



**Politecnico
di Torino**

DIPARTIMENTO INGEGNERIA MECCANICA E AEROSPAZIALE

TESI MAGISTRALE

Analisi aeroelastica di velivoli soggetti a raffica mediante modello a parametri concentrati

Autore
Giuseppe BULZOMÌ

Relatori
Prof. Marco PETROLO
Prof. Matteo FILIPPI
Dr. Rodolfo AZZARA

28 Ottobre 2024

Sommario

La presenza di perturbazioni imprevedibili all'interno dell'atmosfera terrestre influenzano la traiettoria e i carichi esperiti da un velivolo operativo. E' dunque necessario che la fase di progettazione comprenda uno studio accurato di quelle che possono essere i carichi dinamici e statici aggiuntivi che la struttura è portata a sopportare in presenza di questi fenomeni atmosferici. Per poter ottenere ciò, è pratica comune avvalersi di modelli della raffica e del velivolo adatti ad interagire tra loro. I modelli di raffica presenti in questo testo sono sia di tipo continuo che discreto, al fine di mostrare rispettivamente l'entità dei carichi massimi raggiungibili dall'azione di una raffica e la sua influenza sui modi propri della struttura. Particolare attenzione è stata rivolta al modello stocastico di raffica continua e su come esso si basi sui concetti di probabilità e Densità Spettrale di Potenza (PSD). Inoltre, sono stati introdotti i modelli di turbolenza di Dryden e Von Karman, i più utilizzati dalle più importanti normative aeronautiche del mondo. Il modello del velivolo flessibile utilizzato nel testo è stato ottenuto tramite un approccio di tipo Lagrangiano. Le deformazioni flessionali e torsionali sono state espresse tramite il metodo di Rayleigh-Ritz, che le approssima attraverso una serie di forme assunte per ipotesi. Tale approccio permette di derivare un sistema di equazioni a coordinate generalizzate, poco complesso e adatto per determinare risultati in modo rapido. Una volta determinati entrambi i modelli, è possibile valutare la risposta del velivolo alla raffica, sia in termini cinematici che di carico. Il metodo di determinazione del carico mostrato in questo testo si basa sulla supposizione di carichi continui lungo l'apertura alare del velivolo in questione, con i contributi dovuti rispettivamente all'azione aerodinamica e inerziale sovrapponibili tra loro. Inoltre, ogni contributo del carico risulta dipendente dalla risposta cinematica del velivolo. Infine, il modello viene utilizzato per analizzare la risposta di alcuni velivoli commerciali di diversa dimensione, al fine di determinare come il carico alare influenzi la risposta perturbativa sia in termini di carico e deformazione massimi sviluppabili che di frequenza di risonanze della struttura.

Indice

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introduzione | 7 |
| 1.1 | Breve descrizione tesi | 9 |
| 2 | Modello di raffica | 10 |
| 2.1 | Comportamento raffica | 10 |
| 2.2 | Profili di raffica a confronto | 11 |
| 2.2.1 | Raffiche discrete '1-coseno' in funzione del tempo | 12 |
| 2.2.2 | Raffiche continue in funzione della frequenza | 14 |
| 2.2.3 | Probabilità e concetti PSD | 15 |
| 2.2.4 | Modelli di turbolenza secondo Dryden e Von Karman | 20 |
| 3 | Modello e modi flessibili del velivolo in esame | 24 |
| 3.1 | Sistema di riferimento inerziale | 24 |
| 3.2 | Modello rigido | 25 |
| 3.2.1 | Gradi di libertà del modello rigido | 26 |
| 3.3 | Modello di velivolo flessibile | 28 |
| 3.3.1 | Termini di lavoro incrementali | 29 |
| 3.3.2 | Derivate aerodinamiche | 30 |
| 3.3.3 | Descrizione delle forme di modo flessibile | 30 |
| 3.3.4 | Condizioni per ortogonalità con modi di corpo rigido | 31 |
| 3.3.5 | Forme di deformazione dell'ala | 32 |
| 3.3.6 | Modo con flessione di fusoliera dominante | 32 |
| 3.3.7 | Modo con flessione dell'ala dominante | 33 |
| 3.3.8 | Modo con torsione dell'ala dominante | 33 |
| 3.3.9 | Termini di valore di massa modale per il velivolo flessibile | 34 |
| 3.4 | Equazioni del velivolo flessibile | 34 |
| 3.5 | Integrali 'J' | 35 |
| 3.6 | Modifiche al modello in presenza di motori sull'ala | 36 |
| 4 | Tipi di risposte del velivolo e definizione dei carichi dell'ala | 36 |
| 4.1 | Risposta del velivolo in funzione del tempo | 37 |
| 4.1.1 | Espressioni per lo spostamento e angoli sul velivolo | 37 |
| 4.2 | Risposta del velivolo in funzione della frequenza | 37 |
| 4.2.1 | Definizione di una turbolenza armonica | 37 |
| 4.2.2 | FRF per raffica armonica | 38 |
| 4.3 | Carichi interni per un'ala | 38 |
| 4.3.1 | Espressioni dei carichi interni generali - ala continua | 39 |
| 4.4 | Carichi interni dovuti all'incontro con una raffica/turbolenza | 40 |
| 4.4.1 | Forze d'inerzia per unità di ampiezza alare | 40 |
| 4.4.2 | Portanza per unità d'ampiezza alare | 41 |
| 4.5 | Carichi interni in un incontro di raffica | 41 |
| 5 | Risposte alla raffica di un velivolo di prova | 41 |
| 5.1 | Risposta e carichi del velivolo di prova in funzione del tempo | 41 |
| 5.2 | Risposta in turbolenza nel dominio di frequenza per un velivolo flessibile | 48 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 6 | Confronto risultati tra velivoli diversi | 50 |
| 6.1 | Comparazione risposta dei velivoli in funzione del tempo | 51 |
| 6.2 | Comparazione risposta velivolo flessibile in funzione della frequenza | 57 |
| 7 | Conclusioni e sviluppi futuri | 61 |
| 7.1 | Futuri sviluppi | 61 |
| A | Tipi di deformazione | 64 |
| A.1 | Flessione della fusoliera dominante | 64 |
| A.2 | Flessione d'ala dominante | 64 |
| A.3 | Torsione d'ala dominante | 64 |
| B | Velivolo di prova | 65 |
| C | Velivoli in esame | 66 |

Elenco delle figure

| | | |
|----|--|----|
| 1 | Esempio di raffica '1-coseno' | 7 |
| 2 | Esempio di raffica turbolenta. | 8 |
| 3 | Esempio di raffica verticale. | 10 |
| 4 | Esempio di raffica frontale. | 11 |
| 5 | raffica discreta '1-coseno'. | 12 |
| 6 | picco di velocità per una raffica '1-coseno' in funzione della lunghezza della raffica. | 13 |
| 7 | Esempio di turbolenza. | 14 |
| 8 | Campionamento di raffica. | 15 |
| 9 | Densità di probabilità. | 16 |
| 10 | Distribuzione di probabilità. | 16 |
| 11 | 1 - P(y) in scala logaritmica. | 17 |
| 12 | Esempi di sovrapposizione di sinusoidi. | 18 |
| 13 | Schema di PSD. | 19 |
| 14 | Effetto di L su PSD. | 21 |
| 15 | Intensità di turbolenza a medie/grandi altitudini. | 22 |
| 16 | Intensità di turbolenza a medie/grandi altitudini. | 23 |
| 17 | Rapporto tra PSD di Von Karman e Dryden. | 24 |
| 18 | Sistema assi Terra convenzionale. | 25 |
| 19 | Modello di velivolo rigido. | 25 |
| 20 | Velivolo rigido con moti elevazione/beccheggio mostrando quantità incrementali. | 26 |
| 21 | Posizione degli assi lungo l'ala. | 29 |
| 22 | Modo flessibile per un velivolo free-free simmetrico. | 30 |
| 23 | Carichi esterni ed interni all'interno di una sezione d'ala. | 39 |
| 24 | Carichi su un'ala continua. | 40 |
| 25 | Beccheggio per velivolo di prova nel caso di flessione fusoliera dominante nel dominio del tempo. | 43 |
| 26 | Velocità di beccheggio per velivolo di prova nel caso di flessione fusoliera dominante nel dominio del tempo. | 43 |
| 27 | Accelerazione verticale rispetto al baricentro per velivolo di prova nel caso di flessione fusoliera dominante nel dominio del tempo | 44 |
| 28 | Accelerazione verticale per velivolo di prova nel caso di flessione fusoliera dominante nel dominio del tempo. | 44 |
| 29 | Accelerazione verticale baricentro velivolo per flessione alare dominante nel tempo. | 45 |
| 30 | Accelerazione verticale estremità alare velivolo per flessione alare dominante nel tempo. | 45 |
| 31 | Accelerazione verticale baricentro velivolo per torsione alare dominante nel tempo. | 46 |
| 32 | Accelerazione verticale estremità alare velivolo per torsione alare dominante nel tempo. | 46 |
| 33 | Momento alla radice alare velivolo di prova per flessione fusoliera dominante nel tempo. | 47 |
| 34 | Momento alla radice alare velivolo di prova per flessione alare dominante nel tempo. | 47 |

| | | |
|----|---|----|
| 35 | Momento alla radice alare velivolo di prova per torsione alare dominante nel tempo. | 48 |
| 36 | Accelerazione PSD del baricentro velivolo per flessione fusoliera dominante in frequenza. | 49 |
| 37 | Accelerazione PSD del velivolo di prova per flessione alare dominante in frequenza. | 49 |
| 38 | Accelerazione PSD del velivolo di prova per torsione alare dominante in frequenza. | 50 |
| 39 | Comparazione dei risultati per la raffica nel dominio del tempo per modelli di velivolo flessibile: accelerazione del baricentro. | 52 |
| 40 | Comparazione dei risultati per la raffica nel dominio del tempo per modelli di velivolo flessibile: accelerazione del muso. | 52 |
| 41 | Comparazione dei risultati per la raffica nel dominio del tempo per modelli di velivolo flessibile: accelerazione del piano di coda | 53 |
| 42 | Comparazione dei risultati per la raffica nel dominio del tempo per modelli di velivolo flessibile: Beccheggio. | 53 |
| 43 | Comparazione dei risultati per la raffica nel dominio del tempo per modelli di velivolo flessibile: Velocità di beccheggio. | 54 |
| 44 | Comparazione dei risultati per la raffica nel dominio del tempo per modelli di velivolo flessibile: accelerazione per baricentro in flessione alare dominante. | 54 |
| 45 | Comparazione dei risultati per la raffica nel dominio del tempo per modelli di velivolo flessibile: accelerazione per bordo di fuga in flessione alare dominante. | 55 |
| 46 | Momento di flessione alare per velivoli multipli - flessione fusoliera dominante. | 55 |
| 47 | Momento di flessione alare per velivoli multipli - flessione alare dominante. | 56 |
| 48 | Momento di flessione alare per velivoli multipli - torsione alare dominante. | 56 |
| 49 | Comparazione dei risultati per la raffica nel dominio di frequenza per flessione fusoliera dominante: accelerazione PSD per baricentro. | 57 |
| 50 | Comparazione dei risultati per la raffica nel dominio di frequenza per flessione fusoliera dominante: accelerazione PSD per muso. | 58 |
| 51 | Comparazione dei risultati per la raffica nel dominio di frequenza per flessione fusoliera dominante: accelerazione PSD per piano di coda. | 58 |
| 52 | Comparazione dei risultati per la raffica nel dominio di frequenza per flessione alare dominante: accelerazione PSD per baricentro. | 59 |
| 53 | Comparazione dei risultati per la raffica nel dominio di frequenza per flessione alare dominante: accelerazione PSD per estremità alare. | 59 |
| 54 | Comparazione dei risultati per la raffica nel dominio di frequenza per modelli di velivolo flessibile: accelerazione PSD per baricentro. | 60 |
| 55 | Comparazione dei risultati per la raffica nel dominio di frequenza per modelli di velivolo flessibile: accelerazione PSD per estremità alare. | 60 |
| 56 | Immagine velivolo Navion. | 67 |
| 57 | Immagine velivolo Lockheed Jetstar. | 67 |
| 58 | Immagine velivolo McDonnell Douglas DC-8. | 68 |
| 59 | Immagine velivolo Boeing 747. | 68 |

Elenco delle tabelle

| | | |
|---|--|----|
| 1 | Modo flessibile simmetrico del velivolo - flessione fusoliera dominante. | 64 |
| 2 | Modo flessibile simmetrico del velivolo - flessione alare dominante. | 64 |
| 3 | Modo flessibile simmetrico del velivolo - torsione alare dominante. | 65 |
| 4 | Parametri geometrici ed aerodinamici Velivolo di prova. | 65 |
| 5 | Parametri Navion. | 66 |
| 6 | Parametri Lockheed Jetstar. | 66 |
| 7 | Parametri DC-8. | 66 |
| 8 | Parametri Boeing 747. | 66 |

1 Introduzione

Un velivolo operativo non riesce a seguire perfettamente una rotta stabilita. L'atmosfera terrestre è infatti attraversata da perturbazioni imprevedibili che, in caso di contatto con il velivolo, comporterebbero improvvisi effetti indesiderati, come elevate accelerazioni parallele o normali alla direzione di volo e un aumento cospicuo dei carichi dinamici sull'intera struttura. Ciò potrebbe causare dei disagi ad equipaggio e passeggeri, se non addirittura alla rottura preventiva di componenti importanti e conseguente malfunzionamento o distruzione del velivolo. La progettazione di velivoli sempre più leggeri nel corso dei decenni ha condotto ad un intensificarsi di questi effetti a causa della maggiore deformabilità delle nuove strutture. Per tale motivo, è importante che la progettazione sicura di un futuro velivolo tenga conto che i carichi generati siano contenuti nei limiti massimi consentiti delle autorità aeronautiche competenti, oltre a valutare l'effetto sulla vita a fatica dei componenti stessi. Per adempiere a questo obiettivo, è prima necessario introdurre dei modelli di raffica e di velivolo scelti per lo studio in questione.

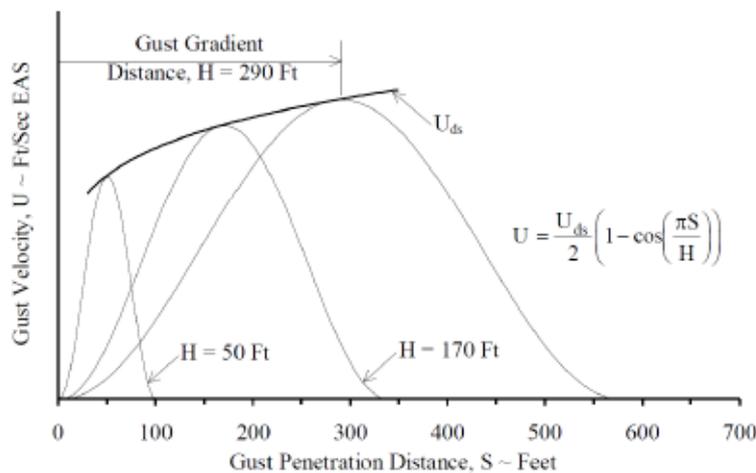


Figura 1: Esempio di raffica '1-coseno'.

Negli ultimi tempi, i modelli di raffica di maggior utilizzo tra le più importanti normative aeronautiche del mondo [1, 2] sono principalmente divisi in due categorie:

- Raffica discreta, ovvero un singolo disturbo finito con una forma specifica;
- Raffica continua, ovvero un'approssimazione della raffica tramite una serie di disturbi concatenati di varia intensità.

Uno dei modelli di raffica discreta più utilizzati consiste nell'idealizzazione della raffica '1-cos' (Fig.1). La forma di raffica continua ad essere di grande utilità perché in grado di simulare un ampio range di perturbazioni per mezzo di due parametri: H e U_{ds} . Il primo determina l'entità spaziale della perturbazione, mentre il secondo esprime il picco di velocità massima raggiungibile. Tali parametri risultano variabili con le condizioni atmosferiche e di progetto del velivolo. Le normative richiedono che un ampio set di perturbazioni sia testato durante il progetto del velivolo, nell'intero range di altezze indicato dall'involuppo di volo.

Esso è stato il modello più importante utilizzato nello studio della raffica fino ai primi anni '50. In seguito, la sua incapacità di replicare la natura casuale tipica delle turbolenze atmosferiche e di eccitare i vari modi elastici della struttura ha portato alla ricerca di

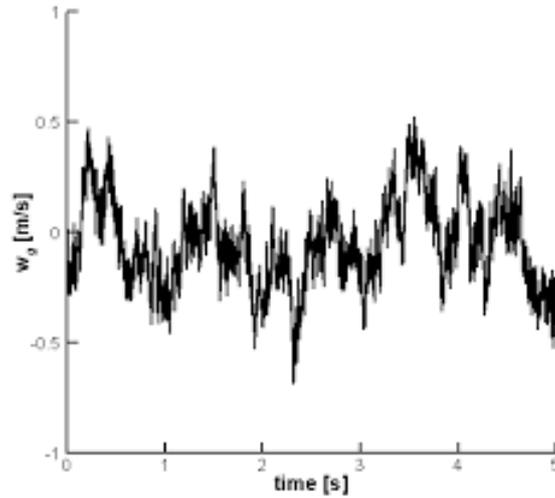


Figura 2: Esempio di raffica turbolenta.

modelli più adatti, come quelli di raffica continua [3, 4].

Tali modelli esprimono la turbolenza come un processo probabilistico che varia casualmente nel tempo e nello spazio (Fig.2). Nello specifico, la raffica viene idealizzata come 'metodo casuale Gaussiano stazionario' [5], che conduce a modelli più realistici. I modi di raffica continua Dryden [6] e Von Karman [7] risultano ancora oggi i più utilizzati.

Entrambi definiscono la raffica per mezzo delle espressioni matematiche della Densità di Potenza Spettrale (PSD) delle varie componenti di velocità. Il modello di Von Karman risulta essere il più accurato tra i modelli ed è l'unico implementato sia in norme civili [1] che militari [8]. I primi tentativi di comprendere come un velivolo rispondesse all'incontro con una raffica risale ai primi decenni del '900 [9, 10]. Essi si basavano sullo studio di un sistema di equazioni lineari in 6 gradi di libertà soggette ad una piccola oscillazione di disturbo per alcuni coefficienti stabiliti. Tuttavia, una tipica struttura di un velivolo è un sistema continuo caratterizzato da un infinito numero di gradi di libertà. Come è facilmente intuibile, una risoluzione analitica di questo sistema sarebbe computazionalmente impossibile. Nel corso dei decenni, questo inconveniente ha portato alla creazione di vari metodi di analisi in grado di discretizzare il sistema e ottimizzare al meglio il rapporto tra tempo di risoluzione e precisione dei risultati [11]. Agli inizi degli anni '60 venne inventato il metodo agli elementi finiti (FEM), la cui importanza nell'ambito della modellazione e simulazione è enorme ancora oggi [12]. Esso propone la suddivisione della struttura in esame in tanti piccoli elementi, di geometria semplice e con una certa proprietà fisica. Ogni elemento è collegato agli altri attraverso dei punti discreti sugli elementi, chiamati nodi. La forma degli elementi può variare a seconda del numero di nodi di cui è composto (triangolare, rettangolare, etc...). L'approccio risolutivo di questo metodo consiste nel determinare le proprietà dinamiche di ogni elemento sotto forma di matrici di diverso genere, come la matrice di massa o rigidità, per poi assemblare tutti gli elementi ed ottenere delle matrici globali di risposta della struttura.

Il modello strutturale è solitamente accompagnato da un modello aerodinamico che ne permetta di determinare la distribuzione delle forze aerodinamiche sulla struttura. Uno dei metodi più importanti che ha sostenuto la prova del tempo è il cosiddetto Doublet Lattice Method (DLM) [13], il quale si pone di calcolare la portanza e la resistenza su una superficie portante tramite le equazioni di Laplace. Esso suddivide tale superficie di portanza infinitamente sottile in diversi elementi trapezoidali, detti pannelli. Ogni pannello

presenta un vortice principale sul quarto della propria corda e due vortici di scia, posti ai lati del pannello, tendenti all'infinito. Nonostante la negazione di effetti quali viscosità e spessore, questo tipo di modellazione aerodinamica è stata fondamentale in quanto in grado di includere lo sviluppo di effetti come quello tridimensionale, totalmente mancante ad un'altra nota teoria di modellazione aerodinamica: la strip theory [14].

Negli ultimi tempi, entrambi i modelli aerodinamici risultano meno precisi del modello noto come dinamica computazionale dei fluidi (CFD) [15, 16]. Questa transizione è dovuta al fatto che il CFD, seppur computazionalmente più oneroso, risulta molto più efficace nel calcolo delle distribuzioni delle forze aerodinamiche per velivoli in condizioni di volo che comprendono il transonico, caso per cui il DLM è carente.

I modelli del velivolo e dei carichi aerodinamici sviluppatasi presi in considerazione in questa relazione risultano estremamente semplici nella formulazione e permettono una rapida determinazione dei risultati, con una efficace rappresentazione qualitativa del contributo flessibile alla risposta del velivolo. La modellazione del velivolo si basa sulle equazioni che descrivono l'equilibrio dinamico-flessibile. Esse sono determinate tramite un approccio Lagrangiano [17, 18], ovvero derivando i termini energetici e di lavoro virtuale del sistema per le singole coordinate generalizzate scelte per ipotesi. La risposta della struttura flessibile genera anche dei carichi dinamici che sono connessi alla entità del contributo oscillatorio. Il modello a cui si fa riferimento è presente nel testo [19].

1.1 Breve descrizione tesi

Il Capitolo 2 contiene la descrizione dei modelli di raffica utilizzati per perturbare il velivolo. Dopo una introduzione alle raffiche, si procede con una comparazione tra le raffiche discrete e le raffiche continue. Dopodiché, in modo da comprendere quest'ultime, è necessario introdurre alcuni concetti di Densità Spettrale di Potenza (PSD). L'ultima sezione si incentra sui modelli di turbolenza continui proposti da Dryden e Von Karman e come quest'ultimi sono implementati nelle simulazioni.

Il Capitolo 3 approfondisce il discorso sulla descrizione del modello di velivolo impiegato, partendo dal modello rigido dello stesso. Successivamente, viene introdotto il modello flessibile come sistema di equazioni ottenute dal metodo di Lagrange sulle equazioni di energia.

Il Capitolo 4 riporta il metodo di risoluzione del sistema di equazione dinamico-Lagrangiano in entrambi i casi di modelli di raffica chiamati in causa. Inoltre, illustrerà brevemente come la risposta cinematica del velivolo possa determinare la distribuzione di forze su una superficie portante come l'ala.

Il Capitolo 5 è dedicato alla comparazione di risposte dinamiche e cinematiche considerando due situazioni diverse. La prima propone le risposte di un velivolo di prova al variare del modello della raffica e del tipo di deformazione premissa. Ciò al fine di verificare l'attendibilità del codice comparando i risultati ottenuti con quelli riportati da letteratura. La seconda consiste nel confronto di risposte ipotizzando i parametri geometrici e aerodinamici provenienti da alcuni velivoli civili in condizioni di volo simili. Questo tipo di analisi è stata proposta al fine di mettere in risalto l'importanza del carico alare e su come quest'ultimo permetta uno sviluppo di carichi perturbativi in modo diverso. Entrambi i paragrafi presentano le risposte sia in funzione della raffica discreta che turbolenta per diversi modi di deformazione.

Infine, il Capitolo 6 contiene alcune considerazioni finali e possibili sviluppi futuri di questo lavoro.

2 Modello di raffica

Al fine di studiare il comportamento del velivolo per un disturbo di raffica, è necessario determinare un modello di raffica adatto. Normative attuali, come [1, 2] (paragrafi CS 25.341 e AMC 25.341), fanno riferimento a due tipi differenti di modelli di disturbo di raffica che possono essere usati per determinare i carichi agenti su un velivolo durante il volo:

- Modelli di raffica discreta;
- Modelli di turbolenza continua.

La prima è anche indicata come 'raffica individuale' ed è generalmente una idealizzazione della struttura di raffica, mentre la seconda si focalizza maggiormente sulla natura stocastica della turbolenza atmosferica.

Entrambe queste tipologie presentano, comunque, dei tratti in comune introdotti brevemente nella seguente sezione. Tutte le informazioni raccolte in questo capitolo sono contenute in [5]. Prima di approfondire i modelli di raffica, è necessario introdurre rapidamente il concetto di raffica.

2.1 Comportamento raffica

Le turbolenze, sia come fenomeno discreto che continuo, comportano una variazione di angolo d'attacco per via di una componente di velocità di raffica a certi angoli per una traiettoria di volo. I carichi verticali e orizzontali cambiano l'angolo d'attacco e possono essere espresse come:

$$\tan(\Delta\alpha) = \frac{U_g}{V} \approx \Delta\alpha \quad (1)$$

in cui V esprime la velocità di avanzamento del velivolo, mentre U_g indica la velocità di raffica.

La Fig.3 mostra un esempio di raffica verticale:

L'azione di questo tipo di raffica comporta una variazione della portanza pari a:

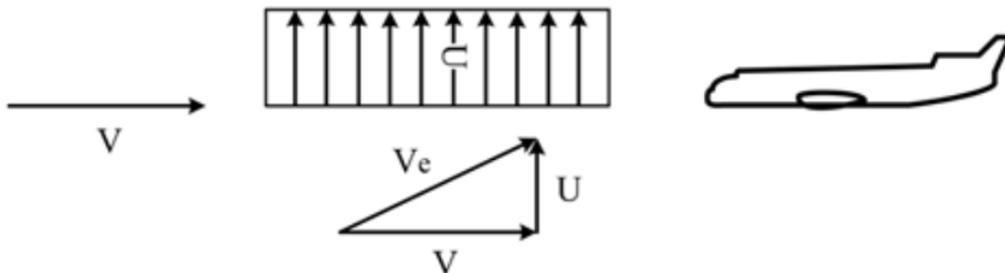


Figura 3: Esempio di raffica verticale.

$$\Delta L = \frac{1}{2}\rho V^2 SC_{L\alpha} \Delta\alpha = \frac{1}{2}\rho V^2 SC_{L\alpha} \frac{U_g}{V} = \frac{1}{2}\rho U_g V SC_{L\alpha} \quad (2)$$

Inoltre, questa modifica dell'angolo d'attacco comporta una variazione del moto del velivolo. La variazione complessiva dell'angolo d'attacco, infatti, non dipende solo dalla velocità di raffica, ma anche dalla velocità con cui il velivolo appropria la raffica stessa. Dato che una raffica perturbativa non può raggiungere un picco massimo istantaneamente, il velivolo necessiterà di tempo per variare il proprio moto. Continuando con l'esempio della raffica verticale, il velivolo reagirà ad essa tramite:

- Elevazione: il velivolo trasla nella direzione della velocità di raffica, in modo da ridurre l'effetto;
- Beccheggio: per via della stabilità del beccheggio, il velivolo tenderà a ridurre l'incremento dell'angolo d'attacco dovuto alla raffica.

Tale risposta può essere descritta esprimendo l'equazione differenziale del moto del velivolo rigido rispondendo alla raffica in termini di una singola variabile α . La variabile α rappresenta l'angolo d'attacco al moto del velivolo e non include un angolo d'attacco associato alla velocità di raffica α_g , identificabile come una funzione forzante. Carichi dovuti alla raffica laterale sono influenzati da moti simili a quelli descritti per una raffica verticale.

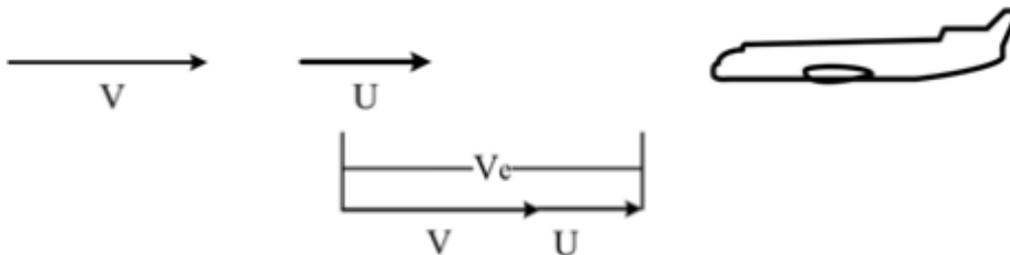


Figura 4: Esempio di raffica frontale.

La raffica può anche essere diretta parallelamente alla velocità di volo del velivolo, come rappresentato in Fig. 4. Tale perturbazione è nota come raffica frontale e determina una variazione della pressione dinamica:

$$\Delta L = \frac{1}{2}\rho [(V + U_g)^2 - V^2] SC_L = \frac{1}{2}\rho [2U_g V + U_g^2] SC_L \approx \frac{1}{2}\rho (2U_g V) SC_L \quad (3)$$

Da notare come il coefficiente di portanza che contribuisce alla variazione di portanza sia C_L e non più $C_{L\alpha}$. Ciò comporta che la raffica frontale genera solo una variazione di portanza, e non di orientamento nello spazio o di traiettoria. La differenza tra i due tipi di raffica dipende principalmente dal moto di beccheggio, poiché l'aumento di portanza dovuto ad una raffica verticale agirà sul centro aerodinamico del velivolo, mentre la portanza sviluppata da una raffica frontale agirà sul baricentro del velivolo. Inoltre, la raffica frontale potrebbe portare ad un piccolo effetto di alleviazione dovuto ad un rallentamento risultante dall'aumento di resistenza associato con l'aumento di pressione dinamica.

2.2 Profili di raffica a confronto

Tipicamente, i profili di raffica tendono a essere continui e irregolari, come quello riportato in Fig. 7. In tal caso, la struttura viene definita come turbolenza, mentre il singolo profilo viene classificato semplicemente come raffica.

2.2.1 Raffiche discrete '1-coseno' in funzione del tempo

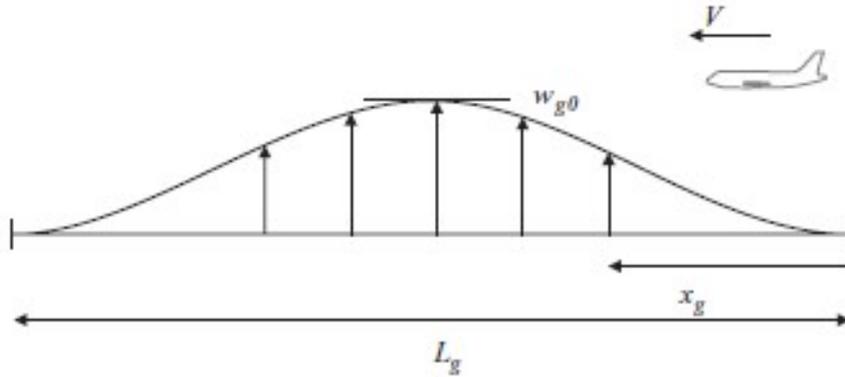


Figura 5: raffica discreta '1-coseno'.

Un profilo turbolento può, infatti, essere pensato come una serie di raffiche individuali. La tipica raffica individuale, o raffica discreta, è del tipo impulso '1-coseno', riportata in Fig.5 e descritta nella normativa CS-25 [1].

L'equazione che ne regola lo sviluppo spaziale è la seguente:

$$w_g(x_g) = \frac{w_{g0}}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi x_g}{L_g} \right), \text{ per } 0 \leq x_g \leq L_g \quad (4)$$

in cui x_g esprime la posizione del velivolo all'interno della raffica relativa ad una origine predefinita, w_{g0} indica il valore di picco, L_g la lunghezza della raffica. La velocità di progetto della raffica varia con la lunghezza di raffica, quota e velocità di volo.

