

# POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale  
Orientamento Spazio



**Politecnico  
di Torino**

Tesi di Laurea Magistrale

**Analisi e ottimizzazione indiretta di traiettorie per  
missioni spaziali verso asteroidi Near-Earth**

**Relatore**  
Prof. Lorenzo Casalino

**Candidato**  
Aurora Chetto

Sessione di Laurea Ottobre 2024



# Sommario

L'analisi e l'ottimizzazione di traiettorie verso asteroidi Near-Earth sono fondamentali per le missioni spaziali di interesse scientifico ed economico con potenziali applicazioni nell'estrazione di risorse minerarie, di difesa planetaria e di studio della genesi del Sistema Solare. In questo panorama la missione ANIME (*Asteroid Nodal Intersection Multiple Encounters*), proposta all'Agenzia Spaziale Italiana, si pone l'obiettivo di effettuare il fly-by di due asteroidi, classificati come potenzialmente pericolosi per la Terra, e di procedere con il rendez-vous dell'asteroide 2000 SG344.

Il lavoro presentato nella tesi consiste nell'ottimizzazione della traiettoria interplanetaria, in funzione della durata e della data di partenza, verso tre asteroidi alternativi a quelli già inclusi nel progetto ANIME. Gli asteroidi interessati dall'analisi sono 2020 OM6, 2020 PJ6 e 2023 HB7; essi sono corpi di particolare interesse, di piccole dimensioni e che non costituiscono un potenziale pericolo per il pianeta.

La tesi si sviluppa in tre sezioni, la prima delle quali riporta i richiami teorici in materia di astrodinamica e propulsione elettrica, utili alla comprensione del problema, e una breve ricerca generale sulle caratteristiche principali degli asteroidi, in modo particolare di quelli nella regione terrestre; la seconda sezione espone le nozioni teoriche relative all'ottimizzazione di traiettorie spaziali attraverso metodi indiretti basati sulla teoria del controllo ottimale. La terza ed ultima sezione presenta il lavoro svolto in tutte le sue fasi con annessi i risultati ottenuti.

# Ringraziamenti

Un ringraziamento sentito al relatore prof. Lorenzo Casalino per il suo tempo, la disponibilità, le conoscenze e i consigli che ha fornito per la realizzazione e la scrittura della tesi.

Tutto questo non avrebbe avuto un inizio, e neanche una fine, se zia Marinella non avesse creduto e investito su di me fin dal principio.

Il grazie più profondo e sincero va a lei e tutta la mia Famiglia, grande e numerosa che con pensiero, motivazione e affetto ha sostenuto il mio percorso universitario giorno dopo giorno.

Non posso nominare tutti ma se in questo momento stai leggendo, hai fatto parte del percorso e del sostegno che ho ricevuto, per questo ti ringrazio.

Un pensiero e ringraziamento speciale a nonna Iuccia, i miei genitori, Elisa, Sara, i nipotini e Matteo per gli insegnamenti, l'unità e l'amore incondizionato.



# Indice

<b>Elenco delle figure</b>	v
<b>Elenco delle tabelle</b>	vii
<b>1 Introduzione</b>	1
1.1 Obiettivo della tesi . . . . .	1
<b>2 Fondamenti di astrodinamica</b>	3
2.1 Leggi fondamentali dell'astrodinamica . . . . .	3
2.1.1 Legge di gravitazione universale . . . . .	4
2.2 Problema degli N-corpi . . . . .	4
2.3 Problema dei due corpi . . . . .	5
2.3.1 Costanti del moto . . . . .	6
2.3.2 Equazione della traiettoria . . . . .	7
2.3.3 Velocità caratteristiche . . . . .	10
2.4 Sistemi di riferimento . . . . .	11
2.4.1 Sistema eliocentrico - eclittico . . . . .	11
2.4.2 Sistema geocentrico equatoriale . . . . .	12
2.4.3 Sistema perifocale . . . . .	12
2.5 Elementi orbitali classici . . . . .	14
2.6 Traiettorie interplanetarie . . . . .	15
2.6.1 Metodo delle patched-conics . . . . .	15
2.6.2 Fase eliocentrica . . . . .	15
<b>3 Richiami di propulsione elettrica</b>	18
3.1 Introduzione alla propulsione spaziale . . . . .	18
3.1.1 Impulso specifico . . . . .	19
3.2 Propulsione elettrica . . . . .	19
3.2.1 Manovre con propulsione elettrica . . . . .	20
3.2.2 Propulsione elettrostatica . . . . .	22
<b>4 Near Earth Asteroids</b>	24
4.1 Introduzione e classificazione generale . . . . .	24
4.1.1 Classi di composizione . . . . .	24

4.2	Near Earth Objects . . . . .	25
4.2.1	Classificazione dei NEA . . . . .	26
4.2.2	Interesse scientifico ed economico . . . . .	28
4.3	Caso di studio . . . . .	29
4.3.1	2020 OM6 . . . . .	29
4.3.2	2020 PJ6 . . . . .	30
4.3.3	2023 HB7 . . . . .	31
<b>5</b>	<b>Ottimizzazione indiretta di traiettorie spaziali</b>	<b>33</b>
5.1	Obiettivi di missione . . . . .	33
5.2	Approcci e metodi risolutivi . . . . .	34
5.3	Teoria del controllo ottimale . . . . .	35
5.3.1	Problema differenziale ai limiti . . . . .	38
5.4	Definizione del modello matematico . . . . .	40
5.4.1	Equazioni del moto . . . . .	40
5.4.2	Controlli ottimali . . . . .	41
5.4.3	Equazioni in coordinate sferiche . . . . .	41
5.4.4	Condizioni al contorno . . . . .	43
<b>6</b>	<b>Analisi delle traiettorie</b>	<b>45</b>
6.1	Ipotesi semplificative . . . . .	45
6.2	Variabili e costanti del problema . . . . .	45
6.3	Conversione dei parametri e adimensionalizzazione . . . . .	46
6.4	Parametri iniziali . . . . .	46
<b>7</b>	<b>Risultati</b>	<b>48</b>
7.1	2020 OM6 . . . . .	48
7.2	2020 PJ6 . . . . .	55
7.3	2023 HB7 . . . . .	63
<b>8</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>70</b>
8.1	Limiti del caso di studio . . . . .	71

# Elenco delle figure

2.1	Problema degli n-corpi [10]	4
2.2	Problema dei due corpi [6]	5
2.3	Flight-path angle [27]	8
2.4	Le sezioni coniche [21]	8
2.5	La geometria dell'ellisse [10]	9
2.6	Sistema di riferimento eliocentrico-eclittico [27]	12
2.7	Sistema di riferimento geocentrico-equatoriale [27]	13
2.8	Sistema perifocale [27]	13
2.9	Elementi orbitali classici [28]	14
2.10	La trasferta di Hohmann [27]	16
2.11	Manovra di cambio di piano [27]	17
3.1	Le componenti della spinta [11]	21
3.2	Schema del propulsore a ioni [26]	23
4.1	Posizione di asteroidi e comete numerati, al 1 Gennaio 2018 [17]	25
4.2	Orbita 2013 WA44 - Classe Amor (in alto a sinistra), Orbita 2021 JG6 - Classe Apollo (in alto a destra), Orbita 2000 SG344 - Classe Aten (in basso a sinistra), Orbita 163693 Atira (2003 CP20) - Classe Atira (in basso a destra) [19]	27
4.3	Orbita 2020 OM6 [19]	29
4.4	Orbita 2020 PJ6 [19]	30
4.5	Orbita 2023 HB7 [19]	31
5.1	Algoritmo metodo di simple-shooting [25]	34
5.2	Sistema di riferimento inerziale e coordinate sferiche [8]	42
7.1	Andamento di $\Delta\theta$ al $t_0$ per l'asteroide 2020 OM6	48
7.2	Andamento della massa finale al variare di $t_0$ per l'asteroide 2020 OM6	49
7.3	Traiettoria nel piano al $t_0 = 193$	50
7.4	Traiettoria nel piano al $t_0 = 195$	50
7.5	Traiettoria nel piano al $t_0 = 198$	51
7.6	Raggio al perielio e afelio al $t_0 = 193$ per l'asteroide 2020 OM6	51
7.7	Raggio al perielio e afelio al $t_0 = 195$ per l'asteroide 2020 OM6	52

7.8	Raggio al perielio e afelio al $t_0 = 198$ per l'asteroide 2020 OM6 . . . . .	52
7.9	Switching Function al $t_0 = 193$ . . . . .	53
7.10	$\Delta V$ in funzione della massa iniziale e del $t_0$ . . . . .	53
7.11	Traiettoria nel piano al $t_0 = 193$ e durata=18 . . . . .	54
7.12	Raggio al perielio e afelio al $t_0 = 193$ e durata=18 per l'asteroide 2020 OM6	54
7.13	Andamento di $\Delta\theta$ al $t_0$ per l'asteroide 2020 PJ6 . . . . .	55
7.14	Andamento della massa finale al variare di $t_0$ per l'asteroide 2020 PJ6 . .	56
7.15	Traiettoria nel piano al $t_0 = 227$ . . . . .	56
7.16	Traiettoria nel piano al $t_0 = 228$ . . . . .	57
7.17	Raggio al perielio e afelio al $t_0 = 227$ per l'asteroide 2020 PJ6 . . . . .	57
7.18	Raggio al perielio e afelio al $t_0 = 228$ per l'asteroide 2020 PJ6 . . . . .	58
7.19	Raggio al perielio e afelio al $t_0 = 225$ per l'asteroide 2020 PJ6 . . . . .	58
7.20	Raggio al perielio e afelio al $t_0 = 229$ per l'asteroide 2020 PJ6 . . . . .	59
7.21	Andamento del $\Delta V$ al variare della massa iniziale per diversi $t_0$ - 2020 PJ6	59
7.22	Andamento del $\Delta V$ al diminuire della durata e di $d$ - 2020 PJ6 . . . . .	60
7.23	Traiettoria nel piano al $t_0 = 228$ . . . . .	61
7.24	Raggio al perielio e afelio al $t_0 = 228$ per l'asteroide 2020 PJ6 . . . . .	61
7.25	Switching Function al $t_0 = 228$ e durata = 7 . . . . .	62
7.26	Andamento di $\Delta\theta$ al $t_0$ per l'asteroide 2023 HB7 . . . . .	63
7.27	Andamento della massa finale al variare di $t_0$ per l'asteroide 2023 HB7 . .	64
7.28	Traiettoria nel piano al $t_0 = 228$ . . . . .	64
7.29	Traiettoria nel piano al $t_0 = 229$ . . . . .	65
7.30	Raggio al perielio e afelio al $t_0 = 228$ per l'asteroide 2023 HB7 . . . . .	65
7.31	Raggio al perielio e afelio al $t_0 = 229$ per l'asteroide 2023 HB7 . . . . .	66
7.32	Andamento del $\Delta V$ al variare della massa iniziale per diversi $t_0$ - 2023 HB7	66
7.33	Andamento del $\Delta V$ al diminuire della durata e di $d$ - 2023 HB7 . . . . .	67
7.34	Traiettoria nel piano al $t_0 = 228$ . . . . .	68
7.35	Raggio al perielio e afelio al $t_0 = 228$ per l'asteroide 2023 HB7 . . . . .	68
7.36	Switching Function al $t_0 = 228$ e durata = 13 . . . . .	69

# Elenco delle tabelle

7.1	Valori di $\Delta\theta$ nella finestra di lancio considerata per l'asteroide 2020 OM6	49
7.2	Valori di $\Delta\theta$ nella finestra di lancio considerata per l'asteroide 2020 PJ6 .	55
7.3	Soluzioni significative - 2020 PJ6 . . . . .	62
7.4	Valori di $\Delta\theta$ nella finestra di lancio considerata per l'asteroide 2023 HB7 .	63
7.5	Soluzioni significative - 2023 HB7 . . . . .	69



# Capitolo 1

## Introduzione

L'essere umano trova da sempre affascinante il mondo antico e misterioso dei corpi celesti, tra essi gli asteroidi sono in grado di stimolare la curiosità umana a tal punto da diventare protagonisti del futuro dell'esplorazione spaziale. Le informazioni che racchiudono possono fare luce sul passato cosmico e i processi che hanno dato origine al Sistema Solare e ai suoi pianeti. I minerali di cui sono composti, sono risorse extraterrestri che nel futuro possono sostenere l'attività umana.

Alla luce dei recenti incidenti, dei quali il più noto ha coinvolto la città russa di Chelyabinsk, gli asteroidi sono diventati oggetto di attenzione pubblica sul delicato tema della difesa planetaria e del monitoraggio dei corpi celesti più vicini alla Terra.

All'interno del panorama descritto, il progetto ANIME si propone di approfondire l'esplorazione e lo studio dettagliato della composizione degli asteroidi, con l'obiettivo di ottenere risultati significativi sia sul fronte scientifico che su quello della difesa planetaria. I target per la missione sono stati selezionati perchè, le loro caratteristiche dimensionali e superficiali, rispecchiano gli obiettivi primari del progetto. Il satellite effettuerà il fly-by degli asteroidi 2006 HZ51 e 2004 QD14 nei mesi di giugno e dicembre 2027 e, in settembre 2028 proseguirà con il rendez-vous dell'asteroide 2000 SG344, impiegando i successivi due mesi in operazioni di analisi. La missione avrà una durata totale di circa 24 mesi. Il satellite progettato per compiere la missione è un CubeSat 12U avente massa iniziale pari a 21 kg. Il suo sottosistema propulsivo presenta il propulsore a ioni Busek BIT-3 che produce una spinta nominale di 1 mN con un impulso specifico di 2100 s [24].

### 1.1 Obiettivo della tesi

Sulla base del progetto ANIME, le analisi svolte nella tesi sono finalizzate alla ricerca di asteroidi alternativi a quelli già selezionati e alla proposta di finestre di lancio differenti a quella nominale. I tre nuovi target sono: 2020 OM6, 2020 PJ6 e 2023 HB7; oltre ad essere classificabili come NEA ("Near Earth Asteroids"), essi hanno in comune un ridotto diametro.

Le analisi delle traiettorie verso gli asteroidi alternativi sono state effettuate con un software eseguibile che utilizza il linguaggio FORTRAN e che implementa un algoritmo

di ottimizzazione indiretta. Il problema di ottimizzazione ha soluzione in una legge di controllo che permette di massimizzare, o minimizzare, un determinato indice di prestazione; nel caso di studio e, come nella maggior parte dei problemi di ambito aerospaziale, tale indice è rappresentato dalla massa finale del satellite, che viene massimizzata, oppure dal  $\Delta V$  che, invece, viene minimizzato. Il metodo indiretto di *multiple-shooting*, attuato dal codice, si basa sulla teoria del controllo ottimale che permette la definizione del problema differenziale ai limiti, la cui risoluzione consiste nella ricerca dei valori iniziali che soddisfano le condizioni al contorno imposte e di ottimo.

# Capitolo 2

## Fondamenti di astrodinamica

### 2.1 Leggi fondamentali dell'astrodinamica

La nascita dell'astrodinamica moderna è datata al 1609, anno in cui Johannes Kepler pubblicò le prime due leggi del moto dei pianeti intorno al Sole, la terza legge verrà pubblicata nel 1619. Kepler enuncia che:

*Prima legge:* "L'orbita di ogni pianeta è un'ellisse ed il Sole occupa uno dei due fuochi".

*Seconda legge:* "La congiungente tra il pianeta ed il Sole spazza aree uguali in tempi uguali".

*Terza legge:* "Il quadrato del periodo orbitale di un pianeta è proporzionale al cubo della sua distanza media dal Sole".

A completamento delle leggi di Keplero, nel 1686 Isaac Newton pubblica le leggi fondamentali del moto nel primo libro dei *Principia*. Tali leggi motivano il moto dei pianeti enunciando che:

*Prima legge di Newton:* "In assenza di forze che agiscono su di esso, un corpo rimane in stato di quiete o in moto rettilineo uniforme".

La conseguenza diretta di tale legge è la necessità di identificare un sistema di riferimento inerziale rispetto al quale descrivere il moto assoluto del corpo.

*Seconda legge di Newton:* "La variazione della quantità di moto di un corpo è proporzionale alla forza impressa ed ha uguale direzione".

Tale legge si può esprimere matematicamente come

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\vec{a}$$

*Terza legge di Newton:* "Per ogni azione esiste una reazione uguale e contraria".

### 2.1.1 Legge di gravitazione universale

Nella stessa pubblicazione, Isaac Newton enuncia le Legge di Gravitazione Universale secondo la quale due corpi di masse  $M$  ed  $m$  esercitano l'uno sull'altro una forza attrattiva che agisce lungo la congiungente dei due corpi ed ha modulo direttamente proporzionale al prodotto delle due masse ed inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza.

$$\vec{F}_g = -G \frac{mM}{R^3} \vec{R} \quad (2.1)$$

dove  $G = 6.673 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg s^2}$  è la *costante di gravitazione universale*.

## 2.2 Problema degli N-corpi

Il problema, che vuole determinare il moto nel caso generale in cui  $n$ -corpi aventi masse confrontabili si muovono in uno spazio vuoto sotto l'azione della mutua attrazione gravitazione, è chiamato *problema degli N-corpi*. In un sistema di riferimento inerziale

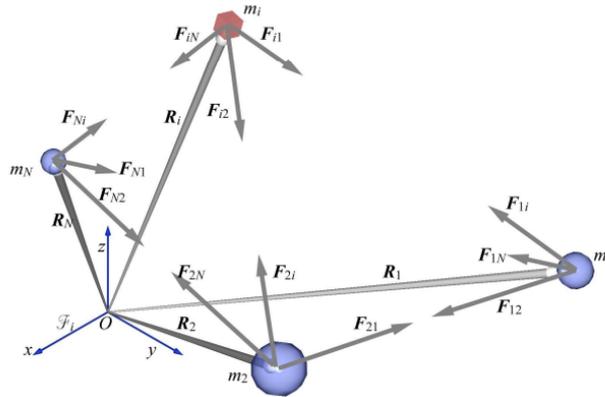


Figura 2.1. Problema degli n-corpi [10]

rispetto alle stelle fisse rappresentato in Figura 2.1, ipotizzando di trascurare altre forze di disturbo esterno e considerando i corpi come masse puntiformi, scriviamo la forza agente sulla massa  $i$ -esima come

$$\vec{F}_{g_i} = -Gm_i \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_j}{R_{ij}^3} \vec{R}_{ij} \quad (2.2)$$

dove il vettore  $\vec{R}_{ij} = \vec{R}_i - \vec{R}_j$  è la distanza relativa tra la massa i-esima e j-esima. Grazie alla seconda legge di Newton possiamo scrivere la seguente uguaglianza

$$-G \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_j}{R_{ij}^3} \vec{R}_{ij} = \ddot{\vec{R}}_i \quad (2.3)$$

in cui è stato possibile semplificare la massa del corpo i-esimo. Esso è un sistema di n equazioni e n incognite, cioè le distanze dei corpi dall'origine del sistema di riferimento. In generale, il problema degli n-corpi non ammette soluzione analitica se si considera un valore di  $n > 2$ . Per poter risolvere analiticamente tale problema, si deve considerare la presenza degli altri corpi come una forza di disturbo e ridurre il numero dei corpi a  $n = 2$ ; tale problema è chiamato *problema dei due corpi*.

## 2.3 Problema dei due corpi

Si considera un sistema composto da due corpi di masse  $m_1$  e  $m_2$ , con  $m_1 \gg m_2$ , sottoposti solo alla forza di attrazione gravitazionale. I corpi si assumono perfettamente sferici e simmetrici, con l'intera massa concentrata nel centro di massa.

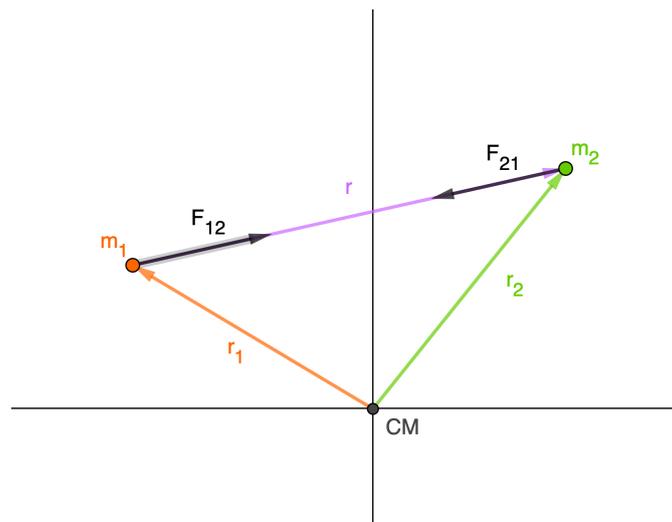


Figura 2.2. Problema dei due corpi [6]

La posizione relativa tra le due masse è data dal vettore

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

È di interesse il moto relativo tra i due corpi per cui si definiscono anche la velocità e l'accelerazione relativa come

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_2 - \dot{\vec{r}}_1$$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1$$

Si scrive la forza agente su entrambe le masse grazie alla Legge di Gravitazione Universale e la seconda legge di Newton come

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r} \quad (2.4)$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r} \quad (2.5)$$

Si semplificano le masse presenti in entrambi i membri delle equazioni e si esegue la sottrazione della seconda dalla prima ottenendo

$$\ddot{\vec{r}} = -G \frac{m_1 + m_2}{r^3} \vec{r} \quad (2.6)$$

È possibile semplificare ulteriormente l'equazione del moto sfruttando le ipotesi del problema dei due corpi. In particolare, si va a definire  $m = m_2$  il corpo secondario e  $M = m_1$  il corpo primario e centrale. Vista l'ipotesi  $M \gg m$ , si può concludere che

$$M + m \simeq M; \quad G(M + m) \simeq GM$$

Si definisce il *parametro gravitazionale*  $\mu = GM$  relativo al corpo principale. L'equazione del moto relativo nel problema dei due corpi è

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3} \vec{r} = 0 \quad (2.7)$$

Dall'equazione 2.7 si può concludere che l'accelerazione, che agisce sul corpo secondario, è tutta radiale. È utile osservare che il moto relativo, a seguito delle semplificazioni, è indipendente dalla massa del corpo secondario.

### 2.3.1 Costanti del moto

Lo studio della cinematica nel problema dei due corpi permette di evidenziare due grandezze caratteristiche dell'orbita chiamate *costanti del moto* per via della loro conservazione. Esse sono l'energia meccanica specifica  $\varepsilon$  e il momento angolare specifico  $\vec{h}$ .

#### Conservazione dell'energia meccanica specifica

Le conoscenze pregresse di fisica e matematica permettono di definire il campo gravitazionale come conservativo, questo significa che un oggetto, soggetto solo alla forza gravitazionale, non può perdere o acquistare energia meccanica bensì può variare solamente la forma dell'energia da cinetica a potenziale e viceversa.

Moltiplicando scalarmente l'equazione del moto per il vettore  $\dot{\vec{r}}$  si ricava l'equazione

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} \right) = 0$$

con cui si conclude che il termine,

$$\varepsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} \quad (2.8)$$

che rappresenta la somma dell'energia cinetica e potenziale per unità di massa di un corpo, rimane costante lungo la sua orbita.

### Conservazione del momento angolare specifico

La forza gravitazionale è sempre diretta radialmente verso il centro del corpo principale, per cui si prevede che il momento angolare del corpo secondario, non soggetto ad una componente tangenziale della forza, si mantenga costante lungo la sua orbita. Matematicamente si può dimostrare quanto sopra detto, svolgendo il prodotto vettoriale di entrambi i membri dell'equazione del moto 2.7 e ottenendo

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = 0$$

con cui si conclude che il termine

$$\vec{h} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{r} \times \vec{v}$$

è costante e viene definito momento angolare specifico. Per definizione, il momento angolare specifico è perpendicolare al piano orbitale e la sua conservazione implica che la traiettoria percorsa dal corpo secondario sia piana. Il modulo del momento angolare specifico è

$$h = rv \sin \gamma = rv \cos \phi$$

dove  $\gamma$  è l'angolo di zenit mentre  $\phi$ , complementare di  $\gamma$ , è il *flight-path angle* che rappresenta l'angolo tra la velocità e l'orizzonte locale come rappresentato in Figura 2.3.

### 2.3.2 Equazione della traiettoria

L'integrazione dell'equazione 2.7 e successive semplificazioni matematiche, portano alla scrittura dell'equazione della traiettoria

$$r = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1 + \frac{B}{\mu} \cos \nu} \quad (2.9)$$

L'angolo  $\nu$  è l'*anomalia vera* cioè l'angolo tra la costante vettoriale  $\vec{B}$ , in direzione del periastro, e il vettore  $\vec{r}$ ; tale parametro misura la posizione radiale del corpo secondario rispetto al periastro. L'equazione 2.9 è comparabile all'equazione di una sezione conica, scritta in coordinate polari, con l'origine coincidente con uno dei due fuochi, e  $\nu$  definito come l'angolo tra  $\vec{r}$  e il punto più vicino al fuoco.

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \nu} \quad (2.10)$$

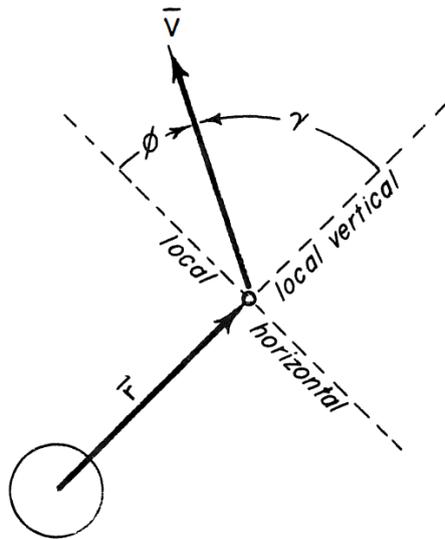


Figura 2.3. Flight-path angle [27]

La costante  $e$ , chiamata *eccentricità*, determina il tipo di sezione conica descritta dall'equazione mentre il *semi-latus rectum*  $p$  è una costante geometrica legata al modulo del momento angolare dalla relazione  $p = h^2/\mu$ . La famiglia delle sezioni coniche include diverse curve ricavate dall'intersezione di un piano e di un cono circolare retto come rappresentato in Figura 2.4.

