

# POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale



**Politecnico  
di Torino**

## Analisi di compositi laminati a fibra curva tramite ABAQUS

**Relatori:**

**Prof. Alfonso PAGANI**

**Dott. Rodolfo AZZARA**

**Dott. Alberto RACIONERO**

**Dott. Dario ZAMANI**

**Candidato:**

**Antonio LI DESTRI**

**Anno Accademico 2023/2024**



*ARj says it's always good to start a paper with a quote.  
He says someone else has already said it best.  
So, if you can't top it, steal from them and go out strong.*

## Abstract

This thesis investigates the mechanical characterization of Variable Stiffness Composites, also known as Variable Angle Tow (VAT) composites. These materials are gaining prominence in the aerospace industry due to their superior mechanical properties compared to traditional metallic alloys. Unlike conventional composites, VAT composites allow for the continuous variation of fiber orientation within the laminate, which enhances structural performances by optimizing the distribution of stiffness and strength. However, this adds complexity also makes their modeling and analysis more challenging.

The research presented in this thesis addresses the complexity of analyzing VAT composites using finite element methods (FEM). The study uses the commercial software ABAQUS, combined with Python scripting, to simulate and solve structural problems in a synergistic manner. Python scripting plays a key role in the parameterization of the models, enabling efficient automation and customization of the geometry. This integrated approach provides flexibility in exploring a wide range of fiber configurations, boundary conditions, and loading scenarios. The mechanical behavior of VAT laminates is examined through both 2D and 3D models, focusing on static, dynamic, and buckling responses. The methodology involves characterizing different fiber paths, from straight to curved configurations, and evaluating their impact on structural performance under various load conditions. Through simulations, this work evaluates the stress distribution, displacement, and deformation patterns in VAT laminates. Specifically, a 2D finite element model is used for static analysis, evaluation of natural frequencies, and buckling behaviour, providing effective means of assessing the overall mechanical response of VAT laminates. For a more detailed study of stress distributions, a 3D model is implemented, enabling a precise evaluation of local stresses and deformations within the layers. This dual approach ensures a comprehensive understanding of the material's performance across different scales. Comparisons are made between traditional straight fiber composites and VAT composites to highlight the benefits of using VAT technology, particularly in aerospace applications where weight optimization and mechanical efficiency are critical. The numerical results show that VAT composites provide improved resistance to mechanical loads, reduce stress concentrations, and enhance buckling resistance, making them a promising solution for high-performance aerospace structures.

This research develops an accurate and computationally efficient parameterised finite element analysis framework that uses both two- and three-dimensional models to investigate the mechanical behaviour of VAT.



# Contents

<b>List of Tables</b>	IV
<b>List of Figures</b>	VI
<b>1 Introduzione</b>	1
1.1 I materiali compositi . . . . .	1
1.1.1 I materiali compositi nella storia . . . . .	2
1.1.2 Stato dell'arte della caratterizzazione meccanica dei materiali compositi . . . . .	3
1.2 Materiali compositi VAT . . . . .	4
1.2.1 Stato dell'arte della caratterizzazione meccanica dei materiali VAT . . . . .	5
<b>2 Caratterizzazione meccanica dei materiali VAT</b>	8
2.1 Teoria dell'Elasticità . . . . .	8
2.2 Teoria elementare della Piastra . . . . .	11
2.3 Teoria della piastra di Reissner-Mindlin . . . . .	14
2.4 Metodo degli Elementi Finiti (FEM) . . . . .	17
2.4.1 Derivazione delle Equazioni di Governo . . . . .	18
2.4.2 Applicazione alle Strutture Laminari . . . . .	18
2.4.3 Forma Debole e Approssimazione degli Spostamenti . . . . .	19
2.5 Materiali compositi e laminati . . . . .	20
2.6 Materiali VAT . . . . .	22
<b>3 Il software ABAQUS</b>	25
3.1 Pre-processo . . . . .	26
3.2 Simulazione . . . . .	27
3.3 Post-processo . . . . .	27
3.4 Modelli ABAQUS . . . . .	28
3.4.1 Modulo Part . . . . .	28
3.4.2 Modulo Propriety . . . . .	29

3.4.3	Modulo Assembly . . . . .	29
3.4.4	Modulo Step . . . . .	30
3.4.5	Modulo Load . . . . .	30
3.4.6	Modulo Mesh . . . . .	31
3.4.7	Modulo Optimization . . . . .	37
3.4.8	Modulo Job . . . . .	37
3.5	Python e ABAQUS . . . . .	38
3.6	Parametrizzazione dell'analisi . . . . .	39
<b>4</b>	<b>Risultati numerici</b>	<b>44</b>
4.1	Analisi statica . . . . .	46
4.1.1	Analisi convergenza Caso 1: Fibre dritte . . . . .	47
4.1.2	Analisi convergenza Caso 2 . . . . .	48
4.1.3	Analisi convergenza Caso 3 . . . . .	48
4.1.4	Analisi convergenza Caso 4 . . . . .	49
4.1.5	Confronto tra quattro vari casi . . . . .	50
4.2	Frequenze naturali: analisi modale . . . . .	52
4.2.1	Analisi di convergenza e confronto tra i casi . . . . .	53
4.3	Analisi di Buckling . . . . .	56
4.4	Analisi dello stato tensionale tridimensionale . . . . .	64
4.4.1	Codice tridimensionale parametrico . . . . .	64
4.4.2	Analisi convergenza stato tensionale . . . . .	66
4.4.3	Caso Open Hole . . . . .	73
<b>5</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>78</b>
<b>A</b>		<b>81</b>
A.1	Forme Modali piastra caso 1 . . . . .	81
A.2	Forme Modali piastra caso 2 . . . . .	82
A.3	Forme Modali piastra caso 3 . . . . .	82
<b>B</b>		<b>84</b>
	<b>Bibliography</b>	<b>86</b>

# List of Tables

3.1	Unità di misura in ABAQUS. . . . .	25
3.2	Comparazione degli elementi tra ABAQUS, Ansys e Patran & Nastran. . . . .	36
4.1	Proprietà del materiale Grafite-Epossidica. . . . .	45
4.2	Variazione delle fibre nei quattro casi studiati. . . . .	46
4.3	Analisi di convergenza della mesh nel piano della piastra con lamina- zione a fibre dritte tramite elementi bidimensionali quadratici S4R. . . . .	47
4.4	Analisi di convergenza della mesh nel piano per l'analisi statica: Caso 2. . . . .	48
4.5	Analisi di convergenza della mesh nel piano per l'analisi statica: Caso 3. . . . .	49
4.6	Analisi di convergenza della mesh nel piano per l'analisi statica: Caso 4. . . . .	49
4.7	Analisi di convergenza della mesh nel piano per l'analisi dinamica: Caso 1. . . . .	53
4.8	Analisi di convergenza della mesh nel piano per l'analisi dinamica: Caso 2. . . . .	54
4.9	Analisi di convergenza della mesh nel piano per l'analisi dinamica: Caso 3. . . . .	54
4.10	Analisi di convergenza della mesh nel piano per l'analisi dinamica: Caso 4. . . . .	55
4.11	Proprietà Grafite-Epossidica. . . . .	58
4.12	Primi 5 carichi critici per QI e VAT . . . . .	60
4.13	Analisi convergenza $\sigma_{xx}$ nel Caso 1. . . . .	67
4.14	Analisi convergenza $\sigma_{yy}$ nel Caso 1. . . . .	68
4.15	Proprietà geometriche e materiale Toray T800/3900S. . . . .	74
4.16	Proprietà Toray T800/3900S. . . . .	75
4.17	Variazione delle fibre per la geometria Open Hole. . . . .	75
4.18	Tensione $\sigma_{xx}$ nel punto A. . . . .	76



5.1	Conforto analisi statica per una piastra a laminazione a fibre dritte e VAT. . . . .	79
5.2	Forme modali della piastra quadrata con densità di mesh $80 \times 80$ . . . . .	79
B.1	Proprietà Lega Al-7075 . . . . .	84
B.2	Carichi critici e proprietà specifiche delle tre piastre studiate . . . . .	84

# List of Figures

1.1	Materiali usati nel Boeing 787 Dreamliner [8]. . . . .	3
1.2	Confronto tra un laminato tradizionale e un laminato con tecnologia VAT [25]. . . . .	4
2.1	Problema elastico 3D con vincoli e carichi esterni applicati [44]. . .	9
2.2	Andamento degli spostamenti $s$ , delle deformazioni $\epsilon$ e delle tensioni $\sigma$ lungo lo spessore del laminato multistrato [50]. . . . .	22
2.3	Confronto tra un laminato VAT con variazione lineare dell'orientamento delle fibre e un laminato con fibre a curvatura costante [1]. . . . .	23
3.1	Fasi di un'analisi completa con ABAQUS [51]. . . . .	26
3.2	Organizzazione di un modello [54]. . . . .	28
3.3	Tipi di elementi in ABAQUS. . . . .	32
3.4	Convenzione di denominazione degli elementi in ABAQUS. . . . .	32
3.5	Elemento esaedrico lineare a otto nodi con integrazione ridotta di tipo C3D8R [56]. . . . .	33
3.6	Elemento tetraedrico (C3D10) in ABAQUS [57]. . . . .	33
3.7	Elementi S4 ed S8. . . . .	34
3.8	Elementi CPE4 ed CPE8 [54]. . . . .	35
4.1	Geometria e condizioni di carico della piastra quadrata utilizzata per l'analisi numerica. . . . .	44
4.2	Rappresentazione andamento delle fibre per i casi analizzati. . . . .	45
4.3	Geometria deformata della piastra. . . . .	46
4.4	Spostamento $u_x$ nei 4 casi. . . . .	50
4.5	Spostamento $u_y$ nei 4 casi. . . . .	51
4.6	Spostamento $u_z$ nei 4 casi. . . . .	51
4.7	Geometria e condizioni a contorno dell'analisi dinamica. . . . .	52
4.8	Convergenza prima forma modale. . . . .	56
4.9	Rappresentazione frequenze modali per andamento di fibre [ $\langle 90,45 \rangle$ , $\langle 0,45 \rangle$ ].	57
4.10	Geometria e condizioni a contorno analisi buckling. . . . .	59

4.11	Confronto carichi critici per piastra rettangolare QI e VAT. . . . .	61
4.12	Rappresentazione delle forme modali per la piastra composita QI. . .	62
4.13	Rappresentazione delle forme modali per la piastra VAT. . . . .	63
4.14	Analisi convergenza $\sigma_{xx}$ nel Caso 1 lungo lo spessore. . . . .	67
4.15	Analisi convergenza $\sigma_{yy}$ nel Caso 1 lungo lo spessore. . . . .	68
4.16	Variazione dello stress attraverso lo spessore. . . . .	69
4.17	Confronto andamento $\sigma_{xx}$ . . . . .	71
4.18	Confronto andamento $\sigma_{zz}$ . . . . .	72
4.19	Confronto andamento $\sigma_{zy}$ . . . . .	73
4.20	. . . . .	74
4.21	Confronto $\sigma_{xx}$ nel punto A per QI e VAT. . . . .	76
4.22	Tensione $\sigma_{xx}$ lungo l'asse $x = 0$ . . . . .	76
4.23	Confronto distribuzione $\sigma_{xx}$ lungo il pannello. . . . .	77
A.1	Rappresentazione frequenze modali per andamento di fibre $[\langle 90,90 \rangle, \langle 0,0 \rangle]$ . 81	
A.2	Rappresentazione frequenze modali per andamento di fibre $[\langle 90,75 \rangle, \langle 0,15 \rangle]$ . 82	
A.3	Rappresentazione frequenze modali per andamento di fibre $[\langle 90,60 \rangle, \langle 0,30 \rangle]$ . 83	
B.1	Rappresentazione delle forme modali per la piastra isotropa. . . . .	85



# Capitolo 1

## Introduzione

### 1.1 I materiali compositi

I materiali compositi rappresentano una classe di materiali di fondamentale importanza nel settore aerospaziale venendo sempre più usati nei velivoli commerciali e in ambito militare. A differenza dei materiali classici, come metalli e ceramiche, i compositi sono fortemente anisotropi e non omogenei essendo costituiti da due o più materiali distinti che, quando combinati, offrono proprietà superiori rispetto ai singoli componenti. Un composito tipico in campo aerospaziale è costituito da una matrice e un rinforzo.

La matrice è la componente continua e meno rigida di un materiale composito; il suo ruolo principale è trasferire correttamente gli sforzi locali tra i rinforzi, distribuendo il carico e limitando la rigidità complessiva del materiale. Inoltre, la matrice protegge i rinforzi dagli agenti chimici e ambientali, contribuendo alla durabilità del composito. I materiali utilizzati per la matrice possono variare, includendo resine polimeriche, metalli e ceramiche, ciascuno con proprietà specifiche che influenzano le prestazioni del composito.

Il rinforzo, invece, è la componente discontinua del composito, caratterizzata da proprietà meccaniche superiori rispetto alla matrice. I rinforzi possono essere di vario tipo, tra cui fibre (come quelle di vetro, carbonio o aramide), particelle, o tessuti, e la loro geometria può variare significativamente (ad esempio, fibre corte o lunghe, tessuti unidirezionali o bidirezionali). La scelta del tipo di rinforzo e della sua configurazione all'interno della matrice, il tipo di resina, la sequenza di laminazione, le condizioni ambientali ed il processo di fabbricazione influiscono notevolmente sulle proprietà finali del materiale composito, come la resistenza, la rigidità, e la tenacità. Questo permette di avere una vasta gamma di materiali che possono offrire delle proprietà meccaniche molto diverse tra di loro. Per esempio, i compositi rinforzati con fibre lunghe e orientate nella direzione del carico tendono

ad avere prestazioni meccaniche superiori rispetto a quelli con rinforzi disordinati o particellari.

Un'altra sostanziale differenza tra materiali compositi e materiali classici risiede nella loro struttura interna. I materiali classici hanno una natura monofasica, questo significa che, per distinguere le diverse fasi, è necessario analizzare il pezzo a livello della nanoscala. Tale caratteristica permette di prevedere con precisione le proprietà meccaniche, come il comportamento alla fatica. Al contrario, i materiali compositi sono caratterizzati da una natura multiscale, questo implica che durante lo studio di un materiale composito è possibile distinguere diversi livelli scale. Alla macroscale, si considerano la matrice e il rinforzo, che generalmente includono l'intero strato (ply). Alla mesoscale, Zamani *et al.* [1] esaminano il comportamento delle singole fibre e la loro interazione. Infine, alla microscale, Pagani *et al.* [2] definiscono un pattern periodico regolare, noto come Repeating Unit Cell (RUC), che rappresenta l'unità geometrica minima ripetibile nello spazio per replicare la struttura della scala superiore.

### 1.1.1 I materiali compositi nella storia

Fin dall'epoca in cui gli antichi egizi costruivano archi rinforzati con strati di legno, tendini e corno [3], si hanno riscontri dell'utilizzo dei materiali compositi. Tuttavia, solo a partire dagli anni '30 e '40 del XX secolo, con l'avvento della fibra di vetro e delle resine polimeriche, la ricerca industriale sui materiali compositi è aumentata. L'industria aeronautica fu una delle prime a riconoscere il potenziale dei compositi. Durante la Seconda Guerra Mondiale, i compositi furono utilizzati per la costruzione di alcune parti di aerei, come le eliche. Un esempio pionieristico fu il Mosquito della de Havilland, un aereo britannico costruito principalmente in legno compensato, un tipo di composito naturale [4]. L'uso dei compositi è aumentato ulteriormente negli anni '60 e '70. La Boeing realizzò parti non strutturali nei suoi modelli 707 e 727 in materiale composito. Tuttavia, fu con l'introduzione del Boeing 787 Dreamliner negli anni 2000 a segnare un punto di svolta. Circa il 50% della struttura del Dreamliner, inclusi la fusoliera e le ali, è costituita da materiali compositi avanzati, principalmente fibra di carbonio [5], così come mostrato in Fig.1.1.

L'adozione dei materiali compositi raggiunse un nuovo apice con la costruzione di aerei completamente in compositi. Il Rutan Voyager, un aereo sperimentale che fece il primo volo senza scalo intorno al mondo nel 1986, ne è un esempio. Il Voyager, progettato da Burt Rutan, aveva una struttura completamente composta da fibra di carbonio e fibra di kevlar [6]. Un altro esempio significativo è l'Airbus A350 XWB, entrato in servizio nel 2015, con una struttura composta da circa il 53% di materiali compositi, includendo anche in questo caso sia fusoliera che ali [7]. Questi aerei mostrano i vantaggi dei compositi in termini di leggerezza, resistenza e riduzione dei costi operativi permettendo un notevole risparmio di carburante

rispetto ai modelli precedenti.



**Figure 1.1:** Materiali usati nel Boeing 787 Dreamliner [8].

I materiali compositi sono diventati sempre più importanti anche per le missioni spaziali. La NASA e altre agenzie spaziali hanno iniziato ad impiegare i compositi per varie applicazioni, tra cui pannelli solari, strutture per veicoli spaziali e scudi termici [9]. Eppure, usufruire dei compositi nello spazio presenta complicazioni uniche, come il fenomeno dell'outgassing. In questo caso i materiali rilasciano gas quando vengono esposti al vuoto dello spazio danneggiando l'equipaggiamento sensibile [10]. La valutazione dell'invecchiamento [7] dei compositi è anch'essa di difficile previsione in quanto la variazione di temperatura nello spazio influenza le loro proprietà meccaniche. Nonostante queste criticità, con il continuo sviluppo tecnologico, i compositi avranno un ruolo sempre più importante nel futuro dell'ingegneria aerospaziale.

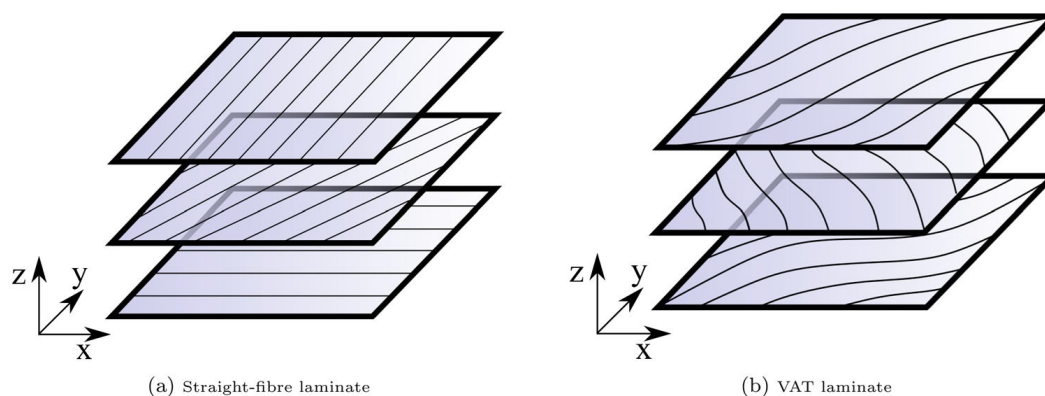
### 1.1.2 Stato dell'arte della caratterizzazione meccanica dei materiali compositi

Dal punto di vista ingegneristico e della caratterizzazione meccanica, lo studio dei materiali compositi che è alla base delle applicazioni sopra citate ha coinvolto numerosi studiosi, i quali hanno sviluppato teorie di diversa complessità, formulate sotto specifiche ipotesi. Molte delle metodologie analitiche si basano su teorie strutturali classiche, come la teoria della piastra di Kirchhoff e quella di Reissner-Mindlin. Su queste fondamenta si basano le due teorie più comuni per lo studio dei laminati: la Classical Lamination Theory (CLT) e la First-order Shear Deformation Theory (FSDT) [11]. Un limite della CLT [12, 13] è rappresentato dall'assunzione dello stato di tensione piano, che ne limita la capacità di descrivere in modo completo il campo di deformazione tridimensionale. Tuttavia, alcuni studiosi hanno ampliato questa teoria con un'analisi degli sforzi fuori piano, mantenendo

l'analisi del campo di deformazioni nel piano conforme alle ipotesi della CLT [14, 15, 16]. Hyer [17] e Herakovich [18] hanno trattato in modo esauriente il problema tridimensionale, ottenendo un'espressione accurata per la deformazione lungo lo spessore del composito. Successivamente alle analisi di Pipes e Pagano [19], sono state sviluppate numerose analisi tridimensionali basate sul metodo degli elementi finiti, che si concentrano anche sugli effetti dei bordi liberi sia in presenza di carichi meccanici che termici [20]. Nell'ambito dell'analisi agli elementi finiti, i contributi di Zhang e Yang [21], così come quello di Han *et al.* [22], sono di grande rilevanza; quest'ultimo ha esteso il metodo per includere le non-linearità geometriche, permettendo di studiare la risposta dei compositi in una gamma più ampia di condizioni. Zhang e Kim [23] hanno sviluppato un'analisi non lineare utilizzando la FSDT e la formulazione Lagrangiana, impiegando elementi shell/plate triangolari a tre nodi per definire gli spostamenti. Diversamente, Tran *et al.* [24] hanno proposto un metodo numerico basato sulla High-order Shear Deformation Theory (HSDT) e su analisi isogeometriche.

## 1.2 Materiali compositi VAT

I materiali compositi VAT (Variable Angle Tow), o tow-steered, rappresentano una classe avanzata di materiali ingegnerizzati che offrono notevoli vantaggi in termini di prestazioni strutturali e ottimizzazione del peso. Questi materiali sono costituiti da fibre di rinforzo, generalmente in carbonio o vetro, disposte in modo non convenzionale rispetto ai tradizionali laminati con orientamenti delle fibre fissi. La tecnologia VAT permette di variare l'angolo delle fibre lungo la superficie del materiale, come mostrato in Fig.1.2, consentendo una distribuzione ottimale delle sollecitazioni e una maggiore resistenza agli sforzi meccanici.



**Figure 1.2:** Confronto tra un laminato tradizionale e un laminato con tecnologia VAT [25].



L'approccio VAT sfrutta sofisticate tecniche di progettazione assistita da computer (CAD) e processi di produzione avanzati per realizzare strutture composite con proprietà meccaniche su misura. Questa capacità di personalizzazione rende i compositi VAT particolarmente adatti per applicazioni aerospaziali, automobilistiche e in altri settori ad alta tecnologia dove la riduzione del peso e l'aumento delle prestazioni sono fondamentali.

### 1.2.1 Stato dell'arte della caratterizzazione meccanica dei materiali VAT

Negli ultimi decenni, la ricerca sui materiali a rigidità variabile (VAT) ha guadagnato notevole interesse, diventando oggetto di numerosi studi che ne hanno approfondito vari aspetti teorici e applicativi nella progettazione di strutture avanzate. Racionero *et al.*, [26], hanno analizzato dettagliatamente il comportamento meccanico di gusci in composito VAT sottoposti a diversi carichi esterni e condizioni al contorno. Gli studi hanno mostrato che i modelli Equivalent Single Layer (ESL) e Layer Wise (LW) sono in accordo con i risultati ottenuti tramite i principali software commerciali per l'analisi dei pannelli piani. In particolare, le teorie Equivalent Single Layer (ESL) rappresentano un approccio semplificato alla modellazione dei laminati compositi, con il vantaggio di ridurre significativamente i costi computazionali. In queste teorie, tutti gli strati del laminato vengono trattati come un singolo strato con proprietà meccaniche medie, utilizzando un'unica matrice di rigidità per le analisi strutturali. Tuttavia, un limite rilevante di questo approccio è l'incapacità di garantire la continuità degli sforzi tra i vari strati, il che può portare a risultati meno accurati in determinate condizioni. D'altra parte, le teorie Layer Wise (LW) forniscono una rappresentazione più dettagliata e rigorosa dei laminati compositi. In queste teorie, ogni strato del laminato viene associato a una propria matrice di rigidità, assicurando la continuità degli sforzi e degli spostamenti alle interfacce tra gli strati. Questo approccio offre una maggiore precisione nelle analisi strutturali, ma comporta costi computazionali notevolmente più elevati, soprattutto in relazione alla complessità e al numero di strati del materiale.

Pagani *et al.* [2], si sono focalizzati sulla necessità di caratterizzare meccanicamente anche la mesoscala dei materiali VAT. Utilizzando la formulazione unificata (CUF), hanno sviluppato un approccio che combina modelli bidimensionali Layer Wise per la descrizione della macroscale e modelli monodimensionali Component-wise per la caratterizzazione della mesoscala. Questo metodo ha permesso di ottenere un'efficienza computazionale superiore e di catturare accuratamente lo stato di sollecitazione tridimensionale alle diverse scale. La Carrera's Unified Formulation (CUF) sopracitata, si basa sulla scrittura delle equazioni di governo mediante una notazione indiciale e un algoritmo capace di gestire un numero virtualmente infinito di teorie, tra cui i modelli Equivalent Single Layer (ESL) e Layer Wise (LW)

[27]. A differenza delle approssimazioni tipicamente adottate, la formulazione CUF permette di ottenere un campo di spostamenti tridimensionale, considerando così anche i contributi delle dimensioni spesso trascurate. Questo risultato è ottenuto tramite l'uso di funzioni di espansione, che possono variare significativamente, influenzando in maniera sostanziale la cinematica del modello analizzato.

Ribeiro ed Akhavan [28, 29] hanno utilizzato la First-order Shear Deformation Theory per investigare le frequenze naturali e le forme modali di piastre in composito a rigidezza variabile, utilizzando elementi finiti basati sulla teoria della deformazione a taglio del terzo ordine. Montemurro e Catapano [30] hanno sviluppato una strategia di ottimizzazione utilizzando la stessa teoria. Il loro studio ha rivelato che l'uso di piastre VAT può causare variazioni significative nelle forme modali e nella prima frequenza naturale del laminato, evidenziando l'importanza dell'orientamento delle fibre nel comportamento dinamico delle piastre. I progressi ottenuti indicano che l'uso di materiali a rigidezza variabile può significativamente migliorare le prestazioni strutturali, specialmente in applicazioni soggette a carichi complessi e condizioni di buckling. Zhou e Gosling [31] hanno impiegato la FSDT per valutare le incertezze delle performance meccaniche delle piastre VAT.

La capacità dei materiali VAT di controllare i flussi di carico, la rigidezza locale e il comportamento dinamico delle strutture complesse è stata ampiamente valutata da Hyer [32], che ha anche identificato modalità per migliorare le prestazioni della struttura in condizioni di buckling. Zappino e Pagani [33] hanno analizzato, sia per via sperimentale che numerica, gli effetti benefici derivanti dall'imposizione di specifici percorsi di rinforzo in presenza di fori in una piastra stampata mediante l'utilizzo della manifattura additiva (AM). In particolare, l'adozione di fibre di rinforzo concentriche intorno ai fori ha dimostrato di ridurre significativamente la concentrazione di stress nell'area circostante, modificando in modo rilevante il campo di deformazioni risultante. Anche Lopes *et al.* [34] hanno dimostrato come le fibre curvilinee possano direzionare i flussi di carico da una regione centrale a una più rigida, aumentando la resistenza al buckling. Weaver *et al.* [35] hanno studiato approfonditamente il comportamento in buckling e post-buckling, introducendo ottimizzazioni specifiche. Xiadong *et al.* [36] hanno analizzato il buckling nei laminati VAT con porzioni delaminate.

Wu *et al.* [37], hanno sviluppato un modello analitico per descrivere il comportamento di pre-buckling dei laminati VAT, implementando un approccio basato sul metodo di Rayleigh-Ritz. Hanno dimostrato che l'uso della funzione di stress di Airy per l'analisi di pre-buckling e buckling delle piastre VAT risulta essere molto conveniente per gestire diverse condizioni al contorno nel piano. Nel loro studio successivo, Wu *et al.* [38], hanno esplorato il comportamento di post-buckling, sviluppando una formulazione semi-analitica basata su un approccio variazionale e applicando il metodo di Rayleigh-Ritz per risolvere il problema in regime postcritico. I risultati indicano che i laminati VAT mantengono una rigidezza complessiva e

un carico critico di buckling elevati, con solo una riduzione minima della rigidità nella regione di postbuckling.

Chen e Nie [39] hanno studiato il comportamento post-critico non lineare di pannelli sandwich soggetti a carico di compressione, in cui le facce superiori ed inferiori sono realizzate tramite piastre VAT. Hanno scoperto che la variazione di rigidità delle facce ha un ruolo determinante nel comportamento di buckling interattivo, suggerendo l'introduzione di un knock-down factor per caratterizzare correttamente questa tipologia di laminati.

I materiali tow-steered sono stati utilizzati anche per il design della risposta aeroelastica di particolari strutture, come le ali degli aeromobili, dove il controllo della risposta aeroelastica è ottenuto tramite un design opportuno del rinforzo del composito [40].

Ribeiro *et al.* [29, 41] hanno inoltre sfruttato la Third-order Shear Theory e una teoria Layer Wise (LW) con elementi finiti *p version* basati sulla teoria della deformazione a taglio del terzo ordine, per studiare le vibrazioni libere e i modi di vibrare di lamine VAT sottili e spesse. L'approccio Layer Wise, che, come detto precedentemente, studia ciascun layer del composito separatamente, ha dimostrato di essere particolarmente efficace, come evidenziato dagli studi di Robbin *et al.* [42, 43].

## Capitolo 2

# Caratterizzazione meccanica dei materiali VAT

In questo capitolo vengono presentate sinteticamente le teorie fisiche e ingegneristiche fondamentali per le analisi strutturali che verranno sviluppate nel corso della tesi. Per condurre un'analisi accurata dei materiali a traiettoria variabile (Variable Angle Tow, VAT), è necessario esaminare preliminarmente i concetti chiave dell'analisi strutturale, introducendo la notazione che sarà utilizzata nelle trattazioni successive.

### 2.1 Teoria dell'Elasticità

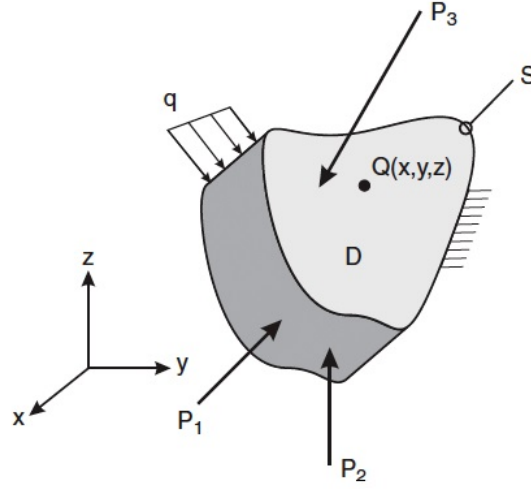
In una struttura tridimensionale generica è possibile individuare le componenti di spostamento, deformazione e tensione in ogni punto della struttura. Questo permette di affrontare il problema elastico, che consiste nel determinare la nuova condizione di equilibrio del corpo considerato, una volta assegnate le forze esterne e i vincoli. In termini pratici, ciò si traduce nella descrizione della nuova forma assunta dal corpo in risposta alle condizioni al contorno imposte.

