Politecnico di Torino

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Matematica
Modelli Matematici e Simulazioni Numeriche

Anno Accademico 2023/2024

Sessione di Laurea Luglio 2024

Uso didattico del compasso di Galileo e del regolo calcolatore

Relatori:
prof.ssa Francesca Ceragioli
prof. Marco Abrate

Candidato:
Eleonora Cafasso

Indice

Introduzione

La matematica è una disciplina molto importante per la formazione dell'individuo, tuttavia, nell'insegnare tale materia, si riscontrano molteplici sfide, legate alle modalità di tenere le lezioni, ai bisogni degli studenti e agli argomenti che costituiscono il programma scolastico. Queste sfide sono per me motivo di interesse e mi portano a cercare possibili soluzioni che migliorino l'approccio dei ragazzi nei confronti della matematica. A questo scopo, nelle pagine seguenti proporrò la progettazione e la sperimentazione di alcune pratiche laboratoriali per gli studenti liceali, sfruttando alcuni strumenti di calcolo meccanici, per valutare se questi possano facilitare l'apprendimento degli studenti. Nello specifico, sono stati scelti il compasso di Galileo e il regolo calcolatore, proponendo ai ragazzi di costruirli ed utilizzarli come strumenti di misura e di calcolo.

L'interesse per questa tipologia di lavoro è nato dopo lo svolgimento di un tirocinio semestrale in alcune classi di indirizzo linguistico e scienze umane con opzione economico sociale, della scuola Maria Ausiliatrice di Torino. Mi sono infatti resa conto dell'importanza di appassionare gli studenti ad una materia che non è tra quelle caratterizzanti il loro indirizzo, e che spesso ritengono essere arida e di difficile, se non impossibile, comprensione. Durante il periodo di tirocinio mi sono accorta che passare tra i banchi mentre l'insegnante di matematica spiegava le lezioni o proponeva degli esercizi, mi permetteva di stabilire un contatto diretto con gli allievi, impedendo che si arrendessero alla prima difficoltà. Uno degli aspetti più gratificanti, è stato quello di vedere la soddisfazione negli occhi di qualche ragazzo dopo aver capito un esercizio, o dopo essere riuscito a stare attento per un'intera lezione, o ancora per un bel voto nella verifica. Tutto questo ha suscitato in me il desiderio di sperimentare con loro un apprendimento diverso, che permettesse a tutti di essere un po' più protagonisti.

La matematica contribuisce alla formazione culturale del cittadino, perché essa consente di acquisire una buona capacità di giudizio critico e di partecipare con più consapevolezza alla vita sociale. Tale materia, dunque, non deve costituire soltanto un insieme di nozioni astratte, ma è necessario che fornisca, a chi la studia, degli strumenti per interpretare la realtà. In tal senso, seppur sia spesso studiata più per obbligo che per piacere, la matematica è un elemento essenziale nella formazione degli allievi a tutti i livelli d'età e per qualunque percorso scelto. (Anichini et al., 2004) [1]

Significativa a questo proposito è la risoluzione approvata all'unanimità nel 1997, in cui la Conferenza generale dell'UNESCO così si esprime:

"... considerata l'importanza centrale delle matematica e delle sue applicazioni nel mondo odierno nei riguardi della scienza, della tecnologia, delle comunicazioni, dell'economia e di numerosi altri campi;
consapevole che la matematica ha profonde radici in molte culture e che i più importanti pensatori per migliaia di anni hanno portato contributi significativi al suo sviluppo, e che il linguaggio e i valori della matematica sono universali e in quanto tali ideali per incoraggiare e realizzare la cooperazione internazionale;
si sottolinea il ruolo chiave dell'educazione matematica, in particolare al livello della scuola primaria e secondaria sia per la comprensione dei concetti matematici, sia per lo sviluppo del pensiero razionale". (Conferenza generale dell'UNESCO, 1997)

L'insegnamento di questa materia, come già sottolineato, presenta numerose sfide, legate al contesto sociale e culturale in cui oggi siamo immersi. Una prima sfida è legata sicuramente al poco interesse che gli allievi dimostrano nei confronti della matematica, causato sia dalla fatica riscontrata nell'apprendere la materia, sia dal crederla molto distante dalla vita di tutti i giorni. In realtà, essa è presente in modo capillare nel mondo di oggi, in particolare nei dispositivi tecnologici che ci circondano, ma generalmente questa presenza risulta invisibile. La scuola ha il compito di rendere tangibile tale presenza e di mostrare come la matematica sia viva nelle occupazioni di ogni giorno, rispondendo ai bisogni che si presentano nel nostro quotidiano, e che si sono susseguiti nel corso della storia. D'altro canto, questa disciplina aiuta nei processi di astrazione poiché insegna, ad esempio, a ripetere delle procedure e ad associare i simboli ai concetti, mostrando agli studenti la bellezza e la potenza del ragionamento e della logica. Spesso, tuttavia, l'insegnamento della matematica risulta essere formale e poco stimolante, basato sull'apprendimento di tecniche e di regole mnemoniche che appaiono agli studenti prive di utilità. Inoltre, nella maggioranza dei casi, gli allievi hanno poca possibilità di ragionare, di esprimersi, di sperimentare le pratiche laboriali e di utilizzare in modo pertinente la tecnologia, e dunque sviluppano scarsa autonomia nel loro lavoro matematico.

Un altro aspetto critico viene riscontrato nel constatare che le competenze matematiche acquisite dagli studenti risultano spesso inferiori a quelle attese [1]. Questo problema si ripercuote sul piano sociale, in quanto la materia in questione vorrebbe contribuire nella formazione di individui capaci di trovare il loro posto nel mondo e di aiutare l'umanità ad

[1] Nelle inchieste svolte sul piano internazionale ci si riferisce ai risultati del TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) dell'ISC (Internationale Study Center), PISA (Programme for International Student Assessment), dell'OCDE, così come all'inchiesta SERCE (Segundo Estudio Regional Comparativo y Esplicativo) condotta dal LLECE (Laboratorio Latinoamericano de Evaluaciòn de la Calidad de la Educaciòn) in America Latina.

affrontare le grandi sfide di oggi, legate a salute, ambiente, energia e sviluppo.