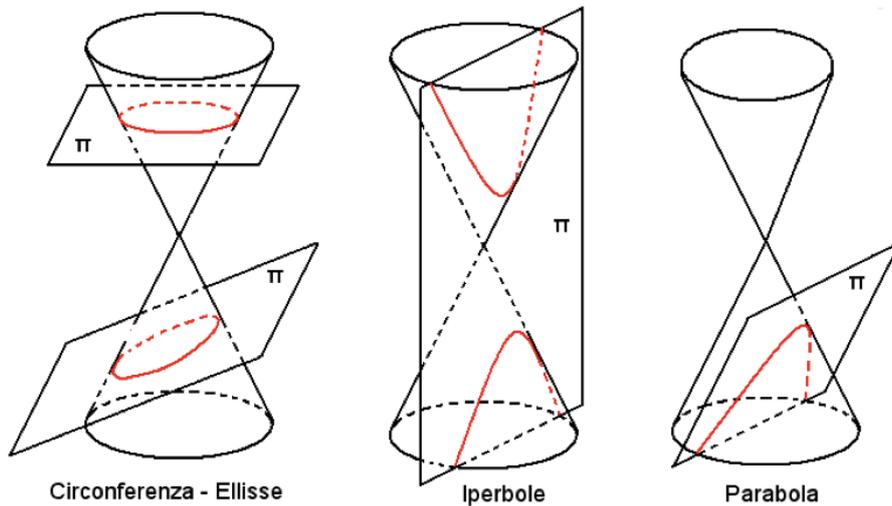


Figura 2.4. Le sezioni coniche [21]

Se il piano interseca una sola metà del cono si ottiene un'ellisse di cui il *cerchio* è un caso particolare ottenuto intersecando il piano normalmente all'asse del cono. Quando il piano è parallelo alle rette generatrici del cono la sezione ottenuta è una *parabola* ed infine, se il piano interseca entrambe le metà del cono si ottengono i due rami dell'*iperbole*. Si concentra l'attenzione sull'ellisse, riportata in Figura 2.5, per definirne i parametri geometrici e le relazioni tra essi.

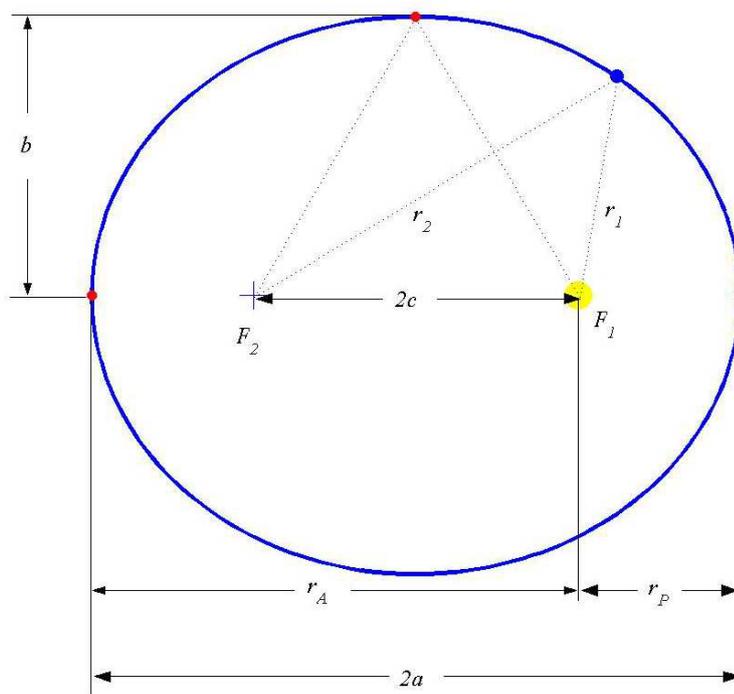


Figura 2.5. La geometria dell'ellisse [10]

Un'ellisse può essere definita come il luogo dei punti in cui la somma delle distanze tra il punto e i due fuochi è costante e pari all'asse maggiore.

$$r_1 + r_2 = 2a$$

L'eccentricità dell'ellisse può essere definita come il rapporto tra la *semidistanza tra i due fuochi*  $c$  e il *semiasse maggiore*  $a$ .

$$e = \frac{c}{a}$$

Dalla definizione di sezione conica è possibile definire anche il semi-latus rectum come

$$p = a(1 - e^2)$$

Il punto più vicino al fuoco di riferimento, in astrodinamica, è chiamato *periastro* ed ha distanza dal fuoco pari a  $r_p = a(1 - e)$ , mentre il punto più lontano è chiamato *apoaastro* ed ha una distanza  $r_a = a(1 + e)$ .

La dimensione e l'energia meccanica specifica di un'orbita sono legate dalla seguente relazione univoca

$$\varepsilon = -\frac{\mu}{2a} \quad (2.11)$$

tale relazione è valida per tutti i tipi di orbite coniche. Il semiasse maggiore di un'ellisse, o un cerchio, è un valore positivo perciò l'energia meccanica specifica di un satellite su un'orbita chiusa è negativa. Il satellite che percorre un'orbita parabolica ha energia meccanica specifica nulla poichè il semiasse maggiore di tale curva è infinito. Infine, un'orbita iperbolica ha semiasse maggiore minore di zero e di conseguenza ha un'energia meccanica specifica positiva.

### 2.3.3 Velocità caratteristiche

La velocità necessaria al corpo secondario per rimanere su un'orbita circolare di raggio  $r$ , attorno al corpo principale, è chiamata *velocità circolare*  $v_c$  ed è possibile ricavarla dalla definizione di energia meccanica specifica. Un'orbita circolare ha raggio  $r = r_c$  costante per cui l'equazione 2.8 diventa

$$\varepsilon = \frac{v_c^2}{2} - \frac{\mu}{r_c} = -\frac{\mu}{2r_c}$$

Isolando  $v_c$  ricaviamo la velocità circolare

$$v_c = \sqrt{\frac{\mu}{r_c}} \quad (2.12)$$

È possibile osservare che, all'aumentare del raggio, la velocità necessaria al corpo secondario per mantenere l'orbita diminuisce.

La velocità minima che permette al corpo secondario, posizionato alla distanza iniziale  $r$ , di evadere dalla sfera di influenza del corpo primario con velocità relativa nulla e su una traiettoria parabolica, è chiamata *velocità di fuga*  $v_e$ . La parabola è caratterizzata da un semiasse maggiore  $a = \infty$  per cui l'equazione 2.8 si può riscrivere come

$$\varepsilon = \frac{v_e^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \frac{v_e^2}{2} - v_c^2 = \frac{0}{2} - \frac{\mu}{r_\infty} = 0$$

Isolando  $v_e$  si ricava la velocità di fuga

$$v_e = \sqrt{2}v_c \quad (2.13)$$

È utile osservare che la velocità relativa al corpo primario all'uscita dalla sfera di influenza, chiamata *eccesso iperbolico di velocità*, è nulla, ma la velocità del corpo secondario rispetto al Sole coincide con quella alla quale il corpo primario ruota rispetto alla stella.

L'eccesso iperbolico di velocità  $v_\infty$  è quindi la velocità residua del corpo secondario all'uscita dalla sfera di influenza e si ricava dall'equazione 2.11

$$\varepsilon = -\frac{\mu}{2a} = \frac{v_\infty^2}{2} - \frac{\mu}{\infty}$$

$$\frac{v_\infty^2}{2} = -\frac{\mu}{2a}$$

da cui si ricava

$$v_\infty = \sqrt{-\frac{\mu}{a}} \quad (2.14)$$

Se il target della missione è esterno al pianeta di partenza, l'eccesso iperbolico di velocità dovrà essere positivo e con direzione concorde alla velocità circolare del pianeta di partenza intorno al Sole, al contrario, se il target è interno, la  $v_\infty$  dovrà avere direzione discorde.

### Sfera di influenza

In un sistema di riferimento non rotazionale in cui sono presenti il satellite, un corpo di massa  $m_2$  e un secondo corpo principale di massa  $m_1$ , la sfera di influenza del corpo di massa  $m_2$  ha raggio pari a

$$r = \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{\frac{2}{5}} r_{12} \quad (2.15)$$

dove  $r_{12}$  è la distanza tra le due masse. Tale raggio si ricava impostando l'equivalenza tra le forze di attrazione gravitazionale dei corpi di massa  $m_2$  e  $m_1$ . La sfera di influenza terrestre rispetto al Sole ha raggio pari a  $0.94 \times 10^6 \text{ km}$ .

## 2.4 Sistemi di riferimento

Per descrivere e rappresentare graficamente la traiettoria di un corpo è indispensabile indicare il sistema di riferimento. Esso viene definito da quattro elementi principali: l'origine del sistema, il piano fondamentale, la direzione principale e il verso della normale al piano fondamentale.

I sistemi di riferimento presentati di seguito sono considerati inerziali, poichè le accelerazioni che subiscono sono trascurabili.

### 2.4.1 Sistema eliocentrico - eclittico

L'origine di tale sistema è il centro del Sole e il piano fondamentale  $X_E, Y_E$  corrisponde al piano in cui giace l'orbita terrestre, chiamato piano dell'eclittica. La direzione dell'asse  $X_E$  si ottiene dall'intersezione tra il piano dell'eclittica e il piano equatoriale all'equinozio di primavera. Il verso positivo di tale asse punta verso la costellazione dell'Ariete. L'asse  $Z_E$  è normale al piano fondamentale ed ha verso positivo che punta all'emisfero che contiene Polaris. La rappresentazione del sistema di riferimento eliocentrico è presente in Figura 2.6

Questo sistema di riferimento è considerato inerziale per missioni di breve durata poichè è presente una perturbazione causata dalle forze gravitazionali di Luna e Sole che attraggono in modo particolare i poli geografici della Terra. Questa attrazione dà vita a due fenomeni, la precessione dell'asse terrestre con periodo di 26000 anni con conseguente precessione degli assi degli equinozi, e la nutazione, cioè un'oscillazione attorno al moto

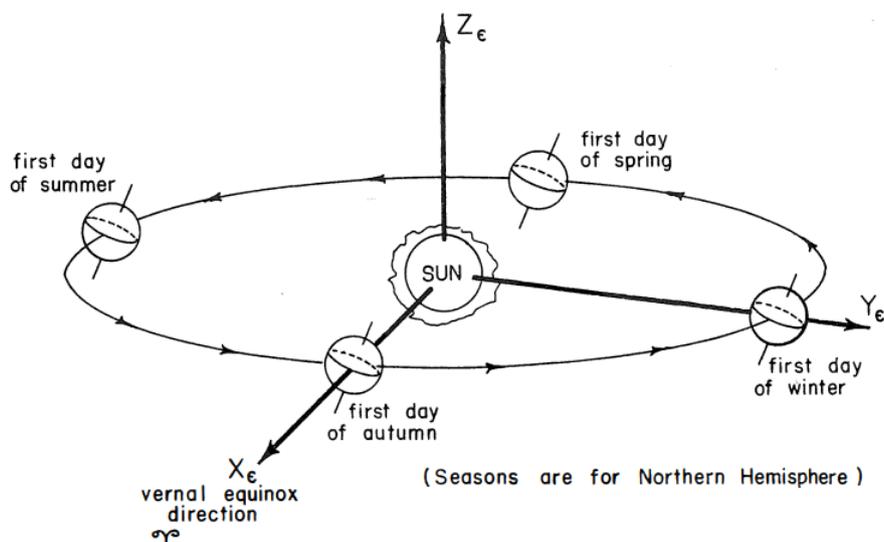


Figura 2.6. Sistema di riferimento eliocentrico-eclittico [27]

di precessione caratterizzato da un periodo di 18.6 anni.

Questi fenomeni portano a due diverse definizioni temporali: l'anno **sidereo** e l'anno **solare**. Il primo ha una durata di 365 giorni 6 ore 9 minuti e 9 secondi e si calcola considerando un angolo spazzato di  $360^\circ$  rispetto alle stelle fisse. L'anno solare ha una durata di 365 giorni 5 ore 48 minuti e 46 secondi che corrisponde ad un angolo spazzato di  $358.10^\circ$ .

### 2.4.2 Sistema geocentrico equatoriale

Il sistema geocentrico equatoriale, in Figura 2.7, chiamato anche con la sigla ECI (*Earth-Centered Inertial*), ha origine nel centro di massa della Terra, il piano fondamentale  $X, Y$  corrisponde al piano equatoriale e ha verso positivo dell'asse  $Z$  che punta verso il polo Nord. Il versore  $\hat{I}$  ha direzione dell'equinozio vernale e punta verso la costellazione di Ariete.

Questo sistema di riferimento è fisso rispetto alle stelle fisse per cui non è solidale alla Terra e di conseguenza è inerziale.

### 2.4.3 Sistema perifocale

Tale sistema è utile per la descrizione del moto dei satelliti poichè la sua origine coincide con il centro del corpo principale e il piano fondamentale corrisponde al piano su cui giace l'orbita del corpo più piccolo. L'asse con versore  $\hat{P}$  indica la direzione del periastro, il versore  $\hat{Q}$  indica la direzione del semilatus rectum ed infine  $\hat{W}$  è normale al piano dell'orbita e ha verso dipendente dal moto progrado o retrogrado del corpo secondario. Il sistema di riferimento perifocale è rappresentato in Figura 2.8.

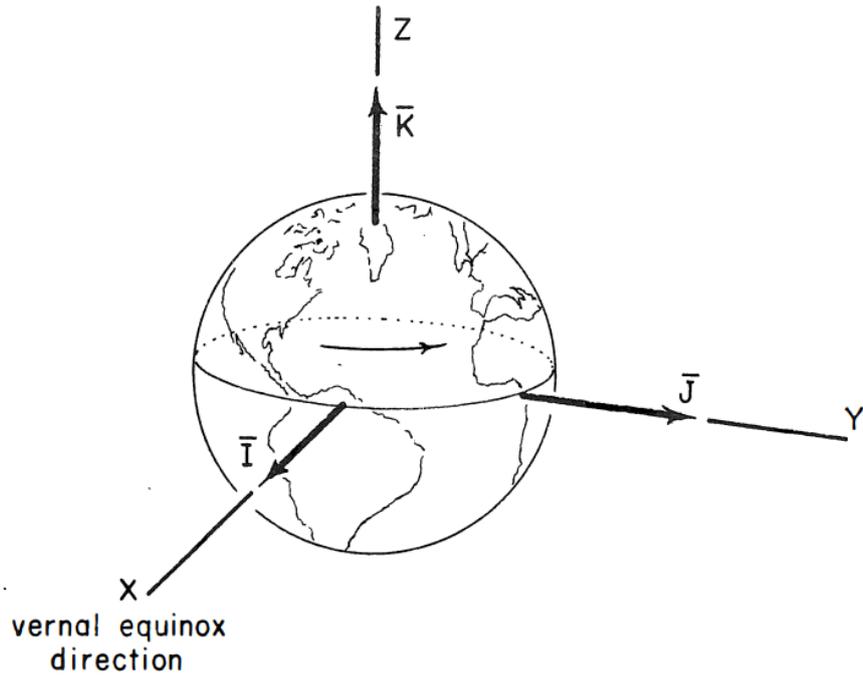


Figura 2.7. Sistema di riferimento geocentrico-equatoriale [27]

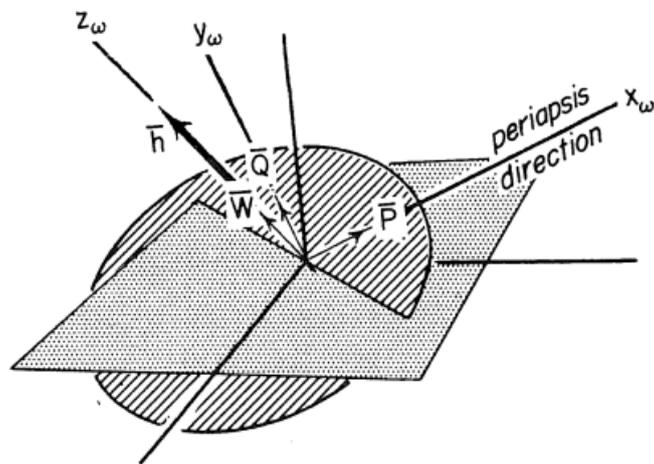


Figura 2.8. Sistema perifocale [27]

## 2.5 Elementi orbitali classici

La dimensione, la forma e l'orientamento di un'orbita sono descritti in modo esaustivo da cinque quantità indipendenti chiamati *elementi orbitali*, rappresentati graficamente in Figura 2.9. Ad essi si aggiunge un sesto parametro in grado di definire la posizione del satellite lungo l'orbita ad un dato tempo.

- Nel piano perifocale:
  - $a$ , **semiasse maggiore**: è una costante che indica la dimensione dell'orbita;
  - $e$ , **eccentricità**: è un valore costante che caratterizza la forma dell'orbita;
  - $\omega$ , **argomento del periastro**: è l'angolo, nel piano perifocale, collocato tra il nodo ascendente e il periastro. Il suo segno è concorde con il verso di percorrenza dell'orbita;
  - $\nu$ , **anomalia vera**: è l'angolo, nel piano dell'orbita, tra il periastro e la posizione del satellite all'epoca;
- Fuori dal piano:
  - $i$ , **inclinazione**: è l'angolo tra il versore  $\hat{K}$ ; e il momento angolare  $\vec{h}$ ;
  - $\Omega$ , **longitudine del nodo ascendente** (RAAN); è l'angolo tra il versore  $\hat{I}$  e la linea dei nodi, nel piano equatoriale.

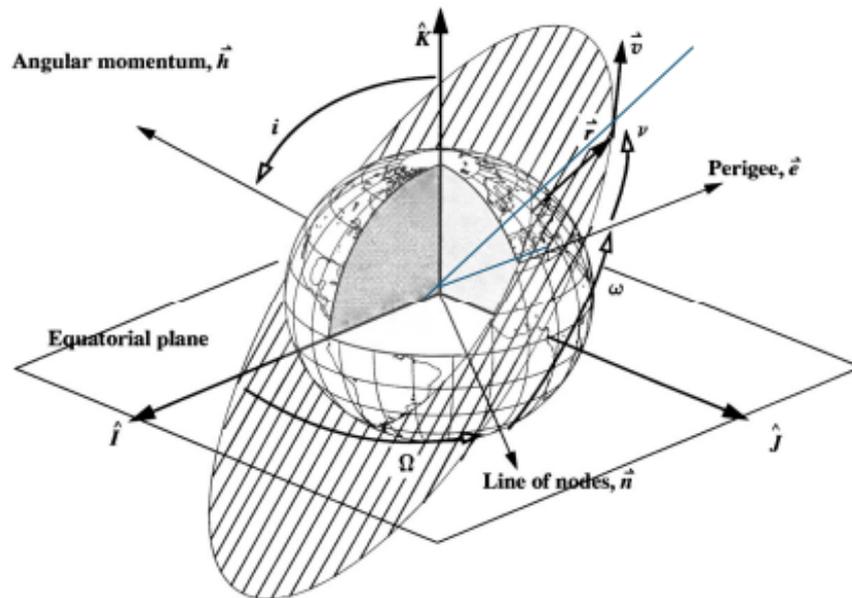


Figura 2.9. Elementi orbitali classici [28]

## 2.6 Traiettorie interplanetarie

### 2.6.1 Metodo delle patched-conics

Il metodo delle patched-conics è un'approssimazione utilizzata nella progettazione di traiettorie interplanetarie che permette di implementare il semplice modello dei due corpi in tutte le fasi della missione. L'intera traiettoria viene suddivisa in 3 parti:

- fase planetocentrica di partenza: si trascura l'influenza del Sole e si percorre una traiettoria iperbolica di fuga dal pianeta di partenza;
- fase eliocentrica: il satellite percorre l'orbita intorno al Sole su una traiettoria ellittica trascurando l'influenza di tutti gli altri pianeti. Lo studio della fase eliocentrica consentirà di calcolare il  $\Delta V$  necessario al satellite per raggiungere il corpo di destinazione e che coincide con l'eccesso iperbolico di velocità al termine della fase planetocentrica di partenza;
- fase planetocentrica di arrivo: si percorre una traiettoria iperbolica di ingresso ipotizzando di trascurare l'influenza del Sole. In base alla tipologia di missione, è possibile effettuare un fly-by (fionda gravitazionale), in questo caso il satellite dovrà intersecare l'orbita del corpo di arrivo davanti o dietro al target e sfruttare la sua quantità di moto per variare direzione e modulo della velocità.

La fase eliocentrica viene approfondita nel paragrafo seguente, poichè gli studi del caso in esame si concentrano su di essa.

### 2.6.2 Fase eliocentrica

Si ipotizza per semplicità di considerare le orbite, del pianeta di partenza e del target, circolari e complanari. La manovra che permette il trasferimento tra due orbite circolari con il minor consumo di carburante è la *trasferta di Hohmann* [27].

Questo tipo di manovra a due impulsi prevede un'orbita di trasferimento ellittica, rappresentata in Figura 2.10, il cui semiasse maggiore è calcolato come

$$a_H = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

dove  $r_1$  è il raggio dell'orbita del pianeta di partenza mentre  $r_2$  è il raggio dell'orbita del target di arrivo. L'energia meccanica specifica dell'orbita di trasferimento è pari a

$$\varepsilon_H = -\frac{\mu}{2a_H} = -\frac{\mu}{r_1 + r_2} = \frac{v_1^2}{2} - \frac{\mu}{r_1} = \frac{v_2^2}{2} - \frac{\mu}{r_2}$$

da cui si ricavano le velocità

$$v_1 = \sqrt{2\mu\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1 + r_2}\right)}; \quad v_2 = \sqrt{2\mu\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1 + r_2}\right)}$$

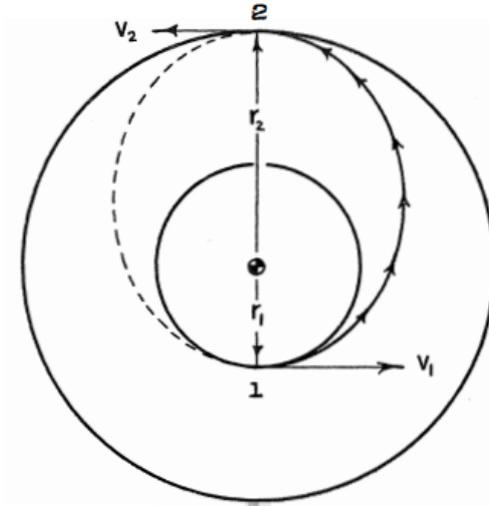


Figura 2.10. La trasferta di Hohmann [27]

È importante osservare che il parametro gravitazionale  $\mu$ , usato nello specifico caso in cui l'orbita ellittica è eliocentrica, è relativo al Sole ed ha valore di  $1.327 \times 10^{20} \frac{m^3}{s^2}$ . Le velocità circolari dell'orbita di partenza e di arrivo valgono

$$v_{c1} = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}}; \quad v_{c2} = \sqrt{\frac{\mu}{r_2}}$$

per cui l'incremento di velocità per immettere il satellite sull'orbita di trasferimento è

$$\Delta V_1 = v_1 - v_{c1}$$

e in modo del tutto simile si calcola la differenza di velocità per circularizzare l'orbita nel punto 2

$$\Delta V_2 = v_2 - v_{c2}$$

Il  $\Delta V$  necessario per eseguire la manovra di Hohmann è dato dalla somma dei singoli contributi  $\Delta V_H = \Delta V_1 + \Delta V_2$ .