Dal punto di vista analitico, questo comporta il calcolo degli spostamenti, delle tensioni e delle deformazioni in ciascun punto P del corpo iniziale. Considerando un corpo tridimensionale di volume V e perimetro S, illustrato in Fig. 2.1, è possibile descrivere il campo di spostamenti mediante il vettore  $\mathbf{u}^T$ .

$$\mathbf{u}^T = \{u_x, u_y, u_z\} = \{u, v, w\}$$

I vettori di sforzo e deformazione vengono quindi definiti in conformità con le relazioni che governano il comportamento elastico del materiale.

$$\boldsymbol{\epsilon}^T = \{\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \gamma_{xy}\}$$



**Figure 2.1:** Problema elastico 3D con vincoli e carichi esterni applicati [44].

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{xy}\}$$

Le sei componenti di deformazione possono essere determinate attraverso relazioni geometriche.

**Deformazioni volumetriche** sono rappresentate dalle componenti  $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}$ , che descrivono il cambiamento di volume del materiale. Queste sono le tre componenti associate alle deformazioni lineari in termini di allungamento/accorciamento.

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = u_{x,x}$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = u_{y,y}$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = u_{z,z}$$

**Deformazioni di forma** riguardano le componenti  $\gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \gamma_{xy}$ , che descrivono le alterazioni della forma del materiale senza variazioni di volume. Queste tre componenti sono legate alle distorsioni per taglio.

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = u_{x,y} + u_{y,x}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = u_{x,z} + u_{z,x}$$

$$\gamma_{zy} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = u_{y,z} + u_{z,y}$$

Nel contesto della risoluzione del problema elastico, oltre alle equazioni di equilibrio e compatibilità, vengono introdotte sei equazioni aggiuntive, note come *equazioni costitutive*. Queste equazioni descrivono la relazione tra le tensioni e le deformazioni attraverso i coefficienti del materiale e si basano sulla legge di Hooke, valida per piccole deformazioni.

Le equazioni costitutive si esprimono nella forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\epsilon} \quad (2.1)$$

dove  $\boldsymbol{\sigma}$  è il vettore delle tensioni,  $\boldsymbol{\epsilon}$  è il vettore delle deformazioni e  $\mathbf{C}$  è la matrice di rigidità del materiale, di dimensioni  $6 \times 6$ . Questa matrice collega direttamente le componenti di tensione con le componenti di deformazione. Nel caso di materiali isotropi, la matrice dei coefficienti elastici risulta particolarmente semplice da rappresentare, poiché riflette le proprietà uniformi del materiale in tutte le direzioni.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

La matrice  $\mathbf{C}$  ha 21 componenti indipendenti per materiali anisotropi, mentre per materiali ortotropi conta solo 9 componenti indipendenti [45]. Le costanti elastiche presenti nella matrice  $\mathbf{C}$  possono essere determinate utilizzando i coefficienti di Lamé  $\lambda$  e  $G$ :

$$C_{11} = \lambda + 2G, \quad C_{12} = \lambda, \quad C_{44} = G$$

I coefficienti di Lamé possono a loro volta essere espressi in funzione del modulo di Young  $E$  e del coefficiente di Poisson  $\nu$ :

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

L'equazione 2.1 è valida solo sotto l'ipotesi di un campo di deformazione lineare, condizione che implica un comportamento lineare del materiale. Questa relazione è applicabile nei casi in cui il materiale rispetta le condizioni di linearità nelle sue risposte meccaniche. Per risolvere il problema elastico lineare, è necessario introdurre ulteriori equazioni chiamate *equazioni indefinite di equilibrio*. Queste equazioni, assieme a quelle di compatibilità e costitutive, completano il sistema necessario per determinare le componenti di tensione per un corpo solido. Le

equazioni indefinite di equilibrio sono espresse come segue e si applicano lungo le tre direzioni di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale definito dagli assi  $x$ ,  $y$  e  $z$ :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = g_x$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = g_y$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = g_z$$

Queste equazioni esprimono l'equilibrio dinamico differenziale indefinito, in cui le componenti di tensione devono soddisfare le condizioni di equilibrio lungo ciascun asse, considerando anche le forze di corpo  $g_x$ ,  $g_y$ , e  $g_z$  applicate.

Una volta integrate le equazioni di equilibrio, compatibilità e costitutive, si ottiene un sistema di 15 equazioni in 15 incognite, che matematicamente definisce il problema elastico lineare. Tuttavia, il problema risulta spesso troppo complesso per una risoluzione analitica completa in forma chiusa, eccetto in casi molto semplici. Per affrontare questa complessità, nel seguito verranno introdotte teorie assiomatiche per elementi strutturali bidimensionali. Queste teorie semplificano notevolmente le equazioni di equilibrio, riducendo il numero di incognite e facilitando l'analisi delle strutture sulla base delle loro tipologie e dimensioni prevalenti.

## 2.2 Teoria elementare della Piastra

La prima teoria assiomatica che viene trattata è la teoria della piastra sottile di Kirchhoff-Love [46]. Questa teoria fornisce un approccio semplificato per analizzare le deformazioni e gli spostamenti in piastre sottili, basandosi su specifiche ipotesi cinematiche. Questa consente di derivare un sistema di tre equazioni che descrivono la cinematica della piastra. Le ipotesi cinematiche fondamentali su cui si basa la teoria sono le seguenti:

1. I segmenti di spessore inizialmente rettilinei, rimangono tali a deformazione avvenuta.
2. I segmenti di spessore non variano la loro lunghezza a seguito della deformazione.
3. I segmenti di spessore inizialmente perpendicolari alla superficie di riferimento, mantengono tale condizione anche una volta avvenuta la deformazione.

Dalle tre ipotesi cinematiche è possibile ricavare il campo di spostamenti della teoria della piastra di Kirchhoff-Love, che è espresso come segue:

$$u(x, y, z) = u^{(0)}(x, y) + z\phi(x, y)$$

$$v(x, y, z) = v^{(0)}(x, y) + z\theta(x, y)$$

$$w(x, y, z) = w^{(0)}(x, y) + z\psi(x, y)$$

Queste espressioni possono essere semplificate. La prima ipotesi cinematica stabilisce che un segmento di spessore rimanga rettilineo dopo la deformazione. Questo implica che, nell'analisi degli spostamenti  $u$ ,  $v$  e  $w$  attorno alla coordinata  $z = 0$ , si considerano solo i termini di ordine unitario nella coordinata  $z$ . In altre parole, si assume che il campo di spostamenti rimanga al massimo lineare rispetto a  $z$ .

L'ipotesi di inalterabilità della lunghezza del segmento implica che la deformazione normale alla direzione  $z$ , denotata da  $\epsilon_{zz}$ , sia nulla. In altre parole:

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Da ciò deriva che lo spostamento  $w(x, y, z)$  lungo  $z$  è indipendente da  $z$ , e può essere rappresentato esclusivamente come:

$$w(x, y, z) = w_0(x, y)$$

Secondo l'ipotesi sulla planarità delle sezioni il segmento rimane ortogonale al piano medio, anche dopo la deformazione, ed implica che le sezioni originariamente piane rimangono piane e normali al piano medio. Questo si traduce nel ritenere nulli gli scorrimenti angolari  $\gamma_{xz}$  e  $\gamma_{yz}$ :

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \phi(x, y) + \frac{\partial w^{(0)}}{\partial x} = 0 \longrightarrow \phi(x, y) = -\frac{\partial w^{(0)}}{\partial x} = -w_{,x}^{(0)}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \theta(x, y) + \frac{\partial w^{(0)}}{\partial y} = 0 \longrightarrow \theta(x, y) = -\frac{\partial w^{(0)}}{\partial y} = -w_{,y}^{(0)}$$

Ricapitolando, si ottengono le seguenti espressioni semplificate:

$$u(x, y, z) = u^{(0)}(x, y) - z\frac{\partial w^{(0)}(x, y)}{\partial x},$$

$$v(x, y, z) = v^{(0)}(x, y) - z\frac{\partial w^{(0)}(x, y)}{\partial y},$$

$$w(x, y, z) = w^{(0)}(x, y).$$



Per completare la formulazione del problema elastico lineare, è essenziale determinare il campo di deformazione associato alla teoria elementare della piastra, applicando le relazioni geometriche al campo di spostamenti definito in precedenza. È importante sottolineare che il campo degli spostamenti è stato scelto in modo tale che  $\epsilon_{zz} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ .

Le componenti di deformazione risultano quindi essere:

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial x^2} = u_{,x}^{(0)} - zw_{,xx}^{(0)} \\ \epsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v^{(0)}}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial y^2} = v_{,y}^{(0)} - zw_{,yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = u_{,y}^{(0)} + v_{,x}^{(0)} - 2zw_{,xy}^{(0)}\end{aligned}$$

Il campo di deformazione può essere riassunto in forma matriciale nel modo seguente:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{,x}^{(0)} \\ v_{,y}^{(0)} \\ u_{,y}^{(0)} + v_{,x}^{(0)} \end{bmatrix} - z \begin{bmatrix} w_{,xx}^{(0)} \\ w_{,yy}^{(0)} \\ 2w_{,xy}^{(0)} \end{bmatrix}$$

Questa espressione può essere sintetizzata come:

$$\epsilon = \epsilon^0 + z\kappa$$

In questa rappresentazione, il vettore  $\epsilon^0$  descrive le deformazioni membranali, ovvero le dilatazioni specifiche e lo scorrimento angolare della superficie di riferimento nel proprio piano, mentre il vettore  $\kappa$  rappresenta le curvature, misurando l'incurvamento della superficie di riferimento. In particolare, i termini  $w_{,xx}^{(0)}$  e  $w_{,yy}^{(0)}$  descrivono il comportamento flessionale, mentre  $2w_{,xy}^{(0)}$  caratterizza il comportamento torsionale.

Le ipotesi cinematiche della teoria elementare, che impongono  $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ , implicano che le corrispondenti tensioni di taglio trasversale siano anch'esse nulle:  $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ . Per ottenere il campo di tensione della piastra di Kirchhoff, è necessario applicare l'ipotesi cinematica  $\epsilon_{zz} = 0$  e aggiungere un'ulteriore ipotesi sullo stato tensionale, ovvero  $\sigma_{zz} = 0$ .

Le tensioni nel piano possono essere espresse come:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx}^{(k)} \\ \sigma_{yy}^{(k)} \\ \tau_{xy}^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^{(k)} & Q_{12}^{(k)} & Q_{16}^{(k)} \\ Q_{12}^{(k)} & Q_{22}^{(k)} & Q_{26}^{(k)} \\ Q_{16}^{(k)} & Q_{26}^{(k)} & Q_{66}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

Questa equazione può essere sintetizzata come:

$$\sigma^{(k)} = Q^{(k)} \epsilon$$

La matrice delle rigidezze ridotte trasformate  $\mathbf{Q}^{(k)}$  varia da strato a strato del laminato, ed è fondamentale per la determinazione dello stato tensionale globale. Questa matrice può essere ottenuta dalla matrice delle rigidezze ridotte non trasformate  $\mathbf{Q}_P$ , che è valida solo nel sistema locale di ortotropia della singola lamina. Per passare al sistema globale, è necessario applicare una matrice di rotazione  $\Lambda_P^{(k)}$  dipendente dall'orientamento  $\theta^{(k)}$  della lamina. La matrice delle rigidezze trasformate nel sistema globale è quindi data da:

$$[Q_P^{(k)}] = [\Lambda_P^{(k)}]^{-1} \cdot [Q_P] \cdot ([\Lambda_P^{(k)}]^{-1})^T$$

Integrando questa matrice sullo spessore del laminato si ottengono le matrici di rigidezza del laminato:

$$[A] = \langle [Q_P^{(k)}] \rangle \quad \text{matrice delle rigidezze membranali}$$

$$[B] = \langle z [Q_P^{(k)}] \rangle \quad \text{matrice delle rigidezze di accoppiamento}$$

$$[D] = \langle z^2 [Q_P^{(k)}] \rangle \quad \text{matrice delle rigidezze flesso-torsionali}$$

La matrice  $[A]$  descrive la relazione tra i carichi nel piano della piastra e le deformazioni membranali. La matrice delle rigidezze di accoppiamento  $[B]$  rappresenta l'interazione tra le deformazioni membranali e le curvature della piastra, indicando come i carichi nel piano possono generare momenti flettenti e torsionali, e viceversa. Infine la matrice  $[D]$  descrive la relazione tra i momenti (flettenti e torsionali) applicati alla piastra e le curvature risultanti. Le equazioni costitutive della piastra, che legano i carichi nel piano, i momenti e il taglio alle relative deformazioni, sono date da:

$$\begin{cases} \{N\} = [A]\{\epsilon^0\} + [B]\{\kappa\} \\ \{M\} = [B]\{\epsilon^0\} + [D]\{\kappa\} \end{cases}$$

Da queste relazioni si può osservare che il comportamento membranale e quello flesso-torsionale risultano accoppiati. In particolare, gli sforzi nel piano  $N$  possono provocare flesso-torsioni fuori dal piano, e i momenti possono generare deformazioni di tipo membranale.

## 2.3 Teoria della piastra di Reissner-Mindlin

La teoria elementare delle piastre si applica efficacemente allo studio di elementi strutturali in cui lo spessore è trascurabile rispetto alle dimensioni caratteristiche della superficie. In tale contesto, viene esclusa la considerazione della deformabilità a taglio trasversale, rendendo questa teoria appropriata per materiali isotropi.

Tuttavia, nel caso di strutture sottili laminate, non è più possibile ignorare la deformabilità a taglio, poiché si osserva che il rapporto  $10 < \frac{E_1}{G_{13}} < 200$  rende significativa la presenza di deformazioni di taglio.

La teoria di Kirchhoff-Love, alla base della modellazione elementare, assume che le sezioni trasversali rimangano piane e perpendicolari alla superficie media anche dopo la deformazione. Questa assunzione semplifica notevolmente il modello, ma diventa inadeguata per descrivere correttamente il comportamento di strutture laminate sottili o di elementi compositi dove la deformabilità a taglio è rilevante. Per affrontare questa limitazione, si introduce una formulazione più complessa, che si basa su un'estensione delle ipotesi elementari: la teoria di Reissner-Mindlin [47]. In questa teoria, la terza ipotesi fondamentale della teoria elementare viene rilassata, non imponendo più che i segmenti di spessore restino rettilinei dopo la deformazione. Di conseguenza, il campo di spostamenti risultante si presenta come segue:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u^{(0)}(x, y) + z \phi(x, y), \\ v(x, y, z) &= v^{(0)}(x, y) + z \theta(x, y), \\ w(x, y, z) &= w^{(0)}(x, y). \end{aligned}$$

Questa formulazione introduce due nuove variabili indipendenti, le rotazioni  $\phi(x, y)$  e  $\theta(x, y)$ , che non possono più essere espresse come derivate dello spostamento verticale  $w(x, y)$  nel piano medio. Di conseguenza, il numero delle incognite nel problema aumenta da tre a cinque, rendendo il modello più accurato per l'analisi di strutture tozze o composite, ma comportando anche un costo computazionale maggiore. Il campo degli spostamenti fornisce la base per determinare le deformazioni nel materiale attraverso le derivate spaziali degli spostamenti lungo i rispettivi assi. In particolare, le relazioni cinematiche collegano direttamente gli spostamenti nel piano e fuori piano alle corrispondenti deformazioni e curvature della piastra, tenendo conto della deformabilità a taglio trasversale.

Il campo di deformazione per la teoria di Mindlin è suddiviso in due componenti principali: le deformazioni nel piano (membranali) e le deformazioni di taglio trasversale. Le deformazioni nel piano sono date da:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} + z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v^{(0)}}{\partial y} + z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u^{(0)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(0)}}{\partial x} + z \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

dove  $u^{(0)}(x, y)$  e  $v^{(0)}(x, y)$  sono gli spostamenti nel piano medio della piastra, mentre  $\theta_x(x, y)$  e  $\theta_y(x, y)$  rappresentano le rotazioni delle sezioni trasversali rispettivamente

attorno agli assi  $y$  e  $x$ . Le deformazioni di taglio trasversale sono descritte come:

$$\begin{aligned}\gamma_{xz} &= \frac{\partial w^{(0)}}{\partial x} - \theta_x \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w^{(0)}}{\partial y} - \theta_y\end{aligned}$$

dove  $w^{(0)}(x, y)$  è lo spostamento verticale della piastra.

Il campo di tensione è correlato al campo di deformazione tramite le seguenti relazioni costitutive nel contesto di un materiale ortotropo:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= Q_{11}\epsilon_x + Q_{12}\epsilon_y + Q_{16}\gamma_{xy}, \\ \sigma_y &= Q_{12}\epsilon_x + Q_{22}\epsilon_y + Q_{26}\gamma_{xy}, \\ \tau_{xy} &= Q_{16}\epsilon_x + Q_{26}\epsilon_y + Q_{66}\gamma_{xy},\end{aligned}$$

dove le  $Q_{ij}$  sono i coefficienti delle rigidzze ridotte nel piano, specifiche per ciascun strato del laminato. Le tensioni di taglio trasversale sono invece date da:

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= Q_{44}\gamma_{xz} + Q_{45}\gamma_{yz}, \\ \tau_{yz} &= Q_{45}\gamma_{xz} + Q_{55}\gamma_{yz}.\end{aligned}$$

Le relazioni costitutive per una piastra laminata sono espresse attraverso le matrici di rigidzza  $[A]$ ,  $[B]$ ,  $[D]$ ,  $[A_T]$ , che collegano i carichi nel piano e fuori piano con le corrispondenti deformazioni e curvatures:

$$\begin{aligned}\{N\} &= [A]\{\epsilon^0\} + [B]\{\kappa\}, \\ \{M\} &= [B]\{\epsilon^0\} + [D]\{\kappa\}, \\ \{T\} &= [A_T]\{\gamma\},\end{aligned}$$

dove:

$$\begin{aligned}[A] &= \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} Q^{(k)} dz, \\ [B] &= \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} z Q^{(k)} dz, \\ [D] &= \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} z^2 Q^{(k)} dz, \\ [A_T] &= \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} Q_T^{(k)} dz.\end{aligned}$$

In queste espressioni,  $\{N\}$  rappresenta il *vettore dei carichi nel piano*,  $\{M\}$  il *vettore dei momenti flettenti*,  $\{T\}$  il *vettore delle forze di taglio*,  $\{\epsilon^0\}$  il *vettore delle deformazioni nel piano*,  $\{\kappa\}$  il *vettore delle curvatures*, e  $\{\gamma\}$  il *vettore delle deformazioni*

*di taglio*. La teoria di Reissner-Mindlin si distingue dalla teoria di Kirchhoff-Love principalmente per l'inclusione delle deformazioni di taglio trasversale. Nella teoria di Kirchhoff-Love, si assume che le sezioni trasversali della piastra rimangano piane e perpendicolari alla superficie media anche dopo la deformazione, implicando che le deformazioni di taglio siano nulle ( $\gamma_{xz} = 0$ ,  $\gamma_{yz} = 0$ ). Questa ipotesi è valida per piastre sottili, dove lo spessore è molto piccolo rispetto alle altre dimensioni, ma risulta inadeguata per piastre più spesse o laminate, dove le deformazioni di taglio hanno un impatto significativo sul comportamento meccanico. La teoria di Mindlin, rilassando l'ipotesi di perpendicolarità delle sezioni trasversali, introduce un modello che considera le rotazioni indipendenti  $\theta_x$  e  $\theta_y$ , aumentando il numero delle variabili cinematiche da tre a cinque. Questo porta a una rappresentazione più accurata del comportamento di piastre con spessori moderati o elevate, tipiche nelle applicazioni composite, a scapito di una maggiore complessità computazionale. La capacità di modellare adeguatamente la deformabilità a taglio trasversale rende la teoria di Mindlin preferibile in molte applicazioni ingegneristiche avanzate.

## 2.4 Metodo degli Elementi Finiti (FEM)

Il metodo agli elementi finiti (FEM) è una tecnica numerica utilizzata per risolvere problemi strutturali complessi descritti da equazioni differenziali, offrendo una soluzione approssimata per geometrie di interesse sotto varie condizioni di carico e vincolo. La metodologia si basa sulla discretizzazione del dominio in un numero finito di elementi, che possono essere 1D, 2D o 3D, con diverse forme e complessità. Ogni elemento è associato a un certo numero di nodi, che determinano la forma dell'elemento e il campo di spostamenti. Quest'ultimo è descritto tramite una combinazione lineare degli spostamenti nodali, usando funzioni di forma, come i polinomi di Lagrange, definiti nel caso unidimensionale da:

$$L_{N,i} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j}$$

L'accuratezza della soluzione aumenta con la raffinazione della mesh, ma una discretizzazione eccessiva può rendere il problema computazionalmente oneroso. Per questo, è necessaria un'analisi di convergenza della mesh per valutare la qualità della soluzione ottenuta. Il punto di partenza della metodologia è il principio dei lavori virtuali (PLV), un concetto fondamentale nella meccanica dei solidi, che permette di derivare le equazioni di governo necessarie per la formulazione della matrice di rigidità, delle masse e del vettore di carico. Questo approccio, applicabile a vari tipi di elementi strutturali, consente di ottenere soluzioni approssimate ma efficaci per l'analisi delle sollecitazioni e degli spostamenti in una struttura.

### 2.4.1 Derivazione delle Equazioni di Governo

Il processo inizia con l'applicazione del principio degli spostamenti virtuali, che si esprime nella forma del principio dei lavori virtuali, il quale afferma che, in condizioni di equilibrio, la somma dei lavori virtuali interni ed esterni è nulla:

$$\delta L_{\text{int}} = \delta L_{\text{est}} - \delta L_{\text{ine}}$$

Nel caso di analisi statica, il termine  $\delta L_{\text{ine}}$ , che rappresenta il lavoro delle forze d'inerzia, è nullo, riducendo l'espressione a:

$$\delta L_{\text{int}} = \delta L_{\text{est}}$$

Il lavoro delle forze interne dovuto dalla deformazione della struttura, può essere descritto come:

$$\delta L_{\text{int}} = \int_V \delta \epsilon^T \sigma dV$$

mentre il lavoro delle forze esterne compiuto dai carichi applicati distribuiti o concentrati, si esprime come:

$$\delta L_{\text{est}} = \int_V \delta u^T g dV + \int_S \delta u^T \rho dS$$

Eguagliando questi integrali si ottengono le equazioni di equilibrio:

$$-b^T \sigma = g, \quad I_n = p$$

dove  $I_n$  rappresenta la matrice dei coseni direttori. Dall'equazione di equilibrio interna e applicando la legge di Hooke, si può derivare la matrice di rigidità  $k$  della struttura:

$$k = -b^T C b$$

portando alla relazione fondamentale del FEM:

$$k u = g$$

dove  $u$  rappresenta il vettore degli spostamenti e  $g$  il vettore delle forze.

### 2.4.2 Applicazione alle Strutture Laminari

Nel contesto dei laminati in composito, le relazioni geometriche e costitutive si specializzano per considerare le caratteristiche anisotrope del materiale. Il campo di tensione e deformazione è suddiviso in due componenti:

$$\sigma_p = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}\}^T, \quad \epsilon_p = \{\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \gamma_{xy}\}^T$$

$$\sigma_n = \{\tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_{zz}\}^T, \quad \epsilon_n = \{\gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \epsilon_{zz}\}^T$$

Le relazioni geometriche lineari che legano gli spostamenti alle deformazioni si esprimono come:

$$\epsilon_p = b_p u, \quad \epsilon_n = (b_{np} + b_{nz})u$$

dove gli operatori differenziali  $b_p$ ,  $b_{np}$  e  $b_{nz}$  sono definiti come:

$$b_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}, \quad b_{np} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b_{nz} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Le leggi costitutive per un materiale ortotropo si esprimono mediante le matrici:

$$\sigma_p = C_{pp}\epsilon_p + C_{pn}\epsilon_n, \quad \sigma_n = C_{np}\epsilon_p + C_{nn}\epsilon_n$$

con  $C_{pp}$ ,  $C_{np}$ ,  $C_{pn}$ , e  $C_{nn}$  che rappresentano le proprietà del materiale ortotropo.

### 2.4.3 Forma Debole e Approssimazione degli Spostamenti

Nella risoluzione pratica con il FEM, si adotta la forma debole del PLV, che permette di approssimare gli spostamenti della struttura come combinazione lineare degli spostamenti nodali:

$$\{u\} = [N]\{S\}$$

dove  $[N]$  è la matrice delle funzioni di forma e  $\{S\}$  il vettore degli spostamenti nodali. Le relazioni geometriche diventano quindi:

$$\{\epsilon\} = [b]\{u\} = [b][N]\{S\} = [B]\{S\}$$

Il campo di tensioni viene calcolato utilizzando la legge costitutiva:

$$\{\sigma\} = [C]\{\epsilon\} = [C][B]\{S\}$$

Il principio dei lavori virtuali, nella sua forma debole, si esprime come:

$$\delta L_{\text{est}} = \delta\{S\}^T\{P\}, \quad \delta L_{\text{int}} = \delta\{S\}^T[K]\{S\}$$

dove  $K$  è la matrice di rigidezza, ottenuta come:

$$K = \int_V B^T C B dV$$

L'equazione completa del FEM diventa quindi:

$$[K]\{S\} = \{P\}$$

Questa relazione consente di determinare il vettore degli spostamenti nodali  $\{S\}$  e di calcolare il campo di spostamenti approssimato per l'intera struttura. L'accuratezza della soluzione dipende dal numero di elementi definiti e dal costo computazionale associato, richiedendo un equilibrio tra precisione e efficienza.

## 2.5 Materiali compositi e laminati

Per descrivere il comportamento meccanico dei materiali compositi, è necessario considerare materiali ortotropi, che presentano proprietà meccaniche differenti lungo tre direzioni ortogonali alla loro struttura. In questi materiali, il comportamento è caratterizzato da tre piani di simmetria. Per analizzare tali materiali, si utilizza un sistema di riferimento materiale, definito dagli assi 1 – 2 – 3, noti come assi di ortotropia. Le equazioni costitutive in questo sistema sono date da:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix}$$

Questa equazione può essere scritta in forma matriciale come:

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{C}^* \boldsymbol{\epsilon}^*$$

Dove  $\mathbf{C}^*$  è la matrice di rigidità del materiale ortotropo. La matrice di deformabilità,  $\mathbf{S}^*$ , è l'inversa di  $\mathbf{C}^*$  ed è espressa come:

$$\mathbf{S}^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{21}}{E_2} & \frac{-\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & \frac{-\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{13}}{E_1} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}$$

Per passare dal sistema di riferimento materiale a quello globale, è necessario considerare una rotazione attorno all'asse z, ottenendo una trasformazione da un sistema di riferimento locale a uno globale.

Le tensioni e le deformazioni nel sistema globale sono ottenute tramite le matrici di trasformazione  $\mathbf{T}_\sigma$  e  $\mathbf{T}_\epsilon$ , rispettivamente. Le relazioni di trasformazione sono:

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{T}_\sigma \boldsymbol{\sigma} \quad \boldsymbol{\epsilon}^* = \mathbf{T}_\epsilon \boldsymbol{\epsilon}$$

Sostituendo queste relazioni nella legge costitutiva, otteniamo:

$$\mathbf{T}_\sigma \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^* \mathbf{T}_\epsilon \boldsymbol{\epsilon}$$

Da cui segue:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T}_\sigma^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{T}_\epsilon \boldsymbol{\epsilon} = \tilde{\mathbf{C}} \boldsymbol{\epsilon}$$



La matrice  $\tilde{\mathbf{C}}$  rappresenta la matrice di rigidità nel sistema globale. È importante notare che, nonostante la matrice  $\tilde{\mathbf{C}}$  possa contenere 13 coefficienti non nulli, i coefficienti indipendenti per descrivere il comportamento del laminato composito rimangono comunque 9. Questo riflette la complessità aggiuntiva introdotta dalla rotazione del sistema di riferimento, ma non cambia il numero di parametri indipendenti necessari per caratterizzare il materiale.

Nell'analisi dei laminati compositi, è cruciale prevedere con precisione il campo di spostamenti, deformazioni e tensioni all'interno della struttura. Le teorie bidimensionali, sebbene utili, spesso non sono sufficienti per un'analisi dettagliata, in particolare per quanto riguarda gli sforzi tangenziali, che sono fondamentali per evitare problemi come la delaminazione tra i vari strati del laminato.

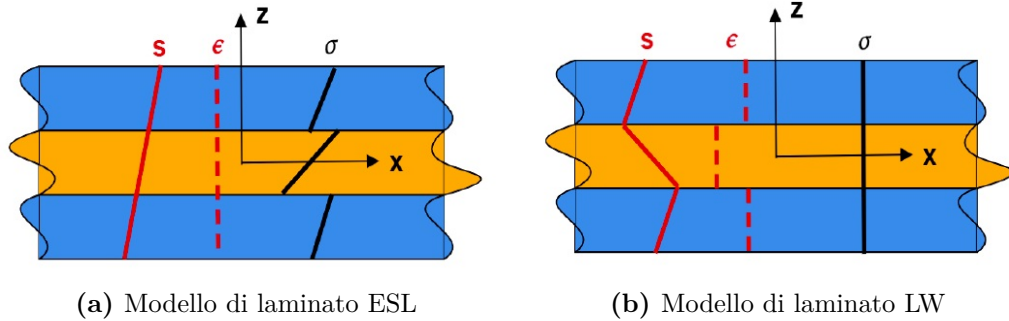
Per affrontare questi problemi, si utilizzano modelli 2D che si basano su diverse teorie, tra cui la Classical Lamination Theory (CLT), la First-order Shear Deformation Theory e la High-order Shear Deformation Theory. Questi modelli, come parte delle teorie Equivalent Single Layer (ESL), sono stati sviluppati per trattare in modo più efficace le caratteristiche dei laminati compositi. La CLT, ad esempio, è un'estensione della teoria delle piastre di Kirchhoff ed è valida per laminati ortotropi in condizioni di tensione piano [45].

Nel contesto della teoria ESL, il processo inizia definendo la matrice di rigidezza per ogni strato del laminato. Successivamente, per ottenere la matrice di rigidezza globale della struttura, si sommano le matrici di rigidezza dei singoli strati. Questo approccio di omogenizzazione considera il laminato come un'unica entità, con le proprietà dei singoli strati aggregate. Di conseguenza, i modelli ESL trattano il laminato come un corpo unico, semplificando l'analisi grazie alla continuità degli spostamenti tra gli strati. Tuttavia, questa semplificazione comporta una limitazione: i modelli ESL non garantiscono la continuità delle tensioni di taglio all'interfaccia tra gli strati, risultando in tensioni potenzialmente discontinue.

I modelli ESL, Fig. 2.2(a) possono essere implementati utilizzando sia espansioni di Taylor che di Lagrange. In tali modelli, gli spostamenti sono continui lungo lo spessore del laminato, il che porta a deformazioni continue [1]. Tuttavia, le tensioni sono discontinue da uno strato all'altro, non assicurando la continuità degli stress tangenziali.

