



**Politecnico
di Torino**

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

Tesi di Laurea Magistrale

Analisi aeroelastica mediante teorie strutturali avanzate e CFD

Relatori

prof. Marco Petrolo
ing. Matteo Filippi

Candidato

Riccardo Ricci

25 Luglio 2024

Indice

| | |
|------------------------------------------------------------------|----|
| Elenco delle tabelle | 5 |
| Elenco delle figure | 7 |
| 1 Introduzione | 9 |
| 1.1 Nuove architetture per i velivoli del futuro | 11 |
| 1.2 Il ruolo dell'Aeroelasticità | 15 |
| 1.3 Stato dell'arte | 17 |
| 2 Modello aerodinamico | 19 |
| 2.1 Equazioni di governo | 19 |
| 2.1.1 Equazione di bilancio della massa | 20 |
| 2.1.2 Equazione di bilancio della quantità di moto | 22 |
| 2.1.3 Equazione di bilancio dell'energia | 25 |
| 2.2 Equazioni di Navier-Stokes e di Eulero | 28 |
| 2.3 RANS per i flussi turbolenti | 30 |
| 2.3.1 Modelli di turbolenza | 32 |
| 2.4 SU2 | 33 |
| 2.4.1 Integrazione nello spazio e nel tempo | 34 |
| 2.4.2 File di configurazione | 35 |
| 2.4.3 Mesh | 36 |
| 3 Modello strutturale | 39 |
| 3.1 Equazioni fondamentali dell'elasticità | 40 |
| 3.2 Carrera Unified Formulation | 41 |
| 3.2.1 Espansione di Taylor per il caso di modello 1D | 42 |
| 3.2.2 Espansione di Lagrange per il caso di modello 1D | 44 |
| 3.3 Formulazione agli elementi finiti | 46 |
| 3.3.1 Matrice di rigidezza | 48 |
| 3.3.2 Matrice di massa | 49 |
| 3.3.3 Vettore dei carichi nodali | 50 |
| 3.3.4 Analisi statica | 50 |

| | | |
|----------|----------------------------------------------------------------|-----------|
| 3.3.5 | Analisi delle vibrazioni libere | 51 |
| 3.3.6 | Analisi di risposta dinamica | 51 |
| 4 | Interazione Fluido-struttura | 53 |
| 4.1 | Infinite Plate Spline (IPS) | 53 |
| 4.2 | Soluzione del modello aeroelastico | 59 |
| 5 | Risultati numerici | 63 |
| 5.1 | Analisi statica di una trave isotropa | 63 |
| 5.1.1 | Formulazione Analitica | 64 |
| 5.1.2 | MUL2 | 65 |
| 5.2 | Calibrazione aerodinamica | 66 |
| 5.2.1 | Simulazione numerica di una lamina 3D a basso Re | 68 |
| 5.3 | Validazione aeroelastica | 73 |
| 5.3.1 | Analisi aeroelastica di un'ala rettangolare isotropa | 73 |
| 5.4 | Effetti aeroelastici | 79 |
| 5.4.1 | Variazione dello spessore della sezione | 79 |
| 5.4.2 | Variazione dell'angolo di laminazione | 79 |
| 6 | Conclusioni | 83 |
| A | Tensore gradiente di velocità | 85 |
| B | Nuclei fondamentali | 86 |
| B.1 | Matrice di Rigidezza | 87 |
| B.2 | Matrice di massa | 88 |

Elenco delle tabelle

| | | |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.1 | Coordinate dei nodi dell'elemento L4 | 45 |
| 3.2 | Coordinate dei nodi dell'elemento L9 | 46 |
| 5.1 | Proprietà del materiale | 63 |
| 5.2 | Studio di convergenza della mesh per lo spostamento verticale nel punto di carico, $u_z \times 10^{-2}$ m | 66 |
| 5.3 | Confronto analisi statica modelli TE e LE, 20 elementi B4 | 66 |
| 5.4 | Studio di convergenza della mesh aerodinamica in funzione dell'estensione del farfield | 70 |
| 5.5 | Proprietà del materiale della lamina piana | 73 |
| 5.6 | Spostamento verticale al LE del tip dell'ala con $\alpha = 1^\circ$ (SSA), [10^{-3} m] | 74 |
| 5.7 | Spostamento verticale al LE del tip dell'ala con $\alpha = 1^\circ$ (SAA), [10^{-3} m] | 75 |
| 5.8 | Valori di riferimento [22, 23] dello spostamento verticale al LE del tip dell'ala con $\alpha = 1^\circ$, [10^{-3} m] | 75 |
| 5.9 | Differenze percentuali rispetto ai valori di riferimento [22, 23] dello spostamento verticale al LE del tip dell'ala con $\alpha = 1^\circ$, [%] | 77 |
| 5.10 | Rotazione al tip dell'ala con $\alpha = 1^\circ$ (SAA) | 78 |
| 5.11 | Deflessione e rotazione al variare dello spessore h , $\alpha = 1^\circ$ e $V_\infty = 20$ m/s | 79 |
| 5.12 | Proprietà del materiale ortotropo | 80 |
| 5.13 | Rotazione al tip dell'ala al variare di ϑ , $\alpha = 1^\circ$ e $V_\infty = 30$ m/s | 80 |

Elenco delle figure

| | | |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1 | Scenari futuri per il traffico aereo [1] | 10 |
| 1.2 | Parsifal PrandtlPlane | 12 |
| 1.3 | SUGAR Truss-braced wing challenges | 13 |
| 1.4 | Airbus MAVERIC | 14 |
| 1.5 | Flying V aircraft | 15 |
| 1.6 | Triangolo di Collar | 16 |
| 2.1 | Elemento fluido infinitesimo | 21 |
| 2.2 | Elemento fluido infinitesimo con le forze nella direzione x [26] | 22 |
| 2.3 | Elemento fluido infinitesimo con i flussi nella direzione x [26] | 26 |
| 2.4 | Celle computazionali per il metodo FVM | 34 |
| 2.5 | Profilo di velocità nello strato limite turbolento | 37 |
| 3.1 | Sistema di riferimento | 39 |
| 3.2 | Confronto tra le deformazioni [36] | 44 |
| 3.3 | Elemento L4 in coordinate reali e normalizzate | 45 |
| 3.4 | Elemento L9 in coordinate reali e normalizzate | 46 |
| 3.5 | Elementi trave utilizzati per l'analisi FEM | 47 |
| 3.6 | Assemblaggio della matrice globale [37] | 49 |
| 4.1 | Schema di soluzione del problema Aeroelastico | 60 |
| 5.1 | Sezione di riferimento della trave | 64 |
| 5.2 | Campo di spostamento u_z , modello TE4, mesh 20 elementi B4 | 67 |
| 5.3 | Distribuzione tensione σ_{yy} , modello TE4, mesh 20 elementi B4 | 67 |
| 5.4 | Modello di lamina piana $AR = 3$ | 68 |
| 5.5 | Mesh lamina piana dettagli | 70 |
| 5.6 | Effetto dell'estensione del dominio sui coefficienti C_L e C_D | 71 |
| 5.7 | Risultati computazionali lamina piana, $Re = 8 \times 10^4$ | 72 |
| 5.8 | Convergenza dello spostamento verticale al LE del tip dell'ala con il metodo iterativo a step per i modelli TE2 e TE4 | 76 |
| 5.9 | Deformata al variare dell'ordine di espansione della sezione trasversale, $V_\infty = 50$ m/s: TE4 (blu), TE3(giallo), TE2(rosso), TE1(verde) | 77 |
| 5.10 | Torsione al tip dell'ala al variare della velocità, modello strutturale TE4 | 78 |
| 5.11 | Effetto della laminazione al tip della lamina, $\alpha = 1^\circ$ e $V_\infty = 30$ m/s | 81 |

Capitolo 1

Introduzione

L'aviazione fornisce i collegamenti di trasporto essenziali per l'integrazione e la coesione tra i vari stati europei. È infatti un importante fattore di prosperità e di ricchezza, che stimola lo sviluppo, apre nuovi mercati, incrementa il commercio internazionale ed attira investimenti. Milioni di europei si affidano all'aviazione per l'istruzione, la formazione, i beni ed i servizi. Inoltre l'aviazione supporta anche molti compiti 'ufficiali' come il monitoraggio del clima, il mantenimento della sicurezza, il servizio medico di emergenza, il soccorso in caso di calamità, le operazioni di ricerca e salvataggio in mare ed in montagna. Nell'ultimo decennio, questo ruolo sempre più centrale dell'aviazione nella vita e nell'economia dell'Europa ha portato ad un incremento costante del traffico aereo. Tale trend si è interrotto a partire da marzo 2020 quando, a causa dei lockdown e delle misure di contenimento per la pandemia da COVID-19, si è verificata una repentina riduzione del numero di voli in tutto il mondo. Negli anni successivi il traffico aereo ha ripreso l'andamento crescente senza però tornare, per il momento, ai livelli precedenti la pandemia. Per il futuro, nel *Rapporto Ambientale sull'Aviazione Europea*, l'EASA traccia tre possibili scenari: come si può vedere nella figura 1.1, per tutti e tre si prevede una crescita costante del numero di voli che attraversano l'Europa fino a superare il picco raggiunto prima del 2020 [1]. Dal momento che il traffico aereo è già attualmente responsabile del 4% delle emissioni di CO₂, tale dato è destinato a peggiorare nei prossimi anni [2]. A partire dagli accordi di Parigi del 2016, gli stati di tutto il mondo hanno sottoscritto una serie di impegni con l'obiettivo di adottare delle strategie per contrastare la minaccia posta dai cambiamenti climatici e dal riscaldamento globale. In questo quadro l'ACARE (Advisory Council for Aviation Research and Innovation in Europe) ha elaborato un report *Fly the Green Deal* che traccia una visione futura dell'evoluzione dell'aeronautica in Europa per una maggiore sostenibilità [3]. Per la prima volta le parti interessate, come la Commissione europea e gli Stati membri, le università, le organizzazioni di ricerca aeronautica, le industrie di progettazione e produzione, le compagnie aeree, le società che gestiscono gli aeroporti, gli enti di regolamentazione del traffico aereo, i fornitori di

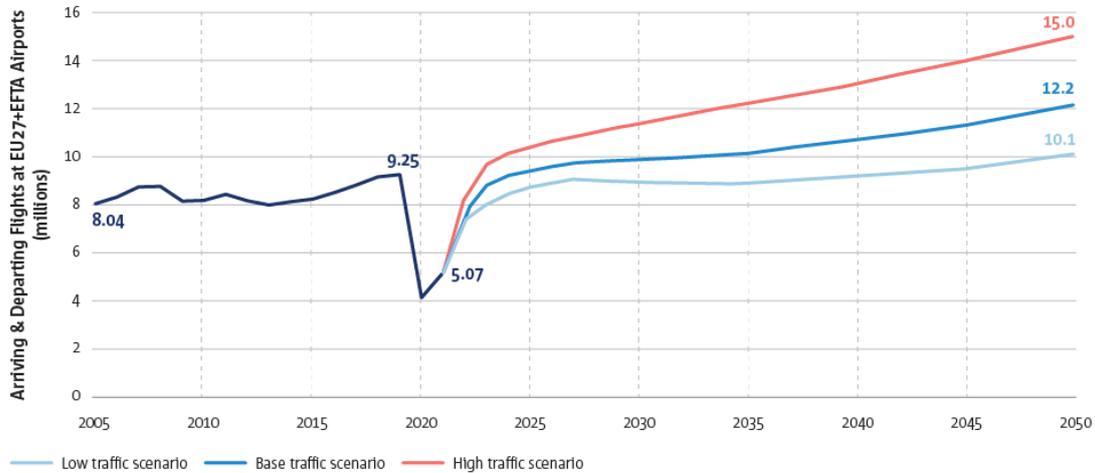


Figura 1.1. Scenari futuri per il traffico aereo [1]

energia e di servizi si sono riuniti per sincronizzare il loro percorso verso una mobilità aerea del futuro eccezionalmente efficiente, accessibile e sostenibile. Il frutto di questo lavoro è un ripensamento a 360° del trasporto in Europa: l'aviazione sarà il cuore pulsante di un servizio di mobilità intermodale, leader a livello mondiale, che permetterà alle persone e alle merci di viaggiare in maniera pulita, silenziosa, competitiva, sicura, resiliente e conveniente. Tutti gli organismi coinvolti hanno quindi sottoscritto una serie di impegni da raggiungere entro il 2050 e stabilito, nei vari ambiti coinvolti, dei traguardi intermedi per il 2030 e il 2035. Gli obiettivi di questo ambizioso progetto sono riassumibili in tre punti:

- raggiungere un'aeronautica *climate neutral* azzerando le emissioni di gas serra;
- garantire i bisogni dei cittadini riducendo l'inquinamento acustico;
- investire e innovare per aumentare la competitività dell'industria aeronautica europea mantenendo il ruolo leader a livello globale.

Per quanto riguarda gli aeromobili, è necessario un cambio di prospettiva: le nuove tecnologie introdotte negli ultimi anni, come i materiali compositi e i profili aerodinamicamente avanzati, consentono solo dei guadagni molto ridotti dal punto di vista degli obiettivi ambientali. Perciò i modelli esistenti sono sostituiti con nuovi veicoli caratterizzati da un'elevata efficienza aerodinamica e bassa resistenza, in modo da ridurre il consumo di energia e l'impatto acustico. Le architetture dei velivoli diventano quindi sempre più complesse, ma la manutenzione e l'aggiornamento sono semplificati grazie alla modifica dei processi produttivi e all'introduzione di nuove strutture e materiali innovativi. I combustibili fossili vengono abbandonati per passare a soluzioni propulsive più green (full electric, hybrid-electric) e a

carburanti più ecologici (bio fuel SAF, idrogeno). Per poter rispondere alle esigenze operative delle diverse tipologie di aeromobili contemporaneamente presenti nei cieli, come velivoli per il trasporto regionale, velivoli executive e business, velivoli da trasporto di grosse dimensioni, veicoli a decollo verticale, sistemi a pilotaggio remoto (Unmanned Aerial Systems), satelliti atmosferici (High Altitude Platform Systems) e velivoli per il volo ricreazionale è necessario riprogettare gli aeroporti, le strutture di supporto a terra e di controllo del traffico aereo.

1.1 Nuove architetture per i velivoli del futuro

Nel quadro di questo rinnovamento degli aeromobili, la ricerca in campo aeronautico si è focalizzata, negli ultimi anni, sullo studio di architetture completamente rivoluzionarie: il velivolo con ala chiusa (boxplane), il velivolo con ala controventata (strut/truss braced wing), la configurazione blended wing body e il velivolo a V.

Velivolo ad ala chiusa

L'idea di un velivolo con un'ala avente due piani principali che si uniscono alle estremità risale agli albori dell'aeronautica. Nel 1924, Ludwig Prandtl, nel report *Induced Drag of Multiplanes*, ha presentato un'ala chiusa a riquadro (Best Wing System) dimostrando come, con una tale geometria, fosse possibile ridurre la resistenza indotta a parità di apertura alare e di portanza generata [4]. A causa della complessità nella realizzazione di tale soluzione e dell'insorgenza di instabilità aerelastiche innescate da una bassa velocità di flutter, questa configurazione non è mai stata utilizzata nel progetto di velivoli per aviazione generale [5]. Negli ultimi anni, tuttavia, l'esigenza di trovare soluzioni innovative ha risvegliato l'attenzione della ricerca verso questa particolare architettura. Diversi studi hanno analizzato le possibilità di realizzare e rendere operativo un velivolo per il trasporto passeggeri nella configurazione PrandtlPlane (PrP). In particolare Kroo ha valutato che l'utilizzo di una configurazione ad ala chiusa permetterebbe un aumento notevole dell'efficienza aerodinamica e quindi della riduzione del consumo di combustibile [6]. Tra il 2017 e il 2020 la Comunità Europea ha finanziato il progetto PARSIFAL (Prandtlplane ARchitecture for the Sustainable Improvement of Future AirpLanes), a cui hanno aderito diverse università ed enti di ricerca europei, con l'obiettivo di sviluppare un velivolo conforme alla normativa ICAO Aerodrome Reference Code C (con apertura alare inferiore a 36 metri) che possa però trasportare un numero di passeggeri maggiore rispetto agli attuali aeromobili della stessa categoria. Con l'adozione della configurazione ad ala chiusa è stato possibile aumentare la capienza di oltre 100 passeggeri rispetto a velivoli come il Boeing 737 e l'Airbus A320 a parità di apertura alare ed efficienza aerodinamica [7]. Nell'immagine 1.2 si può vedere il concept del progetto PARSIFAL.



Figura 1.2. Parsifal PrandtlPlane

Strut/truss braced wing

L'inserimento di un montante o asta di controvento per supportare le semiali consente di alleviare il momento flettente alla radice dell'ala. Queste architetture sono state impiegate per velivoli di piccole dimensioni fin dai primordi dell'aeronautica, quando non si disponeva di materiali sufficientemente resistenti e robusti. Negli ultimi anni, per cercare soluzioni che consentano di azzerare le emissioni nocive, la ricerca sta focalizzando la sua attenzione anche su queste configurazioni perché permettono di realizzare ali con elevato allungamento alare (Aspect Ratio) senza gravare eccessivamente sul peso del velivolo. Un aumento dell'allungamento alare consente di ridurre la resistenza indotta, che rappresenta il contributo principale dei termini resistenti. Una diminuzione della resistenza si traduce in un'aumento dell'efficienza $E = L/D$ che incide direttamente sul range operativo del velivolo e quindi sul consumo di combustibile.¹ In realtà, l'utilizzo di una struttura alare di questo tipo per un velivolo a lungo raggio, è stato proposto, per la prima volta, da Werner Pfenninger all'inizio degli anni '50 [8]. In seguito sono stati effettuati diversi studi di fattibilità: alcuni hanno messo in luce i notevoli vantaggi nella riduzione del consumo di combustibile [9], altri invece hanno evidenziato criticità strutturali, aeroelastiche e legate ai costi di produzione [10] [11]. Perciò lo sviluppo di questa architettura alare è stata abbandonata in favore della configurazione classica. Negli ultimi anni, grazie all'introduzione di materiali compositi innovativi e alle nuove tecniche di ottimizzazione multidisciplinare, questa configurazione viene studiata in maniera più approfondita. All'istituto Politecnico della Virginia sono state effettuate alcune indagini sui parametri che influenzano il comportamento strutturale

¹La formula di Breguet per il range: $R = \frac{V_{TAS}}{g} \left(\frac{L}{D}\right) \frac{1}{SFC} \ln \frac{W_{MTOW}}{W_{MTOW} - W_{fuel}}$

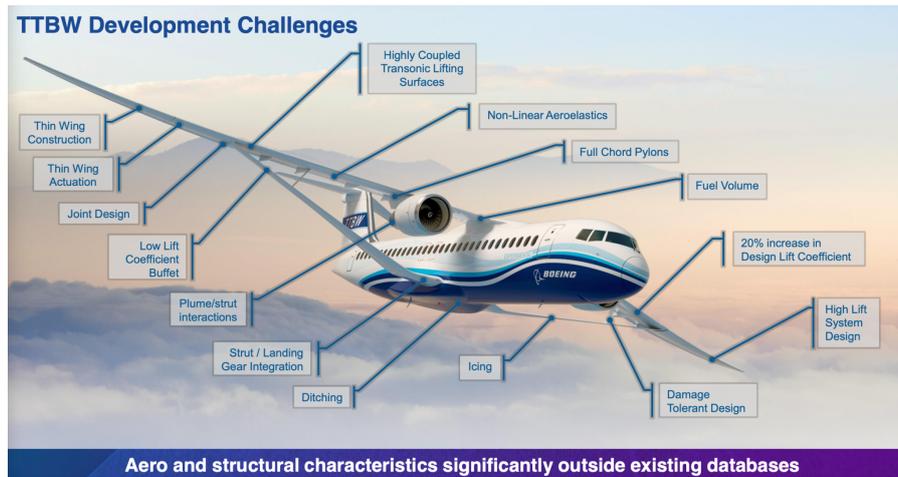


Figura 1.3. SUGAR Truss-braced wing challenges

ed aeroelastico dell'ala, come per esempio lo spessore e l'inclinazione del montante, la posizione lungo l'apertura e lungo la corda [12]. In Europa, presso l'ONERA, il progetto ALBATROS ha permesso di analizzare i vantaggi e le criticità nella realizzazione di un velivolo transonico per il trasporto con ala strut-braced [13]. A partire dal 2010 NASA e Boeing, all'interno del programma SUGAR (Subsonic Ultra Green Aircraft Research), hanno sviluppato un concept con architettura truss-braced wing analizzando le sfide che si prevede possano emergere nella realizzazione di un velivolo di questo tipo [14]. Queste problematiche, riportate nella figura 1.3, sono state in parte affrontate negli stadi successivi del progetto con l'obiettivo di produrre il dimostratore X-66A per effettuare, a partire dal 2028, i primi test in volo.

Blended Wing Body

La teoria di un'ala volante nella quale sono integrati tutti i sottosistemi come i motori, la cabina per i passeggeri, la stiva per le merci e le superfici di controllo è stata sviluppata negli anni '20 da Nicolas Woyevodsky. A causa di problemi di instabilità e di controllabilità emersi con i primi prototipi, questo concept venne però abbandonato fino agli anni '90 quando gli ingegneri di McDonnell Douglas iniziarono a studiarlo in maniera approfondita. A partire dagli anni 2000, Boeing, in cooperazione con NASA, ha sviluppato l'UAV (Unmanned Aerial Vehicle) X-48 con l'obiettivo di investigare le caratteristiche di un velivolo BWB e di valutarne le possibilità per il futuro. Diversi studi hanno evidenziato come questa architettura sia la più promettente per un velivolo a lungo raggio per il trasporto passeggeri con una capienza da 300 a 500 persone [15] [16] [17]. L'integrazione dell'ala e della fusoliera in un'unica struttura continua consente di diminuire l'area esposta al flusso



Figura 1.4. Airbus MAVERIC

e quindi la resistenza aerodinamica. Di conseguenza si riduce l'impronta acustica e il consumo di combustibile fino al 20% rispetto ad un velivolo tradizionale. La particolare forma consente inoltre di ospitare un'area più grande per il payload nella parte centrale dell'aeromobile: la cabina per i passeggeri è più ampia, con un numero inferiore di file per i sedili ma più lunghe rispetto a una fusoliera classica. La forma irregolare della parte centrale genera però delle difficoltà nella distribuzione e nel mantenimento di una pressione costante all'interno della cabina, essenziale per il comfort dei passeggeri. A partire dal 2017 Airbus ha sviluppato MAVERIC, un prototipo di velivolo BWB, con l'obiettivo di effettuare una serie di sperimentazioni in volo per studiare in maniera approfondita questa architettura per l'aeroplano di linea del futuro. Nella figura 1.4 si può vedere il concept di questo velivolo.

The flying V

È un velivolo di linea subsonico nella configurazione ad ala volante ideato durante il dottorato presso la sede Airbus di Amburgo da Justus Benad, uno studente dell'università di Berlino, e sviluppato in collaborazione con l'università di Delft. Questo aeromobile è privo di fusoliera e di impennaggio verticale: la cabina per i passeggeri, la stiva per il payload e i serbatoi del combustibile sono integrati direttamente nella struttura alare che ha la forma di una lettera V, come si può vedere nell'immagine 1.5. La cabina pressurizzata ha una particolare sezione trasversale di forma ovale in modo da essere contenuta all'interno del bordo di attacco dell'ala la cui geometria è caratterizzata da un profilo alare di tipo convenzionale per ottimizzare l'aerodinamica [18]. Grazie alla particolare architettura, il velivolo, rispetto ad



Figura 1.5. Flying V aircraft

un Airbus A350-900, ha un’efficienza aerodinamica maggiore del 20% e una massa inferiore. Perciò, a parità di passeggeri trasportati e di range operativo, con questo aeromobile è possibile ridurre il consumo di combustibile fino al 20%. Dopo la fase preliminare di design e di ottimizzazione numerica, lo sviluppo continua con i test in volo su un prototipo in scala. Questo progetto ha riscosso un notevole successo tanto da essere finanziato da KLM con l’obiettivo di far entrare in servizio questo velivolo entro il 2050 [19].

1.2 Il ruolo dell’Aeroelasticità

L’Aeroelasticità è la scienza che studia l’interazione tra la deformazione di una struttura elastica immersa in una corrente e le forze aerodinamiche che agiscono su di essa. La natura interdisciplinare è illustrata bene dal triangolo di Collar, riportato nella figura 1.6. Questo triangolo mette in evidenza l’interazione tra tre discipline fondamentali: l’aerodinamica, la dinamica e l’elasticità. L’*aerodinamica* classica fornisce una previsione delle forze che agiscono su un corpo di una data forma immerso in una corrente. L’*elasticità* consente di calcolare la forma di un corpo elastico sottoposto ad un determinato carico. La *dinamica* introduce gli effetti delle forze inerziali sul corpo. Dalla combinazione di due tipi di forze si originano altre tre discipline individuate dai lati del triangolo:

- *meccanica del volo* tra forze aerodinamiche ed inerziali;
- *dinamica strutturale* tra forze elastiche ed inerziali;
- *aeroelasticità statica* tra forze aerodinamiche ed elastiche.

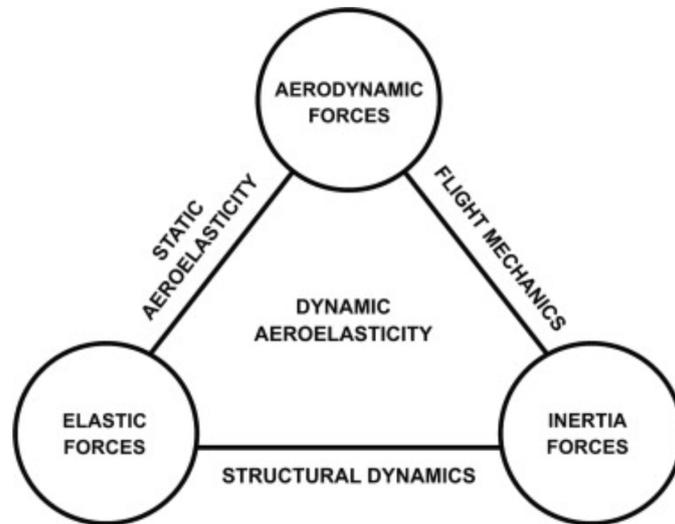


Figura 1.6. Triangolo di Collar

L'*aeroelasticità dinamica* è collocata invece all'interno del triangolo perché si origina dall'interazione tra tutti e tre i tipi di forze. Il campo di applicazione principale è l'ingegneria aeronautica, tuttavia si possono verificare fenomeni aeroelastici sia in campo meccanico (compressori e turbine) sia in campo civile (grattacieli, torri, ponti sospesi, cavi elettrici, condutture).