La trasferta di Hohmann è la più conveniente in termini di  $\Delta V$  richiesto ma presenta il tempo di trasferimento (Time Of Flight, TOF) massimo, tra tutte le manovre di trasferimento tra due orbite circolari, che si può determinare con la seguente relazione:

$$TOF = \pi \sqrt{\frac{a_H^3}{\mu}} \quad (2.16)$$

### Finestra di lancio

La finestra di lancio è un intervallo di tempo entro il quale può essere effettuato il lancio di una missione ottimizzandone il consumo di propellente. Ipotizzando di effettuare una

trasferta di Hohmann, il satellite deve essere in grado di incontrare il target nel punto di intersezione tra l'orbita di trasferimento e quella di arrivo. Per ottenere ciò, al tempo iniziale, la Terra ed il target devono avere il corretto sfasamento. È necessario calcolare il *moto medio*  $n$  dei due corpi

$$n_1 = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\mu_{\odot}}{a_1}}; \quad n_2 = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\mu_{\odot}}{a_2}}$$

ed il tempo di trasferimento dato dall'equazione 2.16. Per calcolare l'*angolo di sfasamento*  $\phi_0$  alla partenza, si deve eguagliare l'angolo  $\pi$ , percorso dal satellite, con la somma di  $\phi_0$  e l'angolo percorso dal target nel tempo di trasferimento

$$\phi_0 + n_2 TOF = \pi \quad (2.17)$$

La successiva finestra di lancio, nel caso in cui un problema tecnico o il maltempo ritardino la partenza, si avrà dopo un *periodo sinodico* calcolato come

$$\tau_s = \frac{2\pi}{|n_1 - n_2|} \quad (2.18)$$

### Traiettorie interplanetarie non complanari

Per traiettorie interplanetarie non complanari, una procedura utilizzata prevede un'orbita di trasferimento nel piano dell'eclittica e un semplice cambio di piano effettuato  $90^\circ$  prima dell'incontro con il target [27]. Il  $\Delta V$  richiesto per la manovra dipende dalla velocità  $V$  del satellite al momento dell'esecuzione e dal seno dell'inclinazione, che per la procedura descritta, equivale alla latitudine eclittica  $\beta_2$  del target presente in Figura 2.11.

$$\Delta V = 2V \sin \frac{\beta_2}{2} \quad (2.19)$$

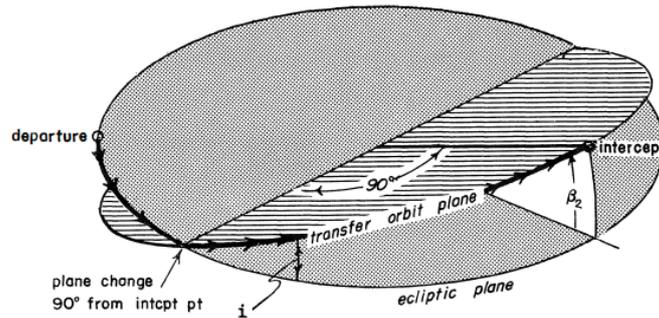


Figura 2.11. Manovra di cambio di piano [27]

# Capitolo 3

## Richiami di propulsione elettrica

### 3.1 Introduzione alla propulsione spaziale

In un sistema isolato, il moto di un satellite si può descrivere attraverso la seguente equazione

$$m\vec{a} = \dot{m}_p c \quad (3.1)$$

dove  $m$  è la massa del satellite,  $\vec{a}$  è la sua accelerazione,  $\dot{m}_p$  è la portata di propellente e  $c$  è la velocità efficace di scarico. Il termine a destra dell'equazione 3.1 è definito come *spinta*  $T$

$$T = \dot{m}_p c \quad (3.2)$$

La potenza necessaria per ottenere la spinta  $T$  è definita come

$$P_T = \frac{1}{2} \dot{m}_p c^2 = \frac{1}{2} T c \quad (3.3)$$

Integrando la spinta su tutta la durata della missione si ottiene l'*impulso totale*  $I_t$ .

$$I_t = \int_{t_0}^{t_f} T dt \quad (3.4)$$

Effettuando la stessa integrazione sulla portata di propellente si ottiene il *consumo di propellente*  $m_p$ .

$$m_p = \int_{t_0}^{t_f} \dot{m}_p dt \quad (3.5)$$

Ricaviamo dall'equazione 3.1 l'*incremento di velocità* nel caso ideale in cui la spinta sia l'unica forza presente e sia applicata parallelamente alla velocità

$$\Delta v = \int_{t_0}^{t_f} \frac{T}{m} dt$$

svolgendo un cambio di variabile è possibile ottenere

$$\Delta v = \int_{m_0}^{m_f} \frac{c}{m} dm$$

L'equazione che si ricava eseguendo l'integrale è l'*equazione del razzo di Tsiolkovsky* per  $c$  costante, in grado di descrivere il moto dei corpi di massa variabile nello spazio

$$\Delta v = c \ln \frac{m_0}{m_f} \quad (3.6)$$

Dall'equazione 3.6 si ricava l'espressione della *massa finale*  $m_f$

$$m_f = m_0 e^{-\frac{\Delta v}{c}} \quad (3.7)$$

### 3.1.1 Impulso specifico

La velocità efficace di scarico è una caratteristica direttamente legata all'*impulso specifico* definito come il rapporto tra la spinta e la portata in peso di propellente al livello del mare

$$I_{sp} = \frac{T}{\dot{m}_p g_0} = \frac{\dot{m}_p c}{\dot{m}_p g_0} = \frac{c}{g_0} \quad (3.8)$$

dove  $g_0$  è l'accelerazione gravitazionale al livello del mare. L'impulso specifico è la misura di quanto efficientemente si utilizza una certa massa di propellente.

Nella propulsione chimica, il valore dell'impulso specifico è limitato dalla reazione chimica, cioè dalla natura di combustibile ed ossidante, ed il suo valore massimo pari a 450s si ha per la combinazione LOx/LH2.

Diversamente, nella propulsione elettrica, l'impulso specifico può crescere in due modi: si può aumentare la potenza elettrica oppure, se la potenza elettrica disponibile è fissa, si possono ridurre spinta o variazione di massa  $\dot{m}$ .

Riassumendo, la propulsione chimica è caratterizzata da bassi impulsi specifici e alte spinte che possono raggiungere i  $10^6 \div 10^7 N$  mentre la propulsione elettrica ha impulsi specifici dell'ordine di  $10^3 s$  e spinte piccole che raggiungono l'unità di Newton.

## 3.2 Propulsione elettrica

La propulsione elettrica è definita come "*L'accelerazione dei gas per la propulsione attraverso resistenze elettriche e/o attraverso forze elettriche e magnetiche*" [12].

Questa definizione ci permette di suddividere la propulsione elettrica in tre rami non sempre isolati tra loro:

- *Propulsione elettrotermica*: in questo caso il gas viene scaldato elettricamente e successivamente espanso in un ugello;
- *Propulsione elettrostatica*: il propellente, in cui sono presenti particelle ionizzate, viene accelerato grazie all'applicazione di forze elettrostatiche;
- *Propulsione elettromagnetica*: il propellente ionizzato viene accelerato da forze elettromagnetiche;

È importante osservare che tutti i propulsori elettrici necessitano di sorgenti di potenza, come pannelli solari, generatori a radioisotopi o reattori a fissione nucleare, in grado di fornire un'energia pari a

$$\eta P_E = \frac{1}{2} \dot{m}_p c^2 = \frac{Tc}{2}$$

dove  $\eta$  è l'efficienza della potenza di spinta definita come  $\eta = \frac{P_T}{P_E}$ . La *massa della sorgente di potenza*  $m_s$  è considerata proporzionale alla potenza elettrica richiesta

$$m_s = \frac{\alpha Tc}{\eta 2}$$

La costante  $\alpha$  è chiamata *massa specifica della sorgente di potenza* ed equivale alla massa della sorgente per unità di kW prodotti. La massa del satellite destinata al payload, chiamata *massa utile*  $m_u$ , è negativamente influenzata dalla massa della sorgente di potenza poiché  $m_u = m_0 - m_s - m_p$ , dove la  $m_0$  è la massa totale del satellite alla partenza. Essendo  $m_0 > m_s$  l'accelerazione totale  $a = \frac{T}{m_0}$  risulta minore di quella che si avrebbe se la massa fosse solo quella corrispondente alla sorgente di potenza, che può essere scritta come

$$a < \frac{T}{m_s} = \frac{2\eta}{\alpha c}$$

È possibile quindi escludere la propulsione elettrica per la fase di lancio, mentre si ritiene un'ottima alternativa alla propulsione chimica, per tutte le missioni che possono avere tempi di percorrenza lunghi come le trasferte interplanetarie o per spedizioni "*near earth*" che richiedono un basso consumo di propellente [12].

### 3.2.1 Manovre con propulsione elettrica

Le proprietà della propulsione elettrica, descritte nel paragrafo precedente, rendono necessario introdurre delle ipotesi semplificative per lo studio di manovre caratterizzate da basse spinte e lunghi tempi di percorrenza. Tali manovre sono descritte da traiettorie a spirale.

L'*approssimazione di Edelbaum*, introdotta nel 1961, è basata sulle seguenti ipotesi [2]:

- si considerano orbite quasi circolari  $r \approx a \approx p$ ,  $V^2 \approx \frac{\mu}{r}$ ,  $e \approx 0$ ,  $\nu \approx M \approx E$ ;
- le orbite hanno piccole inclinazioni  $\sin i \approx i$ ,  $\cos i \approx 1$
- la spinta, e di conseguenza le 3 componenti dell'accelerazione, sono basse e  $\ll \frac{\mu}{r^2}$ ;

La spinta applicata al satellite ha tre componenti, riportate in Figura 3.1, responsabili della variazione di alcuni parametri orbitali:

- $T_V$  è collocata nel piano, è parallela alla velocità e comporta la variazione di  $a$ ,  $e$  e  $\omega$ ;
- $T_N$  è situata nel piano, è perpendicolare alla velocità ed è responsabile della variazione di  $e$  e  $\omega$ ;

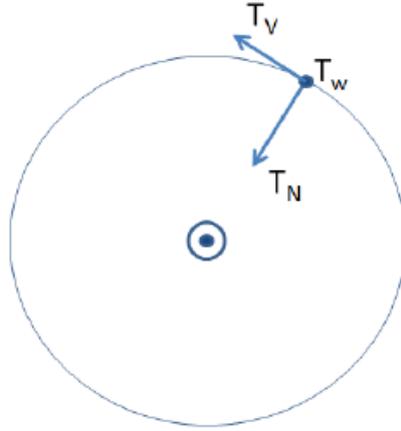


Figura 3.1. Le componenti della spinta [11]

- $T_W$  agisce fuori dal piano dell'orbita e per questo è responsabile della variazione degli elementi orbitali che non sono collocati sul piano perifocale come  $i$  e  $\Omega$ ;

Si definisce  $\alpha$  l'angolo compreso tra la spinta  $\vec{T}$  e la proiezione di  $\vec{V}$  nel piano e  $\beta$  come l'angolo fuori dal piano tra la spinta  $\vec{T}$  e il piano dell'orbita [11]. Le componenti dell'accelerazione  $\vec{A}$  si ricavano come

$$a_T = \frac{T}{m} \cos \alpha \cos \beta$$

$$a_R = \frac{T}{m} \sin \alpha \cos \beta$$

$$a_W = \frac{T}{m} \sin \beta$$

Le approssimazioni di Edelbaum permettono di ignorare le equazioni per la variazione di  $\Omega$  e  $\omega$  e di semplificare le equazioni planetarie di Gauss ottenendo

$$V\dot{a} = 2ra_T \quad (3.9)$$

$$V\dot{e} = 2 \cos \nu a_T - \sin \nu a_R \quad (3.10)$$

$$V\dot{i} = \cos(\omega + \nu) a_W \quad (3.11)$$

Considerando di effettuare un giro completo e apportando un cambio di variabile di integrazione  $dt = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$  si ottengono le equazioni

$$\Delta a = \frac{2aA}{V} \int_0^{2\pi} \cos \alpha \cos \beta d\nu \quad (3.12)$$

$$\Delta e = \frac{A}{V} \int_0^{2\pi} (2 \cos \nu \cos \alpha + \sin \nu \sin \alpha) \cos \beta d\nu \quad (3.13)$$

$$\Delta i = \frac{A}{V} \int_0^{2\pi} \cos(\omega + \nu) \sin \beta d\nu \quad (3.14)$$

La direzione ottimale di accelerazione viene determinata in base allo scopo della manovra, in particolare:

- per ottenere la massima variazione di  $a$  si deve effettuare una spinta tangenziale con  $\alpha = \beta = 0$ ;
- la massima variazione di  $e$  richiede una spinta nel piano  $\beta = 0$  con direzione perpendicolare alla linea degli absidi  $\tan \alpha = \frac{1}{2} \tan \nu$ ;
- la variazione combinata e massima di  $a$  e  $i$  si ottiene per  $\alpha = 0$  e risolvendo un problema di massimo vincolato, attraverso i moltiplicatori di Lagrange  $k$ , per il quale l'angolo di spinta ottimale deve rispettare la relazione  $\tan \beta = k \cos \omega + \nu$ ;

Ampliando la manovra di variazione combinata ad un numero maggiore di giri, e risolvendo il problema di ottimizzazione in termini di  $\Delta V$ , si ottiene che

$$\frac{\sin \beta}{\sqrt{r}} = \text{costante}$$

. È possibile effettuare le seguenti osservazioni [2]:

- il cambiamento di piano è più conveniente a basse velocità che corrispondono ad alti raggi orbitali;
- conviene avere valori di angolo di spinta  $\beta$  piccoli per velocità elevate e raggi piccoli;

### 3.2.2 Propulsione elettrostatica

La propulsione elettrostatica si basa sull'utilizzo dell'energia elettrica per ionizzare ed accelerare il propellente attraverso il campo elettrostatico. Un propulsore elettrostatico deve svolgere tre compiti primari: ionizzare e separare gli ioni dagli elettroni, accelerare gli ioni ed infine neutralizzare il sistema attraverso un fascio di elettroni.

#### Propulsore a ioni

Il propulsore a ioni, schematizzato in Figura 3.2, è un propulsore elettrostatico composto da una camera cilindrica al cui interno sono presenti il catodo e l'anodo che ne compone le pareti.

Dalla parete di sinistra viene introdotto il propellente mentre sulla parete di destra sono presenti due griglie responsabili dell'accelerazione degli ioni. La neutralizzazione è svolta da un catodo cavo in grado di rilasciare un flusso di elettroni.

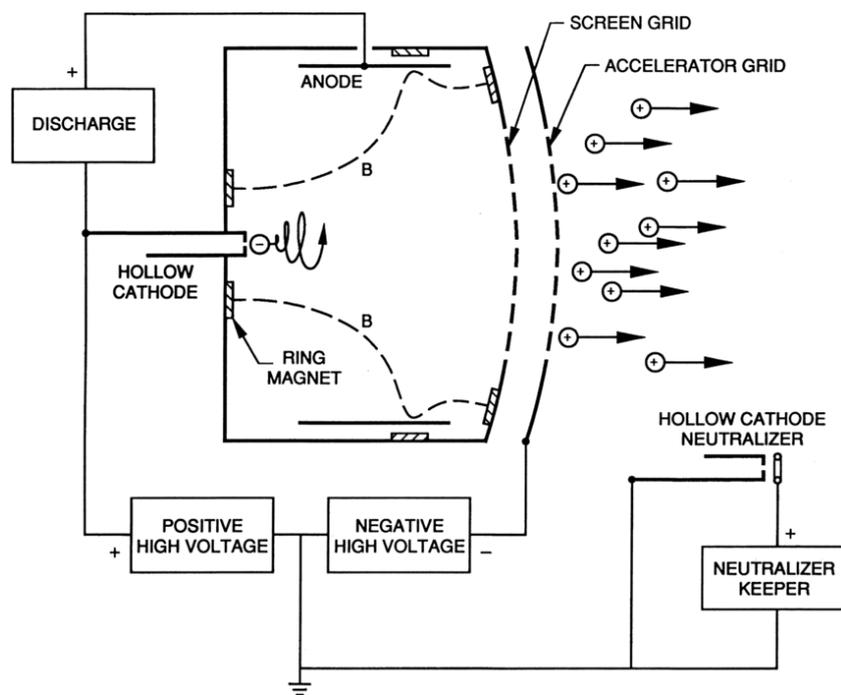


Figura 3.2. Schema del propulsore a ioni [26]

Si riportano di seguito alcuni accenni del funzionamento.

- **Ionizzazione del propellente**: può avvenire attraverso la radiazione a radio frequenza o, più comunemente, con il bombardamento di elettroni, emessi dal catodo per effetto termoionico, che, accelerati dal campo elettrostatico, impattano con gli atomi del propellente, ionizzandoli.
- **Accelerazione degli ioni**: gli ioni positivi vengono accelerati grazie alla differenza di potenziale presente tra la *griglia di schermo* e la *griglia di accelerazione*. La corrente massima presente tra le due griglie è calcolata attraverso la Legge di Child e influisce sulla massima spinta generata dal propulsore. La *densità di spinta*  $\frac{T}{A}$  viene massimizzata ponendo la griglia di accelerazione ad un potenziale negativo e introducendo una terza griglia chiamata *griglia di decelerazione* a potenziale nullo;
- **Neutralizzazione**: è un processo indispensabile per evitare che il satellite si carichi negativamente e per evitare il ritorno in camera degli ioni. Il catodo neutralizzatore emette un plasma quasi neutro che annulla il potenziale positivo accumulato all'uscita della camera.

# Capitolo 4

## Near Earth Asteroids

### 4.1 Introduzione e classificazione generale

Gli asteroidi sono resti rocciosi, privi di atmosfera, caratterizzati dall'aver una composizione chimica risalente alle fasi iniziali della nascita del Sistema Solare. Essi sono chiamati anche *planetini* per via delle loro ridotte dimensioni. Il più grande fin'ora osservato è Vesta che possiede un diametro di circa 530 km ma sono comunque rari i casi in cui la loro dimensione supera i 300 km [5]. A differenza dei pianeti, si ipotizza che gli asteroidi non abbiano subito il processo di aggregazione delle masse da parte della gravità e questo comporterebbe sia la presenza di una composizione chimica esente da modificazioni, sia una forma irregolare tipica di questi corpi celesti.

Nel Sistema Solare, la maggior parte degli asteroidi orbita intorno al Sole tra Marte e Giove in una zona chiamata **fascia principale degli asteroidi**. In essa si stima la presenza di un massimo di 1.9 milioni di corpi aventi diametro maggiore di 1 km e milioni di dimensioni ridotte [5]. La ricerca astronomica ha inoltre evidenziato una seconda fascia situata ai confini del Sistema Solare, cioè oltre l'orbita di Nettuno, chiamata **fascia di Kuiper** [4].

Gli asteroidi chiamati **troiani** condividono l'orbita con un pianeta più grande e sono collocati nei punti lagrangiani stabili L4 ed L5 situati 60° davanti e dietro al corpo maggiore. Il maggior numero di essi sono i troiani di Giove ma ne esistono appartenenti ad altri pianeti del Sistema Solare come Marte e Nettuno. Alcuni asteroidi, detti Near Earth Asteroids, hanno orbite collocate nella regione terrestre e saranno approfonditi nei paragrafi seguenti [5]. In Figura 4.1 si evidenziano i posizionamenti più numerosi nel Sistema Solare Interno.

#### 4.1.1 Classi di composizione

L'analisi spettroscopica degli asteroidi permette di determinare la riflettività superficiale dei suddetti corpi (albedo) alle varie lunghezze d'onda e suddividerli in 3 classi di composizione chimica [5],[22]:

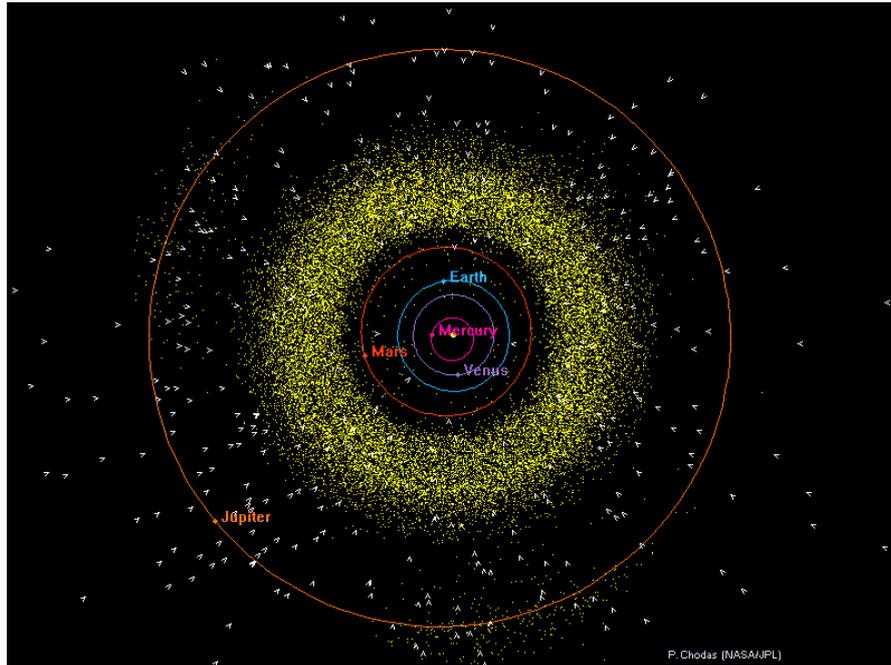


Figura 4.1. Posizione di asteroidi e comete numerati, al 1 Gennaio 2018 [17]

- **tipo C:** sono i più comuni ed antichi del Sistema Solare e sono costituiti da rocce argillose e silicatiche. Hanno un colore scuro con un albedo di 0.03 per via dell'alta presenza di carbonio;
- **tipo S:** comprendono il 17% degli asteroidi e sono costituiti da materiali silicati e ferro-nichel; questo conferisce loro una brillantezza maggiore con un albedo di 0.10-0.22;
- **tipo M:** rappresentano meno del 10% del totale e sono composti principalmente da ferro e nichel. Il loro albedo è pari a 0.10-0.18.

## 4.2 Near Earth Objects

Il termine NEO (Near Earth Object) si riferisce a qualsiasi asteroide o cometa che possiede un raggio al perielio minore di 1.3 UA (Unità Astronomiche), che approssimativamente corrispondono a 195 milioni di km, e un periodo orbitale inferiore a 200 anni. Generalmente i NEO hanno una vita media di circa 10 milioni di anni che termina dopo essersi schiantati contro il Sole. Il loro numero però viene continuamente aggiornato e mantenuto circa costante poichè gli asteroidi della fascia principale, tra i pianeti Marte e Giove, vengono trasportati verso la regione terrestre [30].

### 4.2.1 Classificazione dei NEA

I Near-Earth Objects si possono suddividere in NECs (Near-Earth Comets) e in NEAs (Near-Earth Asteroids). Si concentra l'attenzione su quest'ultimi poichè sono l'oggetto del caso di studio.

Una prima categorizzazione di questi corpi celesti riguarda gli asteroidi potenzialmente pericolosi PHAs definiti come asteroidi che hanno il potenziale di effettuare avvicinamenti minacciosi alla Terra. Il parametro che permette di definire l'appartenenza o no a tale categoria è la Earth MOID cioè la minima distanza tra l'asteroide e la Terra quando vi è intersezione tra le due orbite. Rientrano nei PHAs tutti gli asteroidi che hanno una Earth MOID uguale o inferiore a 0.05 UA e che possiedono una luminosità, misurata in termini di magnitudine assoluta  $H$ , uguale o inferiore a 22. La magnitudine assoluta  $H$  è la magnitudine, cioè la luminosità di un oggetto celeste così come appare ad un osservatore, quando esso si trova ad 1 UA dal Sole e dall'osservatore con angolo di fase nullo, cioè l'angolo tra Sole, oggetto e Terra. Questo parametro è un requisito per la classificazione come PHA perché è strettamente collegato al diametro dell'asteroide. È la dimensione di esso che comporta una maggiore o minore minacciosità per la Terra ma questo parametro è possibile ricavarlo solo convertendo il valore di luminosità ricavata con rilievi ottici. Gli asteroidi con diametro inferiore ai 140 m non sono considerati pericolosi per la Terra [7].

I NEA possono essere ulteriormente suddivisi in quattro classi in base all'orbita attuale da loro percorsa [18].

- **Amor:** il loro semiasse maggiore è più grande del raggio medio dell'orbita della Terra ed in particolare la loro distanza al perielio è compresa tra 1.017 UA e 1.3 UA. Essi sono asteroidi caratterizzati da un'orbita esterna a quella terrestre e interna a quella di Marte ed in particolare l'orbita degli asteroidi Amor non interseca in alcun punto quella terrestre. Un esempio di orbita tipica di un asteroide Amor è riportato in Figura 4.2 in alto a sinistra.
- **Apollo:** la loro orbita interseca quella terrestre e sono caratterizzati da un semiasse maggiore più grande del raggio medio terrestre e distanza al perielio inferiore a 1.017 UA. Per via del maggiore semiasse il periodo orbitale di questi asteroidi è maggiore del periodo terrestre. L'asteroide 2021 JG6 appartiene a questa categoria e la sua orbita è riportata in Figura 4.2 in alto a destra.
- **Aten:** il loro semiasse maggiore è più piccolo del raggio medio dell'orbita terrestre, mentre la distanza dall'afelio è maggiore di 0.983 UA. Queste caratteristiche comportano l'intersezione tra le due orbite ed un periodo orbitale minore del periodo terrestre. Si riporta in Figura 4.2 in basso a sinistra l'orbita di un asteroide appartenente alla classe.
- **Atira:** la loro orbita è interamente contenuta nell'orbita terrestre e non si ha intersezione in alcun punto. Il semiasse maggiore è minore del raggio medio terrestre così come la distanza all'afelio è minore di 0.983 UA. Il nome della classe deriva dall'asteroide 163693 Atira (2003 CP20) di cui si riporta l'orbita in Figura 4.2 in basso a destra.

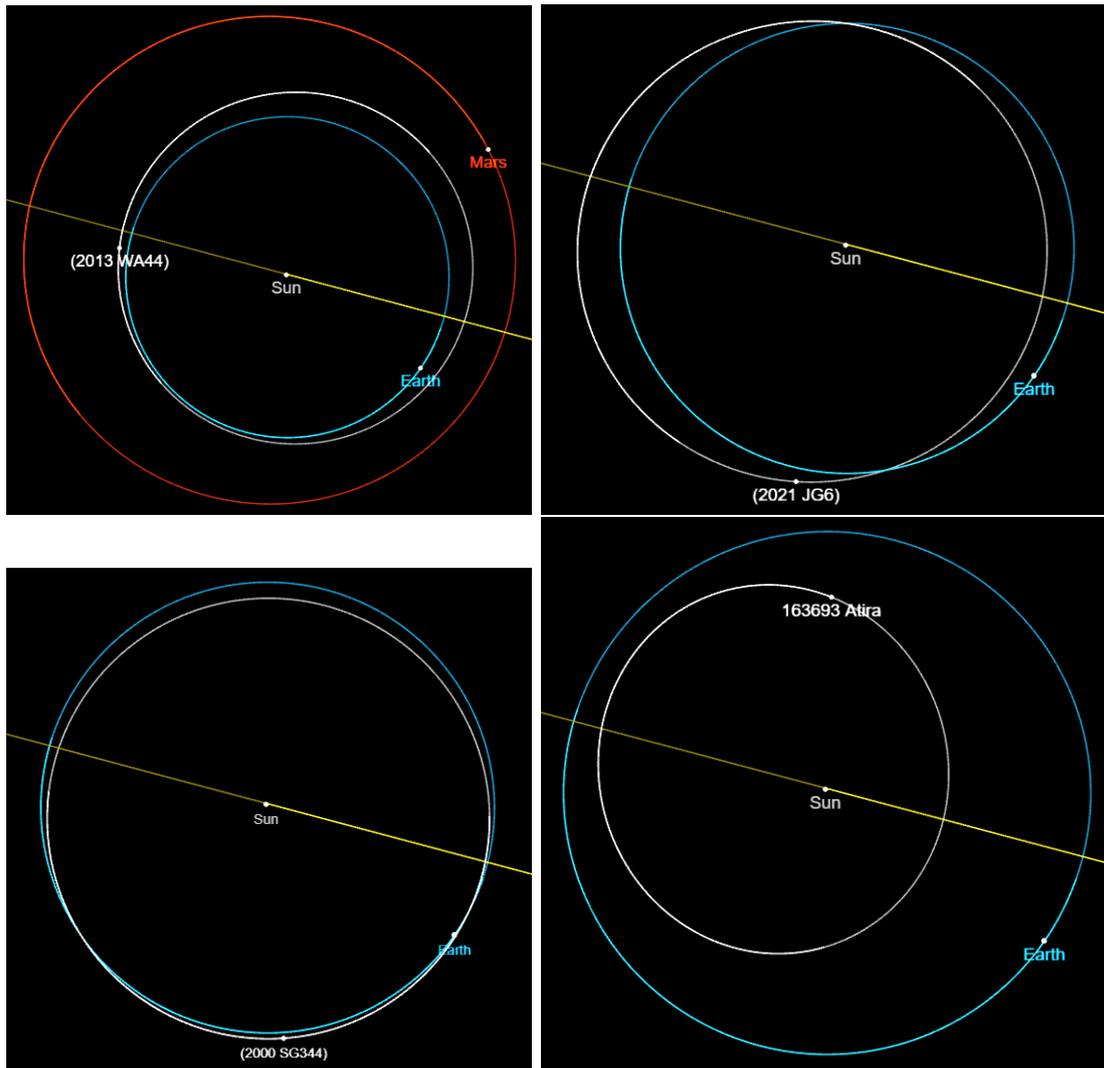


Figura 4.2. Orbita 2013 WA44 - Classe Amor (in alto a sinistra), Orbita 2021 JG6 - Classe Apollo (in alto a destra), Orbita 2000 SG344 - Classe Aten (in basso a sinistra), Orbita 163693 Atira (2003 CP20) - Classe Atira (in basso a destra) [19]

La classe di appartenenza di un NEA può variare a causa delle perturbazioni planetarie che ne deviano l'orbita [7].