Un'alternativa ai modelli ESL è il modello Layer Wise (LW), Fig. 2.2(b), che adotta un approccio diverso. In questo modello, si considerano variabili indipendenti per ogni strato del laminato, permettendo di trattare separatamente ogni strato e di mantenere la continuità degli spostamenti tra gli strati adiacenti. Sebbene la matrice di rigidezza globale risulti più complessa e contenente più gradi di libertà rispetto al modello ESL, il modello LW offre vantaggi significativi. La sua capacità di mantenere la continuità del campo di tensione attraverso lo spessore del laminato, mentre le deformazioni possono essere discontinue all'interfaccia, fornisce una rappresentazione più accurata delle tensioni e delle deformazioni reali [48,

49]. In sintesi, mentre i modelli ESL semplificano l'analisi aggregando le proprietà



**Figure 2.2:** Andamento degli spostamenti  $s$ , delle deformazioni  $\epsilon$  e delle tensioni  $\sigma$  lungo lo spessore del laminato multistrato [50].

degli strati e garantendo spostamenti continui, il modello LW offre una descrizione più dettagliata e accurata, trattando ogni strato separatamente e mantenendo la continuità delle tensioni attraverso lo spessore del laminato. Entrambi gli approcci hanno i loro ambiti di applicazione e limitazioni, ma la scelta tra essi dipende dalla precisione richiesta per l'analisi e dalle specifiche caratteristiche del laminato in esame.

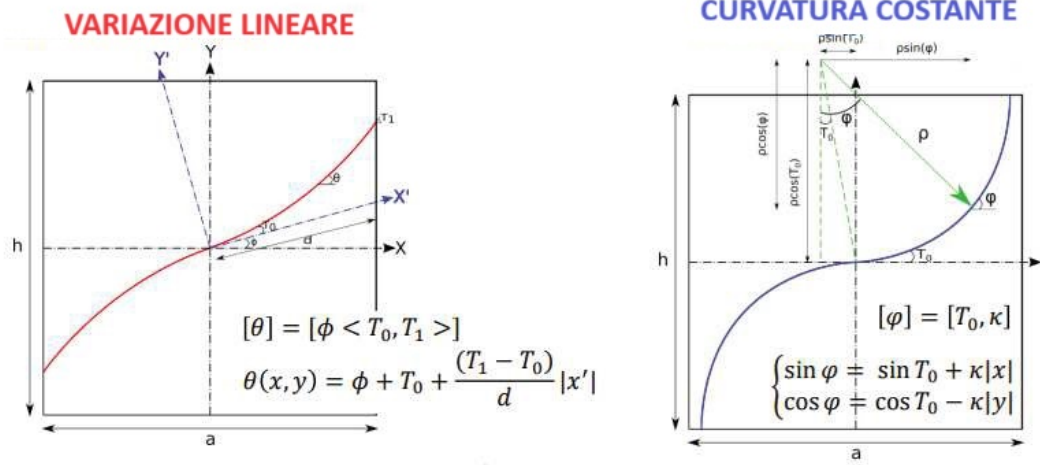
## 2.6 Materiali VAT

Nel contesto dei compositi a laminazione variabile, si possono distinguere principalmente due tipologie di configurazioni: *laminazione a variazione lineare* e *laminazione a curvatura costante*, come mostrato in Fig. 2.3. Queste due configurazioni offrono un grado di controllo differente sull'orientamento delle fibre e quindi sulla distribuzione delle proprietà meccaniche lungo il laminato.

Nella laminazione a variazione lineare, l'angolo  $\theta(x, y)$ , che descrive la direzione locale della fibra in funzione della posizione nel piano del laminato, è caratterizzato da quattro parametri principali:

**Angolo  $\alpha$**  Questo rappresenta l'offset tra il sistema di riferimento globale  $x - y$  e il sistema di riferimento locale  $x' - y'$  della piastra. Esso fornisce l'informazione su come l'angolo  $\theta$  della fibra varia linearmente tra un angolo  $T_0$  al centro della piastra e un angolo  $T_1$  all'estremo del pannello, a meno di una costante  $\alpha$ .

**Angolo  $T_0$**  Questo è l'angolo tra la coordinata locale  $x'$  e la traiettoria della fibra al centro della piastra.



**Figure 2.3:** Confronto tra un laminato VAT con variazione lineare dell'orientamento delle fibre e un laminato con fibre a curvatura costante [1].

**Angolo  $T_1$**  Analogamente, questo è l'angolo tra la coordinata locale  $x'$  e la traiettoria della fibra all'estremo del pannello.

**Lunghezza caratteristica  $d$**  Questa rappresenta la lunghezza lungo la quale la fibra varia da  $T_0$  a  $T_1$ . È importante notare che  $d$  differisce dalle dimensioni orizzontali e verticali del pannello, denotate rispettivamente come  $a$  e  $h$ .

L'espressione matematica che descrive l'orientamento delle fibre nel caso di laminazione a variazione lineare è data da:

$$\theta(x, y) = \phi + T_0 + \left( \frac{T_1 - T_0}{d} \right) |x'|$$

che può essere sintetizzata nella seguente notazione:

$$[\theta] = [\phi \langle T_0, T_1 \rangle]$$

Questa espressione consente di determinare l'orientamento delle fibre in funzione della posizione all'interno del laminato, considerando la variazione lineare dell'angolo  $\theta$ .

A differenza della laminazione a variazione lineare, la laminazione a curvatura costante si basa sull'utilizzo di un angolo  $\phi$  per caratterizzare l'orientamento delle fibre. In questo caso, la configurazione delle fibre segue una traiettoria curvilinea con curvatura costante. La descrizione di questa laminazione richiede due parametri fondamentali:

**Angolo  $T_0$**  questo parametro rappresenta l'orientamento della fibra al centro della piastra, rispetto al sistema di riferimento locale  $x' - y'$ .

**Curvatura  $\kappa$**  Rappresenta la curvatura della traiettoria della fibra, definita come l'inverso del raggio di curvatura del percorso seguito dal braccio robotico che posiziona le fibre. Questo parametro influisce direttamente sulla geometria della fibra nel laminato.

La caratterizzazione matematica dei laminati a curvatura costante è data dalle seguenti espressioni:

$$\sin(\phi) = \sin(T_0) + \kappa|x|$$

$$\cos(\phi) = \cos(T_0) - \kappa|y|$$

Queste equazioni descrivono come l'orientamento delle fibre varia nel piano del laminato in funzione della posizione, mantenendo una curvatura costante.

I compositi VAT rappresentano un'innovazione significativa nel campo dei materiali avanzati, offrendo la possibilità di ottimizzare le proprietà meccaniche attraverso la variazione controllata dell'orientamento delle fibre. Nel seguente elaborato si è scelto di focalizzare l'attenzione sulla tipologia di laminazione a variazione lineare, i quali risultati saranno confrontati nel cap. 4.

## Capitolo 3

# Il software ABAQUS

In questo lavoro di tesi è stato utilizzato il software di analisi agli elementi finiti ABAQUS della Simulia, uno tra i solutori commerciali maggiormente diffusi sul mercato. Questi hanno diverse capacità e consentono di risolvere una vasta gamma di problemi, dalle semplici analisi statiche a quelle non lineari che includono zone di contatto, fino ad analisi dinamiche sia ad alta che a bassa velocità. Inoltre, supporta l'integrazione con altri strumenti software e la personalizzazione attraverso scripting, il che lo rende uno strumento potente e flessibile per gli ingegneri e i ricercatori.

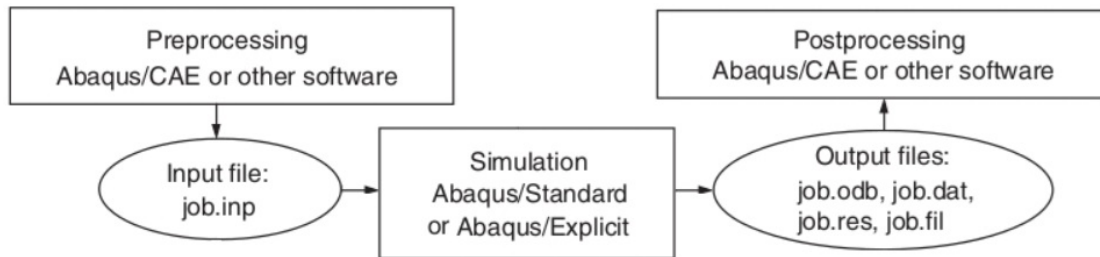
Un aspetto cruciale di ABAQUS, come per tutti i solutori FEM, è l'assenza di unità di misura predefinite. Pertanto, è essenziale che i dati inseriti siano coerenti nelle stesse unità di misura. La tabella 3.1 elenca le grandezze utilizzabili per definire tutti i parametri del modello durante un'analisi. Nello specifico di questa tesi, sono stati utilizzati metri, Newton e Pascal per caratterizzare rispettivamente distanze, forze di pressione e stress.

**Table 3.1:** Unità di misura in ABAQUS.

Quantità	SI	SI (mm)	Unità US (ft)	Unità US (pollice)
Lunghezza	m	mm	ft	in
Forza	N	N	lbf	lbf
Massa	kg	tonne ( $10^3 kg$ )	slug	$lbf s^2/in$
Tempo	s	s	s	s
Tensione	Pa ( $N/m^2$ )	MPa ( $N/mm^2$ )	$lbf/ft^2$	psi ( $lbf/in^2$ )
Energia	J	mJ ( $10^{-3} J$ )	ft lbf	in lbf
Densità	$kg/m^3$	$tonne/mm^3$	$slug/ft^3$	$lbf s^2/in^4$

In particolare, un'analisi completa con ABAQUS si compone generalmente di tre fasi distinte, Fig. 3.1:

1. Pre-elaborazione,
2. Simulazione,
3. Post-elaborazione.



**Figure 3.1:** Fasi di un'analisi completa con ABAQUS [51].

La fase di pre-elaborazione permette di costruire la struttura, definire le proprietà dei materiali coinvolti, assegnare a ciascuna parte della struttura il materiale costituente, e stabilire il carico e le condizioni al contorno. Una volta ottenute tutte le informazioni necessarie, il solutore calcola le matrici di rigidità del modello, nonché le forze interne ed esterne che agiscono su di esso. Nella fase di elaborazione, le equazioni di equilibrio vengono risolte utilizzando le informazioni fornite, e vengono calcolati gli spostamenti. L'ultima fase, infine, consente di visualizzare graficamente le soluzioni ottenute nell'elaborazione [52].

### 3.1 Pre-processo

Durante la fase iniziale, è fondamentale definire il modello del problema fisico e creare un file di input per ABAQUS. Questo modello viene generalmente creato graficamente utilizzando ABAQUS/CAE, Complete ABAQUS Environment, un ambiente completo che fornisce un'interfaccia intuitiva per la modellazione. ABAQUS/CAE è organizzato in moduli, i quali verranno trattati in dettaglio nei paragrafi successivi, ciascuno dei quali rappresenta un aspetto specifico del processo di modellazione, facilitando così la creazione e la modifica del modello stesso. In questa fase è fondamentale il corretto calcolo della matrice di rigidità, per il quale il software richiede dettagli riguardanti il tipo di materiale e la geometria della struttura da simulare. Queste informazioni sono essenziali per garantire l'accuratezza e la validità dei risultati.

Il pre-processo può essere suddiviso in due parti principali. La prima parte consiste nella creazione della geometria del modello, l'assegnazione dei materiali e la definizione dei tipi di elementi che suddivideranno il corpo in un insieme discreto di nodi. Questo passaggio è fondamentale per rappresentare fedelmente le caratteristiche fisiche e meccaniche del sistema in esame. La seconda parte del pre-processo prevede l'attribuzione delle condizioni necessarie affinché il solutore possa eseguire i calcoli. Ciò include la definizione degli stati di carico, delle condizioni al contorno e dei vincoli, elementi indispensabili per simulare realisticamente il comportamento del modello sotto diverse condizioni operative.

## **3.2 Simulazione**

La simulazione, solitamente eseguita come processo in background, è la fase in cui ABAQUS risolve il problema numerico definito nel modello. Prima di iniziare questa fase, viene effettuato un controllo delle informazioni inserite per garantire la correttezza dei dati. Una volta completata questa verifica, inizia il processo di soluzione numerica, durante il quale le equazioni algebriche vengono risolte utilizzando il metodo degli elementi finiti. Esempi di output di un'analisi dello stress includono spostamenti e sollecitazioni, memorizzati in file binari pronti per la post-elaborazione. I tipi di analisi possibili sono vari, spaziando dalle analisi statiche lineari a quelle non lineari, fino alle analisi dinamiche. La durata dell'analisi dipende dalla complessità del problema e dalla potenza del computer utilizzato, potendo variare da pochi secondi a diversi giorni per il completamento.

## **3.3 Post-processo**

Nella fase di post-process si analizzano i risultati ottenuti dalla simulazione, che includono spostamenti, sollecitazioni e altre variabili fondamentali [53]. Questa valutazione avviene solitamente tramite un'interfaccia grafica, dove il modello è rappresentato con una mappa colorata. Ogni colore corrisponde a una fascia di valori numerici di tensione o deformazione, permettendo di identificare le zone maggiormente sollecitate. La valutazione dei risultati, eseguita interattivamente, utilizza il modulo di visualizzazione di ABAQUS/CAE. Questo modulo legge i dati dal file binario di uscita e offre diverse opzioni per la visualizzazione, tra cui animazioni, grafici delle deformazioni e grafici x-y. Questi strumenti permettono un'analisi dettagliata e comprensiva del comportamento del modello, facilitando l'identificazione di eventuali problematiche strutturali e la verifica dell'efficacia delle soluzioni progettuali adottate. In sintesi, la fase di post-process interpreta i dati della simulazione e valida le prestazioni del modello analizzato.

### 3.4 Modelli ABAQUS

Un modello in ABAQUS, riportato in Fig.3.2, è costituito da vari componenti che descrivono il problema fisico da analizzare e i risultati ottenibili. Le informazioni essenziali includono la geometria, le proprietà della sezione, degli elementi e dei materiali, i carichi e le condizioni al contorno, il tipo di analisi e le richieste di uscita. Questi elementi sono fondamentali per definire accuratamente il modello e ottenere risultati validi dalla simulazione [54].

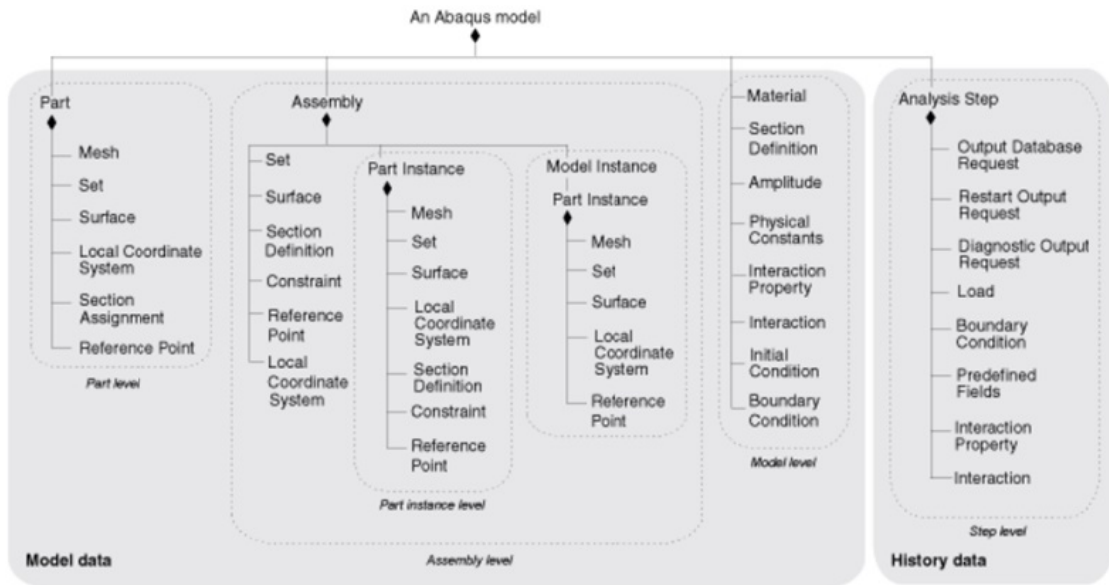


Figure 3.2: Organizzazione di un modello [54].

#### 3.4.1 Modulo Part

Il modulo Part in ABAQUS è imprescindibile per la creazione e definizione della geometria del modello. Questo modulo consente di costruire le parti che compongono il modello di simulazione, sia in 2D che in 3D. Utilizzando ABAQUS/CAE, il modulo Part offre strumenti per disegnare, modificare e gestire le geometrie delle parti, che poi possono essere utilizzate per la creazione di mesh e per le analisi. Nell'analisi in esame la geometria è definita tramite un disegno creato con uno sketch. Scelte le coordinate degli angoli del rettangolo, questi punti vengono utilizzati per tracciare i lati del rettangolo che costituisce il profilo della parte. Sono state anche impostate restrizioni orizzontali, verticali e perpendicolari per garantire che il rettangolo sia ben definito e simmetrico. Una volta completato il disegno del profilo, per la prima fase dello studio, viene creato un oggetto di tipo Part con il metodo BaseShell.



Questo metodo utilizza lo sketch creato per costruire una parte tridimensionale di tipo *Deformable Body* con una geometria di tipo 3D. Gli elementi *Shell* sono utili per modellare strutture in cui una dimensione, lo spessore, è significativamente più piccola rispetto alle altre e in cui le sollecitazioni nella direzione dello spessore sono trascurabili utilizzati. Nella seconda analisi sono stati scelti elementi Solid. Le dimensioni principali della piastra composita in esame (larghezza e lunghezza) sono state definite nel piano X – Y. La geometria risultante è una parte piana che rappresenta il piatto rettangolare, con uno spessore che sarà definito ulteriormente nelle proprietà dei materiali.

### 3.4.2 Modulo Property

Il modulo Property in ABAQUS è dedicato alla definizione delle proprietà dei materiali e delle sezioni trasversali delle parti. Queste proprietà sono essenziali per l'analisi, poiché determinano come il materiale si comporta sotto carico. Le proprietà possono includere caratteristiche elastiche, plastiche, termiche, e altre proprietà meccaniche specifiche. Nel caso in esame, il modulo Property è utilizzato per definire il materiale Graphite-Epoxy. Le proprietà elastiche del materiale sono specificate tramite il metodo *Elastic* e sono definite utilizzando il tipo di materiale *Engineering Constants*. Questi valori definiscono il comportamento elastico del materiale e sono cruciali per la simulazione delle risposte del piatto sotto il carico di pressione. Le costanti ingegneristiche utilizzate sono in unità di Pascal per le rigidità e metri per le dimensioni, assicurando coerenza nelle unità di misura utilizzate nel modello. Il modulo Property non solo definisce le proprietà del materiale, ma può anche essere utilizzato per assegnare tali proprietà alle sezioni trasversali della geometria. Questa assegnazione permette al software ABAQUS di calcolare con precisione come il materiale risponderà alle forze applicate durante l'analisi.

### 3.4.3 Modulo Assembly

Il modulo Assembly in ABAQUS è utilizzato per creare e gestire le istanze delle parti, posizionandole in un sistema di coordinate globali. Ogni parte, una volta creata, ha un proprio sistema di coordinate locale. Il modulo Assembly permette di istanziare queste parti e posizionarle l'una rispetto all'altra, formando un modello completo. Anche nel caso di un modello costituito da una singola parte, come nel nostro caso, è necessario creare un Assembly. Questo consiste in un'unica istanza della parte, che viene posizionata nel sistema di coordinate globali per garantire coerenza e corretta interazione con altri moduli e funzioni del software. Il processo di assemblaggio è fondamentale per analisi più complesse che coinvolgono più parti interagenti, poiché definisce le relazioni geometriche e di contatto tra le parti.

### 3.4.4 Modulo Step

Il modulo Step in ABAQUS è cruciale per definire le condizioni e i controlli delle diverse fasi dell'analisi. Un'analisi può essere suddivisa in diversi step, ciascuno rappresentando un particolare intervallo di tempo o un insieme specifico di condizioni di carico e vincolo. Questi step possono includere analisi statiche, dinamiche, termiche, e altre. Definire correttamente gli step è essenziale per catturare accuratamente il comportamento del modello sotto varie condizioni operative. In questo studio, la pressione applicata alla superficie superiore del piatto è definita in uno specifico step di carico. Ogni step permette di controllare i parametri di soluzione, come il tipo di solver utilizzato, le tolleranze numeriche, gli incrementi temporali, garantendo la precisione e la stabilità della simulazione.

### 3.4.5 Modulo Load

Il modulo Load in ABAQUS serve per la definizione delle condizioni operative del modello di simulazione. Questo modulo permette di applicare vari tipi di carichi e vincoli, essenziali per replicare fedelmente le condizioni reali a cui il modello è sottoposto. La corretta impostazione di carichi e vincoli è fondamentale per ottenere risultati di simulazione accurati e affidabili.

Nel modulo *Load*, i carichi possono essere applicati in diverse forme e distribuzioni, tra cui:

**Carichi di forza** Questi possono essere applicati a nodi specifici, superfici, bordi o volumi. Possono rappresentare forze concentrate o distribuite che agiscono su parti del modello.

**Carichi di pressione** Applicati su superfici specifiche, rappresentano una forza distribuita per unità di area. Ad esempio, nel nostro caso, una pressione di  $10^4$  Pascal viene applicata alla superficie superiore del piatto.

**Carichi termici** Questi carichi rappresentano variazioni di temperatura che possono causare espansione o contrazione termica del materiale.

**Carichi dinamici** Applicati per simulare condizioni transitorie o oscillanti, come forze impulsive o carichi ciclici.

I carichi sono definiti in specifici *step* dell'analisi, che controllano la sequenza e la durata temporale dell'applicazione dei carichi.

Le condizioni al contorno, *Boundary Conditions*, sono utilizzate per vincolare porzioni del modello, controllando i gradi di libertà del corpo. Questi vincoli possono essere definiti come:

**Spostamenti prescritti** Condizioni in cui parti del modello sono vincolate a rimanere fisse (spostamenti nulli) o a muoversi di una quantità prescritta. Ad esempio, in un'analisi statica, le condizioni al contorno evitano che il modello si muova come un corpo rigido in qualsiasi direzione.

**Rotazioni** Vincoli che controllano le rotazioni intorno agli assi specificati.

**Velocità** Per analisi dinamiche, si possono definire condizioni di velocità o accelerazione.

Le condizioni al contorno sono necessarie per garantire che il modello risponda realisticamente alle condizioni operative. La corretta impostazione di questi vincoli è essenziale, poiché un errore può portare a risultati inaccurati o non fisici. In un'analisi strutturale, i gradi di libertà consistono essenzialmente in spostamenti e rotazioni. Esempi di condizioni al contorno includono cerniere, incastri e guide, che definiscono come parti del modello possono muoversi o essere vincolate.

### 3.4.6 Modulo Mesh

Il modulo Mesh in ABAQUS è essenziale per la generazione del reticolo computazionale che definisce il numero e la distribuzione di nodi ed elementi che compongono la struttura definita nel modulo Part. Questa fase, nota come *meshing*, è cruciale in quanto influisce direttamente sulla precisione e affidabilità dei risultati di simulazione e sul tempo di calcolo.

#### Generazione della Mesh

Attraverso la finestra *Global Seeds*, l'utente può definire le dimensioni degli elementi della mesh oppure indicare il numero di elementi per lato, influenzando direttamente la densità della stessa. Successivamente, nella finestra *Mesh Controls*, si seleziona la forma degli elementi, come gli elementi di tipo *Quad* (quadrilateri), e la tecnica di meshing. La tecnica *Structured*, ad esempio, crea una mesh che segue fedelmente la geometria della regione, risultando utile per geometrie regolari. Infine, nella finestra *Element Type*, si specifica la tipologia degli elementi che compongono la mesh, come ad esempio gli elementi S4, che è un elemento shell generale a 4 nodi con doppi gradi di curvatura e deformazioni finite di membrana, è usato per rappresentare superfici sottili.

#### Tipi di Elementi in ABAQUS

ABAQUS offre una vasta gamma di elementi per diverse geometrie, come mostrato in Fig. 3.3 e tipi di analisi. Un elemento è caratterizzato dai seguenti aspetti [55]:

- **Famiglia:** Continuo, Shell, Membrana, Rigido, Trave, Tirante, ecc.
- **Numero di Nodi:** Dipendenti dalla forma dell'elemento e dal suo ordine di interpolazione.
- **Gradi di Libertà per Nodo:** Dipendono dal campo di soluzione dell'analisi (Spostamento, Rotazione, Temperatura, ecc.) e dall'ordine dello spazio di modellazione (1D, 2D e 3D).
- **Formulazione:** Applicabile ad alcune famiglie di elementi (es. shell per piccole e grandi deformazioni), altrimenti la maggior parte degli elementi fornisce entrambe automaticamente.
- **Integrazione:** Integrazione ridotta e piena.

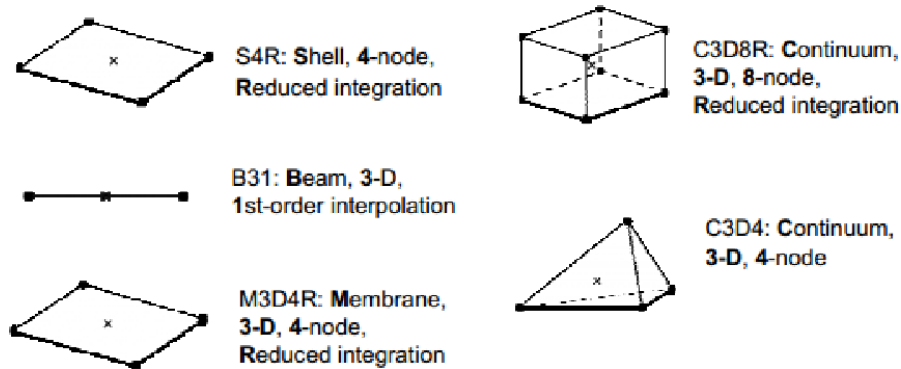


Figure 3.3: Tipi di elementi in ABAQUS.

La Figura 3.4 mostra diverse convenzioni di denominazione a seconda dell'elemento ABAQUS utilizzato. Ciascuno di questi è progettato per applicazioni specifiche. I principali tipi di elementi includono:

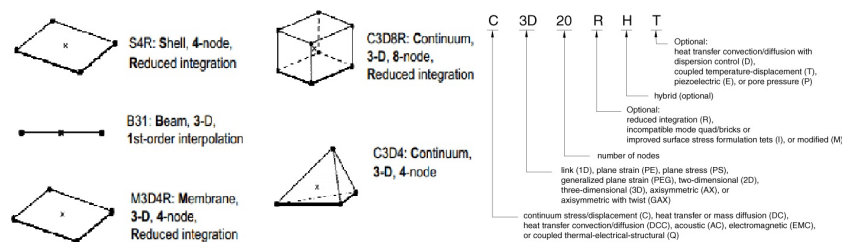
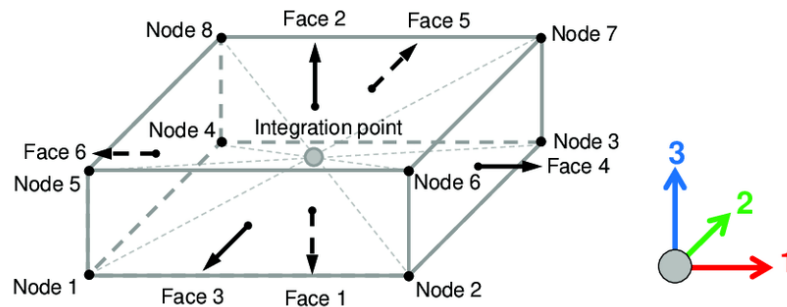


Figure 3.4: Convenzione di denominazione degli elementi in ABAQUS.

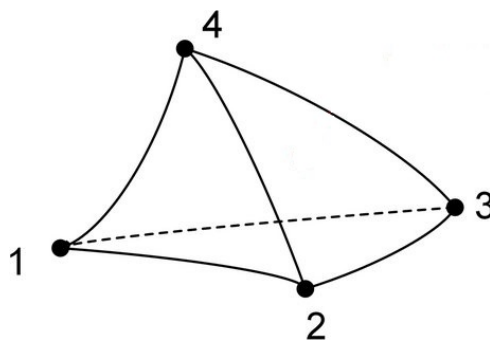
1. **Elementi Solidi:** Utilizzati per rappresentare volumi tridimensionali con forma complessa.

- **C3D8**: L'elemento C3D8 è un elemento cubico a 8 nodi. Ogni nodo ha tre gradi di libertà: spostamenti nelle direzioni x, y e z. È comunemente utilizzato per modellare strutture tridimensionali con geometrie relativamente semplici. Adatto per analisi dove la precisione dei risultati è richiesta nelle aree di elevata deformazione. Ha capacità di integrale piena o ridotta, con quest'ultima che aiuta a ridurre il tempo di calcolo mantenendo una buona precisione per problemi di tipo lineare.



**Figure 3.5:** Elemento esaedrico lineare a otto nodi con integrazione ridotta di tipo C3D8R [56].

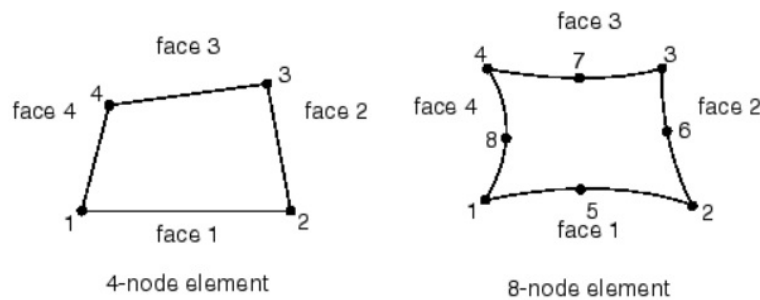
- **C3D10**: Il C3D10 è un elemento tetraedrico a 10 nodi con nodi aggiuntivi su ciascun lato dell'elemento, permettendo una maggiore flessibilità nella modellazione di geometrie complesse. Utilizzato per geometrie complesse dove l'uso di elementi cubici sarebbe difficile. È ideale per le simulazioni che richiedono un adattamento preciso della mesh alla geometria irregolare del modello. Offre un'accuratezza superiore rispetto agli elementi tetraedrici a 4 nodi (C3D4) grazie ai nodi aggiuntivi che migliorano la rappresentazione delle deformazioni.



**Figure 3.6:** Elemento tetraedrico (C3D10) in ABAQUS [57].

2. **Elementi Shell:** Ideali per strutture sottili, come piastre e gusci. Esempi includono:

- **S4:** L'elemento S4 è un elemento shell a 4 nodi che può gestire grandi rotazioni e deformazioni. Ogni nodo ha sei gradi di libertà: tre spostamenti traslazionali e tre rotazioni. È ideale per analisi statiche e dinamiche. Capace di rappresentare accuratamente sia le tensioni di membrana che di flessione. Supporta integrali pieni e ridotti, migliorando la precisione e l'efficienza computazionale.
- **S8R:** L'elemento S8R è un elemento shell quadrilatero con 8 nodi e integrazione ridotta. Ogni nodo ha sei gradi di libertà simili all'S4. Utilizzato per modellare superfici sottili con geometrie più complesse rispetto all'S4. Adatto per simulazioni che richiedono un alto livello di dettaglio nella deformazione della struttura. La riduzione dell'integrazione aiuta a evitare l'effetto di shear locking, migliorando la precisione nei modelli con elevate curvature o deformazioni.



