

# Politecnico di Torino

## Laurea magistrale in Ingegneria Aerospaziale



### Tesi magistrale

# Sviluppo di un metodo per calcolare le tensioni in modelli di strutture con smorzamento per attrito

Relatori:

Prof. STEFANO ZUCCA

GIACOMO SALETTI, PhD student

ANDREA SAPONARO, PhD student

Candidato:

BENEDETTO PERTICARO

Dicembre 2024

*Ciao mamma,  
ci sono riuscito*

# Ringraziamenti

Ringrazio innanzitutto il professore Stefano Zucca per avermi dato la possibilità di svolgere la mia tesi attraverso la sua guida ed i suoi consigli. Ringrazio inoltre i due dottorandi, Andrea Saponaro e Giacomo Saletti, per la loro disponibilità ed il sostegno fornito.

Questa tesi rappresenta la fine di un percorso ricco di momenti di gioia e di dolore che mi hanno aiutato nella crescita personale e professionale, quindi voglio ringraziare me stesso per la forza che ho sviluppato negli anni, che non è un punto di arrivo, ma di partenza per le sfide che dovrò ancora affrontare.

Voglio ringraziare la forza di mio padre nell'essere sempre presente, anche nei momenti difficili, perché ha permesso la continua crescita di una famiglia anche dopo la perdita di nostra madre. Sei il nostro punto di riferimento.

Ringrazio mio fratello perché mi è sempre stato vicino, mi ha fatto vivere mille avventure e mi ha seguito nelle mie scelte, a volte folli, anche se non le condivideva a pieno.

A mia nonna (babka Franca) per essere sempre presente e per il nostro rapporto non descrivibile a parole.

Voglio ringraziare, inoltre, i miei zii e i miei cugini perché mi hanno guidato in questo percorso e mi hanno dato consigli preziosi.

Questi anni sono stati ricchi di persone che meriterebbero un ringraziamento speciale e personale, ma voglio raggrupparli ringraziando

- i ragazzi della cucina del piano terra perché hanno migliorato le mie giornate, ed a volte addolcite con il gelato di Romagnoli
- i ragazzi del corso di atletica perché mi hanno fatto riscoprire la passione per lo sport, mi hanno donato tante emozioni, positive e negative, e mi hanno fatto vivere l'emozionante baitata
- tutte le persone che mi sono state vicine in questo percorso e che hanno contribuito nella mia crescita.

Ringrazio Alessandro, Davide, Luca e Pietro perché, nonostante la distanza, continuano a coltivare l'amicizia nata tra i banchi di scuola, spero di non perdervi mai.

A Gianluca, grazie per il tuo supporto, perché hai continuato a coltivare la nostra amicizia nonostante la distanza, i problemi e le incomprensioni, sei diventato un fratello con cui ho condiviso molto.

Infine ringrazio mia madre perché so che vedermi con la corona di allori in testa sarebbe stato il suo sogno più grande.

## Sommario

La costante richiesta di turbomacchine sempre più performanti ha portato le case produttrici a progettare componenti soggetti a carichi più elevati, nei quali serve prevedere con maggiore precisione lo stato di sollecitazione dovuto alle vibrazioni forzate. Per ottenere dai calcoli valori realistici di ampiezza di vibrazione, è necessario considerare gli effetti dello smorzamento per attrito, che introduce una forte non linearità nel sistema. Il gruppo di ricerca AerMec ha sviluppato un software, denominato NOVA (NONlinear Vibration of Assemblies) per il calcolo nel dominio della frequenza della risposta forzata di componenti di turbomacchine in presenza di smorzamento per attrito. L'utilizzo di NOVA presuppone che il modello agli elementi finiti del componente sia costruito con il software commerciale ANSYS e che le matrici ridotte del modello, esportate da ANSYS, siano utilizzate come input per l'analisi non lineare. NOVA utilizza le matrici ridotte per calcolare l'ampiezza della risposta, ma non è in grado di calcolare lo stato di tensione, non avendo a disposizione il modello agli elementi finiti del componente analizzato. L'obiettivo di questa tesi è di sviluppare un metodo per consentire il calcolo delle tensioni a valle dell'analisi dinamica non lineare in NOVA senza la necessità di eseguire una espansione del campo degli spostamenti calcolati. Il metodo consiste nel salvare come risultato del calcolo in NOVA, le forze di contatto calcolate e di importarle in ANSYS come forze esterne per eseguire in ANSYS un'analisi lineare utilizzando un set di forze composto dalle forzanti esterne e dalle forze di contatto. Il metodo è stato implementato attraverso la scrittura di routine in linguaggio APDL di ANSYS e linguaggio MATLAB e convalidato con successo, utilizzando come test case un modello composto da due travi a sbalzo, in contatto alle estremità libere.

# Indice

<b>Elenco delle figure</b>	<b>3</b>
<b>1 Introduzione</b>	<b>5</b>
<b>2 Cenni teorici</b>	<b>7</b>
2.1 Analisi dinamiche . . . . .	7
2.2 Modello di contatto . . . . .	18
2.2.1 Utilizzo dei modelli di contatto . . . . .	19
2.3 Cenni teorici alle tecniche di riduzione . . . . .	25
2.3.1 Metodo di Craig-Bampton . . . . .	26
<b>3 Metodologia</b>	<b>29</b>
3.1 Metodo del bilanciamento armonico - sistema a 1 grado di libertà . .	30
3.2 Metodo del bilanciamento armonico - sistema a N gradi di libertà . .	32
3.3 Utilizzo di modelli ridotti nel calcolo della risposta forzata non lineare	35
3.4 Calcolo della risposta forzata dell'intero modello . . . . .	36
<b>4 Implementazione</b>	<b>38</b>
4.1 Il software Ansys . . . . .	38
4.2 Il software NOVA . . . . .	39
4.3 Descrizione del processo . . . . .	41
4.3.1 Generazione del modello FEM . . . . .	42
4.3.2 Riduzione di Craig-Bampton . . . . .	43
4.3.3 Creazione del modello in NOVA . . . . .	44
4.3.4 Calcolo della risposta forzata non lineare . . . . .	44
4.3.5 Calcolo della risposta dell'intero sistema . . . . .	44
4.3.6 Comparazione delle due risposte . . . . .	45
4.4 Macro . . . . .	45
4.4.1 Macro estrazione matrici ridotte . . . . .	46
4.4.2 Macro analisi armonica . . . . .	46
4.5 Script Matlab . . . . .	48

---

4.5.1	Script Matlab per la generazione del file contenente la macro per l'importazione del vettore delle forze di contatto . . . . .	48
4.5.2	Script Matlab per la generazione del file contenente la macro per l'importazione del vettore di MAPPING . . . . .	49
<b>5</b>	<b>Applicazione e risultati</b>	<b>50</b>
5.1	Modello . . . . .	50
5.2	Risultati . . . . .	54
<b>6</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>59</b>
<b>A</b>	<b>Macro ANSYS</b>	<b>60</b>
A.1	Esportazione matrici full . . . . .	60
A.2	Esportazione ridotte . . . . .	61
A.3	Macro analisi armonica . . . . .	62
A.4	Macro print_frf2 . . . . .	66
<b>B</b>	<b>Script Matlab</b>	<b>67</b>
B.1	Script Matlab creazione testo per il vettore c1 . . . . .	67
B.2	Script Matlab creazione testo per il vettore MAPPING . . . . .	68
<b>C</b>	<b>Metodo di sovrapposizione modale</b>	<b>69</b>

# Elenco delle figure

2.1	Sistema massa-molla [6]	7
2.2	Sistema massa-molla-smorzatore [6]	8
2.3	Curva sistema sovra-smorzato [6]	10
2.4	Curva smorzamento critico [6]	10
2.5	Curva sistema sotto-smorzato [6]	11
2.6	Sistema forzato [6]	12
2.7	Generico sistema 2 GDL [5]	13
2.8	Modello di contatto [7]	18
2.9	schema molla tangenziale [7]	19
2.10	Andamento dello spostamento per ampiezze $\leq$ al limite di Coulomb [7]	20
2.11	Ciclo ottenuto con $x_0 > x_{cr}$ [7]	21
2.12	Risposta forzata al variare del pre-carico $N_0$ [7]	25
3.1	Modelli di contatto [7]	29
3.2	Esempio della forza di contatto tangenziale [7]	30
3.3	Modello di contatto 3D [7]	34
4.1	Schermata Preprocessor	40
4.2	Schermata solver	40
4.3	Schermata postprocessor	41
4.4	Diagramma di flusso del processo	42
5.1	Modello con vista vplot	50
5.2	Modello con mesh	51
5.3	Schermata opzioni avanzate	53
5.4	Risultato in direzione x con $n = 150$	54
5.5	Risultato in direzione y con $n = 150$	55
5.6	Risultato in direzione x con $n = 80$	55
5.7	Risultato in direzione y con $n = 80$	56
5.8	Risultato in direzione x con $n = 50$	56

5.9 Risultato in direzione y con $n = 50$ . . . . .	57
5.10 Illustrazione della deformata . . . . .	58
5.11 Travi deformate sollecitate alla frequenza di 1853.92 Hz . . . . .	58

# Capitolo 1

## Introduzione

Il problema principale delle vibrazioni forzate nelle turbomacchine in presenza di attrito è rappresentato dalle frequenze di risonanza e dal rischio di sollecitazioni elevate sui componenti a contatto, come le pale delle turbine.

L'attrito può amplificare l'effetto delle vibrazioni nei punti di contatto, aumentando gli stress meccanici e la temperatura all'interfaccia, causando instabilità dinamica, danneggiamento strutturale ed altre problematiche legate al punto di vista energetico.

E' un fenomeno di elevato interesse per le aziende produttrici perché la richieste di turbomacchine sempre più performanti, soggetti a carichi sempre più elevati, ha spinto alla richiesta di prevedere con maggior precisione lo stato di sollecitazione dovuto alle vibrazioni forzate.

Il compito del progettista è molto importante perché deve studiare l'intervallo entro il quale si manifesta la risonanza di tutti i componenti, tenendo conto degli effetti dello smorzamento per attrito, e, se corrisponde con il punto di progetto della turbomacchina, deve trovare un modo salvaguardare il sistema lasciando invariate le prestazioni. Si ricordi che tutti i componenti che costituiscono la turbomacchina, seppur uguali in forma, presentano dei piccoli difetti dovuti alla tolleranza di lavorazione per cui ognuno potrà avere una frequenza di risonanza leggermente diversa, ma sempre all'interno di un determinato intervallo.

In un caso ideale, cioè senza attrito, le vibrazioni forzate possono essere calcolate mediante il seguente diagramma di flusso:

- si identifica l'intervallo di frequenze di interesse per l'analisi
- si effettua l'analisi modale del sistema non smorzato in tale intervallo per acquisire le frequenze di risonanza ed i modi propri di vibrare
- si selezionano i gradi di libertà di output e di input

- si definisce un coefficiente di smorzamento modale per i modi ritenuti rilevanti per l'analisi
- si calcola la risposta per i gradi di libertà di output nell'intervallo di frequenze selezionato

Di contro, in presenza di attrito, si riscontra una deviazione dal caso ideale, poiché bisogna tenere in considerazione la forza di contatto che introduce una non linearità nel sistema. In particolare, quest'ultima non sarà dipendente solo dalla direzione di spostamento, ma anche della velocità e dal tempo.

Per risolvere questo problema è necessario introdurre il metodo del bilanciamento armonico dove sia lo spostamento, che la forzante, vengono espresse mediante somma di componenti armoniche.

La potenzialità del metodo risiede nell'ottenere un set di equazioni algebriche a coefficienti complessi nella formulazione HBM (harmonic balance method) che risultano accoppiate fra loro ed allo stesso tempo risolvibili mediante un metodo iterativo.

La metodologia si propone di effettuare la riduzione di Craig-Bampton al set di equazioni citato sopra e, successivamente, condurre l'analisi non lineare con il modello ridotto. Questo processo produce due output, il calcolo della risposta forzata non lineare ed il vettore contenente le forze di contatto. Attraverso l'implementazione si validificheranno le forze di contatto ottenute.

Nella trattazione si affronta il calcolo delle vibrazioni forzate mettendo in relazione due software, Ansys e NOVA. Precisando che, il primo è un potente risolutore per le analisi ad elementi finiti, mentre il secondo riesce ad effettuare analisi non lineari in tempi ristretti utilizzando le matrici di massa e rigidezza ridotte.

Il processo è suddiviso in tre macro passaggi

1. Dal modello di Ansys si estraggono le matrici di massa e rigidezza ridotte necessarie per creare il modello in NOVA.
2. Mediante NOVA si effettua l'analisi non lineare del modello ridotto e si ottengono due output, il calcolo della risposta forzata non lineare e il vettore delle forze di contatto.
3. Il vettore delle forze di contatto viene importato ed applicato ai rispettivi nodi di contatto del modello completo in Ansys come se fossero delle semplici forzanti esterni. Successivamente si effettua l'analisi armonica con l'applicazione delle forzanti esterne, non appartenenti a quelle del contatto, e si ricava la risposta dell'intero modello.

La metodologia risulta validata nel momento in cui le due risposte, determinate mediante i due software, risultano quasi sovrapposte.

# Capitolo 2

## Cenni teorici

### 2.1 Analisi dinamiche

Le analisi dinamiche sono state introdotte perché le analisi statiche non riescono a descrivere il comportamento dei componenti, rotanti e non, quando questi sono soggetti a carichi variabili nel tempo. In particolare, vengono prodotte delle vibrazioni che, alterando lo stato tensionale interno dei componenti, innescano un danneggiamento per fatica.

Il punto di partenza per la spiegazione delle analisi dinamiche è il modello ad 1 GDL (grado di libertà) dove si ha solamente una massa concentrata collegata ad un punto fermo attraverso una molla.

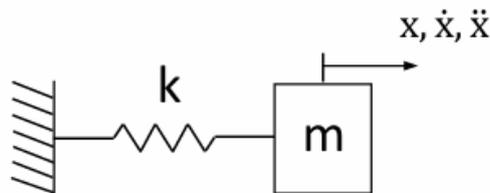


Figura 2.1: Sistema massa-molla [6]

Mediante queste informazioni si ricava la legge che descrive il moto della massa del sistema libero, quindi non soggetto a forze esterne

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (2.1)$$

dove  $\ddot{x}(t)$  rappresenta l'accelerazione che viene ricavata derivando due volte la funzione  $x(t)$ .

Si tratta di un'equazione differenziale del secondo ordine lineare omogenea con soluzione

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t + \phi)$$

dove

- $x_0$  = ampiezza
- $\omega$  = pulsazione
- $\phi$  = fase

Riscrivendo in funzione di  $x(t)$  si ricava

$$(k - \omega_n^2 m)x_0 \cos(\omega_n t + \phi) = 0 \quad (2.2)$$

Poiché si vuole una soluzione non banale, cioè quella per  $x_0 \neq 0$ , bisogna annullare il termine all'interno della prima parentesi. Questa procedura permette, inoltre, di ricavare la pulsazione naturale o di risonanza

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.3)$$

Sostituendo questo risultato nella soluzione ed applicando le condizioni al contorno è possibile ricavare i valori di ampiezza e fase.

In un sistema più simile alla realtà sono presenti pure un termine legato allo smorzamento ed uno alla forzante. Nel proseguo, di volta in volta, si aggiungerà un parametro e si mostrerà come cambia l'equazione del moto. [6]

Prendendo in considerazione pure lo smorzamento si ottiene un sistema come in figura 2.2

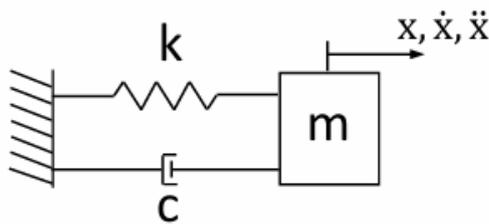


Figura 2.2: Sistema massa-molla-smorzatore [6]

descritto dalla seguente equazione del moto

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (2.4)$$

l'equilibrio interno si ha quando la somma delle tre forze è nulla. Rispetto al caso precedente, è stata aggiunta la forza di attrito viscoso rappresentata dal termine  $c\dot{x}(t)$ .

Poiché si tratta di un'equazione differenziale del secondo ordine lineare omogenea, è possibile risolverla usando la soluzione banale, cioè  $x(t) = 0$ , ma ciò non è utile per cui si cerca una soluzione alternativa.