Il valore del picco di velocità w_{g0} , a sua volta, dipende dalla Eq. 5:

$$w_{g0} = w_{ref} F_g \left(\frac{L_g/2}{107} \right)^{(1/6)} \quad (5)$$

in cui, w_{ref} rappresenta la velocità di raffica di riferimento in una velocità d'aria equivalente, ottenuta da una media di raffiche riscontrabili in circa settanta mila ore di volo. Essa viene indicata dalla normativa CS 25 [1] in funzione della quota di volo per una lunghezza di raffica pari a 107m. F_g esprime il fattore di alleviazione del profilo di volo. Questo fattore è utilizzato per rapportare l'esperienza di servizio esperito in termini di probabilità di volo ad una data altitudine all'interno di un certo range certificato di quota. F_g è minimo al livello del mare, per poi aumentare progressivamente fino a 1 alla massima quota certificabile. Al livello del mare, tale fattore risulta determinabile dalla seguente equazione:

$$F_g = 0.5(F_{gz} + F_{gm}) \quad (6)$$

con:

$$F_{gz} = 1 - \frac{Z_{m0}}{76200} \quad (7)$$

$$F_{gm} = \sqrt{R_1 \tan \left(\frac{\pi R_2}{4} \right)} \quad (8)$$

$$R_1 = \frac{MLW}{MTOW} \quad (9)$$

$$R_2 = \frac{MZFW}{MTOW} \quad (10)$$

in cui Z_{mo} rappresenta la massima quota operativa, MLW indica il peso massimo all'atterraggio, $MTOW$ esprime il peso massimo al decollo e $MZFW$ è il peso massimo in assenza di carburante.

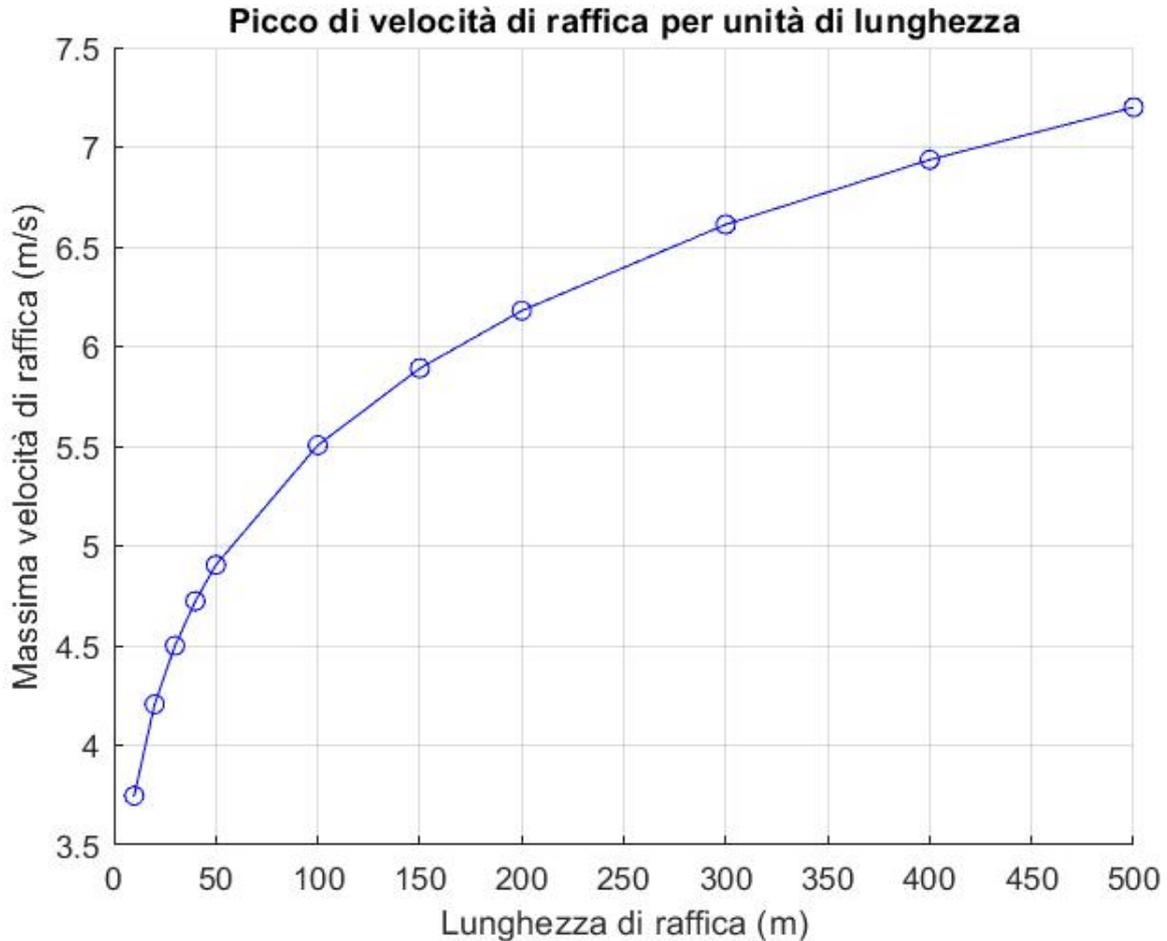


Figura 6: picco di velocità per una raffica '1-coseno' in funzione della lunghezza della raffica.

Per calcolare la risposta del velivolo nel dominio del tempo, l'espressione della velocità di raffica nello spazio necessita di essere trasformata da una funzione spaziale ad una funzione temporale. Si consideri un velivolo in moto rettilineo uniforme che incontra una raffica '1-cos'. Si supponga inoltre che l'ala del velivolo entri nella raffica al tempo $t = 0$ e posizione $x_g = 0$. Il piano di coda entra nella raffica poco tempo dopo rispetto all'ala; ciò è definito come 'effetto di penetrazione della raffica'. Se il velivolo ha una velocità costante V , allora la velocità di raffica w_g esperita dal velivolo sarebbe considerabile come una funzione nel tempo, poiché la quantità per cui l'ala del velivolo è penetrata nella raffica sarà data da $x_g = Vt$. dove V in questo caso esprime la TAS (True Air Speed). In questo modo, la variazione temporale della velocità di raffica sarà data da:

$$w_g(t) = \frac{w_{g0}}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi V}{L_g} t \right) \quad (11)$$

Dato un valore di $w_{ref} = 6.25m/s$, l'Eq. 5 comporta che, all'aumentare della lunghezza di raffica, il picco di velocità di raffica per ogni singola lunghezza abbia un andamento asintotico verso una retta passante a circa $w_{g0} = 7.5 \text{ m/s}$, come si nota dalla Fig. 6.

2.2.2 Raffiche continue in funzione della frequenza



Figura 7: Esempio di turbolenza.

L'idealizzazione della raffica '1-cos' risulta un metodo molto semplice per rappresentare i risultati dinamici di una turbolenza atmosferica che agisce durante il volo in maniera sufficientemente approssimata. Tuttavia, ciò non rappresenta la natura continua ed irregolare delle turbolenze continue, il cui tipico profilo è illustrato in Fig. 7.

Per tale motivo, i profili di raffica sono spesso idealizzati come 'elaborazioni Gaussiane stazionarie'. Con questo metodo, il profilo è considerato stazionario. Ciò comporta che la durata infinita e le sue proprietà statistiche sono le stesse ovunque si possa campionare il fenomeno.

Anche la sua esplicazione nel tempo risulta essere Gaussiana, poiché campionata in maniera casuale, la distribuzione di probabilità risulta dunque essere definita dalla funzione di densità di probabilità:

$$p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sigma_y}\right)^2\right) \quad (12)$$

dove σ_y esprime la deviazione standard ed è un parametro costante. Per 'casuale' si intende che il profilo non è regolare, dunque risulta definito solo in termini statistici.

Questa idealizzazione risulta molto più simile al fenomeno reale rispetto ad una raffica discreta. Infatti, essa presenta:

- Varietà pressoché infinita di singole raffiche;
- Varietà di intensità della raffica con lunghezze di raffica H ;
- Sovrapposizioni di raffiche corte, da cui dipendono i modi elastici, e raffiche lunghe, che influenzano maggiormente il modo rigido del velivolo;
- La velocità di raffica ridotta, propriamente associata con una serie di raffiche risonanti;

Esistono diverse teorie matematiche in grado di trattare questa schematizzazione. In particolare, di seguito si farà riferimento ad alcuni concetti di probabilità e Densità di Potenza Spettrale (PSD - Power Spectral Density). Esse permettono di determinare diverse caratteristiche della risposta del velivolo alla raffica.

2.2.3 Probabilità e concetti PSD

Innanzitutto, è necessario definire una misura dell'entità del profilo di raffica continuo. Data y una funzione nel tempo stazionaria e casuale, come la raffica in Fig. 7. L'entità delle fluttuazioni rispetto al suo valore medio è misurabile tramite il cosiddetto valore quadratico medio (RMS - Root Mean Square), espressa come:

$$\sigma_y = \sqrt{\overline{y^2}} = \sqrt{\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |y(t)|^2 dt} \quad (13)$$

in cui la barra su y indica il valore medio. Questa equazione si applica solo quando il valore medio è nullo. Se, ad esempio, y fosse la risposta del velivolo, y sarebbe l'aumento relativo al valore della quota di volo 1-g.

Per definire σ_y da una raccolta temporale di valori, quest'ultima può essere campionata

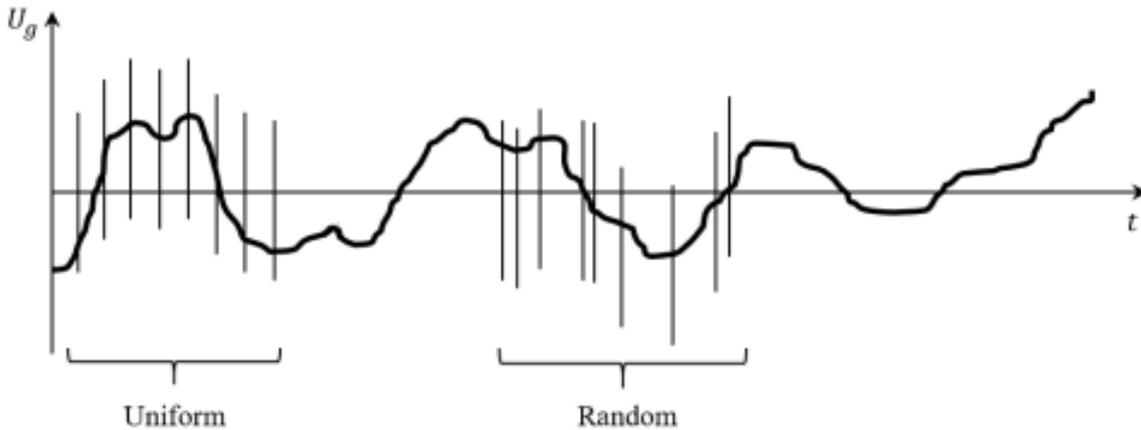


Figura 8: Campionamento di raffica.

a piccoli intervalli o casualmente, come spiegato in Fig. 8. In entrambi i casi, l'Eq. 13 diventa:

$$\sigma_y = \sqrt{\overline{y^2}} = \sqrt{\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |y(t_i)|^2} \quad (14)$$

Si noti come y sia elevato al quadrato prima di essere mediato poiché la somma delle fluttuazioni darebbe come risultato zero, annullando lo scopo di misurare il modulo delle fluttuazioni di y . Altri due concetti importanti per comprendere meglio l'entità della variabile y sono la densità di probabilità e la distribuzione di probabilità. La densità di probabilità $p(y)$ è la quantità per cui la probabilità che y si trovi tra y_1 e $y_1 + dy$ è pari all'area elementare $p(y_1)dy$, come mostrato in Fig. 9, dove $p(y)$ risulta simmetrico per $y = 0$. Tale simmetria è tipica di una distribuzione Gaussiana, ma non è strettamente necessaria.

La distribuzione di probabilità $P(y)$, illustrata in Fig. 9, è indicata come la probabilità che $y < y_1$, ed è data da:

$$P(y) = \int_{-\infty}^{y_1} p(y) dy \quad (15)$$

Un altro modo per definire la distribuzione di probabilità è la funzione di $1 - P(y)$, per

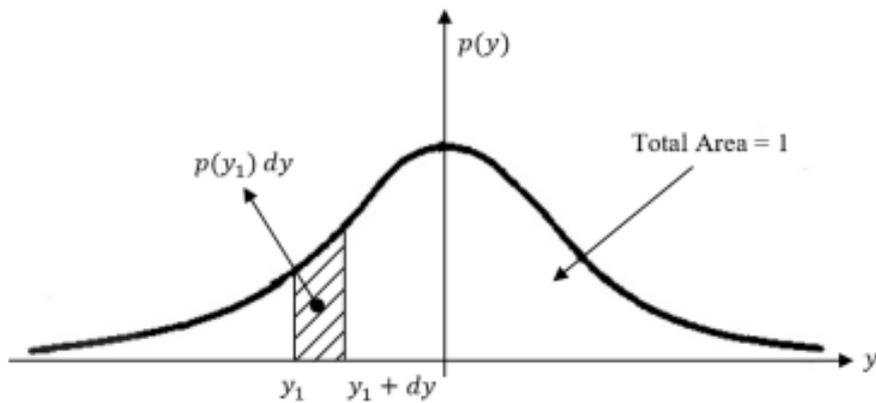


Figura 9: Densità di probabilità.

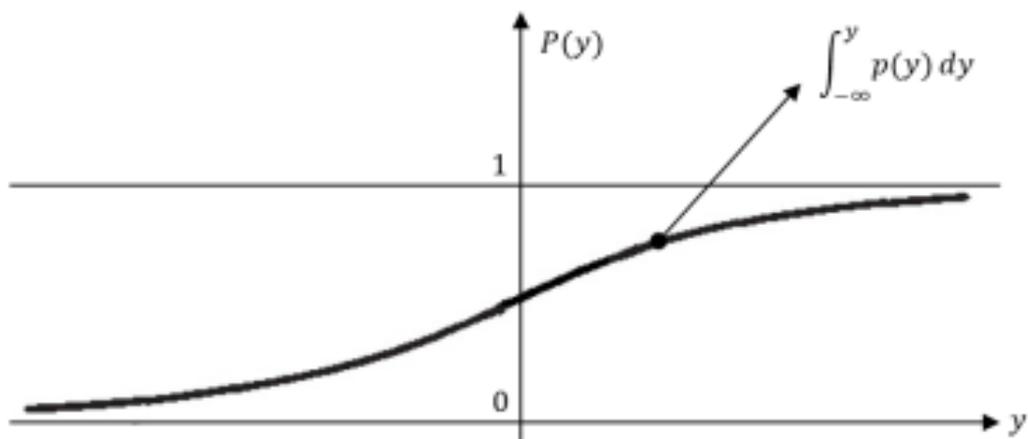


Figura 10: Distribuzione di probabilità.

cui la probabilità sia più grande di y_1 :

$$1 - P(y) = \int_{y_1}^{\infty} p(y)dy \quad (16)$$

Graficamente, l'andamento di $1 - P(y)$ risulta ottenibile specchiando la Fig. 9 attorno

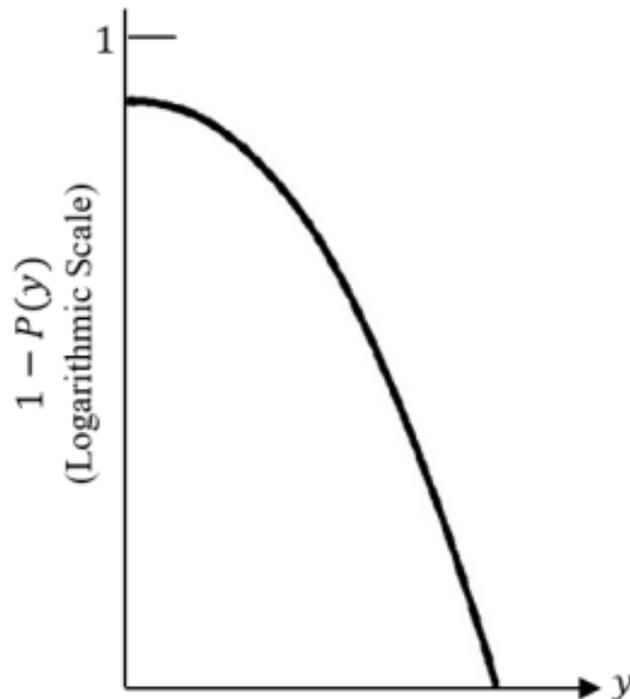


Figura 11: $1 - P(y)$ in scala logaritmica.

all'asse y , ma è spesso graficato in scala semi-logaritmica, come illustrato in Fig. 11.

Questo tipo di studio risulta utile per determinare valori con bassissima probabilità.

Come espresso nella Sez. 2.2.2, l'importanza delle distribuzioni normali è parzialmente dovuta al teorema del limite centrale, il quale indica che, sotto determinate circostanze, la media di molte osservazioni di una variabile casuale con valore medio finito e varianza (σ_y^2) è essa stessa una variabile casuale la cui distribuzione converge ad una distribuzione normale con l'aumento del numero di osservazioni. Perciò, le distribuzioni Gaussiane sono spesso utilizzate per rappresentare le variabili casuali reali la cui distribuzione non è ben conosciuta, come le raffiche continue.

In applicazioni di carico al velivolo, anche la densità di probabilità di \dot{y} è Gaussiana ed indipendente da y .

Una densità di probabilità congiunta (JPDF - Joint Probability Density Function) esprime, in maniera analoga alla densità di probabilità singola, la probabilità che x si trovi tra $x + dx$ e y tra $y + dy$ contemporaneamente. Esso è espresso come $p(x, y)$, dove:

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}} \exp\left(-\frac{1}{1-r^2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sigma_x}\right)^2 - r \left(\frac{x}{\sigma_x}\right) \left(\frac{y}{\sigma_y}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\sigma_y}\right)^2 \right]\right) \quad (17)$$

Si dimostra come, se questa condizione fosse soddisfatta, allora anche il requisito, per il quale \dot{y} è Gaussiana, risulta soddisfatto. L'importanza pratica di ogni requisito addizionale, oltre al fatto che debba essere Gaussiano, è necessario anche nella equazione di

Rice. L'equazione di Rice è dunque la base per la determinazione analitica delle curve di eccedenza della frequenza, utilizzate per applicare la natura probabilistica della turbolenza atmosferica direttamente come i carichi sulla struttura. In pratica, la distribuzione di probabilità di ogni quantità y , espressa nella forma $1 - P(y)$, può essere pensata come ad una frazione temporale. Tuttavia, questa probabilità non dice nulla circa la probabilità che un picco massimo in un intervallo di tempo finito, sarà in eccesso rispetto ad un valore y_1 , né indica il numero di picchi previsti. Per tale tipo di informazione, sono richiesti dati di eccedenza della frequenza.

In sostanza, l'entità di un fenomeno aleatorio Gaussiano è definito statisticamente dal

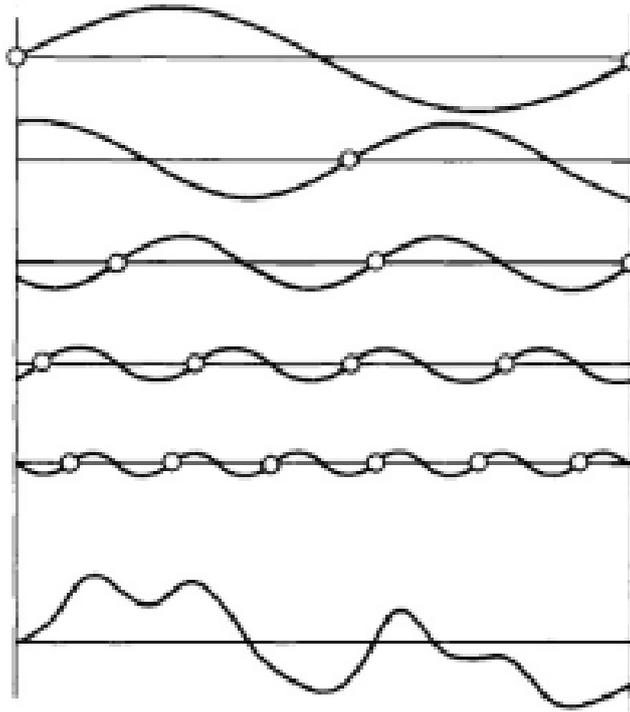


Figura 12: Esempi di sovrapposizione di sinusoidi.

valore quadratico medio (RMS) e la sua distribuzione di probabilità. In modo da completare la descrizione statistica del fenomeno casuale, è richiesta una definizione del suo contenuto di frequenza.

Un fenomeno aleatorio Gaussiano può essere considerato generato dalla sovrapposizione di un infinito numero di componenti sinusoidali, i quali differiscono infinitesimamente in frequenza tra l'uno e l'altro. Inoltre, ogni componente è di ampiezza infinitesima ed ognuna è casualmente sfasata rispetto alle altre.

Ciò è espresso matematicamente come:

$$y(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{\Phi(\omega_m)\Delta\omega} \cos(\omega_m t + \Psi_m) \quad (18)$$

Un esempio di come le sinusoidi si sovrappongono a formare il fenomeno casuale Gaussiano stazionario è mostrato nella Fig. 12. Da notare come una somma di un numero limitato di sinusoidi ha già l'apparenza di un fenomeno aleatorio Gaussiano. Per quanto riguarda l'Eq. 18, il termine $\Phi(\omega_m)$ è chiamato PSD del fenomeno, che, in funzione

della frequenza ω , fornisce la misura completa del contenuto energetico di frequenza del fenomeno. Come illustrato dalla Fig. 13, sia $\Phi(\omega)$ la PSD della quantità di $y(t)$, allora

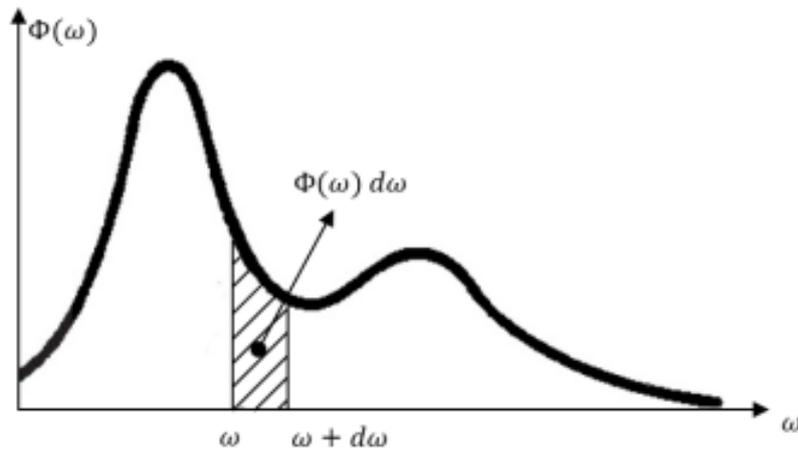


Figura 13: Schema di PSD.

$\Phi(\omega)d\omega$ è la contribuzione per \bar{y}^2 (o σ_y^2) di frequenze tra ω e $\omega + d\omega$. In termini di valore quadratico medio (RMS) può essere espresso come:

$$\sigma_y = \sqrt{\int_0^{\infty} \Phi(\omega) d\omega} \quad (19)$$

Dato $\Phi(\omega)$, un numero infinito di dati temporali può essere generato tramite l'Eq.18. Analogamente, data una raccolta temporale, è possibile calcolare un PSD. Ciò è possibile tramite una **funzione di autocorrelazione**, definita come:

$$R(\tau) = \overline{y(t)y(t+\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t)y(t+\tau) dt \quad (20)$$

Ciò esprime la correlazione di una funzione con sé stesso in punti separati per vari periodi di tempo τ . Per $\tau = 0$, $R = \bar{y}^2 = \sigma_y^2$ quantità che in statistica è definita come **varianza**. Il caso PSD può esser determinato da $R(\tau)$ come segue:

$$\Phi(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R(\tau) \cos(\omega\tau) dt \quad (21)$$

Analogamente:

$$R(\tau) = \int_0^{\infty} \Phi(\omega) \cos(\omega\tau) dt \quad (22)$$

Le Eq.21 e 22 sono delle particolari trasformate di Fourier. Questo è solo un esempio di come determinare un PSD da una raccolta temporale. Un modo più efficace consiste nella (RFT) Trasformata di Fourier Rapida.

Generalmente, data una raffica PSD, due tipi di approccio possono essere seguiti per determinare la risposta di raffica di un velivolo. Una consiste nell'usare la raffica PSD per generare una velocità di raffica nel tempo, che è usato per perturbare il modello del velivolo. Esso è il metodo selezionato per questo testo ed è spiegato nel seguente paragrafo.

2.2.4 Modelli di turbolenza secondo Dryden e Von Karman

I due modelli di turbolenza continua, Von Karman e Dryden, sono stati ampiamente usati nelle applicazioni di simulazione e progetto del velivolo.

Entrambi i modelli esprimono le componenti di velocità lineari e angolari come componenti di raffiche continue come i fenomeni aleatori Gaussiani stazionari e specificare ogni componente PSD per mezzo di espressioni matematiche. Entrambi questi modelli PSD sono presenti in [5]. Per una raffica verticale w_g , la corrispondente $\Phi_g(\omega)$ è definita come:

$$\text{Dryden} : \Phi_{gg}(\Omega) = \sigma_g^2 \frac{2L}{V} \frac{1 + 3L^2\Omega^2}{1 + L^2\Omega^2} \quad (23)$$

$$\text{VonKarman} : \Phi_{gg}(\Omega) = \sigma_g^2 \frac{2L}{V} \frac{1 + (8/3)(1.339\Omega L)^2}{[1 + (1.339\Omega L)^2]^{\frac{11}{6}}} \quad (24)$$

Questi PSD sono espressi in termini di frequenza spaziale come Ω , invece della frequenza circolare ω . La relazione che lega i due termini di frequenza è la seguente:

$$\Omega = \frac{\omega}{V} \quad (25)$$

dove V indica la velocità con cui il velivolo si muove attraverso il campo di raffica.

Dunque, il PSD in termini di frequenza spaziale è esprimibile come:

$$\Phi_i(\Omega) = V\Phi_i(\omega) \quad (26)$$

Altri termini che appaiono nelle equazioni PSD sono l'intensità di turbolenza σ_i , che è un valore quadratico medio di raffica, e L_i la lunghezza di scala della turbolenza. Questa seconda variabile, in pratica, determina la frequenza per cui compare il gomito della curva PSD: ovvero, L_i influenza la forma della curva PSD, come mostrato in Fig. 14. Ciò implica che il valore di L_i dovrebbe essere scelto in modo da far combaciare la raffica PSD il più possibile alla turbolenza effettiva che il velivolo incontrerà. Tuttavia, per valori di $L \geq 1000ft$, la scala di turbolenza influisce sul valore di RMS senza cambiare le curve nella regione delle frequenze dove il velivolo subisce l'effetto della raffica.

Perciò, allo scopo della determinazione della raffica, L_i dev'essere selezionato come una costante: la normativa CS-25 [1] considera L_i pari a 2500 ft per tutte le altitudini, mentre la raffica RMS è cambiata e scalata con un fattore F_g , lo stesso dell'equazione 6.

Tuttavia, per altitudini superiori a circa 2500 ft dal terreno, la scala di turbolenza probabilmente tende a ridursi, specialmente per la componente verticale. Ciò è sicuramente importante per voli ad alte velocità a basse altitudini ma anche quando si progetta l'atterraggio del velivolo. Per questo motivo, le regolazioni militari tentano di riflettere questa riduzione di turbolenza specificamente per un modello a bassa altitudine ($h \leq 1000ft$) e un modello a media/alta altitudine ($h \geq 2000ft$).

Per altitudini inferiori a 1000 ft, la lunghezza di scala della turbolenza per Dryden e Von Karman è espresso come:

$$2L_w = h \quad (27)$$

$$L_u = 2L_g = \frac{1}{(0.177 + 0.000823h)^{1.2}} \quad (28)$$

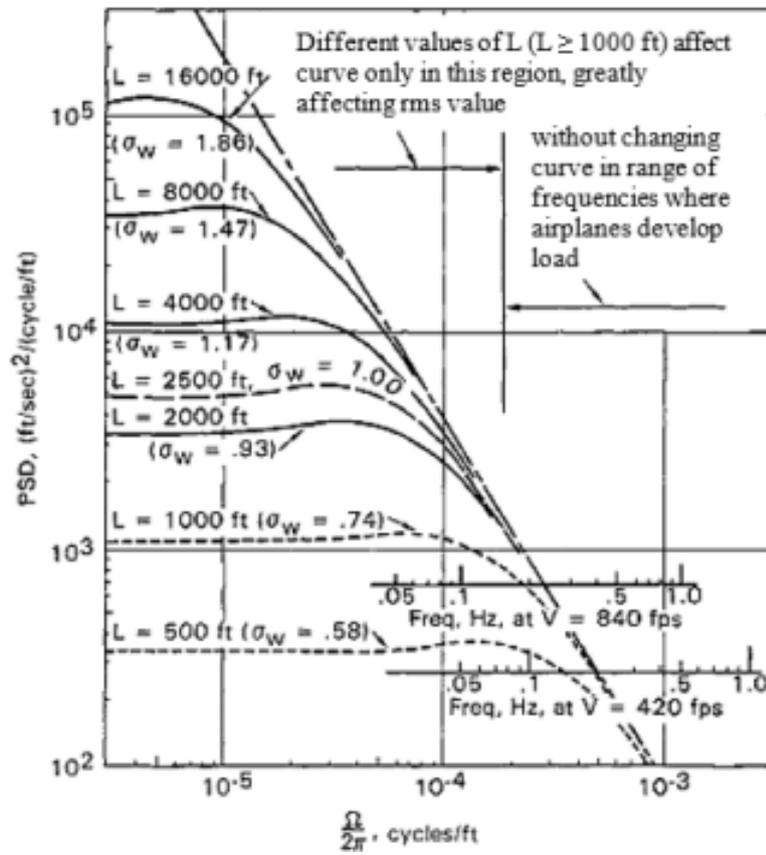


Figura 14: Effetto di L su PSD.

