

POLITECNICO DI TORINO

Lurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale



Tesi di Laurea Magistrale

Analisi aeroelastica di rotori mediante modelli strutturali avanzati.

Relatori

Prof. Matteo FILIPPI

Prof. Marco PETROLO

Ing. Rodolfo AZZARA

Candidato

Federico GUACCHIONE - 305992

Anno Accademico 2023-2024

*A Riki, mamma e papà
siete la mia forza ed i primi a credere in me,
la ragione per cui rialzarsi dopo ogni caduta
e per cui festeggiare dopo ogni traguardo.*

*Alle nonne e ai nonni,
per avermi cresciuto con tutto il vostro amore.*

*A Marzia,
la mia madrina sempre pronta a dare tutto per me.*

*A Isa,
a te che sei, semplicemente sei
sostanza dei giorni miei.*

Fede

Ringraziamenti

Questa tesi rappresenta per me la conclusione di un percorso ricco di difficoltà, ma anche di importanti soddisfazioni. Gli anni universitari rappresentano per me un'occasione di crescita che mi porterò dietro per tutta la vita. I sacrifici non sono mancati, ma senza di essi non avrei avuto la possibilità di imparare tanto, perché le conoscenze non sono mai abbastanza, e soprattutto di crescere dal punto di vista umano. Proprio per questo, le persone che hanno fatto parte del mio viaggio non le ringrazierò mai abbastanza ed avranno sempre un posto nel mio cuore, perché, alla fin dei conti, è stato bellissimo.

Ringrazio il Prof. Filippi Matteo che mi ha permesso di svolgere un progetto molto stimolante, affrontando un argomento di grande rilevanza. Desidero esprimere la mia profonda gratitudine per la disponibilità di Prof. Filippi Matteo e Prof. Petrolo Marco nel seguirmi e per i preziosi suggerimenti che mi hanno fornito. La loro competenza e conoscenza sono stati fondamentali per completare al meglio la mia tesi e acquisire nuove conoscenze sulla materia trattata. Grazie per aver messo a mia disposizione le vostre competenze e per avermi incoraggiato e supportato durante tutto il percorso, aiutandomi a superare le difficoltà incontrate. Desidero esprimere un enorme e sincero ringraziamento all'Ing. Azzara Rodolfo, che è stato costantemente disponibile ed in questi mesi mi ha fornito un supporto continuo.

Sommario

Questo progetto di Tesi di Laurea in Ingegneria Aerospaziale tratta l'analisi aeroelastica di strutture rotanti mediante il metodo numerico CUF (Carrera Unified Formulation), con il supporto del gruppo di ricerca MUL2 del Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale del Politecnico di Torino.

Il progetto presenta i risultati di diverse analisi condotte su strutture rotanti, come le vibrazioni libere, la dinamica dei rotori, i diagrammi di Campbell e il flutter, prendendo in esame varie casistiche. Pertanto, lo scopo della Tesi è di studiare il fenomeno del flutter, una forma di instabilità dinamica che può causare il cedimento delle pale o dei dischi, e di confrontare i risultati ottenuti con il codice MUL2 con quelli di altri metodi analitici e numerici.

Dai primi decenni del secolo scorso, molti modelli numerici sono stati sviluppati per migliorare le prestazioni dell'analisi numerica di strutture complesse. Infatti, i modelli classici, come il modello a trave di Eulero-Bernoulli, hanno mostrato i loro limiti nelle applicazioni industriali che richiedono un numero maggiore di variabili. Il metodo CUF è stato sviluppato per superare questi limiti: esegue teorie strutturali avanzate, poiché le espansioni assegnate incrementano la raffinatezza delle soluzioni. In particolare, il metodo CUF è un metodo numerico basato sugli elementi finiti, che consente di modellare strutture tridimensionali con materiali e geometrie complessi; i modelli in esame sono definite mediante funzioni di espansione adatte, le quali unificano i campi di spostamento. La Tesi utilizza il metodo CUF per modellare le strutture rotanti con un alto grado di accuratezza e flessibilità. A tal proposito, il codice MUL2 implementa il metodo CUF per la discretizzazione spaziale e consente di eseguire analisi statiche, dinamiche e rotoriche delle strutture.

La tesi presenta i risultati delle analisi aeroelastiche di diverse configurazioni di strutture rotanti, sia isotrope che in composito, confrontandoli con quelli di altri metodi. La tesi dimostra la validità e l'efficienza del metodo CUF e del codice MUL2 per lo studio della dinamica dei rotori e del flutter.

Indice

Elenco delle figure	XI
Acronimi	XV
1 Introduzione	1
1.1 Modelli analitici da Rankine ad oggi	1
1.2 Il progresso dei metodi numerici	4
1.3 CUF, un'evoluzione dei metodi FE	7
1.4 Analisi Aeroelastica	8
2 Metodo analitico per le strutture rotanti	11
2.1 Dinamica dei rotori	12
2.1.1 Rotore di Jeffcott ed evoluzioni	12
2.1.2 Effetto giroscopico	20
3 Modello strutturale: CUF	25
3.1 Studio preliminare	25
3.2 Carrera Unified Formulation	28
3.2.1 Funzioni di espansione	28
3.2.2 FEM	34
3.3 Modello CUF applicato alla dinamica dei rotori: strutture <i>spinning</i> .	35
3.3.1 Principio di Hamilton	35
3.3.2 Valutazione della matrice di rigidezza	36
3.3.3 Energia cinetica	38
3.3.4 Vibrazioni delle strutture rotanti	39
3.3.5 Effetti centrifughi	42
3.3.6 Equazioni del moto	42
3.4 CUF: dinamica della pala rotante	45
3.4.1 Equazioni del moto	46
3.5 Modelli aerodinamici: teorie stazionarie ed instazionarie	47

4	Training: Codice CUF	51
4.1	Il codice CUF	51
4.2	Analisi statiche	52
4.3	Analisi dinamiche: Vibrazioni libere	53
5	Dinamica dei rotori: Diagrammi di Campbell	59
5.1	Strutture isotrope	60
5.2	Strutture in composito	69
6	Flutter	75
6.1	Strutture non-rotanti	79
6.1.1	Casi isotropi	79
6.1.2	Casi compositi	84
6.2	Strutture rotanti	90
7	Conclusioni	107
A	Approfondimenti	111
A.1	111
A.2	112
A.3	112
A.3.1	Matrice di Coriolis	112
A.3.2	Matrice <i>spin softening</i>	113
A.3.3	Vettore forza centrifuga	113
	Bibliografia	115

Elenco delle figure

1.1	Rotore con 4-DOF:(a) corpo rigido su un albero conforme senza massa, (b) rotore rigido su cuscinetti conformi e (c) rotore in cui sia i cuscinetti sia l'albero sono conformi. In (a) e (c), si assume che il disco sia un corpo rigido. Ref.[2]	3
2.1	Posizione del baricentro G rispetto alla posizione del centro del disco, nel caso di albero deformato.	12
2.2	Configurazioni del rotore di Jeffcott.	16
2.3	Il rotore di Stodola-Green: modello a quattro gradi di libertà. Ref.[2]	18
2.4	Schema dell'effetto del momento di inerzia di dischi sottili.	19
2.5	Schema di un rotore rigido su cuscinetti compatibili. Il centro di massa si trova tra i cuscinetti. Ref.[2]	23
3.1	Sistema di riferimento della struttura.	26
3.2	Sistema di riferimento fisico (x,y,z) e del materiale (1,2,3).	27
3.3	Teorie strutturali nei casi 1D.	31
3.4	Elementi di Lagrange quadrilateri della sezione trasversale, nel sistema di coordinate naturali (r, s) .	32
3.5	Approcci <i>Component-Wise</i> per strutture laminate.	33
3.6	Rappresentazione dei modelli strutturali mediante CUF.	34
3.7	Procedimento di assemblaggio della matrice di rigidezza K^{ijrs} .	37
3.8	<i>Sketch</i> del sistema di riferimento per una trave rotante: vista della <i>cross-section</i> .	38
3.9	Generica struttura rotante discretizzata utilizzando modelli a trave (sinistra) e a guscio (destra).	40
3.10	Coordinate di riferimento del materiale: rigidezza centrifuga.	42
3.11	<i>Sketch</i> di una struttura irrigidita per gli effetti centrifughi: pala rotante rispetto all'asse z .	46
3.12	Schematizzazione del modello trave.	48

4.1	Analisi statiche: spostamento dell'estremo libero U_z rispetto all'asse z ; $F_z = 10 N$	53
4.2	Analisi di convergenza statica CUF: spostamento dell'estremo libero rispetto all'asse z ; $F_z = 10 N$	53
4.3	Analisi dinamica CUF ($L9 \& 10 \times B3$): modi delle vibrazioni libere.	55
4.4	Analisi dinamica ABAQUS: modi delle vibrazioni libere.	55
4.5	Analisi di convergenza FEM: prima frequenza naturale con elementi L9 ai nodi, al variare degli elementi trave lungo l'asse.	56
4.6	Analisi di convergenza <i>cross-section</i> : prima frequenza naturale con numero variabile di elementi trave B2 lungo l'asse, al variare del modello di espansione ai nodi.	57
4.7	Analisi di convergenza <i>cross-section</i> : seconda frequenza naturale con numero variabile di elementi trave B2 lungo l'asse, al variare del modello di espansione ai nodi.	58
4.8	Analisi di convergenza <i>cross-section</i> : terza frequenza naturale con numero variabile di elementi trave B2 lungo l'asse, al variare del modello di espansione ai nodi.	58
5.1	Analisi di convergenza CUF: prima frequenza (Modo 1 flessionale), trave posta in rotazione.	60
5.2	<i>Mesh</i> della sezione omogenea e isotropa: quadrata $Q9$ (1 $LE9$).	63
5.3	Diagramma di Campbell della Trave 1 snella a sbalzo (Tab.5.2) a sezione quadrata $EI_{zz} = EI_{xx}$; variazione delle frequenze naturali al variare della velocità di rotazione attorno all'asse y longitudinale: confronto con i risultati teorici di Banerjee e Su [58].	64
5.4	Diagramma di Campbell della Trave 2 a sbalzo (Tab.5.2) a sezione quadrata $EI_{zz} = EI_{xx}$; variazione delle frequenze naturali al variare della velocità di rotazione attorno all'asse y longitudinale: confronto con i risultati teorici di Banerjee e Su [58].	65
5.5	Diagramma di Campbell di una trave a sbalzo (Tab.5.5) a sezione rettangolare $EI_{zz} = 0.01 EI_{xx}$ ($0.5 \times 0.05 m$); variazione delle frequenze naturali al variare della velocità di rotazione attorno all'asse y longitudinale: confronto con i risultati teorici di Banerjee e Su [58].	67
5.6	Diagramma di Campbell di una trave a sbalzo (Tab.5.5) a sezione rettangolare ($0.5 \times 0.05 m$); variazione delle frequenze naturali al variare della velocità di rotazione attorno all'asse z	69
5.7	Esempi di possibili configurazioni degli elementi di Lagrange LE della <i>cross-section</i>	70
5.8	(5.8a) Schema della pala di un rotore, che prevede una distanza all' <i>hub</i> r_h ; (5.8b) schema della pala con configurazione $3L9 \& 10 \times B4$ a sezione rettangolare, 3 strati di laminazione e rotazione attorno all'asse z	71

5.9	Diagramma di Campbell di una pala rotorica a sezione rettangolare ($0.5 \times 0.06 m$) in materiale composito; variazione delle frequenze naturali al variare della velocità di rotazione attorno all'asse z , a seconda delle differenti configurazioni di laminazione.	73
5.10	Diagramma di Campbell di una pala rotorica a sezione rettangolare ($0.5 \times 0.06 m$) in materiale composito; variazione delle frequenze naturali al variare della velocità di rotazione attorno all'asse z , a seconda delle differenti configurazioni di laminazione.	74
6.1	Diagramma di <i>flutter</i> per la Trave 1 ($1L16 \& 20 \times B4$, $r_h = 0$) in materiale isotropo; 'ST': <i>Steady-State</i> , 'TH': <i>Theodorsen</i>	80
6.2	Analisi dinamica ABAQUS: primi 5 modi delle vibrazioni libere per una <i>box/beam</i> in parete sottile.	81
6.3	Analisi dinamica CUF ($4 L9 \& 20 \times B4$): primi 5 modi flessionali delle vibrazioni libere per una <i>box/beam</i> in parete sottile.	82
6.4	Diagramma di <i>flutter</i> per la <i>Box-beam</i> 1 ($4L9 \& 20 \times B4$, $r_h = 0$) in materiale isotropo; 'ST': <i>Steady-State</i>	83
6.5	Diagramma di <i>flutter</i> per la Trave 2 ($6L9 \& 20 \times B4$, $r_h = 0$) a 6 strati di laminazione $[45/ - 45/0]_s$; 'ST': <i>Steady-State</i> , 'TH': <i>Theodorsen</i>	87
6.6	Schematizzazione della struttura <i>box-beam</i> in parete sottile.	88
6.7	Diagramma di <i>flutter</i> per la <i>Box-beam</i> 2 ($4L9 \& 20 \times B4$, $r_h = 0$) $[\theta/0.1\theta/2\theta/10\theta]$, con $\theta = 120^\circ$, in materiale composito (Tab.6.6); 'ST': <i>Steady-State</i> , 'TH': <i>Theodorsen</i>	89
6.8	Diagramma di <i>flutter</i> per la Trave 2 ($6L9 \& 20 \times B4$, $r_h = 0$) rotante a 6 strati di laminazione $[30/ - 30/0]_s$, in materiale composito (Tab.6.5); 'ST': <i>Steady-State</i> , 'TH': <i>Theodorsen</i>	91
6.9	Schema della trave posta in rotazione attorno all'asse z	92
6.10	Diagramma di <i>flutter</i> per la <i>Box-beam</i> 2 ($4L9 \& 20 \times B4$, $r_h = 0.975 m$) rotante $[\theta/0.1\theta/2\theta/10\theta]$, con $\theta = 30^\circ$, in materiale composito (Tab.6.6); 'ST': <i>Steady-State</i> , 'TH': <i>Theodorsen</i>	95
6.11	<i>Mesh</i> della pala a sezione rettangolare con curvatura.	96
6.12	Diagramma di <i>flutter</i> per la pala a sezione rettangolare a curvatura variabile ($TE7 \& 20 \times B4$, $r_h = 1.390 m$) rotante in materiale composito (<i>graphite/epoxy</i>), di lunghezza $L = 8.1780 m$ e corda $c = 0.5 m$; 'ST': <i>Steady-State</i>	97
6.13	<i>Mesh</i> della pala con un profilo a forma di ellisse.	98
6.14	Diagramma di <i>flutter</i> per la pala con profilo a forma di ellisse ($TE5 \& 20 \times B4$, $r_h = 1.390 m$) rotante in materiale composito (<i>graphite/epoxy</i>), di lunghezza $L = 8.1780 m$ e corda $c = 0.5 m$; 'ST': <i>Steady-State</i>	99
6.15	<i>Mesh</i> del profilo alare SC1095.	101

- 6.16 Diagramma di *flutter* per la Pala 2 con profilo SC1095 ($TE7$ & $20 \times B4$, $r_h = 1.390 m$) rotante in materiale isotropo (Tab.6.8); 'ST': *Steady-State*.102
- 6.17 Analisi dinamica CUF ($TE7$ & $20 \times B4$): primi 3 modi delle vibrazioni libere coinvolti nei fenomeni aeroelastici, per la Pala 2 (Tab.6.23). . . 103
- 6.18 Diagramma di *flutter* per la Pala 1 con profilo SC1095 ($TE7$ & $20 \times B4$, $r_h = 1.390 m$) rotante in materiale isotropo (Tab.6.8); 'ST': *Steady-State*.104
- 6.19 Diagramma di *flutter* per la Pala 1 con profilo SC1095 ($TE7$ & $20 \times B4$, $r_h = 1.390 m$) rotante in materiale isotropo (Tab.6.8); 'ST': *Steady-State*.105

Acronimi

CUF

Carrera Unified Formulation

DOF

Degrees Of Freedom

EBBT

Euler–Bernoulli Beam Theory

EoM

Equations of Motion

ESL

Equivalent-Single Layer

FEM

Finite Element Method

HOM

High-Order Model

LDN

Lagrange Expansion Displacement-based theory

LOM

Low-Order Model

MDC

Method of Dynamic Compliance

MM

Modal Method

MTC

Method of Trigonometric Collocation

PDE

Partial Differential Equation

PLV

Principio dei Lavori Virtuali

PSBFEM

Polygonal Scaled Boundary Finite Element Method

QEP

Quadratic Eigenvalue Problem

SEREP

System Equivalent Reduction Expansion Process

TBT

Timoshenko Beam Theory

TMM

Transfer Matrix Method

Capitolo 1

Introduzione

Sin dalla fine del secolo scorso, la dinamica delle strutture rotanti ha sempre rappresentato un'importante sfida. Lo sviluppo di nuove tecnologie e la ricerca di un'estrema efficienza aerodinamica, hanno portato particolare attenzione alle geometrie ed ai materiali, i quali necessitano di studi specifici. Negli anni si sono susseguite numerose formulazioni, al fine di ottenere modelli matematici più semplici e ad un costo computazionale più basso. Infatti, una delle più stimolanti *challenge* degli ultimi decenni è il 'risparmio' in termini di costi di calcolo, mantenendo la medesima accuratezza dei risultati. Nella maggior parte dei casi, le analisi rotoriche impongono uno studio tridimensionale sugli elementi finiti molto dispendioso, ma inevitabile per modellare le strutture attuali.

1.1 Modelli analitici da Rankine ad oggi

I metodi di risoluzione relativi alle strutture rotanti sono numerosi ed ognuno tenta di rendere il problema più efficiente dal punto di vista del calcolo, implementando modelli 1D o 2D, i quali non trascurano i contributi dinamici principali. La complessità di tali strutture deriva dalla geometria e dalle combinazioni con cui si possono presentare i singoli elementi principali: pale o dischi, cuscinetti e albero. Nel dettaglio, i primi componenti montati sull'albero assicurano il corretto funzionamento dell'azione centrifuga. L'interazione dinamica tra le parti determina varie alterazioni delle caratteristiche di ogni unità strutturale; ciò comporta significative modifiche dell'insieme rotante. Uno dei principali fenomeni da monitorare è la vibrazione, nonché causa primaria di cedimento, fortemente influenzata dai contributi aeroelastici. Le forze aerodinamiche ed elastiche si combinano e sarà possibile osservare in quale modo daranno vita a condizioni critiche sia statiche che dinamiche.

In tal senso, risulta fondamentale studiare la dinamica dei rotori e i relativi sviluppi in termini di ricerca nel corso dei decenni, al fine di comprenderne la complessità.

I primi sistemi rotanti furono analizzati nel 1869 da Rankine, il quale studiò il caratteristico moto vorticoso, ma con alcune conclusioni errate: ad esempio, gli studi trascuravano le accelerazioni di Coriolis e negavano la possibilità di superare le velocità critiche; perciò, nei successivi decenni queste conclusioni ostacolarono ulteriori sviluppi. Successivamente, venne introdotto il rotore di de Laval (1883), inizialmente rigido, poi reso flessibile e dotato di un disco auto-centrato, in condizioni al di sopra delle velocità critiche. A tal scopo, le analisi proseguirono e permisero alla macchina di operare fino a sette volte il valore della velocità critica; tale obiettivo fu raggiunto da Stodola (1924), pioniere degli studi sulla dinamica dei rotori delle turbomacchine, il quale definì gli effetti giroscopici nell'ambito delle vibrazioni libere. Nel 1895, Foepl implementò i calcoli delle vibrazioni in casi non bilanciati, utilizzando un modello non smorzato che conferma la teoria di de Laval. Lo stesso anno anche Dunkerley raggiunse traguardi rilevanti e fu il primo a nominare le velocità di rotazione di risonanza come velocità critiche, calcolate mediante la teoria di Reynolds. In particolare, l'effetto giroscopico e la sua velocità sono valutate nei diagrammi di Campbell. Nel corso del XX secolo, le conseguenti teorie hanno esaminato le numerose e differenti configurazioni dei rotori, in analisi di instabilità che studiano vari fenomeni caratteristici.

A seguito di un'attenta analisi sulle vibrazioni delle macchine, Vance [1] ha introdotto il problema della dinamica delle strutture rotanti, dal semplice sistema massa-molla a 2-DOF di Rankine, da cui è possibile iniziare ad osservare alcune criticità. Nella dinamica dei rotori è fondamentale monitorare il bilanciamento e la stabilità della struttura, quindi predire ed analizzare le velocità critiche e le frequenze delle vibrazioni. Ad esempio, i vortici indotti, già studiati nel caso massa-molla, possono risultare distruttivi sia in condizioni sincrone sia asincrone rispetto alla rotazione dell'albero; i vortici sincroni eccitati vengono largamente discussi analizzando il rotore di Jeffcott. Nello specifico, il rotore di Jeffcott è uno dei principali modelli di struttura rotante, la cui attribuzione è ampiamente discussa. L'applicazione di questo modello consente di comprendere i fenomeni tipici della dinamica dei rotori ed è stato a lungo un punto di riferimento nelle analisi rotoriche. Ulteriormente sviluppato da Genta [2], il rotore di Jeffcott studia anche i comportamenti dinamici non-lineari ed instazionari, ma i limiti maggiori derivano dal fatto che si tratta di un metodo puramente matematico. Le prime analisi vibrazionali condotte da Foepl (1895) e da Jeffcott (1919) hanno mostrato l'inadeguatezza dei modelli nelle soluzioni più complesse. Pertanto, l'obiettivo di determinare le vibrazioni [3] dei rotori, ed in particolare le frequenze proprie di flessione e torsione per prevenire condizioni di instabilità, ha alimentato la continua ricerca di modelli innovativi.

Sin dai primi sviluppi, la difficoltà e l'incapacità dei metodi analitici di risolvere sistemi complessi, come i rotori, ha portato ad un progresso verso modelli computazionali più affidabili e performanti. L'utilizzo di nuove tecnologie ha consentito

di implementare modelli specifici ed una conseguente varietà degli stessi, in base alle necessità dei singoli studi e per ovviare ad eventuali problematiche. Pertanto, Geradin e Kill [4] presentano la priorità di modellare il rotore flessibile, rispettando le proprietà geometriche e di rigidità del sistema ed operando una riduzione modale, ai fini di un'analisi di instabilità migliore. Come evoluzione del rotore di Jeffcott, Genta [2] propone il modello a 4-DOF, ovvero un sistema in grado di effettuare la decomposizione modale, il quale tiene in considerazione gli effetti giroscopici.

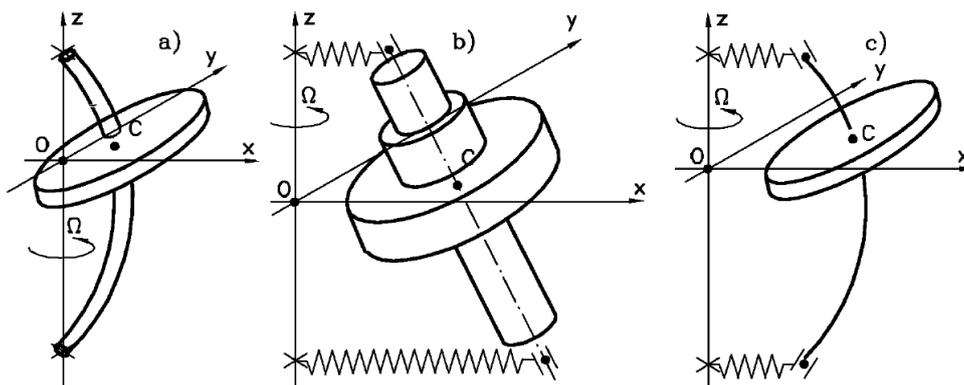


Figura 1.1: Rotore con 4-DOF:(a) corpo rigido su un albero conforme senza massa, (b) rotore rigido su cuscinetti conformi e (c) rotore in cui sia i cuscinetti sia l'albero sono conformi. In (a) e (c), si assume che il disco sia un corpo rigido. Ref.[2]

Gli studi proseguono analizzando dettagliatamente alcuni aspetti, come le dinamiche assiale e torsionale e l'interazione rotore-cuscinetto, sotto l'assunzione di spostamenti piccoli e lineari. Nella seconda parte del libro, le analisi si complicano e vengono tenuti in considerazione gli effetti non-lineari e non-stazionari, portando sempre particolare attenzione alla dinamica dei rotori e dei suoi elementi, opportunamente modellati in modo analitico.

Negli stessi anni, tra gli approcci modali introdotti emerge il modello isotropico two-lateral-mode di Muszynska [5], grazie al quale vengono affrontate le problematiche delle macchine rotanti. Questo metodo modale consente di studiare la stabilità delle vibrazioni auto-eccitate, gli effetti dinamici globali e locali, l'interazione solido-fluido, risonanze frazionarie e tanti altri valori di interesse. Inoltre, la collaborazione con Bently [6] analizza le instabilità rotoriche indotte dal fluido, presentando un modello basato sull'intensità del flusso di fluido tangenziale. Le forze del fluido sono determinate dall'equazione di Reynolds e costituiscono un contributo significativo all'interno del modello, il quale descrive vari fenomeni, tra cui la vorticità del fluido. Diversi esperimenti, condotti dalla stessa autrice e successivamente da Cheng et al.[7], ed alcune comparazioni, ad esempio rispetto alle equazioni di Hirs proposte

da Bauerle et al.[8], hanno dimostrato la precisione e l'efficienza di questo modello non-lineare di forze fluide nel definire i limiti di stabilità.

1.2 Il progresso dei metodi numerici

Il progresso nella dinamica dei rotori ha determinato una ricerca costante di metodi avanzati, al fine di risolvere modelli sempre più complessi e relativi alle diverse configurazioni. Rao [9] propone un'ampia visione dell'evoluzione tecnologica, analizzando e confrontando le diverse teorie, a partire dai metodi energetici per il calcolo delle frequenze naturali del rotore, tra cui l'equazione di Lagrange, il principio di Hamilton ed un'interpretazione ottimizzata dell'autore. Quindi, l'introduzione ai metodi numerici rappresenta la soluzione dei sistemi rotanti; all'inizio del XX secolo, Stodola e Viannello furono i primi ad elaborare un metodo numerico, applicando il principio di energia massima di Rayleigh, in grado di determinare la velocità critica. A seguire, Dunkerley propose una legge semi-empirica, grazie ai risultati di diversi esperimenti, e riuscì a migliorare la procedura di calcolo delle frequenze naturali ed allo stesso tempo a rendere più accurate le stime delle frequenze significative.

Tra gli anni '60 e '70, invece, vengono implementati due metodi fondamentali, in grado di risolvere i modelli analitici: Transfer Matrix Method (TMM) e Finite Element Method (FEM). Intorno al 1960, Prohl e Myklestad collaborarono nel formulare il TMM, il quale necessita di una memoria minore rispetto agli elementi finiti, ma l'applicazione è limitata ai casi in cui si possa suddividere la struttura complessiva in subsistemi, e risolve le interazioni solo tra subsistemi adiacenti. Una decina di anni più tardi, vennero sviluppati i primi modelli agli elementi finiti per la dinamica dei rotori; inizialmente, i FEM erano implementati secondo la EBBT e la TBT, le quali sfruttano la simmetria assiale del rotore, e gli altri componenti collegati erano considerati una massa concentrata. Le teorie classiche delle travi sostengono lo studio delle vibrazioni dei rotori, ma sono limitate a travi corte e sottili. Nel 1972, Ruhl e Booker [10] utilizzarono per la prima volta il FEM per analizzare un rotore, in particolare un generico sistema turborotore-cuscinetto.

Tuttavia, l'evoluzione della potenza di calcolo e le problematiche legate ai modelli trave 1D ha introdotto la modellazione mediante elementi assialsimmetrici (2D) e solidi (3D). I sistemi rotanti modellati con elementi 1D non ammettono una geometria adeguata ed assumono il rotore costituito da una trave deformabile e da masse concentrate e rigide, che modellano i dischi. Tra gli effetti principali trascurati risaltano l'interazione disco-albero, la complessità o l'asimmetria dei componenti collegati, gli effetti centrifughi e quelli giroscopici considerati come elementi separati, relativi ai corrispettivi dischi, e dati in input al modello trave. Inoltre, la dinamica rotorica 1D impone che i dischi e gli elementi estesi lungo il raggio non possano risultare flessibili, influenzando l'accuratezza della soluzione. Durante l'ultimo quarto del secolo scorso, Genta [11] ha sviluppato il codice agli elementi finiti DYNROT,

il quale è basato sull'impiego di coordinate complesse. L'albero è modellato come una trave, mentre i dischi e le pale come elementi circolari, i cui spostamenti sono approssimati con serie di Fourier lungo la direzione tangenziale. In principio, il modello risolveva i problemi lineari della dinamica dei rotori, poi è stato utilizzato anche per studiare i moti instazionari dei sistemi rotanti non-lineari e per l'analisi torsionale dei rotori. Tale codice FEM è adatto limitatamente ai rotori costituiti da dischi flessibili e sottili, purché siano assialsimmetrici, e ne studia le vibrazioni.

Approfondite le limitazioni intrinseche, i modelli 1D e 2D falliscono tipicamente nel risolvere i rotori in condizioni di carico asimmetrico, causato da sistemi non bilanciati, di interazioni fluido-struttura, di geometrie complesse e di condizioni al contorno inusuali. A tal proposito, i modelli solidi 3D ovviano alle problematiche precedentemente esposte e modellizzano con accuratezza gli effetti giroscopici e non-lineari, i quali non vengono analizzati nelle formulazioni lineari. Di conseguenza, il FEM è la tecnica numerica più utilizzata per studiare il comportamento delle strutture rotanti. All'inizio del secolo corrente, Nandi e Neogy [12] hanno formulato un modello FEM tridimensionale, il quale esamina automaticamente gli effetti di deformazione a taglio e di inerzia rotazionale. La possibilità di rappresentare sia l'albero sia i dischi mediante la medesima tipologia di elementi consente di tenere in considerazione la flessibilità del disco. La formulazione 2D è in grado di eseguire vortici sincroni su cuscinetti isotropi e riduce il numero di gradi di libertà, ma è limitata negli argomenti già affrontati. Ad esempio, il modello proposto da He et al. [13] (2007) introduce l'accoppiamento aerodinamico, legato all'interazione tra il fluido e la struttura dei dischi nelle macchine rotanti, specificatamente per una turbomacchina industriale. Le vibrazioni libere e le risposte forzate sono analizzate mediante diversi modelli aeroelastici. L'approccio prevede un modello di riduzione dell'ordine del problema, il quale sfrutta i modi di un sistema regolato per studiare la dinamica dei dischi con comportamenti anomali; in questo modo, il decremento in termini di costo computazionale è considerevole. Nonostante, il metodo determina direttamente le forze aerodinamiche instazionarie e definisce gli effetti rilevanti dovuti ai contributi aeroelastici.

Pertanto, la varietà di metodi computazionali ha consentito il loro impiego nelle analisi dei comportamenti dinamici dei rotori. La difficoltà principale dei FEM risiede nel risolvere le matrici globali ad elevato ordine, che si ottengono in questi sistemi complessi; ciò comporta l'introduzione dei primi metodi di riduzione dell'ordine del problema: Method of Trigonometric Collocation (MTC), Method of Dynamic Compliances (MDC) e Modal Method (MM). Il primo tra questi è stato utilizzato da Jean e Nelson [14] nel 1990, ma non risolve efficacemente il problema di matrici di ordine elevato, le quali incrementano rapidamente la propria dimensione proporzionalmente alla complessità. Quindi, i metodi MDC e MM consentono di determinare le proprietà dinamiche elementari, come ad esempio il problema agli autovalori, la risposta stazionaria e il diagramma di Campbell, mediante il quale si analizza la

stabilità della struttura. Sulla base di questi metodi, i lavori di Nelson e McVaugh [15] (1976) e di Zorzi e Nelson [16] (1977) contengono le matrici di massa locale, di rigidità e dell'effetto giroscopico ed iniziarono ad analizzare la dinamica dei sistemi rotanti, mediante modelli FEM basati sulla trave. In particolare, Nelson [17] (1980) fu il primo ad utilizzare la TBT ed osservò sostanziali vantaggi, in confronto ai risultati precedenti che non consideravano né la deformazione a taglio né la torsione assiale. Per quanto riguarda i MM, Malenovský [18] (2003) presenta un modello di riduzione modale del problema nel dominio delle frequenze, quindi la scelta di un numero maggiore di modi non implica matrici di ordine superiore. I metodi modali esaminano correttamente la risposta stazionaria e la risposta forzata.

A supporto della necessità di applicare modelli 3D nei sistemi rotanti, uno dei principali metodi di riduzione strutturale [19] è la stessa analisi modale, insieme alla Guyan Reduction ed alla Component Mode Synthesis. In un sistema rotante odierno, come una turbomacchina o un motore a reazione, il modello del solo disco palettato raggiunge rapidamente i 150000+ DOF, senza tenere in considerazione il rotore o i cuscinetti. Il problema computazionale risulta, quindi, fondamentale da risolvere e la MM ricopre un ruolo importante in tal senso. Dettagliatamente, l'analisi modale utilizza le coordinate modali per rappresentare il sistema dinamico e per disaccoppiare le equazioni del moto. I modi del sistema sono calcolati mediante un problema agli autovalori; il numero di modi risultanti sono equivalenti al numero di DOF. La riduzione nel sistema deriva da un sottoinsieme dei modi m del sistema estrapolato dall'insieme completo di modi. I metodi modali possono differenziarsi in un'analisi classica, la quale determina gli autovalori non-smorzati mediante un semplice problema agli autovalori, dove le matrici ridotte di massa e di rigidità sono diagonali e di dimensione $m \times m$; oppure in un'analisi modale complessa, la quale tiene in considerazione le matrici di smorzamento, giroscopiche o entrambe per ricavare delle coppie coniugate complesse di autovettori, denominati sinistro e destro, utilizzate per la riduzione del sistema. Mentre la Guyan Reduction, o riduzione statica, riduce le matrici del sistema considerando separatamente le coordinate, le quali sono suddivise in coordinate *master* e *slave*. Invece, la Component Mode Synthesis prevede la suddivisione di un sistema in strutture più piccole, le quali vengono progettate e analizzate singolarmente e poi assemblate in un modello di sistema completo, per valutare l'analisi dinamica. Inoltre, sono presenti in letteratura numerosi processi di riduzione del sistema [19], tra cui la troncatura bilanciata e la SPT. Un esempio di metodo di riduzione modale è fornito da Chatelet et al.[20], in cui i modi sono impiegati per rappresentare la dinamica a riposo; poi la struttura viene assunta simmetrica, in modo tale da studiare il comportamento dinamico di un rotore in composito. Houlston et al.[21], invece, implementano l'analisi modale come metodo di riduzione secondario ed utilizzano delle trasformazioni che conservano la struttura. Nel dettaglio, la procedura è un metodo SPT, per smorzamenti non proporzionali dei rotori, e riduce il sistema mediante le matrici Lancaster Augmented,

le quali sono successivamente diagonalizzate, ovvero disaccoppiate, per mezzo di un'analisi modale complessa. Il metodo non è adatto per gli effetti giroscopici o per modelli complessi, ma mantiene i termini dinamici del secondo ordine, per sviluppare un regolatore modale. Un altro metodo di riduzione degno di nota è il System Equivalent Reduction Expansion Process (SEREP), implementato da Das e Dutt [22] ed in grado di trattare gli effetti giroscopici e gli smorzamenti interni ed esterni. La procedura si articola in una prima analisi modale complessa, in cui la selezione avviene mediante un fattore di amplificazione modale; il passaggio successivo comporta una classificazione ed una conseguente omissione di alcuni elementi, mediante la Guyan Reduction. Il sistema è ridotto in termini di DOF, ma conserva, senza alterazione alcuna, le caratteristiche dinamiche delle strutture rotanti.

1.3 CUF, un'evoluzione dei metodi FE

Tra i primi modelli di riferimento per la riduzione dimensionale, Rao [23] ha presentato una formulazione delle equazioni di governo in termini dell'asse principale della struttura, quindi in funzione di una singola coordinata. Negli stessi anni, Putter e Manor [24] hanno sfruttato la tecnica agli elementi finiti con un elemento trave descritto da un polinomio di V grado, il quale è in grado di studiare le frequenze naturali relative alle travi radiali montate su un disco rotante. I valori presentati rispettano la dinamica di una trave a sbalzo, la quale implica gli effetti della forza di taglio, dell'inerzia rotante e delle forze centrifughe variabili. Hodges et al.[25],[26] hanno proposto un'analisi asintotica variazionale in corrispondenza della sezione della trave, denominata VABS. L'analisi della pala è suddivisa in un problema lineare bidimensionale (2D) sulla *cross-section* e in un ulteriore studio non lineare lungo la coordinata longitudinale della trave. Le formulazioni delle travi possono essere molto imprecise nel caso di strutture a pareti sottili. Successivamente, vari autori hanno superato queste limitazioni impiegando la formulazione a guscio [27],[28]. Pertanto, tra le modalità di riduzione dei FEM è sicuramente efficiente la combinazione di modelli 1D, 2D o 3D. Ad esempio, Jang et al.[29] hanno eseguito un'analisi delle vibrazioni libere su un sistema agli elementi finiti, in cui il disco è modellato in 2D utilizzando la teoria delle piastre di Kirchhoff e la deformazione non lineare di Von Karman. Invece, il mandrino rotante e l'albero fisso utilizzano rispettivamente il modello a trave di Rayleigh e di Eulero. Sun et al.[30] hanno sviluppato un modello bidimensionale per le pale rotanti multistrato, utilizzando una teoria quadratica per strati. In riferimento al metodo introdotto, i risultati delle simulazioni numeriche sono stati confrontati con il modello 3D completo e se ne sono dedotti riscontri positivi.

Le difficoltà essenziali legate ai sistemi dinamici rotanti riguardano l'inclusione della rigidità asimmetrica, dello smorzamento non proporzionale e degli effetti giroscopici. Quindi, la complessa trattazione strutturale impone alcune problematiche,

riguardanti i metodi di riduzione del modello e le seguenti analisi del sistema. Le principali complicazioni riscontrate sono la simmetria delle matrici, le proprietà dipendenti dalla velocità e le matrici malcondizionate. Oltre ad affrontare questi potenziali problemi, i metodi di riduzione devono svolgere l'importante compito di porre al minimo il numero di DOF, i quali incrementano rapidamente nei modelli dinamici 3D dei rotori. Il conseguente decremento dei costi computazionali è fondamentale in processi iterativi, come quello di progettazione delle strutture rotanti. Dunque, le tecniche ridotte agli elementi finiti hanno trovato grande applicazione in questa tipologia di problemi. Di particolare interesse in questo ambito risulta un'altra combinazione di modelli a più dimensioni: il metodo CUF. Introdotta da Carrera et al.[31], la Carrera Unified Formulation (CUF) consente di elaborare le proprietà e il campo degli spostamenti 3D, discretizzando in due domini il sistema. Ad esempio, la trave è suddivisa in un modello 2D per la sezione ed uno 1D lungo l'asse; la formulazione è stata implementata per materiali sia isotropi [32] che compositi [33] e risolve i limiti delle teorie delle travi. La CUF è un metodo agli elementi finiti con una cinematica *node-dependent* [34], tale per cui è possibile applicare un'espansione polinomiale di Lagrange o di Taylor, in modo da descrivere le deformazioni della sezione trasversale. La formulazione è articolata in varie applicazioni di calcolo, in grado di risolvere le differenti condizioni e proprietà delle strutture. Pertanto, il codice implementato secondo il metodo CUF consente di realizzare modelli strutturali 1D, i quali rappresentano effettivamente geometrie 3D, e di eseguire analisi che mantengono un'accuratezza elevata, nonostante siano soggette ad un importante ridimensionamento computazionale, che non ne compromette l'affidabilità. La Carrera Unified Formulation è largamente approfondita nei prossimi capitoli, come il suo codice, mediante il quale vengono determinati i risultati numerici dell'analisi rotorica, a supporto dello studio aeroelastico.

1.4 Analisi Aeroelastica

Inoltre, una delle premesse da tenere in forte considerazione è lo sviluppo aerodinamico delle strutture rotanti. La continua ricerca atta ad ottimizzare le geometrie, al fine di un ulteriore incremento dell'efficienza tecnologica, ha contribuito in modo cruciale all'insorgere di deformazioni strutturali, quindi di diverse condizioni del flusso, le quali vengono studiate in uno specifico ambito detto aeroelastico. Pertanto, l'aeroelasticità è una scienza che analizza l'interazione reciproca tra le forze aerodinamiche e le forze elastiche; l'influenza di questa interazione è fondamentale nella progettazione delle strutture di interesse, come quelle rotanti. I problemi di aeroelasticità non esisterebbero se la struttura fosse perfettamente rigida. Tuttavia, le moderne strutture sono molto flessibili, e questa flessibilità è fondamentale responsabile dei vari tipi di fenomeni aeroelastici. La flessibilità strutturale stessa potrebbe non essere oggetto di osservazione; tuttavia, i fenomeni aeroelastici sorgono

quando le deformazioni strutturali inducono forze aerodinamiche aggiuntive. Tali interazioni possono diventare sempre più piccole fino a raggiungere una condizione di equilibrio stabile, o possono tendere a divergere e distruggere la struttura.

In generale, i problemi di aeroelasticità possono essere classificati in due categorie: fenomeni aeroelastici statici e dinamici. I fenomeni aeroelastici statici, come la divergenza dell'ala, coinvolgono solo le forze aerodinamiche ed elastiche. I fenomeni aeroelastici dinamici, come il flutter, coinvolgono le forze aerodinamiche, elastiche ed inerziali.