**Figure 3.7:** Elementi S4 ed S8.

3. **Elementi Trave:** Utilizzati per modellare strutture a trave, dove la lunghezza della trave è molto maggiore delle altre dimensioni. Esempi includono:

- **B31:** L'elemento B31 è un elemento trave a 2 nodi con sei gradi di libertà per nodo: tre traslazionali e tre rotazionali. Utilizzato frequentemente in analisi strutturali di edifici, ponti, e altre strutture di ingegneria civile. Capace di rappresentare accuratamente sia le deformazioni flessionali che assiali, adatto per problemi lineari e non lineari.
- **B32:** Il B32 è un elemento trave a 3 nodi, che permette una maggiore flessibilità rispetto al B31 grazie al nodo aggiuntivo. Fornisce un miglior adattamento alle deformazioni complesse e alle geometrie curve, aumentando la precisione nei punti di massimo momento flettente.

4. **Elementi Piano:** Per analisi bidimensionali. Esempi includono:

- **CPE4:** L'elemento CPE4 è un elemento bidimensionale a 4 nodi utilizzato per analisi di tensioni piane. Ogni nodo ha due gradi di libertà: spostamenti nelle direzioni x e y. Utilizzato in problemi bidimensionali dove si assume che lo spessore del materiale non influenzi significativamente la distribuzione delle tensioni. Tipico per analisi di componenti come piastre e membrane piane.
- **CPE8:** L'elemento CPE8 è un elemento bidimensionale a 8 nodi, che include nodi aggiuntivi per una rappresentazione più precisa delle deformazioni. Migliore per geometrie irregolari e problemi che richiedono un'accuratezza maggiore rispetto al CPE4. La presenza di nodi aggiuntivi migliora la capacità di catturare dettagli nelle distribuzioni di tensioni e deformazioni, aumentando la precisione del modello.

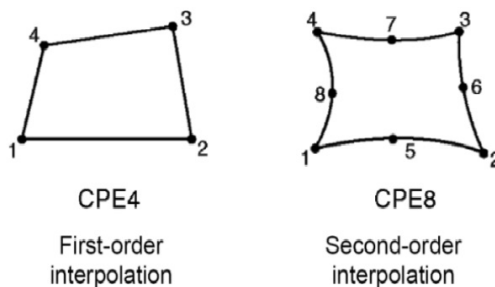


Figure 3.8: Elementi CPE4 ed CPE8 [54].

### Confronto con altri software

Ogni software di analisi agli elementi finiti (FEA) ha una propria libreria di elementi, spesso identificati con codici diversi. Infatti, in Patran & Nastran e ANSYS, la classificazione degli elementi segue criteri simili ma con codifiche diverse. Ad esempio:

- **Patran & Nastran:** Utilizzano codici come CQUAD4, elemento shell quadrilatero a 4 nodi e CHEXA, elemento solido esagonale.
- **ANSYS:** Utilizza codici come SOLID185, un elemento solido a 8 nodi, e SHELL181, elemento shell a 4 nodi.

I principi fondamentali rimangono invariati tra i vari software: la selezione dell'elemento giusto dipende dalla geometria del modello e dai requisiti dell'analisi.

La densità e la qualità della mesh influenzano significativamente i risultati della simulazione, e ogni solutore offre strumenti e algoritmi per ottimizzare la generazione della mesh. La Tabella 3.2 mostra alcuni esempi di corrispondenza tra i codici di elementi in ABAQUS, Patran & Nastran e ANSYS.

**Table 3.2:** Comparazione degli elementi tra ABAQUS, Ansys e Patran & Nastran.

<b>Elemento</b>	<b>ABAQUS</b>	<b>Ansys</b>	<b>Patran &amp; Nastran</b>
Trave 2D	T2D2	LINK1	CBAR
Trave 3D	B31	BEAM4	CBEAM
Piano 2D	CPE4	PLANE42	CQUAD4
Piano 3D	C3D8	SOLID45	CHEXA
Shell 2D	S4	SHELL63	CQUAD4
Shell 3D	S8R	SHELL181	CTRIA3

In ANSYS, gli elementi come LINK1 e BEAM4 rappresentano travi e collegamenti, analoghi ai T2D2 e B31 di ABAQUS. Allo stesso modo, elementi come CQUAD4 e CHEXA in Patran & Nastran sono corrispondenti ai CPE4 e C3D8 di ABAQUS.

Gli elementi in ABAQUS sono progettati per essere versatili e adatti a una varietà di applicazioni, dalla modellazione di strutture semplici a quelle complesse. Confrontando quest'ultimo con Patran & Nastran e ANSYS, si evidenziano differenze nelle codifiche ma una sostanziale similarità nelle capacità e nelle applicazioni degli elementi, sottolineando l'importanza di scegliere il solutore più adatto alle specifiche esigenze del progetto.

### **Conformazione e Dimensioni della Mesh**

La discretizzazione del modello in una mesh comporta un compromesso tra precisione e tempi di calcolo. Una mesh più fine (con elementi più piccoli) fornisce risultati più accurati ma richiede un tempo di calcolo maggiore. Al contrario, una mesh più grossolana (con elementi più grandi) riduce il tempo di calcolo ma può introdurre errori significativi. La qualità della mesh è cruciale per l'accuratezza delle simulazioni FEM. Una mesh ben costruita deve essere in grado di rappresentare fedelmente la geometria del modello e le variazioni di carichi e vincoli.

Per garantire una buona qualità della mesh, è importante considerare:

- **Transizioni graduali:** Evitare cambiamenti bruschi nella dimensione degli elementi.
- **Forma degli elementi:** Utilizzare elementi con forme regolari per evitare distorsioni.



- **Densità locale:** Aumentare la densità della mesh in aree con gradienti di sollecitazione elevati.

Il modulo Mesh di ABAQUS offre strumenti potenti e flessibili per creare una mesh di alta qualità, fondamentale per ottenere risultati di simulazione accurati. La capacità di definire con precisione la densità, la forma e la tipologia degli elementi permette di adattare la mesh alle specifiche esigenze del problema, garantendo un compromesso ottimale tra precisione dei risultati e tempo di calcolo. Confrontato con altri solutori come Patran & Nastran e Ansys, ABAQUS offre una libreria di elementi altrettanto completa, se non più versatile, dimostrandosi una scelta eccellente per le analisi agli elementi finiti.

### **3.4.7 Modulo Optimization**

Il modulo Optimization in ABAQUS è uno strumento avanzato per migliorare le prestazioni strutturali attraverso l'ottimizzazione dei parametri di progettazione. Questo modulo consente di identificare configurazioni ottimali che soddisfano criteri specifici, come minimizzare il peso, massimizzare la rigidità, o ottimizzare la distribuzione dei materiali. Utilizza tecniche di ottimizzazione topologica, di forma e dimensionale, integrandosi con l'ambiente di simulazione per analisi parametriche e studi di sensibilità. Gli algoritmi iterativi valutano le modifiche strutturali rispetto ai criteri prestazionali, ottenendo strutture efficienti e performanti.

### **3.4.8 Modulo Job**

Il modulo Job in ABAQUS è fondamentale per la gestione e l'esecuzione delle analisi finite. Dopo aver completato la fase di pre-processo e di definizione del modello, il modulo Job consente di impostare e avviare simulazioni. Gli utenti possono configurare vari parametri del job, inclusi il tipo di analisi, le condizioni di carico e i criteri di convergenza. Il modulo offre funzionalità per monitorare lo stato dell'analisi in tempo reale, visualizzando informazioni cruciali come il progresso dell'analisi, i tempi di calcolo e eventuali messaggi di errore o avvertimento. Inoltre, è possibile eseguire più job in parallelo, ottimizzando l'utilizzo delle risorse computazionali disponibili. Il modulo Job fornisce anche strumenti per gestire l'output dei risultati, consentendo agli utenti di salvare, visualizzare e post-processare i dati ottenuti dall'analisi. Questa capacità di gestione completa rende il modulo Job un componente essenziale per garantire che le simulazioni vengano eseguite in modo efficiente e che i risultati siano accurati e facilmente accessibili per ulteriori analisi e ottimizzazioni.

## 3.5 Python e ABAQUS

Python è un linguaggio di programmazione interpretato, dinamico e ad alto livello, noto per la sua semplicità sintattica e la vasta gamma di librerie disponibili. Introdotto da Guido van Rossum nel 1991, Python è diventato uno degli strumenti più versatili per lo sviluppo software, l'analisi dei dati, l'intelligenza artificiale e molti altri campi. Una delle sue caratteristiche più apprezzate è la leggibilità del codice, che lo rende accessibile sia ai programmatori esperti che ai neofiti. Grazie alla sua natura open source [58], Python ha una comunità globale che contribuisce attivamente al suo sviluppo, rendendolo costantemente aggiornato con le ultime innovazioni e miglioramenti.

Uno degli aspetti più interessanti di ABAQUS è la sua capacità di integrarsi con Python per estendere e automatizzare le funzionalità di simulazione. Python può essere utilizzato in ABAQUS in vari modi, tra cui l'automazione delle operazioni ripetitive [59], la personalizzazione delle analisi e la creazione di nuovi metodi di simulazione che non sono supportati direttamente dall'interfaccia utente di ABAQUS. Questo consente di sfruttare la potenza della simulazione FEA con la flessibilità e la potenza di programmazione di Python. L'integrazione tra i due avviene principalmente attraverso la ABAQUS Scripting Interface (ASI), un'API che permette agli utenti di interagire con il kernel di ABAQUS usando Python.

L'ABAQUS Scripting Interface permette di manipolare modelli, eseguire analisi, e estrarre risultati attraverso script Python. Questo è particolarmente utile in ambienti di ricerca e sviluppo, dove si devono spesso eseguire simulazioni ripetitive con variazioni minime nei parametri. Invece di configurare manualmente ogni simulazione, uno script Python può essere scritto per modificare automaticamente i parametri, eseguire l'analisi, e raccogliere i risultati, riducendo così il tempo e il rischio di errore umano.

Python è anche utilizzato in ABAQUS per creare modelli personalizzati o per implementare comportamenti materiali specifici attraverso la subroutine UMAT o VUMAT [60]. In questo contesto, Python non viene eseguito direttamente durante la simulazione, ma viene utilizzato per pre-elaborare i dati o post-elaborare i risultati, creando un flusso di lavoro altamente efficiente. L'integrazione di Python con ABAQUS non si limita alla gestione delle analisi ma si estende anche alla visualizzazione dei risultati. Python può essere utilizzato per generare report personalizzati, grafici e visualizzazioni che non sono possibili con gli strumenti di post-elaborazione standard di ABAQUS. Questo rende Python uno strumento essenziale non solo per l'automazione ma anche per l'analisi e la presentazione dei dati, rendendo più semplice comunicare i risultati delle simulazioni a un pubblico non tecnico.

### 3.6 Parametrizzazione dell'analisi

In questo paragrafo, viene fornito un commento dettagliato su come il codice utilizzato in questo lavoro di tesi si sviluppa e come sfrutta le funzionalità di ABAQUS tramite Python. Nel codice, vengono illustrate le diverse fasi della parametrizzazione e della creazione di un'analisi su una piastra rinforzata con fibre a orientamento variabile. L'utilizzo di Python permette di sfruttare la flessibilità e la potenza della programmazione per automatizzare molte operazioni che, altrimenti, dovrebbero essere eseguite manualmente tramite l'interfaccia grafica di ABAQUS.

Il codice permette di generare e configurare un modello complesso in modo parametrico, utilizzando Python per definire la geometria, i materiali, le condizioni al contorno, i carichi, la mesh, e infine per lanciare l'analisi.

Inizialmente l'utente potrà scegliere quale tipo di analisi effettuare e la dimensione bidimensionale o tridimensionale del modello, impostando il valore delle variabili *Modello\_2D* e *Modello\_3D* rispettivamente.

```

10 # Condizioni generali
11 Simmetria_laminato = False
12 Open_Hole = True
13 # Dimensioni modello
14 Modello_3D = True
15 Modello_2D = False
16 # Tipologia analisi
17 Statica = True
18 Frequenze_Naturali = False

```

*Simmetria laminato* consente di definire se il laminato debba essere simmetrico o meno. Se questa opzione è impostata su True, il codice genera automaticamente gli angoli di orientamento per gli strati simmetrici rispetto al piano medio del laminato. La variabile booleana *Open\_Hole* indica se la piastra includerà o meno un'apertura. Nel caso si opti per uno studio bidimensionale della piastra, sarà inoltre possibile selezionare tra tre diverse tipologie di analisi, modificando il valore delle rispettive variabile booleane. Le prime righe del codice stabiliscono i parametri geometrici e meccanici del modello:

```

46 L1 = 1.0
47 L2 = 1.0
48 L3 = 0.05
49 Cx = 0.3    # Coordinata X del centro del cerchio
50 Cy = 0.9    # Coordinata Y del centro del cerchio
51 Rx = 0.1397 # Raggio semiasse x

```

I parametri *L1*, *L2* e *L3* definiscono, in metri, rispettivamente la lunghezza, la larghezza e lo spessore di un singolo strato della piastra. Le variabili *Cx*, *Cy* e *Rx*

invece, caratterizzano le coordinate del centro ed il raggio della possibile apertura nella piastra.

```

56 Material_name = 'Graphite-Epoxy'
57 E11 = 137.9e+09
58 E22 = 8.96e+09
59 pressure = 10000
60 Density= 1540      #kg/m3
    
```

Le costanti ingegneristiche ( $E_{11}$ ,  $E_{22}$ , *etc.*), espresse in Pascal, specificano le proprietà elastiche del materiale composito scelto. Il valore della pressione applicata è definito dalla variabile *pressure* che verrà richiamata nella fase di applicazione del carico. Questa parametrizzazione rende il codice versatile, poiché modificando questi valori si possono facilmente generare modelli con diverse caratteristiche geometriche e meccaniche. Successivamente, vengono definiti gli angoli di orientamento delle fibre nei diversi strati:

```

80 theta = [90.0, 45.0, 0.0, 45.0]
81 #theta = [theta0_first_ply, theta1_first_ply, theta0_second_ply,
82 #         theta1_second_ply, theta0_third_ply, theta1_third_ply, ecc,]
83 kk =len(theta) // 2 # Numero di ply
    
```

Il vettore **theta** contiene gli angoli di orientamento delle fibre per ogni strato del laminato, in gradi. È fondamentale che i valori siano scritti con almeno un valore decimale per un'impostazione di allocazione vettoriale di ABAQUS. I primi due elementi del vettore si riferiscono all'angolo centrale e all'angolo esterno del primo strato, rispettivamente  $T_0$  e  $T_1$ , analogamente i due elementi finali del vettore si riferiscono agli stessi angoli per il secondo ply. È cruciale definire correttamente il vettore *theta*, in quanto esso fornisce informazioni sul numero di strati della struttura studiata, dati che vengono memorizzati nella variabile **kk**.

La geometria della piastra viene creata utilizzando le funzionalità di sketching di ABAQUS:

```

95 s = mdb.models['Model-1'].ConstrainedSketch(name='__profile__',
96         sheetSize=100.0)
97 P1 = 0.0, 0.0
98 P2 = L1, 0.0
99 s.Line(point1=P1, point2=P2)
100 if Open_Hole:
    s.EllipseByCenterPerimeter(center=(Cx, Cy), axisPoint1=(Cx - Rx,
        Cy), axisPoint2=(Cx, Cy - Ry))
    
```

Il codice genera un profilo rettangolare definendo i vertici tramite coordinate parametriche, mentre eventuali aperture, vengono aggiunte solo se la variabile

booleana *Open\_Hole* è impostata su True. Le funzioni *Line*, *HorizontalConstraint*, e *VerticalConstraint* sono utilizzate per disegnare e vincolare i lati del rettangolo, garantendo che la geometria sia correttamente definita. Dopo aver definito i contorni della piastra, il codice crea una parte 3D deformabile, *DEFORMABLE BODY*, e la associa al modello attivo in ABAQUS. Questo passaggio è fondamentale per l'applicazione successiva delle condizioni al contorno e dei carichi. Una volta completata la geometria, si passa alla definizione del materiale e alla creazione della parte:

```
128 mdb.models[ 'Model-1' ]. Material( name=Material_name )
```

Viene creato il materiale studiato nello specifico caso, 'Graphite-Epoxy', con proprietà elastiche definite in precedenza in tabella 4.1 o 'T800/3900B' le cui proprietà verranno riportate in seguito. Se si vuole effettuare uno studio sulle frequenze naturali verrà aggiunta anche l'informazione sulla densità. Per l'analisi bidimensionale, diversi tipi di *step* vengono creati a seconda della tipologia di analisi selezionata. Le condizioni al contorno sono definite utilizzando una funzione dedicata:

```
512 def create_encastre_bc( instance_name , mask , set_name , bc_name ,
513     step_name ) :
514     edges = a.instances[ instance_name ]. edges
515     edges_selected = edges.getSequenceFromMask( mask=( mask , ) , )
516     region = a.Set( edges=edges_selected , name=set_name )
517     mdb.models[ 'Model-1' ]. EncastreBC(
518         name=bc_name , createStepName=step_name ,
519         region=region , localCsys=None
```

Questa funzione utilizza riceve diversi parametri per identificare i bordi su cui applicare il vincolo. Attraverso una maschera seleziona gli spigoli della piastra e applica un vincolo di incastro su di essi. In modo analogo, in caso di analisi statica bidimensionale, il carico di pressione viene applicato alla superficie superiore della piastra:

```
581 if Statica :
582     mdb.models[ 'Model-1' ]. Pressure(
583         name=pressure_name , createStepName=step_name ,
584         region=region , distributionType=distribution_type ,
585         magnitude=pressure
```

Dopo aver definito i carichi e le condizioni al contorno, viene generata la mesh, che varia a seconda della presenza o meno di un'apertura nella geometria. In particolare, le variabili *nc* ed *n* sono cruciali per determinare la densità della mesh:

nc controlla la discretizzazione lungo i bordi dell'apertura, mentre n definisce la densità della mesh lungo lo spigolo della piastra nella direzione y. Questi parametri garantiscono flessibilità e influenzano significativamente la precisione dell'analisi numerica.

```

592 if Open_Hole:
593     p.seedEdgeByNumber(edges=pickedEdges, number=nc, constraint=FINER)
594     p = mdb.models['Model-1'].parts[part_name]
595     e = p.edges
596     pickedEdges = e.getSequenceFromMask(mask=('[#2 ]', ), )
597     p.seedEdgeByNumber(edges=pickedEdges, number=n)
598 else:
599     pickedEdges = e.getSequenceFromMask(mask=('[#1 ]', ), )
600 p.generateMesh()

```

Uno degli aspetti più complessi e delicati del codice riguarda la creazione del layup composito, durante la quale viene definita l'orientazione delle fibre per ciascun elemento di ogni strato della piastra. Viene quindi generato un file .inp contenente tutte le informazioni necessarie per l'analisi. Questo file viene poi letto per estrapolare i dati relativi alla matrice di connettività, che include le coordinate di ogni nodo, e alla matrice *Assembly*, che associa ciascun elemento ai rispettivi nodi. I dati ottenuti vengono elaborati per calcolare il centroide di ogni elemento, e attraverso una funzione apposita viene assegnato il corretto orientamento delle fibre a ciascun elemento, in base alla sua posizione all'interno della piastra. Si procede con la creazione del *CompositeLayup* caratterizzando ogni singolo strato con il rispettivo andamneto delle fibre.

```

627 mdb.jobs[Inp_name].writeInput(consistencyChecking=OFF)
628
629 matrice_nodi=(get_data_from_inp("{}_inp".format(Inp_name), 'Node',
630     lambda x: float(x+'0' if '.' in x else x))
631
632 for element_num in range(len(matrice_Assembly)):
633     for vertex_num in matrice_Assembly[element_num][1:]:
634         xc[element_num] += X[vertex_num-1]
635
636 thetaC.append(VAT(x_coord[element_num], yc[element_num], phi, theta0,
637     theta1, L1/2))

```

L'ultima parte del codice bidimensionale si occupa di preparare e sottomettere il job per l'analisi:

```

825 mdb.Job(name=job_name, model=model_name, ...)
826 mdb.jobs[job_name].submit(consistencyChecking=OFF)

```

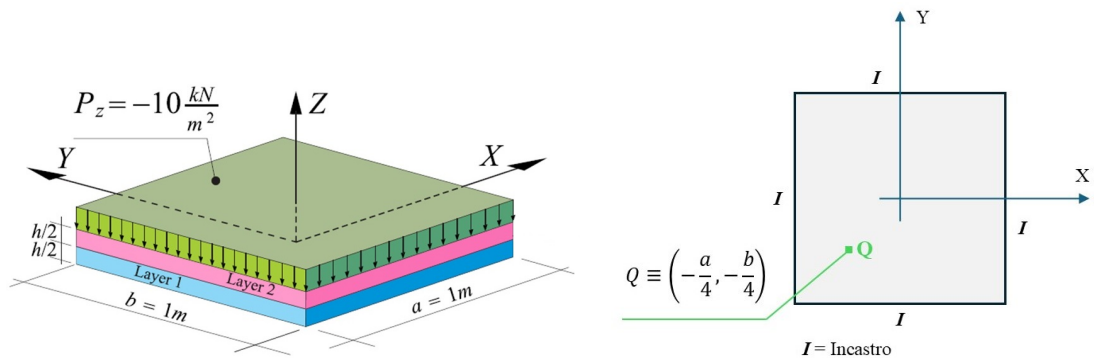
Il job viene creato utilizzando i parametri definiti in precedenza, e l'analisi viene avviata automaticamente.

Ogni aspetto del modello, dalle proprietà del materiale alla configurazione del lay-up composito, è stato gestito in modo parametrico, consentendo una flessibilità e una ripetibilità che sarebbero lente e difficili da ottenere con metodi manuali. I dettagli relativi al codice tridimensionale, così come le differenze rispetto al caso bidimensionale, saranno approfonditi nel paragrafo 4.4.1. I risultati ottenuti mediante l'utilizzo del codice parametrico saranno presentati nel prossimo capitolo.

# Capitolo 4

## Risultati numerici

In questo capitolo si vuole presentare una serie di risultati ottenuti utilizzando il codice Python e il software Abaqus descritti nei capitoli precedenti. La geometria e le proprietà che verranno prese come riferimento per questo studio sono le stesse usate nell'articolo di Demasi *et al.* [27]. La struttura analizzata è una piastra quadrata, mostrata in Fig. 4.1(a), incastrata su tutti i bordi, come illustrato in Fig. 4.1(b). La piastra ha uno spessore di  $h = 0,1$  [m] ed è costituita da due strati di uguale spessore. Il materiale utilizzato è Grafite-Epossidica con proprietà riportate nella tabella 4.1. La piastra è sottoposta a una pressione normale  $P_z = 10kPa$ , applicata sulla superficie superiore. Il sistema di coordinate globale  $X, Y, Z$  è posizionato al centro della piastra. Gli spostamenti, espressi in [m], e le tensioni, espresse in [Pa], sono calcolati nel punto  $Q \left(-\frac{a}{4}, -\frac{b}{4}\right)$ .



(a) Vista tridimensionale del modello della piastra [27].

(b) Definizione del punto  $Q$  per l'analisi delle tensioni e degli spostamenti.

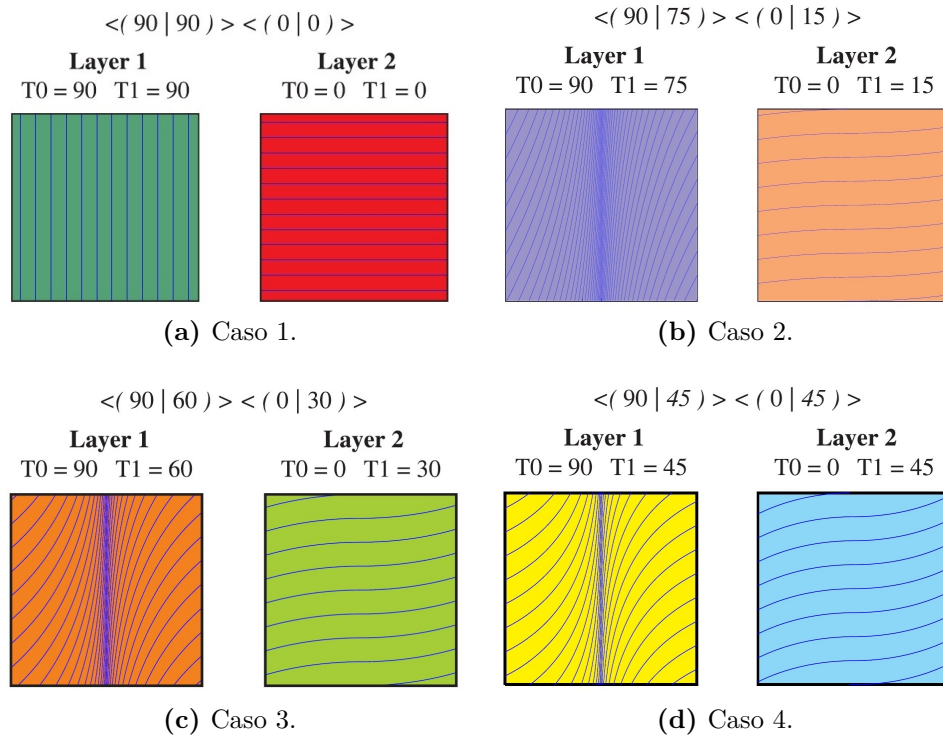
**Figure 4.1:** Geometria e condizioni di carico della piastra quadrata utilizzata per l'analisi numerica.



**Table 4.1:** Proprietà del materiale Grafite-Epossidica.

Proprietà	Valore
$E_{11}$	$137.9 \times 10^9$ Pa
$E_{22} = E_{33}$	$8.96 \times 10^9$ Pa
$G_{12} = G_{13}$	$7.1 \times 10^9$ Pa
$G_{23}$	$6.21 \times 10^9$ Pa
$\nu_{12} = \nu_{13}$	0.3 [-]
$\nu_{23}$	0.49 [-]
$\rho$	$1540$ kg/m <sup>3</sup>

Sono stati esaminati quattro diversi schemi delle fibre, come illustrato graficamente in Fig. 4.2 e schematicamente nella tabella 4.2, per studiare l'influenza della disposizione delle fibre sui risultati della simulazione.



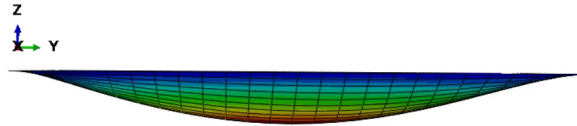
**Figure 4.2:** Rappresentazione andamento delle fibre per i casi analizzati.

**Table 4.2:** Variazione delle fibre nei quattro casi studiati.

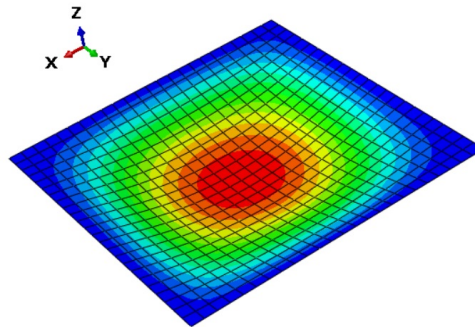
	Schema fibre
Caso 1	$[\langle 90, 90 \rangle, \langle 0, 0 \rangle]$
Caso 2	$[\langle 90, 75 \rangle, \langle 0, 15 \rangle]$
Caso 3	$[\langle 90, 60 \rangle, \langle 0, 30 \rangle]$
Caso 4	$[\langle 90, 45 \rangle, \langle 0, 45 \rangle]$

## 4.1 Analisi statica

Nel caso bidimensionale (2D), il primo ad essere analizzato, la convergenza della soluzione è stata valutata utilizzando cinque mesh di diversa risoluzione:  $8 \times 8$ ,  $12 \times 12$ ,  $16 \times 16$ ,  $20 \times 20$  e  $24 \times 24$ . Per ciascun caso, si esaminerà come variano le tre componenti del vettore di spostamento  $u_x$ ,  $u_y$ , e  $u_z$  rispetto al valore di riferimento e come questi risultati convergono o divergono al variare della risoluzione del modello. Successivamente, si confronteranno i risultati ottenuti nei vari casi per identificare tendenze e differenze significative. Per l'analisi sono stati impiegati elementi plate di tipo S4R. In Figura 4.3 è illustrata la deformazione grafica della piastra soggetta a pressione di 10 kPa.



(a) Vista di profilo.



(b) Vista isometrica.

**Figure 4.3:** Geometria deformata della piastra.

### 4.1.1 Analisi convergenza Caso 1: Fibre dritte

Il primo caso studiato in questa tesi riguarda una curvatura delle fibre nulla lungo la lunghezza della piastra. Questo approccio preliminare è stato utilizzato per acquisire familiarità con il software e iniziare a valutare la coerenza dei risultati ottenuti, fornendo una base per le analisi successive. La Tabella 4.3 mostra i valori di spostamento lungo le tre direzioni principali per la disposizione di fibre  $[\langle 90,90 \rangle, \langle 0,0 \rangle]$ . I dati sono organizzati in modo da sottolineare le differenze fra il valore di riferimento dell'articolo di Demasi *et al.* [27], denotato come *Ref.*, e diverse densità di mesh, dalle più grossolane ( $8 \times 8$ ) alle più raffinate ( $24 \times 24$ ). Per quanto riguarda lo spostamento lungo l'asse  $x$ , la differenza con il valore

**Table 4.3:** Analisi di convergenza della mesh nel piano della piastra con laminazione a fibre dritte tramite elementi bidimensionali quadratici S4R.

Caso 1			
Modello	$u_x$ [m]	$u_y$ [m]	$u_z$ [m]
<i>Ref.</i> [27]	-2.08116E-07	2.08428E-07	-2.83695E-06
$8 \times 8$	-2.34367E-07	2.34367E-07	-2.81984E-06
$12 \times 12$	-2.27270E-07	2.27270E-07	-2.88004E-06
$16 \times 16$	-2.25272E-07	2.25272E-07	-2.91732E-06
$20 \times 20$	-2.24373E-07	2.24373E-07	-2.92612E-06
$24 \times 24$	-2.23884E-07	2.23884E-07	-2.93086E-06

di riferimento è più marcata nei modelli con risoluzione inferiore, ma tende a ridursi man mano che la risoluzione aumenta. La differenza ( $\Delta_u$ ) tra una mesh e la successiva diminuisce in modo quasi continuo, indicando una tendenza alla convergenza per questa componente. Analogamente, i valori di spostamento lungo l'asse  $y$  seguono un trend simile.  $\Delta_u$  è negativo e diminuisce, il che indica anche qui una convergenza del risultato.

I valori di  $u_z$  mostrano una maggiore sensibilità al cambio della densità della mesh, con l'aumentare della risoluzione, la differenza percentuale aumenta progressivamente fino a 3.31% per il modello  $24 \times 24$ . Per approfondire la casistica si è analizzata anche la mesh  $28 \times 28$  che ha riportato un valore di spostamento verticale pari a  $-2.91660E - 06$  m, confrontabile con il valore della mesh  $16 \times 16$ . Ciò indica che la componente  $u_z$  ha un andamento divergente-convergente, e le differenze restano sempre contenute entro un margine del 3.5%. Inoltre, si rileva una simmetria nei risultati. I valori di  $u_x$  e  $u_y$  sono molto simili in termini di grandezza, ma con segni opposti, evidenziando la simmetria del problema rispetto agli assi  $x$  e  $y$ .

