore colonna delle incognite;
- A è la matrice dei coefficienti;
- b è il vettore colonna dei termini noti.

Il vettore colonna delle incognite x , di dimensione 11×1 , per una migliore visualizzazione, viene diviso in due sotto vettori:

$$x = [x_1 \quad x_2]^T$$

Dove:

- x_1 è un vettore riga, di dimensione 1×6 , contenente la tensione, le reazioni vincolari della sprocket wheel, della tensioner e le reazioni vincolari orizzontali delle road wheels:

$$x_1 = [T \quad V_{SW} \quad V_{TW} \quad O_{SW} \quad O_{RW,1} \quad O_{RW,3}]$$

- x_2 è un vettore riga, di dimensione 1×5 , con all'interno le reazioni vincolari verticali al terreno in corrispondenza delle road wheels, lo scuotimento del baricentro e il beccheggio:

$$x_2 = [F_{z,RW,1} \quad F_{z,RW,2} \quad F_{z,RW,3} \quad z_{CG} \quad \tan \theta]$$

La matrice dei coefficienti A , di dimensione 12×11 , viene ugualmente divisa in due sottomatrici:

$$A = [A_1 \quad A_2]$$

Dove:

- A_1 è una matrice di dimensione 12×6 :

$$A_1 = \begin{pmatrix} -(1 + \cos \alpha) & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (1 + \cos \beta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (\cos \beta - 1) & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (1 - \cos \alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d_{CG} & (x_{C,TW} - d_{CG}) & -h_{CG} & q & -q \end{pmatrix}$$

- A_2 è una matrice di dimensione 12×5 :

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & k_1 & -k_1 l_1 \\ 0 & 1 & 0 & k_2 & -k_2 l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k_3 & k_3 l_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (k_1 + k_2 + k_3) & -(k_1 l_1 + k_2 l_2 - k_3 l_3) \\ 0 & 0 & 0 & [k_1(x_{C,RW,1} - d_{CG}) + k_2(x_{C,RW,2} - d_{CG}) + k_3(x_{C,RW,3} - d_{CG})] & [-k_1 l_1(x_{C,RW,1} - d_{CG}) - k_2 l_2(x_{C,RW,2} - d_{CG}) + k_3 l_3(x_{C,RW,3} - d_{CG})] \end{pmatrix}$$

Il sistema ottenuto è composto da dodici equazioni e undici incognite; quindi, la matrice A non è quadrata e possiede un rango pari a undici. Per risolvere il sistema, è necessario eliminare un'equazione, rendendo così la matrice A quadrata e invertibile. Tuttavia, l'equazione eliminata deve essere scelta in modo da mantenere il rango massimo, evitando la perdita di informazioni. Un'analisi più approfondita del sistema mostra che ciascuna delle cinque equazioni di equilibrio orizzontale è linearmente dipendente dalle altre quattro:

$$\begin{aligned} -(1 + \cos \alpha) T + O_{SW} &= 0 \\ (1 + \cos \beta) T &= F \\ (\cos \beta - 1) T + O_{RW,1} &= 0 \\ (1 - \cos \alpha) T - O_{RW,3} &= 0 \\ O_{SW} - O_{RW,1} + O_{RW,3} &= F \end{aligned} \tag{4.23}$$

Pertanto, per mantenere il rango massimo della matrice A , è possibile eliminare solo una delle equazioni di equilibrio orizzontale, mentre non è consentito eliminare le altre equazioni di equilibrio presenti nel sistema.

In questo caso, si è scelto di escludere l'equilibrio orizzontale della massa sospesa, perciò, la matrice dei coefficienti A , di dimensione 11×11 , è:

$$A = [A_1 \quad A_2]$$

Dove:

- A_1 è una matrice di dimensione 11×6 :

$$A_1 = \begin{pmatrix} -(1 + \cos \alpha) & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (1 + \cos \beta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (\cos \beta - 1) & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (1 - \cos \alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d_{CG} & (x_{C,TW} - d_{CG}) & -h_{CG} & q & -q \end{pmatrix}$$

- A_2 è una matrice di dimensione 11×5 :

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & k_1 & -k_1 l_1 \\ 0 & 1 & 0 & k_2 & -k_2 l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k_3 & k_3 l_3 \\ 0 & 0 & 0 & (k_1 + k_2 + k_3) & -(k_1 l_1 + k_2 l_2 - k_3 l_3) \\ 0 & 0 & 0 & [k_1(x_{C,RW,1} - d_{CG}) + k_2(x_{C,RW,2} - d_{CG}) + k_3(x_{C,RW,3} - d_{CG})] & [-k_1 l_1(x_{C,RW,1} - d_{CG}) - k_2 l_2(x_{C,RW,2} - d_{CG}) + k_3 l_3(x_{C,RW,3} - d_{CG})] \end{pmatrix}$$

Di conseguenza, il vettore colonna dei termini noti b , di dimensione 11×1 , è:

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ m_{SW}g + m_{cin,SW}g + \left(\frac{1 - K_{RS}}{2}\right)m_{cin,RS}g \\ F \\ m_{TW}g + m_{cin,TW}g + \left(\frac{1 - K_{RS}}{2}\right)m_{cin,RS}g \\ 0 \\ m_{RW}g \\ m_{RW}g \\ 0 \\ m_{RW}g \\ -V_{RS} - m_s g \\ -F(h_{CG} - z_{C,TW}) - V_{RS}(x_{C,RS} - d_{CG}) \end{bmatrix}$$

4.3.1 Verifica della soluzione

Risolvendo il sistema di equazioni lineari applicando una forza di tensionamento di $F = 0.3 \cdot m_{tot}g = 54.8 \text{ kN}$, si ottengono i seguenti risultati:

Tabella 4.1 - Risultati analisi statica

Tabella 4.1 - Risultati analisi statica (veicolo cingolato con tre road wheels)

RISULTATI		
Grandezza	Valore	Unità di misura
T	30.0	kN
V_{SW}	28.2	kN
V_{TW}	24.7	kN
O_{SW}	51.8	kN
$O_{RW,1}$	5.3	kN
$O_{RW,3}$	8.3	kN
$F_{z,RW,1}$	49.3	kN
$F_{z,RW,2}$	71.6	kN
$F_{z,RW,3}$	56.2	kN
z_{CG}	-0.142	m
$\tan \theta$	-0.007	-

Si ricavano il beccheggio e lo scuotimento dei punti di attacco delle sospensioni al telaio:

$$\theta = \tan^{-1}(-0.007) = -0.372^\circ$$

$$z_1 = z_{CG} - l_1 \cdot \tan \theta = -0.131 \text{ m}$$

$$z_2 = z_{CG} - l_2 \cdot \tan \theta = -0.141 \text{ m}$$

$$z_3 = z_{CG} + l_3 \cdot \tan \theta = -0.152 \text{ m}$$

(4 . 24)

Il segno del beccheggio è coerente con le assunzioni fatte, dato che un baricentro posizionato più vicino all'assale 3 comporta un affondamento maggiore dell'assale 3 rispetto all'assale 1.

Un affondamento maggiore significa maggiore compressione delle molle e quindi una forza a terra più elevata sull'assale 3 rispetto all'assale 1, come mostrato in Figura 4.8:

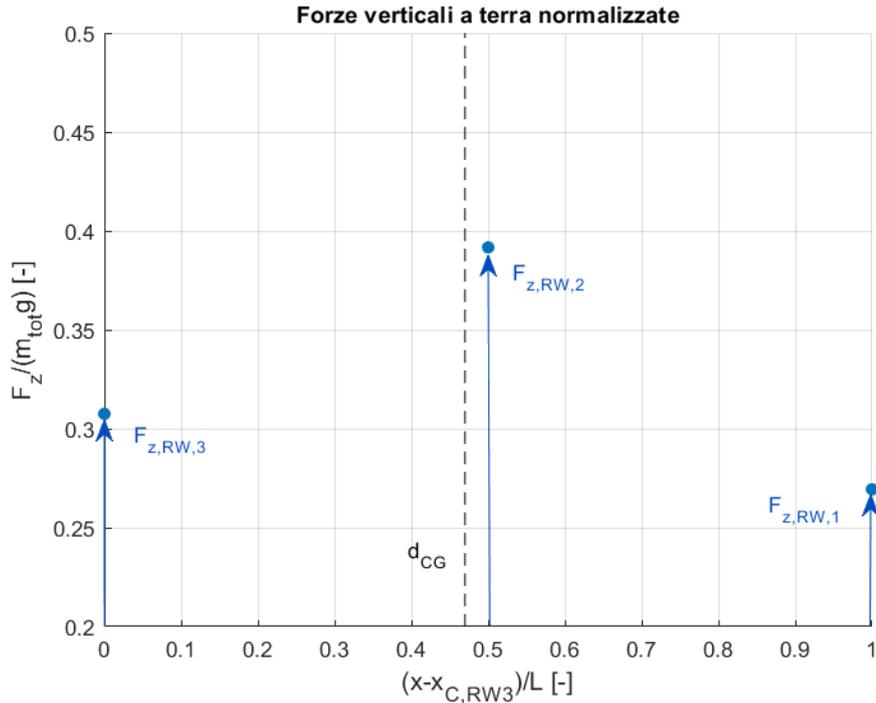


Figura 4.8 - Forze verticali a terra normalizzate (veicolo cingolato con tre road wheels)

Lo zero dell'asse delle ascisse corrisponde all'inizio del segmento di contatto di lunghezza L :

$$L = x_{C,RW,1} - x_{C,RW,3} \quad (4.25)$$

Tabella 4.2 - Forze verticali a terra (veicolo cingolato con tre road wheels)

FORZE A TERRA		
Grandezza	Valore	Unità di misura
$F_{z,RW,1}$	49.3	kN
$F_{z,RW,2}$	71.6	kN
$F_{z,RW,3}$	56.2	kN

Affinché il modello risulti valido, è necessario che la somma delle forze esercitate a terra sui tre assali sia uguale alla forza peso $F_{p,stat}$. Questo perché la forza peso rappresenta l'unica forza esterna applicata al sistema.

Le reazioni vincolari a terra in corrispondenza non risentono del peso del tratto di cingolo a contatto con il terreno, quindi, il suo contributo è da escludere.

$$F_{p,stat} = m_{tot}g - (m_{cin,RW,1} + m_{cin,RW,2} + m_{cin,RW,3})g + -(1 - K_{RS})m_{cin,RS}g = 177.1 \text{ kN} \quad (4.26)$$

La somma delle forze a terra è pari a:

$$F_{z,TOT} = F_{z,RW,1} + F_{z,RW,2} + F_{z,RW,3} = 49.3 + 71.6 + 56.2 = 177.1 \text{ kN} \quad (4.27)$$

La condizione è verificata.

4.4 Calcolo della tensione statica del cingolo nota la forza di tensionamento

Nell'equazione di equilibrio orizzontale della tensioner wheel si può notare come la tensione statica del cingolo sia legata alla forza di tensionamento, quindi, si ha la possibilità di calcolare la tensione del cingolo nota la forza di tensionamento. Nel caso della forza di tensionamento sto applicando una forza indipendentemente dallo spostamento orizzontale che ha la tensioner wheel, questo è compatibile con l'assunzione di cingolo infinitamente rigido perché essendo inestensibile non ha bisogno di essere deformato per trasmettere forze elevate.

La seguente relazione è valida grazie alla semplificazione di scegliere un modello di attrito coulombiano al perno a tangente iperbolica, dato che si può trascurare il suo effetto quando la velocità relativa tra i due corpi è nulla:

$$T = \frac{F}{(1 + \cos \beta)} \quad (4.28)$$

Dove:

- $T [N]$: tensione statica del cingolo;
- $F [N]$: forza di tensionamento;
- $\beta [^\circ]$: angolo di inclinazione del segmento di cingolo tra la tensioner wheel e la road wheel 1.

Nei veicoli cingolati l'obiettivo è cercare di regolare la tensione applicando una forza di tensionamento il più bassa possibile, osservando l'equazione si nota come sia possibile aumentare la tensione a pari sforzo agendo sull'angolo β .

L'angolo β può variare tra 0° e 90° , quindi, la tensione del cingolo ha il seguente range di variazione: $\frac{1}{2}F \leq T \leq F$.

Un valore di β pari a 0° o 90° non è fisicamente possibile; verosimilmente, il suo valore si situerà tra questi due estremi. Per massimizzare la tensione, il valore di β dovrebbe essere quanto più vicino possibile ai 90° .

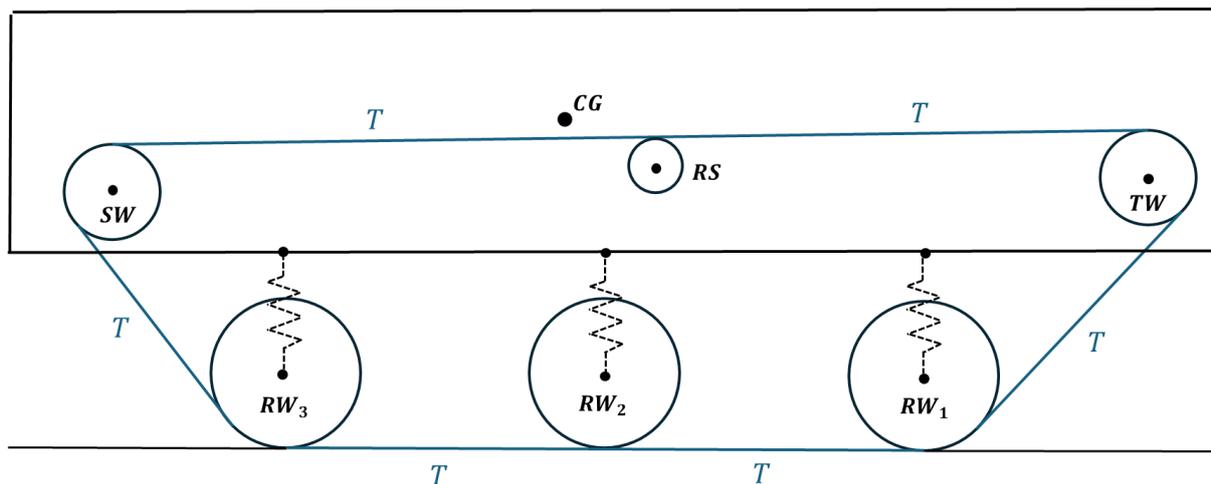


Figura 4.9 - Distribuzione di tensione lungo il cingolo

4.5 Analisi dei risultati del modello statico

4.5.1 Effetto del tensionamento sulla distribuzione delle forze a terra

Il primo caso interessante da analizzare è vedere cosa cambia a livello di distribuzione di forze a terra tra un veicolo multi-asse cingolato e un veicolo multi-asse non cingolato.

Al fine di mettere in evidenza l'effetto del tensionamento si effettua un test mantenendo la geometria inalterata e imponendo una forza di tensionamento $F = 0$.

Risolvendo il problema si ottengono i risultati mostrati in Tabella 4.3:

Tabella 4.3 - Risultati dell'analisi statica (veicolo cingolato con tre road wheels con tensionamento nullo)

RISULTATI		
Grandezza	Valore	Unità di misura
T	0	kN
V_{TW}	0	kN
O_{SW}	0	kN
V_{SW}	0	kN
$O_{RW,1}$	0	kN
$O_{RW,3}$	0	kN
$F_{z,RW,1}$	55.3	kN
$F_{z,RW,2}$	59.0	kN
$F_{z,RW,3}$	62.8	kN
z_{CG}	-0.117	m
$\tan \theta$	-0.005	-

Analizzando la distribuzione di forze verticali a terra, mostrata in Figura 4.10, si può apprezzare come l'assenza di forza di tensionamento influenzi fortemente la distribuzione di forze a terra, in particolare si va a scaricare l'assale centrale mentre si vanno a caricare maggiormente gli assali 1 e 3.

Nel caso in cui applico una forza di tensionamento ho una distribuzione di forze a terra con andamento a spezzata mentre nel caso con tensionamento nullo ho un andamento lineare.

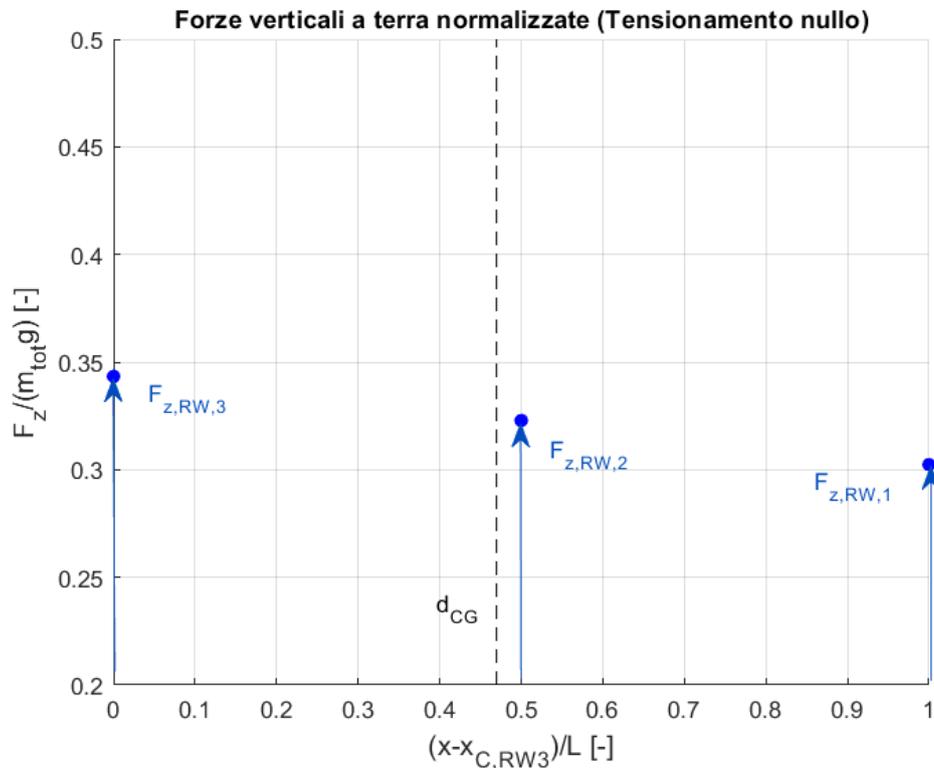


Figura 4.10 - Forze verticali a terra normalizzate (veicolo cingolato con tre road wheels con tensionamento nullo)

Tabella 4.4 - Forze verticali a terra (veicolo cingolato con tre road wheels con tensionamento nullo)

FORZE A TERRA		
Grandezza	Valore	Unità di misura
$F_{z,RW,1}$	55.3	<i>kN</i>
$F_{z,RW,2}$	59.0	<i>kN</i>
$F_{z,RW,3}$	62.8	<i>kN</i>

Inoltre, è interessante valutare quale sia la tendenza di variazione delle forze verticali a terra al variare della forza di tensionamento, per farlo verranno provate varie forze di tensionamento come mostrato in Figura 4.11:

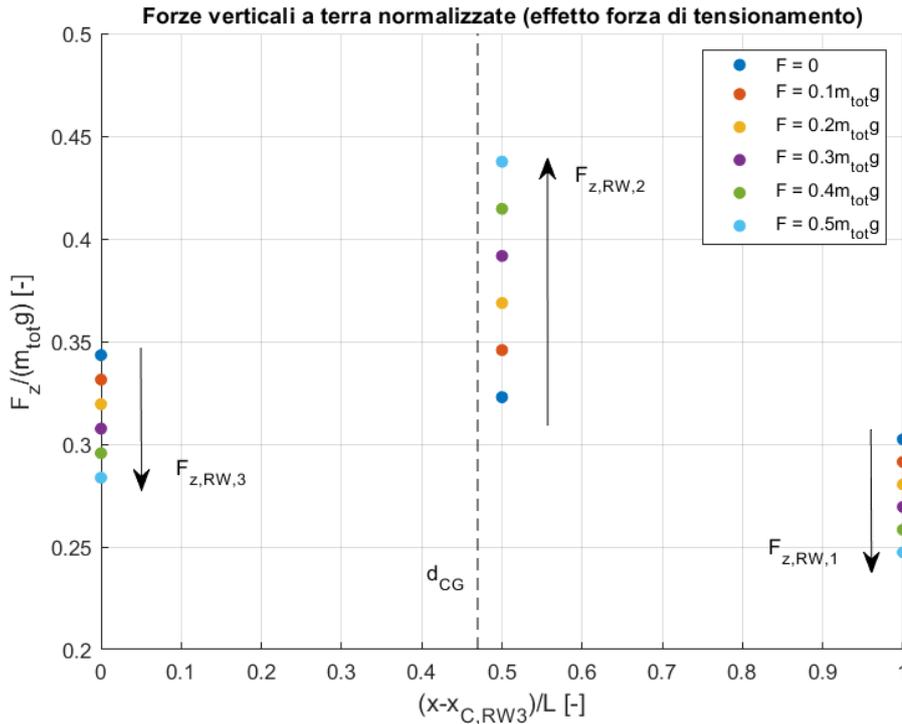


Figura 4.11 - Forze verticali a terra normalizzate (effetto forza di tensionamento) nel veicolo cingolato con tre road wheels

Si osserva come la tendenza di variazione sia lineare, all'aumentare della forza di tensionamento si va a caricare l'assale centrale mentre si vanno a scaricare l'assale anteriore e quello posteriore. Questo fenomeno si spiega con il fatto che, tendendo di più il cingolo, si provoca il sollevamento sia della road wheel anteriore che di quella posteriore, riducendo così il carico verticale esercitato su entrambe. Di conseguenza, il carico si trasferisce maggiormente sulla ruota centrale, aumentando il suo contributo al contatto con il terreno.

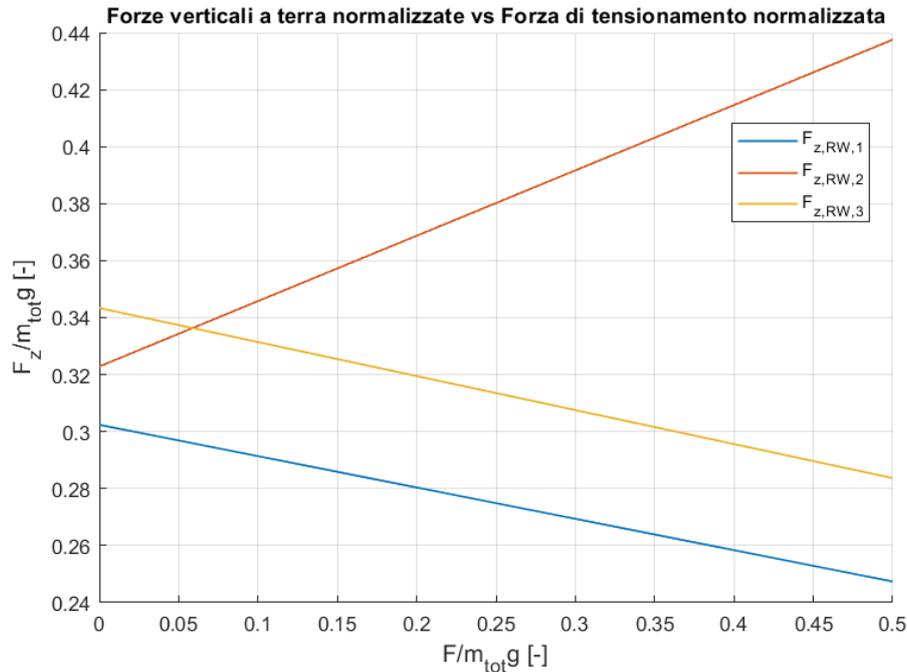


Figura 4.12 - Forze verticali a terra normalizzate vs Forza di tensionamento normalizzata (veicolo cingolato con tre road wheels)

In Figura 4.12 si può visualizzare il trend lineare delle forze a terra in funzione della forza di tensionamento.

Aumentando all'infinito la forza di tensionamento ad un certo punto si avrà che prima la forza a terra dell'assale anteriore e poi la forza a terra dell'assale posteriore andranno a zero, quando questo succede sta ad indicare che si ha un cingolo talmente teso da portare al distacco della ruota da terra.

4.5.2 Effetto del tensionamento sulla rigidità verticale totale del sistema

Il prossimo step è studiare l'effetto del tensionamento sulla rigidità verticale totale del sistema, per farlo viene valutata mediante la relazione 4.29 al variare della forza di tensionamento, mantenendo costanti gli altri parametri.

$$k_{eq} = \frac{W}{|z_{CG}|} \quad (4.29)$$

In cui:

- $k_{eq} \left[\frac{N}{m} \right]$: rigidità verticale totale del sistema;
- $W [N]$: peso del veicolo sostenuto dalle sospensioni;
- $|z_{CG}| [m]$: valore assoluto dello scuotimento del baricentro dalla condizione di riposo, dove non c'è nessun peso applicato.

Il peso del veicolo sostenuto dalla sospensione è pari a:

$$W = (m_{tot} - 3m_{RW} - m_{cin,RW,1} - m_{cin,RW,2} - m_{cin,RW,3})g \quad (4.30)$$

In Figura 4.13 è mostrato l'andamento dello scuotimento del baricentro in funzione del tensionamento:

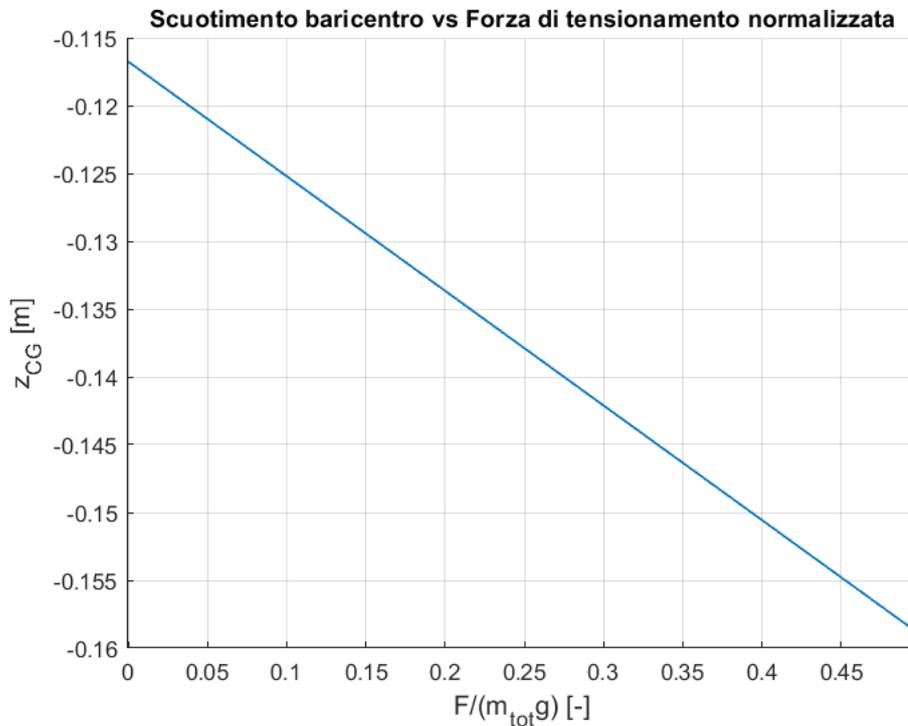


Figura 4.13 - Scuotimento baricentro vs Forza di tensionamento normalizzata (veicolo cingolato con tre road wheels)

All'aumentare del tensionamento si riduce lo scuotimento della massa sospesa, quindi, la rigidità verticale totale del sistema diminuisce.

Nel caso con $F = 0$ kN la rigidità totale del sistema è pari circa alla rigidità totale della sospensione, composta dal parallelo delle rigidità delle molle dei tre assali:

$$k_{eq} = k_1 + k_2 + k_3 \approx 150 * 10^4 \text{ N/m} \quad (4.31)$$

Mentre nel caso con $F > 0$ la rigidità totale del sistema non coincide con la rigidità totale della sospensione perché bisogna considerare che la forza di tensionamento mi va a scaricare le road wheels laterali, infatti, la rigidità totale del sistema diminuisce all'aumentare della forza di tensionamento come mostrato in Figura 4.14. Il tensionamento provoca lo scaricamento delle ruote laterali, poiché queste vengono sollevate dai due tratti inclinati del cingolo. Più alta è la tensione, maggiore è la forza che le tira verso l'alto.

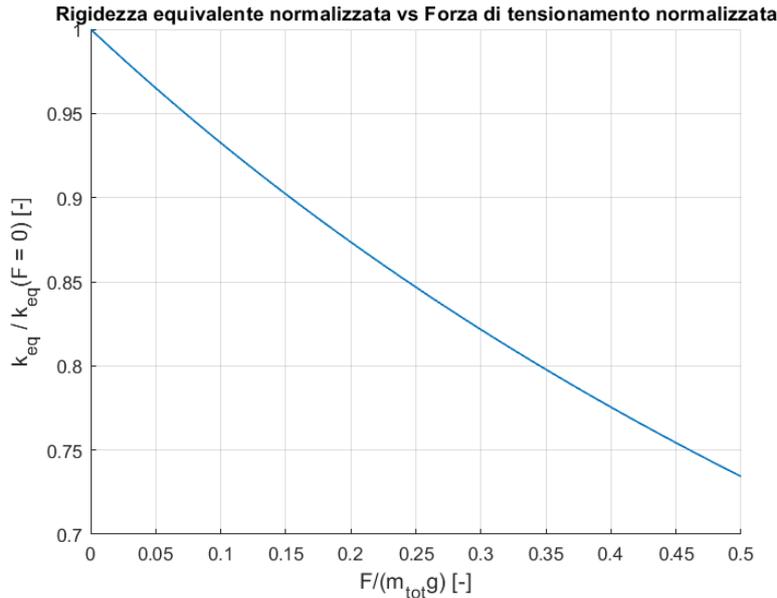


Figura 4.14 - Rigidezza equivalente normalizzata vs Forza di tensionamento normalizzata (veicolo cingolato con tre road wheels)

Per una forza di tensionamento che va all'infinito la rigidezza equivalente non andrà a zero, ma, ad un certo punto saturerà al valore della rigidezza della molla dell'assale centrale perché sarà l'unica ruota a contatto con il terreno.

4.5.3 Effetto del tensionamento sulle reazioni vincolari verticale della tensioner wheel e della sprocket wheel

Un'ulteriore analisi importante per comprendere gli effetti del tensionamento sul sistema riguarda lo studio delle reazioni vincolari verticali sulla sprocket wheel e sulla tensioner wheel. In Figura 4.15 è riportato l'andamento delle reazioni vincolari su entrambe le ruote in funzione della forza di tensionamento:

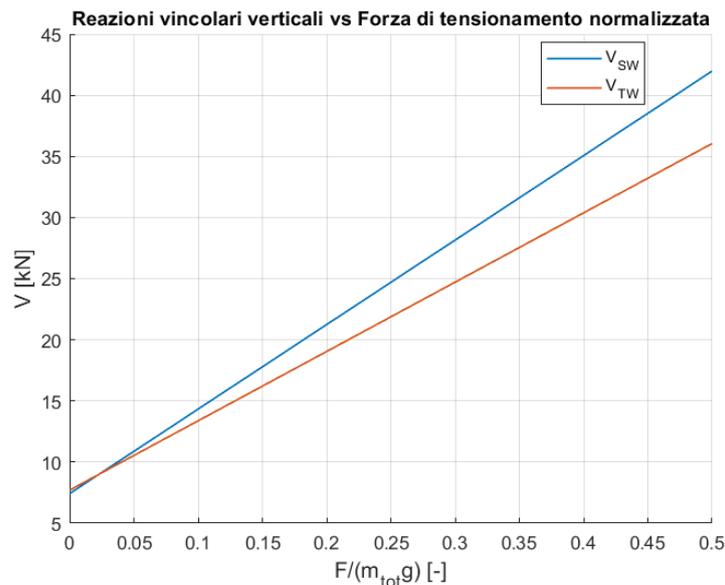


Figura 4.15 - Reazioni vincolari verticali vs Forza di tensionamento normalizzata (veicolo cingolato con tre road wheels)

Dall'osservazione della figura, si nota chiaramente che la reazione vincolare verticale della sprocket wheel aumenta più rapidamente rispetto a quella della tensioner wheel. Questo fenomeno è dovuto al fatto che l'angolo α risulta maggiore dell'angolo β , comportando una maggiore sollecitazione della componente verticale, derivante dalla tensione nel tratto inclinato del cingolo sulla sprocket wheel.

4.5.4 Effetto posizione baricentro

A questo punto, si analizza come cambia il comportamento statico del veicolo cingolato cambiando la posizione del baricentro e la posizione dei centri ruota rispetto alla configurazione iniziale.

La forza di tensionamento in queste simulazioni verrà mantenuta costante a $F = 0.3 \cdot m_{tot}g$.

4.5.4.1 Veicolo cingolato simmetrico

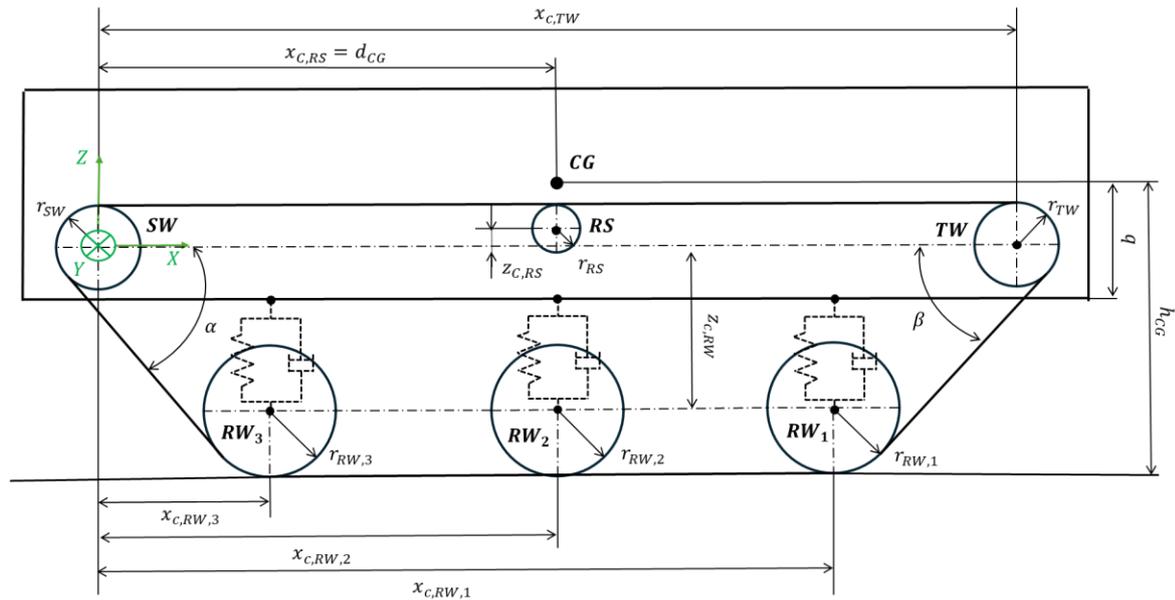


Figura 4.16 - Configurazione geometrica (veicolo cingolato con tre road wheels simmetrico)

In questo caso si ipotizza che il cingolo sia simmetrico lungo l'asse x , quindi, si considera:

- baricentro nella mezziera del veicolo posto in corrispondenza dell'assale centrale;

$$d_{CG} = x_{C,RW,2} \quad (4.32)$$

- la distanza lungo l'asse x tra i centri-ruota della sprocket wheel e della road wheel 3 è uguale alla distanza lungo l'asse x dei centri-ruota della tensioner wheel e della road wheel 1, di conseguenza, gli angoli α e β sono uguali;

$$x_{C,RW,3} = x_{C,TW} - x_{C,RW,1}$$

$$\alpha = \beta \quad (4.33)$$

- La sprocket wheel e la tensioner wheel sono alla stessa quota e hanno lo stesso raggio;

$$\begin{aligned} z_{C,TW} &= z_{C,SW} = 0 \\ r_{TW} &= r_{SW} \end{aligned} \quad (4.34)$$

- La ruota di supporto è posta in corrispondenza dell'assale centrale:

$$x_{C,RS} = d_{CG} \quad (4.35)$$

Le distanze dei centri-ruota del veicolo a riposo rispetto al sistema di riferimento centrato nella sprocket wheel sono riportate in Tabella 4.5:

Tabella 4.5 - Quote geometriche dei centri ruota (veicolo cingolato con tre road wheels simmetrico)

RUOTA	x_c [m]	z_c [m]
Sprocket wheel	0	0
Tensioner wheel	5	0
Road wheel 1	4.150	-0.570
Road wheel 2	2.500	-0.570
Road wheel 3	0.850	-0.570
Ruota di supporto	2.500	0.150

I raggi di ciascuna ruota sono elencati in Tabella 4.6:

Tabella 4.6 - Raggi delle ruote (veicolo cingolato con tre road wheels simmetrico)

RUOTA	r [m]
Sprocket wheel	0.260
Tensioner wheel	0.260
Road wheel 1	0.330
Road wheel 2	0.330
Road wheel 3	0.330
Ruota di supporto	0.115

Essendo il cingolo simmetrico lungo l'asse x ci si aspetta una condizione di equilibrio statico con assenza di beccheggio, questo comporta una distribuzione di forze a terra dovrebbe anch'essa essere simmetrica.

In Tabella 4.7 sono riportati i risultati ottenuti:

Tabella 4.7 - Risultati analisi statica (veicolo cingolato con tre road wheels simmetrico)

RISULTATI		
Grandezza	Valore	Unità di misura
T	30.7	kN
V_{SW}	26.5	kN
V_{TW}	26.5	kN
O_{SW}	54.8	kN
$O_{RW,1}$	6.6	kN
$O_{RW,3}$	6.6	kN
$F_{z,RW,1}$	52.6	kN
$F_{z,RW,2}$	71.7	kN
$F_{z,RW,3}$	52.6	kN
z_{CG}	-0.142	m
$\tan \theta$	0	-

La verifica di angolo di beccheggio nullo è rispettata dato che $\theta = \tan^{-1}(0) = 0^\circ$.

Come rappresentato in Figura 4.17 e Figura 4.18, la distribuzione di forza a terra è perfettamente simmetrica:

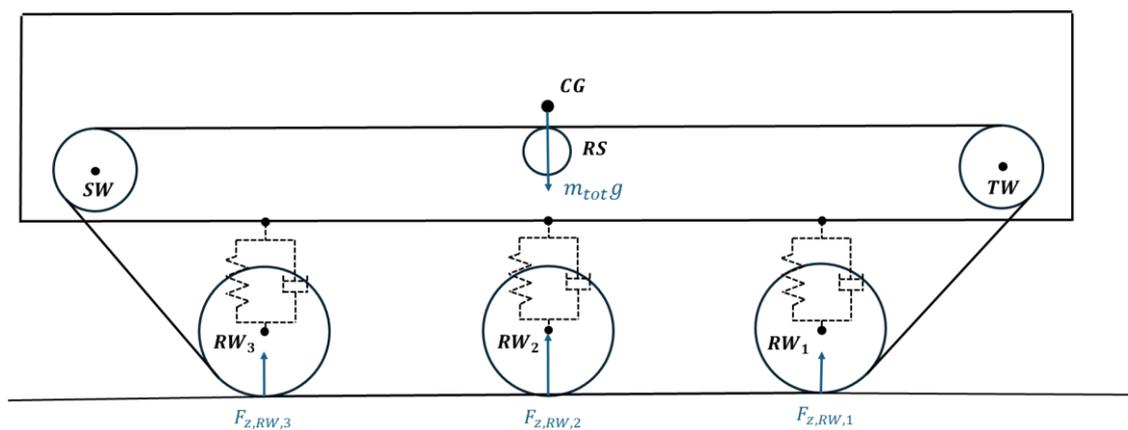


Figura 4.17 - Distribuzione forze a terra (veicolo cingolato con tre road wheels simmetrico)

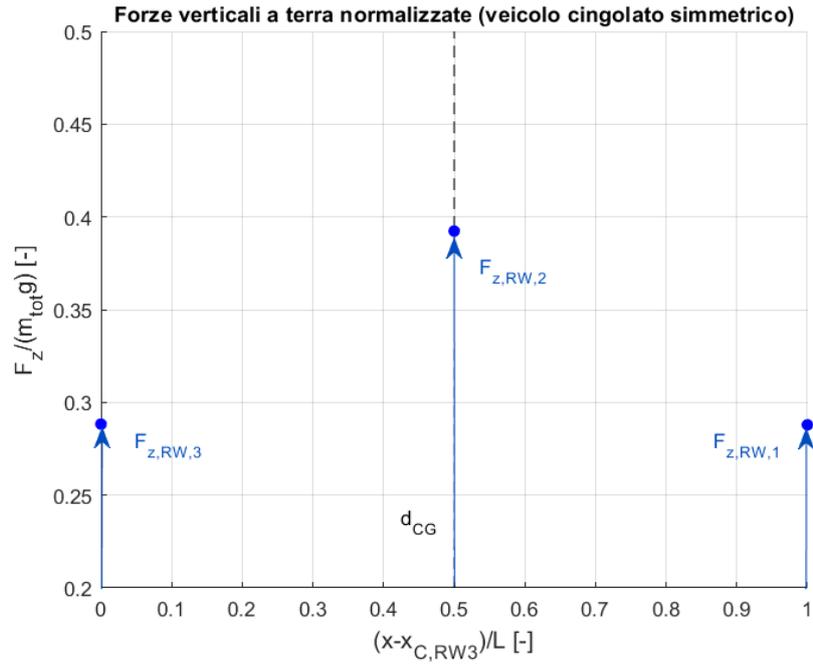


Figura 4.18 - Forze verticali a terra normalizzate (veicolo cingolato con tre road wheels simmetrico)

Tabella 4.8 - Forze verticali a terra (veicolo cingolato con tre road wheels simmetrico)

FORZE A TERRA		
Grandezza	Valore	Unità di misura
$F_{z,RW,1}$	52.6	<i>kN</i>
$F_{z,RW,2}$	71.7	<i>kN</i>
$F_{z,RW,3}$	52.6	<i>kN</i>

4.5.3.2 Baricentro spostato verso l'anteriore

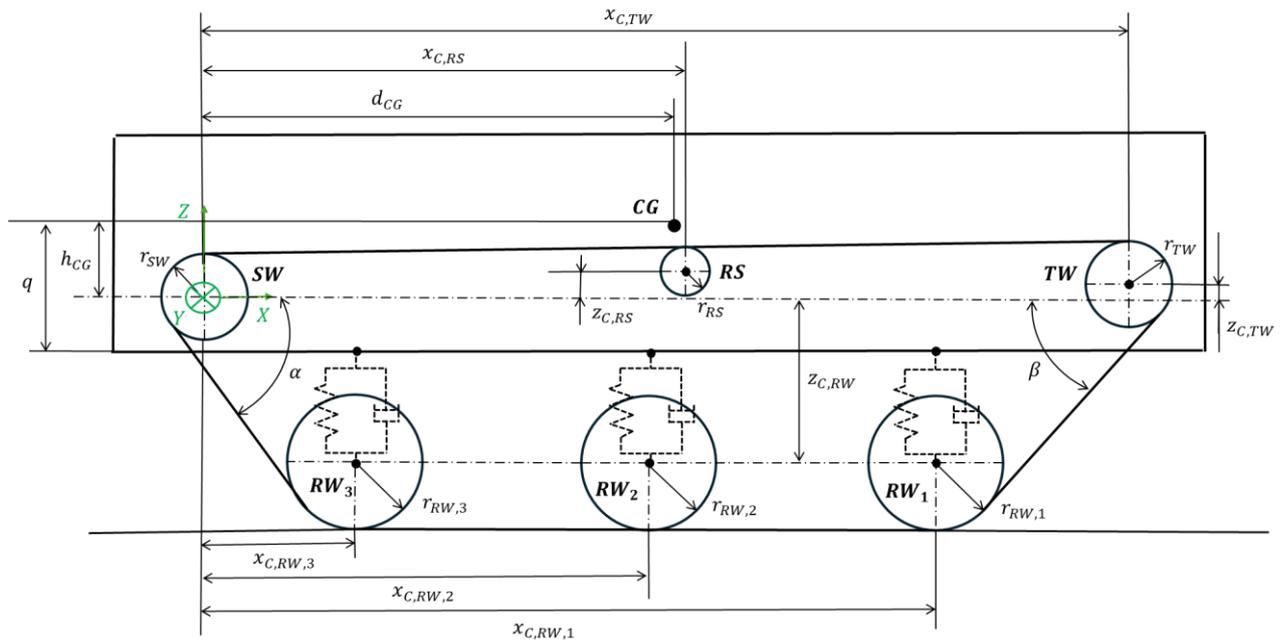


Figura 4.19 - Configurazione geometrica (veicolo cingolato con tre road wheels con baricentro spostato verso l'anteriore)

Questa prova prevede lo spostamento del baricentro del veicolo cingolato verso la parte anteriore, al fine di verificare se il modello riproduce correttamente la fisica del sistema. In particolare, ci si aspetta che il segno del beccheggio si inverta rispetto al caso in cui il baricentro è spostato verso il posteriore e che l'assale anteriore (assale 1) risulti più caricato rispetto all'assale posteriore (assale 3).

Le distanze dei centri-ruota del veicolo a riposo rispetto al sistema di riferimento centrato nella sprocket wheel sono:

Tabella 4.9 - Quote geometriche dei centri ruota (veicolo cingolato con tre road wheels con baricentro spostato verso l'anteriore)

RUOTA	x_C [m]	z_C [m]
Sprocket wheel	0	0
Tensioner wheel	5	0.019
Road wheel 1	4	-0.570
Road wheel 2	2.350	-0.570
Road wheel 3	0.700	-0.570
Ruota di supporto	2.500	0.150

La posizione del baricentro è leggermente spostata verso l'assale anteriore, quindi, si ha $d_{CG} = 2.450$ m.

In Tabella 4.10 sono riportati i risultati ottenuti:

Tabella 4.10 - Risultati analisi statica (veicolo cingolato con tre road wheels con baricentro spostato verso l'anteriore)

RISULTATI		
Grandezza	Valore	Unità di misura
T	30.0	kN
V_{SW}	28.2	kN
V_{TW}	24.7	kN
O_{SW}	51.8	kN
$O_{RW,1}$	5.3	kN
$O_{RW,3}$	8.3	kN
$F_{z,RW,1}$	58.8	kN
$F_{z,RW,2}$	71.6	kN
$F_{z,RW,3}$	46.7	kN
z_{CG}	-0.142	m
$\tan \theta$	0.005	—

Si ricavano quindi il beccheggio e lo scuotimento dei punti di attacco delle sospensioni al telaio:

$$\theta = \tan^{-1}(0.004) = 0.289^\circ$$

$$z_1 = z_{CG} - l_1 \cdot \tan \theta = -0.150 \text{ m}$$

$$z_2 = z_{CG} + l_2 \cdot \tan \theta = -0.141 \text{ m}$$

$$z_3 = z_{CG} + l_3 \cdot \tan \theta = -0.133 \text{ m}$$

(4.36)

Il segno del beccheggio è coerente con le assunzioni fatte, dato che un baricentro posizionato più vicino all'assale 1 comporta un affondamento maggiore dell'assale 1 rispetto all'assale 3.

Un affondamento maggiore significa maggiore compressione delle molle e quindi una forza a terra più elevata sull'assale 1 rispetto all'assale 3 come mostrato in Figura 4.20.

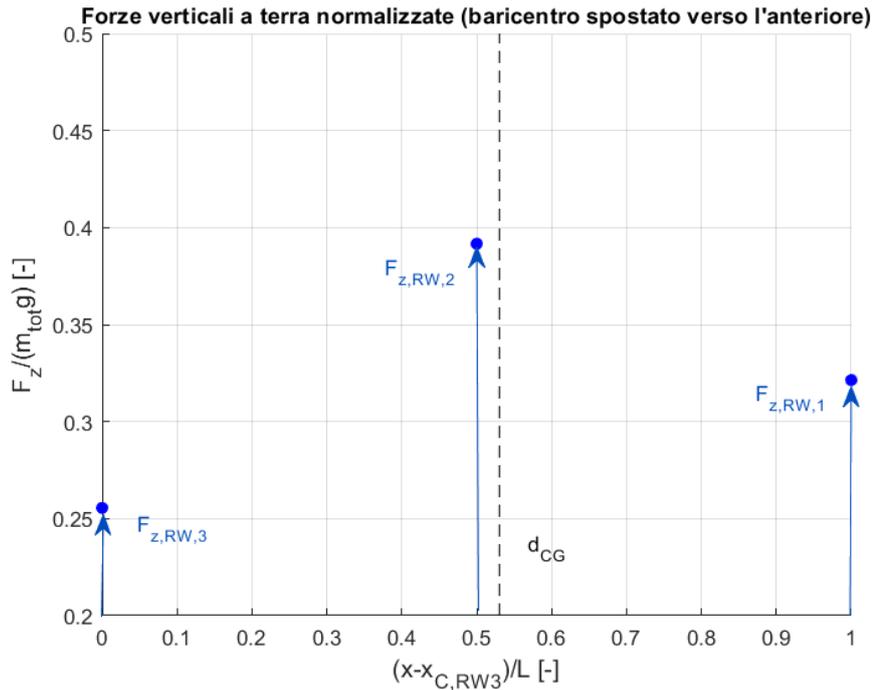


Figura 4.20 - Forze verticali a terra normalizzate (veicolo cingolato con tre road wheels con baricentro spostato verso l'anteriore)

Tabella 4.11 - Forze verticali a terra (veicolo cingolato con tre road wheels con baricentro spostato verso l'anteriore)

RISULTATI		
Grandezza	Valore	Unità di misura
$F_{z,RW,1}$	58.8	<i>kN</i>
$F_{z,RW,2}$	71.6	<i>kN</i>
$F_{z,RW,3}$	46.7	<i>kN</i>

4.5.5 Analisi rigidezza a beccheggio

Un'ulteriore analisi condotta sul modello statico riguarda la valutazione della rigidezza a beccheggio. Per questa prova, si è adottata una configurazione simmetrica del veicolo, che consente di partire da una condizione iniziale di beccheggio nullo, agevolando così l'interpretazione e la chiarezza dei risultati.

Dalla condizione di equilibrio iniziale, si applica una coppia $C_{applicata}$ al baricentro del veicolo, come illustrato in Figura 4.21, e si calcola la rigidezza a beccheggio utilizzando l'espressione:

$$k_{\theta} = \frac{C_{applicata}}{\theta} \quad (4.37)$$

In cui:

- $k_{\theta} \left[\frac{N \cdot m}{deg} \right]$: rigidezza a beccheggio;

- $C_{applicata} [N \cdot m]$: coppia applicata al baricentro;
- $\theta [deg]$: angolo di beccheggio.

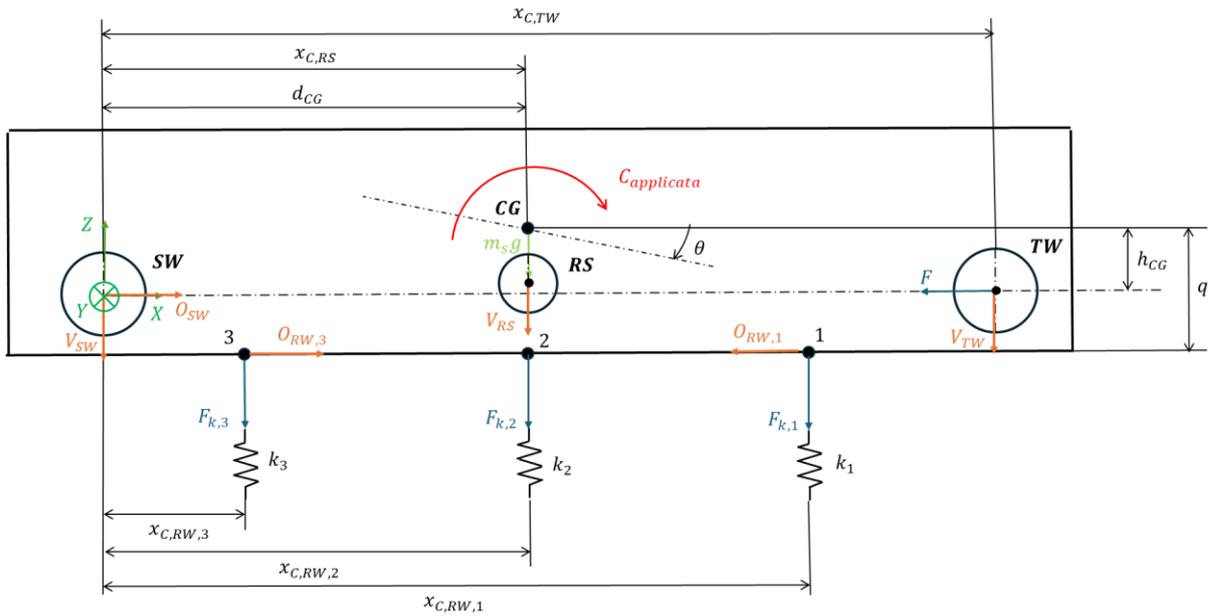


Figura 4.21 - Diagramma corpo libero massa sospesa (veicolo cingolato con tre road wheels con coppia applicata aggiuntiva)

Variando la coppia applicata da 0 a 50000 Nm, è stato calcolato l'incremento dell'angolo di beccheggio risultante. Come mostrato in Figura 4.22, la relazione tra la coppia applicata e l'angolo di beccheggio risulta lineare. Di conseguenza, la rigidità beccheggio ha un valore pari a:

$$k_{\theta} = 4.8 \cdot 10^4 \frac{N \cdot m}{deg}$$

(4 . 38)

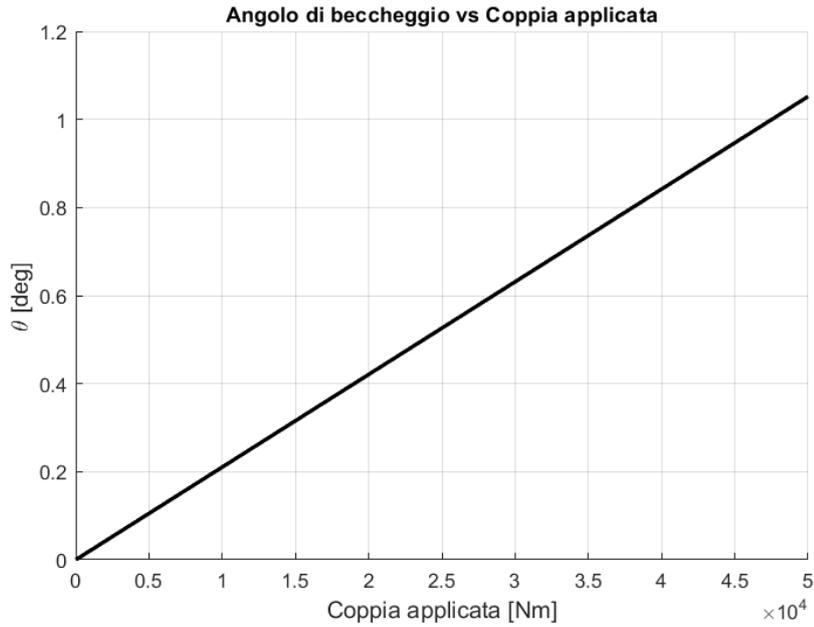


Figura 4.22 - Angolo di beccheggio vs Coppia applicata (veicolo cingolato con tre road wheels)

Successivamente, si è indagato l'influenza della forza di tensionamento sulla rigidità a beccheggio. A tal fine, è stata eseguita una prova con una coppia applicata costante pari a 50000 Nm e incrementando il valore del tensionamento da $F = 0$ a $F = 0.5m_{tot}g$, i risultati sono riportati in Figura 4.23:

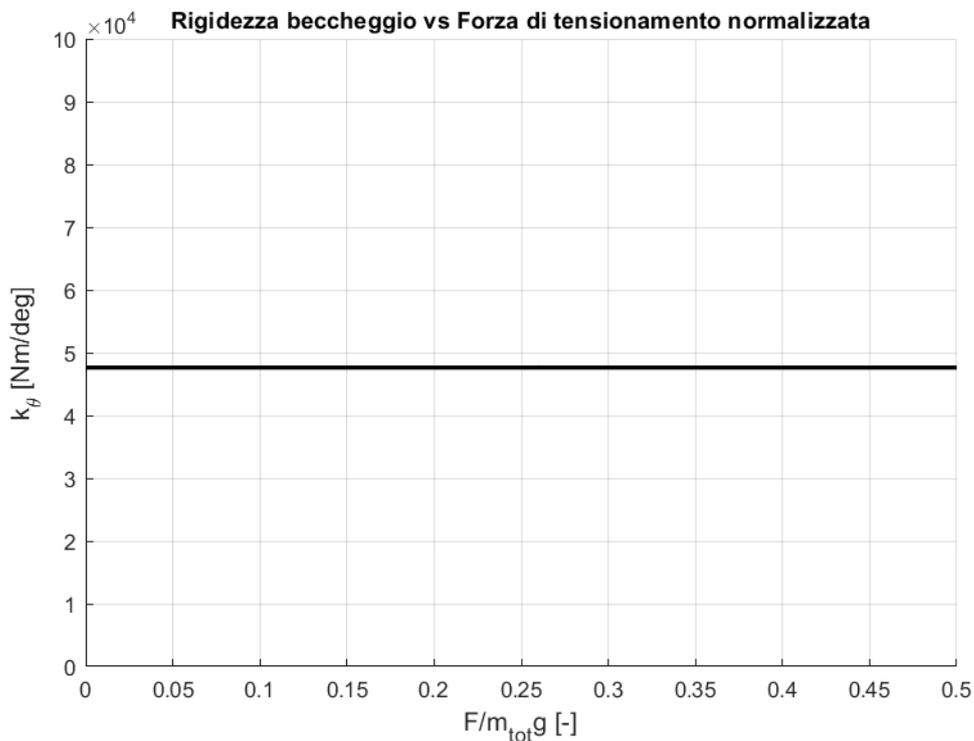


Figura 4.23 - Rigidità a beccheggio vs Forza di tensionamento normalizzata (veicolo cingolato con tre road wheels)

È chiaro come la forza di tensionamento non abbia nessuna influenza sulla rigidità a beccheggio nel caso statico.

Come verifica, viene calcolata la rigidezza a beccheggio nel caso veicolo multi-asse ruotato tramite il principio del lavoro virtuale. Questo metodo prevede l'uguaglianza del lavoro virtuale svolto dalle molle lineari con il lavoro virtuale svolto dall'unica molla di torsione equivalente.

L'energia potenziale immagazzinata dalle molle lineari E_{molle} è:

$$E_{molle} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} k_i (\Delta z_i)^2 \quad (4.39)$$

Con $\Delta z_i = l_i \theta$, sostituendo nella relazione si ottiene:

$$E_{molle} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} k_i (l_i \theta)^2 \quad (4.40)$$

Il lavoro virtuale delle molle lineari δW_{molle} si può esprimere come:

$$\delta W_{molle} = -\frac{\partial E_{molle}}{\partial \theta} \delta \theta = -\left(\sum_{i=1}^3 k_i l_i^2 \theta \right) \delta \theta = -\left(\sum_{i=1}^3 k_i l_i^2 \right) \theta \delta \theta \quad (4.41)$$

L'energia potenziale immagazzinata dall'unica molla torsionale equivalente $E_{torsione}$ vale:

$$E_{torsione} = \frac{1}{2} K_{\theta, ruotato} \theta^2 \quad (4.42)$$

Di conseguenza, il lavoro virtuale $\delta W_{torsione}$ è:

$$\delta W_{torsione} = -\frac{\partial E_{torsione}}{\partial \theta} \delta \theta = -K_{\theta, ruotato} \theta \delta \theta \quad (4.43)$$

Imponendo che il lavoro virtuale delle molle lineari sia uguale a quello della molla torsionale equivalente ottengo:

$$K_{\theta, ruotato} \theta \delta \theta = \left(\sum_{i=1}^3 k_i l_i^2 \right) \theta \delta \theta \quad (4.44)$$

Semplificando $\theta\delta\theta$, si ricava la rigidezza a beccheggio nel caso veicolo multi-asse ruotato $K_{\theta,ruotato}$:

$$K_{\theta,ruotato} = \sum_{i=1}^3 k_i l_i^2 \quad (4.45)$$

Trovandoci nel caso di veicolo simmetrico si ha $l_1 = l_3 = 1.65 \text{ m}$ e $l_2 = 0$, dunque, la rigidezza a beccheggio vale:

$$K_{\theta,ruotato} = 27.2 \cdot 10^5 \frac{N \cdot m}{rad} = 27.2 \cdot 10^5 \frac{N \cdot m}{\frac{180}{\pi} deg} = 4.8 \cdot 10^4 \frac{N \cdot m}{deg} \quad (4.46)$$

Dal confronto dei valori di rigidezza a beccheggio si evince come la verifica sia riuscita.

5. Modello dinamico

Lo step successivo è realizzare un modello che simuli il comportamento del veicolo cingolato mentre è in movimento. A differenza dei modelli statici, che descrivono solo uno stato fisso o un equilibrio, i modelli dinamici catturano il comportamento del sistema attraverso equazioni che tengono conto del tempo come variabile fondamentale. Per la creazione del modello dinamico è stato impiegato Matlab-Simulink, in quanto la simulazione richiede di tenere conto della dipendenza dei valori di sistema in un determinato istante di tempo da quelli dell'istante precedente. Ogni componente del modello è stato progettato per riflettere l'interdipendenza tra le variabili di stato, le forzanti esterne e i parametri, permettendo una simulazione accurata dell'evoluzione temporale del sistema.

5.1 Diagrammi di corpo libero ed equazioni dinamiche

In questa sezione vengono descritti i vari diagrammi di corpo libero con le relative equazioni dinamiche di Newton, ci saranno tre equazioni dinamiche (traslazione orizzontale, traslazione verticale e rotazionale) per ogni ruota e per la massa sospesa.

Nei diagrammi di corpo libero sono presenti le seguenti forze:

- $V [N]$: reazione vincolare verticale al perno;
- $O [N]$: reazione vincolare orizzontale al perno;
- $F [N]$: forza di tensionamento;
- $T [N]$: tensione del cingolo;
- $F_k [N]$: forza elastica esercitata dalla sospensione;
- $F_c [N]$: forza smorzante esercitata dalla sospensione;
- $F_z [N]$: forze verticali a terra;
- $F_x [N]$: forze longitudinali al terreno;
- $mg [N]$: forza peso;
- $m\ddot{x} [N]$: forza d'inerzia orizzontale;
- $m\ddot{z} [N]$: forza d'inerzia verticale;

Le coppie presenti sono:

- $C_{m,SW} [N \cdot m]$: coppia motrice applicata alla sprocket wheel;
- $C_a [N \cdot m]$: coppia di attrito al perno;
- $I\dot{\omega} [N \cdot m]$: coppia d'inerzia rotazionale.

I diagrammi di corpo libero dei diversi componenti costituenti il veicolo sono:

- Sprocket wheel

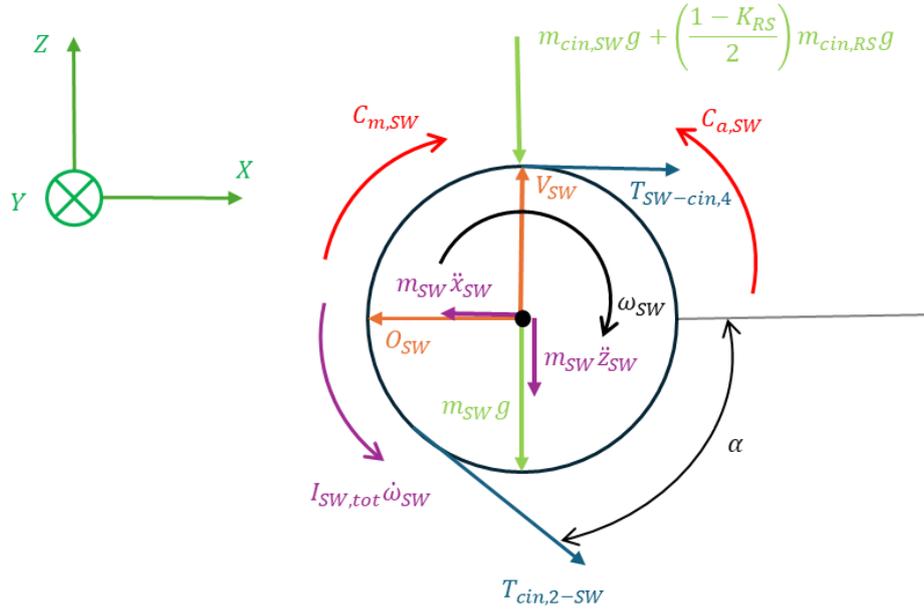


Figura 5.1 - Diagramma corpo libero sprocket wheel in dinamica (veicolo cingolato con tre road wheels)

Il momento d'inerzia totale presente nel calcolo della coppia d'inerzia rotazionale deve tenere conto anche della massa del cingolo avvolta intorno alla sprocket wheel. Di conseguenza, al momento d'inerzia della sprocket wheel si aggiunge il momento d'inerzia del tratto di cingolo avvolto, modellato come un anello sottile di massa $m_{cin,3}$ e di raggio r_{SW} :

$$I_{SW,tot} = I_{SW} + m_{cin,3}r_{SW}^2 \quad (5.1)$$

Equilibrio orizzontale:

$$T_{SW-cin,4} + T_{cin,2-SW} \cos \alpha - O_{SW} = m_{SW}\ddot{x}_{SW} \quad (5.2)$$

Equilibrio verticale:

$$V_{SW} - T_{cin,2-SW} \sin \alpha - m_{SW}g - m_{cin,SW}g - \left(\frac{1-K_{RS}}{2}\right)m_{cin,RS}g = m_{SW}\ddot{z}_{SW} \quad (5.3)$$

Equilibrio alla rotazione:

$$C_{m,SW} - (T_{cin,2-SW} - T_{SW-cin,4})r_{SW} - C_{a,SW} = I_{SW,tot}\dot{\omega}_{SW} \quad (5.4)$$

Dato che la sprocket wheel si trova nella parte posteriore del veicolo, l'applicazione di una coppia motrice per consentire il moto in avanti del mezzo implica una tensione maggiore nel tratto inferiore (ingresso) e minore in quello superiore (uscita). Di conseguenza, nel diagramma di corpo libero della sprocket wheel, $T_{cin,2-SW}$ sarà maggiore di $T_{SW-cin,4}$ e questo mi genera una coppia che insieme alla coppia di attrito al perno $C_{a,SW}$ si oppone alla coppia motrice.

Per ricavare la coppia di attrito al perno si calcola la forza normale alla superficie del perno del caso statico:

$$F_{N,SW,stat} = \sqrt{O_{SW,stat}^2 + V_{SW,stat}^2} \quad (5.5)$$

- Ruota di supporto

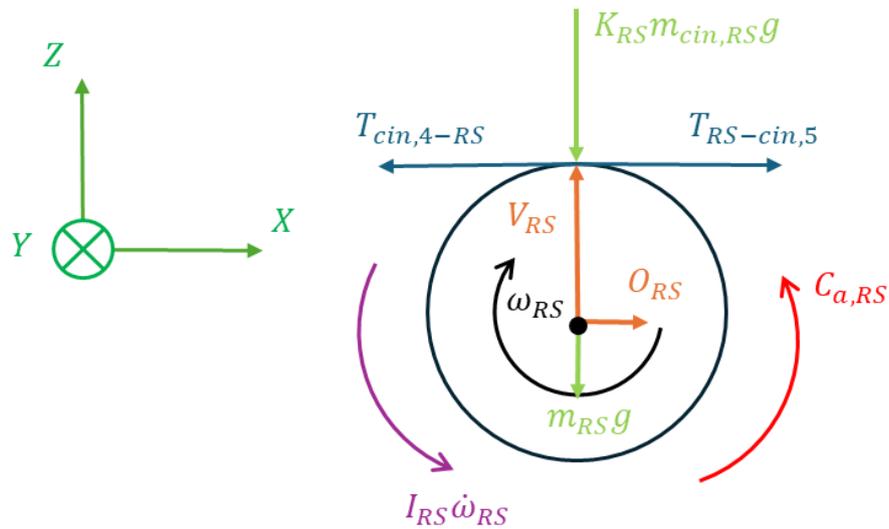


Figura 5.2 - Diagramma corpo libero ruota di supporto in dinamica (veicolo cingolato con tre road wheels)

Equilibrio orizzontale:

$$T_{RS-cin,5} + O_{RS} - T_{cin,4-RS} = 0 \quad (5.6)$$

Equilibrio verticale:

$$V_{RS} - K_{RS}m_{cin,RS}g - m_{RS}g = 0 \quad (5.7)$$

Equilibrio alla rotazione:

$$(T_{RS-cin,5} - T_{cin,4-RS})r_{RS} - C_{a,RS} = I_{RS}\dot{\omega}_{RS}$$

$$(5.8)$$

Nel descrivere il diagramma di corpo libero della ruota di supporto, le tensioni $T_{RS-cin,5}$ e $T_{cin,4-RS}$ rappresentano rispettivamente le tensioni del cingolo ai due estremi della ruota. Tra queste, la tensione $T_{RS-cin,4}$ risulta essere la più elevata. Tuttavia, la differenza di tensione ai capi della ruota di supporto è piccola, quindi nel calcolo della forza normale al perno si può ignorare il contributo della reazione vincolare orizzontale O_{RS} , poiché essa è significativamente inferiore rispetto alla reazione vincolare verticale V_{RS} . Questo consente di semplificare l'analisi, concentrandosi principalmente sulle componenti verticali delle forze.

$$F_{N,RS} = V_{RS} \quad (5.9)$$

Di conseguenza, nell'analisi della dinamica globale del veicolo cingolato, non si considererà l'equilibrio orizzontale della ruota di supporto. Inoltre, la massa della ruota di supporto è trascurabile rispetto alle altre masse coinvolte nel sistema, rendendo trascurabile l'inerzia traslazionale della ruota stessa. Pertanto, l'equilibrio verticale della ruota di supporto non viene incluso nel sistema di equazioni risolvente, poiché coinvolge solo grandezze note e non influisce significativamente sull'analisi complessiva del veicolo.

- Tensioner wheel

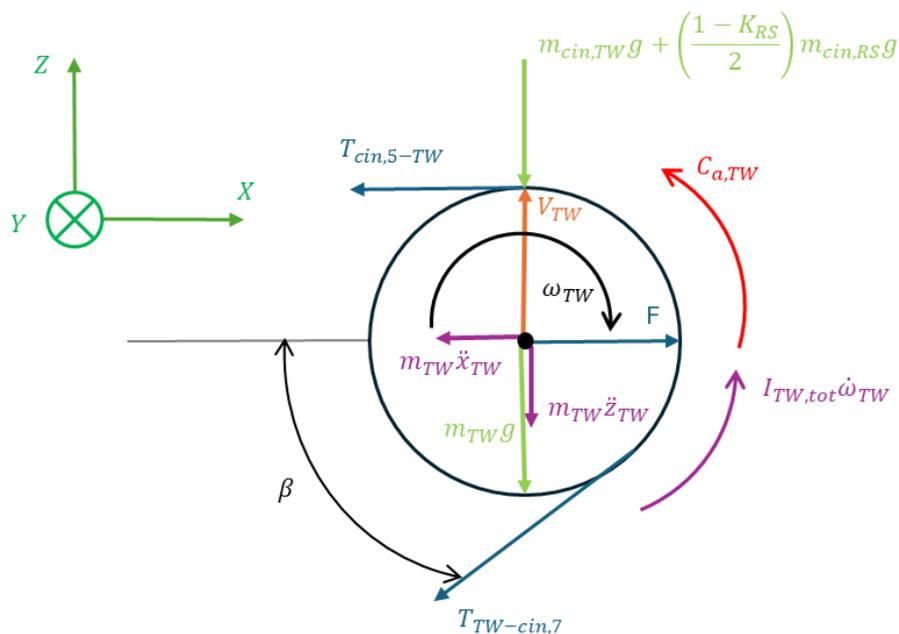


Figura 5.3 - Diagramma corpo libero tensioner wheel in dinamica (veicolo cingolato con tre road wheels)

Il momento d'inerzia totale presente nel calcolo della coppia d'inerzia rotazionale deve tenere conto anche della massa del cingolo avvolta intorno alla tensioner wheel. Di conseguenza, al momento d'inerzia della tensioner wheel si aggiunge il momento

d'inerzia del tratto di cingolo avvolto, modellato come un anello sottile di massa $m_{cin,6}$ e di raggio r_{TW} :

$$I_{TW,tot} = I_{TW} + m_{cin,6}r_{TW}^2 \quad (5.10)$$

Equilibrio orizzontale:

$$F - T_{cin,5-TW} - T_{TW-cin,7} \cos \beta = m_{TW}\ddot{x}_{TW} \quad (5.11)$$

Equilibrio verticale:

$$V_{TW} - T_{TW-cin,7} \sin \beta - m_{TW}g - m_{cin,TW}g - \left(\frac{1 - K_{RS}}{2}\right) m_{cin,RS}g = m_{TW}\ddot{z}_{TW} \quad (5.12)$$

Equilibrio alla rotazione:

$$(T_{TW-cin,7} - T_{cin,5-TW})r_{TW} - C_{a,TW} = I_{TW,tot}\dot{\omega}_{TW} \quad (5.13)$$

Nel diagramma di corpo libero della tensioner wheel le tensioni $T_{cin,5-TW}$ e $T_{TW-cin,7}$ rappresentano le tensioni del cingolo ai due estremi della tensioner wheel. Tra queste, la tensione maggiore è $T_{TW-cin,7}$. La coppia generata dalla differenza di tensione tra i due estremi sarà contrastata dalla coppia di attrito al perno, indicata come $C_{a,TW}$.

Per ricavare la coppia di attrito al perno si calcola la forza normale alla superficie del perno del caso statico:

$$F_{N,TW,stat} = \sqrt{V_{TW,stat}^2 + F_{stat}^2} \quad (5.14)$$

Si passa all'analisi dei diagrammi di corpo libero delle road wheels, dove si introduce il contributo della forza longitudinale F_x . Questa forza, insieme alla coppia di attrito al perno, genera uno squilibrio di tensione su ciascuna ruota:

- Road wheel 1

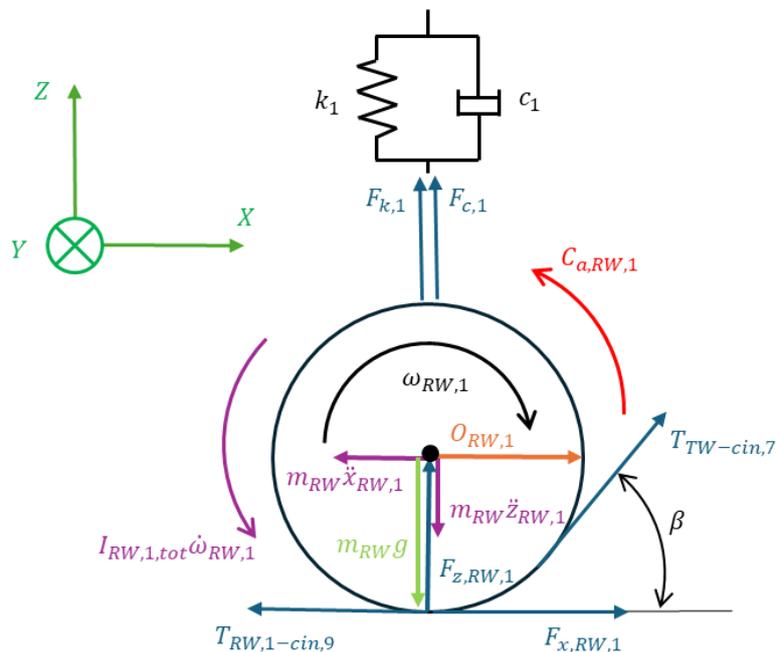


Figura 5.4 - Diagramma corpo libero road wheel 1 in dinamica (veicolo cingolato con tre road wheels)

Il momento d'inerzia totale presente nel calcolo della coppia d'inerzia rotazionale deve tenere conto anche della massa del cingolo avvolta intorno alla road wheel 1. Di conseguenza, al momento d'inerzia della road wheel 1 si aggiunge il momento d'inerzia del tratto di cingolo avvolto, modellato come un anello sottile di massa $m_{cin,8}$ e di raggio r_{RW} :

$$I_{RW,1,tot} = I_{RW} + m_{cin,8}r_{RW}^2 \quad (5.15)$$

Equilibrio orizzontale:

$$F_{x,RW,1} + T_{cin,7-RW,1} \cos \beta + O_{RW,1} - T_{RW,1-cin,9} = m_{RW} \ddot{x}_{RW,1} \quad (5.16)$$

Equilibrio verticale:

$$F_{z,RW,1} + T_{cin,7-RW,1} \sin \beta + F_{k,1} + F_{c,1} - m_{RW}g = m_{RW} \ddot{z}_{RW,1} \quad (5.17)$$

Equilibrio alla rotazione:

$$(T_{RW,1-cin,9} - T_{cin,7-RW,1})r_{RW} - F_{x,RW,1}r_{RW} - C_{a,RW,1} = I_{RW,1,tot}\dot{\omega}_{RW,1} \quad (5.18)$$

Per ricavare la coppia di attrito al perno si calcola la forza normale alla superficie del perno del caso statico:

$$F_{N,RW,1,stat} = \sqrt{O_{RW,1,stat}^2 + F_{k,1,stat}^2} \quad (5.19)$$

- Road wheel 2

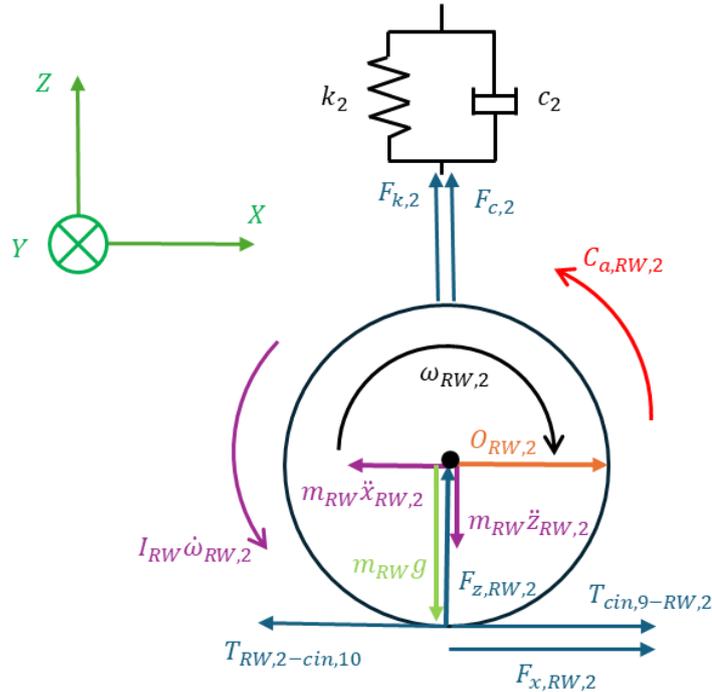


Figura 5.5 - Diagramma corpo libero road wheel 2 in dinamica (veicolo cingolato con tre road wheels)

Equilibrio orizzontale:

$$F_{x,RW,2} + O_{RW,2} + T_{cin,9-RW,2} - T_{RW,2-cin,10} = m_{RW}\ddot{x}_{RW,2} \quad (5.20)$$

Equilibrio verticale:

$$F_{z,RW,2} + F_{k,2} + F_{c,2} - m_{RW}g = m_{RW}\ddot{z}_{RW,2} \quad (5.21)$$

Equilibrio alla rotazione:

$$(T_{RW,2-cin,10} - T_{cin,9-RW,2})r_{RW} - F_{x,RW,2}r_{RW} - C_{a,RW,2} = I_{RW}\dot{\omega}_{RW,2} \quad (5.22)$$

Per ricavare la coppia di attrito al perno si calcola la forza normale alla superficie del perno del caso statico:

$$F_{N,RW,2,stat} = \sqrt{O_{RW,2,stat}^2 + F_{k,2,stat}^2} \quad (5.23)$$

- Road wheel 3

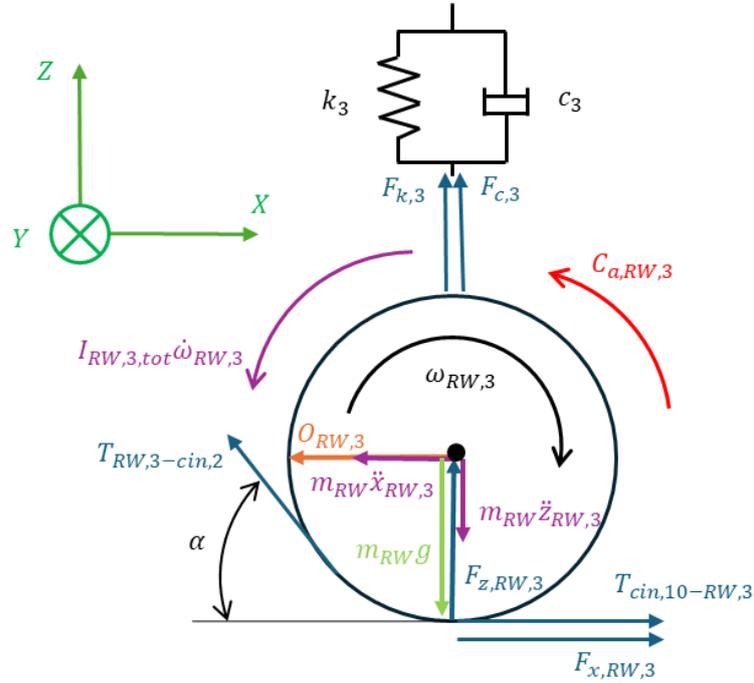


Figura 5.6 - Diagramma corpo libero road wheel 3 in dinamica (veicolo cingolato con tre road wheels)

Il momento d'inerzia totale presente nel calcolo della coppia d'inerzia rotazionale deve tenere conto anche della massa del cingolo avvolto intorno alla road wheel 3. Di conseguenza, al momento d'inerzia della road wheel 3 si aggiunge il momento d'inerzia del tratto di cingolo avvolto, modellato come un anello sottile di massa $m_{cin,10}$ e di raggio r_{RW} :

$$I_{RW,3,tot} = I_{RW} + m_{cin,10} r_{RW}^2 \quad (5.24)$$

Equilibrio orizzontale:

$$F_{x,RW,3} + T_{cin,10-RW,3} - T_{RW,3-cin,2} \cos \alpha - O_{RW,3} = m_{RW} \ddot{x}_{RW,3} \quad (5.25)$$

Equilibrio verticale:

$$F_{z,RW,3} + T_{RW,3-cin,2} \sin \alpha + F_{k,3} + F_{c,3} - m_{RW} g = m_{RW} \ddot{z}_{RW,3} \quad (5.26)$$

Equilibrio alla rotazione:

$$(T_{RW,3-cin,2} - T_{cin,10-RW,3})r_{RW} - F_{x,RW,3}r_{RW} - C_{a,RW,3} = I_{RW,3,tot}\dot{\omega}_{RW,3} \quad (5.27)$$

Per ricavare la coppia di attrito al perno si calcola la forza normale alla superficie del perno del caso statico:

$$F_{N,RW,3,stat} = \sqrt{O_{RW,3,stat}^2 + F_{k,3,stat}^2} \quad (5.28)$$

- Massa sospesa

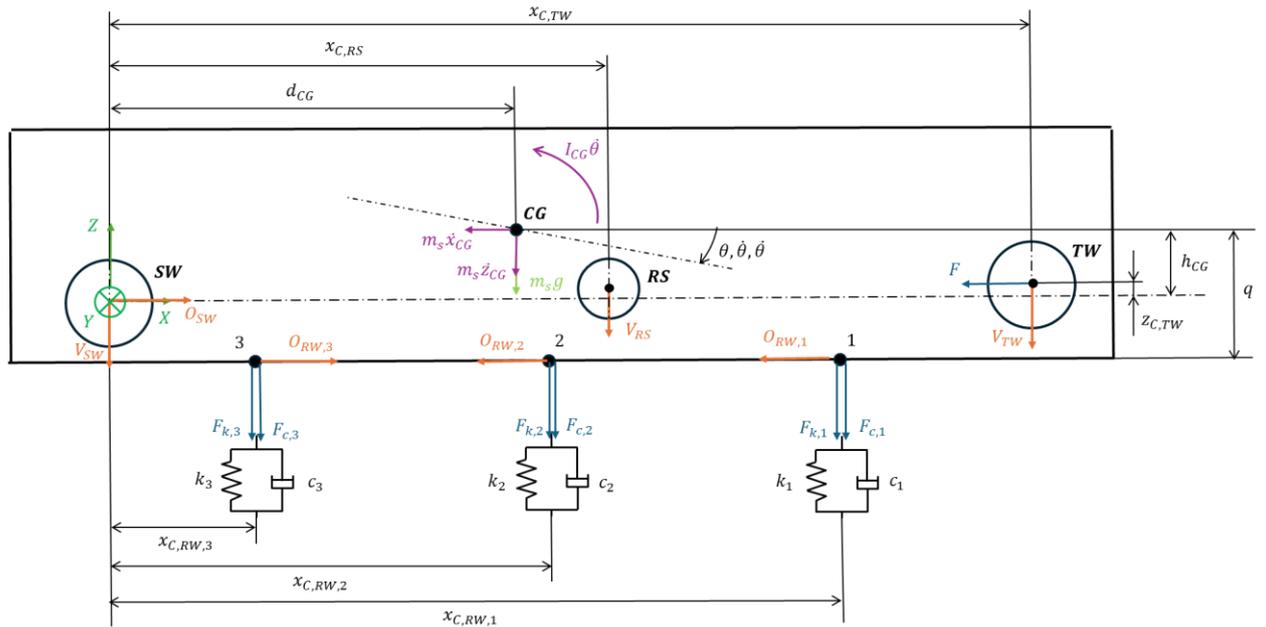


Figura 5.7 - Diagramma corpo libero massa sospesa in dinamica (veicolo cingolato con tre road wheels)

Equilibrio orizzontale:

$$O_{SW} + O_{RW,3} - O_{RW,1} - O_{RW,2} - F = m_s \ddot{x}_{CG} \quad (5.29)$$

Equilibrio verticale:

$$-F_{k,1} - F_{k,2} - F_{k,3} - F_{c,1} - F_{c,2} - F_{c,3} - m_s g - V_{TW} - V_{SW} - V_{RS} = m_s \ddot{z}_{CG} \quad (5.30)$$

Equilibrio alla rotazione intorno a CG:

$$\begin{aligned}
& V_{TW} \cdot (x_{C,TW} - d_{CG}) + V_{RS}(x_{C,RS} - d_{CG}) + F(h_{CG} - z_{C,TW}) - V_{SW}d_{CG} - O_{SW}h_{CG} + \\
& + O_{RW,1}q + O_{RW,2}q - O_{RW,3}q + F_{k,1}(x_{C,RW,1} - d_{CG}) + F_{c,1}(x_{C,RW,1} - d_{CG}) + \\
& + F_{k,2}(x_{C,RW,2} - d_{CG}) + F_{c,2}(x_{C,RW,2} - d_{CG}) - F_{k,3}(d_{CG} - x_{C,RW,3}) + \\
& - F_{c,3}(d_{CG} - x_{C,RW,3}) = I_{CG}\ddot{\theta}
\end{aligned}
\tag{5.31}$$

Di seguito verranno mostrati i diagrammi di corpo libero e le equazioni dinamiche dei segmenti di cingolo congiungenti le varie ruote, in particolare, si analizzeranno le forze coassiali ai tratti del cingolo.

Nel calcolo della forza d'inerzia si tende a trascurare il beccheggio della massa sospesa, poiché il suo contributo non influenza in modo importante i risultati. Di conseguenza, l'accelerazione longitudinale e quella verticale dei diversi segmenti del cingolo possono essere considerate equivalenti a quelle del baricentro del veicolo. Oltre a queste accelerazioni, è necessario tenere conto dell'accelerazione relativa del cingolo rispetto al veicolo \ddot{s}_{rel} , che risulta orientata lungo l'asse del cingolo stesso.

Inoltre, nei tratti di cingolo inferiori compresi tra due road wheel, sto ipotizzando di trascurare il contatto tra il cingolo e il terreno.

- Tratto 2 del cingolo

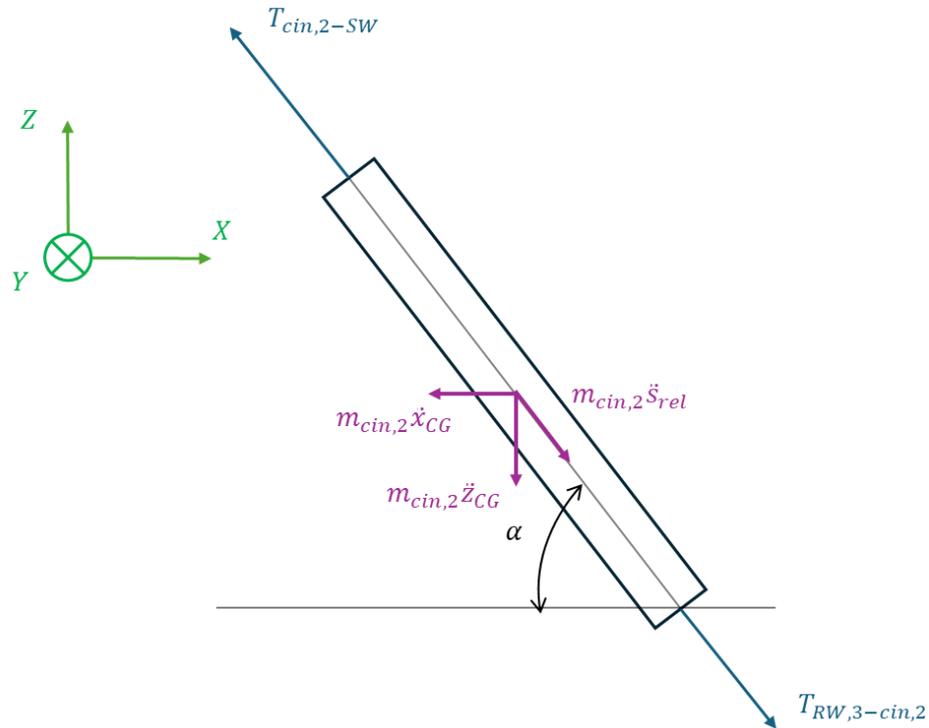


Figura 5.8 - Diagramma di corpo libero del tratto 2 del cingolo in dinamica (veicolo cingolato con tre road wheels)

Equilibrio di forze coassiali:

$$T_{cin,2-sw} + m_{cin,2}\ddot{x}_{CG} \cos \alpha - m_{cin,2}\ddot{s}_{rel} - m_{cin,2}\ddot{z}_{CG} \sin \alpha - T_{RW,3-cin,2} = 0
\tag{5.32}$$

- Tratto 4 del cingolo

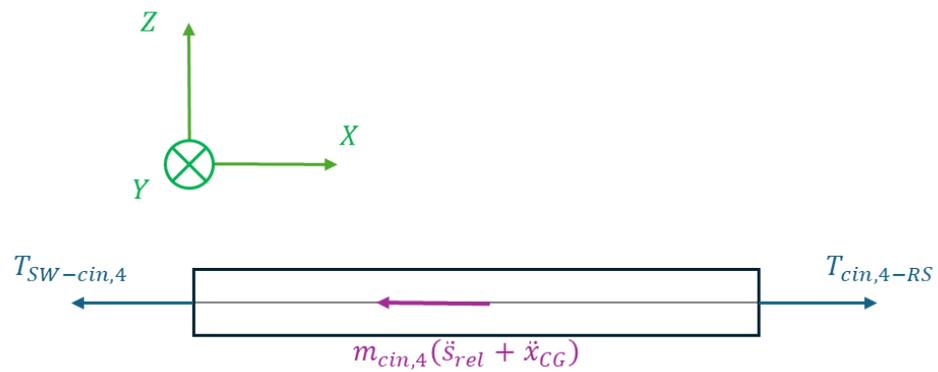


Figura 5.9 - Diagramma di corpo libero del tratto 4 del cingolo in dinamica (veicolo cingolato con tre road wheels)

Equilibrio di forze coassiali:

$$T_{cin,4-RS} - T_{SW-cin,4} - m_{cin,4}\ddot{s}_{rel} - m_{cin,4}\ddot{x}_{CG} = 0 \quad (5.33)$$

- Tratto 5 del cingolo

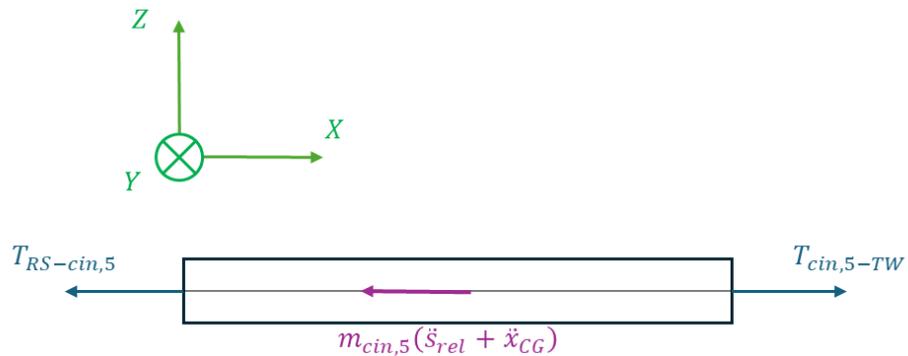


Figura 5.10 - Diagramma di corpo libero del tratto 5 del cingolo in dinamica (veicolo cingolato con tre road wheels)

Equilibrio di forze coassiali:

$$T_{cin,5-TW} - T_{RS-cin,5} - m_{cin,5}\ddot{s}_{rel} - m_{cin,5}\ddot{x}_{CG} = 0 \quad (5.34)$$

- Tratto 7 del cingolo

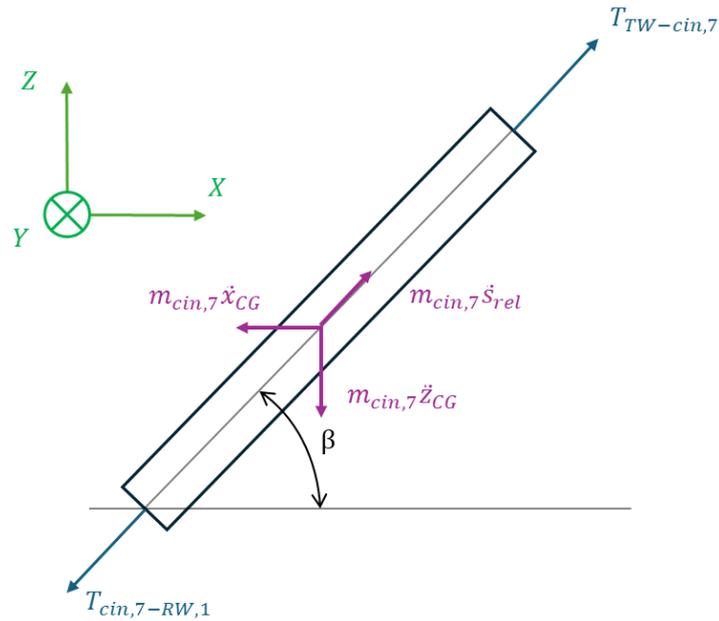


Figura 5.11 - Diagramma di corpo libero del tratto 7 del cingolo in dinamica (veicolo cingolato con tre road wheels)

Equilibrio di forze coassiali:

$$T_{cin,7-RW,1} + m_{cin,7}\ddot{z}_{CG} \sin \beta + m_{cin,7}\ddot{x}_{CG} \cos \beta - m_{cin,7}\ddot{s}_{rel} - T_{TW-cin,7} = 0 \quad (5.35)$$

- Tratto 9 del cingolo

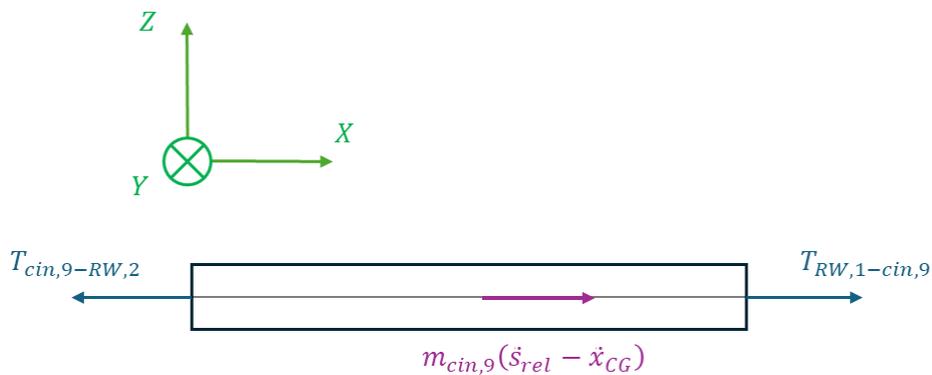


Figura 5.12 - Diagramma di corpo libero del tratto 9 del cingolo in dinamica (veicolo cingolato con tre road wheels)

Equilibrio di forze coassiali:

$$T_{cin,9-RW,2} + m_{cin,9}\ddot{x}_{CG} - T_{RW,1-cin,9} - m_{cin,9}\ddot{s}_{rel} = 0 \quad (5.36)$$

- Tratto 10 del cingolo

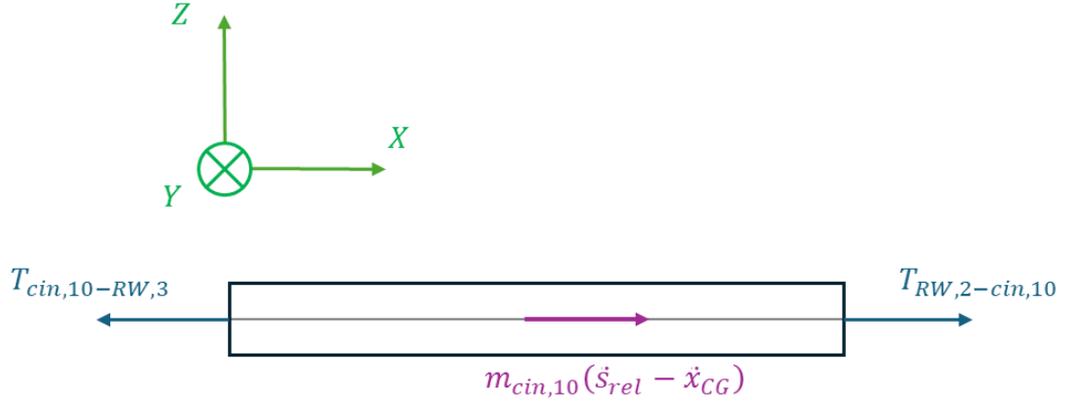


Figura 5.13 - Diagramma di corpo libero del tratto 10 del cingolo in dinamica (veicolo cingolato con tre road wheels)

Equilibrio di forze coassiali:

$$T_{cin,10-RW,3} + m_{cin,10}\ddot{x}_{CG} - T_{RW,2-cin,10} - m_{cin,10}\ddot{s}_{rel} = 0 \quad (5.37)$$

5.2 Sistema di equazioni risolvete

Per risolvere il problema si mettono a sistema le equazioni dinamiche descritte precedentemente nei diagrammi di corpo libero, ad eccezione dell'equilibrio orizzontale e verticale della ruota di supporto, secondo le considerazioni fatte precedentemente nella descrizione del diagramma di corpo libero della ruota di supporto:

- 1) $T_{SW-cin,4} + T_{cin,2-SW} \cos \alpha - O_{SW} = m_{SW}\ddot{x}_{SW}$
- 2) $V_{SW} - T_{cin,2-SW} \sin \alpha - m_{SW}g - m_{cin,SW}g - \left(\frac{1-K_{RS}}{2}\right) m_{cin,RS}g = m_{SW}\ddot{z}_{SW}$
- 3) $C_{m,SW} - (T_{cin,2-SW} - T_{SW-cin,4})r_{SW} - C_{a,SW} = I_{SW,tot}\dot{\omega}_{SW}$
- 4) $(T_{RS-cin,5} - T_{cin,4-RS})r_{RS} - C_{a,RS} = I_{RS}\dot{\omega}_{RS}$
- 5) $F - T_{cin,5-TW} - T_{TW-cin,7} \cos \beta = m_{TW}\ddot{x}_{TW}$
- 6) $V_{TW} - T_{TW-cin,7} \sin \beta - m_{TW}g - m_{cin,TW}g - \left(\frac{1-K_{RS}}{2}\right) m_{cin,RS}g = m_{TW}\ddot{z}_{TW}$
- 7) $(T_{TW-cin,7} - T_{cin,5-TW})r_{TW} - C_{a,TW} = I_{TW,tot}\dot{\omega}_{TW}$
- 8) $F_{x,RW,1} + T_{cin,7-RW,1} \cos \beta + O_{RW,1} - T_{RW,1-cin,9} = m_{RW}\ddot{x}_{RW,1}$
- 9) $F_{z,RW,1} + T_{cin,7-RW,1} \sin \beta + F_{k,1} + F_{c,1} - m_{RW}g = m_{RW}\ddot{z}_{RW,1}$
- 10) $(T_{RW,1-cin,9} - T_{cin,7-RW,1})r_{RW} - F_{x,RW,1}r_{RW} - C_{a,RW,1} = I_{RW,1,tot}\dot{\omega}_{RW,1}$

- 11) $F_{x,RW,2} + O_{RW,2} + T_{cin,9-RW,2} - T_{RW,2-cin,10} = m_{RW}\ddot{x}_{RW,2}$
- 12) $F_{z,RW,2} + F_{k,2} + F_{c,2} - m_{RW}g = m_{RW}\ddot{z}_{RW,2}$
- 13) $(T_{RW,2-cin,10} - T_{cin,9-RW,2})r_{RW} - F_{x,RW,2}r_{RW} - C_{a,RW,2} = I_{RW}\dot{\omega}_{RW,2}$
- 14) $F_{x,RW,3} + T_{cin,10-RW,3} - T_{RW,3-cin,2} \cos \alpha - O_{RW,3} = m_{RW}\ddot{x}_{RW,3}$
- 15) $F_{z,RW,3} + T_{RW,3-cin,2} \sin \alpha + F_{k,3} + F_{c,3} - m_{RW}g = m_{RW}\ddot{z}_{RW,3}$
- 16) $(T_{RW,3-cin,2} - T_{cin,10-RW,3})r_{RW} - F_{x,RW,3}r_{RW} - C_{a,RW,3} = I_{RW,3,tot}\dot{\omega}_{RW,3}$
- 17) $O_{SW} + O_{RW,3} - O_{RW,1} - O_{RW,2} - F = m_s\ddot{x}_{CG}$
- 18) $-F_{k,1} - F_{k,2} - F_{k,3} - F_{c,1} - F_{c,2} - F_{c,3} - m_s g - V_{TW} - V_{SW} - V_{RS} = m_s\ddot{z}_{CG}$
- 19) $V_{TW} \cdot (x_{C,TW} - d_{CG}) + V_{RS}(x_{C,RS} - d_{CG}) + F(h_{CG} - z_{C,TW}) - V_{SW}d_{CG} +$
 $-O_{SW}h_{CG} + O_{RW,1}q + O_{RW,2}q - O_{RW,3}q + F_{k,1}(x_{C,RW,1} - d_{CG}) + F_{c,1}(x_{C,RW,1} +$
 $-d_{CG}) + F_{k,2}(x_{C,RW,2} - d_{CG}) + F_{c,2}(x_{C,RW,2} - d_{CG}) - F_{k,3}(d_{CG} - x_{C,RW,3}) +$
 $-F_{c,3}(d_{CG} - x_{C,RW,3}) = I_{CG}\ddot{\theta}$
- 20) $T_{cin,2-SW} + m_{cin,2}\ddot{x}_{CG} \cos \alpha - m_{cin,2}\ddot{s}_{rel} - m_{cin,2}\ddot{z}_{CG} \sin \alpha - T_{RW,3-cin,2} = 0$
- 21) $T_{cin,4-RS} - T_{SW-cin,4} - m_{cin,4}\ddot{s}_{rel} - m_{cin,4}\ddot{x}_{CG} = 0$
- 22) $T_{cin,5-TW} - T_{RS-cin,5} - m_{cin,5}\ddot{s}_{rel} - m_{cin,5}\ddot{x}_{CG} = 0$
- 23) $T_{cin,7-RW,1} + m_{cin,7}\ddot{z}_{CG} \sin \beta + m_{cin,7}\ddot{x}_{CG} \cos \beta - m_{cin,7}\ddot{s}_{rel} - T_{TW-cin,7} = 0$
- 24) $T_{cin,9-RW,2} + m_{cin,9}\ddot{x}_{CG} - T_{RW,1-cin,9} - m_{cin,9}\ddot{s}_{rel} = 0$
- 25) $T_{cin,10-RW,3} + m_{cin,10}\ddot{x}_{CG} - T_{RW,2-cin,10} - m_{cin,10}\ddot{s}_{rel} = 0$

(5 . 38)

Sostituisco le relazioni delle forze elastiche e smorzanti della sospensione:

- 1) $T_{SW-cin,4} + T_{cin,2-SW} \cos \alpha - O_{SW} = m_{SW}\ddot{x}_{SW}$
- 2) $V_{SW} - T_{cin,2-SW} \sin \alpha - m_{SW}g - m_{cin,SW}g - \left(\frac{1-K_{RS}}{2}\right) m_{cin,RS}g = m_{SW}\ddot{z}_{SW}$
- 3) $C_{m,SW} - (T_{cin,2-SW} - T_{SW-cin,4})r_{SW} - C_{a,SW} = I_{SW,tot}\dot{\omega}_{SW}$
- 4) $(T_{RS-cin,5} - T_{cin,4-RS})r_{RS} - C_{a,RS} = I_{RS}\dot{\omega}_{RS}$
- 5) $F - T_{cin,5-TW} - T_{TW-cin,7} \cos \beta = m_{TW}\ddot{x}_{TW}$
- 6) $V_{TW} - T_{TW-cin,7} \sin \beta - m_{TW}g - m_{cin,TW}g - \left(\frac{1-K_{RS}}{2}\right) m_{cin,RS}g = m_{TW}\ddot{z}_{TW}$
- 7) $(T_{TW-cin,7} - T_{cin,5-TW})r_{TW} - C_{a,TW} = I_{TW,tot}\dot{\omega}_{TW}$
- 8) $F_{x,RW,1} + T_{cin,7-RW,1} \cos \beta + O_{RW,1} - T_{RW,1-cin,9} = m_{RW}\ddot{x}_{RW,1}$
- 9) $F_{z,RW,1} + T_{cin,7-RW,1} \sin \beta + k_1(z_1 - h_{RW,1}) + c_1(\dot{z}_1 - \dot{h}_{RW,1}) +$
 $-m_{RW}g = m_{RW}\ddot{z}_{RW,1}$
- 10) $T_{RW,1-cin,9}r_{RW} - T_{cin,7-RW,1}r_{RW} - F_{x,RW,1}r_{RW} - C_{a,RW,1} = I_{RW,1,tot}\dot{\omega}_{RW,1}$
- 11) $F_{x,RW,2} + O_{RW,2} + T_{cin,9-RW,2} - T_{RW,2-cin,10} = m_{RW}\ddot{x}_{RW,2}$
- 12) $F_{z,RW,2} + k_2(z_2 - h_{RW,2}) + c_2(\dot{z}_2 - \dot{h}_{RW,2}) - m_{RW}g = m_{RW}\ddot{z}_{RW,2}$
- 13) $T_{RW,2-cin,10}r_{RW} - T_{cin,9-RW,2}r_{RW} - F_{x,RW,2}r_{RW} - C_{a,RW,2} = I_{RW}\dot{\omega}_{RW,2}$
- 14) $F_{x,RW,3} + T_{cin,10-RW,3} - T_{RW,3-cin,2} \cos \alpha - O_{RW,3} = m_{RW}\ddot{x}_{RW,3}$
- 15) $F_{z,RW,3} + T_{RW,3-cin,2} \sin \alpha + k_3(z_3 - h_{RW,3}) + c_3(\dot{z}_3 - \dot{h}_{RW,3}) +$
 $-m_{RW}g = m_{RW}\ddot{z}_{RW,3}$
- 16) $T_{RW,3-cin,2}r_{RW} - T_{cin,10-RW,3}r_{RW} - F_{x,RW,3}r_{RW} - C_{a,RW,3} = I_{RW,3,tot}\dot{\omega}_{RW,3}$
- 17) $O_{SW} + O_{RW,3} - O_{RW,2} - O_{RW,1} - F = m_s\ddot{x}_{CG}$

$$\begin{aligned}
18) & -k_1(z_1 - h_{RW,1}) - k_2(z_2 - h_{RW,2}) - k_3(z_3 - h_{RW,3}) - c_1(\dot{z}_1 - \dot{h}_{RW,1}) + \\
& -c_2(\dot{z}_2 - \dot{h}_{RW,2}) - c_3(\dot{z}_3 - \dot{h}_{RW,3}) - m_s g - V_{TW} - V_{SW} - V_{RS} = m_s \ddot{z}_{CG} \\
19) & V_{TW} \cdot (x_{C,TW} - d_{CG}) + V_{RS}(x_{C,RS} - d_{CG}) + F(h_{CG} - z_{C,TW}) - V_{SW} d_{CG} + \\
& -O_{SW} h_{CG} + O_{RW,1} q + O_{RW,2} q - O_{RW,3} q + k_1(z_1 - h_{RW,1})(x_{C,RW,1} - d_{CG}) + \\
& + k_2(z_2 - h_{RW,2})(x_{C,RW,2} - d_{CG}) + k_3(z_3 - h_{RW,3})(x_{C,RW,3} - d_{CG}) + \\
& + c_1(\dot{z}_1 - \dot{h}_{RW,1})(x_{C,RW,1} - d_{CG}) + c_2(\dot{z}_2 - \dot{h}_{RW,2})(x_{C,RW,2} - d_{CG}) + \\
& + c_3(\dot{z}_3 - \dot{h}_{RW,3})(x_{C,RW,3} - d_{CG}) = I_{CG} \ddot{\theta} \\
20) & T_{cin,2-SW} + m_{cin,2} \ddot{x}_{CG} \cos \alpha - m_{cin,2} \ddot{s}_{rel} - m_{cin,2} \ddot{z}_{CG} \sin \alpha - T_{RW,3-cin,2} = 0 \\
21) & T_{cin,4-RS} - T_{SW-cin,4} - m_{cin,4} \ddot{s}_{rel} - m_{cin,4} \ddot{x}_{CG} = 0 \\
22) & T_{cin,5-TW} - T_{RS-cin,5} - m_{cin,5} \ddot{s}_{rel} - m_{cin,5} \ddot{x}_{CG} = 0 \\
23) & T_{cin,7-RW,1} + m_{cin,7} \ddot{z}_{CG} \sin \beta + m_{cin,7} \ddot{x}_{CG} \cos \beta - m_{cin,7} \ddot{s}_{rel} - T_{TW-cin,7} = 0 \\
24) & T_{cin,9-RW,2} + m_{cin,9} \ddot{x}_{CG} - T_{RW,1-cin,9} - m_{cin,9} \ddot{s}_{rel} = 0 \\
25) & T_{cin,10-RW,3} + m_{cin,10} \ddot{x}_{CG} - T_{RW,2-cin,10} - m_{cin,10} \ddot{s}_{rel} = 0
\end{aligned} \tag{5.39}$$

Sostituisco le relazioni di spostamento, velocità verticali dei punti di attacco della sospensione e le accelerazioni puntuali dei centri ruota:

$$\begin{aligned}
1) & T_{SW-cin,4} + T_{cin,2-SW} \cos \alpha - O_{SW} = m_{SW}(\ddot{x}_{CG} - \ddot{\theta} b_{SW} \sin \gamma_{SW} + \dot{\theta}^2 b_{SW} \cos \gamma_{SW}) \\
2) & V_{SW} - T_{cin,2-SW} \sin \alpha - m_{SW} g - m_{cin,SW} g - \left(\frac{1-K_{RS}}{2}\right) m_{cin,RS} g = m_{SW}(\ddot{z}_{CG} + \\
& + \ddot{\theta} b_{SW} \cos \gamma_{SW} + \dot{\theta}^2 b_{SW} \sin \gamma_{SW}) \\
3) & C_{m,SW} + T_{SW-cin,4} r_{SW} - T_{cin,2-SW} r_{SW} - C_{a,SW} = I_{SW,tot} \dot{\omega}_{SW} \\
4) & (T_{RS-cin,5} - T_{cin,4-RS}) r_{RS} - C_{a,RS} = I_{RS} \dot{\omega}_{RS} \\
5) & F - T_{cin,5-TW} - T_{TW-cin,7} \cos \beta = m_{TW}(\ddot{x}_{CG} - \ddot{\theta} b_{TW} \sin \gamma_{SW} - \dot{\theta}^2 b_{TW} \cos \gamma_{TW}) \\
6) & V_{TW} - T_{TW-cin,7} \sin \beta - m_{TW} g - m_{cin,TW} g - \left(\frac{1-K_{RS}}{2}\right) m_{cin,RS} g = m_{TW}(\ddot{z}_{CG} + \\
& - \ddot{\theta} b_{TW} \cos \gamma_{TW} + \dot{\theta}^2 b_{TW} \sin \gamma_{TW}) \\
7) & (T_{TW-cin,7} - T_{cin,5-TW}) r_{TW} - C_{a,TW} = I_{TW,tot} \dot{\omega}_{TW} \\
8) & F_{x,RW,1} + T_{cin,7-RW,1} \cos \beta + O_{RW,1} - T_{RW,1-cin,9} = m_{RW}(\ddot{x}_{CG} - \ddot{\theta} b_1 \sin \gamma_1 + \\
& - \dot{\theta}^2 b_1 \cos \gamma_1) \\
9) & F_{z,RW,1} + T_{cin,7-RW,1} \sin \beta + k_1(z_{CG} - l_1 \cdot \tan \theta - h_{RW,1}) + \\
& + c_1(\dot{z}_{CG} - \dot{\theta} b_1 \cos \gamma_1 - \dot{h}_{RW,1}) - m_{RW} g = m_{RW} \ddot{h}_{RW,1} \\
10) & T_{RW,1-cin,9} r_{RW} - T_{cin,7-RW,1} r_{RW} - F_{x,RW,1} r_{RW} - C_{a,RW,1} = I_{RW,1,tot} \dot{\omega}_{RW,1} \\
11) & F_{x,RW,2} + O_{RW,2} + T_{cin,9-RW,2} - T_{RW,2-cin,10} = m_{RW}(\ddot{x}_{CG} - \ddot{\theta} b_2 \sin \gamma_2 + \\
& - \dot{\theta}^2 b_2 \cos \gamma_2) \\
12) & F_{z,RW,2} + k_2(z_{CG} - l_2 \cdot \tan \theta - h_{RW,2}) + c_2(\dot{z}_{CG} - \dot{\theta} b_2 \cos \gamma_2 - \dot{h}_{RW,2}) + \\
& - m_{RW} g = m_{RW} \ddot{h}_{RW,2} \\
13) & T_{RW,2-cin,10} r_{RW} - T_{cin,9-RW,2} r_{RW} - F_{x,RW,2} r_{RW} - C_{a,RW,2} = I_{RW} \dot{\omega}_{RW,2} \\
14) & F_{x,RW,3} + T_{cin,10-RW,3} - T_{RW,3-cin,2} \cos \alpha - O_{RW,3} = m_{RW}(\ddot{x}_{CG} - \ddot{\theta} b_3 \sin \gamma_3 + \\
& + \dot{\theta}^2 b_3 \cos \gamma_3) \\
15) & F_{z,RW,3} + T_{RW,3-cin,2} \sin \alpha + k_3(z_{CG} + l_3 \cdot \tan \theta - h_{RW,3}) + \\
& + c_3(\dot{z}_{CG} + \dot{\theta} b_3 \cos \gamma_3 - \dot{h}_{RW,3}) - m_{RW} g = m_{RW} \ddot{h}_{RW,3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
16) & T_{RW,3-cin,2}r_{RW} - T_{cin,10-RW,3}r_{RW} - F_{x,RW,3}r_{RW} - C_{a,RW,3} = I_{RW,3,tot}\dot{\omega}_{RW,3} \\
17) & O_{SW} + O_{RW,3} - O_{RW,2} - O_{RW,1} - F = m_s\ddot{x}_{CG} \\
18) & -k_1(z_{CG} - l_1 \cdot \tan \theta - h_{RW,1}) - k_2(z_{CG} - l_2 \cdot \tan \theta - h_{RW,2}) + \\
& -k_3(z_{CG} + l_3 \cdot \tan \theta - h_{RW,3}) - c_1(\dot{z}_{CG} - \dot{\theta}b_1 \cos \gamma_1 - \dot{h}_{RW,1}) - c_2(\dot{z}_{CG} + \\
& -\dot{\theta}b_2 \cos \gamma_2 - \dot{h}_{RW,2}) - c_3(\dot{z}_{CG} + \dot{\theta}b_3 \cos \gamma_3 - \dot{h}_{RW,3}) - m_s g - V_{TW} - V_{SW} + \\
& -V_{RS} = m_s\ddot{z}_{CG} \\
19) & V_{TW} \cdot (x_{C,TW} - d_{CG}) + V_{RS}(x_{C,RS} - d_{CG}) + F(h_{CG} - z_{C,TW}) - V_{SW}d_{CG} + \\
& -O_{SW}h_{CG} + O_{RW,1}q + O_{RW,2}q - O_{RW,3}q + k_1(z_{CG} - l_1 \cdot \tan \theta - h_{RW,1})(x_{C,RW,1} + \\
& -d_{CG}) + k_2(z_{CG} - l_2 \cdot \tan \theta - h_{RW,2})(x_{C,RW,2} - d_{CG}) + \\
& +k_3(z_{CG} + l_3 \cdot \tan \theta - h_{RW,3})(x_{C,RW,3} - d_{CG}) + \\
& +c_1(\dot{z}_{CG} - \dot{\theta}b_1 \cos \gamma_1 - \dot{h}_{RW,1})(x_{C,RW,1} - d_{CG}) + \\
& +c_2(\dot{z}_{CG} - \dot{\theta}b_2 \cos \gamma_2 - \dot{h}_{RW,2})(x_{C,RW,2} - d_{CG}) + \\
& +c_3(\dot{z}_{CG} + \dot{\theta}b_3 \cos \gamma_3 - \dot{h}_{RW,3})(x_{C,RW,3} - d_{CG}) = I_{CG}\ddot{\theta} \\
20) & T_{cin,2-SW} + m_{cin,2}\ddot{x}_{CG} \cos \alpha - m_{cin,2}\ddot{s}_{rel} - m_{cin,2}\ddot{z}_{CG} \sin \alpha - T_{RW,3-cin,2} = 0 \\
21) & T_{cin,4-RS} - T_{SW-cin,4} - m_{cin,4}\ddot{s}_{rel} - m_{cin,4}\ddot{x}_{CG} = 0 \\
22) & T_{cin,5-TW} - T_{RS-cin,5} - m_{cin,5}\ddot{s}_{rel} - m_{cin,5}\ddot{x}_{CG} = 0 \\
23) & T_{cin,7-RW,1} + m_{cin,7}\ddot{z}_{CG} \sin \beta + m_{cin,7}\ddot{x}_{CG} \cos \beta - m_{cin,7}\ddot{s}_{rel} - T_{TW-cin,7} = 0 \\
24) & T_{cin,9-RW,2} + m_{cin,9}\ddot{x}_{CG} - T_{RW,1-cin,9} - m_{cin,9}\ddot{s}_{rel} = 0 \\
25) & T_{cin,10-RW,3} + m_{cin,10}\ddot{x}_{CG} - T_{RW,2-cin,10} - m_{cin,10}\ddot{s}_{rel} = 0
\end{aligned}$$

(5 . 40)

Sostituisco le espressioni delle coppie di attrito al perno, si considera di essere nel caso di velocità abbastanza elevata da poter semplificare la tangente iperbolica:

$$\begin{aligned}
1) & T_{SW-cin,4} + T_{cin,2-SW} \cos \alpha - O_{SW} = m_{SW}(\ddot{x}_{CG} - \ddot{\theta}b_{SW} \sin \gamma_{SW} + \dot{\theta}^2 b_{SW} \cos \gamma_{SW}) \\
2) & V_{SW} - T_{cin,2-SW} \sin \alpha - m_{SW}g - m_{cin,SW}g - \left(\frac{1-K_{RS}}{2}\right) m_{cin,RS}g = m_{SW}(\ddot{z}_{CG} + \\
& +\ddot{\theta}b_{SW} \cos \gamma_{SW} + \dot{\theta}^2 b_{SW} \sin \gamma_{SW}) \\
3) & C_{m,SW} + T_{SW-cin,4}r_{SW} - T_{cin,2-SW}r_{SW} - (C_{a0,SW} + c_{perno}\omega_{SW}) = I_{SW,tot}\dot{\omega}_{SW} \\
4) & (T_{RS-cin,5} - T_{cin,4-RS})r_{RS} - (C_{a0,RS} + c_{perno}\omega_{RS}) = I_{RS}\dot{\omega}_{RS} \\
5) & F - T_{cin,5-TW} - T_{TW-cin,7} \cos \beta = m_{TW}(\ddot{x}_{CG} - \ddot{\theta}b_{TW} \sin \gamma_{SW} - \dot{\theta}^2 b_{TW} \cos \gamma_{TW}) \\
6) & V_{TW} - T_{TW-cin,7} \sin \beta - m_{TW}g - m_{cin,TW}g - \left(\frac{1-K_{RS}}{2}\right) m_{cin,RS}g = m_{TW}(\ddot{z}_{CG} + \\
& -\ddot{\theta}b_{TW} \cos \gamma_{TW} + \dot{\theta}^2 b_{TW} \sin \gamma_{TW}) \\
7) & T_{TW-cin,7}r_{TW} - T_{cin,5-TW}r_{TW} - (C_{a0,TW} + c_{perno}\omega_{TW}) = I_{TW,tot}\dot{\omega}_{TW} \\
8) & F_{x,RW,1} + T_{cin,7-RW,1} \cos \beta + O_{RW,1} - T_{RW,1-cin,9} = m_{RW}(\ddot{x}_{CG} - \ddot{\theta}b_1 \sin \gamma_1 + \\
& -\dot{\theta}^2 b_1 \cos \gamma_1) \\
9) & F_{z,RW,1} + T_{cin,7-RW,1} \sin \beta + k_1(z_{CG} - l_1 \cdot \tan \theta - h_{RW,1}) + \\
& +c_1(\dot{z}_{CG} - \dot{\theta}b_1 \cos \gamma_1 - \dot{h}_{RW,1}) - m_{RW}g = m_{RW}\dot{h}_{RW,1} \\
10) & T_{RW,1-cin,9}r_{RW} - T_{cin,7-RW,1}r_{RW} - F_{x,RW,1}r_{RW} + \\
& -(C_{a0,RW,1} + c_{perno}\omega_{RW,1}) = I_{RW,1,tot}\dot{\omega}_{RW,1} \\
11) & F_{x,RW,2} + O_{RW,2} + T_{cin,9-RW,2} - T_{RW,2-cin,10} = m_{RW}(\ddot{x}_{CG} - \ddot{\theta}b_2 \sin \gamma_2 + \\
& -\dot{\theta}^2 b_2 \cos \gamma_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
12) & F_{z,RW,2} + k_2(z_{CG} - l_2 \cdot \tan \theta - h_{RW,2}) + c_2(\dot{z}_{CG} - \dot{\theta} b_2 \cos \gamma_2 - \dot{h}_{RW,2}) + \\
& - m_{RW} g = m_{RW} \ddot{h}_{RW,2} \\
13) & T_{RW,2-cin,10} r_{RW} - T_{cin,9-RW,2} r_{RW} - F_{x,RW,2} r_{RW} + \\
& - (C_{a0,RW,2} + c_{perno} \omega_{RW,2}) = I_{RW} \dot{\omega}_{RW,2} \\
14) & F_{x,RW,3} + T_{cin,10-RW,3} - T_{RW,3-cin,2} \cos \alpha - O_{RW,3} = m_{RW} (\ddot{x}_{CG} - \ddot{\theta} b_3 \sin \gamma_3 + \\
& + \dot{\theta}^2 b_3 \cos \gamma_3) \\
15) & F_{z,RW,3} + T_{RW,3-cin,2} \sin \alpha + k_3(z_{CG} + l_3 \cdot \tan \theta - h_{RW,3}) + \\
& + c_3(\dot{z}_{CG} + \dot{\theta} b_3 \cos \gamma_3 - \dot{h}_{RW,3}) - m_{RW} g = m_{RW} \ddot{h}_{RW,3} \\
16) & T_{RW,3-cin,2} r_{RW} - T_{cin,10-RW,3} r_{RW} - F_{x,RW,3} r_{RW} + \\
& - (C_{a0,RW,3} + c_{perno} \omega_{RW,3}) = I_{RW,3,tot} \dot{\omega}_{RW,3} \\
17) & O_{SW} + O_{RW,3} - O_{RW,2} - O_{RW,1} - F = m_s \ddot{x}_{CG} \\
18) & -k_1(z_{CG} - l_1 \cdot \tan \theta - h_{RW,1}) - k_2(z_{CG} - l_2 \cdot \tan \theta - h_{RW,2}) + \\
& -k_3(z_{CG} + l_3 \cdot \tan \theta - h_{RW,3}) - c_1(\dot{z}_{CG} - \dot{\theta} b_1 \cos \gamma_1 - \dot{h}_{RW,1}) - c_2(\dot{z}_{CG} + \\
& - \dot{\theta} b_2 \cos \gamma_2 - \dot{h}_{RW,2}) - c_3(\dot{z}_{CG} + \dot{\theta} b_3 \cos \gamma_3 - \dot{h}_{RW,3}) - m_s g - V_{TW} - V_{SW} + \\
& - V_{RS} = m_s \ddot{z}_{CG} \\
19) & V_{TW} \cdot (x_{C,TW} - d_{CG}) + V_{RS} (x_{C,RS} - d_{CG}) + F (h_{CG} - z_{C,TW}) - V_{SW} d_{CG} + \\
& - O_{SW} h_{CG} + O_{RW,1} q + O_{RW,2} q - O_{RW,3} q + k_1(z_{CG} - l_1 \cdot \tan \theta - h_{RW,1}) (x_{C,RW,1} + \\
& - d_{CG}) + k_2(z_{CG} - l_2 \cdot \tan \theta - h_{RW,2}) (x_{C,RW,2} - d_{CG}) + \\
& + k_3(z_{CG} + l_3 \cdot \tan \theta - h_{RW,3}) (x_{C,RW,3} - d_{CG}) + \\
& + c_1(\dot{z}_{CG} - \dot{\theta} b_1 \cos \gamma_1 - \dot{h}_{RW,1}) (x_{C,RW,1} - d_{CG}) + \\
& + c_2(\dot{z}_{CG} - \dot{\theta} b_2 \cos \gamma_2 - \dot{h}_{RW,2}) (x_{C,RW,2} - d_{CG}) + \\
& + c_3(\dot{z}_{CG} + \dot{\theta} b_3 \cos \gamma_3 - \dot{h}_{RW,3}) (x_{C,RW,3} - d_{CG}) = I_{CG} \ddot{\theta} \\
20) & T_{cin,2-SW} + m_{cin,2} \ddot{x}_{CG} \cos \alpha - m_{cin,2} \ddot{s}_{rel} - m_{cin,2} \ddot{z}_{CG} \sin \alpha - T_{RW,3-cin,2} = 0 \\
21) & T_{cin,4-RS} - T_{SW-cin,4} - m_{cin,4} \ddot{s}_{rel} - m_{cin,4} \ddot{x}_{CG} = 0 \\
22) & T_{cin,5-TW} - T_{RS-cin,5} - m_{cin,5} \ddot{s}_{rel} - m_{cin,5} \ddot{x}_{CG} = 0 \\
23) & T_{cin,7-RW,1} + m_{cin,7} \ddot{z}_{CG} \sin \beta + m_{cin,7} \ddot{x}_{CG} \cos \beta - m_{cin,7} \ddot{s}_{rel} - T_{TW-cin,7} = 0 \\
24) & T_{cin,9-RW,2} + m_{cin,9} \ddot{x}_{CG} - T_{RW,1-cin,9} - m_{cin,9} \ddot{s}_{rel} = 0 \\
25) & T_{cin,10-RW,3} + m_{cin,10} \ddot{x}_{CG} - T_{RW,2-cin,10} - m_{cin,10} \ddot{s}_{rel} = 0
\end{aligned}
\tag{5.41}$$

Sostituisco le equazioni relative alla cinematica del cingolo:

$$\begin{aligned}
1) & T_{SW-cin,4} + T_{cin,2-SW} \cos \alpha - O_{SW} = m_{SW} (\ddot{x}_{CG} - \ddot{\theta} b_{SW} \sin \gamma_{SW} + \dot{\theta}^2 b_{SW} \cos \gamma_{SW}) \\
2) & V_{SW} - T_{cin,2-SW} \sin \alpha - m_{SW} g - m_{cin,SW} g - \left(\frac{1-K_{RS}}{2} \right) m_{cin,RS} g = m_{SW} (\ddot{z}_{CG} + \\
& + \ddot{\theta} b_{SW} \cos \gamma_{SW} + \dot{\theta}^2 b_{SW} \sin \gamma_{SW}) \\
3) & C_{m,SW} + T_{SW-cin,4} r_{SW} - T_{cin,2-SW} r_{SW} - (C_{a0,SW} + c_{perno} \omega_{SW}) = \frac{I_{SW,tot}}{r_{SW}} \ddot{s}_{rel} \\
4) & (T_{RS-cin,5} - T_{cin,4-RS}) r_{RS} - \left(C_{a0,RS} + c_{perno} \omega_{SW} \frac{r_{SW}}{r_{RS}} \right) = \frac{I_{RS}}{r_{RS}} \ddot{x}_{rel} \\
5) & F - T_{cin,5-TW} - T_{TW-cin,7} \cos \beta = m_{TW} (\ddot{x}_{CG} - \ddot{\theta} b_{TW} \sin \gamma_{TW} - \dot{\theta}^2 b_{TW} \cos \gamma_{TW}) \\
6) & V_{TW} - T_{TW-cin,7} \sin \beta - m_{TW} g - m_{cin,TW} g - \left(\frac{1-K_{RS}}{2} \right) m_{cin,RS} g = m_{TW} (\ddot{z}_{CG} + \\
& - \ddot{\theta} b_{TW} \cos \gamma_{TW} + \dot{\theta}^2 b_{TW} \sin \gamma_{TW})
\end{aligned}$$

- 7) $T_{TW-cin,7}r_{TW} - T_{cin,5-TW}r_{TW} - \left(C_{a0,TW} + c_{perno}\omega_{SW}\frac{r_{SW}}{r_{TW}}\right) = \frac{I_{TW,tot}}{r_{TW}}\ddot{s}_{rel}$
- 8) $F_{x,RW,1} + T_{cin,7-RW,1}\cos\beta + O_{RW,1} - T_{RW,1-cin,9} = m_{RW}(\ddot{x}_{CG} - \ddot{\theta}b_1\sin\gamma_1 - \dot{\theta}^2b_1\cos\gamma_1)$
- 9) $F_{z,RW,1} + T_{cin,7-RW,1}\sin\beta + k_1(z_{CG} - l_1 \cdot \tan\theta - h_{RW,1}) + c_1(\dot{z}_{CG} - \dot{\theta}b_1\cos\gamma_1 - \dot{h}_{RW,1}) - m_{RW}g = m_{RW}\ddot{h}_{RW,1}$
- 10) $T_{RW,1-cin,9}r_{RW} - T_{cin,7-RW,1}r_{RW} - F_{x,RW,1}r_{RW} + \left(C_{a0,RW,1} + c_{perno}\omega_{SW}\frac{r_{SW}}{r_{RW}}\right) = \frac{I_{RW,1,tot}}{r_{RW}}\ddot{s}_{rel}$
- 11) $F_{x,RW,2} + O_{RW,2} + T_{cin,9-RW,2} - T_{RW,2-cin,10} = m_{RW}(\ddot{x}_{CG} - \ddot{\theta}b_2\sin\gamma_2 - \dot{\theta}^2b_2\cos\gamma_2)$
- 12) $F_{z,RW,2} + k_2(z_{CG} - l_2 \cdot \tan\theta - h_{RW,2}) + c_2(\dot{z}_{CG} - \dot{\theta}b_2\cos\gamma_2 - \dot{h}_{RW,2}) - m_{RW}g = m_{RW}\ddot{h}_{RW,2}$
- 13) $T_{RW,2-cin,10}r_{RW} - T_{cin,9-RW,2}r_{RW} - F_{x,RW,2}r_{RW} + \left(C_{a0,RW,2} + c_{perno}\omega_{SW}\frac{r_{SW}}{r_{RW}}\right) = \frac{I_{RW}}{r_{RW}}\ddot{s}_{rel}$
- 14) $F_{x,RW,3} + T_{cin,10-RW,3} - T_{RW,3-cin,2}\cos\alpha - O_{RW,3} = m_{RW}(\ddot{x}_{CG} - \ddot{\theta}b_3\sin\gamma_3 + \dot{\theta}^2b_3\cos\gamma_3)$
- 15) $F_{z,RW,3} + T_{RW,3-cin,2}\sin\alpha + k_3(z_{CG} + l_3 \cdot \tan\theta - h_{RW,3}) + c_3(\dot{z}_{CG} + \dot{\theta}b_3\cos\gamma_3 - \dot{h}_{RW,3}) - m_{RW}g = m_{RW}\ddot{h}_{RW,3}$
- 16) $T_{RW,3-cin,2}r_{RW} - T_{cin,10-RW,3}r_{RW} - F_{x,RW,3}r_{RW} + \left(C_{a0,RW,3} + c_{perno}\omega_{SW}\frac{r_{SW}}{r_{RW}}\right) = \frac{I_{RW,3,tot}}{r_{RW}}\ddot{s}_{rel}$
- 17) $O_{SW} + O_{RW,3} - O_{RW,2} - O_{RW,1} - F = m_s\ddot{x}_{CG}$
- 18) $-k_1(z_{CG} - l_1 \cdot \tan\theta - h_{RW,1}) - k_2(z_{CG} - l_2 \cdot \tan\theta - h_{RW,2}) + -k_3(z_{CG} + l_3 \cdot \tan\theta - h_{RW,3}) - c_1(\dot{z}_{CG} - \dot{\theta}b_1\cos\gamma_1 - \dot{h}_{RW,1}) + -c_2(\dot{z}_{CG} - \dot{\theta}b_2\cos\gamma_2 - \dot{h}_{RW,2}) - c_3(\dot{z}_{CG} + \dot{\theta}b_3\cos\gamma_3 - \dot{h}_{RW,3}) - m_s g - V_{TW} - V_{SW} - V_{RS} = m_s\ddot{z}_{CG}$
- 19) $V_{TW} \cdot (x_{C,TW} - d_{CG}) + V_{RS}(x_{C,RS} - d_{CG}) + F(h_{CG} - z_{C,TW}) - V_{SW}d_{CG} + -O_{SW}h_{CG} + O_{RW,1}q + O_{RW,2}q - O_{RW,3}q + k_1(z_{CG} - l_1 \cdot \tan\theta - h_{RW,1})(x_{C,RW,1} + -d_{CG}) + k_2(z_{CG} - l_2 \cdot \tan\theta - h_{RW,2})(x_{C,RW,2} - d_{CG}) + +k_3(z_{CG} + l_3 \cdot \tan\theta - h_{RW,3})(x_{C,RW,3} - d_{CG}) + +c_1(\dot{z}_{CG} - \dot{\theta}b_1\cos\gamma_1 - \dot{h}_{RW,1})(x_{C,RW,1} - d_{CG}) + +c_2(\dot{z}_{CG} - \dot{\theta}b_2\cos\gamma_2 - \dot{h}_{RW,2})(x_{C,RW,2} - d_{CG}) + +c_3(\dot{z}_{CG} + \dot{\theta}b_3\cos\gamma_3 - \dot{h}_{RW,3})(x_{C,RW,3} - d_{CG}) = I_{CG}\ddot{\theta}$
- 20) $T_{cin,2-SW} + m_{cin,2}\ddot{x}_{CG}\cos\alpha - m_{cin,2}\ddot{s}_{rel} - m_{cin,2}\ddot{z}_{CG}\sin\alpha - T_{RW,3-cin,2} = 0$
- 21) $T_{cin,4-RS} - T_{SW-cin,4} - m_{cin,4}\ddot{s}_{rel} - m_{cin,4}\ddot{x}_{CG} = 0$
- 22) $T_{cin,5-TW} - T_{RS-cin,5} - m_{cin,5}\ddot{s}_{rel} - m_{cin,5}\ddot{x}_{CG} = 0$
- 23) $T_{cin,7-RW,1} + m_{cin,7}\ddot{z}_{CG}\sin\beta + m_{cin,7}\ddot{x}_{CG}\cos\beta - m_{cin,7}\ddot{s}_{rel} - T_{TW-cin,7} = 0$
- 24) $T_{cin,9-RW,2} + m_{cin,9}\ddot{x}_{CG} - T_{RW,1-cin,9} - m_{cin,9}\ddot{s}_{rel} = 0$
- 25) $T_{cin,10-RW,3} + m_{cin,10}\ddot{x}_{CG} - T_{RW,2-cin,10} - m_{cin,10}\ddot{s}_{rel} = 0$

(5.42)

Riformulo:

- 1) $T_{SW-cin,4} + T_{cin,2-SW} \cos \alpha - O_{SW} - m_{SW} \ddot{x}_{CG} + \ddot{\theta} m_{SW} b_{SW} \sin \gamma_{SW} = \dot{\theta}^2 m_{SW} b_{SW} \cos \gamma_{SW}$
- 2) $-T_{cin,2-SW} \sin \alpha + V_{SW} - m_{SW} \ddot{z}_{CG} - \ddot{\theta} m_{SW} b_{SW} \cos \gamma_{SW} = m_{SW} g + m_{cin,SW} g + \left(\frac{1-K_{RS}}{2}\right) m_{cin,RS} g + \dot{\theta}^2 m_{SW} b_{SW} \sin \gamma_{SW}$
- 3) $T_{SW-cin,4} r_{SW} - T_{cin,2-SW} r_{SW} - \frac{I_{SW,tot}}{r_{SW}} \ddot{s}_{rel} = -C_{m,SW} + C_{a0,SW} + c_{perno} \omega_{SW}$
- 4) $-T_{cin,4-RS} r_{RS} + T_{RS-cin,5} r_{RS} - \frac{I_{RS}}{r_{RS}} \ddot{s}_{rel} = C_{a0,RS} + c_{perno} \omega_{SW} \frac{r_{SW}}{r_{RS}}$
- 5) $-T_{cin,5-TW} - T_{TW-cin,7} \cos \beta - m_{TW} \ddot{x}_{CG} + \ddot{\theta} m_{TW} b_{TW} \sin \gamma_{TW} = -F + -\dot{\theta}^2 m_{TW} b_{TW} \cos \gamma_{TW}$
- 6) $-T_{TW-cin,7} \sin \beta + V_{TW} - m_{TW} \ddot{z}_{CG} + \ddot{\theta} m_{TW} b_{TW} \cos \gamma_{TW} = m_{TW} g + m_{cin,TW} g + \left(\frac{1-K_{RS}}{2}\right) m_{cin,RS} g + \dot{\theta}^2 m_{TW} b_{TW} \sin \gamma_{TW}$
- 7) $-T_{cin,5-TW} r_{TW} + T_{TW-cin,7} r_{TW} - \frac{I_{TW,tot}}{r_{TW}} \ddot{s}_{rel} = C_{a0,TW} + c_{perno} \omega_{SW} \frac{r_{SW}}{r_{TW}}$
- 8) $T_{cin,7-RW,1} \cos \beta - T_{RW,1-cin,9} + O_{RW,1} - m_{RW} \ddot{x}_{CG} + \ddot{\theta} m_{RW} b_1 \sin \gamma_1 = -F_{x,RW,1} - \dot{\theta}^2 m_{RW} b_1 \cos \gamma_1$
- 9) $T_{cin,7-RW,1} \sin \beta + F_{z,RW,1} = -k_1 z_{CG} + k_1 l_1 \cdot \tan \theta + k_1 h_{RW,1} - c_1 \dot{z}_{CG} + c_1 \dot{\theta} b_1 \cos \gamma_1 + c_1 \dot{h}_{RW,1} + m_{RW} \ddot{h}_{RW,1} + m_{RW} g$
- 10) $-T_{cin,7-RW,1} r_{RW} + T_{RW,1-cin,9} r_{RW} - \frac{I_{RW,1,tot}}{r_{RW}} \ddot{s}_{rel} = F_{x,RW,1} r_{RW} + C_{a0,RW,1} + c_{perno} \omega_{SW} \frac{r_{SW}}{r_{RW}}$
- 11) $T_{cin,9-RW,2} - T_{RW,2-cin,10} + O_{RW,2} - m_{RW} \ddot{x}_{CG} + \ddot{\theta} m_{RW} b_2 \sin \gamma_2 = -F_{x,RW,2} + -\dot{\theta}^2 m_{RW} b_2 \cos \gamma_2$
- 12) $F_{z,RW,2} = -k_2 z_{CG} + k_2 l_2 \cdot \tan \theta + k_2 h_{RW,2} - c_2 \dot{z}_{CG} + c_2 \dot{\theta} b_2 \cos \gamma_2 + c_2 \dot{h}_{RW,2} + m_{RW} \ddot{h}_{RW,2} + m_{RW} g$
- 13) $-T_{cin,9-RW,2} r_{RW} + T_{RW,2-cin,10} r_{RW} - \frac{I_{RW}}{r_{RW}} \ddot{s}_{rel} = F_{x,RW,2} r_{RW} + C_{a0,RW,2} + c_{perno} \omega_{SW} \frac{r_{SW}}{r_{RW}}$
- 14) $T_{cin,10-RW,3} - T_{RW,3-cin,2} \cos \alpha - O_{RW,3} - m_{RW} \ddot{x}_{CG} + \ddot{\theta} m_{RW} b_3 \sin \gamma_3 = -F_{x,RW,3} + \dot{\theta}^2 m_{RW} b_3 \cos \gamma_3$
- 15) $T_{RW,3-cin,2} \sin \alpha + F_{z,RW,3} = m_{RW} g - k_3 z_{CG} - k_3 l_3 \cdot \tan \theta + k_3 h_{RW,3} - c_3 \dot{z}_{CG} + -c_3 \dot{\theta} b_3 \cos \gamma_3 + c_3 \dot{h}_{RW,3} + m_{RW} \ddot{h}_{RW,3} + m_{RW} g$
- 16) $-T_{cin,10-RW,3} r_{RW} + T_{RW,3-cin,2} r_{RW} - \frac{I_{RW,3,tot}}{r_{RW}} \ddot{s}_{rel} = F_{x,RW,3} r_{RW} + C_{a0,RW,3} + c_{perno} \omega_{SW} \frac{r_{SW}}{r_{RW}}$
- 17) $O_{SW} - O_{RW,1} - O_{RW,2} + O_{RW,3} - m_s \ddot{x}_{CG} = F$
- 18) $-V_{TW} - V_{SW} - m_s \ddot{z}_{CG} = m_s g + V_{RS} + (k_1 + k_2 + k_3) z_{CG} + (-k_1 l_1 - k_2 l_2 + k_3 l_3) \tan \theta - k_1 h_{RW,1} - k_2 h_{RW,2} - k_3 h_{RW,3} + (c_1 + c_2 + c_3) \dot{z}_{CG} + (-c_1 b_1 \cos \gamma_1 - c_2 b_2 \cos \gamma_2 + c_3 b_3 \cos \gamma_3) \dot{\theta} + -c_1 \dot{h}_{RW,1} - c_2 \dot{h}_{RW,2} - c_3 \dot{h}_{RW,3}$

$$\begin{aligned}
19) & -V_{SW}d_{CG} + V_{TW} \cdot (x_{C,TW} - d_{CG}) - O_{SW}h_{CG} + O_{RW,1}q + O_{RW,2}q - O_{RW,3}q + \\
& -I_{CG}\ddot{\theta} = -V_{RS}(x_{C,RS} - d_{CG}) - F(h_{CG} - z_{C,TW}) + \\
& -[k_1(x_{C,RW,1} - d_{CG}) + k_2(x_{C,RW,2} - d_{CG}) + k_3(x_{C,RW,3} - d_{CG})]z_{CG} + \\
& +[k_1l_1(x_{C,RW,1} - d_{CG}) + k_2l_2(x_{C,RW,2} - d_{CG}) - k_3l_3(x_{C,RW,3} - d_{CG})]\tan\theta + \\
& +k_1(x_{C,RW,1} - d_{CG})h_{RW,1} + k_2(x_{C,RW,2} - d_{CG})h_{RW,2} + k_3(x_{C,RW,3} + \\
& -d_{CG})h_{RW,3} - [c_1(x_{C,RW,1} - d_{CG}) + c_2(x_{C,RW,2} - d_{CG}) + c_3(x_{C,RW,3} + \\
& -d_{CG})]\dot{z}_{CG} + [c_1b_1 \cos\gamma_1(x_{C,RW,1} - d_{CG}) + c_2b_2 \cos\gamma_2(x_{C,RW,2} - d_{CG}) + \\
& -c_3b_3 \cos\gamma_3(x_{C,RW,3} - d_{CG})]\dot{\theta} + c_1(x_{C,RW,1} - d_{CG})\dot{h}_{RW,1} + c_2(x_{C,RW,2} + \\
& -d_{CG})\dot{h}_{RW,2} + c_3(x_{C,RW,3} - d_{CG})\dot{h}_{RW,3} \\
20) & -T_{RW,3-cin,2} + T_{cin,2-SW} + m_{cin,2}\ddot{x}_{CG} \cos\alpha - m_{cin,2}\ddot{s}_{rel} - m_{cin,2}\ddot{z}_{CG} \sin\alpha = 0 \\
21) & -T_{SW-cin,4} + T_{cin,4-RS} - m_{cin,4}\ddot{x}_{CG} - m_{cin,4}\ddot{s}_{rel} = 0 \\
22) & -T_{RS-cin,5} + T_{cin,5-TW} - m_{cin,5}\ddot{x}_{CG} - m_{cin,5}\ddot{s}_{rel} = 0 \\
23) & -T_{TW-cin,7} + T_{cin,7-RW,1} + m_{cin,7}\ddot{x}_{CG} \cos\beta - m_{cin,7}\ddot{s}_{rel} + m_{cin,7}\ddot{z}_{CG} \sin\beta = 0 \\
24) & -T_{RW,1-cin,9} + T_{cin,9-RW,2} + m_{cin,9}\ddot{x}_{CG} - m_{cin,9}\ddot{s}_{rel} = 0 \\
25) & -T_{RW,2-cin,10} + T_{cin,10-RW,3} + m_{cin,10}\ddot{x}_{CG} - m_{cin,10}\ddot{s}_{rel} = 0
\end{aligned} \tag{5.43}$$

Le incognite totali sono venticinque e indicate nelle equazioni da un colore rosso:

- $T_{SW-cin,4}, T_{cin,4-RS}, T_{RS-cin,5}, T_{cin,5-TW}, T_{TW-cin,7}, T_{cin,7-RW,1}, T_{RW,1-cin,9},$
 $T_{cin,9-RW,2}, T_{RW,2-cin,10}, T_{cin,10-RW,3}, T_{RW,3-cin,2}, T_{cin,2-SW}, V_{SW}, V_{TW}, O_{SW},$
 $O_{RW,1}, O_{RW,2}, O_{RW,3}, F_{z,RW,1}, F_{z,RW,2}, F_{z,RW,3}, \ddot{x}_{CG}, \ddot{s}_{rel}, \ddot{z}_{CG}, \ddot{\theta}.$

5.3 Soluzione del sistema con approccio matriciale

Si prosegue riscrivendo il sistema nella seguente forma:

$$Ax = b \tag{5.44}$$

dove:

- x è il vettore colonna delle incognite;
- A è la matrice dei coefficienti;
- b è il vettore colonna dei termini noti.

Il vettore colonna delle incognite x , di dimensione 25×1 , per una migliore visualizzazione, viene diviso in quattro sotto vettori:

$$x = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]^T$$

Dove:

- x_1 è un vettore riga, di dimensione 1×6 , contenente le tensioni del cingolo:

$$x_1 = [T_{SW-cin,4} \quad T_{cin,4-RS} \quad T_{RS-cin,5} \quad T_{cin,5-TW} \quad T_{TW-cin,7} \quad T_{cin,7-RW,1}]$$

- x_2 è un vettore riga, di dimensione 1×6 , contenente le tensioni del cingolo:

$$x_2 = [T_{RW,1-cin,9} \quad T_{cin,9-RW,2} \quad T_{RW,2-cin,10} \quad T_{cin,10-RW,3} \quad T_{RW,3-cin,2} \quad T_{cin,2-SW}]$$

- x_3 è un vettore riga, di dimensione 1×9 , contenente le reazioni vincolari:

$$x_3 = [V_{SW} \quad V_{TW} \quad O_{SW} \quad O_{RW,1} \quad O_{RW,2} \quad O_{RW,3} \quad F_{z,RW,1} \quad F_{z,RW,2} \quad F_{z,RW,3}]$$

- x_4 è un vettore riga, di dimensione 1×4 , con all'interno i termini di accelerazione:

$$x_4 = [\ddot{x}_{CG} \quad \ddot{s}_{rel} \quad \ddot{z}_{CG} \quad \ddot{\theta}]$$

La matrice dei coefficienti A , di dimensione 25×25 , viene ugualmente divisa in quattro sottomatrici:

$$A = [A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4]$$

Dove:

- A_1 è una matrice di dimensione 25×6 :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r_{SW} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r_{RS} & r_{RS} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r_{TW} & r_{TW} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_{RW} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- A_2 è una matrice di dimensione 25×6 :

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_{SW} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r_{RW} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r_{RW} & r_{RW} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r_{RW} & r_{RW} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- A_3 è una matrice di dimensione 25×9 :

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -d_{CG} & (x_{C,RW} - d_{CG}) & -h_{CG} & q & q & -q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- A_4 è una matrice di dimensione 25×4 :

$$A_4 = \begin{pmatrix} -m_{SW} & 0 & 0 & m_{SW}b_{SW} \sin \gamma_{SW} \\ 0 & 0 & -m_{SW} & -m_{SW}b_{SW} \cos \gamma_{SW} \\ 0 & -\frac{I_{SW,tot}}{r_{SW}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{I_{BT}}{r_{BT}} & 0 & 0 \\ -m_{TW} & 0 & 0 & m_{TW}b_{TW} \sin \gamma_{TW} \\ 0 & 0 & -m_{TW} & m_{TW}b_{TW} \cos \gamma_{TW} \\ 0 & -\frac{I_{TW,tot}}{r_{TW}} & 0 & 0 \\ -m_{RW} & 0 & 0 & m_{RW}b_1 \sin \gamma_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{I_{RW,1,tot}}{r_{RW}} & 0 & 0 \\ -m_{RW} & 0 & 0 & m_{RW}b_2 \sin \gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{I_{RW}}{r_{RW}} & 0 & 0 \\ -m_{RW} & 0 & 0 & m_{RW}b_3 \sin \gamma_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{I_{RW,3,tot}}{r_{RW}} & 0 & 0 \\ -m_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{CG} \\ m_{cin,2} \cos \alpha & -m_{cin,2} & -m_{cin,2} \sin \alpha & 0 \\ -m_{cin,4} & -m_{cin,4} & 0 & 0 \\ -m_{cin,5} & -m_{cin,5} & 0 & 0 \\ m_{cin,7} \cos \beta & -m_{cin,7} & m_{cin,7} \sin \beta & 0 \\ m_{cin,9} & -m_{cin,9} & 0 & 0 \\ m_{cin,10} & -m_{cin,10} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il vettore colonna dei termini noti b , di dimensione 25×1 , può essere suddiviso in due componenti distinte. La prima parte è costituita dai termini che variano in funzione degli input del problema specifico, mentre la seconda parte è composta da termini costanti, che rimangono invariati indipendentemente dagli input considerati:

$$b = B_{IN} \cdot b_{IN} + B_{cost} \cdot b_{cost} \quad (5.45)$$

Dove:

- b_{IN} è un vettore colonna, di dimensione 20×1 , contenente gli input del problema, per una migliore visualizzazione, viene suddiviso in quattro sotto vettori:

$$b_{IN} = [b_{IN,1} \quad b_{IN,2} \quad b_{IN,3} \quad b_{IN,4}]^T$$

In cui:

- $b_{IN,1}$ è un vettore riga, di dimensione 1×6 , includente la forza di tensionamento, la coppia motrice applicata alla sprocket wheel, le forze di trazione e la velocità di rotazione della sprocket wheel:

$$b_{IN,1} = [F \quad C_{m,SW} \quad F_{x,RW,1} \quad F_{x,RW,2} \quad F_{x,RW,3} \quad \omega_{SW}];$$

- $b_{IN,2}$ è un vettore riga, di dimensione 1×2 , contenente lo scuotimento del baricentro e la velocità di traslazione verticale del baricentro:

$$b_{IN,2} = [z_{CG} \quad \dot{z}_{CG}];$$

- $b_{IN,3}$ è un vettore riga, di dimensione 1×3 , con all'interno il beccheggio del veicolo e la velocità di beccheggio, quest'ultima è presente anche con il termine elevato al quadrato per mantenere il sistema lineare:

$$b_{IN,3} = [\tan \theta \quad \dot{\theta} \quad \dot{\theta}^2];$$

- $b_{IN,4}$ è un vettore riga, di dimensione 1×9 , che contiene lo spostamento verticale, la velocità di traslazione verticale e l'accelerazione verticale delle road wheels:

$$b_{IN,4} = [h_{RW,1} \quad h_{RW,2} \quad h_{RW,3} \quad \dot{h}_{RW,1} \quad \dot{h}_{RW,2} \quad \dot{h}_{RW,3} \quad \ddot{h}_{RW,1} \quad \ddot{h}_{RW,2} \quad \ddot{h}_{RW,3}]$$

- B_{IN} è una matrice, di dimensione 25×20 , associata al vettore b_{IN} :

$$B_{IN} = [B_{IN,1} \quad B_{IN,2} \quad B_{IN,3} \quad B_{IN,4}]$$

In cui:

- $B_{IN,1}$ è una matrice di dimensione 25×6 :

$$B_{IN,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & c_{perno} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{perno} \frac{r_{SW}}{r_{RS}} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{perno} \frac{r_{SW}}{r_{TW}} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{RW} & 0 & 0 & c_{perno} \frac{r_{SW}}{r_{RW}} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_{RW} & 0 & c_{perno} \frac{r_{SW}}{r_{RW}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_{RW} & c_{perno} \frac{r_{SW}}{r_{RW}} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(h_{CG} - z_{C,TW}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $B_{IN,2}$ è una matrice di dimensione 25×2 :

$$B_{IN,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -k_1 & -c_1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -k_2 & -c_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -k_3 & -c_3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \sum_{i=1}^3 k_i & \sum_{i=1}^3 c_i \\ -\sum_{i=1}^3 k_i(x_{C,RW,i} - d_{CG}) & -\sum_{i=1}^3 c_i(x_{C,RW,i} - d_{CG}) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $B_{IN,3}$ è una matrice di dimensione 25×3 :

$$B_{IN,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & m_{SW}b_{SW} \cos \gamma_{SW} \\ 0 & 0 & m_{SW}b_{SW} \sin \gamma_{SW} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m_{TW}b_{TW} \cos \gamma_{TW} \\ 0 & 0 & m_{TW}b_{TW} \sin \gamma_{TW} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m_{RW}b_1 \cos \gamma_1 \\ k_1 l_1 & c_1 b_1 \cos \gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k_2 l_2 & c_2 b_2 \cos \gamma_2 & -m_{RW}b_2 \cos \gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -k_3 l_3 & -c_3 b_3 \cos \gamma_3 & m_{RW}b_3 \cos \gamma_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\sum_{i=1,2} k_i l_i + k_3 l_3 & -\sum_{i=1,2} c_i b_i \cos \gamma_i + c_3 b_3 \cos \gamma_3 & 0 \\ \sum_{i=1,2} k_i l_i (x_{C,RW,i} - d_{CG}) - k_3 l_3 (x_{C,RW,3} - d_{CG}) & \sum_{i=1,2} c_i b_i \cos \gamma_i (x_{C,RW,i} - d_{CG}) - c_3 b_3 \cos \gamma_3 (x_{C,RW,3} - d_{CG}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $B_{IN,4}$ è una matrice di dimensione 25×9 :

$$B_{IN,A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & 0 & c_1 & 0 & 0 & m_{RW} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & m_{RW} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & m_{RW} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 & -c_1 & -c_2 & -c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_1(x_{C,RW,1} - d_{CG}) & k_2(x_{C,RW,2} - d_{CG}) & k_3(x_{C,RW,3} - d_{CG}) & c_1(x_{C,RW,1} - d_{CG}) & c_2(x_{C,RW,2} - d_{CG}) & c_3(x_{C,RW,3} - d_{CG}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- b_{cost} è un vettore colonna, di dimensione 14×1 , contenente i termini costanti del problema:

$$b_{cost} = [C_{a0,SW} \quad C_{a0,RS} \quad C_{a0,TW} \quad C_{a0,RW,1} \quad C_{a0,RW,2} \quad C_{a0,RW,3} \quad m_{SW}g \quad m_{TW}g \quad m_{RW}g \quad m_s g \quad m_{cin,SW}g \quad m_{cin,TW}g \quad V_{RS} \quad m_{cin,RS}g]^T$$

- B_{cost} è una matrice, di dimensione 25×14 , associata al vettore b_{cost} :

$$B_{cost} = \begin{bmatrix} B_{cost,1} \\ B_{cost,2} \end{bmatrix}$$

In cui:

- $B_{cost,1}$ è una matrice di dimensione 13×14

$$B_{cost,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \left(\frac{1-K_{RS}}{2}\right) & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \left(\frac{1-K_{RS}}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $B_{cost,2}$ è una matrice di dimensione 12×14 :

$$B_{cost,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -(x_{C,RS} - d_{CG}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5.4 Condizioni iniziali del problema

Essendo il problema descritto tramite equazioni differenziali, è necessario definire le condizioni iniziali per garantire una soluzione completa del sistema. Come spiegato in precedenza, il sistema dispone di quattro gradi di libertà, rappresentati attraverso le seguenti coordinate generalizzate:

- 1) x_{CG} : traslazione longitudinale del baricentro;
- 2) z_{CG} : scuotimento del baricentro;
- 3) θ : angolo di beccheggio (con centro di beccheggio nel baricentro);
- 4) s_{rel} : traslazione assiale del cingolo relativa al veicolo.

Queste coordinate descrivono il comportamento dinamico del veicolo e forniscono le informazioni necessarie per l'evoluzione temporale delle variabili di stato.

L'impostazione delle condizioni iniziali consente di determinare l'equilibrio iniziale e l'evoluzione del sistema nel tempo. Per ciascuno di questi gradi di libertà, è necessario definire le condizioni iniziali relative agli spostamenti e alle velocità, in modo da descrivere accuratamente lo stato iniziale del sistema e fornire una base per la soluzione delle equazioni differenziali che governano il suo comportamento dinamico.

Le condizioni iniziali sul primo grado libertà sono:

- Posizione longitudinale iniziale del baricentro è pari alla distanza tra il baricentro e la sprocket wheel $x_{CG,0} = d_{CG}$, essendo che le quote geometriche sono riferite ad un sistema di riferimento fisso con origine nel centro della sprocket wheel. La posizione della sprocket wheel all'istante iniziale è pari a zero $x_{SW,0} = 0$;
- Velocità iniziale di avanzamento del veicolo $v_{x,0} = \dot{x}_{CG,0}$ da inserire come input dall'utente.

Le condizioni iniziali sul secondo grado di libertà sono:

- La posizione verticale iniziale del baricentro viene posta pari a quella ottenuta nell'analisi statica $z_{CG,0} = z_{CG,stat}$;

- Velocità iniziale di traslazione verticale del baricentro nulla $\dot{z}_{CG,0} = 0$.

Le condizioni iniziali sul terzo grado di libertà sono:

- L'angolo di beccheggio è pari al risultato dell'analisi statica $\theta_0 = \theta_{stat}$;
- Velocità iniziale di beccheggio nulla $\dot{\theta}_0 = 0$.

Le condizioni iniziali sul quarto grado di libertà sono:

- Velocità iniziale di traslazione relativa del cingolo pari alla velocità iniziale di avanzamento del veicolo $\dot{s}_{rel,0} = v_{x,0}$, da cui ricavo la velocità iniziale di rotazione della sprocket wheel:

$$\omega_{SW,0} = \frac{\dot{s}_{rel,0}}{r_{SW}} \quad (5.46)$$

5.5 Modello Simulink

Per risolvere il sistema dinamico si è scelto di utilizzare l'ambiente Matlab-Simulink. Matlab-Simulink offre un'interfaccia grafica per la simulazione, che agevola la costruzione del modello tramite blocchi funzionali. Ciò riduce la complessità della programmazione manuale e consente di implementare le equazioni del sistema in modo modulare e intuitivo. Questo approccio semplifica l'integrazione delle diverse componenti del sistema, permettendo la simulazione del comportamento dinamico in tempo reale e fornendo una serie di strumenti utili per l'analisi dei risultati.

Il modello Simulink è composto da quattro macrosistemi:

- Risoluzione problema matriciale;
- Modello di contatto cingolo-terreno;
- Profilo stradale;
- Logica di controllo.

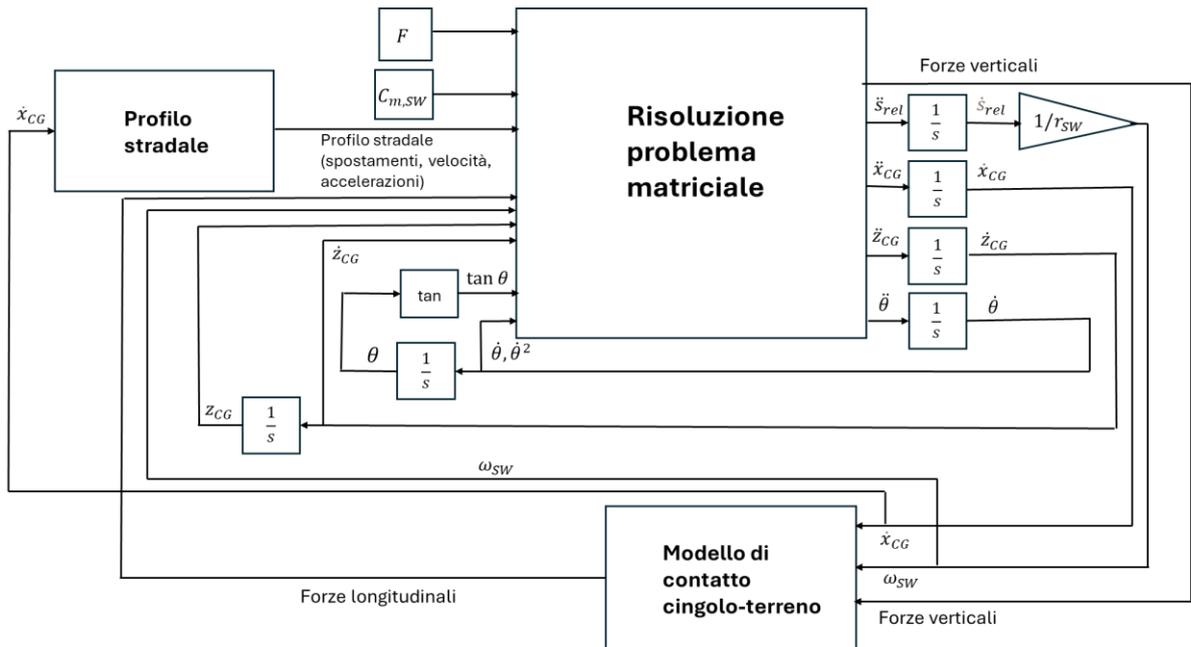


Figura 5.14 - Schema modello Simulink

5.5.1 Risoluzione problema matriciale

Il primo blocco racchiude tutte le operazioni necessarie a risolvere il sistema lineare. In ingresso ci sono tutti gli input che costituiscono il vettore b_{IN} :

$$b_{IN} = [F \ C_{m,sw} \ F_{x,RW,1} \ F_{x,RW,2} \ F_{x,RW,3} \ \omega_{sw} \ z_{CG} \ \dot{z}_{CG} \ \tan \theta \ \theta \ \theta^2 \ h_{RW,1} \ h_{RW,2} \ h_{RW,3} \ \dot{h}_{RW,1} \ \dot{h}_{RW,2} \ \dot{h}_{RW,3} \ \ddot{h}_{RW,1} \ \ddot{h}_{RW,2} \ \ddot{h}_{RW,3}]^T$$

Successivamente si calcola il vettore dei termini noti b :

$$b = B_{IN} \cdot b_{IN} + B_{cost} \cdot b_{cost} \quad (5.47)$$

Per risolvere il sistema si applica la seguente relazione:

$$x = A^{-1}b \quad (5.48)$$

Per ridurre i tempi di simulazione si è scelto di precalcolare l'espressione analitica della matrice inversa, riducendo così i tempi di calcolo dell'esecuzione del modello Simulink.

In uscita ci sono tutte le variabili del vettore delle incognite x che servono a calcolare gli input dell'istante di tempo successivo della simulazione:

- $F_{z,RW,1}, F_{z,RW,2}, F_{z,RW,3}, \ddot{x}_{CG}, \ddot{s}_{rel}, \ddot{z}_{CG}, \ddot{\theta}$.

5.5.2 Modello di contatto cingolo-terreno

Il secondo blocco contiene il modello di contatto cingolo-terreno, descritto da:

$$F_{x,i} = \mu_{cingolo-terreno} (F_{z,i} + m_{cin,i}g) \tanh\left(\frac{3\sigma}{\sigma_{F,max}}\right) \quad (5.49)$$

Gli input del blocco sono:

- Le reazioni vincolari verticali al terreno in corrispondenza delle road wheels $F_{z,RW,1}, F_{z,RW,2}, F_{z,RW,3}$;
- La velocità di traslazione longitudinale del baricentro \dot{x}_{CG} ;
- La velocità di rotazione della sprocket wheel ω_{SW} .

Gli output sono:

- Le forze longitudinali in corrispondenza delle road wheels $F_{x,RW,1}, F_{x,RW,2}, F_{x,RW,3}$;
- Lo scorrimento longitudinale σ .

5.5.3 Modello profilo stradale

Nel terzo blocco è il modello del profilo stradale dove si calcolano gli spostamenti, le velocità e le accelerazioni verticali delle road wheels.

L'input del blocco è:

- La velocità di traslazione longitudinale del baricentro \dot{x}_{CG} .

Gli output sono:

- Gli scuotimenti delle road wheels $h_{RW,1}, h_{RW,2}, h_{RW,3}$;
- Le velocità di traslazione verticale delle road wheels $\dot{h}_{RW,1}, \dot{h}_{RW,2}, \dot{h}_{RW,3}$;
- Le accelerazioni verticali delle road wheels $\ddot{h}_{RW,1}, \ddot{h}_{RW,2}, \ddot{h}_{RW,3}$.

Avendo supposto di avere delle ruote rigide e di non avere il distacco delle ruote da terra, esse seguiranno perfettamente il profilo stradale.

Le posizioni dei centri ruota sono definite rispetto a un sistema di riferimento fisso, con l'origine situata nel centro della sprocket wheel. All'istante iniziale, la posizione della sprocket wheel è pari a zero.

Nel blocco viene integrata la velocità del baricentro del veicolo \dot{x}_{CG} per ricavare la posizione longitudinale del baricentro nel tempo durante tutta la simulazione.

Una volta ottenuta la posizione del baricentro si ricavano le posizioni delle road wheels nel tempo applicando i rispettivi offset:

$$\begin{aligned} x_{RW,1} &= x_{CG} + (x_{c,RW,1} - d_{CG}) \\ x_{RW,2} &= x_{CG} + (x_{c,RW,2} - d_{CG}) \\ x_{RW,3} &= x_{CG} - (d_{CG} - x_{c,RW,3}) \end{aligned} \quad (5.50)$$

Successivamente, utilizzando una look-up table, si inseriscono le posizioni longitudinali delle road wheels nella funzione che descrive il profilo stradale, al fine di determinare gli spostamenti verticali delle road wheels. Da questi, si calcolano poi le velocità e le accelerazioni mediante le derivate temporali.

5.5.4 Logica di controllo

Nel modello proposto, l'input necessario per selezionare il tipo di simulazione da eseguire è rappresentato dalla coppia motrice applicata alla sprocket wheel. Sono stati implementati due metodi per fornire l'input di coppia:

- 1) Applicazione di un segnale di coppia definito dall'utente (ad esempio, coppia nulla, step di coppia, ecc.);
- 2) Controllo della velocità mediante un regolatore PID.

Il controllo PID (Proporzionale-Integrativo-Derivativo) è un algoritmo di controllo automatico ampiamente utilizzato in ambito industriale e ingegneristico per la regolazione di variabili di processo come temperatura, velocità, pressione e posizione. La sua vasta applicazione è motivata da alcune caratteristiche fondamentali che lo rendono altamente efficiente rispetto ad altre tipologie di controllo: una notevole efficacia nella gestione di un'ampia varietà di processi industriali, una relativa semplicità di taratura e una robustezza garantita su un ampio range operativo.

Nella Figura 5.15 è illustrata una rappresentazione schematica di un tipico regolatore PID in configurazione di controllo ad anello chiuso, in cui compaiono i seguenti segnali:

- $r(t)$: segnale di riferimento in ingresso nel controllore (o setpoint);
- $y(t)$: segnale di uscita del sistema;
- $e(t)$: errore, calcolato come differenza tra il segnale di riferimento e il segnale di uscita del sistema;
- $u(t)$: segnale di controllo in ingresso al sistema, elaborato dal regolatore PID sulla base dell'errore.

In un tipico sistema di controllo in anello chiuso, la variabile di processo $y(t)$ controllata è un parametro di output del sistema considerato. Il setpoint $r(t)$ rappresenta il valore desiderato di tale variabile. Ad ogni istante, viene calcolato l'errore $e(t)$, ossia la differenza tra il valore di riferimento e il valore corrente della variabile di processo. Questo errore è quindi elaborato dal regolatore PID per determinare il valore di input $u(t)$ da inviare al sistema, in modo da ottenere una regolazione precisa e stabile della variabile controllata.

In questo caso, essendo un controllo di velocità, la variabile di processo è rappresentata dalla velocità di avanzamento del veicolo, mentre l'input da fornire al sistema corrisponde alla coppia motrice da applicare alla sprocket wheel.

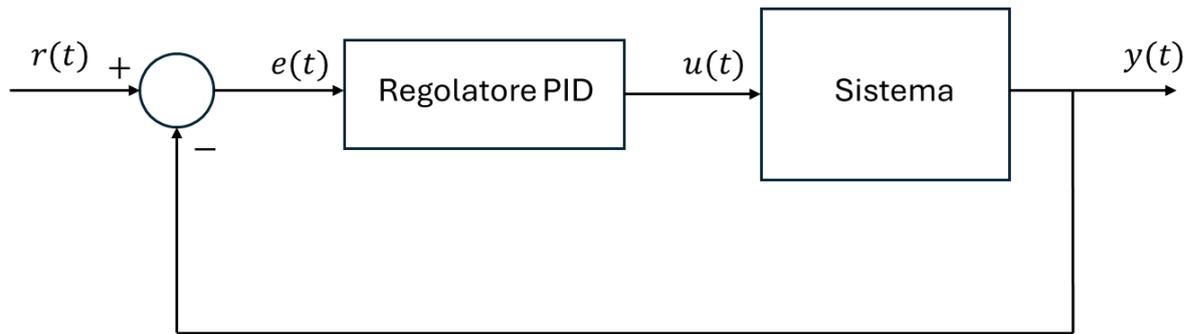


Figura 5.15 - Schema regolatore PID

La legge di controllo, cioè il legame tra $e(t)$ e $u(t)$, del regolatore è:

$$u(t) = K_p e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \frac{de(t)}{dt} \quad (5.51)$$

dove i coefficienti K_p , K_I e K_D sono, rispettivamente, i guadagni delle azioni proporzionale, integrale e derivativa.

Anche se, in generale, è usata maggiormente la seguente espressione:

$$u(t) = K_p \left(e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_D \frac{de(t)}{dt} \right) \quad (5.52)$$

In cui:

- $T_I = \frac{K_p}{K_I}$: costante di tempo dell'azione integrale;
- $T_D = \frac{K_D}{K_p}$: costante di tempo dell'azione derivativa.

La legge di controllo del regolatore PID è quindi composta da tre contributi:

$$u(t) = u_p(t) + u_I(t) + u_D(t) \quad (5.53)$$

- Azione proporzionale: $u_p(t) = K_p e(t)$

L'azione proporzionale nel controllo PID si basa sul principio che un errore $e(t)$ maggiore all'ingresso del controllore genera un'azione di controllo proporzionalmente più intensa. In altre parole, il controllo proporzionale risponde direttamente all'errore, ossia alla differenza tra il valore desiderato (setpoint) e il valore effettivo della variabile di processo. Questa azione permette di ridurre l'errore, riportando la variabile controllata verso il setpoint.

L'incremento del parametro proporzionale K_p tende a migliorare la rapidità di risposta del sistema, ma può anche aumentare il rischio di instabilità, poiché induce una maggiore ampiezza delle oscillazioni. Di conseguenza, un controllo proporzionale puro

è generalmente adatto solo per processi intrinsecamente stabili (ossia asintoticamente stabili) poiché, in assenza di altre azioni di controllo, non è sempre in grado di garantire l'eliminazione dell'errore a regime o di assicurare una risposta stabile in condizioni operative più complesse.

- Azione integrale: $u_I(t) = K_I \int_0^t e(\tau) d\tau$

L'azione integrativa del controllo PID ha il compito di correggere l'errore a regime, tenendo conto della memoria del segnale nel tempo. Questa componente accumula l'errore nel corso del tempo, compensando eventuali errori residui che la sola azione proporzionale non riesce a eliminare. In questo modo, l'azione integrativa consente al controllo PID di ridurre progressivamente l'errore a zero nel lungo periodo.

Essenzialmente, l'azione integrativa garantisce che, a regime, la variabile controllata raggiunga e mantenga il valore del setpoint. Questa componente può essere interpretata come un meccanismo per l'azzeramento dell'errore a regime introdotto dall'azione proporzionale. Risulta particolarmente rilevante nelle applicazioni industriali, poiché assicura un errore nullo in condizioni di regime anche in caso di variazioni a gradino del segnale di riferimento $r(t)$.

- Azione derivativa: $u_D(t) = K_D \frac{de(t)}{dt}$

L'azione derivativa del controllo PID si basa sulla rapidità di variazione dell'errore, intervenendo in anticipo per stabilizzare l'errore e le oscillazioni, senza attendere che diventino significative o persistano nel tempo. In questo modo, la componente derivativa agisce come un freno, attenuando oscillazioni e picchi e rendendo la risposta del sistema più fluida e stabile. Il suo ruolo principale è quindi migliorare la stabilità del sistema in anello chiuso, rendendo la risposta del controllo più rapida e smorzata.

La componente derivativa fornisce in uscita la derivata temporale dell'errore $e(t)$. Tuttavia, non sempre è necessaria: in molti casi, i controllori adottano configurazioni P o PI, poiché l'azione derivativa aumenta la sensibilità del sistema alle variazioni rapide dell'errore. Tale caratteristica può introdurre instabilità nel sistema, compromettendo la qualità del controllo. Per questo motivo, l'azione derivativa viene utilizzata principalmente in processi che richiedono una maggiore stabilità e una risposta più precisa, mentre viene spesso omessa in applicazioni più semplici.

La progettazione della logica di controllo PID si fonda sulla definizione delle performance richieste dal sistema.

Nella progettazione è fondamentale eseguire la taratura del controllore, ovvero, il processo di regolazione dei guadagni K_P , K_I , K_D finalizzato a ottenere una risposta del sistema il più possibile aderente al riferimento. Esso è realizzato applicando un segnale di riferimento a gradino (step) e misurando la risposta della variabile di processo.

Durante la progettazione, vengono valutate quattro grandezze caratteristiche che permettono di ottimizzare le prestazioni del controllore:

- Tempo di salita T_s : il tempo necessario affinché la risposta del sistema passi dal 10% al 90% del valore finale a regime;

- Massima sovra elongazione S : la percentuale di scostamento del valore di picco del sistema rispetto al valore a regime, calcolata come:

$$S = \frac{y_{max} - y_{\infty}}{y_{\infty}} \cdot 100 \text{ [%]} \quad (5.54)$$

- Tempo di assestamento T_a : il tempo richiesto affinché la risposta del sistema rimanga all'interno di una banda di errore limitata, tipicamente il 5% del valore a regime;
- Errore a regime e_{∞} : la differenza tra il valore della variabile di processo a regime e il valore di riferimento, rappresentando l'errore residuo stabilizzato nel tempo.

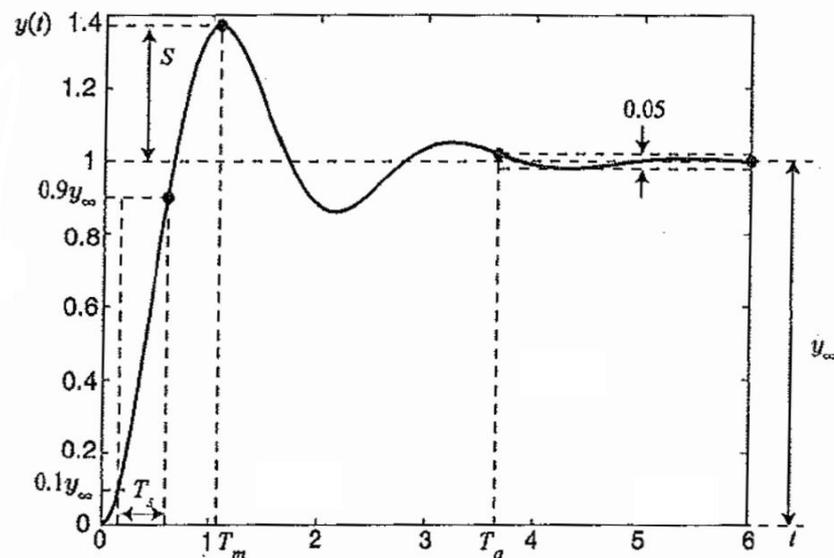


Figura 5.16 - Rappresentazione grandezze caratteristiche di un controllore

Esistono diversi metodi per eseguire la taratura del controllore, come ad esempio il metodo di *Zieger-Nichols*, il metodo *guess and check* o il tool di *tuning* di Simulink.

In questo lavoro, per semplicità operativa, per ricavare i valori dei guadagni si è scelto di usare il metodo *guess and check*.

Durante la prova di taratura, il sistema parte da una velocità iniziale di 5 m/s. Successivamente, viene applicato uno step di riferimento per portare la velocità da 5 m/s a 5.2 m/s. Come primo approccio, si disattivano i guadagni K_I e K_D , permettendo così al controllore di operare esclusivamente con l'azione proporzionale. In questo modo è possibile valutare l'effetto del guadagno proporzionale K_P nel seguire il segnale di riferimento.

Nella Figura 5.17 sono riportate le prove effettuate per diversi valori di K_P . Si osserva che, all'aumentare di K_P , la velocità di raggiungimento del valore target aumenta e l'errore a regime si riduce. Tuttavia, un incremento eccessivo del coefficiente porta all'insorgere di oscillazioni nel sistema.

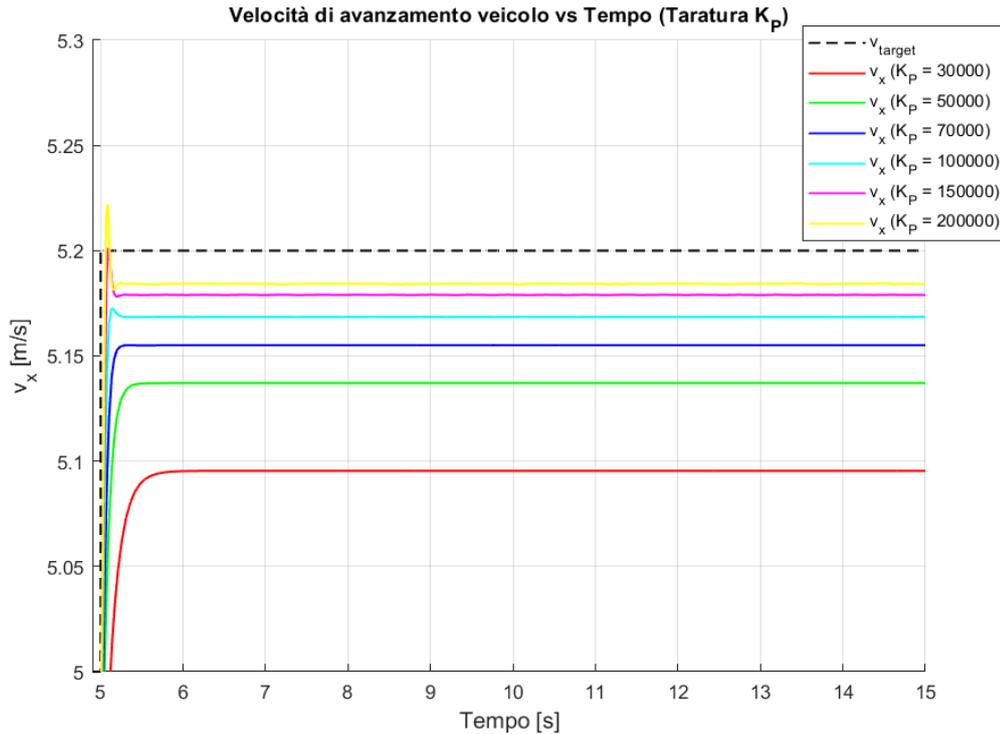


Figura 5.17 - Velocità di avanzamento veicolo vs Tempo (Taratura K_p)

Incrementando ulteriormente il guadagno proporzionale, sarebbe possibile azzerare l'errore a regime e ridurre il tempo di salita. Tuttavia, ciò causerebbe l'insorgenza di rapide oscillazioni nel sistema, compromettendo la qualità della risposta. Per ridurre l'errore a regime senza destabilizzare il sistema, è necessario introdurre un'azione integrale, combinata con un'azione derivativa, che consenta di stabilizzare il sistema e migliorare la risposta dinamica del controllore.

Un equilibrio ottimale nella regolazione del controllore è stato raggiunto utilizzando i seguenti parametri:

- $K_p = 70000 \frac{N \cdot m}{m/s} = 70000 N \cdot s$
- $K_I = 50000 N$
- $K_D = 4000 N \cdot s^2$

La risposta del sistema in seguito allo step di velocità impostato come target è illustrata in Figura 5.18.

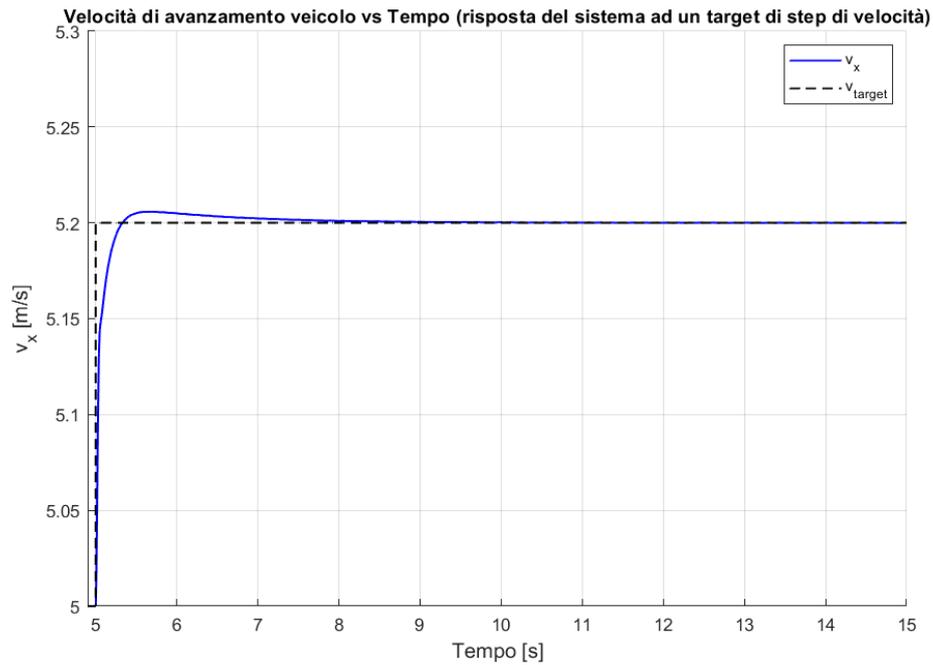


Figura 5.18 - Velocità di avanzamento veicolo vs Tempo (risposta del sistema ad un target di step di velocità)

Le grandezze caratteristiche della risposta del sistema sono:

- $T_s = 0.18 \text{ s}$;
- $S = 2.9 \%$;
- $T_a = 0.23 \text{ s}$;
- $e_\infty = 0$.

6. Simulazioni

In questo capitolo vengono presentati i risultati delle simulazioni condotte utilizzando il modello dinamico di veicolo cingolato dotato di tre road wheels. Le simulazioni includono una prova di Coast-Down e una prova di step di coppia motrice. Sebbene il modello a tre road wheels rappresenti un caso poco realistico e difficilmente applicabile nella pratica, queste prove sono state comunque eseguite al fine di verificare il corretto funzionamento del modello. Questo approccio consente di predisporre una base solida per lo sviluppo di configurazioni più realistiche del modello.

Le simulazioni saranno effettuate su due tipologie di profilo stradale: una strada piana e un profilo stradale di tipo sinusoidale.

6.1 Strada piana

6.1.1 Descrizione profilo stradale

Il profilo stradale scelto in questa simulazione è una strada piana con quota costante $h = 0$.

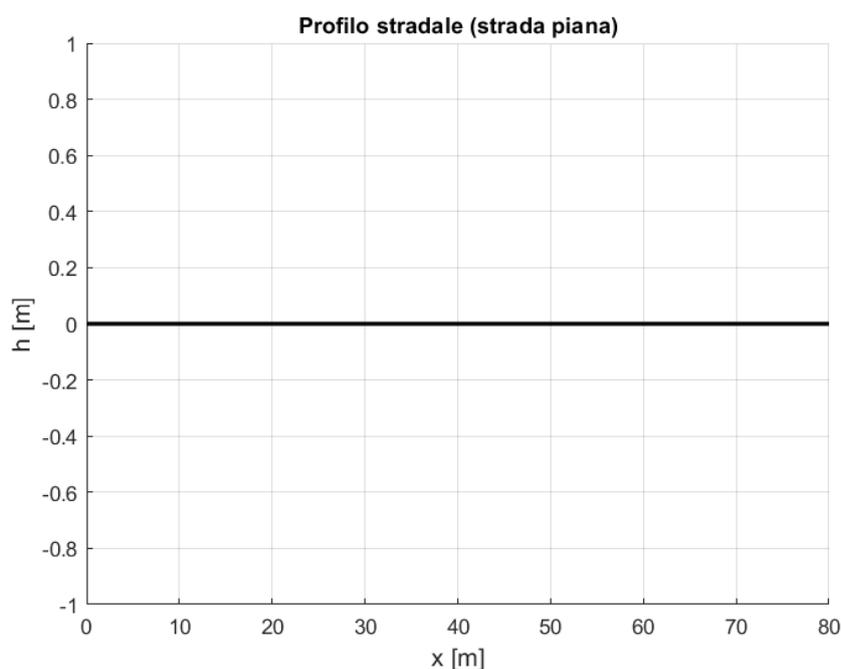


Figura 6.1 - Profilo stradale (strada piana)

6.1.2 Prova di Coast-Down

La prova consiste a portare il veicolo ad una certa velocità, quindi, posizionandosi con il cambio in folle, senza cioè carico motore, si procede a far decelerare il veicolo senza l'uso dei freni.

La velocità di inizio test è 10 m/s e la durata della simulazione è di dieci secondi.

Verranno testati due casi per studiare l'effetto che ha il tensionamento sulla dinamica del veicolo cingolato:

1) $F = 0.3m_{tot}g = 54.8 \text{ kN}$

2) $F = 0.6m_{tot}g = 109.6 \text{ kN}$

In Figura 6.2 si osserva che, in entrambi i casi, l'accelerazione longitudinale è negativa, indicando che il veicolo sta decelerando a causa degli attriti.

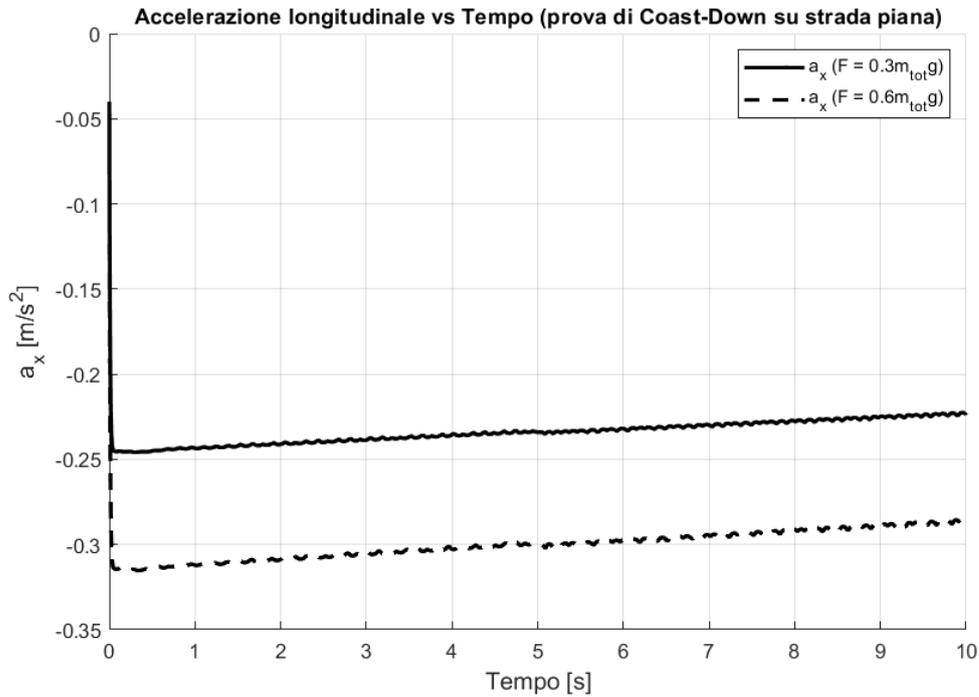


Figura 6.2 - Accelerazione longitudinale vs Tempo (prova di Coast-Down su strada piana con veicolo cingolato con tre road wheels)

Si nota, inoltre, che all'aumentare della forza di tensionamento, la decelerazione del veicolo aumenta. Questo comportamento può essere spiegato analizzando il grafico delle forze longitudinali in Figura 6.6.

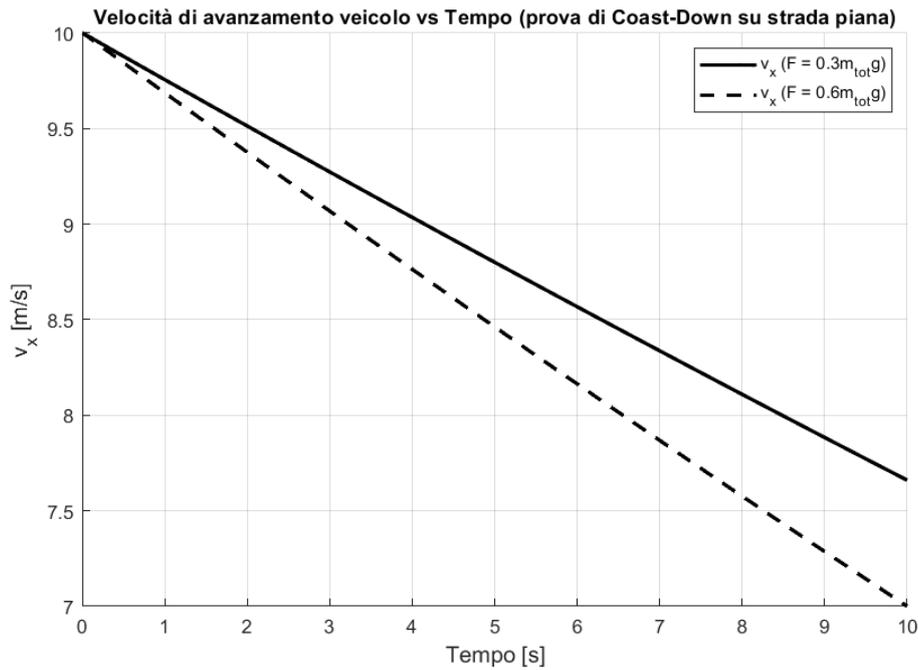


Figura 6.3 - Velocità di avanzamento veicolo vs Tempo (prova di Coast-Down su strada piana con veicolo cingolato con tre road wheels)

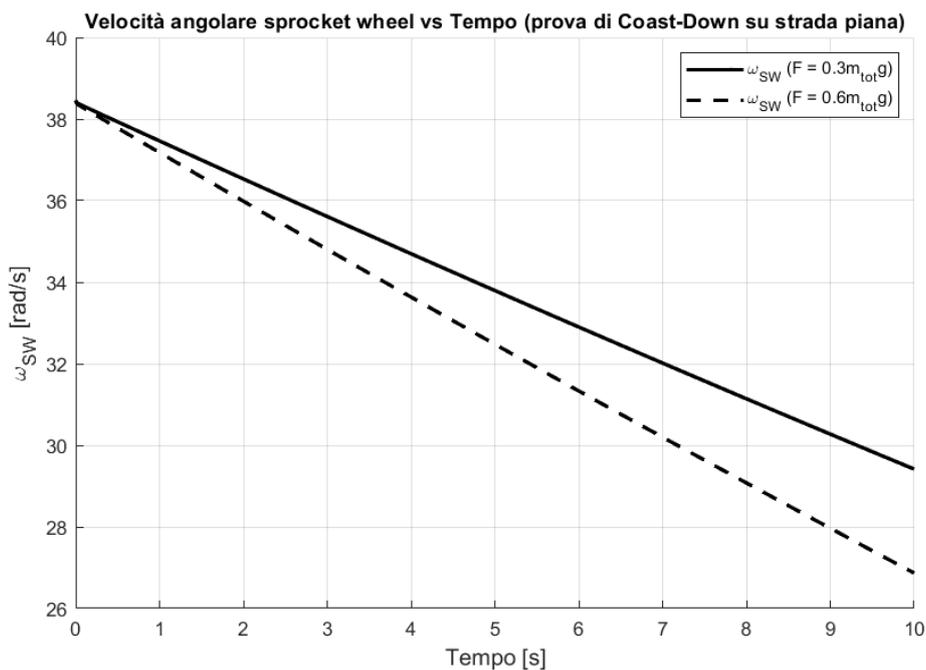


Figura 6.4 - Velocità angolare sprocket wheel vs Tempo (prova di Coast-Down su strada piana con veicolo cingolato con tre road wheels)

In Figura 6.3 e Figura 6.4 viene mostrato come la sia la velocità longitudinale che la velocità di rotazione della sprocket wheel diminuiscono più rapidamente nel caso con $F = 0.6m_{tot}g$, a causa della maggiore decelerazione.

In Figura 6.5 è illustrato l'andamento delle forze verticali a terra in corrispondenza delle road wheels.

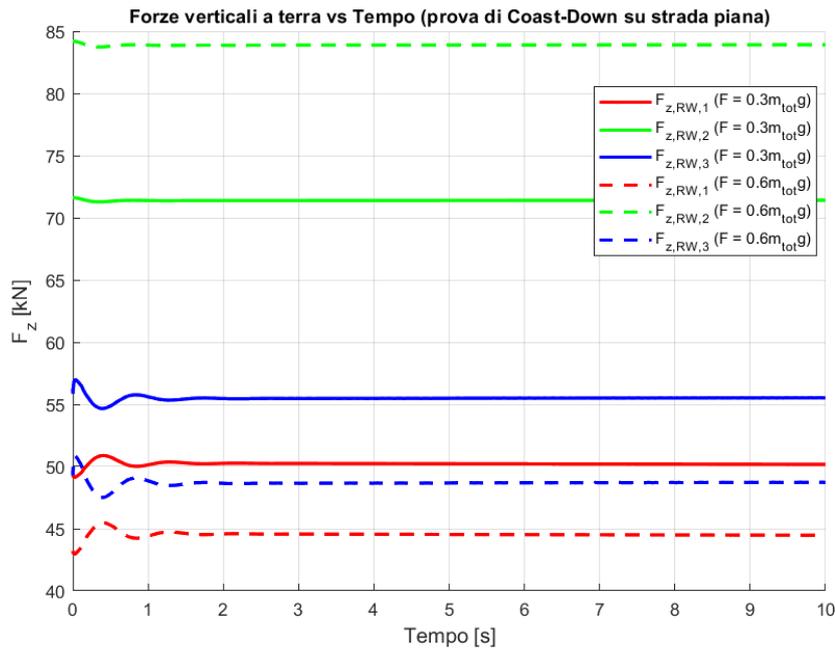


Figura 6.5 - Forze verticali a terra vs Tempo (prova di Coast-Down su strada piana con veicolo cingolato con tre road wheels)

Il risultato è coerente con l'analisi statica precedentemente svolta, mostrando che la ruota maggiormente caricata è quella centrale, mentre la ruota anteriore è la meno caricata, a causa della posizione del baricentro. All'aumentare della forza di tensionamento, si osserva una riduzione della forza a terra sugli assali anteriore e posteriore, mentre l'assale centrale subisce un incremento della forza. Questo avviene perché, aumentando la tensione, il cingolo viene teso maggiormente, il che provoca il sollevamento delle ruote anteriore e posteriore. Di conseguenza, il carico verticale esercitato sul terreno si riduce.

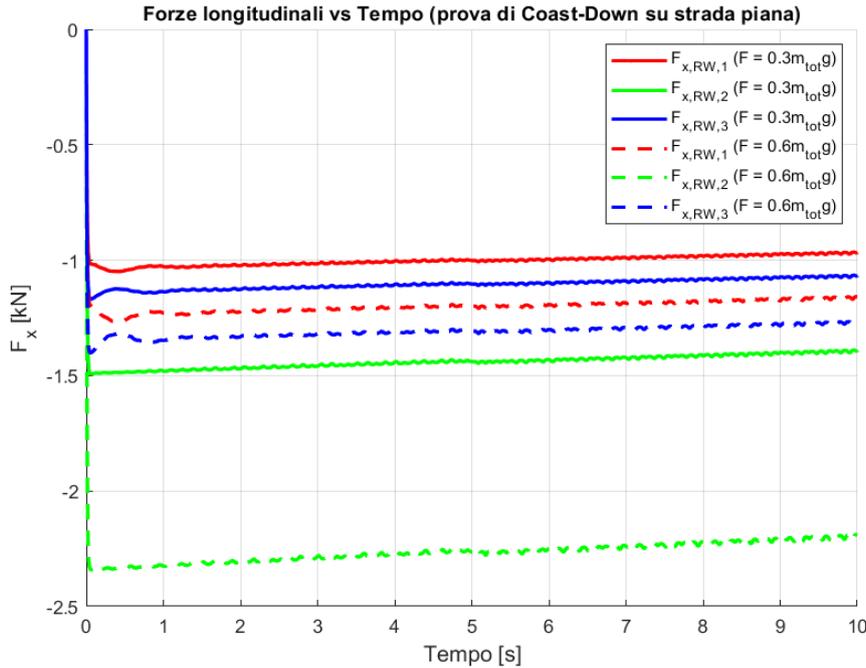


Figura 6.6 - Forze longitudinali vs Tempo (prova di Coast-Down su strada piana con veicolo cingolato con tre road wheels)

L'andamento delle forze longitudinali è fortemente influenzato dai carichi verticali, come descritto nel modello di contatto cingolo-terreno presentato nella sezione 3.7. In particolare, la ruota centrale, essendo la più caricata, è quella su cui si sviluppa la maggiore forza frenante. Allo stesso modo, il fatto che la forza frenante $F_{x,RW1}$ sia inferiore a $F_{x,RW3}$ è dovuto alla posizione del baricentro del veicolo.

Quando si passa dalle forze verticali a quelle longitudinali, l'effetto del tensionamento cambia. Con l'aumento della forza di tensionamento, si registra un incremento delle forze longitudinali opposte all'avanzamento su tutti gli assali. Questo fenomeno spiega perché il veicolo cingolato subisca una decelerazione maggiore all'aumentare del tensionamento. Tuttavia, per le ruote anteriore e posteriore, questo comportamento non segue direttamente l'andamento dei carichi verticali.

In Figura 6.7 è presente una vista laterale del cingolo per indicare la differenza di tensione tra i vari tratti del cingolo, mentre, in Figura 6.8 è illustrato l'andamento delle tensioni nel caso di una forza di tensionamento $F = 0.3m_{tot}g$.

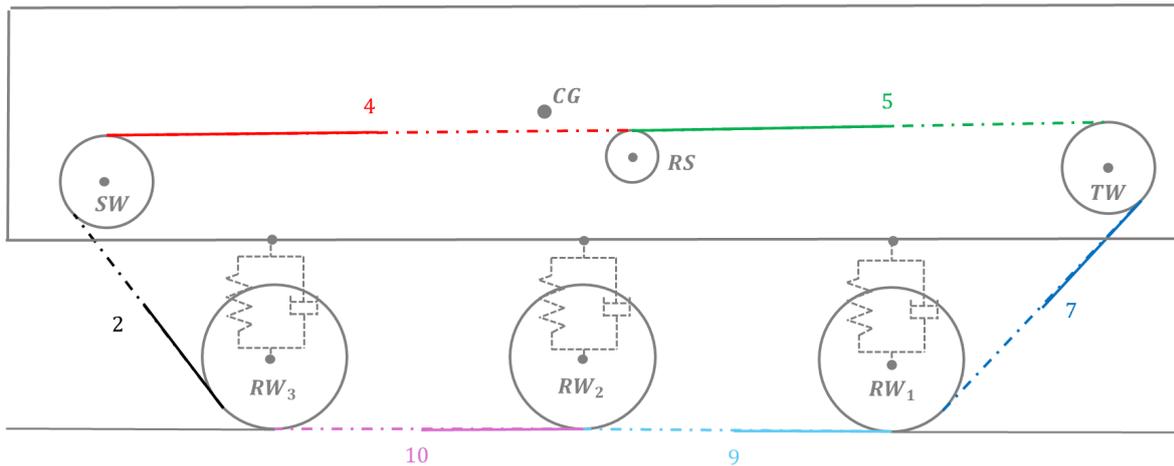


Figura 6.7 - Rappresentazione tensioni del cingolo (veicolo cingolato con tre road wheels)

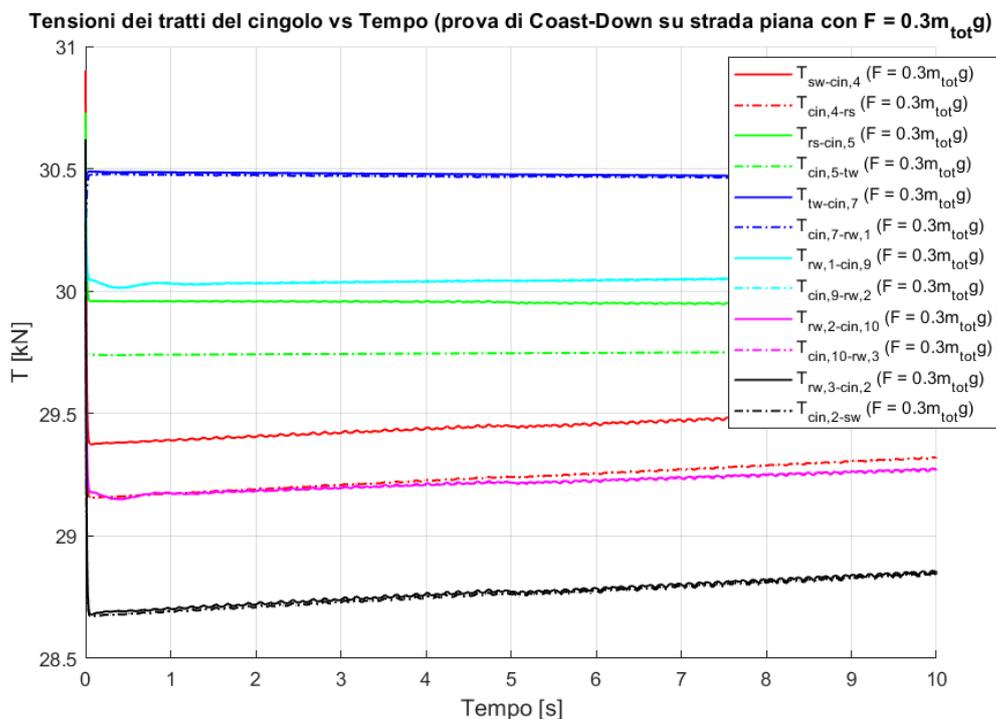


Figura 6.8 - Tensioni dei vari tratti del cingolo vs Tempo (prova di Coast-Down su strada piana con $F = 0.3m_{tot}g$ con veicolo cingolato con tre road wheels)

Ogni segmento del cingolo è descritto da due curve: una linea continua rappresentante la tensione a monte del segmento e una linea tratteggiata che indica la tensione a valle. La differenza tra queste due curve evidenzia l'effetto dell'inerzia del tratto di cingolo analizzato. Come si nota, tale differenza è significativa principalmente nei tratti superiori del cingolo, ossia nel segmento compreso tra la sprocket wheel e la ruota di supporto (cin 4) e in quello tra la ruota di supporto e la tensioner wheel (cin 5).

Facendo riferimento ai diagrammi di corpo libero dei tratti di cingolo descritti nella sezione 5.1, si comprende che i tratti superiori ruotano nello stesso verso dell'avanzamento del veicolo. Di conseguenza, l'effetto inerziale in questi tratti risulta amplificato, in quanto l'accelerazione del baricentro del veicolo si somma all'accelerazione relativa del cingolo. Entrambe le accelerazioni hanno lo stesso modulo, ipotizzando un puro rotolamento del cingolo rispetto al suolo. Nei tratti inferiori, invece, le due accelerazioni sono di direzione

opposta, portando a una compensazione del contributo inerziale. Di conseguenza, le due curve di tensione nei tratti inferiori risultano sovrapposte.

Per quanto riguarda i tratti inclinati del cingolo, il contributo inerziale appare ridotto, poiché solo la componente orizzontale dell'accelerazione relativa del cingolo si oppone a quella del baricentro, determinando un effetto complessivo inferiore rispetto ai tratti orizzontali superiori.

Infine, si osserva che le massime tensioni si riscontrano in prossimità della tensioner wheel. Allontanandosi da quest'ultima, la tensione diminuisce leggermente a causa degli attriti.

In Figura 6.9 vengono mostrate le tensioni dei tratti del cingolo con forza di tensionamento aumentata a $F = 0.6m_{tot}g$.

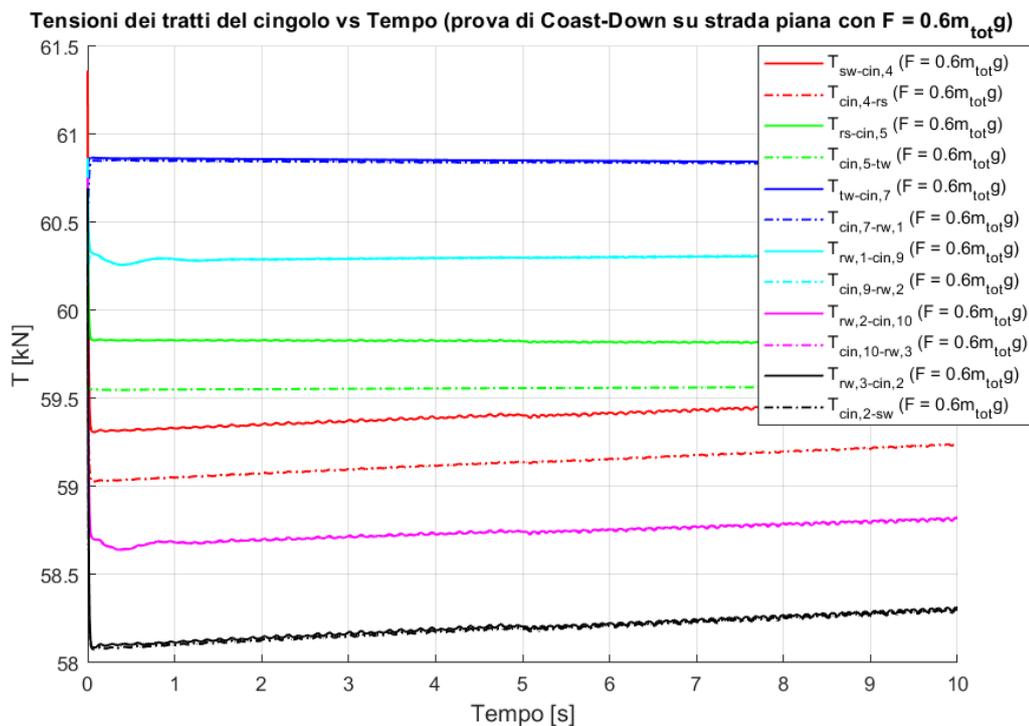


Figura 6.9 - Tensioni dei vari tratti del cingolo vs Tempo (prova di Coast-Down su strada piana con $F = 0.6m_{tot}g$ con veicolo cingolato con tre road wheels)

Con l'aumento della forza di tensionamento, il profilo delle tensioni lungo i vari tratti del cingolo si mantiene sostanzialmente invariato, con una differenza osservabile nei tratti orizzontali superiori del cingolo (linea verde e linea rossa). In particolare, la tensione nel tratto compreso tra la ruota di supporto e la tensioner wheel (cin 5) subisce un incremento meno marcato rispetto agli altri, mentre nel tratto tra la sprocket wheel e la ruota di supporto (cin 4) l'aumento risulta più evidente.