Per quanto riguarda lo studio aeroelastico di strutture rotanti, il fenomeno di interesse è il *flutter* torsionale, che può verificarsi quando la velocità di rotazione di un'elica o di un rotore raggiunge una certa soglia. L'oscillazione torsionale può causare vibrazioni indesiderate e persino la rottura della struttura rotante. Le pale deformate influenzano, a loro volta, il campo di flusso intorno alle pale, il quale a sua volta influenza i carichi aerodinamici sulle pale. La dinamica dell'inerzia gioca un ruolo significativo nella correlazione tra i carichi aerodinamici e le deformazioni elastiche, e le accelerazioni che ne derivano.

Capitolo 2

Metodo analitico per le strutture rotanti

A causa della presenza di azioni variabili nel tempo, i componenti aeronautici, rotanti e non rotanti, vibrano. Le vibrazioni producono delle tensioni variabili nel tempo all'interno dei componenti ed è possibile studiarle mediante il tensore degli sforzi $[\sigma]$. Pertanto, le tensioni variabili nel tempo possono produrre un danneggiamento progressivo ed irreversibile del materiale, denominato fatica, che può portare al cedimento del componente in servizio. Per il progetto strutturale di componenti aeronautici e aerospaziali è necessario disporre di modelli e di metodi per prevedere e, se necessario, ridurre l'ampiezza delle vibrazioni. A tal proposito, i modelli sviluppati per le analisi statiche non sono in grado di prevedere correttamente il campo di spostamenti e di tensioni dovute alle vibrazioni, quando la loro frequenza è superiore ad un certo valore di soglia. I modelli statici non sono adatti a modellare il comportamento strutturale di componenti sollecitati da forze variabili nel tempo. Infatti, questi modelli non sono in grado di valutare la dipendenza dell'ampiezza di vibrazione e della deformata del sistema dalla frequenza caratteristica.

Al fine di ovviare ad eventuali problematiche di calcolo dell'intero sistema, il sistema viene suddiviso in componenti con un processo definito *dynamic substructuring*. Dunque, viene generato un modello ridotto per ciascun componente e viene assemblato il modello ridotto del sistema completo, rispetto al quale viene eseguita l'analisi. Considerando un sistema composto da un disco calettato su un albero, nella realtà la massa e l'elasticità sono distribuite in entrambi i corpi. Tuttavia, è possibile ipotizzare che la massa sia concentrata nel disco, il quale risulta infinitamente rigido, mentre l'elasticità sia concentrata nell'albero, il quale risulta privo di massa. Inoltre, il disco calettato viene posizionato nella mezzeria dell'albero in modo tale che, a seguito della flessione dell'albero, il disco trasli in direzione trasversale ma non

ruoti. I supporti, mediante i quali il rotore è vincolato alla cassa della struttura a cui appartiene, siano infinitamente rigidi e trascuriamo la forza peso. Il modello matematico ottenuto prende il nome di *rotore di Jeffcott*.

In questo capitolo, vengono definiti analiticamente i comportamenti relativi ai singoli elementi del rotore: i dischi sono tipicamente rigidi, l'albero è flessibile e viene modellato come una trave, i cuscinetti e le guarnizioni vengono aggiunti nei termini di smorzamento dell'equazione di governo.

2.1 Dinamica dei rotori

2.1.1 Rotore di Jeffcott ed evoluzioni

A seguito di decenni di studi e di sviluppi, le soluzioni analitiche hanno raggiunto un'affidabilità tale da consentire il loro utilizzo per validare i risultati numerici dei vari codici. La dinamica dei rotori risulta molto complessa, quindi i singoli componenti vengono esaminati e ne viene estrapolata l'influenza sulla dinamica complessiva del modello.

Relativamente al modello analitico in oggetto, è possibile che la posizione del baricentro G del disco sul piano (x,y) non coincida con la posizione del centro del disco C , come mostrato nella Figura 2.1, dove sono individuati l'eccentricità del rotore e , la velocità di rotazione Ω e l'angolo di fase φ . Da qui in avanti viene considerata la configurazione deformata per scrivere le equazioni di equilibrio alla traslazione orizzontale e verticale del rotore, nel caso in cui l'albero ruoti con velocità costante Ω .

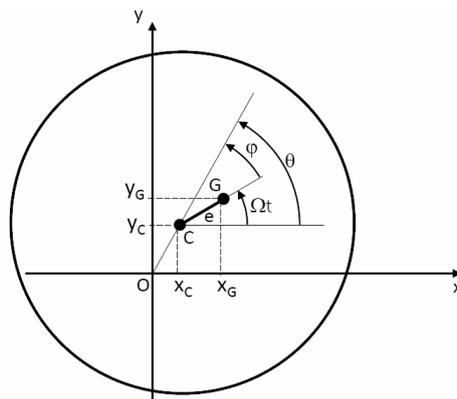


Figura 2.1: Posizione del baricentro G rispetto alla posizione del centro del disco, nel caso di albero deformato.

In genere, le equazioni di governo del moto vengono calcolate per ogni componente del rotore preso singolarmente. Specificatamente, viene scritta la definizione analitica relativa al componente appena introdotto, il quale considera uno spostamento del baricentro dovuto alla deformazione dell'albero:

$$\begin{cases} x_G = x_C + e \cos(\Omega t) \\ y_G = y_C + e \sin(\Omega t) \end{cases}$$

da cui si ottengono le equazioni di equilibrio, rispettivamente nella direzione orizzontale e verticale:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_G + c\dot{x}_C + kx_C = 0 \\ m\ddot{y}_G + c\dot{y}_C + ky_C = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x}_C + c\dot{x}_C + kx_C = me\Omega^2 \cos(\Omega t) \\ m\ddot{y}_C + c\dot{y}_C + ky_C = me\Omega^2 \sin(\Omega t) \end{cases}$$

Dunque, vengono ricavate le seguenti espressioni relative alle posizioni dei punti caratteristici del disco:

$$\begin{cases} x_G = x_C + e \cos(\Omega t) \\ y_G = y_C + e \sin(\Omega t) \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_G = \dot{x}_C - e\Omega \sin(\Omega t) \\ \dot{y}_G = \dot{y}_C + e\Omega \cos(\Omega t) \end{cases} \quad (2.1)$$

A partire da queste formulazioni, lo studio presentato da Genta [2] elabora un modello analitico di riferimento riguardante la dinamica dei rotori. In accordo con il suddetto lavoro, vengono ricavati i contributi energetici della struttura rotante; in particolare, l'Eq.(2.2) definisce l'energia potenziale U del componente, mentre l'Eq.(2.3) consente di calcolare l'energia dissipata D . Un altro contributo rilevante è quello legato all'energia cinetica T del disco ed è espresso mediante l'Eq.(2.4). Quest'ultima equazione viene rielaborata mediante le espressioni dell'Eq.(2.1), le quali esprimono gli spostamenti e le velocità relative al baricentro. Pertanto, si ricava la formula dell'energia cinetica (Eq.(2.5)) in funzione di altri parametri.

$$U = \frac{1}{2}k(x_C^2 + y_C^2) \quad (2.2)$$

$$D = \frac{1}{2}c(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2) \quad (2.3)$$

$$T = \frac{1}{2}I_G\Omega^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) \quad (2.4)$$

$$T = \frac{1}{2}I_G\Omega^2 + \frac{1}{2}m[(\dot{x}_C - e\Omega \sin(\Omega t))^2 + (\dot{y}_C + e\Omega \cos(\Omega t))^2] =$$

$$T = \frac{1}{2}I_G\Omega^2 + \frac{1}{2}m[\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2 + e^2\Omega^2 - 2e\Omega\dot{x}_C \sin(\Omega t) + 2e\Omega\dot{y}_C \cos(\Omega t)] \quad (2.5)$$

Dunque, le equazioni del moto sono definite mediante l'equazione di Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} = F q_j$$

dove q_i sono le coordinate indipendenti generalizzate, $F q_i$ le forze generalizzate ed $i \geq 1$ indica il corrispettivo grado di libertà. Nel dettaglio, è possibile considerare l'equazione di Lagrange specifica dello studio in esame:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} \right) + \frac{\partial U}{\partial x_j} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_j} = 0$$

e vengono analizzati i contributi relativi al primo caso, ovvero $\left(\frac{\partial}{\partial x_C} \right)$, analogo al secondo:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_C} = \frac{1}{2} m [2\dot{x}_C - 2e\Omega \sin(\Omega t)] \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_C} \right) = m\ddot{x}_C - me\Omega^2 \cos(\Omega t)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_C} = k x_C$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_C} = c \dot{x}_C$$

Risolvendole le due casistiche analoghe, vengono determinate le nuove equazioni di equilibrio (Eq.(2.6)), le quali compongono un sistema di equazioni differenziali disaccoppiate non omogenee. Ogni equazione è formalmente analoga a quella ricavata per l'oscillazione forzata di un sistema ad un grado di libertà. In questo caso, la differenza è nel secondo membro dell'equazione, dove non troviamo una forza esterna, bensì un'eccitazione parametrica. Infatti, se l'eccentricità del rotore fosse nulla ($e = 0$) il secondo termine si annullerebbe, generando un sistema omogeneo smorzato.

$$\begin{cases} m\ddot{x}_C + c\dot{x}_C + kx_C = me\Omega^2 \cos(\Omega t) \\ m\ddot{y}_C + c\dot{y}_C + ky_C = me\Omega^2 \sin(\Omega t) \end{cases} \quad (2.6)$$

In presenza di eccentricità, la risposta stazionaria del sistema assume la seguente espressione:

$$\begin{cases} x_C(t) = A \cos(\Omega t + \varphi_x) \\ y_C(t) = B \sin(\Omega t + \varphi_y) \end{cases}$$

La simmetria del sistema consente di assumere $A = B = R$ e lo sfasamento delle due componenti di spostamento, x_C e y_C , rispetto alle due forzanti deve essere lo stesso:

$$\begin{cases} x_C(t) = R \cos(\Omega t + \varphi) = R \cos(\theta) \\ y_C(t) = R \sin(\Omega t + \varphi) = R \sin(\theta) \end{cases}$$

da cui si ricava che la traiettoria descritta dal centro C del rotore è circolare, mentre l'angolo di fase φ corrisponde all'angolo compreso tra i segmenti OC e CG . Il moto risultante è detto di precessione sincrona, in quanto il baricentro G del rotore ruota attorno al punto C con la stessa velocità con cui il medesimo punto C ruota attorno all'origine. Durante il moto di precessione sincrona, l'albero si deforma elasticamente e tale deformazione ruota con velocità Ω . Le fibre interne, comprese tra il centro C e l'asse di rotazione z , risultano compresse, mentre le fibre esterne subiscono una trazione. Pertanto, le tensioni in ogni punto dell'albero risultano costanti nel tempo e non danno origine a danneggiamento per fatica.

Le equazioni del moto vengono normalizzate rispetto alla massa m , al fine di ricavare i valori di R e φ :

$$\begin{cases} \ddot{x}_C + 2\zeta\omega_n\dot{x}_C + \omega_n^2 x_C = e\Omega^2 \cos(\Omega t) \\ \ddot{y}_C + 2\zeta\omega_n\dot{y}_C + \omega_n^2 y_C = e\Omega^2 \sin(\Omega t) \end{cases}$$

con la frequenza naturale $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$ e lo smorzamento $\zeta = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2\sqrt{mk}} = \frac{c}{2m\omega_n}$. Dalla prima equazione vengono ricavate l'ampiezza R e la fase φ del sistema ad 1-DOF, di cui sono presentate le rispettive Eq.(2.7),(2.8), a partire dalla seguente notazione complessa:

$$\left(-\Omega^2 + i2\zeta\omega_n\Omega + \omega_n^2\right) \bar{x}_C e^{i\Omega t} = e\Omega^2 e^{i\Omega t}$$

$$R = \frac{e\Omega^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \Omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\Omega^2}} \quad (2.7)$$

$$\tan(\varphi) = \frac{\text{Im}(\bar{x}_C)}{\text{Re}(\bar{x}_C)} = -\frac{2\zeta\omega_n\Omega}{\omega_n^2 - \Omega^2} \quad (2.8)$$

Pertanto, se la velocità di rotazione Ω è pari alla pulsazione naturale ω_n del sistema abbiamo la condizione di *risonanza* e si ricava l'espressione caratteristica del fenomeno:

$$R = \frac{e}{2\zeta}$$

L'ampiezza massima della risposta si ottiene ad una velocità di rotazione Ω_{cr} , detta velocità critica, il cui valore si ottiene imponendo la derivata $\frac{dR}{d\Omega} = 0$:

$$\Omega_C = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - 2\zeta^2}}$$

Dato il valore tipicamente piccolo dello smorzamento viscoso, si può considerare $\Omega_C = \omega_n$; quindi, la velocità critica del rotore coincide con la frequenza naturale del modo flessionale del sistema.

Fino ad ora, la rigidezza dell'albero è stata genericamente indicata come k , senza indagare la sua dipendenza dai parametri dell'albero, quali sezione, materiale e lunghezza, per la configurazione mostrata in Figura 2.2a. La rigidezza trasversale dell'albero da utilizzare nell'equazione di equilibrio è il rapporto tra una forza trasversale applicata in corrispondenza del baricentro del disco e lo spostamento trasversale che questa forza produce. Pertanto, il procedimento di analisi si riduce al calcolo della deformazione di una trave in presenza di una forza F , applicata in mezzzeria. Dalla Teoria delle Travi è noto che, se viene utilizzato il modello di trave di Eulero, lo spostamento R legato alla deformazione è pari a

$$R = \frac{FL^3}{48 EJ}$$

dove vengono introdotti il modulo di Young E e il momento d'inerzia J . Dalla precedente formula è possibile ottenere la relazione di riferimento per ricavare la rigidezza dell'albero:

$$k = \frac{F}{R} = \frac{48 EJ}{L^3} \quad (2.9)$$

la cui espressione viene sostituita all'interno delle equazioni di equilibrio (Eq.(2.6)) e la velocità critica assume il seguente valore:

$$\Omega_C = \omega_n = \sqrt{\frac{48 EJ}{mL^3}}$$

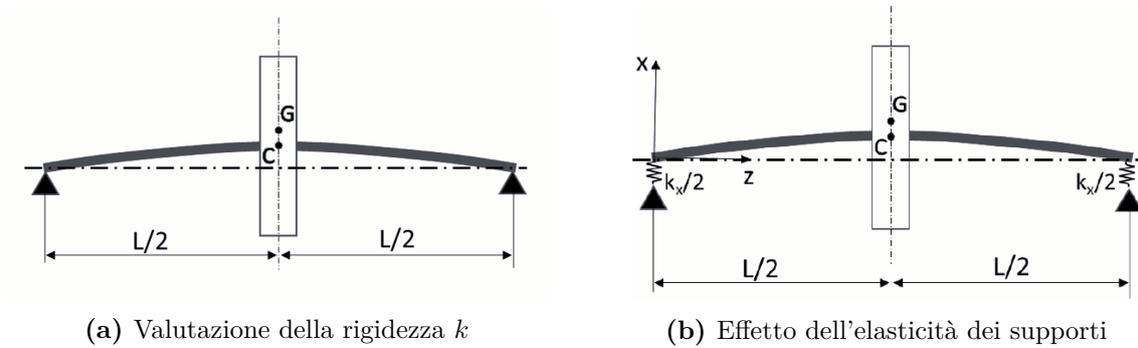


Figura 2.2: Configurazioni del rotore di Jeffcott.

Questa relazione permette di svolgere un'analisi parametrica qualitativa, identificando i parametri il cui valore contribuisce a definire la velocità critica del rotore e individuando l'effetto di una loro variazione sulla velocità Ω_C . L'analisi relativa alla configurazione in oggetto può essere estesa ad altre, nelle quali sia differente la posizione del rotore rispetto ai cuscinetti.

Dunque, il modello di Jeffcott ipotizza che l'albero sia vincolato a terra mediante supporti infinitamente rigidi. Nella realtà i cuscinetti hanno una rigidezza finita e il suo valore influenza il comportamento dinamico del sistema presentato in Fig.2.2b. Al fine di introdurre tale rigidezza nel modello, il primo passo consiste nell'ipotizzare che i cuscinetti siano isotropi, ovvero che la loro rigidezza nel piano (x,y) non dipenda dalla direzione considerata ($k_x = k_y$).

Su ciascuno dei due piani (x,z) e (y,z) l'equazione di equilibrio in direzione trasversale, mantiene la stessa forma del caso precedente

$$\begin{cases} \ddot{x}_C + \frac{c}{m}\dot{x}_C + \frac{k_{eq}}{m}x_C = e\Omega^2 \cos(\Omega t) \\ \ddot{y}_C + \frac{c}{m}\dot{y}_C + \frac{k_{eq}}{m}y_C = e\Omega^2 \sin(\Omega t) \end{cases}$$

Tuttavia, la rigidezza del sistema in questo caso è la rigidezza equivalente dovuta a due elementi elastici in serie, l'albero e i cuscinetti, i quali sono in parallelo tra di loro:

$$k_{eq} = \frac{k k_x}{k + k_x}$$

da cui si ricava la forma adimensionale $\frac{k_{eq}}{k} = \frac{\frac{k_x}{k}}{1 + \frac{k_x}{k}}$. L'andamento asintotico in prossimità dell'unità del termine k_{eq}/k funzione di k_x/k mostra che un valore di rigidezza finito dei cuscinetti riduce la rigidezza complessiva del sistema; di conseguenza, il valore della velocità critica diminuisce e l'equazione diventa

$$\Omega_C = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}}$$

La precedente valutazione riguarda l'effetto dell'elasticità di cuscinetti isotropi sulla dinamica del rotore. Il moto resta un moto di precessione sincrona, la cui velocità critica dipende dalla rigidezza dei supporti. Tuttavia, data la presenza di un carico radiale sui supporti, il loro comportamento non è isotropo e, in generale $k_x \neq k_y$.

A questo punto è importante studiare l'effetto dell'anisotropia sulla dinamica del rotore. Il modello, già mostrato in Figura 2.2b, viene assunto con le seguenti caratteristiche: disco modellato come una massa concentrata, albero infinitamente rigido, supporti elastici con $k_x < k_y$. Le equazioni di equilibrio del sistema omogeneo non smorzato sono:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_C + k_x x_C = me\Omega^2 \cos(\Omega t) \\ m\ddot{y}_C + k_y y_C = me\Omega^2 \sin(\Omega t) \end{cases} \quad (2.10)$$

La soluzione di riferimento per ciascuna equazione è pari a

$$\begin{cases} x_C = A \cos(\Omega t) \\ y_C = B \sin(\Omega t) \end{cases}$$

da cui si ottiene l'espressione $\frac{x_C^2}{A^2} + \frac{y_C^2}{B^2} = 1$, la quale corrisponde all'equazione di un'ellisse di semi-assi A e B . Sostituendo tali valori nelle Eq.(2.10), si determina il seguente sistema di equazioni del moto:

$$\begin{cases} -m\Omega^2 A \cos(\Omega t) + k_x A \cos(\Omega t) = m e \Omega^2 \cos(\Omega t) \\ -m\Omega^2 B \sin(\Omega t) + k_y B \sin(\Omega t) = m e \Omega^2 \sin(\Omega t) \end{cases}$$

Pertanto, le ampiezze dei semi-assi A e B risultano:

$$A = \frac{e \Omega^2}{\frac{k_x}{m} - \Omega^2} \quad B = \frac{e \Omega^2}{\frac{k_y}{m} - \Omega^2}$$

Osservando i denominatori delle due precedenti espressioni, si osserva che il valore di Ω determina tre casi differenti riguardanti il comportamento del centro C . Il primo caso $\Omega < \sqrt{\frac{k_x}{m}}$ individua lo spostamento del centro C lungo l'ellisse in senso antiorario ed anche il baricentro G ruota attorno a C in senso antiorario, trovandosi sempre all'esterno dell'ellisse. Invece, se $\Omega > \sqrt{\frac{k_y}{m}}$, il punto C percorre l'ellisse in senso antiorario, trovandosi sempre all'interno dell'ellisse. Nel caso in cui la velocità di rotazione sia $\sqrt{\frac{k_x}{m}} < \Omega < \sqrt{\frac{k_y}{m}}$, il centro percorre l'ellisse in senso orario, mentre il baricentro ruota attorno a C in senso antiorario; quindi, la posizione del baricentro cambia rispetto al centro C . Di conseguenza, in quest'ultimo caso non si ha una precessione sincrona.

Il modello di Jeffcott analizzato in questo capitolo presuppone che i dischi siano rappresentati come masse concentrate, trascurando quindi l'effetto del loro momento di inerzia rispetto all'asse di flessione. Tuttavia, si tratta di un'ipotesi che non vale nel caso in cui i dischi, oltre allo spostamento laterale del baricentro, subiscono anche una rotazione attorno ad un asse ortogonale all'asse di rotazione, come nel caso di disco a sbalzo rappresentato in Fig.2.3.

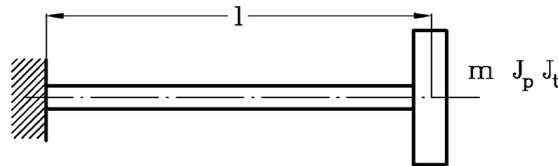


Figura 2.3: Il rotore di Stodola-Green: modello a quattro gradi di libertà. Ref.[2]

A tal proposito, è possibile utilizzare il metodo dei coefficienti di influenza, per valutare l'effetto del momento di inerzia del disco sulla velocità critica del sistema. Quindi, vengono introdotte le seguenti relazioni, in funzione della risultante delle

forze di inerzia F ed il momento risultante delle forze di inerzia M :

$$\begin{aligned} y &= \alpha_{yF}F + \alpha_{yM}M \\ \varphi &= \alpha_{\varphi F}F + \alpha_{\varphi M}M \end{aligned} \quad (2.11)$$

Per quanto riguarda la forza $F = m\Omega^2y$, è la forza centrifuga dovuta alla massa m del disco che ruota attorno all'asse z , con una velocità Ω posizionata ad una distanza y dall'asse di rotazione.

Per quanto riguarda il momento risultante M , viene posto come riferimento lo schema in Fig.2.4, nel quale le forze verticali corrispondono alle forze centrifughe infinitesime associate ad una massa dm , che si trova ad una distanza radiale y' dall'asse di rotazione e ad una distanza x' dal piano di giacitura del disco nella configurazione indeformata. In questo modo, il momento risultante ha direzione verso l'alto, quindi, nelle equazioni di y e φ ha segno negativo:

$$M = \int x' dF = \int x'y'\Omega^2 dm = \int \varphi y'^2\Omega^2 dm = \Omega^2\varphi \int y'^2 dm = J_t\Omega^2\varphi$$

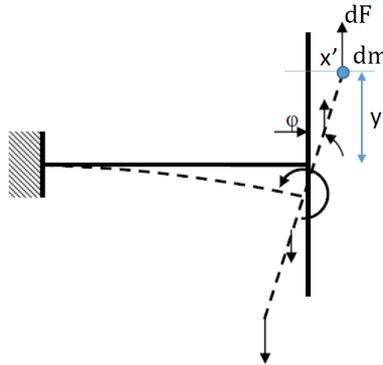


Figura 2.4: Schema dell'effetto del momento di inerzia di dischi sottili.

Nel caso specifico, i coefficienti di influenza sono quelli di una trave a sbalzo di lunghezza L caricata all'estremità da un carico concentrato (α_{yF} e $\alpha_{\varphi F}$) e da una coppia concentrata (α_{yM} e $\alpha_{\varphi M}$). Pertanto, le Eq.2.11 vengono riscritte nella seguente forma:

$$\begin{aligned} y &= \frac{L^3}{3EI}m\Omega^2y - \frac{L^2}{2EI}J_t\Omega^2\varphi \\ \varphi &= \frac{L^2}{2EI}m\Omega^2y - \frac{L}{EI}J_t\Omega^2\varphi \end{aligned}$$

da cui si ottiene, raccogliendo a fattor comune y e φ , il sistema di equazioni di riferimento:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{m\Omega^2 L^3}{3EI}\right)y + \frac{J_t \Omega^2 L^2}{2EI}\varphi &= 0 \\ \frac{m\Omega^2 L^2}{2EI}y - \left(1 + \frac{J_t \Omega^2 L}{EI}\right)\varphi &= 0 \end{aligned}$$

Si tratta di un sistema di equazioni omogenee, la cui soluzione non banale si trova imponendo che sia nullo il determinante della matrice dei coefficienti:

$$-\left(1 - \frac{m\Omega^2 L^3}{3EI}\right)\left(1 + \frac{m\Omega^2 L}{EI}\right) - \frac{J_t \Omega^2 L^2}{2EI} \frac{m\Omega^2 L^2}{2EI} = 0$$

Lo studio è atto a quantificare l'effetto del momento di inerzia del caso in esame; per questo motivo, viene assunta come riferimento la soluzione relativa al modello di Jeffcott, trascurando l'effetto della rotazione del disco. In tal caso, la pulsazione naturale, la quale coincide con la velocità critica, risulta pari al valore:

$$\Omega_{C0}^2 = \omega_n^2 = \frac{k}{m} = \frac{3EI}{mL^3}$$

il quale viene sostituito nell'equazione del polinomio caratteristico e si ricava la seguente espressione in grado di risolvere il problema:

$$\left(1 - \frac{\Omega^2}{\Omega_{C0}^2}\right)\left(1 + \frac{J_t \Omega^2 L}{EI}\right) + \frac{3}{4} \frac{J_t \Omega^4 L}{EI \Omega_{C0}^2} = 0 \quad (2.12)$$

L'Eq.(2.12) ammette varie e numerose soluzioni, tra cui è possibile individuare due casi estremi, per $J_t = 0$ e $J_t \rightarrow \infty$, i quali consentono di determinare la specifica velocità di rotazione, rispettivamente pari a $\Omega^2 = \Omega_{C0}^2$ ed a $\Omega^2 = 4\Omega_{C0}^2$. Pertanto, l'andamento della velocità critica in funzione del valore del momento di inerzia J_t , conferma l'effetto irrigidente dovuto al momento di inerzia di un disco sottile.

2.1.2 Effetto giroscopico

Nelle sezioni precedenti è stata posta particolare attenzione al moto di precessione di un rotore, utilizzando il modello di Jeffcott ad 1-DOF. Tale studio ha consentito di dimostrare che la velocità critica del rotore coincide con la frequenza naturale del modo flessionale del sistema. Inoltre, questa considerazione è valida anche nel caso di un sistema con N gradi di libertà. Nel caso specifico, il sistema è caratterizzato da N velocità critiche coincidenti con le N pulsazioni naturali associate ai modi flessionali del sistema e a ciascuna velocità critica viene associata una deformata rotante.

Al fine di valutare l'effetto giroscopico sulle velocità critiche di un rotore, viene introdotto un modello costituito da un rotore rigido appoggiato su supporti flessibili di rigidezza k_1 e k_2 , come mostrato nella Figura 2.5.

Pertanto, il modello di riferimento assume specifiche definizioni degli spostamenti nelle direzioni trasversali uscente x e verso l'alto y ; nello dettaglio, il pedice '1' indica il lato sinistro mentre quello '2' il lato destro. I valori θ_{xG} e θ_{yG} valutano lo spostamento angolare attorno all'asse x_G e y_G , rispettivamente. La traslazione lungo gli assi x e y viene calcolata mediante il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_G + k_1x_1 + k_2x_2 = 0 \\ m\ddot{y}_G + k_1y_1 + k_2y_2 = 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

in cui è possibile notare e sostituire alcuni parametri, assumendo i valori caratteristici del modello:

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{l} (bx_1 + ax_2) \\ y_G &= \frac{1}{l} (by_1 + ay_2) \\ \theta_{xG} &\approx \frac{1}{l} (y_2 - y_1) \\ \theta_{yG} &\approx -\frac{1}{l} (x_2 - x_1) \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_G + a\theta_{yG} \\ x_2 &= x_G - b\theta_{yG} \\ y_1 &= y_G - a\theta_{xG} \\ y_2 &= y_G + b\theta_{xG} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Dunque, le Eq.(2.13) relative alla traslazione vengono rielaborate, applicando le sopraccitate definizioni ed introducendo i termini $\alpha = k_1 + k_2$ e $\gamma = -k_1a + k_2b$ in funzione delle rigidezze (vedi Eq.(2.16)).

$$\begin{cases} m\ddot{x}_G + (k_1 + k_2)x_G - (-k_1a + k_2b)\theta_{yG} = 0 \\ m\ddot{y}_G + (k_1 + k_2)y_G + (-k_1a + k_2b)\theta_{xG} = 0 \end{cases}$$

da cui si ottiene la forma compatta:

$$\text{Traslazione : } \begin{cases} m\ddot{x}_G + \alpha x_G - \gamma\theta_{yG} = 0 \\ m\ddot{y}_G + \alpha y_G + \gamma\theta_{xG} = 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

Dato un corpo che ruota attorno ad un asse principale z longitudinale, il cui moto venga perturbato da una rotazione attorno ad uno degli altri assi principali x e y , si genera un momento giroscopico ortogonale ai due assi precedenti, il cui valore è

$$M_{gir} = J_P \omega \wedge \dot{\theta} \quad (2.17)$$

dove J_P è il momento di inerzia rispetto all'asse z , detto momento polare. Nel caso di rotazione attorno all'asse y il momento è discorde rispetto all'asse x , mentre nel caso di rotazione attorno all'asse x il momento è concorde con l'asse y .

$$M_{gir,x} = J_P \omega \wedge \dot{\theta}_{yG} \quad M_{gir,y} = J_P \omega \wedge \dot{\theta}_{xG}$$

Pertanto, viene eseguito il seguente procedimento per determinare il sistema di equazioni relativo alla rotazione del modello. Le espressioni dei momenti giroscopici ortogonali agli assi x e y vengono sostituite con il corretto segno, in accordo con il verso di applicazione di M_{gir} rispetto all'asse di riferimento.

$$\begin{cases} J_t \ddot{\theta}_{xG} - k_1 a y_2 + k_2 b y_2 + M_{gir,x} = 0 \\ J_t \ddot{\theta}_{yG} + k_1 a x_2 - k_2 b x_2 + M_{gir,y} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} J_t \ddot{\theta}_{xG} - k_1 a y_2 + k_2 b y_2 + J_P \omega \dot{\theta}_{yG} = 0 \\ J_t \ddot{\theta}_{yG} + k_1 a x_2 - k_2 b x_2 - J_P \omega \dot{\theta}_{xG} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} J_t \ddot{\theta}_{xG} + J_P \omega \dot{\theta}_{yG} + (k_2 b - k_1 a) y_G + (k_1 a^2 + k_2 b^2) \theta_{xG} = 0 \\ J_t \ddot{\theta}_{yG} - J_P \omega \dot{\theta}_{xG} - (k_2 b - k_1 a) x_G + (k_1 a^2 + k_2 b^2) \theta_{yG} = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava la formulazione ridotta, con $\delta = k_1 a^2 + k_2 b^2$:

$$Rotazione : \begin{cases} J_t \ddot{\theta}_{xG} + J_P \omega \dot{\theta}_{yG} + \gamma y_G + \delta \theta_{xG} = 0 \\ J_t \ddot{\theta}_{yG} - J_P \omega \dot{\theta}_{xG} - \gamma x_G + \delta \theta_{yG} = 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

In riferimento alle Eq.(2.16), le soluzioni relative all'equilibrio alla traslazione determinano le pulsazioni naturali:

$$\omega_{nx} = \omega_{ny} = -\sqrt{\frac{2k}{m}}$$

Ricordando che $\Omega_C^2 = \omega_n^2$, si ottengono le due velocità di rotazione critiche con segno opposto:

$$\Omega_{C1} = \sqrt{\frac{2k}{m}} \quad \Omega_{C2} = -\sqrt{\frac{2k}{m}}$$

La prima corrisponde ad un moto di precessione del rotore concorde con la velocità di rotazione, denominata *forward whirl*, la seconda ad un moto di precessione del rotore discorde rispetto alla velocità di rotazione, *backward whirl*.

Analogamente, per le Eq.(2.18) di equilibrio alla rotazione viene ricercata una soluzione del tipo $\theta_{xG} = \Theta_{xG} e^{st}$ e $\theta_{yG} = \Theta_{yG} e^{st}$. Sostituendo e semplificando il termine esponenziale si ottiene il sistema omogeneo

$$\begin{cases} (J_t s^2 + \delta) \Theta_{xG} + J_P \omega s \Theta_{yG} = 0 \\ (J_t s^2 + \delta) \Theta_{yG} - J_P \omega s \Theta_{xG} = 0 \end{cases}$$

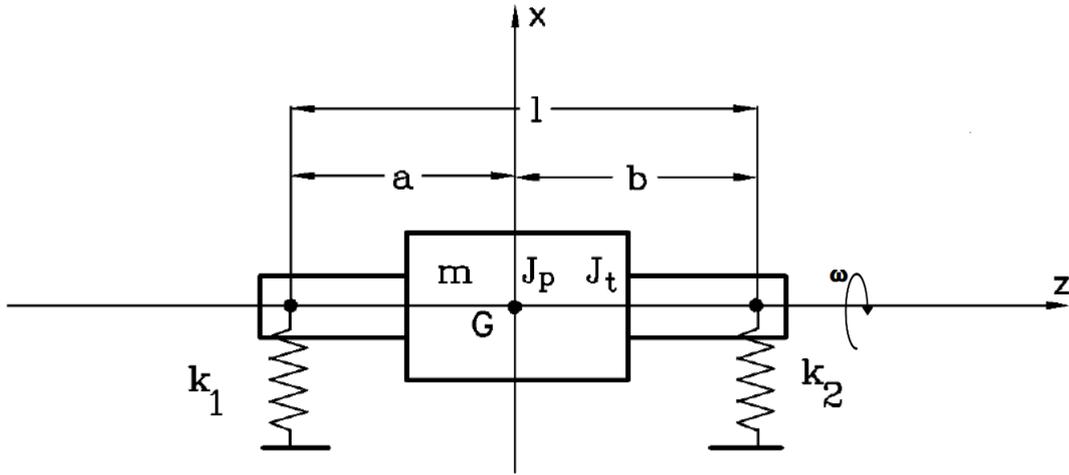


Figura 2.5: Schema di un rotore rigido su cuscinetti compatibili. Il centro di massa si trova tra i cuscinetti. Ref.[2]

dal quale è possibile ricavare le pulsazioni naturali imponendo la condizione:

$$\det \begin{bmatrix} J_t s^2 + \delta & J_P \omega s \\ -J_P \omega s & J_t s^2 + \delta \end{bmatrix} = 0$$

$$(J_t s^2 + \delta)^2 = 0$$

Al fine di calcolare le pulsazioni proprie, vengono prima valutate le radici del polinomio caratteristico a $\omega = 0$, quindi con rotazione nulla attorno all'asse z :

$$s = \pm j \sqrt{\frac{k l^2}{2 J_t}}$$

poiché l'esponente s risulta immaginario, la soluzione corrisponde ad una pulsazione naturale ω_{nC0} , la quale corrisponde ad un modo a $\omega = 0$ e che prevede solo la rotazione del rotore, e non traslazione, ovvero un moto conico:

$$\omega_{nC0} = \sqrt{\frac{k l^2}{2 J_t}} = \sqrt{\frac{\delta}{J_t}} \quad (2.19)$$

Dal momento in cui viene posto in rotazione il modello, la condizione secondo cui il determinante si annulla consente di ottenere il seguente polinomio caratteristico:

$$\det \begin{bmatrix} J_t s^2 + \delta & J_P \omega s \\ -J_P \omega s & J_t s^2 + \delta \end{bmatrix} = 0$$

$$(J_t s^2 + \delta)^2 + (J_P \omega s)^2 = 0$$

Assumendo che s sia un valore immaginario e che le radici del polinomio siano le pulsazioni naturali associate ai modi conici, vengono riscritte le corrispondenti radici:

$$\begin{aligned} s &= \pm j \omega_{nC} \\ s^2 &= -\omega_{nC}^2 \end{aligned}$$

da cui il polinomio caratteristico del sistema diventa

$$\begin{aligned} (-J_t \omega_{nC}^2 + \delta)^2 - (J_P \omega_{nC})^2 &= 0 \\ (J_t \omega_{nC}^2 - \delta + J_P \omega_{nC})(J_t \omega_{nC}^2 - \delta - J_P \omega_{nC}) &= 0 \end{aligned}$$

Data la pulsazione di riferimento $\omega_{nC0} = \sqrt{\frac{\delta}{J_t}}$ (Eq.(2.19)) e definito P il rapporto tra il momento polare del rotore J_P e il momento trasversale J_t , viene rielaborata la formulazione del problema. Inoltre, vengono introdotte alcune variabili normalizzate $\bar{\omega}_{nC} = \frac{\omega_{nC}}{\omega_{nC0}}$ e $f_{rC0} = \frac{\omega}{\omega_{nC0}}$, mediante cui si ricava la forma finale del polinomio caratteristico:

$$(\bar{\omega}_{nC}^2 + P f_{rC0} \bar{\omega}_{nC} - 1)(\bar{\omega}_{nC}^2 - P f_{rC0} \bar{\omega}_{nC} - 1) = 0$$

Pertanto, il polinomio ottenuto determina le seguenti radici:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_{nC1} &= -\frac{P f_{rC0}}{2} + \sqrt{\left(\frac{P f_{rC0}}{2}\right)^2 + 1} > 0 & \bar{\omega}_{nC2} &= \frac{P f_{rC0}}{2} - \sqrt{\left(\frac{P f_{rC0}}{2}\right)^2 + 1} < 0 \\ \bar{\omega}_{nC4} &= -\frac{P f_{rC0}}{2} - \sqrt{\left(\frac{P f_{rC0}}{2}\right)^2 + 1} < 0 & \bar{\omega}_{nC3} &= \frac{P f_{rC0}}{2} + \sqrt{\left(\frac{P f_{rC0}}{2}\right)^2 + 1} > 0 \end{aligned}$$

Le soluzioni rappresentano come, a causa del momento giroscopico, le velocità critiche dei modi conici, le quali presuppongono la rotazione del disco e non la sua traslazione, dipendono dalla velocità di rotazione del rotore ω . Al fine di rappresentare tale dipendenza, nel 1924, Campbell ha sviluppato l'omonimo diagramma, nel quale in ordinata si riportano i valori delle velocità critiche del rotore e in ascissa la sua velocità di rotazione. Pertanto, i diagrammi di Campbell vengono suddivisi in grafici affini al *forward whirl* oppure al *backward whirl*, in relazione al caso specifico che viene trattato.

Capitolo 3

Modello strutturale: CUF

In questo capitolo, viene presentato l'approccio del modello CUF, il quale consente di ottimizzare i metodi strutturali, come quello di Eulero-Bernoulli, che trovano limitazioni dal punto di vista industriale. Tale formulazione pone l'obiettivo di rendersi competitiva in termini computazionali, applicando le teorie *Equivalent-Single Layer* (ESL) e l'approccio *Layer-Wise* (LW). Le equazioni del moto per le strutture rotanti in formato CUF vengono derivate mediante il Principio di Hamilton. Il modello consente di sviluppare un codice in grado di elaborare le teorie aerodinamiche, aprendo la possibilità di svolgere analisi aeroelastiche.

3.1 Studio preliminare

Prima di introdurre il modello strutturale Carrera Unified Formulation, è necessario definire la geometria dei componenti, le notazioni, le matrici dei materiali e i campi di spostamento, di deformazione e di sollecitazione.

Come mostrato nella Figura 3.1, si considera il vettore spostamento trasposto (Eq.(3.1)), il quale è definito nel sistema di coordinate ortonormali (x,y,z) . La superficie A è la sezione trasversale e $0 \leq y \leq L$ è l'asse longitudinale. Pertanto, lo sforzo σ e la deformazione ϵ sono date dall'Eq.(3.2), dove il pedice ' n ' indica i termini sulla sezione trasversale e ' p ' i termini dei piani ortogonali ad A . In particolare, le Eq.(3.3) relative alla deformazione vengono riscritte in funzione del vettore spostamento.

$$u(x, y, z) = \{u_x \ u_y \ u_z\}^T \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \{\sigma_{zz} \ \sigma_{xx} \ \sigma_{zx}\}^T, & \epsilon_p &= \{\epsilon_{zz} \ \epsilon_{xx} \ \epsilon_{zx}\}^T \\ \sigma_n &= \{\sigma_{zy} \ \sigma_{xy} \ \sigma_{yy}\}^T, & \epsilon_n &= \{\epsilon_{zy} \ \epsilon_{xy} \ \epsilon_{yy}\}^T \end{aligned} \quad (3.2)$$

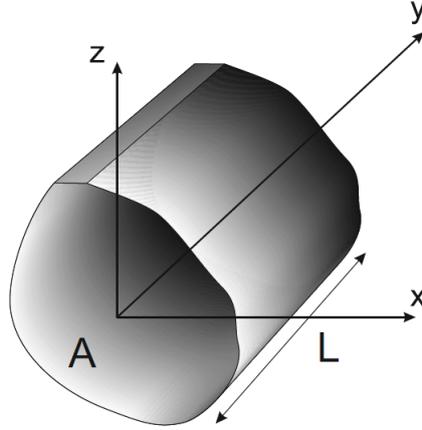


Figura 3.1: Sistema di riferimento della struttura.

