

POLITECNICO DI TORINO



**Politecnico  
di Torino**

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

Tesi di Laurea

**Analisi del danneggiamento  
progressivo di strutture a guscio  
rinforzato mediante modelli  
Layer-Wise**

**Relatori**

Prof. Marco PETROLO

Ing. Salvatore SAPUTO

Dott.ssa Elisa TORTORELLI

**Candidato**

Riccardo ROGINA s306126

ANNO ACCADEMICO 2023-2024

## Sommario

Il presente lavoro di tesi si concentra sulla validazione di modelli numerici bidimensionali (2D) basati sulla Carrera Unified Formulation (CUF), un approccio avanzato nel campo della modellazione strutturale, finalizzato allo studio del comportamento meccanico e del danneggiamento progressivo di strutture laminate in materiale composito. Questi materiali, ampiamente utilizzati in settori come l'aerospaziale e l'automotive, presentano caratteristiche meccaniche eccezionali ma richiedono modelli accurati per prevederne il comportamento sotto diverse condizioni operative. L'analisi si è concentrata su piastre danneggiate, specificamente caratterizzate dalla presenza di fori o intagli centrali, che rappresentano difetti geometrici i quali comprometterebbero l'integrità strutturale. Queste strutture sono state studiate sotto l'applicazione di carichi sia statici che dinamici, con l'obiettivo di comprendere a fondo i fenomeni di danneggiamento e i meccanismi di propagazione del danno.

La ricerca si articola in tre sezioni principali, ognuna delle quali affronta aspetti fondamentali e complementari. La prima sezione è dedicata a una revisione approfondita delle principali teorie strutturali disponibili per i materiali compositi, con particolare enfasi sugli approcci Layer-Wise ed Equivalent Single Layer. L'approccio Layer-Wise, adottato nell'ambito della Carrera Unified Formulation, permette di modellare con precisione le distribuzioni di tensioni e deformazioni all'interno dei singoli strati del laminato. Inoltre, sono stati esaminati i principali criteri di failure, come il modello Hashin 3D e Puck, scelto come alternativa al CODAM2.

La seconda sezione approfondisce la teoria della Carrera Unified Formulation, descrivendo le sue implementazioni in modelli numerici agli elementi finiti specifici per travi e piastre. In particolare, vengono analizzati i concetti chiave su cui si basa la CUF, come le espansioni polinomiali di Lagrange e il concetto di Fundamental Nucleus, che consente una formulazione unificata ed efficiente dei modelli. Questa parte del lavoro esplora anche le tecniche numeriche necessarie per implementare e risolvere le equazioni dei modelli: tra cui il metodo di Newton-Raphson, utilizzato per le analisi non lineari implicite, e il metodo delle differenze centrali, impiegato nelle simulazioni dinamiche esplicite.

Infine, la terza sezione presenta i casi studio, in cui i modelli sviluppati sono stati applicati a piastre laminate con difetti geometrici. Queste sono state analizzate attraverso simulazioni numeriche condotte utilizzando il software Mul2 e validate mediante confronto con risultati disponibili in letteratura e con simulazioni effettuate tramite Abaqus.

I casi studio includono analisi su carichi statici lineari e dinamici non lineari, con l'obiettivo di verificare la capacità dei modelli di prevedere correttamente il comportamento delle strutture in condizioni realistiche.

## Sommario

(english version)

This thesis focuses on the validation of two-dimensional (2D) numerical models based on the Carrera Unified Formulation (CUF), an advanced approach in structural modeling, aimed at studying the mechanical behavior and progressive damage of laminated composite structures. These materials, widely used in sectors such as aerospace and automotive, exhibit exceptional mechanical properties but require accurate models to predict their behavior under various operating conditions.

The analysis focused on damaged plates, specifically characterized by the presence of central holes or notches, which represent geometric defects compromising structural integrity. These structures were studied under the application of both static and dynamic loads, with the goal of gaining a deep understanding of damage phenomena and damage propagation mechanisms.

The research is divided into three main sections, each addressing fundamental and complementary aspects. The first section is dedicated to a comprehensive review of the main structural theories available for composite materials, with particular emphasis on the Layer-Wise and Equivalent Single Layer approaches. The Layer-Wise approach, adopted within the Carrera Unified Formulation framework, allows for the precise modeling of stress and strain distributions within individual laminate layers. Moreover, the primary failure criteria, such as the Hashin 3D and Puck models, were examined as alternatives to the CODAM2 criterion.

The second section delves into the theory of the Carrera Unified Formulation, describing its implementation in finite element models specifically tailored for beams and plates. In particular, key concepts underpinning CUF are analyzed, such as Lagrange polynomial expansions and the concept of the Fundamental Nucleus, which enables a unified and efficient model formulation. This part of the work also explores the numerical techniques required to implement and solve the model equations, including the Newton-Raphson method, used for implicit nonlinear analyses, and the central difference method, employed for explicit dynamic simulations.

Finally, the third section presents case studies in which the developed models were applied to laminated plates with geometric defects. These were analyzed through numerical simulations performed using the Mul2 software and validated by comparing the results with those available in the literature and with simulations conducted using Abaqus.

The case studies include analyses under linear static and nonlinear dynamic loads, aiming to verify the ability of the models to accurately predict the behavior of structures under realistic conditions.

# Indice

<b>Elenco delle figure</b>	4
<b>Elenco delle tabelle</b>	7
<b>1 INTRODUZIONE</b>	9
1.1 I compositi . . . . .	10
1.1.1 Matrice . . . . .	11
1.1.2 Fibre . . . . .	11
1.1.3 Vantaggi, svantaggi e diffusione . . . . .	13
1.2 Criteri di progetto . . . . .	15
1.2.1 Safe life . . . . .	15
1.2.2 Fail safe . . . . .	15
1.2.3 Damage Tolerance . . . . .	16
1.3 Modelli per lo studio dei laminati . . . . .	19
1.4 Tipologie di danneggiamento dei Laminati compositi . . . . .	20
1.4.1 La delaminazione . . . . .	20
1.5 Scopo della tesi . . . . .	24
<b>2 TEORIE E METODOLOGIE DI ANALISI DEL DANNEGGIA- MENTO</b>	25
2.1 I materiali ortotropi . . . . .	26
2.1.1 Determinazione delle caratteristiche meccaniche . . . . .	28
2.2 Teorie per lo studio dei laminati . . . . .	31
2.2.1 Equivalent single layer . . . . .	31
2.2.2 Layer Wise . . . . .	32
2.2.3 Zig-zag . . . . .	33
2.2.4 Formulazioni . . . . .	33
2.3 Criteri di Failure . . . . .	35
2.3.1 Massima tensione e massima deformazione . . . . .	36
2.3.2 Polinomiali . . . . .	36
2.3.3 Hashin . . . . .	37
2.3.4 Puck . . . . .	39
2.4 Meccanismi di danneggiamento . . . . .	41
2.4.1 First Ply Failure (FPF) . . . . .	42
2.4.2 Material Property Degradation Method (MPDM) . . . . .	43

2.4.3	Continuum Damage Mechanics (CDM)	45
<b>3</b>	<b>FORMULAZIONE UNIFICATA DI CARRERA (CUF)</b>	<b>49</b>
3.1	Definizione della teoria	50
3.1.1	Espansioni di Taylor (TE)	51
3.1.2	Espansioni di Lagrange (LE)	52
3.1.3	Modello trave	52
3.1.4	Modello piastra	56
3.1.5	La matrice di rigidezza, delle masse e il vettore dei carichi	58
3.1.6	Equazione di governo	60
3.2	Tipologie di analisi	60
3.2.1	Problemi statici o quasi-statici	61
3.2.2	Problemi dinamici	63
3.3	Modello di danneggiamento	66
3.3.1	CODAM2	66
3.3.2	Hashin + Puck	68
<b>4</b>	<b>SIMULAZIONI NUMERICHE</b>	<b>75</b>
4.1	Analisi statiche e lineari	76
4.1.1	CASI 1D	76
4.1.2	CASI 2D	91
4.2	Analisi dinamiche e non lineari	98
4.2.1	Analisi del singolo elemento a trazione	99
4.2.2	Analisi del singolo elemento a compressione	101
4.2.3	Prova a trazione su provino con intaglio centrale	105
4.2.4	Prova a compressione su provino con foro centrale	108
<b>5</b>	<b>CONCLUSIONI</b>	<b>113</b>
5.1	Riassunto del Lavoro di Tesi	114
5.2	Conclusioni	114
5.3	Prospettive Future	115
	<b>Bibliografia</b>	<b>119</b>

# Elenco delle figure

1.1	Materiale bicomponente [1] . . . . .	10
1.2	curva sforzo-deformazione per differenti tipi di fibre [2] . . . . .	12
1.3	Percentuale in peso dei materiali compositi in campo aeronautico nel tempo [3] . . . . .	14
1.4	Slow crack growth concept - Resistenza residua [4] . . . . .	16
1.5	Slow crack growth concept - Resistenza strutturale [5] . . . . .	16
1.6	Resistenza residua in funzione del tempo trascorso [6] . . . . .	17
1.7	Diagramma di accrescimento del difetto [6] . . . . .	18
1.8	Curva del difetto equivalente [6] . . . . .	19
1.9	Schema delle tre modalità di apertura possibili del composito laminato [7] . . . . .	21
1.10	Effetti di impatti a differenti energie [6] . . . . .	22
1.11	Test di impatto e modalità di danneggiamento [6] . . . . .	23
2.1	sistema di riferimento globale $\langle x y z \rangle$ e locale $\langle 1 2 3 \rangle$ [8] . . . . .	26
2.2	Proprietà meccaniche al variare della frazione in volume di fibra [6] . . . . .	28
2.3	Confronto tra le teorie per il calcolo di $E_2$ (sx) e di $G_{12}$ (dx) [6] . . . . .	31
2.4	Modello ESL campo di spostamento lineare [9] . . . . .	32
2.5	Modello LW campo di spostamento lineare [9] . . . . .	32
2.6	Assunzioni della teoria <i>CLT</i> [10] . . . . .	34
2.7	Assunzioni della teoria <i>FSDT</i> [10] . . . . .	34
2.8	Assunzioni della teoria <i>HSDT</i> [10] . . . . .	35
2.9	<i>Fiber mode</i> (sx) e <i>Matrix mode</i> (dx) per una lamina unidirezionale [11] . . . . .	39
2.10	Diagramma di flusso <i>Progressive Damage Analysis</i> [12] . . . . .	41
2.11	Comportamento dopo il <i>FPF</i> [6] . . . . .	42
2.12	Grafico carico-deformazione per un laminato [13] . . . . .	43
2.13	Categorie di degradazione nel <i>MPDM</i> [14] . . . . .	44
2.14	Effetto del parametro <i>SRC</i> sul carico di rottura finale [15] . . . . .	45
2.15	Evoluzione lineare del danno [16] . . . . .	46
2.16	Danneggiamento in funzione dello spostamento equivalente [17] . . . . .	46
3.1	Sistema di riferimento utilizzato nella CUF [18] . . . . .	50
3.2	Modello CUF-1D [19] . . . . .	52
3.3	Elemento B2 (linear) . . . . .	53
3.4	Elemento B3 (quadratic) . . . . .	53

3.5	Elemento B4 (cubic) . . . . .	53
3.6	Espansione LE1 (linear) [18] . . . . .	54
3.7	Espansione LE2 (quadratic) [18] . . . . .	54
3.8	Espansione LE3 (cubic) [18] . . . . .	55
3.9	Esempio di modello CUF-2D (elemento Q4 in rosso e relativa espansione in blu) . . . . .	56
3.10	Assemblaggio matrici e vettori globali [20] . . . . .	59
3.11	Assemblaggio grafico matrici globali [21] . . . . .	60
3.12	Schematizzazione del metodo N-R per uno step di carico [22] . . . . .	62
3.13	Diagramma di flusso che illustra la sequenza di passaggi del metodo <i>N-R</i> completo durante un'analisi implicita nella <i>CUF</i> [22] . . . . .	63
3.14	Schematizzazione del calcolo della risposta $F(t)$ di un sistema non lineare con suddivisione in $n$ passi di ampiezza $\Delta t$ . . . . .	64
3.15	Diagramma di flusso di un'analisi esplicita nella <i>CUF</i> [22] . . . . .	66
3.16	Schema dei sistemi di riferimento $\langle 1 \ 2 \ 3 \rangle$ e $\langle l \ n \ t \rangle$ [23] . . . . .	69
3.17	Caso di carico a due picchi, con massimo globale in $(72^\circ, 0.6746)$ , utilizzando l'algoritmo <i>Stepwise Search Method (SSM)</i> [24] . . . . .	70
3.18	Risultati per il caso di carico scelto: l'algoritmo <i>EGSS</i> fallisce nell'identificare il massimo assoluto, al contrario <i>SRGSS</i> e <i>SPIS</i> lo identificano con successo [24] . . . . .	71
4.1	Trave 1 condizione di carico e vincolo con sezione . . . . .	77
4.2	Spostamento massimo con <i>Abaqus</i> (sup) e la <i>CUF</i> (inf) a confronto nel caso della trave 1 . . . . .	78
4.3	Analisi della convergenza alla soluzione esatta dello stress della trave 1 . . . . .	79
4.4	Trave 2 condizione di carico e vincolo con sezione . . . . .	80
4.5	Analisi della convergenza alla soluzione esatta dello stress della trave 2 . . . . .	81
4.6	Trave 3 condizione di carico e vincolo con sezione . . . . .	82
4.7	Analisi della convergenza alla soluzione esatta dello spostamento massimo della trave 3 . . . . .	83
4.8	Trave 4 condizione di carico e vincolo con sezione . . . . .	84
4.9	Spostamento massimo con <i>Abaqus</i> (sup) e la <i>CUF</i> (inf) a confronto nel caso della trave 4 . . . . .	85
4.10	Analisi della convergenza alla soluzione esatta dello spostamento massimo della trave 4 . . . . .	86
4.11	Piastra 1 condizione di carico e vincolo . . . . .	91
4.12	Spostamento massimo con <i>Abaqus</i> (sup) e la <i>CUF</i> (inf) a confronto nel caso della piastra 1 . . . . .	92
4.13	Analisi della convergenza alla soluzione esatta per Q4 e Q9 per la piastra 1 . . . . .	93
4.14	Piastra 2 condizione di carico e vincolo . . . . .	95
4.15	Spostamento massimo con <i>Abaqus</i> (sup) e la <i>CUF</i> (inf) a confronto nel caso della piastra 2 . . . . .	96
4.16	Spostamento massimo con <i>Abaqus</i> (sup) e la <i>CUF</i> (inf) a confronto nel caso della piastra 3 . . . . .	97

4.17	Schematizzazione della configurazione dei test di trazione sul singolo elemento: fibre orientate nella direzione y (rosso), nella direzione x (blu) e con laminazione $[90/45/0/-45]_{2s}$ (verde) . . . . .	99
4.18	Curva sforzo-deformazione di un singolo elemento caricato in trazione sotto condizioni di deformazione uniassiale. Elemento caricato nella direzione longitudinale dominata dalle fibre (sx), ed elemento caricato nella direzione trasversale dominata dalla matrice (dx) [25] . . . . .	100
4.19	Curva sforzo-deformazione di un singolo elemento $[90/45/0/-45]_{2s}$ laminato quasi-isotropo in trazione sotto condizione di deformazione uniassiale [25, 26] . . . . .	100
4.20	Curve di ammorbidimento post-picco, sia lineari che lineari-fragili, utilizzate per modellare il danno compressivo delle fibre. Il numero rappresenta la percentuale della resistenza massima che persiste come stress residuo nel plateau [27] . . . . .	102
4.21	Curva sforzo-deformazione di un singolo elemento caricato in compressione sotto condizioni di deformazione uniassiale. Elemento caricato nella direzione longitudinale dominata dalle fibre (sx), ed elemento caricato nella direzione trasversale dominata dalla matrice (dx) [27] . . . . .	103
4.22	Curva sforzo-deformazione di un singolo elemento $[90/45/0/-45]_{2s}$ laminato quasi-isotropo in compressione sotto condizione di deformazione uniassiale [27, 28] . . . . .	103
4.23	Provino con intaglio al centro con laminazione $[45/90/-45/0]_{4s}$ quasi-isotropo, condizioni al contorno e discretizzazione nell'intorno dell'intaglio [25]. . . . .	105
4.24	Curve sforzo-deformazione per il provino in trazione con intaglio centrale in scala 8 con laminazione $[45/90/-45/0]_{4s}$ quasi-isotropo . . . . .	106
4.25	Paragone della resistenza massima ricavata sperimentalmente e con i diversi modelli matematici citati [19] . . . . .	107
4.26	Rappresentazione schematica della piastra forata soggetta a compressione e la sua discretizzazione nel piano con 48 Q9 [27] . . . . .	108
4.27	Progressione del danno della fibra per della piastra forata . . . . .	110
4.28	Progressione del danno della matrice della piastra forata . . . . .	111



# Elenco delle tabelle

1.1	Proprietà meccaniche per lamina unidirezionali ottenuta con resina epossidica e fibre di diversa tipologia [29, 30] . . . . .	13
2.1	Proprietà meccaniche Carbon Fibre/Epoxy [6] utilizzato per la costruzione dei grafici in Figura 2.3 . . . . .	30
2.2	Formulazioni Coefficienti $F$ presenti nei criteri di Tsai-Wu, Tsai-Hill, Azzi-Tsai e Hoffman [14] . . . . .	37
2.3	Formulazioni Hashin nel caso bidimensionale per <i>Fiber</i> e <i>Matrix mode</i> . . . . .	39
2.4	Formulazioni <i>Puck</i> . . . . .	40
2.5	Valori raccomandati per i parametri di inclinazione [31] . . . . .	41
3.1	Confronto tra analisi implicite ed esplicite . . . . .	61
3.2	Schema di integrazione temporale a differenze centrate [32] . . . . .	65
3.3	Formulazioni Hashin + Puck [23] . . . . .	68
3.4	Valori equivalenti dello spostamento e della tensione [8] . . . . .	72
4.1	Risultati analitici e numerici della trave 1 in Figura 4.1 . . . . .	77
4.2	Risultati del modello <i>CUF</i> all'aumentare degli elementi B2 per la trave 1 . . . . .	78
4.3	Risultati analitici e numerici della trave 2 in Figura 4.4 . . . . .	80
4.4	Risultati del modello <i>CUF</i> all'aumentare degli elementi B2 per la trave 2 . . . . .	80
4.5	Risultati analitici e numerici della trave 3 in Figura 4.6 . . . . .	82
4.6	Risultati del modello <i>CUF</i> all'aumentare degli elementi B2 per la trave 3 . . . . .	82
4.7	Risultati analitici e numerici della trave 4 in Figura 4.8 . . . . .	84
4.8	Risultati del modello <i>CUF</i> all'aumentare degli elementi B2 per la trave 4 . . . . .	85
4.9	Analisi con elementi B3 e B4 per la trave 1 . . . . .	87
4.10	Analisi con espansione LE1, LE2 e LE3 per la trave 1 . . . . .	87
4.11	Analisi con elementi B3 e B4 per la trave 2 . . . . .	88
4.12	Analisi con espansione LE1, LE2 e LE3 per la trave 2 . . . . .	88
4.13	Analisi con elementi B3 e B4 per la trave 3 . . . . .	89
4.14	Analisi con espansione LE1, LE2 e LE3 per la trave 3 . . . . .	89
4.15	Analisi con elementi B3 e B4 per la trave 4 . . . . .	90

4.16	Analisi con espansione LE1, LE2 e LE3 per la trave 4 . . . . .	90
4.17	Risultati analitici e numerici della piastra 1 in Figura 4.11 . . . . .	92
4.18	Risultati del modello <i>CUF</i> all'aumentare degli elementi Q4 e Q9 per la piastra 1 . . . . .	93
4.19	Analisi con espansione LE1, LE2 e LE3 per la piastra 1 . . . . .	94
4.20	Risultati analitici e numerici per la piastra 2 in Figura 4.14 . . . . .	95
4.21	Proprietà meccaniche composito <i>IM7/8552</i> [19] . . . . .	96
4.22	Risultati analitici e numerici per la piastra 3 in Figura 4.14 . . . . .	97
4.23	Resistenza longitudinale, trasversale, interlaminare e al taglio del CFRP per il singolo elemento [33] . . . . .	98
4.24	Energia di frattura del CFRP per il singolo elemento [33] . . . . .	98
4.25	Punti caratteristici delle curve in Figura 4.18 e 4.19 . . . . .	101
4.26	Proprietà elastiche composito <i>IM7/8552</i> [27] . . . . .	102
4.27	Punti caratteristici delle curve in Figura 4.21 e 4.22 . . . . .	104
4.28	Scalatura del provino con intaglio al centro per test di trazione [25] in riferimento alla Figura 4.23 . . . . .	105
4.29	Punti caratteristici delle curve in Figura 4.24 . . . . .	106
4.30	Scalatura del provino con intaglio al centro per test di trazione [25] in riferimento alla figura 4.23 . . . . .	108
4.31	Analisi di convergenza della mesh sia nel piano che per l'espansione per il caso della piastra forata . . . . .	109
4.32	Effetto delle dimensioni del provino . . . . .	109

# Capitolo 1

## INTRODUZIONE

## 1.1 I compositi

Nel settore aerospaziale, la ricerca di materiali caratterizzati da un elevato rapporto tra resistenza meccanica e peso specifico rappresenta un obiettivo costante. L'evoluzione tecnologica dell'ultimo secolo ha portato all'impiego di leghe leggere, quali quelle di alluminio, magnesio, titanio, acciaio, nonché di materiali compositi.

I materiali compositi vantano origini antichissime: già 5000-6000 anni fa, nell'Antico Egitto, si realizzavano mattoni combinando fango e paglia.

Oggi, un esempio emblematico è rappresentato dal calcestruzzo armato, costituito da una matrice di cemento e ghiaia rinforzata con barre in acciaio. Anche in natura, tuttavia, possiamo osservare strutture analoghe, come il legno o la stessa struttura ossea umana.

Questi materiali sono ampiamente impiegati nell'industria manifatturiera, specialmente nei settori automobilistico e aeronautico, per le loro eccellenti proprietà meccaniche specifiche.

Un materiale composito è una combinazione di due o più materiali chimicamente distinti e con proprietà fisico-meccaniche diverse; ciò consente di ottenere proprietà superiori ai singoli costituenti. Per raggiungere tali proprietà è necessario selezionare accuratamente le percentuali relative dei singoli componenti.

Nei compositi bicomponenti (Figura 1.1), si ha una componente rinforzante più resistente sotto forma di fase discontinua chiamata rinforzo, una componente continua meno resistente chiamata matrice ed infine un additivo per migliorare il processo di coesione tra i primi due.

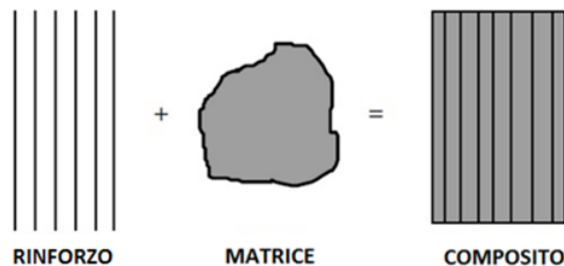


Figura 1.1. Materiale bicomponente [1]

Questi materiali possono essere classificati in diversi modi, tra i principali vi è la classificazione in base al meccanismo di rafforzamento, cioè alla forma e all'orientamento del rinforzo:

- compositi particellari;
- compositi fibrosi;
- compositi con riempitivo.

Le nostre analisi, che verranno affrontate nel lavoro di tesi, si focalizzeremo sul secondo gruppo, in particolare su quei compositi realizzati con fibre lunghe allineate

in una singola direzione, ottenendo così, con la sovrapposizione di più strati con diverse angolazioni, materiali ortotropi.

La distribuzione casuale delle fibre corte, invece, garantisce una resistenza più bassa, ma uniforme in tutte le direzioni e quindi avvicinandosi ad un materiale quasi-isotropo.

### 1.1.1 Matrice

Nei materiali compositi, le matrici svolgono i seguenti ruoli:

- mantengono le fibre separate e trasferiscono il carico;
- proteggono le fibre dagli agenti chimici, atmosferici e dai danni meccanici;
- migliorano la resistenza del composito per la loro maggiore tenacità rispetto alle fibre;
- rallentano la propagazione delle rotture.

La matrice può essere prodotta con tutte e tre le principali classi di materiali: metalli, ceramici e polimeri.

Le matrici termoindurenti polimeriche sono le più comuni nelle applicazioni strutturali grazie alle loro eccellenti proprietà meccaniche, alla capacità di mantenere queste proprietà anche in ambienti caldi e umidi e alla loro resistenza chimica. In particolare, l'epossidica viene preferita per l'assenza di sostanze volatili prodotte durante il processo di indurimento, per la bassa contrazione, per la resistenza chimica e alla corrosione, per l'eccellente adesione e per la possibilità di essere parzialmente polimerizzata e successivamente completata in un secondo momento.

### 1.1.2 Fibre

Le fibre in un composito sono gli elementi di rinforzo che conferiscono resistenza e rigidità alla struttura e sono perciò fondamentali per la prestazione meccanica del materiale.

I rinforzi possono essere realizzati con diversi materiali e i più comuni sono:

- **fibre di Boro:** hanno visto la loro prima apparizione nel 1959 mediante il metodo di Talley [29], che consiste nel ridurre un alogenuro di Boro su un filamento di tungsteno, il quale è riscaldato ed immerso in un ambiente ricco di idrogeno. A causa degli elevati costi di produzione al fine di ottenere una buona fibra, si prediligono fibre più economiche quando possibile;
- **fibre di Carbonio:** sono prodotte attraverso la pirolisi del poliacrilonitrile (*PAN*), per via delle sue caratteristiche ideali, come la temperatura di fusione più alta rispetto a quella di decomposizione, un alto contenuto di carbonio e l'assenza di ossigeno molecolare, poichè potrebbe compromettere le proprietà meccaniche del prodotto finale. Si ottiene un'ottimizzazione del processo

quando viene applicata una trazione durante la pirolisi, consentendo di migliorare la qualità della fibra. Anche queste fibre presentano costi elevati come le precedenti;

- **fibre di Vetro:** sono ottenute attraverso un processo di fusione di materiali ricchi in silice, successivamente, di estrusione a caldo, attraverso stampi sottili, ed infine di raffreddamento repentino. È poi possibile trattarle termicamente per migliorarne ulteriormente le proprietà meccaniche, garantendo una vasta gamma di prodotti di dimensioni e proprietà differenti e assicurando al contempo un'ottima versatilità e una notevole sostenibilità economica;
- **fibre Aramidiche** [34]: sono state sviluppate negli anni '50 a partire dalle poliammidi aromatiche. Le poliammidi sono grandi molecole caratterizzate dal legame ammidico  $CO-NH$ , che si forma dalla condensazione di un acido carbossilico e di un'ammina. La struttura e le proprietà di queste molecole dipendono dai processi di produzione e possono essere lineari o contenere gruppi aromatici. Le poliammidi con anelli aromatici mostrano migliori prestazioni meccaniche, in particolare un modulo di elasticità più elevato. Le più note sono il *Nomex* ed il *Kevlar*.

In Figura 1.2 sono mostrate le curve sforzo-deformazione di alcuni tipi di fibre presentate ('B' sono le fibre di Boro, 'C' quelle di carbonio e 'SiC' carburo di Silicio):

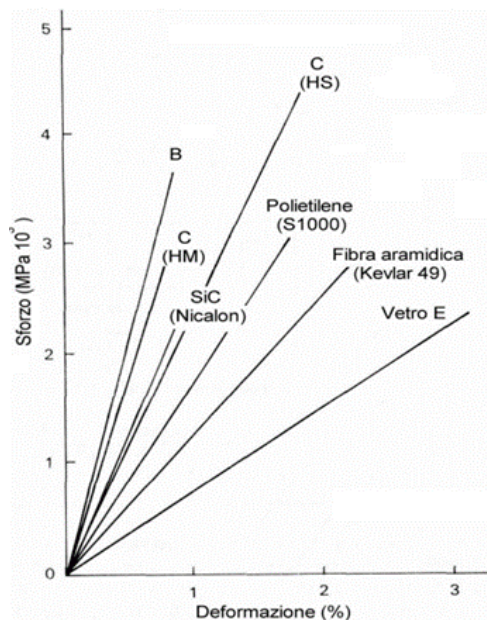


Figura 1.2. curva sforzo-deformazione per differenti tipi di fibre [2]

Vengono riportate nella Tabella 1.1 anche le principali proprietà meccaniche di una singola lamina epossidica con diversi tipi di fibre come rinforzo.

Proprietà	Unità di misura	Simbolo	Boro	Grafite	Vetro	Kevlar
Frazione di volume fibra		$V_f$	0.50	0.70	0.45	0.60
Modulo elastico longitudinale	$GPa$	$E_1$	204	181	38.6	85
Modulo elastico trasversale	$GPa$	$E_2$	18.50	10.30	8.27	5.60
Poisson		$\nu_2$	0.23	0.28	0.26	0.34
Modulo di taglio	$GPa$	$G_{12}$	5.59	7.17	4.14	4.20
Resistenza ultima alla trazione longitudinale	$MPa$	$(\sigma_1^T)_{ult}$	1260	1500	1062	1410
Resistenza ultima alla compressione longitudinale	$MPa$	$(\sigma_1^C)_{ult}$	2500	1500	610	280
Resistenza ultima alla trazione trasversale	$MPa$	$(\sigma_2^T)_{ult}$	61	40	31	28
Resistenza ultima alla compressione trasversale	$MPa$	$(\sigma_2^C)_{ult}$	202	246	118	141
Resistenza ultima al taglio nel piano	$MPa$	$(\tau_{12}^T)_{ult}$	67	68	72	45
Coefficiente di espansione termica longitudinale	$\mu m/m/^\circ C$	$\alpha_1$	6.10	0.02	8.60	-4
Coefficiente di espansione termica trasversale	$\mu m/m/^\circ C$	$\alpha_2$	30.30	22.50	22.10	58

Tabella 1.1. Proprietà meccaniche per lamina unidirezionali ottenuta con resina epossidica e fibre di diversa tipologia [29, 30]

### 1.1.3 Vantaggi, svantaggi e diffusione

L'utilizzo in continuo aumento di questa tipologia di materiali è dovuto ai numerosi vantaggi che ne comporta, come ad esempio:

- elevata resistenza specifica
- elevata resistenza alla corrosione
- anisotropia meccanica
- design flessibile
- buone proprietà di isolamento
- design integrato

Nonostante i molteplici vantaggi, è importante considerare anche i loro punti deboli, poichè questi possono influenzare la loro adozione e la loro efficacia in determinate applicazioni, richiedendo un'attenta valutazione delle specifiche esigenze del progetto. Tra i principali abbiamo:

- costo
- difficoltà nella riparazione
- degrado ambientale
- variazione delle proprietà
- riciclabilità
- sensibilità all'impatto

Tale diffusione nel corso del tempo ha subito un notevole aumento, con una crescita significativa nel corso degli ultimi decenni. Originariamente sviluppati per applicazioni aerospaziali e militari durante la metà del XX secolo, i materiali compositi hanno gradualmente trovato spazio in settori come l'industria automobilistica, navale, sportiva, energetica ed edile.

L'avanzamento delle tecnologie di produzione e dei processi di fabbricazione, insieme alla ricerca e allo sviluppo costanti, ha consentito una maggiore comprensione e sfruttamento delle potenzialità di questi materiali. Questo ha determinato una crescente adozione di quest'ultimi in ambiti commerciali e industriali, come dimostra il grafico in Figura 1.3.

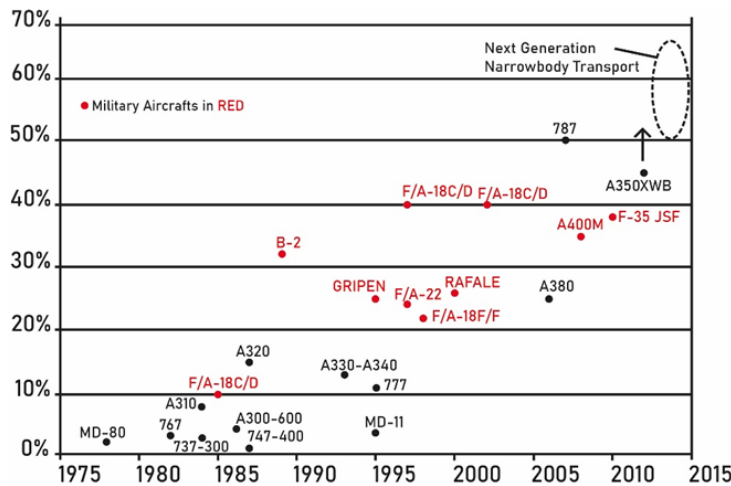


Figura 1.3. Percentuale in peso dei materiali compositi in campo aeronautico nel tempo [3]



## 1.2 Criteri di progetto

L'importanza vitale di garantire la sicurezza e l'affidabilità nei settori come l'aviazione è cruciale data la natura critica delle operazioni di volo. Per questo motivo la conformità normativa presenta un ruolo importantissimo nell'industria dell'aviazione, la quale, in Europa, è gestita dall'agenzia europea per la sicurezza (*EASA*).

Tra i principali problemi, vi è quello del dimensionamento a fatica, che ha portato alla nascita di tre criteri di progetto, ognuno con una diversa filosofia, i quali sono brevemente presentati di seguito.

### 1.2.1 Safe life

Una struttura progettata secondo il criterio *Safe-life* è una struttura che deve essere in grado di rimanere integra, cioè libera da cricche, per una vita assegnata (espressa in numero di ore di volo o numero di voli), al termine della quale viene ritirata dal servizio e sostituita, indipendentemente dal fatto che abbia subito o meno dei danneggiamenti.

Quindi in questo criterio di progetto è necessario eseguire preventivamente delle prove per verificare che la struttura sia in grado di operare senza alcun danno per una certa durata di tempo. Ma vista l'incertezza e la dispersione di dati che si ha nel trattare la fatica, si introduce un fattore di sicurezza  $k$  chiamato "*scatter factor*" (fattore di dispersione) del valore di circa 3-4.

Si passa così dalla vita desiderata a quella calcolata e ciò implica in genere una struttura più pesante. Di fatti, questo criterio viene frequentemente utilizzato nel caso di strutture isostatiche o in quelle strutture indicate come primarie, per ovvi motivi di sicurezza.

### 1.2.2 Fail safe

Per *Fail safe*, sicurezza nella rottura, si intende la capacità della struttura di evitare un cedimento catastrofico anche in presenza di un danno da fatica, corrosione o causa accidentale. Perciò è accettabile che un componente possa cedere per affaticamento, ma questo non deve portare al crollo dell'intera struttura, cioè altri elementi strutturali devono poter assolvere al compito dell'elemento guasto.

Importante è la determinazione di una corretta procedura di ispezione, sia per gli intervalli di tempo che per il livello di approfondimento della stessa, al fine di individuare la prima rottura.