### 4.2.2 Interesse scientifico ed economico

L'interesse per i NEA è estremamente ampio in diversi campi. In campo scientifico, la struttura e la composizione di essi sono fondamentali portatori di informazioni riguardanti la formazione del Sistema Solare e l'origine della vita sulla Terra, in più, lo studio delle loro orbite permette di avere una visione sempre più chiara delle perturbazioni orbitali indispensabili per future missioni spaziali. La minacciosità dei PHAs rende lo studio di tali corpi una priorità in campo di sicurezza planetaria poichè, l'impatto di un asteroide seppur di dimensioni contenute, può provocare danni ingenti a strutture e persone. Dal punto di vista delle risorse minerarie, i NEA sono considerati un'importante fonte di estrazione di materie prime in grado di sopperire all'elevato consumo di quelle terrestri. In particolare, gli asteroidi classificati PHAs, per la loro vicinanza all'orbita terrestre, possono essere sfruttati intensivamente a tale scopo. Le materie prime ricavate possono essere utilizzate in ambito spaziale per la costruzione delle strutture e come combustibili per la propulsione [31].

## 4.3 Caso di studio

La tesi verterà sullo studio di fattibilità di missioni e sull'ottimizzazione di traiettorie verso tre asteroidi di cui si riportano le caratteristiche principali.

### 4.3.1 2020 OM6

L'asteroide 2020 OM6 appartiene alla classe *Apollo* e la sua orbita è raffigurata in Figura 4.3.

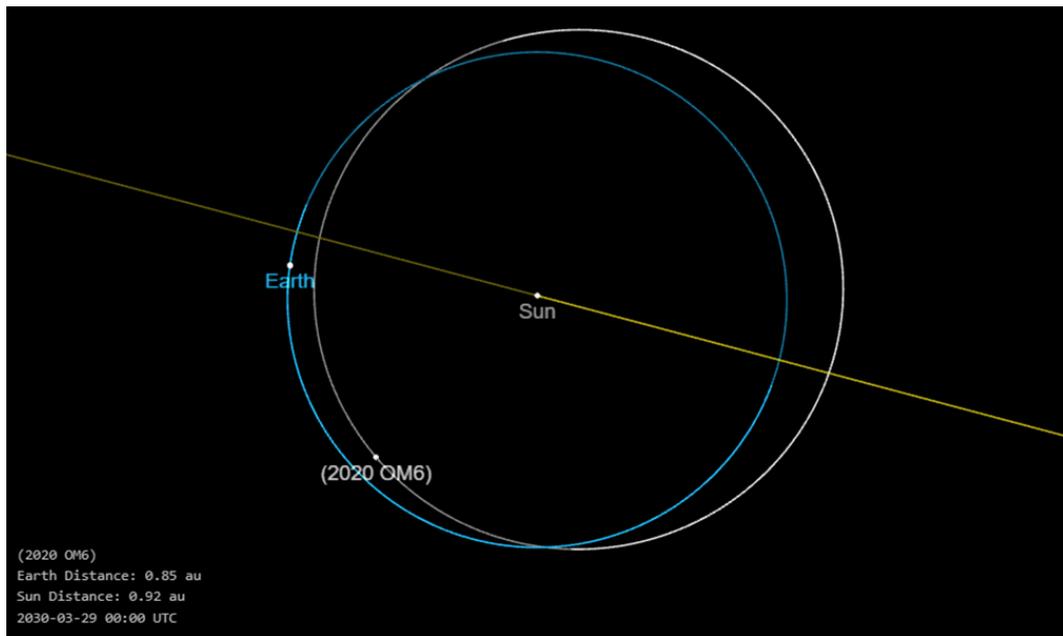


Figura 4.3. Orbita 2020 OM6 [19]

I suoi parametri orbitali sono elencati di seguito:

- Eccentricità  $e = 0.1581865925413048$
- Semiasse maggiore  $a = 1.061989257349752$  UA
- Distanza dal perielio  $q = 0.8939967954141238$  UA
- Distanza dall'afelio  $Q = 1.22998171928538$  UA
- Inclinazione  $i = 3.725397375323054$  deg
- Longitudine del nodo ascendente  $\Omega = 292.5268682090261$  deg
- Argomento del perielio  $\omega = 270.9734231548252$  deg

- Anomalia media  $M = 35.60601763855028 \text{ deg}$
- Periodo orbitale  $T = 399.7409242778107 \text{ d}$

La magnitudine assoluta è pari a  $H = 25.0$ , il suo diametro è di  $d = 0.034 \text{ km}$  ed ha una massa di  $m = 5.5 \times 10^7 \text{ kg}$ . Grazie a tali caratteristiche l'asteroide 2020 OM6 non è classificato come PHA nonostante la sua Earth MOID sia pari a  $0.00655806 \text{ UA}$  [13]. Le osservazioni svolte dal *JPL Sentry System* [20] hanno previsto, con una probabilità di  $1.6 \times 10^{-6}$ , un potenziale impatto con la Terra, con velocità di ingresso in atmosfera di  $V_{\text{impact}} = 12.23 \text{ km/s}$ , che si potrebbe verificare il 10 luglio 2106. Il prossimo passaggio ravvicinato è invece previsto per il 29 gennaio 2031 con una distanza nominale di  $0.0229865 \text{ UA}$  [23].

### 4.3.2 2020 PJ6

L'orbita dell'asteroide 2020 PJ6 è riportata in Figura 4.4. Per via delle intersezioni con l'orbita terrestre e il valore del semiasse maggiore, esso è classificato come *Aten*.

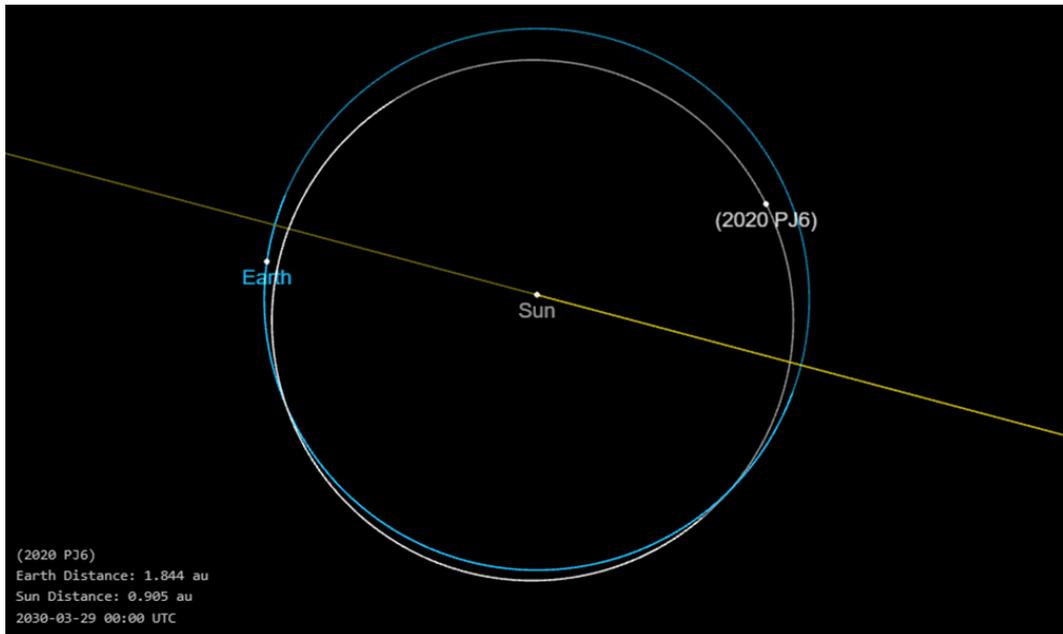


Figura 4.4. Orbita 2020 PJ6 [19]

I parametri orbitali sono riassunti nel seguente elenco:

- Eccentricità  $e = 0.09914817544607221$
- Semiasse maggiore  $a = 0.9614685995805538 \text{ UA}$
- Distanza dal perielio  $q = 0.8661407421834516 \text{ UA}$

- Distanza dall'afelio  $Q = 1.056796456977656$  UA
- Inclinazione  $i = 0.8090413652836559$  deg
- Longitudine del nodo ascendente  $\Omega = 141.3616703452164$  deg
- Argomento del perielio  $\omega = 314.2283613497107$  deg
- Anomalia media  $M = 31.11816676501184$  deg
- Periodo orbitale  $T = 344.3507908725621$  d

L'asteroide ha una massa di  $m = 2.3e + 7$  kg e una magnitudine assoluta pari a  $H = 25.6$  da cui si ricava un diametro di  $d = 0.026$  km. Esso possiede una Earth MOID di 0.00205603 UA ma per via dell'elevata magnitudine l'asteroide 2020 PJ6 non è considerato pericoloso per la Terra [14]. Il prossimo passaggio ravvicinato è previsto il 2 maggio 2036 con una distanza nominale di 0.0189486 UA [23], mentre un possibile impatto con la Terra è previsto per il 9 maggio 2074 con una probabilità di  $5.9 \times 10^{-7}$  ed una velocità di ingresso in atmosfera di  $V_{impact} = 11.37$  km/s [20].

### 4.3.3 2023 HB7

Il terzo asteroide denominato 2023 HB7, appartiene alla classe *Aten* e la sua orbita è rappresentata in Figura 4.5.

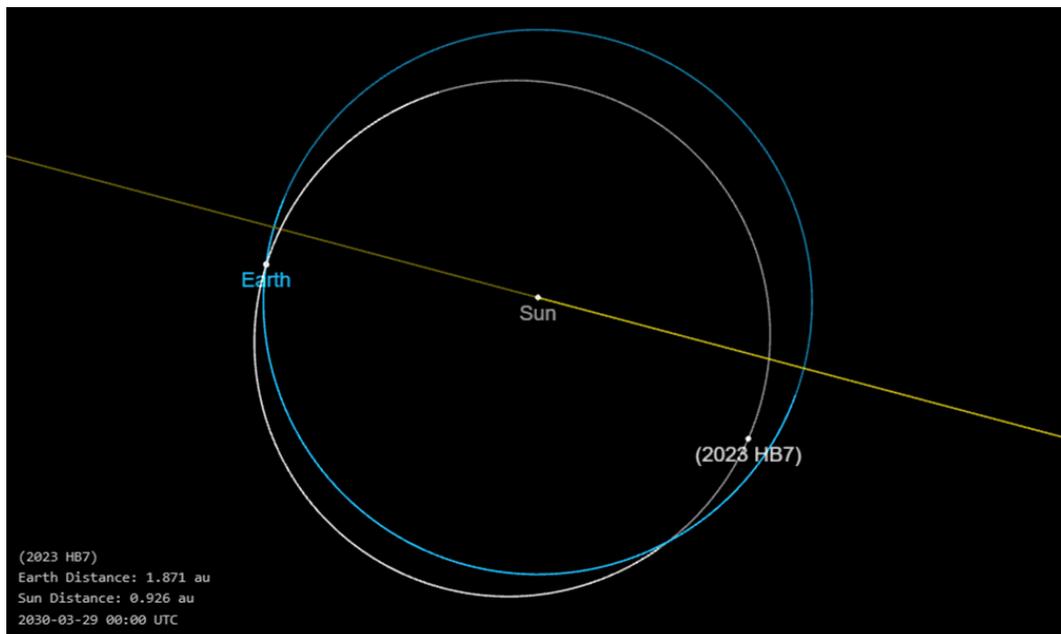


Figura 4.5. Orbita 2023 HB7 [19]

La sua orbita è caratterizzata dai seguenti parametri:

- Eccentricità  $e = 0.1860265544991429$
- Semiasse maggiore  $a = 0.9521576098592014$  UA
- Distanza dal perielio  $q = 0.7750310103569551$  UA
- Distanza dall'afelio  $Q = 1.129284209361448$  UA
- Inclinazione  $i = 1.535757526667351$  *deg*
- Longitudine del nodo ascendente  $\Omega = 130.54444471744$  *deg*
- Argomento del perielio  $\omega = 302.5654209276682$  *deg*
- Anomalia media  $M = 339.1660643567272$  *deg*
- Periodo orbitale  $T = 339.3608125130773$  *d*

L'asteroide 2023 HB7 non è classificato come PHA poichè è caratterizzato da una magnitudine assoluta pari a  $H = 25.25$  ed una Earth MOID pari a  $0.00122817$  UA [15]. Per questo asteroide non sono previsti potenziali impatti con la Terra, tuttavia, il prossimo passaggio ravvicinato è fissato per il 28 marzo 2036 ad una distanza nominale di  $0.0230248$  UA [23].

# Capitolo 5

## Ottimizzazione indiretta di traiettorie spaziali

Ottimizzare una traiettoria spaziale significa ricercare la soluzione che, nel rispetto delle condizioni al contorno, soddisfa dei criteri prefissati. La soluzione del problema di ottimizzazione è una legge di controllo che massimizza o minimizza un parametro chiamato anche *indice di prestazione*. Nel campo spaziale, è di fondamentale importanza aumentare la massa del carico pagante e per ottenere ciò, ipotizzando di non variare il sistema propulsivo, è necessario minimizzare il consumo di propellente.

### 5.1 Obiettivi di missione

Un processo fondamentale da eseguire al fine di ottimizzare una traiettoria spaziale è la scelta dell'obiettivo della missione e la trascrizione attraverso una formulazione matematica dello stesso, chiamata funzione obiettivo.

La classificazione più semplice della funzione obiettivo avviene in base alla quantità di obiettivi stessi, in particolare, possono esistere funzioni a singolo obiettivo, ad esempio un parametro fisico, o funzioni multi-obiettivo in cui si esegue un trade-off tra i diversi criteri selezionati [9].

La seconda classificazione dipende dal parametro che si vuole ottimizzare e dalla forma dell'espressione necessaria a scriverlo. La prima tipologia di obiettivo è espressa in forma di Mayer e si caratterizza per la sua dipendenza dalle condizioni al contorno della trasferta. Obiettivi espressi in tale forma sono il minimizzare il tempo di trasferta o minimizzare l'incremento di velocità.

Gli obiettivi del secondo tipo sono espressi in forma di Lagrange, essi dipendono dall'intero percorso, infatti, la funzione obiettivo presenta una funzione integrale nel tempo. Appartengono a tale categoria la minimizzazione della spinta o il consumo di propellente [9].

Nella sua forma generale, la funzione obiettivo è del tipo:

$$J = \varphi(\vec{x}_{(j-1)_+}, \vec{x}_{j-}, t_{(j-1)_+}, t_{j-}) + \sum_j \int_{(j-1)_+}^{t_{j-}} \Phi(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t) dt \quad j = 1, \dots, n \quad (5.1)$$

essa è somma di due termini, uno dipende esclusivamente dalle variabili e dal tempo ai contorni, chiamato termine di Mayer, ed un secondo dipendente dal tempo e dai valori assunti in ogni punto della trasferta, chiamato termine di Lagrange. È possibile semplificare il funzionale  $J$  e adottare la formulazione di Mayer, preferita in questa trattazione, definendo delle variabili ausiliarie. In particolare, si ricercano le traiettorie in cui viene massimizzata la massa finale del satellite e di conseguenza minimizzato il  $\Delta V$ .

## 5.2 Approcci e metodi risolutivi

Il problema di ottimizzazione può essere risolto secondo due approcci: analitico, in cui sono previste notevoli semplificazioni che rendono scarsamente interessanti le soluzioni, e numerico, che adotta metodi numerici per la ricerca di soluzioni approssimate. I metodi numerici applicabili si dividono in due categorie:

- metodi diretti: sono descritti da un grande numero di parametri e richiedono una discretizzazione della traiettoria. Il dominio di convergenza è ampio, tuttavia le soluzioni ricavate potrebbero non essere ottimali;
- metodi indiretti: sono descritti da un limitato numero di parametri, richiedono tempi di calcolo brevi e sfruttano i principi del calcolo variazionale. Le soluzioni ottenute hanno un'alta precisione ma il dominio di convergenza è ridotto.

Il metodo indiretto più semplice è il metodo di simple-shooting, caratterizzato dall'algoritmo riportato in Figura 5.1.

```

Input: Initial Guess of Unknown Initial Conditions

Output: State-Adjoint Extremal Trajectory

while Error in Terminal Conditions is Larger Than Specified Tolerance do
    Integrate Trajectory from  $t_0$  to  $t_f$ ;
    Compute Error in Terminal Conditions;
    Update Unknown Initial Conditions;
end

```

Figura 5.1. Algoritmo metodo di simple-shooting [25]

Si ipotizza un vettore di variabili iniziali di tentativo e, insieme alle condizioni iniziali conosciute, si effettua l'integrazione della traiettoria. Successivamente si confrontano

le condizioni finali ottenute numericamente con quelle conosciute, cancelandone l'errore. Si esegue l'aggiornamento delle condizioni iniziali ipotizzate fino a quando l'errore computato è minore di una certa tolleranza, se questo si verifica, l'algoritmo termina e si ha una soluzione al problema di ottimizzazione. Il metodo appena descritto ha il vantaggio di essere semplice ma porta con sé diverse difficoltà numeriche dovute al mal condizionamento dell'Hamiltoniano.

Il caso di studio risolve il problema di ottimizzazione utilizzando un metodo indiretto iterativo di *multiple-shooting*, sviluppato per ovviare alle difficoltà numeriche e caratterizzato dall'applicazione del metodo di *simple-shooting* su ogni sottointervallo in cui è stata suddivisa la traiettoria. Nonostante l'aumento della dimensione del problema, la riduzione degli intervalli di tempo, su cui viene eseguita l'integrazione, riduce la sensibilità del metodo agli errori nelle condizioni iniziali incognite, comportando un miglioramento sostanziale rispetto al metodo semplice [25]. Il metodo indiretto di *multiple-shooting* è basato sulla teoria del controllo ottimale descritta nella sezione seguente, nella forma usata per l'ottimizzazione di traiettorie spaziali [3].

## 5.3 Teoria del controllo ottimale

La teoria del controllo ottimale è indispensabile per la scrittura del problema di ottimo come un problema matematico con vincoli algebrici e differenziali. Applicando tale teoria al metodo indiretto, si è in grado di calcolare i valori iniziali che consentono di soddisfare tutte le condizioni al contorno imposte e di ottimo. Tali valori iniziali sono soluzione del nuovo sistema di equazioni differenziali al limiti, formulato proprio grazie alla teoria del controllo ottimale.

Il sistema generico è espresso da un set di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine del tipo

$$\dot{\vec{x}}(t) = f(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t) \quad (5.2)$$

dove  $\vec{x}(t)$  è il vettore di variabili di stato,  $\vec{u}(t)$  è il vettore dei controlli e  $t$  è la variabile indipendente tempo.

È conveniente suddividere la traiettoria in un numero  $n$  di archi, ognuno dei quali è caratterizzato da  $n_x$  variabili di stato e  $n_u$  variabili di controllo. Dal punto di vista di notazione, il  $j$ -esimo arco ha tempo iniziale  $t_{(j-1)_+}$  e finale  $t_{j-}$  e il vettore di variabili di stato ha valori al contorno pari a  $\vec{x}_{(j-1)_+}$  e  $\vec{x}_{j-}$ . Il segno "-" permette di considerare il valore subito prima il punto considerato mentre il segno "+" il valore subito dopo. Nei punti di giunzione è possibile riscontrare eventuali discontinuità delle variabili (ad es. per manovre impulsive).

Si impongono le condizioni al contorno di tipo misto, sui contorni interni ed esterni, espresse come

$$\chi(\vec{x}_{(j-1)_+}, \vec{x}_{j-}, t_{(j-1)_+}, t_{j-}) = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (5.3)$$

oltre a tali imposizioni, attraverso un particolare metodo descritto successivamente, si andranno ad imporre anche i vincoli sulle variabili di controllo  $\vec{u}$ .

Si riscrive il funzionale  $J$  introducendo i moltiplicatori di Lagrange

$$J^* = \varphi + \vec{\mu}^T \vec{\chi} + \sum_j \int_{t_{(j-1)_+}}^{t_{j-}} (\Phi + \vec{\lambda}^T (\vec{f} - \dot{\vec{x}})) dt \quad j = 1, \dots, n \quad (5.4)$$

dove i moltiplicatori introdotti sono: costanti  $\vec{\mu}$  associate alle condizioni al contorno e le variabili  $\vec{\lambda}$  associate alle equazioni di stato. I due funzionali  $J$  e  $J^*$  hanno valori massimi e minimi coincidenti se sono soddisfatte le condizioni al contorno e le equazioni di stato. È necessario eliminare la dipendenza del funzionale dalla derivata temporale di  $\vec{x}$  applicando l'integrazione per parti e ottenendo

$$J^* = \varphi + \vec{\mu}^T \vec{\chi} + \sum_j (\vec{\lambda}_{(j-1)_+}^T \vec{x}_{(j-1)_+} - \vec{\lambda}_{j-}^T \vec{x}_{j-}) + \sum_j \int_{t_{(j-1)_+}}^{t_{j-}} (\Phi + \vec{\lambda}^T \vec{f} - \dot{\vec{\lambda}}^T \vec{x}) dt \quad j = 1, \dots, n \quad (5.5)$$

Differenziando si ottiene la variazione prima del funzionale  $J^*$ , dove l'Hamiltoniano  $H$  è definito come

$$H = \Phi + \vec{\lambda}^T \vec{f} \quad (5.6)$$

La variazione prima è espressa come

$$\begin{aligned} \delta J^* = & \left( -H_{(j-1)_+} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{(j-1)_+}} + \vec{\mu}^T \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial t_{(j-1)_+}} \right) \delta t_{(j-1)_+} + \left( H_{j-} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j-}} + \vec{\mu}^T \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial t_{j-}} \right) \delta t_{j-} + \\ & + \left( \vec{\lambda}_{(j-1)_+}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{x}_{(j-1)_+}} + \vec{\mu}^T \left[ \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial \vec{x}_{(j-1)_+}} \right] \right) \delta \vec{x}_{(j-1)_+} + \left( -\vec{\lambda}_{j-}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{x}_{j-}} + \vec{\mu}^T \left[ \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial \vec{x}_{j-}} \right] \right) \delta \vec{x}_{j-} + \\ & + \sum_j \int_{t_{(j-1)_+}}^{t_{j-}} \left( \left( \frac{\partial H}{\partial \vec{x}} + \dot{\vec{\lambda}}^T \right) \delta \vec{x} + \frac{\partial H}{\partial \vec{u}} \delta \vec{u} \right) dt \quad j = 1, \dots, n \quad (5.7) \end{aligned}$$

La condizione di ottimo si ha in un punto di stazionarietà per cui è necessario l'annullamento della variazione prima del funzionale  $\delta J^* = 0$ . Per ottenere ciò, occorre scegliere opportunamente le variabili e le costanti aggiuntive in modo da annullare i coefficienti  $\delta \vec{x}$  e  $\delta \vec{u}$  all'interno dell'integrale, per ogni punto della traiettoria. Con questa operazione si ottengono le equazioni differenziali di Eulero-Lagrange per le variabili aggiunte

$$\frac{d\vec{\lambda}}{dt} = - \left( \frac{\partial H}{\partial \vec{x}} \right)^T \quad (5.8)$$

e le equazioni algebriche per i controlli

$$\left( \frac{\partial H}{\partial \vec{u}} \right)^T = 0 \quad (5.9)$$

In presenza di un vincolo, secondo il Principio di Massimo di Pontryagin, il valore ottimale di un controllo vincolato è quello che, pur rientrando nel dominio di ammissibilità, rende massimo o minimo l'Hamiltoniano in ogni punto della traiettoria. Vediamo nel dettaglio due casi:

- se il valore ottimale fornito dall'equazione (5.9) appartiene al dominio di ammissibilità, allora il vincolo non entra in gioco ed il **controllo è localmente non vincolato**;
- se il valore ottimale fornito dall'equazione (5.9) è agli estremi del dominio di ammissibilità allora il controllo avrà valore massimo o minimo ed il **controllo è vincolato**.