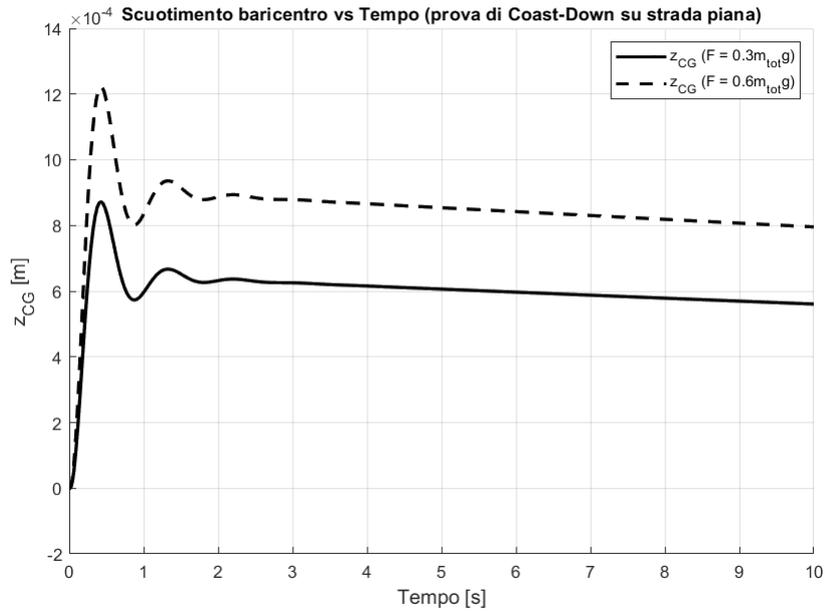


Figura 6.10 - Scuotimento baricentro vs Tempo (prova di Coast-Down su strada piana con veicolo cingolato con tre road wheels)

Come si evidenzia dalla Figura 6.10, la condizione iniziale derivante dall'analisi statica è eccessiva, infatti, ci vogliono circa due secondi per far sì che lo scuotimento si stabilizza. Comunque, si parla di un ordine di grandezza molto bassa quindi, la condizione iniziale scelta è un buon punto di partenza.

Questo lieve periodo di assestamento iniziale si nota anche nell'accelerazione verticale del baricentro, mostrata in Figura 6.11.

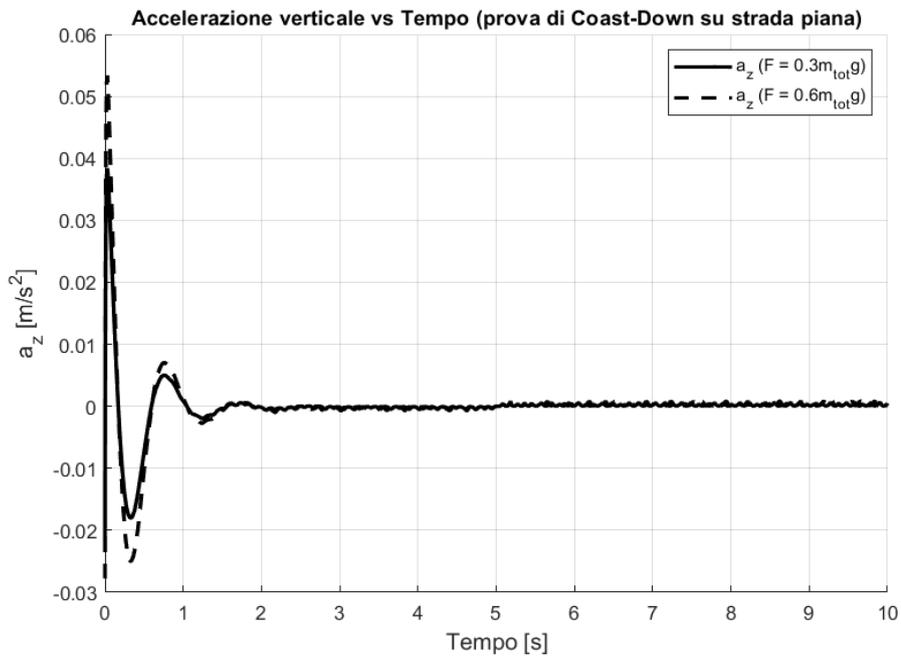


Figura 6.11 - Accelerazione verticale vs Tempo (prova di Coast-Down su strada piana con veicolo cingolato con tre road wheels)

È evidente come, dopo un breve periodo di assestamento, il modello raggiunga una condizione di stabilità.

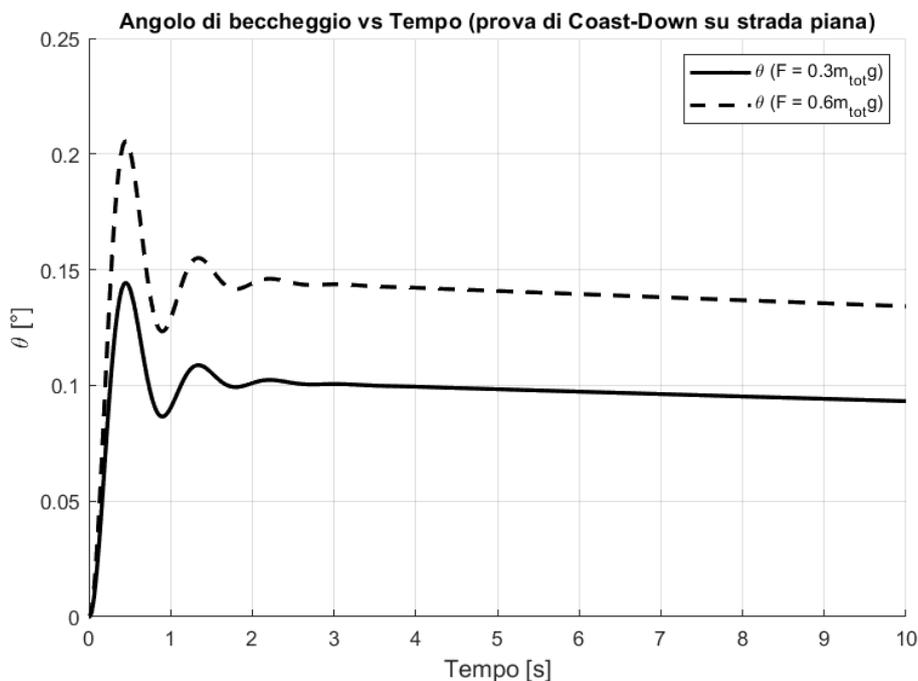


Figura 6.12 - Angolo di beccheggio vs Tempo (prova di Coast-Down su strada piana con veicolo cingolato con tre road wheels)

In Figura 6.12, è mostrato l'andamento dell'angolo di beccheggio durante la prova. L'analisi statica iniziale mostra che il veicolo presenta un'inclinazione verso la parte posteriore; infatti, all'avvio della simulazione si osserva subito un incremento dell'angolo di beccheggio. Questo indica che, per raggiungere la stabilità, il veicolo riduce progressivamente la sua inclinazione posteriore. Inoltre, un aumento della forza di tensionamento determina un incremento nell'ampiezza dell'oscillazione iniziale per quanto riguarda il beccheggio, lo scuotimento del baricentro e l'accelerazione verticale.

Lo scorrimento longitudinale, rappresentato in Figura 6.13, risulta negativo in quanto, per come è stato definito nell'equazione 3.36, assume valori negativi quando viene applicata una coppia frenante, e positivi in presenza di una coppia motrice. In questo caso, sebbene il veicolo cingolato sia in avanzamento, l'azione degli attriti lo rallenta progressivamente, simulando l'effetto di una coppia frenante.

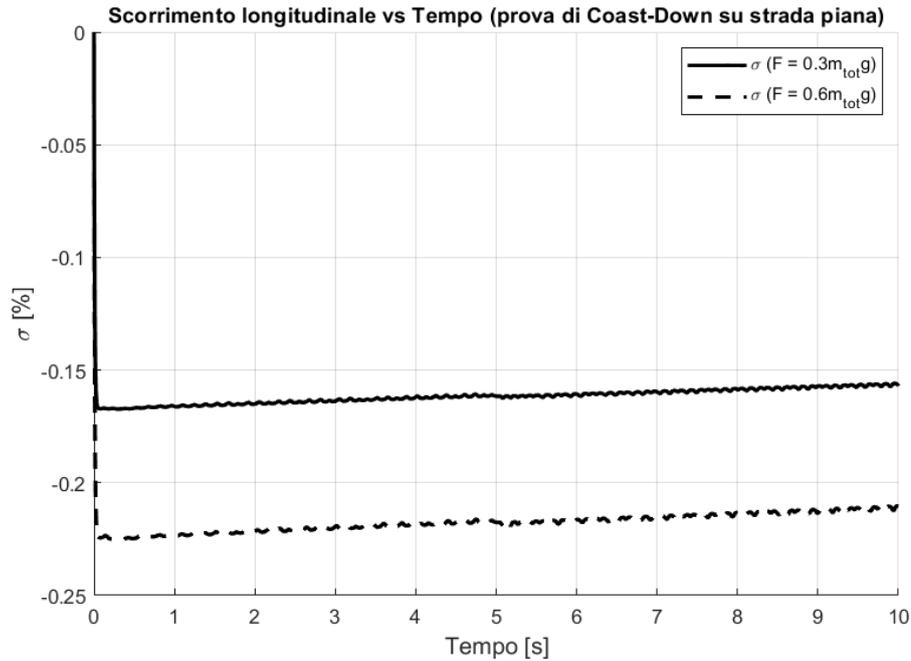


Figura 6.13 - Scorrimento longitudinale durante (prova di Coast-Down su strada piana con veicolo cingolato con tre road wheels)

6.1.3 Step di coppia motrice

In questa prova viene applicata al cingolo una coppia motrice descritta tramite la funzione tangente iperbolica, questa scelta è dovuta al bisogno di avere un'applicazione di coppia senza discontinuità per evitare problemi di stabilità di simulazione.

Essendo che la funzione tangente iperbolica varia tra -1 e +1, per avere una coppia motrice che parta da zero e raggiunga il valore target, è necessario shiftare di un'unità in direzione verticale la funzione tangente iperbolica e inserire un gain di 0.5 a valle del calcolo al fine di uniformare la scala.

Inoltre, tramite il gain presente prima del blocco *tanh* è possibile scegliere la rapidità con cui la coppia raggiunge il valore target.

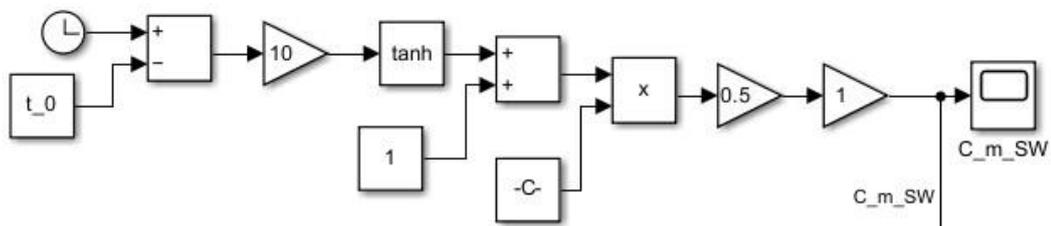


Figura 6.14 - Creazione segnale coppia motrice su Simulink

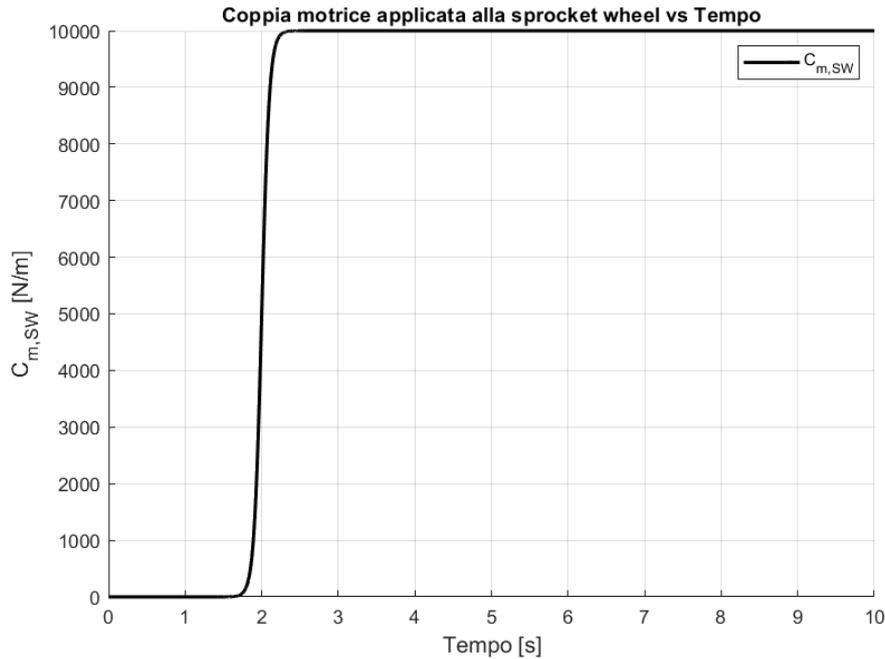


Figura 6.15 - Coppia motrice applicata alla sprocket wheel vs Tempo (veicolo cingolato con tre road wheels)

Nella Figura 6.15 è illustrato l'andamento della coppia motrice applicata alla sprocket wheel. Descrivendo la coppia tramite una funzione tangente iperbolica la maggior parte viene applicata a $t = 2$ s, anche se un lieve effetto della coppia comincia a manifestarsi a $t = 1.6 \div 1.7$ s.

Verranno testati due casi per studiare l'effetto che ha il tensionamento sulla dinamica del veicolo cingolato:

$$1) F = 0.3m_{tot}g = 54.8 \text{ kN}$$

$$2) F = 0.6m_{tot}g = 109.6 \text{ kN}$$

La prova inizia con il veicolo che si muove ad una velocità iniziale di 10 m/s e senza nessuna coppia applicata allo sprocket wheel; quindi, il veicolo decelera leggermente fino a $t = 1.6 \div 1.7$ s dove si inizierà a sentire l'effetto della coppia applicata. In queste condizioni, il veicolo subisce una leggera decelerazione fino a $t = 1.6 \div 1.7$ s, momento in cui l'effetto della coppia inizia a diventare percettibile. Successivamente, come evidenziato in Figura 6.16, l'applicazione della coppia comporta un incremento dell'accelerazione del veicolo fino a raggiungere un valore di $a_x \approx 1.7 \text{ m/s}^2$.

In seguito, l'accelerazione subisce una leggera diminuzione a causa degli attriti presenti, poiché la coppia motrice applicata rimane costante.

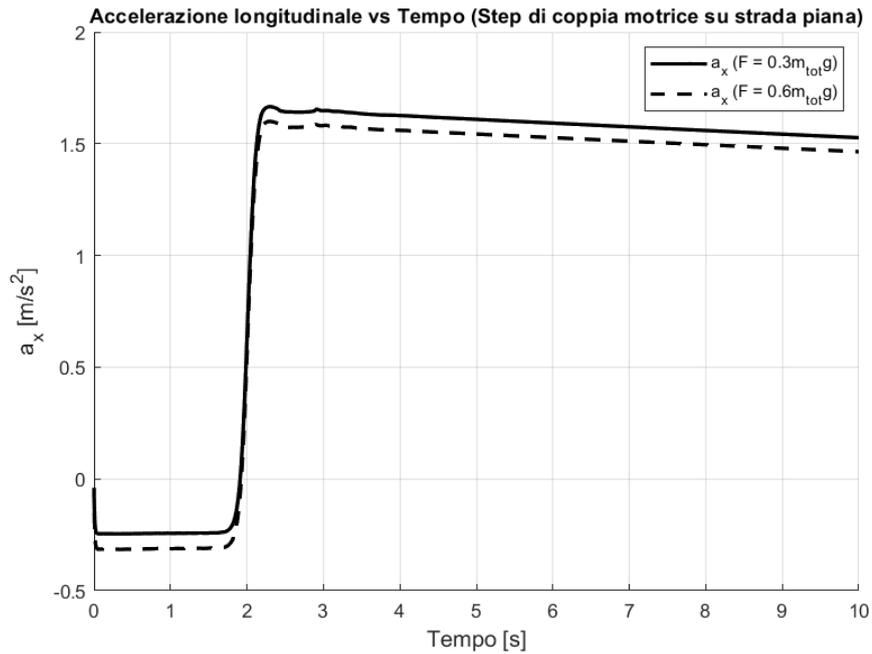


Figura 6.16 - Accelerazione longitudinale vs Tempo (Step di coppia motrice su strada piana con veicolo cingolato con tre road wheels)

Come già emerso dalla prova di Coast-Down, si osserva che un aumento del tensionamento comporta una decelerazione del veicolo.

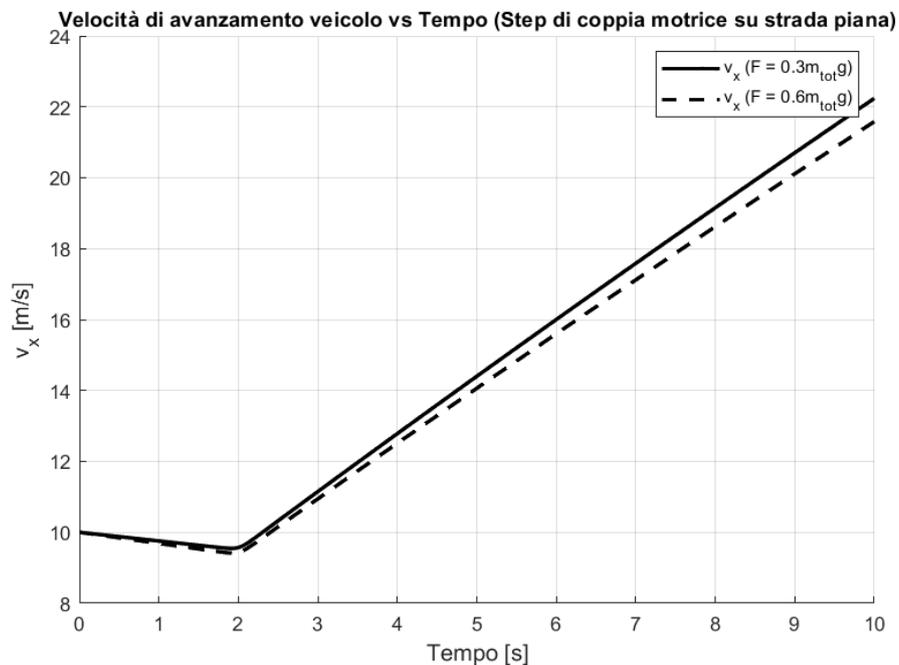


Figura 6.17 – Velocità di avanzamento veicolo vs Tempo (Step di coppia motrice su strada piana con veicolo cingolato con tre road wheels)

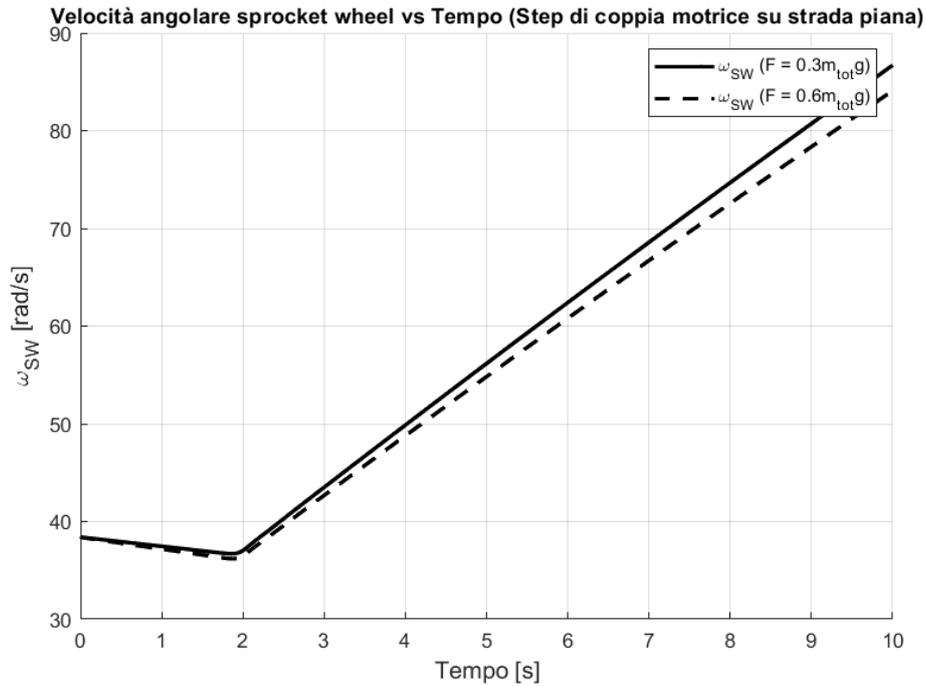


Figura 6.18 - Velocità angolare sprocket wheel vs Tempo (Step di coppia motrice su strada piana con veicolo cingolato con tre road wheels)

In accordo con il grafico dell'accelerazione longitudinale, la velocità longitudinale del veicolo e la velocità di rotazione della sprocket wheel diminuiscono fino a $t \approx 2 s$, per poi aumentare rapidamente. Nel caso di un maggior tensionamento, le velocità risultano inferiori.

In Figura 6.19 viene mostrata la variazione delle forze verticali al suolo durante la simulazione.

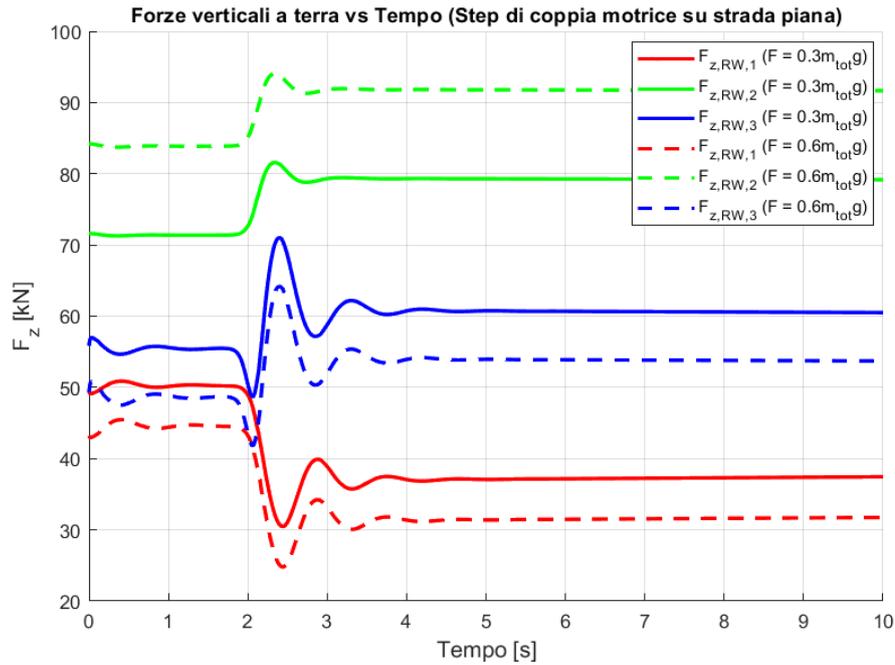


Figura 6.19 - Forze verticali a terra vs Tempo (Step di coppia motrice su strada piana con veicolo cingolato con tre road wheels)

Si può osservare che l'applicazione della coppia motrice provoca un trasferimento di carico verso l'assale posteriore, evidenziato dall'aumento di $F_{z,RW3}$ e dalla diminuzione di $F_{z,RW1}$. Per quanto riguarda il tensionamento, l'effetto risulta coerente con le simulazioni precedenti: incrementando il tensionamento, si registra un aumento della forza verticale sull'assale centrale e una diminuzione sugli assali esterni, indipendentemente dalla presenza di coppia motrice.

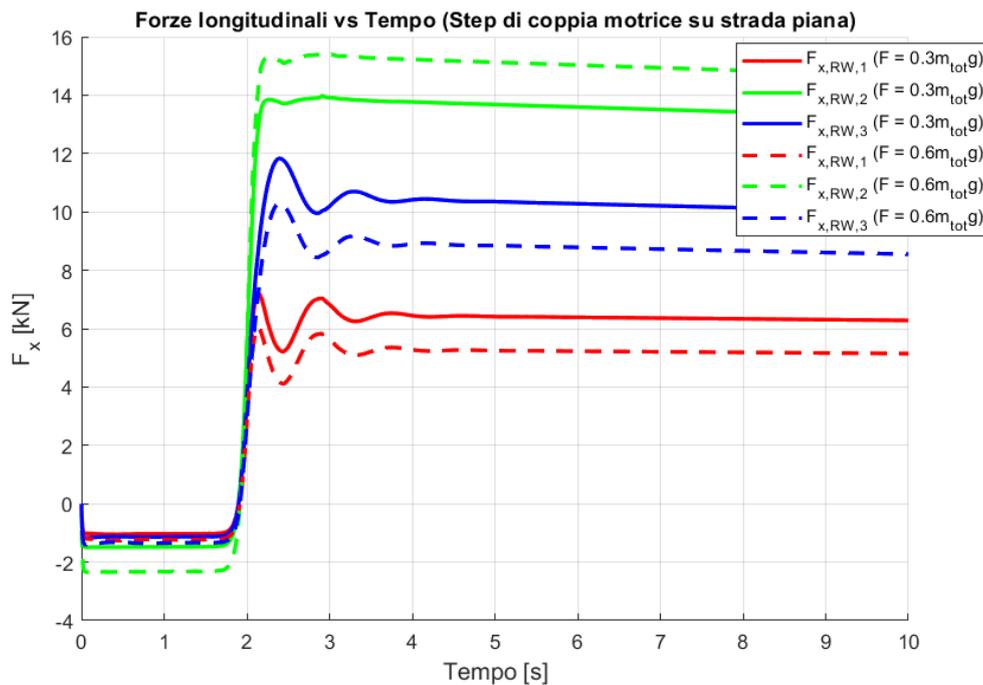


Figura 6.20 - Forze longitudinali vs Tempo (Step di coppia motrice su strada piana con veicolo cingolato con tre road wheels)

Con l'applicazione della coppia motrice, le forze longitudinali diventano forze di trazione, consentendo al veicolo di accelerare. Tuttavia, l'aspetto più rilevante, evidenziato in Figura 6.20, riguarda l'effetto del tensionamento. Il tensionamento, infatti, agendo sui carichi verticali, influisce sulle forze longitudinali in tutte le condizioni operative. In particolare, per l'assale centrale, un aumento del tensionamento comporta un incremento sia della forza frenante nella prima parte della simulazione, sia della forza di trazione durante l'applicazione della coppia, direttamente collegato alla variazione dei carichi verticali. Inoltre, poiché l'assale centrale è quello maggiormente caricato, è anche quello su cui si sviluppano le forze frenanti e di trazione più elevate.

Per quanto concerne gli assali anteriore e posteriore, un aumento del tensionamento determina un lieve aumento della forza frenante nella fase iniziale, ma l'effetto più significativo è la riduzione della forza di trazione nella fase successiva. Inoltre, con l'applicazione della coppia motrice, si osserva un notevole aumento della forza di trazione sull'assale posteriore rispetto all'assale anteriore, dovuto al trasferimento di carico verso il retro del veicolo.

In Figura 6.22, sono mostrate le tensioni dei tratti del cingolo per un tensionamento di $F = 0.3m_{tot}g$, si nota come l'effetto più rilevante da analizzare è quello della coppia motrice.

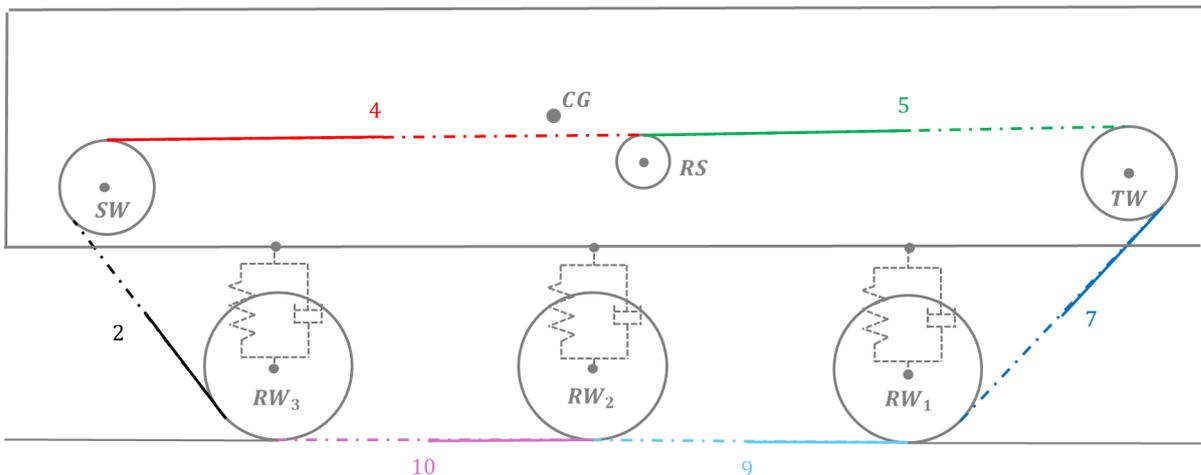


Figura 6.21 - Rappresentazione tensioni del cingolo (veicolo cingolato con tre road wheels)

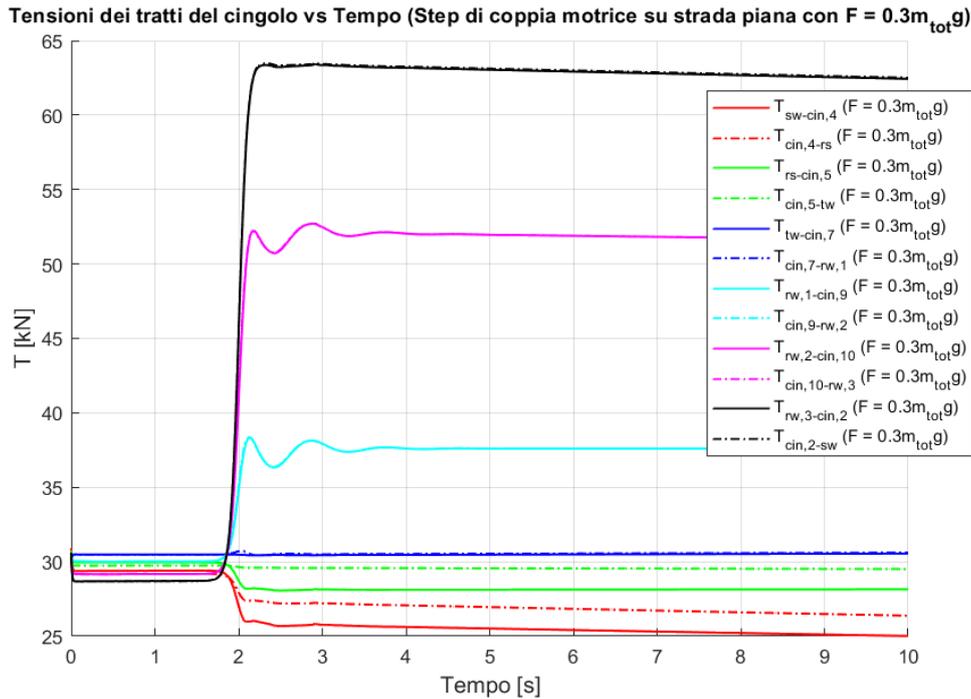


Figura 6.22 - Tensioni dei tratti del cingolo vs Tempo (Step di coppia motrice su strada piana con $F = 0.3m_{tot}g$ con veicolo cingolato con tre road wheels)

Quando viene applicata una coppia motrice alla sprocket wheel, i tratti del cingolo ad essa collegati presentano tensioni notevolmente diverse. Si distingue un tratto lasco, caratterizzato da una tensione inferiore, che si trova immediatamente successivo alla sprocket wheel nel verso di rotazione della coppia. In questo caso, con coppia oraria, il tratto lasco (cin 4) è compreso tra la sprocket wheel e la ruota di supporto. Al contrario, il tratto teso (cin 2), che presenta una tensione maggiore, si trova in direzione opposta, tra la sprocket wheel e la road wheel 3.

Procedendo dal tratto teso e analizzando il cingolo in senso antiorario, si osserva una significativa diminuzione della tensione ogni volta che si oltrepassa una road wheel, dovuta all'azione delle forze di trazione.

Con l'aumento del tensionamento, si osserva in Figura 6.23 che, anche raddoppiandolo, l'effetto della coppia motrice sulla tensione non subisce variazioni significative.

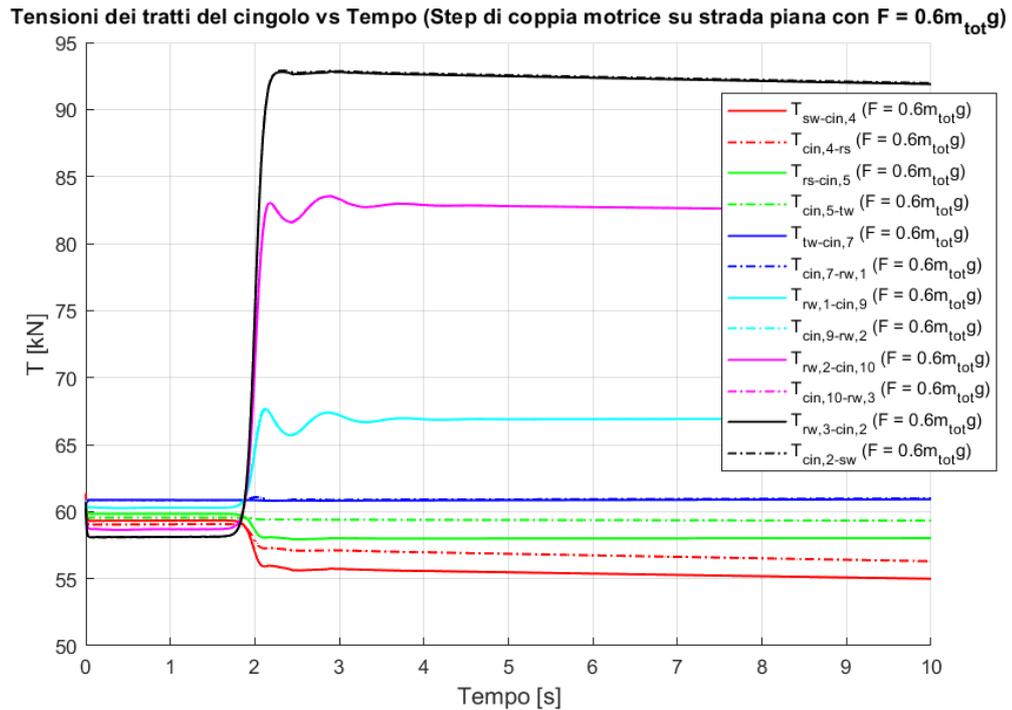


Figura 6.23 - Tensioni dei tratti del cingolo vs Tempo (Step di coppia motrice su strada piana con $F = 0.6m_{tot}g$ con veicolo cingolato con tre road wheels)

In Figura 6.24 e Figura 6.25 si osserva che l'applicazione della coppia motrice, oltre a causare un abbassamento della parte posteriore dovuto al trasferimento di carico, evidenziato dall'aumento del valore assoluto dell'angolo di beccheggio, comporta anche un abbassamento del baricentro.

Aumentando il tensionamento si va a ridurre leggermente l'inclinazione del veicolo verso il posteriore durante l'intera prova.

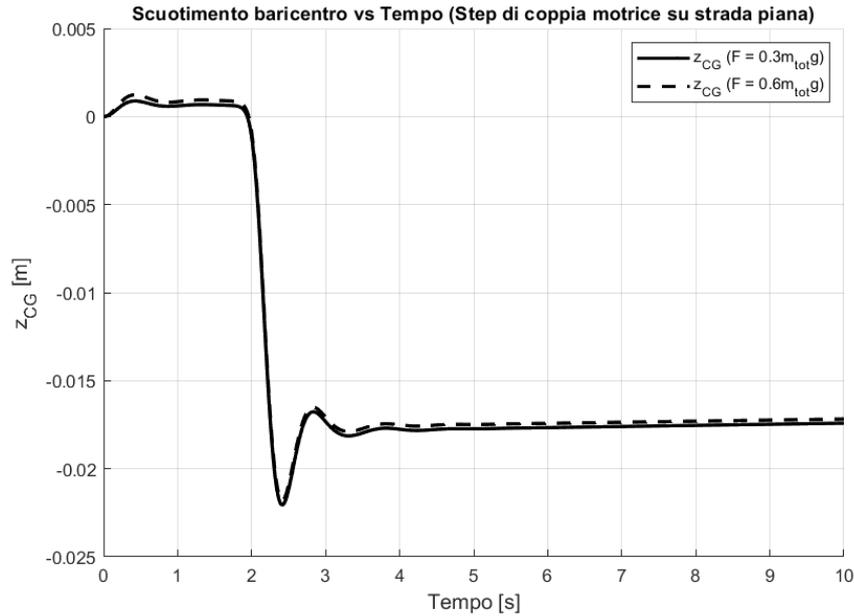


Figura 6.24 - Scuotimento baricentro vs Tempo (Step di coppia motrice su strada piana con veicolo cingolato con tre road wheels)

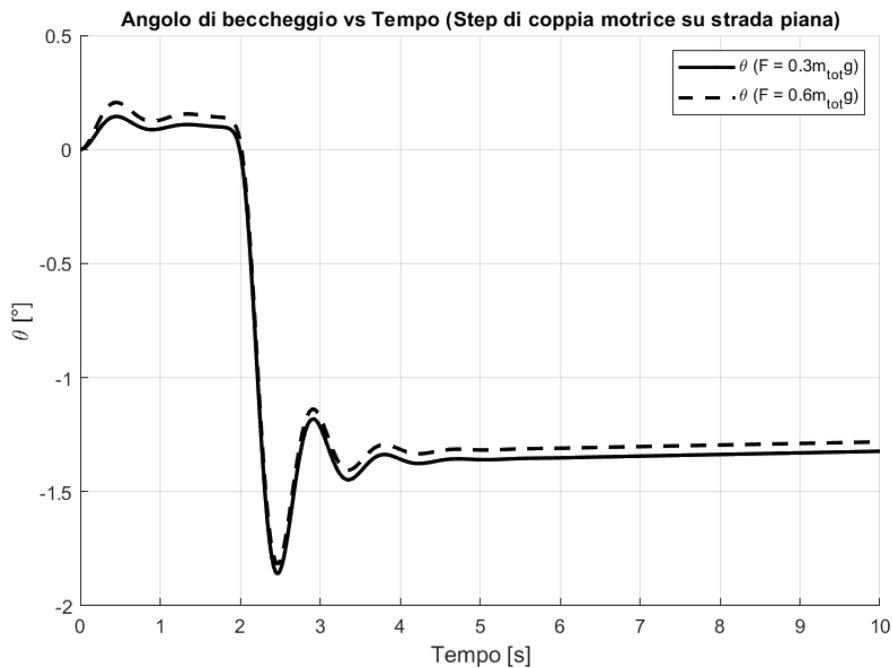


Figura 6.25 - Angolo di beccheggio vs Tempo (Step di coppia motrice su strada piana con veicolo cingolato con tre road wheels)

L'abbassamento del baricentro dovuto all'applicazione della coppia motrice è evidenziato anche dal grafico dell'accelerazione verticale riportato in Figura 6.26, dove si osserva una significativa variazione al momento dell'applicazione della coppia, seguita da una fase stabile.

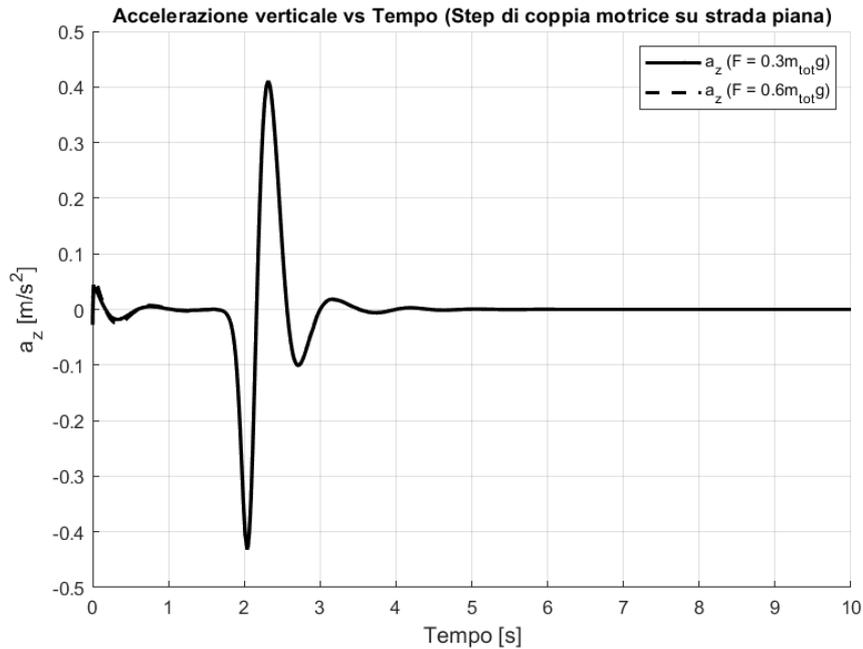


Figura 6.26 - Accelerazione verticale vs Tempo (Step di coppia motrice su strada piana con veicolo cingolato con tre road wheels)

In Figura 6.27 è illustrato come l'applicazione di una coppia motrice alla sprocket wheel comporti il passaggio da uno scorrimento negativo (fase di frenata) a uno scorrimento positivo (fase di trazione). Aumentando il tensionamento, il veicolo subisce un effetto frenante, poiché il valore assoluto dello scorrimento risulta maggiore in fase di frenata e minore in fase di trazione.

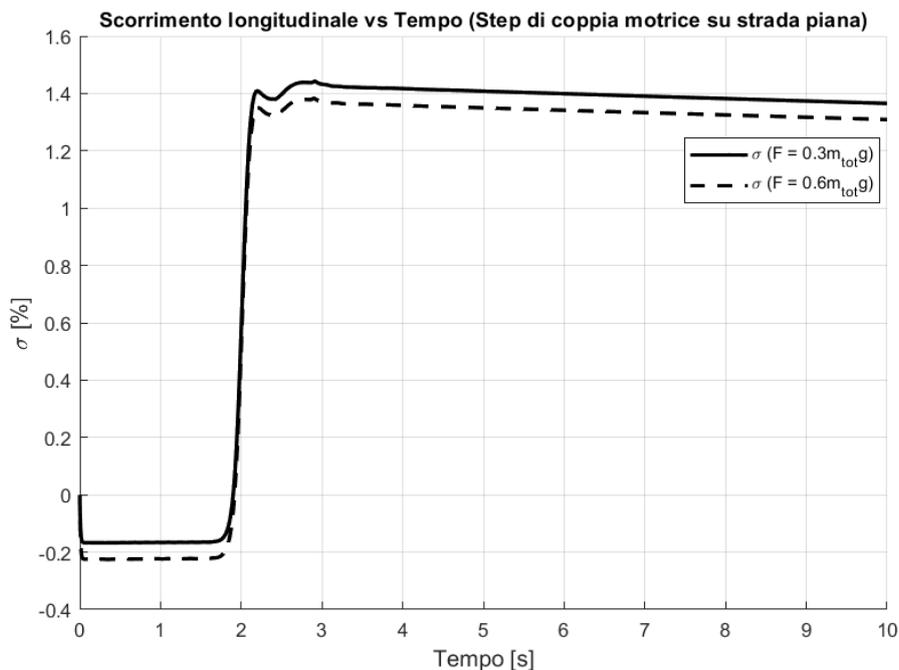


Figura 6.27 - Scorrimento longitudinale vs Tempo (Step di coppia motrice su strada piana con veicolo cingolato con tre road wheels)

6.2 Profilo stradale sinusoidale

Dopo aver esaminato il comportamento del veicolo su una strada pianeggiante, si procede a valutare la risposta del modello in presenza di un profilo stradale con andamento sinusoidale.

6.2.1 Descrizione profilo stradale

Nelle varie simulazioni verrà scelto un profilo stradale $h(x)$ sinusoidale con la seguente conformazione:

- Tratto iniziale piano di lunghezza $l = x_{c,TW} + 0.5 = 5.5 \text{ m}$ a quota $h = 0$ per far sì che venga rispettata l'ipotesi di strada piana fatta per l'analisi statica;
- Tratto sinusoidale a lunghezza d'onda costante $\lambda = 2l = 11\text{m}$ e con ampiezza $h_0 = 0.02 \text{ m}$:

$$h(x) = h_0 \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right) \quad (6.1)$$

Per evitare problematiche di simulazione durante la transizione tra il tratto pianeggiante e quello sinusoidale, la funzione seno è stata anticipata di $\frac{\pi}{2}$. Questo accorgimento consente di ottenere un profilo sinusoidale che non inizi dallo zero della funzione, ma dal suo massimo, garantendo così un profilo stradale continuo e derivabile. Tale continuità è cruciale, poiché è necessario calcolare le derivate temporali per determinare velocità e accelerazioni delle road wheels. Inoltre, per assicurare che la funzione inizi da un'altezza $h = 0$, è stata traslata verticalmente di $-h_0$:

$$h(x) = h_0 \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda} - \frac{\pi}{2}\right) - h_0 \quad (6.2)$$

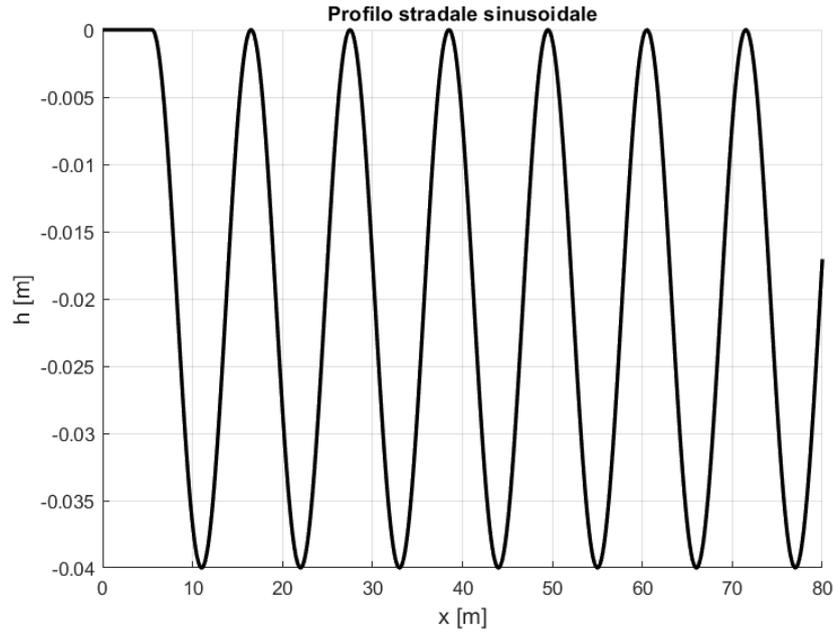


Figura 6.28 - Profilo stradale sinusoidale

6.2.2 Prova di Coast-Down

Per valutare il comportamento del veicolo su un profilo stradale sinusoidale, sono state replicate le stesse prove eseguite su strada piana. La prima prova considerata è quella di Coast-Down, condotta nelle medesime condizioni: la velocità iniziale del test è fissata a 10 m/s e la simulazione ha una durata di dieci secondi.

Verranno testati due scenari differenti:

$$1) F = 0.3m_{tot}g = 54.8 \text{ kN}$$

$$2) F = 0.6m_{tot}g = 109.6 \text{ kN}$$

In Figura 6.29, Figura 6.30 e Figura 6.31 vengono mostrate rispettivamente le caratteristiche di accelerazione longitudinale, velocità di avanzamento del veicolo e velocità angolare della sprocket wheel durante la prova.

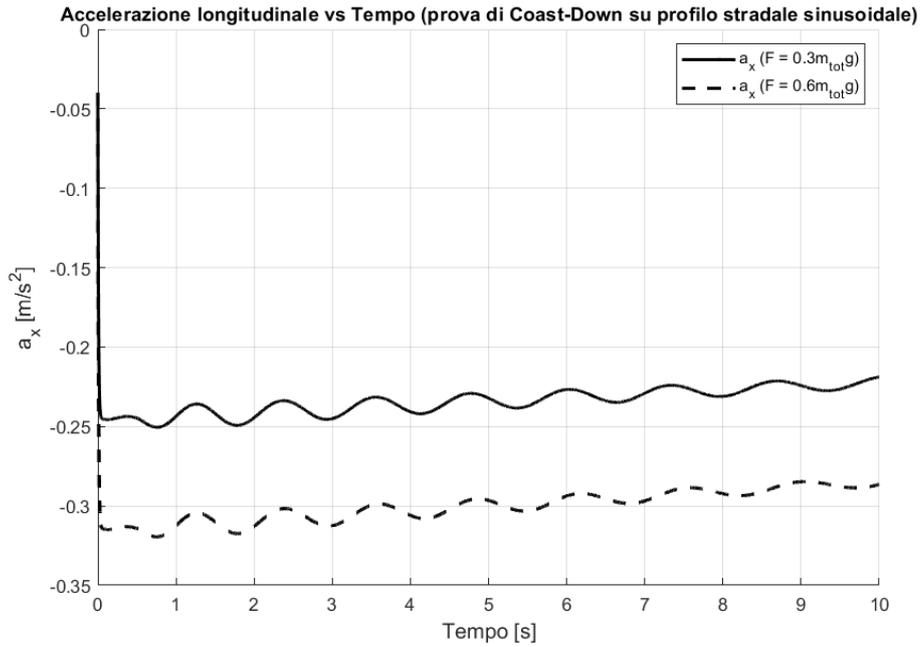


Figura 6.29 - Accelerazione longitudinale vs Tempo (prova di Coast-Down su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con tre road wheels)

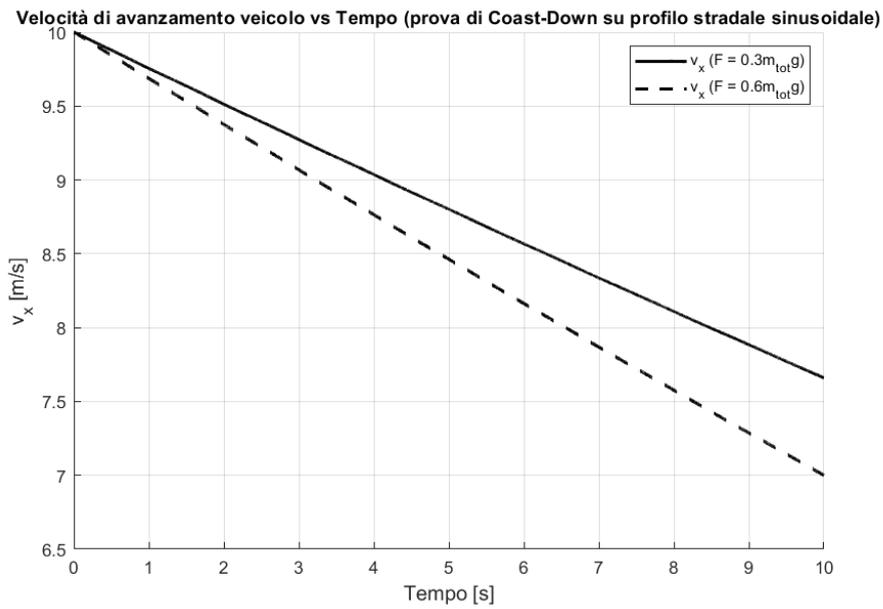


Figura 6.30 - Velocità longitudinale veicolo vs Tempo (prova di Coast-Down su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con tre road wheels)

Velocità angolare sprocket wheel vs Tempo (prova di Coast-Down su profilo stradale sinusoidale)

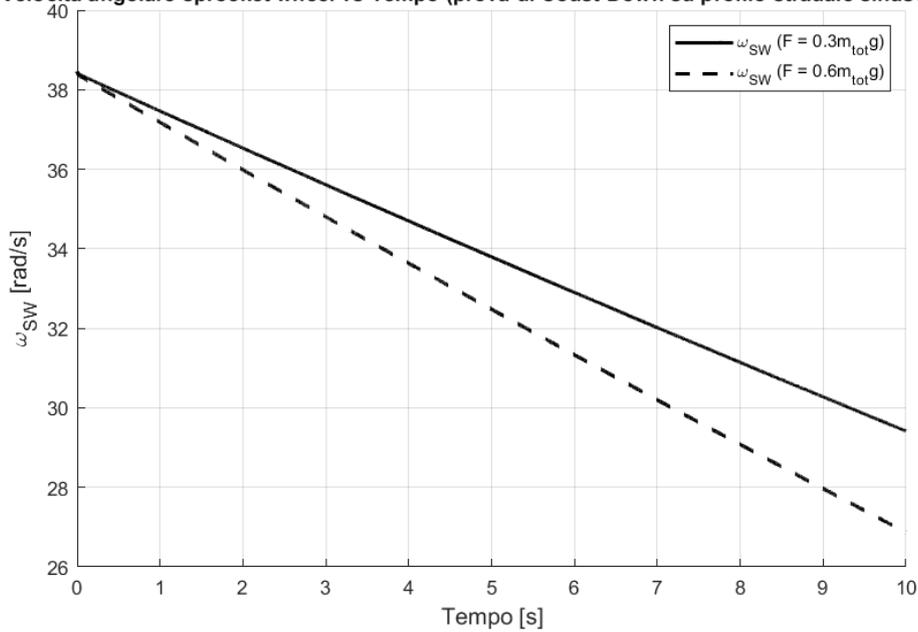


Figura 6.31 - Velocità angolare sprocket wheel vs Tempo (prova di Coast-Down su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con tre road wheels)

Dall'analisi delle figure emerge che il modello mantiene la sua stabilità anche in presenza di un profilo stradale con andamento sinusoidale. L'andamento dell'accelerazione rispecchia il profilo sinusoidale del terreno: i tratti discendenti del percorso generano una lieve accelerazione del veicolo, mentre i tratti ascendenti causano una leggera decelerazione. I risultati ottenuti sono coerenti con quelli osservati su strada piana: all'aumentare del tensionamento, si osserva un incremento della decelerazione, che si traduce in una riduzione più rapida della velocità del veicolo e della velocità di rotazione della sprocket wheel.

Per quanto riguarda le forze verticali e longitudinali esercitate sul terreno, illustrate rispettivamente in Figura 6.32 e Figura 6.33, esse seguono l'andamento oscillatorio del profilo stradale sinusoidale

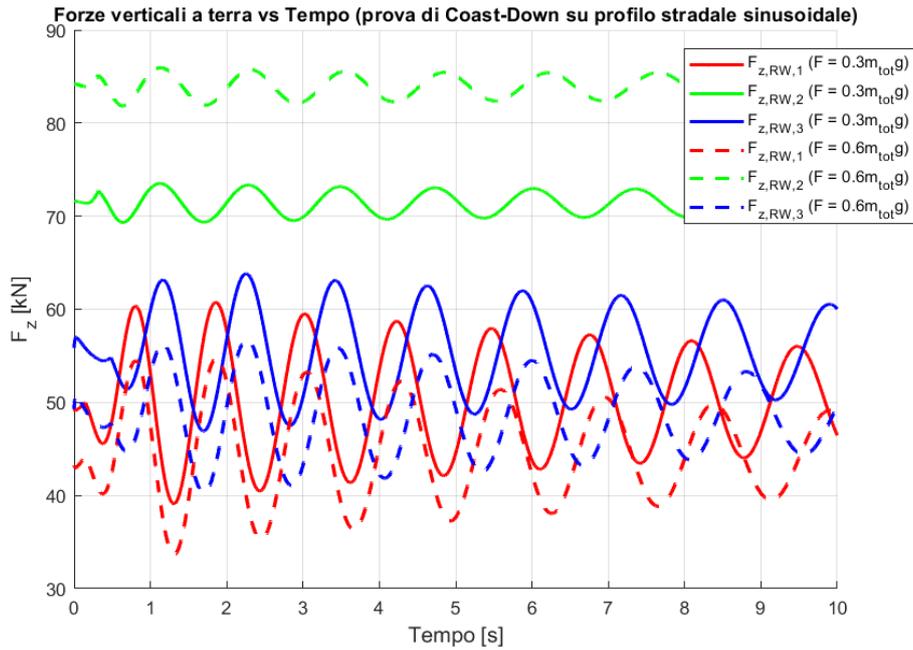


Figura 6.32 - Forze verticali a terra vs Tempo (prova di Coast-Down su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con tre road wheels)

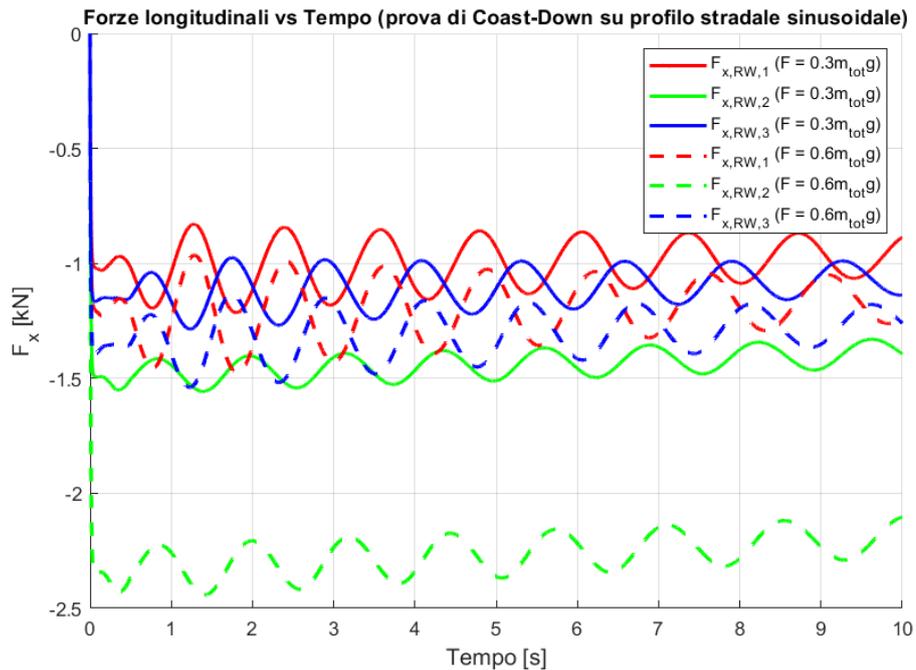


Figura 6.33 - Forze longitudinali vs Tempo (prova di Coast-Down su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con tre road wheels)

Analizzando la Figura 6.32, si osserva che le oscillazioni più marcate si verificano sugli assali anteriore e posteriore.

Durante i tratti ascendenti del terreno, si verifica un trasferimento di carico verso l'assale posteriore a causa della forza di gravità, mentre nei tratti discendenti il carico si sposta verso l'assale anteriore. L'assale centrale, essendo posizionato più vicino al baricentro del

veicolo e quindi meno soggetto al trasferimento di carico, presenta oscillazioni di minore ampiezza.

Inoltre, con il progredire della simulazione, l'ampiezza delle oscillazioni diminuisce grazie all'effetto dello smorzatore.

L'andamento delle forze longitudinali, come mostrato in Figura 6.33, è direttamente correlato alle forze verticali, come già osservato nel caso della strada pianeggiante.

L'effetto del tensionamento, come si può notare nei due grafici, rimane il medesimo visto nell'analisi su strada piana.

In Figura 6.34 è presente una vista laterale del cingolo per indicare la differenza di tensione tra i vari tratti del cingolo, mentre, la Figura 6.35 mostra l'andamento delle tensioni nel tempo per una forza di tensionamento di $F = 0.3m_{tot}g$.

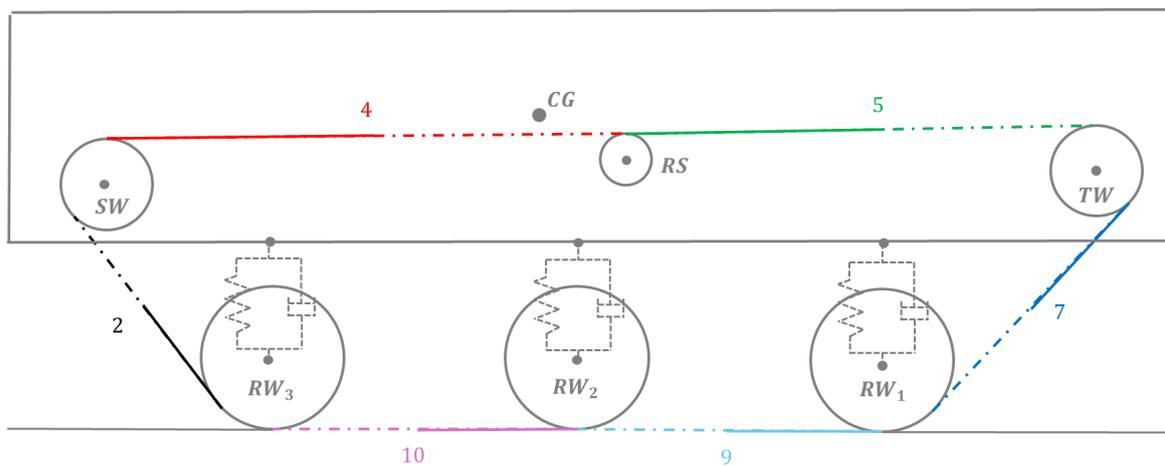


Figura 6.34 - Rappresentazione tensioni del cingolo (veicolo cingolato con tre road wheels)

Tensioni dei tratti del cingolo vs Tempo (prova di Coast-Down su profilo stradale sinusoidale con $F = 0.3m_{tot}g$)

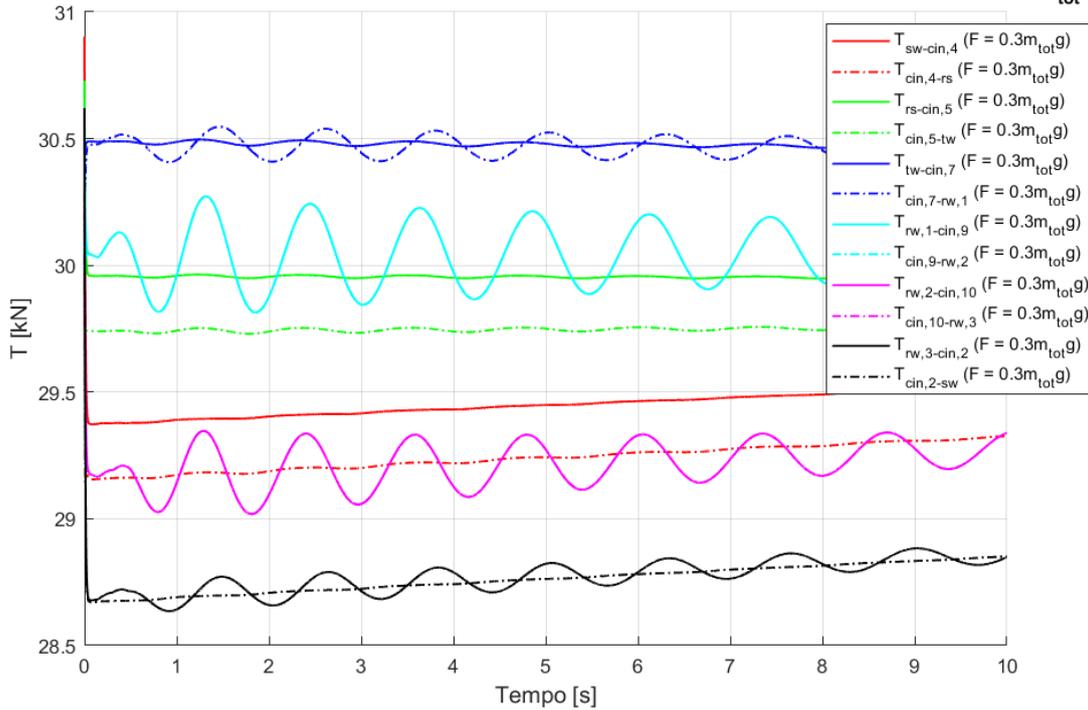


Figura 6.35 - Tensioni dei tratti del cingolo vs Tempo (prova di Coast-Down su profilo stradale sinusoidale con $F = 0.3m_{tot}g$ con veicolo cingolato con tre road wheels)

Nei segmenti di cingolo a contatto con almeno una road wheel le tensioni mostrano un'oscillazione più marcata, la quale progressivamente viene ridotta grazie all'azione dello smorzatore. Questo comportamento è causato dalle oscillazioni delle forze longitudinali, che si riflettono sulle tensioni di tali tratti. Al contrario, nei restanti tratti del cingolo, la tensione non presenta grosse oscillazioni.

Osservando la Figura 6.36, come nel caso di un percorso su strada piana, l'aumento della forza di tensionamento determina un incremento uniforme della tensione lungo l'intero cingolo ad eccezione dei tratti di cingolo superiori.

Tensioni dei tratti del cingolo vs Tempo (prova di Coast-Down su profilo stradale sinusoidale con $F = 0.6m_{tot}g$)

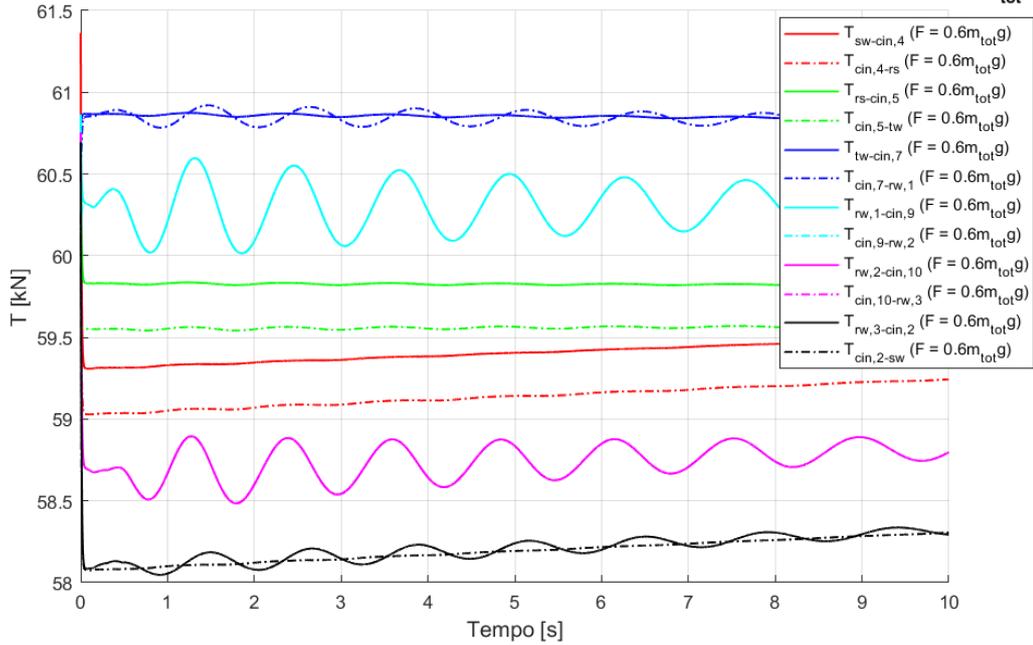


Figura 6.36 - Tensioni dei tratti del cingolo vs Tempo (prova di Coast-Down su profilo stradale sinusoidale con $F = 0.6m_{tot}g$ con veicolo cingolato con tre road wheels)

Durante la percorrenza di un profilo stradale sinusoidale, il movimento del baricentro del sistema evidenzia un'oscillazione corrispondente, come si può osservare in Figura 6.37. L'aumento della forza di tensionamento comporta un leggero decremento dell'ampiezza dell'oscillazione dello scuotimento del baricentro.

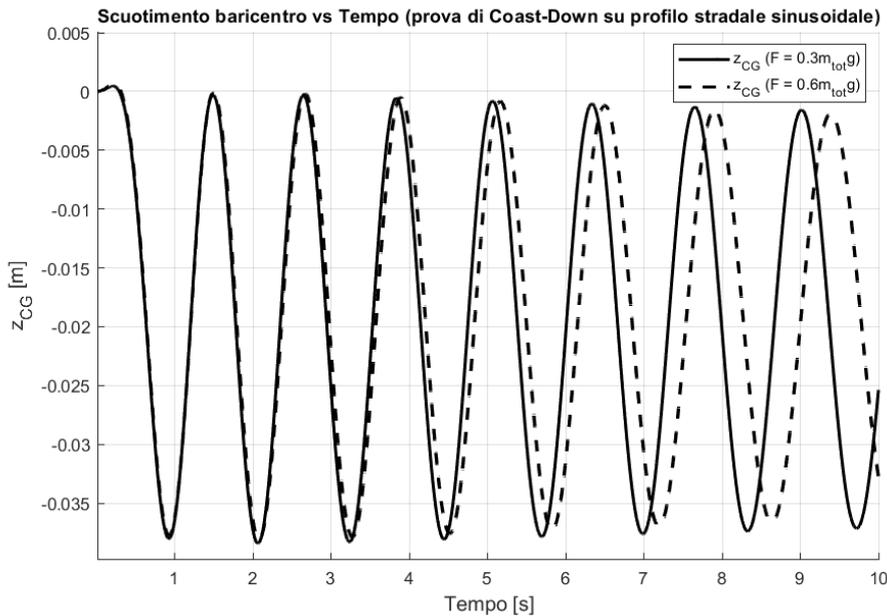


Figura 6.37 - Scuotimento baricentro vs Tempo (prova di Coast-Down su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con tre road wheels)

Dall'osservazione dell'accelerazione verticale in Figura 6.38, si rileva una progressiva diminuzione dell'accelerazione verticale nel corso della simulazione, effetto attribuibile

all'azione dello smorzatore. Un incremento della forza di tensionamento contribuisce ulteriormente a ridurre le oscillazioni, migliorandone l'efficacia.

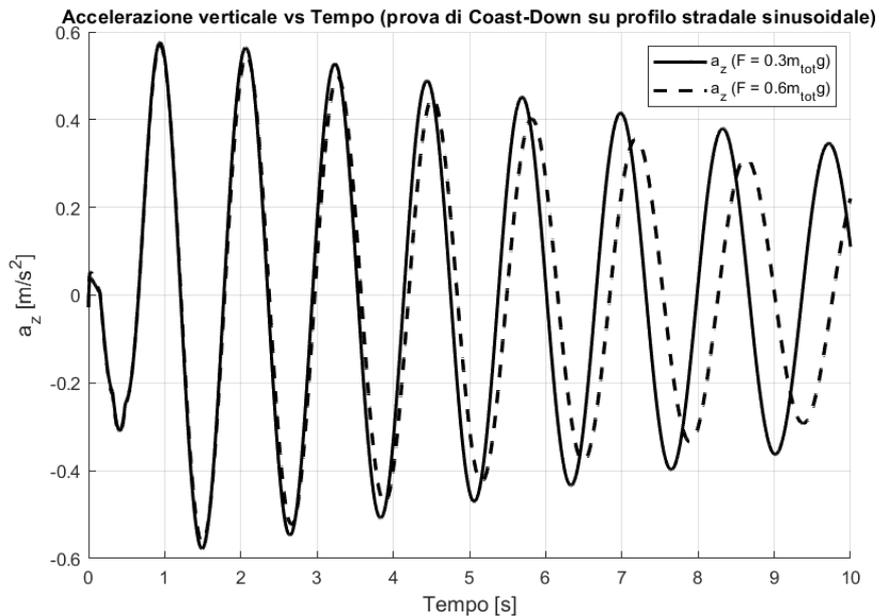


Figura 6.38 - Accelerazione verticale vs Tempo (prova di Coast-Down su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con tre road wheels)

Un profilo stradale sinusoidale induce un'oscillazione della cassa del veicolo, la cui ampiezza tende a diminuire progressivamente con l'avanzare del veicolo, grazie al contributo degli smorzatori. Nel caso in cui il tensionamento venga raddoppiato, l'ampiezza iniziale dell'oscillazione risulta simile a quella con tensionamento inferiore, ma durante la simulazione si osserva una riduzione più marcata, come illustrato in Figura 6.39.

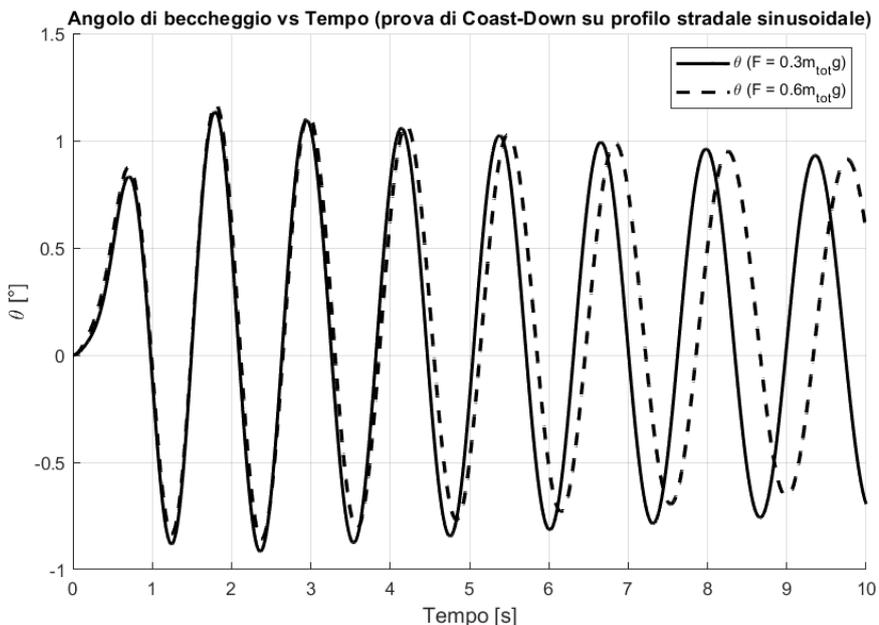


Figura 6.39 - Angolo di beccheggio vs Tempo (prova di Coast-Down su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con tre road wheels)

L'andamento dello scorrimento longitudinale riflette fedelmente il grafico dell'accelerazione longitudinale, come mostrato in Figura 6.40. Lo scorrimento risulta negativo, in quanto il veicolo è in fase di decelerazione a causa degli attriti.

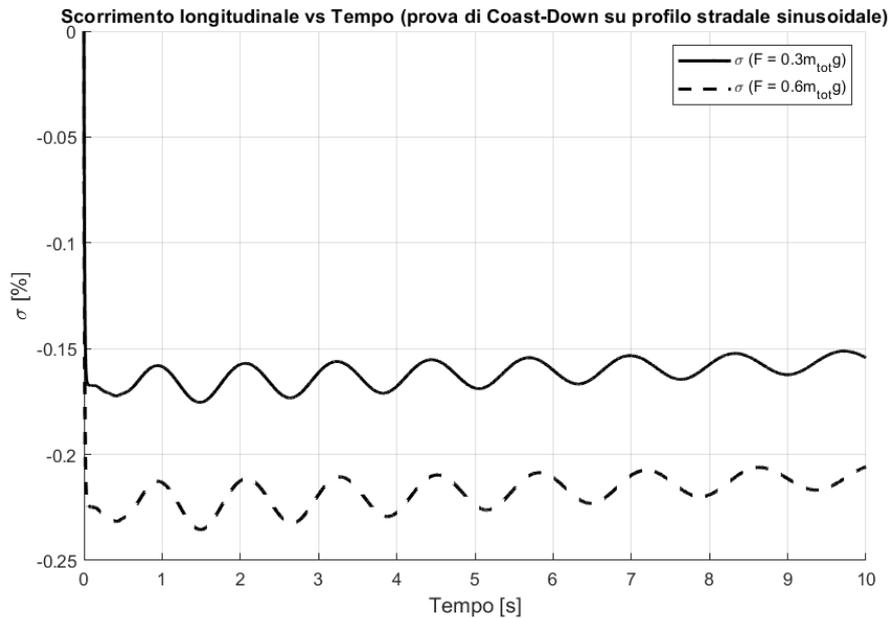


Figura 6.40 - Scorrimento longitudinale vs Tempo (prova di Coast-Down su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con tre road wheels)

6.2.3 Step di coppia motrice

Nella Figura 6.41 è illustrata la coppia motrice applicata alla sprocket wheel. Il suo profilo è identico a quello del caso su strada piana, consentendo così di visualizzare le differenze mantenendo lo stesso input di coppia come punto di partenza.

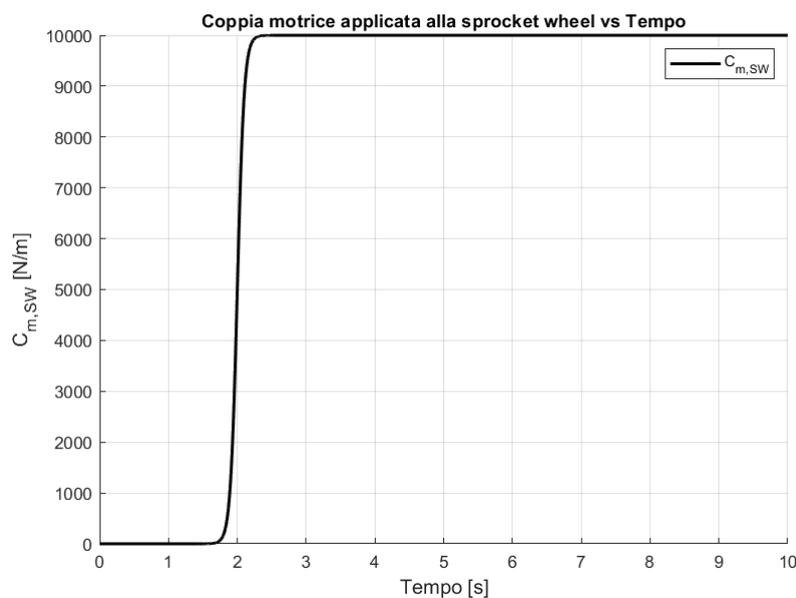


Figura 6.41 - Coppia motrice applicata alla sprocket wheel vs Tempo (veicolo cingolato con tre road wheels)

Verranno testati due casi:

- 1) $F = 0.3m_{tot}g = 54.8 \text{ kN}$
- 2) $F = 0.6m_{tot}g = 109.6 \text{ kN}$

In Figura 6.42, Figura 6.43 e Figura 6.44 si osserva che il valore medio dell'accelerazione rimane invariato rispetto al caso su strada pianeggiante, il che implica che la velocità di traslazione longitudinale del veicolo e la velocità di rotazione della sprocket wheel non subiscano variazioni significative nei due scenari durante l'intera simulazione. Nel tratto in cui la coppia motrice non è applicata, il veicolo decelera a causa degli attriti, per poi riprendere velocità non appena l'effetto della coppia si manifesta. Anche l'effetto del tensionamento risulta essere analogo a quanto visto su un profilo stradale piano.

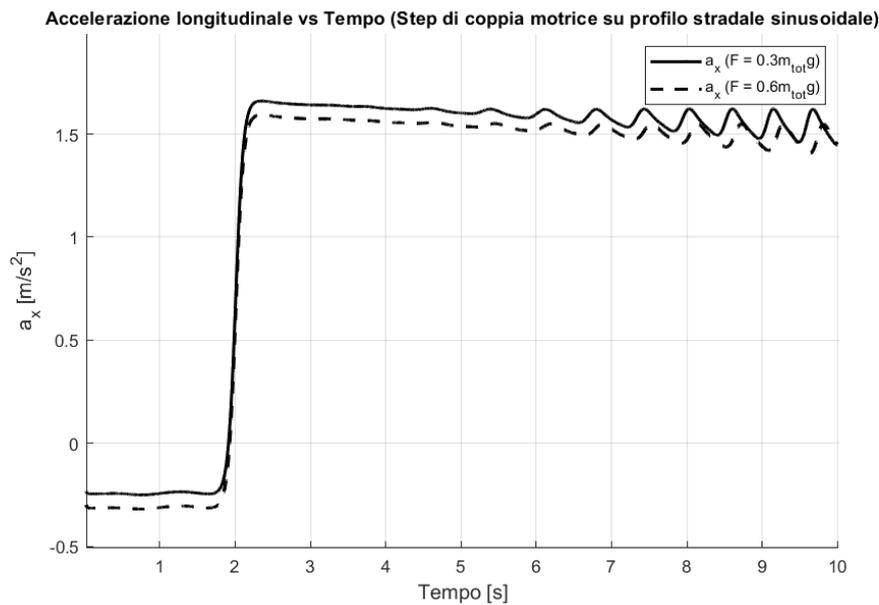


Figura 6.42 - Accelerazione longitudinale vs Tempo (Step di coppia motrice su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con tre road wheels)

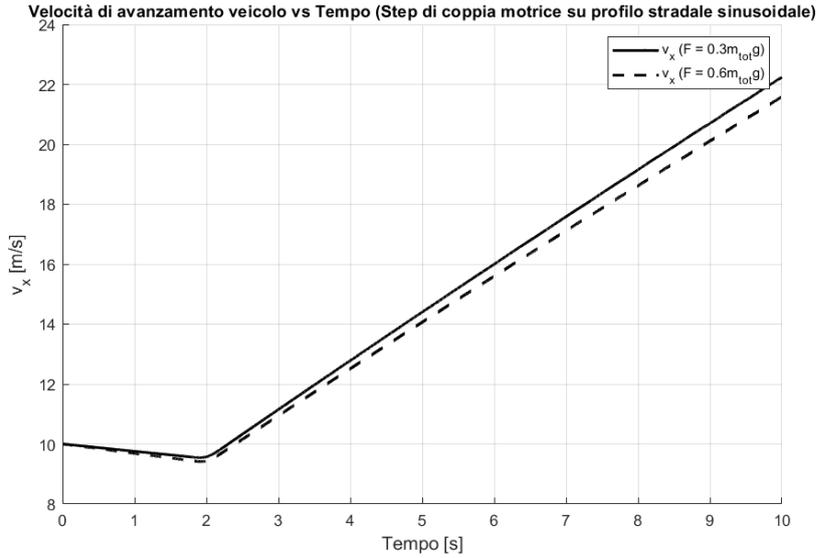


Figura 6.43 - Velocità longitudinale veicolo vs Tempo (Step di coppia motrice su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con tre road wheels)

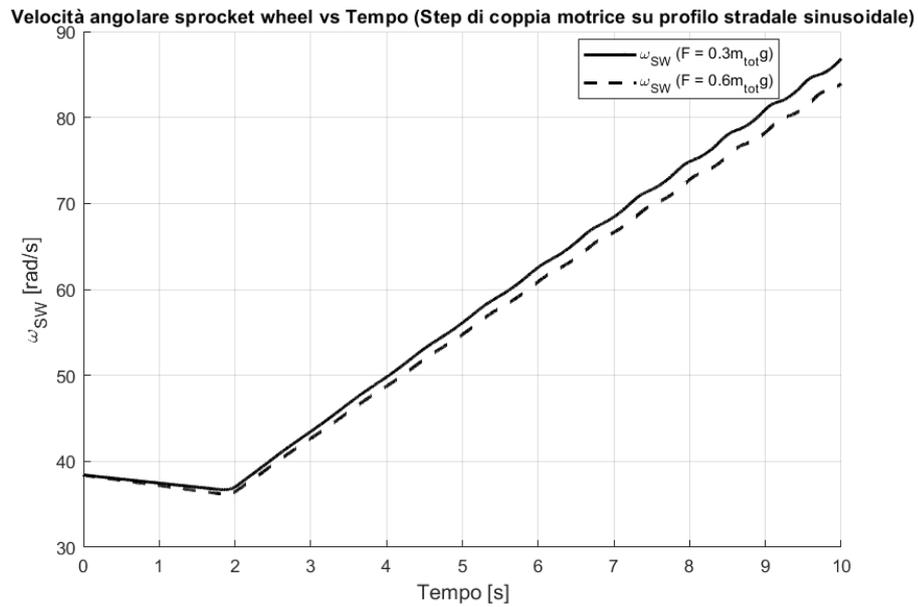


Figura 6.44 - Velocità angolare sprocket wheel vs Tempo (Step di coppia motrice su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con tre road wheels)

Per quanto riguarda le forze verticali e longitudinali esercitate sul terreno, rappresentate rispettivamente in Figura 6.45 e Figura 6.46, esse seguono l'andamento oscillatorio del profilo stradale sinusoidale.

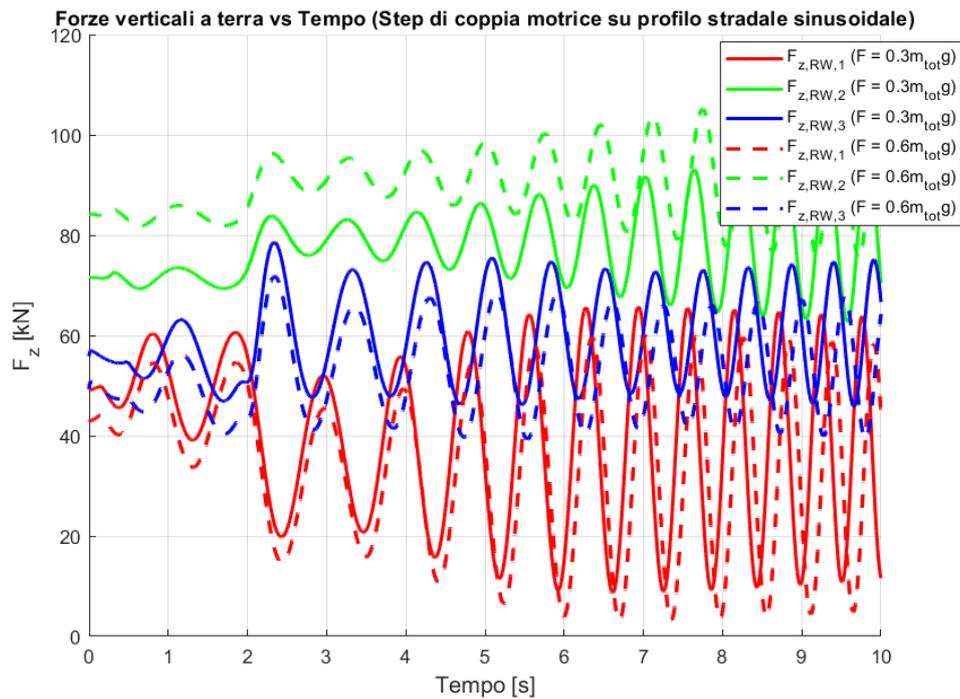


Figura 6.45 - Forze verticali a terra vs Tempo (Step di coppia motrice su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con tre road wheels)

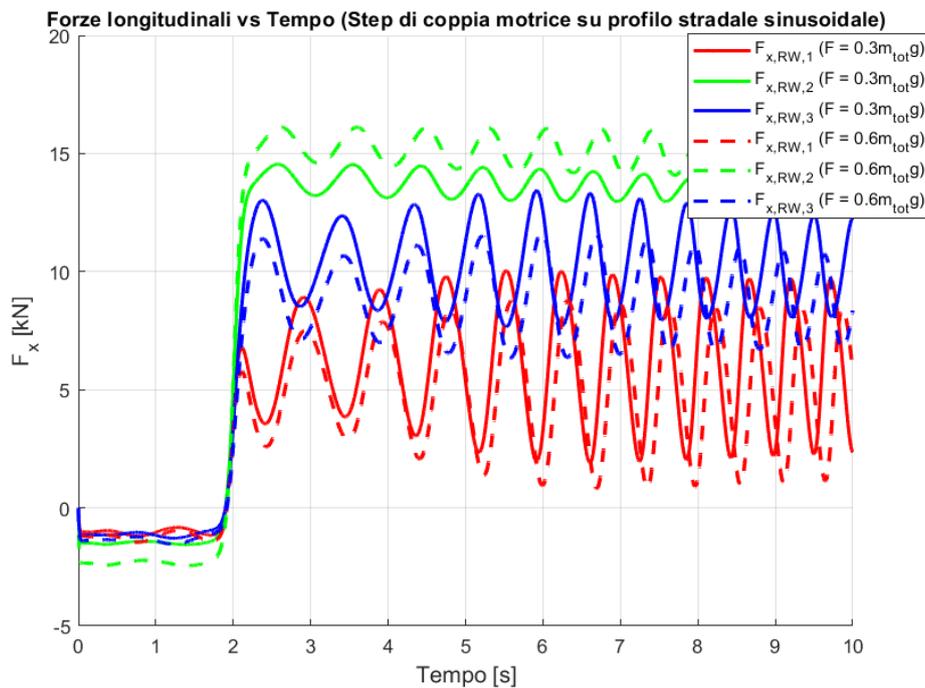


Figura 6.46 - Forze longitudinali vs Tempo (Step di coppia motrice su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con tre road wheels)

Analizzando le forze verticali, si osserva che le oscillazioni più accentuate interessano gli assali anteriore e posteriore, per le stesse ragioni descritte nella prova di Coast-Down. Tuttavia, a seguito dell'applicazione della coppia motrice, il veicolo viaggia a velocità più

elevate, rendendo tali oscillazioni più marcate. Con il progredire della simulazione, l'ampiezza delle oscillazioni tende a ridursi grazie all'intervento dello smorzatore.

L'applicazione della coppia motrice genera un trasferimento di carico verso l'assale posteriore, evidenziato dall'aumento del valore medio di $F_{z,RW3}$ e dalla riduzione del valore medio di $F_{z,RW1}$.

In merito al tensionamento, l'effetto risulta coerente con le simulazioni precedenti: un incremento del tensionamento comporta un aumento della forza verticale sull'assale centrale e una diminuzione sugli assali esterni, indipendentemente dalla presenza della coppia motrice.

L'andamento delle forze longitudinali, illustrato in Figura 6.46, risulta essere direttamente correlato alle forze verticali, come già osservato precedentemente.

In Figura 6.48 è mostrato come variano le tensioni dei tratti del cingolo durante la simulazione con $F = 0.3m_{tot}g$.

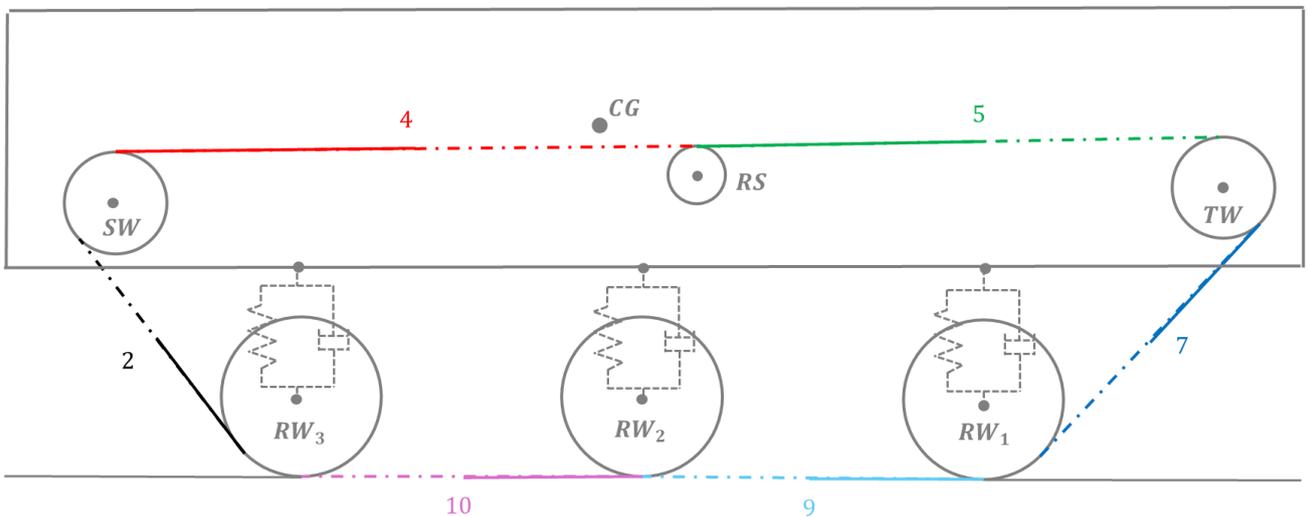


Figura 6.47 - Rappresentazione tensioni del cingolo (veicolo cingolato con tre road wheels)

Tensioni dei tratti del cingolo vs Tempo (Step di coppia motrice su profilo stradale sinusoidale con $F = 0.3m_{tot}g$)

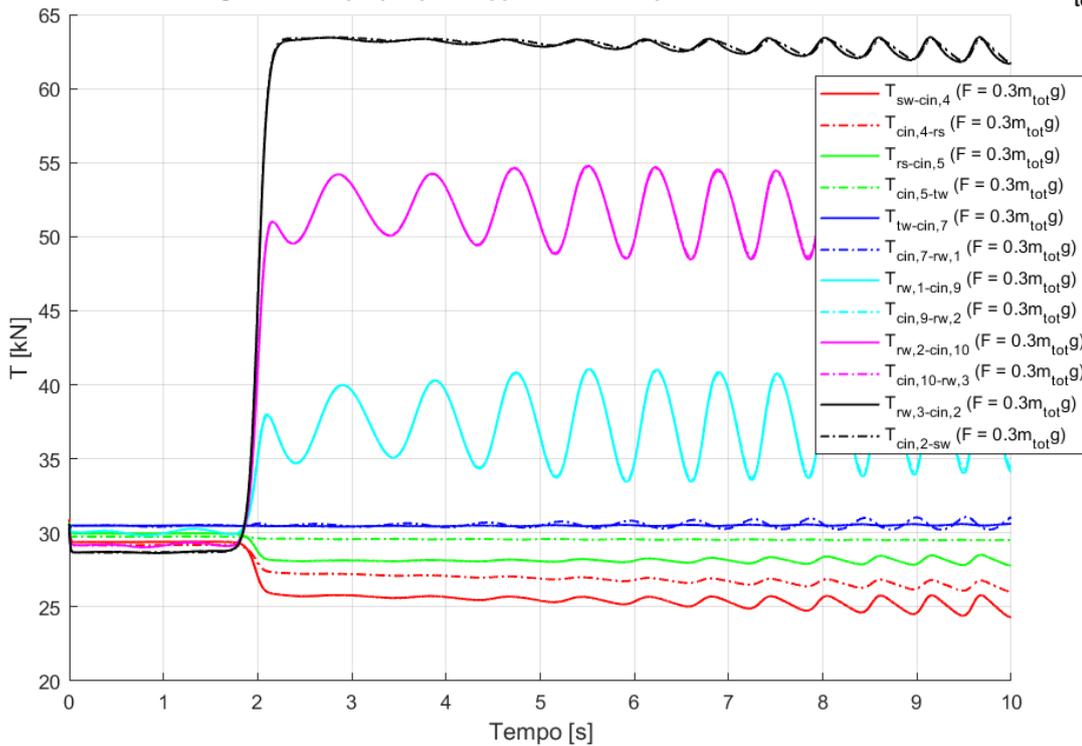


Figura 6.48 - Tensioni dei tratti del cingolo vs Tempo (Step di coppia motrice su profilo stradale sinusoidale con $F = 0.3m_{tot}g$ con veicolo cingolato con tre road wheels)

Anche nel caso di un profilo stradale sinusoidale, l'effetto più rilevante da analizzare è quello della coppia motrice. Quando questa viene applicata alla sprocket wheel, i tratti del cingolo collegati ad essa mostrano tensioni significativamente differenti. Si distingue un tratto lasco, caratterizzato da una tensione ridotta, posizionato immediatamente dopo la sprocket wheel nel senso di rotazione della coppia. In questo caso, con coppia oraria, il tratto lasco è situato tra la sprocket wheel e la ruota di supporto. Al contrario, il tratto teso, con una tensione maggiore, si trova nella direzione opposta, tra la sprocket wheel e la road wheel 3.

Proseguendo l'analisi a partire dal tratto teso, osservando il cingolo in senso antiorario, si nota una diminuzione significativa della tensione ogni volta che viene oltrepassata una road wheel, effetto dovuto alle forze di trazione in gioco. Nei tratti di cingolo a contatto con il terreno, la tensione subisce oscillazioni in corrispondenza delle variazioni delle forze longitudinali.

Inoltre, facendo riferimento alla Figura 6.49, raddoppiando la forza di tensionamento non si osservano variazioni significative nell'effetto della coppia motrice sulla tensione, come già evidenziato nel caso di strada pianeggiante.

Tensioni dei tratti del cingolo vs Tempo (Step di coppia motrice su profilo stradale sinusoidale con $F = 0.6m_{tot}g$)

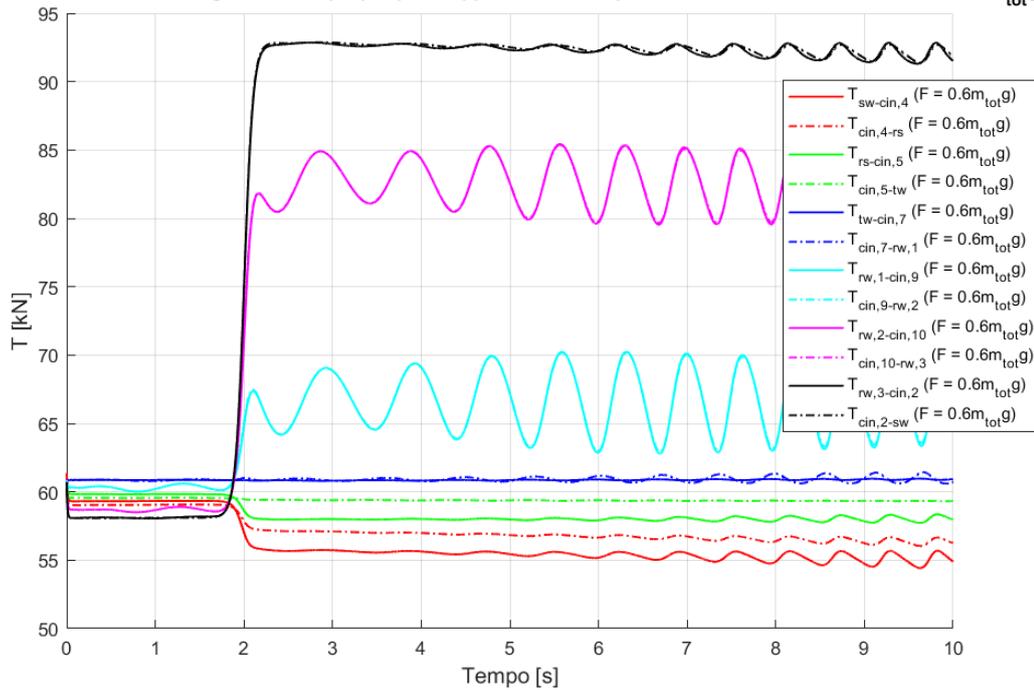


Figura 6.49 - Tensioni dei tratti del cingolo vs Tempo (Step di coppia motrice su profilo stradale sinusoidale con $F = 0.6m_{tot}g$ con veicolo cingolato con tre road wheels)

Durante la percorrenza di un profilo stradale sinusoidale, il movimento del baricentro del sistema evidenzia un'oscillazione corrispondente, come mostrato in Figura 6.50. Si può anche notare come l'aumento della forza di tensionamento non comporti una variazione dello scuotimento del baricentro.

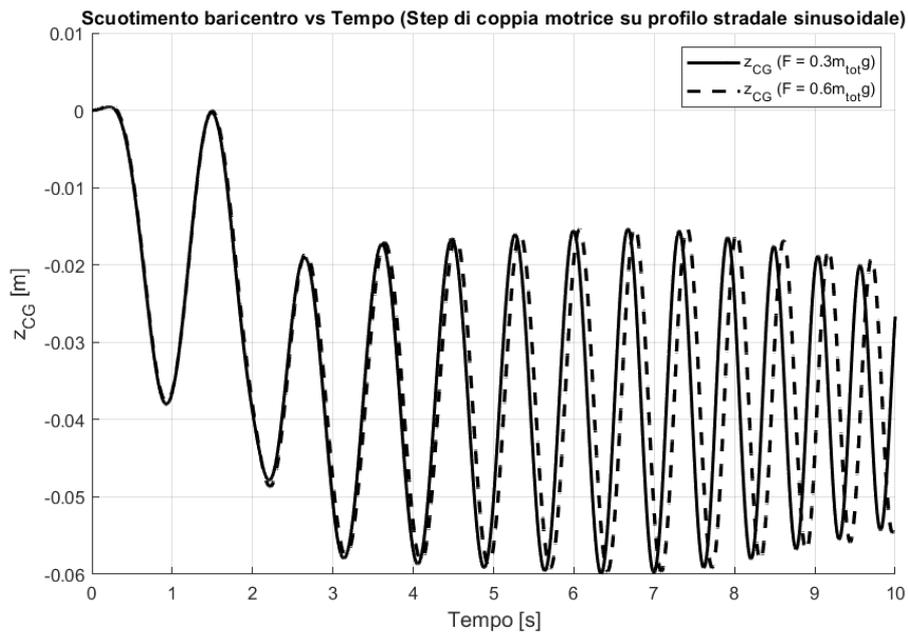


Figura 6.50 - Scuotimento baricentro vs Tempo (Step di coppia motrice su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con tre road wheels)

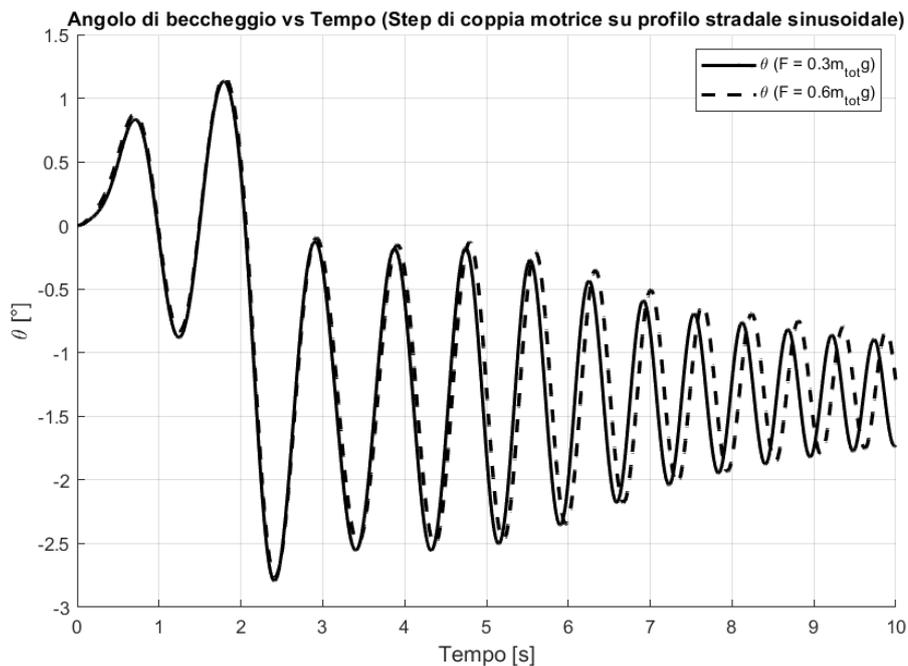


Figura 6.51 - Angolo di beccheggio vs Tempo (Step di coppia motrice su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con tre road wheels)

In Figura 6.50 e Figura 6.51 si osserva che l'applicazione della coppia motrice, oltre a causare un abbassamento della parte posteriore del veicolo dovuto al trasferimento di carico, evidenziato dall'aumento del valore assoluto dell'angolo di beccheggio, comporta anche un abbassamento del baricentro. Durante la percorrenza di un profilo stradale sinusoidale, il movimento del baricentro e il beccheggio mostrano oscillazioni corrispondenti, con la differenza che l'oscillazione del beccheggio risulta maggiormente smorzata.

Raddoppiare la forza di tensionamento porta ad un leggero ritardo nell'oscillazione sia per lo scuotimento che per il beccheggio.

Nella Figura 6.52 è rappresentato l'andamento dell'accelerazione verticale del baricentro. Si nota un incremento dell'ampiezza delle oscillazioni nel corso della prova, correlato all'aumento della velocità del veicolo. Con velocità elevate, il tempo a disposizione per le sospensioni per assorbire e smorzare le oscillazioni si riduce, rendendo meno efficace il controllo del movimento verticale.