Il fatto che la lunghezza di scala turbolenta longitudinale sia due volte le lunghezze verticale e laterale è ottenuto sperimentalmente esprimendo L_i in termini della funzione di autocorrelazione (Eq. 20), come segue:

$$L = \frac{\int_0^\infty R(\tau)dt}{R(0)} \quad (29)$$

Le intensità di turbolenza σ_i , invece sono date per entrambi i modelli come:

$$\sigma_w = 0.1W_{20} \quad (30)$$

$$\frac{\sigma_u}{\sigma_w} = \frac{\sigma_g}{\sigma_w} = \frac{1}{(0.177 + 0.000823h)^{0.4}} \quad (31)$$

Dove W_{20} è la velocità del vento a 20 ft, che è tipicamente pari a 15 nodi per una turbolenza leggera, 30 nodi per turbolenza moderata e 45 nodi per turbolenza importante. Da notare come, a basse altitudini, la velocità del vento è presa negli assi del velivolo, così una direzione di matrice del coseno dev'essere definita per ruotare le velocità di raffica negli assi body. Per altezze al di sopra dei 2000 ft, la lunghezza di scala di turbolenza è presa

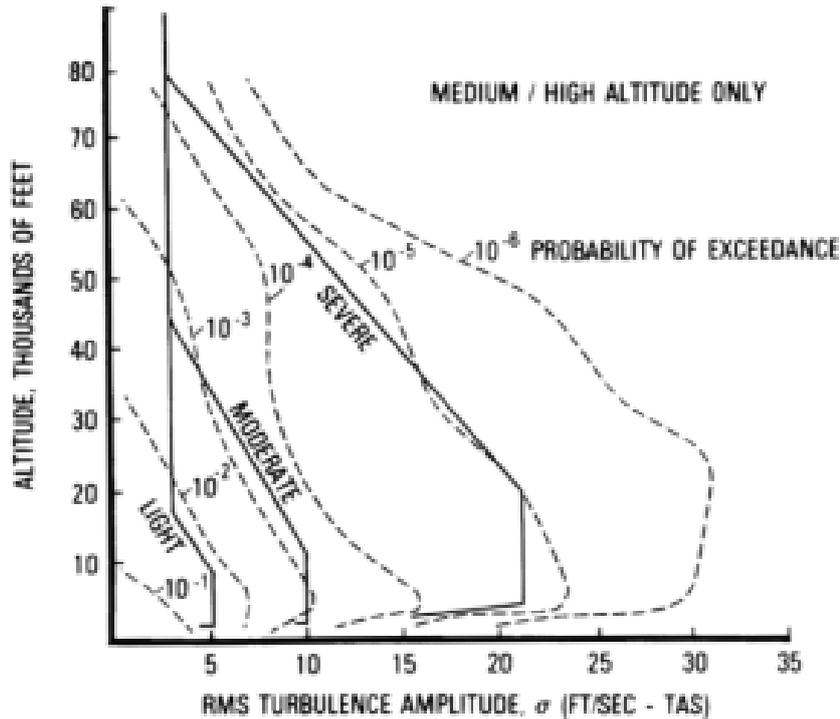


Figura 15: Intensità di turbolenza a medie/grandi altitudini.

come:

$$\text{Dryden} : L_u = 2L_g = 2L_w = 1750ft \quad (32)$$

$$\text{VonKarman} : L_u = 2L_v = 2L_w = 2500ft \quad (33)$$

Le intensità di turbolenza, invece, hanno lo stesso valore in tutte le direzioni e sono determinate da un grafico che fornisce l'intensità di turbolenza come una funzione di altezza e la probabilità dell'intensità di turbolenza risulta ecceduta. Esso è derivato dalla

Fig. 15.

Infine, per altezze tra 1000 ft e 2000 ft le velocità di turbolenza e velocità angolari di turbolenza sono determinate interpolando linearmente tra il valore dal modello a bassa altitudine (trasformato nelle coordinate body) e il valore dal modello ad elevate altitudini.

Dati i due modelli qui rappresentati, la Von Karman fornisce una migliore approssima-

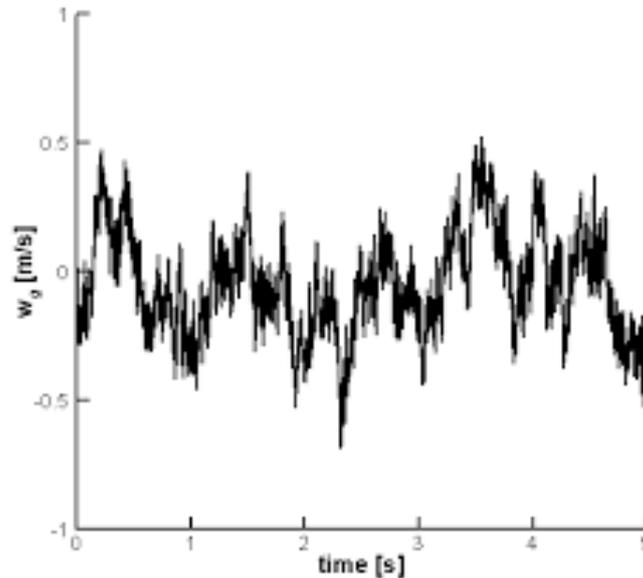


Figura 16: Intensità di turbolenza a medie/grandi altitudini.

zione ai dati osservati e perciò è lo standard per l'uso nei progetti. Il modello Dryden ha comunque mantenuto la sua importanza per via della sua semplicità nel derivare il filtro richiesto per generare una propria velocità di raffica. In ogni caso le turbolenze di raffica agiscono prima sul modello rigido per poi influenzare il comportamento del velivolo tramite equazioni di Lagrange.

Il rapporto tra i PSD di Von Karman e Dryden è rappresentato in funzione di frequenza nella Fig.17 per una serie di valori della velocità di volo vera (TAS). Entrambi gli spettri presentano una scala di turbolenza di circa 2500 ft (762 m circa) e un ugual valore di RMS. Si considera la radice quadrata del rapporto di PSD, cosicché la quantità delle curve approssimi il rapporto delle risposte in RMS quando la risposta è confinata ad una banda di frequenza ridotta. Dal grafico mostrato in Fig.14 si nota come un aumento della frequenza comporta un cospicuo aumento dei valori del PSD di Von Karman rispetto a Dryden. Tale differenza risulta più accentuata al diminuire della velocità di volo.

Per un sistema lineare, esprimendo con i e o per definire rispettivamente ingresso e uscita, la relazione tra PSD d'ingresso ed uscita è indicata come:

$$\Phi_o(f) = \Phi_i(f)|H(f)|^2 \quad (34)$$

Se la distribuzione di probabilità in ingresso è Gaussiana, anche quella di uscita sarà Gaussiana. Nelle applicazioni relative alla raffica, la funzione di trasferimento è ottenuta dalla soluzione delle equazioni differenziali di moto del velivolo: dato, ad esempio, una velocità di raffica d'ingresso, i risultati in uscita spaziano dalle accelerazioni ai momenti di flessione e torsione. Questo è possibile supponendo di utilizzare un modello basato su un sistema lineare, come quello spiegato a breve nel capitolo successivo.

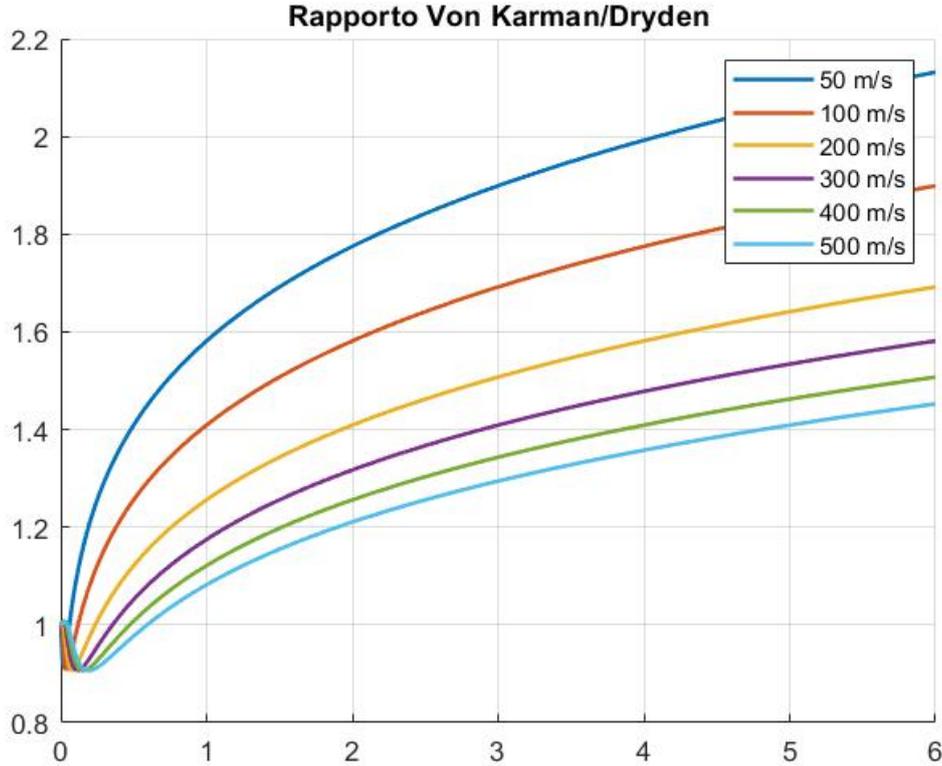


Figura 17: Rapporto tra PSD di Von Karman e Dryden.

3 Modello e modi flessibili del velivolo in esame

Il modello principale di questo testo è di tipo flessibile. Tuttavia, per completezza di trattazione, si riporta anche il sistema di equazioni dinamiche del velivolo rigido per mettere in evidenza la somiglianza e come il contributo di quest'ultimo sia importante per il primo.

3.1 Sistema di riferimento inerziale

Prima di sviluppare i modelli matematici del velivolo è necessario supporre un appropriato sistema di riferimento. Nel caso di un'analisi degli effetti dovuti ad una raffica di un velivolo in volo rettilineo uniforme per breve distanza, è spesso conveniente misurare il moto del velivolo rispetto ad un sistema di riferimento fisso a terra [20].

Tale sistema è un tipico sistema cartesiano avente origine o_0 sulla superficie della Terra e obbedisce alla regola della mano destra (o_0, x_0, y_0, z_0) , dove l'asse (o_0, x_0) punta verso Nord, (o_0, y_0) punta a Est e (o_0, z_0) punta verso il centro della Terra.

Poiché il volo è a breve distanza, risulta adeguato assumere la terra sotto il velivolo come piana, al di sopra della quale il velivolo procede ad altezza costante. Di conseguenza, come mostrato in Fig.18, il piano orizzontale è definito da (o_E, x_E, y_E) ed è parallelo al piano (o_0, x_0, y_0) sulla superficie terrestre. Il vettore (o_E, x_E) punta nella direzione arbitraria del volo del velivolo. L'asse (o_E, z_E) punta perennemente verso il basso. Gli assi di terra (o_E, x_E, y_E, z_E) definiti in questo modo sono dunque legati a terra per mezzo del vettore di gravità e forniscono il riferimento inerziale per moto del velivolo a breve distanza. Inoltre,

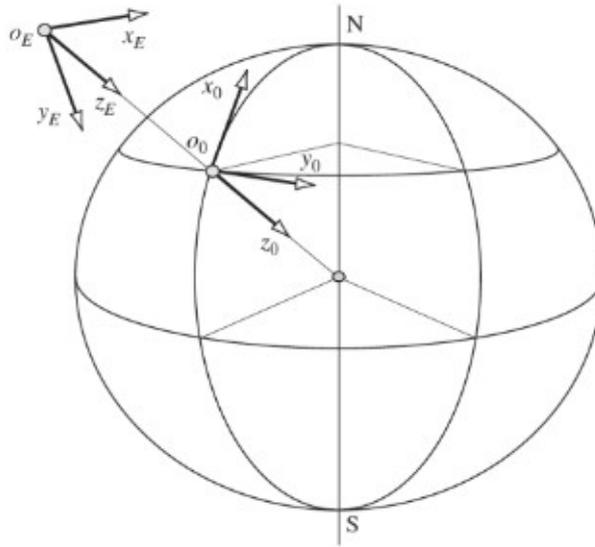


Figura 18: Sistema assi Terra convenzionale.

dato che il velivolo si approccia alla raffica in moto rettilineo uniforme, si suppone che il moto del velivolo avvenga sul piano (x_E, z_E) .

Questo sistema di riferimento è adatto per lo studio in questione, in quanto l'incontro tra velivolo e raffica è normalmente in condizione di volo stabile e le escursioni da questo riferimento sono relativamente piccole.

3.2 Modello rigido

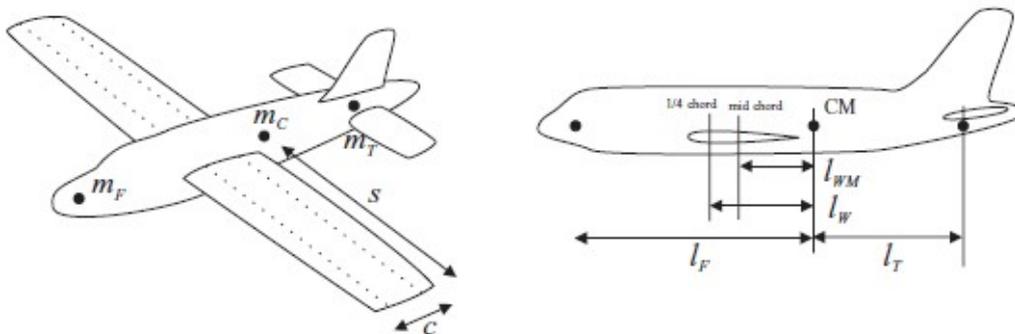


Figura 19: Modello di velivolo rigido.

Il modello, preso da [19] e mostrato in Fig.19, presenta un'ala non rastremata e con angolo di freccia nullo, dotata di massa distribuita uniformemente lungo l'apertura e con un'asse di massa posizionato posteriormente all'asse flessionale. Il piano di coda è rigido e i motori sono montati sul retro della fusoliera al fine di lasciare l'ala libera. I motori non sono presenti nella figura.

Per convenienza, si suppone che la sua massa sia concentrata su tre posizioni; fronte, retro e centro. Il velivolo è stato pensato per essere il più semplice possibile.

L'ala presenta una corda c e una semi-apertura s , un asse flessionale d'ala posto a distanza l_A posteriormente all'asse del fuoco dell'ala (ad un quarto circa della corda) e situato ad una distanza l_E anteriormente all'asse di massa dell'ala.

Le dimensioni della fusoliera dal centro del velivolo alla coda, il centro aerodinamico dell'ala e l'asse di massa dell'ala e la posizione del fronte di fusoliera sono indicate rispettivamente come l_T, l_W, l_{WM}, l_F . La dimensione dell'ampiezza fisica della fusoliera è trascurata nell'integrazione lungo l'ala.

La massa dell'ala per unità di apertura alare è indicata come μ_W , in modo tale che la massa dell'ala sia $m_W = 2\mu_W s$.

Si ipotizza che la fusoliera sia suddivisa in masse discrete m_F, m_C, m_T e che siano posizionate rispettivamente sulla parte frontale della fusoliera, sul centro di massa del velivolo e sul fuoco aerodinamico del piano di coda. La massa totale del velivolo è dunque pari a: $m = m_F + m_W + m_C + m_T$. Supponendo che il momento di massa attorno al baricentro sia pari a 0 per l'intero velivolo, dalla Fig. 19 si evince come le masse e la loro posizione sono correlate dall'espressione:

$$m_F l_F + m_W l_{WM} - m_T l_T = 0 \quad (35)$$

Al contempo, il momento di inerzia di beccheggio dell'ala per unità di apertura alare è espresso come χ_W , cosicché il valore totale per le ali lungo l'asse di massa è $I_W = 2\chi_W s$. Il momento di inerzia al beccheggio per il velivolo attorno al centro di massa è dato da:

$$I_Y = (I_W + m_W l_{WM}^2) + m_F l_F^2 + m_T l_T^2 \quad (36)$$

dove il termine d'ala implica il teorema dell'asse parallelo e il termine di massa del centro fusoliera non appare.

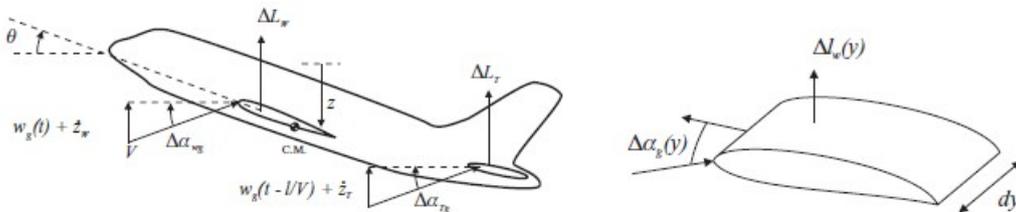


Figura 20: Velivolo rigido con moti elevazione/beccheggio mostrando quantità incrementali.

3.2.1 Gradi di libertà del modello rigido

Il modello di velivolo rigido in esame, il cui sistema di riferimento è di tipo inerziale, presenta un moto baricentrico positivo verso il basso, e un moto di beccheggio θ positivo in cabrata (Fig. 20). Entrambi i moti sono riferiti al centro di massa. Le forze di portanza incrementali sono indicate come $\Delta L_W, \Delta L_T$, poiché il velivolo è assunto in volo rettilineo uniforme prima di entrare e i carichi di raffica saranno aggiunti ai carichi di volo stabili. Si suppone che le forze di portanza agiscano rispettivamente ai centri aerodinamici dell'ala e del piano di coda. Per semplicità, si impiegherà una rappresentazione aerodinamica quasi stabile, sebbene effetti aerodinamici instabili sono normalmente inclusi. Effetti di downwash saranno esclusi qui per semplificare le espressioni, così come effetti dovuti all'aerodinamica instabile per lo stesso motivo. Dalla Fig. 20, si evince come l'angolo

di beccheggio istantaneo e la velocità di elevazione del velivolo influenzano l'incidenza dell'ala e del piano di coda. In termini di equazioni, tale incremento si esprime come:

$$\Delta\theta_{Wg} = \frac{w_g(t) + \dot{z}_W}{V} + \theta \quad \Delta\theta_{Tg} = \frac{w_g(t - l/V) + \dot{z}_T}{V} + \theta \quad (37)$$

mentre le velocità di elevazione per i centri aerodinamici sono diversi per l'ala e il piano di coda dovuta agli effetti di beccheggio:

$$\dot{z}_W = \dot{z}_C - l_W\dot{\theta} \quad \dot{z}_T = \dot{z}_C + l_T\dot{\theta} \quad (38)$$

L'effetto aerodinamico instabile sulla velocità angolare di beccheggio $\dot{\theta} = q$ è negato qui per l'analisi di raffica. Di conseguenza, i cambiamenti di portanza su ala e coda si riducono a:

$$\Delta L_W = \frac{1}{2}\rho V^2 S_W a_W \left[\frac{w_g(t) + \dot{z}_C - l_W\dot{\theta}}{V} + \theta \right] \quad \Delta L_T = \frac{1}{2}\rho V^2 S_T a_T \left[\frac{w_g(t - l/V) + \dot{z}_C + l_T\dot{\theta}}{V} + \theta \right] \quad (39)$$

La forza diretta verso il basso applicata al velivolo sarà uguale al prodotto tra massa e accelerazione del centro di massa, mentre il momento con alzamento del naso attorno ad un asse passante per il centro di massa è pari al momento d'inerzia rispetto all'asse di beccheggio per l'accelerazione di beccheggio:

$$m\ddot{z}_C = -\Delta L_W - \Delta L_T \quad I_y\ddot{\theta} = \Delta L_W l_W - \Delta L_T l_T \quad (40)$$

dove le forze di portanza incrementali di ala e piano causano rispettivamente delle risposte di beccheggio orarie e antiorarie. E' conveniente scrivere queste due equazioni in termini delle derivate aerodinamiche, la quale è basata sugli assi inerziali indicati alla Fig. 18:

$$m\ddot{z}_C = Z_z\dot{z}_C + Z_q\dot{\theta} + Z_\theta\theta + Z_{gW}w_g(t) + Z_{gT}w_g\left(t - \frac{l}{V}\right) \quad (41)$$

$$I_y\ddot{\theta} = M_z\dot{z}_C + M_q\dot{\theta} + M_\theta\theta + M_{gW}w_g(t) + M_{gT}w_g\left(t - \frac{l}{V}\right) \quad (42)$$

Esprimendo i contributi della raffica relativi a forze e momenti come:

$$\begin{aligned} Z_{gW} &= -\frac{1}{2}\rho V S_W a_W & Z_{gT} &= -\frac{1}{2}\rho V S_T a_T (1 - \kappa_\epsilon) \\ M_{gW} &= \frac{1}{2}\rho V S_W a_W l_W & M_{gT} &= -\frac{1}{2}\rho V S_T a_T l_T (1 - \kappa_\epsilon) \end{aligned} \quad (43)$$

e le derivate relative agli effetti sui gradi di libertà del velivolo come:

$$\begin{aligned} Z_z &= -\frac{1}{2}\rho V [S_W a_W + S_T a_T (1 - \kappa_\epsilon)] & M_z &= \frac{1}{2}\rho V [S_W a_W l_W - S_T a_T (1 - \kappa_\epsilon) l_T] \\ Z_q &= -\frac{1}{2}\rho V S_T a_T l_T & M_q &= -\frac{1}{2}\rho V S_T a_T l_T^2 \\ Z_\theta &= -\frac{1}{2}\rho V^2 [S_W a_W + S_T a_T (1 - \kappa_\epsilon)] & M_\theta &= \frac{1}{2}\rho V^2 [S_W a_W l_W - S_T a_T (1 - \kappa_\epsilon) l_T] \end{aligned} \quad (44)$$

3.3 Modello di velivolo flessibile

Finora, è stato introdotto solo il caso del velivolo rigido, ma la deformazione flessibile di un velivolo comporta un contributo alle risposte non trascurabili, specialmente se ogni contenuto di frequenza in funzione del tempo coincide con uno o più frequenze naturali del velivolo.

Ipotizziamo che sia la fusoliera che l'ala siano flessibili. L'affidabilità dei casi considerati in questo documento risultano abbastanza paragonabili a modelli più realistici, tranne che per il contributo dovuto alla presenza di un angolo freccia.

Per permettere il controllo e la modifica sia delle forme di modo che delle frequenze naturali, garantendo così un approccio analitico, si suppone di definire arbitrariamente il tipo di modo richiesto per ottenere parametri del modo di forma e massa modale, vincolando il modo flessibile ortogonalmente al corpo rigido e ai modi di beccheggio. Il metodo scelto per adempiere a questo obiettivo consiste nell'utilizzo delle equazioni di Lagrange, ovvero equazioni differenziali scritte in termini di quantità energetiche e di lavoro virtuale rispetto ai gradi di libertà o "coordinate generalizzate" prese come riferimento.

Le equazioni di Lagrange possono essere espresse, per un sistema di n gradi di libertà, come:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_j} + \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{x}_j} + \frac{\partial U}{\partial x_j} = \frac{\partial(\delta W)}{\partial(\delta x_j)} = Q_j \quad (45)$$

in cui i vari simboli presenti nell'equazione indicano rispettivamente:

- $T = \frac{1}{2}m_j\dot{x}_j^2$, l'energia cinetica del sistema;
- $U = \frac{1}{2}k_jx_j^2$, l'energia potenziale del sistema;
- $\Gamma = \frac{1}{2}c_j\dot{q}_j^2$, l'energia dissipativa del sistema;
- \dot{x}_j la derivata temporale corrispondente alla variabile j -esima;
- Q_j la forza generalizzata non conservativa relativa alla variabile j -esima;

L'energia cinetica del sistema è data dalla somma dell'energia cinetica per ogni componente del sistema stesso. Nel caso in questione, l'equazione si esprime come:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{z}_c^2 + \frac{1}{2}I_Y\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_e\dot{q}_e^2 \quad (46)$$

dove m esprime la massa dell'intero sistema, I_Y il momento d'inerzia del velivolo rispetto all'asse normale al piano di simmetria del velivolo, m_e indica la massa modale che determineremo nel sotto-paragrafo 3.3.9.

In modo analogo, l'energia potenziale, dovuta al solo contributo flessibile del sistema, è espressa dall'equazione:

$$U = \frac{1}{2}k_e\dot{q}_e^2 \quad (47)$$

dove la rigidità modale è espressa come $k_e = \omega_e^2 m_e$.

Infine, l'energia dissipativa del sistema è data da:

$$\Gamma = \frac{1}{2}c_e\dot{q}_e^2 \quad (48)$$

in cui il fattore di smorzamento viscoso è esprimibile come $c_e = 2\zeta\omega_e m_e$.

Si sottolinea come solo il modo flessibile comporta effetti di rigidità e smorzamento strutturale.

Per completare l'equazione di Lagrange è necessario determinare il contributo delle forze generalizzate Q_j . Ciò è possibile considerando il principio del lavoro virtuale δW come somma della j -esima forza moltiplicata rispetto ad una variabile incrementale δx_j .

$$Q_j = \frac{\delta W}{\delta x_j} \quad (49)$$

3.3.1 Termini di lavoro incrementali

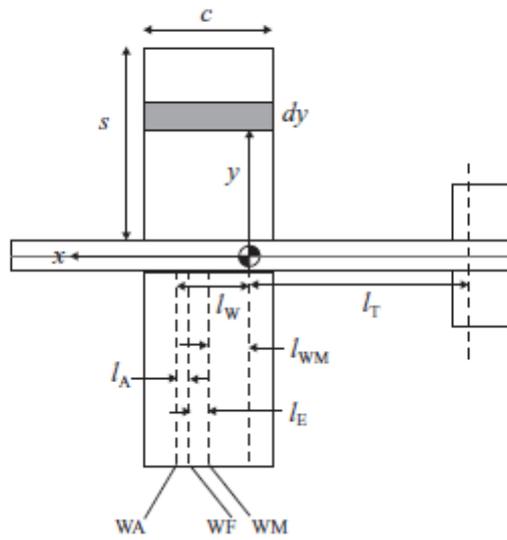


Figura 21: Posizione degli assi lungo l'ala.

Gli spostamenti incrementali rispetto all'ala sono richiesti in modo da determinare il lavoro incrementale fatto e, successivamente, le forze generalizzate. Questi spostamenti richiedono la determinazione della posizione degli assi dell'ala rispetto al centro di massa, mostrati in Fig. 21.

L'asse flessionale dell'ala (WF), intorno ad un terzo della corda, è assunto posto ad una distanza l_E davanti all'asse di massa (WM) così da avere un accoppiamento flessione/torsione. L'asse del fuoco aerodinamico dell'ala (WA), ad un quarto della corda, è ad una distanza l_W avanti al centro di massa e a distanza l_A dell'asse flessionale. La relazione finale tra le dimensioni della corda è dunque: $l_W = l_A + l_E + l_{WM}$.

Gli spostamenti incrementali necessari a questo studio sono relativi all'asse centrale dell'ala e al piano di coda e sono indicate come:

$$\begin{aligned} \delta z_{WA}(y) &= \delta z_C - l_W \delta \theta + (\kappa_e(y) - l_A \gamma_e(y)) \delta q_e \\ \delta z_T(y) &= \delta z_C + l_T \delta \theta + \kappa_{eT} \delta q_e \end{aligned} \quad (50)$$

Per cui i lavori incrementali ottenuti dalle portanze alari e di coda sono rispettivamente:

$$\delta W_W = -2 \frac{1}{2} \rho V^2 c a_W \int_{y=0}^s \left[\frac{w_g(t) + \dot{z}_C - l_W \dot{\theta}}{V} + \theta + \gamma_e(y) q_e \right] [\delta z_C - l_W \delta \theta + (\kappa_e - l_A \gamma_e(y)) \delta q_e] dy \quad (51)$$

$$\delta W_T = -L_T \delta z_T = -\frac{1}{2} \rho V^2 S_T a_T \left[\frac{w_g \left(t - \frac{l}{V} \right) + \dot{z}_C + l_T \dot{\theta}}{V} + \theta + \gamma_{eT} q_e \right] (\delta z_C + l_T \delta \theta + \kappa_{eT} \delta q_e) \quad (52)$$

Le derivate aerodinamiche sono dunque ottenibili impiegando i differenziali di questi termini di lavoro incrementali nelle equazioni di Lagrange.

3.3.2 Derivate aerodinamiche

Per evitare di appesantire eccessivamente il testo, si riporta un esempio di come ottenere un contributo alle forze generalizzate presente nelle equazioni di Lagrange. In questo caso, le derivate parziali del lavoro su ala e piano di coda rispetto alla traslazione del baricentro:

$$\frac{\partial(\delta W_W)}{\partial(\delta z_C)} = -2 \int_{y=0}^s \frac{1}{2} \rho V^2 c_{aW} \left[\frac{w_g(t) + \dot{z}_C - l_W \dot{\theta}}{V} + \theta \right] dy = Z_{zW} \dot{z}_C + Z_{qW} \dot{\theta} + Z_{eW} \dot{q}_e \quad (53)$$

$$\frac{\partial(\delta W_T)}{\partial(\delta z_C)} = -\frac{1}{2} \rho V^2 S_T a_T \left[\frac{w_g \left(t - \frac{l}{V} \right) + \dot{z}_C + l_T \dot{\theta}}{V} + \theta + \gamma_{eT} q_e \right] = Z_{zT} \dot{z}_C + Z_{qT} \dot{\theta} + Z_{eT} \dot{q}_e \quad (54)$$

3.3.3 Descrizione delle forme di modo flessibile

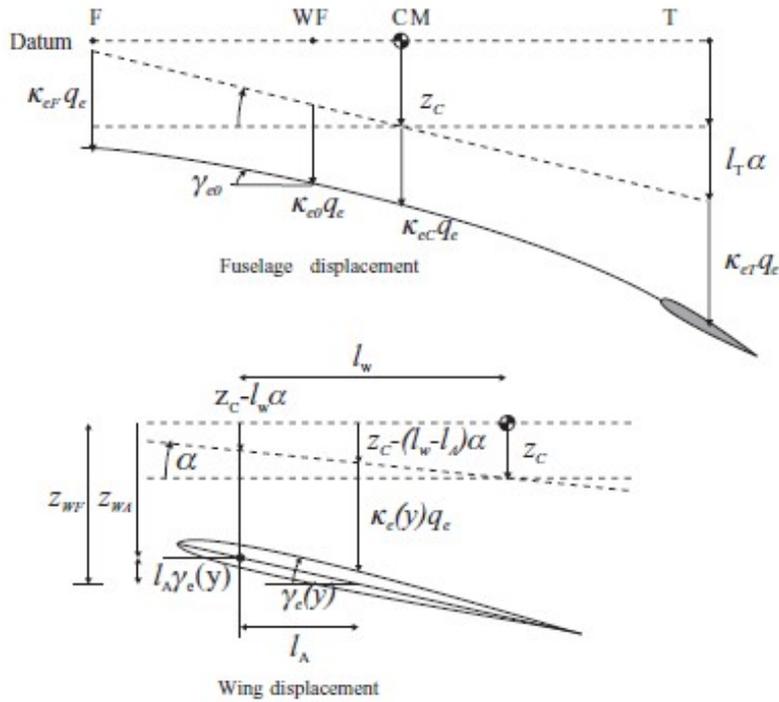


Figura 22: Modo flessibile per un velivolo free-free simmetrico.

Il velivolo comprende una forma di modo flessibile free-free (o elastica) analoga a quella mostrata in Fig. 22. Essa è creata in modo tale per cui l'ala si deformi in flessione e torsione e la fusoliera solo in flessione. Il modo flessibile sarà definito da una coordinata modale q_e . Le deformazioni di flessione e torsione dell'ala sono correlate all'asse flessionale

dell'ala dalle funzioni $\kappa_e(y)$ e $\gamma_e(y)$ (positivo in senso orario rispetto asse y), dove i valori alla radice dell'ala sono espressi come: $\kappa_{e0} = \kappa_e(0)$ e $\gamma_{e0} = \gamma_e(0)$. La deformazione modale di fusoliera, supposta positiva verso il basso, è definita dai valori di spostamento $\kappa_{eF}, \kappa_{e0}, \kappa_{eW}, \kappa_{eC}, \kappa_{eT}$. Essi corrispondono rispettivamente alla deformazione della parte anteriore della fusoliera, dell'asse flessionale dell'ala, dell'asse di massa dell'ala, del centro di massa del velivolo (coincidente con la parte centrale della fusoliera) e delle posizioni di coda. Si assume che la sezione di fusoliera che include la cross-section dell'ala e il centro di massa del velivolo si comporti rigidamente, dunque si alzerà di κ_{e0} e ruoterà con il naso verso l'alto con angolo γ_{e0} , relativo alla posizione dell'asse flessionale dell'ala. Così gli spostamenti d'ala e dei centri di massa del velivolo sono dati da:

$$\kappa_{eW} = \kappa_{e0} + l_E \gamma_{e0} \quad \kappa_{eC} = \kappa_{e0} + (l_{WM} + l_E) \gamma_{e0} \quad (55)$$

Il beccheggio positivo γ_{eT} può esser stimato assumendo che le deformazioni di fusoliera fronte e retro nella forma modale variano in maniera quadratica; basandosi su questa assunzione e conoscendo lo spostamento e la pendenza della sezione centrale, si mostra che il beccheggio del piano di coda è esprimibile come:

$$\gamma_{eT} = 2 \left\{ \frac{\kappa_{eT} - \kappa_{eC}}{l_T} \right\} - \gamma_{e0} \quad (56)$$

3.3.4 Condizioni per ortogonalità con modi di corpo rigido

Un modo simmetrico free-free è, per definizione, ortogonale ai modi di beccheggio e elevazione del corpo rigido. Un metodo per imporre questa condizione di ortogonalità è assicurare che non vi sia una forza d'inerzia verticale o momento di beccheggio nella deformazione del modo flessibile. Ad esempio, la forza d'inerzia fisica associata con l'accelerazione della massa modale di coda è una forza diretta verso l'alto pari a $m_T(\kappa_{eT}\ddot{q}_e)$. Quando le condizioni di ortogonalità sono imposte e i termini di accelerazione generalizzata comuni \ddot{q}_e sono cancellate, allora si può assumere che la condizione per una forza di inerzia nulla è:

$$m_F \kappa_{eF} + 2 \int_0^s \mu_W [\kappa_E(y) + l_E \gamma_E(y)] dy + m_C \kappa_{eC} + m_T \kappa_{eT} = 0 \quad (57)$$

dove il secondo termine esprime un integrale del contributo di flessione dell'ala per striscia dy . Si noti che il moto dell'asse di massa del velivolo sia una funzione di torsione e flessione. La condizione per un momento di inerzia nullo rispetto al centro di massa (positivo in picchiata) è:

$$-m_F \kappa_{eF} l_F - 2l_{WM} \int_0^s \mu_W [\kappa_E(y) + l_W \gamma_E(y)] dy + 2 \int_0^s \chi_W \gamma_E(y) dy + m_T \kappa_{eT} l_T = 0 \quad (58)$$

dove il terzo termine indica un contributo di torsione pari all'integrale del contributo per unità di apertura alare. L'angolo di beccheggio del piano di coda non appare in questa equazione per via dell'esclusione di qualunque momento di inerzia per la coda. Queste espressioni permettono ai parametri modali free-free di essere determinati per diversi tipi di modo flessibile.