### 4.1.2 Analisi convergenza Caso 2

Il secondo caso analizzato si concentra su una disposizione di fibre che presenta una piccola variazione all'interno del layer  $[\langle 90,75 \rangle, \langle 0,15 \rangle]$ . La Tabella 4.4 riporta i risultati ottenuti.

**Table 4.4:** Analisi di convergenza della mesh nel piano per l'analisi statica: Caso 2.

Caso 2			
Modello	$u_x$ [m]	$u_y$ [m]	$u_z$ [m]
<i>Ref.</i> [27]	-2.53070E-07	2.48150E-07	-2.92661E-06
$8 \times 8$	-2.81959E-07	2.67874E-07	-2.86265E-06
$12 \times 12$	-2.73672E-07	2.63220E-07	-2.93656E-06
$16 \times 16$	-2.70399E-07	2.60412E-07	-2.96194E-06
$20 \times 20$	-2.68918E-07	2.59221E-07	-2.97390E-06
$24 \times 24$	-2.68154E-07	2.58667E-07	-2.98062E-06

Inizialmente i valori di spostamento lungo l'asse  $x$  mostrano una differenza elevata rispetto al valore di riferimento per i modelli a bassa risoluzione, che si riducono gradualmente all'infittirsi della mesh.  $\Delta_u$  diventa quasi insignificante verso il modello  $24 \times 24$ , il che suggerisce una buona convergenza per questa componente. Un andamento della soluzione simile viene notato per lo spostamento lungo l'asse  $y$ , in cui la differenza percentuale diminuisce al crescere della risoluzione, e anche in questo caso,  $\Delta_u$  è negativo e diminuisce. Per quanto riguarda la componente  $u_z$  si osserva un leggero aumento nella differenza percentuale con l'aumentare della risoluzione, fermandosi comunque a valori accettabili (1.85%) per la mesh  $24 \times 24$ . In questo caso, tutte le componenti mostrano una tendenza alla convergenza con l'aumentare della risoluzione, con una lieve divergenza per  $u_z$ , simile al Caso 1.

### 4.1.3 Analisi convergenza Caso 3

Nel terzo caso è stata studiata l'influenza sulla soluzione di una variazione di fibre più marcata  $[\langle 90,60 \rangle, \langle 0,30 \rangle]$ , come illustrato in Fig. 4.2(c). I risultati di questa configurazione sono riportati nella tabella 4.5.

Per questa configurazione di fibre, tutte le componenti evidenziano una tendenza chiara alla convergenza con l'aumentare della risoluzione, con un'attenzione particolare alla componente  $u_z$ , che, a differenza dei casi precedenti, sottostima la soluzione rispetto al riferimento, segnalando una buona convergenza. La componente  $u_x$  presenta  $\Delta_u$  trascurabili nei modelli ad alta risoluzione, confermando ulteriormente la tendenza alla convergenza. Analogamente, la componente  $u_y$  mostra una riduzione della differenza rispetto al valore di riferimento con l'aumentare della risoluzione,

**Table 4.5:** Analisi di convergenza della mesh nel piano per l'analisi statica: Caso 3.

Caso 3			
Modello	$u_x$ [m]	$u_y$ [m]	$u_z$ [m]
<i>Ref.</i> [27]	-2.76740E-07	2.72110E-07	-2.90170E-06
8 × 8	-2.96241E-07	2.78489E-07	-2.61883E-06
12 × 12	-2.92252E-07	2.78818E-07	-2.71733E-06
16 × 16	-2.90940E-07	2.77652E-07	-2.75558E-06
20 × 20	-2.90225E-07	2.76849E-07	-2.77531E-06
24 × 24	-2.89866E-07	2.76422E-07	-2.78721E-06

con una differenza percentuale minima dell'1,58% nel modello 24 × 24. Questo risultato attesta l'accuratezza della simulazione effettuata.

#### 4.1.4 Analisi convergenza Caso 4

Nel quarto ed ultimo caso bidimensionale è stata esaminata l'influenza sulla soluzione di una variazione più significativa nella disposizione delle fibre, configurata come  $[\langle 90,45 \rangle, \langle 0,45 \rangle]$ . I risultati ottenuti per questa configurazione sono riportati nella tabella 4.6.

**Table 4.6:** Analisi di convergenza della mesh nel piano per l'analisi statica: Caso 4.

Caso 4			
Modello	$u_x$ [m]	$u_y$ [m]	$u_z$ [m]
<i>Ref.</i> [27]	-2.33630E-07	2.55850E-07	-2.80100E-06
8 × 8	-2.26156E-07	2.52689E-07	-2.48532E-06
12 × 12	-2.33608E-07	2.56391E-07	-2.52964E-06
16 × 16	-2.37463E-07	2.57560E-07	-2.55552E-06
20 × 20	-2.39692E-07	2.58267E-07	-2.56790E-06
24 × 24	-2.41201E-07	2.58759E-07	-2.57502E-06

Similmente al Caso 3, per  $u_z$  la differenza percentuale è negativa per tutti i modelli, e si osserva una leggera riduzione della differenza  $\Delta_u$  con l'aumentare della risoluzione. Per quanto riguarda  $u_x$ , inizialmente, la differenza percentuale è negativa, ma tende a diventare positiva con l'aumentare della risoluzione, fino a superare leggermente il valore di riferimento nel modello 24 × 24. Si evidenzia una differenza del 0.01% per il valore ottenuto alla mesh 16 × 16. Il  $\Delta_u$  è negativo nei modelli

a bassa risoluzione ma si riduce progressivamente, indicando una tendenza alla convergenza. Per questa configurazione di fibre, tutte le componenti mostrano una buona tendenza alla convergenza, con le componenti  $u_x$  e  $u_y$  che superano leggermente il valore di riferimento, ma entro limiti accettabili.

#### 4.1.5 Confronto tra quattro vari casi

In tutti i casi,  $u_x$  mostra una differenza percentuale significativa nei modelli a bassa risoluzione, come si evince in Fig. 4.4, ma la differenza si riduce con l'aumentare della risoluzione, sottolineando una buona convergenza.

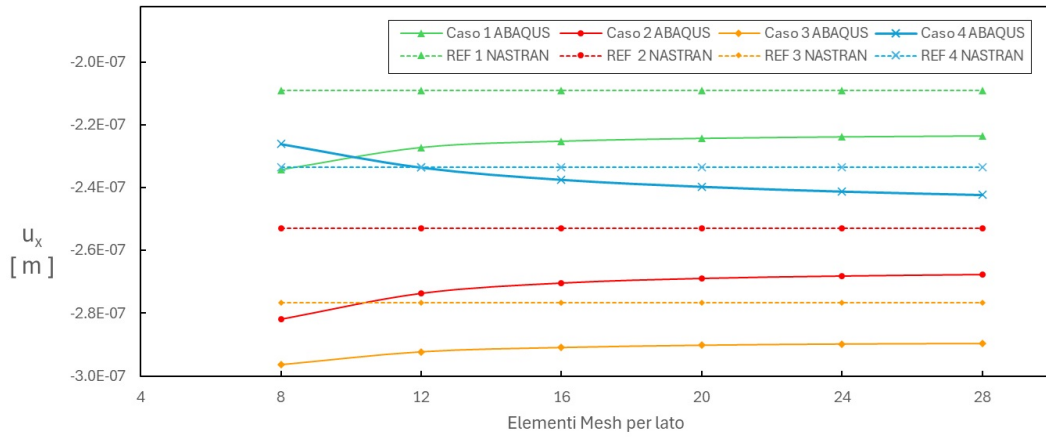


Figure 4.4: Spostamento  $u_x$  nei 4 casi.

Nel Caso 4, la componente supera leggermente il valore di riferimento nei modelli a risoluzione più alta, ma entro un margine di errore del 5%.

Simile alla componente  $u_x$ ,  $u_y$  mostra una tendenza alla convergenza con l'aumentare della risoluzione in tutti i casi. Anche per questa componente nel Caso 4, come illustrato in Fig. 4.5,  $u_y$  supera leggermente il valore di riferimento nei modelli a risoluzione più alta, ma resta entro un margine di errore del 2%. Nei primi due casi, la componente  $u_z$  mostra una leggera divergenza positiva rispetto al valore di riferimento, come mostrato in Fig. 4.6, mentre i Casi 3 e 4 sovrastimano leggermente la soluzione. Tuttavia, in tutti i casi, la divergenza resta entro limiti accettabili, meno del 5%, e mostrano una tendenza alla convergenza con l'aumentare della risoluzione.

In generale, i risultati mostrano che con l'aumentare della risoluzione dei modelli, tutte le componenti  $u_x$ ,  $u_y$ , e  $u_z$  tendono a convergere verso i valori di riferimento. Le leggere divergenze osservate in alcuni casi rientrano entro limiti accettabili, suggerendo che i modelli ad alta risoluzione forniscono risultati più accurati e stabili.

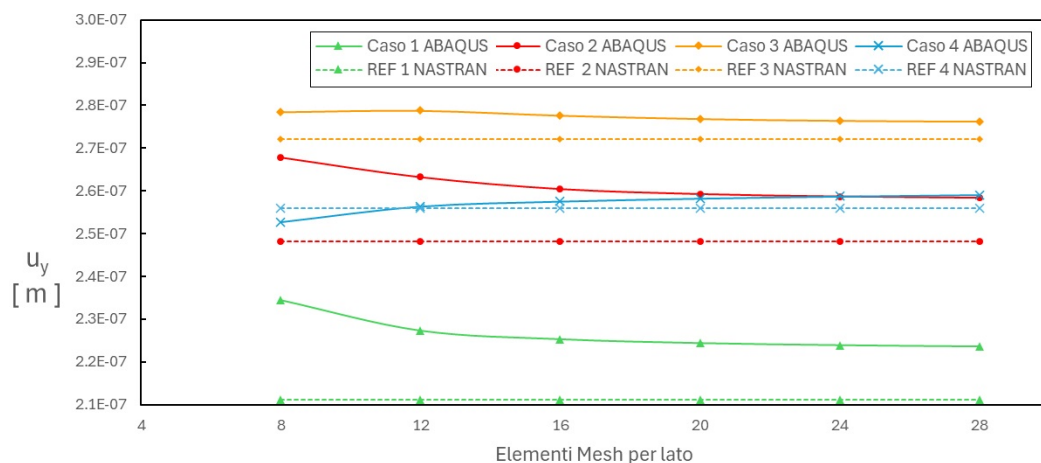


Figure 4.5: Spostamento  $u_y$  nei 4 casi.

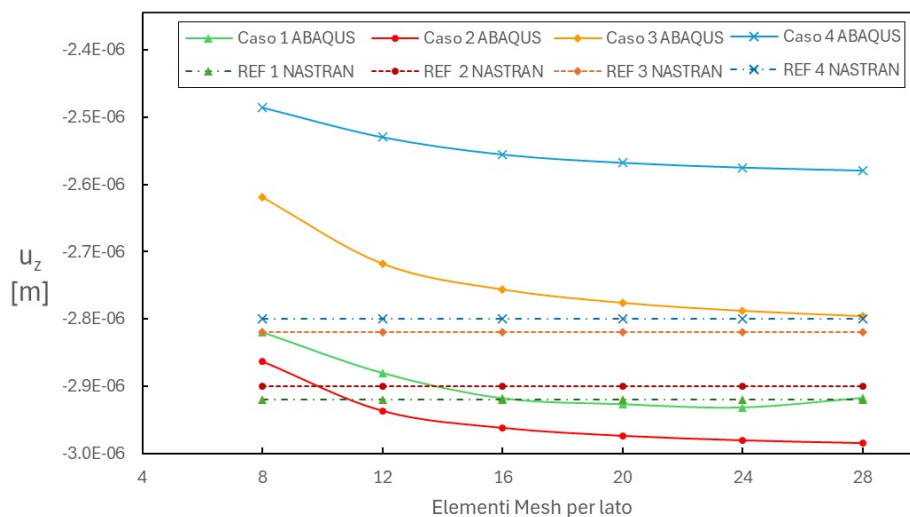
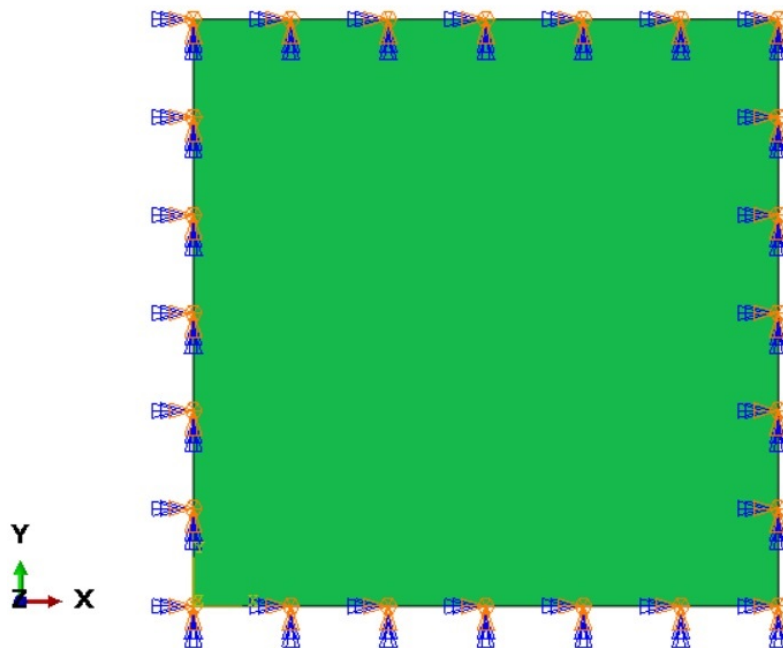


Figure 4.6: Spostamento  $u_z$  nei 4 casi.

Tuttavia, è importante notare che nel quarto caso le componenti  $u_x$  e  $u_y$  sovrastimano e sottostimano rispettivamente la soluzione al cambiare della densità della mesh, il che potrebbe richiedere ulteriori analisi per garantire la precisione dei modelli.

## 4.2 Frequenze naturali: analisi modale

A conferma ulteriore della validità del modello, in questo paragrafo verrà analizzata la risposta della struttura ad un'analisi dinamica. In particolare, si studieranno le frequenze naturali della piastra quadrata incastrata su tutti i bordi, come illustrato in Figura 4.7. La piastra è composta da due strati di spessore 0.05 [m] ciascuno, realizzati con il materiale Grafite-Epossidica. Nella parametrizzazione dello studio,



**Figure 4.7:** Geometria e condizioni a contorno dell'analisi dinamica.

è stata attivata la variabile booleana *Frequenze\_Naturali*. Tale scelta ha permesso di omettere la definizione del carico, includendo invece le informazioni relative alla densità del materiale. La procedura di creazione e assegnazione del campo ai rispettivi strati è rimasta invariata rispetto all'analisi statica.

Le analisi dinamiche, in particolare quelle riguardanti le frequenze naturali, rivestono un ruolo fondamentale nella valutazione del comportamento strutturale. Le frequenze naturali rappresentano le frequenze alle quali la struttura tende a vibrare in modo incontrollato in assenza di forze esterne. Queste informazioni sono fondamentali per comprendere la risposta dinamica della struttura e prevenire fenomeni di risonanza che potrebbero compromettere la sua stabilità e sicurezza strutturale.



### 4.2.1 Analisi di convergenza e confronto tra i casi

In questa sezione vengono presentati i risultati delle analisi di convergenza, in relazione all'articolo di riferimento di Demasi *et al.* [27], indicato come *Ref.* [27]. Le analisi sono state condotte utilizzando le stesse densità di mesh impiegate per l'analisi statica, partendo da quelle più grossolane ( $8 \times 8$ ) fino alle più raffinate ( $24 \times 24$ ). L'obiettivo era verificare il comportamento della convergenza per i diversi modi di vibrazione. In Tabella 4.7 si osserva che la convergenza è stata raggiunta

**Table 4.7:** Analisi di convergenza della mesh nel piano per l'analisi dinamica: Caso 1.

Caso 1					
Modello	$f_1$ [Hz]	$f_2$ [Hz]	$f_3$ [Hz]	$f_4$ [Hz]	$f_5$ [Hz]
<i>Ref.</i> [27]	609.15	1130.21	1130.21	1525.65	1836.46
$8 \times 8$	621.54	1201.2	1201.2	1597.2	2074.6
$12 \times 12$	611.42	1153.9	1153.9	1544.3	1924.0
$16 \times 16$	607.97	1138.2	1138.2	1526.2	1874.5
$20 \times 20$	606.38	1131	1131.0	1518.0	1852.1
$24 \times 24$	605.53	1127.2	1127.2	1513.5	1840.1

per tutti i modi analizzati, confermando la validità delle simulazioni con una mesh più fitta. I risultati mostrano una progressiva riduzione della differenza rispetto ai valori di riferimento man mano che la densità della mesh aumenta.

La Tabella 4.8 riporta i risultati dell'analisi di convergenza per il secondo Caso, dove sono elencate le frequenze naturali dei primi cinque modi di vibrazione per diverse densità di mesh. Anche in questo caso, i valori calcolati si avvicinano progressivamente a quelli del modello di riferimento *Ref.* [27] con l'aumentare della risoluzione della mesh. Si osserva che per la mesh più grossolana ( $8 \times 8$ ), le frequenze sono sovrastimate, con differenze maggiori per i modi più alti. Ad esempio, per il quinto modo, la frequenza è di 2083.6 Hz, rispetto ai 1835.96 Hz del valore di riferimento. La convergenza diventa più evidente con la mesh  $12 \times 12$ , e si raggiunge una buona precisione già a partire dalla mesh  $16 \times 16$ , con valori molto vicini a quelli di riferimento, come nel caso del primo modo (610.37 Hz contro 610.67 Hz). La mesh  $24 \times 24$  conferma la tendenza di convergenza con differenze ormai minime. Un dettaglio interessante è che  $f_2$  ed  $f_3$  hanno lo stesso valore, suggerendo una possibile degenerazione modale, cioè la presenza di due modi indipendenti che vibrano alla stessa frequenza.

La Tabella 4.9 presenta i risultati relativi al terzo Caso dove è stata studiata l'influenza sulla soluzione di una variazione di fibre  $[\langle 90,60 \rangle, \langle 0,30 \rangle]$ . Anche qui, si nota che le frequenze naturali sono sovrastimate per la mesh  $8 \times 8$ , con discrepanze particolarmente rilevanti per i modi superiori. Ad esempio, anche in questa

**Table 4.8:** Analisi di convergenza della mesh nel piano per l'analisi dinamica: Caso 2.

Caso 2					
Modello	$f_1$ [Hz]	$f_2$ [Hz]	$f_3$ [Hz]	$f_4$ [Hz]	$f_5$ [Hz]
<i>Ref.</i> [27]	610.67	1113.70	1149.47	1525.22	1835.96
$8 \times 8$	624.54	1193.6	1224	1609.6	2083.6
$12 \times 12$	613.99	1143.4	1176.1	1552.5	1930.9
$16 \times 16$	610.37	1126.4	1160.3	1532.9	1880.6
$20 \times 20$	608.7	1118.7	1153.1	1523.7	1857.8
$24 \times 24$	607.8	1114.8	1149.3	1518.8	1845.6

simulazione la frequenza del quinto modo è molto elevata, 2114.2 Hz, contro i 1838.25 Hz del modello di riferimento. Con l'aumentare della densità della mesh, le frequenze si avvicinano ai valori di riferimento, con una buona convergenza a partire dalla mesh  $16 \times 16$ , dove il primo modo presenta una differenza di soli 12.35 Hz rispetto al valore di riferimento. Anche in questo caso, la mesh  $24 \times 24$  dimostra una convergenza quasi perfetta, con differenze inferiori per tutti i modi considerati.

**Table 4.9:** Analisi di convergenza della mesh nel piano per l'analisi dinamica: Caso 3.

Caso 3					
Modello	$f_1$ [Hz]	$f_2$ [Hz]	$f_3$ [Hz]	$f_4$ [Hz]	$f_5$ [Hz]
<i>Ref.</i> [27]	618.96	1103.95	1173.53	1526.63	1838.25
$8 \times 8$	649.24	1217.5	1306.5	1695.6	2114.2
$12 \times 12$	636.05	1162.8	1247.4	1621.2	1959.6
$16 \times 16$	631.31	1143.9	1227.6	1594.6	1908.8
$20 \times 20$	629.01	1134.9	1218.4	1581.9	1885.9
$24 \times 24$	627.71	1130	1213.4	1574.7	1873.5

La Tabella 4.10 riguarda il quarto ed ultimo caso e segue lo stesso schema delle analisi precedenti. Le frequenze naturali per la mesh  $8 \times 8$  sono significativamente superiori rispetto ai valori di riferimento, con una sovrastima particolarmente marcata per i modi superiori. L'aumento della risoluzione della mesh comporta una riduzione delle differenze, e si osserva una buona convergenza a partire dalla mesh  $16 \times 16$ . Anche per questo caso, la mesh  $24 \times 24$  presenta una corrispondenza molto stretta con i valori di riferimento, confermando la qualità della simulazione con mesh più raffinate.

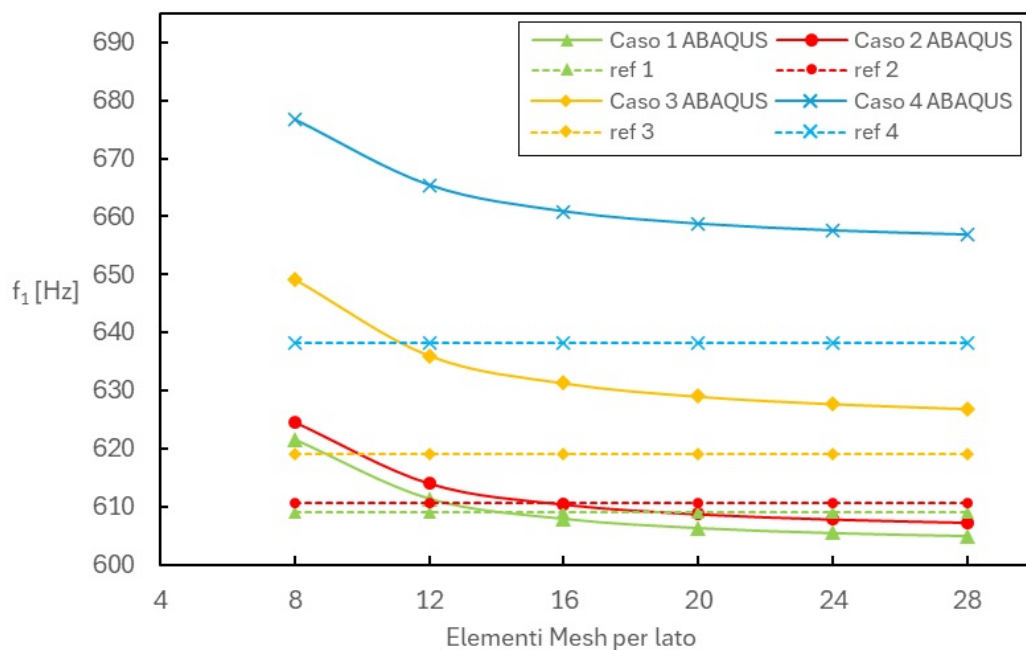
**Table 4.10:** Analisi di convergenza della mesh nel piano per l'analisi dinamica: Caso 4.

Caso 4					
Modello	$f_1$ [Hz]	$f_2$ [Hz]	$f_3$ [Hz]	$f_4$ [Hz]	$f_5$ [Hz]
<i>Ref.</i> [27]	638.25	1103.95	1202.72	1533.08	1847.98
$8 \times 8$	676.84	1220.7	1310.1	1706.7	2130.4
$12 \times 12$	665.45	1171.6	1276	1642.7	1988.2
$16 \times 16$	660.89	1153.3	1262.8	1617.7	1938.3
$20 \times 20$	658.75	1144.9	1257.2	1605.9	1916
$24 \times 24$	657.57	1140.3	1254.4	1599.4	1904.2

Analizzando complessivamente i risultati riportati nelle quattro tabelle, si osserva un comportamento comune in termini di convergenza. In tutti i casi, la mesh  $8 \times 8$  presenta frequenze sovrastimate rispetto ai valori di riferimento, con discrepanze più evidenti per i modi superiori. A partire dalla mesh  $12 \times 12$ , le differenze si riducono sensibilmente, e una buona convergenza si ottiene già con la mesh  $16 \times 16$ . La mesh  $24 \times 24$  conferma la precisione dei calcoli, mostrando differenze ormai trascurabili. Tuttavia, un aspetto degno di nota è la variazione del grado di sovrastima tra i diversi casi. Ad esempio, nel Caso 3, le differenze per la mesh  $8 \times 8$  risultano più marcate rispetto a quelle osservate negli altri casi, in particolare per i modi superiori. Questo suggerisce che il modello dinamico nel Caso 3 potrebbe essere più sensibile alla risoluzione della mesh rispetto agli altri casi, richiedendo dunque un maggior grado di raffinatezza per ottenere risultati accurati.

Per evitare di appesantire l'elaborato e mantenere un livello di sintesi adeguato, si è scelto di presentare il grafico dell'analisi di convergenza limitatamente alla prima frequenza naturale per i diversi casi studiati. Tale approccio consente di mettere in evidenza l'andamento della convergenza senza sovraccaricare il testo con informazioni ridondanti. La prima frequenza naturale, infatti, fornisce già un'indicazione significativa della precisione delle simulazioni rispetto al modello di riferimento, in quanto rappresentativa del comportamento generale del sistema. In questo modo, si semplifica la comprensione dei risultati, evitando di riprodurre dati per tutti i modi di vibrazione, che seguono comunque una tendenza analoga. La rappresentazione grafica permette di visualizzare chiaramente come l'aumento della densità della mesh migliori la precisione dei risultati, con una rapida convergenza verso i valori di riferimento già a partire da una mesh di media risoluzione, soprattutto per i primi tre andamenti delle fibre.

In aggiunta al grafico dell'analisi di convergenza per la prima frequenza naturale, si è deciso di riportare, in Fig. 4.9, le forme modali corrispondenti alla mesh più raffinata  $24 \times 24$  per il quarto caso studiato. I restanti 3 casi sono riportati



**Figure 4.8:** Convergenza prima forma modale.

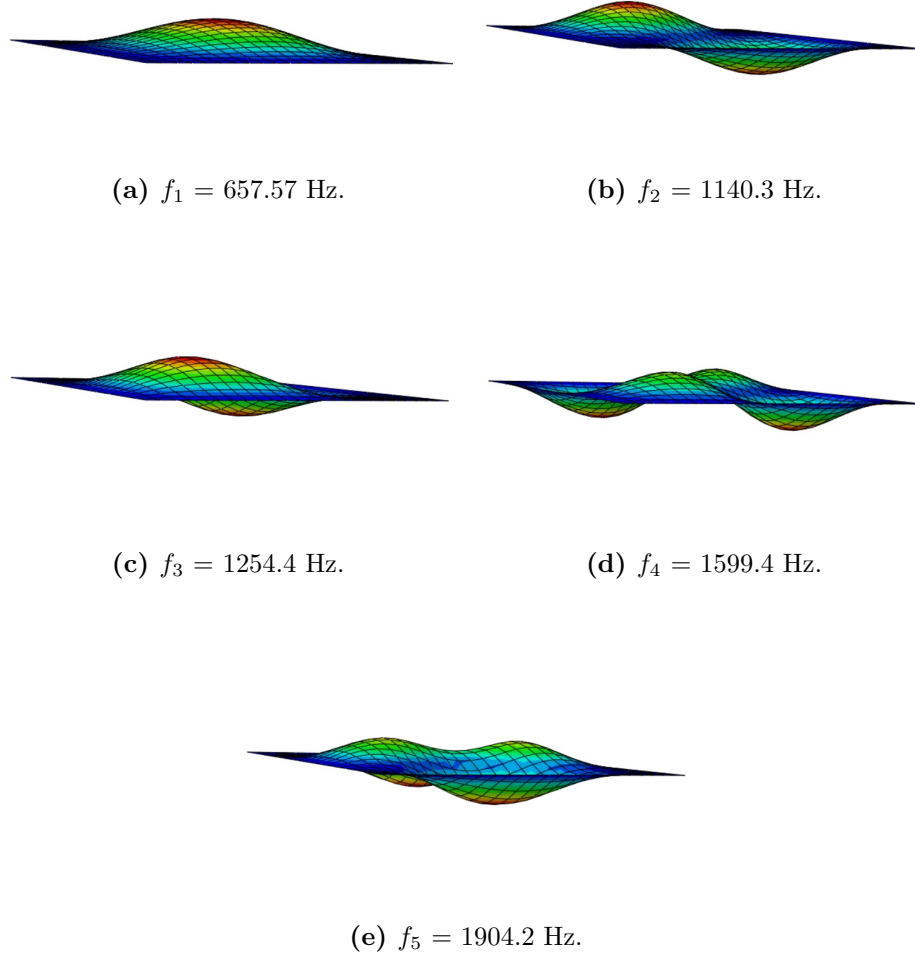
nell'appendice A. Questa scelta permette di fornire una rappresentazione visiva chiara e dettagliata delle deformazioni associate ai primi cinque modi di vibrazione, evidenziando le caratteristiche dinamiche dei modelli analizzati.

Le forme modali per la mesh  $24 \times 24$  sono particolarmente significative, poiché con questa densità si osserva una buona convergenza dei risultati rispetto ai valori di riferimento. La visualizzazione delle forme modali consente di comprendere meglio le dinamiche strutturali associate ai vari modi, mostrando le configurazioni geometriche che la struttura assume durante le oscillazioni.

### 4.3 Analisi di Buckling

In questa sezione si procede con l'analisi di buckling della struttura, confrontando due diverse piastre. L'analisi di buckling è cruciale per valutare la stabilità della struttura sotto carico compressivo. Essa permette di identificare i fattori di carico critico, ovvero i valori del carico oltre i quali la struttura subisce instabilità e può collassare. Questo tipo di analisi fornisce indicazioni fondamentali sul comportamento della struttura in condizioni di carico critico e sulla sua capacità di mantenere l'integrità sotto compressione.

Dopo aver verificato la convergenza delle analisi statica e modale, l'analisi di buckling viene condotta sulla struttura utilizzando una mesh con densità  $24 \times 24$ . Per



**Figure 4.9:** Rappresentazione frequenze modali per andamento di fibre  $[\langle 90,45 \rangle, \langle 0,45 \rangle]$ .

ciascun caso, si identifica il fattore di carico critico associato ai primi modi di buckling, mettendo in evidenza i carichi a cui la struttura diventa instabile.

