



**Politecnico
di Torino**

POLITECNICO DI TORINO
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria
Aerospaziale

OTTIMIZZAZIONE DI MANOVRE DI
RENDEZ-VOUS TRAMITE METODI
INDIRETTI

Relatore:
Prof. Lorenzo Casalino

Candidato:
Giorgio Tomaino

Anno Accademico 2023/24

Abstract

Questo lavoro di tesi si propone di studiare l'ottimizzazione di due manovre di rendez-vous tra due spacecraft in orbita bassa, in cui il primo deve raggiungere l'orbita obbiettivo del secondo, tramite la modifica dei parametri orbitali. Nella tesi vengono illustrati i principali concetti teorici riguardo la meccanica orbitale, al volo spaziale e alle relative manovre orbitali, con un approfondimento sulla propulsione che verrà utilizzata.

In seguito ci si concentrerà sull'analisi della manovre, viene utilizzato il metodo di ottimizzazione indiretto che sfrutta l'integrazione delle equazioni per risolvere il problema di ottimo, rispetto al metodo diretto che invece le discretizza. Il metodo indiretto sfrutta del principio di massimo di Pontryagin e per trovare la soluzione alle equazioni si risolve un Boundary Value Problem. Lo scopo del lavoro è ricavare la migliore configurazione tra spinta generata dal motore (elettrico) e consumo dello stesso, valutato col parametro ΔV (variazione di velocità), per compiere le manovre nei tempi stabiliti, dividendo la manovra in duecento nodi per completare così il rendez-vous.

Inoltre, questo studio si prefissa l'obbiettivo di confrontare i risultati ottenuti dai lavori di D'amico e Costigliola, che studiarono il medesimo problema utilizzando il metodo diretto e indiretto su cinquanta nodi.

English Version

This thesis aims to study the optimization of two rendez-vous maneuvers between two spacecraft in low Earth orbit, the first spacecraft must reach the target orbit of the second by modifying its orbital parameters. Firstly, the thesis illustrates the main theoretical concepts related to orbital mechanics, spaceflight, and orbital maneuvers, with a focus on the propulsion system used. Secondly, the study focuses on the analysis of the maneuver: in this work is used the indirect optimization method that uses the integration of equations to solve the optimality problem, compared to the direct method that discretizes them. The indirect method uses the Pontryagin maximum principle and to find the solution to the equations a Boundary Value Problem is solved. The goal of this work is to derive the best configuration between the thrust generated by the (electric) engine and its fuel consumption, evaluated using the parameter ΔV (change in velocity), to perform the maneuvers within the established time limits, dividing the maneuver into two hundred nodes to complete the rendezvous. In conclusion, this study aims to compare the results obtained by D'Amico and Costigliola, who studied the same problem using the direct and indirect method on fifty nodes.

Indice

Abstract	I
Indice	III
Elenco delle figure	V
Elenco delle tabelle	VI
1 Introduzione	1
2 Teoria Orbitale Base	3
2.1 Problema dei Due Corpi	3
2.1.1 Leggi di Keplero	5
2.1.2 Parametri Orbitali Classici	7
2.1.3 Orbite	9
2.2 Propulsione	12
2.2.1 Equazione del Razzo	14
2.2.2 Impulso Specifico	16
2.3 Manovre Orbitali	19
2.4 Modelli utilizzati	21
2.4.1 Moto relativo	21
2.4.2 Parametri Orbitali Relativi	24
3 Il Metodo di Ottimizzazione Indiretto	25
3.1 Teoria del Controllo Ottimale	26
3.2 Il controllo Bang-Bang	31
3.3 Problema Differenziale ai Limiti	32

4	Definizione del Problema	34
4.1	Approssimazioni da considerare	34
4.2	Definizione dei parametri	36
4.3	Applicazione della teoria del controllo	39
4.3.1	Definizione dell'Hamiltoniano	39
4.3.2	Derivate sui controlli	41
4.4	Controllo sulla Switching Function	43
4.5	Derivate per la massa	45
4.6	Implementazione sul codice	46
5	Risultati del Problema	47
5.1	Casi di studio	47
5.1.1	Definizioni preliminari del problema	49
5.2	Caso 1	50
5.3	Caso 2	61
6	Conclusioni	72
	Bibliografia	73

Elenco delle figure

2.1	Orbita di un pianeta che spazza aree uguali in tempi uguali . . .	6
2.2	Parametri orbitali.	8
2.3	Differenti tipologie di orbite.	9
2.4	Differenti orbite in base alla distanza dalla Terra.	11
2.5	Un esempio di orbita molto ellittica con focus sul tempo di permanenza sui poli.	11
2.6	Schema trasferta di Hohmann.	20
2.7	Rappresentazione angolo β nel caso di spinta frenante.	22
2.8	Rappresentazione angolo α nel caso di spinta frenante.	23
5.1	Diagramma di spinta per diversi valori - caso 1	50
5.2	Variazione massa per diversi valori di spinta - caso 1	52
5.3	Diagramma di spinta nel tempo - caso 1	54
5.4	Traiettoria del <i>deputy</i> - caso 1	55
5.5	Dettaglio sulla traiettoria del <i>deputy</i> - caso 1	56
5.6	Diagramma andamento δa nel tempo - caso 1	57
5.7	Diagramma andamento $\delta \lambda$ nel tempo - caso 1	58
5.8	Diagramma andamento δe_x e δe_y nel tempo - caso 1	59
5.9	Diagramma decremento massa nel tempo - caso 1	60
5.10	Diagramma spinta per diversi valori di spinta - caso 2	61
5.11	Variazione massa per diversi valori di spinta- caso 2	63
5.12	Diagramma spinta - caso 2	65
5.13	Traiettoria del <i>deputy</i> - caso 2	66
5.14	Diagramma andamento δa nel tempo - caso 2	67
5.15	Diagramma andamento $\delta \lambda$ nel tempo - caso 2	68
5.16	Diagramma andamento δe_x nel tempo - caso 2	69
5.17	Diagramma andamento δe_y nel tempo - caso 2	70
5.18	Decremento massa nel tempo - caso 2	71

Elenco delle tabelle

2.1	Esempi di ΔV per diverse missioni.	15
2.2	Esempi di I_s in base a diversi tipi di motori.	17
5.1	Valori parametri ad inizio e fine manovra - caso 1	51
5.2	Test andamento tempi accensione motore - caso 1	51
5.3	Test spinta e ΔV associato - caso 1	53
5.4	Andamento tempi archi di spinta - caso 1	53
5.5	Valori parametri inizio e fine manovra - caso 2	62
5.6	Test andamento tempi accensione motore - caso 2	62
5.7	Test spinta e ΔV associato - caso 2	64
5.8	Andamento tempi archi di spinta - caso 2	65

Capitolo 1

Introduzione

Questo lavoro di tesi si prefissa l'obbiettivo di studiare e ottimizzare due manovre di rendez-vous¹ tra due spacecraft² in orbita intorno alla Terra. Il veicolo che compirà la manovra è detto *deputy* (vice) e deve raggiungere lo spacecraft *chief* (capo) che definisce l'orbita di arrivo; la prima manovra in questione è un cambio di semiasse maggiore, la seconda un cambio di eccentricità, alla fine delle quali i due velivoli si incontreranno e compieranno perciò il rendez-vous.

Questa tipologia di manovra viene effettuata fin dall'inizio delle esplorazioni umane nello spazio, in quanto indispensabili per congiungere due veicoli nello spazio nell'ottica, tra le altre cose, degli approvvigionamento delle stazioni spaziali, fattore indispensabile per lo studio dell'ambiente in microgravità in previsione delle missioni su altri corpi celesti.

La prima volta che questo tipo di manovra viene effettuata risale al 1962 quando le due navicelle sovietiche Vostok 3 e 4 riuscirono ad allinearsi a circa 6,5 km tra loro, azzerando questa distanza nelle missioni successive e riuscendo effettivamente a collegarsi (fase di docking). Anche gli americani intrapresero questi studi sulla manovra pochi anni dopo durante le missioni Gemini, in vista del programma Apollo dove era indispensabile per il ritorno in orbita degli astronauti allunati sul suolo lunare. Una delle più famose manovre di rendez-vous fu compiuta nel 1975 in cui una navicella americana

¹Rendez-vous significa "recarsi" o "recaevi", indicando in linguaggio comune un appuntamento. In ambito astronautico indica appunto l'incontro tra due veicoli nello spazio,

²Il termine spacecraft (letteralmente navicella spaziale) in generale può venire usato per indicare un qualsiasi satellite di tipo artificiale che si muove nello spazio.

Apollo e una Soyuz sovietica si collegarono in orbita segnando la fine della corsa allo spazio e l'inizio delle distensioni politiche e di collaborazione tra le due grandi superpotenze mondiali, che portarono negli anni seguenti alla creazione della stazione spaziale internazionale (ISS).

La difficoltà principale di questa manovra è riuscire ad allineare i veicoli che stanno orbitando intorno alla Terra su piani orbitali e a velocità differenti (quindi anche a distanze differenti dalla superficie).

Lo spacecraft *deputy*, per compiere la trasferta, utilizzerà un motore di tipo elettrico o elettromagnetico, caratterizzato da piccoli valori di spinta ma con grande impulso specifico. Ciò comporta un minore consumo di carburante e quindi pesi e ingombri molto minori rispetto all'utilizzo di propellenti di tipo chimico, a discapito però di tempi di manovra più lunghi che andranno valutati durante lo studio della trasferta.

La manovra viene simulata e studiata tramite la risoluzione delle derivate dei controlli, utilizzando il metodo di ottimizzazione indiretto e al principio di massimo di Pontryagin; questi calcoli vengono eseguiti su un codice in linguaggio di programmazione Fortran³, che restituiranno la modifica dei parametri dello spacecraft e la relativa differenza di velocità che dovrà subire per compiere la manovra. Questo valore fungerà da parametro fondamentale per determinare il consumo e quindi la fattibilità o meno dello studio, in quanto più è grande il valore di ΔV più carburante sarà necessario per compiere la manovra e ciò comporta portarne di più nello spazio, pertanto ci sarà un aumento dei costi della missione.

Questo lavoro vuole ricalcolare e, nel caso, migliorare i risultati ottenuti dai colleghi D'Amico[4] e Costigliola[3] utilizzando il metodo indiretto rispetto a quello diretto, con un aumento del numero di nodi (ovvero di suddivisione dei tratti di orbita su cui applicare il metodo di ottimo).

³Versione Fortran 90 eseguito su macchina virtuale con installato Windows XP a 32 bit.

Capitolo 2

Teoria Orbitale Base

Per poter comprendere appieno ciò che andremo a trattare è necessario soffermarsi sulle principali leggi e formule matematiche sviluppate nel corso dei secoli per descrivere il movimento dei corpi nello spazio, in assenza perciò di forze esterne che agiscono su di essi all'infuori della forza di gravità. In questo primo capitolo verranno illustrate queste leggi in maniera non esaustiva, non essendo l'obiettivo della tesi, presentando comunque una sufficiente completezza per andare poi a comprendere i passaggi successivi della nostra analisi.

2.1 Problema dei Due Corpi

Il Problema dei Due Copri non è altro che la risoluzione delle equazioni del moto tra due oggetti nello spazio data la loro massa e velocità iniziale, in cui l'unica interazione tra di essi è rappresentata dalla forza di gravità; questo problema in realtà non è che una approssimazione del più generico Problema degli n corpi (riconducibile al moto reale dei corpi celesti), dove però è estremamente complesso calcolare e tenere in considerazioni i moti relativi di tutti i diversi oggetti, risultando di difficile se non impossibile risoluzione anche per i calcolatori più potenti nel mondo. Le approssimazioni più importanti che possiamo implementare per semplificare il problema degli n corpi sono le seguenti:

- consideriamo ovviamente solo due corpi con masse puntiformi,
- una delle due masse deve essere molto più grande dell'altra,

- interviene esclusivamente la forza di gravità generata dai due corpi, non considerando eventuali perturbazioni che nella realtà potrebbero verificarsi.

Un esempio di problema dei due corpi è rappresentato dal Sole e dalla Terra o la Terra e un satellite, in quanto in entrambi i casi la differenza di massa tra i due corpi è di parecchi ordini di grandezza e le distanze (o dimensioni nel caso del satellite) permettono di definire puntiformi le loro masse.

Detto questo, l'unica forza che valutiamo è appunto la forza di gravità, o meglio, la Legge di Gravitazione Universale, definita da *Newton* nel XVII sec. Questa equazione esprime la forza di attrazione che due corpi esercitano tra loro in base alla loro massa (m e M) e alla distanza r al quadrato tra di loro; viene così scritta in termini vettoriali:

$$\mathbf{F} = -G \frac{mM}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (2.1)$$

in cui G è la costante di gravitazione universale e vale $6,67 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$.

Viene definito il parametro gravitazionale $\mu = GM$, se M è la massa della Terra ($5,98 \times 10^{24} kg$), $\mu = 398600 \frac{km^3}{s^2}$.

La proprietà principale di questa forza è il fatto di essere *conservativa*¹ e ciò comporta che si conservi l'energia meccanica del sistema, in maniera analoga si mantiene costante anche il momento angolare, dato che riprenderemo in seguito quando si parlerà delle orbite.

¹Una forza conservativa è una forza che può essere descritta come un campo conservativo nello spazio in cui si muovono i corpi, e non soltanto come una forza applicata ad un corpo in moto, perciò il lavoro che viene compiuto dalla forza sul corpo in un certo tragitto non deve dipendere dal percorso ma solamente dai punti di partenza e di arrivo della traiettoria che viene seguita dal corpo.

2.1.1 Leggi di Keplero

Dalle osservazioni dell'astronomo *Tycho Brahe*², *Keplero* dedusse le sue tre leggi che descrivevano il moto dei corpi celesti intorno a una Stella; da queste leggi Newton riuscì a dimostrare la sua legge di gravitazione universale.

Con riferimento al Sistema Solare, ma ugualmente valide per qualsiasi orbita, la prima legge recita:

«L'orbita descritta da un pianeta è un'ellisse, di cui il Sole occupa uno dei due fuochi.»

Questo enunciato è storicamente molto importante in quanto si abbraccia la teoria Eliocentrica sviluppata da Copernico (in cui il Sole è al centro del moto dei pianeti), abbandonando la teoria Geocentrica Tolemaica (la Terra al centro, dovendo giustificare con moti molto complicati il movimento di alcuni pianeti). Ancor più importante però è la definizione che ci viene data della forma ellittica³ dell'orbita. Essa è definita da due semiassi (a semiasse maggiore e b semiasse minore) e presenterà, allineati al semiasse maggiore, due punti detti fuochi. Matematicamente parlando, dato un punto generico, il luogo di punti formati dalla somma tra le distanze del punto dai fuochi, è chiamato ellisse.

Conoscendo questo ultimo concetto, la seconda legge esprime invece come rispetto al fuoco in cui è presente il Sole, il pianeta col suo movimento spazza aree uguali in tempi uguali. Ciò comporta, in parole semplici, che il pianeta si muoverà più veloce quando durante la sua orbita si avvicinerà al Sole e più lentamente quando sarà distante da esso. Il punto più vicino al Sole viene definito perielio (perigeo nel moto Terra-satellite), il più lontano afelio (apogeo). Come vedremo in seguito, la forma ellittica è energeticamente stabile e permette la stabilità del moto.

Questa seconda legge deriva appunto dalla conservazione del momento angolare che, tra le altre cose, mantiene costante il piano dell'orbita; ciò comporta che un satellite in orbita intorno alla Terra continuerà indisturbato a ruotare

²Tycho Brahe fu un astronomo danese vissuto nel XVI sec, nel 1572 osservò e studiò la supernova nella costellazione di Cassiopea che permise negli anni seguenti di abbandonare il concetto di universo immutabile. I suoi studi passarono al suo allievo Johannes von Kepler che sviluppò le sue famose leggi orbitali.

³In geometria, l'ellisse è una curva piana chiusa che si ottiene segnando un cono circolare con un piano non parallelo ad alcuna generatrice. Un caso particolare di ellisse è da considerarsi la circonferenza.

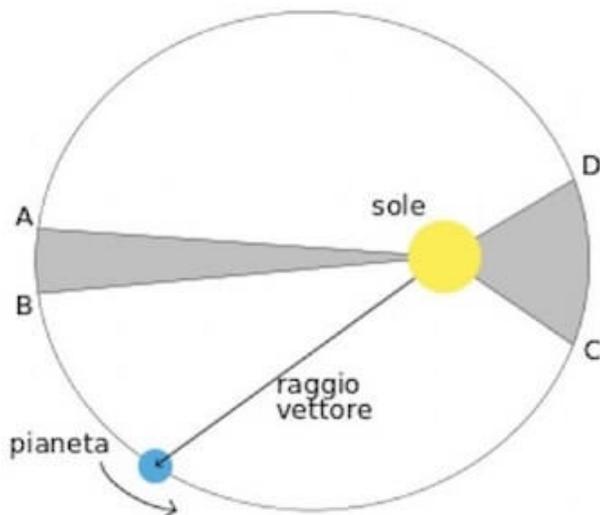


Figura 2.1: Orbita di un pianeta che spazza aree uguali in tempi uguali

senza andare a modificare la sua orbita, che definiremo in seguito con i parametri orbitali. Ovviamente nella realtà ci saranno perdite di velocità causate da forze di attrito con le parti alte dell'atmosfera o disallineamenti dovuti ai moti relativi, ciò rende necessario l'utilizzo di un motore specifico per il controllo d'assetto.

Per concludere, la terza legge di Keplero esprime:

$$k = \frac{T^2}{a^3} \quad (2.2)$$

L'equazione spiega che per ogni pianeta in orbita intorno al Sole, è costante il rapporto tra il quadrato del periodo T (tempo per compiere un'orbita) e il cubo del suo semiasse a . La costante in questione sarà un parametro dipendente dal corpo principale (quindi per tutti i satelliti che ruotano intorno alla Terra la costante non cambia) e ciò permette agli scienziati di stimare con accuratezza le orbite di pianeti in altri sistemi non facilmente osservabili.

2.1.2 Parametri Orbitali Classici

Definite le leggi fondamentali, è possibile descrivere il moto di un generico corpo intorno ad pianeta (o comunque un corpo di dimensioni molto maggiori) tramite l'utilizzo di sei parametri, definiti parametri orbitali classici o semplicemente elementi orbitali. Questi parametri definiscono la forma e l'orientamento dell'orbita rispetto al corpo principale e in più indicano la posizione relativa dell'oggetto orbitante; questi parametri sono:

- a semiasse maggiore;
- e eccentricità;
- i inclinazione del piano orbitale;
- ω argomento del periastro⁴;
- Ω longitudine del nodo ascendente;
- M anomalia media al tempo considerato.

Il semiasse maggiore è appunto metà dell'asse maggiore che divide l'ellisse, passante per il centro di essa; in particolare questo asse maggiore collega i punti di periastro e apoastro. L'eccentricità è un parametro adimensionale non negativo che indica la forma di una curva, in particolare se:

- $0 \leq e < 1$ la curva è una ellisse;
- $e = 1$ la curva è una parabola;
- $e > 1$ la curva è una iperbole.