È possibile verificare la gestione dell'affaticamento nelle strutture attraverso i diagrammi di *Slow crack growth*, di cui un esempio è riportato in Figura 1.4, dove si riporta la resistenza residua in funzione della vita operativa:

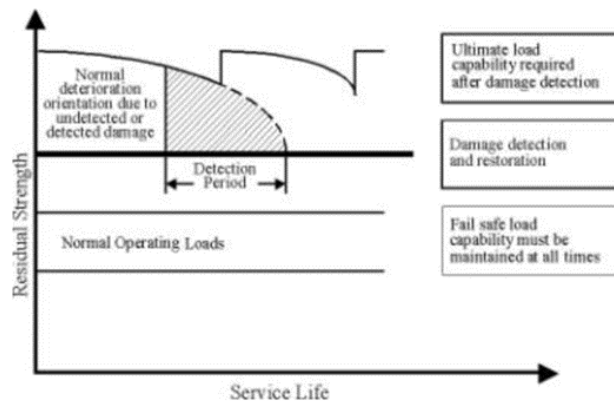


Figura 1.4. Slow crack growth concept - Resistenza residua [4]

Un ulteriore esempio di diagramma utilizzato è riportato in Figura 1.5, che rappresenta la resistenza strutturale in funzione del tempo di servizio:

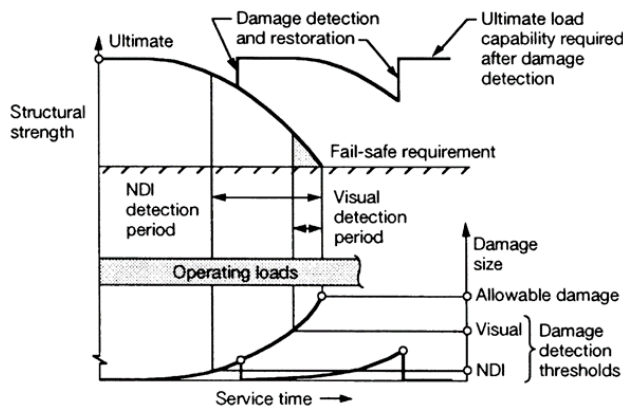


Figura 1.5. Slow crack growth concept - Resistenza strutturale [5]

### 1.2.3 Damage Tolerance

La *Damage tolerance* è la capacità della struttura di conservare la sua funzionalità in presenza di un danno. In questa filosofia, si parte dal presupposto che in tutti i punti critici della struttura sono sempre presenti, a partire dal momento in cui viene realizzata, difetti assimilabili a cricche, che possono essere punto di innesco per possibile rottura a fatica. Viene studiata l'evoluzione di tali cricche basandosi su concetti e metodologie tipiche della meccanica della frattura, sino ad arrivare a dimensioni tali da comportare un'ovvia riduzione delle caratteristiche di resistenza della struttura ma comunque mai al di sotto dei valori necessari a reggere i carichi imposti dalla normativa (di solito i carichi a contingenza).

Questo criterio di progetto rappresenta il migliore compromesso tra progettazione, anche se onerosa, e le esigenze degli operatori che tendono a richiedere un numero

sempre più ridotto di interventi e di manutenzione, oltre a poter garantire una maggiore sicurezza.

Anche in questo caso viene sviluppato un adeguato programma di ispezione: si definisce, infatti, per ciascun elemento strutturale un appropriato calendario di ispezioni cosicchè le cricche (già presenti o formatesi in seguito all'utilizzo) non si propaghino fino alla rottura prima di essere individuate. Ciò si applica a tutti i principali elementi strutturali, eccetto quelli per cui il costruttore può dimostrare che tale approccio non è praticabile, nel qual caso viene adottato un approccio *Safe-life* con opportuni *scatter factor*. Vengono progettati secondo quest'ultimo criterio i supporti motori, i carrelli, le cerniere delle superfici mobili, certi attacchi ala-fusoliera; il resto della struttura è di solito progettato secondo gli altri due criteri.

Per lo studio della *Damage tolerance* sono particolarmente utili i diagrammi caratteristici del materiale (o del componente), come:

- **Diagramma di carico residuo** (Figura 1.6), dove viene riportata la variazione di resistenza strutturale in funzione del tempo di utilizzo;

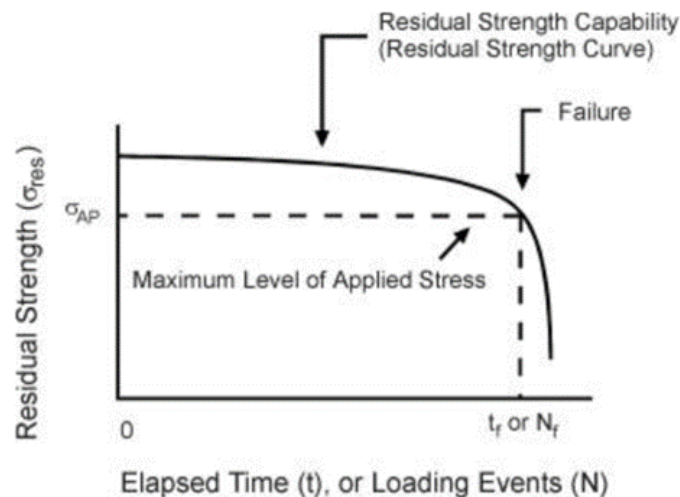


Figura 1.6. Resistenza residua in funzione del tempo trascorso [6]

- **diagramma di accrescimento del difetto** (Figura 1.7), dove viene riportato come il difetto si accresce in funzione del numero di cicli o delle ore di funzionamento a un valore di carico fissato.

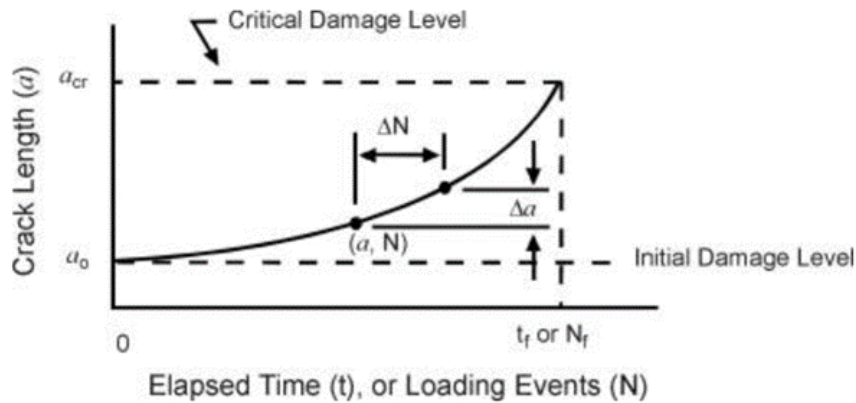


Figura 1.7. Diagramma di accrescimento del difetto [6]

Studiando il secondo diagramma (Figura 1.7) si nota la presenza di un difetto iniziale, che può essere reale, se è stato effettivamente misurato, o semplicemente ipotizzato, ed in questo caso, l'ipotesi dimensionale iniziale è fatta su base statistica. Una volta formulata l'ipotesi dimensionale, viene tracciata la curva di accrescimento e a quel punto si può assistere a due possibili scenari:

- **crescita al di sotto della curva di accrescimento:** in questo caso è garantita l'adeguatezza della struttura in studio a resistere ai carichi applicati, cioè la struttura è in grado di sopportare il carico residuo come previsto da normativa;
- **crescita al di sopra della curva di accrescimento:** in questo caso sono necessarie azioni correttive, come possono essere l'utilizzare la macchina a carichi operativi più bassi rispetto a quelli di test, oppure ridimensionare/sostituire/riparare il componente interessato dal difetto. In questa circostanza per la valutazione del carico residuo è necessario conoscere la dimensione, la posizione e l'orientazione del difetto e ciò viene fatto nuovamente statisticamente. Si tratta della curva del difetto iniziale equivalente, riportata in Figura 1.8.

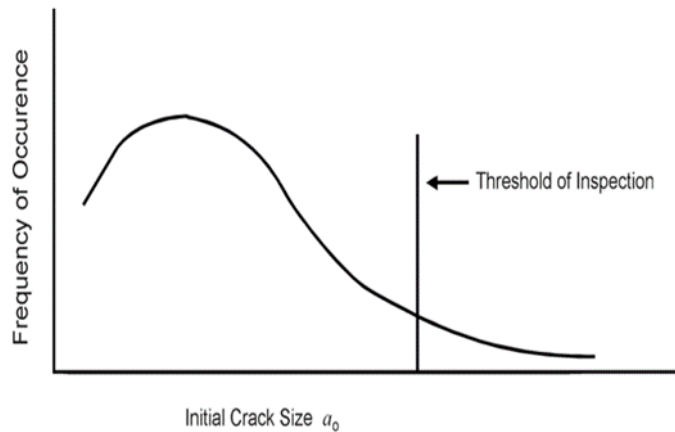


Figura 1.8. Curva del difetto equivalente [6]

### 1.3 Modelli per lo studio dei laminati

Negli anni sono stati sviluppati svariati approcci teorici e modelli strutturali per l'analisi dei laminati, mirando ad una caratterizzazione sempre più accurata dei loro comportamenti.

L'evoluzione di teorie, come la *Classical Lamination Theory (CLT)* e la *First-Order Shear Deformation Theory (FSDT)*, ha portato allo sviluppo di teorie di ordine superiore, offrendo miglioramenti significativi in termini di precisione e risultati.

Tra queste, la **Formulazione Unificata di Carrera (CUF)**, la quale, mediante l'introduzione di funzioni di espansione di diverso ordine e tipologia (Lagrangiane o di Taylor), ha reso possibile la creazione di modelli 1D e 2D confrontabili con quelli tridimensionali dei software commerciali, ma con notevole riduzione dei tempi e dei costi computazionali.

La CUF, implementata nel software *Mul2*, adotta l'approccio *Layer-Wise*, trattando i vari strati del laminato in modo indipendente per analizzarne gli effetti intrinseci, mentre le interazioni inter-laminari possono essere considerate a discrezione.

Esistono diversi criteri di failure per la valutazione del danno strato per strato, nonché per determinare la presenza o meno di rottura, in funzione delle specifiche esigenze e dei parametri richiesti dagli utenti.

Tali criteri sono implementati nei software di analisi strutturale, consentendo anche la visualizzazione del danneggiamento progressivo all'interno di ciascun strato. In particolare, la *Progressive Failure Analysis (PFA)* offre diversi approcci per modellare il danneggiamento, come la *Continuum Damage Mechanics (CDM)*, che prevede una graduale riduzione della resistenza residua del componente in risposta alla sollecitazione continua. La stessa routine **Hashin + Puck**, presentata come alternativa del CODAM2, utilizza quest'ultimo approccio, andando a formulare modelli 1D e 2D differenti da quelli 3D commerciali. Questi software possono essere impiegati per

una vasta gamma di casi, da analisi statiche implicite e lineari ad analisi dinamiche esplicite e non lineari, coprendo situazioni di trazione, compressione, flessione ed impatto.

## 1.4 Tipologie di danneggiamento dei Laminati compositi

I danni nei laminati compositi possono essere suddivisi in tre categorie distinte, indipendentemente dalle sollecitazioni in gioco: frattura della matrice, delaminazione e frattura della fibra. L'insorgenza di questi fenomeni, intrinsecamente collegati tra loro da un rapporto di causa ed effetto, compromette le prestazioni del materiale in misura variabile [35].

- **Frattura della matrice:** molto spesso è il primo fenomeno che si manifesta con possibile separazione matrice-rinforzo all'interfaccia. Si presenta con formazione di cricche di piccole dimensioni nella zona interlaminare a seguito di uno sforzo, le quali rimangono per lo più confinate, grazie alla struttura a layers, senza minare in modo significativo alle proprietà meccaniche.
- **Delaminazione:** raggiunto un certo livello di carico e sopraggiunto il fenomeno della fatica, queste cricche si diffondono formandone di più grandi, le quali portano alla separazione tra gli strati.
- **Frattura della fibra:** durante il ciclo di vita operativa è possibile che si vada incontro a rottura di alcune fibre che per qualche ragione sono meno performanti delle altre o per via di stress localizzati. Quando questo fenomeno si diffonde in più larga scala, a causa di una delaminazione o di un urto, le proprietà del materiale crollano drasticamente, intaccando soprattutto la resistenza residua, e ciò anticipa il failure strutturale. Tra i tre casi è il più pericoloso, ma comunque, nella maggior parte delle situazioni, l'ultimo a verificarsi cronologicamente.

### 1.4.1 La delaminazione

Durante i cicli di carico operativi le prime zone ad essere maggiormente danneggiate sono sicuramente quelle interlaminari, cioè quelle zone dove è presente solo matrice. Quest'ultima, avendo proprietà meccaniche altamente inferiori al rinforzo, facilita l'insorgenza di cricche che portano al distacco tra le lamine.

L'espansione incontrollata della delaminazione è il motivo principale della rottura dei laminati durante l'uso, poichè porta ad un forte calo delle performance del materiale. La sua pericolosità è inoltre accentuata dal fatto che non presenta fin da subito segni esterni visibili del fenomeno in atto.

La delaminazione avviene per tre possibili cause:

- **effetto di bordo libero:** l'anisotropia dei laminati compositi può generare, agli estremi del materiale, diverse tensioni a seconda della sequenza di laminazione, comportando, perciò, una differente modo di delaminazione (Figura 1.9). Il distacco si diffonde poi verso l'interno portando inevitabilmente al fallimento della struttura. Attraverso specifici test, è possibile misurare la tenacità a frattura interlaminare nei tre modi;



Figura 1.9. Schema delle tre modalità di apertura possibili del composito laminato [7]

- **carico a fatica:** è un processo di deterioramento del materiale che avviene durante la sua vita operativa con la generazione di micro-cricche che aumentano in numero e dimensione al crescere del numero di cicli. Si giunge alla rottura della matrice nelle zone più stressate, come il bordo o le discontinuità, giungendo infine alla diffusione della delaminazione e frattura del rinforzo;
- **impatto:** il danneggiamento da urto contro il laminato può assumere diverse configurazioni a seconda dello stimolo cui lo stesso è sottoposto e la sua risposta [3]. Il primo parametro da tenere in considerazione nello studio del fenomeno è l'**energia di impatto**.

Difatti, al crescere quest'ultima aumenta la differenza di risposta della struttura rispetto a quella classica che si osserva nel metallo, dove il corpo impattante lascia un'impronta superficiale più o meno profonda per via della tenacità del materiale.

Nei compositi abbiamo tre diversi casi:

- *impatto a bassa energia:* la superficie impattata superficiale non presenta tracce di danneggiamento, poichè il difetto si manifesta internamente, in configurazione piramidale, come una delaminazione o una rottura della superficie posteriore rispetto all'impatto;
- *impatto a media energia:* le lamine subito adiacenti l'impatto subiscono flessione, e il difetto si espande internamente al composito, generando delaminazioni;
- *impatto ad alta energia:* l'effetto è quello di penetrazione nel laminato con delaminazioni adiacenti.

In Figura 1.10 è schematizzato il comportamento del laminato nelle diverse situazioni sopra elencate:

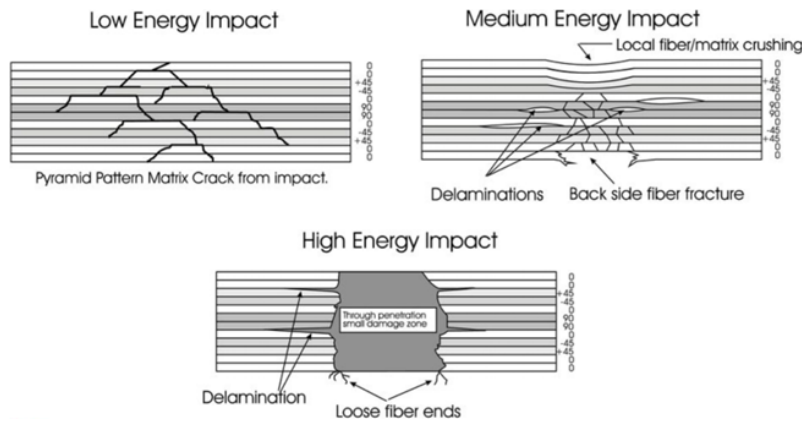


Figura 1.10. Effetti di impatti a differenti energie [6]

Il secondo parametro da tenere in conto nello studio degli impatti è **il rapporto tra spessore e lunghezza libera** della struttura, in quanto l'impatto genera un accoppiamento flessione-torsionale.

In generale, quindi, un impatto può provocare i seguenti danneggiamenti (Figura 1.11):

- *delaminazione*, ovvero quando lo scambio energetico attiva la proprietà di adesione tra strati;
- *flessione*, nel caso in cui si raggiunga la  $\sigma_{max}$  di flessione della superficie opposta a quella in cui è avvenuto l'impatto;
- *penetrazione*, se il fenomeno locale attiva la rottura superficiale della sezione trasversale.



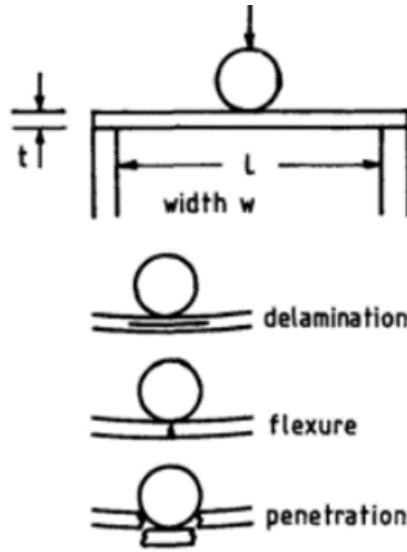


Figura 1.11. Test di impatto e modalità di danneggiamento [6]

Per prevedere quale dei primi due fenomeni avvenga prima (esclusa la penetrazione che comporta la rottura) si studia l'energia che viene scambiata durante l'impatto.

Nel primo caso si calcola il carico tagliente massimo e si ottiene, a seguito delle operazioni presentate di seguito, l'energia necessaria per portare a delaminazione:

$$\tau_{ILSS} = \frac{3P}{4wt} \quad (1.1)$$

$$U_{shear} = \frac{1}{2}P \frac{PL^3}{48E_f I} = \frac{2}{9} \frac{\tau_{ILSS}^2}{E_f} \frac{wL^3}{t} \quad (1.2)$$

Nel secondo caso si misura, invece, l'energia che porta la flessione fino alla  $\sigma$  ammissibile:

$$\sigma_{max} = \frac{M t}{I} = \frac{3PL}{2wt^2} \quad (1.3)$$

$$U_{flex} = \frac{1}{2}P\delta = \frac{1}{2}P \frac{PL^3}{48E_f I} = \frac{1}{18} \sigma_{max}^2 \frac{wtL}{E_f} \quad (1.4)$$

Quindi se  $U_{flex} > U_{shear}$  avviene prima la delaminazione, mentre se  $U_{flex} < U_{shear}$  viceversa.

## 1.5 Scopo della tesi

La presente tesi ha lo scopo di esplorare le problematiche legate al danneggiamento progressivo dei materiali compositi sotto carico, andando ad individuare quale strato e più sensibile al danno: inizialmente si presentano le caratteristiche generali dei compositi, per poi passare in rassegna le principali teorie di modellazione ed infine uno studio numerico.

In questo primo capitolo è stato presentato il composito nel suo complesso ed il suo comportamento macroscopico; in quello successivo questi argomenti sono affrontati con maggiore dettaglio, introducendo teorie e metodologie per lo studio dei laminati e per l'analisi del danneggiamento con gli annessi criteri di failure.

In questo contesto di fondamentale importanza è la Formulazione Unificata di Carrera (CUF), la quale svolge un ruolo da protagonista nello studio, poichè la si vuole utilizzare come alternativa ai classici software di calcolo, dimostrandone il costo computazionale ridotto. Per questo motivo vi è stato dedicato un capitolo, dando così al lettore tutte le informazioni necessarie per comprenderla.

Si intende anche introdurre la routine Hashin + Puck integrata nel Mul2, come alternativa al CODAM2, per l'analisi del danneggiamento progressivo e della rottura dei laminati: i test numerici svolti nel capitolo 4 mirano a confermare la sua efficacia.

## Capitolo 2

# TEORIE E METODOLOGIE DI ANALISI DEL DANNEGGIAMENTO

In questo ampio e dettagliato capitolo, si propone di esaminare in modo chiaro le teorie strutturali più significative per l'analisi dei materiali compositi. Sarà dato particolare risalto alle teorie ad alto ordine, nonchè ai criteri essenziali per la valutazione dei guasti e ai modelli avanzati elaborati per l'osservazione e l'analisi del danno progressivo. Quest'approfondita indagine costituisce il fondamentale punto di partenza per una piena comprensione della *Formulazione Unificata di Carrera (CUF)* e dei criteri applicativi adottati nei molteplici codici di analisi che saranno impiegati nel corso del presente lavoro.

## 2.1 I materiali ortotropi

Il laminato è una struttura multistrato, cioè, composto da numerosi strati disposti in sequenza, ognuno dei quali presenta una combinazione unica di fibre e matrice, la quale può essere considerata al pari di un materiale ortotropo.

Ogni singola lamina viene caratterizzata da un suo sistema di riferimento locale, dove la direzione 1 coincide con l'orientamento delle fibre, la direzione 2 è perpendicolare ad essa all'interno del piano ed infine la direzione 3 è ortogonale alle prime due e uscente dal piano. Vi è anche un sistema di riferimento globale definito rispetto a un sistema materiale che è espresso attraverso gli assi  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Questa organizzazione di sistemi di riferimento è mostrata in Figura 2.1 dove l'asse 3 coincide con l'asse  $z$  e  $\theta$  è l'angolo attorno a quest'ultimo.

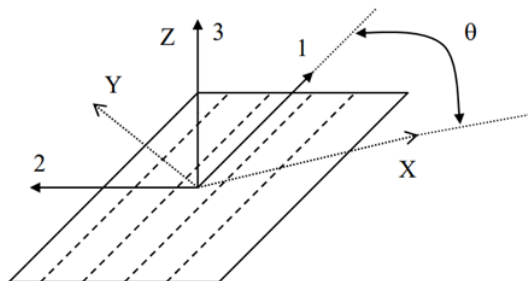


Figura 2.1. sistema di riferimento globale  $\langle x y z \rangle$  e locale  $\langle 1 2 3 \rangle$  [8]

Si definiscono di seguito, rispetto al sistema  $\langle x y z \rangle$ , il campo di spostamenti  $u$ , i vettori delle sollecitazioni  $\sigma$  e delle deformazioni  $\epsilon$ :

$$u(x, y, z) = \{u_x(x, y, z), u_y(x, y, z), u_z(x, y, z)\}^T \quad (2.1)$$

$$\sigma = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}, \sigma_{xy}\}^T \quad (2.2)$$

$$\epsilon = \{\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{yz}, \epsilon_{xz}, \epsilon_{xy}\}^T \quad (2.3)$$

Secondo la teoria classica dell'elasticità, gli spostamenti sono collegati alle deformazioni mediante una matrice  $D$  di operatori differenziali:

$$\epsilon = Du \quad (2.4)$$

$$D = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z \\ \partial_z & 0 & \partial_x \\ 0 & \partial_z & \partial_y \\ \partial_y & \partial_x & 0 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Invece, il legame tra tensioni e deformazioni di ogni  $k$ -esima lamina è dato dalla legge di Hook, dove la matrice di rigidezza  $C$  è quella di un materiale ortotropo. Quest'ultima è in funzione del modulo di Young in direzione delle fibre ( $E_1$ ) e della matrice ( $E_2$ ), dei coefficienti di Poisson  $\nu$  e dei moduli di taglio  $G$ . Il sistema di riferimento utilizzato per la definizione dell'equazione e della matrice è quello locale  $\langle 1 \ 2 \ 3 \rangle$  come segue:

$$\sigma_k = C\epsilon_k \quad (2.6)$$

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

dove

$$\sigma = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}\}^T \quad (2.8)$$

$$\epsilon = \{\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}, \epsilon_{23}, \epsilon_{13}, \epsilon_{12}\}^T \quad (2.9)$$

Ricorriamo ad una matrice di rotazione  $T$  per passare dal sistema di riferimento locale della lamina a quello globale del laminato (riferimento alla Figura 2.1). La legge di Hooke che si ottiene è la seguente:

$$\sigma = TCT^T\epsilon = \tilde{C}\epsilon \quad (2.10)$$

dove

$$T = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -\sin 2\theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & \sin 2\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos 2\theta \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

I coefficienti della matrice  $\tilde{C}$  dipendono sia dalle proprietà meccaniche del materiale composito utilizzato ma anche dall'angolo di orientamento  $\theta$  delle fibre in ogni strato della laminazione.

### 2.1.1 Determinazione delle caratteristiche meccaniche

Per determinare le caratteristiche meccaniche di una lamina è necessario considerare la frazione di volume in fibra, come mostrato in Figura 2.2. Inoltre, le formule utilizzate per la trattazione si basano sull'uso e sulla validità della regola della miscela.

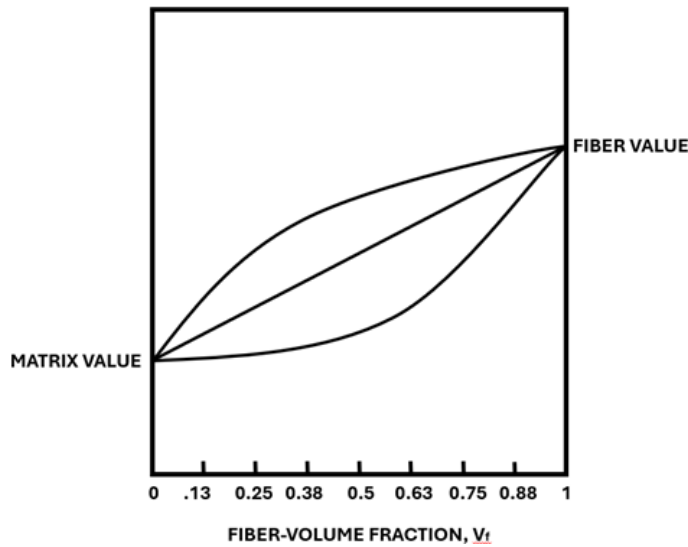


Figura 2.2. Proprietà meccaniche al variare della frazione in volume di fibra [6]

- Grazie all'ipotesi di **assenza di vuoti**, si calcola la densità del composito:

$$\rho_{Composito} = \frac{M}{V} = \frac{\rho_f A_f L}{AL} = \rho_f V_f + \rho_m V_m \quad (2.12)$$

- Grazie all'ipotesi per cui una matrice e fibra subiscono la **stessa deformazione lungo la direzione 1**, si calcola il modulo elastico  $E_1$ :

$$\epsilon_1 = \epsilon_f = \epsilon_m \quad (2.13)$$

$$P = \sigma_f A_f + \sigma_m A_m = \sigma_1 A \quad (2.14)$$

$$\sigma_f = E_f \epsilon_1 \quad (2.15)$$

$$\sigma_m = E_m \epsilon_1 \quad (2.16)$$

$$E_f \epsilon_1 A_f + E_m \epsilon_1 A_m = \sigma_1 A \quad (2.17)$$

$$E_1 = E_f V_f + E_m V_m \quad (2.18)$$

Si noti che il carico applicato risulta essere somma dei contributi associati a fibra e matrice, i quali rispondono con la propria  $\sigma$  moltiplicata per la sezione da loro occupata. Perciò la relazione appare lineare.

- Grazie all'ipotesi per cui matrice e fibra subiscono la **stessa tensione lungo la direzione 2**, si calcola il modulo elastico  $E_2$ :

$$\sigma_1 = \sigma_f = \sigma_m \quad (2.19)$$

$$\Delta W = \epsilon_2 W = \Delta W_f + \Delta W_m = \epsilon_f V_f W + \epsilon_m V_m W \quad (2.20)$$

$$\epsilon_f = \frac{\sigma_2}{E_f} \quad (2.21)$$

$$\epsilon_m = \frac{\sigma_2}{E_m} \quad (2.22)$$

$$\epsilon_2 = \epsilon_f V_f + \epsilon_m V_m = \frac{\sigma_2}{E_f} V_f + \frac{\sigma_2}{E_m} V_m = \sigma_2 / E_2 \quad (2.23)$$

$$E_2 = \frac{E_f E_m}{E_f V_m + E_m V_f} \quad (2.24)$$

Si noti che il carico applicato al composito è uniforme; perciò, la deformazione  $\epsilon$  è data dalla somma dei contributi di fibra e matrice. La relazione risulta essere parabolica.

- Supponendo **costante la tensione tagliente tra fibra e matrice**, si calcola il modulo di taglio  $G_{12}$ :

$$\tau = \tau_f = \tau_m \quad (2.25)$$

$$\gamma = \frac{\Delta}{W} = \frac{\Delta_f + \Delta_m}{W} = \gamma_f V_f + \gamma_m V_m \quad (2.26)$$

$$\gamma_m = \frac{\tau}{G_m} \quad (2.27)$$

$$\gamma_f = \frac{\tau}{G_f} \quad (2.28)$$

$$\gamma = \frac{\tau}{G_f} V_f + \frac{\tau}{G_m} V_m = \frac{\tau}{G_{12}} \quad (2.29)$$

$$G_{12} = \frac{G_f G_m}{G_f V_m + G_m V_f} \quad (2.30)$$

Anche in questo caso la relazione è parabolica.

- Supponendo una **tensione applicata in direzione 1** si calcola il coefficiente di Poisson  $\nu_{12}$ :

$$\nu_{12} = -\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \quad (2.31)$$

$$\Delta W = -W \epsilon_2 = W \nu_{12} \epsilon_1 \quad (2.32)$$

$$\Delta W = \Delta W_f + \Delta W_m \quad (2.33)$$

$$\Delta W_f = -W V_f \epsilon_{2f} = -W V_f \nu_f \epsilon_1 \quad (2.34)$$

$$\Delta W_m = -W V_m \epsilon_{2m} = -W V_m \nu_m \epsilon_1 \quad (2.35)$$

$$\nu_{12} = V_f \nu_f = V_m \nu_m \quad (2.36)$$

Per il calcolo del modulo trasversale e del modulo a taglio, oltre a quelle riportate, esistono formulazioni alternative, come quelle di *Puck* o *Foster-Knappe*, con le quali si fa un confronto nei grafici in Figura 2.3 del materiale proprietà descritte in Tabella 2.1.

Materiali	$V_f$	$E_f$	$G_f$	$\nu_f$	$E_m$	$G_m$	$\nu_m$	$E_{fy}$	$G_{fy}$
<b>Carbon</b>	0.6	230	8.27	0.2	3.45	1.28	0.35	16.6	5.89
<b>Fibre/Epoxy</b>		[MPa]	[MPa]		[MPa]	[MPa]		[GPa]	[GPa]

Tabella 2.1. Proprietà meccaniche Carbon Fibre/Epoxy [6] utilizzato per la costruzione dei grafici in Figura 2.3



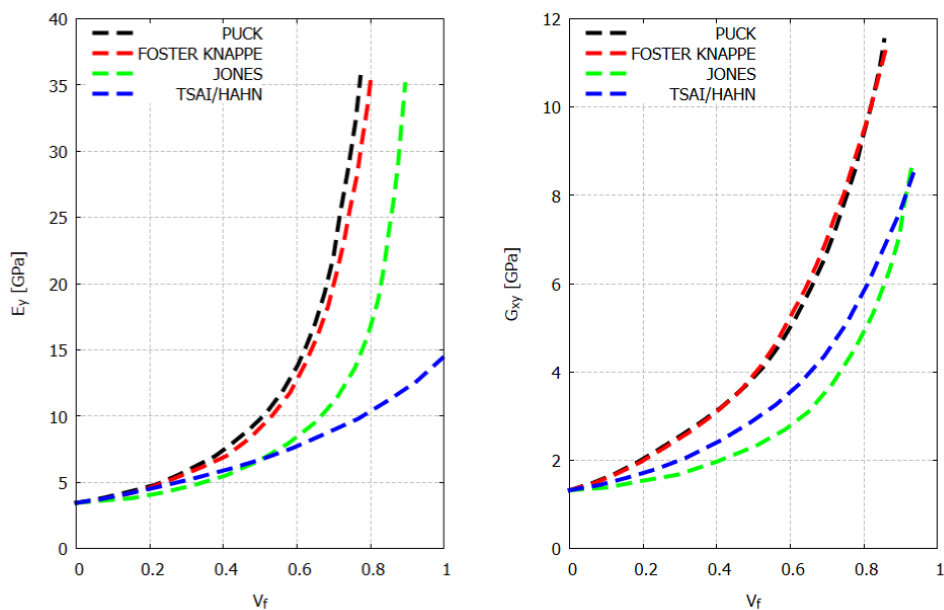


Figura 2.3. Confronto tra le teorie per il calcolo di  $E_2$  (sx) e di  $G_{12}$  (dx) [6]

## 2.2 Teorie per lo studio dei laminati

Per condurre lo studio e lo sviluppo di modelli validi per l'analisi dei materiali compositi, è possibile adottare diverse metodologie che contemplano considerazioni di natura generale e stabiliscono modalità specifiche per valutare gli stress e le deformazioni nei componenti. La selezione dell'approccio appropriato risulta quindi fondamentale per acquisire una comprensione più o meno esaustiva della distribuzione ricercata, in vista delle successive indagini sul laminato.

### 2.2.1 Equivalent single layer

Questo metodo è concepito per semplificare il processo di modellazione delle strutture laminate, riducendo il costo computazionale rispetto ai tradizionali approcci tridimensionali della *Finite Element Method (FEM)*.

L'idea fondamentale dell'*ESL* è di rappresentare un laminato complesso come un singolo strato equivalente con proprietà meccaniche appropriate. Questo strato equivalente cattura il comportamento globale del laminato in termini di rigidità e resistenza, facendo una media pesata dei vari strati e consentendo perciò di ridurre la complessità del modello (il numero di incognite è indipendente dal numero di layer).

Il difetto di questa teoria è la ridotta precisione di calcolo delle tensioni trasversali all'interfaccia tra i layer e delle risposte locali.

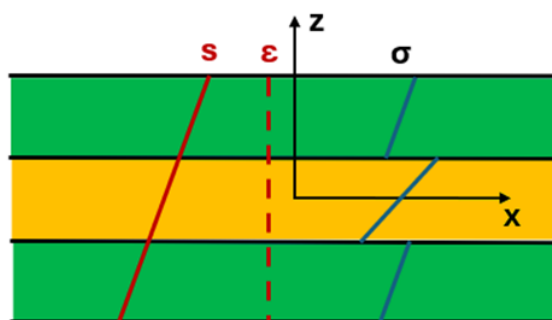


Figura 2.4. Modello ESL campo di spostamento lineare [9]

L'ipotesi alla base della teoria *ESL* è la seguente: il campo di spostamento e le sue derivate si presentano continui attraverso l'intero laminato, quindi di classe  $C_1$ , lineari o di ordine superiore, a seconda del tipo di modello utilizzato. Perciò si ottiene una tensione lineare, o di ordine superiore, a tratti ma non continua per via delle differenti rigidezze di ogni singolo strato. Un esempio è riportato in Figura 2.4 con un campo di spostamento lineare.

### 2.2.2 Layer Wise

Questa teoria, al contrario della prima, permette di considerare le caratteristiche uniche di ogni strato, offrendo una visione dettagliata del comportamento complessivo del composito e perciò analizzando come ogni strato contribuisce al comportamento globale del materiale.

La teoria Layer Wise fornisce previsioni più accurate rispetto ai modelli omogeneizzati e permette processi di calcolo di ottimizzazione, come ad esempio, la scelta della disposizione e dello spessore degli strati per migliorare le prestazioni strutturali e la resistenza.

