



**Politecnico
di Torino**

Politecnico di Torino

Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

**Whirl flutter e instabilità aeroelastiche: confronto tra
modelli analitici e software mid-fidelity**

Candidato:

Antonio Lattanzio

Relatori:

Prof. Marco Gherlone
Prof. Olivier Dessombz

Anno accademico 2023/24

Indice

Abstract	6
Ringraziamenti - Acknowledgements	7
1 Introduzione	8
1.1 Aviazione sostenibile e propulsione ad elica	8
1.2 Whirl flutter - definizione e cenni storici	10
1.3 Simulazioni mid-fidelity e metodi innovativi	12
1.4 Simulazione del fenomeno e software coinvolti	14
1.4.1 DUST	14
1.4.2 MBDyn	15
2 Cenni teorici	16
2.1 Il vortex particle method	16
2.1.1 Calcolo dei carichi aerodinamici	18
2.2 Fenomeni aeroelastici	20
2.2.1 Il fluttering	20
2.2.2 Il whirl flutter	23
2.2.3 Interazione tra rotore e ala	28
2.3 Post-processing e elaborazione del segnale	29
2.3.1 Il metodo di Prony	30
2.3.2 Il metodo HQG (Half-Quadratic Gain Method)	31
2.3.3 Il metodo dell'involuppo	32
3 Analisi dei risultati	33
3.1 Rotore rigido	33
3.2 Rotore installato su un'ala flessibile	42
3.3 Rotore installato all'estremità dell'ala	51
4 Conclusioni	52
Appendice A - Metodo HQG	56
Appendice B - Metodo di Prony e Matrix Pencil	58
Appendice C - Metodo dell'involuppo	60

Elenco delle figure

1.1	Midnight, un eVTOL di nuova generazione presentato nel 2022	9
1.2	Il velivolo da trasporto militare Airbus A400M, dotato di 4 motori turboprop . . .	10
1.3	Il convertiplano AW609	11
1.4	L'aereo Lockheed L-188 Electra	12
1.5	I resti del volo 710 della Northwest Airlines, con uno dei quattro motori e parte dell'ala divelti dal resto della struttura	12
1.6	Schema riassuntivo sul problema della scelta dei metodi (fonte: www.idealsimulations.com/resources/turbulence-models-in-cfd	13
2.1	Diagramma di una particella con vorticità Γ (sinistra), applicazione della legge di Biot Savart (destra) [2]	18
2.2	Schema esplicativo del calcolo della vorticità di una VP [14]: Γ_L sul lato libero è considerata esclusivamente nel calcolo di Γ_i , Γ_R è ripartita in due parti uguali tra Γ_i e Γ_{in}	19
2.3	Modi di torsione e flessione amplificati dal flutter su un'ala di aliante [11]	21
2.4	Schema del modello semplificato di ala soggetta a fluttering (source : https://www.aerodynamics4students.com/aeroelasticity/)	22
2.5	Schema di un'elica suscettibile a whirl flutter e dei suoi movimenti di beccheggio (a) e imbardata (b) [17]	24
2.6	Schema dei modi caratterizzanti il whirl flutter: backward mode (a) e forward mode (b) [17]	24
2.7	Schema cinematico del modello [17]	25
2.8	Stabilità del sistema in funzione di A e della rigidità strutturale [17]	27
2.9	Stabilità del sistema in funzione della geometria e dello smorzamento strutturale [17]	27
2.10	Schema cinematico del modello ala - rotore [15]	28
2.11	Vista in sezione e in pianta del modello ala - rotore [15]	29
3.1	Schema del modello, tratto dall'articolo [7]	33
3.2	Discretizzazione e schematizzazione aerodinamica dell'elemento di pala (source : https://en.wikipedia.org/wiki/Blade_element_theory)	34
3.3	Confronto tra due casi di flutter giroscopico, con il nodo rappresentato coincidente con il centro dell'elica	37
3.4	Analisi del segnale Θ per un advance ratio di 1	38
3.5	Visualizzazione del rotore e della scia prodotta per un advance ratio 0.8	39

3.6	Confronto tra i risultati di Mair e DUST	39
3.7	Confronto dei risultati ottenuti in base al profilo utilizzato sulle pale	40
3.8	Traiettoria del nodo centrale del rotore per diverse pale AR e NACA 0012	41
3.9	Il Tecnam P2006T (in alto) e l'X57 Maxwell (in basso)	42
3.10	Modi di flutter (sinistra) et della divergenza (destra) [15]	44
3.11	Distribuzione dell'angolo di torsione lungo le pale del motore	44
3.12	Visualizzazione delle superfici portanti del modello DUST	45
3.13	Dettaglio sul rotore	45
3.14	Grafico della portanza misurata sull'ala	46
3.15	Confronto tra il metodo Prony (in alto) e il Matrix Pencil (in basso)	48
3.16	Visualizzazione della divergenza alare simulata da DUST	49
3.17	Deformazione verticale e torsione della struttura alare	49
3.18	Confronto tra i risultati forniti da DUST e da Liu Xu	50
3.19	Visualizzazione della geometria modellata con DUST	51
3.20	Confronto tra i risultati forniti da DUST e da Liu Xu	51

Abstract

In un mercato aeronautico sempre più dinamico ed esigente, la continua richiesta di velivoli innovativi, efficienti e sicuri non lascia spazio alle tempistiche tradizionali associate alla produzione di simulazioni con tecnologie tradizionali. In particolare, con la ricerca di tecnologie più sostenibili e il ritorno alla propulsione a elica, le variabili coinvolte nelle architetture dei velivoli aumentano ed è necessario testare tutte le possibili configurazioni per ottimizzare le caratteristiche degli aerei e renderli sicuri. Questo tipo di intento non può essere raggiunto utilizzando i più diffusi software commerciali che, pur offrendo un elevato grado di precisione per l'ambiente industriale, rallentano la fase di progettazione, soprattutto all'inizio. Lo scopo dello studio presentato è quindi quello di testare software che offrono approcci alternativi, che fanno parte dell'insieme di metodi "mid-fidelity" progettati principalmente per l'analisi aerodinamica e strutturale, e quindi progettati con algoritmi basati rispettivamente sul metodo delle particelle di vorticità (VPM) e sui metodi multibody. In particolare, alcuni di questi software possono essere sfruttati in combinazione per l'analisi aeroelastica, offrendo l'elevata velocità di calcolo tipica dei software multibody e la capacità di catturare fenomeni aerodinamici non lineari utilizzando il VPM. In particolare, lo scopo dello studio è quello di analizzare il fenomeno del flutter giroscopico (whirl flutter) utilizzando questi software, e di confrontare i risultati ottenuti con la bibliografia disponibile, al fine di discuterne l'affidabilità, l'accuratezza e l'ipotesi di un loro possibile utilizzo nelle fasi preliminari di progettazione di un aereo commerciale.

In an increasingly dynamic and demanding aviation market, the continuous demand for innovative, efficient and safe aircraft leaves no room for the traditional timeframes associated with producing simulations with traditional technologies. In particular, with a look towards cleaner technologies, and a return towards propeller propulsion, the variables at play in aircraft architectures increase, and it is necessary to test all possible configurations to optimise aircraft characteristics and make them safe. This type of intent cannot be realised using the most widespread commercial software, which, although providing a high degree of precision for the industrial environment, slows down the design phase, especially at its beginning. The study presented therefore aims to test software offering alternative approaches, which fall within the set of "mid-fidelity" methods, designed primarily for aerodynamic and structural analysis, and therefore notoriously conceived through algorithms based on the Vortex Particle Method (VPM), and Multibody methods, respectively. Specifically, some of this software can be exploited in a combined manner for aeroelastic analyses, providing a high calculation speed typical of multibody software and an ability to capture non-linear aerodynamic phenomena thanks to VPM. In particular, the aim of the study is to analyse the whirl flutter instability through these software packages, and compare the results obtained with the available bibliography in

order to discuss their reliability, precision and the hypothesis of their possible use within the preliminary design phases of a commercial aircraft.

Ringraziamenti - Acknowledgements

Alla conclusione di questo percorso è doveroso menzionare e ringraziare le persone che mi hanno aiutato e permesso di condurre al meglio il progetto.

Desidero esprimere un sincero ringraziamento al mio relatore, il Prof. Marco Gherlone, per la costante disponibilità dimostrata durante tutto il percorso di stesura di questa tesi.

Je tiens à remercier le Professeur Oliver Dessombz pour sa supervision à l'Ecole Centrale de Lyon, et pour les corrections qu'il a apportées, m'apprenant ainsi que la réussite d'un projet dépend aussi de sa présentation.

Enfin, je voudrais remercier le très important Jean-Baptiste Tô, la personne qui a été la plus proche de moi dans ce projet et qui s'est toujours efforcée de me donner les réponses ou de m'aider à les trouver. Un bon tuteur apporte ses idées et ses compétences, un excellent tuteur apporte son écoute et son empathie face aux difficultés rencontrées. Jean-Baptiste a été un exemple pour tout cela, et travailler avec lui a été un plaisir, et heureusement continuera à l'être.

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Aviazione sostenibile e propulsione ad elica

La necessità di rendere sostenibile l'aviazione commerciale sta spingendo sempre più gli operatori del mercato aeronautico a rivolgersi a soluzioni alternative. La democratizzazione del turismo a lungo raggio e la necessità di trasportare sempre più merci e persone costringono i costruttori a rivedere la fase di progettazione di un aereo per renderlo meno inquinante. Di conseguenza, molte aziende si stanno orientando verso soluzioni innovative, ma anche al miglioramento di tecnologie precedentemente scartate; ad esempio, l'esplorazione di motori con fan esterno alla gondola, come l'USF RISE del consorzio CFM, annunciato per il 2021, molto tempo dopo la nascita di vari progetti di motori unducted negli anni '80 (ad esempio l'Allison 578-DX). Inoltre, si è assistito a un proliferare di aziende e start-up del settore aeronautico impegnate nell'esplorazione e nella costruzione di velivoli con sistemi di alimentazione innovativi (ad esempio celle a combustibile o propulsione ibrida), un mercato sempre più fiorente stimolato dalla domanda dei clienti e dagli investimenti dei principali operatori. Per valutare questa tendenza, possiamo confrontare le previsioni di diversi analisti di mercato per il settore dei velivoli "more electric" (MEA), che si prevede crescerà di oltre il 10% nel periodo 2022-2030. [5]. Tra le varie soluzioni sempre più disponibili sul mercato, soprattutto per le rotte più brevi, le più efficienti e meno inquinanti sono gli eVTOL (Electric Vertical Take-Off and Landing). Questi veicoli rappresentano una delle innovazioni più promettenti dell'aviazione moderna. Stanno rapidamente attirando l'attenzione per il loro potenziale rivoluzionario per il trasporto urbano e regionale, grazie alla loro capacità di offrire un'alternativa sostenibile ed efficiente ai mezzi di trasporto tradizionali. Gli eVTOL sono progettati per combinare i vantaggi degli elicotteri e degli aerei tradizionali, sfruttando l'energia elettrica generata da una cella a combustibile per operazioni più silenziose ed ecologiche. La propulsione elettrica riduce significativamente le emissioni di carbonio e i livelli di rumorosità rispetto ai motori a combustione interna, oltre alla capacità di fornire una potenza significativa in tempi brevi per le fasi di volo che richiedono un'elevata spinta del motore, rendendo gli eVTOL particolarmente adatti all'uso in aree urbane densamente popolate. Inoltre, l'uso di batterie o celle a combustibile avanzate offre la possibilità di voli più efficienti dal punto di vista energetico.



Figura 1.1: Midnight, un eVTOL di nuova generazione presentato nel 2022

Sulle rotte di medio raggio, soprattutto quelle per il trasporto merci, si è registrato un lento ma costante aumento del numero di aeromobili a turboelica. [6], cioè con eliche alimentate da motori a combustione. Ciò che accomuna queste tecnologie è l'utilizzo di rotori per ottimizzare il sistema di propulsione e aumentarne l'efficienza.

Le eliche sono particolarmente efficaci a velocità medio-basse, tipiche dell'aviazione regionale e a corto raggio. I motori elettrici funzionano bene con le eliche, in quanto possono fornire una coppia elevata a basse velocità di rotazione. Sono quindi ideali per il funzionamento al di sotto di Mach 0.6, regime operativo consigliato per la maggior parte dei prototipi volanti basati in parte sulla propulsione elettrica (propulsione ibrida o batterie a combustione), e lo stesso vale per l'efficienza propulsiva dei motori turboelica. I motori a reazione, invece, sono progettati per operare ad alte velocità e a quote più elevate, sono meno efficienti alle basse velocità e l'ipotetica conversione dell'energia elettrica in spinta è attualmente complessa e inefficiente. Un altro vantaggio delle eliche è il ridotto impatto ambientale in termini di rumore e vibrazioni. Gli aerei ad elica elettrica sono notevolmente più silenziosi dei motori a reazione, in particolare per l'assenza del rumore del getto e di un rumore tonale legato alla comparsa di un'onda d'urto in regime transonico e ad alto numero di giri; si tratta di un aspetto cruciale per i voli sopra le aree urbane e per migliorare l'accettabilità sociale delle operazioni aeroportuali.



Figura 1.2: Il velivolo da trasporto militare Airbus A400M, dotato di 4 motori turboprop

Per un componente così critico come l'elica, che è costantemente sottoposto a carichi aerodinamici variabili e dinamici, un nuovo tipo di instabilità si è aggiunto alle fonti di deformazione strutturale e di vibrazione convenzionalmente riscontrate nell'aviazione civile (flutter alare e buffet). Si tratta del flutter giroscopico, o *whirl flutter* in inglese.

1.2 Whirl flutter - definizione e cenni storici

Questo fenomeno, sul quale si focalizza questo documento, è definito come il moto di precessione dell'asse del rotore, dovuto all'effetto combinato di forze giroscopiche e aerodinamiche. Inoltre le eliche causano anche un effetto di interferenza aerodinamica con la struttura della gondola e dell'ala. Può causare vibrazioni instabili, che possono portare al cedimento dell'hub del motore o di un'intera ala [17].

Il fenomeno è stato scoperto prima analiticamente da Taylor e Browne, solo dopo l'incidente di due aerei di linea Lockheed L-188 C Electra II nel 1959 e 1960, è stata riconosciuta l'importanza del fenomeno nelle applicazioni pratiche. Un interesse sempre maggiore per sé è sviluppato con la presentazione di alcuni modelli di convertiplano come il Bell-Boeing V-22 Osprey, l'Agusta-Westland AW609, e il XC-142A, ovvero modelli soggetti fortemente a questo fenomeno nella fase di transizione tra il decollo e il volo orizzontale.



Figura 1.3: Il convertiplano AW609

Il rapporto sugli incidenti che hanno coinvolto l'aereo Lockheed L-188 Electra [1], in particolare sugli incidenti del volo 542 della Braniff Airways e del volo 710 della Northwest Airlines, fornisce approfondimenti sul fenomeno aeroelastico che ha portato a queste tragedie. Nel primo caso, l'incidente si è verificato quando le forze aerodinamiche esercitate dal rotore sulle gondole dell'aereo hanno interagito in modo distruttivo con la struttura dell'ala. Le gondole non sono state in grado di assorbire e smorzare le vibrazioni, causando il distacco del motore numero tre dall'ala. Questo ha portato alla disintegrazione dell'ala destra. Alla base del problema c'era un difetto di progettazione nella giunzione tra la gondola e l'ala, che non teneva conto delle oscillazioni potenzialmente distruttive causate dall'accoppiamento della dinamica di rotazione del motore con la gondola. Questa inadeguatezza strutturale rendeva l'aereo vulnerabile al flutter, portando al cedimento strutturale dell'ala. Lo stesso accadde nel secondo caso, nel 1960, in cui l'ala fu divelta dalla fusoliera: si osservarono danni da fatica alla struttura, dovuti principalmente all'elevata frequenza di atterraggi bruschi. Questo danno ha ridotto notevolmente lo smorzamento strutturale fornito dalla gondola, portando all'incidente mortale. Questi due eventi causarono la morte di 97 persone tra passeggeri ed equipaggio. In primo luogo, sono state apportate importanti modifiche al progetto, in particolare rafforzando le gondole per resistere meglio alle forze aerodinamiche. Sono stati aggiunti smorzatori di vibrazioni per assorbire le forze oscillatorie, riducendo in modo significativo la probabilità di flutter distruttivo. Anche i piloni dei motori sono stati riprogettati per fornire un migliore supporto e smorzamento. Oltre alle modifiche fisiche, la Federal Aviation Administration (FAA) ha rivisto e aggiornato i suoi standard di certificazione nella parte 25.25.629, richiedendo ai produttori di eseguire test aeroelastici più rigorosi durante la fase di progettazione. Inoltre, è stato aggiunto uno standard di velocità all'involuppo di volo entro il quale un aereo deve essere esente da flutter. Questo comportò simulazioni sul velivolo completo e campagne di test in galleria del vento per garantire che i velivoli fossero in grado di resistere a fenomeni aeroelastici simili. Le misure per il personale con il fine di prevenire gli incidenti includono l'addestramento dei piloti a manovre di atterraggio più delicate per ridurre i danni al motore e alla struttura del pilone. Sono state imposte ispezioni regolari dei supporti e delle strutture della gondola per identificare le aree di usura o di potenziale guasto. L'industria è stata sensibilizzata, incoraggiando i produttori a

incorporare strumenti di analisi avanzati nella progettazione dei nuovi aeromobili e favorendo la collaborazione con le autorità di regolamentazione, i produttori e gli istituti di ricerca. Il monitoraggio continuo e la raccolta di dati sui problemi di aeroelasticità sono diventati una prassi standard per affrontare in modo proattivo i rischi potenziali e migliorare la sicurezza degli aeromobili.



Figura 1.4: L'aereo Lockheed L-188 Electra



Figura 1.5: I resti del volo 710 della Northwest Airlines, con uno dei quattro motori e parte dell'ala divelti dal resto della struttura

1.3 Simulazioni mid-fidelity e metodi innovativi

Nel settore dell'aviazione, i costruttori di aeromobili affrontano una sfida complessa durante le fasi iniziali di un progetto: è necessario trovare un equilibrio tra la precisione delle simulazioni

e il tempo necessario per ottenere i risultati. Le simulazioni aerodinamiche, essenziali per prevedere il comportamento degli aeromobili, richiedono infatti calcoli dettagliati che devono essere integrati con software avanzati per modellare l'interazione tra il fluido e la struttura, così come per valutare l'impatto ambientale e l'inquinamento acustico prodotto. Questi processi sono fondamentali per garantire che l'aeromobile sia sicuro ed efficiente.