Pertanto, le deformazioni sono ottenute come

$$\begin{aligned}\epsilon_p &= D_p u \\ \epsilon_n &= D_n u = (D_{np} + D_{ny}) u\end{aligned}\quad (3.3)$$

dove gli operatori differenziali D_p e D_n sono rappresentati dalle seguenti espressioni esplicite:

$$D_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad D_{np} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{ny} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{bmatrix}\quad (3.4)$$

Le relazioni costitutive ottenute dalla legge di Hooke generalizzata consentono di ricavare le componenti delle tensioni

$$\sigma = C \epsilon$$

Date le Eq.(3.2) ed applicando la precedente espressione si ricavano i termini relativi alle sollecitazioni σ , in funzione delle deformazioni ϵ e dei coefficienti C :

$$\begin{aligned}\sigma_p &= C_{pp}\epsilon_p + C_{pn}\epsilon_n \\ \sigma_n &= C_{np}\epsilon_p + C_{nn}\epsilon_n\end{aligned}\quad (3.5)$$

In riferimento alle sopraccitate equazioni, le matrici dei coefficienti per un generico materiale k vengono presentate nell'Eq.(3.6). A tal proposito, sia le strutture laminate di tipo *box-beam* che i cilindri possono essere considerati costituiti da un certo numero di piastre rettilinee o curve di materiale ortotropo. In questi casi, i sistemi di coordinate del materiale (1,2,3) generalmente non coincidono con il sistema

di coordinate (x,y,z) , come nel modello illustrato in Fig.3.2 di una struttura in materiale composito.

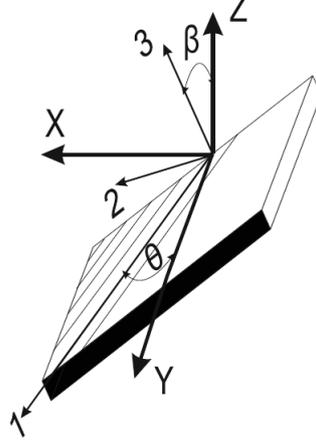


Figura 3.2: Sistema di riferimento fisico (x,y,z) e del materiale $(1,2,3)$.

$$C_{pp}^k = \begin{bmatrix} C_{11}^k & C_{12}^k & C_{14}^k \\ C_{12}^k & C_{22}^k & C_{24}^k \\ C_{14}^k & C_{24}^k & C_{44}^k \end{bmatrix}, \quad C_{pn}^k = \begin{bmatrix} C_{15}^k & C_{16}^k & C_{13}^k \\ C_{25}^k & C_{26}^k & C_{23}^k \\ C_{45}^k & C_{46}^k & C_{43}^k \end{bmatrix}, \quad C_{nn}^k = \begin{bmatrix} C_{55}^k & C_{56}^k & C_{35}^k \\ C_{56}^k & C_{66}^k & C_{36}^k \\ C_{35}^k & C_{36}^k & C_{33}^k \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Tuttavia, se si considera un materiale ortotropo, alcuni termini possono essere semplificati, grazie alla presenza di piani di simmetria ortogonali. Se il sistema di coordinate ortonormali scelto è tale che l'asse coincide con i tre piani di simmetria, si ottengono le seguenti matrici di materiale per un materiale ortotropo:

$$C_{pp}^k = \begin{bmatrix} C_{11}^k & C_{12}^k & 0 \\ C_{12}^k & C_{22}^k & C_{24}^k \\ C_{14}^k & C_{24}^k & C_{44}^k \end{bmatrix}, \quad C_{pn}^k = \begin{bmatrix} C_{15}^k & C_{16}^k & C_{13}^k \\ C_{25}^k & C_{26}^k & C_{23}^k \\ C_{45}^k & C_{46}^k & C_{43}^k \end{bmatrix}, \quad C_{nn}^k = \begin{bmatrix} C_{55}^k & C_{56}^k & C_{35}^k \\ C_{56}^k & C_{66}^k & C_{36}^k \\ C_{35}^k & C_{36}^k & C_{33}^k \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

in cui i coefficienti del materiale dipendono dal modulo di Young E , dal coefficiente di Poisson ν e dal modulo di taglio G . Inoltre, talvolta risulta necessario applicare una correzione a tali coefficienti a causa del fenomeno di *Poisson locking* investigato da Carrera et al. [35]. Questa anomalia è associata all'approssimazione numerica su strutture sottili o materiali incomprimibili come dimostrato in dettaglio da Babuška e Suri [36]. I modelli soggetti a tale fenomeno sono quelli con distribuzioni costanti e lineari delle componenti di spostamento in piano, u_x e u_z . La specifica correzione è basata sull'assunzione di sforzi normali trasversali σ_{xx} e σ_{zz} nulli, mentre le componenti di deformazione corrispondenti, ϵ_{xx} e ϵ_{zz} , sono calcolate di conseguenza

e sostituite nelle espressioni delle tensioni σ_{yy} e σ_{xy} . è stata presentata da Carrera e Brischetto [37], Carrera et al. [38],[39] e Carrera e Petrolo [31].

3.2 Carrera Unified Formulation

La formulazione proposta da Carrera definisce la sezione trasversale mediante un'espansione di funzioni generiche, la cui dimensione può variare a seconda del tipo di modello. Nel caso in cui una dimensione può essere trascurata rispetto alle altre, come una piastra o un guscio, il campo di spostamento è espresso dalla seguente espansione:

$$u(x, y, z, t) = F_{\tau}^{1D}(z, t) u_{\tau}(x, y) \quad , \quad \tau = 1, 2, \dots, M \quad (3.8)$$

dove u_{τ} è il vettore spostamento generalizzato, F_{τ}^{1D} è una funzione di espansione che approssima il campo di spostamento attraverso lo spessore, ed M è il numero di termini dell'espansione; il pedice ripetuto τ , secondo la notazione di Einstein, indica la sommatoria.

Al contrario, per i modelli di trave in cui due dimensioni sono trascurabili rispetto all'altra, l'equazione ridotta ottenuta è:

$$u(x, y, z, t) = F_{\tau}^{2D}(x, z) u_{\tau}(y, t) \quad , \quad \tau = 1, 2, \dots, M \quad (3.9)$$

dove F_{τ}^{2D} è la funzione di espansione utilizzata per descrivere la *cross-section*.

In accordo con le espansioni appena enunciate, la scelta di F_{τ} e M è arbitraria, lasciando all'utente la possibilità di impostare come input tali parametri, in funzione del modello strutturale di interesse. Per discretizzare il dominio, CUF può essere associato al metodo degli elementi finiti (FEM), introducendo la scelta di funzioni base di qualsiasi ordine per modellare il campo cinematico della sezione trasversale di una trave.

3.2.1 Funzioni di espansione

Nel corso degli anni sono state sviluppate numerose funzioni di espansione. Due di esse sono utilizzate principalmente nei modelli odierni: per strutture laminate in composito, l'espansione di Taylor (TE) richiede un approccio ESL, mentre l'espansione di Lagrange (LE) un approccio LW.

Funzione di Espansione di Taylor (TE)

I modelli basati sulla TE utilizzano serie di espansioni polinomiali, $x^i z^j$ per quelli monodimensionali e z^j per quelli bidimensionali, dove i e j sono numeri interi. Queste espansioni polinomiali descrivono il campo di spostamento sulla sezione trasversale nel modello 1D, ad esempio una trave, e lo spostamento nella direzione dello spessore nel caso di modelli 2D, come piastre o gusci.

L'ordine N della funzione di espansione è definito dall'utente come input dell'analisi e può essere deciso dopo uno studio di convergenza, se necessario. Un generico campo di spostamento per $TE 1D$ di ordine N può essere espresso dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} u_x &= \sum_{N_i=0}^N \left(\sum_{M=0}^{N_i} x^{N-M} z^M u_{x \frac{N(N+1)+M+1}{2}} \right) \\ u_y &= \sum_{N_i=0}^N \left(\sum_{M=0}^{N_i} x^{N-M} z^M u_{y \frac{N(N+1)+M+1}{2}} \right) \\ u_z &= \sum_{N_i=0}^N \left(\sum_{M=0}^{N_i} x^{N-M} z^M u_{z \frac{N(N+1)+M+1}{2}} \right) \end{aligned}$$

Al fine di analizzare ulteriormente il caso in esame, nelle Eq.(3.11),(3.12) vengono presentati due esempi di modelli TE, rispettivamente di primo ($TE1$), secondo ($TE2$) e terzo ($TE3$) ordine:

$$\begin{aligned} u_x &= u_{x_1} + x u_{x_2} + z u_{x_3} \\ u_y &= u_{y_1} + x u_{y_2} + z u_{y_3} \\ u_z &= u_{z_1} + x u_{z_2} + z u_{z_3} \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} u_x &= u_{x_1} + x u_{x_2} + z u_{x_3} + x^2 u_{x_4} + xz u_{x_5} + z^2 u_{x_6} \\ u_y &= u_{y_1} + x u_{y_2} + z u_{y_3} + x^2 u_{y_4} + xz u_{y_5} + z^2 u_{y_6} \\ u_z &= u_{z_1} + x u_{z_2} + z u_{z_3} + x^2 u_{z_4} + xz u_{z_5} + z^2 u_{z_6} \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} u_x &= u_{x_1} + x u_{x_2} + z u_{x_3} + x^2 u_{x_4} + xz u_{x_5} + z^2 u_{x_6} + x^3 u_{x_7} + x^2 z u_{x_8} + xz^3 u_{x_9} + z^3 u_{x_{10}} \\ u_y &= u_{y_1} + x u_{y_2} + z u_{y_3} + x^2 u_{y_4} + xz u_{y_5} + z^2 u_{y_6} + x^3 u_{y_7} + x^2 z u_{y_8} + xz^3 u_{y_9} + z^3 u_{y_{10}} \\ u_z &= u_{z_1} + x u_{z_2} + z u_{z_3} + x^2 u_{z_4} + xz u_{z_5} + z^2 u_{z_6} + x^3 u_{z_7} + x^2 z u_{z_8} + xz^3 u_{z_9} + z^3 u_{z_{10}} \end{aligned} \quad (3.12)$$

A questo punto, per completare lo studio del metodo in esame vengono definite le espansioni in serie F_7^{2D} , le quali sono in grado di discretizzare la sezione trasversale per i seguenti casi a $N = 2$ e $N = 3$:

$$\begin{aligned} N = 1 : \quad & F_1 = 1, \quad F_2 = x, \quad F_3 = z \\ N = 2 : \quad & F_1 = 1, \quad F_2 = x, \quad F_3 = z, \quad F_4 = x^2, \quad F_5 = xz, \quad F_6 = z^2 \\ N = 3 : \quad & F_1 = 1, \quad F_2 = x, \quad F_3 = z, \quad F_4 = x^2, \quad F_5 = xz, \quad F_6 = z^2, \\ & F_7 = x^3, \quad F_8 = x^2z, \quad F_9 = xz^2, \quad F_{10} = z^3 \end{aligned}$$

L'applicazione delle equazioni TE a strutture laminate in composito avviene mediante il modello *Equivalent-Single Layer*. Infatti, l'approccio ESL considera

le proprietà della sezione trasversale come omogenee. Il contributo di ogni strato viene sommato e porta a un unico insieme di variabili per l'intera struttura. Questo modello fornisce risultati accurati per i fenomeni globali, ad esempio le frequenze di vibrazione fondamentali oppure le deflessioni trasversali, ma spesso non è affidabile per la valutazione della distribuzione degli stress in 3D. Sono stati esplorati molti altri approcci ESL, tra cui i più utilizzati sono il modello a zig-zag introdotto da Toledano e Murakami [40], il quale considera l'anisotropia intrinseca delle strutture multistrato, e le teorie presentate da Loredo e Castel [41] che utilizzano funzioni di espansione di tipo trigonometrico ed esponenziale.

Il modello strutturale *TE1* può essere utilizzato per implementare adeguatamente le teorie classiche della trave: EBBT e TBT. Il primo modello classico non tiene conto dell'effetto di taglio trasversale, quindi $\gamma_{yx} = \gamma_{yz} = 0$ e necessita di una condizione aggiuntiva espressa da Carrera et al.[39], in cui ϵ_{xy} e ϵ_{zy} vengono espresse attraverso le equazioni costitutive. Invece, il secondo modello richiede due condizioni, come presentato da Carrera et al.[39]: l'applicazione di un campo cinematico di approssimazione del primo ordine, Eq.(3.10), e uno spostamento costante per u_x e u_y , ammettendo una distribuzione di sforzo e taglio costante. Tale ipotesi implica la condizione $u_{x_2} = u_{x_3} = u_{z_2} = u_{z_3} = 0$, a riguardo di alcuni termini trascurabili, ed i termini $\theta(y)$ e $\phi(y)$ vengono ammessi pari a u_{y_2} e u_{y_3} . Inoltre, è rilevante notare che questi modelli richiedono un'ulteriore correzione dovuta al *Poisson locking*, come discusso preliminarmente nella sezione 3.1.

Funzione di Espansione di Lagrange (LE)

I modelli strutturali LE utilizzano polinomi di interpolazione di Lagrange come funzioni della *cross-section*; tali equazioni consentono di costruire teorie *high-order* 1D e 2D (HOT). La formulazione isoparametrica può essere applicata per trattare varie tipologie di geometrie arbitrarie. Come le equazioni di Taylor, le LE sono utilizzate come funzioni F_τ sulla sezione trasversale, per modellare una trave, e sullo spessore, nel caso di piastre e gusci. Poiché questo lavoro studia i modelli trave, vengono presentate solo le funzioni della sezione trasversale. Per definire la sezione trasversale si utilizzano principalmente tre tipi di elementi lagrangiani: polinomi a quattro punti (L4), polinomi a nove punti (L9) e polinomi a sedici punti (L16). La formulazione isoparametrica è stata descritta dettagliatamente da Onate [42] e successivamente utilizzata da Filippi e al. in [43],[44] per un'applicazione della CUF rispettivamente in una valutazione termoelastica e in uno studio delle vibrazioni riguardante le pale rotanti.

Dunque, un approccio *Layer-Wise* è in grado di effettuare una descrizione dettagliata degli strati. Una panoramica delle teorie LW a riguardo delle strutture laminate in materiale composito è stata fornita da Carrera [45]. Le teorie *Layer-Wise*

determinano vari campi di spostamento indipendenti in ogni singolo strato ed impongono condizioni di compatibilità alle interfacce tra gli strati di laminazione. Nella Figura , sono proposti due esempi di espansione LW in direzione z di tipo lineare e un modello *high-order*. Tra le variabili incognite risulta solo lo spostamento puro, se si adottano i polinomi di Lagrange come funzioni di espansione F_τ . Pertanto, è possibile adottare diversi tipi di sistemi di polinomi trasversali; alcuni esempi sono mostrati nella Fig.3.3, a cui viene associato il corrispondente campo di spostamento:

$$\begin{aligned} u_x^k &= u_{x_1}^k F_1^k(x, z) + \dots + u_{x_N}^k F_N^k(x, z) \\ u_y^k &= u_{y_1}^k F_1^k(x, z) + \dots + u_{y_N}^k F_N^k(x, z) \\ u_z^k &= u_{z_1}^k F_1^k(x, z) + \dots + u_{z_N}^k F_N^k(x, z) \end{aligned}$$

dove $k = 1, \dots, N_{layers}$ indica ogni singolo strato, mentre le funzioni $F_1(x, z), \dots, F_N(x, z)$ definiscono gli ordini $1, \dots, N$ dei polinomi di Lagrange.

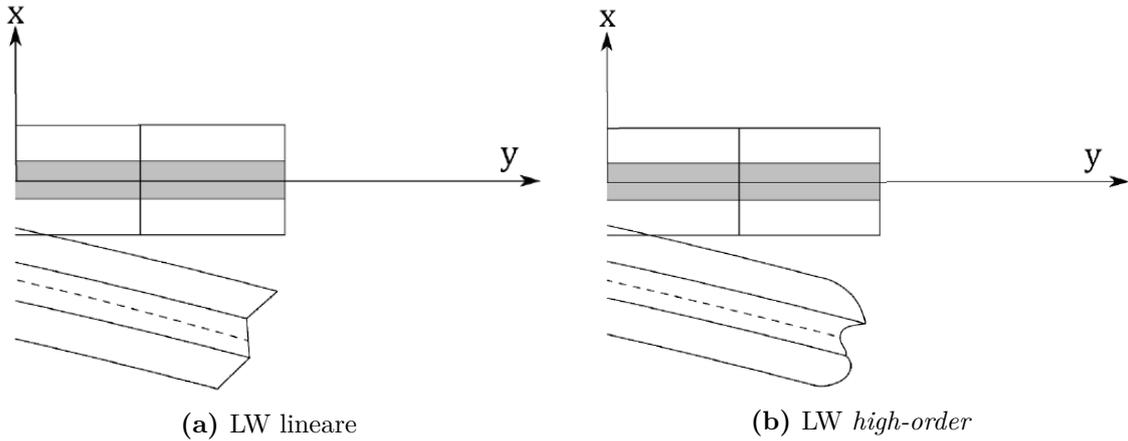


Figura 3.3: Teorie strutturali nei casi 1D.

I polinomi LE sono solitamente implementati in termini di coordinate normalizzate (r, s) , anche dette naturali. Questa scelta non è obbligatoria, poiché i polinomi LE possono essere implementati anche in termini di coordinate reali. Tuttavia, la formulazione normalizzata è stata preferita in quanto offre molti vantaggi. A tal proposito, vengono illustrati gli elementi L4 e L16 nella Figura 3.4. I polinomi di Lagrange quadrilateri più semplici (LE4) comportano la seguente espressione:

$$F_\tau = \frac{1}{4}(1 + rr_\tau)(1 + ss_\tau) \quad \tau = 1, 2, 3, 4 \quad (3.13)$$

dove r e s sono le cosiddette coordinate normalizzate e r_τ e s_τ rappresentano le coordinate dei quattro punti nel sistema di coordinate naturali.

In questo modo, si ottengono le funzioni di spostamento presentate nell'Eq.(3.14), in relazione ad un sistema di riferimento naturale (r, s) , il quale consente di ricavare determinati valori legati all'elemento quadrilatero: $F_1(-1, -1) = 1$, $F_2(1, -1) = 1$, $F_3(1, 1) = 1$, $F_4(-1, 1) = 1$.

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{4}(1-r)(1-s) \quad , \quad F_2 = \frac{1}{4}(1+r)(1-s) \\ F_3 &= \frac{1}{4}(1+r)(1+s) \quad , \quad F_4 = \frac{1}{4}(1-r)(1+s) \end{aligned} \quad (3.14)$$

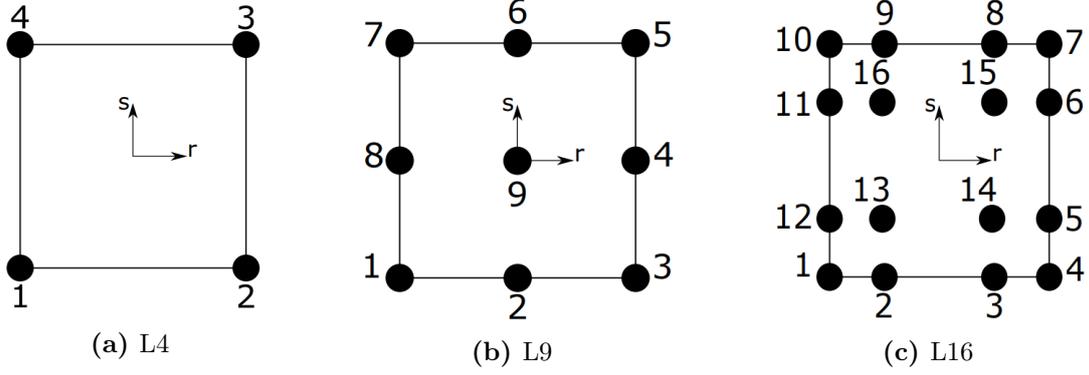


Figura 3.4: Elementi di Lagrange quadrilateri della sezione trasversale, nel sistema di coordinate naturali (r, s) .

In riferimento all'elemento L9, nonché il modello ampiamente indagato nel corso del corrente studio, è mostrato in Fig. rispetto al sistema di coordinate normalizzate, dove i valori di r e s variano da -1 a $+1$, per semplicità di rappresentazione. In questo caso, le funzioni di interpolazione assumono la seguente forma:

$$\begin{aligned} F_\tau &= \frac{1}{4}(r^2 + rr_\tau)(s^2 + ss_\tau) \quad \tau = 1, 3, 5, 7 \\ F_\tau &= \frac{1}{2}s_\tau^2(s^2 + ss_\tau)(1 - r^2) + \frac{1}{2}r_\tau^2(r^2 + rr_\tau)(1 - s^2) \quad \tau = 2, 4, 6, 8 \\ F_\tau &= (1 - r^2)(1 - s^2) \quad \tau = 9 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Pertanto, il campo degli spostamenti relativo ad un elemento polinomiale L9 è descritto dal seguente sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} u_x &= F_1u_{x_1} + F_2u_{x_2} + F_3u_{x_3} + F_4u_{x_4} + F_5u_{x_5} + F_6u_{x_6} + F_7u_{x_7} + F_8u_{x_8} + F_9u_{x_9} \\ u_y &= F_1u_{y_1} + F_2u_{y_2} + F_3u_{y_3} + F_4u_{y_4} + F_5u_{y_5} + F_6u_{y_6} + F_7u_{y_7} + F_8u_{y_8} + F_9u_{y_9} \\ u_z &= F_1u_{z_1} + F_2u_{z_2} + F_3u_{z_3} + F_4u_{z_4} + F_5u_{z_5} + F_6u_{z_6} + F_7u_{z_7} + F_8u_{z_8} + F_9u_{z_9} \end{aligned} \quad (3.16)$$

con le variabili di spostamento u_{x_1}, \dots, u_{z_9} , le quali rappresentano le componenti di spostamento in traslazione di ognuno dei nove punti dell'elemento L9. Si può notare che gli elementi LE possono essere assemblati per creare forme più complesse della *cross-section* o per il raffinamento mediante diversi elementi di Lagrange, di cui sono presenti maggiori dettagli nel lavoro di Carrera e Petrolo [46].

Come già affermato, che le configurazioni LE sono adottate nei modelli di compositi soprattutto mediante la teoria *Layer- Wise*, anche se può essere utilizzata anche per quella ESL. L'approccio LW descrive i compositi laminati come un insieme di singoli strati. Pertanto, il campo di spostamento è definito separatamente in ciascun materiale del laminato. Al fine di garantire la continuità degli spostamenti alle interfacce, il processo di omogeneizzazione viene applicato solo in corrispondenza delle stesse interfacce. Una descrizione dettagliata delle teorie a strati è presentata da Liew and al.[47]. In particolare, gli approcci ESL e LW vengono identificati all'interno di un unico approccio denominato *Component-Wise*, come esposto da Carrera e al.[48]. Una rappresentazione visiva delle matrici ESL e LW è presentata nella Figura 3.5, per comprendere meglio la differenza del processo di omogeneizzazione per l'assemblaggio della matrice.

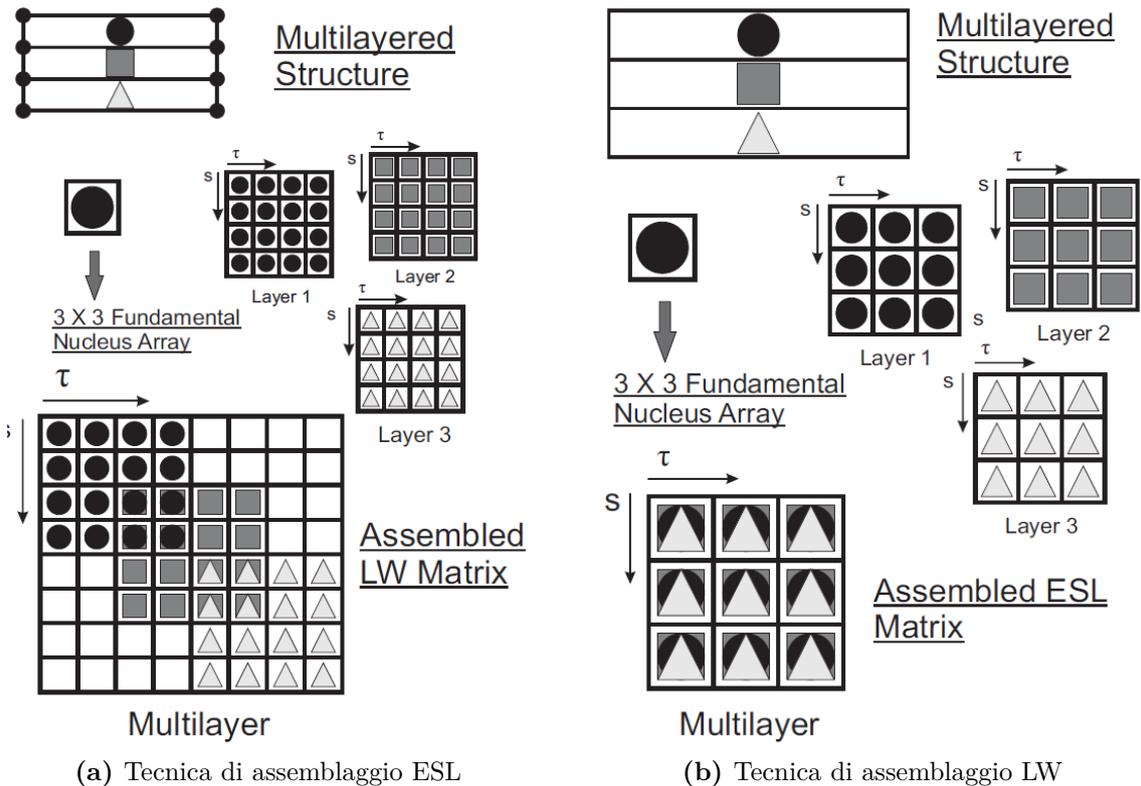


Figura 3.5: Approcci *Component-Wise* per strutture laminate.

3.2.2 FEM

La formulazione agli elementi finiti ha la funzione di determinare la forma *weak* delle equazioni di governo. Infatti, il FEM permette di superare i limiti delle soluzioni analitiche legati alla geometria, al carico e alle condizioni al contorno. In tal senso, le equazioni di governo di un sistema possono essere derivate mediante diversi principi della meccanica, come il Principio degli spostamenti virtuali (PVD), il Principio di D'Alembert e il Principio di Hamilton. Indipendentemente dalla teoria, il metodo CUF attribuisce forme indipendenti dall'ordine dei modelli ai termini delle equazioni di governo (massa, rigidità, smorzamento e matrici di carico). Il metodo agli elementi finiti richiede l'introduzione delle funzioni di forma N_i e del vettore spostamento nodale $q_{\tau i}$, il quale viene definito secondo la seguente espressione:

$$q_{\tau i} = \{q_{u_{x\tau i}} \quad q_{u_{y\tau i}} \quad q_{u_{z\tau i}}\}^T \quad \tau = 1, 2, \dots, M \ ; \ i = 1, 2, \dots, N_{node}$$

dove i indica il nodo dell'elemento considerato e N_{node} il numero dei nodi per ogni singolo elemento. L'applicazione del CUF impiega il metodo FE per discretizzare il campo di spostamento lungo l'asse longitudinale y per le travi, oppure sulla sezione trasversale per piastre e gusci. Ricordando l'Eq.(3.9), si ricava il vettore spostamento generalizzato lungo l'asse y , in riferimento al modello trave largamente analizzato:

$$u_{\tau}(y, t) = N_i(y) q_{\tau i}(t) \quad (3.17)$$

Dunque, applicando il modello CUF, con l'apporto di elementi finiti 1D, viene elaborato il campo degli spostamenti tridimensionale presentato nell'Eq.(3.18), per la trave. Inoltre, la Figura consente di visualizzare le potenzialità del metodo CUF, in associazione agli FE, per quanto riguarda la discretizzazione delle strutture, sia di tipo trave che piastra.

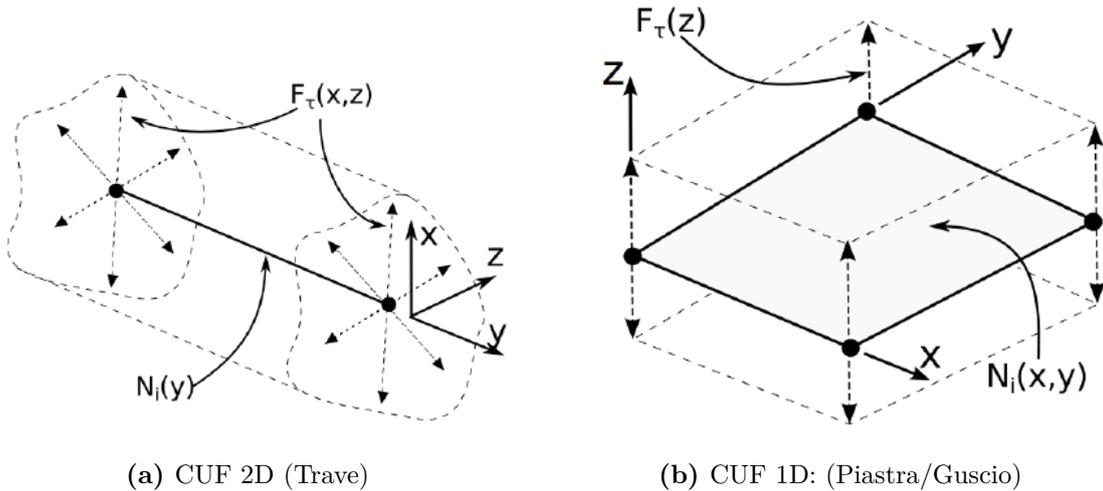


Figura 3.6: Rappresentazione dei modelli strutturali mediante CUF.

$$u(x, y, z) = F_\tau(x, z) N_i(y) q_{\tau i} \quad (3.18)$$

In questo lavoro, vengono implementati tre tipi di elementi trave per definire l'interpolazione della variabile di spostamento lungo l'asse longitudinale della medesima trave: lineare con due nodi (B2), quadratico con tre nodi (B3) e cubico con quattro nodi (B4).

3.3 Modello CUF applicato alla dinamica dei rotori: strutture *spinning*

3.3.1 Principio di Hamilton

L'analisi concernente la dinamica dei rotori della pala implica un procedimento dedicato, al fine di ottenere le equazioni del moto nella forma ottimizzata elaborata dalla CUF. Dunque, l'impostazione del problema richiede l'introduzione del Principio di Hamilton, il quale consente di determinare le EoM relative alla dinamica dei rotori. In riferimento ad un percorso newtoniano, un sistema che evolve da uno stato al tempo t_1 a un altro al tempo t_2 , ammette una soluzione stazionaria, la quale determina un'invarianza nell'intervallo di tempo. Pertanto, la variazione dell'energia cinetica, potenziale e del lavoro indotto dalle forze non conservative è pari a zero, in quell'intervallo di tempo. Tale ipotesi porta alla seguente espressione:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt + \delta \int_{t_1}^{t_2} W_{nc} dt \quad (3.19)$$

dove risaltano le energie cinetica T e potenziale U (affine all'energia di deformazione e al potenziale delle forze esterne conservative) nel sistema di riferimento rotante, il lavoro generato dalle forze non conservative W_{nc} sul sistema e la variazione virtuale δ , la quale definisce le perturbazioni cinematiche del modello. I suddetti termini del Principio di Hamilton vengono presentati rispetto alle coordinate q_i e forze Q_i generalizzate:

$$\begin{aligned} \delta T &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \\ \delta U &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial U}{\partial q_i} \delta q_i \right) \\ \delta W_{nc} &= \sum_{i=1}^n (\partial Q_i \delta q_i) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Sostituendo le espressioni dell'Eq.(3.20) nell'Eq.(3.19) si ottiene l'Eq.(3.21), a seguito di un'integrazione per parti.

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial U}{\partial q_k} + Q_k \right) \delta q_k \right] dt = 0 \quad (3.21)$$

L'applicazione del concetto variazionale introdotto dall'Eq.(3.19) consente di ricavare le EoM indipendentemente dalle condizioni del sistema. I valori stazionari riferiti alla medesima equazione iniziale (3.19) coincidono con le soluzioni delle equazioni di Lagrange (Eq.(3.22)), le quali definiscono in modo analogo le equazioni del moto, conferendo al sistema variazioni arbitrarie e indipendenti relative al modello in esame.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial q_k} = Q_k \quad (3.22)$$

3.3.2 Valutazione della matrice di rigidezza

A questo punto, il procedimento richiede di definire l'energia potenziale U , la quale viene espressa nell'Eq.(3.23), al fine di elaborare la matrice di rigidezza. Le grandezze introdotte seguono la formulazione presentata nella sezione 3.1 relativa al CUF. All'interno dell'equazione, sono individuati il vettore spostamento u , la matrice degli operatori differenziali lineari D dell'Eq.(3.4) e la matrice dei coefficienti del materiale C descritta nell'Eq.(3.6). Pertanto, la matrice di rigidezza e il vettore di carico sono definite in accordo con il Principio di Hamilton Eq.(3.19), in conformità con lo studio dinamico dei rotori.

$$U = \frac{1}{2} \int_V (u^T D^T C D u) dV \quad (3.23)$$

In riferimento all'applicazione di un carico concentrato $P = P_x P_y P_z^T$, applicato in un generico punto (x^p, y^p, z^p) della struttura rotante, ed alla condizione di energia cinetica nulla, si ottengono le seguenti espressioni. Dunque, le formulazioni CUF e FE, rispettivamente definite mediante l'Eq.(3.9) e l'Eq.(3.17) nelle sezioni precedenti, consentono di elaborare il modello strutturale. Introducendo la matrice di rigidezza $K^{ij\tau s}$ e il vettore relativo al carico $\tilde{P}^{i\tau}$ presentati nell'Eq.(3.25) elaborata da Carrera e Filippi [33], viene determinata l'espressione mediante i termini di riferimento specifici dell'analisi esposta.

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\int_V \delta u^T (D^T C D) u dV - \delta u^T P \right) dt = 0$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\delta q_{\tau i}^T K^{ij\tau s} q_{sj} - \delta q_{\tau i}^T \tilde{P}^{i\tau} \right) dt = 0 \quad (3.24)$$

specificatamente, si ricavano

$$\begin{aligned}
 K^{ij\tau s} = & I_l^{ij} \triangleleft D_{np}^T(F_\tau I) \left[C_{np}^k D_p(F_s I) + C_{nn}^k D_{np}(F_s I) \right] + \\
 & + D_p^T(F_\tau I) \left[C_{pp}^k D_p(F_s I) + C_{pn}^k D_{np}(F_s I) \right] \triangleright + \\
 & + I_l^{ij,y} \triangleleft \left[D_{np}^T(F_\tau I) + D_p^T(F_\tau I) C_{pn} \right] F_s \triangleright + I_{Ay} \\
 & + I_l^{i,yj} I_{Aj}^T \triangleleft F_\tau \left[C_{np}^k D_p(F_s I) + C_{nn}^k D_{np}(F_s I) \right] \triangleright + \\
 & + I_l^{i,yj,y} I_{Ay}^T I_{Ay} \triangleleft F_\tau C_{nn}^k F_s \triangleright \\
 \tilde{P}^{i\tau} = & N_i(y^p) F_\tau(x^p, z^p) P
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

dove

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_{Ay} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \triangleleft \dots \triangleright = \int_A \dots dA$$

$$(I_l^{ij}, I_l^{ij,y}, I_l^{i,yj}, I_l^{i,yj,y}) = \int_l (N_i N_j, N_i N_{j,y}, N_{i,y} N_j, N_{i,y} N_{j,y}) dy$$

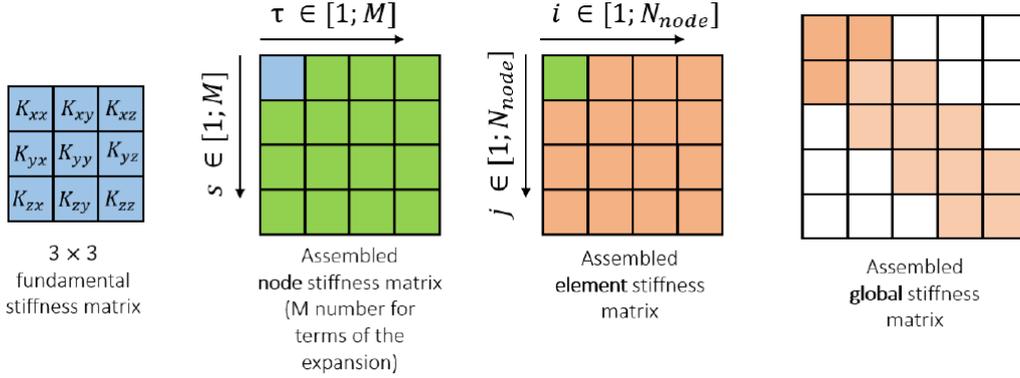


Figura 3.7: Procedimento di assemblaggio della matrice di rigidezza $K^{ij\tau s}$.

A tal proposito, la matrice di rigidezza $K^{ij\tau s}$ richiede un ulteriore approfondimento riguardante le nove componenti del nucleo fondamentale relative alla stessa matrice, dettagliatamente presentate in [33]. Pertanto, la complessità del problema necessita di un procedimento specifico, rappresentato in Fig.3.7, il quale impiega gli indici i, j, τ, s al fine di assemblare in modo puntuale la matrice di rigidezza complessiva del sistema. Dalle suddette assunzioni, è possibile osservare che la matrice di rigidezza $K^{ij\tau s}$ non dipende né dall'ordine dell'espansione caratteristica né dalla scelta dei polinomi di espansione F_τ . Infatti, la procedura CUF è in grado di implementare teorie multi-classe di qualsiasi ordine, mediante solo nove enunciati ed un conseguente risparmio computazionale rilevante.

3.3.3 Energia cinetica

La struttura analizzata è posta in rotazione, quindi è necessario valutare le forze e i momenti inerziali. Il modello simula una trave che ruota liberamente rispetto al suo asse longitudinale ed è supportata da N_b cuscinetti; come mostrato in Fig.3.8, la struttura gira con una velocità angolare Ω . Tali implementazioni richiedono alcune modifiche del principio di Hamilton, il quale considera i nuovi contributi legati ai cuscinetti (W_b) e all'effetto centrifugo (U_{σ_0}) ed assume la seguente espressione:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - (U + U_{\sigma_0}) + W_b) dt = 0 \quad (3.26)$$

In merito al sistema di riferimento rotante ed alla relativa sezione trasversale della figura sottostante, l'energia cinetica di una trave rotante si ottiene esprimendo la velocità assoluta del punto P , come dimostrato da Carrera et al.[32].

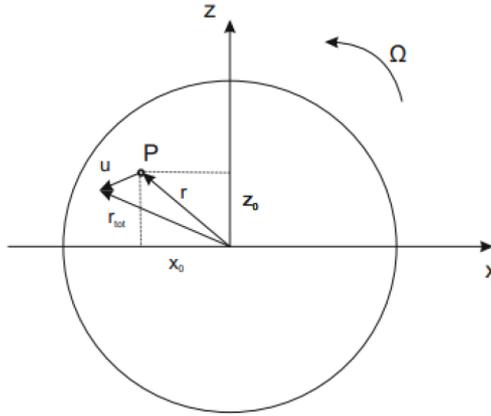


Figura 3.8: *Sketch* del sistema di riferimento per una trave rotante: vista della *cross-section*.

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Omega \\ 0 & 0 & 0 \\ -\Omega & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La velocità assoluta in corrispondenza del punto P generico è determinata dalla somma delle velocità relative e di trasferimento. L'espressione di tale velocità assoluta v_{abs} è la seguente:

$$v_{abs} = v_{rel} + v_{tr} = \dot{u} + \Omega \times r_{tot} \quad (3.27)$$

dove $r_{tot} = r + u$ è la distanza raffigurata tra il punto P e l'asse neutro.

Dunque, si ricava l'equazione dell'energia cinetica del modello strutturale in esame:

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \left(\dot{u}^T \dot{u} + 2u^T \Omega^T \dot{u} + u^T \Omega^T \Omega u + 2\dot{u}^T \Omega r + 2u^T \Omega^T \Omega r + r^T \Omega^T \Omega r \right) dV \quad (3.28)$$

in cui sono definiti u come il vettore spostamento, r è la distanza di un punto P appartenente all'albero rispetto all'asse neutro e Ω è la matrice della velocità di rotazione.