Un possibile metodo è esprimere la soluzione nella forma  $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$  e sostituirla nell'equazione per ottenere il seguente polinomio caratteristico

$$(m\lambda^2 + c\lambda + k)x_0 e^{\lambda t} = 0 \quad (2.5)$$

La cui soluzione non banale si ricava imponendo uguale a zero il termine fra parentesi

$$(m\lambda^2 + c\lambda + k) = 0 \quad (2.6)$$

Si tratta di un'equazione di secondo grado con incognita  $\lambda$  e può essere risolta applicando la formula risolutiva

$$\lambda = -\frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \quad (2.7)$$

Questa forma permette di ottenere tre possibili soluzioni, dipendenti dal valore sotto radice, nello specifico:

- $c < 2\sqrt{mk} \rightarrow$  sistema sotto-smorzato
- $c = 2\sqrt{mk} \rightarrow$  smorzamento critico
- $c > 2\sqrt{mk} \rightarrow$  sistema sovra-smorzato

Esaminando le soluzioni a ritroso, quindi iniziando da quella del sistema sovra-smorzato, si ottengono le seguenti soluzioni. Nel caso in cui  $c > 2\sqrt{mk}$  il valore sotto la radice sarà positivo quindi si avranno 2 soluzioni reali e negative della forma

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

Questa soluzione presenta un andamento simile a quello in figura 2.3

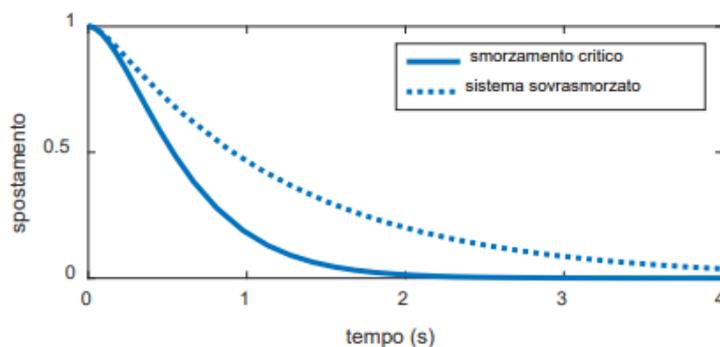


Figura 2.3: Curva sistema sovra-smorzato [6]

Per  $c = 2\sqrt{mk}$  il valore sotto radice sarà nullo, in particolare,  $\lambda$  ha la forma della pulsazione naturale e ci saranno due soluzioni coincidenti reali e negative della forma

$$x(t) = (A + Bt)e^{\lambda t}$$

Con il seguente andamento

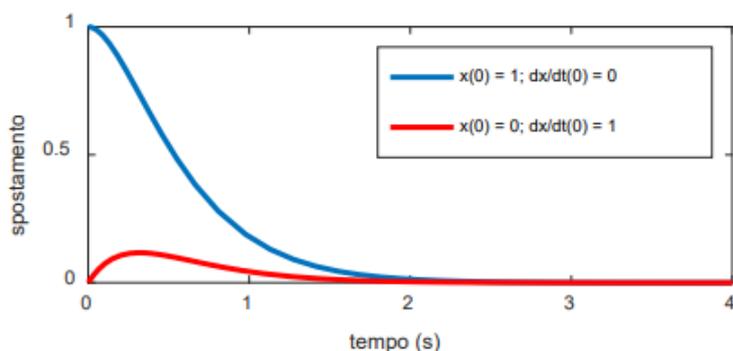


Figura 2.4: Curva smorzamento critico [6]

Queste due prime soluzioni definiscono un moto smorzato aperiodico poiché tendono ad annullare lo spostamento ad infinito senza continuare ad oscillare periodicamente attorno al valore finale.

Infine, per  $c < 2\sqrt{mk}$  il valore sotto radice sarà negativo per cui si avranno delle soluzioni in forma complessa. In dettaglio, si introduce il damping ratio, o smorzamento relativo

$$\zeta = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2\sqrt{mk}} < 1$$

e si riscrive la  $\lambda$  in funzione di quest'ultimo valore e della frequenza naturale

$$\lambda = \omega_n(-\zeta \pm i\sqrt{1-\zeta^2})$$

Esprimendo la soluzione usando la forma delle equazioni differenziali ordinarie di secondo grado e sostituendo i valori ricavati di  $\lambda$  si ottiene la seguente forma

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} = e^{-\zeta\omega_n t}(Ae^{i\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t} + Be^{-i\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t})$$

Riscrivibile in funzione della di ampiezza e fase

$$x(t) = Ce^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t + \phi)$$

e rappresentata dalle curve

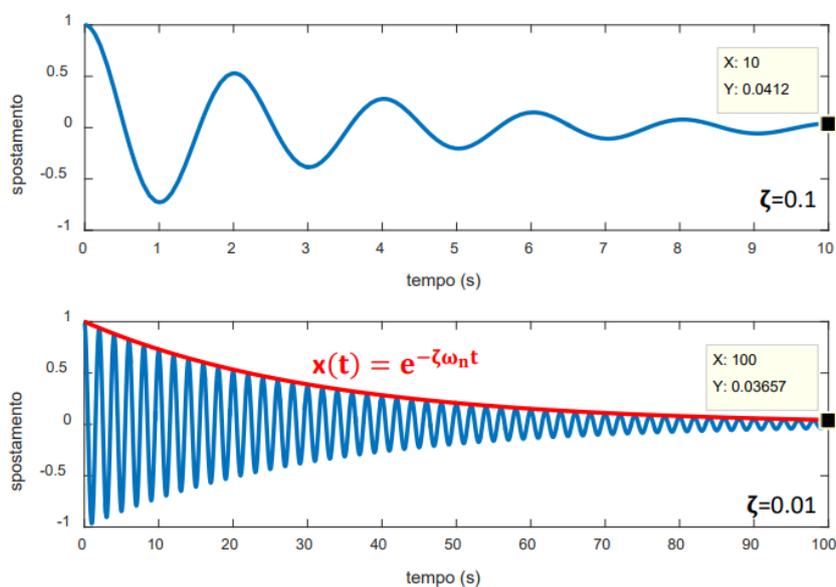


Figura 2.5: Curva sistema sotto-smorzato [6]

dipendenti dal valore dello smorzamento.

Si noti che in questo caso si ha un moto smorzato periodico con andamento oscillante attorno al valore asintotico. [6]

Infine, l'ultimo elemento da aggiungere per descrivere un sistema 1 GDL è la forzante  $f(t) = f_0\cos(\omega t)$  con cui si ottiene il seguente sistema

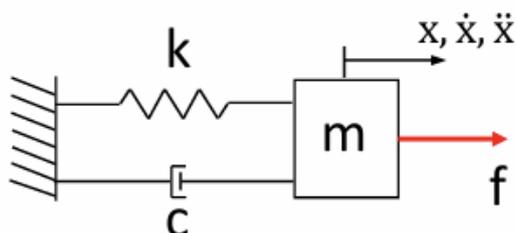


Figura 2.6: Sistema forzato [6]

descritto dall'equazione del moto

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \quad (2.8)$$

In questo caso si ha un'equazione differenziale lineare del secondo ordine non omogenea, la cui soluzione è data dalla somma tra la soluzione dell'omogenea associata e dall'integrale particolare.

Matematicamente si avrà una soluzione del tipo

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t + \phi)$$

che può essere riscritta mediante la notazione complessa in

$$\bar{x}(t) = x_0 e^{i(\omega t + \phi)} = x_0 e^{i\phi} e^{i\omega t}$$

Ricordando che anche la forzante può essere scritta nella forma

$$\bar{f}(t) = f_0 e^{i\omega t}$$

è possibile usare la notazione complessa per scrivere l'equazione che descrive il moto

$$(-\omega^2 m + i\omega c + k)\bar{x}e^{i\omega t} = f_0 e^{i\omega t}$$

ed eliminare la dipendenza dal tempo dividendo per  $e^{i\omega t}$ . Ciò permette di concentrarsi sulla parte reale e immaginaria di  $\bar{x}$ , da cui dipendono l'ampiezza e la fase della risposta. Esplicitando per il valore che si vuole studiare si ottiene

$$\bar{x} = \frac{f_0}{(k - \omega^2 m + i\omega c)}$$

e, definendo la risposta statica come  $x_{st} = \frac{f_0}{k}$  e portando fuori della parentesi  $k$ , è possibile riscrivere l'equazione nel seguente modo

$$\bar{x} = \frac{x_{st}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + 2i\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}$$

Il nuovo termine definito

$$k\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + 2i\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)$$

Prende il nome di rigidità dinamica e dipenderà dalla pulsazione della forzante.

Un caso particolare si ha quando la frequenza è pari a quella di risonanza poiché i primi due termini si elidono a vicenda

$$\bar{x} = \frac{x_{st}}{2i\zeta}$$

Questo risultato mostra che la risposta è complessa quindi il ritardo è di  $90^\circ$  rispetto alla forzante  $f_0$ . [6]

Poiché nei sistemi reali i GDL del sistema sono molti, possono superare le centinaia di migliaia in quelli industriali, bisogna trovare un metodo per analizzare il loro comportamento dinamico partendo dall'equazione che è stata introdotta per quelli ad 1 GDL.

Poiché il metodo non è condizionato dal numero di GDL, è possibile analizzare il sistema più semplice dove ne sono presenti solamente 2, come in figura 2.7

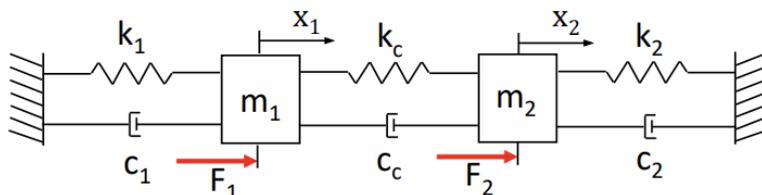


Figura 2.7: Generico sistema 2 GDL [5]

Considerando le masse singolarmente ed esprimendo le loro equazioni di equilibrio lungo l'asse x si ottiene:

- Massa 1

$$-m_1\ddot{x}_1 - c_1\dot{x}_1 - k_1x_1 + k_c(x_2 - x_1) + c_c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + F_1 = 0$$

- Massa 2

$$-m_2\ddot{x}_2 - c_2\dot{x}_2 - k_2x_2 - k_c(x_2 - x_1) - c_c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + F_2 = 0$$

Raccogliendo a fattor comune è possibile esprimerle come un sistema di equazioni:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_c) \dot{x}_1 - c_c \dot{x}_2 + (k_1 + k_c) x_1 - k_c x_2 = F_1 \\ m_1 \ddot{x}_2 + (c_2 + c_c) \dot{x}_2 - c_c \dot{x}_1 + (k_2 + k_c) x_2 - k_c x_1 = F_2 \end{cases}$$

che può essere espresso in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_c & -c_c \\ -c_c & c_2 + c_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_c & -k_c \\ -k_c & k_2 + k_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

Questa forma risulta molto vantaggiosa perchè permette di effettuare determinati calcoli tenendo in considerazione solo alcune matrici, in particolare è possibile calcolare gli autovalori e gli autovettori del sistema tenendo in considerazione solamente la matrice di massa con le rispettive accelerazioni e la matrice delle rigidezze con i suoi spostamenti. La forma matriciale avrà la seguente forma:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_c & -k_c \\ -k_c & k_2 + k_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

dove, sostituendo la notazione complessa, la soluzione avrà la forma  $\{x\} = \{\bar{x}\}e^{i\omega t}$ , la cui parte reale rappresenta la vibrazione del sistema, si ottiene

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 m_1 + k_1 + k_c & -k_c \\ -k_c & -\omega^2 m_2 + k_2 + k_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

Riconducibile alla forma

$$[-\omega^2 [m] + [k]] \{\bar{x}\} e^{i\omega t} = \{0\}$$

La soluzione non banale si ottiene imponendo uguale a zero  $-\omega^2 [m] + [k]$ . Inoltre, risolvendo rispetto ad  $\omega^2$ , si ottengono le pulsazioni naturali del sistema che corrispondono algebricamente agli autovalori. Espresso in forma polinomiale risulta la seguente

$$(-\omega^2 m_1 + k_1 + k_c)(-\omega^2 m_2 + k_2 + k_c) - k_c^2 = 0$$

La conoscenza degli autovalori permette di ricavare i rispettivi autovettori. In particolare, ad ogni autovalore corrisponde un modo di vibrare del componente ed è possibile determinarlo sostituendo nell'equazione matriciale 2.9 la frequenza naturale di interesse, eliminando la dipendenza dal tempo ed, infine, calcolando i coefficienti del vettore  $\{\bar{x}\}$ . [5]

A seguito della sostituzione si evince che la matrice diventa singolare ed una delle due righe diventa linearmente dipendente dall'altra per cui il calcolo dell'autovettore viene effettuato imponendo un valore arbitrario ad uno dei due coefficienti del

vettore  $\bar{x}$ . Questo metodo risolutivo permette di affermare che i modi di vibrare sono definiti a meno di una costante moltiplicativa. Dal punto di vista fisico rappresentano una deformata la cui ampiezza può essere definita in modo arbitrario.

Analizzando le forme modali fisicamente si può affermare che esprimono il modo in cui il sistema vibra. In dettaglio, è possibile valutare come si comporta al variare delle condizioni iniziali:

- Coincidente con uno dei modi propri; la risposta sarà composta da una sola componente armonica con pulsazione  $\omega_n$
- Non coincidenti con nessuno dei modi propri; la risposta sarà composta due componenti armoniche (sempre in riferimento ad un sistema 2 GDL) che vibreranno una con la prima frequenza naturale e l'altra con la seconda

Nei sistemi dove sono presenti molti GDL è conveniente definire il nuovo vettore di GDL modali  $\{\bar{q}\}$  definito in

$$\{\bar{x}\} = [\Psi]\{\bar{q}\} \quad (2.10)$$

dove, il prodotto fra la matrice che esprime i modi di vibrare del sistema ed il vettore dei GDL modali, definisce quello degli GDL fisici  $\{\bar{x}\}$ .

Questa relazione è importante perchè sarà utilizzata nella definizione della matrice di riduzione nel metodo di Craig-Bampton.

Questa notazione permette di riscrivere l'equazione del moto in coordinate modali nel seguente modo pre-moltiplicando per  $[\Psi]^T$

$$\begin{aligned} [\Psi]^T [-\omega^2[m] + [k]][\Psi]\{\bar{q}\}e^{i\omega t} &= \{0\} \\ [-\omega^2[m_{mod}] + [k_{mod}]]\{\bar{q}\}e^{i\omega t} &= \{0\} \end{aligned}$$

dove  $[m_{mod}]$  e  $[k_{mod}]$  rappresentano le nuove matrici modali di massa e rigidità.

Sfruttando l'ortogonalità dei modi propri e ricordando che sono definiti a meno di una costante moltiplicativa è possibile scalarli a piacere, per cui si opta per la m-normalizzazione eseguita mediante il fattore di scala calcolato per il modo n-esimo

$$\alpha_n = \sqrt{\{\Psi_n^T\}[m]\{\Psi_n\}}$$

Il nuovo modo m-normalizzato avrà la forma

$$\{\Phi_n\} = \frac{\{\Psi_n\}}{\alpha_n}$$

e permette di riscrivere l'equazioni del moto con i seguenti vantaggi

$$[-\omega^2[I] + [\tilde{k}_{mod}]]\{\bar{q}\}e^{i\omega t} = \{0\} \quad (2.11)$$

con

$$[\tilde{k}_{mod}] = diag(\omega_n^2)$$

Questa nuova forma contiene le matrici diagonali e permette di disaccoppiare il sistema per cui ogni equazione può essere studiata come un sistema ad 1 GDL.

Prendendo in considerazione il sistema libero smorzato si avrà la seguente equazione che descrive il moto

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = 0$$

dove  $[c]$  rappresenta lo smorzamento viscoso e, a causa della difficoltà nell'ottenere dei valori esatti, viene modellato in forma proporzionale secondo la seguente relazione

$$[c] = \alpha[k] + \beta[m]$$

con  $\alpha$  e  $\beta$  definiti sulla base dell'esperienza.

Riscrivendo l'equazione del moto mediante le coordinate modali, quindi sfruttando la relazione 2.10, e pre-moltiplicandola per  $[\Phi]^T$  si ottiene la forma

$$[\phi]^T [m][\phi]\{\ddot{q}\} + [\phi]^T [c][\phi]\{\dot{q}\} + [\phi]^T [k][\phi]\{q\} = 0$$

Inoltre, sfruttando la k- e m- ortogonalità dei modi si ha

$$\{\ddot{q}\} + diag[c_n]\{\dot{q}\} + diag[\omega_n^2]\{q\} = 0$$

Questa notazione permette di definire due risultati teorici importanti:

1. il sistema smorzato presenta gli stessi modi del sistema non smorzato
2. Ogni singola equazione modale è l'equazione di un sistema ad 1 GDL

Infine, si analizza il caso di un sistema a N GDL con vibrazioni forzate. L'equazione del moto sarà

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{F\}$$

la cui soluzione sarà simile al caso 1 GDL, cioè sarà una composizione fra la soluzione dell'omogenea associata e quella stazionaria, cioè la soluzione dell'integrale particolare.

Per risolvere l'equazione è possibile sostituire la notazione complessa e dividere il tutto per  $e^{i\omega t}$

$$[-\omega^2[m] + i\omega[c] + [k]]\{\bar{x}\} = \{\bar{F}\}$$

Da questa relazione è possibile definire la matrice di rigidezza dinamica

$$[D(\omega)] = -\omega^2[m] + i\omega[c] + [k]$$

e la matrice di recettanza

$$[A(\omega)] = [D(\omega)]^{-1}$$

Nella pratica il costo computazionale di tale matrice è molto elevato per sistemi a molti GDL per cui è conveniente passare dalle coordinate fisiche a quelle modali e si ottiene

$$[\phi]^T [-\omega^2[m] + i\omega[c] + [k]] [\phi] \{\bar{q}\} = [\phi]^T \{\bar{F}\}$$

$$[-\omega^2[I] + i\omega \text{diag}[c_n] + \text{diag}[\omega_n^2]] \{\bar{q}\} = [\phi]^T \{\bar{F}\}$$

dove le matrici che si sommano all'interno delle parentesi quadre sono diagonali per cui la matrice risultante sarà anch'essa diagonale.

Esplicitando per  $\bar{q}$  si ha

$$\{\bar{q}\} = \text{diag} \left[ \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2 + i\omega c_n} \right] [\phi]^T \{\bar{F}\}$$

ed infine, pre-moltiplicando per  $[\phi]$

$$\{\bar{x}\} = [\phi] \text{diag} \left[ \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2 + i\omega c_n} \right] [\phi]^T \{\bar{F}\} \quad (2.12)$$

Si noti che da questa notazione è possibile esprimere la matrice di recettanza come

$$A_{j,k}(\omega) = \frac{\bar{x}_j}{\bar{F}_k}$$

che esprime il rapporto tra il j-esimo GDL e la k-esima forzante.