Eccentricità e semiasse definiscono univocamente la forma dell'orbita di uno spacecraft, nel caso particolare di orbita circolare l'eccentricità è nulla e il semiasse maggiore corrisponde ovviamente al raggio della circonferenza stessa. L'inclinazione indica quanto è inclinato il piano orbitale rispetto al piano equatoriale del corpo principale, quindi del caso Terra - spacecraft viene misurata l'inclinazione rispetto all'equatore.

La longitudine del nodo ascendente è quell'angolo che misura quanti gradi

⁴Il periastro è il generico termine riferito al perigeo, punto specifico nell'orbita Terra - Sole, l'analogo dell'apogeo è l'apoastro.

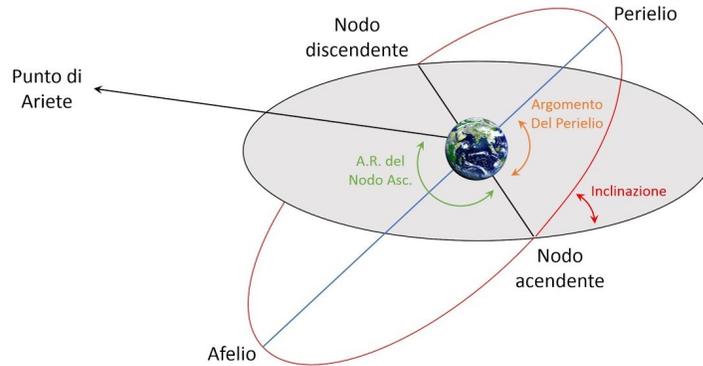


Figura 2.2: Parametri orbitali.

rispetto al punto d'Ariete⁵ il moto del satellite ascende il piano equatoriale, questo punto è chiamato nodo ascendente, opposto al nodo discendente in cui invece il satellite ridiscende sotto l'equatore; ovviamente questo parametro ha senso di esistere solo se l'orbita è inclinata, nel caso in cui l'inclinazione è nulla si parlerà di orbita equatoriale e questo parametro viene ridefinito. L'argomento del periastro è l'angolo tra la linea dei nodi (che congiunge nodo ascendente e nodo discendente) e il periastro, indicando quindi l'orientamento dell'ellisse; anche in questo caso questo parametro può perdere di significato se l'eccentricità è nulla, infatti in un'orbita circolare non esiste periastro. Infine l'anomalia media indica, rispetto questa volta al periastro, in che punto dell'orbita si trova il nostro spacecraft. Nei casi particolari citati vengono utilizzati dei parametri alternativi che non vedremo in questa trattazione.

⁵Il punto d'Ariete è quel punto intorno al Sole in cui la Terra si trova durante l'equinozio di primavera, la congiungente Terra - Sole interseca la costellazione dell'Ariete.

2.1.3 Orbite

I parametri orbitali definiscono in definitiva una specifica forma e posizione di un'orbita nello spazio che, come è stato anticipato, mantiene costante la posizione del piano orbitale grazie alla conservazione del momento angolare. Rimane costante anche l'energia meccanica dell'orbita, somma tra energia cinetica e potenziale che, in accordo con la seconda legge di Keplero, cambieranno valore in base alla posizione rispetto al corpo principale (energia cinetica massima ed energia potenziale minima al periastro, inverse all'apoaastro). L'energia meccanica può essere quindi scritta come:

$$E = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} \quad (2.3)$$

Dove la prima frazione indica la forza cinetica dipendente dalla velocità del corpo e la seconda invece indica l'energia potenziale che dipende dalla massa del corpo principale e dalla distanza da esso. La seconda scrittura fa comparire il valore del semiasse maggiore, confermando che ogni orbita avrà una energia differente; è anche facile intuire come a seconda del valore di questa energia l'orbita sarà o no stabile:

- se $E < 0$ la traiettoria sarà un'ellisse;
- se $E = 0$ la traiettoria sarà una parabola;
- se $E > 0$ la traiettoria sarà un'iperbole.

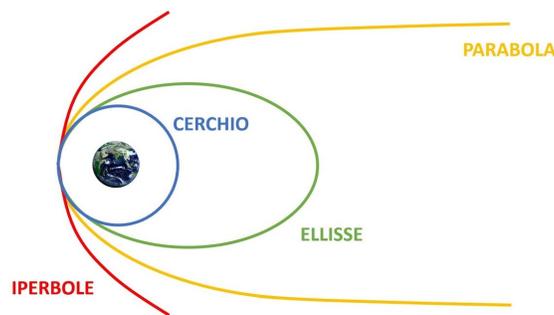


Figura 2.3: Differenti tipologie di orbite.

Infatti solo quando l'energia è negativa lo spacecraft continuerà a orbitare intorno al corpo principale, mentre se l'energia aumenterà fino a valori ≥ 0 il

corpo avrà una velocità tale da sfuggire dalla forza di attrazione del pianeta tramite una traiettoria parabolica o, se con abbastanza velocità, una iperbolica. Per cambiare orbita quindi si interviene sull'energia, modificandola e spesso facendone cambiare segno per passare da ellissi a parabola o iperbole, permettendo così lo spostamento nello spazio, modificando nuovamente l'energia meccanica per riportarla ad un valore negativo (quindi ad una forma ellittica) e perciò inserendosi in un'orbita stabile.

Tutto questo è indispensabile per i movimenti degli spacecraft nello spazio, la tipologia di traiettoria che andranno a compiere dipenderà dalla tipologia di trasferta che dovranno compiere.

Nel caso di ellisse è possibile (riscrivendo la terza legge di Keplero) esplicitare il periodo:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \quad (2.4)$$

Nel caso particolare di orbita circolare è possibile ricavare la velocità orbitale (detta circolare o prima velocità cosmica⁶) (quindi avendo velocità costante per tutta l'orbita), calcolata come segue:

$$v = \sqrt{\frac{\mu}{r}} \quad (2.5)$$

Inoltre è possibile catalogare la tipologia di orbita in base alla sua posizione rispetto alla Terra, avremo:

- orbite LEO (low Earth orbit), 300 - 1000 km;
- orbite MEO (medium Earth orbit), fino a 35786 km;
- orbite HEO (high Earth orbit), oltre i 35786 km.

Il limite di 35786 km (dalla superficie) indica una specifica orbita detta geosincrona, ovvero che ruota intorno alla Terra alla stessa velocità di rotazione della Terra stessa, un caso particolare è l'orbita chiamata *geostazionaria* (GEO), orbita circolare ed equatoriale con la particolarità che mantiene sempre la stessa posizione nel cielo terrestre, ovvero il satellite punta sempre nello stesso punto sulla superficie.

⁶La prima velocità cosmica è quella velocità che un corpo deve avere per riuscire a stabilizzarsi in un'orbita intorno ad un corpo.

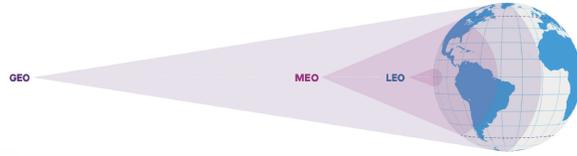


Figura 2.4: Differenti orbite in base alla distanza dalla Terra.

Questo tipo di orbita è molto utilizzata per i sistemi di telecomunicazione in quanto con soli tre satelliti sfasati di 120° è possibile trasmettere alla quasi totalità delle terre abitate. L'unico difetto è che questi satelliti hanno, per l'elevata distanza dalla superficie, una grande latenza di trasmissione dati, così negli ultimi anni si stanno optando nuove tipologie di comunicazione tramite costellazioni di centinaia di mini-satelliti in orbita LEO, diminuendo di molto i problemi di latenza.

Infine si possono distinguere le orbite polari, dotate di una elevata inclinazione che gli permette di osservare i poli, o le cosiddette "Highly Elliptical Orbit" ovvero orbite molto ellittiche che nel punto di perigeo si avvicinano a meno di 1000 km dalla superficie e invece ad apogeo oltre a 10000 km, questo per avere una alta permanenza sempre sui poli.

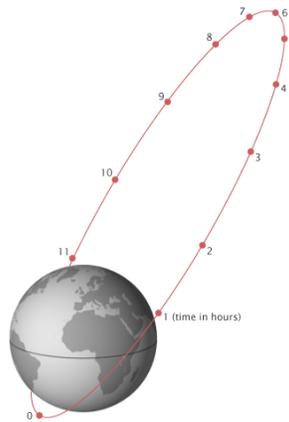


Figura 2.5: Un esempio di orbita molto ellittica con focus sul tempo di permanenza sui poli.

2.2 Propulsione

Dall'equazione (2.3), l'unico parametro che possiamo andare a modificare per modificare l'energia dell'orbita, è la velocità; le trasferite nello spazio perciò avranno come parametro fondamentale la variazione della velocità (ΔV). Fare questo però è estremamente complicato perché non si può scambiare energia con l'ambiente spaziale (vuoto) in maniera semplice come facciamo sulla Terra, l'unico modo è "spingere" perdendo massa dietro di noi, applicando quindi il terzo principio della dinamica di Newton, ovvero che ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria. Perdendo massa ma conservandosi la quantità di moto⁷ è possibile ricavare una relazione tra massa persa e velocità acquisita, scritta come:

$$m dV = dm_p c \quad (2.6)$$

in cui dividendo per il tempo ricavo:

$$m \frac{dV}{dt} = \dot{m}_p c = T \quad (2.7)$$

dove:

- m è la massa iniziale;
- m_p è la massa di propellente espulsa;
- $\frac{dV}{dt}$ è l'accelerazione che subisce la massa;
- \dot{m}_p è la portata di massa che viene espulsa (propellente);
- c è la velocità con cui il propellente viene espulso, chiamata velocità efficace di scarico;
- T è la spinta.

Questa equazione esprime in maniera chiara come tutta la spinta che viene generata deriva solamente dalla massa di propellente che è possibile portata a bordo del razzo, quindi tutte le manovre che si possono compiere nello spazio andranno accuratamente previste per dimensionare in maniera accurata

⁷La quantità di moto è una grandezza vettoriale tra il prodotto della massa e la sua velocità, questa quantità è una grandezza conservativa.

quanto propellente è portare a bordo, senza eccedere per evitare pesi e ingombri eccessivi. Infatti un problema da non trascurare è il peso non solo dei propellenti⁸ ma anche dei serbatoi e di tutte quelle strutture che sostengono il razzo che, una volta in orbita, comportano soltanto peso ulteriore e inutile che deve essere accelerato. Si opta pertanto di dividere in diverse parti il razzo (*staging*) che andranno sganciati una volta esaurito il carburante al loro interno così da alleggerire il restante razzo.

Questo razzo più piccolo necessiterà, in proporzione, di meno spinta per continuare l'ascesa e quindi anche i motori che spingeranno questo successivo stage saranno più piccoli (generalmente anche differenti per essere ottimizzati alla diversa pressione dell'alta atmosfera).

⁸Per creare spinta, i motori a propulsione chimica necessitano di due serbatoi, uno per il combustibile (H_2 , CH_4 , kerosene) e l'altro per il comburente (tipicamente ossigeno liquido LOX), propellenti usati sui razzi possono essere solidi o liquidi, in alcuni casi i propellenti liquidi, per mantenersi tali, necessitano di impianti criogenici che aumentano ulteriormente il peso dei serbatoi.

2.2.1 Equazione del Razzo

L'equazione del razzo, o equazione di *Tsiolkowski*⁹ dal nome del suo ideatore, è una legge matematica che permette di legare la variazione di velocità ΔV con la variazione di massa dovuto al consumo di propellente. L'equazione di ricava integrando nel tempo l'equazione (2.7):

$$\int_0^{\Delta t} m dV = \int_0^{\Delta t} T dt$$

dividendo per la massa e sostituendo la definizione di spinta si trova:

$$\int_0^{\Delta t} dV = \int_0^{\Delta t} \frac{\dot{m}_p c}{m} dt$$

da cui è possibile, facendo un cambio di variabile tra il tempo e la massa del razzo, ricavare il rapporto di masse sapendo che la portata è definita $\dot{m} = \frac{dm}{dt} = -\dot{m}_p$, quindi:

$$\Delta V = - \int_{m_0}^{m_f} \frac{c}{m} dm$$

Se consideriamo la velocità efficace di scarico costante possiamo infine trovare l'equazione del razzo:

$$\Delta V = -c \ln \left(\frac{m_f}{m_0} \right) \quad (2.8)$$

L'equazione di Tsiolkowski esprime in maniera chiara come per aumentare la velocità dello spacecraft è necessario perdere massa; il legame tra queste grandezze dipende in maniera proporzionale alla velocità con cui la massa di propellente viene espulsa. La velocità efficace di scarico infatti esprime l'efficacia del motore che stiamo utilizzando, più è alto il valore e meglio vengono accelerati i gas propulsivi perciò più ΔV si riuscirà a creare.

Nella tabella 2.1 sono indicati i valori di ΔV per alcune tipologie di missione; è immediato notare come serva un valore molto più elevato per immettersi in orbita LEO che, per esempio, raggiungere Marte. Questo accade perché l'ascesa in orbita è uno dei momenti più complicati per una missione in quanto "vincere" la forza di gravità è estremamente complesso, è necessaria

⁹Konstantin Èduardovič Ciolkovskij, traslitterato Tsiolkowski, fu un ingegnere russo considerato il pioniere dell'astronautica che per primo teorizzò il volo spaziale.

Missione	ΔV [km/s]
Immissione in LEO	10
Un anno di mantenimento in orbita	0.5
Trasferta LEO -> GEO (impulsiva)	3.5
Trasferta LEO -> GEO (spirale)	6
Fuga (escape) dalla Terra (impulsiva)	3.2
Fuga (escape) dalla Terra (spirale)	8
Trasferta Terra -> Marte (impulsiva)	5.5
Trasferta Terra -> Marte (spirale)	6
Trasferta Terra -> Giove (spirale)	16.7
Trasferta Terra -> Alpha Centaury	30000

Tabella 2.1: Esempi di ΔV per diverse missioni.

una grandissima quantità di energia per raggiungere i 100 km di altezza (convenzionalmente il limite in cui inizia lo spazio) e superare l'attrito con l'atmosfera. Viene inoltre indicata la differenza tra manovra impulsiva e a spirale, che approfondiremo nei capitoli seguenti; in una manovra impulsiva la traiettoria è diretta verso l'obbiettivo, quindi più corta e con un solo impulso all'inizio della spinta e uno alla fine per riposizionare il satellite. In una manovra a spirale invece, il satellite inizierà ad allargare la sua orbita sempre di più compiendo appunto una spirale intorno al corpo principale e ciò comporta più impulsi nel tempo e quindi tendenzialmente più ΔV . Potrebbe sembrare che convenga sempre l'utilizzo di manovre di tipo impulsivo per risparmiare sulla variazione di velocità ma ciò non è sempre vero in quanto, come già trattato in precedenza, i motori chimici (e i loro serbatoi) sono molto pesanti e quindi non convenienti per lunghe trasferte, al contrario dei motori elettrici molto più compatti e con consumi inferiori.

2.2.2 Impulso Specifico

Un altro concetto fondamentale nell'ambito propulsivo è l'impulso specifico, questa grandezza lega il tipo di motore (e quindi anche il tipo di propellente utilizzato) alla spinta che riesce a generare. L'impulso specifico viene espresso nel Sistema Internazionale con l'unità di misura dei secondi, questo perché indica per quanto tempo un determinato motore riesce a generare la spinta prevista. All'impulso specifico è legato il concetto di impulso totale che indica invece quanta spinta viene generata durante il tempo misurato, viene calcolato nel seguente modo:

$$I_t = \int_{t_0}^{t_f} T dt \quad (2.9)$$

Mentre l'impulso specifico è espresso come:

$$I_s = \frac{I_t}{m_p g_0} \quad (2.10)$$

Ma sostituendo la definizione di impulso specifico e quella di spinta (2.7) è possibile riscrivere l'impulso specifico come:

$$I_s = \frac{c}{g_0} \quad (2.11)$$

Perciò l'impulso specifico esprime un rapporto tra la velocità efficace di scarico e l'accelerazione di gravità¹⁰ sulla Terra e come anticipato questo valore varia a seconda del tipo di motore e propellente utilizzato.

Per quanto riguarda la propulsione chimica, che utilizza reazioni di combustione per espandere i gas di scarico, i valori tipici di I_s variano tra i 200 e i 450 secondi, a seconda se si utilizzano propellenti solidi o liquidi criogenici. Nella propulsione elettrica invece i valori sono tipicamente molto più elevati, circa un ordine di grandezza in più, anche se questa tipologia di motore è molto scalabile a seconda dell'utilizzo richiesto. In generale, per l'ascesa in orbita è possibile utilizzare soltanto la propulsione chimica mentre per le manovre in orbita vengono spesso preferiti i motori elettrici; questo avviene perché i motori elettrici, per quanto abbiano un elevato impulso specifico, generano in realtà una spinta molto piccola e questa non è sufficiente a superare la gravità terrestre, al contrario dei propellenti chimici che generano

¹⁰L'accelerazione di gravità viene espressa come rapporto tra il parametro gravitazionale μ e il raggio del corpo; per la Terra vale circa $9,81 \text{ m/s}^2$.

grandissime quantità di energia. La propulsione chimica d'altro canto necessita di elevate quantità di propellente, tutto peso aggiuntivo che dovrà in qualche modo essere portato in orbita, mentre i propulsori elettrici hanno un consumo immensamente minore, avendo perciò un vantaggio in termini di costo-opportunità quando si sceglie di utilizzarli in orbita, specialmente per manovre di trasferta di satelliti, come vedremo in questo elaborato. L'unico contro di questo tipo di propulsione è appunto la poca spinta che viene generata dai motori, ciò comporta una dilatazione dei tempi di manovra che non possono essere trascurati.

	Sistema	I_s [s]	T [N]
C P	Monopropellente liquido	200 - 250	0.01 - 100
	Bipropellente liquido	300 - 450	0.01 - 10^7
	Propellente solido	200 - 300	1 - 10^6
	Propellente ibrido	250 - 350	1 - 10^6
ET P	Resistogetti	200 - 350	0.2 - 0.3
	Arcogetti	400 - 1000	0.2 - 1
E P	Propulsori a ioni	2000 - 5000	< 0.2
	Propulsori a effetto Hall	1500 - 2000	< 2
EM P	Propulsori a plasma pulsato (PPT)	600 - 2000	< 0.01
	Propulsori magneto plasma dinamici (MPD)	2000 - 5000	< 2

Tabella 2.2: Esempi di I_s in base a diversi tipi di motori.