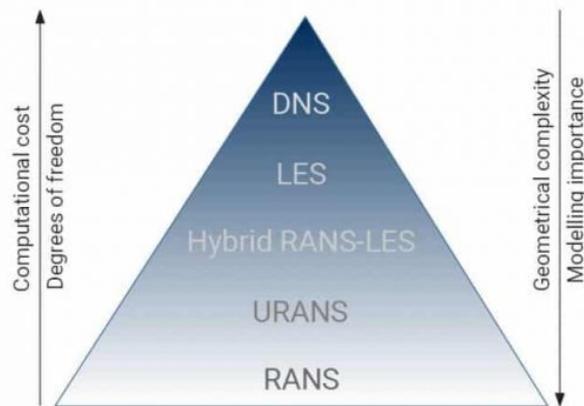


Figura 1.6: Schema riassuntivo sul problema della scelta dei metodi
(fonte: www.idealsimulations.com/resources/turbulence-models-in-cfd)

La maggior parte delle simulazioni di meccanica dei fluidi effettuate nella ricerca accademica utilizza i metodi ad alta fedeltà mostrati nella parte superiore della figura 1.6, con una forte tendenza a privilegiare l'accuratezza rispetto alla velocità di calcolo. Nell'industria, i metodi RANS e URANS sono preferiti per motivi di velocità. Utilizzando leggi di parete, schemi numerici adattati alla risoluzione delle equazioni discretizzate e modelli di turbolenza adeguati, è possibile sostituire a una legge che risolve finemente il flusso con una media delle grandezze che rimane comunque rappresentativa delle sue proprietà dinamiche e termiche. Queste formulazioni delle equazioni di Navier-Stokes riducono quindi notevolmente i tempi e le risorse di calcolo rispetto alle simulazioni su larga scala o dirette, pur mantenendo un corretto livello di accuratezza.

Nel settore industriale, al fine di integrare più facilmente i calcoli aerostutturali nel flusso di lavoro preliminare della progettazione aeronautica, si sceglie attualmente di sacrificare parte dell'accuratezza dei calcoli del carico aerodinamico per ottenere soluzioni più rapide. In particolare, per la caratterizzazione di quest'ultimo, gli strumenti più diffusi sono principalmente i metodi numerici che risolvono un flusso potenziale, come il metodo dei pannelli, il Vortex Lattice Method e quello della linea portante di Prandtl. Questi metodi fanno ipotesi semplificative e trascurano alcune proprietà fisiche del flusso, come la viscosità molecolare e turbolenta o la compressibilità. Il problema principale risiede nella loro relativamente scarsa capacità di modellare i fenomeni non lineari associati al calcolo delle forze aerodinamiche, come la mancata considerazione degli effetti di compressibilità, che devono essere artificialmente corretti applicando un fattore di correzione [10], o il fatto che la natura tridimensionale del flusso non viene presa in considerazione nell'ultimo metodo citato. Allo stesso modo l'ipotesi

di un flusso irrotazionale implica l'assenza di uno strato limite e di una scia, che svolgono un ruolo essenziale nel calcolo della resistenza all'attrito viscoso e della resistenza di forma. Ciò evidenzia la necessità di sviluppare metodi alternativi alle analisi RANS convenzionali, che possano alleggerire e velocizzare l'analisi in alcune aree critiche come i sistemi dinamici (elementi rotanti, deformazione delle pareti), migliorando al contempo l'accuratezza di altre simulazioni senza compromettere l'efficienza complessiva del processo.

Per affrontare queste sfide, diversi istituti accademici e di ricerca hanno intrapreso lo sviluppo di metodi alternativi che promettono di accelerare notevolmente le simulazioni mantenendo un alto livello di affidabilità, anche in configurazioni di problemi non convenzionali.

1.4 Simulazione del fenomeno e software coinvolti

Recentemente sono stati sviluppati sempre più metodi lagrangiani, ovvero una classe di algoritmi che, invece di applicare le leggi di conservazione della massa, della quantità di moto e dell'energia in piccoli volumi discreti (elementi o volumi finiti), descrivono semplicemente l'evoluzione di un gran numero di particelle nello spazio, influenzate dagli elementi considerati nel problema (pareti fisse o mobili, rotori, ecc.). Questi metodi risolvono un problema importante rendendo le analisi CFD molto più rapide, poiché non è più necessario creare e utilizzare una mesh per i calcoli; per dare un'idea dei vantaggi, in molte simulazioni di alta precisione, questo passaggio richiede più della metà dello lavoro e del tempo necessario.

Il VPM è uno dei metodi lagrangiani più affermati negli ultimi tempi, in grado di fornire un buon compromesso tra i metodi a bassa fedeltà e i solutori RANS, considerati metodi ad alta precisione nell'industria aerospaziale. Oltre a queste qualità, in letteratura si possono trovare altre caratteristiche dell'algoritmo [2]:

- in assenza di mesh, la condizione di Courant-Friedrichs-Lewy, cioè la relazione tra discretizzazione spaziale e temporale, viene eliminata; c'è quindi un ampio margine di scelta sullo step temporale da utilizzare.
- Il metodo ha un'accuratezza spaziale del secondo ordine [16] e introduce una dissipazione numerica molto ridotta.
- Le derivate della velocità sono calcolate analiticamente dalla distribuzione di vorticità e non numericamente, quindi l'accuratezza è indipendente dalla discretizzazione spaziale e dal metodo scelto.
- Il VPM è numericamente instabile quando le strutture vorticosi si rompono in prossimità del regime turbolento, perché l'allungamento dei vortici dà luogo a un rapido aumento della vorticità locale.

Questo approccio si dimostra particolarmente efficace nell'analisi delle geometrie che includono rotori ed è ampiamente utilizzato nelle fasi preliminari della progettazione. Durante queste infatti, è fondamentale testare una varietà di configurazioni diverse per valutare la fattibilità del progetto o di un particolare componente.

1.4.1 DUST

Il Politecnico di Milano ha sviluppato un nuovo strumento di calcolo a media fedeltà, chiamato DUST, con l'obiettivo di rappresentare una risorsa veloce e affidabile per la simulazione dell'ae-

rodinamica di configurazioni complesse di velivoli rotanti, come gli aerei elettrici a decollo e atterraggio verticale (eVTOL). DUST integra diversi modelli aerodinamici per corpi solidi, come il metodo dei pannelli, il metodo vortex lattice ed quello basato sulla lifting line theory. Inoltre, è stato implementato un metodo VPM per la modellazione della scia che fornisce una descrizione lagrangiana stabile del flusso a vorticità libera, adatta alle simulazioni numeriche di configurazioni caratterizzate da forti interazioni aerodinamiche.

Si tratta di uno strumento tuttavia in fase di sviluppo, in quanto open source, ma con una comunità di sviluppatori crescente e una serie di test cases e di esempi di validazione a supporto che rendono il software valido.

1.4.2 MBDyn

Si tratta di un software meno recente di DUST, ma sempre sviluppato presso il Politecnico di Milano, che sfrutta metodi numerici per EDO ed EDP per risolvere le equazioni cinematiche di sistemi complessi, composti da più corpi rigidi. In generale, tutti i metodi multibody si basano sulle equazioni di Lagrange, e ogni elemento delle matrici di massa e smorzamento, oltre ai vettori caratterizzanti i carichi e i vincoli applicati, viene caratterizzato a seconda dell'elemento scelto, del vincolo cinetico applicato e della caratterizzazione del carico. I primi algoritmi basati su questo metodo permettevano di operare esclusivamente su corpi perfettamente rigidi, adesso invece è stato raggiunto uno stato dell'arte in cui la deformabilità delle strutture può essere modellizzata attraverso tre differenti modus operandi.

- discretizzando i corpi attraverso elementi la cui deformabilità è caratterizzata con modelli basati sulle proprietà elastiche del materiale, come ad esempio elementi beam a 2 o 3 nodi;
- discretizzando un corpo in più elementi rigidi e concentrando le sue proprietà elastiche nei vincoli posti tra questi;
- caratterizzando la deformazione dei corpi attraverso condensazione modale, vale a dire indicando quali modi vibratorii e gradi di libertà interessano il movimento del corpo a seconda di vincoli e carichi applicati.

La scelta di usare MBDyn deriva dalla compatibilità di quest'ultimo con solutori fluidodinamici come DUST e OpenFoam, la cui caratterizzazione dei carichi aerodinamici è molto più precisa e complessa rispetto a quella dei metodi in-built di MBDyn, come la teoria dell'elemento di pala o la teoria lifting line. In particolare, questi metodi semplici non consentono di caratterizzare perfettamente la variazione dinamica del carico calcolato, oltre a ignorare completamente l'interazione tra scia del rotore e ala del velivolo.

L'unione combinata dei software permette quindi di unire la precisione del metodo VPM alla rapidità di calcolo del software multibody.

Capitolo 2

Cenni teorici

2.1 Il vortex particle method

Questo metodo si basa su una formulazione potenziale delle equazioni del moto di un fluido, che viene implementata rilasciando particelle nella scia dell'ala dove si sviluppano gli effetti viscosi. Lo scopo di queste particelle è quello di rappresentare lo sviluppo vorticoso e il trasporto di questi vortici nella scia. Il vantaggio di questo metodo è che tiene conto dell'instabilità della scia e del suo effetto sulle strutture a valle, che saranno soggette a sollecitazioni transitorie causate dalle fluttuazioni di pressione nei vortici della scia. Un'altra ragione è che ogni particella, come spiegato di seguito, dà origine a una velocità indotta in qualsiasi punto del dominio di simulazione attraverso il teorema di Biot-Savart. Questa formulazione consente quindi di tenere meglio conto dell'effetto della scia nelle sue immediate vicinanze sulle forze calcolate sulle superfici portanti.

Il punto di partenza del metodo è la legge di conservazione della vorticità, espressa in forma lagrangiana.

$$\frac{D}{Dt}\omega = (\omega \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nu\nabla^2\omega \quad (2.1)$$

Ricordando che $\omega = \nabla\mathbf{u}$, questa legge può essere ridotta alla legge di conservazione della quantità di moto. Poiché si tratta di una rielaborazione delle equazioni di Navier-Stokes, è necessario tenere conto delle fluttuazioni del campo dovute alla turbolenza. Nel flusso sono presenti diverse scale di vortici e, sebbene il trasferimento di energia tra di essi sia continuo e reciproco, è impossibile risolverli tutti a livello computazionale. Per continuare, è necessario separare la parte del campo legata a queste piccole scale dal resto, e quindi applicare un "filtro". Questa parte più piccola sarà trattata con diversi modelli, la cui scelta renderà il programma più o meno accurato, mentre il resto sarà risolto attraverso il VPM.

A tal fine, l'equazione 2.1 può essere scritta con il campo filtrato:

$$\frac{d}{dt}\bar{\omega} = (\bar{\omega} \cdot \nabla)\bar{\mathbf{u}} + \nu\nabla^2\bar{\omega} - E \quad (2.2)$$

dove il simbolo $\bar{\omega}$ indica la quantità filtrata, quindi relativa alle scale medie e grandi, mentre E è il contributo dovuto all'avvezione e all'allungamento della vorticità per le scale più piccole, mascherato dal filtro. Si tratta della stessa operazione utilizzata nel passaggio dalla forma

canonica delle equazioni di Navier-Stokes alle equazioni LES.

A questo punto, si fa un'ulteriore distinzione tra le variazioni di vorticità dovute a fenomeni viscosi e le variazioni inviscide. Le prime sono trattate con modelli diversi, e anche in questo caso la scelta è legata alla configurazione del problema e al grado di precisione desiderato, mentre le seconde saranno oggetto del metodo lagrangiano.

$$\begin{cases} \left(\frac{d}{dt}\bar{\omega}\right)_{inv.} = (\bar{\omega} \cdot \nabla)\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{E} \\ \left(\frac{d}{dt}\bar{\omega}\right)_{visc.} = \nu \nabla^2 \bar{\omega} \end{cases} \quad (2.3)$$

Successivamente, il campo $\bar{\omega}$ inviscido sarà discretizzato introducendo una distribuzione variabile nel tempo di particelle di vorticità, ciascuna con una posizione \mathbf{x}_p e un valore di vorticità Γ_p associato.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\omega}(\mathbf{x}, t) \approx \sum_p \Gamma_p(t) \quad (2.4)$$

Passando all'approssimazione per la singola particella si ottiene:

$$\bar{\omega}(\mathbf{x}, t) = \sum_p \Gamma_p \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p(t)) \quad (2.5)$$

Per regolarizzare il campo ed eliminare le singularità introdotte dal delta di Dirac δ , introduciamo la funzione radiale di base ζ_{σ_p} , che introduce una distribuzione di Γ_p e allo stesso tempo un'approssimazione di ω_σ nel volume tra due particelle.

$$\omega_\sigma(\mathbf{x}, t) = \sum_p \Gamma_p \zeta_{\sigma_p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p(t)) \quad (2.6)$$

La funzione ζ_{σ_p} può essere scelta tra una varietà di funzioni base radiali, ma una delle più comuni in letteratura è la seguente :

$$\zeta_{\sigma_p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p(t)) = \frac{1}{\sigma_p^3(t)} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_p(t)\|}{\sigma_p(t)}\right) \quad (2.7)$$

dove $\sigma_p(t)$ è il raggio di attenuazione della particella p. Nella figura seguente, possiamo vedere l'effetto della funzione ζ_{σ_p} su una particella.

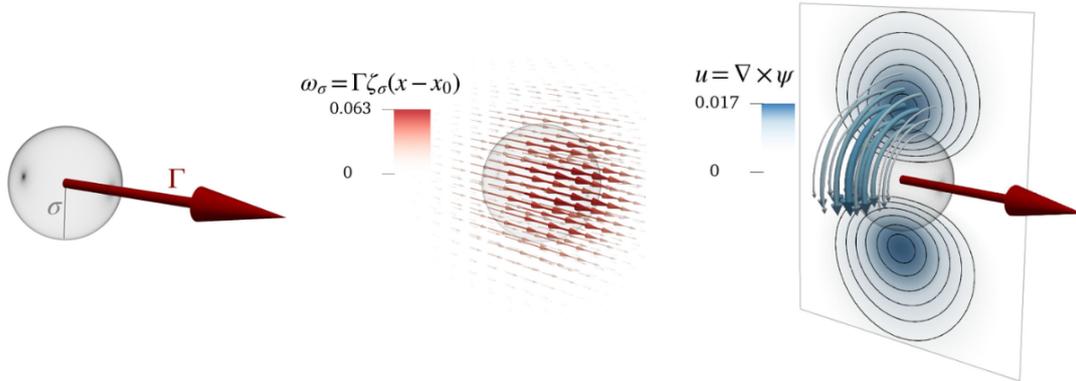


Figura 2.1: Diagramma di una particella con vorticità Γ (sinistra), applicazione della legge di Biot Savart (destra) [2]

A questo punto, utilizzando la legge di Biot-Savart e impiegando 2.6 in 2.3, si ottiene la base per il calcolo del campo di velocità. Il valore di Γ_p è determinato dalla configurazione del problema, dagli elementi rotanti presenti e dalle superfici, nonché dalla modellazione di queste ultime come sorgenti di vorticità. Le equazioni vengono poi risolte utilizzando schemi diversi a seconda del solutore utilizzato.

L'equazione che è stata usata estesamente nella letteratura, e che è il punto di partenza del metodo in sé, è chiamata *Classic VPM*:

$$\frac{d}{dt} \Gamma_p = (\Gamma_p \cdot \nabla) \mathbf{u}(\mathbf{x}_p) \quad (2.8)$$

L'ipotesi che sta alla base del VPM classico prende il nome di "vorticità localizzata" (*localized-vorticity assumption*), che consiste nel trascurare i termini di influenza delle particelle vicine, superata una certa distanza. Questo modello quindi vede il dominio del fluido come una distribuzione di "globuli", con superfici sferoidali, e a ognuno di questi una vorticità associata.

2.1.1 Calcolo dei carichi aerodinamici

Per caratterizzare il flusso adiacente alle superfici portanti, la velocità viene calcolata attraverso la teoria dei flussi potenziali. Per la modellizzazione delle superfici portanti, DUST consente di utilizzare tre elementi differenti:

- **pannelli** (*Surface Panels, SP*), utilizzati per modellare corpi solidi dotati di spessore; le superfici sono discretizzate attraverso questi elementi ed a ognuno di questi viene associata una doppietta di intensità μ_i . L'intensità σ della sorgente della doppietta è calcolata imponendo al bordo del dominio la condizione di Neumann per la non penetrazione del pannello:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u}_\phi = \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \phi = \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{u}_b - \mathbf{U}_\infty - \mathbf{u}_\psi) =: \sigma(\mathbf{u}_b; \mathbf{U}_\infty; \mathbf{u}_\psi) \quad (2.9)$$

- **Vortex sheets** (*vortex lattice elements, VL*), ovvero elementi bidimensionali, senza spessore, utili per modellizzare superfici piane e sottili, oppure la superficie media dei profili alari;

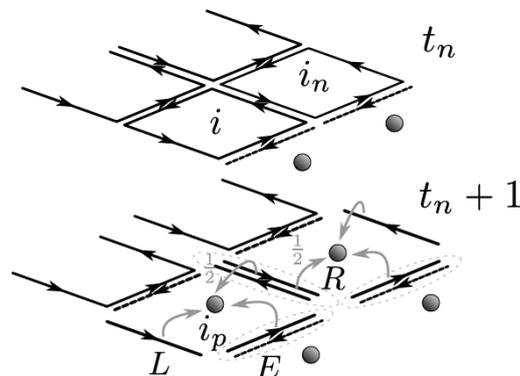


Figura 2.2: Schema esplicativo del calcolo della vorticità di una VP [14]: Γ_L sul lato libero è considerata esclusivamente nel calcolo di Γ_i , Γ_R è ripartita in due parti uguali tra Γ_i e Γ_{i_n}

si tratta di fogli composti di "vortex rings" di intensità Γ_i , equivalenti a una distribuzione uniforme di doppiette con la stessa intensità $\mu_i = \Gamma_i$.

- **Linee portanti** (*Lifting Line, LL*), elementi unidimensionali utilizzati per modellizzare elementi portanti snelli e allungati, con elevato aspect ratio, per esempio le pale di un rotore; si tratta di una distribuzione di vorticità $\Gamma(y)$ definita lungo l'ala, la quale attraverso il teorema di Kutta - Joukowski permette di calcolare la distribuzione di velocità attorno al profilo. Tuttavia, per ottimizzare le simulazioni e ridurre il costo computazionale è possibile fornire al codice delle lookup tables (files .c81) nei quali sono tabulate le relazioni $c_L, c_D, c_m = f(\alpha, Re, M)$ relative al profilo alare impiegato.