E' importante notare che, riscrivendo in forma matriciale la relazione completa, se si è interessati solo alla risposta del j-esimo GDL  $\bar{x}_j$  basterebbe tenere in considerazione solamente la riga degli autovettori voluta. Isolando solo la parte interessata del j-esimo GDL si evince che il valore della recettanza può essere espresso come la seguente sommatoria

$$A_{j,k}(\omega) = \frac{\bar{x}_j}{\bar{F}_k} = \sum_{n=1}^N \frac{\phi_{n,j} \phi_{n,k}}{\omega_n^2 - \omega^2 + i\omega c_n}$$

Questa notazione è molto potente poiché raggiunge il valore massimo solo quando la frequenza è pari a quella n-esima di risonanza e tende a diminuire molto quando la frequenza dell'eccitante si allontana da quella naturale. Ciò dimostra che i contributi delle altre frequenze di risonanza non sono necessari al calcolo della risposta massima per una data  $\omega_n$  poiché saranno molto piccoli e non incidono significativamente. Questa caratteristica permette di diminuire i tempi di calcolo perché basta concentrarsi sui modi che realmente daranno un contributo alla definizione della risposta. [5]

## 2.2 Modello di contatto

Due corpi a contatto scambiano delle forze tra loro e si deformano.

Il contatto è modellato mediante delle molle con una certa rigidezza in direzione normale e tangenziale. Nella realtà non avranno sempre lo stesso valore, ma per motivi di studio si analizza il semplice caso in cui il loro valore è costante.

Prendendo come riferimento un sistema ad 1 GDL, il contatto può essere espresso come nella figura 2.8

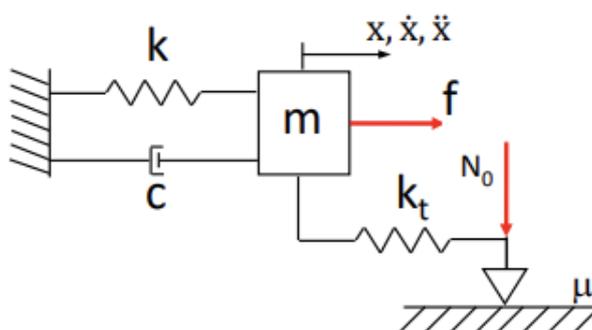


Figura 2.8: Modello di contatto [7]

Per semplicità si è scelto il solo contatto tangenziale poiché permette di spiegare il funzionamento del modello di attrito coulombiano dove, il moto periodico definito da  $x(t)$ , permette, nel caso in cui si supera il limite, la manifestazione dei due stati:

- stick (adesione), cioè  $y(t) = 0$  e  $\|f_c(t)\| < \mu N_0$
- slip (strisciamento), cioè  $y(t) \neq 0$  e  $\|f_c(t)\| = \mu N_0$

Prendendo in considerazione la sola forza di contatto, rappresentata in figura 2.9 e descritta dalla seguente equazione

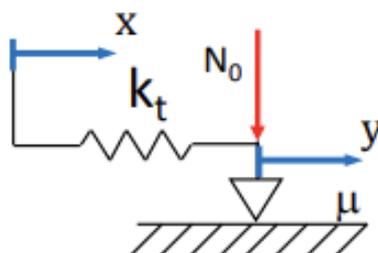


Figura 2.9: schema molla tangenziale [7]

$$f_c(t) = k_t(x(t) - y(t))$$

si evince che se  $f_c(t) > 0$  la molla risulta compressa, viceversa, se minore di 0, sarà tesa.

Analizzando la relazione si scopre che il contatto rimane bloccato fin quando  $|f_c(t)| \leq \mu N_0$ , cioè quando viene raggiunto il limite di Coulomb, oltre tale valore si passa dalla fase di stick a quella di slip, determinata dallo strisciamento fra i due corpi in corrispondenza del punto di contatto. Nella fase di slip i due sistemi di riferimento,  $x$  e  $y$ , si muovono delle stesse quantità per cui la molla né si allunga, né si accorcia. Mentre, durante la transizione da slip a stick si manifesta l'inversione del moto relativo, cioè la velocità  $\dot{x}(t)$  cambia di segno. In questo caso la forza sulla molla diminuisce e si passa a valori inferiori al limite di Coulomb. [7]

### 2.2.1 Utilizzo dei modelli di contatto

Analizzando in dettaglio i modelli di contatto e i criteri di transizione è possibile calcolare le rispettive forze ed estrarre i coefficienti di Fourier da inserire nelle equazioni di equilibrio.

Nella trattazione si è deciso di usare l'armonica fondamentale con fase iniziale  $\phi = 0$ , descritta dallo spostamento

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t + \phi)$$

Come espresso precedentemente, nel modello bisogna distinguere due casi, il primo in cui la forza di contatto non supera il limite di Coulomb ed il secondo in cui tale forza è maggiore del limite. [7]

Nel primo caso si prende in considerazione un moto armonico con delle ampiezze che non permettono il superamento del limite. In questa situazione non si ha lo strisciamento dei corpi per cui è possibile considerare  $y(t) = 0$ , cioè il contatto rimane bloccato. L'equazione della forza sarà

$$f_c(t) = k_t(x(t) - y(t)) = k_t x(t)$$

e nel caso critico avrà la forma

$$f_c = k_t c_{cr} = \mu N_0$$

da cui

$$x_{cr} = \frac{\mu N_0}{k_t}$$

Poiché non si ha strisciamento l'equazione del moto

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) - f_c(x, \dot{x}, t)$$

non sarà condizionata dallo spostamento e dalla velocità per cui è possibile esprimerla nel seguente modo, sfruttando la relazione  $f_c(t) = k_t x(t)$

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + (k + k_t)x(t) = f(t) \quad (2.13)$$

Lo spostamento avrà l'andamento rappresentato nella figura 2.10 dove il valore massimo si raggiunge per il limite di Coulomb.

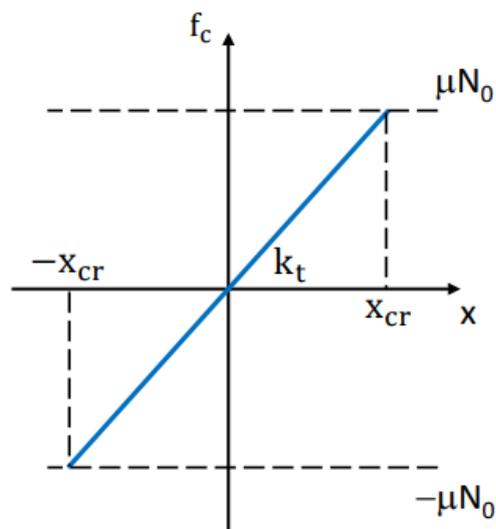


Figura 2.10: Andamento dello spostamento per ampiezze  $\leq$  al limite di Coulomb [7]

Si noti la che l'area sottesa dalla curva è nulla per cui non si ha dispersione energetica.

Nel caso in cui  $x_0 > x_{cr}$ , cioè l'ampiezza supera il limite di Coulomb, il modello subirà la transizione stick/slip e, poiché si è presa in considerazione l'armonica fondamentale, si avrà un ciclo di isteresi dipendente da  $x_0$  come nella figura 2.11

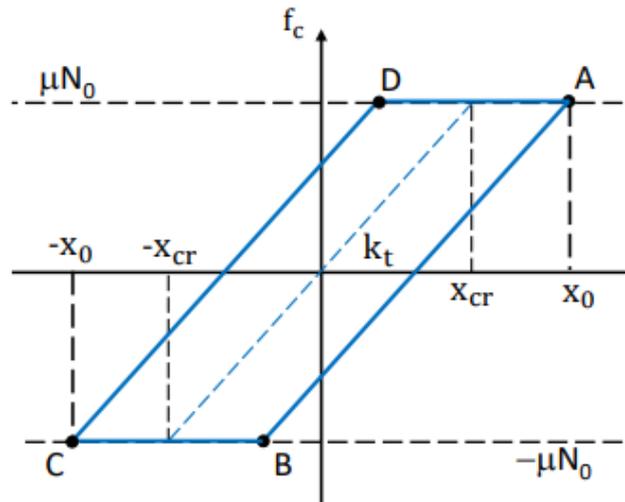


Figura 2.11: Ciclo ottenuto con  $x_0 > x_{cr}$  [7]

Se nel primo caso determinare la forza di contatto lungo i tratti è semplice, nel ciclo di isteresi il processo si complica.

Prendendo in considerazione le relazioni

$$f_c = k_t(x - y) \quad (2.14)$$

$$x = x_0 \cos(\theta) \quad (2.15)$$

e, ricordando che nei quattro punti estremi del ciclo il valore della forza di contatto vale in valore assoluto esattamente il limite di Coulomb, è possibile determinare il valore lungo i tratti.

Nel proseguo si analizzano sia i punti di transizione sia i tratti che li collegano; nonostante si conosca il valore dei primi, è necessario usarli per esplicitare i valori di  $y(t)$  e  $\theta$  che andranno sostituiti nella relazione 2.14 per conoscere, di volta in volta, il valore della forza di contatto lungo tutti i punti del tratto.

- **Punto A**

Nel punto iniziale  $\theta$  è nulla e la forza di contatto è determinata dalla seguente espressione e vale esattamente il limite di Coulomb

$$f_c = k_t(x_0 - y_A) = \mu N_0$$

Questa relazione permette di ricavare  $y_A$  necessaria per il per determinare la forza nel tratto successivo

$$y_A = x_0 - \frac{\mu N_0}{k_t}$$

- **Tratto A-B**

Il primo tratto dipende dal valore di  $y_A$ , per cui bisogna sostituirlo nella relazione 2.14

$$f_c(\theta) = k_t(x - y_A) = \mu N_0 + k_t x_0(\cos(\theta) - 1) \quad (2.16)$$

- **Punto B**

Nel punto B si conosce il valore della forza di contatto, ma non quello della di  $\theta_B$  per cui, utilizzando la relazione 2.14 espressa nel seguente modo

$$f_c = k_t(x_0 \cos(\theta) - y_A) = -\mu N_0$$

è possibile determinare il suo valore

$$\theta_B = \arccos\left(1 - \frac{2\mu N_0}{k_t x_0}\right)$$

- **Tratto B-C**

Essendo nella fase di slip il valore della forza di contatto rimane costante e vale

$$f_c = k_t(x - y) = -\mu N_0 \quad (2.17)$$

Mentre  $\theta$  assume un valore compreso fra  $\theta_B$  e  $\pi$ .

- **Punto C**

In C sia ha la transizione tra slip e stick, quindi si ha l'inversione del moto, inoltre  $\theta_C = \pi$ , mentre

$$f_c = k_t(-x_0 - y_C) = -\mu N_0$$

Esplicitando si ottiene

$$y_C = -x_0 + \frac{\mu N_0}{k_t} = -y_A$$

$y_C$  ha lo stesso valore di  $y_A$  ma con segno opposto, questo perché si sta percorrendo il tratto di curva inverso

- **Tratto C-D**

Il tratto C-D ha lo stesso valore di tratto A-B, ma è sfasato di  $\pi$

$$f_C(\theta) = k_t(x - y_C) = -\mu N_0 + k_t x_0 (\cos(\theta) + 1) \quad (2.18)$$

- **Punto D**

Infine, nel punto D si ha la transizione tra stick e slip e si nota che i valori presentano un'analogia con il punto diametralmente opposto

$$f_C = k_t(x_0 \cos(\theta_D) - y_C) = \mu N_0$$

e

$$\theta_D = \arccos\left(-1 + \frac{2\mu N_0}{k_t x_0}\right) = \theta_B + \pi$$

cioè  $\theta$  è sfasata di  $\pi$  rispetto B.

- **Tratto A-D**

L'ultimo tratto è caratterizzato dalla forza di contatto costante

$$f_c = k_t(x - y) = \mu N_0 \quad (2.19)$$

Tornando all'equazione di equilibrio e approssimando l'andamento periodico con il primo termine di Fourier si ottiene

$$f_c(\theta) \simeq \operatorname{Re}(\bar{f}_c^{(1)} e^{i\theta})$$

da cui si ricavano le relazioni

$$\operatorname{Re}(\bar{f}_c^{(1)}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_c(\theta) \cos(\theta) d\theta \quad (2.20)$$

$$\operatorname{Im}(\bar{f}_c^{(1)}) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_c(\theta) \sin(\theta) d\theta \quad (2.21)$$

Analizzandole nel caso  $x_0 < x_{cr}$ , quindi in full-stick, e ricordando che

$$f_c(\theta) = k_t x_0 \cos(\theta)$$

si ottengono i seguenti risultati

$$\operatorname{Re}(\bar{f}_c^{(1)}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_c(\theta) \cos(\theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} k_t x_0 \cos(\theta) \cos(\theta) d\theta = \frac{k_t x_0}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta = k_t x_0$$

$$Im(\bar{f}_c^{(1)}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_c(\theta) \sin(\theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} k_t x_0 \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta = \frac{k_t x_0}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta = 0$$

Questi risultati affermano che

- il contatto è lineare
- la forza è in fase con lo spostamento
- la forza è pari al prodotto dello spostamento per la rigidità di contatto

Nel caso  $x_0 > x_{cr}$  l'alternanza del contatto fa sì che la forza è definita a tratti per cui è possibile spezzare l'integrale

$$\int_0^{2\pi} \dots d\theta = \int_0^{\theta_B} \dots d\theta + \int_{\theta_B}^{\pi} \dots d\theta + \int_{\pi}^{\pi+\theta_B} \dots d\theta + \int_{\pi+\theta_B}^{2\pi} \dots d\theta$$

e per la loro proprietà e la simmetria è possibile semplificare ulteriormente il calcolo

$$\int_0^{2\pi} \dots d\theta = 2 \int_0^{\theta_B} \dots d\theta + 2 \int_{\theta_B}^{\pi} \dots d\theta$$

Distinguendo nuovamente fra parte reale e immaginaria si ottengono le seguenti forme

$$Re(\bar{f}_c^{(1)}) = \frac{2}{\pi} \left[ \int_0^{\theta_B} f_c(\theta) \cos(\theta) d\theta + \int_{\theta_B}^{\pi} f_c(\theta) \cos(\theta) d\theta \right] \quad (2.22)$$

$$Im(\bar{f}_c^{(1)}) = \frac{2}{\pi} \left[ \int_0^{\theta_B} f_c(\theta) \sin(\theta) d\theta + \int_{\theta_B}^{\pi} f_c(\theta) \sin(\theta) d\theta \right] \quad (2.23)$$

ricordando i valori delle forze di contatto 2.16 e 2.17 ed il valore di  $\cos(\theta_B)$  è possibile integrare 2.22 e 2.23, si ottengono i seguenti valori

$$Re(\bar{f}_c^{(1)}) = \frac{k_t x_0}{\pi} \left[ \theta_B - \frac{1}{2} [\sin(2\theta_B)] \right] \quad (2.24)$$

$$Im(\bar{f}_c^{(1)}) = \frac{4\mu N_0}{\pi} \left[ 1 - \frac{\mu N_0}{k_t x_0} \right] \quad (2.25)$$

Questi risultati mostrano che la parte reale è in fase con lo spostamento, quindi si tratta di una forza elastica, mentre il caso immaginario è sfasato di  $\pi$  per cui si tratta una forza dissipativa.

In definitiva, la componente  $N_0$  nella parte immaginaria prende il nome di pre-carico e modifica l'andamento della risposta come nella figura 2.12

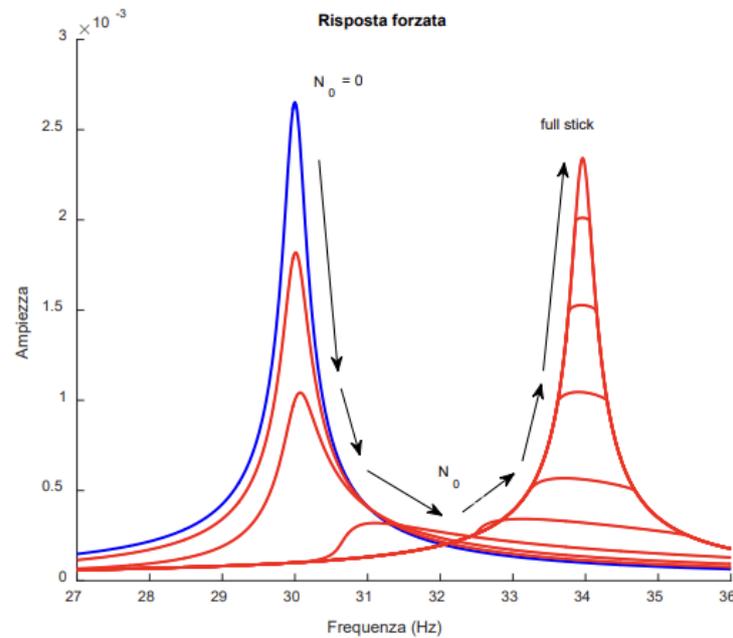


Figura 2.12: Risposta forzata al variare del pre-carico  $N_0$  [7]

cioè all'aumentare di tale valore la risposta si sposta a frequenze maggiori e si ottengono gli stessi risultati di un contatto bloccato poiché si passa al campo full-stick. [7]

## 2.3 Cenni teorici alle tecniche di riduzione

L'ambito della progettazione industriale di componenti ha spinto sulla ricerca di tecniche di riduzione poiché i modelli ad elementi finiti utilizzati presentano molti GDL e richiedono un elevato costo computazionale. Questi metodi hanno l'obiettivo di ridurre grandi matrici, dove sono presenti molti GDL, in matrici più piccole (ridotte), in modo da snellire i tempi di calcolo di modelli molto grandi, preservando l'accuratezza dei risultati di interesse.

