



**Politecnico  
di Torino**

**Politecnico di Torino**

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Civile

Tesi di Laurea Magistrale

**Metodologia di ottimizzazione per ponti ad arco  
strallati: Interazione arco-impalcato**

Relatori:

Prof. A. MANUELLO BERTETTO

Prof. G.C. MARANO

Ing. J. MELCHIORRE

Candidata:  
Marta Chazalettes

a.a. 2024/2025

## Abstract

Le strutture ad arco risultano particolarmente efficienti per lo sviluppo di ponti sospesi, data la loro capacità di sopportare carichi elevati, la loro stabilità, la loro efficienza strutturale, e la loro capacità di integrarsi nel contesto urbano. L'ottimizzazione della geometria e della forma della struttura risulta fondamentale per la minimizzazione del volume complessivo. Questo, a sua volta, permetta una riduzione dei costi relativi ai materiali e di costruzione. Il numero di parametri strutturali e non da considerare nell'ottimizzazione risulta tuttavia troppo elevato per condurre una ricerca esaustiva di tutte le possibili soluzioni in tempi limitati. D'altro canto, l'utilizzo di metodi basati sul gradiente richiede lo sviluppo di equazioni differenziabili che leghino la funzione obiettivo (minimizzazione del volume) ai parametri di design, operazione che può risultare complessa.

Questa tesi presenta, quindi, l'applicazione di algoritmi genetici, con un numero limitato di parametri, all'ottimizzazione di strutture di ponti ad arco con impalcato. Tale metodo si ispira ai principi della selezione naturale e della genetica, e opera iterativamente su una popolazione di soluzioni distinte. Ad ogni iterazione seleziona il sottoinsieme di soluzioni migliori, con la conseguente evoluzione della popolazione verso quella ottimale. L'ottimizzazione è guidata dalla specifica di variabili genetiche, funzione obiettivo e vincoli. Nell'applicazione considerata le variabili genetiche corrispondono alle metriche selezionabili dall'utente, quali forma dell'arco, sezioni trasversali degli elementi e simili, e manipolabili dall'algoritmo per trovare la soluzione ottimale. La funzione obiettivo equivale alla minimizzazione del volume della struttura. I vincoli, ovvero le condizioni da soddisfare per ritenere valido il risultato dell'ottimizzazione, sono rappresentati dal confronto tra le massime sollecitazioni di Von Mises e la resistenza del materiale.

Nella prima parte della tesi la metodologi descritta è stata utilizzata su una semplice struttura ad arco, utilizzando il software Grasshopper. In questo fase l'ottimizzazione è stata eseguita considerando diverse combinazioni delle variabili genetiche, in particolare considerando forma dell'arco e tipo di sezione trasversale e conseguenti parametri di quest'ultima. È stato così ottenuta la curva di dipendenza del volume ottimale in funzione del carico esterno applicato, con andamento puramente lineare.

Successivamente lo stesso tipo di analisi è stato esteso ad una struttura complessa, composta da arco, impalcato e pendini. Data la maggior complessità della struttura, si è deciso di mantenere costanti alcuni parametri di ingresso. In particolare, l'analisi è stata condotta con un arco a forma circolare, un impalcato a sezione rettangolare cava e i pendini a sezione circolare cava. Con tale configurazione, anche in questo caso, è stato ottenuta la curva di relazione tra volume e carico esterno applicato. Differentemente dal caso precedente, tale dipendenza è risultata crescente ma non puramente lineare.

La metodologia proposta può rappresentare un utile strumento preliminare per il dimensionamento di strutture di ponti ad arco, permettendo una ricerca rapida della soluzione ottimale a seconda delle necessità progettuali.

Come strumento di validazione delle soluzioni ottenute, la tesi propone un sistema di equazioni per descrivere il comportamento e l'interazione della struttura con arco, impalcato e pendini. La soluzione numerica di queste equazioni permetterà di garantire la sicurezza e la funzionalità nelle condizioni previste dei risultati ottenuti con l'ottimizzazione.

# Sommario

1.	<i>Introduzione</i> .....	1
1.1.	Struttura della tesi .....	4
2.	<i>Storia dei ponti ad arco e la loro evoluzione</i> .....	5
2.1.	Origini e sviluppo iniziale.....	5
2.1.1.	Ponti sospesi .....	5
2.1.2.	Ponti strallati .....	6
2.2.	Evoluzione nella progettazione .....	7
2.3.	Arco Circolare e Ponti Strallati.....	7
2.4.	Ottimizzazione dei ponti a travi sospese .....	9
2.4.1.	Analisi di lavori esistenti .....	11
3.	<i>Ottimizzazione Strutturale</i> .....	19
3.1.	Metodologie di Ottimizzazione .....	19
3.2.	Obiettivi dell'ottimizzazione strutturale .....	21
3.3.	Tecnologie emergenti nell'ottimizzazione strutturale .....	22
3.4.	Metodologia utilizzata: Algoritmo genetico .....	23
3.4.1.	Forme dell'arco possibili .....	25
3.4.2.	Sezioni trasversali possibili.....	25
4.	<i>Risultati dell'ottimizzazione</i> .....	29
4.1.	Analisi preliminare.....	29
4.1.1.	Arco parabolico con sezione trasversale quadrata (piena).....	30
4.1.2.	Arco parabolico con sezione trasversale rettangolare (piena) .....	32
4.1.3.	Arco parabolico con sezione trasversale rettangolare (piena) .....	34
4.1.4.	Arco parabolico con sezione trasversale rettangolare (cava) .....	36
4.1.5.	Confronto tra volumi.....	38
4.1.6.	Confronto tra forme dell'arco .....	40
4.2.	Analisi struttura ad arco con impalcato e pendini .....	43
4.2.1.	Arco circolare con sezione trasversale circolare piena e freccia costante .....	44

4.2.2.	Arco circolare con sezione trasversale circolare cava e freccia costante.....	46
4.2.3.	Arco circolare con sezione trasversale circolare piena e freccia variabile .....	48
4.2.4.	Arco circolare con sezione trasversale circolare cava e freccia variabile.....	50
4.2.5.	Confronto tra volumi.....	52
5.	<i>Processo di ottimizzazione .....</i>	<i>55</i>
6.	<i>Equazioni descrittive dell'interazione tra arco e impalcato .....</i>	<i>60</i>
6.1.	Problema delle travi curve .....	61
6.1.1.	Equazioni indefinite di equilibrio .....	62
6.1.2.	Equazioni indefinite di equilibrio per archi circolari .....	65
6.1.3.	Equazioni cinematiche .....	66
6.1.4.	Equazioni costitutive .....	68
6.2.	Soluzione problema dell'arco .....	69
6.2.1.	Calcolo degli spostamenti tangenziali.....	70
6.3.	Arco circolare uniformemente teso con pendini .....	73
6.4.	Equazione dell'impalcato .....	76
6.5.	Sistema Arco – Impalcato .....	79
6.5.1.	Condizioni al contorno.....	81
7.	<i>Conclusione e lavori futuri.....</i>	<i>85</i>
	<i>Bigliografia .....</i>	<i>86</i>
	<i>Indice delle figure .....</i>	<i>91</i>
	<i>Indice dei grafici .....</i>	<i>92</i>

# 1. Introduzione

Le strutture ad arco hanno da sempre esercitato un ruolo decisivo nel progresso e nello sviluppo dell'architettura e dell'ingegneria lungo tutto il corso della storia. Per poter comprendere la loro notevole importanza sia da un punto di vista culturale che strutturale, basti pensare che le prime forme risalgono al periodo compreso fra il IV e III millennio a.C, in Egitto [1].

"Arco non è altro che una fortezza causata da due debolezze; imperorché l'arco negli edifici è composto di due parti di cerchio, i quali quarti cerchi, ciascuno debolissimo per sé, desidera cadere, e opponendosi alla ruina l'uno dell'altro, le due debolezze si convertano in unica fortezza". Così definì Leonardo da Vinci l'arco, primo a comprendere e studiare il funzionamento di queste strutture con un certo rigore.

Le strutture ad arco, grazie alla loro configurazione statica, presentano un funzionamento principalmente a compressione, ma possono anche manifestare un comportamento a flessione, dovuto al fatto che la forma delle strutture non coincide sempre con la curva delle pressioni. La loro architettura offre un efficiente sistema di distribuzione dei carichi, generando spinte laterali e verticali. Tali strutture hanno trovato ampio impiego nella costruzione di ponti, con un'evoluzione significativa nel tempo riguardo ai materiali, in particolare verso l'acciaio.

L'uso di materiali come il calcestruzzo è emerso alla fine del XIX secolo grazie a ingegneri pionieri come Hennebique, Freyssinet e Maillart. Per quanto riguarda l'acciaio, con Darby e successivamente con esponenti come Telford, Brunel ed Eiffel, abbiamo assistito a una straordinaria evoluzione tecnologica nel XIX secolo, culminata nel XX secolo in studi più moderni di Lindenthal, Amman e Freeman.

Relativamente alle strutture in muratura si ripercorre quanto riportato in [2]. Grande importanza hanno svolto gli studi di Pippard, Trantner & Chitty (1936) sulla base di una combinazione di risultati analitici e sperimentali. Notevole influenza hanno avuto gli studi di Heyman (1966) inerenti al metodo di progettazione plastica delle strutture in acciaio applicando i medesimi principi alle strutture ad arco in muratura, con conseguente diretta applicazione dei teoremi dell'analisi limite plastica. Livesley

(1978) sfruttò i risultati e gli studi di Heyman per ottenere dei risultati mediante un algoritmo di programmazione lineare.

Sulla base delle pubblicazioni di Heyman e Livesley sono stati condotti ulteriori studi da parte per esempio di Smith FW, Harvey WJ & Vardy AE (1990) e Harvey (1991), comunque in merito alle strutture in muratura con particolare attenzione all'utilizzo dei teoremi dell'analisi limite. Fra gli altri, sempre con riferimento all'analisi rigido plastica si ricordano gli studi di Gilbert & Melbourne (1995) e di Boothby & Brown (1992).

Un altro metodo adottato per comprendere il funzionamento delle strutture ad arco è quello legato all'analisi elastica con diverse pubblicazioni ad opera di Bridle & Hughes (1989), McNeely, Archer & Smith (1989). Ricerche più recenti sulle leggi costitutive della muratura non armata, hanno portato alla loro implementazione in codici ad elementi finiti in relazione alle strutture ad arco. In questo ambito si fa quindi riferimento alle ricerche condotte da Drucker & Prager (1997), Taylor & Mallinder (1987-1993), Mallinder (1997), Choo, Coutie & Gong (1991), Loo & Yang (1991).

Altri ricercatori hanno invece adottato delle analisi elastiche non lineari come Pi YL e Nazmi (1997), soprattutto con riferimento alla resistenza di archi in acciaio ed ai fenomeni di instabilità ad essi connessi. Anche lo studio di strutture ad arco secondo analisi non lineari ha avuto un grande coinvolgimento nella comprensione delle strutture in esame con molteplici ricerche quali quelle di YL Pi et al. (2007), Pi & Trahair (1998), Tsiatas & Babouskos (2017), Dimopoulos & Gantes (2008), Zhang et al. (2019), Li et al. (2019), atte ancora allo studio dell'instabilità.

Altro ambito di studio risulta essere quello dell'individuazione della configurazione geometrica ottimale di tali strutture per cui ulteriori ricerche sono state condotte. Si fa riferimento, ad esempio, a Marano et al. (2014), Lewis (2016), tramite un modello matematico, Wang & Wang (2015) con uno studio sugli archi funicolari, nonché ricerche relative alla minimizzazione del volume del materiale strutturale e dell'eccentricità delle sollecitazioni interne come, per esempio, quella condotta da Marano et al. (2018), A. Manuello Bertetto & Marano (2022) [3].

Altri lavori sono relativi alla determinazione del design con il miglior costo, trovando un profilo ottimale come quello in [4]. Sicuramente oltre ai metodi analitici ed ai metodi numerici, come quello posto alla base del presenta lavoro [5], assumono una rilevante importanza anche il metodo numerico agli elementi finiti. Tale metodo può naturalmente essere applicato intendendo la struttura come una serie di elementi trave fra loro connessi, al fine di approssimare la geometria curvilinea dell'arco. Tali segmenti possono dunque essere rettilinei o curvilinei, come nel metodo presentato da Ibrahimbegovic (1995) e nel metodo presentato da Tufekci et al. (2017) con il quale è possibile ottenere dei risultati non affetti da errori e numericamente corretti anche con un numero limitato di elementi, infatti lo studio si basa sulla soluzione analitica dell'equazione differenziale che governa le travi curve planari.

Ulteriore e alternativo approccio è invece quello proposto da Bauer (2016) [6], in cui si sfrutta l'analisi isogeometrica, con la quale si definisce un elemento di una curva spaziale in modo non lineare assumendo la teoria di Bernoulli che includa la torsione ma senza deformazione. L'analisi isogeometrica (IGE), combina progettazione e analisi utilizzando le funzioni di base del Computer Aided Design (CAD) al fine di approssimare la soluzione nel contesto dell'analisi degli elementi finiti. L'analisi isogeometrica sfrutta essenzialmente il concetto di NURBS che genera delle funzioni di base utilizzate per costruire un modello geometrico esatto.

Il quantitativo di studi effettuati nell'ambito dell'analisi strutturale degli archi, di cui si è indicato qualche esempio, mostra come ancora oggi tali tipologie di strutture risultano di interesse e come sia in evoluzione la ricerca in merito al comportamento strutturale delle stesse. [7]



## 1.1. Struttura della tesi

Nel lavoro presentato in questa tesi magistrale, in primo luogo si riporta un'analisi dei lavori esistenti per quel che riguarda l'ottimizzazione strutturale di ponti.

In seguito, viene descritta l'ottimizzazione utilizzata, basata su algoritmi genetici. Vengono quindi presentate le diverse soluzioni strutturali ottenute.

Dapprima si considera una struttura costituita da un singolo elemento ad arco. In seguito, viene considerata una struttura più complessa, formata da arco, impalcato e pendini che collegano questi ultimi, emulando la struttura di un ponte sospeso.

Lo scopo delle ottimizzazioni strutturali in questo caso è quello di trovare il volume minimo per tali strutture, che rappresenta la funzione obiettivo dell'algoritmo.

Inoltre, viene proposta la metodologia di ottimizzazione eseguita e il processo con cui è stata compiuta. A tale scopo sono stati utilizzati il software Rhino 8 e Grasshopper 3D. Per l'analisi strutturale è stato utilizzato il software Karamba3D.

In ultimo vengono sviluppate le equazioni che descrivono il comportamento dell'arco e dell'impalcato e la loro interazione quando collegati dai pendini.

L'obiettivo futuro sarà quello tradurre queste ultime in un software di calcolo numerico per ottenere la validazione delle ottimizzazioni eseguite, e quindi confrontare i valori di sollecitazioni ottenuti nei due casi, partendo dalle stesse condizioni iniziali.

## 2. Storia dei ponti ad arco e la loro evoluzione

### 2.1. Origini e sviluppo iniziale

#### 2.1.1. Ponti sospesi

I ponti ad arco sospesi, noti anche come ponti ad archi sospesi, costituiscono una straordinaria espressione dell'ingegneria moderna, unendo l'estetica architettonica alla funzionalità strutturale. Questo tipo di ponte sfrutta la resistenza dell'arco e il supporto delle sospensioni per distribuire il carico in modo efficace, permettendo di coprire lunghezze delle campate notevoli. Le origini degli archi risalgono a civiltà antiche, dove venivano utilizzati in edifici monumentali e infrastrutture. Con l'avvento di nuove tecnologie e materiali, i ponti ad arco sospesi hanno visto un'evoluzione, diventando simboli della capacità umana di innovare e costruire opere straordinarie che sfidano le leggi della fisica.

In Italia i primi ponti costruiti furono:

- il ponte San Benedetto ubicato a Padova, sospeso su corde verticali di ferro, lungo 26,80 metri e largo 3,75 m, costruito per opera del colonnello del Genio Anton Claudio Galateo per congiungere la riviera di San Benedetto con la strada del Patriarcato [8];
- il ponte di Villa Paolina (più propriamente una passerella) a Sesto Fiorentino, in località Quinto Alto, progettato dall'ingegnere Antonio Carcopino tra il 1825 e il 1828, e il ponte Leopoldo II, del 1833, che furono i primi ponti italiani a cavi metallici [8];
- il ponte Ferdinando sul Garigliano, che fu nel 1832, il primo ponte sospeso italiano carrabile a catene di ferro forgiate ed il sesto di questo tipo ad essere costruito in Europa. [8]

### 2.1.2. Ponti strallati

Gli archi strallati, noti anche come ponti strallati, rappresentano un'importante evoluzione nell'ingegneria civile, combinando l'ingegneria dell'arco con le tecnologie moderne dei materiali. La storia degli archi risale a diverse migliaia di anni fa, con i primi esempi visibili in strutture architettoniche antiche. Tuttavia, i ponti strallati come li conosciamo oggi sono un'invenzione del XIX secolo.

Durante l'era romana, l'arco era principalmente utilizzato per supportare strutture come acquedotti, ponti e edifici. Con il crollo dell'Impero Romano e il successivo rinascimento, vi è stata una riscoperta delle tecniche architettoniche classiche.

Le prime applicazioni di tale metodo di costruzioni di ponti risalgono ai secoli XVII e XIX, in particolare in Italia (Fausto Veranzio), in Germania (Immanuel Löscher) ed in Inghilterra (Redbath and Brown).

Il primo progettista di un ponte di questo tipo, anche se solo in via teorica, è Fausto Veranzio, eclettica figura di letterato ed inventore, che nella sua opera "Machinae Novae" tra tante invenzioni presenta anche un "pons ferreus", con impalcato di legno e stralli costituiti da catene.

La prima realizzazione concreta, non solo teorica, risale al 1784, ed è un ponte a Freyberg dovuta al carpentiere tedesco Immanuel Löscher. Purtroppo, ci furono due crolli di opere di questo tipo, in Inghilterra sul fiume Tweed nel 1818 (Dryburgh Abbey Bridge) ed in Germania sul Saale nel 1824, che perciò fermarono per più di un secolo lo sviluppo di questo schema.

Soltanto nel 1938 Franz Dischinger iniziò a riscoprire il ponte strallato proponendo un ponte ferroviario sospeso a doppio binario sul fiume Elba presso Amburgo, con una luce unica di 750 m, nel quale la sospensione delle parti laterali della luce centrale era prevista coi tiranti inclinati a ventaglio uscenti dalla sommità delle torri. Dischinger pubblicò i risultati dei suoi studi solo nel 1949, e subito dopo, tra il 1950 e il 1952, numerosi progetti di ponti strallati furono proposti in Germania per la ricostruzione di alcuni ponti sul fiume Reno.

Il primo ponte strallato moderno è il Strömsund Bringe (Svezia) di 183 m realizzato sempre da Dischinger nel 1955. [9]

Ora le tecnologie si sono evolute in maniera molto impressionate; infatti, si è arrivati a costruire il ponte più lungo al mondo con luce pari a 2883 m, in particolare il Ponte Rion Antrion.

## 2.2. Evoluzione nella progettazione

Il concetto di archi strallati ha preso piede nel XIX secolo, quando i progressi nei materiali – in particolare l'acciaio e il calcestruzzo – hanno aperto la strada a nuove possibilità di progettazione. La combinazione della forma dell'arco con i tiranti, o pendini, ha permesso di trasferire i carichi in maniera più efficiente, riducendo la quantità di materiale necessario e creando strutture più leggere e agili, così anche da ridurre i costi complessivi.

## 2.3. Arco Circolare e Ponti Strallati

L'arco circolare è una particolare forma di arco che ha trovato una vasta applicazione nei ponti strallati. Caratterizzato da una curvatura uniforme, l'arco circolare permette una distribuzione efficiente delle forze, riducendo al contempo la torsione e migliorando la stabilità generale della struttura.

Uno dei più noti esempi di ponte strallato con un arco circolare è il Ponte Centrale di Reggio Emilia, completato nel 2011, progettato dall'architetto e ingegnere Santiago Calatrava (in Fig.2). Questo ponte è sorprendente non solo per la sua funzione, ma anche per la sua eleganza e il design innovativo, che abbina un arco circolare a un impalcato sostenuto da pendini. La forma dell'arco consente una forte capacità di carico e un'estetica distintiva che si integra nel paesaggio. Il ponte Centrale, perfettamente visibile dall'autostrada A1 e dalla linea ad Alta Velocità, si pone come uno degli elementi cardine per posizione e dimensioni.

Si tratta di un grande ponte ad arco a via inferiore, costituito da una luce di oltre 220 metri, e con un arco centrale alto 50 metri circa. Esso è composto principalmente da:

due spalle laterali, l'impalcato – montato come una spina dorsale a un cassone centrale a cui sono saldate le costole su cui transitano le automobili –, l'arco e le 50 coppie di pendini. A sorreggere l'impalcato è l'arco che, tramite i pendini, scarica il peso sulle spalle poste alle due estremità. Tutti gli elementi sono in acciaio verniciato bianco, ad eccezione delle spalle in cemento armato. [10]



Figura 1 – Ponte centrale di Reggio Emilia (Nicola Tampelloni, CC BY-SA 4.0)

Un altro esempio tangibile di strutture ad arco è rappresentato dai ponti strallati, in cui l'arco e i pendini interagiscono in modi complessi per sostenere l'impalcato. Tra i più celebri ponti strallati con raggio circolare, possiamo citare il Ponte di Millau in Francia e il Ponte delle Americhe a Panama (riportato in Fig.3), entrambi noti per la loro eleganza e per l'efficienza strutturale.

Il ponte delle Americhe attraversa l'ingresso sul Pacifico del canale di Panama nei pressi di Balboa, vicino alla città di Panama. Fu costruito tra il 1952 ed il 1962 dagli Stati Uniti spendendo 20 milioni di dollari.

Il ponte è del tipo ad arco, con una lunghezza di 1,654 m suddivisi in 14 campate da riva a riva; l'arco principale misura 344 m. Il punto più alto è a 117 m sopra il livello

del mare; la luce più alta è 61,3 m sul livello dell'acqua. Esistono ampie rampe d'accesso sui due lati ed un marciapiede per ogni lato.

Dal suo completamento nel 1962 fino all'apertura del Ponte del Centenario nel 2004, il ponte delle Americhe fu una parte fondamentale della strada Panamericana, in quanto era il solo ponte permanente ad attraversare il canale e quindi ad unire il Nordamerica con il Sudamerica dalla apertura del canale avvenuta nel 1914 (un piccolo ponte mobile stradale fu costruito nei pressi delle chiuse di Gatún ed uno stradale e ferroviario vicino a Miraflores nel 1942, ma entrambi sono utilizzabili solo quando le paratie delle chiuse non sono aperte). [11]



*Figura 2 – Ponte centrale delle Americhe a Panama (Santiago Bernard R)*

#### **2.4. Ottimizzazione dei ponti a travi sospese**

Le strutture ad arco con impalcato sostenuto da pendini rappresentano una delle soluzioni più avanzate nel campo dei ponti moderni, combinando l'eleganza estetica a funzioni strutturali altamente efficienti. Questo tipo di sistema architettonico sfrutta l'interazione tra l'arco e i pendini, che sono cavi o barre inclinati che sostengono l'impalcato, favorendo la distribuzione ottimale dei carichi. L'efficacia di questa

configurazione deriva dalla capacità dell'arco di portare carichi tramite compressione, mentre i pendini trasferiscono le tensioni verso l'arco stesso.

L'ottimizzazione dei ponti a travi sospese rappresenta una sfida significativa per gli ingegneri strutturali. Anche se i primi studi su questo argomento risalgono a più di 40 anni fa, la ricerca in quest'area ha visto un notevole aumento di interesse negli ultimi dieci anni, con oltre la metà delle pubblicazioni recenti. In passato, le tecniche di ottimizzazione si sono concentrate principalmente sulle forze dei cavi e sui design ottimali per ridurre i costi, che insieme costituiscono l'80% della ricerca precedente in questo campo. Tuttavia, nell'ultimo decennio, si è sviluppato un interesse crescente nell'applicare algoritmi di ottimizzazione a vari ambiti, come la progettazione di ponti ibridi con impalcato rinforzati in fibra e il monitoraggio di strutture esistenti, nonché nello sviluppo di dispositivi di controllo per migliorare la risposta sismica.

I ponti a travi sospese comprendono tre elementi strutturali principali: l'impalcato, le torri e i cavi di sospensione, che sostengono l'impalcato lungo la sua lunghezza attraverso cavi inclinati. Questo approccio consente la realizzazione di ponti con ampie luci e impalcato sottili. L'impalcato funge da trave continua elastica, supportata dai cavi inclinati che forniscono supporto verticale e una precompressione naturale.

I cavi di sospensione trasferiscono il peso dell'impalcato alle torri, le quali, esercitando compressione, trasferiscono il carico alle fondamenta. Caratterizzati da un'alta ridondanza, questi ponti sono influenzati dalla rigidità degli elementi portanti e dalla distribuzione delle forze nei cavi; quindi, costituiscono una soluzione strutturale efficace per luci di media e lunga distanza, ampiamente adottata a livello globale. [8]

Progettare ponti a travi sospese è un compito complesso che prevede la risoluzione di vari problemi, tra cui la definizione della struttura, delle sezioni trasversali dei componenti, la distribuzione delle forze dei cavi, le fasi costruttive e gli effetti geometrici non lineari. Per i ponti in calcestruzzo, devono essere considerati anche gli effetti temporali. Le tecniche di ottimizzazione si rivelano particolarmente utili per affrontare le sfide di design di strutture grandi e complesse come i ponti a travi sospese, poiché consentono di elaborare una grande quantità di dati, riducendo i costi

dei materiali e fornendo soluzioni sia economiche che strutturalmente efficienti. Inoltre, queste tecniche sono valide per affrontare vari problemi all'interno di queste strutture complicate, grazie alle loro capacità decisionali.