Per la modellizzazione della scia invece, come già anticipato, DUST impiega una distribuzione di particelle vorticosi, le quali seguono l'equazione del trasporto della vorticità e permettono di calcolare il campo di velocità nella scia e attorno alle superfici portanti che interagiscono con esse. È importante precisare che le particelle vengono "generate" dalle superfici portanti, non sono rilasciate all'interno del volume della simulazione per studiare l'interazione con queste ultime. In particolare, le VP sono generate dagli elementi VL della scia. Dopo un numero prescritto di passi temporali n_w , ogni VL viene convertito in una particella, generando, dopo il transitorio iniziale, una scia con n_w file di pannelli attaccati al bordo di fuga, seguite da una scia di particelle. Quando avviene la conversione da VL a VP, l'intensità Γ_p è data dall'integrazione del contributo di vorticità dai lati dell'elemento VL. Tuttavia, poiché ogni pannello del reticolo di vortici ha un'intensità costante μ_i e rappresenta un percorso chiuso, la semplice integrazione dei suoi lati porterebbe a un valore nullo. Per questo motivo l'intensità effettiva di ogni lato condiviso da pannelli adiacenti è ripartito a metà tra i due pannelli, come è possibile osservare in fig. 2.2. Mentre gli elementi VL vicini in direzione normale al flusso vengono convertiti contemporaneamente e il loro contributo è condiviso con le rispettive particelle, il pannello adiacente nella direzione del flusso è stato già convertito al passo temporale precedente. Per questo motivo ogni particella convertita si forma con il contributo dei due lati laterali del pannello, e con un lato dell'elemento VL, ormai convertito in particella, dell'iterazione precedente.

Una volta ottenuta la distribuzione di velocità attorno alle superfici portanti, i carichi vengono calcolati in maniera differente a seconda dell'elemento utilizzato. Una superficie parametriz-

zata attraverso elementi SP prevede che la distribuzione di pressione sia calcolata attraverso l'equazione di Bernoulli.

$$p + \frac{1}{2}\rho\mathbf{u}^2 = p_\infty + \frac{1}{2}\rho\mathbf{u}_\infty^2 \quad (2.10)$$

La distribuzione di pressione p viene poi utilizzata per calcolare il coefficiente di pressione c_p e integrarlo sul profilo.

Il calcolo dei carichi sugli elementi VL si basa sulla formulazione non stazionaria del problema di Kutta per flussi incomprimibili:

$$\mathbf{F}_i = \rho\mathbf{u}_i \times \mathbf{l}_i(\mu_i - \mu_{i-1}) - \rho A_i \frac{d\mu_i}{dt} \mathbf{n}_i \quad (2.11)$$

dove \mathbf{l}_i è il vettore, perpendicolare al flusso, del lato condiviso tra i pannelli i e $i-1$ (lungo la corda), \mathbf{u}_i è il vettore velocità calcolato all'interfaccia tra i pannelli e A_i è l'area del pannello. Se $i = 1$, quindi il pannello si trova al bordo di attacco, $\mu_{i-1} = 0$.

Infine, la valutazione dei carichi aerodinamici prodotti dagli elementi LL è il risultato diretto dell'integrazione sulla superficie dei coefficienti aerodinamici c_L, c_D, c_m .

2.2 Fenomeni aeroelastici

L'aeroelasticità si occupa del comportamento di un corpo elastico in un flusso d'aria, in cui esiste una significativa interazione reciproca, tra la deformazione e il flusso d'aria.

2.2.1 Il fluttering

È uno dei fenomeni più critici da tenere in considerazione durante la fase di progettazione. Quando un aereo è in volo, si deforma staticamente sotto l'effetto del carico. Queste deformazioni modificano la distribuzione del carico aerodinamico, che a sua volta modifica le deformazioni. Solo quando la pressione dinamica incidente diventa sufficientemente grande, il processo di feedback interagente può portare a un forte accoppiamento tra i modi di flessione e torsione e a un'oscillazione autoeccitata, spesso distruttiva, in cui l'energia del flusso viene trasmessa all'ala [12]. Questo fenomeno si verifica solitamente nelle strutture flessibili, come le ali o le superfici di controllo.

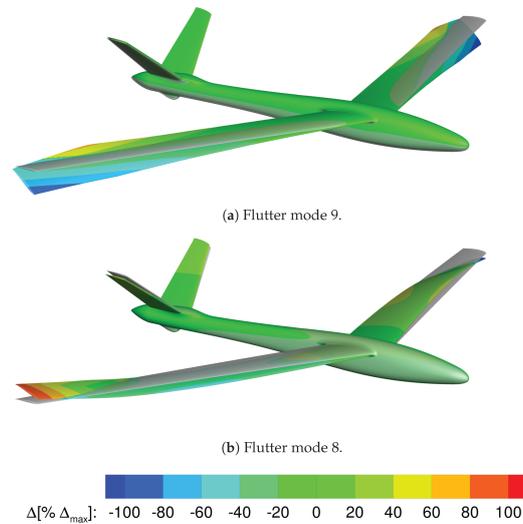


Figura 2.3: Modi di torsione e flessione amplificati dal flutter su un'ala di aliante [11]

Analizzando più nel dettaglio il fenomeno:

1. Le forze aerodinamiche causano la deformazione della struttura, in particolare dei componenti flessibili come le ali e le superfici di controllo.
2. Le deformazioni indotte dalle forze aerodinamiche possono modificare la forma e la rigidità della struttura. Questi cambiamenti influenzano il flusso d'aria intorno alla struttura, che a sua volta influenza le forze aerodinamiche che agiscono su di essa.
3. Se l'interazione tra le forze aerodinamiche e la dinamica strutturale porta a un ciclo di retroazione positivo, possono verificarsi oscillazioni instabili. In questo caso, le deformazioni strutturali causano cambiamenti nelle forze aerodinamiche, che a loro volta amplificano le deformazioni strutturali, portando a oscillazioni ancora maggiori.
4. Se non viene affrontato, il flutter può portare la struttura a un punto di failure critico. Le oscillazioni rapide possono aumentare rapidamente in ampiezza, portando alla fatica strutturale e potenzialmente al cedimento strutturale.

Il fenomeno può essere modellato da un sistema massa-molla, che coinvolge due gradi di libertà: la deformazione verticale dovuta alla flessione e la rotazione dell'ala attorno al suo centro elastico. Si impone un equilibrio, sia tra le forze in gioco sia tra i momenti, e si studia la stabilità del sistema.

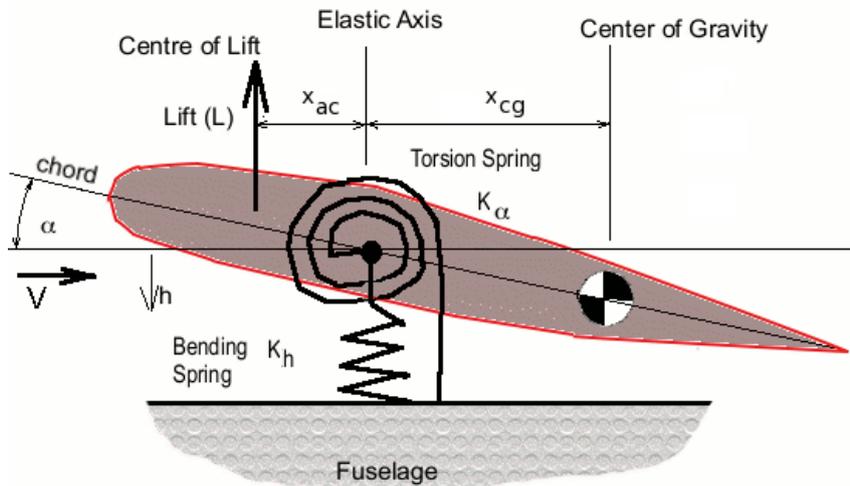


Figura 2.4: Schema del modello semplificato di ala soggetta a fluttering (source : <https://www.aerodynamics4students.com/aeroelasticity/>)

$$\begin{cases} -L - K_h h = m \frac{d^2 h}{dt^2} + S_\alpha \frac{d^2 \alpha}{dt^2} \\ L x_{ac} - K_\alpha \alpha = S_\alpha \frac{d^2 h}{dt^2} + I_\alpha \frac{d^2 \alpha}{dt^2} \end{cases} \quad (2.12)$$

Ponendo il sistema in forma matriciale e linearizzandolo, è possibile studiarne le frequenze naturali e analizzarne gli autovalori; per determinate velocità di volo e angoli di attacco, questi valori cambieranno segno e si passerà da un sistema stabile a uno instabile, con oscillazioni sempre più ampie. Per rendere questa condizione improbabile per tutte le velocità di volo previste, è necessario sulla struttura, sulla geometria dell'ala e sui materiali.

Attualmente, il processo più utilizzato per il dimensionamento di una struttura alare sottoposta a deformazioni dinamiche è la *mode tracking*: l'analisi agli elementi finiti è utilizzata per verificare come cambiano le frequenze naturali della struttura all'aumentare della velocità dell'aria o al variare di altri parametri. Come mostrato nella figura 2.3, i principali modi di interesse sono quelli di flessione e torsione dell'ala. L'obiettivo è scoprire per quali configurazioni del problema questi modi non sono più sufficientemente smorzati, e le parti reali e immaginarie degli autovalori legati ai modi sono analizzate in un grafico V-f-g (velocità del flusso - frequenza modale e tasso di smorzamento). Questa analisi modale è relativamente economica in termini di costi di calcolo, poiché trascura completamente l'aerodinamica dell'ala e l'interazione fluido-struttura. Come miglioramento è possibile introdurre nel sistema di matrici ottenuto dal MEF il contributo dei carichi aerodinamici per affinare l'analisi degli autovalori. Tuttavia, l'influenza dell'accuratezza dei metodi l'influenza dell'accuratezza dei metodi aerodinamici sulla modellazione del carico è significativa e il metodo RANS, comunemente utilizzata nell'industria per la sua buona rappresentazione delle forze aerodinamiche, è costosa e non facile da integrare nel metodo a causa dei tempi di calcolo proibitivi.

2.2.2 Il whirl flutter

L'instabilità di flutter giroscopico, o whirl flutter, è un tipo di instabilità aeroelastica specifica delle geometrie rotanti e che può comparire sugli aerei con motore turboprop. Tiene conto degli effetti dinamici e aerodinamici delle parti rotanti, come il rotore di un motore a turbina a gas o un'elica. La massa rotante aumenta il numero di gradi di libertà e genera forze e momenti aggiuntivi. Le eliche rotanti causano inoltre un'interferenza aerodinamica con la struttura della gondola o di un'ala. L'instabilità del whirl flutter è dovuta alle forze e ai momenti aerodinamici indotti dal movimento dell'elica e che agiscono sui suoi due piani principali [17]. Può causare vibrazioni instabili, che possono portare al cedimento di un impianto motore o di un'intera ala. Uno dei tentativi di modellizzazione del fenomeno più ampiamente studiati in letteratura è stato sviluppato da Reed nel 1967 [9], e considera il rotore e l'albero come corpi perfettamente rigidi. Si tratta di una schematizzazione molto semplificata del fenomeno (nota come "toy model"), ma che permette di comprendere meglio il fenomeno riducendo all'essenziale i parametri geometrici, strutturali e dinamici che giocano un ruolo nella comparsa dell'instabilità. Questa semplificazione consente inoltre di modellare il fenomeno con due soli gradi di libertà, velocizzando notevolmente i calcoli. Il supporto flessibile del motore è sostituito da un sistema di due molle rotanti che inducono coppie lungo gli assi y e z (vedi figura 2.6) tramite rigidità K_{Θ} e K_{Ψ} . Se consideriamo la rotazione dell'elica con velocità angolare Ω , i gradi di libertà coincidono con la rotazione sui tre assi, e trascurando banalmente l'asse principale del rotore, è quindi possibile osservare il beccheggio e l'imbardata.

Combinando questi due movimenti con quello dell'elica a velocità angolare Ω , il movimento di rotazione si aggiunge a quello di precessione. L'effetto giroscopico fa sì che i due moti indipendenti si fondano in un moto vorticoso ed ellittico, come illustrato nella figura seguente ??, che, a seconda del senso di rotazione rispetto a quello del rotore, è chiamato *forward mode* o *backward mode*. È essenziale sottolineare che la modellazione strutturale e, in misura minore, quella aerodinamica svolgono un ruolo fondamentale nel determinare quale dei due modi diventa instabile per primo.

I carichi aerodinamici più importanti sono il momento di imbardata dovuto al beccheggio $M_Z(\Theta)$ e, analogamente, il momento di beccheggio dovuto all'imbardata $M_Y(\Psi)$. Questi momenti devono essere bilanciati da termini di smorzamento aerodinamico o strutturale. Lo stato di stabilità neutrale senza smorzamento del sistema rappresenta lo stato di fluttering. Il flusso d'aria corrispondente ($V_{\infty} = V_{FL}$) è detto critico. Finché la velocità dell'aria è inferiore al valore critico ($V_{\infty} < V_{FL}$), il sistema è stabile e il movimento giroscopico è smorzato. Quando la velocità dell'aria supera il valore critico ($V_{\infty} > V_{FL}$), il sistema diventa instabile e il movimento giroscopico diverge.

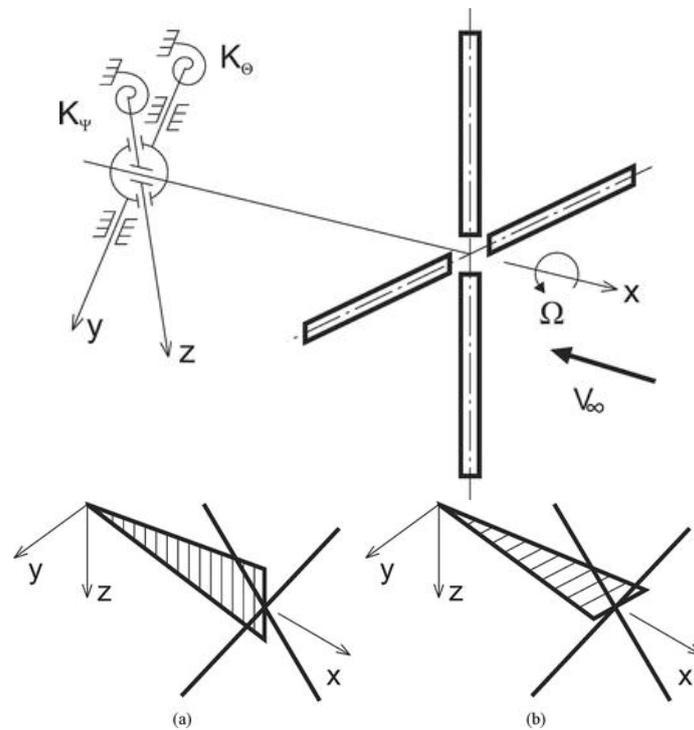


Figura 2.5: Schema di un'elica suscettibile a whirl flutter e dei suoi movimenti di beccheggio (a) e imbardata (b) [17]

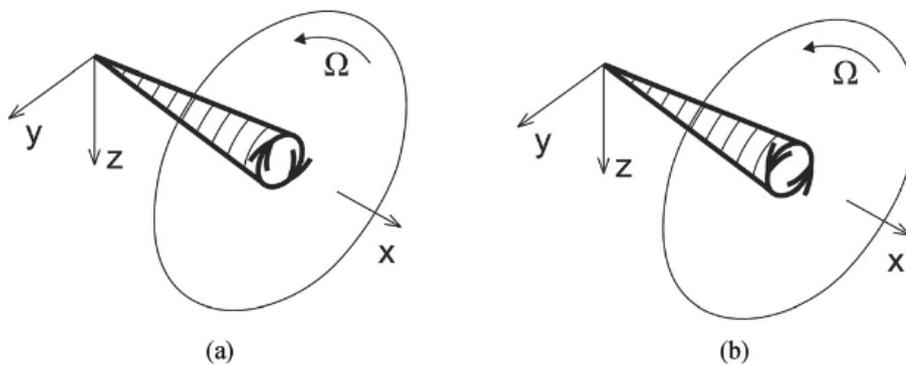


Figura 2.6: Schema dei modi caratterizzanti il whirl flutter: backward mode (a) e forward mode (b) [17]

L'orientamento del movimento dell'asse dell'elica è in senso opposto rispetto alla rotazione dell'elica per il modo a bassa frequenza e coincidente invece per la modalità a frequenza più alta. La traiettoria di questo movimento ellittico dipende da entrambe le frequenze angolari ω_Θ

e ω_Ψ . Per definizione del sistema di riferimento i moti di imbardata e beccheggio hanno uno spostamento di fase di 90° .

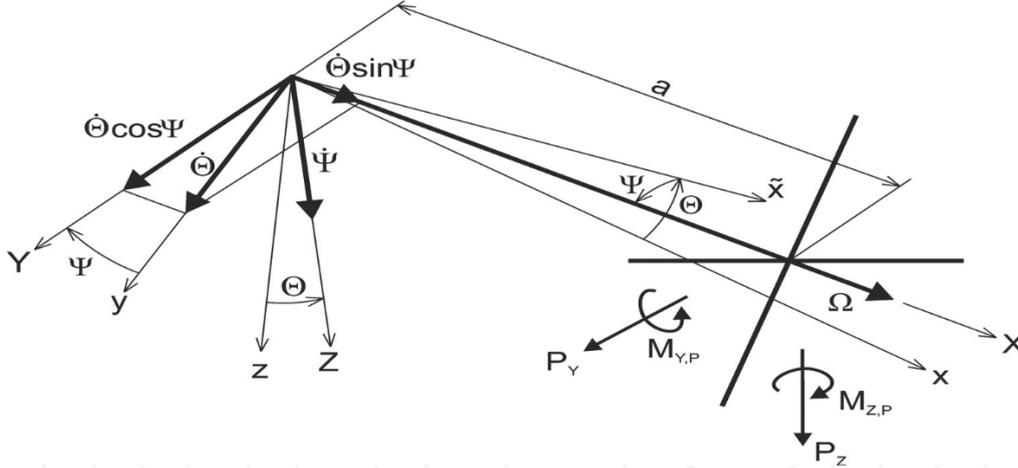


Figura 2.7: Schema cinematico del modello [17]

La stabilità del modello può essere studiata attraverso le equazioni di Lagrange, ottenendo un sistema in due variabili del quale si andranno a studiare gli autovalori. L'energia cinetica del sistema è definita da:

$$E_K = \frac{1}{2} J_X \omega_X^2 + \frac{1}{2} (J_Y \omega_Y^2 + J_Z \omega_Z^2) \quad (2.13)$$

Osservando lo schema in figura 2.7, si possono definire le velocità:

$$\omega_X = \Omega + \dot{\Theta} \sin \Psi \approx \Omega + \dot{\Theta} \Psi \quad (2.14)$$

$$\omega_Y = \dot{\Theta} \cos \Psi \approx \dot{\Theta} \quad (2.15)$$

$$\omega_Z = \dot{\Psi} \quad (2.16)$$

Considerando che $\dot{\Theta}^2 \Psi^2 \ll \Omega^2$, si può riscrivere l'espressione dell'energia cinetica:

$$E_K = \frac{1}{2} J_X \Omega^2 + J_X \Omega \Psi \dot{\Theta} + \frac{1}{2} (J_Y \dot{\Theta}^2 + J_Z \dot{\Psi}^2) \quad (2.17)$$

L'energia potenziale invece è data dalla formula:

$$E_P = \frac{1}{2} K_\Theta \dot{\Theta}^2 + \frac{1}{2} K_\Psi \Psi^2 \quad (2.18)$$

Infine, i termini di dissipazione sono dati dallo smorzamento strutturale, con una forza proporzionale all'ampiezza dello spostamento.

$$D = \frac{1}{2} \frac{K_\Theta \gamma_\Theta}{\omega} \dot{\Theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{K_\Psi \gamma_\Psi}{\omega} \dot{\Psi}^2 \quad (2.19)$$

Ricordando che il primo termine in 2.17 non dipende dalle variabili Θ e Ψ , è possibile scrivere il sistema di equazioni differenziali relativo al problema:

$$\begin{cases} J_Y \ddot{\Theta} + C_\Theta \dot{\Theta} + J_X \Omega \dot{\Psi} + K_\Theta \Theta = Q_\Theta \\ J_Z \ddot{\Psi} + C_\Psi \dot{\Psi} - J_X \Omega \dot{\Theta} + K_\Psi \Psi = Q_\Psi \end{cases} \quad (2.20)$$

I carichi aerodinamici Q_Θ e Q_Ψ possono essere calcolati diversamente a seconda del modello utilizzato: in (**Reed**) l'aerodinamica è calcolata attraverso un modello quasi stazionario, ovvero con piccole perturbazioni del campo di velocità, mentre in (**Mair**) i carichi sono calcolati attraverso la teoria dell'elemento di pala, viene introdotta quindi non-linearità nel modello, aggiungendo quindi un grado di complessità e precisione maggiore.