Nel caso particolare in cui il controllo vincolato non compare esplicitamente nell'equazione (5.9) e quindi l'Hamiltoniano risulta lineare rispetto ad esso, si hanno due ulteriori possibilità:

- se il **coefficiente del controllo non è nullo** nell'equazione (5.6), allora si ha H massimo per il valore massimo del controllo se il coefficiente è positivo, o minimo se è negativo. Questo metodo è conosciuto come *controllo bang-bang*;
- se il **coefficiente del controllo è nullo** nell'equazione (5.6) in un intervallo di tempo finito, allora si deve imporre uguali a zero tutte le derivate successive del coefficiente rispetto al tempo, fino all'apparizione esplicita del controllo in una delle derivate. Si ha il controllo ottimale quando si impone l'annullamento di quest'ultima derivata.

Si ottengono le 4 condizioni al contorno mancanti annullando i coefficienti  $\delta\vec{x}_{j-}$ ,  $\delta\vec{x}_{j+}$ ,  $\delta t_{j-}$ ,  $\delta t_{j+}$  nella (5.7). In questo caso il riferimento è nel  $j$ -esimo contorno considerato come estremo finale del  $(j-1)$ -esimo intervallo ed estremo iniziale del  $j$ -esimo intervallo. Nelle equazioni si indica il valore assunto subito prima al punto  $j$  con  $j_-$  e quello subito dopo con  $j_+$ . Si ottengono le seguenti condizioni al contorno:

$$-\vec{\lambda}_{j-}^T + \frac{\partial\varphi}{\partial\vec{x}_{j-}} + \vec{\mu}^T \left[ \frac{\partial\vec{\chi}}{\partial\vec{x}_{j-}} \right] = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (5.10)$$

$$\vec{\lambda}_{j+}^T + \frac{\partial\varphi}{\partial\vec{x}_{j+}} + \vec{\mu}^T \left[ \frac{\partial\vec{\chi}}{\partial\vec{x}_{j+}} \right] = 0 \quad j = 0, \dots, n-1 \quad (5.11)$$

$$H_{j-} + \frac{\partial\varphi}{\partial t_{j-}} + \vec{\mu}^T \frac{\partial\vec{\chi}}{\partial t_{j-}} = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (5.12)$$

$$-H_{j+} + \frac{\partial\varphi}{\partial t_{j+}} + \vec{\mu}^T \frac{\partial\vec{\chi}}{\partial t_{j+}} = 0 \quad j = 0, \dots, n-1 \quad (5.13)$$

Le equazioni (5.10) e (5.12) hanno significato per  $j > 0$  mentre le equazioni (5.11) e (5.13) per  $j < n$ . Il sistema differenziale dato dalle equazioni (5.2),(5.8) e dalle condizioni al contorno assegnate (5.3) viene completato dalle condizioni al contorno di ottimo del tipo

$$\vec{\sigma}(\vec{x}_{(j-1)+}, \vec{x}_{j-}, \vec{\lambda}_{(j-1)+}, \vec{\lambda}_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-}) = 0 \quad (5.14)$$

ottenute eliminando le costanti aggiuntive  $\vec{\mu}$  dalle equazioni delle condizioni al contorno (5.10), (5.11), (5.12), (5.13).

Si prenda in considerazione una generica variabile di stato  $x$  con relative condizioni al contorno, la corrispondente variabile aggiuntiva  $\lambda_x$  avrà condizioni di ottimo secondo i seguenti criteri:

- se  $x$  è assegnata esplicitamente all'istante iniziale o finale, allora la variabile assegnata  $\lambda_{x_0}$  è **libera**;
- se il valore di  $x$  all'istante iniziale o finale non compare nella funzione  $\varphi$  o nelle condizioni al contorno, allora la variabile aggiuntiva all'istante iniziale o finale è **nulla**;
- se  $x$  è continua e non è assegnata esplicitamente a un punto interno, si avrà l'equazione  $x_{j_+} = x_{j_-}$  in  $\vec{\chi}$  e la variabile aggiunta sarà continua con  $\lambda_{x_{j_+}} = \lambda_{x_{j_-}}$ ;
- se  $x$  è continua ed è assegnata esplicitamente ad un contorno interno, l'equazione  $x_{j_+} = x_{j_-} = a$  è contenuta in  $\vec{\chi}$  e la variabile aggiuntiva ha una **discontinuità libera**, cioè attraverso il processo di ottimizzazione si avrà il valore di  $\lambda_{x_{j_+}}$ , indipendente da  $\lambda_{x_{j_-}}$ ;

Si hanno ulteriori casi di condizioni al contorno per  $H$  non dipendente dal tempo in modo esplicito:

- L'Hamiltoniano è **nullo** se il tempo iniziale o finale non compare esplicitamente nelle condizioni al contorno  $\vec{\chi}$  o nella funzione  $\varphi$ ;
- se il tempo  $t_j$  intermedio non compare nella funzione  $\varphi$  in modo esplicito ma è presente in  $\vec{\chi}$  con l'equazione di continuità  $t_{j_+} = t_{j_-}$ , allora l'Hamiltoniano è continuo nel punto  $j$ ;
- se il tempo  $t_j$  intermedio è esplicitamente assegnato e in  $\vec{\chi}$  si ha l'equazione  $t_{j_+} = t_{j_-} = a$ , l'Hamiltoniano presenta una **discontinuità libera**.

### 5.3.1 Problema differenziale ai limiti

La teoria del controllo ottimale consente di formulare il problema differenziale ai limiti BVP (*Boundary Values Problem*), che consiste in un sistema di equazioni differenziali in cui le incognite sono i valori iniziali delle variabili. La risoluzione del problema consiste nel trovare i valori delle incognite in grado di soddisfare le condizioni al contorno e di ottimo. Si riportano alcune peculiarità del problema:

- le equazioni differenziali possono presentare una forma diversa nei sottointervalli in cui è suddiviso l'intervallo di integrazione;
- ogni sottointervallo ha una durata generalmente incognita;
- le condizioni al contorno, interne ed esterne, possono includere i valori delle variabili e possono essere non-lineari;
- le variabili possono avere valore incognito in presenza di discontinuità ai contorni interni;

Il problema differenziale ai limiti deve essere ridotto ad una successione di problemi ai valori iniziali per poterne ricavare la soluzione; tale successione viene portata a convergenza tramite il metodo di Newton.

Il problema è descritto dalle equazioni differenziali (5.2) e (5.8), con le equazioni algebriche dei controlli (5.9), le condizioni al contorno (5.3) e le condizioni di ottimo (5.14), assumendo la forma:

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \vec{f}^*(\vec{y}, t) \quad (5.15)$$

dove  $\vec{y} = (\vec{x}, \vec{\lambda})$  è il vettore delle variabili di stato e aggiunte. La presenza di parametri costanti rende necessaria la definizione di un nuovo vettore  $\vec{z} = (\vec{y}, \vec{c})$  dove  $\vec{c}$  è il vettore dei parametri costanti.

Per poter svolgere l'integrazione, nonostante la durata dei sottointervalli sia incognita, si effettua un cambio di variabile e si definisce la nuova variabile  $\varepsilon$  come:

$$\varepsilon = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{\tau_j} \quad (5.16)$$

dove  $\tau_j$  è la durata incognita del sottointervallo e  $j$  è il generico sottointervallo. La nuova forma del sistema è:

$$\frac{d\vec{z}}{d\varepsilon} = \vec{f}(\vec{z}, \varepsilon) \quad (5.17)$$

La forma generale delle condizioni al contorno è:

$$\vec{\Psi}(\vec{s}) = 0 \quad (5.18)$$

dove  $\vec{s} = (\vec{y}_0, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n, \vec{c})$  è il vettore contenente i parametri costanti e i valori delle variabili ai contorni interni ed esterni.

L'iterazione *r-esima* del processo iterativo per la risoluzione del BVP prevede i seguenti passi:

- supponendo incogniti tutti i valori iniziali, si fissa

$$\vec{z}(0) = \vec{p}^r \quad (5.19)$$

dove  $\vec{p}^r$  contiene i valori di partenza ottenuti dall'iterazione precedente. Alla prima iterazione si scelgono dei valori di tentativo  $\vec{p}^1$ ;

- si procede all'integrazione dell'equazione (5.17) lungo tutta la traiettoria tenendo conto delle discontinuità e si determina il valore delle variabili di stato ad ogni contorno;
- al termine dell'integrazione si effettua il calcolo dell'errore sulle condizioni al contorno  $\vec{\Psi}^r$ ;
- con l'obiettivo di annullare l'errore, ad ogni iterazione si apporta una correzione ai valori iniziali

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}^{r+1} - \vec{p}^r = - \left[ \frac{\partial\vec{\Psi}}{\partial\vec{p}} \right]^{-1} \vec{\Psi}^r \quad (5.20)$$

fino al raggiungimento di una tolleranza sufficiente. Nell'equazione 5.20 compare una matrice ottenuta dal prodotto

$$\left[ \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial \vec{p}} \right] = \left[ \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial \vec{s}} \right] \left[ \frac{\partial \vec{s}}{\partial \vec{p}} \right] \quad (5.21)$$

dove, a secondo membro, la prima matrice contiene le derivate delle condizioni al contorno rispetto ai valori delle variabili ad ogni contorno, mentre la seconda matrice contiene le derivate di questi ultimi rispetto ai valori iniziali. Per la determinazione completa di tale matrice si rimanda il lettore alla fonte [3].

L'integrazione del sistema (5.17) viene eseguita con un metodo basato sulle formule di Adams [29] e caratterizzato da passo ed ordine variabili.

## 5.4 Definizione del modello matematico

Il metodo di ottimizzazione esplicitato nel paragrafo precedente, si applica al modello matematico del problema. Occorre quindi definirne le equazioni di governo, le condizioni al contorno e di ottimo.

### 5.4.1 Equazioni del moto

Il moto del satellite è descritto dalle equazioni differenziali ricavate dal problema dei due corpi

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V} \quad (5.22)$$

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{g} + \frac{\vec{T}}{m} \quad (5.23)$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{T}{c} \quad (5.24)$$

dove  $\vec{r}$  è il vettore posizione,  $\vec{V}$  è il vettore velocità,  $\vec{g}$  è l'accelerazione gravitazionale,  $m$  è la massa del satellite,  $\vec{T}$  è il vettore della spinta e  $c$  è la velocità efficace di scarico. Si introduce l'Hamiltoniano, definito con l'equazione (5.6), come

$$H = \vec{\lambda}_r^T \vec{V} + \vec{\lambda}_V^T \vec{g} + T S_F \quad (5.25)$$

dove il *coefficiente di spinta* o *switching function* è definito dalla relazione

$$S_F = \frac{\vec{\lambda}_V^T \vec{T}}{mT} - \frac{\lambda_m}{c} \quad (5.26)$$

Il vettore  $\vec{\lambda}_V$  contiene le variabili aggiuntive delle velocità mentre  $\lambda_m$  è relativa alla massa.

## 5.4.2 Controlli ottimali

Il valore massimo dell'Hamiltoniano è strettamente dipendente dal segno della switching function  $S_F$  che è a sua volta correlata al modulo e alla direzione della spinta. Consideriamo che la direzione della spinta sia parallela al vettore delle variabili aggiuntive  $\vec{\lambda}_V$  e che la velocità efficace di scarico sia costante. Queste considerazioni portano alla semplificazione dell'equazione (5.26) come segue

$$S_F = \frac{\lambda_V}{m} - \frac{\lambda_m}{c} \quad (5.27)$$

La sola variabile di controllo rimasta è il modulo della spinta ed è possibile osservare che, se si utilizza un controllo di tipo *bang-bang*, si possono verificare i seguenti casi:

- se  $S_F > 0$ , la spinta ha modulo massimo;
- se  $S_F < 0$ , la spinta ha modulo minimo (generalmente nulla);
- se  $S_F = 0$  in tutto l'intervallo, l'arco è singolare.

## 5.4.3 Equazioni in coordinate sferiche

In un sistema di riferimento inerziale basato sul piano equatoriale, riportato in Figura 5.2, si descrive la posizione del satellite, in coordinate sferiche, con il vettore  $\vec{r}$

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} r \\ \theta \\ \phi \end{bmatrix}$$

La velocità del satellite è definita in un sistema di riferimento locale dalle componenti in direzione radiale verso lo Zenit, in direzione Est e Nord.

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

La scelta di questo sistema di riferimento conviene poichè non presenta accelerazioni di trascimento e di Coriolis che comporterebbero complicazioni alla risoluzione del problema differenziale ai limiti; inoltre, la proiezione dell'equazione differenziale della velocità in questo sistema di riferimento permette di avere una semplice relazione tra la velocità assoluta e relativa [1].

Si effettua la proiezione delle equazioni del moto nel sistema di riferimento inerziale e si ottiene:

$$\frac{dr}{dt} = u \quad (5.28)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{r \cos \phi} \quad (5.29)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{w}{r} \quad (5.30)$$

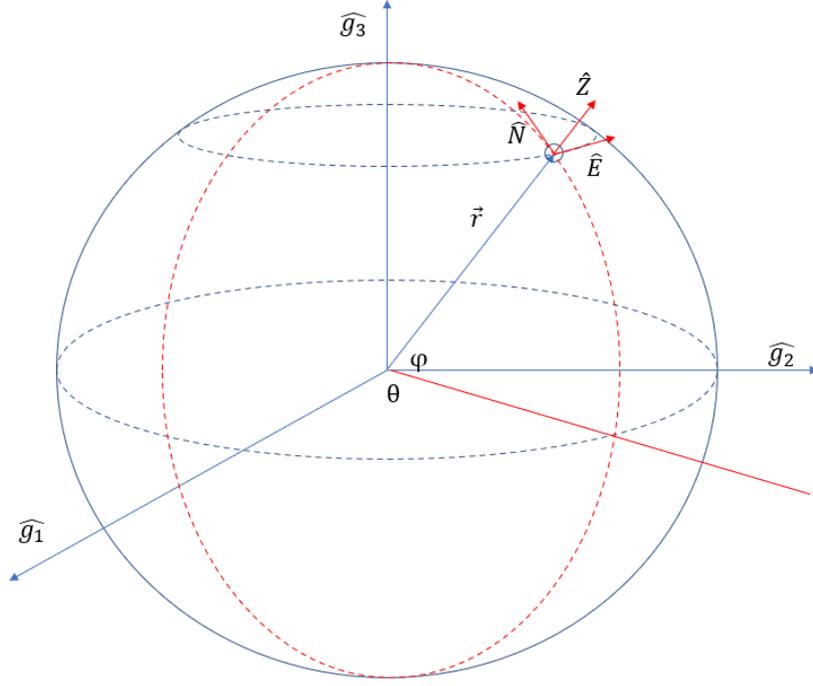


Figura 5.2. Sistema di riferimento inerziale e coordinate sferiche [8]

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{r^2} + \frac{v^2}{r} + \frac{w^2}{r} + \frac{T}{m} \sin \gamma_T \quad (5.31)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{uv}{r} + \frac{uw}{r} \tan \phi + \frac{T}{m} \cos \gamma_T \cos \psi_T \quad (5.32)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{uw}{r} - \frac{v^2}{r} \tan \phi + \frac{T}{m} \cos \gamma_T \sin \psi_T \quad (5.33)$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{T}{c} \quad (5.34)$$

Gli angoli  $\gamma_T$  e  $\psi_T$  sono rispettivamente il *flight path angle* e l'*heading* della spinta  $\vec{T}$ . Derivando l'Hamiltoniano (5.25) rispetto a  $\gamma_T$  e  $\psi_T$  ed annullando tali derivate, si calcolano i valori ottimali degli angoli di spinta:

$$\sin \gamma_T = \frac{\lambda_u}{\lambda_V} \quad (5.35)$$

$$\cos \gamma_T \cos \psi_T = \frac{\lambda_v}{\lambda_V} \quad (5.36)$$

$$\cos \gamma_T \sin \psi_T = \frac{\lambda_w}{\lambda_V} \quad (5.37)$$

dove  $\vec{\lambda}_V$ , anche chiamato *primer vector*, ha modulo pari a

$$\lambda_V = \sqrt{\lambda_u^2 + \lambda_v^2 + \lambda_w^2} \quad (5.38)$$

Insieme alle equazioni di stato, il modello matematico viene completato dalle equazioni differenziali alle variabili aggiunte, ricavate esplicitando le equazioni di Eulero-Lagrange (5.8) [1].

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_r = \frac{1}{r^2} \left[ \lambda_\theta \frac{v}{\cos \phi} + \lambda_\phi w + \lambda_u \left( -\frac{2}{r} + v^2 + w^2 \right) + \right. \\ \left. + \lambda_v (-uv + vw \tan \phi) + \lambda_w (-uw - v^2 \tan \phi) \right] \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$\dot{\lambda}_\theta = 0 \quad (5.40)$$

$$\dot{\lambda}_\phi = \frac{1}{r \cos^2 \phi} (-\lambda_\theta v \sin \phi - \lambda_v vw + \lambda_w v^2) \quad (5.41)$$

$$\dot{\lambda}_u = \frac{1}{r} (-\lambda_r r + \lambda_v v + \lambda_w w) \quad (5.42)$$

$$\dot{\lambda}_v = \frac{1}{r} \left[ -\lambda_\theta \frac{1}{\cos \phi} - 2\lambda_u v + \lambda_v (u - w \tan \phi) + 2\lambda_w v \tan \phi \right] \quad (5.43)$$

$$\dot{\lambda}_w = \frac{1}{r} (-\lambda_\phi - 2\lambda_u w - \lambda_v v \tan \phi + \lambda_w u) \quad (5.44)$$

$$\dot{\lambda}_m = \frac{T}{m^2} \lambda_V \quad (5.45)$$

#### 5.4.4 Condizioni al contorno

Definite le equazioni differenziali di stato e delle variabili aggiunte, si impongono le condizioni al contorno che, nel caso generale, includono anche i contorni interni. Nel caso in esame il satellite esegue un semplice rendez-vous dell'asteroide target per cui si definiscono le condizioni al contorno solo agli estremi iniziale e finale della traiettoria. All'istante iniziale  $t_0$ , il satellite avrà stessa posizione e velocità della Terra con una massa di  $m(t_0) = 21 \text{ kg}$ ; mentre, all'istante finale  $t_f$ , la posizione e la velocità del satellite dovranno coincidere con quelle del target.

##### Condizioni iniziali

Le condizioni iniziali, utilizzate per l'integrazione, come mostrato nell'equazione (5.19), sono contenute nel vettore  $\vec{p}$  che si struttura come segue:

$$\vec{p} = [t_0, t_f, r_0, \theta_0, \phi_0, u_0, v_0, w_0, \lambda_{r_0}, \lambda_{\theta_0}, \lambda_{\phi_0}, \lambda_{u_0}, \lambda_{v_0}, \lambda_{w_0}]^T \quad (5.46)$$

dove

- $t_0$  e  $t_f$  sono il tempo di partenza dalla Terra e di arrivo al target;
- $r_0, \theta_0, \phi_0$  sono le componenti del vettore posizione del satellite all'istante iniziale;
- $u_0, v_0$  e  $w_0$  sono le componenti del vettore velocità del satellite all'istante iniziale;
- $\lambda_{r_0}, \lambda_{\theta_0}, \lambda_{\phi_0}, \lambda_{u_0}, \lambda_{v_0}, \lambda_{w_0}$  sono le variabili aggiunte all'istante iniziale;

### Condizioni ai contorni interni

Pur non essendo trattati nel caso in esame si definiscono di seguito le condizioni al contorno che è necessario imporre nell'eventualità di fly-by, ricordando che la traiettoria viene suddivisa in tanti archi quanti sono i target. Il metodo di multiple-shooting infatti, richiede di imporre la continuità delle variabili di stato ed aggiunte all'interfaccia di ogni sottointervallo [25]. Ipotizzando di essere al  $j$ -esimo fly-by ed indicando con  $j_-$  il punto immediatamente prima e con  $j_+$  il punto immediatamente dopo, la posizione del satellite dovrà coincidere con quella del  $j$ -esimo target  $\vec{r}_{j_-} = \vec{r}_{target_j}$ . Attraverso le condizioni al contorno interno si impone la continuità di tali variabili

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{j_+} = r_{j_-} \\ \theta_{j_+} = \theta_{j_-} \\ \phi_{j_+} = \phi_{j_-} \\ u_{j_+} = u_{j_-} \\ v_{j_+} = v_{j_-} \\ w_{j_+} = w_{j_-} \\ m_{j_+} = m_{j_-} \end{array} \right.$$

Le condizioni di ottimo prevedono anche la continuità delle variabili aggiuntive

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_{u_{j_+}} = \lambda_{u_{j_-}} \\ \lambda_{v_{j_+}} = \lambda_{v_{j_-}} \\ \lambda_{w_{j_+}} = \lambda_{w_{j_-}} \end{array} \right.$$

Infine, il tempo di ripartenza dovrà essere calcolato come

$$t_{j_+} = t_{j_-} + t_{stay}$$

dove  $t_{stay}$  è l'intervallo di tempo utilizzato per le osservazioni dell'asteroide.

# Capitolo 6

## Analisi delle traiettorie

L'introduzione della tesi presenta un accenno all'utilizzo di un codice FORTRAN per l'analisi delle missioni alternative. Tale codice è stato fornito, per lo svolgimento del lavoro, dal Politecnico di Torino. La familiarizzazione con il codice e l'eseguibile ha impiegato i primi mesi di lavoro ma è risultato indispensabile per l'ottenimento ultimo dei risultati. Si riportano in questo capitolo le principali caratteristiche del codice che hanno avuto un ruolo fondamentale nell'analisi e si tralascia la struttura dello stesso.

### 6.1 Ipotesi semplificative

Per l'analisi preliminare di fattibilità si formulano delle ipotesi semplificative. Si assumono corretti i parametri orbitali ricavati dallo strumento Horizons System [16] per le date entro le quali si sono svolte le analisi; si trascurano la fase di lancio e di fuga dalla sfera di influenza terrestre, in questo modo si considera solo la traiettoria interplanetaria eliocentrica. Il propulsore ha un rendimento  $\eta = 0.625$  e impulso specifico pari a 2100 s. La sua spinta massima è di 1.25 mN ma per poter svolgere un calcolo conservativo, si ipotizza che il *duty cycle* del motore preveda che, durante la trasferta, il 10% del tempo il propulsore sia spento e si consideri in questo modo solo il 90% della spinta nominale [24].

La ricerca iniziale di soluzioni convergenti, per i tre nuovi asteroidi considerati, si è svolta utilizzando parametri irrealistici di massa del satellite e durata della missione, tuttavia sono stati utilizzati nella fase esplorativa, per ampliare il dominio di convergenza.

### 6.2 Variabili e costanti del problema

La dimensione del nostro problema è data dal parametro  $N$  ed è pari a 17. Di queste grandezze 14 sono variabili ed includono posizione, velocità e massa del satellite, con le loro rispettive variabili aggiunte.

$$var = [r, \theta, \phi, u, v, w, \lambda_r, \lambda_\theta, \lambda_\phi, \lambda_u, \lambda_v, \lambda_w, m, \lambda_m]$$

Le restanti 3 sono parametri costanti e comprendono i tempi di partenza ed arrivo, e l'eccesso iperbolico di velocità.

$$cost = [t_0, t_f, V_\infty]$$

## 6.3 Conversione dei parametri e adimensionalizzazione

La conversione dei parametri è un processo fondamentale per poter utilizzare grandezze con ordini confrontabili; le variabili su cui applicheremo la conversione sono la distanza, la velocità, la massa, l'accelerazione e il tempo.

- La *distanza di riferimento* è l'Unità Astronomica UA, definita come la distanza media tra il Sole e la Terra, per cui i valori delle distanze avranno ordine di grandezza pari all'unità  $r_{conv} = 1 \text{ UA} = 1.49597870691 \times 10^8 \text{ km}$ .

- La *velocità di riferimento* è la velocità circolare della Terra nella sua orbita intorno al Sole

$$V_{conv} = \sqrt{\frac{\mu_\odot}{r_{conv}}} = 29.7846183 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

essendo le orbite dei NEA nella regione terrestre, le velocità avranno valore circa pari a 1.

- La *massa di riferimento* è quella del satellite all'istante iniziale  $m_0 = 21 \text{ kg}$ , per cui al  $t_0$  la massa avrà valore 1, mentre all'istante finale sarà pari al rapporto tra il valore finale e quello di riferimento.
- L'*accelerazione di riferimento*, come per la velocità, si riferisce all'orbita terrestre e si calcola come:

$$a_{conv} = \frac{\mu_\odot}{r_{conv}^2} = 5.93008352 \times 10^{-6} \frac{\text{km}}{\text{s}^2}$$

- Il periodo di riferimento è definito come

$$T_{conv} = \sqrt{\frac{r_{conv}^2}{\mu_\odot}} \frac{1}{86400} = 58.13244087$$

Il sistema di riferimento temporale che utilizza il codice per indicare la data di partenza e di arrivo si riferisce al J2000, particolarmente utilizzato in ambito astrodinamico, che definisce come punto di partenza per il calcolo dei giorni l'1 Gennaio 2000 alle ore 12:00 UTC, ovvero il *Julian Day* 2451545.0.

## 6.4 Parametri iniziali

Per una generica analisi, il codice richiede l'inserimento di vari parametri di cui si riporta la definizione. I primi tre fanno riferimento all'integrazione e sono: il passo di integrazione  $r_{min}$  ( $0.1 \div 0.0001$ ), l'aumento massimo dell'errore tra un'iterazione e la successiva *pbis*

(mantenuto costante pari a 2) e il numero massimo di iterazioni  $j_{max}$ . Il successivo parametro è la data di partenza  $t_0$ , espressa come differenza dal J2000, seguito dalla durata della missione. Successivamente, si indica il pianeta di partenza (0 = Terra) e l'asteroide di arrivo specificandone il numero, se l'asteroide rientra nella categoria *numbered*, oppure indicando il numero della riga, diminuito di 2, del file contenente gli *unnumbered*. Si procede inserendo la massa adimensionalizzata del satellite alla partenza  $am_0$  e le condizioni di uscita dalla sfera di influenza terrestre in termini di distanza della traiettoria di parcheggio  $d$  ed angoli  $\alpha$  e  $\delta$ , rispettivamente dentro e fuori dal piano dell'eclittica. L'ultimo parametro è l'eccesso iperbolico di velocità, considerato nullo in tutte le nostre analisi.