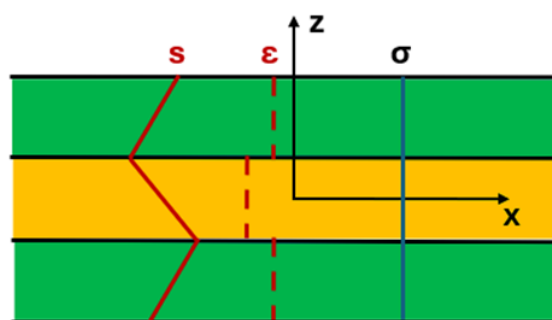


Figura 2.5. Modello LW campo di spostamento lineare [9]

In questo approccio, gli spostamenti mantengono la continuità all'interfaccia come nell'*ESL*, ma sono lineari, o di ordine superiore, a tratti. Ne consegue che le deformazioni presentano discontinuità tra gli strati, mentre le tensioni trasversali sono

costanti in tutto il laminato. Il campo di spostamenti è quindi di classe  $C_0$ . Un esempio è riportato in Figura 2.5 con un campo di spostamento lineare.

### 2.2.3 Zig-zag

Questo modello è stato sviluppato come alternativa al modello *ESL*, con l'obiettivo di risolvere i problemi analitici di quest'ultimo mantenendo basso il costo computazionale rispetto al modello *Layer Wise*. A tal fine, viene introdotta la funzione di *Murakami*, che comporta un'inversione di segno degli spostamenti all'interfaccia tra i vari strati, generando così un campo di spostamenti continuo a tratti, e di conseguenza una discontinuità nelle deformazioni nello spessore. Quest'ultima permette di compensare la discontinuità presente nel campo di tensioni, riducendo in modo significativo l'errore di approssimazione dei risultati.

Funzione di *Murakami*:

$$(-1)^k \zeta_k u_z \quad (2.37)$$

### 2.2.4 Formulazioni

Tra le formulazioni utilizzabili in queste teorie si trovano diverse possibilità. Sono presentate in successione all'aumentare del livello di precisione nella definizione del campo di spostamenti e quindi nella valutazione degli stress e strain.

#### Classical lamination theory (CLT)

Questa teoria [36] segue quella della piastra di Kirchhoff (Eulero-Bernoulli nel caso trave) con il seguente campo di spostamenti:

$$\begin{cases} u_i(x, y, z) = u_i^0(x, y) - z u_{i,z}^0(x, y) \\ u_3(x, y, z) = u_3^0(x, y) \end{cases} \quad (2.38)$$

Con  $i = 1, 2$  oppure  $i = x, y$  e  $\beta = z$

Le ipotesi si basano sul fatto che un segmento ortogonale al piano medio resta tale anche a deformazione avvenuta, senza cambiare la sua lunghezza (Figura 2.6). Ne consegue che gli scorrimenti trasversali fuori dal piano  $\gamma_{xy}$  e  $\gamma_{xz}$  e la deformazione normale  $\epsilon_{zz}$  sono nulli.

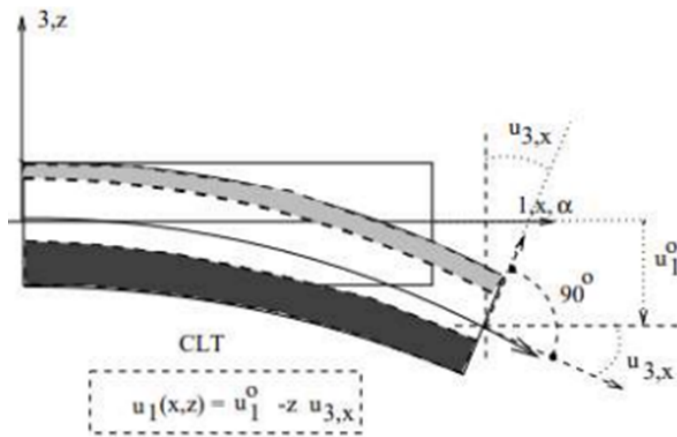


Figura 2.6. Assunzioni della teoria *CLT* [10]

### First-order Shear Deformation Theory (FSDT)

Tale teoria [37] segue la teoria della piastra di Reissner-Mindlin con il seguente campo di spostamento:

$$\begin{cases} u_i(x, y, z) = u_i^0(x, y) - z\phi_i(x, y) \\ u_3(x, y, z) = u_3^0(x, y) \end{cases} \quad (2.39)$$

Con  $\phi_i = u_{3i} - \gamma_{3i}$ ,  $i = 1, 2$  oppure  $i = x, y$  e  $3 = z$

In questa circostanza l'ipotesi di ortogonalità decade (Figura 2.7), perciò in questo modello vengono considerate le deformazioni a taglio fuori dal piano  $\gamma_{xy}$  e  $\gamma_{xz}$  diverse da zero, mentre la deformazione normale  $\epsilon_{zz}$  rimane nulla.

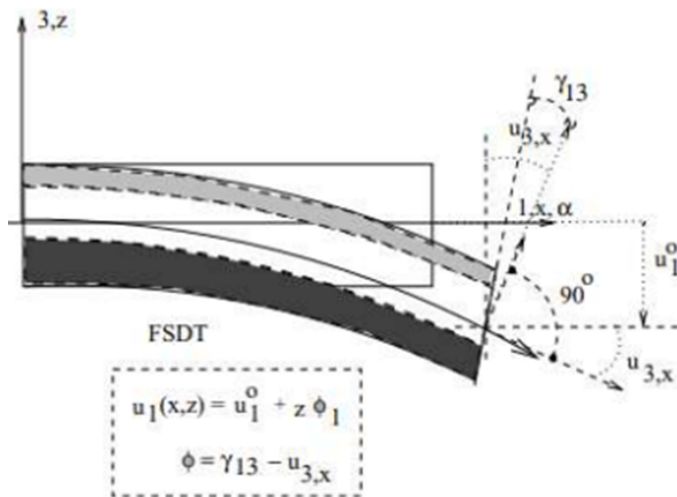


Figura 2.7. Assunzioni della teoria *FSDT* [10]

### Higher-order Shear Deformation Theories (HOT)

Sono modelli di grado superiore e perciò più complessi (Figura 2.8). La formulazione generale dello spostamento è la seguente:

$$u_i(x, y, z) = u_i^0(x, y) + z u_{i+1}(x, y) + z^2 u_{i+2}(x, y) + \dots + z^N u_{i+N}(x, y) \quad (2.40)$$

dove  $N$  è l'ordine dell'espansione.

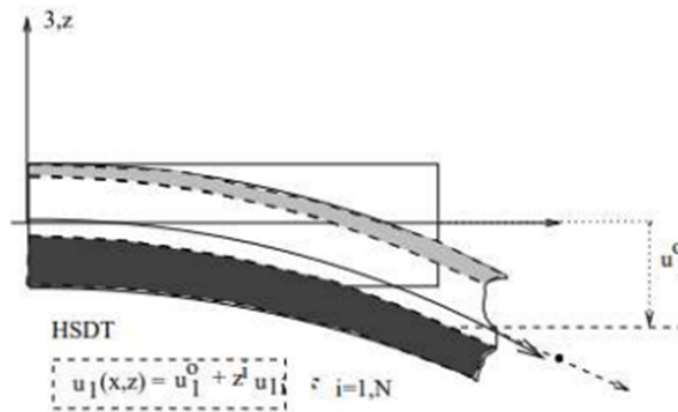


Figura 2.8. Assunzioni della teoria *HSDT* [10]

Per la teoria *ESL* sarà sufficiente applicare una di queste formulazioni sul campo di spostamento dell'intero laminato, mentre per *LW* e *HSDT* è possibile farlo su tutti i  $k$ -esimi strati (viene posto ad apice il numero  $k$ -esimo per specificare a quale strato ci si riferisce).

## 2.3 Criteri di Failure

La rottura di un materiale viene determinata attraverso un confronto tra lo stato di sollecitazione presente al suo interno e un valore massimo ammissibile, il quale deriva principalmente da prove sperimentali e rappresenta un parametro cruciale per la progettazione e l'analisi di affidabilità e sicurezza dei materiali. Al contrario dei materiali isotropi, quelli ortotropi presentano resistenza e comportamento dipendenti dall'orientamento delle sollecitazioni applicate.

I parametri specifici attraverso i quali si valuta la resistenza sono la resistenza a trazione longitudinale, trasversale, a compressione longitudinale, trasversale e a taglio. Nel contesto della ricerca e dell'analisi dei materiali compositi, sono stati sviluppati diversi criteri di failure, ognuno basato su principi guida specifici, al fine di prevedere rotture macroscopiche all'interno del laminato. Si distinguono in base al fatto che siano o meno interattivi, cioè se si considera o meno la compresenza e interazione di diverse sollecitazioni all'interno del materiale in questione.

Inoltre, un'ulteriore distinzione viene fatta in base alla finalità di studio, se all'interno di ogni lamina (criteri intra-laminari) o all'interfaccia fra queste (criteri inter-laminari).

### 2.3.1 Massima tensione e massima deformazione

Questi criteri sono definiti non-interattivi poichè confrontano la tensione o la deformazione presente lungo ciascuna direzione del riferimento cartesiano del materiale con i rispettivi valori limite ammissibili: la rottura si verifica quando uno qualsiasi di questi parametri supera il corrispondente limite, anche individualmente.

Nel caso di **massima tensione** abbiamo:

$$\sigma_{11} \geq X_T \quad \text{oppure} \quad \sigma_{11} \leq -X_C \quad (2.41)$$

$$\sigma_{22} \geq Y_T \quad \text{oppure} \quad \sigma_{22} \leq -Y_C \quad (2.42)$$

$$\tau_{12} \geq S_L \quad (2.43)$$

dove  $\sigma_{11}$  e  $\sigma_{22}$  sono gli stress normali nel piano,  $\tau_{12}$  lo sforzo di taglio nel piano,  $X_T$  e  $X_C$  sono i limiti a tensione e compressione in direzione della fibra, mentre  $Y_T$  e  $Y_C$  in direzione perpendicolare alla fibra e  $S_L$  la resistenza a taglio longitudinale.

Allo stesso modo nel caso di **massima deformazione** abbiamo:

$$\epsilon_{11} \geq \epsilon_T \quad \text{oppure} \quad \epsilon_{11} \leq -\epsilon_C \quad (2.44)$$

$$\epsilon_{22} \geq \epsilon_T \quad \text{oppure} \quad \epsilon_{22} \leq -\epsilon_C \quad (2.45)$$

$$\gamma_{12} \geq \gamma_L \quad (2.46)$$

dove  $\epsilon_{11}$  e  $\epsilon_{22}$  sono le deformazioni nel piano,  $\gamma_{12}$  è lo scorrimento angolare a taglio nel piano,  $\epsilon_T$  e  $\epsilon_C$  sono i limiti a deformazione in trazione e compressione e  $\gamma_L$  il limite di scorrimento a taglio.

Sono criteri molto semplici e per questo presentano molti limiti nel considerare in modo globale le sollecitazioni applicate al materiale.

### 2.3.2 Polinomiali

Questi criteri sono di tipo interattivo e intra-laminari, i quali utilizzano polinomi di secondo ordine o superiore, dedotti da risultati di prove sperimentali, per definire l'indice di rottura. Fanno parte di questo gruppo i criteri di *Tsai-Wu*, *Tsai-Hill*, *Azzi-Tsai* e *Hoffman* e la loro formulazione generale è la seguente:

$$F_1\sigma_{11} + F_2\sigma_{22} + F_3\sigma_{33} + F_{11}\sigma_{11}^2 + F_{22}\sigma_{22}^2 + F_{33}\sigma_{33}^2 + 2F_{12}\sigma_{11}\sigma_{22} + 2F_{23}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2F_{13}\sigma_{11}\sigma_{33} + F_{44}\tau_{13}^2 + F_{55}\tau_{23}^2 + F_{66}\tau_{12}^2 \geq 1 \quad (2.47)$$

Inoltre, deve essere rispettata la seguente disuguaglianza:

$$F_{ii}F_{jj} - F_{ij}^2 \geq 0 \quad (2.48)$$

I coefficienti davanti ai termini tensionali sono suddivisibili in termini lineari  $F_i$ , relativi alla direzione dello stress, e quadratici  $F_{ij}$ , relativi alla forma ellissoidale della curva rappresentativa dello stato tensionale nella lamina.

In Tabella 2.2 sono riportate le formulazioni di questi coefficienti per tutti e quattro i criteri citati.

	Tsai-Wu	Tsai-Hill	Azzi-Tsai	Hoffman
$F_1$	$\frac{1}{X_T} - \frac{1}{X_C}$	0	0	$\frac{1}{X_T} - \frac{1}{X_C}$
$F_2$	$\frac{1}{Y_T} - \frac{1}{Y_C}$	0	0	$\frac{1}{Y_T} - \frac{1}{Y_C}$
$F_3$	$\frac{1}{Z_T} - \frac{1}{Z_C}$	0	0	$\frac{1}{Z_T} - \frac{1}{Z_C}$
$F_{12}$	$-\frac{1}{2\sqrt{X_T X_C Y_T Y_C}}$	$-\frac{1}{2}(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2})$	$-\frac{1}{X^2}$	$-\frac{1}{2}(\frac{1}{X_T X_C} + \frac{1}{Y_T Y_C} - \frac{1}{Z_T Z_C})$
$F_{13}$	$-\frac{1}{2\sqrt{X_T X_C Z_T Z_C}}$	$-\frac{1}{2}(\frac{1}{X^2} - \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2})$	0	$-\frac{1}{2}(\frac{1}{X_T X_C} - \frac{1}{Y_T Y_C} + \frac{1}{Z_T Z_C})$
$F_{23}$	$-\frac{1}{2\sqrt{Y_T Y_C Z_T Z_C}}$	$-\frac{1}{2}(-\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2})$	0	$-\frac{1}{2}(-\frac{1}{X_T X_C} + \frac{1}{Y_T Y_C} + \frac{1}{Z_T Z_C})$
$F_{11}$	$\frac{1}{X_T X_C}$	$\frac{1}{X^2}$	$\frac{1}{X^2}$	$\frac{1}{X_T X_C}$
$F_{22}$	$\frac{1}{Y_T Y_C}$	$\frac{1}{Y^2}$	$\frac{1}{Y^2}$	$\frac{1}{Y_T Y_C}$
$F_{33}$	$\frac{1}{Z_T Z_C}$	$\frac{1}{Z^2}$	0	$\frac{1}{Z_T Z_C}$
$F_{44}$	$\frac{1}{S_{23}^2}$	$\frac{1}{S_{23}^2}$	0	$\frac{1}{S_{23}^2}$
$F_{55}$	$\frac{1}{S_{13}^2}$	$\frac{1}{S_{13}^2}$	0	$\frac{1}{S_{13}^2}$
$F_{66}$	$\frac{1}{S_{12}^2}$	$\frac{1}{S_{12}^2}$	$\frac{1}{S_{12}^2}$	$\frac{1}{S_{12}^2}$

Tabella 2.2. Formulazioni Coefficienti  $F$  presenti nei criteri di Tsai-Wu, Tsai-Hill, Azzi-Tsai e Hoffman [14]

Il limite dei criteri polinomiali è l'incapacità di identificare la metodologia di rottura del materiale, informazione fondamentale per lo studio del danneggiamento progressivo.

### 2.3.3 Hashin

Il criterio di Hashin [38] è di tipo interattivo, poichè esamina le interazioni tra tensioni longitudinali e trasversali, oltre alle tensioni di taglio, per valutare il modo di rottura, cioè se la rottura si verificherà in un determinato strato o nel composito nel suo complesso.

Per la sua formulazione è necessario identificare gli invarianti:

$$I_1 = \sigma_{11} \quad (2.49)$$

$$I_2 = \sigma_{22} + \sigma_{33} \quad (2.50)$$

$$I_3 = \sigma_{23}^2 - \sigma_2\sigma_{33} \quad (2.51)$$

$$I_4 = \sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 \quad (2.52)$$

$$I_5 = 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{13} - \sigma_{22}\sigma_{13}^2 + \sigma_{33}\sigma_{12}^2 \quad (2.53)$$

L'invariante  $I_5$  non viene considerata nell'analisi poichè il segno degli sforzi di taglio non influenza la rottura del laminato.

Caso generico di un materiale trasversalmente isotropo con approssimazione quadratica:

$$A_1I_1 + B_1I_1^2 + A_2I_2 + B_2I_2^2 + C_{12}I_1I_2 + A_3I_3 + A_4I_4 = 1 \quad (2.54)$$

I valori limite per ciascuna direzione sono i seguenti:

- $\sigma_A^+$  = tensione rottura a trazione in direzione delle fibre;
- $\sigma_A^-$  = tensione rottura a trazione in direzione delle fibre;
- $\sigma_T^+$  = tensione rottura a trazione in direzione perpendicolare alle fibre;
- $\sigma_T^-$  = tensione rottura a compressione in direzione perpendicolare alle fibre;
- $\tau_T$  = tensione di rottura di taglio in direzione trasversale;
- $\tau_A$  = tensione di rottura di taglio in direzione assiale.

Si distinguono due modi di rottura del composito unidirezionale in *fiber mode* e *matrix mode*, cioè per rottura delle fibre o della matrice, ciascuna a trazione o compressione.

I due casi sono mostrati in Figura 2.9: nel primo, la rottura avviene nel piano perpendicolare alle fibre  $x_2, x_3$  e gli stress responsabili sono  $\sigma_{11}, \sigma_{12}$  e  $\sigma_{13}$ ; mentre nel secondo, la rottura avviene parallelamente alle fibre a causa delle tensioni  $\sigma_{nn}, \sigma_{nt}$  e  $\sigma_{n1}$ .



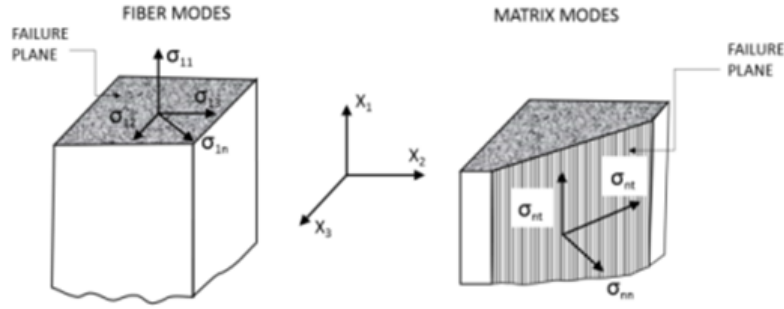


Figura 2.9. *Fiber mode* (sx) e *Matrix mode* (dx) per una lamina unidirezionale [11]

- **Fiber mode**

$$A_f \sigma_{11} + B_f \sigma_{11}^2 + \frac{1}{\tau_A^2} (\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2) = 1 \quad (2.55)$$

- **Matrix mode**

$$A_m (\sigma_{22} + \sigma_{33}) + A_m (\sigma_{22} + \sigma_{33})^2 + \frac{1}{\tau_T^2} (\sigma_{22}^2 - \sigma_{22} \sigma_{33}) + \frac{1}{\tau_A^2} (\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2) = 1 \quad (2.56)$$

Nel caso bidimensionale la formulazione si semplifica come segue nella Tabella 2.3: i termini  $X$  e  $Y$  rappresentano gli ammissibili per compressione e tensione nelle direzioni principali della lamina,  $S$  i limiti per lo sforzo di taglio nei piani di scorrimento e  $Z$  il limite per lo stress in direzione trasversale.

	<b>Fibra</b>	<b>Matrice</b>
<b>Trazione</b>	$\left(\frac{\sigma_{11}}{X_T}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S_{12}}\right)^2 \geq 1$ se $\sigma_{11} > 0$	$\left(\frac{\sigma_{22}}{Y_T}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S_{12}}\right)^2 \geq 1$ se $\sigma_{22} > 0$
<b>Compressione</b>	$-\frac{\sigma_{11}}{X_C}$ se $\sigma_{11} < 0$	$\left(\frac{\sigma_{22}}{S_{23}}\right)^2 + \left[\left(\frac{Y_C}{2S_{23}}\right)^2 - 1\right] \frac{\sigma_{22}}{Y_C} + \left(\frac{\tau_{12}}{S_{12}}\right)^2 \geq 1$ se $\sigma_{22} < 0$

Tabella 2.3. Formulazioni Hashin nel caso bidimensionale per *Fiber* e *Matrix mode*

### 2.3.4 Puck

Il criterio di rottura di *Puck* [39] è nato partendo dal precedente criterio e migliorandone i seguenti aspetti: ha la capacità di considerare distintamente i meccanismi di rottura delle fibre e della matrice come quello di *Hashin*, ma in questo caso facendo riferimento alle proprietà di queste ultime e non dell'intera lamina; per la rottura

della matrice è ora possibile avere tre condizioni di carico, cioè la tensione trasversale (*modo A*), la compressione trasversale moderata (*modo B*) e la compressione trasversale estesa (*modo C*); la caratterizzazione degli angoli variabili del piano di rottura è un'ulteriore innovazione per la compressione e studio di quest'ultima.

Le formulazioni son riportate in Tabella 2.4:

Fibre	
<b>A trazione</b>	$\frac{1}{\epsilon_{1T}} (\epsilon_1 + \frac{\nu_{f12}}{E_{f1}} m_{\sigma f} \sigma_{22}) \geq 1$
<b>A Compressione</b>	$\frac{1}{\epsilon_{1C}}  (\epsilon_1 + \frac{\nu_{f12}}{E_{f1}} m_{\sigma f} \sigma_{22})  + (10\gamma_{21})^2 \geq 1$
Matrice	
<b>Modo A</b>	$\sqrt{(\frac{\tau_{21}}{S_{21}})^2 + (1 - p_{vp}^+ \frac{Y_T}{S_{21}})^2 (\frac{\sigma_{22}}{Y_T})^2} + p_{vp}^+ \frac{\sigma_{22}}{S_{21}} + \frac{\sigma_{11}}{\sigma_{11D}} \geq 1$
<b>Modo B</b>	$\frac{1}{S_{21}} (\sqrt{\tau_{21}^2 + (p_{vp}^- \sigma_{22})^2} + p_{vp}^- \sigma_{22}) + \frac{\sigma_{11}}{\sigma_{11D}} \geq 1$
<b>Modo C</b>	$\left[ \frac{\tau_{21}}{2(1+p_{vv}^+)S_{21}} + (\frac{\sigma_{22}}{Y_T})^2 \right] \frac{Y_T}{-\sigma_{22}} + \frac{\sigma_{11}}{\sigma_{11D}} \geq 1$

Tabella 2.4. Formulazioni *Puck*

Dove:

- $\epsilon_{1T}$  e  $\epsilon_1$  sono le deformazioni di rottura per tensione e compressione;
- $\epsilon_1$  è la deformazione normale per uno strato unidirezionale;
- $\nu_{f12}$  e  $E_{f1}$  sono il rapporto di Poisson e il modulo di Young della fibra;
- $m_{\alpha f}$  è il fattore di ingrandimento medio di stress nella direzione trasversale, *magnification factor*;
- $\sigma_{11}$  e  $\sigma_{22}$  sono gli sforzi nelle direzioni principale e trasversale;
- $\gamma_{21}$  e  $\tau_{21}$  rappresentano l'angolo di scorrimento e lo sforzo di taglio;
- $\sigma_{11D}$  è il valore dello sforzo che si avrebbe in caso di degradazione lineare;
- $p_{vp}^+$ ,  $p_{vp}^-$  e  $p_{vv}^-$  sono i parametri di inclinazione del piano di rottura.

Questi ultimi termini sono essenziali per definire il failure con questo criterio e per ricavarli occorrono molti esperimenti; per questo motivo, lo stesso *Puck* ha dimostrato che nel caso di compositi *GFRP* e *CFRP*, cioè compositi rinforzati rispettivamente con fibre di vetro e carbonio, questi parametri possono essere approssimati come in Tabella 2.5.

	$p_{vp}^+$	$p_{vp}^-$	$p_{vv}^-$
<b>GFRP</b>	0.25	0.30	0.20-0.25
<b>CFRP</b>	0.30	0.35	0.25-0.30

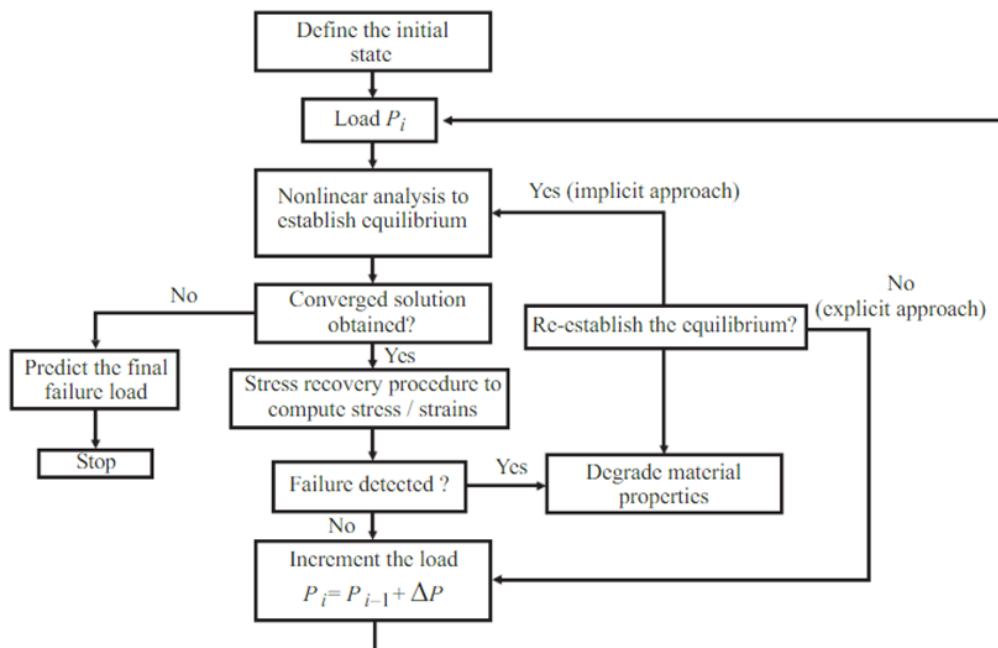
Tabella 2.5. Valori raccomandati per i parametri di inclinazione [31]

## 2.4 Meccanismi di danneggiamento

Il processo di degradazione del materiale è fondamentale nell'analisi del danneggiamento progressivo, soprattutto quando l'obiettivo è determinare il carico di rottura finale. Se viene rilevato un cedimento all'interno di uno strato del materiale, le proprietà di questo strato devono essere modificate seguendo un modello di degradazione del materiale.

I modelli di cedimento progressivo (*Progressive Failure Analysis, PFA*) presenti in letteratura sono molteplici: in fase di progetto si fa riferimento alle condizioni che portano al *First Ply Failure (FPF)* per il dimensionamento dei componenti, ma vi sono anche il *Material Property Degradation Method (MPDM)*, semplice e intuitivo, e il *Continuum Damage Mechanics (CDM)*, più complesso ed empirico.

Un esempio di come questo metodo di analisi può essere strutturato è illustrato in Figura 2.10.

Figura 2.10. Diagramma di flusso *Progressive Damage Analysis* [12]

### 2.4.1 First Ply Failure (FPF)

Utilizzando ad esempio il criterio di *Tsai-Hill*, l'indicazione della condizione di cedimento avviene quando una delle lamine raggiunge il valore unitario previsto dal criterio. In questa circostanza si parla di *First Ply Failure*, ovvero, con rottura di una sola lamina, si ipotizza che il laminato intero non sia più in grado di sopportare il carico.

Capitano situazioni in cui questa ipotesi non è verificata e il laminato mostra ancora la capacità di resistere a carichi, pur con alcune lamine rotte. Ovviamente i carichi devono essere redistribuiti sul laminato residuo, calcolando le rigidità equivalenti del laminato senza la lamina rotta. Un andamento tipico dopo la prima rottura è mostrato in Figura 2.11.

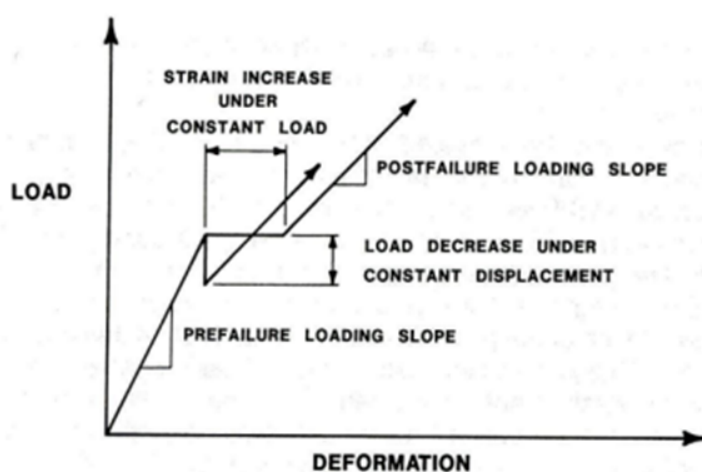


Figura 2.11. Comportamento dopo il *FPF* [6]

Si nota che la curva carico-deformazioni non è più lineare, bensì lineare a tratti, in quanto cambiano le rigidità caratteristiche del laminato. In funzione della configurazione di carico applicata, si determina quello che viene indicato come carico di rottura della prima lamina (*FPF*). Successivamente si determinano le caratteristiche del laminato degradato e si procede alla determinazione di rotture successive fino all'individuazione del carico al quale si rompe l'ultima lamina ed il laminato non riesce a sopportare altro carico, *Last Ply Failure (LPF)*.

*FPF* e *LPF* devono quindi essere confrontati con i carichi di progetto, come i *Design limit loads* (ovvero i carichi che possono verificarsi durante la vita operativa) ed i *Design ultimate loads* (ovvero i carichi ultimi che sono definiti tramite un fattore moltiplicativo pari a 1.5 dei precedenti).

Dal punto di vista della normativa si impone che la struttura non sia rotta per nessuno dei carichi limite e quindi entro i carichi limite non si devono verificare rotture. Nel caso in cui  $FPF < LPF$  (condizione non sempre verificata), si ottiene il grafico in Figura 2.12.

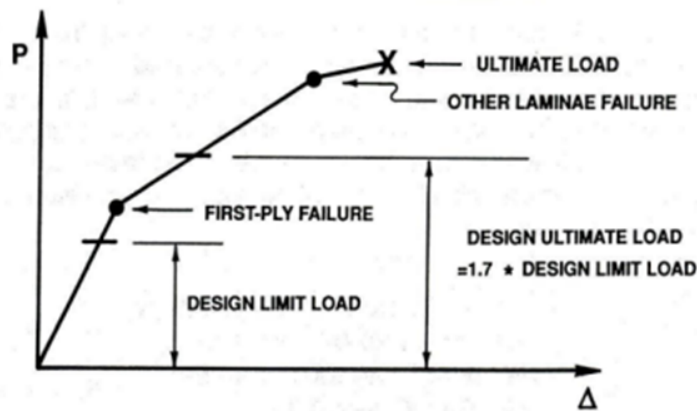


Figura 2.12. Grafico carico-deformazione per un laminato [13]

### 2.4.2 Material Property Degradation Method (MPDM)

Questo metodo di analisi si basa sulla possibilità di modellare il materiale riducendo progressivamente la sua rigidità, per via del danneggiamento progressivo, con l'utilizzo di fattori di degradazione costanti, chiamati *Stiffness Reduction Coefficient* (*SRC*).

*Tan et al* [40] elaborarono una soluzione per i laminati 2D forati in composito, sottoposti a trazione o compressione nel piano. Le proprietà del materiale ad essere abbassate per simulare la degradazione della rigidità sono tre:

$$E_{11} = D_1 E_{11}^0 \quad (2.57)$$

$$E_{22} = D_2 E_{22}^0 \quad (2.58)$$

$$G_{12} = D_6 G_{12}^0 \quad (2.59)$$

Il termine  $D$ , che rappresenta il fattore di riduzione, è un valore sufficientemente piccolo, ma diverso da 0, mentre le grandezze con l'apice '0' sono le proprietà del materiale non degradato.

Esistono tre categorie di degradazione nel *MPDM* presentate graficamente in Figura 2.13:

- **degradazione istantanea:** le caratteristiche meccaniche del materiale si riducono immediatamente a zero o quasi. Il fattore *SRC* è inferiore all'unità, ma comunque non troppo piccolo per evitare problemi nel calcolo della nuova matrice di rigidità. Con valori dell'ordine di  $10^{-3}$  si ottengono dei buoni risultati evitando problemi computazionali;
- **stress costante:** lo stress viene mantenuto costante nella lamina in cui è avvenuto il danneggiamento, affinché essa non possa più sostenere carichi;

- **degradazione graduale:** le caratteristiche meccaniche vengono ridotte moltiplicando per un valore compreso tra zero e uno ogni volta che si raggiunge il valore unitario previsto dal criterio scelto: in questo caso i fattori *SRC* sono moltiplici affinché il carico sopportabile dal materiale non passi in modo diretto dal massimo a zero, modellando il cedimento in modo più accurato ma con un costo computazionale maggiore.

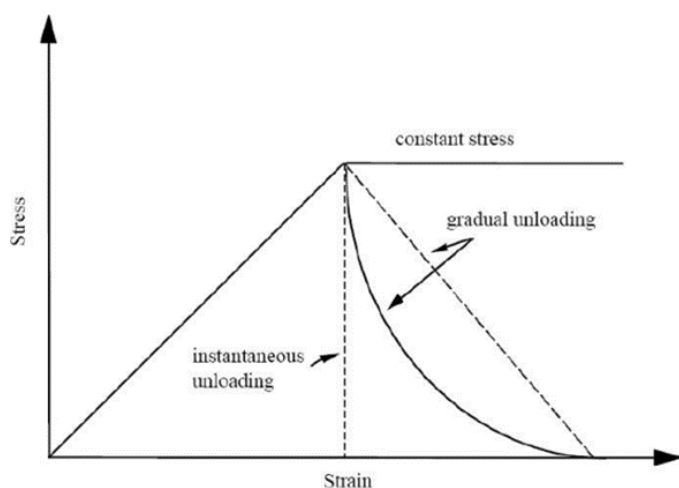


Figura 2.13. Categorie di degradazione nel *MPDM* [14]

Il primo a proporre la soluzione di degradazione graduale fu *Reddy* [15], il quale aveva osservato che, nel metodo del danneggiamento istantaneo, la sostituzione dell'elemento danneggiato con uno integro non considerava adeguatamente la reale dimensione della frattura e la grandezza della mesh utilizzata. In effetti, la prima può essere molto più piccola della seconda, rendendo ingiustificata la sostituzione completa dell'elemento, il quale invece potrebbe ancora sostenere carichi rilevanti. Sarebbe quindi più appropriato che le proprietà dell'elemento danneggiato si situassero tra quelle di un elemento integro e uno rotto, permettendo così all'elemento di continuare a sostenere carichi in funzione della sua rigidità residua.

Dopo aver argomentato a favore del danneggiamento progressivo, resta aperta la questione su quale valore di *SRC* garantisca un buon equilibrio tra accuratezza dei risultati e costo computazionale. Infatti, con valori molto bassi di *SRC*, il costo computazionale sarebbe ridotto ma si perderebbe la gradualità del danneggiamento; mentre valori più vicini a uno aumenterebbero significativamente il costo computazionale, a causa dell'elevato numero di iterazioni necessarie per completare la rottura dell'elemento.