Le due piastre analizzate, entrambe realizzate in Grafite-Epossidica, in tabella 4.11, presentano diverse configurazioni di laminazione simmetrica: una è una piastra composita Quasi Isotropa (QI) con una sequenza di laminazione  $[0/\pm 45/90]_s$ , mentre l'altra è una piastra con laminazione VAT,  $[\langle 90,0 \rangle, \langle 0,45 \rangle, \langle 90,75 \rangle, \langle 30,60 \rangle]_s$ . Nonostante entrambe utilizzino lo stesso materiale base, il comportamento strutturale è fortemente influenzato dalla disposizione delle fibre nelle due configurazioni.

**Table 4.11:** Proprietà Grafite-Epossidica.

Proprietà	Valore	Unità di Misura
$E_{11}$	$137.9 \times 10^9$	Pa
$E_{22}$	$8.96 \times 10^9$	Pa
$E_{33}$	$8.96 \times 10^9$	Pa
$G_{12}$	$7.1 \times 10^9$	Pa
$G_{13}$	$7.1 \times 10^9$	Pa
$G_{23}$	$6.21 \times 10^9$	Pa
$\nu_{12}$	0.3	[-]
$\nu_{13}$	0.3	[-]
$\nu_{23}$	0.49	[-]
$\rho$	1540	$kg/m^3$

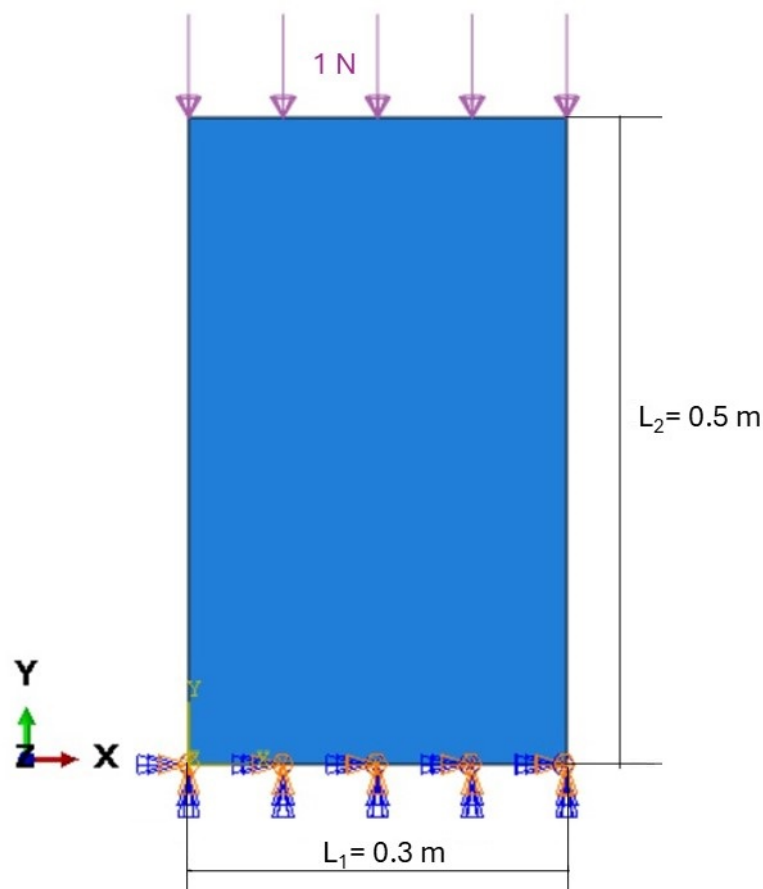
Per descrivere la sequenza di laminazione si adotta la nomenclatura internazionale standard [45], che segue i seguenti criteri:

- Gli angoli di orientazione delle fibre vengono racchiusi tra parentesi quadre e separati dal simbolo “/”;
- Quando strati consecutivi hanno la medesima orientazione delle fibre, l’angolo viene indicato una sola volta, accompagnato da un pedice che specifica il numero di ripetizioni;
- Per indicare angoli opposti successivi, si utilizza il simbolo “±”;
- Nei laminati simmetrici, si riporta solo metà della sequenza di laminazione, aggiungendo un pedice “s” alla chiusura della parentesi quadra;
- Nel caso di laminati simmetrici con un numero dispari di strati, l’orientazione dell’ultimo strato, che rappresenta la lamina centrale, viene barrata superiormente.

La laminazione  $[0/\pm 45/90]_s$  conferisce alla piastra un comportamento quasi isotropo, ossia un comportamento meccanico che si avvicina a quello di un materiale isotropo, mantenendo però i vantaggi dei materiali compositi. La disposizione simmetrica delle fibre lungo più direzioni permette alla struttura di distribuire gli sforzi in maniera relativamente uniforme, conferendo una buona resistenza a trazione e compressione in varie direzioni del piano. Tuttavia, questa configurazione non consente ottimizzazioni locali per gestire carichi complessi, risultando in un comportamento meno efficiente rispetto alla laminazione VAT per quanto riguarda i carichi critici. La laminazione a fibre a orientamento variabile consente di adattare

l'orientamento delle fibre alle esigenze locali della struttura. Questo porta a un miglioramento della resistenza all'instabilità.

Per l'analisi verrà utilizzato il codice parametrico sviluppato nell'ambito di questo lavoro di tesi. La piastra rettangolare studiata presenterà dimensioni pari a  $0,3 \text{ m} \times 0,5 \text{ m}$ , con uno spessore di  $1,272 \text{ mm}$ . Essa è costituita da 8 strati con laminazione simmetrica, ciascuno con uno spessore di  $0,159 \text{ mm}$ . Modificando il valore della variabile booleana *Buckling\_a\_compressione* a 'True' nel codice, si impone un vincolo di incastro fisso lungo il lato di dimensione minore della struttura, mentre il lato opposto è sottoposto a un carico unitario di compressione, illustrato in Fig. 4.10.



**Figure 4.10:** Geometria e condizioni a contorno analisi buckling.

Ricapitolando, il codice parametrico è aggiornato nel seguente:

```

10 Modello_2D = True
11 Buckling_a_compressione = True
12 # Geometria
13 L1 = 0.3          # dimensione x
14 L2 = 0.5          # dimensione y del piatto
15 L3 = 0.000159    # spessore singolo layer
16 n = 24           # Numero di elementi finiti in direzione y
17 theta = [ 90.0, 0.0, 0.0, 45.0, 90.0, 75.0, 30.0, 60.0 ]
18 Simmetria_laminato = True
19
20 if Simmetria_laminato:
21     if len(theta)%2==0:
22         switched=[]
23         for i in range(0, len(theta), 2)[::-1]:
24             switched.append(theta[i])
25             switched.append(theta[i+1])
26         theta=theta+switched
27 kk =len(theta) // 2 # Numero di ply

```

In Tabella 4.12 sono presentati i primi cinque carichi critici derivanti dalle analisi di instabilità condotte sulle diverse strutture. Di seguito verranno presentate le

**Table 4.12:** Primi 5 carichi critici per QI e VAT

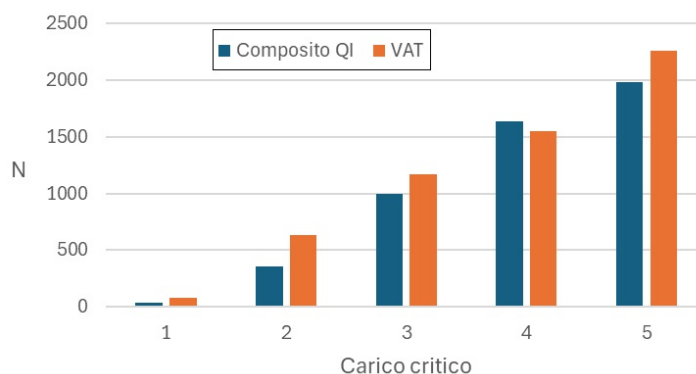
Carico critico n°	Composito QI [N]	VAT [N]
1	39.27	78.05
2	355.66	633.03
3	998.6	1167.7
4	1635.9	1549.1
5	1984.3	2263.3

cinque forme modali associate ai carichi critici, come mostrato nelle Fig. 4.12 e 4.13, facilitando la comparazione delle prestazioni delle varie configurazioni.

La piastra in composito Quasi Isotropo (QI) presenta carichi critici significativamente inferiori rispetto alla piastra VAT. Per esempio, il primo carico critico per la piastra QI è di 39.27 N, mentre per la piastra VAT è di 78.05 N. Questa differenza dimostra che la piastra VAT ha una maggiore resistenza all'instabilità per le modalità iniziali di buckling. Le successive modalità confermano la tendenza, come evidenziato dal grafico in Fig. 4.11: i carichi critici nella piastra VAT sono generalmente più alti, a eccezione del quarto carico critico (1635.9 N per il QI rispetto a 1549.1 N per il VAT), dove il comportamento sembra essere più simile. Tuttavia, il quinto carico critico per il VAT riprende un valore più alto rispetto



alla piastra QI.



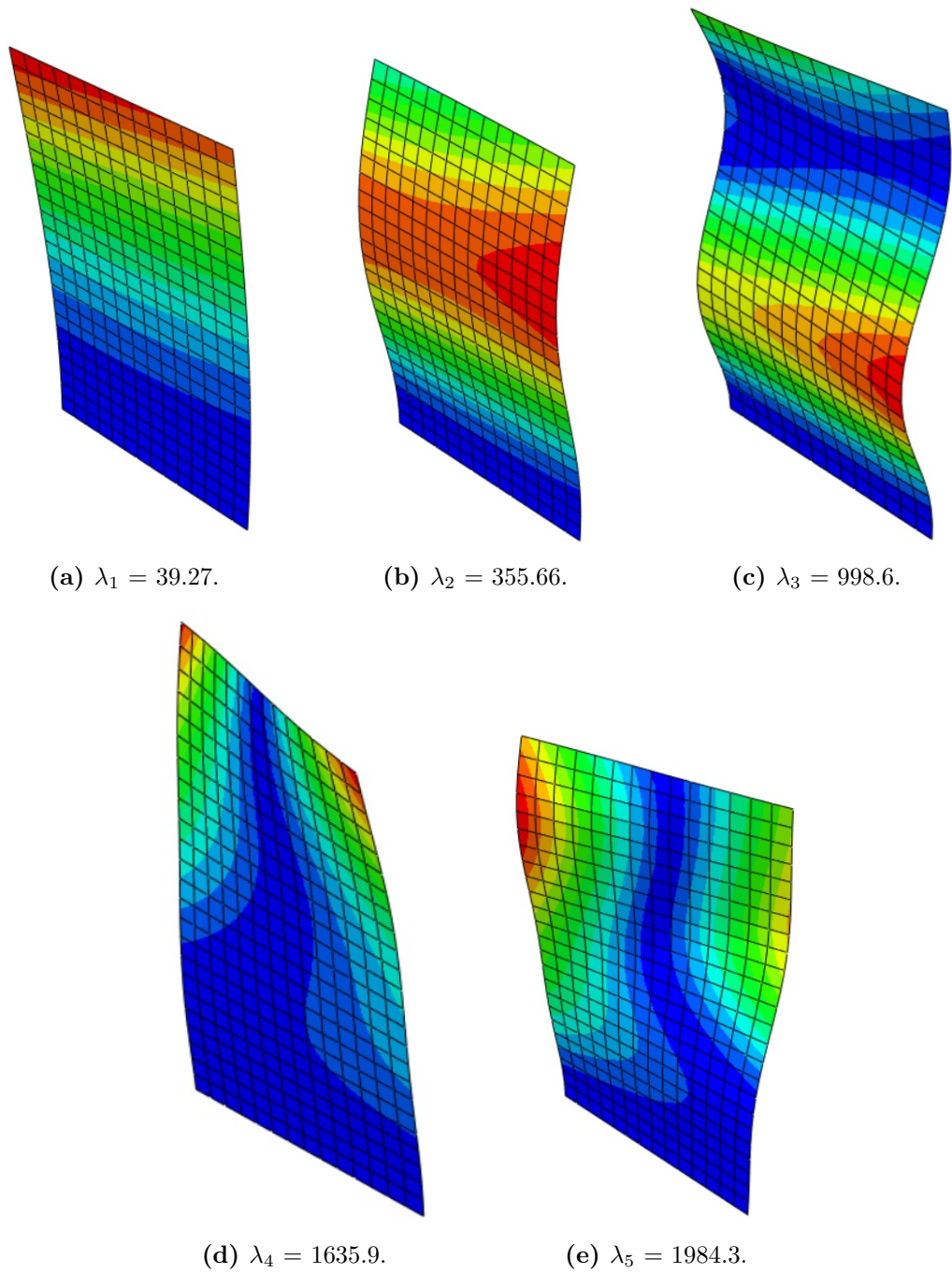
**Figure 4.11:** Confronto carichi critici per piastra rettangolare QI e VAT.

Le forme modali della piastra composita quasi isotropa sono caratterizzate da deformazioni più simmetriche rispetto alla piastra VAT. La rigidità distribuita in modo uniforme lungo i vari orientamenti di fibre comporta una maggiore regolarità nelle modalità di vibrazione e instabilità, con curvature meno complesse e distribuzioni di deformazione più prevedibili.

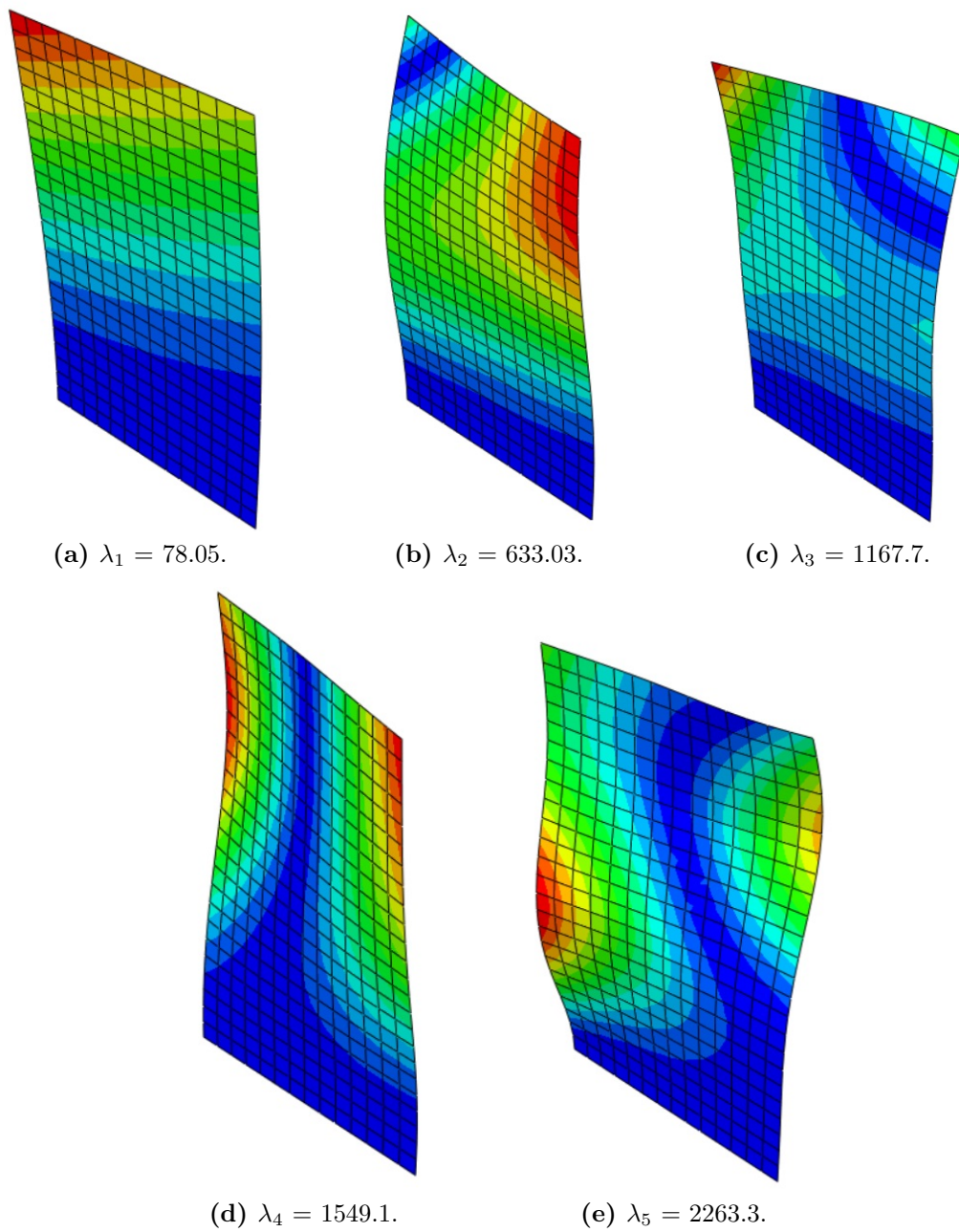
Le modalità per la piastra VAT, al contrario, mostrano una distribuzione delle deformazioni più complessa, riflettendo la natura della laminazione variabile. Le forme modali della laminazione VAT, specialmente nei carichi critici più elevati, mostrano un'oscillazione più marcata nelle aree locali, suggerendo che la piastra VAT può adattarsi meglio a carichi più complessi.

Per completare l'analisi e ottenere una visione più esaustiva delle prestazioni strutturali, si è deciso di confrontare i risultati precedenti con quelli ottenuti da una piastra realizzata in Ergal, una lega di alluminio 7075, nota per le sue eccellenti proprietà meccaniche. Lo studio ha preso in considerazione una piastra isotropa con le stesse dimensioni delle piastre composite già analizzate. Da tale analisi, è emerso che il primo carico critico della piastra in Ergal è pari a 125.29 N, un valore che, a prima vista, potrebbe apparire elevato rispetto ai risultati previsti dalla teoria. Tuttavia, questo valore deve essere opportunamente corretto tenendo conto delle proprietà specifiche del materiale, in particolare il rapporto tra il carico critico e il peso della piastra, espresso in  $\frac{N}{Kg}$ .

Nel caso dell'alluminio 7075, questo rapporto è pari a  $27.23 \frac{N}{Kg}$ , un valore superiore rispetto alle piastre composite quasi isotrope QI e VAT, per le quali il rapporto è di  $14.92 \frac{N}{Kg}$ . Questo parametro rappresenta un'informazione ingegneristica di fondamentale importanza, poiché permette di confrontare in modo equo le prestazioni delle strutture tenendo in considerazione la densità dei materiali e quindi il loro



**Figure 4.12:** Rappresentazione delle forme modali per la piastra composita QI.



**Figure 4.13:** Rappresentazione delle forme modali per la piastra VAT.

peso specifico. Un confronto diretto dei carichi critici senza tener conto di questa correzione risulterebbe ingannevole, in quanto l'alluminio, pur avendo un carico critico maggiore, presenta una densità superiore rispetto ai materiali compositi,

influenzando il peso della struttura e la sua efficienza complessiva.

Per chiarire ulteriormente questo concetto, si consideri che, per ottenere una piastra in Ergal dello stesso peso di quelle composite, lo spessore della piastra in lega di alluminio dovrebbe essere ridotto di un fattore pari a 1,82. Questo ridimensionamento dello spessore comporterebbe inevitabilmente una significativa riduzione della resistenza all'instabilità, rendendo meno vantaggiosa la scelta di un materiale isotropo come l'Ergal per applicazioni dove il buckling e il peso rappresentano criteri di progetto critici.

Come indicato dal rapporto carico-peso costante pari a  $14.92 \frac{N}{Kg}$ , le prestazioni della piastra VAT risultano particolarmente favorevoli in termini di carico critico. A parità di peso, la configurazione VAT dimostra una resistenza all'instabilità superiore rispetto sia alla piastra QI sia alla piastra in Ergal. Questa maggiore efficienza può essere attribuita alla possibilità di ottimizzare l'orientamento delle fibre nella laminazione VAT, seguendo le direzioni dei carichi principali e riducendo i punti deboli tipici delle laminazioni a orientamento fisso, come accade nei compositi QI, o della natura isotropa dell'alluminio.

In sintesi, il confronto tra le tre configurazioni evidenzia chiaramente che la laminazione VAT offre prestazioni superiori, specialmente per le prime modalità critiche. Per applicazioni in cui il buckling e il peso sono parametri chiave, l'utilizzo di laminazioni a orientamento variabile garantisce una resistenza strutturale significativamente migliorata, senza aumentare il peso complessivo della struttura. Ulteriori approfondimenti, compresi i dettagli numerici e le immagini delle forme modali, possono essere consultati nell'Appendice B.

## 4.4 Analisi dello stato tensionale tridimensionale

Per l'analisi dello stato tensionale della piastra, è stato sviluppato un codice tridimensionale, ispirato al codice bidimensionale precedentemente utilizzato per esaminare il comportamento statico e la risposta della struttura in seguito ad analisi di instabilità e dinamiche. In questo paragrafo, si illustreranno le principali differenze tra il nuovo codice e il precedente, nonché i risultati dell'analisi di convergenza effettuata per diversi valori di mesh. A tal fine, verranno utilizzati come riferimento i valori di stress forniti nel lavoro di Demasi *et al.* [27].

### 4.4.1 Codice tridimensionale parametrico

Il codice tridimensionale parametrizza la geometria della sezione in modo analogo a quanto avviene nel codice bidimensionale, avvalendosi delle funzioni *s.line* e *ConstrainedSketch*. Tuttavia, a differenza del modello bidimensionale, il codice 3D genera un modello tridimensionale attraverso la funzione *BaseSolidExtrude*,

consentendo di considerare la geometria reale e la distribuzione dello spessore dei materiali.

```

158 p = mdb.models[ 'Model-1' ]. Part (name=part_name ,
159     dimensionality=THREE_D, type=DEFORMABLE_BODY)
160 p.BaseSolidExtrude (sketch=s, depth=L3)

```

In contrasto, il codice bidimensionale impiegava tecniche semplificate, come *Base-Shell*, che limitavano la simulazione a una rappresentazione bidimensionale, impedendo così un'analisi approfondita degli effetti dello spessore e delle interazioni tridimensionali.

Nel nuovo approccio, il modulo Assembly assume un'importanza cruciale: attraverso operazioni booleane, vengono creati i diversi strati del materiale composito. Queste operazioni consentono di unire le istanze degli strati, generando una geometria complessa che riflette più fedelmente la realtà fisica della laminazione.

```

181 for i in range(2, kk+1):
182     instance_name = 'Part-1-1-lin-' + str(i) + '-1'
183     instance_list.append(instance_name)
184
185     a.InstanceFromBooleanMerge (name=part_name ,
186         instances=[a.instances[inst] for inst in instance_list] ,
187         keepIntersections=ON, originalInstances=DELETE, domain=GEOMETRY)

```

Una volta completata questa fase, si procede alla creazione della mesh e del campo che descrive la variazione delle fibre, mantenendo sostanzialmente invariati i principi del modello bidimensionale. Durante l'assegnazione del materiale e del campo delle fibre ai vari strati, nel codice tridimensionale si definisce una sezione solida *HomogeneousSolidSection*, permettendo una rappresentazione più accurata delle proprietà del materiale attraverso un modello anisotropo complesso.

```

194 mdb.models[ 'Model-1' ]. HomogeneousSolidSection (name='Section-1' ,
195     material=Material_name, thickness=None)

```

Successivamente, vengono stabilite le condizioni al contorno, incastrando ogni faccia laterale della sezione e applicando un carico di pressione sulla faccia superiore. Nel codice, viene utilizzata una maschera in formato esadecimale per selezionare in modo progressivo diverse facce del modello geometrico.

```

242 num_bc = kk * 4 # Imposta il numero di BC
243 bc_count = 0 # Contatore delle BC create
244 for i in range(29):
245     mask_value = hex(1 << i)[2:] # Genera la maschera in esadecimale
246     if Open_Hole:
247         if ((i + 1) % 6 == 5 ) or ((i + 1) % 6 == 0): # Salta ogni
           quinta o sesta maschera
248             continue
249     else
250         if (i + 1) % 5 == 0: # Salta ogni quinta maschera
251             continue
252     faces1 = f1.getSequenceFromMask(mask=('[#' + mask_value + ']',),)
253     region = regionToolset.Region(faces=faces1)
254     mdb.models['Model-1'].EncastreBC(name='BC-' + str(bc_count + 1),
           createStepName='Step-1', region=region, localCsys=None)
255
256     bc_count += 1 # Incrementa il contatore
257     if bc_count >= num_bc: # Ferma il ciclo se raggiunge il numero
           di BC
258         break

```

La funzione *hex()* converte il risultato di uno shift bit a bit ( $1 \ll i$ ) in una stringa esadecimale, eliminando i primi due caratteri "0x". Questa maschera identifica le facce da fissare, permettendo la creazione di vincoli incastrati *EncastreBC*. L'uso dell'esadecimale rende il processo più efficiente per selezionare gruppi ABAQUS di facce numericamente rappresentabili.

Infine, viene assegnato l'orientamento delle fibre negli strati, si crea il lavoro e si sottopone ad elaborazione, analogamente a quanto avviene nel modello bidimensionale.

#### 4.4.2 Analisi convergenza stato tensionale

In questa sezione viene presentata l'analisi della convergenza dello stato tensionale. Il materiale composito in esame, grazie alla variabilità dell'orientamento delle fibre, presenta caratteristiche meccaniche anisotrope che rendono l'analisi più complessa rispetto a materiali tradizionali. La procedura di convergenza mira a verificare l'accuratezza e la stabilità delle soluzioni ottenute attraverso la discretizzazione del modello numerico con mesh di diversa risoluzione. Viene quindi verificata la dipendenza delle sollecitazioni principali  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{zx}$  e  $\sigma_{zy}$  dal numero di elementi finiti nel modello.

I valori di riferimento sono riportati per ciascuna tabella e derivano da studi numerici consolidati [27]. Le mesh considerate sono composte da  $20 \times 20 \times 16$ ,  $40 \times 40 \times 16$ ,  $80 \times 80 \times 16$ ,  $80 \times 80 \times 8$ ,  $80 \times 80 \times 4$  elementi, permettendo un'analisi della convergenza delle soluzioni. Vengono discussi quattro casi differenti,

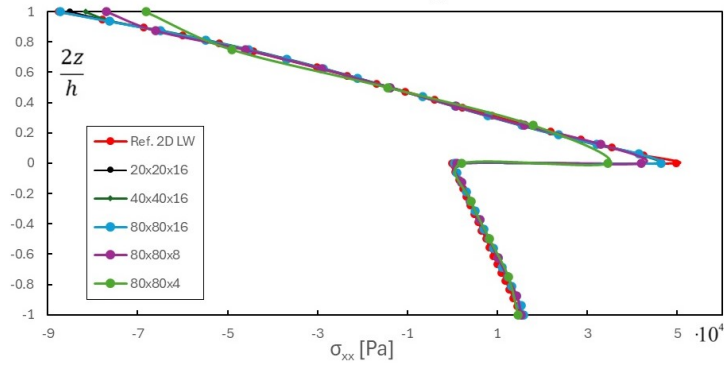
corrispondenti a differenti configurazioni del composito VAT. Le tabelle riportano i valori delle sollecitazioni  $\sigma_{xx}$  ed  $\sigma_{yy}$  per il caso a fibre dritte, e nei paragrafi successivi vengono confrontati i risultati ottenuti. Nel Caso 1, in tabella 4.13, si

**Table 4.13:** Analisi convergenza  $\sigma_{xx}$  nel Caso 1.

	$\sigma_{xx}$ [Pa]
<i>Ref.</i> [27]	49269.3
$20 \times 20 \times 16$	46268.1
$40 \times 40 \times 16$	45781.5
$80 \times 80 \times 16$	46313.7
$80 \times 80 \times 8$	41905.2
$80 \times 80 \times 4$	34653.9

osserva una forte variazione tra i valori di riferimento e quelli ottenuti con le mesh a bassa risoluzione. Ad esempio, la sollecitazione  $\sigma_{xx}$  passa da -49269.34 Pa nella soluzione di riferimento a 34653.9 Pa per la mesh  $80 \times 80 \times 4$ , evidenziando una scarsa accuratezza iniziale. Tuttavia, con l'aumento della risoluzione della mesh, si nota una progressiva convergenza verso i valori di riferimento. In Figura 4.14 viene presentata la convergenza della soluzione lungo lo spessore della piastra.

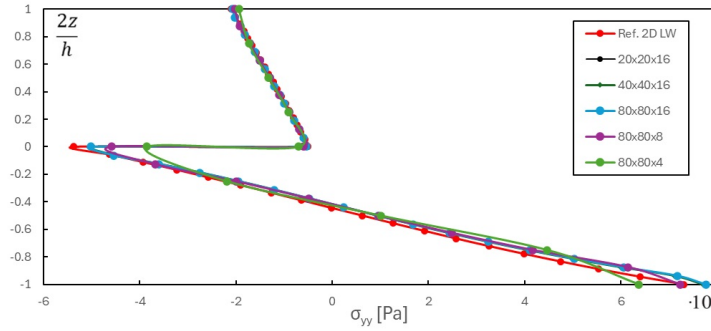
I risultati sono stati valutati lungo la retta passante per il punto Q di coordinate  $(x,y,z) = (0.25 \text{ m}, 0.25 \text{ m}, z)$ . Si nota come le simulazioni più grezze sottostimano la



**Figure 4.14:** Analisi convergenza  $\sigma_{xx}$  nel Caso 1 lungo lo spessore.

soluzione, mentre la mesh più fine  $80 \times 80 \times 16$  riesce a correttamente a valutare l'orientamento della fibra nel piano e la variazione lungo lo spessore.

Analogamente in Fig. 4.15 si riporta l'analisi di convergenza della tensione  $\sigma_{yy}$  per il caso a fibre dritte. Anche in questo caso si nota come all'aumentare della densità della mesh la soluzione è più accurata. I valori della tensione valutata nel punto medio della piastra di coordinate  $(x,y,z) = (0.25 \text{ m}, 0.25 \text{ m}, 0.05 \text{ m})$  sono riassunti



**Figure 4.15:** Analisi convergenza  $\sigma_{yy}$  nel Caso 1 lungo lo spessore.

nella tabella 4.14. L'accuratezza di questo risultato è ottenuto a discapito del il costo computazionale che aumenta da pochi secondi per la mesh  $20 \times 20 \times 16$  a circa 10 minuti per analisi per la mesh  $80 \times 80 \times 16$ .