Problemi aeroelastici, anche se non riconosciuti come tali, si sono presentati fin dai primordi dell'aeronautica: nel 1903, pochi giorni prima del volo dei fratelli Wright, i tentativi eseguiti da Samuel Langley fallirono a causa della rottura catastrofica dell'ala troppo flessibile e troppo carica. I fenomeni aeroelastici legati alla divergenza torsionale furono i fattori predominanti nell'impiego della configurazione a biplano fino agli inizi degli anni '30, quando, l'introduzione della struttura metallica a guscio rinforzato fornì adeguata rigidità torsionale per la realizzazione di velivoli monoplani. Il primo caso di flutter documentato ha coinvolto il bombardiere inglese Handley Page O nel 1916: una violenta oscillazione della coda causò una notevole distorsione della parte posteriore della fusoliera con un movimento asimmetrico dell'equilibratore. A causa delle numerose rotture strutturali catastrofiche verificatesi nella Prima Guerra Mondiale, questi fenomeni iniziarono ad essere studiati in maniera approfondita, ragione per cui Roxbee Cox e Pugsley, all'inizio degli anni '30, coniarono la parola *aeroelasticità* per indicare questa nuova scienza. Dopo la Seconda Guerra Mondiale, con il raggiungimento di velocità supersoniche, emersero nuovi problemi aeroelastici legati alla generazione di onde d'urto e alle oscillazioni di pressione che caratterizzano il campo transonico. Con velocità ancora più elevate, tipiche dei veicoli per il volo spaziale, iniziarono anche a manifestarsi effetti termici sulle strutture dando origine all'aerotermodinamica.

Nel progetto di veicoli aerospaziali è, quindi, necessario tenere conto dei fenomeni aeroelastici, che possono manifestarsi sulla struttura con un comportamento catastrofico portando improvvisamente e repentinamente alla distruzione del velivolo con perdita dell’equipaggio. I problemi aeroelastici si distinguono tra problemi di stabilità e problemi di risposta. In campo aeronautico, per quanto riguarda la stabilità, il problema statico principale è quello della *divergenza torsionale*, il problema dinamico più importante è invece rappresentato dal *flutter*. Il problema di risposta aeroelastica statica principale è la perdita di efficacia dell’alettone con conseguente *inversione dei comandi*.

Poiché i velivoli di nuova concezione si discostano notevolmente dalla configurazione classica ad ala fissa è necessario studiare attentamente l’evoluzione dei componenti strutturali sottoposti ai carichi aerodinamici. Nelle fasi preliminari del progetto l’utilizzo di modelli analitici e computazionali consente di esplorare e sperimentare diverse nuove configurazioni ad un costo ridotto. Quindi è essenziale poter disporre di tool efficienti che consentano di prevedere in maniera sempre più accurata il comportamento aeroelastico delle strutture coinvolte in modo da ridurre il più possibile i test sperimentali.

1.3 Stato dell’arte

Analizzando la letteratura si può vedere come, negli ultimi vent’anni, siano stati sviluppati diversi modelli aeroelastici da impiegare nelle fasi di design preliminare. Si spazia da tool più semplici, basati su teorie unidimensionali della trave e su un’aerodinamica di tipo potenziale, a modelli che combinano rappresentazioni strutturali FEM complesse con software per l’analisi CFD.

In [20] un modello trave raffinato è stato combinato con un metodo aerodinamico di tipo Vortex Lattice Method (VLM) per lo studio di configurazioni alari classiche e non convenzionali. La validazione del modello viene effettuata confrontando i risultati ottenuti con quelli prodotti da Nastran, rispettivamente per un’ala dritta, un’ala con angolo diedro e un’ala rastremata. In tutti e tre i casi, aumentando il numero di elementi beam di tipo B4, il risultato tende a convergere con quello estrapolato da Nastran in termini di spostamento al tip dell’ala. In [21] l’analisi aeroelastica della struttura alare viene effettuata combinando il modello piastra di Reissner-Mindlin con il Doublet Lattice Method (DLM) per il calcolo dei carichi aerodinamici non stazionari.

Dal confronto dei risultati ottenuti con il modello trave raffinato combinato con il VLM [20] e dei risultati ricavati mediante teorie aeroelastiche basate sulla piastra, Carrera e altri evidenziano la minor accuratezza, in termini di risposta aeroelastica statica, della schematizzazione dell’ala con elementi 1D. Tuttavia tale approccio è molto meno costoso dal punto di vista computazionale [22].

Tutti i tool analizzati finora, per la parte aerodinamica, si avvalgono di metodi semplificati che forniscono risultati accurati qualora non siano presenti delle non

linearità evidenti nel campo di moto. Sia il VLM sia il DLM rappresentano una soluzione numerica dell'equazione linearizzata del potenziale, ottenuta a partire dalle equazioni di Eulero e quindi trascurando gli effetti della compressibilità e della conducibilità termica. Di conseguenza tali metodi possono essere utilizzati con buona approssimazione nel caso in cui valga la teoria delle piccole perturbazioni: piccoli inarcamenti, incidenze contenute, scia chiusa, numero di Reynolds non troppo elevato e urti deboli.

Per poter studiare le nuove architetture degli aeromobili del futuro, negli ultimi anni la ricerca si è focalizzata sul miglioramento del livello di accuratezza dell'analisi aeroelastica cercando di limitare il più possibile l'aumento del costo computazionale. In quest'ottica Grifò ed altri hanno proposto un approccio innovativo che combina un modello strutturale di ordine variabile basato sulla Carrera Unified Formulation (CUF) con un software CFD, SU2, per la parte aerodinamica [23]. I due risolutori, strutturale e aerodinamico, sono stati validati e calibrati separatamente confrontando i risultati ottenuti con quelli disponibili in letteratura. A questo punto il codice aeroelastico è stato testato per il calcolo dello spostamento verticale al tip e della torsione di un'ala rettangolare, di un'ala isotropa e di un'ala in materiale composito con profilo NACA 2415. In [24] il nuovo tool viene validato per lo studio del comportamento di un'ala in materiale composito con geometria complessa (tipo A320), applicato per l'analisi aeroelastica di un'ala investita da una corrente transonica e per un primo test di tailoring aeroelastico.

SU2 [25] è un software open-source, multiplatforma (Windows, Linux, MacOS) che consente di risolvere numericamente il campo aerodinamico attorno ad un corpo mediante le equazioni di Eulero, di Navier Stokes o le RANS.

Capitolo 2

Modello aerodinamico

In questo capitolo viene delineato il modello aerodinamico che sarà utilizzato nell'analisi aeroelastica. Tale modello è basato sulla Computational Fluids Dynamics (CFD), cioè sulla risoluzione numerica diretta delle equazioni della fluidodinamica. A differenza dei metodi derivati dalla linearizzazione dell'equazione del potenziale (VLM e DLM), l'utilizzo di un modello aerodinamico high-fidelity permette di ricavare il campo di moto attorno a un corpo e di calcolare i carichi aerodinamici agenti su di esso tenendo conto anche dei comportamenti irregolari e non lineari del fluido. Nella prima parte del capitolo vengono presentate le equazioni generali della meccanica dei fluidi.

2.1 Equazioni di governo

Queste equazioni rappresentano la traduzione matematica dei tre principi fisici su cui si basa tutta la fluidodinamica [26]:

- la conservazione della massa;
- la seconda legge di Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$;
- la conservazione dell'energia.

Posso essere scritte in forma integrale o differenziale, conservativa o non conservativa. Dal punto di vista fisico le equazioni sono del tutto equivalenti ma dal punto di vista della CFD l'implementazione in un algoritmo di una forma piuttosto che di un'altra è fondamentale per evitare problemi di instabilità numerica dei risultati. Il modello di fluido descritto in questo paragrafo è basato sulle equazioni alle derivate parziali ottenute considerando un volume di fluido infinitamente piccolo. Tale volume deve essere però abbastanza esteso da contenere un numero di particelle sufficiente per poter considerare il fluido come un continuo nel quale le grandezze fondamentali (pressione, velocità, densità e temperatura) siano derivabili. Se si

considera il volume infinitesimo di fluido fermo nello spazio si ricavano le equazioni differenziali in forma conservativa, se invece il volume infinitesimo si muove lungo una linea di corrente con velocità $\mathbf{v} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$ uguale alla velocità locale del flusso si ottengono le equazioni in forma non conservativa. Per passare da una forma all'altra si introduce l'operatore *derivata sostanziale*:

$$D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla \quad (2.1)$$

che rappresenta, dal punto di vista fisico, la velocità di variazione di una grandezza scalare seguendo un elemento fluido nel suo moto. La derivata sostanziale (o materiale) è, quindi, la somma di due termini: la *derivata locale* (o derivata euleriana) $\partial/\partial t$, ovvero la velocità di variazione della grandezza a punto fisso, e la *derivata convettiva* $\mathbf{v} \cdot \nabla$, che rappresenta la variazione prodotta dal movimento dell'elemento fluido da un punto ad un altro del campo di moto.

Le equazioni fondamentali della meccanica dei fluidi sono tre: l'equazione di bilancio della massa (o di continuità), l'equazione di bilancio della quantità di moto e l'equazione di bilancio dell'energia.

2.1.1 Equazione di bilancio della massa

Si considera un elemento infinitesimo di fluido di lati dx , dy , dz fisso nello spazio e si adotta un sistema di riferimento cartesiano nel quale la velocità $\mathbf{v} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$ e la densità ρ sono funzioni delle coordinate x , y , z e del tempo t . Come si può vedere nella figura 2.1, è presente un flusso di massa che attraversa l'elemento fluido considerato. Le frecce evidenziano i contributi di influsso o di deflusso delle varie facce dell'elemento. Considerando positivo il deflusso della massa concorde con gli assi cartesiani si possono scrivere i bilanci del flusso netto nelle 3 direzioni:

$$\begin{aligned} \left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx \right] dy dz - (\rho u) dy dz &= \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy dz \\ \left[\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy \right] dx dz - (\rho v) dx dz &= \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dx dy dz \\ \left[\rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dz \right] dx dy - (\rho w) dx dy &= \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dx dy dz \end{aligned} \quad (2.2)$$

Quindi il flusso netto di massa che esce dall'elemento è:

$$\text{Flusso di massa} = \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] dx dy dz \quad (2.3)$$

mentre il tasso di variazione della massa nel tempo all'interno dell'elemento infinitesimo di densità $\rho(dx dy dz)$ può essere calcolato come:

$$\text{Tasso di variazione della massa} = \frac{\partial \rho}{\partial t} (dx dy dz) \quad (2.4)$$

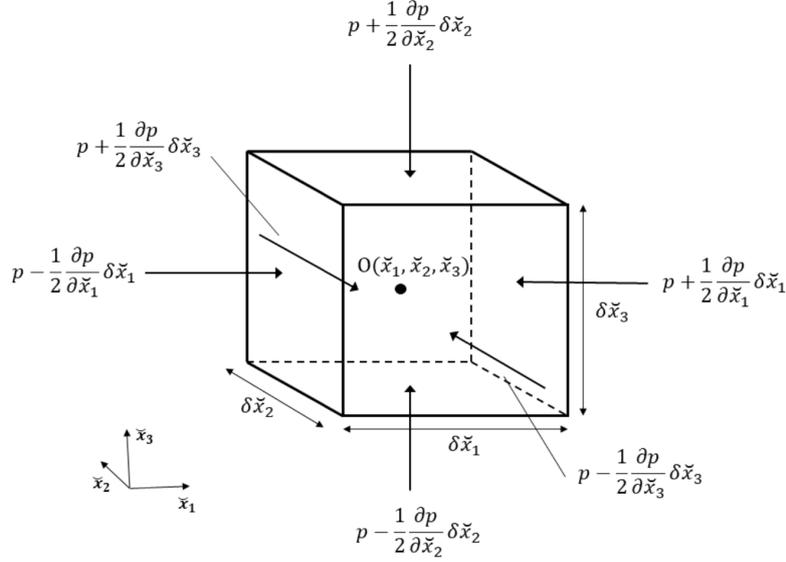


Figura 2.1. Elemento fluido infinitesimo

Per il principio di conservazione della massa applicato all'elemento di fluido infinitesimo, il deflusso di massa dall'elemento deve eguagliare la diminuzione della massa all'interno dell'elemento stesso. Comparando le equazioni (2.3) e (2.4) si ottiene:

$$\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] dx dy dz = -\frac{\partial \rho}{\partial t} (dx dy dz) \quad (2.5)$$

da cui:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] = 0 \quad (2.6)$$

Riscrivendo in forma compatta si ottiene l'equazione di continuità:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.7)$$

cioè l'equazione scalare che permette di calcolare il bilancio della massa. Avendo assunto come punto di partenza un elemento di fluido infinitesimo fermo nello spazio si è ricavata la forma conservativa dell'equazione di bilancio della massa. Se si sviluppa il termine di divergenza e si sostituisce l'operatore derivata sostanziale (2.1), l'equazione può essere riscritta nella forma non conservativa:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (2.8)$$

Nel caso di campo di moto solenoidale, cioè con divergenza del vettore velocità nulla $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, si ottiene $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ e quindi la densità della particella non varia durante lo spostamento lungo la traiettoria. Questa situazione equivale all'incompressibilità del campo di moto.

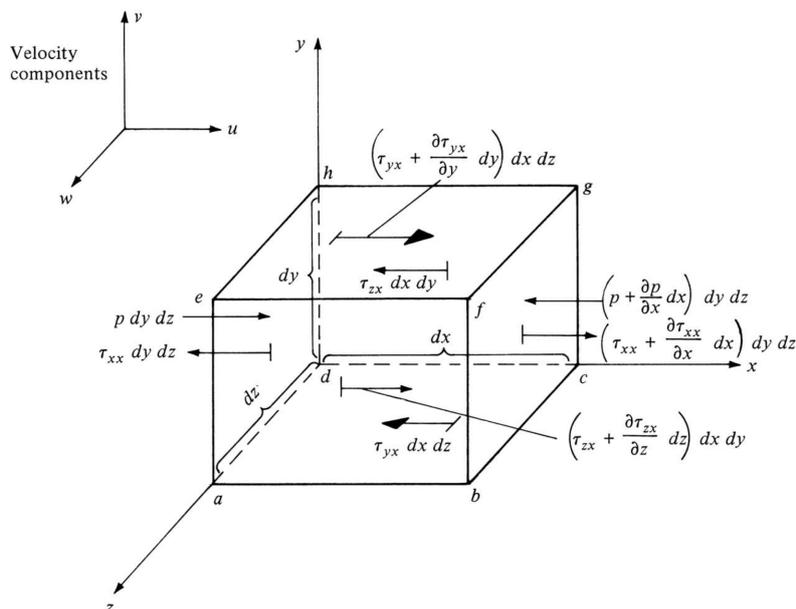


Figura 2.2. Elemento fluido infinitesimo con le forze nella direzione x [26]

2.1.2 Equazione di bilancio della quantità di moto

Si considera un elemento fluido infinitesimo che si muove nello spazio con velocità $\mathbf{v} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$ a cui viene applicata la seconda legge di Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$: la forza netta sull'elemento fluido è uguale alla massa dell'elemento moltiplicata per l'accelerazione. Le forze che agiscono sull'elemento sono di due tipi: forze di volume, che agiscono a distanza, come le forze gravitazionali, elettriche o magnetiche e forze di superficie, che agiscono direttamente sulla superficie dell'elemento fluido, come la pressione e gli sforzi viscosi. Poiché la legge di Newton è una relazione vettoriale, si può scrivere il bilancio delle forze scomponendolo in tre equazioni, rispettivamente nelle direzioni x , y e z . Nella figura 2.2 sono riportate le forze coinvolte nella sola direzione x . Come si può vedere, la pressione è applicata sulle facce perpendicolari all'asse x e spinge verso l'interno dell'elemento. Le τ invece rappresentano gli sforzi viscosi: per convenzione τ_{ii} è lo sforzo normale nella direzione i mentre τ_{ij} individua un taglio, cioè uno sforzo tangenziale nella direzione j esercitato in un piano perpendicolare all'asse i . Per esempio, τ_{yx} è lo sforzo di taglio nella direzione x applicato sulle facce dell'elemento perpendicolari all'asse y . Per effetto delle azioni viscosi, quindi, in un fluido tridimensionale nel quale le tre componenti di velocità u , v e w sono diverse da zero, ciascuna faccia dell'elemento è soggetta contemporaneamente a uno sforzo di taglio e a uno sforzo normale. In molti casi, però, gli sforzi normali sono molto più piccoli degli sforzi di taglio.

La risultante delle forze di superficie nella direzione x assume la seguente forma:

$$R_x = \left[p - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) \right] dy dz + \left[\left(\tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} dx \right) - \tau_{xx} \right] dy dz + \left[\left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) - \tau_{yx} \right] dx dz + \left[\left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) - \tau_{zx} \right] dx dy \quad (2.9)$$

Eseguendo alcune semplificazioni e tenendo conto delle forze di volume si può scrivere la forza totale lungo x :

$$F_x = \left[-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right] dx dy dz + \rho f_x dx dy dz \quad (2.10)$$

dove $\rho f_x dx dy dz$ è il contributo della forza di volume che agisce sull'elemento fluido nella direzione x . La massa dell'elemento fluido è costante e pari a $m = \rho dx dy dz$; l'accelerazione nella direzione x , dal momento che l'elemento fluido si muove con una certa velocità, può essere calcolata mediante la derivata sostanziale $a_x = Du/Dt$. Combinando le equazioni si può scrivere la legge di Newton nella direzione x :

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho f_x \quad (2.11)$$

In maniera equivalente, considerando gli opportuni termini dello sforzo viscoso, si possono ottenere le equazioni per le direzioni y e z :

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho f_y \quad (2.12)$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \rho f_z \quad (2.13)$$

Queste tre equazioni sono le equazioni di bilancio della quantità di moto per un fluido viscoso in forma non conservativa, poiché si è partiti da un elemento di fluido in movimento. A differenza dell'equazione di continuità, l'equazione della quantità di moto è un'equazione vettoriale e può essere scritta in forma compatta, trascurando le forze di volume:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} - \nabla \cdot \bar{\bar{\tau}} = 0 \quad (2.14)$$

nella quale $\bar{\bar{\tau}}$ è il tensore degli sforzi. Si ipotizza che il fluido considerato sia un fluido *newtoniano* e che quindi sia presente un legame di proporzionalità diretta tra sforzi viscosi e gradiente di velocità. Il tensore degli sforzi è dato dalla somma di un contributo di equilibrio legato agli sforzi normali, presente anche nello stato di quiete, e un contributo di disequilibrio correlato al movimento del fluido:

$$\bar{\bar{\tau}} = \bar{\bar{\tau}}_{eq} + \bar{\bar{\tau}}_{dis} \quad (2.15)$$

$\bar{\tau}_{eq}$ è isotropo, non varia con la direzione e rappresenta, quindi, il termine della pressione termodinamica, che può essere calcolato come:

$$\bar{\tau}_{eq} = -p\bar{I} = - \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Il tensore degli sforzi viscosi $\bar{\tau}_{dis}$, che deriva dal meccanismo di trasporto della quantità di moto a livello molecolare, può essere determinato con l'equazione costitutiva dei fluidi newtoniani:

$$\bar{\tau}_{dis} = 2\mu\bar{D} + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{v})\bar{I} \quad (2.17)$$

dove μ è la viscosità dinamica misurata in $[\frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}}]$ e λ il coefficiente di viscosità, entrambi dipendenti dallo stato termodinamico del fluido. Per l'ipotesi di Stokes la bulk viscosity (viscosità di volume) η è nulla in presenza di tassi di espansione o compressione non troppo elevati e quindi μ e λ sono legate direttamente tra di loro:

$$\eta = \frac{2}{3}\mu + \lambda = 0 \implies \lambda = -\frac{2}{3}\mu \quad (2.18)$$

\bar{D} è il tensore velocità di deformazione e rappresenta la parte simmetrica del tensore gradiente di velocità, la cui espressione completa è riportata nell'appendice A. Applicando l'ipotesi di Stokes all'equazione (2.17) si ottiene la relazione:

$$\bar{\tau}_{dis} = 2\mu\bar{D} - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{v})\bar{I} \quad (2.19)$$

Sostituendo le relazioni (2.16) e (2.19) nelle equazioni (2.15) e (2.14) si arriva alla forma non conservativa definitiva dell'equazione di bilancio della quantità di moto:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla \cdot \left[\left(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T \right) - \frac{2}{3} \left(\nabla \cdot \mathbf{v} \right) \bar{I} \right] \quad (2.20)$$

Per scrivere la forma conservativa sono necessari alcuni rimaneggiamenti al termine a sinistra dell'uguale. Si applica l'operatore derivata sostanziale (2.1) al vettore velocità \mathbf{v} :

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \quad (2.21)$$

si esplicita la derivata:

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.22)$$

e si richiama l'identità vettoriale che permette di calcolare la divergenza di un prodotto tra uno scalare e un vettore:

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \quad (2.23)$$

Ricavando i termini $\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ dall'equazione (2.22) e $\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ dall'equazione (2.23) e sostituendo nell'equazione (2.21) si ottiene:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} - \mathbf{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) - \mathbf{v} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) - \mathbf{v} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right]$$

dove il termine tra parentesi quadre è proprio l'equazione di continuità (2.7) e quindi pari a zero. Sostituendo nell'equazione (2.20) si può scrivere l'equazione della quantità di moto in forma conservativa:

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = -\nabla p + \mu \nabla \cdot \left[\left(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T \right) - \frac{2}{3} \left(\nabla \cdot \mathbf{v} \right) \bar{\mathbf{I}} \right] \quad (2.24)$$

2.1.3 Equazione di bilancio dell'energia

Per ricavare questa equazione si applica il principio di conservazione dell'energia, che per un elemento infinitesimo di fluido in movimento con velocità \mathbf{v} coincide con la prima legge della termodinamica: la variazione di energia interna è pari alla somma dei flussi netti di calore e del lavoro compiuto dalle forze sull'elemento. Si procede in maniera conforme a quanto effettuato per l'equazione di bilancio della quantità di moto nel paragrafo 2.1.2. Anche in questo caso, quindi, le forze che agiscono sull'elemento fluido si distinguono in forze di volume e forze di superficie, ovvero la pressione e gli sforzi viscosi. Il lavoro compiuto da queste forze è pari al prodotto della forza per la velocità nella direzione di azione della forza stessa. Nella figura 2.3 sono riportati tutti i contributi del lavoro e dei flussi di calore per la direzione x . Il bilancio del lavoro svolto dalle forze di pressione sulle due facce perpendicolari all'asse x verso l'interno dell'elemento, è pari a:

$$\left[up - \left(up + \frac{\partial(up)}{\partial x} dx \right) \right] dy dz = -\frac{\partial(up)}{\partial x} dx dy dz \quad (2.25)$$

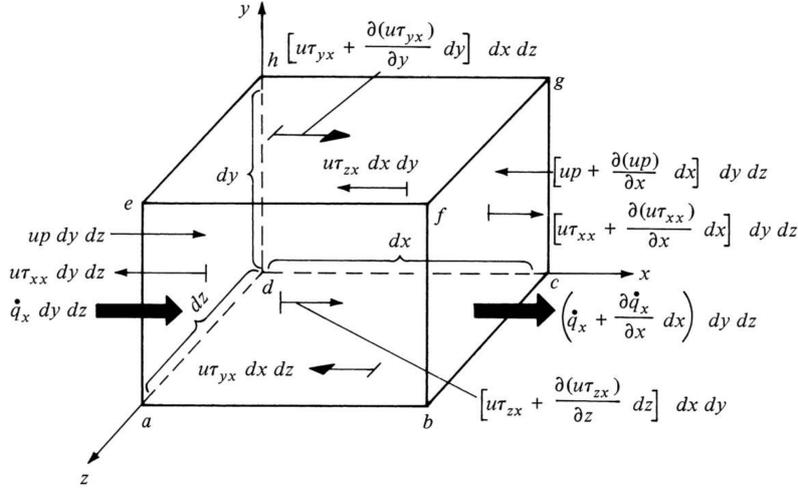
In maniera analoga si può procedere per gli sforzi viscosi τ_{xx} , τ_{yx} e τ_{zx} . Per esempio, il lavoro compiuto dallo sforzo di taglio τ_{yx} risulta:

$$\left[\left(u\tau_{yx} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} dy \right) - u\tau_{yx} \right] dx dz = \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} dx dy dz \quad (2.26)$$

Il lavoro compiuto da tutte le forze di superficie nella direzione x è:

$$\left[-\frac{\partial(up)}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z} \right] dx dy dz \quad (2.27)$$

Espressioni affini possono essere ottenute per le forze di superficie nelle direzioni y e z . Il lavoro totale svolto sull'elemento di fluido infinitesimo in movimento è dato


 Figura 2.3. Elemento fluido infinitesimo con i flussi nella direzione x [26]

dalla somma di tutti i contributi delle forze nelle tre direzioni:

$$\left[-\left(\frac{\partial(up)}{\partial x} + \frac{\partial(vp)}{\partial y} + \frac{\partial(wp)}{\partial z} \right) + \frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z} + \frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial(w\tau_{zz})}{\partial z} \right] dx dy dz + \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx dy dz \quad (2.28)$$

dove $\rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx dy dz$ rappresenta il lavoro svolto dalle forze di volume sull'elemento fluido in movimento.