Per risolvere questo problema, *Reddy* ha analizzato tre diversi laminati di uguali dimensioni ma con orientamenti differenti degli strati, al fine di determinare il carico critico di rottura. Le prove sono state condotte utilizzando valori di *SRC* compresi tra  $10^{-6}$  e 0.8.

Come illustrato in Figura 2.14, per valori molto bassi di  $SRC$ , il carico critico diminuisce significativamente, poichè una degradazione completa dell'elemento comporta l'immediata redistribuzione dei carichi sul resto della struttura, accelerando il processo di rottura. Con l'aumento del fattore di degradazione, il carico ultimo cresce, raggiungendo valori che si discostano del 10% dai risultati sperimentali. In particolare, i risultati si stabilizzano per valori di  $SRC$  intorno a 0.5, che può essere quindi considerato ottimale per l'analisi di danneggiamento con degradazione graduale.

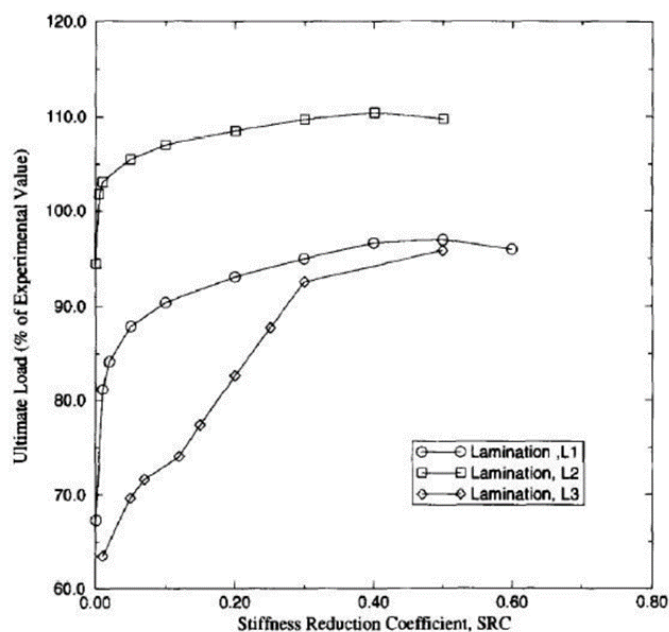


Figura 2.14. Effetto del parametro  $SRC$  sul carico di rottura finale [15]

### 2.4.3 Continuum Damage Mechanics (CDM)

La  $CDM$  è un approccio teorico più avanzato e accurato per modellare il comportamento dei materiali durante il processo di danneggiamento.

L'idea fondamentale è il fatto di considerare il materiale come un continuo, cioè un corpo che può essere descritto da grandezze continue come tensione, deformazione e danneggiamento. Quest'ultimo è rappresentato mediante delle variabili di stato, che indicano lo stato di deterioramento del materiale in un determinato punto. Queste variabili possono essere di diversi tipi, come scalari o tensoriali, a seconda della natura del danno e del modo in cui influisce sulle proprietà materiali e la formulazione varia a seconda del criterio di cedimento adottato e del tipo di valutazione desiderata.

Un esempio di questo approccio è illustrato in Figura 2.15.

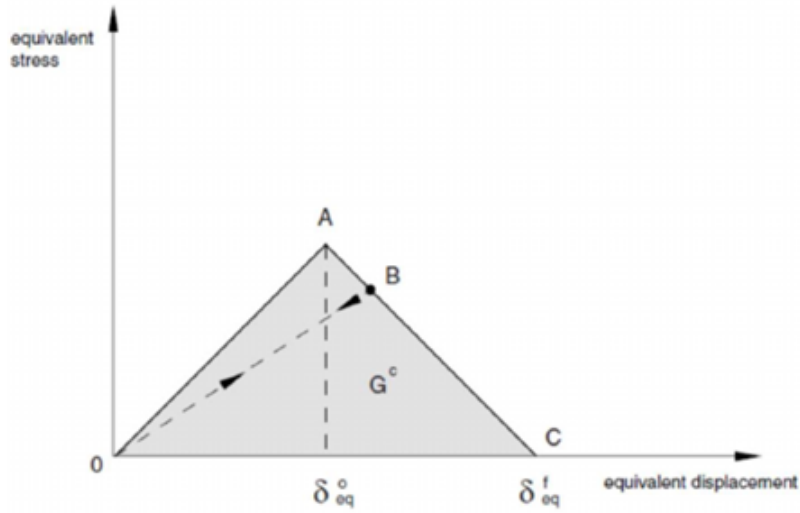


Figura 2.15. Evoluzione lineare del danno [16]

Il valore di stress aumenta fino a raggiungere o superare il limite ammissibile, rappresentato dal punto A e dallo spostamento  $\delta_{eq}^0$ . Da questo momento, il danneggiamento interno deve essere incluso nelle equazioni costitutive del materiale, fino a raggiungere lo spostamento limite prima della rottura,  $\delta_{eq}^f$ . L'energia assorbita dal materiale fino alla rottura è pari alla tenacità a frattura  $G^C$ , ovvero capacità di un materiale di assorbire energia prima di fratturarsi in modo fragile.

La formulazione del danneggiamento è l'equazione 2.60 (graficamente in figura 2.16) e deve essere utilizzata sia per le fibre che per la matrice, sia a trazione che compressione.

$$d = \frac{\delta_e^f (\delta_{eq} - \delta_{eq}^0)}{\delta_{eq} (\delta_{eq}^f - \delta_{eq}^0)} \quad (2.60)$$

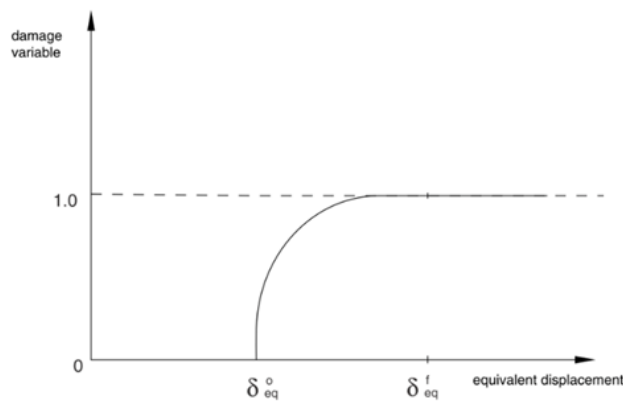


Figura 2.16. Danneggiamento in funzione dello spostamento equivalente [17]



Inoltre, in questo contesto Matzenmiller, Lubliner e Taylor [41] svilupparono un modello noto come metodo *MLT*. Questo approccio utilizza una funzione di Weibull per rappresentare la distribuzione statistica dei difetti e dei cedimenti all'interno del materiale. In questo modello viene introdotto un parametro,  $m$ , che agisce come fattore di controllo sulla densità di energia di deformazione in un determinato punto del materiale, influenzando così l'evoluzione della variabile di danno  $d$ :

$$d_{MLT} = 1 - e^{-\frac{1}{me}(\frac{\epsilon_I}{\epsilon_{f,I}})^m} \quad (2.61)$$

Con  $\epsilon_I$  che rappresenta la deformazione nella componente  $I$  e  $\epsilon_{f,I}$  la deformazione di rottura per la componente  $I$ .



## Capitolo 3

# FORMULAZIONE UNIFICATA DI CARRERA (CUF)

In questo capitolo viene descritta più dettagliatamente *la Formulazione Unificata di Carrera*, spiegando le scelte effettuate e i modelli di analisi implementati nel programma di riferimento *Mul2*, software sviluppato al Politecnico di Torino, il quale viene utilizzato come plug-in di altri software per l'analisi strutturale, quali *Abaqus*. Successivamente, si presenta una possibile alternativa per lo studio del danneggiamento progressivo utilizzando Hashin 3D e Puck, al fine di sostituire il codice attualmente in uso (CODAM2) con l'integrazione della subroutine Hashin + Puck.

### 3.1 Defnizione della teoria

*La Formulazione Unificata di Carrera (CUF)* è una teoria avanzata per l'analisi strutturale, che permette di modellare strutture complesse attraverso un approccio unificato.

La forza del modello *CUF* è il fatto di poter integrare strutture trave, piastra e solido in un'unica formulazione matematica, di fatti il campo di spostamento è sempre il medesimo (Equazione 3.1). Ciò ci consente di scegliere il livello di approssimazione e la complessità del modello in base alle esigenze specifiche dell'analisi. Questo approccio flessibile migliora l'efficienza computazionale e la precisione dei risultati. Il sistema di riferimento utilizzato per la formulazione di questa teoria è mostrato in Figura 3.1.

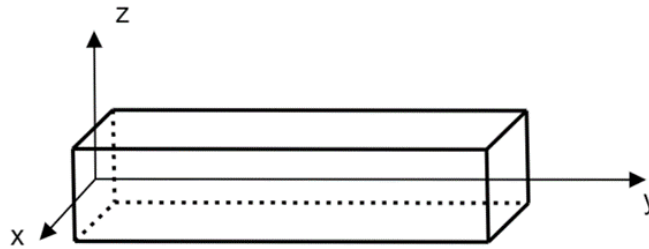


Figura 3.1. Sistema di riferimento utilizzato nella CUF [18]

$$u(x, y, z) = \sum_{\tau} F_{\tau} u_{\tau} = F_{\tau} u_{\tau} \quad (3.1)$$

Le  $F_{\tau}$  sono le funzioni di forma che modellano la struttura e dipendono dal modello usato:

$$1D \rightarrow F_{\tau}(x, y) = f(x, y) \quad (3.2)$$

$$2D \rightarrow F_{\tau}(z) = f(z) \quad (3.3)$$

$$3D \rightarrow F_{\tau} = 1 \quad (3.4)$$

Il pedice  $\tau$  varia da uno a  $M$ , cioè la variabile che determina il numero di termini dell'espansione. Questo ci permette, variando  $M$ , di ottenere infiniti modelli di una

stessa sezione.

Sono utilizzate principalmente due tipi di espansioni a seconda della circostanza: i *polinomi di Taylor* per teorie *ESL* e *polinomi di Lagrange* per teorie *LW* e *ESL*.

Scelte le funzioni di forma per modellare la sezione, la discretizzazione avviene mediante *Finite Element Method (FEM)*, utilizzando funzioni lagrangiane che dipendono da coordinate diverse in base alla formulazione utilizzata:

$$1D \rightarrow N_i(y) \quad (3.5)$$

$$2D \rightarrow N_i(x, y) \quad (3.6)$$

$$3D \rightarrow N_i(x, y, z) \quad (3.7)$$

Possiamo quindi ora formulare il campo di spostamenti per tutti e tre i tipi di modelli, trave, piastra e solido:

$$1D \rightarrow u = F_\tau(x, y)N_i(y)u_{\tau i} \quad (3.8)$$

$$2D \rightarrow u = F_\tau(z)N_i(x, y)u_{\tau i} \quad (3.9)$$

$$3D \rightarrow u = F_\tau N_i(x, y, z)u_{\tau i} \quad (3.10)$$

### 3.1.1 Espansioni di Taylor (TE)

L'espansione si basa sull'uso della serie di *Taylor* [42], con  $M$  termini polinomiali. Per esempio, l'espansione del primo ordine ( $M = 1$ ) generale è la seguente:

$$u_x = u_{x1} + zu_{x2} + zu_{x3} \quad (3.11)$$

$$u_y = u_{y1} + zu_{y2} + zu_{y3} \quad (3.12)$$

$$u_z = u_{z1} + zu_{z2} + zu_{z3} \quad (3.13)$$

Partendo da questo è possibile passare alla *CLT* applicando, ad esempio la teoria di Timoshenko, eliminando alcuni dei termini:

$$u_x = u_{x1} \quad (3.14)$$

$$u_y = u_{y1} + x\phi_z + z\phi_x \quad (3.15)$$

$$u_z = u_{z1} \quad (3.16)$$

Come detto precedentemente, questo tipo di espansioni sono applicabili solo con approcci *ESL*.

### 3.1.2 Espansioni di Lagrange (LE)

Questa espansione si basa sull'utilizzo dei *polinomi di Lagrange* [43], espressi con la scrittura  $L_n$ , dove  $n$  identifica il numero di nodi presenti all'interno del singolo elemento. Le funzioni di forma di *Lagrange* sono polinomi che assumono il valore 1 in un nodo specifico e 0 in tutti gli altri nodi dell'elemento.

Per i nostri studi faremo sempre riferimento a questo tipo di espansione poichè in questo caso non abbiamo alcun problema nel modellare secondo l'approccio *Layer-Wise* e inoltre si aggirano così anche alcune delle limitazioni intrinseche dei modelli *TE*, come l'inclusione di termini di ordine superiore, che mancano di significato fisico (le incognite sono caratterizzate da spostamenti puramente traslazionali).

Nello specifico vedremo la sua applicazione per il caso trave e piastra nei successivi paragrafi.

### 3.1.3 Modello trave

In questo paragrafo si presenta il modello trave mediante la formulazione *CUF* monodimensionale e la discretizzazione *FEM*, una sua schematizzazione è riportata in Figura 3.2:

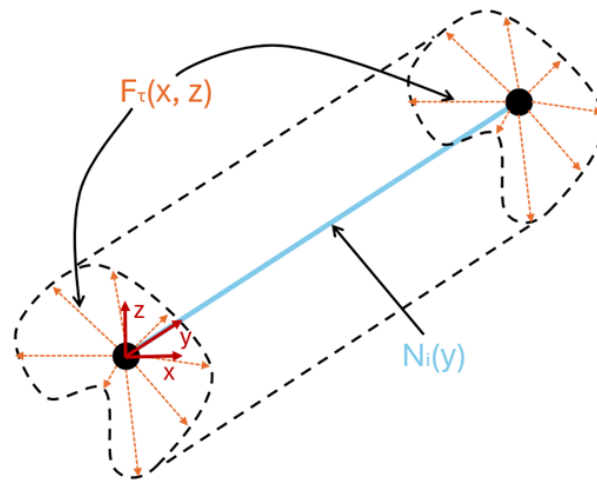


Figura 3.2. Modello CUF-1D [19]

La trave è rappresentata mediante elementi *CUF-1D* disposti lungo il suo asse longitudinale, dove ad ogni nodo è associata un'espansione della sezione trasversale corrispondente.

Gli elementi di possibile utilizzo sono rappresentati in Figura 3.3, 3.4 e 3.5 di seguito, con le rispettive formulazioni Lagrangiane dipendenti dalla sola coordinata assiale  $y$ :

### Elementi B2



Figura 3.3. Elemento B2 (linear)

$$N_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi), \quad N_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi), \quad \begin{cases} \xi_1 = -1 \\ \xi_2 = +1 \end{cases} \quad (3.17)$$

### Elementi B3



Figura 3.4. Elemento B3 (quadratic)

$$N_1 = \frac{1}{2}\xi(1 - \xi), \quad N_2 = \frac{1}{2}\xi(1 + \xi), \quad N_3 = -(1 - \xi)(1 + \xi), \quad \begin{cases} \xi_1 = -1 \\ \xi_2 = +1 \\ \xi_3 = 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

### Elementi B4



Figura 3.5. Elemento B4 (cubic)

$$N_1 = -\frac{9}{16}\left(\xi + \frac{1}{3}\right)\left(\xi - \frac{1}{3}\right)(\xi - 1), \quad N_2 = \frac{9}{16}\left(\xi + \frac{1}{3}\right)\left(\xi - \frac{1}{3}\right)(\xi + 1),$$

$$N_3 = \frac{27}{16}(\xi + 1)\left(\xi - \frac{1}{3}\right)(\xi - 1), \quad N_4 = -\frac{27}{16}(\xi + 1)\left(\xi + \frac{1}{3}\right)(\xi - 1), \quad \begin{cases} \xi_1 = -1 \\ \xi_2 = +1 \\ \xi_3 = -\frac{1}{3} \\ \xi_4 = \frac{1}{3} \end{cases} \quad (3.19)$$

Definiti i nodi si passa alla definizione delle rispettive espansioni, sempre lagrangiane ma questa volta in funzione delle coordinate x-z del piano di sezione. Queste sono presentate in Figura 3.6, 3.7 e 3.8:

### Espansione LE1

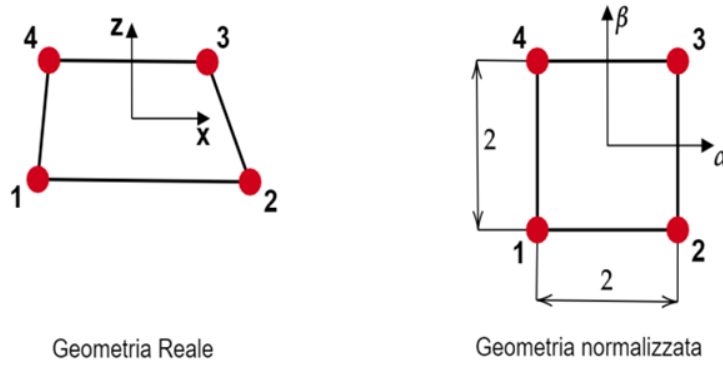


Figura 3.6. Espansione LE1 (linear) [18]

Sono elementi a 4 nodi, i quali presentano la stessa espressione, cioè un prodotto tra funzioni lineari nelle coordinate normalizzate  $\alpha$  e  $\beta$ :

$$F_\tau = \frac{1}{4}(1 + \alpha\alpha_\tau)(1 + \beta\beta_\tau), \quad \tau = 1, 2, 3, 4 \quad (3.20)$$

### Espansione LE2

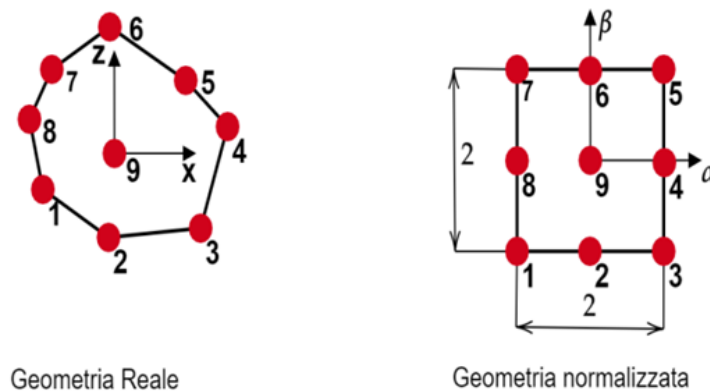


Figura 3.7. Espansione LE2 (quadratic) [18]

Sono elementi a 9 nodi, i quali presentano tre espressioni diverse in base alla loro posizione (nodi ai vertici, al centro dei lati e al centro dell'elemento) e sono rappresentate da funzioni quadratiche nelle coordinate normalizzate  $\alpha$  e  $\beta$ :



$$F_\tau = \frac{1}{4}(\alpha^2 + \alpha\alpha_\tau)(\beta^2 + \beta\beta_\tau), \quad \tau = 1, 3, 5, 7 \quad (3.21)$$

$$F_\tau = \frac{1}{2}\alpha_\tau(\alpha^2 + \alpha\alpha_\tau)(1 - \beta^2) + \frac{1}{2}\beta_\tau(\beta^2 + \beta\beta_\tau)(1 - \alpha^2), \quad \tau = 2, 4, 6, 8 \quad (3.22)$$

$$F_\tau = (1 - \alpha^2)(1 - \beta^2), \quad \tau = 9 \quad (3.23)$$

### Espansione LE3

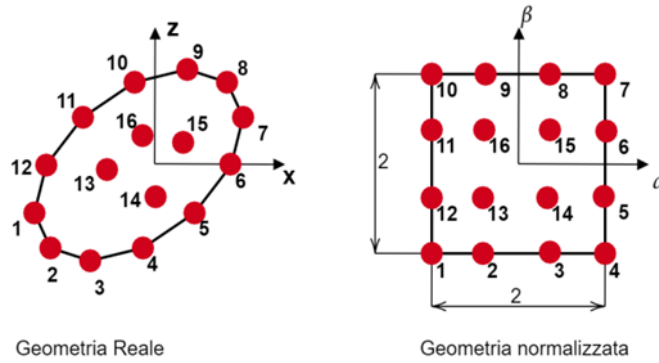


Figura 3.8. Espansione LE3 (cubic) [18]

Sono elementi a 16 nodi; anche in questo caso si avranno diverse espressioni in base alla posizione del nodo, in particolare quattro (nodi ai vertici, nodi al centro dei lati e al centro dell'elemento) con l'utilizzo di funzioni cubiche nelle coordinate normalizzate  $\alpha$  e  $\beta$ :

$$F_\tau = \frac{81}{256}(1 + \alpha\alpha_\tau)\left(\frac{1}{9} - \alpha^2\right)(1 + \beta\beta_\tau)\left(\frac{1}{9} - \beta^2\right), \quad \tau = 1, 2, 3, 4 \quad (3.24)$$

$$F_\tau = \frac{243}{256}(1 - \alpha^2)\left(\beta^2 - \frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{3} + 3\alpha\alpha_\tau\right)(1 + \beta\beta_\tau), \quad \tau = 2, 3, 8, 9 \quad (3.25)$$

$$F_\tau = \frac{243}{256}(1 - \beta^2)\left(\alpha^2 - \frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{3} + 3\beta\beta_\tau\right)(1 + \alpha\alpha_\tau), \quad \tau = 5, 6, 11, 12 \quad (3.26)$$

$$F_\tau = \frac{729}{256}(1 - \alpha^2)(1 - \beta^2)\left(\frac{1}{3} + 3\alpha\alpha_\tau\right)\left(\frac{1}{3} + 3\beta\beta_\tau\right), \quad \tau = 13, 14, 15, 16 \quad (3.27)$$

Possiamo quindi ottenere il campo di spostamento per il modello *CUF* monodimensionale come riportato nell'Espressione 3.8, dove le variabili da stabilire sono:

$$u_{\tau i} = \{u_{x,\tau i}, u_{y,\tau i}, u_{z,\tau i}\}^T \quad (3.28)$$

dove  $\tau = 1, \dots, M$  è il numero di termini polinomiali dell'espansione *LE*, nonchè il numero totale di nodi, ed  $i = 1, \dots, NE$  è il numero di nodi dell'elemento.

Perciò possiamo ora calcolare i gradi di libertà totali ( $DOFs$ ) del modello così assemblato:

$$DOFs = (3 * M) * [(N_E - 1) * NBE + 1] \quad (3.29)$$

dove NBE è il numero totale di elementi trave utilizzati.

### 3.1.4 Modello piastra

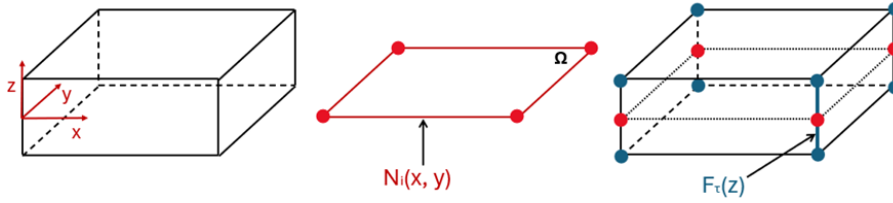


Figura 3.9. Esempio di modello CUF-2D (elemento Q4 in rosso e relativa espansione in blu)

I passaggi significativi per la creazione di un modello bidimensionale piastra sono riportati in Figura 3.9: in generale la piastra viene modellata mediante elementi  $CUF-2D$  nel piano medio  $\Omega$  e ad ogni nodo è associata un'espansione 1D lungo lo spessore.

Le formulazioni Lagrangiane dipendenti dalle coordinate  $x$  e  $y$  degli elementi  $2D$  di possibile utilizzo, sono graficamente le stesse delle Figure 3.6, 3.7 e 3.8, ma con  $\xi$  e  $\eta$  come coordinate normalizzate al posto di  $\alpha$  e  $\beta$ . Le espressioni sono le seguenti:

#### Elemento Q4

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i), \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (3.30)$$

#### Elemento Q9

$$N_i = \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi\xi_i)(\eta^2 + \eta\eta_i), \quad i = 1, 3, 5, 7 \quad (3.31)$$

$$N_i = \frac{1}{2}\xi_i(\xi^2 + \xi\xi_i)(1 - \eta^2) + \frac{1}{2}\eta_i(\eta^2 + \eta\eta_i)(1 - \xi^2), \quad i = 2, 4, 6, 8 \quad (3.32)$$

$$N_i = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2), \quad i = 9 \quad (3.33)$$

#### Elemento Q16

$$N_i = \frac{81}{256}(1 + \xi\xi_i)\left(\frac{1}{9} - \xi^2\right)(1 + \eta\eta_i)\left(\frac{1}{9} - \eta^2\right), \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (3.34)$$

$$N_i = \frac{243}{256}(1 - \xi^2)\left(\eta^2 - \frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{3} + 3\xi\xi_i\right)(1 + \eta\eta_i), \quad i = 2, 3, 8, 9 \quad (3.35)$$

$$N_i = \frac{243}{256}(1 - \eta^2)(\xi^2 - \frac{1}{9})(\frac{1}{3} + 3\eta\eta_i)(1 + \xi\xi_i), \quad i = 5, 6, 11, 12 \quad (3.36)$$

$$N_i = \frac{729}{256}(1 - \xi^2)(1 - \eta^2)(\frac{1}{3} + 3\xi\xi_i)(\frac{1}{3} + 3\eta\eta_i), \quad i = 13, 14, 15, 16 \quad (3.37)$$

Anche per l'espansione lungo lo spessore possiamo far riferimento alle Figure 3.3, 3.4 e 3.5 viste precedentemente ma con coordinata naturale  $\zeta$ , la quale rappresenta la posizione del nodo nel sistema naturale dell'elemento  $(\xi, \eta)$ . Le formulazioni sono riportate di seguito:

### Espansione LE1

$$F_1 = \frac{1}{2}(1 - \zeta), \quad F_2 = \frac{1}{2}(1 + \zeta), \quad \begin{cases} \zeta_1 = -1 \\ \zeta_2 = +1 \end{cases} \quad (3.38)$$

### Espansione LE2

$$F_1 = \frac{1}{2}\zeta(1 - \zeta), \quad F_2 = \frac{1}{2}\zeta(1 + \zeta), \quad F_3 = -(1 - \zeta)(1 + \zeta), \quad \begin{cases} \zeta_1 = -1 \\ \zeta_2 = +1 \\ \zeta_3 = 0 \end{cases} \quad (3.39)$$

### Espansione LE3

$$F_1 = -\frac{9}{16}(\zeta + \frac{1}{3})(\zeta - \frac{1}{3})(\zeta - 1), \quad F_2 = \frac{9}{16}(\zeta + \frac{1}{3})(\zeta - \frac{1}{3})(\zeta + 1),$$

$$F_3 = \frac{27}{16}(\zeta + 1)(\zeta - \frac{1}{3})(\zeta - 1), \quad F_4 = -\frac{27}{16}(\zeta + 1)(\zeta + \frac{1}{3})(\zeta - 1), \quad \begin{cases} \zeta_1 = -1 \\ \zeta_2 = +1 \\ \zeta_3 = -\frac{1}{3} \\ \zeta_4 = \frac{1}{3} \end{cases} \quad (3.40)$$

Il numero totale di gradi di libertà (*DOFs*) del modello piastra è ottenuto in questo modo ( $N_N$  numero totale nodi):

$$DOFs = (3 * M) * N_N \quad (3.41)$$

### 3.1.5 La matrice di rigidità, delle masse e il vettore dei carichi

Per costruire la matrice di rigidità, di massa e il vettore di carichi nodali globali del laminato viene richiamato il *Principio dei Lavori Virtuali (PLV)* il quale afferma quanto segue: “Condizione necessaria e sufficiente perchè una struttura permanga nel suo stato di equilibrio è che per ogni spostamento virtuale compatibile con i vincoli, il lavoro delle forze esterne sia uguale a quello delle forze interne” [44]. Ciò può essere tradotto come segue con dominio  $\Omega$  e bordo  $\Gamma$ :

$$\delta L_{ine} + \delta L_{int} - \delta L_{ext} = 0 \quad (3.42)$$

$$\int_{\Omega} \delta u_{\tau i} \rho \ddot{u}_i d\Omega + \int_{\Omega} \delta \epsilon_{ij} \sigma_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} \delta u_{\tau i} b_i d\Omega - \int_{\Gamma} \delta u_{\tau i} t_i d\Gamma \quad (3.43)$$

dove  $\sigma$  rappresenta il tensore degli stress,  $\epsilon$  il tensore delle deformazioni,  $u$  il vettore degli spostamenti,  $u$  la derivata seconda parziale di quest'ultimo,  $b$  e  $t$  i vettori dei carichi esterni applicati;  $\delta$  indica invece la variazione virtuale e  $L_{int}$ ,  $L_{ext}$  e  $L_{ine}$  rappresentano rispettivamente l'energia interna di deformazione, il lavoro svolto dai carichi esterni e il lavoro dovuto ai carichi inerziali.

#### Matrice di rigidità

Se si considera il solo lavoro dovuto all'energia di deformazione interna e alcune considerazioni fatte precedentemente sulla relazione sforzo-deformazione, si arriva a scrivere in forma matriciale che:

$$\delta L_{int} = \delta u_{\tau i}^T k_{ij\tau s} u_{sj} \quad (3.44)$$

dove  $k^{ij\tau s}$  è una matrice  $3 \times 3$  (Espressione 3.45) che rappresenta il nucleo fondamentale (FN) della matrice di rigidità per un modello CUF-1D e presenta la seguente forma:

$$k_{ij\tau s} = \begin{bmatrix} k_{ij\tau s}^{xx} & k_{ij\tau s}^{xy} & k_{ij\tau s}^{xz} \\ k_{ij\tau s}^{xy} & k_{ij\tau s}^{yy} & k_{ij\tau s}^{yz} \\ k_{ij\tau s}^{xz} & k_{ij\tau s}^{yz} & k_{ij\tau s}^{zz} \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

#### Matrice delle masse

Il calcolo della matrice delle masse è di particolare importanza nel momento in cui si esegue un'analisi modale. Per far ciò si passa a dalla variazione virtuale del lavoro delle forze inerziali scritta con l'approssimazione del campo di spostamenti bidimensionale:

$$\delta L_{ine} = \delta u_{sj} m_{ij\tau s} \ddot{u}_{\tau i} \quad (3.46)$$

La matrice  $m^{ij\tau s}$   $3 \times 3$  è il nucleo fondamentale (FN) della matrice delle masse dell'elemento del modello CUF-1D.

$$m_{ij\tau s} = \begin{bmatrix} m_{ij\tau s}^{xx} & m_{ij\tau s}^{xy} & m_{ij\tau s}^{xz} \\ m_{ij\tau s}^{xy} & m_{ij\tau s}^{yy} & m_{ij\tau s}^{yz} \\ m_{ij\tau s}^{xz} & m_{ij\tau s}^{yz} & m_{ij\tau s}^{zz} \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

### Vettore dei carichi

Nel medesimo modo possiamo ricavarci il vettore dei carichi nodali esprimendo la variazione del lavoro delle forze esterne come segue:

$$\delta L_{ext} = \delta u_{sj} p_{sj} \quad (3.48)$$

dove  $p_{sj}$  rappresenta il vettore dei carichi  $3 \times 1$ .

I nuclei fondamentali formulati precedentemente sono invarianti, ovvero le loro espressioni formali nel nucleo rimangono le stesse indipendentemente dalla scelta della funzione di forma o della funzione di espansione.

Per un insieme di elementi di trave generici di ordine  $p$  e funzione di espansione con  $M$  termini, l'assemblaggio globale viene ottenuto espandendo gli indici dei nuclei fondamentali  $\tau, s = 1, 2, \dots, M$  e  $i, j = 1, 2, \dots, p + 1$ .

Una volta definiti i nuclei fondamentali questi vengono assemblati, come in Figura 3.10, facendo variare i pedici per formare le matrici di rigidezza, di massa e vettore dei carichi globale.

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\tau sij} &= \sum_{n=1}^{n_{elem}} \sum_{i,j=1}^{p+1} \bigcup_{\tau,s=1}^M \mathbf{k}_{\tau sij} \\ \mathbf{M}_{\tau sij} &= \sum_{n=1}^{n_{elem}} \sum_{i,j=1}^{p+1} \bigcup_{\tau,s=1}^M \mathbf{m}_{\tau sij} \\ \mathbf{p}_{sj} &= \sum_{n=1}^{n_{elem}} \sum_{j=1}^{p+1} \bigcup_{s=1}^M \mathbf{p}_{sj} \end{aligned}$$

Figura 3.10. Assemblaggio matrici e vettori globali [20]

dove  $\Sigma$  è l'operatore di assemblaggio degli elementi finiti che somma il contributo corrispondente degli  $n$ -elementi,  $U$  è l'operatore di assemblaggio  $CUF$  che somma il contributo corrispondente in base all'ordine dell'elemento finito e alla teoria della struttura e  $K_{\tau sij}$ ,  $M_{\tau sij}$  e  $p_{\tau i}$  sono rispettivamente la matrice di rigidezza globale assemblata, la matrice di massa globale e il vettore di carico esterno globale. Una procedura di assemblaggio grafica è proposta in Figura 3.11.

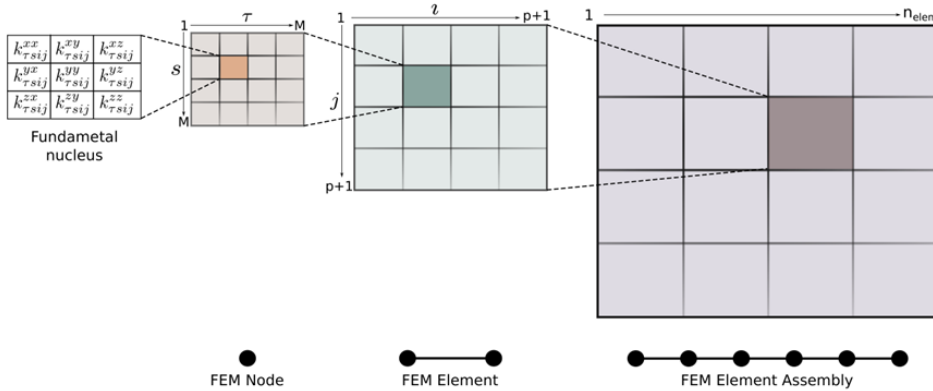


Figura 3.11. Assemblaggio grafico matrici globali [21]

### 3.1.6 Equazione di governo

Arrivati a questo punto possiamo richiamare l'Equazione di equilibrio 3.42, utilizzando le matrici assemblate globali degli elementi finiti di Figura 3.10:

$$M_{ij\tau s} u_{\tau i} + K_{ij\tau s} u_{\tau i} = P_{sj} \quad i, j = 1, \dots, p+1 \quad \tau, s = 1, \dots, M \quad (3.49)$$

È importante ricordare il fatto che la formulazione compatta espressa qui sopra è invariante rispetto alla scelta della funzione di forma e delle funzioni di espansione della sezione trasversale. Pertanto, la stessa implementazione numerica può produrre una classe di teorie strutturali in cui la scelta della funzione di espansione è un parametro libero.