3.3.4 Vibrazioni delle strutture rotanti

I campi di spostamento, deformazione e sollecitazione sono introdotti nell'Equazione 3.29 per un modello a guscio. Sebbene la derivazione sia mostrata per i gusci, va sottolineato che relazioni simili valgono per i modelli a trave [49]. Pertanto, le deformazioni sono ottenute come

$$\begin{aligned} u &= u_\alpha u_\beta u_{zT} \\ \epsilon &= \epsilon_{\alpha\alpha} \epsilon_{\beta\beta} \epsilon_{zz} \epsilon_{\alpha z} \epsilon_{\beta z} \epsilon_{\alpha\beta T} \\ \sigma &= \sigma_{\alpha\alpha} \sigma_{\beta\beta} \sigma_{zz} \sigma_{\alpha z} \sigma_{\beta z} \sigma_{\alpha\beta T} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Le relazioni spostamento-deformazione e la legge di Hooke sono scritte come segue:

$$\begin{aligned} \epsilon &= (b_l + b_{nl}) u \\ \sigma &= C \epsilon \end{aligned} \quad (3.30)$$

dove ϵ sta per il tensore di deformazione completo di Green-Lagrange, C indica la matrice elastica del materiale, b_l e b_{nl} sono gli operatori differenziali lineari e non lineari, rispettivamente. Per brevità, si rimanda il lettore a [50],[51] per una descrizione completa di queste matrici. Secondo CUF e FEM, il campo di spostamento 3D è scritto come:

$$\begin{aligned} \text{Beam} : u(x, y, z; t) &= F_\tau(x, z) N_i(y) q_{\tau i}(t) \quad \tau = 1, \dots, M \quad i = 1, \dots, N_n \\ \text{Shell} : u(\alpha, \beta, z; t) &= F_\tau(z) N_i(\alpha, \beta) q_{\tau i}(t) \quad \tau = 1, \dots, M \quad i = 1, \dots, N_n \end{aligned} \quad (3.31)$$

in cui F_τ rappresenta un insieme di funzioni delle coordinate x e z della sezione trasversale per la trave e funzioni di espansione dello spessore lungo l'asse z per il modello a guscio, N_i indica le funzioni di forma sull'asse della trave e sulla superficie media del guscio, $q_{\tau i}$ rappresenta le variabili nodali incognite, M rappresenta l'ordine dell'espansione, N_n è il numero di nodi per elemento, t indica il tempo e gli indici ripetuti stanno per somma. Si rimanda a [52] per una spiegazione completa delle derivazioni matematiche nel formalismo CUF. La classe della teoria cinematica è determinata dalla scelta di F_τ . In questo lavoro, per discretizzare la sezione trasversale della trave e lo spessore del guscio si adottano sia le funzioni di espansione

di Lagrange (LE) sia quelle di espansione di Taylor (TE). Per i modelli di trave, la TE di ordine N o, utilizzando LE, i polinomi a quattro punti (L4), a nove punti (L9) e a sedici punti (L16) possono essere adottati per costruire cinematiche di ordine basso o elevato. Per i modelli a guscio, invece, si assume l'acronimo LDN (Lagrange Expansion, Displacement-based theory with the order N) per riferirsi a gusci specificamente raffinati. Ad esempio, LE3 rappresenta le funzioni di espansione di Lagrange cubiche (quattro nodi). Si rimanda alla Figura 3.9 per la discretizzazione strutturale con modelli di travi e gusci.

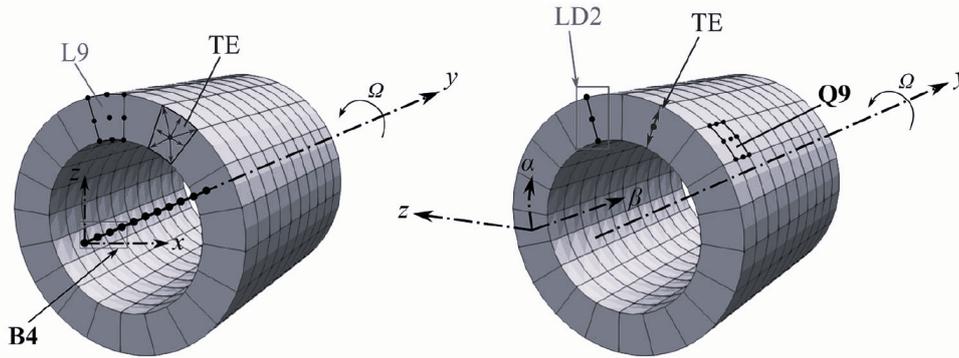


Figura 3.9: Generica struttura rotante discretizzata utilizzando modelli a trave (sinistra) e a guscio (destra).

Per le funzioni di forma nel piano a b si utilizzano i classici FE 1D a due (B2), tre (B3) e quattro (B4) nodi, ovvero con approssimazione lineare, quadratica e cubica lungo l'asse della trave, mentre per le funzioni di forma nel piano $\alpha - \beta$ si adottano i classici FE 2D a quattro nodi lineari (Q4), nove nodi quadratici (Q9) e sedici nodi cubici (Q16). Per completezza, ulteriori dettagli sulle teorie cinematiche TE e LE sono disponibili negli elaborati [31],[52],

Il principio del lavoro virtuale (PLV) viene utilizzato per derivare le equazioni di governo non lineari agli elementi finiti (FE). Esso stabilisce la condizione di equilibrio tra i lavori virtuali eseguiti dalle deformazioni, dalle forze inerziali e dai carichi esterni. I lavori virtuali sono scritti in termini di FNs della matrice di rigidità secante $K_S^{ij\tau s}$, della matrice di massa $M^{ij\tau s}$, della matrice di Coriolis $G^{ij\tau s}$, della matrice di *spin softening* $K_\Omega^{ij\tau s}$, del vettore forza centrifuga F_Ω^{sj} e del vettore forza nodale F^{sj} , rispettivamente, sono riportati di seguito. Per completezza, le derivazioni complete delle FNs della matrice di Coriolis, della matrice di addolcimento dello

spin e del vettore forza centrifuga sono riportate in A.3.

$$\begin{aligned}
 \delta L_{int} &= \int_V \delta \epsilon^T \sigma dV = \delta q_{sj}^T \left(K_0^{ij\tau s} + K_{lnl}^{ij\tau s} + K_{nll}^{ij\tau s} + K_{nlnl}^{ij\tau s} \right) q_{\tau i} = \delta q_{sj}^T K_S^{ij\tau s} q_{\tau i} \\
 \delta L_{ine} &= \int_V \delta \hat{u}^T F_I dV = \delta q_{sj}^T \left(M^{ij\tau s} q_{\tau i} + G^{ij\tau s} q_{\tau i} + K_{\Omega}^{ij\tau s} q_{\tau i} + F_{\Omega}^{sj} \right) \\
 \delta L_{ext} &= \delta q_{sj}^T F^{sj}
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

Le forze inerziali di una struttura in rotazione attorno all'asse b sono:

$$F_I = -\rho \begin{Bmatrix} \hat{u}_{\alpha} \\ \hat{u}_{\beta} \\ \hat{u}_z \end{Bmatrix} - 2\rho\Omega \begin{Bmatrix} \hat{u}_{\alpha} \\ 0 \\ \hat{u}_z \end{Bmatrix} + \rho\Omega^2 \begin{Bmatrix} \hat{u}_{\alpha} \\ 0 \\ \hat{u}_z \end{Bmatrix} - \rho\Omega^2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ z_e \end{Bmatrix} \tag{3.33}$$

in cui gli apici i, j, τ, s identificano i quattro indici sfruttati per assemblare le matrici e i vettori globali.

Se si applicano carichi esterni F , l'equazione non lineare da risolvere è:

$$K_S q_e = F + F_{\Omega} \tag{3.34}$$

La soluzione q_e è calcolata con uno schema di linearizzazione Netwon-Raphson. In particolare, linearizzando la variazione virtuale delle deformazioni interne, vengono introdotte le FNs della matrice di rigidità tangente (K_T) e della matrice di rigidità geometrica (K_{σ}).

$$\delta(\delta L_{int}) = \delta q_{sj}^T \left(K_0^{ij\tau s} + K_{T1}^{ij\tau s} \right) \delta q_{\tau i} + q_{sj}^T K_{\sigma}^{ij\tau s} \delta q_{\tau i} = q_{sj}^T K_T^{ij\tau s} \delta q_{\tau i} \tag{3.35}$$

Si rimanda al lavoro presentato da [53] per la derivazione dettagliata della matrice di rigidezza tangente. In questo elaborato, si adotta un approccio geometrico non lineare in forma linearizzata, in cui la K_T è semplificata come segue:

$$K_T \approx K_0 + K_{\sigma}^* \tag{3.36}$$

dove K_0 rappresenta la matrice di rigidezza lineare e K_{σ}^* è la nuova matrice di rigidezza geometrica che deriva dalla considerazione del vettore di deformazione non lineare moltiplicato per la componente lineare del vettore di sollecitazione iniziale indotto dalla rotazione, la quale è calcolata attraverso un'analisi statica lineare.

Le frequenze naturali ω e le relative forme dei modi \bar{q} , le quali sono associate alle vibrazioni di piccola ampiezza, sono calcolate assumendo una soluzione armonica. Il problema quadratico degli autovalori (QEP) viene risolto con le medesime modalità espresse in [33].

$$M\ddot{\hat{q}} + \Omega G\dot{\hat{q}} \left(K_0 + \Omega^2 K_{\sigma}^* + K_{\Omega} \right) \hat{q} = 0 \tag{3.37}$$

3.3.5 Effetti centrifughi

Conseguentemente ai moti assunti fino ad ora, è importante valutare i contributi relativi all'albero della struttura, ed in particolare legati alla sua deformabilità caratteristica. Infatti, lo studio richiede un approfondimento a riguardo della flessione dello stesso albero, a cui viene attribuita un'energia potenziale addizionale U_{σ_0} relativa alla geometria. Considerando l'albero come una struttura altamente deformabile posta in rotazione, la dinamica del sistema necessita di questo termine aggiuntivo, il quale comporta effetti non trascurabili:

$$U_{\sigma_0} = \int_V \sigma_0 \epsilon^{nl} dV \quad (3.38)$$

dove σ_0 è il pre-carico ed ϵ^{nl} rappresenta le componenti non-lineari relative alle deformazioni. Nel caso di strutture con simmetria rispetto all'asse, il termine σ_0 del pre-carico si ottiene mediante la valutazione dei contributi tangenziali, radiali e assiali, i quali sono indicati rispettivamente da $\sigma_{\delta\delta}$, σ_{rr} e σ_{yy} . In riferimento al sistema di coordinate cartesiane presentato nella Figura 3.10, le espressioni relative ai carichi ricavati da [49] sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \sigma_{0_{xx}} &= \sigma_{\delta\delta} \sin(\delta)^2 + \sigma_{rr} \cos(\delta)^2 \\ \sigma_{0_{yy}} &= \sigma_{yy} \\ \sigma_{0_{zz}} &= \sigma_{\delta\delta} \cos(\delta)^2 + \sigma_{rr} \sin(\delta)^2 \\ \sigma_{0_{xz}} (= \sigma_{0_{zx}}) &= \sigma_{rr} \sin(\delta)\cos(\delta) - \sigma_{\delta\delta} \sin(\delta)\cos(\delta) \end{aligned}$$

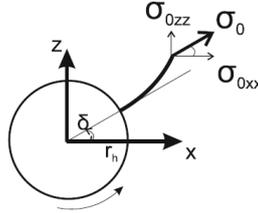


Figura 3.10: Coordinate di riferimento del materiale: rigidità centrifuga.

Pertanto, la seguente formulazione definisce l'energia potenziale legata agli effetti dovuti alla forza centrifuga, per una geometrie e materiali generici:

$$U_{\sigma_0} = \int_V \sigma_{0_{xx}} \epsilon_{xx}^{nl} + \sigma_{0_{zz}} \epsilon_{zz}^{nl} + \sigma_{0_{xz}} \epsilon_{xz}^{nl} + \sigma_{0_{zx}} \epsilon_{zx}^{nl} dV \quad (3.39)$$

3.3.6 Equazioni del moto

Come effettuato in precedenza nella sezione 3.3.2, viene applicato il principio di Hamilton ed i termini introdotti sono manipolati mediante i modelli CUF (Eq.(3.9)) e

FE (Eq.(3.17)). Tali approssimazioni consentono di descrivere il moto della struttura, poiché vengono considerati tutti i contributi presentati nelle sezioni precedenti e inseriti nell'Eq.(3.26), sostituendo le corrispondenti equazioni Eq.(3.23, 3.28, 3.39) relative ai singoli fenomeni e proprietà. In questo modo, si ricava la seguente espressione del problema:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\delta q_{\tau i}^T M^{ij\tau s} \ddot{q}_{sj} + \delta q_{\tau i}^T G_{TOT}^{ij\tau s} \dot{q}_{sj} + \delta q_{\tau i}^T K_{TOT}^{ij\tau s} q_{sj} + \delta q_{\tau i}^T F_{\Omega}^{i\tau r} \right) dt = 0 \quad (3.40)$$

da cui è possibile estrapolare il valore delle matrici $G_{TOT}^{ij\tau s}$ e $K_{TOT}^{ij\tau s}$, come somma di contributi specifici:

$$\begin{aligned} G_{TOT}^{ij\tau s} &= G_{\Omega}^{ij\tau s} + G_b^{ij\tau s} \\ K_{TOT}^{ij\tau s} &= K^{ij\tau s} + K_b^{ij\tau s} + K_{\Omega}^{ij\tau s} + K_{\sigma_0}^{ij\tau s} \end{aligned}$$

Oltre alle matrici già esplicitate nell'Eq.(3.40), sono introdotti dei termini aggiuntivi, i quali risultano una conseguenza della rotazione:

- matrice di massa $M^{ij\tau s}$
- matrice di Coriolis $G_{\Omega}^{ij\tau s}$
- matrice di smorzamento del cuscinetto $G_b^{ij\tau s}$
- matrice di rigidezza $K^{ij\tau s}$
- matrice di rigidezza del cuscinetto $K_b^{ij\tau s}$
- matrice di *spin softening* $K_{\Omega}^{ij\tau s}$
- matrice di rigidezza centrifuga $K_{\sigma_0}^{ij\tau s}$
- vettore di carico $F_{\Omega}^{i\tau}$

A proposito di queste grandezze, sono state definiti da [54] i nuclei fondamentali delle matrici elencate di cui sopra, mediante il medesimo procedimento eseguito a riguardo della matrice di rigidezza $K^{ij\tau s}$ in occasione dell'Eq.(3.25). Di seguito, sono proposte le formulazioni dei nuclei fondamentali relative alle matrici caratteristiche

del modello:

$$\begin{aligned}
 M^{ij\tau s} &= I_l^{ij} \triangleleft (F_\tau \rho^k I F_s) \triangleright \\
 G_\Omega^{ij\tau s} &= I_l^{ij} \triangleleft (F_\tau \rho^k I F_s) \triangleright 2\Omega \\
 G_b^{ij\tau s} &= \sum_{p=1}^{N_b} N_i(y_b^p) F_\tau(x_b^p, z_b^p) C_b^p F_s(x_b^p, z_b^p) N_j(y_b^p) \\
 K_b^{ij\tau s} &= \sum_{p=1}^{N_b} N_i(y_b^p) F_\tau(x_b^p, z_b^p) K_b^p F_s(x_b^p, z_b^p) N_j(y_b^p) \\
 K_\Omega^{ij\tau s} &= -I_l^{ij} \triangleleft (F_\tau \rho^k I F_s) \triangleright \Omega^T \Omega \\
 K_{\sigma_0}^{ij\tau s} &= I_l^{ij} \triangleleft (F_{\tau,x} \sigma_{0,xx} I F_{s,x}) + (F_{\tau,z} \sigma_{0,zz} I F_{s,z}) + \\
 &\quad + (F_{\tau,x} \sigma_{0,xz} I F_{s,z}) + (F_{\tau,z} \sigma_{0,zx} I F_{s,x}) \triangleright \\
 F_\Omega^{i\tau} &= I_l^i \Omega^T \Omega \triangleleft (F_\tau I \rho r) \triangleright
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

dove

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \triangleleft \dots \triangleright = \int_A \dots dA$$

$$(I_l^i, I_l^{ij}, I_l^{ij,y}, I_l^{i,yj}, I_l^{i,yj,y}) = \int_l (N_i, N_i N_j, N_i N_{j,y}, N_{i,y} N_j, N_{i,y} N_{j,y}) dy$$

e $r = \{x_P, 0, z_P\}^T$ è la distanza di un generico punto P sulla sezione trasversale dall'asse neutro.

Inoltre, i nuovi nuclei fondamentali delle matrici introdotte è possibile esprimerli in forma matriciale, le quali sono presentate nell'Appendice A.1.

Dunque, si impone l'ipotesi che la soluzione è espressa mediante una funzione periodica $q = \bar{q} e^{i\omega t}$; di conseguenza, la risoluzione del problema determina le frequenze naturali e i modi del rotore, in relazione al modello definito da un'equazione omogenea del tipo

$$M\ddot{q} + G_{TOT}\dot{q} + K_{TOT}q = 0 \tag{3.42}$$

Assumendo tale soluzione esponenziale e derivando l'Eq.(3.42), si ricava il seguente polinomio caratteristico:

$$\bar{q} e^{i\omega t} [K_{TOT} + G_{TOT}i\omega - M\omega^2] = 0 \tag{3.43}$$

Pertanto, l'Eq.(3.43) viene catalogato come un *quadratic eigenvalues problem* (QEP) di ordine R , dove il termine ω è legato alle frequenze naturali e allo smorzamento del modello. La definizione del QEP consente di formulare un sistema lineare agli autovalori di ordine $2 \times R$ [32], dove R è il numero di DOF:

$$\begin{cases} M\ddot{q} + G_{TOT}\dot{q} + K_{TOT}q = 0 \\ -\dot{q} + \dot{q} = 0 \end{cases} \tag{3.44}$$

A tal proposito, vengono introdotti due nuovi vettori, a e \dot{a} , al fine di rielaborare l'equazione del moto presentata nell'Eq.(3.45) in due varianti, entrambi in grado di semplificare la risoluzione del problema:

$$a = \begin{Bmatrix} q \\ \dot{q} \end{Bmatrix} \quad \dot{a} = \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} R\dot{a} + Ta &= 0 \\ \frac{R}{T} - \frac{1}{i\omega} I &= 0 \end{aligned} \quad (3.45)$$

da cui si ricava la seguente forma classica, avendo esplicitato la forma complessa di q nella seconda espressione dell'Eq.(3.45):

$$T^{-1}R = \begin{bmatrix} K_{TOT}^{-1}G_{TOT} & K_{TOT}^{-1}M \\ -I & 0 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

In riferimento all'Eq.(3.46), il problema viene ridotto ad un'equazione matriciale risolvibile mediante gli standard metodi agli autovalori. Tuttavia, le varie implementazioni innovative, con la funzione di ottimizzare il processo di calcolo numerico, sono oggetto di ulteriori modifiche per sviluppare un modello capace di simulare le diverse dinamiche legate ai rotori, come la rotazione della struttura attorno all'asse z (vedi Fig.3.11).

3.4 CUF: dinamica della pala rotante

In questa sezione conclusiva di applicazione alla dinamica dei rotori del modello costruito mediante la combinazione di FE e CUF, viene investigato il caso in Fig.3.11 di una struttura che ruota rispetto all'asse z . Pertanto, il procedimento è analogo a quello appena studiato per le strutture di tipo *spinning*. L'equazione di partenza viene definita sempre mettendo in atto il principio di Hamilton, il quale, nel modello specifico, non considera il lavoro svolto dai supporti:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - (U + U_{\sigma_0})) dt = 0 \quad (3.47)$$

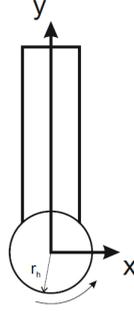


Figura 3.11: Sketch di una struttura irrigidita per gli effetti centrifughi: pala rotante rispetto all'asse z .

Dunque, i passaggi successivi implementano alcune modifiche alle definizioni ed alle soluzioni già descritte nella sezione 3.3. La matrice della velocità di rotazione costante attorno all'asse z assume una nuova interpretazione della formulazione:

$$\Omega = a = \begin{Bmatrix} 0 & -\Omega & 0 \\ \Omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

Conseguentemente, si ricava la seguente espressione dell'energia cinetica globale del sistema:

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \left(\dot{u}^T \dot{u} + 2u^T \Omega^T \dot{u} + u^T \Omega^T \Omega u + 2\dot{u}^T \Omega r + 2u^T \Omega^T \Omega r \right) dV \quad (3.48)$$

Inoltre, le variazioni apportate influenzano ulteriormente l'energia potenziale legata agli effetti centrifughi. L'Eq.(3.49) dell'energia potenziale centrifuga coinvolge termini di deformazione non lineari differenti rispetto al caso precedente. Tra i contributi dell'energia potenziale U_{σ_0} , il parametro non lineare $u_{y,y}$ viene solitamente omesso in letteratura; nel caso in esame, il valore del medesimo termine può risultare rilevante, a causa dell'accoppiamento tra i moti assiali ed ortogonali.

$$U_{\sigma_0} = \frac{1}{2} \int_V \sigma_0 \left(u_{x,y}^2 + u_{y,y}^2 + u_{z,y}^2 \right) dV \quad (3.49)$$

3.4.1 Equazioni del moto

Le approssimazioni introdotte dai modelli CUF (Eq.(3.9)) e FE (Eq.(3.17)) consentono di descrivere il moto della struttura, partendo dall'Eq.(3.26) e sostituendo al suo interno le sopraccitate Eq.(3.47, 3.48, 3.49) relative alle nuove proprietà del modello strutturale. In questo modo, si ricava la seguente espressione del problema:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\delta q_{\tau i}^T M^{ij\tau s} \ddot{q}_{sj} + \delta q_{\tau i}^T G_{TOT}^{ij\tau s} \dot{q}_{sj} + \delta q_{\tau i}^T K_{TOT}^{ij\tau s} q_{sj} + \delta q_{\tau i}^T F_{\Omega}^{i\tau} r \right) dt = 0 \quad (3.50)$$

da cui è possibile estrapolare il valore delle matrici:

$$\begin{aligned} G_{TOT}^{ij\tau s} &= G_{\Omega}^{ij\tau s} \\ K_{TOT}^{ij\tau s} &= K^{ij\tau s} + K_b^{ij\tau s} + K_{\Omega}^{ij\tau s} + K_{\sigma_0}^{ij\tau s} \end{aligned}$$

I nuclei fondamentali dei termini $G_{\Omega}^{ij\tau s}$ e $K_{\Omega}^{ij\tau s}$ sono stati già presentati nella precedente sezione 3.3.6; invece, da [54] vengono riportate le modifiche riguardanti i seguenti contributi di rigidezza e carico, rispettivamente

$$\begin{aligned} K_{\sigma_0}^{ij\tau s} &= I_{l\sigma_0}^{i,yj,y} \triangleleft (F_{\tau} \rho I F_s) \triangleright \Omega^T \Omega \\ F_{\Omega}^{i\tau} &= I_{ly}^i \Omega^T \Omega \triangleleft (F_{\tau} I \rho) \triangleright \end{aligned} \quad (3.51)$$

dove

$$\left(I_{ly}^i, I_{l\sigma_0}^{i,yj,y} \right) = \int_l \left(y N_i, \sigma_0 N_{i,y} N_{j,y} \right) dy$$

Inoltre, i nuovi nuclei fondamentali delle matrici introdotte è possibile esprimerli in forma matriciale, le quali sono presentate nell'Appendice A.2.

Tale rappresentazione della dinamica relativa ai rotori, come la pala, consente di determinare le frequenze naturali e i modi, risolvendo il problema agli autovalori relativo all'equazione di riferimento del sistema:

$$T^{-1}R = \begin{bmatrix} K_{TOT}^{-1} G_{TOT} & K_{TOT}^{-1} M \\ -I & 0 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

Come risultato, le equazioni del moto risultano definite in una forma completamente tridimensionale, sia per le strutture in rotazione di tipo *spinning* che per quelle irrigidite in funzione degli effetti centrifughi, come quest'ultimo caso studiato. Nonostante le soluzioni siano in accordo i metodi FE delle strutture 3D, il modello elaborato è costituito effettivamente da elementi 1D-CUF, i quali ottimizzano il sistema dal punto di vista computazionale, senza perdere in termini di affidabilità. Le prestazioni del modello CUF sono state valutate nei successivi capitoli riservati ai risultati numerici.

3.5 Modelli aerodinamici: teorie stazionarie ed instazionarie

In funzione di definire in maniera completa il comportamento di un profilo aerodinamico in un fluido incomprimibile, associato ad oscillazioni armoniche, Theodorsen ha presentato una funzione della distribuzione di portanza che migliora il modello quasi-stazionario. Lo studio considera una superficie di controllo di una piastra che viene assunta come piatta, la quale può ruotare rispetto ad un asse, alla distanza

$x = b_c a$, in accordo con l'angolo di attacco Λ e può muoversi verticalmente, $h(t)$. L'espressione di Theodorsen per la previsione della portanza instazionaria è:

$$L_a = \pi \rho_a b_c^2 \left[\ddot{h} + V_\infty \dot{\alpha} - b_c a \ddot{\alpha} \right] + 2\pi \rho_a b_c V_\infty C(k) \left[\dot{h} + V_\infty \alpha + b_c \left(\frac{1}{2} - a \right) \dot{\alpha} \right] \quad (3.53)$$

in cui ρ_a è la densità dell'aria, b_c la semi-corda, V_∞ la velocità indisturbata a monte e il coefficiente di Theodorsen $C(k)$ è in funzione della frequenza ridotta $k = \frac{\omega b_c}{V_\infty}$ [55].

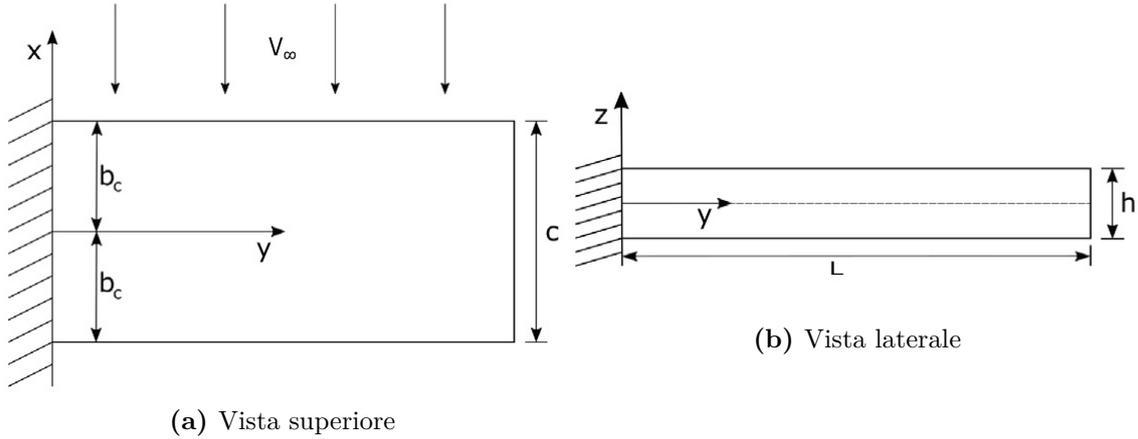


Figura 3.12: Schematizzazione del modello trave.

La posizione dell'asse di rotazione rispetto al centro della sezione, indicata come a , dipende dal carico applicato, dallo schema di laminazione utilizzato e dalle condizioni di supporto. A differenza del primo termine non circolatorio, ovvero il termine di massa aggiunta, il secondo termine dell'Eq.(3.53) è quello che tiene conto del moto circolare. In riferimento al secondo termine, quando la funzione di Theodorsen è pari all'unità, $C(k) = 1$, viene definito il caso **quasi-stazionario** (ST), mentre se la funzione di Theodorsen è una funzione complessa $C(k) = F(k) + iG(k)$ viene implementato un modello di **aerodinamica instazionaria** (TH). Inoltre, un'espressione semplificata di $C(k)$ è stata presentata da Jones [56], a partire dalla soluzione di Wagner (1925), che era interessato all'approssimazione esponenziale:

$$C(k) \equiv 1 - \frac{0.165}{1 - \left(\frac{0.0455}{k}\right) i} - \frac{0.335}{1 - \left(\frac{0.3}{k}\right) i}$$

Il primo termine dell'Eq.(3.53) può essere trascurato, poiché le proprietà di massa della struttura sono piccole e legate a termini differenziali del primo e del secondo ordine; quindi, si ottiene la seguente funzione della portanza:

$$L_a \equiv 2\pi \rho_a b_c V_\infty C(k) \left[\dot{h} + V_\infty \alpha \right] \quad (3.54)$$

Dunque, al fine di ottenere il coefficiente di portanza adimensionale C_L associato all'*aspect ratio* dell'ala (AR_w) e agli effetti dell'angolo di *sweep* (Λ), applicando l'approssimazione di Diederich viene ricavata l'espressione dovuta alla correzione:

$$C_{l\alpha} = \frac{dC_L}{d\alpha} = \frac{\pi AR_w}{\pi AR_w + C_{l\alpha 0} \cos(\Lambda)} C_{l\alpha 0} \cos(\Lambda)$$

dove l'*aspect ratio* è pari a $AR_w = \frac{2L_w}{c_m}$, che introduce la lunghezza dell'ala L_w e la corda media c_m (vedi Fig.3.12), e $C_{l\alpha 0}$ è indicato come la pendenza dell'evoluzione della portanza ($C_{l\alpha 0} \approx 2\pi$). Inoltre, l'analisi relativa alla quantità πb_c consente di sviluppare una soluzione ancor più accurata della distribuzione di pressione, in riferimento al dorso del profilo aerodinamico. Pertanto, il parametro πb_c viene definito mediante $\int_{-b_c}^{b_c} \sqrt{\frac{b_c-x}{b_c+x}} dx$; le Eq.(3.53) e (3.54) vengono riadattate e sono in grado di elaborare l'effetto della distribuzione di pressione relativi ad una geometria specifica del modello alare di interesse:

$$L_a = \frac{2\pi AR_w \cos(\Lambda)}{\pi AR_w + 2\pi \cos(\Lambda)} \int_{-b_c}^{b_c} \sqrt{\frac{b_c-x}{b_c+x}} dx \rho_a V_\infty C(k) \left[\dot{h} + V_\infty \alpha + b_c \left(\frac{1}{2} - a \right) \dot{\alpha} \right]$$

$$L_a \equiv \frac{2\pi AR_w \cos(\Lambda)}{\pi AR_w + 2\pi \cos(\Lambda)} \int_{-b_c}^{b_c} \sqrt{\frac{b_c-x}{b_c+x}} dx \rho_a V_\infty C(k) \left[\dot{h} + V_\infty \alpha \right]$$

Capitolo 4

Training: Codice CUF

4.1 Il codice CUF

Il gruppo di ricerca MUL^2 del Politecnico di Torino è specializzato nello studio di strutture *multistrato*, per analisi *multicampo*, utilizzando modelli strutturali avanzati. Il codice di calcolo è definito sulla base della Carrera Unified Formulation, associata ai modelli cinetici *node-dependent*, ed è scritto in Fortran. L'algoritmo targato MUL^2 consente lo sviluppo dei vari modelli avanzati, come trave, piastra e guscio, e ne simula il comportamento in condizioni statiche, dinamiche e aeroelastiche, oltre alle analisi di buckling e failure di strutture isotrope, composite, piezoelettriche ed FGM. L'ampia area di applicazione della CUF consente lo studio delle interazioni fluido-struttura, quindi il relativo sviluppo di modelli avanzati per la fluidodinamica.

L'analisi di convergenza del codice è il primo passo da compiere e, a tal scopo, è stata presa in esame una trave libera, con un incastro al bordo, a sezione quadrata e di materiale isotropo, le cui proprietà sono presenti nella tabella 4.1. Le prossime sezioni valutano gli studi di convergenza, in ambito sia dinamico che statico, i quali definiscono il modello adatto all'analisi rotorica.

Dati Analisi CUF	Valori Modello Trave
Lunghezza trave L [m]	10
Lunghezza del lato <i>cross-section</i> l [m]	1
Carico Applicato F_z [m]	10
Modulo di Young E [GPa]	70
Coefficiente di Poisson ν	0.3
Densità ρ [$\frac{kg}{m^3}$]	2700
α [K^{-1}]	$16.3 \cdot 10^{-6}$

Tabella 4.1: Proprietà della trave.

Dunque, il campo tridimensionale è suddiviso in due domini, una sezione trasversale 2D ed un asse 1D. Il codice interpola le funzioni *node-dependent* della sezione rispetto all'asse, mediante funzioni di forma Lagrangiane ai nodi, in grado di costruire il modello trave completo. Nella CUF l'ordine di espansione, e quindi l'accuratezza, di un modello strutturale è uno degli input dell'analisi. In questo modo, il punto di forza del metodo è la combinazione tra modelli ad alta accuratezza, per mezzo degli elementi di Lagrange, ed altri meno raffinati a basso costo computazionale, applicando ad esempio gli elementi di Taylor [57].

Nel caso in oggetto, i polinomi di interpolazione di Lagrange risultano ottimali al fine di rappresentare il campo degli spostamenti della *cross-section*, poiché l'elemento è quadrilatero. Il codice predispone di tre tipologie di elementi Lagrangiani, a disposizione per ogni nodo: *bi-linear* (L4), *bi-quadratic* (L9) e *bi-cubic* (L16). I nodi sono numerati e presi singolarmente calcolano i valori di η e ξ , rispetto al sistema di riferimento. Solo mediante la *connectivity*, è possibile definire la corrispondenza tra nodi ed elementi, e le relazioni tra i nodi, della trave discretizzata.

Pertanto, il codice CUF vincola le analisi di convergenza della trave, con un primo studio del modello FEM 1D, dove varia il numero di elementi trave lungo l'asse, ed un secondo relativo alla *cross-section*, dove variano gli elementi trasversali ai nodi per un fissato numero di elementi trave. Una volta esaminata l'analisi convergente, è possibile confrontare i diversi modelli cinematici.

4.2 Analisi statiche

Lo studio di convergenza è stato condotto a supporto dell'analisi statica, applicando un carico $F_z = 10\text{ N}$ sul lato superiore della sezione trasversale. La deflessione della trave, la quale corrisponde allo spostamento U_z , viene misurata e confrontata con il valore analitico. L'espressione della deflessione massima per una trave a sbalzo è facilmente reperibile in letteratura ed è espressa secondo la formulazione 4.1. Le proprietà della struttura sono le stesse presentate in precedenza e sono elencate nella Tabella 4.1. I risultati presentati nella Figura 4.2 mostrano che gli elementi L9 e L16 hanno una velocità di convergenza molto simile. Inoltre, l'uso di elementi B4 consente una bassa deviazione relativa rispetto al valore analitico $U_{z_{analitico}} = 5.71 \cdot 10^{-7}\text{ m}$, per un numero ridotto di elementi: meno dell'1% per soli 10 elementi.

$$|U_{zan}| = \frac{FL^3}{3EI} \quad (4.1)$$

Un ulteriore confronto è stato effettuato rispetto ai risultati forniti dal software commerciale agli elementi finiti ABAQUS, mediante le stesse analisi eseguite sulla struttura conforme, sia dal punto di vista geometrico che del materiale.

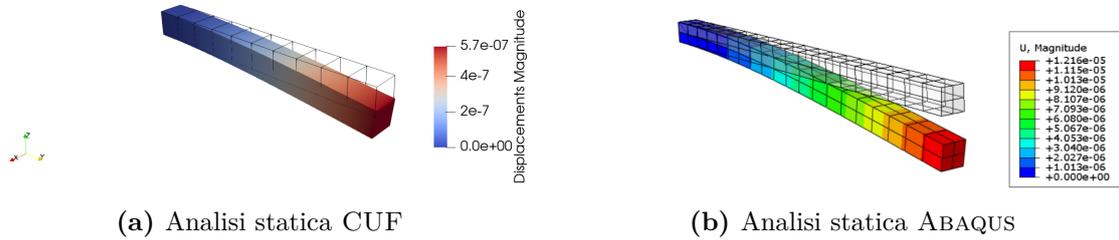
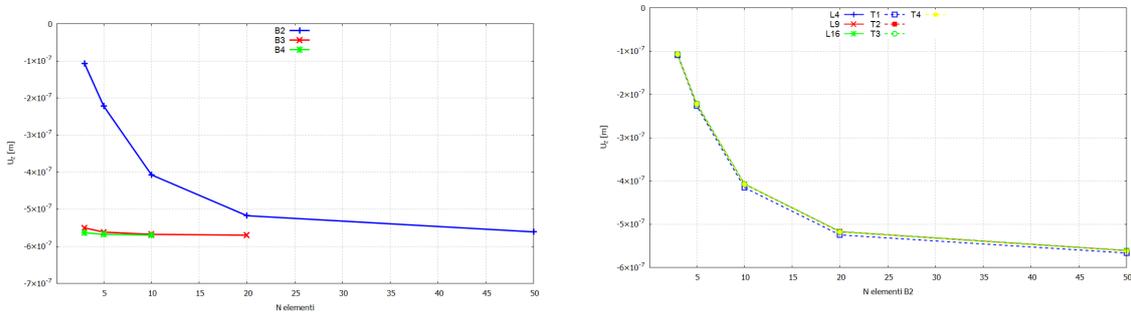


Figura 4.1: Analisi statiche: spostamento dell'estremo libero U_z rispetto all'asse z ; $F_z = 10 N$.

	Risultati Analitici	Abaqus	CUF (1 L9 & 10 × B3)
U_z estremo libero	$-5.71 \cdot 10^{-7}$	$-1.21 \cdot 10^{-5}$	$-5.68 \cdot 10^{-7}$

Tabella 4.2: Spostamento [m] dell'estremo libero lungo l'asse z , sottoposto ad un carico $F_z = 10 N$, secondo metodi analitici e numerici.



(a) Analisi di convergenza statica FEM: spostamento U_z con elementi L9 ai nodi, al variare degli elementi trave lungo l'asse

(b) Analisi di convergenza statica *cross-section*: spostamento U_z con numero variabile di elementi trave B2 lungo l'asse, al variare del modello di espansione ai nodi

Figura 4.2: Analisi di convergenza statica CUF: spostamento dell'estremo libero rispetto all'asse z ; $F_z = 10 N$.

4.3 Analisi dinamiche: Vibrazioni libere

Lo studio della dinamica consente di analizzare le vibrazioni della struttura, in primo luogo, senza considerare alcuna rotazione. Le vibrazioni ricoprono un ruolo

fondamentale nella dinamica dei rotori, poiché sono una delle principali cause di rottura. Nelle strutture rotanti, il suddetto fenomeno è molto complesso e dipende dall'influenza di un componente sul comportamento dinamico di un altro. Nonostante, in fase preliminare risulta necessaria un'analisi delle vibrazioni libere; lo studio dei casi non rotanti valuta le caratteristiche vibrazionali delle singole strutture e pone le basi per un'analisi rotorica dell'intero sistema. Il codice CUF elabora le prime frequenze naturali della trave, descritta nella Tabella 4.1.

A confronto con i risultati ottenuti, sono presenti in letteratura le soluzioni analitiche, basate su equazioni differenziali parziali (PDE). Lo spostamento $u(x, t)$ è espresso come il prodotto delle funzioni dello spostamento $\phi(x)$ e del tempo $f(t)$, grazie a cui si ricava l'equazione 4.2:

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{EI}{\rho S} \frac{1}{\phi(x)} \frac{d^4 \phi(x)}{dx^4} = - \frac{1}{f(t)} \frac{d^2 f(t)}{dt^2} = \omega^2 \quad (4.2)$$

Quindi, le frequenze naturali del sistema $f = \frac{\omega}{2\pi}$ sono determinate dalla seguente formulazione, la quale rispetta le condizioni al contorno della trave in oggetto, come l'assenza di rotazione all'estremo incastrato e senza considerare né forze a taglio né momenti flettenti all'estremo libero:

$$f_i = \frac{1}{2\pi} \frac{X_i^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \quad (4.3)$$

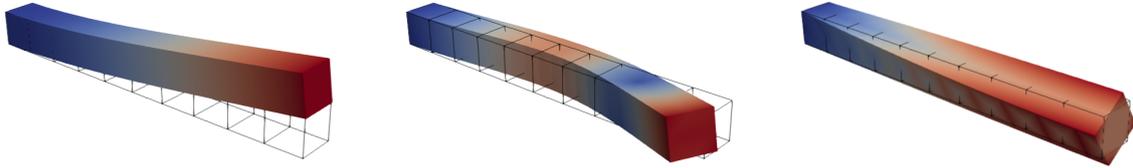
dove sono in risalto il modulo di Young E , il momento d'inerzia della sezione trasversale I , la superficie della sezione trasversale S , la densità ρ , la lunghezza della trave L e il coefficiente X_i relativo alle condizioni al contorno. In particolare, $X_1^2 = 3.516$ e $X_2^2 = 22.03$, rispettivamente per il primo e il secondo modo flessionale.

Mentre l'equazione 4.4 valuta il modo vibrazionale di torsione, sempre in accordo con le condizioni al contorno e considerando una sezione trasversale omogenea $I_\theta = J\rho$:

$$I_\theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = GJ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (4.4)$$

nella quale sono presenti lo spostamento angolare θ , il momento d'inerzia della massa I_θ , il momento polare della sezione trasversale J e il modulo di taglio $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$. La seguente espressione determina le frequenze naturali torsionali:

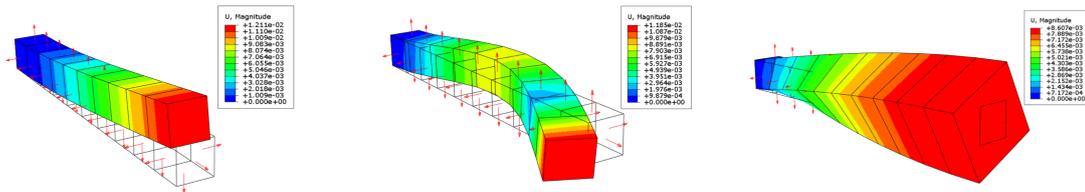
$$f_i = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{GJ}{I_\theta L}}$$



(a) Modo 1 (I flessionale) f_1 (b) Modo 2 (II flessionale) f_2 (c) Modo 3 (I torsionale) f_3

Figura 4.3: Analisi dinamica CUF ($L9 \times 10 \times B3$): modi delle vibrazioni libere.

Come già osservato nella sezione riservata all’analisi statica (4.2), i risultati sono comparati con quelli ottenuti mediante ABAQUS. L’analisi è ripetuta sulla medesima struttura, ma le modalità di risoluzione sono differenti. In particolare, il software commerciale utilizza una formulazione poligonale SBFEM (*scaled boundary finite element method*), la quale consente di effettuare un’analisi dinamica affidabile dal punto di vista numerico. Tra i principali passaggi, sono implementati la definizione dell’elemento UEL (*user-defined element*) e la risoluzione delle matrici di rigidità e di massa, attraverso la decomposizione agli autovalori. I risultati mostrano che il PSBFEM è più accurato di un codice FEM con raffinamento della griglia. Inoltre, il metodo poligonale agli elementi finiti evita la presenza di nodi sospesi costruendo una maglia poligonale. In questo modo, il PSBFEM può scegliere una risoluzione di maglia appropriata per le diverse strutture, garantendo l’accuratezza e riducendo i costi di calcolo.