Per quanto riguarda i flussi di calore i contributi sono legati a due fattori: il riscaldamento volumetrico per assorbimento o emissione di radiazioni e il trasferimento di calore attraverso la superficie a causa dei gradienti di temperatura. Come si può vedere nella figura 2.3 il trasferimento netto di calore nella direzione x per conduzione termica è:

$$\left[\dot{q}_x - \left(\dot{q}_x + \frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} dx \right) \right] dy dz = -\frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} dx dy dz \quad (2.29)$$

dove \dot{q}_x è il flusso di calore per unità di massa trasferito nella direzione x nell'unità di tempo. Considerando le analoghe espressioni per le direzioni y e z si può determinare il trasferimento totale di calore per conduzione termica nell'elemento considerato:

$$-\left(\frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y} + \frac{\partial \dot{q}_z}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (2.30)$$

I flussi di calore possono essere espressi per mezzo della legge di Fourier in funzione dei gradienti locali di temperatura:

$$\dot{q}_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad \dot{q}_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} \quad \dot{q}_z = -k \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2.31)$$

dove k è la conducibilità termica misurata in $[\frac{W}{m \cdot K}]$. Il flusso netto di calore nell'elemento di fluido in movimento è determinato dalla somma del calore trasferito per conduzione termica e del termine di riscaldamento volumetrico $\rho \dot{q} dx dy dz$:

$$\left[\rho \dot{q} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] dx dy dz \quad (2.32)$$

L'energia totale interna dell'elemento fluido per unità di massa è data dalla somma dell'energia legata al movimento casuale delle molecole e dell'energia cinetica del moto traslazionale dell'elemento fluido:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{V^2}{2} \right) dx dy dz \quad (2.33)$$

Combinando le equazioni (2.28), (2.32) e (2.33) si ricava l'equazione di bilancio dell'energia totale:

$$\begin{aligned} \rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{V^2}{2} \right) = & \rho \dot{q} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \frac{\partial (up)}{\partial x} - \frac{\partial (vp)}{\partial y} - \frac{\partial (wp)}{\partial z} \\ & + \frac{\partial (u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial (u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial (u\tau_{zx})}{\partial z} + \frac{\partial (v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial (v\tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial (v\tau_{zy})}{\partial z} + \frac{\partial (w\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial (w\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial (w\tau_{zz})}{\partial z} \\ & + \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Moltiplicando le equazioni della quantità di moto nelle tre direzioni (2.11), (2.12) e (2.13) rispettivamente per u , v e w e sommandole tra di loro si ottiene:

$$\begin{aligned} \rho \frac{DV^2}{Dt} = & -u \frac{\partial p}{\partial x} - v \frac{\partial p}{\partial y} - w \frac{\partial p}{\partial z} + u \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) + v \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \\ & + w \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) + \rho (u f_x + v f_y + w f_z) \end{aligned} \quad (2.35)$$

Sottraendo questa relazione all'equazione (2.34) e tenendo conto che $\rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = \rho (u f_x + v f_y + w f_z)$ si arriva alla forma non conservativa dell'equazione dell'energia interna:

$$\begin{aligned} \rho \frac{De}{Dt} = & \rho \dot{q} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) - p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \tau_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} \\ & + \tau_{zx} \frac{\partial u}{\partial z} + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{zy} \frac{\partial v}{\partial z} + \tau_{xz} \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial w}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.36)$$

nella quale l'energia cinetica e i termini legati alle forze di volume sono scomparsi. L'equazione scalare che permette di calcolare il bilancio di energia può essere riscritta in forma vettoriale:

$$\rho \frac{De}{Dt} = -p \nabla \cdot \mathbf{v} + (\bar{\bar{\tau}}_{dis} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (2.37)$$

dove il flusso termico conduttivo \mathbf{q} è espresso per mezzo della legge di Fourier $\mathbf{q} = -k\nabla T$, come visto nell'equazione (2.31). Si introduce la funzione di dissipazione $\mathcal{D} = \frac{1}{\rho}(\bar{\bar{\tau}}_{dis} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{v}$ che tiene conto della trasformazione irreversibile di energia meccanica in calore operata dagli sforzi viscosi. L'equazione assume quindi la forma:

$$\rho \frac{De}{Dt} = -p\nabla \cdot \mathbf{v} + \rho\mathcal{D} + k\nabla^2 T \quad (2.38)$$

Analogamente a quanto fatto per l'equazione della quantità di moto, con alcuni rimaneggiamenti e manipolazioni, si può dimostrare che vale la relazione:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{V^2}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \right] + \nabla \cdot \left[\rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \mathbf{v} \right] = \frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{v}) \quad (2.39)$$

Sostituendo questa espressione nell'equazione (2.34), trascurando le forze di volume e riscrivendo con la notazione vettoriale si ottiene la forma conservativa dell'equazione dell'energia totale:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{v}) = -\nabla \cdot (p\mathbf{v}) + \nabla \cdot (\bar{\bar{\tau}}_{dis} \cdot \mathbf{v}) - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (2.40)$$

Data la definizione di entalpia totale $H = e + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2}$ si può riscrivere l'equazione accorpando il termine di divergenza dell'energia con quello delle forze di pressione:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \nabla \cdot (\rho H \mathbf{v}) = \nabla \cdot (\bar{\bar{\tau}}_{dis} \cdot \mathbf{v}) - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (2.41)$$

Allo stesso modo si può procedere per l'equazione dell'energia interna (2.37) riscrivendola in forma conservativa:

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{v}) = -p\nabla \cdot \mathbf{v} + (\bar{\bar{\tau}}_{dis} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (2.42)$$

2.2 Equazioni di Navier-Stokes e di Eulero

Le equazioni di Navier-Stokes per un fluido non stazionario, tridimensionale, viscoso e compressibile coincidono con l'equazione di continuità (2.7), l'equazione di bilancio della quantità di moto (2.24) e l'equazione di bilancio dell'energia totale (2.40) ricavate nel paragrafo precedente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) &= 0 \\ \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) &= -\nabla p + \mu \nabla \cdot \left[\left(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T \right) - \frac{2}{3} \left(\nabla \cdot \mathbf{v} \right) \bar{\bar{I}} \right] \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{v}) &= -\nabla \cdot (p\mathbf{v}) + \nabla \cdot (\bar{\bar{\tau}}_{dis} \cdot \mathbf{v}) - \nabla \cdot \mathbf{q} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Queste equazioni differenziali, sviluppate tra il 1822 e il 1850 dall'ingegnere e fisico francese Claude-Louis Navier e dal matematico e fisico irlandese George Gabriel Stokes, descrivono il movimento di una sostanza fluida viscosa. Nei codici per la CFD queste equazioni vengono discretizzate e risolte numericamente in maniera diretta (Direct Numerical Simulation). Il costo computazionale è determinato dalla precisione di risoluzione richiesta.

Nell'ipotesi di fluido ideale non ci sono fenomeni diffusivi legati all'agitazione termica, quindi sono nulli gli sforzi viscosi $\mu = 0$ e gli scambi di calore $k = 0$. Tutte le trasformazioni fisiche sono reversibili e adiabatiche, cioè isentropiche. Pertanto dalla semplificazione delle equazioni di Navier-Stokes si ottengono le equazioni di Eulero:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) &= 0 \\ \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) &= -\nabla p \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{v}) &= -\nabla \cdot (p \mathbf{v})\end{aligned}\tag{2.44}$$

In entrambi i casi il numero di equazioni è pari a cinque (continuità, tre equazioni della quantità di moto, energia) per sei variabili di flusso incognite: la densità ρ , la pressione p , le tre componenti della velocità u , v , w e l'energia interna e . Quindi è necessaria una sesta equazione per chiudere il sistema. Si utilizza l'equazione di stato dei gas perfetti:

$$p = \rho R T\tag{2.45}$$

nella quale R è la costante specifica del gas, che per l'aria assume il valore $R = 287,05 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$. Si introduce una settima incognita, la temperatura T che, per un gas caloricamente perfetto, è legata all'energia interna dalla relazione di stato $e = c_v T$, con c_v calore specifico a volume costante.

Nella risoluzione numerica delle equazioni di Navier-Stokes e di Eulero è di fondamentale importanza impostare le condizioni iniziali del flusso libero e le opportune *condizioni al contorno*, in modo da riprodurre, in maniera coerente, il campo fluido attorno alla geometria che si sta analizzando. Nel caso di flusso viscoso, si impone, a parete, la *condizione di aderenza*, ossia l'annullamento della velocità relativa tra la superficie e lo strato di gas a contatto $u = v = w = 0$. Al contrario, nel caso di flusso inviscido, si impone la *condizione di tangenza* del vettore velocità $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$, con \mathbf{n} vettore normale alla superficie in un dato punto. Altre condizioni prevedono l'imposizione di una certa temperatura T_w di parete (wall) nello strato di fluido direttamente a contatto oppure un dato flusso di calore. Se invece non è presente trasferimento di calore dal fluido alla superficie si impiega la condizione di adiabaticità della temperatura, ossia l'annullamento del gradiente $(\partial T / \partial n) = 0$ a parete. Differenti condizioni al contorno possono essere utilizzate in zone diverse rispetto

la parete a seconda del particolare caso considerato: per esempio ingresso o uscita per un flusso in un condotto oppure campo lontano e flusso a valle per un corpo immerso una corrente.

2.3 RANS per i flussi turbolenti

Le equazioni Reynolds-Averaged Navier-Stokes (RANS) sono una forma ridotta delle equazioni generali di Navier-Stokes. Vengono utilizzate per lo studio dei flussi turbolenti nei quali, essendo il moto delle particelle irregolare, le variabili sono caratterizzate da un comportamento fluttuante caotico. Di conseguenza, la risoluzione numerica diretta delle equazioni di Navier-Stokes per un moto turbolento è quasi impossibile. Il limite nell'applicazione della DNS è di natura computazionale ed è legato al numero di Reynolds:

$$Re = \frac{\rho UL}{\mu} \quad (2.46)$$

dove ρ è la densità, μ la viscosità dinamica, U la velocità del flusso e L una lunghezza caratteristica. Il numero di Reynolds rappresenta fisicamente il rapporto tra le forze di inerzia e le forze viscosi: oltre un certo valore critico Re_{crit} si verifica il passaggio dal flusso *laminare*, nel quale i filetti fluidi rimangono paralleli gli uni agli altri e le proprietà del fluido sono costanti, al flusso *turbolento*, caratterizzato da un continuo rimescolamento operato dai vortici che determina la variabilità casuale delle grandezze. In queste condizioni, applicare una strategia risolutiva diretta richiederebbe una discretizzazione del dominio di calcolo estremamente densa: per ottenere una corretta risoluzione spaziale è necessaria una griglia con un numero di celle proporzionale a $Re^{9/4}$ e una CPU time dell'ordine di Re^3 . Ne risulta che simulazioni numeriche così onerose sono praticamente impossibili con l'attuale potenza di calcolo a disposizione. Pertanto sono stati elaborati degli approcci alternativi che permettono di descrivere, con sufficiente approssimazione, il fenomeno della turbolenza:

- LES (Large Eddy Simulation);
- RANS (Reynolds-Averaged Navier-Stokes).

Nella teoria LES vengono valutate direttamente le grandezze macroscopiche mentre si modellano gli effetti dei vortici più piccoli. Questo approccio, dal punto di vista del costo computazionale, è circa dieci volte meno oneroso della DNS. Tuttavia non è di interesse per questa tesi.

L'approccio RANS è basato sulla decomposizione, proposta da Reynolds [27], in una parte media e in una fluttuante delle grandezze che caratterizzano il flusso. La generica variabile a è indicata come:

$$a = \bar{a} + a' \quad (2.47)$$

dove \bar{a} è il valore medio della grandezza e a' il valore fluttuante. La scelta del tipo di media è molto importante perché le equazioni di Navier-Stokes vengono risolte in termini di valor medio delle grandezze considerate. Nel caso di media temporale, \bar{a} viene calcolata come:

$$\bar{a} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} a \, dt \quad (2.48)$$

Il valore così ottenuto varia solamente nello spazio, mentre resta costante nel tempo, perciò questo tipo di media è idoneo alla descrizione di flussi che presentano una turbolenza stazionaria. In altre situazioni, si può impiegare una media spaziale o una media di insieme. La media della componente fluttuante $\overline{a'}$ è sempre nulla perché i valori delle fluttuazioni sono sia positivi sia negativi. Applicando la scomposizione (2.47) alle variabili fisiche:

$$p = \bar{p} + p' \quad v_i = \bar{v}_i + v'_i \quad (2.49)$$

e sostituendole nelle equazioni di continuità e della quantità di moto si ottengono le equazioni mediate per un caso incomprimibile ($\rho' \ll \bar{\rho}$), qui scritte con la notazione di Einstein:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} &= 0 \\ \rho \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \rho \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\tau}_{ij} - \overline{\rho v'_i v'_j}) \end{aligned} \quad (2.50)$$

Queste equazioni sono formalmente identiche alle equazioni di Navier-Stokes (2.2) fatta eccezione per la comparsa del *tensore degli sforzi di Reynolds*:

$$\overline{\tau}^R = -\overline{\rho v'_i v'_j} \quad (2.51)$$

un termine di sforzi fittizio che quantifica il flusso di quantità di moto dovuto alle fluttuazioni turbolente della velocità. Per un caso 3D questo termine è composto da nove componenti, di cui sei linearmente indipendenti: le equazioni RANS non sono, quindi, delle equazioni chiuse ma è necessario introdurre altre relazioni per determinare le nuove variabili introdotte. I modelli di chiusura più semplici sono incentrati sull'ipotesi di Boussinesq che si basa sull'idea che i vortici più grandi e più energetici siano i principali responsabili del trasferimento di quantità di moto nel flusso turbolento. Come per il caso laminare, anche lo sforzo di taglio turbolento dipende linearmente dalla velocità di deformazione media:

$$\overline{\tau}^R = -\overline{\rho v'_i v'_j} = 2\mu_T \overline{S}^R - \frac{2}{3}\rho\kappa \overline{I} \quad (2.52)$$

dove $\overline{S}^R = \frac{1}{2}(\nabla \bar{\mathbf{v}} + \nabla \bar{\mathbf{v}}^T)$ è il tensore velocità di deformazione mediato alla Reynolds, μ_T la viscosità dinamica turbolenta e $\kappa = \frac{1}{2}\overline{\mathbf{v}'\mathbf{v}'}$ l'energia cinetica turbolenta. Si può notare che questa relazione ricalca esattamente l'equazione costitutiva dei

fluidi newtoniani con l'ipotesi di Stokes (2.19). A differenza della viscosità dinamica, μ_T non è una proprietà del fluido ma delle condizioni locali del flusso, quindi è instazionaria e varia da punto a punto. In questa maniera, grazie all'approssimazione di Boussinesq, si semplifica la trattazione passando dalle sei incognite del tensore degli sforzi di Reynolds alla determinazione di un appropriato valore per μ_T . Per stimare il valore della viscosità turbolenta si utilizzano i modelli di turbolenza con chiusura al primo ordine: Spalart-Allmaras, $\kappa - \varepsilon$, $\kappa - \omega$ e SST.

Nel caso in cui le fluttuazioni di densità non siano trascurabili, per semplificare le equazioni del moto, si applica la scomposizione di Reynolds alla densità e alla pressione mentre si utilizza la scomposizione di Favre [28] per la velocità e le altre variabili:

$$\rho = \bar{\rho} + \rho' \quad p = \bar{p} + p' \quad v_i = \tilde{v}_i + v_i'' \quad (2.53)$$

dove la media alla Favre è una media pesata tramite la densità:

$$\tilde{v}_i = \frac{1}{\bar{\rho}} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \rho v_i dt \quad (2.54)$$

Sostituendo le variabili così scomposte si ottengono le equazioni di Navier-Stokes mediate alla Favre e alla Reynolds [29]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} \tilde{v}_i) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{v}_j \tilde{v}_i) &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{\tau}_{ij} - \bar{\rho} \widetilde{v_i'' v_j''}) \\ \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{E}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{v}_j \tilde{H}) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} - \bar{\rho} \widetilde{v_j'' h''} + \widetilde{\tau_{ij} v_i''} - \bar{\rho} \widetilde{v_j'' \kappa} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\tilde{v}_i (\tilde{\tau}_{ij} - \bar{\rho} \widetilde{v_i'' v_j''}) \right] \end{aligned} \quad (2.55)$$

dove $\widetilde{\tau}^F = -\bar{\rho} \widetilde{v_i'' v_j''}$ è un termine aggiuntivo, simile al tensore degli sforzi di Reynolds, ma mediato alla Favre.

2.3.1 Modelli di turbolenza

Il modello di Spalart-Allmaras è un modello che prevede la risoluzione di un'equazione di trasporto aggiuntiva per determinare la viscosità turbolenta. Fornisce risultati accurati a fronte di un costo computazione contenuto, è particolarmente adatto per bassi Re e flussi quasi 2D. Presenta dei problemi per flussi 3D.

Nel modello $\kappa - \varepsilon$ vengono risolte due equazioni di trasporto aggiuntive, una per l'energia cinetica turbolenta κ e una per la velocità di dissipazione ε . È particolarmente adatto per lo studio della scia. Ne sono state sviluppate numerose varianti ed è ampiamente utilizzato in campo industriale.

Il modello $\kappa - \omega$ originale, proposto da Wilcox nel 1988, sostituisce l'equazione per la velocità di dissipazione dell'energia cinetica turbolenta ε con quella per la

velocità specifica di dissipazione ω . Nello studio dello strato limite vicino alla parete permette di raggiungere un'accuratezza simile a quella del modello $\kappa - \varepsilon$ a fronte, però, di una stabilità numerica maggiore. Questo metodo è particolarmente adatto per flussi caratterizzati da gradienti di pressione avversi e separazione. Tuttavia il modello è particolarmente sensibile alle condizioni al contorno del flusso libero. Menter nel 1994 ha formulato il metodo Shear Stress Transport (SST) che combina un approccio $\kappa - \varepsilon$ per il campo lontano e una formulazione $\kappa - \omega$ vicino alla parete in modo da sfruttare i vantaggi di entrambi i metodi.

2.4 SU2

SU2 è un ambiente open-source per l'analisi computazionale e la progettazione sviluppato alla Stanford University a partire dal 2013. Il software permette di risolvere in maniera efficiente diversi tipi di equazioni differenziali alle derivate parziali per analizzare e ottimizzare problemi fisici multidisciplinari. Questa suite è estremamente flessibile, infatti può essere integrata con differenti pacchetti in modo da eseguire svariate simulazioni nel campo ingegneristico: analisi aeroelastiche, aeroacustiche, elettrodinamiche, studio di flussi chimicamente reattivi, ottimizzazione di forma, raffinamento della mesh, calcolo dei gradienti. L'architettura del tool è composta da una serie di file eseguibili nel linguaggio di programmazione C++, ognuno dei quali progettato per una specifica funzione, uniti da una sovrastruttura di script compilati in Python. In questa tesi SU2 è impiegato per la risoluzione del campo aerodinamico, pertanto dei diversi moduli che compongono il software, si utilizzeranno, rispettivamente, SU2_CFD e SU2_DEF. SU2_CFD risolve in maniera diretta le equazioni compressibili di Navier-Stokes espresse nella forma differenziale:

$$\mathcal{R}(U) = \frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}^c(U) - \nabla \cdot \mathbf{F}^v(U, \nabla U) - Q = 0 \quad (2.56)$$

dove $U = \{\rho, \rho \mathbf{v}, \rho E\}^T$ sono le variabili di stato delle equazioni della fluidodinamica, Q un generico termine sorgente, \mathbf{F}^c e \mathbf{F}^v , rispettivamente, i flussi convettivi e viscosi:

$$\mathbf{F}^c = \begin{Bmatrix} \rho \mathbf{v} \\ \rho \mathbf{v} \mathbf{v} + \bar{\bar{I}} p \\ \rho E \mathbf{v} + p \mathbf{v} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{F}^v = \begin{Bmatrix} \cdot \\ \bar{\bar{\tau}} \\ \bar{\bar{\tau}} \cdot \mathbf{v} + k \nabla T \end{Bmatrix} \quad (2.57)$$

con $\bar{\bar{\tau}}$ tensore degli sforzi viscosi come espresso nell'equazione relativa alla $\bar{\bar{\tau}}_{dis}$ (2.19). La viscosità dinamica μ e la conducibilità termica k sono calcolate come somma di un termine laminare e un termine turbolento:

$$\mu = \mu_d + \mu_t \quad (2.58)$$

$$k = k_d + k_t = \frac{\mu_d c_p}{Pr_d} + \frac{\mu_t c_p}{Pr_t} \quad (2.59)$$

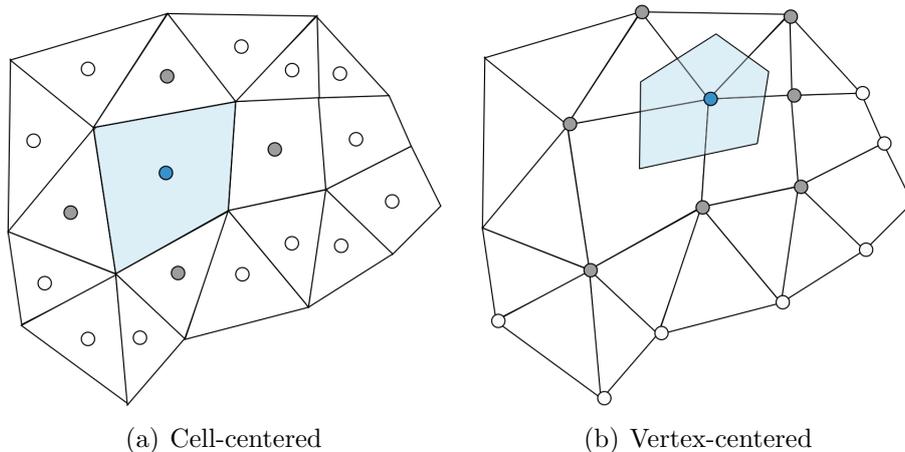


Figura 2.4. Celle computazionali per il metodo FVM

in modo da poter cambiare facilmente il tipo di equazione utilizzato nella risoluzione del campo di moto in base alle impostazioni di input nel file di configurazione. Per un campo di moto laminare nel quale si vogliono applicare le equazioni di Navier-Stokes si avrà $\mu = \mu_d$ e $k = k_d$ con $\mu_t = 0$ e $k_t = 0$, per risolvere un flusso ideale con le equazioni di Eulero invece sarà $\mu = \mu_d = \mu_t = 0$ e $k = k_d = k_t = 0$. Nel caso di un flusso turbolento, per utilizzare le equazioni RANS, sia i termini laminari e sia i termini turbolenti della viscosità dinamica e della conducibilità termica saranno diversi da zero per poter considerare il contributo degli sforzi di Reynolds. Per risolvere queste equazioni viene effettuata una discretizzazione nello spazio utilizzando il metodo ai volumi finiti. Config e mesh files

2.4.1 Integrazione nello spazio e nel tempo

Il metodo ai volumi finiti (Finite Volume Method) è un metodo utilizzato per l'integrazione e la valutazione delle equazioni differenziali alle derivate parziali[30, 31]. È basato sulla discretizzazione del dominio di riferimento in una griglia composta da tante celle o volumi elementari di forma diversa non sovrapposti tra di loro. Le leggi di governo per calcolare le variabili di flusso sono applicate in alcuni punti discreti, detti nodi. Questi nodi possono essere collocati al centro o ai vertici delle celle, come si può vedere nella figura 2.4. Nell'approccio Vertex-centered, utilizzato in SU2, una seconda mesh, diversa da quella del dominio, viene creata intorno ai vertici della mesh di partenza unendo i centroidi e i punti medi dei lati delle celle adiacenti. Le variabili vengono quindi calcolate nei vertici; per determinare le variazioni attraverso l'elemento si effettua un'interpolazione mediante delle funzioni di forma. L'idea fondamentale del FVM è la conversione degli integrali di volume delle equazioni differenziali che contengono un termine di divergenza in integrali

superficiali, in modo da valutare direttamente i flussi attraverso le superfici di ogni volumetto. L'equazione (2.56) viene discretizzata nella forma:

$$\int_{\Omega_i} \frac{\partial U}{\partial t} d\Omega + \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} (\tilde{F}_{c_{ij}} + \tilde{F}_{v_{ij}}) \Delta S_{ij} - Q |\Omega_i| = \int_{\Omega_i} \frac{\partial u}{\partial t} d\Omega + \mathcal{R}_i(U) = 0 \quad (2.60)$$

dove $\mathcal{R}_i(U)$ il residuo, $\tilde{F}_{c_{ij}}$ e $\tilde{F}_{v_{ij}}$ i flussi convettivi e viscosi, ΔS_{ij} è l'area della faccia associata con il lato ij , Ω_i il volumetto di controllo e $\mathcal{N}(i)$ i nodi vicini al nodo i . Per la discretizzazione dei flussi convettivi è possibile utilizzare metodi centrati o upwind, infatti all'interno di SU2 sono stati implementati diversi schemi numerici: JST, Lax-Friedrich, Roe, Roe-Turkel e altri. Per i flussi viscosi invece si applica il metodo ai minimi quadrati o di Green-Gauss in ogni nodo, mediando i risultati per il calcolo dei gradienti sulle facce. Per quanto riguarda il termine temporale si possono impiegare sia metodi di integrazione espliciti (Runge-Kutta ed Eulero) e sia il metodo di integrazione implicito (Eulero). Le varie impostazioni sui metodi di risoluzione così come sui criteri di convergenza e sui sistemi per migliorare la rapidità e la robustezza della soluzione (residual smoothing, multigrid e preconditioning) sono assegnate nel file di configurazione.

2.4.2 File di configurazione

È un file di testo nel formato *filename.cfg* che ha la funzione di passare in input al codice le impostazioni dell'utilizzatore per la risoluzione di un particolare problema. Per ogni opzione la sintassi è del tipo `option_name = value`, dove `value` può essere un valore scalare oppure una o più stringhe di caratteri racchiuse tra parentesi e separate da virgole. In questa maniera è possibile definire il problema matematico scegliendo il tipo di analisi (Euler, Navier-Stokes, RANS oppure `Inc.Euler`, `Inc.Navier-Stokes`, `Inc.RANS` per un caso incompressibile,...), il modello di turbolenza per le RANS (`SA`, `SA_NEG` o `SST`), individuare il sistema di riferimento e le grandezze adottate per l'adimensionalizzazione dei coefficienti. In questo file si forniscono una serie di input aerodinamici per definire le caratteristiche del flusso indisturbato quali pressione, temperatura, velocità, densità, numero di Mach, modello di viscosità e alcuni parametri fondamentali per la simulazione come il numero di Reynolds e l'angolo di attacco. Si possono impostare le condizioni al contorno per delineare il problema che si sta studiando: ingresso e uscita per un flusso chiuso, zone di parete nelle quali vale la condizione di aderenza, zone di simmetria e il farfield per individuare il campo lontano. Inoltre possono essere settati alcuni parametri fondamentali per la soluzione: metodo numerico per il calcolo dei gradienti spaziali, coefficienti e metodo di integrazione temporale, tipo di solutore lineare che si intende applicare (Lower-Upper Symmetric-Gauss-Seidel, Generalized Minimal Residual, Biconjugate Gradient Stabilized), criteri di convergenza (errore residuo), numero massimo di iterazioni e altri sistemi per migliorare la velocità e la robustezza della soluzione. Nell'ultima parte del file di configurazione vengono definite

le informazioni di input e di output: nome del file contenente la mesh, informazioni visualizzate sullo schermo e salvate nel file `history_output`, variabili immagazzinate nel file di output in base alle coordinate dei punti della griglia di calcolo (pressione, temperatura, viscosità, Mach, coefficienti aerodinamici, coefficienti di attrito,...) e il formato dei file di output (Paraview, CSV, Tecplot).

2.4.3 Mesh

Il formato nativo del file della mesh è `.su2`, tuttavia la suite è compatibile con mesh generate da software di terze parti nel formato CGNS. Il funzionamento del codice è basato su griglie non strutturate nelle quali le celle sono organizzate in modo arbitrario, senza un'ordine prestabilito. Pertanto il file `.su2` è un semplice documento di testo nel formato ASCII che fornisce la griglia geometrica con la localizzazione dei nodi, la matrice di connettività e le informazioni sul tipo di elementi utilizzati per la discretizzazione (triangoli, rettangoli, tetraedri, esaedri, ...) sia nel caso bidimensionale e sia nel caso tridimensionale. Tramite appositi markers, cioè nomi o tag, è possibile distinguere all'interno del file gli elementi che definiscono le superfici del corpo, quelli che individuano il campo lontano e quelli delle zone di simmetria. Come si può vedere nelle immagini..... [Descrizione mesh con immagini](#)

La qualità della mesh è uno dei parametri fondamentali per poter ottenere dei risultati accurati mediante le simulazioni CFD [32]. Nella definizione della mesh entrano in gioco diversi fattori, tra cui:

- preparazione della geometria;
- dimensione del campo lontano (farfield);
- tipo di celle utilizzate nella discretizzazione;
- raffinamento vicino la parete;
- condizioni al contorno.