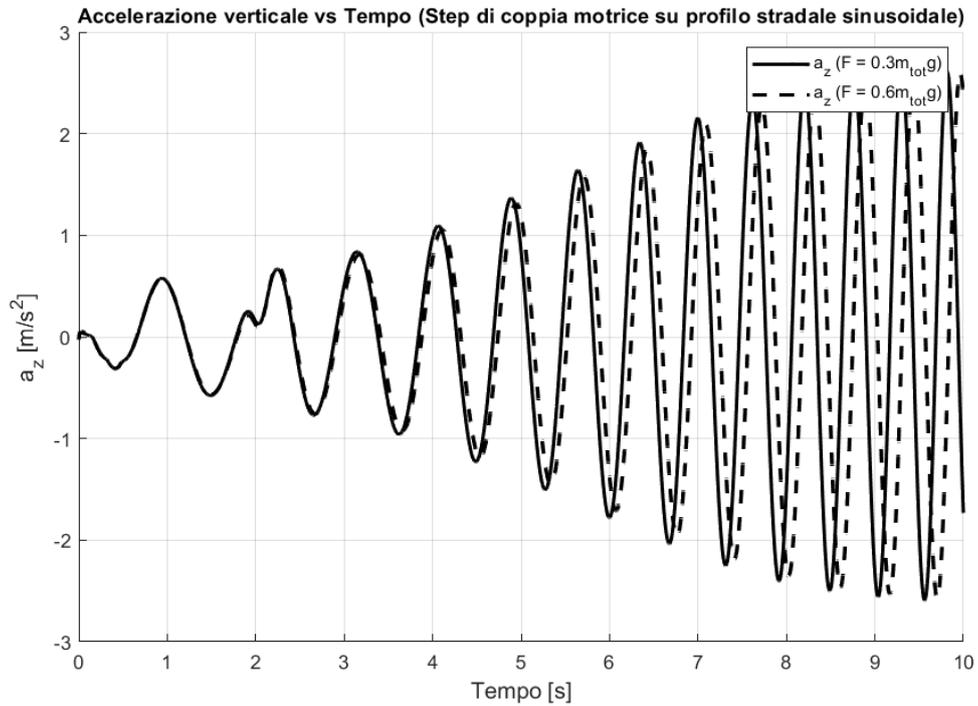


Figura 6.52 - Accelerazione verticale vs Tempo (Step di coppia motrice su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con tre road wheels)

Il comportamento dello scorrimento longitudinale, come osservato nelle simulazioni precedenti, segue lo stesso andamento dell'accelerazione longitudinale. Un aspetto rilevante è che, dopo l'applicazione della coppia motrice, l'ampiezza delle oscillazioni aumenta. Inoltre, con l'incremento del tensionamento, si registra una riduzione dello scorrimento in tutte le condizioni operative analizzate.

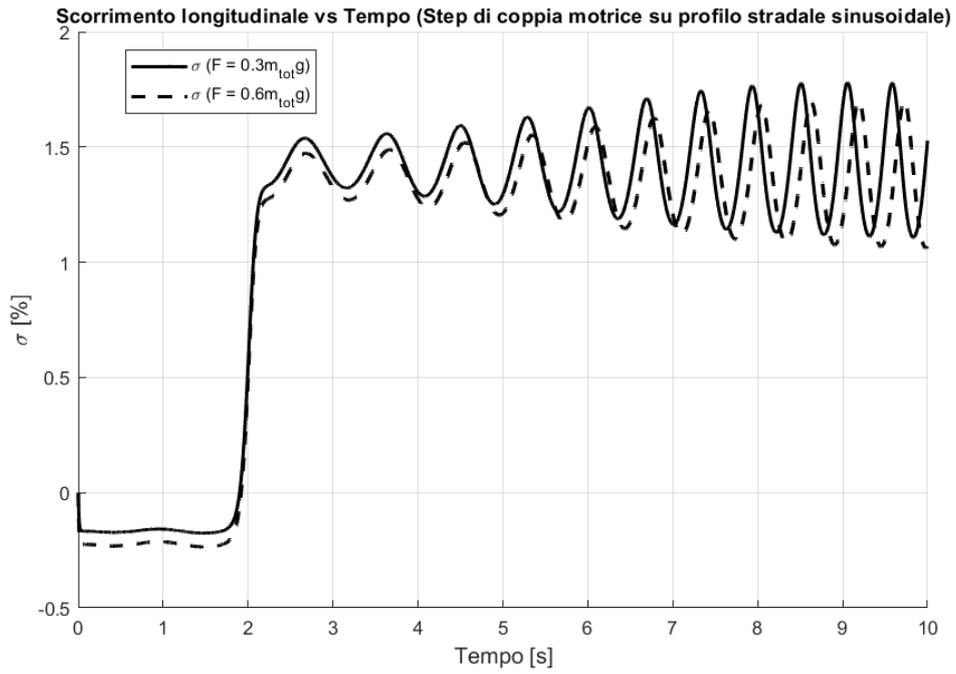


Figura 6.53 - Scorrimento longitudinale vs Tempo (Step di coppia motrice su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con tre road wheels)

7. Estensione del modello ad un veicolo cingolato con un numero N di road wheels e un numero n di ruote di supporto

Nel seguente capitolo verrà descritto come modificare il modello al fine di estenderlo ad un caso di veicolo cingolato con un numero N di road wheels ed un numero n di ruote di supporto, le ruote sono numerate in ordine crescente partendo dalla ruota più distante dalla sprocket wheel.

È stato deciso di estendere il modello per riprodurre una configurazione di veicolo cingolato che rispecchi maggiormente le caratteristiche dei veicoli reali.

Per le parti della modellazione che non cambiano al variare del numero di ruote si fa riferimento al modello con tre road wheels precedentemente descritto.

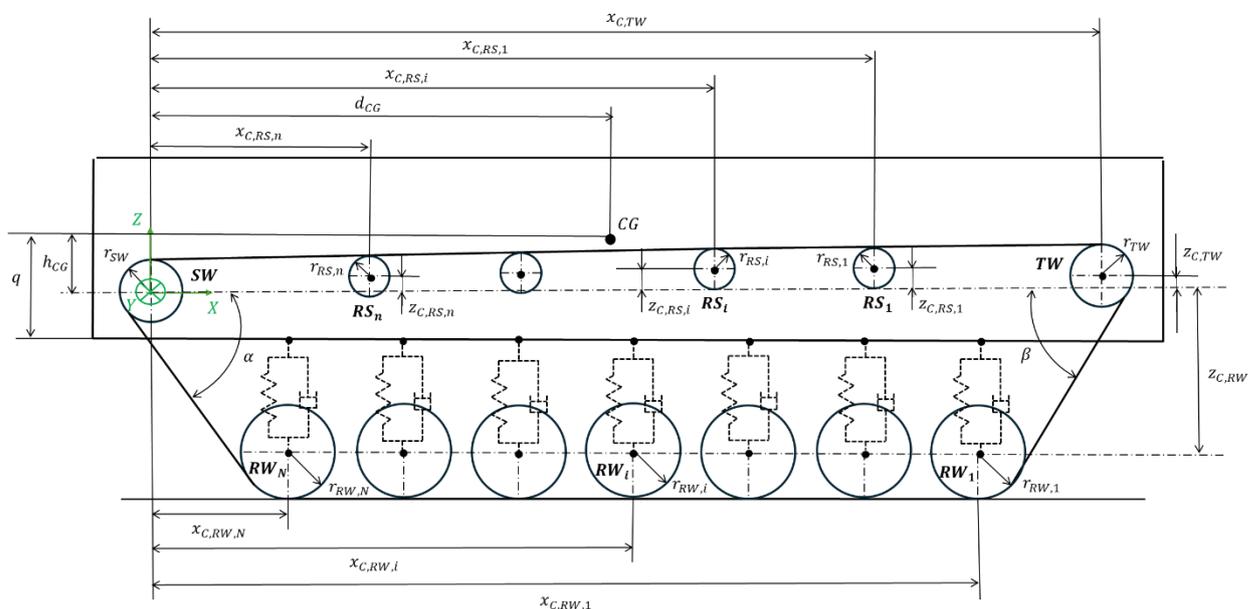


Figura 7.1 - Configurazione geometrica generica (veicolo cingolato con N road wheels)

7.1 Cinematica del veicolo

7.1.1 Equazioni di congruenza traslazione verticale

Per caratterizzare la cinematica di sospensione, al fine di calcolare la forza elastica esercitata, è necessario descrivere le traslazioni verticali dei punti di attacco delle sospensioni al telaio in funzione della traslazione verticale del baricentro z_{CG} e del beccheggio θ :

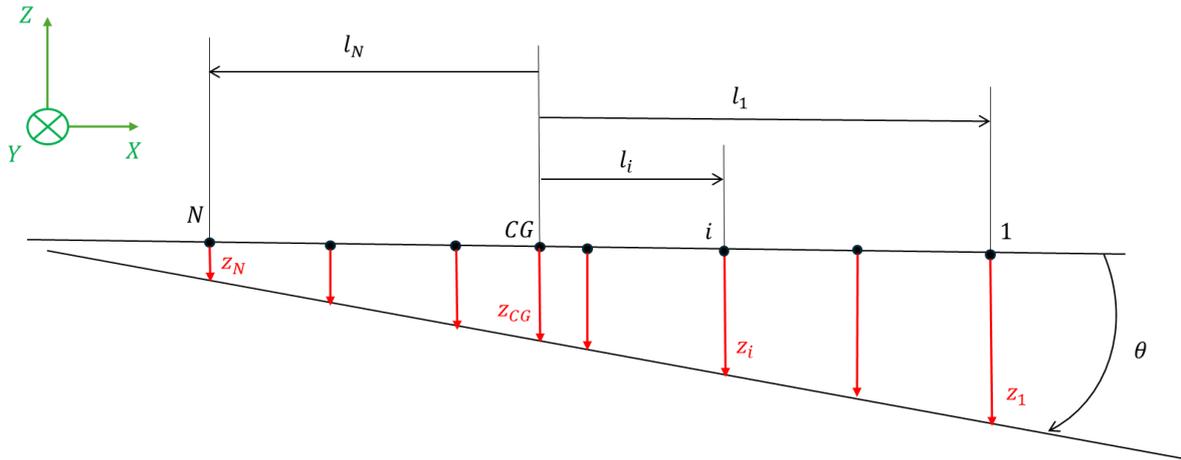


Figura 7.2 - Congruenza traslazioni verticali degli N assali (veicolo cingolato con N road wheels)

Le relazioni di congruenza di traslazione verticale per l'i-esimo assale con le seguenti:

- Se $x_{C,RW,i} > d_{CG}$

$$z_i = z_{CG} - l_i \cdot \tan \theta \quad (7.1)$$

Dove:

$$l_i = x_{C,RW,i} - d_{CG} \quad (7.2)$$

- $x_{C,RW,i} < d_{CG}$

$$z_i = z_{CG} + l_i \cdot \tan \theta \quad (7.3)$$

Dove:

$$l_i = d_{CG} - x_{C,RW,i} \quad (7.4)$$

7.1.2 Equazioni di congruenza velocità di traslazione verticale

Per il calcolo della forza smorzante esercitata dall'ammortizzatore è necessario ricavare le velocità di traslazione verticale dei punti di attacco della sospensione al telaio in funzione della velocità di traslazione verticale del baricentro \dot{z}_{CG} e della velocità di oscillazione di beccheggio $\dot{\theta}$:

- Punto di attacco i-esimo se $x_{C,RW,i} > d_{CG}$

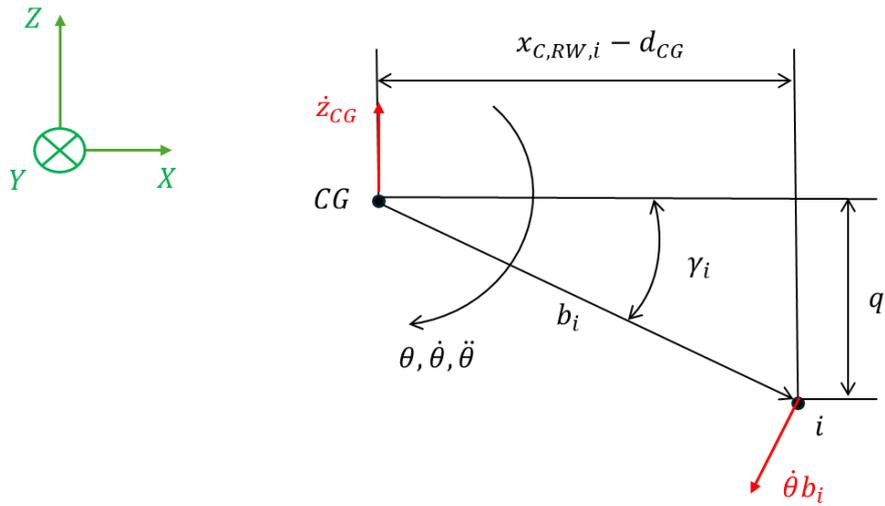


Figura 7.3 - Velocità di traslazione verticale punto di attacco i-esimo se $x_{C,RW,i} > d_{CG}$

La velocità di traslazione verticale del punto di attacco i-esimo è:

$$\dot{z}_i = \dot{z}_{CG} - \dot{\theta} b_i \cos \gamma_i \quad (7.5)$$

Con:

$$b_i = \sqrt{q^2 + (x_{C,RW,i} - d_{CG})^2}$$

$$\gamma_i = \tan^{-1} \frac{q}{(x_{C,RW,i} - d_{CG})} \quad (7.6)$$

- Punto di attacco i-esimo se $x_{C,RW,i} < d_{CG}$

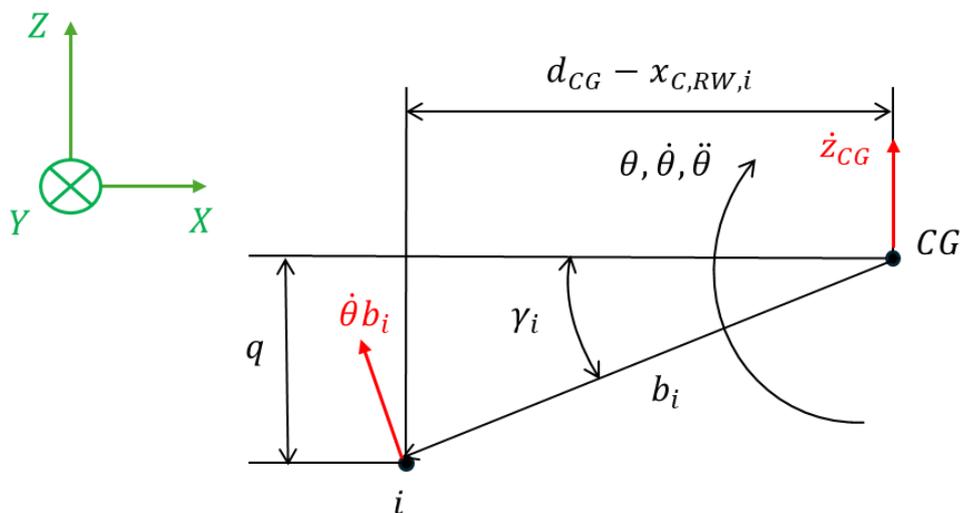


Figura 7.4 - Velocità di traslazione verticale punto di attacco i-esimo se $x_{C,RW,i} < d_{CG}$

La velocità di traslazione verticale del punto di attacco i-esimo è:

$$\dot{z}_i = \dot{z}_{CG} + \dot{\theta} b_i \cos \gamma_i \quad (7.7)$$

Con:

$$b_i = \sqrt{q^2 + (d_{CG} - x_{C,RW,i})^2}$$

$$\gamma_i = \tan^{-1} \frac{q}{(d_{CG} - x_{C,RW,i})} \quad (7.8)$$

7.1.3 Equazioni di congruenza accelerazioni verticali e longitudinali

A questo punto bisogna definire le accelerazioni puntuali del centro di ogni ruota per il calcolo delle forze d'inerzia. Le relazioni per la tensioner wheel e la sprocket wheel sono uguali a quelle viste nel modello con tre road wheels, mentre è necessario descrivere le relazioni valide per una i-esima road wheels, con $i = 1:N$.

- Road wheel i-esima se $x_{C,RW,i} > d_{CG}$

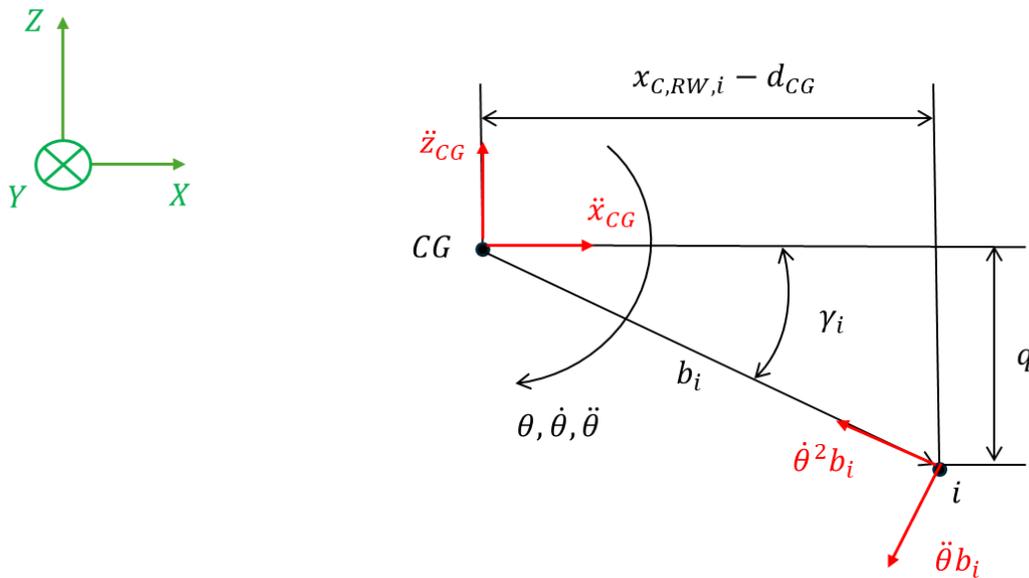


Figura 7.5 - Accelerazioni puntuali road wheel i-esima se $x_{C,RW,i} > d_{CG}$

L'accelerazione longitudinale dell'i-esima road wheel è:

$$\ddot{x}_{RW,i} = \ddot{x}_i = \ddot{x}_{CG} - \ddot{\theta} b_i \sin \gamma_i - \dot{\theta}^2 b_i \cos \gamma_i \quad (7.9)$$

L'accelerazione verticale dell'i-esima road wheel è:

$$\ddot{z}_{RW,i} = \ddot{h}_{RW,i} \quad (7.10)$$

- Road wheel i-esima se $x_{C,RW,i} < d_{CG}$

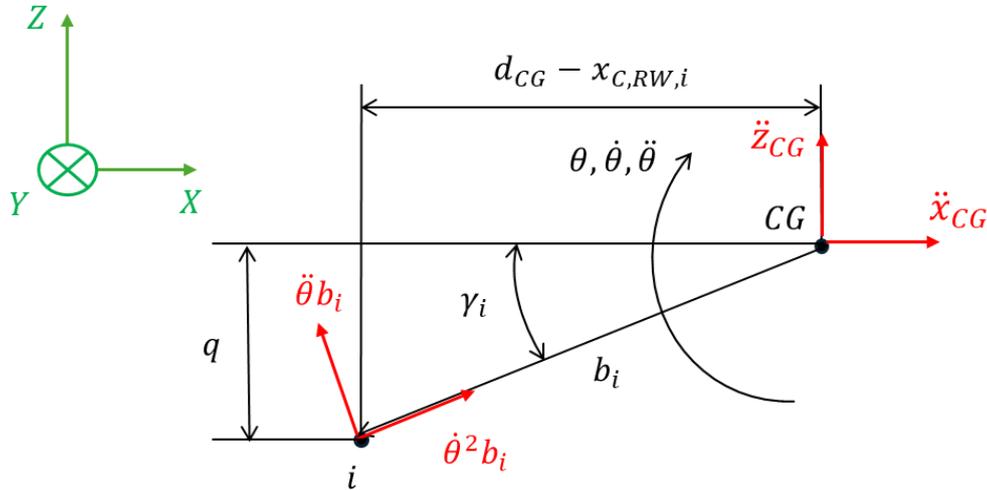


Figura 7.6 - Accelerazioni puntuali road wheel i-esima se $x_{C,RW,i} < d_{CG}$

L'accelerazione longitudinale dell'i-esima road wheel è:

$$\ddot{x}_{RW,i} = \ddot{x}_i = \ddot{x}_{CG} - \ddot{\theta} b_i \sin \gamma_i + \dot{\theta}^2 b_i \cos \gamma_i \quad (7.11)$$

L'accelerazione verticale dell'i-esima road wheel è:

$$\ddot{z}_{RW,i} = \ddot{h}_{RW,i} \quad (7.12)$$

7.2 Modellazione del cingolo

Il cingolo sarà modellato seguendo lo stesso approccio descritto in precedenza. Verrà suddiviso in un certo numero di tratti, ciascuno dei quali avrà una massa proporzionale alla sua lunghezza rispetto alla lunghezza totale del cingolo.

La numerazione dei tratti di cingolo per convenzione parte dal tratto di cingolo avvolto attorno alla road wheel N e poi prosegue in senso orario.

Il cingolo, essendo dotato di massa, eserciterà un contributo inerziale, oltre a generare una forza peso verticale che dovrà essere considerata nel calcolo.

Per tenere conto dell'inerzia dei tratti di cingolo avvolti attorno alle ruote, si procederà ad incrementare il momento d'inerzia della ruota corrispondente. Invece, per i segmenti di cingolo che collegano due ruote, il contributo inerziale sarà rappresentato da una massa concentrata posizionata nel punto centrale del segmento.

Il peso del cingolo si distribuisce con la stessa modalità vista nel modello con tre road wheels, con la differenza che la quota di peso su ciascuna ruota sarà inferiore. Nelle sezioni

in cui il cingolo è sollevato da terra, il suo peso viene sostenuto dai perni della sprocket wheel, della tensioner wheel e delle ruote di supporto. Invece, il tratto del cingolo che è a contatto con il terreno non esercita carico sui perni delle road wheels, ma interviene esclusivamente nel modello di interazione tra cingolo e terreno. La Figura 7.7 mostra la distribuzione del peso del cingolo lungo l'intero veicolo.

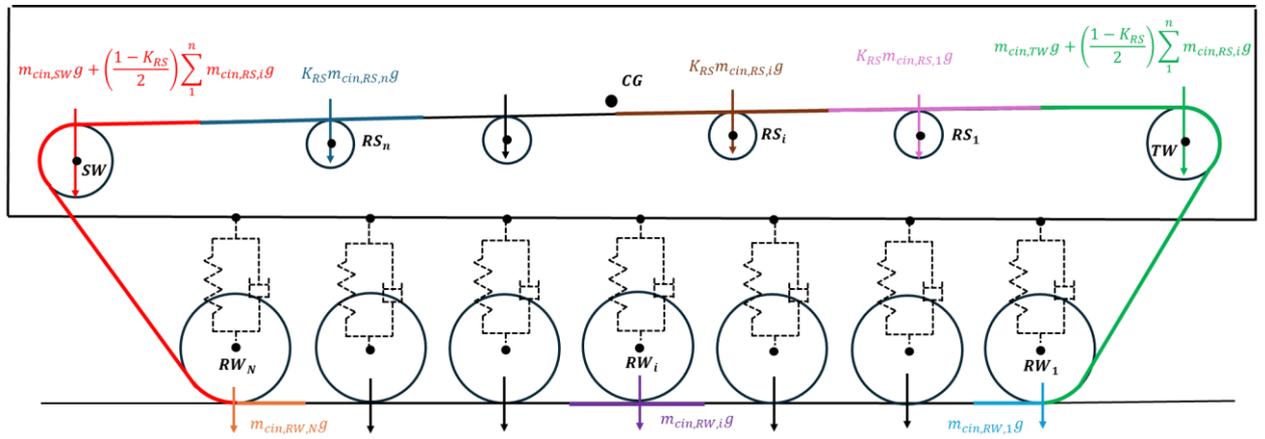


Figura 7.7 - Distribuzione peso del cingolo (veicolo cingolato con N road wheels)

7.3 Modello statico

Di seguito vengono presentati i vari diagrammi di corpo libero, accompagnati dalle corrispondenti equazioni di equilibrio statico. Per ciascuna ruota e per la massa sospesa, saranno considerate tre equazioni di equilibrio: una per la traslazione orizzontale, una per la traslazione verticale e una per l'equilibrio rotazionale. Tuttavia, per le ruote non si tiene conto dell'equilibrio rotazionale, poiché la tensione lungo l'intero cingolo è costante. Questo è dovuto al fatto che la coppia di attrito al perno è stata modellata in modo tale da non generare perdite quando il veicolo è fermo.

- Sprocket wheel

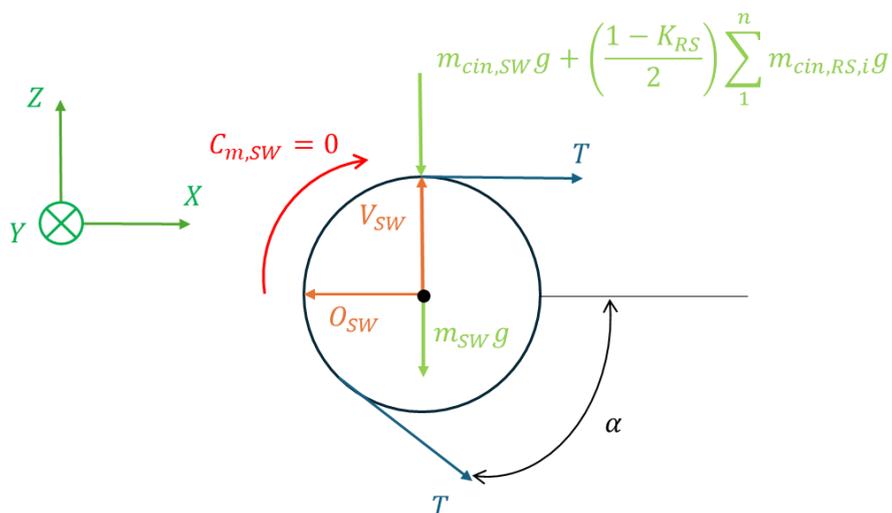


Figura 7.8 - Diagramma di corpo libero della sprocket wheel in statica (veicolo cingolato con N road wheels)

Trovandoci nel caso statico si ha che la coppia applicata sulla sprocket wheel è nulla $C_{m,SW} = 0$.

Nel diagramma di corpo libero è presente anche il peso del tratto di cingolo sostenuto dalla sprocket wheel, dato che si va a scaricare sul perno.

Equilibrio orizzontale:

$$(1 + \cos \alpha)T - O_{SW} = 0 \quad (7.13)$$

Equilibrio verticale:

$$V_{SW} - T \sin \alpha - m_{SW}g - m_{cin,SW}g - \left(\frac{1 - K_{RS}}{2}\right) \sum_1^n m_{cin,RS,i}g = 0 \quad (7.14)$$

- Ruota di supporto i-esima (con $i = 1:n$):

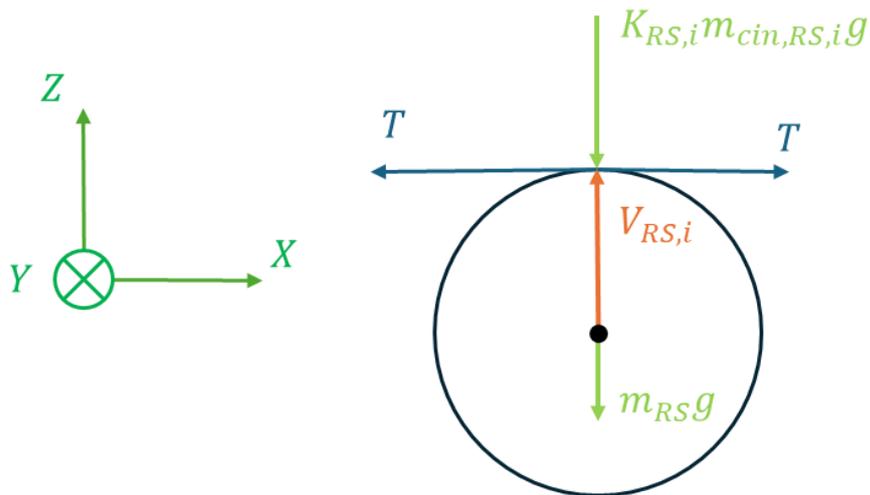


Figura 7.9 - Diagramma di corpo libero ruota di supporto i-esima (veicolo cingolato con N road wheels)

Essendo che la distribuzione del peso del cingolo è disaccoppiata rispetto al problema statico, la reazione vincolare verticale $V_{RS,i}$ non è un'incognita.

Equilibrio orizzontale:

$$T - T = 0 \quad (7.15)$$

Equilibrio verticale:

$$V_{RS} - K_{RS}m_{cin,RS,i}g - m_{RS}g = 0 \quad (7.16)$$

- Tensioner wheel

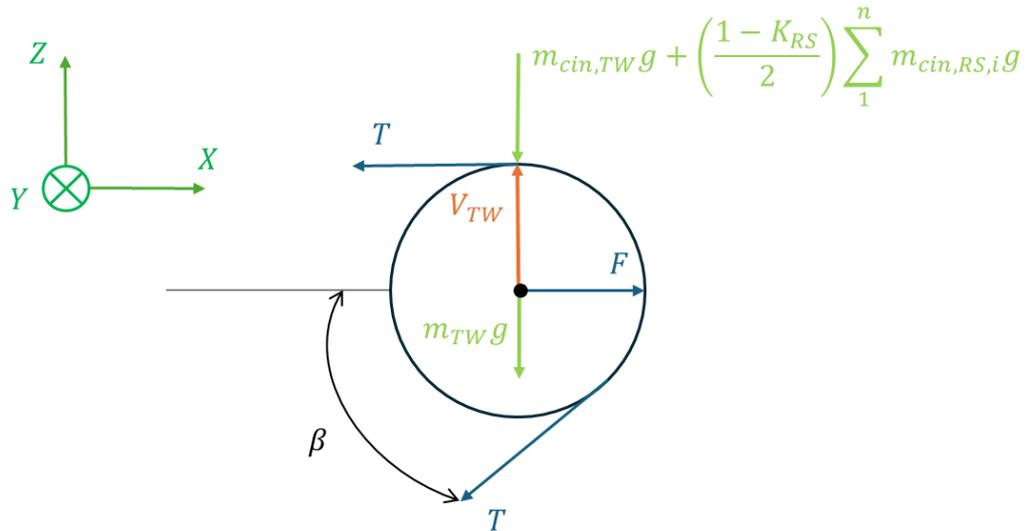


Figura 7.10 - Diagramma di corpo libero della tensioner wheel in statica (veicolo cingolato con N road wheels)

Nel diagramma di corpo libero viene considerato anche il peso del tratto di cingolo sostenuto dalla tensioner wheel, poiché questo peso si scarica direttamente sul perno.

Equilibrio orizzontale:

$$F - T - T \cos \beta = 0 \quad (7.17)$$

Equilibrio verticale:

$$V_{TW} - T \sin \beta - m_{TW}g - m_{cin,TW}g - \left(\frac{1 - K_{RS}}{2}\right) \sum_1^n m_{cin,RS,i}g = 0 \quad (7.18)$$

- Road wheel 1

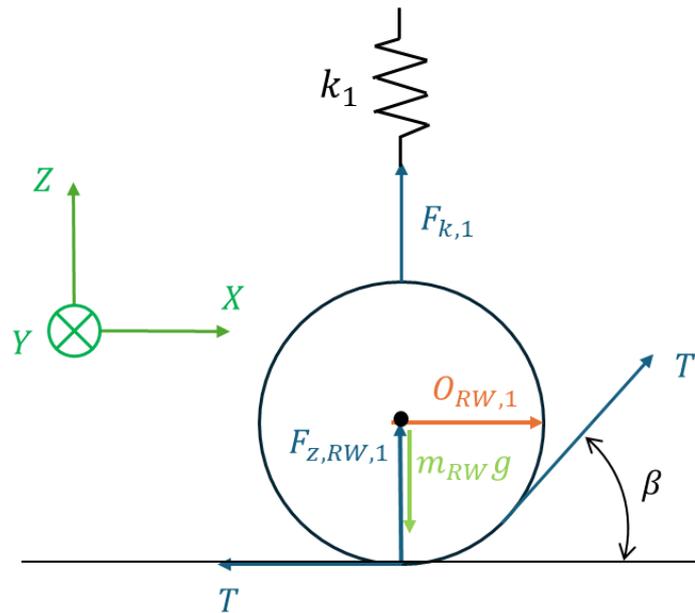


Figura 7.11 - Diagramma di corpo libero della road wheel 1 in statica (veicolo cingolato con N road wheels)

Equilibrio orizzontale:

$$T \cos \beta + O_{RW,1} - T = 0$$

(7.19)

Equilibrio verticale:

$$T \sin \beta + F_{z,RW,1} + F_{k,1} - m_{RW}g = 0$$

(7.20)

- Road wheel i-esima

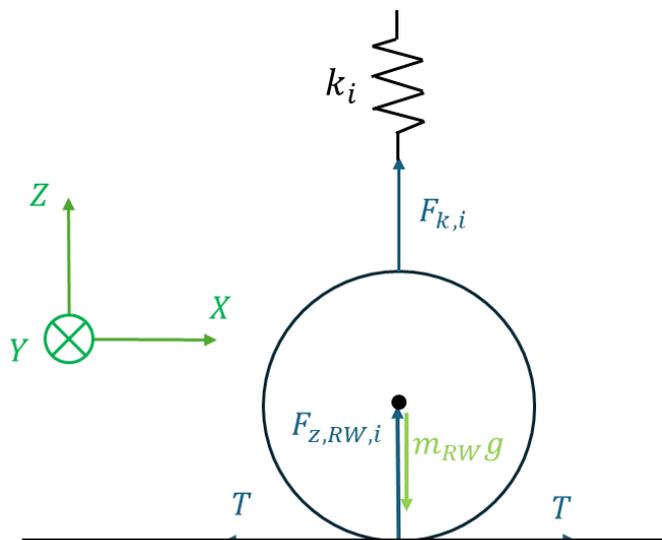


Figura 7.12 - Diagramma corpo libero road wheel i-esima in statica (veicolo cingolato con N road wheels)

Equilibrio orizzontale:

$$T - T = 0 \quad (7.21)$$

Equilibrio verticale:

$$F_{z,RW,i} + F_{k,i} - m_{RW}g = 0 \quad (7.22)$$

- Road wheel N

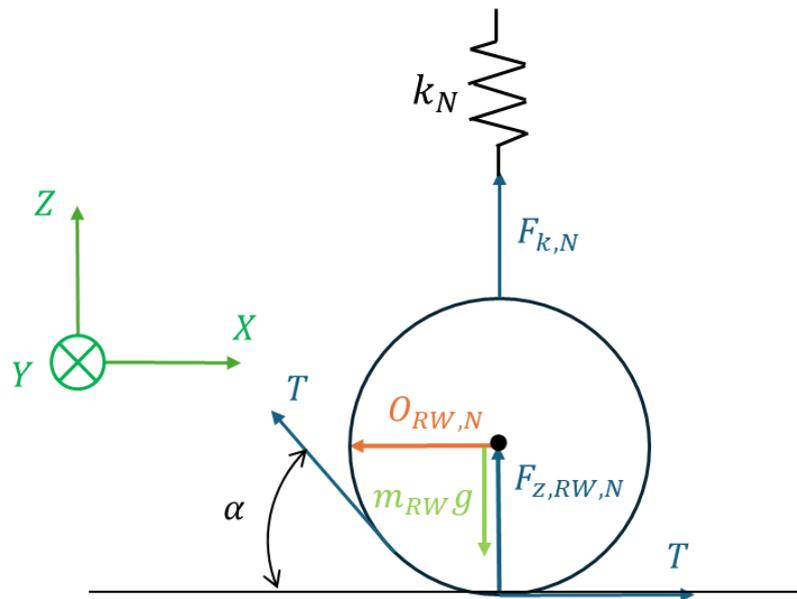


Figura 7.13 - Diagramma corpo libero road wheel N in statica (veicolo cingolato con N road wheels)

Equilibrio orizzontale:

$$T - T \cos \alpha - O_{RW,N} = 0 \quad (7.23)$$

Equilibrio verticale:

$$T \sin \alpha + F_{z,RW,N} + F_{k,N} - m_{RW}g = 0 \quad (7.24)$$

- Massa sospesa

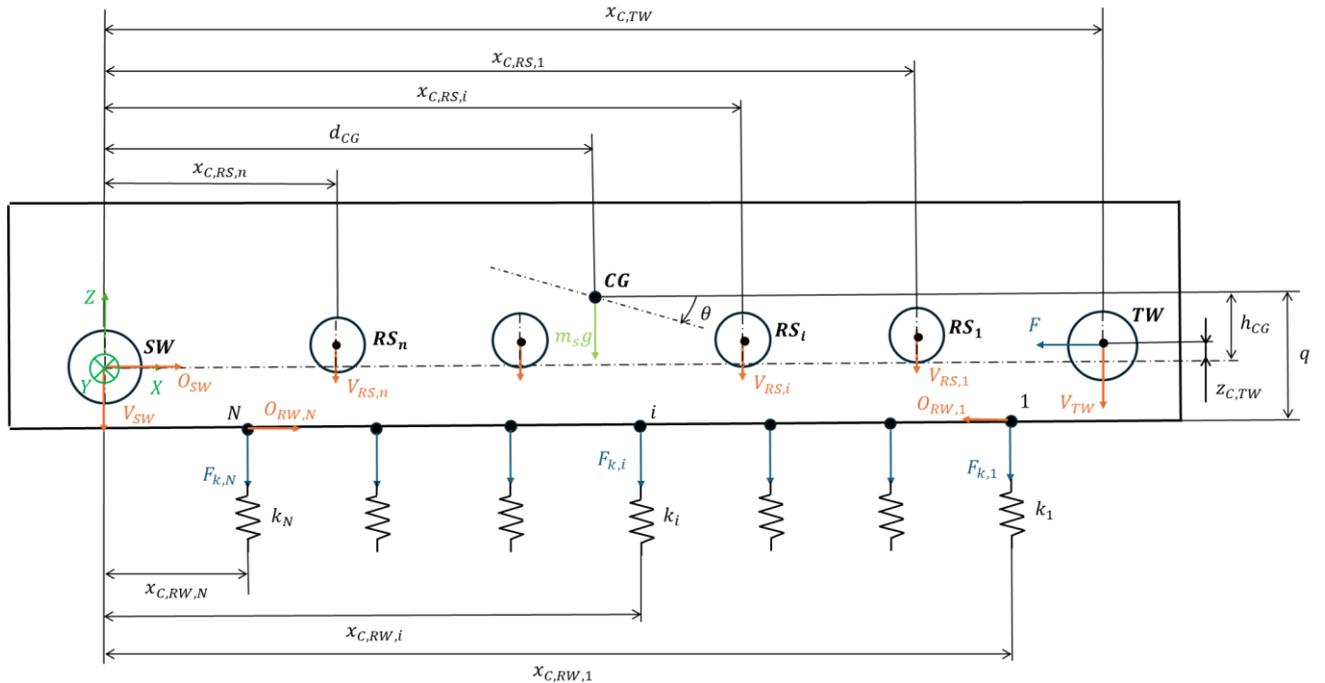


Figura 7.14 - Diagramma corpo libero massa sospesa in statica (veicolo cingolato con N road wheels)

Equilibrio orizzontale della massa sospesa:

$$O_{SW} + O_{RW,N} - O_{RW,1} - F = 0 \quad (7.25)$$

Equilibrio verticale della massa sospesa:

$$-V_{TW} - V_{SW} - \sum_{i=1}^N F_{k,i} - \sum_{i=1}^n V_{RS,i} - m_s g = 0 \quad (7.26)$$

Equilibrio rotazionale intorno a CG:

$$-V_{SW} d_{CG} - O_{SW} h_{CG} + V_{TW} \cdot (x_{C,TW} - d_{CG}) + F(h_{CG} - z_{C,TW}) + O_{RW,1} q + -O_{RW,N} q + \sum_{i=1}^n V_{RS,i} (x_{C,RS,i} - d_{CG}) + \sum_{i=1}^N F_{k,i} (x_{C,RW,i} - d_{CG}) = 0 \quad (7.27)$$

7.4 Modello dinamico

In questa sezione sono descritti i diagrammi di corpo libero e le equazioni dinamiche di un generico veicolo cingolato con un numero N di road wheels.

- Sprocket wheel

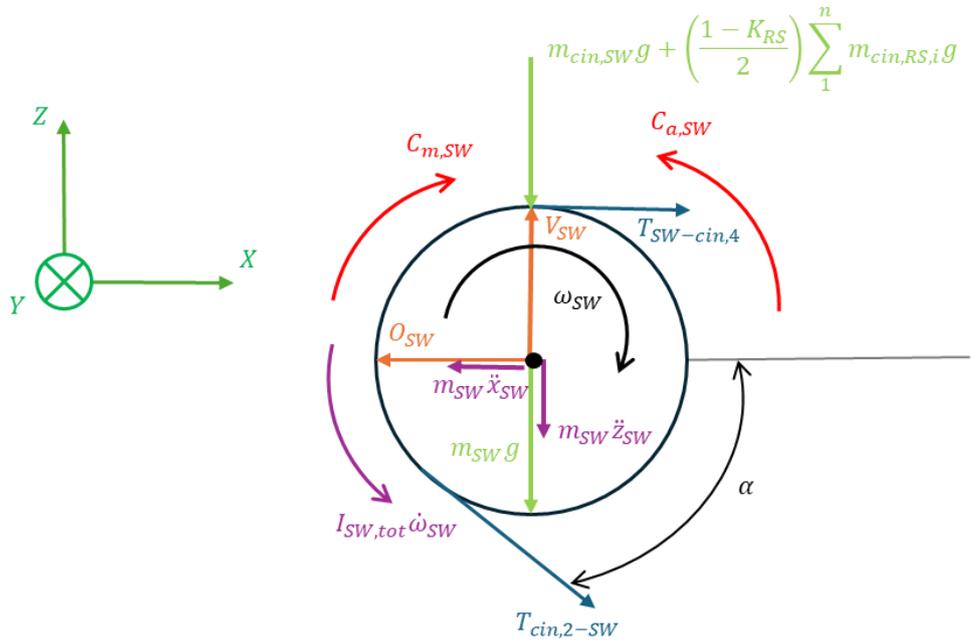


Figura 7.15 - Diagramma corpo libero sprocket wheel in dinamica (veicolo cingolato con N road wheels)

Il momento d'inerzia totale presente nel calcolo della coppia d'inerzia rotazionale deve tenere conto anche della massa del cingolo avvolta intorno alla sprocket wheel. Di conseguenza, al momento d'inerzia della sprocket wheel si aggiunge il momento d'inerzia del tratto di cingolo avvolto, modellato come un anello sottile di massa $m_{cin,3}$ e di raggio r_{SW} :

$$I_{SW,tot} = I_{SW} + m_{cin,3}r_{SW}^2 \quad (7.28)$$

Equilibrio orizzontale:

$$T_{SW-cin,4} + T_{cin,2-SW} \cos \alpha - O_{SW} = m_{SW}\ddot{x}_{SW} \quad (7.29)$$

Equilibrio verticale:

$$V_{SW} - T_{cin,2-SW} \sin \alpha - m_{SW}g - m_{cin,SW}g - \left(\frac{1-K_{RS}}{2}\right) \sum_1^n m_{cin,RS,i}g = m_{SW}\ddot{z}_{SW} \quad (7.30)$$

Equilibrio alla rotazione:

$$C_{m,SW} - (T_{cin,2-SW} - T_{SW-cin,4})r_{SW} - C_{a,SW} = I_{SW,tot}\dot{\omega}_{SW} \quad (7.31)$$

Per ricavare la coppia di attrito al perno si calcola la forza normale alla superficie del perno del caso statico:

$$F_{N,SW,stat} = \sqrt{O_{SW,stat}^2 + V_{SW,stat}^2} \quad (7.32)$$

- Ruota di supporto i-esima

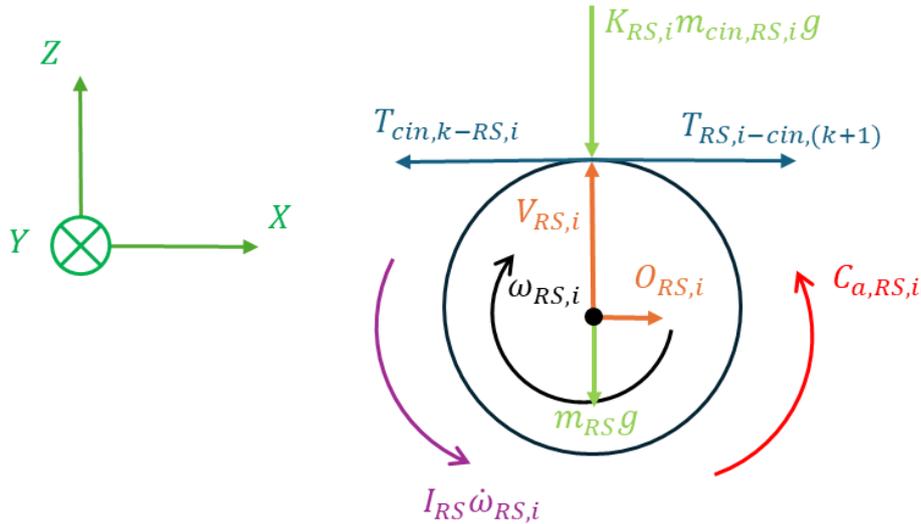


Figura 7.16 - Diagramma corpo libero ruota di supporto i-esima in dinamica (veicolo cingolato con N road wheels)

Equilibrio orizzontale:

$$T_{RS,i-cin,(k+1)} + O_{RS,i} - T_{cin,k-RS,i} = 0 \quad (7.33)$$

Equilibrio verticale:

$$V_{RS,i} - K_{RS,i} m_{cin,RS,i} g - m_{RS} g = 0 \quad (7.34)$$

Equilibrio alla rotazione:

$$(T_{RS,i-cin,(k+1)} - T_{cin,k-RS,i}) r_{RS} - C_{a,RS,i} = I_{RS} \dot{\omega}_{RS,i} \quad (7.35)$$

La forza normale alla superficie del perno è:

$$F_{N,RS,i} = V_{RS,i} \quad (7.36)$$

- Tensioner wheel

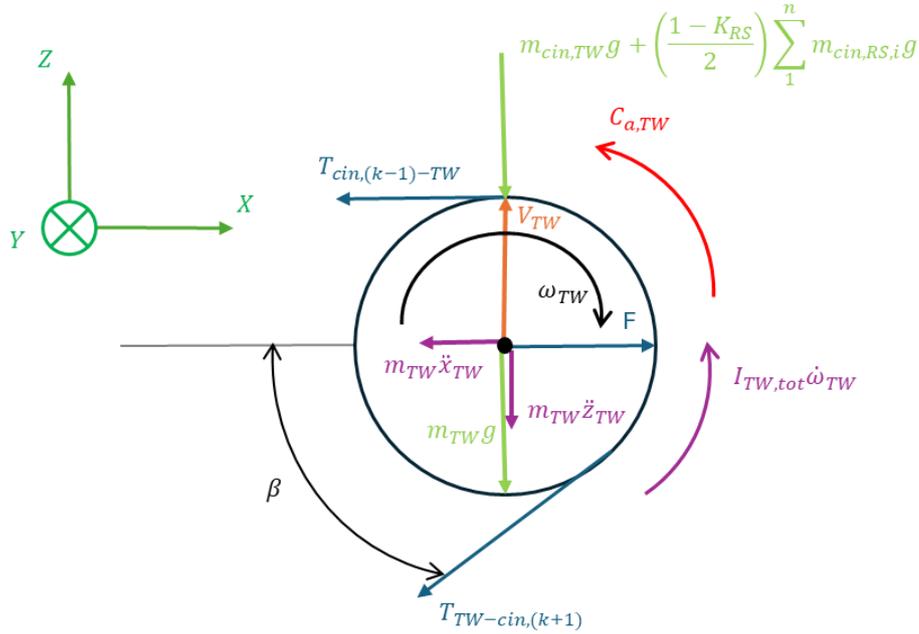


Figura 7.17 - Diagramma corpo libero tensioner wheel in dinamica (veicolo cingolato con N road wheels)

Il momento d'inerzia totale presente nel calcolo della coppia d'inerzia rotazionale deve tenere conto anche della massa del cingolo avvolto intorno alla tensioner wheel. Di conseguenza, al momento d'inerzia della tensioner wheel si aggiunge il momento d'inerzia del tratto k-esimo di cingolo avvolto, modellato come un anello sottile di massa $m_{cin,k}$ e di raggio r_{TW} :

$$I_{TW,tot} = I_{TW} + m_{cin,k}r_{TW}^2 \quad (7.37)$$

Equilibrio orizzontale:

$$F - T_{cin,(k-1)-TW} - T_{TW-cin,(k+1)} \cos \beta = m_{TW}\ddot{x}_{TW} \quad (7.38)$$

Equilibrio verticale:

$$V_{TW} - T_{TW-cin,(k+1)} \sin \beta - m_{TW}g - m_{cin,TW}g + \left(\frac{1-K_{RS}}{2}\right) \sum_1^n m_{cin,RS,i}g = m_{TW}\ddot{z}_{TW} \quad (7.39)$$

Equilibrio alla rotazione:

$$(T_{TW-cin,(k+1)} - T_{cin,(k-1)-TW})r_{TW} - C_{a,TW} = I_{TW,tot}\dot{\omega}_{TW} \quad (7.40)$$

Per ricavare la coppia di attrito al perno si calcola la forza normale alla superficie del perno del caso statico:

$$F_{N,TW,stat} = \sqrt{V_{TW,stat}^2 + F_{stat}^2} \quad (7.41)$$

- Road wheel 1

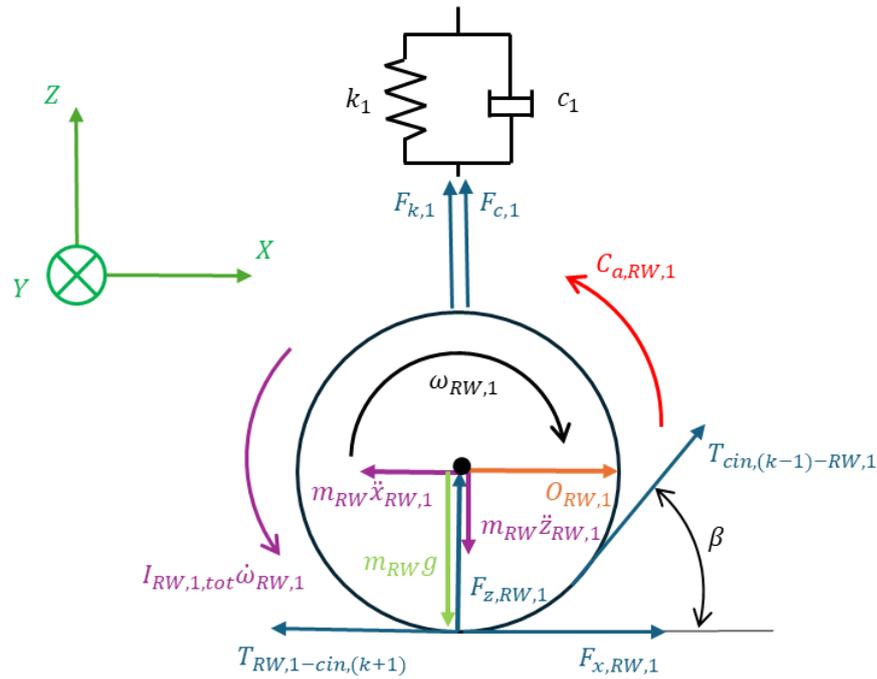


Figura 7.18 - Diagramma corpo libero road wheel 1 in dinamica (veicolo cingolato con N road wheels)

Il momento d'inerzia totale presente nel calcolo della coppia d'inerzia rotazionale deve tenere conto anche della massa del cingolo avvolta intorno alla road wheel 1. Di conseguenza, al momento d'inerzia della road wheel 1 si aggiunge il momento d'inerzia del tratto k-esimo di cingolo avvolto, modellato come un anello sottile di massa $m_{cin,k}$ e di raggio r_{RW} :

$$I_{RW,1,tot} = I_{RW} + m_{cin,k}r_{RW}^2 \quad (7.42)$$

Equilibrio orizzontale:

$$F_{x,RW,1} + T_{cin,(k-1)-RW,1} \cos \beta + O_{RW,1} - T_{RW,1-cin,(k+1)} = m_{RW}\ddot{x}_{RW,1} \quad (7.43)$$

Equilibrio verticale:

$$F_{z,RW,1} + T_{cin,(k-1)-RW,1} \sin \beta + F_{k,1} + F_{c,1} - m_{RW}g = m_{RW}\ddot{z}_{RW,1} \quad (7.44)$$

Equilibrio alla rotazione:

$$(T_{RW,1-cin,(k+1)} - T_{cin,(k-1)-RW,1})r_{RW} - F_{x,RW,1}r_{RW} - C_{a,RW,1} = I_{RW,1,tot}\dot{\omega}_{RW,1} \quad (7.45)$$

Per ricavare la coppia di attrito al perno si calcola la forza normale alla superficie del perno del caso statico:

$$F_{N,RW,1,stat} = \sqrt{O_{RW,1,stat}^2 + F_{k,1,stat}^2} \quad (7.46)$$

- Road wheel i-esima (con $i \neq 1$ e $i \neq N$) se $x_{C,RW,i} > d_{CG}$

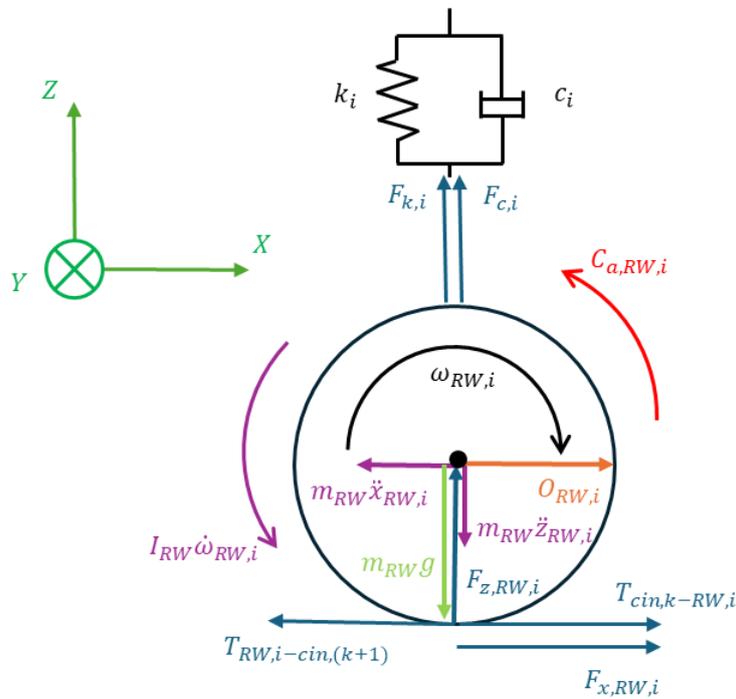


Figura 7.19 - Diagramma corpo libero road wheel i-esima (con $i \neq 1$ e $i \neq N$) in dinamica se $x_{C,RW,i} > d_{CG}$ (veicolo cingolato con N road wheels)

Equilibrio orizzontale:

$$F_{x,RW,i} + O_{RW,i} + T_{cin,k-RW,i} - T_{RW,i-cin,(k+1)} = m_{RW}\ddot{x}_{RW,i} \quad (7.47)$$

Equilibrio verticale:

$$F_{z,RW,i} + F_{k,i} + F_{c,i} - m_{RW}g = m_{RW}\ddot{z}_{RW,i} \quad (7.48)$$

Equilibrio alla rotazione:

$$(T_{RW,i-cin,(k+1)} - T_{cin,k-RW,i})r_{RW} - F_{x,RW,i}r_{RW} - C_{a,RW,i} = I_{RW}\dot{\omega}_{RW,i} \quad (7.49)$$

Per ricavare la coppia di attrito al perno si calcola la forza normale alla superficie del perno del caso statico:

$$F_{N,RW,i,stat} = \sqrt{O_{RW,i,stat}^2 + F_{k,i,stat}^2} \quad (7.50)$$

- Road Wheel i-esima (con $i \neq 1$ e $i \neq N$) se $x_{C,RW,i} < d_{CG}$

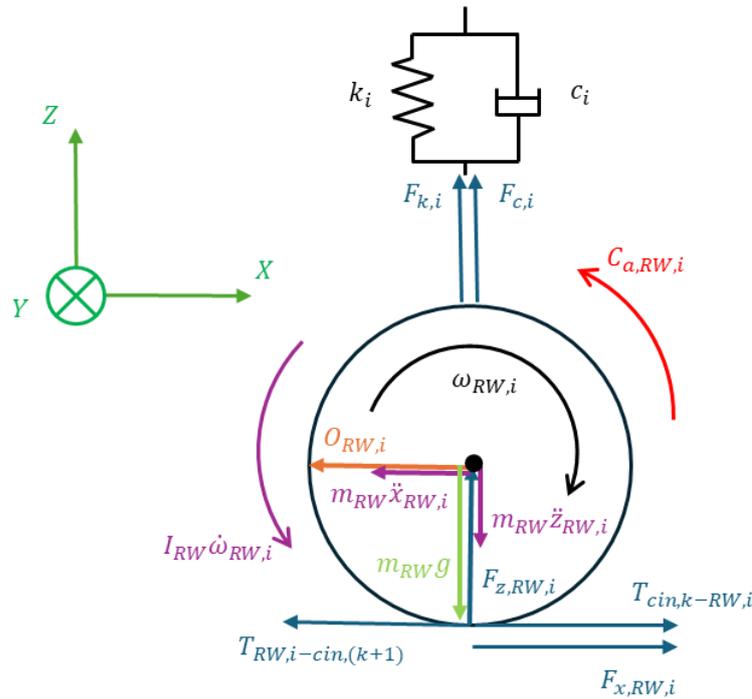


Figura 7.20 - Diagramma corpo libero road wheel i-esima (con $i \neq 1$ e $i \neq N$) in dinamica se $x_{C,RW,i} < d_{CG}$ (veicolo cingolato con N road wheels)

Equilibrio orizzontale:

$$F_{x,RW,i} - O_{RW,i} + T_{cin,k-RW,i} - T_{RW,i-cin,(k+1)} = m_{RW}\ddot{x}_{RW,i} \quad (7.51)$$

Equilibrio verticale:

$$F_{z,RW,i} + F_{k,i} + F_{c,i} - m_{RW}g = m_{RW}\ddot{z}_{RW,i} \quad (7.52)$$

Equilibrio alla rotazione:

$$(T_{RW,i-cin,(k+1)} - T_{cin,k-RW,i})r_{RW} - F_{x,RW,i}r_{RW} - C_{a,RW,i} = I_{RW}\dot{\omega}_{RW,i} \quad (7.53)$$

Per ricavare la coppia di attrito al perno si calcola la forza normale alla superficie del perno del caso statico:

$$F_{N,RW,i,stat} = \sqrt{O_{RW,i,stat}^2 + F_{k,i,stat}^2} \quad (7.54)$$

- Road wheel N

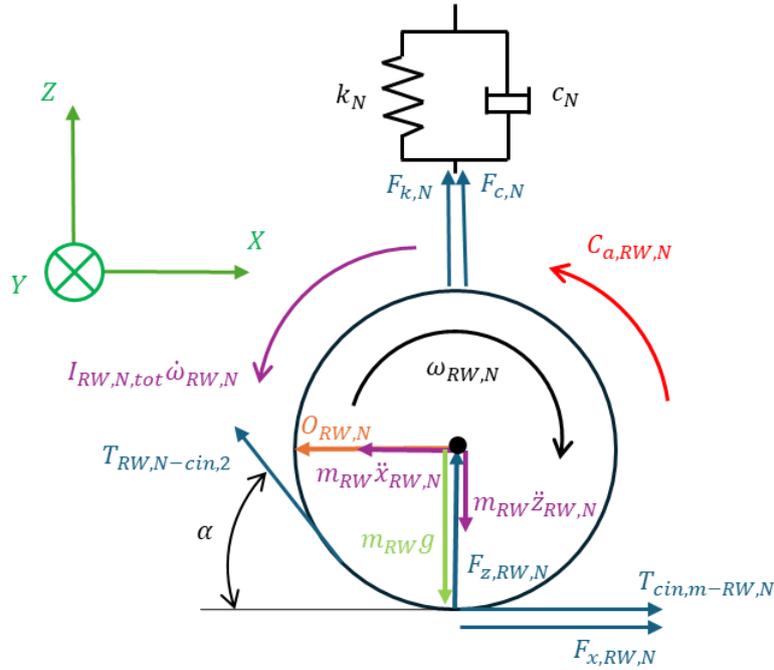


Figura 7.21 - Diagramma corpo libero road wheel N in dinamica (veicolo cingolato con N road wheels)

Il momento d'inerzia totale presente nel calcolo della coppia d'inerzia rotazionale deve tenere conto anche della massa del cingolo avvolto intorno alla road wheel N . Di conseguenza, al momento d'inerzia della road wheel N si aggiunge il momento d'inerzia del tratto 1 di cingolo avvolto, modellato come un anello sottile di massa $m_{cin,1}$ e di raggio r_{RW} :

$$I_{RW,N,tot} = I_{RW} + m_{cin,1}r_{RW}^2 \cdot \quad (7.55)$$

Equilibrio orizzontale:

$$F_{x,RW,N} + T_{cin,m-RW,N} - T_{RW,N-cin,2} \cos \alpha - O_{RW,N} = m_{RW}\ddot{x}_{RW,N} \quad (7.56)$$

Equilibrio verticale:

$$F_{z,RW,N} + T_{RW,N-cin,2} \sin \alpha + F_{k,N} + F_{c,N} - m_{RW}g = m_{RW}\ddot{z}_{RW,N} \quad (7.57)$$

Equilibrio alla rotazione:

$$(T_{RW,N-cin,2} - T_{cin,m-RW,N})r_{RW} - F_{x,RW,N}r_{RW} - C_{a,RW,N} = I_{RW,N,tot}\dot{\omega}_{RW,N} \quad (7.58)$$

Per ricavare la coppia di attrito al perno si calcola la forza normale alla superficie del perno del caso statico:

$$F_{N,RW,N,stat} = \sqrt{O_{RW,N,stat}^2 + F_{k,N,stat}^2} \quad (7.59)$$

- Massa sospesa

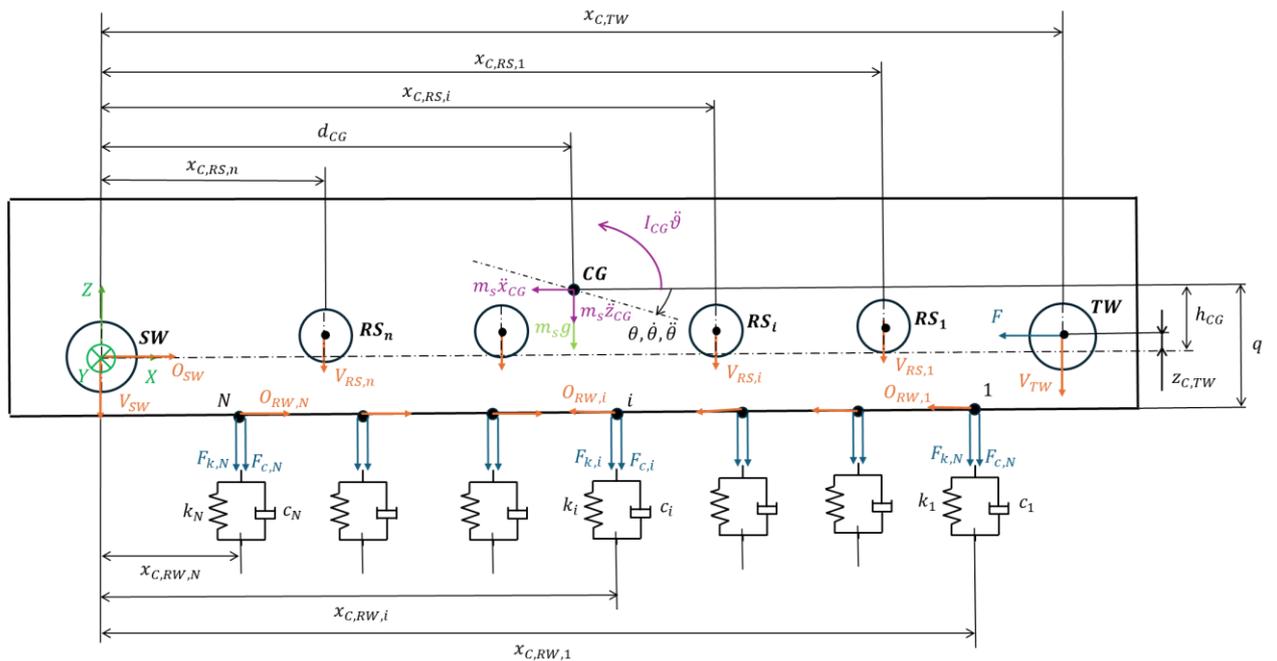


Figura 7.22 - Diagramma corpo libero massa sospesa in dinamica (veicolo cingolato con N road wheels)

Equilibrio orizzontale della massa sospesa:

$$O_{SW} + O_{RW,N} - O_{RW,1} \pm \sum_{i=2}^{N-1} O_{RW,i} - F = m_s \ddot{x}_{CG} \quad (7.60)$$

Equilibrio verticale della massa sospesa:

$$-\sum_{i=1}^N F_{k,i} - \sum_{i=1}^N F_{c,i} - \sum_{i=1}^n V_{RS,i} - m_s g - V_{TW} - V_{SW} = m_s \ddot{z}_{CG} \quad (7.61)$$

Equilibrio alla rotazione intorno a CG:

$$\begin{aligned}
& V_{TW} \cdot (x_{C,TW} - d_{CG}) + \sum_{i=1}^n V_{RS,i} (x_{C,RS,i} - d_{CG}) + F(h_{CG} - z_{C,TW}) - V_{SW}d_{CG} + \\
& -O_{SW}h_{CG} + O_{RW,1}q \pm \sum_{i=2}^{N-1} O_{RW,i}q - O_{RW,N}q + \sum_{i=1}^N F_{k,i}(x_{C,RW,i} - d_{CG}) + \\
& + \sum_{i=1}^N F_{c,i}(x_{C,RW,i} - d_{CG}) = I_{CG}\ddot{\theta}
\end{aligned} \tag{7.62}$$

Di seguito verranno mostrati i diagrammi di corpo libero e le equazioni dinamiche dei segmenti di cingolo congiungenti le varie ruote, in particolare, si analizzeranno le forze coassiali ai tratti del cingolo. Nella modellazione valgono le stesse ipotesi fatte per il veicolo cingolato con tre road wheels.

- Tratto di cingolo tra road wheel N e sprocket wheel

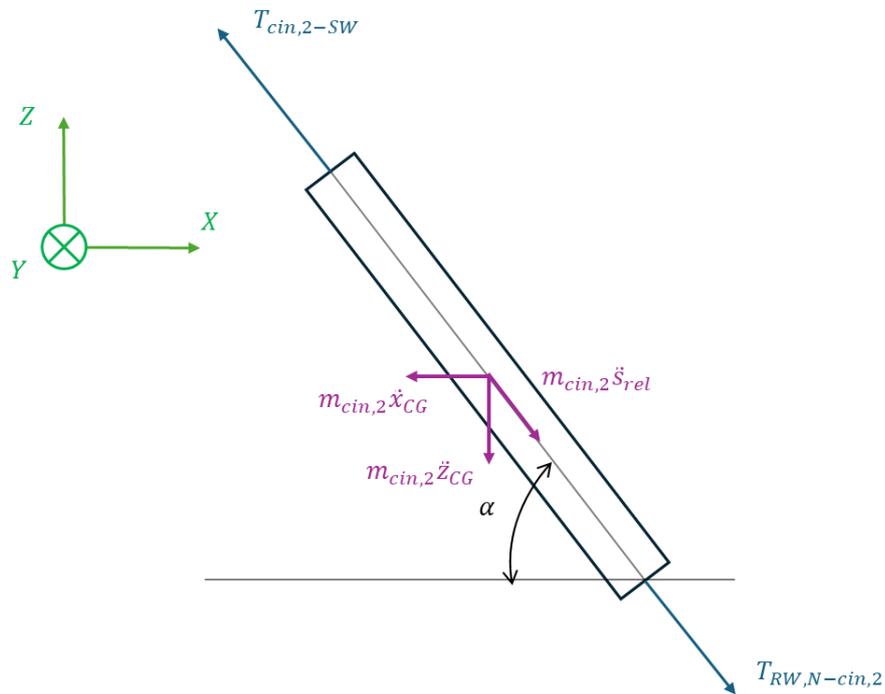


Figura 7.23 - Diagramma di corpo libero del tratto di cingolo tra road wheel N e sprocket wheel (veicolo cingolato con N road wheels)

Equilibrio di forze coassiali:

$$T_{cin,2-SW} + m_{cin,2}\ddot{x}_{CG} \cos \alpha - m_{cin,2}\ddot{s}_{rel} - m_{cin,2}\ddot{z}_{CG} \sin \alpha - T_{RW,N-cin,2} = 0 \tag{7.63}$$

- Tratto di cingolo tra sprocket wheel e ruota di supporto n

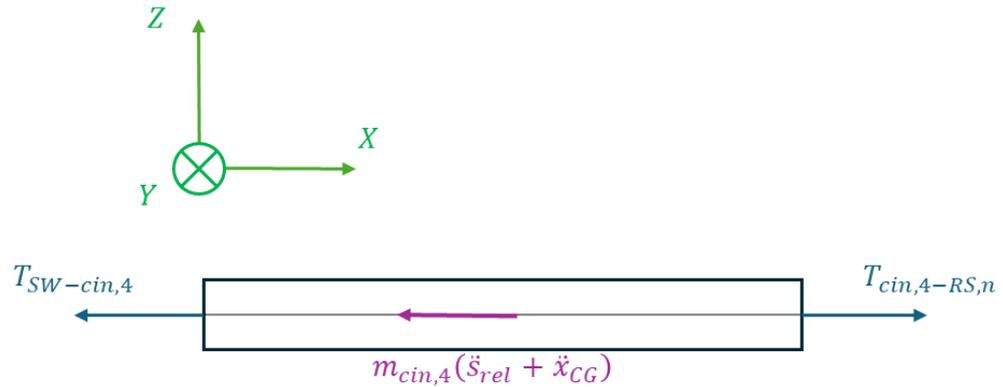


Figura 7.24 - Diagramma di corpo libero del tratto di cingolo tra sprocket wheel e ruota di supporto n (veicolo cingolato con N road wheels)

Equilibrio di forze coassiali:

$$T_{cin,4-RS,n} - T_{SW-cin,4} - m_{cin,4}\ddot{s}_{rel} - m_{cin,4}\ddot{x}_{CG} = 0 \quad (7.64)$$

- Tratto di cingolo k -esimo tra due ruote di supporto consecutive

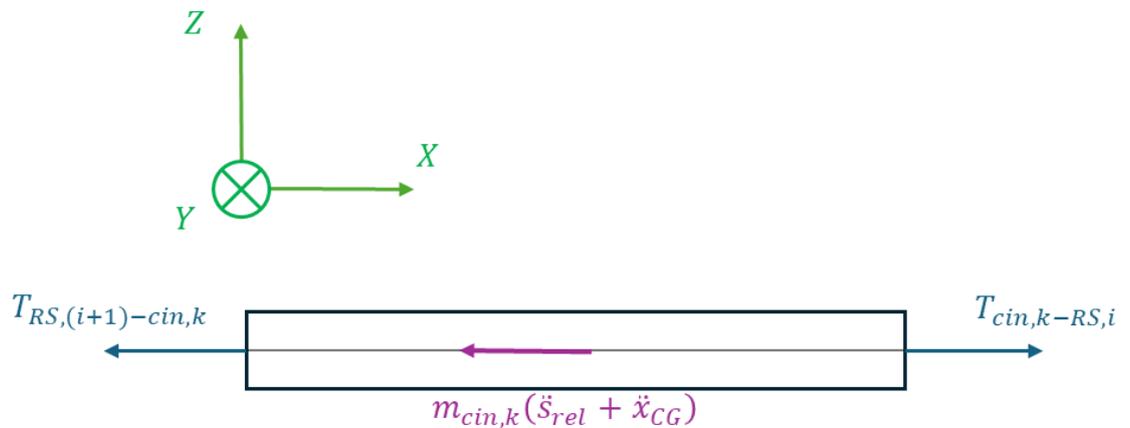


Figura 7.25 - Diagramma di corpo libero del tratto di cingolo k -esimo tra due ruote di supporto consecutive (veicolo cingolato con N road wheels)

Equilibrio di forze coassiali:

$$T_{cin,k-RS,i} - T_{RS,(i+1)-cin,k} - m_{cin,k}\ddot{s}_{rel} - m_{cin,k}\ddot{x}_{CG} = 0 \quad (7.65)$$

- Tratto di cingolo k-esimo tra la ruota di supporto 1 e la tensioner wheel

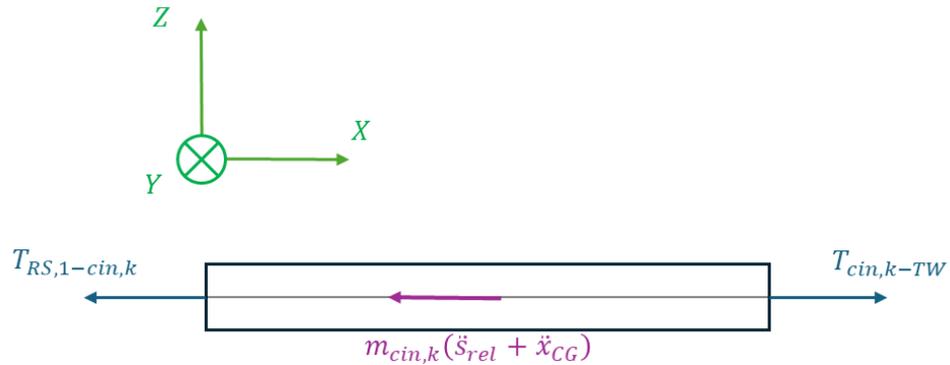


Figura 7.26 - Diagramma di corpo libero del tratto di cingolo k-esimo tra la ruota di supporto 1 e la tensioner wheel (veicolo cingolato con N road wheels)

Equilibrio di forze coassiali:

$$T_{cin,k-TW} - T_{RS,1-cin,k} - m_{cin,k}\ddot{s}_{rel} - m_{cin,k}\ddot{x}_{CG} = 0 \quad (7.66)$$

- Tratto di cingolo k-esimo tra la tensioner wheel e la road wheel 1

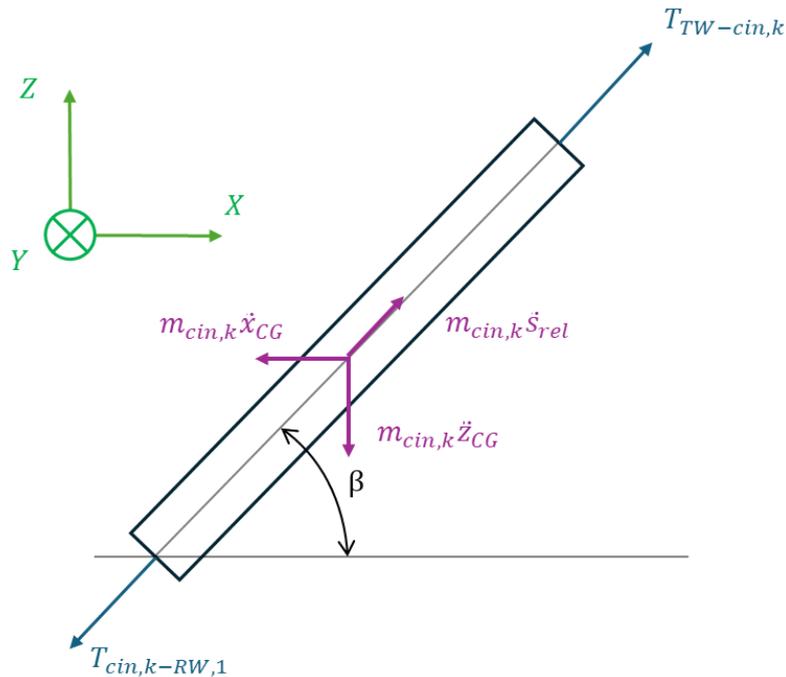


Figura 7.27 - Diagramma di corpo libero del tratto di cingolo k-esimo tra la tensioner wheel e la road wheel 1 (veicolo cingolato con N road wheels)

Equilibrio di forze coassiali:

$$T_{cin,k-RW,1} + m_{cin,k}\ddot{z}_{CG} \sin \beta + m_{cin,k}\ddot{x}_{CG} \cos \beta - m_{cin,k}\ddot{s}_{rel} - T_{TW-cin,k} = 0 \quad (7.67)$$

- Tratto di cingolo k-esimo tra due road wheel consecutive

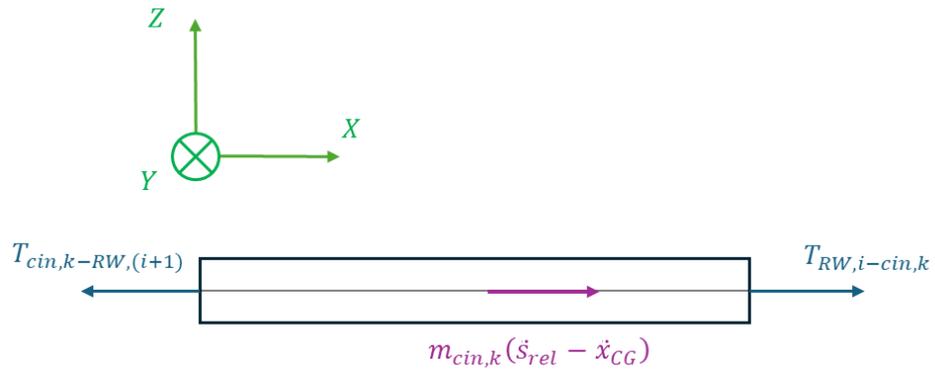


Figura 7.28 - Diagramma di corpo libero del tratto di cingolo k-esimo tra due road wheel consecutive (veicolo cingolato con N road wheels)

Equilibrio di forze coassiali:

$$T_{cin,k-RW,(i+1)} + m_{cin,k}\ddot{x}_{CG} - T_{RW,i-cin,k} - m_{cin,k}\ddot{s}_{rel} = 0 \quad (7.68)$$

8. Modello con cinque road wheels

Il modello di veicolo cingolato a cinque road wheels è stato modellato replicando la stessa configurazione standard presente nel software Adams Car, in particolare, quella utilizzata nel toolkit aggiuntivo ATV (Adams Tracked Vehicle), su cui ci ha lavorato un altro tesista del corso di laurea magistrale in ingegneria meccanica al Politecnico di Torino (Carlo Muccio).

Il software multibody consente di modellare in modo accurato, il comportamento di un veicolo cingolato in diverse condizioni operative. Per confrontare i risultati delle simulazioni ottenuti su ATV con quelli di questo modello, è stato necessario eseguire un post-processing dei dati. Tale operazione è stata svolta tramite uno script di conversione in Matlab, permettendo un confronto diretto tra i risultati dei due modelli e l'analisi delle differenze emerse.

L'analisi dei risultati ha permesso di validare la modellazione sviluppata in questo lavoro di tesi, fornendo un'indicazione del livello di accuratezza del modello.

8.1 Caratteristiche veicolo cingolato

Il veicolo cingolato con cinque road wheels è stato modellato adottando la stessa configurazione standard presente nel modello ATV. La configurazione prevede cinque road wheels, una tensioner wheel, una sprocket wheel e una ruota di supporto.

8.1.1 Configurazione geometrica

Le quote geometriche dei centri ruota, relative a un sistema di riferimento con origine nel centro della sprocket wheel, sono riportate in Tabella 8.1:

Tabella 8.1 - Quote geometriche dei centri ruota (veicolo cingolato con cinque road wheels)

RUOTA	x_C [m]	z_C [m]
Sprocket wheel	0	0
Tensioner wheel	4.610	0.001
Road wheel 1	3.761	-0.396
Road wheel 2	3.000	-0.396
Road wheel 3	2.330	-0.396
Road wheel 4	1.530	-0.396
Road wheel 5	0.830	-0.396
Ruota di supporto	2.690	0.089

La posizione del baricentro è spostata verso l'assale posteriore, dunque, la quota orizzontale del baricentro rispetto alla sprocket wheel è $d_{CG} = 2.159 m$. La quota verticale del baricentro, sempre rispetto alla sprocket wheel è pari a $h_{CG} = 0.394 m$.

La distanza verticale del baricentro dai punti di attacco delle sospensioni al telaio ha un valore di $q = 0.594 m$

I raggi di ciascuna ruota sono riportati in Tabella 8.2:

Tabella 8.2 - Raggi delle ruote (veicolo cingolato con cinque road wheels)

<i>RUOTA</i>	<i>r [m]</i>
Sprocket wheel	0.255
Tensioner wheel	0.250
Road wheel 1	0.330
Road wheel 2	0.330
Road wheel 3	0.330
Road wheel 4	0.330
Road wheel 5	0.330
Ruota di supporto	0.158

Conoscendo la posizione dei centri ruota di tutte le ruote e il loro raggio è possibile realizzare l'intero cingolo tramite il tool descritto nell'appendice, si possono quindi ricavare gli angoli di inclinazione α e β dei tratti inclinati del cingolo:

$$\alpha = 30.2^\circ$$

$$\beta = 30.9^\circ$$

In Figura 8.1 è rappresentata la configurazione geometrica delle ruote e del cingolo, realizzata tramite il tool calcolo catena descritto nell'appendice.

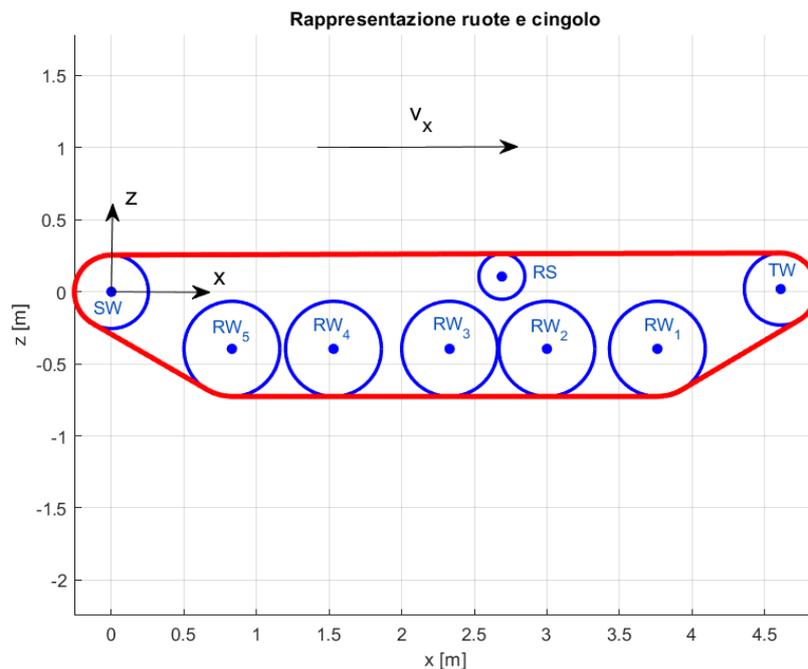


Figura 8.1 - Rappresentazione ruote e cingolo realizzata tramite il tool calcolo catena in ambiente Matlab (veicolo cingolato con cinque road wheels)

8.1.2 Caratteristiche fisiche

Le masse complessive di ciascun componente del modello di veicolo cingolato, che coincidono con quelle presenti nel modello ATV, sono riportate nella Tabella 8.3. Questi dati permettono di calcolare la massa totale del veicolo.

Tabella 8.3 - Massa dei componenti (veicolo cingolato con cinque road wheels)

COMPONENTE	Massa [kg]
Massa sospesa	13206
Sprocket wheel	100
Tensioner wheel	100
Road wheels	350
Ruota di supporto	60
Cingolo	2190
TOTALE	16006

I momenti di inerzia di ciascun componente elencati in Tabella 8.4 sono presi dal modello ATV:

Tabella 8.4 - Momenti d'inerzia dei componenti (veicolo cingolato con cinque road wheels)

MOMENTI D'INERZIA		
Grandezza	Valore	Unità di misura
$I_{y,CG}$	35000	$kg \cdot m^2$
I_{SW}	1.8	$kg \cdot m^2$
I_{TW}	1.8	$kg \cdot m^2$
I_{RW}	1.8	$kg \cdot m^2$
I_{RS}	0.05	$kg \cdot m^2$

8.1.3 Calcolo rigidezza e smorzamento lineare equivalenti della sospensione

Al fine di uniformare le caratteristiche delle sospensioni del modello ATV e del modello Matlab, è stato necessario convertire la rigidezza e lo smorzamento torsionali “linearizzati” presi dal modello ATV, dato che in quest’ultimo la sospensione è conformata come una barra di torsione, in smorzamento lineare.

8.1.3.1 Calcolo rigidezza lineare equivalente

Nel calcolo è stato preso il valore della rigidezza torsionale nell’intorno dell’origine, il cui valore è:

$$k_{tors} = 4.3 \cdot 10^5 \frac{N \cdot mm}{deg} = 4.3 \cdot 10^2 \frac{N \cdot m}{deg} = 4.3 \cdot 10^2 \frac{N \cdot m}{\frac{\pi}{180} rad} = 24.64 \cdot 10^3 \frac{N \cdot m}{rad} \quad (8.1)$$

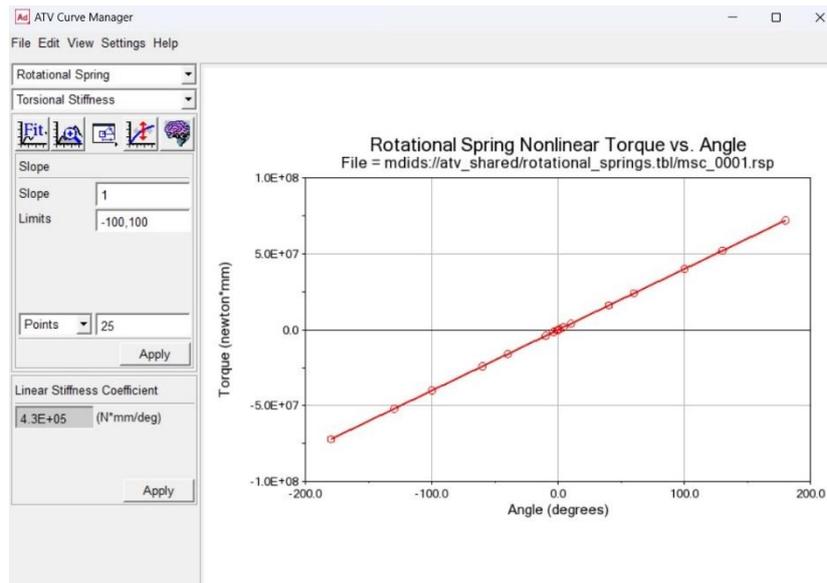


Figura 8.2 - Rigidezza torsionale nell'intorno dell'origine (modello ATV)

Per convertire la rigidezza torsionale in una rigidezza lineare, è stato necessario determinare un sistema equivalente di forze, tenendo conto di come una rotazione attorno a un punto (o asse) si traduca in uno spostamento lineare verticale proporzionale alla distanza dal punto di rotazione.

Se consideriamo un braccio rigido di lunghezza l (la distanza dal centro di rotazione), uno spostamento angolare α genera uno spostamento verticale δ all'estremità del braccio, dato da:

$$\delta = l \cdot \alpha \quad (8.2)$$

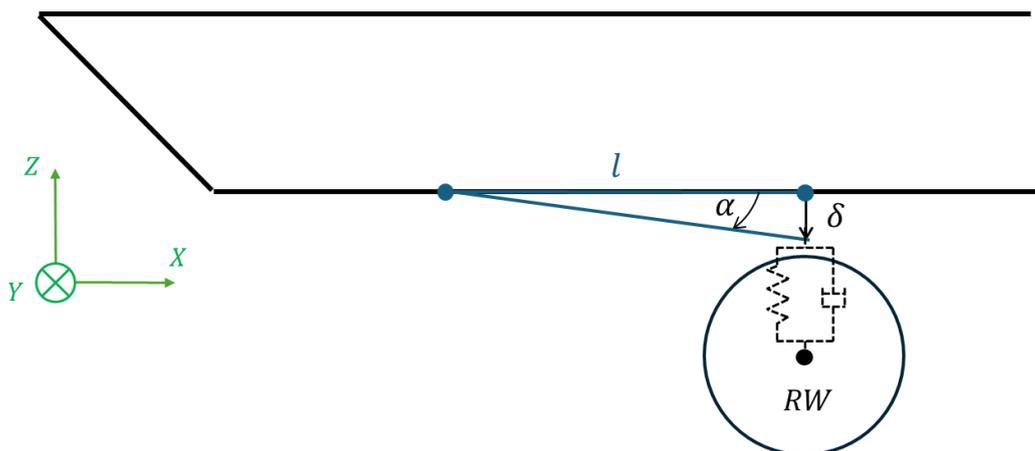


Figura 8.3 - Equivalenza tra spostamento angolare e spostamento lineare verticale

La rigidezza verticale lineare k_{lin} è definita come il rapporto tra la forza verticale F_{lin} applicata all'estremità del braccio e lo spostamento verticale δ :

$$k_{lin} = \frac{F_{lin}}{\delta} \quad (8.3)$$

Mentre la rigidità torsionale è definita come il rapporto tra il momento applicato M e lo spostamento angolare α :

$$k_{tors} = \frac{M}{\alpha} \quad (8.4)$$

Considerando che la forza verticale F_{lin} genera un momento M :

$$M = F_{lin} \cdot l \quad (8.5)$$

Si può ricavare la rigidità lineare verticale k_{lin} in funzione della rigidità torsionale k_{tors} :

$$k_{lin} = \frac{F_{lin}}{\delta} = \frac{M/l}{\delta} = \frac{M/l}{l \cdot \alpha} = \frac{M}{l^2 \cdot \alpha} = \frac{k_{tors}}{l^2} = 23.14 \cdot 10^4 \frac{N}{m} \quad (8.6)$$

In cui:

- $l = 0.326 \text{ m}$ è la componente lungo l'asse longitudinale del braccio nel modello ATV.

Poiché nel modello Matlab-Simulink i lati destro e sinistro del cingolo sono condensati in un'unica rappresentazione, il numero di ruote nel modello è ridotto a cinque, rispetto alle dieci presenti nel modello ATV. Di conseguenza, è necessario raddoppiare il valore corrispondente per compensare tale differenza:

$$k_{lin,tot} = 2 \cdot k_{lin} = 46.28 \cdot 10^4 \frac{N}{m} \quad (8.7)$$

Dunque, le rigidità delle sospensioni nel modello Matlab sono:

Tabella 8.5 - Rigidità delle sospensioni (veicolo cingolato con cinque road wheels)

RIGIDITÀ		
Grandezza	Valore	Unità di misura
k_1	$46.28 \cdot 10^4$	N/m
k_2	$46.28 \cdot 10^4$	N/m
k_3	$46.28 \cdot 10^4$	N/m
k_4	$46.28 \cdot 10^4$	N/m
k_5	$46.28 \cdot 10^4$	N/m

Una volta ottenute le rigidezze lineari si calcola la frequenza naturale verticale f_n del sistema:

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{tot}}{m_{s,tot}}} = 1.97 \text{ Hz} \quad (8.8)$$

Dove:

- $k_{tot} = \sum_{i=1}^5 k_i$ è la rigidezza verticale equivalente del veicolo;
- $m_{s,tot} = m_s + m_{SW} + m_{RS} + m_{TW} + m_{cin,SW} + m_{cin,RS} + m_{cin,TW}$ è la massa totale sostenuta dalla sospensione.

8.1.3.2 Calcolo smorzamento lineare equivalente

Il valore del coefficiente di smorzamento torsionale del modello ATV nell'intorno dell'origine è:

$$c_{tors} = 9 \cdot 10^4 \frac{N \cdot mm}{\frac{deg}{s}} = 90 \frac{N \cdot m}{\frac{deg}{s}} = 90 \frac{N \cdot m}{\frac{\pi \text{ rad}}{180 \text{ s}}} = 5157 \frac{N \cdot m \cdot s}{rad} \quad (8.9)$$

Per convertire lo smorzamento torsionale in smorzamento lineare è stato necessario risolvere il sistema equivalente di forze, partendo dal fatto che la potenza dissipata dallo smorzatore torsionale dev'essere la stessa potenza dissipata dallo smorzatore lineare verticale.

La potenza dissipata dallo smorzatore torsionale è:

$$P_{d,tors} = C_{tors} \cdot \omega \quad (8.10)$$

Dove:

- $P_{d,tors} [W]$: potenza dissipata dallo smorzatore torsionale;
- $C_{tors} [N \cdot m]$: momento torcente;
- $\omega \left[\frac{rad}{s} \right]$: velocità angolare.

Il momento torcente si può esprimere come:

$$C_{tors} = c_{tors} \omega \quad (8.11)$$

Quindi:

$$P_{d,tors} = c_{tors} \cdot \omega^2 \quad (8.12)$$

La potenza dissipata dallo smorzatore lineare è:

$$P_{d,lin} = F_{lin} \cdot v_z \quad (8.13)$$

Dove:

- $P_{d,lin} [W]$: potenza dissipata dallo smorzatore lineare;
- $F_{lin} [N]$: forza di smorzamento;
- $v_z \left[\frac{m}{s}\right]$: velocità verticale.

La forza di smorzamento si può esprimere come:

$$F_{lin} = c_{lin} v_z \quad (8.14)$$

In cui:

- $c_{lin} \left[\frac{N \cdot s}{m}\right]$: coefficiente di smorzamento lineare;
- $v_z \left[\frac{m}{s}\right]$: velocità verticale.

Di conseguenza:

$$P_{d,lin} = c_{lin} \cdot v_z^2 \quad (8.15)$$

La velocità verticale v_z si può ricavare come:

$$v_z = \omega \cdot l \quad (8.16)$$

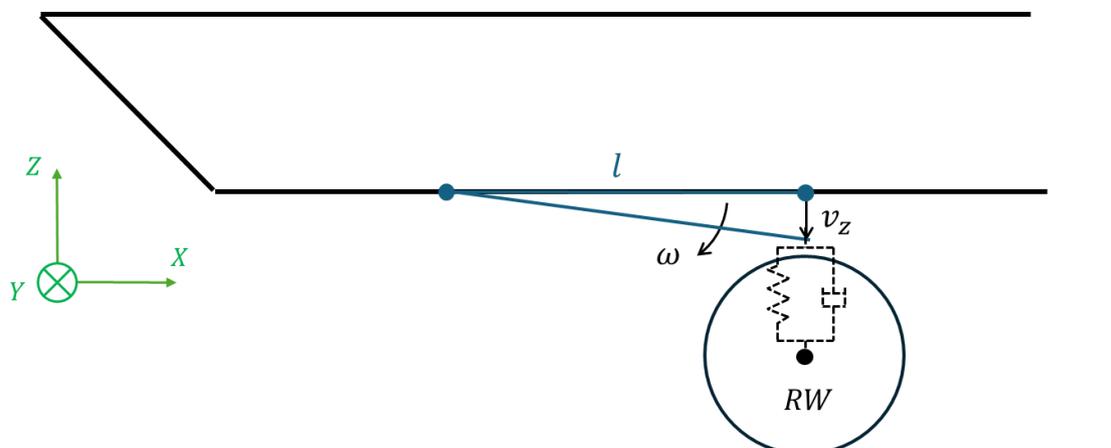


Figura 8.4 - Equivalenza tra velocità angolare e velocità lineare verticale

Sostituisco in 8.15:

$$P_{d,lin} = c_{lin} \cdot \omega^2 \cdot l^2 \quad (8.17)$$

Essendo che la potenza dissipata è la stessa uguaglio 8.12 e 8.17:

$$\begin{aligned} c_{tors} \cdot \omega^2 &= c_{lin} \cdot \omega^2 \cdot l^2 \\ c_{tors} &= c_{lin} \cdot l^2 \end{aligned} \quad (8.18)$$

Ricavo c_{lin} :

$$c_{lin} = \frac{c_{tors}}{l^2} = 48.43 \cdot 10^3 \frac{N \cdot s}{m} \quad (8.19)$$

Poiché nel modello Matlab i lati destro e sinistro del cingolo sono condensati in un'unica rappresentazione, il numero di ruote nel modello è ridotto a cinque, rispetto alle dieci presenti nel modello ATV. Di conseguenza, è necessario raddoppiare il valore corrispondente per compensare tale differenza:

$$c_{lin,tot} = 2 \cdot 48.43 \cdot 10^3 \frac{N \cdot s}{m} = 96.86 \cdot 10^3 \frac{N \cdot s}{m} = 9.7 \cdot 10^4 \frac{N \cdot s}{m} \quad (8.20)$$

I coefficienti di smorzamento delle sospensioni sono:

Tabella 8.6 - Coefficienti di smorzamento delle sospensioni (veicolo cingolato con cinque road wheels)

COEFFICIENTI DI SMORZAMENTO		
Grandezza	Valore	Unità di misura
c_1	$9.7 \cdot 10^4$	$N \cdot s/m$
c_2	$9.7 \cdot 10^4$	$N \cdot s/m$
c_3	$9.7 \cdot 10^4$	$N \cdot s/m$
c_4	$9.7 \cdot 10^4$	$N \cdot s/m$
c_5	$9.7 \cdot 10^4$	$N \cdot s/m$

Anche se non verranno usati nel modello, vengono calcolati lo smorzamento ottimo e lo smorzamento critico per confrontarli con il valore di smorzamento ottenuto dalla conversione.

Lo smorzamento ottimo $c_{ott,i}$ si calcola come:

$$c_{ott,i} = \frac{\sqrt{\frac{m_{s,tot} k_{tot}}{2}}}{5} = 2.6 \cdot 10^4 \frac{N \cdot s}{m} \quad (8.21)$$

Lo smorzamento critico $c_{cr,i}$ vale:

$$c_{cr,i} = \frac{2\sqrt{m_{s,tot}k_{tot}}}{5} = 7.5 \cdot 10^4 \frac{N \cdot s}{m} \quad (8.22)$$

Dunque, lo smorzamento ottenuto tramite la conversione è abbastanza elevato, dato che è superiore sia allo smorzamento ottimo che a critico. Di conseguenza, nelle simulazioni ci si aspetterà di osservare un comportamento più sovra smorzato.

8.2 Modellazione cingolo

La numerazione dei tratti di cingolo per convenzione parte dal tratto di cingolo avvolto attorno alla road wheel 5 e poi prosegue in senso orario, come mostrato in Figura 8.5.

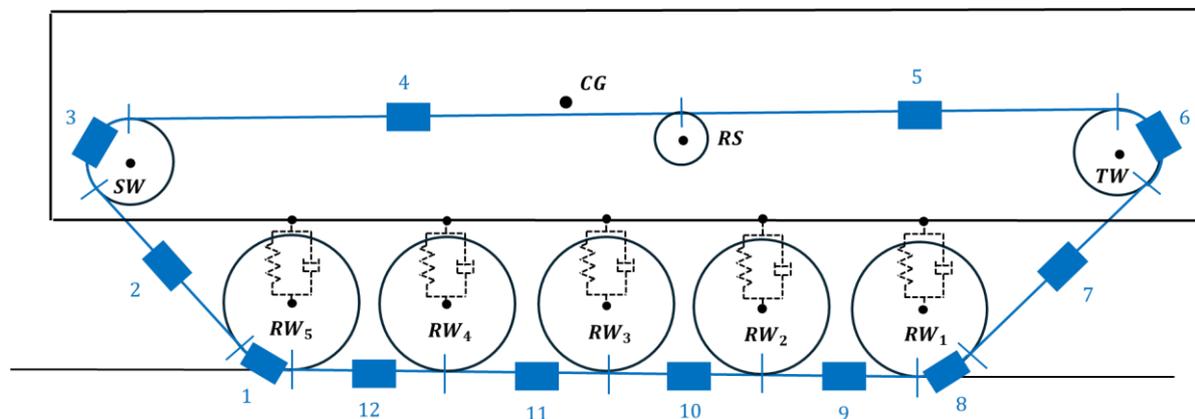


Figura 8.5 - Suddivisione dei tratti del cingolo (veicolo cingolato con cinque road wheels)

Per calcolare la massa di ciascun tratto del cingolo, si può applicare l'equazione 3.33 descritta precedentemente nella sezione 3.6.

Il peso dei tratti di cingolo viene sostenuto dalle varie ruote secondo la suddivisione descritta in 8.23. Per quanto riguarda le road wheels, sono sempre valide le considerazioni fatte nel modello precedentemente descritto, ovvero, il tratto di cingolo a contatto con il terreno non influisce sui perni delle road wheels, ma agisce esclusivamente nel modello di interazione cingolo-terreno.

$$m_{cin,SW} = m_{cin,1} + m_{cin,2} + m_{cin,3} + \frac{m_{cin,4}}{2}$$

$$m_{cin,RS} = \frac{m_{cin,4}}{2} + \frac{m_{cin,5}}{2}$$

$$m_{cin,TW} = \frac{m_{cin,5}}{2} + m_{cin,6} + m_{cin,7} + m_{cin,8}$$

$$m_{cin,RW,1} = \frac{m_{cin,9}}{2}$$

$$m_{cin,RW,2} = \frac{m_{cin,9}}{2} + \frac{m_{cin,10}}{2}$$

$$\begin{aligned}
m_{cin,RW,3} &= \frac{m_{cin,10}}{2} + \frac{m_{cin,11}}{2} \\
m_{cin,RW,4} &= \frac{m_{cin,11}}{2} + \frac{m_{cin,12}}{2} \\
m_{cin,RW,5} &= \frac{m_{cin,12}}{2}
\end{aligned}
\tag{8.23}$$

8.3 Modello statico

Nella risoluzione del problema statico vengono applicate le considerazioni descritte nel capitolo precedente, dunque, il sistema di equazioni risolvente è:

- 1) $-(1 + \cos \alpha) T + O_{SW} = 0$
- 2) $-\sin \alpha T + V_{SW} = m_{SW}g + m_{cin,SW}g + \left(\frac{1-K_{RS}}{2}\right) m_{cin,RS}g$
- 3) $(1 + \cos \beta) T = F$
- 4) $-\sin \beta T + V_{TW} = m_{TW}g + m_{cin,TW}g + \left(\frac{1-K_{RS}}{2}\right) m_{cin,RS}g$
- 5) $(\cos \beta - 1)T + O_{RW,1} = 0$
- 6) $\sin \beta T + F_{z,RW,1} + k_1 z_{CG} - k_1 l_1 \cdot \tan \theta = m_{RW}g$
- 7) $F_{z,RW,2} + k_2 z_{CG} - k_2 l_2 \cdot \tan \theta = m_{RW}g$
- 8) $F_{z,RW,3} + k_3 z_{CG} - k_3 l_3 \cdot \tan \theta = m_{RW}g$
- 9) $F_{z,RW,4} + k_4 z_{CG} + k_4 l_4 \cdot \tan \theta = m_{RW}g$
- 10) $(1 - \cos \alpha) T - O_{RW,5} = 0$
- 11) $\sin \alpha T + F_{z,RW,5} + k_5 z_{CG} + k_5 l_5 \cdot \tan \theta = m_{RW}g$
- 12) $O_{SW} - O_{RW,1} + O_{RW,5} = F$
- 13) $V_{TW} + V_{SW} + \left(\sum_{i=1}^5 k_i\right) z_{CG} - \left(\sum_{i=1}^3 k_i l_i - \sum_{i=4,5} k_i l_i\right) \tan \theta = -V_{RS} - m_s g$
- 14) $-V_{SW} d_{CG} + (x_{C,TW} - d_{CG}) V_{TW} - O_{SW} h_{CG} + O_{RW,1} q - O_{RW,5} q +$
 $+ \left[\sum_{i=1}^5 k_i (x_{C,RW,i} - d_{CG})\right] z_{CG} + \left[-\sum_{i=1}^3 k_i l_i (x_{C,RW,i} - d_{CG}) + \right.$
 $\left. \sum_{i=4,5} k_i l_i (x_{C,RW,i} - d_{CG})\right] \tan \theta = -F(h_{CG} - z_{C,TW}) - V_{RS}(x_{C,RS} - d_{CG})$

(8.24)

In totale ci sono tredici incognite, indicate nelle equazioni da un colore rosso:

- $T, V_{SW}, V_{TW}, O_{SW}, O_{RW,1}, O_{RW,5}, F_{z,RW,1}, F_{z,RW,2}, F_{z,RW,3}, F_{z,RW,4}, F_{z,RW,5}, z_{CG}, \tan \theta.$

Si prosegue riscrivendo il sistema nella seguente forma:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}
\tag{8.25}$$

dove:

- x è il vettore colonna delle incognite;
- A è la matrice dei coefficienti;
- b è il vettore colonna dei termini noti.