# Capitolo 7

## Risultati

Alla luce delle ipotesi e del procedimento esplicitato nel capitolo precedente, si riportano i risultati ottenuti. Dopo aver eseguito delle prove di familiarizzazione con gli asteroidi già previsti dal progetto ANIME, sono stati considerati i target alternativi e si è svolta una fase esplorativa per poter limitare la finestra di lancio in modo da massimizzare la massa finale. Questo si ottiene considerando i valori di  $\Delta\theta$ , calcolati come  $\theta_{Terra} - \theta_{Asteroide}$ , prossimi a zero.

### 7.1 2020 OM6

La fase esplorativa per l'asteroide 2020 OM6 ha permesso di calcolare i valori di  $\Delta\theta$  e si riporta in Figura 7.1 l'andamento di essi.

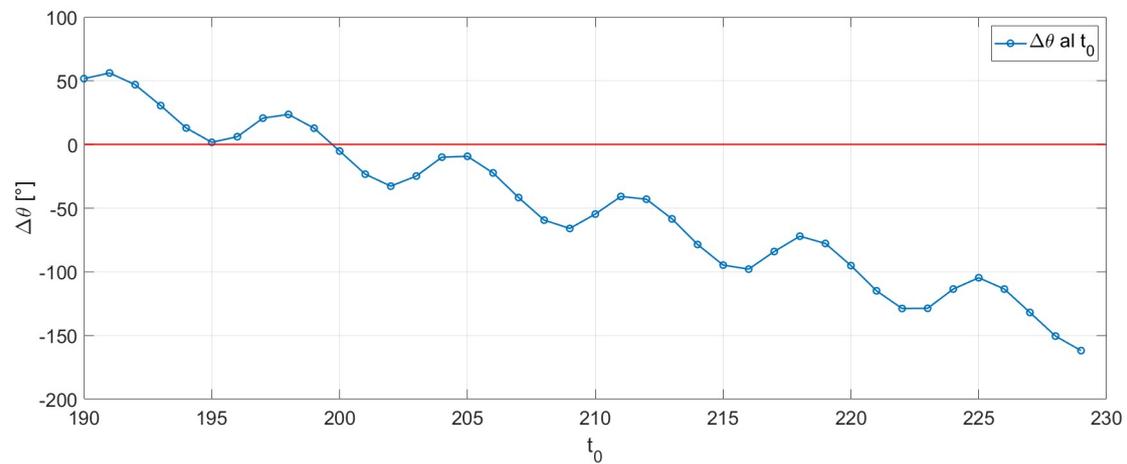


Figura 7.1. Andamento di  $\Delta\theta$  al  $t_0$  per l'asteroide 2020 OM6

È possibile concentrare la ricerca della fase successiva, nella finestra di lancio compresa tra  $t_0 = 191 \div 198$ , dove i valori di fasamento sono più vicini allo zero e di cui si riportano i valori della data corrispondente e del  $\Delta\theta$  in Tabella 7.1.

Data partenza	$t_0$	$\Delta\theta$ [°]
26/05/2030	191	56.1584
23/07/2030	192	46.9714
19/09/2030	193	30.5622
16/11/2030	194	12.9680
13/01/2031	195	1.7328
12/03/2031	196	6.1494
10/05/2031	197	20.7080
07/07/2031	198	23.6319

Tabella 7.1. Valori di  $\Delta\theta$  nella finestra di lancio considerata per l'asteroide 2020 OM6

Si considerano ora i seguenti parametri, in comune a tutte le prove svolte in questa fase: massa iniziale  $m_0 = 0.5 = 10.5 \text{ kg}$ , durata = 25, condizioni di uscita dalla sfera di influenza terrestre  $d = 0.1$ ,  $\alpha = 90^\circ$  e  $\delta = 0^\circ$ . Con queste condizioni iniziali, sono state trovate diverse traiettorie valide al variare della data di partenza all'interno della finestra selezionata, di cui si grafica l'andamento della massa finale in Figura 7.2

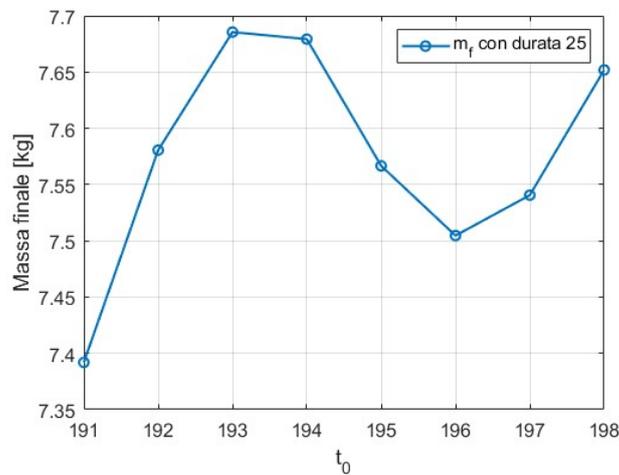


Figura 7.2. Andamento della massa finale al variare di  $t_0$  per l'asteroide 2020 OM6

Le traiettorie più significative dal punto di vista della massa finale hanno  $t_0 = 193, 198$ . Per via del suo minimo valore di  $\Delta\theta$  si prende in considerazione anche la traiettoria con

partenza al  $t_0 = 195$ . Per queste tre date di partenza si rappresentano in Figura 7.3, 7.4 e 7.5 la traiettoria percorsa dal satellite vista nel piano XY.

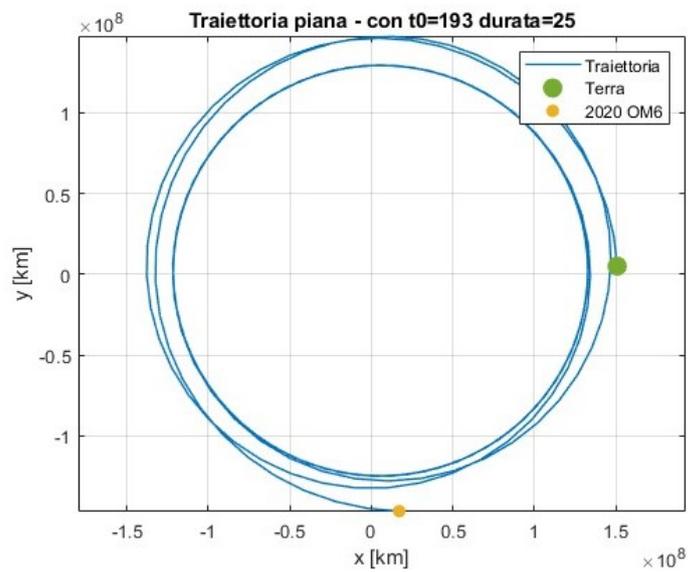


Figura 7.3. Traiettoria nel piano al  $t_0 = 193$

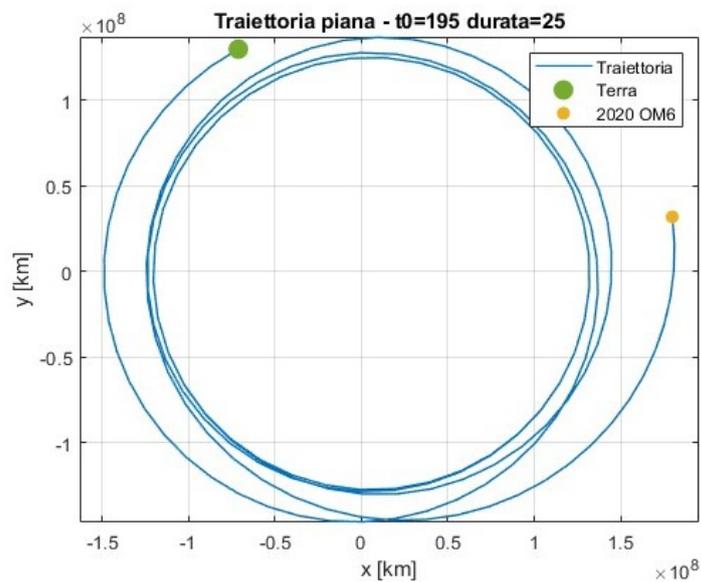


Figura 7.4. Traiettoria nel piano al  $t_0 = 195$

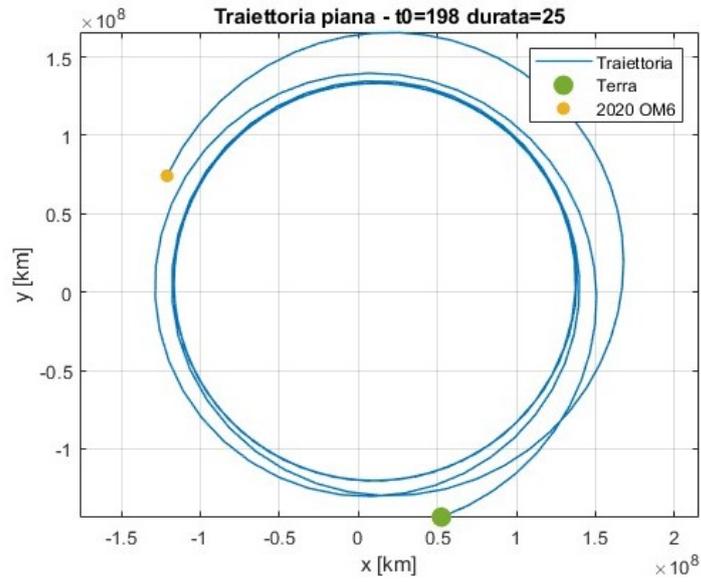


Figura 7.5. Traiettorie nel piano al  $t_0 = 198$

I tre grafici mostrano che la traiettoria del satellite è caratterizzata da ellissi con eccentricità accentuate e, vista l'inclinazione dell'orbita dell'asteroide, subirà importanti manovre di cambio di piano per poterlo raggiungere. In Figura 7.6, 7.7 e 7.8 è rappresentato l'andamento dei raggi di perielio e afelio del satellite durante la missione.

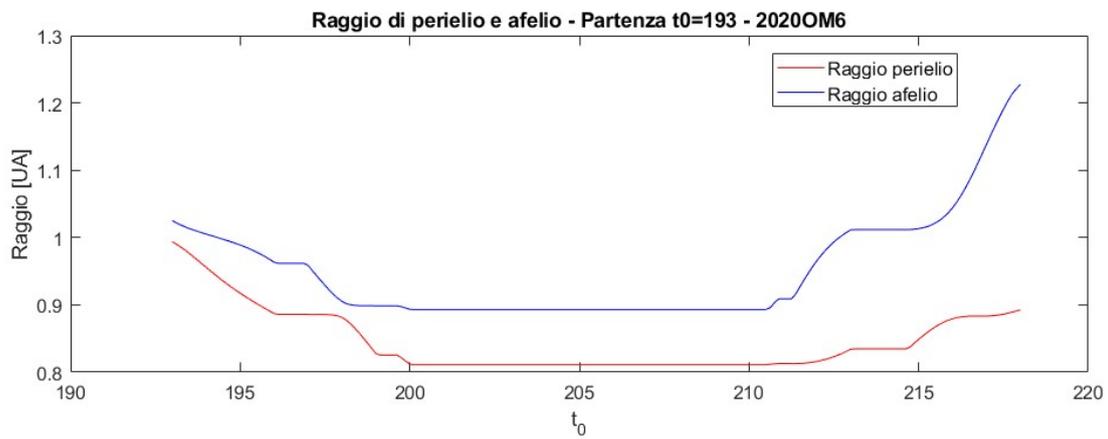


Figura 7.6. Raggio al perielio e afelio al  $t_0 = 193$  per l'asteroide 2020 OM6

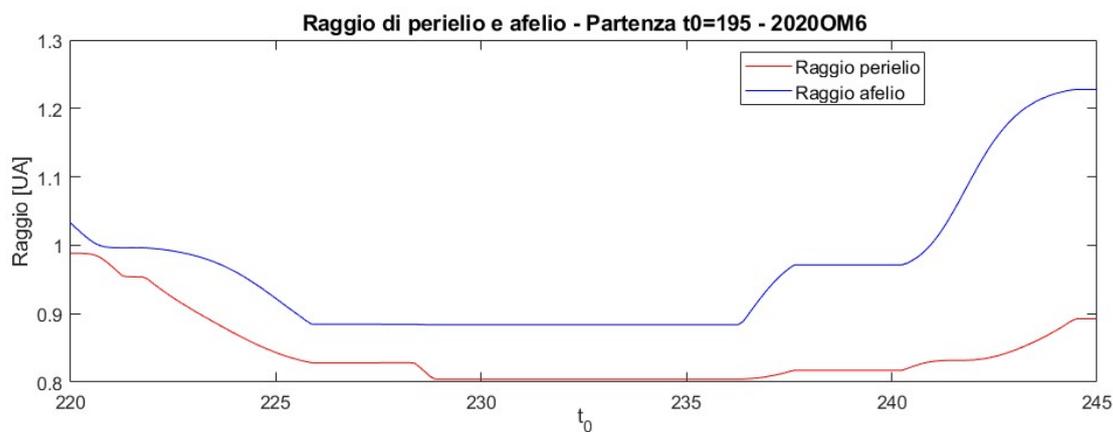


Figura 7.7. Raggio al perielio e afelio al  $t_0 = 195$  per l'asteroide 2020 OM6

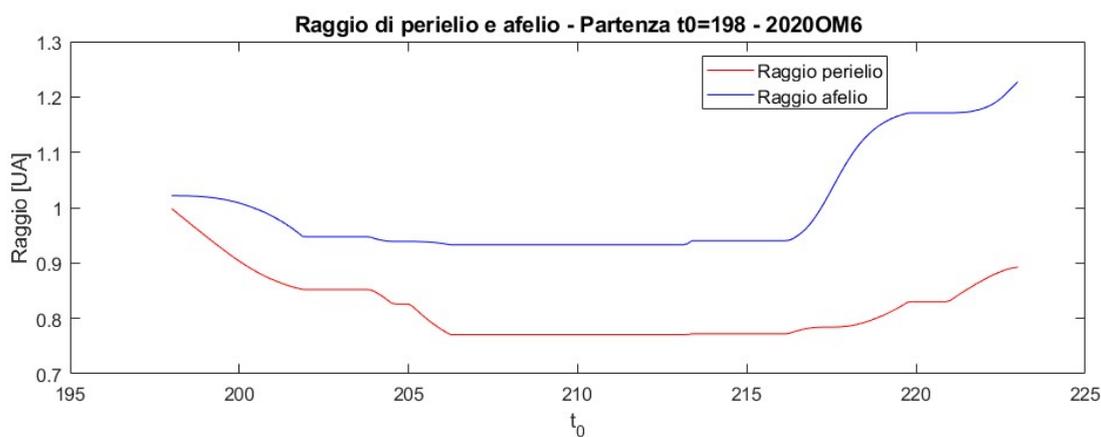


Figura 7.8. Raggio al perielio e afelio al  $t_0 = 198$  per l'asteroide 2020 OM6

Il fenomeno per cui i raggi necessitano di una diminuzione, che comporta un aumento di velocità della traiettoria, e un successivo aumento, per riportarsi sull'orbita dell'asteroide, permette di concludere in modo anticipato che le soluzioni mostrate sono poco efficienti. Inoltre, si osserva che nel primo caso è presente un tratto costante dei due raggi per una durata maggiore rispetto agli altri due casi in esame, questo ci permette di concludere che il consumo per  $t_0 = 193$  è minore poichè i tratti costanti si riferiscono a porzioni di traiettoria in cui la  $S_F < 0$ , perciò la spinta è minima e generalmente nulla.

Ciò è dimostrabile confrontando l'andamento dei raggi in Figura 7.6 e l'andamento della switching function in Figura 7.9.

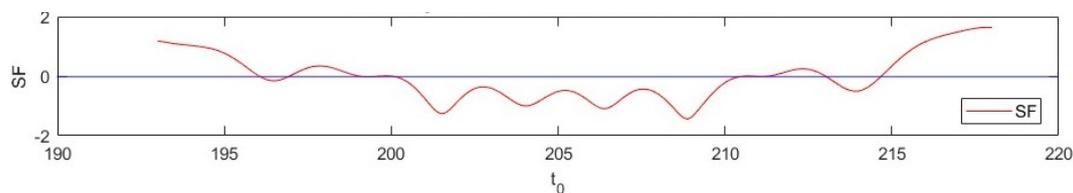


Figura 7.9. Switching Function al  $t_0 = 193$

Il grafico in Figura 7.10 dimostra che all'aumentare della massa iniziale aumenta il  $\Delta V$  necessario per lo svolgimento della missione e che, come commentato relativamente alle rappresentazioni dei raggi, la soluzione con  $\Delta V$  minore è caratterizzata da  $t_0 = 193$ .

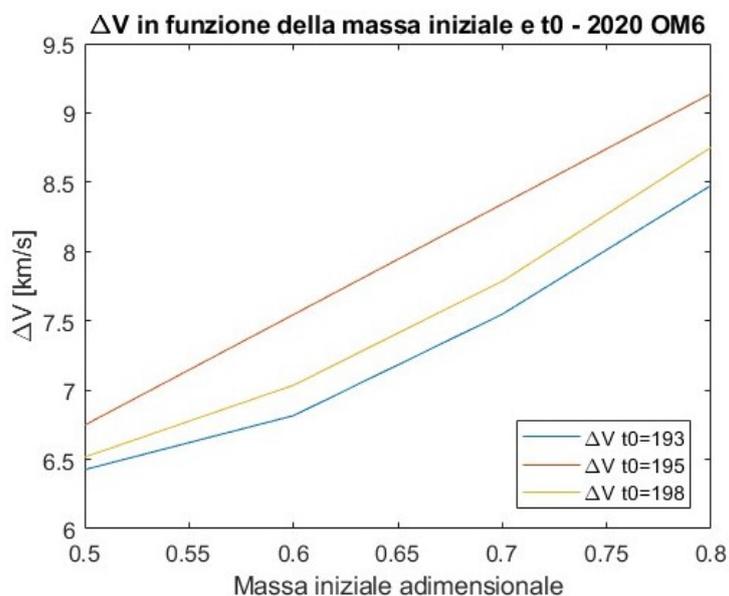


Figura 7.10.  $\Delta V$  in funzione della massa iniziale e del  $t_0$

Un'indagine approfondita per questa data di partenza, al diminuire della durata della missione, ha permesso di ottenere una soluzione con durata minima, caratterizzata dai seguenti parametri:

$t_0$	durata	massa iniziale [kg]	$d$	$\alpha$	$\delta$	massa finale [kg]	$\Delta V$ [km/s]
193	18	10.5	0.05	90°	0°	6.16740158	10.95800029

Si riporta in Figura 7.11 la traiettoria del satellite della soluzione trovata e, in Figura 7.12, l'andamento dei raggi di perielio e afelio.

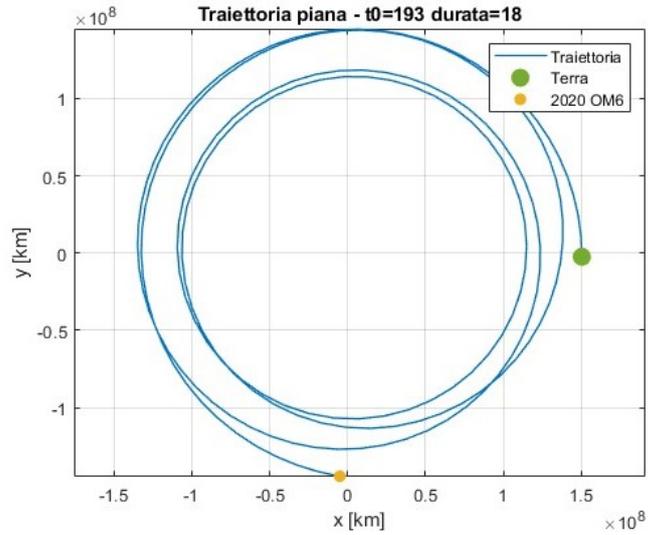


Figura 7.11. Traiettorie nel piano al  $t_0 = 193$  e durata=18

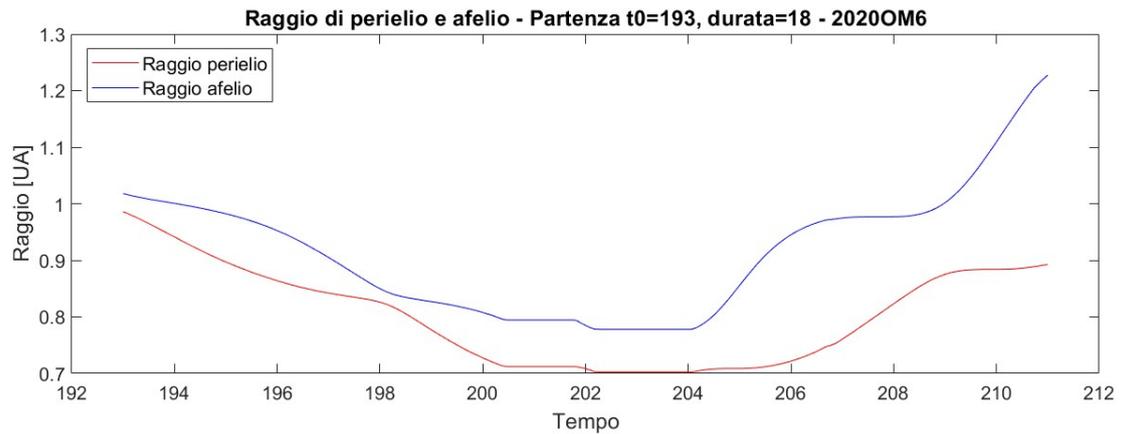


Figura 7.12. Raggio al perielio e afelio al  $t_0 = 193$  e durata=18 per l'asteroide 2020 OM6

Al diminuire della durata della missione, diminuisce la monotonia dell'andamento dei raggi di perielio e afelio e la durata dei tratti costanti, di conseguenza aumenta il consumo e diminuisce la massa finale del satellite.

## 7.2 2020 PJ6

Eseguito il calcolo dei  $\Delta\theta$  al variare della data di partenza, si riporta l'andamento del parametro per l'asteroide 2020 PJ6 in Figura 7.13.

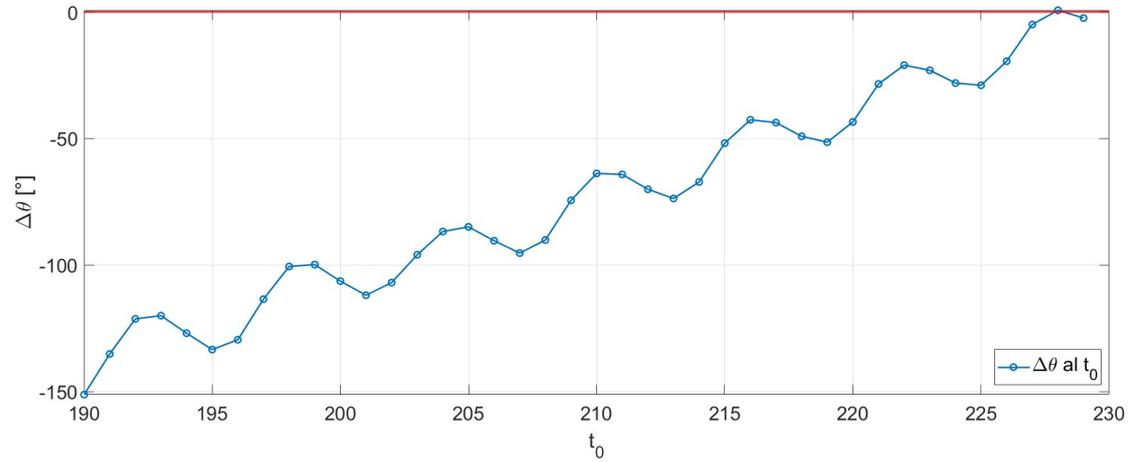


Figura 7.13. Andamento di  $\Delta\theta$  al  $t_0$  per l'asteroide 2020 PJ6

Si concentra l'attenzione nella finestra di lancio compresa tra  $t_0 = 222 \div 229$  di cui si riportano i valori del  $\Delta\theta$  in Tabella 7.2. Con i seguenti parametri comuni:  $m_0 = 0.5 = 10.5 \text{ kg}$ ,  $durata = 20$ ,  $d = 0.1$ ,  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\delta = 0^\circ$ , sono state calcolate delle traiettorie a diverse date di partenza nella finestra di lancio ristretta e si grafica l'andamento della massa finale in Figura 7.14.

Data partenza	$t_0$	$\Delta\theta$ [°]
02/05/2035	222	-21.0167
29/06/2035	223	-23.0445
26/08/2035	224	-28.087
23/10/2035	225	-28.9703
20/12/2035	226	-19.4713
17/02/2036	227	-4.9261
15/04/2036	228	0.6835
12/06/2036	229	-2.3822

Tabella 7.2. Valori di  $\Delta\theta$  nella finestra di lancio considerata per l'asteroide 2020 PJ6

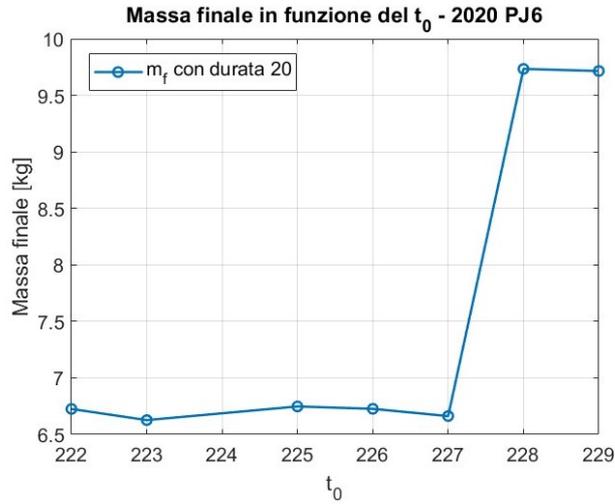


Figura 7.14. Andamento della massa finale al variare di  $t_0$  per l'asteroide 2020 PJ6

L'andamento della massa finale permette di osservare un'importante discontinuità tra la soluzione con partenza al  $t_0 = 227$  e quella avente  $t_0 = 228$ . Ci si aspetta infatti che le masse finali di entrambe le soluzioni abbiano un valore simile per via del loro fasamento iniziale. Questo particolare comportamento viene studiato di seguito confrontando i risultati ottenuti nei due diversi casi.