La scolarità di base dovrebbe inoltre assicurare una formazione matematica di qualità rivolta a tutti gli allievi. Queste due ambizioni - garantire un'educazione di qualità e che tale educazione sia per tutti - sembrano spesso inconciliabili, non solo per quanto riguarda i contesti sociali più poveri, ma anche a causa di una mentalità diffusa in tutto il mondo, secondo la quale una proposta di qualità debba essere necessariamente rivolta ad un gruppo selezionato di studenti. Superare questa visione è una sfida reale nell'insegnamento della matematica e richiede una presenza consistente di insegnanti qualificati, oltre che di un sistema educativo che abbia a cuore l'inclusività.

Per garantire un'educazione matematica efficace e coerente, bisognerebbe superare le chiusure esistenti tra le discipline, in modo che tutte, e in particolare quelle scientifiche, interagiscano tra loro verso l'obiettivo comune di una formazione integrale degli studenti. In particolare, si tratta di trovare il giusto equilibrio tra i contenuti specifici di una disciplina e le competenze trasversali, che consenta di formare una cultura ad ampio raggio, imparando ad orientarsi tra le competenze acquisite e a ragionare su di esse per costruirne di nuove.

Un'altra sfida per l'insegnamento della matematica è quella relativa alla valutazione degli allievi. Essa risulta necessaria sia nella sua dimensione formativa, sia per confrontare i risultati ottenuti con le aspettative. La questione essenziale, però, è che i mezzi di valutazione siano coerenti con gli obiettivi attesi dall'insegnamento, appoggiandosi su metodologie e strumenti appropriati. La valutazione deve dunque essere multiforme, senza limitarsi ad un'unica tipologia (come ad esempio l'utilizzo delle sole domande a risposta multipla), per permettere a ciascuno studente di esprimere al meglio le sue conoscenze e competenze.

Infine, l'educazione matematica deve tenere conto dei cambiamenti in atto nella società, considerando che gli studenti di oggi sono molto diversi dai loro coetanei di qualche anno fa, e che non si può quindi pretendere di utilizzare lo stesso approccio educativo. Sicuramente l'evoluzione tecnologia condiziona il modo di apprendere di tutti noi che ne siamo immersi, e in particolare quello dei ragazzi. Bisogna dunque prendere in considerazione l'importanza e la visibilità crescente della parte sperimentale della matematica, il contributo della tecnologia al calcolo, alla visualizzazione ed alla simulazione, senza dimenticare le forme possibili di lavoro collaborativo, perché tutto possa essere integrato, in modo equilibrato, nella formazione degli allievi. (Michèle Artigue, 2011) [2]

Viste le molteplici sfide a cui l'insegnamento della matematica deve oggi far fronte, questo lavoro di tesi si propone di utilizzare alcuni strumenti matematici per rispondere alle esigenze della disciplina e agevolare l'apprendimento degli studenti, provando a mostrar loro che "tutti sono in grado di fare della matematica" (Emma Castelnuovo, 1967) [5].

Nello specifico, il primo capitolo di tale lavoro è dedicato ad una breve trattazione relativa al laboratorio di matematica, seguito da un secondo capitolo in cui si spiegano le motivazioni che hanno portato alla progettazione delle due attività laboratoriali proposte. Nel terzo e quarto capitolo, invece, sono analizzate in modo dettagliato le scansioni delle attività in questione, la loro sperimentazione pratica nelle classi del liceo e l'analisi dei risultati ottenuti. Nell'ultimo capitolo, infine, si proporranno alcune considerazioni nate dallo svolgimento del lavoro descritto.

Capitolo 1

L'importanza del laboratorio di matematica

Cosa si intende con "laboratorio di matematica"

Nell'ambito delle materie insegnate nei licei, quelle scientifiche si prestano maggiormente ad essere indagate mediante attività laboratoriali, che permettano non solo di apprendere concetti, ma anche di vederli applicati alla realtà, tentando di unire l'aspetto nozionistico a quello applicativo. In questo contesto si colloca il laboratorio di matematica, inteso come un luogo in cui "imparare facendo" e diventare protagonisti dell'acquisizione dei propri saperi, provando il gusto di scoprire di volta in volta nuovi aspetti, guidati da intuizioni, tentativi, ma anche dagli errori. È un luogo mentale più che fisico ed è costituito da una serie di indicazioni metodologiche trasversali, volte a costruire significati matematici mediante gli strumenti utilizzati e le interazioni che si creano tra le persone.(Anichini et al., 2004) [1]

Il laboratorio, dunque, tenta di unire la funzione culturale della matematica, costituita da un sapere sistematico e da competenze teoriche, e la sua funzione strumentale, che riguarda la comprensione quantitativa della realtà, e quindi ad esempio misurare una grandezza, leggere dati, eseguire calcoli... Queste due facce della matematica si completano a vicenda: da un lato l'aspetto culturale e le conoscenze teoriche diventano significative solo se accompagnate dai riferimenti ai calcoli e dai tentativi per validarli, dall'altro le misure effettuate trovano il loro fondamento proprio sulle conoscenze teoriche, che le legano al contesto storico e alla realtà in cui viviamo. Il laboratorio di matematica, dunque, è costituito da un insieme di attività che hanno come scopo la costruzione di significati a partire da oggetti matematici, passando dalla sfera pratica, in cui si utilizza uno strumento (o artefatto), alla sfera intellettiva, nella quale si costruisce conoscenza:

"Il processo di utilizzo di un artefatto è un processo che permette di produrre qualcosa, ma anche di costruire conoscenza. Il primo processo è generalmente visibile [...], il secondo

non è totalmente visibile, né per chi lo utilizza, né per l'osservatore" (Monaghan et al., 2016, p. 8) [10] [1].

I significati che si costruiscono a partire dagli oggetti matematici, quindi, non risiedono solo negli strumenti, né emergono dalla sola interazione tra studente e strumento, ma derivano da una riflessione individuale e di gruppo sugli oggetti di studio e sulle attività proposte, favorita dal contesto di lavoro creato dall'insegnante. Quest'ultimo, dunque, ha un ruolo fondamentale, in quanto è chiamato a realizzare un ambiente stimolante, in cui tutti gli studenti possano emergere con un ruolo da protagonisti, intuendo in modo autonomo ciò che viene loro chiesto nelle varie fasi del processo, quasi dimentichi della presenza dell'insegnante, che compare solo di tanto in tanto per fornire chiarimenti e per guidare il progredire delle attività. I giovani si riappropriano così del gusto della scoperta, tipico dell'età infantile, nella quale il mondo appare nel suo fascino sempre nuovo, sensibilità che spesso viene persa nel corso degli studi, in quanto la sete di conoscenza fine a se stessa tende ad affievolirsi e si predilige uno studio più mnemonico, volto a garantire risultati in tempi brevi.