3.3.5 Forme di deformazione dell'ala

Al fine di applicare le espressioni di ortogonalità sopra citate, devono essere definite le forme flessionali e torsionali rispetto all'asse flessionale dell'ala. Per fare ciò, si utilizza un approccio di tipo Rayleigh-Ritz [17, 21]. Tale metodo consiste nella approssimazione di un sistema tramite uno o più forme di deformazione. E' importante che ogni forma soddisfi le condizioni al contorno geometriche e di carico del sistema. Queste forme possono essere di tipo polinomiale, iperbolico e trigonometrico.

Nel caso specifico, la deformazione a flessione dell'ala si esprime attraverso una funzione polinomiale quadratica:

$$\kappa_e(y) = \kappa_{e0} \left[1 + A \left(\frac{y}{s} \right)^2 \right] \quad (59)$$

dove A è un' incognita costante che definisce l'entità della flessione e la posizione lungo l'apertura alare di ogni linea nodale che percorre, appunto, l'ala. Analogamente, la deformazione a torsione dell'ala potrebbe essere utilizzata dopo per normalizzare le forme modali ed è data da:

$$\gamma_e(y) = \gamma_{e0} \left[1 + B \left(\frac{y}{s} \right) \right] \quad (60)$$

dove B è un'altra incognita costante che definisce l'entità della torsione all'estremità rispetto alla radice. Lo spostamento del bordo di fuga alla sezione più estrema dell'ala viene utilizzato nel caso specifico per normalizzare le forme modali ed è definito da:

$$\kappa_{Ti_{pTE}} = \kappa_{e0}(1 + A) + \gamma_{e0}(1 + B)l_{TE} \quad (61)$$

dove $l_{TE} = \frac{3}{4}c - l_A$ indica la distanza dall'asse flessionale al bordo di fuga dell'ala.

Quando queste funzioni polinomiali sono sostituite nelle Eqs. 57 e 58, assumendo che il velivolo si deformi sia lungo l'ala che la fusoliera, allora il risultato è:

$$\begin{aligned} m_F \kappa_{eF} + m_W \left(1 + \frac{A}{3} \right) \kappa_{e0} + m_W l_E \left(1 + \frac{B}{2} \right) \gamma_{e0} + m_C \kappa_{eC} + m_T \kappa_{eT} &= 0 \\ -m_F l_F \kappa_{eF} l_F - m_W l_{WM} \left(1 + \frac{A}{3} \right) \kappa_{e0} + (I_W - m_W l_E l_{WM}) \left(1 + \frac{B}{2} \right) \gamma_{e0} + m_T \kappa_{eT} l_T &= 0 \end{aligned} \quad (62)$$

Per poter soddisfare queste equazioni, devono essere determinate diverse incognite e ciò non sembra essere possibile. Tuttavia, supponendo dei casi speciali, la scelta dei parametri risulta fattibile. I tre casi in considerazione sono la flessione di fusoliera, la flessione dell'ala e la torsione dell'ala, ciascuna componente dominante nella forma modale, esaminate separatamente.

3.3.6 Modo con flessione di fusoliera dominante

Supponendo il caso di un'ala completamente rigida, i valori dei parametri sono A=B=0, ma la fusoliera risulta flessibile. Poiché il modo non richiede beccheggio di ala, si assume che $\gamma_{e0} = 0$ e dunque, dalle Eq. 55, $\kappa_{eC} = \kappa_{e0}$. e la sezione centrale rigida salirà di κ_{e0} .

Quando questi valori sono sostituiti nelle Eqs. 62, allora si ottiene:

$$\begin{aligned} m_F \kappa_{eF} + m_T \kappa_{eT} &= -(m_W + m_C) \kappa_{e0} \\ -m_F l_F \kappa_{eF} + m_T l_T \kappa_{eT} &= m_W l_{WM} \kappa_{e0} \end{aligned} \quad (63)$$

Risolvere queste equazioni porta a degli spostamenti modali del piano di coda e fronte fusoliera κ_{eF} , κ_{eT} , entrambi espressi in termini di κ_{e0} . Il beccheggio del piano di coda è

determinato usando l'Eq. 56. La forma modale può essere definita usando una normalizzazione dove, per esempio, κ_{e0} o lo spostamento del bordo di fuga all'estremità κ_{TipTE} sono pari a 1.

3.3.7 Modo con flessione dell'ala dominante

Si consideri ora il caso della flessione d'ala dominante, per il quale l'ala è rigida in torsione e $B=0$. La fusoliera è rigida, ma permette beccheggio tramite γ_{e0} attorno l'asse flessionale dell'ala, soddisfacendo in questo modo il vincolo di ortogonalità; tuttavia, poiché la fusoliera è rigida, il beccheggio del piano di coda γ_{eT} è pari a γ_{e0} e gli spostamenti modali della parte frontale, fusoliera e coda devono essere in funzione della elevazione e beccheggio del centro di fusoliera, dunque:

$$\begin{aligned}\kappa_{eF} &= \kappa_{e0} - (l_F - l_{WM} - l_E) \gamma_{e0} \\ \kappa_{eC} &= \kappa_{e0} + (l_{WM} + l_E) \gamma_{e0} \\ \kappa_{eT} &= \kappa_{e0} + (l_T + l_{WM} + l_E) \gamma_{e0}\end{aligned}\tag{64}$$

Se questi termini sono sostituiti nelle equazioni di ortogonalità, il risultato potrebbe semplificarsi in:

$$\begin{aligned}\left(m + m_W \frac{A}{3}\right) \kappa_{e0} + m (l_E + l_{WM}) \gamma_{e0} &= 0 \\ - \left(m_W \frac{A}{3}\right) l_{WM} \kappa_{e0} + I_y \gamma_{e0} &= 0\end{aligned}\tag{65}$$

dove le espressioni precedenti includono il momento inerziale e il momento di massa. Entrambe le Eq. 65 esprimono il rapporto tra γ_{e0} e κ_{e0} come una funzione di A . Comparando queste equazioni, si evince come A risulta essere pari a:

$$\frac{m_W}{m} \left[1 + \frac{l_{WM}(l_E + l_{WM})}{l_y^2} \right] A = -3\tag{66}$$

con $I_y = ml_y^2$ e l_y indica il raggio di beccheggio rispetto al baricentro. Il rapporto γ_{e0}/κ_{e0} potrebbe essere determinato dal valore di A . Valori della forma modale per le posizioni del fronte, centro e retro fusoliera possono essere determinati in funzione di κ_{e0} sostituendo questo rapporto nelle Eq. 64. La forma modale è dunque definita come prima, basata sulla normalizzazione dove, per esempio, κ_{e0} o lo spostamento dell'ala κ_{tipTE} sono espressi in unità.

3.3.8 Modo con torsione dell'ala dominante

Il caso in cui l'ala è flessibile in torsione ma l'ala è rigida, ne deriva un valore di $A=0$. Inoltre, sebbene la fusoliera sia supposta rigida a flessione, si assume che sia ancora capace di spostarsi verticalmente e ruotare in beccheggio. Dunque, il beccheggio del piano di coda γ_{eT} è pari a γ_{e0} anche in questo caso, ottenendo la seguente equazione:

$$\begin{aligned}\kappa_{e0} + \left(l_E + l_{WM} + \frac{m_W}{m} \frac{B}{2} l_E \right) \gamma_{e0} &= 0 \\ \left(I_Y + I_{WW} \frac{B}{2} \right) \gamma_{e0} &= 0\end{aligned}\tag{67}$$

dove $I_{WW} = I_W - m_W l_E l_{WM}$. Poiché il beccheggio di fusoliera γ_{e0} non è nullo, allora si pone $B = -2 \frac{I_Y}{I_{WW}}$ e così il rapporto $\frac{\gamma_{e0}}{\kappa_{e0}}$ può essere determinato. Valori di forma modale per le posizioni di fronte/centro/retro fusoliera sono determinabili in termini di κ_{e0} sostituendo questo rapporto nelle Eq. 67 e la forma di modo normalizzato.

3.3.9 Termini di valore di massa modale per il velivolo flessibile

La massa modale m_e per l'intero modo flessibile del velivolo potrebbe essere definita scrivendo l'energia cinetica associata e il moto delle masse fisiche nella deformazione del modo flessibile e eguagliando il tutto al valore espresso in termini di massa modale. Il termine di energia cinetica generale include espressioni integrali per la flessione e la torsione dell'ala, così come termini energetici per la massa discreta, ottenendo:

$$T = \frac{1}{2} m_e \dot{q}_e^2 = \frac{1}{2} m_F (\kappa_{eF} \dot{q}_e)^2 + 2 \frac{1}{2} \int_0^s \mu_W \{ [\kappa_e(y) + l_E \gamma_e(y)] \dot{q}_e \}^2 dy + 2 \frac{1}{2} \int_0^s \chi_W [\gamma_e(y) \dot{q}_e]^2 dy + \frac{1}{2} m_C [\kappa_{eC} \dot{q}_e]^2 dy + \frac{1}{2} m_T [\kappa_{eT} \dot{q}_e]^2 \quad (68)$$

Una volta calcolate le integrazioni ed eliminando il fattore comune $\frac{1}{2} \dot{q}_e^2$, una espressione generale per la massa modale potrebbe essere:

$$m_e = m_F \kappa_{eF}^2 + m_W \left(1 + \frac{2A}{3} + \frac{A^2}{5} \right) \kappa_{e0}^2 + (I_W + m_W l_E^2) \left(1 + B + \frac{B^2}{3} \right) \gamma_{e0}^2 + 2 m_W l_E \left[1 + \frac{A}{3} + \frac{B}{2} + \frac{AB}{4} \right] \kappa_{e0} \gamma_{e0} + m_C \kappa_{eC}^2 + m_T \kappa_{eT}^2 \quad (69)$$

La massa modale potrebbe essere stimata per la forma modale richiesta, tenendo in considerazione che il valore numerico è unico, ma dipende dalla normalizzazione della forma modale. Considerando i dati di un velivolo di prova presenti nell'appendice B e supponendo lo spostamento normalizzato del bordo di fuga dell'estremità alare come unitaria, si ottiene un esempio delle deformazioni normalizzate del modello riportate nell'appendice A:

3.4 Equazioni del velivolo flessibile

Combinando tutte le equazioni presenti nel Sez. 3.3, si ottengono le equazioni complete in funzione delle coordinate Lagrangiane:

$$\begin{aligned} m \ddot{z}_C &= Z_z \dot{z}_C + Z_q \dot{\theta} + Z_e \dot{q}_e + Z_\theta \theta + Z_e q_e + Z_{gW} w_g(t) + Z_{gT} w_g \left(t - \frac{l}{V} \right) \\ I_Y \ddot{\theta} &= M_z \dot{z}_C + M_q \dot{\theta} + M_e \dot{q}_e + M_\theta \theta + M_e q_e + M_{gW} w_g(t) + M_{gT} w_g \left(t - \frac{l}{V} \right) \\ m_e \ddot{q}_e + c_e \dot{q}_e + k_e q_e &= Q_z \dot{z}_C + Q_q \dot{\theta} + Q_e \dot{q}_e + Q_e q_e + Q_{gW} w_g(t) + Q_{gT} w_g \left(t - \frac{l}{V} \right) \end{aligned} \quad (70)$$

Per dovere di compattezza, le equazioni del moto per questo caso di raffica possono essere scritte in forma matriciale. A differenza del caso di velivolo rigido, i termini di modo flessibile comportano l'aggiunta di una riga ed una colonna in ciascuna matrice, ottenendo

il seguente sistema:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cc|c} m & 0 & 0 \\ 0 & I_Y & 0 \\ 0 & 0 & m_e \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \ddot{z}_C \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{q}_e \end{Bmatrix} + \left\{ \left[\begin{array}{cc|c} -Z_{\dot{z}} & -Z_{\dot{q}} & -Z_{\dot{e}} \\ -M_{\dot{z}} & -M_{\dot{q}} & -M_{\dot{e}} \\ -Q_{\dot{z}} & -Q_{\dot{q}} & c_e - Q_{\dot{e}} \end{array} \right] \right\} \begin{Bmatrix} \dot{z}_C \\ \dot{\theta} \\ \dot{q}_e \end{Bmatrix} + \\ & + \left\{ \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -Z_{\theta} & -Z_e \\ 0 & -M_{\theta} & -M_e \\ 0 & -Q_{\theta} & k_e - Q_e \end{array} \right] \right\} \begin{Bmatrix} z_C \\ \theta \\ q_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Z_{gW} \\ M_{gW} \\ Q_{gW} \end{Bmatrix} w_g(t) + \begin{Bmatrix} Z_{gT} \\ M_{gT} \\ Q_{gT} \end{Bmatrix} w_g \left[t - \frac{l}{V} \right] \quad (71) \end{aligned}$$

i cui termini aggiuntivi sono:

$$\begin{aligned} Z_{\dot{e}} &= -\frac{1}{2}\rho V S_T a_T \kappa_{eT} & M_{\dot{e}} &= -\frac{1}{2}\rho V S_T a_T l_T \kappa_{eT} \\ Q_{\dot{e}} &= -\frac{1}{2}\rho V S_T a_T \kappa_{eT}^2 & Z_e &= \frac{1}{2}\rho V^2 [-S_W a_W J_1 - S_T a_T \gamma_{eT}] \\ M_e &= \frac{1}{2}\rho V^2 [S_W a_W l_W J_1 - S_T a_T l_T \gamma_{eT}] & Q_e &= \frac{1}{2} [-S_W a_W J_3 - S_T a_T \gamma_{eT} \kappa_{eT}] \\ Q_{gW} &= -\frac{1}{2}\rho V S_W a_W J_2 & Q_{gT} &= -\frac{1}{2}\rho V S_T a_T \kappa_{eT} (1 - \kappa_e) \end{aligned} \quad (72)$$

Scrivendo in una forma matriciale compatta, il sistema diventa:

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = f_{gW}w_g(t) + f_{gT}w_g\left(t - \frac{l}{V}\right) \quad (73)$$

dove i simboli indicano rispettivamente:

- M: la matrice di massa che raccoglie tutti i termini che moltiplicano la derivata seconda delle variabili di deformazione;
- C: matrice di smorzamento che comprende tutti i termini moltiplicativi delle variabili in derivata prima;
- K: matrice di rigidità
- q: vettore delle variabili rispetto alle coordinate generalizzate;
- f_{gW} e f_{gT} : vettori che includono tutti i contributi aerodinamici dovuti all'incontro tra corpo e raffica.

3.5 Integrali 'J'

Nelle espressioni per le derivate aerodinamiche (Eq. 72), sono presenti tre integrali comprendenti le forme di flessione e torsione dell'ala. Questi integrali necessitano di essere valutati in quantità modali sostituite quando si calcolano le derivate aerodinamiche del velivolo flessibile. Usando le forme assunte dalle Eq. 59 e 60 espresse nella sezione, allora:

$$J_1 = \frac{1}{s} \int_{y=0}^s \gamma_e dy = \gamma_{e0} \left(1 + \frac{B}{2}\right) \quad (74)$$

$$J_2 = \frac{1}{s} \int_{y=0}^s (\kappa_e - l_A \gamma_e) dy = \left(1 + \frac{A}{3}\right) \kappa_{e0} - l_A \left(1 + \frac{B}{2}\right) \gamma_{e0} \quad (75)$$

$$J_3 = \frac{1}{s} \int_{y=0}^s (\kappa_e - l_A \gamma_e) \gamma_e dy = \left(1 + \frac{A}{3} + \frac{B}{2} + \frac{AB}{4}\right) \kappa_{e0} \gamma_{e0} - l_A \left(1 + B + \frac{B^2}{3}\right) \gamma_{e0}^2 \quad (76)$$

3.6 Modifiche al modello in presenza di motori sull'ala

Nel caso si volesse considerare la presenza di un motore o altro elemento situato sul ventre dell'ala, i coefficienti precedenti subiranno dei cambiamenti. Per ovviare alla loro presenza, si suppone di modellare tale elemento come una massa concentrata posta ad una distanza longitudinale x_M dall'asse elastico (positivo verso il piano di coda) e y_M dall'asse simmetrico [22]. I metodi per determinare i valori dei parametri (κ_{eF} , κ_{eC} , κ_{eT} , κ_{e0} , γ_{e0} , AeB) non variano. Tuttavia le condizioni di ortogonalità di traslazione e di momento devono essere modificati, ottenendo le seguenti equazioni:

$$m_F \kappa_{eF} + m_W \left(1 + \frac{A}{3}\right) \kappa_{e0} + m_W l_E \left(1 + \frac{B}{2}\right) \gamma_{e0} + m_C \kappa_{eC} + m_T \kappa_{eT} + \\ + m_M \kappa_{e0} \left(1 + A \left(\frac{y_M}{s}\right)^2\right) - m_M x_M \gamma_{e0} \left(1 + B \frac{y_M}{s}\right) = 0 \quad (77)$$

$$-m_F \kappa_{eF} l_F - m_W \left(1 + \frac{A}{3}\right) \kappa_{e0} l_{WM} + (I_W - m_W l_E l_{WM}) \left(1 + \frac{B}{2}\right) \gamma_{e0} + m_T \kappa_{eT} l_T + \\ + m_M \kappa_{e0} \left(1 + A \left(\frac{y_M}{s}\right)^2\right) (x_M + l_E + l_{WM}) - m_M x_M \gamma_{e0} \left(1 + B \frac{y_M}{s}\right) (x_M + l_E + l_{WM}) = 0 \quad (78)$$

Allo stesso tempo, l'equazione della massa modale dev'essere modificata in modo da comprendere il contributo dell'elemento come:

$$m_e = m_F \kappa_{eF}^2 + m_W \left(1 + 2\frac{A}{3} + \frac{A^2}{5}\right) \kappa_{e0}^2 + (I_W + m_W l_E^2) \left(1 + B + \frac{B^2}{3}\right) \gamma_{e0}^2 + \\ + 2m_W l_E \left(1 + \frac{A}{3} + \frac{B}{2} + \frac{AB}{4}\right) \kappa_{e0} \gamma_{e0} + m_C \kappa_{eC}^2 + m_T \kappa_{eT}^2 + \\ + m_M \left[\kappa_{e0} \left(1 + A \left(\frac{y_M}{s}\right)^2\right) - x_M \gamma_{e0} \left(1 + B \left(\frac{y_M}{s}\right)\right) \right]^2 \quad (79)$$

Queste modifiche saranno utili nella Sez. 6, dove quasi tutti i velivoli presi in considerazione presenteranno degli elementi integrati all'ala.

4 Tipi di risposte del velivolo e definizione dei carichi dell'ala

La determinazione della risposta all'azione della raffica sul velivolo non è univoca in entrambi i casi. Nel caso temporale, essa si basa sulla determinazione del vettore delle coordinate in accelerazione, per poi ottenere il vettore base tramite una doppia integrazione. Nel caso delle frequenze, la determinazione della risposta passa per la creazione di una matrice di risposta in frequenza (FRF) che colleghi raffica e risposta. La spiegazione in dettaglio è fornita all'interno del capitolo. Un altro obiettivo del capitolo è mostrare come i carichi interni si articolano all'interno del corpo portante principale del velivolo, ovvero l'ala. La superficie alare sarà considerata come continua, al fine di mostrare l'influenza della risposta cinematica sui carichi aggiuntivi provocati dalla raffica. Per avere una visione più chiara del fenomeno, si è optato per una rappresentazione esclusivamente temporale dei carichi. I codici MATLAB, le equazioni per l'analisi della risposta del velivolo alle raffiche e le forze che ne derivano sono presenti nel testo [19].

4.1 Risposta del velivolo in funzione del tempo

Una volta definiti i dati iniziali relativi alla dimensione del velivolo (altezza di volo, dimensioni, massa e velocità TAS) e della raffica (velocità massima del disturbo), il codice procede alla risoluzione del sistema (Eq.73). Il risultato di questi calcoli porta alla accelerazione del velivolo in termini di coordinate generalizzate:

$$\ddot{q} = [M]^{-1} \left[f_{gW} w_g(t) + f_{gT} w_g(t - \frac{l}{V}) - [C] \dot{q} - [K] q \right] \quad (80)$$

Dove M,C,K sono rispettivamente la matrice di massa, smorzamento e rigidità; $q = (z_C, \theta, q_e)$ è il vettore dei gradi di libertà del sistema; f_{gW} e f_{gT} indicano le forze agenti sulle superfici di ala e piano di coda. Il vettore viene dunque integrato progressivamente così da ottenere i valori finali delle coordinate generalizzate nei tre stadi del moto. Il tutto viene portato a termine da un apposito ambiente SIMULINK [23]. Una volta determinato il vettore, le risposte delle varie componenti del velivolo si ottengono come combinazione lineare di queste coordinate. In seguito sono brevemente elencate alcune delle suddette combinazioni.

4.1.1 Espressioni per lo spostamento e angoli sul velivolo

Le espressioni per la variazione di flessioni e torsioni lungo l'ala (e rotazione al piano di coda) possono essere scritte come combinazione di moti di corpo rigido e del modo flessibile. I moti di corpo rigido sono definiti da uno spostamento (verso il basso) z_C al centro di massa e l'angolo θ , mentre il modo flessibile è definito dalle coordinate generalizzate q_e . Gli spostamenti sulla fusoliera frontale (pedice F), e piano di coda (T), sono ad esempio:

$$\begin{aligned} z_F &= z_C - l_F \theta + \kappa_{eF} q_e \\ z_T &= z_C + l_T \theta + \kappa_{eT} q_e \end{aligned} \quad (81)$$

dove gli spostamenti sono una somma degli effetti di beccheggio, elevazione e modo flessibile. Lungo l'asse dei centri aerodinamici dell'ala (WA), l'asse flessionale e l'asse del bordo di fuga (TE), le variazioni di spostamento sono:

$$\begin{aligned} z_{WA}(y) &= z_C - l_W \theta + [\kappa_e(y) - l_A \gamma_e(y)] q_e \\ z_{WF}(y) &= z_C - (l_W - l_A) \theta + \kappa_e(y) q_e \\ z_{TE}(y) &= z_C - l_W \theta + [\kappa_{tipTE} + l_E \gamma_e(y)] q_e \end{aligned} \quad (82)$$

4.2 Risposta del velivolo in funzione della frequenza

Questo tipo di analisi comporta la necessità di rendere lineare qualsiasi non-linearità presente nel modello del velivolo. Un modo per ovviare a questo inconveniente consiste nel generare un segnale casuale nel tempo e poi calcolare direttamente la risposta nello stesso dominio; Tuttavia questo stratagemma non è contemplato all'interno di questo testo, in quanto ogni termine del sistema di equazioni risulta lineare. Prima di procedere, è necessario descrivere brevemente la turbolenza armonica.

4.2.1 Definizione di una turbolenza armonica

L'analisi PSD effettuata in seguito utilizza una serie di raffiche di tipo armonico il cui valore di frequenza varia in maniera discreta. Supponendo che una singola raffica armonica

presenti una ampiezza di w_{g0} e lunghezza d'onda λ_g , definita dalla seguente espressione:

$$w_g(x_g) = w_{g0} \sin\left(\frac{2\pi x_g}{\lambda_g}\right) = w_{g0} \sin\left(\frac{2\pi V}{\lambda_g} t\right) = w_{g0} \sin(\omega t) = w_{g0} \exp i\omega t \quad (83)$$

in concordanza con l'ipotesi di moto rettilineo uniforme del velivolo. Allo scopo di introdurre il ritardo di penetrazione del piano di coda, la sua forma in algebra complessa dev'essere modificata in modo tale da includere tale ritardo. Per cui:

$$w_g\left(t - \frac{l}{V}\right) = w_{g0} \sin\left(\frac{2\pi V}{\lambda_g} \left(t - \frac{l}{V}\right)\right) = w_{g0} \exp\left(i\omega t - \frac{\omega l}{V}\right) \quad (84)$$

4.2.2 FRF per raffica armonica

La risposta in frequenza del sistema secondo PSD richiede, come descritto nel Capitolo 2, di una FRF (Funzione di Risposta in Frequenza) che colleghi la velocità di raffica e la risposta che ne consegue. Nel caso di velivolo in esame, è sufficiente sostituire le coordinate generalizzate in forma armonica:

$$z_C = \tilde{z}_C e^{i\omega t} \quad \theta = \tilde{\theta} e^{i\omega t} \quad q_e = \tilde{q}_e e^{i\omega t} \quad (85)$$

nel sistema (Eq. 71) per ottenere l'equazione che relaziona i gradi di libertà del sistema con la raffica:

$$\tilde{q} = \begin{Bmatrix} \tilde{z}_C \\ \tilde{\theta} \\ \tilde{q}_e \end{Bmatrix} = [-\omega^2[M] + i\omega[C] + [K]]^{-1} \times \left[f_{gW} + f_{gT} \exp \frac{\omega l}{V} \right] = \mathbf{H}_{qg} w_{g0} \quad (86)$$

con \mathbf{H}_{qg} che rappresenta la matrice di FRF tra le risposte generalizzate e la velocità di raffica. I termini delle matrici M,C,K descritte all'interno della Sez.4.1 non subiscono alcuna variazione. Analogamente al caso temporale (Eq. 82), la risposta fisica del velivolo si ottiene dalla moltiplicazione della matrice FRF per i parametri dimensionali opportuni. Ad esempio, si riporta di seguito l'accelerazione del piano di coda:

$$\tilde{z}_{TAcc} = -\omega^2 [1 \quad l_T \quad \kappa_{eT}] \mathbf{H}_{qg} w_{g0} = H_{TAccg} w_{g0} \quad (87)$$

Ogni funzione così conformata mostrerà un picco di risonanza alla frequenza naturale di modo flessibile così come un altro picco per il modo di corto periodo.

4.3 Carichi interni per un'ala

In questa sezione, si introduce l'argomento da un punto di vista generale, con un ala di velivolo che esperisce carichi verticali di taglio/torsione/flessione sotto l'azione d'inerzia e forze di portanza aerodinamica durante un incontro di raffica. Un approccio analogo sarebbe utilizzabile anche per il piano di coda e il timone.

Per un velivolo sottoposto a moto tridimensionale, il carico esterno è distribuito in modo tale che l'ala sia soggetta a momenti di flessione e sforzi di taglio lungo piani orizzontali e verticali, così come la torsione, che rappresenta la tendenza di un componente a torcersi. Si supponga di avere un tipico diagramma di corpo libero di una sezione d'ala come quello mostrato in Fig. 23. La flessione verticale e il taglio avvengono per via di uno sbilanciamento lungo l'ala tra le distribuzioni di portanza e inerzia lungo l'ala mentre

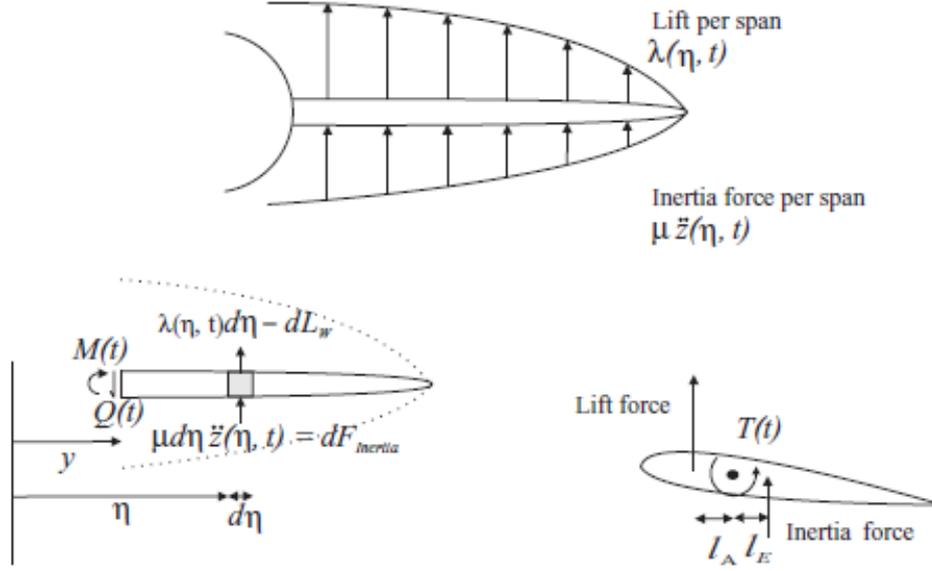


Figura 23: Carichi esterni ed interni all'interno di una sezione d'ala.

la flessione orizzontale e il taglio avvengono per via di uno sbilanciamento lungo l'ala tra la distribuzione delle forze di resistenza, delle forze d'inerzia e la spinta dei motori. La torsione, invece, si genera tramite un disequilibrio lungo la corda dell'ala dei contributi di portanza e distribuzione dell'inerzia, così come della resistenza e spinta. Si supponga che l'effetto dovuto al carrello sia trascurabile.

4.3.1 Espressioni dei carichi interni generali - ala continua

Si consideri un'ala come quella mostrata in Fig.24. Essa presenta una distribuzione di portanza e di forze d'inerzia per unità di apertura alare $\lambda_A(\eta, t)$ e $\lambda_I(\eta, t)$, con η che esprime la posizione lungo l'apertura alare. La forza d'inerzia agisce verso l'alto e l'accelerazione definisce la sua direzione positiva verso il basso, così come stabilito nei capitoli precedenti. La stessa figura mostra anche il diagramma di corpo libero per la sezione alare creata alla posizione y , con carichi interni introdotti per permettere l'equilibrio della sezione. In questo modo, l'analisi parte all'estremità e procede verso la radice in modo tale che le reazioni alla radice alare non siano richieste a priori.