Sono quasi tutti parametri arbitrari non governati da nessuna legge o regola, quindi è fondamentale la sensibilità che deriva dall'esperienza e dalle prove effettuate. Le mesh utilizzate in questo lavoro sono state create mediante il software Pointwise nel quale viene importata direttamente la geometria dell'ala prodotta con un software cad. Questo tool consente la generazione e la modifica delle mesh di superficie e di volume in modo da soddisfare i requisiti dell'analisi fluidodinamica e le esigenze di accuratezza del problema considerato. Per ottenere dei buoni risultati è necessario prestare particolare attenzione alle regioni vicino alla parete, dove si risente l'influenza delle condizioni al contorno legate alla presenza del corpo. Lo strato limite è definito come la fascia di fluido compresa tra la superficie del corpo e il punto

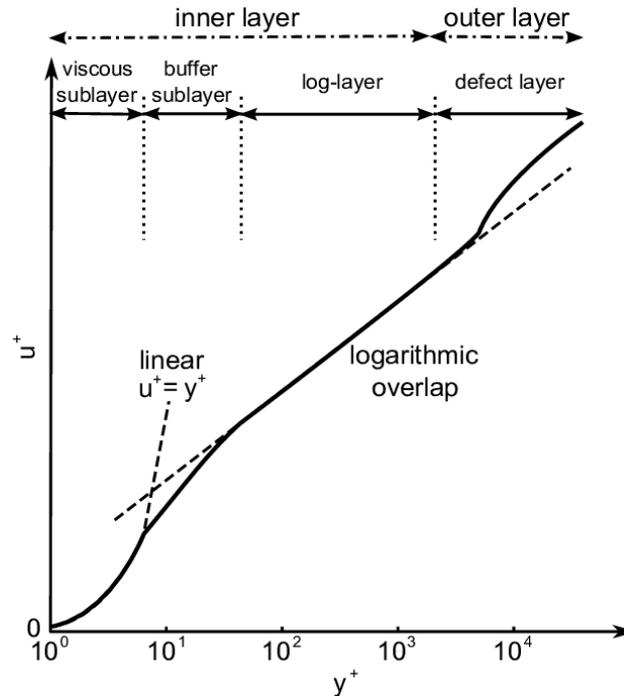


Figura 2.5. Profilo di velocità nello strato limite turbolento

nel quale la velocità è equivalente al 99% della velocità della corrente indisturbata. Nella figura 2.5 è riportato il tipico profilo di velocità per uno strato limite turbolento. Si possono distinguere 3 zone fondamentali:

- viscous sublayer ($y^+ < 5$);
- buffer layer ($5 < y^+ < 30$);
- log - layer ($30 < y^+ < 500$).

con u^+ velocità adimensionale e y^+ distanza dalla parete adimensionalizzata, definite come:

$$u^+ = \frac{U}{u_\tau} = f(y^+) \quad y^+ = \frac{yu_\tau}{\nu} \quad (2.61)$$

dove y è la distanza dalla superficie di contorno e u_τ la velocità di attrito. Queste tre zone sono caratterizzate da gradienti molto elevati a causa dell'interazione tra sforzi viscosi e sforzi turbolenti: nel primo strato, più vicino alla parete è dominante la viscosità, nella zona di raccordo i due effetti si equivalgono mentre nello strato logaritmico prevale la turbolenza. Una stima adeguata dello strato limite è, quindi, fondamentale per ottenere una previsione accurata dei coefficienti di resistenza e portanza, dei fenomeni di interazione fluido-struttura, per la modellazione

della turbolenza e per l'ottimizzazione aerodinamica. Nella simulazione RANS sono possibili due soluzioni per trattare lo strato limite: impiegare delle funzioni di parete per approssimare le grandezze caratteristiche del flusso oppure risolvere direttamente il sottostrato viscoso. Questo secondo approccio consente di ottenere risultati più accurati a fronte di un maggior sforzo di discretizzazione del dominio di calcolo. Per poter risolvere le equazioni nella zona vicino alla parete, infatti, è necessario collocare un numero sufficiente di celle computazionali nel sottostrato viscoso. La regola generale prevede che l'altezza della prima cella sia tale da garantire un valore di y^+ inferiore all'unità. Dal momento che il valore esatto di y^+ viene calcolato solo dopo che la simulazione è arrivata a convergenza, inizialmente bisogna stimare l'altezza Δs della prima cella per poter generare la mesh computazionale. Tale stima si basa sulla teoria dello strato limite della lamina piana e consiste nell'applicazione delle formule per il calcolo della velocità di attrito u_τ , del coefficiente di attrito c_f , dello stress di parete τ_w e del numero di Reynolds [33]:

$$Re_x = \frac{\rho UL}{\mu} \quad c_f = \frac{0.026}{Re_x^{1/7}} \quad \tau_w = \frac{c_f \rho U_\infty^2}{2} \quad \Delta s = \frac{y^+ \mu}{\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \rho} \quad (2.62)$$

dove L è una lunghezza caratteristica nella direzione x (corda dell'ala o lunghezza della fusoliera) e y^+ il valore desiderato. Dopo che la simulazione arriva a convergenza si calcola lo spessore esatto dello strato limite e quindi si possono effettuare eventuali aggiustamenti alla mesh variando lo spessore della prima cella. Nel paragrafo 5.2 è stato effettuato uno studio di convergenza per calibrare il modello aerodinamico e per personalizzare la mesh in modo da ottenere dei risultati computazionali paragonabili con quelli sperimentali.

Capitolo 3

Modello strutturale

In questo capitolo viene delineato il modello strutturale che sarà utilizzato nell'analisi aeroelastica. Tale modello è basato su un approccio innovativo, la *Carrera Unified Formulation*, che permette di generare schemi strutturali diversi in base all'ordine scelto per le approssimazioni cinematiche. In questo modo, rendendo l'ordine della teoria un parametro libero, è possibile adattare il campo di spostamenti alla complessità della struttura considerata, senza alterare l'implementazione. Si ottiene così un sistema molto flessibile che consente di superare i limiti delle tecniche di modellazione classiche e da cui vengono derivate le equazioni di governo per la formulazione agli elementi finiti.

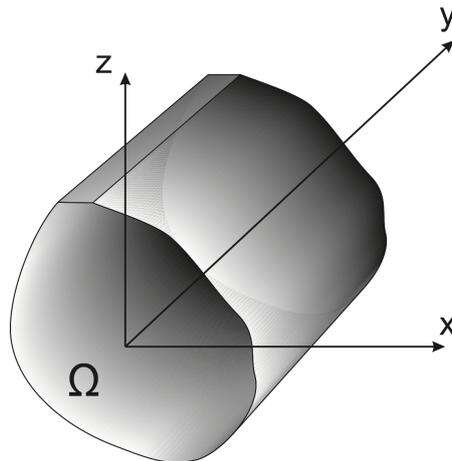


Figura 3.1. Sistema di riferimento

3.1 Equazioni fondamentali dell'elasticità

Una trave è una struttura con una dimensione, la lunghezza o estensione assiale L , predominante rispetto ad ogni altra dimensione perpendicolare ad essa. Intersecando la trave con un piano ortogonale all'asse è possibile identificare la sezione trasversale Ω della struttura, come si può vedere nella figura 3.1. In questa sezione si può quindi definire una terna di assi Cartesiani: x e z sono contenuti nella sezione trasversale mentre l'asse y è diretto lungo l'asse della trave. Si introduce il vettore trasposto degli spostamenti:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \{u_x \quad u_y \quad u_z\}^T \quad (3.1)$$

dove u_x , u_y e u_z sono le componenti di spostamento lungo x , y e z rispettivamente. Le deformazioni, $\boldsymbol{\varepsilon}$, e le tensioni, $\boldsymbol{\sigma}$, sono definite come:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \varepsilon_{xz} \quad \varepsilon_{yz} \quad \varepsilon_{xy}\}^T \quad (3.2)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{xz} \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_{xy}\}^T \quad (3.3)$$

Nel caso di piccoli spostamenti rispetto a una dimensione caratteristica della sezione trasversale della trave, è possibile linearizzare il problema esprimendo le deformazioni in funzione delle componenti di spostamento:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = u_{x,x} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} = u_{y,y} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} = u_{z,z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = u_{x,y} + u_{y,x} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = u_{x,z} + u_{z,x} \\ \gamma_{zy} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = u_{y,z} + u_{z,y} \end{aligned} \quad (3.4)$$

che possono essere scritte in forma vettoriale come:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{b}\mathbf{u} \quad (3.5)$$

dove $\boldsymbol{\varepsilon}$ è il vettore delle deformazioni e \mathbf{b} la matrice degli operatori differenziali:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Nell'ipotesi di comportamento elastico lineare del materiale di cui è composta la trave, le componenti di tensione e di deformazione sono legate dalla legge di Hooke:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.7)$$

nella forma inversa:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S}\boldsymbol{\sigma} \quad (3.8)$$

dove \mathbf{C} è la matrice dei coefficienti di rigidezza e \mathbf{S} è la matrice dei coefficienti elastici di deformabilità. Per un materiale isotropo la matrice \mathbf{C} assume la forma:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

con

$$C_{11} = 2G + \lambda, \quad C_{12} = \lambda, \quad C_{44} = G \quad (3.10)$$

Nel caso di materiale isotropo il modulo di taglio G dipende unicamente dal modulo di Young E del materiale utilizzato e dal coefficiente di Poisson ν :

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (3.11)$$

3.2 Carrera Unified Formulation

La Carrera Unified Formulation (CUF) permette di costruire modelli strutturali avanzati considerando l'ordine della teoria come un parametro libero dell'analisi [34]. Il campo degli spostamenti di un generico punto può essere descritto nella forma:

$$\mathbf{u} = F_\tau \mathbf{u}_\tau, \quad \tau = 1, 2, \dots, M \quad (3.12)$$

dove F_τ è la funzione di espansione, \mathbf{u}_τ è il vettore degli spostamenti generalizzati mentre M indica il numero di termini dell'espansione, che determina l'accuratezza della teoria. In accordo con la notazione di Einstein, la ripetizione del pedice τ indica una sommatoria. Nell'ambito di questo studio, considerando delle strutture alari, quindi con una dimensione della sezione trasversale nettamente inferiore rispetto alla lunghezza, è utile ricondursi al modello trave 1D. Perciò le funzioni di espansione F_τ variano sulla sezione trasversale di coordinate x e z . La scelta delle funzioni F_τ è arbitraria e permette di scrivere il campo cinematico in maniera differente a seconda del modello beam utilizzato. Nell'ambito di questo lavoro si considerano due casi: un'espansione basata sui polinomi di Taylor (Taylor Expansion) e una basata sui polinomi di Lagrange (Lagrange Expansion).

3.2.1 Espansione di Taylor per il caso di modello 1D

I modelli 1D di tipo TE sono basati su espansioni polinomiali del campo di spostamenti sulla sezione trasversale, x^i e z^j , con i e j numeri interi positivi. Un generico campo di spostamenti di ordine N è espresso dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} u_x &= \sum_{N_i=0}^N \left(\sum_{M=0}^{N_i} x^{N-M} z^M u_{x \frac{N(N+1)+M+1}{2}} \right) \\ u_y &= \sum_{N_i=0}^N \left(\sum_{M=0}^{N_i} x^{N-M} z^M u_{y \frac{N(N+1)+M+1}{2}} \right) \\ u_z &= \sum_{N_i=0}^N \left(\sum_{M=0}^{N_i} x^{N-M} z^M u_{z \frac{N(N+1)+M+1}{2}} \right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

L'ordine N dell'espansione è un parametro di input dell'analisi e viene scelto, per un dato problema strutturale, mediante un apposito studio di convergenza. Utilizzando, per esempio, un modello di Taylor del secondo ordine, con $N = 2$ e $M = 6$, si ottiene il seguente modello cinematico:

$$\begin{aligned} u_x &= u_{x_1} + x u_{x_2} + z u_{x_3} + x^2 u_{x_4} + xz u_{x_5} + z^2 u_{x_6} \\ u_y &= u_{y_1} + x u_{y_2} + z u_{y_3} + x^2 u_{y_4} + xz u_{y_5} + z^2 u_{y_6} \\ u_z &= u_{z_1} + x u_{z_2} + z u_{z_3} + x^2 u_{z_4} + xz u_{z_5} + z^2 u_{z_6} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Come si può vedere, il modello 1D descritto dall'equazione (3.14) presenta 18 variabili di spostamento generalizzate: tre costanti, sei lineari e nove paraboliche. Si possono ottenere anche modelli con un numero inferiore di termini.

L'utilizzo di espansioni basate sui polinomi di Taylor presenta alcune limitazioni intrinseche: le variabili introdotte hanno un significato solamente matematico in quanto sono delle derivate rispetto gli assi della trave, i termini di ordine superiore non presentano un significato locale ma possono descrivere solo le proprietà della sezione trasversale, l'estensione ad una formulazione con grandi rotazioni può presentare delle difficoltà [35]. Tuttavia, a partire dall'espansione di Taylor del primo ordine con $N = 1$, è possibile ricavare i modelli classici della trave di Eulero-Bernoulli (EBBT) e Timoshenko (TBT).

Teorie della trave classiche come casi particolari dell'espansione di Taylor del primo ordine: Eulero-Bernoulli (EBBT) e Timoshenko (TBT)

La teoria della trave di Eulero-Bernoulli è basata su alcune ipotesi fondamentali:

- la sezione trasversale è piana;
- la sezione trasversale ruota attorno all'asse neutro rimanendo piana;

- la sezione trasversale rimane ortogonale all'asse della trave dopo la deformazione.

In accordo con la prima ipotesi, in questo modello, non sono considerate le deformazioni nel piano e quindi le componenti di spostamento u_x e u_z dipendono dalla sola coordinata assiale y . In base alla seconda ipotesi lo spostamento fuori dal piano u_y è lineare rispetto alle coordinate x e z . Si ricava, quindi, il seguente campo di spostamenti:

$$\begin{cases} u_x(x, y, z) = u_{x_1}(y) \\ u_y(x, y, z) = u_{y_1}(y) + \phi_z(y)x + \phi_x(y)z \\ u_z(x, y, z) = u_{z_1}(y) \end{cases} \quad (3.15)$$

dove ϕ_x e ϕ_z sono gli angoli di rotazione attorno all'asse x e all'asse z rispettivamente. La terza ipotesi permette di trascurare le deformazioni a taglio γ_{xy} e γ_{yz} , che risultano nulle. In questa maniera è possibile ricavare gli angoli di rotazione in funzione delle derivate degli spostamenti nel piano:

$$\begin{cases} \gamma_{xy} = u_{y,x} + u_{x,y} = \phi_z + u_{x_1,y} = 0 \\ \gamma_{yz} = u_{y,z} + u_{z,y} = \phi_x + u_{z_1,y} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \phi_z = -u_{x_1,y} \\ \phi_x = -u_{z_1,y} \end{cases} \quad (3.16)$$

Sostituendo queste relazioni nell'equazione (3.18) è possibile riscrivere il campo di spostamenti del modello EBBT:

$$\begin{cases} u_x = u_{x_1} \\ u_y = u_{y_1} - u_{x_1,y}x - u_{z_1,y}z \\ u_z = u_{z_1} \end{cases} \quad (3.17)$$

Nel corso dell'ottocento Timoshenko ha sviluppato un modello di trave che tiene conto anche della deformazione a taglio ($\gamma_{xy} \neq 0$ e $\gamma_{yz} \neq 0$). Rispetto la teoria EBBT, di conseguenza, viene meno l'ipotesi di ortogonalità della sezione trasversale con l'asse della trave a causa della deformazione. Il campo di spostamenti risultante assume la seguente forma:

$$\begin{cases} u_x(x, y, z) = u_{x_1}(y) \\ u_y(x, y, z) = u_{y_1}(y) + \phi_z(y)x + \phi_x(y)z \\ u_z(x, y, z) = u_{z_1}(y) \end{cases} \quad (3.18)$$

A differenza del caso precedente le incognite del modello sono cinque e per ricavare le componenti di deformazione si sostituiscono le equazioni del campo di spostamenti nelle relazioni geometriche. Nella figura 3.2 si può osservare la diversa configurazione deformata per le due teorie del modello trave.

I modelli trave di Eulero-Bernoulli e di Timoshenko possono essere ricavati come casi particolari di un'espansione lineare di ordine $N = 1$ del modello di Taylor. Il

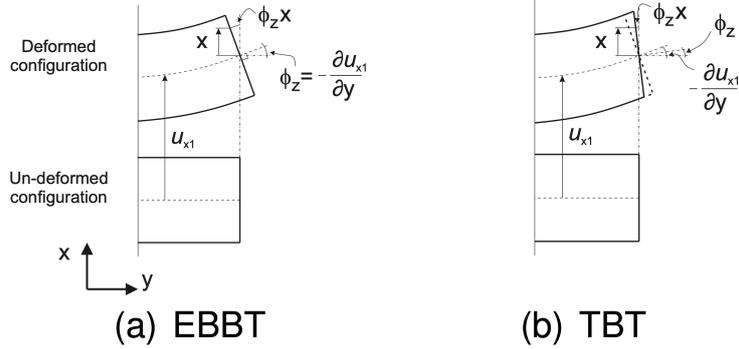


Figura 3.2. Confronto tra le deformazioni [36]

campo cinematico risulta:

$$\begin{cases} u_x = F_1 u_{x1} + F_2 u_{x2} + F_3 u_{x3} \\ u_y = F_1 u_{y1} + F_2 u_{y2} + F_3 u_{y3} \\ u_z = F_1 u_{z1} + F_2 u_{z2} + F_3 u_{z3} \end{cases} \quad (3.19)$$

nel quale le funzioni di approssimazione sono $F_1 = 1$, $F_2 = x$ e $F_3 = z$, le componenti di spostamento u_x e u_z sono costanti sulla sezione trasversale e quindi $u_{x2} = u_{z2} = u_{x3} = u_{z3} = 0$. Il modello EBBT richiede un'ulteriore condizione, cioè la penalizzazione sugli scorrimenti a taglio γ_{xy} e γ_{yz} .

3.2.2 Espansione di Lagrange per il caso di modello 1D

I modelli LE sono basati sull'utilizzo dell'espansione di Lagrange per formulare schemi CUF 1D di ordine superiore. Le funzioni di approssimazione F_τ coincidono con i polinomi di Lagrange che vengono utilizzati, però, nella formulazione isoparametrica con coordinate normalizzate. In questo lavoro si considera sia l'elemento più semplice a 4 nodi sulla sezione trasversale (L4) e sia l'elemento a 9 nodi (L9). Nella figura 3.3 viene mostrato l'elemento L4 le cui funzioni di interpolazione sono:

$$F_\tau = \frac{1}{4}(1 + \alpha\alpha_\tau)(1 + \beta\beta_\tau) \quad \tau = 1, 2, 3, 4 \quad (3.20)$$

dove α e β sono le coordinate normalizzate, mentre α_τ e β_τ sono le coordinate dei 4 nodi riportate nella tabella 3.1.

Per questo elemento si ottiene un campo di spostamenti quasi lineare (bilineare):

$$\begin{cases} u_x = F_1 u_{x1} + F_2 u_{x2} + F_3 u_{x3} + F_4 u_{x4} \\ u_y = F_1 u_{y1} + F_2 u_{y2} + F_3 u_{y3} + F_4 u_{y4} \\ u_z = F_1 u_{z1} + F_2 u_{z2} + F_3 u_{z3} + F_4 u_{z4} \end{cases} \quad (3.21)$$

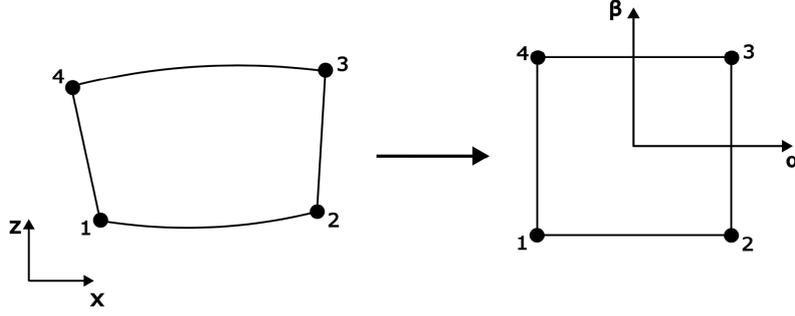


Figura 3.3. Elemento L4 in coordinate reali e normalizzate

Tabella 3.1. Coordinate dei nodi dell'elemento L4

| Nodo | α_τ | β_τ |
|------|---------------|--------------|
| 1 | -1 | -1 |
| 2 | 1 | -1 |
| 3 | 1 | 1 |
| 4 | -1 | 1 |

nel quale F_1, F_2, F_3 e F_4 sono i polinomi di Lagrange ottenuti con l'equazione (3.2.2), u_{x_1}, \dots, u_{z_4} le componenti di spostamento dei 4 nodi nelle direzioni x, y e z .

Se si vuole un modello strutturale più raffinato, per definire il campo di spostamenti della sezione trasversale si può utilizzare un elemento a 9 nodi (L9). Come si può vedere nella figura 3.4, in questo modello, oltre i punti sul contorno è presente anche un nodo al centro dell'elemento. Le nove funzioni di interpolazione sono:

$$\begin{aligned}
 F_\tau &= \frac{1}{4}(\alpha^2 + \alpha\alpha_\tau)(\beta^2 + \beta\beta_\tau) & \tau = 1, 3, 5, 7 \\
 F_\tau &= \frac{1}{2}\beta_\tau^2(\beta^2 + \beta\beta_\tau)(1 - \alpha^2) + \frac{1}{2}\alpha_\tau^2(\alpha^2 + \alpha\alpha_\tau)(1 - \beta^2) & \tau = 2, 4, 6, 8 \\
 F_\tau &= (1 - \alpha^2)(1 - \beta^2) & \tau = 9
 \end{aligned} \quad (3.22)$$

dove α e β sono le coordinate normalizzate, mentre α_τ e β_τ sono le coordinate dei 9 punti riportate nella tabella 3.2.

Il campo di spostamenti per l'elemento L9 è quadratico:

$$\begin{aligned}
 u_x &= F_1 u_{x_1} + F_2 u_{x_2} + F_3 u_{x_3} + F_4 u_{x_4} + F_5 u_{x_5} + F_6 u_{x_6} + F_7 u_{x_7} + F_8 u_{x_8} + F_9 u_{x_9} \\
 u_y &= F_1 u_{y_1} + F_2 u_{y_2} + F_3 u_{y_3} + F_4 u_{y_4} + F_5 u_{y_5} + F_6 u_{y_6} + F_7 u_{y_7} + F_8 u_{y_8} + F_9 u_{y_9} \\
 u_z &= F_1 u_{z_1} + F_2 u_{z_2} + F_3 u_{z_3} + F_4 u_{z_4} + F_5 u_{z_5} + F_6 u_{z_6} + F_7 u_{z_7} + F_8 u_{z_8} + F_9 u_{z_9}
 \end{aligned} \quad (3.23)$$

nel quale F_1, F_2, \dots, F_9 sono i polinomi di Lagrange ottenuti con le relazioni (3.22), u_{x_1}, \dots, u_{z_9} le componenti di spostamento dei 9 nodi nelle direzioni x, y e z .

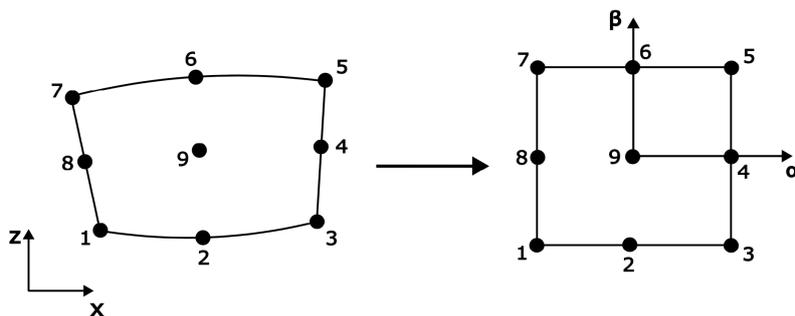


Figura 3.4. Elemento L9 in coordinate reali e normalizzate

Tabella 3.2. Coordinate dei nodi dell'elemento L9

| Nodo | α_τ | β_τ |
|------|---------------|--------------|
| 1 | -1 | -1 |
| 2 | 0 | -1 |
| 3 | 1 | -1 |
| 4 | 1 | 0 |
| 5 | 1 | 1 |
| 6 | 0 | 1 |
| 7 | -1 | 1 |
| 8 | -1 | 0 |
| 9 | 0 | 0 |

L'utilizzo di un modello basato sui polinomi di Lagrange permette di superare alcuni limiti dei modelli TE. In particolare, a differenza del caso precedente, le incognite sono delle variabili fisiche e corrispondono agli spostamenti dei punti della sezione trasversale. Scegliendo, quindi, elementi con punti collocati in zone di particolare interesse (in prossimità dei carichi), si riesce a calcolare il campo di spostamenti in maniera più accurata. Grazie alla possibilità di suddividere la sezione trasversale in porzioni di trave, i modelli LE risultano essere più flessibili ed adatti per problemi che presentano non linearità geometriche. Oltre a L4 e L9, si possono utilizzare elementi a tre (L3), a sei (L6) e a 16 punti (L16).

3.3 Formulazione agli elementi finiti

La formulazione unificata del campo degli spostamenti dato dall'equazione (3.12) viene combinata con il metodo degli elementi finiti (FEM), nel quale lo spostamento

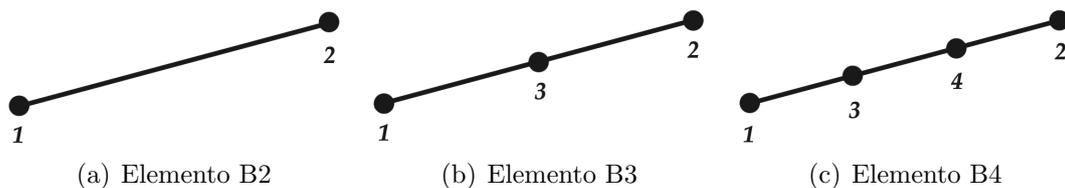


Figura 3.5. Elementi trave utilizzati per l'analisi FEM

di un punto qualsiasi nel dominio dell'elemento è espresso in funzione dei corrispondenti valori assunti nei nodi, interpolati dalle funzioni di forma N_i . Il campo degli spostamenti assume quindi la forma:

$$\mathbf{u} = N_i F_\tau \mathbf{u}_{\tau i}, \quad \tau = 1, 2, \dots, M \quad (3.24)$$

dove $i = 1, 2, \dots, N_N$ è il nodo dell'elemento considerato e N_N è il numero di nodi lungo la trave. $\mathbf{u}_{\tau i}$ è il vettore degli spostamenti nodali definito come:

$$\mathbf{u}_{\tau i} = \{u_{x_{\tau i}} \quad u_{y_{\tau i}} \quad u_{z_{\tau i}}\}^T \quad (3.25)$$

Si ricorda che F_τ è la funzione di espansione della CUF, mentre M indica il numero di termini dell'espansione ed è il parametro libero del modello strutturale che ne determina l'ordine. Nell'immagine 3.5 sono riportati gli elementi trave considerati per l'analisi FEM. Le funzioni di forma variano a seconda che si utilizzino, rispettivamente, elementi a due nodi (B2), a tre (B3) e a quattro (B4):

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2}(1-r), & N_2 &= \frac{1}{2}(1+r) & \begin{cases} r_1 = -1 \\ r_2 = 1 \end{cases} \\ N_1 &= \frac{1}{2}r(r-1), & N_2 &= \frac{1}{2}r(r+1), & N_3 &= -(1+r)(1-r) & \begin{cases} r_1 = -1 \\ r_2 = 1 \\ r_3 = 0 \end{cases} \\ N_1 &= -\frac{9}{16}\left(r + \frac{1}{3}\right)\left(r - \frac{1}{3}\right)(r-1), & N_2 &= \frac{9}{16}\left(r + \frac{1}{3}\right)\left(r - \frac{1}{3}\right)(r+1) & \begin{cases} r_1 = -1 \\ r_2 = 1 \\ r_3 = -\frac{1}{3} \\ r_4 = \frac{1}{3} \end{cases} \\ N_3 &= \frac{27}{16}(r+1)\left(r - \frac{1}{3}\right)(r-1), & N_4 &= -\frac{27}{16}(r+1)\left(r + \frac{1}{3}\right)(r-1) \end{aligned} \quad (3.26)$$

dove r è la coordinata lungo l'elemento e r_i sono le posizioni dei nodi dell'elemento.