## 3.2 Tipologie di analisi

Nel contesto dell'analisi strutturale, si ha la possibilità di esaminare sia casi di studio lineari che non lineari. Questi casi verranno esaminati in dettaglio attraverso simulazioni numeriche nei capitoli successivi. Quando si descrive un problema relativo alle strutture, si incontrano inevitabilmente delle non linearità, le quali emergono a causa della natura intrinseca dei materiali utilizzati e del loro comportamento sotto varie condizioni al contorno applicate.

Per tale motivo, trattando problemi legati agli impatti, dove la non linearità è introdotta dal contatto, l'attenzione si è poi spostata maggiormente sulle analisi non lineari.

In tal senso, è importante distinguere tra soluzioni implicite ed esplicite. Le soluzioni implicite sono caratterizzate da equazioni in cui la soluzione a ogni passo temporale dipende sia dallo stato al tempo corrente che da quello precedente; questo significa che per trovare la soluzione al tempo attuale, è necessario risolvere un sistema di equazioni che coinvolgono le variabili del tempo presente.

Al contrario, le soluzioni esplicite utilizzano equazioni in cui la soluzione a ogni passo temporale dipende solo dallo stato al tempo precedente; in altre parole, le variabili

al tempo attuale vengono calcolate direttamente dalle variabili al tempo precedente, senza la necessità di risolvere sistemi di equazioni simultanee.

Questo rende il metodo esplicito generalmente più semplice da implementare e a livello computazionale meno costoso per ogni singolo passo temporale, sebbene richieda un numero maggiore di passi temporali per garantire la stabilità e l'accuratezza della soluzione.

Le caratteristiche generali sono riportate in Tabella 3.1.

Caratteristica	Analisi Implicita	Analisi Esplicita
<b>Stabilità</b>	Generalmente elevata, consente passi temporali grandi	Dipende dal passo temporale, richiede passi piccoli
<b>Costo Computazionale</b>	Elevato per ogni passo temporale	Minore per passo temporale, ma molti più passi necessari
<b>Convergenza</b>	Può essere difficile da garantire con forti non linearità	Generalmente garantita con passi temporali adeguati
<b>Implementazione</b>	Complessa, richiede metodi iterativi	Relativamente semplice, aggiornamenti diretti
<b>Applicazioni Tipiche</b>	Simulazioni a lungo termine, problemi con grandi deformazioni	Problemi di breve durata, impatti, esplosioni
<b>Efficienza Computazionale</b>	Maggiore per simulazioni a lungo termine	Maggiore per problemi di breve durata

Tabella 3.1. Confronto tra analisi implicite ed esplicite

Nei prossimi paragrafi sono presentati alcuni esempi di questo tipo di analisi.

### 3.2.1 Problemi statici o quasi-statici

Nel caso si abbia a che fare con problemi statici o quasi-statici, lineari o no, si utilizzano, nella maggior parte dei casi, analisi implicite, come quella di *Newton-Raphson*. La forma compatta dell'equazione di governo non lineare, senza considerare i termini di natura dinamica, può essere espressa come:

$$K_{ij\tau s}^s u_{\tau i} = P_{sj} \quad (3.50)$$

Lo schema incrementale degli elementi finiti viene realizzato attraverso la parametrizzazione del carico esterno introducendo il fattore di carico  $\lambda_n$  riferito all'istante temporale  $t_n$ :

$$f_{int}(u) - \lambda_n p = 0 \quad (3.51)$$

dove  $n$  rappresenta il numero di step incrementale.

Il metodo *N-R* consente di convergere alla soluzione finale  $u_{n+1}$  attraverso una serie di iterazioni, considerando sempre la soluzione  $u$  allo step precedente, come da esempio in Figura 3.12. Le interazioni al suo interno continuano fin quando la differenza tra

il valore atteso e il valore approssimato non scende al di sotto di una certa tolleranza, per poi proseguire allo step di carico successivo.

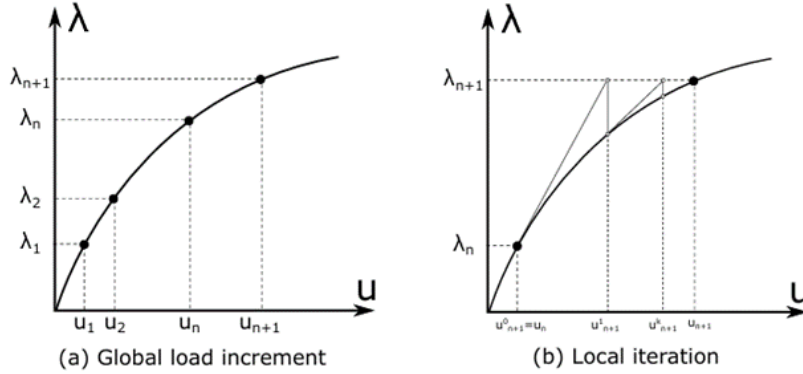


Figura 3.12. Schematizzazione del metodo N-R per uno step di carico [22]

Utilizzando il vettore soluzione nell'istante di tempo  $t_{n+1}$ , l'espansione in serie di Taylor del vettore delle forze interne, in funzione dell'incognita spostamento, è data da:

$$F_{int}(u_{n+1}^{k+1}) = F_{int}(u_{n+1}^k) + \frac{\partial F_{int}(u_{n+1}^k)}{\partial u_{n+1}^k} (u_{n+1}^{k+1} - u_{n+1}^k) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_{int}(u_{n+1}^k)}{\partial u_{n+1}^{k2}} (u_{n+1}^{k+1} - u_{n+1}^k)^2 + \dots \quad (3.52)$$

dove  $k$  si riferisce al numero di iterazione dello step incrementale corrente.

Quando si tronca la serie di Taylor al termine lineare, per via della staticità del problema, lo schema di *Newton-Raphson* per l'equazione di equilibrio incrementale linearizzata può essere formulato come segue:

$$F_{int}(u_{n+1}^{k+1}) = F_{int}(u_{n+1}^k) + \frac{\partial F_{int}(u_{n+1}^k)}{\partial u_{n+1}^k} \Delta u = F_{int}(u_{n+1}^k) + K_T \Delta u \quad (3.53)$$

dove  $k$  rappresenta l'indice di iterazione per ogni incremento,  $\Delta u$  lo spostamento incrementale e  $K^T$  la matrice di rigidità tangente ottenuta prendendo la derivata parziale della forza interna corrente rispetto alla soluzione corrente. Quest'ultima viene ricalcolata ad ogni iterazione per riuscire a garantire una convergenza quadratica asintotica.

Utilizzando la forma matriciale *CUF*, l'Equazione 3.53 può essere riscritta in questo modo:

$$K_{ij\tau s}^T \Delta u_{\tau i} = \phi_{sj}^{res} \quad (3.54)$$

dove  $\phi_{sj}^{res}$  denota il vettore residuo nodale delle forze sbilanciate.

Il processo iterativo continua fino a che la variazione nella soluzione non scenda al di sotto di una certa tolleranza (Espressione 3.55).



$$\frac{\|\Delta u_{n+1}^k\|_2}{\|\Delta u_{n+1}\|_2} \leq TOL \quad (3.55)$$

Il metodo  $N-R$  completo è oneroso a livello computazionale per via del totale ricalcolo della matrice  $K^T$  ad ogni iterazione (come mostrato in Figura 3.12), ciò non lo rende adatto a problemi con elevata non linearità, malgrado la sua convergenza quasi quadratica. Esistono diverse varianti del metodo (Newton stazionario, metodo delle secanti, Newton alle differenze) che possono essere utilizzate al posto della procedura classica in determinate situazioni per ottenere dei vantaggi di calcolo.

In Figura 3.13 è mostrato un diagramma di flusso sulla sequenza dell'analisi non lineare implicita nella  $CUF$ , utilizzando il metodo  $N-R$  completo.

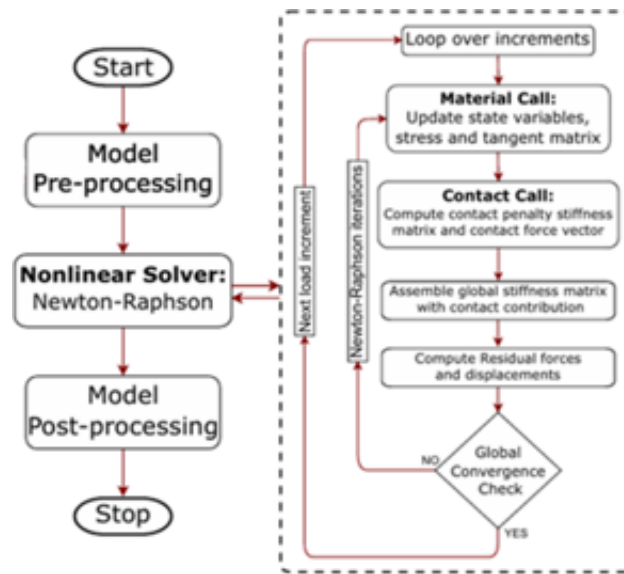


Figura 3.13. Diagramma di flusso che illustra la sequenza di passaggi del metodo  $N-R$  completo durante un'analisi implicita nella  $CUF$  [22]

### 3.2.2 Problemi dinamici

Quando entrano in gioco problemi di natura dinamica, cioè problemi dipendenti dalla variabile tempo, le analisi di tipo esplicito sono le più efficaci per determinare la soluzione. Queste fanno al caso nostro poichè il danneggiamento progressivo dei materiali compositi rientra in questa tipologia di problemi per via della sua natura fortemente non lineare. Di fatti, le tecniche di soluzione implicita per questo tipo di analisi sui compositi spesso incontrano problemi di convergenza, portando a una mancanza di soluzione.

L'equazione del moto per l'analisi dinamica può essere espressa nella forma matriciale  $CUF$  come:

$$M_{ij\tau s} \ddot{u}_{\tau i} + C_{ij\tau s} \dot{u}_{\tau i} + K_{ij\tau s} u_{\tau i} = P_{sj} \quad (3.56)$$

Si può ottenere una forma più compatta dell'Espressione 3.56, per ogni passo  $\Delta t$ :

$$M\ddot{u}^{t+\Delta t} = F_{ext}^{t+\Delta t} - F_{int}^{t+\Delta t} \quad (3.57)$$

$F_{ext}^{t+\Delta t}$  e  $F_{int}^{t+\Delta t}$  rappresentano rispettivamente i vettori dei carichi esterni ed interni (inerzia e smorzamento) al passo  $t + \Delta t$ .

La soluzione dell'equazione differenziale del secondo ordine può essere risolta mediante il metodo delle differenze centrali: si avvia il ciclo di calcolo inizializzando i valori di spostamento e delle sue due derivate prime, indicandole con  $u^0$ ,  $\dot{u}^0$  e  $\ddot{u}^0$ ; il calcolo del valore incognito di quest'ultime avviene al termine di ogni intervallo partendo dai loro valori ricavati al termine dell'intervallo precedente (il comportamento non lineare viene approssimato con una sequenza di sistemi lineari consecutivi).

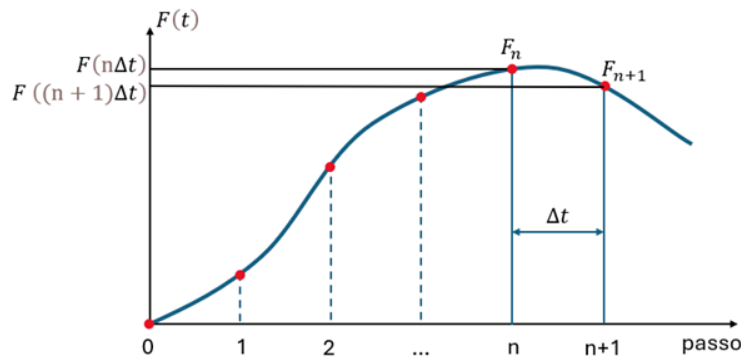


Figura 3.14. Schematizzazione del calcolo della risposta  $F(t)$  di un sistema non lineare con suddivisione in  $n$  passi di ampiezza  $\Delta t$

Le Formule di velocità 3.58 e accelerazione 3.59 sono ricavate dallo sviluppo in serie di Taylor della funzione spostamento (in avanti e all'indietro):

$$\dot{u}_n = \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2\Delta t} \quad (3.58)$$

$$\ddot{u}_n = \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{(\Delta t)^2} \quad (3.59)$$

Nel calcolo sono stati trascurati i termini di ordine superiore a  $(\Delta t)^2$ , ciò comporta un errore proporzionale a tale termine: minore è l'ampiezza del passo, maggiore sarà la precisione, a costo di un maggiore sforzo computazionale.

Il massimo  $\Delta t$  ammissibile per garantire la stabilità del metodo è dato dalla seguente equazione:

$$\Delta t_{critico} = \frac{2}{\omega_{MAX}} \quad (3.60)$$

dove  $\omega_{MAX}$  è la massima frequenza del sistema.

Dopo aver calcolato gli spostamenti, questi vengono utilizzati per aggiornare le deformazioni e, di conseguenza, i campi di stress. Dal tensore di stress aggiornato si

giunge al vettore delle forze interne  $F_{int}^{t+\Delta t}$  ed esterne  $F_{est}^{t+\Delta t}$ .

A ogni passo è necessaria l'inversione della matrice di massa  $M$  per il calcolo dell'accelerazione aggiornata:

$$\ddot{u}^{t+\Delta t} = M^{-1}(F_{est}^{t+\Delta t} - F_{int}^{t+\Delta t}) \quad (3.61)$$

L'operazione di inversione della matrice  $M$  può rapidamente diventare un grosso collo di bottiglia nell'analisi man mano che aumenta il numero di gradi di libertà (*DOFs*) del sistema. Questo problema viene risolto sostituendo la matrice di massa completa (consistente) con una versione semplificata, ovvero la matrice di massa 'lumped', che è una matrice diagonale e ciò la rende facilmente invertibile.

Questa si ottiene utilizzando il metodo della somma per righe, dove i termini diagonali sono calcolati secondo:

$$M_{ii}^{Lumped} = \sum_j M_{ij} \quad (3.62)$$

Lo schema riassuntivo di integrazione temporale esplicita che utilizza il metodo delle differenze finite centrali è sintetizzato nella Tabella 3.2. La Figura 3.15 presenta un diagramma di flusso che descrive il processo di soluzione attraverso l'integrazione temporale esplicita.

---

Inizializzazione di $u^0$ e $\dot{u}^0$
Valutazione della matrice $M$ 'Lumped'
Calcolo della velocità col metodo delle differenze centrali (Equazione 3.58)
Per ogni incremento temporale:
1) Valutazione del nuovo spostamento
2) Calcolo dell'incremento di spostamento
3) A ogni punto di integrazione calcolo della deformazione e stress aggiornati
4) Calcolo dei vettori forza
5) Calcolo della nuova accelerazione
6) Calcolo della nuova velocità con lo stesso metodo

---

Tabella 3.2. Schema di integrazione temporale a differenze centrate [32]

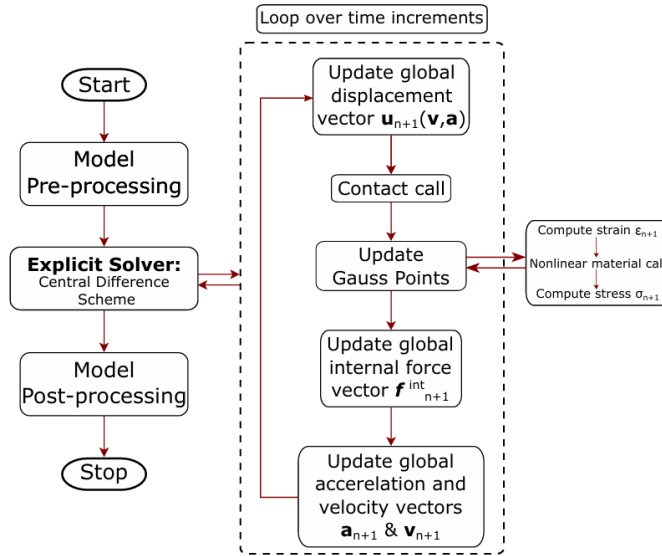


Figura 3.15. Diagramma di flusso di un'analisi esplicita nella CUF [22]

### 3.3 Modello di danneggiamento

Per rappresentare l'evoluzione del danneggiamento all'interno di ogni singola lamina, è possibile avvalersi di una varietà di modelli, tra questi il modello CODAM2 e il modello Hashin + Puck, il cui nome deriva dai criteri che ne guidano il funzionamento. Entrambi i modelli sono stati concepiti per condurre analisi focalizzate sul comportamento interlaminare e risultano particolarmente adatti per essere integrati nella struttura della CUF quando si trattano analisi esplicite.

#### 3.3.1 CODAM2

Il *CODAM2* [27], *Composite Damage Model*, implementato nella CUF, è un metodo utilizzato per ricreare il danneggiamento progressivo per la macro e meso scala. Il danno si presenta nel momento in cui l'indice di failure  $F$  del criterio di rottura scelto raggiunge l'unità: nella direzione 1, cioè quella della fibra, il criterio è quello del massimo stress, valutato nel sistema materiale; nella direzione 2, cioè nella direzione trasversale alla fibra, si utilizza il criterio di Hashin 2D. Le formulazioni compressive sono state riportate nel capitolo precedente nell'Equazione 2.41 e nella Tabella 2.3. Le misure di deformazione equivalente nelle direzioni longitudinale e trasversale sono definite come:

$$\epsilon_1^{eq} = |\epsilon_{11}| \quad (3.63)$$

$$\epsilon_2^{eq} = \sqrt{\gamma_{12}^2 + \epsilon_{22}^2} \quad (3.64)$$

Le misure di stress equivalente corrispondenti sono date da:

$$\sigma_1^{eq} = \sigma_{11} \quad (3.65)$$

$$\epsilon_2^{eq} = \frac{\tau_{12}\gamma_{12} + \sigma_{22}\epsilon_{22}}{\sqrt{\gamma_{12}^2 + \epsilon_{22}^2}} \quad (3.66)$$

Raggiunta la condizione di innesco del danno ( $F_\alpha = 1$ ), le deformazioni sono calcolate nel seguente modo:

$$\epsilon_\alpha^i = \epsilon_\alpha^{eq}|_{F_\alpha=1}, \quad \alpha = 1, 2 \quad (3.67)$$

dove gli indici 1 e 2 si riferiscono rispettivamente al danno dominato da fibre e matrice nello strato  $i$ -esimo.

Arrivando a saturazione del danno, le deformazioni, che sono quindi massime, vengono determinate nella seguente formula:

$$\epsilon_1^s = \frac{2g_1^f}{X_C} \quad e \quad \epsilon_2^s = \frac{2g_2^f}{T} \quad con \quad T = \sigma_2^{eq}|_{F_2=1} \quad (3.68)$$

dove  $g_1^f$  e  $g_2^f$  sono le densità di energia di frattura e  $T$  è il valore massimo della tensione  $\sigma_2^{eq}$ .

La dipendenza spuria dalla mesh viene ridotta scalando l'energia di frattura ottenuta sperimentalmente  $G_\alpha^f$  con un parametro di lunghezza caratteristico dell'elemento, in conformità con la teoria della banda di frattura:

$$g_\alpha^f = \frac{G_\alpha^f}{l^*}, \quad con \quad \alpha = 1, 2 \quad e \quad l^* = V_{GP}^{\frac{1}{3}} \quad (3.69)$$

dove  $l^*$  corrisponde al parametro di lunghezza equivalente della mesh e  $V_{GP}$  è il volume elementare costruito secondo i punti di Gauss. Le variabili  $\omega_1$  e  $\omega_2$  quantificano il danno, rispettivamente, delle fibre e della matrice, note le tensioni e le deformazioni prima e dopo il danneggiamento. Queste ultime sono calcolate come segue:

$$\omega_\alpha = \left( \frac{\langle \epsilon_\alpha^{eq} - \epsilon_\alpha^i \rangle}{\epsilon_\alpha^s - \epsilon_\alpha^i} \right) \left( \frac{\epsilon_\alpha^s}{\epsilon_\alpha^{eq}} \right) \quad con \quad \alpha = 1, 2 \quad (3.70)$$

dove  $\langle \cdot \rangle$  è l'operatore di *Macaulay*.

Questi parametri vengono utilizzati per comporre la matrice di rigidezza secante  $C$ :

$$C^{dam} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} (1 - R_2\nu_{23}\nu_{32})R_1E_1 & (\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31})R_1R_2E_1 & (\nu_{31} + R_2\nu_{21}\nu_{32})R_1E_1 & 0 & 0 & 0 \\ & (1 - R_1\nu_{31}\nu_{13})R_2E_2 & (\nu_{23} + R_1\nu_{31}\nu_{12})R_2E_2 & 0 & 0 & 0 \\ & & SYM & \Delta R_1R_2G_{12} & 0 & 0 \\ & & & & \Delta G_{23} & 0 \\ & & & & & \Delta G_{13} \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

Con

$$\Delta = 1 - R_2\nu_{23}\nu_{32} - R_1R_2\nu_{12}\nu_{21} - 2R_1R_2\nu_{31}\nu_{12}\nu_{23} - R_1\nu_{31}\nu_{13} \quad dove \quad R_\alpha = (1 - \omega_\alpha), \quad \alpha = 1, 2 \quad (3.72)$$

dove  $R_\alpha$  è il fattore di riduzione di rigidezza.

Ottenuta la matrice di rigidezza è possibile inserirla nell'equazione costitutiva per conoscere lo stato di tensione del componente:

$$\sigma = C^{dam} \epsilon \quad (3.73)$$

### 3.3.2 Hashin + Puck

La routine Hashin + Puck, sviluppata per l'analisi di materiali ortotropi, utilizzando i criteri di failure omonimi già descritti, è stata originariamente progettata per analisi implicite ma successivamente adattata per un'applicazione esplicita. Questo paragrafo illustra il funzionamento della versione modificata della routine, che è stata impiegata per le analisi numeriche presentate nel seguito della tesi.

Il criterio di Hashin è utilizzato nel caso di danneggiamento della fibra (sia a trazione che compressione) e della matrice (solo a trazione), mentre il criterio di Puck per la matrice a compressione. Le formulazioni per i singoli casi sono riportate in Tabella 3.3.

	Fibra	Matrice
<b>A Trazione</b>	$F_{ft} = \left(\frac{\sigma_{11}}{X_T}\right)^2 + \theta_f \left(\frac{\tau_{12}^2 + \tau_{13}^2}{S_{12}^2}\right) = 1$ se $\sigma_{11} \geq 0$	$F_{mt} = \left(\frac{\sigma_{22} + \sigma_{33}}{Y_T}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}^2 - \tau_{13}^2}{S_{12}^2}\right) \left(\frac{\tau_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{33}}{S_{23}^2}\right) = 1$ se $\sigma_{22} \geq 0$
<b>A Compressione</b>	$F_{fc} = \left(\frac{\sigma_{11}}{X_C}\right)^2 = 1$ se $\sigma_{11} < 0$	$F_{mc} = \left(\frac{\tau_{tn}}{S_{23}^A + \mu_{tn}\sigma_n}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{ln}}{S_{12} + \mu_{ln}\sigma_n}\right)^2 = 1$ se $\sigma_{22} < 0$

Tabella 3.3. Formulazioni Hashin + Puck [23]

dove:

- $\theta_f$  rappresenta il contributo a taglio alla rottura a trazione della fibra;
- $S_{23}^A$  è il limite a taglio trasversale nel piano di rottura, calcolato dall'ammissibile di taglio e dall'angolo  $\theta$  di inclinazione del piano di rottura;
- $\mu_{tn}$  e  $\mu_{ln}$  sono i coefficienti di attrito nella direzione trasversale e longitudinale al piano di rottura;  $\sigma_{ij}$  ( $i, j = l, n, t$ ) indicano il tensore degli stress  $\sigma_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) ruotato dell'angolo  $\theta$  mediante la matrice  $T(\theta)$  di trasformazione:

$$\sigma_{lnt} = T(\theta)\sigma_{123}T(\theta)^T \quad (3.74)$$

Per una migliore comprensione del criterio di Puck nel caso di matrice sottoposta a compressione, in Figura 3.16 è riportato uno schema dei sistemi di riferimento utilizzati.

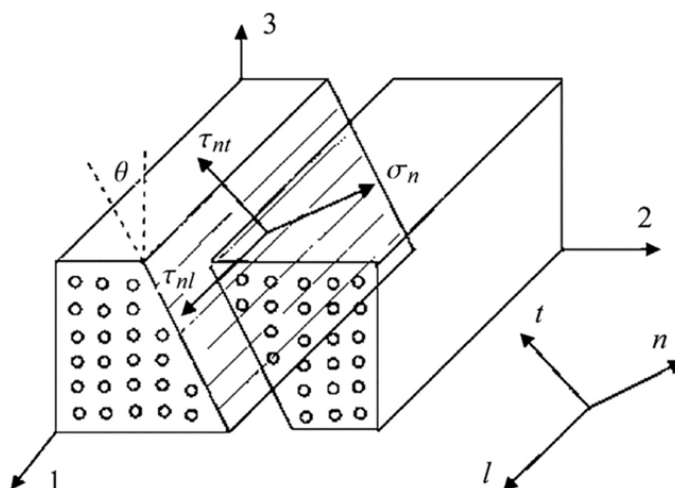


Figura 3.16. Schema dei sistemi di riferimento  $\langle 1\ 2\ 3 \rangle$  e  $\langle l\ n\ t \rangle$  [23]

Dall'Equazione 3.74, possiamo scrivere:

$$\begin{cases} \sigma_n(\theta) = \sigma_{22}\cos^2\theta + \sigma_{33}\sin^2\theta + 2\tau_{23}\sin\theta\cos\theta \\ \tau_{nt}(\theta) = (\sigma_{33} - \sigma_{22})\sin\theta\cos\theta + \tau_{23}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \\ \tau_{nl}(\theta) = \tau_{13}\sin\theta + \tau_{12}\cos\theta \end{cases} \quad (3.75)$$

Il potenziale piano di rottura, cioè in particolare l'angolo  $\theta$ , viene determinato tramite l'algoritmo *Stepwise Search Method (SSM)*, che individua il valore massimo di  $F_{mc}$  raggiunto durante la prova di carico.

Puck suggerì di inclinare i piani d'azione con incrementi di  $1^\circ$ : di conseguenza, per ogni condizione di stress sono necessarie 181 iterazioni (da  $-90^\circ$  a  $+90^\circ$ ) e ciò comporta un elevato costo computazionale.

Per ovviare a tale problema, sono stati sviluppati diversi algoritmi di ricerca rapida dell'angolo di orientamento del piano di rottura (*FPOA*).

Come esempio esplicativo si considera un caso di carico trovato in letteratura [24], in cui si generano due massimi locali. L'algoritmo *SSM* identifica i due massimi in  $(-7^\circ, 0.668)$  e  $(72^\circ, 0.6746)$ , come mostrato in Figura 3.17, e stabilisce che il secondo è un massimo globale.

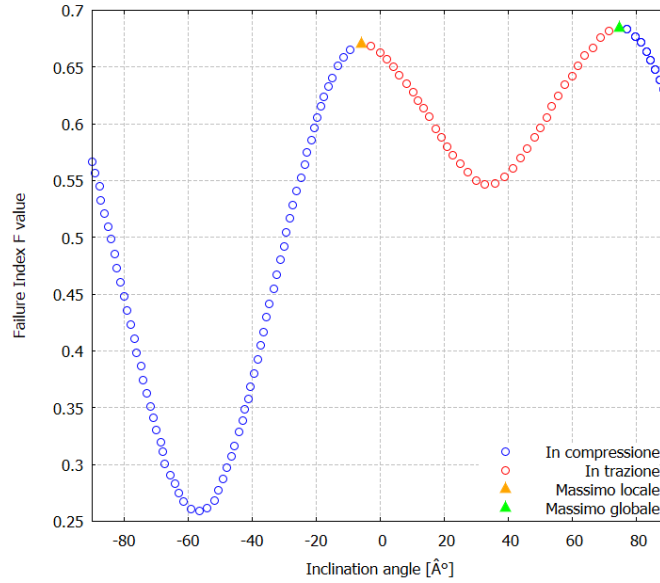


Figura 3.17. Caso di carico a due picchi, con massimo globale in  $(72^\circ, 0.6746)$ , utilizzando l'algoritmo *Stepwise Search Method (SSM)* [24]

Tra gli algoritmi di ricerca rapida, abbiamo quello introdotto da Weigand, l'algoritmo *Extended Golden Section Search (EGSS)*, il quale presenta una riduzione dei punti di supporto necessari per la ricerca del FPOA. Questo algoritmo combina il *metodo della Sezione Aurea (GSS)*, utilizzato per iterare tra i punti di supporto, avvicinandoli progressivamente finché non si raggiunge il valore di tolleranza prestabilito, con la tecnica di interpolazione parabolica successiva presentata in Equazione 3.76. Il GSS viene utilizzato per iterare tra i punti di supporto, avvicinandoli progressivamente finché non si raggiunge il valore di tolleranza prestabilito. Tuttavia, in presenza di alcune condizioni, come la compresenza di due massimi, può non identificare correttamente il massimo globale, il quale viene nel nostro caso localizzato a  $(-6.4625^\circ, 0.668)$ .

$$\theta \approx \theta_2 - \frac{1}{2} \frac{(\theta_2 - \theta_1)^2(F_2 - F_3) - (\theta_2 - \theta_3)^2(F_2 - F_1)}{(\theta_2 - \theta_1)(F_2 - F_3) - (\theta_2 - \theta_3)(F_2 - F_1)} \quad (3.76)$$

Con una precisione maggiore, Schirmaier sviluppò l'algoritmo *Selective Range Golden Section Search (SRGSS)*, che utilizza il *metodo del range selettivo (SR)*. Questo metodo restringe l'ampio intervallo di ricerca di  $180^\circ$  in uno o più intervalli di  $20^\circ$  per individuare la possibilità di più massimi locali. L'intervallo viene individuato andando a calcolare i punti di supporto ogni  $10^\circ$ , se il punto corrente presenta valori di failure index  $F$  superiori rispetto al punto precedente e a quello successivo, questo range è definito come SR. Infine viene applicato l'algoritmo *GSS* solo ai blocchi SR, in presenza di più massimi locali, questi vengono confrontati per definire il massimo globale.

Successivamente Rezasefat propose l'algoritmo *Simple Parabolic Interpolation Search*



(*SPIS*) [45] come perfezionamento del precedente, che impiega la tecnica di interpolazione parabolica successiva all'interno del metodo *SR*, evitando l'uso dell'algoritmo *GSS*.

Questi algoritmi di ricerca rapida per il *FPOA* riducono significativamente il numero di iterazioni necessarie per individuare l'angolo di frattura ma, poichè il numero di punti di calcolo risulta inferiore rispetto al metodo *SSM*, la precisione di questi può risultare inferiore.

I risultati del caso sono mostrati in Figura 3.18.

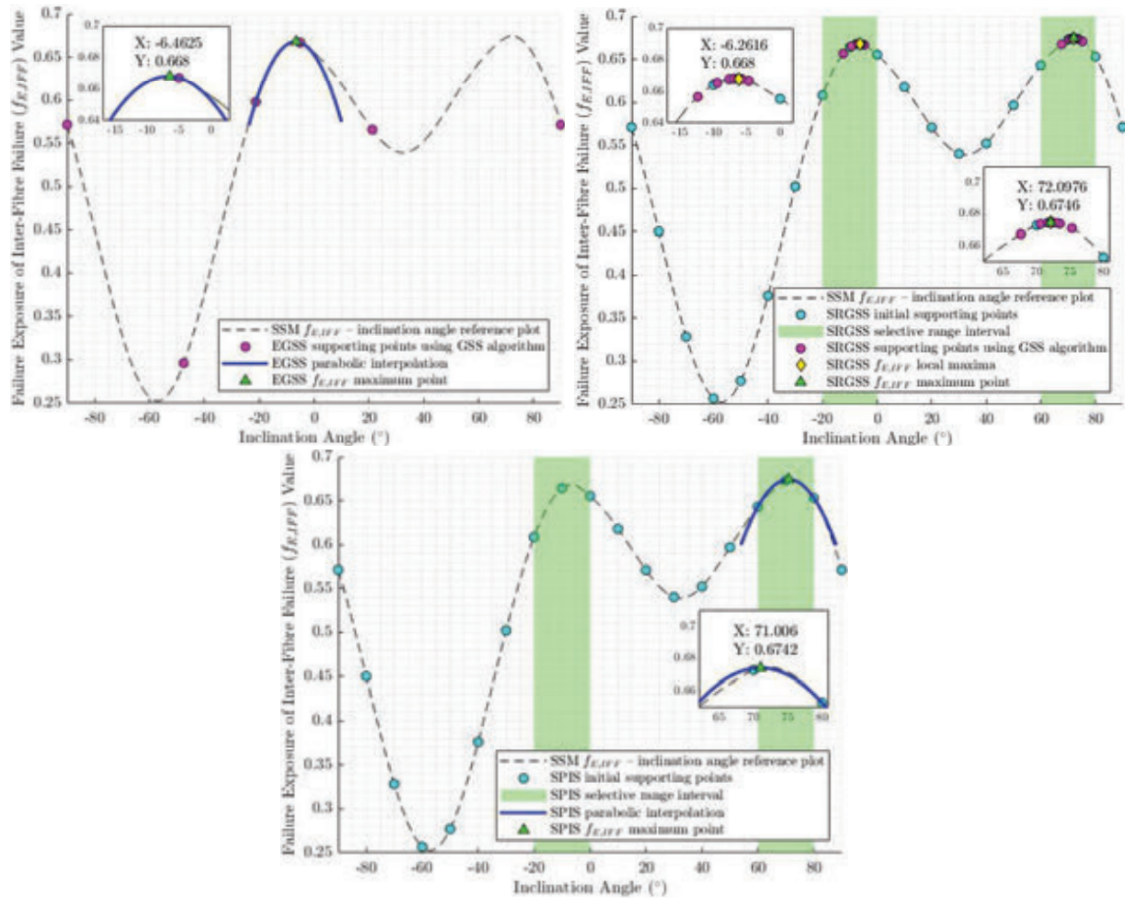


Figura 3.18. Risultati per il caso di carico scelto: l'algoritmo *EGSS* fallisce nell'identificare il massimo assoluto, al contrario *SRGSS* e *SPIS* lo identificano con successo [24]

Facendo uso dell'algoritmo *SPIS* otteniamo un notevole risparmio computazionale, passando dalle 180 interazioni a solo 19. Tale ottimizzazione rende Hashin + Puck al pari del CODAM2 sotto l'aspetto del tempo di analisi.