Si selezionano le soluzioni con il  $t_0 = 227, 228$  e si tracciano gli andamenti delle traiettorie in Figura 7.15, 7.16 e dei raggi di perielio e afelio in Figura 7.17, 7.18.

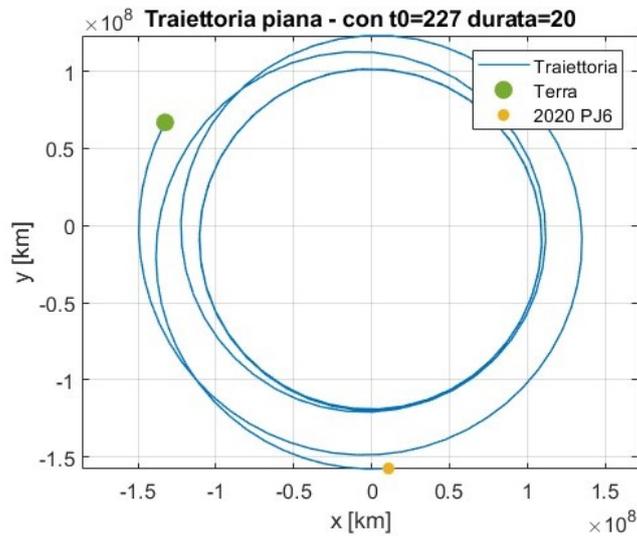


Figura 7.15. Traiettoria nel piano al  $t_0 = 227$

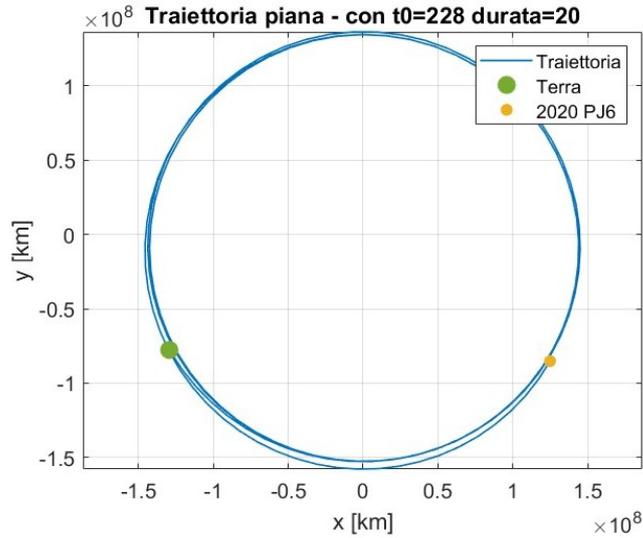


Figura 7.16. Traiettoria nel piano al  $t_0 = 228$

La rappresentazione delle traiettorie permette di osservare una differenza nel numero di giri percorsi, in particolare il satellite nella soluzione con  $t_0 = 227$  compie un giro in più e i raggi della traiettoria minori indicano che esso deve avere una velocità sostenuta per poter raggiungere l'asteroide.

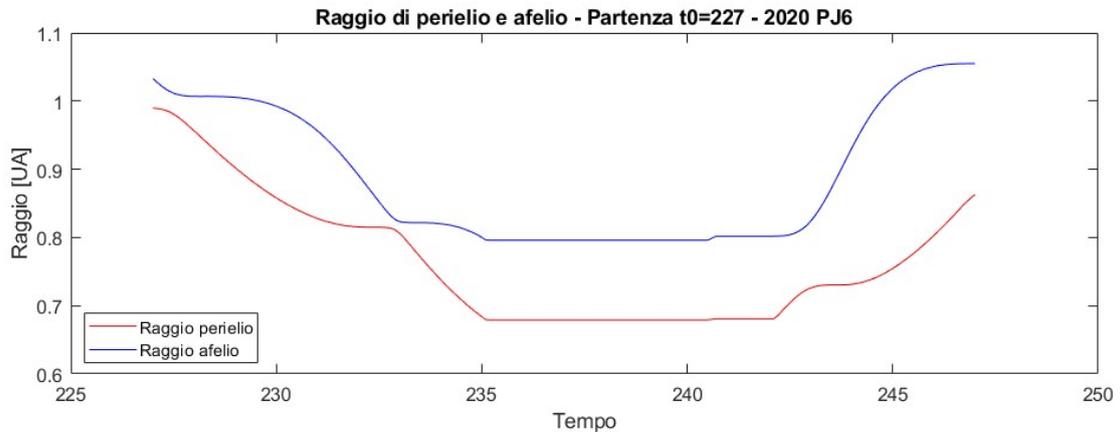


Figura 7.17. Raggio al perielio e afelio al  $t_0 = 227$  per l'asteroide 2020 PJ6

Come dimostra la Figura 7.17, gli andamenti dei raggi di perielio e afelio non sono monotoni, bensì devono subire una drastica riduzione per aumentare la velocità della traiettoria e poi un aumento repentino per riportarsi sull'orbita dell'asteroide. Entrambe le osservazioni espresse comportano un aumento dei consumi e motivano la discontinuità ottenuta per le masse finali.

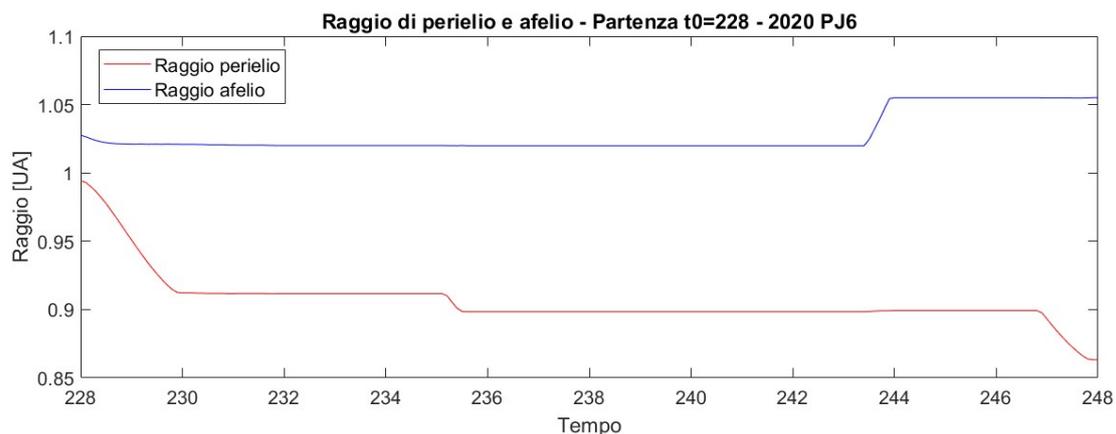


Figura 7.18. Raggio al perielio e afelio al  $t_0 = 228$  per l'asteroide 2020 PJ6

Un importante risultato da riportare è che un cattivo fasamento alla partenza, comporta una riduzione della monotonia dell'andamento dei raggi. Per mostrare ciò, senza introdurre il fenomeno della discontinuità, è possibile confrontare due ulteriori soluzioni in Figura 7.19 e 7.20, caratterizzate da  $t_0 = 225, 229$  che possiedono valori di  $\Delta\theta$  discrepanti.

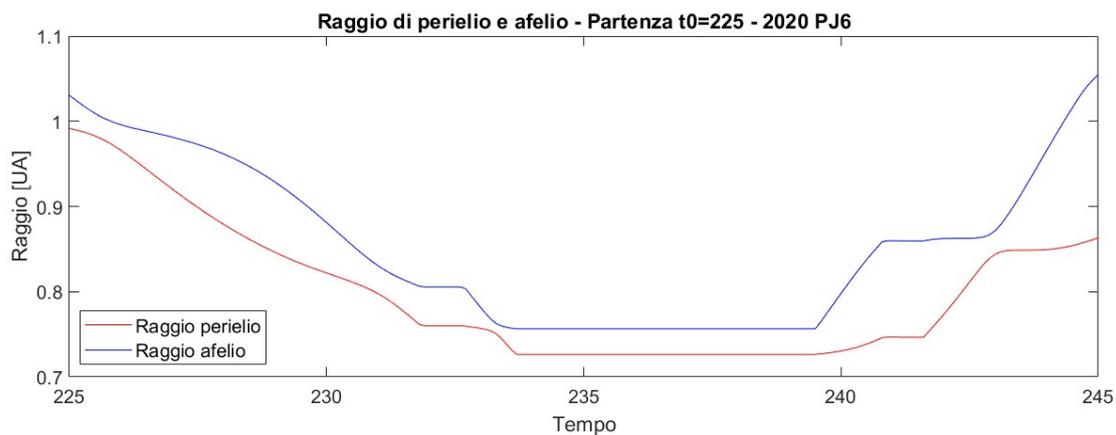


Figura 7.19. Raggio al perielio e afelio al  $t_0 = 225$  per l'asteroide 2020 PJ6

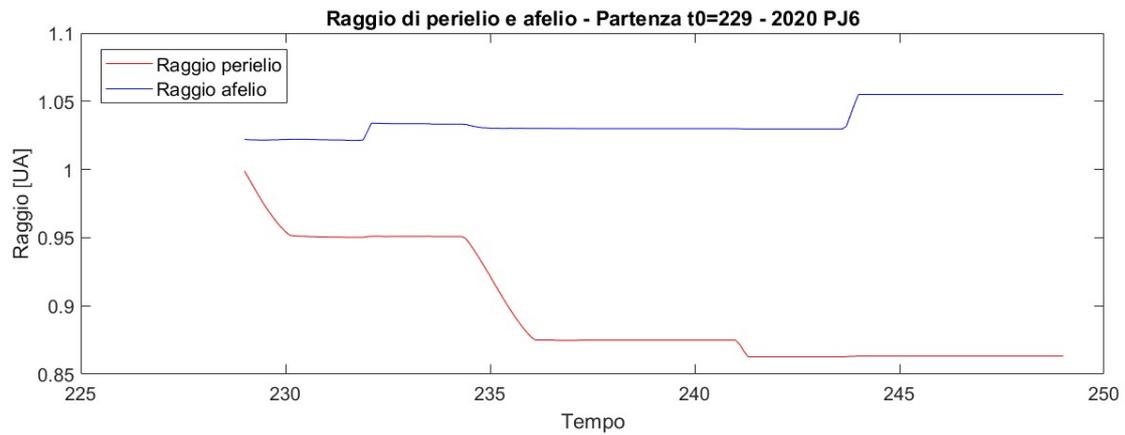


Figura 7.20. Raggio al perielio e afelio al  $t_0 = 229$  per l'asteroide 2020 PJ6

La Figura 7.21 mostra l'andamento del  $\Delta V$  nei tre casi con  $\Delta\theta$  minori, all'aumentare della massa iniziale. Questa indagine ha permesso di osservare che, aumentando la massa iniziale, è stato possibile trovare soluzioni convergenti per  $t_0 = 227$ , caratterizzate da un consumo addirittura inferiore ai restanti due casi.

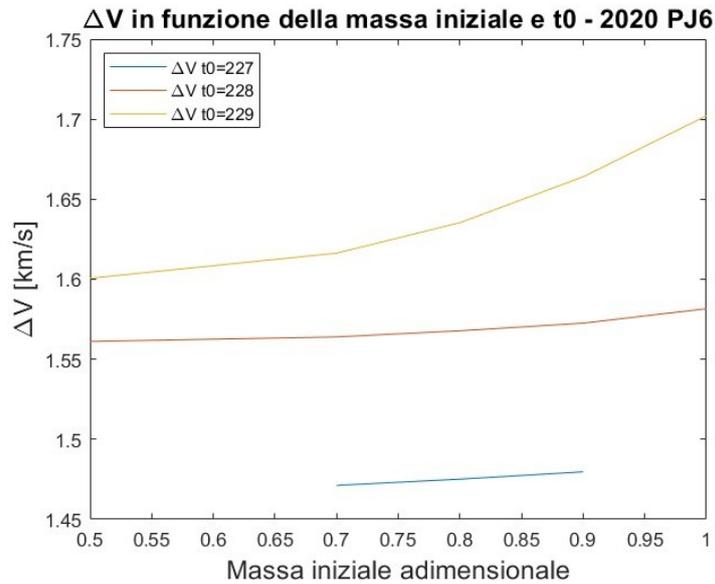


Figura 7.21. Andamento del  $\Delta V$  al variare della massa iniziale per diversi  $t_0$  - 2020 PJ6

L'ultima indagine eseguita per lo studio del  $\Delta V$  prevede di variare le condizioni di uscita dalla sfera di influenza terrestre, considerando tre valori di distanza dell'orbita di parcheggio, e per ognuno di essi si traccia l'andamento dei costi al diminuire della durata della missione. Tale risultato è illustrato in Figura 7.22 per i due casi tra i quali è stata precedentemente riscontrata la discontinuità. Il consumo inferiore, in entrambi i casi, si ha per condizioni di uscita caratterizzate dal parametro  $d = 0.02$ . Al diminuire della durata della missione si ha un aumento del  $\Delta V$  ma, raggiunta la durata minima per cui si è ottenuta convergenza, la soluzione con  $t_0 = 228$  ha un consumo minore.

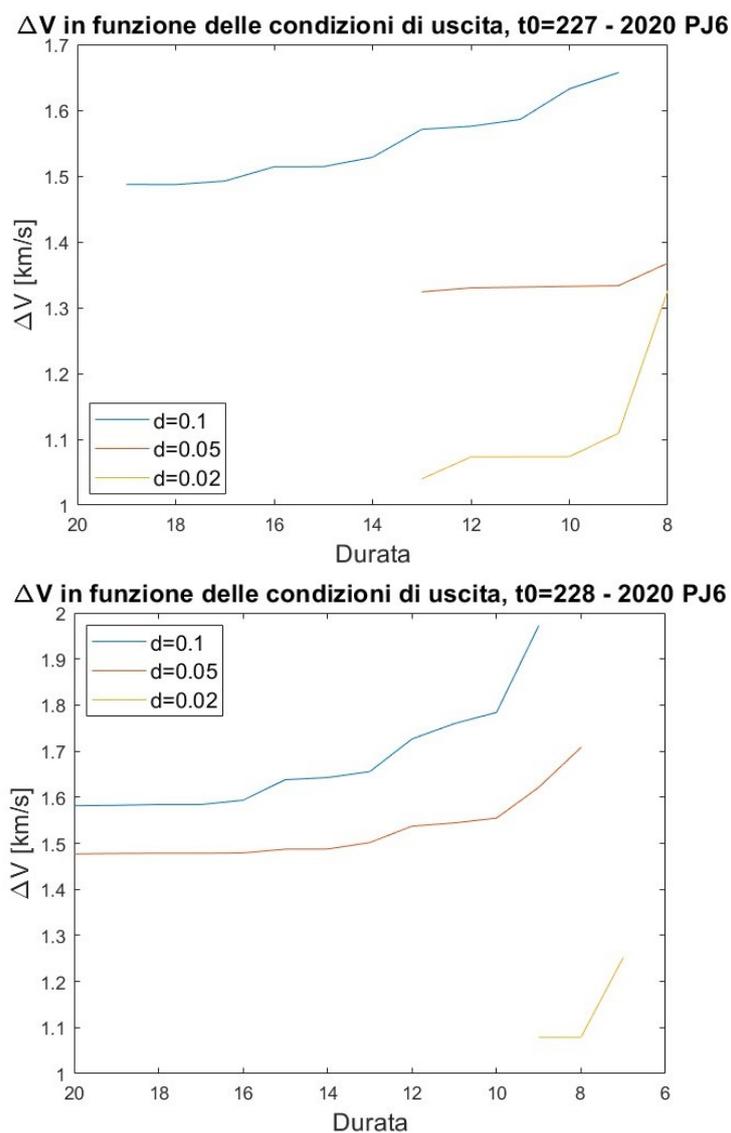


Figura 7.22. Andamento del  $\Delta V$  al diminuire della durata e di  $d$  - 2020 PJ6

La soluzione più significativa, ottenuta dalle analisi, è caratterizzata dai seguenti parametri:

$t_0$	durata	massa iniziale [kg]	$d$	$\alpha$	$\delta$	massa finale [kg]	$\Delta V$ [km/s]
228	7	21	0.02	90°	0°	19.76113104	1.25222651

La sua traiettoria, rappresentata in Figura 7.23, e l'andamento dei raggi di perielio e afelio in Figura 7.24, mostrano un ottimo posizionamento dell'asteroide, un andamento monotono dei raggi e, conseguentemente, un ridotto consumo.

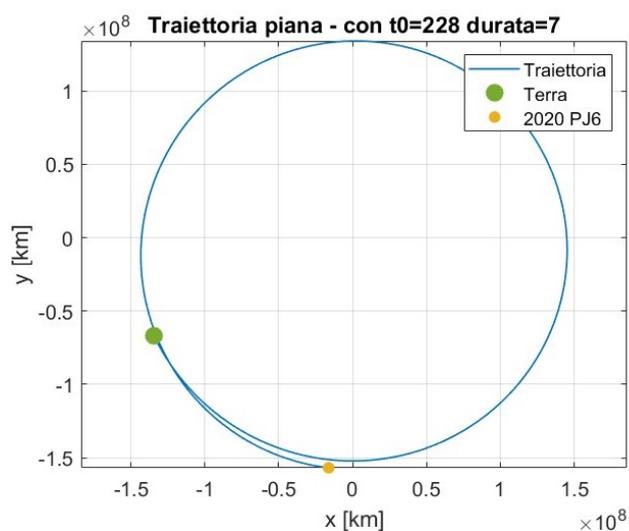


Figura 7.23. Traiettoria nel piano al  $t_0 = 228$

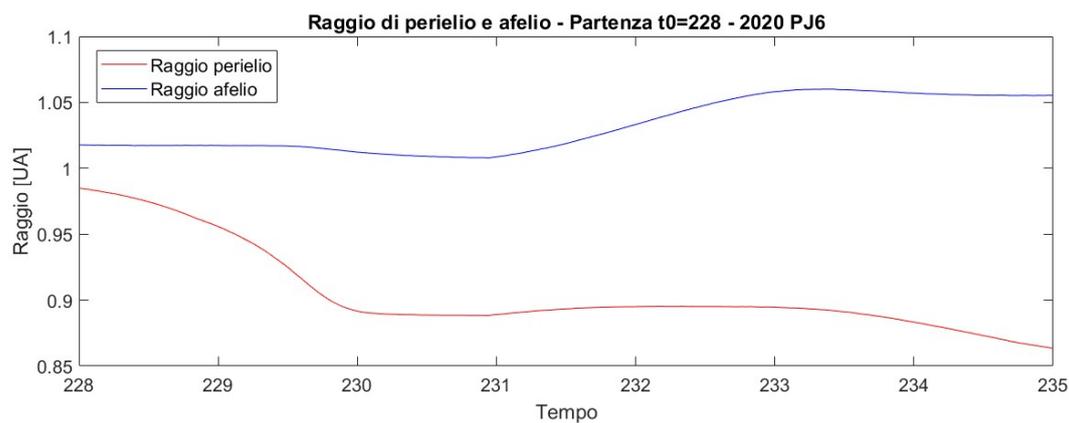


Figura 7.24. Raggio al perielio e afelio al  $t_0 = 228$  per l'asteroide 2020 PJ6

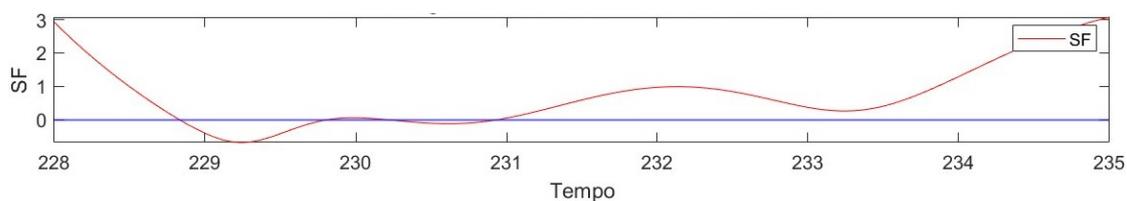


Figura 7.25. Switching Function al  $t_0 = 228$  e durata = 7

La rappresentazione della switching function in Figura 7.25 ci permette di osservare due fasi a motori spenti nella prima metà della traiettoria e di confrontare tale risultato con la soluzione significativa della sezione successiva, relativa all'asteroide 2023 HB7. Si riportano in Tabella 7.2, le ulteriori soluzioni riscontrate che possono essere utili per studi successivi, con le relative caratteristiche.

$t_0$	Data partenza	Data arrivo	durata	massa finale [kg]	$\Delta V$ [km/s]
227	17/02/2036	27/05/2037	8	19.69008424	1.326400997
227	17/02/2036	24/07/2037	9	19.89862027	1.109438941
228	15/04/2036	27/05/2037	7	19.76113104	1.25222651
228	15/04/2036	24/07/2037	8	19.92799346	1.079061737
229	12/06/2036	20/09/2037	8	19.50816042	1.517560560
229	12/06/2036	17/11/2037	9	19.58135441	1.440437256
229	12/06/2036	04/09/2038	14	19.61394997	1.406184591

Tabella 7.3. Soluzioni significative - 2020 PJ6

## 7.3 2023 HB7

L'andamento del  $\Delta\theta$  per l'asteroide 2023 HB7, al variare della data di partenza, è evidenziato in Figura 7.26. Si limita la ricerca successiva alla finestra di lancio  $t_0 = 223 \div 229$

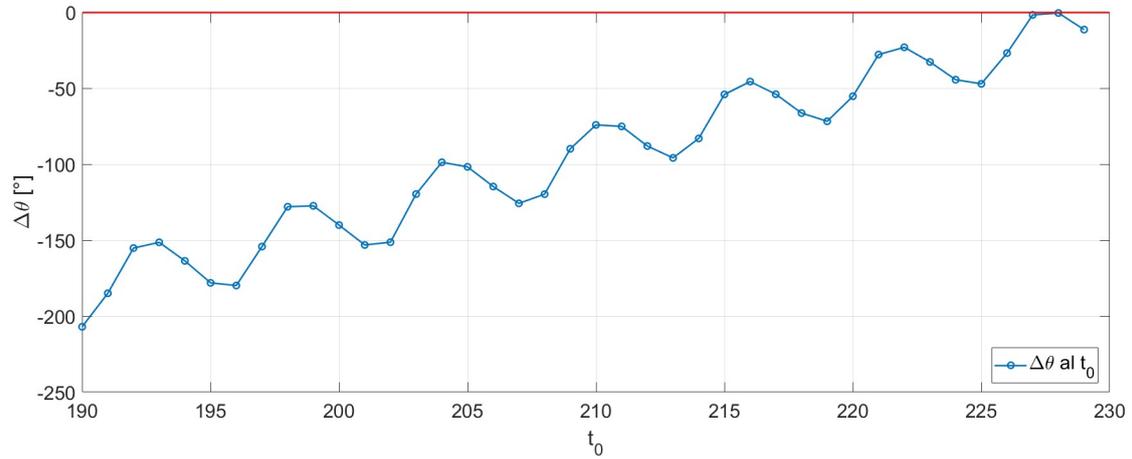


Figura 7.26. Andamento di  $\Delta\theta$  al  $t_0$  per l'asteroide 2023 HB7

di cui si riportano in Tabella 7.4 la data corrispondente e il  $\Delta\theta$  calcolato. Le traiettorie ricercate con parametri iniziali:  $m_0 = 0.6 = 12.6 \text{ kg}$ ,  $durata = 20$ ,  $d = 0.1$ ,  $\alpha = 90^\circ$  e  $\delta = 0^\circ$ , hanno massa finale rappresentata in Figura 7.27.

Data partenza	$t_0$	$\Delta\theta$ [°]
29/06/2035	223	-32.7285
26/08/2035	224	-44.4223
23/10/2035	225	-47.1134
20/12/2035	226	-26.8991
17/02/2036	227	-1.7713
15/04/2036	228	-0.5174
12/06/2036	229	-11.463

Tabella 7.4. Valori di  $\Delta\theta$  nella finestra di lancio considerata per l'asteroide 2023 HB7

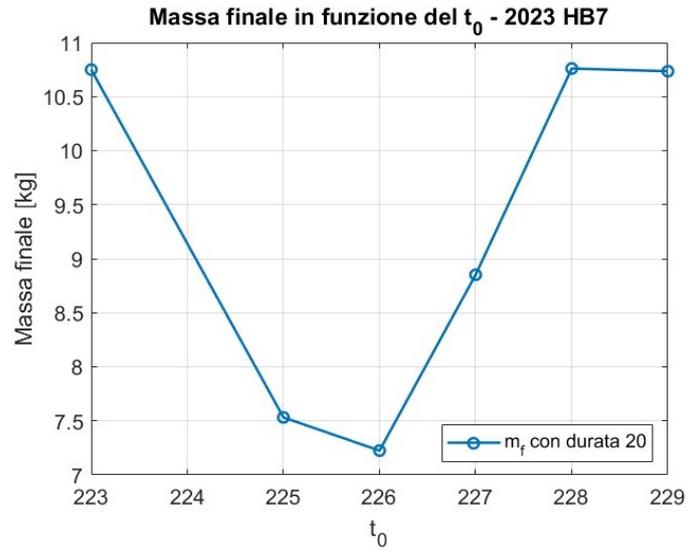


Figura 7.27. Andamento della massa finale al variare di  $t_0$  per l'asteroide 2023 HB7

Si concentra l'analisi seguente alle date di partenza  $t_0 = 228, 229$  di cui si riportano le traiettorie delle soluzioni in Figura 7.28 e 7.29 e gli andamenti dei raggi al perielio e afelio Figura 7.30 e 7.31.