Gli strumenti utilizzati nel laboratorio di matematica

Gli strumenti utilizzati nel laboratorio di matematica possono essere di vario tipo, comprendendo sia quelli tradizionali, costruiti con materiali poveri (fogli, spilli, matita...), sia quelli tecnologicamente avanzati, come ad esempio i software di geometria. Ciascuno di essi, seppur in modo molto diverso, racchiude in sè dei concetti e dei significati, che aiutano l'utilizzatore a costruire conoscenze matematiche. Osservando quanto è avvenuto nel corso della storia, infatti, si nota che il processo risolutivo di un dato problema e la progettazione di un artefatto che supportasse tale soluzione, sono spesso stati sviluppati contemporaneamente. Per questo, riprodurre tale metodologia in ambito scolastico consente di favorire il processo di apprendimento, in quanto gli strumenti, che risultano essere concreti e manipolabili, coinvolgono i nostri sensi e aiutano sia la concentrazione che la memorizzazione:

"Tutto deve essere offerto il più possibile ai nostri sensi; all'intelligenza, il visibile agli occhi, ciò che si può ascoltare alle orecchie, gli odori all'olfatto, ciò che si può assaggiare al gusto, ciò che si può toccare al tatto; e ogni volta che qualcosa può essere afferrato da più di un senso alla volta, va presentato ad essi contemporaneamente. In ogni caso, se le cose non possono essere presentate così come sono, si può usare una loro rappresentazione, come ad esempio modelli o immagini. [...] È un errore introdurre prima le regole in forma astratta e poi spiegarle con esempi. Perché la luce deve arrivare prima di colui che deve essere illuminato. [...] Qualsiasi cosa sia da fare, deve essere imparata facendola." (Comenius, 1657) [6]

[1] Tradotto dall'inglese

In Europa, l'uso di strumenti concreti per supportare l'insegnamento della matematica, ebbe un forte impulso nella seconda metà del diciannovesimo secolo, grazie soprattutto al contributo del tedesco Felix Klein. Come primo presidente della "Commissione internazionale per l'istruzione matematica" (ICMI), Klein sostenne in modo deciso l'importanza di ricorrere a modelli, strumenti e al lavoro pratico, come mezzi per illustrare concetti teorici. (Bussi et al., 2010) [4]
Guido Castelnuovo, successivamente, condividendo appieno i principi metodologici di Klein, portò avanti tale approccio nei confronti della matematica, affermando che gli insegnanti della scuola secondaria dovrebbero coltivare e incentivare nei propri allievi l'immaginazione creativa, lo spirito di osservazione e le capacità logiche, avendo come obiettivo principale quello di trasmettere agli studenti la passione per la matematica, più che di fornire loro conoscenze approfondite. [8]
Emma Castelnuovo, poi, negli anni cinquanta, sostenne l'idea secondo la quale, se si vogliono mettere in movimento le menti dei ragazzi, bisogna muoversi nello spazio e proporre attività che stimolino l'attenzione degli alunni e la loro capacità di "vedere con gli occhi della mente". Inoltre, per dare la possibilità a tutti di fare scoperte, inventò moltissimi modi per insegnare la matematica con materiali semplici come spaghi, elastici e barrette di ferro, in modo che tutti potessero comprendere i concetti più difficili, anche chi aveva più difficoltà a misurarsi con l'astrazione. [7]

Il ruolo della storia

Oltre agli oggetti concreti di cui si è parlato in precedenza, un altro efficace strumento di laboratorio può essere visto nella storia della matematica. Inserire qualche cenno storico che contestualizzi la scoperta di nuovi concetti o l'invenzione degli strumenti, permette infatti di fornire adeguate motivazioni agli argomenti trattati, oltre a dare, eventualmente, la possibilità di collegamenti interdisciplinari ad esempio con la filosofia, l'arte, o altri insegnamenti. In questo modo, si permetterà agli studenti di scoprire lo sviluppo della matematica attraverso i secoli ed i continenti, oltre a mostrare il ruolo che essa ha giocato e gioca ancora oggi, nello sviluppo scientifico, tecnologico, economico e sociale. La matematica risulterà così come una scienza viva, ancorata al mondo e in interazione con gli altri campi disciplinari (Michèle Artigue, 2011). [2]

La metologia di lavoro

Per quanto riguarda, nello specifico, il ciclo scolastico secondario, il laboratorio di matematica risulta essere molto efficace, seppur poco diffuso. È infatti proficuo, per gli studenti delle scuole superiori, essere coinvolti in attività didattiche stimolanti, che li aiutino a ragionare sugli argomenti trattati. Un esempio di tale approccio è l'insegnamento per problemi:

"L'insegnamento per problemi è assolutamente fondamentale come approccio alla costruzione del sapere, non solo nella matematica. Consiste nel porre problemi agli studenti, facendoli loro risolvere singolarmente, a gruppi, a casa o in classe, in tempi lunghi o brevi. Per problema non intendiamo solo la richiesta di ottenere un risultato a seguito di una serie di calcoli, ma la proposta di riconoscere una situazione problematica di ampia natura, formulata da altri: può trattarsi di un classico problema che ha caratterizzato la storia della matematica, o di un problema sorto da un contesto scolastico, oppure da un contesto extra-scolastico, ambientale per esempio, o sportivo, o di vita quotidiana." (Anichini et al., 2004, p. 29) [1]

In questo modo, gli studenti imparano a porsi problemi nei confronti di ciò che imparano a scuola, ma anche nei confronti del mondo, acquisendo la capacità di ragionare e di pensare in modo critico. Questo tipo di approccio può essere favorito sia dal lavoro autonomo, che in piccoli gruppi (da due, tre o quattro persone). Quest'ultimo ha come ulteriore vantaggio l'imparare a relazionarsi con gli altri: discutere, difendere la propria opinione, ma anche accettare e ascoltare pareri diversi. Gli allievi, in questo modo, diventano responsabili del proprio apprendimento e sono invitati a sfruttare al meglio delle proprie potenzialità, il tempo e le risorse che sono loro forniti.