(a) Modo 1 (I flessionale) f_1 (b) Modo 2 (II flessionale) f_2 (c) Modo 3 (I torsionale) f_3

Figura 4.4: Analisi dinamica ABAQUS: modi delle vibrazioni libere.

Di seguito, applicando i metodi precedentemente esposti, sono riportati i risultati specifici delle vibrazioni libere, nel caso di una trave con un estremo incastrato e l’altro libero di muoversi:

	Risultati Analitici	Abaqus	CUF (1 LE9 & 10 × B3)
f_1 : primo modo flessionale	8.23	8.51	8.24
f_2 : secondo modo flessionale	51.5	51.56	49.65
f_3 : modo torsionale	71.1	76.57	78.94

Tabella 4.3: Frequenze naturali [Hz] della trave, secondo metodi analitici e numerici.

I valori ricavati confermano la piccola differenza tra le formulazioni analitiche e numeriche. Pertanto, è necessario valutare il caso in cui l'analisi numerica sia convergente, per utilizzare correttamente il modello introdotto. L'analisi di convergenza consente di individuare la combinazione ideale dei vari elementi, in modo tale da ottenere soluzioni numeriche esatte. Come mostra la Figura 4.5, l'applicazione degli elementi assiali B3 e B4, rispetto a quelli B2, determina un incremento della velocità di convergenza, ad un basso numero di elementi.

La procedura evidenzia una maggior efficienza degli elementi trave B3 e B4, andando a verificare dettagliatamente quale sia il modello migliore. Le curve relative a B3 e B4 risultano sovrapposte a larghi tratti, impostando lo stesso numero di elementi; in particolare, se il modello è composto da almeno 5 elementi trave, le differenze non sono percettibili. Infatti, i valori delle frequenze naturali variano dell'ordine dei centesimi, a seconda di come viene definito il metodo numerico. La scelta risulta complicata e necessita di ulteriori analisi, anche in termini di costo computazionale minore, per determinare un modello ottimale.

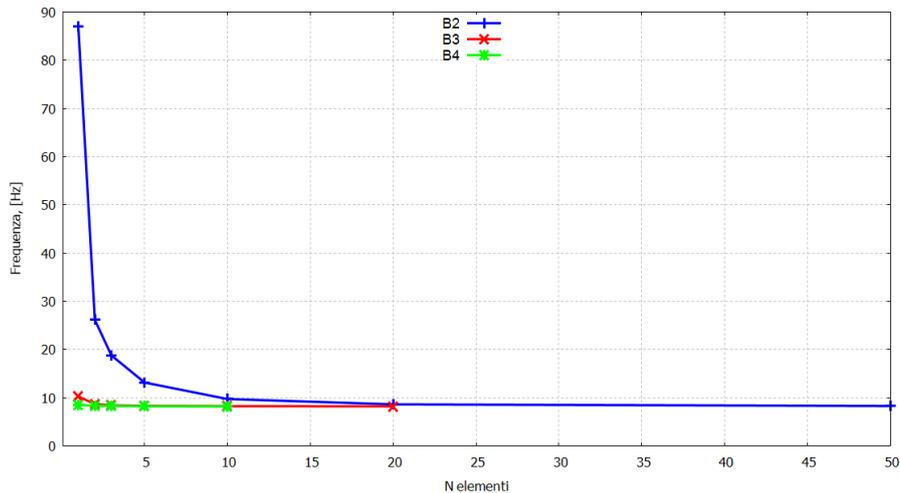


Figura 4.5: Analisi di convergenza FEM: prima frequenza naturale con elementi L9 ai nodi, al variare degli elementi trave lungo l'asse.

La medesima procedura deve essere completata per definire gli elementi della sezione trasversale. Nelle figure di seguito, sono rappresentate le curve caratteristiche delle diverse discretizzazioni della *cross-section*, le quali nel caso specifico possono seguire espansioni di Lagrange o di Taylor di ordine differente.

Ad esempio, nel computo della prima frequenza naturale in Figura 4.6, non si notano differenze significative tra i vari modelli, anche variando il numero di elementi trave assiali. In sostanza, le curve giungono a convergenza con le stesse modalità, indifferentemente dal tipo di espansione. Mentre le prime incongruenze sono rilevate in Figura 4.7, la quale prende in esame i risultati relativi alla seconda frequenza naturale. A seconda del modello impostato, le curve convergono in modo differente e determinano risultati con valori grossolanamente differenti. Pertanto, è necessario individuare i metodi più accurati ed adottare le dovute contromisure per il caso in esame; per valutare le frequenze successive alla prima, risultano affidabili solo alcune espansioni ai nodi.

La Figura 4.8 mostra come la frequenza naturale torsionale non risulta ben determinata con elementi a bassi livelli di accuratezza, poiché il modello è troppo rigido. Pertanto, in questo caso, è stata sufficiente una combinazione di elementi L9 e circa venti elementi B2 per convergere. Tuttavia, se è necessario essere più precisi per il modo torsionale, è possibile utilizzare L16 come funzione di espansione. Infatti, la deviazione risulta ancora superiore al 10% per gli elementi L9. Per quanto riguarda gli elementi L16, il risultato relativo alla frequenza torsionale $f_3 = 72.76 \text{ Hz}$ è caratterizzato da una deviazione dell'errore numerico al di sotto di valori significativi. Le seguenti valutazioni sono state effettuate con gli elementi più semplici a disposizione, gli elementi trave B2, poiché predispone una disamina migliore riguardo alle possibili differenze tra le diverse espansioni della sezione trasversale.

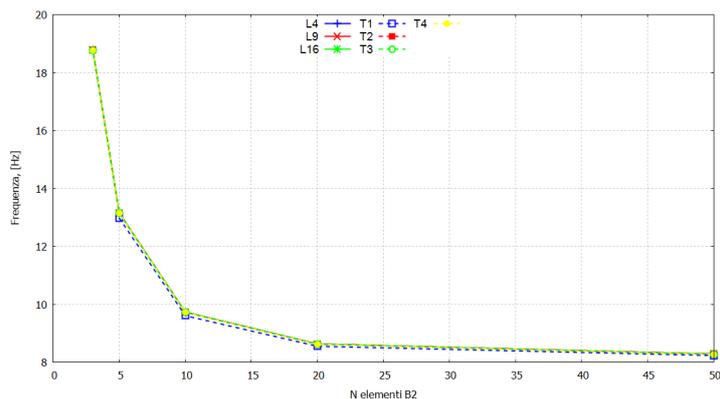


Figura 4.6: Analisi di convergenza *cross-section*: prima frequenza naturale con numero variabile di elementi trave B2 lungo l'asse, al variare del modello di espansione ai nodi.

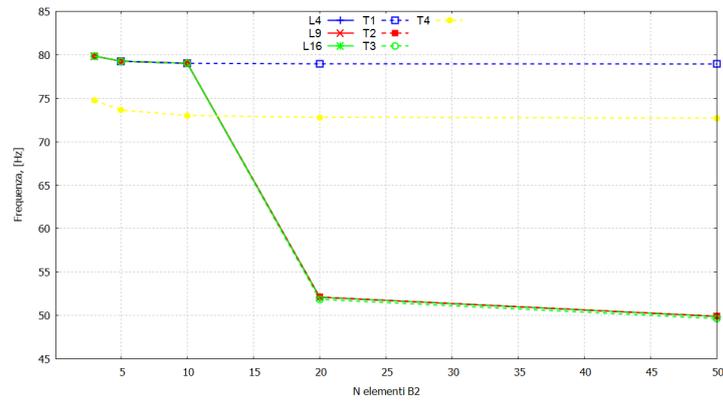


Figura 4.7: Analisi di convergenza *cross-section*: seconda frequenza naturale con numero variabile di elementi trave B2 lungo l'asse, al variare del modello di espansione ai nodi.

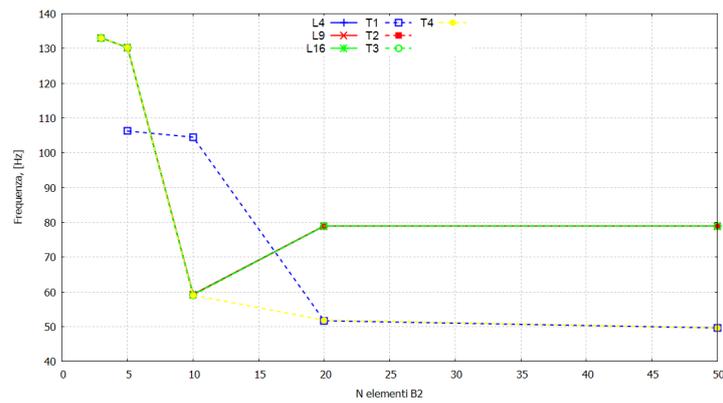


Figura 4.8: Analisi di convergenza *cross-section*: terza frequenza naturale con numero variabile di elementi trave B2 lungo l'asse, al variare del modello di espansione ai nodi.

Capitolo 5

Dinamica dei rotori: Diagrammi di Campbell

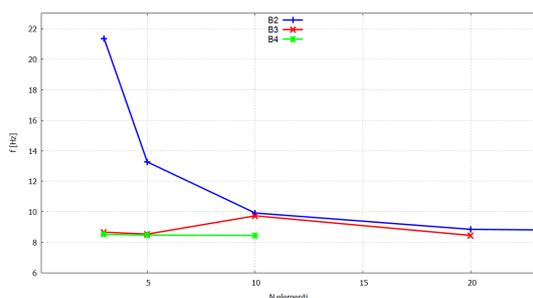
A differenza del capitolo precedente, l'albero comincia a muoversi ed è applicata ad esso una velocità di rotazione Ω . In conformità con la teoria riferibile alla dinamica dei rotori, largamente trattata nel Capitolo 2 dedicato, le frequenze proprie del sistema dipendono dalla velocità di rotazione a causa di vari effetti collaterali, come quelli giroscopici o idraulici con i cuscinetti e le guarnizioni. Particolare attenzione è riposta nel diagramma di Campbell, il quale descrive la risposta vibratoria di un sistema rotante. Questa rappresentazione consente di valutare l'evoluzione delle frequenze in funzione della velocità di rotazione, ma permette anche di identificare le velocità critiche in cui il sistema diventa instabile; ovvero è definita tale la velocità di rotazione per cui la frequenza è nulla.

Il diagramma di Campbell, chiamato anche diagramma di interferenza, rappresenta lo spettro di risposta di un sistema in funzione del suo regime di oscillazione. Questo strumento prende il nome da Wilfred Campbell, che ne introdusse il concetto. Osservando alcuni aspetti, nei sistemi di rotordinamica, le frequenze proprie spesso dipendono dalla velocità di rotazione a causa degli effetti giroscopici indotti o delle condizioni idrodinamiche variabili nei cuscinetti a fluido. Il diagramma di Campbell può rappresentare vari casi, come ad esempio i valori calcolati analiticamente delle frequenze proprie in funzione della velocità di rotazione dell'albero. Questo caso è anche chiamato "mappa delle velocità di rotazione". Inoltre, valuta lo spettro di risposta alle vibrazioni misurato sperimentalmente in funzione della velocità di rotazione dell'albero mediante un grafico a cascata, con le posizioni dei picchi che corrispondono generalmente alle frequenze proprie. In ingegneria acustica, il diagramma di Campbell rappresenta lo spettro di pressione rispetto alla velocità di rotazione dell'albero di una macchina; a volte è denominato anche mappa del rumore tridimensionale. Pertanto, il diagramma di Campbell è uno strumento prezioso per

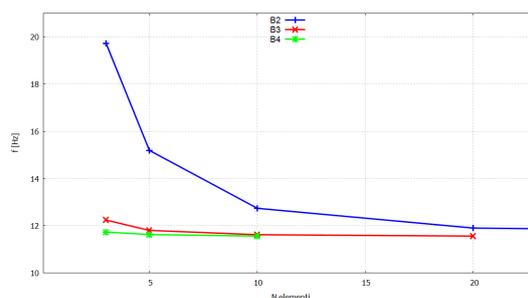
valutare le risonanze del rotore e garantire che i regimi di funzionamento siano lontani dalle frequenze critiche, riducendo così il rischio di vibrazioni e rotture.

5.1 Strutture isotrope

Come nei casi precedenti, sono state effettuate le analisi di convergenza dei risultati ottenuti con il codice MUL^2 . In ogni ambito i diagrammi convergenti risultano necessari per un corretto divenire delle simulazioni numeriche. La scrupolosa disamina, riguardo alla convergenza, consente di definire il modello adatto ad ogni singolo sistema, sia in termini di accuratezza che di risparmio in costo computazionale. In particolare, l'analisi convergente segue un determinato procedimento, il quale, nel caso della trave, consiste in una prima valutazione del metodo agli elementi finiti 1D relativo all'estensione della struttura. In secondo luogo, viene esaminata la *cross-section*, ovvero la discretizzazione della sezione acquisita mediante la CUF, e le diverse espansioni bidimensionali.



(a) Analisi di convergenza FEM: prima frequenza con elementi L9 ai nodi, al variare degli elementi trave lungo l'asse; $\Omega = 30 \frac{rad}{s}$



(b) Analisi di convergenza FEM: prima frequenza con elementi L9 ai nodi, al variare degli elementi trave lungo l'asse; $\Omega = 180 \frac{rad}{s}$

Figura 5.1: Analisi di convergenza CUF: prima frequenza (Modo 1 flessionale), trave posta in rotazione.

Le figure in 5.1 mostrano un'accuratezza maggiore con elementi trave B3 e B4, i quali comportano una velocità di convergenza senza eguali rispetto all'utilizzo di elementi B2. A velocità di rotazione maggiore ($\Omega = 180 \frac{rad}{s}$), diventa visibile un distacco più significativo, già per la prima frequenza vibrazionale, e ciò consente di optare per la scelta adatta all'analisi rotorica. La prima frequenza del modo flessionale deve soddisfare determinati livelli di errore, che siano ampiamente al di sotto dell'1%, per garantire dei risultati affidabili anche a velocità Ω e frequenze f_{modi} maggiori. Inoltre, il primo diagramma evidenzia un discostamento anomalo dall'andamento convergente del modello con elementi B3; dovendo studiare la ben nota complessità della dinamica dei rotori, un ulteriore indizio per escludere questa

soluzione. La scelta ricade sull'opzione a $10 \times B4$ elementi trave lungo l'asse longitudinale; il modello garantisce un'accuratezza di calcolo elevata, senza eccedere in termini di costo computazionale.

Oltre a definire la composizione del FEM 1D, viene esaminata la sezione trasversale e la relativa discretizzazione 2D (Tab. 5.1). Le espansioni a disposizione del codice CUF sono quelle già citate di Lagrange, *high-order model*, e di Taylor, identificate come *low-order model*, per le tipologie ad ordine più basso. Le seconde comportano un costo computazionale minore, ma le soluzioni ne risentono in raffinatezza, all'aumentare della complessità del sistema. In funzione di cogliere l'accuratezza migliore tra i modelli di espansione della *cross-section*, è stata effettuata l'analisi di convergenza su una trave discretizzata con elementi B3, già sufficientemente raffinati, e sono poste in esame le frequenze che riservano una maggior incertezza. Le rilevanze più importanti sono presenti nella convergenza relativa alle espansioni di Taylor a basso ordine di accuratezza. Pertanto, l'adeguato compromesso tra un metodo altamente raffinato ed un basso costo computazionale propone il modello Lagrangiano *bi-quadratic* (LE9), come discretizzazione della *cross-section* della struttura.

Espansioni Modello trave	f_{1b}	f_{1f}	f_{2b}	f_{2f}	f_{3b}	f_{3f}
TE1	3.4120	12.925	44.560	53.879	125.79	134.88
TE2	3.4650	12.978	44.857	54.174	127.75	135.60
TE3	3.4557	12.969	44.588	53.908	127.73	134.22
TE4	3.4541	12.967	44.576	53.897	125.09	134.18
LE4	2.6355	12.148	40.101	49.414	114.76	123.82
LE9	3.4635	12.976	44.844	54.161	127.75	135.54
LE16	3.4545	12.968	44.581	53.902	127.73	134.20

Tabella 5.1: Analisi di convergenza *cross-section*: frequenze $[Hz]$ dei primi modi di vibrare flessionali, a seconda dei modelli di discretizzazione con ordini di raffinatezza differenti, ad una velocità di rotazione pari a $\Omega = 30 \frac{rad}{s}$; trave a sezione quadrata con discretizzazione $10 \times B4$.

In letteratura [32], la frequenza adimensionale viene rappresentata in funzione di un parametro della velocità di rotazione per consentire un confronto più semplice tra i risultati ottenuti da studi differenti. La frequenza adimensionale ω^* e il parametro della velocità di rotazione Ω^* sono espressi come segue

$$\omega^* = \frac{\omega}{\omega_0} \quad , \quad \Omega^* = \frac{\Omega}{\omega_0}$$

in riferimento ad una specifica interpretazione del parametro

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{E J_{xx} E J_{zz}}}{\rho A L^4}}$$

da cui è possibile individuare il modulo di Young E , la densità ρ , l'area della sezione trasversale A , la lunghezza dell'albero L e i momenti d'inerzia J_{xx} e J_{zz} lungo i piani principali. Nel caso di sezioni trasversali simmetriche, come quelle circolari e quadrate, si ricorda l'eguaglianza $J_{xx} = J_{zz}$. In questa sezione, vengono analizzate diverse tipologie di *multiple cross-section* ed i risultati numerici sono confrontati con quelli trovati in letteratura per la stessa configurazione [58], [32].

Diagrammi di Campbell: sezione quadrata

A seguito dello studio preliminare sulla convergenza, il modello è ora pronto per effettuare l'analisi rotorica del sistema. La dinamica dei rotori è studiata mediante i diagrammi di Campbell, opportunamente disposti nelle seguenti pagine, in relazione ai vari casi.

I primi risultati riguardano le sezioni trasversali omogenee, le quali consentono di assumere $J_{xx} = J_{zz}$. Quindi, sono state valutate due strutture, a sezione quadrata e a sezione circolare; le proprietà del materiale sono le medesime e i modelli della trave hanno i seguenti valori:

Dati Analisi CUF	Trave 1 snella	Trave 2
Modulo di Young E [GPa]	70	70
Coefficiente di Poisson ν	0.3	0.3
Densità ρ [$\frac{kg}{m^3}$]	2700	2700
Lunghezza trave snella L [m]	5	10
Lunghezza del lato l [m]	0.01	1

Tabella 5.2: Proprietà delle travi a sezione omogenea ($I_{xx} = I_{zz}$).

Per quanto riguarda la discretizzazione, il modello quadrato utilizza un singolo elemento L9 per definire la sezione. In particolare, il primo caso in Tab.5.2 implementa un modello molto snello, $\frac{L_1}{l_1} = 500$, il quale è in accordo con la teoria di Eulero-Bernoulli relativa alle travi; in Figura 5.2 è raffigurata la discretizzazione trasversale. In direzione assiale, il modello è costituito da $10 \times B4$ elementi e con condizioni al contorno di tipo *clamped-free*.

Dunque, viene effettuata la verifica dell'affidabilità dei risultati ottenuti mediante il codice numerico CUF. Inizialmente, sono poste sotto la lente d'ingrandimento le

frequenze naturali a velocità di rotazione nulla, $\Omega = 0$, le quali devono coincidere con i valori ricavati dall'analisi dinamica delle vibrazioni libere, quindi in accordo con le soluzioni analitiche dell'Eq.4.3. I modi torsionali non sono influenzati dalla velocità di rotazione, pertanto vengono presi in esame solamente i casi flessionali.

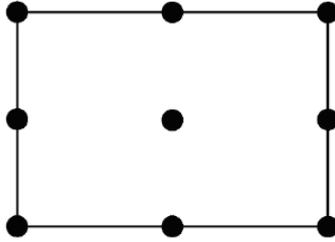


Figura 5.2: Mesh della sezione omogenea e isotropa: quadrata Q9 (1 LE9).

	f_1	f_2	f_3
Trave 1 snella	0.3304	2.070	5.799
Trave 2	8.220	49.50	131.0

Tabella 5.3: Frequenze naturali [Hz] dei primi tre modi a $\Omega = 0$ (Tab.5.2).

Le curve rappresentate nei seguenti Diagrammi di Campbell, in Fig.5.3 e 5.4, valutano i modi di vibrare al variare della velocità di rotazione Ω . In tal senso, sono evidenti le due tendenze caratteristiche relative ad ogni modo, denominate *backward* e *forward* in base all'andamento rispettivamente decrescente o crescente. Infatti, lo stesso modo tende sia ad aumentare sia a diminuire; nei casi illustrati questa tendenza è rilevante e le curve seguono l'andamento teorico in riferimento alle stesse configurazioni [32], [58].

Per quanto riguarda le curve rappresentate in Figura 5.3 e 5.4, le soluzioni rispettano l'andamento atteso. Le curve sono sovrapponibili per i primi modi, eccezion fatta per il caso a snellezza ridotta, i quali si distaccano dall'andamento teorico. Nonostante le differenze evidenziate, per tutti e sei i modi di vibrare le pendenze delle soluzioni numeriche, sia *backward* che *forward*, riproducono quelle rilevate dai medesimi diagrammi elaborati da [58]. I risultati numerici, come quelli analitici presentati, sono in accordo con lo studio effettuato da Hodges e Rutkowski [59]. Al fine di valutare al meglio i risultati principali, vengono predisposte le Tabelle 5.4, le quali propongono gli errori caratteristici relativi alla dinamica dei rotori.

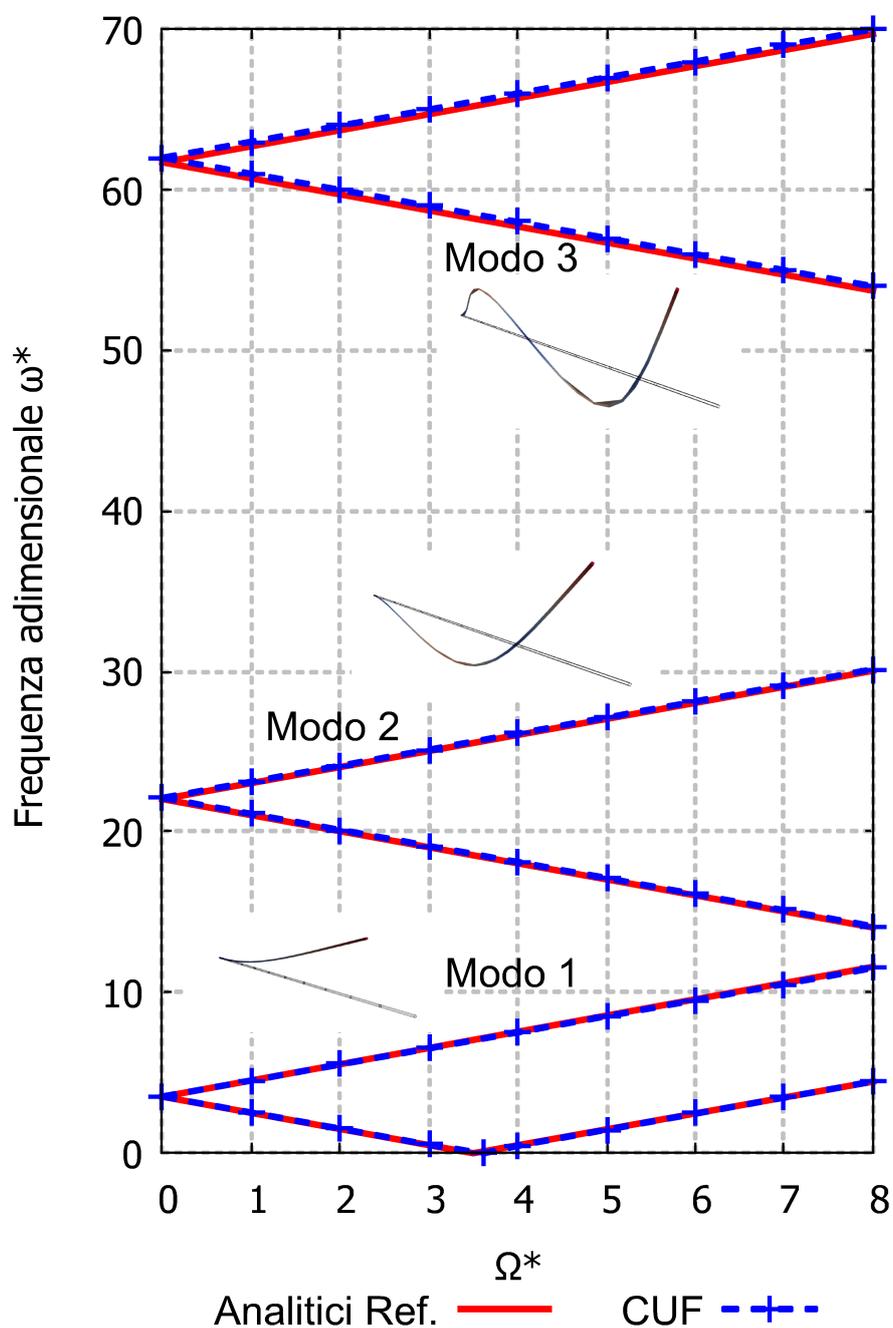


Figura 5.3: Diagramma di Campbell della Trave 1 snella a sbalzo (Tab.5.2) a sezione quadrata $EI_{zz} = EI_{xx}$; variazione delle frequenze naturali al variare della velocità di rotazione attorno all'asse y longitudinale: confronto con i risultati teorici di Banerjee e Su [58].

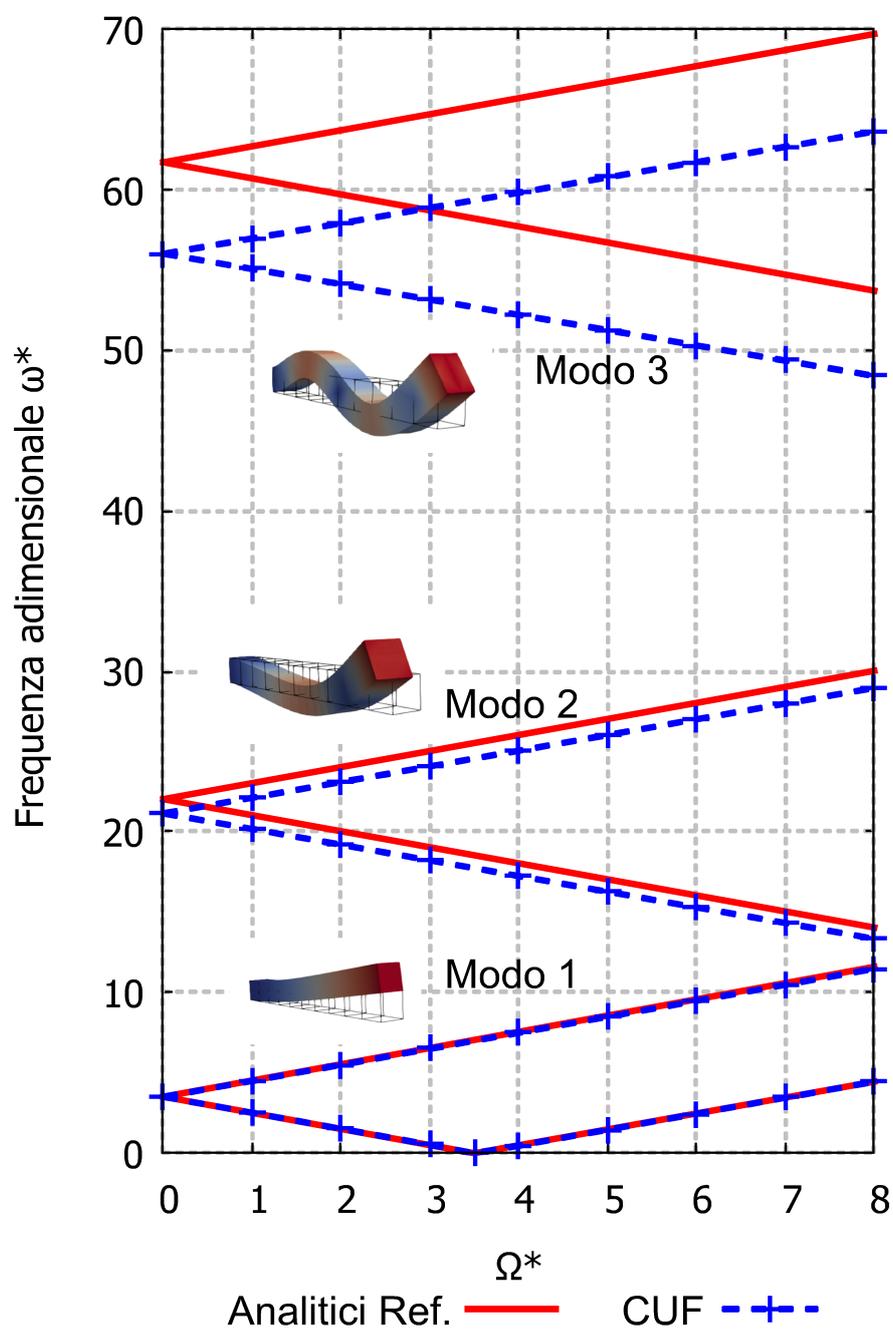


Figura 5.4: Diagramma di Campbell della Trave 2 a sbalzo (Tab.5.2) a sezione quadrata $EI_{zz} = EI_{xx}$; variazione delle frequenze naturali al variare della velocità di rotazione attorno all'asse y longitudinale: confronto con i risultati teorici di Banerjee e Su [58].

		$\omega_{1,2}^*$	$\omega_{3,4}^*$	$\omega_{5,6}^*$	Ω_{cr1}^*
Trave 1 snella	Analitici Ref.[58]	3.516	22.034	61.697	3.50
	Numerici CUF	3.531	22.127	61.970	3.53
	Errore	0.43%	0.42%	0.44%	0.86%
Trave 2	Analitici Ref.[58]	3.516	22.034	61.697	3.50
	Numerici CUF	3.514	21.160	55.998	3.55
	Errore	-0.06%	-3.97%	-9.24%	1.43%

Tabella 5.4: Risultati analitici e numerici delle frequenze adimensionali ω^* e del parametro della velocità critica di *spinning* Ω_{cr}^* (I modo), per due tipologie di trave a sbalzo a sezione quadrata $EI_{zz} = EI_{xx}$ (Tab.5.2).

I risultati relativi alla Trave 2 mostrano un netto discostamento dall'andamento analitico, dovuto alla configurazione trattata. Infatti, il secondo caso in esame non rispetta le assunzioni della teoria di Eulero-Bernoulli, la quale impone un rapporto di snellezza almeno pari a 500. Pertanto, il modello esamina il comportamento di una trave a sezione quadrata, in cui non è possibile trascurare i contributi della *cross-section*. Specificatamente a questa condizione, le dimensioni significative della sezione trasversale comportano la presenza degli effetti dovuti al taglio. Questo fenomeno introduce dei contributi aggiuntivi, i quali determinano le differenze dal caso a snellezza elevata, come viene individuato nella Figura 5.4. A tal proposito, le variazioni risultano più o meno accentuate in relazione al modo di vibrare selezionato, poiché ad ogni singola modifica strutturale corrisponde uno specifico contributo relativo alla deformazione a taglio.

In fase progettuale, questi diagrammi rappresentano un supporto dal punto di vista strutturale, in quanto forniscono le indicazioni necessarie per l'utilizzo ottimale delle configurazioni. Ad esempio, alcuni campi di applicazione possono essere identificati nel comportamento a fatica, nei criteri di rottura, nell'ottenere le informazioni necessarie, per sapere se la struttura resiste o meno ai carichi, e nell'accoppiamento con altri dispositivi.

Diagrammi di Campbell: sezione rettangolare

Successivamente, sono state valutate le strutture a sezione rettangolare, le quali non ammettono l'eguaglianza dei momenti d'inerzia $I_{xx} \neq I_{zz}$. Quindi, viene presa in considerazione un trave snella che rispetta le condizioni di Eulero-Bernoulli $h = 0.1 \cdot b$, secondo cui è possibile assumere valida la relazione $EI_{zz} = 0.01 EI_{xx}$ lungo le *cross-section* del modello. Lo studio viene effettuato considerando il medesimo materiale e vengono analizzate due differenti geometrie: la prima in conformità con le ipotesi teoriche, mentre la seconda accentua la condizione di trave sottile.

Dati Analisi CUF	
Modulo di Young E [GPa]	70
Coefficiente di Poisson ν	0.3
Densità ρ [$\frac{kg}{m^3}$]	2700
Lunghezza trave L [m]	7.5
Larghezza della <i>cross-section</i> b [m]	0.5
Altezza <i>cross-section</i> h [m]	0.05

Tabella 5.5: Proprietà delle travi a sezione rettangolare ($I_{zz} = 0.01 I_{xx}$).

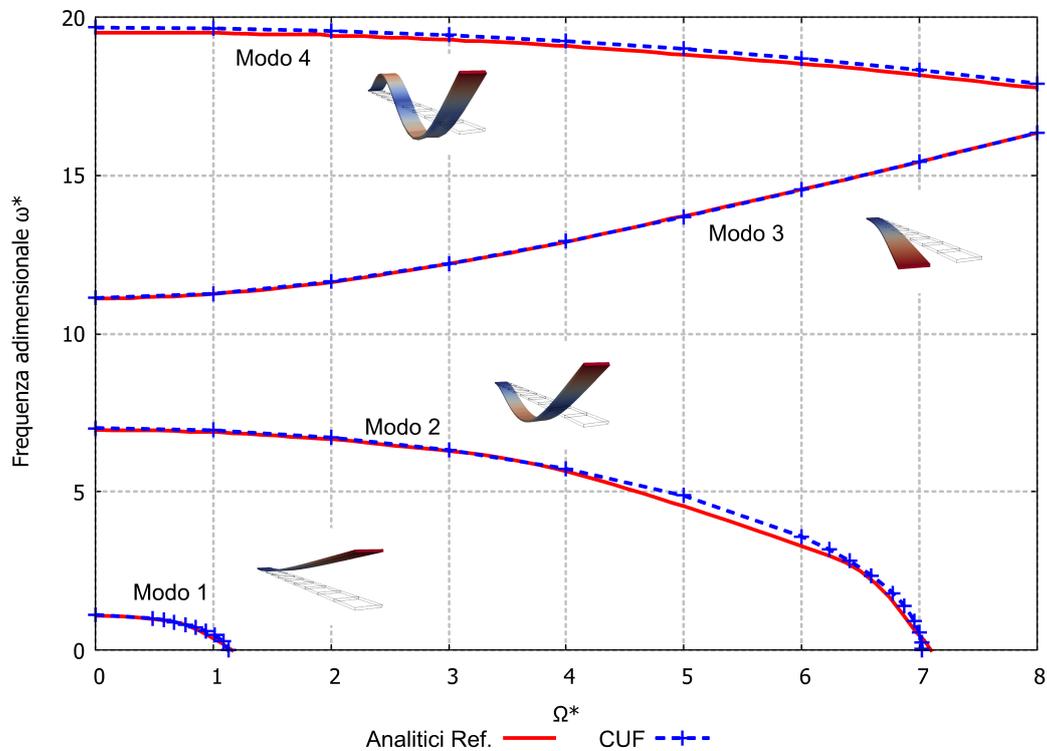


Figura 5.5: Diagramma di Campbell di una trave a sbalzo (Tab.5.5) a sezione rettangolare $EI_{zz} = 0.01 EI_{xx}$ ($0.5 \times 0.05 m$); variazione delle frequenze naturali al variare della velocità di rotazione attorno all'asse y longitudinale: confronto con i risultati teorici di Banerjee e Su [58].

I diagrammi di Campbell relativi ai due modelli a sezione rettangolare in esame descrivono andamenti differenti per ognuno dei modi di vibrare, incrementando la velocità di rotazione attorno all'asse longitudinale. Il primo studio, in Fig.5.5, descrive

l'andamento dei primi modi di vibrare in funzione della velocità di rotazione Ω , per una struttura a sezione rettangolare che ruota attorno al proprio asse longitudinale. In questo modo, è possibile confrontare i valori ottenuti con quelli relativi alla teoria formulata da Banerjee e Su [58]. Gli andamenti sono in linea con quanto previsto in ambito teorico; infatti, è importante evidenziare la presenza di due velocità critiche. In riferimento ai primi due modi, le frequenze naturali si annullano in prossimità di determinate velocità pari a $\Omega_{cr1} \approx 5 \frac{rad}{s}$ e $\Omega_{cr2} \approx 30 \frac{rad}{s}$ rispettivamente per il primo e per il secondo modo di vibrare. Questo fenomeno è da monitorare, valutando i valori delle velocità critiche di interesse.

f_1	f_2	f_3
0.7372	4.618	7.318

Tabella 5.6: Frequenze naturali $[Hz]$ dei primi tre modi a $\Omega = 0$ (Tab.5.5).

	ω_1^*	ω_2^*	ω_3^*	ω_4^*	Ω_{cr1}^*	Ω_{cr2}^*
Analitici Ref.[58]	1.1119	6.9680	11.119	19.511	1.1	7.1
Numerici CUF	1.1210	7.0232	11.128	19.669	1.12	7.03
Errore	0.82%	0.79%	0.08%	0.81%	2.09%	-1.04%

Tabella 5.7: Risultati analitici e numerici delle frequenze adimensionali ω^* e dei parametri della velocità critica di *spinning* Ω_{cr}^* (I e II modo), per una trave a sbalzo a sezione rettangolare $EI_{zz} = 0.01 EI_{xx}$ (Tab.5.5).

Il modello CUF introdotto è conforme per questa tipologia di studi e consente di valutare i comportamenti relativi a varie geometrie. A tal proposito, viene effettuata un'analisi rotorica su una struttura che ruota attorno all'asse z , ovvero si procede con una similitudine il più possibile affine alla pala di un rotore.

Dunque, i forti accoppiamenti tra le diverse deformazioni di flessione, di torsione e assiali determinano interazioni significative tra le forme dei modi. Le curve di terza e quarta frequenza, ad esempio, si avvicinano e poi si allontanano definendo una zona di deviazione relativamente ampia. All'interno di questa zona, le varie forme relative ai modi di vibrare possono cambiare in modo significativo rispetto a quelle mostrate in Fig.5.6.

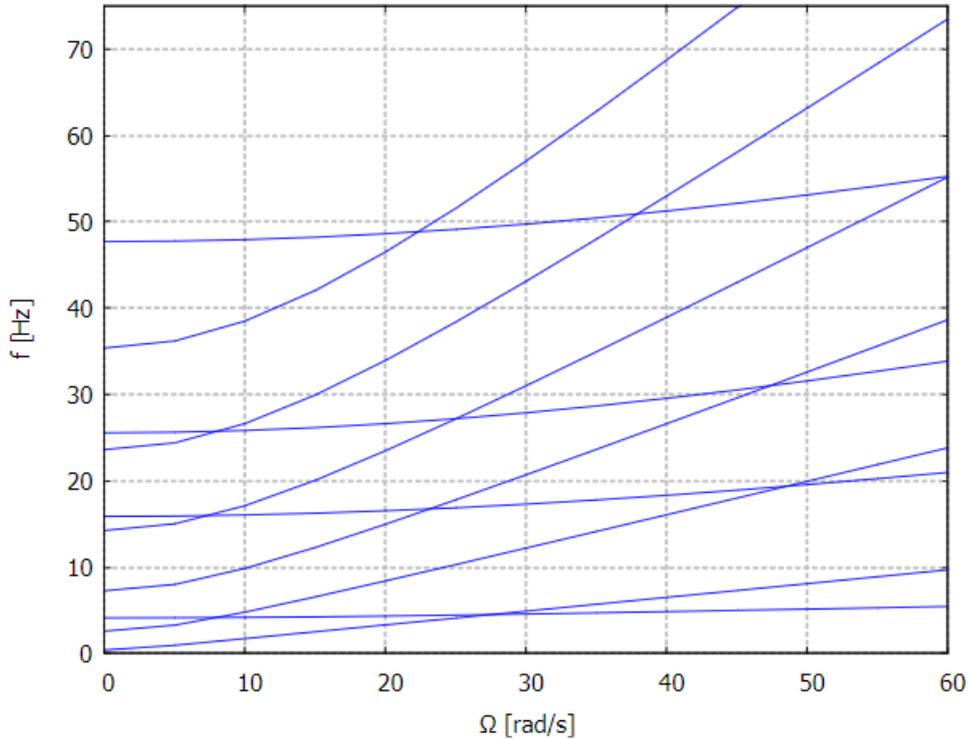


Figura 5.6: Diagramma di Campbell di una trave a sbalzo (Tab.5.5) a sezione rettangolare ($0.5 \times 0.05 \text{ m}$); variazione delle frequenze naturali al variare della velocità di rotazione attorno all'asse z .