Considerando il moto armonico, riscrivendo quindi le variabili $[\Theta, \Psi] = [\bar{\Theta}, \bar{\Psi}]e^{j\omega t}$, si ottiene il sistema

$$\left(-\omega^2 [\mathbf{M}] + j\omega \left([\mathbf{D}] + [\mathbf{G}] + [\mathbf{D}^A] \right) + \left([\mathbf{K}] + [\mathbf{K}^A] \right) \right) \begin{bmatrix} \bar{\Theta} \\ \bar{\Psi} \end{bmatrix} = \{0\} \quad (2.21)$$

dove \mathbf{M} è la matrice di massa:

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} J_Y & 0 \\ 0 & J_Z \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

\mathbf{D} contiene i contributi di smorzamento meccanico:

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} \frac{K_\Theta \gamma_\Theta}{\omega} & 0 \\ 0 & \frac{K_\Psi \gamma_\Psi}{\omega} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

\mathbf{G} è la matrice relativa agli effetti giroscopici:

$$[\mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 0 & J_X \Omega \\ -J_X \Omega & 0 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

\mathbf{K} è la matrice di rigidità strutturale:

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} K_\Theta & 0 \\ 0 & K_\Psi \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Infine \mathbf{K}^A e \mathbf{D}^A sono i contributi di rigidità e smorzamento dovuti all'aerodinamica delle pale. Il sistema può essere quindi risolto studiando gli autovalori, i quali possono fornire la frequenza del modo e il rispettivo smorzamento. Una conclusione condivisa in letteratura è osservabile nei grafici 2.8 e 2.9

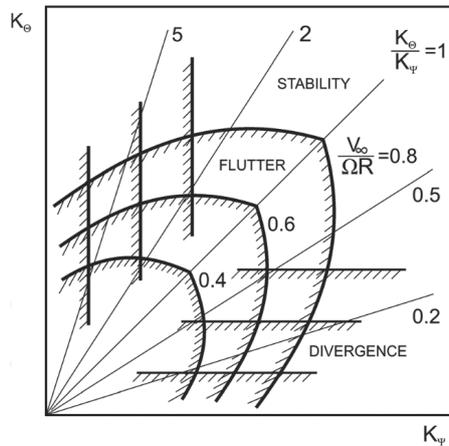


Figura 2.8: Stabilità del sistema in funzione di A e della rigidità strutturale [17]

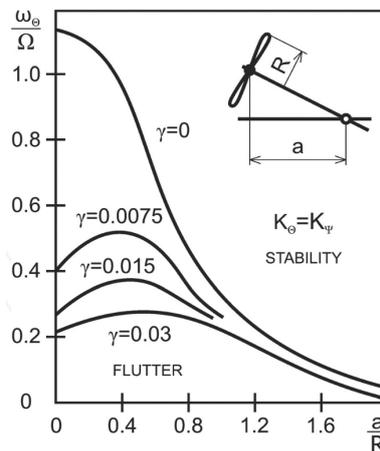


Figura 2.9: Stabilità del sistema in funzione della geometria e dello smorzamento strutturale [17]

I parametri più influenti, sono indubbiamente quelli strutturali e quelli legati alla geometria del rotore. In prima analisi, maggiore è l'advance ratio $A = \frac{V_\infty}{\Omega R}$, tanto maggiore sarà l'effetto destabilizzante del flusso sul rotore. Il caso peggiore è quello a simmetria centrale, quindi con un rapporto $\frac{K_\theta}{K_\psi}$ unitario, in quanto i modi si manifestano con forma circolare, quindi con delle oscillazioni massimali in entrambe le direzioni. Infine, per un'elevata asimmetria strutturale l'instabilità si manifesta come divergenza, il moto di precessione non è osservabile, si ha una diretta deviazione dell'asse di rotazione, senza oscillazioni, e quest'ultimo si allontana da uno dei due piani principali. Questa soluzione si può ottenere quando in 2.21 $\omega = 0$.

Altro parametro molto importante è lo smorzamento meccanico, che aumentando presenta un effetto stabilizzante, così come aumentare la lunghezza dell'asse.

2.2.3 Interazione tra rotore e ala

Le interazioni con un'elica possono indurre cambiamenti nel comportamento dinamico di un'ala flessibile. Per ottenere una migliore previsione delle instabilità del rotore e dell'ala, Bennet e Bland [3] hanno modellato insieme l'ala flessibile e l'elica, per introdurre l'accoppiamento dinamico dei due sistemi.

L'inclusione di un'elica rotante nel sistema aggiunge termini di massa e di inerzia extra nel modello strutturale a causa della massa del motore e degli effetti giroscopici. L'influenza aerodinamica dell'elica sull'ala viene considerata aggiungendo i carichi aerodinamici come forze e momenti nodali che agiscono sui gradi di libertà nodali della superficie portante. Inoltre, il movimento del punto di pivot dell'elica dovuto alla flessibilità dell'ala aggiunge ulteriori termini inerziali e giroscopici nel modello semplificato del rotore. Inoltre, il movimento del punto di pivot modifica gli angoli effettivi di beccheggio e imbardata incontrati dalle pale, modificando così la sua aerodinamica.

La schematizzazione del modello è presentata in figura 2.11, mentre la cinematica del modello è illustrata in 2.10.

L'analisi del modello segue la stessa procedura, con la caratterizzazione del sistema attraverso le equazioni di Lagrange e la scelta dei gradi di libertà da analizzare. Attraverso la messa in forma matriciale del sistema di equazioni, si ottengono i modi propri del sistema e i rispettivi valori di frequenza modale e smorzamento.

Come già menzionato nella sezione 2.2.1, è necessaria una discretizzazione dell'ala in nodi e elementi beam. In questo caso i gradi di libertà considerati sono lo spostamento verticale e la rotazione rispetto all'asse y associati ad ogni nodo dell'ala, oltre agli angoli di rollio e imbardata del rotore. Questi ultimi due vanno modellizzati in funzione del movimento del nodo dell'ala coincidente con il punto di pivot del rotore, ed è necessario che il rotore sia posizionato quindi in coincidenza del nodo scelto. Anche in questo caso, la scelta del modello utilizzato per il calcolo dei carichi aerodinamici influisce sui risultati e sulla velocità di volo critica.

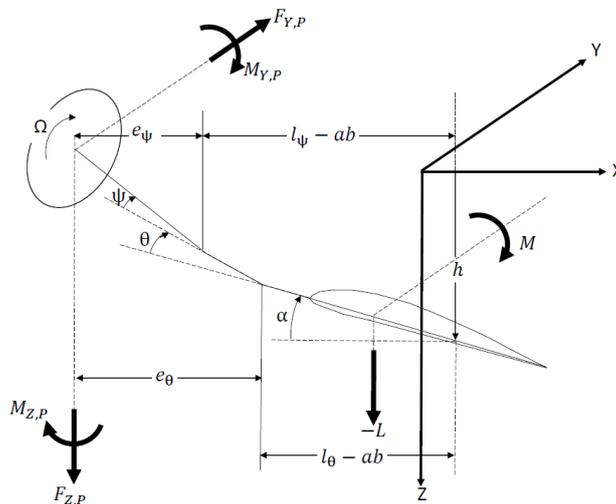


Figura 2.10: Schema cinemático del modello ala - rotore [15]

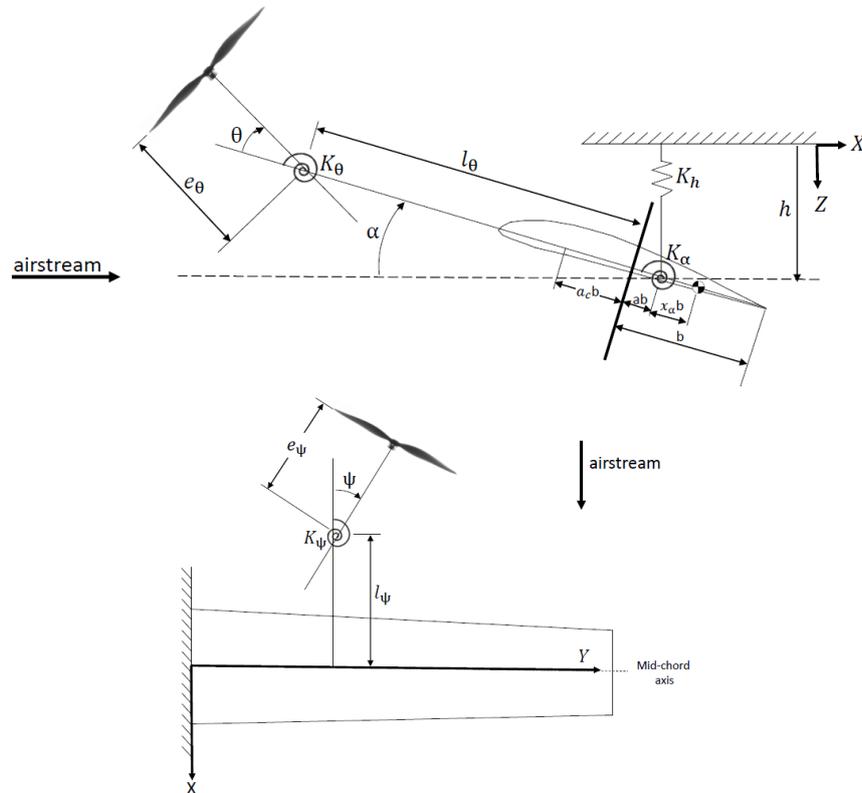


Figura 2.11: Vista in sezione e in pianta del modello ala - rotore [15]

Considerando il modello schematizzato, si ottengono due sistemi matriciali.

$$(A_S - A_a) \ddot{q}_P + (B_S - B_a) \ddot{q}_{WP} + (C_S - C_a) \dot{q}_P + (D_S - D_a) \dot{q}_{WP} + (E_S - E_a) q_P + (-F_a) q_{WP} = 0 \quad (2.26)$$

$$M_{S,g} \ddot{q}_W + C_{S,g} \dot{q}_W + K_{S,g} q_W + F_S \ddot{q}_P + G_S \dot{q}_{WP} + H_S \dot{q}_P = Q_W + Q_P \quad (2.27)$$

I gradi di libertà dei due sistemi sono raggruppati in tre vettori: q_P , q_{WP} e q_W , rispettivamente i gradi di libertà associati al rotore, al nodo dell'ala collegato al rotore e ai nodi dell'ala.

Nel sistema è possibile riconoscere le matrici di massa A , B ed M , quelle di smorzamento C e D , le matrici di rigidità K ed E , i contributi giroscopici delle matrici G ed H , ed infine le forze trasmesse tra ala e rotore attraverso F_a e F_S . Gli indici S ed a indicano infine la natura dei contributi presenti nelle matrici, che può essere strutturale o aerodinamica.

2.3 Post-processing e elaborazione del segnale

Una delle principali peculiarità caratterizzanti i software multibody è il calcolo della soluzione, che non avviene secondo i metodi elencati in precedenza, come l'identificazione di autovettori e autovalori del problema posto in forma matriciale, ma passa attraverso la risoluzione nel tempo

di equazioni differenziali di secondo grado. Di conseguenza, anche la soluzione è offerta come una serie di funzioni variabili in t , che descrivono l'andamento dei gradi di libertà associati ai nodi nel corso della simulazione. In particolare, nel caso di MBDyn, nel file di output prodotto, sono presentati i valori di dodici grandezze associate ad ogni nodo.

$$\mathbf{r}_i = \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ \theta_i \\ \phi_i \\ \omega_i \end{Bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{r}}_i = \begin{Bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{z}_i \\ \dot{\theta}_i \\ \dot{\phi}_i \\ \dot{\omega}_i \end{Bmatrix}$$

Queste variabili sono la posizione del nodo nel sistema di riferimento globale, il suo orientamento rispetto agli assi x , y e z , e le derivate nel tempo di queste coordinate.

Queste informazioni permettono di ricavare facilmente la forma dei modi a cui si è interessati, tuttavia, senza alcuna operazione di postprocessing, non consentono di identificare frequenze proprie e fattori di smorzamento, valori utili per studiare la stabilità del sistema.

I metodi utilizzati sono tre, e la scelta è stata influenzata in base all'esito della simulazione.

2.3.1 Il metodo di Prony

Si tratta di un algoritmo pensato per trovare una soluzione ai cosiddetti "problemi di recupero", ovvero quelli in cui si cerca di ricostruire i valori di una funzione f a partire da misurazioni o campioni noti in punti specifici. Questo tipo di problema non ha sempre una soluzione unica. Ad esempio, conoscendo i valori di una funzione in soli due punti, esistono infinite curve possibili che passano attraverso questi punti.

Per affrontare questa situazione, sono necessarie delle ipotesi sulla funzione: un approccio comune è assumere che possa essere espressa come una combinazione lineare di funzioni base note, riducendo così il compito al calcolo dei coefficienti.

$$f = \sum_{j=1}^n a_j f_j, \quad a_j \in \mathbb{R} \quad (2.28)$$

Questo metodo, menzionato anche da Newton, trasforma il problema in un sistema di equazioni lineari, la cui risolubilità dipende dalle proprietà di una matrice associata, noto come problema di recupero lineare, un argomento classico dell'analisi numerica.

$$\mathbf{MA} = \mathbf{F} \quad (2.29)$$

Dove

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} f_1(x_1) & \cdots & f_n(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_m) & \cdots & f_n(x_m) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

Gaspard de Prony nel 1795 sposta l'attenzione verso un approccio diverso per i problemi di recupero. Invece di usare combinazioni lineari di funzioni base note, vengono considerate funzioni della forma

$$\mathbf{z}_i(t) = e^{kt} = e^{(-\alpha_i + j\omega_i)t} \quad (2.30)$$

per approssimare la funzione attraverso la sommatoria

$$f(t) = y(k, t) \approx \sum_{i=1}^M R_i z_i^t \quad (2.31)$$

Prony modifica il problema, passando da una ricerca delle funzioni più adatte per ricostruire f , a una problema di ottimizzazione sui valori $M, R_i, \alpha_i, \omega_i$, in modo da trovare la combinazione di valori migliore per ottenere $\min(\|f(t) - y(k, t)\|_2)$, si tratta a tutti gli effetti di un problema di minimi quadrati.

Il metodo di Prony è stato per molto tempo trascurato nei problemi di analisi dei segnali oscillatori, in quanto molto sensibile al rumore sui dati raccolti, tuttavia negli ultimi decenni è tornato in auge grazie all'elaborazione di nuovi algoritmi derivati dall'originale. Esempi noti sono gli algoritmi Esprit e Matrix Pencil, che differiscono per il numero di passaggi e il tipo di fattorizzazione scelta per la matrice M (SVD nel primo caso, QR per il secondo) [8]. Questi metodi sono utili e apprezzati nei problemi di approssimazione di segnali reali, dove a causa del rumore presente è introdotta sparsità nel problema.

2.3.2 Il metodo HQG (Half-Quadratic Gain Method)

Questo metodo utilizza direttamente i valori al quadrato della funzione di risposta in frequenza, fornendo una stima accurata del rapporto di smorzamento da una stima del fattore di qualità. Identifica lo smorzamento analizzando le frequenze in cui l'ampiezza della risposta in frequenza al quadrato si riduce alla metà del suo valore massimo. Si applica direttamente ai dati della densità spettrale di potenza (PSD) o alle funzioni di risposta in frequenza, rendendolo particolarmente accurato per i sistemi SDOF (Single Degree of Freedom) [4].

Concretamente, si analizza graficamente un'analisi PSD ottenuta attraverso il metodo di Welch o la trasformata di Fourier, e si considera la frequenza di picco del segnale, f_p , che è uguale alla frequenza di risposta di ampiezza massima per un SDOF e non si verifica necessariamente alla frequenza con la massima potenza. Successivamente, si cercano nel grafico i valori adiacenti f_u e f_l , ovvero le frequenze associate alla metà dell'ampiezza di picco del quadrato della funzione di risposta in frequenza.

Concretamente, nel grafico si intersecano i valori tracciati dalla PSD con una retta orizzontale di ascissa $P(f_p) - 3$ dB. I due valori trovati attraverso l'intersezione tra retta e picco sono quindi individuati secondo la disuguaglianza $f_l < f_p < f_u$. La frequenza del modo osservato è banalmente f_p , mentre il fattore di smorzamento è dato dalla formula:

$$\zeta = \sqrt{\frac{1}{2} - \left(\sqrt{4 + 4 \left(\frac{f_u - f_l}{f_p} \right)^2} - \left(\frac{f_u - f_l}{f_p} \right)^4 \right)^{-1}} \quad (2.32)$$

È inoltre importante notare che si assume che il picco corrispondente al valore di picco della PSD sia quello che corrisponde alla risposta smorzata del sistema. Infatti, poiché i segnali

elaborati sono la risposta vibratoria dei nodi strutturali, la potenza spettrale delle serie temporali è legata alle vibrazioni di maggiore ampiezza, che nella maggior parte dei casi corrispondono alla risposta smorzata dell'asse del rotore.