Le seguenti equazioni esprimono la forza di taglio e il momento di flessione sopra l'intera sezione di taglio:

$$\begin{aligned}
 Q(y, t) &= \int_{\eta=y}^s [\lambda_A(\eta, t) + \lambda_I(\eta, t)] d\eta \\
 M(y, t) &= \int_{\eta=y}^s [\lambda_A(\eta, t) + \lambda_I(\eta, t)](\eta - y) d\eta \\
 T(y, t) &= \int_{\eta=y}^s [l_A \lambda_A(\eta, t) - l_E \lambda_I(\eta, t)] d\eta
 \end{aligned} \tag{88}$$

Le forze di taglio e il momento flettente potrebbero essere calcolate ad ogni posizione dell'apertura alare come funzione del tempo supponendo la distribuzione alare come funzione del moto dell'ala. La torsione alare necessita un approccio integrativo che tenga conto della differente posizione sulla corda della portanza e della forza d'inerzia.

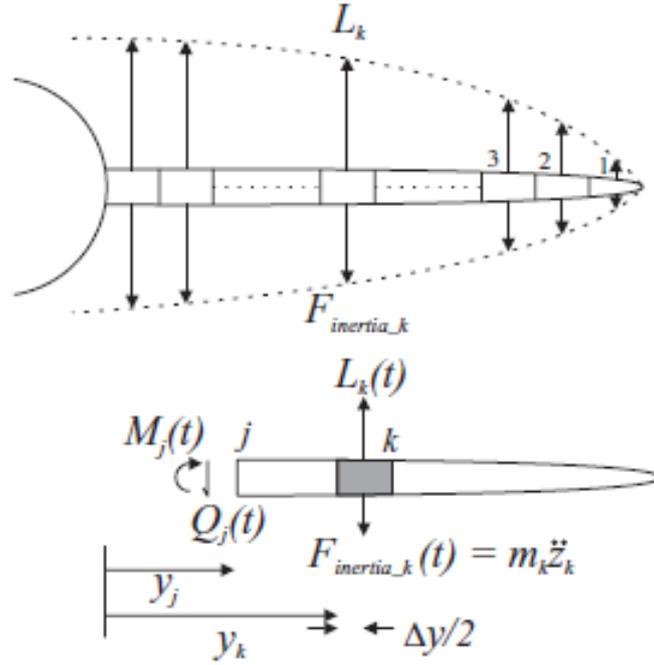


Figura 24: Carichi su un'ala continua.

4.4 Carichi interni dovuti all'incontro con una raffica/turbolenza

In questa sezione, le forze aerodinamiche per unità d'ampiezza alare saranno determinate per una raffica simmetrica e poi successivamente sostituite nell'espressione generale per i carichi interni nell'ala continua, mostrata nel paragrafo precedente.

4.4.1 Forze d'inerzia per unità di ampiezza alare

Per il caso di una raffica generale, l'accelerazione varierà lungo l'apertura alare e nel tempo; esso avrà sia componenti di modo flessibile che di corpo rigido. Così, la forza inerziale per apertura alare sarà data da:

$$\lambda_I(\eta, t) = \mu \ddot{z}_{WM}(\eta, t) \quad (89)$$

dove \ddot{z}_{WM} indica l'accelerazione verso il basso lungo l'asse di massa dell'ala per il punto lungo l'apertura alare preso in considerazione. Tale spostamento, dipendente da elevazione, beccheggio e modi flessibili, è pari a:

$$z_{WM}(y) = z_C - l_{WM}\theta + [\kappa_e(y) + l_E\gamma_e(y)] q_e \quad (90)$$

Per cui, l'equazione completa della forza d'inerzia per apertura alare è la seguente:

$$\lambda_I(\eta, t) = \mu \ddot{z}_{WM}(\eta, t) = \mu \left\{ \ddot{z}_C(t) - l_{WM}\ddot{\theta}(t) + [\kappa_e(\eta) + l_E\gamma_e(\eta)] \ddot{q}_e(t) \right\} \quad (91)$$

Il contributo inerziale ai carichi interni è dovuto dunque alle accelerazioni dei gradi di libertà presi in considerazione.

4.4.2 Portanza per unità d'ampiezza alare

Durante l'approccio con una raffica, la portanza dell'ala è in funzione dell'angolo di incidenza e della torsione dell'ala, elevazione e modo flessibile, oltre che delle velocità di beccheggio e di raffica. La portanza alare incrementale per unità d'apertura in una raffica è data da:

$$\lambda_A(\eta, t) = \frac{1}{2}\rho V c a_W \left\{ w_g + \dot{z}_C - l_W \dot{\theta} + [\kappa_e(\eta) - l_A \gamma_e(\eta) \dot{q}_e] \right\} + \frac{1}{2}\rho V^2 c a_W [\theta + \gamma_e(\eta) q_e] \quad (92)$$

in cui sono presenti i termini della raffica e delle coordinate generalizzate secondo gli stati del moto della posizione e della velocità.

4.5 Carichi interni in un incontro di raffica

Dopo aver determinato le forze aerodinamiche ed inerziali per apertura alare, espresse nelle Eq. 91 e 92, si effettua una sostituzione nell'Eq. 88 per determinare le forze di taglio e i momenti di flessione e torsione. Una volta scritto il vettore delle coordinate generalizzate, il gioco è fatto. Per semplicità, si considera il caso di momento alla radice, che per il modello del velivolo utilizzato nella Sez. 3.3, il risultato è il seguente:

$$\begin{aligned} M(0, t) = & \mu \frac{s^2}{2} \left\{ \ddot{z}_C - l_{WM} \ddot{\theta} + \left[\kappa_{e0} \left(1 + \frac{A}{2} \right) + l_E \gamma_{e0} \left(1 + \frac{2B}{3} \right) \right] \ddot{q}_e \right\} + \\ & + \frac{1}{2} \rho_0 V_0 a_W c \frac{s^2}{2} \left\{ \dot{z}_C - l_W \dot{\theta} + \left[\kappa_{e0} \left(1 + \frac{A}{2} \right) - l_A \gamma_{e0} \left(1 + \frac{2B}{3} \right) \right] \dot{q}_e + w_g \right\} + \\ & + \frac{1}{2} \rho_0 V_0^2 a_W c \frac{s^2}{2} \left[\theta + \gamma_{e0} \left(1 + \frac{2B}{3} \right) q_e \right] \quad (93) \end{aligned}$$

dove le variabili di risposta, la velocità di raffica e il momento di flessione sono tutti funzioni del tempo.

5 Risposte alla raffica di un velivolo di prova

L'ultima parte di questa tesi si concentra sui risultati grafici ottenuti dalla risposta del modello del velivolo ai modelli di raffica adottati. La prima sezione del capitolo riporta gli effetti della risposta, sia discreta che continua, al variare del modo flessibile per un velivolo di prova. I dati relativi a massa, dimensioni, condizioni atmosferiche e di volo per il velivolo inizialmente considerato sono riportati in Tabella 4 presente nell'appendice B.

5.1 Risposta e carichi del velivolo di prova in funzione del tempo

Il primo caso di perturbazione analizzata è la raffica discreta verticale di tipo '1-cos' (Sez.2.2.1). I grafici che rappresentano le risposte in accelerazione del modello sono scalate in funzione della accelerazione di gravità. I grafici che presentano le risposte del beccheggio sono definiti in gradi.

Il moto generale di un velivolo soggetto a questo tipo di raffica è comune a tutti i modi, dipendente dalla frequenza di corto periodo: il velivolo cabra leggermente verso l'alto finché non subentra il piano di coda, che, con il suo contributo, porta il velivolo in picchiata. Le accelerazioni raggiungono un picco negativo di valore, per poi giungere ad

un valore positivo quando il beccheggio verso il basso inizia a prendere effetto. L'azione perturbatrice verrà successivamente smorzata fino a ritornare alla condizione di equilibrio in una nuova condizione di volo. L'escursione tra i due picchi varia con la lunghezza della raffica. I grafici riportati in Fig.25, 26, 27, mostrano una risposta tipica del velivolo supponendo una condizione di flessione della fusoliera dominante. Il loro andamento mostra chiaramente come una maggior dimensione della raffica comporti un maggior escursione dalla condizione di equilibrio. Tuttavia, tale progressione non rispecchia l'azione oscillatoria del componente flessibile, molto più evidente al diminuire della lunghezza della raffica.

In Fig.28, inoltre, è riportata la risposta delle varie parti del velivolo per lo stesso modo flessibile in funzione di una raffica di lunghezza pari a 50 m. Tale grafico mette in evidenza come l'azione flessibile comporti una risposta in ritardo delle parti quali muso e piano di coda rispetto a quella principale del baricentro. Inoltre, essendo il piano di coda l'elemento più distante dal baricentro, sarà quello soggetto all'accelerazione maggiore.

Un altro tipo di deformazione è riportato in Fig.29,30. Esse mostrano l'accelerazione a cui è soggetto la fusoliera rigida e l'estremità alare in condizione di flessione dell'ala dominante per raffiche di lunghezza rispettivamente pari a 20,40,60 e 80 m. La risposta oscillatoria risulta poco influente sulla fusoliera, la quale presenta un andamento quasi per nulla ondulato. L'estremità alare risulta invece dominata dalla risposta flessibile, con il picco di accelerazione registrato che appartiene alla raffica di lunghezza pari a 40 m, né la più lunga, né la più breve.

Infine, la torsione della fusoliera dominante è riportata in Fig.31,32. Per una raffica dalla lunghezza d'onda relativamente lunga, la risposta ottenuta è molto simile a quella del velivolo rigido. Per sollecitare la risposta flessibile, sono state scelte le risposte per lunghezze d'onda pari a 10,20,35,50 m. La lunghezza di raffica corrispondente alla massima accelerazione del baricentro è di 50 m, risposta che risulta poco influenzata dalla componente oscillatoria. L'estremità alare è, analogamente al caso della precedente, dominata dalla risposta flessibile, con il picco di accelerazione massimo registrato nel caso di raffica lunga 20 m.

I modi flessibili possono influenzare in maniera determinante anche il momento incrementale che si sviluppa sulla superficie alare.

La Fig.33 mostra il caso di un momento di flessione che si sviluppa per flessione fusoliera dominante ad una frequenza di risonanza di 2 Hz e uno smorzamento del 4%. La variazione incrementale dei momenti raggiunge il suo picco positivo nel caso della raffica di lunghezza pari a 100 m, mentre il picco negativo viene registrato per una lunghezza di raffica di 200 m. Nel caso di flessione alare dominante (3 Hz, 4% smorzamento), mostrato in Fig.34, il valore massimo e minimo vengono raggiunti per una lunghezza di raffica di 60 m. A differenza del caso precedente, il momento presenta una maggiore influenza oscillatoria dovuta al modo flessibile. I risultati per il modo di torsione dominante (9 Hz, 4%), evidenziano come il momento incrementale segua l'andamento del modello di raffica, superato il quale l'andamento del momento flessionale si sviluppa in un intorno della posizione di equilibrio.(Fig.35). Si noti come i valori di picco non si presentano per le stesse lunghezze d'onda della risposta. Inoltre, il modo della flessione dominante è quello che comporta una maggiore accelerazione subita, probabilmente dovuto al contributo ulteriore fornito dalla maggiore libertà di deformazione del muso e del piano di coda.

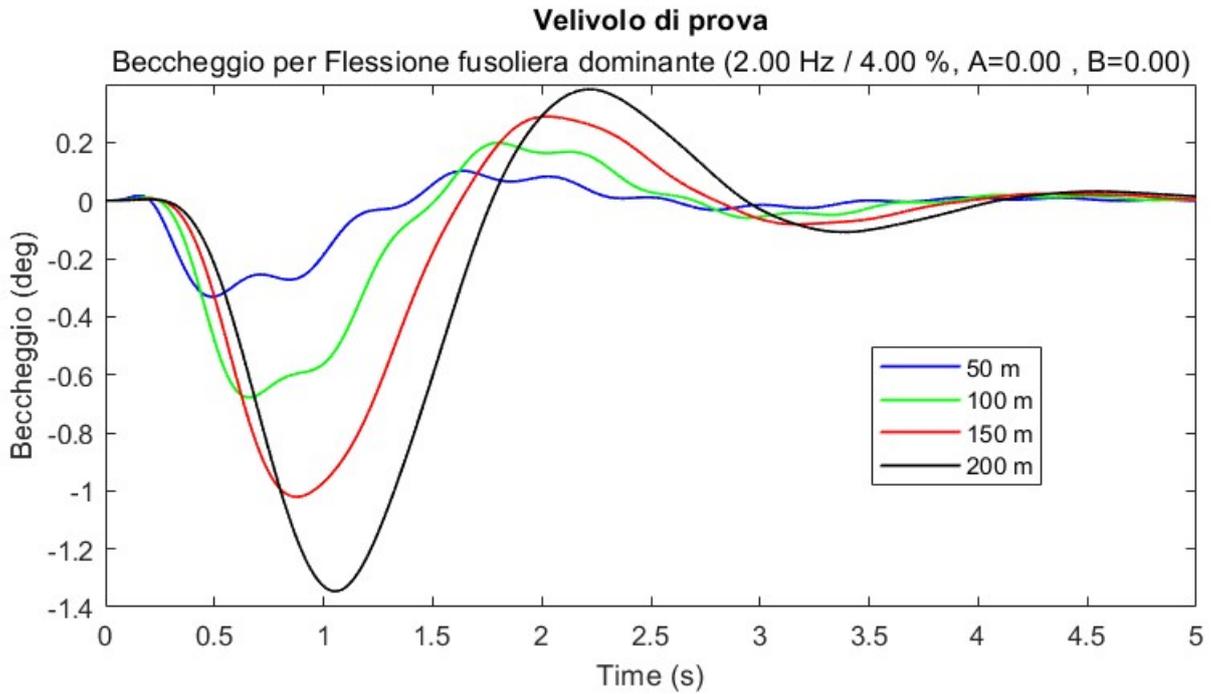


Figura 25: Beccheggio per velivolo di prova nel caso di flessione fusoliera dominante nel dominio del tempo.

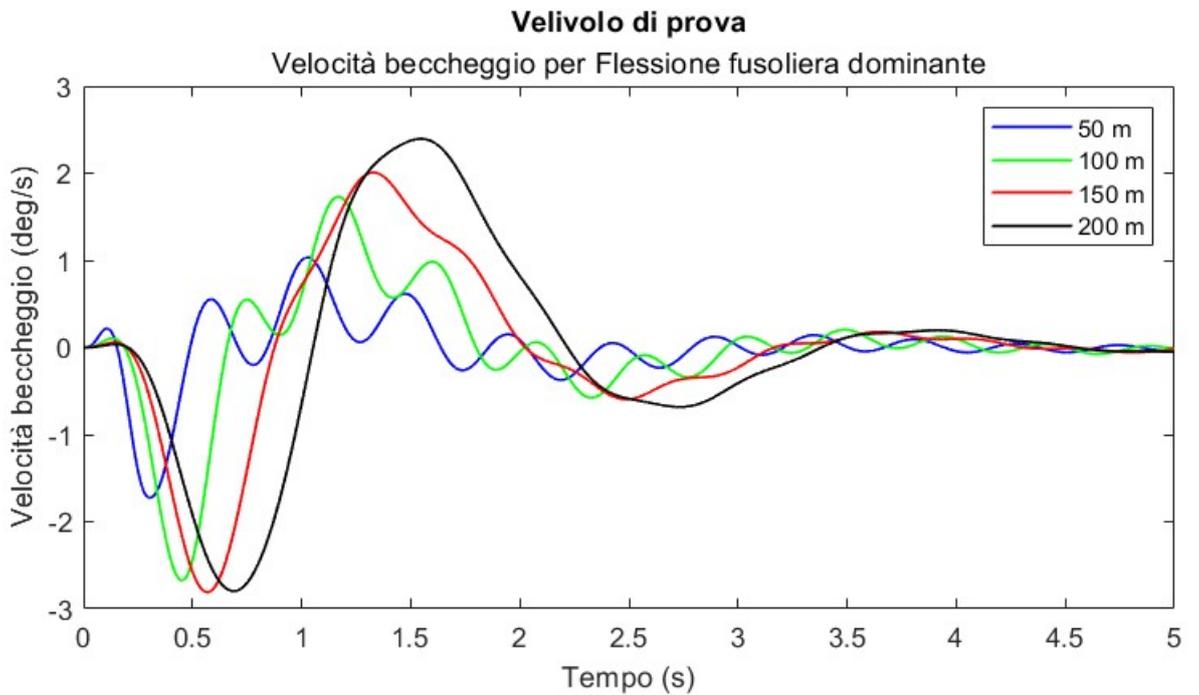


Figura 26: Velocità di beccheggio per velivolo di prova nel caso di flessione fusoliera dominante nel dominio del tempo.

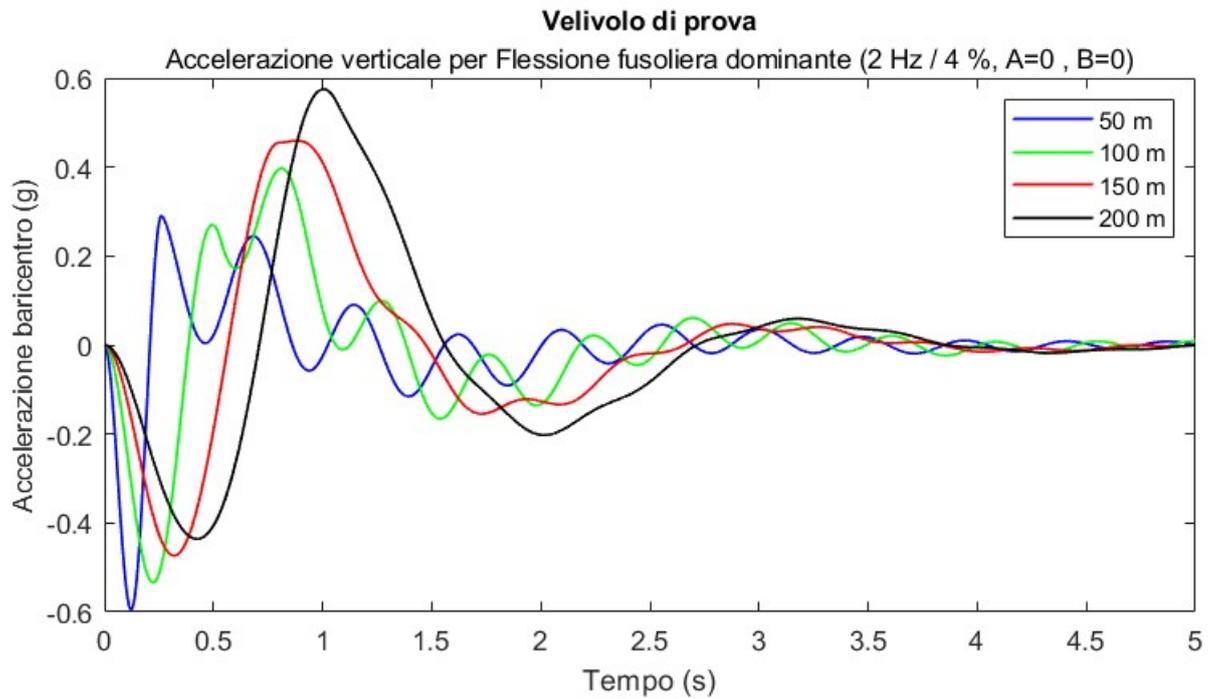


Figura 27: Accelerazione verticale rispetto al baricentro per velivolo di prova nel caso di flessione fusoliera dominante nel dominio del tempo

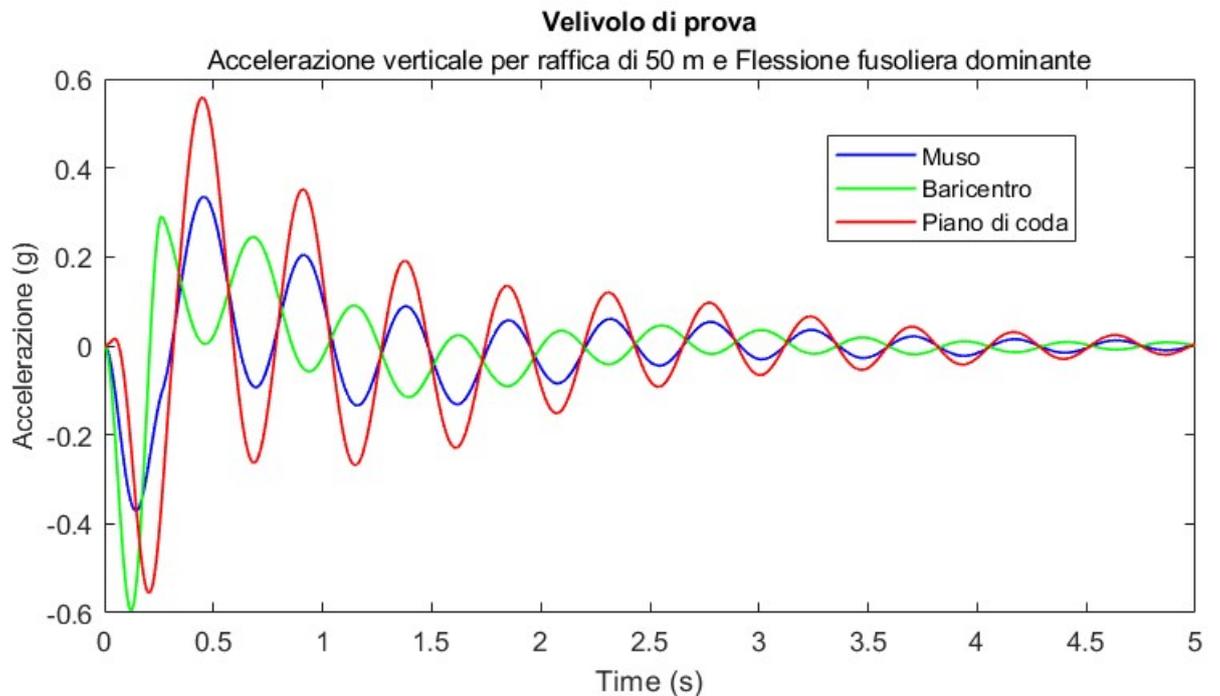


Figura 28: Accelerazione verticale per velivolo di prova nel caso di flessione fusoliera dominante nel dominio del tempo.

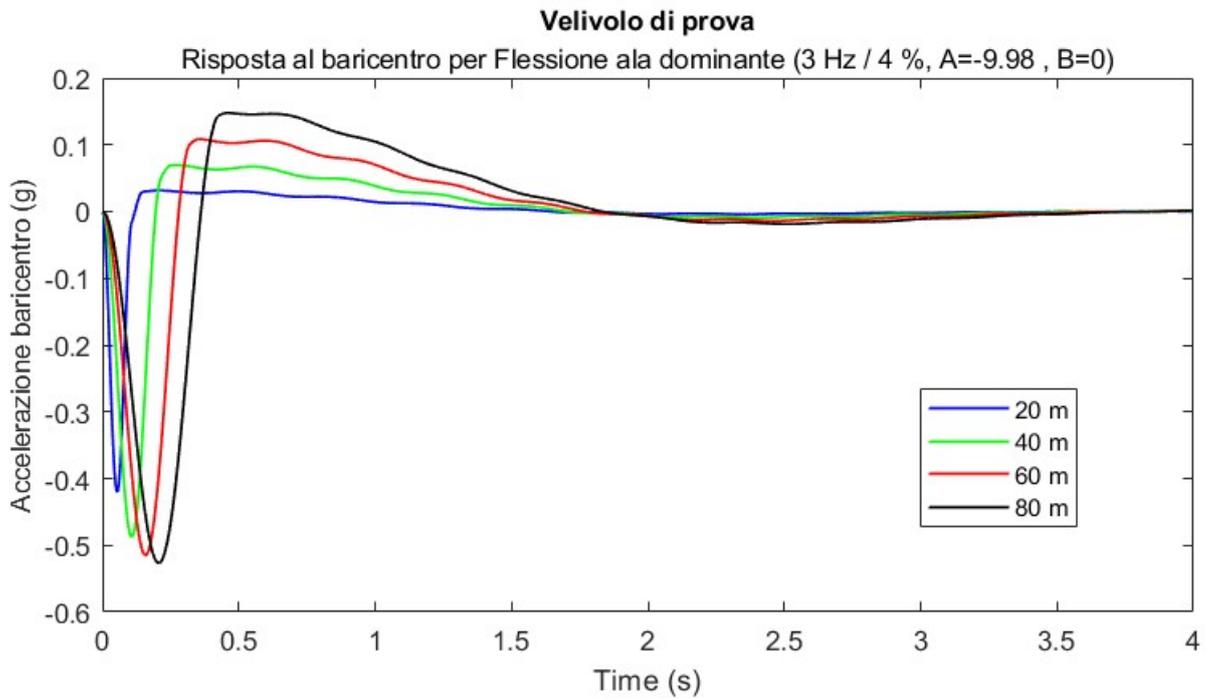


Figura 29: Accelerazione verticale baricentro velivolo per flessione alare dominante nel tempo.

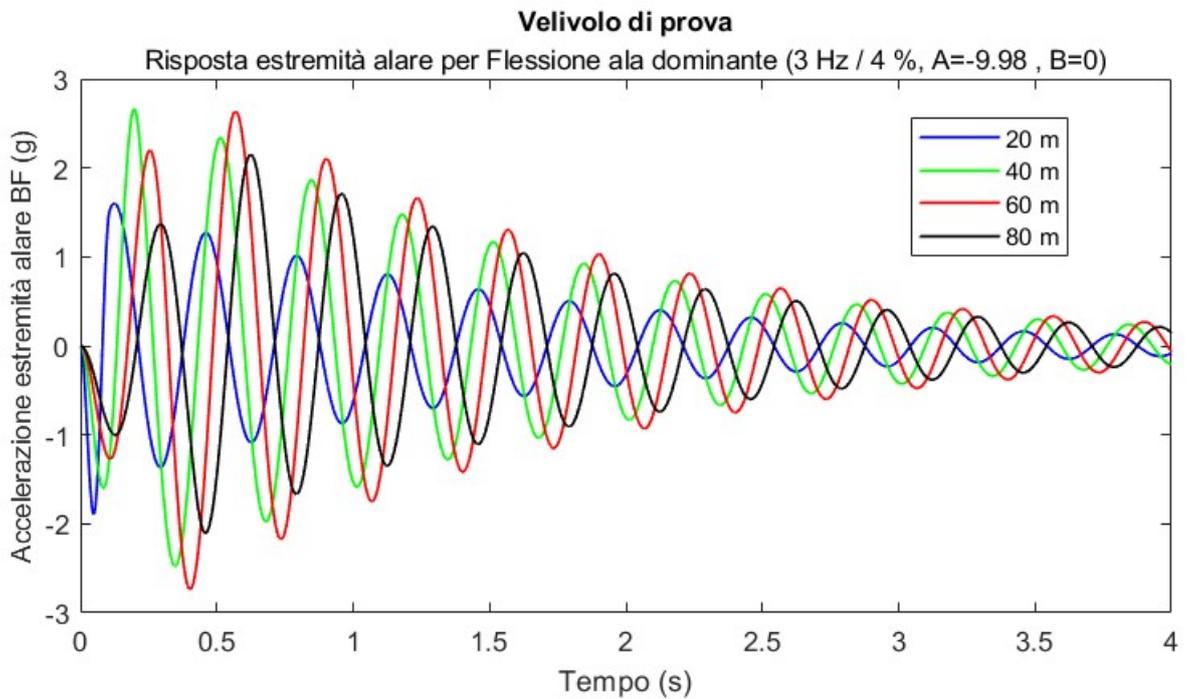


Figura 30: Accelerazione verticale estremità alare velivolo per flessione alare dominante nel tempo.

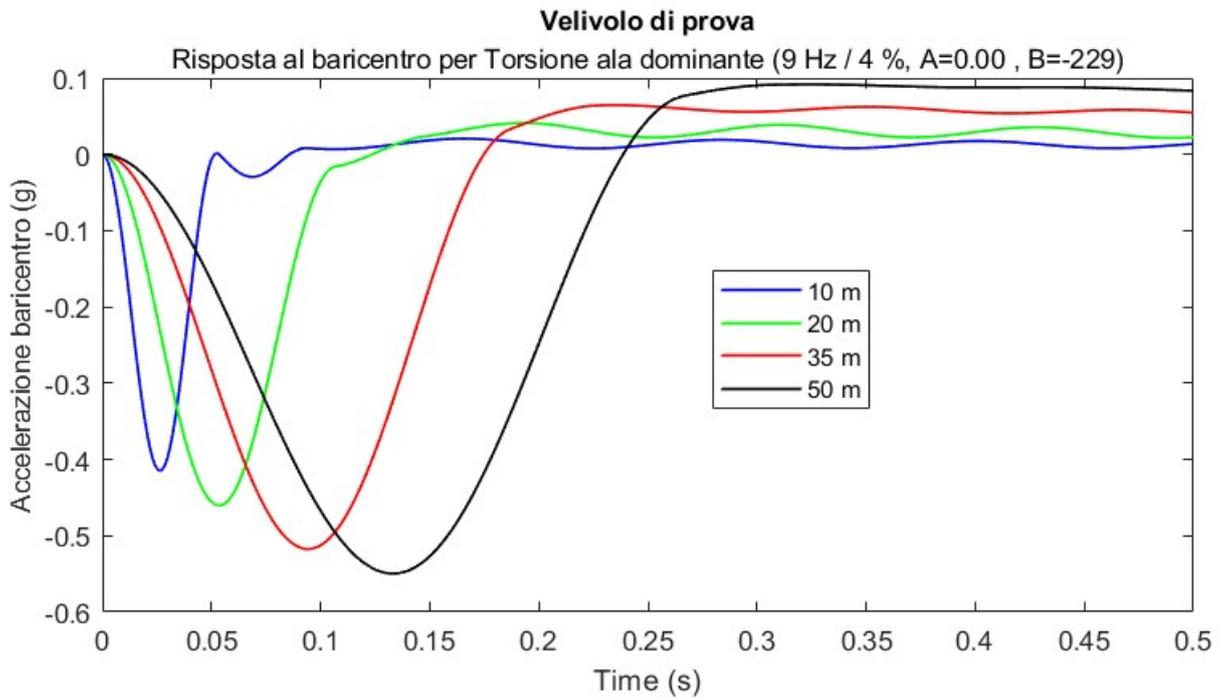


Figura 31: Accelerazione verticale baricentro velivolo per torsione alare dominante nel tempo.

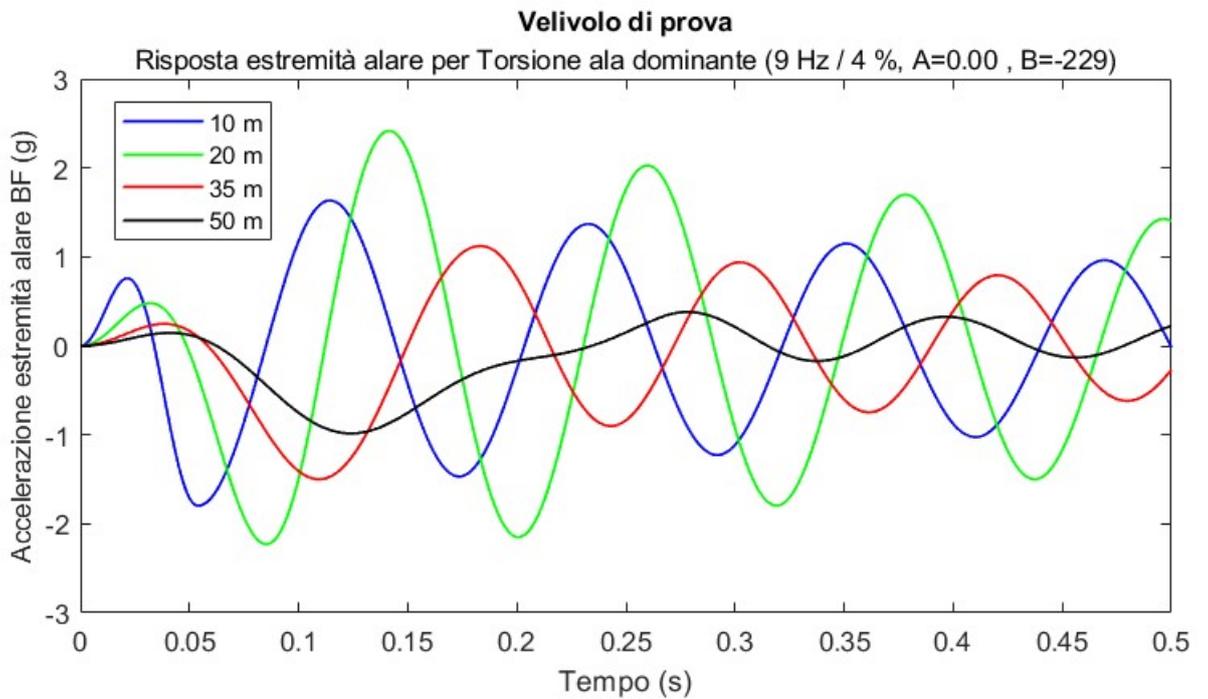


Figura 32: Accelerazione verticale estremità alare velivolo per torsione alare dominante nel tempo.