5.2 Strutture in composito

L'introduzione alle strutture in composito richiede di descrivere dettagliatamente gli strati ed in funzione di ciò viene introdotto un approccio *Layer-Wise*. Le teorie LW sono state ampiamente trattate da Carrera [45], al fine di poterle applicare ai compositi. Pertanto, i modelli basati su una teoria LW sono costituiti da campi di spostamento indipendenti relativi ad ogni singolo strato. Allo stesso tempo, vengono imposte le condizioni di compatibilità all'interfaccia tra le lamine, poiché i modelli includono specifiche condizioni di vincolo. Le variabili incognite risultano solo come spostamenti, se si adottano i polinomi di Lagrange (LE) come funzioni di espansione F_τ . A tal proposito, sono disponibili diverse tipologie di configurazione della sezione trasversale, a seconda del polinomio di Lagrange considerato (vedi Fig.5.7). I polinomi LE possono essere definiti mediante diverse impostazioni delle coordinate, le quali sono normalizzate oppure effettive. Maggiori dettagli riguardo ai modelli basati sugli elementi di Lagrange sono esposti nel lavoro prodotto da Carrera e Petrolo [46]. Il modello più semplice è il polinomio quadrilaterale LE4 ed è

composto da 4 punti che rappresentano l'elemento di riferimento. Tuttavia, nel caso di un elemento LE9, i nodi in gioco sono 9 e le funzioni interpolanti sono le seguenti:

$$\begin{aligned}
 F_\tau &= \frac{1}{4} (r^2 + rr_\tau) (s^2 + ss_\tau) & \tau = 1,3,5,7 \\
 F_\tau &= \frac{1}{2} s_\tau^2 (s^2 + ss_\tau) (1 - r^2) + \frac{1}{2} r_\tau^2 (r^2 + rr_\tau) (1 - s^2) & \tau = 2,4,6,8 \\
 F_\tau &= (1 - r^2) (1 - s^2) & \tau = 9
 \end{aligned}$$

dove r e s sono le coordinate normalizzate ed r_τ e s_τ sono le coordinate dei 9 punti reali.

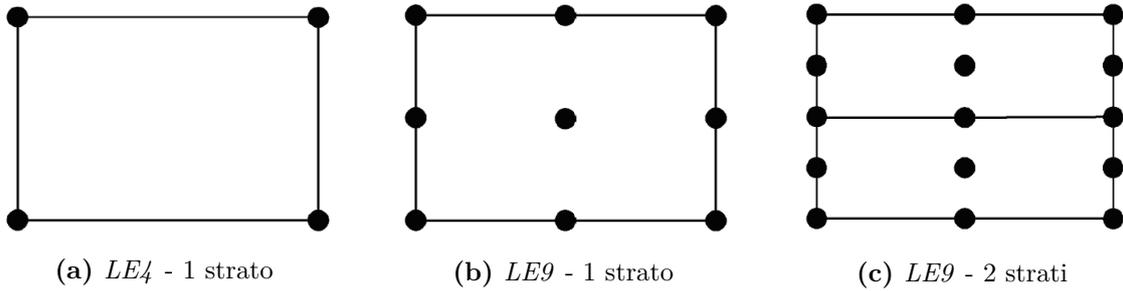


Figura 5.7: Esempi di possibili configurazioni degli elementi di Lagrange *LE* della *cross-section*.

Dunque, la scelta ricade su questi modelli e nello specifico vengono utilizzati gli elementi **LE9** per discretizzare la *cross-section* della struttura in composito. Le configurazioni analizzate sono costruite mediante una combinazione di 3 polinomi LE9, a definire la sezione trasversale, in modo tale che il comportamento cinematico dei singoli strati sia indipendente. Nel dettaglio, in Figura 5.8 è raffigurato il modello in esame, il quale è costituito da 10 elementi trave **B4** lungo l'asse y .

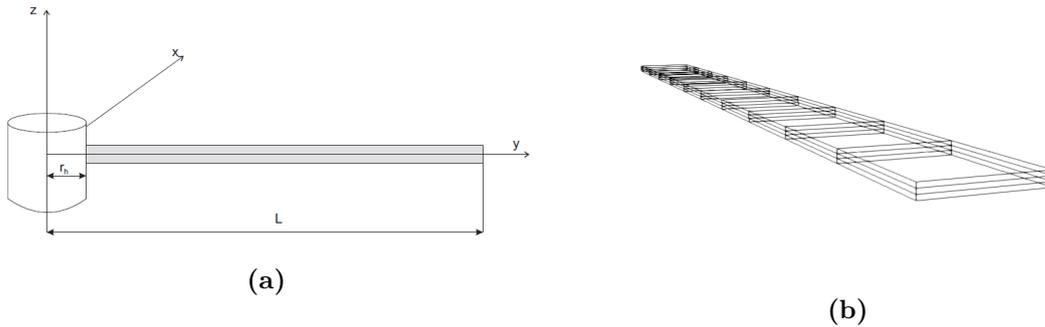


Figura 5.8: (5.8a) Schema della pala di un rotore, che prevede una distanza all'*hub* r_h ; (5.8b) schema della pala con configurazione $3L9 \& 10 \times B4$ a sezione rettangolare, 3 strati di laminazione e rotazione attorno all'asse z .

Dati	
Analisi CUF	
Modulo di Young E_{11} [GPa]	181
Modulo di Young $E_{22} = E_{33}$ [GPa]	10.3
Coefficiente di Poisson $\nu_{12} = \nu_{13}$	0.28
Coefficiente di Poisson ν_{23}	0.33
Densità ρ [$\frac{kg}{m^3}$]	1600
Lunghezza trave L [m]	7.5
Larghezza della <i>cross-section</i> b [m]	0.5
Altezza <i>cross-section</i> h [m]	0.06

Tabella 5.8: Proprietà della trave a sezione rettangolare.

Le proprietà geometriche appena elencate descrivono una struttura che vuole avvicinarsi alle caratteristiche della pala di un rotore, ma con una sezione trasversale poco performante di forma rettangolare. Il raggio alla radice è considerato nullo, $r_h = 0$, e vengono ricavati opportunamente i moduli di taglio G relativi ai piani trasversali, i quali sono assunti pari a $G_{12} = G_{13} = 7.17 \text{ GPa}$ e $G_{23} = 5.52 \text{ GPa}$.

La seguente analisi valuta le differenze nel comportamento delle frequenze dei modi di vibrare, al variare degli angoli di laminazione degli strati in composito. Infatti, i primi diagrammi mostrano alcuni esempi, come le differenze rispetto al modello in materiale ortotropico $[0,0,0]$, con le fibre dei 3 strati disposte con il medesimo angolo nullo (vedi Fig.5.9a). Nei successivi diagrammi di Campbell è possibile osservare i differenti andamenti caratteristici delle strutture rotanti, in base all'angolo di laminazione delle fibre. La Figura 5.9b rappresenta in maniera qualitativa cosa comporta l'utilizzo di strutture in composito rispetto ad un caso

in materiale isotropo, come ad esempio quello introdotto nelle analisi delle sezioni precedenti ($E = 70 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$, $\rho = 2700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$).

I risultati sono catalogati nella Tabella 5.9, a cui si fa riferimento per valutare con maggior precisione i valori delle frequenze modali. La sequenza crescente legata alle frequenze mostra il comportamento dei modi di vibrare dovuto all'incremento della velocità di rotazione attorno all'asse z , e con quali modalità gli stessi modi variano a seconda della configurazione adottata. La dinamica dei rotori risente in modo rilevante delle differenti laminazioni, quindi queste risultanze numeriche hanno il compito di approfondire il tema relativo ai materiali compositi. In particolare,

Ω [rad/s]	$0^\circ/90^\circ/0^\circ$			$90^\circ/0^\circ/0^\circ$		
0	1.8016	11.262	12.473	1.0918	6.8348	12.445
10	2.4982	11.968	12.490	2.0375	7.9448	12.463
20	3.8718	13.871	12.542	3.5547	10.589	12.517
30	5.3967	16.554	12.628	5.1277	13.893	12.604
40	6.9599	19.714	12.743	6.7112	17.462	12.722
50	8.5358	20.865	12.886	8.2983	21.155	12.867
60	10.117	22.190	13.052	9.8869	24.911	13.034
	$0^\circ/30^\circ/0^\circ$			$0^\circ/45^\circ/0^\circ$		
0	1.8147	11.345	13.168	1.8053	11.286	12.737
10	2.5080	12.046	13.186	2.5011	11.991	12.755
20	3.8789	13.938	13.238	3.8741	13.890	12.809
30	5.4029	16.611	13.324	5.3989	16.571	12.897
40	6.9659	19.731	13.441	6.9622	19.702	13.016
50	8.5419	23.132	13.587	8.5383	23.096	13.165
60	10.123	26.663	13.758	10.120	26.634	13.339
	$45^\circ/-45^\circ/0^\circ$			$45^\circ/-45^\circ/45^\circ$		
0	0.97261	6.0849	9.9533	0.62422	3.9148	5.6920
10	1.9819	7.3195	9.9775	1.8238	5.7360	5.6514
20	3.5263	10.158	10.035	3.4099	5.8629	8.9993
30	5.1113	13.568	10.163	5.0068	6.0590	12.696
40	6.7028	17.210	10.318	6.6042	6.3065	16.493
50	8.2956	20.947	10.507	8.2013	6.5876	20.331
60	9.8884	24.714	10.725	9.7980	6.8872	24.187

Tabella 5.9: Frequenze modali [Hz] relativi ai primi tre modi flessionali, per una pala in composito a 3 strati di laminazione.

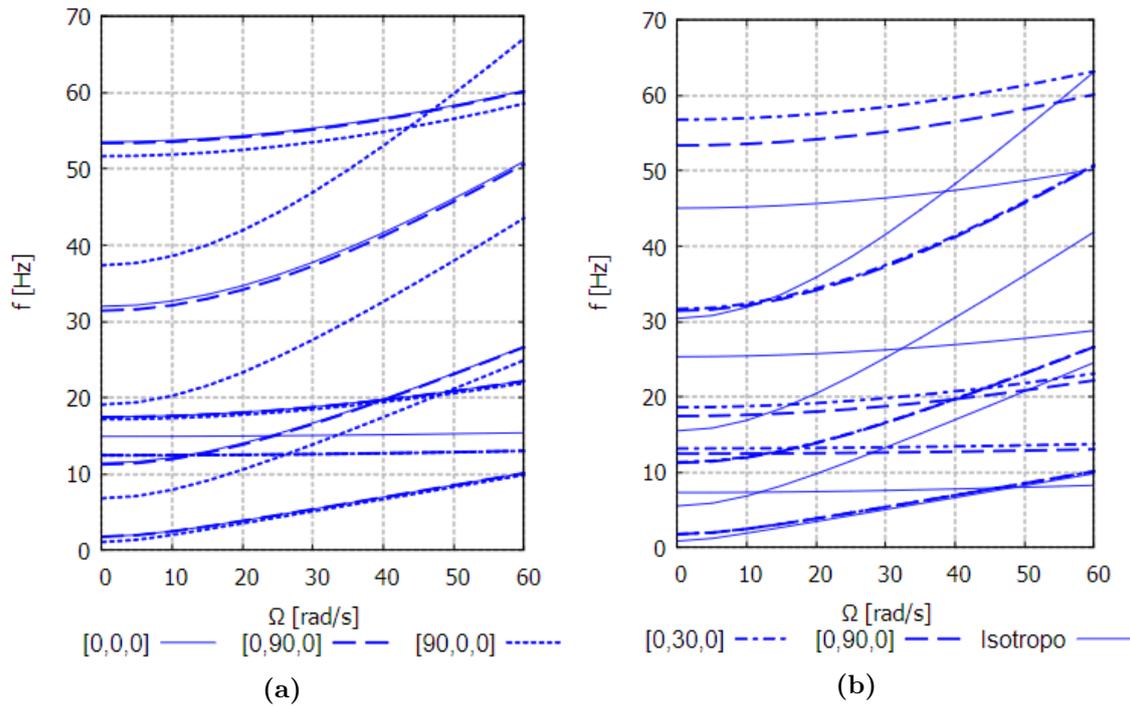


Figura 5.9: Diagramma di Campbell di una pala rotorica a sezione rettangolare ($0.5 \times 0.06 \text{ m}$) in materiale composito; variazione delle frequenze naturali al variare della velocità di rotazione attorno all'asse z , a seconda delle differenti configurazioni di laminazione.

Le strutture in materiale ortotropo sono state analizzate in base a diverse sequenze di laminazione ed è stato ipotizzato che tutti gli strati abbiano lo stesso spessore. Un esempio è fornito nella Fig.5.10b, dove è possibile osservare le differenze tra le sequenze $[45^\circ / -45^\circ / 0^\circ]$ e $[45^\circ / -45^\circ / 45^\circ]$ e come interagiscono i diversi modi di vibrare. I diagrammi riportati sono in riferimento ad un modello strutturale 3L9, a cui viene corrisposto un numero di gradi di libertà (3843 DOF) superiore a quelli TE, al fine di utilizzare un approccio ad elevata efficienza numerica. Le soluzioni LW consentono di eseguire analisi più accurate, anche se ad un costo computazionale maggiore.

Le Figure 5.9,5.10 mostrano i valori di frequenza calcolati con il modello di Lagrange 3L9 in funzione della velocità di rotazione attorno all'asse z , per varie configurazioni. Per consentire il confronto con i risultati presentati in [60],[61], sono state ricavate le frequenze circolari ω a diverse velocità Ω e le soluzioni numeriche confermano l'affidabilità del modello. È interessante notare che, variando l'angolo di laminazione delle fibre, le curve caratteristiche dei modi sono diverse all'aumentare della velocità di rotazione. In alcuni casi, si può notare uno scambio di modi tra le prime due frequenze; inoltre, il secondo modo flessionale solitamente risulta

accoppiato ad uno torsionale. Pertanto, l'angolo di laminazione influenza l'andamento e gli accoppiamenti relativi ai modi di vibrare, al variare della velocità di rotazione.

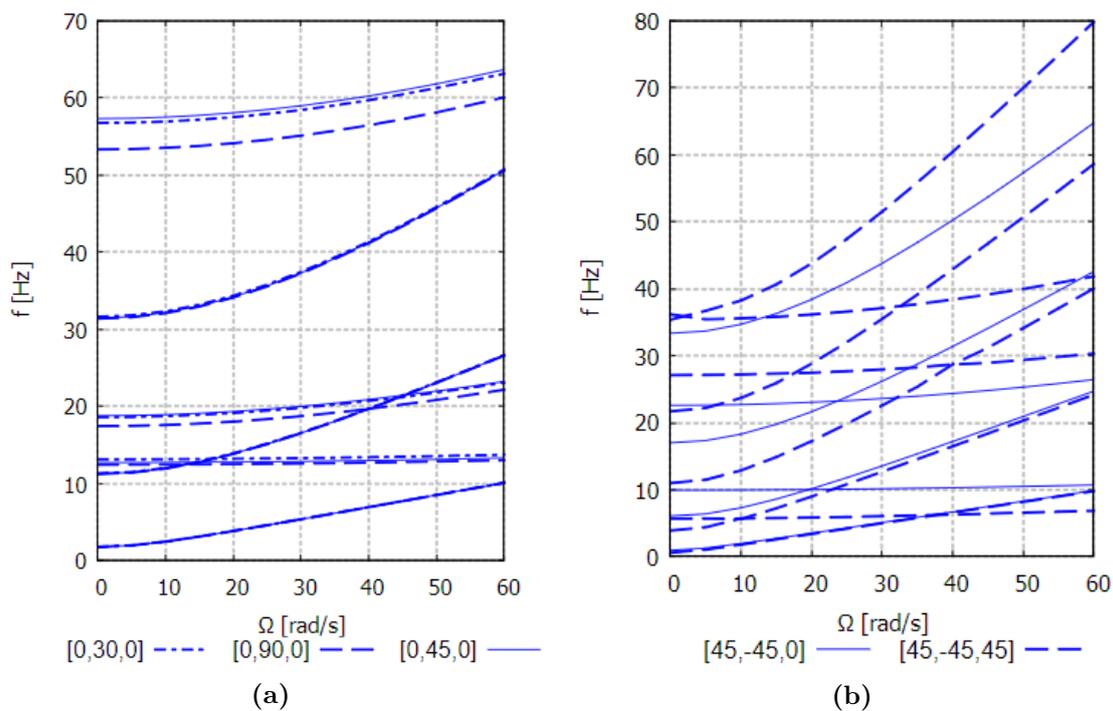


Figura 5.10: Diagramma di Campbell di una pala rotorica a sezione rettangolare ($0.5 \times 0.06 m$) in materiale composito; variazione delle frequenze naturali al variare della velocità di rotazione attorno all'asse z , a seconda delle differenti configurazioni di laminazione.

Capitolo 6

Flutter

Dopo aver studiato ed estrapolato i risultati più significativi riguardanti la dinamica dei rotori, ne deriva l'analisi di uno tra i fenomeni di maggior rilievo in ambito strutturale: il *flutter*. Sulla base della formulazione espressa nel Capitolo 3, è stato sviluppato lo stesso modello agli elementi finiti in linguaggio Fortran delle sezioni precedenti ed è ora in grado di analizzare la condizione di *flutter* di strutture composite laminate. Quindi, la Carrera Unified Formulation (CUF) consente di generare un modello agli elementi finiti gerarchico, molto accurato ed economicamente efficiente. Nelle sezioni successive vengono presentati i risultati numerici di strutture isotrope e composite laminate. L'analisi aeroelastica è svolta mediante il metodo $p-k$ e la condizione di *flutter*, in particolare la velocità V_F e la frequenza f_F , è definita nel punto in cui la parte reale dell'autovalore, ovvero il *damping*, è nulla. Quest'ultimo capitolo si riserva di approfondire tale argomento, introducendo contributi aerodinamici di diverso genere e geometrie via via più complesse.

Dati Analisi CUF	Trave 1 Valid. - Isotropo
Modulo di Young E [GPa]	73.8
Coefficiente di Poisson ν	0.3
Densità ρ [$\frac{kg}{m^3}$]	2768
Lunghezza trave L [m]	0.305
Larghezza della <i>cross-section</i> c [m]	0.076
Altezza <i>cross-section</i> t [mm]	1

Tabella 6.1: Proprietà della piastra in materiale isotropo: confronto con risultati teorici.

Inizialmente, vengono verificate le soluzioni numeriche del codice CUF mettendole a confronto con i valori teorici. Il primo modello esaminato riprende scrupolosamente le caratteristiche della struttura introdotta da Koo [62] e da Petrolo [63], le cui

proprietà sono elencate nella Tabella 6.1. In funzione dell'analisi aeroelastica di un'ala in materiale isotropo, Koo (2001) studia un modello di piastra basato sulla Classical Laminated Theory (CLT, 2D).

Tuttavia, è necessario svolgere un'indagine preliminare in grado di valutare la convergenza delle soluzioni numeriche, nel caso di *flutter*. Il codice dispone di due differenti modelli aerodinamici, uno stazionario e l'altro che implementa la teoria instazionaria di Theodorsen. Entrambi i casi sono utilizzati nel corso del capitolo, per valutare il comportamento delle strutture non-rotanti e rotanti.

L'analisi di convergenza viene effettuata prendendo come riferimento la teoria stazionaria, per quanto riguarda le ipotesi aerodinamiche. A loro volta, vengono modificati i modelli strutturali al fine di determinare la combinazione ottimale per studiare i fenomeni aeroelastici. I valori presentati nelle Tabelle 6.2 e 6.3 tengono conto delle assunzioni di un modello aerodinamico di tipo *steady-state* e rappresentano le conseguenze sulle condizioni di *flutter* al variare delle discretizzazioni strutturali e delle espansioni nodali, rispettivamente. Pertanto, se ne evince che il modello più efficiente risulta essere quello composto da una *mesh* di $20 \times B4$ elementi trave, mentre la *cross-section* viene definita mediante le espansioni polinomiali **LE9**; tale specifica comporta un rapporto ottimale tra accuratezza delle soluzioni e costo computazionale.

Mesh Elementi Trave	V_{ST_F}	f_{ST_F}
10 <i>B4</i>	63.571	45.018
20 <i>B4</i>	63.536	44.981
30 <i>B4</i>	63.523	44.969

Tabella 6.2: Effetto della discretizzazione strutturale sulle condizioni di *flutter*, velocità [$\frac{m}{s}$] e frequenze [Hz], per la teoria di *Steady-State*; trave in Tab.6.1 con espansioni *LE9* ai nodi.

Espansioni Modello trave	V_{ST_F}	f_{ST_F}	DOF
TE4	62.198	44.687	2745
LE4	64.446	46.526	732
LE9	63.536	44.980	1647
LE16	62.761	44.810	2928

Tabella 6.3: Effetto dell'ordine dei modelli di espansione sulle condizioni di *flutter*, velocità [$\frac{m}{s}$] e frequenze [Hz], per la teoria di *Steady-State*; trave in Tab.6.1 con discretizzazione $20 \times B4$.

Di seguito sono presentate le varie configurazioni esaminate nel corso di questo capitolo. Come già esposto nella medesima sezione, i primi casi riguardano un modello di validazione del codice; infatti, le dimensioni della struttura rispettano i valori proposti dai precedenti studi. I modelli successivi riproducono le grandezze caratteristiche dei cassoni alari, i quali hanno una grande importanza dal punto di vista strutturale. Gli studi relativi alle *box-beam* hanno il compito di procedere verso analisi sempre più affini ai casi relativi alle strutture rotanti ricercate nelle forme, come ad esempio le pale di elicottero.

Dati Analisi CUF	<i>Box-beam</i> 1 Isotropo
Modulo di Young $E_{isotropo}$ [GPa]	73.8
Coefficiente di Poisson $\nu_{isotropo}$	0.3
Densità $\rho_{isotropo}$ [$\frac{kg}{m^3}$]	2768
Lunghezza trave L [m]	7.5
Larghezza della <i>cross-section</i> c [m]	0.5
Altezza <i>cross-section</i> h [m]	$c/15$
Spessore parete sottile t [m]	$c/150$

Tabella 6.4: Proprietà della trave a sezione rettangolare in parete sottile: *box-beam*.

Dati Analisi CUF	Trave 2 Valid. - Composito
Modulo di Young $E_{L_{g/e}}$ [GPa]	181
Modulo di Young $E_{T_{g/e}}$ [GPa]	10.3
Modulo di taglio $G_{LT_{g/e}}$ [GPa]	7.17
Coefficiente di Poisson $\nu_{LT_{g/e}}$	0.28
Densità $\rho_{graf/epoxy}$ [$\frac{kg}{m^3}$]	1600
Lunghezza trave L [m]	0.305
Larghezza della <i>cross-section</i> b [m]	0.0762
Altezza <i>cross-section</i> t [mm]	0.804

Tabella 6.5: Proprietà della piastra in materiale composito.

Dati Analisi CUF	<i>Box-beam 2</i> Composito
Modulo di Young $E_{L_{g/e}}$ [GPa]	181
Modulo di Young $E_{T_{g/e}}$ [GPa]	10.3
Modulo di taglio $G_{LT_{g/e}}$ [GPa]	7.17
Coefficiente di Poisson $\nu_{LT_{g/e}}$	0.28
Densità $\rho_{graf/epoxy}$ [$\frac{kg}{m^3}$]	1600
Lunghezza trave L [m]	1
Larghezza della <i>cross-section</i> c [m]	0.5
Altezza <i>cross-section</i> h [m]	$c/15$
Spessore parete sottile t [m]	$c/150$

Tabella 6.6: Proprietà della trave a sezione rettangolare in parete sottile: *box-beam* in materiale composito.

Dati Analisi CUF	<i>Box-beam 3</i> Composito
Modulo di Young $E_{L_{g/e}}$ [GPa]	181
Modulo di Young $E_{T_{g/e}}$ [GPa]	10.3
Modulo di taglio $G_{LT_{g/e}}$ [GPa]	7.17
Coefficiente di Poisson $\nu_{LT_{g/e}}$	0.28
Densità $\rho_{graf/epoxy}$ [$\frac{kg}{m^3}$]	1600
Lunghezza trave L [m]	7.5
Larghezza della <i>cross-section</i> c [m]	0.5
Altezza <i>cross-section</i> h [m]	$c/15$
Spessore parete sottile t [m]	$c/150$

Tabella 6.7: Proprietà della trave a sezione rettangolare in parete sottile: *box-beam* in materiale composito.

Dati Analisi CUF	Pala 1 Composito	Pala 2 Isotropo
Modulo di Young $E_{L_{g/e}}$ [GPa]	181	71
Modulo di Young $E_{T_{g/e}}$ [GPa]	10.3	/
Modulo di taglio $G_{LT_{g/e}}$ [GPa]	7.17	27.3
Coefficiente di Poisson $\nu_{LT_{g/e}}$	0.28	0.3
Densità $\rho_{graf/epoxy}$ [$\frac{kg}{m^3}$]	1600	2770
Lunghezza radiale L [m]	8.177784	8.177784
Corde c [m]	0.532511	0.532511
Distanza r_{hub}	0.17 L	0.17 L
Profilo alare	SC1095	SC1095

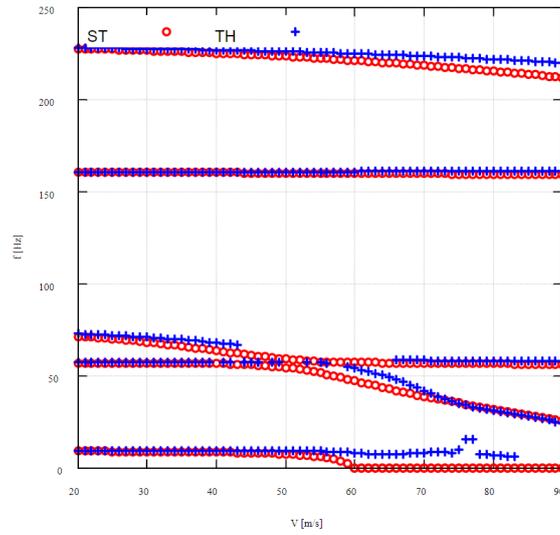
Tabella 6.8: Proprietà della pala cava in Fig.6.15, che descrive una tipica configurazione del rotore principale dell'UH-60. Ref.[64],[65]

6.1 Strutture non-rotanti

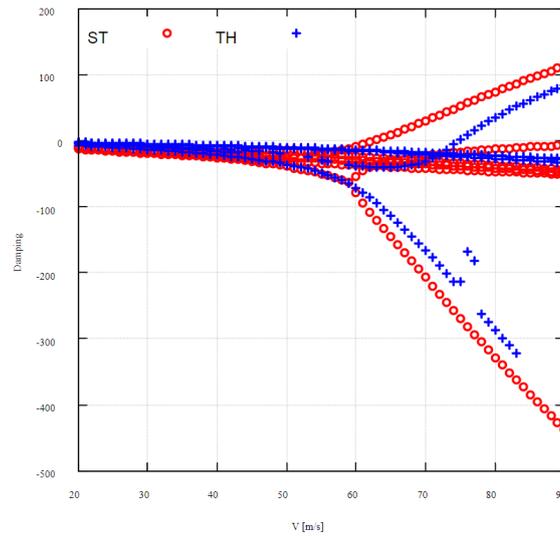
6.1.1 Casi isotropi

Piastra: validazione del codice

Il primo modello preso in esame è il medesimo utilizzato nella precedente analisi di convergenza. Pertanto, vengono impostate le caratteristiche meccaniche e geometriche presenti nella Tabella 6.1. L'analisi aeroelastica consiste nel valutare i diagrammi relativi alle grandezze di riferimento, smorzamento e frequenza, in funzione della velocità V . Le condizioni di *flutter* si ricavano in corrispondenza della velocità per cui il *damping* si annulla, e diventa successivamente positivo. I casi raffigurati consentono di valutare il confronto tra le teorie aerodinamiche *steady-state* e di *Theodorsen*, ed in che modo influenzano le soluzioni generate dal codice CUF. In Fig.6.1 sono rappresentati gli andamenti relativi alla struttura già descritta, mentre le Figure 6.4 mostrano il comportamento aeroelastico di una struttura in parete sottile, le cui proprietà geometriche sono riportate in Tab.6.4.



(a) Frequenza



(b) Smorzamento

Figura 6.1: Diagramma di *flutter* per la Trave 1 ($1L16 \times 20 \times B4$, $r_h = 0$) in materiale isotropo; 'ST': *Steady-State*, 'TH': *Theodorsen*.

Box-beam

Relativamente alla struttura *box-beam*, il confronto rispetto ai risultati ricavati mediante il software commerciale ABAQUS rappresenta un contributo rilevante all'elaborato. I seguenti esiti proposti sono riferiti al modello in materiale isotropo, come illustrato nella Tabella 6.4. Al fine di validare il codice CUF, in Tab.6.9 viene

presentato un ulteriore confronto tra i risultati numerici, i quali confermano l'elevata accuratezza del codice in esame; infatti, i valori ottenuti comportano errori relativi minimi tra le due alternative di calcolo.

	Abaqus	CUF (4 L9 & 20 × B4)
f_1 : primo modo flessionale	4.7673	4.7694
f_2 : secondo modo flessionale	29.515	29.607
f_3 : terzo modo flessionale	48.271	48.782
f_4 : quarto modo flessionale	82.203	81.782
f_5 : quinto modo flessionale	161.11	157.21

Tabella 6.9: Frequenze naturali [Hz] della trave, secondo metodi analitici e numerici.

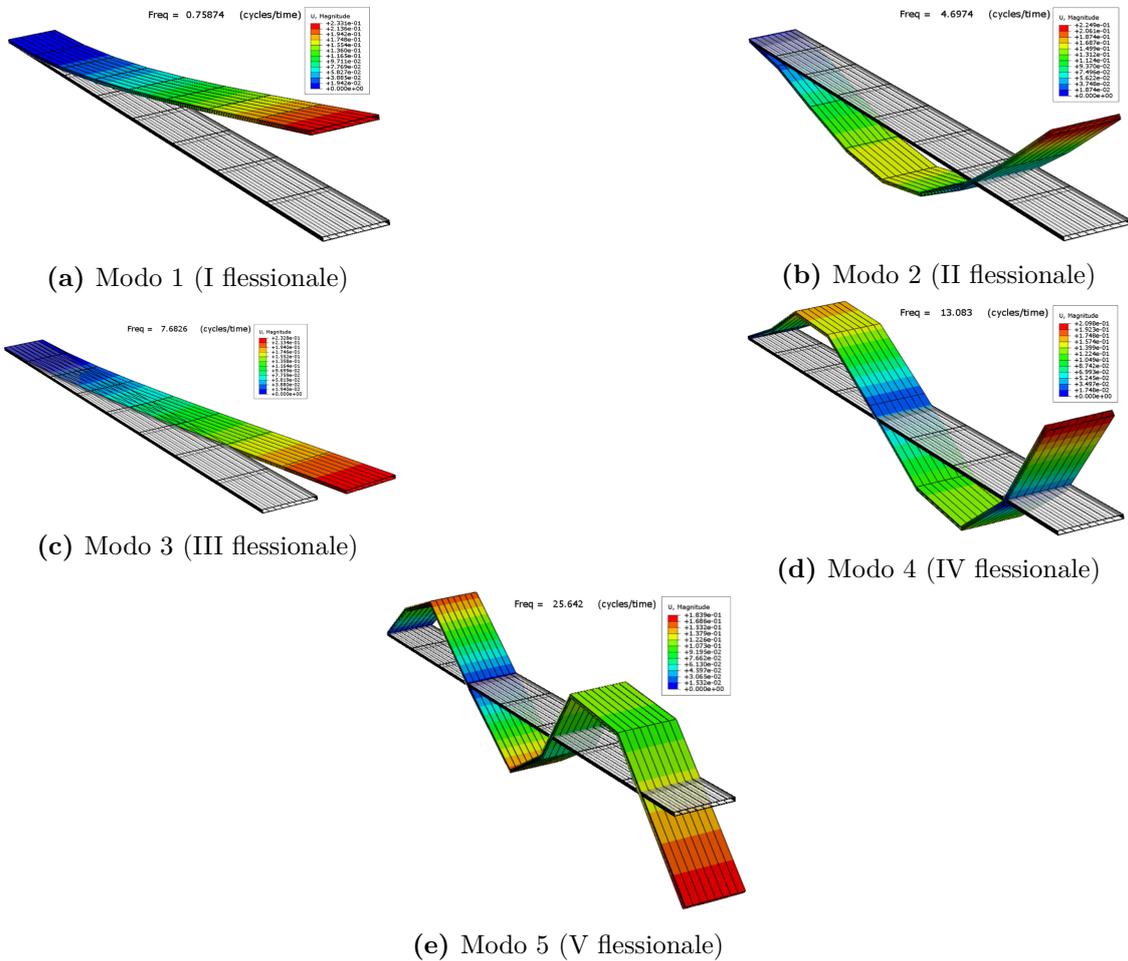


Figura 6.2: Analisi dinamica ABAQUS: primi 5 modi delle vibrazioni libere per una *box/beam* in parete sottile.

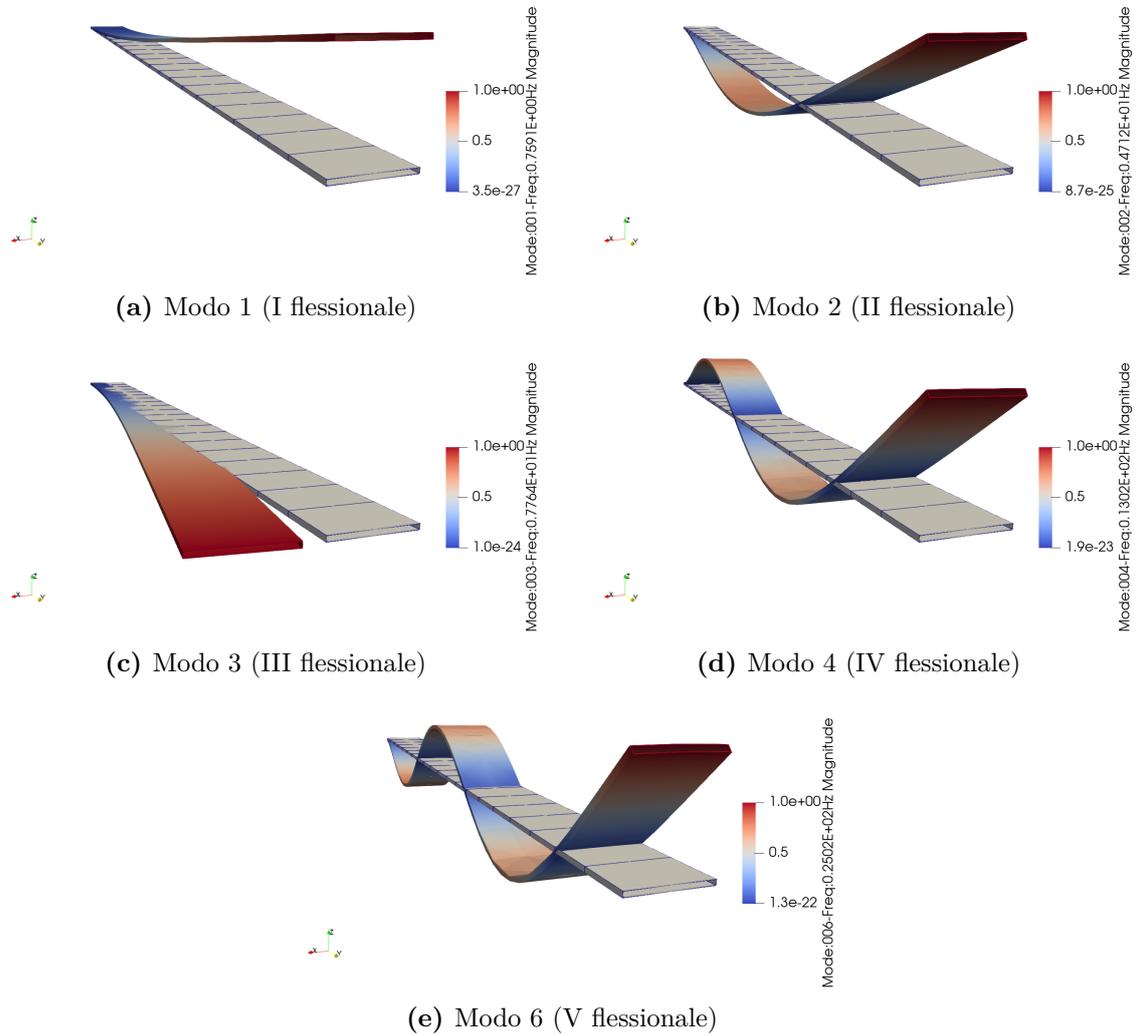
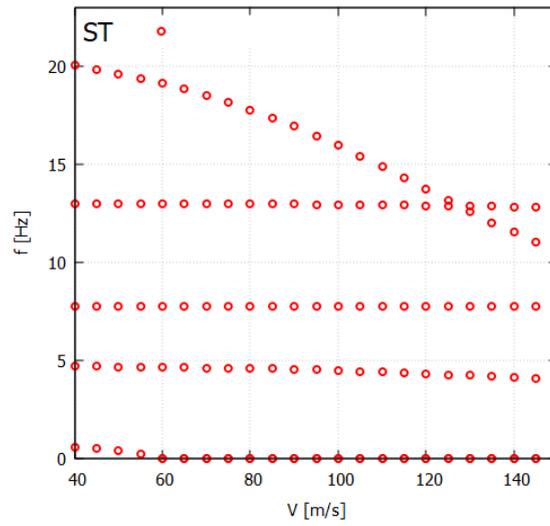
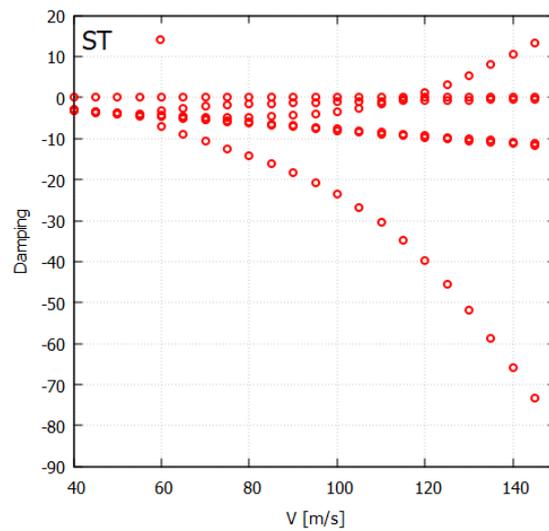


Figura 6.3: Analisi dinamica CUF (4 $L9 \& 20 \times B4$): primi 5 modi flessionali delle vibrazioni libere per una *box/beam* in parete sottile.



(a) Frequenza



(b) Smorzamento

Figura 6.4: Diagramma di *flutter* per la *Box-beam* 1 ($4L9 \& 20 \times B4$, $r_h = 0$) in materiale isotropo; 'ST': *Steady-State*.

6.1.2 Casi compositi

Piastra: validazione del codice

Al fine di analizzare la funzionalità strutturale dei materiali compositi, vengono presentati vari modelli laminati, a partire dal caso in Tab.6.1 ma con opportune proprietà meccaniche. Inizialmente, è necessario verificare la validità delle soluzioni numeriche relative al codice CUF proposto per questo tipo di strutture. A tal proposito, la Tabella 6.10 mostra la variazione dei valori caratteristici in funzione della laminazione, in accordo con i risultati ricavati da Kameyama e Fukunaga [66] mediante la CLT, e da Hollowell e Dugundji [67] in ambito sperimentale. Il materiale utilizzato è un composito grafite/epossidico, il quale assume $E_L = 98.0 \text{ GPa}$, $E_T = 7.90 \text{ GPa}$, $G_{LT} = 5.60 \text{ GPa}$, $\nu = 0.28$ e $\rho = 1520 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. I risultati evidenziano una differenza rilevante tra la soluzione stazionaria e quella instazionaria, in quanto i contributi aerodinamici sono diversi. I valori relativi alla teoria di *Theodorsen* comportano valori superiori in termini di velocità critiche V_F , mediante un'impostazione del problema più completa, a fronte di un costo computazionale più elevato. Al contrario, le analisi stazionarie richiedono tempi di calcolo di gran lunga inferiori e garantiscono un approccio conservativo riguardante le condizioni di *flutter*, in accordo con gli esiti teorici ed empirici proposti. Tuttavia, in entrambi i casi è possibile valutare correttamente le differenze prestazionali tra le varie laminazioni.

Dunque, i seguenti diagrammi, in Fig.6.5, individuano le condizioni di *flutter* della trave fissata in fase di validazione, considerando le proprietà attuali di un composito in fibra di carbonio e matrice in resina epossidica ($E_L = 181 \text{ GPa}$, $E_T = 10.3 \text{ GPa}$, $G_{LT} = 7.17 \text{ GPa}$, $\nu = 0.28$ e $\rho = 1600 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$).

Laminazione	ST	TH	CLT (2007)	Exp. (1984)
	CUF 6 L9	CUF 6 L9	Ref.[66]	Ref.[67]
$[0_2/90]_s$	21.6	26.3	23.0	25
$[30_2/0]_s$	26.7	29.5	27.1	27
$[45_2/0]_s$	27.9	30.7	27.5	28
$[45/-45/0]_s$	44.9	47.0	40.1	>32

Tabella 6.10: Velocità di *flutter* [$\frac{m}{s}$] per una piastra a 6 strati di laminazione.

A tal proposito, la semplicità della struttura esaminata consente di studiare le diverse tecniche di laminazione e di comprendere le caratteristiche corrispondenti, nonché quali tipologie hanno performance migliori. Dunque, sono state introdotte le laminazioni ad oggi utilizzate in applicazioni strutturali. Specificatamente, lo studio tratta i modelli in materiale composito di tipo *cross-ply*, *angle-ply* e *double-double*, i quali sono rispettivamente costituiti da laminazioni in ordine casuale a 0° e 90° rispetto all'asse z , da laminazioni trasversali senza alcun vincolo e da pacchetti di doppie laminazioni coincidenti posti in sequenza alternata.