In aggiunta al lavoro di gruppo, è importante dedicare dello spazio anche alla discussione matematica, nella quale l'insegnante ha il ruolo di guida, con il compito di coinvolgere tutta la classe, senza perdere di vista i fini specifici delle varie attività. L'obiettivo centrale della discussione, attorno al quale si articolano tutti gli interventi degli studenti e del professore, può essere ad esempio quello di trovare una linea comune rispetto ai contributi che emergono dai vari gruppi in cui si è lavorato in precedenza, oppure trovare una soluzione ad un problema che viene posto. In questi lavori, l'insegnante aiuterà gli alunni ad arrivare, per passi successivi, al traguardo che ci si era posti, ragionando insieme e accogliendo i suggerimenti e le proposte di tutti i componenti della classe. Infatti, la discussione matematica e le attività laboratoriali, hanno come ulteriore obiettivo quello di mettere in luce anche gli studenti che in classe risultano essere meno brillanti o più insicuri, e che spesso, soprattutto tra gli adolescenti, sono messi in ombra dalla presenza di alcuni leader, che emergono per la loro acutezza o per il loro carattere.

Nelle pagine successive verranno proposte la progettazione e la realizzazione due attività per gli alunni della scuola secondaria di secondo grado, in linea con gli obiettivi e le procedure che il laboratorio di matematica si pone, analizzandone poi i risultati.

Capitolo 2

Progettazione delle attività

Nel mondo attuale, dove tutte le risposte sono "a portata di click", tornano ad essere utili gli strumenti di calcolo usati fino a qualche decina di anni fa, che obbligano a fermarsi e a ragionare sulle operazioni da svolgere, permettendo di capirne il senso. Per questo motivo, nel progettare le attività didattiche che verranno presentate, si è pensato di utilizzare alcuni potenti strumenti di calcolo: il regolo lineare e il compasso di Galileo per quanto riguarda le classi prime del liceo, il regolo calcolatore per le classi quarte.

Queste scelte sono state compiute a fronte di un attento dialogo con le professoresse di matematica del Liceo Maria Ausiliatrice di Torino, e dopo avere svolto il tirocinio nelle classi di tale scuola, avendo avuto modo di conoscere, almeno parzialmente, gli allievi e alcune delle loro difficoltà nell'apprendimento della materia. Nelle prime, si è quindi deciso di concentrarsi sull'ordine dei numeri relativi, utilizzando il regolo lineare per svolgere somme algebriche e di trattare poi il concetto di proporzione e triangoli simili, alla base del funzionamento del compasso di Galileo. Nelle quarte, invece, attraverso il regolo calcolatore, si è focalizzata l'attenzione sulla riscoperta dei logaritmi e delle loro proprietà, ragionando su di essi e sperimentando alcune applicazioni pratiche. Le classi in cui le attività sono state proposte sono di indirizzo Linguistico e Scienze Umane con opzione Economico Sociale, dove alla matematica sono dedicate rispettivamente due e tre ore settimanali, non essendo una materia di indirizzo.

In accordo con le insegnanti, si è poi deciso in quale periodo dell'anno svolgere tali attività, in modo da sfruttarne al massimo le potenzialità nell'ambito dello svolgimento del programma scolastico. Entrambi i percorsi sono stati attuati nei mesi di marzo e aprile, che per le classi prime corrispondevano al periodo precedente rispetto alla trattazione della geometria piana, mentre per le quarte ci si collocava dopo la parte di programma relativo alle funzioni esponenziali, come introduzione per le logaritmiche.

Le insegnanti del liceo si sono dimostrate soddisfatte della possibilità di offrire ai propri allievi un'attività di laboratorio su argomenti che solitamente non risultano di immediata comprensione e che vengono facilmente dimenticati. Nella loro esperienza constatano infatti che gli studenti abbiano una memoria sempre più labile nei confronti degli argomenti trattati, con la fatica crescente di utilizzare i concetti già appresi come base per introdurne di nuovi. Le professoresse riconoscono, tuttavia, che il tempo che servirebbe agli allievi per interiorizzare un nuovo argomento sia molto superiore a quello necessario per spiegarlo loro durante le lezioni, ma che spesso sia indispensabile procedere velocemente per poter stare al passo con il programma da svolgere. Questo presuppone che gli studenti dedichino un tempo sufficiente a riprendere autonomamente i concetti trattati, al di fuori dell'orario scolastico; ne scaturisce un certo rammarico nel constatare che non sempre questo avviene. Un'altra loro consapevolezza riguarda la frequente aridità degli argomenti proposti, che non permette ai ragazzi di essere stimolati dalla materia, dal momento che, sempre a motivo del poco tempo a disposizione, la trattazione spesso risulta astratta, trascurando di fermarsi sugli esempi e le applicazioni concrete.

Nel pensare le attività, si è data importanza alla costruzione degli strumenti da parte degli studenti stessi, in modo che ciascuno si rendesse conto di come lo strumento fosse fatto e potesse manipolarlo per comprenderne il funzionamento. La metodologia adottata ha previsto frequenti discussioni e attività pratiche in piccoli gruppi, avendo cura che ciascuno studente avesse la possibilità di ragionare e sperimentare. In particolare, ciascun gruppo è stato invitato a creare la propria "conoscenza di gruppo", da confrontare poi con quelle degli altri gruppi, fino ad ottenere una "conoscenza di classe". Si è dato un ampio spazio alla verbalizzazione dei concetti trattati, affinché i ragazzi, cercando le parole giuste per spiegare quanto appreso, fossero facilitati nel memorizzarlo. Per questo motivo, durante ogni lezione, si è chiesto a ciascun gruppo, mediante una consegna ben precisa, di produrre un piccolo elaborato relativo all'attività svolta, da confrontare poi con i compagni. In questo modo dunque, non solo gli studenti hanno subito fatto proprie le nozioni acquisite, ma hanno anche avuto la possibilità di chiarire eventuali incomprensioni, fornendo un riscontro immediato sul grado di apprendimento della lezione. In parallelo, durante l'attività, non si è trascurato di fornire alcuni riferimenti storici, per contestualizzare la nascita e l'utilizzo degli strumenti proposti. Questo ha permesso di scoprire lo sviluppo della matematica attraverso i secoli e di allargare gli orizzonti culturali, stimolando un apprendimento che collegasse ambiti diversi, con l'intento di sfatare il mito che tutte le materie siano rigidamente separate.