2.3.3 Il metodo dell'involuppo

Tra i vari modi per modulare un segnale e estrarne informazioni, un operatore estremamente utile è la trasformata di Hilbert, definita come:

$$\hat{x}(t) = \mathcal{H}\{x(t)\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (2.33)$$

Si tratta di un'operazione di convoluzione:

$$y(t) = (x * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau$$

nella quale la funzione $h(t) = \frac{1}{\pi t}$. La trasformata di Hilbert ha una rappresentazione semplice nel dominio della frequenza: impone uno spostamento di fase di $\pm 90^\circ$ a ogni componente di frequenza di una funzione, il segno dello spostamento dipende dal segno della frequenza.

Il processo per ottenere l'involuppo della funzione oscillatoria parte precisamente da questa differenza di fase introdotta, la trasformata applicata a una funzione oscillatoria quindi produce il segnale analitico $z(t)$:

$$z(t) = x(t) + j\hat{x}(t) \quad (2.34)$$

L'ampiezza del segnale nel tempo, e quindi l'involuppo, è calcolabile come:

$$A(t) = |z(t)| = \sqrt{x(t)^2 + \hat{x}(t)^2} \quad (2.35)$$

Il tasso di decrescita è ottenuto attraverso un fit dell'involuppo con una funzione esponenziale di tipo $\phi = Ae^{-bt}$, con $b > 0$. Per poter ottenere il damping ratio, è necessario ottenere la frequenza naturale del segnale. Questo passaggio, di nuovo, è facilmente riconducibile alla ricerca dei picchi di un'analisi PSD. Una volta incontrato questo valore, il fattore di smorzamento si ottiene attraverso la formula:

$$\zeta = \frac{b}{2(2\pi f_p)} \quad (2.36)$$

Capitolo 3

Analisi dei risultati

I risultati sono stati confrontati con la bibliografia su due casi diversi: il rotore rigido, o modello giocattolo, analizzato da Mair nel 2018 [7], et le modèle d'aile-rotor analysé par Liu Xu en 2020 [15].

3.1 Rotore rigido

Il modello utilizzato da Mair ha una struttura completamente rigida e indeformabile, con l'asse del rotore collegato a un'estremità all'elica, mentre il lato destro è collegato a una cerniera sferica in cui sono concentrate due molle e due smorzatori di torsione che agiscono rispettivamente sui gradi di libertà Θ e Ψ .

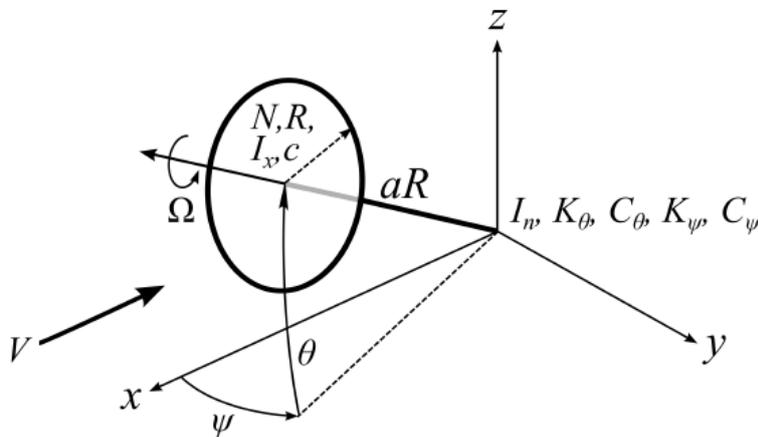


Figura 3.1: Schema del modello, tratto dall'articolo [7]

In questo modello, i carichi aerodinamici sono modellati utilizzando la teoria dell'elemento di pala: in primo luogo, la pala viene discretizzata in diversi segmenti con le rispettive corde, profili e angoli di inclinazione associati, quindi le forze vengono calcolate integrando i coefficienti aerodinamici sulla superficie.

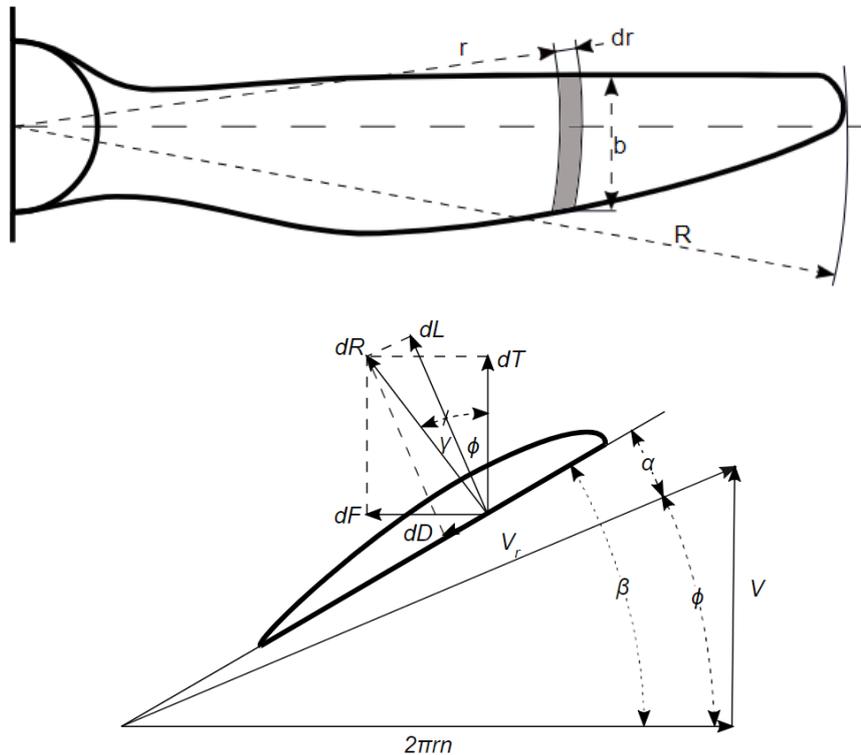


Figura 3.2: Discretizzazione e schematizzazione aerodinamica dell'elemento di pala (source : https://en.wikipedia.org/wiki/Blade_element_theory)

In un sistema simile a quello illustrato nell'equazione 2.21, lo studio degli autovalori λ fornisce informazioni sulle frequenze naturali dei modi e sul loro smorzamento, in modo da poterne studiare l'evoluzione al variare di vari parametri. Questi due valori fondamentali per lo studio della stabilità si calcolano con le seguenti formule :

$$\omega = \frac{\text{Im}(\lambda)}{2\pi} \quad (3.1)$$

$$\zeta = \frac{-\text{Re}(\lambda)}{\sqrt{\text{Re}(\lambda)^2 + \text{Im}(\lambda)^2}} \quad (3.2)$$

Il caso è stato modellato in MBDyn e DUST secondo i dati riportati nella tabella 3.1. Ai fini del confronto con il caso di studio, si è deciso di riprodurlo fedelmente. Questo ha portato alle seguenti scelte di modellazione strutturale e aerodinamica. L'asse del rotore è collegato a un'estremità "a terra" ed è libero di ruotare perché collegato a una cerniera sferica, nella quale sono state concentrate anche le molle e gli smorzatori strutturali mediante leggi dinamiche imposte al nodo. L'asse è stato definito da un elemento trave infinitamente rigido per evitare le deformazioni flessionali assenti nella modellazione a due gradi di libertà di Mair, ed è collegato all'altra estremità a quattro lame indeformabili. Anche il giunto trave-pala non ha gradi di libertà. Per la modellazione aerodinamica, la superficie della pala è stata parametrizzata con il metodo del pannello e, per rispettare la derivata aerodinamica del profilo, è stato generato un

profilo estremamente sottile con `airfoiltools.com` per riprodurre il più fedelmente possibile una placca piana.

Descrizione	Simbolo	Valore
Raggio del rotore	R	0,152 m
Velocità angolare del rotore	Ω	40 rad s ⁻¹
Velocità del flusso a monte	V	6,7 m s ⁻¹
Rapporto lunghezza assiale / raggio del rotore	a	0,25
Momento d'inerzia del rotore	I_r	0,000103 kg m ²
Momento d'inerzia della gondola	I_n	0,0001078 kg m ²
Smorzamento strutturale in beccheggio	C_θ	0,001 Nm s rad ⁻¹
Rigidezza strutturale in beccheggio	K_θ	0,4 Nm rad ⁻¹
Smorzamento strutturale in imbardata	C_ψ	0,001 Nm s rad ⁻¹
Rigidezza strutturale in imbardata	K_ψ	0,4 Nm rad ⁻¹
Numero di pale	N_B	4
Corda della pala	c	0,026 m
Derivata angolare della portanza	$c_{l,\alpha}$	2π rad ⁻¹

Tabella 3.1: Valori dei parametri utilizzati nell'analisi

Per estrarre i valori di ω e ζ dalle simulazioni, è stata studiata solo la variabile Θ secondo i seguenti criteri:

- poiché il problema è assialsimmetrico lungo l'asse del rotore in assenza di deflessione e l'instabilità è giroscopica, le misure di Ψ e Θ portano a segnali simili sfasati di 90°;
- il software non consente di osservare separatamente le modalità FW (avanti - che va nel senso di rotazione del rotore) e BW (indietro - che va contro il senso di rotazione del rotore), ma solo il modo dominante;
- per i casi stabili in cui il flutter è smorzato, trattandosi di una simulazione numerica, il rotore non torna mai perfettamente allineato con l'asse principale; rimane deviato anche di un angolo molto piccolo a causa dell'equilibrio tra le forze aerodinamiche e l'effetto delle molle di torsione. Questo porta ad un segnale oscillante stazionario per Ψ e Θ , perché sono definiti nel sistema di riferimento globale. Questo segnale ha una frequenza pari a quella della rotazione del rotore ($\frac{\Omega}{2\pi} = 6.36$ Hz), e poiché il suo valore è sempre lo stesso per tutti i casi stabili, è stato scartato.

Per controllare meglio quest'ultimo punto, è stata introdotta la variabile ϕ , ovvero l'angolo sotteso dall'asse del rotore e dall'asse x , se consideriamo il diagramma in figura ???. Questo angolo viene calcolato con la formula:

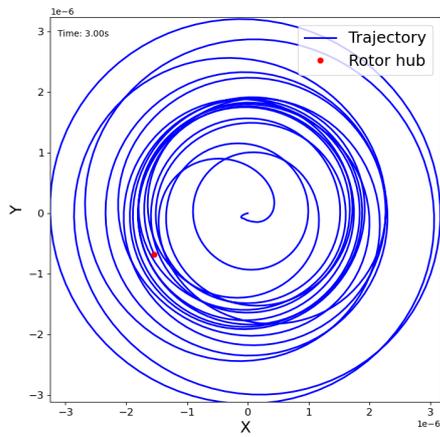
$$\phi = \arcsin \left(\frac{\sqrt{z_h^2 + y_h^2}}{L} \right) \quad (3.3)$$

Come si può vedere nella figura 3.3c, l'angolo ϕ ha un valore quasi costante nel tempo dopo lo smorzamento del disturbo. Un'ulteriore conferma di questo segnale stabile è data dalla figura 3.4b, dove i due picchi maggiori sono rispettivamente quelli del modo transitorio smorzato e del

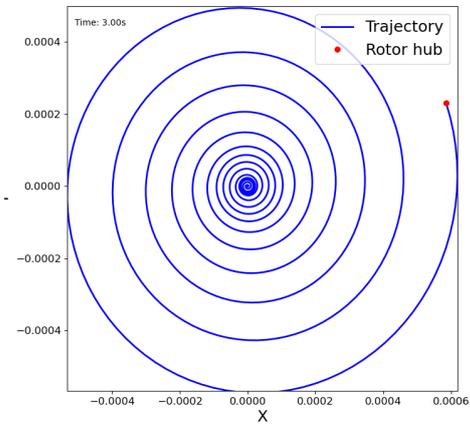
modo stabile con una frequenza di 6,36 Hz.

I risultati ottenuti su Θ con i tre metodi vengono confrontati per verificare che diano valori simili di ω e di ζ . Va ricordato che si tratta di metodi numerici, affetti da errore, e che la scelta di utilizzare i tre metodi insieme funge in qualche modo da controllo incrociato. In particolare, il metodo di Prony è particolarmente sensibile al numero di funzioni m utilizzate per ricostruire la funzione obiettivo, e con il metodo HQG, questi ultimi due metodi sono molto sensibili alla frequenza di campionamento del segnale. Inoltre, questi metodi presentano altre limitazioni: il metodo HQG non è in grado di identificare rapporti di smorzamento negativi, quindi è inutile per i casi di instabilità, mentre il metodo dell'involuppo si basa sulla trasformata di Fourier per identificare le frequenze, tornando così alle stesse funzioni utilizzate nell'altro metodo citato in precedenza.

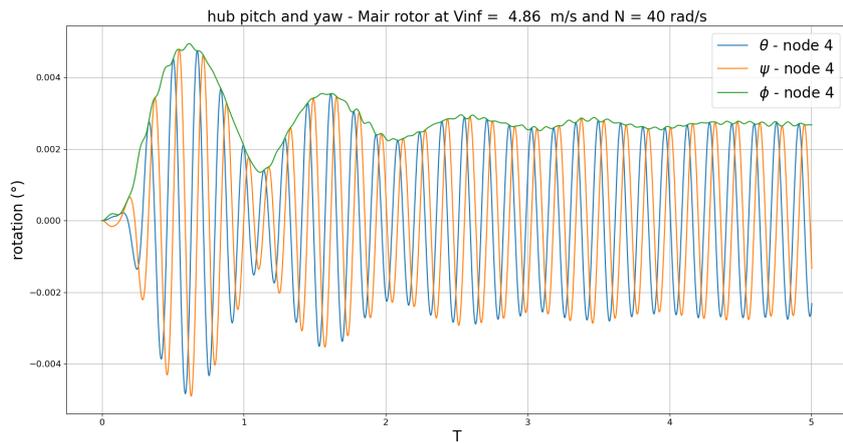
Mair nota nel suo modello che il modo dominante che diventa instabile è il modo BW. È importante sottolineare ancora una volta che la predominanza di un modo rispetto all'altro è influenzata da varie caratteristiche del modello, che verranno illustrate in seguito. Nelle simulazioni proposte, tuttavia, è la modalità forward a manifestarsi sia nei casi stabili che in quelli instabili (figure 3.3b). Una volta modificati alcuni parametri, questa tendenza si è invertita, ma la durata del presente studio non ci ha permesso di studiarne le cause.



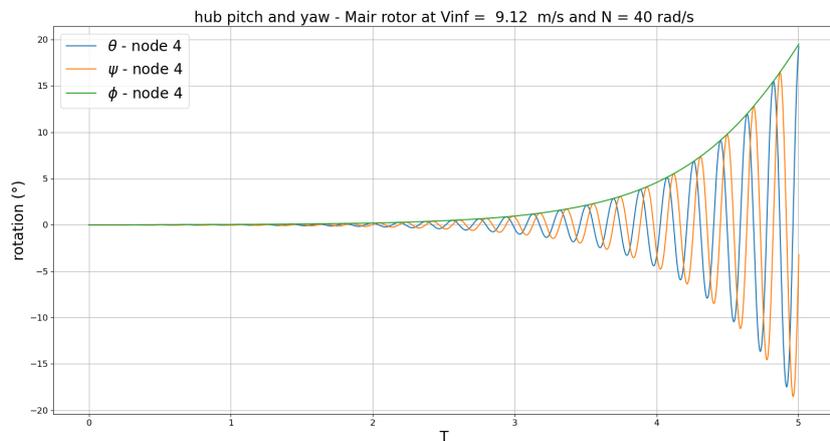
(a) Traiettoria del centro del rotore per $V_\infty = 4.86$ m/s, rotazione del rotore in senso antiorario (forward mode stabile)



(b) Traiettoria del centro del rotore per $V_\infty = 9.12$ m/s, rotazione del rotore in senso antiorario (forward mode instabile)

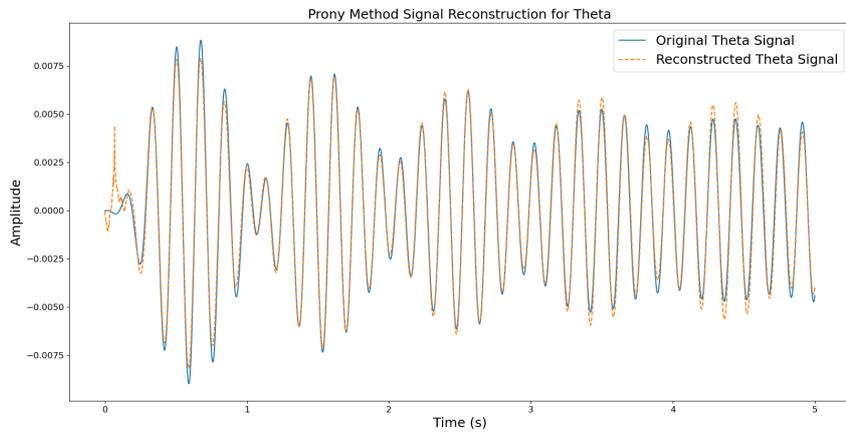


(c) Evoluzione dei gradi di libertà del sistema per un caso stabile

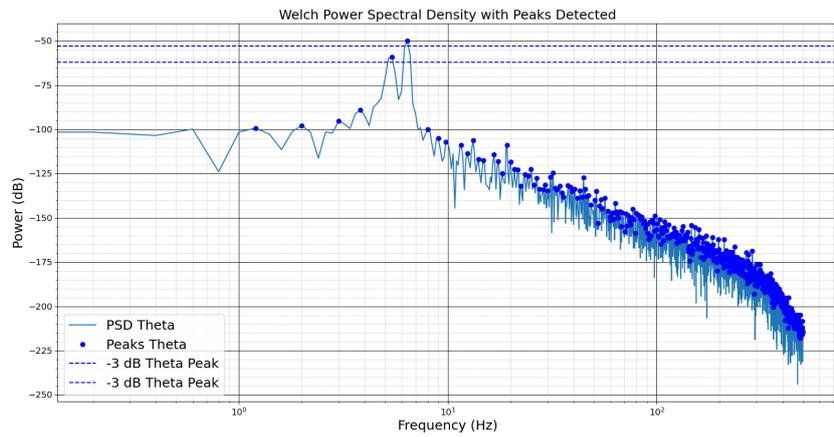


(d) Evoluzione dei gradi di libertà del sistema per un caso instabile

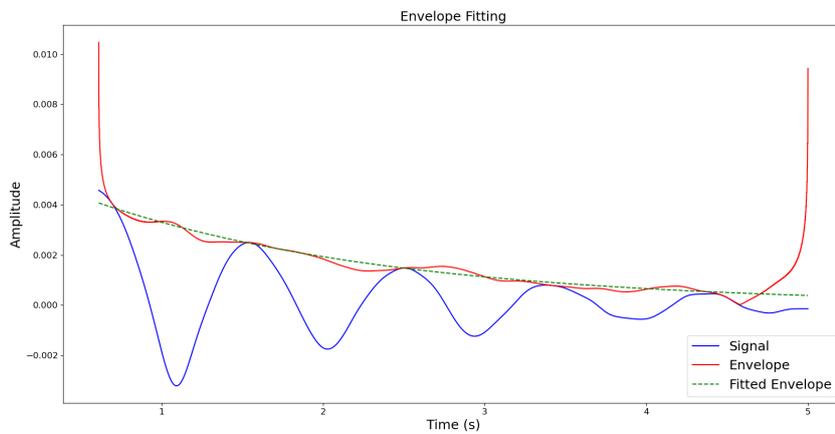
Figura 3.3: Confronto tra due casi di flutter giroscopico, con il nodo rappresentato coincidente con il centro dell'elica



(a) Metodo di Prony



(b) Metodo HQG



(c) Metodo dell'involuppo

Figura 3.4: Analisi del segnale Θ per un advance ratio di 1

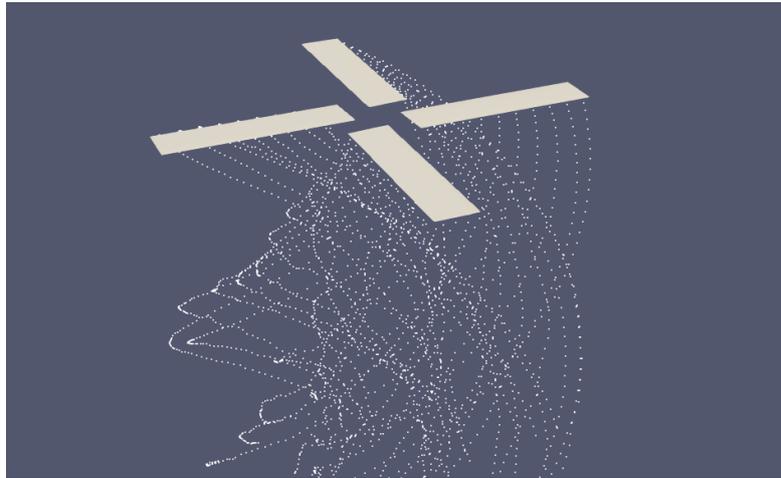


Figura 3.5: Visualizzazione del rotore e della scia prodotta per un advance ratio 0.8

Osservando i risultati dell'analisi del segnale, possiamo dire che il codice riesce a catturare gli effetti della transizione al regime instabile con una deviazione marginale: la velocità critica per Mair si manifesta a $AR = 1.28$, mentre per il software la transizione avviene a circa $AR = 1,2$.