Il vettore colonna delle incognite x , di dimensione 13×1 , per una migliore visualizzazione, viene diviso in due sotto vettori:

$$x = [x_1 \quad x_2]^T$$

Dove:

- x_1 è un vettore riga, di dimensione 1×6 , che include la tensione, le reazioni vincolari della sprocket wheel, della tensioner e le reazioni vincolari orizzontali delle road wheels:

$$x_1 = [T \quad V_{SW} \quad V_{TW} \quad O_{SW} \quad O_{RW,1} \quad O_{RW,5}]$$

- x_2 è un vettore riga, di dimensione 1×7 , con all'interno le reazioni vincolari verticali al terreno in corrispondenza delle road wheels, lo scuotimento del baricentro e il beccheggio:

$$x_2 = [F_{z,RW,1} \quad F_{z,RW,2} \quad F_{z,RW,3} \quad F_{z,RW,4} \quad F_{z,RW,5} \quad z_{CG} \quad \tan \theta]$$

Analogamente al caso con tre road wheels elimino l'equilibrio orizzontale della massa sospesa dal sistema di equazioni, perciò, la matrice dei coefficienti A , di dimensione 13×13 , è:

$$A = [A_1 \quad A_2]$$

Dove:

- A_1 è una matrice di dimensione 13×6 :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -(1 + \cos \alpha) & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (1 + \cos \beta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (\cos \beta - 1) & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (1 - \cos \alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d_{CG} & (x_{C,TW} - d_{CG}) & -h_{CG} & q & -q \end{bmatrix}$$

- A_2 è una matrice di dimensione 13×7 :

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_1 l_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_2 l_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & k_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_3 l_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & k_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_4 l_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & k_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_5 l_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\sum_{i=1}^5 k_i \right) & 0 & 0 & 0 & 0 & - \left(\sum_{i=1}^3 k_i l_i - \sum_{i=4,5} k_i l_i \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sum_{i=1}^5 k_i (x_{C,RW,i} - d_{CG}) & - \sum_{i=1}^3 k_i l_i (x_{C,RW,i} - d_{CG}) & + \sum_{i=4,5} k_i l_i (x_{C,RW,i} - d_{CG}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il vettore b dei termini noti è un vettore colonna di dimensione 13×1 :

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ m_{SW}g + m_{cin,SW}g + \left(\frac{1 - K_{RS}}{2} \right) m_{cin,RS}g \\ F \\ m_{TW}g + m_{cin,TW}g + \left(\frac{1 - K_{RS}}{2} \right) m_{cin,RS}g \\ 0 \\ m_{RW}g \\ m_{RW}g \\ m_{RW}g \\ m_{RW}g \\ 0 \\ m_{RW}g \\ -V_{RS} - m_s g \\ -V_{RS}(x_{C,RS} - d_{CG}) - F(h_{CG} - z_{C,TW}) \end{bmatrix}$$

8.4 Modello dinamico

Nella creazione del modello dinamico del veicolo vengono rispettate le linee guida riportate nel capitolo precedente. Rispetto al modello base viene aggiunta una coppia resistente alla sprocket wheel per tenere conto delle resistenze aggiuntive che sono presenti del modello ATV.

Il coefficiente di resistenza all'avanzamento del cingolo c_{res} nel modello ATV è stato calcolato come:

$$c_{res} = \frac{P}{m_{tot}g \cdot v_x} \quad (8.26)$$

Dove:

- $P [W]$: somma delle potenze in uscite dalle due sprocket wheels del modello ATV;
- $v_x \left[\frac{m}{s} \right]$: velocità longitudinale del veicolo cingolato;

- m_{tot} [kg] : massa totale del veicolo cingolato;
- g $\left[\frac{m}{s^2}\right]$: accelerazione di gravità.

Una volta ottenuto il coefficiente di resistenza all'avanzamento del modello ATV si calcola la forza resistente F_{res} :

$$F_{res} = c_{res} \cdot m_{tot} g \quad (8.27)$$

Si riporta la forza resistente come una coppia resistente $C_{res,SW}$ applicata alla sprocket wheel:

$$C_{res,SW} = F_{res} \cdot r_{SW} \quad (8.28)$$

Quindi, la coppia motrice effettiva applicata alla sprocket wheel $C_{m,ef,SW}$ è:

$$C_{m,ef,SW} = C_{m,SW} - C_{res,SW} \quad (8.29)$$

Il sistema di equazioni risolvibile è:

- 1) $T_{SW-cin,4} + T_{cin,2-SW} \cos \alpha - O_{SW} - m_{SW} \ddot{x}_{CG} + \ddot{\theta} m_{SW} b_{SW} \sin \gamma_{SW} = \dot{\theta}^2 m_{SW} b_{SW} \cos \gamma_{SW}$
- 2) $-T_{cin,2-SW} \sin \alpha + V_{SW} - m_{SW} \ddot{z}_{CG} - \ddot{\theta} m_{SW} b_{SW} \cos \gamma_{SW} = m_{SW} g + m_{cin,SW} g + \left(\frac{1-K_{RS}}{2}\right) m_{cin,RS} g + \dot{\theta}^2 m_{SW} b_{SW} \sin \gamma_{SW}$
- 3) $T_{SW-cin,4} r_{SW} - T_{cin,2-SW} r_{SW} - \frac{I_{SW,tot}}{r_{SW}} \ddot{s}_{rel} = -C_{m,ef,SW} + C_{a0,SW} + c_{perno} \omega_{SW}$
- 4) $-T_{cin,4-RS} r_{RS} + T_{RS-cin,5} r_{RS} - \frac{I_{RS}}{r_{RS}} \ddot{x}_{rel} = C_{a0,RS} + c_{perno} \omega_{SW} \frac{r_{SW}}{r_{RS}}$
- 5) $-T_{cin,5-TW} - T_{TW-cin,7} \cos \beta - m_{TW} \ddot{x}_{CG} + \ddot{\theta} m_{TW} b_{TW} \sin \gamma_{TW} = -F + -\dot{\theta}^2 m_{TW} b_{TW} \cos \gamma_{TW}$
- 6) $-T_{TW-cin,7} \sin \beta + V_{TW} - m_{TW} \ddot{z}_{CG} + \ddot{\theta} m_{TW} b_{TW} \cos \gamma_{TW} = m_{TW} g + m_{cin,TW} g + \left(\frac{1-K_{RS}}{2}\right) m_{cin,RS} g + \dot{\theta}^2 m_{TW} b_{TW} \sin \gamma_{TW}$
- 7) $-T_{cin,5-TW} r_{TW} + T_{TW-cin,7} r_{TW} - \frac{I_{TW,tot}}{r_{TW}} \ddot{s}_{rel} = C_{a0,TW} + c_{perno} \omega_{SW} \frac{r_{SW}}{r_{TW}}$
- 8) $T_{cin,7-RW,1} \cos \beta - T_{RW,1-cin,9} + O_{RW,1} - m_{RW} \ddot{x}_{CG} + \ddot{\theta} m_{RW} b_1 \sin \gamma_1 = -F_{x,RW,1} - \dot{\theta}^2 m_{RW} b_1 \cos \gamma_1$
- 9) $T_{cin,7-RW,1} \sin \beta + F_{z,RW,1} = -k_1 z_{CG} + k_1 l_1 \cdot \tan \theta + k_1 h_{RW,1} - c_1 \dot{z}_{CG} + c_1 \dot{\theta} b_1 \cos \gamma_1 + c_1 \dot{h}_{RW,1} + m_{RW} \ddot{h}_{RW,1} + m_{RW} g$
- 10) $-T_{cin,7-RW,1} r_{RW} + T_{RW,1-cin,9} r_{RW} - \frac{I_{RW,1,tot}}{r_{RW}} \ddot{s}_{rel} = F_{x,RW,1} r_{RW} + C_{a0,RW,1} + c_{perno} \omega_{SW} \frac{r_{SW}}{r_{RW}}$
- 11) $T_{cin,9-RW,2} - T_{RW,2-cin,10} + O_{RW,2} - m_{RW} \ddot{x}_{CG} + \ddot{\theta} m_{RW} b_2 \sin \gamma_2 = -F_{x,RW,2} + -\dot{\theta}^2 m_{RW} b_2 \cos \gamma_2$

- 12) $F_{z,RW,2} = -k_2 z_{CG} + k_2 l_2 \cdot \tan \theta + k_2 h_{RW,2} - c_2 \dot{z}_{CG} + c_2 \dot{\theta} b_2 \cos \gamma_2 + c_2 \dot{h}_{RW,2} + m_{RW} \ddot{h}_{RW,2} + m_{RW} g$
- 13) $-T_{cin,9-RW,2} r_{RW} + T_{RW,2-cin,10} r_{RW} - \frac{I_{RW}}{r_{RW}} \ddot{S}_{rel} = F_{x,RW,2} r_{RW} + C_{a0,RW,2} + c_{perno} \omega_{SW} \frac{r_{SW}}{r_{RW}}$
- 14) $T_{cin,10-RW,3} - T_{RW,3-cin,11} + O_{RW,3} - m_{RW} \ddot{x}_{CG} + \ddot{\theta} m_{RW} b_3 \sin \gamma_3 = -F_{x,RW,3} + -\dot{\theta}^2 m_{RW} b_3 \cos \gamma_3$
- 15) $F_{z,RW,3} = -k_3 z_{CG} + k_3 l_3 \cdot \tan \theta + k_3 h_{RW,3} - c_3 \dot{z}_{CG} + c_3 \dot{\theta} b_3 \cos \gamma_3 + c_3 \dot{h}_{RW,3} + m_{RW} \ddot{h}_{RW,3} + m_{RW} g$
- 16) $-T_{cin,10-RW,3} r_{RW} + T_{RW,3-cin,11} r_{RW} - \frac{I_{RW}}{r_{RW}} \ddot{S}_{rel} = F_{x,RW,3} r_{RW} + C_{a0,RW,3} + c_{perno} \omega_{SW} \frac{r_{SW}}{r_{RW}}$
- 17) $T_{cin,11-RW,4} - T_{RW,4-cin,12} - O_{RW,4} - m_{RW} \ddot{x}_{CG} + \ddot{\theta} m_{RW} b_4 \sin \gamma_4 = -F_{x,RW,4} + \dot{\theta}^2 m_{RW} b_4 \cos \gamma_4$
- 18) $F_{z,RW,4} = -k_4 z_{CG} - k_4 l_4 \cdot \tan \theta + k_4 h_{RW,4} - c_4 \dot{z}_{CG} - c_4 \dot{\theta} b_4 \cos \gamma_4 + c_4 \dot{h}_{RW,4} + m_{RW} \ddot{h}_{RW,4} + m_{RW} g$
- 19) $-T_{cin,11-RW,4} r_{RW} + T_{RW,4-cin,12} r_{RW} - \frac{I_{RW}}{r_{RW}} \ddot{S}_{rel} = F_{x,RW,4} r_{RW} + C_{a0,RW,4} + c_{perno} \omega_{SW} \frac{r_{SW}}{r_{RW}}$
- 20) $T_{cin,12-RW,5} - T_{RW,5-cin,2} \cos \alpha - O_{RW,5} - m_{RW} \ddot{x}_{CG} + \ddot{\theta} m_{RW} b_5 \sin \gamma_5 = -F_{x,RW,5} + \dot{\theta}^2 m_{RW} b_5 \cos \gamma_5$
- 21) $T_{RW,5-cin,2} \sin \alpha + F_{z,RW,5} = m_{RW} g - k_5 z_{CG} - k_5 l_5 \cdot \tan \theta + k_5 h_{RW,5} - c_5 \dot{z}_{CG} - c_5 \dot{\theta} b_5 \cos \gamma_5 + c_5 \dot{h}_{RW,5} + m_{RW} \ddot{h}_{RW,5} + m_{RW} g$
- 22) $-T_{cin,12-RW,5} r_{RW} + T_{RW,5-cin,2} r_{RW} - \frac{I_{RW,5,tot}}{r_{RW}} \ddot{S}_{rel} = F_{x,RW,5} r_{RW} + C_{a0,RW,5} + c_{perno} \omega_{SW} \frac{r_{SW}}{r_{RW}}$
- 23) $O_{SW} - O_{RW,1} - O_{RW,2} - O_{RW,3} + O_{RW,4} + O_{RW,5} - m_s \ddot{x}_{CG} = F$
- 24) $-V_{TW} - V_{SW} - m_s \ddot{z}_{CG} = m_s g + V_{RS} + \sum_{i=1}^5 k_i z_{CG} + (-k_1 l_1 - k_2 l_2 - k_3 l_3 + k_4 l_4 + k_5 l_5) \tan \theta - \sum_{i=1}^5 k_i h_{RW,i} + \sum_{i=1}^5 c_i \dot{z}_{CG} + (-c_1 b_1 \cos \gamma_1 - c_2 b_2 \cos \gamma_2 + -c_3 b_3 \cos \gamma_3 + c_4 b_4 \cos \gamma_4 + c_5 b_5 \cos \gamma_5) \dot{\theta} - \sum_{i=1}^5 c_i \dot{h}_{RW,i}$
- 25) $-V_{SW} d_{CG} + V_{TW} \cdot (x_{C,TW} - d_{CG}) - O_{SW} h_{CG} + O_{RW,1} q + O_{RW,2} q + O_{RW,3} q + -O_{RW,4} q - O_{RW,5} q - I_{CG} \ddot{\theta} = -V_{RS} (x_{C,RS} - d_{CG}) - F (h_{CG} - z_{C,TW}) + -[\sum_{i=1}^5 k_i (x_{C,RW,i} - d_{CG})] z_{CG} + [k_1 l_1 (x_{C,RW,1} - d_{CG}) + k_2 l_2 (x_{C,RW,2} - d_{CG}) + k_3 l_3 (x_{C,RW,3} - d_{CG}) - k_4 l_4 (x_{C,RW,4} - d_{CG}) - k_5 l_5 (x_{C,RW,5} - d_{CG})] \tan \theta + + \sum_{i=1}^5 k_i (x_{C,RW,i} - d_{CG}) h_{RW,i} - [\sum_{i=1}^5 c_i (x_{C,RW,i} - d_{CG})] \dot{z}_{CG} + + [c_1 b_1 \cos \gamma_1 (x_{C,RW,1} - d_{CG}) + c_2 b_2 \cos \gamma_2 (x_{C,RW,2} - d_{CG}) + + c_3 b_3 \cos \gamma_3 (x_{C,RW,3} - d_{CG}) - c_4 b_4 \cos \gamma_4 (x_{C,RW,4} - d_{CG}) + -c_5 b_5 \cos \gamma_5 (x_{C,RW,5} - d_{CG})] \dot{\theta} + \sum_{i=1}^5 c_i (x_{C,RW,i} - d_{CG}) \dot{h}_{RW,i}$

$$\begin{aligned}
26) & -T_{RW,5-cin,2} + T_{cin,2-SW} + m_{cin,2}\ddot{x}_{CG} \cos \alpha - m_{cin,2}\ddot{s}_{rel} - m_{cin,2}\ddot{z}_{CG} \sin \alpha = 0 \\
27) & -T_{SW-cin,4} + T_{cin,4-RS} - m_{cin,4}\ddot{x}_{CG} - m_{cin,4}\ddot{s}_{rel} = 0 \\
28) & -T_{RS-cin,5} + T_{cin,5-TW} - m_{cin,5}\ddot{x}_{CG} - m_{cin,5}\ddot{s}_{rel} = 0 \\
29) & -T_{TW-cin,7} + T_{cin,7-RW,1} + m_{cin,7}\ddot{x}_{CG} \cos \beta - m_{cin,7}\ddot{s}_{rel} + m_{cin,7}\ddot{z}_{CG} \sin \beta = 0 \\
30) & -T_{RW,1-cin,9} + T_{cin,9-RW,2} + m_{cin,9}\ddot{x}_{CG} - m_{cin,9}\ddot{s}_{rel} = 0 \\
31) & -T_{RW,2-cin,10} + T_{cin,10-RW,3} + m_{cin,10}\ddot{x}_{CG} - m_{cin,10}\ddot{s}_{rel} = 0 \\
32) & -T_{RW,3-cin,11} + T_{cin,11-RW,4} + m_{cin,11}\ddot{x}_{CG} - m_{cin,11}\ddot{s}_{rel} = 0 \\
33) & -T_{RW,4-cin,12} + T_{cin,12-RW,5} + m_{cin,12}\ddot{x}_{CG} - m_{cin,12}\ddot{s}_{rel} = 0
\end{aligned} \tag{8.30}$$

Le incognite totali sono trentatré e sono indicate nelle equazioni da un colore rosso:

- $T_{SW-cin,4}, T_{cin,4-RS}, T_{RS-cin,5}, T_{cin,5-TW}, T_{TW-cin,7}, T_{cin,7-RW,1}, T_{RW,1-cin,9}, T_{cin,9-RW,2}, T_{RW,2-cin,10}, T_{cin,10-RW,3}, T_{RW,3-cin,11}, T_{cin,11-RW,4}, T_{RW,4-cin,12}, T_{cin,12-RW,5}, T_{RW,5-cin,2}, T_{cin,2-SW}, V_{SW}, V_{TW}, O_{SW}, O_{RW,1}, O_{RW,2}, O_{RW,3}, O_{RW,4}, O_{RW,5}, F_{z,RW,1}, F_{z,RW,2}, F_{z,RW,3}, F_{z,RW,4}, F_{z,RW,5}, \ddot{x}_{CG}, \ddot{s}_{rel}, \ddot{z}_{CG}, \ddot{\theta}$.

Si prosegue riscrivendo il sistema nella seguente forma:

$$Ax = b \tag{8.31}$$

Dove:

- x è il vettore colonna delle incognite;
- A è la matrice dei coefficienti;
- b è il vettore colonna dei termini noti.

Il vettore colonna delle incognite x , di dimensione 33×1 , per una migliore visualizzazione, viene diviso in quattro sotto vettori:

$$x = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]^T$$

Dove:

- x_1 è un vettore riga, di dimensione 1×8 , contenente le tensioni del cingolo:

$$x_1 = [T_{SW-cin,4} \quad T_{cin,4-RS} \quad T_{RS-cin,5} \quad T_{cin,5-TW} \quad T_{TW-cin,7} \quad T_{cin,7-RW,1} \quad T_{RW,1-cin,9} \quad T_{cin,9-RW,2}]$$

- x_2 è un vettore riga, di dimensione 1×8 , contenente le tensioni del cingolo:

$$x_2 = [T_{RW,2-cin,10} \quad T_{cin,10-RW,3} \quad T_{RW,3-cin,11} \quad T_{cin,11-RW,4} \quad T_{RW,4-cin,12} \quad T_{cin,12-RW,5} \quad T_{RW,5-cin,2} \quad T_{cin,2-SW}]$$

- x_3 è un vettore riga, di dimensione 1×8 , che include le reazioni vincolari della sprocket wheel, della tensioner wheel e le reazioni vincolari orizzontali delle road wheels:

$$x_3 = [V_{SW} \quad V_{TW} \quad O_{SW} \quad O_{RW,1} \quad O_{RW,2} \quad O_{RW,3} \quad O_{RW,4} \quad O_{RW,5}]$$

- x_4 è un vettore riga, di dimensione 1×5 , con all'interno le reazioni vincolari verticali al terreno in corrispondenza delle road wheels:

$$x_4 = [F_{z,RW,1} \quad F_{z,RW,2} \quad F_{z,RW,3} \quad F_{z,RW,4} \quad F_{z,RW,5}]$$

- x_5 è un vettore riga, di dimensione 1×4 , che contiene i termini di accelerazione:

$$x_5 = [\ddot{x}_{CG} \quad \ddot{s}_{rel} \quad \ddot{z}_{CG} \quad \ddot{\theta}]$$

La matrice dei coefficienti A , di dimensione 33×33 , viene divisa in dieci sottomatrici. Le sottomatrici sono organizzate in cinque per riga, al fine di facilitare l'associazione della matrice A al vettore delle incognite. Sono inoltre disposte in due per colonna per semplificare la visualizzazione, considerando l'elevato numero di righe che caratterizza la matrice A :

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} & A_{1,5} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} & A_{2,5} \end{bmatrix}$$

Dove:

- $A_{1,1}$ è una matrice di dimensione 13×8 :

$$A_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r_{SW} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r_{RS} & r_{RS} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\cos \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r_{TW} & r_{TW} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \beta & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_{RW} & r_{RW} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_{RW} \end{pmatrix}$$

- $A_{2,1}$ è una matrice di dimensione 20×8 :

$$A_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $A_{1,2}$ è una matrice di dimensione 13×8 :

$$A_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_{SW} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r_{RW} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $A_{2,2}$ è una matrice di dimensione 20×8 :

$$A_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r_{RW} & r_{RW} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r_{RW} & r_{RW} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_{RW} & r_{RW} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $A_{1,3}$ è una matrice di dimensione 13×8 :

$$A_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $A_{2,3}$ è una matrice di dimensione 20×8 :

$$A_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -d_{CG} & (x_{C,TW} - d_{CG}) & -h_{CG} & q & q & q & -q & -q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $A_{1,4}$ è una matrice di dimensione 13×5 :

$$A_{1,4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $A_{2,4}$ è una matrice di dimensione 20×5 :

$$A_{2,4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $A_{1,5}$ è una matrice di dimensione 13×4 :

$$A_{1,5} = \begin{pmatrix} -m_{SW} & 0 & 0 & m_{SW}b_{SW} \sin \gamma_{SW} \\ 0 & 0 & -m_{SW} & -m_{SW}b_{SW} \cos \gamma_{SW} \\ 0 & -\frac{I_{SW,tot}}{r_{SW}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{I_{RS}}{r_{RS}} & 0 & 0 \\ -m_{TW} & 0 & 0 & m_{TW}b_{TW} \sin \gamma_{TW} \\ 0 & 0 & -m_{TW} & m_{TW}b_{TW} \cos \gamma_{TW} \\ 0 & -\frac{I_{TW,tot}}{r_{TW}} & 0 & 0 \\ -m_{RW} & 0 & 0 & m_{RW}b_1 \sin \gamma_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{I_{RW,1,tot}}{r_{RW}} & 0 & 0 \\ -m_{RW} & 0 & 0 & m_{RW}b_2 \sin \gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{I_{RW}}{r_{RW}} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $A_{2,5}$ è una matrice di dimensione 20×4 :

$$A_{2,5} = \begin{pmatrix} -m_{RW} & 0 & 0 & m_{RW} b_3 \sin \gamma_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{I_{RW}}{r_{RW}} & 0 & 0 \\ -m_{RW} & 0 & 0 & m_{RW} b_4 \sin \gamma_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{I_{RW}}{r_{RW}} & 0 & 0 \\ -m_{RW} & 0 & 0 & m_{RW} b_5 \sin \gamma_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{I_{RW,5,tot}}{r_{RW}} & 0 & 0 \\ -m_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{CG} \\ m_{cin,2} \cos \alpha & -m_{cin,2} & -m_{cin,2} \sin \alpha & 0 \\ -m_{cin,4} & -m_{cin,4} & 0 & 0 \\ -m_{cin,5} & -m_{cin,5} & 0 & 0 \\ m_{cin,7} \cos \beta & -m_{cin,7} & m_{cin,7} \sin \beta & 0 \\ m_{cin,9} & -m_{cin,9} & 0 & 0 \\ m_{cin,10} & -m_{cin,10} & 0 & 0 \\ m_{cin,11} & -m_{cin,11} & 0 & 0 \\ m_{cin,12} & -m_{cin,12} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il vettore colonna dei termini noti b , di dimensione 33×1 , viene suddiviso in due componenti distinte. La prima parte è costituita dai termini che variano in funzione degli input del problema specifico, mentre la seconda parte è composta da termini costanti, che rimangono invariati indipendentemente dagli input considerati:

$$b = B_{IN} \cdot b_{IN} + B_{cost} \cdot b_{cost} \quad (8.32)$$

Dove:

- Il vettore colonna b_{IN} , di dimensione 28×1 , rappresenta gli input del problema ed è suddiviso in otto sottovettori. Tra questi, tre hanno dimensione unitaria e possono quindi essere considerati scalari:

$$b_{IN} = [b_{IN,1} \quad b_{IN,2} \quad b_{IN,3} \quad b_{IN,4} \quad b_{IN,5} \quad b_{IN,6} \quad b_{IN,7} \quad b_{IN,8}]^T$$

In cui:

- $b_{IN,1}$ è un vettore riga, di dimensione 1×8 , che include la forza di tensionamento, la coppia motrice applicata alla sprocket wheel, le forze di trazione e la velocità di rotazione della sprocket wheel:

$$b_{IN,1} = [F \quad C_{m,ef,SW} \quad F_{x,RW,1} \quad F_{x,RW,2} \quad F_{x,RW,3} \quad F_{x,RW,4} \quad F_{x,RW,5} \quad \omega_{SW}]$$

- $b_{IN,2}$ è un vettore riga di dimensione 1×2 , contenente lo scuotimento del baricentro e la velocità di traslazione verticale del baricentro:

$$b_{IN,2} = [z_{CG} \quad \dot{z}_{CG}]$$

- $b_{IN,3}$, $b_{IN,4}$, $b_{IN,5}$ sono degli scalari che contengono rispettivamente il beccheggio del veicolo, la velocità di beccheggio e il quadrato di quest'ultima:

$$b_{IN,3} = [\tan \theta]$$

$$b_{IN,4} = [\dot{\theta}]$$

$$b_{IN,5} = [\dot{\theta}^2]$$

- $b_{IN,6}$, $b_{IN,7}$, $b_{IN,8}$ sono dei vettori riga, di dimensione 1×5 , che includono rispettivamente lo spostamento verticale, la velocità di traslazione verticale e l'accelerazione verticale delle road wheels:

$$b_{IN,6} = [h_{RW,1} \quad h_{RW,2} \quad h_{RW,3} \quad h_{RW,4} \quad h_{RW,5}]$$

$$b_{IN,7} = [\dot{h}_{RW,1} \quad \dot{h}_{RW,2} \quad \dot{h}_{RW,3} \quad \dot{h}_{RW,4} \quad \dot{h}_{RW,5}]$$

$$b_{IN,8} = [\ddot{h}_{RW,1} \quad \ddot{h}_{RW,2} \quad \ddot{h}_{RW,3} \quad \ddot{h}_{RW,4} \quad \ddot{h}_{RW,5}]$$

- La matrice B_{IN} , di dimensione 33×28 , è associata al vettore b_{IN} e suddivisa in sedici sottomatrici. Queste sottomatrici sono disposte in otto per riga, per facilitare l'associazione della matrice B_{IN} al vettore degli input, e in due per colonna, al fine di semplificarne la visualizzazione, dato l'elevato numero di righe che caratterizza la matrice. Tra queste sottomatrici, sei hanno dimensioni unitarie e possono pertanto essere considerate come vettori:

$$B_{IN} = \begin{bmatrix} B_{IN,1,1} & B_{IN,1,2} & B_{IN,1,3} & B_{IN,1,4} & B_{IN,1,5} & B_{IN,1,6} & B_{IN,1,7} & B_{IN,1,8} \\ B_{IN,2,1} & B_{IN,2,2} & B_{IN,2,3} & B_{IN,2,4} & B_{IN,2,5} & B_{IN,2,6} & B_{IN,2,7} & B_{IN,2,8} \end{bmatrix}$$

In cui:

- $B_{IN,1,1}$ è una matrice di dimensione 13×8 :

$$B_{IN,1,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{perno} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{r_{SW}}{r_{RS}} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{perno} \frac{r_{SW}}{r_{TW}} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{RW} & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{perno} \frac{r_{SW}}{r_{RW}} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_{RW} & 0 & 0 & 0 & c_{perno} \frac{r_{SW}}{r_{RW}} \end{pmatrix}$$

- $B_{IN,2,1}$ è una matrice di dimensione 20×8 :

$$B_{IN,2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_{RW} & 0 & 0 & c_{perno} \frac{r_{SW}}{r_{RW}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_{RW} & 0 & c_{perno} \frac{r_{SW}}{r_{RW}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_{RW} & c_{perno} \frac{r_{SW}}{r_{RW}} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(h_{CG} - z_{c,TW}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $B_{IN,1,2}$ è una matrice di dimensione 13×2 :

$$B_{IN,1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -k_1 & -c_1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -k_2 & -c_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $B_{IN,2,2}$ è una matrice di dimensione 20×2 :

$$B_{IN,2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -k_3 & -c_3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -k_4 & -c_4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -k_5 & -c_5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \sum_{i=1}^5 k_i & \sum_{i=1}^5 c_i \\ -\sum_{i=1}^5 k_i(x_{C,RW,i} - d_{CG}) & -\sum_{i=1}^5 c_i(x_{C,RW,i} - d_{CG}) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $B_{IN,1,3}$ è un vettore colonna di dimensione 13×1 :

$$B_{IN,1,3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ k_1 l_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ k_2 l_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $B_{IN,2,3}$ è un vettore colonna di dimensione 20×1 :

$$B_{IN,2,3} = \begin{pmatrix} 0 \\ k_3 l_3 \\ 0 \\ 0 \\ -k_4 l_4 \\ 0 \\ 0 \\ -k_5 l_5 \\ 0 \\ 0 \\ -\sum_{i=1}^3 k_i l_i + \sum_{i=4,5} k_i l_i \\ \sum_{i=1}^3 k_i l_i (x_{C,RW,i} - d_{CG}) - \sum_{i=4,5} k_i l_i (x_{C,RW,i} - d_{CG}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $B_{IN,1,4}$ è un vettore colonna di dimensione 13×1 :

$$B_{IN,1,4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ c_1 b_1 \cos \gamma_1 \\ 0 \\ 0 \\ c_2 b_2 \cos \gamma_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $B_{IN,2,4}$ è un vettore colonna di dimensione 20×1 :

$$B_{IN,2,4} = \begin{pmatrix} 0 \\ c_3 b_3 \cos \gamma_3 \\ 0 \\ 0 \\ -c_4 b_4 \cos \gamma_4 \\ 0 \\ 0 \\ -c_5 b_5 \cos \gamma_5 \\ 0 \\ 0 \\ -\sum_{i=1}^3 c_i b_i \cos \gamma_i + \sum_{i=4,5} c_i b_i \cos \gamma_i \\ \sum_{i=1}^3 c_i b_i \cos \gamma_i (x_{C,RW,i} - d_{CG}) - \sum_{i=4,5} c_i b_i \cos \gamma_i (x_{C,RW,i} - d_{CG}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $B_{IN,1,5}$ è un vettore colonna di dimensione 13×1 :

$$B_{IN,1,5} = \begin{pmatrix} m_{SW}b_{SW} \cos \gamma_{SW} \\ m_{SW}b_{SW} \sin \gamma_{SW} \\ 0 \\ 0 \\ -m_{TW}b_{TW} \cos \gamma_{TW} \\ m_{TW}b_{TW} \sin \gamma_{TW} \\ 0 \\ -m_{RW}b_1 \cos \gamma_1 \\ 0 \\ 0 \\ -m_{RW}b_2 \cos \gamma_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $B_{IN,2,5}$ è un vettore colonna di dimensione 20×1 :

$$B_{IN,2,5} = \begin{pmatrix} -m_{RW}b_3 \cos \gamma_3 \\ 0 \\ 0 \\ m_{RW}b_4 \cos \gamma_4 \\ 0 \\ 0 \\ m_{RW}b_5 \cos \gamma_5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $B_{IN,1,6}$ è una matrice di dimensione 13×5 :

$$B_{IN,1,6} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $B_{IN,2,6}$ è una matrice di dimensione 20×5 :

$$B_{IN,2,6} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 & -k_4 & -k_5 \\ k_1(x_{C,RW,1} - d_{CG}) & k_2(x_{C,RW,2} - d_{CG}) & k_3(x_{C,RW,3} - d_{CG}) & k_4(x_{C,RW,4} - d_{CG}) & k_5(x_{C,RW,5} - d_{CG}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $B_{IN,1,7}$ è una matrice di dimensione 13×5 :

$$B_{IN,1,7} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $B_{IN,2,7}$ è una matrice di dimensione 20×5 :

$$B_{IN,2,7} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_1 & -c_2 & -c_3 & -c_4 & -c_5 \\ c_1(x_{C,RW,1} - d_{CG}) & c_2(x_{C,RW,2} - d_{CG}) & c_3(x_{C,RW,3} - d_{CG}) & c_4(x_{C,RW,4} - d_{CG}) & c_5(x_{C,RW,5} - d_{CG}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $B_{IN,1,8}$ è una matrice di dimensione 13×5 :

$$B_{IN,1,8} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{RW} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{RW} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $B_{IN,2,8}$ è una matrice di dimensione 20×5 :

$$B_{IN,2,8} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{RW} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{RW} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{RW} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- b_{cost} è un vettore colonna, di dimensione 16×1 , contenente i termini costanti e suddiviso in due sotto vettori:

$$b_{cost} = [b_{cost,1} \quad b_{cost,2}]^T$$

In cui:

- $b_{cost,1}$ è un vettore riga di dimensione 1×8 :

$$b_{cost,1} = [C_{a0,SW} \quad C_{a0,RS} \quad C_{a0,TW} \quad C_{a0,RW,1} \quad C_{a0,RW,2} \quad C_{a0,RW,3} \quad C_{a0,RW,4} \quad C_{a0,RW,5}]$$

- $b_{cost,2}$ è un vettore riga di dimensione 1×8 :

$$b_{cost,2} = [m_{SWg} \quad m_{TWg} \quad m_{RWg} \quad m_{sg} \quad m_{cin,SWg} \quad m_{cin,TWg} \quad V_{RS} \quad m_{cin,RSg}]$$

- B_{cost} è una matrice, di dimensione 33×16 , composta da quattro sottomatrici, associata al vettore b_{cost} :

$$B_{cost} = \begin{bmatrix} B_{cost,1,1} & B_{cost,1,2} \\ B_{cost,1,2} & B_{cost,2,2} \end{bmatrix}$$

In cui:

- $B_{cost,1,1}$ è una matrice di dimensione 13×8 :

$$B_{cost,1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \left(\frac{1 - K_{RS}}{2}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \left(\frac{1 - K_{RS}}{2}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $B_{cost,2,2}$ è una matrice di dimensione 20×8 :

$$B_{cost,2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(x_{C,RS} - d_{CG}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8.5 Validazione modello

Per validare il modello sviluppato in Matlab-Simulink, sono state condotte tre prove sperimentali, i cui risultati sono stati confrontati con quelli ottenuti tramite il modello ATV. Qualora si desideri ottenere informazioni riguardo le modalità con cui sono stati ottenuti i risultati nel toolkit ATV, è necessario fare riferimento alla tesi dello studente menzionato in precedenza. Le prove sono state eseguite nelle stesse condizioni operative, permettendo una comparazione accurata dei dati e una valutazione dell'affidabilità del modello Matlab-Simulink.

Le prove effettuate sono:

- 1) Prova statica;
- 2) Prova di accelerazione su strada piana;
- 3) Prova di marcia a velocità costante su profilo stradale sinusoidale;
- 4) Risposta in frequenza.

8.5.1 Prova statica

In questa verifica sono state effettuate delle prove statiche per diversi valori di tensionamento e si è valutato il trend delle reazioni vincolari verticali delle ruote superiori (sprocket wheel, tensioner wheel) al variare del tensionamento. Per quanto riguarda la reazione vincolare della ruota di supporto, come descritto precedentemente nell'equazione 3.35, dipende unicamente dal coefficiente K_{RS} .

Come primo test è stato mantenuto il valore di default del coefficiente $K_{RS} = 0.5$, utilizzato fino a questo punto. I risultati ottenuti sono riportati in Figura 8.6, le linee continue rappresentano le grandezze calcolate con il modello Matlab-Simulink mentre quelle riguardanti il modello ATV sono tratteggiate.

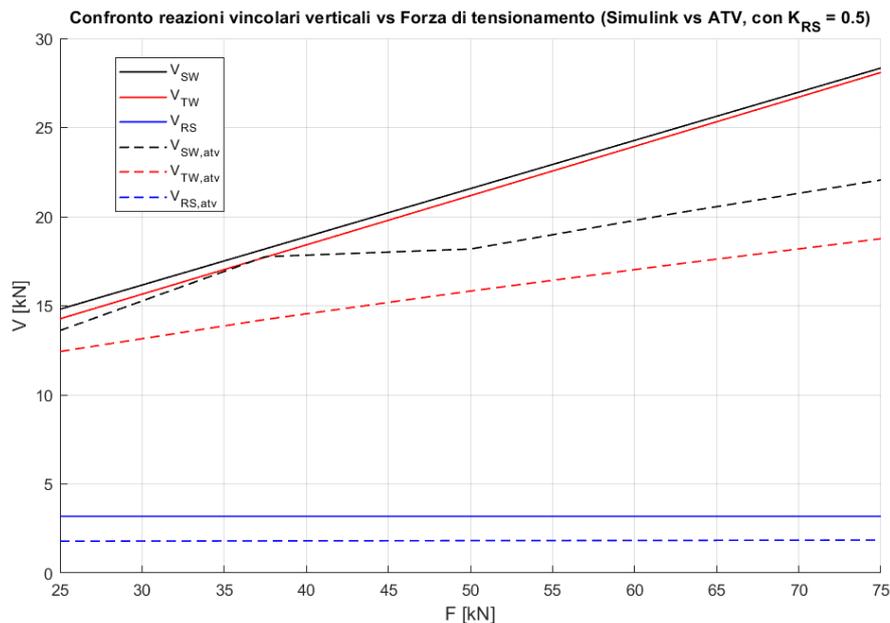


Figura 8.6 - Confronto reazioni vincolari verticali vs Forza di tensionamento (Simulink vs ATV, con $K_{RS} = 0.5$)

Si osserva che, in entrambi i modelli, le reazioni vincolari della sprocket wheel e della tensioner wheel aumentano in modo praticamente lineare con l'incremento del tensionamento. Inoltre, sia su Matlab-Simulink che su ATV, si osserva che la reazione vincolare sulla sprocket wheel risulta sempre superiore rispetto a quella sulla tensioner wheel.

Di conseguenza, è la sprocket wheel a subire il maggior carico di sollecitazione. Tuttavia, nel modello Matlab-Simulink, la differenza tra le due reazioni vincolari risulta meno pronunciata e i valori sono più elevati rispetto a quelli ottenuti nel modello ATV, con un

incremento più rapido all'aumentare del tensionamento. Questo avviene perché il modello Matlab-Simulink è meno dettagliato e non include alcuni componenti del veicolo cingolato, presenti invece nel modello ATV, che permettono di assorbire parte della forza di tensionamento.

Per quanto riguarda la ruota di supporto, si nota come la reazione vincolare del modello Matlab-Simulink è addirittura il doppio di quella del modello ATV, per cui valore di K_{RS} scelto risulta eccessivo, mentre l'ipotesi di mantenere il coefficiente costante è corretta dato che anche su ATV la reazione vincolare non è influenzata molto dal tensionamento.

Di conseguenza, per migliorare la sovrapposizione, come valore finale si è scelto di utilizzare un valore costante $K_{RS} = 0.25$ che permetta di ottenere una reazione verticale simile a quella presente nel modello ATV, i risultati sono mostrati in Figura 8.7.

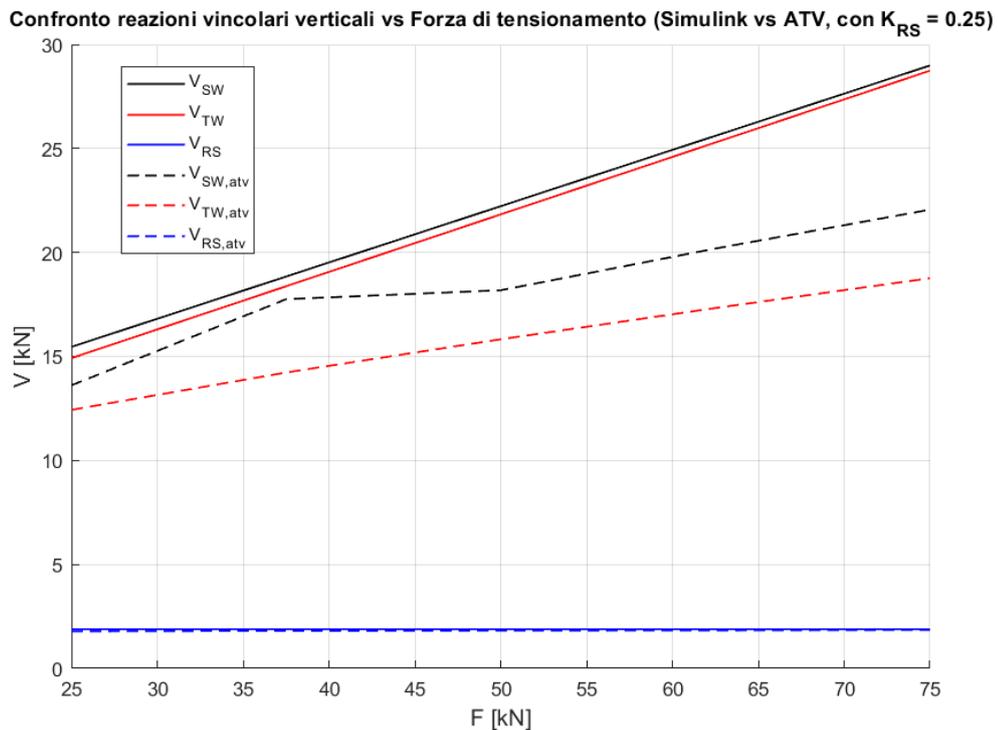


Figura 8.7 - Confronto reazioni vincolari verticali vs Forza di tensionamento (Simulink vs ATV, con $K_{RS} = 0.25$)

8.5.2 Prova di accelerazione su strada piana

Questo paragrafo descrive la prova di validazione di accelerazione su strada piana, nella quale il veicolo cingolato effettua una rampa di velocità in cui si passa in 8 secondi progressivamente da 1.3 m/s a 13.5 m/s, con una forza di tensionamento di 50 kN.

Nel modello Matlab-Simulink, i parametri relativi al contatto cingolo-terreno e alla coppia di attrito al perno sono inizialmente impostati come nella configurazione a tre road wheels, come descritto nelle sezioni 3.7 e 3.8. L'obiettivo di questa fase di validazione è ottimizzare tali parametri per garantire un allineamento accurato della dinamica longitudinale tra i due modelli.

Il primo passo consiste nell'eseguire la prova sul modello ATV per ottenere i risultati. Successivamente, si utilizza la storia temporale della coppia motrice applicata alla sprocket

wheel come input di coppia nel modello Matlab-Simulink, partendo sempre da una velocità iniziale di 1.3 m/s e con una forza di tensionamento di 50 kN.

Per allineare correttamente i due modelli, è innanzitutto necessario raddoppiare la coppia proveniente dal modello ATV, poiché in Matlab-Simulink i lati destro e sinistro del cingolo sono condensati in un'unica rappresentazione. Inoltre, è fondamentale considerare le resistenze aggiuntive presenti nel modello ATV; pertanto, come descritto precedentemente nella sezione 8.3, nel modello Matlab-Simulink viene introdotta una coppia resistente sulla sprocket wheel $C_{res,SW}$.

Di conseguenza, la coppia motrice effettiva applicata alla sprocket wheel $C_{m,ef,SW}$ è:

$$C_{m,ef,SW} = 2 \cdot C_{m,SW,atv} - C_{res,SW} \quad (8.33)$$

In Figura 8.8 in nero è rappresentato la coppia motrice applicata nel modello ATV raddoppiata, in verde è rappresentata la coppia resistente da aggiungere al modello Matlab mentre la linea blu indica la coppia motrice effettivamente applicata alla sprocket wheel nel modello Matlab-Simulink.

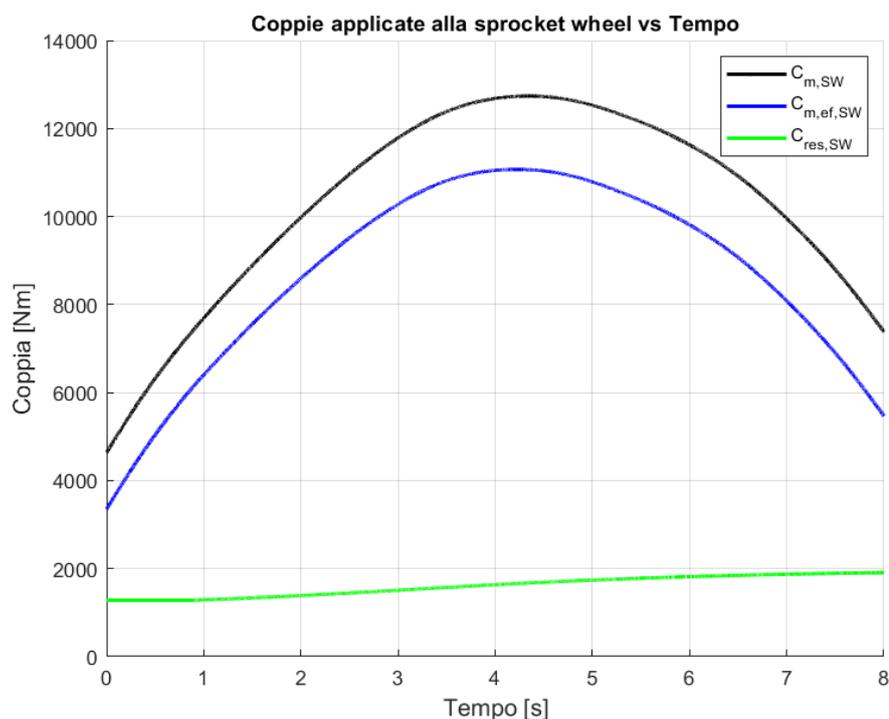


Figura 8.8 - Coppie applicate alla sprocket wheel vs Tempo (veicolo cingolato con cinque road wheels)

L'inserimento della coppia resistente risulta cruciale per garantire l'allineamento tra i due modelli. In Figura 8.9, i risultati del modello ATV sono rappresentati dalla linea tratteggiata rossa, mentre le curve ottenute con il modello Matlab-Simulink sono indicate dalle linee verdi e blu. In particolare, la linea continua verde mostra la simulazione effettuata includendo la coppia resistente, mentre la linea continua blu rappresenta la simulazione in condizioni prive di coppia resistente.

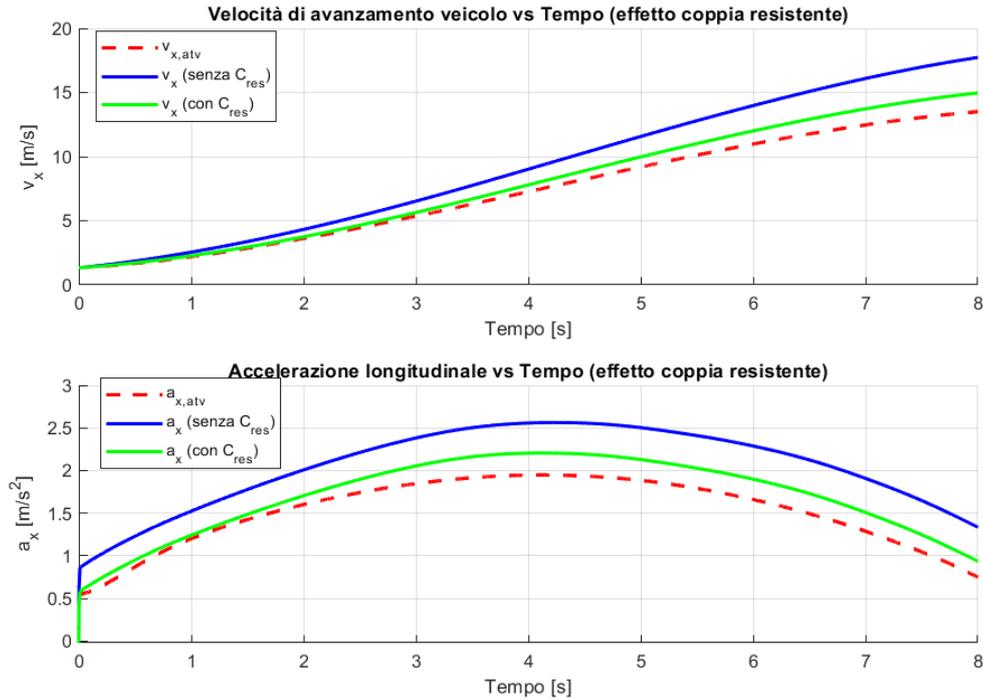


Figura 8.9 - Velocità di avanzamento veicolo (figura in alto) e accelerazione longitudinale (figura in basso) vs Tempo (effetto coppia resistente) nel veicolo cingolato con cinque road wheels

Dall'analisi della figura si osserva che, in assenza di coppia resistente, l'accelerazione del modello Matlab-Simulink risulta eccessiva, con una conseguente discrepanza significativa nelle velocità rispetto al modello ATV. Dunque, nelle successive simulazioni, la coppia resistente sarà sempre inclusa all'interno del modello.

Tuttavia, il risultato ottenuto non è ancora soddisfacente: l'accelerazione del modello Matlab-Simulink risulta ancora eccessiva, evidenziando perdite insufficienti. In particolare, si nota un aumento dell'accelerazione con la crescita della velocità, suggerendo che la causa potrebbe risiedere in un attrito insufficiente. Per equilibrare le perdite tra i due modelli, è stato quindi deciso di intervenire sui coefficienti di attrito coulombiano e viscoso al perno.

Nel modello Matlab-Simulink, infatti, le perdite dovute alla rotazione del cingolo risultano sottostimate, poiché il cingolo non è modellato in dettaglio. Al contrario in ATV, essendo un modello multibody, viene descritta accuratamente sia la dinamica di ogni singolo pattino del cingolo sia l'interazione tra di essi.

Per stimare i coefficienti di attrito ideali, si è partiti simulando il sistema con i valori nominali dei coefficienti di attrito:

- $\mu_{nom} = 0.005$, valore del coefficiente di attrito dinamico di Coulomb;
- $c_{perno,nom} = 1 \frac{N \cdot m}{rad/s}$, coefficiente di smorzamento viscoso del perno.

Successivamente, sono state condotte altre due simulazioni incrementando progressivamente il coefficiente di attrito dinamico, prima raddoppiandolo e poi triplicandolo, con l'obiettivo di analizzare l'influenza dell'attrito sulla dinamica del veicolo. I risultati di queste simulazioni sono illustrati in Figura 8.10. In particolare, i grafici relativi

alle simulazioni con attrito nominale, raddoppiato e triplicato sono indicati rispettivamente in blu, verde e azzurro.

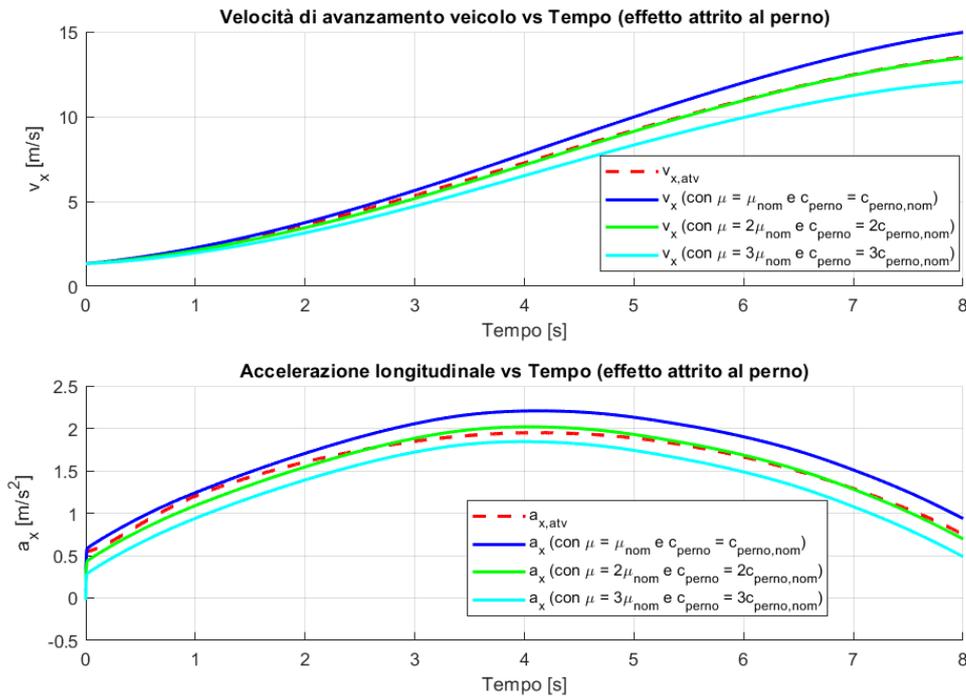


Figura 8.10 - Velocità di avanzamento veicolo (figura in alto) e accelerazione longitudinale (figura in basso) vs Tempo (effetto attrito al perno) nel veicolo cingolato con cinque road wheels

Dall'osservazione dei risultati si evince che la scelta ottimale è raddoppiare il valore del coefficiente di attrito rispetto al valore nominale, poiché in tale configurazione i grafici di accelerazione e velocità risultano pressoché sovrapponibili a quelli ottenuti dal modello di riferimento ATV.

I valori scelti per i coefficienti sono:

- $\mu = 2 \cdot \mu_{nom} = 0.10$;
- $c_{perno} = 2 \cdot c_{perno,nom} = 2 \frac{N \cdot m}{rad/s}$.

Un'ulteriore complicazione nel confronto tra i due modelli riguarda l'uniformità della cinematica del cingolo. Nel modello Matlab-Simulink, come descritto nella sezione 3.5, è stato utilizzato finora il raggio effettivo della sprocket wheel ($r_{SW} = 0.255 \text{ m}$) nel vincolo cinematico. Invece, nel modello ATV viene impiegato un raggio equivalente $r_{SW,eq}$ per correlare la velocità assiale del cingolo relativa a veicolo \dot{s}_{rel} con la velocità di rotazione della sprocket wheel ω_{SW} :

$$\dot{s}_{rel} = \omega_{SW} r_{SW,eq} \quad (8.34)$$

In cui:

- $r_{SW,eq} = 0.275 \text{ m}$

Questo aspetto è analizzato in Figura 8.11, in cui sono presentate due simulazioni: una che impiega il raggio equivalente fornito dal modello ATV nella cinematica del cingolo, e l'altra in cui si utilizza, come di consueto, il raggio della sprocket wheel.

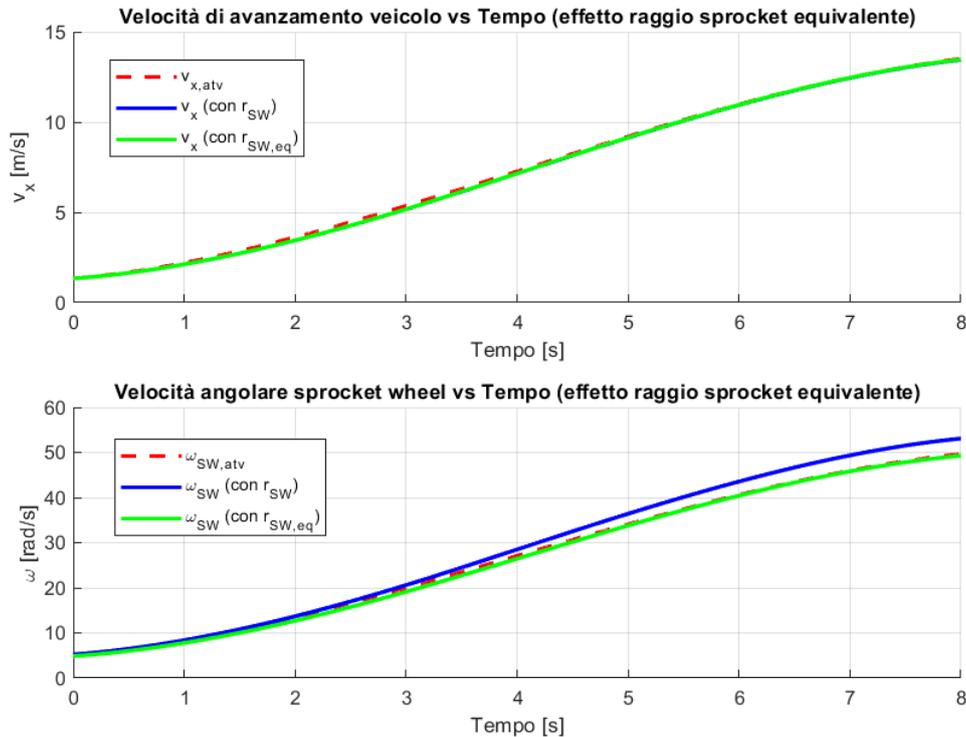


Figura 8.11 - Velocità di avanzamento veicolo (figura in alto) e velocità angolare sprocket wheel (figura in basso) vs Tempo (effetto raggio sprocket equivalente) nel veicolo cingolato con cinque road wheels

Dall'analisi della figura emerge che questa discrepanza nella scelta del raggio della sprocket wheel comporta una differenza nella velocità angolare della sprocket wheel tra i due modelli, nonostante la velocità di avanzamento risulti coincidente in entrambi i casi.

Per ottenere una maggiore coerenza tra i modelli, è stato adottato lo stesso approccio anche nel modello Matlab-Simulink, utilizzando il raggio equivalente nella relazione cinematica tra cingolo e sprocket wheel. Questa scelta permette di allineare meglio i risultati cinematici e dinamici tra i modelli ATV e Matlab-Simulink, migliorando l'accuratezza del modello.

Un'altra grandezza importante da monitorare è lo scorrimento longitudinale, il quale dipende strettamente dal modello di contatto cingolo-terreno descritto nel paragrafo 3.7, e, in particolare, dal valore soglia $\sigma_{F,max}$.

Inizialmente, è stato utilizzato il valore soglia nominale $\sigma_{F,max,nom} = 0.2$.

Tuttavia, con questo valore nominale, non si ottiene una corrispondenza adeguata nel valore medio dello scorrimento longitudinale tra i due modelli analizzati, rendendo necessaria una calibrazione di questo parametro.

In Figura 8.12 e Figura 8.13 sono riportati i risultati delle simulazioni eseguite con diversi valori di soglia dello scorrimento longitudinale.

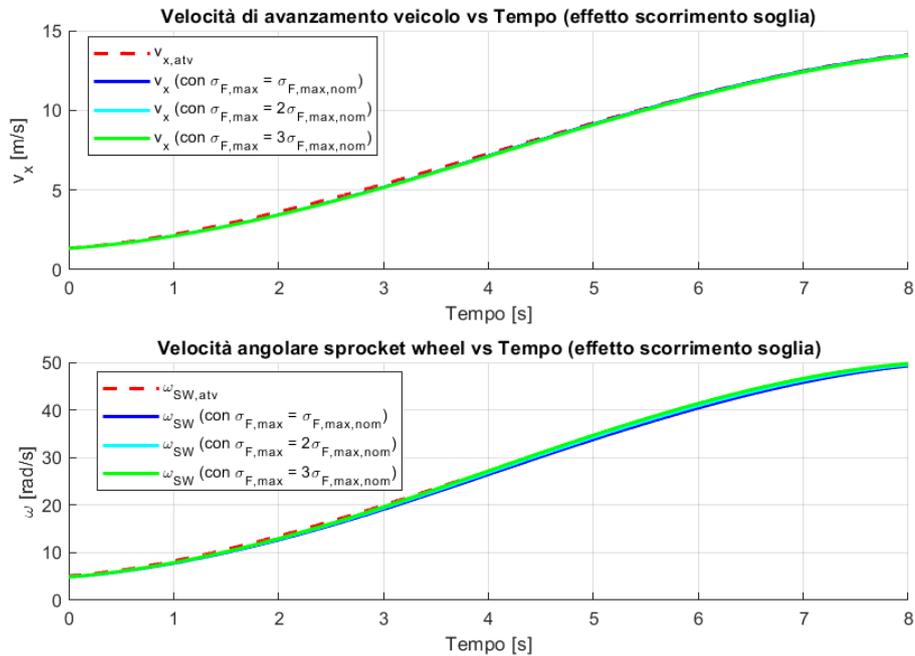


Figura 8.12 - Velocità di avanzamento veicolo (figura in alto) e velocità angolare sprocket wheel (figura in basso) vs Tempo (effetto scorrimento soglia) nel veicolo cingolato con cinque road wheels

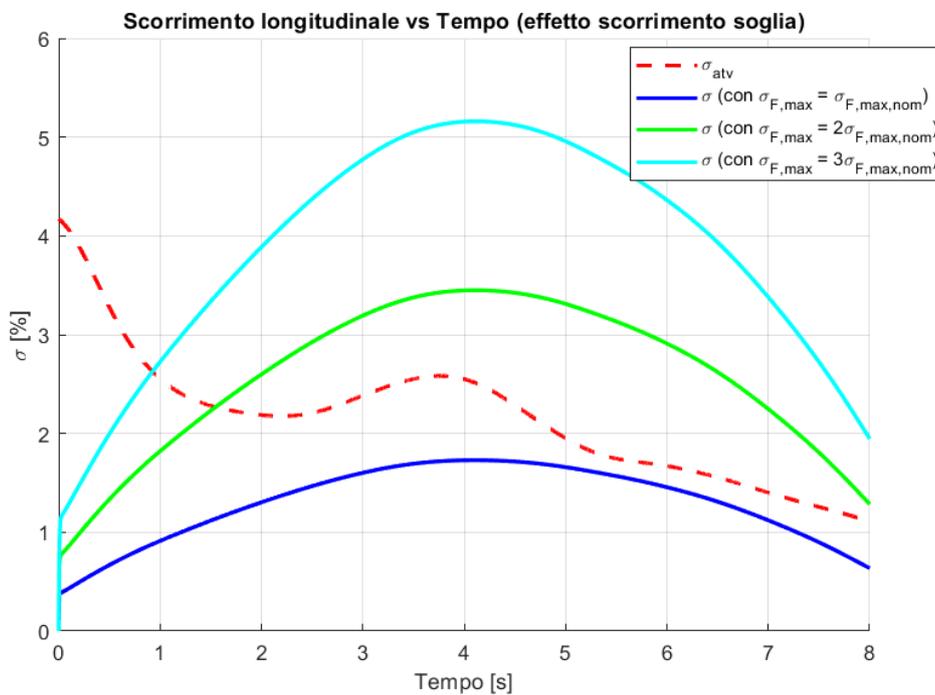


Figura 8.13 - Scorrimento longitudinale vs Tempo (effetto scorrimento soglia) nel veicolo cingolato con cinque road wheels

Dall'osservazione dei grafici emerge come la variazione di $\sigma_{F,max}$ influisca esclusivamente sul valore di scorrimento longitudinale, senza alterare la velocità di avanzamento né la velocità angolare della sprocket wheel.

Il valore che meglio approssima lo scorrimento longitudinale tra i due modelli è quello indicato dalla curva verde, corrispondente a $\sigma_{F,max} = 2 \cdot \sigma_{F,max,nom} = 0.4$. Per uniformare il valore medio di scorrimento longitudinale, è stato quindi scelto di impostare questo valore nel modello di contatto cingolo-terreno.

Dopo aver completato la calibrazione dei parametri fondamentali, si è proceduto con il confronto di altre grandezze dinamiche di interesse, quali il beccheggio, lo scuotimento del baricentro e l'accelerazione verticale del baricentro. I risultati di queste analisi sono riportati in Figura 8.14 e Figura 8.15.

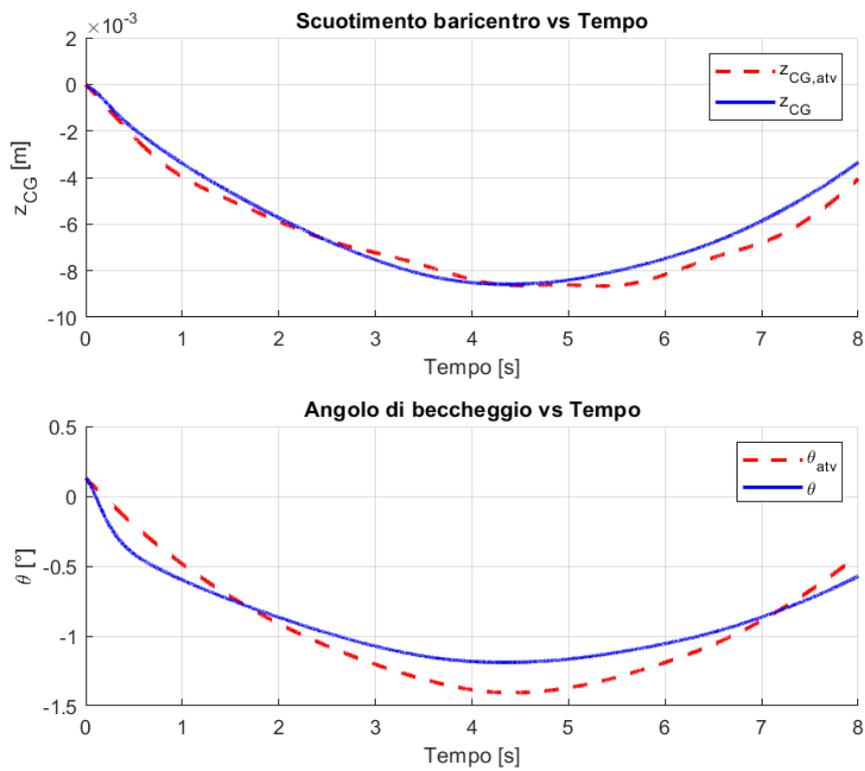


Figura 8.14 - Scuotimento baricentro (figura in alto) e angolo di beccheggio (figura in basso) vs Tempo (veicolo cingolato con cinque road wheels)

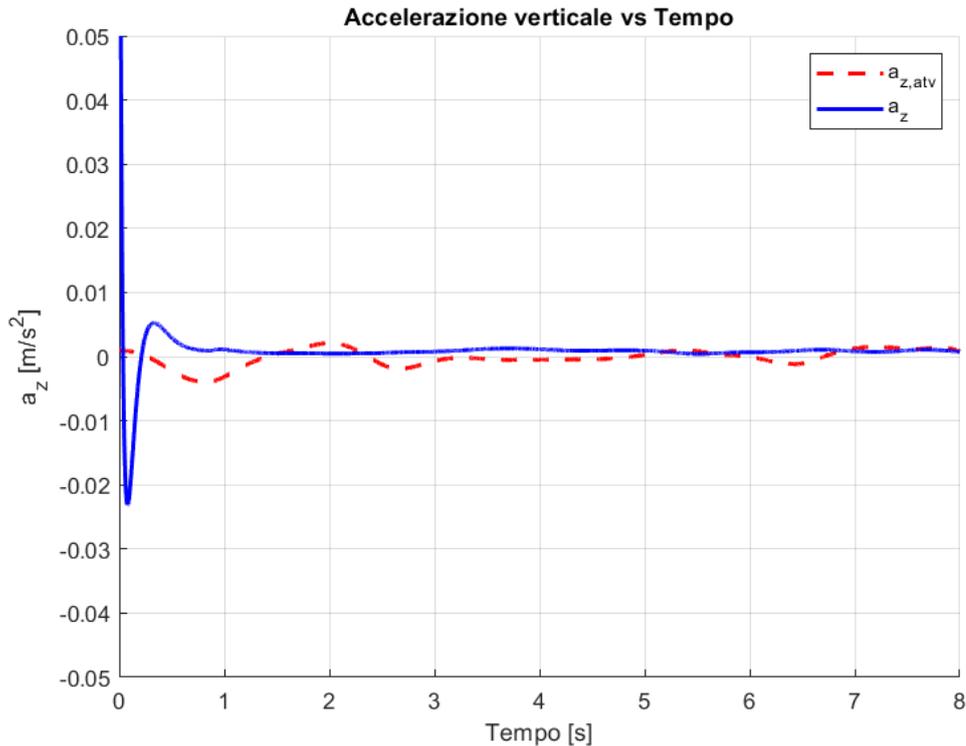


Figura 8.15 - Accelerazione verticale vs Tempo (veicolo cingolato con cinque road wheels)

Dall'osservazione delle figure si evidenzia un'ottima sovrapposizione tra i modelli per quanto riguarda il beccheggio e lo scuotimento del baricentro, mostrando una buona coerenza con la dinamica reale del veicolo. In particolare, l'applicazione della coppia di trazione alla sprocket wheel produce un abbassamento della parte posteriore del baricentro; questo si traduce, nel sistema di riferimento adottato, in un angolo negativo di beccheggio. Per quanto riguarda l'accelerazione verticale del baricentro, i risultati mostrano valori generalmente bassi, eccezion fatta per un lieve assestamento iniziale. Questo comportamento è coerente con le condizioni di simulazione, che prevedono un veicolo in marcia su una superficie piana.

È stato inoltre condotto un confronto sulle tensioni nei diversi tratti del cingolo per verificare se questi siano sollecitati in modo analogo nei due modelli. In questo caso specifico, tuttavia, non è stata applicata al modello Matlab-Simulink una coppia pari al doppio di quella utilizzata nel modello ATV. Tale scelta è motivata dal fatto che, nel modello ATV, la coppia viene distribuita tra i due lati del veicolo cingolato, mentre nel modello Matlab-Simulink i due lati sono condensati in uno solo, il che avrebbe determinato tensioni superiori nei tratti del cingolo nel modello Matlab-Simulink.

Le tensioni nei tratti di cingolo del modello Matlab-Simulink sono illustrate in Figura 8.17, mentre quelle relative al modello ATV sono riportate in Figura 8.18.

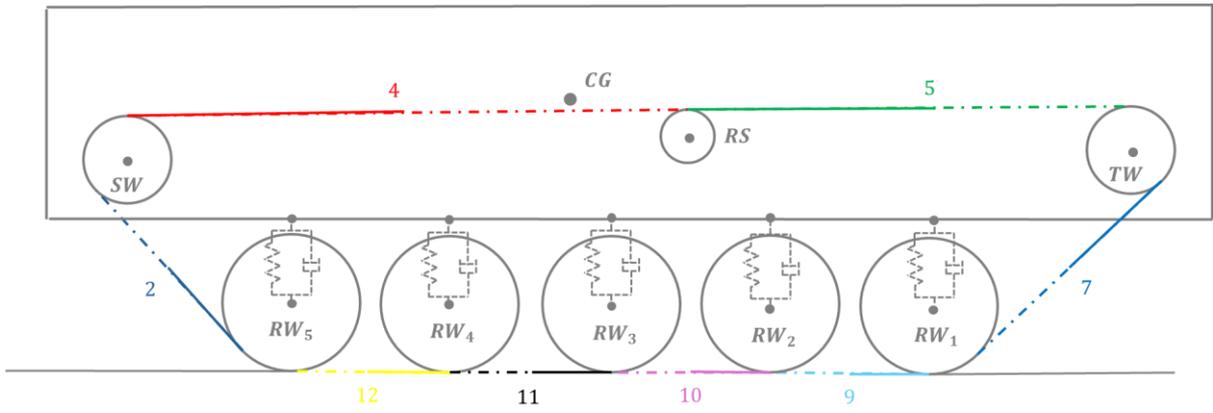


Figura 8.16 – Rappresentazione tensioni del cingolo (modello Matlab-Simulink con veicolo cingolato con cinque road wheels)

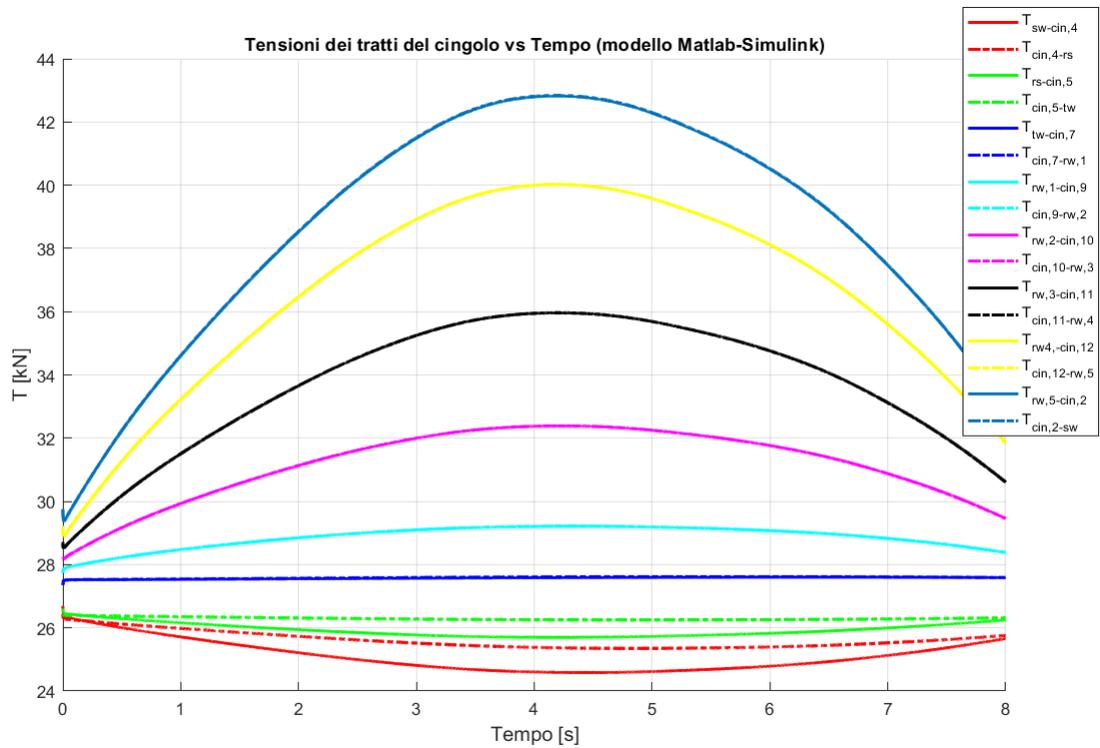


Figura 8.17 - Tensioni dei tratti del cingolo vs Tempo (modello Matlab-Simulink con veicolo cingolato con cinque road wheels)

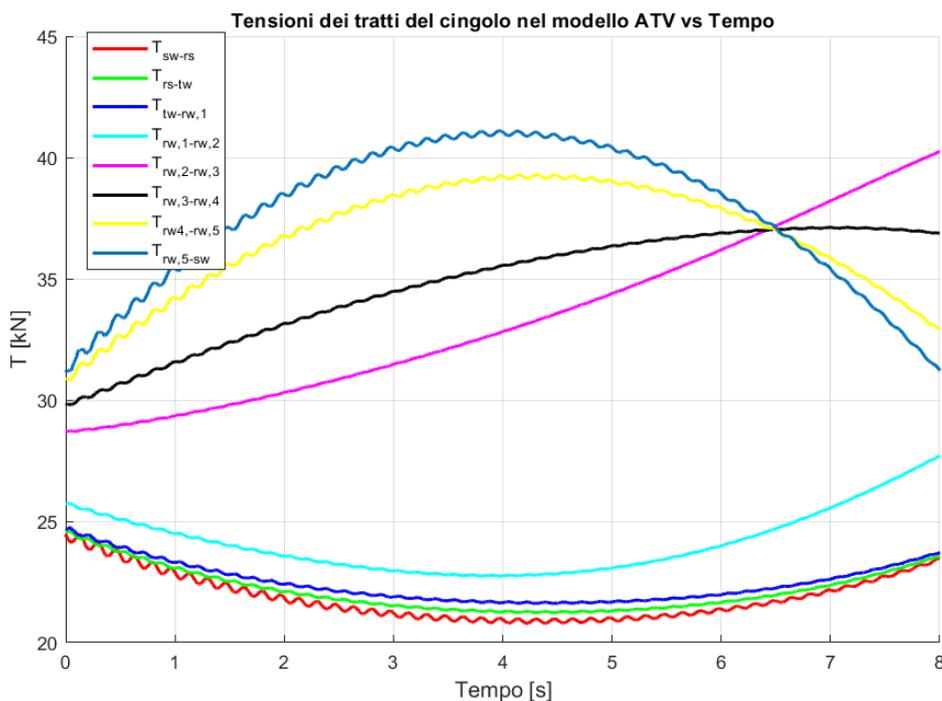


Figura 8.18 - Tensioni dei tratti del cingolo vs Tempo (modello ATV)

Osservando la Figura 8.17, nel modello Matlab-Simulink analizzato, ogni tratto del cingolo è rappresentato da due curve: una linea continua che indica la tensione a monte del tratto e una linea tratteggiata che rappresenta la tensione a valle. La differenza tra queste due curve è indicativa dell'inerzia del tratto di cingolo corrispondente. Come si può osservare, tale differenza è apprezzabile solo nei tratti superiori del cingolo, ovvero nel tratto che si estende dalla sprocket wheel alla ruota di supporto (cin 4) e nel segmento tra la ruota di supporto e la tensioner wheel (cin 5).

Facendo riferimento ai diagrammi di corpo libero dei tratti di cingolo descritti nel paragrafo 7.4, è possibile comprendere come i tratti superiori del cingolo ruotino nello stesso verso dell'avanzamento del veicolo. Di conseguenza, l'inerzia in questi tratti risulta raddoppiata, poiché l'accelerazione del baricentro del veicolo si somma all'accelerazione relativa del cingolo (avendo entrambe lo stesso modulo in base all'ipotesi di puro rotolamento adottata nel modello). Nei tratti inferiori, invece, le due accelerazioni hanno direzione opposta, risultando in un annullamento del contributo inerziale. Per questo motivo, nei tratti inferiori le due curve di tensione si sovrappongono.

Nei tratti inclinati del cingolo, si osserva un contributo inerziale ridotto, poiché solo la componente orizzontale dell'accelerazione relativa del cingolo è diretta in verso opposto all'accelerazione del baricentro, con un effetto complessivo inferiore rispetto ai tratti orizzontali superiori.

Nel modello ATV, come illustrato in Figura 8.18, per facilitare la visualizzazione è stata riportata la tensione media di ciascun segmento di cingolo compreso tra due ruote. Confrontando i risultati dei due modelli, si nota una somiglianza sia nei valori che nei trend dei tratti con tensioni più elevate e più basse. Tuttavia, nei tratti intermedi la sovrapposizione risulta meno precisa, in particolare tra la road wheel 2 e la road wheel 4.

Per evidenziare la buona corrispondenza dei risultati relativi ai tratti con tensione massima (tra la road wheel 5 e la sprocket wheel) e con tensione minima (tra la sprocket wheel e la

ruota di supporto), in Figura 8.19 è riportato un confronto dell'andamento delle tensioni in questi tratti nei due modelli.

Nel modello Matlab-Simulink, sono state considerate le tensioni immediatamente a monte e a valle della sprocket wheel, poiché sono quelle più influenzate dalla coppia applicata a questa ruota. In questo modo, è possibile ottenere una curva unica e rappresentativa per ciascun tratto, facilitando il confronto diretto con i risultati del modello ATV.

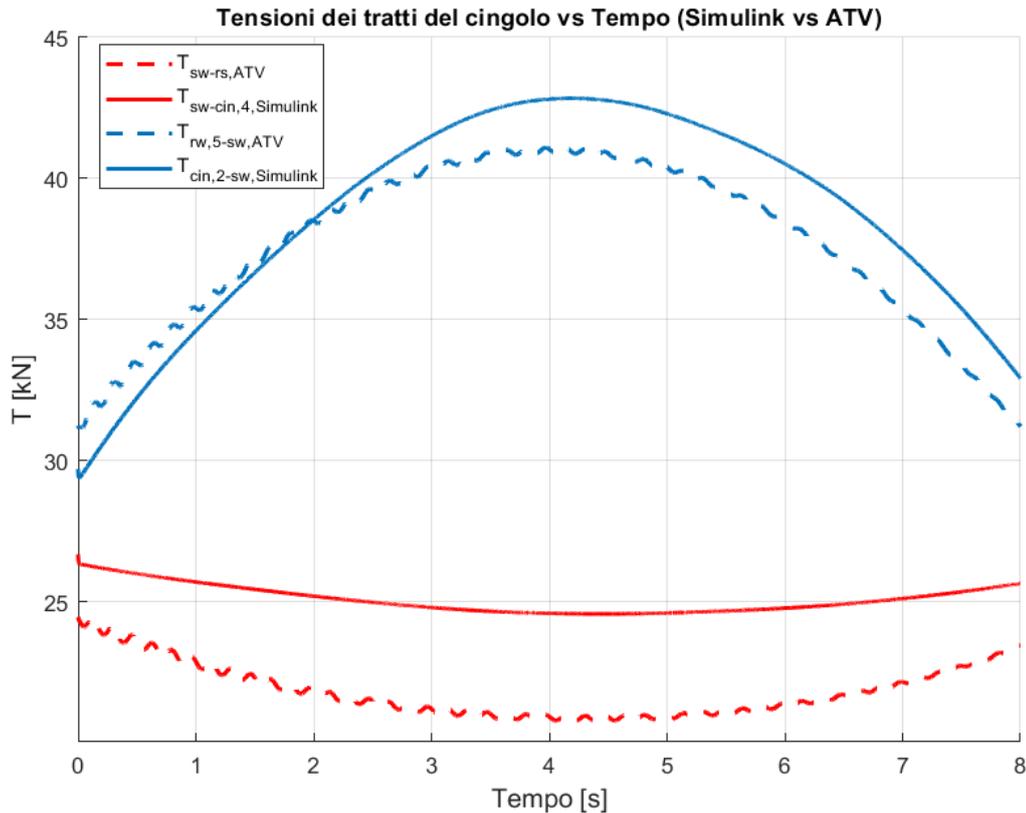


Figura 8.19 - Tensioni dei tratti del cingolo vs Tempo (Simulink vs ATV)

Dall'analisi della figura si osserva un buon allineamento tra gli andamenti dei due modelli, con una buona sovrapposizione complessiva. Tuttavia, le tensioni nel modello Matlab-Simulink risultano mediamente più elevate rispetto a quelle del modello ATV. Questo risultato è in linea con quanto rilevato nella prova statica, in cui sono state esaminate le reazioni vincolari verticali.

In Figura 8.20 sono riportate le forze longitudinali e verticali rilevate sulle road wheels nel modello Matlab-Simulink. Queste grandezze non sono state confrontate con quelle del modello ATV, poiché il modello realizzato adotta un'approssimazione significativa nel modello di contatto tra cingolo e terreno, basata su un numero finito di contatti puntuali corrispondenti al numero di road wheels. Poiché questa assunzione non è presente su ATV, un confronto diretto delle forze longitudinali e verticali risulterebbe poco accurato.

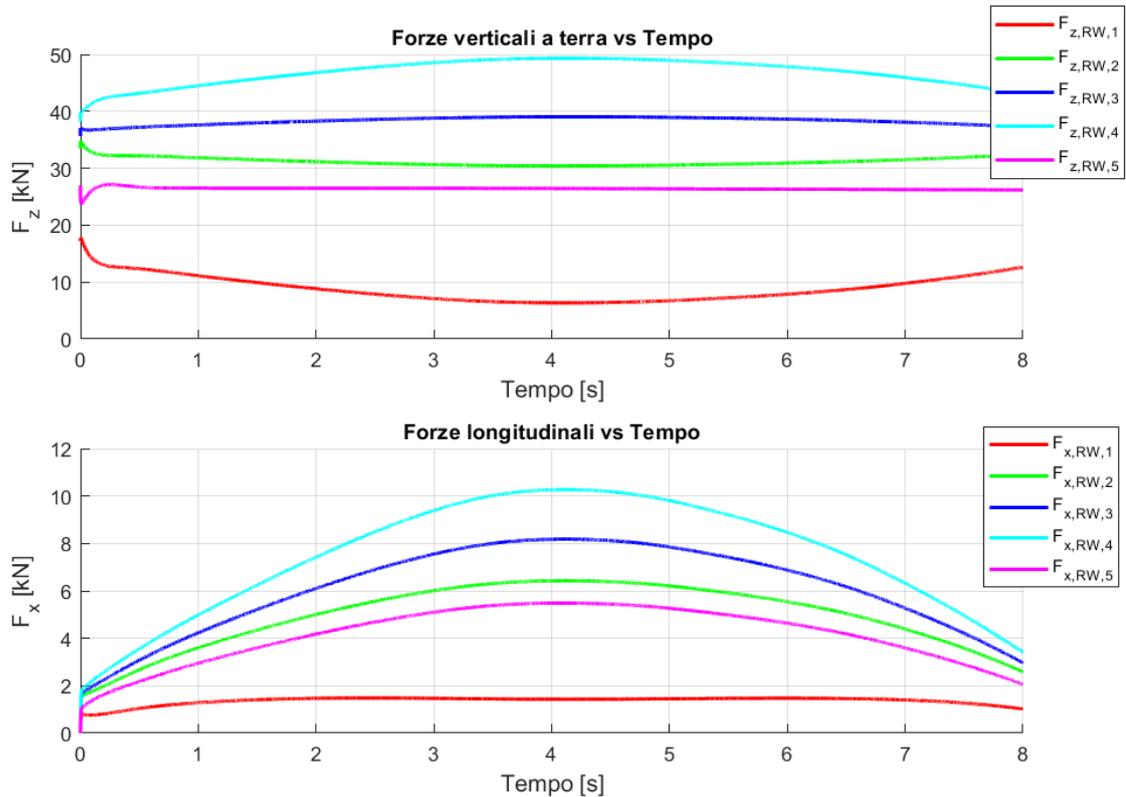


Figura 8.20 - Forze verticali a terra (figura in alto) e Forze longitudinali (figura in basso) vs Tempo (veicolo cingolato con cinque road wheels)

Dopo aver confrontato le principali grandezze con il modello ATV, è stata effettuata un'analisi delle perdite complessive presenti nel modello Matlab-Simulink.

Nel modello sono presenti due fonti di perdita:

- P_{res} [W]: potenza dissipata dalla resistenza all'avanzamento del cingolo;
- P_a [W]: potenza dissipata per attrito al perno.

La potenza dissipata dalla resistenza all'avanzamento del cingolo si può esprimere come:

$$P_{res} = C_{res,SW} \cdot \omega_{SW} \quad (8.35)$$

In cui:

- $C_{res,SW}$ [N · m] : coppia di resistenza di avanzamento del cingolo applicata alla sprocket wheel;
- ω_{SW} $\left[\frac{rad}{s}\right]$: velocità angolare sprocket wheel.

In Figura 8.21 è riportato l'andamento della potenza dissipata dalla resistenza all'avanzamento del cingolo; tale valore aumenta nel corso della simulazione poiché, con il

passare del tempo, crescono sia la coppia resistente sia la velocità angolare della sprocket wheel, come evidenziato nei grafici precedenti.



Figura 8.21 - Potenza dissipata per resistenza all'avanzamento del cingolo vs Tempo (veicolo cingolato con cinque road wheels)

La potenza dissipata per attrito al perno dall'i-esima ruota è descritta dall'equazione 8.33:

$$P_{a,i} = C_{a,i} \cdot \omega_i \quad (8.36)$$

In cui:

- $C_{a,i} [N \cdot m]$: coppia di attrito al perno della ruota i-esima;
- $\omega_i \left[\frac{rad}{s} \right]$: velocità angolare ruota i-esima.

In Figura 8.22 sono rappresentate le potenze dissipate per attrito al perno di ogni ruota del veicolo cingolato, distinguendo tra la componente coulombiana (linea continua) e la componente viscosa (linea tratteggiata). Si nota immediatamente una netta prevalenza delle perdite coulombiane.

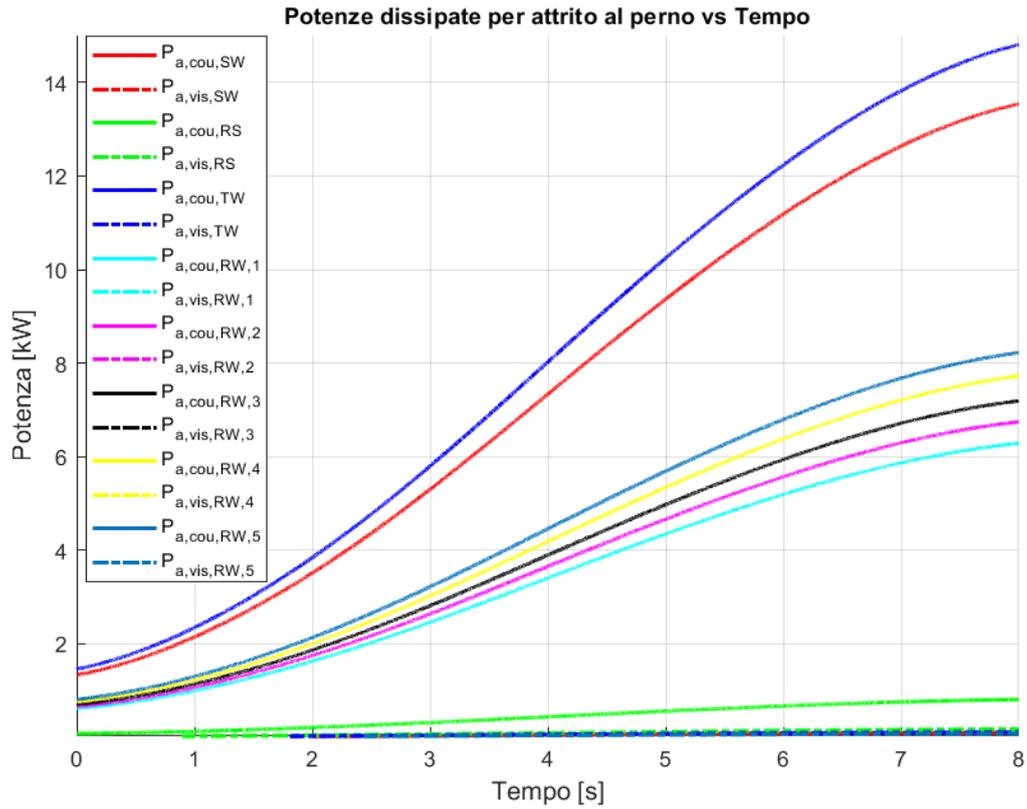


Figura 8.22 - Potenze dissipate per attrito al perno vs Tempo (veicolo cingolato con cinque road wheels)

In Figura 8.23 vengono analizzate singolarmente le perdite coulombiane per ciascuna componente, al fine di ottenere una visione più dettagliata dei contributi.

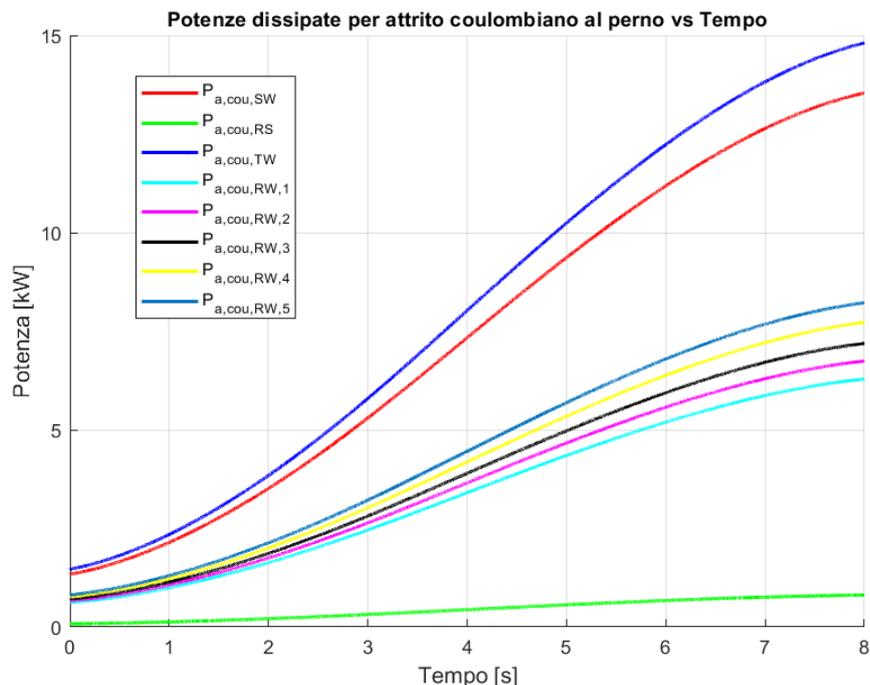


Figura 8.23 - Potenze dissipate per attrito coulombiano al perno vs Tempo (veicolo cingolato con cinque road wheels)

La maggior parte delle perdite dovute all'attrito coulombiano si concentra principalmente nella sprocket e nella tensioner wheel, mentre la ruota di supporto presenta perdite di entità inferiore. Questo risultato è plausibile, poiché la sprocket wheel e la tensioner wheel sono le ruote maggiormente sollecitate: entrambe sostengono gran parte del peso del cingolo e, nel caso della tensioner wheel, è applicata anche la forza di tensionamento.

Analizzando i risultati, è rilevante sottolineare, come già descritto nella sezione 3.8, che la componente coulombiana della coppia di attrito al perno, attualmente, viene implementata nel modello come una coppia di modulo costante, calcolata in condizioni statiche. Tra le road wheel, la quinta risulta quella con la maggiore dissipazione; ciò è dovuto al fatto che, in condizioni statiche, la coppia di attrito al perno è più elevata nella road wheel 5 a causa della posizione del baricentro, che risulta spostato verso la parte posteriore del veicolo. Essendo l'assale che tende ad affondare maggiormente, è anche quello che subisce le sollecitazioni più elevate. Inoltre, in condizioni statiche, le uniche road wheels che presentano una reazione vincolare orizzontale sono la prima e la quinta.

Un possibile sviluppo futuro del modello potrebbe prevedere l'implementazione di una coppia di attrito variabile durante la simulazione, in grado di adattarsi dinamicamente alle condizioni operative.

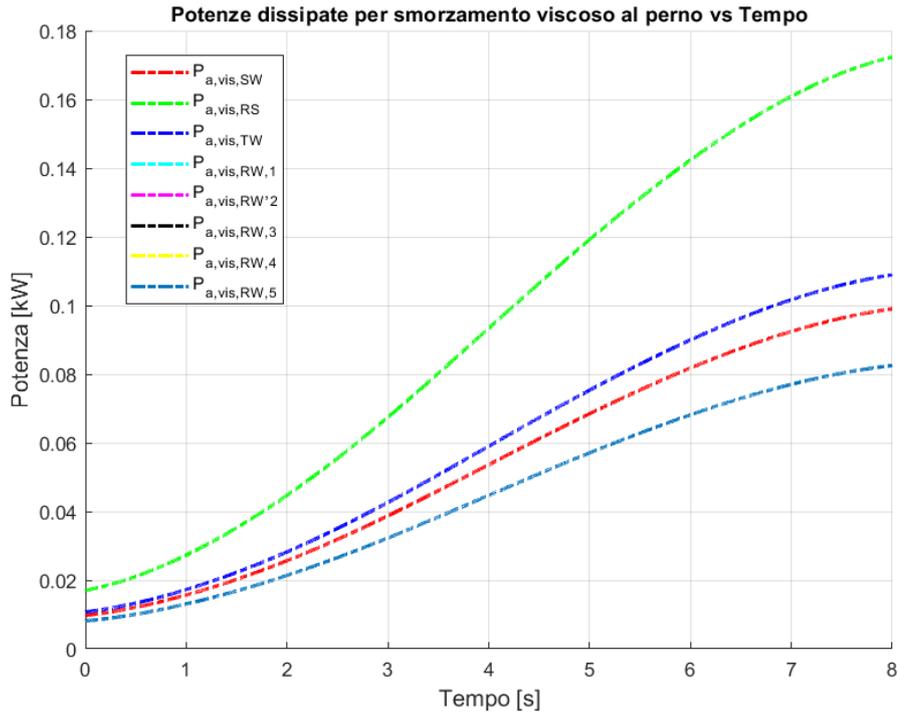


Figura 8.24 - Potenze dissipate per smorzamento viscoso al perno vs Tempo (veicolo cingolato con cinque road wheels)

In Figura 8.24 sono riportate le potenze dissipate per smorzamento viscoso al perno. Dai valori si osserva che queste perdite sono di un ordine di grandezza inferiore rispetto a quelle dovute alla componente coulombiana di attrito.

Come descritto nella sezione 3.8, la componente viscosa della coppia di attrito al perno dipende dal coefficiente di smorzamento viscoso e dalla velocità angolare. Poiché il coefficiente di smorzamento viscoso è mantenuto costante durante la simulazione, il valore della potenza dissipata per smorzamento viscoso è influenzato unicamente dalla velocità di rotazione delle ruote. Di conseguenza, la quota più elevata di smorzamento viscoso si riscontra nella ruota di supporto, che ha il raggio minore e quindi la velocità di rotazione più alta tra tutte le ruote. Allo stesso modo, le road wheels dissipano tutte la stessa quantità di potenza, poiché, avendo il medesimo raggio, ruotano alla stessa velocità.

Una volta aver descritto tutte le fonti di perdita viene calcolata la potenza motrice netta $P_{m,netta}$, la quale si può esprimere come:

$$P_{m,netta} = P_m - P_{res} - P_{a,cou,TOT} - P_{a,vis,TOT} \quad (8.37)$$

In cui:

- $P_{m,netta} [W]$: potenza motrice netta;
- $P_m = C_{m,SW} \cdot \omega_{SW} [W]$: potenza motrice lorda;
- $P_{res} [W]$: potenza dissipata dalla resistenza all'avanzamento del cingolo;
- $P_{a,cou,TOT} [W]$: potenza totale dissipata per attrito coulombiano al perno;
- $P_{a,vis,TOT} [W]$: potenza totale dissipata per smorzamento viscoso al perno.

Il confronto tra le diverse potenze è illustrato in Figura 8.25, da cui emerge che la perdita maggiore è attribuibile alla resistenza all'avanzamento del cingolo. Al contrario, la perdita dovuta allo smorzamento viscoso ha un'influenza minima rispetto alle altre potenze in gioco.

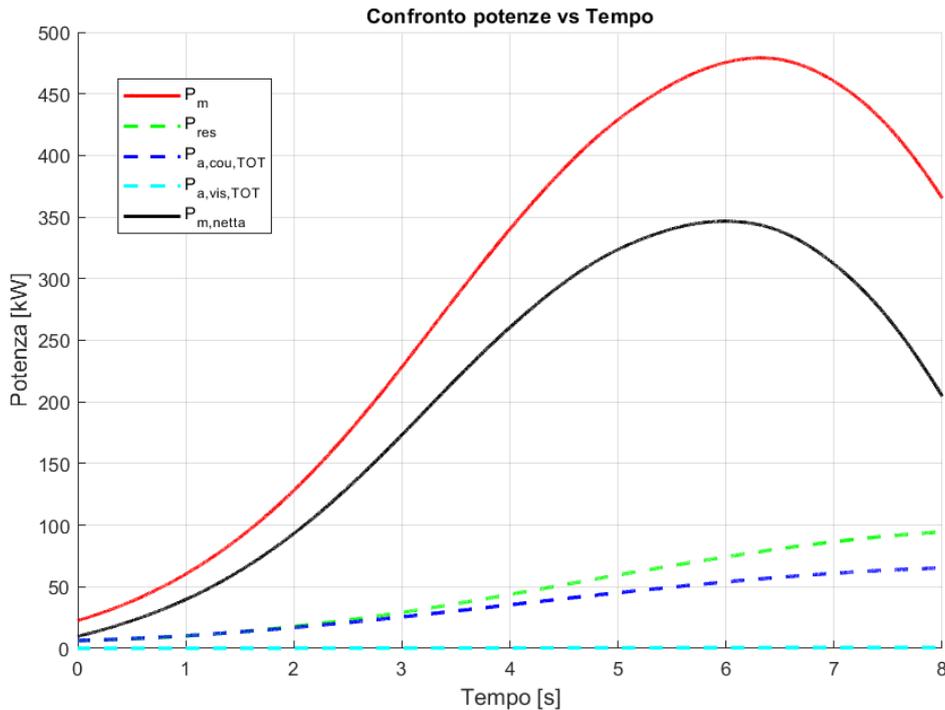


Figura 8.25 - Confronto potenze vs Tempo (veicolo cingolato con cinque road wheels)

8.5.3 Prova di marcia a velocità costante su profilo stradale sinusoidale

Un ulteriore test di validazione consiste nella marcia a velocità costante su un profilo stradale sinusoidale, verranno tre simulazioni con velocità rispettivamente pari a 5 m/s, 10 m/s e 15 m/s. Durante le prove verrà applicata una forza di tensionamento costante pari a 50 kN.

Il profilo stradale, rappresentato in Figura 8.26, ha una lunghezza di 120 metri e una larghezza di 5 metri, il tratto iniziale e quello finale sono pianeggianti e hanno entrambi una lunghezza pari a 10 metri, in modo da rispettare l'ipotesi di strada piana fatta per l'analisi statica.

La parte sinusoidale ha una lunghezza di 100 metri e viene descritta da:

$$h(x) = h_0 \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda} + \varphi\right) \quad (8.38)$$

Dove:

- $h_0 = 0.02 \text{ m}$ è la semi-ampiezza della sinusoide;

- $\lambda = 10 \text{ m}$ è la lunghezza d'onda;
- $\varphi = \frac{\pi}{2}$ è la fase.

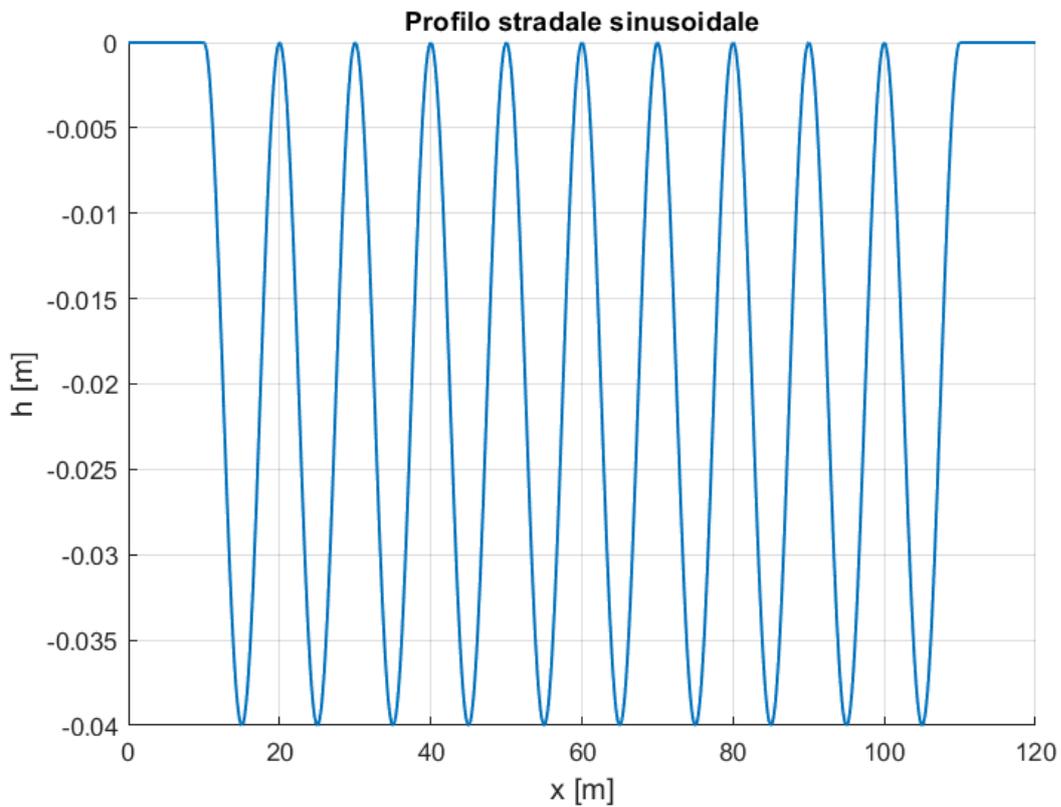


Figura 8.26 - Profilo stradale sinusoidale

Un'ulteriore rappresentazione del profilo stradale è riportata in Figura 8.27, in cui si distinguono i tratti pianeggianti, evidenziati in chiaro e ciascuno lungo 10 metri, e la sezione di strada sinusoidale, che si estende per 100 metri.

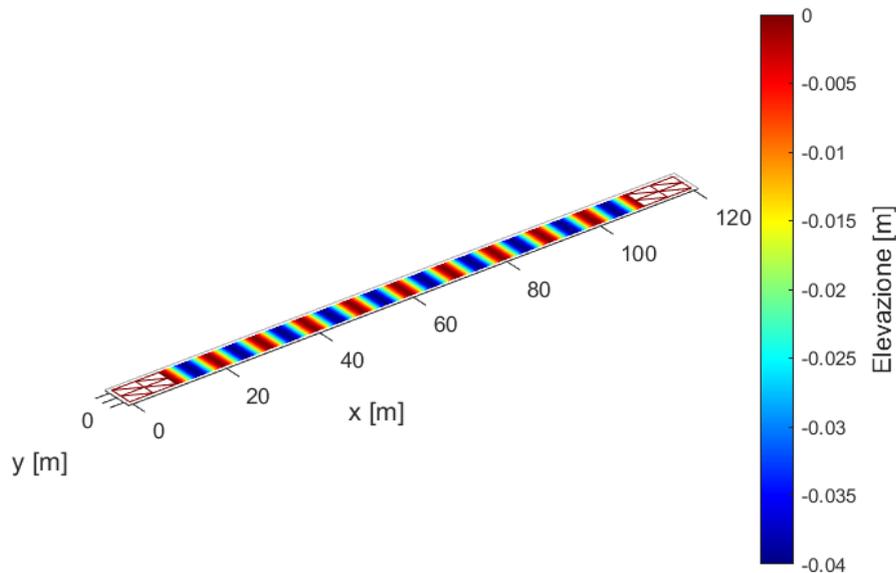


Figura 8.27 - Profilo stradale sinusoidale (rappresentazione alternativa)

Nel modello Matlab-Simulink sono stati utilizzati gli stessi parametri precedentemente calibrati attraverso la prova di accelerazione su strada piana. Tuttavia, a differenza della prova precedente, il segnale di coppia proveniente dal modello ATV non è stato impiegato come input. Per il controllo della velocità, è stato invece adottato un regolatore PID, descritto nella sottosezione 5.5.4.

Le frequenze fondamentali eccitate durante le tre simulazioni sono espresse da:

$$f = \frac{v_x}{\lambda} \quad (8.39)$$

In cui:

- $f [Hz]$: frequenza fondamentale;
- $v_x \left[\frac{m}{s} \right]$: velocità di avanzamento del veicolo;
- $\lambda [m]$: lunghezza d'onda della strada.