Questo modo di procedere è in linea con quanto affermato in "Semiotic Mediation in the Mathematics Classroom" (Bartolini Bussi e Mariotti, 2008) [3], nel quale si sostiene che una sequenza di insegnamento dovrebbe avvenire alternando diverse tipologie di attività, che sviluppano componenti diverse del processo semiotico, secondo un ciclo che si ripete. Tale ciclo consta di tre parti:

- L'attività con l'artefatto, nella quale gli studenti hanno a che fare con un artefatto o con uno strumento, e con esso devono assolvere ad alcuni compiti, lavorando a coppie o in piccoli gruppi;

- La produzione individuale, dove gli studenti sono chiamati a produrre qualcosa di scritto (la loro esperienza, il funzionamento dell'artefatto, una formulazione matematica...) o in alcuni casi un disegno;

- La produzione collettiva, nella quale la Discussione Matematica gioca un ruolo fondamentale. Spesso l'insegnante lancia il tema della discussione, per esempio chiedendo agli studenti di discutere o di scrivere le loro proposte di soluzione ad un problema e in seguito di analizzarle ed elaborarle collettivamente.

A queste tre fasi, come già detto, si è ritenuto opportuno aggiungere una fase preliminare di costruzione dell'artefatto, con l'obiettivo di rendere gli studenti maggiormente protagonisti.

Nei capitoli seguenti si riportano le schede complete di quanto svolto nelle classi e l'analisi dei risultati ottenuti, proponendo le stesse attività a due prime e due quarte del liceo Maria Ausiliatrice di Torino.

Capitolo 3

Le proporzioni e il compasso proporzionale

3.1 Introduzione all'attività

Il concetto di proporzione viene affrontato nel corso del programma scolastico della prima liceo. Si è deciso dunque di pensare ad un'attività che coinvolgesse, come prerequisito, tale concetto e lo estendesse alla geometria piana, e in particolare alla similitudine tra triangoli. Ci si pone dunque l'obiettivo di introdurre questo tipo di similitudine, che gli studenti non hanno mai incontrato nel loro percorso di studi, mettendola in relazione ai vari tipi di similitudine geometrica che possono osservare nella loro esperienza quotidiana, come ad esempio la proporzionalità che esiste tra i vari formati dei fogli di carta (A3, A4, A5, ...), la proporzionalità che si ottiene tra due figure facendo uno zoom dello schermo del computer o del cellulare, eccetera. Inoltre, per visualizzare più facilmente la nozione di triangoli simili, si è pensato di fornire agli studenti alcuni triangoli di cartoncino da confrontare e misurare.

Uno dei due artefatti che vengono impiegati, con lo scopo di prendere dimestichezza nell'utilizzo di uno strumento di calcolo geometrico e di ripassare l'ordine dei numeri relativi, è il regolo lineare. Esso consiste di due righelli graduati, con tacche equidistanti tra loro, che vengono fatti scorrere uno sull'altro permettendo di effettuare somme e sottrazioni. In particolare, in questa attività si considera un regolo contenente sia i numeri positivi che quelli negativi, con sensibilità pari a 0.5 centimetri (o qualunque altra unità di misura si scelga di utilizzare).

Si è poi scelto di costruire e di utilizzare il compasso geometrico e militare (o compasso proporzionale di Galileo), in quanto il suo funzionamento si basa proprio sul concetto di triangoli simili. Esso è stato inventato a Padova nel 1597. Nel corso del Rinascimento furono molti i tentativi di elaborare uno strumento universale che permettesse di eseguire agilmente calcoli aritmetici e operazioni geometriche. L'esigenza era sentita soprattutto in campo militare, dove la tecnologia delle armi da fuoco richiedeva cognizioni matematiche sempre più precise. Le sette linee proporzionali tracciate sulle gambe del compasso e le quattro scale segnate sul quadrante, consentivano di effettuare con estrema facilità ogni sorta di operazione aritmetica e geometrica: dal calcolo degli interessi all'estrazione delle radici quadrate e cubiche, dal disegno dei poligoni al calcolo di aree e volumi, dalla misura dei calibri al rilevamento del territorio. [11]

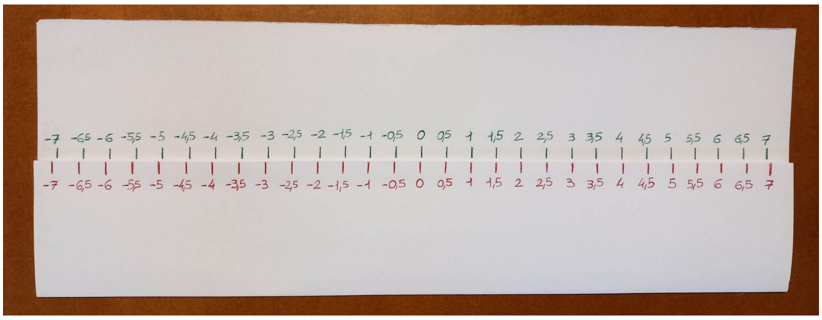


Figura 3.1: Modello semplice di regolo lineare

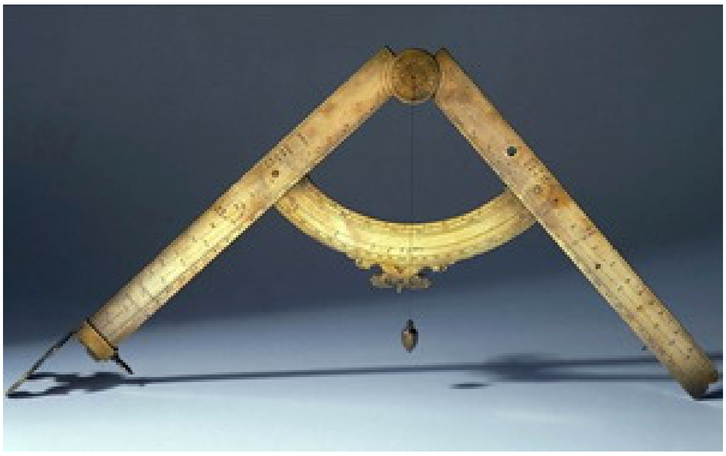


Figura 3.2: Compasso proporzionale di Galileo (dal catalogo del museo Galileo [11])

Si è optato per l'utilizzo della sola scala aritmetica del compasso geometrico e militare, in quanto è la più intuitiva e la più facile da costruire. Inoltre essa è sufficiente per comprendere il funzionameto dello strumento, poiché tutte le altre scale operano in modo analogo. L'utilizzo di questo compasso permette di raggiungere due obiettivi: da un lato, di mostrare come un oggetto pratico funzioni sulla base del concetto dei triangoli simili, e come quindi la matematica non sia slegata dalla concretezza; dall'altro lato, di consolidare il concetto appreso attraverso alcuni esercizi che richiedono la manualità e l'utilizzo dell'artefatto.