Inizialmente, viene posta particolare attenzione alla differenza tra strutture a 6 ed a 3 strati di laminazione (Fig.6.11), mantenendo inalterate le caratteristiche geometriche e meccaniche della struttura. Pertanto, la presenza di 6 elementi $L9$ per la *cross-section* del primo modello, rispetto ai 3 dell'altro, comporta una sostanziale disparità nel numero di gradi di libertà corrispondenti. Inoltre, il caso a 6 strati è composto da una sequenza simmetrica, la quale garantisce prestazioni migliori in risposta alle sollecitazioni. In particolare, la configurazione $[45/-45/0]_s$ mette in risalto condizioni di *flutter* (V_F) ampiamente superiori, in confronto al caso analogo a 3 strati di laminazione.

Laminazione	V_F	f_F	DOF
$[0/0/90]_s$	24.9	31.191	7137
$[45/-45/0]_s$	57.2	58.094	7137
$[0/0/90]$	23.7	27.328	3843
$[45/-45/0]$	30.2	32.195	3843

Tabella 6.11: Velocità $[\frac{m}{s}]$ e frequenze $[Hz]$ di *flutter*: confronto tra una struttura in composito a 6 strati ed a 3 strati di laminazione (*cross-ply* e *angle-ply*): $LE9 \& 20 \times B4$ (ST).

Successivamente, vengono esaminate le varie tipologie di laminazione utilizzando la struttura a 6 strati, già introdotta. I risultati della Tabella 6.12 sono riferiti sia a configurazioni casuali sia a quelle simmetriche e denotano una maggior propensione alla resistenza al *flutter* da parte dei casi simmetrici; infatti, seppur vi siano alcune eccezioni, i valori delle velocità V_F relativi alle laminazioni simmetriche sono più alti. Tuttavia, la Tabella 6.13 mostra i parametri di riferimento di *flutter* nel caso di configurazione *angle-ply*. Tali disposizioni delle laminazioni producono un incremento di prestazione rilevante, che consente di individuare alcuni casi di maggior interesse. Inoltre, genera molta curiosità l'ultima e la più recente famiglia di laminati compositi, denominati *double-double* (DD), la quale potrebbe rivoluzionare le strutture in composito, rendendole più leggere, più resistenti, più facili da progettare e meno costose da produrre. I risultati relativi a questa tipologia di configurazione, in merito al caso a 8 strati di laminazione (vedi Tab.6.14), confermano l'efficienza dei laminati *double-double*, con un valore massimo in corrispondenza della sequenza DD $[45_2/-45_2/45_2/-45_2]$.

Laminazione CUF 6 L9	V_F	f_F
[0/90/0/0/90/90]	23.7	27.082
[90/90/0/90/0/90]	23.3	25.627
[90/0/90/90/0/0]	24.2	28.644
[90/90/0] _s	23.4	23.984
[90/0/90] _s	23.6	26.908
[0/90/0] _s	24.6	30.068
[0/90/90] _s	24.6	29.804
[0/0/90] _s	24.9	31.191

Tabella 6.12: Velocità [$\frac{m}{s}$] e frequenze [Hz] di *flutter* per una piastra a 6 strati di laminazione di tipo *cross-ply*: LE9 & 20 × B4 (ST).

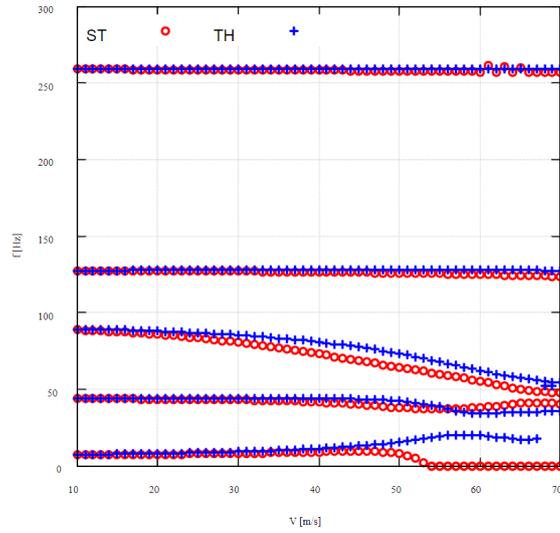
Laminazione CUF 6 L9	V_F	f_F
[45/90/0] _s	37.4	29.288
[45/30/90] _s	33.9	29.023
[30/45/ - 45] _s	37.1	33.994
[30/ - 30/0] _s	47.3	44.649
[45/ - 45/30] _s	57.0	58.941
[45/ - 45/0] _s	57.2	58.094

Tabella 6.13: Velocità [$\frac{m}{s}$] e frequenze [Hz] di *flutter* per una piastra a 6 strati di laminazione di tipo *angle-ply*: LE9 & 20 × B4 (ST).

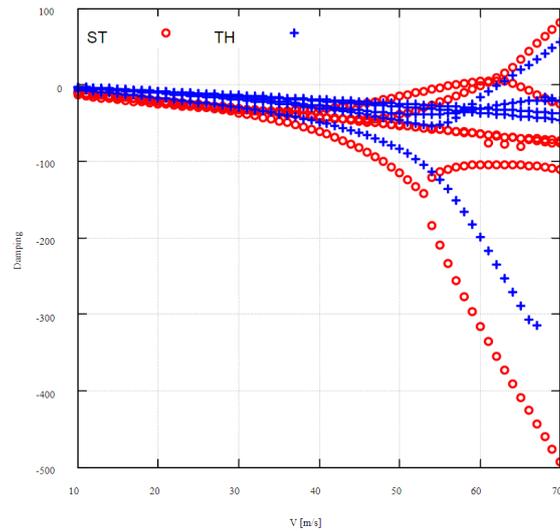
Laminazione CUF 6 L9	V_F	f_F	DOF=9333
[0 ₂ /90 ₂ /0 ₂ /90 ₂]	24.0	28.048	
[30 ₂ /60 ₂ /30 ₂ /60 ₂]	30.3	28.120	
[30 ₂ / - 30 ₂ /30 ₂ / - 30 ₂]	48.6	44.361	
[45 ₂ / - 45 ₂ /45 ₂ / - 45 ₂]	53.7	58.436	

Tabella 6.14: Velocità [$\frac{m}{s}$] e frequenze [Hz] di *flutter* per una piastra a 8 strati di laminazione di tipo *double-double*: LE9 & 20 × B4 (ST).

A seguito di un attenta analisi a riguardo delle varie tipologie di laminazione, la Figura 6.5 mostra l'evoluzione della frequenza e dello smorzamento relativi alla configurazione principale, [45/ - 45/0]_s. Pertanto, esaminando il diagramma specifico 6.5b, è possibile ricavare la velocità di *flutter* V_F relativa ai due approcci aerodinamici.



(a) Frequenza



(b) Smorzamento

Figura 6.5: Diagramma di *flutter* per la Trave 2 ($6L9 \& 20 \times B4$, $r_h = 0$) a 6 strati di laminazione $[45/ - 45/0]_s$; 'ST': *Steady-State*, 'TH': *Theodorsen*.

Box-beam

I seguenti studi consentono di valutare il comportamento di un modello di pala rotorica approssimata con una struttura *box-beam*. Le proprietà del modello sono elencate nella Tabella 6.6; inoltre, la struttura è costituita da 20 elementi trave a 4

nodii, mentre la sezione trasversale è discretizzata mediante 4 elementi di Lagrange cubici.

Conformemente alla configurazione $[\theta_b/\theta_r/\theta_t/\theta_l]$ raffigurata in Fig.6.6, viene posto in esame un esempio di laminazione secondo cui è probabile che si verifichino accoppiamenti di flessione-torsione. I rispettivi angoli di laminazione, quindi, sono ricavati a partire dal caso $[\theta/0.1\theta/2\theta/10\theta]$. Il modello consente di analizzare le condizioni di *flutter* al variare di θ ed utilizzando un approccio stazionario ST, il quale risulta già affidabile, a fronte dell'impiego di espansioni di Lagrange *LE9* per definire le sezioni.

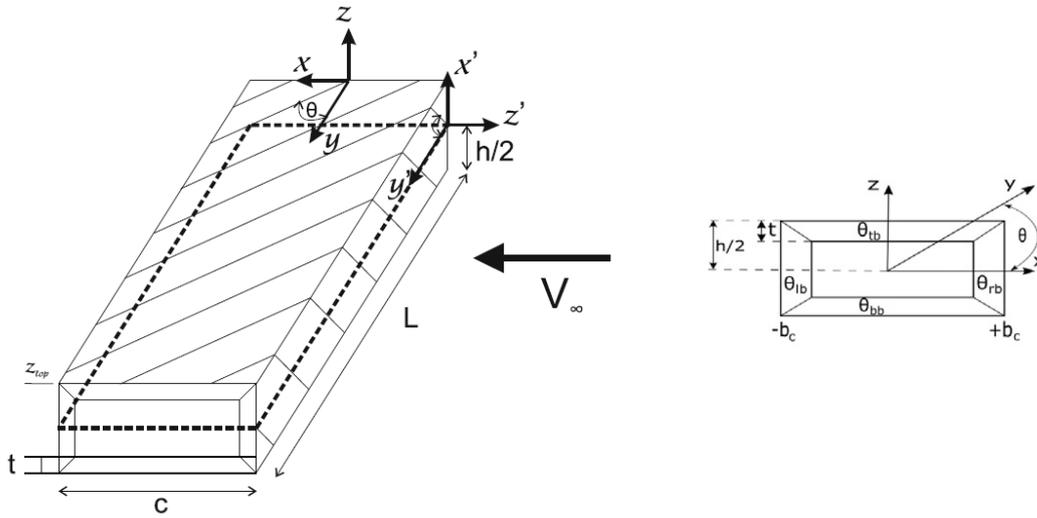
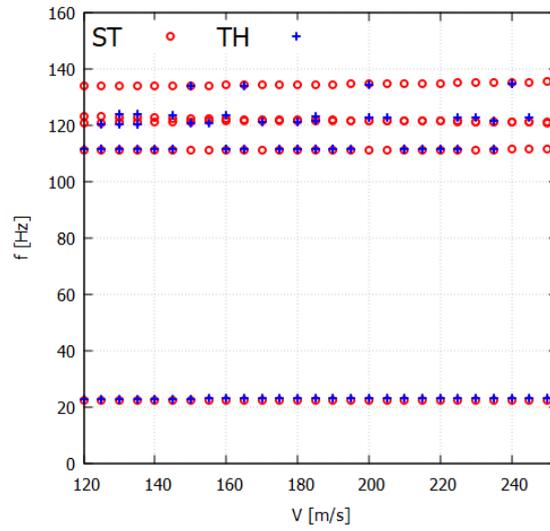


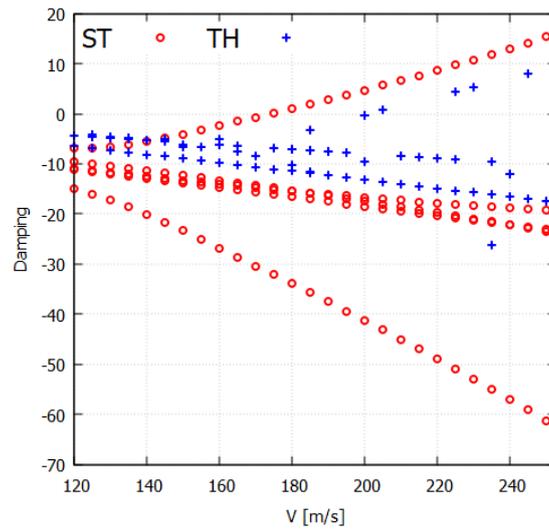
Figura 6.6: Schematizzazione della struttura *box-beam* in parete sottile.

θ	V_F	f_F	DOF=4392
CUF 4 L9			
0°	308.9	117.34	
30°	175.2	115.24	
60°	143.0	122.04	
90°	144.5	112.91	
120°	174.1	121.32	
150°	161.9	117.55	
180°	311.3	118.2	

Tabella 6.15: Velocità $[\frac{m}{s}]$ e frequenze $[Hz]$ di *flutter* per un *box-beam* in materiale composito con laminazione $[\theta/0.1\theta/2\theta/10\theta]$ (Tab.6.6): *LE9* & $20 \times B4$ (ST).



(a) Frequenza



(b) Smorzamento

Figura 6.7: Diagramma di *flutter* per la *Box-beam* 2 ($4L9 \times 20 \times B4$, $r_h = 0$) $[\theta/0.1\theta/2\theta/10\theta]$, con $\theta = 120^\circ$, in materiale composito (Tab.6.6); 'ST': *Steady-State*, 'TH': *Theodorsen*.

Lunghezza trave L [m]	V_F	f_F
1	175.2	115.25
3.5	192.6	13.878
7.5	69.4	6.5229

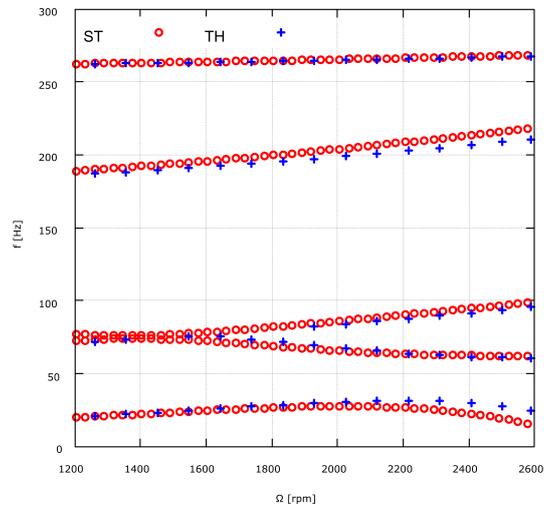
Tabella 6.16: Effetto della lunghezza della pala sulle condizioni di *flutter*, velocità [$\frac{m}{s}$] e frequenze [Hz]; *Box-beam* 2 ($4L9 \& 20 \times B4$, $r_h = 0$) [$\theta/0.1\theta/2\theta/10\theta$], con $\theta = 30^\circ$, in materiale composito (Tab.6.6): ST.

Le analisi parametriche presentate sopra consentono di effettuare una convalida del codice numerico, il quale fornisce delle soluzioni in accordo con le modifiche geometriche applicate. Per quanto riguarda la *box-beam*, la lunghezza influenza in maniera significativa le condizioni di *flutter*. Pertanto, in fase progettuale è necessario trovare una dimensione adatta, al fine di ottimizzare le prestazioni della struttura rotante. Inoltre, la Tabella 6.15 propone un confronto tra le diverse configurazioni delle laminazioni, da cui è possibile estrapolare le soluzioni migliori in base alle richieste specifiche del modello.

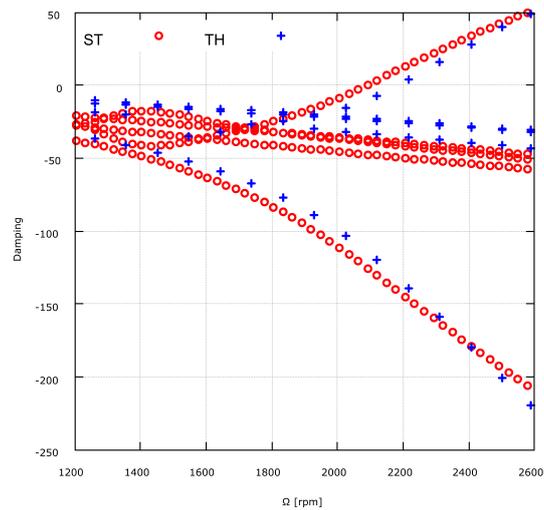
6.2 Strutture rotanti

Piastra: validazione del codice

In accordo con quanto spiegato nella Sezione 3.4, le prossime analisi dell'elaborato esaminano una struttura posta in rotazione rispetto al proprio asse z . Il moto simula il comportamento della pala di un elicottero, ad una velocità di avanzamento costante. Allo stesso modo dei casi precedenti a modello fisso (Sez.6.1), le strutture sono soggette al fenomeno di *flutter*. A tal proposito, è possibile individuare i corrispondenti valori di velocità e di frequenza, i quali determinano un *target* relativo a questa condizione critica. Lo studio ha l'obiettivo di ricavare i valori di soglia corretti per diverse tipologie di struttura e di analizzare l'influenza delle varie laminazioni e delle loro disposizioni, nel caso di materiali compositi.



(a) Frequenza



(b) Smorzamento

Figura 6.8: Diagramma di *flutter* per la Trave 2 ($6L9 \& 20 \times B4$, $r_h = 0$) rotante a 6 strati di laminazione $[30/ - 30/0]_s$, in materiale composito (Tab.6.5); 'ST': *Steady-State*, 'TH': *Theodorsen*.

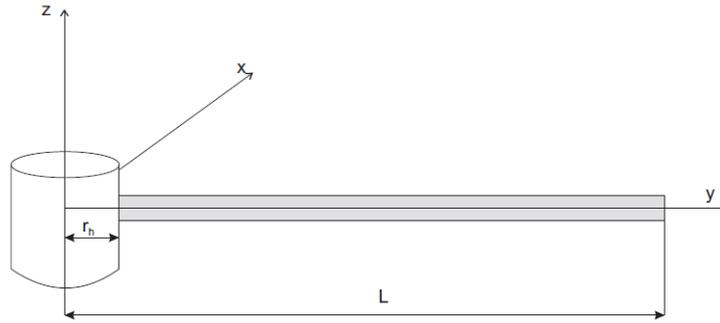


Figura 6.9: Schema della trave posta in rotazione attorno all'asse z .

Il primo modello in esame è la piastra semplice descritta in Tab.6.5, al fine di valutare più adeguatamente le differenze tra le diverse sequenze di laminazione. In Fig.6.9 viene raffigurato un modello approssimativo della trave in parete sottile a 3 strati di laminazione, con una velocità di rotazione Ω . Infatti, la Tabella 6.17 presenta i risultati relativi al modello di trave introdotto. Le configurazioni predisposte richiamano le sequenze già studiate di tipo *cross-ply*, *angle-ply* e *double-double*. Dall'analisi è possibile dedurre un comportamento migliore delle configurazioni che sfruttano la sequenza $30^\circ / -30^\circ$ al loro interno, le quali sono in grado di posticipare la condizione di *flutter* rispetto agli altri casi; specificatamente, la laminazione *angle-ply* $[30 / -30 / 0]_s$ mostra le prestazioni di maggior rilievo tra i modelli analizzati. A tal proposito, nella Figura 6.8 sono rappresentati i diagrammi da esaminare in caso di *flutter*, secondo i due approcci aerodinamici già presentati. In particolare, il codice elabora il metodo $p-k$, al fine di individuare la condizione di *flutter*. La struttura in materiale composito $[30 / -30 / 0]_s$ viene valutata a diverse velocità di rotazione Ω , fino alla condizione critica.

Laminazione	Ω_F	f_F	DOF
$[45 / -45 / 0]$	1287.34	40.675	3843
$[0 / 0 / 90]_s$	1019.94	35.389	7137
$[30 / -30 / 0]_s$	2088.58	64.638	7137
$[45 / -45 / 0]_s$	1895.67	74.611	7137
$[30_2 / -30_2 / 30_2 / -30_2]$	2015.05	63.015	9333
$[45_2 / -45_2 / 45_2 / -45_2]$	1939.60	72.604	9333

Tabella 6.17: Velocità [rpm] e frequenze [Hz] di *flutter* per la Trave 2 in materiale composito (Tab.6.5) rotante: $LE9 \& 20 \times B4$ (ST).

Box-beam

Dunque, nel seguente caso vengono impostate inizialmente le proprietà della Tabella 6.6, quindi di una *box-beam* lunga $L = 1\text{ m}$. In riferimento a questa geometria, sono stati valutati gli effetti della laminazione, per quanto riguarda le strutture in materiale composito, e della lunghezza caratteristica L della trave. Il modello consente di estrapolare i valori di interesse relativi alla condizione di *flutter*. Nell'analisi in Tab.6.18 vengono determinate le velocità Ω_F e le frequenze f_F critiche al variare degli angoli di laminazione θ , in accordo con la configurazione $[\theta/0.1\theta/2\theta/10\theta]$. La struttura *box-beam* in parete sottile è composta da quattro strati di laminazione, così disposti $[\theta_b/\theta_r/\theta_t/\theta_l]$ in Fig.6.6; la scelta della suddetta configurazione permette di studiare ottimamente gli accoppiamenti di flessione-torsione. Pertanto, il caso a $\theta = 30^\circ$ risulta il modello più performante nel contrastare il fenomeno di *flutter*.

θ CUF 4 L9	Ω_F	f_F	DOF=4392
0°	2383.68	60.141	
30°	3257.50	90.142	
60°	2740.85	84.066	
90°	2776.18	93.542	
120°	2701.69	85.166	
150°	2697.87	150.50	
180°	2369.35	60.067	

Tabella 6.18: Velocità [*rpm*] e frequenze [*Hz*] di *flutter* per un *box-beam* in materiale composito con laminazione $[\theta/0.1\theta/2\theta/10\theta]$ (Tab.6.6) rotante: $LE9 \& 20 \times B4$ (ST).

In prospettiva di applicare il codice in merito a strutture di utilizzo via via più realistico, in Tab.6.19 è possibile osservare cosa comporta in termini numerici l'allungamento della trave. Il modello subisce una riduzione significativa della velocità di *flutter*, in corrispondenza dei singoli incrementi di L . Questo comportamento rispetta gli ordini di grandezza presentati in letteratura da [68], relativi ad un caso reale della pala di un elicottero.

Lunghezza trave	Ω_F	f_F
L [m]		
1	3257.50	90.142
3.5	376.27	15.336
7.5	90.820	6.4012

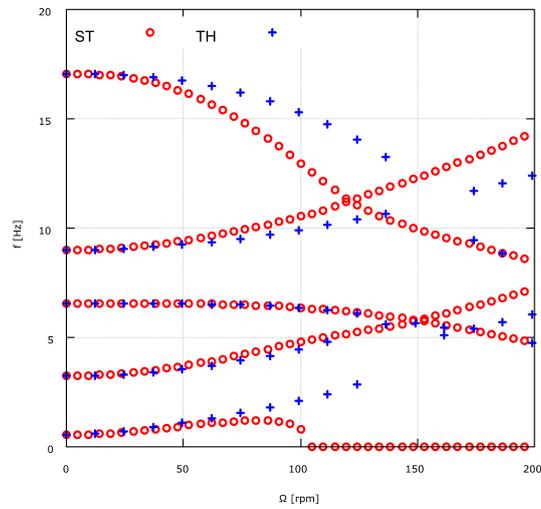
Tabella 6.19: Effetto della lunghezza della pala sulle condizioni di *flutter*, velocità [rpm] e frequenze [Hz]; *Box-beam* 2 (4L9 & 20 × B4, $r_h = 0$) [$\theta/0.1\theta/2\theta/10\theta$], con $\theta = 30^\circ$, in materiale composito (Tab.6.6): ST.

In tal senso, le prestazioni sono necessariamente inferiori, poiché la laminazione non è ottimale e la geometria è ancora approssimativa e senza forme ricercate; pertanto, la configurazione minimale della struttura non consente di raggiungere le caratteristiche aerodinamiche di un profilo alare. La fase preliminare di questo specifico studio porta a definire la geometria presentata in Tab.6.7, su cui effettuare ulteriori analisi. Nonostante tali precisazioni, il modello assume le dimensioni fedeli a quelle di un caso reale.

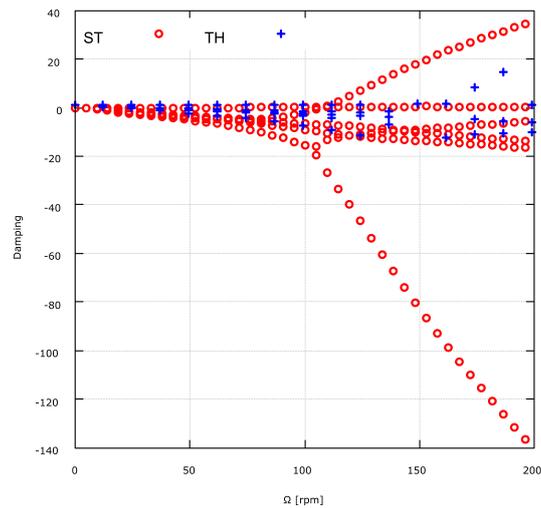
Lo studio riguardante il cassone alare appena presentato prosegue apportando ulteriori modifiche al modello. Dopo aver valutato il decremento di prestazioni in relazione ad un allungamento effettivo della trave, viene esaminato il contributo dovuto alla lunghezza radiale dell'*hub*. Relativamente ad ogni applicazione, la radice di una pala è separata dal centro di rotazione di una certa distanza, denominata appunto r_{hub} . Al variare di tale valore, la Tabella 6.20 denota una variazione delle condizioni di *flutter* per la configurazione a $\theta = 90^\circ$. Pertanto, risulta rilevante non eccedere troppo nel dimensionamento di questa grandezza, di cui non è possibile fare a meno nell'architettura di un rotore, come quello dell'elicottero. Il codice è quindi in grado di impostare la distanza r_h desiderata e di valutarne l'effetto sui modi di vibrare. Il valore $r_h = 0.975$, il quale è equivalente a $0.17 L$, corrisponde alle proporzioni tipiche delle applicazioni commerciali e rappresenta un buon compromesso in termini prestazionali.

Lunghezza <i>hub</i>	Ω_F	f_F
r_h [m]		
0	102.18	10.257
0.975	86.523	9.7183
1.725	78.023	9.6668
2.25	72.962	9.6391

Tabella 6.20: Effetto della lunghezza dell'*hub*, r_h , sulle condizioni di *flutter*, velocità [rpm] e frequenze [Hz]; *Box-beam* 3 (4L9 & 20 × B4) [$\theta/0.1\theta/2\theta/10\theta$], con $\theta = 90^\circ$, in materiale composito (Tab.6.7): ST.



(a) Frequenza



(b) Smorzamento

Figura 6.10: Diagramma di *flutter* per la *Box-beam 2* ($4L9 \& 20 \times B4$, $r_h = 0.975 \text{ m}$) rotante $[\theta/0.1\theta/2\theta/10\theta]$, con $\theta = 30^\circ$, in materiale composito (Tab.6.6); 'ST': *Steady-State*, 'TH': *Theodorsen*.

Nella Figura 6.10 vengono presentati gli andamenti relativi alla frequenza ed allo smorzamento, i quali definiscono la condizione di *flutter* della geometria specifica. Il modello di trave in esame prende come riferimento le dimensioni elencate in Tab.6.7, che descrivono una sezione di tipo *box-beam*. A proposito delle pareti sottili in materiale composito, è stata assunta la configurazione $[\theta/0.1\theta/2\theta/10\theta]$, a cui viene

associato l'angolo di laminazione $\theta = 30^\circ$, il quale rappresenta la scelta migliore per quanto riguarda le *performance* strutturali. Inoltre, il prototipo analizzato considera una distanza radiale $r_h = 0.975 m$ in corrispondenza della radice della pala. Come illustrato, la Fig.6.10 mostra le condizioni di flutter previste utilizzando le teorie quasi-stazionarie (ST) e instazionarie (TH). Pertanto, i risultati riferiti al modello aerodinamico instazionario di Theodorsen prevedono un incremento significativo della velocità di flutter Ω_F , ed una conseguente frequenza caratteristica minore, in confronto a quanto prefigura l'approccio *steady-state*.

Pala a sezione rettangolare con curvatura

Dunque, si procede verso geometrie della *cross-section* più complesse, le quali garantiscono elevate prestazioni aerodinamiche. Inizialmente, vengono presentati alcuni modelli che valutano l'effetto della curvatura sul fenomeno di *flutter*. Nella Tabella 6.22, le prime strutture sono caratterizzate da una curvatura descritta dal rapporto $\frac{d}{c}$, dove d indica la distanza individuata in Fig.6.11 e c la corda della sezione trasversale. In particolare, viene valutata la condizione di *flutter* al variare delle dimensioni caratteristiche della pala. Lo studio parametrico consente di analizzare i diversi valori della velocità Ω_F e di esprimere la totale copertura del metodo CUF, a riguardo di qualsiasi configurazione. Dettagliatamente, le ridotte dimensioni in termini di lunghezza L implicano un aumento notevole della velocità di *flutter*, ma muovendosi in direzione di modelli più vicini ai casi reali delle strutture rotanti i risultati sono meno performanti, in linea con le aspettative. Tali esempi rispettano gli ordini di grandezza delle prestazioni aeroelastiche riferite a pale con dimensioni simili. Lo studio raffigurato in Fig.6.12 approfondisce il caso più affine ad un caso reale, in cui varia la sola curvatura. I diagrammi mostrano una visione estesa del comportamento delle frequenze e del termine di *damping* relativi ai primi modi di vibrare. Oltre a valutare gli andamenti delle curve di riferimento, è possibile individuare i punti coincidenti con le condizioni di *flutter* dei differenti modelli.

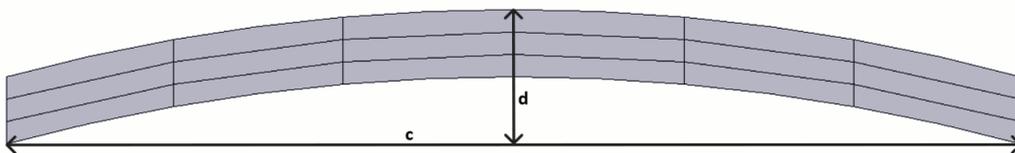
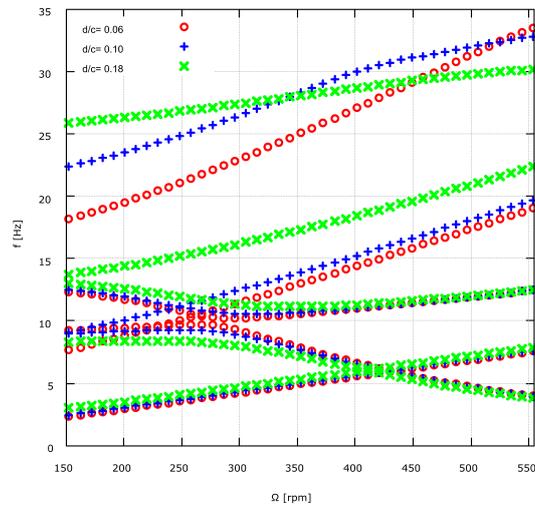
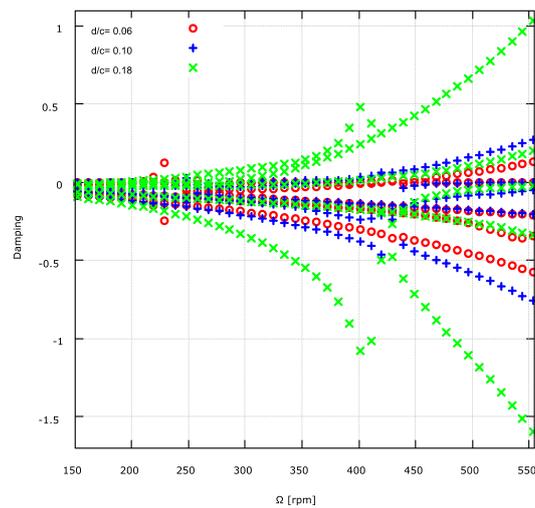


Figura 6.11: *Mesh* della pala a sezione rettangolare con curvatura.



(a) Frequenza



(b) Smorzamento

Figura 6.12: Diagramma di *flutter* per la pala a sezione rettangolare a curvatura variabile ($TE7 \& 20 \times B4$, $r_h = 1.390 \text{ m}$) rotante in materiale composito (*graphite/epoxy*), di lunghezza $L = 8.1780 \text{ m}$ e corda $c = 0.5 \text{ m}$; 'ST': *Steady-State*.

Lunghezza L [m]	Larghezza <i>cross-section</i> c [m]	Spessore <i>cross-section</i> t [m]	d/c	Ω_F
8.1780	0.5	0.0333	0.10	292.23
"	0.5	0.0333	0.06	320.88
"	0.5	0.0333	0.18	190.04
"	0.5	0.06	0.10	254.03
"	0.5	0.09	0.10	215.83
"	0.3	0.0333	0.10	262.62
"	1.0	0.0333	0.10	241.61
2	0.5	0.0333	0.10	792.65
15	0.5	0.0333	0.10	108.87

Tabella 6.21: Effetto sulla velocità di *flutter* Ω_F [rpm] al variare delle dimensioni caratteristiche, per una pala in composito (*graphite/epoxy*) a sezione rettangolare con curvatura, in Fig.6.11, per un modello *TE7 & 20 × B4*.

Pala con profilo a forma di ellisse

A seguito dell'introduzione di una curvatura, è stata valutata positivamente l'accuratezza del software, quindi è possibile modellare la geometria della *cross-section*, al fine di rispettare i requisiti aerodinamici di una pala rotante. La successiva forma è quella più affine ad un profilo NACA simmetrico, ovvero un ellisse. In quest'ultima sezione, gli studi precedenti sono stati eseguiti in tale direzione, poiché un profilo aerodinamico viene valutato solamente nel caso di struttura rotante. Infatti, il modello a pala fissa sarebbe oggetto di valori molto alti a riguardo della condizione di *flutter*, grazie alle elevate caratteristiche di incidenza del flusso indisturbato. La rotazione, invece, presenta diversi termini aggiuntivi, i quali inducono in maniera significativa il fenomeno strutturale di accoppiamento flesso-torsionale legato all'aeroelasticità dinamica. Come già affermato, i risultati ottenuti determinano le grandezze di soglia relative al *flutter*, per non andare incontro alle tipiche oscillazioni distruttive che il fenomeno comporta.

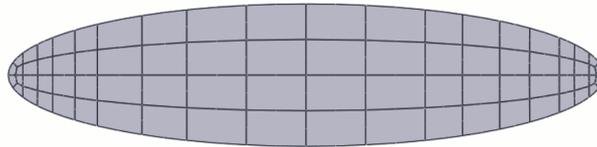
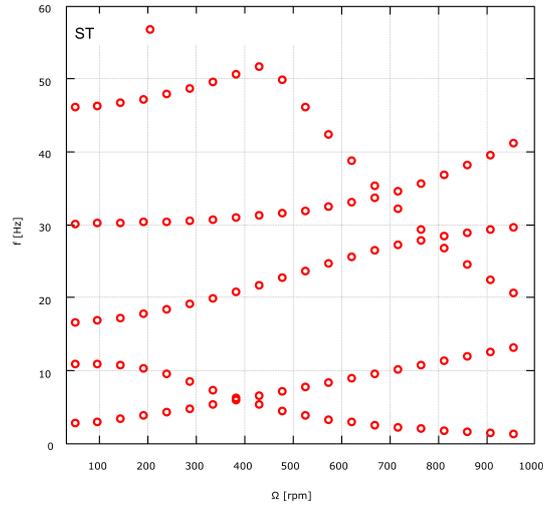
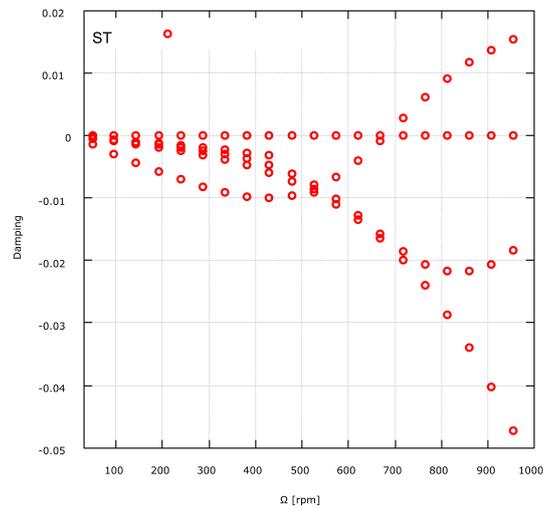


Figura 6.13: *Mesh* della pala con un profilo a forma di ellisse.



(a) Frequenza



(b) Smorzamento

Figura 6.14: Diagramma di *flutter* per la pala con profilo a forma di ellisse ($TE5 \& 20 \times B4$, $r_h = 1.390 \text{ m}$) rotante in materiale composito (*graphite/epoxy*), di lunghezza $L = 8.1780 \text{ m}$ e corda $c = 0.5 \text{ m}$; 'ST': *Steady-State*.

Dettagliatamente, la struttura implica una condizione di *flutter* caratterizzata dalla velocità $\Omega_F = 680.77 \text{ rpm}$ e dalla frequenza $f_F = 34.66 \text{ [Hz]}$. Gli andamenti specifici sono descritti in Fig.6.14, per valutare in che modo variano le grandezze riferite ai primi modi di vibrare. Come si deduce da un confronto rispetto alla letteratura, i risultati numerici del codice CUF relativi al *flutter* sono piuttosto analoghi a quelli

ottenuti in riferimento ai profili NACA, ricavati sia sperimentalmente che con metodi numerici. Nello specifico, i valori per una sezione trasversale a forma di ellissoide sono superiori, poiché le proprietà geometriche garantiscono un comportamento ottimale dal punto di vista strutturale. Nonostante le prestazioni aerodinamiche non siano elevate, tale modello prevede una condizione di *flutter* che insorge ad velocità prossima a quella corrispondente ai profili alari ricercati.

Pala con profilo alare SC1095

L'introduzione di geometrie più complesse consente di valutare il metodo CUF anche in relazione a casi di difficoltà maggiore. Lo studio esprime le grandi potenzialità di questo codice numerico, il quale si dimostra applicabile a qualsiasi soluzione geometrica e strutturale. Nello specifico, la Figura 6.15 mostra un profilo alare cavo di tipo SC1095, il quale viene ricavato dalle caratteristiche tecniche relative all'elicottero Sikorsky UH-60 Black Hawk [64]. Le ulteriori dimensioni specifiche della pala sono presentate nella Tabella 6.8, ovvero quelle proposte dal lavoro di sperimentazione eseguito da Shinoda et al.[65],[69]. A fronte di una discretizzazione della *cross-section* molto complicata, l'elaborato si riserva di individuare un modello di espansione ottimale. Pertanto, nella Tabella 6.22 è possibile valutare i risultati ricavati mediante i modelli di espansione agli elementi di Taylor, rispetto al caso di Lagrange. In particolare, i modelli TE presentati sono rappresentanti della categoria HOM, ovvero mantengono un ordine di raffinatezza elevato. Come ben noto, il modello LE risulta eccessivamente dispendioso, quindi è necessario individuare un compromesso tra affidabilità e costo computazionale. Al fine di ottimizzare il processo di calcolo numerico del metodo CUF, viene selezionata l'espansione **TE7** associata ad una discretizzazione unidimensionale $20 \times B4$.

Espansioni Modello trave	f_{1_f}	f_{2_f}	f_{3_l}	f_{4_t}	f_{5_f}	DOF
TE3	1.19101	7.40131	10.3611	14.9126	20.4899	1830
TE4	1.19085	7.39597	10.3578	14.8277	20.4568	2745
TE5	1.19053	7.38436	10.3523	14.7010	20.3843	3843
TE6	1.19027	7.37505	10.3521	14.5999	20.3267	5124
TE7	1.19001	7.36574	10.3498	14.5332	20.2701	6588
LE9	1.18916	7.33564	10.3393	14.3878	20.0956	156282

Tabella 6.22: Effetto sulle frequenze naturali [Hz] dei diversi modelli di espansione, per la Pala 1 in composito presentata in Tab.6.8 con discretizzazione $20 \times B4$. Frequenze riferite alla condizione di vibrazione libera; f :*flapwise*, l :*chordwise*, t :*torsionale*.

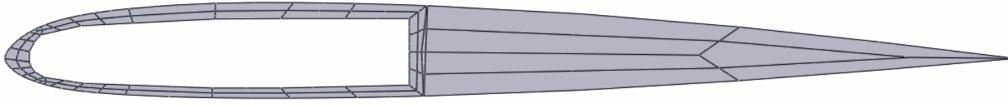


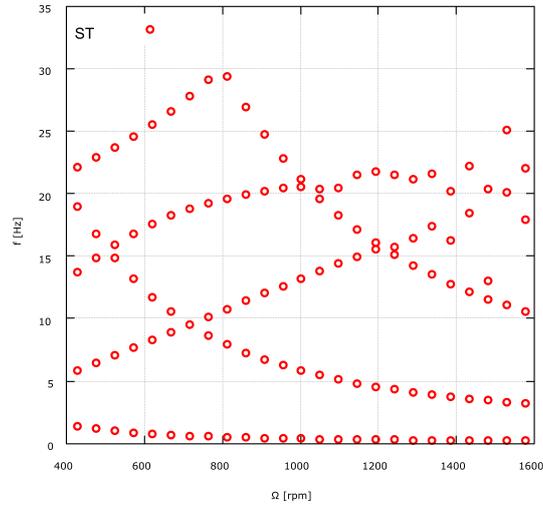
Figura 6.15: *Mesh* del profilo alare SC1095.

Dopo aver effettuato l'analisi di convergenza (Tab.6.22) per quanto riguarda la *cross-section*, viene eseguito un test di validazione del codice. Pertanto, viene presentato un confronto rispetto ad un lavoro che simula il comportamento di una pala con il profilo NACA SC1095 con proprietà geometriche e del materiale simili. Per questo motivo, i risultati della Tabella 6.23 sono relativi a modelli che differiscono in maniera minima tra di loro, oltre ad essere riferiti a metodi numerici diversi. Nonostante tali differenze, le soluzioni numeriche del codice in esame propongono piccoli discostamenti dai valori presentati in letteratura da Rauchenstein [68] e Badran et al.[70].