A questo punto è importante evidenziare come l'ordine del modello trave utilizzato è determinato dall'espansione della sezione trasversale (polinomio interpolante,

numero di termini e distribuzione dei nodi) come descritto nel paragrafo 3.2 a pagina 41 ed è assolutamente indipendente dal tipo di elemento (B2, B3 o B4) utilizzato per l'interpolazione lungo l'asse longitudinale della trave. Il numero di gradi di libertà (Degrees Of Freedom) del modello strutturale composto da N_{BE} elementi può essere calcolato mediante la formula:

$$DOFs = \underbrace{3 \times M}_{\text{DOF per nodo}} \times \left[\left(\underbrace{N_{NE}}_{\text{n}^\circ \text{ nodi dell'elemento}} - 1 \right) \times \underbrace{N_{BE}}_{\text{n}^\circ \text{ di elementi beam}} + 1 \right] \quad (3.27)$$

dove N_{NE} è pari a 2, 3 o 4 a seconda che si utilizzino elementi B2, B3 o B4 per discretizzare la struttura lungo l'asse longitudinale.

3.3.1 Matrice di rigidezza

L'implementazione della CUF nel metodo agli elementi finiti consente di calcolare le matrici di rigidezza e di massa e il vettore dei carichi nodali mediante l'utilizzo di nuclei fondamentali che sono indipendenti dall'ordine del modello.

Per la scrittura delle equazioni di governo si ricorre al principio degli spostamenti virtuali (Principle of Virtual Displacements), in base al quale:

$$\delta L_{\text{int}} = \delta L_{\text{ext}} - \delta L_{\text{ine}} \quad (3.28)$$

dove L_{int} è il lavoro interno compiuto dalle forze elastiche, L_{ext} è il lavoro delle forze esterne applicate alla struttura e L_{ine} è il lavoro delle forze inerziali. La variazione del lavoro virtuale delle forze interne può essere scritta come:

$$\delta L_{\text{int}} = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (3.29)$$

Introducendo le equazioni geometriche e costitutive (3.5) e (3.7) si ottiene:

$$\delta L_{\text{int}} = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T C \boldsymbol{\varepsilon} dV = \delta \mathbf{u}_{sj}^T \int_V N_j F_s \mathbf{b}^T C \mathbf{b} N_i F_\tau dV \mathbf{u}_{\tau i} \quad (3.30)$$

Riscrivendo in forma compatta si arriva alla formulazione:

$$\delta L_{\text{int}} = \delta \mathbf{u}_{sj}^T \mathbf{k}^{\tau s i j} \mathbf{u}_{\tau i} \quad (3.31)$$

nella quale $\mathbf{k}^{\tau s i j}$ rappresenta la matrice di rigidezza scritta come nucleo fondamentale. È una matrice 3×3 , indipendente dall'ordine del modello e dal tipo di espansione utilizzata per la sezione trasversale. Le quattro componenti dell'apice indicano i quattro cicli che devono essere eseguiti per costruire la matrice globale: i e j si riferiscono alle funzioni di forma, τ e s alle funzioni di espansione. Nell'immagine 3.6 viene illustrata la procedura di assemblaggio completa. Si parte dai nuclei fondamentali $\mathbf{k}^{\tau s i j}$ variando gli indici τ ed s per costruire la matrice di

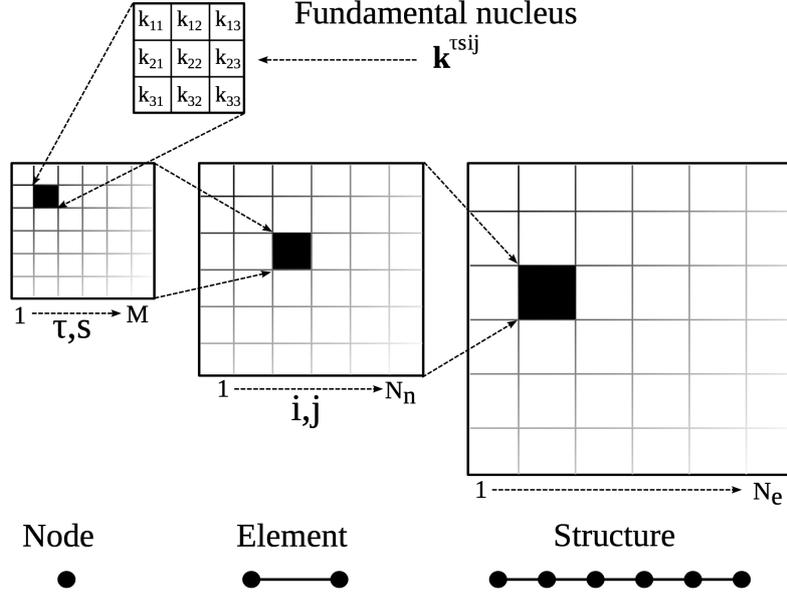


Figura 3.6. Assemblaggio della matrice globale [37]

rigidezza di ogni singolo nodo. Queste matrici vengono poi inserite nella matrice di ciascun elemento beam variando gli indici i e j . Per ottenere la matrice di rigidezza globale si uniscono, quindi, le matrici di tutti gli elementi in cui è suddivisa la struttura considerata. Nell'appendice B.1 sono riportate le componenti del nucleo fondamentale.

3.3.2 Matrice di massa

Analogamente a quanto fatto per la matrice di rigidezza si può ricavare la matrice di massa con la formulazione unificata. Riprendendo il PVD la variazione del lavoro virtuale delle forze inerziali può essere espressa come:

$$\delta L_{\text{ine}} = \int_V \delta \mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} dV \quad (3.32)$$

dove ρ è la densità del materiale e $\ddot{\mathbf{u}}$ il vettore delle accelerazioni. Sostituendo le equazioni geometriche e costitutive (3.5) e (3.7), come effettuato precedentemente per il lavoro interno, l'equazione può essere riscritta nella forma:

$$\delta L_{\text{ine}} = \delta \mathbf{u}_{sj}^T \int_V N_j F_s \rho N_i F_\tau dV \ddot{\mathbf{u}}_{\tau i} \quad (3.33)$$

in cui $\ddot{\mathbf{u}}_{\tau i}$ rappresenta il vettore delle accelerazioni nodali. In forma compatta l'equazione diventa:

$$\delta L_{\text{ine}} = \delta \mathbf{u}_{sj}^T \mathbf{m}^{\tau s i j} \ddot{\mathbf{u}}_{\tau i} \quad (3.34)$$

nella quale $\mathbf{m}^{\tau sij}$ è la matrice di massa scritta come nucleo fondamentale. Anche questa matrice non dipende dall'ordine di espansione utilizzato per la sezione trasversale. Perciò è possibile ottenere diversi modelli raffinati di trave senza cambiare la forma dei nuclei fondamentali. Le componenti del nucleo fondamentale della matrice di massa sono riportate nell'appendice B.2.

3.3.3 Vettore dei carichi nodali

La variazione virtuale del lavoro esterno, nel caso di carico superficiale, può essere scritta come:

$$\delta L_{\text{ext}}^{p_{\alpha\beta}} = \int_{S_\alpha} \delta u_\beta p_{\alpha\beta} d\alpha dy \quad (3.35)$$

dove $p_{\alpha\beta}(y)$ è il carico superficiale, α l'asse perpendicolare alla superficie S_α su cui agisce il carico nella direzione β . Introducendo le funzioni di espansione F_s e gli spostamenti nodali l'espressione diventa:

$$\delta L_{\text{ext}}^{p_{\alpha\beta}} = \int_{S_\alpha} F_s(\alpha_p) N_j \delta u_{\beta sj} p_{\alpha\beta} d\alpha dy \quad (3.36)$$

nella quale α_p è la coordinata di applicazione del carico.

Nel caso di carico di linea $q_{\alpha\beta}(y)$ la variazione del lavoro virtuale delle forze esterne è:

$$\delta L_{\text{ext}}^{q_{\alpha\beta}} = \int_l \delta u_\beta q_{\alpha\beta} dy = \int_l F_s N_j \delta u_{\beta sj} q_{\alpha\beta} dy \quad (3.37)$$

Considerando il generico vettore dei carichi concentrati $\mathbf{P} = \{P_{ux} \ P_{uy} \ P_{uz}\}^T$ applicato nel punto di coordinate (x_p, y_p, z_p) , il lavoro virtuale è dato da:

$$\delta L_{\text{ext}} = F_s(x_p, z_p) N_j(y_p) \delta \mathbf{u}_{sj}^T \mathbf{P} \quad (3.38)$$

Questa equazione permette di individuare le variabili di spostamento a cui deve essere applicato il carico in modo da assemblare, in maniera corretta, il vettore dei carichi nodali. Perciò, implementando il metodo degli elementi finiti nella formulazione unificata è sempre possibile passare da una distribuzione qualsiasi di carichi sul corpo ad un sistema di forze concentrate applicate ai nodi. Sostituendo le variazioni del lavoro delle forze interne (3.31), delle forze inerziali (3.34) e delle forze esterne (3.38) nel principio degli spostamenti virtuali (3.28) si ottiene una relazione tra matrici che viene utilizzata per la soluzione dei diversi tipi di problemi strutturali.

3.3.4 Analisi statica

Si considera l'effetto delle forze elastiche e dei carichi esterni trascurando le forze inerziali dovute all'accelerazione della struttura. Il PVD diventa:

$$\delta L_{\text{int}} = \delta L_{\text{ext}} \quad (3.39)$$

Come mostrato nel paragrafo 3.3.1 la variazione virtuale del lavoro interno può essere scritta come:

$$\delta L_{\text{int}} = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} \quad (3.40)$$

dove \mathbf{K} è la matrice di rigidezza e \mathbf{U} il vettore degli spostamenti nodali. La variazione virtuale del lavoro esterno, calcolata nel paragrafo 3.3.3 è:

$$\delta L_{\text{ext}} = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{P} \quad (3.41)$$

nella quale \mathbf{P} è il vettore dei carichi nodali. Sostituendo nell'equazione (3.39) si ottiene la formulazione classica di un problema algebrico lineare:

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{P} \quad (3.42)$$

La soluzione dell'equazione è:

$$\mathbf{U} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{P} \quad (3.43)$$

Per risolvere il problema di risposta statica è necessario che la matrice \mathbf{K} sia invertibile e quindi $\det(\mathbf{K}) \neq 0$. Nella pratica le matrici non vengono invertite ma fattorizzate.

3.3.5 Analisi delle vibrazioni libere

In quest'analisi le forze elastiche equilibrano le forze inerziali:

$$\delta L_{\text{ine}} + \delta L_{\text{int}} = 0 \quad (3.44)$$

La variazione virtuale del lavoro delle forze inerziali, calcolata nel paragrafo 3.3.2, è espressa come:

$$\delta L_{\text{ine}} = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} \quad (3.45)$$

Sostituendo nell'equazione (3.44) si ottiene la relazione nella forma FEM:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{U}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \delta \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} &= 0 \\ \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \mathbf{U} &= 0 \end{aligned} \quad (3.46)$$

Imponendo una soluzione puramente armonica si riconduce l'equazione ad un problema agli autovalori, le cui soluzioni rappresentano le frequenze proprie del sistema (autovalori) e i modi di vibrare della struttura (autovettori). Questo approccio modale viene utilizzato per lo studio della condizione di flutter.

3.3.6 Analisi di risposta dinamica

Si considerano tutti e tre i contributi dei lavori virtuali:

$$\delta L_{\text{ine}} + \delta L_{\text{int}} = \delta L_{\text{ext}} \quad (3.47)$$

Sostituendo le approssimazioni FEM:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{U}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \delta \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} &= \delta \mathbf{U}^T \mathbf{P} \\ \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \mathbf{U} &= \mathbf{P} \end{aligned} \quad (3.48)$$

Capitolo 4

Interazione Fluido-struttura

In questo capitolo viene presentato l'algoritmo di interazione fluido-struttura (Fluid-Structure Interaction) per l'accoppiamento tra il codice aerodinamico e quello strutturale. Per poter svolgere l'analisi aeroelastica è necessario sviluppare una procedura strutturata che consenta lo scambio di informazioni tra i due diversi campi disciplinari. I due codici, infatti, utilizzano due diverse griglie di calcolo: la mesh del modello aerodinamico è generalmente collocata sulla superficie esterna, mentre quella del modello strutturale all'interno del componente, in corrispondenza del piano medio. L'algoritmo di interazione fluido-struttura deve quindi rispondere a due diverse esigenze:

- la trasformazione degli spostamenti calcolati nella griglia strutturale a spostamenti nei punti nella griglia aerodinamica;
- il trasferimento delle forze fluidodinamiche dai punti della griglia aerodinamica ai punti della griglia strutturale.

Entrambe queste trasformazioni devono avvenire in maniera conservativa per quanto riguarda la quantità di moto e l'energia. Per l'interpolazione delle grandezze tra le griglie aerodinamiche e strutturali, in questo studio, si è deciso di utilizzare la tecnica Infinite Plate Spline (IPS). Nella prima parte di questo capitolo viene quindi analizzato il metodo di interpolazione adottato e la sua formulazione, viene poi illustrato il modello del problema aeroelastico complessivo ed infine descritta la procedura iterativa di soluzione necessaria per l'ottenimento di un risultato convergente.

4.1 Infinite Plate Spline (IPS)

Il metodo IPS o spline di superficie, proposto da Harder e Desmarais [38] è uno strumento matematico utilizzato per l'interpolazione di una funzione w su tutti i punti di una superficie (x, y) nella quale w è nota per un numero discreto di punti

$w_i(x_i, y_i)$. Nella pratica questa teoria introduce una piastra infinita di spessore costante e ne risolve le equazioni differenziali di equilibrio, permettendo di ottenere per la deformazione una soluzione in forma chiusa che soddisfi le deflessioni nei punti strutturali. Dopo aver risolto le equazioni lineari è possibile determinare la deflessione nei punti aerodinamici e calcolare le pendenze nei punti di controllo.

Per analizzare la formulazione di tale metodo è necessario definire una griglia di N_{PS} punti, detti *Pseudo-Structural Points* nei quali vengono calcolati gli spostamenti trasversali tramite un modello FEM + CUF. Tali punti, indicati con l'aggettivo *Pseudo* sono distinti dai nodi strutturali dell'elemento trave con cui è discretizzata la semiala. N_{AP} indica, invece, il numero dei punti aerodinamici nei quali è necessario effettuare l'interpolazione. L'equazione differenziale di una piastra infinita di rigidità flessionale D assume la forma:

$$D\nabla^4 w = q \quad (4.1)$$

con w deflessione della piastra e q carico distribuito che agisce sulla piastra. Introducendo le coordinate polari $x = r \cos \vartheta$ e $y = r \sin \vartheta$, l'operatore ∇^4 può essere scritto come:

$$\nabla^4 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) \right] \right\}$$

Sostituendo questa espressione l'equazione 4.1 diventa:

$$D \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} = q \quad (4.2)$$

Attraverso una serie di integrazioni e considerando il carico distribuito nullo, si ottiene la soluzione generale dell'equazione differenziale in forma omogenea:

$$w(r) = C_0 + C_1 r^2 + C_2 \ln r + C_3 r^2 \ln r \quad (4.3)$$

Affinché lo spostamento trasversale assuma un valore finito per $r = 0$ si calcola il limite $\lim_{r \rightarrow 0} w$, che equivale a studiare l'andamento di ciascuno dei termini che compaiono nell'equazione 4.3. Da quest'analisi di convergenza risulta che il coefficiente C_2 deve essere nullo. Moltiplicando l'equazione 4.2 per $2\pi r$ e integrando da 0 ad r si ottiene la forza concentrata P applicata nell'origine del sistema di coordinate:

$$\begin{aligned} P &= \lim_{r \rightarrow 0} \left[\int_0^r 2\pi r q \, dr \right] = \lim_{r \rightarrow 0} \left[\int_0^r 2\pi r D \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} dr \right] \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ 2\pi r D r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} \quad (4.4) \end{aligned}$$

Sostituendo a w l'espressione (4.3) e ricordando che $C_2 = 0$ si ricava il coefficiente C_3 in funzione dell'intensità del carico e della rigidezza flessionale, cioè $C_3 = P/8\pi D$. La soluzione fondamentale può essere quindi scritta nella forma:

$$w(r) = A + B r^2 + F r^2 \ln r^2 \quad (4.5)$$

con $F = \frac{P}{16\pi D}$. Questa equazione rappresenta la deflessione di una piastra a causa di un carico concentrato applicato nell'origine del sistema di coordinate (x, y) . Nel caso in cui il carico sia applicato in un punto diverso dall'origine, al posto di r si utilizza $r_i = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2$, che rappresenta la distanza tra il punto in cui si calcola la deflessione w e il generico punto di coordinate (x_i, y_i) nel quale agisce la forza. Se la piastra è sottoposta a N forze collocate in differenti punti di carico (x_i, y_i) , con $i = 1, 2, \dots, N$, la deflessione totale può essere ottenuta con il principio di sovrapposizione degli effetti:

$$w(x, y) = \sum_{i=0}^N \left[A_i + B_i r^2 + F_i r_i^2 \ln r_i^2 \right] \quad (4.6)$$

nella quale i coefficienti A_i , B_i e F_i sono incogniti. Per determinare questi coefficienti si sviluppa la soluzione in funzione di x_i , y_i , r e ϑ , ottenendo:

$$\begin{aligned} w(r, \vartheta) = & \sum_{i=1}^N A_i + r^2 \sum_{i=1}^N B_i + \sum_{i=1}^N B_i x_i^2 + \sum_{i=1}^N B_i y_i^2 - 2r \sum_{i=1}^N (B_i + F_i) (x_i \cos \vartheta + y_i \sin \vartheta) \\ & + r^2 \ln r^2 \sum_{i=1}^N F_i + \sum_{i=1}^N F_i (x_i^2 + y_i^2) - 2 \sum_{i=1}^N F_i (x_i \cos \vartheta + y_i \sin \vartheta)^2 + \ln r^2 \sum_{i=1}^N F_i (x_i^2 + y_i^2) \\ & - 2r \ln r^2 \sum_{i=1}^N F_i (x_i \cos \vartheta + y_i \sin \vartheta) + 4 \sum_{i=1}^N F_i (x_i \cos \vartheta + y_i \sin \vartheta)^2 + O(\ln r^2) \end{aligned} \quad (4.7)$$

I termini di ordine superiore sono trascurati. Poiché la piastra è infinita, la deflessione deve diventare "piatta" ad una certa distanza dal punto di carico. Infatti le spline di superficie sono delle funzioni continue e lisce che diventano, ad elevate distanze dagli N punti di carico (x_i, y_i) , quasi lineari in x e y . Applicando questa condizione si analizzano i termini dell'equazione (4.7) per verificare quali hanno un andamento monotono e limitato per $r \rightarrow \infty$. I restanti termini devono essere

annullati. Si ottengono, pertanto, le condizioni al contorno valide all'infinito:

$$\sum_{i=1}^N F_i = 0 \quad (4.8)$$

$$\sum_{i=1}^N B_i = 0 \quad (4.9)$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N F_i x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^N F_i y_i = 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

dove l'equazione (4.8) rappresenta l'equilibrio risultante delle forze mentre le equazioni (4.10) l'equilibrio dei momenti. Il significato fisico dell'equazione (4.9) non è chiaro ma è necessaria affinché la deflessione abbia un andamento lineare all'infinito. Imponendo queste condizioni al contorno, lo spostamento trasversale di un generico punto della piastra può essere calcolato, in coordinate polari, mediante l'equazione:

$$w(r, \vartheta) = \sum_{i=1}^N A_i + \sum_{i=1}^N B_i x_i^2 + \sum_{i=1}^N B_i y_i^2 - 2r \cos \vartheta \sum_{i=1}^N B_i x_i - 2r \sin \vartheta \sum_{i=1}^N B_i y_i + \sum_{i=1}^N F_i r_i^2 \ln r_i^2 \quad (4.11)$$

Dati:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \left(A_i + B_i x_i^2 + B_i y_i^2 \right) &= a_0 \\ -2r \cos \vartheta \sum_{i=1}^N B_i x_i &= x \left[-2 \sum_{i=1}^N B_i x_i \right] = a_1 x \\ -2r \sin \vartheta \sum_{i=1}^N B_i y_i &= y \left[-2 \sum_{i=1}^N B_i y_i \right] = a_1 y \end{aligned} \quad (4.12)$$

si ricava l'espressione finale, che permette di calcolare, per una piastra con N carichi concentrati collocati nei punti (x_i, y_i) , con $i = 1, 2, \dots, N$, la deflessione in un generico punto (x, y) :

$$w(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + \sum_{i=1}^N F_i K_i(x, y) \quad (4.13)$$

con $K_i(x, y) = r_i^2 \ln r_i^2$ e $r_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2$. Nell'equazione (4.13) sono presenti $N + 3$ incognite, ovvero gli N valori F_i più i coefficienti a_0, a_1, a_2 . Per risolvere il sistema serve quindi un egual numero di equazioni: le tre condizioni al contorno all'infinito (4.8, 4.10) più le N equazioni che si possono scrivere assumendo noti gli spostamenti nei punti pseudo-strutturali. Tali spostamenti vengono calcolati direttamente per mezzo della formulazione strutturale utilizzata nel problema aeroelastico. Per gli N_{PS} punti della griglia strutturale, pertanto, assumendo noti gli spostamenti, si può scrivere:

$$w_j = (x_j, y_j) = a_0 + a_1 x_j + a_2 y_j + \sum_{i=1}^N F_i K_{ij}(x, y) \quad (4.14)$$

con

$$\begin{cases} r_{ij}^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \\ K_{ij} = r_{ij}^2 \ln r_{ij}^2 \end{cases} \quad \begin{cases} K_{ij} = K_{ji} \\ K_{ij} = 0 \text{ se } i = j \end{cases}$$

L'insieme delle $N + 3$ equazioni può essere quindi raggruppato in un sistema:

$$\begin{cases} [0] = [0]\{a\} + [R]^T\{F\} \\ [w] = [R]\{a\} + [K]\{F\} \end{cases} \quad (4.15)$$

Si introducono i seguenti vettori e matrici:

$$\{w\} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{Bmatrix} \quad \{a\} = \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_N \end{Bmatrix}$$

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_N & y_N \end{bmatrix} \quad [K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1N} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{N1} & K_{N2} & \dots & K_{NN} \end{bmatrix}$$

e si scrive il sistema finale da risolvere in notazione matriciale:

$$\begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{w\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [0] & [R]^T \\ [R] & [K] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{a\} \\ \{F\} \end{Bmatrix} = [G] \begin{Bmatrix} \{a\} \\ \{F\} \end{Bmatrix} \quad (4.16)$$

$[G]$ è una matrice quadrata di dimensioni $(N_{PS} + 3) \times (N_{PS} + 3)$ calcolata a partire dalle coordinate dei punti pseudo strutturali definiti a priori e dai relativi spostamenti che derivano dai gradi di libertà della struttura. Invertendo l'equazione (4.16)

è possibile calcolare le $N + 3$ incognite rappresentate dalle componenti del vettore $\{a\}$ e $\{F\}$. Una volta ottenuti i coefficienti della spline si può interpolare ogni punto nel piano (x, y) e quindi calcolare gli spostamenti negli N_{AP} punti aerodinamici. Applicando l'equazione (4.14) per il k^{th} punto aerodinamico di coordinate (x_k, y_k) , lo spostamento interpolato assume la forma:

$$w_k^*(x_k, y_k) = a_0 + a_1x_k + a_2y_k + \sum_{i=1}^N F_i K_{ki} \quad (4.17)$$

dove

$$K_{ki} = r_{ki}^2 \ln r_{ki}^2$$

$$r_{ki}^2 = (x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2$$

In maniera equivalente si può scrivere in notazione matriciale:

$$w_k^*(x_k, y_k) = \left[1, x_k, y_k, K_{k1}, K_{k2}, \dots, K_{kN} \right] \begin{Bmatrix} \{a\} \\ \{F\} \end{Bmatrix} \quad (4.18)$$

$$= \left[1, x_k, y_k, K_{k1}, K_{k2}, \dots, K_{kN} \right] [G]^{-1} \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{w\} \end{Bmatrix}$$

Estendendo la procedura descritta per tutti i punti aerodinamici N_{AP} si può scrivere il sistema di equazioni:

$$\{w^*\} = \begin{Bmatrix} w_{1A}^* \\ w_{2A}^* \\ \vdots \\ w_{N_{AP}}^* \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_{1AP} & y_{1AP} & K_{1AP,1} & K_{1AP,2} & \dots & K_{1AP,N_{PS}} \\ 1 & x_{2AP} & y_{2AP} & K_{2AP,1} & K_{2AP,2} & \dots & K_{2AP,N_{PS}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{N_{AP}} & y_{N_{AP}} & K_{N_{AP},1} & K_{N_{AP},2} & \dots & K_{N_{AP},N_{PS}} \end{bmatrix}}_{[D^*]} [G]^{-1} \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{w\} \end{Bmatrix} \quad (4.19)$$

dove la matrice $[D^*]$ ha dimensioni $N_{AP} \times (N_{PS} + 3)$. Osservando nell'equazione (4.16) che le prime tre righe del vettore dei coefficienti della spline sono nulli, si possono eliminare le prime tre colonne della matrice $[G]^{-1}$ senza influenzare il risultato. L'equazione (4.19) può quindi essere riscritta:

$$\{w^*\} = \begin{Bmatrix} w_{1AP}^* \\ w_{2AP}^* \\ \vdots \\ w_{N_{AP}}^* \end{Bmatrix} = [D^*][G^*]^{-1}\{w\} = [T^*]\{w\} \quad (4.20)$$

dove $[G^*]^{-1}$ è la matrice $[G]$ epurata delle prime tre colonne.