Gli algoritmi di ottimizzazione lavorano modificando iterativamente le variabili di design per migliorare il progetto attuale verso una soluzione ottimale. Esistono numerosi metodi di ottimizzazione, che si possono dividere in approcci basati sul gradiente e non gradiente.

Il metodo basato sul gradiente richiede il calcolo delle derivate della funzione obiettivo e dei vincoli di design rispetto alle variabili di design, con analisi di sensibilità che indicano in quale direzione modificare le attuali variabili per raggiungere una soluzione ottimale. In contrasto, gli approcci non basati sul gradiente minimizzano la funzione obiettivo senza necessitare delle derivate, impiegando tecniche come algoritmi evolutivi, genetici o di annealing simulato.

Queste tecniche rientrano anche nel campo delle strategie di ottimizzazione non convesse, mentre le strategie basate su ottimizzazione convessa tendono a convergere nella ricerca di un'ottima soluzione locale in tempi polinomiali.

L'ottimizzazione dei ponti a travi sospese di solito include una vasta gamma di variabili e vincoli di design, portando spesso a problemi che risultano computazionalmente impegnativi. [12]

#### 2.4.1. Analisi di lavori esistenti

Il calcolo delle forze nei cavi è fondamentale per progettare ponti a travi sospese, distinguendoli da altre tipologie di ponti. Il tensionamento dei cavi è essenziale per gestire la geometria, distribuire le sollecitazioni e correggere eventuali errori costruttivi. Di conseguenza, molti ricercatori hanno utilizzato algoritmi di ottimizzazione per individuare la corretta distribuzione delle forze nei cavi, rappresentando il 42,2% delle ricerche analizzate. I primi studi risalgono agli anni '70 e '80, includendo lavori che considerano come variabili sia le forze sia le aree dei cavi.



Feder [13] ha introdotto un metodo basato su criteri di ottimalità per calcolare le forze di precompressione dei cavi in strutture in acciaio, prendendo in considerazione sollecitazioni e momenti flettenti. Il metodo si avvale di coefficienti influenzabili e risolve il problema mediante equazioni lineari con il metodo dei minimi quadrati.

Furukawa e collaboratori [14] hanno adottato un criterio di energia minima di deformazione per calcolare le forze nei ponti in acciaio, utilizzando coefficienti di influenza per stabilire la funzione obiettivo, garantendo che il carico morto non provochi momenti flettenti alla base delle torri. Impiegando il metodo variabile metric, hanno applicato l'algoritmo BFGS per minimizzare la funzione obiettivo. Hanno inoltre esteso questo metodo ai ponti in calcestruzzo [15], tenendo conto del creep, e hanno espresso le forze nei tendini come funzioni lineari delle forze nei cavi.

Osuo e il suo gruppo [16] hanno sviluppato un metodo per calcolare gli spessori degli shim, ottimizzando la lunghezza e le forze dei cavi in ponti con torri flessibili, risolvendo il problema minimizzando il prodotto scalare del vettore shim.

Kasuga e colleghi [17] hanno investigato gli aggiustamenti delle forze nei cavi, incluso l'effetto del creep del calcestruzzo, mediante una matrice di influenza e risolvendo problemi di programmazione non lineare per minimizzare il lavoro richiesto da queste forze.

Wang et al. [18] hanno esplorato quattro approcci per ottimizzare le forze nei cavi, con l'obiettivo di ridurre al minimo deformazioni e tensioni causate dal peso del ponte. Hanno valutato: la riduzione della somma dei quadrati delle deformazioni verticali nei punti di ancoraggio sull'impalcato (MMSVD), la riduzione del momento massimo lungo l'impalcato (MMM), la trave continua (CBM) e la trave semplicemente sostenuta (SBM). Quest'ultima è stata ritenuta la più efficace sulla base delle deformazioni flettenti e verticali.

Janjic et al. [19] hanno proposto un metodo di forza unitaria (UFM) per identificare le forze nei cavi ottimali, mirando a ottenere una distribuzione ideale del momento flettente lungo l'impalcato del ponte sotto carico morto. Questo metodo tiene conto della sequenza costruttiva, delle non linearità geometriche e degli effetti temporali come creep e ritiro del calcestruzzo, oltre al rilassamento dei tendini di precompressione.

Sung et al. [20] e Lee et al. [21] hanno lavorato sull'ottimizzazione delle forze nei cavi per ponti in acciaio asimmetrici. Sung et al. hanno impiegato una matrice di influenza delle forze per minimizzare l'energia totale di deformazione, espressa come funzione quadratica. Lee et al. hanno utilizzato un approccio a due fasi, basato sul metodo del carico unitario, per definire la distribuzione desiderata del momento flettente nella fase finale sotto carico morto e precompressione.

Sun et al. [22] hanno implementato l'algoritmo della regione di fiducia per stabilire le forze ottimali nei cavi, con l'obiettivo di ridurre l'energia di deformazione flettente in impalcato e torri sotto carichi di tipo permanente.

Baldomir e Hernández [23], insieme ad altri [24, 25], hanno minimizzato il volume dei cavi in un ponte in acciaio a lunga campata grazie a un algoritmo di programmazione quadratica sequenziale (SQP) basato sul gradiente e usando differenze finite per calcolare le sensibilità.

Yu et al. [26] hanno sfruttato il metodo del fattore di carico sconosciuto (ULF) tramite Midas/Civil per ottimizzare le forze nei cavi di un ponte asimmetrico, usando la matrice di influenza e definendo vincoli su deformazioni, reazioni e forze interne.

Hassan et al. [27] hanno determinato le forze dei cavi in ponti acciaio-composito usando un algoritmo genetico a codifica reale (RCGA), focalizzandosi sulla minimizzazione della radice quadrata della somma dei quadrati (SRSS) delle

deflessioni nei nodi dell'impalcato e delle torri. In seguito [28], hanno applicato lo stesso algoritmo per calcolare le aree dei cavi, puntando a ridurre il peso dell'acciaio. Entrambi gli studi hanno utilizzato curve B-spline per descrivere la distribuzione delle forze nei cavi, gestendo così l'elevato numero di variabili.

Zhang et al. [29] hanno proposto una strategia a due fasi per ottenere le tensioni ottimali dei cavi nei ponti con carico morto, applicando il metodo degli elementi finiti (FEM) e un metodo di programmazione quadratica considerando le non linearità geometriche, questo applicato a ponti sospesi con cavi rigidi.

Lonetti e Pascuzzo [30, 31] hanno creato una formulazione per calcolare le migliori forze di precompressione e le sezioni trasversali dei cavi in ponti auto-ancorati, utilizzando la FEM per analizzare le non linearità geometriche e i vari tipi di carichi. Hanno considerato vincoli sugli stati limite, tensioni massime ammissibili e deflessioni, usando l'ottimizzatore SNOPT per risolvere il problema di programmazione non lineare vincolato.

Asgari et al. [32, 33] hanno presentato un approccio di ottimizzazione multi-vincolo, applicando un problema inverso con il metodo del carico unitario per ponti a lunga campata. Song et al. [34] hanno ridotto l'energia di deformazione totale della trave e della torre per ottimizzare le forze dei cavi in ponti di grande luce.

Sun e Xiao [35] hanno sviluppato un metodo per ottimizzare lo stato di carico morto nei ponti sospesi ancorati a terra, basato sul metodo della trave continua e della zona fattibile, utilizzando ANSYS APDL per minimizzare l'energia di deformazione flettente e regolando le forze dei cavi ancorati a terra tramite i momenti pieganti delle torri.

Sung et al. [36] hanno studiato l'ottimizzazione nella pianificazione della costruzione impiegando la tecnica di erezione a sbalzo. Hanno calcolato le forze sui cavi riducendo

al minimo la differenza tra le deformazioni finali e gli obiettivi di costruzione stabiliti. Sono stati presi in considerazione i vincoli inerenti alle forze assiali dei cavi per ogni fase dell'erezione. Hanno integrato l'ottimizzazione tramite Sciame di Particelle (PSO) e Annealing Simulato (SA) in un algoritmo genetico classico (GA) per migliorare le possibilità di evitare minimi locali.

Carpentieri et al. [37] hanno creato un algoritmo dedicato alla progettazione ottimale della sequenza di pretensionamento dei cavi. Le forze di pretensionamento necessarie per ottenere una distribuzione ideale del momento flettente sul ponte sono state calcolate mediante la risoluzione di un problema di tipo lineare. Fabrocino et al. [38] hanno determinato le forze di precompressione in ponti con strutture combinate in acciaio e composito per conseguire una distribuzione desiderata del momento flettente sulle travi longitudinali. Per ottimizzare l'uso dei materiali del ponte, è stata utilizzata una matrice di influenza delle forze dei cavi, definendo allo stesso tempo la distribuzione mirata del momento flettente.

Ha et al. [39] hanno proposto un algoritmo in tre fasi finalizzato all'ottimizzazione delle tensioni iniziali e del peso totale dei cavi impiegando un'analisi non lineare e inelastica. È stato sviluppato un metodo fondato su un algoritmo genetico micro ( $\mu$ GA) che utilizza una matrice di carico unitario per ridurre il carico computazionale. Hanno ottenuto le tensioni iniziali minimizzando la somma quadratica delle deflessioni verticali del ponte e delle deflessioni orizzontali dei piloni. Le aree dei cavi sono state ottimizzate minimizzando il loro peso totale sotto condizioni di carico permanenti e variabili, tenendo conto delle tensioni iniziali già calcolate. Sono stati considerati vincoli relativi alle tensioni dei membri e alle deflessioni, sia verticali del ponte che orizzontali dei piloni.

Nel contesto dei ponti a più campate, Baldomir et al. [40] hanno cercato di minimizzare il volume dei cavi nel ponte Forth Replacement Crossing, considerando

due variabili progettuali per ogni cavo (l'area della sezione trasversale e la forza di precompressione) per ottenere la geometria desiderata sotto il proprio peso. Hanno utilizzato il software commerciale Altair Optistruct v11 (2013) per affrontare il problema di ottimizzazione. Cid et al. [41] hanno identificato le posizioni di ancoraggio, le aree e le forze dei cavi in un ponte a più campate dotato di torri in calcestruzzo e un impalcato in acciaio, tenendo conto delle non linearità geometriche. L'ottimizzazione del volume d'acciaio dei cavi è stata realizzata tramite un algoritmo SQP basato sul gradiente, con sensibilità calcolate utilizzando il metodo delle differenze finite. Arellano et al. [42] si sono concentrati anch'essi sui ponti a più campate per calcolare le lunghezze di sovrapposizione dei cavi in strutture con cavi incrociati, considerando come funzioni obiettivo il costo minimo del sistema di cavi, la massima deformazione della parte superiore del pilone e il carico variabile alternato massimo sul ponte. Hanno risolto il problema multi-obiettivo utilizzando l'algoritmo genetico NSGA II (Non-dominated Sorting Genetic Algorithm II).

Wang et al. [43] hanno presentato un'ottimizzazione in due fasi per la pianificazione del tensionamento nel processo di trasformazione del sistema (STP) di un ponte a travi sospese costruito con un metodo di avanzamento incrementale. Nella prima fase, hanno effettuato un'analisi di sensibilità globale utilizzando una rete neurale a propagazione all'indietro (BPNN) per definire una tensione unica su un cavo, minimizzando così i costi di costruzione. Nella seconda fase, un metodo di progettazione ottimizzata supportato da BPNN è stato impiegato per selezionare lunghezze di tiraggio a due step, garantendo che lo schema ottimizzato rispetti più principi di controllo necessari per un STP di successo.

Guo et al. [44] hanno affrontato l'ottimizzazione delle forze dei cavi in un ponte curvo con una trave a scatola in acciaio, combinando l'uso dell'algoritmo SA con curve di interpolazione cubiche B-spline per rappresentare efficacemente la distribuzione delle forze dei cavi.

A partire dal 2009, l'uso degli algoritmi di ottimizzazione si è ampliato per includere problematiche diverse dall'ottimizzazione delle forze nei cavi e dal design ottimale, con circa il 20% degli articoli recenti che presenta nuove applicazioni. [12]

Ricerche significative, come quella di Park et al. [45], hanno utilizzato metodi di penalizzazione per aggiornare modelli di elementi finiti in base a misurazioni vibranti. In altri studi sul monitoraggio della salute strutturale (SHM), è stata posta l'attenzione sull'ottimizzazione dei sensori per migliorare la diagnosi dei danni. Per esempio, Azarbayejani et al. [46] hanno trattato la questione della rete di sensori come un problema multi-obiettivo, integrando una funzione che gestisce incertezze e costi.

Ulteriori ricerche hanno impiegato algoritmi genetici e metodi di codifica avanzati per migliorare l'ottimizzazione della posizione dei sensori nei ponti. Gli algoritmi di ottimizzazione sono anche stati utilizzati per valutare e identificare le condizioni dei ponti esistenti, monitorando variabili cruciali come la tensione nei cavi e le forze interne all'interno delle travi. Parallelamente, sono stati ottimizzati dispositivi di controllo per migliorare la risposta dinamica dei ponti, utilizzando diverse strategie di ottimizzazione per affinare l'efficacia di smorzatori e sistemi di isolamento.

Il tema del "design ottimale" comporta la necessità di tenere in considerazione diversi tipi di variabili: quelle legate al dimensionamento (come le aree dei cavi e le dimensioni trasversali del deck e delle torri), quelle meccaniche (come le forze di precompressione dei cavi), geometriche (inclusa l'altezza delle torri e le lunghezze delle campate laterali e centrali, oltre alle posizioni di ancoraggio dei cavi) e topologiche (quali il numero di cavi). La presenza di una vasta gamma di variabili e vincoli, che spesso sono non lineari e in conflitto tra loro, porta a un contesto di design non convesso, rendendo il problema più complesso e costoso dal punto di vista computazionale rispetto a quello relativo all'ottimizzazione delle forze dei cavi.

Le norme e i codici di progettazione hanno un'influenza significativa sulla definizione del problema di design ottimale. Durante la fase di analisi, diverse variabili come le

condizioni di carico e gli effetti da considerare nel processo di progettazione, oltre al tipo di analisi strutturale da utilizzare, giocano un ruolo importante. Nella successiva fase di ottimizzazione, i criteri di servizio e di resistenza indicati nei codici devono essere tradotti in vincoli di progettazione che devono essere rispettati affinché il design risulti praticabile.

Quando si esaminano i metodi di ottimizzazione, sia basati sul gradiente che non gradiente, emerge che non vi è differenza nella valutazione dei vincoli. I metodi basati sul gradiente, infatti, richiedono uno sforzo supplementare per la formulazione e l'implementazione delle derivate necessarie all'analisi di sensibilità, ciò rende più accessibile l'uso di approcci non basati sul gradiente. Tuttavia, la complessità della fase di analisi, soprattutto quando ci sono molte variabili di design, può essere gestita in modo efficace attraverso l'uso di strategie di ottimizzazione convessa. [12]

Riguardo ai tipi di ponte analizzati, risulta che l'85,3% degli articoli dedicati all'“ottimo design” si è concentrato sui ponti stradali, mentre solo il 14,7% ha esaminato le passerelle. Tuttavia, negli ultimi cinque anni, il segmento relativo all'ottimo design delle passerelle ha visto un incremento, costituendo il 25% degli articoli dedicati a questo tema e l'8,3% del totale degli articoli pubblicati.

Per minimizzare la funzione obiettivo, sono stati impiegati diversi approcci, tra cui la programmazione lineare, la programmazione non lineare, metodi di criteri di optimalità e algoritmi genetici. Analogamente a quanto osservato nel caso dell'“ottimizzazione delle forze dei cavi”, solo una limitata percentuale (14,7%) degli studi ha fatto uso di algoritmi metaeuristici. L'ampio numero di variabili e vincoli di design, unito alla complessità dell'analisi strutturale (che può includere grandi strutture, diversi scenari di carico, non linearità geometriche, fasi costruttive e azioni dinamiche), può rappresentare un ostacolo per l'applicazione efficace delle tecniche metaeuristiche. [12]

### 3. Ottimizzazione Strutturale

Citando (Olhoff & Taylor, 1983) [47]: “L'ottimizzazione strutturale può essere definita come l'istituzione razionale di un design strutturale che è il migliore di tutti i possibili design all'interno di un obiettivo prescritto e di un dato insieme di limitazioni geometriche e/o comportamentali.”

L'ottimizzazione strutturale, perciò, è il processo attraverso il quale un ingegnere progetta una struttura in modo da soddisfare determinati requisiti di prestazione, minimizzando o massimizzando (a seconda dei casi) variabili pertinenti, come il peso, il costo, o il consumo di materiali, dette funzioni obiettivo.

Questo processo implica l'applicazione di strategie matematiche e computazionali per trovare le configurazioni più efficaci e sostenibili.

#### 3.1. Metodologie di Ottimizzazione

L'ottimizzazione strutturale si basa su diversi approcci e tecniche. Tra i più comuni ci sono:

1. **Ottimizzazione analitica:** Questa metodologia utilizza equazioni matematiche e modelli fisici per descrivere il comportamento strutturale. I metodi analitici, come l'ottimizzazione lineare, sono utili per problemi semplici in cui le relazioni tra variabili sono chiare e ben definite.
2. **Ottimizzazione numerica:** Per problemi più complessi, dove le interazioni tra variabili non possono essere facilmente descritte, si usano metodi numerici. Tecniche come l'ottimizzazione mediante Finite Element Method (FEM) consentono di esplorare l'intero spazio delle soluzioni e identificare la configurazione ottimale. Questi metodi possono includere algoritmi evolutivi (come gli algoritmi genetici) e algoritmi di programmazione non lineare.
3. **Ottimizzazione basata su metodi stocastici:** L'ottimizzazione stocastica affronta l'incertezza nei dati. Utilizza algoritmi che esplorano randomicamente le soluzioni per trovare la migliore, anche in contesti influenzati dalla variabilità delle condizioni di carico e delle proprietà dei materiali. Gli approcci stocastici



sono particolarmente utili in situazioni dove le condizioni di carico sono variabili o difficili da prevedere.

4. **Ottimizzazione Multi-Obiettivo:** In contesti complessi, è comune avere più obiettivi da ottimizzare simultaneamente. Ad esempio, nella progettazione di ponti, si potrebbe voler minimizzare il costo, il peso e il tempo di costruzione. Approcci multi-obiettivo consentono di trovare un bilanciamento tra questi aspetti, producendo configurazioni che soddisfano vari requisiti contemporaneamente.

I metodi di ottimizzazione possono essere raggruppati quindi in due principali categorie, quelli basati sul gradiente e quelli non.

I metodi di ottimizzazione con gradiente utilizzano le informazioni sulle derivate (gradiente) della funzione obiettivo per guidare il processo di ricerca del minimo o del massimo. Questo implica calcolare il gradiente della funzione rispetto alle variabili indipendenti, quindi rispetto anche a tutti i vincoli di design. Questi metodi sono particolarmente efficaci quando la funzione obiettivo è continua e differenziabile (cioè, ha derivate di primo e secondo ordine). Gli algoritmi basati sul gradiente possono convergere molto rapidamente verso un minimo locale, specialmente in problemi ben formulati. Tuttavia, possono essere sensibili all'inizializzazione e possono rimanere bloccati in minimi locali. [12]

Gli algoritmi di ottimizzazione non basati sul gradiente, anche detti algoritmi evolutivi o genetici, non richiedono la conoscenza delle derivate della funzione obiettivo. Ciò li rende utili per problemi in cui la funzione è non differenziabile, discontinua o molto complessa. Questi algoritmi possono avere una convergenza più lenta rispetto ai metodi basati sul gradiente e potrebbero richiedere più tempo di calcolo, ma offrono il vantaggio di trovare soluzioni globali più spesso in spazi di ricerca complessi.

Un algoritmo genetico rappresenta un approccio di ottimizzazione stocastica capace di offrire una soluzione abbastanza valida, anche se non garantisce di trovare la soluzione ottimale. In altre parole, utilizzando questi algoritmi stocastici, l'utente

deve bilanciare tra la certezza di ottenere la soluzione migliore e la probabilità di ottenere una soluzione soddisfacente, risparmiando così tempo e risorse computazionali. [7]

### 3.2. Obiettivi dell'ottimizzazione strutturale

Nell'ottimizzazione strutturale delle strutture di ponti i principali obiettivi che solitamente vengono considerati sono:

1. Minimizzazione del peso: Uno degli obiettivi principali dell'ottimizzazione è ridurre il peso della struttura senza compromettere la sicurezza e la funzionalità. Questo è particolarmente importante nei ponti, dove il sovraccarico di materiali può aumentare significativamente i costi di costruzione e manutenzione.
2. Massimizzazione della resistenza: L'ottimizzazione delle forme architettoniche, come quelle degli archi, permette di garantire che le strutture siano in grado di sostenere i carichi applicati, affrontando le forze di compressione e tensione in modo più efficiente. Una forma ottimale può ridurre i picchi di stress e migliorare la durabilità della struttura.
3. Riduzione dei costi: L'ottimizzazione mira anche a ridurre i costi complessivi del progetto. Ciò include non solo il costo dei materiali, ma anche considerazioni legate alla costruzione e alla manutenzione. L'uso efficace dei materiali può portare a notevoli risparmi economici a lungo termine.
4. Sostenibilità ambientale: Con l'aumento delle preoccupazioni ambientali, l'ottimizzazione strutturale si è evoluta per includere criteri di sostenibilità. Le scelte progettuali possono ora considerare l'uso di materiali riciclati o a bassa emissione di carbonio, e l'efficienza energetica durante il ciclo di vita della struttura.

Nei ponti ad arco e strallati, l'ottimizzazione gioca un ruolo cruciale, in particolare per quel che riguarda la geometria dell'arco: la forma dell'arco può essere progettata per massimizzare l'efficienza nel portare i carichi. L'arco circolare, per esempio, distribuisce uniformemente le forze di compressione e tensione, risultando in un design sobrio e altamente resistente. Tecniche di ottimizzazione possono essere applicate per determinare il raggio e l'altezza ottimali dell'arco in base ai carichi previsti. Ricerche hanno mostrato che archi con geometrie ottimizzate possono ridurre la quantità di materiale necessario fino al 20%.

Un altro fattore importante è la struttura dei pendini, infatti i pendini svolgono un ruolo chiave nell'interazione tra l'arco e l'impalcato. L'ottimizzazione della loro lunghezza, inclinazione e sezione trasversale è essenziale per garantire che le forze di trazione siano distribuite in modo efficiente. Utilizzando tecniche di ottimizzazione, è possibile calibrare la progettazione dei pendini per ottenere una struttura più leggera e con una maggiore resilienza, fondamentale in condizioni di carico variabile e accelerazioni sismiche.

Infine, per quel che riguarda i materiali e le fasi di costruzione, l'ottimizzazione strutturale considera anche le proprietà dei materiali utilizzati. Scegliere materiali con elevate caratteristiche meccaniche, come l'acciaio ad alta resistenza o il calcestruzzo speciale, consente di ridurre il peso della struttura senza compromettere la capacità portante. Inoltre, un approccio integrato che combina il calcolo delle forze con l'analisi delle proprietà dei materiali può portare a progetti significativamente più economici e performanti.

### **3.3. Tecnologie emergenti nell'ottimizzazione strutturale**

Il campo dell'ottimizzazione strutturale è in rapida evoluzione grazie all'adozione di tecnologie emergenti. Alcuni sviluppi recenti includono:

1. **Intelligenza Artificiale (IA):** L'IA e il machine learning possono essere utilizzati per esplorare vasti spazi di progettazione e identificare automaticamente le configurazioni strutturali migliori. Algoritmi di apprendimento automatico

possono migliorare le capacità di previsione e ottimizzazione, adattandosi dinamicamente ai cambiamenti delle condizioni di carico o delle variabili progettuali.

2. Modellazione parametrica: Strumenti di modellazione parametrica, come Grasshopper per Rhinoceros, permettono agli ingegneri di esplorare rapidamente diverse configurazioni geometriche e di testare la loro performance strutturale. Questo approccio integrato facilita una progettazione più iterativa e creativa, permettendo agli ingegneri di valutare le modifiche in tempo reale.
3. Stampa 3D: Tecniche di stampa 3D stanno iniziando ad essere esplorate per la produzione di componenti architettonici e strutturali. Questa tecnologia consente la realizzazione di forme complesse che altrimenti sarebbero difficoltose da costruire con metodi tradizionali, permettendo ottimizzazioni geometriche per la riduzione del peso e dell'uso dei materiali.
4. Simulazione avanzata: L'uso di simulazioni avanzate, come quelle basate su dinamica dei fluidi computazionale (CFD) e analisi delle vibrazioni, consente di valutare il comportamento della struttura in scenari reali, come venti estremi o terremoti. Questo tipo di analisi aiuta a ottimizzare le caratteristiche strutturali per garantire la sicurezza e la stabilità nel lungo periodo.