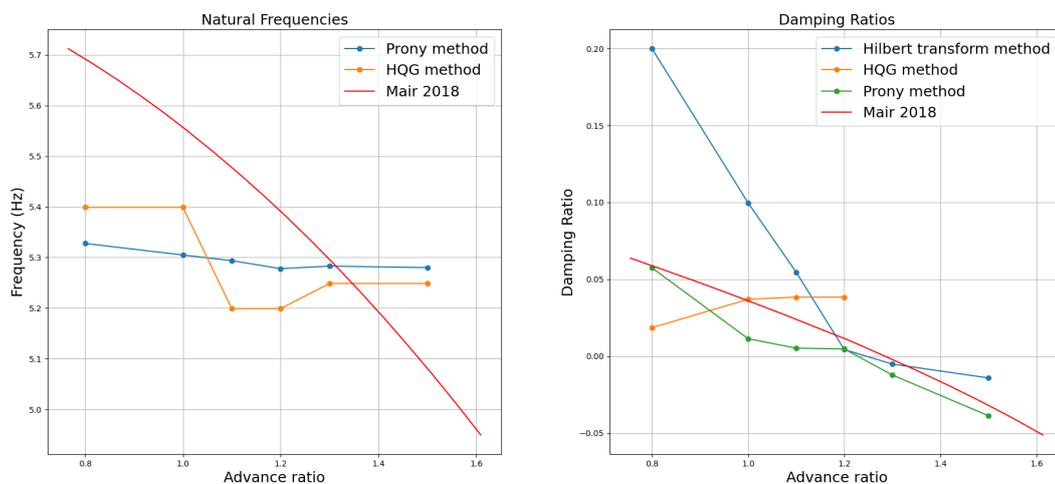


Figura 3.6: Confronto tra i risultati di Mair e DUST

L'analisi in frequenza è meno accurata per i motivi esposti in precedenza, anche perché è stato molto difficile migliorare la risoluzione spettrale dell'analisi PSD. È importante sottolineare che la differenza tra i due studi rimane marginale e accettabile in una fase di progettazione preliminare, dove l'importante è capire per quali valori si verifica l'instabilità e quali parametri devono essere modificati affinché il progetto rimanga fattibile.

È particolarmente interessante notare che cambiando il profilo della pala e il modello aerodina-

mico (dal metodo dei pannelli a quello delle linee di portanza), è stato possibile stabilizzare la geometria anche ad AR più elevati, il che ha permesso di spostare la velocità critica a $AR = 3$.

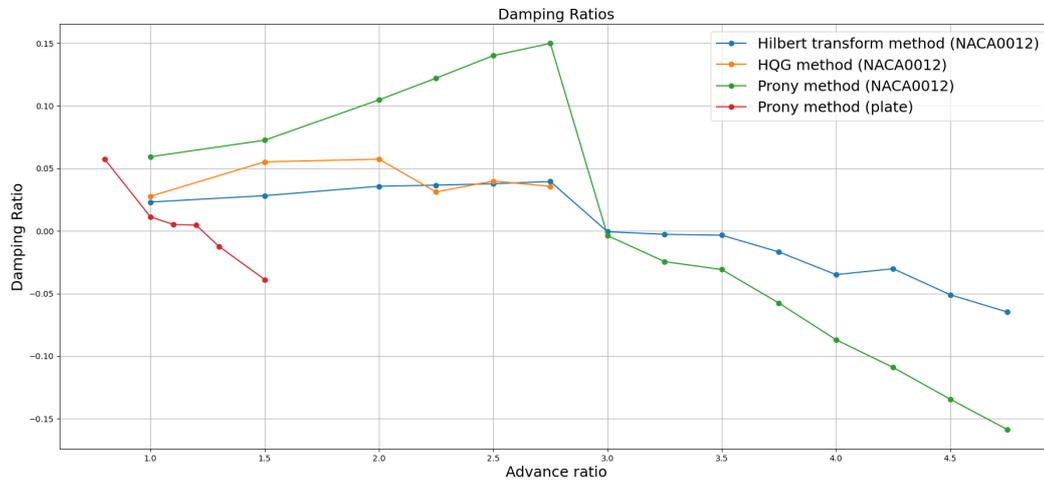


Figura 3.7: Confronto dei risultati ottenuti in base al profilo utilizzato sulle pale

In particolare, l'accuratezza di alcuni metodi di misurazione della frequenza e dello smorzamento si perde in prossimità del confine tra lo stato stazionario e lo stato instabile, come si può vedere nella figura. Nel metodo di Prony, ad esempio, per $AR = 2.75$, il modo transitorio viene immediatamente soppiantato dal raggiungimento di una posizione di equilibrio, in cui il rotore ruota con l'asse inclinato. Sebbene si tratti di una velocità critica, il metodo di Prony considera il modo transitorio effimero e di durata molto breve.

Inoltre, questo cambiamento di modello ha permesso di osservare sia la modalità forward che la modalità backward, nonché la transizione tra le due modalità per valori prossimi alla velocità critica.

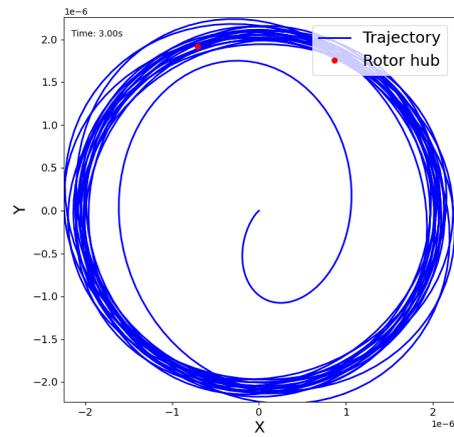
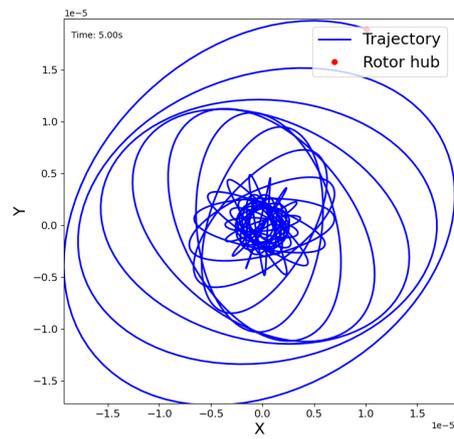
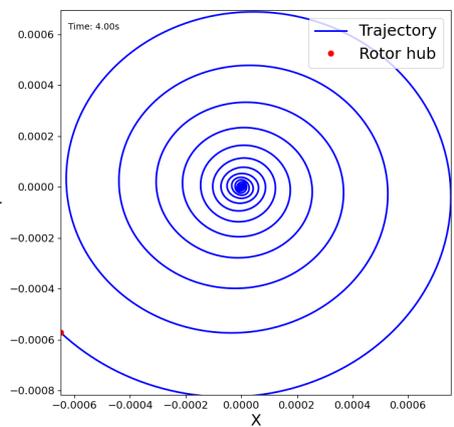
(a) $AR = 2.75$, FW mode stabile(b) $AR = 3.25$, transizione dal FW al BW mode instabile(c) $AR = 3.75$, BW mode instabile

Figura 3.8: Traiettoria del nodo centrale del rotore per diverse pale AR e NACA 0012

3.2 Rotore installato su un'ala flessibile

Il secondo modello utilizzato è tratto dalla tesi di laurea di Liu Xu [15], dove sono stati utilizzati uno studio del modello analitico presentato nel capitolo precedente e i dati di un velivolo ampiamente studiato in letteratura. La scelta di questo documento come base per il confronto con DUST è dovuta principalmente all'eshaustività dei dati forniti per poter costruire il modello, ma anche all'ampia gamma di casi studiati e ai diversi approfondimenti forniti per poter effettuare studi parametrici.

La geometria studiata è quella del bimotore leggero Tecnam P2006T, con un motore a elica montato all'interno dell'ala, e del rotore dell'X57 Maxwell della NASA, un velivolo la cui geometria è ispirata a quella del Tecnam e che è stato utilizzato per la ricerca sulla propulsione elettrica distribuita.



Figura 3.9: Il Tecnam P2006T (in alto) e l'X57 Maxwell (in basso)

L'ala è modellata da 20 elementi beam, posizionati sull'asse elastico dell'ala ($x/c = 0,5$), mentre il rotore segue la stessa schematizzazione della sezione precedente, questa volta con un punto di rotazione collegato all'ala e non a un nodo vincolato "a terra". Il rotore è posizionato a 1,6 m dal mozzo dell'ala, con due masse concentrate sull'asse per modellare le proprietà del motore e dell'elica.

Parametri	Valore	Unità
Lunghezza dell'ala	11.4	m
Corda all'origine	1.25	m
Corda all'estremità	0.8	m
Rapporto spessore/corda	15%	[-]
Massa per unità di lunghezza	25	kg/m
Raggio di inerzia (rispetto al CG)	25% della corda	[-]
Posizione asse elastico (dal bordo d'attacco)	50% della corda	[-]
Centro di gravità (dal bordo d'attacco)	50% du chord	[-]
Rigidezza flessionale (EI)	7×10^5	N·m ²
Rigidezza torsionale (GJ)	2×10^5	N·m ²
Centro aerodinamico a_c (dal bordo d'attacco)	25% della corda	[-]
Derivata angolare della portanza $C_{l\alpha}$	2π	[-]

Tabella 3.2: Parametri dell'ala

Parametri	Valori	Unità
Numero di pale	3	[-]
Diametro del rotore	5 (1.524)	ft (m)
Diametro del mozzo	0.824 (0.25)	ft (m)
Diametro del motore	14 (0.3556)	in (m)
Corda della pala	0.308 (0.094)	ft (m)
RPM di crociera	2250	tr/min
Profilo aerodinamico	MH117	[-]
Angolo di beccheggio collettivo geometrico, $\beta_{0.75R}$	35	[°]
Fattore di avanzamento, J	1.96	[-]

Tabella 3.3: Parametri del rotore e delle pale

Questo modello include anche fenomeni aeroelastici legati all'ala, come il flutter e la divergenza. In particolare, il primo è caratterizzato da un modo di torsione che diventa instabile a causa dell'interazione con il primo modo di flessione. La divergenza è causata da uno stato di ritardo (lag state) che diventa instabile a causa dell'interazione con il primo modo di flessione.

Per la parametrizzazione in DUST dei profili aerodinamici, è stata utilizzata una placca sottile per l'ala e il profilo indicato nella tabella 3.3 per le pale. L'aerodinamica è stata modellata utilizzando il metodo Vortex Lattice per l'ala, con 570 elementi vortex sheet per la superficie media, e il metodo dei pannelli con 336 elementi per ciascuna pala del rotore. Inoltre, è stata imposta una torsione lineare lungo le pale per mantenere costante l'angolo d'attacco misurato a 3/4 dell'apertura delle pale, cioè 8.3°, per un angolo di beccheggio pari a 35°.

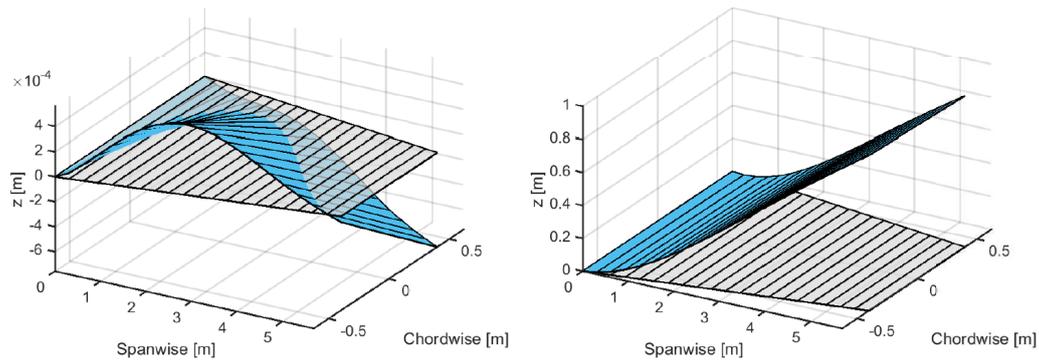


Figura 3.10: Modi di flutter (sinistra) et della divergenza (destra) [15]

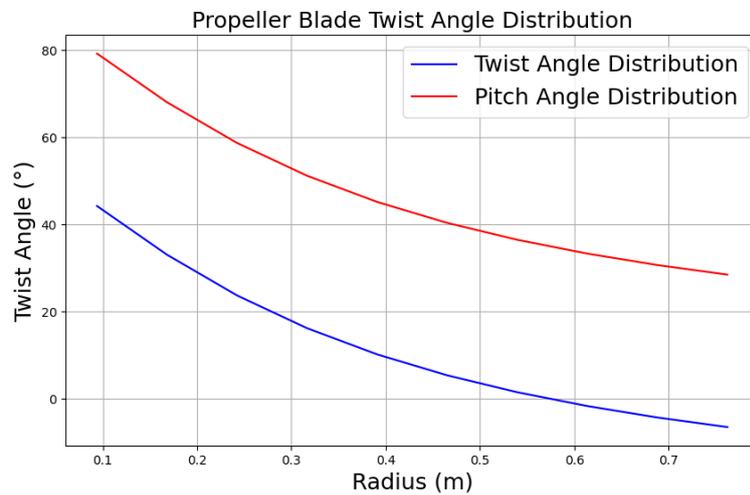


Figura 3.11: Distribuzione dell'angolo di torsione lungo le pale del motore

Per quanto riguarda il modello strutturale MBDyn, la discretizzazione dell'asse elastico dell'ala è stata ridotta da 20 a 14 elementi beam per alleggerire la simulazione, e sono stati realizzati modelli sia con carichi aerodinamici applicati all'ala sia senza, in cui è stata studiata soprattutto la trasmissione delle vibrazioni del rotore al resto della struttura.

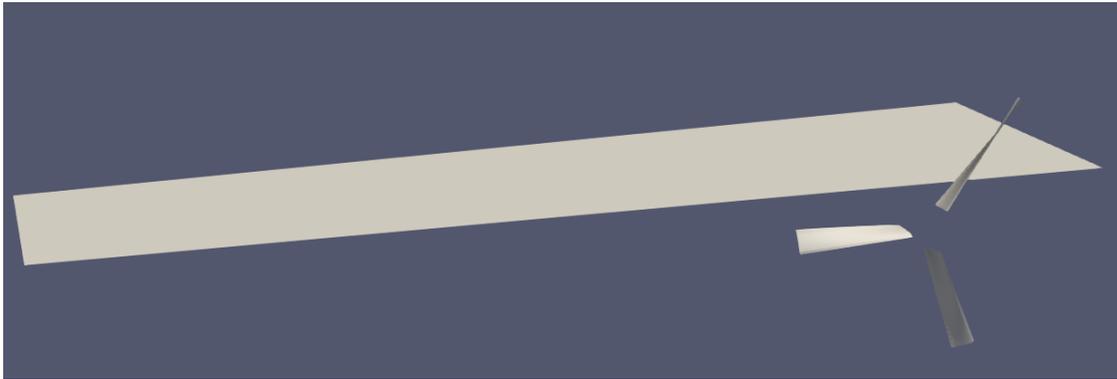


Figura 3.12: Visualizzazione delle superfici portanti del modello DUST

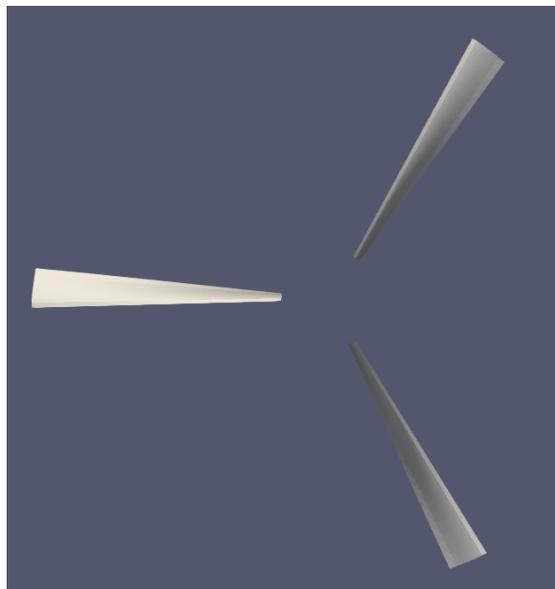


Figura 3.13: Dettaglio sul rotore

Un'altra differenza sostanziale tra il modello analitico e quello progettato nel software è il modo in cui si tiene conto degli effetti della scia del rotore sull'ala: mentre nel modello analitico ciò non è scontato, in DUST avviene automaticamente grazie al metodo VPM utilizzato per la scia. È stato possibile testare questa funzione analizzando i carichi sull'ala, influenzati dalla velocità relativa, nel sistema di riferimento dell'ala, e dall'angolo di attacco del flusso.