La matrice $[G_{kg}] = [T^*]$ è la matrice di interpolazione che mette in relazione le deflessioni nella griglia strutturale $\{u_g\}$ alle deflessioni dei punti nella griglia aerodinamica $\{u_k\}$:

$$\{u_k\} = [G_{kg}]\{u_g\} \quad (4.21)$$

Per quanto riguarda le forze, i due sistemi devono essere strutturalmente equivalenti, cioè devono deflettere la struttura in maniera equivalente. Per assicurare tale requisito si impone che il lavoro virtuale compiuto dalle forze aerodinamiche $\{F_k\}$ sia uguale al lavoro virtuale compiuto dalle forze strutturali $\{F_g\}$:

$$\{\delta u_k\}^T \{F_k\} = \{\delta u_g\}^T \{F_g\} \quad (4.22)$$

dove $\{\delta u_k\}$ e $\{\delta u_g\}$ sono deflessioni virtuali, rispettivamente nella griglia aerodinamica e strutturale. Sostituendo l'equazione (4.21) nel termine di sinistra si ottiene:

$$\{\delta u_g\}^T \left([G_{kg}]^T \{F_k\} - \{F_g\} \right) = 0 \quad (4.23)$$

da cui, data l'arbitrarietà nella scelta delle deflessioni virtuali, si ottiene l'equazione di trasformazione delle forze:

$$\{F_g\} = [G_{kg}]^T \{F_k\} \quad (4.24)$$

Le equazioni (4.21) e (4.24) sono necessarie per completare la formulazione di un problema aeroelastico nel quale le griglie aerodinamiche e strutturali non coincidono. L'utilizzo di entrambe garantisce pertanto il trasferimento coerente delle grandezze, in termini di spostamenti e forze, tra i due campi disciplinari, permettendo di implementare la procedura di soluzione.

4.2 Soluzione del modello aeroelastico

La struttura che consente la combinazione del software CFD (SU2) e del codice CUF + FEM (Mul2) per l'analisi aeroelastica statica richiede lo sviluppo di un codice stabile e flessibile che garantisca un'interfaccia autonoma e continua degli output aerodinamici e degli input strutturali e viceversa. Tale codice, scritto in linguaggio Python, contiene al suo interno l'implementazione delle matrici di interpolazione del modello Infinite Plate Spline descritto nel paragrafo 4.1. Il problema aeroelastico complessivo viene risolto mediante una procedura iterativa a step che determina il raggiungimento di una condizione di equilibrio tra i fenomeni aerodinamici e la deformazione della struttura. Tale procedura è rappresentata nella figura 4.1. Il ciclo aeroelastico, gestito da uno script Python, può essere suddiviso nelle seguenti fasi:

1. L'analisi inizia con il calcolo del campo di moto attorno al corpo considerato mediante il software SU2. Il tool SU2_CFD viene chiamato direttamente

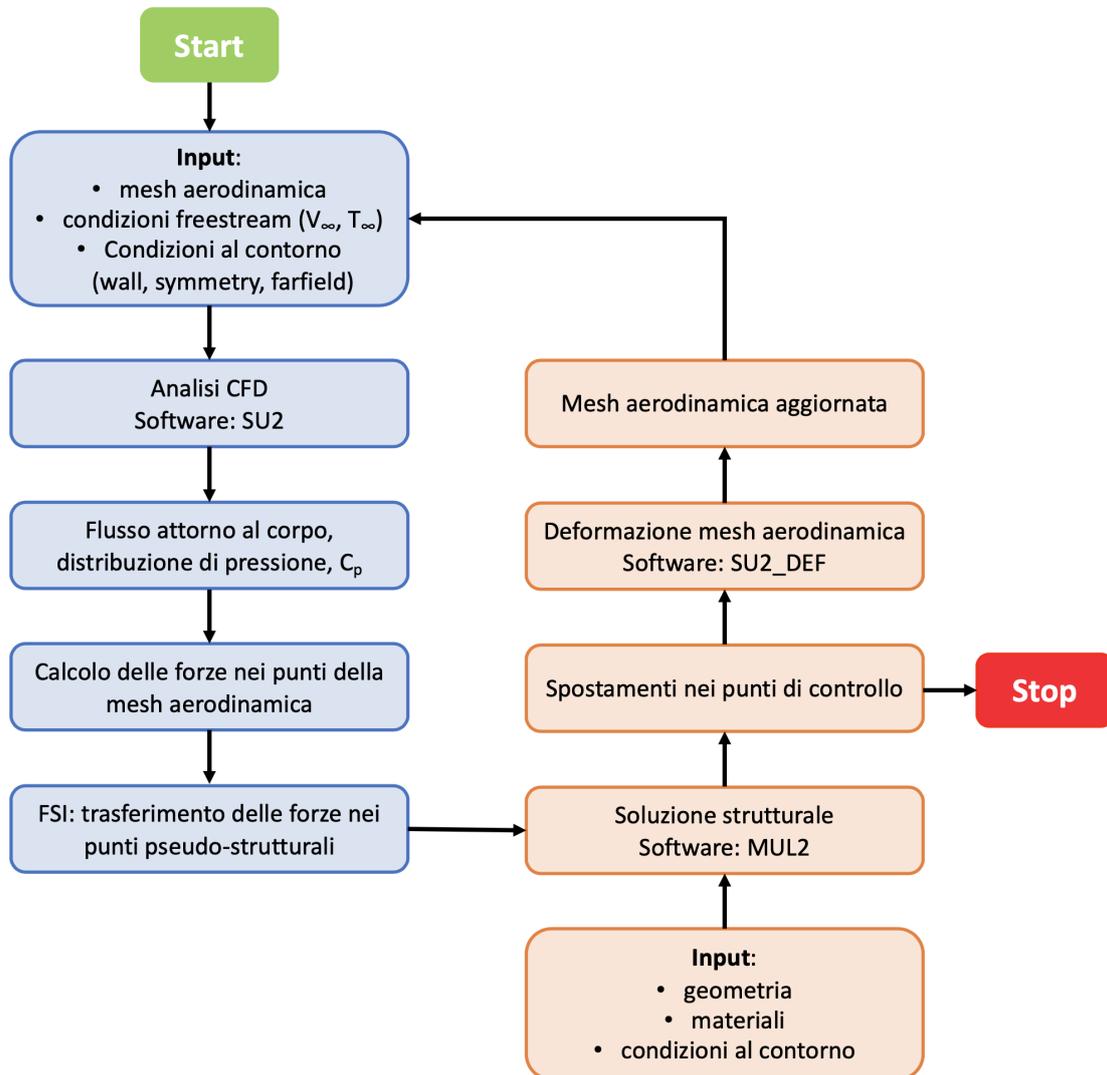


Figura 4.1. Schema di soluzione del problema Aeroelastico

da un comando del codice Python. Il file di configurazione che contiene gli input aerodinamici (condizioni della corrente indisturbata, condizioni al contorno, modello numerico impiegato, impostazioni per la soluzione) viene preventivamente impostato. Le iterazioni del codice fluidodinamico continuano fino al raggiungimento di una condizione di convergenza, individuata da una tolleranza $\varepsilon_t = 10^{-5}$.

2. Una routine del codice Python legge la griglia di punti che compongono la mesh di superficie e gli output di SU2 (coefficienti di pressione C_p) ricostruendo le forze di pressione che agiscono sul corpo.

3. I carichi calcolati nella griglia aerodinamica vengono convertiti in forze applicate negli N_{PS} punti pseudo strutturali collocati nel piano medio della sezione mediante l'algoritmo di interazione fluido-struttura. La matrice di interpolazione $[G_{kg}]$ è la stessa per tutte le iterazioni.
4. Soluzione del problema strutturale CUF + FEM. Il software MUL2 fornisce in output le caratteristiche di spostamento e di deformazione dei punti di controllo indicati nei relativi file di input. Il risultato della prima deformazione, individuato con l'acronimo SSA (Static Structural Analysis), rappresenta la deformazione della struttura che deriva dall'applicazione diretta dei carichi aerodinamici calcolati a partire dalla struttura indeformata. Con questo approccio non viene tenuto in considerazione l'effetto della deformazione sull'aerodinamica del corpo.
5. Nel passo successivo il codice Python elabora gli output strutturali per creare il file di configurazione necessario al tool SU2_DEF. Tale funzione deforma la mesh di volume a partire dagli spostamenti della superficie del corpo, permettendo di ottenere una nuova geometria. Questo processo è basato sulle equazioni lineari dell'elasticità [39] e avviene in maniera automatica. Impostando una serie di opzioni è possibile ottenere differenti tipi di deformazione e spostamento.
6. Il codice Python richiama SU2_CFD per risolvere il campo di moto attorno al corpo deformato e ricavare una nuova distribuzione di pressione. I nuovi carichi aerodinamici vengono utilizzati per deformare la struttura ripetendo la procedura descritta precedentemente dal punto 2 al punto 5.

L'intero processo viene replicato più volte, fino ad arrivare ad una convergenza tra i carichi fluidodinamici e la deformazione della struttura. Tale soluzione, che rappresenta una condizione di bilancio tra fluido e struttura, è indicata con l'acronimo SAA (Static Aeroelastic Analysis) e costituisce il punto di arrivo dell'analisi aeroelastica.

Capitolo 5

Risultati numerici

In questo capitolo vengono riportati i primi risultati ottenuti per la validazione dei modelli strutturali, aerodinamici ed aeroelastici. Per le analisi sono state considerate differenti geometrie sia con materiale isotropo sia con materiale composito. Nella prima sezione viene condotta un'analisi statica per illustrare le potenzialità della formulazione unificata 1D.

5.1 Analisi statica di una trave isotropa

In questa sezione si studia il comportamento statico di una trave di materiale isotropo sottoposta ad una forza verticale. Le analisi vengono svolte mediante il software agli elementi finiti MUL2. I risultati ottenuti sono confrontati con la formulazione analitica e con la letteratura [40, 41].

Si considera una trave incastrata alla radice e caricata nell'estremo libero. Nella figura 5.1 è schematizzata la sezione rettangolare della trave utilizzata. Il sistema di riferimento è centrato nell'origine della sezione, l'asse y coincide con l'asse della trave mentre l'asse z è perpendicolare al piano medio. La trave ha lunghezza $L = 1$ m, larghezza $b = 0,2$ m e spessore $h = 0,01$ m. Le proprietà del materiale di cui è composta la trave sono riportate nella tabella 5.1.

Tabella 5.1. Proprietà del materiale

| E [MPa] | ν | ρ [kg/m ³] |
|-----------|-------|-----------------------------|
| 73000 | 0,3 | 2700 |

Il carico di intensità $P = -100$ N è diretto verso il basso ed è applicato nel punto di coordinate $(x; y; z) = (0; 1; 0,005)$ cioè in corrispondenza del centro della sezione trasversale all'estremità libera della struttura.

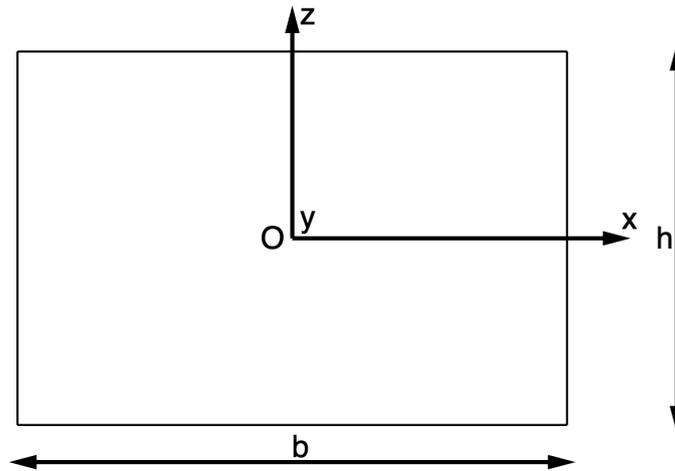


Figura 5.1. Sezione di riferimento della trave

5.1.1 Formulazione Analitica

Per il calcolo della freccia massima si può utilizzare il modello di Eulero-Bernoulli per una trave a sbalzo, isotropa ed omogenea, incastrata ad un'estremità. Il momento è legato alla curvatura della trave e alla rigidità flessionale EI_x dall'equazione:

$$M_x = -EI_x \frac{d^2 u_z}{dy^2} \quad (5.1)$$

Poiché la derivata del momento flettente è il taglio si ottiene la relazione:

$$-EI_x \frac{d^3 u_z}{dy^3} = T_z \quad (5.2)$$

Imponendo le condizioni al contorno (spostamento e rotazione nulli all'incastro, momento nullo all'estremo libero), ipotizzando costanti il momento di inerzia e il modulo di Young, integrando si ottiene l'espressione della linea elastica:

$$u_z(y) = \frac{Py^2}{6EI_x}(3L - y) \quad (5.3)$$

All'estremo libero la deflessione è massima e può essere calcolata con la relazione:

$$u_z(L) = \frac{PL^3}{3EI_x} \quad (5.4)$$

Nel caso in esame lo spostamento all'estremità della struttura risulta:

$$u_z = \frac{FL^3}{3EI} = 2,7397 \times 10^{-2} \text{ m} \quad (5.5)$$

dove $I = \frac{h^3 b}{12} = 1,667 \times 10^{-8} \text{ m}^4$ è il momento di inerzia della sezione considerata.

5.1.2 MUL2

Il software MUL2 è stato sviluppato dal gruppo di ricerca MUL2 del Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale del Politecnico di Torino. Questo codice permette l'analisi di strutture più o meno complesse mediante l'integrazione della CUF nel metodo FEM. L'interfaccia è costituita da una serie di file di testo che contengono gli input utili per l'analisi. Cambiando i valori presenti in questi file l'utente può variare le caratteristiche del modello e della simulazione.

Nel file ANALYSIS si può indicare il tipo di analisi che si vuole effettuare: 101 per analisi statica, 103 per analisi dinamica con esplicitazione del numero di modi di vibrare della struttura che si vuole ottenere. I file CONNECTIVITY e NODES sono fondamentali per la definizione del modello FEM. Nel primo sono indicati il numero e il tipo di elementi (B2, B3, B4 se 1D) utilizzati per discretizzare la struttura lungo l'asse longitudinale, dettagliandone la numerazione dei nodi elemento per elemento. Nel secondo sono riportate le coordinate di tutti i nodi nel sistema di riferimento globale unitamente al modello strutturale adottato (TE o LE) e all'ordine di tale modello. I file EXP_CONN ed EXP_MESH consentono di definire gli elementi utilizzati per la sezione trasversale e lo spessore. Nel caso di modello strutturale basato su espansione di Taylor questi file vengono utilizzati esclusivamente per descrivere la geometria della sezione trasversale. Nei file MATERIAL e LAMINATION vengono indicate le proprietà dei materiali utilizzati per il modello e gli strati, nel caso in cui la struttura sia un laminato composito. Il file BC contiene i carichi applicati alla struttura e i vincoli sugli spostamenti. Il file POSTPROCESSING contiene le indicazioni di output che si vogliono ottenere. Il comando PARA richiede la creazione di un file .vtk da utilizzare per visualizzare graficamente i risultati in Paraview mentre il comando PNT permette di indicare i punti nei quali si vogliono avere le informazioni dell'analisi strutturale.

Cambiando i valori dei parametri di input è stato possibile eseguire diverse simulazioni con MUL2 al variare della mesh e del tipo di modello strutturale utilizzato per la sezione trasversale. Nella tabella 5.2 è riportato uno studio di convergenza per valutare l'effetto del numero di elementi B4 della mesh e l'ordine di espansione del modello di spostamento utilizzato per la sezione trasversale. Come si può vedere, per i modelli del primo ordine (EBBT, TBT e TE1) il risultato ottenuto è praticamente indipendente dalla mesh utilizzata e coincide con il risultato analitico. Utilizzando un modello di ordine superiore, invece, il valore di spostamento u_z calcolato si discosta leggermente da quello dei modelli del primo ordine: la motivazione risiede nel fatto che, considerando una trave di allungamento moderato, entra in gioco anche il taglio, trascurato dai modelli di ordine 1. Nei modelli di ordine superiore l'accuratezza aumenta sempre di più man mano che cresce il numero di elementi beam utilizzati per la discretizzazione. Tuttavia una mesh più fitta comporta anche un aumento dei gradi di libertà e quindi un maggior costo computazionale.

Tabella 5.2. Studio di convergenza della mesh per lo spostamento verticale nel punto di carico, $u_z \times 10^{-2}$ m

| Mesh | EBBT | TBT | TE1 | TE2 | TE3 | TE4 |
|------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1 | -2,739 | -2,739 | -2,739 | -2,487 | -2,511 | -2,522 |
| 5 | -2,739 | -2,739 | -2,739 | -2,572 | -2,652 | -2,659 |
| 10 | -2,739 | -2,739 | -2,739 | -2,582 | -2,668 | -2,675 |
| 20 | -2,739 | -2,739 | -2,739 | -2,587 | -2,675 | -2,681 |
| 40 | -2,739 | -2,739 | -2,739 | -2,590 | -2,677 | -2,684 |

Nella tabella 5.3 vengono confrontati i risultati ottenuti con modelli basati sull'espansione di Taylor e con modelli basati su Lagrange. Come nel caso precedente, u_z è lo spostamento verticale al tip, σ_{yy} è la tensione nel punto di incastro mentre l'acronimo DOF indica i gradi di libertà. Si è considerata una mesh composta da 20 elementi B4. I risultati dei vari modelli sono simili per quanto riguarda lo spostamento verticale, differiscono maggiormente nella tensione del punto di incastro. Gli errori maggiori, sia sullo spostamento sia sulla tensione, si manifestano con l'utilizzo dell'espansione di Lagrange a 4 nodi. I modelli che forniscono un risultato più preciso sono TE4 e 2L9, entrambi, però, caratterizzati da un costo computazionale più elevato come risulta evidente dal confronto del numero dei gradi di libertà. Nelle figure 5.2 e 5.3 è riportata la visualizzazione delle distribuzioni di spostamento e di tensione del caso TE4 ottenute mediante il software ParaView.

Tabella 5.3. Confronto analisi statica modelli TE e LE, 20 elementi B4

| Modello | TE2 | TE3 | TE4 | L4 | L9 | 2L4 | 2L9 |
|----------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $u_z [10^{-2} \text{ m}]$ | -2,587 | -2,675 | -2,681 | -2,038 | -2,675 | -2,587 | -2,677 |
| $\sigma_{yy} [\text{MPa}]$ | 33,37 | 42,48 | 41,81 | 22,30 | 42,44 | 33,37 | 40,97 |
| DOF | 1098 | 1830 | 2745 | 732 | 1647 | 1098 | 2745 |

5.2 Calibrazione aerodinamica

In questa sezione vengono riportati gli studi preliminari svolti per impostare i parametri di input del software SU2 in modo da ottenere risultati soddisfacenti con le simulazioni CFD, prestando particolare attenzione alla generazione della mesh e alla qualità della griglia di calcolo. Per automatizzare il processo aeroelastico, inoltre, è necessario utilizzare e manipolare in maniera corretta gli output del software aerodinamico con l'obiettivo di convergere verso valori attendibili durante le

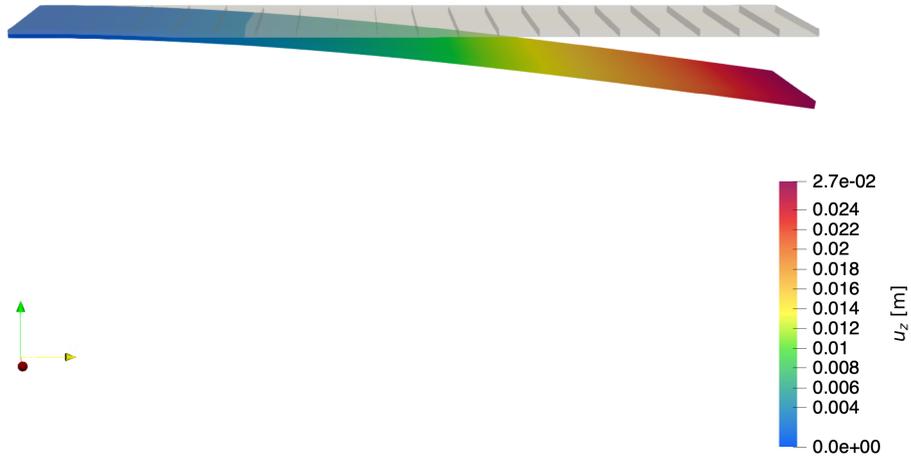


Figura 5.2. Campo di spostamento u_z , modello TE4, mesh 20 elementi B4

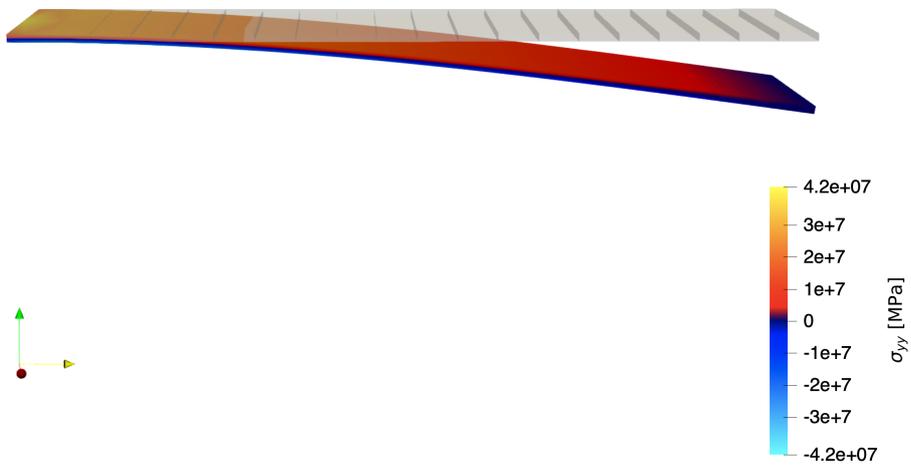
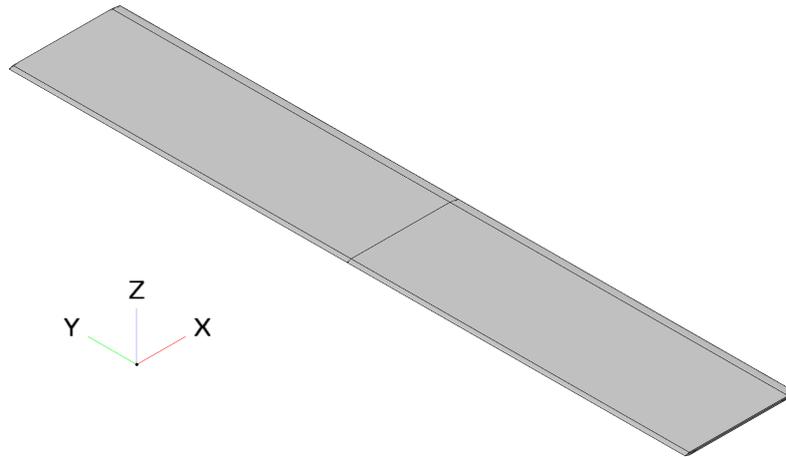


Figura 5.3. Distribuzione tensione σ_{yy} , modello TE4, mesh 20 elementi B4

successive iterazioni con il codice strutturale. Gli output aerodinamici ottenuti in questa fase sono stati comparati a risultati numerici e sperimentali presenti nella letteratura.

Figura 5.4. Modello di lamina piana $AR = 3$

5.2.1 Simulazione numerica di una lamina 3D a basso Re

Per questo studio è stata presa in considerazione una lamina piana con Aspect Ratio $AR = 3$ che riproduce l'ala di velivoli Unmanned Aerial Vehicle (UAV) e Micro Air Vehicle (MAV). Negli ultimi anni, con la grande diffusione dei droni, l'interesse dei ricercatori si è rivolto verso queste categorie di velivoli rendendo disponibili diversi studi numerici [42] e sperimentali [43, 44, 45] con cui confrontarsi. Questo caso di studio, inoltre, pur essendo caratterizzato da dimensioni e scale ridotte, è particolarmente significativo per dimostrare la validità dei risultati del tool aerodinamico. Nonostante il basso numero di Reynolds, infatti, data l'apertura alare contenuta si risentono in maniera significativa gli effetti tridimensionali del flusso. Tali comportamenti non lineari sono legati allo sviluppo di una bolla di separazione laminare sulla superficie del corpo con conseguente transizione al flusso turbolento. Nella figura 5.4 è riportato il modello utilizzato nella sperimentazione. Per quanto riguarda le caratteristiche geometriche la corda aerodinamica è $c = 0,264$ m, l'apertura alare $b = 0,804$ m, l'area $A = 0,2122$ m² e il taper ratio $\lambda = 1$. Il profilo è rettangolare a sezione costante con bordo di attacco e bordo di fuga triangolari (affilati? sharp). L'ala viene investita da una corrente indisturbata in condizioni standard, il numero di Reynolds risulta pari a $Re = 8 \times 10^4$. Per ridurre le dimensioni della mesh aerodinamica è stata ricostruita una sola semiala immersa in un dominio emisferico. La prima parte della sperimentazione è incentrata sulla qualità della griglia computazionale, in particolare sugli effetti del parametro y^+ e dell'estensione del campo lontano. Dopo aver definito tutte le caratteristiche della mesh sono state effettuate diverse simulazioni al variare dell'angolo di attacco α in modo da tracciare le curve del C_L e del C_D e confrontarle con i risultati presenti nella letteratura.

Qualità della mesh

A partire da un valore iniziale di $y^+ = 0,9$, mediante le formule (2.62) è stato possibile calcolare l'altezza della prima cella da utilizzare per la generazione della mesh aerodinamica. Fissata un'incidenza $\alpha = 5^\circ$, poiché le simulazioni numeriche in termini di C_L e C_D non sono risultate soddisfacenti, si è proceduto infittendo la mesh vicino alla parete con valori di y^+ sempre più piccoli. Alla fine si è adottato un valore di $y^+ = 0,25$ a cui corrisponde un'altezza della prima cella di circa $1,62 \times 10^{-5}$ mm. Con questo valore di Δs la simulazione numerica è in grado di prevedere l'andamento delle grandezze nello strato limite in maniera precisa e accurata. La necessità di adottare un valore di altezza della prima cella così piccolo è legata allo strato limite particolarmente sottile che si genera nelle condizioni fluidodinamiche considerate, e al fatto che SU2 è basato su uno schema vertex-centered nel quale i punti computazionali sono posti ai vertici delle celle e non al centro delle stesse. Pertanto per riprodurre in maniera precisa quello che succede nello strato limite è necessario che almeno due celle cadano all'interno del viscous sublayer. Nella figura 5.5 sono riportati dei particolari delle sezioni della mesh di volume lungo gli assi x e y . La zona intorno al corpo è composta da celle anisotrope, in particolare prismi, evidenziate dal colore verde. La dimensione di tali celle, che si sviluppano direttamente dalla mesh superficiale, aumenta gradualmente in direzione normale al corpo con un tasso di crescita geometrico fissato a priori. Procedendo verso l'esterno si incontra una zona di transizione caratterizzata dalla presenza di celle gialle di tipo piramidale. La zona più distante dal corpo fino ai confini del farfield è popolata con tetraedri isotropi, evidenziati dal colore rosso.