In questa tesi è stato utilizzato il software Grasshopper, nel *Capitolo 5* è descritto il processo seguito in dettaglio.

### **3.4. Metodologia utilizzata: Algoritmo genetico**

In questa tesi si è deciso di utilizzare il metodo di ottimizzazione con algoritmo evolutivo o algoritmo genetico.

L'algoritmo genetico è un tipo di algoritmo di apprendimento automatico che si fonda su un metodo di ottimizzazione stocastica, utile per affrontare sia problemi di ottimizzazione vincolati che non vincolati [48, 49]. Tale metodo si ispira ai principi

della selezione naturale e della genetica, processi fondamentali per l'evoluzione biologica [50].

Questo algoritmo opera modificando in modo iterativo una popolazione di soluzioni distinte: ad ogni iterazione, seleziona gli individui migliori dall'attuale insieme di soluzioni in base a determinati criteri di selezione, utilizzandoli per generare la successiva generazione. Con il passare delle generazioni, la popolazione "evolve" cercando di raggiungere una soluzione ottimale [51].

Per utilizzare questo algoritmo è necessario definire alcuni parametri di input, le variabili genetiche, la funzione obiettivo e i vincoli.

Nel contesto dell'ottimizzazione strutturale, i parametri di input sono le variabili impostate dall'utente all'inizio del processo e rappresentano le scelte progettuali elaborate dai progettisti nella fase preliminare.

Le variabili genetiche sono invece le misure che, insieme ai parametri di input, definiscono la geometria del problema. Le differenti combinazioni di queste quantità andranno a comporre ciascun individuo della popolazione, che verrà modificato progressivamente per cercare la soluzione ottimale.

La funzione obiettivo rappresenta la quantità che l'algoritmo mira a massimizzare o minimizzare attraverso le modifiche alle variabili genetiche. Nel caso specifico di questa analisi, si è deciso di minimizzare il volume del materiale necessario per la realizzazione della struttura. Ad ogni iterazione, la quantità di materiale richiesta deve essere calcolata in base alle variabili di design, fino a trovare la geometria che consente di ottenere il volume minimo.

Infine, i vincoli rappresentano uguaglianze o disuguaglianze che devono essere soddisfatte e rappresentato i limiti per la struttura ottimizzata.

In questa tesi il limite che è stato considerato riguarda le sollecitazioni, in particolare l'algoritmo deve verificare che il massimo delle sollecitazioni di Von Mises applicate sia inferiore della resistenza del materiale:

$$\sigma_{maz}^{VM} < f_y$$

(3.1)

In questa tesi è stata fatta un'analisi preliminare con esclusivamente la struttura dell'arco (senza l'impalcato e i pendini), facendo riferimento a [7].

Di seguito, verranno presentate tutte le possibili opzioni progettuali considerate in questa analisi preliminare.

#### 3.4.1. Forme dell'arco possibili

Sono state prese in considerazione due diverse forme dell'arco:

- Arco parabolico, di equazione:  $y = ax^2 + bx + c$ ;
- Arco circolare, di equazione:  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ .

Essendo entrambe definite da funzioni quadratiche, conoscendo la posizione dei sei due punti base, la geometria è completamente determinabile con l'imposizione di una sola variabile, in particolare con la freccia  $f$  dell'arco.

Perciò inserendo  $f$  come variabile genetica, l'algoritmo genetico genera un valore tale per cui si generi una geometria dell'arco diversa per ciascun individuo della popolazione.

Pertanto, la scelta da parte dell'utente di forme ad arco paraboliche o circolari comporterà l'aggiunta di una sola variabile al processo di ottimizzazione.

Nell'analisi preliminare sono state utilizzate entrambe le forme considerate, invece nell'analisi dell'arco con impalcato e pendini è stata utilizzata solo l'arco a forma circolare, per motivi prettamente tempistici.

#### 3.4.2. Sezioni trasversali possibili

Un altro parametro di input per quel che riguarda le scelte progettuali è la scelta della sezione trasversale dell'arco, dell'impalcato e dei pendini.

Nell'analisi preliminare sono implementate sei diverse sezioni trasversali. Queste sezioni sono proposte in modo tale da permettere di aggiungere da una a tre variabili genetiche all'ottimizzazione.

In particolare, le sezioni trasversali circolari e quadrate piene sono le più semplici, poiché possono essere descritte da un solo parametro  $r$ , che rappresenta il raggio della sezione circolare o il lato di quella quadrata.



Figura 3 – Sezione quadrata piena

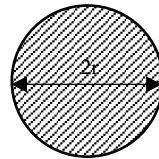


Figura 4 – Sezione circolare piena

Per aumentare la complessità dell'ottimizzazione, aggiungendo una variabile genetica si possono utilizzare per esempio le sezioni trasversali rettangolari piene e quelle circolari o quadrate cave sottili. Infatti, in questo modo viene aggiunta una variabile: per le sezioni rettangolari piene verranno considerate le due dimensioni del rettangolo  $r_1, r_2$ ; per la sezione circolare cava sottile verranno considerati il raggio della circonferenza esterna e lo spessore  $r, t$ ; infine, per la sezione quadrata cava sottile verranno considerati il lato del quadrato e lo spessore  $r, t$ .

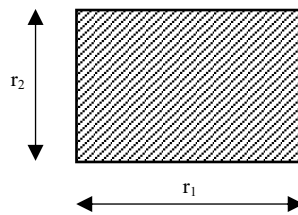


Figura 5 – Sezione rettangolare piena

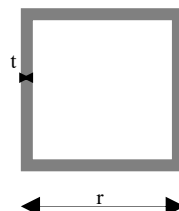


Figura 6 – Sezione quadrata cava sottile

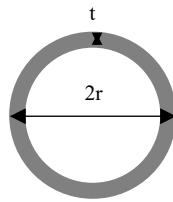


Figura 7 – sezione circolare piena

In ultimo è possibile scegliere la sezione trasversale rettangolare cava, che è la più complessa poiché deve essere definita utilizzando tre diverse variabili: le due dimensioni principali e lo spessore della sezione trasversale  $r_1, r_2, t$ .

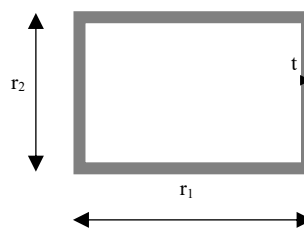


Figura 8 – Sezione quadrata cava sottile

Il codice può essere ulteriormente sviluppato per includere diversi tipi di sezioni trasversali; per esempio, si potrebbe aggiungere una sezione rettangolare cava con vari spessori tra le flange e le travi verticali. Questo tipo di sezione rappresenterebbe un notevole passo avanti nell'ottimizzazione, in quanto permetterebbe di ottimizzare la geometria in modo indipendente per resistere sia alle sollecitazioni flessionali che a quelle di taglio.

Inoltre, un altro miglioramento potrebbe consistere nell'inserimento di tabelle contenenti profili standard commerciali, il che consentirebbe all'algoritmo di selezionare tra diverse geometrie comunemente utilizzate nella pratica. Questo semplificherebbe anche il problema di ottimizzazione, poiché non si dovrebbero considerare più variabili genetiche (per esempio come per le sezioni cave), ma basterebbe considerare la posizione della sezione trasversale come unica variabile genetica. [7]



Nell'analisi preliminare sono state utilizzate le sezioni quadrate piena e cava e le sezioni rettangolari piena e cava.

Invece nell'analisi del sistema arco-impalcato sono state utilizzate per l'arco la sezione circolari piena e la sezione circolare cava; per l'impalcato invece è stata utilizzata la sezione rettangolare cava, ma usando una sola variabile genetica (l'altezza); per i pendini invece la sezione circolare cava, anche in questo caso considerando la variazione una sola variabile genetica, in particolare il diametro, per motivi computazionali e tempistici, infatti è stata fatta questa scelta per non ulteriormente complessiva l'ottimizzazione e per avere risultati in un tempo ridotto.

## 4. Risultati dell'ottimizzazione

In questo capitolo verranno presentati alcuni esempi di risultati di ottimizzazione ottenuti attraverso l'algoritmo descritto nei capitoli precedenti.

In particolare, verrà presentata un'analisi preliminare in cui è stato considerato esclusivamente la struttura dell'arco, in seguito saranno invece presi in considerazione anche i pendini e l'impalcato.

L'ottimizzazione viene effettuata con carichi applicati su tutta la struttura considerata e con diverse configurazioni ad arco, con l'obiettivo di illustrare come il volume del materiale cambi in relazione al numero di variabili genetiche e alla geometria sia globale che locale della struttura. [7]

In particolare, sono stati considerati il peso proprio della struttura e un carico verticale uniformemente distribuito lungo l'asse, orientato secondo la direzione della gravità. Sono stati analizzati i casi di arco, e in seguito anche impalcato, incernierati.

L'algoritmo di ottimizzazione viene eseguito variando il carico applicato esternamente, partendo da  $q_0 = -50 \text{ kN/m}$  e incrementandolo di  $50 \text{ kN/m}$  per ogni iterazione fino a un massimo di  $q_0 = -300 \text{ kN/m}$  (il segno negativo è dovuto al fatto che sono rivolti verso il basso).

Infine, è importante sottolineare che le configurazioni esaminate, e in particolare le dimensioni delle sezioni trasversali per tutti i casi studio, non sono rappresentative di problemi reali. In questa fase, infatti, si è scelto di utilizzare intervalli di variabili molto ampi soltanto per studiare le relazioni tra le grandezze coinvolte, senza considerare le limitazioni imposte dai vincoli tecnologici e intrinseci al processo costruttivo.

### 4.1. Analisi preliminare

Di seguito saranno riportati i primi risultati dell'analisi preliminare considerando solo l'arco nell'ottimizzazione, facendo riferimento a [7].

#### 4.1.1. Arco parabolico con sezione trasversale quadrata (piena)

Il primo caso considerato è l'ottimizzazione di un arco con forma parabolica e sezione trasversale quadrata piena, con dimensioni costanti lungo gli assi.

In questo caso sono state considerate due variabili genetiche:

- La freccia dell'arco:  $f$ ;
- Il lato del quadrato:  $r$ ;

Si riporta una tabella con i risultati ottenuti al variare del carico applicato, in particolare i valori della freccia, del lato del quadrato e il valore del volume ( $V [m^3]$ ) (la funzione obbiettivo):

Arco parabolico con sezione quadrata (piena)			
$q_0$ [kN/m]	$f$ [m]	$r$ [m]	$V$ [ $m^3$ ]
-50	5,32	0,2	4,04
-100	8,87	0,247	6,19
-150	9,29	0,293	8,79
-200	10,2	0,332	11,26
-250	9,98	0,367	13,7
-300	10,15	0,395	16,05

I risultati sono rappresentati nel grafico seguente, nel quale è possibile osservare la relazione tra i carichi esterni applicati e il volume di materiale necessario per sostenerli:

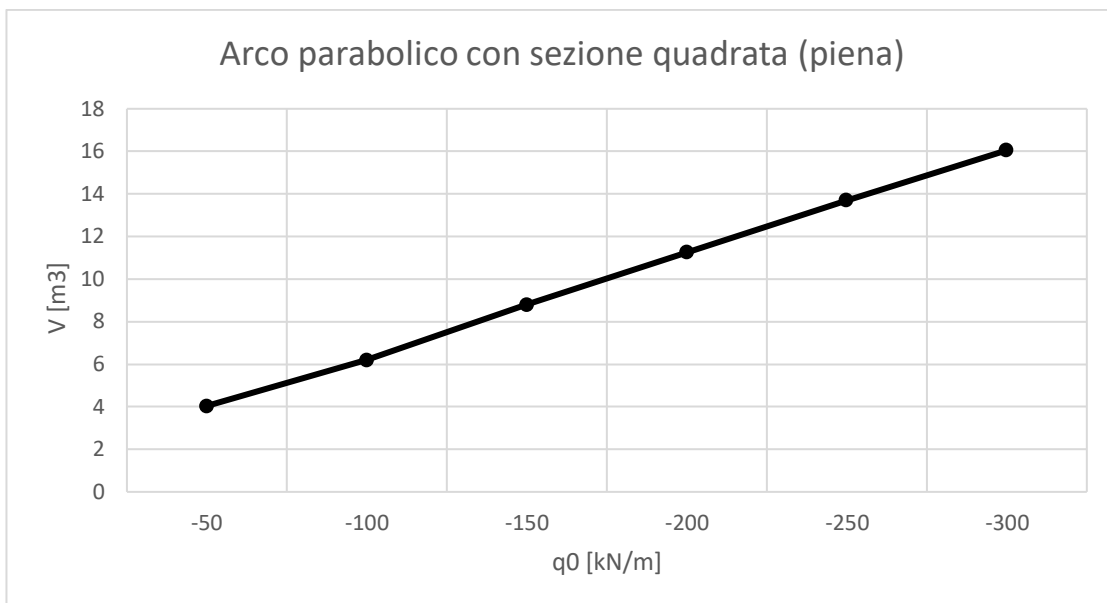


Grafico 1 – Volume dell'arco sottoposto a carichi verticali uniformemente distribuiti – 2 variabili genetiche

#### 4.1.2. Arco parabolico con sezione trasversale rettangolare (piena)

Il secondo caso considerato è l'ottimizzazione di un arco con forma parabolica e sezione trasversale quadrata cava (sottile), con dimensioni costanti lungo gli assi.

In questo caso sono state considerate tre variabili genetiche:

- La freccia dell'arco:  $f$ ;
- La base del rettangolo:  $r_1$ ;
- L'altezza del rettangolo:  $r_2$ .

Si riporta una tabella con i risultati ottenuti al variare del carico applicato, in particolare i valori della freccia, dei lati del rettangolo e il valore del volume ( $V [m^3]$ ) (la funzione obiettivo):

Arco parabolico con sezione rettangolare (piena)				
q0 [kN/m]	f [m]	r1 [m]	r2 [m]	V [m3]
-50	5,27	0,2	0,2	4,05
-100	9,58	0,289	0,2	5,87
-150	10,52	0,39	0,2	8,04
-200	11,35	0,485	0,2	10,02
-250	11,94	0,576	0,2	11,96
-300	11,84	0,636	0,21	13,92

I risultati sono rappresentati nel grafico seguente, nel quale è possibile osservare la relazione tra i carichi esterni applicati e il volume di materiale necessario per sostenerli:

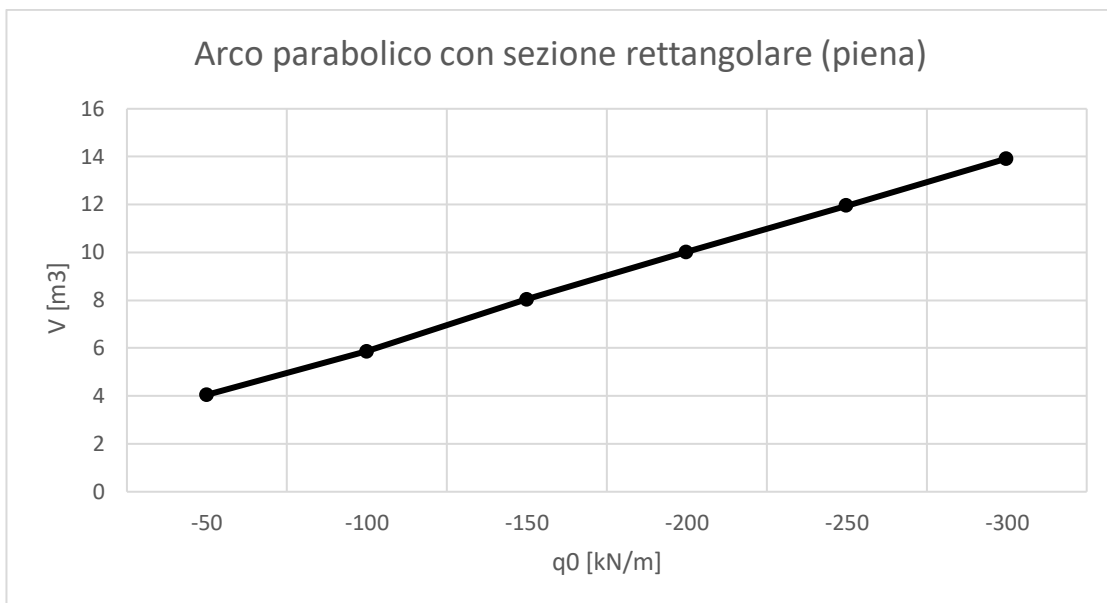


Grafico 2 – Volume dell'arco sottoposto a carichi verticali uniformemente distribuiti – 3 variabili genetiche

#### 4.1.3. Arco parabolico con sezione trasversale rettangolare (piena)

Il terzo caso considerato è l'ottimizzazione di un arco con forma parabolica e sezione trasversale quadrata piena, con dimensioni costanti lungo gli assi.

In questo caso sono state considerate tre variabili genetiche:

- La freccia dell'arco:  $f$ ;
- Il lato del quadrato:  $r$ ;
- Lo spessore della sezione:  $t$ .

Questa configurazione ha lo stesso numero di variabili genetiche della precedente, ma è facile constatare che il numero di variabili genetiche non è l'unico fattore che influisce sul risultato finale. Infatti, confrontando i risultati di questa ottimizzazione con la precedente, si può notare come sia possibile ottenere volumi di materiale molto diversi, anche mantenendo lo stesso numero di variabili genetiche. Ciò implica che non è solo la quantità, ma anche la tipologia delle variabili scelte, ad essere determinante per definire la migliore geometria della struttura.

Si riporta una tabella con i risultati ottenuti al variare del carico applicato, in particolare i valori della freccia, del lato del quadrato dello spessore e il valore del volume ( $V [m^3]$ ) (la funzione obbiettivo):

Arco parabolico con sezione quadrata (cava)				
q0 [kN/m]	f [m]	r [m]	t [m]	V [m3]
-50	13,54	0,503	0,01	2,04
-100	15,95	0,854	0,01	3,62
-150	17,67	1,171	0,01	5,05
-200	18,57	1,471	0,01	6,36
-250	19,33	1,767	0,01	7,68
-300	19,51	2,061	0,01	8,98

I risultati sono rappresentati nel grafico seguente, nel quale è possibile osservare la relazione tra i carichi esterni applicati e il volume di materiale necessario per sostenerli:

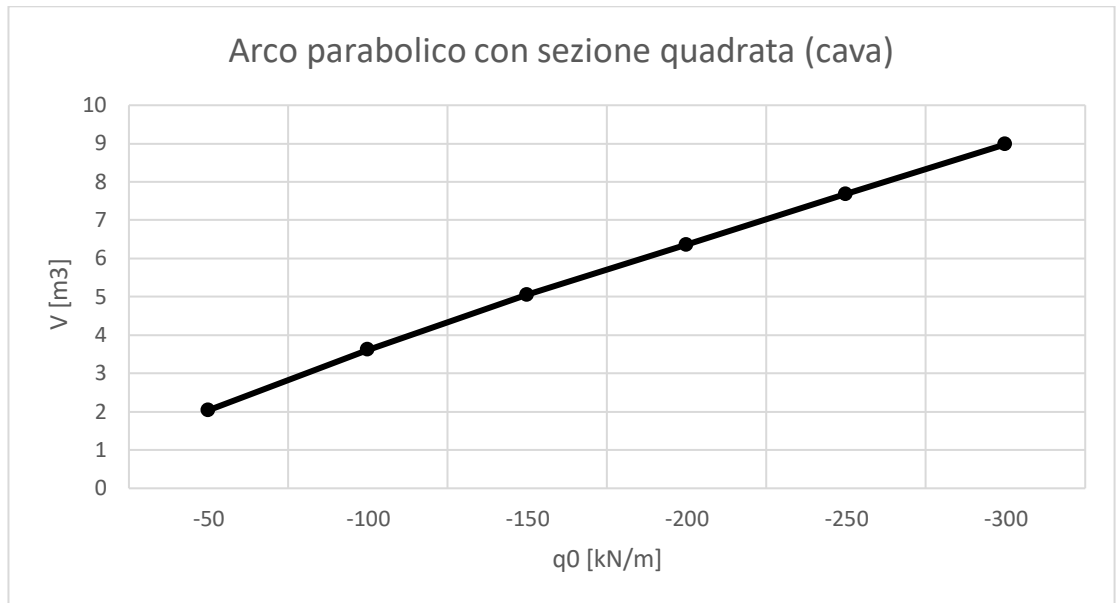


Grafico 3 – Volume dell'arco sottoposto a carichi verticali uniformemente distribuiti – 3 variabili genetiche

Si osserva che, sebbene lo spessore della sezione trasversale sia una variabile genetica, tutte le soluzioni ottimizzate mostrano lo stesso spessore  $t = 1 \text{ cm}$ , che corrisponde al valore minimo dell'intervallo di variazione di ( $t$ ). Questo suggerisce che la configurazione ottimizzata è quella in cui il materiale è posizionato il più lontano possibile dall'asse baricentrico.

Confrontando i valori ottenuti con quelli ottenuti nell'ottimizzazione precedente, si può vedere come questi siano oggettivamente più piccoli, poiché per strutture di questo tipo le sezioni trasversali cave lavorano meglio.



#### 4.1.4. Arco parabolico con sezione trasversale rettangolare (cava)

Il quarto caso considerato è l'ottimizzazione di un arco con forma parabolica e sezione trasversale quadrata cava (sottile), con dimensioni costanti lungo gli assi.

In questo caso sono state considerate tre variabili genetiche:

- La freccia dell'arco:  $f$ ;
- La base del rettangolo:  $r_1$ ;
- L'altezza del rettangolo:  $r_2$ .
- Lo spessore della sezione:  $t$ .

Si riporta una tabella con i risultati ottenuti al variare del carico applicato, in particolare i valori della freccia, dei lati del rettangolo, dello spessore e il valore del volume ( $V [m^3]$ ) (la funzione obbiettivo):

Arco parabolico con sezione rettangolare (cava)					
$q_0$ [kN/m]	$f$ [m]	$r_1$ [m]	$r_2$ [m]	$t$ [m]	$V$ [m <sup>3</sup> ]
-50	13,68	0,633	0,352	0,01	2,02
-100	16,46	1224	0,44	0,01	3,51
-150	18,14	1541	0,75	0,01	4,91
-200	18,98	1834	1062	0,01	6,27
-250	19,68	1979	1515	0,01	7,61
-300	20,41	2938	1082	0,01	8,82

I risultati sono rappresentati nel grafico seguente, nel quale è possibile osservare la relazione tra i carichi esterni applicati e il volume di materiale necessario per sostenerli:

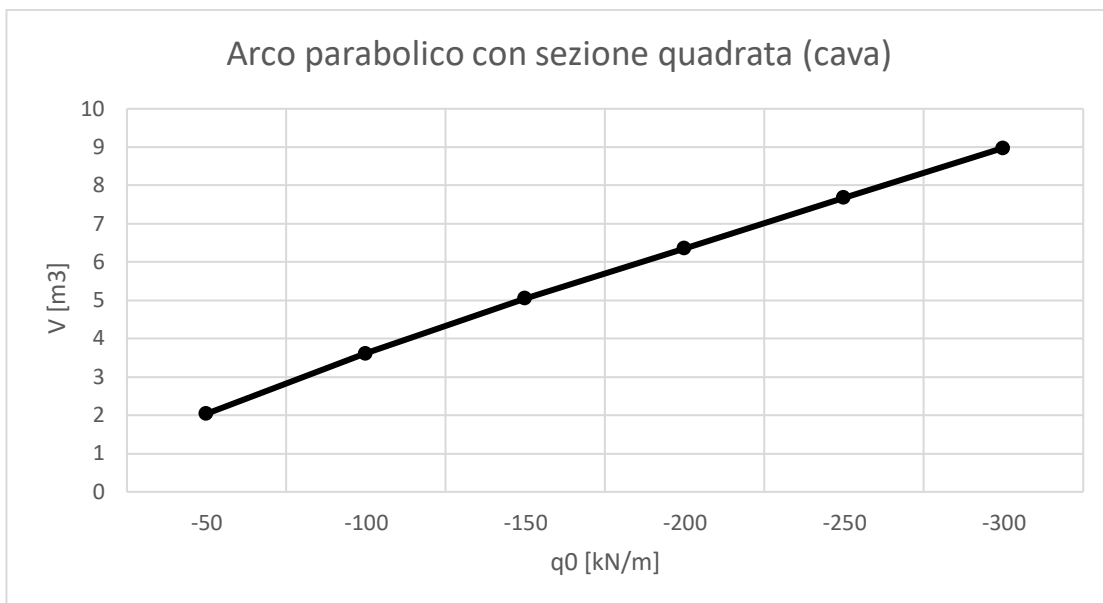


Grafico 4 – Volume dell'arco sottoposto a carichi verticali uniformemente distribuiti – 4 variabili genetiche

Si osserva che i risultati ottenuti sono molto simili a quelli ottenuti con l'ottimizzazione dell'arco con sezione quadrata cava.

#### 4.1.5. Confronto tra volumi

Nei paragrafi seguenti, si è deciso di rappresentare insieme, nello stesso grafico, i volumi di tutte le configurazioni ottimizzate descritte in precedenza. Questo permetterà di confrontare i risultati di ottimizzazione ottenuti da diverse configurazioni e con un numero crescente di variabili genetiche.