Qui di seguito viene riportata la scheda completa dell'attività svolta e l'analisi dei risultati ottenuti, proponendo le stesse lezioni, per una durata di tre ore, ad una classe di indirizzo Linguistico e una di Scienze Umane con opzione Economico Sociale. In particolare, la prima ora è dedicata al regolo lineare, la seconda ora al concetto di triangoli simili, e la terza al compasso proporzionale.

3.2 Descrizione dell'attività

Materiali necessari per ciascuno studente:

- Un foglio bianco intero e uno tagliato a metà sulla lunghezza
- Triangoli di cartoncino (figura 3.7)
- Tavole per la costruzione del compasso stampate su un cartoncino (figura 3.10), un fermacampione, forbici, righello
- Fogli su cui scrivere le varie istruzioni ed elaborati richiesti e schema riassuntivo finale (uno per gruppo)

3.2.1 Lezione 1: Costruzione e utilizzo del regolo lineare

Per questa prima parte dell'attività, gli studenti rimangono seduti ai loro posti e vengono coinvolti nella spiegazione. Si mostra agli studenti un modello di regolo semplice, come quello in figura 3.3, e si spiega che una volta veniva utilizzato al posto delle calcolatrici, per eseguire calcoli. Esso può aiutare ancora oggi a chiarire quale sia l'ordine dei numeri relativi sulla scala dei numeri e a svolgere con essi le somme e le sottrazioni.

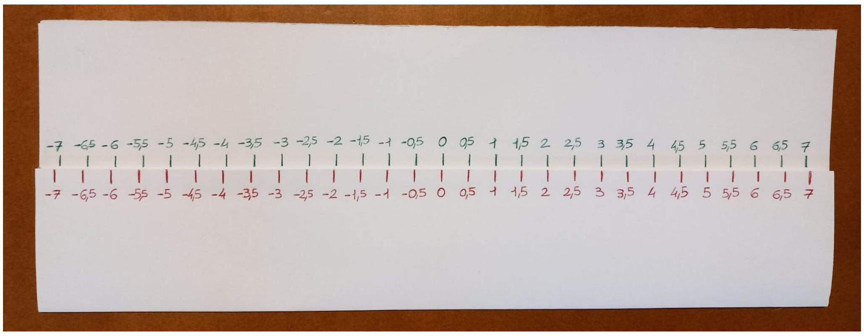


Figura 3.3: Regolo lineare

A questo punto si fornisce loro il materiale necessario (un foglio intero e uno tagliato a metà sul lato corto) per costruire il proprio regolo lineare. Si fanno insieme i seguenti passi:

- Si piega il foglio intero a metà sulla lunghezza e poi una metà ancora a metà, verso l'interno;
- Si infila l'altro foglio all'interno di quello piegato, in modo che scorra;
- Si segnano su entrambi i fogli (dove si uniscono) delle tacche di distanza pari a 2 quadretti e si scrive su ciascuna un numero, partendo dallo 0 al centro (sopra e sotto) e procedendo verso destra con i numeri positivi e a sinistra con quelli negativi (mettendo anche i mezzi numeri). Per praticità, si scrivono con colori diversi i numeri sulla riga superiore e quelli sulla riga inferiore.

Si chiede agli studenti, divisi a gruppi di 3-4, di ipotizzare come si usi lo strumento, facendo qualche tentativo e scrivendo poi, sul foglio fornito, la procedura che ritengono corretta per il suo utilizzo. A questo punto i gruppetti si scambiano le istruzioni, e provano ad eseguire le istruzioni ricevute, per verificarne il corretto funzionamento e per discutere collettivamente eventuali imprecisioni.
Si mostrano ora le istruzioni corrette, per essere certi che ciascuno abbia appreso la procedura esatta:

- Allineare il primo addendo (sulla scala superiore) con lo 0 della scala inferiore;
- Cercare il secondo addendo sulla scala inferiore;
- Leggere il risultato in corrispondenza di quest'ultimo.

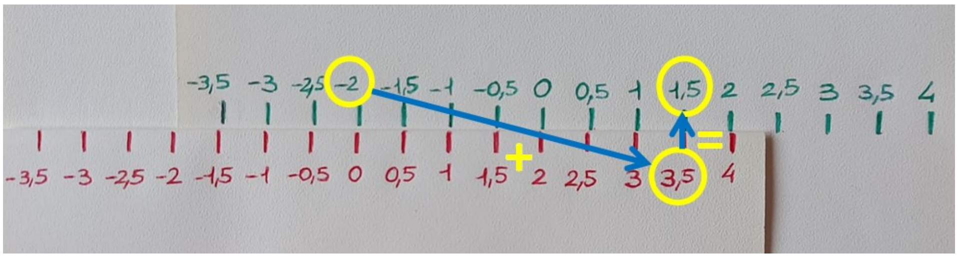


Figura 3.4: Esempio di utilizzo del regolo per svolgere una somma

3.2.2 Lezione 2: Ripasso delle proporzioni e introduzione al concetto di triangoli simili

La *proporzione* è un'uguaglianza tra il rapporto di due grandezze e il rapporto di altre due grandezze e viene scritta nella forma: $a : b = c : d$ oppure $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Queste due coppie di numeri stanno, quindi, nello stesso rapporto tra loro.

Chiamiamo *estremi proporzionali* i due numeri più esterni rispetto all'uguale, e *medi proporzionali* i due numeri più vicini all'uguale.