Nella tabella 2.2 vengono indicati differenti tipologie di motori utilizzati nelle missioni spaziali con il relativo impulso specifico e range medio di spinta generata. I motori sono stati suddivisi per categoria: propulsione chimica (CP), elettrotermica (ET P), elettrica (E P) ed elettromagnetica (EM P). Come già visto in precedenza, per la propulsione chimica avremo elevata spinta ma limitato impulso specifico, il massimo valore è raggiunto dall'utilizzo di idrogeno e ossigeno criogenico. La propulsione elettrotermica sfrutta lo stesso principio di quella chimica, ovvero riscaldare i gas propulsivi per aumentarne la pressione, ma ciò avviene attraverso il riscaldamento elettrico e non alle

reazioni chimiche, infatti avremo valori di impulso specifico paragonabili alla propulsione chimica ma con spinte mediamente inferiori. La propulsione elettrica pura invece sfrutta effetti elettrici per accelerare le particelle, perciò dovendo accelerare piccole quantità di materia la spinta sarà molto piccola avendo però consumi molto bassi, garantendo un elevato impulso specifico. La propulsione elettromagnetica sfrutta un meccanismo simile a quella elettrica aggiungendoci la componente magnetica, aumentando tendenzialmente l'impulso specifico.

2.3 Manovre Orbitali

Una manovra orbitale non è altro che un movimento che facciamo compiere al nostro spacecraft che modifica uno o più parametri orbitali dell'orbita che compie intorno al corpo principale. Il movimento si compie tramite la produzione di spinta del motore che imprime una determinata variazione di velocità (ΔV) al nostro corpo orbitante modificando così la velocità totale di orbita.

Generando spinta in momenti e posizioni differenti dell'orbita si avranno conseguenze diverse:

- per modificare la forma (nel piano orbitale) dell'orbita è necessario spingere in direzione tangenziale all'orbita stessa;
- per modificare l'inclinazione del piano orbitale bisognerà invece spingere in maniera perpendicolare al piano.

Nel primo caso, cambiando la forma dell'orbita cambia di conseguenza anche la sua energia meccanica, perciò dall'equazione (2.3) viene ricavata la differenza di velocità. Da questa formula si intuisce come si avranno maggiori variazioni di ΔV per valori bassi del raggio dell'orbita, ciò significa che in una eventuale manovra di aumento del semiasse converrà sempre spingere quando il raggio è minimo (di conseguenza, in accordo con la seconda legge di Keplero, anche quando la velocità è massima), quindi al periastro.

Nel secondo caso invece è necessario applicare un ΔV fuori dal piano, influenzando molto sulla velocità di rotazione dello spacecraft secondo la seguente legge:

$$\Delta V = 2V \sin\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) \quad (2.12)$$

Perciò in questo caso conviene spingere quando la velocità è minima (quindi a raggi alti), per avere così una differenza di velocità più piccola possibile. Spingere fuori dal piano è pertanto la manovra più economicamente sfavorevole da fare, avendo lo spacecraft già una certa velocità in orbita, di norma infatti è una manovra molto costosa che si tende ad evitare programmando in maniera accurata il lancio inserendo il satellite già all'inclinazione finale durante le prime fasi del lancio.

Considerando un semplice cambio di orbita complanari tra loro, la manovra più economica (in termini di ΔV) è chiamata trasferta di Hohmann (figura 2.6). In questa manovra il satellite, genera spinta al periastro ($\max V$),

compie una traiettoria ellittica di 180° fino all'orbita di arrivo; qui genererà un secondo impulso per raggiungere la velocità orbitale¹¹ specifica dell'orbita. Questo tipo di manovra non è però la più veloce, in quel caso sarebbe necessario passare direttamente all'orbita finale in maniera diretta, però questo necessita di aumentare la velocità soltanto tramite la spinta del motore, pertanto richiede un consumo elevato di carburante.

Queste considerazioni sono sempre valide ma specificatamente attuate nelle trasferte con propulsione chimica, che sono tipicamente di tipo impulsivo; per quanto riguarda la propulsione elettrica invece, la spinta (di solito molto piccola) è generata in maniera continua nel tempo, perciò la traiettoria che compirà lo spacecraft sarà molto simile a una spirale, compiendo diverse orbite intorno al corpo principale prima di raggiungere la destinazione voluta. Questo comporta ovviamente un aumento considerevole dei tempi per il raggiungimento dell'obbiettivo, rendendo necessario valutare accuratamente i tempi di manovra che potrebbero diventare troppo elevati.

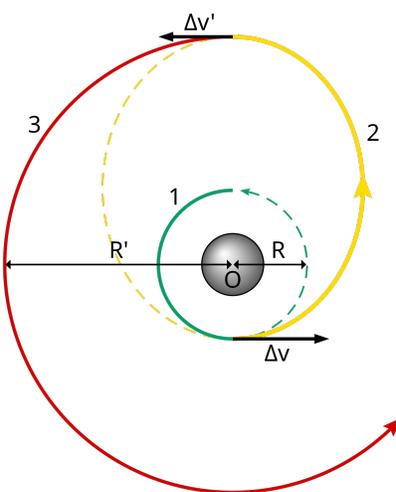


Figura 2.6: Schema trasferta di Hohmann.

¹¹La velocità orbitale è quella velocità che deve avere un corpo per orbitare in una specifica orbita ellittica, si ricava esplicitando la velocità nella formula dell'energia orbitale (2.3).

2.4 Modelli utilizzati

Nell'analisi che segue sono stati utilizzati alcuni modelli di semplificazione del moto e di definizione dei parametri del problema per agevolare la risoluzione dei calcoli. Questi metodi non andranno a modificare quello che è il problema stesso ma renderanno solo la sua risoluzione più immediata.

2.4.1 Moto relativo

Per il calcolo delle equazioni del moto dei due spacecraft è complicato descriverne il movimento utilizzando un sistema di riferimento standard solidale con la Terra, perché bisognerebbe combinare il moto relativo¹² tra i satelliti e la rotazione della Terra stessa.

Considerando una approssimazione di moto quasi circolare (che vedremo essere coerente con il nostro caso studiato), si utilizza un sistema di riferimento con origine nello spacecraft *deputy* servendosi della riscrittura delle accelerazioni in coordinate sferiche, ovvero combinando per le tre direzioni ortogonali del moto tre dati: un valore di intensità della grandezza e due angoli per la direzione nello spazio. Vengono definite le coordinate con questo criterio:

- coordinata radiale (u_r) in direzione radiale rispetto al corpo principale (la Terra);
- coordinata tangenziale (u_t) in direzione del moto del corpo;
- coordinata normale (u_n) (o fuori dal piano) positiva in accordo con la regola della mano destra.

Con l'ipotesi precedente di moto circolare è possibile definire una coordinata longitudine $\theta = \Omega + \omega + M$, visto che questi valori sono costanti o comunque non definiti nel caso in questione. Definite queste variabili è possibile

¹²Con il termine moto relativo si intende un movimento che compie un corpo rispetto ad un sistema di riferimento scelto; viene descritto per la prima volta da Galileo Galilei nel suo "Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo" introducendo per la prima volta il concetto di inerzia.

riscrivere l'accelerazione che subisce lo spacecraft in coordinate sferiche:

$$\begin{aligned}
 u_r &= \frac{T}{m} \sin \alpha \cos \beta \\
 u_t &= \frac{T}{m} \cos \alpha \cos \beta \\
 u_n &= \frac{T}{m} \sin \beta
 \end{aligned}
 \tag{2.13}$$

In questa terna di equazioni compare il rapporto $\frac{T}{m}$ che non è altro se non il modulo dell'accelerazione totale, α è l'angolo tra la velocità (quindi l'asse tangenziale del riferimento) e la spinta (figura 2.8) mentre β è l'angolo tra la spinta e il piano orbitale dello spacecraft (figura 2.7). Queste equazioni saranno il punto di partenza per i successivi sviluppi dell'ottimizzazione della trasferta.

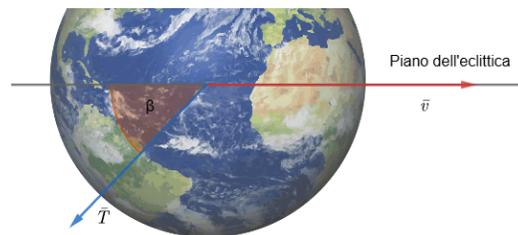


Figura 2.7: Rappresentazione angolo β nel caso di spinta frenante.

Queste equazioni sono le generiche per un moto in tre dimensioni, con un movimento anche fuori dal piano orbitale (tramite l'accelerazione u_n) e relativa modifica dell'inclinazione; nel caso che andremo a studiare viene sviluppato un moto semplificato in sole due direzioni, in cui vedremo che l'angolo β sarà nullo, non essendoci una componente normale di spinta.

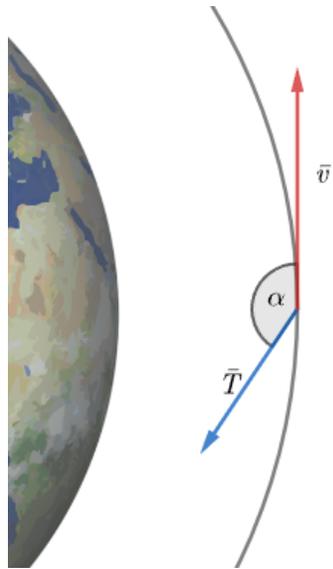


Figura 2.8: Rappresentazione angolo α nel caso di spinta frenante.

2.4.2 Parametri Orbitali Relativi

Come è stato anticipato nel capitolo 2.1.2, per definire le orbite di inizio e fine traiettoria vengono utilizzati i parametri orbitali; questi parametri però sono definiti per una sola orbita mentre è comodo per i calcoli che andremo a svolgere legare i valori dei due spacecraft.

Per fare questo andremo ad utilizzare gli elementi orbitali relativi (ROE) ovvero combinazioni non lineari degli elementi orbitali classici dei due spacecraft. Questo metodo è molto utile per il tipo di analisi che andremo a svolgere, non dovendo utilizzare due gruppi di variabili per i due spacecraft ma soltanto uno che unisce i dati dei velivoli.

Mantenendo la notazione dell'articolo di riferimento[6], con il pedice "c" ci si riferisce allo spacecraft *chief* mentre con il pedice "d" allo spacecraft *deputy* che compirà la manovra. Gli elementi orbitali relativi vengono definiti come:

$$\begin{aligned}
 \delta a &= \frac{a_d - a_c}{a_c} \\
 \delta \lambda &= (\theta_d - \theta_c) + (\Omega_d - \Omega_c) \cos i_c \\
 \delta e_x &= e_d \cos \omega_d - e_c \cos \omega_c \\
 \delta e_y &= e_d \sin \omega_d - e_c \sin \omega_c \\
 \delta i_x &= i_d - i_c \\
 \delta i_y &= (\Omega_d - \Omega_c) \sin i_c
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Il valore θ corrisponde alla somma tra anomali vera M e argomento del periastro ω , indica l'argomento della latitudine. Il termine δa corrisponde al semiasse maggiore relativo mentre $\delta \lambda$ è la longitudine. Questi due parametri indicano le direzioni radiali e tangenziali del nostro sistema di riferimento solidale con lo spacecraft. Gli altri parametri indicano rispettivamente i vettori relativi di eccentricità e inclinazione.

Come anticipato, considerando il caso in due dimensioni, il vettore relativo di inclinazione dell'orbita resterà nullo per tutta la manovra, riducendo pertanto il numero di variabili in gioco.

Capitolo 3

Il Metodo di Ottimizzazione Indiretto

Con il termine ottimizzazione si intende un insieme di calcoli e azioni che permettono di massimizzare o minimizzare un determinato parametro, utilizzando alcune variabili come controlli per garantire la stabilità e il raggiungimento della condizione di ottimo che stiamo ricercando. Questo metodo utilizza come calcolo l'integrazione numerica di diverse equazioni [5], ovvero la risoluzione di equazioni differenziali tramite calcoli numerici senza dover ricorrere al più complesso calcolo integrale; questo è possibile utilizzando metodi di approssimazione e perciò il risultato avrà per sua natura un certo errore che andrà tenuto sotto controllo per rendere l'ottimizzazione il più accurata possibile.

Il concetto di metodo indiretto si riferisce al fatto di ricavare i risultati del problema tramite ulteriori passaggi, rispetto invece al metodo diretto dove viene ricavata subito la soluzione. Nel nostro caso andremo a risolvere iterativamente le equazioni finché la differenza tra la soluzione e il valore che vogliamo trovare non si annulla, rispetto invece al caso diretto in cui si parte dal valore di arrivo per ricavare la soluzione. Utilizzare un metodo indiretto per la risoluzione delle equazioni ha dei vantaggi a livello di precisione dei risultati e soprattutto sul costo computazionale utilizzato, sfruttando un numero limitato di parametri, rispetto invece al metodo diretto che garantisce una semplificazione nella definizione iniziale delle equazioni ma queste necessiteranno di un numero molto alto di parametri e quindi un costo computazionale maggiore. Lo svantaggio principale del metodo indiretto è però la possibilità di non riuscire ad arrivare a convergenza[1], questo aspetto an-

drà valutato tramite adeguati strumenti di controllo.

Nella sezione seguente verrà illustrato il metodo di ottimizzazione indiretta tramite la teoria del Controllo Ottimale che verrà utilizzata per la risoluzione del nostro problema. [9]

3.1 Teoria del Controllo Ottimale

Il Controllo Ottimale è un metodo che permette la ricerca di valori ottimi (quindi di massimo o minimo) di una funzione tramite i principi del calcolo variazionale¹In questo capitolo verrà illustrata la teoria per sviluppare il controllo basato sull'articolo seguente [2].

Dato un sistema riferito al calcolo di una traiettoria, applicando la teoria del controllo ottimale il sistema da considerare viene indicato da:

- un vettore di variabili di stato \mathbf{x} ,
- un vettore delle variabili di controllo \mathbf{u} ,
- la variabile indipendente del tempo t ,
- le condizioni al contorno χ ;

le equazioni differenziali del sistema avranno quindi la forma del tipo:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (3.1)$$

Per esaminare la manovra è utile suddividere la traiettoria che ci aspettiamo di ottenere in alcuni intervalli detti *archi* in cui le variabili sono definite continue e vengono quindi indicate delle condizioni al contorno per delimitare questi intervalli². Le condizioni al contorno dipendono dalle variabili di stato e dal tempo nelle condizioni iniziali e finali degli intervalli. Vengono anche valutate dei limiti sui parametri di controllo, come per esempio un limite temporale che ovviamente non può essere negativo ma che può non dover superare un certo valore deciso in precedenza.

¹Il calcolo variazionale si occupa della ricerca e delle proprietà dei punti estremi (massimi e minimi) dei funzionali.

²La traiettoria inizia nel punto $j = 0$ e termina nel punto $j = n$.

Definiti questi valori l'obiettivo del controllo ottimale è cercare i valori massimi e minimi del funzionale J^3 definito come:

$$J = \varphi + \sum_j \int_{t_{(j-1)_+}}^{t_{j-}} \phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt \quad j = 1, \dots, n \quad (3.2)$$

Dove φ è la funzione che dipende dai valori assunto dai contorni degli archi e da ϕ che dipende dai valori assunti dalle variabili e dai controlli in tutti i punti; annullando uno di questi due parametri è possibile semplificare il problema riconducendosi alla formulazione di Lagrange (per $\varphi = 0$) o di Mayer (per $\phi = 0$); in questo lavoro verrà utilizzata quest'ultima semplificazione. A questo punto si introducono i moltiplicatori di Lagrange per tenere conto delle equazioni differenziali e delle condizioni al contorno:

- le variabili aggiunte associate alle equazioni di stato, $\boldsymbol{\lambda}$,
- le costanti aggiunte legate alle condizioni al contorno, $\boldsymbol{\mu}$;

riscrivendo il funzionale come:

$$J^* = \varphi + \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\chi} + \sum_j \int_{t_{(j-1)_+}}^{t_{j-}} \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{f} - \dot{\mathbf{x}}) dt \quad j = 1, \dots, n \quad (3.3)$$

che corrisponde a J per qualsiasi valore dei moltiplicatori scelto se le equazioni differenziali e condizioni al contorno sono verificate.

Integrando per parti si elimina la dipendenza dalla variabile $\dot{\mathbf{x}}$ e differenziando si ottiene la variazione del funzionale:

$$\begin{aligned} \delta J^* = & \left(-H_{(j-1)_+} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{(j-1)_+}} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t_{(j-1)_+}} \right) \delta t_{(j-1)_+} + \\ & + \left(-H_{j-} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j-}} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t_{j-}} \right) \delta t_{j-} + \\ & + \left(\boldsymbol{\lambda}_{(j-1)_+}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}_{(j-1)_+}} + \boldsymbol{\mu}^T \left[\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{x}_{(j-1)_+}} \right] \right) \delta \mathbf{x}_{(j-1)_+} + \\ & + \left(-\boldsymbol{\lambda}_{j-}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}_{j-}} + \boldsymbol{\mu}^T \left[\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{x}_{j-}} \right] \right) \delta \mathbf{x}_{j-} + \\ & + \sum_j \int_{t_{(j-1)_+}}^{t_{j-}} \left(\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T \right) \delta \mathbf{x} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} \right) dt \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (3.4)$$

³Con j_- e j_+ si intende i valori subito prima e subito dopo il punto della traiettoria, è necessario distinguere questi punti perché potrebbero esserci discontinuità.

in cui le parentesi quadre indicano una matrice⁴.

Per la scrittura dell'equazione (3.4) viene definito l'Hamiltoniano H del sistema come:

$$H = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f} \quad (3.5)$$

Questo parametro sarà fondamentale per la nostra analisi di ottimo.

Scegliendo in maniera accurata i valori delle variabili e delle costanti aggiunte è possibile annullare i coefficienti dell'equazione (3.4) confermando la stazionarietà del funzionale J^* riassumibile con la formula $\delta J^* = 0$.

Se nell'integrale si annullano i coefficienti $\delta \mathbf{x}$ e $\delta \mathbf{u}$ è possibile ricavare le equazioni di Eulero-Lagrange per le variabili aggiunte:

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} = - \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \quad (3.6)$$

e le equazioni algebriche per i controlli:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \right)^T = 0 \quad (3.7)$$

Considerando i domini di affidabilità dei controlli scelti ad inizio analisi si può ricavare il valore ottimale di questi valori sapendo che essi massimizzano o minimizzano l'Hamiltoniano in ogni punto della traiettoria; questo concetto è definito *Principio di Massimo di Pontryagin* [10] che quindi massimizza o minimizza il funzionale J .

Il valore del controllo che ottimizza il funzionale perciò può ricadere in due casi:

- controllo NON VINCOLATO, se il valore ottimale è quello ricavato dalla seconda equazione di Eulero-Lagrange, perciò rientra nel dominio ammissibile del controllo e non viene interessato il vincolo,
- controllo VINCOLATO, quando il valore di ottimo è all'estremità dell'arco e quindi il controllo assume il valore massimo o minimo se il risultato della (3.7) non è accettabile dal dominio di affidabilità.

Ricadiamo in un caso particolare se l'Hamiltoniano è lineare rispetto a uno dei controlli, e quindi nella sua derivata non compare la variabile e il valore non può essere dedotto; basandosi sull'equazione (3.5) si possono distinguere due ulteriori casi:

⁴Quando si deriva un vettore \mathbf{a} di n componenti rispetto un altro vettore \mathbf{b} di m componenti si origina una matrice n per m .