Tabella 8.7 - Frequenze fondamentali eccitate durante le simulazioni

FREQUENZE FONDAMENTALI ECCITATE	
Velocità [m/s]	Frequenza [Hz]
5	0.5
10	1
15	1.5

In Figura 8.28 e Figura 8.29 sono riportate la velocità di avanzamento del veicolo cingolato e la velocità di rotazione della sprocket wheel durante le simulazioni. In tutti i grafici, la linea continua rappresenta il modello Matlab-Simulink, mentre la linea tratteggiata si riferisce al modello ATV. Entrambi i modelli seguono correttamente la velocità target, indicando il buon funzionamento del controllo di velocità. Nel caso del modello ATV, il segnale visualizzato parte da zero, poiché è stato applicato un filtro per attenuare il rumore presente nel segnale originale. In realtà, la velocità rimane costante per tutta la durata della prova. L'applicazione del filtro è stata necessaria per migliorare la leggibilità del segnale, altrimenti troppo rumoroso e poco comprensibile.

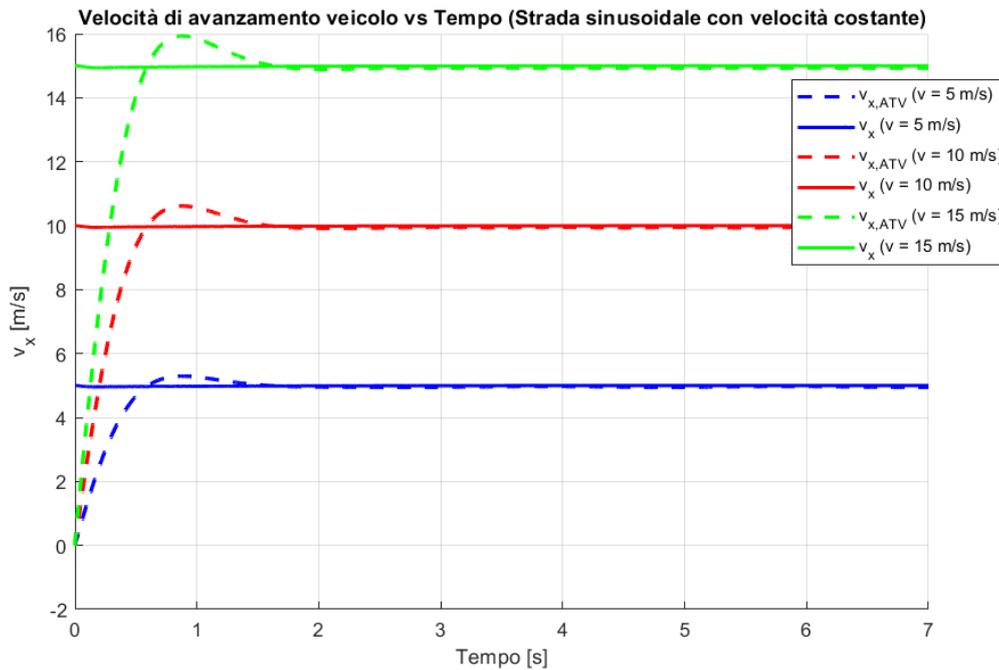


Figura 8.28 - Velocità di avanzamento veicolo vs Tempo (Strada sinusoidale con velocità costante) con veicolo cingolato con cinque road wheels

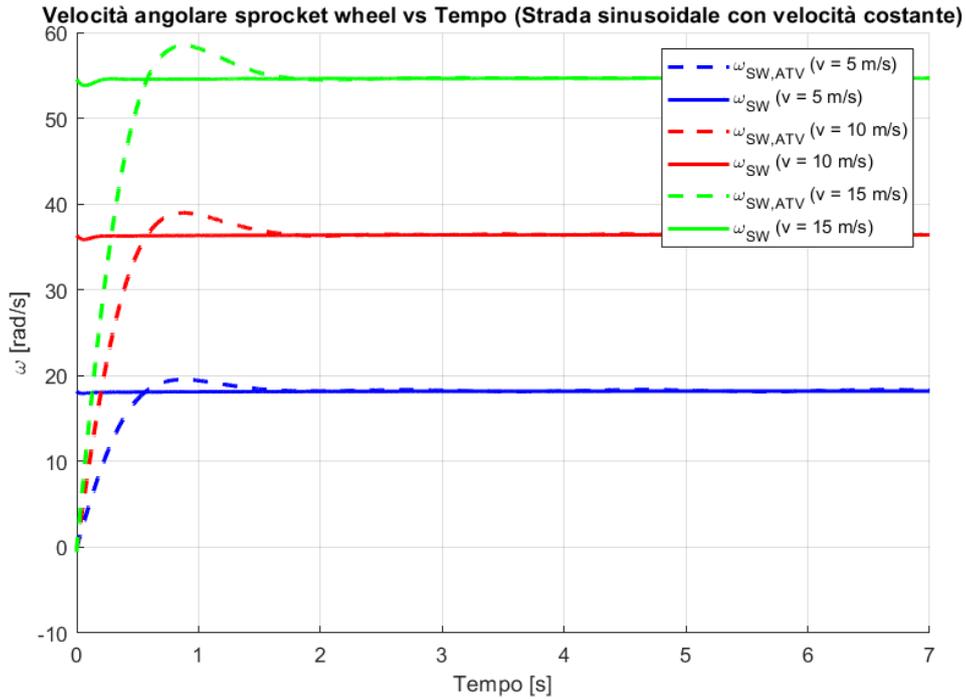


Figura 8.29 - Velocità angolare sprocket wheel vs Tempo (Strada sinusoidale con velocità costante) con veicolo cingolato con cinque road wheels

La costanza della velocità è evidenziata anche dal grafico dell'accelerazione longitudinale, riportato in Figura 8.30, dove il valore medio risulta nullo.

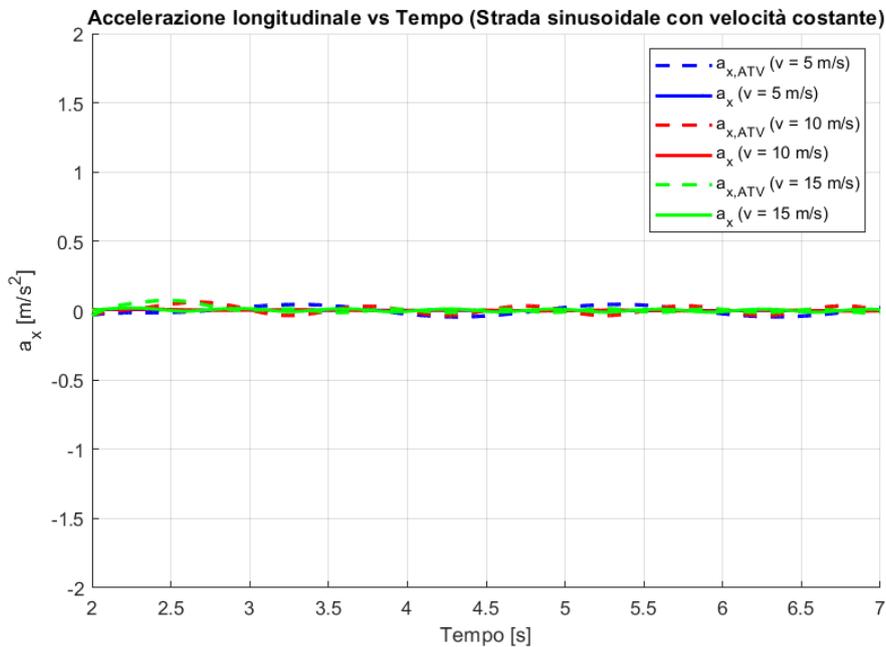


Figura 8.30 - Accelerazione longitudinale vs Tempo (Strada sinusoidale con velocità costante) con veicolo cingolato con cinque road wheels

In Figura 8.31, Figura 8.32 e Figura 8.33 sono riportati i grafici relativi allo scuotimento del baricentro nelle simulazioni effettuate utilizzando i due modelli, rappresentato in funzione del tempo e dello spazio.

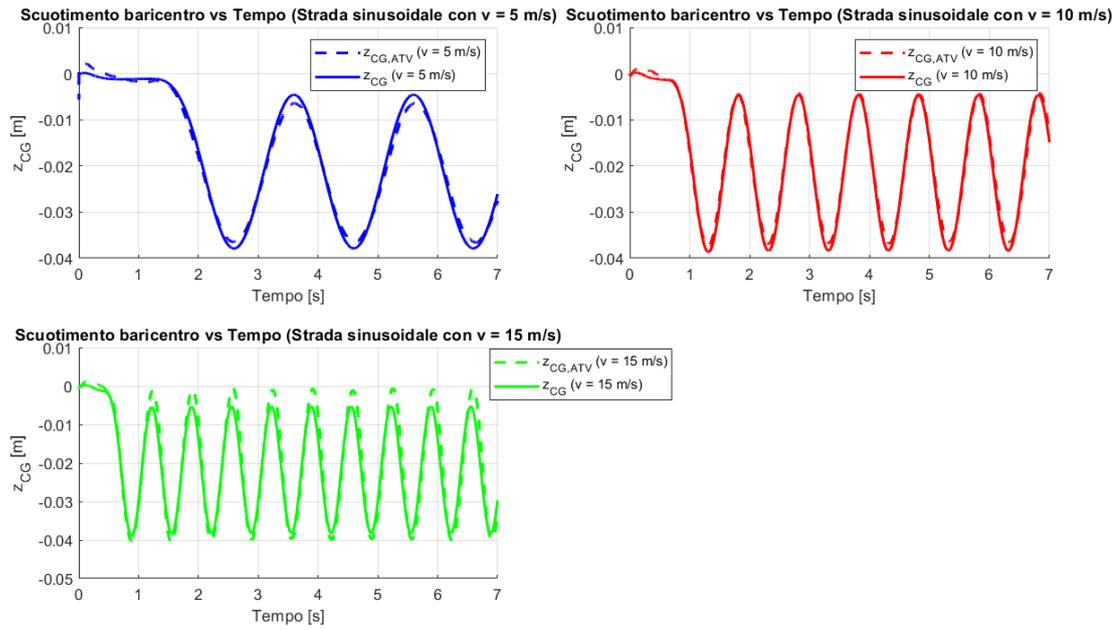


Figura 8.31 - Scuotimento baricentro vs Tempo su strada sinusoidale con velocità 5 m/s (figura in alto a sinistra), 10 m/s (figura in alto a destra) e 15 m/s (figura in basso a sinistra) con veicolo cingolato con cinque road wheels

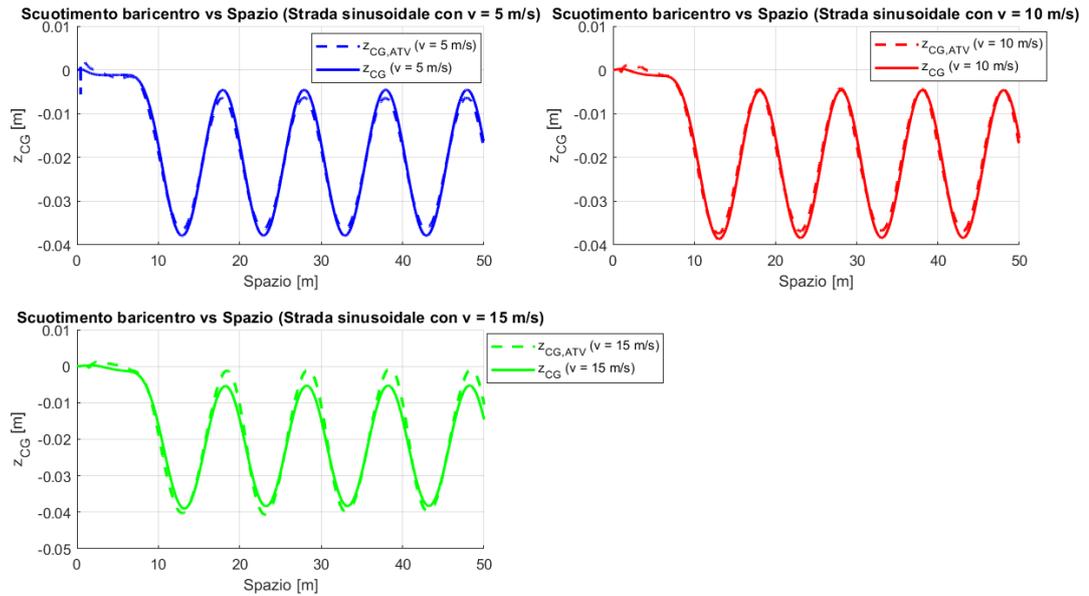


Figura 8.32 - Scuotimento baricentro vs Spazio su strada sinusoidale con velocità 5 m/s (figura in alto a sinistra), 10 m/s (figura in alto a destra) e 15 m/s (figura in basso a sinistra) con veicolo cingolato con cinque road wheels

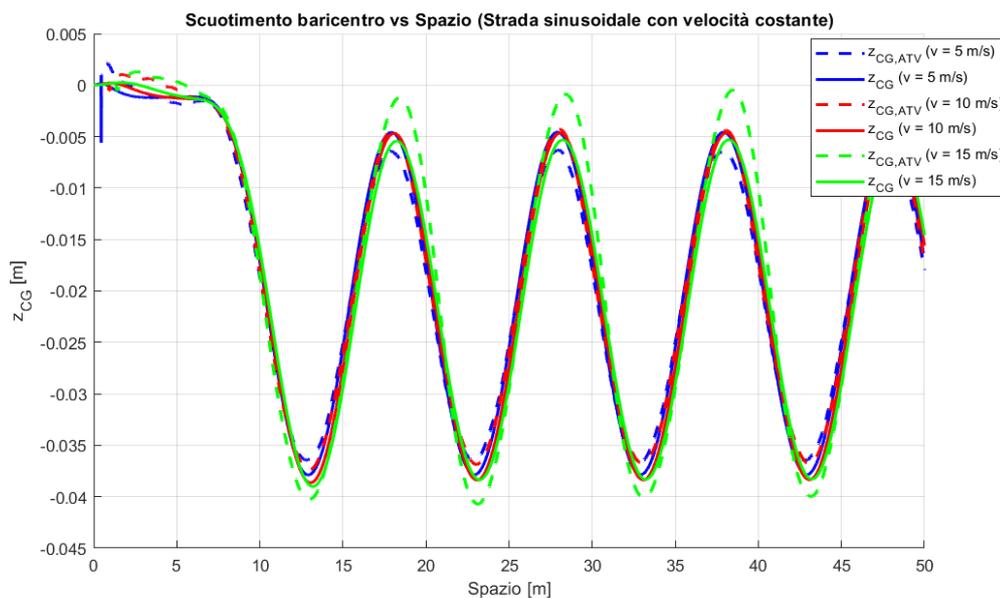


Figura 8.33 - Scuotimento baricentro vs Spazio (Strada sinusoidale con velocità costante) con veicolo cingolato con cinque road wheels

Dai grafici emerge chiaramente un'ottima sovrapposizione tra i risultati ottenuti con i due modelli, a conferma della corretta calibrazione dei parametri nel modello Matlab-Simulink, con particolare riferimento alla modellazione delle sospensioni.

Analizzando in dettaglio, si osserva che, a una velocità di 5 m/s, lo scuotimento del baricentro nel modello ATV risulta inizialmente inferiore rispetto a quello del modello Matlab-Simulink. Tuttavia, con l'aumento della velocità, lo scuotimento nel modello ATV cresce di più rispetto al modello Matlab-Simulink. Ad esempio, a una velocità di 15 m/s, lo scuotimento del baricentro nel modello ATV supera quello calcolato con il modello

Matlab-Simulink. Questo comportamento indica che, nel modello ATV, lo scuotimento del baricentro aumenta proporzionalmente all'incremento della velocità, mentre nel modello Matlab-Simulink la variazione dello scuotimento è più contenuta e meno influenzata dalla velocità.

Un fenomeno analogo è osservabile anche nell'andamento dell'accelerazione verticale, riportato in Figura 8.34.

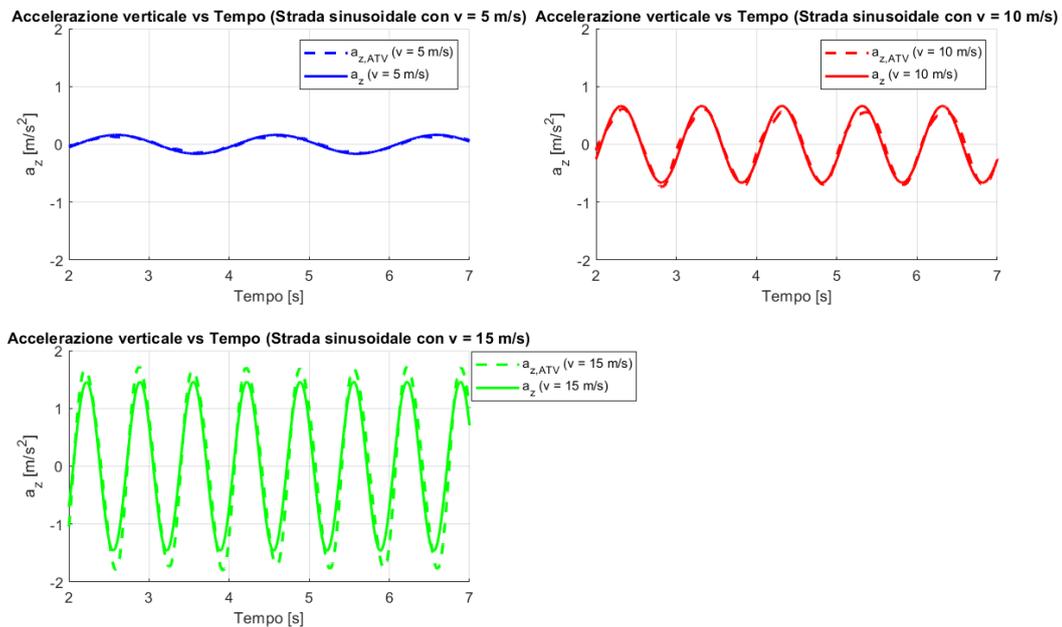


Figura 8.34 - Accelerazione verticale vs Tempo su strada sinusoidale con velocità 5 m/s (figura in alto a sinistra), 10 m/s (figura in alto a destra) e 15 m/s (figura in basso a sinistra) con veicolo cingolato con cinque road wheels

In entrambi i modelli, l'accelerazione verticale tende ad aumentare all'aumentare della velocità; tuttavia, nel modello ATV, tale incremento è più pronunciato rispetto a quello rilevato nel modello Matlab-Simulink.

L'analisi dell'angolo di beccheggio, rappresentato in funzione del tempo e dello spazio in Figura 8.35, Figura 8.36 e Figura 8.37 evidenzia una buona sovrapposizione tra i due modelli, con differenze contenute nei valori dei massimi e dei minimi.

Nel modello Matlab-Simulink, l'angolo di beccheggio, analogamente allo scuotimento del baricentro, mostra una scarsa sensibilità alle variazioni di velocità. Il modello ATV attraversa una risonanza con una velocità di 10 m/s (frequenza 1 Hz), poi a 15 m/s il sistema torna ad avere una risposta più contenuta e aumenta lo sfasamento. Il modello Matlab-Simulink è più rigido, infatti, è ancora in banda passante, dato che si ha la stessa ampiezza di risposta indipendentemente dalla velocità e quindi dalla frequenza di eccitazione.

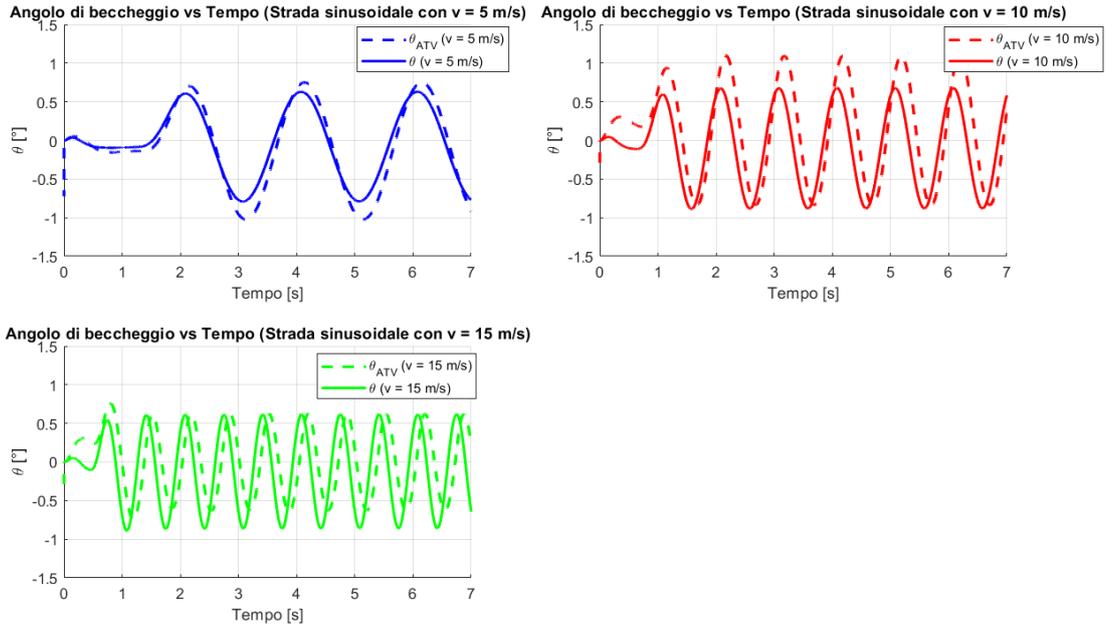


Figura 8.35 - Angolo di beccheggio vs Tempo su strada sinusoidale con velocità 5 m/s (figura in alto a sinistra), 10 m/s (figura in alto a destra) e 15 m/s (figura in basso a sinistra) con veicolo cingolato con cinque road wheels

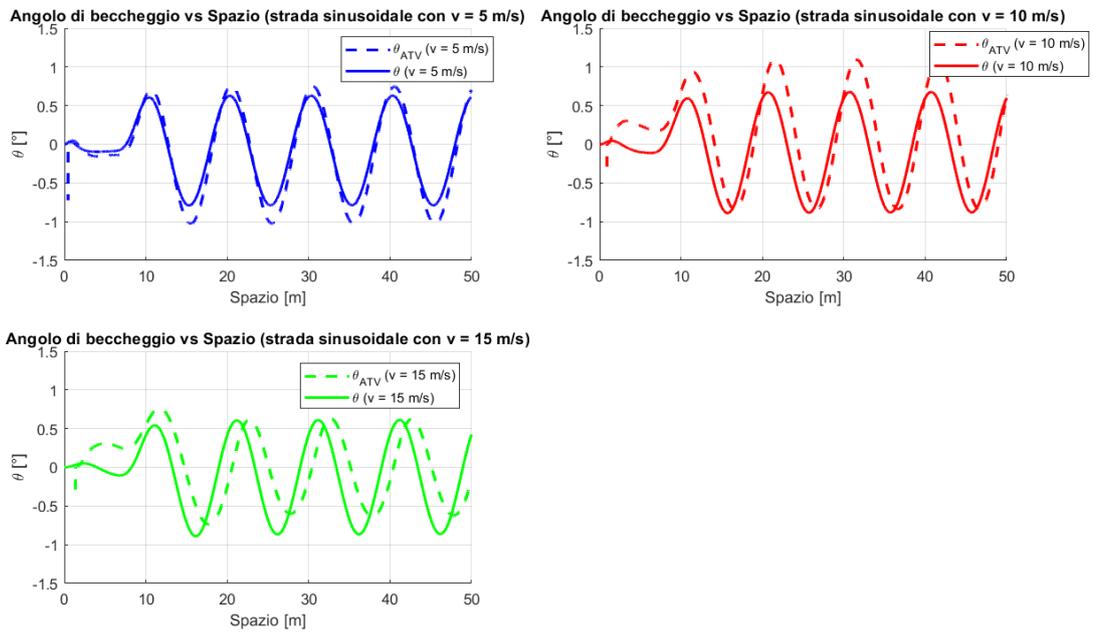


Figura 8.36 - Angolo di beccheggio vs Spazio su strada sinusoidale con velocità 5 m/s (figura in alto a sinistra), 10 m/s (figura in alto a destra) e 15 m/s (figura in basso a sinistra) con veicolo cingolato con cinque road wheels

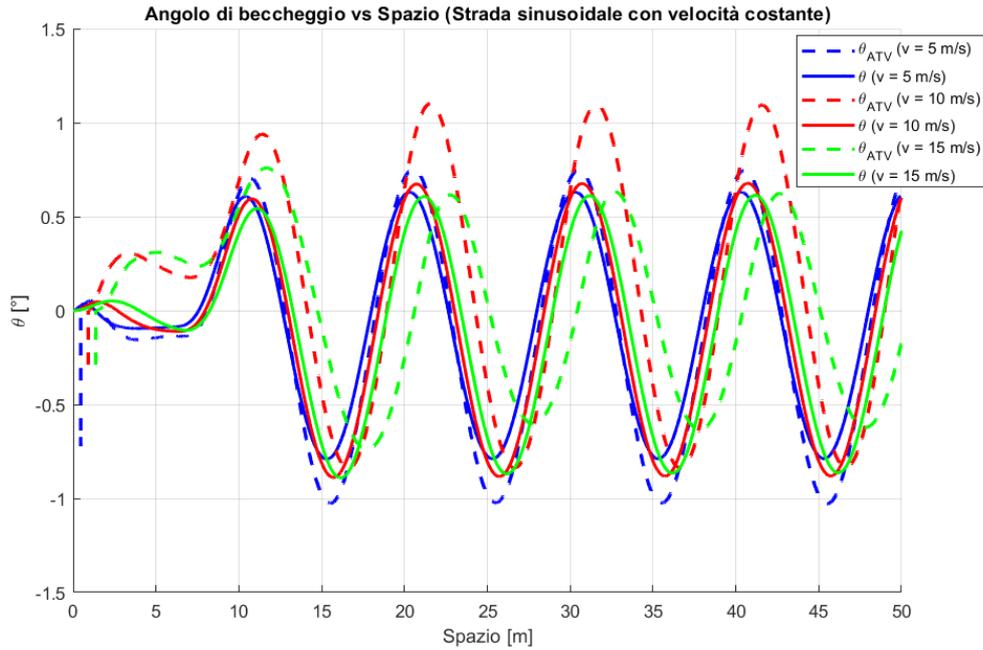


Figura 8.37 - Angolo di beccheggio vs Spazio (strada sinusoidale con velocità costante) con veicolo cingolato con cinque road wheels

8.5.4 Risposta in frequenza

Per completare la validazione del modello si è valuta la risposta in frequenza per quanto riguarda l'accelerazione verticale del baricentro. Al fine di andare ad eccitare le varie frequenze, è stata eseguita una prova di rampa di velocità su un profilo stradale sinusoidale con lunghezza d'onda costante, come si forza di tensionamento si continua a mantenere 50 kN.

Il profilo stradale in questa prova ha una lunghezza di 300 metri e una larghezza di 5 metri, il tratto iniziale e quello finale sono pianeggianti e hanno entrambi una lunghezza pari a 10 metri, in modo da rispettare l'ipotesi di strada piana fatta per l'analisi statica.

La parte sinusoidale del profilo stradale ha una lunghezza di 280 metri e viene descritta dalla equazione 8.38, i parametri del profilo sono:

- $h_0 = 0.02 \text{ m}$;
- $\lambda = 1.5 \text{ m}$;
- $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

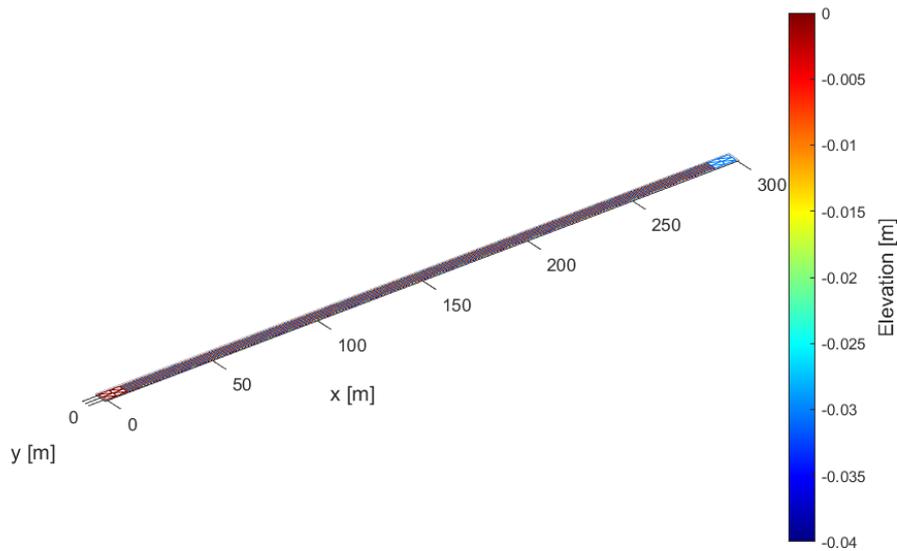


Figura 8.38 - Profilo stradale sinusoidale (analisi risposta in frequenza)

Come si nota in Figura 8.39, la prova prevede 1 secondo a velocità costante pari a 1 m/s, in modo da superare il tratto pianeggiante, successivamente si accelera da 1 m/s a 15 m/s in 28 secondi e infine si sta 1 secondo a velocità costante di 15 m/s (in corrispondenza del tratto piano finale).

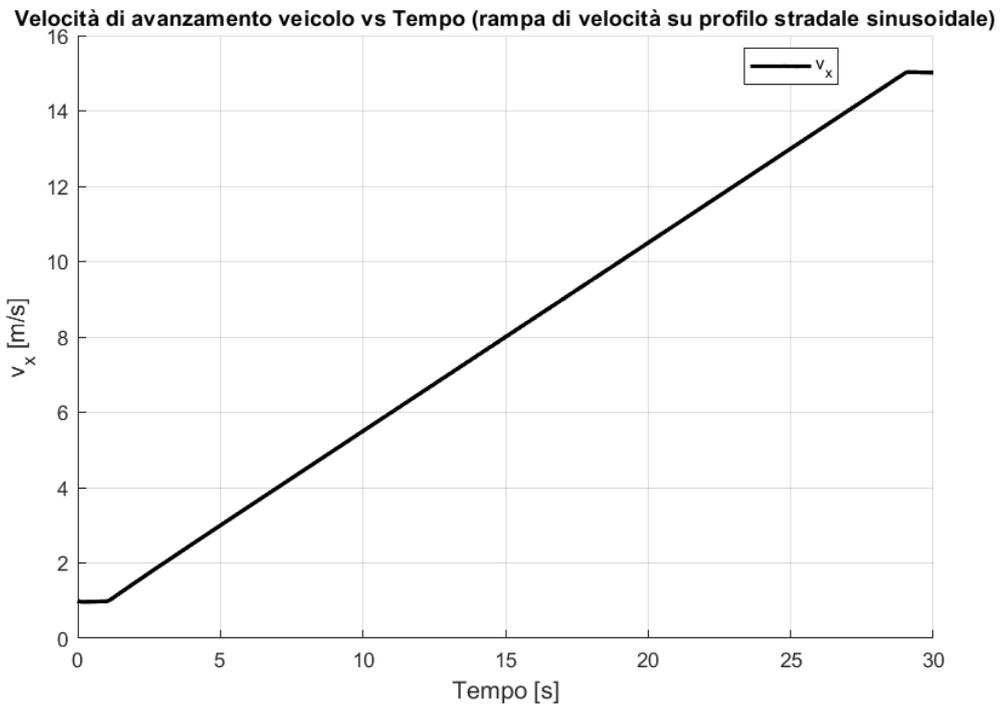


Figura 8.39 - Velocità di avanzamento veicolo vs Tempo (rampa di velocità su profilo stradale sinusoidale) con veicolo cingolato con cinque road wheels

La frequenza fondamentale si può scrivere come:

$$f = \frac{v_x}{\lambda}$$

(8 . 40)

In cui:

- f [Hz]: frequenza fondamentale;
- v_x $\left[\frac{m}{s}\right]$: velocità di avanzamento del veicolo;
- λ [m]: lunghezza d'onda della strada.

Dunque, riferendosi all'equazione 8.40, variando la velocità da 1 m/s a 15 m/s, con lunghezza d'onda costante pari a 1.5 m, andrò ad eccitare un range di frequenze che va da 0.67 Hz a 10 Hz.

Per caratterizzare il comportamento del sistema verrà analizzata la seguente risposta in frequenza:

- Input: profilo stradale h ;
- Output: accelerazione verticale a_z .

Prima di procedere con l'analisi della risposta in frequenza, nella Figura 8.40 è riportato l'andamento temporale dell'accelerazione verticale. Questo consente di ottenere una visione preliminare del segnale e di comprenderne le caratteristiche.

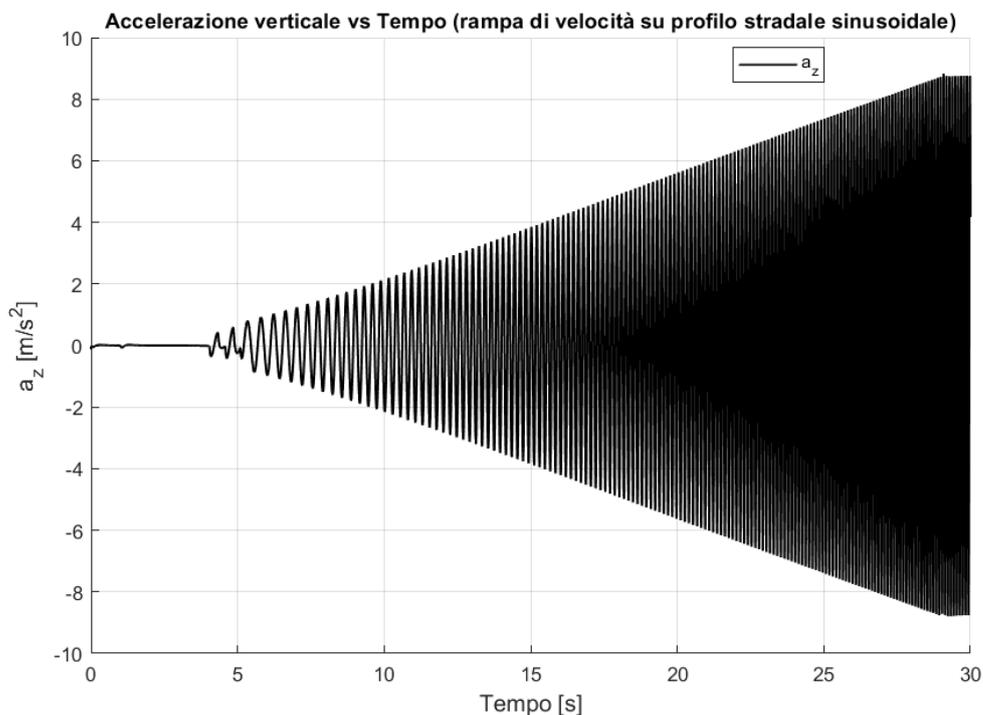


Figura 8.40 - Accelerazione verticale vs Tempo (rampa di velocità su profilo stradale sinusoidale) con veicolo cingolato con cinque road wheels

È evidente come l'accelerazione verticale aumenti progressivamente con l'incremento della velocità di avanzamento del veicolo. Al contrario, il segmento in cui l'accelerazione verticale risulta pressoché nulla corrisponde alla porzione iniziale pianeggiante del profilo stradale.

Dopo aver esaminato l'accelerazione verticale nel dominio temporale, ci si aspetta di ottenere risultati coerenti anche nell'analisi in frequenza. In Figura 8.41 sono riportati il modulo e la fase della risposta in frequenza (rapporto tra accelerazione verticale e spostamento stradale), insieme alla funzione di coerenza relativa.

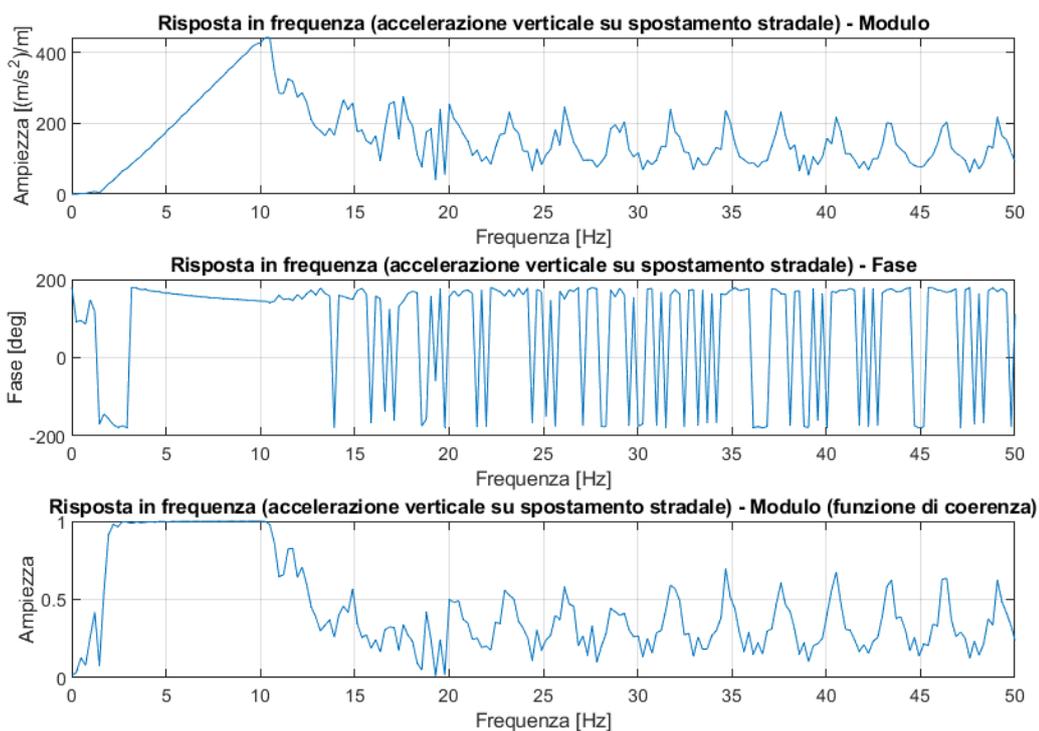


Figura 8.41 - Modulo (figura in alto), fase (figura in centro) e funzione di coerenza (figura in basso) della risposta in frequenza (accelerazione verticale su spostamento stradale) con veicolo cingolato con cinque road wheels

Dall'analisi della figura si osserva immediatamente un incremento del modulo della risposta in frequenza nell'intervallo 0-10 Hz, che corrisponde alle frequenze effettivamente sollecitate durante la prova. Questo comportamento indica che, nel corso del test, l'ampiezza delle oscillazioni dell'accelerazione verticale aumenta, in linea con quanto evidenziato in Figura 8.40.

La funzione di coerenza fornisce una misura dell'affidabilità della stima della risposta in frequenza e del comportamento lineare del sistema. Quando la funzione di coerenza assume valore pari a 1, la stima è affidabile, mentre valori prossimi allo 0 indicano una stima poco accurata. Questo può essere attribuito alla mancanza di energia fornita al sistema in quel range di frequenze o a un comportamento non lineare del sistema stesso. I risultati ottenuti confermano la loro verosimiglianza, poiché la funzione di coerenza si

mantiene vicina all'unità per le frequenze sollecitate durante la prova, calando rapidamente oltre i 10 Hz.

Per approfondire il comportamento nel range di frequenze di interesse, in Figura 8.42 sono riportati gli stessi risultati con un dettaglio maggiore nell'intervallo 0-10 Hz.

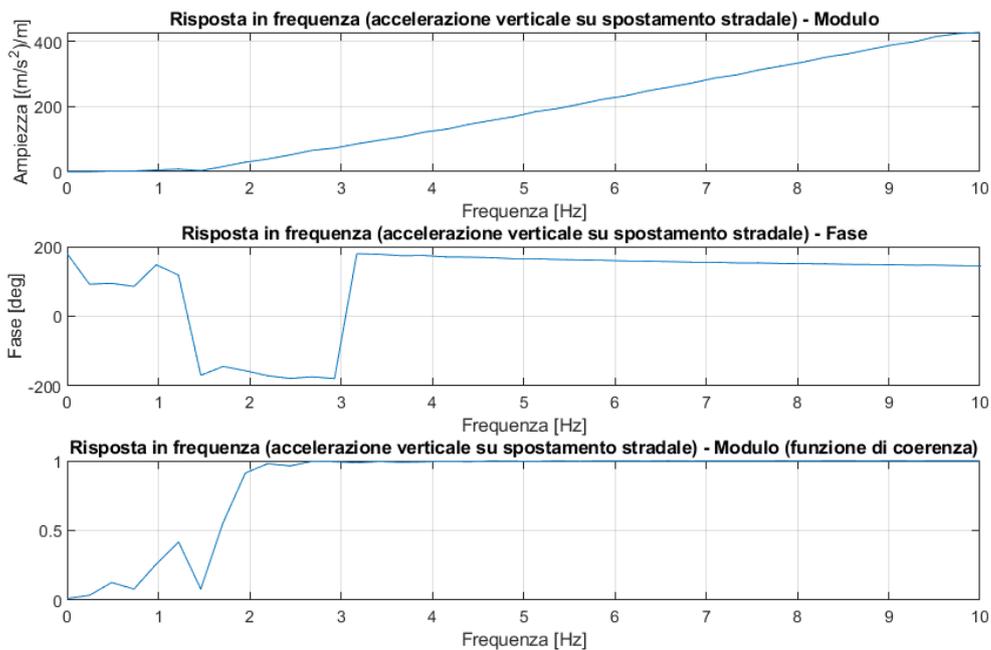


Figura 8.42 - Modulo (figura in alto), fase (figura in centro) e funzione di coerenza (figura in basso) della risposta in frequenza (accelerazione verticale su spostamento stradale) con veicolo cingolato con cinque road wheels nell'intervallo 0-10 Hz

Analizzando l'intervallo di frequenze compreso tra 0.67 e 1.5 Hz, corrispondente alle prime frequenze eccitate dal veicolo all'ingresso nel profilo stradale, si osserva che i picchi di ampiezza risultano poco pronunciati. Questo comportamento indica che il sistema presenta un elevato smorzamento. Un sistema sovrasmorzato, infatti, è caratterizzato da una rigidità tale da trasmettere integralmente le oscillazioni, spiegando così l'aumento rapido dell'accelerazione verticale all'incrementare della velocità di avanzamento.

In Figura 8.43 è rappresentato lo spettrogramma dell'accelerazione verticale, che utilizza una scala cromatica per evidenziare la distribuzione della potenza della risposta nel dominio tempo-frequenza. La potenza, direttamente correlata all'ampiezza della risposta, aumenta con il crescere dell'ampiezza stessa. Nel grafico, le aree caratterizzate da colori più intensi indicano livelli di potenza più elevati, mentre quelle con colori più tenui o freddi rappresentano potenze inferiori.

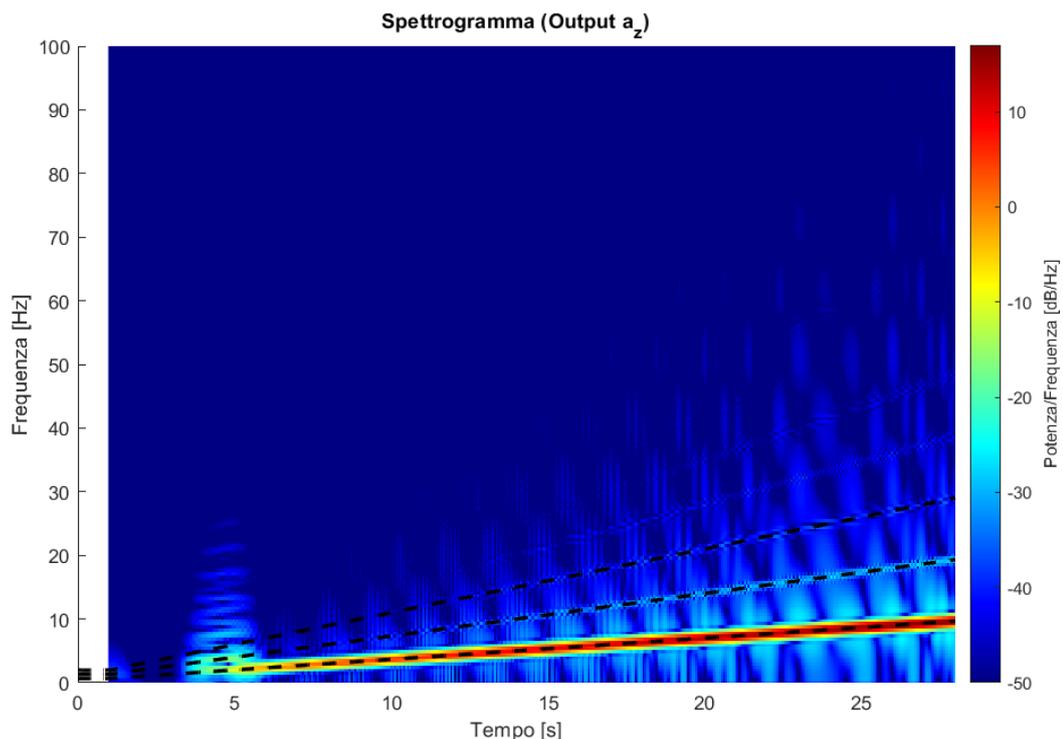


Figura 8.43 - Spettrogramma output (accelerazione verticale) con veicolo cingolato con cinque road wheels

Nel grafico, la linea tratteggiata nera più in basso rappresenta la frequenza fondamentale $f = v/\lambda$, mentre le linee tratteggiate superiori indicano le super armoniche, che sono multipli della frequenza fondamentale ($2f, 3f, \dots$). La risposta risulta quindi pluriarmonica: oltre alla frequenza fondamentale sono presenti le super armoniche, anche se in questo caso con potenze significativamente inferiori.

Nei primi cinque secondi non si rilevano forzanti, come evidenziato dal colore blu scuro che domina il grafico per ogni valore di frequenza. A partire dai cinque secondi, si nota una certa discontinuità, corrispondente al passaggio dal tratto pianeggiante al tratto sinusoidale del profilo stradale. In questa fase, si iniziano a eccitare frequenze più elevate, evidenziate dall'intensificazione dei colori nelle fasce superiori dello spettro. Durante il transito sul tratto sinusoidale, la risposta del sistema risulta coerente: rimane dominante la frequenza fondamentale, che rappresenta la forzante del sistema, mentre le super armoniche, pur presenti, mostrano un'intensità ridotta e possono essere considerate trascurabili in prima approssimazione.

Osservando la frequenza fondamentale, si nota che, con l'aumento della velocità, la regione corrispondente alla linea tratteggiata si intensifica progressivamente, assumendo un colore rosso acceso. Questo comportamento conferma che l'ampiezza dell'accelerazione verticale aumenta al crescere della velocità durante la prova.

In Figura 8.44 è illustrato lo spettrogramma dell'input del sistema, ovvero lo spostamento del profilo stradale.

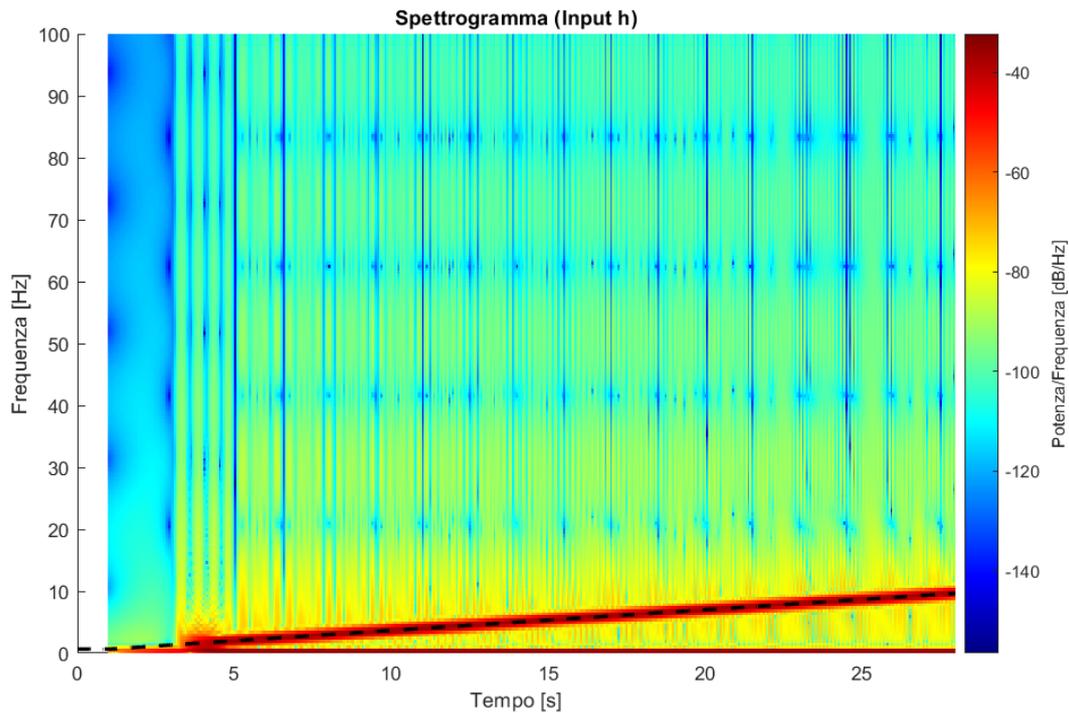


Figura 8.44 - Spettrogramma input (spostamento profilo stradale) con veicolo cingolato con cinque road wheels

Si osserva che l'input è mono-armonico, come evidenziato dalla concentrazione delle zone di colore più intenso unicamente in corrispondenza della frequenza fondamentale.

Questo consente di concludere che il sistema non si comporta in maniera perfettamente lineare. In un sistema lineare, infatti, un input mono-armonico genererebbe un output anch'esso mono-armonico. Nel caso analizzato, invece, nell'accelerazione verticale sono presenti anche le super armoniche, sebbene con un'intensità significativamente inferiore rispetto alla frequenza fondamentale.

Per evidenziare meglio i picchi della risposta in frequenza, è stata effettuata la stessa prova riducendo il coefficiente di smorzamento delle sospensioni di un ordine di grandezza, impostando $c = 9.7 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{s}/\text{m}$. In Figura 8.45 è riportata la risposta in frequenza ottenuta con questa configurazione.

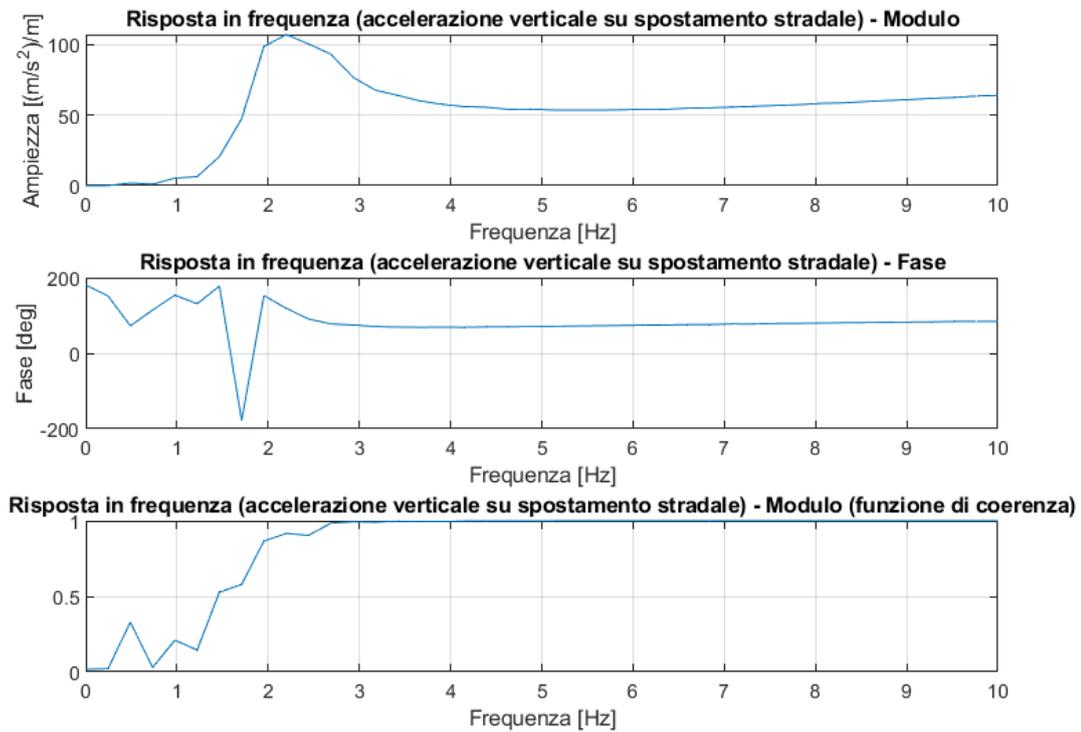


Figura 8.45 - Modulo (figura in alto), fase (figura in centro) e funzione di coerenza (figura in basso) della risposta in frequenza (accelerazione verticale su spostamento stradale) con veicolo cingolato con cinque road wheels (con smorzamento ridotto) nell'intervallo 0-10 Hz

Analizzando il grafico, si può apprezzare un picco di risonanza a 2.2 Hz dove c'è una repentina salita dell'accelerazione, a cui segue una discesa. Dunque, si vede meno crescita dell'ampiezza all'aumentare della frequenza, a dimostrazione del fatto che il sistema è meno smorzato. Le osservazioni fatte possono essere ulteriormente confermate analizzando il grafico dell'accelerazione verticale nel dominio del tempo, riportato in Figura 8.46.

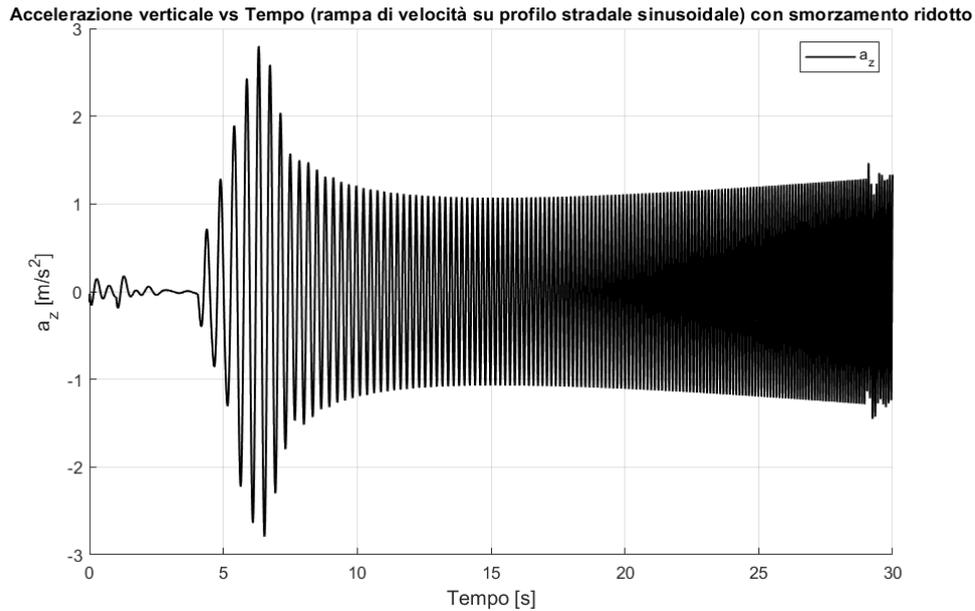


Figura 8.46 - Accelerazione verticale vs Tempo (rampa di velocità su profilo stradale sinusoidale) con veicolo cingolato con cinque road wheels (con smorzamento ridotto)

Dopo aver analizzato i risultati ottenuti tramite il modello Matlab-Simulink, si procede al confronto con quelli derivati dal modello ATV. Per garantire una valutazione coerente, nel confronto vengono considerati i valori della simulazione corrispondenti allo stesso coefficiente di smorzamento utilizzato nel modello ATV.

In Figura 8.47 è mostrato il confronto tra i due modelli del segnale temporale di accelerazione verticale, in colore rosso sono indicati i risultati del modello ATV mentre in nero quelli del modello Matlab-Simulink. Si nota come il trend sia simile tra i due modelli, anche se il modello Matlab-Simulink ha accelerazioni verticali leggermente superiori, a dimostrazione del fatto che è più rigido rispetto ad ATV.

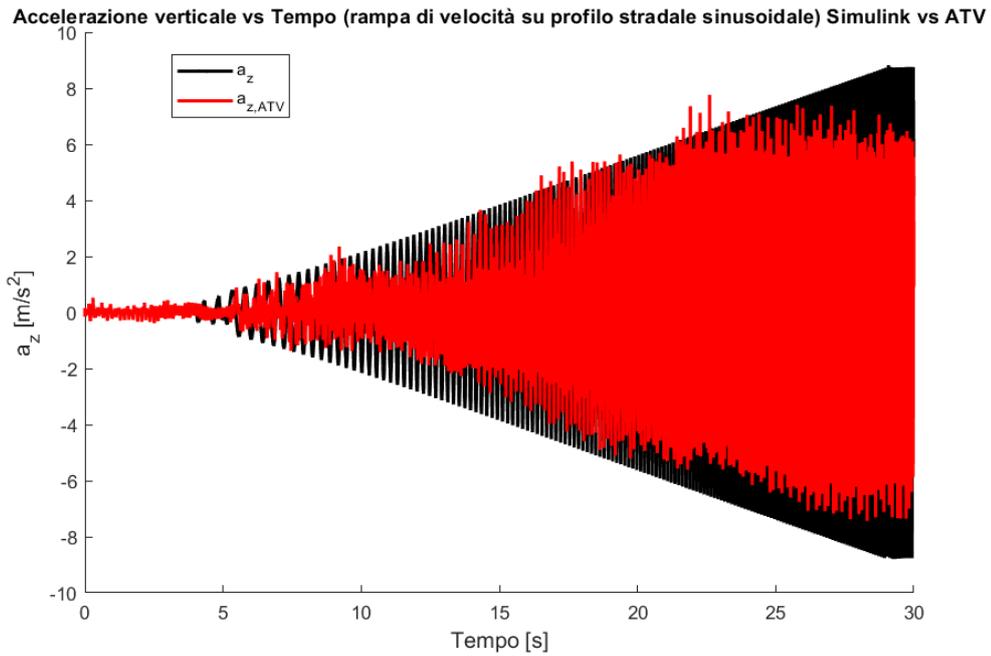


Figura 8.47 - Accelerazione verticale vs Tempo (rampa di velocità su profilo stradale sinusoidale) Simulink vs ATV

Nella Figura 8.48 è illustrata la risposta in frequenza ottenuta mediante il modello ATV. Si rileva un primo picco di risonanza attorno ai 2 Hz, seguito da un incremento progressivo dell'ampiezza fino a raggiungere i 10 Hz.

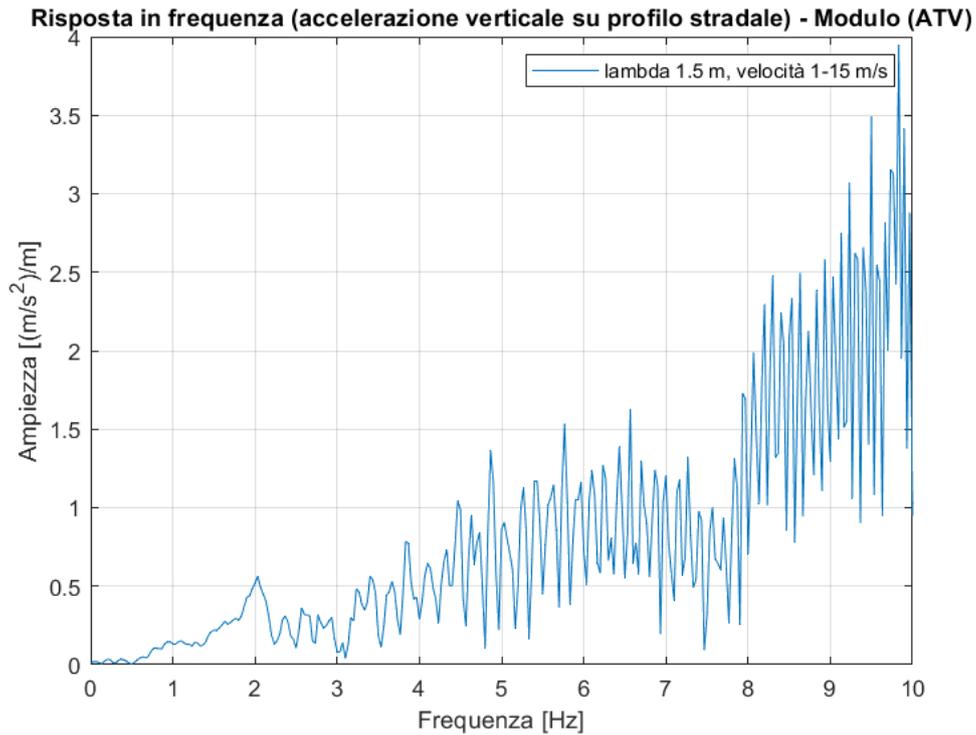


Figura 8.48 - Modulo della risposta in frequenza (accelerazione verticale su spostamento stradale) nel modello ATV nell'intervallo 0-10 Hz

In Figura 8.49 è mostrato lo spettrogramma dell'accelerazione verticale del modello ATV, si nota come il modello ATV non sia lineare dato che oltre alla frequenza fondamentale sono presenti le super armoniche. Queste armoniche si manifestano perché i sistemi sospensivi reali tendono ad amplificare i multipli interi della frequenza fondamentale. Come evidenziato dal confronto tra i risultati ottenuti con il modello Matlab-Simulink, presentati in Figura 8.43, e quelli del modello ATV, le super armoniche nel modello ATV mostrano un'intensità maggiore. Questo comportamento è attribuibile al fatto che il modello ATV, essendo più dettagliato e vicino al funzionamento reale di un veicolo, incorpora una maggiore non linearità.

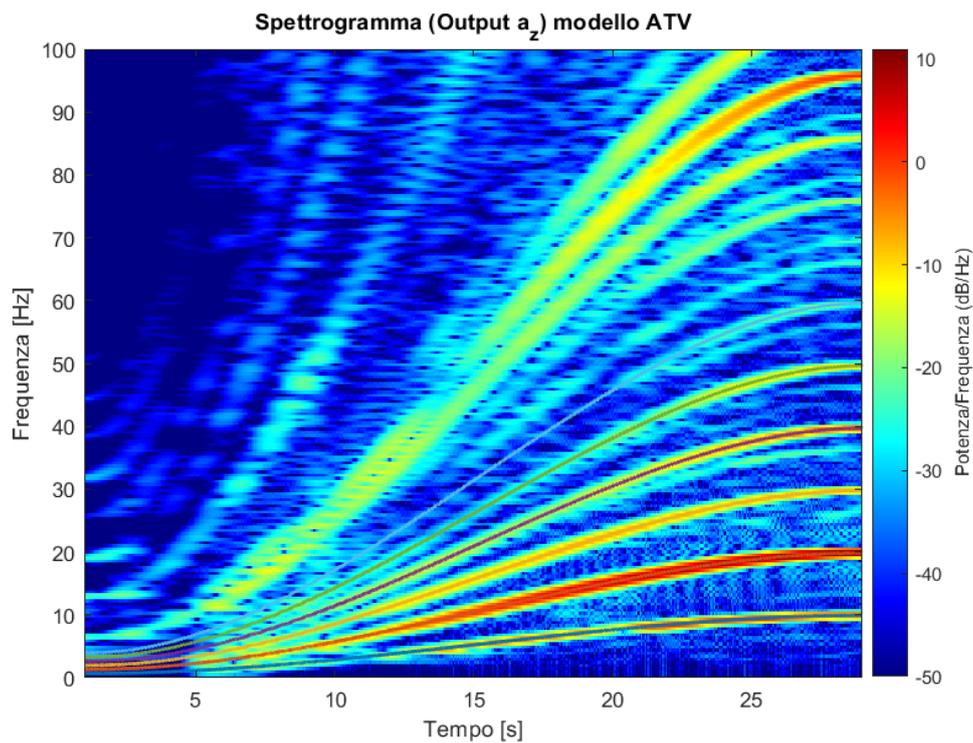


Figura 8.49 - Spettrogramma output (accelerazione verticale) nel modello ATV

9. Modello con sette road wheels

9.1 Caratteristiche veicolo cingolato

Il modello di veicolo proposto è costituito da un telaio, considerato come un corpo rigido con massa concentrata nel proprio baricentro, sette road wheels, una tensioner wheel, una sprocket wheel e quattro ruote di supporto.

9.1.1 Configurazione geometrica

Nella Tabella 9.1 sono riportate le quote geometriche dei centri ruota, relative a un sistema di riferimento con origine nel centro della sprocket wheel:

Tabella 9.1 - Quote geometriche dei centri ruota (veicolo cingolato con sette road wheels)

RUOTA	x_c [m]	z_c [m]
Sprocket wheel	0	0
Tensioner wheel	6.185	0.019
Road wheel 1	5.455	-0.370
Road wheel 2	4.667	-0.370
Road wheel 3	3.884	-0.370
Road wheel 4	3.108	-0.370
Road wheel 5	2.332	-0.370
Road wheel 6	1.556	-0.370
Road wheel 7	0.780	-0.370
Ruota di supporto 1	4.995	0.220
Ruota di supporto 2	4.224	0.220
Ruota di supporto 3	2.697	0.220
Ruota di supporto 4	1.120	0.220

La posizione del baricentro del veicolo cingolato è spostata verso l'assale posteriore, infatti, la distanza tra il baricentro e la sprocket wheel è $d_{CG} = 2.903$ m. La quota verticale del baricentro rispetto alla sprocket wheel è pari a $h_{CG} = 0.400$ m. La distanza verticale del baricentro dai punti di attacco delle sospensioni al telaio è $q = 0.500$ m.

I raggi di ciascuna ruota sono mostrati in Tabella 9.2:

Tabella 9.2 - Raggi delle ruote (veicolo cingolato con sette road wheels)

RUOTA	r [m]
Sprocket wheel	0.310
Tensioner wheel	0.300
Road wheel 1	0.330
Road wheel 2	0.330
Road wheel 3	0.330
Road wheel 4	0.330
Road wheel 5	0.330
Road wheel 6	0.330
Road wheel 7	0.330
Ruota di supporto 1	0.115
Ruota di supporto 2	0.115
Ruota di supporto 3	0.115
Ruota di supporto 4	0.115

Conoscendo la posizione dei centri ruota di tutte le ruote e il loro raggio è possibile realizzare l'intero cingolo tramite il tool descritto nell'appendice, si possono quindi ricavare gli angoli di inclinazione α e β dei tratti inclinati del cingolo:

$$\alpha = 26.7^\circ$$

$$\beta = 30.1^\circ$$

In Figura 9.1 è rappresentata la configurazione geometrica delle ruote e del cingolo, realizzata tramite il tool calcolo catena descritto nell'appendice.

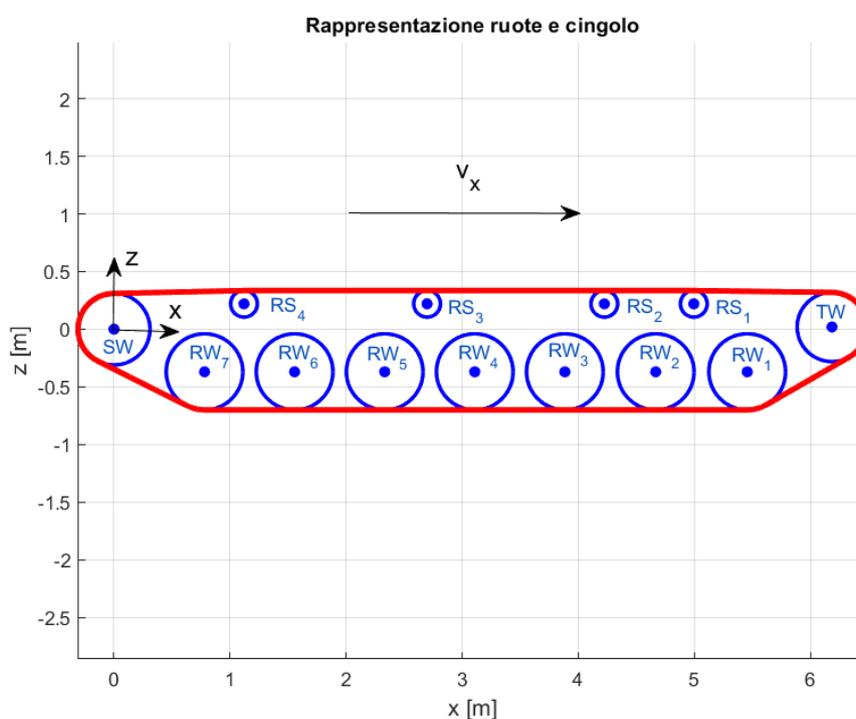


Figura 9.1 - Rappresentazione ruote e cingolo realizzata tramite il tool calcolo catena in ambiente Matlab (veicolo cingolato con sette road wheels)

9.1.2 Caratteristiche fisiche

In Tabella 9.3 sono descritte le masse di ogni componente:

Tabella 9.3 - Massa dei componenti (veicolo cingolato con sette road wheels)

COMPONENTE	Massa [kg]
Massa sospesa	45300
Sprocket wheel	250
Tensioner wheel	112
Road wheels	735
Ruota di supporto	36
Cingolo	2139
TOTALE	48572

I momenti di inerzia di ciascun componente sono:

Tabella 9.4 - Momenti d'inerzia dei componenti (veicolo cingolato con sette road wheels)

MOMENTI D'INERZIA		
Grandezza	Valore	Unità di misura
$I_{y,CG}$	80000	$kg \cdot m^2$
I_{SW}	0.55	$kg \cdot m^2$
I_{TW}	0.3	$kg \cdot m^2$
I_{RW}	0.5	$kg \cdot m^2$
I_{RS}	0.06	$kg \cdot m^2$

Le rigidità delle sospensioni sono:

Tabella 9.5 - Rigidità delle sospensioni (veicolo cingolato con sette road wheels)

RIGIDITÀ		
Grandezza	Valore	Unità di misura
k_1	$40 \cdot 10^4$	N/m
k_2	$40 \cdot 10^4$	N/m
k_3	$40 \cdot 10^4$	N/m
k_4	$40 \cdot 10^4$	N/m
k_5	$40 \cdot 10^4$	N/m
k_6	$40 \cdot 10^4$	N/m
k_7	$40 \cdot 10^4$	N/m

Si considera un veicolo cingolato con ammortizzatori tarati secondo un criterio di smorzamento ottimo, come precedente descritto nel modello con tre road wheels, dunque, per calcolare il coefficiente di smorzamento si seguono i seguenti passaggi.

Si ricava la massa totale sostenuta dalla sospensione $m_{s,tot}$:

$$m_{s,tot} = m_s + m_{SW} + 4m_{RS} + m_{TW} + m_{cin,SW} + m_{cin,RS,1} + m_{cin,RS,2} + m_{cin,RS,3} + m_{cin,RS,4} + m_{cin,TW} \quad (9.1)$$

Dove:

- m_s [kg] : massa sospesa;
- m_{SW} [kg] : massa della sprocket wheel;
- m_{RS} [kg] : massa della singola ruota di supporto;
- m_{TW} [kg] : massa della tensioner wheel;
- $m_{cin,SW}$ [kg] : massa del tratto di cingolo sostenuto dalla sprocket wheel;
- $m_{cin,RS,1}$ [kg] : massa del tratto di cingolo sostenuto dalla ruota di supporto 1;
- $m_{cin,RS,2}$ [kg] : massa del tratto di cingolo sostenuto dalla ruota di supporto 2;
- $m_{cin,RS,3}$ [kg] : massa del tratto di cingolo sostenuto dalla ruota di supporto 3;
- $m_{cin,RS,4}$ [kg] : massa del tratto di cingolo sostenuto dalla ruota di supporto 4;
- $m_{cin,TW}$ [kg] : massa del tratto di cingolo sostenuto dalla tensioner wheel.

Si calcola la rigidità verticale equivalente del veicolo k_{tot} , pari al parallelo di tutte le molle:

$$k_{tot} = \sum_{i=1}^7 k_i \quad (9.2)$$

Dove:

- k_i $\left[\frac{N}{m}\right]$: rigidità della molla dell'i-esimo assale.

Si calcola lo smorzamento ottimo totale $c_{ott,tot}$:

$$c_{ott,tot} = \sqrt{\frac{m_{s,tot} k_{tot}}{2}} \quad (9.3)$$

Si può quindi ricavare lo smorzamento di un singolo assale ripartendo lo smorzamento totale sul numero di ammortizzatori:

$$c_i = c_{ott,i} = \frac{c_{ott,tot}}{N_{damp}} = 3.67 \cdot 10^4 \frac{N \cdot s}{m} \quad (9.4)$$

Dove:

- c_i $\left[\frac{N \cdot s}{m}\right]$: coefficiente di smorzamento dell'ammortizzatore dell'i-esimo assale;
- N_{damp} [-] : è il numero di ammortizzatori (in questo caso pari a 7).

I coefficienti di smorzamento delle sospensioni sono:

Tabella 9.6 - Coefficienti di smorzamento delle sospensioni (veicolo cingolato con sette road wheels)

COEFFICIENTI DI SMORZAMENTO		
Grandezza	Valore	Unità di misura
c_1	$3.67 \cdot 10^4$	$N \cdot s/m$
c_2	$3.67 \cdot 10^4$	$N \cdot s/m$
c_3	$3.67 \cdot 10^4$	$N \cdot s/m$
c_4	$3.67 \cdot 10^4$	$N \cdot s/m$
c_5	$3.67 \cdot 10^4$	$N \cdot s/m$
c_6	$3.67 \cdot 10^4$	$N \cdot s/m$
c_7	$3.67 \cdot 10^4$	$N \cdot s/m$

Per completezza, viene calcolato lo smorzamento critico $c_{cr,i}$, anche se non verrà al momento impostato nelle simulazioni:

$$c_{cr,i} = \frac{2\sqrt{m_{s,tot}k_{tot}}}{7} = 10.4 \cdot 10^4 \frac{N \cdot s}{m} \quad (9.5)$$

La frequenza naturale dello scuotimento verticale vale:

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{tot}}{m_{s,tot}}} = 1.22 \text{ Hz} \quad (9.6)$$

9.2 Modellazione cingolo

La numerazione dei tratti di cingolo per convenzione parte dal tratto di cingolo avvolto attorno alla road wheel 7 e poi prosegue in senso orario, come mostrato in Figura 9.2.

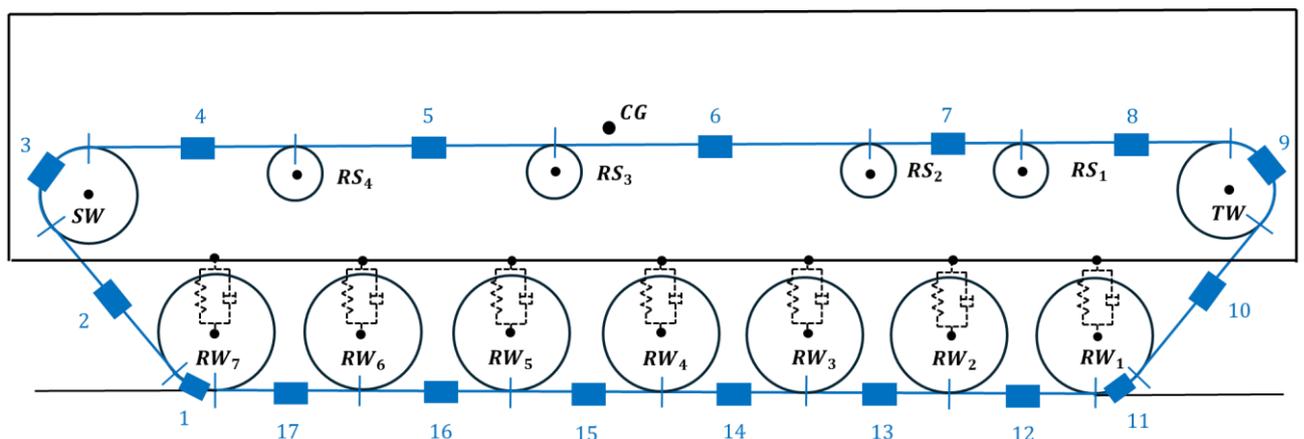


Figura 9.2 - Suddivisione dei tratti del cingolo (veicolo cingolato con sette road wheels)

Per calcolare la massa di ciascun tratto del cingolo, si può applicare l'equazione 3.33 descritta precedentemente nella sezione 3.6.

Il peso dei tratti di cingolo viene sostenuto alle varie ruote secondo la suddivisione descritta in 9.7. Per quanto riguarda le road wheels, sono sempre valide le considerazioni fatte nel modello precedentemente descritto, ovvero, il tratto di cingolo a contatto con il terreno non influisce sui perni delle road wheels, ma agisce esclusivamente nel modello di interazione cingolo-terreno.

$$\begin{aligned}
m_{cin,SW} &= m_{cin,1} + m_{cin,2} + m_{cin,3} + \frac{m_{cin,4}}{2} \\
m_{cin,RS,4} &= \frac{m_{cin,4}}{2} + \frac{m_{cin,5}}{2} \\
m_{cin,RS,3} &= \frac{m_{cin,5}}{2} + \frac{m_{cin,6}}{2} \\
m_{cin,RS,2} &= \frac{m_{cin,6}}{2} + \frac{m_{cin,7}}{2} \\
m_{cin,RS,1} &= \frac{m_{cin,7}}{2} + \frac{m_{cin,8}}{2} \\
m_{cin,TW} &= \frac{m_{cin,8}}{2} + m_{cin,9} + m_{cin,10} + m_{cin,11} \\
m_{cin,RW,1} &= \frac{m_{cin,12}}{2} \\
m_{cin,RW,2} &= \frac{m_{cin,12}}{2} + \frac{m_{cin,13}}{2} \\
m_{cin,RW,3} &= \frac{m_{cin,13}}{2} + \frac{m_{cin,14}}{2} \\
m_{cin,RW,4} &= \frac{m_{cin,14}}{2} + \frac{m_{cin,15}}{2} \\
m_{cin,RW,5} &= \frac{m_{cin,15}}{2} + \frac{m_{cin,16}}{2} \\
m_{cin,RW,6} &= \frac{m_{cin,16}}{2} + \frac{m_{cin,17}}{2} \\
m_{cin,RW,7} &= \frac{m_{cin,17}}{2}
\end{aligned} \tag{9.7}$$

9.3 Modello statico

Nel veicolo cingolato con sette road wheels il sistema di equazioni risolvete è il seguente:

- 1) $-(1 + \cos \alpha) T + O_{SW} = 0$
- 2) $-\sin \alpha T + V_{SW} = m_{SW}g + m_{cin,SW}g + \left(\frac{1-K_{RS}}{2}\right) \sum_{i=1}^4 m_{cin,RS,i}g$
- 3) $(1 + \cos \beta) T = F$
- 4) $-\sin \beta T + V_{TW} = m_{TW}g + m_{cin,TW}g + \left(\frac{1-K_{RS}}{2}\right) \sum_{i=1}^4 m_{cin,RS,i}g$
- 5) $(\cos \beta - 1)T + O_{RW,1} = 0$
- 6) $\sin \beta T + F_{z,RW,1} + k_1 z_{CG} - k_1 l_1 \cdot \tan \theta = m_{RW}g$
- 7) $F_{z,RW,2} + k_2 z_{CG} - k_2 l_2 \cdot \tan \theta = m_{RW}g$
- 8) $F_{z,RW,3} + k_3 z_{CG} - k_3 l_3 \cdot \tan \theta = m_{RW}g$
- 9) $F_{z,RW,4} + k_4 z_{CG} - k_4 l_4 \cdot \tan \theta = m_{RW}g$
- 10) $F_{z,RW,5} + k_5 z_{CG} + k_5 l_5 \cdot \tan \theta = m_{RW}g$

$$\begin{aligned}
11) & F_{z,RW,6} + k_6 z_{CG} + k_6 l_6 \cdot \tan \theta = m_{RW} g \\
12) & (1 - \cos \alpha) T - O_{RW,7} = 0 \\
13) & \sin \alpha T + F_{z,RW,7} + k_7 z_{CG} + k_7 l_7 \cdot \tan \theta = m_{RW} g \\
14) & O_{SW} - O_{RW,1} + O_{RW,7} = F \\
15) & V_{TW} + V_{SW} + (\sum_{i=1}^7 k_i) z_{CG} + (-\sum_{i=1}^4 k_i l_i + \sum_{i=5}^7 k_i l_i) \tan \theta = -\sum_{i=1}^4 V_{RS,i} + \\
& -m_s g \\
16) & -V_{SW} d_{CG} + V_{TW} \cdot (x_{C,TW} - d_{CG}) - O_{SW} h_{CG} + O_{RW,1} q - O_{RW,7} q + \\
& + [\sum_{i=1}^7 k_i (x_{C,RW,i} - d_{CG})] z_{CG} + (-\sum_{i=1}^4 k_i l_i (x_{C,RW,i} - d_{CG}) + \\
& \sum_{i=5}^7 k_i l_i (x_{C,RW,i} + -d_{CG})) \tan \theta = -\sum_{i=1}^4 V_{RS,i} (x_{C,RS,i} - d_{CG}) - F (h_{CG} - z_{C,TW})
\end{aligned} \tag{9.8}$$

In totale ci sono quindici incognite, indicate nelle equazioni da un colore rosso:

- $T, V_{SW}, V_{TW}, O_{SW}, O_{RW,1}, O_{RW,7}, F_{z,RW,1}, F_{z,RW,2}, F_{z,RW,3}, F_{z,RW,4}, F_{z,RW,5}, F_{z,RW,6}, F_{z,RW,7}, z_{CG}, \tan \theta$.

Si prosegue riscrivendo il sistema nella seguente forma:

$$Ax = b \tag{9.9}$$

Dove:

- x è il vettore colonna delle incognite;
- A è la matrice dei coefficienti;
- b è il vettore colonna dei termini noti.

Il vettore colonna delle incognite x , di dimensione 15×1 , per una migliore visualizzazione, viene diviso in due sotto vettori:

$$x = [x_1 \quad x_2]^T$$

Dove:

- x_1 è un vettore riga, di dimensione 1×6 , contenente la tensione, le reazioni vincolari della sprocket wheel, della tensioner e le reazioni vincolari orizzontali delle road wheels:

$$x_1 = [T \quad V_{SW} \quad V_{TW} \quad O_{SW} \quad O_{RW,1} \quad O_{RW,7}]$$

- x_2 è un vettore riga, di dimensione 1×9 , con all'interno le reazioni vincolari verticali al terreno in corrispondenza delle road wheels, lo scuotimento del baricentro e il beccheggio:

$$x_2 = [F_{z,RW,1} \quad F_{z,RW,2} \quad F_{z,RW,3} \quad F_{z,RW,4} \quad F_{z,RW,5} \quad F_{z,RW,6} \quad F_{z,RW,7} \quad z_{CG} \quad \tan \theta]$$

Analogamente ai casi con tre e cinque road wheels elimino l'equilibrio orizzontale della massa sospesa dal sistema di equazioni, perciò, la matrice dei coefficienti A , di dimensione 15×15 , è:

$$A = [A_1 \quad A_2]$$

Dove:

- A_1 è una matrice di dimensione 15×6 :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -(1 + \cos \alpha) & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (1 + \cos \beta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (\cos \beta - 1) & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (1 - \cos \alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d_{CG} & (x_{C,RW} - d_{CG}) & -h_{CG} & q & -q \end{bmatrix}$$

- A_2 è una matrice di dimensione 15×9 :

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & k_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & k_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sum_{i=1}^7 k_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sum_{i=1}^7 k_i (x_{C,RW,i} - d_{CG}) & \left(-\sum_{i=1}^4 k_i l_i + \sum_{i=5}^7 k_i l_i \right) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il vettore b dei termini noti è un vettore colonna di dimensione 15×1 :

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ m_{SW}g + m_{cin,SW}g + \left(\frac{1-K_{RS}}{2}\right) \sum_1^4 m_{cin,RS,i}g \\ F \\ m_{TW}g + m_{cin,TW}g + \left(\frac{1-K_{RS}}{2}\right) \sum_1^4 m_{cin,RS,i}g \\ 0 \\ m_{RW}g \\ m_{RW}g \\ m_{RW}g \\ m_{RW}g \\ m_{RW}g \\ m_{RW}g \\ 0 \\ m_{RW}g \\ -\sum_{i=1}^4 V_{RS,i} - m_s g \\ -\sum_{i=1}^4 V_{RS,i} (x_{C,RS,i} - d_{CG}) - F(h_{CG} - z_{C,TW}) \end{bmatrix}$$

9.4 Modello dinamico

Il sistema di equazioni risolvente è il seguente:

- 1) $T_{SW-cin,4} + T_{cin,2-SW} \cos \alpha - O_{SW} - m_{SW} \ddot{x}_{CG} + \ddot{\theta} m_{SW} b_{SW} \sin \gamma_{SW} = \dot{\theta}^2 m_{SW} b_{SW} \cos \gamma_{SW}$
- 2) $-T_{cin,2-SW} \sin \alpha + V_{SW} - m_{SW} \ddot{z}_{CG} - \ddot{\theta} m_{SW} b_{SW} \cos \gamma_{SW} = m_{SW} g + m_{cin,SW} g + \left(\frac{1-K_{RS}}{2}\right) \sum_{i=1}^4 m_{cin,RS,i} g + \dot{\theta}^2 m_{SW} b_{SW} \sin \gamma_{SW}$
- 3) $T_{SW-cin,4} r_{SW} - T_{cin,2-SW} r_{SW} - \frac{I_{SW,tot}}{r_{SW}} \ddot{s}_{rel} = -C_{m,SW} + C_{a0,SW} + c_{perno} \omega_{SW}$
- 4) $-T_{cin,4-RS,4} r_{RS} + T_{RS,4-cin,5} r_{RS} - \frac{I_{RS}}{r_{RS}} \ddot{s}_{rel} = C_{a0,RS,4} + c_{perno} \omega_{SW} \frac{r_{SW}}{r_{RS}}$
- 5) $-T_{cin,5-RS,3} r_{RS} + T_{RS,3-cin,6} r_{RS} - \frac{I_{RS}}{r_{RS}} \ddot{s}_{rel} = C_{a0,RS,3} + c_{perno} \omega_{SW} \frac{r_{SW}}{r_{RS}}$
- 6) $-T_{cin,6-RS,2} r_{RS} + T_{RS,2-cin,7} r_{RS} - \frac{I_{RS}}{r_{RS}} \ddot{s}_{rel} = C_{a0,RS,2} + c_{perno} \omega_{SW} \frac{r_{SW}}{r_{RS}}$
- 7) $-T_{cin,7-RS,1} r_{RS} + T_{RS,1-cin,8} r_{RS} - \frac{I_{RS}}{r_{RS}} \ddot{s}_{rel} = C_{a0,RS,1} + c_{perno} \omega_{SW} \frac{r_{SW}}{r_{RS}}$
- 8) $-T_{cin,8-TW} - T_{TW-cin,10} \cos \beta - m_{TW} \ddot{x}_{CG} + \ddot{\theta} m_{TW} b_{TW} \sin \gamma_{TW} = -F + -\dot{\theta}^2 m_{TW} b_{TW} \cos \gamma_{TW}$
- 9) $-T_{TW-cin,10} \sin \beta + V_{TW} - m_{TW} \ddot{z}_{CG} + \ddot{\theta} m_{TW} b_{TW} \cos \gamma_{TW} = m_{TW} g + m_{cin,TW} g + \left(\frac{1-K_{RS}}{2}\right) \sum_{i=1}^4 m_{cin,RS,i} g + \dot{\theta}^2 m_{TW} b_{TW} \sin \gamma_{TW}$
- 10) $-T_{cin,8-TW} r_{TW} + T_{TW-cin,10} r_{TW} - \frac{I_{TW}}{r_{TW}} \ddot{s}_{rel} = C_{a0,TW} + c_{perno} \omega_{SW} \frac{r_{SW}}{r_{TW}}$
- 11) $T_{cin,10-RW,1} \cos \beta - T_{RW,1-cin,12} + O_{RW,1} - m_{RW} \ddot{x}_{CG} + \ddot{\theta} m_{RW} b_1 \sin \gamma_1 = -F_{x,RW,1} - \dot{\theta}^2 m_{RW} b_1 \cos \gamma_1$
- 12) $T_{cin,10-RW,1} \sin \beta + F_{z,RW,1} = -k_1 z_{CG} + k_1 l_1 \cdot \tan \theta + k_1 h_{RW,1} - c_1 \dot{z}_{CG} + c_1 \dot{\theta} b_1 \cos \gamma_1 + c_1 \dot{h}_{RW,1} + m_{RW} \ddot{h}_{RW,1} + m_{RW} g$

- 13) $-T_{cin,10-RW,1}r_{RW} + T_{RW,1-cin,12}r_{RW} - \frac{I_{RW,1,tot}}{r_{RW}}\ddot{S}_{rel} = F_{x,RW,1}r_{RW} + C_{a0,RW,1} + c_{perno}\omega_{SW}\frac{r_{SW}}{r_{RW}}$
- 14) $T_{cin,12-RW,2} - T_{RW,2-cin,13} + O_{RW,2} - m_{RW}\ddot{x}_{CG} + \ddot{\theta}m_{RW}b_2 \sin \gamma_2 = -F_{x,RW,2} + -\dot{\theta}^2m_{RW}b_2 \cos \gamma_2$
- 15) $F_{z,RW,2} = -k_2z_{CG} + k_2l_2 \cdot \tan \theta + k_2h_{RW,2} - c_2\dot{z}_{CG} + c_2\dot{\theta}b_2 \cos \gamma_2 + c_2\dot{h}_{RW,2} + m_{RW}\ddot{h}_{RW,2} + m_{RW}g$
- 16) $-T_{cin,12-RW,2}r_{RW} + T_{RW,2-cin,13}r_{RW} - \frac{I_{RW}}{r_{RW}}\ddot{S}_{rel} = F_{x,RW,2}r_{RW} + C_{a0,RW,2} + c_{perno}\omega_{SW}\frac{r_{SW}}{r_{RW}}$
- 17) $T_{cin,13-RW,3} - T_{RW,3-cin,14} + O_{RW,3} - m_{RW}\ddot{x}_{CG} + \ddot{\theta}m_{RW}b_3 \sin \gamma_3 = -F_{x,RW,3} + -\dot{\theta}^2m_{RW}b_3 \cos \gamma_3$
- 18) $F_{z,RW,3} = -k_3z_{CG} + k_3l_3 \cdot \tan \theta + k_3h_{RW,3} - c_3\dot{z}_{CG} + c_3\dot{\theta}b_3 \cos \gamma_3 + c_3\dot{h}_{RW,3} + m_{RW}\ddot{h}_{RW,3} + m_{RW}g$
- 19) $-T_{cin,13-RW,3}r_{RW} + T_{RW,3-cin,14}r_{RW} - \frac{I_{RW}}{r_{RW}}\ddot{S}_{rel} = F_{x,RW,3}r_{RW} + C_{a0,RW,3} + c_{perno}\omega_{SW}\frac{r_{SW}}{r_{RW}}$
- 20) $T_{cin,14-RW,4} - T_{RW,4-cin,15} + O_{RW,4} - m_{RW}\ddot{x}_{CG} + \ddot{\theta}m_{RW}b_4 \sin \gamma_4 = -F_{x,RW,4} + -\dot{\theta}^2m_{RW}b_4 \cos \gamma_4$
- 21) $F_{z,RW,4} = -k_4z_{CG} + k_4l_4 \cdot \tan \theta + k_4h_{RW,4} - c_4\dot{z}_{CG} + c_4\dot{\theta}b_4 \cos \gamma_4 + c_4\dot{h}_{RW,4} + m_{RW}\ddot{h}_{RW,4} + m_{RW}g$
- 22) $-T_{cin,14-RW,4}r_{RW} + T_{RW,4-cin,15}r_{RW} - \frac{I_{RW}}{r_{RW}}\ddot{S}_{rel} = F_{x,RW,4}r_{RW} + C_{a0,RW,4} + c_{perno}\omega_{SW}\frac{r_{SW}}{r_{RW}}$
- 23) $T_{cin,15-RW,5} - T_{RW,5-cin,16} - O_{RW,5} - m_{RW}\ddot{x}_{CG} + \ddot{\theta}m_{RW}b_5 \sin \gamma_5 = -F_{x,RW,5} + +\dot{\theta}^2m_{RW}b_5 \cos \gamma_5$
- 24) $F_{z,RW,5} = -k_5z_{CG} - k_5l_5 \cdot \tan \theta + k_5h_{RW,5} - c_5\dot{z}_{CG} - c_5\dot{\theta}b_5 \cos \gamma_5 + c_5\dot{h}_{RW,5} + m_{RW}\ddot{h}_{RW,5} + m_{RW}g$
- 25) $-T_{cin,15-RW,5}r_{RW} + T_{RW,5-cin,16}r_{RW} - \frac{I_{RW}}{r_{RW}}\ddot{S}_{rel} = F_{x,RW,5}r_{RW} + C_{a0,RW,5} + c_{perno}\omega_{SW}\frac{r_{SW}}{r_{RW}}$
- 26) $T_{cin,16-RW,6} - T_{RW,6-cin,17} - O_{RW,6} - m_{RW}\ddot{x}_{CG} + \ddot{\theta}m_{RW}b_6 \sin \gamma_6 = -F_{x,RW,6} + +\dot{\theta}^2m_{RW}b_6 \cos \gamma_6$
- 27) $F_{z,RW,6} = m_{RW}g - k_6z_{CG} - k_6l_6 \cdot \tan \theta + k_6h_{RW,6} - c_6\dot{z}_{CG} - c_6\dot{\theta}b_6 \cos \gamma_6 + c_6\dot{h}_{RW,6} + m_{RW}\ddot{h}_{RW,6}$
- 28) $-T_{cin,16-RW,6}r_{RW} + T_{RW,6-cin,17}r_{RW} - \frac{I_{RW}}{r_{RW}}\ddot{S}_{rel} = F_{x,RW,6}r_{RW} + C_{a0,RW,6} + c_{perno}\omega_{SW}\frac{r_{SW}}{r_{RW}}$
- 29) $T_{cin,17-RW,7} - T_{RW,7-cin,2} \cos \alpha - O_{RW,7} - m_{RW}\ddot{x}_{CG} + \ddot{\theta}m_{RW}b_7 \sin \gamma_7 = -F_{x,RW,7} + \dot{\theta}^2m_{RW}b_7 \cos \gamma_7$
- 30) $T_{RW,7-cin,2} \sin \alpha + F_{z,RW,7} = m_{RW}g - k_7z_{CG} - k_7l_7 \cdot \tan \theta + k_7h_{RW,7} - c_7\dot{z}_{CG} + -c_7\dot{\theta}b_7 \cos \gamma_7 + c_7\dot{h}_{RW,7} + m_{RW}\ddot{h}_{RW,7} + m_{RW}g$

$$\begin{aligned}
31) & -T_{cin,17-RW,7}r_{RW} + T_{RW,7-cin,2}r_{RW} - \frac{I_{RW,7,tot}}{r_{RW}}\ddot{S}_{rel} = F_{x,RW,7}r_{RW} + C_{a0,RW,7} + \\
& + c_{perno}\omega_{SW}\frac{r_{SW}}{r_{RW}} \\
32) & O_{SW} - O_{RW,1} - O_{RW,2} - O_{RW,3} - O_{RW,4} + O_{RW,5} + O_{RW,6} + O_{RW,7} - m_s\ddot{x}_{CG} = F \\
33) & -V_{TW} - V_{SW} - m_s\ddot{z}_{CG} = \sum_{i=1}^4 V_{RS,i} + m_s g + \sum_{i=1}^7 k_i z_{CG} + (-k_1 l_1 - k_2 l_2 + \\
& -k_3 l_3 - k_4 l_4 + k_5 l_5 + k_6 l_6 + k_7 l_7) \tan \theta - \sum_{i=1}^7 k_i h_{RW,i} + \sum_{i=1}^7 c_i \dot{z}_{CG} + \\
& + (-c_1 b_1 \cos \gamma_1 - c_2 b_2 \cos \gamma_2 - c_3 b_3 \cos \gamma_3 - c_4 b_4 \cos \gamma_4 + c_5 b_5 \cos \gamma_5 + \\
& + c_6 b_6 \cos \gamma_6 + c_7 b_7 \cos \gamma_7) \dot{\theta} - \sum_{i=1}^7 c_i \dot{h}_{RW,i} \\
34) & -V_{SW}d_{CG} + V_{TW} \cdot (x_{C,TW} - d_{CG}) - O_{SW}h_{CG} + O_{RW,1}q + O_{RW,2}q + O_{RW,3}q + \\
& + O_{RW,4}q - O_{RW,5}q - O_{RW,6}q - O_{RW,7}q - I_{CG}\ddot{\theta} = -\sum_{i=1}^4 V_{RS,i}(x_{C,RS,i} - d_{CG}) + \\
& -F(h_{CG} - z_{C,TW}) - [\sum_{i=1}^7 k_i(x_{C,RW,i} - d_{CG})]z_{CG} + [k_1 l_1(x_{C,RW,1} - d_{CG}) + \\
& + k_2 l_2(x_{C,RW,2} - d_{CG}) + k_3 l_3(x_{C,RW,3} - d_{CG}) + k_4 l_4(x_{C,RW,4} - d_{CG}) + \\
& -k_5 l_5(x_{C,RW,5} - d_{CG}) - k_6 l_6(x_{C,RW,6} - d_{CG}) - k_7 l_7(x_{C,RW,7} - d_{CG})] \tan \theta + \\
& + \sum_{i=1}^7 k_i(x_{C,RW,i} - d_{CG})h_{RW,i} - [\sum_{i=1}^7 c_i(x_{C,RW,i} - d_{CG})]\dot{z}_{CG} + \\
& + [c_1 b_1 \cos \gamma_1(x_{C,RW,1} - d_{CG}) + c_2 b_2 \cos \gamma_2(x_{C,RW,2} - d_{CG}) + \\
& + c_3 b_3 \cos \gamma_3(x_{C,RW,3} - d_{CG}) + c_4 b_4 \cos \gamma_4(x_{C,RW,4} - d_{CG}) + \\
& -c_5 b_5 \cos \gamma_5(x_{C,RW,5} - d_{CG}) - c_6 b_6 \cos \gamma_6(x_{C,RW,6} - d_{CG}) + \\
& -c_7 b_7 \cos \gamma_7(x_{C,RW,7} - d_{CG})]\dot{\theta} + \sum_{i=1}^7 c_i(x_{C,RW,i} - d_{CG})\dot{h}_{RW,i} \\
35) & -T_{RW,7-cin,2} + T_{cin,2-SW} + m_{cin,2}\ddot{x}_{CG} \cos \alpha - m_{cin,2}\ddot{S}_{rel} - m_{cin,2}\ddot{z}_{CG} \sin \alpha = 0 \\
36) & -T_{SW-cin,4} + T_{cin,4-RS,4} - m_{cin,4}\ddot{x}_{CG} - m_{cin,4}\ddot{S}_{rel} = 0 \\
37) & -T_{RS,4-cin,5} + T_{cin,5-RS,3} - m_{cin,5}\ddot{x}_{CG} - m_{cin,5}\ddot{S}_{rel} = 0 \\
38) & -T_{RS,3-cin,6} + T_{cin,6-RS,2} - m_{cin,6}\ddot{x}_{CG} - m_{cin,6}\ddot{S}_{rel} = 0 \\
39) & -T_{RS,2-cin,7} + T_{cin,7-RS,1} - m_{cin,7}\ddot{x}_{CG} - m_{cin,7}\ddot{S}_{rel} = 0 \\
40) & -T_{RS,1-cin,8} + T_{cin,8-TW} - m_{cin,8}\ddot{x}_{CG} - m_{cin,8}\ddot{S}_{rel} = 0 \\
41) & -T_{TW-cin,10} + T_{cin,10-RW,1} + m_{cin,10}\ddot{x}_{CG} \cos \beta - m_{cin,10}\ddot{S}_{rel} + \\
& + m_{cin,10}\ddot{z}_{CG} \sin \beta = 0 \\
42) & -T_{RW,1-cin,12} + T_{cin,12-RW,2} + m_{cin,12}\ddot{x}_{CG} - m_{cin,12}\ddot{S}_{rel} = 0 \\
43) & -T_{RW,2-cin,13} + T_{cin,13-RW,3} + m_{cin,13}\ddot{x}_{CG} - m_{cin,13}\ddot{S}_{rel} = 0 \\
44) & -T_{RW,3-cin,14} + T_{cin,14-RW,4} + m_{cin,14}\ddot{x}_{CG} - m_{cin,14}\ddot{S}_{rel} = 0 \\
45) & -T_{RW,4-cin,15} + T_{cin,15-RW,5} + m_{cin,15}\ddot{x}_{CG} - m_{cin,15}\ddot{S}_{rel} = 0 \\
46) & -T_{RW,5-cin,16} + T_{cin,16-RW,6} + m_{cin,16}\ddot{x}_{CG} - m_{cin,16}\ddot{S}_{rel} = 0 \\
47) & -T_{RW,6-cin,17} + T_{cin,17-RW,7} + m_{cin,17}\ddot{x}_{CG} - m_{cin,17}\ddot{S}_{rel} = 0
\end{aligned}$$

(9.10)

Le incognite totali sono quarantasette e sono indicate nelle equazioni da un colore rosso:

- $T_{SW-cin,4}, T_{cin,4-RS,4}, T_{RS,4-cin,5}, T_{cin,5-RS,3}, T_{RS,3-cin,6}, T_{cin,6-RS,2}, T_{RS,2-cin,7}, T_{cin,7-RS,1},$
 $T_{RS,1-cin,8}, T_{cin,8-TW}, T_{TW-cin,10}, T_{cin,10-RW,1}, T_{RW,1-cin,12}, T_{cin,12-RW,2}, T_{RW,2-cin,13},$
 $T_{cin,13-RW,3}, T_{RW,3-cin,14}, T_{cin,14-RW,4}, T_{RW,4-cin,15}, T_{cin,15-RW,5}, T_{RW,5-cin,16},$
 $T_{cin,16-RW,6}, T_{RW,6-cin,17}, T_{cin,17-RW,7}, T_{RW,7-cin,2}, T_{cin,2-SW}, V_{SW}, V_{TW}, O_{SW}, O_{RW,1},$
 $O_{RW,2}, O_{RW,3}, O_{RW,4}, O_{RW,5}, O_{RW,6}, O_{RW,7}, F_{z,RW,1}, F_{z,RW,2}, F_{z,RW,3}, F_{z,RW,4}, F_{z,RW,5},$
 $F_{z,RW,6}, F_{z,RW,7}, \ddot{x}_{CG}, \ddot{S}_{rel}, \ddot{z}_{CG}, \ddot{\theta}.$

Si prosegue riscrivendo il sistema nella seguente forma:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (9.11)$$

Dove:

- x è il vettore colonna delle incognite;
- A è la matrice dei coefficienti;
- b è il vettore colonna dei termini noti.