Proprietà delle proporzioni:

$$a \cdot d = b \cdot c$$

$$a : b = c : d \Leftrightarrow b : a = d : c \Leftrightarrow a : c = b : d \Leftrightarrow d : b = c : a \qquad \textit{oppure}$$
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Leftrightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$$

Si chiede adesso ai ragazzi qualche esempio di utilizzo delle proporzioni nella vita quotidiana e si citano ad esempio le ricette di cucina (mostrando loro una ricetta per il tiramisù con 4 uova, ma ipotizzando di averne solo 3), le cartine geografiche rispetto al mondo reale (mostrando un'immagine di Google Maps, da cui in basso a destra si può ricavare la scala rispetto al mondo reale), lo zoom che si fa con due dita sul cellulare, i formati dei fogli di carta (A3, A4, A5), eccetera. Partendo da questi esempi, si introduce il concetto di triangoli simili.

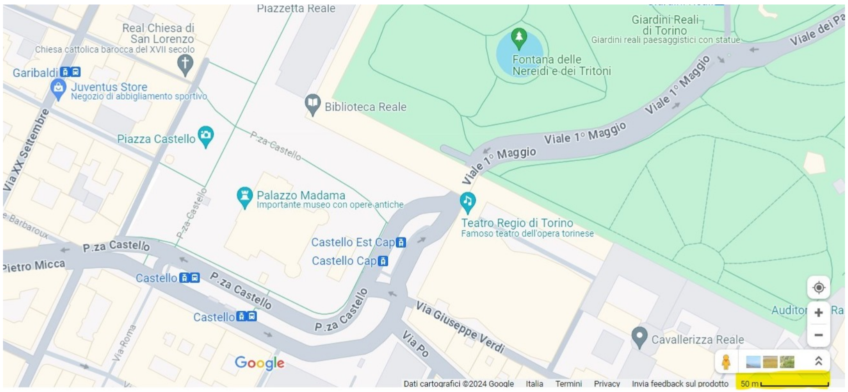


Figura 3.5: Immagine di Google Maps per evidenziare il concetto di scala

Triangoli simili: diciamo che due triangoli sono simili se hanno i tre angoli ordinatamente congruenti e i tre lati proporzionali tra loro, cioè se facciamo il rapporto tra le coppie di lati dei due triangoli, tale rapporto risulta essere lo stesso.

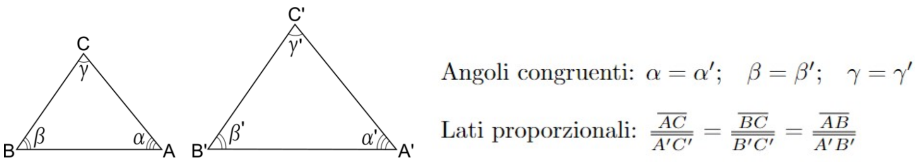


Figura 3.6: Triangoli simili

Si distribuiscono ora agli studenti tre triangoli di cartoncino (figura 3.7), due simili tra loro (a e c), e il terzo non simile ai precedenti (b). Si chiede loro di individuare quali siano simili, verificando innanzitutto che gli angoli siano uguali (sovrapponendoli) e poi di conseguenza, che i lati siano in proporzione, e che quindi il loro rapporto sia costante.

Si propongono ora alcuni esercizi da svolgere a coppie:

1. Costruire un terzo triangolo, simile ai due che sono già simili tra loro, in modo che la base sia ad esempio di 8 cm, senza calcolare il valore dei lati obliqui, ma semplicemente ricavandoli attraverso la costruzione.

2. Scrivere una proporzione che metta in relazione i lati dei triangoli simili che hanno sottomano.

3. Ricavare le misure dei lati di un triangolo simile a quello da loro costruito, ma che sia nella scala di 3:2 rispetto ad esso.

Dopo che tutti hanno provato a svolgere ciascun esercizio, si commenta insieme, dando spazio ai ragazzi di proporre le proprie soluzioni, in modo da accertarsi che sia stato capito ed eseguito in modo corretto. Come sintesi di questa parte di attività, si chiede agli studenti, sempre a coppie, di scrivere la definizione di triangoli simili e di disegnarne due.

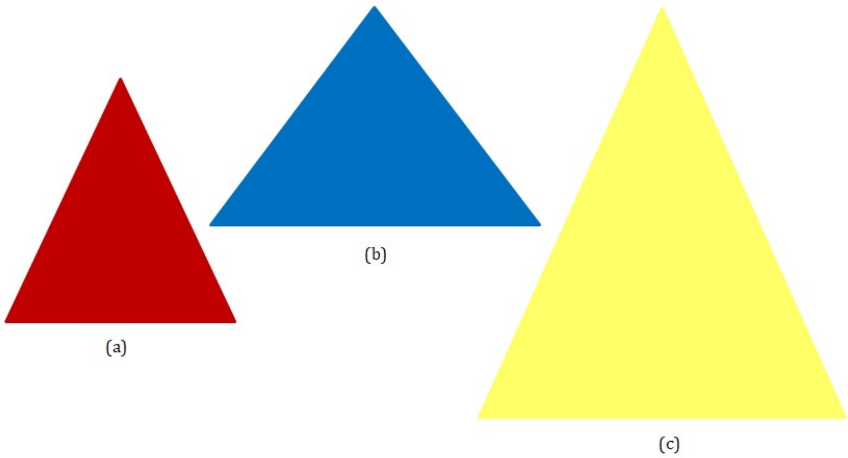


Figura 3.7: Triangoli simili e non, distribuiti agli studenti

Introduciamo ora il compasso proporzionale di Galileo:

Un po' di storia: Lo strumento di cui andremo a parlare si chiama "Compasso geometrico e militare" e fu inventato e costruito (in ottone) da Galileo Galilei nel 1597 a Padova. È formato da due bracci, imperniati in un disco rotondo. Sulle facce, recta e versa, sono incise sette scale proporzionali. Il compasso di Galileo è simile ad un calcolatore e lui stesso descrive più di 40 operazioni eseguibili con il suo strumento, per uso principalmente civile e militare. Col suo compasso si misuravano distanze, altezze, profondità e pendenze; si calcolava la balistica dei tiri di artiglieria; si poteva ridisegnare una mappa con una scala diversa; si calcolavano cambi di monete e interessi (figura 3.8).