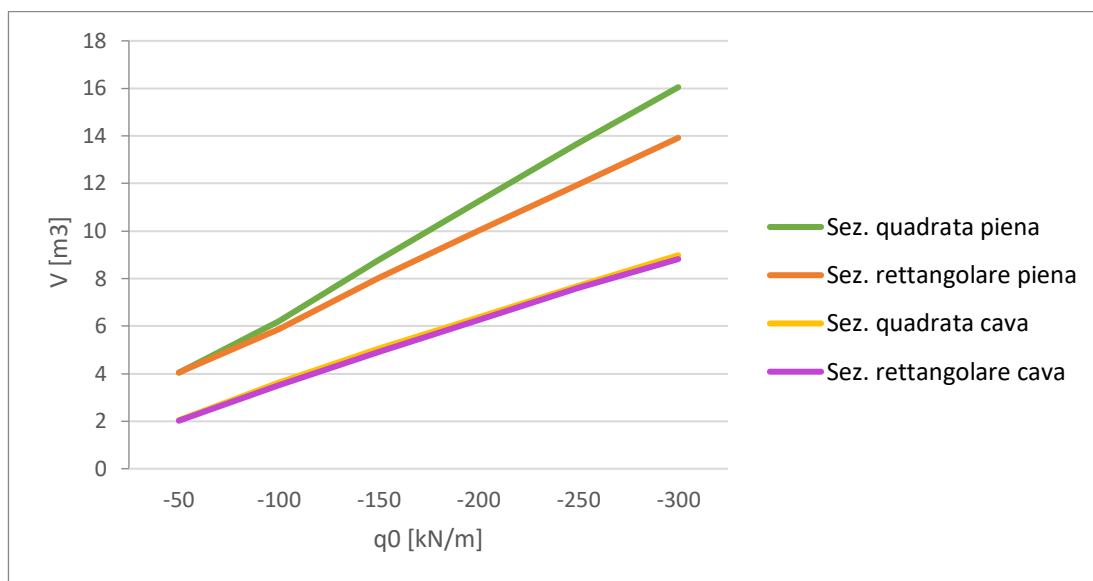


Grafico 5 – Confronto risultati ottenuti dalle ottimizzazioni precedenti

Da questo grafico si può notare come aumentare il numero di variabili genetiche, la funzione obiettivo, cioè il volume totale della struttura diminuisce.

Questo è spiegabile dal fatto che l'aumento del numero di variabili da ottimizzare fornisce una maggiore libertà di modificarsi alla geometria, ciò produrrà un numero maggiore di soluzioni da scegliere.

Inoltre, si può notare, ovviamente, come il volume cambia in base alla sezione trasversale; infatti, si vede come abbia una notevole diminuzione se la sezione ha la stessa forma ma è considerata cava o piena.

Invece non si nota una grande variazione tra le ultime due configurazioni anche se il numero di variabili genetiche aumenta.

Di conseguenza, dall'analisi preliminare relativa agli archi sottoposti a carichi uniformemente distribuiti lungo l'asse dell'arco emergono tre conclusioni principali:

- Si nota una chiara relazione lineare tra il carico esterno applicato e il volume totale di materiale richiesto per realizzare una struttura ad arco capace di sostenere tale carico.
- Incrementando il numero di variabili genetiche, si ampliano i gradi di libertà del problema di ottimizzazione, rendendo così possibile individuare soluzioni più efficienti dal punto di vista del volume di materiale.
- Alcune variabili esercitano un'influenza più marcata sulla soluzione finale rispetto ad altre. [7]

#### 4.1.6. Confronto tra forme dell'arco

Infine, è stata condotta un'analisi finale per quel che riguarda la forma ottimale dell'arco, confrontando due diverse forme dell'arco, in modo da trovare quella che risulta ottimale.

In particolare, è effettuato un confronto tra il primo caso considerato (al paragrafo 4.1.1) di un arco soggetto a carico distribuito, con forma parabolica e sezione trasversale quadrata piena e costante; e un arco soggetto a carico distribuito, con forma circolare e sezione trasversale quadrata piena e costante.

Per entrambi i casi sono state considerate due variabili genetiche:

- La freccia dell'arco:  $f$ ;
- Il lato del quadrato:  $r$ ;

Si riporta una tabella con i risultati ottenuti dall'ottimizzazione dell'arco a forma circolare al variare del carico applicato, in particolare i valori della freccia, dei lati del rettangolo, dello spessore e il valore del volume ( $V [m^3]$ ) (la funzione obiettivo), Si riportano i risultati dell'ottimizzazione dell'arco a forma circolare, poiché per quello parabolico si rimanda al paragrafo 4.1.1:

Arco circolare con sezione quadrata (piena)			
$q_0$ [kN/m]	$f$ [m]	$r$ [m]	$V$ [m <sup>3</sup> ]
-50	6,34	0,204	4,16
-100	7,01	0,273	7,56
-150	7,8	0,326	10,68
-200	8,09	0,368	13,7
-250	8,27	0,403	16,63
-300	8,42	0,438	19,44

I risultati sono rappresentati nel grafico seguente, nel quale è possibile osservare la relazione tra i carichi esterni applicati e il volume di materiale necessario per sostenerli:

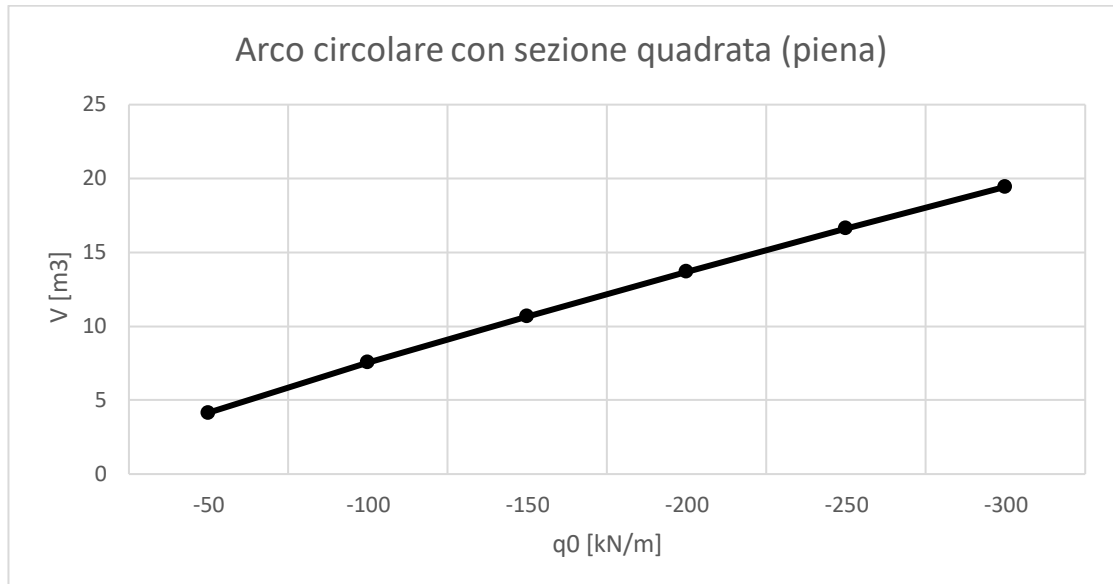


Grafico 6 – Volume dell'arco sottoposto a carichi verticali uniformemente distribuiti – 2 variabili genetiche

Di seguito è riportato il grafico con entrambe le configurazioni considerate, al fine di definire quale sia la migliore forma dell'arco in questo caso considerato:

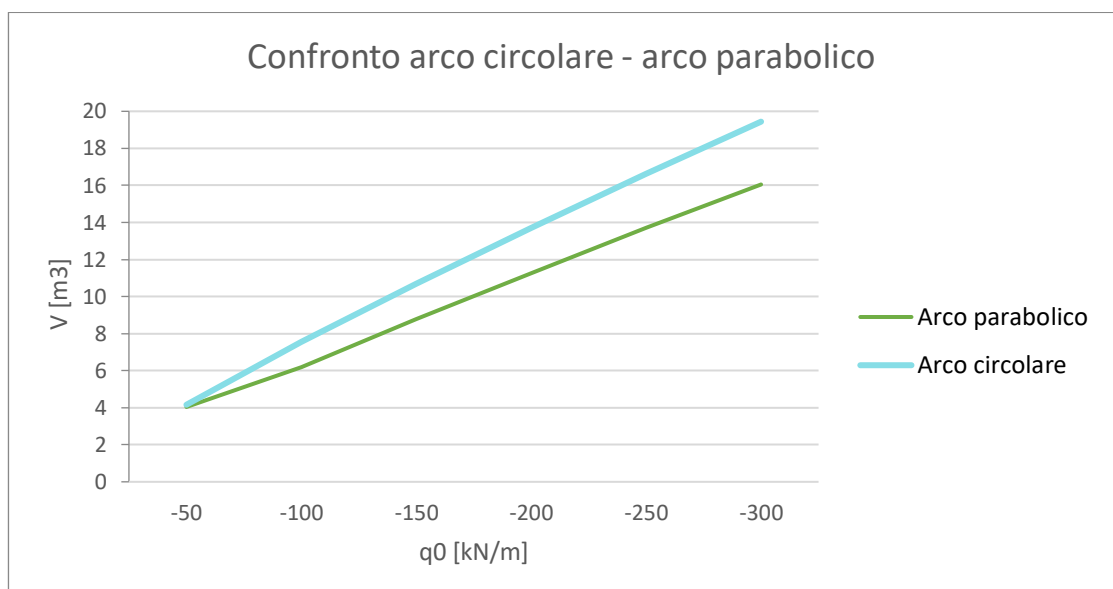


Grafico 7 – Confronto risultati ottenuti dalle ottimizzazioni

Come già descritto in letteratura, la forma di arco più efficace per carichi uniformemente distribuiti è quella parabolica. La forma circolare, invece, risulta la scelta meno efficiente.

Un potenziale miglioramento del codice potrebbe consistere nell'aggiunta di ulteriori forme di arco. In particolare, sarebbe interessante introdurre opzioni per forme catenarie e archi polinomiali, così da esplorare come l'ottimizzazione possa beneficiare dell'aggiunta di ulteriori variabili genetiche o dalla selezione di forme già riconosciute come le migliori. [7]

## 4.2. Analisi struttura ad arco con impalcato e pendini

In questo capitolo si riportano i risultati di diverse ottimizzazioni di una struttura ad arco con impalcato e pendini. Questi ultimi due elementi sono stati aggiunti al codice descrivente l'arco.

Come nei casi precedenti l'algoritmo di ottimizzazione viene eseguito variando il carico applicato esternamente, partendo da  $q_0 = -50 \text{ kN/m}$  e incrementandolo di  $50 \text{ kN/m}$  per ogni iterazione fino a un massimo di  $q_0 = -300 \text{ kN/m}$  (il segno negativo è dovuto al fatto che sono rivolti verso il basso).

Per motivi di semplicità computazionale e limitazioni temporali, è stato scelto di utilizzare esclusivamente la forma circolare per l'arco. Questa decisione è stata presa anche in considerazione delle equazioni presentate nei capitoli successivi, che descrivono il comportamento di strutture di questo tipo. L'obiettivo futuro è infatti quello di tradurre queste equazioni in un software di calcolo numerico, consentendo così un confronto tra i risultati ottenuti con i due metodi. In aggiunta, per le medesime, è stata considerata un'unica sezione dell'impalcato, in particolare una sezione rettangolare cava, con l'altezza di tale sezione come variabile genetica da ottimizzare. Analogamente, per i pendini è stata adottata esclusivamente una sezione circolare cava, con il diametro di questa sezione come variabile genetica da ottimizzare. Inoltre, per un motivo analogo è stato considerato un numero fisso di pendini poiché esso definiva la divisione in elementi finiti dell'arco e dell'impalcato, fondamentale per l'utilizzo del software Grasshopper 3D.

Infine, anche in questo caso è importante sottolineare che le configurazioni esaminate, e in particolare le dimensioni delle sezioni trasversali per tutti i casi studio, non sono rappresentative di problemi reali. In questa fase, infatti, si è scelto di utilizzare intervalli di variabili molto ampi soltanto per studiare le relazioni tra le grandezze coinvolte, senza considerare le limitazioni imposte dai vincoli tecnologici e intrinseci al processo costruttivo.



#### 4.2.1. Arco circolare con sezione trasversale circolare piena e freccia costante

Il primo caso considerato è l'ottimizzazione di un arco con forma circolare e sezione trasversale circolare piena, con dimensioni costanti lungo gli assi.

È stata considerata una freccia costante pari alla metà della lunghezza dell'impalcato, in considerazione delle equazioni presentate nei capitoli successivi, che descrivono il comportamento di strutture di questo tipo.

In questo caso sono state considerate tre variabili genetiche da ottimizzare:

- Il raggio del cerchio della sezione dell'arco:  $r_{arco}$ ;
- L'altezza della sezione dell'impalcato:  $r_{deck}$ ;
- Il diametro dei cavi dei pendini:  $\varphi_{cavi}$ ;

Si riporta una tabella con i risultati ottenuti al variare del carico applicato, in particolare i valori del raggio del cerchio della sezione dell'arco, dell'altezza della sezione dell'impalcato, del diametro dei cavi dei pendini e il valore del volume ( $V [m^3]$ ) (la funzione obiettivo):

Arco circolare con sezione circolare (piena), freccia costante				
q0 [kN/m]	r_arco [m]	r_deck [m]	phi_cavi [m]	V [m3]
-50	0,5215	1,918	0,015	317,1135
-100	0,664	2,969	0,0135	488,4815
-150	0,7855	2,989	0,011	665,295
-200	0,891	3	0,01	839,9
-250	0,975	3	0,01	994,6
-300	1,055	2,791	0,01	1152,79

I risultati sono rappresentati nel grafico seguente, nel quale è possibile osservare la relazione tra i carichi esterni applicati e il volume di materiale necessario per sostenerli:

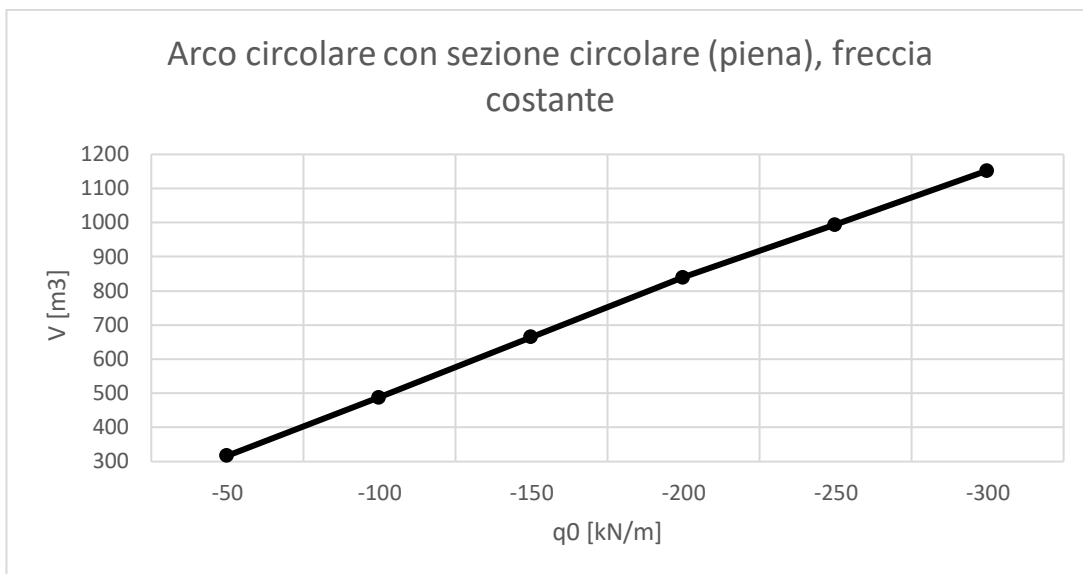


Grafico 8 – Volume dell'arco sottoposto a carichi verticali uniformemente distribuiti – 3 variabili genetiche

Inoltre, si riporta di seguito il grafico che descrive come il software utilizzato trovi il valore di volume finale nel tempo, in particolare quindi il tempo impiegato per le diverse ottimizzazioni:

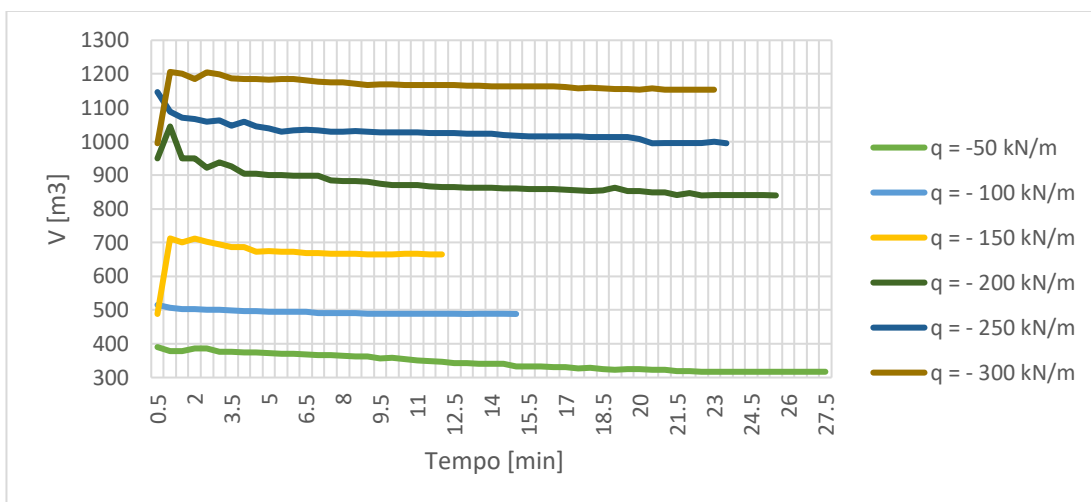


Grafico 9 – Variazione nel tempo delle ottimizzazioni

L'ottimizzazione più lunga in questo caso risulta quella con il carico più piccolo, presumibilmente poiché ha più valori che soddisfano le condizioni sulle sollecitazioni, essendo più basse.

#### 4.2.2. Arco circolare con sezione trasversale circolare cava e freccia costante

Il secondo caso considerato è l'ottimizzazione di un arco con forma circolare e sezione trasversale circolare cava, con dimensioni costanti lungo gli assi.

È stata considerata una freccia costante pari alla metà della lunghezza dell'impalcato, in considerazione delle equazioni presentate nei capitoli successivi, che descrivono il comportamento di strutture di questo tipo.

In questo caso sono state considerate quattro variabili genetiche da ottimizzare:

- Il raggio del cerchio della sezione dell'arco:  $r_{arco}$ ;
- Lo spessore della sezione dell'arco:  $t_{arco}$ ;
- L'altezza della sezione dell'impalcato:  $r_{deck}$ ;
- Il diametro dei cavi dei pendini:  $\varphi_{cavi}$ ;

In questa analisi è risultata verificata solamente la configurazione con il carico minimo, pari a  $50 \text{ kN/m}$ . Le altre configurazioni di carico non hanno dato risultati utilizzabili, in particolare la resistenza del materiale non è risultata sufficiente.

I motivi plausibili per questo risultato possono essere molteplici:

- È stata effettuata un'ottimizzazione in un tempo limitato, poiché non era disponibile tempo maggiore; perciò, il software non è stato in grado di arrivare alla soluzione;
- I parametri dell'ottimizzazione, quindi le variabili genetiche, sono stati scelti in numero non eccessivamente elevati, per un motivo di potenza del computer utilizzato; quindi, anche in questo caso il software non ha potuto validare tutte le soluzioni possibili, per arrivare ad una verificata;
- Un errore nel codice, che ha portato alla costruzione di un modello non perfettamente adatto alla rappresentazione esatta della struttura considerata.

Si riporta una tabella con l'unico risultato ottenuto al variare del carico applicato, in particolare i valori del raggio del cerchio della sezione dell'arco, dell'altezza della

sezione dell'impalcato, del diametro dei cavi dei pendini e il valore del volume ( $V [m^3]$ ) (la funzione obiettivo):

Arco circolare con sezione circolare (cava), freccia costante					
q0 [kN/m]	r_arco [m]	t_arco [m]	r_deck [m]	phi_cavi [m]	V [m3]
-50	2,478	0,061	2,296	0,011	247,282

Si può notare dal grafico riportato in seguito come questa ottimizzazione abbia comunque impiegato un lasso di tempo più lungo rispetto alle precedenti descritte:

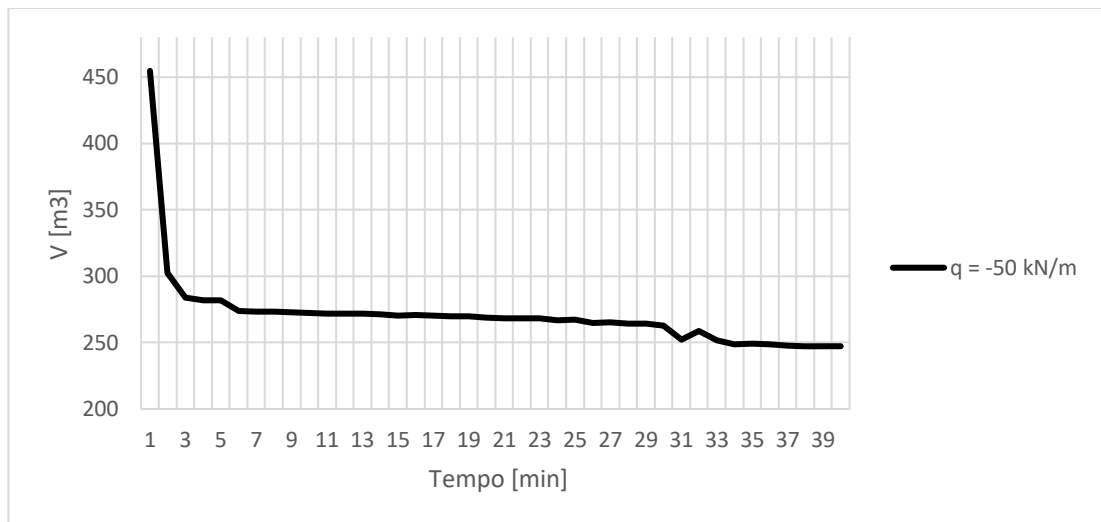


Grafico 10 – Variazione nel tempo delle ottimizzazioni

#### 4.2.3. Arco circolare con sezione trasversale circolare piena e freccia variabile

Il terzo caso considerato è l'ottimizzazione di un arco con forma circolare e sezione trasversale circolare piena, con dimensioni costanti lungo gli assi.

In questo caso è stata considerata una freccia variabile, quindi, è stata considerata tra le variabili genetiche.