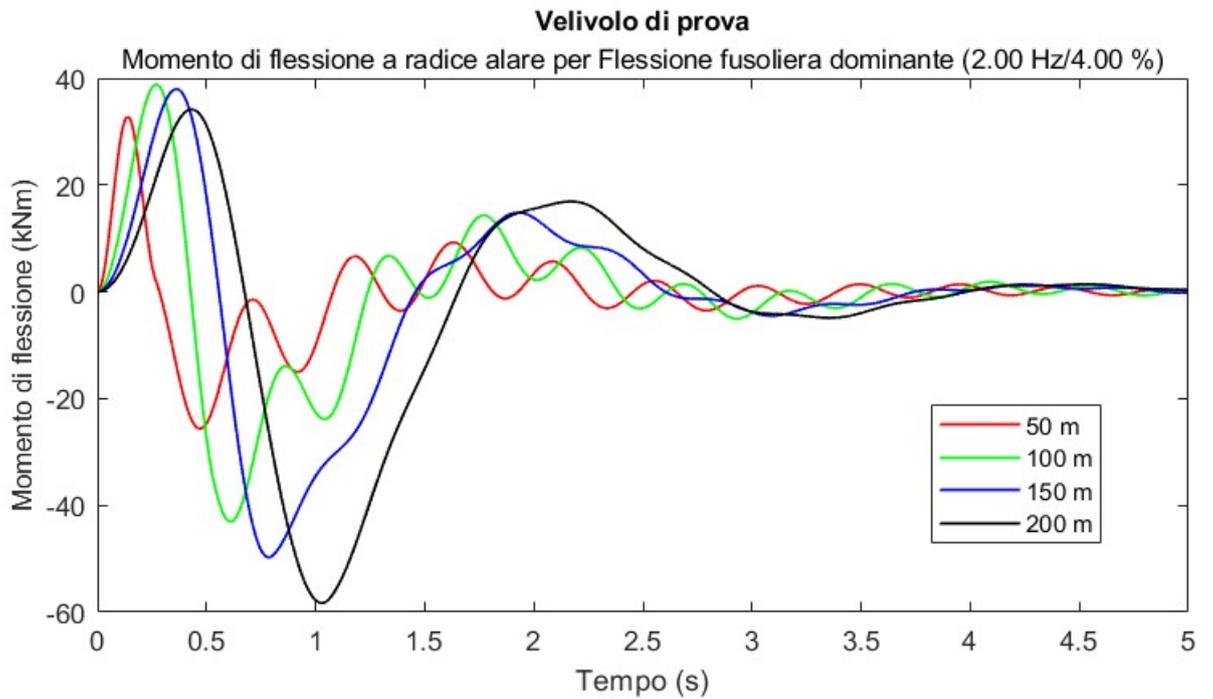


Figura 33: Momento alla radice alare velivolo di prova per flessione fusoliera dominante nel tempo.

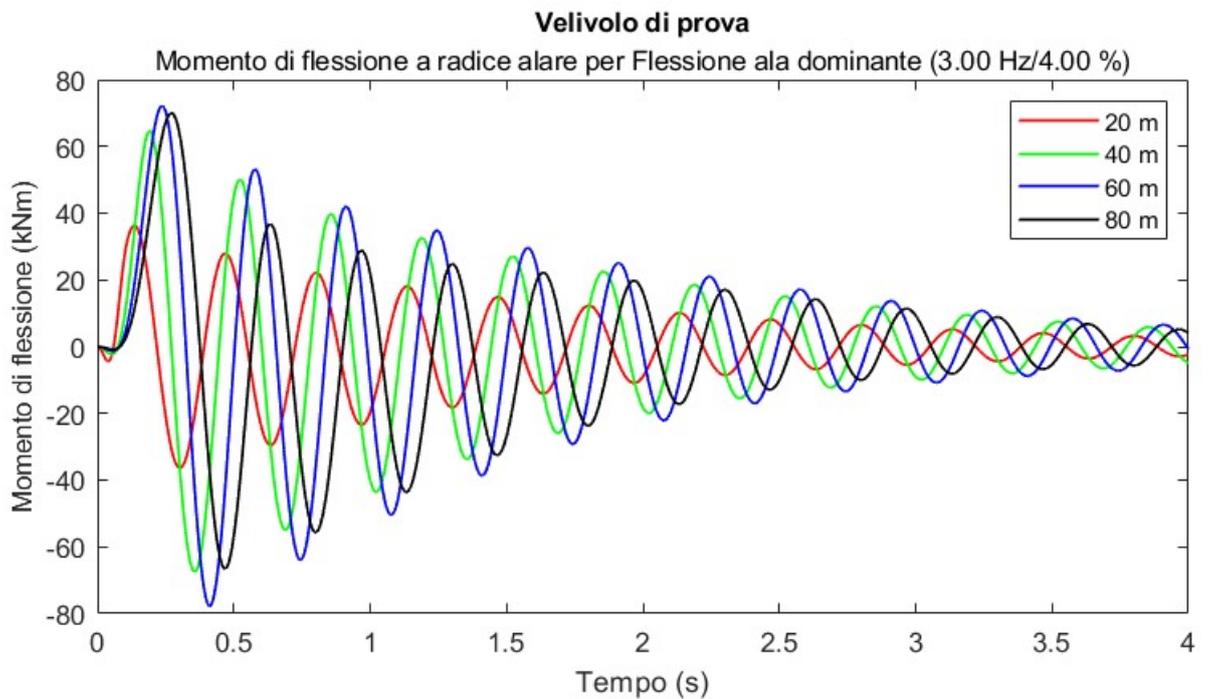


Figura 34: Momento alla radice alare velivolo di prova per flessione alare dominante nel tempo.

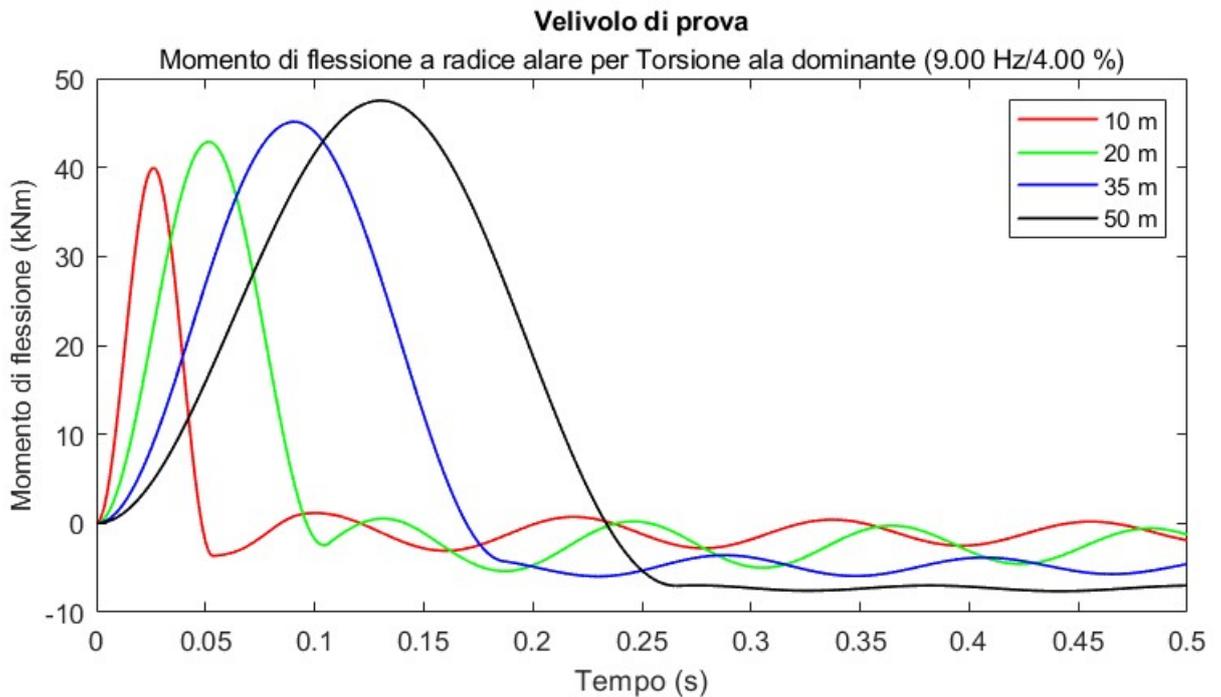


Figura 35: Momento alla radice alare velivolo di prova per torsione alare dominante nel tempo.

5.2 Risposta in turbolenza nel dominio di frequenza per un velivolo flessibile

Le risposte del modello del velivolo alla sollecitazione di una raffica continua mettono in evidenza alcuni picchi di risonanza corrispondenti ai modi di corto periodo e flessibile. Le risposte riportate nei seguenti grafici sono relative all' accelerazione in PSD del piano di coda, dell'estremità alare, del baricentro e del muso del velivolo in funzione della frequenza. Si consideri il caso di flessione fusoliera dominante (2 Hz, 4 %), riportato in Fig.36. E' evidente come, essendo la fusoliera flessibile, il piano di coda e il muso siano molto più sollecitati rispetto alla risposta del baricentro e estremità alare. Tale comportamento è confermato dai valori quadratici medi (RMS), presenti in legenda. Nel caso di flessione alare dominante, presente in Fig.37, la risposta dell'estremità alare risulta molto maggiore delle altre parti del velivolo. Situazione analoga per il caso di Fig.38, con la differenza che i picchi di risonanza raggiunti dalle varie parti della fusoliera (muso, coda e baricentro) presentano dei valori molto minori, tanto da risultare minori della sollecitazione dovuta al modo di corto periodo.

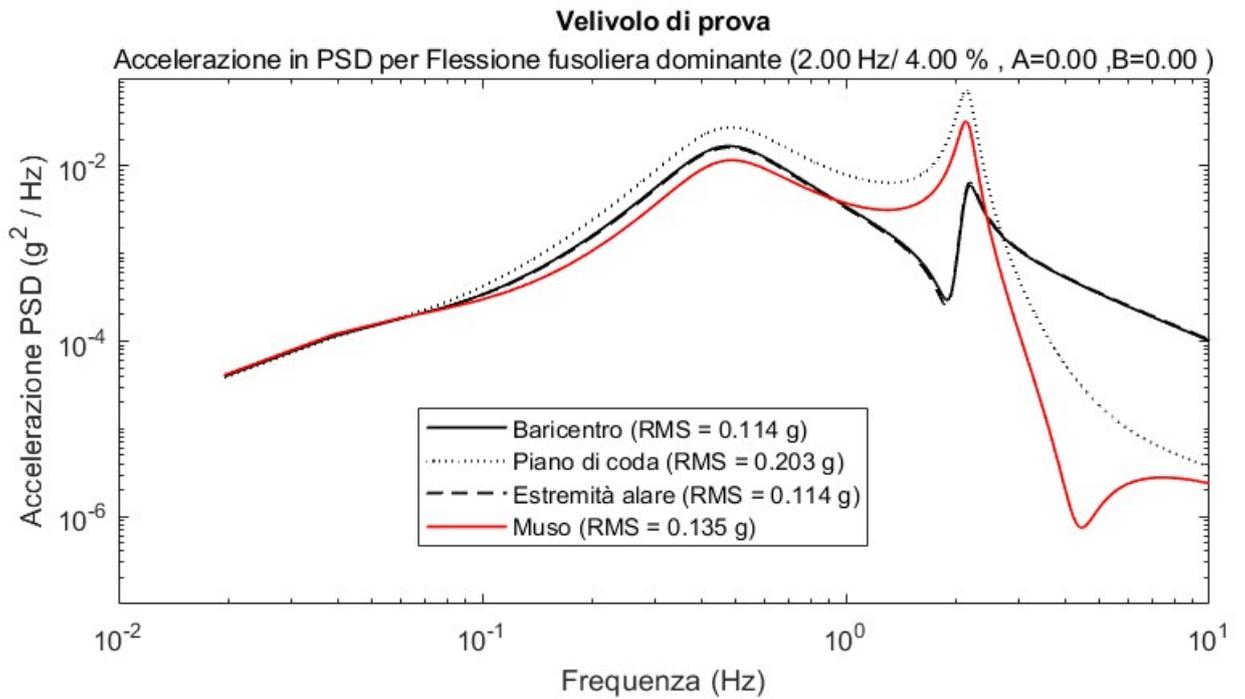


Figura 36: Accelerazione PSD del baricentro velivolo per flessione fusoliera dominante in frequenza.

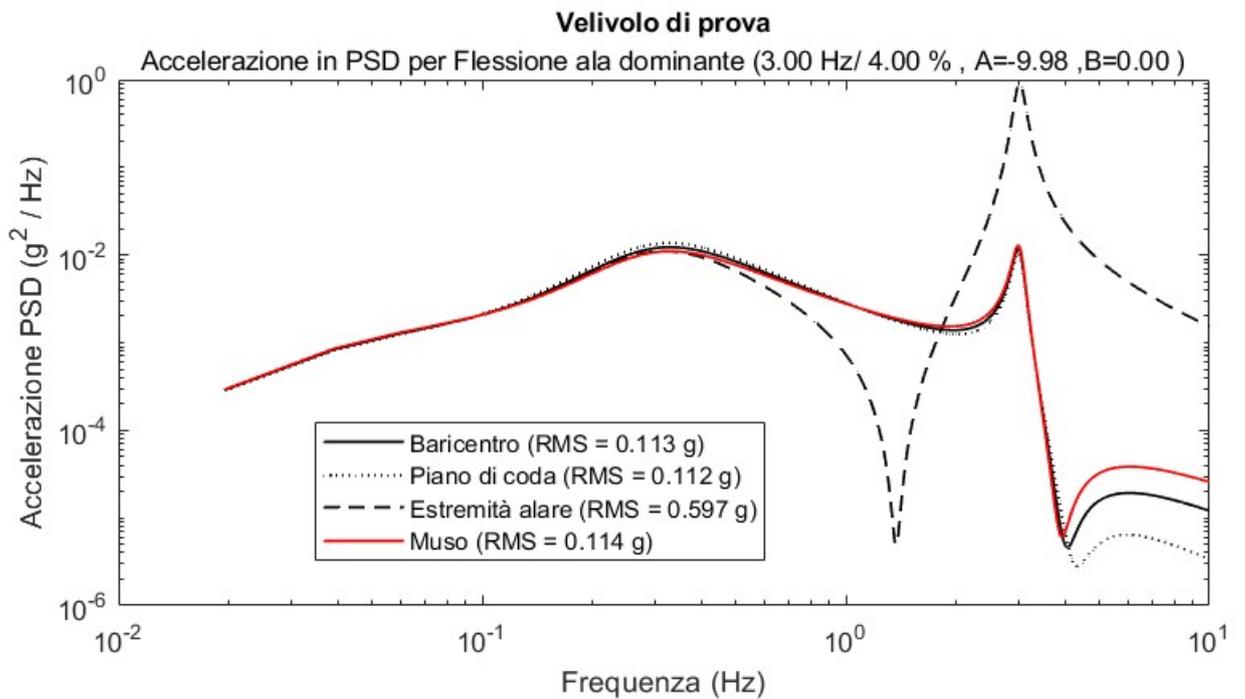


Figura 37: Accelerazione PSD del velivolo di prova per flessione alare dominante in frequenza.

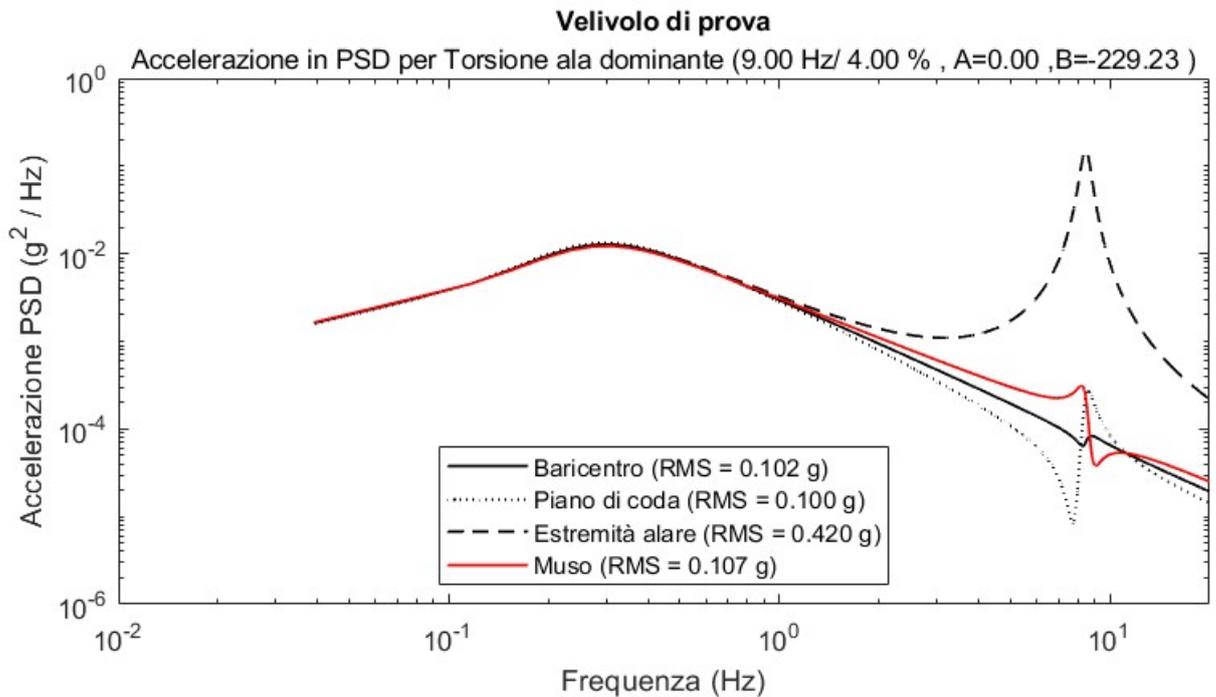


Figura 38: Accelerazione PSD del velivolo di prova per torsione alare dominante in frequenza.

6 Confronto risultati tra velivoli diversi

Il seguente capitolo intende esaminare lo stesso tipo di risposta in funzione di velivoli civili di classe diversa per determinate condizioni di volo simili.

I dati aerodinamici e geometrici relativi ai velivoli in analisi sono stati presi dai seguenti report [24, 25] e siti [26, 27, 28, 29, 30, 31, 32].

I vari testi e siti consultati non comprendevano alcuni dati relativi alle dimensioni e posizionamenti del piano di coda. Essi sono stati ricavati da equazioni tipiche di testi che trattano di progettazione del velivolo [33]. Le frequenze naturali del modo flessibile per entrambi gli studi sono state scelte appositamente basse per metterne in risalto gli effetti. Nell'analisi riportata sono stati scelti quattro velivoli di tre classi diverse: 1 velivolo leggero (Navion), 1 business jet (Lockheed Jetstar) e 2 jet di linea (McDonnell Douglas DC-8 e Boeing 747-400), ognuno dotato di un carico alare diverso. Una vista in pianta di tutti i velivoli è riportata nelle Fig.56,57,58,59. Al fine di considerare i contributi relativi alla presenza di motori o tank sull'ala, il modello è stato appositamente modificato tramite un approccio suggerito da [22] e riportato nella Sez. 3.6. Le tabelle 5,6,7,8, presenti nell'appendice C riportano i parametri fisici, geometrici e aerodinamici dei velivoli in esame. L'analisi delle risposte dei velivoli è stata effettuata secondo le seguenti ipotesi:

- Condizione di volo di avvicinamento;
- Condizioni tipiche di un'altitudine in prossimità del livello del mare per un modello atmosferico ISA [34];
- Picco di velocità di raffica raggiunto nel caso discreto in funzione della lunghezza di raffica e dell'altitudine secondo la normativa [1] (Sez.2.2.1).

Le risposte dei velivoli sono etichettate in legenda secondo un ordine crescente di carico alare del velivolo considerato.

6.1 Comparazione risposta dei velivoli in funzione del tempo

Si consideri inizialmente il caso della flessione fusoliera dominante (2 Hz, 4%). I grafici in Fig.39,40,41 riportano le accelerazioni verticali subite rispettivamente da baricentro, naso e piano di coda per una raffica di 100 m di lunghezza. Si può notare come, minore è il carico alare del velivolo, maggiori saranno i picchi assoluti di accelerazione sviluppati nell'incontro con la raffica. Questo è dovuto al fatto che una maggiore portanza a parità di inerzia comporta lo sviluppo di una maggiore accelerazione. Inoltre, un basso valore di carico alare produce un numero maggiore di oscillazioni, sia in termini di corto periodo che di modo flessibile. I jet di linea, di carico alare superiore, seguono la forma della raffica per poi mantenere un valore positivo di accelerazione per un tempo maggiore rispetto agli altri due velivoli prima di tornare alla condizione di equilibrio. Le Fig.42,43 mostrano un comportamento simile anche per il beccheggio nelle stesse condizioni, con il velivolo Navion di carico inferiore che raggiunge degli angoli di picchiata e cabrata maggiore di tutti gli altri e in intervalli di tempo più brevi, mentre i velivoli di carico maggiore deviano dalla condizione di equilibrio di soli pochi gradi, impiegando tempi molto maggiori per tornare allo stato iniziale.

Il caso della flessione alare dominante (Fig.44,45) differisce dal caso precedente soprattutto per lo sviluppo della accelerazione al baricentro. Nonostante si confermi come i velivoli di carico inferiore subiscano le accelerazioni maggiori, il ritorno alla condizione di equilibrio di tutti i velivoli avviene in tempi molto inferiori rispetto al caso di flessione dominante. Lo stesso non si può affermare per le accelerazioni calcolate sull'estremità alare, dove un minore carico alare comporterà una maggiore accelerazione assoluta e tempi maggiori necessari alla dissipazione del disturbo.

Per quanto riguarda lo sviluppo dei carichi sulle ali dei velivoli, esso avviene in maniera indipendente da quella delle accelerazioni. La Fig.46 mostra il momento sviluppato sulla radice alare di ogni velivolo nel caso della flessione fusoliera dominante. L'ipotesi di un'ala rigida ha portato ad un iniziale sviluppo orario del momento, il quale segue la forma della raffica, per poi produrre un picco minore di momento antiorario che impiega un tempo maggiore a dissiparsi. Maggiore il carico del velivolo, maggiori saranno i picchi di momento sviluppatisi e il tempo impiegato dall'ala per dissipare il momento incrementale. La Fig.47 mostra lo sviluppo alla radice del momento per un caso di flessione dell'ala dominante. La flessibilità dell'ala comporta una maggiore persistenza del disturbo, con la creazione di carichi oscillanti caratterizzati da picchi elevati sia in modo orario e antiorario che si dissipano nel tempo. Il caso della torsione alare presenta uno sviluppo simile a quello della fusoliera dominante (Fig.48), con la differenza che la presenza della torsione riesce a mitigare l'azione della raffica, permettendo un ritorno alla condizione di equilibrio pochi istanti dopo dal passaggio all'interno della raffica.

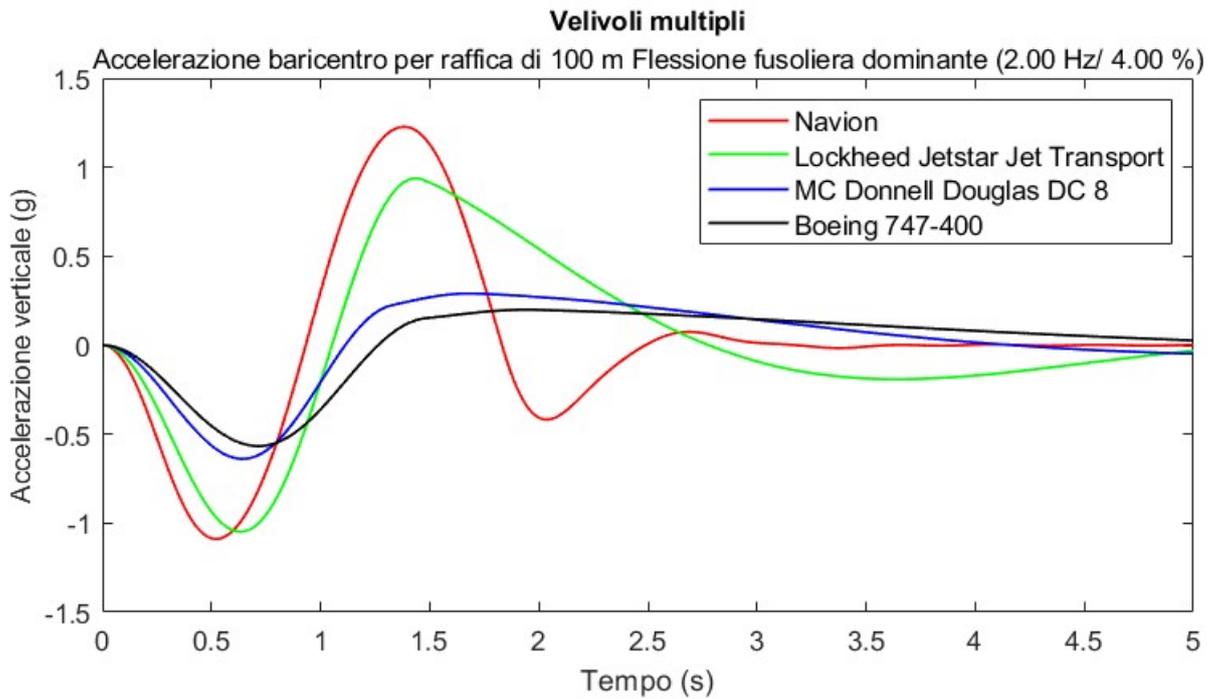


Figura 39: Comparazione dei risultati per la raffica nel dominio del tempo per modelli di velivolo flessibile: accelerazione del baricentro.

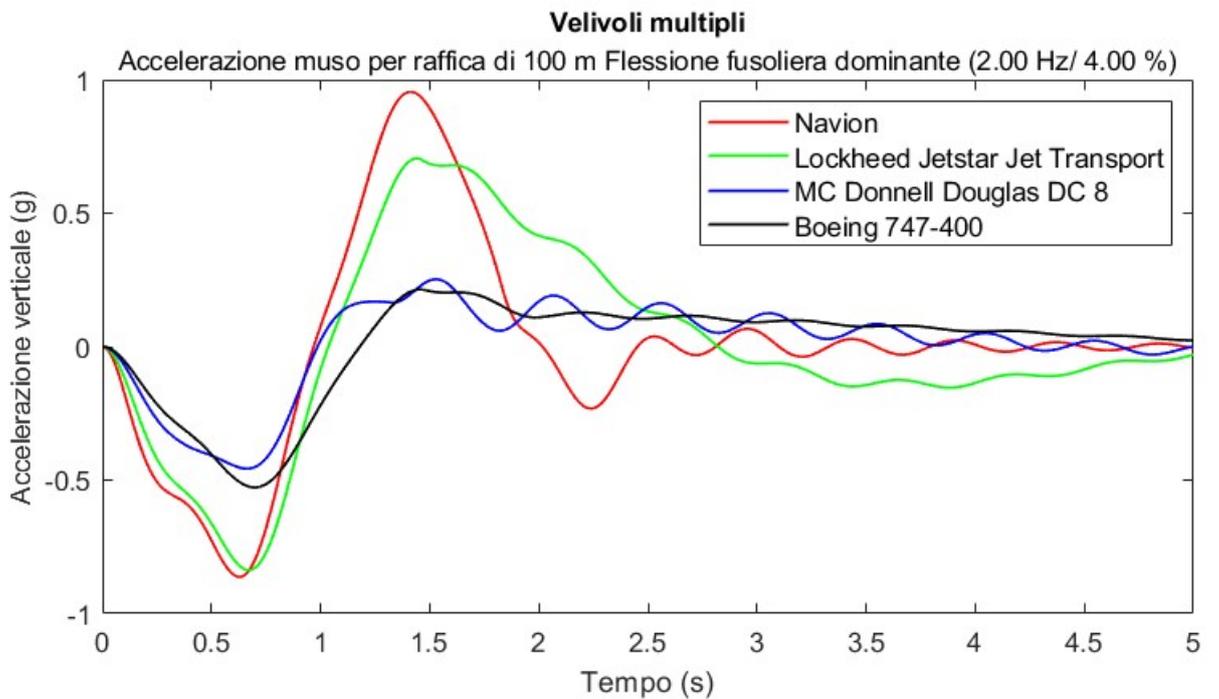


Figura 40: Comparazione dei risultati per la raffica nel dominio del tempo per modelli di velivolo flessibile: accelerazione del muso.