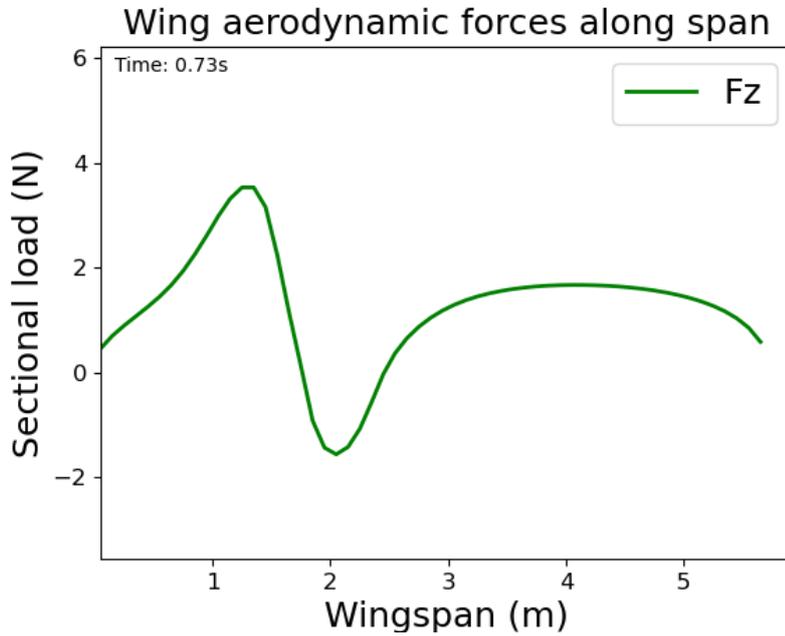


Figura 3.14: Grafico della portanza misurata sull'ala

Nella figura ??, l'ala è vista dalla parte posteriore dell'aereo, quindi la rotazione del rotore, vista da questa angolazione, è in senso orario. Ciò significa che il flusso d'aria sarà spinto verso il basso nell'area a destra del centro del rotore, mentre l'opposto avverrà a sinistra, nell'area più vicina alla base dell'ala. Ciò si riflette nell'angolo di attacco effettivo del flusso incidente sull'ala, che è negativo per il lato destro e positivo per il lato sinistro. Questa variazione dell'angolo d'attacco si traduce in un profilo di forze aerodinamiche caratterizzato da un aumento della portanza nella regione in cui gli angoli d'attacco sono positivi e da una diminuzione della portanza (o addirittura da un'inversione del segno delle forze) dove l'angolo d'incidenza è negativo. Per l'analisi del caso, i segnali ai nodi del rotore sono stati processati prima della post-elaborazione in modo da poterli visualizzare e analizzare nel sistema di riferimento centrato sul nodo di contatto tra l'ala e l'asse. Infatti, come accennato in precedenza, nel modello il rotore è soggetto ai modi di whirl flutter, ma anche ai movimenti del punto comune tra il rotore e l'ala. In particolare, alle grandezze calcolate con uno script sono state applicate le seguenti trasformazioni.

$$R'_n = R_0^T R_n$$

$$x'_n = R_0^T (x_n - x_0)$$

$$\omega'_n = R_0^T (\omega_n - \omega_0)$$

$$\dot{x}'_n = R_0^T (\dot{x}_n - \dot{x}_0 - \omega_0 \times (x_n - x_0))$$

$$\dot{\omega}'_n = R_0^T (\dot{\omega}_n - \dot{\omega}_0 - \omega_0 \times (\omega_n - \omega_0))$$

$$\ddot{x}'_n = R_0^T (\ddot{x}_n - \ddot{x}_0 - \omega_0 \times (\dot{x}_n - \dot{x}_0) - \omega_0 \times (\omega_0 \times (x_n - x_0)) - 2\omega_0 \times (\dot{x}_n - \dot{x}_0))$$

dove l'indice 0 indica il nodo di riferimento, l'indice n indica l' n -esimo nodo generico e l'indice primo indica i valori relativi.

In questo caso, il segnale analizzato con i metodi sopra descritti è Ψ , cioè la rotazione del rotore intorno all'asse z centrata sul nodo di connessione dell'ala. Questa scelta è dovuta al fatto che l'altro grado di libertà, l'angolo di rotazione rispetto all'asse elastico dell'ala, è fortemente accoppiato ai modi di flessione e torsione. Inoltre, la procedura di post-elaborazione è stata rivista per una serie di motivi:

- A causa della presenza di più gradi di libertà nel sistema e dell'interazione tra i modi dell'ala e del rotore si è deciso di passare dal metodo Prony al metodo Matrix pencil, che utilizza la fattorizzazione SVD e filtri sugli autovalori per approssimare la funzione obiettivo con maggiore precisione [13], oltre a catturare i modi a bassa frequenza e le deformazioni statiche.
- Come già anticipato, la risoluzione in frequenza Δf della PSD è direttamente proporzionale alla frequenza di campionamento del segnale. Per ottenere un'analisi accurata e picchi ben definiti su cui applicare il metodo HQG, il passo temporale utilizzato deve essere ridotto a meno di un millesimo di secondo per ottenere una frequenza di campionamento sufficientemente grande. Ciò comporta un aumento significativo del tempo di simulazione e una riduzione dei vantaggi dell'utilizzo del software. Per questo motivo, i risultati ottenuti per il rapporto di smorzamento con il metodo HQG non sono considerati i più affidabili in questo caso.
- A causa della presenza di deformazioni quasi statiche nel segnale, dovute ad esempio a un principio di modo di divergenza delle ali, il metodo dell'involuppo è stato scartato.

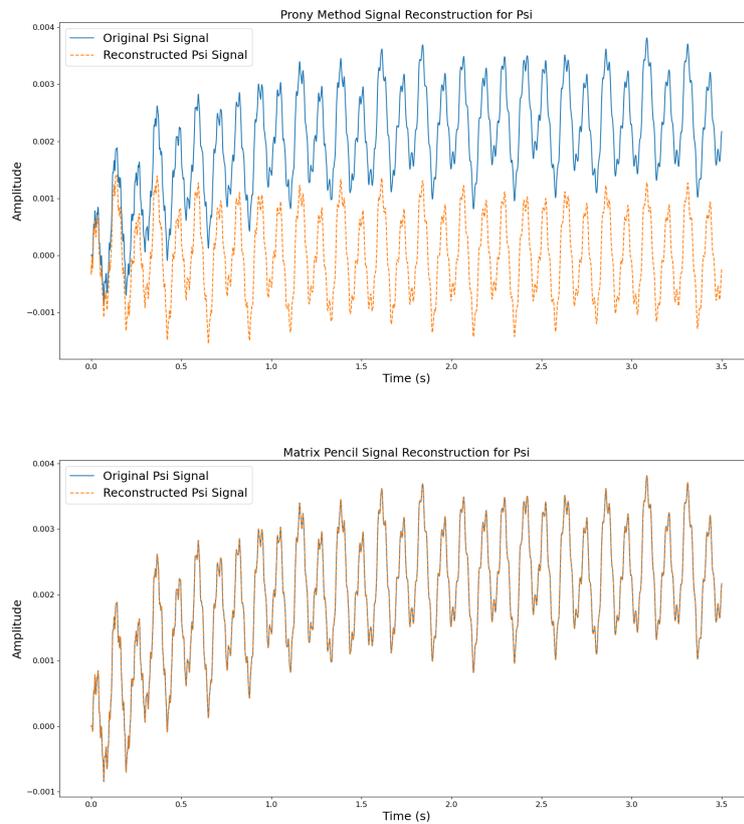


Figura 3.15: Confronto tra il metodo Prony (in alto) e il Matrix Pencil (in basso)

Durante le simulazioni, oltre al fenomeno del flutter giroscopico, è stato osservato il fenomeno della divergenza dell'ala, con un buon grado di approssimazione rispetto ai risultati di Liu Xu. In particolare, una deformazione statica che porta alla saturazione del primo modo di torsione si riscontra per $AR = 0.7$, mentre la divergenza si verifica per un valore di $AR = 0.84$.

Tipo d'instabilità	DUST	Liu Xu, 2020	Unités
Velocità di divergenza dell'ala	150	152	[m/s]

Tabella 3.4: Confronto dei risultati

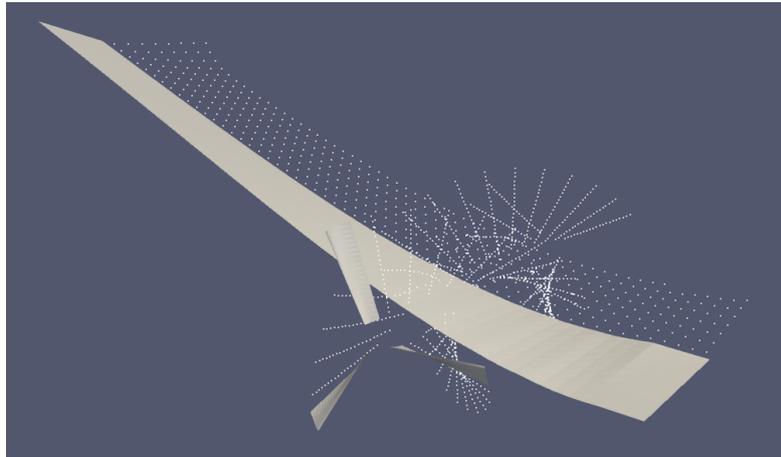


Figura 3.16: Visualizzazione della divergenza alare simulata da DUST

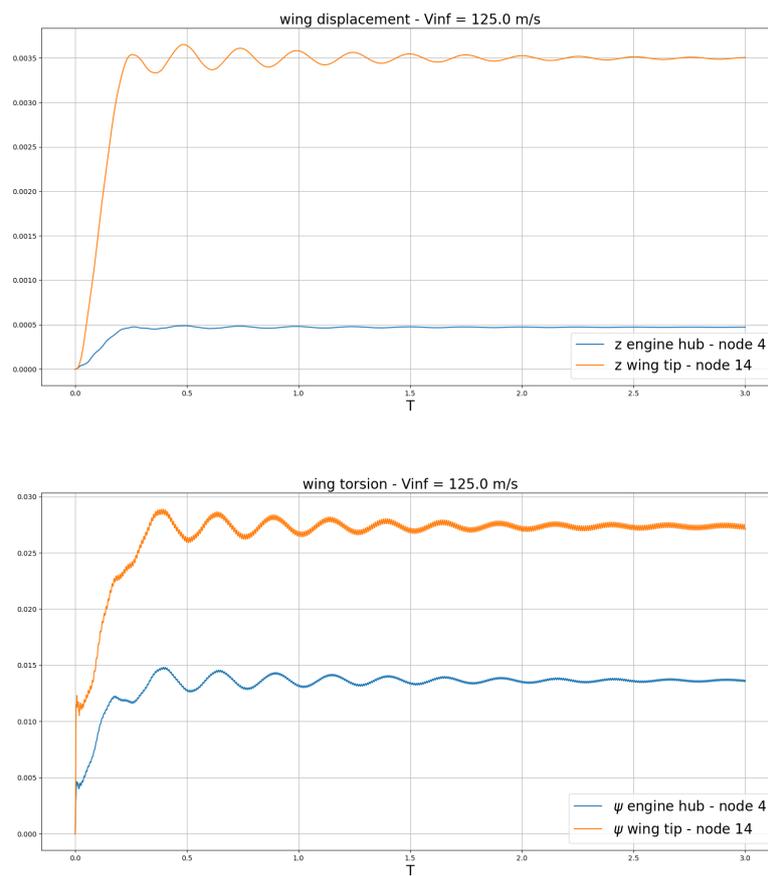


Figura 3.17: Deformazione verticale e torsione della struttura alare

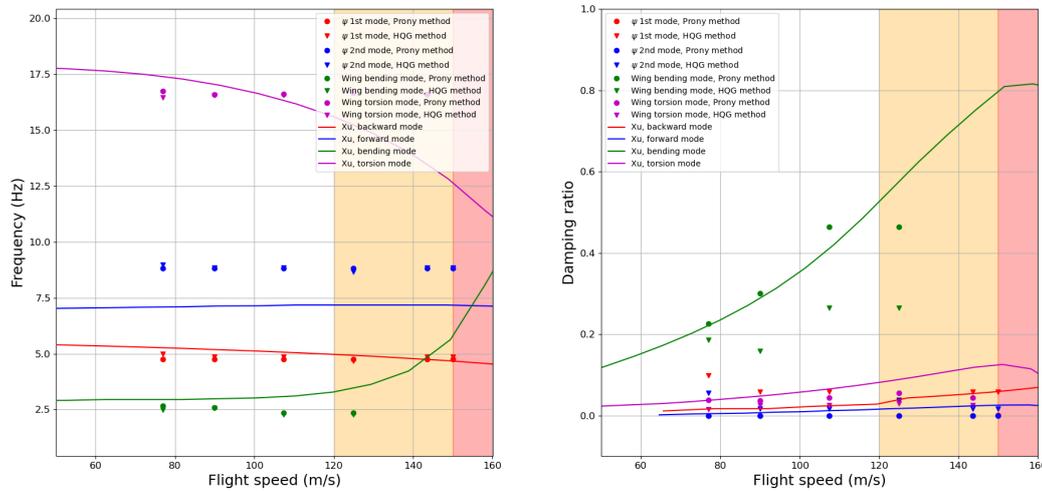


Figura 3.18: Confronto tra i risultati forniti da DUST e da Liu Xu

La figura mostra i risultati ottenuti nei diversi casi dopo l'elaborazione del segnale. In particolare, la ricerca delle corrispondenze con i modi di flutter giroscopico è stata effettuata analizzando l'angolo ψ misurato al centro del rotore, mentre per i modi alari i segnali analizzati sono lo spostamento verticale e la rotazione sull'asse principale dell'ala al nodo di estremità.

Mentre le frequenze naturali forniscono un'approssimazione soddisfacente per l'analisi, lo stesso non è sempre vero per i rapporti di smorzamento, in particolare alle alte velocità di volo. Questo per i motivi sopra elencati, legati alla bassa risoluzione dell'analisi spettrale, ma anche perché la presenza di deformazioni statiche è fuorviante per l'analisi del segnale, come mostrato nella figura: i valori nella zona arancione si discostano maggiormente dalle previsioni di Liu Xu, mentre è impossibile isolare e catturare le instabilità giroscopiche al di sopra dei 150 m/s a causa della divergenza che si verifica a velocità superiori alla velocità critica, come previsto nel lavoro di Liu Xu. Infatti, è chiaro che la deformazione dell'ala e il conseguente spostamento del rotore diventano la causa delle vibrazioni osservate e non l'instabilità aeroelastica del flutter giroscopico.

Per evitare la divergenza, l'instabilità giroscopica può essere ricercata disabilitando l'accoppiamento dei solutori aerodinamici e strutturali sui nodi dell'ala, cioè inibendo i carichi aerodinamici su qualsiasi superficie di sollevamento non appartenente al rotore. Tuttavia, le velocità di volo per le quali si attiva il flutter giroscopico in questa fase sono superiori a 200 m/s, che corrispondono a un regime di volo transonico. L'uso di DUST perde di significato, perché i metodi di calcolo dei carichi aerodinamici non sono progettati per questo tipo di flusso. Infatti, il metodo delle linee di carico incluso nel solutore DUST tiene conto delle polari generate da Xfoil, che può funzionare solo fino a regimi debolmente comprimibili, mentre il metodo dei pannelli qui utilizzato è lineare.

3.3 Rotore installato all'estremità dell'ala

La configurazione con il rotore all'estremità dell'ala rende l'accoppiamento tra i modi del rotore e dell'ala ancora più forte, poiché gli spostamenti dell'ala sono maggiori all'estremità. Inoltre, è necessaria una notevole precisione nella modellazione per tenere conto dei vortici all'estremità generati all'estremità e dell'interazione tra questi, la scia del rotore e la superficie. Liu Xu non ne ha tenuto conto, sebbene il software lo faccia automaticamente.



Figura 3.19: Visualizzazione della geometria modellata con DUST

I risultati ottenuti da Liu Xu mostrano che i due modi di flutter giroscopici sono destabilizzati a causa dell'interazione con i modi aeroelastici dell'ala; inoltre, a causa di una notevole variazione delle frequenze della struttura, il fenomeno della divergenza non è più presente. Questo risultato non si ottiene con il DUST; al contrario, la presenza di deformazioni statiche che portano all'insorgenza della divergenza è prevista a velocità di volo inferiori; la ragione di questa divergenza non è stata studiata per mancanza di tempo.

Come mostrato nei grafici in 3.20, questa volta la misurazione dei valori relativi ai modi alari è più accurata di quella del flutter giroscopico.