In questo caso sono state considerate quattro variabili genetiche da ottimizzare:

- La freccia dell'arco:  $f_{arco}$ ;
- Il raggio del cerchio della sezione dell'arco:  $r_{arco}$ ;
- L'altezza della sezione dell'impalcato:  $r_{deck}$ ;
- Il diametro dei cavi dei pendini:  $\varphi_{cavi}$ ;

Si riporta una tabella con i risultati ottenuti al variare del carico applicato, in particolare i valori della freccia dell'arco, del raggio del cerchio della sezione dell'arco, dell'altezza della sezione dell'impalcato, del diametro dei cavi dei pendini e il valore del volume ( $V [m^3]$ ) (la funzione obiettivo):

Arco circolare con sezione circolare (piena) freccia variabile					
q0 [kN/m]	f_arco [m]	r_arco [m]	r_deck [m]	phi_cavi [m]	V [m3]
-50	2,62	0,534	0,51	0,01	136,446
-100	5,08	0,531	0,68	0,01	141,673
-150	6,09	0,534	1,08	0,11	149,807
-200	8,81	0,547	1,862	0,011	171,687
-250	10,38	0,621	2,057	0,013	202,949
-300	17,04	0,656	2,125	0,018	239,24

I risultati sono rappresentati nel grafico seguente, nel quale è possibile osservare la relazione tra i carichi esterni applicati e il volume di materiale necessario per sostenerli:

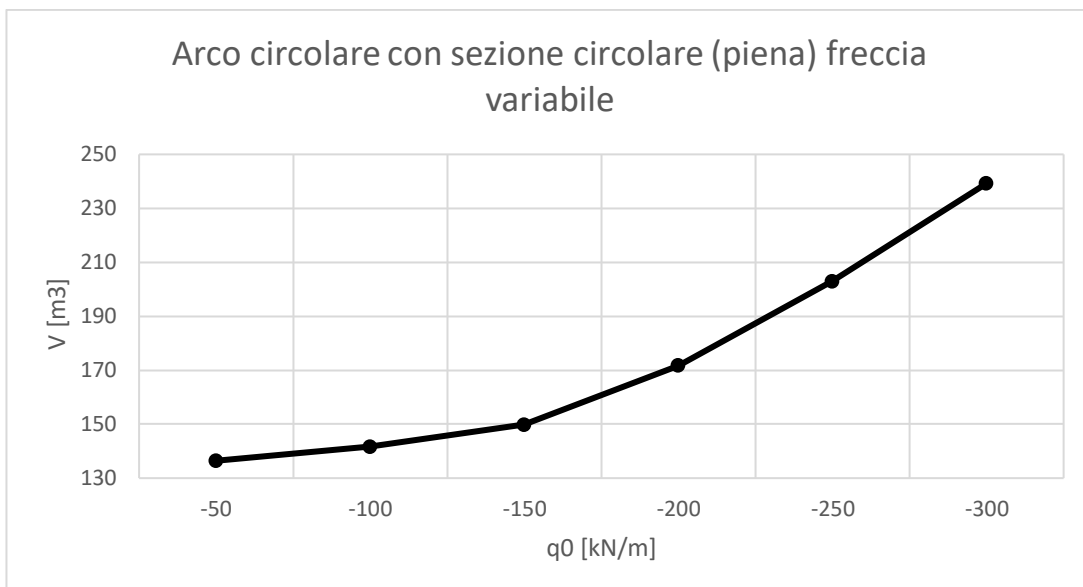


Grafico 11 – Volume dell’arco sottoposto a carichi verticali uniformemente distribuiti – 4 variabili genetiche

Inoltre, si riporta di seguito il grafico che descrive come il software utilizzato trovi il valore di volume finale nel tempo, in particolare quindi il tempo impiegato per le diverse ottimizzazioni:

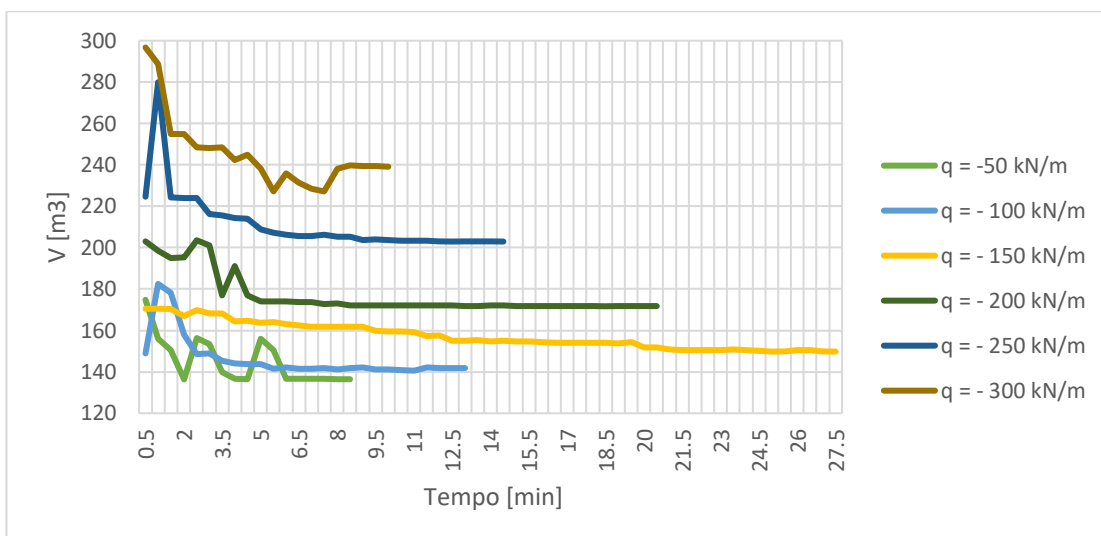


Grafico 12 – Variazione nel tempo delle ottimizzazioni

#### 4.2.4. Arco circolare con sezione trasversale circolare cava e freccia variabile

Il quarto caso considerato è l'ottimizzazione di un arco con forma circolare e sezione trasversale circolare cava, con dimensioni costanti lungo gli assi.

In questo caso è stata considerata una freccia variabile, quindi, è stata considerata tra le variabili genetiche.

In questo caso sono state considerate cinque variabili genetiche da ottimizzare:

- La freccia dell'arco:  $f_{arco}$ ;
- Il raggio del cerchio della sezione dell'arco:  $r_{arco}$ ;
- Lo spessore della sezione dell'arco:  $t_{arco}$ ;
- L'altezza della sezione dell'impalcato:  $r_{deck}$ ;
- Il diametro dei cavi dei pendini:  $\varphi_{cavi}$ ;

Si riporta una tabella con i risultati ottenuti al variare del carico applicato, in particolare i valori della freccia dell'arco, del raggio del cerchio della sezione dell'arco, dell'altezza della sezione dell'impalcato, del diametro dei cavi dei pendini e il valore del volume ( $V [m^3]$ ) (la funzione obiettivo):

Arco circolare con sezione circolare (vuota) con freccia variabile						
q0 [kN/m]	f [m]	r_arco [m]	t_arco [m]	r_deck [m]	phi_cavi [m]	V [m3]
-50	8,39	1,03	0,044	0,939	0,015	86,02
-100	7,76	0,84	0,119	0,895	0,019	114,386
-150	9,21	1,393	0,099	0,72	0,011	134,433
-200	10,72	1,748	0,101	0,678	0,014	161,508
-250	11,17	1,945	0,103	0,63	0,011	185,752
-300	13,02	2,132	0,099	0,59	0,025	194,615

I risultati sono rappresentati nel grafico seguente, nel quale è possibile osservare la relazione tra i carichi esterni applicati e il volume di materiale necessario per sostenerli:

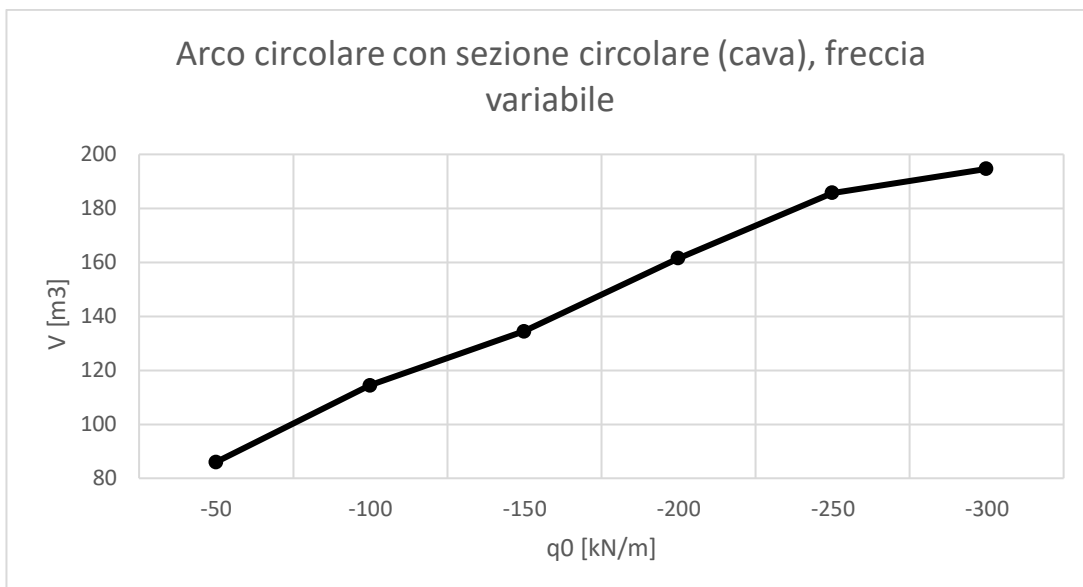


Grafico 13 – Volume dell’arco sottoposto a carichi verticali uniformemente distribuiti – 4 variabili genetiche

Inoltre, si riporta di seguito il grafico che descrive come il software utilizzato trovi il valore di volume finale nel tempo, in particolare quindi il tempo impiegato per le diverse ottimizzazioni:

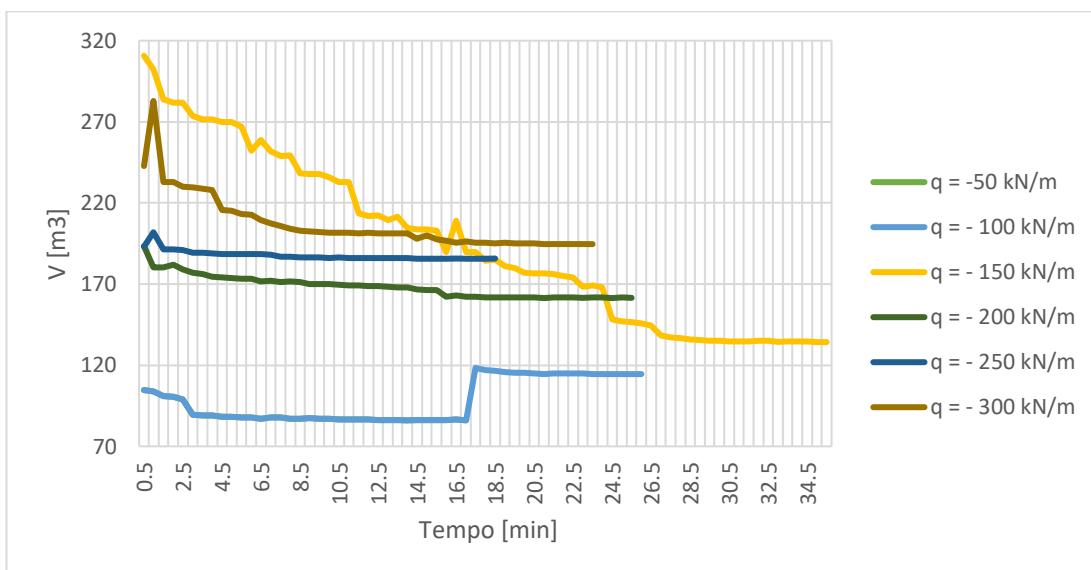


Grafico 14 – Variazione nel tempo delle ottimizzazioni



#### 4.2.5. Confronto tra volumi

Nel seguente paragrafo, vengono riportati i confronti dei volumi con le soluzioni ottimizzate trovate. Questo permetterà di confrontare i risultati di ottimizzazione ottenuti da diverse configurazioni e con un numero crescente di variabili genetiche.

Il primo confronto proposto è tra l'ottimizzazione della struttura con la stessa sezione trasversale dell'arco, ma con la freccia nel primo caso costante e nel secondo caso variabile:

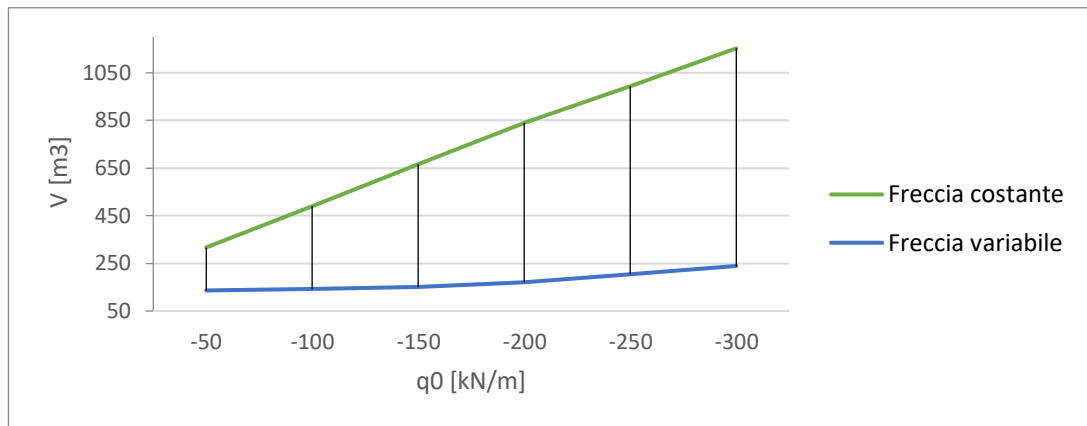


Grafico 15 – Confronto risultati ottenuti dalle ottimizzazioni precedenti

Da questo grafico si può notare come aumentare il numero di variabili genetiche, la funzione obiettivo, cioè il volume totale della struttura diminuisce.

Questo è spiegabile dal fatto che l'aumento del numero di variabili da ottimizzare fornisce una maggiore libertà di modificarsi alla geometria, ciò produrrà un numero maggiore di soluzioni da scegliere. In questo caso specifico la ragione è ovvia per il fatto che con una freccia minore la lunghezza totale dell'arco è minore, di conseguenza il volume diminuisce.

Un secondo confronto proposto è quello tra i risultati ottenuti dalle ottimizzazioni delle strutture entrambe con il valore della freccia come variabile genetica, ma con sezioni trasversali differenti.

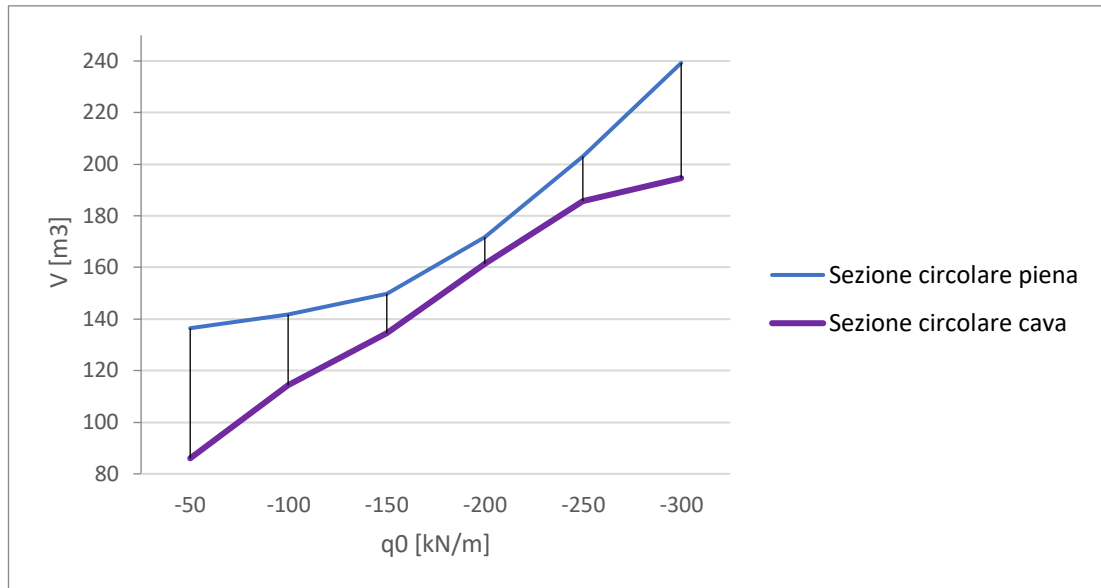


Grafico 16 – Confronto risultati ottenuti dalle ottimizzazioni precedenti

Anche in questo caso, come per il caso studiato dell'arco considerato singolarmente, si può notare, ovviamente, come il volume cambia in base alla sezione trasversale; infatti, si vede come abbia una notevole diminuzione se la sezione ha la stessa forma ma è considerata cava o piena.

Di conseguenza, dall'analisi relativa ai sistemi arco-impalcato-pendini sottoposti a carichi uniformemente distribuiti emergono tre conclusioni principali:

- La relazione tra carico esterno applicato e volume dell'arco è ovviamente crescente ma non è fortemente lineare come nel caso dell'arco considerato da solo;
- Incrementando il numero di variabili genetiche, si ampliano i gradi di libertà del problema di ottimizzazione, rendendo così possibile individuare soluzioni più efficienti dal punto di vista del volume di materiale;
- Alcune variabili esercitano un'influenza più marcata sulla soluzione finale rispetto ad altre.

Per migliorare questo processo di ottimizzazione di questo tipo di struttura si potrebbero considerare i seguenti metodi:

- aggiungere verifiche da eseguire, per esempio quando si considera come materiale l'acciaio, le verifiche di instabilità;
- considerare tutte le variabili genetiche, anche per le sezioni dei pendini e dell'impalcato (quindi le altre dimensioni e i relativi spessori);
- aggiungere la possibilità di cambiare scegliere le sezioni trasversali dei pendini e dell'impalcato, come già si può fare nell'arco;
- considerare anche strutture con diversi materiali (per esempio l'impalcato in calcestruzzo, l'arco e i pendini in acciaio);
- considerare anche diverse funzioni obiettivo, come la minimizzazione delle tensioni sui pendini;
- rendere le variabili genetiche più funzionali, per esempio come detto in precedenza, se si caricassero delle tabelle standard con le varie sezioni trasversali, queste rappresenterebbero un'unica variabile (quella della scelta), senza dover aggiungere più parametri per descriverle;
- definire come variabile genetica il numero dei pendini, così da vedere come cambia il comportamento con un numero maggiore;
- definire un modo diverso per la suddivisione dell'arco e dell'impalcato in elementi lineari finiti, di dimensioni ridotte, tale da essere coerente con il numero di pendini (cioè l'intersezione tra arco-pendini e impalcato-pendini deve comunque persistere, altrimenti il software li considera come elementi separati e non considera più l'intersezione tra essi).
- Condurre ulteriori studi per individuare la migliore rifinitura della mesh, in modo da trovare un buon equilibrio tra la precisione dei risultati e il tempo computazionale richiesto.

## 5. Processo di ottimizzazione

In questo capitolo viene riportato il processo di ottimizzazione seguito, in particolare è stato utilizzato il software Rhino 8 [52] e il suo plug in Grasshopper 3D. [53]

Il processo è stato eseguito secondo i seguenti punti:

1. Definizione delle variabili di input e le variabili genetiche:

Le dimensioni e le forme dell'arco e delle sezioni trasversali vengono definite come variabili da ottimizzare. In particolare, in questo caso sono state raggruppate così da semplificare il processo di scelta di quali variabili usare.

Sono state suddivise in due gruppi:

Variabili genetiche:

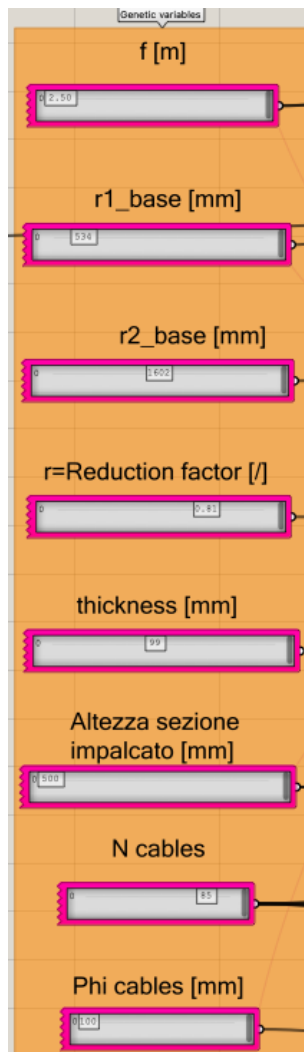


Figura 9 – Variabili genetiche

## Parametri di input

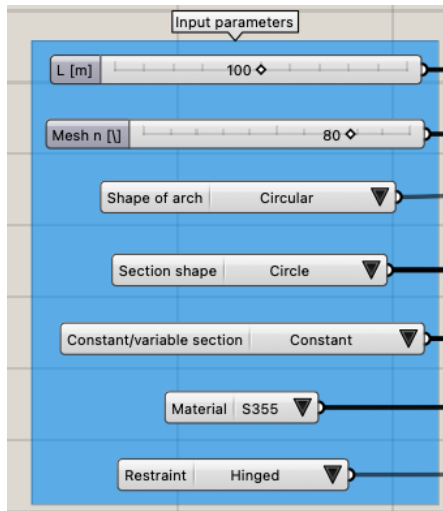


Figura 10 – Parametri di input

2. Analisi strutturale: Per eseguire l'ottimizzazione dell'arco, è fondamentale effettuare l'analisi strutturale del modello parametrico realizzato utilizzando Grasshopper 3D.

Nel contesto di Grasshopper 3D, sono disponibili numerosi strumenti che possono essere utilizzati per sviluppare il modello agli elementi finiti della struttura. In questa tesi, si è optato per l'uso del risolutore agli elementi finiti commerciale Karamba3D [54]. Questa scelta è stata motivata dal fatto che il software può essere integrato nell'ambiente di Grasshopper 3D, risulta relativamente semplice da utilizzare e, soprattutto, è fornito di un manuale utente molto completo.

Il modello agli elementi finiti dell'arco è stato realizzato approssimando la struttura curva con una serie di elementi a trave lineari consecutivi. In particolare, per quanto riguarda la struttura completa con i pendini e l'impalcato, la suddivisione degli elementi dell'arco e dell'impalcato dipende dal numero dei pendini presenti, che deve essere sufficientemente elevato per garantire una suddivisione efficace in elementi finiti. Questa scelta è stata effettuata per garantire l'interazione tra le strutture, perché, altrimenti il software avrebbe considerato gli elementi come separati tra loro. Sebbene questa sia un'approssimazione piuttosto forte, è la metodologia più comunemente utilizzata per le strutture curvature.

L'affidabilità di questo approccio dipende fortemente dalla rifinitura della mesh. È necessario considerare che una mesh più fine comporta un tempo computazionale maggiore, il che può risultare problematico quando l'analisi deve essere eseguita ripetutamente, come in questo caso.

3. Implementazione dell'algoritmo e definizione della funzione obiettivo: L'algoritmo genetico viene utilizzato per esplorare lo spazio delle soluzioni, cercando, in questo caso di minimizzare il volume di materiale.

Per questo processo è stato utilizzato lo strumento di Grasshopper 3D: Galapagos.

È un plugin progettato per l'ottimizzazione e la simulazione evolutiva. Utilizza principi derivati dalla teoria dell'evoluzione biologica per risolvere problemi complessi di progettazione e ottimizzazione.

Questo strumento consente all'utente di scegliere tra due diversi risolutori di ottimizzazione:

- Il risolutore evolutivo (quello utilizzato per le analisi precedenti);
- Il risolutore di annealing simulato.

È importante notare che il risolutore evolutivo di Galapagos non consente di impostare direttamente una funzione di vincolo. Pertanto, i vincoli sono gestiti attraverso l'introduzione di un fattore di penalità sulla funzione obiettivo.

In particolare, nel caso in cui i vincoli stabiliti non siano rispettati, l'algoritmo moltiplica il volume di materiale calcolato per un valore molto elevato. Questo approccio fa sì che le configurazioni che non soddisfano i requisiti di vincolo vengano automaticamente eliminate, poiché risultano avere i volumi maggiori.

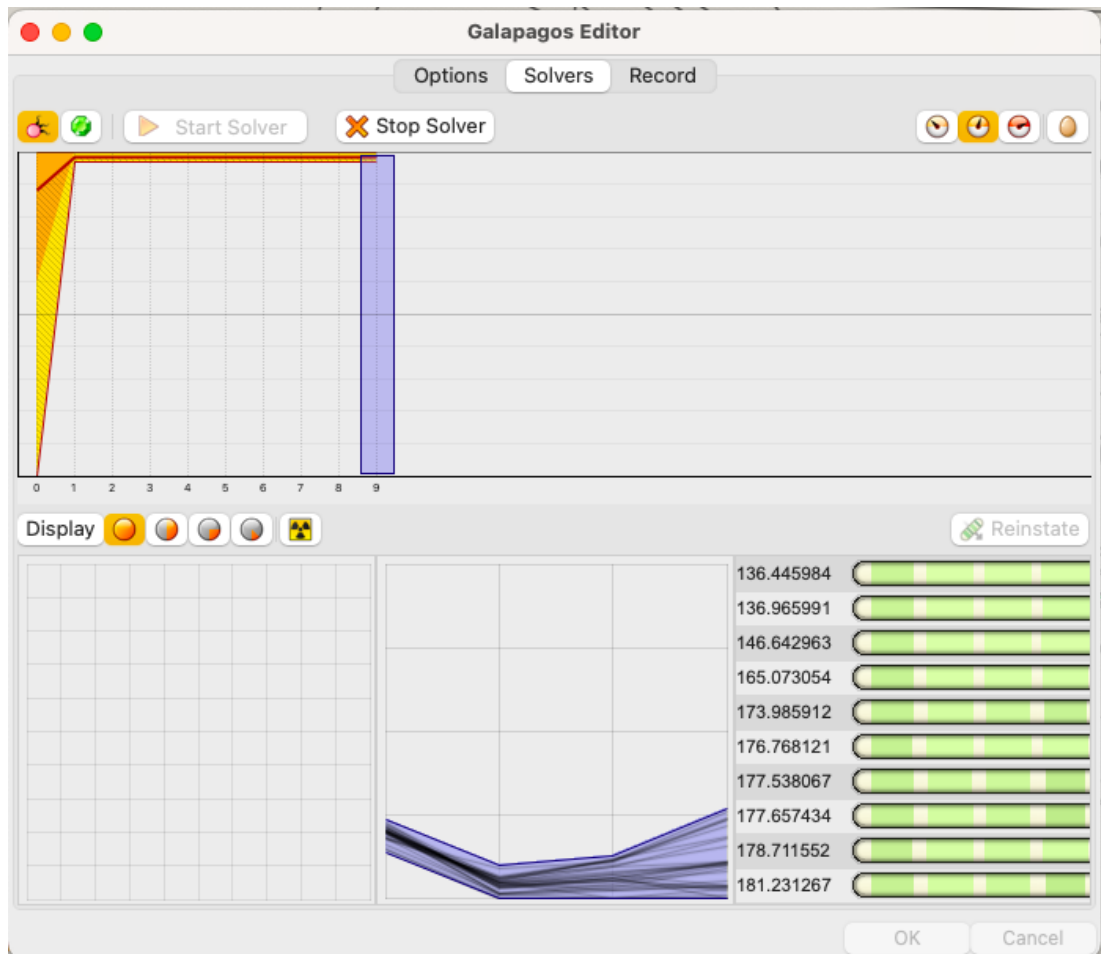


Figura 11– Galapagos

In sintesi, l'algoritmo di ottimizzazione creato in Grasshopper 3D, basato sulle scelte progettuali dell'utente, impiega l'algoritmo evolutivo Galapagos per generare un gran numero di combinazioni delle variabili genetiche, con ogni combinazione che rappresenta un individuo in una popolazione di archi con forme diverse.