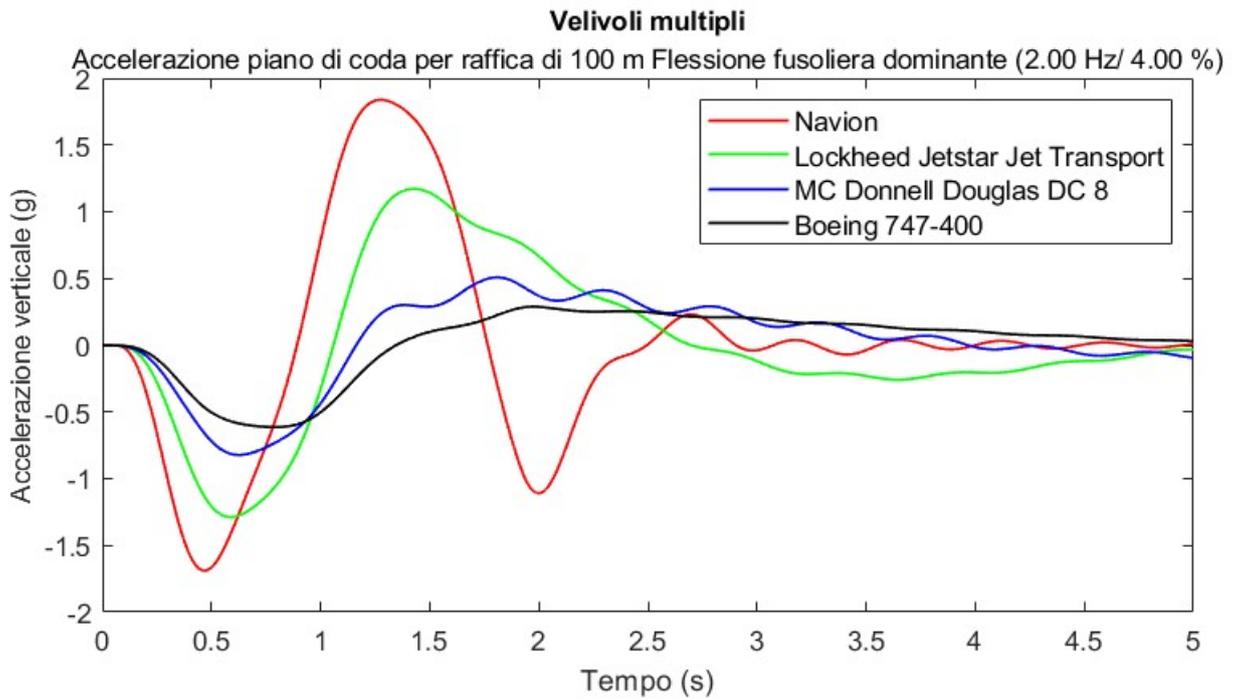


Figura 41: Comparazione dei risultati per la raffica nel dominio del tempo per modelli di velivolo flessibile: accelerazione del piano di coda

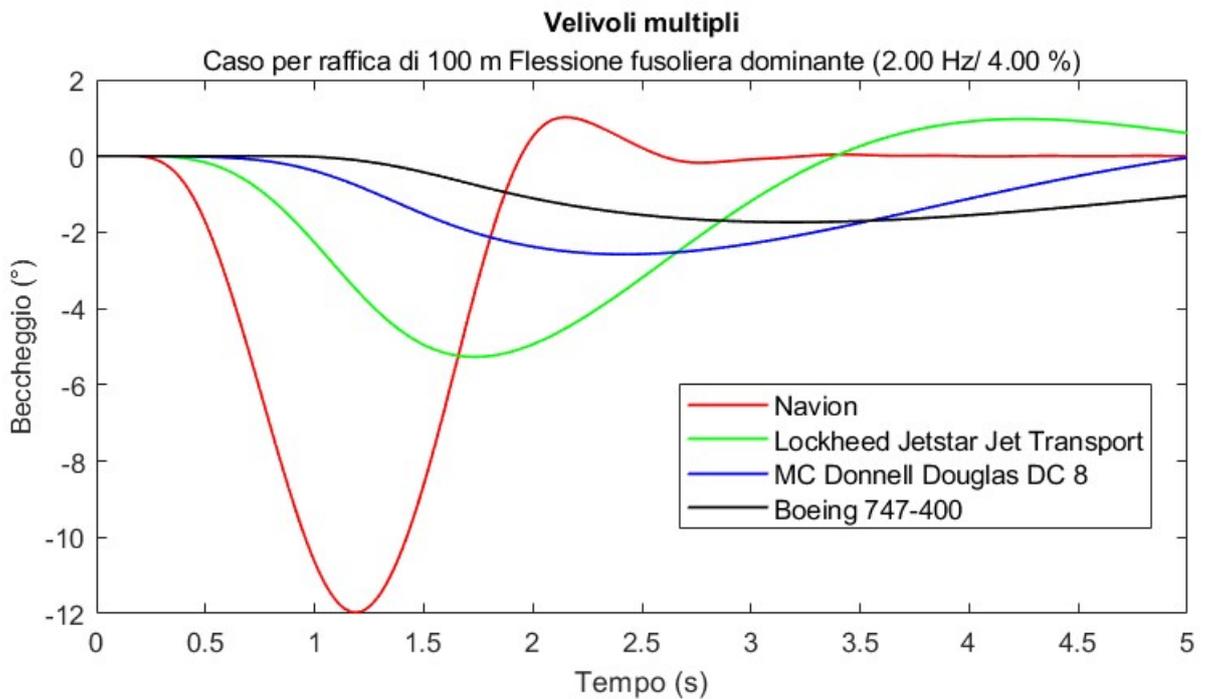


Figura 42: Comparazione dei risultati per la raffica nel dominio del tempo per modelli di velivolo flessibile: Beccheggio.

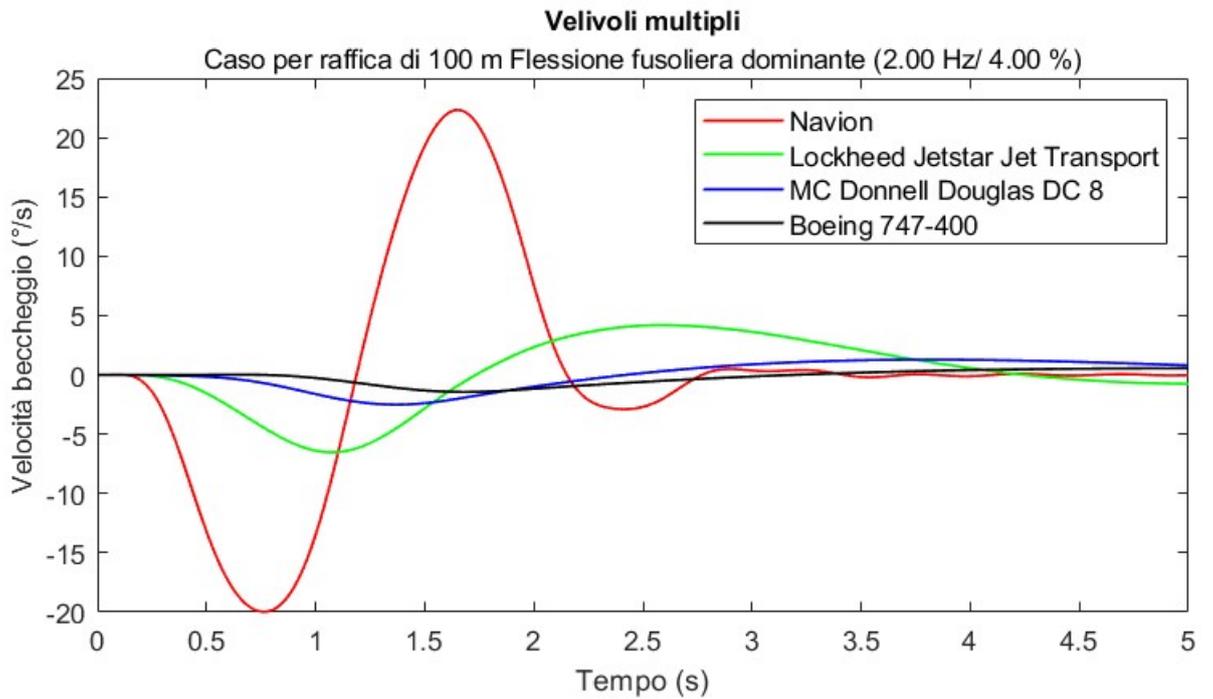


Figura 43: Comparazione dei risultati per la raffica nel dominio del tempo per modelli di velivolo flessibile: Velocità di beccheggio.

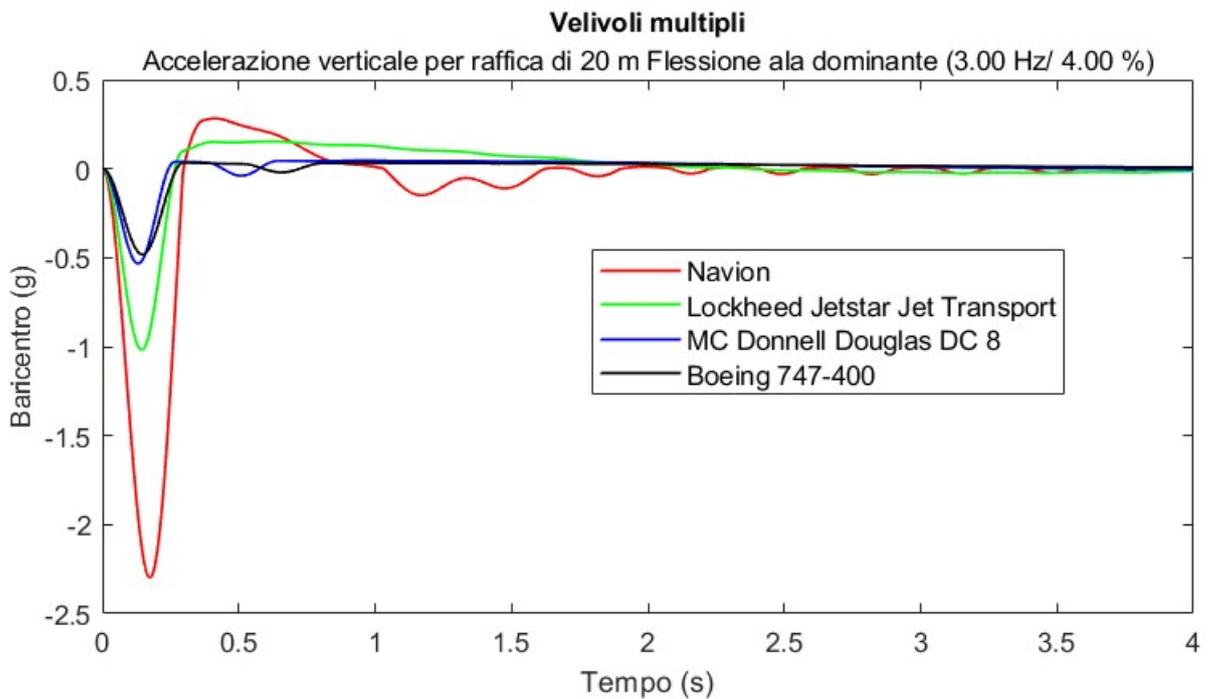


Figura 44: Comparazione dei risultati per la raffica nel dominio del tempo per modelli di velivolo flessibile: accelerazione per baricentro in flessione alare dominante.

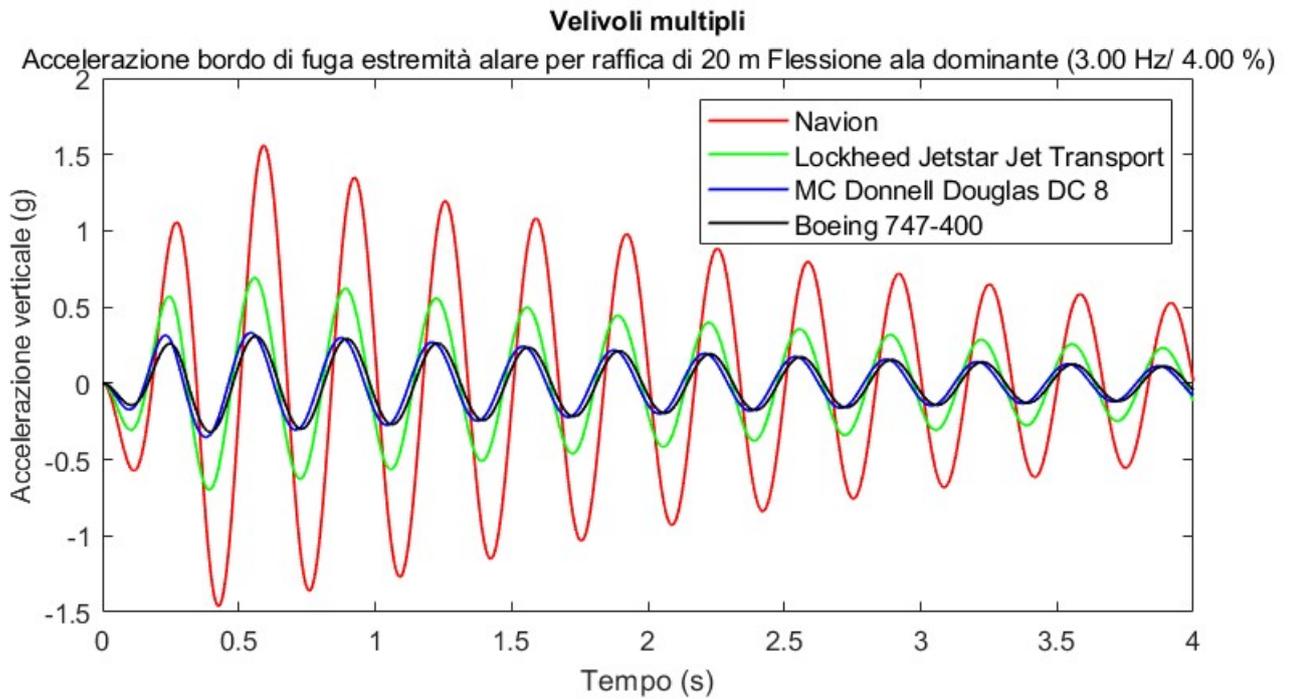


Figura 45: Comparazione dei risultati per la raffica nel dominio del tempo per modelli di velivolo flessibile: accelerazione per bordo di fuga in flessione alare dominante.

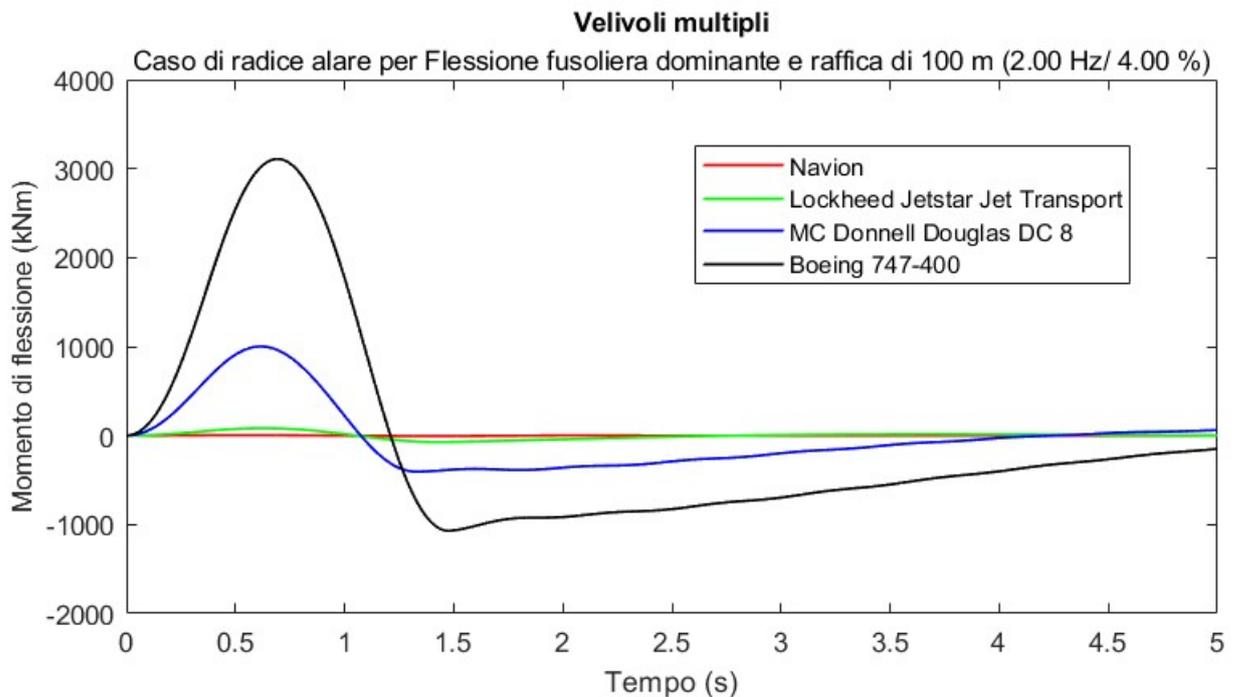


Figura 46: Momento di flessione alare per velivoli multipli - flessione fusoliera dominante.

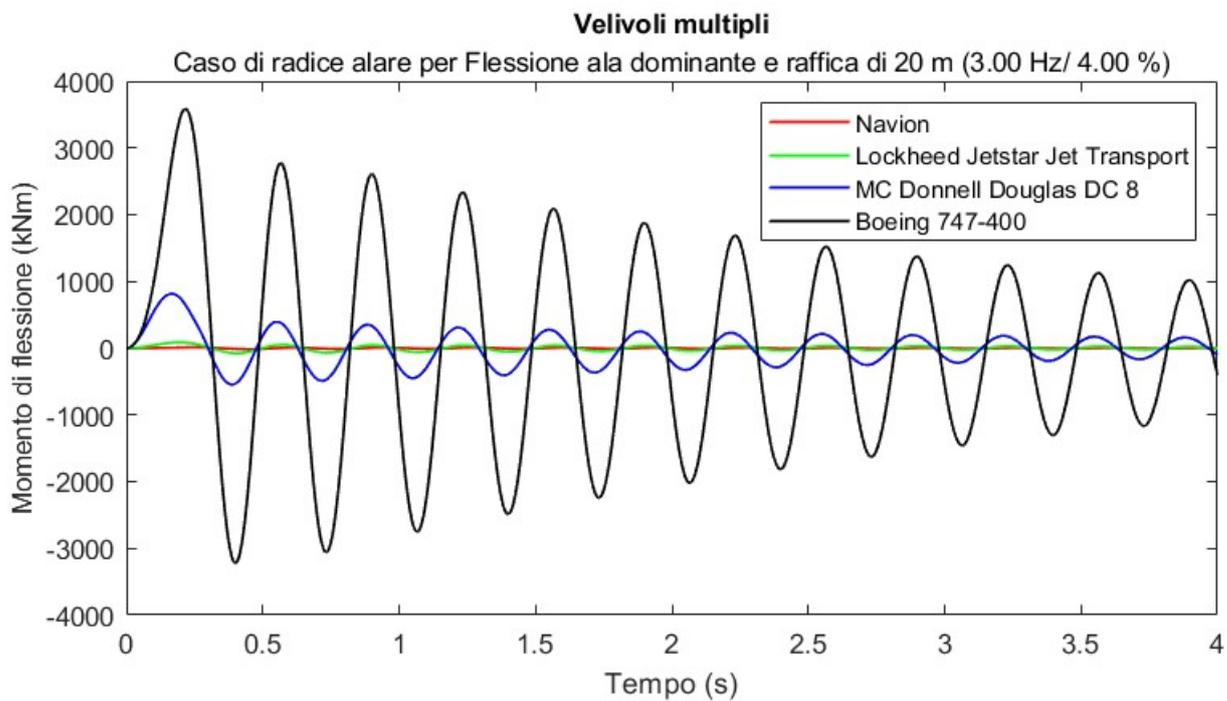


Figura 47: Momento di flessione alare per velivoli multipli - flessione alare dominante.

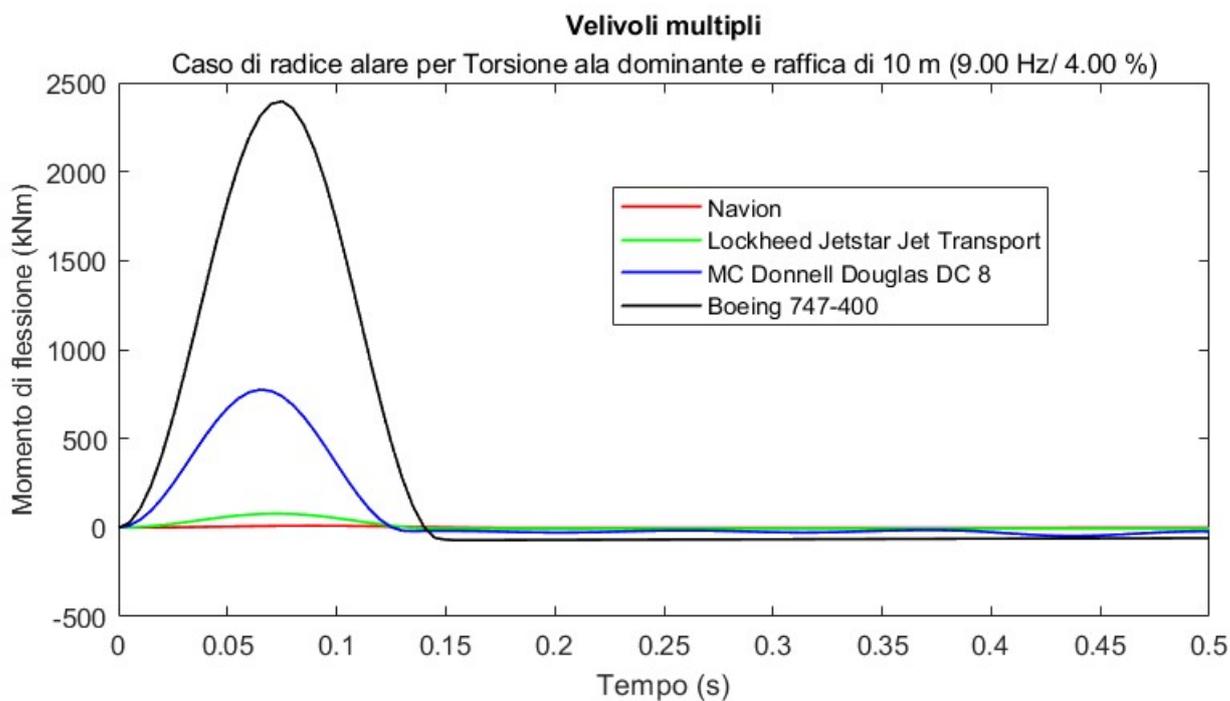


Figura 48: Momento di flessione alare per velivoli multipli - torsione alare dominante.

6.2 Comparazione risposta velivolo flessibile in funzione della frequenza

Il carico alare dei velivoli influenza entrambi i picchi di risonanza, seppur la frequenza del modo flessibile sia stata determinata per ipotesi e non subisca alcuna variazione. I risultati relativi alle componenti del baricentro, muso e piano di coda per la flessione della fusoliera dominante sono riportate in Fig.49,50,51. E' possibile notare che i picchi del modo flessibile risultano sempre più importanti al diminuire del carico alare del velivolo. I picchi di corto periodo non seguono la stessa regola e risultano tutti di un simile ordine di grandezza per tutti i velivoli, ma la sua frequenza di risonanza varia. Infatti, al diminuire delle dimensioni del velivolo, si presenta una maggiore oscillazione attorno al baricentro e dunque una maggiore frequenza di corto periodo. E' possibile notare situazioni analoghe anche negli altri casi presi in considerazione. La flessione dell'ala dominante, riportata nelle Fig.52,53, ripropone le stesse caratteristiche, con la differenza che l'elevata flessione dell'ala comporta per la stessa un picco di modo flessibile molto maggiore di qualunque picco di corto periodo. Questo contributo non si riflette sul resto del velivolo, dove il picco di risonanza dovuto alla frequenza del corto periodo presenta valori dello stesso ordine di grandezza o superiore della sua controparte flessibile.

L'azione del corto periodo risulta ancora più importante nel caso della torsione alare dominante (Fig.54,55), dove il picco di modo flessibile è pressoché trascurabile in prossimità del baricentro. Inoltre, il picco di modo flessibile è a malapena uguale a quello di corto periodo nel caso della estremità alare, la cui frequenza di risonanza si presenta a valori più elevati rispetto ai modi flessibili precedenti.

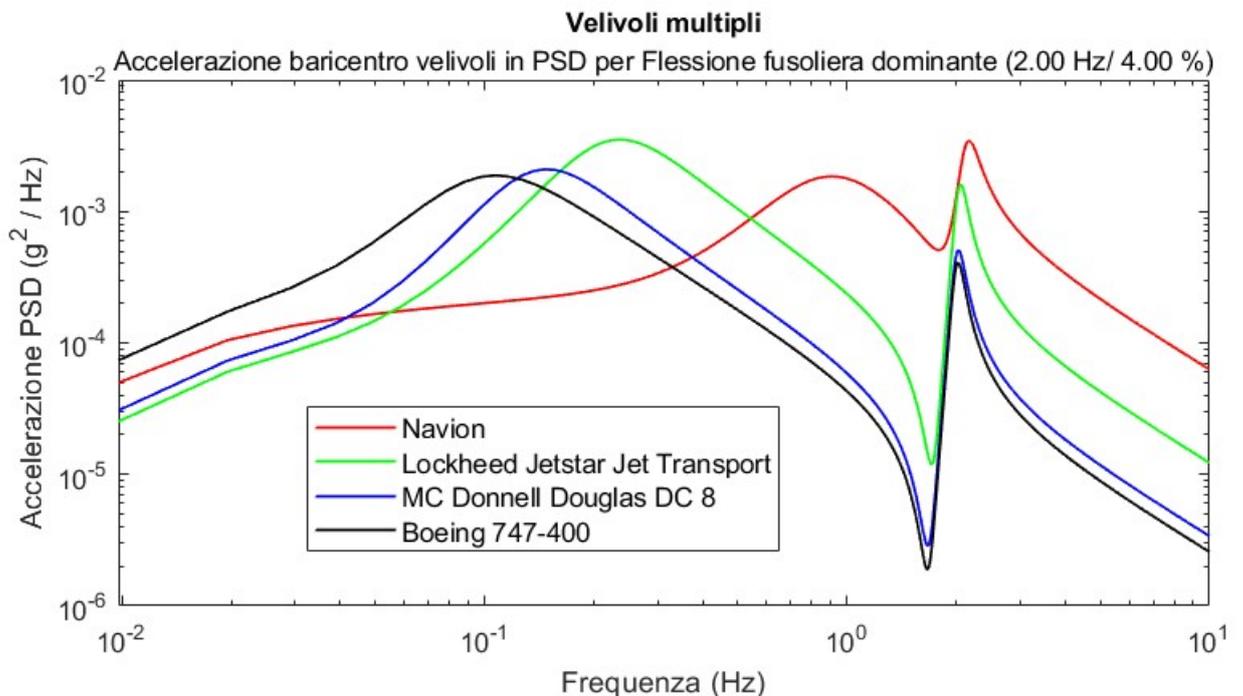


Figura 49: Comparazione dei risultati per la raffica nel dominio di frequenza per flessione fusoliera dominante: accelerazione PSD per baricentro.

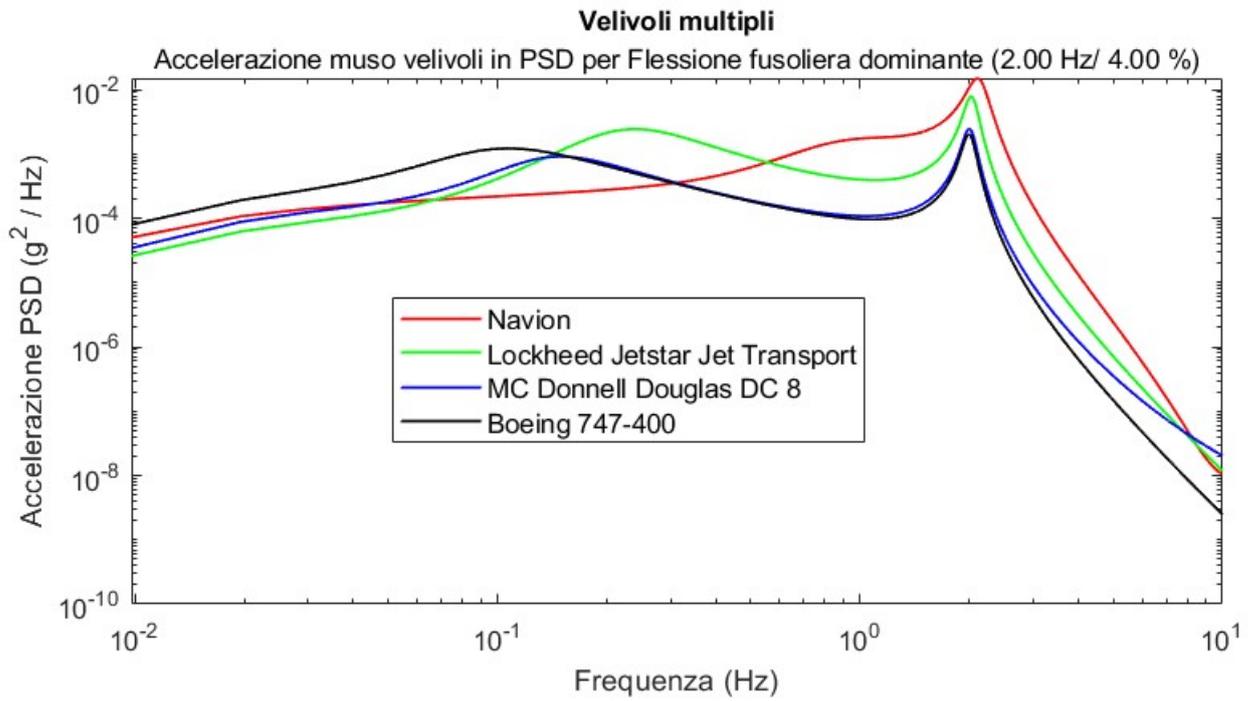


Figura 50: Comparazione dei risultati per la raffica nel dominio di frequenza per flessione fusoliera dominante: accelerazione PSD per muso.

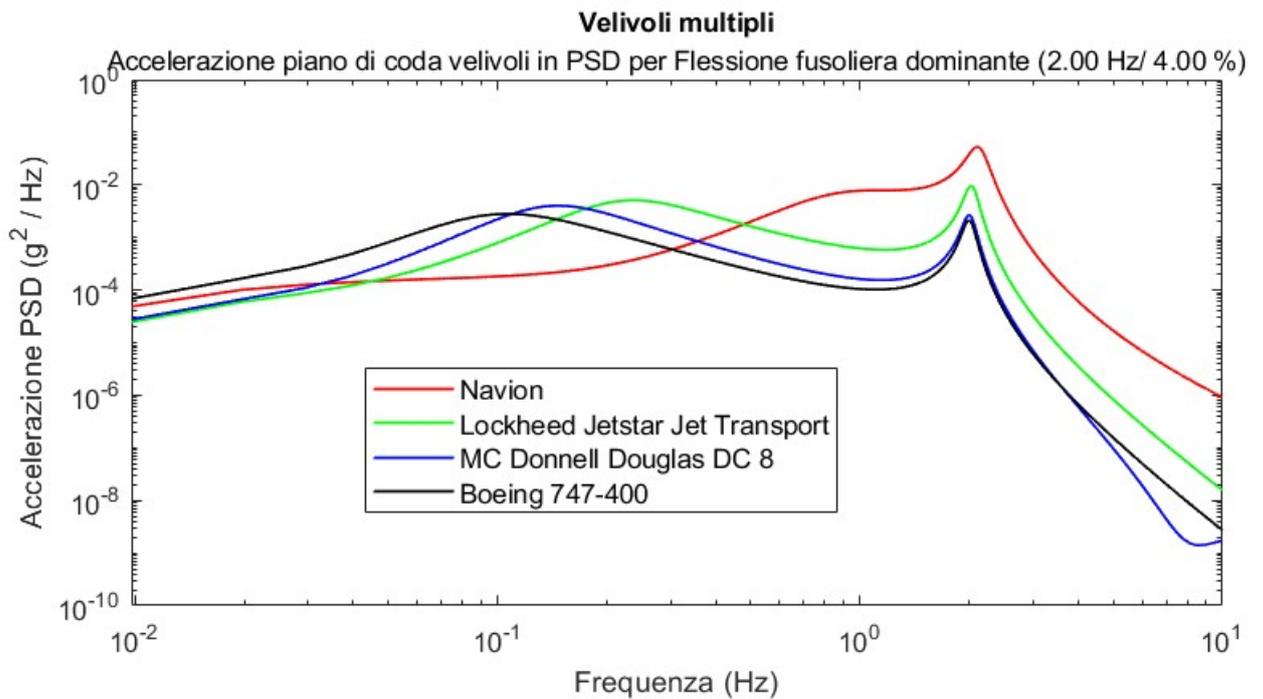


Figura 51: Comparazione dei risultati per la raffica nel dominio di frequenza per flessione fusoliera dominante: accelerazione PSD per piano di coda.