Un altro aspetto che rende la riduzione un metodo efficace risiede nel fatto che un sistema di grandi dimensioni presenta molte forme modali che si manifestano per frequenze di risonanza progressivamente maggiori. In particolare, durante la vita operativa dei componenti molte modi di vibrare non verranno mai eccitati, quindi è preferibile studiare il comportamento all'interno di un range di frequenze di interesse.

Nel corso degli anni sono state presentate diverse tecniche di riduzione, di seguito vengono proposte le tre più importanti:

- Il metodo di condensazione statica, o riduzione di Guyan, si basa su considerazioni statiche. Dal punto di vista dei nodi si tengono in considerazione solo i GDL di alcuni esterni, che verranno chiamati master, mentre si ridurranno tutti i quelli interni, definiti come slave. Dal punto di vista delle matrici che vengono generate si ha quella del trasferimento ai nodi slave degli spostamenti calcolati ai nodi master, quella di rigidezza che esprime il legame fra GDL esterni e quella di massa che risulta approssimata. Poiché il metodo è basato su considerazioni di tipo statico non è ottimale per i calcoli dinamici. Seppur presenti dei buoni risultati bisogna tenere in considerazione l'elevato costo computazionale per la generazione delle matrici nella fase di riduzione. [4]
- La tecnica di riduzione modale tiene conto dei modi del sistema, in particolare conserva una piccola parte di tutti i possibili autovettori della base modale per usarli nelle analisi dinamiche. Il vantaggio della tecnica risiede nel disaccoppiare le equazioni del sistema espresse nello spazio modale. Il problema è che non è sempre possibile approssimare il comportamento della struttura mediante la sovrapposizione modale, per cui bisogna fare attenzione ad aggiungere o eliminare ai vincoli poichè si può incorrere in errori. [4]
- Il metodo di condensazione dinamica di Craig-Bampton risulta molto efficiente, in particolare sfrutta le caratteristiche positive dei due precedenti unendo la riduzione statica e modale. Tenendo in considerazione il modello ridotto di Guyan si aggiungono i modi calcolati imponendo dei vincoli sui nodi esterni. Questi modi prendono il nome di GDL generalizzati. Questa tecnica presenta lo svantaggio di avere molte più equazioni per rappresentare il modello rispetto ai due casi precedenti, ma allo stesso tempo risulta molto più accurato.[4]

Nella trattazione si terrà conto del metodo di riduzione di Craig-Bampton a cui verrà dedicata la seguente sottosezione, dove verrà spiegato il modo in cui si ottiene la matrice di riduzione e la sua conseguente applicazione alle matrici di massa e rigidezza.

### 2.3.1 Metodo di Craig-Bampton

Il metodo di Craig-Bampton è una tecnica di condensazione dinamica utilizzata per ridurre sistemi complessi a molti GDL in sistemi più semplici, mantenendo da un lato una determinata precisione per le frequenze basse di interesse, dall'altro una buona risposta dinamica in determinati punti del sistema, cioè in corrispondenza delle interfacce. [5]

Questa riduzione implica la divisione del sistema in due sotto gruppi:

- GDL interni, ossia quelli che subiranno la riduzione poiché sono meno significativi nel comportamento dinamico complessivo del sistema;
- GDL di vincolo, cioè i nodi in cui o il sistema è collegato ad altri componenti o sono sede di applicazione delle forze esterne, quindi subiranno degli spostamenti fisici.

Prendendo in considerazione l'equazione che descrive il moto di un sistema dinamico

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = F(t) \quad (2.26)$$

dove

- M rappresenta la matrice di massa
- C è la matrice di smorzamento
- K corrisponde alla matrice di rigidezza
- F è la forzante esterna

è possibile esprimere lo spostamento nella seguente forma

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_i \\ x_v \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

La particolarità di questo metodo è da attribuire al modo in cui vengono espressi gli spostamenti dei GDL interni, poiché risultano composizione lineare della risposta statica e dei modi dinamici interni secondo la seguente relazione

$$\{x_i\} = [\phi_i]\{q_i\} + [T]\{x_v\} \quad (2.28)$$

Il primo prodotto indica i modi dinamici interni, in particolare,  $\phi_i$  è la matrice che contiene le forme modali calcolate con  $\{x_v\} = \{0\}$ , mentre in  $q_i$  sono presenti le rispettive coordinate modali associate ai relativi nodi. Il secondo prodotto riguarda la risposta statica dove la matrice T descrive tale risposta rispetto i nodi di vincolo; è definita come

$$[T] = -[k_{ii}]^{-1}[k_{iv}] \quad (2.29)$$

Con  $[k_{ii}]$  e  $k_{iv}$  che rappresentano le sotto matrici che si ottengono riordinando la matrice di rigidezza nel seguente modo

$$[K] = \begin{bmatrix} [k_{ii}] & [k_{iv}] \\ [k_{vi}] & [k_{vv}] \end{bmatrix}$$

Mediante questi valori è possibile definire la matrice di riduzione

$$\begin{Bmatrix} x_i \\ x_v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\phi_i] & [T] \\ [0] & [I] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_i \\ x_v \end{Bmatrix} \quad (2.30)$$

La matrice sopra riportata prende il nome di matrice di riduzione e viene indicata con [R]. [5]

Si noti che le dimensioni di tale matrice dipendono dal numero di modi interni scelti, in particolare se si decidesse di usarli tutti si otterrebbe una matrice quadrata e non avrebbe senso effettuare la riduzione, quindi ne vengono scelti solo pochi. Quindi si otterrà una matrice rettangolare avente numero di righe pari a quello della matrice di massa/rigidezza e come colonne la somma fra il numero di GDL vincolati e il numero di modi interni scelti.

Da quanto espresso, questo metodo risulta vantaggioso dal punto di vista computazionale, riuscendo a ridurre i GDL di sistemi molto grandi e, al tempo stesso, riuscendo a mantenere una certa accuratezza per i GDL di vincolo, preservando le proprietà modali più importanti. Di contro il metodo risulta poco accurato per le alte frequenze, a meno che non vengano inclusi un numero sufficiente di modi interni.

# Capitolo 3

## Metodologia

Nella realtà i sistemi meccanici presentano un comportamento lineare solo in presenza di determinati parametri, se questi vengono meno si entra nel campo della non linearità.

Esistono 3 tipi principali di non linearità:

- Non linearità geometriche in presenza di grandi deformazioni elastiche
- Non linearità del materiale in presenza di deformazioni e tensioni in campo plastico
- Non linearità di contatto

Nel corso della trattazione verrà considerata l'ultima.

Le forze vengono scambiate attraverso le superfici di contatto ed il loro valore dipende dalla cinematica del contatto. I modelli possono essere schematizzati in base ai GDL che si tengono in considerazione per ogni nodo e sono schematizzati nella figura 3.1

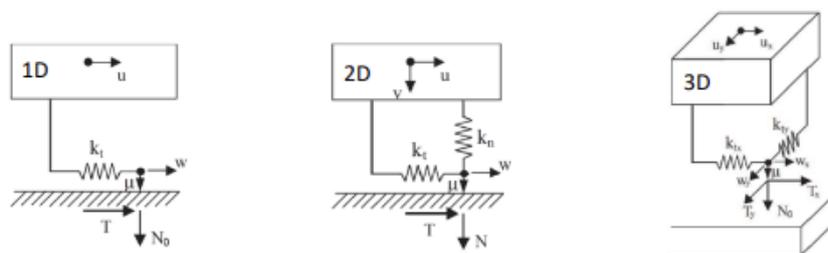


Figura 3.1: Modelli di contatto [7]

### 3.1 Metodo del bilanciamento armonico - sistema a 1 grado di libertà

Se un sistema lineare ad un GDL è definito dalla seguente equazione del moto

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \quad (3.1)$$

quello non lineare presenta in più una forza di contatto tangenziale  $f_c$  nata dallo strisciamento della massa che sarà funzione dello spostamento, della velocità e del tempo.

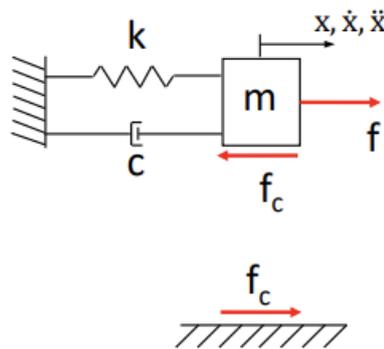


Figura 3.2: Esempio della forza di contatto tangenziale [7]

L'equazione del moto così descritta sarà

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) - f_c(x, \dot{x}, t) \quad (3.2)$$

Come si evince questa nuova forzante introduce una non linearità nel sistema poiché non dipende linearmente da  $x$ . In definitiva, anche se si introducesse una forzante armonica del tipo

$$f(t) = \bar{f}e^{i\omega t}$$

non è possibile assumere che la risposta lo sia pure perché la forza di contatto introduce una non linearità

$$x(t) \neq \bar{x}e^{i\omega t}$$

Questo concetto permette di introdurre il metodo del bilanciamento armonico. In generale, un sistema non lineare soggetto ad una forzante armonica potrà avere due tipi di risposte:

- una periodica (ma non armonica) di periodo T pari a quello della forzante
- una non periodica

Prendendo in considerazione la prima e confrontandola con l'equazione di equilibrio è possibile affermare che la risposta  $x(t)$  sarà periodica solo se la forza di contatto  $f_c(x, \dot{x}, t)$  è periodica. Inoltre, essendo una funzione periodica esprimibile come somma di componenti armoniche di Fourier, è possibile riscrivere la risposta e la forza di contatto nel seguente modo:

$$x(t) \cong x_0 + \sum_{n=1}^N \bar{x}^{(n)} e^{in\omega t} \quad f_c(t) \cong f_{c0}(x, \dot{x}) + \sum_{n=1}^N \bar{f}_c^{(n)} e^{in\omega t}$$

Si noti che "N" sopra la sommatoria indica il grado dell'armonica; bisogna fare attenzione al grado di troncamento della serie di Fourier perché da essa dipende l'accuratezza dei risultati.

Trascurando la componente statica,  $x_0$  e  $f_{c0}$ , e tenendo in considerazione solamente quella dinamica è possibile riscrivere l'equazione di equilibrio attraverso le notazioni espresse sopra

$$-m \sum_{n=1}^N n^2 \omega^2 \bar{x}^{(n)} e^{in\omega t} + c \sum_{n=1}^N in\omega \bar{x}^{(n)} e^{in\omega t} + k \sum_{n=1}^N \bar{x}^{(n)} e^{in\omega t} = \bar{f} e^{i\omega t} - \sum_{n=1}^N \bar{f}_c^{(n)} e^{in\omega t}$$

Raccogliendo a fattor comune

$$\sum_{n=1}^N (-n\omega)^2 m + in\omega c + k \bar{x}^{(n)} e^{in\omega t} = \bar{f} e^{i\omega t} - \sum_{n=1}^N \bar{f}_c^{(n)} e^{in\omega t}$$

Adesso è possibile distinguere due casi, il primo si riferisce all'armonica ( $n = 1$ ), il secondo a tutte le armoniche successive ( $n > 1$ ).

$$\begin{aligned} n = 1 & \quad (-\omega^2 m + i\omega c + k) \bar{x}^{(1)} e^{i\omega t} = \bar{f} e^{i\omega t} - \bar{f}_c^{(1)} e^{i\omega t} \\ n > 1 & \quad (-(n\omega)^2 m + in\omega c + k) \bar{x}^{(n)} e^{in\omega t} = -\bar{f}_c^{(n)} e^{in\omega t} \end{aligned}$$

Eliminando la dipendenza dal tempo si ottiene il set di equazioni che esprime il "metodo del bilanciamento armonico" per un sistema a 1 GDL

$$\begin{cases} n = 1 & (-\omega^2 m + i\omega c + k) \bar{x}^{(1)} = \bar{f} - \bar{f}_c^{(1)} \\ n > 1 & (-(n\omega)^2 m + in\omega c + k) \bar{x}^{(n)} = -\bar{f}_c^{(n)} \end{cases} \quad (3.3)$$

Bisogna osservare che ai fini di rispettare l'uguaglianza i termini n-esimi devono essere identici sia a destra che a sinistra. Inoltre, poiché il generico coefficiente di Fourier delle forze di contatto dipende da  $x(t)$  e sapendo che quest'ultimo è rappresentato da

$$x(t) \approx x_0 + \sum_{n=1}^N \bar{x}^{(n)} e^{in\omega t}$$

è possibile affermare che

$$\bar{f}_c^{(n)}(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \dots, \bar{x}^{(n)})$$

Cioè la forza di contatto è dipendente dallo spostamento delle singole armoniche per cui le equazioni nella formulazione HBM sono accoppiate tra di loro

Poiché si utilizzerà la prima armonica si analizza il caso 1 GDL con  $n = 1$ . L'equazione da risolvere è

$$(\omega^2 m + i\omega c + k)\bar{x}^{(1)} = \bar{f} - \bar{f}_c^{(1)} \quad (3.4)$$

e può essere espressa nella forma con parte reale e immaginaria come segue:

$$(-\omega^2 m + i\omega c + k)(\text{Re}(\bar{x}^{(1)}) + i\text{Im}(\bar{x}^{(1)})) = (\text{Re}(\bar{f}) + i\text{Im}(\bar{f})) - (\text{Re}(\bar{f}_c^{(1)}) + i\text{Im}(\bar{f}_c^{(1)}))$$

Riscrivendo in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 m + k & -\omega c \\ \omega c & -\omega^2 m + k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \text{Re}(\bar{x}^{(1)}) \\ \text{Im}(\bar{x}^{(1)}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \text{Re}(\bar{f}) \\ \text{Im}(\bar{f}) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \text{Re}(\bar{f}_c^{(1)}) \\ \text{Im}(\bar{f}_c^{(1)}) \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

si noti che è un sistema di equazioni algebriche reali non lineari per cui il metodo di soluzione dovrà essere iterativo e si arriverà a convergenza solo dopo aver raggiunto una soglia minima. Un possibile metodo sarà Newton-Raphson. [7]

Nel paragrafo successivo verrà implementato il metodo per un sistema a N gradi di libertà.

## 3.2 Metodo del bilanciamento armonico - sistema a N gradi di libertà

Il sistema di equazioni 3.3 è riferito ad un modello dove è presente solamente 1 GDL. Nel caso si voglia espandere il metodo ad un modello contenente molti GDL bisogna riscrivere il set di equazioni nel seguente modo

$$\begin{cases} n = 1 & (-\omega^2[M] + i\omega[C] + [K])\bar{x}^{(1)} = \bar{F} - \bar{F}_c^{(1)} \\ n > 1 & (-(n\omega)^2[M] + in\omega[C] + [K])\bar{x}^{(n)} = -\bar{F}_c^{(n)} \end{cases} \quad (3.6)$$

Questa forma risulta molto generica in quanto non tutti i GDL sono di contatto, inoltre, tutti quelli che non appartengono a questa categoria, non risentono della forzante non lineare.

Sfruttando le seguenti caratteristiche:

- le forze di contatto non lineari dipendono solamente dai GDL di contatto
- le forze di contatto non lineari agiscono solamente sui GDL dei relativi spostamenti

è possibile migliorare l'efficienza dei calcoli dividendo il vettore degli spostamenti nelle due tipologie di GDL, di contatto e non, quest'ultimi solitamente sono chiamati extra

$$\left\{ \bar{X}^{(n)} \right\} = \begin{Bmatrix} \bar{X}_b^{(n)} \\ \bar{X}_e^{(n)} \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

Dove i pedici assumono i seguenti significati

- n = numero dell'armonica
- b = nodi di contatto
- e = nodi extra

Definendo la matrice di rigidezza dinamica nel seguente modo [3]

$$D^{(n)}(\omega) = -(n\omega)^2[M] + in\omega[C] + [K]$$

è possibile scrivere le equazioni che descrivono il moto del sistema a N GDL soggetto a forze di contatto non lineari nel seguente modo:

$$\begin{bmatrix} D_{bb}^{(n)}(\omega) & D_{be}^{(n)}(\omega) \\ D_{eb}^{(n)}(\omega) & D_{ee}^{(n)}(\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{X}_{b,n}^{(n)} \\ \bar{X}_{e,n}^{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_{b,n}^{(n)} \\ \bar{F}_{e,n}^{(n)} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \bar{F}_{nl}^{(n)} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

La sua risoluzione permette di calcolare la risposta forzata non lineare di un modello a N GDL con contatti striscianti. [1]

Questa forma risulta molto onerosa dal punto di vista computazionale poiché contiene tutte le informazioni riguardanti il modello. Nella trattazione si vuole studiare un metodo con cui ottenere dei risultati approssimativamente simili a quelli che

si otterrebbero attraverso la notazione sopra, usando un modello contenente meno informazioni.

Per la creazione del nuovo modello è deciso di utilizzare il metodo di Craig-Bampton, dove si sono scelti come nodi master quelli di contatto e di applicazione delle forzanti esterni, mentre per gli slave sono stati tenuti solamente 60 modi. Tale metodo verrà applicato alle equazioni del moto riportate sopra nel seguente paragrafo.

Generalmente i modelli reali sono descritti da modelli di contatto 3D, per cui sarà necessario l'utilizzo dell'equazione sopra riportata, 3.8, per effettuare le analisi non lineari.

Un tipico modello è schematizzato nella figura sottostante, dove, la forza che si instaura in corrispondenza del punto di contatto, è modellata mediante tre componenti, due parallele alla superficie ed una perpendicolare.

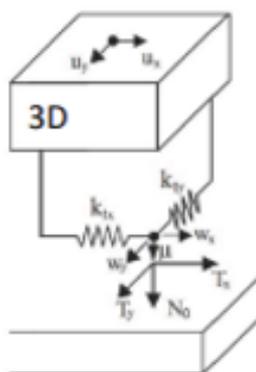


Figura 3.3: Modello di contatto 3D [7]

Ci sono diversi fattori che influiscono sul contatto, i principali sono la tipologia di superficie attraverso la quale si instaura e le proprietà del materiale.