- se il coefficiente del controllo nell'Hamiltoniano non è nullo allora H viene massimizzato dal valore massimo del controllo (se il coefficiente è positivo) o dal valore minimo (se il coefficiente è negativo), questo caso viene chiamato controllo *Bang-Bang* e verrà approfondito in seguito.
- se il coefficiente è nullo ricadiamo nel caso di arco singolare ed bisogna ricavare il valore del controllo tramite derivazioni successive rispetto al tempo.

Si ricavano inoltre le condizioni al contorno per gli intervalli j -esimi, andando ad annullare i coefficienti differenziali temporali e delle variabili aggiunte dell'equazione (3.4):

$$\begin{aligned}
-\lambda_{j-}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}_{j-}} + \boldsymbol{\mu}^T \left[\frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{x}_{j-}} \right] &= 0 \quad j = 1, \dots, n \\
\lambda_{j+}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}_{j+}} + \boldsymbol{\mu}^T \left[\frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{x}_{j+}} \right] &= 0 \quad j = 0, \dots, n-1 \\
H_{j-} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j-}} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{x}_{j-}} &= 0 \quad j = 1, \dots, n \\
-H_{j+} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j+}} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{x}_{j+}} &= 0 \quad j = 0, \dots, n-1
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Dalle condizioni su j è facile notare come la prima e la terza equazione non esistano all'inizio della traiettoria mentre la seconda e la quarta non esistano alla fine. Eliminando le costanti aggiunte $\boldsymbol{\mu}$ si ottengono le condizioni ottimali; insieme alle equazioni (3.1) e (3.6) si completa il sistema differenziale da risolvere.

Queste equazioni possono fornire delle ulteriori condizioni di ottimo sulle variabili aggiunte:

- se una variabile è assegnata a t_0 o t_f la corrispondente variabile aggiunta è libera⁵ in quel punto;
- se una variabile a t_0 o t_f non compare tra le condizioni allora la variabile aggiunta si annulla;
- se una variabile è continua e libera, anche la variabile aggiunta è continua e libera;

⁵Con il termine varibile libera si intende che sulla variabile non ci sono condizioni.

- se una variabile è continua e assegnata la corrispondente variabile aggiunta ha una discontinuità libera in quel punto.

In maniera analoga anche sull'Hamiltoniano possiamo dedurre che:

- se il t_0 o t_f è libero allora l'Hamiltoniano si annulla;
- se il t_0 o t_f è assegnato allora l'Hamiltoniano è libero;
- se un tempo intermedio è libero, l'Hamiltoniano è continuo nel punto;
- se un tempo intermedio è assegnato, l'Hamiltoniano ha una discontinuità libera nel punto.

3.2 Il controllo Bang-Bang

Il controllo Bang Bang è un metodo utilizzato per regolare una certa variabile di un sistema cercando di farla convergere ad un certo valore voluto. Come anticipato nella sezione precedente, nel caso in cui l'Hamiltoniano è lineare per il controllo, attraverso il Principio di Massimo di Pontryagin è possibile regolare la variabile in questione modificandola a seconda del valore che assume una seconda variabile chiamata *Switching Function*, che non è altro che la derivata dell'Hamiltoniano rispetto al controllo. Viene definita come:

$$S_F = \frac{\partial H}{\partial u} \quad (3.9)$$

Dall'espressione di questa funzione, il controllo assumerà un determinato valore (intervallo scelto ad inizio analisi $u : [u_{\max}; u_{\min}]$) a seconda del segno della funzione stessa:

- se $S_F > 0$ il controllo u assumerà il valore massimo u_{\max} ,
- se $S_F < 0$ il controllo u assumerà il valore minimo u_{\min} ,
- se $S_F = 0$ il controllo si ricava derivando la switching function (facendo attenzione che il valore trovato esista all'interno del dominio del controllo).

Il grande vantaggio di questo metodo di controllo è il fatto che è estremamente semplice da implementare, dipendendo da una sola variabile e variando il suo stato semplicemente in acceso o spento, questo perché tipicamente il valore minimo è zero; riportandoci nel nostro caso studio, siamo nella condizione di motore spento che non genera spinta. Oltre alla semplicità, questo metodo permette una risposta rapida al comando in quanto non necessita di grandi risorse computazionali per i calcolatori.

Lo svantaggio principale è che esiste la concreta possibilità di non raggiungere mai convergenza al valore atteso ma si continui ad oscillare intorno all'obiettivo, ciò denota una non precisione e stabilità del codice; si cerca di limitare questo problema implementando un'analisi numerica.

3.3 Problema Differenziale ai Limiti

Per limitare l'oscillazione del valore obiettivo nel caso della teoria del controllo ottimale viene risolto un nuovo sistema di equazioni chiamato *Boundary Value Problem*, o BVP, ovvero problema ai valori al contorno (o ai limiti). Gli intervalli di suddivisione non sempre sono noti e possono avere definizioni differenti mentre le condizioni al contorno spesso sono non lineari.

Questa analisi è particolarmente importante per la teoria del controllo ottimale perché appunto permette di valutare con accuratezza la validità dei risultati ottenuti con l'analisi di ottimo. La soluzione del BVP si ottiene portando a convergenza tramite il *metodo di Newton*⁶ una successione di problemi ai valori iniziali.

Non sapendo il valore della durata dei sotto-intervalli si procede sostituendo la variabile t con una nuova variabile ϵ definita, per il j -esimo sotto-intervallo come:

$$\epsilon = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{\tau_j} \quad (3.10)$$

dove τ_j è la durata del sotto-intervallo.

Siccome possono comparire dei parametri costanti nel nostro problema, come la durata, è utile fare riferimento ad un nuovo vettore $\mathbf{z} = (\mathbf{y}, \mathbf{c})$ dove \mathbf{y} è il vettore che contiene le variabili di stato e le variabili aggiunte, mentre il vettore \mathbf{c} contiene i parametri costanti.

Il problema si può riassumere perciò con la seguente espressione:

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\epsilon} = \mathbf{f}(\mathbf{z}, \epsilon) \quad (3.11)$$

Le variabili di stato e aggiunte possono essere esplicitate come:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{d\epsilon} &= \tau_j \frac{d\mathbf{x}}{dt} \\ \frac{d\boldsymbol{\lambda}}{d\epsilon} &= \tau_j \frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Infine viene definito un vettore di condizioni al contorno in funzione di un secondo vettore \mathbf{s} che racchiude i valori incogniti:

$$\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{s}) = 0 \quad (3.13)$$

⁶Il Metodo di Newton, o metodo delle tangenti, è una tipologia di calcolo che permette l'approssimazione della soluzione di una equazione tramite diverse iterazioni di derivazione dell'equazione stessa (matematicamente la derivata di una funzione indica la retta tangente alla curva in quel punto, da qui il nome "metodo delle tangenti").

La soluzione del BVP si ricavano attraverso le diverse iterazioni del metodo di Newton vengono modificati i valori iniziali dei parametri secondo la seguente legge:

$$\mathbf{p}^{r+1} = \mathbf{p}^r + \Delta\mathbf{p} \quad (3.14)$$

con r che indica il numero dell'iterata mentre \mathbf{p} è il vettore dei valori di iterazione. $\Delta\mathbf{p}$ è la variazione di correzione e si calcola come:

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}^{r+1} - \mathbf{p}^r = - \left[\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{p}} \right]^{-1} \Psi^r \quad (3.15)$$

Si ricorda che l'espressione tra parentesi quadre indica una matrice e si ricava come:

$$\left[\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{p}} \right] = \left[\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{s}} \right] \left[\frac{\partial\mathbf{s}}{\partial\mathbf{p}} \right] \quad (3.16)$$

dove al secondo membro il primo termine si ricava per derivazione e il secondo indica i valori nei contorni degli intervalli $\left[\frac{\partial\mathbf{z}}{\partial\mathbf{p}} \right]$, ottenuta integrando il sistema:

$$\left[\frac{\partial\dot{\mathbf{z}}}{\partial\mathbf{p}} \right] = \left[\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\mathbf{z}} \right] \left[\frac{\partial\mathbf{z}}{\partial\mathbf{p}} \right] \quad (3.17)$$

Per comprendere se il problema converge o no viene calcolato l'errore ad ogni iterazione, se questo errore è minore di un valore scelto inizialmente si procede all'iterazione successiva; se invece il valore dell'errore è superiore significa che la correzione che andiamo a compiere è eccessiva allora si decide di dimezzarla (bisezione della correzione), indicando in questo caso un limite al numero di bisezioni possibili prima di indicare la non convergenza dell'analisi.

Capitolo 4

Definizione del Problema

4.1 Approssimazioni da considerare

In base ai dati a disposizione è possibile considerare alcune approssimazioni e semplificazioni al nostro problema, così da diminuire il numero di variabili in gioco e quindi il costo computazionale generale. In primo luogo possiamo approssimare il moto dei due spacecraft separato e non dipendenti tra loro a livello di interazione gravitazionale, quindi è possibile applicare ad entrambi la semplificazione del problema dei due corpi 2.1 in quanto la massa dei due satelliti è diversi ordini di grandezza più piccola rispetto alla massa della Terra¹. I velivoli si muovono in un'orbita bassa (meno di $1000km$ dalla superficie) pertanto la perturbazione prodotta da altri corpi celesti come la Luna, o comunque altri satelliti di massa simile, è trascurabile.

Riferendosi ai parametri orbitali dello *chief* 5.1 si nota come il valore di eccentricità ($e_c = 0.001$) è un valore estremamente piccolo, rispetto per esempio al valore di eccentricità dell'orbita della Terra intorno al Sole ($e_T = 0.017$) la quale viene comunemente scambiata per quasi circolare; perciò è conveniente considerare l'approssimazione di moto quasi circolare del nostro spacecraft. Grazie a questa semplificazione il valore di semiasse maggiore a è sostituibile al valore del raggio dell'ipotetica circonferenza che andremo a considerare.

¹La massa della Terra è circa $5,98 * 10^{24}kg$, un satellite di riferimento che possiamo considerare può pesare anche $1000kg$, una differenza di circa 10^{21} volte. Applicando la Legge di Gravitazione Universale la forza di attrazione tra satellite e Terra è estremamente maggiore di una eventuale forza satellite - satellite.

Considerando sempre la posizione alla quale orbitano gli spacecraft in esame (orbita bassa LEO) è necessario fare alcune considerazioni sullo stato dell'atmosfera a questa altitudine. L'alta atmosfera che andiamo a considerare comprende (fino ai $500km$) la termosfera, una zona dove la temperatura cinetica delle particelle può variare dai -80 a $+1800^{\circ}C$, e l'esosfera (fino a $10000km$) dove la temperatura cinetica delle particelle dipende principalmente dall'irradiazione solare. In entrambi i caso gli scambi termici sono trascurabili in quanto le particelle sono estremamente rarefatte perciò l'interazione termica con gli spacecraft non è rilevante.

Diverso però è l'effetto frenante che queste particelle compiono su tutti gli oggetti in orbita, riducendone la velocità di rotazione facendo "cadere" verso la superficie gli spacecraft. In questa trattazione andremo a trascurare questo effetto frenante, in quanto i tempi di analisi della manovra saranno comunque molto piccoli rispetto alle tempistiche necessarie per far rallentare i corpi orbitanti, in cui generalmente impiegano diversi mesi per avere un impatto significativo.

Una ulteriore semplificazione che viene attuata durante l'analisi è la linearizzazione delle equazioni, ovvero la riscrittura di determinate equazioni non lineari (perciò più complesse da risolvere) in equazioni lineari molto più semplici. Questa semplificazione si utilizza intorno a punti noti della funzione, generalmente dove questa si annulla, nel nostro caso viene utilizzata per ogni punto degli estremi dei nodi in cui la traiettoria viene divisa, che in accordo con la teoria del controllo ottimale, delimitano dei tratti in cui le specifiche parametriche rimangono stabili, semplificando perciò i calcoli.

4.2 Definizione dei parametri

Con la definizione in notazione ROE si definiscono i sei parametri principali per il problema, a questi viene aggiunto un settimo parametro relativo alla variazione di massa dello spacecraft: δm ; questo valore nell'analisi viene normalizzato ad uno nel punto iniziale e ci permetterà di valutare la diminuzione di massa dovuta alla propulsione, in accordo con le equazioni viste in precedenza.

Oltre a questi parametri vengono identificate le relative variabili aggiunte λ che comporranno l'Hamiltoniano che andrà risolto tramite l'analisi di ottimizzazione; per un totale di 14 parametri.

Il sistema che andremo a considerare si articola nel seguente modo:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \quad (4.1)$$

Dove:

- \mathbf{x} è il vettore dei parametri 2.14.
- $\dot{\mathbf{x}}$ è il vettore delle loro derivate (e quindi di quanto varierà il parametro stesso nell'intervallo considerato),
- A è la matrice che identifica il moto kepleriano dei due spacecraft,
- \mathbf{u} è il vettore delle spinte dell'approssimazione di Edelbaum 2.13
- B è la matrice che converte in coordinate polari il vettore della spinta.

Ovviamente il vettore dei parametri al tempo iniziale t_0 contiene i valori dell'orbita iniziale del *deputy* e al tempo finale t_f i valori obiettivo di arrivo all'orbita dello spacecraft *chief*. La matrice A , per la dinamica nel piano dell'eclittica che consideriamo in questa analisi, assume questi valori:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2}n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

in cui n la velocità media dello spacecraft *chief*.

La matrice B permette la rotazione del vettore di spinta in coordinate polari e ha questa forma:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ \sin \theta & 2 \cos \theta & 0 \\ -\cos \theta & 2 \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta \\ 0 & 0 & \sin \theta \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Calcolando i prodotti vettoriali si ricavano le derivate:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} +2u_t \\ -\frac{3}{2}n\delta a - 2u_r \\ +\sin \theta u_r + 2 \cos \theta u_t \\ -\cos \theta u_r + 2 \sin \theta u_t \\ +\cos \theta u_n \\ +\sin \theta u_n \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Sostituendo le equazioni di Edelbaum (2.13) si riscrivono le derivate facendo comparire la spinta e gli angoli di inclinazione di essa, che insieme

comporranno la terna dei controlli.

$$\begin{aligned}\delta \dot{a} &= +2 \frac{T}{m} \cos \alpha \cos \beta \\ \delta \dot{\lambda} &= -\frac{3}{2} n \delta a - 2 \frac{T}{m} \sin \alpha \cos \beta \\ \delta \dot{e}_x &= +\frac{T}{m} \sin \alpha \cos \beta \sin \theta + 2 \frac{T}{m} \cos \alpha \cos \beta \cos \theta \\ \delta \dot{e}_y &= -\frac{T}{m} \sin \alpha \cos \beta \cos \theta + 2 \frac{T}{m} \cos \alpha \cos \beta \sin \theta \\ \delta \dot{i}_x &= \frac{T}{m} \sin \beta \cos \theta \\ \delta \dot{i}_y &= \frac{T}{m} \sin \beta \sin \theta\end{aligned}\tag{4.5}$$

Queste saranno le generiche equazioni che andranno a risolvere il problema nelle diverse iterazioni del programma.

4.3 Applicazione della teoria del controllo

In questo paragrafo verrà trattata l'applicazione pratica della teoria del controllo ottimale sviluppando esplicitamente le formule anticipate nel capitolo teorico modificando quando necessario le equazioni aggiungendo i dati a disposizione.

4.3.1 Definizione dell'Hamiltoniano

Dopo aver definito le variabili del problema è importante definire esplicitamente l'Hamiltoniano, come definito nella teoria (3.5), si calcola moltiplicando membro a membro il vettore delle variabili aggiunte λ con le derivate appena calcolate sui parametri. Risulta che:

$$H = \lambda_a \dot{\delta a} + \lambda_\lambda \dot{\delta \lambda} + \lambda_{e_x} \dot{\delta e_x} + \lambda_{e_y} \dot{\delta e_y} + \lambda_{i_x} \dot{\delta i_x} + \lambda_{i_y} \dot{\delta i_y} \quad (4.6)$$

Sostituendo le derivate dei parametri 4.5 si trova l'equazione generica dell'Hamiltoniano espressa in funzione dei controlli T , α , β :

$$\begin{aligned} H = & +2\frac{T}{m} \cos \alpha \cos \beta \lambda_a \\ & + \left(-\frac{3}{2}n\delta a - 2\frac{T}{m} \sin \alpha \cos \beta\right) \lambda_\lambda \\ & + \left(\frac{T}{m} \sin \alpha \cos \beta \sin \theta + 2\frac{T}{m} \cos \alpha \cos \beta \cos \theta\right) \lambda_{e_x} \\ & + \left(-\frac{T}{m} \sin \alpha \cos \beta \cos \theta + 2\frac{T}{m} \cos \alpha \cos \beta \sin \theta\right) \lambda_{e_y} \\ & + \frac{T}{m} \sin \beta \cos \theta \lambda_{i_x} \\ & + \frac{T}{m} \sin \beta \sin \theta \lambda_{i_y} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Considerando i casi di studio esplicitati nel capitolo 5.1, le manovre svolte comportano solo una modifica del δa e del $\delta \lambda$ oppure del solo vettore eccentricità, non interessando l'inclinazione del piano orbitale. Questi dati ci permettono di semplificare la nostra equazione 4.7 aggiungendo la condizione:

$$\text{Nessuna variazione vettore inclinazione} \iff \beta = 0^2 \quad (4.8)$$

²Ricordando che β è l'angolo compreso tra il vettore spinta e il piano orbitale.

Far valere questa condizione significa poter semplificare le nostre equazioni sostituendo:

$$\begin{aligned}\sin \beta &= 0 \\ \cos \beta &= 1\end{aligned}$$

Questa semplificazione ci permette di alleggerire la scrittura dell'equazione 4.7 potendola riscrivere come segue:

$$\begin{aligned}H &= +2\frac{T}{m} \cos \alpha \lambda_a \\ &+ \left(-\frac{3}{2}n\delta a - 2\frac{T}{m} \sin \alpha\right) \lambda_\lambda \\ &+ \left(\frac{T}{m} \sin \alpha \sin \theta + 2\frac{T}{m} \cos \alpha \cos \theta\right) \lambda_{e_x} \\ &+ \left(-\frac{T}{m} \sin \alpha \cos \theta + 2\frac{T}{m} \cos \alpha \sin \theta\right) \lambda_{e_y}\end{aligned}\tag{4.9}$$

Da questo punto si svilupperanno le equazioni dei controlli e le derivate per le componenti da utilizzare durante il calcolo della variazione dell'orbita.

4.3.2 Derivate sui controlli

Per valutare l'affidabilità sul sistema che stiamo valutando è importante valutare i controlli sul metodo di ottimizzazione, quindi applicare l'equazione 3.7 per le tre variabili di controllo:

$$\alpha, \beta, T$$

derivando l'Hamiltoniano 4.7 per i tre controlli e valutando i limiti di ammissibilità dei valori ottenuti.