Successivamente, i risultati dell'analisi strutturale vengono utilizzati per calcolare le massime sollecitazioni di Von Mises sulla struttura ad arco. Queste sollecitazioni vengono confrontate con la resistenza a snervamento del materiale, permettendo di eliminare dalla popolazione le strutture che non sono in grado di sostenere i carichi applicati.

Per le configurazioni che non riescono a sostenere i carichi applicati, i volumi vengono moltiplicati per un fattore di penalità di  $10^6$  rendendo queste configurazioni le meno

favorevoli per il risolutore. A questo punto, il risolutore evolutivo seleziona le migliori configurazioni all'interno della popolazione per generare una nuova generazione di individui. Il processo viene ripetuto fino a quando la configurazione ottimale non convergerà verso la migliore soluzione.

I prossimi passi che si possono effettuare una volta completata queste fasi sono:

4. Validazione e simulazione: Le soluzioni ottimizzate vengono validate mediante simulazioni numeriche e analisi strutturale approfondita. Questo permette di confrontare le performance delle varie configurazioni e di garantirne la sicurezza e la funzionalità nelle condizioni previste.

5. Generazione di modelli 3D: Alla fine del processo, si può utilizzare software di modellazione 3D come Grasshopper 3D per generare automaticamente il modello tridimensionale dell'arco ottimizzato. Questo approccio grafico non solo facilita la visualizzazione del progetto finale, ma è anche utile nell'ambito della progettazione BIM (Building Information Modeling), permettendo di integrare il modello con altre informazioni progettuali, grazie all'interoperabilità del software Rhinoceros.



## 6. Equazioni descrittive dell'interazione tra arco e impalcato

Per la validazione dei risultati ottenuti dalle ottimizzazioni, è stato sviluppato un sistema di equazioni che descrivono l'interazione tra l'arco e l'impalcato, uniti dai pendini.

Il caso che è stato analizzato in questa tesi è un sistema di arco con impalcato collegati dai pendini, con forma circolare a raggio costante e considerato incernierato alla base, come in Fig. 14.

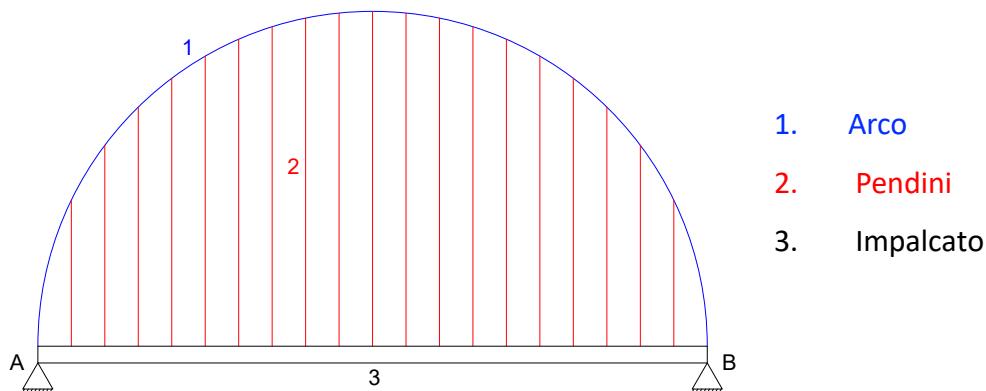


Figura 12 – Sistema Arco + impalcato + pendini

Vengono fatte delle ipotesi per quel che riguarda i comportamenti dell'arco e dell'impalcato:

1. È stato considerato il peso proprio sia dell'arco che dell'impalcato;
2. Poiché il carico è applicato sull'impalcato, i pendini allungandosi trasferiscono il carico dall'impalcato all'arco;
3. L'impalcato ha un comportamento a trave;
4. L'arco è circolare a sezione costante ( $R = cost$ ).

Nelle condizioni limite si considera:

- $J_i \rightarrow 0 \Rightarrow$  il carico grava interamente sull'arco;
- $J_i \rightarrow \infty \Rightarrow$  la trave è infinitamente rigida, per tale motivo l'arco risulta completamente scarico;

Nel caso in esame ci si trova in una condizione intermedia.

## 6.1. Problema delle travi curve

Per ottenere la soluzione analitica della risposta di un arco circolare, si deve fare una trattazione preliminare, in particolare trattare il problema delle travi curve [55], attenendosi alla teoria di De Saint Venant, con tutte le relative ipotesi, tra cui la conservazione della sezione piana. L'elemento di trave curva può essere rappresentato nel seguente modo: si considera un concio infinitesimo delimitato da due sezioni trasversali rette ortogonali all'asse della trave, come mostrato in Fig.15.

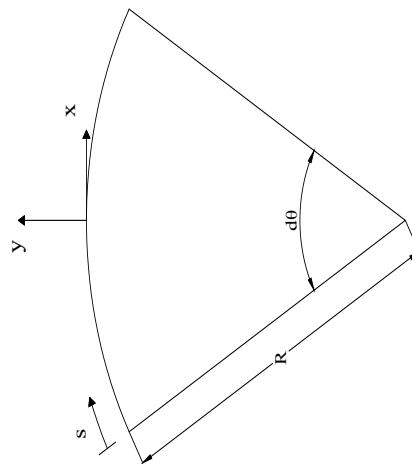


Figura 13 – Elemento infinitesimo di trave curva

Dove:

- $s \rightarrow$  rappresenta l'ascissa curvilinea;
- $R \rightarrow$  rappresenta il raggio di curvatura;
- $d\theta \rightarrow$  rappresenta l'angolo compreso tra le due sezioni esterne.

Per definizione si ha l'estensione del tratto infinitesimo di trave  $ds$  con la seguente espressione:

$$ds = R d\theta \tag{6.1}$$

Allo scopo di studiare il comportamento di una trave curva soggetta ad azioni esterne, è necessario correlare le forze esterne che agiscono sulla trave con le forze interne e

lo spostamento indotto sulla trave stessa. Dovranno essere utilizzate tre tipi di relazioni per ottenere la soluzione:

- Equazioni statiche (indefinite di equilibrio);
- Equazioni cinematiche;
- Equazioni costitutive.

### 6.1.1. Equazioni indefinite di equilibrio

Le equazioni indefinite di equilibrio consentono di determinare una relazione tra le caratteristiche interne della sollecitazione e le forze esterne applicate. Le caratteristiche interne della sollecitazione per una trave curvilinea piana sono lo sforzo normale  $N$ , il taglio  $T$ , il momento flettente  $M$ ; mentre le azioni esterne applicate sono il carico distribuito normale  $q(s)ds$ , il carico distribuito tangenziale  $p(s)ds$ , il momento distribuito  $m(s)ds$ . Si riporta la rappresentazione di un tratto infinitesimo di trave soggetto a tali azioni in *Fig.2.2*:

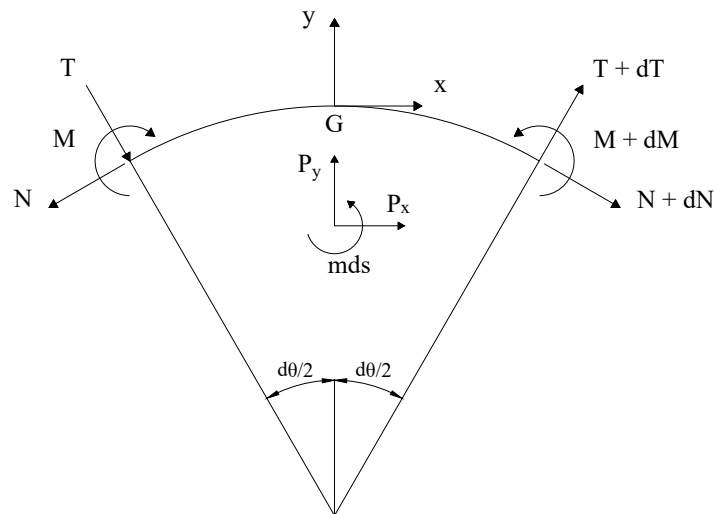


Figura 14 – Caratteristiche interne delle sollecitazioni e forze esterne agenti

Per agevolare l'analisi si indicando i carichi agenti sull'asse  $x$  e sull'asse  $y$  nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
 P_x &= p(s)ds \\
 P_y &= q(s)ds
 \end{aligned}
 \tag{6.1}$$

Poiché si lavora con elementi infinitesimi, valgono le seguenti relazioni che saranno utilizzate in seguito:

$$\begin{aligned}
 \cos(d\theta) &\cong 1 \\
 \sin(d\theta) &\cong d\theta
 \end{aligned}
 \tag{6.2}$$

Successivamente, si procede con la formulazione delle equazioni di equilibrio in direzione  $x$ , in direzione  $y$  e l'equilibrio alla rotazione attorno al baricentro dell'elemento infinitesimo.

#### **Equilibrio alla traslazione lungo l'asse $x$**

Considerando le forze agenti nella direzione  $x$ , l'equilibrio può essere espresso come:

$$\sum F_x = 0
 \tag{6.3}$$

Riferendosi alla *Fig.16* si ottiene la seguente relazione:

$$-N + N + dN + T \frac{d\theta}{2} + (T + dT) \frac{d\theta}{2} + P_x ds = 0
 \tag{6.4}$$

Semplificando è possibile ottenere l'equazione di equilibrio in direzione  $x$  nella seguente espressione:

$$\frac{dN}{ds} + \frac{T}{R} + P_x = 0
 \tag{6.5}$$

#### **Equilibrio alla traslazione lungo l'asse $y$**

Considerando le forze agenti nella direzione  $y$ , l'equilibrio può essere espresso come:

$$\sum F_y = 0
 \tag{6.6}$$

Riferendosi alla *Fig.16* si ottiene la seguente relazione:

$$-T + T + dT - N \frac{d\theta}{2} - (N + dN) \frac{d\theta}{2} + P_y ds = 0 \quad (6.7)$$

Semplificando è possibile ottenere l'equazione di equilibrio in direzione  $x$  nella seguente espressione:

$$\frac{dT}{ds} - \frac{N}{R} + P_y = 0 \quad (6.8)$$

### Equilibrio alla rotazione rispetto al baricentro

Il seguente equilibrio si può identificare con la relazione:

$$\sum M_G = 0 \quad (6.9)$$

Riferendosi alla *Fig.16*, considerando le forze agenti sull'elemento si ottiene la seguente relazione:

$$-M + M + dM - T \frac{ds}{2} + (T + dT) \frac{ds}{2} + m ds = 0 \quad (6.10)$$

Semplificando è possibile ottenere l'equazione di equilibrio in direzione  $x$  nella seguente espressione:

$$\frac{dM}{ds} + T + m = 0 \quad (6.11)$$

### Forma matriciale

Le equazioni di equilibrio trovate, si possono scrivere in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{ds} & \frac{1}{R} & 0 \\ -\frac{1}{R} & \frac{d}{ds} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{d}{ds} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ T \\ M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P_x \\ -P_y \\ -m \end{Bmatrix} \quad (6.12)$$

### 6.1.2. Equazioni indefinite di equilibrio per archi circolari

Per archi circolari, come nel caso in esame, cioè per archi in cui il raggio di curvatura  $R$  non sia funzione dell'ascissa curvilinea  $s$ , le equazioni possono essere scritte in funzione di  $\theta$ :

$$\begin{aligned}\frac{dN}{d\theta} + T + P_x R &= 0 \\ \frac{dT}{d\theta} - N + P_y R &= 0 \\ \frac{dM}{d\theta} + T + mR &= 0\end{aligned}$$

(6.13)

In questo modo è possibile disaccoppiare la funzione  $M$  dalle altre due e ottenere un'equazione differenziale del terzo ordine, ove compaia solo l'incognita  $M(\theta)$ , in particolare considerando la terza equazione di quelle riportate sopra:

$$T = m + \frac{1}{R} \frac{dM}{d\theta}$$

(6.14)

Così che le altre due si trasformano come segue:

$$\begin{aligned}\frac{dN}{d\theta} + m + \frac{1}{R} \frac{dM}{d\theta} + P_x R &= 0 \\ \frac{dm}{d\theta} + \frac{1}{R} \frac{d^2 M}{d\theta^2} - N + P_y R &= 0\end{aligned}$$

(6.15)

Da cui:  $N = P_y R + \frac{dm}{d\theta} + \frac{1}{R} \frac{d^2 M}{d\theta^2}$

(6.16)

Quindi derivando la (6.16) rispetto a  $\theta$  e inserendola nell'equazione (6.15b) risulta:

$$\frac{d^3 M}{d\theta^3} + \frac{dM}{d\theta} = -R^2 \left( P_x + \frac{dP_y}{d\theta} \right) - R \left( m + \frac{d^2 m}{d\theta^2} \right)$$

(6.17)

### 6.1.3. Equazioni cinematiche

Le equazioni cinematiche mettono in relazione gli spostamenti, causati dai carichi applicati, con le deformazioni. In particolare, si considerano lo spostamento lungo la tangenziale  $u$ , lungo la direzione normale  $v$  e la rotazione della sezione  $\varphi$ , riportate in Fig.16.

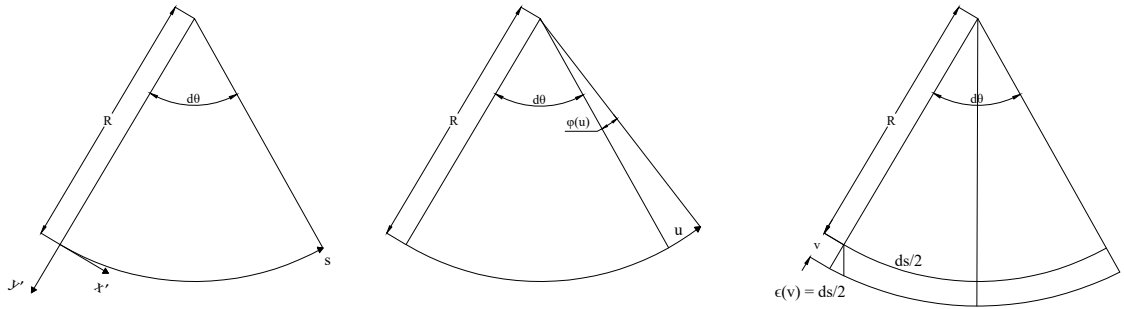


Figura 15 – Stato deformativo trave piana curva

Inizialmente si considerano le equazioni cinematiche per la trave rettilinea, che vengono riportate in seguito:

$$\begin{bmatrix} \epsilon \\ \gamma \\ \chi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{d}{dz} & 0 \\ \frac{d}{dz} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{d}{dz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \varphi \end{bmatrix}$$

(6.18)

La variazione dell'angolo  $\varphi(u)$ , come si può vedere dalla Fig.17, vale:

$$\varphi(u) = \frac{u}{R}$$

(6.19)

Lo spostamento radiale  $v$  produce una deformazione radiale  $\epsilon(v)$ , che, a meno di un infinitesimo di ordine superiore vale:

$$\epsilon(v) = \frac{v}{R}$$

(6.20)

In seguito alla rotazione relativa infinitesima  $d\varphi$ , l'angolo fra le due sezioni estreme verrà individuato come  $d\theta + d\varphi$  e quindi come la somma fra la rotazione iniziale e quella elastica a seguito della deformazione. Di conseguenza la curvatura totale vale:

$$\chi_{tot} = \frac{d\theta + d\varphi}{ds} \quad (6.21)$$

Così che la variazione di curvatura, cioè la curvatura dovuta alla rotazione elastica  $d\varphi$ , risulta essere:

$$\chi = \chi_{tot} - \frac{1}{R} = \frac{d\varphi}{ds} \quad (6.22)$$

Inserendo le relazioni appena trovate per  $\varphi, \epsilon, \chi$  nella matrice (6.18), è possibile ottenere la matrice che esprime le equazioni cinematiche per la trave curva piana:

$$\begin{bmatrix} \epsilon \\ \gamma \\ \chi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} & \frac{d}{ds} & 0 \\ \frac{d}{ds} & -\frac{1}{R} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{d}{ds} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \varphi \end{bmatrix} \quad (6.22)$$



#### 6.1.4. Equazioni costitutive

In conclusione, le equazioni costitutive correlano le caratteristiche interne della sollecitazione con lo stato deformativo. È possibile ottenere l'equazione costitutiva considerando di essere nel campo dell'elasticità lineare, in cui vale la legge di Hooke:

$$\sigma = E \epsilon \quad (6.23)$$

E dalla relazione tra gli scorrimenti angolari con le tensioni tangenziali:

$$\tau = G \gamma \quad (6.24)$$

Considerando le relazioni appena descritte, si possono esprimere le relazioni costitutive nel seguente modo:

$$\begin{aligned} N &= EA \epsilon \\ T &= GA_t \gamma \\ M &= EJ \chi \end{aligned} \quad (6.25)$$

Dove:

- $E$  = il modulo elastico del materiale;
- $A$  = area della sezione trasversale;
- $A_t$  = area della sezione trasversale tagliante.

Si riporta la forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} N \\ T \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & GA_t & 0 \\ 0 & 0 & EJ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon \\ \gamma \\ \chi \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

## 6.2. Soluzione problema dell'arco

In questo capitolo si vuole ritrovare la soluzione del problema dell'arco, in questo caso per un arco circolare, utilizzando le equazioni descritte nel capitolo precedente.

Per semplificare il problema, sono state effettuate ipotesi semplificative. In primo luogo, è stata assunta trascurabile la deformazione a taglio, con conseguente annullamento dello scorrimento angolare:

$$\gamma = 0 \tag{6.27}$$

Di conseguenza ricordando le equazioni cinematiche:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{du}{ds} + \frac{v}{R} \\ \gamma &= \frac{dv}{ds} - \frac{u}{R} - \varphi \\ \chi &= \frac{d\varphi}{ds} \end{aligned} \tag{6.28}$$

La seconda equazione diventa:

$$\varphi = \frac{dv}{ds} - \frac{u}{R} \tag{6.29}$$

Derivando  $\varphi$  rispetto all'ascissa curvilinea si ottiene l'espressione della curvatura, ovviamente considerando la derivata del raggio rispetto ad  $s$  nulla poiché esso è costante:

$$\chi = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d^2v}{ds^2} + \frac{du}{ds} \frac{1}{R} \tag{6.30}$$

Un'ulteriore assunzione è l'instensibilità assiale della trave curva:

$$\epsilon = 0 \tag{6.31}$$

Questo comporta che dalla prima equazione cinematica (6.28a) si ottiene:

$$v = -\frac{du}{ds} R \quad (6.32)$$

Infine, derivando quest'ultima due volte e sostituendola nell'equazione della curvatura (6.30) si ottiene:

$$\chi = -\frac{d^3u}{ds^3} R - \frac{du}{ds} \frac{1}{R} \quad (6.33)$$

### 6.2.1. Calcolo degli spostamenti tangenziali

Per completare l'analisi e giungere ad una soluzione finale, la cui incognita sarà unicamente lo spostamento  $u(s)$ , si deve riprendere le equazioni indefinite di equilibrio viste in precedenza, in particolare l'equazione (6.11):

$$-T = \frac{dM}{ds} + m \quad (6.34)$$

Derivandola e sostituendola nella prima equazione (6.5) indefinita di equilibrio si ottiene:

$$\frac{dT}{ds} = -\frac{d^2M}{ds^2} - \frac{dm}{ds} \quad (6.35)$$

$$\frac{dN}{ds} = \frac{1}{R} \frac{dM}{ds} + \frac{m}{R} - P_x \quad (6.36)$$

Sostituendo la derivata del taglio nella seconda equazione indefinita di equilibrio (6.8) si ottiene:

$$N = R \left( P_y - \frac{d^2M}{ds^2} - \frac{dm}{ds} \right) \quad (6.37)$$

Derivandola:

$$\frac{dN}{ds} = R \frac{dP_y}{ds} - R \frac{d^3M}{ds^3} - R \frac{d^2m}{ds^2} \quad (6.38)$$

Sostituendo quest'ultima nell'equazione (6.36) si ottiene un'equazione differenziale del terzo ordine in cui l'unica incognita è il momento flettente e le sue derivate:

$$R \frac{d^3M}{ds^3} + \frac{1}{R} \frac{dM}{ds} = P_x + R \frac{dP_y}{ds} - R \frac{d^2m}{ds^2} - \frac{m}{R} \quad (6.39)$$

Per poter calcolare gli spostamenti tangenziali, si utilizzano le equazioni costitutive, in particolare l'equazione che lega il momento alla curvatura. Ciò implica la conoscenza delle derivate prima, seconda e terza della curvatura (3.33) rispetto alla coordinata curvilinea  $s$  che vengono qui riportate:

$$\begin{aligned} \frac{d\chi}{ds} &= - \left( R \frac{d^4u}{ds^4} + \frac{1}{R} \frac{d^2u}{ds^2} \right) \\ \frac{d^2\chi}{ds^2} &= - \left( R \frac{d^5u}{ds^5} + \frac{1}{R} \frac{d^3u}{ds^3} \right) \\ \frac{d^3\chi}{ds^3} &= - \left( R \frac{d^6u}{ds^6} + \frac{1}{R} \frac{d^4u}{ds^4} \right) \end{aligned} \quad (6.40)$$

Inserendole nell'equazione costitutiva si ottengono le derivate dei momenti in funzione della sola incognita  $u(s)$ , si considera un modulo elastico e un momento di inerzia costanti:

$$\begin{aligned} \frac{dM}{ds} &= -EJ \frac{d\chi}{ds} = -EJ \left( R \frac{d^4u}{ds^4} + \frac{1}{R} \frac{d^2u}{ds^2} \right) \\ \frac{d^2M}{ds^2} &= -EJ \frac{d^2\chi}{ds^2} = -EJ \left( R \frac{d^5u}{ds^5} + \frac{1}{R} \frac{d^3u}{ds^3} \right) \\ \frac{d^3M}{ds^3} &= -EJ \frac{d^3\chi}{ds^3} = -EJ \left( R \frac{d^6u}{ds^6} + \frac{1}{R} \frac{d^4u}{ds^4} \right) \end{aligned} \quad (6.41)$$

Infine, inserendole nell'equazione (6.39), si raggiunge l'equazione finale dell'arco circolare, differenziale del sesto ordine con come unica incognita  $u(s)$ :

$$EJ \left( R^2 \frac{d^6 u}{ds^6} + 2 \frac{d^4 u}{ds^4} + \frac{1}{R} \frac{d^2 u}{ds^2} \right) = - \left[ P_x + R \frac{dP_y}{ds} - R \frac{d^2 m}{ds^2} - \frac{m}{R} \right] \quad (6.42)$$

Per la futura trattazione è necessario avere l'equazione in funzione dell'angolo  $\theta$ , poiché vale la relazione:

$$ds = R d\theta \rightarrow \frac{d}{ds} = \frac{1}{R} \frac{d}{d\theta} \quad (6.43)$$

$$\begin{aligned} EJ \left( R^2 \frac{d^6 u}{ds^6} + 2 \frac{d^4 u}{ds^4} + \frac{1}{R^2} \frac{d^2 u}{ds^2} \right) &= EJ \left( R^2 \cdot \frac{1}{R^6} \cdot \frac{d^6 u}{d\theta^6} + \frac{2}{R^4} \cdot \frac{d^4 u}{d\theta^4} + \frac{1}{R^2} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right) \\ &= \frac{EJ}{R^4} \left( \frac{d^6 u}{d\theta^6} + 2 \cdot \frac{d^4 u}{d\theta^4} + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right) \end{aligned} \quad (6.44)$$

L'equazione finale risulta:

$$\frac{EJ}{R^4} \left( \frac{d^6 u}{d\theta^6} + 2 \cdot \frac{d^4 u}{d\theta^4} + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right) = - \left[ P_x + R \frac{dP_y}{ds} - R \frac{d^2 m}{ds^2} - \frac{m}{R} \right] \quad (6.45)$$

### 6.3. Arco circolare uniformemente teso con pendini

Si considera il caso in esame: un sistema ad arco circolare con impalcato e pendini, dove si assume che i pendini si comportino come una membrana uniformemente distribuita lungo l'arco, con una sezione costante  $t$ .

Di seguito saranno definiti i carichi agenti sull'arco:

- Peso proprio dell'arco  $\rightarrow \gamma_a \cdot A_a$
- Carico uniforme dato dal tiro dei pendini  $\rightarrow q = -f_{v,p}$

Per prima cosa vengono definite delle relazioni geometriche, in particolare tra la coordinata curvilinea  $s$ , la coordinata globale  $x$  e l'angolo  $\theta$ .