Analizzando quest'ultimo fattore è possibile affermare che il contatto è modellato sulla legge di Coulomb dove si afferma che i due corpi rimangono in contatto, quindi nella situazione di stick, finché le forze tangenziali non superano il limite. Da un punto di vista matematico

$$|f_c(t)| = \mu N_0$$

dove

$$f_c(t) = \sqrt{f_{cx}(t)^2 + f_{cy}(t)^2}$$

con le forze descritte dal prodotto fra la costante di rigidità e lo spostamento che le molle, schematizzate, subiscono a seguito delle forzanti esterne.

### 3.3 Utilizzo di modelli ridotti nel calcolo della risposta forzata non lineare

La notazione descritta nel paragrafo 3.2 è riferita al caso in cui si prende in considerazione il modello completo con tutti i GDL. Nella trattazione si vuole implementare un metodo che snellisca le matrici e riduca significativamente i tempi di calcolo. Per far ciò si è deciso di applicare la riduzione di Craig-Bampton alla legge del moto 3.8

Riprendendo le notazioni scritte nel paragrafo 2.3.1, cioè quello relativo alla riduzione, si evince che è necessario determinare ed utilizzare la matrice di riduzione definita come

$$[R] = \begin{bmatrix} [\phi_i] & [T_A] \\ [0] & [I] \end{bmatrix}$$

dove

- $[\phi_i]$  è la matrice delle forme modali
- $[T_A]$  è la matrice ottenuta mediante la moltiplicazione 2.29

Poiché lo spostamento secondo questa riduzione è definito come

$$\begin{Bmatrix} x_e^{(n)} \\ x_b^{(n)} \end{Bmatrix} = [R] \begin{Bmatrix} Q_e \\ X_b \end{Bmatrix}$$

risulta conveniente riscrivere l'equazione del moto 3.8 nella forma

$$\begin{bmatrix} D_{be}^{(n)}(\omega) & D_{bb}^{(n)}(\omega) \\ D_{ee}^{(n)}(\omega) & D_{eb}^{(n)}(\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{X}_e^{(n)} \\ \bar{X}_b^{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_e^{(n)} \\ \bar{F}_b^{(n)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{F}_{nl}^{(n)} \end{Bmatrix}$$

in modo da poter sostituire la relazione dello spostamento senza effettuare ulteriori passaggi. Successivamente è necessario pre moltiplicare tutti i termini per la trasposta della matrice di riduzione per ultimare la riduzione. Nel dettaglio

$$[R]^T \begin{bmatrix} D_{be}^{(n)}(\omega) & D_{bb}^{(n)}(\omega) \\ D_{ee}^{(n)}(\omega) & D_{eb}^{(n)}(\omega) \end{bmatrix} [R] \begin{Bmatrix} \bar{Q}_e \\ \bar{X}_b \end{Bmatrix} = [R]^T \begin{Bmatrix} \bar{F}_e^{(n)} \\ \bar{F}_b^{(n)} \end{Bmatrix} + [R]^T \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{F}_{nl}^{(n)} \end{Bmatrix}$$

Analizzando i due fattori a destra dell'uguale si evince che il prodotto fra la matrice di riduzione ed il vettore delle forzanti non lineari avrà la seguente forma

$$[R]^T \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{F}_{nl}^{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{F}_{nl}^{(n)} \end{Bmatrix}$$

mentre

$$[R]^T \begin{Bmatrix} \overline{F}_e^{(n)} \\ \overline{F}_b^{(n)} \end{Bmatrix}$$

rimane espresso nel seguente modo perché il vettore  $\{\overline{F}_e^{(n)}\}$  potrebbe essere diverso da zero.

Applicando queste considerazioni, la legge del moto secondo la riduzione di Craig-Bampton assume la seguente forma particolare

$$\begin{bmatrix} D_{be}^{(n)}(\omega) & D_{bb}^{(n)}(\omega) \\ D_{ee}^{(n)}(\omega) & D_{eb}^{(n)}(\omega) \end{bmatrix}_{rid} \begin{Bmatrix} \overline{Q}_e^{(n)} \\ \overline{X}_b^{(n)} \end{Bmatrix} = [R]^T \begin{Bmatrix} \overline{F}_e^{(n)} \\ \overline{F}_b^{(n)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \overline{F}_{nl}^{(n)} \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

La sua risoluzione permette di calcolare la risposta forzata non lineare di un modello ridotto con contatti striscianti.

Bisogna osservare che nella pratica i nodi master non saranno solo i nodi di contatto, ma è possibile aggiungerne altri, necessari, ad esempio, per l'applicazione delle forze esterne o per la visualizzazione della risposta. Secondo questa osservazione è necessario effettuare una modifica al vettore delle forze non lineari ed una al vettore degli spostamenti, nel primo caso

$$\left\{ \overline{F}_{nl}^{(n)} \right\}_{old} = \begin{Bmatrix} \overline{F}_{nl}^{(n)} \\ 0 \end{Bmatrix}_{new}$$

dove il vettore degli zeri appartiene ai nodi master non coinvolti nel contatto. Nel secondo caso bisogna distinguere ulteriormente gli spostamenti in quanto quelli non appartenenti al contatto possono essere definiti come master non di contatto ed il vettore assume la forma

$$\left\{ \overline{X}_b^{(n)} \right\}_{old} = \begin{Bmatrix} \overline{X}_b^{(n)} \\ \overline{X}_n^{(n)} \end{Bmatrix}_{new}$$

### 3.4 Calcolo della risposta forzata dell'intero modello

L'equazione 3.9, nel paragrafo precedente, presenta delle limitazioni poiché non contiene le informazioni riguardo il modello completo, quindi non è possibile determinare la risposta forzata di tutti i gradi di libertà.

La sua risoluzione permette di ottenere il vettore degli spostamenti ridotti ed il vettore delle forze di contatto. Entrambi i vettori possono essere usati per la

determinazione della risposta forzata dell'intero modello, mediante due approcci diversi:

- Nel primo approccio si utilizza il vettore degli spostamenti ridotti determinato mediante la relazione 3.3.

$$\begin{Bmatrix} x_e^{(n)} \\ x_c^{(n)} \end{Bmatrix} = [R] \begin{Bmatrix} Q_e \\ X_c \end{Bmatrix}$$

Si noti che è possibile determinare il vettore degli spostamenti del sistema completo moltiplicando quello degli spostamenti ridotti per la matrice di riduzione.

Questo approccio presenta delle limitazioni poiché è necessario conoscere la matrice di riduzione, non sempre disponibile, inoltre, per i sistemi industriali dove sono presenti molti gradi di libertà, è difficile gestirla.

- Nel secondo approccio si sfrutta il vettore delle forze di contatto determinato a seguito della risoluzione dell'equazione 3.9.

Nel dettaglio, queste forze vengono applicate al modello completo come se fossero delle forzanti esterne, in modo da ottenere un sistema lineare. In definitiva, non essendo presenti delle forzanti non lineari, è possibile effettuare un'analisi lineare per ricavare la risposta forzata dell'intero modello. Questo metodo ha un costo computazionale molto basso.

Nella trattazione si è scelto di implementare il secondo metodo perchè non si vuole utilizzare la matrice di riduzione, le cui dimensioni risultano proibitive per applicazioni industriali.

# Capitolo 4

## Implementazione

Questo capitolo è dedicato all'implementazione del metodo.

E' suddiviso in una prima parte descrittiva dove verranno illustrati i software che sono stati utilizzati, per poi passare all'implementazione in sé mediante un workflow che mostra i passaggi eseguiti, infine verranno date delle informazioni sulla logica sia delle macro che degli script Matlab utilizzati.

### 4.1 Il software Ansys

Ansys Mechanical APDL è un potente software che permette di effettuare analisi FEM.

A seguito di un'interfaccia grafica molto semplice, questo programma possiede degli ottimi codici risolutivi per cui è altamente consigliato per effettuare analisi di tipo strutturale, meccanico, termico e fluidodinamico.

Dal punto di vista pratico è necessario l'utilizzo di un modello per effettuare le analisi, per cui si hanno due strade per ottenerlo, la prima consiste nel crearlo all'interno del software stesso mediante l'utilizzo dell'interfaccia grafica, la seconda sfrutta un modello creato esternamente al programma, ad esempio mediante CATIA, che viene inportato.

Per eseguire le relative analisi bisogna fornire dei comandi al programma, per far ciò esistono due metodi, uno, più lento, che utilizza l'interfaccia grafica, l'altro, più veloce, basato sulla lettura delle macro.

Solitamente i due metodi sono utilizzati per scopi diversi, il primo è consigliabile per operazioni che devono essere eseguite una sola volta, il secondo è preferibile per attività ripetitive, dove sia il modello che il tipo di analisi rimangono gli stessi, ma variano, per ogni analisi, alcuni valori nei parametri.

Nella pratica le macro hanno uno scopo aggiuntivo in quanto non tutti i comandi sono disponibili nell'interfaccia grafica, per cui risulta necessario il loro utilizzo per implementare queste funzioni mancanti.

Secondo quanto espresso, le macro risultano un ottimo strumento per velocizzare i processi e possono essere definite come un insieme di istruzioni, scritte in un file di testo, che vengono lette ed eseguite dal programma, la logica nel loro utilizzo consiste nella possibilità di automatizzare i processi senza ricorrere all'uso dell'interfaccia grafica che li rallenterebbe.

Per quanto riguarda il processo di implementazione questo software viene usato nella parte iniziale e finale, nel dettaglio:

- La parte iniziale è necessaria per l'esportazione delle matrici di massa e rigidezza ridotte del modello.
- La parte finale consiste nell'analisi armonica per la determinazione della ampiezza della risposta dell'intero sistema mediante l'applicazione delle forze di contatto, sommate come se fossero delle normali forze esterne applicate ai rispettivi nodi.

Per ulteriori informazioni su ciò che avviene nel dettaglio si rimanda al paragrafo 4.3 di questo capitolo.

## 4.2 Il software NOVA

NOVA<sup>®</sup> 2.0 è un software utilizzato per il calcolo della risposta forzata non lineare di sistemi strutturali quando sono presenti forze di contatto. NOVA<sup>®</sup> 2.0 è stato sviluppato in ambiente MATLAB<sup>®</sup> e distribuito come eseguibile. [1]

Questo programma si presta bene all'utilizzo tramite le matrici ridotte del sistema, questa caratteristica gli conferisce competitività in quanto gli consente di effettuare le analisi in tempi molto brevi.

E' dotato di un'interfaccia molto intuitiva divisa su tre pannelli principali:

- **Preprocessor**

Si tratta del pannello iniziale dove è possibile importare il modello partendo dai file caricati nella cartella di lettura di NOVA. E' utile in quanto permette di visionare sia il numero di corpi che di contatti, inoltre, si ha un feedback sullo stato di quest'ultimi.

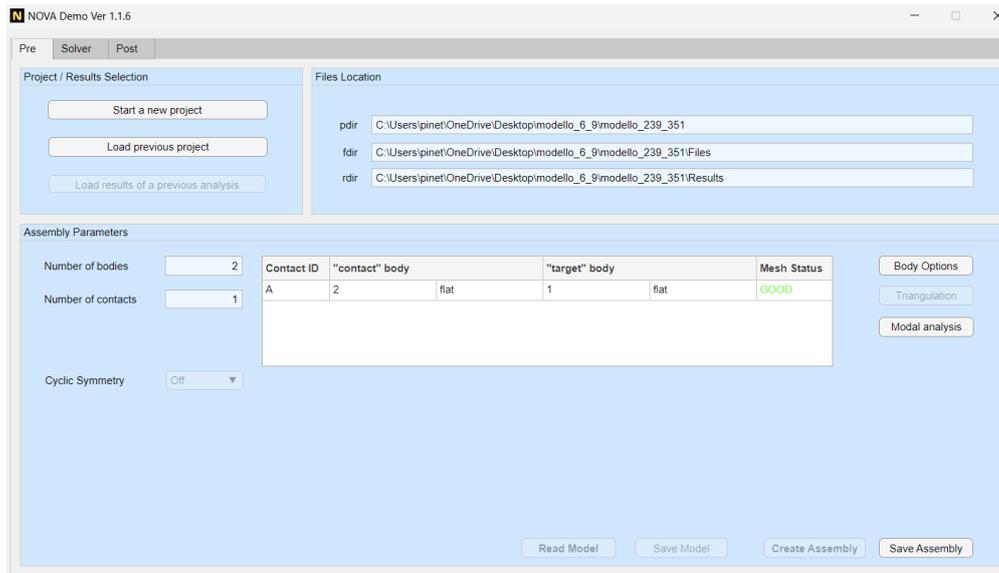


Figura 4.1: Schermata Preprocessor

- **Solver**

E' la schermata attraverso la quale vengono applicati i valori numerici necessari per avviare le analisi lineari e non lineari. Di particolare interesse è il pannello dei parametri di contatto poiché permette di definirlo usando le dimensioni delle superfici a contatto.

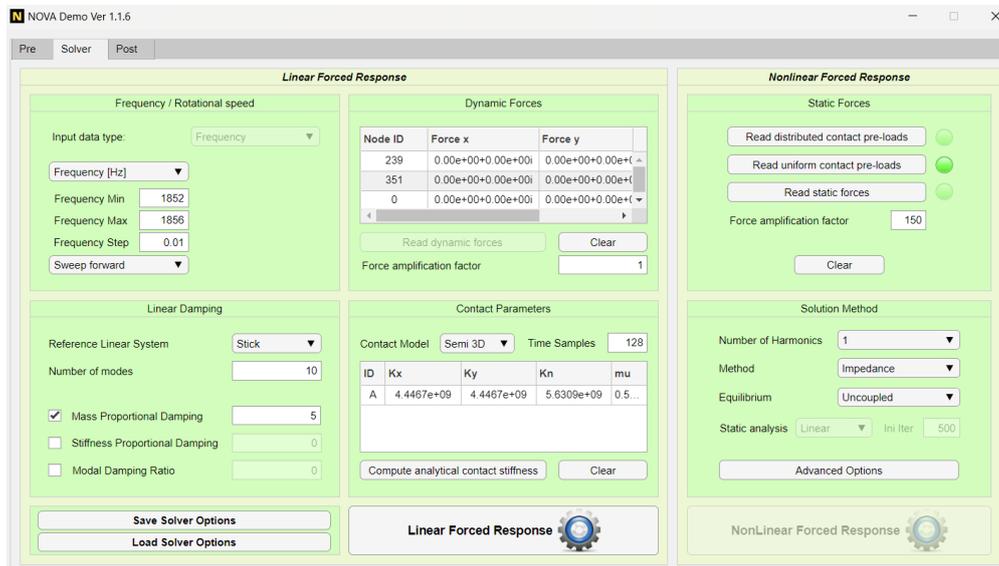


Figura 4.2: Schermata solver

- **Postprocessor**

Questa schermata permette la visualizzazione dei risultati delle analisi. In dettaglio è possibile scegliere il nodo ed il grado di libertà attraverso cui si vuole visionare la risposta, inoltre si ha la possibilità di esportare i grafici corrispondenti, necessari per il confronto relativo al metodo che si sta implementando.

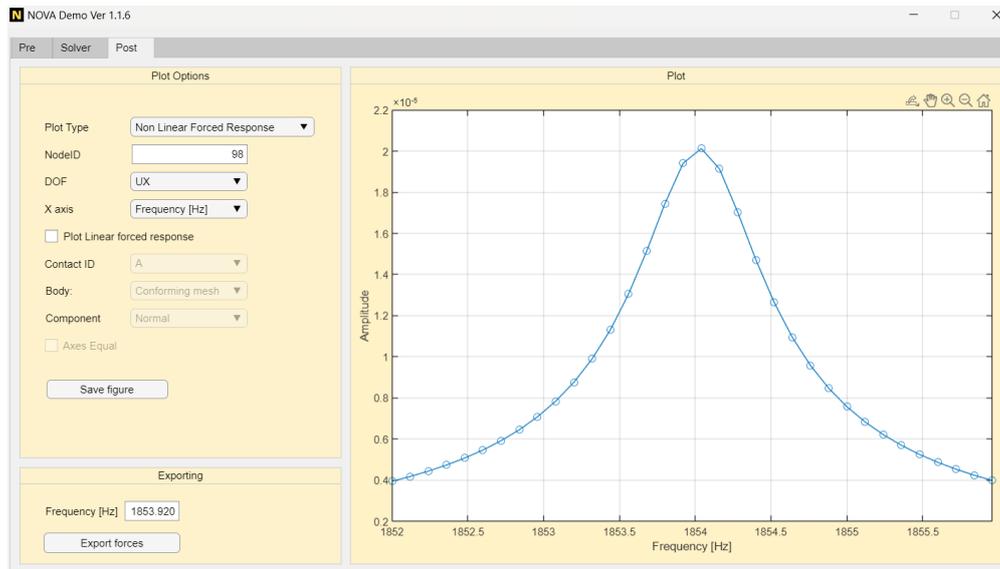


Figura 4.3: Schermata postprocessor

Per quanto riguarda il processo di implementazione questo software viene utilizzato nella fase centrale, in particolare è necessario per la determinazione delle forze di contatto non lineari, necessarie per la parte finale.

Ulteriori informazioni verranno descritte nel paragrafo 4.3, dove verrà analizzato il processo passo dopo passo.