Iniziando derivando l'equazione per il controllo α , si ricava la seguente equazione:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \alpha} &= -\sin \alpha \frac{T}{m} (2\lambda_a + 2 \cos \theta \lambda_{e_x} + 2 \sin \theta \lambda_{e_y}) \\ &\quad + \cos \alpha \frac{T}{m} (-2\lambda_\lambda + \sin \theta \lambda_{e_x} - \cos \theta \lambda_{e_y}) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Riscrivendo i termini:

$$\begin{aligned} (2\lambda_a + 2 \cos \theta \lambda_{e_x} + 2 \sin \theta \lambda_{e_y}) &= A \\ (-2\lambda_\lambda + \sin \theta \lambda_{e_x} - \cos \theta \lambda_{e_y}) &= B \end{aligned}$$

si calcola per quali valori l'equazione del controllo si annulla, arrivando alla scrittura seguente:

$$-\sin \alpha A + \cos \alpha B = 0$$

Applicando l'identità fondamentale della trigonometria³ è possibile definire α come una equazione in funzione dei soli parametri 2.14, ciò ci permette inoltre di semplificare la scrittura dell'Hamiltoniano liberando la dipendenza dalla variabile α . Si riscrivono il seno e il coseno di α come:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \\ \sin \alpha &= \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \end{aligned} \tag{4.11}$$

³L'identità fondamentale della trigonometria mette in relazione seno e coseno nella formula:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Utilizzando la funzione tangente si può ricavare semplicemente il valore di α nel modo:

$$\alpha = \arctan \frac{B}{A} \quad (4.12)$$

Passando al secondo controllo su β , derivando l'Hamiltoniano si trova l'equazione:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \beta} &= -\frac{T}{m} \sin \beta \left[(2\lambda_a + 2 \cos \theta \lambda_{e_x} + 2 \sin \theta \lambda_{e_y}) \cos \alpha \right. \\ &\quad \left. + (-2\lambda_\lambda + \sin \theta \lambda_{e_x} - \cos \theta \lambda_{e_y}) \sin \alpha \right] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Come si intuisce, essendo tutta l'equazione moltiplicata per $\sin \beta$, questa si annulla per la condizione 4.8, confermando l'ipotesi iniziale di manovra piana (infatti avevamo già semplificato l'Hamiltoniano eliminando le componenti per la variazione del vettore inclinazione).

Infine si calcola l'equazione di controllo per la spinta T , ricavando l'espressione:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial T} &= \frac{\cos \beta}{m} \left[(2\lambda_a + 2 \cos \theta \lambda_{e_x} + 2 \sin \theta \lambda_{e_y}) \cos \alpha \right. \\ &\quad \left. + (-2\lambda_\lambda + \sin \theta \lambda_{e_x} - \cos \theta \lambda_{e_y}) \sin \alpha \right] \end{aligned} \quad (4.14)$$

In questo caso però non è possibile imporre la condizione di;

$$\frac{\partial H}{\partial T} = 0$$

perché l'equazione (4.14) non contiene il controllo.

Per risolvere questo inconveniente viene utilizzato un ulteriore controllo sulla spinta tramite la Switching Function che vedremo in seguito. L'obiettivo è infatti spingere solo nel momento in cui è necessario modificare il movimento per cambiare orbita, non essendo necessario spingere in ogni momento della traiettoria; ovviamente è anche necessario non "superare" la posizione target che cerchiamo di ottenere quindi in altre occasioni può convenire non spingere affatto. Tutto questo concetto è contenuto nel controllo della switching function.

4.4 Controllo sulla Switching Function

Come anticipato per il controllo della spinta utilizzeremo il metodo di controllo Bang-Bang, trattato nel capitolo 3.2; nel nostro caso andremo a valutare la spinta del sistema valutando il valore che la funzione chiamata *Switching Function* assumerà nei diversi istanti di tempo della manovra, viene definita come:

$$S_F = \frac{\lambda_V}{m} - \frac{\lambda_m}{c} \quad (4.15)$$

in cui:

- λ_V è il modulo del vettore con le componenti dell'Hamiltoniano,
- m è la massa del sistema,
- λ_m è la variabile aggiunta sulla massa,
- c è la velocità efficace di scarico.

Considerando la spinta costante⁴ a seconda del valore che assume la Switching Function possiamo decidere quanta spinta applicare al nostro spacecraft in modo da non superare la posizione obbiettivo che ci siamo prefissati in partenza.

Nello specifico, per ogni arco della traiettoria, se:

- $S_F > 0$ verrà applicata la spinta massima,
- $S_F < 0$ verrà applicata la spinta minima (spinta nulla),
- $S_F = 0$ ci troveremo in un arco singolare.

Nel caso di archi singolari bisognerà calcolare la derivata della Switching Function di gradi superiori finché non comparirà espressamente il valore del controllo che andremo ad esprimere, in questo caso quindi finché non comparirà la spinta.

Il vettore λ_V viene definito dai valori delle variabili aggiunte moltiplicati

⁴Valutando un motore di tipo elettrico le spinte sono generalmente piccole ma costanti nel tempo (impulso specifico molto alto).

per il coefficiente della componente dell'Hamiltoniano corrispondente, viene perciò definito come:

$$\begin{aligned}\lambda_V = & +2 \cos \alpha \lambda_a + \\ & - 2 \sin \alpha \lambda_\lambda + \\ & + (2 \cos \alpha \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta) \lambda_{e_x} + \\ & + (2 \cos \alpha \sin \theta - \sin \alpha \cos \theta) \lambda_{e_y}\end{aligned}\tag{4.16}$$

Mentre il valore di λ_m sarà il valore della variabile aggiunta sulla massa che vedremo calcolata in seguito.

4.5 Derivate per la massa

Dopo aver definito la funzione (switching function) che ci permette di decidere se nel determinato punto della traiettoria noi andremo a generare spinta oppure no, è importante valutare come questa spinta influenzi i diversi parametri che abbiamo introdotto nella nostra analisi di controllo ottimale.

Per fare ciò è necessario derivare l'equazione dell'Hamiltoniano 4.9 rispetto le componenti della massa δ_m e λ_m , trovando:

$$\frac{\partial H}{\partial \delta_m} = -\frac{T}{c} \tag{4.17}$$
$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_m} = +\frac{T\lambda_V}{m^2}$$

Quest'ultima equazione contiene al suo interno il vettore λ_V (vettore delle variabili aggiunte) che utilizziamo durante il calcolo della Switching Function. Questo è infatti il parametro che più di tutti viene influenzato dall'andamento decrescente della massa che viene utilizzata durante la manovra. Invece la derivata rispetto a δ_m è un valore costante perché possiamo supporre che in ogni momento in cui il motore spinge fuoriesca la stessa quantità di propellente perciò la portata di uscita supponiamo che rimanga costante. Ovviamente questa è una semplificazione che decidiamo di supporre in quanto nella realtà ci saranno sempre dei piccoli difetti che possono influire sulla spinta generata da un motore e soprattutto nel tempo si possono creare danni alla struttura o depositi di materiale (specialmente nei propulsori che utilizzano come propellente principale dei derivati del carbonio) che vanno a modificare la forma degli ugelli e quindi anche la spinta generata dal motore stesso.

4.6 Implementazione sul codice

L'applicazione della teoria de controllo ottimale viene applicato su un codice in Fortran, un linguaggio di programmazione particolarmente utilizzato in ambito ingegneristico adatto al calcolo numerico sviluppato da IBM negli anni cinquanta. Viene utilizzata la versione Fortran 90, tramite una macchina virtuale con installato Windows XP a 32 bit, in quanto il codice fu inizialmente sviluppato in questa modalità risultando molto affidabile e funzionale. Il metodo per l'integrazione numerica fa riferimento al "lavoro" di Shampine e Gordon [11] mentre per la risoluzione del problema differenziale ai limiti il codice è derivato da un'applicazione di Gasparo, Macconi e Pasquali [8] applicando alcune modifiche tra cui utilizzo di archi multipli e la possibilità di discontinuità ai confini degli archi stessi. Oltre a questo vengono aggiunte delle condizioni al contorno nei punti iniziali e finali degli archi stessi con a volte anche condizioni intermedie e spesso queste risultano non lineari. Nel codice si presenta una prima parte in cui vengono definite tutte le variabili e le condizioni iniziali e finali della nostra manovra, successivamente viene applicato effettivamente il metodo nella maniera analoga alla descrizione fatta nei capitoli precedenti, in cui ad ogni iterazione (quindi ad ogni nodo in cui è diviso l'intervallo preso in considerazione) vengono ricalcolati i parametri finché non si raggiunge l'obbiettivo. In contemporanea viene fatta l'analisi dell'errore dei risultati per accertarsi di non far divergere i parametri. Infine vengono restituiti in output i valori più significativi calcolati, tra cui ovviamente i parametri, per valutarne l'andamento nel tempo, e soprattutto i valori della massa finale e in conseguenza del ΔV della manovra stessa.

Capitolo 5

Risultati del Problema

5.1 Casi di studio

Come anticipato, questo lavoro ha l'obiettivo di ricalcolare le prestazioni di due manovre di trasferta risolte nell'articolo "Optimal control for formation reconfiguration problems using pseudospectral methods" [6] utilizzando questa volta il metodo indiretto che, dato il tempo, minimizza il ΔV .

Inoltre si confrontano i risultati ottenuti passando dai 50 ai 200 nodi di calcolo per gli archi di spinta, aspettandosi dei risultati più accurati.

Ricordando che i due spacecraft sono *chief* (obbiettivo / target) e *deputy* (oggetto dell'analisi). I parametri orbitali dello *chief* sono:

$$\begin{aligned} a &= R_E + 750km \\ e &= 0.001 \\ i &= 80.19^\circ \\ \Omega &= 50^\circ \\ \omega &= 60^\circ \\ M &= 0^\circ \end{aligned} \tag{5.1}$$

Dove R_E è il raggio della Terra di 6371 km.

Riscrivendo i parametri nella notazione ROE 2.14 il primo caso di studio considererà una sola variazione dei parametri δa e $\delta \lambda$ con una accelerazione massima consentita di $a_{\max} = 3e^{-5}m/s^2$.

Il secondo caso invece verterà di una sola variazione del vettore eccentricità e una accelerazione massima di $a_{\max} = 5e^{-5}m/s^2$.

La manovra si conclude dopo un tempo $t_f = 2T$, dove T è il periodo orbitale dello spacecraft *chief*. Per confrontare i risultati è utile valutare il ΔV richiesto dalla manovra per valutarne il consumo rispetto ai casi studi proposti; sono stati calcolate le seguenti variazioni di velocità¹:

$$\Delta V_{\text{Caso1}} = 0.1200 \text{ m/s}^2$$

$$\Delta V_{\text{Caso2}} = 0.1676 \text{ m/s}^2$$

¹Nel paper di riferimento si riscontra un refuso di scrittura in quanto i due valori di ΔV sono invertiti nella prima parte di introduzione al problema.

5.1.1 Definizioni preliminari del problema

Per entrambi i casi di studio è richiesta una condizione temporale nel concludere la manovra in due periodi orbitali dello spacecraft *chief*, utilizzando la formula (2.4) è possibile ricavare il singolo periodo² che risulterà:

$$\mathbf{T} = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} = 2\pi\sqrt{\frac{7121^3}{398600}} = 5980.30 \text{ secondi}$$

Moltiplicando per due si ottiene il tempo per due periodi che corrispondono circa a:

$$2\mathbf{T} = \frac{11960.6s}{3600} = 3.32 \text{ ore}$$

Sapendo questo è possibile ricavare la velocità circolare (2.5) del *chief* che risulterà essere:

$$v = \sqrt{\frac{398600}{7121}} = 7.4817 \text{ km/s} = 26.93 \text{ km/s} = 26934 \text{ km/h}$$

Per semplificare i calcoli nel codice è stata apportata una normalizzazione dei parametri in ingresso dividendo ognuno di essi per il valore del raggio a cui ruota lo spacecraft *chief*, ovvero 7121km , questo permette al codice di lavorare con numeri macchina più grandi e limitare perciò la quantità di errore che si avrebbe lavorando con numeri molto più piccoli simili alla precisione di macchina³ del calcolatore.

²Ricordando che nel caso di orbita circolare il semiasse maggiore equivale al raggio della circonferenza stessa e nel nostro caso equivale a $R_{Terra} = 6371\text{km}$ sommato all'altezza dell'orbita dello chief $h_c = 750\text{km}$, ovvero $r = 7121\text{km}$

³La precisione di macchina (o ϵ di macchina) è il numero (in valore assoluto) più piccolo che un calcolatore che lavora con virgola mobile riesce a processare, andando incontro al fenomeno della cancellazione numerica nel caso di diminuzione ulteriore di questo numero. Questo accade perché la memoria di un calcolatore è per sua natura limitata perciò rendendo fisicamente impossibile avere dei numeri più piccoli di questo valore.

5.2 Caso 1

Nel primo caso in esame, [7], è proposta una manovra di solo cambio semiasse e longitudine, mantenendo costante invece l'eccentricità dell'orbita e ovviamente (viste le ipotesi (4.8)) l'inclinazione non cambia. In questo caso è risultato impossibile raggiungere convergenza utilizzando una accelerazione non superiore al valore di $3e^{-5} m/s^2$, sono quindi state calcolate diverse soluzioni tentativo aumentando il valore della spinta⁴ e la relativa ΔV calcolata.

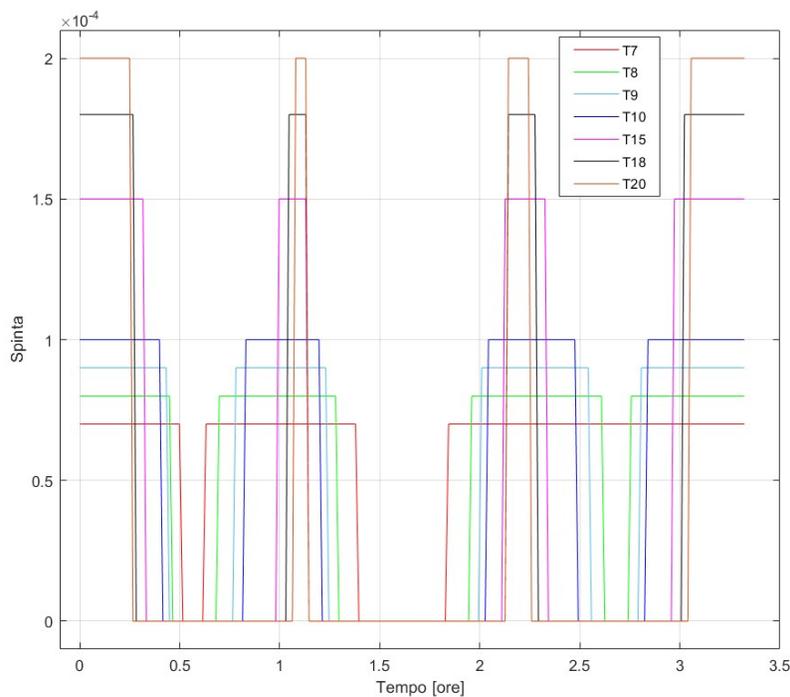


Figura 5.1: Diagramma di spinta per diversi valori - caso 1

Nella figura 5.1 sono rappresentati i diagrammi di spinta di diversi tentativi utilizzando una spinta sempre crescente, come si può notare l'andamento è pressoché simile per ogni tentativo, si tratta di quattro fasi di spinta in cui

⁴Spinta per unità di massa, espressa in m/s^2 , perciò dato paragonabile con l'accelerazione massima dell'articolo.

il motore rimane acceso per più tempo nei casi in cui la spinta è minore.

	Inizio	Fine
δa	-100	0
$\delta \lambda$	1000	9000
δe_x	500	500
δe_y	-10	-10

Tabella 5.1: Valori parametri ad inizio e fine manovra - caso 1

Nella tabella 5.1 sono raccolti i valori dei parametri per le orbite iniziali e finali del *deputy*, in tutti i casi vengono raggiunti questi valori durante l'analisi per le spinte visti in precedenza.

Spinta	Tempo accensione [sec]	% accensione
7	9986.80	83.497
8	8312.37	69.498
9	7176.14	59.998
10	6279.13	52.498
15	3827.28	31.999
18	3049.86	25.499
20	2631.25	21.999

Tabella 5.2: Test andamento tempi accensione motore - caso 1

Come osservabile nella tabella 5.2 in tutti i casi studiati viene superato il 20% del tempo⁵ di accensione del motore, superando addirittura l'80% nel caso di spinta di $7e^{-5} m/s^2$.

In questo caso ciò accade perché gli ultimi due archi di spinta sono molto lunghi e si uniscono in uno unico, aumentando pertanto il tempo totale di accensione, necessario questo per il raggiungimento dei valori obiettivo.

Si può notare come il primo e l'ultimo tratto di accensione sono per tutti i casi studiati quelli in cui il motore rimane più acceso e questi diminuiscono di poco con l'aumento della spinta. rispetto invece alle due accensioni intermedie che si riducono molto al crescere della spinta. Questo andamento è

⁵La percentuale di accensione del motore è calcolata rispetto alle due orbite dello spacecraft *chief*, perciò sul tempo di $2T$.

facilmente visualizzabile anche nella figura 5.2 in cui è rappresentata il decremento della massa nel tempo e ovviamente ciò comporterà un consumo maggiore di carburante all'aumentare del tempo di accensione del motore.

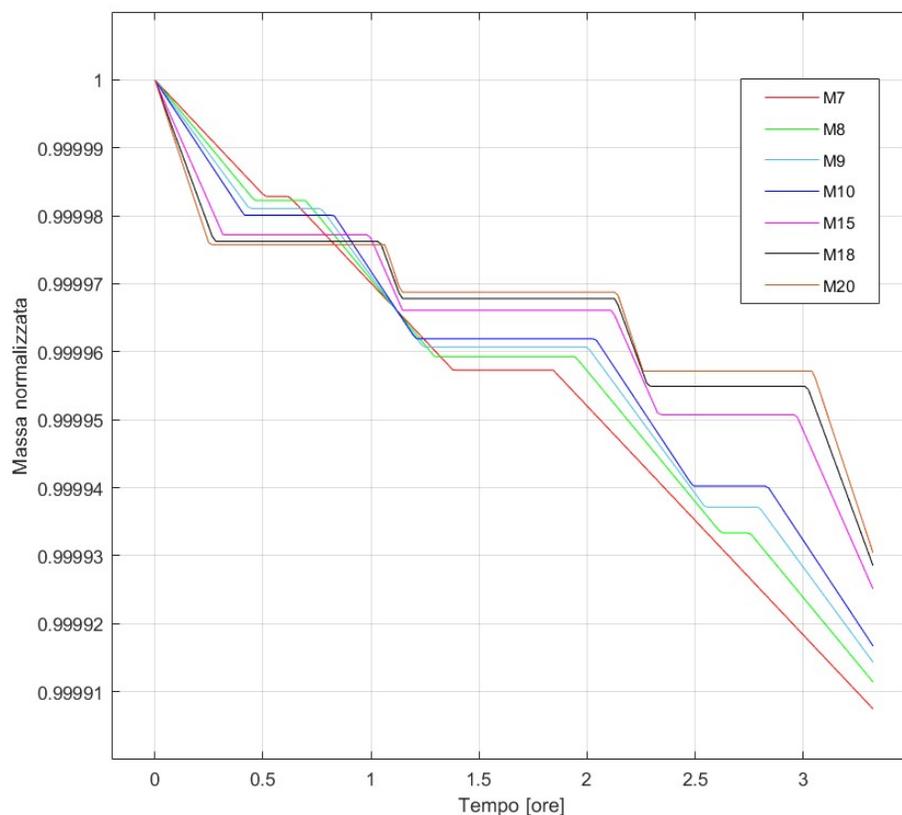


Figura 5.2: Variazione massa per diversi valori di spinta - caso 1

Infatti risulta esserci una differenza di circa 0.00002 unità di massa tra il caso a spinta inferiore da quello a spinta maggiore, aumentando la variazione di velocità finale di circa 0.17 m/s .