Il secondo parametro preso in considerazione è l'estensione del campo lontano o farfield, cioè della porzione di fluido che racchiude il corpo e che ha il compito di rappresentare l'ambiente atmosferico circostante. La dimensione di questa zona viene indicata in funzione di una lunghezza caratteristica del modello che si sta analizzando, come la corda per l'ala o la lunghezza della fusoliera nel caso di velivolo completo. Nella tabella 5.4 sono riportati i risultati dei coefficienti di portanza e di resistenza ottenuti per cinque diverse estensioni del campo lontano della mesh. Come si può vedere, per un farfield pari a 10 e a 30 volte la corda dell'ala i risultati della simulazione sono influenzati dal disturbo generato dalle condizioni al contorno. La maggiore variabilità si riscontra nel coefficiente di portanza rispetto a quello di resistenza.

All'aumentare della dimensione del campo lontano i valori dei coefficienti di portanza e resistenza tendono ad assestarsi su valori più costanti, come risulta evidente dalla diminuzione della pendenza delle curve C_L e C_D nel grafico 5.6. Una maggiore estensione del farfield comporta però una crescita del numero di elementi necessari a discretizzare il volume di fluido circostante. Perciò sono necessarie più iterazioni e quindi un maggior costo computazionale affinché la simulazione arrivi a convergenza. Un ottimo compromesso è rappresentato da un'estensione del volume

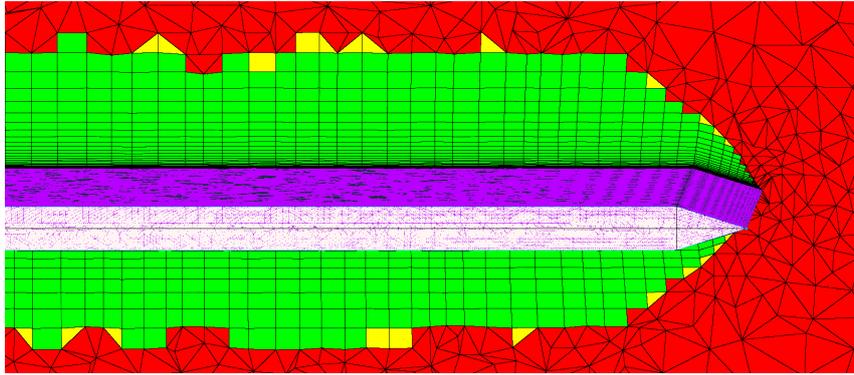
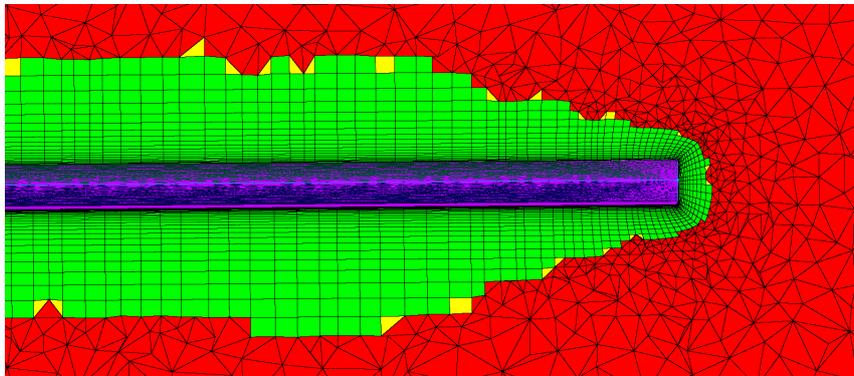
(a) Sezione lungo l'asse x (b) Sezione lungo l'asse y

Figura 5.5. Mesh lamina piana dettagli

Tabella 5.4. Studio di convergenza della mesh aerodinamica in funzione dell'estensione del farfield

| Farfield | C_L | C_D | Iterazioni |
|----------|--------|--------|------------|
| $10c$ | 0,3056 | 0,0261 | 1661 |
| $30c$ | 0,3042 | 0,0264 | 1603 |
| $50c$ | 0,3008 | 0,0261 | 1674 |
| $100c$ | 0,3009 | 0,0260 | 1976 |
| $200c$ | 0,3012 | 0,0259 | > 2500 |

di fluido equivalente a 50 volte la corda. L'errore che si commette rispetto a volumi più grandi è pari a 0,1% per il coefficiente di portanza e a 0,8% per il coefficiente di resistenza. In questo caso il numero di iterazioni per arrivare a convergenza è prossimo a quelle dei farfield più piccoli e non si verifica pertanto un gran aumento

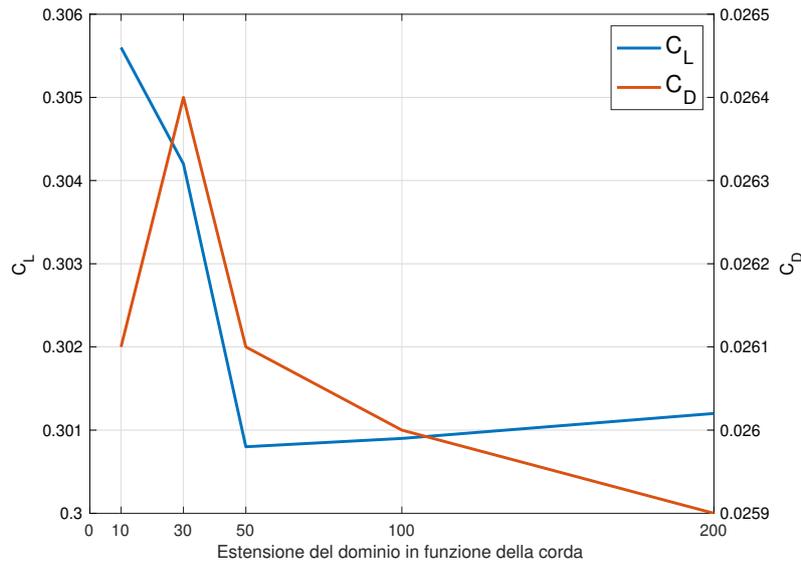
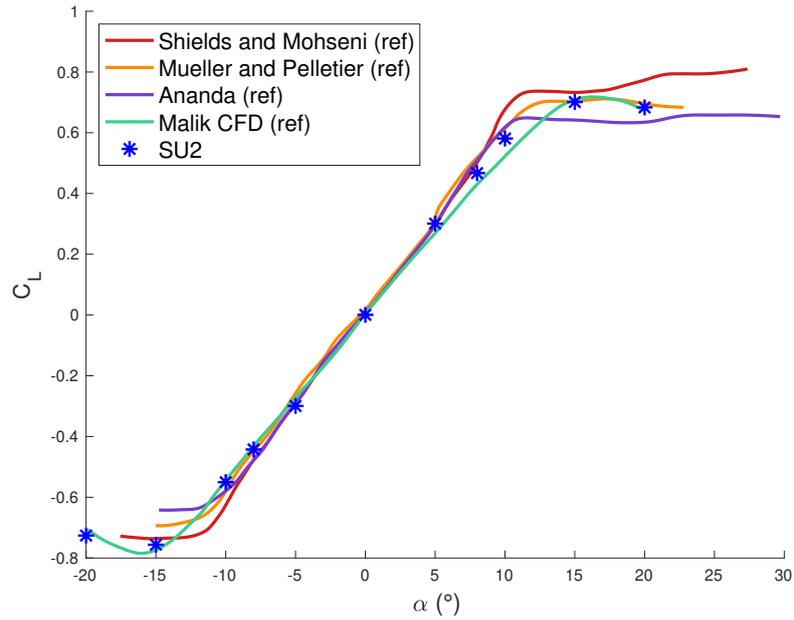


Figura 5.6. Effetto dell'estensione del dominio sui coefficienti C_L e C_D

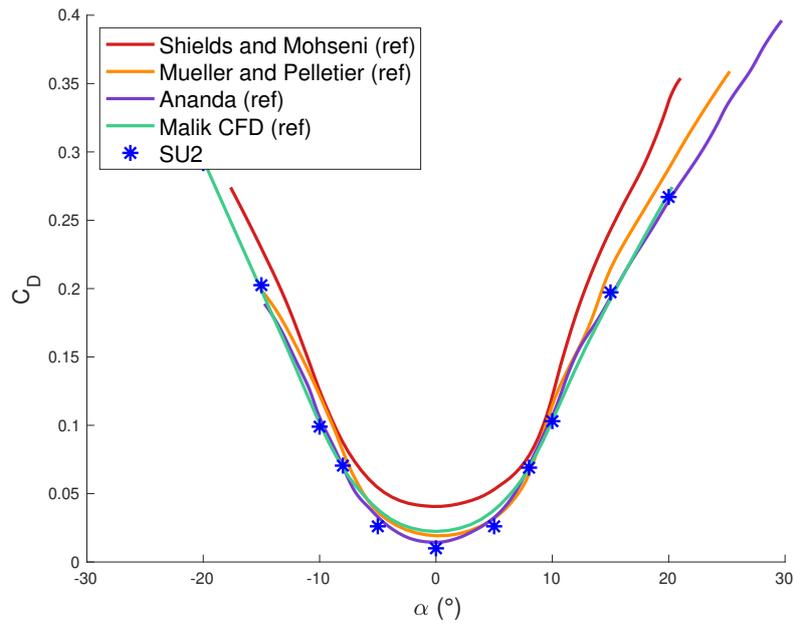
del costo computazionale.

Validazione dei dati delle simulazioni

Dopo aver definito l'altezza Δs della prima cella e aver posto l'estensione del farfield pari a 50 volte la corda dell'ala si è potuto valutare l'effetto della variazione dell'angolo d'attacco α sui coefficienti aerodinamici. Gli output delle simulazioni sono stati confrontati con altri risultati numerici [42] e con i risultati sperimentali [43, 44, 45] provenienti da prove effettuate in galleria del vento. La mesh utilizzata, di forma emisferica, è composta da circa $3,2 \times 10^6$ celle. Il problema aerodinamico è risolto in SU2 mediante le equazioni RANS con il modello di Spalart-Allmaras per la turbolenza. Osservando la figura 5.7 si nota come i risultati ottenuti con SU2 corrispondano ai dati numerici e ai dati provenienti dalle simulazioni in galleria del vento. Per quanto riguarda il coefficiente di portanza, nella figura 5.7(a), si possono riscontrare piccole differenze, rispetto ai dati sperimentali, in corrispondenza della condizione di stallo e del C_L massimo. Tali discrepanze sono legate alle differenze nella geometria dei modelli utilizzati. Analizzando la figura 5.7(b) si nota come anche per il coefficiente di portanza i risultati di SU2 vanno perfettamente d'accordo con gli output numerici di Malik e con i risultati sperimentali di Ananda.



(a) Variazione del C_L con l'angolo di attacco



(b) Variazione del C_D con l'angolo di attacco

Figura 5.7. Risultati computazionali lamina piana, $Re = 8 \times 10^4$

5.3 Validazione aeroelastica

In questa sezione vengono riportati i test svolti per verificare l'accoppiamento tra il codice aerodinamico e quello strutturale. Lo scambio di informazioni tra i due campi avviene mediante l'algoritmo per l'interazione fluido-struttura descritto nel capitolo 4. Il trasferimento dei carichi e degli spostamenti da un dominio all'altro è basato su un metodo di interpolazione di tipo Infinite Plate Spline (IPS). I risultati dell'analisi aeroelastica presentati nel paragrafo vengono distinti tra l'approccio *SSA* (*Static Structural Analysis*) nel quale il campo di spostamenti è generato dall'applicazione diretta dei carichi aerodinamici sulla struttura e l'approccio *SAA* (*Static Aeroelastic Analysis*) nel quale, mediante un processo iterativo, si tiene conto dell'interazione tra i due campi fino al raggiungimento di una condizione di bilancio tra forze aerodinamiche e deformazioni strutturali [22]. I risultati ottenuti sono comparati con valori di riferimento presenti nella letteratura.

5.3.1 Analisi aeroelastica di un'ala rettangolare isotropa

Per questo studio si considera una lamina piana con apertura alare $b = 5$ m, corda $c = 1$ m e spessore $h = 0,02$ m. La piastra, incastrata ad un'estremità, è realizzata in alluminio con le caratteristiche meccaniche riportate nella tabella 5.5.

Tabella 5.5. Proprietà del materiale della lamina piana

| E [MPa] | ν | ρ [kg/m ³] |
|-----------|-------|-----------------------------|
| 69000 | 0,33 | 2700 |

Dal punto di vista delle caratteristiche aerodinamiche si considerano tre diverse velocità del flusso $V_\infty = 10, 30$ e 50 m/s e un angolo di attacco $\alpha = 1^\circ$. La spaziatura Δs (y^+) della mesh aerodinamica vicino alla parete dipende dalla velocità della corrente, perciò si utilizzano tre diverse griglie di calcolo, generate tenendo conto dei risultati e delle considerazioni espressi nel paragrafo 5.2. La mesh per $V_\infty = 10$ m/s è costituita da 404527 elementi 3D (tetraedri, piramidi e prismi), quella per $V_\infty = 30$ m/s da 434531 elementi e quella per $V_\infty = 50$ m/s da 444935 elementi. La struttura viene analizzata mediante un modello trave unidimensionale discretizzato in 20 elementi B4 utilizzando la formulazione CUF unita al metodo agli elementi finiti e risolta con il software MUL2, come descritto nel paragrafo 5.1.

Per verificare la convergenza e l'accuratezza dei risultati si prende in considerazione il massimo spostamento verticale calcolato in corrispondenza del bordo di attacco al tip dell'ala. Questo risultato viene confrontato con studi su modelli analoghi presenti nella letteratura [22, 23]. Nel primo la configurazione è stata studiata mediante il Vortex Lattice Method (VLM) per il calcolo dei carichi aerodinamici,

l'Infinite Spline Method per l'integrazione fluido-struttura e la CUF+FEM applicata ad un modello trave unidimensionale per la parte strutturale. Nella seconda referenza, invece, i carichi aerodinamici sono stati valutati mediante l'impiego della CFD, gli spostamenti ricavati con l'utilizzo di un modello piastra bidimensionale e il collegamento tra le due parti assicurato dalla tecnica Moving-Least Square (MLS).

Nella tabella 5.6 sono riportati i valori ottenuti nel presente lavoro nel caso di analisi SSA, cioè senza interazione tra fluido e struttura. Tali valori sono il risultato dell'applicazione sulla struttura dei carichi aerodinamici calcolati nella prima iterazione del ciclo aeroelastico. Invece nella tabella 5.7 sono riportati i risultati ot-

Tabella 5.6. Spostamento verticale al LE del tip dell'ala con $\alpha = 1^\circ$ (SSA), [10^{-3} m]

| Modello | $V_\infty = 10$ m/s | $V_\infty = 30$ m/s | $V_\infty = 50$ m/s |
|----------|---------------------|---------------------|---------------------|
| EBBT/TBT | 9,114 | 70,725 | 184,39 |
| TE1 | 9,115 | 70,726 | 184,39 |
| TE2 | 8,303 | 64,511 | 168,42 |
| TE3 | 8,860 | 68,833 | 179,67 |
| TE4 | 8,879 | 68,980 | 180,06 |

tenuti con l'approccio SAA. Tali valori, che rappresentano il punto di equilibrio tra forze aerodinamiche e deformazione, sono il risultato di sei iterazioni tra il codice CFD e quello FEM. Confrontando le due tabelle si può notare come, per la velocità minore, i valori rimangano quasi invariati attraverso le iterazioni. Al contrario lo spostamento trasversale varia in maniera più consistente per $V_\infty = 30$ e 50 m/s, soprattutto per i modelli strutturali di ordine più elevato, TE3 e TE4, caratterizzati da una maggiore accuratezza nel calcolo degli spostamenti attraverso la sezione trasversale. Ciononostante queste due velocità sono contraddistinte da un diverso trend nelle iterazioni che può essere osservato nella figura 5.8, dove viene riportato l'andamento della deflessione al tip della lamina per TE2 e TE4. Per quanto riguarda la velocità $V_\infty = 30$ m/s si può vedere dal grafico 5.8(a) come la seconda iterazione sia già molto prossima al valore di convergenza SAA, con una differenza percentuale inferiore all'1%. Diversamente, come risulta dal grafico 5.8(b), per $V_\infty = 50$ m/s la crescita è più graduale ed è quindi necessario un maggior numero di iterazioni per avvicinarsi al valore finale dello spostamento. Per entrambe le velocità l'andamento del modello TE3 è quasi coincidente con quello di TE4.

Nella figura 5.9 è riportato l'andamento delle deformate del caso $V_\infty = 50$ m/s a convergenza al variare del modello strutturale utilizzato per l'espansione della sezione trasversale. Si può vedere come l'andamento per TE4, rappresentato in blu, è quasi totalmente sovrapposto con la deflessione calcolata con TE3, rappresentata in giallo. Le deflessioni dei casi TE1 e TE2 sono individuate, rispettivamente,

Tabella 5.7. Spostamento verticale al LE del tip dell'ala con $\alpha = 1^\circ$ (SAA), [10^{-3} m]

| Modello | $V_\infty = 10$ m/s | $V_\infty = 30$ m/s | $V_\infty = 50$ m/s |
|----------|---------------------|---------------------|---------------------|
| EBBT/TBT | 9,101 | 70,395 | 183,08 |
| TE1 | 9,102 | 70,408 | 183,16 |
| TE2 | 8,373 | 70,206 | 221,32 |
| TE3 | 8,940 | 75,261 | 239,53 |
| TE4 | 8,959 | 75,423 | 240,03 |

dai colori verde e rosso. L'entità degli spostamenti è amplificata, per esigenze di rappresentazione e di chiarezza, mediante l'utilizzo di un fattore di scala.

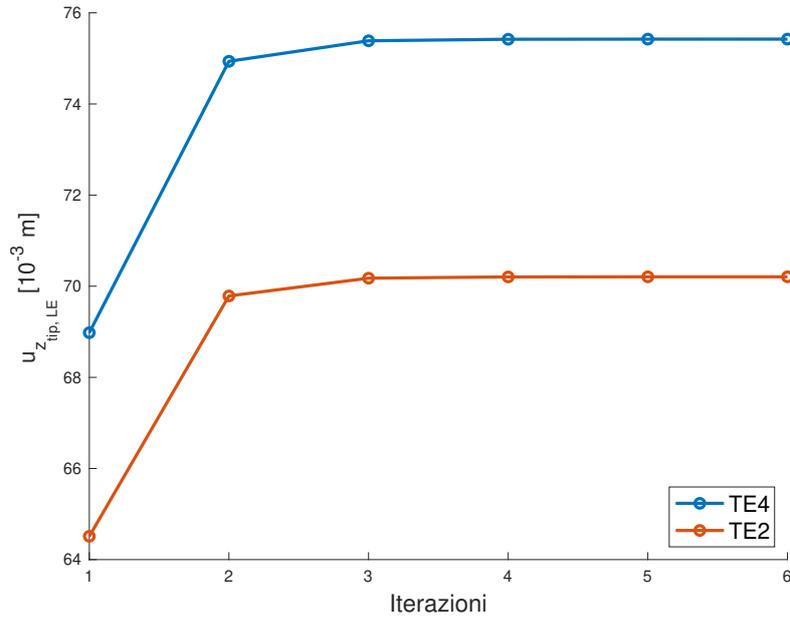
Nella tabella 5.8 sono riportati i valori di riferimento. I primi tre sono ottenuti con il VLM accoppiato ad un modello trave unidimensionale [22], quello relativo alla piastra con un approccio iterativo (SAA) [23]. Nella tabella 5.9 sono riportate le differenze percentuali tra i valori a convergenza per il modello TE4 e i suddetti valori di riferimento. Come si può vedere, per quanto riguarda le velocità $V_\infty = 30$ e 50 m/s le differenze percentuali sono dell'ordine dell'1 o 2 %. Tale esito dimostra che, per queste velocità, i risultati ottenuti nel presente studio riproducono accuratamente i valori di riferimento. Per contro i risultati ottenuti per $V_\infty = 10$ m/s si discostano da entrambe le referenze. Tale differenza è attribuibile all'insorgenza di effetti non lineari nel flusso risultante a causa della presenza della viscosità con conseguente variazione dei carichi aerodinamici.

Tabella 5.8. Valori di riferimento [22, 23] dello spostamento verticale al LE del tip dell'ala con $\alpha = 1^\circ$, [10^{-3} m]

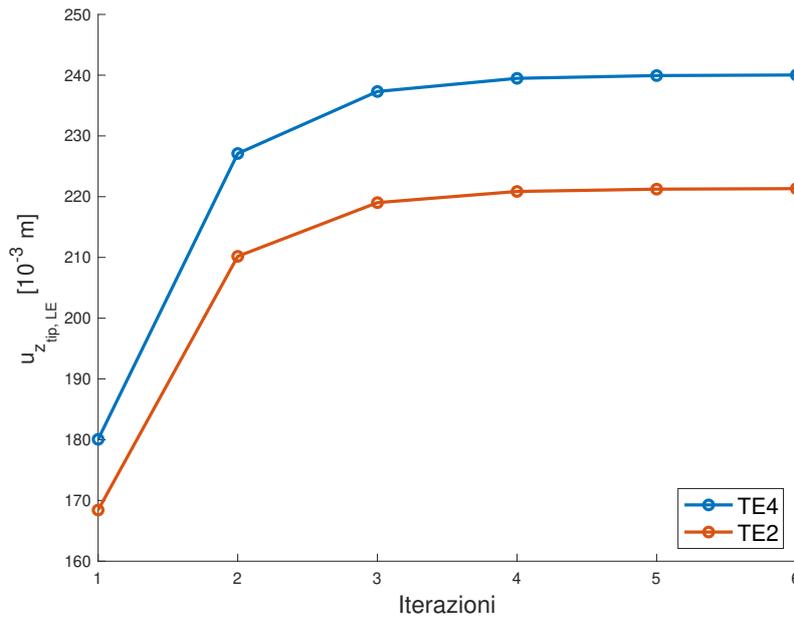
| Modello | $V_\infty = 10$ m/s | $V_\infty = 30$ m/s | $V_\infty = 50$ m/s |
|-------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| N = 3 | 7,4966 | 73,241 | 224,45 |
| N = 4 | 7,5126 | 73,797 | 243,94 |
| NASTRAN | 7,5446 | 73,731 | 245,49 |
| Piastra N=3 | 5,8113 | 73,268 | 241,90 |

Nella tabella 5.10 sono stati inseriti i valori della torsione nella sezione di estremità della lamina per le tre velocità analizzate. Tali rotazioni sono calcolate a partire dagli spostamenti verticali rilevati al bordo di attacco u_{zLE} e di fuga u_{zTE} , mediante la formula:

$$\arctan \frac{u_{zLE} - u_{zTE}}{c} \quad (5.6)$$



(a) $V_{\infty} = 30$ m/s, $\alpha = 1^{\circ}$



(b) $V_{\infty} = 50$ m/s, $\alpha = 1^{\circ}$

Figura 5.8. Convergenza dello spostamento verticale al LE del tip dell'ala con il metodo iterativo a step per i modelli TE2 e TE4

dove $c = 1$ m è la corda aerodinamica. Si può osservare come gli angoli di rotazione siano tutti positivi determinando, di conseguenza, un incremento di incidenza verso

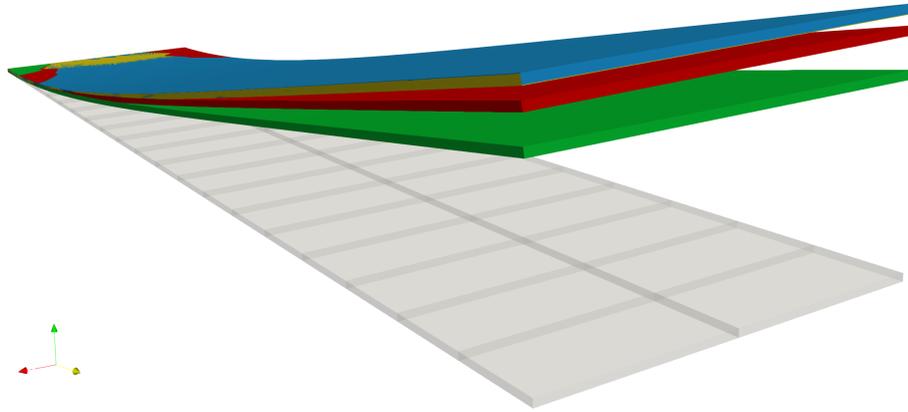


Figura 5.9. Deformata al variare dell'ordine di espansione della sezione trasversale, $V_\infty = 50$ m/s: TE4 (blu), TE3(giallo), TE2(rosso), TE1(verde)

Tabella 5.9. Differenze percentuali rispetto ai valori di riferimento [22, 23] dello spostamento verticale al LE del tip dell'ala con $\alpha = 1^\circ$, [%]

| Modello | $V_\infty = 10$ m/s | $V_\infty = 30$ m/s | $V_\infty = 50$ m/s |
|-------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| N = 3 | 19,51 | 2,86 | -1,63 |
| N = 4 | 16,14 | 2,13 | -1,85 |
| NASTRAN | 15,79 | 2,21 | -2,27 |
| Piastra N=3 | 35,13 | 2,83 | -0,78 |

l'estremità dell'ala per effetto della torsione. Inoltre l'angolo di rotazione aumenta al crescere della velocità del flusso. Questo andamento è riscontrabile anche nel grafico 5.10 dove viene riportata la variazione di ϑ in funzione della velocità per il modello strutturale TE4. I modelli del primo ordine (TE1, EBBT e TBT) non sono stati rappresentati in quest'analisi perché non rilevano una differenza di deflessione tra il leading edge e il trailing edge determinando quindi una torsione nulla dei punti della sezione.