Come per il CODAM2, i criteri di failure richiedono le deformazioni e le tensioni equivalenti che sono riportate in Tabella 3.4 (vengono forniti gli spostamenti equivalenti dai quali si derivano le deformazioni):

Modo di failure	Spostamento equivalente $\delta_{eq}$	Tensione equivalente $\sigma_{eq}$
FT	$\delta_{eq}^{fT} = l_c \sqrt{\langle \epsilon_{11} \rangle^2 + \epsilon_{12}^2 + \epsilon_{13}^2}$	$\sigma_{eq}^{fT} = \frac{l_c (\langle \sigma_{11} \rangle \langle \epsilon_{11} \rangle + \sigma_{12} \epsilon_{12} + \sigma_{13} \epsilon_{13})}{\delta_{eq}^{fT}}$
FC	$\delta_{eq}^{fC} = l_c \langle -\epsilon_{11} \rangle$	$\sigma_{eq}^{fC} = \frac{l_c \langle -\sigma_{11} \rangle \langle -\epsilon_{11} \rangle}{\delta_{eq}^{fC}}$
MT	$\delta_{eq}^{mT} = \frac{l_c \sqrt{\langle \epsilon_{22} \rangle^2 + \langle \epsilon_{33} \rangle^2 + \epsilon_{12}^2 + \epsilon_{23}^2 + \epsilon_{13}^2}}{l_c \sqrt{\langle \epsilon_{22} \rangle^2 + \langle \epsilon_{33} \rangle^2 + \epsilon_{12}^2 + \epsilon_{23}^2 + \epsilon_{13}^2}}$	$\sigma_{eq}^{mT} = \frac{l_c (\langle \sigma_{22} \rangle \langle \epsilon_{22} \rangle + \langle \sigma_{33} \rangle \langle \epsilon_{33} \rangle + \sigma_{12} \epsilon_{12} + \sigma_{23} \epsilon_{23} + \sigma_{13} \epsilon_{13})}{\delta_{eq}^{mT}}$
MC	$\delta_{eq}^{mC} = \frac{l_c \sqrt{\langle -\epsilon_{22} \rangle^2 + \langle -\epsilon_{33} \rangle^2 + \epsilon_{12}^2 + \epsilon_{23}^2 + \epsilon_{13}^2}}{l_c \sqrt{\langle -\epsilon_{22} \rangle^2 + \langle -\epsilon_{33} \rangle^2 + \epsilon_{12}^2 + \epsilon_{23}^2 + \epsilon_{13}^2}}$	$\sigma_{eq}^{mC} = \frac{l_c (\langle -\sigma_{22} \rangle \langle -\epsilon_{22} \rangle + \langle -\sigma_{33} \rangle \langle -\epsilon_{33} \rangle + \sigma_{12} \epsilon_{12} + \sigma_{23} \epsilon_{23} + \sigma_{13} \epsilon_{13})}{\delta_{eq}^{mC}}$

Tabella 3.4. Valori equivalenti dello spostamento e della tensione [8]

Il danneggiamento progressivo si basa sull'energia di rottura, quindi è necessario calcolare il valore dello spostamento massimo equivalente utilizzando la tenacità a frattura e la tensione equivalente associata all'avvio del danneggiamento e seguendo l'evoluzione CMD (Equazione 2.60).

$$\delta_{eq}^f = \frac{2G_{IC}}{\sigma_{eq}^0} \quad (3.77)$$

I valori equivalenti di inizio frattura sono i seguenti:

$$\begin{cases} \delta_{eq}^{0,I} = \frac{\delta_{eq}^I}{\sqrt{F_I}} \\ \sigma_{eq}^{0,I} = \frac{\sigma_{eq}^I}{\sqrt{F_I}} \end{cases} \quad (3.78)$$

dove  $I = [fT, fC, mT, mC]$ .

In conclusione, ad ogni iterazione la matrice  $C^{dam}$  viene aggiornata come mostrato nell'Equazione 3.79 per la valutazione del danneggiamento [45].

$$C^{dam} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} d_f E_{11} (1 - d_m \nu_{23} \nu_{32}) & d_f d_m E_{11} (\nu_{21} + \nu_{23} \nu_{31}) & d_f E_{11} (\nu_{31} + d_m \nu_{21} \nu_{32}) & 0 & 0 & 0 \\ d_f d_m E_{11} (\nu_{21} + \nu_{23} \nu_{31}) & d_m E_{22} (1 - d_f \nu_{13} \nu_{31}) & d_m E_{22} (\nu_{32} + d_f \nu_{12} \nu_{31}) & 0 & 0 & 0 \\ d_f E_{11} (\nu_{31} + d_m \nu_{21} \nu_{32}) & d_m E_{22} (\nu_{32} + d_f \nu_{12} \nu_{31}) & E_{33} (1 - d_f d_m \nu_{12} \nu_{21}) & 0 & 0 & 0 \\ & & & \Lambda d_f d_m G_{12} & 0 & 0 \\ & & & & \Lambda d_f d_m G_{23} & 0 \\ & & & & & \Lambda d_f d_m G_{13} \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

dove:

$$\begin{cases} d_f = (1 - d_{fT})(1 - d_{fC}) \\ d_m = (1 - d_{mT})(1 - d_{mC}) \\ \Delta = 1 - d_f d_m \nu_{12} \nu_{21} - d_m \nu_{23} \nu_{32} - d_f \nu_{13} \nu_{31} - 2d_f d_m \nu_{21} \nu_{32} \nu_{13} \end{cases} \quad (3.80)$$

dove  $d_{fT}$ ,  $d_{fC}$ ,  $d_{mT}$  e  $d_{mC}$  sono i parametri di danneggiamento della fibra e della matrice a trazione e compressione calcolati nell'Espressione [2.60](#).



## Capitolo 4

# SIMULAZIONI NUMERICHE

Questo capitolo presenta tutti i casi di studio esaminati: inizialmente, si è mirato a esplorare modelli di studio semplici e rappresentativi per ottenere una visione d'insieme delle funzionalità di *Abaqus* e della *CUF* potendoli così anche confrontare. Sono stati condotti test statici e dinamici su travi e piastre, utilizzando materiali sia isotropi che ortotropi (compositi).

## 4.1 Analisi statiche e lineari

In principio, si è dedicata particolare attenzione ad analisi su geometrie semplici, condotte attraverso un solutore implicito di natura statica e lineare. È importante sottolineare che in questa fase non è stato considerato il danneggiamento progressivo, optando piuttosto per una linearizzazione del comportamento del materiale.

I casi di studio sono stati sottoposti ad un'analisi comparativa utilizzando la *CUF*, il software commerciale *Abaqus* e un approccio analitico scelto in base alle condizioni in esame.

Questa strategia di studio ci ha consentito di esplorare e motivare le differenze e le somiglianze tra i risultati ottenuti dai diversi metodi di valutazione.

Gli errori riportati nelle tabelle sono calcolati come errori percentuali rispetto al valore di riferimento scelto, come segue:

$$\Delta\sigma = \frac{\sigma_{ref} - \sigma}{\sigma_{ref}} * 100 \quad (4.1)$$

$$\Delta u = \frac{u_{ref} - u}{u_{ref}} * 100 \quad (4.2)$$

### 4.1.1 CASI 1D

Come modelli *1D-CUF* vengono analizzate staticamente quattro classiche travi ad asse rettilineo e sezione costante, variandone le caratteristiche geometriche e le condizioni di contorno.

I risultati così ottenuti sono confrontati con un modello *Abaqus* e con il metodo analitico di *DSV* e della linea elastica. Questi ultimi sono considerati i valori di riferimento ( $u_{ref}$  per lo spostamento e  $\sigma_{ref}$  per lo stress) poichè in casi di travi semplici la teoria analitica risulta corretta ed attendibile.

Inoltre, per quanto riguarda i modelli realizzati con la *CUF* si studia la convergenza all'aumentare degli elementi di mesh per verificarne l'affidabilità; ciò non viene fatto con *Abaqus* vista la coerenza con i risultati analitici.

Il materiale della trave a cui si fa riferimento per questi casi studio è una lega di alluminio e zinco tra le più prestanti, Alluminio 7075 (nome commerciale *ERGAL*), la quale viene utilizzata principalmente in campo strutturale aerospaziale.

Le proprietà meccaniche di nostro interesse per questa prova sono:

- modulo di Young  $E = 72500$  MPa
- coefficiente di Poisson  $\nu = 0.33$
- densità  $\rho = 2810$  Kg/m<sup>3</sup>

**TRAVE 1**

Il primo test è svolto su una trave di lunghezza  $L = 500$  mm con sezione quadrata ( $b = h = 20$  mm) incastrata all'estremo sinistro soggetta ad una trazione di 1000 N all'estremo destro come in Figura 4.1.



Figura 4.1. Trave 1 condizione di carico e vincolo con sezione

Formule utilizzate per il modello analitico trave in trazione:

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} \quad (4.3)$$

$$u_{y_{max}} = \frac{FL}{EA} \quad (4.4)$$

Modello	$\sigma_y [MPa]$	$\sigma_{VM} [MPa]$	$u_y [mm]$
CUF 160 B2 x 4 L1	2.5E+00	2.5E+00	1.72E-02
ABAQUS solid	2.5E+00	2.5E+00	1.72E-02
Analitico DSV	2.5E+00	2.5E+00	1.72E-02

Tabella 4.1. Risultati analitici e numerici della trave 1 in Figura 4.1

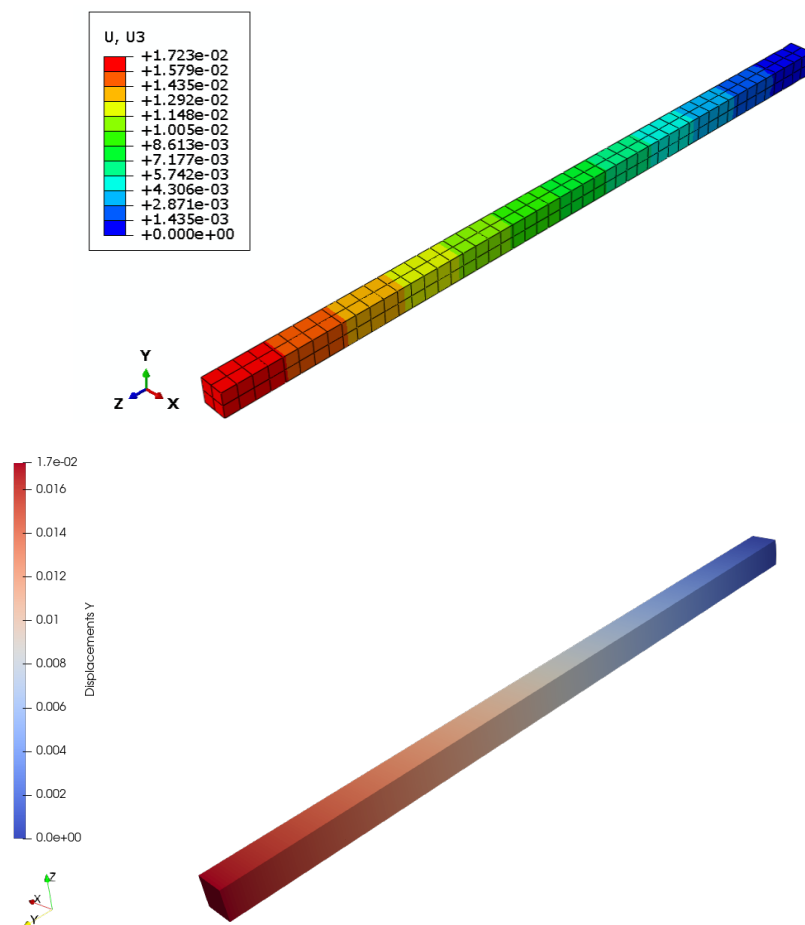


Figura 4.2. Spostamento massimo con *Abaqus* (sup) e la *CUF* (inf) a confronto nel caso della trave 1

Elementi B2	$u_y[mm]$	$\Delta u$	$\sigma_y[MPa]$	$\Delta\sigma$
5	1.72E-02	0.0 %	9.6E-01	61.6 %
20	1.72E-02	0.0 %	1.7E+00	32.0 %
40	1.72E-02	0.0 %	1.8E+00	26.4 %
80	1.72E-02	0.0 %	2.0E+00	20.0 %
160	1.72E-02	0.0 %	2.5E+00	0.0 %
200	1.72E-02	0.0 %	2.5E+00	0.0 %

Tabella 4.2. Risultati del modello *CUF* all'aumentare degli elementi B2 per la trave 1



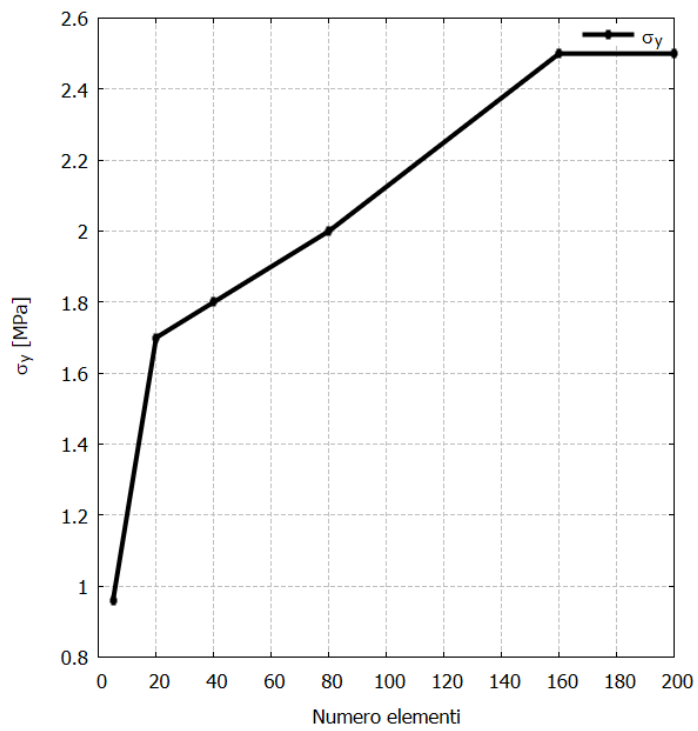


Figura 4.3. Analisi della convergenza alla soluzione esatta dello stress della trave 1

## TRAVE 2

Il secondo test è della stessa tipologia del primo, varia la sezione ( $b = h = 30 \text{ mm}$ ) come riportato in Figura 4.4.

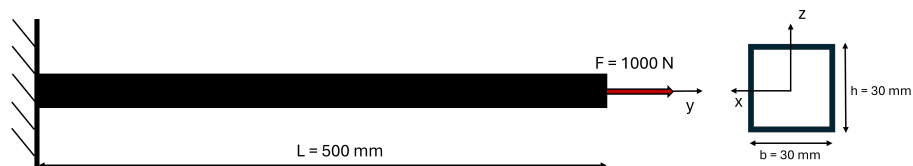


Figura 4.4. Trave 2 condizione di carico e vincolo con sezione

Modello	$\sigma_y [MPa]$	$\sigma_{VM} [MPa]$	$u_y [mm]$
CUF 160 B2 x 4 L1	1.11E+00	1.11E+00	7.66E-03
ABAQUS solid	1.11E+00	1.11E+00	7.65E-03
Analitico DSV	1.11E+00	1.11E+00	7.66E-03

Tabella 4.3. Risultati analitici e numerici della trave 2 in Figura 4.4

Elementi B2	$u_y [mm]$	$\Delta u$	$\sigma_y [MPa]$	$\Delta \sigma$
5	7.66E-03	0.0 %	4.6E-01	58.5 %
20	7.66E-03	0.0 %	7.9E-01	28.8 %
40	7.66E-03	0.0 %	8.4E-01	24.3 %
80	7.66E-03	0.0 %	9.1E-01	18.0 %
160	7.66E-03	0.0 %	1.11E+00	0.0 %
200	7.66E-03	0.0 %	1.11E+00	0.0 %

Tabella 4.4. Risultati del modello CUF all'aumentare degli elementi B2 per la trave 2

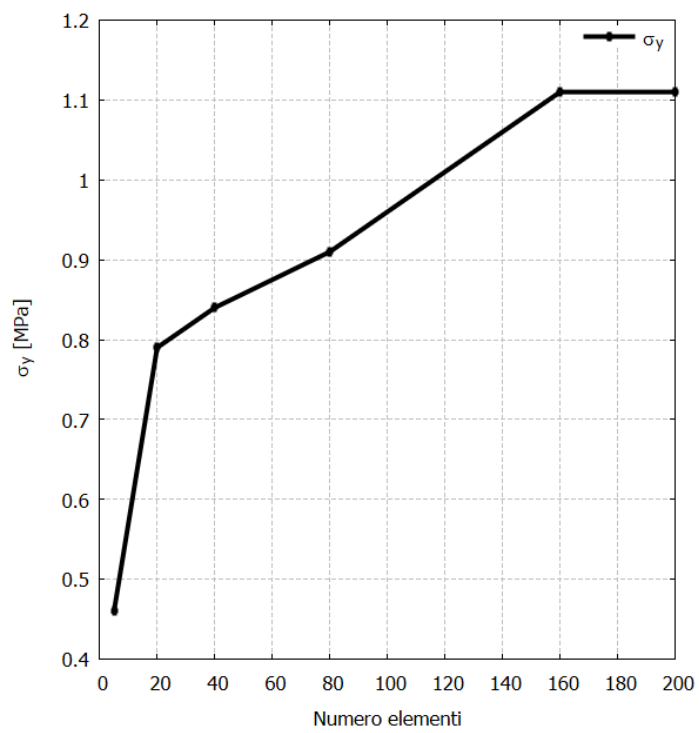


Figura 4.5. Analisi della convergenza alla soluzione esatta dello stress della trave 2

### TRAVE 3

La terza trave presenta anch'essa una lunghezza  $L = 500 \text{ mm}$  ma questo caso a sezione rettangolare ( $b = 15 \text{ mm}$  e  $h = 30 \text{ mm}$ ) incastrata all'estremità sinistra e sottoposta a flessione pura con un carico di  $10 \text{ N}$  all'estremità destra, come in Figura 4.6.

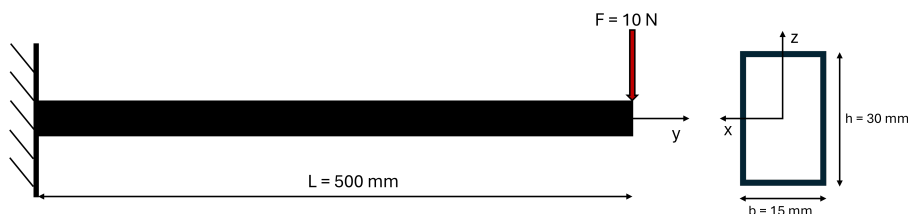


Figura 4.6. Trave 3 condizione di carico e vincolo con sezione

Formule utilizzate per il modello analitico trave in pura flessione:

$$\sigma_{max} = \frac{My}{I} \quad (4.5)$$

$$u_{z_{max}} = \frac{FL^3}{2EI} \quad (4.6)$$

Modello	$\sigma_y [MPa]$	$\sigma_{VM} [MPa]$	$u_y [mm]$
CUF 160 B2 x 4 L1	2.22E+00	2.22E+00	-1.70E-01
ABAQUS solid	2.22E+00	2.21E+00	-1.69E-01
Analitico DSV	2.22E+00	2.22E+00	-1.70E-01

Tabella 4.5. Risultati analitici e numerici della trave 3 in Figura 4.6

Elementi B2	$u_z [mm]$	$\Delta u$	$\sigma_y [MPa]$	$\Delta \sigma$
5	-3.26E-02	80.8 %	4.29E-01	80.7 %
20	-1.31E-01	23.3 %	1.85E+00	8.3 %
40	-1.54E-01	9.6 %	2.22E+00	0.0 %
80	-1.61E-01	5.3 %	2.22E+00	0.0 %
160	-1.69E-01	1.0 %	2.22E+00	0.0 %
200	-1.69E-01	0.3 %	2.22E+00	0.0 %

Tabella 4.6. Risultati del modello CUF all'aumentare degli elementi B2 per la trave 3

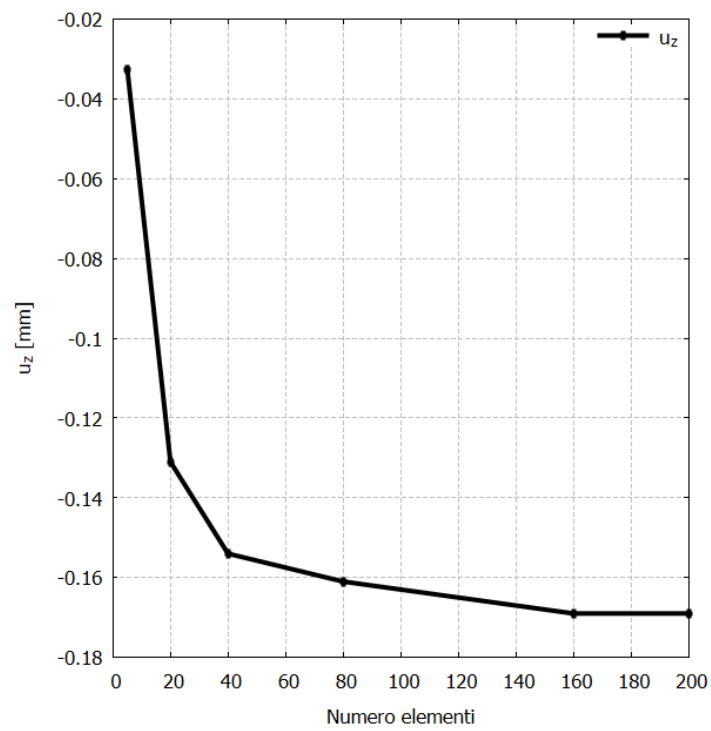


Figura 4.7. Analisi della convergenza alla soluzione esatta dello spostamento massimo della trave 3

**TRAVE 4**

La quarta trave è anch'essa sottoposta a flessione pura, varia la sezione rettangolare ( $b = 15 \text{ mm}$  e  $h = 45 \text{ mm}$ ) e il carico applicato ( $F = 25 \text{ N}$ ), come in Figura 4.8.

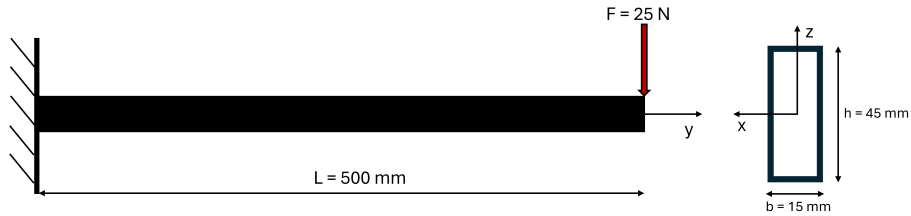


Figura 4.8. Trave 4 condizione di carico e vincolo con sezione

Modello	$\sigma_y [MPa]$	$\sigma_{VM} [MPa]$	$u_y [mm]$
CUF 160 B2 x 4 L1	2.47E+00	2.47E+00	-1.26E-01
ABAQUS solid	2.47E+00	2.47E+00	-1.26E-01
Analitico DSV	2.47E+00	2.47E+00	-1.26E-01

Tabella 4.7. Risultati analitici e numerici della trave 4 in Figura 4.8

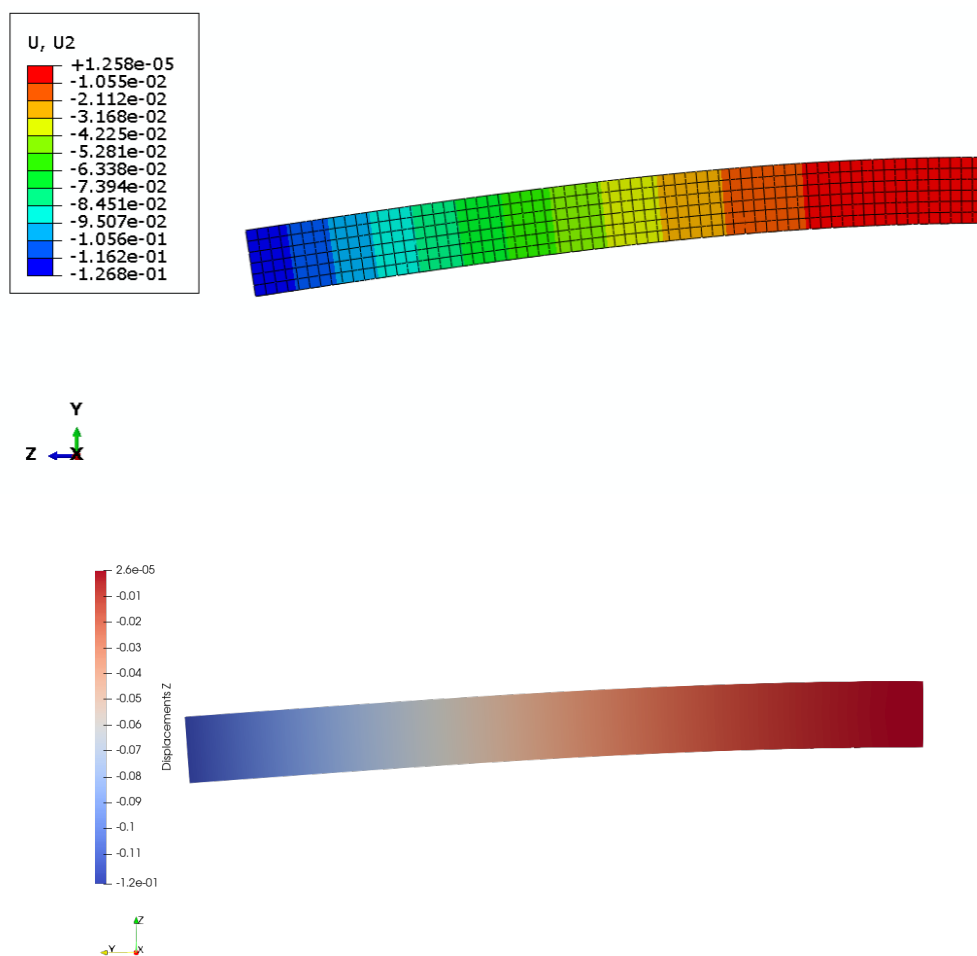


Figura 4.9. Spostamento massimo con Abaqus (sup) e la CUF (inf) a confronto nel caso della trave 4

Elementi B2	$u_z [mm]$	$\Delta u$	$\sigma_y [MPa]$	$\Delta \sigma$
5	-4.35E-02	65.5 %	8.45E-01	65.8 %
20	-1.09E-01	13.6 %	2.30E+00	6.9 %
40	-1.18E-01	6.5 %	2.46E+00	0.4 %
80	-1.21E-01	4.1 %	2.46E+00	0.2 %
160	-1.26E-01	0.2 %	2.47E+00	0.0 %
200	-1.26E-01	0.1 %	2.47E+00	0.0 %

Tabella 4.8. Risultati del modello *CUF* all'aumentare degli elementi B2 per la trave 4

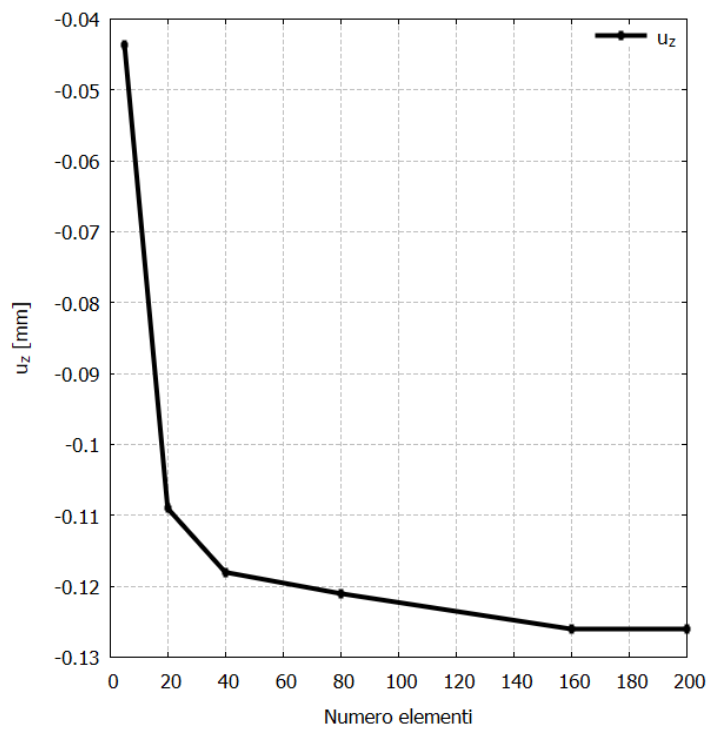


Figura 4.10. Analisi della convergenza alla soluzione esatta dello spostamento massimo della trave 4



I risultati ottenuti con i tre diversi modelli sono coerenti tra loro per tutti e i quattro i casi proposti; inoltre, con il modello *CUF* si può aumentare il grado degli elementi e delle espansioni Lagrangiane utilizzate andando a verificare quali vantaggi questo comporta.

Perciò, di seguito sono riportati i valori ottenuti variando gli elementi B2 con B3 (Three-Node Beam) e B4 (Four-Node Beam) e mantenendo elementi LE1 per l'Espansione e poi successivamente variando anche quest'ultima con LE2 e LE3.

## Trave 1

Elementi B3	$u_y [mm]$	$\Delta u$	$\sigma_y [MPa]$	$\Delta \sigma$
1	1.69E-02	1.5 %	2.39E+00	4.4 %
2	1.72E-02	0.0 %	2.50E+00	0.0 %
Elementi B4				
1	1.72E-02	0.0 %	2.50E+00	0.0 %

Tabella 4.9. Analisi con elementi B3 e B4 per la trave 1

Elementi LE1	$u_y [mm]$	$\Delta u$	$\sigma_y [MPa]$	$\Delta \sigma$
1x1	1.72E-02	0.0 %	2.50E+00	0.0 %
Elementi LE2				
1x1	1.72E-02	0.0 %	2.50E+00	0.0 %
Elementi LE3				
1x1	1.72E-02	0.0 %	2.50E+00	0.0 %

Tabella 4.10. Analisi con espansione LE1, LE2 e LE3 per la trave 1

**Trave 2**

Elementi B3	$u_y[mm]$	$\Delta u$	$\sigma_y[MPa]$	$\Delta\sigma$
1	7.52E-03	1.8 %	1.06E+00	4.5 %
2	7.66E-03	0.0 %	1.11E+00	0.0 %
Elementi B4				
1	7.66E-03	0.0 %	1.11E+00	0.0 %

Tabella 4.11. Analisi con elementi B3 e B4 per la trave 2

Elementi LE1	$u_y[mm]$	$\Delta u$	$\sigma_y[MPa]$	$\Delta\sigma$
1x1	7.66E-03	0.0 %	1.11E+00	0.0 %
Elementi LE2				
1x1	7.66E-03	0.0 %	1.11E+00	0.0 %
Elementi LE3				
1x1	7.66E-03	0.0 %	1.11E+00	0.0 %

Tabella 4.12. Analisi con espansione LE1, LE2 e LE3 per la trave 2

### Trave 3

Elementi B3	$u_z [mm]$	$\Delta u$	$\sigma_y [MPa]$	$\Delta \sigma$
1	-1.24E-01	27.3 %	1.26E+00	43.1 %
2	-1.53E-01	10.0 %	1.94E+00	12.6 %
4	-1.61E-01	5.4 %	2.20E+00	0.9 %
8	-1.63E-01	4.0 %	2.21E+00	0.3 %
16	-1.68E-01	0.9 %	2.22E+00	0.0 %
Elementi B4				
1	-1.61E-01	5.2 %	2.12E+00	5.0 %
2	-1.65E-01	2.8 %	2.18E+00	1.9 %
4	-1.68E-01	1.2 %	2.22E+00	0.0%

Tabella 4.13. Analisi con elementi B3 e B4 per la trave 3

Elementi LE1	$u_z [mm]$	$\Delta u$	$\sigma_y [MPa]$	$\Delta \sigma$
1x1	-1.61E-01	5.4 %	2.12E+00	4.6 %
1x2	-1.65E-01	3.1 %	2.20E+00	1.1 %
2x4	-1.70E-01	0.1 %	2.22E+00	0.0%
Elementi LE2				
1x1	-1.70E-01	0.2 %	2.22E+00	0.0 %
Elementi LE3				
1x1	-1.70E-01	0.2 %	2.22E+00	0.0 %

Tabella 4.14. Analisi con espansione LE1, LE2 e LE3 per la trave 3

## Trave 4

Elementi B3	$u_z[mm]$	$\Delta u$	$\sigma_y[MPa]$	$\Delta\sigma$
1	-9.37E-02	25.6 %	1.46E+00	40.8 %
2	-1.15E-01	8.6 %	2.23E+00	9.8 %
4	-1.20E-01	4.6 %	2.43E+00	1.5 %
8	-1.22E-01	3.2 %	2.45E+00	0.7 %
16	-1.24E-01	0.2 %	2.47E+00	0.0 %
Elementi B4				
1	-1.20E-01	4.7 %	2.37E+00	4.1%
2	-1.23E-01	2.4 %	2.44E+00	1.4%
4	-1.25E-01	1.1 %	2.47E+00	0.0 %

Tabella 4.15. Analisi con elementi B3 e B4 per la trave 4

Elementi LE1	$u_z[mm]$	$\Delta u$	$\sigma_y[MPa]$	$\Delta\sigma$
1x1	-1.19E-01	5.3 %	2.35E+00	4.4 %
1x2	-1.22E-01	3.0 %	2.45E+00	1.0 %
2x4	-1.26E-01	0.1 %	2.47E+00	0.0 %
Elementi LE2				
1x1	1.26E-01	0.1 %	2.47E+00	0.0 %
Elementi LE3				
1x1	1.26E-01	0.1 %	2.47E+00	0.0 %

Tabella 4.16. Analisi con espansione LE1, LE2 e LE3 per la trave 4

Dall'analisi delle travi si osserva come l'aumento di grado ad elementi B3 e B4 permetta una convergenza molto più rapida rispetto agli elementi B2 utilizzati inizialmente. Possiamo notare, ad esempio, che per la prima trave sottoposta a trazione si ottiene un risultato accurato con soli due elementi B3 o uno B4 contro i 160 elementi B2.

L'incremento di grado dell'espansione per queste semplici travi a trazione è pressochè ininfluenza; si notano dei vantaggi per le travi a flessione poichè queste presentano una variazione dei parametri (spostamento e tensione) nella sezione al contrario delle prime due travi.

### 4.1.2 CASI 2D

Si procede allo stesso modo con modelli  $2D$  di piastre sottili, con materiali, geometrie e condizioni di carico e vincoli diversi.

Si utilizzano solutori impliciti per casi statici e lineari: nel nostro caso gli elementi per il confronto sono gli S4R e gli S8R (*Continuum Shell*) di *Abaqus*, corrispondenti ai Q4 e ai Q9 della *CUF*. Per quanto riguarda invece i modelli analitici utilizzati, essi variano in base alle condizioni di studio.

#### PIASTRA 1

Il primo test è svolto su una piastra rettangolare di dimensioni 50 x 25 mm e spessore 1 mm, incastrata sui lati corti e caricata al centro con una forza perpendicolare alla superficie di 15 N, come riportato in Figura 4.11.