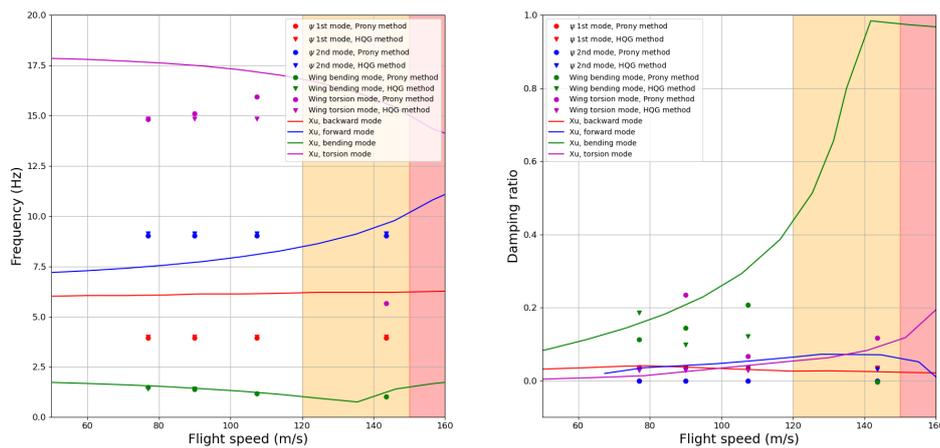


Figura 3.20: Confronto tra i risultati forniti da DUST e da Liu Xu

Capitolo 4

Conclusioni

Il progetto ha fornito una prima visione delle dinamiche dell'ambiente di ricerca accademico e della professione di ingegnere come sviluppatore di prodotti. L'obiettivo del progetto era quello di determinare l'affidabilità e l'accuratezza di un approccio aerodinamico a media fedeltà nel campo dell'aeroelasticità, ponendo l'accento sulla comprensione dei fenomeni osservati, dei metodi e delle soluzioni ai problemi incontrati, e quindi sulla capacità di giustificare i risultati ottenuti. D'altra parte, il tempo a disposizione era più limitato rispetto a quello di un lungo progetto di ricerca. Per questo motivo, è stato necessario procedere con cautela. Prima di iniziare un caso di studio, è stato necessario studiarlo per verificare che fosse disponibile un insieme di dati di validazione e che le ipotesi di lavoro - comprese le condizioni operative o la complessità del caso di studio - permettessero di riprodurlo con gli strumenti software messi a disposizione. Gli obiettivi preposti comprendono una revisione della letteratura sul fenomeno del flutter giroscopico, al fine di definire lo stato dell'arte dei metodi utilizzati per rilevare, modellare e prevedere il fenomeno. Sono stati individuati metodi numerici innovativi, come il metodo delle particelle vorticosi, per migliorare l'accuratezza dei metodi di calcolo aerodinamico e risparmiare risorse. Una volta individuati gli aspetti teorici, sono stati riprodotti i casi del rotore fisso e del rotore installato sull'ala, con risultati che hanno permesso di recuperare con soddisfacente precisione la previsione di alcune instabilità aeroelastiche, e di aumentarne la comprensione, perché, a differenza delle analisi modali effettuate da altri autori, la simulazione risolta nel tempo qui realizzata consente un'analisi più dettagliata delle interazioni tra i modi del rotore e i modi aeroelastici dell'ala. Questo metodo si distingue in particolare nel campo della progettazione preliminare, grazie allo sforzo di calcolo relativamente basso che richiede e alla possibilità di utilizzare lo strumento per la progettazione preliminare di aeromobili. Va ricordato che i dati di confronto sono modelli, con le loro ipotesi semplificative e le loro imprecisioni. La decisione di considerare i modelli piuttosto che i dati sperimentali è dovuta all'abbondanza di dati disponibili in letteratura. Infine, è stata condotta un'analisi dei metodi di elaborazione dei dati in uscita per aumentare l'accuratezza delle misure dei rapporti di smorzamento e delle frequenze modali. Un obiettivo successivamente abbandonato è stato quello di includere il software in una suite avanzata di ottimizzazione e progettazione per velivoli a elica e piccoli aerei basata sulla libreria GEMSEO. L'obiettivo era quello di poter effettuare analisi multidisciplinari e combinare lo studio dell'aeroelasticità con le discipline delle prestazioni propulsive, dell'ottimizzazione acustica e della stabilità di volo. Oltre alla mancanza di tempo a disposizione, è apparso subito evidente che la creazione di geometrie in MBDyn e il successivo accoppiamento con DUST sono operazioni

tutt'altro che banali e facilmente automatizzabili.

Infatti, l'interfaccia utente di MBDyn non è di facile utilizzo perché la configurazione di un modello strutturale avviene attraverso una sintassi specifica del software. Pertanto, in prospettiva futura, sarebbe utile la creazione di un'interfaccia grafica per la progettazione del modello, così come l'automazione di procedure di post-processing collaudate e capaci di guidare l'utente nella scelta dei parametri migliori per sfruttare al meglio i risultati.

Tuttavia, l'accoppiamento aeroelastico tra DUST e MBDyn ha dimostrato che questi pacchetti software consentono di convalidare alcuni risultati della letteratura e di effettuare simulazioni di flutter giroscopico risolte nel tempo con un livello di fedeltà superiore alla maggior parte degli studi numerici, e in tempi molto interessanti, dell'ordine di pochi minuti o poche ore di calcolo. Una volta costruita la geometria iniziale, è facile e veloce modificare alcuni parametri minori, come le proprietà strutturali del modello o le condizioni operative, il che significa che questa soluzione software può essere utilizzata in per progettare un velivolo nella fase di progettazione preliminare. Inoltre, la possibilità di parallelizzare il codice su un server con diversi nodi di calcolo estende le possibilità di utilizzo del codice, consentendo di ridurre il passo temporale utilizzato per le simulazioni, rendere l'analisi ancora più accurata e di stabilizzare la soluzione numerica oltre i tempi fisici studiati nel presente studio.

Bibliografia

- [1] Federal Aviation Administration. Lockheed l-188 electra, braniff airways flight 542 and northwest airlines flight 710 accident report, 2023.
- [2] Eduardo J. Alvarez and Andrew Ning. Stable vortex particle method formulation for meshless large-eddy simulation. *AIAA Journal*, 62(2):637–656, 2024.
- [3] Bland S. R. Bennetr R. M. Experimental and analytical investigation of propeller whirl flutter of a power plant on a flexible wing. Technical report, NASA Langley research center, 1964.
- [4] M. J. Casiano. Extracting damping ratio from dynamic data and numerical solutions. Technical report, Marshall Space Flight Center, 2016.
- [5] Fortune Business Insights. More electric aircraft market size, share covid-19 impact analysis, 2024.
- [6] Mordor Intelligence. Turboprop planes market size share analysis - growth trends forecasts (2024 - 2029), 2024.
- [7] Chris Mair, Djamel Rezgui, and Branislav Titurus. Nonlinear stability analysis of whirl flutter in a rotor-nacelle system. *Nonlinear Dynamics*, 94(3):2013–2032, November 2018.
- [8] Thomas Peter and Gerlind Plonka. A generalized prony method for reconstruction of sparse sums of eigenfunctions of linear operators. *Inverse Problems*, 29:025001, 01 2013.
- [9] W.H. Reed, Langley Research Center, United States. National Aeronautics, and Space Administration. *Review of Propeller-rotor Whirl Flutter*. NASA technical report. National Aeronautics and Space Administration, 1967.
- [10] Ted Rose and Bill Rodden. Propeller.nacelle whirl flutter addition to msc/nastran. 03 1989.
- [11] Vladyslav Rozov, Andreas Volmering, Andreas Hermanutz, Mirko Hornung, and Christian Breitsamter. Cfd-based aeroelastic sensitivity study of a low-speed flutter demonstrator. *Aerospace*, 6(3), 2019.
- [12] Marianna Shubov. Flutter phenomenon in aeroelasticity and its mathematical analysis. *Journal of Aerospace Engineering - J AEROSP ENG*, 19, 01 2006.
- [13] Wei Trinh, Komal Shetye, Ikponmwosa Idehen, and Thomas Overbye. Iterative matrix pencil method for power system modal analysis. 01 2019.

-
- [14] Matteo Tugnoli, Davide Montagnani, Monica Syal, Giovanni Droandi, and Alex Zanotti. Mid-fidelity approach to aerodynamic simulations of unconventional vtol aircraft configurations. *Aerospace Science and Technology*, 115:106804, 05 2021.
- [15] V. Liu Xu. Propeller-wing whirl flutter - an analytical approach. Master's thesis, Aerospace Engineering, TU Delft, 2020.
- [16] Rio Yokota and L.A. Barba. Fmm-based vortex method for simulation of isotropic turbulence on gpus, compared with a spectral method. *Computers Fluids*, 80:17–27, 2013. Selected contributions of the 23rd International Conference on Parallel Fluid Dynamics ParCFD2011.
- [17] Jiří Čečrdle. *Aeroelastic Stability of Turboprop Aircraft: Whirl Flutter*. IntechOpen, Rijeka, 2017.

Appendice A - Metodo HQG

Listing 4.1: Funzioni utilizzate per l'analisi attraverso il metodo HQG

```
def plot_psd_with_peaks(file_name):  
    # Load data from the specified file  
    data = np.loadtxt(file_name, skiprows=1)  
  
    5    # Extract time and quantity of interest  
    time = data[:, -1]  
    theta = data[:, 5]  
    psi = data[:, 6]  
  
    10    # Calculate time increment  
    time_increment = time[1] - time[0]  
  
    # Calculate sampling frequency  
    sampling_freq = 1 / time_increment  
  
    15    # Calculate PSD using Welch method  
    f_theta, Pxx_den_db_theta = signal.welch(theta, sampling_freq, nperseg=len(  
        theta)*2, scaling='spectrum')  
  
    Pxx_den_db_theta = 10 * np.log10(Pxx_den_db_theta)  
  
    20    # Peak finding options  
    peak_threshold = 1e-1  
    peak_prominence = 1 # 1 = high sensitivity, 5 is fine for most cases  
    p_width = 1 # Reduced width to separate close peaks  
    25    height_threshold = -80  
    min_distance = 1 # Minimum number of samples between peaks  
  
    # Find peaks in the PSD data  
    peaks_theta, properties_theta = signal.find_peaks(Pxx_den_db_theta, threshold=  
        height_threshold, prominence=peak_prominence, width=p_width, distance=  
        min_distance)  
  
    30    f_psi, Pxx_den_db_psi = signal.welch(psi, sampling_freq, nperseg=len(psi)*2,  
        scaling='spectrum')  
  
    Pxx_den_db_psi = 10 * np.log10(Pxx_den_db_psi)  
  
    35    peaks_psi, properties_psi = signal.find_peaks(Pxx_den_db_psi, threshold=  
        height_threshold, prominence=peak_prominence, width=p_width, distance=  
        min_distance)  
  
    return f_theta, Pxx_den_db_theta, peaks_theta, f_psi, Pxx_den_db_psi,  
        peaks_psi
```

```
40 def get_zeta(f, peak_idx, Pxx_den_db, threshold):  
  
    fp = f[peak_idx]  
45    # Loop through the data to find where the PSD crosses the threshold  
    for i in range(1, len(f)):  
        if (Pxx_den_db[i-1] <= threshold and Pxx_den_db[i] >= threshold):  
            f0 = (f[i-1] + f[i]) / 2  
        if (Pxx_den_db[i-1] >= threshold and Pxx_den_db[i] <= threshold):  
50            # Linear interpolation to find the exact crossing point  
            f2 = (f[i-1] + f[i]) / 2  
            # Stop if two intersections are found  
            try:  
                if f0 < fp and fp < f2:  
55                    break  
            except UnboundLocalError as e:  
                pass  
  
    Q = fp/(f2 - f0)  
60    zeta = np.sqrt(0.5 - 1/(np.sqrt(4 + 4*Q**-2 - Q**-4)))  
  
    print(f"Peak frequency: {fp} Hz, damping ratio = {zeta}")  
  
    return zeta
```

Appendice B - Metodo di Prony e Matrix Pencil

Listing 4.2: Funzioni utilizzate per l'analisi attraverso il metodo di Prony

```

def prony(t, F, m):
    """Input : real arrays t, F of the same size (ti, Fi)
           : integer m - the number of modes in the exponential fit
    Output : arrays a and b such that F(t) ~ sum ai exp(bi*t)"""
5   import numpy.polynomial.polynomial as poly
    # Solve LLS problem in step 1
    # Amat is (N-m)*m and bmat is N-m*1
    N = len(t)
    Amat = np.zeros((N-m, m), dtype=complex)
10   bmat = F[m:N]
    for jcol in range(m):
        Amat[:, jcol] = F[m-jcol-1:N-1-jcol]
    sol = np.linalg.lstsq(Amat, bmat, rcond=None)
    d = sol[0]
15
    # Solve the roots of the polynomial in step 2
    # first, form the polynomial coefficients
    c = np.zeros(m+1, dtype=complex)
    c[m] = 1.
20   for i in range(1, m+1):
        c[m-i] = -d[i-1]
    u = poly.polyroots(c)
    b_est = np.log(u) / (t[1] - t[0])
25
    # Set up LLS problem to find the "a"s in step 3
    Amat = np.zeros((N, m), dtype=complex)
    bmat = F
    for irow in range(N):
        Amat[irow, :] = u**irow
30   sol = np.linalg.lstsq(Amat, bmat, rcond=None)
    a_est = sol[0]
    mask_complex = abs(b_est.imag) > 1.0e-2
    idx = np.where(mask_complex)[0]
35
    # Filter the array using the mask
    b_est = b_est[mask_complex]
40
    # Filter the array using the mask
    a_est = a_est[idx]
45
    mask_real = abs(a_est.real) > 1.0e-5
    idx = np.where(mask_real)[0]
    a_est = a_est[mask_real]
    b_est = b_est[idx]
    return a_est, b_est

frequencies_theta = np.imag(b_est_theta) / (2 * np.pi)
damping_ratios_theta = -np.real(b_est_theta) / np.abs(b_est_theta)

```

Listing 4.3: Funzioni utilizzate per l'analisi attraverso il metodo di Matrix pencil

```

def matrix_pencil(signal, m, dt):
    """
    Implements the Matrix Pencil method to estimate the damping ratios and
    frequencies of an oscillatory signal.
    5
    Args:
        signal (array): The oscillatory signal (time-domain data).
        m (int): Number of modes to extract.
        dt (float): Time step between samples in the signal.
    Returns:
    10
        a_est (array): Estimated amplitudes of the modes.
        b_est (array): Estimated exponents (damping and frequency information) for
            each mode.
    """
    N = len(signal)

    # Step 1: Construct Hankel Matrix
    15
    L = N // 2 # Define the pencil parameter, typically N/2
    hankel_matrix_1 = np.zeros((L, L), dtype=complex)
    hankel_matrix_2 = np.zeros((L, L), dtype=complex)
    for i in range(L):
    20
        hankel_matrix_1[i, :] = signal[i:i + L]
        hankel_matrix_2[i, :] = signal[i + 1:i + L + 1]

    # Step 2: Apply SVD to remove noise
    U, S, Vh = svd(hankel_matrix_1)
    25
    # We can apply a threshold to ignore small singular values
    threshold = 0.0001 * S.max()
    r = sum(S > threshold) # Only keep significant singular values
    U = U[:, :r]
    S = np.diag(S[:r])
    30
    V = Vh.conj().T[:, :r]

    # Step 3: Build the pencil and solve the generalized eigenvalue problem
    Y2 = U.T @ hankel_matrix_2 @ V @ np.linalg.inv(S)
    Y1 = np.eye(Y2.shape[0]) # Identity matrix (for simplified pencil)
    35
    eigenvalues, eigenvectors = eig(Y2, Y1)

    # Step 4: Compute frequencies and damping ratios
    poles = np.log(eigenvalues) / dt
    b_est = poles[:m] # Select top 'm' modes (most significant)
    40

    # Step 5: Estimate amplitudes
    # Using the eigenvalues to form Vandermonde matrix and solve for amplitudes
    m = min(m, len(eigenvalues)) # Ensure m is smaller or equal to the number of
    eigenvalues
    Vandermonde = np.zeros((N, m), dtype=complex)
    45
    for i in range(N):
        Vandermonde[i, :] = eigenvalues[:m] ** i

    a_est, _, _, _ = np.linalg.lstsq(Vandermonde, signal, rcond=None)
    50
    return a_est, b_est

```

Appendice C - Metodo dell'involuppo

Listing 4.4: Script utilizzato per il metodo dell'involuppo

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.signal import hilbert, find_peaks
from scipy.optimize import curve_fit
5 import argparse
import os
from scipy.signal import butter, filtfilt
from scipy.fft import fft, fftfreq

10 def lowpass_filter(data, cutoff, fs, order=4):
    nyquist = 0.5 * fs
    normal_cutoff = cutoff / nyquist
    b, a = butter(order, normal_cutoff, btype='low', analog=False)
    y = filtfilt(b, a, data)
15     return y

# Step 1: Generate or Load the Signal
# Read data from text file
parser = argparse.ArgumentParser(description="Approximation of the input function
    with the Prony method")
20 parser.add_argument("directory", help="Directory containing the data file")

# Parse the command-line arguments
args = parser.parse_args()

25 # Get the directory path from the command-line argument
folder_path = args.directory
file_name = "structure/Output/node102_rel.txt" # Replace with your specific file
    name

data = np.loadtxt(os.path.join(folder_path, file_name), skiprows=1)

30 t = data[:, -1]
psi = data[:, 6]
cutoff_frequency = 30 # Set your desired cutoff frequency in Hz
T = t[1] - t[0] # Sampling interval
35 sampling_rate = 1 / T # Calculate the sampling rate from the t array

signal = lowpass_filter(psi, cutoff_frequency, sampling_rate)

N = len(t)
40 yf = fft(signal)
xf = fftfreq(N, T)[:N // 2]

# Identify the peak frequency
peak_frequency = np.abs(xf[np.argmax(np.abs(yf[:N // 2]))])
45 print(f"Estimated Frequency (Hz): {peak_frequency:.4f}")

# Calculate the natural frequency from the estimated peak frequency
omega_n_estimated = 2 * np.pi * peak_frequency
50 print(f"Estimated Natural Frequency (rad/s): {omega_n_estimated:.4f}")
```

```
# Step 2: Extract the Envelope
55 # Using Hilbert transform to extract the analytic signal
analytic_signal = hilbert(signal)
envelope = np.abs(analytic_signal)

# Step 3: Fit the Envelope to a Decay Model
60 # Define an exponential decay function
def exponential_decay(t, A, b):
    return A * np.exp(-b * t)

# Fit the envelope data to the exponential decay model
65 initial_guess = [max(signal), signal[-1]]
params, covariance = curve_fit(exponential_decay, t, envelope, p0=initial_guess)

# Extract the fitted parameters
A_fit, b_fit = params
70

# Generate the fitted envelope using the fitted parameters
fitted_envelope = exponential_decay(t, A_fit, b_fit)

# Plot the envelope and its fit
75 plt.figure(figsize=(12, 6))
plt.plot(t, signal, label='Signal', color='blue')
plt.plot(t, envelope, label='Envelope', color='red')
plt.plot(t, fitted_envelope, label='Fitted Envelope', color='green', linestyle='--')

plt.title('Envelope Fitting', fontsize = 18)
80 plt.xlabel('Time (s)', fontsize = 18)
plt.ylabel('Amplitude', fontsize = 18)
plt.legend(fontsize = 18)
plt.tick_params(axis='both', which='major', labelsize=12) # Increase font size of
axis scale numbers
plt.show()
85

# Step 4: Analyze the Decay
print(f"Fitted Decay Constant (b): {b_fit:.4f}")
print(f"Fitted Amplitude (A): {A_fit:.4f}")

90 # Interpretation of the decay constant
decay_time = 1 / b_fit
print(f"Decay Time (Time constant tau = 1/b): {decay_time:.4f} s")
#print(f"Average function value : {avg:.4f} degrees")

95 # Calculate Damping Ratio
zeta = b_fit / (2 * omega_n_estimated)
print(f"Damping Ratio : {zeta:.4f}")
```