La variazione di velocità è stata calcolata tenendo conto della conversione apportata al resto dell'analisi, i dati sono raccolti nella tabella 5.3 dove si nota un decrescere della differenza di velocità da applicare allo spacecraft per compiere la manovra.

Spinta * 10^{-5}	ΔV m/s
7	0.69228
8	0.66274
9	0.64094
10	0.62299
15	0.56030
18	0.53455
20	0.52043

Tabella 5.3: Test spinta e ΔV associato - caso 1

Tutti i valori calcolati risultano essere superiori a quelli previsti dall'analisi condotta dai colleghi precedentemente; si può notare comunque un significativo decremento della variazione di velocità richiesta per la manovra con l'aumento della spinta generata. Come visto precedentemente, i tratti con l'accensione più lunga sono il primo e l'ultimo impulso, e questi influiscono pesantemente sul ΔV totale calcolato, non riducendosi molto con l'aumento della spinta rispetto a quello che accade con gli impulsi intermedi.

Essendo i valori di spinta già oltre il limite richiesto si è scelto di approfondire il solo caso di spinta uguale a $10e^{-5} m/s^2$ in quanto avendo un valore il più vicino possibile a quanto previsto e consumi non esageratamente elevati. Vengono analizzati i risultati dei diversi parametri di progetto, soffermandosi sull'evoluzione dei loro valori nel tempo.

Arco	Δt [sec]	% accensione
1	1495.03	12.5
2	1315.63	11.5
3	1674.43	13.5
4	1794.04	15.0

Tabella 5.4: Andamento tempi archi di spinta - caso 1

Come anticipato, il codice riesce ad arrivare a soluzione nel limite dei 200 nodi utilizzando quattro archi di spinta, facilmente individuabili visivamente nel diagramma in figura 5.3.

Nell'analisi è stata trascurata eventuale discontinuità tra la fase di spinta e quella di non spinta, infatti i rami del diagramma si presentano perfettamente verticali, quando nella realtà sia all'inizio che alla fine della fase di accensione dei motori l'accelerazione dovrebbe prima aumentare con una

certa pendenza e alla fine decrescere sempre linearmente. Utilizzando però, come nel nostro caso, un motore elettrico a basso valore di spinta possiamo sopporre una accelerazione quasi istantanea, rispetto invece al caso di motori chimici più suscettibili a questo tipo di discrepanze.

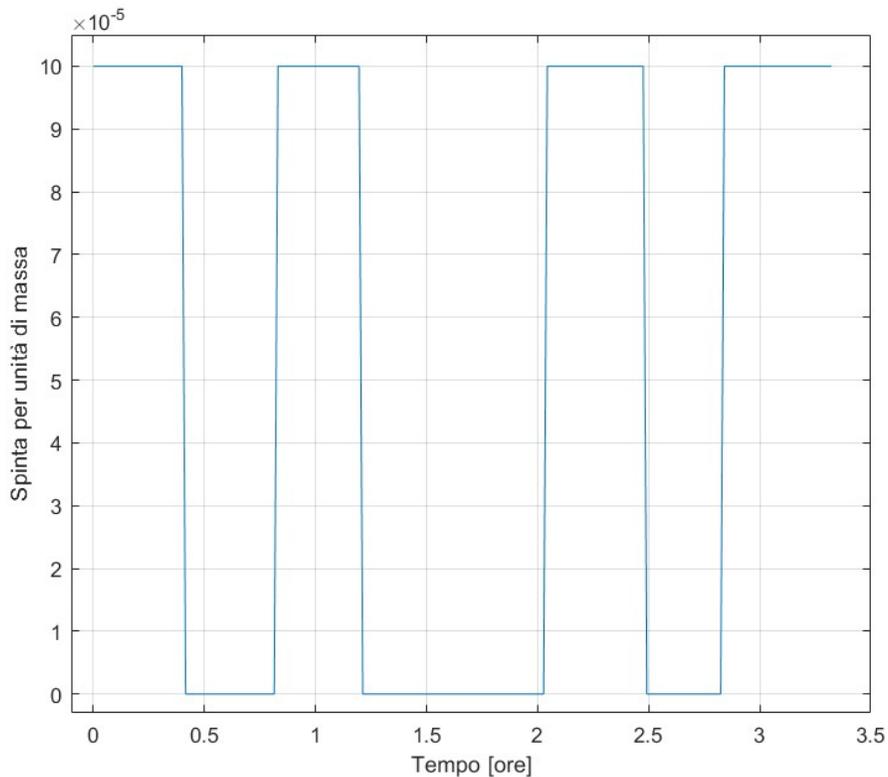


Figura 5.3: Diagramma di spinta nel tempo - caso 1

Nella tabella 5.4 sono raccolti i tempi di accensione del motore per i quattro archi di spinta, in tutti i casi il motore rimane acceso per parecchio tempo, dai 20 ai 30 minuti. In questo caso in realtà sono gli ultimi due impulsi quelli più lunghi, riconducibili all'andamento riscontrabile nella figura 5.1 e alla sovrapposizione di questi per spinte piccole.

Questi tempi prolungati sono resi necessari per riuscire a modificare l'orbita che come si vedrà in seguito si sposterà di molto rispetto all'orbita originale e per fare questo è necessaria una grande quantità di energia e di conseguenza tempi di accensione più lunghi.

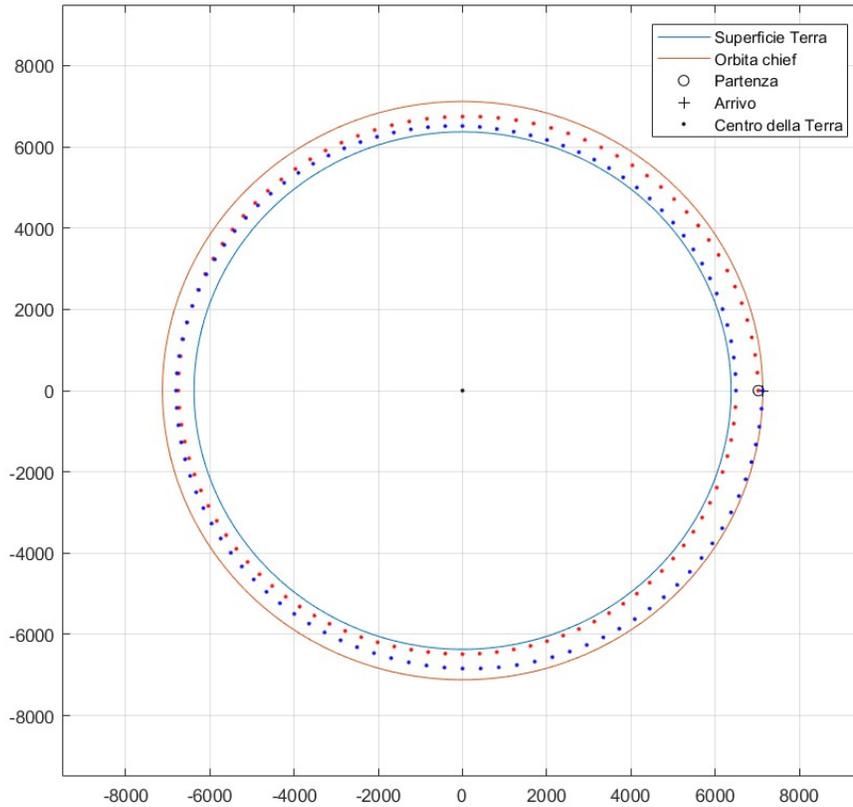


Figura 5.4: Traiettoria del *deputy* - caso 1

Nella figura 5.4 viene raffigurata la traiettoria del *deputy* nelle due orbite intorno alla Terra, in rosso la prima e in blu la seconda. Confrontando questo grafico con il profilo di spinta precedente, si intuisce come il primo impulso serve per ridurre l'altezza dell'orbita fino al perigeo di essa (prima mezza orbita in rosso) mentre con il secondo impulso l'orbita viene stabilizza. In seguito si presenta un tratto più lungo di attesa in cui lo spacecraft compie una seconda mezza orbita (in blu), gli ultimi due impulsi servono per allargare e infine stabilizzarlo nell'orbita finale. L'arrivo dello spacecraft *deputy* corrisponderà con quello dello spacecraft *chief* che si muoverà invece di moto

uniformemente circolare (sempre trascurando perdite per attrito) raggiungendo perciò l'obiettivo del rendez-vous.

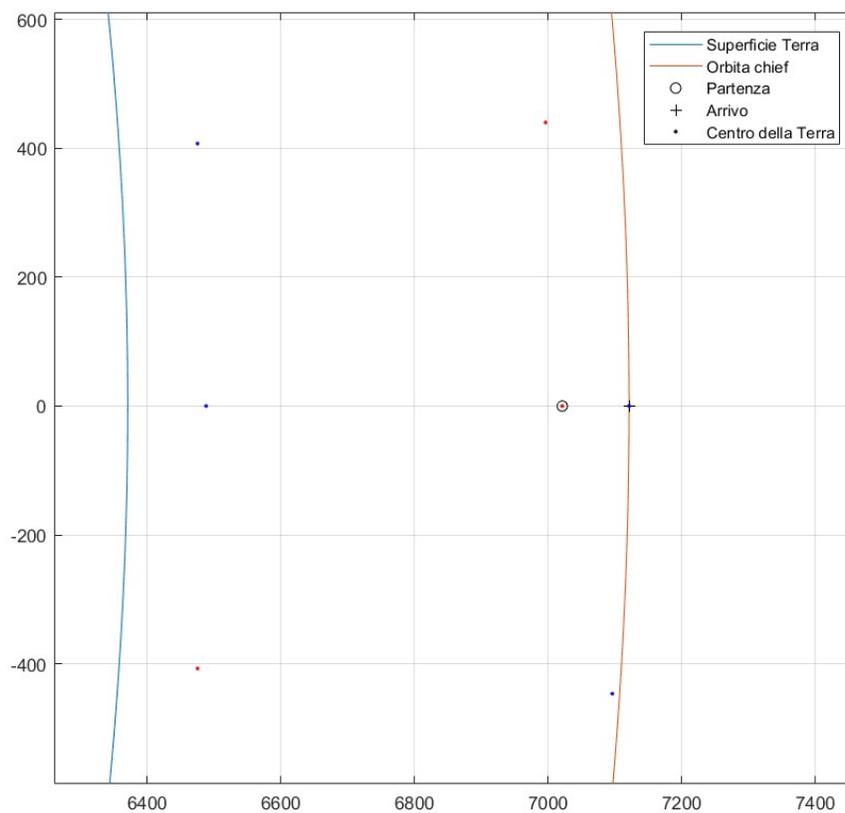


Figura 5.5: Dettaglio sulla traiettoria del *deputy* - caso 1

Nella figura 5.5 si può notare il dettaglio nel punto di inizio e fine manovra; per variare di poco il semiasse di un'orbita ma dovendo anche preoccuparsi di fasare i due satelliti a distanza relativa magari non così elevata, è necessario compiere una manovra che porta ad avvicinarsi molto alla superficie della Terra e, come in questo caso, è necessario distribuire la manovra in più periodi orbitali.

L'avvicinarsi alla superficie permette di sfruttare appieno l'attrazione gravitazionale della Terra che fa "cadere" lo spacecraft verso la superficie, aumentando perciò la velocità, dovendo poi utilizzare il motore solo per circolarizzare il velivolo. Viene così usato meno propellente rispetto a una manovra diretta verso l'obiettivo, ricordando come ciò sia fondamentale durante una missione spaziale, avendo a disposizione una quantità limitata di combustibile e portare anche solo un chilo in più richiederebbe un'ingente quantitativo di peso in più durante il lancio.

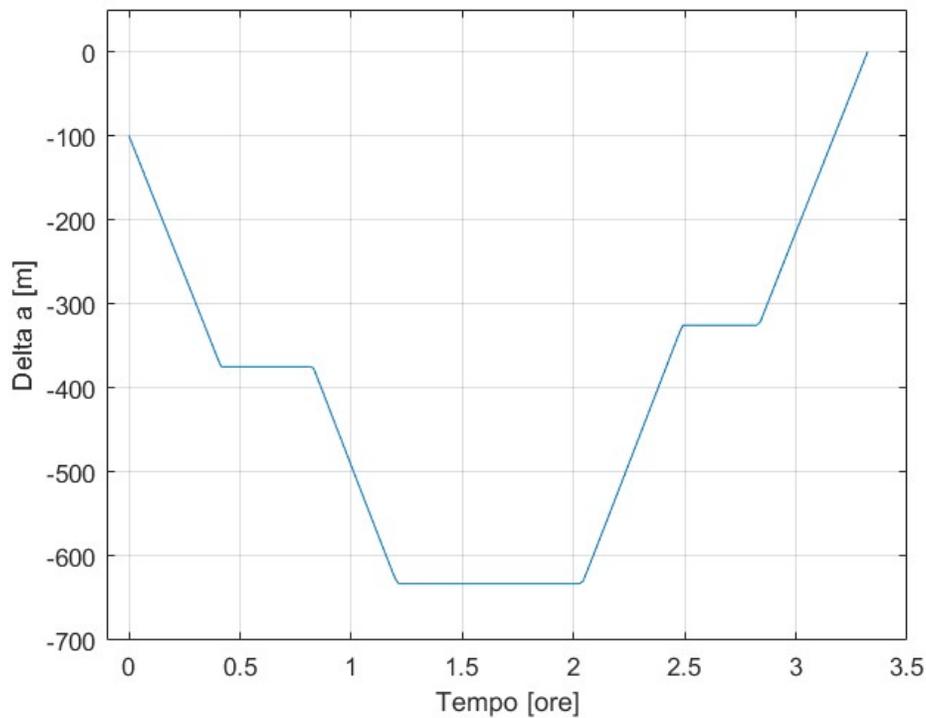


Figura 5.6: Diagramma andamento δa nel tempo - caso 1

Questo avvicinamento alla Terra risulta molto chiaro nel grafico in figura 5.6, in cui è sempre evidente quando il motore è acceso (tratti in pendenza) rispetto a quanto il motore è spento (tratti orizzontali), si ricorda che in questo grafico, sulle ordinate, il punto zero indica l'orbita obbiettivo del *chief* mentre il valore -100 indica la posizione relativa del *deputy* all'inizio della manovra, ovvero in una posizione più interna rispetto alla Terra.

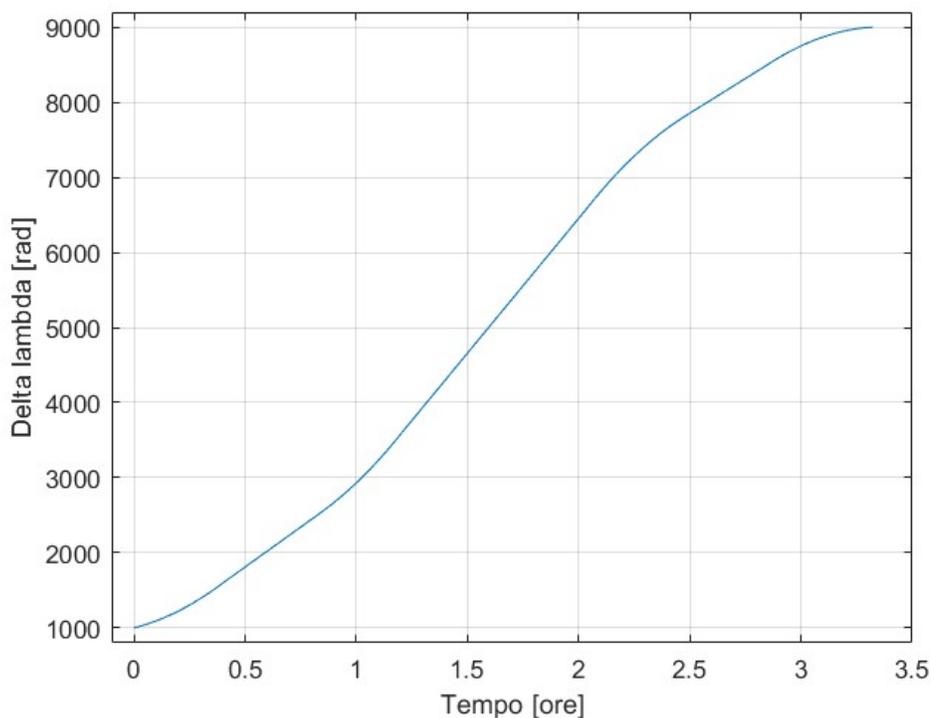


Figura 5.7: Diagramma andamento $\delta\lambda$ nel tempo - caso 1

In maniera analoga è possibile rappresentare l'andamento del $\delta\lambda$, figura 5.7, ovvero della longitudine dello spacecraft, che deve passare dal valore di 1000 a 9000 radianti. Come si vede dal grafico la crescita è costante e quasi lineare durante tutta la missione, con una leggera inflessione all'inizio e alla fine, spiegabile perché in questi momenti lo spacecraft si trova più lontano dalla superficie della Terra e perciò l'avanzamento angolare sarà lievemente inferiore, rimanendo pressoché costante nel resto dell'orbita.

Gli ultimi parametri orbitali relativi da considerare sono i valori delle eccentricità relative, rappresentati nella figura 5.8. I valori iniziali e finali di δe_x e δe_y , non essendo interessate dalla manovra, dovranno coincidere tra loro e questo denota la validità dell'analisi. Questo aspetto che viene soddisfatta ma, come prevedibile, durante il periodo della missione la forma dell'orbita si modifica (dovuto alla modifica del semiasse) e di conseguenza anche l'ec-

centricità cambierà, influenzando sulle eccentricità relative come si può vedere dal grafico.