Il materiale è lo stesso delle travi, ovvero Alluminio 7075 (nome commerciale ERGAL) di cui ci interessano le seguenti proprietà:

- modulo di Young  $E = 72500$  MPa
- coefficiente di Poisson  $\nu = 0.33$
- densità  $\rho = 2810$  Kg/m<sup>3</sup>

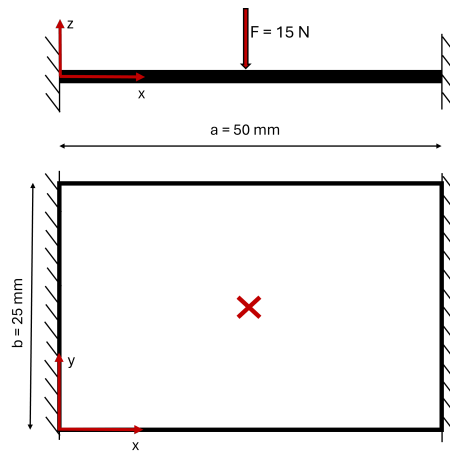


Figura 4.11. Piastra 1 condizione di carico e vincolo

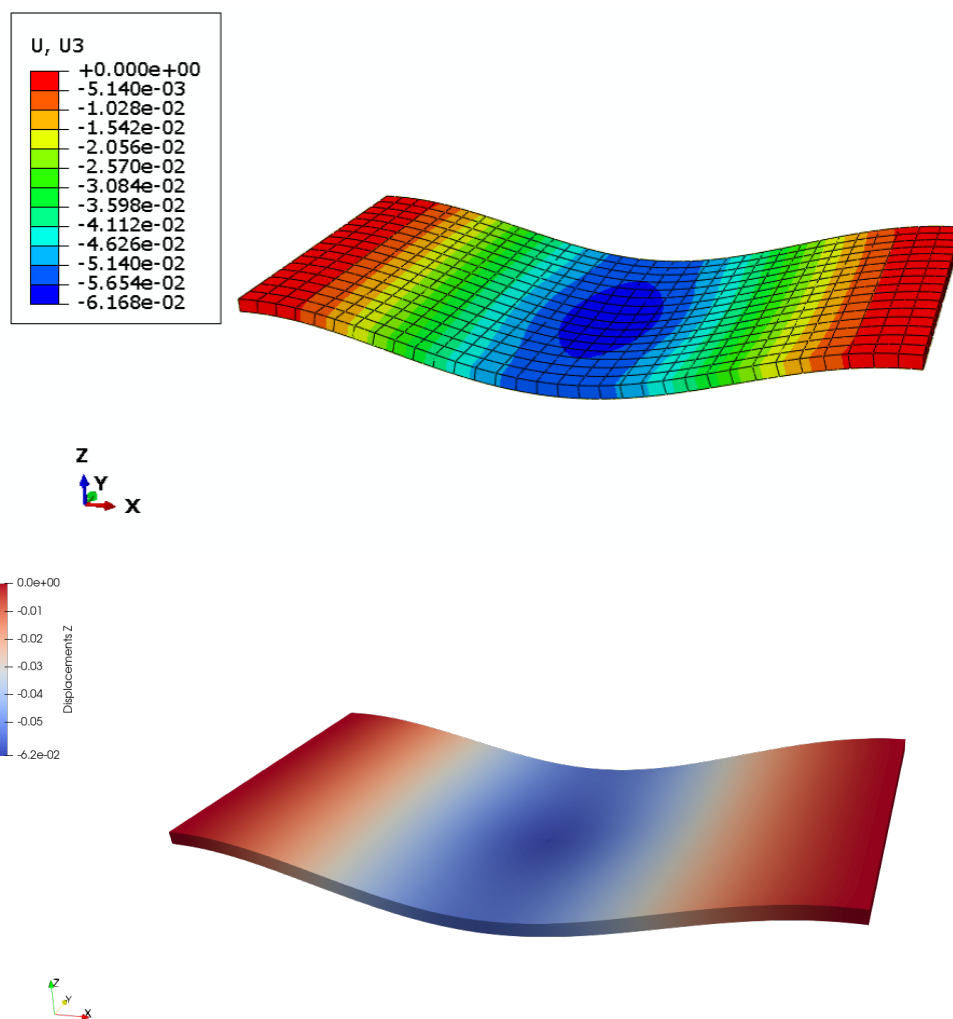
Per il risultato analitico dello spostamento si fa riferimento all'approssimazione della piastra a flessione incastrata ai due lati corti come se fosse una trave, secondo il modello di Eulero-Bernoulli:

$$u_{z_{max}} = \frac{FL^3}{192EI} \quad (4.7)$$

dove  $L$  è la lunghezza (caratteristica) del lato più lungo e  $I$  il momento di inerzia riferito alla sezione del lato più corto. Il risultato che si ottiene non verrà preso come corretto poichè è frutto di una forte approssimazione.

Modello	$\sigma_x [MPa]$	$\sigma_y [MPa]$	$u_z [mm]$
CUF 16x32 Q9 x 4 B3	4.84E+01	3.82E+01	-6.18E-02
ABAQUS solid	4.91E+01	3.89E+01	-6.17E-02
Analitico EB			-6.47E-02

Tabella 4.17. Risultati analitici e numerici della piastra 1 in Figura 4.11

Figura 4.12. Spostamento massimo con *Abaqus* (sup) e la *CUF* (inf) a confronto nel caso della piastra 1

Per l'analisi con il modello *CUF*, sono stati considerati inizialmente elementi Q4 e Q9 per la definizione della mesh, mantenendo invece costante l'espansione con 16 elementi B2.

Elementi Q4	$u_z [mm]$	$\Delta u$
2x4	-1.35E-03	97.7 %
4x8	-4.74E-03	92.4 %
8x16	-1.51E-02	75.9 %
16x32	-3.44E-02	44.9 %
Elementi Q9		
2x4	-4.41E-02	29.3%
4x8	-5.73E-02	8.1 %
8x16	-6.12E-02	1.9 %
16x32	-6.21E-02	0.3 %

Tabella 4.18. Risultati del modello *CUF* all'aumentare degli elementi Q4 e Q9 per la piastra 1

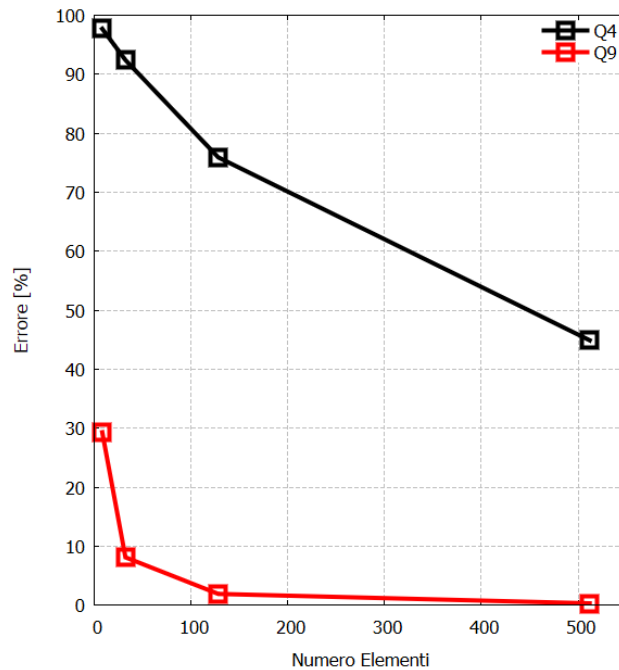


Figura 4.13. Analisi della convergenza alla soluzione esatta per Q4 e Q9 per la piastra 1

Dai risultati in Figura 4.13, si denota che l'utilizzo di elementi Q4 comporti una convergenza molto lenta e quindi un elevato numero di elementi: malgrado la semplicità del modello gli elementi Q4 non sono utilizzabili per via dell'elevato costo computazionale che ne consegue.

Gli elementi Q9 invece presentano un'ottima convergenza, infatti già con 8x16 elementi si ha un errore minore del 2 % contro il 76 % dei Q4.

Come per la trave si eseguono analisi di convergenza anche per l'espansione andando ad aumentare il numero di elementi e il loro grado. In queste prove sono stati utilizzati 16x32 elementi Q9 per la mesh.

Elementi LE1	$u_z [mm]$	$\Delta u$
1	-4.88E-02	21.7 %
4	-6.11E-02	1.9 %
8	-6.20E-02	0.5 %
16	-6.21E-02	0.3 %
Elementi LE2		
1	-6.21E-02	0.3 %
2	-6.21E-02	0.3 %
Elementi B4		
1	-6.21E-02	0.3 %

Tabella 4.19. Analisi con espansione LE1, LE2 e LE3 per la piastra 1

Dalla Tabella 4.19 si denota subito come la scelta di un'espansione di grado maggiore comporti un grosso risparmio in costo di calcolo, 16 elementi B2 contro uno o massimo due elementi B3 o B4.



**PIASTRA 2**

La seconda piastra è quadrata di lato  $a = b = 60$  mm e spessore 2 mm semplicemente appoggiata sui quattro lati, realizzata con lo stesso Alluminio, al quale è applicato una forza di 10 N al centro.

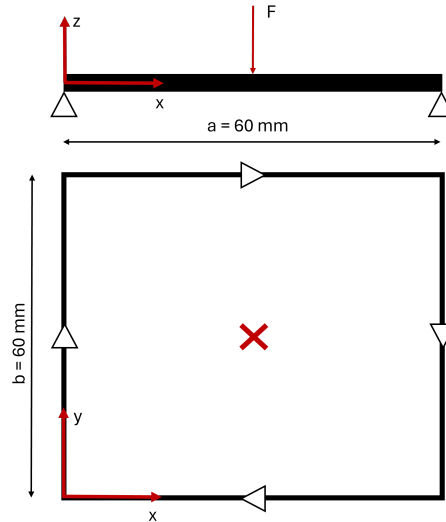


Figura 4.14. Piastra 2 condizione di carico e vincolo

In questo caso per la valutazione analitica dello spostamento si ricorre alla *CLT*:

Modello	$\sigma_x$ [MPa]	$\sigma_y$ [MPa]	$u_z$ [mm]
<b>CUF</b> 12x12 Q9 x 4 B3	5.15E+00	5.15E+00	-5.17E-03
<b>ABAQUS</b> solid	5.31E+00	5.31E+00	-5.27E-03
<b>Analitico</b>			-5.27E-03

Tabella 4.20. Risultati analitici e numerici per la piastra 2 in Figura 4.14

Avendo avuto esperienza con l'analisi di convergenza del primo caso e avendo a che fare con una piastra regolare e simmetrica, si è deciso di utilizzare 4 elementi B3 per l'espansione e 12 x 12 elementi Q9 per la mesh, al fine di ottenere un risultato abbastanza accurato ma allo stesso tempo con un costo computazionale ridotto.

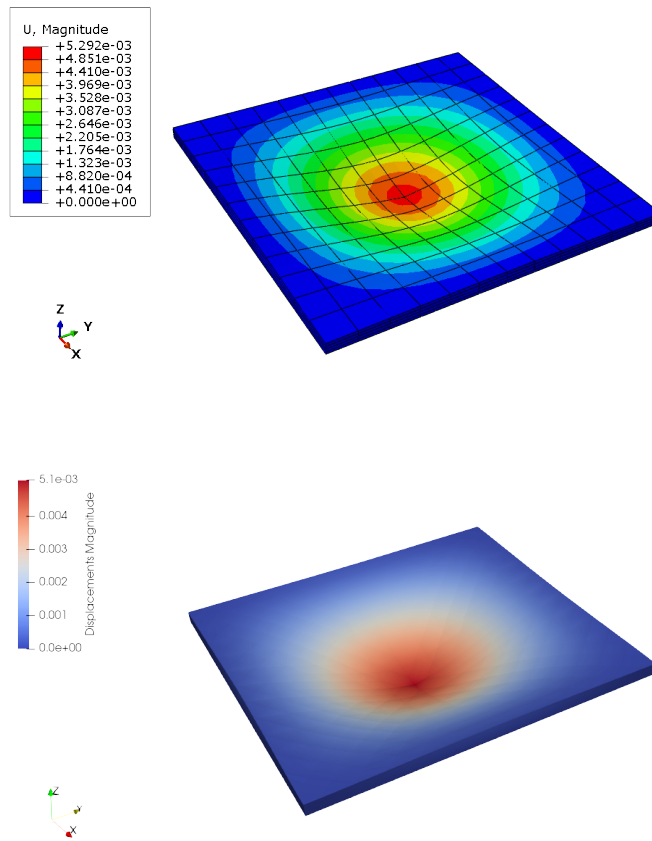


Figura 4.15. Spostamento massimo con *Abaqus* (sup) e la *CUF* (inf) a confronto nel caso della piastra 2

### PIASTRA 3

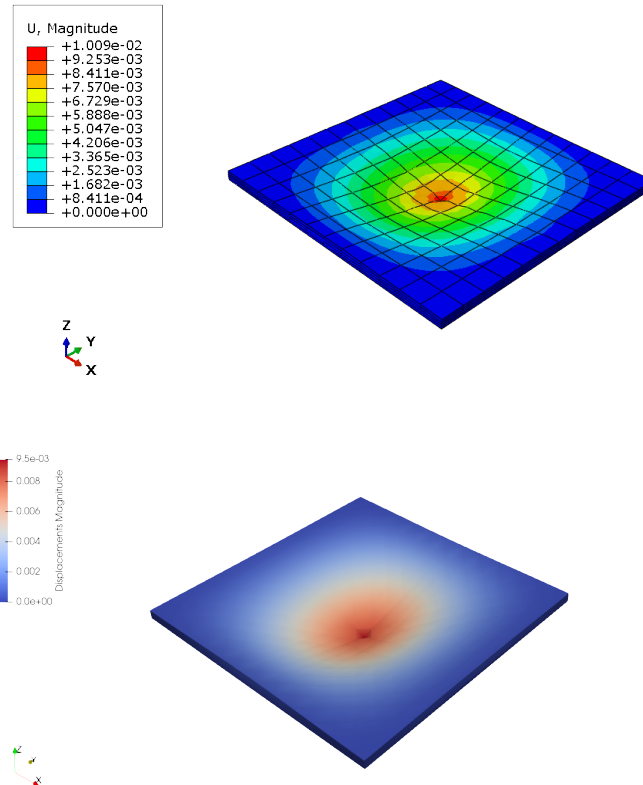
L'ultima piastra presenta la medesima geometria, condizioni di carico e vincolo della precedente. A variare è solo il materiale, il quale è un composito polimerico rinforzato con fibre di carbonio IM7/8552 (CFRP) con le seguenti proprietà meccaniche in Tabella 4.21. La sequenza di laminazione utilizzata per la piastra è  $[0/90/90/0]$  ed ogni strato è spesso 0.5 mm.

$E_1[MPa]$	$E_2[MPa]$	$E_3[MPa]$	$G_{12}[MPa]$	$G_{13}[MPa]$	$G_{23}[MPa]$	$\nu_{12}$	$\nu_{13}$	$\nu_{23}$
165E+03	9E+03	9E+03	5.6E+03	5.6E+03	2.8E+03	0.34	0.34	0.5

Tabella 4.21. Proprietà meccaniche composito *IM7/8552* [19]

Modello	$\sigma_x [MPa]$	$\sigma_y [MPa]$	$u_z [mm]$
<b>CUF</b> 12x12 Q9 x 4 B3	1.55E+00	1.13E+01	-0.95E-02
<b>ABAQUS</b> solid	1.56E+00	1.06E+01	-1.01E-02
<b>Analitico</b> KL			-1.01E-02

Tabella 4.22. Risultati analitici e numerici per la piastra 3 in Figura 4.14

Figura 4.16. Spostamento massimo con *Abaqus* (sup) e la *CUF* (inf) a confronto nel caso della piastra 3

In questi due casi era stato precedentemente applicato un carico sinusoidale, il quale in *Abaqus* è perfettamente applicabile, mentre per la *CUF* questa è assegnata mediante forze concentrate nei nodi secondo la regola:

$$F = pA \quad (4.8)$$

dove  $A$  è l'area della piastra e  $p$  è la pressione. L'utilizzo di questa formula presenta alcune imprecisioni: la distribuzione della forza tra i nodi di ciascun elemento non avviene in modo isolato, ma si combina con la forza attribuita ai nodi degli elementi adiacenti. Tale sovrapposizione introduce perciò una complessità nella somma totale non permettendo un'ottima correlazione dei due modelli con *DOFs* bassi.

## 4.2 Analisi dinamiche e non lineari

Questa sezione offre una serie di esempi numerici utilizzati come casi di validazione per garantire la corretta implementazione del modello Hashin + Puck esplicito per l'analisi del danno progressivo sotto carichi di trazione e compressione, confrontando i risultati con quelli ottenuti con il CODAM2 trovati in letteratura [19]. In tale routine sono implementati gli omonimi criteri di rottura, Hashin 3D e Puck ad angolo variabile.

Il sistema materiale impiegato in tutti i casi è il composito rinforzato in fibra di carbonio IM7/8552 (CFRP) e le sue proprietà elastiche e di resistenza sono riportate nelle Tabelle 4.21, 4.23 e 4.24.

$X_T[MPa]$	$X_C[MPa]$	$Y_T[MPa]$	$Y_C[MPa]$	$Z_T[MPa]$	$Z_C[MPa]$	$S_L[MPa]$	$S_T[MPa]$	$S_I[MPa]$
2560.0	1690.0	73.0	250.0	73.0	250.0	90.0	90.0	90.0

Tabella 4.23. Resistenza longitudinale, trasversale, interlaminare e al taglio del CFRP per il singolo elemento [33]

$G_{ft}$	$G_{fc}$	$G_{mt}$	$G_{mc}$	$G_{it}$	$G_{ic}$
$[MPa \cdot mm]$	$[MPa \cdot mm]$	$[MPa \cdot mm]$	$[MPa \cdot mm]$	$[MPa \cdot mm]$	$[MPa \cdot mm]$
120.0	80.0	2.6	4.2	2.6	4.2

Tabella 4.24. Energia di frattura del CFRP per il singolo elemento [33]

### 4.2.1 Analisi del singolo elemento a trazione

I test su singolo elemento rappresentano un metodo efficace per verificare la correttezza dell'implementazione del modello, potendo analizzare i modi di frattura in modo separato.

Nelle seguenti analisi è stato considerato un elementino di dimensioni 1 mm x 1 mm, modellato utilizzando un singolo elemento Q4 nel piano, con un'espansione lineare LE1 per rappresentare lo spessore dello strato, pari a 0,125 mm. Il sistema è sottoposto a deformazione uniassiale imponendo uno spostamento e viene valutato lo sforzo risultante.

Il primo caso prevede un spostamento applicato nella direzione longitudinale, quindi dominata dalle fibre, nel secondo, invece, abbiamo uno spostamento trasversale, quindi dominato dalla matrice e nell'ultimo si utilizza un elementino con laminazione quasi-isotropa  $[90/45/0/ - 45]_{2s}$  (Figura 4.17).

Nell'ultimo caso per l'espansione sono stati utilizzati 16 elementi LE1, uno per ciascun strato che compone il laminato.

Le curve sforzo-deformazione relative a questi test, con i relativi paragoni, sono mostrate in Figura 4.18 e 4.19.

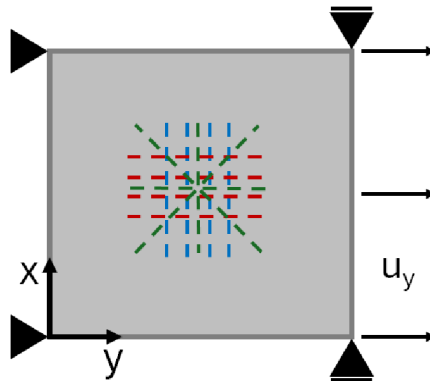


Figura 4.17. Schematizzazione della configurazione dei test di trazione sul singolo elemento: fibre orientate nella direzione y (rosso), nella direzione x (blu) e con laminazione  $[90/45/0/ - 45]_{2s}$  (verde)

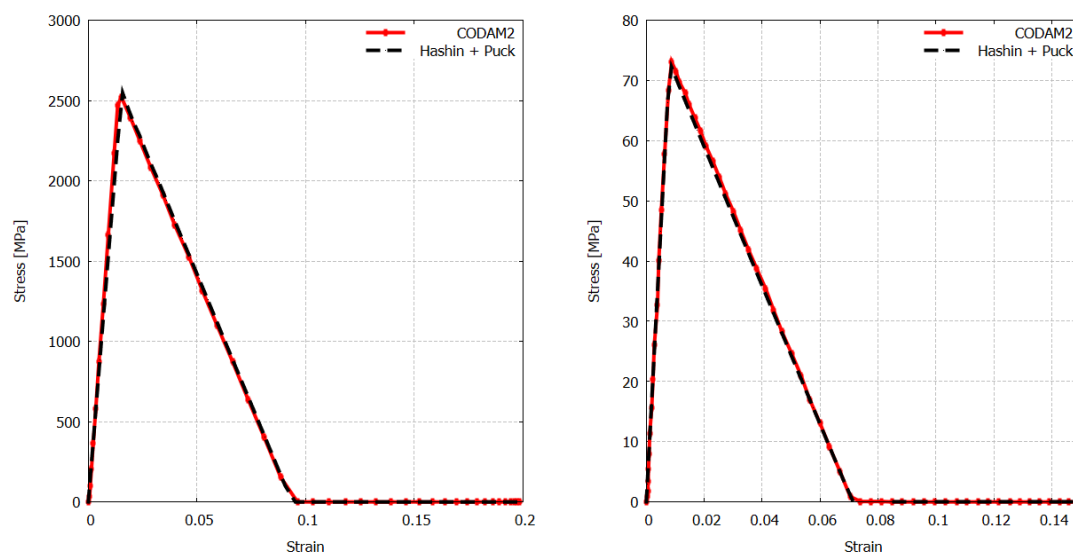


Figura 4.18. Curva sforzo-deformazione di un singolo elemento caricato in trazione sotto condizioni di deformazione uniassiale. Elemento caricato nella direzione longitudinale dominata dalle fibre (sx), ed elemento caricato nella direzione trasversale dominata dalla matrice (dx) [25]

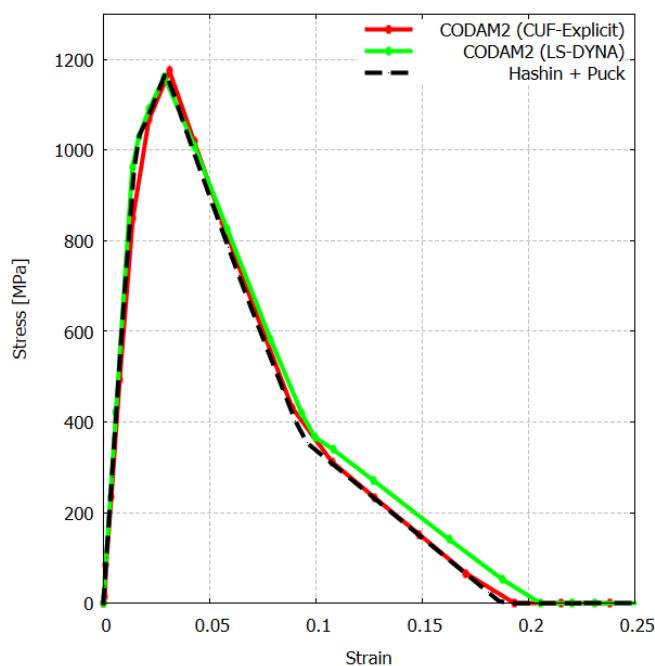


Figura 4.19. Curva sforzo-deformazione di un singolo elemento  $[90/45/0/-45]_{2s}$  laminato quasi-isotropo in trazione sotto condizione di deformazione uniassiale [25, 26]

Laminazione	MODELLO	$\sigma_{0eq}[MPa]$	$\delta_1^{0T}$	$\delta_1^{fT}$
[0]	CODAM2 (CUF-Esplicit)	2522	0.0152	0.0963
	Hashin + Puck	2547	0.0158	0.0953
[90]	CODAM2 (CUF-Esplicit)	73.0	0.0087	0.070
	Hashin + Puck	72.2	0.0087	0.071
[90/45/0/ 45] <sub>2s</sub>	CODAM2 (CUF-Esplicit)	1175	0.031	0.193
	– CODAM2 (LS-DYNA)	1162	0.029	0.205
	Hashin + Puck	1170	0.029	0.191

Tabella 4.25. Punti caratteristici delle curve in Figura 4.18 e 4.19

Le curve sforzo-deformazione ottenute con la routine di Hashin + Puck dei singoli elementi, caricati in trazione sia parallelamente che trasversalmente alle fibre, sono sovrapponibili con quelle ottenute con il modello CODAM2: da come si evince dalla Tabella 4.25 i valori di stress massimo  $\sigma_{0eq}$ , di deformazione al quale inizio il processo di degrado  $\delta_1^{0T}$  e di failure  $\delta_1^{fT}$  sono pressochè coincidenti e coerenti con gli ammissibili del materiale,  $X_T$  ( $= 2560MPa$ ) e  $Y_T$  ( $= 73MPa$ ) riportati in Tabella 4.23. Anche l'area sottesa dalle curve, ovvero l'energia di frattura a trazione  $G_{ft}$  per la direzione longitudinale e  $G_{mt}$  per quella trasversale, rimane costante per tutte le curve ( $120 MPa \cdot mm$  e  $2.6 MPa \cdot mm$ , rispettivamente), in modo consistente coi dati.

Solo nel caso laminato si ha un leggera discrepanza, ricondotta ai diversi approcci di modellazione strutturale impiegati nelle analisi: nel primo tratto, fino al valore di picco, la curva segue i valori ottenuti con il CODAM2 (CUF-Esplicit) [25], mentre nel secondo tratto segue quelli ottenuti con il CODAM2 (LS-DYNA) [26], ma in generale i valori di tensione, deformazione, resistenza ed energia a frattura sono rispettati.

## 4.2.2 Analisi del singolo elemento a compressione

Questi test, analogamente ai precedenti, servono a verificare l'efficacia della routine, ma in questo caso attraverso un'analisi in compressione. Anche qui è possibile esaminare separatamente l'inizio e la propagazione delle diverse modalità di rottura. Esiste però un problema dovuto al fatto che i modelli costitutivi lineari, come quello da noi utilizzato, presentano limiti considerevoli nel momento in cui si parla di test a compressione: giunti a picco massimo si presentano fenomeni di micro-buckling, dovuti all'instabilità delle fibre ad inizio cedimento, che comportano una rapida riduzione della capacità di carico, seguita da un plateau.

## Softening post-picco

Una semplice curva di ammorbidimento lineare post-picco quindi risulta inadeguata, per migliorare le capacità predittive del modello, ne vengono quindi implementate di più avanzate [28]: nel nostro caso, si adotta una curva di ammorbidimento post-picco di tipo 'Linear Softening' o 'Linear-Brittle', pensate per rappresentare la rapida diminuzione dello stress e il successivo plateau stabile.

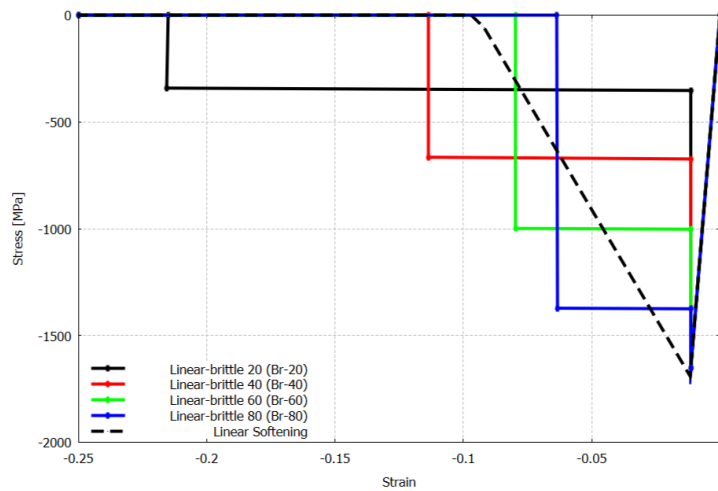


Figura 4.20. Curve di ammorbidimento post-picco, sia lineari che lineari-fragili, utilizzate per modellare il danno compressivo delle fibre. Il numero rappresenta la percentuale della resistenza massima che persiste come stress residuo nel plateau [27]

L'altezza del plateau, ovvero lo stress residuo, è una percentuale dello stress di picco, e variando tale percentuale si ottengono le varie curve riportate in Figura 4.20. Nonostante il cambiamento nella forma delle curve, l'area sottesa da ognuna rimane costante, poichè rappresenta l'energia di frattura associata al sistema.

Nei casi studio a compressione proposti, verrà utilizzato sempre un softening lineare non avendo la possibilità di lavorare direttamente sul codice.

Il materiale impiegato per l'elemento di questo test è il medesimo polimero rinforzato, con le stesse dimensioni, discretizzazione, condizioni al contorno e casi studio (Figura 4.17). A variare sono lo spostamento imposto uniassiale, che in questo caso è negativo, e le proprietà elastiche, le quali variano leggermente e che sono riportate in Tabella 4.26 (per resistenza ed energia alla frattura far riferimento sempre alle Tabelle 4.23 e 4.24).

$E_1$ [MPa]	$E_2$ [MPa]	$E_3$ [MPa]	$G_{12}$ [MPa]	$G_{13}$ [MPa]	$G_{23}$ [MPa]	$\nu_{12}$	$\nu_{13}$	$\nu_{23}$	$\rho$ $[\frac{kg}{mm^3}]$
150E+03	11E+03	11E+03	5.8E+03	5.8E+03	2.9E+03	0.34	0.34	0.48	1.7E-06

Tabella 4.26. Proprietà elastiche composito *IM7/8552* [27]



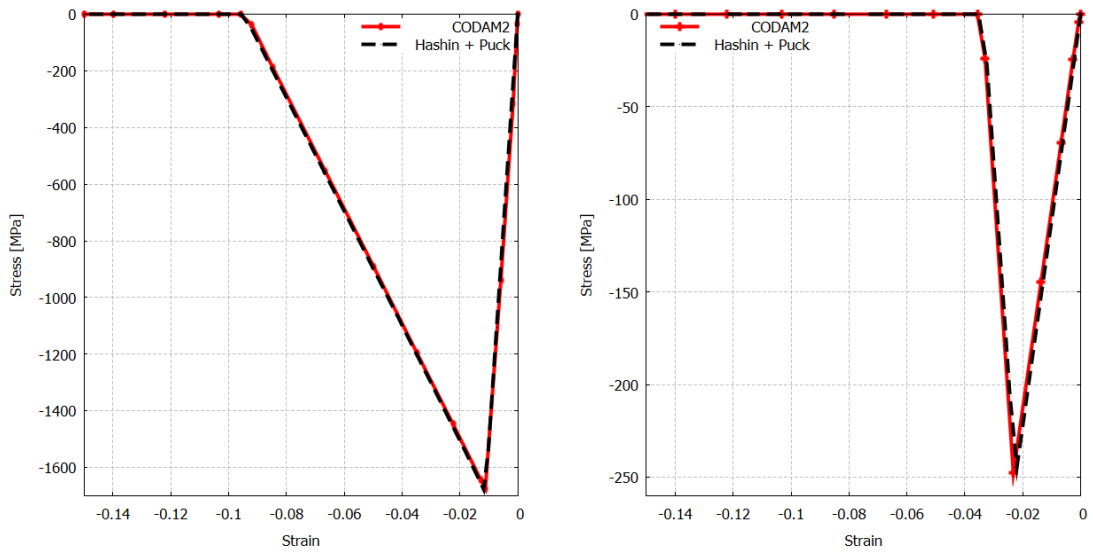


Figura 4.21. Curva sforzo-deformazione di un singolo elemento caricato in compressione sotto condizioni di deformazione uniassiale. Elemento caricato nella direzione longitudinale dominata dalle fibre (sx), ed elemento caricato nella direzione trasversale dominata dalla matrice (dx) [27]

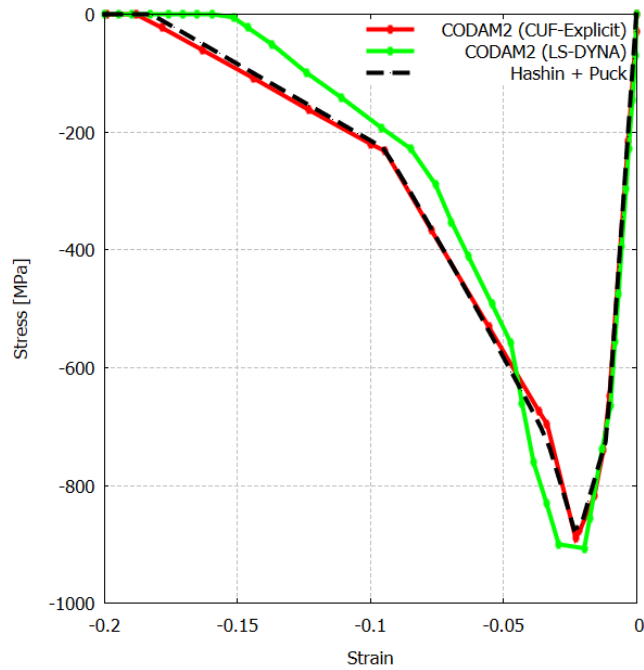


Figura 4.22. Curva sforzo-deformazione di un singolo elemento  $[90/45/0/-45]_{2s}$  laminato quasi-isotropo in compressione sotto condizione di deformazione uniassiale [27, 28]

Laminazione	MODELLO	$\sigma_{0eq}[MPa]$	$\delta_1^{0T}$	$\delta_1^{fT}$
[0]	CODAM2 (CUF-Esplicit)	-1674	-0.011	-0.096
	Hashin + Puck	-1676	-0.012	-0.096
[90]	CODAM2 (CUF-Esplicit)	-247	-0.023	-0.035
	Hashin + Puck	-244	-0.022	-0.035
[90/45/0/ 45] <sub>2s</sub>	CODAM2 (CUF-Esplicit)	-889	-0.023	-0.188
	– CODAM2 (LS-DYNA)	-906	-0.020	-0.159
	Hashin + Puck	-874	-0.023	-0.184

Tabella 4.27. Punti caratteristici delle curve in Figura 4.21 e 4.22

Come possiamo notare in Figura 4.21 e dalla Tabella 4.27, la risposta sforzo-deformazione dei singoli elementi, caricati in compressione sia parallelamente che trasversalmente alle fibre, segue anche in questa circostanza i risultati del CODAM2, con un ammorbidimento post picco di tipo 'Linear Softening'. In entrambi i casi, il picco di tensione corrisponde agli ammissibili del materiale  $X_C$  ( $= 1690MPa$ ) e  $Y_C$  ( $= 250MPa$ ), riportati in Tabella 4.23. Analogamente le aree sottese dalla curve coincidono con l'energia di frattura a compressione  $G_{fc}$  e  $G_{fc}$  fornita come input al modello ( $80 MPa \cdot mm$  per la direzione longitudinale e  $4.2 MPa \cdot mm$  per la direzione trasversale).

La risposta del laminato costituito da un singolo elemento in Figura 4.22 mostra una buona correlazione con le previsioni numeriche ottenute tramite CODAM2 (CUF-Explicit) [27] e CODAM2 (LS-DYNA) [28] in termini di valori di stress e deformazioni, resistenza ed energia di frattura. Le variazioni sono attribuite, come nel caso a trazione, ai diversi approcci di modellazione strutturale impiegati nelle analisi.

### 4.2.3 Prova a trazione su provino con intaglio centrale

Questa prova consiste nell'analisi di un provino intagliato centralmente, incastrato ad un'estremità e sottoposto a trazione sull'altra estremità (spostamento  $u_y$ ). Il sistema in questione è rappresentato schematicamente in Figura 4.23 e presenta una laminazione di  $[90/45/0/-45]_{2s}$  (quasi-isotropo), dove ogni strato è spesso 0.125 mm, quindi per un totale di 4 mm di spessore. Le proprietà elastiche e di resistenza del materiale utilizzato sono riportate nelle Tabelle 4.21 4.23 4.24.