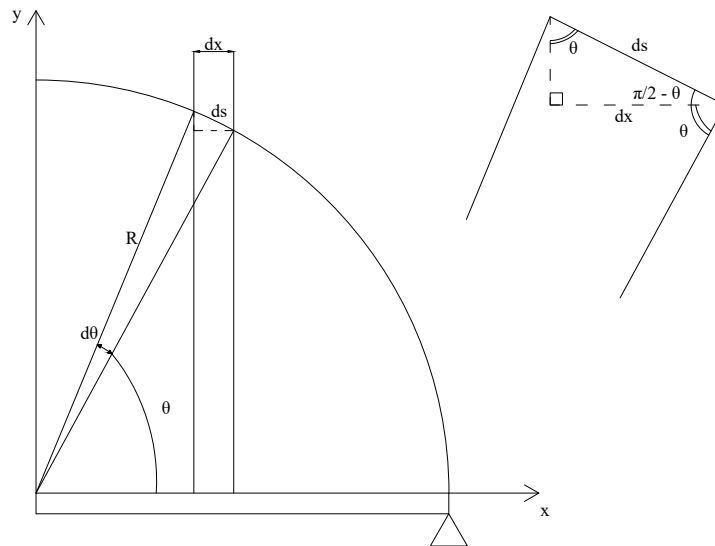


Figura 16 – Relazione geometrica

Come si vede in Fig.18 vale la seguente relazione:

$$dx = - ds \cdot \text{sen}\theta = - R \cdot d\theta \cdot \text{sen}\theta \quad \text{con } \theta[0; \pi] \quad (6.46)$$

Poiché l'arco ha raggio  $R$  costante essendo circolare e ipotizzando di non avere momenti applicati all'arco l'equazione può essere semplificata nel seguente modo:

$$\left( R^2 \frac{d^6 u}{ds^6} + 2 \frac{d^4 u}{ds^4} + \frac{1}{R^2} \frac{d^2 u}{ds^2} \right) = - \frac{1}{EJ_a} \left( P_T + R \frac{dP_N}{ds} \right) \quad (6.47)$$

Su un elemento infinitesimo di lunghezza  $ds$  gravano:

- Peso elemento unitario  $\rightarrow \gamma_a \cdot A_a \cdot ds$
- Carico uniforme  $\rightarrow -q \cdot dx = -q \cdot (-ds \cdot \text{sen}\theta)$

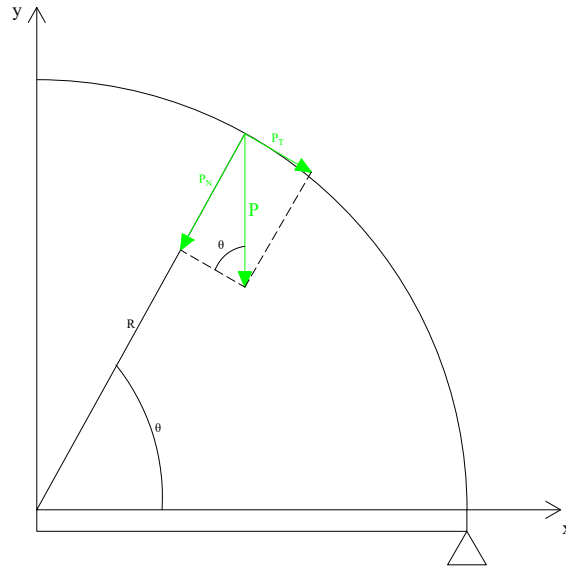


Figura 17 – Carichi esterni applicati

Quindi su un tratto  $ds$ , come mostrato in Fig.19, si ha un carico verticale pari a:

$$(q \cdot \text{sen}\theta + \gamma_a \cdot A_a) \cdot ds = P \cdot ds$$

(6.48)

Se si proietta il carico  $P$  rispetto alla normale e alla tangente:

$$P_N = -P \cdot \text{sen}\theta = -(q \cdot \text{sen}\theta + \gamma_a \cdot A_a) \cdot \text{sen}\theta$$

$$P_T = -P \cdot \text{cos}\theta = -(q \cdot \text{sen}\theta + \gamma_a \cdot A_a) \cdot \text{cos}\theta$$

(6.49)

Si può trasformare tutto in funzione dell'angolo  $\theta$ :

$$\begin{aligned} \frac{dP_N}{ds} &= \frac{1}{R} \frac{dP_N}{d\theta} = -\frac{1}{R} \frac{d}{d\theta} (q \cdot \text{sen}\theta + \gamma_a \cdot A_a) \cdot \text{sen}\theta \\ &= -\frac{1}{R} \frac{d}{d\theta} (q \cdot \text{sen}^2 \theta + \gamma_a \cdot A_a \cdot \text{sen}\theta) \\ &= -\frac{1}{R} (2q \cdot \text{sen}\theta \cdot \text{cos}\theta + \gamma_a \cdot A_a \cdot \text{cos}\theta) \end{aligned}$$

(6.50)

$$\begin{aligned}
- \left( P_T + R \frac{dP_N}{ds} \right) &= + (q \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta + \gamma_a \cdot A_a \cdot \cos\theta) + \frac{R}{R} (2q \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta + \gamma_a \cdot \\
A_a \cdot \cos\theta) &= 3q \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta + 2 \gamma_a \cdot A_a \cdot \cos\theta
\end{aligned}
\tag{6.51}$$

L'equazione dell'arco in funzione di  $\theta$  risulta essere:

$$\left( \frac{d^6 u}{d\theta^6} + 2 \frac{d^4 u}{d\theta^4} + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right) = \frac{R^4}{EJ_a} \cdot [ 3 \cdot q \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta + 2 \gamma_a \cdot A_a \cdot \cos\theta ]
\tag{6.52}$$

Dove il carico uniforme  $q$  è espresso dalla forza dei pendini:

$$q = -f_{v,p}(\theta)$$



## 6.4. Equazione dell'impalcato

Avendo ipotizzato un impalcato a sezione costante, l'equazione che rappresenta il suo comportamento è l'equazione della linea elastica:

$$E_i J_i \cdot \frac{d^4 y}{dx^4} = -q(x) = -(\gamma_i A_i - f_{v,p}(\theta)) \quad (6.53)$$

Dove il carico  $q$  è dato dalla somma di:

- peso proprio dell'impalcato  $\rightarrow \gamma_i \cdot A_i$
- tiro nei pendini  $\rightarrow f_{v,p}$

In questo caso sono di interesse solamente le componenti verticali degli spostamenti, riportate in seguito nella Fig.20:

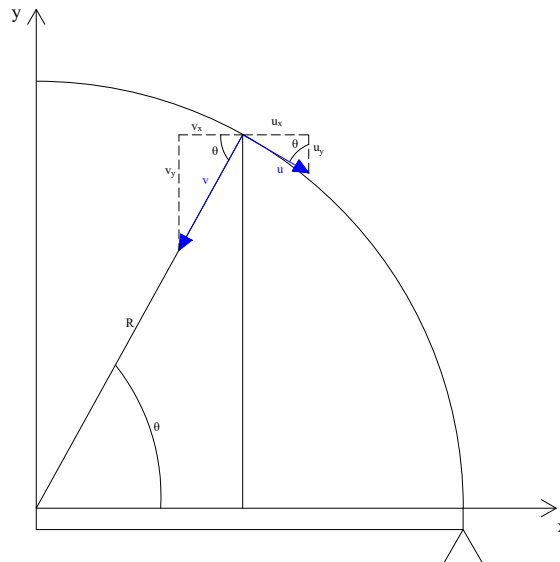


Figura 18 – Spostamenti normale e tangenziale

$$\begin{cases} u_y = -u \cdot \cos\theta \\ v_y = -v \cdot \sin\theta \end{cases} \quad (6.54)$$

La componente  $v$  si può anche ricavare in funzione di  $u$  come:

$$v(\theta) = -\frac{du}{ds} \cdot R = -\frac{R}{R} \cdot \frac{du}{d\theta} = -\frac{du}{d\theta} \quad (6.55)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_y = -u \cdot \cos\theta \\ v_y = +\frac{du}{d\theta} \cdot \sin\theta \end{cases} \quad (6.56)$$

La rigidezza per unità di lunghezza dell'arco è data da:

$$f_{v,p} = \frac{K_p \cdot \Delta l}{l_o} \quad (6.57)$$

Dove:

- ordinata nel punto considerato sull'arco  $\rightarrow l_o = R \cdot \sin\theta$
- la rigidezza per assiale dei pendini, definita da una costante  $\rightarrow K_p$  (ipotesi effettuata per semplificare le equazioni)
- variazione di lunghezza  $\rightarrow \Delta l = y_i - y_a$  con  $y_i \geq y_a \geq 0$  (Questa ipotesi rappresenta il fatto che l'arco è più rigido dell'impalcato)

Sostituendo le relazioni riportate si trova  $f_{v,p}$  per unità di lunghezza dell'impalcato  $dx$ :

$$f_{v,p}(\theta) = \frac{K_p \cdot (y_i - y_a)}{l_o} = \frac{K_p \cdot (y_i - y_a)}{R \cdot \sin\theta} \quad (6.58)$$

Dove l'abbassamento dell'arco  $y_a$  può essere espresso come:

$$y_a = u_y + v_y = -u \cdot \cos\theta + \frac{du}{d\theta} \cdot \sin\theta \quad (6.59)$$

$$\Rightarrow f_{v,p} = \frac{E_p \cdot t_p}{R \sin\theta} \cdot \left( y_i - \left( -u \cdot \cos\theta + \frac{du}{d\theta} \cdot \sin\theta \right) \right)$$

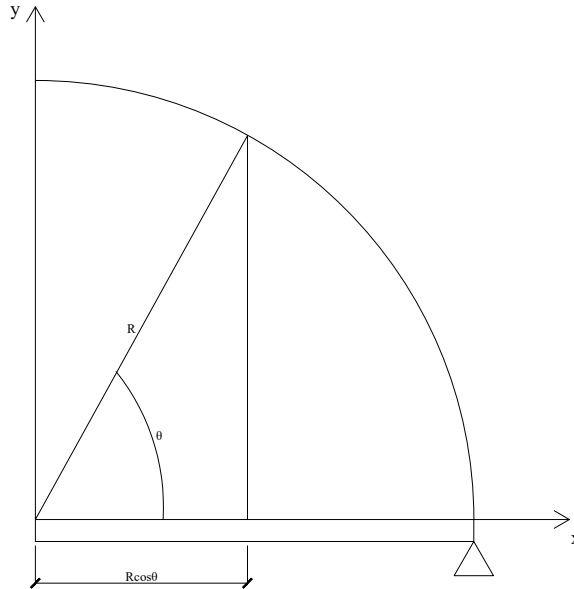
$$\Rightarrow f_{v,p} = \frac{K_p}{R \sin\theta} \cdot \left( y_i + u \cdot \cos\theta - \frac{du}{d\theta} \cdot \sin\theta \right)$$

(6.60)

La coordinata dell'abbassamento della trave, visto in *Fig. 18*, risulta:

$$x = R \cdot \cos\theta$$

$$\frac{dx}{d\theta} = -R \cdot \text{sen}\theta \Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = -\frac{1}{R \cdot \text{sen}\theta}$$
(6.61)



*Figura 19 – Coordinata dell'abbassamento*

Si ottiene l'equazione che descrive il comportamento dell'impalcato:

$$EJ_i \cdot \frac{d^4 y}{dx^4} = -q(x) = -(\gamma_i A_i - f_v(\theta)) = -(\gamma_i A_i - f_v(\theta))$$
(6.62)

$$-q(x) = -\left[ \gamma_i A_i - \frac{E_p \cdot t_p}{R \text{sen}\theta} \cdot \left( y_i + u \cdot \cos\theta - \frac{du}{d\theta} \cdot \text{sen}\theta \right) \right]$$
(6.63)

Trasformando  $dx$  in  $d\theta$  con la relazione in (6.60):

$$E_i J_i \cdot \frac{d^4 y}{dx^4} = E_i J_i \cdot \left( -\frac{1}{R \cdot \text{sen}\theta} \right)^4 \cdot \frac{d^4 y}{d\theta^4} = \frac{E_i J_i}{R^4 \cdot \text{sen}^4 \theta} \cdot \frac{d^4 y}{d\theta^4}$$
(6.64)

$$\frac{E_i J_i}{R^4 \cdot \text{sen}^4 \theta} \cdot \frac{d^4 y}{d\theta^4} = -\left[ \gamma_i A_i - \frac{K_p}{R \text{sen}\theta} \cdot \left( y_i + u \cdot \cos\theta - \frac{du}{d\theta} \cdot \text{sen}\theta \right) \right]$$
(6.65)

## 6.5. Sistema Arco – Impalcato

Si riportano le equazioni che compongono il sistema da risolvere, con la sostituzione dell'equazione della forza dei pendini (6.60) nell'equazione risolvente dell'arco

Arco:

$$\left(\frac{d^6 u}{d\theta^6} + 2\frac{d^4 u}{d\theta^4} + \frac{d^2 u}{d\theta^2}\right) = \frac{R^4}{E_a J_a} \cdot [3q \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta + 2\gamma_a \cdot A_a \cdot \cos\theta] = \frac{R^4}{E_a J_a} \left\{ 3 \cdot \left[ -\frac{K_p}{R \sin\theta} \cdot \left(y_i + u \cdot \cos\theta - \frac{du}{d\theta} \cdot \sin\theta\right) \right] \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta + 2\gamma_a \cdot A_a \cdot \cos\theta \right\} \quad (6.66)$$

Impalcato:

$$\frac{d^4 y_i}{d\theta^4} = -\frac{R^4 \cdot \sin^4 \theta}{E_i J_i} \cdot \left[ \gamma_i A_i - \frac{K_p}{R \sin\theta} \cdot \left(y_i + u \cdot \cos\theta - \frac{du}{d\theta} \cdot \sin\theta\right) \right] \quad (6.67)$$

In questo modo è stato ricavato un sistema differenziale di due equazioni in due incognite. Le incognite sono lo spostamento tangenziale dell'arco  $u(\theta)$  e l'abbassamento dell'impalcato  $y_i(\theta)$ .

Dopo vari passaggi matematici semplificativi, si possono esprimere le due equazioni nel seguente modo:

Arco:

$$\left(\frac{d^6 u}{d\theta^6} + 2\frac{d^4 u}{d\theta^4} + \frac{d^2 u}{d\theta^2}\right) = -\frac{3 \cdot R^3}{E_a J_a} \cdot K_p \cdot \cos \cdot y_i - \frac{3 \cdot R^3}{E_a J_a} \cdot K_p \cdot \sin\theta \cdot \cos^2 \theta \cdot (E_p t_p) \cdot u + \frac{3 \cdot R^3}{E_a J_a} \cdot \sin^2 \theta \cdot \cos\theta \cdot (E_p t_p) \cdot \frac{du}{d\theta} + \frac{2 \cdot R^4}{E_a J_a} \cdot \gamma_a \cdot A_a \cdot \cos\theta \quad (6.68)$$

Impalcato:

$$\frac{d^4 y_i}{d\theta^4} = -\frac{R^4 \cdot \sin^4 \theta}{E_i J_i} \cdot \gamma_i A_i + \frac{R^3}{E_i J_i} \cdot \sin^3 \theta \cdot K_p \cdot y_i + \frac{R^3}{E_i J_i} \cdot \sin^3 \theta \cdot K_p \cdot \cos\theta \cdot u - \frac{R^3}{E_i J_i} \cdot \sin^4 \theta \cdot K_p \cdot \frac{du}{d\theta} \quad (6.69)$$

Dall'equazione dell'arco ricavo  $y_i$  in funzione di  $u$ :

$$y_i = \frac{E_a J_a}{3 \cdot R^3 \cdot \cos\theta \cdot K_p} \cdot \left( \frac{d^6 u}{d\theta^6} + 2 \frac{d^4 u}{d\theta^4} + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right) - u \cdot \cos\theta + \frac{du}{d\theta} \cdot \sin\theta - \frac{2 \cdot R}{3 \cdot K_p} \cdot \gamma_a \cdot A_a \quad (6.70)$$

Sostituisco i valori nell'equazione dell'impalcato:

$$\begin{aligned} \frac{d^4}{d\theta^4} \left[ \frac{E_a J_a}{3 \cdot R^3 \cdot \cos\theta \cdot K_p} \cdot \left( \frac{d^6 u}{d\theta^6} + 2 \frac{d^4 u}{d\theta^4} + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right) - u \cdot \cos\theta + \frac{du}{d\theta} \cdot \sin\theta - \frac{2 \cdot R}{3 \cdot K_p} \cdot \gamma_a \cdot A_a \right. \\ \left. A_a \right] = - \frac{R^4 \cdot \sin^4 \theta}{E_i J_i} \cdot \gamma_i A_i + \frac{R^3}{E_i J_i} \cdot \sin^3 \theta \cdot K_p \cdot \left[ \frac{E_a J_a}{3 \cdot R^3 \cdot \cos\theta \cdot K_p} \cdot \left( \frac{d^6 u}{d\theta^6} + 2 \frac{d^4 u}{d\theta^4} + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right) - \right. \\ \left. u \cdot \cos\theta + \frac{du}{d\theta} \cdot \sin\theta - \frac{2 \cdot R}{3 \cdot K_p} \cdot \gamma_a \cdot A_a \right] + \frac{R^3}{E_i J_i} \cdot \sin^3 \theta \cdot K_p \cdot u \cdot \cos\theta - \frac{R^3}{E_i J_i} \cdot \sin^4 \theta \cdot \\ K_p \cdot \frac{du}{d\theta} \\ \Rightarrow \frac{d^4}{d\theta^4} \left[ \frac{E_a J_a}{3 \cdot R^3 \cdot \cos\theta \cdot K_p} \cdot \left( \frac{d^6 u}{d\theta^6} + 2 \frac{d^4 u}{d\theta^4} + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right) - u \cdot \cos\theta + \frac{du}{d\theta} \cdot \sin\theta - \frac{2 \cdot R}{3 \cdot K_p} \cdot \gamma_a \cdot \right. \\ \left. A_a \right] = - \frac{R^4 \cdot \sin^4 \theta}{E_i J_i} \cdot \gamma_i A_i + \frac{(E_a J_a) \cdot \sin^3 \theta}{3 \cdot (E_i J_i) \cdot \cos\theta} \cdot \left( \frac{d^6 u}{d\theta^6} + 2 \frac{d^4 u}{d\theta^4} + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right) - \frac{R^3}{E_i J_i} \cdot \sin^3 \theta \cdot K_p \cdot u \cdot \\ \cos\theta + \frac{R^3}{E_i J_i} \cdot \sin^4 \theta \cdot K_p \cdot \frac{du}{d\theta} - \frac{2 \cdot R^4 \cdot \sin^3 \theta}{3 \cdot E_i J_i} \cdot \gamma_a \cdot A_a + \frac{R^3}{E_i J_i} \cdot \sin^3 \theta \cdot K_p \cdot u \cdot \cos\theta - \\ \frac{R^3}{E_i J_i} \cdot \sin^4 \theta \cdot K_p \cdot \frac{du}{d\theta} \end{aligned} \quad (6.71)$$

L'equazione finale, un'equazione differenziale del decimo ordine, risolvibile del sistema risulta:

$$\begin{aligned} \frac{d^4}{d\theta^4} \left[ \frac{E_a J_a}{3 \cdot R^3 \cdot \cos\theta \cdot K_p} \cdot \left( \frac{d^6 u}{d\theta^6} + 2 \frac{d^4 u}{d\theta^4} + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right) - u \cdot \cos\theta + \frac{du}{d\theta} \cdot \sin\theta - \frac{2 \cdot R}{3 \cdot K_p} \cdot \gamma_a \cdot A_a \right] = \\ - \frac{R^4 \cdot \sin^4 \theta}{E_i J_i} \cdot \gamma_i A_i + \frac{(E_a J_a) \cdot \sin^3 \theta}{3 \cdot (E_i J_i) \cdot \cos\theta} \cdot \left( \frac{d^6 u}{d\theta^6} + 2 \frac{d^4 u}{d\theta^4} + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right) - \frac{2 \cdot R^4 \cdot \sin^3 \theta}{3 \cdot E_i J_i} \cdot \gamma_a \cdot A_a \end{aligned} \quad (6.72)$$

Per semplificare l'equazione si pongono i seguenti coefficienti:

$$\begin{aligned} a &= \frac{E_a J_a}{3} \\ b &= E_i J_i \\ c &= R^3 \cdot K_p \\ d &= - \frac{2 \cdot R}{3 \cdot K_p} \cdot \gamma_a \cdot A_a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e &= R^4 \cdot \gamma_i A_i \\
 f &= \frac{2 \cdot R^4}{3} \cdot \gamma_a \cdot A_a
 \end{aligned}
 \tag{6.73}$$

Sostituendo i coefficienti nell'equazione si può scrivere:

$$\begin{aligned}
 &\frac{d^4}{d\theta^4} \left[ \frac{a}{b \cdot c} \cdot \frac{1}{\cos\theta} \cdot \left( \frac{d^6 u}{d\theta^6} + 2 \frac{d^4 u}{d\theta^4} + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right) - u \cdot \cos\theta + \frac{du}{d\theta} \cdot \sin\theta - d \right] \\
 &= -\frac{e}{b} + \frac{a}{b} \cdot \frac{\sin^3 \theta}{\cos\theta} \cdot \left( \frac{d^6 u}{d\theta^6} + 2 \frac{d^4 u}{d\theta^4} + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right) - \frac{f}{b} \cdot \sin^3 \theta
 \end{aligned}
 \tag{6.74}$$

Si può notare che l'equazione risulta molto complessa, poiché è un'equazione differenziale del decimo ordine; infatti, non si è trovata una soluzione da inserire in un software numerico come Matlab.

Però essendo del decimo ordine sono state considerate le condizioni al contorno, in particolare sono state definite dieci condizioni al contorno totali, per arco e impalcato.

#### 6.5.1. Condizioni al contorno

In questo caso sono le condizioni al contorno di arco e impalcato incernierato.

##### **Condizioni al contorno dell'arco incernierato:**

$$\begin{aligned}
 u(\theta = 0) &= 0 \\
 u(\theta = \pi) &= 0 \\
 v(\theta = 0) &= -\frac{du}{d\theta}(0) = 0 \\
 v(\theta = \pi) &= -\frac{du}{d\theta}(\pi) = 0 \\
 M(\theta = 0) &= 0 \\
 M(\theta = \pi) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{6.75}$$

Per definire il momento in funzione di  $\theta$  si ricorda la relazione:

$$M = E_a J_a \chi
 \tag{6.76}$$

Facendo riferimento alle relazioni che legano  $s$  a  $\theta$  e  $\chi$  a  $u$ , rispettivamente (6.43) e (6.33), si può esprimere la curvatura in funzione di  $\theta$ :

$$\chi = -\frac{d^3u}{ds^3}R - \frac{du}{ds} \frac{1}{R} = -\frac{1}{R^3} \cdot \frac{d^3u}{d\theta^3}R - \frac{du}{d\theta} \frac{1}{R} \frac{1}{R} = -\frac{1}{R^2} \cdot \left( \frac{d^3u}{d\theta^3} + \frac{du}{d\theta} \right) \quad (6.77)$$

$$\Rightarrow M = E_a J_a \chi = -\frac{E_a J_a}{R^2} \cdot \left( \frac{d^3u}{d\theta^3} + \frac{du}{d\theta} \right) \quad (6.78)$$

Risulta possibile esprimere le sei condizioni al contorno per l'arco nel seguente modo:

$$\begin{aligned} u(\theta = 0) &= 0 \\ u(\theta = \pi) &= 0 \\ v(\theta = 0) &= -\frac{du}{d\theta}(0) = 0 \\ v(\theta = \pi) &= -\frac{du}{d\theta}(\pi) = 0 \\ M(\theta = 0) &= E_a J_a \chi(\theta = 0) = \left| -\frac{E_a J_a}{R^2} \cdot \left( \frac{d^3u}{d\theta^3} + \frac{du}{d\theta} \right) \right|_{(\theta=0)} \\ M(\theta = \pi) &= E_a J_a \chi(\theta = \pi) = \left| -\frac{E_a J_a}{R^2} \cdot \left( \frac{d^3u}{d\theta^3} + \frac{du}{d\theta} \right) \right|_{(\theta=\pi)} \end{aligned} \quad (6.79)$$

**Condizioni al contorno dell'impalcato incernierato:**

$$\begin{aligned} y_i(\theta = 0) &= 0 \\ y_i(\theta = \pi) &= 0 \\ M(\theta = 0) & \\ M(\theta = \pi) & \end{aligned} \quad (6.80)$$

Per esprimere il momento flettente dell'impalcato si utilizza la relazione tra la freccia ed il momento stesso fornita dalla linea elastica, per cui vale:

$$\frac{d^2 y_i}{dy^2} = -\frac{M}{E_i J_i} \Rightarrow M = -E_i J_i \cdot \frac{d^2 y_i}{dy^2} \quad (6.81)$$

L'operatore  $dy$  può essere espresso in funzione di  $\theta$  nel seguente modo:

$$dy = -ds \cdot \cos\theta = -R \cdot d\theta \cdot \cos\theta \quad (6.82)$$

$$\Rightarrow M = -E_i J_i \cdot \frac{d^2 y_i}{dy} = -E_i J_i \cdot \frac{1}{R \cdot \cos\theta} \cdot \frac{d^2 y_i}{d\theta^2} \quad (6.83)$$

Facendo riferimento all'equazione (6.70) si può esprimere la derivata seconda di  $y_i$  rispetto a  $\theta$ , la quale vale:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_i}{d\theta^2} = & \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{E_a J_a}{3 \cdot R^3 \cdot \cos\theta \cdot K_P} \cdot \left( \frac{d^6 u}{d\theta^6} + 2 \frac{d^4 u}{d\theta^4} + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right) \right) - \frac{du}{d\theta} \cdot \text{sen}\theta + u \cdot \text{cos}\theta + \frac{d^3 u}{d\theta^3} \cdot \\ & \text{sen}\theta + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \cdot \text{cos}\theta \end{aligned} \quad (6.84)$$