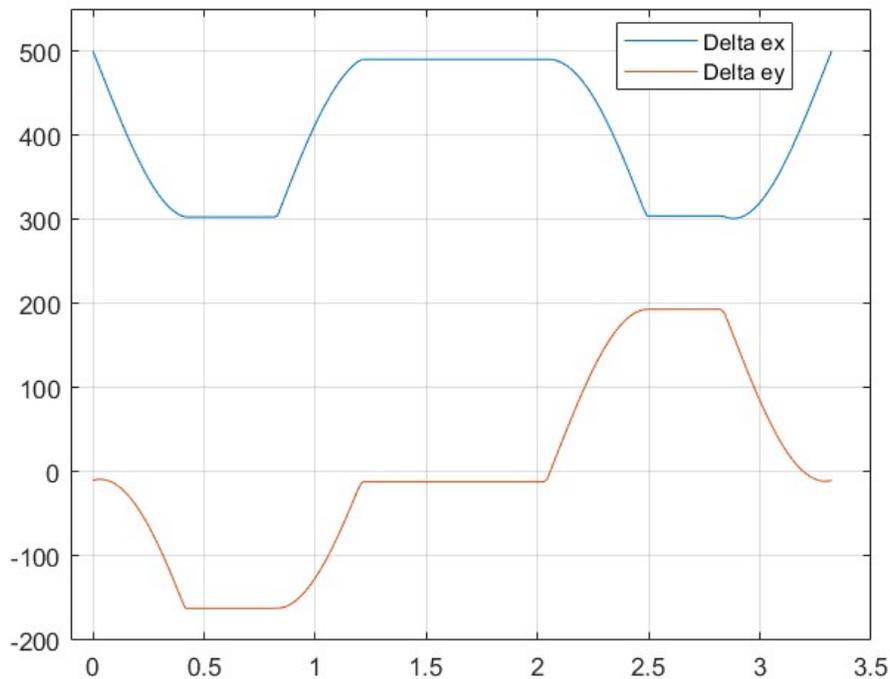


Figura 5.8: Diagramma andamento δe_x e δe_y nel tempo - caso 1

L'ultimo parametro che dobbiamo ancora valutare è l'andamento della massa del sistema spacecraft, questa decresce ad ogni impulso del motore. I tratti di decrescita sono i medesimi dei grafici precedenti, come visibile in figura 5.9. Il tasso di decrescita è il medesimo in quanto abbiamo ipotizzato che il nostro motore sia ideale senza perdite o difetti, perciò genera sempre la stessa spinta consumando la stessa quantità di propellente.

Dopo l'analisi di ottimo, viene calcolato un valore della massa finale, normalizzata, di:

$$m_{f_{Casol}} = 0.999917 \text{ kg}$$

Con questo valore è possibile calcolare il valore finale del ΔV della missione nel primo caso, utilizzando l'equazione (2.8) e apportando la giusta correzione

dei dati dovuta alla normalizzazione si ricava:

$$\Delta V_{Caso1} = 0.622995 \text{ m/s}$$

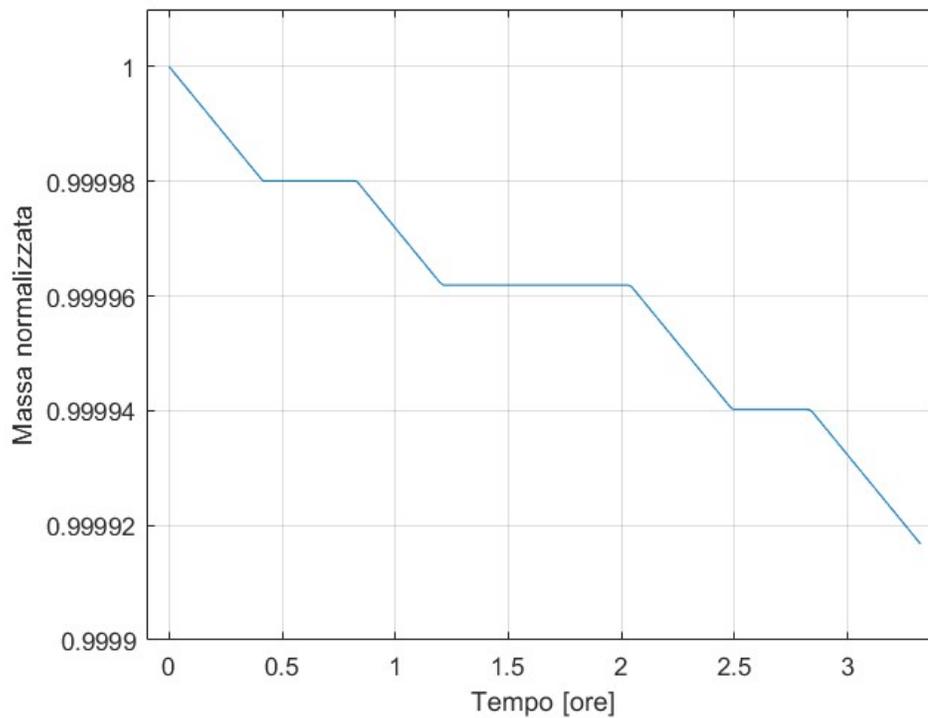


Figura 5.9: Diagramma decremento massa nel tempo - caso 1

Questo valore si discosta da quello trovato dall'articolo di circa cinque volte, la motivazione si potrebbe individuare soprattutto nel fatto che abbiamo dovuto utilizzare un valore di spinta superiore per poter far convergere il codice, ciò può aver influito negativamente sulle prestazioni. Riferito a ciò, nell'analisi svolta nel caso di 50 nodi gli archi di spinta erano soltanto tre e non quattro come invece trovato in questo lavoro, ciò ovviamente aumenta il tempo in cui il motore rimane acceso e pertanto anche un aumento dei consumi e della differenza di velocità necessaria alla missione.

5.3 Caso 2

Passando al secondo caso proposto dallo studio, viene compiuta una manovra di solo cambio eccentricità dell'orbita, mantenendo però costante sia il semiasse che la longitudine dell'orbita (e ovviamente sempre l'inclinazione). In questo caso il limite di accelerazione ammissibile era lievemente maggiore, pari a $5e^{-5} m/s^2$ ma sono stati fatti dei test su diversi valori per valutare le migliori prestazioni della manovra. Nella figura 5.10 sono raccolte i diversi profili di spinta⁶ in una finestra di valori compresi tra $2 \div 23e^{-5} m/s^2$.

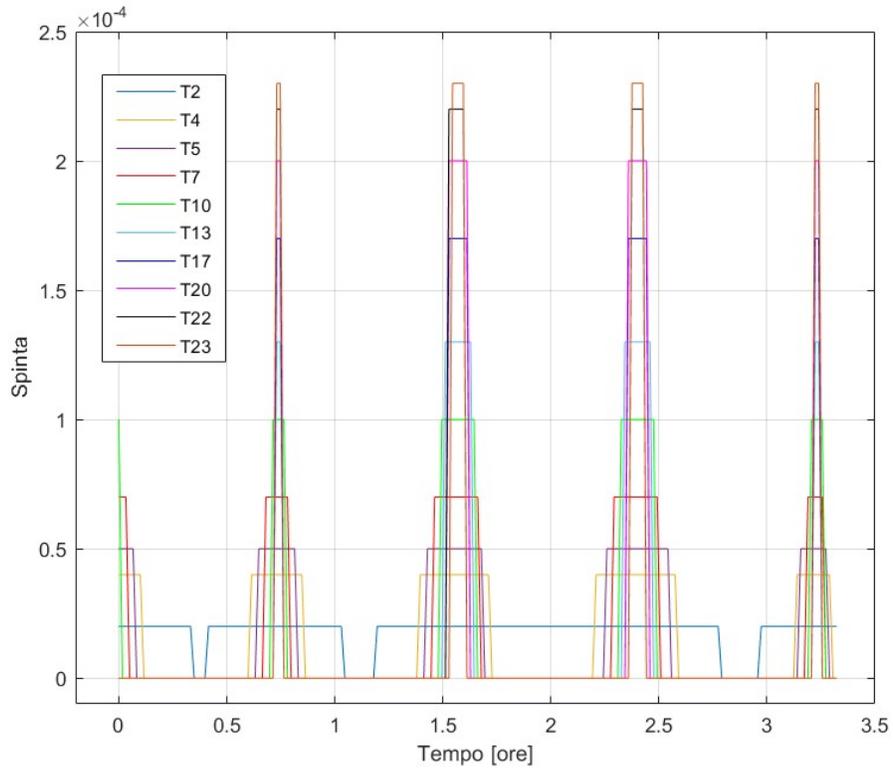


Figura 5.10: Diagramma spinta per diversi valori di spinta - caso 2

Come si può notare, c'è variabilità del numero degli archi a seconda della spinta che andiamo a scegliere, per valori superiori a $10e^{-5} m/s^2$ (linea ver-

⁶Sempre spinta per unità di massa.

de) ci sono quattro impulsi, in cui ovviamente la durata dipende dall'intensità della spinta stessa (più è grande e per meno tempo il motore rimarrà acceso); per valori inferiori a questo invece è presente un ulteriore arco all'inizio della manovra. Nel caso particolare di spinta di $2e^{-5} m/s^2$ il terzo e quarto arco si uniscono formandone uno unico più lungo.

Nella tabella 5.5 sono raccolti i valori iniziali e finali raggiunti durante lo studio della seconda manovra, mentre nella tabella 5.6 vengono indicati i tempi di accensione del motore per i casi studiati all'aumento della spinta.

	Inizio	Fine
δa	0	0
$\delta \lambda$	10000	10000
δe_x	500	200
δe_y	-10	100

Tabella 5.5: Valori parametri inizio e fine manovra - caso 2

Spinta	Tempo accensione [sec]	% accensione
2	10584.81	88.497
4	4485.09	37.499
5	3468.47	28.999
7	2451.85	20.499
10	1734.23	14.499
13	1196.02	9.999
17	956.82	7.999
20	956.82	7.999
22	777.42	6.499
23	717.61	5.999

Tabella 5.6: Test andamento tempi accensione motore - caso 2

A parte il primo caso di spinta molto piccola, in cui il motore risulta quasi sempre acceso, negli altri casi possiamo subito vedere una netta diminuzione dell'attività del motore rispetto al caso 1. I tempi di accensione diminuiscono molto fino a stabilizzarsi intorno ai dodici minuti totali per l'intera manovra, questo avviene perché la manovra di cambio di eccentricità non richiede, come si vedrà più avanti, di variare l'altezza dell'orbita (ne tanto

meno l'inclinazione) e perciò sono richiesti attenti e brevi impulsi sufficienti a modificare l'eccentricità.

Per valutare però quale di questi casi risulta essere il migliore dal punto di vista dei consumi bisogna valutare la differenza di velocità a fine manovra e per fare questo, come visto precedentemente, conviene soffermarsi sull'andamento della massa nel tempo.

Come prevedibile, visionando la figura 5.11, il caso di spinta di $2e^{-5} m/s^2$ è quello che consumerà di più. Questo accade perché il motore rimane acceso per troppo tempo ad ogni impulso, non riuscendo a raggiungere la posizione ideale a causa della poca spinta, infatti il terzo e quarto impulso risulteranno talmente lunghi che andranno ad unirsi formandone uno unico.

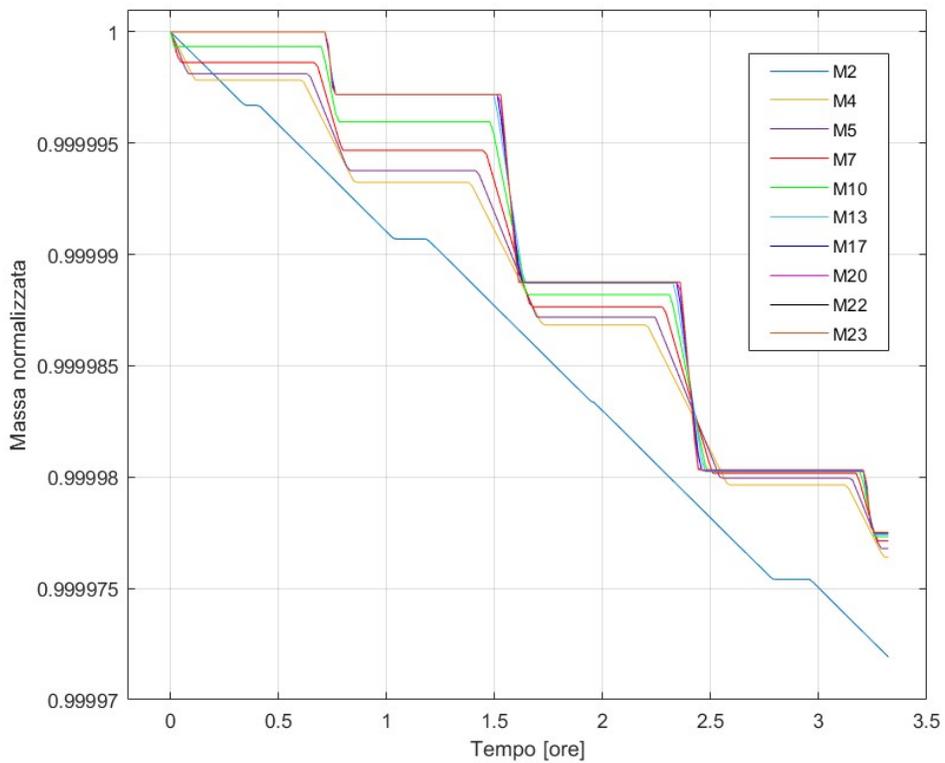


Figura 5.11: Variazione massa per diversi valori di spinta- caso 2

In tutti gli altri casi l'andamento è molto simile, rientrando in un piccolo range di differenza; per valutare con accuratezza quale caso risulta essere il migliore si calcola la differenza di velocità (con l'equazione (2.7)) e vengono raccolti i dati nella tabella 5.7. Partendo dalla spinta inferiore, il valore associato di differenza di velocità continua progressivamente a diminuire fino al valore con spinta di $23e^{-5} m/s^2$, corrispondente a una valore di ΔV di circa $0.16819 m/s$, andando poi ad aumentare successivamente.

Ciò denota una migliore capacità di convergenza del problema per valori di spinta maggiori, rispetto ai risultati di riferimento del articolo; questo andamento può però anche dipendere da una migliore predisposizione del codice stesso nella gestione di spinte più alte e quindi una migliore ottimizzazione di quello che è poi il consumo di carburante.

Spinta $*10^{-5}$	$\Delta V m/s$
2	0.21012
4	0.17657
5	0.17362
7	0.17107
10	0.16961
13	0.16893
17	0.16848
20	0.16830
22	0.16823
23	0.16819

Tabella 5.7: Test spinta e ΔV associato - caso 2

Detto questo comunque, escludendo i due casi estremi, la variazione massima di ΔV è relativamente piccola, appena $0.0084 m/s$ circa, possiamo pertanto scegliere di approfondire uno specifico caso con più tranquillità.

Volendo rimanere il più vicino possibile al valore di ΔV e di spinta dell'articolo di riferimento, si sceglie di approfondire il caso con spinta di $10e-5 \text{ m/s}^2$.

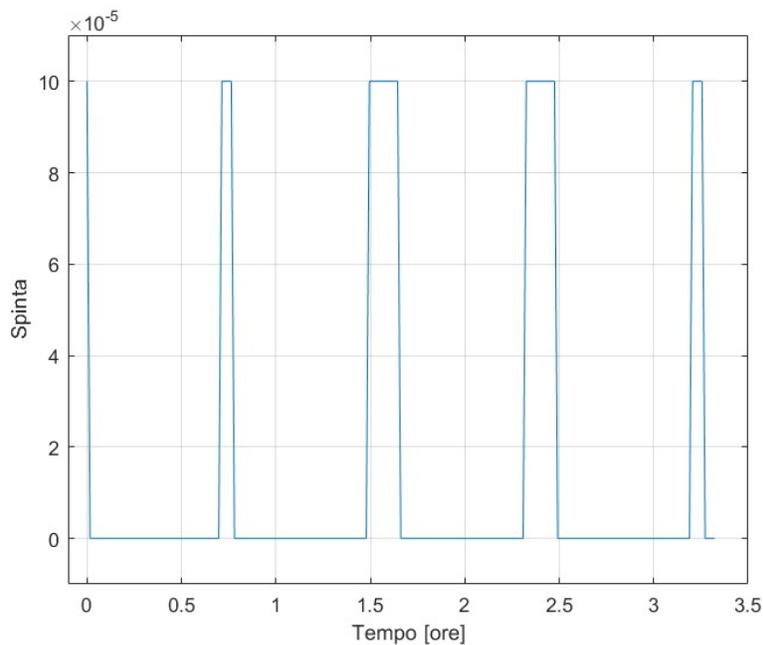


Figura 5.12: Diagramma spinta - caso 2

Siccome questo valore di spinta è lo stesso del caso 1 è possibile valutare il comportamento dello stesso tipo di analisi per tipologie differenti di manovre e valutare perciò eventuali differenze o analogie col primo caso.

Arco	Δt [sec]	% accensione
1	59.80	0.5
2	239.20	2.0
3	598.01	5.0
4	598.01	5.0
5	239.20	2.0

Tabella 5.8: Andamento tempi archi di spinta - caso 2

Nella figura 5.12 viene rappresentato il diagramma di spinta in cui sono evi-

denti i cinque archi di spinta necessari alla manovra, anche se il primo è molto breve e decade nel caso di aumento di spinta (come visto nella figura 5.10). Rispetto al caso 1 (figura 5.3), è chiaro come il tempo di accensione del motore sia notevolmente inferiore e ciò si ripercuote sulla quantità di carburante utilizzata e perciò sul ΔV finale.

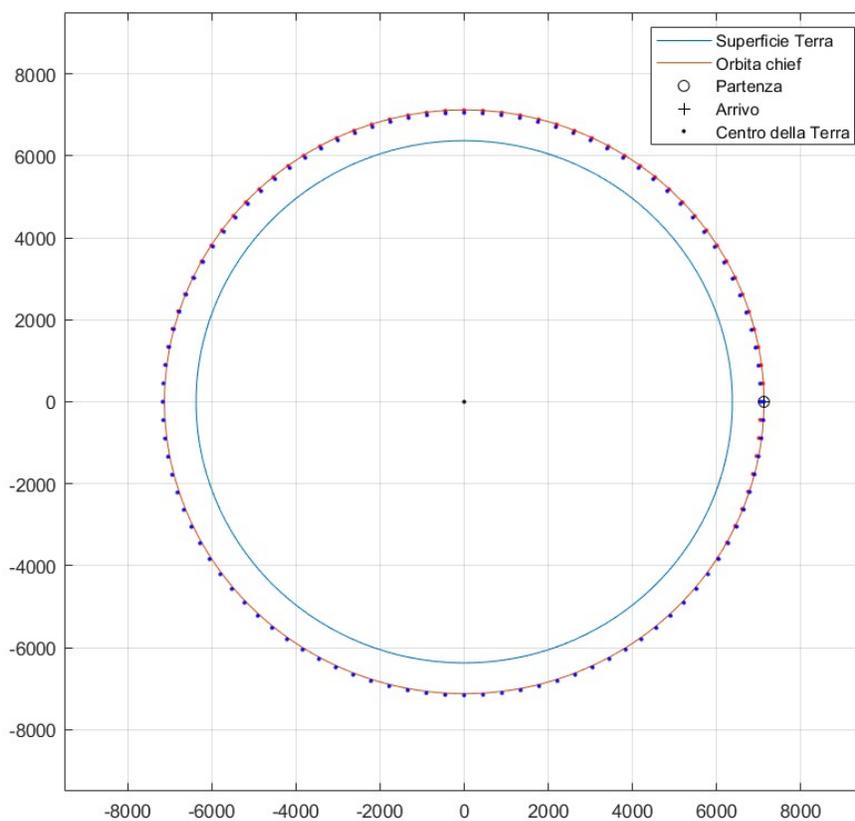


Figura 5.13: Traiettoria del *deputy* - caso 2

Soffermandosi sulla larghezza di questi impulsi infatti possiamo calcolare una accensione massima del motore di meno di dieci minuti nei casi più intensi (terzo e quarto impulso), come raccolto nella tabella 5.8.