## 4.3 Descrizione del processo

Il processo sviluppato nel progetto può essere descritto mediante il seguente diagramma di flusso

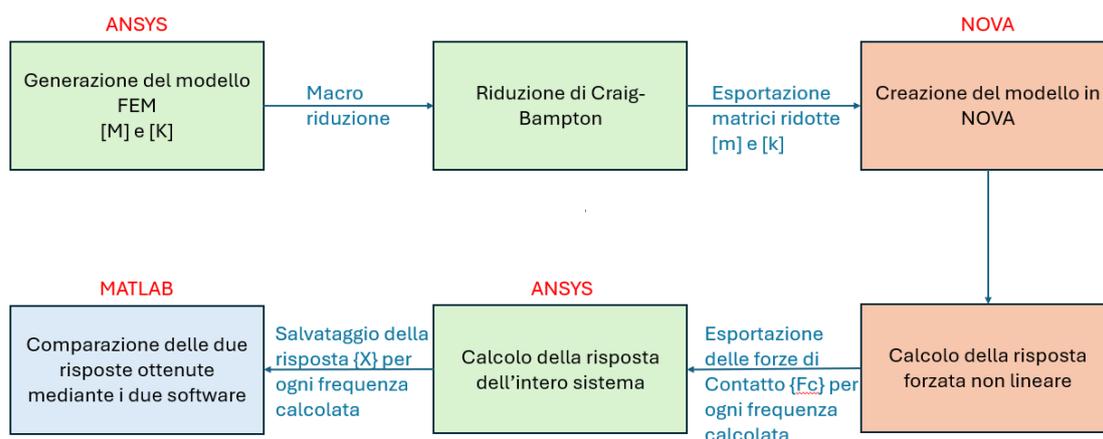


Figura 4.4: Diagramma di flusso del processo

Come è possibile osservare è suddiviso in sei macro parti che verranno analizzate nel dettaglio nei sotto paragrafi successivi.

### 4.3.1 Generazione del modello FEM

La generazione del modello può avvenire mediante due modi, come espresso nel paragrafo 4.1. In questa parte verrà descritto come si crea il modello tramite l'interfaccia grafica di Ansys.

La generazione del modello avviene secondo i seguenti passaggi

- **Determinazione della geometria**

La geometria viene creata attraverso la sezione "Modelling" della tendina del Preprocessor. E' possibile progettare strutture 1D, 2D e 3D più o meno complesse.

- **Determinazione delle proprietà del materiale**

Per poter applicare la mesh è necessario definire sia le proprietà del materiale che il tipo di elemento, volendo determinare il primo fattore bisogna utilizzare la sezione "Material Props" della tendina del Preprocessor. Qui è possibile determinare le tipologie del materiale in funzione delle caratteristiche che deve possedere, ad esempio se le proprietà sono di natura strutturale è possibile determinare il modulo di Young, la densità o altre proprietà che caratterizzano il componente sotto questo aspetto.

Il progetto è basato sulle analisi dinamiche non lineari per cui basteranno informazioni riguardo le proprietà del materiale riguardanti la struttura.

- **Determinazione del tipo di elemento**

Il tipo di elemento si genera attraverso la sezione "Element type" della tendina del Preprocessor.

Nel caso in questione è sufficiente generare la tipologia di materiale "SOLID185", ossia un solido 3D a 8 nodi. Per maggiori informazioni è possibile visionare l'help di Ansys.

- **Generazione della mesh**

La generazione della mesh avviene attraverso la sezione "Meshing" della tendina del Preprocessor.

La tipologia di mesh da utilizzare dipende dalla forma del materiale poiché è necessario meshare correttamente il componente cercando di non lasciare zone scoperte. Nel progetto la forma del materiale è abbastanza semplice ed è meshata a livello del volume attraverso il "SOLID185", già descritto sopra.

Nel caso studiato il modello FEM era già sviluppato per cui è bastato l'inserimento delle condizioni al contorno.

Per quanto riguarda la generazione delle matrici [M] e [K], una volta definito il modello FEM, basta effettuare un'analisi modale perché permette la loro creazione.

### 4.3.2 Riduzione di Craig-Bampton

Il passaggio dal modello FEM alla riduzione di Craig-Bampton avviene mediante la macro che effettua la riduzione ed esporta le matrici ridotte [m] e [k] nel formato HBmat, cioè Harwell-Boeing format, per poter essere lette da NOVA.

Questo passaggio è necessario poiché si vogliono utilizzare le matrici ridotte per il calcolo della risposta forzata non lineare in NOVA.

La riduzione di Craig-Bampton permette di generare le matrici ridotte di massa e rigidezze, caratterizzate dalla distinzione fra nodi master, che subiranno gli spostamenti reali, e nodi slave, i cui spostamenti sono funzione delle forme modali. Le matrici così generate presentano pochi gradi di libertà, confrontate con quelle complete, ma riescono a conservare un'ottima qualità delle informazioni sulle matrici per le frequenze naturali di interesse. Per ulteriori informazioni guardare il paragrafo 2.3.1.

Per informazioni sulla macro utilizzata per la riduzione e la successiva esportazione delle matrici vedere il paragrafo 4.4.1.

### 4.3.3 Creazione del modello in NOVA

La generazione del modello in NOVA richiede sia l'utilizzo delle matrici di massa e rigidità ridotte, nel caso studiato, sia le informazioni riguardo i nodi di contatto e gli eventuali nodi extra. Le caratteristiche che devono avere queste informazioni sono riportate nel manuale di NOVA.

NOVA legge le informazioni nella cartella "files" ed è in grado di stabilire i vari contatti esistenti e la loro tipologia. Una volta stabilite queste caratteristiche è possibile creare il modello mediante l'apposito tasto e passare nella sezione del solver dove si dichiarano i valori riguardo la frequenza, lo smorzamento lineare, le forzanti esterne ed il modello di contatto, necessari per eseguire l'analisi lineare. Sempre nel solver è possibile settare i parametri dell'analisi non lineare, ma questo verrà descritto nel sotto paragrafo successivo.

### 4.3.4 Calcolo della risposta forzata non lineare

Mediante il pannello solver è possibile eseguire il calcolo della risposta forzata non lineare. Nel dettaglio, tale calcolo richiede la determinazione sia delle forze statiche che del metodo di soluzione.

A valle di questa analisi è possibile ottenere, non solo la risposta forzata, ma anche il vettore delle forze di contatto per ogni frequenza calcolata. E' possibile esportarlo mediante il tasto "Export forces" della schermata del "Post". Questo vettore delle forze servirà per applicare il metodo descritto nella metodologia.

### 4.3.5 Calcolo della risposta dell'intero sistema

A questo punto dell'implementazione si torna a lavorare con il software Ansys dove è stata sviluppata la macro A.3 per eseguire il calcolo della risposta dell'intero sistema.

In questo passaggio le forze di contatto estratte da NOVA vengono applicate al modello completo in Ansys come se fossero delle forzanti esterne e sommate alle forzanti già presenti, in modo da ricondurre il calcolo ad una semplice analisi lineare forzata.

Questa operazione si effettua per ogni frequenza calcolata in NOVA perchè ad ognuna di esse è associato un determinato valore delle forze di contatto. La determinazione della risposta avviene mediante la macro A.3 che determina l'ampiezza relativa ad una sola frequenza per volta. Questo processo si ripete fino al raggiungimento di tutte le frequenze calcolate ed i valori così ottenuti vengono salvati manualmente all'interno di un vettore Matlab.

Maggiori chiarimenti sul funzionamento della macro vengono forniti in 4.4.2

### 4.3.6 Comparazione delle due risposte

Avendo calcolati tutti i valori in Ansys secondo il passo precedente, è possibile tracciare la curva della risposta dell'intero sistema mediante il comando "plot" di Matlab e sovrapporla, in un unico grafico, alla curva della risposta forzata non lineare determinata in NOVA.

In definitiva, è possibile affermare che il metodo risulta verificato nel caso in cui le due curve sovrapposte risultano quasi coincidenti.

In caso positivo, è possibile affermare che il metodo consente il calcolo delle tensioni a valle dell'analisi dinamica non lineare in NOVA senza la necessità di eseguire un'espansione del campo degli spostamenti calcolati.

## 4.4 Macro

La macro è un insieme di istruzioni, scritte in un file di testo, che vengono eseguite dal programma, Ansys. E' caratterizzata da una determinata punteggiatura:

- alcuni comandi devono iniziare con "\*" per essere letti dal programma, ad esempio "dim" necessario per al creazione dei vettori
- alcune funzioni utilizzano "/", ad esempio per accedere ai macro gruppi del "main menu" o per le funzioni di caricamento del file .db
- il "!" si usa per commentare le righe. Solitamente si usa per insirire dei commenti a lato del testo per spiegare la funzione della riga oppure per non far leggere, quindi eseguire, alcuni funzioni presenti
- infine, i parametri non necessitano di una punteggiatura, ma possono essere definiti semplicemente attribuendo un valore alla variabile, ad esempio "num\_mode = 60"

Il vantaggio delle macro risiede nella possibilità di automatizzare i processi di analisi e rendere le operazioni più veloci.

Nel progetto vengono usate 3 macro principali e 2 create, mediante script Matlab, per l'importazione delle forze di contatto. Le prime 3 sono le seguenti:

- Macro estrazione matrici ridotte
- Macro analisi armonica

Nel proseguo vengono descritte in dettaglio le loro caratteristiche e si porrà maggiore attenzione all'ultima poiché permette di determinare i valori che creano la curva della risposta non lineare.

### 4.4.1 Macro estrazione matrici ridotte

Questa macro permette l'esportazione delle matrici ridotte di massa e rigidezza secondo il metodo di riduzione di Craig-Bampton.

La creazione delle matrici secondo tale metodo richiede di dichiarare il numero di modi slave che si vogliono includere ed indicare i nodi master. Per inserire quest'ultimo parametro è necessario creare dei sottogruppi contenenti tali nodi, richiamarli mediante il comando "cmsel" e definirli come nodi master attraverso il comando "m". Prima di avviare l'analisi è necessario riselezionare tutto e poi selezionare solo i nodi e gli elementi del componente su cui si vuole effettuare la riduzione.

L'esportazione delle matrici avviene mediante il comando "hbmatt". Per ogni matrice verrà generato un file contenente i valori sparsi della matrice stessa ed un file contenente il rispettivo vettore di MAPPING.

### 4.4.2 Macro analisi armonica

Nella macro dell'analisi armonica si distinguono 5 passaggi:

- **Lettura del file**

Le analisi vengono effettuate su un file db che contiene il modello. Verrà caricato mediante il comando "RESUME" e, per prevenire messaggi di errori nella gui, si applica il comando "\uis".

Il modello rimane invariato per ogni analisi, quindi verrà caricato di volta in volta e le modifiche su esso non verranno salvate.

- **Importazione delle forze e del vettore di mapping**

L'importazione delle forze, come quella del vettore di mapping, avviene tramite il comando di \input.

In particolare, tramite lo script Matlab ?? viene generato un file dove viene inserito il codice per creare i tre vettori relativi alle tre direzioni x, y, z e, in maniera ripetitiva, vengono riempiti con i rispettivi valori nell'ordine determinato dalla matrice di mapping. Un procedimento simile avviene per il vettore di mapping, dove viene preso in considerazione solo il primo valore relativo al nodo della terna cartesiana.

Questi valori vengono utilizzati nella parte successiva della macro dove si applicano le relative forze ai nodi definiti nel vettore di mapping.

Le forze sono espresse in forma complessa, quindi è presente un valore reale ed uno immaginario; il comando per applicarle al nodo corrispondente prende le due parti e ne calcola ampiezza e fase.

- **Analisi modale**

Per effettuare l'analisi modale bisogna prima selezionare tutti gli elementi e,

successivamente, definire le caratteristiche dell'analisi, cioè dichiarare il numero di modi ed il metodo per loro estrazione. Nel caso in questione si è scelto di estrarre 60 modi ed usare il metodo di "Block Lanczos".

- **Applicazione delle forze di contatto ai rispettivi modi e successiva analisi armonica**

L'analisi armonica richiede, oltre alla definizione del metodo, anche il range di range di frequenze ed il numero di intervalli al suo interno. Per chiarezza si riporta l'esempio in questione, si è applicata una frequenza minima di 1851.88 Hz ed una frequenza massima di 1856.08 Hz, poiché si vogliono degli intervalli regolari di 0.05 Hz sono state scelte 35 num\_freqns. Nonostante il primo valore voluto è 669.6 Hz, si è applicata come valore minimo 669.595 Hz perché vengono considerati solo gli intervalli e la prima frequenza, corrispondente a freq\_min, viene scartata.

Viene usato il metodo di sovrapposizione modale, indicato con "msup", al quale bisogna aggiungere il numero di modi su cui bisogna effettuare il calcolo, nel caso in questione si è scelto 60. Bisogna indicare la tipologia di smorzamento da applicare, cioè proporzionale o ai modi o alla massa o alla rigidità. Nel nostro caso è stato effettuato il calcolo rispetto alla massa, nonostante il metodo della sovrapposizione modale è stato sviluppato prevalentemente per lo smorzamento proporzionale ai modi.

- **Trascrizione dei risultati nei rispettivi assi di riferimento in un file di testo**

L'ultima parte è relativa ai risultati, in particolare si entra nella sezione "/post26" dove è possibile trascrivere i valori calcolati per ogni direzione all'interno di file di testo.

I file così generati sono divisi in base alla direzione, x, y, z, e sono composti da due colonne, nella prima sono presenti le frequenze, nella seconda il valore associato.

In dettaglio, una volta ottenute le deflessioni rispetto un determinato asse, ad esempio x, mediante il comando "nsol", bisogna esprimere tali valori in valore assoluto in modo da ricavare l'ampiezza della risposta, per far ciò si utilizza il comando "abs". Tali risultati devono essere salvati all'interno di vettori per cui si ottiene la dimensione che devono avere mediante il comando "get" e si generano con "dim", successivamente si inseriscono all'interno attraverso "vget".

La parte relativa al tracciamento a schermo del grafico con l'andamento lungo una determinata direzione è opzionale, mentre è di estrema importanza chiamare la macro A.4 in quanto permette la generazione dei file con i valori richiesti.

## 4.5 Script Matlab

Durante il progetto è stato necessario implementare 2 script Matlab per la creazione delle macro per l'importazione di dati esterni. Nel dettaglio sono stati sviluppati i seguenti script:

- Script Matlab per la generazione del file contenente la macro per l'importazione del vettore delle forze di contatto
- Script Matlab per la generazione del file contenente la macro per l'importazione del vettore di MAPPING

### 4.5.1 Script Matlab per la generazione del file contenente la macro per l'importazione del vettore delle forze di contatto

Per caricare all'interno di ANSYS i dati estratti da NOVA è stato utilizzato uno script Matlab che genera una macro con all'interno le informazioni dei vettori.

In dettaglio, come primo step si carica il file esportato da NOVA e si trasforma in una matrice con tante righe, quanti sono i GDL, e solo due colonne perchè il valore della forza è espresso in forma complessa, quindi si ha una parte reale ed una immaginaria.

Nello script viene creato il file dove sarà presente la macro e si attribuirà il nome di "c1.txt". All'interno verranno mostrati i codici per generare i vettori FC\_x, FS\_x, FC\_y, FS\_y, FC\_z, FS\_z, dove con C si indica la parte reale, mentre con S la parte immaginaria.

I vettori saranno inizialmente vuoti; verranno riempiti mediante un ciclo "for" di Matlab che andrà da 1 fino al numero di nodi presenti, ricavato dividendo per 3 il numero di righe della matrice. Per ogni nodo è presente una terna di GDL per cui si crea un contatore chiamato "valore" ed ogni volta assume il valore corrispondente all'asse di riferimento che bisogna inserire nella riga di codice all'interno del file. In dettaglio, il primo valore della terna corrisponde all'asse x a cui sono associati due valori, quello reale e quello immaginario, per salvarli si utilizzano due variabili e verranno caricati nella riga `*vfill, FC_x(%d, 1), data, %1.16f`, dove "%d" rappresenta il valore momentaneo di i nel "for" e "%1.16f" il valore della variabile temporanea. Scritte queste due prime righe di codice si passa alle successive relative all'asse y dove si ripete lo stesso principio ma si inseriscono nella variabile i due valori successivi della matrice; terminati tutti i GDL associati il contatore del "for" si passa a quello successivo e si prendono in considerazione i tre nuovi valori della matrice. Terminato il riempimento del file si chiude mediante il comando "fclose".

Nell'appendice è presente lo script utilizzato.

### 4.5.2 Script Matlab per la generazione del file contenente la macro per l'importazione del vettore di MAPPING

La creazione del vettore di MAPPING avviene in maniera simile, ma verranno presi in considerazione meno termini.

Nel vettore di MAPPING è presente l'ID dei nodi ai quali bisogna associare le forze di contatto salvate nei vettori FC\_x, FS\_x, FC\_y, FS\_y, FC\_z, FS\_z.

Lo script inizia con la generazione del vettore "nodi\_interesse" dove verranno caricati i nodi della superficie di contatto. Nel file di MAPPING il singolo ID del nodo viene ripetuto tre volte poiché fa riferimento ai tre GDL che gli si possono attribuire, cioè le forze possono essere espresse attraverso gli assi di riferimento x, y, z.

Il vettore vuoto di MAPPING non viene generato all'interno dello script, ma il suo codice è inglobato all'interno della macro dell'analisi armonica. Mediante un ciclo "for" si effettua una procedura simile a quella del file "c1.txt", quindi, avendo già i valori selezionati, si passa direttamente al suo riempimento. Si sovrascrive nel file "MAPPING.txt" il codice "*\*vfill, FNODEs\_ARRAY(%d, 1), data, %d*" dove di volta in volta è sostituito il numero del nodo e la posizione nel vettore.

# Capitolo 5

## Applicazione e risultati

In questo capitolo viene illustrato il modello su cui viene implementata la metodologia e vengono riportati i risultati che si sono ottenuti.