Le condizioni al contorno dell'impalcato valgono:

$$y_i(\theta = 0) = \frac{E_a J_a}{3 \cdot R^3 \cdot \cos(0) \cdot K_P} \cdot \left( \frac{d^6 u}{d\theta^6} + 2 \frac{d^4 u}{d\theta^4} + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right) - u \cdot \cos(0) + \frac{du}{d\theta} \cdot \text{sen}(0) - \frac{2 \cdot R}{3 \cdot K_P} \cdot \gamma_a \cdot A_a = 0$$

$$y_i(\theta = \pi) = \frac{E_a J_a}{3 \cdot R^3 \cdot \cos(\pi) \cdot K_P} \cdot \left( \frac{d^6 u}{d\theta^6} + 2 \frac{d^4 u}{d\theta^4} + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right) - u \cdot \cos(\pi) + \frac{du}{d\theta} \cdot \text{sen}(\pi) - \frac{2 \cdot R}{3 \cdot K_P} \cdot \gamma_a \cdot A_a = 0$$

$$M(\theta = 0) = \left| -E_i J_i \cdot \frac{1}{R \cdot \cos\theta} \cdot \left[ \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{E_a J_a}{3 \cdot R^3 \cdot \cos\theta \cdot K_P} \cdot \left( \frac{d^6 u}{d\theta^6} + 2 \frac{d^4 u}{d\theta^4} + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right) \right) - \frac{du}{d\theta} \cdot \text{sen}\theta + u \cdot \text{cos}\theta + \frac{d^3 u}{d\theta^3} \cdot \text{sen}\theta + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \cdot \text{cos}\theta \right] \right|_{\theta=0} = 0$$

$$M(\theta = \pi) = \left| -E_i J_i \cdot \frac{1}{R \cdot \cos\theta} \cdot \left[ \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{E_a J_a}{3 \cdot R^3 \cdot \cos\theta \cdot K_P} \cdot \left( \frac{d^6 u}{d\theta^6} + 2 \frac{d^4 u}{d\theta^4} + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right) \right) - \frac{du}{d\theta} \cdot \text{sen}\theta + u \cdot \text{cos}\theta + \frac{d^3 u}{d\theta^3} \cdot \text{sen}\theta + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \cdot \text{cos}\theta \right] \right|_{\theta=\pi} = 0$$

(6.85)



Utilizzando le costanti definite in precedenza e definendo ulteriormente:

$$\alpha = \frac{a}{b \cdot c} \Rightarrow y_i = \alpha \cdot \frac{1}{\cos \theta} \cdot \left( \frac{d^6 u}{d\theta^6} + 2 \frac{d^4 u}{d\theta^4} + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right) - u \cdot \cos \theta + \frac{du}{d\theta} \cdot \sin \theta - d \quad (6.86)$$

Si può definire la derivata prima di  $y_i$  come:

$$\begin{aligned} \frac{dy_i}{d\theta} &= \alpha \left( \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \left( \frac{d^6 u}{d\theta^6} + 2 \frac{d^4 u}{d\theta^4} + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right) + \frac{1}{\cos \theta} \left( \frac{d^7 u}{d\theta^7} + 2 \frac{d^5 u}{d\theta^5} + \frac{d^3 u}{d\theta^3} \right) \right) - \frac{du}{d\theta} \cdot \cos \theta + u \cdot \\ &\sin \theta + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \cdot \sin \theta + \frac{du}{d\theta} \cdot \cos \theta \\ \Rightarrow \frac{dy_i}{d\theta} &= \alpha \left( \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \left( \frac{d^6 u}{d\theta^6} + 2 \frac{d^4 u}{d\theta^4} + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right) + \frac{1}{\cos \theta} \left( \frac{d^7 u}{d\theta^7} + 2 \frac{d^5 u}{d\theta^5} + \frac{d^3 u}{d\theta^3} \right) \right) + u \cdot \sin \theta + \\ &\frac{d^2 u}{d\theta^2} \cdot \sin \theta \end{aligned} \quad (6.87)$$

La derivata seconda di  $y_i$  vale:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_i}{d\theta^2} &= \alpha \left[ \frac{\cos \theta + 2 \sin^2 \theta}{\cos^3 \theta} \left( \frac{d^6 u}{d\theta^6} + 2 \frac{d^4 u}{d\theta^4} + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right) + \frac{1}{\cos \theta} \left( \frac{d^7 u}{d\theta^7} + 2 \frac{d^5 u}{d\theta^5} + \frac{d^3 u}{d\theta^3} \right) \right] + \alpha \left[ \frac{d^8 u}{d\theta^8} + \right. \\ &2 \frac{d^6 u}{d\theta^6} + \frac{d^4 u}{d\theta^4} \left. \right] \cdot \frac{1}{\cos \theta} + \frac{du}{d\theta} \cdot \sin \theta + u \cdot \cos \theta + \frac{d^3 u}{d\theta^3} \cdot \sin \theta + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \cdot \cos \theta \end{aligned} \quad (6.88)$$

Una volta riportata la (6.88) nelle espressioni del momento delle condizioni al contorno, queste ultime valgono:

$$\begin{aligned} y_i(\theta = 0) &= \frac{EaJa}{3 \cdot R^3 \cdot K_P} \cdot \left( \frac{d^6 u}{d\theta^6} + 2 \frac{d^4 u}{d\theta^4} + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right) - u - \frac{2 \cdot R}{3 \cdot K_P} \cdot \gamma_a \cdot A_a = 0 \\ y_i(\theta = \pi) &= -\frac{EaJa}{3 \cdot R^3 \cdot K_P} \cdot \left( \frac{d^6 u}{d\theta^6} + 2 \frac{d^4 u}{d\theta^4} + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right) + u - \frac{2 \cdot R}{3 \cdot K_P} \cdot \gamma_a \cdot A_a = 0 \\ M(\theta = 0) &= \left| -E_i J_i \cdot \frac{1}{R \cdot \cos \theta} \cdot \left\{ \alpha \left[ \frac{\cos \theta + 2 \sin^2 \theta}{\cos^3 \theta} \left( \frac{d^6 u}{d\theta^6} + 2 \frac{d^4 u}{d\theta^4} + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right) + \frac{1}{\cos \theta} \left( \frac{d^7 u}{d\theta^7} + \right. \right. \right. \right. \\ &2 \frac{d^5 u}{d\theta^5} + \frac{d^3 u}{d\theta^3} \left. \left. \left. \right] \right\} + \alpha \left[ \frac{d^8 u}{d\theta^8} + 2 \frac{d^6 u}{d\theta^6} + \frac{d^4 u}{d\theta^4} \right] \cdot \frac{1}{\cos \theta} + \frac{du}{d\theta} \cdot \sin \theta + u \cdot \cos \theta + \frac{d^3 u}{d\theta^3} \cdot \sin \theta + \right. \\ &\left. \frac{d^2 u}{d\theta^2} \cdot \cos \theta \right\} \Big|_{\theta=0} = 0 \\ M(\theta = \pi) &= \left| -E_i J_i \cdot \frac{1}{R \cdot \cos \theta} \cdot \left\{ \alpha \left[ \frac{\cos \theta + 2 \sin^2 \theta}{\cos^3 \theta} \left( \frac{d^6 u}{d\theta^6} + 2 \frac{d^4 u}{d\theta^4} + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right) + \frac{1}{\cos \theta} \left( \frac{d^7 u}{d\theta^7} + \right. \right. \right. \right. \\ &2 \frac{d^5 u}{d\theta^5} + \frac{d^3 u}{d\theta^3} \left. \left. \left. \right] \right\} + \alpha \left[ \frac{d^8 u}{d\theta^8} + 2 \frac{d^6 u}{d\theta^6} + \frac{d^4 u}{d\theta^4} \right] \cdot \frac{1}{\cos \theta} + \frac{du}{d\theta} \cdot \sin \theta + u \cdot \cos \theta + \frac{d^3 u}{d\theta^3} \cdot \sin \theta + \right. \\ &\left. \frac{d^2 u}{d\theta^2} \cdot \cos \theta \right\} \Big|_{\theta=\pi} = 0 \end{aligned} \quad (6.89)$$

## 7. Conclusione e lavori futuri

In questa tesi è stata presentata l'ottimizzazione mediante algoritmi genetici del volume totale di una struttura complessa, tipica di un ponte sospeso, formata da arco, impalcato e pendini.

L'analisi è stata incentrata sullo studio della dipendenza di tale volume da una serie di parametri di ingresso, quali la forma dell'arco, la sezione trasversale dei diversi elementi, i carichi applicati, il materiale considerato, i vincoli alla base dell'arco e dell'impalcato.

Coerentemente con quanto ottenuto con uno studio sul solo arco, presentato in [7], l'aumento delle variabili genetiche del modello, corrispondenti ai gradi libertà dell'ottimizzazione, ha permesso di trovare soluzioni a volume minore. Tuttavia, tale miglioramento è stato ottenuto al costo di un maggior tempo di esecuzione, anche considerata la maggiore complessità della struttura analizzata.

È stato, quindi, necessario trovare il giusto compromesso tra l'efficacia dell'ottimizzazione e il tempo richiesto per eseguirla, per tale ragione il numero di massimo di gradi di libertà è stato scelto pari a cinque.

Un aspetto che differisce dalla trattazione preliminare, condotta in assenza di impalcato e pendini, è la dipendenza del volume dal carico strutturale applicato. Questa risulta infatti crescente ma con un andamento non puramente lineare.

Successivamente è stata ricavata un'equazione per descrivere il comportamento e l'interazione di arco e impalcato. La soluzione analitica di queste ultime è risultata tuttavia complessa, data la sua natura differenziale del decimo ordine.

Il lavoro futuro si incentrerà sulla soluzione numerica di tale equazione, mediante software specializzati, come Matlab. L'obiettivo sarà quello di validare i risultati delle ottimizzazioni confrontandoli con la soluzione numerica, così da garantirne la sicurezza e la funzionalità nelle condizioni previste.

## Bigliografia

- [1] Santiago Huerta, (2007). "Oval domes: History, geometry and mechanics". Nexus Network Journal, 9.2, 211-248.
- [2] Thomas E Boothby, (2001). "Analysis of masonry arches and vaults". Progress in Structural Engineering and materials, 3.3, 246–256.
- [3] A Manuello Bertetto and GC Marano, (2022). "Numerical and dimensionless analytical solutions for circular arch optimization". Engineering Structures, 253, 113360.
- [4] Mostafa Z Abd Elrehim, Mohamed A Eid, and Mostafa G Sayed, (2019). "Structural optimization of concrete arch bridges using Genetic Algorithms". Ain Shams Engineering Journal, 10.3, 507–516.
- [5] J Melchiorre, A Manuello, F Marmo, S Adriaenssens, and GC Marano. (2023) "Differential formulation and numerical solution for elastic arches with variable curvature and tapered cross-sections". European Journal of Mechanics, A/Solids 97, 104757.
- [6] AM Bauer, Michael Breitenberger, B Philipp, Roland Wüchner, and K-U Bletzinger. «Nonlinear isogeometric spatial Bernoulli beam». In: Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 303 (2016).
- [7] J Melchiorre, (2021). "Optimal configurations of arches with variable curvature and tapered cross-sections" (Tesi di laurea magistrale). Politecnico di Torino.
- [8] Contributor di Wikipedia, "Ponte sospeso", *Wikipedia, L'enciclopedia libera*, [//it.wikipedia.org/w/index.php?title=Ponte\\_sospeso&oldid=141077560](https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Ponte_sospeso&oldid=141077560)
- [9] Contributor di Wikipedia, "Ponte strallato", *Wikipedia, L'enciclopedia libera*, [//it.wikipedia.org/w/index.php?title=Ponte\\_strallato&oldid=141375142](https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Ponte_strallato&oldid=141375142)
- [10] Contributor di Wikipedia, "Ponti di Calatrava a Reggio Emilia", *Wikipedia, L'enciclopedia libera*, [//it.wikipedia.org/w/index.php?title=Ponti\\_di\\_Calatrava\\_a\\_Reggio\\_Emilia&oldid=141470364](https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Ponti_di_Calatrava_a_Reggio_Emilia&oldid=141470364)

- [11] Contributori di Wikipedia, "Ponte delle Americhe", *Wikipedia, L'enciclopedia libera*,  
[//it.wikipedia.org/w/index.php?title=Ponte\\_delle\\_Americhe&oldid=137837931](https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Ponte_delle_Americhe&oldid=137837931)
- [12] Alberto M.B. Martins, Luís M.C. Simões, João H.J.O. Negrão (2020). "Optimization of cable-stayed bridges: A literature survey" *Advances in Engineering Software*, Volume 149, 1-11.
- [13] Feder D. (1976). "Optimization of the prestressing in the cables of a cable-stayed bridge". *Proceedings of the 10th congress of IABSE 1976*. p. 135–8. <https://doi.org/10.5169/SEALS-10516>.
- [14] Furukawa, K., Sugimoto, H., Egusa, T., Inoue, K., & Yamada, Y. (1987). "Studies on optimization of cable prestressing for cable-stayed bridges". *Proceedings of International Conference on Cable-stayed Bridges, Bangkok*, 723-34.
- [15] Furukawa, K., Sakai, I., Kumagai, S., Arai, H., & Kasuga, A. (1987). "Optimization of cable forces in cable-stayed prestressed concrete bridges based on minimum strain energy criterion". *International conference on cable-stayed bridges, Bangkok, Thailand*, 711-722.
- [16] Osuo, Y., Toshimori, N., & Suzuki, Y. (1987). "A calculation method of shim thickness to adjust cable lengths at erection of cable-stayed bridges". *Proc. Int. Conf. on Cable-Stayed Bridges*, 891-902.
- [17] Kasuga A, Arai H, Breen J, Furukawa K., (1995). "Optimum cable-force adjustments in concrete cable-stayed bridges". *J Struct Eng-ASCE*, 121(4), 685–94.
- [18] Wang YC, Vlahinos AS, Shu H., (1997). "Optimization of cable preloading on cable-stayed bridges". Stubbs N, editor. *Proc. SPIE 3043, Smart Structures and Materials 1997: Smart Systems for Bridges, Structures, and Highways*.
- [19] Janjic D, Pircher M, Pircher H., (2003). "Optimization of cable tensioning in cable-stayed bridges". *J Bridge Eng*, 8(3), 131–7.
- [20] Sung Y-C, Chang D-W, Teo E-H, (2006). "Optimum post-tensioning cable forces of Mau-Lo Hsi cable-stayed bridge". *Eng Struct* 2006, 28(10), 1407–17.

- [21] Lee T-Y, Kim Y-H, Kang S-W., (2008). "Optimization of tensioning strategy for asymmetric cable-stayed bridge and its effect on construction process". *Struct Multidiscip Optim* 2008, 35(6), 623–9.
- [22] Sun H., Dou Y.-Z., Qian Y.-J., (2009). "Optimal cable tension design for cable-stayed bridges on trust region algorithm". *Int Conf Transp Eng* 2009, 1826–31.
- [23] Baldomir A., Hernández S., (2009). "Cable optimization of a long span cable stayed bridge in La Coruna (Spain)". Hernandez S, Brebbia CA, editors. *Computer Aided Optimum Design in Engineering XI Vol. 106*. Wessex Inst Technol; Univ La Coruna; p. 107–19.
- [24] Baldomir A., Hernandez S., Nieto F., Jurado JA, (2010). "Cable optimization of a long span cable stayed bridge in La Coruna (Spain). *Adv Eng Softw*; 41, 7–8; 931–8.
- [25] Hernandez S., Baldomir A., Perez I. (2012). "Optimization of cable cross-sectional area in long span cable stayed bridges". *Proceedings of the 20th analysis and computation specialty conference*, p. 278–87.
- [26] Yu BC, Gao SX, Gao C, Yang J, Xie B.(2012). "The determination of the problem of the cable-stayed bridge reasonable superpositioning optimization under the constant load state, basing on the unknown load coefficient method of Midas/civil". *Appl Mech Mater* 2012; 2081–4.
- [27] Hassan MM, Nassef AO, El Damatty AA., (2012). "Determination of optimum post-tensioning cable forces of cable-stayed bridges". *Eng Struct* 2012; 44, 248–59.
- [28] Hassan MM. (2013). "Optimization of stay cables in cable-stayed bridges using finite element, genetic algorithm, and B-spline combined technique". *Eng Struct* 2013; 49, 643–54.
- [29] Zhang Z, Li F-R, Kou C-H, Tsai J-L. (2010). "Static analysis of a self-anchored cable-stayed-suspension bridge with optimal cable tensions". *Chung Cheng Ling Hsueh Pao/J Chung Cheng Inst Technol* 2010; 39(2), 1–10.
- [30] Lonetti P., Pascuzzo A., (2014). "Optimum design analysis of hybrid cable-stayed suspension bridges. *Adv Eng Softw* 2014; 73, 53–66.

- [31] Lonetti P., Pascuzzo A. (2014). "Design analysis of the optimum configuration of self-anchored cable-stayed suspension bridges". *Struct Eng Mech* 2014; 51(5), 847–66.
- [32] Asgari B, Osman SA, Adnan A, (2014). "A new multiconstraint method for determining the optimal cable stresses in cable-stayed bridges". *Sci World J.* 2014.
- [33] Asgari B, Osman SA, Bin Adnan A. (2015). "Optimization of pre-tensioning cable forces in highly redundant cable-stayed bridges". *Int J Struct Stab Dyn* 2015, 15(1).
- [34] Song C, Xiao R, Sun B. (2018). "Optimization of cable pre-tension forces in long-span cable-stayed bridges considering the counterweight". *Eng Struct*, 172, 919-28.
- [35] Sun B, Xiao R. (2015). "Optimization of dead load state in earth-anchored cable-stayed bridges". *J Harbin Inst Technol (New Ser)* 2015, 22(3), 87-94.
- [36] Sung Y-C, Wang C-Y, Teo E-H, (2016). "Application of particle swarm optimisation to construction planning for cable-stayed bridges by the cantilever erection method". *Struct Infrastruct Eng* 2016, 12(2), 208-22.
- [37] Carpentieri G, Modano M, Fabbrocino F, Feo L, Fraternali F. (2016). "On the optimal design of cable-stayed bridges". *Proceedings of the 7th European congress on computational methods in applied sciences and engineering, ECCOMAS 2*, 3386-94.
- [38] Fabbrocino F, Modano Ni, Farina I, Carpentieri G, Fraternali F. (2017). "Optimal prestress design of composite cable-stayed bridges". *Compos Struct* 2017, 169(SI), 167-72.
- [39] Ha M-H, Vu Q-A, Truong V-H, (2018). "Optimum design of stay cables of steel cable-stayed bridges using nonlinear inelastic analysis and genetic algorithm". *Structures* 2018, 16, 288-302.
- [40] Baldomir A, Tembrás E, Hernández S. (2015). "Optimization of cable weight in multi-span cable-stayed bridges. Application to the Forth Replacement Crossing". Pacheco P, Magalhaes F, editors. *Multi-span large bridges* CRC Press., 491-8.
- [41] Cid C., Baldomir A, Hernandez S. (2018). "Optimum crossing cable system in multi-span cable-stayed bridge". *Eng Struct* 2018, 160, 342-55.

- [42] Arellano H, Tolentino D, Gomez R. (2019). "Optimum criss crossing cables in multi-span cable-stayed bridges using genetic algorithms". *KSCE J Civil Eng* 2019, 23(2), 719-28.
- [43] Wang X, Wu W, Liu Y, Ran Z, (2019). "Surrogate-assisted two-phase tensioning strategy optimization for the system transformation process of a cable-stayed bridge". *Eng Optim* 2019, 1-17.
- [44] Guo J, Yuan W, Dang X, Alam MS, (2019). "Cable force optimization of a curved cable-stayed bridge with combined simulated annealing method and cubic B-Spline interpolation curves". *Eng Struct* 2019, 201, 109813.
- [45] Park W, Kim H-K, Jongchil P. (2012). "Finite element model updating for a cable-stayed bridge using manual tuning and sensitivity-based optimization". *Struct Eng Int* 2012; 22 (1), 14–9.
- [46] Azarbajejani M, El-Osery AI, Taha MMR. (2009). "Entropy-based optimal sensor networks for structural health monitoring of a cable-stayed bridge". *Smart Struct Syst* 2009; 5(4), 369–79.
- [47] Olhoff, N. & Taylor, J. E., (1983). "On Structural Optimization". *Journal of Applied Mechanics*, 50(4b), 1139-1151.
- [48] Goldberg, D. E. & Holland, J. H., (1988). "Genetic algorithms and machine learning". Kluwer Academic Publishers.
- [49] Goldberg, D. E., (1989). "Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning". Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc.
- [50] Holland, J. H., (1992). "Genetic algorithms". *Scientific American*, 267(1), 66–73.
- [51] Grefenstette, J. J., (1989). "How genetic algorithms work: A critical look at implicit parallelism". *Proceedings of the 3rd International Joint Conference on Genetic Algorithms (ICGA89)*.
- [52] Rhino3D, s.d. [Online] Available at: <https://www.rhino3d.com/it/>
- [53] Grasshopper3D, s.d. [Online] <https://www.grasshopper3d.com/>
- [54] Karamba3D, s.d. [Online] <https://www.karamba3d.com/>
- [55] Alberto Carpinteri, (1993). "Scienza delle costruzioni". Pitagora. Vol.1 e Vol.2

## Indice delle figure

<i>Figura 1 – Ponte centrale di Reggio Emilia (Nicola Tampelloni, CC BY-SA 4.0 )</i> .....	8
<i>Figura 2 – Ponte centrale delle Americhe a Panama (Santiago Bernard R)</i> .....	9
<i>Figura 3 – Sezione quadrata piena</i> .....	26
<i>Figura 4 – Sezione circolare piena</i> .....	26
<i>Figura 5 – Sezione rettangolare piena</i> .....	26
<i>Figura 6 – Sezione quadrata cava sottile</i> .....	26
<i>Figura 7 – sezione circolare piena</i> .....	27
<i>Figura 8 – Sezione quadrata cava sottile</i> .....	27
<i>Figura 9 – Variabili genetiche</i> .....	55
<i>Figura 10 – Parametri di input</i> .....	56
<i>Figura 11– Galapagos</i> .....	58
<i>Figura 12 – Sistema Arco + impalcato + pendini</i> .....	60
<i>Figura 13 – Elemento infinitesimo di trave curva</i> .....	61
<i>Figura 14 – Caratteristiche interne delle sollecitazioni e forze esterne agenti</i> .....	62
<i>Figura 15 – Stato deformativo trave piana curva</i> .....	66
<i>Figura 16 – Relazione geometrica</i> .....	73
<i>Figura 17 – Carichi esterni applicati</i> .....	74
<i>Figura 18 – Spostamenti normale e tangenziale</i> .....	76
<i>Figura 19 – Coordinata dell’abbassamento</i> .....	78



## Indice dei grafici

<i>Grafico 1 – Volume dell’arco sottoposto a carichi verticali uniformemente distribuiti – 2 variabili genetiche .....</i>	<i>31</i>
<i>Grafico 2 – Volume dell’arco sottoposto a carichi verticali uniformemente distribuiti – 3 variabili genetiche .....</i>	<i>33</i>
<i>Grafico 3 – Volume dell’arco sottoposto a carichi verticali uniformemente distribuiti – 3 variabili genetiche .....</i>	<i>35</i>
<i>Grafico 4 – Volume dell’arco sottoposto a carichi verticali uniformemente distribuiti – 4 variabili genetiche .....</i>	<i>37</i>
<i>Grafico 5 – Confronto risultati ottenuti dalle ottimizzazioni precedenti .....</i>	<i>38</i>
<i>Grafico 6 – Volume dell’arco sottoposto a carichi verticali uniformemente distribuiti – 2 variabili genetiche .....</i>	<i>41</i>
<i>Grafico 7 – Confronto risultati ottenuti dalle ottimizzazioni .....</i>	<i>41</i>
<i>Grafico 8 – Volume dell’arco sottoposto a carichi verticali uniformemente distribuiti – 3 variabili genetiche .....</i>	<i>45</i>
<i>Grafico 9 – Variazione nel tempo delle ottimizzazioni .....</i>	<i>45</i>
<i>Grafico 10 – Variazione nel tempo delle ottimizzazioni .....</i>	<i>47</i>
<i>Grafico 11 – Volume dell’arco sottoposto a carichi verticali uniformemente distribuiti – 4 variabili genetiche .....</i>	<i>49</i>
<i>Grafico 12 – Variazione nel tempo delle ottimizzazioni .....</i>	<i>49</i>
<i>Grafico 13 – Volume dell’arco sottoposto a carichi verticali uniformemente distribuiti – 4 variabili genetiche .....</i>	<i>51</i>
<i>Grafico 14 – Variazione nel tempo delle ottimizzazioni .....</i>	<i>51</i>
<i>Grafico 15 – Confronto risultati ottenuti dalle ottimizzazioni precedenti .....</i>	<i>52</i>
<i>Grafico 16 – Confronto risultati ottenuti dalle ottimizzazioni precedenti .....</i>	<i>53</i>