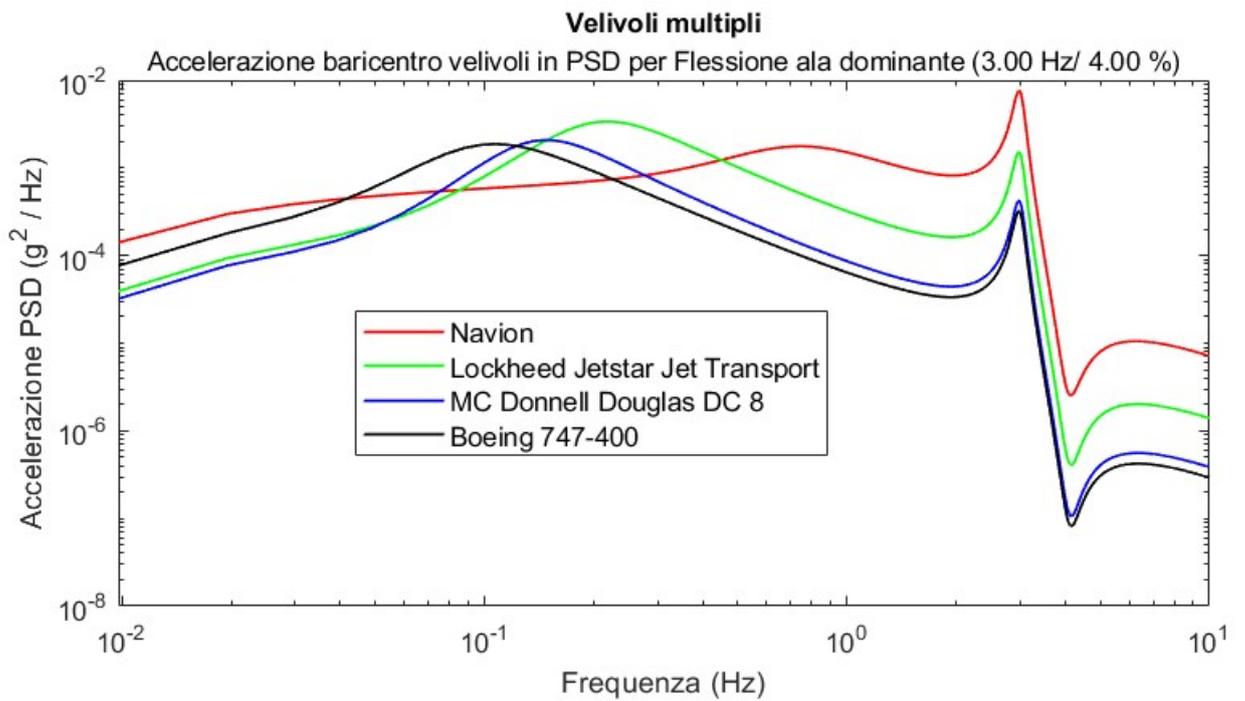


Figura 52: Comparazione dei risultati per la raffica nel dominio di frequenza per flessione alare dominante: accelerazione PSD per baricentro.

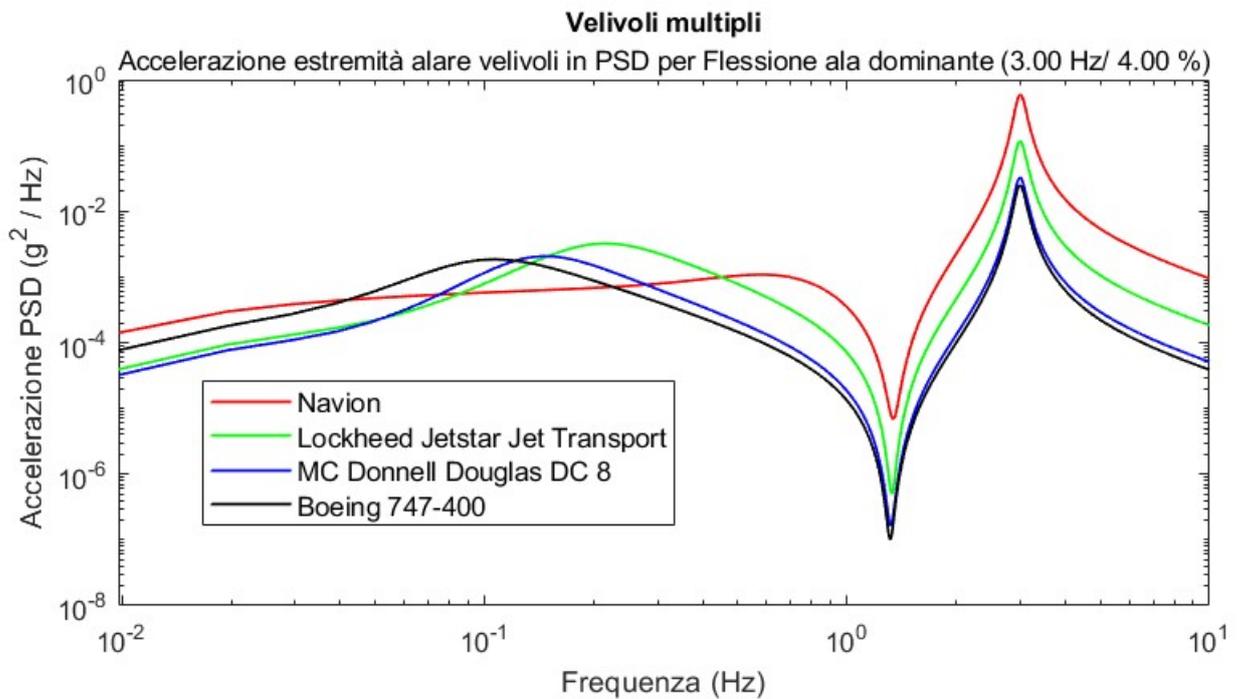


Figura 53: Comparazione dei risultati per la raffica nel dominio di frequenza per flessione alare dominante: accelerazione PSD per estremità alare.

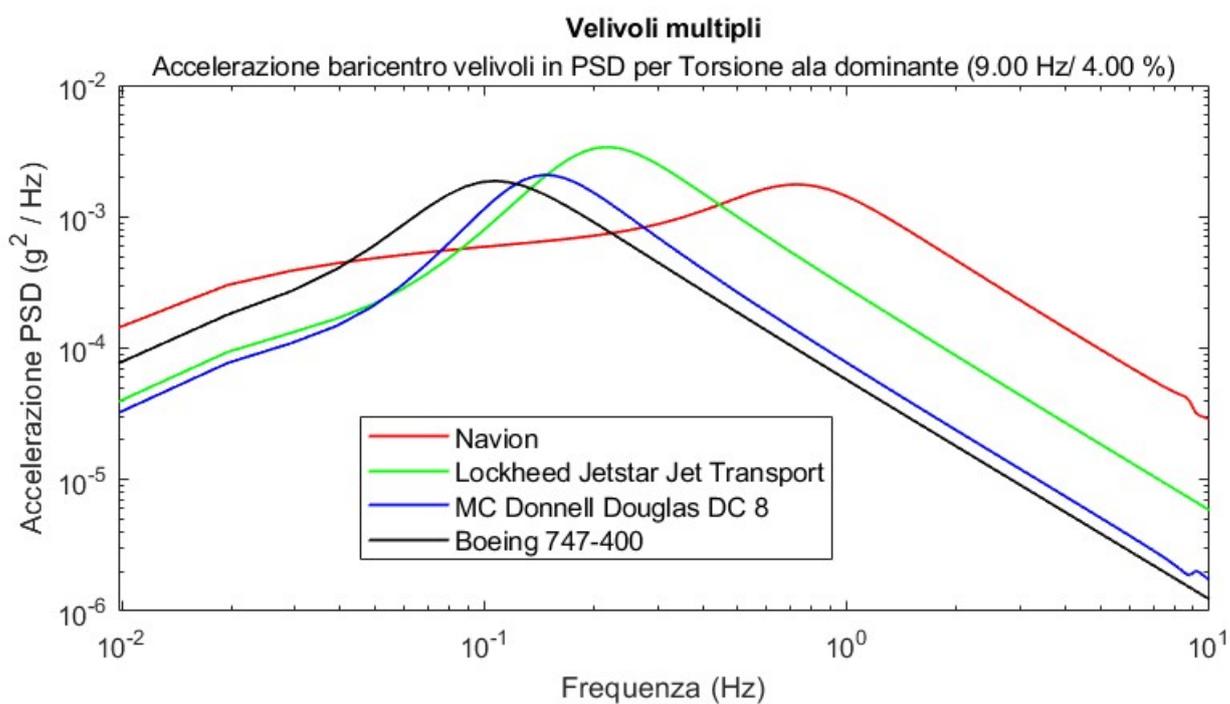


Figura 54: Comparazione dei risultati per la raffica nel dominio di frequenza per modelli di velivolo flessibile: accelerazione PSD per baricentro.

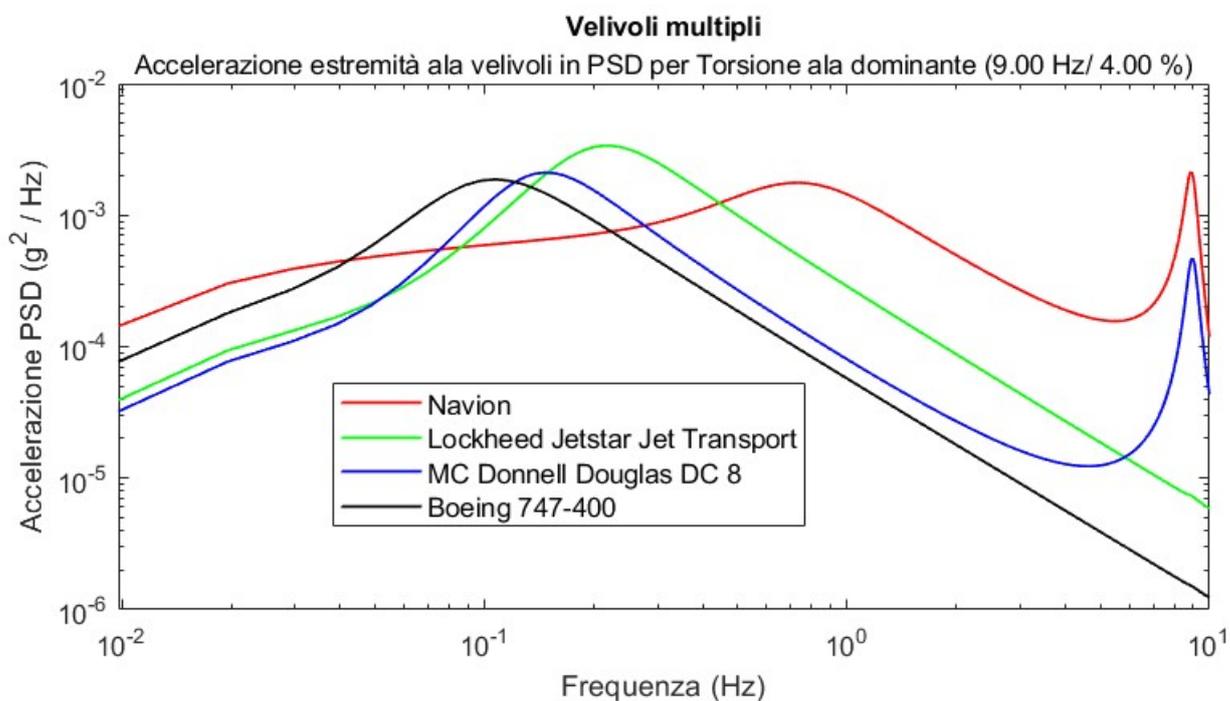


Figura 55: Comparazione dei risultati per la raffica nel dominio di frequenza per modelli di velivolo flessibile: accelerazione PSD per estremità alare.

7 Conclusioni e sviluppi futuri

L'obiettivo principale di questa documentazione è quello di mostrare alcuni effetti dovuti alla azione di una raffica a seconda del modo flessibile, e del carico alare che caratterizza un velivolo. Il modello del velivolo è dotato di un unico grado di flessibilità alla volta, in modo tale da mettere in luce l'effettivo contributo di ogni tipo di deformazione del velivolo. Esso può essere considerato come un'aggiunta al sistema del velivolo rigido. Inoltre, esprimere i coefficienti relativi al modo flessibile per mezzo del metodo di Rayleigh-Ritz ha permesso di mostrare quelli che sono i concetti base dello sviluppo aeroelastico dovuto alla raffica mantenendo non oneroso il carico computazionale richiesto. Per quanto riguarda i carichi aerodinamici, essi sono stati determinati combinando i valori delle coordinate generalizzate in ogni stato di moto possibile (accelerazione, velocità e posizione). Il capitolo 5 mostra i risultati relativi alle risposte ottenute dal velivolo di prova se perturbato dalla sua condizione di equilibrio da raffiche esterne. Nonostante il diverso tipo di analisi, si può notare come alcune risposte delle varie parti del velivolo siano comuni in tutti e tre i casi. Ad esempio, il fatto che le parti più sollecitate, sia in termini di picco che di contributo oscillatorio, sono il piano di coda e l'ala. Il capitolo 6 mostra i risultati relativi alle risposte ottenute da una serie di velivoli caratterizzati da un carico alare differente. E' evidente come il carico alare influisca sia in termini oscillatori che perturbativi. Infatti, i velivoli dotati di maggior inerzia rispetto alla portanza sono in grado di oltrepassare la perturbazione senza subire importanti alterazioni della condizione di equilibrio, cosa che non succede per i velivoli di minor carico alare.

In conclusione, nonostante le approssimazioni inserite, il modello presentato fornisce una plausibile analisi della risposta dinamica del velivolo in tempo reale.

7.1 Futuri sviluppi

La sezione si propone di suggerire alcuni miglioramenti futuri per lo studio fin qui presentato. Lo studio delle risposte dei diversi velivoli potrebbe essere migliorato supponendo di accoppiare i modi di flessione e torsione del velivolo, al fine di comprendere fino a che punto si influenzino l'un l'altro e se una loro combinazione comporti una variazione significativa di risposta alle azioni perturbative di una raffica rispetto ai casi singoli esposti.

Il modello del velivolo trascura anche altri importanti parametri geometrici tipici di un velivolo che determinano una redistribuzione delle forze portanti rispetto ad un'ala rettilinea come l'angolo di freccia o l'angolo diedro dell'ala, oppure del momento rispetto al baricentro del velivolo stesso, come la differenza d'altezza tra il piano di coda e l'ala.

Inoltre, si potrebbero inserire altri effetti aeroelastici come flutter e divergenza. Per quanto riguarda il metodo del carico aerodinamico, esso potrebbe essere calcolato sull'intera ala, implementando modelli che discretizzano la superficie alare come la strip theory. Un ulteriore miglioramento consiste nell'implementazione di un sistema di controllo atto ad attenuare l'azione perturbativa della raffica noti come Gust Load Alleviation (GLA).

Riferimenti bibliografici

- [1] EASA Certification Specifications. Acceptable means of compliance for large aeroplanes, cs-25 and amc-25. the european aviation safety agency (easa), june 2016. amendment 18.

- [2] Enforcement Fairness Act. Part 25—airworthiness standards: Transport category airplanes. *Hand*, 87, 2022.
- [3] P. Donely. Summary of information relating to gust loads on airplanes. Technical report, National Advisory Committee For Aeronautics, 1949.
- [4] R. J. Hakkinen, A.S. Richardson Jr. Theoretical and experimental investigation of random gust loads part i: Aerodynamic transfer function of a simple wing configuration in incompressible flow. Technical Report NACA-TN-3878, Massachusetts Institute of Technology, 1957.
- [5] F. M. Hoblit. *Gust loads on aircraft: concepts and applications*. AIAA, 1988.
- [6] T. De Karman, L. Howarth. On the statistical theory of isotropic turbulence. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A-Mathematical and Physical Sciences*, 164(917):192–215, 1938.
- [7] H. W. Liepmann. On the application of statistical concepts to the buffeting problem. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 19(12):793–800, 1952.
- [8] R. H. Hoh, D. G. Mitchell, I. L. Ashkenas, R. H. Klein, R. K. Heffley, J. Hodgkinson. *Proposed MIL Standard and Handbook—Flying Qualities of Air Vehicles, Volume II: Proposed MIL Handbook*. AFWAL-TR-82-3081 Volume II, Wright-Patterson Air Force Base, OH, 1982.
- [9] E. B. Wilson. Theory of an aeroplane encountering gusts. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2(5):294–297, 1916.
- [10] L. Bairstow, A. Fage. Oscillations of the tailplane and body of an aircraft in flight. *ARC R&M*, 276(2), 1916.
- [11] R. L. Bisplinghoff, H. Ashley, R. L. Halfman. *Aeroelasticity*. Dover Publications, 1983.
- [12] G. Liu, S. Quek. *The finite element method: a practical course*. Butterworth-Heinemann, 2013.
- [13] E. Albano, W. Rodden. A doublet-lattice method for calculating a lift distributions on oscillating surfaces in subsonic flows. *AIAA Journal*, 7(2):279–285, 1969.
- [14] J.D. Anderson. *Emeritus, “Fundamental of Aerodynamics”*. McGraw-Hill, New York, USA, 2001.
- [15] K. M. Roughen, M. L. Baker, T. Fogarty. Computational fluid dynamics and doublet-lattice calculation of unsteady control surface aerodynamics. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 24(1):160–166, 2001.
- [16] C. Kaiser, and D. Friedewald, J. Nitzsche. Comparison of nonlinear cfd with time-linearized cfd and cfd-corrected dlm for gust encounter simulations. *IFASD 2017-International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics*, 2017.
- [17] S. Rao. *Mechanical vibrations*. Pearson,Prentice Hall, 4 edition, 2001.
- [18] A. W. Pila. *Introduction to lagrangian dynamics*. Springer, 2019.

- [19] J. R. Wright, J. E. Cooper. *Introduction to aircraft aeroelasticity and loads*, volume 20. John Wiley & Sons, 2008.
- [20] M. V. Cook. *Flight dynamics principles: a linear systems approach to aircraft stability and control*. Butterworth-Heinemann, 2012.
- [21] L. R. Klein. Analysis of complex elastic structures by a rayleigh-ritz component modes method using lagrange multipliers. Technical report, Princeton University, April 1974.
- [22] D. Balatti, H. Haddad Khodaparast, M. I. Friswell, M. Manolesos, M. Amoozgar. The effect of folding wingtips on the worst-case gust loads of a simplified aircraft model. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, 236(2):219–237, 2022.
- [23] MathWorks. Simulink, reference page, 2024.
- [24] G. L. Teper. Aircraft stability and control data. Technical report, NASA, 1969.
- [25] R. K. Heffley, W. F. Jewell. Aircraft handling qualities data. Technical report, NASA, 1972.
- [26] National Air and Space Museum. Rolls-royce conway rco.12 mark 509 turbofan engine, 2024.a.
- [27] National Air and Space Museum. Rolls-royce rb211 turbofan engine, 2024.b.
- [28] Airliners. Lockheed jetstar, 2024.a.
- [29] Airliners. Navion, 2024.b.
- [30] Airliners. Mcdonnell douglas dc-8, 2024.c.
- [31] Flugzeug info. Boeing 747-400, 2024.
- [32] GlobalAir. Lockheed jetstar, 2024.
- [33] M. H. Sadraey. *Aircraft design: A systems engineering approach*. John Wiley & Sons, 2012.
- [34] M. Cavcar. The international standard atmosphere (isa). *Anadolu University, Turkey*, 30(9):1–6, 2000.

A Tipi di deformazione

A.1 Flessione della fusoliera dominante

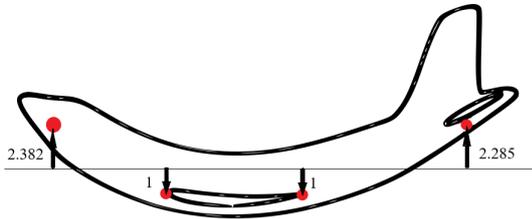


Tabella 1: Modo flessibile simmetrico del velivolo - flessione fusoliera dominante.

| | |
|------------------|--------|
| κ_{eF} | -2.382 |
| κ_{e0} | 1.00 |
| κ_{eC} | 1.00 |
| κ_{eT} | -2.285 |
| γ_{e0} | 0 |
| γ_{eT} | -0.939 |
| κ_{TipLE} | 1 |
| κ_{TipTE} | 1 |

La fusoliera si piega verso il basso, ma non vi è alcun piegamento o rotazione dell'ala. La massa modale è pari a $m_e = 23340kg$.

A.2 Flessione d'ala dominante

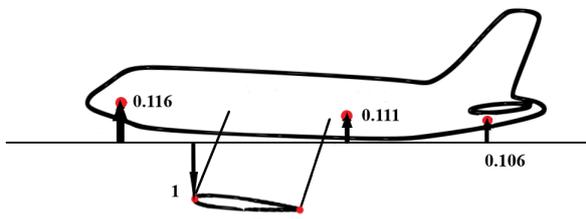


Tabella 2: Modo flessibile simmetrico del velivolo - flessione alare dominante.

| | |
|------------------|---------|
| κ_{eF} | -0.116 |
| κ_{e0} | -0.111 |
| κ_{eC} | -0.111 |
| κ_{eT} | -0.106 |
| γ_{e0} | 0.00077 |
| γ_{eT} | 0.00077 |
| κ_{TipLE} | 0.999 |
| κ_{TipTE} | 1 |

Il modo risultante, con un valore di $A = -9.98$, mostra un'ala che si piega verso il basso e la fusoliera che si alza verso l'alto con un minimo di elevazione. La massa modale è $m_e = 616kg$.

A.3 Torsione d'ala dominante

Considerando un valore di $B = -229$. Inoltre, il valore di massa modale è pari a $m_e = 325kg$.

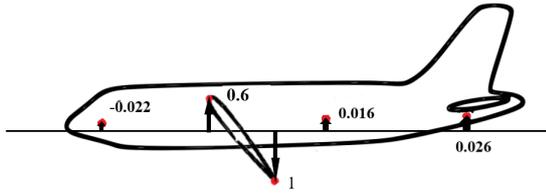


Tabella 3: Modo flessibile simmetrico del velivolo - torsione alare dominante.

| | |
|------------------|---------|
| κ_{eF} | 0.0222 |
| κ_{e0} | -0.0004 |
| κ_{eC} | -0.0016 |
| κ_{eT} | -0.0262 |
| γ_{e0} | -0.0035 |
| γ_{eT} | -0.0035 |
| κ_{TiPLE} | -0.6 |
| κ_{TiPTE} | 1 |

B Velivolo di prova

| | |
|------------------|--------|
| $m[kg]$ | 10000 |
| $W[N]$ | 98100 |
| $S_W[m^2]$ | 30 |
| $S_T[m^2]$ | 7.5 |
| $c[m]$ | 2.0 |
| $b[m]$ | 15 |
| $l_W[m]$ | 0.6 |
| $l_T[m]$ | 7 |
| $a_W[rad^{-1}]$ | 4.5 |
| $a_T[rad^{-1}]$ | 3.2 |
| $I_y[kgm^2]$ | 144000 |
| k_ϵ | 0.38 |
| $V_{EAS}[m/s]$ | 150 |
| $h[ft]$ | 14000 |
| $\rho_0[kg/m^3]$ | 1.225 |
| $w_{g0}[m/s]$ | 6.25 |

Tabella 4: Parametri geometrici ed aerodinamici Velivolo di prova.

C Velivoli in esame

Tabella 5: Parametri Navion.

| | |
|-----------------|--------|
| $m[kg]$ | 1237.5 |
| $m_{eng}[kg]$ | 0 |
| $S_W[m^2]$ | 17.68 |
| $S_T[m^2]$ | 4.10 |
| $c[m]$ | 1.767 |
| $b[m]$ | 10.35 |
| $l_W[m]$ | 0.08 |
| $l_T[m]$ | 5.11 |
| $c_T[m]$ | 1.01 |
| $b_T[m]$ | 8.14 |
| $I_y[kgm^2]$ | 12093 |
| $W/S_W[N/m^2]$ | 686.6 |
| $a_W[rad^{-1}]$ | 4.725 |
| $a_T[rad^{-1}]$ | 4.20 |
| k_ϵ | 0.496 |
| $V_{TAS}[m/s]$ | 54.56 |

| | |
|-----------------|----------------|
| $m[kg]$ | 85500 |
| $m_{eng}[kg]$ | 2061 |
| $S_W[m^2]$ | 249.86 |
| $S_T[m^2]$ | 36.80 |
| $c[m]$ | 7.13 |
| $b[m]$ | 44.11 |
| $l_W[m]$ | 0.65 |
| $l_T[m]$ | 27.91 |
| $c_T[m]$ | 2.662 |
| $b_T[m]$ | 13.82 |
| $I_y[kgm^2]$ | $1.974 * 10^7$ |
| $W/S_W[N/m^2]$ | 3357 |
| $a_W[rad^{-1}]$ | 3.48 |
| $a_T[rad^{-1}]$ | 4.54 |
| k_ϵ | 0.284 |
| $V_{TAS}[m/s]$ | 75.485 |

Tabella 7: Parametri DC-8.

Tabella 6: Parametri Lockheed Jetstar.

| | |
|-----------------|--------|
| $m[kg]$ | 17192 |
| $m_{eng}[kg]$ | 1800 |
| $S_W[m^2]$ | 50.40 |
| $S_T[m^2]$ | 6.75 |
| $c[m]$ | 3.39 |
| $b[m]$ | 16.66 |
| $l_W[m]$ | 0 |
| $l_T[m]$ | 8.28 |
| $c_T[m]$ | 1.3 |
| $b_T[m]$ | 5.196 |
| $I_y[kgm^2]$ | 351060 |
| $W/S_W[N/m^2]$ | 2093 |
| $a_W[rad^{-1}]$ | 4.61 |
| $a_T[rad^{-1}]$ | 4.18 |
| k_ϵ | 0.5327 |
| $V_{TAS}[m/s]$ | 69.595 |

| | |
|-----------------|----------------|
| $m[kg]$ | 286470 |
| $m_{eng}[kg]$ | 5615 |
| $S_W[m^2]$ | 528.55 |
| $S_T[m^2]$ | 36.80 |
| $c[m]$ | 8.466 |
| $b[m]$ | 60.66 |
| $l_W[m]$ | 0 |
| $l_T[m]$ | 34.32 |
| $c_T[m]$ | 4.61 |
| $b_T[m]$ | 22.65 |
| $I_y[kgm^2]$ | $1.578 * 10^7$ |
| $W/S_W[N/m^2]$ | 4711 |
| $a_W[rad^{-1}]$ | 4.94 |
| $a_T[rad^{-1}]$ | 4.47 |
| k_ϵ | 0.427 |
| $V_{TAS}[m/s]$ | 69.43 |

Tabella 8: Parametri Boeing 747.

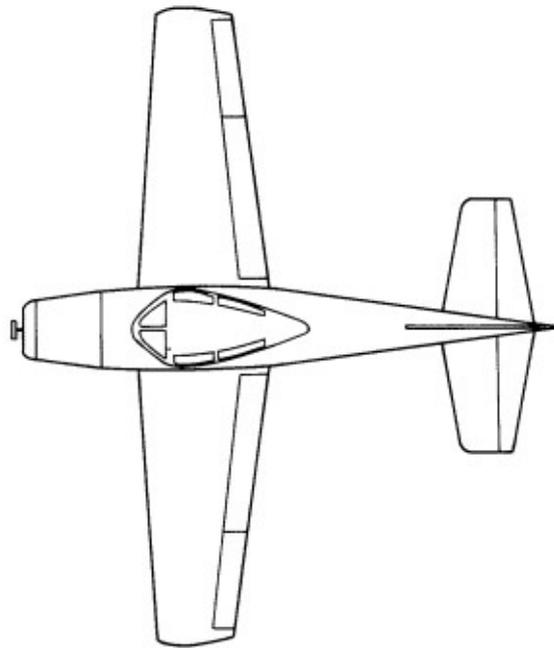


Figura 56: Immagine velivolo Navion.

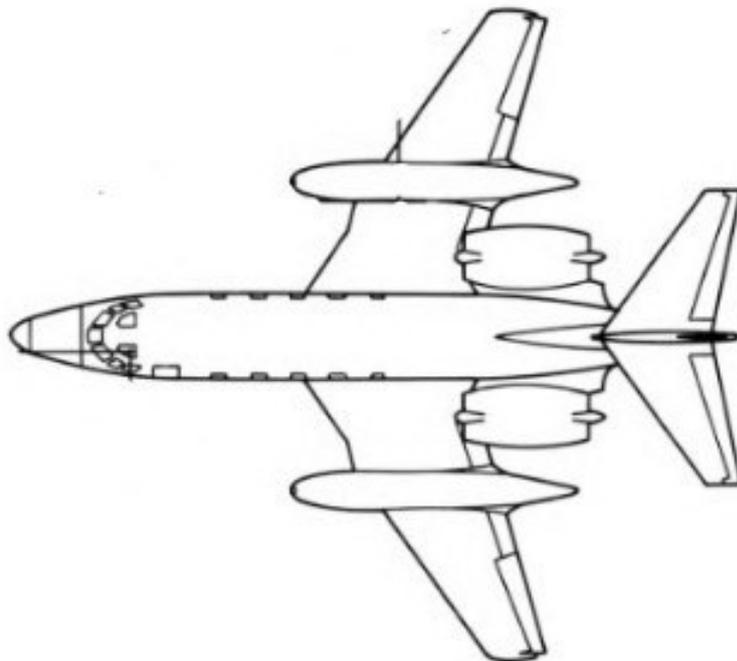


Figura 57: Immagine velivolo Lockheed Jetstar.



Figura 58: Immagine velivolo McDonnell Douglas DC-8.

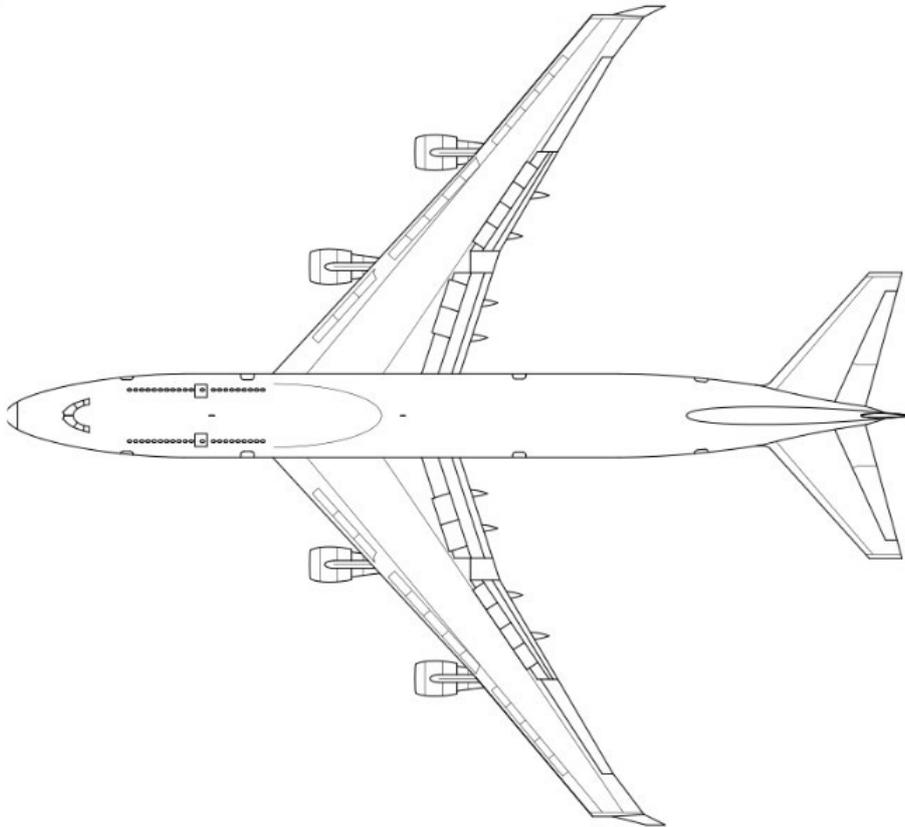


Figura 59: Immagine velivolo Boeing 747.