### 5.1 Modello

Il modello su cui è stato implementato il metodo è il seguente

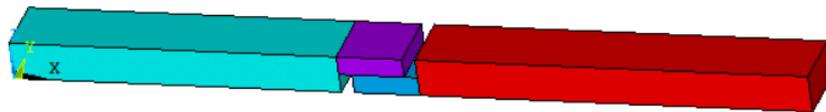


Figura 5.1: Modello con vista vplot

E' possibile osservare che è composto da due travi che entrano in contatto in corrispondenza delle superfici condivise dei volumi viola e blu.

Le travi presenti nel modello hanno la stessa dimensione e sono formate dall'unione di due volumi, il primo, più grande, ha dimensioni

- $x = 0.25$  m
- $y = 0.05$  m
- $z = 0.03$  m

il secondo, più piccolo, ha dimensioni

- $x = 0.05 \text{ m}$
- $y = 0.05 \text{ m}$
- $z = 0.015 \text{ m}$

L'intero modello è composto dallo stesso materiale con le seguenti caratteristiche

- densità  $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$
- coefficiente d'attrito = 0.5
- modulo di Young =  $2 * 10^{11} \text{ N/m}^2$
- coefficiente di Poisson = 0.3

La struttura è modellata mediante elementi SOLID185, definiti da 8 nodi, ognuno dei quali possiede 3 gradi di libertà, cioè le traslazioni nelle direzioni x, y e z.

Al modello è stata applicata una "MESH200" con caratteristiche 3D descritta da un quadrato di 4 nodi con dimensioni diverse tra i due volumi che compongono la trave, più precisamente la mesh si infittisce nel volume più piccolo in modo da avere una risposta più precisa in corrispondenza del contatto, come mostrato nella seguente figura

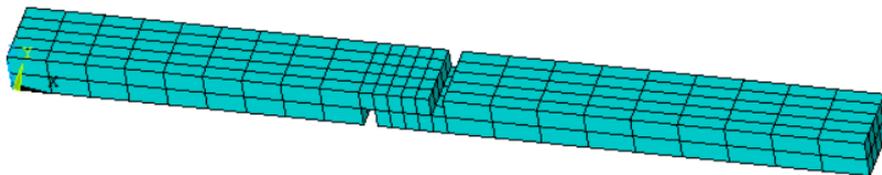


Figura 5.2: Modello con mesh

La mesh, così definita, possiede 240 nodi e 115 elementi per trave.

Nell'ultimo passo della creazione del modello bisogna applicare i vincoli sugli spostamenti dei nodi estremi delle due travi, in modo da simulare la condizione di trave incastrata ad un estremo e libera nell'altro.

La riduzione è effettuata mediante la macro A.2.

Poichè si vuole ottenere la matrice ridotta per ogni trave, è necessario selezionare solo i nodi e, successivamente, gli elementi che appartengono alla sola trave di interesse, inoltre, è necessario definire i nodi master ed il numero di quelli slave

che si vogliono tenere in considerazione. Nella tabella sottostante sono riportati il numero di nodi slave ed i nodi master utilizzati per ogni trave

numero trave	numero nodi slave	nodi master
1	60	13 14 15 16 17 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 239
2	60	98 99 100 101 102 103 104 105 106 107 109 110 111 112 117 118 119 120 121 122 123 124 125 126 127 128 129 130 131 132 351

Si noti che per ogni trave, oltre ai nodi dove si instaura il contatto, è stato preso un nodo master corrispondente al punto di applicazione della forzante esterna, 239 e 351.

Ottenute le matrici è possibile creare il modello in NOVA ed effettuare le analisi.

Per effettuare l'analisi lineare, propedeutica a quella non lineare, è necessario applicare i seguenti valori sezione "Linear Forced Response" della schermata 4.2

- **Frequency/Rotational speed**

Frequency min = 1852 Hz

Frequency max = 1856 Hz

Frequency step = 0.01 Hz

- **Linear damping**

Mass proportional damping = 5

- **Dynamic forces**

Node ID	Force x	Force y	Force z
239	0 N	0 N	50 N
351	0 N	0 N	-50 N

- **Contact Parameters**

ID	kx	ky	kn	mu
A	4.467e+9 N	4.467e+9 N	5.6309e+9 N	0.5

Eseguita l'analisi lineare è possibile impostare i parametri per avviare quella non lineare. Nello specifico si utilizza la sezione dedicata "Non linear forced response" della schermata 4.2

- **Static forces**

E' stato usato il pulsante "Read uniform contact pre-loads" che legge un file nella cartella del modello dove è presente il valore del vettore di precarico statico, nel caso in questione 150 N. Successivamente è stato fatto variare il fattore moltiplicativo del precarico per ottenere i grafici del paragrafo successivo.

- **Solution method**

Questa sezione permette di definire il metodo di soluzione ed è diviso in due parti, la prima, generale, dove sono stati definiti i seguenti parametri

- Number of harmonics = 1
- Method = impedance
- Equilibrium = uncoupled

la seconda, più specifica, riguardante le opzioni avanzate, riportate nella seguente figura

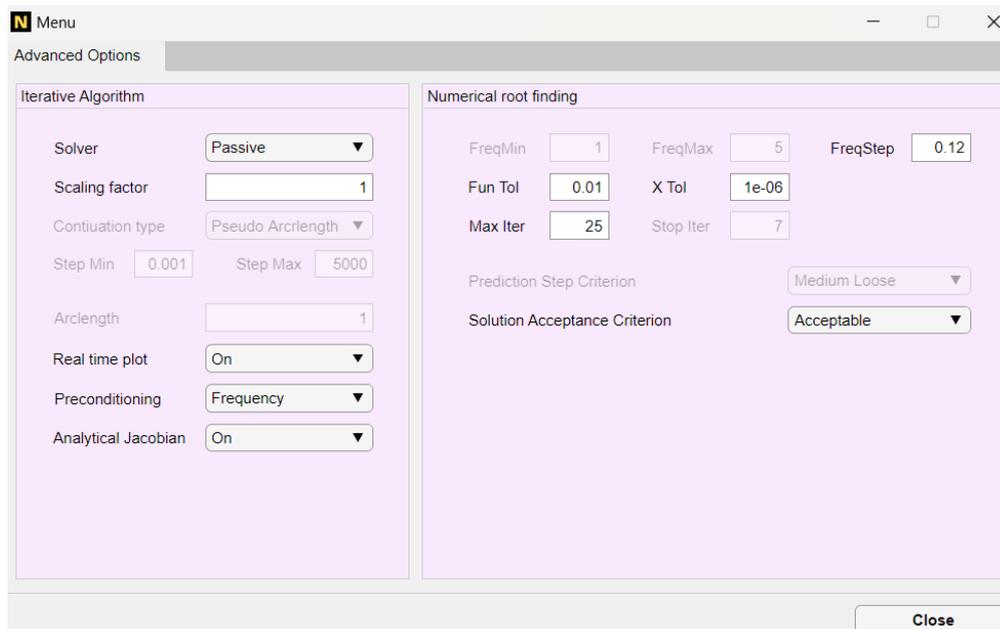


Figura 5.3: Schermata opzioni avanzate

L'analisi non lineare, così definita ed eseguita in NOVA, permette di determinare due output, la risposta forzata e le forze di contatto per ogni frequenza calcolata. Applicando la metodologia, si estrae il vettore delle forze di contatto per una data

frequenza e mediante lo script Matlab B.1 si genera il file di testo necessario per importare tali forze all'interno di Ansys.

Per determinare il valore della risposta del modello completo, per la frequenza di estrazione, si torna in Ansys e si usa la macro A.3 per eseguire l'analisi armonica applicando i parametri usati per effettuare le analisi lineari in NOVA, ad eccezione dei "Contact parameters".

Nel paragrafo successivo vengono mostrati i risultati ottenuti.

## 5.2 Risultati

Il procedimento, ampiamente descritto, ha portato ad ottenere i risultati mostrati in questo paragrafo.

I grafici ottenuti sono tracciati rispetto alle due direzioni parallele al piano del contatto, x e y, poichè sono i gradi di libertà maggiormente sollecitati dalle forzanti esterne e permettono di osservare l'effetto della non linearità di contatto.

I grafici, inoltre, vengono rappresentati in tre casi diversi, viene fatto variare il fattore moltiplicativo del precarico, in modo da mostrare come varia l'ampiezza della risposta quando la zona del contatto risulta sollecitata da un carico iniziale perpendicolare alla superficie di interazione con intensità decrescente.

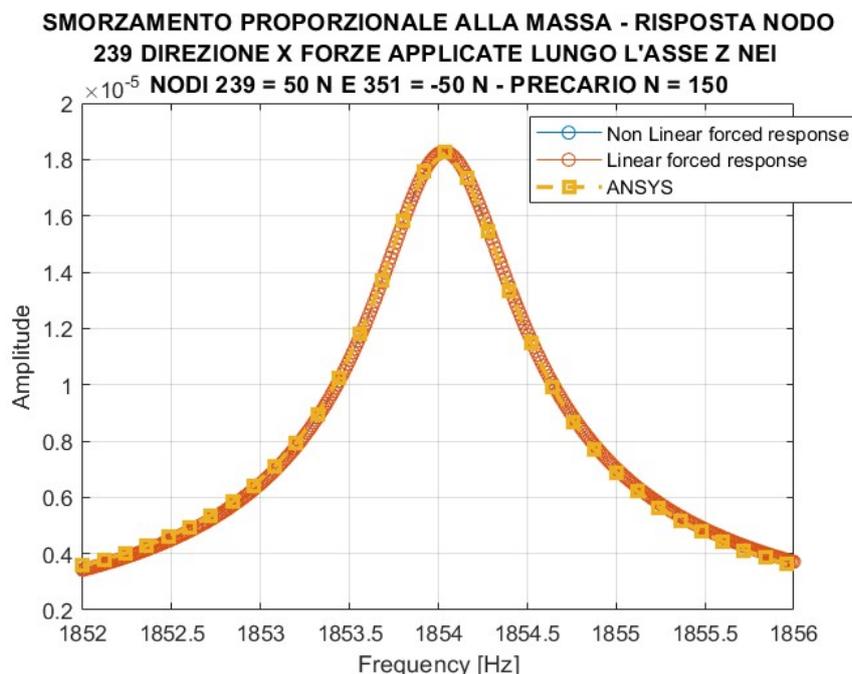
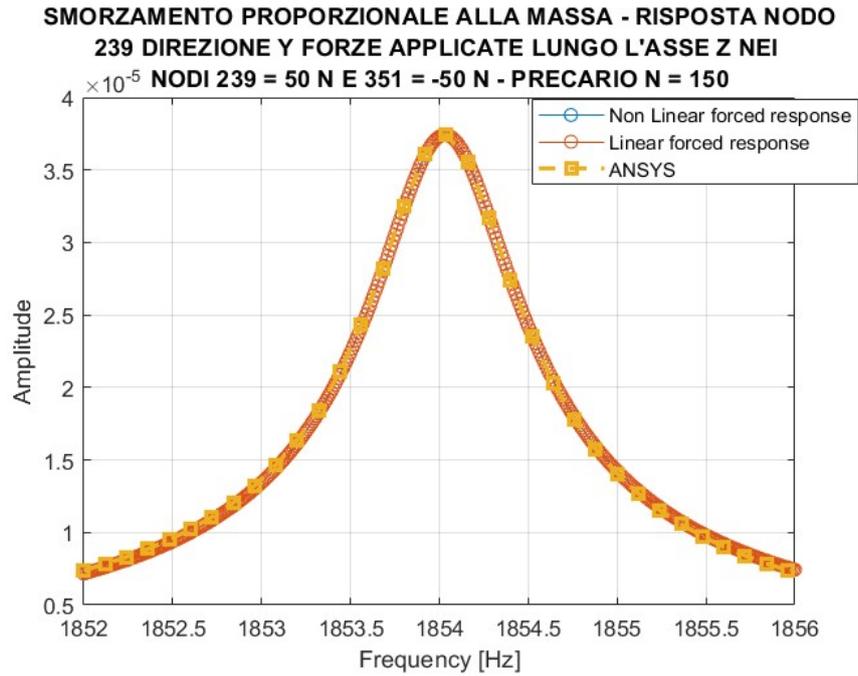
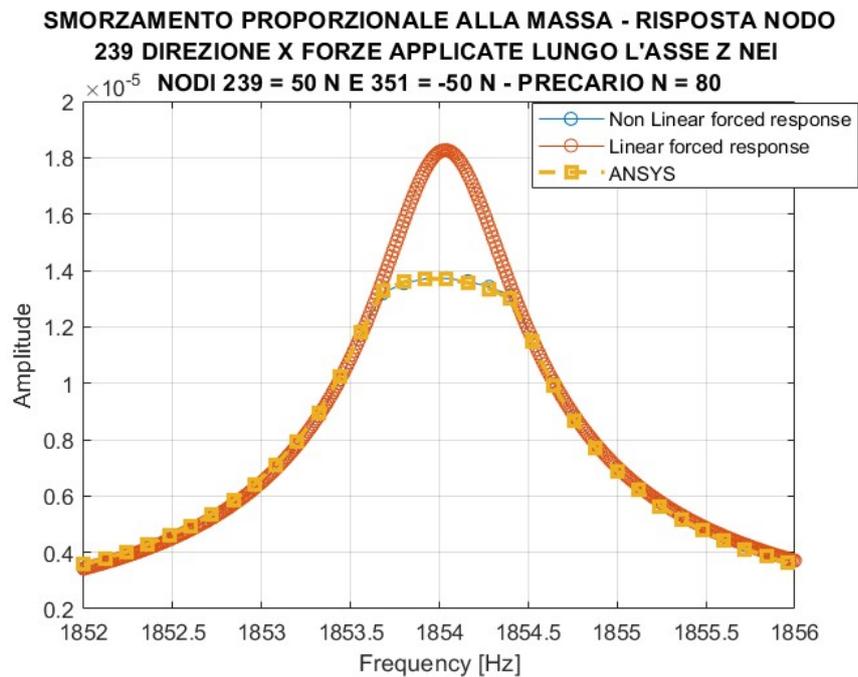
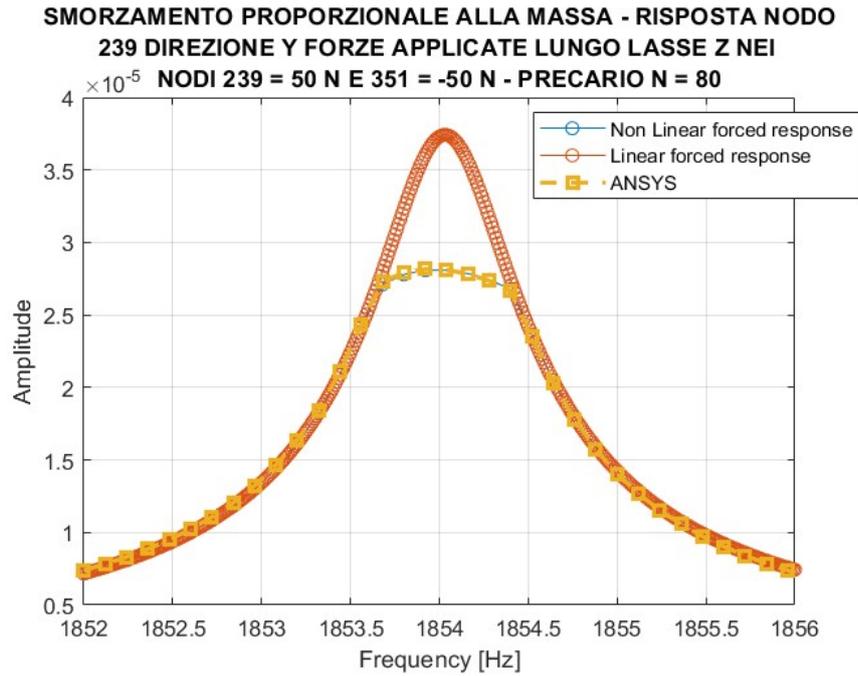
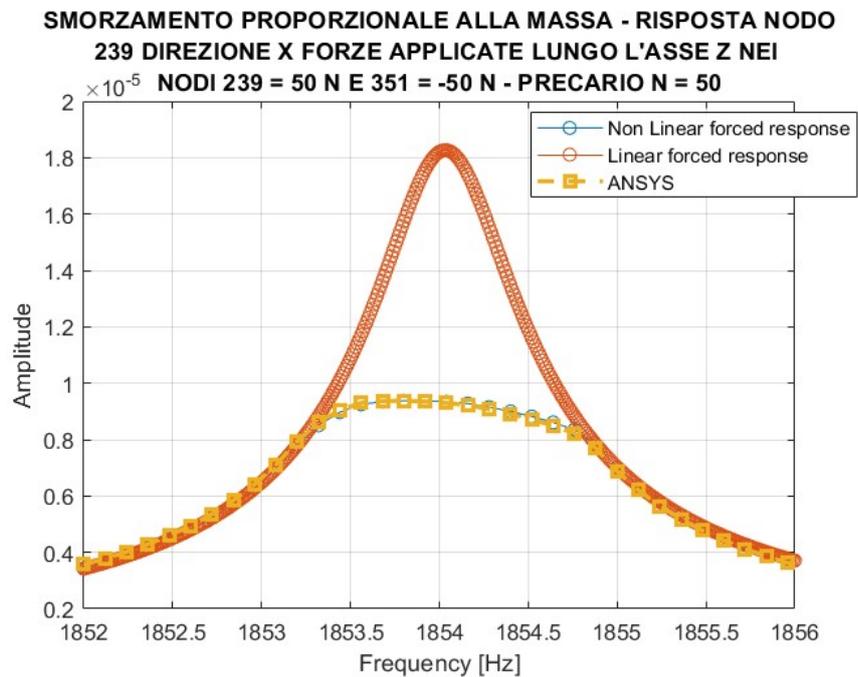