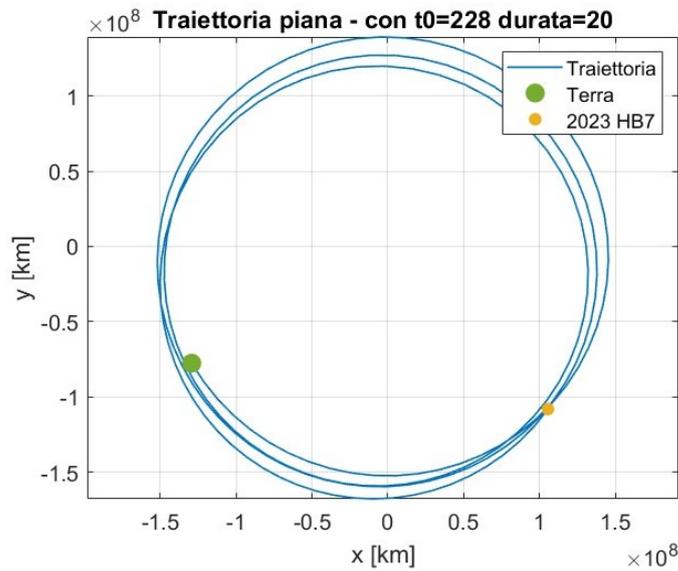


Figura 7.28. Traiettoria nel piano al  $t_0 = 228$

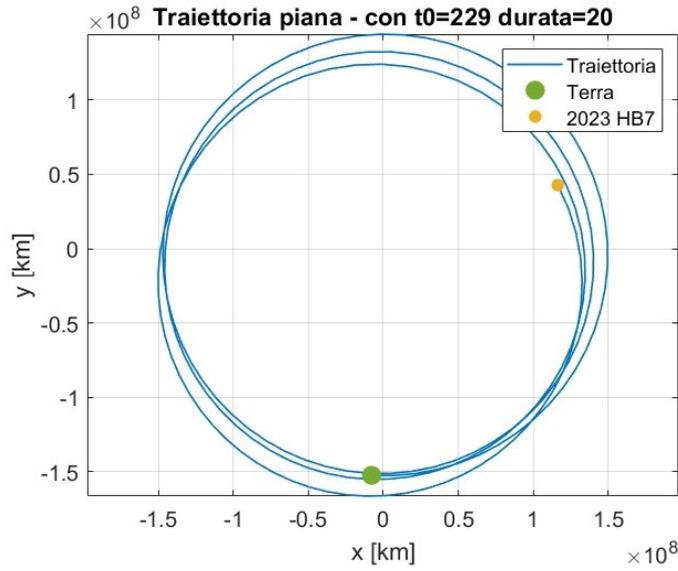


Figura 7.29. Traiettoria nel piano al  $t_0 = 229$

Il semiasse maggiore dell'orbita dell'asteroide 2023 HB7 è minore rispetto ai due asteroidi precedenti e questo si riflette sulla necessità di ridurre il raggio di perielio fino al valore di 0.78 UA per ottenere un'eccentricità pari a 0.1849.

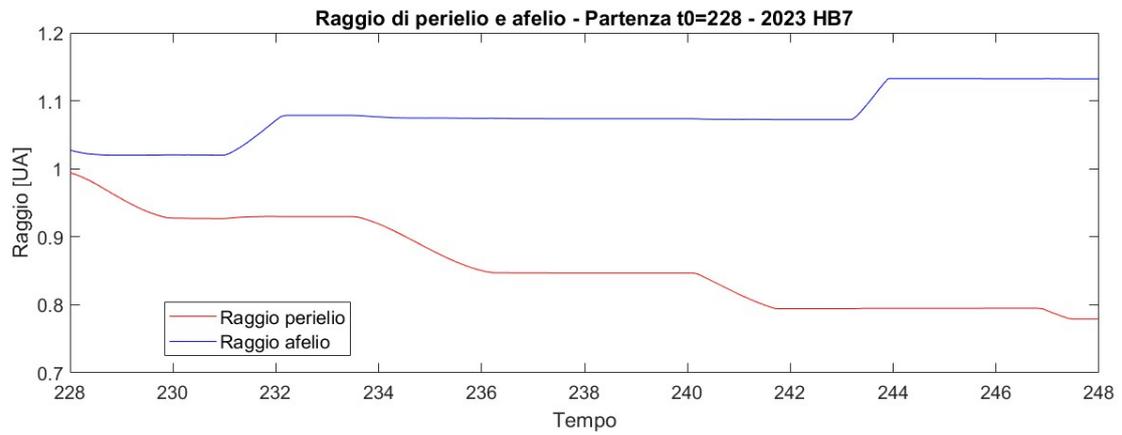


Figura 7.30. Raggio al perielio e afelio al  $t_0 = 228$  per l'asteroide 2023 HB7

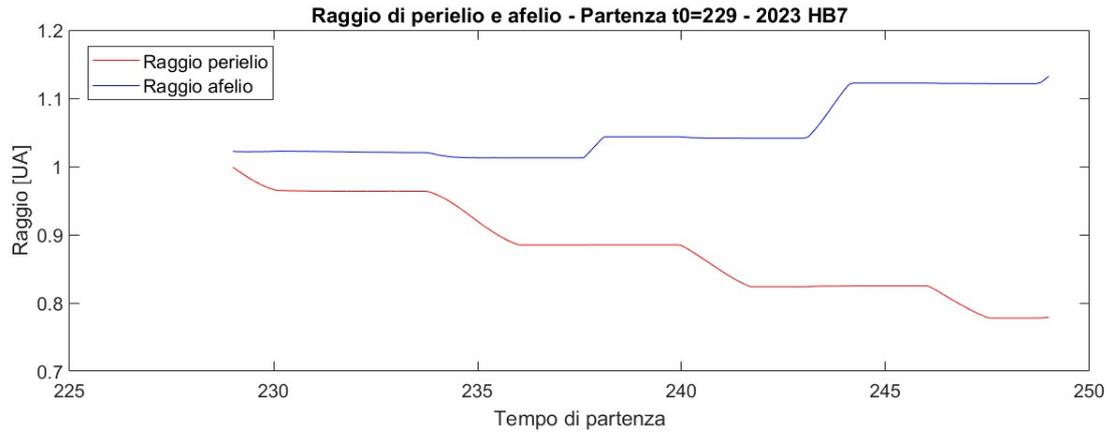


Figura 7.31. Raggio al perielio e afelio al  $t_0 = 229$  per l'asteroide 2023 HB7

L'osservazione precedente permette di prevedere un consumo maggiore per il raggiungimento dell'asteroide in esame, rispetto al caso del 2020 PJ6.

La Figura 7.32 riporta l'andamento del  $\Delta V$  al variare della massa iniziale per i 3 casi con massa finale maggiore, in particolare, la soluzione con partenza al  $t_0 = 228$ , oltre ad avere il fasamento migliore, presenta il consumo inferiore e sarà il parametro iniziale usato per le ulteriori indagini.

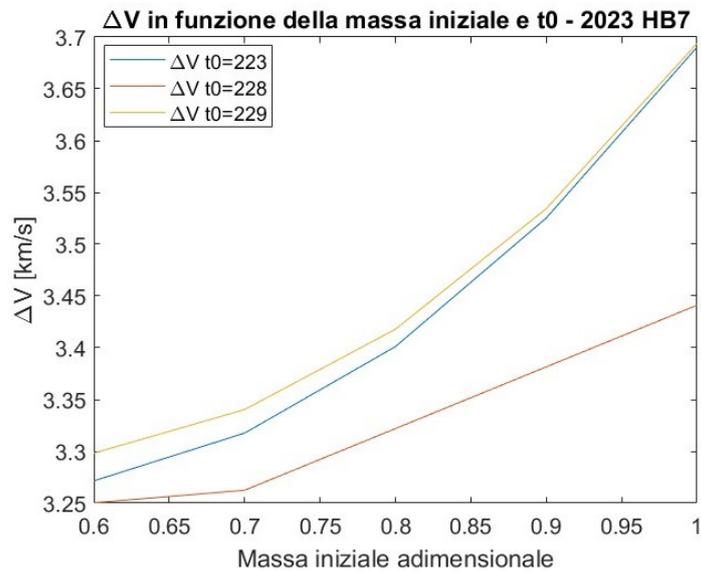


Figura 7.32. Andamento del  $\Delta V$  al variare della massa iniziale per diversi  $t_0$  - 2023 HB7

L'indagine finale, per quanto riguarda il  $\Delta V$ , vede il calcolo di tale parametro al variare della durata della missione e delle condizioni di uscita dalla sfera di influenza terrestre, in particolare la distanza  $d$ .

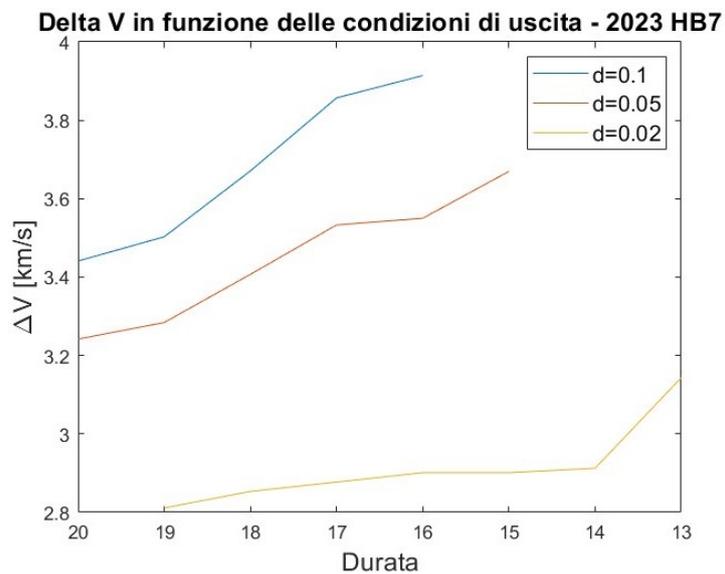


Figura 7.33. Andamento del  $\Delta V$  al diminuire della durata e di  $d$  - 2023 HB7

L'utilizzo del valore minimo del parametro  $d$ , permette di trovare soluzioni con bassi consumi e con durata minore.

In Figura 7.34 e 7.35 sono illustrati la traiettoria e gli andamenti dei raggi di perielio e afelio in riferimento alla soluzione più interessante, di cui si riportano i parametri principali:

$t_0$	durata	massa iniziale [kg]	$d$	$\alpha$	$\delta$	massa finale [kg]	$\Delta V$ [km/s]
228	13	21	0.02	90°	0°	18.02727014	3.143397301

È possibile osservare che, pur riducendo la durata della missione, l'andamento dei raggi mantiene la propria monotonia con una diminuzione dei tratti costanti ma, rispetto alla soluzione dell'asteroide 2020 PJ6, è presente un solo tratto non propulso, limitato al tempo compreso tra  $236.9050 \div 237.1000$ .

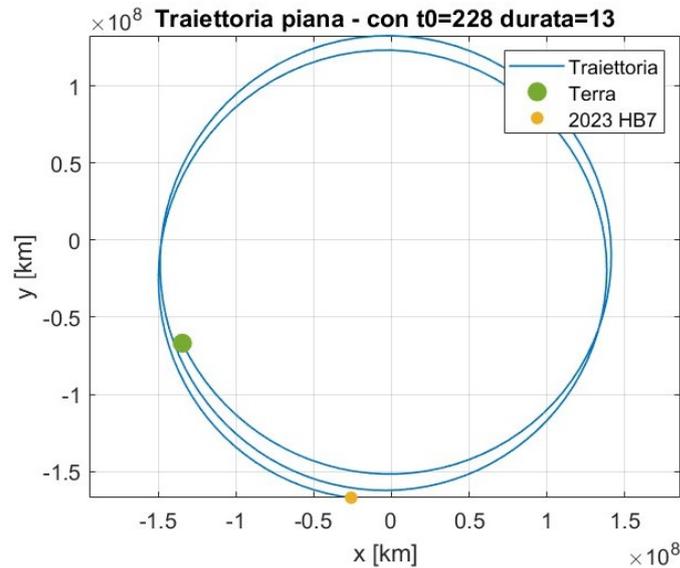


Figura 7.34. Traiettoria nel piano al  $t_0 = 228$

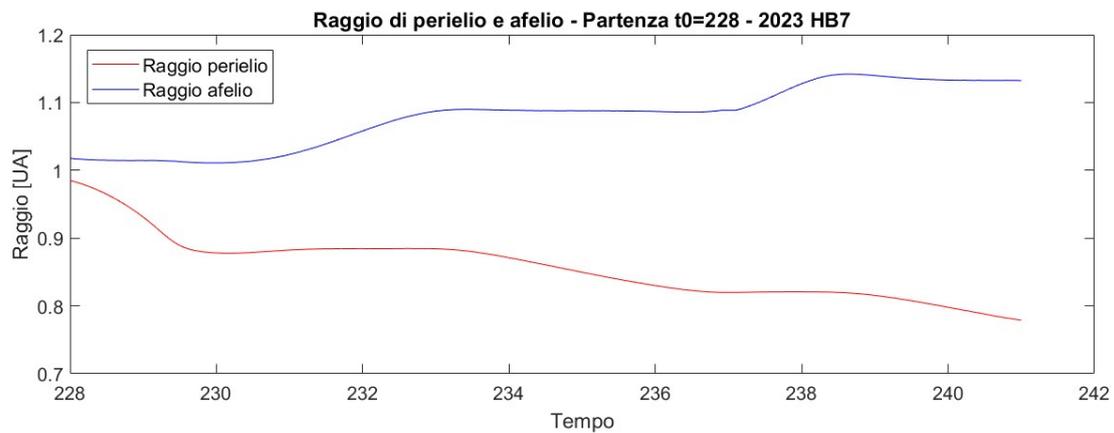


Figura 7.35. Raggio al perielio e afelio al  $t_0 = 228$  per l'asteroide 2023 HB7

Ciò è osservabile anche dalla rappresentazione della switching function in Figura 7.36.

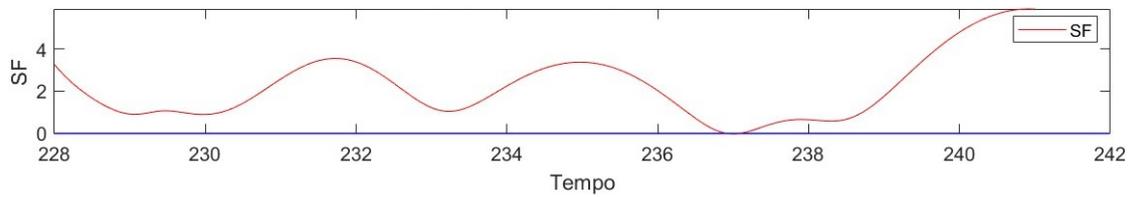


Figura 7.36. Switching Function al  $t_0 = 228$  e durata = 13

Si riassumono in Tabella 7.3 le soluzioni più significative ottenute dall'analisi della traiettoria diretta verso l'asteroide 2023 HB7.

$t_0$	<i>Data partenza</i>	<i>Data arrivo</i>	<i>durata</i>	<i>massa finale [kg]</i>	$\Delta V$ [km/s]
228	15/04/2036	10/05/2038	13	18.02727014	3.143397301
228	15/04/2036	04/09/2038	15	18.24058903	2.901136931
229	12/06/2036	01/11/2038	15	17.66344392	3.379029699
229	12/06/2036	25/02/2039	17	17.82218093	3.468840357

Tabella 7.5. Soluzioni significative - 2023 HB7

# Capitolo 8

## Conclusioni

L'obiettivo di effettuare l'analisi di fattibilità di missioni verso tre asteroidi alternativi al progetto ANIME è stato raggiunto, individuando nel corpo 2020 PJ6 l'alternativa migliore e nel target 2020 OM6 quella peggiore. Per ogni asteroide studiato, si riassumono di seguito le considerazioni effettuate alla luce dei risultati ottenuti dall'ottimizzazione indiretta delle traiettorie dalla Terra ad essi.

### **2020 OM6**

I risultati evidenziano che tale corpo celeste è il più difficile da raggiungere tra quelli studiati poiché non è stata trovata nessuna soluzione significativa che considera la massa totale del satellite di 21 kg. L'orbita dell'asteroide in questione è la più inclinata e questo comporta manovre di cambio di piano più costose.

### **2020 PJ6**

Le soluzioni trovate ci permettono di concludere che è l'asteroide più facilmente raggiungibile. In base al requisito di durata della missione è possibile adottare una traiettoria con consumo minore pari a 1.0791 km/s e durata di 15 mesi, oppure, considerare un compromesso tra il vincolo di durata e il  $\Delta V$ .

La sua orbita presenta un'inclinazione inferiore agli altri due casi, per cui richiede un costo minore per effettuare i cambi di piano; ciò si ripercuote sulla bontà delle soluzioni ottenute.

### **2023 HB7**

La sua orbita è caratterizzata da un'eccentricità maggiore rispetto ai casi precedenti e questo si riflette in una minore massa finale; nonostante ciò, le traiettorie ottenute attraverso l'analisi hanno un costo accettabile in quanto sono in linea con i valori previsti per una trasferta interplanetaria propulsa elettricamente. La soluzione più economica prevede un  $\Delta V$  di 2.9011 km/s mentre quella più breve ha una durata di 25 mesi; tale valore supera la vita operativa di 23 mesi stimata per il payload del satellite con l'attuale scudo dall'ambiente spaziale [24].

## 8.1 Limiti del caso di studio

Nell'ultima sezione dell'elaborato si vogliono mettere in evidenza eventuali ostacoli riscontrati e il loro possibile superamento grazie a futuri studi sull'argomento; tali limiti sono raccolti di seguito:

- È possibile ampliare la ricerca iniziale prevedendo una finestra di lancio più avanzata nel tempo per gli asteroidi 2023 HB7 e 2020 PJ6, poichè questo consentirebbe di trovare altre soluzioni, con  $\Delta\theta$  vicino a zero, successive al 12/06/2036;
- L'utilizzo di un metodo di ottimizzazione indiretto ha ristretto il campo di convergenza, impedendo l'analisi di possibili soluzioni che con un metodo diretto si sarebbero potute ottenere; in particolare, per l'asteroide 2020 PJ6 non si è trovata una convergenza ottimale per la soluzione con data di partenza 17/02/2036 nonostante il fasamento iniziale dal valore di  $-4.9261^\circ$ , allo stesso modo per l'asteroide 2023 HB7 con partenza in data 17/02/2036 e  $\Delta\theta$  pari a  $-1.7713^\circ$ ;
- L'analisi di fattibilità effettuata ha permesso di escludere l'asteroide 2020 OM6 ma, essendo uno studio preliminare, occorrerebbe effettuarne uno più dettagliato nel caso in cui si selezionasse uno tra i due asteroidi rimanenti per una futura missione;
- Considerando l'importante aumento del  $\Delta V$  al diminuire della durata della missione, potrebbe essere utile estendere il requisito del progetto nominale ed aumentarne la sua durata. La finestra di lancio ottimale, considerata per gli asteroidi 2020 PJ6 e 2023 HB7, è prevista per il 15/04/2036 e, nel lasso di tempo che ci separa da questa data, il progresso scientifico potrebbe aumentare la resistenza del payload del satellite, o del suo scudo, all'ambiente spaziale.

# Bibliografia

- [1] Lorenzo Casalino. Equazioni in coordinate sferiche, . Appunti concessi per elaborato.
- [2] Lorenzo Casalino. Space propulsion, . Appunti delle lezioni.
- [3] Lorenzo Casalino. Ottimizzazione indiretta di traiettorie spaziali, . Appunti concessi per elaborato.
- [4] NASA Science Dana Bolles. The kuiper belt. URL <https://science.nasa.gov/solar-system/kuiper-belt/>. Ultimo accesso 03/09/2024.
- [5] NASA Science Dana Bolles. Asteroid facts, 2024. URL <https://science.nasa.gov/solar-system/asteroids/facts/>. Ultimo accesso 03/09/2024.
- [6] Campionati Italiani di Astronomia. Il problema dei due corpi. URL <https://moodle.olimpiadi.inaf.it/mod/page/view.php?id=730>. Ultimo accesso 04/09/2024.
- [7] Near-Earth Objects Coordination Centre European Space Agency. Definitions & assumptions. URL <https://neo.ssa.esa.int/definitions-assumptions>. Ultimo accesso 03/09/2024.
- [8] Ivan Felli. Optimization of interplanetary trajectories to near-earth asteroids using electric propulsion., 2022. URL <http://webthesis.biblio.polito.it/id/eprint/23345>. Rel. Lorenzo Casalino. Politecnico di Torino, Corso di laurea magistrale in Ingegneria Aerospaziale.
- [9] Marco Grammatico. Fuel-optimal lander trajectory for lunar soft-precision landing, 2021. URL <http://webthesis.biblio.polito.it/id/eprint/18883>. Rel. Lorenzo Casalino, Politecnico di Torino, Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale.
- [10] Giulio Avanzini Guido Colasurdo. *Astrodynamics*. SpacE Exploration and Development Systems, Politecnico di Torino, II Edition 2006 - 07 - Ver. 2.0.1.
- [11] Andrea Iapichello. Ottimizzazione di traiettorie per missioni a fly-by multipli con asteroidi near-earth, 2022. Politecnico di Torino.
- [12] R.G. Jahn. *Physics of Electric Propulsion*. McGraw-Hill, New York, 1968.

- [13] NASA Jet Propulsion Laboratory. Small-body database lookup, . URL [https://ssd.jpl.nasa.gov/tools/sbdb\\_lookup.html#/?sstr=2020%20M6](https://ssd.jpl.nasa.gov/tools/sbdb_lookup.html#/?sstr=2020%20M6). Ultimo accesso 03/09/2024.
- [14] NASA Jet Propulsion Laboratory. Small-body database lookup, . URL [https://ssd.jpl.nasa.gov/tools/sbdb\\_lookup.html#/?sstr=2020%20PJ6](https://ssd.jpl.nasa.gov/tools/sbdb_lookup.html#/?sstr=2020%20PJ6). Ultimo accesso 03/09/2024.
- [15] NASA Jet Propulsion Laboratory. Small-body database lookup, . URL [https://ssd.jpl.nasa.gov/tools/sbdb\\_lookup.html#/?sstr=2023%20HB7](https://ssd.jpl.nasa.gov/tools/sbdb_lookup.html#/?sstr=2023%20HB7). Ultimo accesso 03/09/2024.
- [16] NASA Jet Propulsion Laboratory. Horizons system, . URL [https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons/app.html#/.](https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons/app.html#/)  Ultimo accesso 12/09/2024.
- [17] NASA Jet Propulsion Laboratory. Diagrams and charts, . URL <https://ssd.jpl.nasa.gov/diagrams/>. Ultimo accesso 03/09/2024.
- [18] NASA Jet Propulsion Laboratory. Neo basics, . URL [https://cneos.jpl.nasa.gov/about/neo\\_groups.html](https://cneos.jpl.nasa.gov/about/neo_groups.html). Ultimo accesso 03/09/2024.
- [19] NASA Jet Propulsion Laboratory. Small-body database lookup, . URL [https://ssd.jpl.nasa.gov/tools/sbdb\\_lookup.html#/.](https://ssd.jpl.nasa.gov/tools/sbdb_lookup.html#/)  Ultimo accesso 03/09/2024.
- [20] NASA Jet Propulsion Laboratory. Sentry: Earth impact monitoring, . URL <https://cneos.jpl.nasa.gov/sentry/>. Ultimo accesso 15/09/2024.
- [21] Stefano Depifanio Mario Depifanio. Coniche. URL <https://www.zerzetasm.it/6matematica/05cartella/sottoPag/sottovoce01.php>. Ultimo accesso 06/09/2024.
- [22] Fulvio Mete. Spettroscopia di asteroidi e comete. URL <https://spettroscopia.uai.it/Spettroscopia%20di%20asteroidi%20e%20comete.htm>. Ultimo accesso 03/09/2024.
- [23] ESA Near Earth Objects Dynamic Site. Neodys database. URL <https://newton.spacedys.com/index.php?pc=3.0>. Ultimo accesso 15/09/2024.
- [24] D. Perna, M. Pajola, L. Casalino, S. Iavnovski, M. Lavagna, M. Zannoni, M. Bechini, A. Capannolo, A. Colagrossi, G. Cremonese, E. Dotto, A. Lucchetti, E. Mazzotta Epifani, J. Prinetto, E. Simioni, and G. Zanotti P. Tortora. *The "Asteroid Nodal Intersection Multiple Encounters" (ANIME) CubeSat Mission: Science and Planetary Protection*. 7th IAA Planetary Defense Conference, held in Vienna, Austria, id. 54, 2021.
- [25] Anil Rao. A survey of numerical methods for optimal control. *Advances in the Astronautical Sciences*, 135, 01 2010.
- [26] Edgar Y. Choueiri Robert G. Jahn. *Electric Propulsion*. Encyclopedia of Physical Science and Technology (Third Edition), Academic Press, 2003.

- [27] Jerry E. White Roger R. Bate, Donald D. Mueller. *Fundamentals of ASTRODYNAMICS*. Dover Publications, Inc, 1971.
- [28] Suparta W. Sanusi H. *Open Platform Orbit Determination Systems Using a Mixture of Orbit Estimator and Orbit Propagator*. Springer, Singapore, 2018.
- [29] Gordon M. K. Shampine D. F. *Computer Solution of Ordinary Differential Equation: the Initial Value Problem*. 1<sup>a</sup> ed., W.H. Freeman, San Fracisco, CA, 1975.
- [30] International Astronomical Union. Near earth objects. URL <https://www.iau.org/public/themes/neo/>. Ultimo accesso 03/09/2024.
- [31] Donald K. Yeomans. Why study asteroids? URL [https://ssd.jpl.nasa.gov/sb/why\\_asteroids.html](https://ssd.jpl.nasa.gov/sb/why_asteroids.html). Ultimo accesso 04/09/2024.