Il vettore colonna delle incognite x , di dimensione 47×1 , per una migliore visualizzazione, viene diviso in quattro sotto vettori:

$$x = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6]^T$$

Dove:

- x_1 è un vettore riga, di dimensione 1×9 , contenente le tensioni del cingolo:

$$x_1 = [T_{SW-cin,4} \quad T_{cin,4-RS,4} \quad T_{RS,4-cin,5} \quad T_{cin,5-RS,3} \quad T_{RS,3-cin,6} \quad T_{cin,6-RS,2} \quad T_{RS,2-cin,7} \quad T_{cin,7-RS,1} \quad T_{RS,1-cin,8}]$$

- x_2 è un vettore riga, di dimensione 1×9 , contenente le tensioni del cingolo:

$$x_2 = [T_{cin,8-TW} \quad T_{TW-cin,10} \quad T_{cin,10-RW,1} \quad T_{RW,1-cin,12} \quad T_{cin,12-RW,2} \quad T_{RW,2-cin,13} \quad T_{cin,13-RW,3} \quad T_{RW,3-cin,14} \quad T_{cin,14-RW,4}]$$

- x_3 è un vettore riga, di dimensione 1×8 , contenente le tensioni del cingolo:

$$x_3 = [T_{RW,4-cin,15} \quad T_{cin,15-RW,5} \quad T_{RW,5-cin,16} \quad T_{cin,16-RW,6} \quad T_{RW,6-cin,17} \quad T_{cin,17-RW,7} \quad T_{RW,7-cin,2} \quad T_{cin,2-SW}]$$

- x_4 è un vettore riga, di dimensione 1×10 , che include le reazioni vincolari della sprocket wheel, della tensioner wheel e le reazioni vincolari orizzontali delle road wheels:

$$x_4 = [V_{SW} \quad V_{TW} \quad O_{SW} \quad O_{RW,1} \quad O_{RW,2} \quad O_{RW,3} \quad O_{RW,4} \quad O_{RW,5} \quad O_{RW,6} \quad O_{RW,7}]$$

- x_5 è un vettore riga, di dimensione 1×7 , con all'interno le reazioni vincolari verticali al terreno in corrispondenza delle road wheels:

$$x_5 = [F_{z,RW,1} \quad F_{z,RW,2} \quad F_{z,RW,3} \quad F_{z,RW,4} \quad F_{z,RW,5} \quad F_{z,RW,6} \quad F_{z,RW,7}]$$

- x_6 è un vettore riga, di dimensione 1×4 , che contiene i termini di accelerazione:

$$x_6 = [\ddot{x}_{CG} \quad \ddot{s}_{rel} \quad \ddot{z}_{CG} \quad \ddot{\theta}]$$

La matrice dei coefficienti A , di dimensione 47×47 , viene divisa in diciotto sottomatrici. Le sottomatrici sono organizzate in sei per riga, al fine di facilitare l'associazione della

matrice A al vettore delle incognite. Sono inoltre disposte in tre per colonna per semplificare la visualizzazione, considerando l'elevato numero di righe che caratterizza la matrice A :

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} & A_{1,5} & A_{1,6} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} & A_{2,5} & A_{2,6} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & A_{3,4} & A_{3,5} & A_{3,6} \end{bmatrix}$$

Dove:

- $A_{1,1}$ è una matrice di dimensione 16×9 :

$$A_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r_{SW} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r_{RS} & r_{RS} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r_{RS} & r_{RS} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_{RS} & r_{RS} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_{RS} & r_{RS} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $A_{2,1}$ è una matrice di dimensione 18×9 :

$$A_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $A_{3,1}$ è una matrice di dimensione 13×9 :

$$A_{3,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $A_{1,2}$ è una matrice di dimensione 16×9 :

$$A_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\cos \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r_{TW} & r_{TW} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \beta & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r_{RW} & r_{RW} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -r_{RW} & r_{RW} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $A_{2,2}$ è una matrice di dimensione 18×9 :

$$A_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_{RW} & r_{RW} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_{RW} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $A_{3,2}$ è una matrice di dimensione 13×9 :

$$A_{3,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $A_{1,3}$ è una matrice di dimensione 16×8 :

$$A_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_{SW} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $A_{2,3}$ è una matrice di dimensione 18×8 :

$$A_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r_{RW} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r_{RW} & r_{RW} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r_{RW} & r_{RW} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_{RW} & r_{RW} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $A_{3,3}$ è una matrice di dimensione 13×8 :

$$A_{3,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $A_{1,4}$ è una matrice di dimensione 16×10 :

$$A_{1,4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $A_{2,4}$ è una matrice di dimensione 18×10 :

$$A_{2,4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -d_{CG} & (x_{C,TW} - d_{CG}) & -h_{CG} & q & q & q & q & -q & -q & -q \end{pmatrix}$$

- $A_{3,4}$ è una matrice di dimensione 13×10 :

$$A_{3,4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $A_{1,5}$ è una matrice di dimensione 16×7 :

$$A_{1,5} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $A_{2,5}$ è una matrice di dimensione 18×7 :

$$A_{2,5} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $A_{3,5}$ è una matrice di dimensione 13×7 :

$$A_{3,5} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $A_{1,6}$ è una matrice di dimensione 16×4 :

$$A_{1,6} = \begin{pmatrix} -m_{SW} & 0 & 0 & m_{SW}b_{SW} \sin \gamma_{SW} \\ 0 & 0 & -m_{SW} & -m_{SW}b_{SW} \cos \gamma_{SW} \\ 0 & -\frac{I_{SW,tot}}{r_{SW}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{I_{RS}}{r_{RS}} & 0 & 0 \\ -m_{TW} & 0 & 0 & m_{TW}b_{TW} \sin \gamma_{TW} \\ 0 & 0 & -m_{TW} & m_{TW}b_{TW} \cos \gamma_{TW} \\ 0 & -\frac{I_{TW,tot}}{r_{TW}} & 0 & 0 \\ -m_{RW} & 0 & 0 & m_{RW}b_1 \sin \gamma_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{I_{RW,1,tot}}{r_{RW}} & 0 & 0 \\ -m_{RW} & 0 & 0 & m_{RW}b_2 \sin \gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{I_{RW}}{r_{RW}} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $A_{2,6}$ è una matrice di dimensione 18×4 :

$$A_{2,6} = \begin{pmatrix} -m_{RW} & 0 & 0 & m_{RW}b_3 \sin \gamma_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{I_{RW}}{r_{RW}} & 0 & 0 \\ -m_{RW} & 0 & 0 & m_{RW}b_4 \sin \gamma_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{I_{RW}}{r_{RW}} & 0 & 0 \\ -m_{RW} & 0 & 0 & m_{RW}b_5 \sin \gamma_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{I_{RW}}{r_{RW}} & 0 & 0 \\ -m_{RW} & 0 & 0 & m_{RW}b_6 \sin \gamma_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{I_{RW}}{r_{RW}} & 0 & 0 \\ -m_{RW} & 0 & 0 & m_{RW}b_7 \sin \gamma_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{I_{RW,7,tot}}{r_{RW}} & 0 & 0 \\ -m_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{CG} \end{pmatrix}$$

- $A_{3,6}$ è una matrice di dimensione 13×4 :

$$A_{3,6} = \begin{pmatrix} m_{cin,2} \cos \alpha & -m_{cin,2} & -m_{cin,2} \sin \alpha & 0 \\ -m_{cin,4} & -m_{cin,4} & 0 & 0 \\ -m_{cin,5} & -m_{cin,5} & 0 & 0 \\ -m_{cin,6} & -m_{cin,6} & 0 & 0 \\ -m_{cin,7} & -m_{cin,7} & 0 & 0 \\ -m_{cin,8} & -m_{cin,8} & 0 & 0 \\ m_{cin,10} \cos \beta & -m_{cin,10} & m_{cin,10} \sin \beta & 0 \\ m_{cin,12} & -m_{cin,12} & 0 & 0 \\ m_{cin,13} & -m_{cin,13} & 0 & 0 \\ m_{cin,14} & -m_{cin,14} & 0 & 0 \\ m_{cin,15} & -m_{cin,15} & 0 & 0 \\ m_{cin,16} & -m_{cin,16} & 0 & 0 \\ m_{cin,17} & -m_{cin,17} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il vettore colonna dei termini noti b , di dimensione 47×1 , viene suddiviso in due componenti distinte. La prima parte è costituita dai termini che variano in funzione degli input del problema specifico, mentre la seconda parte è composta da termini costanti, che rimangono invariati indipendentemente dagli input considerati:

$$b = B_{IN} \cdot b_{IN} + B_{cost} \cdot b_{cost}$$

(9.12)

Dove:

- Il vettore colonna b_{IN} , di dimensione 36×1 , rappresenta gli input del problema ed è suddiviso in otto sottovettori. Tra questi, tre hanno dimensione unitaria e possono quindi essere considerati scalari:

$$b_{IN} = [b_{IN,1} \quad b_{IN,2} \quad b_{IN,3} \quad b_{IN,4} \quad b_{IN,5} \quad b_{IN,6} \quad b_{IN,7} \quad b_{IN,8}]^T$$

In cui:

- $b_{IN,1}$ è un vettore riga, di dimensione 1×10 , che include la forza di tensionamento, la coppia motrice applicata alla sprocket wheel, le forze di trazione e la velocità di rotazione della sprocket wheel:

$$b_{IN,1} = [F \quad C_{m,SW} \quad F_{x,RW,1} \quad F_{x,RW,2} \quad F_{x,RW,3} \quad F_{x,RW,4} \quad F_{x,RW,5} \quad F_{x,RW,6} \quad F_{x,RW,7} \quad \omega_{SW}]$$

- $b_{IN,2}$ è un vettore riga di dimensione 1×2 , contenente lo scuotimento del baricentro e la velocità di traslazione verticale del baricentro:

$$b_{IN,2} = [z_{CG} \quad \dot{z}_{CG}]$$

- $b_{IN,3}$, $b_{IN,4}$, $b_{IN,5}$ sono degli scalari che contengono rispettivamente il beccheggio del veicolo, la velocità di beccheggio e il quadrato di quest'ultima:

$$\begin{aligned} b_{IN,3} &= [\tan \theta] \\ b_{IN,4} &= [\dot{\theta}] \\ b_{IN,5} &= [\dot{\theta}^2] \end{aligned}$$

- $b_{IN,6}$, $b_{IN,7}$, $b_{IN,8}$ sono dei vettori riga, di dimensione 1×7 , che includono rispettivamente lo spostamento verticale, la velocità di traslazione verticale e l'accelerazione verticale delle road wheels:

$$\begin{aligned} b_{IN,6} &= [h_{RW,1} \quad h_{RW,2} \quad h_{RW,3} \quad h_{RW,4} \quad h_{RW,5} \quad h_{RW,6} \quad h_{RW,7}] \\ b_{IN,7} &= [\dot{h}_{RW,1} \quad \dot{h}_{RW,2} \quad \dot{h}_{RW,3} \quad \dot{h}_{RW,4} \quad \dot{h}_{RW,5} \quad \dot{h}_{RW,6} \quad \dot{h}_{RW,7}] \\ b_{IN,8} &= [\ddot{h}_{RW,1} \quad \ddot{h}_{RW,2} \quad \ddot{h}_{RW,3} \quad \ddot{h}_{RW,4} \quad \ddot{h}_{RW,5} \quad \ddot{h}_{RW,6} \quad \ddot{h}_{RW,7}] \end{aligned}$$

- La matrice B_{IN} , di dimensione 34×36 , è associata al vettore b_{IN} e suddivisa in ventiquattro sottomatrici. Queste sottomatrici sono disposte in otto per riga, per facilitare l'associazione della matrice B_{IN} al vettore degli input, e in tre per colonna, al fine di semplificarne la visualizzazione, dato l'elevato numero di righe che caratterizza la matrice. Tra queste sottomatrici, sei hanno dimensioni unitarie e possono pertanto essere considerate come vettori:

$$B_{IN} = \begin{bmatrix} B_{IN,1,1} & B_{IN,1,2} & B_{IN,1,3} & B_{IN,1,4} & B_{IN,1,5} & B_{IN,1,6} & B_{IN,1,7} & B_{IN,1,8} \\ B_{IN,2,1} & B_{IN,2,2} & B_{IN,2,3} & B_{IN,2,4} & B_{IN,2,5} & B_{IN,2,6} & B_{IN,2,7} & B_{IN,2,8} \\ B_{IN,3,1} & B_{IN,3,2} & B_{IN,3,3} & B_{IN,3,4} & B_{IN,3,5} & B_{IN,3,6} & B_{IN,3,7} & B_{IN,3,8} \end{bmatrix}$$

In cui:

- $B_{IN,1,1}$ è una matrice di dimensione 16×10 :

$$B_{IN,1,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{perno} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{perno} \frac{r_{SW}}{r_{RS}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{perno} \frac{r_{SW}}{r_{RS}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{perno} \frac{r_{SW}}{r_{RS}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{perno} \frac{r_{SW}}{r_{RS}} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{perno} \frac{r_{SW}}{r_{TW}} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{RW} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{perno} \frac{r_{SW}}{r_{RW}} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_{RW} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{perno} \frac{r_{SW}}{r_{RW}} \end{pmatrix}$$

- $B_{IN,2,1}$ è una matrice di dimensione 18×10 :

$$B_{IN,2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_{RW} & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{perno} \frac{r_{SW}}{r_{RW}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_{RW} & 0 & 0 & 0 & c_{perno} \frac{r_{SW}}{r_{RW}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_{RW} & 0 & 0 & c_{perno} \frac{r_{SW}}{r_{RW}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_{RW} & 0 & c_{perno} \frac{r_{SW}}{r_{RW}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_{RW} & c_{perno} \frac{r_{SW}}{r_{RW}} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(h_{CG} - z_{C,TW}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $B_{IN,3,1}$ è una matrice di dimensione 13×10 :

$$B_{IN,3,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $B_{IN,1,2}$ è una matrice di dimensione 16×2 :

$$B_{IN,1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -k_1 & -c_1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -k_2 & -c_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $B_{IN,2,2}$ è una matrice di dimensione 18×2 :

$$B_{IN,2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -k_3 & -c_3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -k_4 & -c_4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -k_5 & -c_5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -k_6 & -c_6 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -k_7 & -c_7 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \sum_{i=1}^7 k_i & \sum_{i=1}^7 c_i \\ -\left[\sum_{i=1}^7 k_i (x_{C,RW,i} - d_{CG}) \right] & -\left[\sum_{i=1}^7 c_i (x_{C,RW,i} - d_{CG}) \right] \end{pmatrix}$$

- $B_{IN,3,2}$ è una matrice di dimensione 13×2 :

$$B_{IN,3,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $B_{IN,1,3}$ è un vettore colonna di dimensione 16×1 :

$$B_{IN,1,3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ k_1 l_1 \\ 0 \\ 0 \\ k_2 l_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $B_{IN,2,3}$ è un vettore colonna di dimensione 18×1 :

$$B_{IN,2,3} = \begin{pmatrix} 0 \\ k_3 l_3 \\ 0 \\ 0 \\ k_4 l_4 \\ 0 \\ 0 \\ -k_5 l_5 \\ 0 \\ 0 \\ -k_6 l_6 \\ 0 \\ 0 \\ -k_7 l_7 \\ 0 \\ 0 \\ -\sum_{i=1}^4 k_i l_i + \sum_{i=5}^7 k_i l_i \\ \sum_{i=1}^4 k_i l_i (x_{C,RW,i} - d_{CG}) - \sum_{i=5}^7 k_i l_i (x_{C,RW,i} - d_{CG}) \end{pmatrix}$$

- $B_{IN,3,3}$ è un vettore colonna di dimensione 13×1 :

$$B_{IN,3,3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $B_{IN,1,4}$ è un vettore colonna di dimensione 16×1 :

$$B_{IN,1,4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ c_1 b_1 \cos \gamma_1 \\ 0 \\ 0 \\ c_2 b_2 \cos \gamma_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $B_{IN,2,4}$ è un vettore colonna di dimensione 18×1 :

$$B_{IN,2,4} = \begin{pmatrix} 0 \\ c_3 b_3 \cos \gamma_3 \\ 0 \\ 0 \\ c_4 b_4 \cos \gamma_4 \\ 0 \\ 0 \\ -c_5 b_5 \cos \gamma_5 \\ 0 \\ 0 \\ -c_6 b_6 \cos \gamma_6 \\ 0 \\ 0 \\ -c_7 b_7 \cos \gamma_7 \\ 0 \\ 0 \\ -\sum_{i=1}^4 c_i b_i \cos \gamma_i + \sum_{i=5}^7 c_i b_i \cos \gamma_i \\ \sum_{i=1}^4 c_i b_i \cos \gamma_i (x_{C,RW,i} - d_{CG}) - \sum_{i=5}^7 c_i b_i \cos \gamma_i (x_{C,RW,i} - d_{CG}) \end{pmatrix}$$

- $B_{IN,3,4}$ è un vettore colonna di dimensione 13×1 :

$$B_{IN,3,4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $B_{IN,1,5}$ è un vettore colonna di dimensione 16×1 :

$$B_{IN,1,5} = \begin{pmatrix} m_{SW} b_{SW} \cos \gamma_{SW} \\ m_{SW} b_{SW} \sin \gamma_{SW} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -m_{TW} b_{TW} \cos \gamma_{TW} \\ m_{TW} b_{TW} \sin \gamma_{TW} \\ 0 \\ -m_{RW} b_1 \cos \gamma_1 \\ 0 \\ 0 \\ -m_{RW} b_2 \cos \gamma_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $B_{IN,2,5}$ è un vettore colonna di dimensione 18×1 :

$$B_{IN,2,5} = \begin{pmatrix} -m_{RW} b_3 \cos \gamma_3 \\ 0 \\ 0 \\ -m_{RW} b_4 \cos \gamma_4 \\ 0 \\ 0 \\ m_{RW} b_5 \cos \gamma_5 \\ 0 \\ 0 \\ m_{RW} b_6 \cos \gamma_6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ m_{RW} b_7 \cos \gamma_7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $B_{IN,3,5}$ è un vettore colonna di dimensione 13×1 :

$$B_{IN,3,5} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $B_{IN,1,6}$ è una matrice di dimensione 16×7 :

$$B_{IN,1,6} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $B_{IN,2,6}$ è una matrice di dimensione 18×7 :

$$B_{IN,2,6} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 & -k_4 & -k_5 & -k_6 & -k_7 \\ k_1(x_{C,RW,1} - d_{CG}) & k_2(x_{C,RW,2} - d_{CG}) & k_3(x_{C,RW,3} - d_{CG}) & k_4(x_{C,RW,4} - d_{CG}) & k_5(x_{C,RW,5} - d_{CG}) & k_6(x_{C,RW,6} - d_{CG}) & k_7(x_{C,RW,7} - d_{CG}) \end{pmatrix}$$

- $B_{IN,3,6}$ è una matrice di dimensione 13×7 :

$$B_{IN,3,6} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $B_{IN,1,7}$ è una matrice di dimensione 16×7 :

$$B_{IN,1,7} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $B_{IN,2,7}$ è una matrice di dimensione 18×7 :

$$B_{IN,2,7} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_1 & -c_2 & -c_3 & -c_4 & -c_5 & -c_6 & -c_7 \\ c_1(x_{C,RW,1} - d_{CG}) & c_2(x_{C,RW,2} - d_{CG}) & c_3(x_{C,RW,3} - d_{CG}) & c_4(x_{C,RW,4} - d_{CG}) & c_5(x_{C,RW,5} - d_{CG}) & c_6(x_{C,RW,6} - d_{CG}) & c_7(x_{C,RW,7} - d_{CG}) \end{pmatrix}$$

- $B_{IN,3,7}$ è una matrice di dimensione 13×7 :

$$B_{IN,3,7} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $B_{IN,1,8}$ è una matrice di dimensione 16×7 :

$$B_{IN,1,8} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{RW} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{RW} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $B_{IN,2,8}$ è una matrice di dimensione 18×7 :

$$B_{IN,2,8} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{RW} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{RW} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{RW} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{RW} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{RW} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $B_{IN,3,8}$ è una matrice di dimensione 13×7 :

$$B_{IN,3,8} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- b_{cost} è un vettore colonna, di dimensione 24×1 , contenente i termini costanti e suddiviso in tre sotto vettori:

$$b_{cost} = [b_{cost,1} \quad b_{cost,2} \quad b_{cost,3}]^T$$

In cui:

- $b_{cost,1}$ è un vettore riga di dimensione 1×6 :

$$b_{cost,1} = [C_{a0,SW} \quad C_{a0,RS,1} \quad C_{a0,RS,2} \quad C_{a0,RS,3} \quad C_{a0,RS,4} \quad C_{a0,TW}]$$

- $b_{cost,2}$ è un vettore riga di dimensione 1×7 :

$$b_{cost,2} = [C_{a0,RW,1} \quad C_{a0,RW,2} \quad C_{a0,RW,3} \quad C_{a0,RW,4} \quad C_{a0,RW,5} \quad C_{a0,RW,6} \quad C_{a0,RW,7}]$$

- $b_{cost,3}$ è un vettore riga di dimensione 1×11 :

$$b_{cost,3} = \left[m_{SW,g} \quad m_{TW,g} \quad m_{RW,g} \quad m_{s,g} \quad m_{cin,SW,g} \quad m_{cin,TW,g} \quad V_{RS,1} \quad V_{RS,2} \quad V_{RS,3} \quad V_{RS,4} \quad \sum_{i=1}^4 m_{cin,RS,i,g} \right]$$

- B_{cost} è una matrice, di dimensione 47×24 , associata al vettore b_{cost} :

$$B_{cost} = \begin{bmatrix} B_{cost,1,1} & B_{cost,2,1} & B_{cost,1,3} \\ B_{cost,2,1} & B_{cost,2,2} & B_{cost,2,3} \\ B_{cost,3,1} & B_{cost,3,2} & B_{cost,3,3} \end{bmatrix}$$

In cui:

- $B_{cost,1,1}$ è una matrice di dimensione 16×6 :

$$B_{cost,1,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $B_{cost,2,1}$ è una matrice di dimensione 18×6 :

$$B_{cost,2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $B_{cost,3,1}$ è una matrice di dimensione 13×6 :

$$B_{cost,3,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $B_{cost,1,2}$ è una matrice di dimensione 16×7 :

$$B_{cost,1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $B_{cost,2,2}$ è una matrice di dimensione 18×7 :

$$B_{cost,2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $B_{cost,3,2}$ è una matrice di dimensione 13×7 :

$$B_{cost,3,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $B_{cost,1,3}$ è una matrice di dimensione 16×11 :

9.5 Simulazioni

In questa sezione sono presentati i risultati delle simulazioni condotte utilizzando il modello dinamico del veicolo cingolato a sette road wheels. L'obiettivo è verificare il corretto funzionamento del modello, replicando in particolare le stesse simulazioni già effettuate per la configurazione a tre road wheels.

In questo caso al momento non si hanno a disposizione dati sperimentali per validare il modello, quindi, questa operazione verrà lasciata a futuri sviluppi.

9.5.1 Strada piana

9.5.1.1 Descrizione profilo stradale

Il profilo stradale scelto in questa simulazione è una strada piana con quota costante $h = 0$.

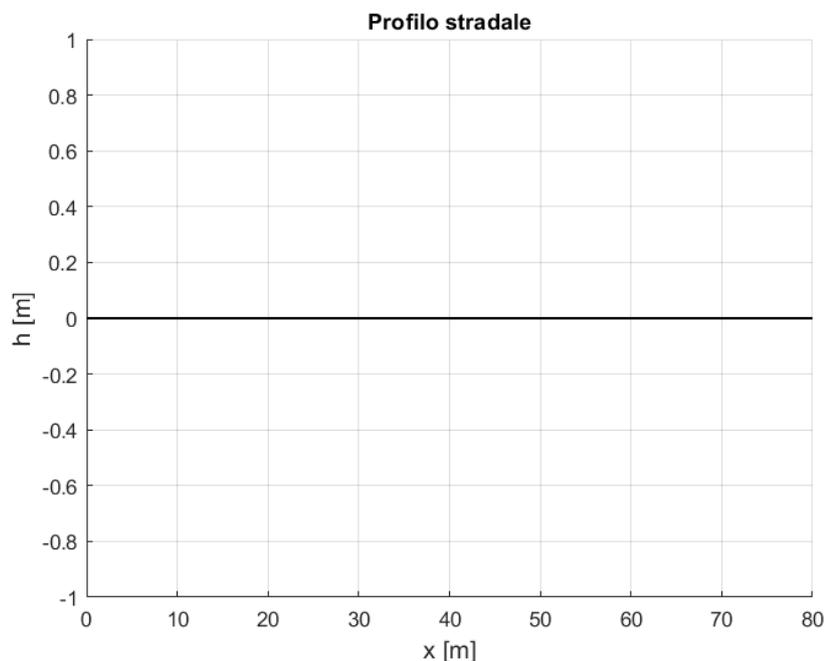


Figura 9.3 - Profilo stradale (strada piana)

9.5.1.2 Prova di Coast-Down

La prova consiste a portare nel portare il veicolo ad una certa velocità, quindi, posizionandosi con il cambio in folle, senza cioè carico motore, si procede a far decelerare il veicolo senza l'uso dei freni.

I parametri della prova sono gli stessi del caso di veicolo cingolato con tre road wheels, cioè, si ha una velocità di inizio test di 10 m/s e una durata della simulazione di dieci secondi.

Verranno testati due casi:

- 1) $F = 0.12m_{tot}g = 57.2 \text{ kN}$;

$$2) F = 0.24m_{tot}g = 114.4 \text{ kN}.$$

In Figura 9.4, Figura 9.5 e Figura 9.6 sono riportate l'accelerazione e la velocità longitudinali del veicolo cingolato. Rispetto al veicolo con tre road wheels, a parità di forza di tensionamento applicata, la decelerazione risulta leggermente inferiore, in quanto la maggiore massa conferisce al veicolo un'inerzia superiore. Di conseguenza, la velocità diminuisce più lentamente.

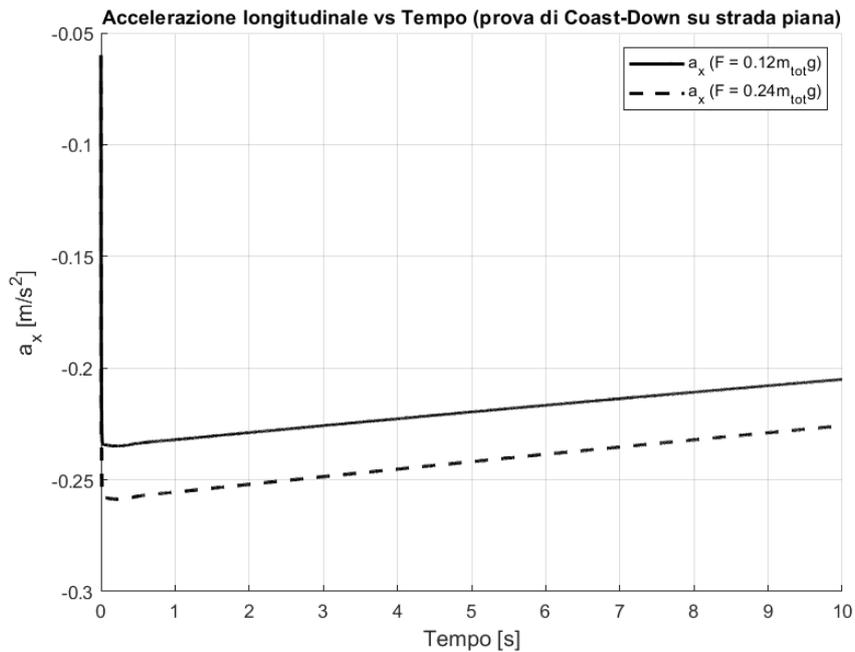


Figura 9.4 - Accelerazione longitudinale vs Tempo (prova di Coast-Down su strada piana con veicolo cingolato con sette road wheels)

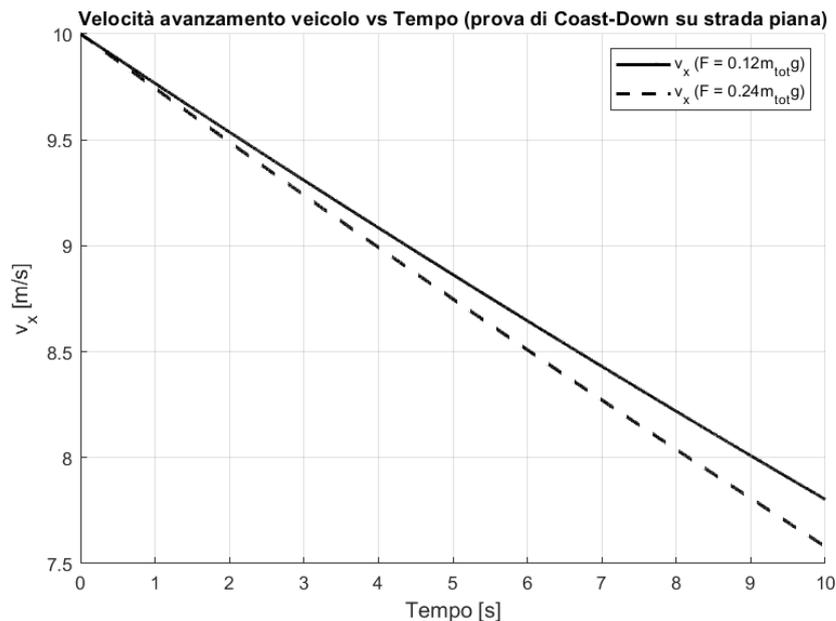


Figura 9.5 - Velocità di avanzamento veicolo vs Tempo (prova di Coast-Down su strada piana con veicolo cingolato con sette road wheels)

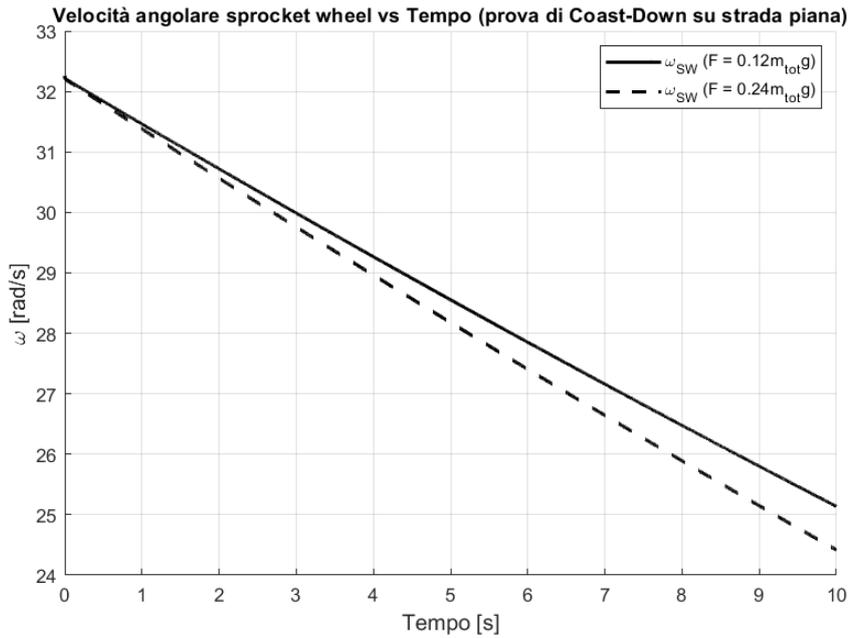


Figura 9.6 - Velocità angolare sprocket wheel vs Tempo (prova di Coast-Down su strada piana con veicolo cingolato con sette road wheels)

L'aspetto più interessante riguarda però l'effetto del tensionamento: aumentando il tensionamento di circa lo stesso valore, il suo impatto sull'accelerazione longitudinale si riduce della metà, lo stesso comportamento si osserva per la velocità. Quindi, più il veicolo è pesante e meno risente del tensionamento.

In Figura 9.7 e Figura 9.8 è rappresentato rispettivamente l'andamento delle forze verticali e longitudinali in corrispondenza delle road wheels. Poiché le forze longitudinali sono direttamente influenzate dall'andamento delle forze verticali, le considerazioni si concentrano su queste ultime.

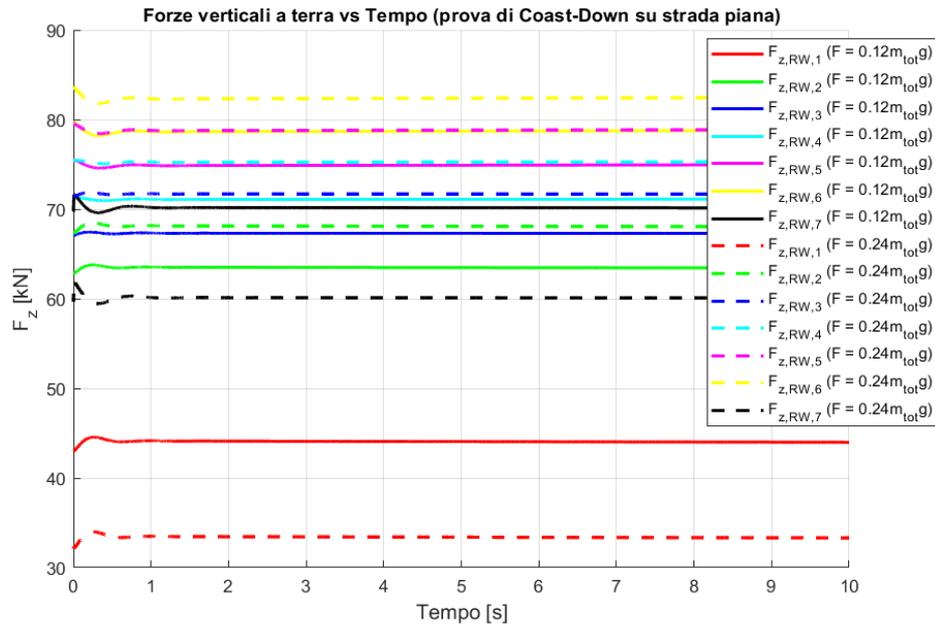


Figura 9.7 - Forze verticali a terra vs Tempo (prova di Coast-Down su strada piana con veicolo cingolato con sette road wheels)

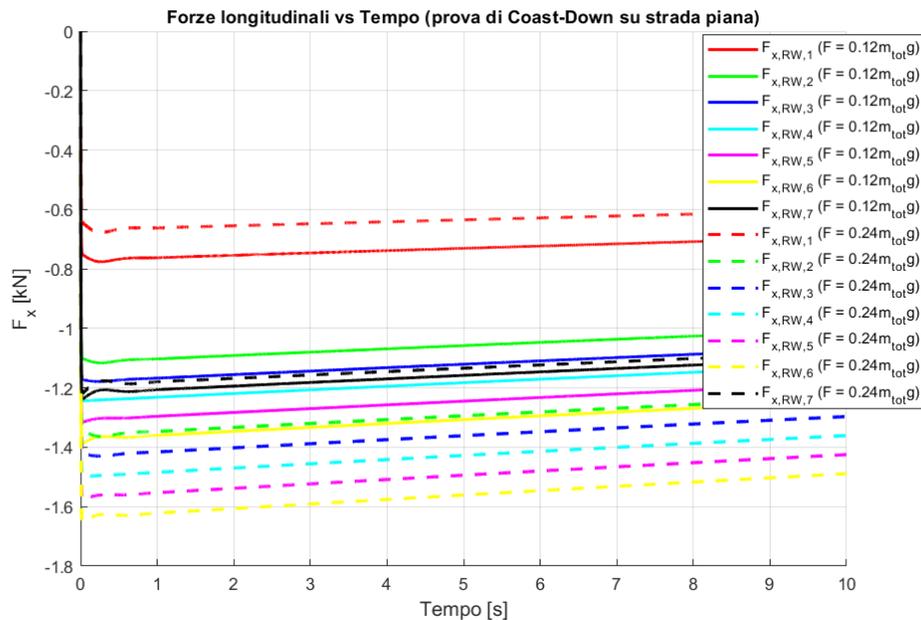


Figura 9.8 - Forze longitudinali vs Tempo (prova di Coast-Down su strada piana con veicolo cingolato con sette road wheels)

Dall'analisi della Figura 9.7 emerge che la road wheel più caricata è la numero 6, nonostante il veicolo presenti un'inclinazione verso il posteriore dovuta alla posizione del baricentro, cosa che porterebbe ad una forza a terra maggiore sulla ruota 7. Questo avviene perché i tratti inclinati del cingolo esercitano una spinta verso l'alto sia sulla ruota anteriore (road wheel 1) sia su quella posteriore (road wheel 7), riducendo così la forza a terra su entrambe. Infatti, con l'aumento del tensionamento, si osserva una diminuzione delle forze a terra sugli assali 1 e 7, mentre le forze sugli altri assali aumentano.

In Figura 9.9 è presente una vista laterale del cingolo per indicare la differenza di tensione tra i vari tratti del cingolo, mentre, in Figura 9.10 sono rappresentate le tensioni nel caso di una forza di tensionamento $F = 0.12m_{tot}g$. Si osserva che i tratti del cingolo soggetti a maggiore tensione sono quelli adiacenti o in prossimità della tensioner wheel.

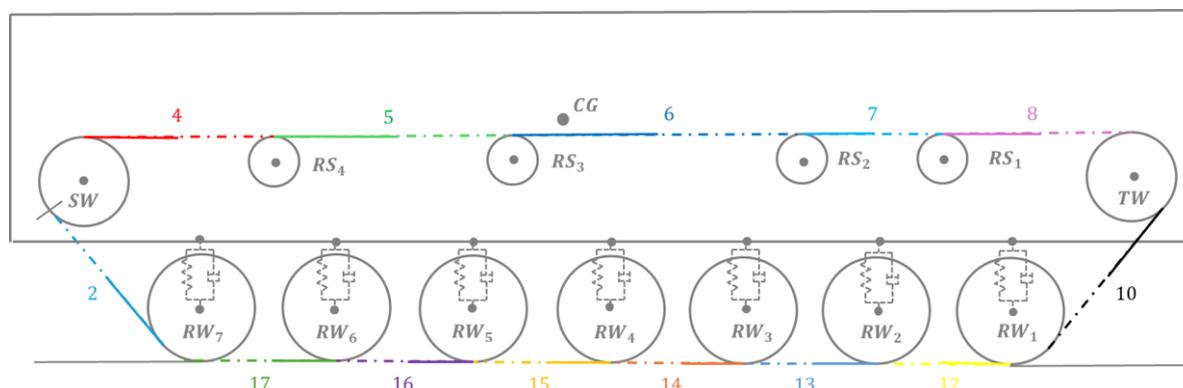


Figura 9.9 - Rappresentazione tensioni del cingolo (veicolo cingolato con sette road wheels)

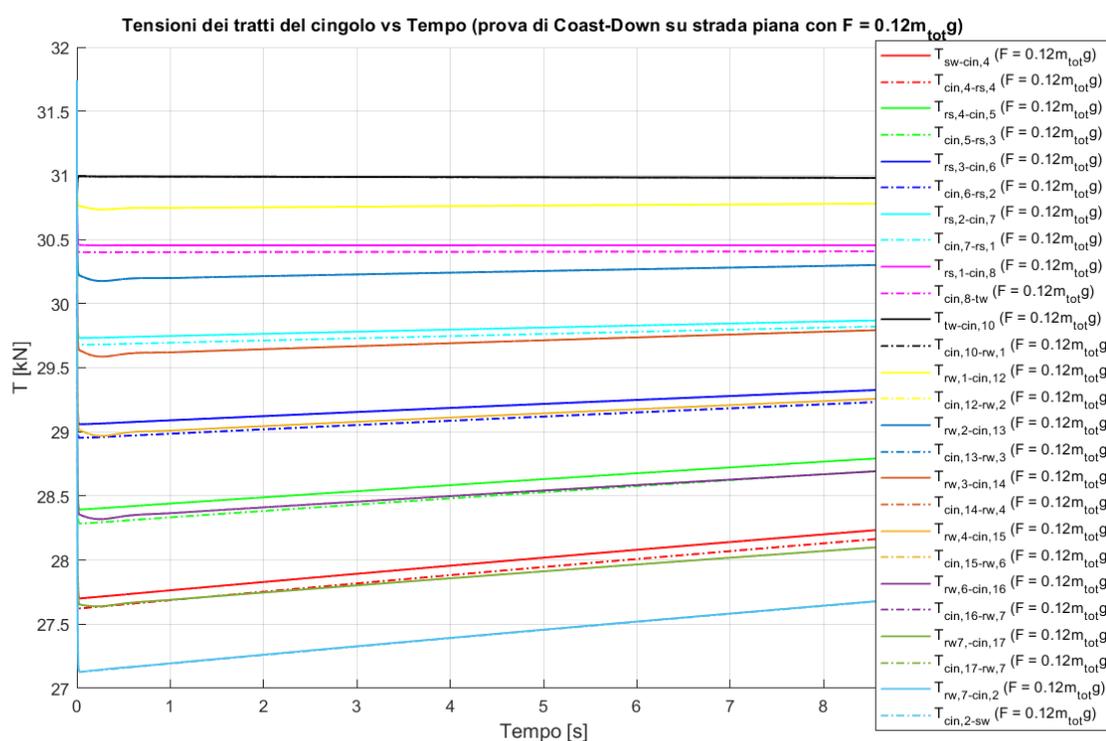


Figura 9.10 - Tensioni dei vari tratti del cingolo vs Tempo (Prova di Coast-Down su strada piana con $F = 0.12m_{tot}g$ con veicolo cingolato con sette road wheels)

Analogamente a quanto avviene nella configurazione con tre road wheels, ogni segmento del cingolo è rappresentato da due curve: una linea continua che indica la tensione a monte del segmento e una linea tratteggiata che rappresenta la tensione a valle. La differenza tra queste due curve evidenzia l'effetto dell'inerzia del segmento di cingolo considerato, un fenomeno che risulta particolarmente significativo nei tratti superiori del cingolo, ossia quelli compresi tra la sprocket wheel, le varie ruote di supporto e la tensioner wheel.

Si nota come i tratti del cingolo soggetti a maggiore tensione siano quelli adiacenti o in prossimità della tensioner wheel. Allontanandosi da quest'ultima, la tensione diminuisce leggermente a causa degli attriti.

In Figura 9.11 vengono mostrate le tensioni dei tratti del cingolo con forza di tensionamento aumentata a $F = 0.24m_{tot}g$.

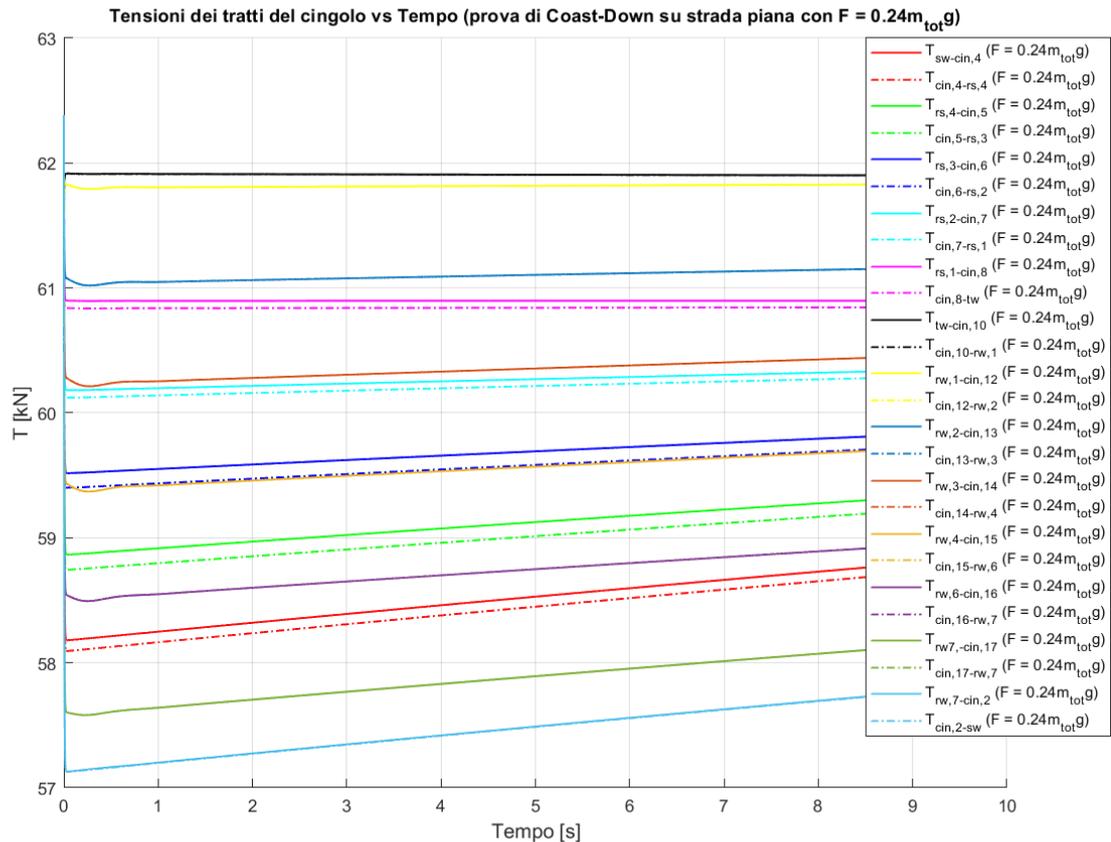


Figura 9.11 - Tensioni dei vari tratti del cingolo vs Tempo (Prova di Coast-Down su strada piana con $F = 0.24m_{tot}g$ con veicolo cingolato con sette road wheels)

Con l'aumento della forza di tensionamento, la tensione tende poi a crescere in modo relativamente uniforme lungo ciascun tratto del cingolo.

Lo scuotimento e il beccheggio mostrati nelle in Figura 9.12 e Figura 9.13 seguono un andamento analogo a quello osservato nella configurazione con tre road wheels. In particolare, si nota una condizione iniziale influenzata dall'analisi statica, che risulta eccessiva. Questo comportamento richiede circa due secondi affinché lo scuotimento e il beccheggio si stabilizzino.

Questo lieve periodo di assestamento iniziale si nota anche nell'accelerazione verticale del baricentro, mostrata in Figura 9.14.

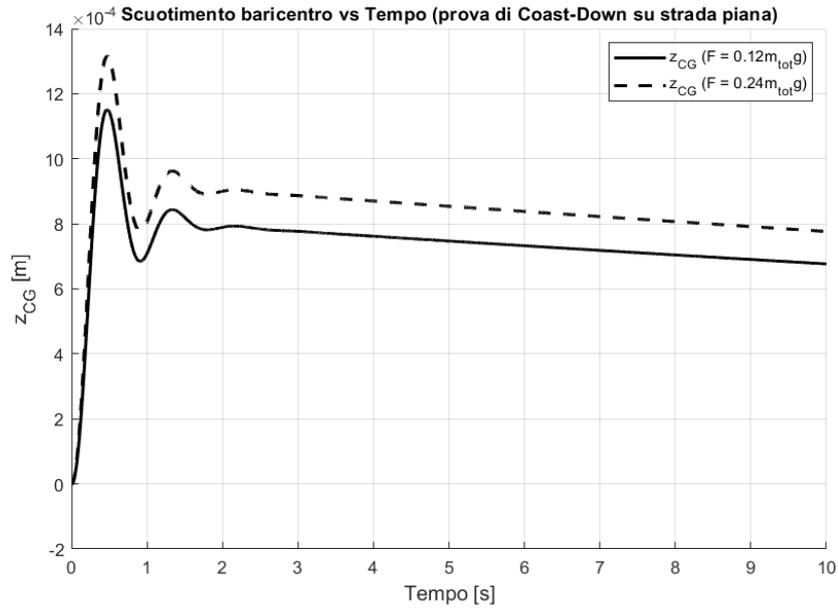


Figura 9.12 - Scuotimento baricentro vs Tempo (prova di Coast-Down su strada piana con veicolo cingolato con sette road wheels)

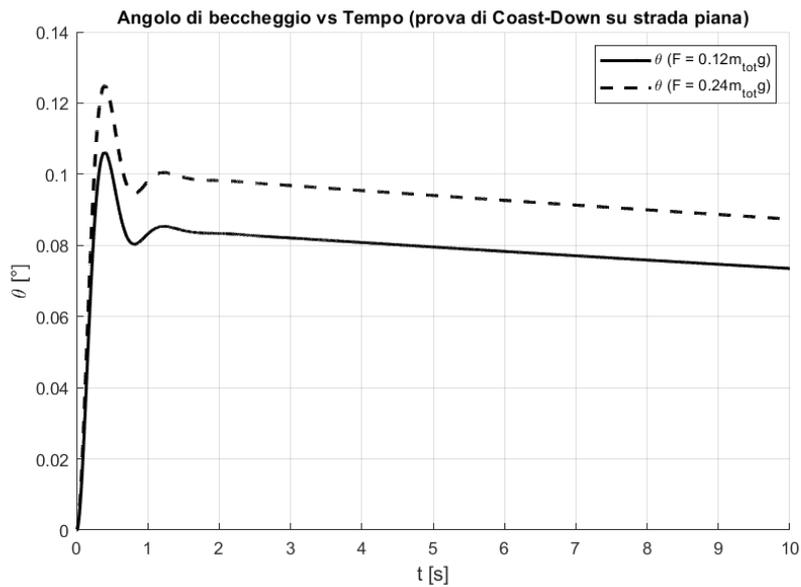


Figura 9.13 - Angolo di beccheggio vs Tempo (prova di Coast-Down su strada piana con veicolo cingolato con sette road wheels)

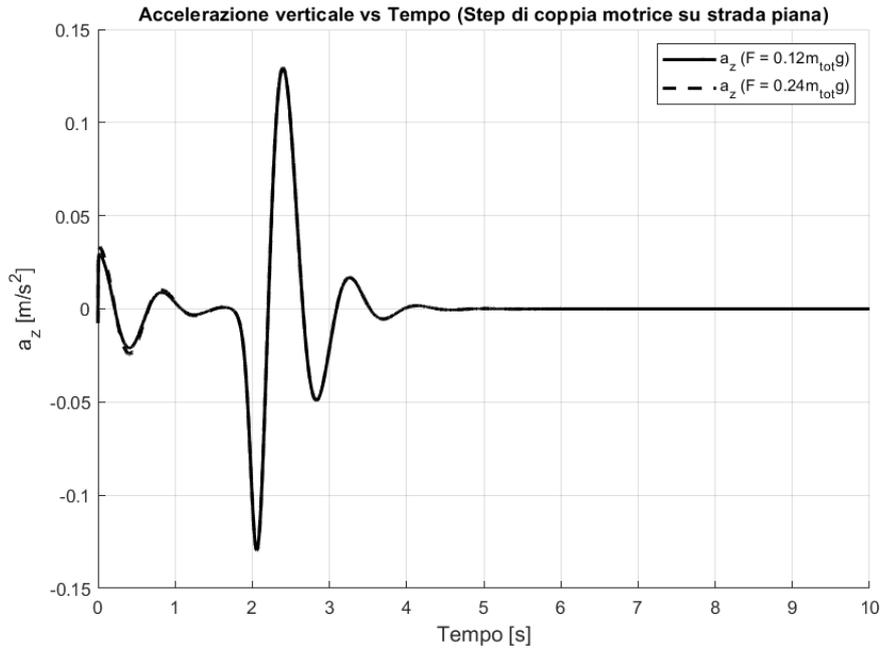


Figura 9.14 - Accelerazione verticale vs Tempo (prova di Coast-Down su strada piana con veicolo cingolato con sette road wheels)

Il valore di scorrimento longitudinale, illustrato in Figura 9.15, risulta negativo in quanto, come definito nell'equazione 3.36, assume segno negativo quando viene applicata una coppia frenante, mentre diventa positivo in presenza di una coppia motrice. In questo caso specifico, sebbene il veicolo cingolato sia in avanzamento, l'azione degli attriti ne provoca un progressivo rallentamento, simulando l'effetto di una coppia frenante.

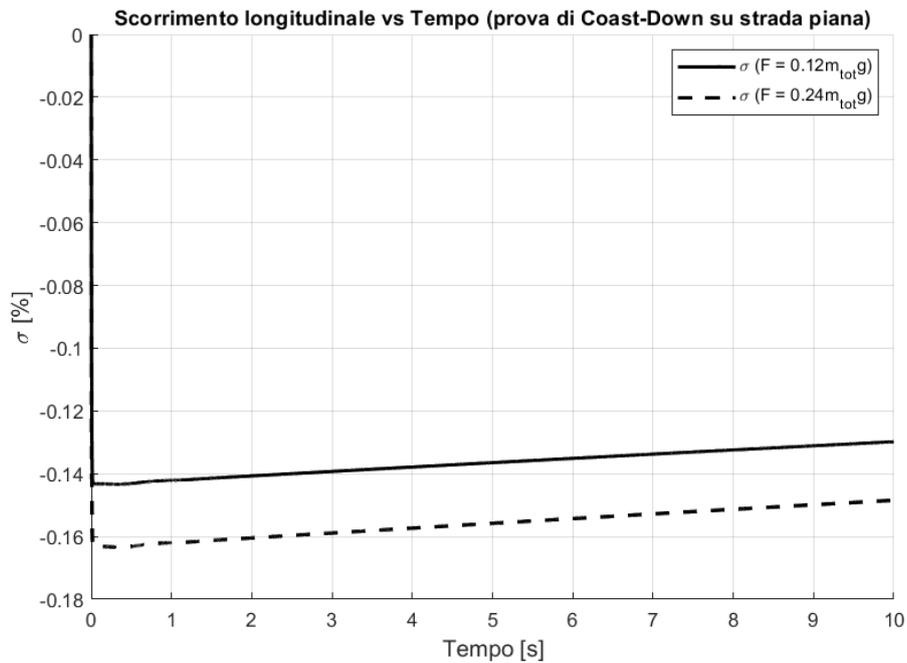


Figura 9.15 - Scorrimento longitudinale vs Tempo (prova di Coast-Down su strada piana con veicolo cingolato con sette road wheels)

9.5.1.3 Step di coppia motrice

In questa prova, alla sprocket wheel viene applicata una coppia motrice descritta mediante una funzione tangente iperbolica. Si tratta della stessa coppia utilizzata nelle simulazioni del modello con tre road wheels, il cui andamento è riportato in Figura 9.16.

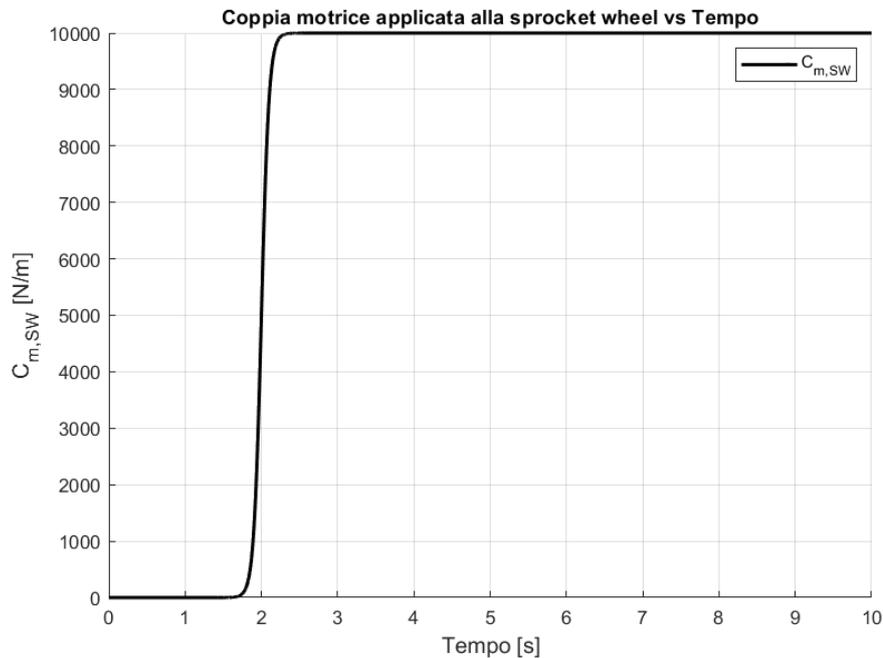


Figura 9.16 - Coppia motrice applicata alla sprocket wheel vs Tempo (veicolo cingolato con sette road wheels)

Verranno testati due casi per studiare l'effetto che ha il tensionamento sulla dinamica del veicolo cingolato:

1) $F = 0.12m_{tot}g = 57.2 \text{ kN}$;

2) $F = 0.24m_{tot}g = 114.4 \text{ kN}$.

L'accelerazione longitudinale, la velocità di traslazione longitudinale e la velocità di rotazione della sprocket wheel, mostrate rispettivamente in Figura 9.17, Figura 9.18 e Figura 9.19, seguono lo stesso andamento osservato nella configurazione con tre road wheels. Tuttavia, applicando la stessa coppia a un veicolo più pesante, si osserva una minore accelerazione, a causa della maggiore inerzia del sistema.

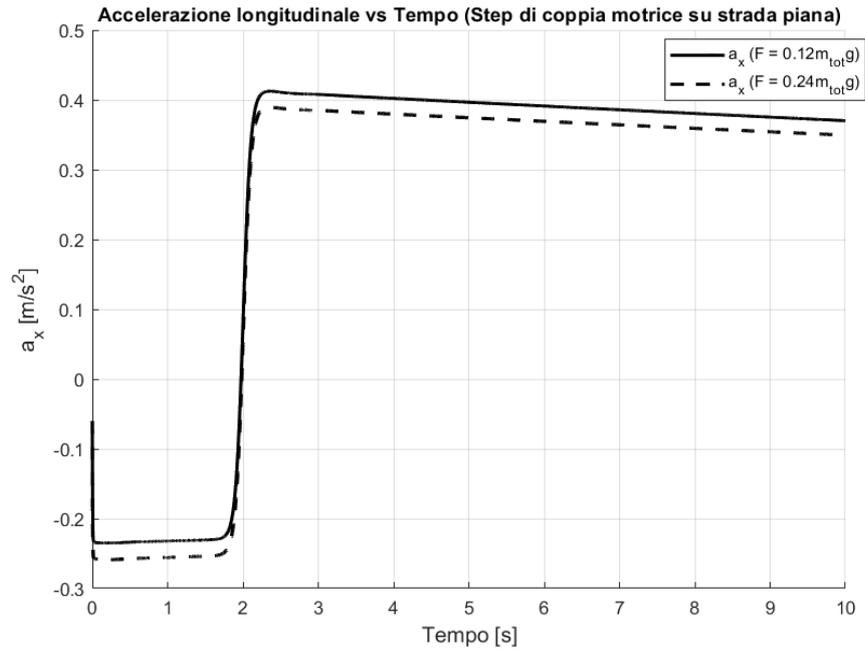


Figura 9.17 - Accelerazione longitudinale vs Tempo (Step di coppia motrice su strada piana con veicolo cingolato con sette road wheels)

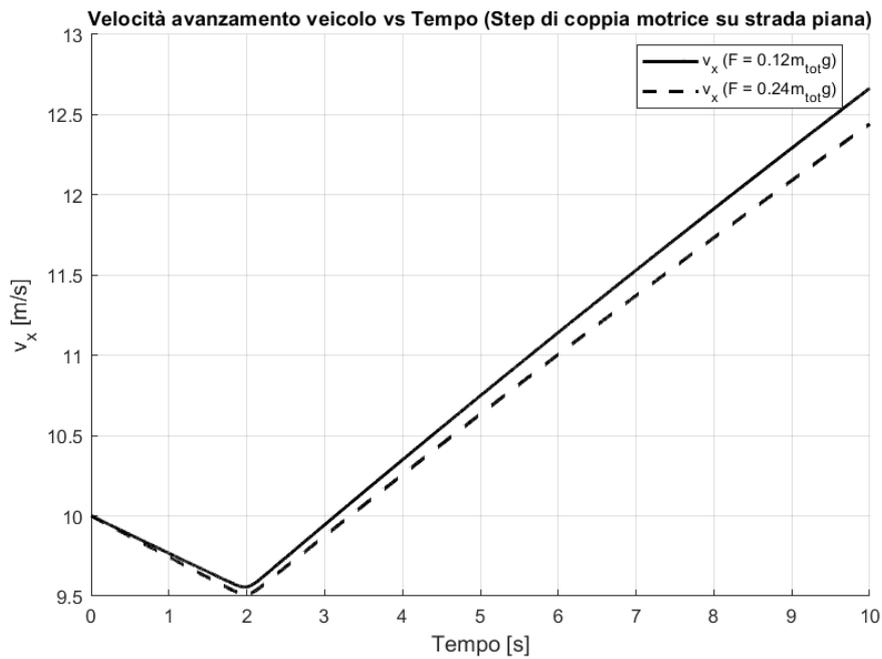


Figura 9.18 - Velocità di avanzamento veicolo vs Tempo (Step di coppia motrice su strada piana con veicolo cingolato con sette road wheels)

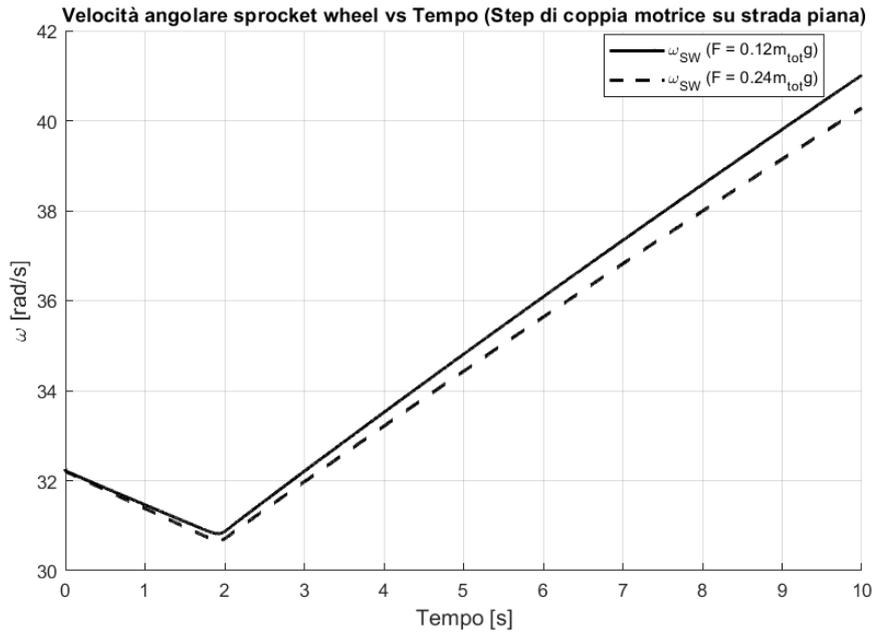


Figura 9.19 - Velocità angolare sprocket wheel vs Tempo (Step di coppia motrice su strada piana con veicolo cingolato con sette road wheels)

L'accelerazione longitudinale, la velocità di traslazione longitudinale e la velocità di rotazione della sprocket wheel seguono lo stesso andamento osservato nei modelli precedenti. Tuttavia, applicando la stessa coppia a un veicolo più pesante, si osserva una minore accelerazione, a causa della maggiore inerzia del sistema.

In Figura 9.20 e Figura 9.21 sono illustrate, rispettivamente, le forze verticali a terra e le forze longitudinali in corrispondenza delle road wheels.

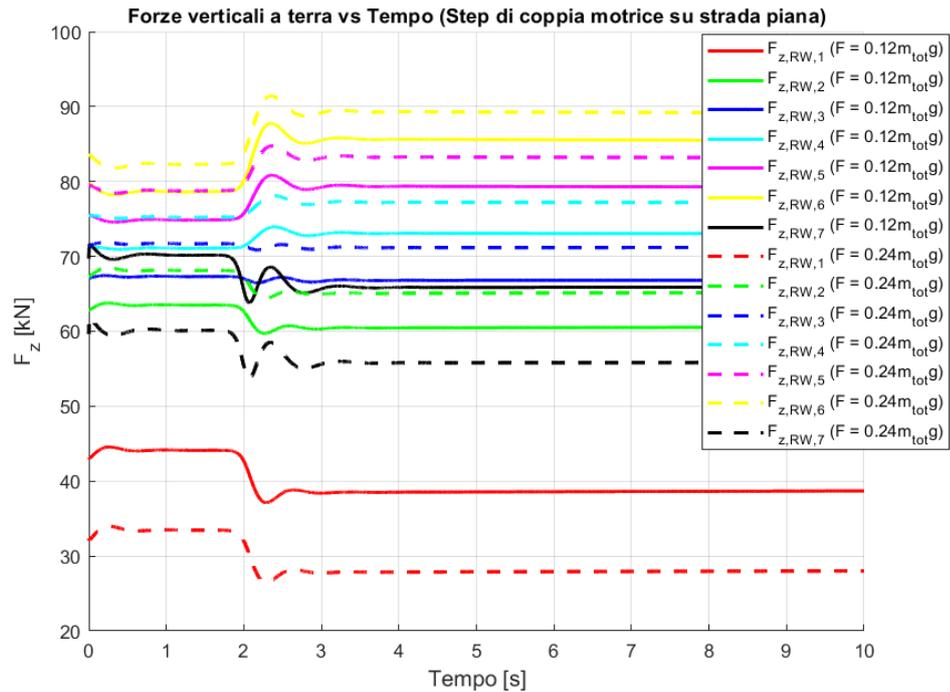


Figura 9.20 - Forze verticali a terra vs Tempo (Step di coppia motrice su strada piana con veicolo cingolato con sette road wheels)

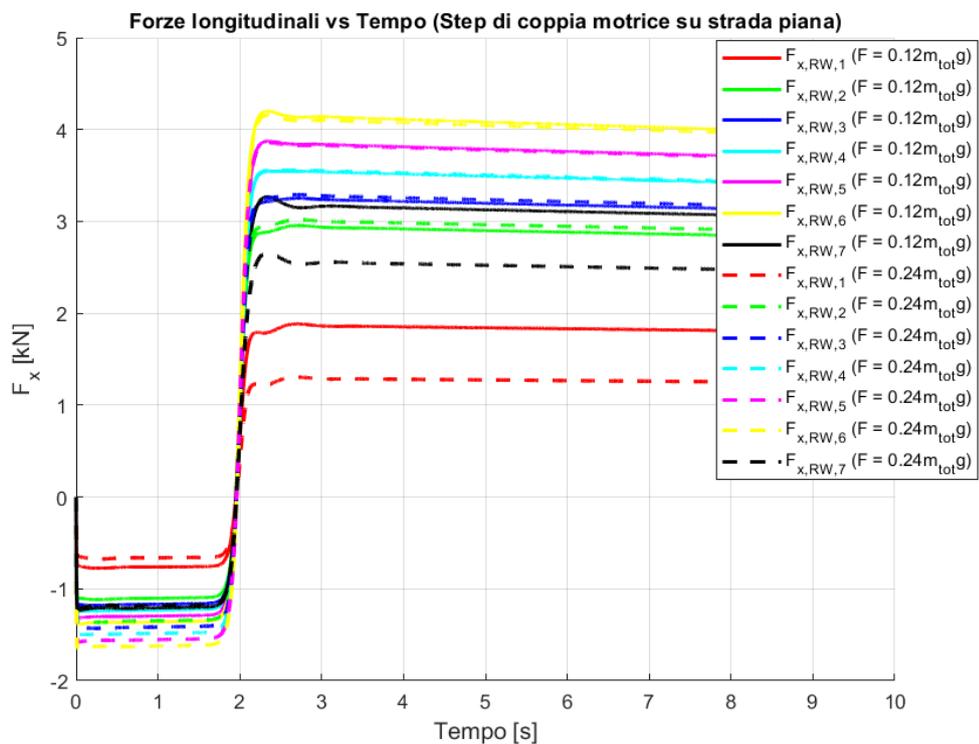


Figura 9.21 - Forze longitudinali vs Tempo (Step di coppia motrice su strada piana con veicolo cingolato con sette road wheels)

L'applicazione della coppia motrice comporta un aumento delle forze verticali sulle road wheels posteriori (4, 5, 6) a causa del trasferimento di carico verso il retro del veicolo. Al

contrario, si osserva una diminuzione delle forze sulle ruote anteriori (1, 2, 3) e sulla road wheel 7, quest'ultima a causa dell'effetto del tensionamento. L'applicazione della coppia motrice determina un aumento della forza a terra sulla road wheel 7 a causa del trasferimento di carico.

Tuttavia, come si può osservare in Figura 9.23, la coppia motrice induce anche un significativo incremento della tensione nel tratto teso del cingolo, con il picco di tensione localizzato nel tratto inclinato tra la sprocket wheel e la road wheel 7 (tratto cin 2). Questo effetto prevale sul trasferimento di carico, portando complessivamente a una riduzione della forza a terra sulla road wheel 7.

Le differenze tra le forze longitudinali di trazione sono direttamente legate alle considerazioni fatte riguardo alle forze a terra.

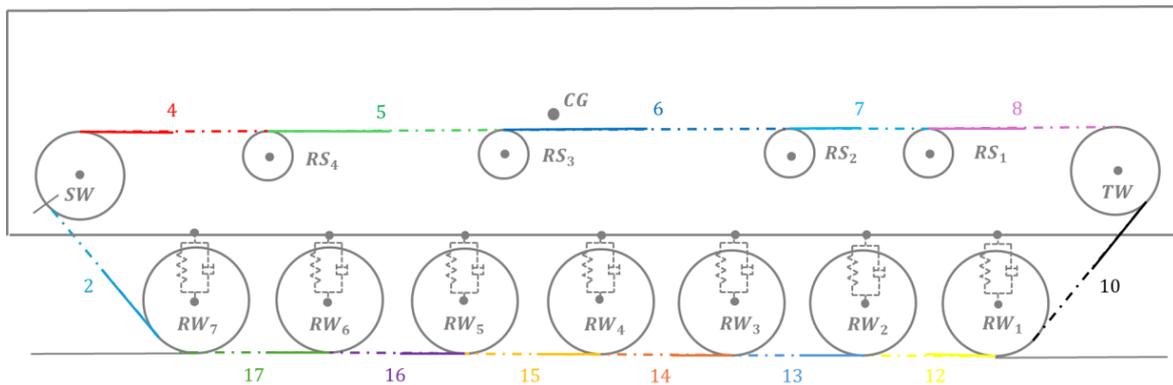


Figura 9.22 - Rappresentazione delle tensioni del cingolo (veicolo cingolato con sette road wheels)

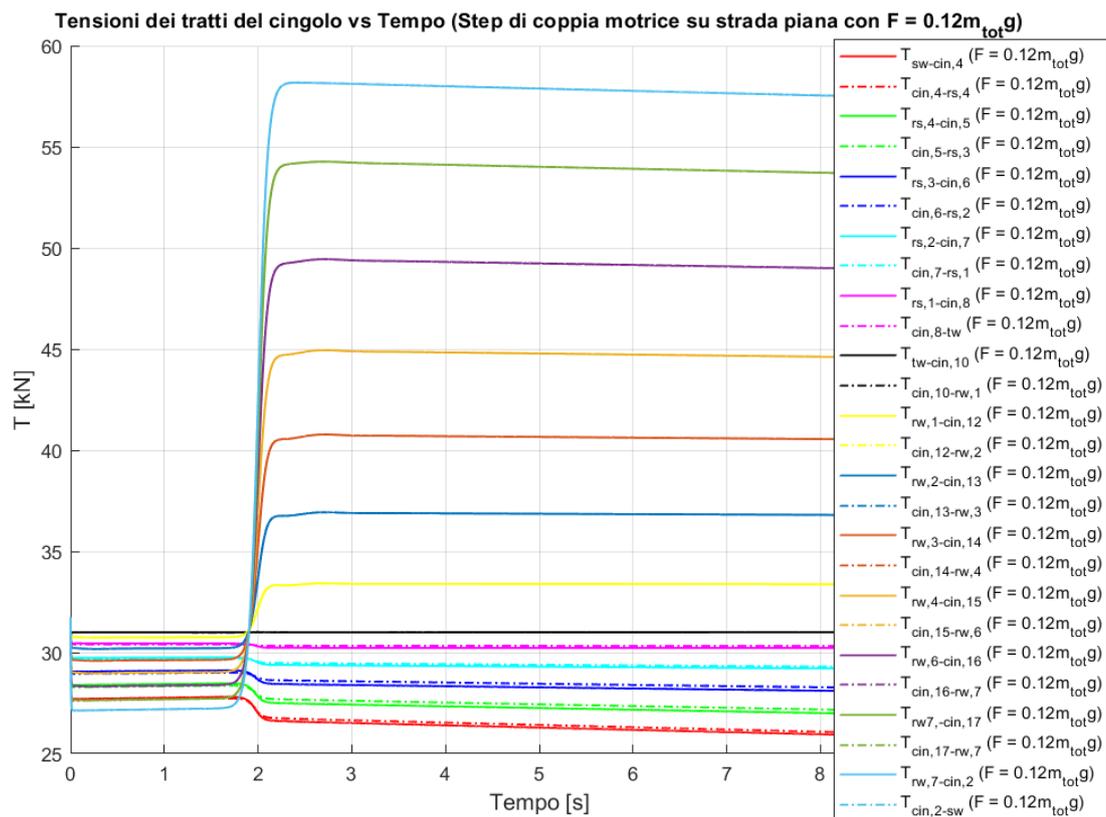


Figura 9.23 - Tensioni dei tratti del cingolo vs Tempo (Step di coppia motrice su strada piana con $F = 0.12m_{tot}g$ con veicolo cingolato con sette road wheels)

Per le tensioni dei vari tratti del cingolo, valgono le considerazioni fatte precedentemente nel modello con tre road wheels. Con l'applicazione della coppia motrice, la differenza di tensione tra tratto teso e tratto lasco è evidente analizzando la differenza tra $T_{cin,2-sw}$ e $T_{sw-cin,4}$.

Come mostrato in Figura 9.24, l'aumento del tensionamento, anche se raddoppiato, non comporta variazioni significative nell'effetto della coppia motrice sulla tensione.

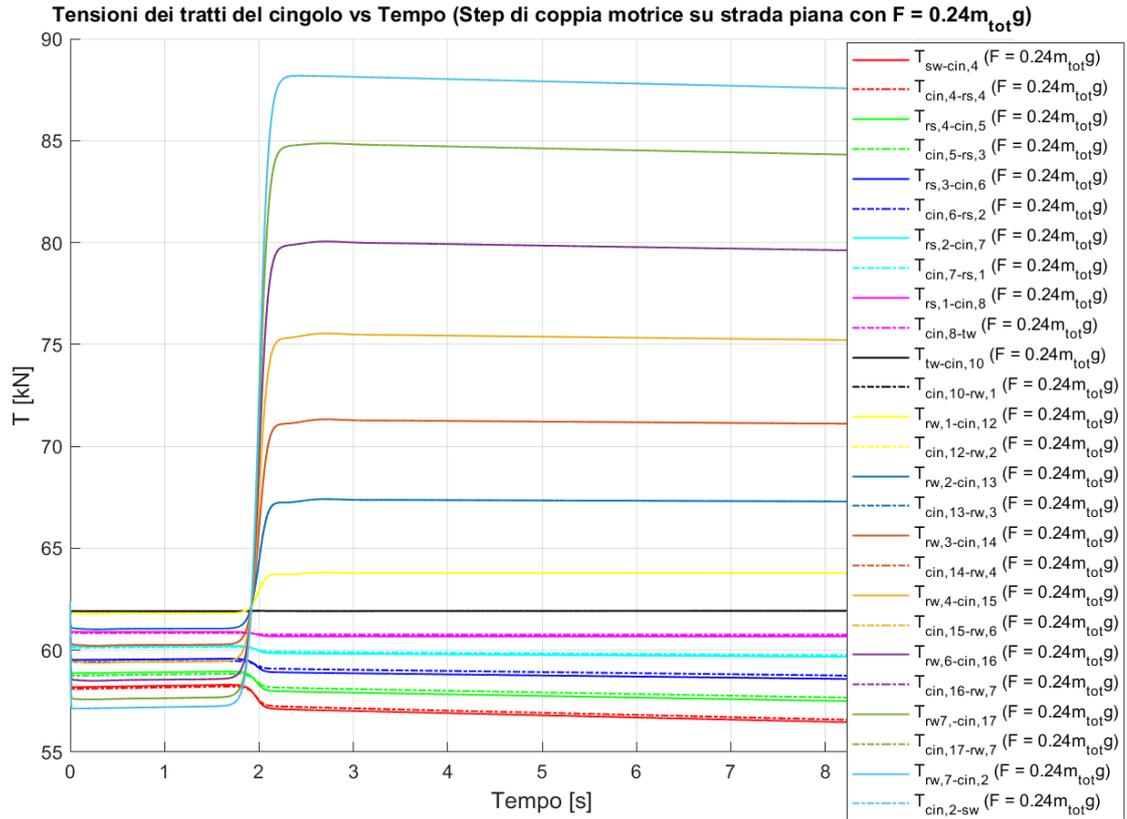


Figura 9.24 - Tensioni dei tratti del cingolo vs Tempo (Step di coppia motrice su strada piana con $F = 0.24m_{tot}g$ con veicolo cingolato con sette road wheels)

In Figura 9.25 e Figura 9.26, si può osservare come l'applicazione della coppia motrice provochi, oltre a un abbassamento della parte posteriore del veicolo dovuto al trasferimento di carico, evidenziato dall'incremento dell'angolo di beccheggio in valore assoluto, anche una riduzione dell'altezza del baricentro.

L'effetto del tensionamento, invece, rimane invariato rispetto a quanto rilevato nella prova di Coast-Down

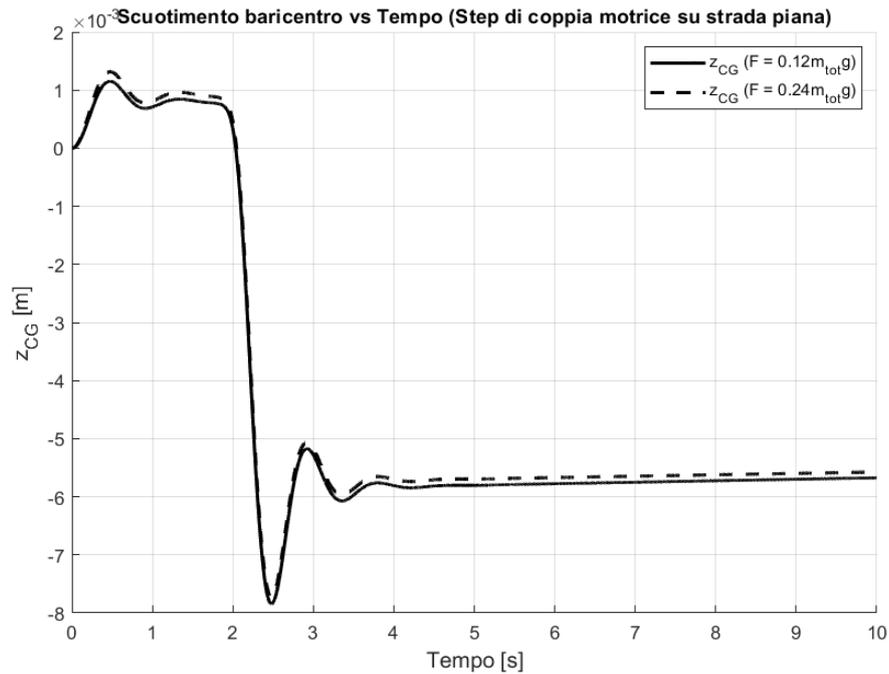


Figura 9.25 - Scuotimento baricentro vs Tempo (Step di coppia motrice su strada piana con veicolo cingolato con sette road wheels)

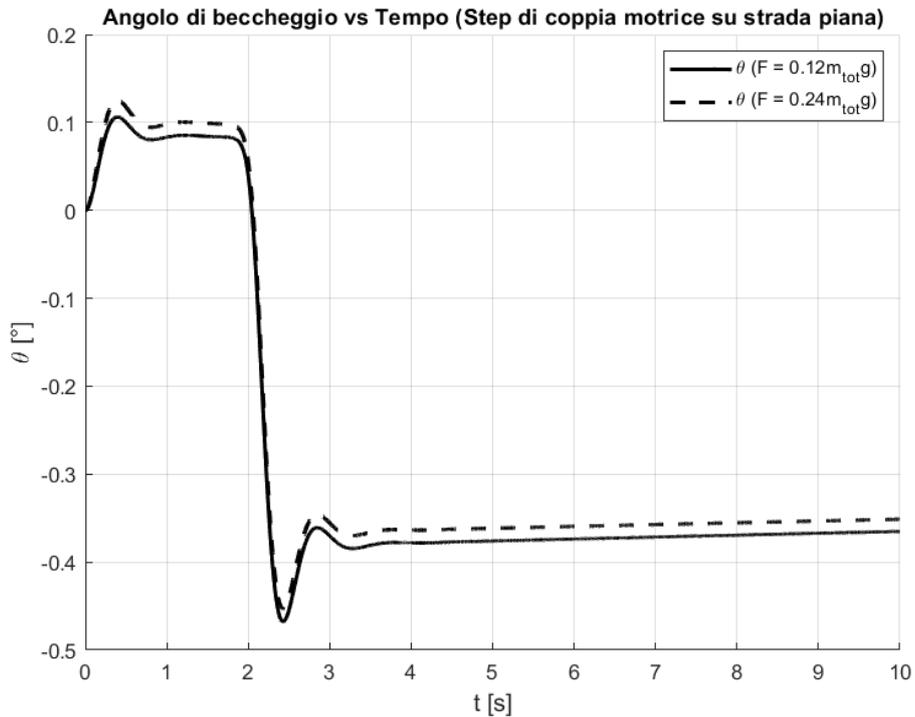


Figura 9.26 - Angolo di beccheggio vs Tempo (Step di coppia motrice su strada piana con veicolo cingolato con sette road wheels)

Il grafico dell'accelerazione verticale, mostrato in Figura 9.27, evidenzia l'abbassamento del baricentro causato dall'applicazione della coppia motrice. Si osserva una variazione significativa nel momento in cui la coppia viene applicata, seguita da una fase di stabilizzazione.

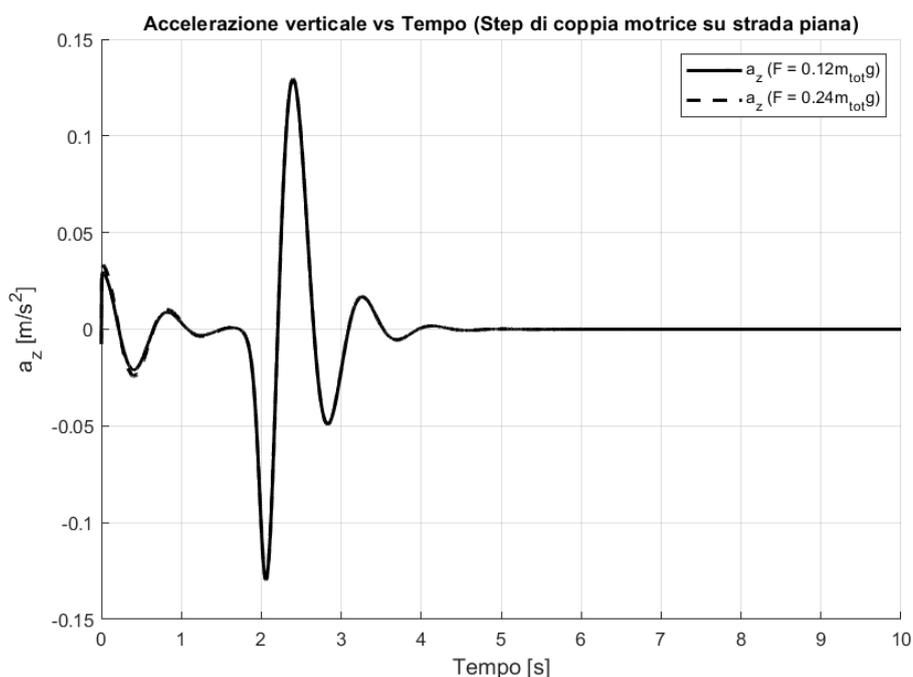


Figura 9.27 - Accelerazione verticale vs Tempo (Step di coppia motrice su strada piana con veicolo cingolato con sette road wheels)

Il comportamento dello scorrimento longitudinale, rappresentato in Figura 9.28, mostra un andamento coerente con quello dell'accelerazione longitudinale, analogamente a quanto osservato nelle simulazioni dei modelli precedenti. In presenza di una coppia motrice, lo scorrimento passa da valori negativi, associati alla fase di frenata, a valori positivi, corrispondenti alla fase di trazione. Con l'aumento del tensionamento, il veicolo manifesta un effetto frenante, poiché il valore assoluto dello scorrimento risulta più elevato durante la fase di frenata e ridotto nella fase di trazione.

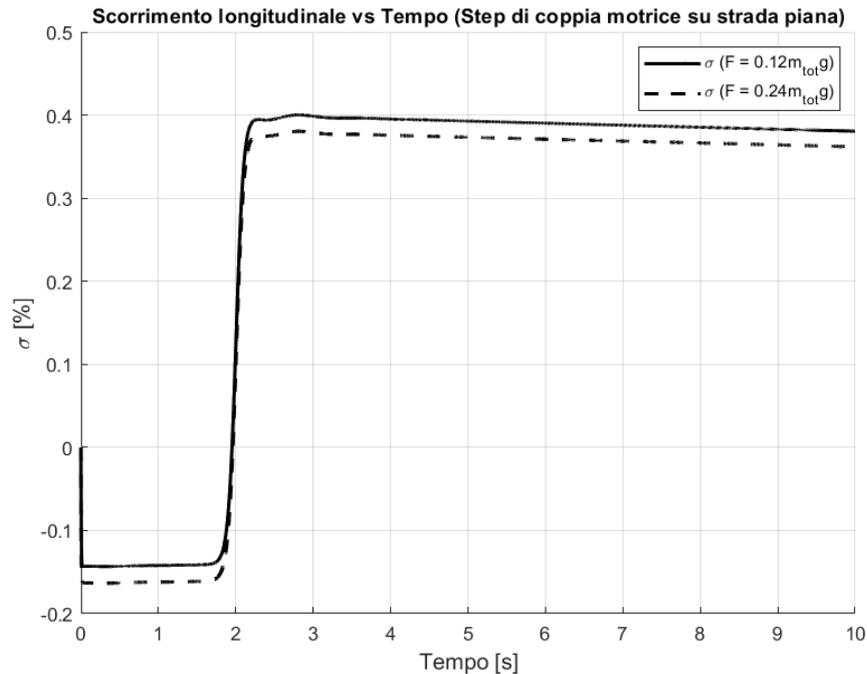


Figura 9.28 - Scorrimento longitudinale vs Tempo (Step di coppia motrice su strada piana con veicolo cingolato con sette road wheels)

9.5.2 Profilo stradale sinusoidale

Dopo aver esaminato il comportamento del veicolo su una strada pianeggiante, si procede a valutare la risposta del modello in presenza di un profilo stradale con andamento sinusoidale.

9.5.2.1 Descrizione profilo stradale

Nelle varie simulazioni verrà scelto un profilo stradale $h(x)$ sinusoidale con la seguente conformazione:

- Tratto iniziale piano di lunghezza $l = x_{c,TW} + 0.5 = 6.685 \text{ m}$ a quota $h = 0$ per far sì che venga rispettata l'ipotesi di strada piana fatta per l'analisi statica;
- Tratto sinusoidale a lunghezza d'onda costante $\lambda = 2l = 13.370 \text{ m}$ e con ampiezza $h_0 = 0.02 \text{ m}$:

$$h(x) = h_0 \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda} - \frac{\pi}{2}\right) - h_0$$

(9.13)

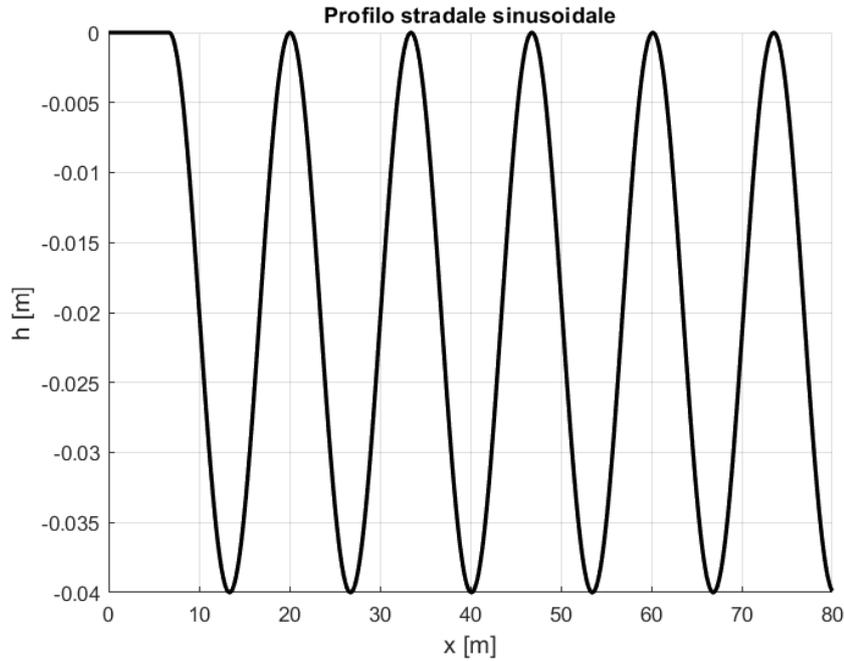


Figura 9.29 - Profilo stradale sinusoidale

9.5.2.2 Prova di Coast-Down

La prova consiste a portare nel portare il veicolo ad una certa velocità, quindi, posizionandosi con il cambio in folle, senza cioè carico motore, si procede a far decelerare il veicolo senza l'uso dei freni.

I parametri della prova sono gli stessi del caso di veicolo cingolato con tre road wheels, cioè, si ha una velocità di inizio test di 10 m/s e una durata della simulazione di dieci secondi.

Verranno testati due casi:

$$1) F = 0.12m_{tot}g = 57.2 \text{ kN};$$

$$2) F = 0.24m_{tot}g = 114.4 \text{ kN}.$$

Dall'analisi della Figura 9.30, Figura 9.31 e Figura 9.32 emerge che l'andamento dell'accelerazione rispecchia il profilo sinusoidale del terreno: i tratti discendenti del percorso generano una lieve accelerazione del veicolo, mentre i tratti ascendenti causano una leggera decelerazione. Rispetto al modello con tre road wheels, in questo caso, essendo il veicolo caratterizzato da una massa maggiore, le oscillazioni risultano ridotte. I risultati ottenuti sono coerenti con quelli osservati su strada piana: all'aumentare del tensionamento, si osserva un incremento della decelerazione, che si traduce in una riduzione più rapida della velocità del veicolo e della velocità di rotazione della sprocket wheel.

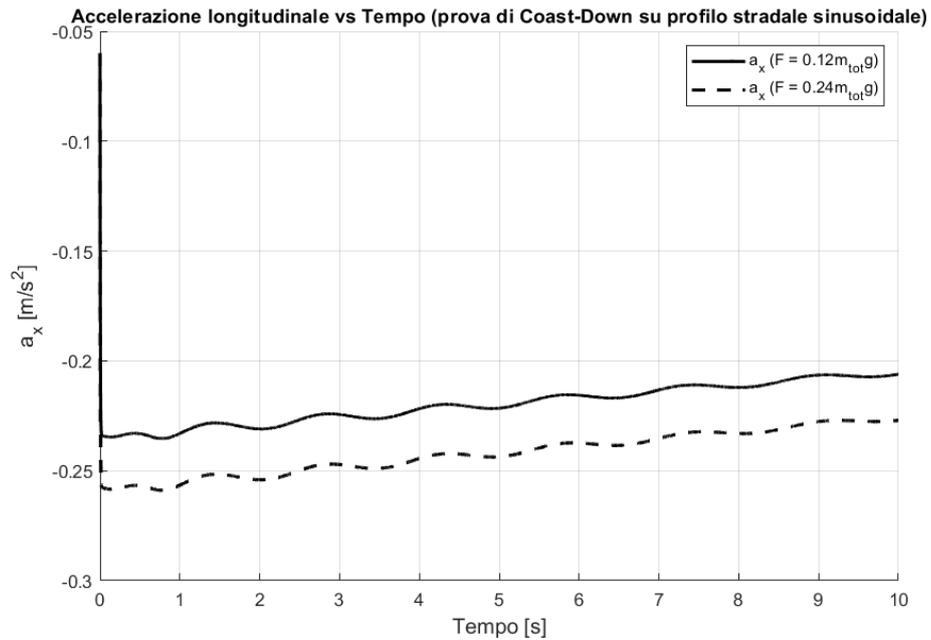


Figura 9.30 - Accelerazione longitudinale vs Tempo (prova di Coast-Down su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con sette road wheels)

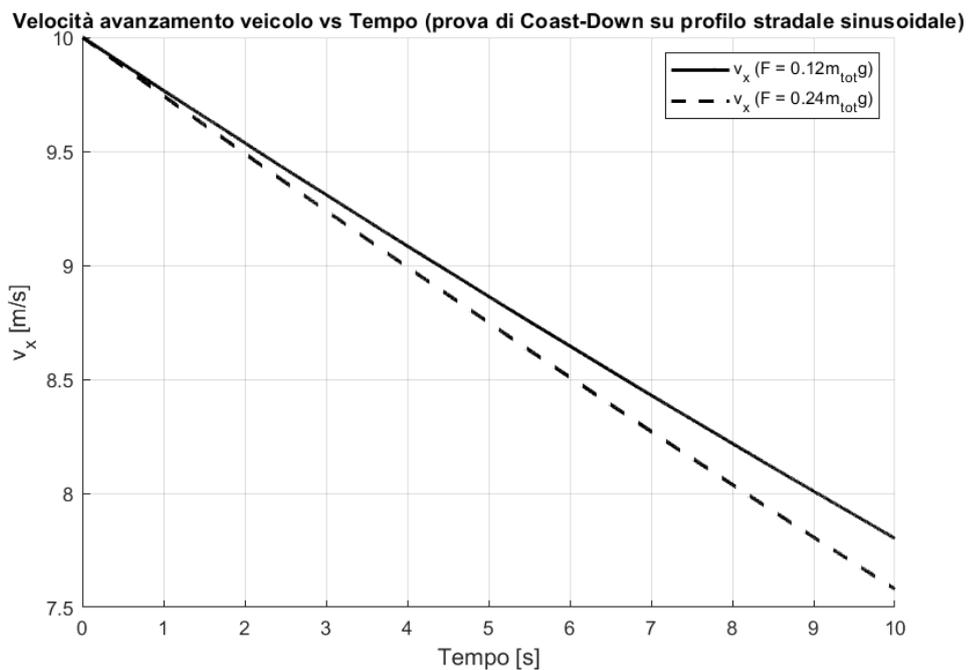


Figura 9.31 - Velocità longitudinale veicolo vs Tempo (prova di Coast-Down su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con sette road wheels)

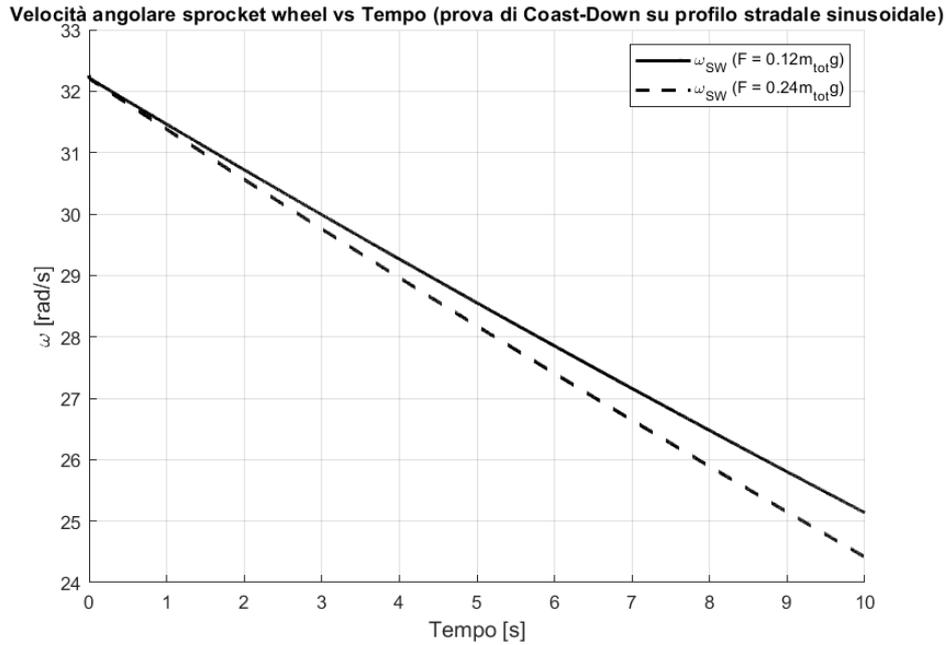


Figura 9.32 - Velocità angolare sprocket wheel vs Tempo (prova di Coast-Down su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con sette road wheels)

Per quanto riguarda le forze verticali e longitudinali esercitate sul terreno, illustrate rispettivamente in Figura 9.33 e Figura 9.34, esse seguono l'andamento oscillatorio del profilo stradale sinusoidale.

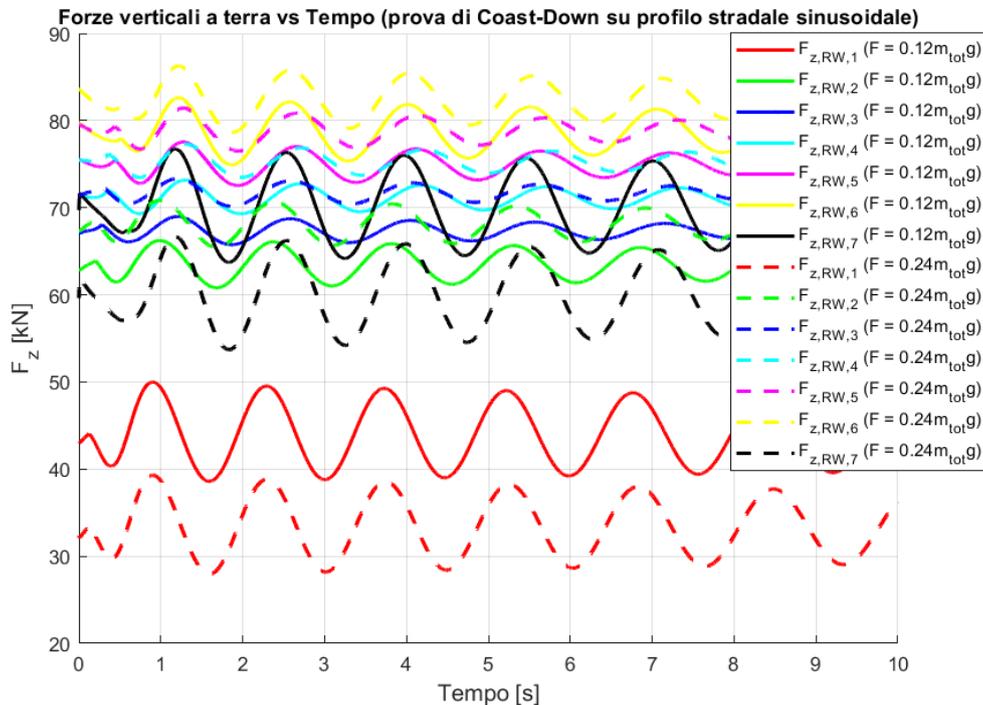


Figura 9.33 - Forze verticali a terra vs Tempo (prova di Coast-Down su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con sette road wheels)

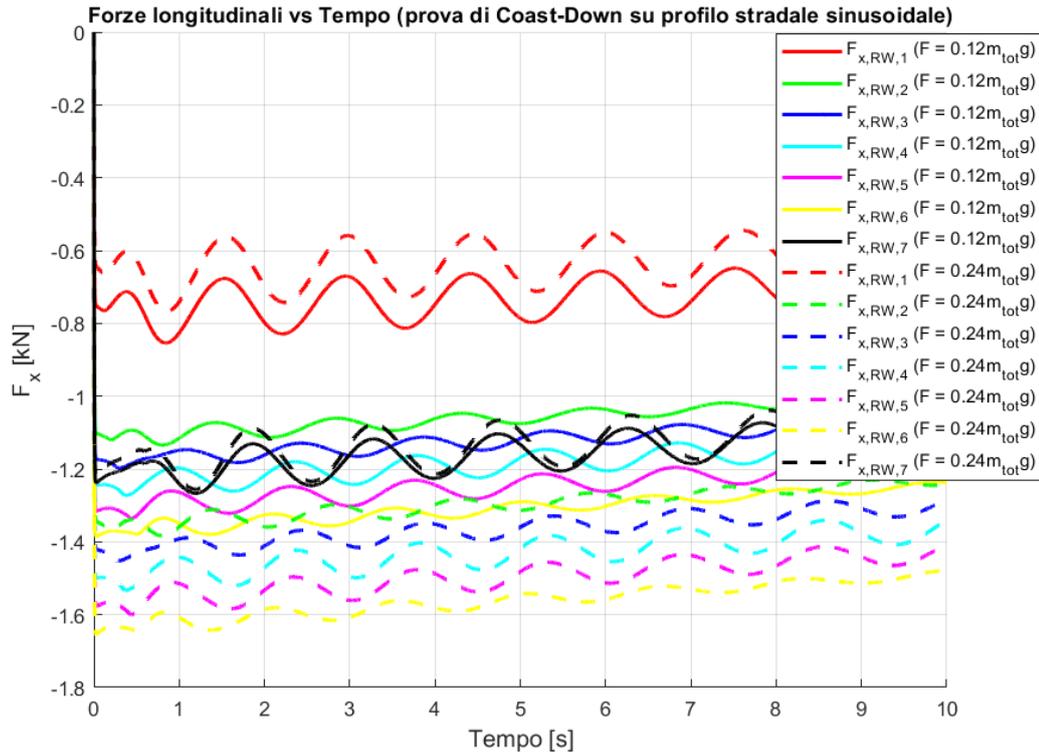


Figura 9.34 - Forze longitudinali vs Tempo (prova di Coast-Down su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con sette road wheels)

Analizzando la Figura 9.33, si osserva che le oscillazioni più marcate si verificano sugli assali esterni (assali 1 e 7).

Durante i tratti ascendenti del terreno, si verifica un trasferimento di carico verso l'assale posteriore a causa della forza di gravità, mentre nei tratti discendenti il carico si sposta verso l'assale anteriore. Gli assali centrali, essendo posizionati più vicino al baricentro del veicolo e quindi meno soggetto al trasferimento di carico, presentano oscillazioni di minore ampiezza.

L'andamento delle forze longitudinali è sempre direttamente correlato alle forze verticali, come già osservato nel caso della strada pianeggiante.

L'effetto del tensionamento, come si può notare nei due grafici, rimane il medesimo visto nell'analisi su strada piana.

La Figura 9.36 mostra l'andamento delle tensioni interne al cingolo nel tempo applicando una forza di tensionamento di $F = 0.12m_{tot}g$.

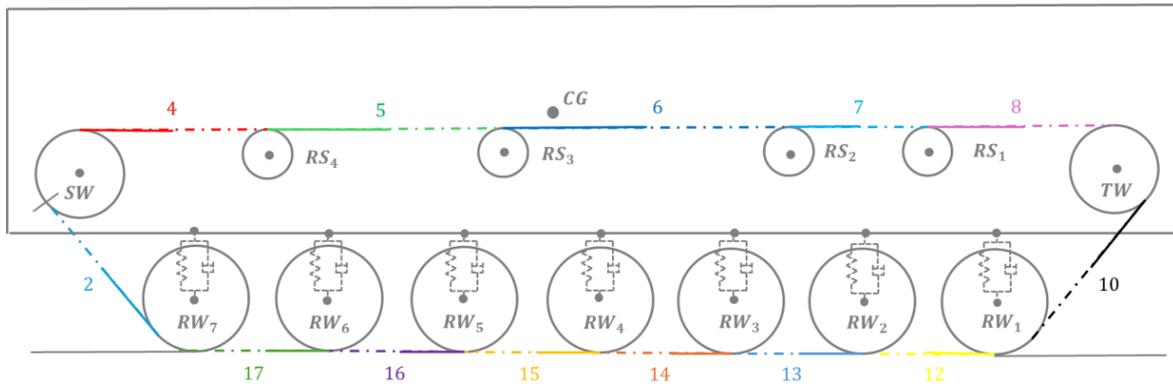


Figura 9.35 - Rappresentazione delle tensioni del cingolo (veicolo cingolato con sette road wheels)

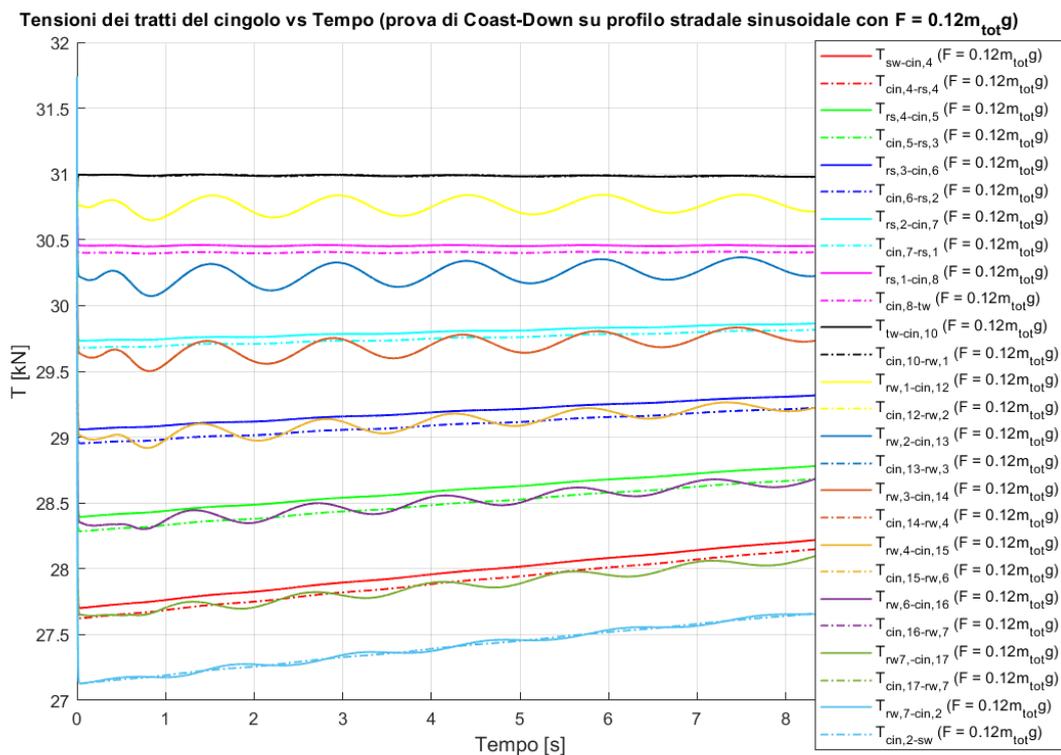


Figura 9.36 - Tensioni dei tratti del cingolo vs Tempo (prova di Coast-Down su profilo stradale sinusoidale con $F = 0.12m_{tot}g$ con veicolo cingolato con sette road wheels)

Nei tratti orizzontali del cingolo a contatto con il terreno, le tensioni mostrano un andamento sinusoidale, con un'ampiezza di oscillazione progressivamente ridotta grazie all'azione dello smorzatore. Questo comportamento è dovuto alle oscillazioni delle forze longitudinali, che si riflettono sulle tensioni di tali tratti. Al contrario, nei restanti tratti del cingolo, la tensione ha oscillazioni minori.