Figura 5.4: Risultato in direzione x con n = 150

Figura 5.5: Risultato in direzione y con  $n = 150$ Figura 5.6: Risultato in direzione x con  $n = 80$

Figura 5.7: Risultato in direzione y con  $n = 80$ Figura 5.8: Risultato in direzione x con  $n = 50$

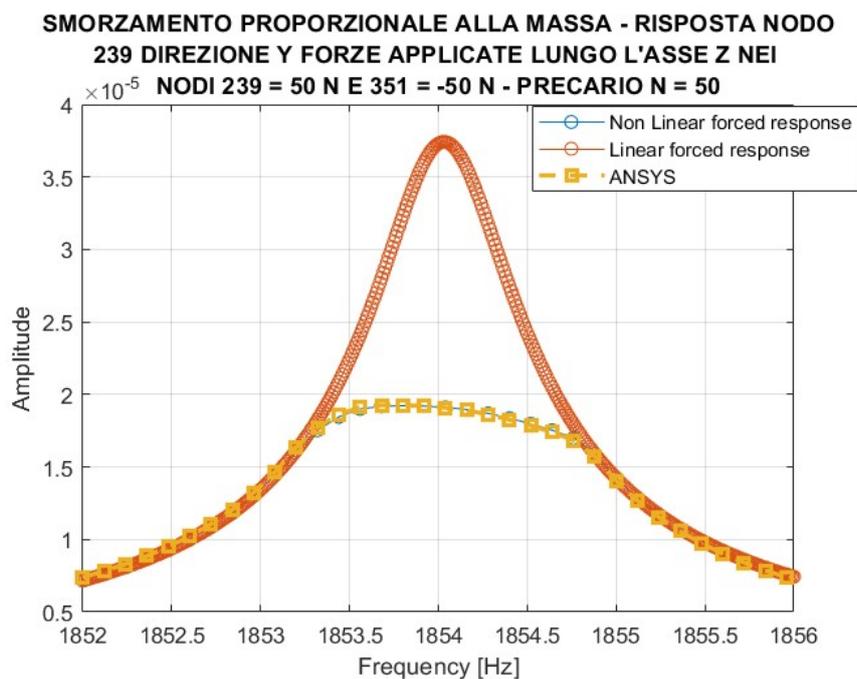


Figura 5.9: Risultato in direzione y con  $n = 50$

Come è possibile osservare, la risposta calcolata in NOVA mediante l'analisi non lineare risulta quasi sovrapposta alla risposta determinata in Ansys mediante l'analisi lineare. Questo risultato mostra che gli output di NOVA, riguardo le forze di contatto, sono corretti e, applicate ai rispettivi nodi nel modello completo, è possibile effettuare l'analisi lineare in Ansys ed ottenere la stessa risposta dell'analisi non lineare precedentemente effettuata.

Un'altra conclusione traibile dalla lettura dei grafici riguarda la validazione del calcolo della risposta forzata determinata con NOVA.

Si ricorda che NOVA permette di visualizzare solamente la risposta dei nodi master. Questo dettaglio mette in luce la difficoltà nel confrontare le risposte degli altri nodi del sistema, per cui risulta necessario trovare un modo aggiuntivo che permette la visualizzazione del comportamento dei restanti nodi, in funzione della risposta di quelli conosciuti. Una possibile soluzione propone di proiettare in Ansys lo spostamento dell'intero sistema sollecitato ad una frequenza specifica.

```
DISPLACEMENT  
STEP=1  
SUB =1  
FREQ=1853.92  
REAL ONLY  
DMX =.201E-04
```

Figura 5.10: Illustrazione della deformata

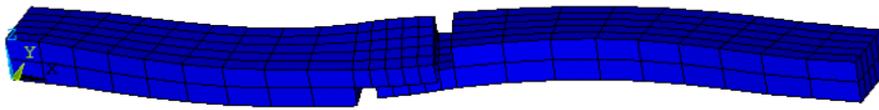


Figura 5.11: Travi deformate sollecitate alla frequenza di 1853.92 Hz

La figura mostra lo spostamento associato alla prima forma modale del sistema sollecitato alla frequenza di 1853.92 Hz e fornisce un quadro di ciò che succede ai restanti nodi del modello completo.

In definitiva, il metodo sviluppato per determinare le tensioni in modelli di strutture con smorzamento per attrito risulta verificato.

# Capitolo 6

## Conclusioni

Il tema centrale di questo progetto è sviluppare un metodo per calcolare le tensioni in modelli di strutture con smorzamento per attrito.

Nella trattazione si è fatto riferimento al metodo del bilanciamento armonico riadattato ad un sistema ridotto, posando l'attenzione sul vettore delle forze di contatto, determinato a seguito dell'analisi non lineare in NOVA e mostrando come viene usato per poter eseguire l'analisi lineare successiva in Ansys.

L'implementazione del metodo è resa possibile attraverso l'utilizzo congiunto di due software, Ansys e NOVA. Il primo permette di ottenere le matrici di massa e rigidità ridotte per la creazione del modello in NOVA, il secondo effettua le analisi non lineari e permette di determinare le forze di contatto da caricare nel modello del primo software per effettuare l'analisi armonica, necessaria per validificare i risultati ottenuti in NOVA. L'interazione fra i due software, inoltre, è resa possibile dall'utilizzo di script Matlab e di routine in linguaggio APDL di Ansys.

Le analisi sono state eseguite concentrandosi sulla quarta frequenza naturale, nel range di frequenze 1852-1856 Hz. Sono mostrate le ampiezze di vibrazione lungo i GDL x e y per il nodo 239, per diversi valori del fattore moltiplicativo del precarico.

Analizzando i risultati si riscontra che a seguito dell'analisi armonica effettuata in Ansys, mediante l'applicazione delle forze di contatto, estratte da NOVA, sul modello completo come delle semplici forzanti esterne, si ottiene la risposta del sistema completo prossima a quella determinata con il sistema ridotto. Questo risultato è visionabile dalle curve relative alle due risposte che risultano quasi sovrapposte.

In definitiva, il software NOVA si dimostra essere un valido strumento per la determinazione del calcolo della risposta forzata in tempi di calcolo molto ristretti rispetto a programmi già affermati, come Ansys.

# Appendice A

## Macro ANSYS

### A.1 Esportazione matrici full

```
1 /CLEAR,NOSTART
2 RESUME,<FILENAME>,db
3 /filename,<FILENAME>
4 /UIS,MSGPOP,3 ! Prevents warning messages in the GUI
5
6 csel,s,CORPO_2
7 esln,s,all
8
9 /solu
10
11 ! Analysis Definition
12 num_mode = 30
13 antype,modal
14 modopt,lanb,num_mode
15 wrfull,1
16 solve
17
18 /aux2
19
20 /header,defa
21 /format,defa
22
23 ! Reduced Order Matrices [K] and [M]
24 file,modello_non_ruotato,full
25 hbmatt,M2,txt,,ascii,mass,no,yes
```

```
26 hbmat,K2,txt,,ascii,stiff,no,yes
27
28 finish
```

## A.2 Esportazione ridotte

```
1 /CLEAR,NOSTART
2 RESUME,<FILENAME>,db
3 /filename,<FILENAME>
4 /UIS,MSGPOP,3 ! Prevents warning messages in the GUI
5
6 normal_modes = 60! Slave Mode Number
7
8 /solu
9
10 ! Analysis Definition
11
12 antype,substr
13
14 seopt,modello_prove,2,1
15
16 ! Craig-Bampton method
17 cmsopt,fixed,normal_modes
18
19 ! BCSOPTION,,INCORE
20
21 ! Master Nodes Selection
22
23 cmsel,s,INTERFACCIA_2
24 cmsel,a,NODO_22
25
26 m,all,all
27
28 ! Select the whole model
29
30 allsel
31
32 cmsel,s,TRAVE_2
33 esln,s,all
```

```
34
35 ! Solve
36
37 solve
38
39 ! Solution End
40
41 finish
42
43
44 /aux2
45
46 ! Default Settings fot Data files
47
48 /output
49
50 /header, defa
51
52 /format, defa
53
54 ! Reduced Order Matrices [K] and [M]
55
56 file, modello_prove, sub
57
58 hbmat, M2, txt, , ascii, mass, no, yes
59
60 hbmat, K2, txt, , ascii, stiff, no, yes
61
62 finish
```

### A.3 Macro analisi armonica

```
1 /CLEAR, NOSTART
2 RESUME, modello_prove, db
3 /filename, modello_prove
4 /UIS, MSGPOP, 3 ! Prevents warning messages in the GUI
5
6
7 ! =====
```

```
8 ! Define Force List
9 ! =====
10
11 /input ,c1,txt
12
13 ! =====
14 ! Preceding Modal Analysis
15 ! =====
16
17 /solu
18 allsel ,all
19
20 ! Define Analysis Type
21 num_mode = 60 ! Used also later
22 antype ,modal
23 modopt ,lanb,num_mode,,,,off
24 mxpand ,all
25
26 ! Solve
27 solve
28
29 ! Finish the Solution Pass
30 finish
31
32
33
34 ! =====
35 ! Harmonic Analysis
36 ! =====
37
38
39 /solu
40 allsel ,all
41 freq_min=1851.88
42 freq_max=1856.08
43 num_freqns=35
44
45
46 num_fnodes = 60
47 *dim ,FNODEs_ARRAY ,array ,num_fnodes ,1
48 /input ,mapping ,txt
49
50 bet=5
```

```
51
52 antype,harmonic
53 hropt,msup,num_mode      ! mode-superposition method & mode
    Numbers
54 !hropt,full
55 !outres,nsol,all
56 hrout,on                ! On: print results as real and
    imaginary components ; Off: print results as amplitudes and
    phase angles
57 lvscale,0              ! To make sure that no modal forcing terms
    are included
58 !outpr,,all
59 harfrq,freq_min,freq_max ! frequency range
60 nsubst,num_freqs       ! intervals within freq. range
61 kbc,1                  ! specifies stepped or ramped
    loading within a load step. 0: ramped - 1: stepped
62 alphad,bet
63
64
65
66
67 ! Apply Excitation
68 *do,i,1,num_fnodes
69   f,FNODEs_ARRAY(i),fx,FC_x(i),FS_x(i)
70   f,FNODEs_ARRAY(i),fy,FC_y(i),FS_y(i)
71   f,FNODEs_ARRAY(i),fz,FC_z(i),FS_z(i)
72 *enddo
73 allsel,all
74
75
76 f,239,fz,50
77 f,351,fz,-50
78
79
80 ! Solve
81 solve
82
83 !Finish the Solution Pass
84 finish
85
86
87
88 ! =====
```

```

89 ! Print and export
90 ! =====
91
92
93 /post26
94
95
96 ref_node = 239
97
98 file,,rfrq
99 nsol,2,ref_node,u,x           ! Get x-deflection data
100 nsol,3,ref_node,u,y         ! Get y-deflection data
101 nsol,4,ref_node,u,z         ! Get z-deflection data
102 abs,5,2                      ! Store reponse
    amplitude, already stored in variable #2
103 abs,6,3
104 abs,7,4
105
106
107 *get,substeps,vari,,nsets    ! Get number of freq
    steps
108 *dim,x_axis,,substeps,1      ! Vector to store
    frequencies
109 *dim,y1_axis,,substeps,1     ! Vector to store
    response levels (ux)
110 *dim,y2_axis,,substeps,1     ! Vector to store
    response levels (uy)
111 *dim,y3_axis,,substeps,1     ! Vector to store
    response levels (uz)
112
113
114 vget,x_axis,1                ! Store frequencies, to
    be printed out
115 vget,y1_axis,5               ! Store response levels,
    to be printed out
116 vget,y2_axis,6               ! Store response levels,
    to be printed out
117 vget,y3_axis,7               ! Store response levels,
    to be printed out
118
119
120 ! Plot & Print

```

```
121 plvar,6          ! Plot (ux) of this node, just for
      visualization
122
123 ! Call to the printing function
124 /input,print_frf2,txt
125
126
127 finish
```

## A.4 Macro print\_frf2

```
1      *c fopen,Response_Node_%ref_node%_X,txt
2      *vwrite,x_axis(1),y1_axis(1)
3      (F9.3,5X,F15.13)
4      *c fclose
5
6      *c fopen,Response_Node_%ref_node%_Y,txt
7      *vwrite,x_axis(1),y2_axis(1)
8      (F9.3,5X,F15.13)
9      *c fclose
10
11     *c fopen,Response_Node_%ref_node%_Z,txt
12     *vwrite,x_axis(1),y3_axis(1)
13     (F9.3,5X,F15.13)
14     *c fclose
15
16     /EOF
```

# Appendice B

## Script Matlab

### B.1 Script Matlab creazione testo per il vettore c1

```
1 dimensione = size(c1,1);
2 numero_nodi = dimensione/3;
3
4 file = fopen('c1.txt','w');
5 fprintf(file,'numero_nodi = %d\n',numero_nodi);
6
7 fprintf(file,'*dim,FC_x,array,numero_nodi,1\n');
8 fprintf(file,'*dim,FS_x,array,numero_nodi,1\n');
9
10 fprintf(file,'*dim,FC_y,array,numero_nodi,1\n');
11 fprintf(file,'*dim,FS_y,array,numero_nodi,1\n');
12
13 fprintf(file,'*dim,FC_z,array,numero_nodi,1\n');
14 fprintf(file,'*dim,FS_z,array,numero_nodi,1\n');
15
16 for i = 1:numero_nodi
17     valore = (i-1)*3 + 1;
18     temp1 = c1(valore,1);
19     fprintf(file,'*vfill,FC_x(%d,1),data,%1.16f
20             \n',i,temp1);
21     temp2 = c1(valore,2);
22     fprintf(file,'*vfill,FS_x(%d,1),data,%1.16f
23             \n',i,temp2);
24     valore = valore + 1;
25     temp1 = c1(valore,1);
```

```
24 fprintf(file, '*vfill,FC_y(%d,1),data,%1.16f
    \n',i,temp1);
25 temp2 = c1(valore,2);
26 fprintf(file, '*vfill,FS_y(%d,1),data,%1.16f
    \n',i,temp2);
27 valore = valore + 1;
28 temp1 = c1(valore,1);
29 fprintf(file, '*vfill,FC_z(%d,1),data,%1.16f
    \n',i,temp1);
30 temp2 = c1(valore,2);
31 fprintf(file, '*vfill,FS_z(%d,1),data,%1.16f
    \n',i,temp2);
32 end
33
34 fclose(file);
```

## B.2 Script Matlab creazione testo per il vettore MAPPING

```
1 nodi_interesse = [];
2 for i = 1:size(mapping,1)/3
3     nodi_interesse(i) = mapping(i*3);
4
5 end
6
7 file = fopen('mapping.txt','w');
8
9 for i = 1:size(mapping,1)/3
10    temp = nodi_interesse(i);
11    fprintf(file, '*vfill,FNODEs_ARRAY(%d,1),data,%d
    \n',i,temp);
12 end
13
14 fclose(file);
```

# Appendice C

## Metodo di sovrapposizione modale

Il metodo di sovrapposizione modale si basa sull'equazione del moto del sistema

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{F\}$$

Da cui estrapola ed usa solo i modi necessari per rappresentare le frequenze di interesse, motivo per il quale risulta vantaggioso dal punto di vista computazionale.

L'assunzione principale afferma che lo spostamento può essere espresso come combinazione lineare dei singoli modi di vibrare secondo la relazione

$$\{x\} = \sum_{i=1}^N [\phi_i]\{q_i\}$$

dove  $\phi_i$  sono le forme modali m-normalizzate, mentre  $q_i$  sono le coordinate modali. Riscrivendo l'equazione del moto mediante l'espressione sopra si ricava

$$[m][\phi]\{\ddot{q}\} + [c][\phi]\{\dot{q}\} + [k]\{q\} = \{F\}$$

e pre-moltiplicando per  $[\phi]^T$  si ottiene

$$[\phi]^T [m][\phi]\{\ddot{q}\} + [\phi]^T [c][\phi]\{\dot{q}\} + [\phi]^T [k][\phi]\{q\} = [\phi]^T \{F\}$$

Le tre matrici risultanti che moltiplicano i vettori di spostamento, velocità e accelerazione sono diagonali.

Questo metodo riduce significativamente le dimensioni delle matrici e, di conseguenza, i tempi di calcolo.

In definitiva, le risposte modali individuali  $q_i$  con le rispettive forme modali superimposte per ottenere l'attuale risposta, per questo il metodo viene chiamato "mode-superposition". [2]

# Bibliografia

- [1] gruppo di ricerca AerMec. *NOVA 2.0: USER MANUAL*. 2024.
- [2] COMSOL. *Mode Superposition*. Accesso: 16 ottobre 2024. 2024. URL: <https://www.comsol.com/multiphysics/mode-superposition>.
- [3] Christian Maria Firrone, Stefano Zucca et al. "Modelling friction contacts in structural dynamics and its application to turbine bladed disks". In: *Numerical Analysis-Theory and Application* 14 (2011), pp. 301–334.
- [4] F Palloni. "IMPLEMENTAZIONE DEL SUPERAMENTO DI CRAIG-BAMPTON IN FEMTOOLS APPLICATION FRAMEWORK". In: ().
- [5] Stefano Zucca. *Sistemi a parametri concentrati, sistemi a molti gradi di libertà*. 2022.
- [6] Stefano Zucca. *Sistemi a parametri concentrati, sistemi ad un grado di libertà*. 2022.
- [7] Stefano Zucca. *Smorzamento per attrito delle vibrazioni*. 2022.