Il primo impulso invece dura esattamente il tempo che intercorre tra un nodo e un altro, circa un minuto, sufficiente a imprimere una prima modifica ai parametri orbitali; in questo caso, parte il primo, si nota una certa simmetria degli impulsi successivi, uno più breve seguito da uno più lungo. Considerando quando sono generati questi impulsi notiamo che il secondo è fatto a circa 180° dall'inizio della manovra, il terzo invece circa dopo aver compiuto il primo giro; nuovamente il quarto e il quinto come questi ultimi due e con intensità invece invertite.

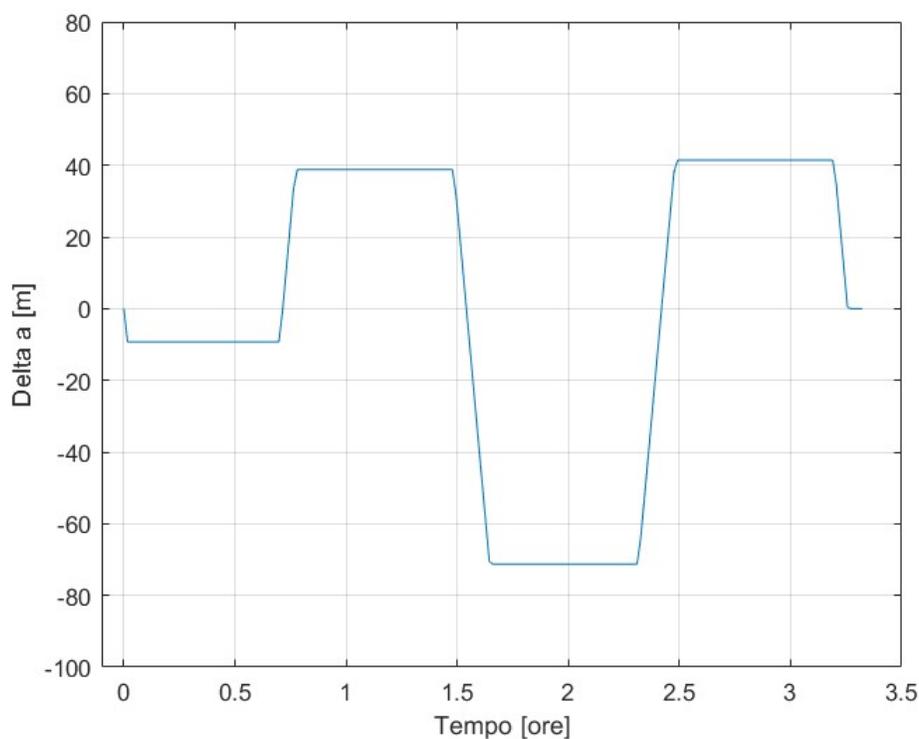


Figura 5.14: Diagramma andamento δa nel tempo - caso 2

Questo accade per bilanciare la perturbazione generata dai due impulsi precedenti e allineare così l'orbita modificata con quella obiettivo dello spacecraft *chief*. Successivamente, nella figura 5.13, viene visualizzata la traiettoria dello spacecraft *deputy*; in maniera analoga al primo caso, lo spacecraft compie due orbite intorno alla Terra mantenendo però questa volta pressoché costante l'altezza dalla superficie.

Ciò è facilmente valutabile dalla figura 5.14 in cui la massima variazione di altitudine tra il il punto più lontano e quello più vicino dalla superficie non supera il valore di 100, rispetto invece ai 650 circa del primo caso, ovviamente necessari per poter compiere il cambio di semiasse.

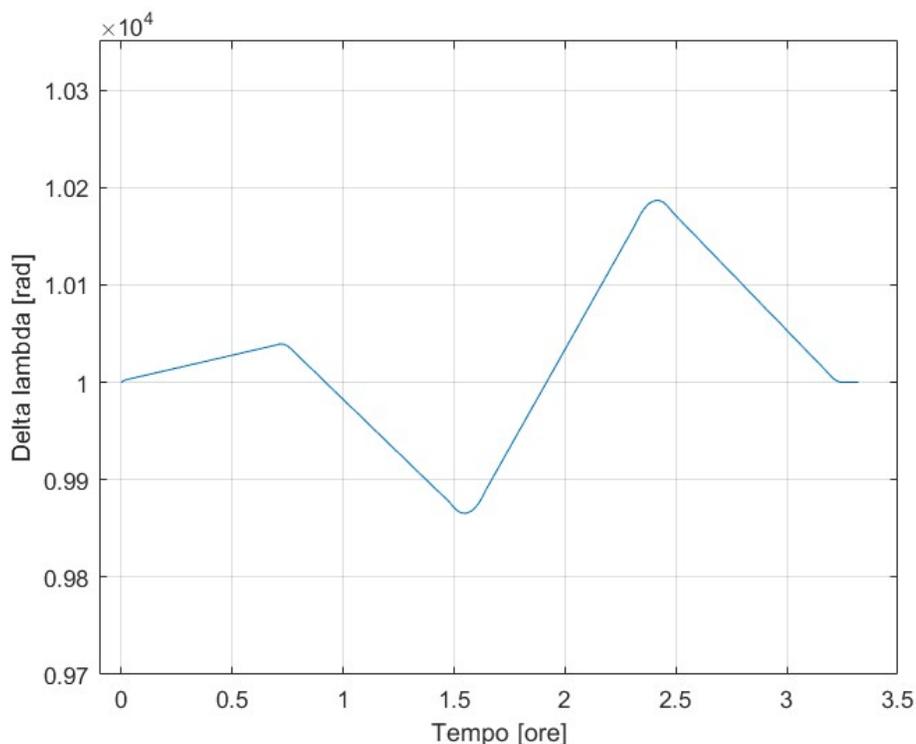


Figura 5.15: Diagramma andamento $\delta\lambda$ nel tempo - caso 2

Nella figura 5.15 viene rappresentato l'andamento della variazione di longitudine nel tempo della seconda manovra, anche in questo caso la variazione massima è decisamente inferiore rispetto alla stessa nel caso 1, variando di appena 300 unità, andando a crescere e decrescere ad ogni impulso, rispetto alla crescita continua del primo caso.

Per entrambi i parametri, il valore di arrivo e di fine manovra coincidono rispettivamente, con inevitabili fluttuazioni durante il periodo orbitale, in maniera analoga alle eccentricità relative del caso 1.

A questo punto vengono valutati i grafici dell'andamento delle eccentricità relative, nella figura 5.16 viene rappresentato l'andamento della δe_x mentre

nella figura 5.17 l'andamento della δe_y . La δe_x varia a tratti dal valore 500 a quello di 200 seguendo i cinque archi di spinta che avevamo già individuato in precedenza; come prevedibile, i tratti in cui c'è una decrescita più ripida corrispondono al terzo e quarto impulso, ovvero a quelli in cui il motore rimane acceso per più tempo.

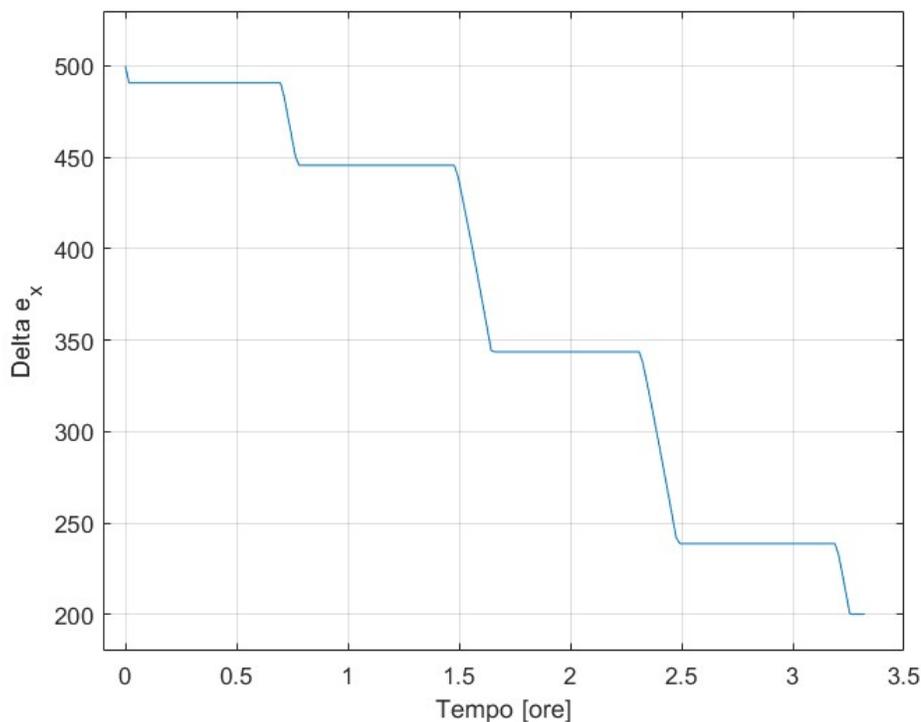


Figura 5.16: Diagramma andamento δe_x nel tempo - caso 2

La stessa cosa accade per l'andamento della δe_y , che passa da un valore di -10 a quello di 100; anche in questo caso sono presenti i cinque "salti" dovuti agli archi: il primo è brevissimo e quasi non visibile all'inizio e poi i successivi quattro archi di intensità variabile ma riconducibili anche loro al diagramma di spinta visto in precedenza.

Infine si valuta l'andamento della massa nel corso di tutta la manovra, nella figura 5.18; anche in questo caso abbiamo lo stesso tasso di decrescita per ogni tratto (uguale pendenza), analogamente al primo caso di studio in cui

abbiamo mantenuto le stesse ipotesi sul motore.
La massa normalizzata a fine analisi risulta essere:

$$m_{f_{Caso2}} = 0.999977 \text{ kg}$$

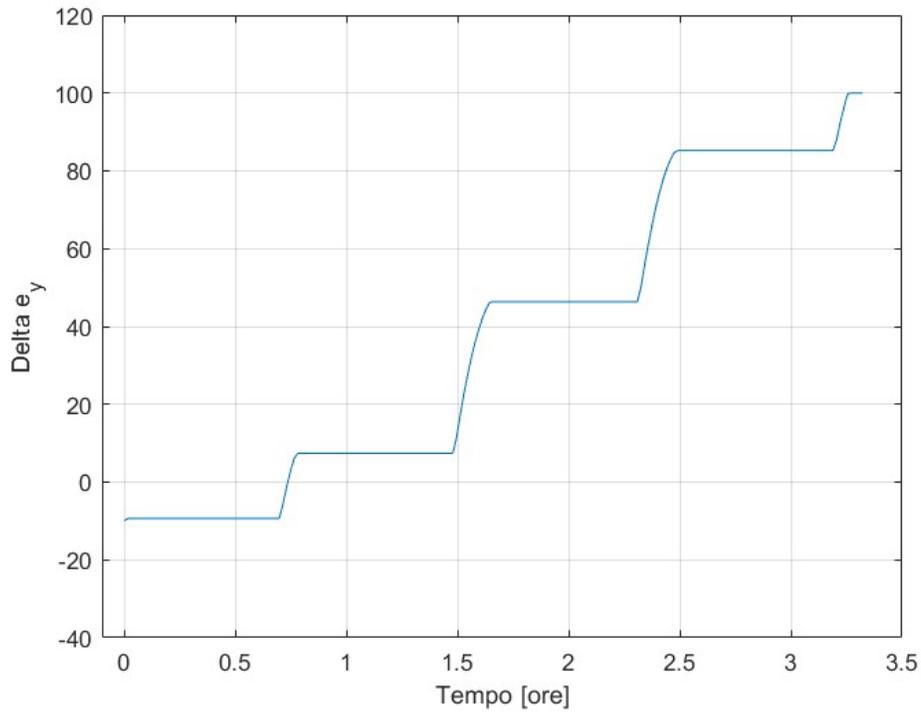


Figura 5.17: Diagramma andamento δe_y nel tempo - caso 2

Sapendo questo dato si può ricavare il ΔV definitivo che risulta essere (applicando sempre la correzione):

$$\Delta V_{Caso2} = 0.169606 \text{ m/s}$$

Rispetto al caso 1, questa volta siamo riusciti a trovare un valore di ΔV paragonabile al risultato trovato dallo studio precedente con 50 nodi, la differenza è di 0.002 m/s per il nostro caso di 200 nodi, considerando comunque la scelta maggiore di spinta.

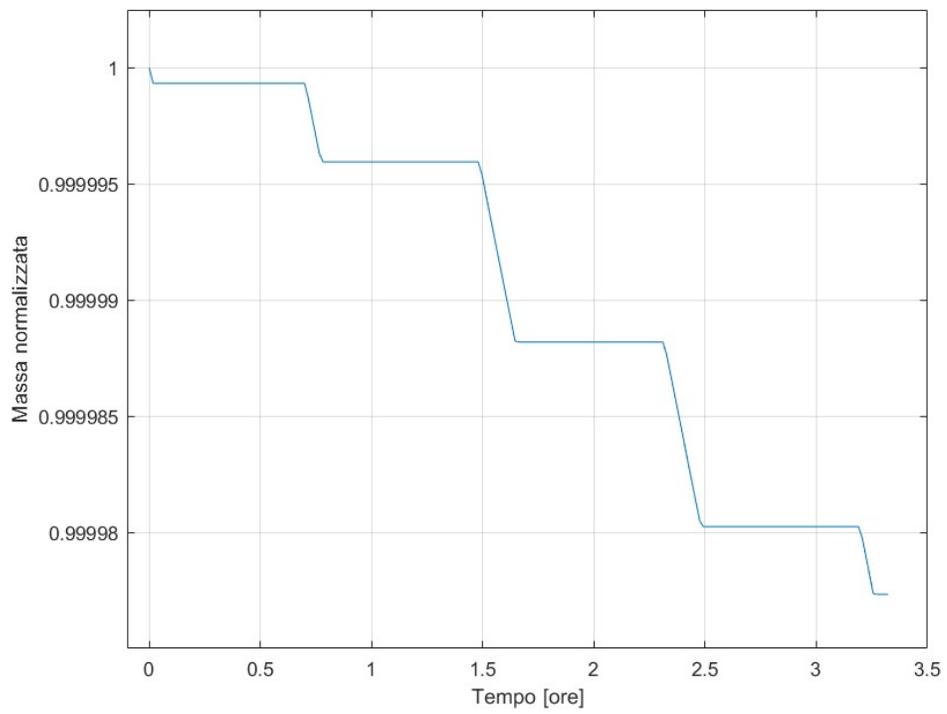


Figura 5.18: Decremento massa nel tempo - caso 2

Capitolo 6

Conclusioni

In conclusione alla raccolta dei dati per entrambe le manovre di studio, possiamo trarre alcune considerazioni riguardo dell'accuratezza o meno della nostra analisi, ricordando che i calcoli di ottimizzazione svolti si basano su numerose semplificazioni più o meno importanti che potrebbero influire negativamente sul risultato finale. Come già spiegato nei capitoli precedenti, la richiesta di utilizzare una accelerazione massima di $3e^{-5} m/s^2$ nel primo caso è stata impossibile da soddisfare perché il codice non riusciva a convergere ad una soluzione, rendendo perciò necessario aumentarne il valore.

Per il secondo caso si arrivava a convergenza con il valore richiesto di $5e^{-5} m/s^2$ ma i consumi erano superiori e aumentando di poco la spinta si riusciva a raggiungere valori di variazione di velocità paragonabili allo studio precedente. Per entrambi i casi studiati si è riscontrato sempre un andamento del ΔV a decrescere con l'aumento della spinta per unità di massa applicato, come si vede dalle tabelle 5.3 e 5.7 in accordo con quello che ci si poteva aspettare; in particolare nel secondo caso si è notato come superare un valore di $24e^{-5} m/s^2$ risulti però deleterio in quanto fa nuovamente aumentare la variazione di velocità necessaria, non riuscendo inoltre a raggiungere convergenza ai valori finali attesi.

Detto questo, valutando i risultati abbiamo trovato riscontro con lo studio precedente per il secondo caso, con una quasi sovrapposizione dei valori di ΔV , mentre per il primo caso è stato trovato un risultato decisamente più alto. Le motivazioni potrebbero dipendere dalla non perfetta ottimizzazione del codice per questo specifico tipo di manovra o appunto dalla scelta costretta di utilizzare una spinta maggiore, come anticipato nel capitolo dedicato, nello studio precedente si era arrivati a convergenza con solo tre archi

di spinta ma col nostro codice non si è riusciti a scendere sotto ai quattro, costringendo un aumento significativo dei consumi.

Inoltre, avendo scelto lo stesso valore di spinta per entrambi i casi di studio possiamo concludere che l'analisi con le equazioni che abbiamo utilizzato riescono a simulare in maniera più accurata manovre di cambio di eccentricità rispetto invece a manovre di aumento del semiasse, questo può dipendere da una migliore capacità del codice nel gestire una quantità di archi superiore ma brevi (caso 2) rispetto a meno archi ma più lunghi (caso 1).

Bibliografia

- [1] Arthur Earl Bryson. *Applied optimal control: optimization, estimation and control*. Routledge, 2018.
- [2] Lorenzo Casalino. “Ottimizzazione Indiretta di Traiettorie Spaziali”. In: *Appendice* ().
- [3] Davide Costigliola, Lorenzo Casalino et al. “Autonomous Phasing Maneuvers in Near Circular Earth Orbits”. In: *Proceedings of the 2022 AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, Vol. 180*. Springer, 2024.
- [4] Simone D’Amico e Oliver Montenbruck. “Proximity operations of formation-flying spacecraft using an eccentricity/inclination vector separation”. In: *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 29.3 (2006), pp. 554–563.
- [5] Philip J Davis e Philip Rabinowitz. *Methods of numerical integration*. Courier Corporation, 2007.
- [6] Alessia De Iuliis, Davide Costigliola e Lorenzo Casalino. “Optimal Control for Formation Reconfiguration Problems using Pseudospectral Methods”. In: *Proceedings of the 33rd Space Flight Mechanics Meeting, Austin, TX, USA*. 2023, pp. 15–19.
- [7] Gabriella Gaias e Simone D’Amico. “Impulsive maneuvers for formation reconfiguration using relative orbital elements”. In: *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 38.6 (2015), pp. 1036–1049.
- [8] MARIA GRAZIA Gasparo, Maria Macconi, Aldo Pasquali et al. “Risoluzione numerica di problemi ai limiti per equazioni differenziali ordinarie mediante problemi ai valori iniziali”. In: (1979).
- [9] Derek F Lawden. “Optimal trajectories for space navigation”. In: (*No Title*) (1963).

- [10] Lev Semenovich Pontryagin. *Mathematical theory of optimal processes*. Routledge, 2018.
- [11] Lawrence F Shampine. “Computer solution of ordinary differential equations”. In: *The initial value problem (1975)*.