Aumentando il tensionamento a $F = 0.24m_{tot}g$ la distribuzione delle tensioni nei tratti di cingolo a contatto nel terreno rimane invariata, dato che si osserva un aumento uniforme della tensione.

Negli altri segmenti si osservano lievi variazioni nella distribuzione della tensione. Ad esempio, la quota di tensione nel tratto tra la tensioner wheel e la road wheel 1 diminuisce

leggermente rispetto agli altri segmenti, mentre nel tratto tra la sprocket wheel e la ruota di supporto 4 aumenta leggermente.

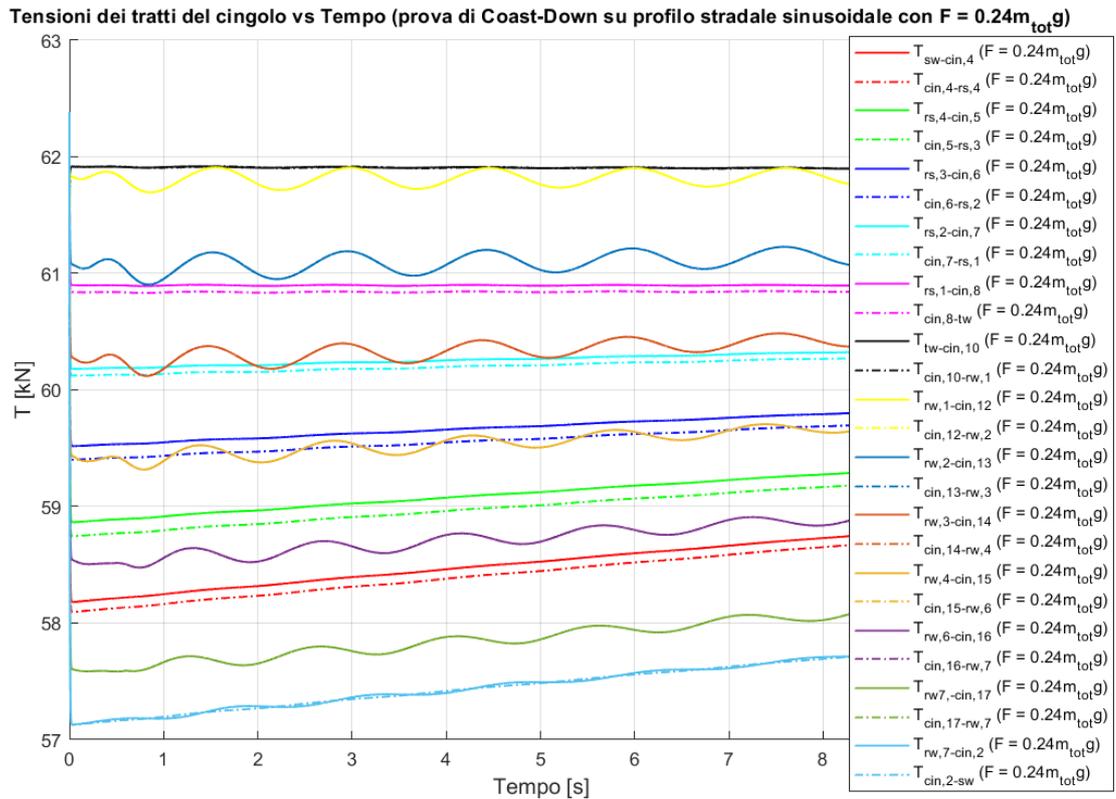


Figura 9.37 - Tensioni dei tratti del cingolo vs Tempo (prova di Coast-Down su profilo stradale sinusoidale con $F = 0.24m_{tot}g$ con veicolo cingolato con sette road wheels)

Durante la percorrenza di un profilo stradale sinusoidale, il movimento del baricentro del sistema mostra un'oscillazione corrispondente, come si può notare in Figura 9.38.

Si può osservare come l'incremento della forza di tensionamento influenza leggermente lo scuotimento del baricentro.

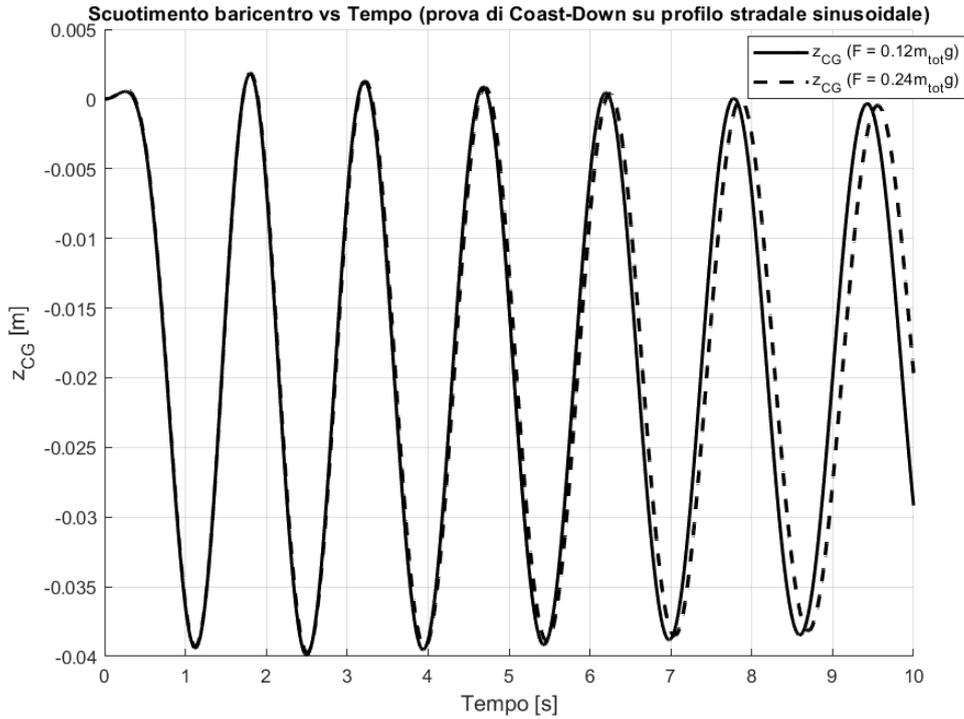


Figura 9.38 - Scuotimento baricentro vs Tempo (prova di Coast-Down su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con sette road wheels)

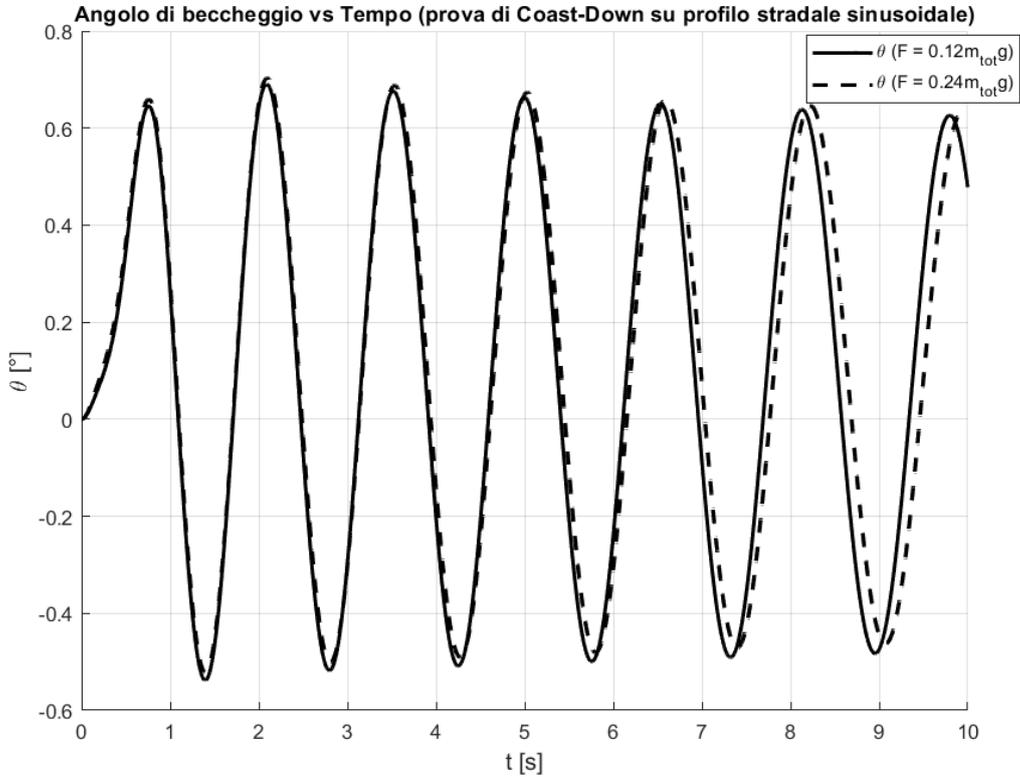


Figura 9.39 - Angolo di beccheggio vs Tempo (prova di Coast-Down su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con sette road wheels)

Questo tipo di profilo provoca un'oscillazione della cassa del veicolo, la cui ampiezza tende a ridursi progressivamente con l'avanzare del veicolo, grazie all'azione degli smorzatori. Quando il tensionamento viene raddoppiato, così come nel caso dello scuotimento, si ha una variazione minima dei risultati, come mostrato in Figura 9.39.

L'analisi dell'accelerazione verticale, mostrata in Figura 9.40, evidenzia una progressiva diminuzione dell'accelerazione nel corso della simulazione, attribuibile all'azione dello smorzatore. Un aumento della forza di tensionamento contribuisce a ridurre leggermente le oscillazioni.

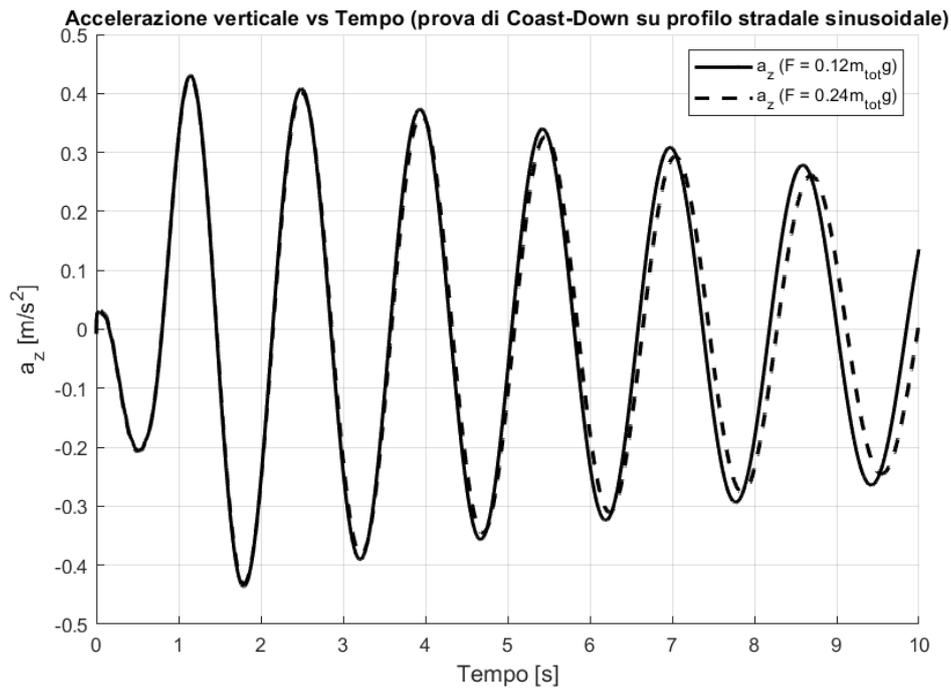


Figura 9.40 - Accelerazione verticale vs Tempo (prova di Coast-Down su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con sette road wheels)

L'andamento dello scorrimento longitudinale rispecchia fedelmente il grafico dell'accelerazione longitudinale, come illustrato in Figura 9.41. Lo scorrimento assume valori negativi poiché il veicolo si trova in fase di decelerazione a causa degli attriti.

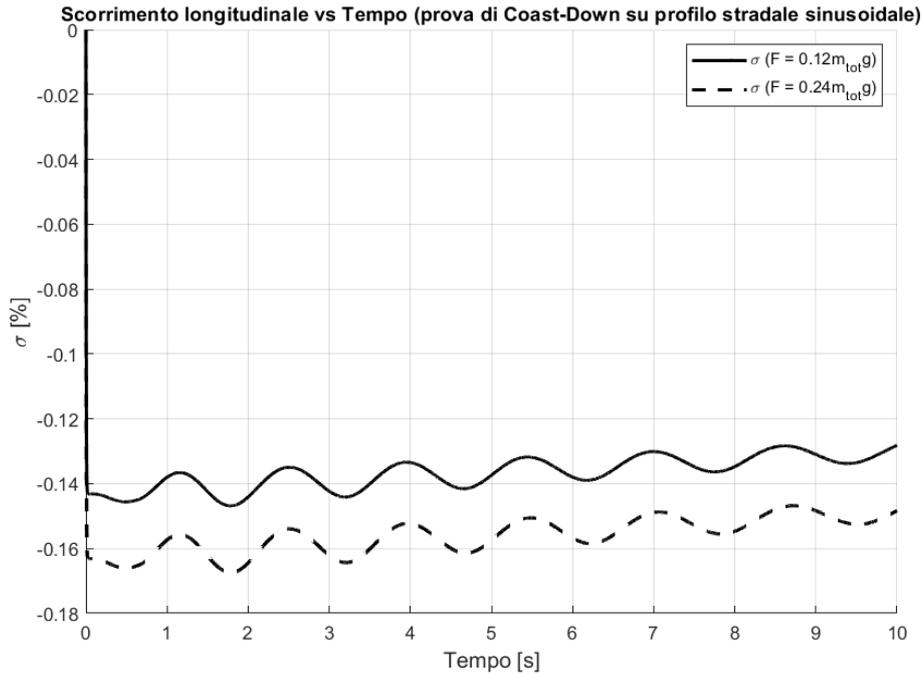


Figura 9.41 - Scorrimento longitudinale vs Tempo (prova di Coast-Down su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con sette road wheels)

9.5.2.3 Step di coppia motrice

Nella Figura 9.42 è mostrata la coppia motrice applicata alla sprocket wheel. Il suo andamento è identico a quello delle simulazioni precedenti, consentendo così di visualizzare le differenze mantenendo lo stesso input di coppia come punto di partenza.

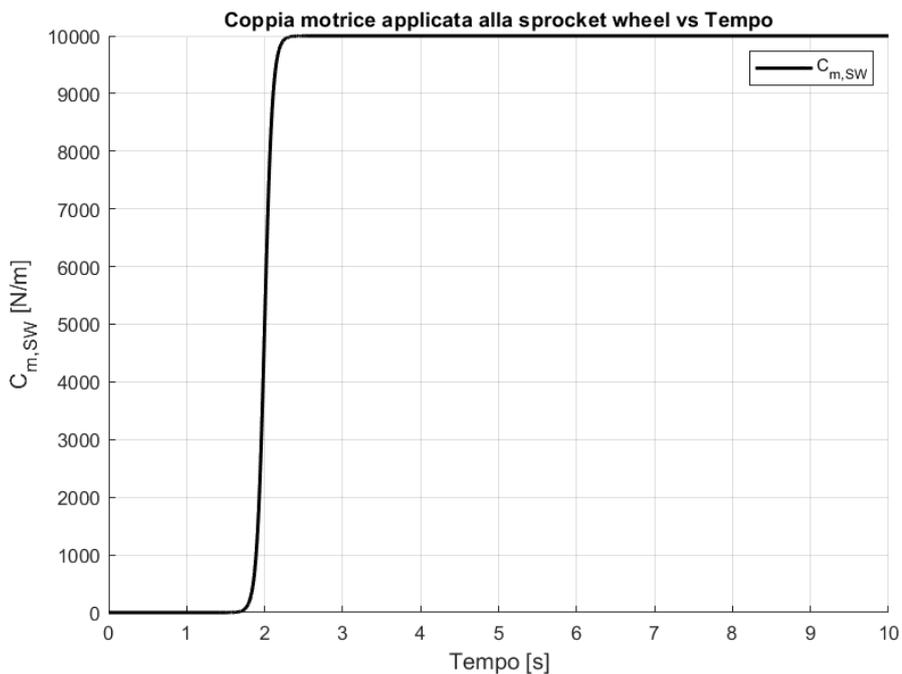


Figura 9.42 - Coppia motrice applicata alla sprocket wheel vs Tempo (veicolo cingolato con sette road wheels)

Verranno testati due casi:

- 1) $F = 0.12m_{tot}g = 57.2 \text{ kN}$;
- 2) $F = 0.24m_{tot}g = 114.4 \text{ kN}$.

Visualizzando la Figura 9.43, Figura 9.44 e Figura 9.45, si nota come l'accelerazione longitudinale, la velocità di traslazione longitudinale e la velocità di rotazione della sprocket wheel seguano lo stesso andamento osservato nei modelli precedenti, come già osservato su strada piana. Tuttavia, applicando una coppia uguale a un veicolo più pesante, si osserva una minore accelerazione, a causa della maggiore inerzia del sistema.

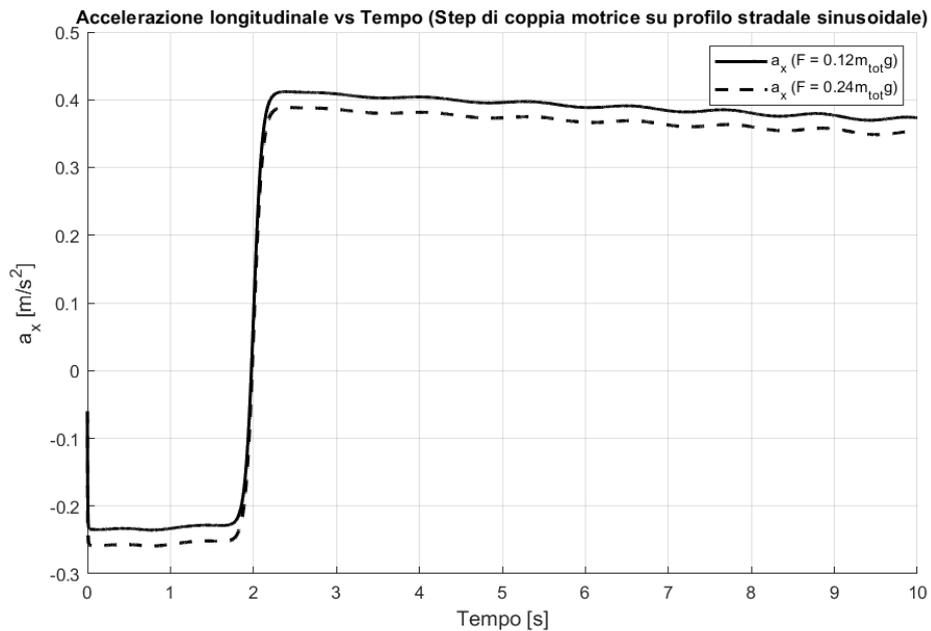


Figura 9.43 - Accelerazione longitudinale vs Tempo (Step di coppia motrice su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con sette road wheels)

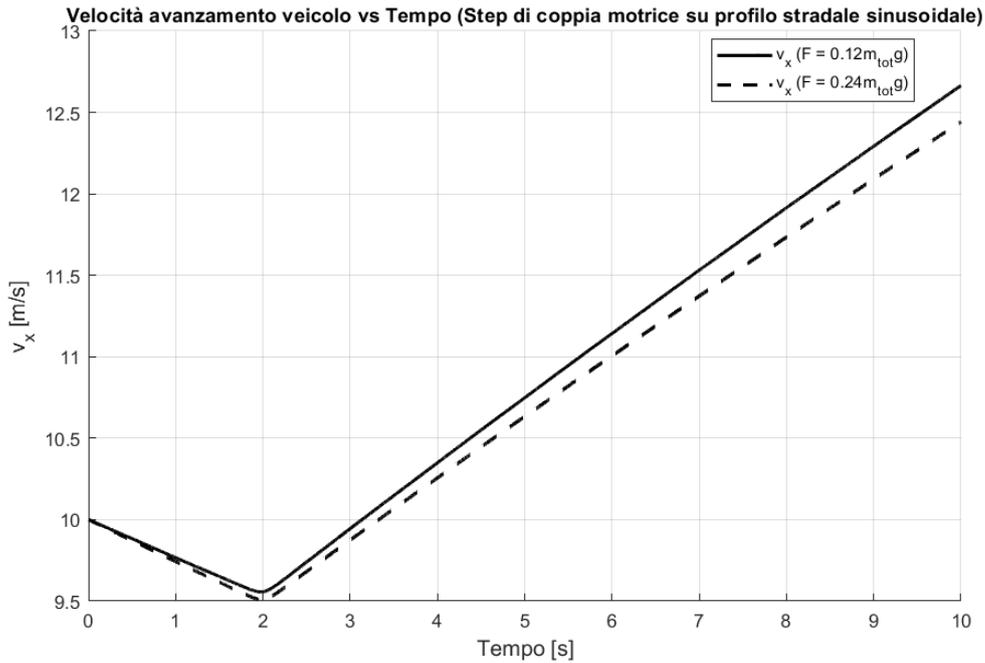


Figura 9.44 - Velocità longitudinale veicolo vs Tempo (Step di coppia motrice su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con sette road wheels)

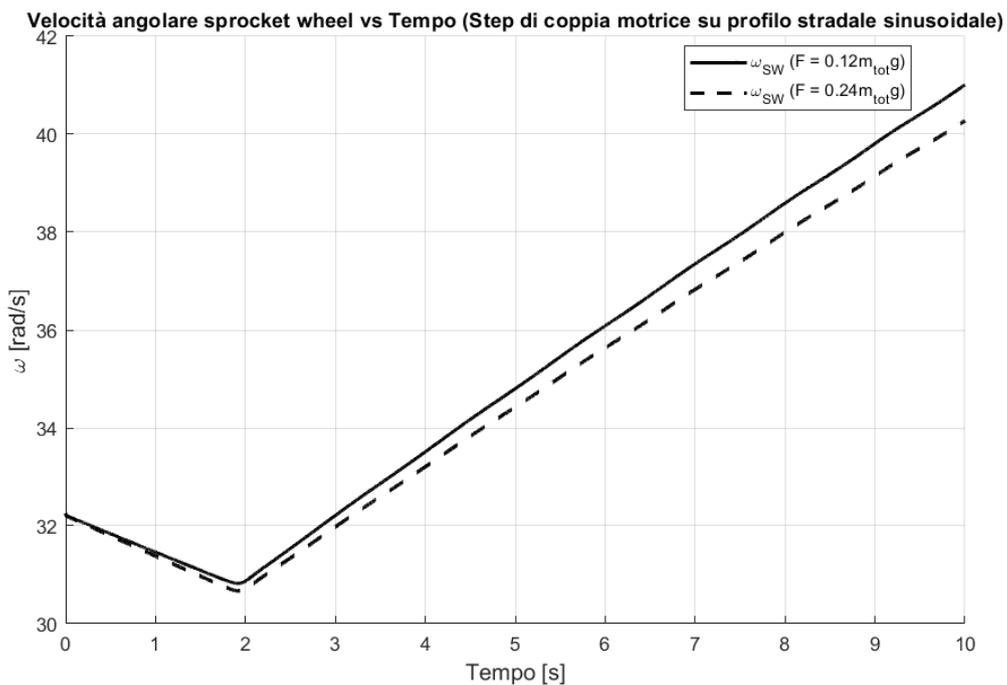


Figura 9.45 - Velocità angolare sprocket wheel vs Tempo (Step di coppia motrice su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con sette road wheels)

Per quanto riguarda le forze verticali e longitudinali esercitate sul terreno, rappresentate rispettivamente in Figura 9.46 e Figura 9.47, esse seguono l'andamento oscillatorio del profilo stradale sinusoidale.

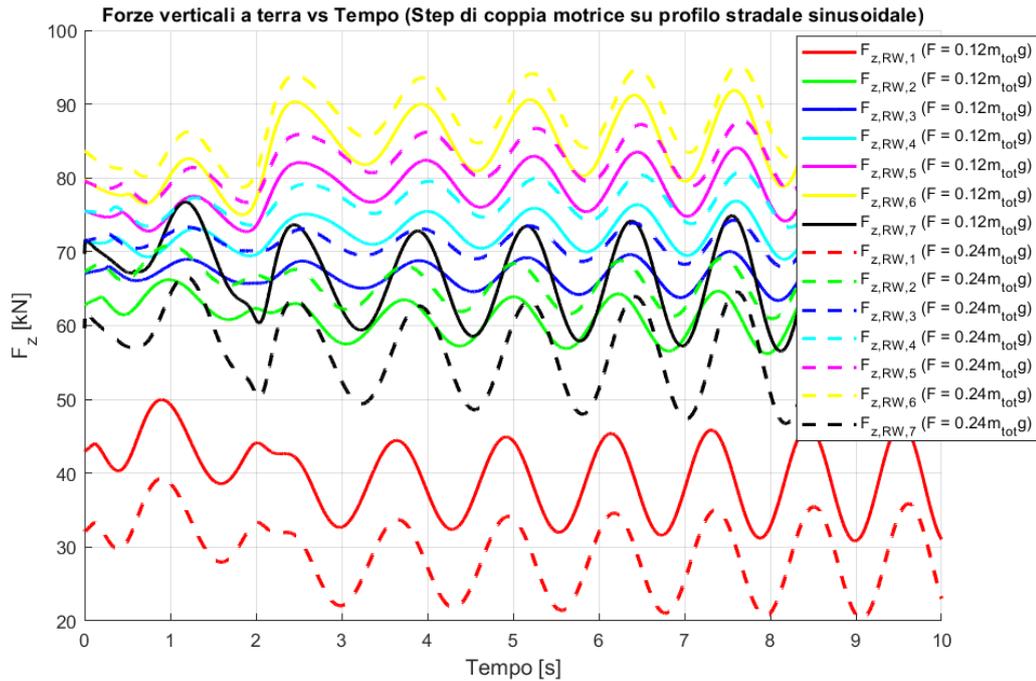


Figura 9.46 - Forze verticali a terra vs Tempo (Step di coppia motrice su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con sette road wheels)

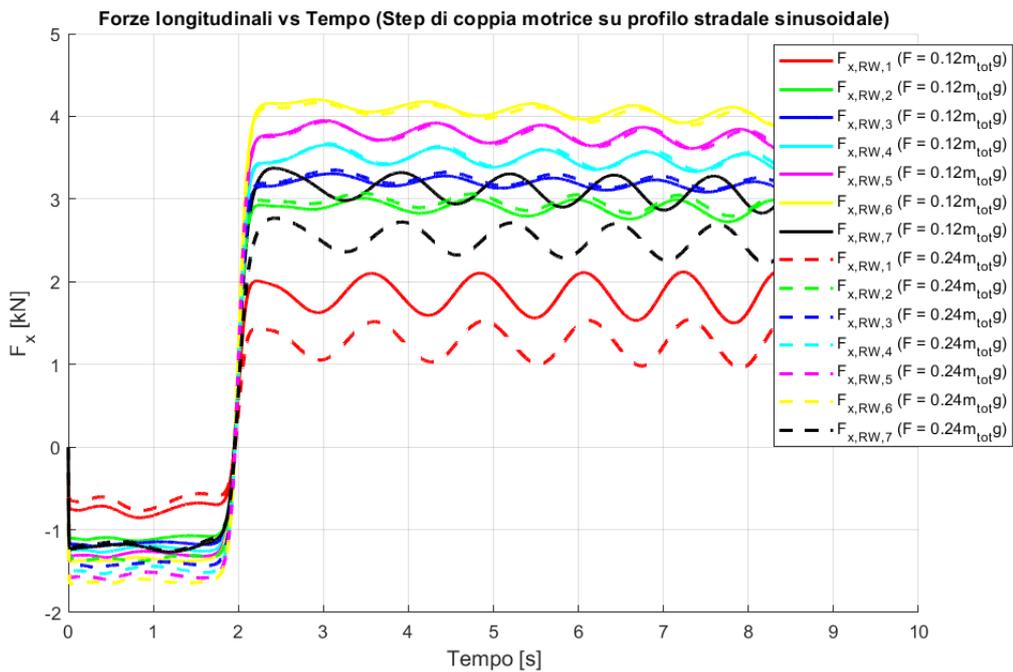


Figura 9.47 - Forze longitudinali vs Tempo (Step di coppia motrice su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con sette road wheels)

Come osservato anche su un tracciato pianeggiante, l'applicazione della coppia motrice provoca un incremento delle forze verticali sulle road wheels posteriori (4, 5, 6), dovuto al trasferimento di carico verso la parte posteriore del veicolo. In parallelo, si riscontra una riduzione delle forze sulle ruote anteriori (1, 2, 3) e sulla road wheel 7, quest'ultima a causa del tensionamento del cingolo. L'applicazione della coppia motrice porta a un aumento della forza a terra sulla road wheel 7 per effetto del trasferimento di carico. Tuttavia, la

coppia induce anche un notevole incremento della tensione nel tratto teso del cingolo, con il picco di tensione localizzato nella sezione inclinata tra la sprocket wheel e la road wheel 7. Questo fenomeno prevale sul trasferimento di carico, determinando complessivamente una riduzione della forza a terra sulla road wheel 7.

Le differenze nelle forze longitudinali in fase di trazione sono direttamente correlate alle considerazioni fatte sulle forze a terra.

In Figura 9.49 è mostrato come variano le tensioni dei tratti del cingolo durante la simulazione con $F = 0.12m_{tot}g$.

Il valore delle tensioni durante la prova è simile a quello visto su strada piana, con la differenza che si nota una leggera oscillazione delle tensioni dei tratti di cingolo a contatto con il terreno.

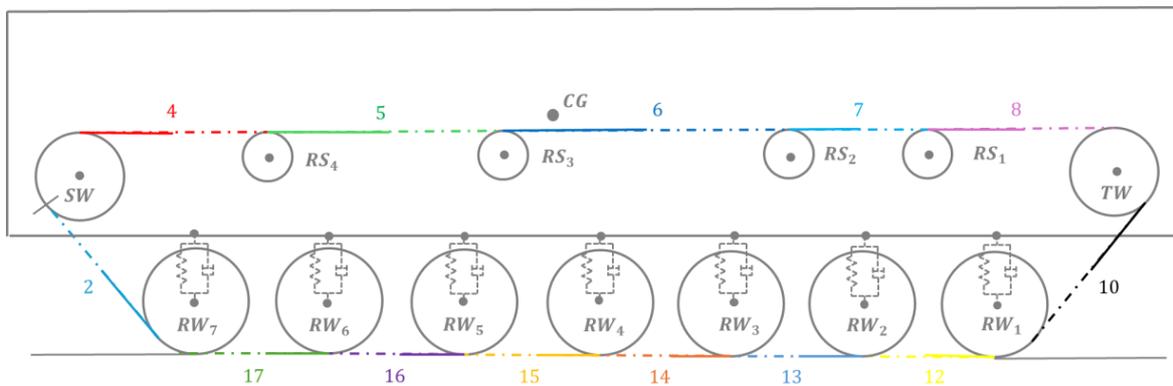


Figura 9.48 - Rappresentazione delle tensioni del cingolo (veicolo cingolato con sette road wheels)

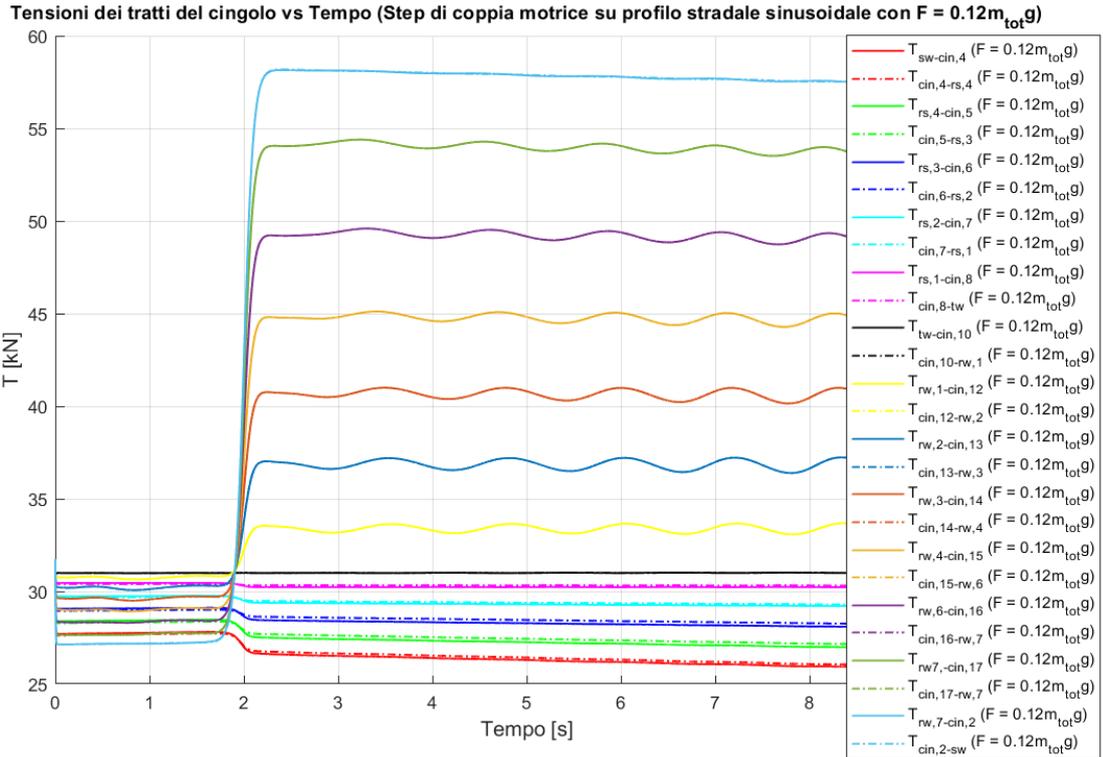


Figura 9.49 - Tensioni dei tratti del cingolo vs Tempo (Step di coppia motrice su profilo stradale sinusoidale con $F = 0.12m_{tot}g$ con veicolo cingolato con sette road wheels)

Come mostrato in Figura 9.50, il raddoppio della forza di tensionamento non comporta variazioni significative nell'effetto della coppia motrice sulla tensione, analogamente a quanto osservato nel caso di strada pianeggiante.

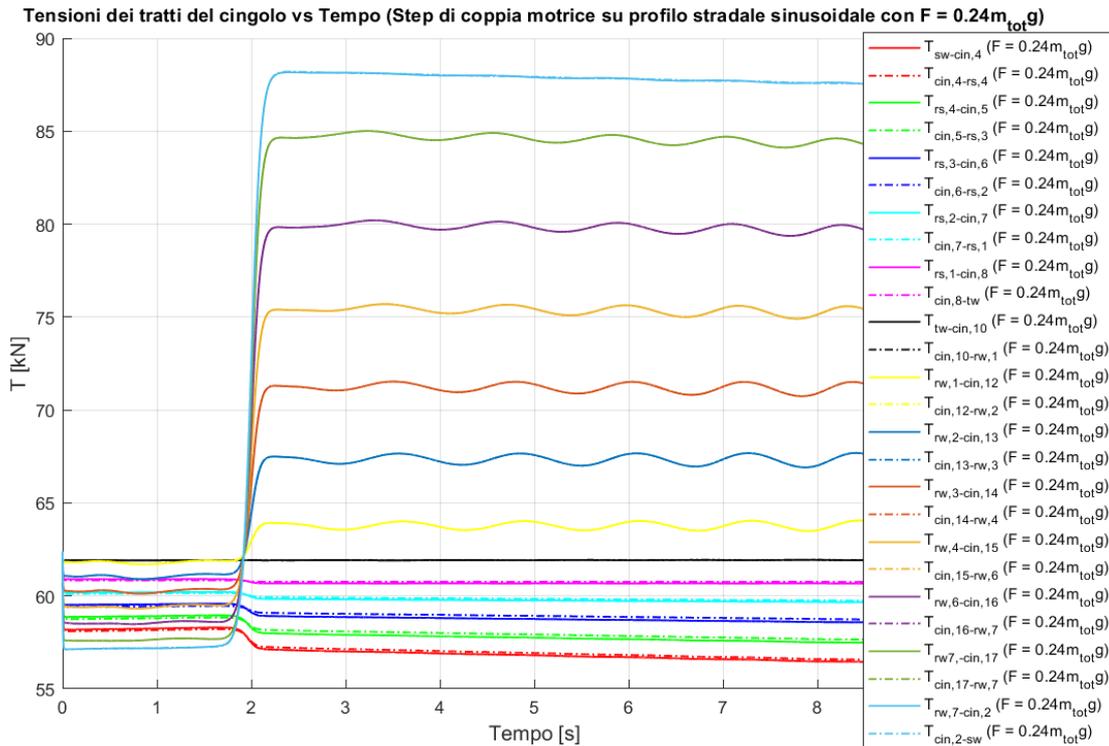


Figura 9.50 - Tensioni dei tratti del cingolo vs Tempo (Step di coppia motrice su profilo stradale sinusoidale con $F = 0.24m_{tot}g$ con veicolo cingolato con sette road wheels)

In Figura 9.51 e Figura 9.52, si evidenzia come l'applicazione della coppia motrice provochi, oltre a un abbassamento della parte posteriore del veicolo dovuto al trasferimento di carico, evidenziato dall'incremento del valore medio dell'angolo di beccheggio in valore assoluto, anche una riduzione dell'altezza media del baricentro.

L'incremento del tensionamento, anche nel caso di applicazione di uno step di coppia motrice, ha un'influenza minima sullo scuotimento e sull'angolo di beccheggio del veicolo.

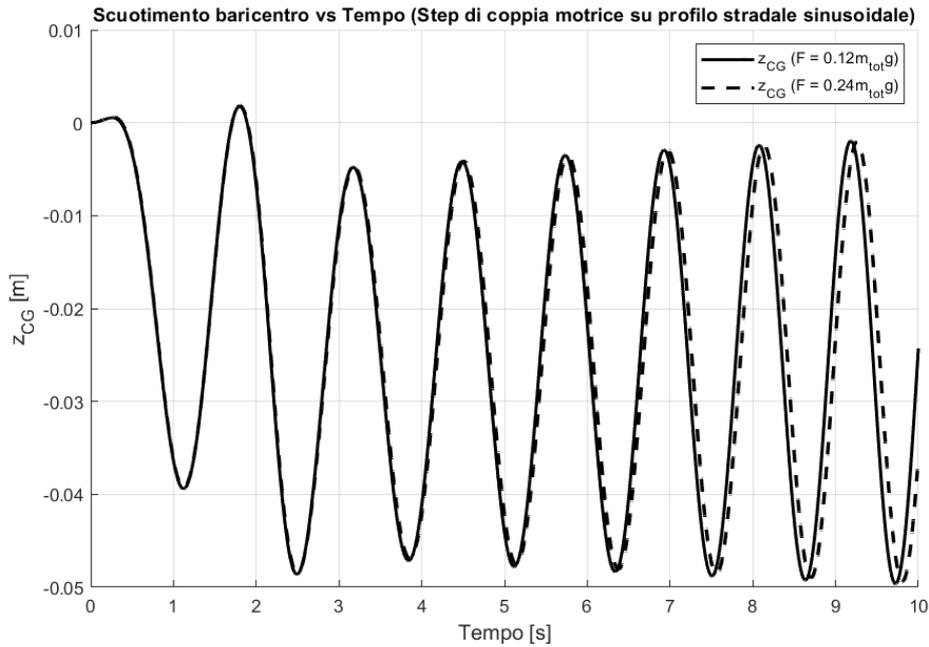


Figura 9.51 - Scuotimento baricentro vs Tempo (Step di coppia motrice su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con sette road wheels)

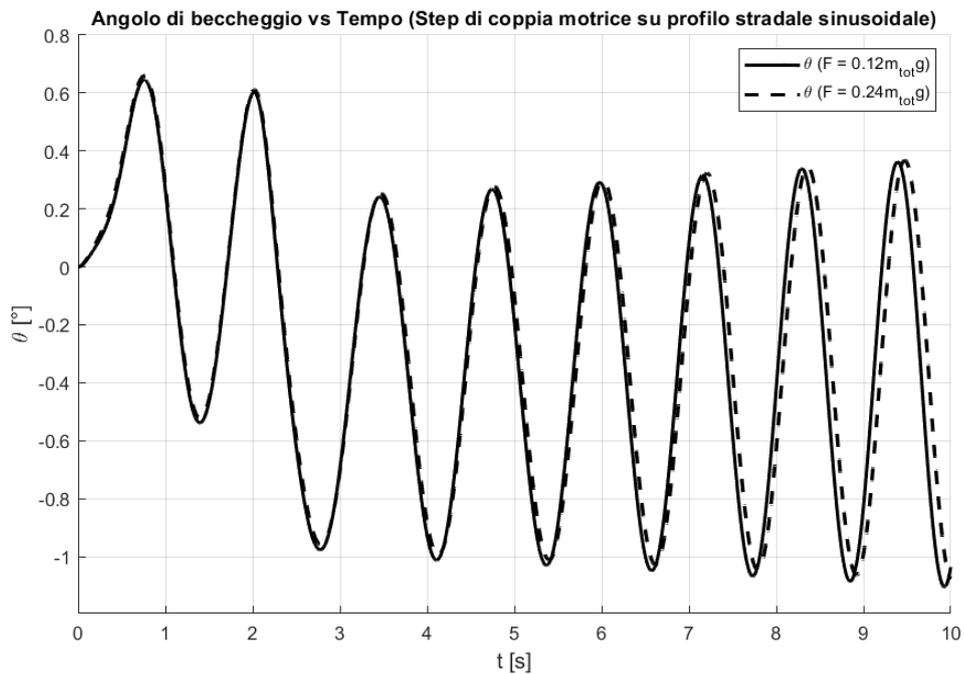


Figura 9.52 - Angolo di beccheggio vs Tempo (Step di coppia motrice su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con sette road wheels)

La Figura 9.53 mostra l'andamento dell'accelerazione verticale del baricentro. Si osserva un aumento dell'ampiezza delle oscillazioni durante la prova, correlato all'incremento della velocità del veicolo. A velocità elevate, il tempo a disposizione per le sospensioni di assorbire e smorzare le oscillazioni diminuisce, riducendo l'efficacia del controllo del movimento verticale.

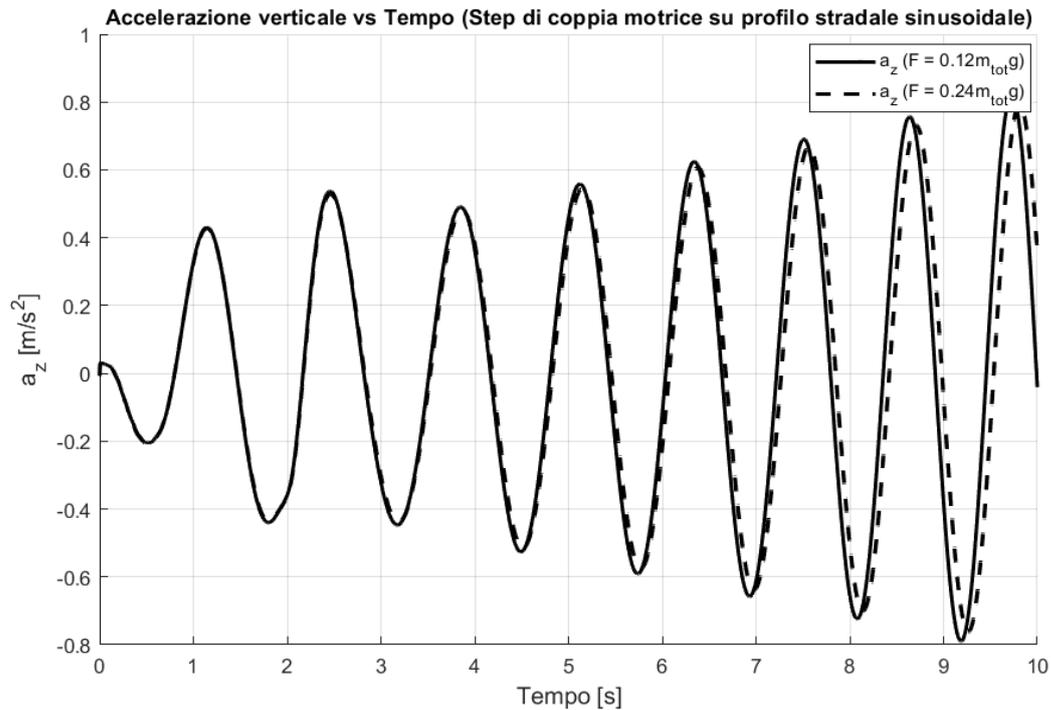


Figura 9.53 - Accelerazione verticale vs Tempo (Step di coppia motrice su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con sette road wheels)

Il comportamento dello scorrimento longitudinale, mostrato in Figura 9.54, come emerso dalle simulazioni precedenti, riflette l'andamento dell'accelerazione longitudinale. Un aspetto significativo è l'aumento dell'ampiezza delle oscillazioni in seguito all'applicazione della coppia motrice. Inoltre, con l'incremento del tensionamento, si osserva una riduzione dello scorrimento in tutte le condizioni operative considerate.

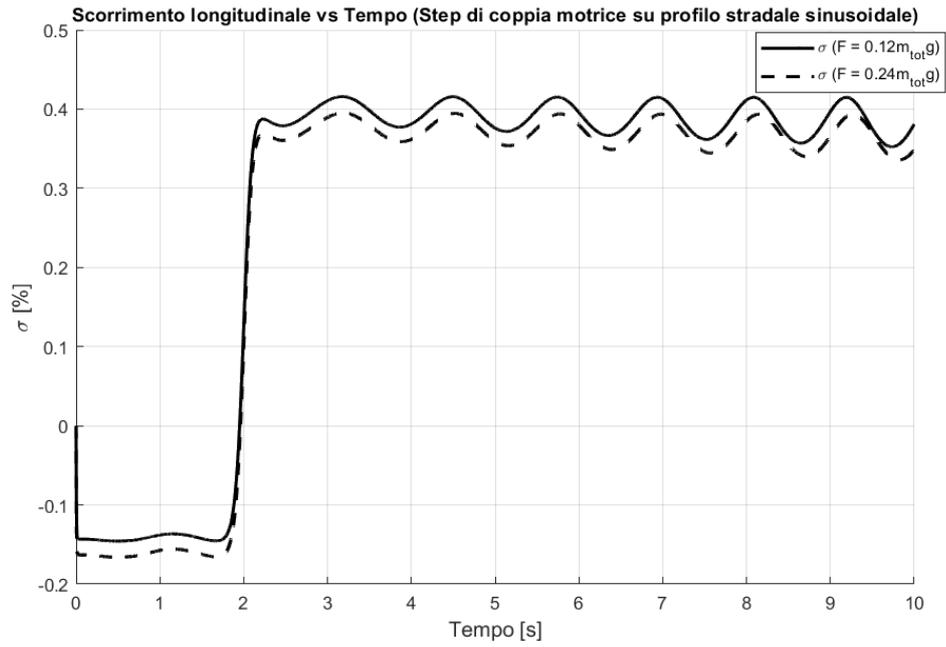


Figura 9.54 - Scorrimento longitudinale vs Tempo (Step di coppia motrice su profilo stradale sinusoidale con veicolo cingolato con sette road wheels)

10. Conclusioni e sviluppi futuri

Il modello sviluppato dimostra una buona capacità di descrivere con precisione le grandezze cinematiche e dinamiche principali che caratterizzano il comportamento globale di un veicolo cingolato sia in condizioni stazionarie sia in transitorio. Inoltre, è in grado di valutare grandezze più specifiche, come le tensioni nei vari tratti del cingolo, la distribuzione delle forze verticali a terra e le reazioni vincolari presenti su ciascuna ruota. Grazie allo script realizzato in Matlab, descritto nell'appendice, è possibile modificare rapidamente la geometria del veicolo, consentendo di analizzare gli effetti che tali variazioni geometriche hanno sul comportamento statico e dinamico del veicolo stesso.

È stata implementata una logica di controllo basata su un controllore PID, che permette di regolare la velocità del veicolo in modo preciso. In alternativa, il modello consente di disattivare il controllo e fornire un segnale di coppia scelto dall'utente, ampliando le possibilità di analisi.

Le simulazioni effettuate hanno prodotto risultati verosimili, confermando la validità delle ipotesi semplificative adottate nella progettazione del modello. In particolare, la validazione del modello in configurazione con cinque road wheels ha mostrato una buona coerenza rispetto ai risultati ottenuti con il toolkit ATV (Adams Tracked Vehicle) del software Adams Car, sia nella prova di accelerazione su strada piana sia nelle prove su un profilo stradale sinusoidale.

Nella prova statica, le reazioni vincolari calcolate risultano leggermente superiori rispetto a quelle del modello ATV. Tale discrepanza è attribuibile alla minore complessità del modello Matlab-Simulink, che non include alcuni componenti del veicolo cingolato presenti invece in ATV, i quali assorbono parte delle forze di tensionamento.

Tuttavia, il modello presenta ancora dei limiti: attualmente, è in grado di valutare solo la dinamica longitudinale e verticale, e richiede un terreno rigido. Gli sviluppi futuri potrebbero mirare ad estendere l'analisi alla dinamica laterale e a rendere il modello applicabile anche su terreni cedevoli. Inoltre, altre possibili migliorie potrebbe includere l'implementazione di una coppia d'attrito al perno variabile durante la simulazione, in grado di adattarsi dinamicamente alle condizioni operative, e aumentare il livello di dettaglio della descrizione del powertrain.

In conclusione, il modello rappresenta un buon compromesso tra semplicità e accuratezza, fornendo una base solida per ulteriori sviluppi e applicazioni nel campo della simulazione dei veicoli cingolati.

11. Appendice

11.1 Tool calcolo catena

Il seguente tool è uno script Matlab che, note posizioni geometriche dei centri ruota, è in grado di calcolare le posizioni di ogni punto del cingolo in modo che sia sempre tangente alle circonferenze delle ruote.

I dati di input del tool sono i seguenti:

- Vettore colonna con le coordinate x_c dei centri delle ruote del veicolo cingolato;
- Vettore colonna con le coordinate z_c dei centri delle ruote del veicolo cingolato;
- Vettore colonna con il raggio delle ruote del veicolo cingolato.

Essendo un modello in due dimensioni le ruote sono visualizzate come circonferenze e il cingolo è visualizzato come una successione di archi (tratti della catena a contatto con le ruote) e segmenti (tratti della catena tra una ruota e l'altra).

Dopo aver inserito i dati di input il modello segnala un errore se i dati inseriti non sono corretti, in particolare il valore dei raggi deve essere positivo, le coordinate dei centri e i raggi devono essere tali da non produrre ruote intersecanti.

In Figura 11.1 è rappresentato l'esempio dove la sprocket wheel e la road wheel 3 si intersecano a causa di un inserimento in input di dati non corretti.

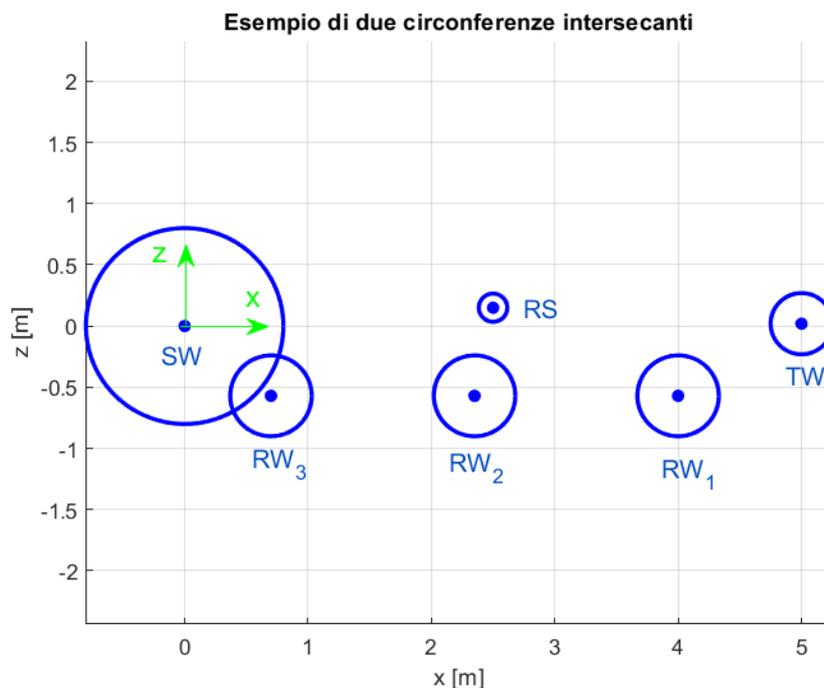


Figura 11.1 - Esempio di circonferenze intersecanti

Lo script fornirà come output:

- $x_{cingolo}$: vettore colonna con coordinate x di ogni punto del cingolo;
- $z_{cingolo}$: vettore colonna con coordinate z di ogni punto del cingolo;
- $\theta_{cingolo}$: vettore colonna con l'inclinazione di ogni segmento del cingolo tangente a due ruote consecutive;
- $l_{cingolo,arco}$: vettore colonna contenente la lunghezza di ogni arco del cingolo;
- $l_{cingolo,segmento}$: vettore colonna contenente la lunghezza di ogni segmento del cingolo;
- $l_{cingolo,tot}$: grandezza scalare che indica la lunghezza totale del cingolo.

11.1.1 Risoluzione sistema per ricavare rette tangenti

Una volta aver verificato che i dati di input siano corretti si passa alla realizzazione del cingolo, per ottenere una soluzione che si adatti ad ogni configurazione di ruote inserite si sono prima ricavate tutte le possibili tangenti ad una coppia generica di circonferenze di cui sono note le coordinate del centro e il loro raggio.

In questo esempio, la circonferenza 1 rappresenta la road wheel 3, mentre, la circonferenza 2 rappresenta la sprocket wheel.

Per ricavare tutte le possibili tangenti ad una coppia generica di circonferenze, si mette a sistema l'equazione di una retta generica in forma esplicita con l'equazione della circonferenza 1 in forma implicita:

$$\begin{cases} z = mx + q \\ (x - x_{C,1})^2 + (z - z_{C,1})^2 = r_1^2 \end{cases} \quad (11.1)$$

Dove:

- m : coefficiente angolare della retta generica;
- q : intercetta della retta generica;
- $x_{C,1}$: coordinata x del centro della circonferenza 1;
- $z_{C,1}$: coordinata z del centro della circonferenza 1.

Sostituendo la z della prima equazione nella seconda si ottiene la seguente equazione di secondo grado in x:

$$(1 + m^2)x^2 + (2qm - 2x_{C,1} - 2mz_{C,1})x + q^2 - 2qz_{C,1} + x_{C,1}^2 + z_{C,1}^2 - r_1^2 = 0 \quad (11.2)$$

Per imporre che la retta sia tangente alla circonferenza si impone il determinante

$\Delta = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - a * c = 0$ e si ottiene la seguente equazione nelle variabili m e q:

$$(r_1^2 - x_{C,1}^2)m^2 + (-2x_{C,1}q + 2x_{C,1}z_{C,1})m - q^2 + 2z_{C,1}q - z_{C,1}^2 + r_1^2 = 0 \quad (11.3)$$

Ora si ripete la stessa procedura con la circonferenza 2, si mette a sistema l'equazione della retta generica in forma esplicita con l'equazione della circonferenza della ruota 2 in forma implicita:

$$\begin{cases} z = mx + q \\ (x - x_{C,2})^2 + (z - z_{C,2})^2 = r_2^2 \end{cases} \quad (11.4)$$

Dove:

- m : coefficiente angolare della retta generica;
- q : intercetta della retta generica;
- $x_{C,2}$: coordinata x del centro della circonferenza 2;
- $z_{C,2}$: coordinata z del centro della circonferenza 2.

Sostituendo la z della prima equazione nella seconda equazione si ottiene la seguente equazione di secondo grado in x :

$$(1 + m^2)x^2 + (2qm - 2x_{C,2} - 2mz_{C,2})x + q^2 - 2qz_{C,2} + x_{C,2}^2 + z_{C,2}^2 - r_2^2 = 0 \quad (11.5)$$

Per imporre che la retta sia tangente alla circonferenza si impone il determinante

$$\Delta = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - a * c = 0 \text{ e si ottiene la seguente equazione nelle variabili } m \text{ e } q:$$

$$(r_2^2 - x_{C,2}^2)m^2 + (-2x_{C,2}q + 2x_{C,2}z_{C,2})m - q^2 + 2z_{C,2}q - z_{C,2}^2 + r_2^2 = 0 \quad (11.6)$$

Per ricavare i valori m e q della retta tangente sia alla circonferenza 1 che alla circonferenza 2 basta mettere a sistema l'equazione 11.3 e l'equazione 11.6, essendo un sistema composto da due equazioni di secondo grado in due incognite le possibili soluzioni sono 4 quindi ottenendo 4 coppie di valori m e q ci posso essere fino a 4 rette tangenti ad una coppia di circonferenze, esse vengono rappresentate in Figura 11.2.

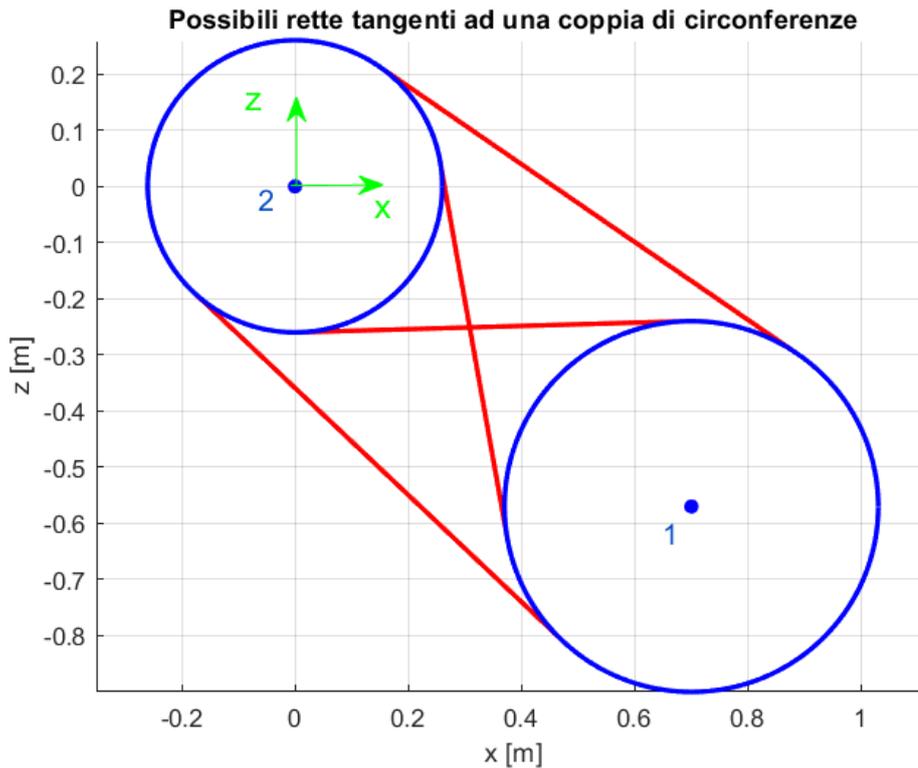


Figura 11.2 - Possibili rette tangenti ad una coppia di circonferenze

Il procedimento descritto è stato implementato in Matlab utilizzando variabili simboliche, un approccio che richiede un tempo di calcolo relativamente elevato. Risolvere un problema simbolico a ogni iterazione renderebbe il codice inefficiente per operazioni che richiedono molte iterazioni, come ad esempio la generazione di un'animazione. Per superare questo limite, il problema simbolico viene risolto prima di eseguire un eventuale ciclo *for* con N iterazioni, utilizzando il comando *solve*:

```
[sol_m_sym, sol_q_sym] = solve(eq1,eq2,m,q);
```

Dove:

- *eq1, eq2* sono le due equazioni che compongono il sistema da risolvere;
- *m, q* sono le incognite;
- *sol_m_sym* è un vettore che contiene le quattro possibili soluzioni di *m*;
- *sol_q_sym* è un vettore che contiene le quattro possibili soluzioni di *q*.

```
% Soluzione problema simbolico (retta tangente a due circonferenze)
syms m q x_c1 x_c2 z_c1 z_c2 r1 r2
eq1 = m^2*(r1^2-x_c1^2)+m*(-2*x_c1*q+2*x_c1*z_c1)-z_c1^2-q^2+2*q*z_c1+r1^2 == 0;
eq2 = m^2*(r2^2-x_c2^2)+m*(-2*x_c2*q+2*x_c2*z_c2)-z_c2^2-q^2+2*q*z_c2+r2^2 == 0;
[sol_m_sym,sol_q_sym] = solve(eq1,eq2,m,q);
```

Figura 11.3 - Risoluzione problema simbolico

Le variabili simboliche rappresentanti le coordinate dei centri e i relativi raggi di due circonferenze generiche vengono memorizzate nel vettore *old*:

```
old = [x_c1 x_c2 z_c1 z_c2 r1 r2];
```

Successivamente si entra all'interno del ciclo *for* e si memorizzano ad ogni iterazione le coordinate dei centri e i raggi delle due circonferenze di interesse all'interno del vettore *new*:

```
new = [Wheel_x(i) Wheel_x(i+1) Wheel_z(i) Wheel_z(i+1) Wheel_r(i) Wheel_r(i+1)];
```

Si utilizza il comando *subs*:

```
sol_m = subs(sol_m_sym,old,new);  
sol_q = subs(sol_q_sym,old,new);
```

Ad esempio, il comando *subs* restituisce in *sol_m* una copia di *sol_m_sym*, sostituendo tutte le occorrenze di *old* con *new*, e valutando successivamente il valore di *sol_m_sym*.

```
for i = 1:length(wheel_r)-1  
  
    new = [wheel_x(i) wheel_x(i+1) wheel_z(i) wheel_z(i+1) wheel_r(i) wheel_r(i+1)];  
    sol_m = subs(sol_m_sym,old,new);  
    sol_q = subs(sol_q_sym,old,new);  
  
end
```

Figura 11.4 - Sostituzione variabili

Questo metodo di sostituzione risulta significativamente più rapido rispetto alla risoluzione del problema simbolico a ogni iterazione, consentendo così di accelerare l'intero processo.

11.1.2 Realizzazione intero cingolo

Al fine di disegnare correttamente il cingolo bisogna escludere tutti i segmenti tangenti eccetto quello che rappresenta correttamente il cingolo.

In questo caso, si prendono come esempio la ruota road wheel 3 e la sprocket wheel.

I primi due segmenti tangenti si possono escludere imponendo la condizione che la tangente non debba intersecare il segmento congiungente i centri di due circonferenze consecutive, come mostrato in Figura 11.5.

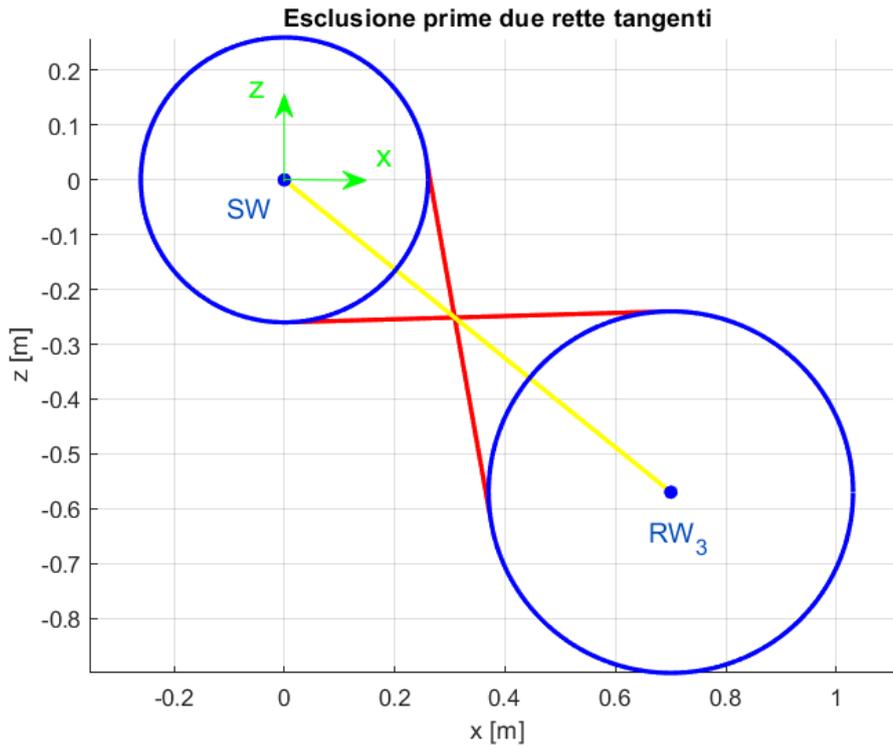


Figura 11.5 - Esclusione prime due rette tangenti

Dopo aver verificato la prima condizione rimane da escludere ancora una possibile tangente, quest'ultima tangente si può escludere prendendo 5 punti equi spaziatati lungo il segmento che va dal punto di tangenza con la circonferenza della road wheel 3 al punto di tangenza con la circonferenza della sprocket wheel e verificando che ognuno di essi non cada essere all'interno del poligono convesso costruito tramite i centri di tutte le ruote del cingolo. In Figura 11.6 in giallo è rappresentato il poligono convesso, mentre, in rosso è rappresentata la tangente da escludere.

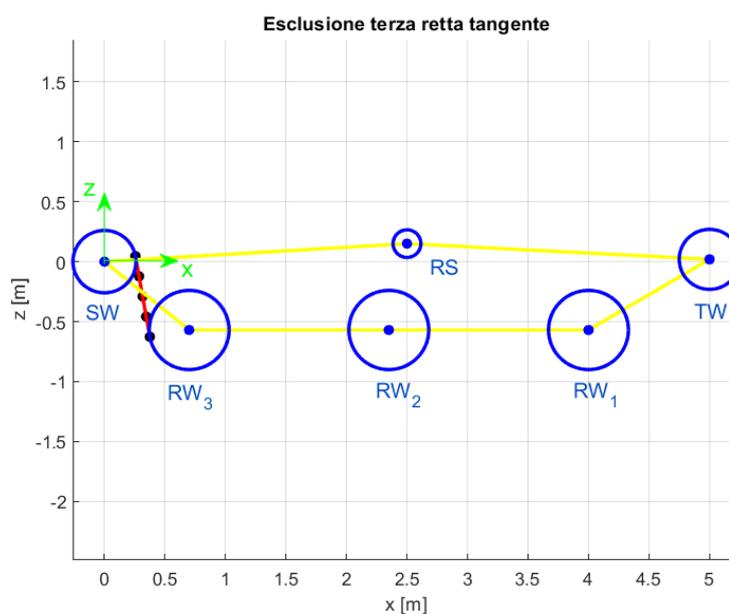


Figura 11.6 - Esclusione terza retta tangente

Alla fine di tutte le verifiche si ottiene il segmento tangente corretto mostrata in Figura 11.7.

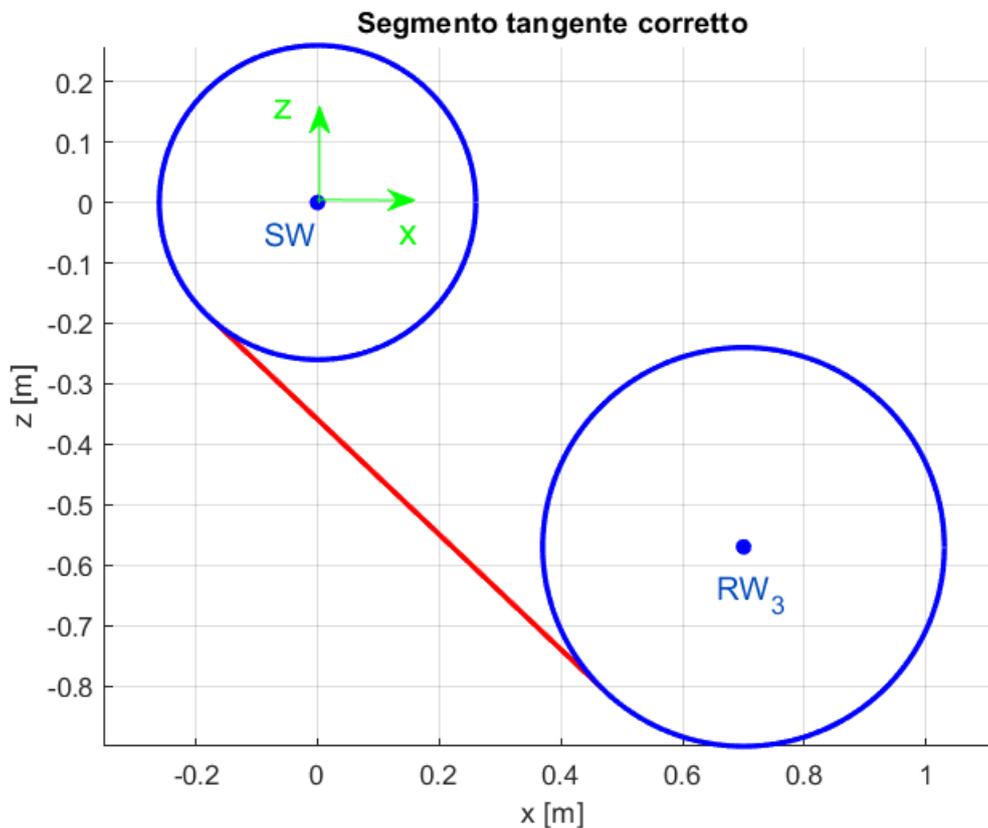


Figura 11.7 - Segmento tangente corretto

Successivamente bisogna aggiungere al segmento tangente anche la porzione di arco in cui la catena giace sulla circonferenza delle ruote, di seguito verrà presentato come esempio la porzione di arco della sprocket wheel.

La porzione di arco è percorsa in senso orario e partirà in corrispondenza del punto di tangenza denominato T_1 a cui corrisponde una posizione angolare θ_{T1} e arriverà fino al secondo punto di tangenza T_2 a cui corrisponde una posizione angolare θ_{T2} .

Per disegnare l'arco verranno presi cento punti equi spazati nell'intervallo tra θ_{T1} e θ_{T2} e le coordinate di ogni punto sono espresse da:

$$\begin{aligned} x_j &= r \cdot \cos \theta_j + x_c \\ z_j &= r \cdot \sin \theta_j + z_c \end{aligned} \tag{11.7}$$

Dove:

- x_j : coordinata x del j-esimo punto sull'arco;
- z_j : coordinata z del j-esimo punto sull'arco;
- θ_j : coordinata angolare del j-esimo punto sull'arco;
- r : raggio della ruota;
- x_c : coordinata x del centro della ruota;

- z_c : coordinata z del centro della ruota.

In Figura 11.8 si può osservare la porzione di arco percorsa dalla catena in colore rosso mentre la parte non percorsa è di colore blu, i puntini rossi invece indicano i punti di tangenza.

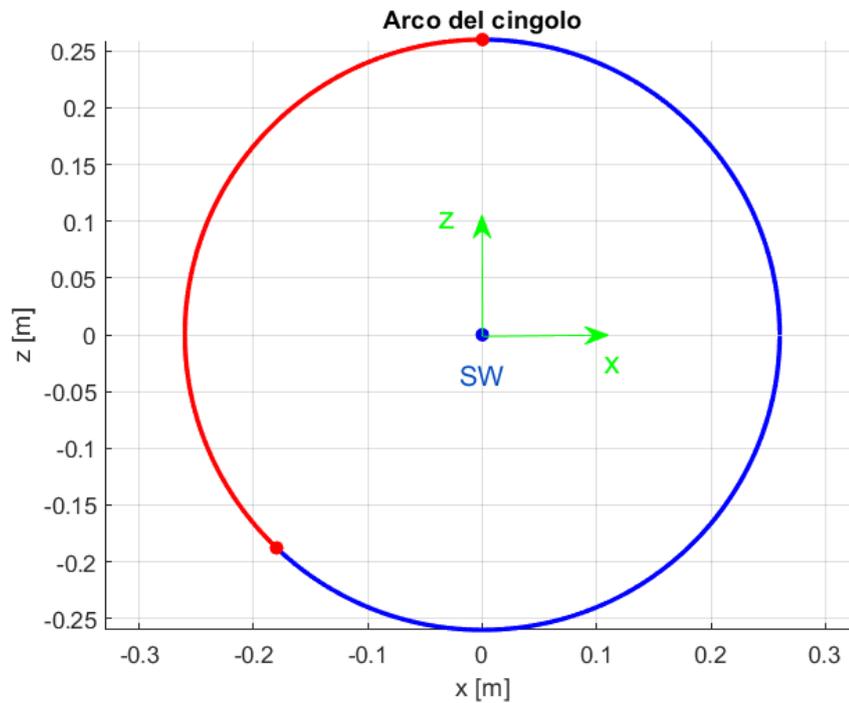


Figura 11.8 - Arco del cingolo

Ripetendo la procedura descritta per ogni coppia di ruote si ottengono tutti i segmenti tangenti, essi poi verranno uniti agli archi in cui la catena giace su ogni ruota ottenendo così la catena completa rappresentata in Figura 11.9.

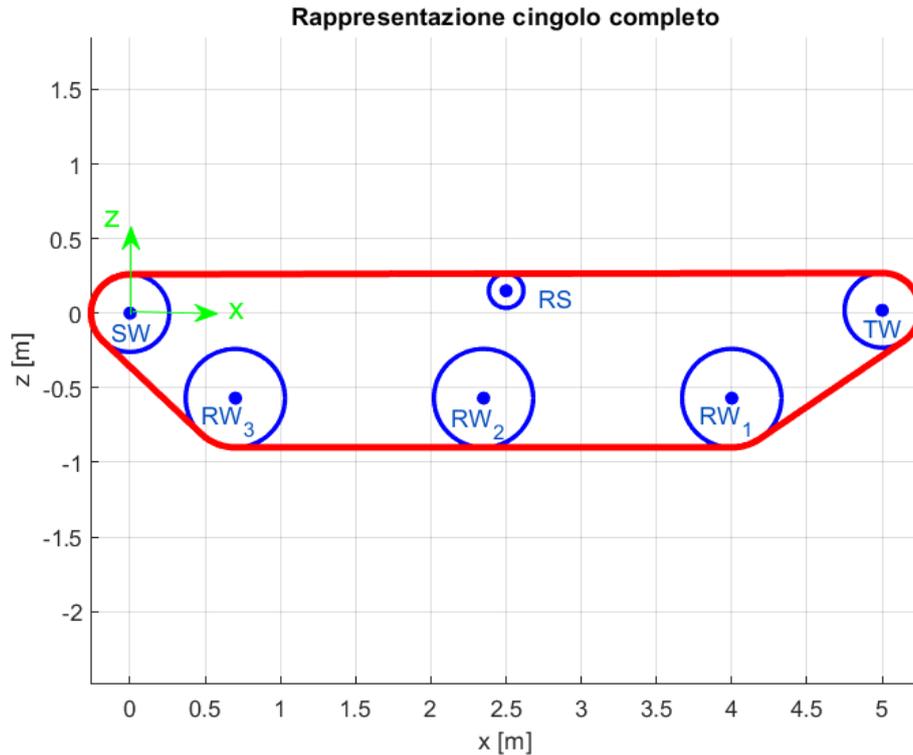


Figura 11.9 - Rappresentazione cingolo completo

11.1.3 Disegno dei nodi centrali dei pattini

Nel tool dedicato al calcolo della catena è stata implementata un'ulteriore funzione che, dato in input il numero di pattini del cingolo, consente di calcolare le coordinate x-z del nodo centrale di ciascun pattino e la relativa inclinazione. Sebbene questa funzione non sia stata direttamente utilizzata nel modello di veicolo cingolato sviluppato, essa rappresenta un elemento potenzialmente utile per futuri sviluppi, soprattutto qualora si volesse caratterizzare in modo più dettagliato il comportamento e la geometria del cingolo.

Si parte ricavando la distanza l_i tra il nodo centrale di un pattino e quello del suo successivo:

$$l_i = \frac{l_{tot}}{n} \quad (11.8)$$

Dove:

- l_{tot} [m]: lunghezza di tutto il cingolo;
- n : numero di pattini.

Una volta ricavata la distanza tra ogni nodo centrale si posizioneranno i nodi sul cingolo sotto forma di punti equidistanti, il primo punto verrà posizionato al centro dell'orma di contatto della ruota in contatto con il terreno posteriore (nelle coordinate $x_{p,1} = x_{C,RW,3}$,

$z_{p,1} = z_{C,RW,3}$) mentre i successivi verranno inseriti in senso orario partendo da quest'ultimo fino a completare tutta la catena.

Nell'inserimento dei pattini è stato applicato il vincolo che, considerando il terreno rigido, l'orientamento dei pattini a contatto con il terreno deve essere pari a 0 radianti.

La Figura 11.10 mostra la rappresentazione completa del cingolo, in cui sono stati posizionati tutti i nodi centrali dei 91 pattini che lo compongono.

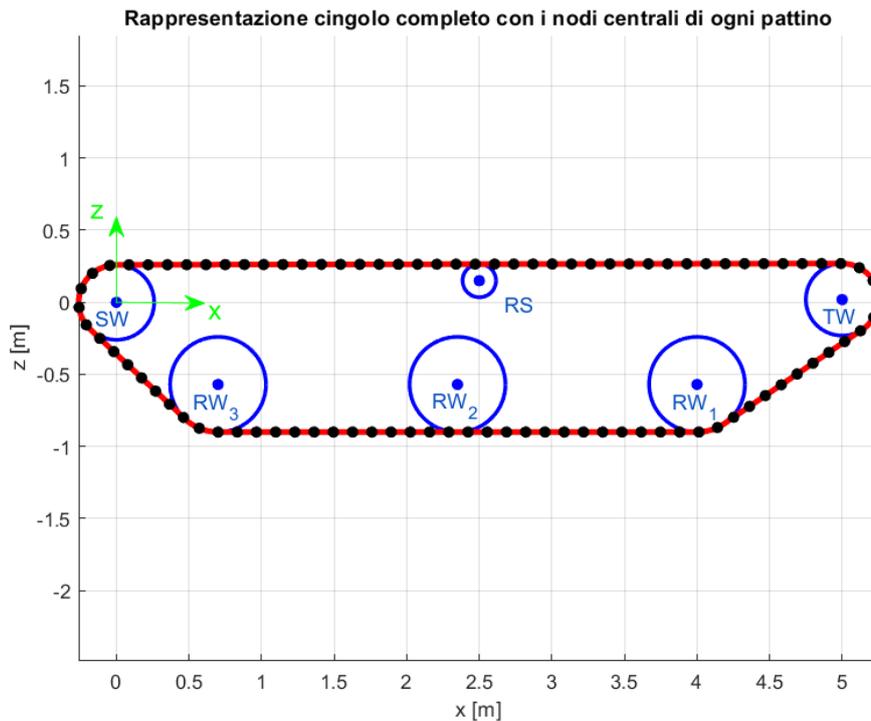


Figura 11.10 - Rappresentazione cingolo completo con i nodi centrali di ogni pattino

11.2 Realizzazione animazione

Sfruttando le potenzialità del tool calcolo catena descritto precedente è stato possibile realizzare un'animazione che rappresenti il movimento e il comportamento dinamico del modello di veicolo cingolato. Inoltre, include una rappresentazione dei carichi verticali e longitudinali applicati sulle ruote durante la simulazione.

11.2.1 Preparazione dei dati

Per riuscire a realizzare l'animazione il primo passo è salvare nel file *Variabili_animazione.mat* le variabili di interesse (posizione del baricentro, dei punti di attacco delle sospensioni, dei centri-ruota, e le forze longitudinali e verticali) ad ogni istante della simulazione.

Il passo temporale t_step_size controlla la frequenza con cui vengono estratti i dati temporali per l'animazione. Impostando $t_step_size = 1$ calcolerei i segmenti di cingolo ad ogni istante temporale della simulazione, però, questo comporterebbe un tempo di calcolo

elevato, dato che il tool calcolo catena dovrebbe svolgere una quantità enorme di iterazioni. Di conseguenza, un valore ottimale è un t_step_size che vale tra 50 e 100.

11.2.2 Disegno della geometria del sistema

Le posizioni e i raggi delle ruote sono raccolti negli array $Wheel_X$, $Wheel_Z$, $Wheel_R$, partendo dai quali è possibile ricavare i segmenti del cingolo tramite la funzione personalizzata $Disegno_cingolo_animazione$, che contiene il tool calcolo catena.

È stata definita anche una funzione $circr$ per tracciare i cerchi corrispondenti alle ruote, in base al raggio e alla posizione del centro-ruota.

11.2.3 Animazione del movimento

Il ciclo principale aggiorna le posizioni di tutti i componenti in base al tempo. All'interno del ciclo:

- Vengono calcolate le posizioni dei componenti principali (ruote, baricentro, telaio, cingolo e punti di attacco), in particolare, per simulare il movimento dinamico del telaio viene usata la funzione $RigidRotoTraslation$;
- Elementi grafici come $plot$ e $quiver$ vengono aggiornati dinamicamente.

Nella prima iterazione del ciclo, tutti gli oggetti grafici sono creati e memorizzati in una struttura $header$.

Nei passi successivi, le proprietà grafiche degli oggetti esistenti vengono aggiornate con nuovi dati tramite il comando set .

Il grafico viene scalato dinamicamente per garantire che il sistema sia sempre visibile, in particolare l'asse x segue il movimento del baricentro.

All'interno del grafico sono presenti anche delle etichette per rendere la chiaro il significato di ciascun componente. Le forze longitudinali e verticali sono rappresentate rispettivamente con frecce rosse e blu.

Di seguito è mostrato il codice per realizzare l'animazione, in particolare viene mostrato il codice relativo al modello con cinque road wheels.

```

%%% DISEGNO ANIMAZIONE %%%

close all
clear all
clc

% Carico variabili per realizzare animazione
load( 'Variabili_animazione.mat' );

% Scelta ogni quanto campionare un istante temporale nel vettore tempo
t_step_size = 100;

% Scalo il riferimento in modo da aver y = 0 in corrispondenza del terreno
h_SW = abs(z_c_RW)+r_RW;
h_CG_assoluto = h_CG + h_SW;

i = 1;

%%% Calcolo segmenti di cingolo tramite il tool calcolo catena
for count=1:t_step_size:size(t,1)

    Wheel_X = [x_RW5(count,1) x_SW(count,1) x_RS(count,1) x_TW(count,1) x_RW1(count,1)
x_RW2(count,1) x_RW3(count,1) x_RW4(count,1)];
    Wheel_Z = [(h_RW5(count,1)+r_RW) (z_SW(count,1)+h_CG_assoluto) (z_RS(count,1)+h_CG_assoluto)
(z_TW(count,1)+h_CG_assoluto) (h_RW1(count,1)+r_RW) (h_RW2(count,1)+r_RW) (h_RW3(count,1)+r_RW)
(h_RW4(count,1)+r_RW)];
    Wheel_R = [r_RW r_SW r_RS r_TW r_RW r_RW r_RW r_RW];

    [x_segmento,z_segmento] = Disegno_cingolo_animazione(Wheel_X,Wheel_Z,Wheel_R);

% Memorizzo le coordinate x e z dei segmenti ad ogni iterazioni in
% variabili dedicate
x_cin2(:,i) = x_segmento(:,1);
z_cin2(:,i) = z_segmento(:,1);
x_cin4(:,i) = x_segmento(:,2);
z_cin4(:,i) = z_segmento(:,2);
x_cin5(:,i) = x_segmento(:,3);
z_cin5(:,i) = z_segmento(:,3);
x_cin7(:,i) = x_segmento(:,4);
z_cin7(:,i) = z_segmento(:,4);
x_cin9(:,i) = x_segmento(:,5);
z_cin9(:,i) = z_segmento(:,5);
x_cin10(:,i) = x_segmento(:,6);
z_cin10(:,i) = z_segmento(:,6);
x_cin11(:,i) = x_segmento(:,7);
z_cin11(:,i) = z_segmento(:,7);
x_cin12(:,i) = x_segmento(:,8);
z_cin12(:,i) = z_segmento(:,8);

    i/(size(t,1)/t_step_size)*100
    i = i+1;

end

```

```

angle_circle = 0:0.01:2*pi;

% Funzione di un cerchio per angolo in radianti
circr = @(radius,rad_ang,p0) [radius*cos(rad_ang)+p0(1); radius*sin(rad_ang)+p0(2)]; %
Funzione di un cerchio per angolo in radianti

theta_SW = cumtrapz(t,omega_SW);
scaleFx = 1e-4;
scaleFz = 1e-5;

% Scelta dimensioni del telaio
chassis = [
    1 -1-2.25 0 0.75
    2 -1-2.25 0 -0.75
    3 5.75-2.25 0 -0.75
    4 5.75-2.25 0 0.75
];

h_SW = abs(z_c_RW)+r_RW;
h_CG_assoluto = h_CG + h_SW;

%% Disegno animazione

figure(1)
hold on;
set(gcf,"Position",[0 0 3*560 420])
xlabel('X [m]')
axis equal;
ylabel('Z [m]')
ylim([-0.1 ceil(max(z_CG)+h_CG_assoluto+0.5)])
plot(x,h,'-k','linewidth',2,'HandleVisibility','off')

j = 1;
for count = 1:t_step_size:size(t,1)

    % Mostro a schermo il tempo durante la simulazione
    title(['Tempo = ',num2str(t(count)),'/ 10 s'])

    % Descrizione del movimento del telaio
    chassis_Rot = RigidRotoTranslation(chassis,[0 0 0],0,theta(count,1),0);
    X_chassis_Rot = chassis_Rot(:,2)+x_CG(count,1);
    Z_chassis_Rot = chassis_Rot(:,4)+z_CG(count,1)+h_CG_assoluto;

    % Calcolo circonferenza ruote
    circ1 = circr(r_RW,angle_circle,[x_RW1(count,1) h_RW1(count,1)+r_RW]).';
    circ2 = circr(r_RW,angle_circle,[x_RW2(count,1) h_RW2(count,1)+r_RW]).';
    circ3 = circr(r_RW,angle_circle,[x_RW3(count,1) h_RW3(count,1)+r_RW]).';
    circ4 = circr(r_RW,angle_circle,[x_RW4(count,1) h_RW4(count,1)+r_RW]).';
    circ5 = circr(r_RW,angle_circle,[x_RW5(count,1) h_RW5(count,1)+r_RW]).';
    circ_SW = circr(r_SW,angle_circle,[x_SW(count,1) z_SW(count,1)+h_CG_assoluto]).';
    circ_TW = circr(r_TW,angle_circle,[x_TW(count,1) z_TW(count,1)+h_CG_assoluto]).';
    circ_RS = circr(r_RS,angle_circle,[x_RS(count,1) z_RS(count,1)+h_CG_assoluto]).';

    if count==1

```

```

if count==1

% Disegno centri-ruota, punti di attacco, telaio e baricentro
header.chassis = patch(X_chassis_Rot,Z_chassis_Rot, 'k', 'FaceAlpha',0.2, 'EdgeColor','none');
header.CG = plot(x_CG(count,1),z_CG(count,1)+h_CG_assoluto,'ro','MarkerFaceColor','r');
header.RW1 = plot(x_RW1(count,1),h_RW1(count,1)+r_RW,'bo','MarkerFaceColor','b');
header.RW2 = plot(x_RW2(count,1),h_RW2(count,1)+r_RW,'bo','MarkerFaceColor','b');
header.RW3 = plot(x_RW3(count,1),h_RW3(count,1)+r_RW,'bo','MarkerFaceColor','b');
header.RW4 = plot(x_RW4(count,1),h_RW4(count,1)+r_RW,'bo','MarkerFaceColor','b');
header.RW5 = plot(x_RW5(count,1),h_RW5(count,1)+r_RW,'bo','MarkerFaceColor','b');
header.S1 = plot(x_1(count,1),z_1(count,1)+h_CG_assoluto,'bo','MarkerFaceColor','b');
header.S2 = plot(x_2(count,1),z_2(count,1)+h_CG_assoluto,'bo','MarkerFaceColor','b');
header.S3 = plot(x_3(count,1),z_3(count,1)+h_CG_assoluto,'bo','MarkerFaceColor','b');
header.S4 = plot(x_4(count,1),z_4(count,1)+h_CG_assoluto,'bo','MarkerFaceColor','b');
header.S5 = plot(x_5(count,1),z_5(count,1)+h_CG_assoluto,'bo','MarkerFaceColor','b');
header.SW = plot(x_SW(count,1),z_SW(count,1)+h_CG_assoluto,'bo','MarkerFaceColor','b');
header.TW = plot(x_TW(count,1),z_TW(count,1)+h_CG_assoluto,'bo','MarkerFaceColor','b');
header.RS = plot(x_RS(count,1),z_RS(count,1)+h_CG_assoluto,'bo','MarkerFaceColor','b');

% Disegno etichette
header.CG_text = text(x_CG(count,1),z_CG(count,1)+h_CG_assoluto,' CG');
header.RW1_text = text(x_RW1(count,1),h_RW1(count,1)+r_RW,' RW1');
header.RW2_text = text(x_RW2(count,1),h_RW2(count,1)+r_RW,' RW2');
header.RW3_text = text(x_RW3(count,1),h_RW3(count,1)+r_RW,' RW3');
header.RW4_text = text(x_RW4(count,1),h_RW4(count,1)+r_RW,' RW4');
header.RW5_text = text(x_RW5(count,1),h_RW5(count,1)+r_RW,' RW5');
header.S1_text = text(x_1(count,1),z_1(count,1)+h_CG_assoluto,' 1');
header.S2_text = text(x_2(count,1),z_2(count,1)+h_CG_assoluto,' 2');
header.S3_text = text(x_3(count,1),z_3(count,1)+h_CG_assoluto,' 3');
header.S4_text = text(x_4(count,1),z_4(count,1)+h_CG_assoluto,' 4');
header.S5_text = text(x_5(count,1),z_5(count,1)+h_CG_assoluto,' 5');
header.SW_text = text(x_SW(count,1),z_SW(count,1)+h_CG_assoluto,' SW');
header.TW_text = text(x_TW(count,1),z_TW(count,1)+h_CG_assoluto,' TW');
header.RS_text = text(x_RS(count,1),z_RS(count,1)+h_CG_assoluto,' RS');

% Disegno le frecce rappresentanti le forze longitudinali e
% verticali
header.RW1_Fx = quiver(x_RW1(count,1),h_RW1(count,1),Fx_RW1(count,1),0,scaleFx,'Color',
'r','LineWidth',2);
header.RW1_Fz = quiver(x_RW1(count,1),h_RW1(count,1),0,Fz_RW1(count,1),scaleFz,'Color',
'b','LineWidth',2);
header.RW2_Fx = quiver(x_RW2(count,1),h_RW2(count,1),Fx_RW2(count,1),0,scaleFx,'Color',
'r','LineWidth',2);
header.RW2_Fz = quiver(x_RW2(count,1),h_RW2(count,1),0,Fz_RW2(count,1),scaleFz,'Color',
'b','LineWidth',2);
header.RW3_Fx = quiver(x_RW3(count,1),h_RW3(count,1),Fx_RW3(count,1),0,scaleFx,'Color',
'r','LineWidth',2);
header.RW3_Fz = quiver(x_RW3(count,1),h_RW3(count,1),0,Fz_RW3(count,1),scaleFz,'Color',
'b','LineWidth',2);
header.RW4_Fx = quiver(x_RW4(count,1),h_RW4(count,1),Fx_RW4(count,1),0,scaleFx,'Color',
'r','LineWidth',2);
header.RW4_Fz = quiver(x_RW4(count,1),h_RW4(count,1),0,Fz_RW4(count,1),scaleFz,'Color',
'b','LineWidth',2);
header.RW5_Fx = quiver(x_RW5(count,1),h_RW5(count,1),Fx_RW5(count,1),0,scaleFx,'Color',
'r','LineWidth',2);
header.RW5_Fz = quiver(x_RW5(count,1),h_RW5(count,1),0,Fz_RW5(count,1),scaleFz,'Color',
'b','LineWidth',2);

% Disegno segmenti cingolo
header.cin2 = plot(x_cin2(:,j),z_cin2(:,j),'k','LineWidth',1);
header.cin4 = plot(x_cin4(:,j),z_cin4(:,j),'k','LineWidth',1);

```

```

% Disegno segmenti cingolo
header.cin2 = plot(x_cin2(:,j),z_cin2(:,j), 'k', 'LineWidth',1);
header.cin4 = plot(x_cin4(:,j),z_cin4(:,j), 'k', 'LineWidth',1);
header.cin5 = plot(x_cin5(:,j),z_cin5(:,j), 'k', 'LineWidth',1);
header.cin7 = plot(x_cin7(:,j),z_cin7(:,j), 'k', 'LineWidth',1);
header.cin9 = plot(x_cin9(:,j),z_cin9(:,j), 'k', 'LineWidth',1);
header.cin10 = plot(x_cin10(:,j),z_cin10(:,j), 'k', 'LineWidth',1);
header.cin11 = plot(x_cin11(:,j),z_cin11(:,j), 'k', 'LineWidth',1);
header.cin12 = plot(x_cin12(:,j),z_cin12(:,j), 'k', 'LineWidth',1);

% Disegno circonferenze ruote
header.circ1 = plot(circ1(:,1),circ1(:,2), 'k', 'LineWidth',1);
header.circ2 = plot(circ2(:,1),circ2(:,2), 'k', 'LineWidth',1);
header.circ3 = plot(circ3(:,1),circ3(:,2), 'k', 'LineWidth',1);
header.circ4 = plot(circ4(:,1),circ4(:,2), 'k', 'LineWidth',1);
header.circ5 = plot(circ5(:,1),circ5(:,2), 'k', 'LineWidth',1);
header.circ_SW = plot(circ_SW(:,1),circ_SW(:,2), 'k', 'LineWidth',1);
header.circ_TW = plot(circ_TW(:,1),circ_TW(:,2), 'k', 'LineWidth',1);
header.circ_RS = plot(circ_RS(:,1),circ_RS(:,2), 'k', 'LineWidth',1);
header.speed_SW = plot(x_SW(count,1)+[0 r_SW*sin(theta_SW(count,1))], ...
    z_SW(count,1)+h_CG_assoluto+[0 r_SW*cos(theta_SW(count,1))], ...
    'g', 'LineWidth',2);

else

%% Aggiorno l'animazione con i nuovi valori

% Disegno centri-ruota, punti di attacco, telaio e baricentro
% (aggiornati)
set(header.chassis, 'Xdata',X_chassis_Rot,'Ydata',Z_chassis_Rot);
set(header.CG, 'Xdata',x_CG(count,1), 'Ydata',z_CG(count,1)+h_CG_assoluto);
set(header.RW1, 'Xdata',x_RW1(count,1), 'Ydata',h_RW1(count,1)+r_RW);
set(header.RW2, 'Xdata',x_RW2(count,1), 'Ydata',h_RW2(count,1)+r_RW);
set(header.RW3, 'Xdata',x_RW3(count,1), 'Ydata',h_RW3(count,1)+r_RW);
set(header.RW4, 'Xdata',x_RW4(count,1), 'Ydata',h_RW4(count,1)+r_RW);
set(header.RW5, 'Xdata',x_RW5(count,1), 'Ydata',h_RW5(count,1)+r_RW);
set(header.S1, 'Xdata',x_1(count,1), 'Ydata',z_1(count,1)+h_CG_assoluto);
set(header.S2, 'Xdata',x_2(count,1), 'Ydata',z_2(count,1)+h_CG_assoluto);
set(header.S3, 'Xdata',x_3(count,1), 'Ydata',z_3(count,1)+h_CG_assoluto);
set(header.S4, 'Xdata',x_4(count,1), 'Ydata',z_4(count,1)+h_CG_assoluto);
set(header.S5, 'Xdata',x_5(count,1), 'Ydata',z_5(count,1)+h_CG_assoluto);
set(header.SW, 'Xdata',x_SW(count,1), 'Ydata',z_SW(count,1)+h_CG_assoluto);
set(header.TW, 'Xdata',x_TW(count,1), 'Ydata',z_TW(count,1)+h_CG_assoluto);
set(header.RS, 'Xdata',x_RS(count,1), 'Ydata',z_RS(count,1)+h_CG_assoluto);

% Disegno etichette (aggiornate)
set(header.CG_text, 'position',[x_CG(count,1),z_CG(count,1)+h_CG_assoluto]);
set(header.RW1_text, 'position',[x_RW1(count,1),h_RW1(count,1)+r_RW]);
set(header.RW2_text, 'position',[x_RW2(count,1),h_RW2(count,1)+r_RW]);
set(header.RW3_text, 'position',[x_RW3(count,1),h_RW3(count,1)+r_RW]);
set(header.RW4_text, 'position',[x_RW4(count,1),h_RW4(count,1)+r_RW]);
set(header.RW5_text, 'position',[x_RW5(count,1),h_RW5(count,1)+r_RW]);
set(header.S1_text, 'position',[x_1(count,1),z_1(count,1)+h_CG_assoluto]);
set(header.S2_text, 'position',[x_2(count,1),z_2(count,1)+h_CG_assoluto]);
set(header.S3_text, 'position',[x_3(count,1),z_3(count,1)+h_CG_assoluto]);
set(header.S4_text, 'position',[x_4(count,1),z_4(count,1)+h_CG_assoluto]);
set(header.S5_text, 'position',[x_5(count,1),z_5(count,1)+h_CG_assoluto]);
set(header.SW_text, 'position',[x_SW(count,1),z_SW(count,1)+h_CG_assoluto]);
set(header.TW_text, 'position',[x_TW(count,1),z_TW(count,1)+h_CG_assoluto]);
set(header.RS_text, 'position',[x_RS(count,1),z_RS(count,1)+h_CG_assoluto]);

% Disegno le frecce rappresentanti le forze longitudinali e
% verticali (aggiornate)

set(header.RW1_Fx, 'Xdata',x_RW1(count,1), 'Ydata',h_RW1(count,1), 'udata',Fx_RW1(count,1), 'vdata', 0);
set(header.RW1_Fz, 'Xdata',x_RW1(count,1), 'Ydata',h_RW1(count,1), 'udata',0, 'vdata',
Fx_RW1(count,1));

```

```

% Disegno le frecce rappresentanti le forze longitudinali e
% verticali (aggiornate)

set(header.RW1_Fx, 'Xdata', x_RW1(count,1), 'Ydata', h_RW1(count,1), 'udata', Fx_RW1(count,1), 'vdata', 0);
set(header.RW1_Fz, 'Xdata', x_RW1(count,1), 'Ydata', h_RW1(count,1), 'udata', 0, 'vdata', Fz_RW1(count,1));

set(header.RW2_Fx, 'Xdata', x_RW2(count,1), 'Ydata', h_RW2(count,1), 'udata', Fx_RW2(count,1), 'vdata', 0);
set(header.RW2_Fz, 'Xdata', x_RW2(count,1), 'Ydata', h_RW2(count,1), 'udata', 0, 'vdata', Fz_RW2(count,1));

set(header.RW3_Fx, 'Xdata', x_RW3(count,1), 'Ydata', h_RW3(count,1), 'udata', Fx_RW3(count,1), 'vdata', 0);
set(header.RW3_Fz, 'Xdata', x_RW3(count,1), 'Ydata', h_RW3(count,1), 'udata', 0, 'vdata', Fz_RW3(count,1));

set(header.RW4_Fx, 'Xdata', x_RW4(count,1), 'Ydata', h_RW4(count,1), 'udata', Fx_RW4(count,1), 'vdata', 0);
set(header.RW4_Fz, 'Xdata', x_RW4(count,1), 'Ydata', h_RW4(count,1), 'udata', 0, 'vdata', Fz_RW4(count,1));

set(header.RW5_Fx, 'Xdata', x_RW5(count,1), 'Ydata', h_RW5(count,1), 'udata', Fx_RW5(count,1), 'vdata', 0);
set(header.RW5_Fz, 'Xdata', x_RW5(count,1), 'Ydata', h_RW5(count,1), 'udata', 0, 'vdata', Fz_RW5(count,1));

% Disegno segmenti cingolo (aggiornati)
set(header.cin2, 'Xdata', x_cin2(:,j), 'Ydata', z_cin2(:,j));
set(header.cin4, 'Xdata', x_cin4(:,j), 'Ydata', z_cin4(:,j));
set(header.cin5, 'Xdata', x_cin5(:,j), 'Ydata', z_cin5(:,j));
set(header.cin7, 'Xdata', x_cin7(:,j), 'Ydata', z_cin7(:,j));
set(header.cin9, 'Xdata', x_cin9(:,j), 'Ydata', z_cin9(:,j));
set(header.cin10, 'Xdata', x_cin10(:,j), 'Ydata', z_cin10(:,j));
set(header.cin11, 'Xdata', x_cin11(:,j), 'Ydata', z_cin11(:,j));
set(header.cin12, 'Xdata', x_cin12(:,j), 'Ydata', z_cin12(:,j));

% Disegno circonferenze ruote (aggiornate)
set(header.circ1, 'Xdata', circ1(:,1), 'Ydata', circ1(:,2));
set(header.circ2, 'Xdata', circ2(:,1), 'Ydata', circ2(:,2));
set(header.circ3, 'Xdata', circ3(:,1), 'Ydata', circ3(:,2));
set(header.circ4, 'Xdata', circ4(:,1), 'Ydata', circ4(:,2));
set(header.circ5, 'Xdata', circ5(:,1), 'Ydata', circ5(:,2));
set(header.circ_SW, 'Xdata', circ_SW(:,1), 'Ydata', circ_SW(:,2));
set(header.circ_TW, 'Xdata', circ_TW(:,1), 'Ydata', circ_TW(:,2));
set(header.circ_RS, 'Xdata', circ_RS(:,1), 'Ydata', circ_RS(:,2));

set(header.speed_SW, 'Xdata', x_SW(count,1)+[0 r_SW*sin(theta_SW(count,1))], ...
'Ydata', z_SW(count,1)+h_CG_assoluto+[0 r_SW*cos(theta_SW(count,1))]);

end
xlim(x_CG(count,1)+5*[-1 1])
drawnow

j = j + 1;
pause(0.01)
end

```

11.3 Descrizione funzione analisi statica

Dato che nell'analisi dinamica alcuni valori di inizializzazione vengono presi dall'analisi statica e la componente coulombiana della coppia attrito al perno viene considerata costante e valutata a partire dalla forza normale alla superficie del caso statico è necessario lanciare l'analisi statica prima di ricavare le matrici del problema dinamico. Al fine di automatizzare il processo verrà utilizzata la seguente funzione nello script Matlab:

$$(Uscite\ funzione) = f_analisi_statica(Ingnessi\ funzione)$$

Di seguito, come esempio, sono elencati gli ingressi e le uscite della funzione del caso di veicolo cingolato con tre road wheels.

Gli ingressi della funzione sono:

- $x_{C,RS}, x_{C,TW}, x_{C,RW,1}, x_{C,RW,2}, x_{C,RW,3}, d_{CG}, \alpha, \beta, z_{C,TW}, z_{C,RW}, h_{CG}, q, k_1, k_2, k_3, r_{RW}, r_{SW}, r_{TW}, m_s, m_{SW}, m_{TW}, m_{RW}, m_{cin,SW}, m_{cin,TW}, V_{RS}, K_{RS}, m_{cin,RS}, F_{st}$.

Uscite funzione:

- $T_{st}, V_{TW,st}, V_{SW,st}, O_{SW,st}, O_{RW,1,st}, O_{RW,3,st}, F_{z,RW,1,st}, F_{z,RW,2,st}, F_{z,RW,3,st}, z_{CG}, \tan \theta_{st}$

12. Bibliografia

- [1] C. Ferraresi, T. Raparelli, “Meccanica Applicata”, CLUT.
- [2] D. Meneghel, “Regolatori PID: Tecniche di sintesi e problematiche implementative”, 2010.
- [3] E. Galvagno, E. Rondinelli, M. Velardocchia, (2012) “Electro-mechanical transmission modelling for series-hybrid tracked tanks”, *Int. J. Heavy Vehicle Systems*, Vol. 19, No. 3, pp.256–280.
- [4] F. Di Legge, “Modellazione e controllo direzionale di un veicolo cingolato bimodulare”, Politecnico di Torino, 2020.
- [5] J. Wong, “Dynamics of Tracked Vehicles”, *International Journal of Vehicle Mechanics and Mobility*, pp. 197-219, 2007.
- [6] P. Edwin, K. Shankar, K. Kannan, “Soft soil track interaction modeling in single rigid body tracked vehicle models”, *Journal of Terramechanics*.
- [7] S. Banerjee, V. Balamurugan, R. Krishnakumar, “Ride Comfort Analysis of Math Ride Dynamics Model of Full Tracked Vehicle with Trailing Arm Suspension”, *Procedia Engineering* (2016).
- [8] S. Tang, S. Yuan, J. Hu, X. Li, J. Zhou, J. Guo, “Modeling of steady-state performance of skid-steering for high-speed tracked vehicles”, *Journal of Terramechanics* (2017).