Il costo computazionale dell'analisi aeroelastica è legato principalmente al numero di iterazioni interne necessarie al codice fluidodinamico per arrivare a convergenza ad ogni iterazione del codice aeroelastico. Nel caso $V_\infty = 10$ m/s sono necessarie meno di 1000 iterazioni, mentre per $V_\infty = 50$ m/s ne servono più di 2300. Il tempo

Tabella 5.10. Rotazione al tip dell'ala con $\alpha = 1^\circ$ (SAA)

| Velocità [m/s] | Modello | $u_{z_{LE}} [10^{-3} \text{ m}]$ | $u_{z_{TE}} [10^{-3} \text{ m}]$ | Rotazione [°] |
|----------------|---------|----------------------------------|----------------------------------|---------------|
| 10 | TE2 | 8,373 | 8,167 | 0,0118 |
| | TE3 | 8,940 | 8,730 | 0,0120 |
| | TE4 | 8,959 | 8,749 | 0,0120 |
| 30 | TE2 | 70,207 | 68,289 | 0,1099 |
| | TE3 | 75,261 | 73,313 | 0,1116 |
| | TE4 | 75,423 | 73,473 | 0,1117 |
| 50 | TE2 | 221,32 | 214,81 | 0,3732 |
| | TE3 | 239,53 | 232,88 | 0,3806 |
| | TE4 | 240,03 | 233,38 | 0,3810 |

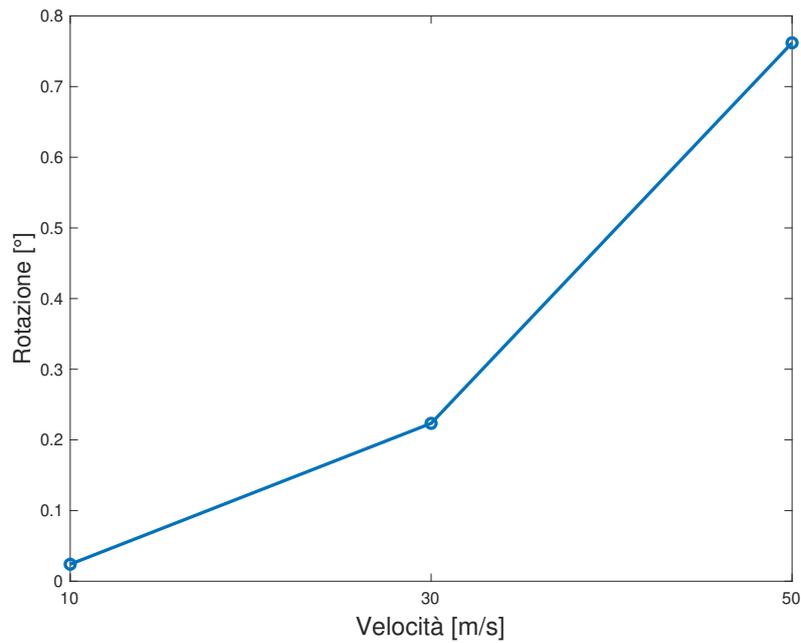


Figura 5.10. Torsione al tip dell'ala al variare della velocità, modello strutturale TE4

di esecuzione, pertanto, varia da 5 ore CPU a 10 ore CPU a seconda della velocità del flusso. Tale tempo è inferiore del 94 % rispetto a quello dichiarato in uno studio analogo presente nella letteratura [23, 46]

5.4 Effetti aeroelastici

In questo paragrafo viene valutato il ruolo di alcuni parametri sul comportamento aeroelastico della lamina piana presa in considerazione per la validazione. In particolare nella prima parte è analizzato l'effetto della variazione dello spessore della sezione, successivamente viene utilizzato un materiale ortotropo per studiare l'influenza dell'angolo di laminazione.

5.4.1 Variazione dello spessore della sezione

Le caratteristiche della lamina piana e del materiale sono le stesse prese in considerazione nella sezione 5.3.1, ad eccezione dello spessore h che viene fatto variare. Si considerano tre diversi valori $h = (0,01; 0,02; 0,04) m$ in modo da valutare l'influenza del parametro L/h sulla deflessione massima rilevata in corrispondenza del bordo di attacco all'estremità della lamina. Nella tabella 5.11 sono riportati i risultati numerici ottenuti dalle simulazioni.

Tabella 5.11. Deflessione e rotazione al variare dello spessore h , $\alpha = 1^\circ$ e $V_\infty = 20 m/s$

| $h [10^{-3} m]$ | $u_{z_{LE}} [10^{-3} m]$ | $u_{z_{TE}} [10^{-3} m]$ | Rotazione [$^\circ$] |
|-----------------|--------------------------|--------------------------|------------------------|
| 10 | 349,42 | 340,34 | 0,5202 |
| 20 | 31,90 | 31,05 | 0,0489 |
| 40 | 3,8611 | 3,7572 | 0,0059 |

Si può vedere come un dimezzamento dello spessore della sezione comporti un aumento dello spostamento trasversale di un ordine di grandezza rispetto al caso base, per $h = 0,02 m$. In maniera analoga un raddoppio di h induce una riduzione di un fattore 10 nella deflessione. Tale comportamento si riflette anche sulla rotazione della sezione di estremità. Per $h = 0,04 m$ la torsione è di due ordini di grandezza inferiore rispetto al caso $h = 0,01 m$. Un aumento dello spessore della trave, infatti, determina un aumento della rigidità torsionale K spostando l'insorgenza di fenomeni di instabilità statica (divergenza) verso valori più elevati della velocità. Per queste simulazioni è stato utilizzato un modello strutturale TE4 e una velocità del flusso $V_\infty = 20 m/s$, affinché le deformazioni della lamina rimanessero in campo lineare.

5.4.2 Variazione dell'angolo di laminazione

Le caratteristiche geometriche della lamina piana sono le stesse prese in considerazione nella sezione 5.3.1. In questo caso si utilizza un materiale ortotropo per valutare il comportamento aeroelastico al variare dell'angolo di laminazione ϑ . Nella

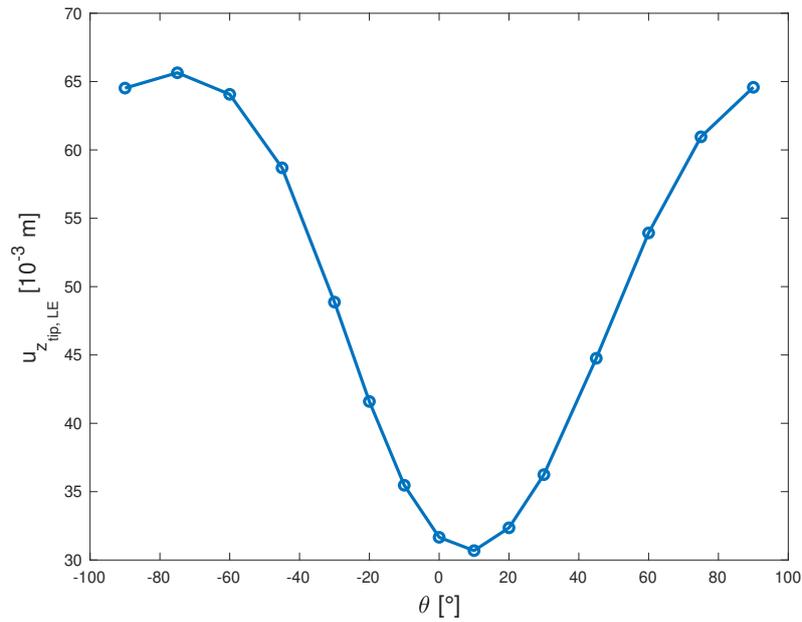
Tabella 5.12. Proprietà del materiale ortotropo

| Proprietà | Valore |
|----------------------------------|--------|
| E_L [GPa] | 20,5 |
| $E_T = E_Z$ [GPa] | 10 |
| $\nu_{TL} = \nu_{LZ} = \nu_{TZ}$ | 0,25 |
| $G_{TL} = G_{LZ} = G_{TZ}$ [GPa] | 5 |

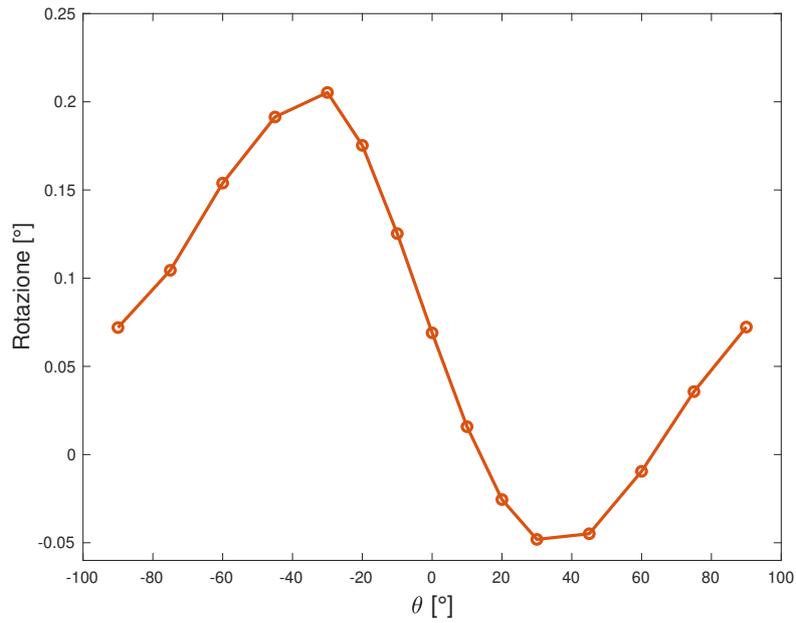
tabella 5.12 sono indicate le proprietà meccaniche del materiale. L'angolo di inclinazione delle fibre è misurato rispetto all'asse y della sezione: per $\vartheta < 0$ le fibre sono inclinate verso destra rispetto tale asse, il contrario per $\vartheta > 0$. Come si può osservare dalla tabella per la maggior parte dei valori di ϑ la rotazione della sezione all'estremità è positiva: tale comportamento determina un aumento dell'incidenza rispetto alla corrente. Quindi la deformazione causerà un delta di portanza sempre maggiore. Tale condizione potrebbe essere "pericolosa" perché si traduce in una più rapida insorgenza di fenomeni di instabilità aeroelastica statica. Al contrario per angoli di laminazione compresi tra 20° e 60° la rotazione della sezione è negativa. Pertanto la deformazione dell'ala comporta una riduzione dell'incidenza e un delta di portanza negativo che tende a stabilizzare il comportamento aeroelastico allontanando il problema della divergenza. Nel grafici 5.11 sono visualizzati gli andamenti

Tabella 5.13. Rotazione al tip dell'ala al variare di ϑ , $\alpha = 1^\circ$ e $V_\infty = 30$ m/s

| ϑ [°] | $u_{z_{LE}}$ [10^{-3} m] | $u_{z_{TE}}$ [10^{-3} m] | Rotazione [°] |
|-----------------|-----------------------------|-----------------------------|---------------|
| -90 | 64,524 | 63,268 | 0,0720 |
| -75 | 65,646 | 63,822 | 0,1045 |
| -60 | 64,067 | 61,382 | 0,1539 |
| -45 | 58,691 | 55,351 | 0,1914 |
| -30 | 48,868 | 45,284 | 0,2053 |
| -20 | 41,599 | 38,540 | 0,1753 |
| -10 | 35,469 | 33,282 | 0,1253 |
| 0 | 31,660 | 30,456 | 0,0690 |
| 10 | 30,686 | 30,411 | 0,0158 |
| 20 | 32,355 | 32,799 | -0,0255 |
| 30 | 36,247 | 37,086 | -0,0481 |
| 45 | 44,757 | 45,541 | -0,0449 |
| 60 | 53,929 | 54,094 | -0,0095 |
| 75 | 60,959 | 60,336 | 0,0357 |
| 90 | 64,583 | 63,322 | 0,0723 |



(a) Deflessione $u_{z_{LE}}$



(b) Torsione

Figura 5.11. Effetto della laminazione al tip della lamina, $\alpha = 1^\circ$ e $V_\infty = 30$ m/s

della deflessione massima, misurata in corrispondenza del bordo di attacco, e della torsione dell'estremità dell'ala in funzione dell'angolo di laminazione ϑ .

Capitolo 6

Conclusioni

L'obiettivo di questa tesi è lo sviluppo di un nuovo software aeroelastico che combini un codice di fluidodinamica computazionale (CFD) con un codice strutturale basato sulla Carrera Unified Formulation (CUF) integrata nella formulazione agli elementi finiti (FEM). Questo framework è stato implementato, testato e validato utilizzando dati presenti nella letteratura.

La CUF ha permesso di utilizzare, senza modificare la formulazione, modelli strutturali unidimensionali di ordine diverso relativamente al campo di spostamento della sezione trasversale. Questi modelli sono basati sui polinomi di Taylor (TE) e sull'espansione di Lagrange (LE). Ciò ha determinato una riduzione del costo computazionale rispetto all'utilizzo di modelli 2D (piastra) e 3D (solidi). La prima fase è stata quindi dedicata alla validazione del modello strutturale mediante analisi statiche e dinamiche svolte utilizzando il software MUL2 del Politecnico di Torino.

Per quanto riguarda il modello aerodinamico la scelta è ricaduta su SU2, un codice open source sviluppato dall'Università di Stanford. L'impiego di un software CFD contribuisce a superare i limiti dei codici low-fidelity (VLM e DLM) utilizzati abitualmente in ambito aeroelastico. Infatti la risoluzione delle equazioni complete della fluidodinamica nel campo di moto consente di tener conto degli effetti non lineari del flusso (viscosità) per il calcolo delle forze aerodinamiche. La seconda fase è stata pertanto dedicata alla calibrazione del tool aerodinamico, in particolare per la qualità della griglia di calcolo. Sono stati eseguiti una serie di test per valutare l'influenza dell'altezza della prima cella computazionale $\Delta s(y^+)$ a partire dalla superficie del corpo e delle dimensioni del campo lontano (farfield). I risultati ottenuti in questa analisi sono stati confrontati con risultati sperimentali e numerici presenti in letteratura.

In seguito il lavoro si è focalizzato sullo sviluppo di un codice in linguaggio Python per garantire il raccordo e l'interazione tra parte fluidodinamica e parte strutturale (Fluid-Structure Interaction). Gli output di SU2 vengono elaborati per calcolare le forze che agiscono nei punti della griglia aerodinamica, le quali vengono poi trasferite dalla matrice di interpolazione nei nodi della griglia strutturale,

diventando gli input di MUL2. La deflessione calcolata con il software FEM viene poi utilizzata per deformare la mesh aerodinamica di partenza. La nuova mesh così ottenuta viene passata al software CFD per valutare l'effetto della deformazione sui carichi aerodinamici. La matrice di interpolazione è basata sulla tecnica Infinite Plate Spline (IPS). Il modello aeroelastico è stato validato confrontando i risultati ottenuti con la letteratura. Il software è stato poi applicato per indagare gli effetti di alcuni parametri (rigidezza strutturale e angolo di laminazione per materiale composito) sul comportamento aeroelastico della lamina considerata.

Questo lavoro ha dimostrato che il nuovo software aeroelastico formato dal codice CFD e dal codice CUF+FEM funziona correttamente, riproducendo in maniera accurata risultati già presenti in letteratura, per un'applicazione in regime di basso subsonico. In futuro si potrà verificare l'utilizzo di quest'applicazione per strutture alari con una geometria più complessa e per condizioni di volo critiche caratterizzate dalla presenza di fenomeni aerodinamici non lineari. Un ulteriore sviluppo del framework aeroelastico potrà orientarsi sull'analisi dinamica e sul calcolo degli effetti inerziali determinanti per l'insorgere di fenomeni come il flutter e il buffeting.

Appendice A

Tensore gradiente di velocità

Il tensore del gradiente di velocità ha la seguente forma:

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}}_{\overline{\overline{D}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) & -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) & 0 \end{bmatrix}}_{\overline{\overline{A}}}$$

dove $\overline{\overline{D}}$ è il tensore velocità di deformazione, simmetrico rispetto la diagonale e composto da 6 componenti indipendenti $D_{ij} = D_{ji}$, mentre $\overline{\overline{A}}$ è il tensore vorticità, antisimmetrico rispetto la diagonale e composto da 3 componenti indipendenti $A_{ij} = -A_{ji}$. Si possono scrivere nella forma:

$$\overline{\overline{D}} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)$$

$$\overline{\overline{A}} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v}^T)$$

Appendice B

Nuclei fondamentali

B.1 Matrice di Rigidezza

Le nove componenti del nucleo fondamentale della matrice di rigidezza $\mathbf{k}^{\tau sij}$ sono:

$$\begin{aligned}
 k_{xx}^{\tau sij} &= C_{22} \int_A F_{\tau,x} F_{s,x} dx dz \int_l N_i N_j dy + C_{66} \int_A F_{\tau,z} F_{s,z} dx dz \int_l N_i N_j dy + \\
 &\quad + C_{44} \int_A F_{\tau} F_s dx dz \int_l N_{i,y} N_{j,y} dy \\
 k_{xy}^{\tau sij} &= C_{23} \int_A F_{\tau} F_{s,x} dx dz \int_l N_{i,y} N_j dy + C_{44} \int_A F_{\tau,x} F_s dx dz \int_l N_i N_{j,y} dy \\
 k_{xz}^{\tau sij} &= C_{12} \int_A F_{\tau,z} F_{s,x} dx dz \int_l N_i N_j dy + C_{66} \int_A F_{\tau,x} F_{s,z} dx dz \int_l N_i N_j dy \\
 k_{yx}^{\tau sij} &= C_{44} \int_A F_{\tau} F_{s,x} dx dz \int_l N_{i,y} N_j dy + C_{23} \int_A F_{\tau,x} F_s dx dz \int_l N_i N_{j,y} dy \\
 k_{yy}^{\tau sij} &= C_{55} \int_A F_{\tau,z} F_{s,z} dx dz \int_l N_i N_j dy + C_{44} \int_A F_{\tau,x} F_{s,x} dx dz \int_l N_i N_j dy + \\
 &\quad + C_{33} \int_A F_{\tau} F_s dx dz \int_l N_{i,y} N_{j,y} dy \\
 k_{yz}^{\tau sij} &= C_{55} \int_A F_{\tau} F_{s,z} dx dz \int_l N_{i,y} N_j dy + C_{13} \int_A F_{\tau,z} F_s dx dz \int_l N_i N_{j,y} dy \\
 k_{zx}^{\tau sij} &= C_{12} \int_A F_{\tau,x} F_{s,z} dx dz \int_l N_i N_j dy + C_{66} \int_A F_{\tau,z} F_{s,x} dx dz \int_l N_i N_j dy \\
 k_{zy}^{\tau sij} &= C_{13} \int_A F_{\tau} F_{s,z} dx dz \int_l N_{i,y} N_j dy + C_{55} \int_A F_{\tau,z} F_s dx dz \int_l N_i N_{j,y} dy \\
 k_{zz}^{\tau sij} &= C_{11} \int_A F_{\tau,z} F_{s,z} dx dz \int_l N_i N_j dy + C_{66} \int_A F_{\tau,x} F_{s,x} dx dz \int_l N_i N_j dy + \\
 &\quad + C_{55} \int_A F_{\tau} F_s dx dz \int_l N_{i,y} N_{j,y} dy
 \end{aligned}$$

B.2 Matrice di massa

Le componenti del nucleo fondamentale della matrice di massa $\mathbf{m}^{\tau sij}$ sono:

$$m_{xx}^{\tau sij} = m_{yy}^{\tau sij} = m_{zz}^{\tau sij} = \rho \int_A F_\tau F_s dx dz \int_l N_i N_j dy$$

$$m_{xy}^{\tau sij} = m_{xz}^{\tau sij} = m_{yx}^{\tau sij} = m_{yz}^{\tau sij} = m_{zx}^{\tau sij} = m_{zy}^{\tau sij} = 0$$

Bibliografia

- [1] *European Aviation Environmental Report*. EUROPEAN COMMISSION e EEA. <https://www.easa.europa.eu/eco/eaer>, 2022.
- [2] D. Lee et al. «The contribution of global aviation to anthropogenic climate forcing for 2000 to 2018». In: *Atmospheric environment (Oxford, England : 1994)* 244 (set. 2020).
- [3] *Fly the Green Deal*. ACARE. <https://www.acare4europe.org>, 2022.
- [4] L. Prandtl. *Induced Drag of Multiplanes*. NACA-TN-182. NACA, 1924.
- [5] R. H. Lange et al. *Feasibility study of the transonic biplane concept for transport aircraft application*. NASA-CR-132462 LG74ER0077. NASA, 1974.
- [6] I. Kroo. «Non-planar Wing Concepts For Increased Aircraft Efficiency». In: *VKI Lecture Series on Innovative Configurations and Advanced Concepts for Future Civil Aircraft* (gen. 2005).
- [7] K. Abu Salem et al. «PARSIFAL Project: a breakthrough innovation in air transport». In: *Aerotecnica Missili & Spazio* 97 (giu. 2018), pp. 40–46.
- [8] W. Pfenninger. *Design considerations of large subsonic long range transport airplanes with low drag boundary layer suction*. Rapp. tecn. NAI-54-800 (BLC-67). Northrop Aircraft, 1954.
- [9] P. M. Smith et al. *A study of high-altitude manned research aircraft employing strut-braced wings of high-aspect-ratio*. NASA-CR-159262. NASA, 1981.
- [10] P. H. Park. «The effect on block fuel consumption of a strutted vs. cantilever wing for a short haul transport including strut aeroelastic considerations». In: *AIAA Journal* 1454 (1978), p. 78.
- [11] R. V. Turriziani et al. *Preliminary design characteristics of a subsonic business jet concept employing an aspect ratio 25 strut braced wing*. NASA-CR-159361. NASA, 1980.
- [12] M. Bhatia, R. K. Kapania e R. T. Haftka. «Structural and Aeroelastic Characteristics of Truss-Braced Wings: A Parametric Study». In: *Journal of Aircraft* 49 (ago. 2012), pp. 302–310.

-
- [13] G. Carrier et al. «Investigation Of A Strut-Braced Wing Configuration For Future Commercial Transport». In: *International Congress of the Aeronautical Sciences*. Vol. 1. Gen. 2012.
- [14] C. Droney, N. Harrison e G. Gatlin. «Subsonic ultra-green aircraft research: transonic truss-braced wing technical maturation». In: *Proceedings of the 31st Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences*. Belo Horizon, Brazil, 2018, pp. 9–14.
- [15] R. Liebeck. «Design of the Blended Wing Body Subsonic Transport». In: *Journal of Aircraft - J AIRCRAFT* 41 (gen. 2004), pp. 10–25.
- [16] P. Okonkwo e H. Smith. «Review of evolving trends in blended wing body aircraft design». In: *Progress in Aerospace Sciences* 82 (feb. 2016).
- [17] D. Paulus et al. «Configuration selection for a 450-passenger ultraefficient 2020 aircraft». In: *EUCASS Proceedings Series* (dic. 2013).
- [18] J. Benad e R. Vos. «Design of a Flying V Subsonic Transport». In: set. 2022.
- [19] J. Benad. «The Flying V - A new Aircraft Configuration for Commercial Passenger Transport». In: nov. 2015.
- [20] A. Varello et al. «An Improved Beam Formulation for Aeroelastic Applications». In: *Collection of Technical Papers - AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference* (apr. 2010).
- [21] R. Vepa. «Aeroelastic Analysis of Wing Structures Using Equivalent Plate Models». In: *Aiaa Journal - AIAA J* 46 (mag. 2008), pp. 1216–1225.
- [22] E. Carrera, A. Varello e L. Demasi. «A refined structural model for static aeroelastic response and divergence of metallic and composite wings». In: *CEAS Aeronautical Journal* 4.2 (2013), pp. 175–189.
- [23] M. Grifò, A. Da Ronch e I. Benedetti. «A computational aeroelastic framework based on high-order structural models and high-fidelity aerodynamics». In: *Aerospace Science and Technology* 132 (dic. 2022), p. 108069.
- [24] M. Grifò et al. «High-fidelity aeroelastic transonic analysis using higher-order structural models». In: *Composite Structures* 321 (lug. 2023), p. 117315.
- [25] <https://su2code.github.io>.
- [26] J. D. Anderson. *Computational Fluid Dynamics: The Basics with Applications*. McGraw-Hill, 1995.
- [27] Reynolds Osborne. «IV. On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion». In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London (A.)* (1895), 186:123–164.
- [28] A. J. Favre. *The equations of compressible turbulent gases*. Rapp. tecn. Institut de mécanique statistique de la turbulence, 1965.

-
- [29] T.B. Gatski e J.-P Bonnet. *Compressibility, Turbulence and High Speed Flow*. Elsevier, 2013.
- [30] T. Barth, R. Herbin e M. Ohlberger. «Finite Volume Methods: Foundation and Analysis». In: *Encyclopedia of Computational Mechanics Second Edition*. John Wiley & Sons, Ltd, 2017, pp. 1–60. ISBN: 9781119176817.
- [31] F. Moukalled, L. Mangani e M. Darwish. *The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics: An Advanced Introduction with OpenFOAM and Matlab*. Springer Publishing Company, Incorporated, 2015. ISBN: 3319168738.
- [32] F. Götten et al. «A review of guidelines and best practices for subsonic aerodynamic simulations using RANS CFD». In: dic. 2019.
- [33] F. M. White. *Fluid mechanics*. 7th ed. McGraw-Hill series in mechanical engineering. McGraw-Hill, 2011. ISBN: 9780073529349.
- [34] E. Carrera et al. *Finite Element Analysis of Structures Through Unified Formulation*. John Wiley & Sons, Ltd, 2014.
- [35] E. Carrera e M. Petrolo. «Refined beam elements with only displacement variables and plate/shell capabilities». In: *Meccanica* 47 (apr. 2012), pp. 537–556.
- [36] E. Carrera et al. «Notes on Finite Elements for Aeroelastic Problems». Finite Elements for Aeroelastic Problems Aeroelasticity Course. 2017.
- [37] M. Petrolo. «Notes on FEM for Aeroelasticity». Slides del corso di Aeroelasticità. 2021.
- [38] R. L. Harder e R. N. Desmarais. «Interpolation using surface splines». In: *Journal of Aircraft* 9 (1972), pp. 189–191.
- [39] R. P. Dwight. «Robust Mesh Deformation using the Linear Elasticity Equations». In: *Computational Fluid Dynamics 2006*. A cura di Herman Deconinck e E. Dick. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2009, pp. 401–406.
- [40] M. Orlandi. «Tailoring aeroelastico di strutture composite con angolo di laminazione variabile». Tesi di laurea mag. Politecnico di Torino, 2022.
- [41] M. Santori. «Analisi aeroelastiche di strutture di velivoli utilizzando teorie strutturali avanzate e DLM». Tesi di laurea mag. Politecnico di Torino, 2023.
- [42] K. Malik, W. Asrar e E. Sulaeman. «Low Reynolds Number Numerical Simulation of the Aerodynamic Coefficients of a 3D Wing». In: *International Journal of Aviation, Aeronautics, and Aerospace* (gen. 2018).
- [43] G. Ananda, P.P. Sukumar e M. Selig. «Measured aerodynamic characteristics of wings at low Reynolds numbers». In: *Aerospace Science and Technology* 42 (mag. 2015).

- [44] M. Shields e K. Mohseni. «Effects of Sideslip on the Aerodynamics of Low-Aspect-Ratio Low-Reynolds-Number Wings». In: *AIAA Journal* 50 (ago. 2012), pp. 85–99.
- [45] A. Pelletier e T. Mueller. «Low Reynolds Number Aerodynamics of Low-Aspect-Ratio, Thin/Flat/Cambered-Plate Wings». In: *Journal of Aircraft - J AIRCRAFT* 37 (set. 2000), pp. 825–832.
- [46] M. Grifò. «A computational framework for aeroelastic tailoring based on the use of CUF and high-fidelity CFD». Tesi di dott. Università degli Studi di Palermo, 2023.
- [47] M. Petrolo. «Advanced aeroelastic models for the analysis of lifting surfaces made of composite materials». Tesi di dott. Politecnico di Torino, 2011.
- [48] A. Pagani. «Modelli "component-wise" per analisi statica, dinamica e aeroelastica di strutture alari». Tesi di laurea mag. Politecnico di Torino, 2011.
- [49] D. H. Hodges e G. A. Pierce. *Introduction to Structural Dynamics and Aeroelasticity*. Cambridge Aerospace Series, 15. Cambridge University Press, 2011.
- [50] Thomas Economon et al. «SU2: An Open-Source Suite for Multiphysics Simulation and Design». In: *AIAA Journal* 54 (dic. 2015), pp. 1–19.
- [51] Karim Abu Salem et al. «A CFD-Based Collaborative Approach for Box-Wing Aircraft Aerodynamic Assessment: The PARSIFAL Study Case». In: *Aerotecnica Missili e Spazio* (set. 2023). DOI: 10.1007/s42496-023-00172-7.