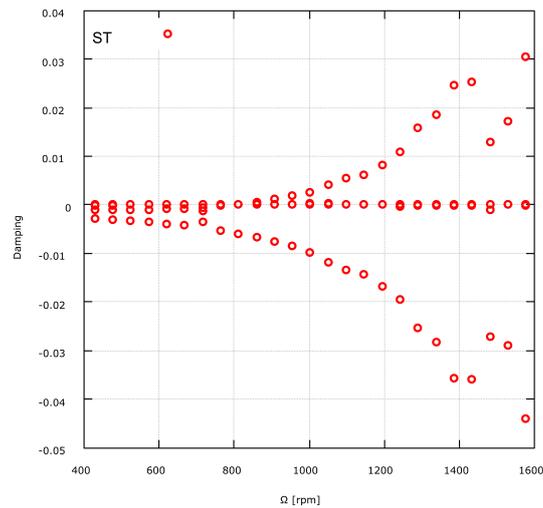
Struttura non rotante			
Frequenza Modale	Modi normali (2002)	FE (2019)	CUF
	Ref.[68]	Ref.[70]	TE7 & 20 × B4
f_{1_f} : prima flessionale	0.6358	0.6995	0.5349
f_{2_f} : seconda flessionale	3.9839	4.3837	3.3475
f_{3_t} : prima torsionale	20.0498	21.0303	21.1987

Tabella 6.23: Frequenze naturali [Hz] dei modi di vibrare coinvolti nei fenomeni aeroelastici, per la Pala 2 con profilo SC1095 in materiale isotropo presentata in Tab.6.8; f : flessionale, t : torsionale.

Dunque, è possibile porre in rotazione attorno all'asse z la pala, la quale viene valutata rispetto al fenomeno di accoppiamento flesso-torsionale, dopo aver esaminato le relative frequenze modali. Le grandezze di riferimento del modello ricercato, tra cui i valori della stessa struttura non rotante, vengono inserite come *input* del codice CUF, per studiare le condizioni di *flutter*. A tal proposito, i diagrammi in Fig.6.16 mostrano gli andamenti caratteristici relativi alla pala già descritta in materiale isotropo, elaborati mediante il metodo $p-k$. La struttura è costruita secondo le indicazioni presenti in letteratura dell'elicottero UH-60, con alcune assunzioni semplificative. Il modello inizialmente analizzato è quello raffigurato in Fig.6.15, in cui la zona cava rimane vuota; inoltre, tale prototipo considera una distanza alla radice del rotore pari a $r_h = 0.17 L$. Il diagramma relativo al *damping*, Fig.6.16b, rileva la velocità di *flutter* della pala, $\Omega_F = 906.46 \text{ rpm}$, a cui corrisponde una frequenza pari a $f_F = 20.217 \text{ Hz}$.



(a) Frequenza



(b) Smorzamento

Figura 6.16: Diagramma di *flutter* per la Pala 2 con profilo SC1095 ($TE7$ & $20 \times B4$, $r_h = 1.390 m$) rotante in materiale isotropo (Tab.6.8); 'ST': *Steady-State*.

Come illustrato nei diagrammi precedenti, le deformazioni presentate in Fig.6.17 sono quelle coinvolte nel fenomeno di *flutter*. Infatti, ad una certa velocità insorge un'oscillazione catastrofica dovuta all'accoppiamento tra i primi modi di vibrare, in particolare tra il secondo e il terzo, i quali sono flessionale e torsionale rispettivamente. Il software PARAVIEW consente di visualizzare i risultati numerici ottenuti con il codice CUF; queste soluzioni sono state confrontate sopra con esiti positivi, nella

Tabella 6.23.

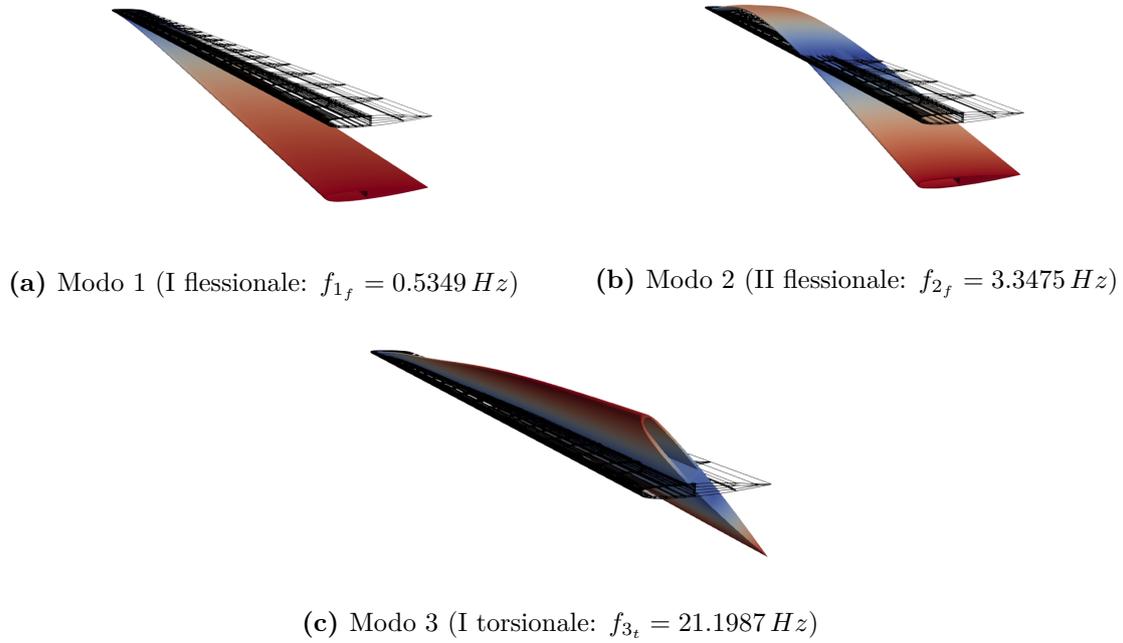
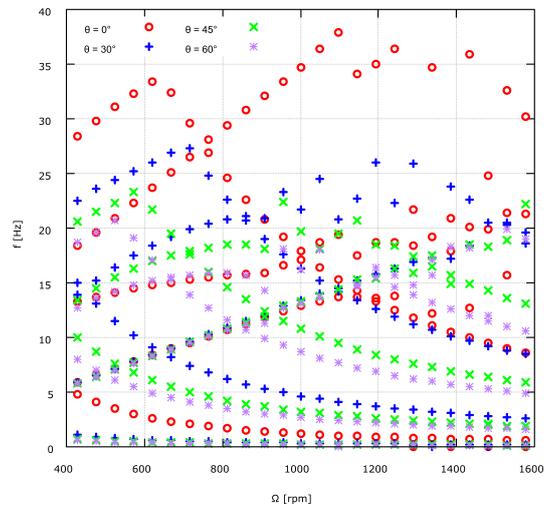


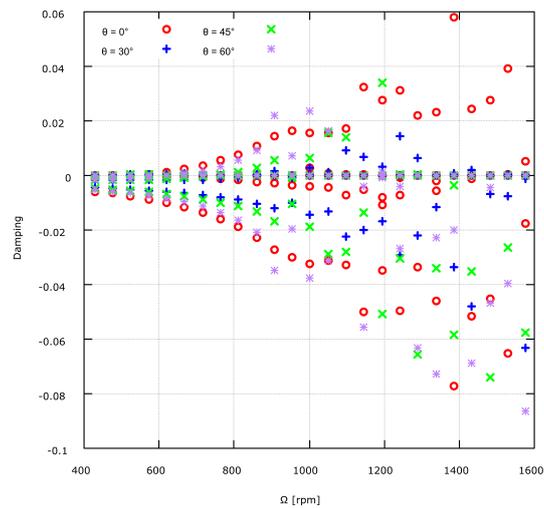
Figura 6.17: Analisi dinamica CUF ($TE7$ & $20 \times B4$): primi 3 modi delle vibrazioni libere coinvolti nei fenomeni aeroelastici, per la Pala 2 (Tab.6.23).

Lo studio prosegue analizzando come varia il comportamento della struttura per il caso con un materiale composito innovativo in grafite epossidica, il quale è già stato introdotto. Le prestazioni delle laminazioni in composito sono superiori in termini strutturali rispetto ad un materiale isotropo, come ad esempio l'alluminio. La Figura 6.18 mostra gli andamenti delle variazioni relativi alle frequenze ed agli smorzamenti, in funzione dell'incremento di velocità.

Nello specifico, la pala rotante con un profilo alare SC1095 è stata esaminata a seconda dei diversi angoli di laminazione delle fibre di composito. Pertanto, le seguenti Figure 6.18 e 6.19 studiano le grandezze caratteristiche che definiscono le oscillazioni legate al fenomeno di *flutter*, rispettivamente per le configurazioni a $\theta = 0^\circ$, $\theta = 30^\circ$, $\theta = 45^\circ$, $\theta = 60^\circ$, $\theta = 90^\circ$, $\theta = 120^\circ$ e $\theta = 150^\circ$, dove θ indica l'angolo di laminazione.

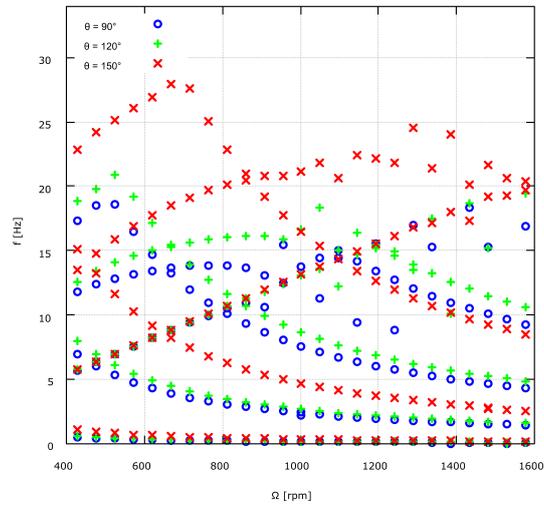


(a) Frequenza

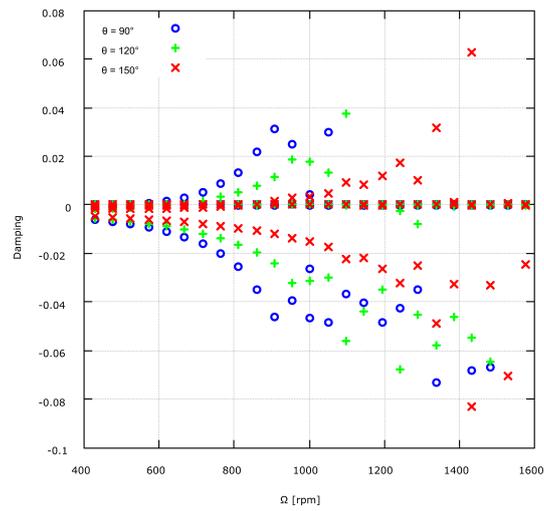


(b) Smorzamento

Figura 6.18: Diagramma di *flutter* per la Pala 1 con profilo SC1095 ($TE7$ & $20 \times B4$, $r_h = 1.390 m$) rotante in materiale isotropo (Tab.6.8); 'ST': *Steady-State*.



(a) Frequenza



(b) Smorzamento

Figura 6.19: Diagramma di *flutter* per la Pala 1 con profilo SC1095 ($TE7$ & $20 \times B4$, $r_h = 1.390 m$) rotante in materiale isotropo (Tab.6.8); 'ST': *Steady-State*.

Laminazione	Ω_F	f_F
0°	620.40	14.728
30°	906.85	20.863
45°	811.69	18.437
60°	716.42	15.710
90°	620.75	13.423
120°	715.92	15.629
150°	907.07	20.815

Tabella 6.24: Velocità [rpm] e frequenze [Hz] di *flutter* per la Pala 1 con profilo SC1095 in materiale composito (Tab.6.8) rotante: $TE7 \& 20 \times B4$ (ST).

A seguito dell'analisi riguardante i diagrammi presentati sopra in Fig.6.18, 6.19, si osserva l'eterogeneità dei risultati relativi ad un unico materiale, in cui varia l'angolo di laminazione θ . In riferimento alla pala rotorica con un profilo alare SC1095 rappresentato in Figura 6.15, la condizione di *flutter* differisce in base alla configurazione presa in esame. Nonostante il materiale composito sia il medesimo, sono rappresentate le variazioni significative relative ai valori caratteristici, i quali definiscono il punto di formazione delle prime oscillazioni con un accoppiamento flessor-torsionale. A tal proposito, la Tabella 6.24 valuta le differenze tra le configurazioni esaminate, in termini di velocità e frequenza specifiche del fenomeno. In particolare, i rendimenti di maggior rilievo sono stati ottenuti con i modelli a $\theta = 30^\circ$ e $\theta = 150^\circ$, i quali determinano rispettivamente soluzioni numeriche pari a $\Omega_{F_{30}} = 906.85 rpm$ con $f_{F_{30}} = 20.863 Hz$ ed $\Omega_{F_{150}} = 907.07 rpm$ con $f_{F_{150}} = 20.815 Hz$. Come visto nel corso dell'elaborato, le frequenze di *flutter* incrementano all'aumentare della velocità di riferimento. Le prestazioni migliori appena citate sono in grado di raggiungere l'efficienza strutturale relativa al modello in materiale isotropo, ovvero l'alluminio. I risultati ottenuti sono stati confrontati rispetto ad alcuni lavori presenti in letteratura, tra cui [68],[70],[71], estrapolandone un riscontro positivo in termini valutativi. Pertanto, la complessità del modello viene riprodotta in maniera ottimale, al fine di effettuare un'analisi aeroelastica accurata, con i rilevanti vantaggi che ne comporta il metodo CUF.

Capitolo 7

Conclusioni

L'elaborato appena concluso esegue una ricerca nel campo delle strutture rotanti, studiando sia la dinamica delle vibrazioni libere che le oscillazioni aeroelastiche. I dati ricavati consentono di catalogare le grandezze caratteristiche, al fine di fornire gli strumenti necessari in fase di progettazione. In questo capitolo conclusivo, sono valutati i principali risultati relativi ad una trave isotropa ed ortotropa, la quale è stata modellata mediante la Carrera Unified Formulation (CUF) implementata nel codice già presentato. All'interno dell'elaborato sono state utilizzate le espansioni di Lagrange e di Taylor, con lo scopo di esaminare le potenzialità di ciascuna. Le scelte sono effettuate a fronte di analisi preliminari che valutano l'accuratezza dei modelli in funzione della struttura specifica.

Le prime indagini hanno preso in considerazione il caso statico, per confrontare i risultati numerici rispetto alle teorie analitiche. Le soluzioni sono accurate e consentono di approfondire lo studio verso le applicazioni dinamiche più complesse. Come nel caso precedente, anche le analisi delle vibrazioni libere vengono osservate attentamente per proseguire lo studio. Inoltre, le analisi iniziali contengono uno studio di convergenza per impostare le condizioni di discretizzazione presenti nell'elaborato. I risultati ottenuti per una sezione trasversale quadrata sono oggetto di una comparazione rispetto ai risultati presenti in letteratura:

- Analisi statica: bassa deviazione ($< 1\%$) dai valori analitici della deflessione con gli elementi di asse $B3$ ed un elemento trasversale $L9$.
- Analisi dinamiche (vibrazioni libere): bassa deviazione ($< 4\%$) dai valori analitici delle frequenze naturali in vibrazione libera e rapida convergenza, utilizzando la medesima configurazione appena descritta, ovvero $10 \times B3$ ed un elemento $L9$ per la sezione trasversale. Nonostante le soluzioni consentano di descrivere correttamente il fenomeno, è possibile incrementare l'accuratezza relativa al modo di torsione.

Nel dettaglio, il capitolo successivo delinea il comportamento delle strutture rotanti, le quali sono soggette a deformazioni dinamiche. Il momento d'inerzia relativo alla specifica forma della sezione trasversale influisce notevolmente sul comportamento dinamico di una trave rotante, quindi sono state calcolate diverse sezioni trasversali: simmetrica e asimmetrica. L'analisi sulla dinamica dei rotori riguardano la stessa trave, per studiare l'influenza della velocità sulle frequenze naturali e per individuare la velocità critica. Il modello viene modificato, con $10 \times B$ ed un elemento L9, e definisce un diagramma di Campbell per ogni caso, con valori non dimensionali. In questo modo, i diagrammi vengono sovrapposti rispetto agli andamenti teorici proposti in letteratura. I diagrammi di Campbell sono caratterizzati dalle seguenti conclusioni:

- Il modello che applica le condizioni di Eulero-Bernoulli ($\frac{L_1}{l_1} > 500$) propone andamenti *backward* e *forward* coincidenti con quelli teorici.
- Le dimensioni maggiori della *cross-section* quadrata generano una diminuzione dei valori delle frequenze naturali. Il primo modo flessionale, come la velocità critica ad esso riferito, non è influenzato da questa variazione geometrica, mentre è crescente a riguardo delle forme modali successive.
- Lo studio presenta le velocità di rotazione critiche per le sezioni trasversali simmetriche (quadrato, circonferenza) e non simmetriche (rettangolo).
- La struttura a sezione rettangolare valuta l'utilizzo del materiale ortotropo con differenti laminazioni in composito, per il caso di rotazione attorno all'asse z .

Dunque, il capitolo conclusivo studia il fenomeno aeroelastico dinamico ed è suddiviso in due parti, una sulle strutture rotanti e quella successiva su quelle non rotanti. La prima sezione ha lo scopo di valutare il codice CUF mediante un modello di validazione presentato in letteratura. Le strutture esaminate hanno caratteristiche geometriche moderate, perciò vengono assegnati gli elementi di Lagrange per modellare la sezione trasversale. I modelli aerodinamici di riferimento sono di tipo *Steady-State* e di *Theodorsen*. Le conclusioni riferite a questa prima parte sono le seguenti:

- Inizialmente, viene effettuata un'analisi di convergenza per scegliere il modello strutturale adatto. Gli elementi di Lagrange stabiliscono una convergenza significativa, quindi la decisione ricade sugli L9; i modelli ridotti agli TE garantiscono comunque un'elevata affidabilità.
- Le soluzioni del codice CUF vengono confrontate rispetto ai risultati di ABAQUS; tali esiti numerici presentano differenze minime, per le analisi dinamiche sulle vibrazioni libere.

- La validazione utilizza il modello già definito, quindi il codice viene analizzato dettagliatamente e mostra risultati con una bassa deviazione ($< 10\%$), in confronto rispetto sia alle soluzioni analitiche sia agli esiti empirici.
- La teoria instazionaria di *Theodorsen* consente di determinare soluzioni più vicine alla realtà, considerando effetti aerodinamici caratteristici mediante un processo iterativo.
- Per questi primi modelli non rotanti, la geometria varia in maniera ristretta, fino ad esaminare una *box-beam* sia isotropa che ortotropa.
- Il metodo CUF è in grado di predisporre vari strati di laminazione, in materiale composito ortotropo; in base al tipo di struttura, l'elaborato analizza i risultati ottenuti in relazione ai differenti angoli di laminazione.

Infine, la struttura costruita mediante modelli strutturali avanzati esamina il fenomeno di *flutter*, impostando una certa velocità di rotazione attorno all'asse z . Le oscillazioni accoppiate di modi flessionali e torsionali producono deformazioni catastrofiche, pertanto è importante studiare accuratamente tale fenomeno in fase progettuale. Inoltre, gli elicotteri sono soggetti ad uno sviluppo costante nel corso degli ultimi decenni. Lo scopo di quest'ultima parte è di studiare in modo specifico le grandezze caratteristiche relative alle pale di un elicottero, al fine di dimostrare l'efficienza del codice CUF. A tal proposito, la complessità della geometria incrementa, per generare modelli simili a quelli installati sui velivoli ad ala mobile. Pertanto, le soluzioni numeriche ottenute sono confrontate in riferimento ad una base bibliografica ed è possibile osservare le relative conclusioni:

- Lo studio utilizza modelli ridotti, i quali descrivono i comportamenti strutturali con un grado di affidabilità soddisfacente; i risultati sono dovuti dalla geometria lineare lungo l'asse y della pala che non induce particolari accoppiamenti flessor-torsionali. Come già stimato, la valutazione legata alle torsioni è soggetta ad errori maggiori.
- La ricerca riguardante i materiali ortotropi delinea un'evidente dipendenza tra i valori caratteristici e il grado di angolazione delle fibre in composito. Pertanto, in fase di progetto la laminazione deve essere considerato come un parametro altamente significativo. In particolare, la pala di elicottero in alluminio è caratterizzata da rendimenti strutturali ottimali, i quali vengono raggiunti solo da alcune configurazioni in composito con laminazioni unidirezionali.
- Le analisi dinamiche dimostrano l'accuratezza dei modelli ridotti: le funzioni di espansione HOM di Taylor determinano soluzioni numeriche esatte sia per le frequenze naturali che per le condizioni di *flutter*. L'elaborato studia i

modi di vibrare coinvolti nelle oscillazioni aeroelastiche di accoppiamento flessor-torsionale, al fine di rappresentare i corrispondenti andamenti di *damping* e frequenza in funzione della velocità di rotazione.

- La pala è stata la struttura più complessa analizzata ed è stata elaborata mediante i contributi letterari di riferimento. A tal scopo, sono state effettuate alcune analisi preliminari di prova, prima di definire la pala in esame con un profilo alare specifico. I risultati mostrano le ottime prestazioni del codice CUF, in grado di studiare qualsiasi tipologia di struttura. Le performance migliori in termini aeroelastici sono evidentemente corrispondenti con le geometrie ricercate dei profili alari.

Appendice A

Approfondimenti

A.1

I nuclei fondamentali delle matrici relative all'equazione del moto in forma matriciale, per le strutture *spinning*:

$$\begin{aligned}
 G_{\Omega}^{ij\tau s} &= \Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 I_l^{ij} \langle F_{\tau} \rho F_s \rangle \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 I_l^{ij} \langle F_{\tau} \rho F_s \rangle & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 K_{\Omega}^{ij\tau s} &= \Omega^2 \begin{bmatrix} -I_l^{ij} \langle F_{\tau} \rho F_s \rangle & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_l^{ij} \langle F_{\tau} \rho F_s \rangle \end{bmatrix} \\
 K_{\sigma_0}^{ij\tau s} &= \Omega^2 \begin{bmatrix} I_l^{ij} K_{\sigma_0} & 0 & 0 \\ 0 & I_l^{ij} K_{\sigma_0} & 0 \\ 0 & 0 & I_l^{ij} K_{\sigma_0} \end{bmatrix} \\
 F_{\Omega}^{i\tau} &= \Omega^2 \begin{bmatrix} I_l^i \langle F_{\tau} \rho x_P \rangle \\ 0 \\ I_l^i \langle F_{\tau} \rho z_P \rangle \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

A.2

I nuclei fondamentali delle matrici relative all'equazione del moto in forma matriciale, per la pala rotante:

$$\begin{aligned}
 G_{\Omega}^{ij\tau s} &= \Omega \begin{bmatrix} 0 & -2 I_l^{ij} \langle F_{\tau} \rho F_s \rangle & 0 \\ 2 I_l^{ij} \langle F_{\tau} \rho F_s \rangle & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 K_{\Omega}^{ij\tau s} &= \Omega^2 \begin{bmatrix} -I_l^{ij} \langle F_{\tau} \rho F_s \rangle & 0 & 0 \\ 0 & -I_l^{ij} \langle F_{\tau} \rho F_s \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 K_{\sigma_0}^{ij\tau s} &= \Omega^2 \begin{bmatrix} I_{l\sigma_0}^{i,yj,y} \langle (F_{\tau} \rho I F_s) \rangle & 0 & 0 \\ 0 & I_{l\sigma_0}^{i,yj,y} \langle (F_{\tau} \rho I F_s) \rangle & 0 \\ 0 & 0 & I_{l\sigma_0}^{i,yj,y} \langle (F_{\tau} \rho I F_s) \rangle \end{bmatrix} \\
 F_{\Omega}^{i\tau} &= \Omega^2 \begin{bmatrix} 0 \\ I_{ly}^i \langle F_{\tau} \rho \rangle \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

A.3

Le matrici 3×3 $G^{ij\tau s}$, $K^{ij\tau s}$ e il vettore 3×1 F_{Ω}^{sj} sono le cosiddette *FNs* della matrice di Coriolis, della matrice di addolcimento dello spin e del vettore forza centrifuga, rispettivamente. Le espressioni delle loro componenti sono invarianti e possono essere ottenute permutando gli indici τ , i , s e j . Questi ultimi due sono utilizzati per le variazioni virtuali degli spostamenti e hanno gli stessi limiti di s e i . Si considerano strutture *shell* con spessore costante e raggi di curvatura costanti R_{α} e R_{β} in tutto il dominio S e che ruotano intorno all'asse delle ordinate y . Pertanto, si ottiene:

$$H_{\alpha} = \left(1 + \frac{\zeta}{R_{\alpha}} \right) \quad , \quad H_{\beta} = \left(1 + \frac{\zeta}{R_{\beta}} \right) \tag{A.3}$$

dove ζ indica la distanza del punto dalla superficie di riferimento. In particolare, si considerano i casi con $H_{\beta} = 1$, cioè con la sola curvatura R_{α} : per brevità, si rimanda il lettore a [72] per una descrizione dettagliata del modello a guscio. Per chiarezza, $\langle (\cdot) \rangle = \int_V (\cdot) dV$.

A.3.1 Matrice di Coriolis

$$\begin{aligned}
 G^{ij\tau s}[1,3] &= 2\rho \langle F_{\tau} F_s N_i N_j H_{\alpha} \rangle \triangleright \Omega \\
 G^{ij\tau s}[3,1] &= -2\rho \langle F_{\tau} F_s N_i N_j H_{\alpha} \rangle \triangleright \Omega
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

A.3.2 Matrice *spin softening*

$$\begin{aligned} K_{\Omega}^{ij\tau s}[1,1] &= -\rho \triangleleft F_{\tau} F_s N_i N_j H_{\alpha} H_{\beta} \triangleright \Omega^2 \\ K_{\Omega}^{ij\tau s}[3,3] &= -\rho \triangleleft F_{\tau} F_s N_i N_j H_{\alpha} H_{\beta} \triangleright \Omega^2 \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

A.3.3 Vettore forza centrifuga

$$F_{\Omega}^{sj}[3] = \rho z_e \triangleleft F_s N_j H_{\alpha} R_{\alpha} \triangleright \Omega^2 \quad (\text{A.6})$$

Bibliografia

- [1] John M Vance, Fouad Y Zeidan e Brian G Murphy. *Machinery vibration and rotordynamics*. John Wiley & Sons, 2010 (cit. a p. 2).
- [2] Giancarlo Genta. *Dynamics of rotating systems*. Springer Science & Business Media, 2005 (cit. alle pp. 2, 3, 13, 18, 23).
- [3] Chong-Won Lee. *Vibration analysis of rotors*. Vol. 21. Springer Science & Business Media, 1993 (cit. a p. 2).
- [4] M Geradin e N Kill. «A new approach to finite element modelling of flexible rotors». In: *Engineering Computations* 1.1 (1984), pp. 52–64 (cit. a p. 3).
- [5] Agnieszka Muszynska. *Rotordynamics*. CRC press, 2005 (cit. a p. 3).
- [6] A Muszynska e DE Bently. «Frequency-swept rotating input perturbation techniques and identification of the fluid force models in rotor/bearing/seal systems and fluid handling machines». In: *Journal of Sound and Vibration* 143.1 (1990), pp. 103–124 (cit. a p. 3).
- [7] Mei Cheng, Guang Meng e Jianping Jing. «Numerical and experimental study of a rotor–bearing–seal system». In: *Mechanism and Machine Theory* 42.8 (2007), pp. 1043–1057 (cit. a p. 3).
- [8] Simon Bäuerle e Hartmut Hetzler. «Rotor-systems with compliant seals: A comparison of the rotordynamics using the Muszynska model and Hirs’ lubrication equations». In: *Pamm* 17.1 (2017), pp. 359–360 (cit. a p. 4).
- [9] JS Rao. *History of rotating machinery dynamics*. Vol. 20. Springer Science & Business Media, 2011 (cit. a p. 4).
- [10] Roland L Ruhl e JF Booker. «A finite element model for distributed parameter turborotor systems». In: (1972) (cit. a p. 4).
- [11] Giancarlo Genta, Cristiana Delprete e D Bassani. «DYNROT: a finite element code for rotordynamic analysis based on complex co-ordinates». In: *Engineering computations* 13.6 (1996), pp. 86–109 (cit. a p. 4).
- [12] A Nandi e S Neogy. «Modelling of rotors with three-dimensional solid finite elements». In: *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design* 36.4 (2001), pp. 359–371 (cit. a p. 5).

-
- [13] Zhijiang He, Bogdan I Epureanu e Christophe Pierre. «Fluid-structural coupling effects on the dynamics of mistuned bladed disks». In: *AIAA journal* 45.3 (2007), pp. 552–561 (cit. a p. 5).
- [14] AN Jean e HD Nelson. «Periodic response investigation of large order non-linear rotordynamic systems using collocation». In: *Journal of sound and vibration* 143.3 (1990), pp. 473–489 (cit. a p. 5).
- [15] HD Nelson e JM McVaugh. «The dynamics of rotor-bearing systems using finite elements». In: (1976) (cit. a p. 6).
- [16] ES Zorzi e HD Nelson. «Finite element simulation of rotor-bearing systems with internal damping». In: (1977) (cit. a p. 6).
- [17] HD Nelson. «A finite rotating shaft element using Timoshenko beam theory». In: (1980) (cit. a p. 6).
- [18] Eduard Malenovskỳ et al. «Using the modal method in rotor dynamic systems». In: *International Journal of Rotating Machinery* 9 (2003), pp. 181–196 (cit. a p. 6).
- [19] Matthew B Wagner, Amir Younan, Paul Allaire, Randy Cogill et al. «Model reduction methods for rotor dynamic analysis: a survey and review». In: *International Journal of Rotating Machinery* 2010 (2010) (cit. a p. 6).
- [20] Eric Chatelet, David Lornage, Georges Jacquet-Richardet et al. «A three dimensional modeling of the dynamic behavior of composite rotors». In: *International Journal of Rotating Machinery* 8 (2002), pp. 185–192 (cit. a p. 6).
- [21] Paul Robert Houlston, Seamus D Garvey e Atanas A Popov. «Modal control of vibration in rotating machines and other generally damped systems». In: *Journal of Sound and Vibration* 302.1-2 (2007), pp. 104–116 (cit. a p. 6).
- [22] AS Das e JK Dutt. «Reduced model of a rotor-shaft system using modified SEREP». In: *Mechanics Research Communications* 35.6 (2008), pp. 398–407 (cit. a p. 7).
- [23] JS Rao. «Natural frequencies of turbine blading-a survey». In: *Shock and Vibration Digest* 5.10 (1973), pp. 3–16 (cit. a p. 7).
- [24] S Putter e H Manor. «Natural frequencies of radial rotating beams». In: *Journal of Sound and Vibration* 56.2 (1978), pp. 175–185 (cit. a p. 7).
- [25] Carlos ES Cesnik e Dewey H Hodges. «VABS: a new concept for composite rotor blade cross-sectional modeling». In: *Journal of the American helicopter society* 42.1 (1997), pp. 27–38 (cit. a p. 7).
- [26] Dewey H Hodges. *Nonlinear composite beam theory*. American Institute of Aeronautics e Astronautics, 2006 (cit. a p. 7).

- [27] Young-Jung Kee e Ji-Hwan Kim. «Vibration characteristics of initially twisted rotating shell type composite blades». In: *Composite structures* 64.2 (2004), pp. 151–159 (cit. a p. 7).
- [28] Hao Kang, Chongseok Chang, Hossein Saberi e Robert A Ormiston. «Assessment of beam and shell elements for modeling rotorcraft blades». In: *Journal of Aircraft* 51.2 (2014), pp. 520–531 (cit. a p. 7).
- [29] GH Jang, SH Lee e MS Jung. «Free vibration analysis of a spinning flexible disk–spindle system supported by ball bearing and flexible shaft using the finite element method and substructure synthesis». In: *Journal of Sound and Vibration* 251.1 (2002), pp. 59–78 (cit. a p. 7).
- [30] Jia Sun, Ines Lopez Arteaga e Leif Kari. «Dynamic modeling of a multilayer rotating blade via quadratic layerwise theory». In: *Composite Structures* 99 (2013), pp. 276–287 (cit. a p. 7).
- [31] Erasmo Carrera, Gaetano Giunta e Marco Petrolo. *Beam structures: classical and advanced theories*. John Wiley & Sons, 2011 (cit. alle pp. 8, 28, 40).
- [32] Erasmo Carrera, EM Filippi e Enrico Zappino. «Analysis of rotor dynamic by one-dimensional variable kinematic theories». In: *Journal of engineering for gas turbines and power* 135.9 (2013), p. 092501 (cit. alle pp. 8, 38, 44, 61–63).
- [33] Erasmo Carrera e M Filippi. «Variable kinematic one-dimensional finite elements for the analysis of rotors made of composite materials». In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 136.9 (2014), p. 092501 (cit. alle pp. 8, 36, 37, 41).
- [34] Matteo Filippi, Enrico Zappino e Erasmo Carrera. «A node-dependent kinematic approach for rotordynamics problems». In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 141.6 (2019), p. 062501 (cit. a p. 8).
- [35] Erasmo Carrera e Marco Petrolo. «On the effectiveness of higher-order terms in refined beam theories». In: (2011) (cit. a p. 27).
- [36] Ivo Babuška e Manil Suri. «Locking effects in the finite element approximation of elasticity problems». In: *Numerische Mathematik* 62.1 (1992), pp. 439–463 (cit. a p. 27).
- [37] Erasmo Carrera e Salvatore Brischetto. «Analysis of thickness locking in classical, refined and mixed multilayered plate theories». In: *Composite Structures* 82.4 (2008), pp. 549–562 (cit. a p. 28).
- [38] Erasmo Carrera, Federico Miglioretti e Marco Petrolo. «Accuracy of refined finite elements for laminated plate analysis». In: *Composite Structures* 93.5 (2011), pp. 1311–1327 (cit. a p. 28).

- [39] Erasmo Carrera, Gaetano Giunta, Pietro Nali e Marco Petrolo. «Refined beam elements with arbitrary cross-section geometries». In: *Computers & structures* 88.5-6 (2010), pp. 283–293 (cit. alle pp. 28, 30).
- [40] A Toledano e H Murakami. «A high-order laminated plate theory with improved in-plane responses». In: *International Journal of Solids and Structures* 23.1 (1987), pp. 111–131 (cit. a p. 30).
- [41] Alexandre Loredo e Alexis Castel. «Two multilayered plate models with transverse shear warping functions issued from three dimensional elasticity equations». In: *Composite Structures* 117 (2014), pp. 382–395 (cit. a p. 30).
- [42] Eugenio Oñate. *Structural analysis with the finite element method. Linear statics: volume 2: beams, plates and shells*. Springer Science & Business Media, 2013 (cit. a p. 30).
- [43] M Filippi, A Entezari e E Carrera. «Unified finite element approach for generalized coupled thermoelastic analysis of 3D beam-type structures, part 2: Numerical evaluations». In: *Journal of Thermal Stresses* 40.11 (2017), pp. 1402–1416 (cit. a p. 30).
- [44] M Filippi, D Giusa, A Pagani, E Zappino e E Carrera. «Assessment of classical, advanced, and layer-wise theories for the vibration of rotating composite anisotropic blades». In: *Composite Structures* 245 (2020), p. 112315 (cit. a p. 30).
- [45] E19178181062 Carrera. «Theories and finite elements for multilayered, anisotropic, composite plates and shells». In: *Archives of computational methods in engineering* 9 (2002), pp. 87–140 (cit. alle pp. 30, 69).
- [46] Erasmo Carrera e Marco Petrolo. «Refined beam elements with only displacement variables and plate/shell capabilities». In: *Meccanica* 47 (2012), pp. 537–556 (cit. alle pp. 33, 69).
- [47] KM Liew, ZZ Pan e LW Zhang. «An overview of layerwise theories for composite laminates and structures: Development, numerical implementation and application». In: *Composite Structures* 216 (2019), pp. 240–259 (cit. a p. 33).
- [48] Erasmo Carrera, Maria Maiaru e Marco Petrolo. «Component-wise analysis of laminated anisotropic composites». In: *International Journal of Solids and Structures* 49.13 (2012), pp. 1839–1851 (cit. a p. 33).
- [49] E Carrera e M Filippi. «A refined one-dimensional rotordynamics model with three-dimensional capabilities». In: *Journal of Sound and Vibration* 366 (2016), pp. 343–356 (cit. alle pp. 39, 42).
- [50] E Carrera, A Pagani, R Augello e B Wu. «Popular benchmarks of nonlinear shell analysis solved by 1D and 2D CUF-based finite elements». In: *Mechanics of Advanced Materials and Structures* 27.13 (2020), pp. 1098–1109 (cit. a p. 39).

- [51] KJ Bathe. *Finite element procedure 1996 Upper Saddle River* (cit. a p. 39).
- [52] Erasmo Carrera, Maria Cinefra, Marco Petrolo e Enrico Zappino. *Finite element analysis of structures through unified formulation*. John Wiley & Sons, 2014 (cit. alle pp. 39, 40).
- [53] A Pagani e E Carrera. «Unified formulation of geometrically nonlinear refined beam theories». In: *Mechanics of Advanced Materials and Structures* 25.1 (2018), pp. 15–31 (cit. a p. 41).
- [54] Matteo Filippi et al. «A variable kinematic one-dimensional model for aeroelasticity and dynamic analysis of multi-layered rotors». Tesi di dott. PhD thesis, Politecnico di Torino, Turin, Italy, 2015 (cit. alle pp. 43, 47).
- [55] Raymond L Bisplinghoff, Holt Ashley e Robert L Halfman. *Aeroelasticity*. Courier Corporation, 2013 (cit. a p. 48).
- [56] Robert T Jones. *Operational treatment of the nonuniform-lift theory in airplane dynamics*. Rapp. tecn. 1938 (cit. a p. 48).
- [57] EZGLE Carrera, Enrico Zappino e Guohong Li. «Finite element models with node-dependent kinematics for the analysis of composite beam structures». In: *Composites Part B: Engineering* 132 (2018), pp. 35–48 (cit. a p. 52).
- [58] JR Banerjee e H Su. «Development of a dynamic stiffness matrix for free vibration analysis of spinning beams». In: *Computers & structures* 82.23-26 (2004), pp. 2189–2197 (cit. alle pp. 62–68).
- [59] Dewey H Hodges e Michael J Rutkowski. «Free-vibration analysis of rotating beams by a variable-order finite-element method». In: *AIAA Journal* 19.11 (1981), pp. 1459–1466 (cit. a p. 63).
- [60] Young-Jung Kee e Sang-Joon Shin. «Structural dynamic modeling for rotating blades using three dimensional finite elements». In: *Journal of Mechanical Science and Technology* 29 (2015), pp. 1607–1618 (cit. a p. 73).
- [61] Matteo Filippi, Alfonso Pagani e Erasmo Carrera. «Accurate nonlinear dynamics and mode aberration of rotating blades». In: *Journal of Applied Mechanics* 85.11 (2018), p. 111004 (cit. a p. 73).
- [62] Kyo-Nam Koo. «Aeroelastic characteristics of double-swept isotropic and composite wings». In: *Journal of aircraft* 38.2 (2001), pp. 343–348 (cit. a p. 75).
- [63] Marco Petrolo. «Advanced aeroelastic models for the analysis of lifting surfaces made of composite materials». In: *Erasmo Carrera* (2011) (cit. a p. 75).
- [64] Joseph Totah. «A critical assessment of UH-60 main rotor blade airfoil data». In: *11th Applied Aerodynamics Conference*. 1993, p. 3413 (cit. alle pp. 79, 100).

- [65] Patrick M Shinoda, Hyeonsoo Yeo e Thomas R Norman. «Rotor performance of a UH-60 rotor system in the NASA Ames 80-by 120-Foot Wind Tunnel». In: *Journal of the American Helicopter Society* 49.4 (2004), pp. 401–413 (cit. alle pp. 79, 100).
- [66] Masaki Kameyama e Hisao Fukunaga. «Optimum design of composite plate wings for aeroelastic characteristics using lamination parameters». In: *Computers & structures* 85.3-4 (2007), pp. 213–224 (cit. a p. 84).
- [67] Steven J Hollowell e John Dugundji. «Aeroelastic flutter and divergence of stiffness coupled, graphite/epoxy cantilevered plates». In: *Journal of Aircraft* 21.1 (1984), pp. 69–76 (cit. a p. 84).
- [68] Werner J Rauchenstein. «A 3D Theodorsen-based rotor blade flutter model using normal modes». Tesi di dott. Citeseer, 2002 (cit. alle pp. 93, 101, 106).
- [69] Patrick M Shinoda, Thomas R Norman, Stephen A Jacklin, H Yeo, APF Bernhard e Axel Haber. «Investigation of a full-scale wide chord blade rotor system in the NASA Ames 40-by 80-foot wind tunnel». In: *American Helicopter Society 4th Decennial Specialist's Conference on Aeromechanics, San Francisco, CA*. 2004 (cit. a p. 100).
- [70] Hossam T Badran, Mohammad Tawfik e Hani M Negm. «Improving aeroelastic characteristics of helicopter rotor blades in forward flight». In: *Advances in aircraft and spacecraft science* 6.1 (2019), p. 031 (cit. alle pp. 101, 106).
- [71] A Sieradzki. «Aeroelastic analysis of a helicopter rotor in hover». In: *Journal of Physics: Conference Series*. Vol. 1101. 1. IOP Publishing. 2018, p. 012033 (cit. a p. 106).
- [72] B Wu, A Pagani, WQ Chen e E Carrera. «Geometrically nonlinear refined shell theories by Carrera Unified Formulation». In: *Mechanics of Advanced Materials and Structures* 28.16 (2021), pp. 1721–1741 (cit. a p. 112).