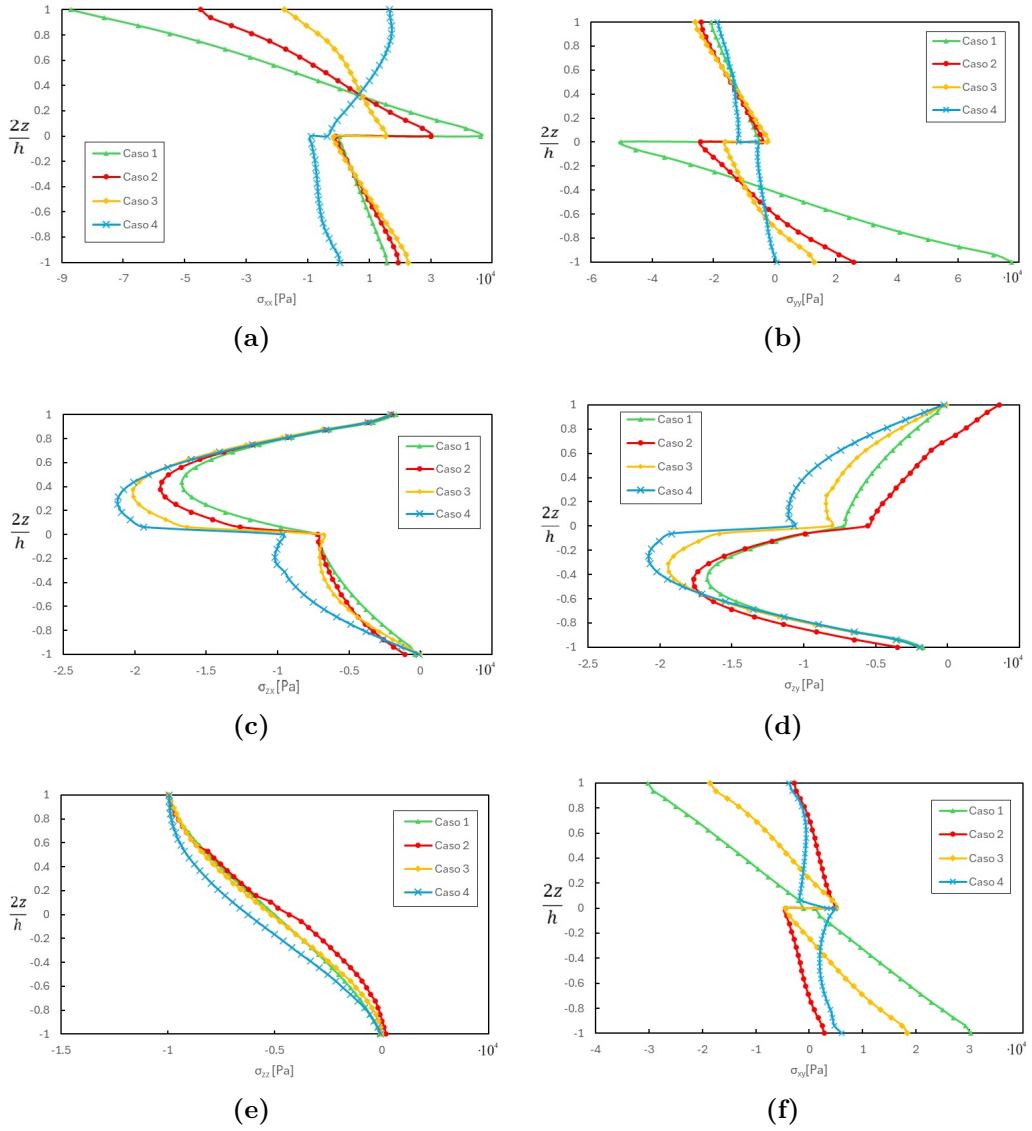
**Table 4.14:** Analisi convergenza  $\sigma_{yy}$  nel Caso 1.

	$\sigma_{yy}$ [Pa]
<i>Ref.</i> [27]	-5069.1
$20 \times 20 \times 16$	-5433.9
$40 \times 40 \times 16$	-5419.2
$80 \times 80 \times 16$	-5332.5
$80 \times 80 \times 8$	-5927.4
$80 \times 80 \times 4$	-7081.4

Analizzando i vari casi, si può osservare che tutti presentano una tendenza alla convergenza con l'aumentare della risoluzione della mesh. Tuttavia, la velocità di convergenza e la precisione ottenuta variano in base alle configurazioni del composito VAT. In generale, le mesh più fini forniscono risultati più accurati, anche se per alcune componenti delle sollecitazioni a taglio, come  $\sigma_{zx}$  e  $\sigma_{zy}$ , rimangono delle leggere discrepanze. Ciò suggerisce che, nonostante l'aumento della risoluzione della mesh, la complessità anisotropa del materiale composito richiede ulteriori approfondimenti e possibili affinamenti del modello numerico per garantire una completa convergenza delle soluzioni.

Infine, si è voluto studiare l'andamento dello stress attraverso lo spessore della piastra. Questo tipo di studio è fondamentale per comprendere meglio la distribuzione delle sollecitazioni all'interno del materiale e le sue implicazioni sulle prestazioni meccaniche, contribuendo in modo cruciale all'ottimizzazione della progettazione di componenti strutturali. In tal senso, prevenire fenomeni di cedimento è uno degli obiettivi principali della ricerca ingegneristica su tali materiali.





**Figure 4.16:** Variazione dello stress attraverso lo spessore.

Come illustrato nel grafico in Fig. 4.16 (a), la componente di tensione normale  $\sigma_{xx}$  mostra un andamento complesso, con variazioni significative lungo lo spessore del materiale. In accordo con i risultati riportati da Demasi *et al.* [27], il comportamento osservato per  $\sigma_{xx}$  conferma che vi è un incremento della tensione fino al piano medio del materiale, seguito da una brusca diminuzione, attribuibile alla discontinuità di orientamento delle fibre. Successivamente, la tensione riprende a crescere con un andamento quasi lineare, sebbene partendo da un valore inferiore rispetto alla fase iniziale. Questa discontinuità è particolarmente evidente nel Caso 4, che presenta un

incremento più pronunciato dello stress nella direzione xx, distinguendosi dagli altri casi per un comportamento più marcato, ma comunque coerente con le aspettative teoriche. Questo comportamento è tipico dei materiali compositi con orientamento variabile delle fibre, in cui la disposizione delle fibre influenza significativamente la distribuzione delle sollecitazioni. Le curve per gli altri casi seguono andamenti simili, con differenze nelle ampiezze delle variazioni, ma tutte mostrano oscillazioni regolari in corrispondenza della posizione  $\frac{2z}{h} = 0$ , piano neutro della piastra.

Per quanto riguarda la componente  $\sigma_{yy}$ , la tensione normale in direzione y presenta un andamento decrescente per tutti i casi man mano che si attraversa lo spessore della piastra, anche per questa tensione si osserva una brusca linearità a tratti. Il Caso 4, linea azzurra, si distingue per valori di  $\sigma_{yy}$  significativamente più bassi rispetto agli altri casi lungo tutto l'intervallo, indicando una minore componente di sforzo in questa direzione. Questo evidenzia un' orientamento ottimale delle fibre, tabella 4.2, rispetto alla direzione del carico, il composito sta distribuendo efficacemente le sollecitazioni, sfruttando al meglio la resistenza del materiale e riducendo la concentrazione di stress in determinate aree critiche.

La componente di stress  $\sigma_{zy}$  mostra una variazione più complessa lungo lo spessore. Tutti i casi presentano un andamento parabolico simile, per ognuno dei due strati, ma con differenze nelle ampiezze.

In Figura 4.16 (e) l'andamento della componente di tensione  $\sigma_{zz}$  segue un profilo decrescente con il diminuire di  $\frac{2z}{h}$ . Anche per questa componente di tensione, Il Caso 4 presenta valori più bassi rispetto agli altri casi, in particolare tra 0 e -0,5, evidenziando una minore intensità di sforzo.

Per ulteriore chiarezza sono riportati adesso dei grafici, che evidenziano le differenze e le somiglianze nei profili delle componenti di tensione  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{zy}$  lungo lo spessore della piastra per i quattro casi studiati, confrontando i risultati ottenuti con ABAQUS con quelli riportati nell'articolo di Demasi *et al.* [27].

La Figura 4.17 mostra la tensione nel piano  $\sigma_{xx}$ . Nel primo caso, caratterizzato da fibre dritte, si osserva una buona corrispondenza tra le due soluzioni, con pendenze simili che suggeriscono un'accurata riproduzione del modello. Analogamente nel Caso 2 e 3 i risultati simulati con ABAQUS mostrano un buon accordo con la soluzione di riferimento, avvicinandosi alla soluzione ottimale presentata da Demasi *et al.* [27]. Tuttavia, nel caso 4, che introduce una variazione significativa dell'orientamento delle fibre, si osservano maggiori discrepanze, evidenziando le sfide nella modellazione di configurazioni più complesse.

La Figura 4.18 mostra la similitudine dei profili di tensione ottenuti per tutti e quattro i casi analizzati, sia con fibre orientate in modo rettilineo sia con orientamento variabile. L'andamento presenta una leggera sovrastima dei valori di tensione agli estremi della piastra, in linea con le aspettative teoriche. Tale risultato conferma che l'andamento della tensione è adeguatamente rappresentato, con variazioni limitate tra le diverse configurazioni di laminazione.

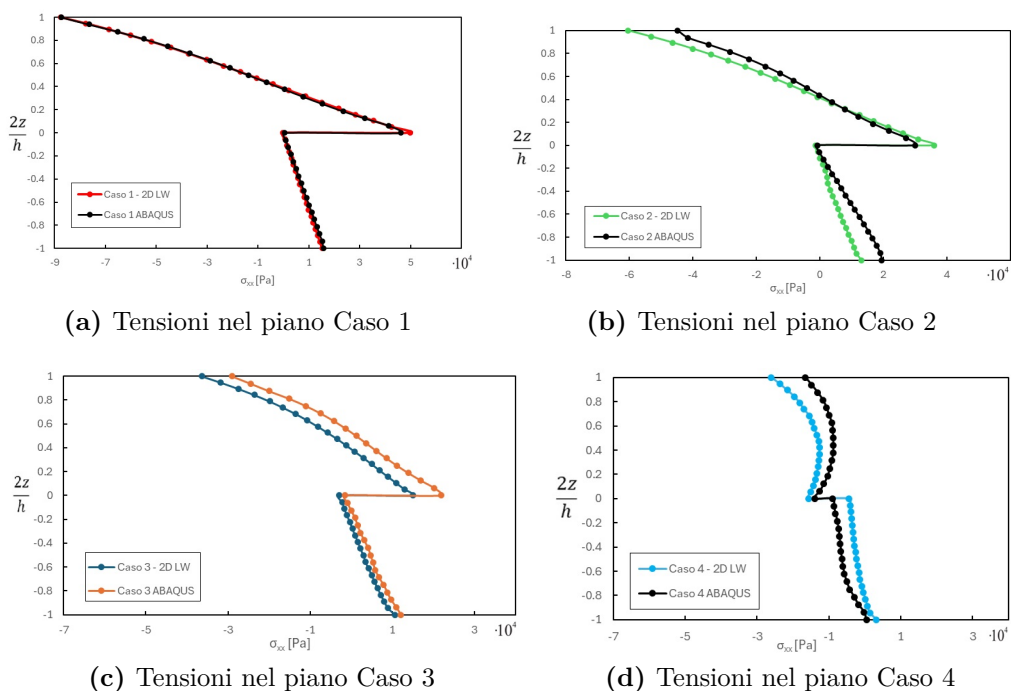
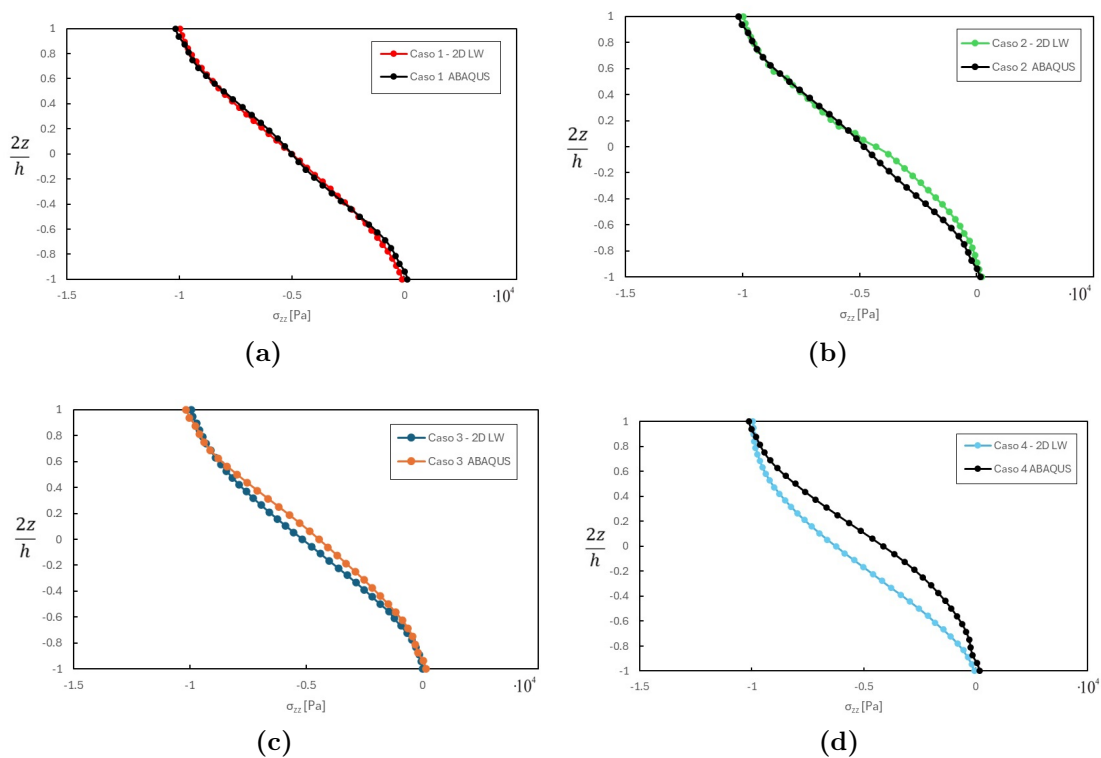


Figure 4.17: Confronto andamento  $\sigma_{xx}$  .

Infine, la Fig. 4.19 confronta i risultati della simulazione presentati da Demasi *et al.* nell'articolo di riferimento con quelli ottenuti tramite il software ABAQUS. Anche in questo caso si osserva il comportamento atteso, di tipo almeno parabolico, per la distribuzione della tensione trasversale. Tuttavia, emergono lievi differenze, specialmente lungo il primo strato, dove ABAQUS sottostima la tensione. Tale discrepanza è attribuibile alle limitazioni della teoria strutturale implementata in ABAQUS, che non riesce a rappresentare con precisione gli sforzi tangenziali. Questo limita la capacità del software di replicare fedelmente il comportamento complessivo della laminazione.



**Figure 4.18:** Confronto andamento  $\sigma_{zz}$ .

Complessivamente, i grafici mostrano la validità delle simulazioni ABAQUS per configurazioni standard e confermano le ipotesi iniziali. Tuttavia, per scenari con variazioni strutturali marcate, le discrepanze osservate indicano aree in cui potrebbero essere necessari miglioramenti. La capacità di ABAQUS di simulare in modo dettagliato e preciso il comportamento meccanico dei materiali compositi rappresenta comunque un contributo significativo alla progettazione avanzata, aprendo la strada a futuri sviluppi e applicazioni pratiche.

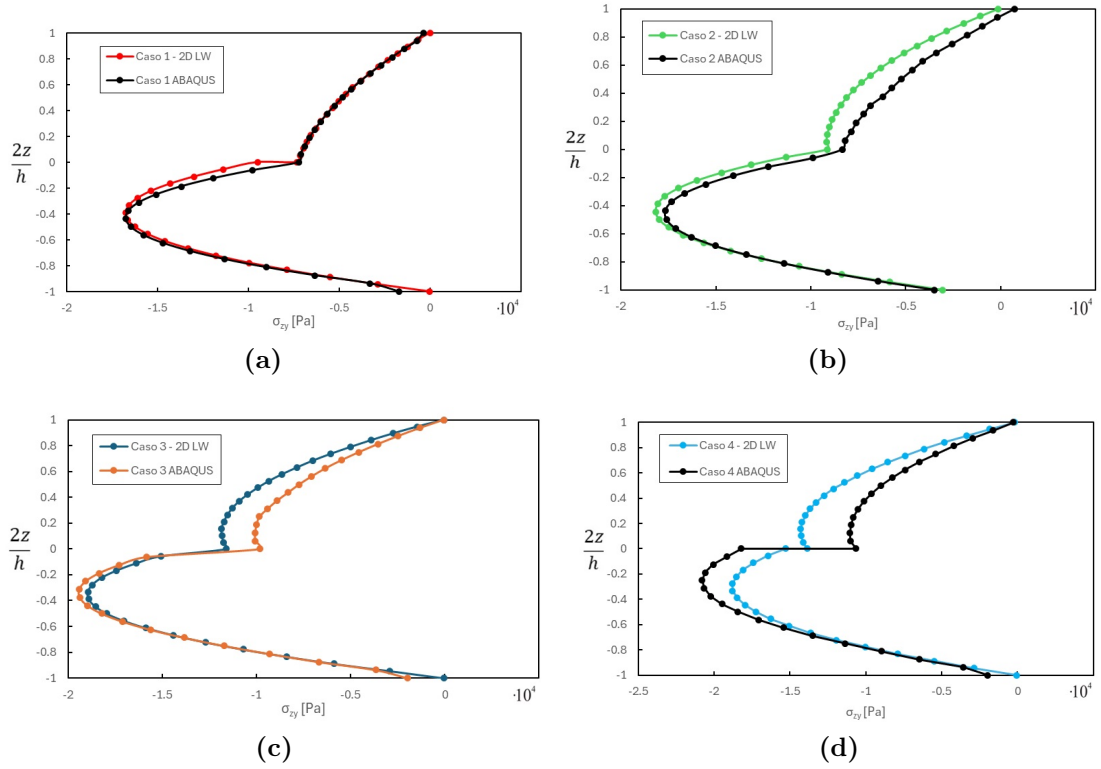


Figure 4.19: Confronto andamento  $\sigma_{zy}$ .

### 4.4.3 Caso Open Hole

In questa ultima sezione del capitolo si sono analizzate le capacità di un materiale VAT in una struttura contenente un'apertura, prendendo come riferimento il lavoro di Vijayachandran *et al.* [61]. Si considera un pannello rettangolare di dimensioni 0,61 [m]  $\times$  1,83 [m], con un'apertura ellittica posizionata centralmente. L'asse maggiore dell'apertura è allineato lungo la dimensione maggiore del pannello e ha una lunghezza di 0,46 [m], mentre l'asse minore ha una lunghezza di 0,28 [m]. Queste dimensioni corrispondono esattamente alla sezione ripetitiva della fenestratura di un Boeing 787 Dreamliner, non considerando la curvatura della fusoliera. È applicato un carico uni-assiale di forza pari a 100 [N], come mostrato in Fig. 4.20 (a). Il pannello è semplicemente appoggiato lungo i bordi più corti. Per l'analisi, si utilizza il sistema di materiali Toray T800/3900S, le cui proprietà sono riportate in Tabella 4.16.

Data la simmetria del carico e della geometria, per l'analisi è sufficiente considerare un quarto del pannello, imponendo condizioni di simmetria ai bordi  $x = 0$  e  $y = 0$ , come indicato in Fig. 4.20 (b).

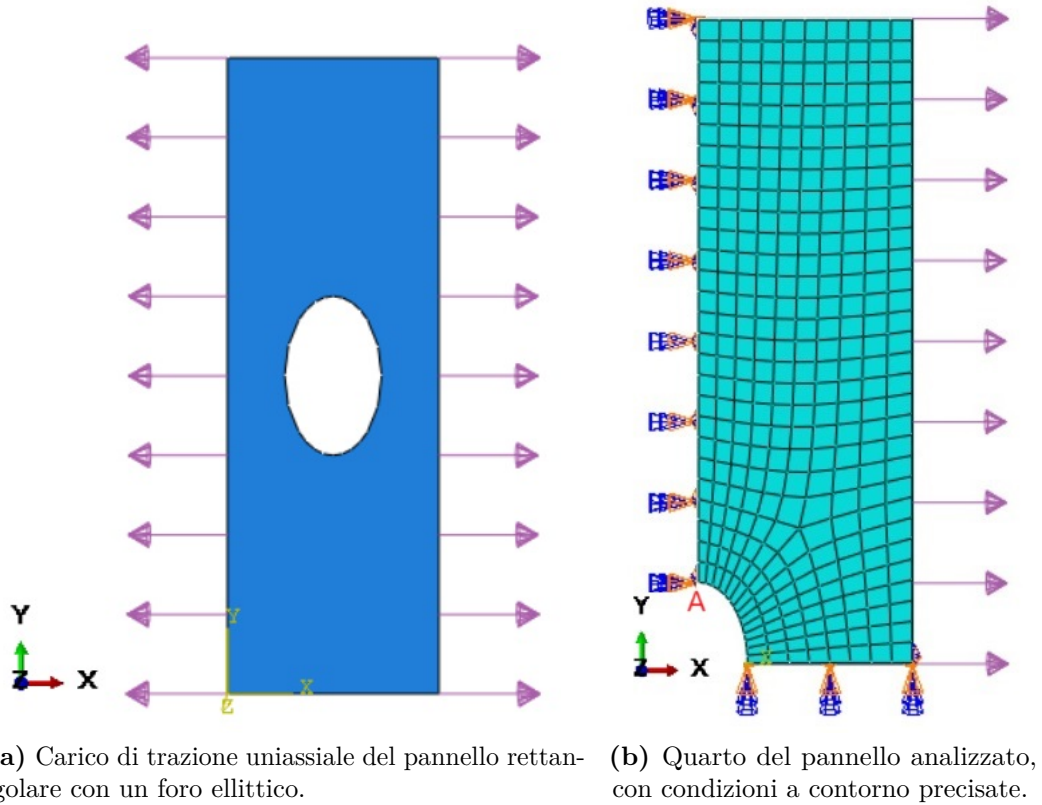


Figure 4.20

Table 4.15: Proprietà geometriche e materiale Toray T800/3900S.

Dimensione	Valore	Proprietà	Valore
$L_x$	0.61 m	$E_{11}$	$1.48 \times 10^{12}$ Pa
$L_y$	1.83 m	$E_{22}$	$8.48 \times 10^9$ Pa
$R_x$	0.28 m	$E_{33}$	$8.48 \times 10^9$ Pa
$R_y$	0.46 m	$G_{12} = G_{13}$	$3.94 \times 10^9$ Pa
$t_z$	0.238125 mm	$G_{23}$	$3.235 \times 10^9$ Pa
$N_{strati}$	8	$\nu_{12}$	0.329 [-]
$F_x$	100 N	$\nu_{13} = \nu_{23}$	0.32 [-]

### Open Hole 2D

Nel caso bidimensionale analizzato, sono stati considerati 8 strati con spessore pari a 0,000238125 [m] e una laminazione simmetrica di tipo Quasi Isotropo (QI), confrontati con tre configurazioni di laminazioni VAT descritte in Tabella

**Table 4.16:** Proprietà Toray T800/3900S.

Proprietà	Valore	Unità di Misura
$E_{11}$	$1.48 \times 10^{12}$	Pa
$E_{22}$	$8.48 \times 10^9$	Pa
$E_{33}$	$8.48 \times 10^9$	Pa
$G_{12}$	$3.94 \times 10^9$	Pa
$G_{13}$	$3.94 \times 10^9$	Pa
$G_{23}$	$3.235 \times 10^9$	Pa
$\nu_{12}$	0.329	[-]
$\nu_{13}$	0.32	[-]
$\nu_{23}$	0.32	[-]

4.17. L'analisi si è concentrata sul punto A, situato lungo il bordo del quarto del pannello in corrispondenza di  $x = 0$ , nel punto di congiunzione tra l'arco di ellisse e la linea verticale, con l'obiettivo di minimizzare la tensione  $\sigma_{xx}$  in quel punto.  $[\langle 90,0 \rangle, \langle 0,45 \rangle, \langle 90,75 \rangle, \langle 30,60 \rangle]_s$

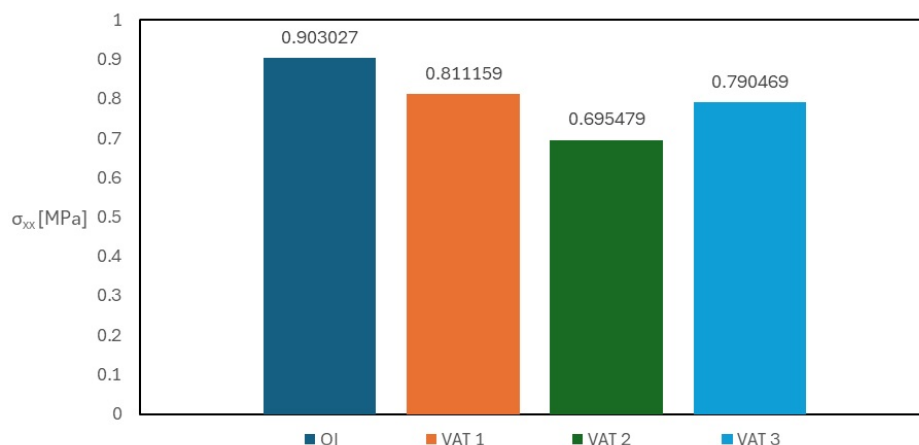
**Table 4.17:** Variazione delle fibre per la geometria Open Hole.

	Schema fibre
QI	$[0/\pm 45/90]_s$
VAT 1	$[\langle 45,60 \rangle, \langle 5,20 \rangle, \langle 65,10 \rangle, \langle 5,30 \rangle]_s$
VAT 2	$[\langle 90,45 \rangle, \langle 45,60 \rangle, \langle 15,30 \rangle, \langle 70,50 \rangle]_s$
VAT 3	$[\langle 45,90 \rangle, \langle 15,30 \rangle, \langle 65,10 \rangle, \langle 5,30 \rangle]_s$

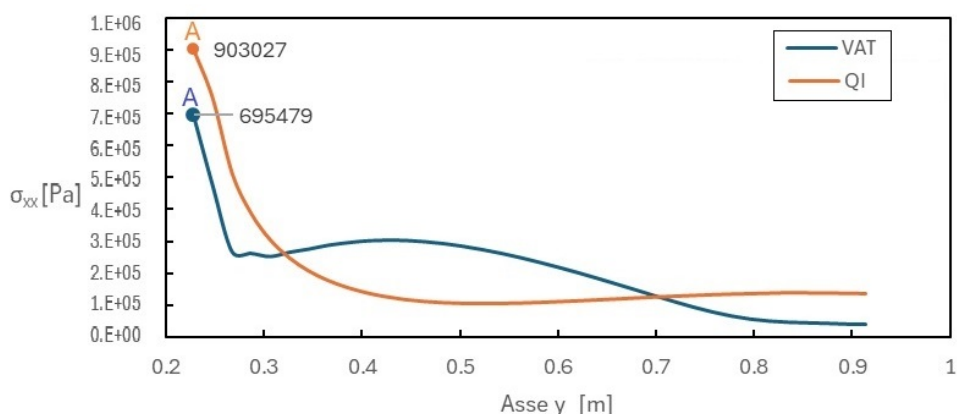
I risultati delle simulazioni effettuate sono riportati nel seguente grafico a barre a pagina 76. Come si evince dalla Fig. 4.21 si hanno notevoli benefici ad utilizzare un andamento curvo lungo la lunghezza del pannello rispetto alla laminazione convenzionale a strati incrociati (QI). La laminazione VAT1 riduce lo stress del 10 %, mentre una laminazione più marcata degli strati esterni, utilizzata nella laminazione VAT 2, diminuisce la tensione a circa il 23 % del valore iniziale. Si è inoltre valutato l'andamento della distribuzione della tensione della soluzione migliore ottenuta con laminazione curva, VAT 2, rispetto alla configurazione QI, tracciando, in Fig. 4.22, la variazione della tensione a partire dal Punto A lungo il bordo del pannello. Lo stato tensionale minimo è mantenuto per una breve distanza dal punto A, dopodiché la configurazione VAT tende a incrementare lo stress nella parte centrale del profilo, per poi ridursi nuovamente in prossimità dell'estremità superiore del pannello. Quest'andamento oscillante conferma che una laminazione VAT può essere vantaggiosa in applicazioni dove si richiede un

**Table 4.18:** Tensione  $\sigma_{xx}$  nel punto A.

	QI	VAT 1	VAT 2	VAT 3
$\sigma_{xx}[Pa]$	903027	811159	695479	790469



**Figure 4.21:** Confronto  $\sigma_{xx}$  nel punto A per QI e VAT.



**Figure 4.22:** Tensione  $\sigma_{xx}$  lungo l'asse  $x = 0$ .

minor stress agli estremi, senza particolari vincoli sulla porzione centrale. Tale comportamento evidenzia come l'ottimizzazione strutturale in ingegneria debba essere sempre contestualizzata rispetto al problema specifico, sottolineando che non esistono configurazioni universalmente ottimali, ma soluzioni adattate alle condizioni d'uso richieste.



Per completezza di analisi in Fig. 4.23 viene illustrata la differenza di distribuzione della tensione  $\sigma_{xx}$  in tutto il pannello nei 4 casi analizzati. Si osserva che la distribuzione a fibre curve non solo riduce il valore della tensione nel punto A, ma nei casi VAT 1 e VAT 3 sposta l'area maggiormente sollecitata verso l'esterno del pannello, una zona progettualmente più resistente.

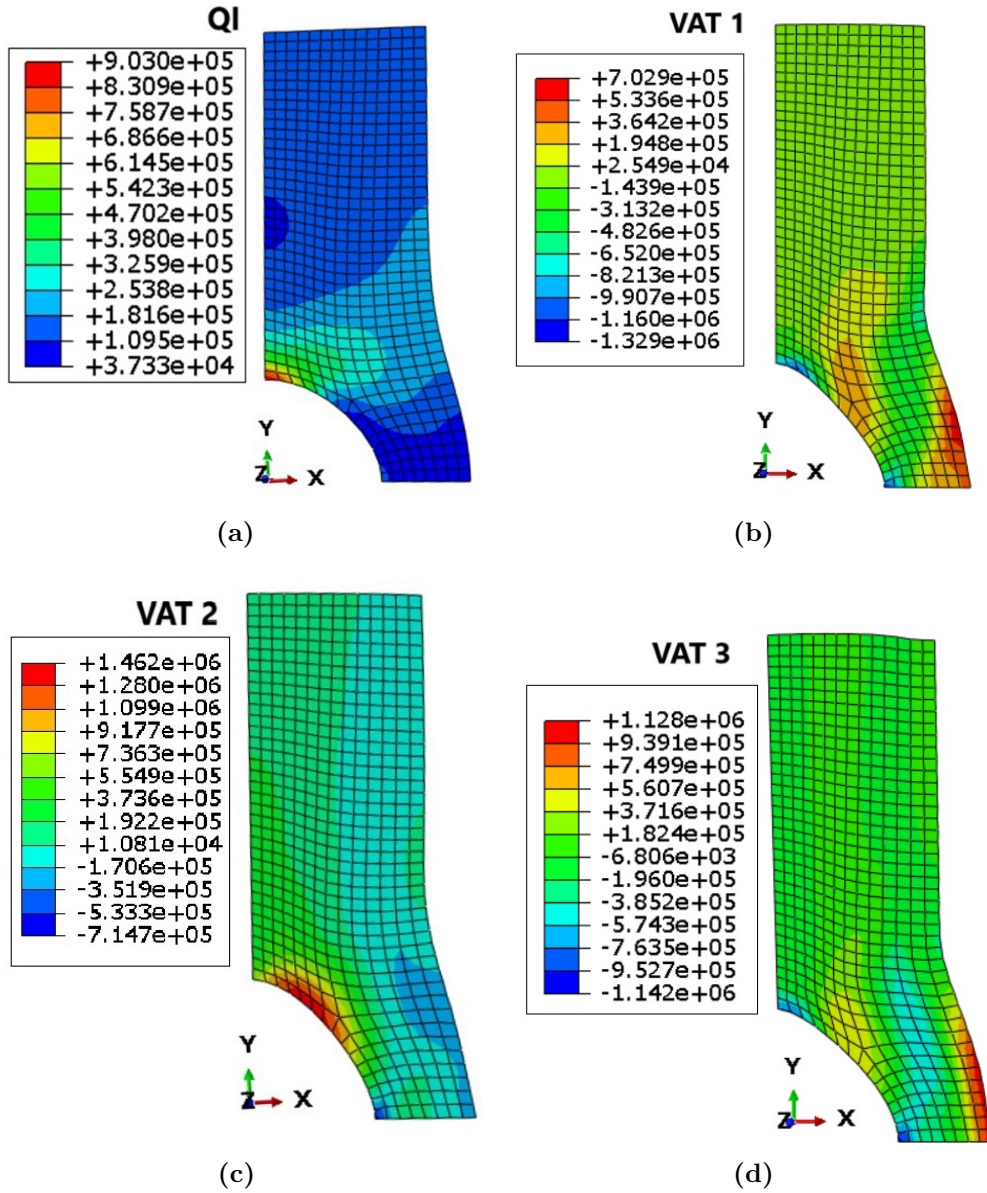


Figure 4.23: Confronto distribuzione  $\sigma_{xx}$  lungo il pannello.