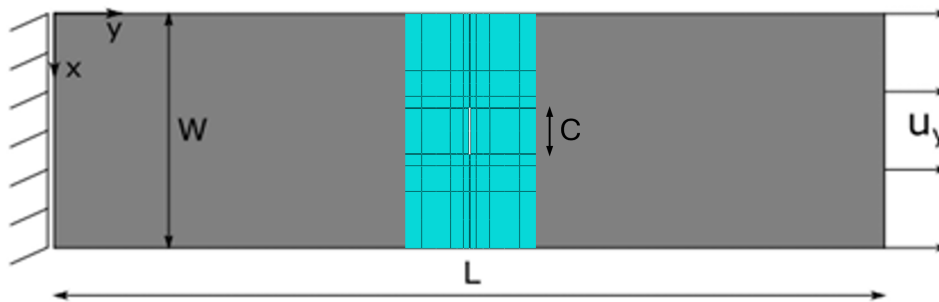


Figura 4.23. Provino con intaglio al centro con laminazione  $[45/90/-45/0]_{4s}$  quasi-isotropo, condizioni al contorno e discretizzazione nell'intorno dell'intaglio [25].

Lo studio numerico viene svolto su scale differenti (Tabella 4.30) per mostrare la capacità del modello di prevedere gli effetti di scalatura nelle strutture composite. Per via dell'elevato costo computazionale le simulazioni sono svolte su scala 8.

Scala	Lunghezza intaglio C [mm]	Larghezza provino W [mm]	Lunghezza provino L [mm]
1	3.2	15.9	63.5
2	6.4	31.8	127.0
4	12.7	63.5	254.0
8	25.4	127.0	508.0
16	50.8	254.0	508.0
24	76.2	381.0	1016.0

Tabella 4.28. Scalatura del provino con intaglio al centro per test di trazione [25] in riferimento alla Figura 4.23

I risultati sono confrontati sia con quelli ottenuti sperimentalmente [46] che con quelli numerici acquisiti in letteratura [26] con i modelli CODAM2 (LS-DYNA), CODAM2 (CUF-Explicit) e ABQ-DLR, il quale è basato sul modello di danneggiamento di Ladeveze implementato in ABAQUS (Explicit).

Nelle analisi con il modello CODAM2 (CUF-Explicit), le mesh utilizzate (dalla scala 1 a quella 16) sono composte da 132 elementi quadratici Q9, mentre per la scala 24

è stata utilizzata una mesh con 244 elementi Q9.

La Figura 4.24 mostra le curve sforzo-deformazione del provino in scala 8, ottenuta attraverso i diversi approcci di modellazione e mesh citati. Le linee orizzontali in grassetto indicano i valori minimo e massimo dello stress ottenuto sperimentalmente.

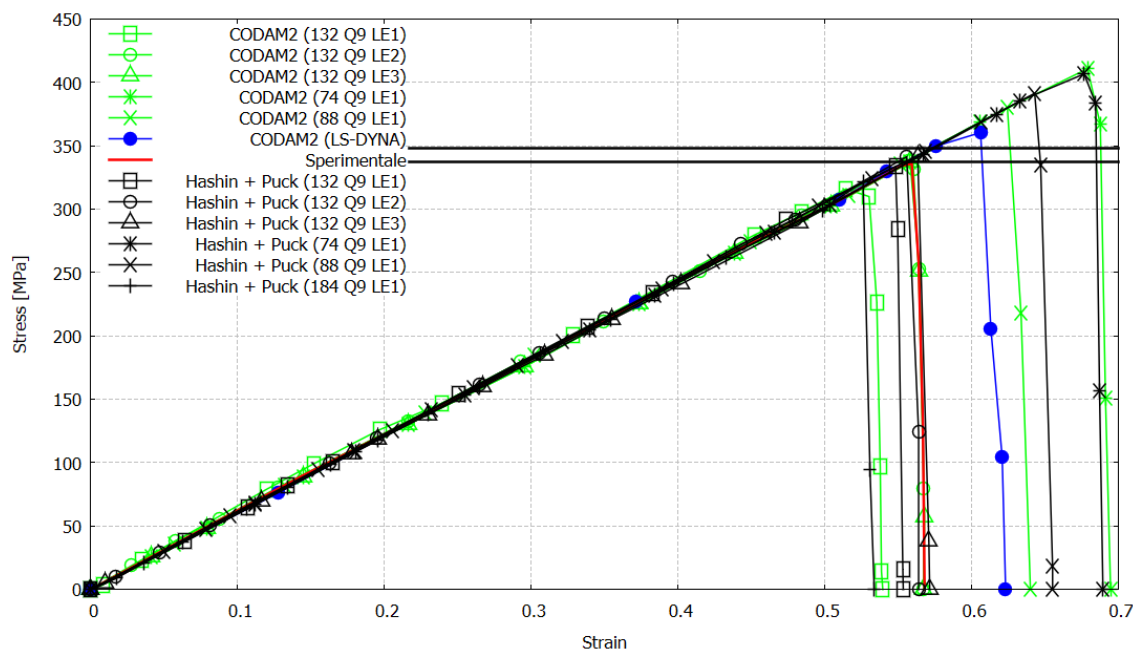


Figura 4.24. Curve sforzo-deformazione per il provino in trazione con intaglio centrale in scala 8 con laminazione  $[45/90/-45/0]_{4s}$  quasi-isotropa

MODELLO	MESH	$\sigma_{0eq} [MPa]$	$\delta_1^{0T}$	$\delta_1^{fT}$
CODAM2 (CUF-Esplicit)	132 Q9 LE1	316	0.515	0.540
	132 Q9 LE2	338	0.557	0.567
	132 Q9 LE3	339	0.558	0.568
	74 Q9 LE1	410	0.679	0.695
	88 Q9 LE1	380	0.624	0.640
	184 Q9 LE1	307	0.510	0.530
CODAM2 (LS-DYNA)		360	0.606	0.623
Sperimentale		336	0.559	0.568
Hashin + Puck	132 Q9 LE1	334	0.548	0.553
	132 Q9 LE2	341	0.556	0.564
	132 Q9 LE3	342	0.562	0.571
	74 Q9 LE1	407	0.677	0.690
	88 Q9 LE1	391	0.643	0.655
	184 Q9 LE1	321	0.526	0.534

Tabella 4.29. Punti caratteristici delle curve in Figura 4.24

Dalle curve emerge un comportamento fragile del provino con un comportamento elastico lineare all'aumentare dello stress fino al raggiungimento del picco, seguito da una brusca perdita di rigidità che porta alla rottura.

La risposta ottenuta con il modello di Hashin + Puck risulta coerente con i risultati numerici e sperimentali trovati in letteratura, come dimostra anche la Tabella 4.29, dalla quale possiamo trarre le seguenti conclusioni:

- la discretizzazione che porta ad una migliore simulazione della realtà è quella che utilizza 132 elementi Q9 nel piano e un elemento LE1 per layer;
- l'aumento dell'ordine di espansione dello spessore porta ad una lieve e trascurabile crescita della resistenza massima, dimostrando, sotto questo punto di vista, una stabilità maggiore rispetto al CODAM2;
- come previsto, l'aumento della densità della mesh nel piano comporta una riduzione della resistenza massima.

Inoltre, la Figura 4.25 illustra l'influenza delle dimensioni del provino sui valori di stress massimo, evidenziando come questi diminuiscano con l'aumentare della scala. Per il modello di Hashin + Puck, oltre ai risultati relativi alla scala 8, sono riportati anche quelli per la scala 4 (utilizzando la medesima discretizzazione 132 Q9 LE1). Sebbene limitato a due scale, tale confronto conferma il trend già evidenziato dagli altri modelli.

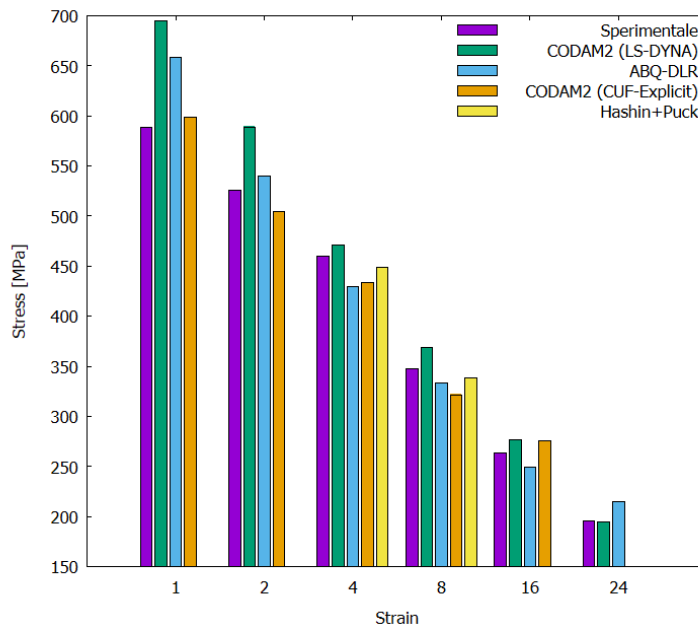


Figura 4.25. Paragone della resistenza massima ricavata sperimentalmente e con i diversi modelli matematici citati [19]

#### 4.2.4 Prova a compressione su provino con foro centrale

Il prossimo test riguarda una piastra forata soggetta a compressione applicando uno spostamento come mostrato in Figura 4.26, nella quale è mostrata anche la mesh nel piano con 48 Q9. Inoltre, anche in questo caso, si considera l'effetto dell'aumento delle dimensioni sui risultati ottenuti (in Tabella 4.30 le diverse scale utilizzate). Lo spessore e la sequenza di laminazione sono le medesime del caso precedente, a cambiare leggermente sono le proprietà elastiche del materiale utilizzato, le quali sono riportate in Tabella 4.26.

I dati sperimentali a cui si fa riferimento sono quelli proposti da *Lee e Soutis* [47], mentre quelli numerici sono stati svolti col modello CODAM2 [27].

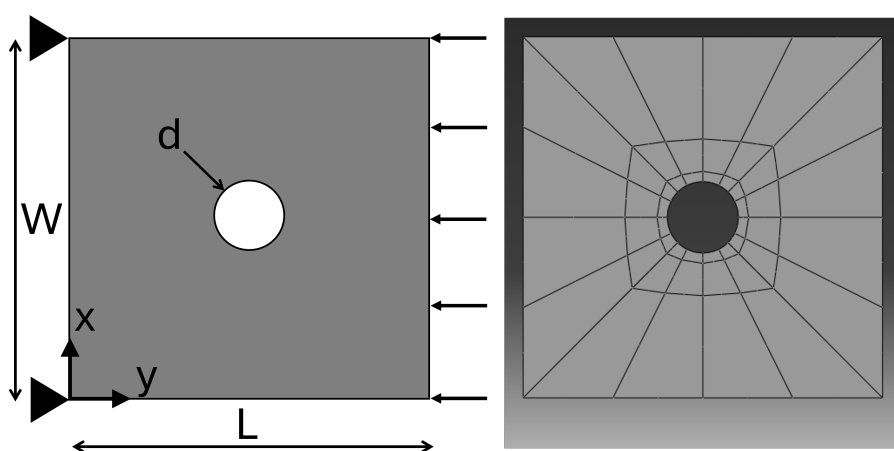


Figura 4.26. Rappresentazione schematica della piastra forata soggetta a compressione e la sua discretizzazione nel piano con 48 Q9 [27]

Scala	Diametro Foro d [mm]	Larghezza provino W [mm]	Lunghezza provino L [mm]
1	6.35	32	32
4	25.4	128	128

Tabella 4.30. Scalatura del provino con intaglio al centro per test di trazione [25] in riferimento alla figura 4.23

MODELLO	SCALA	MESH	$\sigma_{0eq}$ [MPa]
CODAM2	1	48 Q9 LE1	576
(CUF-Esplicit)	1	48 Q9 LE2	582
	1	48 Q9 LE3	586
	1	72 Q9 LE1	572
	1	966 Q9 LE1	563
Sperimentale			349
Hashin + Puck	1	48 Q9 LE1	458
	1	48 Q9 LE2	471
	1	48 Q9 LE3	474
	1	72 Q9 LE1	440
	4	72 Q9 LE1	336
	1	96 Q9 LE1	429

Tabella 4.31. Analisi di convergenza della mesh sia nel piano che per l'espansione per il caso della piastra forata

Dai risultati ottenuti possiamo notare che:

- utilizzare un Softening lineare post-picco non ci permette di trovare una precisa correlazione con i dati sperimentali, ottenendo invece una sovrastima della resistenza a rottura circa del 25%;
- il modello CODAM2 produce risultati peggiori rispetto a Hashin + Puck, attribuendo alla resistenza un valore ancor più elevato rispetto a quello reale, con una discrepanza di circa un 60%;
- malgrado gli aumenti di discretizzazione nel piano ed espansione lungo lo spessore, per entrambi i modelli matematici, non si riscontrano grandi miglioramenti;
- aumentare le dimensioni della piastra e quindi del danno, provocano, come nel caso precedente, una riduzione dello stress massimo applicabile (Tabella 4.32).

SCALA	MESH	$\sigma_{0eq}$ [MPa]
1	72 Q9 LE1	440
4	72 Q9 LE1	336

Tabella 4.32. Effetto delle dimensioni del provino

- l'evoluzione del danno progressivo di fibra e matrice a compressione è mostrato in Figura 4.27 e 4.28. Il danneggiamento è stato rilevato negli strati a 0 gradi, nei quali si hanno le fibre orientate nella direzione di carico e quindi più soggette a fenomeni di instabilità (Buckling).

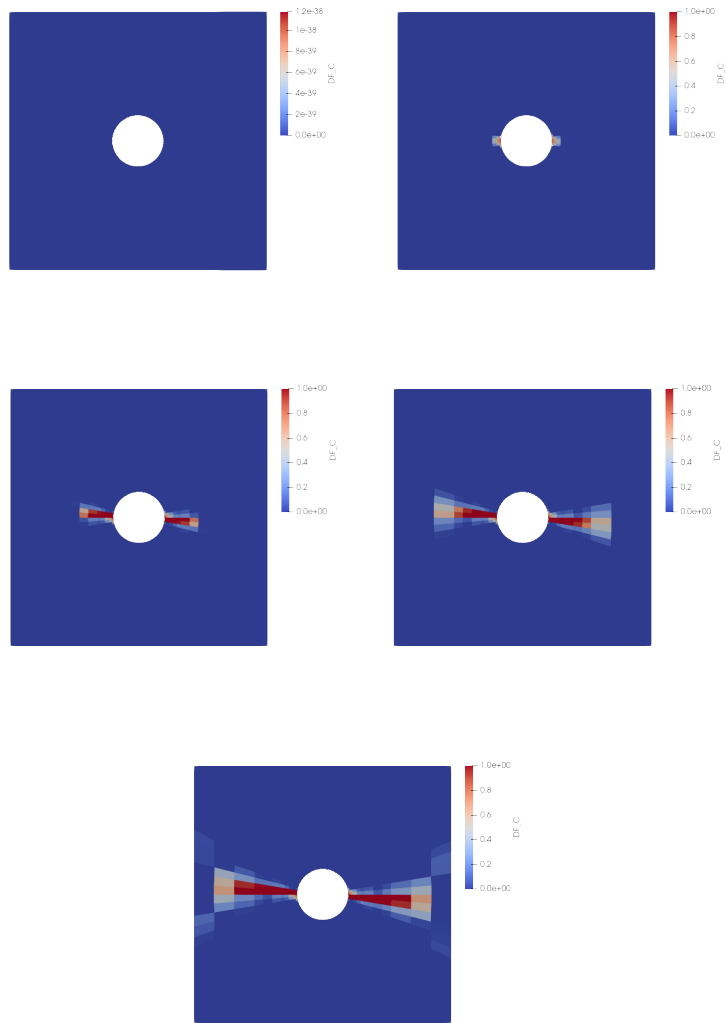


Figura 4.27. Progressione del danno della fibra per della piastra forata



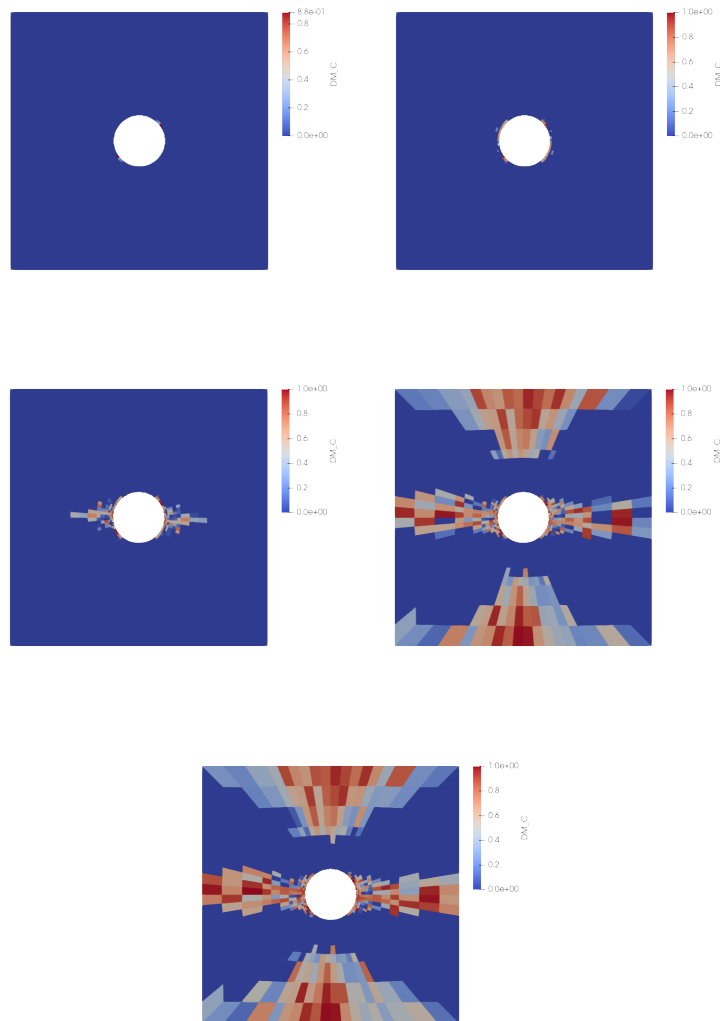


Figura 4.28. Progressione del danno della matrice della piastra forata

Risultati notevolmente migliori (errori al di sotto del 4%) si ottengono con modelli di cedimento fragile, i quali sono ritrovabili in letteratura [27, 8]. Le soluzioni di quest'ultimi, sono state ottenute con Br-30 per il CODAM2 e Br-50 per Hashin + Puck, mostrando di essere le più adatte a prevedere il comportamento reale della piastra a compressione.



## Capitolo 5

# CONCLUSIONI

## 5.1 Riassunto del Lavoro di Tesi

Il presente lavoro di tesi si è focalizzato sullo sviluppo e sulla validazione di modelli numerici bidimensionali (2D) basati sulla *Carrera Unified Formulation* (CUF), con l'obiettivo di analizzare il comportamento meccanico e il danneggiamento progressivo di strutture laminate in materiale composito. L'attenzione è stata rivolta in particolare a piastre danneggiate, caratterizzate da fori o intagli centrali, soggette a carichi di natura statica e dinamica.

Il lavoro si articola in tre principali sezioni teorico-pratiche:

- **Revisione delle Teorie sui Materiali Compositi:** nel secondo capitolo, viene condotta un'analisi approfondita delle principali teorie strutturali disponibili in letteratura, con particolare attenzione agli approcci *Layer-Wise* ed *Equivalent Single Layer*. L'approccio *Layer-Wise*, adottato nella CUF, si è rivelato particolarmente efficace per modellare separatamente le distribuzioni di tensione e deformazione nei singoli strati del laminato. Inoltre, sono stati esaminati i criteri di *failure*, con un focus sui modelli *Hashin* e *Puck*, fondamentali per la simulazione del danneggiamento progressivo;
- **Teoria della CUF e modelli agli Elementi Finiti:** nel terzo capitolo, viene descritta la teoria della CUF e le sue implementazioni in modelli numerici di elementi finiti per travi e piastre. Si approfondiscono le espansioni polinomiali di Lagrange, il concetto di *Fundamental Nucleus* e la costruzione delle matrici di massa, rigidezza e vettore dei carichi. Inoltre, viene trattata l'implementazione numerica delle analisi implicite ed esplicite, con particolare attenzione al metodo di *Newton-Raphson* e al metodo delle differenze centrali;
- **Casi Studio e Validazione:** nel quarto capitolo, sono presentati i risultati delle simulazioni numeriche effettuate. Sono state analizzate piastre laminate con difetti geometrici (fori o intagli centrali), soggette a carichi statici lineari e dinamici non lineari. Le simulazioni sono state condotte utilizzando il software Mul2, validando i modelli 2D-CUF attraverso il confronto con risultati di riferimento disponibili in letteratura e con analisi effettuate tramite Abaqus.

Il lavoro si conclude con un'analisi critica dei risultati ottenuti, evidenziando i vantaggi offerti dai modelli sviluppati in termini di accuratezza e riduzione dei costi computazionali e suggerendo possibili sviluppi futuri per migliorare ulteriormente la loro efficacia.

## 5.2 Conclusioni

Il lavoro svolto in questa tesi ha permesso di validare l'applicazione della *Carrera Unified Formulation* (CUF), combinata con il criterio di Hashin-Puck, per lo studio di piastre laminate composite con difetti geometrici. Attraverso l'implementazione

nel software Mul2, sono state condotte analisi statiche lineari e dinamiche non lineari per valutare il comportamento meccanico e l'evoluzione del danneggiamento progressivo.

Le principali conclusioni tratte dal lavoro possono essere così sintetizzate:

- **efficienza e Accuratezza:** i modelli numerici basati sulla CUF hanno dimostrato un'elevata accuratezza nel predire le distribuzioni di tensione e deformazione, mantenendo un notevole vantaggio in termini di riduzione dei gradi di libertà (DOFs) e dei costi computazionali rispetto ai software commerciali come Abaqus;
- **validità del Modello Hashin-Puck:** l'implementazione del criterio Hashin + Puck si è rivelata efficace nella simulazione del danneggiamento progressivo dei laminati. I risultati ottenuti mostrano una buona corrispondenza con i dati di riferimento disponibili in letteratura, mostrando anche una migliore veridicità rispetto al modello CODAM2. Questo è da ricondurre al fatto che quest'ultimo impiega il criterio di Hashin 2D, mentre il criterio H + P ne utilizza una formulazione 3D;
- **rappresentazione del Danneggiamento Localizzato:** i modelli CUF si sono dimostrati in grado di rappresentare con accuratezza i fenomeni di danneggiamento localizzato, evidenziando l'influenza delle caratteristiche geometriche dei difetti (come fori o intagli) sulla risposta strutturale complessiva.

L'insieme dei risultati ottenuti conferma la validità dei modelli CUF come alternativa ai metodi tridimensionali tradizionali, grazie alla loro versatilità e alla capacità di rappresentare accuratamente fenomeni complessi riducendo il tempo computazionale.

## 5.3 Prospettive Future

Pur avendo raggiunto risultati significativi, il presente lavoro apre la strada a diversi sviluppi futuri volti a migliorare e ampliare l'applicabilità dei modelli CUF e del criterio Hashin-Puck:

1. **estensione della Validazione:** si propone di estendere la validazione dei modelli a casistiche più complesse, come impatti, includendo combinazioni di carichi e configurazioni laminate di diversa scala. Questa attività consentirebbe di rafforzare ulteriormente la robustezza e la generalizzabilità dei risultati ottenuti;
2. **integrazione degli Elementi Coesivi:** l'introduzione di elementi coesivi nei modelli sviluppati permetterebbe di considerare il fenomeno della delaminazione e del danneggiamento inter-laminare, migliorando la rappresentatività delle simulazioni rispetto ai casi reali;

3. **ottimizzazione del Criterio di Puck:** un miglioramento nel calcolo dell'angolo  $\alpha$  previsto dal criterio di Puck consentirebbe di ridurre le approssimazioni numeriche, aumentando l'accuratezza della descrizione del danneggiamento progressivo;
4. **analisi Multi-Fisiche:** la futura integrazione di analisi multi-fisiche, come lo studio delle interazioni termo-meccaniche, amplierebbe ulteriormente il campo di applicazione dei modelli CUF, rendendoli adatti a problematiche più complesse.

Questi sviluppi futuri rappresentano un'opportunità per migliorare ulteriormente le potenzialità e l'efficacia dei modelli CUF, consolidandone il ruolo come strumenti di analisi avanzati nel campo delle strutture in composito.

# Ringraziamenti

Oggi si conclude per me un lungo viaggio e voglio iniziare con un ringraziamento speciale al Professor Petrolo, che mi ha dato l'opportunità di lavorare su un argomento così importante per il nostro campo di studi. La sua fiducia e il suo supporto sono stati fondamentali.

Un grazie di cuore all'Ingegnere Saputo e alla Dott.ssa Tortorelli, che mi hanno seguito con estrema disponibilità e gentilezza lungo tutto il mio percorso. La loro guida è stata preziosa e insostituibile.

Un pensiero speciale va al mio compagno di corso Ed. In questi anni ci siamo sostenuti a vicenda nei momenti più difficili e non avrei potuto desiderare un alleato migliore in questa avventura. Laurearci insieme nello stesso giorno rende questo traguardo ancora più significativo.

Grazie a mia sorella Giorgia, che mi ha cresciuto come un Millennial: dividevamo pomeriggi indimenticabili guardando *The O.C.*, *Buffy l'ammazzavampiri*, *Dragon Ball* e ascoltando Hilary Duff nei giorni in cui saltavamo la scuola. Quei momenti mi mancano più di quanto possa esprimere. E grazie a Matteo, per la felicità che le dona e perché so che sarà lui a starle accanto e a proteggerla quando io non potrò. A mia madre Patrizia, devo tutto. La sua straordinaria forza nell'affrontare ogni ostacolo che la vita le ha posto davanti mi ha insegnato tanto, anche se so che non sarò mai forte quanto lei. Non dimenticherò mai i giorni in cui, malato a casa, tornavi dal panettiere con pane e prosciutto cotto, e dividevamo insieme una puntata della *Signora in Giallo* o di *Detective in corsia*. Quei momenti e quel prosciutto avevano un sapore unico, impossibile da replicare.

A mio padre Piero. Il mio più grande rammarico è che tu non possa essere qui a vedermi raggiungere i miei traguardi e a conoscere la persona speciale che mi sta accanto. Resterai per sempre nel mio cuore come quell'omone grande grande che guardavo dal basso con occhi pieni di ammirazione e amore.

Grazie a te, Natalia. Sei il mio più grande supporto, il mio punto fermo, e non riesco a immaginare un futuro senza di te. Non vedo l'ora di scoprire cosa la vita ha in serbo per noi e prometto di fare sempre del mio meglio per renderti felice. Partiamo da *Mirtilla* e dall'*Aurora Boreale*. . . il resto lo scriveremo insieme.

E grazie a tutte le persone che mi sono state accanto.

Riccardo





# Bibliografia

- [1] A. Rubini. *Analisi del processo produttivo di componenti in fibra di carbonio con autoclave: il caso di HP Composites*. PhD thesis, Politecnico di Torino, 2020.
- [2] F. Calleri. *Failure Analysis of Cross-Ply Laminates*. PhD thesis, Politecnico di Torino, 2020.
- [3] M. Norkhairunnisa, T. Chai Hua, SM Sapuan, and RA Ilyas. Evolution of aerospace composite materials. In *Advanced composites in aerospace engineering applications*. 2022.
- [4] A. Akdeniz. The impact of mandated aging airplane programs on jet transport airplane scheduled structural inspection programs. *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, 2001.
- [5] G. Goranson. Fatigue issues in aircraft maintenance and repairs. *International Journal of Fatigue*, 1998.
- [6] G. Frulla. *Dispense Corso di Tecnologie Aerospaziali*. 2023.
- [7] T. Vaitkunas, P. Griskevicius, and K. Spakauskas. Interlaminar strength analysis of bonded carbon fiber rods. 2021.
- [8] M. Colucci. *Sviluppo di modelli strutturali 1D e 2D per il danneggiamento progressivo di strutture in composito= 1D and 2D higher-order models for the progressive damage analysis of composite structures*. PhD thesis, Politecnico di Torino, 2023.
- [9] E. Carrera. Theories and finite elements for multilayered, anisotropic, composite plates and shells. *Archives of computational methods in engineering*, 9, 2002.
- [10] C. Fagianò. Computational modeling of tow-placed composite laminates with fabrication. 2010.
- [11] Altair Radioss. Explicit structural finite element analysis, composite failure model, 2024.
- [12] RM O’Higgins, GS Padhi, MA McCarthy, and CT McCarthy. Experimental and numerical study of the open-hole tensile strength of carbon/epoxy composites. *Mechanics of Composite Materials*, 40:269–278, 2004.
- [13] KC Jois and D. Höwer. Modeling and analysis of laminated composites: classical and contemporary approaches. In *Advances in Modeling and Simulation in Textile Engineering*, pages 301–349. 2021.

- 
- [14] *CM Saggese*. Analisi agli elementi finiti del danneggiamento progressivo di strutture in composito= Finite Element Progressive Failure Analysis of composite structures. *PhD thesis, Politecnico di Torino, 2019*.
- [15] *YSN Reddy, CM Dakshina Moorthy, and JN Reddy*. Non-linear progressive failure analysis of laminated composite plates. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 30:629–649, 1995.
- [16] *M. Suada, H. Syamsudin, and H. Romadon*. Experimental and numerical analysis of carbon/epoxy composite plate subject to low-velocity impact. *Journal of Engineering and Technological Sciences*, 54, 2022.
- [17] *M. Arruda, L. Castro, A. Ferreira, D. Martins, and J. Correia*. Physically non-linear analysis of beam models using carrera unified formulation. *Composite Structures*, 195, 2018.
- [18] *D. Scano*. Uso di Polinomi di Lagrange nell’Analisi Lineare e Nonlineare di Strutture Lamine. *PhD thesis, Politecnico di Torino, 2021*.
- [19] *MH Nagaraj, E. Carrera, and M. Petrolo*. Progressive damage analysis of composite laminates subjected to low-velocity impact using 2d layer-wise structural models. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 127, 2020.
- [20] *I. Kaleel, E. Carrera, M. Petrolo, and AM Waas*. Computationally-efficient multiscale models for progressive failure and damage analysis of composites. 2019.
- [21] *E. Carrera, M. Cinefra, M. Petrolo, and E. Zappino*. Finite element analysis of structures through unified formulation. 2014.
- [22] *MH Nagaraj*. Higher-order layer-wise models for the progressive damage and impact analysis of composite structures. 2021.
- [23] *L. Xue, S. Yang, Z. He, R. Wang, Y. Zheng, N. Li, K. Zheng, and Y. Ren*. Low velocity impact response of carbon fiber composite laminates with surface glass fibers. *Applied Composite Materials*, pages 1–25, 2024.
- [24] *N. Wirawan, IH Abuzayed, M. Akbar, and JL Curiel-Sosa*. A robust fast fracture plane orientation angle search algorithm for puck 3d inter-fibre failure criterion. *European Journal of Computational Mechanics*, 33:227–254, 2024.
- [25] *MH Nagaraj, J. Reiner, R. Vaziri, E. Carrera, and M. Petrolo*. Progressive damage analysis of composite structures using higher-order layer-wise elements. *Composites Part B: Engineering*, 190, 2020.
- [26] *J. Reiner, T. Feser, D. Schueler, M. Waimer, and R. Vaziri*. Comparison of two progressive damage models for studying the notched behavior of composite laminates under tension. *Composite Structures*, 207:385–396, 2019.
- [27] *MH Nagaraj, J. Reiner, R. Vaziri, E. Carrera, and M. Petrolo*. Compressive damage modeling of fiber-reinforced composite laminates using 2d higher-order layer-wise models. *Composites Part B: Engineering*, 215, 2021.
- [28] *Johannes Reiner, Navid Zobeiry, and Reza Vaziri*. A stacked sublaminates-based damage-plasticity model for simulating progressive damage in composite laminates under impact loading. *Thin-Walled Structures*, 156, 2020.
- [29] *N. Scuor*. Introduzione: fibre. Materiali Compositi. *PhD thesis, Università degli studi di Trieste, 2019*.

- [30] B. Tuberosa. *Proprietà meccaniche a trazione di compositi polimerici rinforzati con fibre lunghe di carbonio di interesse per il settore automotive*. Università di Bologna, 2012.
- [31] K. Kodagali. Progressive Failure Analysis of composite Materials using the e Analysis of composite Materials using the Puck Failure Criteria. *PhD thesis, University of South Carolina, 2017*.
- [32] R. De Borst, M. A Crisfield, JC Remmers, and CV Verhoosel. *Nonlinear finite element analysis of solids and structures*. 2012.
- [33] M. Trombini, M. Enea, MRT Arruda, A. Pagani, M. Petrolo, and E. Carrera. *1d higher-order theories for quasi-static progressive failure analysis of composites based on a full 3d hashin orthotropic damage model*. Composites Part B: Engineering, 270, 2024.
- [34] V. Agostinelli. *Caratterizzazione sperimentale di materiali compositi soggetti ad impatto sul bordo*. 2014.
- [35] SIB Syed Abdullah. *Damage and Failure in Composite Structures*. 2021.
- [36] RM Jones. *Mechanics of composite materials*. 2018.
- [37] E. Reissner. *The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates*. Journal of Applied Mechanics, 12:69–76, 1945.
- [38] Z. Hashin and A. Rotem. *A fatigue failure criterion for fiber reinforced materials*. Journal of composite materials, 7:448–464, 1973.
- [39] A. Puck and H. Schürmann. *Failure analysis of frp laminates by means of physically based phenomenological models*. Composites science and technology, 62:1633–1662, 2002.
- [40] SC Tan and RJ Nuismer. *A theory for progressive matrix cracking in composite laminates*. Journal of Composite Materials, 23:1029–1047, 1989.
- [41] ALJTR Matzenmiller, J. Lubliner, and RL Taylor. *A constitutive model for anisotropic damage in fiber-composites*. Mechanics of materials, 20:125–152, 1995.
- [42] DW Sleight. *Progressive failure analysis methodology for laminated composite structures*. Technical report, 1999.
- [43] I. Lapczyk and JA Hurtado. *Progressive damage modeling in fiber-reinforced materials*. Composites Part A: Applied science and manufacturing, 38:2333–2341, 2007.
- [44] F. Bertolino. *Dispense Corso di Fondamenti di Costruzioni Meccaniche*. PhD thesis, Università degli Studi di Cagliari, 2019.
- [45] M. Rezasefat, DB Torres, A. Gonzalez-Jimenez, M. Giglio, and A. Manes. *A fast fracture plane orientation search algorithm for puck’s 3d iff criterion for ud composites*. Materials Today Communications, 28:102700, 2021.
- [46] X. Xu, MR Wisnom, X. Li, and SR Hallett. *A numerical investigation into size effects in centre-notched quasi-isotropic carbon/epoxy laminates*. Composites Science and Technology, 111:32–39, 2015.
- [47] J. Lee and C. Soutis. *Measuring the notched compressive strength of composite laminates: Specimen size effects*. Composites Science and Technology, 68(12):2359–2366, 2008.