# Capitolo 5

## Conclusioni

Nel contesto di questa tesi, il lavoro ha riguardato lo studio di materiali compositi a rigidità variabile, meglio noti come compositi VAT (Variable Angle Tow), e l'applicazione del software ABAQUS, con il supporto di script Python, per l'analisi di modelli strutturali complessi. Si è esaminato il comportamento meccanico di laminati con fibre orientate in modo variabile, studiando in particolare l'impatto della variazione dell'orientamento delle fibre sulle proprietà strutturali come lo spostamento, la distribuzione delle tensioni e la risposta dinamica.

Il lavoro ha dimostrato l'efficacia dei compositi VAT nel migliorare la resistenza alle sollecitazioni meccaniche rispetto ai compositi tradizionali con fibre dritte. Le simulazioni numeriche hanno evidenziato come la possibilità di variare l'orientamento delle fibre all'interno del laminato permetta una distribuzione ottimale delle sollecitazioni, riducendo in modo significativo i picchi di tensione e migliorando la stabilità globale della struttura. Si è fatto ampio uso della First-order Shear Deformation Theory (FSDT) per analizzare con accuratezza gli effetti di taglio, offrendo una rappresentazione più realistica del comportamento dei materiali compositi laminati rispetto alla Classical Lamination Theory (CLT). La scelta della FSDT è stata cruciale per l'analisi dei compositi VAT, poiché ha permesso di considerare gli effetti del taglio trasversale, che sono essenziali per catturare la risposta strutturale dei materiali laminati soggetti a carichi complessi. Questo approccio ha garantito un modello numerico accurato, in grado di rappresentare le deformazioni e tensioni presenti nei compositi a fibre variabili.

Uno dei principali contributi di questa tesi risiede nello sviluppo di un codice parametrico in Python, integrato con ABAQUS, che permette di automatizzare l'intero processo di modellazione, simulazione e post-elaborazione. L'utilizzo di un approccio parametrico ha reso possibile una maggiore flessibilità nella definizione della geometria, del materiale e delle condizioni al contorno, permettendo di eseguire simulazioni su una vasta gamma di configurazioni di fibre. La possibilità di utilizzare script Python per controllare ABAQUS ha permesso di ridurre notevolmente

il tempo necessario per l'analisi di configurazioni diverse, migliorando al contempo l'accuratezza e la ripetibilità delle simulazioni. L'uso di ABAQUS ha dimostrato la validità delle fibre a rigidità variabile nel migliorare le prestazioni dei compositi, confermando i vantaggi dei materiali VAT rispetto alle configurazioni tradizionali. Le analisi statiche sono risultate fortemente suscettibili alla variabilità dell'orientamento delle fibre, soprattutto per il modello tridimensionale. Si è ottenuta una migliore distribuzione delle sollecitazioni, con una riduzione significativa dei picchi di tensione. Questo è particolarmente evidente nei casi in cui le fibre seguono un andamento curvo, che ha dimostrato di migliorare la resistenza alla flessione e alla torsione. Inoltre, le simulazioni hanno mostrato come il caso con fibre a curvatura variabile presenti risultati migliori in termini di spostamento rispetto alle configurazioni con fibre dritte, ecco alcuni risultati riportati in tabella 5.1.

**Table 5.1:** Confronto analisi statica per una piastra a laminazione a fibre dritte e VAT.

Modello	$u_z$ [m]	$\sigma_{xx}$ [Pa]	$\sigma_{zz}$ [Pa]	$\sigma_{zx}$ [Pa]	$\sigma_{zy}$ [Pa]
Fibre dritte	-2.91660E-06	46268.1	-5129.39	-7216.52	-7207.87
VAT	-2.57955E-06	30026.5	-5458.92	-11224.30	-10652.67

Lo studio delle frequenze naturali ha rivelato che la presenza di fibre con orientamento variabile modifica in modo sostanziale le proprietà dinamiche del composito, come riportato in tabella 5.2.

**Table 5.2:** Forme modali della piastra quadrata con densità di mesh  $80 \times 80$ .

Modello	$f_1$ [Hz]	$f_2$ [Hz]	$f_3$ [Hz]	$f_4$ [Hz]	$f_5$ [Hz]
Fibre dritte	603.76	1119.3	1119.3	1504.3	1815.7
VAT Caso 2	605.82	1105	1141.5	1507.6	1820.3
VAT Caso 3	623.97	1117.3	1201.2	1555.2	1847.7
VAT Caso 4	654.64	1130.4	1252.6	1585.8	1883.2

La configurazione a fibre variabile lungo la struttura ha frequenze modali più alte in tutte le modalità considerate, ciò indica una maggiore rigidità globale e una maggiore resistenza alle vibrazioni della struttura. L'analisi di convergenza delle frequenze naturali ha mostrato una buona corrispondenza tra i risultati numerici ottenuti con ABAQUS e i valori di riferimento presenti in letteratura. L'aumento della risoluzione della mesh ha migliorato la precisione dei risultati, confermando la validità del modello numerico sviluppato.

Per quanto riguarda l'analisi di buckling, è stato osservato che la variazione dell'orientamento delle fibre ha aumentato la resistenza della struttura all'instabilità

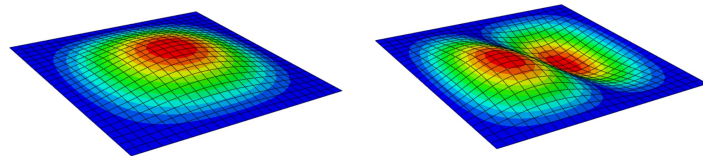
sotto carico. In particolare, le configurazioni con fibre a curvatura variabile hanno mostrato una maggiore resistenza al carico critico di buckling, riducendo la probabilità di collasso strutturale.

I risultati ottenuti confermano che l'uso di compositi VAT offre significativi vantaggi in termini di resistenza meccanica e stabilità strutturale, rendendoli particolarmente adatti per applicazioni in settori ad alte prestazioni come l'aerospaziale e l'automotive. Tuttavia, il lavoro svolto in questa tesi rappresenta solo un primo passo verso una comprensione più approfondita del potenziale di questi materiali.

In conclusione, questa tesi ha dimostrato che i compositi VAT rappresentano una soluzione innovativa e promettente per migliorare le prestazioni meccaniche delle strutture composite. L'utilizzo di ABAQUS, insieme a script Python, ha permesso di analizzare in modo dettagliato il comportamento di questi materiali sotto diverse condizioni di carico. I risultati ottenuti confermano che la possibilità di variare l'orientamento delle fibre offre vantaggi significativi in termini di resistenza, stabilità e risposta dinamica. Tuttavia, rimangono ancora molte sfide da affrontare. La complessità dei compositi VAT richiede ulteriori studi, sia numerici che sperimentali, per comprenderne appieno le potenzialità e le limitazioni. In particolare, sarà necessario sviluppare modelli numerici sempre più raffinati e precisi, in grado di catturare in modo accurato il comportamento anisotropo di questi materiali e di prevedere con precisione le loro prestazioni in situazioni reali. Solo così sarà possibile sfruttare al massimo le potenzialità dei compositi VAT e integrarli in modo efficace nelle applicazioni industriali del futuro.

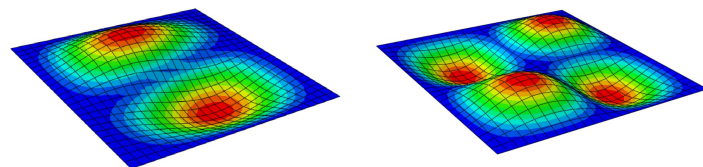
# Appendix A

## A.1 Forme Modali piastra caso 1



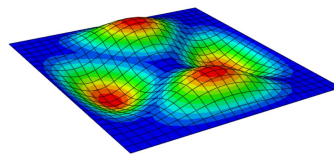
(a)  $f_1 = 605.53$  Hz.

(b)  $f_2 = 1127.2$  Hz.



(c)  $f_3 = 1127.2$  Hz.

(d)  $f_4 = 1513.5$  Hz.



(e)  $f_5 = 1840.1$  Hz.

**Figure A.1:** Rappresentazione frequenze modali per andamento di fibre  $[(90,90), (0,0)]$ .

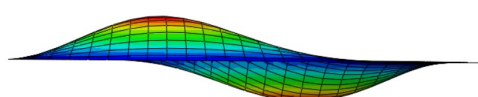
---

## A.2 Forme Modali piastra caso 2

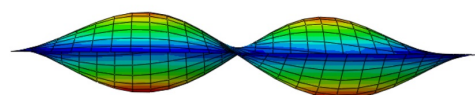


(a)  $f_1 = 607.8$  Hz.

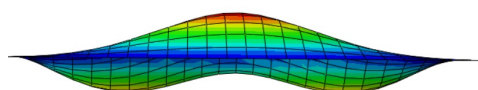
(b)  $f_2 = 1114.8$  Hz.



(c)  $f_3 = 1149.3$  Hz.



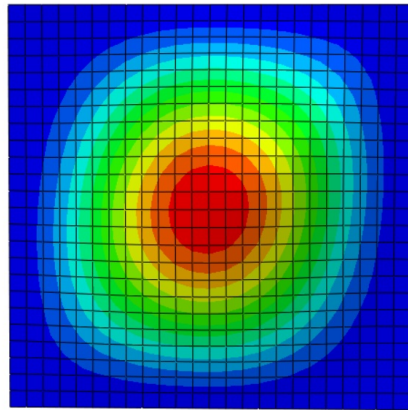
(d)  $f_4 = 1518.8$  Hz.



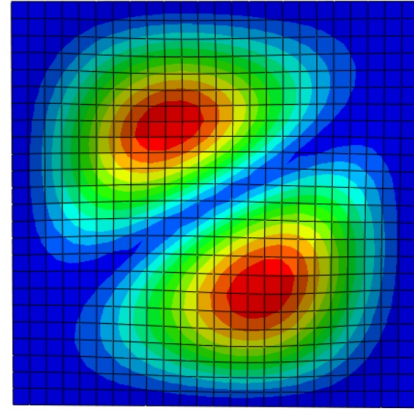
(e)  $f_5 = 1845.6$  Hz.

**Figure A.2:** Rappresentazione frequenze modali per andamento di fibre  $[(90,75), (0,15)]$ .

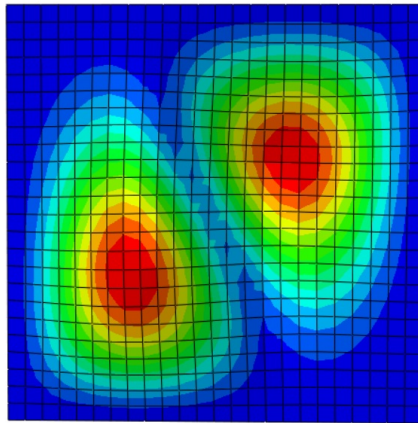
## A.3 Forme Modali piastra caso 3



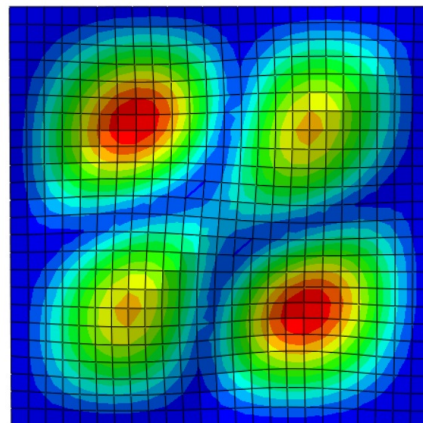
(a)  $f_1 = 627.71$  Hz.



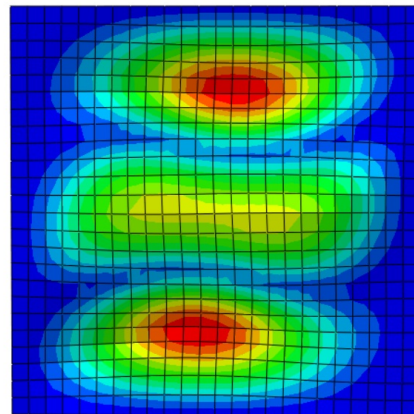
(b)  $f_2 = 1130.0$  Hz.



(c)  $f_3 = 1213.4$  Hz.



(d)  $f_4 = 1574.7$  Hz.



(e)  $f_5 = 1873.5$  Hz.

**Figure A.3:** Rappresentazione frequenze modali per andamento di fibre  $[\langle 90,60 \rangle, \langle 0,30 \rangle]$ .

# Appendix B

La prima piastra oggetto di analisi di confronto è realizzata in lega di alluminio 7075, comunemente nota come Ergal, ampiamente impiegata in ambito aerospaziale e militare per le sue elevate prestazioni meccaniche. Le proprietà della lega sono riportate in Tabella B.1. La nuova piastra presenta dimensioni pari a  $0,3 \text{ m} \times 0,5 \text{ m}$ , con uno spessore di 1,272 mm.

**Table B.1:** Proprietà Lega Al-7075

Proprietà	Valore	Unità di Misura
E	71	GPa
$\nu$	0.3	[-]
$\rho$	2810	$\text{kg}/\text{m}^3$

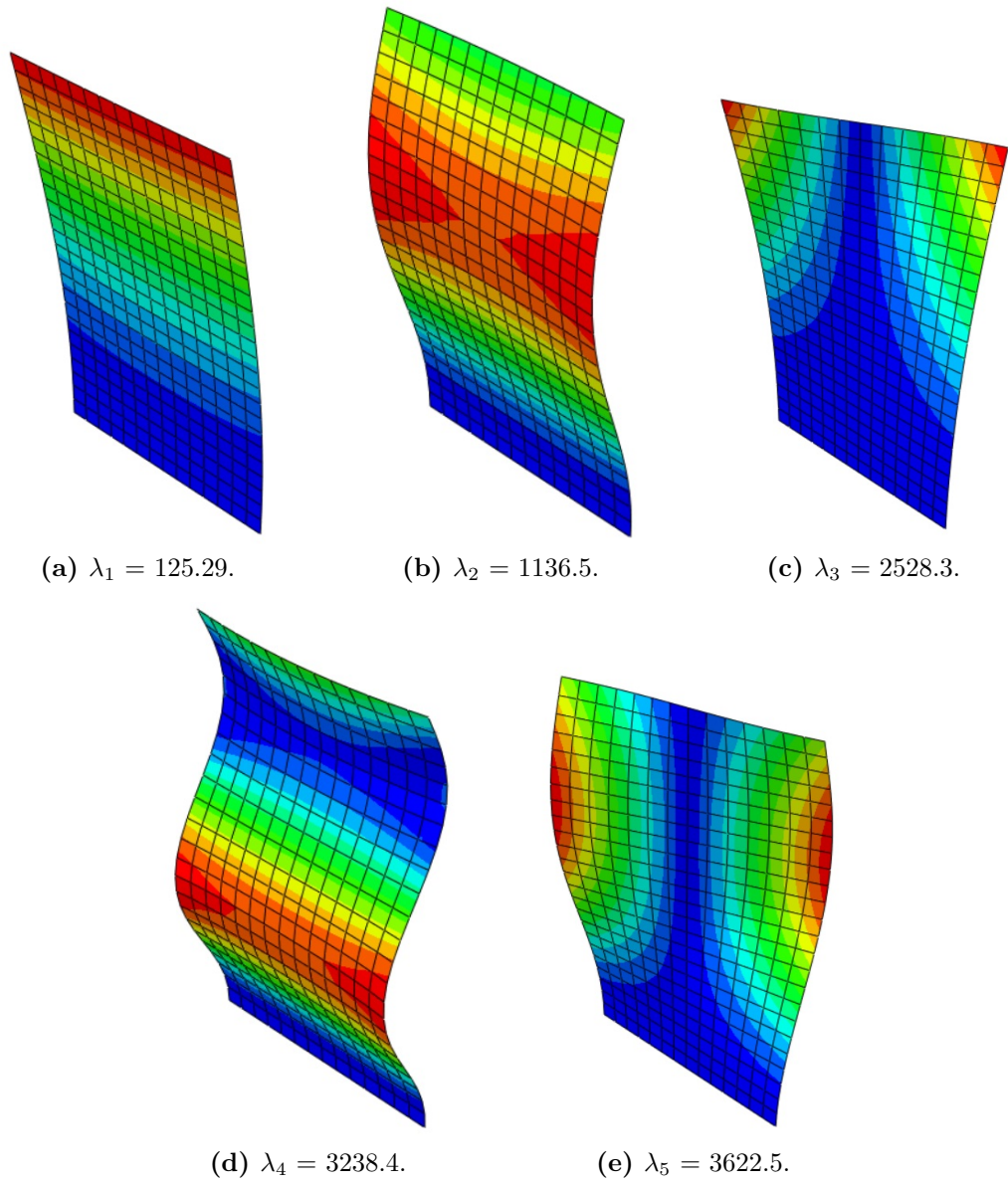
In Tabella B.2 sono presentati i primi cinque carichi critici derivanti dalle analisi di instabilità condotte sulle diverse strutture.

**Table B.2:** Carichi critici e proprietà specifiche delle tre piastre studiate

Carico critico n°	Al-7075 [N]	Composito QI [N]	VAT [N]
1	125.29 (27.23)	39.27 (14.92)	78.05 (14.92)
2	1136.5 (27.23)	355.66 (14.92)	633.03 (14.92)
3	2528.3 (27.23)	998.6 (14.92)	1167.7 (14.92)
4	3238.4 (27.23)	1635.9 (14.92)	1549.1 (14.92)
5	3622.5 (27.23)	1984.3 (14.92)	2263.3 (14.92)

È importante notare che, tra parentesi tonde, è indicata la proprietà specifica che rappresenta il rapporto tra il carico applicato e il peso della piastra rettangolare. Questa informazione aggiuntiva conferisce un significato ingegneristico più rilevante ai valori riportati, facilitando la comparazione delle prestazioni delle varie configurazioni.





**Figure B.1:** Rappresentazione delle forme modali per la piastra isotropa.

# Bibliography

- [1] D. Zamani, A. Pagani, and A. Racionero. «Ottimizzazione di laminati VAT realizzati in AFP attraverso un approccio orientato ai difetti». MA thesis. Politecnico di Torino, 2023 (cit. on pp. 2, 21, 23).
- [2] A. Pagani, M. Petrolo, and A. R. Sánchez-Majano. «Stochastic characterization of multiscale material uncertainties on the fibre-matrix interface stress state of composite variable stiffness plates». In: *Elsevier* (2023) (cit. on pp. 2, 5).
- [3] K. K. Chawla. *Composite Materials: Science and Engineering*. Springer Cham, 2019 (cit. on p. 2).
- [4] E. Angelucci and P. Matricardi. *Guida agli aeroplani di tutto il mondo*. Mondadori, 1979 (cit. on p. 2).
- [5] V. Giurgiutiu. «Stress, Vibration, and Wave Analysis in Aerospace Composites». In: *Elsevier* (2022) (cit. on p. 2).
- [6] R. M. Jones. *Mechanics Of Composite Materials*. CRC Press, 2018 (cit. on p. 2).
- [7] G. Solares and E. René. «A Novel Structural Health Monitoring Method for Full-Scale CFRP Structures». In: *EPFL* (2015) (cit. on pp. 2, 3).
- [8] J. I. Rojas Gregorio and D. Crespo Artiaga. «Comparison of the response of different configurations of aircraft repair patches under static and dynamic loading». In: *Universitat Politècnica de Catalunya* (2020) (cit. on p. 3).
- [9] T. Sano, G. Mathaudhu, et al. *Advanced Composites for Aerospace, Marine, and Land Applications*. Springer Cham, 2016 (cit. on p. 3).
- [10] N. Mazlan, S. M. Sapuan, and R. A. Ilyas. *Advanced Composites in Aerospace Engineering Applications*. Springer Cham, 2022 (cit. on p. 3).
- [11] M. Petrolo. «Advances in Predictive Models and Methodologies for Numerically Efficient Linear and Nonlinear Analysis of Composites». In: *Springer* (2019) (cit. on p. 3).

- [12] R. F. Gibson. «Principles of composite material mechanics». In: *McGraw-Hill* (1994) (cit. on p. 3).
- [13] R. M. Jones. «Mechanics of composite materials». In: *Taylor and Francis* (1999) (cit. on p. 3).
- [14] J. R. Vinson and R. L. Sierakowski. «The behavior of structures composed of composite materials». In: *Springer* (1986) (cit. on p. 4).
- [15] G. C. Staab. «Laminar composites». In: *Elsevier Science* (1999) (cit. on p. 4).
- [16] C. Kassapoglou. «Design and analysis of composite structures». In: *Wiley* (2013) (cit. on p. 4).
- [17] M. W. Hyer. «Stress analysis of fiber-reinforced composite materials». In: *The McGraw-Hill Companies* (1998) (cit. on p. 4).
- [18] G. Solares and E. René. «Mechanics of fibrous composites». In: *John Wiley and Sons* (1998) (cit. on p. 4).
- [19] P. R. B. and P. N. J. «Interlaminar stresses in composite laminates under uniform axial extension». In: *Journal of Composite Materials* (1970) (cit. on p. 4).
- [20] N. Pagano. «Stress fields in composite laminates». In: *International Journal of Solids and Structures* (1978) (cit. on p. 4).
- [21] Y. X. Zhang and C. H. Yang. «Recent developments in finite element analysis for laminated composite plates». In: *Composite Structures* (2009) (cit. on p. 4).
- [22] W. Han, M. Petyt, and K. M. Hsiao. «An investigation into geometrically nonlinear analysis of rectangular laminated plates using the hierarchical finite element method». In: *Finite Elements in Analysis and Design* (1994) (cit. on p. 4).
- [23] Y. X. Zhang and K. S. Kim. «A simple displacement-based 3-node triangular element for linear and geometrically nonlinear analysis of laminated composite plates». In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* (2005) (cit. on p. 4).
- [24] L. V. Tran, J. Lee, H. Nguyen-Van, H. Nguyen-Xuan, and M. A. Wahab. «Geometrically nonlinear isogeometric analysis of laminated composite plates based on higher-order shear deformation theory». In: *International Journal of Non-Linear Mechanics* (2015) (cit. on p. 4).
- [25] A. Pagani and A. Racionero. «Influence of fiber misalignments on buckling performance of variable stiffness composites using layerwise models and random fields». In: *Mechanics of Advanced Materials and Structures* (2020) (cit. on p. 4).

- [26] A. R. Racionero, R. Azzara, A. Pagani, and E. Carrera. «Accurate Stress Analysis of Variable Angle Tow Shells by High-Order Equivalent-Single-Layer and Layer-Wise Finite Element Models». In: *Materials* (2021) (cit. on p. 5).
- [27] L. Demasi, G. Biagini, F. Vannucci, E. Santarpia, and R. Cavallaro. «Equivalent single layer, zig-zag, and layer wise theories for variable angle tow composites based on the generalized unified formulation». In: *Elsevier* (2018) (cit. on pp. 6, 44, 47–49, 53–55, 64, 66–70).
- [28] P. Ribeiro and H. Akhavan. «Non-linear vibrations of variable stiffness composite laminated plates». In: *Composite Structures* (2012) (cit. on p. 6).
- [29] H. Akhavan and P. Ribeiro. «Natural modes of vibration of variable stiffness composite laminates with curvilinear fibers». In: *Composite Structures* (2011) (cit. on pp. 6, 7).
- [30] M. Montemurro and A. Catapano. «On the effective integration of manufacturability constraints within the multi-scale methodology for designing variable angle-tow laminates». In: *Composite Structures* (2017) (cit. on p. 6).
- [31] X. Zhou and P. D. Gosling. «Towards an understanding of variations in the buckling of tailored variable angle tow composite plates». In: *Composite Structures* (2018) (cit. on p. 6).
- [32] M. W. Hyer and H. H. Lee. «The use of curvilinear fiber format in composite structure design». In: *30th Conference on Structures, Structural Dynamics and Materials* (2012) (cit. on p. 6).
- [33] E. Zappino, M. Filippi, A. Pagani, M. Petiti, and E. Carrera. «Experimental and numerical analysis of 3D printed open-hole plates reinforced with carbon fibers». In: *Composites Part C: Open Access* (2020) (cit. on p. 6).
- [34] C. Lopes, P. Camanho, Z. Grdal, and B. Tatting. «Progressive failure analysis of tow-placed variable-stiffness composite panels». In: *International Journal of Solids and Structures* (2007) (cit. on p. 6).
- [35] Z. Wu, P. Weaver, G. Raju, and B. Kim. «Buckling analysis and optimisation of variable angle tow composite plates». In: *Thin-Walled Structures* (2012) (cit. on p. 6).
- [36] C. Xiaodong, W. Zhangming, N. Guojun, and P. Weaver. «Buckling analysis of variable angle tow composite plates with a through-the-width or an embedded rectangular delamination». In: *International Journal of Solids and Structures* (2018) (cit. on p. 6).
- [37] Z. Wu, P. M. Weaver, G. Raju, and B. C. Kim. «Buckling Analysis and Optimisation of Variable Angle Tow Composite Plates». In: *Thin-Walled Structures* (2012) (cit. on p. 6).

- [38] Z. Wu, P. M. Weaver, and G. Raju. «Postbuckling analysis of variable angle tow composite plates». In: *Elsevier* (2013) (cit. on p. 6).
- [39] X. Chen and G. Nie. «On the nonlinear post-critical responses of VAT sandwich beams with variable stiffness composite skins under axial compression». In: *Elsevier* (2022) (cit. on p. 7).
- [40] O. Stodieck, J. Cooper, P. Weaver, and P. Kealy. «Improved aeroelastic tailoring using tow-steered composites». In: *Composite Structures* (2013) (cit. on p. 7).
- [41] S. Yazdani and P. Ribeiro. «A layerwise p-version finite element formulation for free vibration analysis of thick composite laminates with curvilinear fibres». In: *Composite Structures* (2015) (cit. on p. 7).
- [42] Robbin and J. Reddy. «Refined beam elements with only displacement variables and plate/shell capabilities». In: *International Journal of Theoretical and Applied Mechanics* (2018) (cit. on p. 7).
- [43] R. Shimpi and A. Ainapure. «A beam finite element based on layerwise trigonometric shear deformation theory». In: *Composite Structures* (2001) (cit. on p. 7).
- [44] E. Carrera, M. Cinefra, E. Zappino, and M. Petrolo. *Finite Element Analysis of Structures through Unified Formulation*. John Wiley & Sons, 2014 (cit. on p. 9).
- [45] A. Gazzillo, A. Pagani, E. Carrera, A. Racionero, and R. Azzara. «Modelli avanzati per lo studio della risposta post-critica di pannelli in composito a rigidità variabile». MA thesis. Politecnico di Torino, 2022 (cit. on pp. 10, 21, 58).
- [46] G. Kirchhoff. «Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe». In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)* (1850) (cit. on p. 11).
- [47] R. D. Mindlin. «Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates». In: *Journal of Applied Mechanics* (1951) (cit. on p. 15).
- [48] D. Zamani. «Least-weight design of tow-steered composites». In: *Materials Research Proceedings* (2024) (cit. on p. 21).
- [49] A. Pagani, A. Racionero, D. Zamani, M. Petrolo, and E. Carrera. «Fundamental Frequency Layer-Wise Optimization of Tow-Steered Composites Considering Gaps and Overlaps». In: *Aerotec. Missili Spaz.* (2024) (cit. on p. 22).

- [50] D. Scano, E. Carrera, A. Pagani, and R. Augello. «Uso di Polinomi di Lagrange nell'Analisi Lineare e Nonlineare di Strutture Lamine». MA thesis. Politecnico di Torino, 2021 (cit. on p. 22).
- [51] M. La Scala. «Utilizzo del software Abaqus per lo sviluppo di modelli numerici a elementi finiti di strutture in muratura soggette ad azione sismica». MA thesis. Roma Tre, 2015 (cit. on p. 26).
- [52] Dassault Systèmes. *Abaqus Analysis User's Guide*. Version 2016. 2017 (cit. on p. 26).
- [53] M. Montemurro. «Analisi numerica e sperimentale del comportamento a compressione di materiali compositi». MA thesis. Università di Bologna, 2014 (cit. on p. 27).
- [54] Dassault Systèmes. *Abaqus 2022 Documentation*. 2022 (cit. on pp. 28, 35).
- [55] Abaqus/CAE User's Guide. «Overview of Abaqus Elements». In: *StudyLib* (2017) (cit. on p. 31).
- [56] T. Assis Dutra et al. «Identification of Representative Equivalent Volumes on the Microstructure of 3D-Printed Fiber-Reinforced Thermoplastics Based on Statistical Characterization». In: *Polymers* (2022) (cit. on p. 33).
- [57] Y. Pu, D. B. Apel, S. Prusek, et al. «Back-analysis for initial ground stress field at a diamond mine using machine learning approaches». In: *Nat Hazards* (2021) (cit. on p. 33).
- [58] S. Heldens, A. Sclocco, H. Dreuning, P. Hijma, and J. Maassen. «litstudy: A Python package for literature reviews». In: *SoftwareX* (2022) (cit. on p. 38).
- [59] J. Yang, T. Zhang, C. Kong, B. Sun, and R. Ran. «Application of Python-Based Abaqus Secondary Development in Laser Shock Forming of Aluminum Alloy 6082-T6». In: *Micromachines* (2024) (cit. on p. 38).
- [60] H. S. Suh, C. Kweon, B. Lester, S. Kramer, and W. Sun. «A publicly available PyTorch-ABAQUS UMAT deep-learning framework for level-set plasticity». In: *Mechanics of Materials* (2023) (cit. on p. 38).
- [61] A. Vijayachandran and A. M. Waas. «Minimizing stress concentrations using steered fiberpaths and incorporating realistic manufacturing signatures». In: *Elsevier* (2022) (cit. on p. 73).