Tutti gli usi del compasso derivano dalla possibilità di trovare con esso grandezze proporzionali a grandezze assegnate, siano esse linee, aree o volumi. Dunque, l'operazione base di questo strumento, è la proporzione. Aperto il compasso ad un angolo qualsiasi, infatti, le distanze fra le coppie di punti corrispondenti stanno fra loro come le distanze fra quei punti e l'origine:

$$AA' : BB' = OA : OB = OA' : OB'$$

Perché questi segmenti sono in proporzione? Si chiede agli studenti di provare a rispondere a questa domanda, mostrando loro come è fatto lo strumento, e poi si dà loro la spiegazione corretta: immaginiamo questi segmenti come i lati dei triangoli isosceli OAA' e OBB'. Questi triangoli sono simili, in quanto hanno i tre angoli rispettivamente congruenti, pertanto anche i lati risultano rispettivamente proporzionali (figura 3.9).

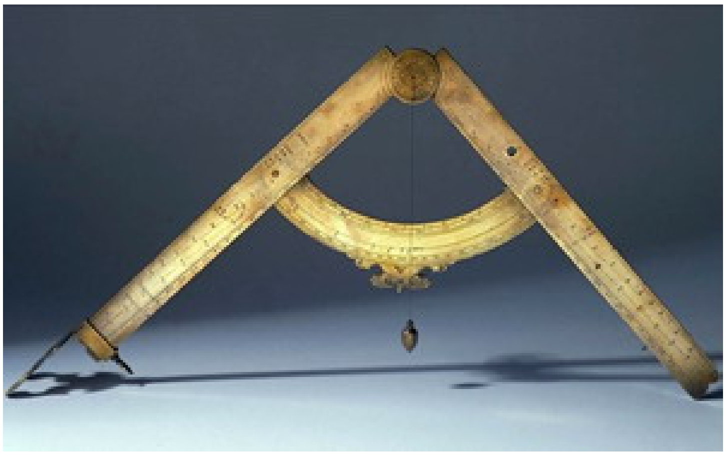


Figura 3.8: Compasso geometrico e militare di Galileo

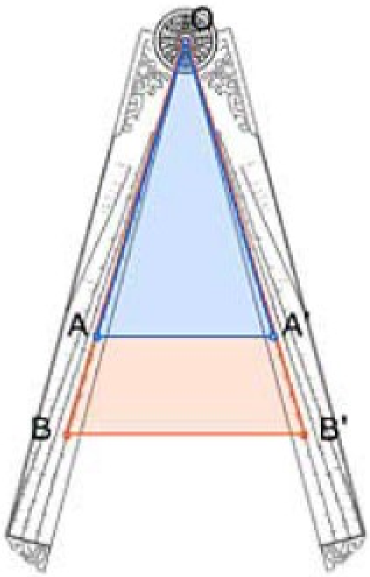


Figura 3.9: Triangoli simili nel compasso di Galileo

3.2.3 Lezione 3: Costruzione e utilizzo del compasso proporzionale

Si distribuisce agli studenti la tavola per la costruzione del compasso (figura 3.10) e un fermacampione. Si chiede loro di ritagliare le due parti e poi si costruisce con loro la scala aritmetica del compasso proporzionale, segnando delle tacche sull'interno dei due bracci a distanza di 1 cm una dall'altra, partendo dal centro del cerchio e segnando 0 sul centro, e poi 10, 20, 30, e così via. A questo punto si forano i due centri dei cerchi e si uniscono insieme con il fermacampione. Lo strumento è pronto!

Tra le scale che si trovano sul compasso proporzionale, la scala aritmetica è la più semplice che si possa costruire. Essa permette di dividere un segmento in un numero qualsiasi di parti uguali o di eseguire moltiplicazioni e divisioni. Per questo motivo il compasso di Galileo poteva essere impiegato nel disegno geometrico e architettonico, nella costruzione delle scale graduate degli strumenti di misura e in applicazioni simili.

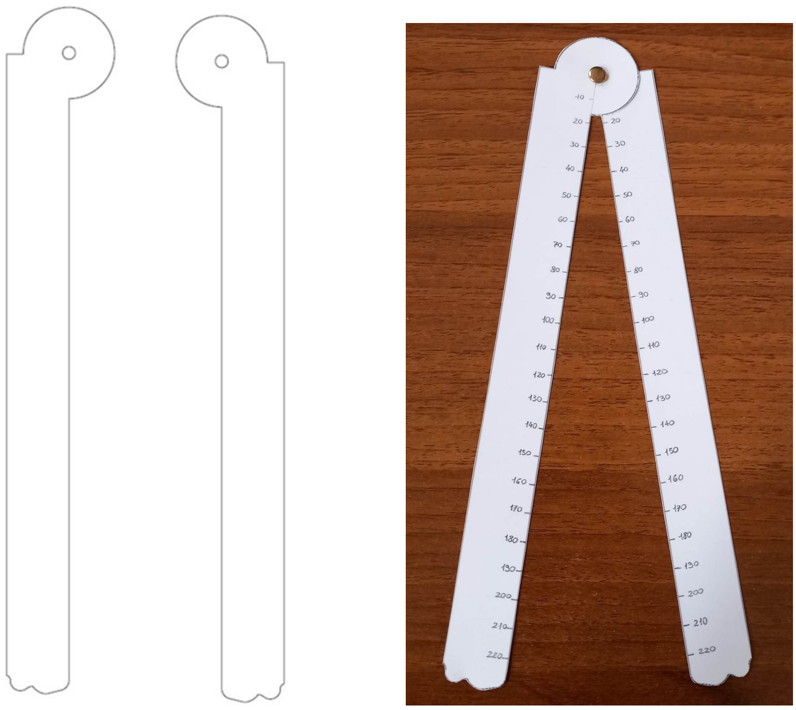


Figura 3.10: Costruzione del compasso con scala aritmetica

Si propone ora l'utilizzo dello strumento costruito per la divisione di un segmento in parti uguali. Si disegna, ad esempio, un segmento lungo 7 cm e si cerca di dividerlo in 5 parti uguali:

- Individuare sulle linee aritmetiche due numeri che stanno fra loro in un rapporto di 5 a 1, ad esempio 100 e 20;

- Aprire il compasso proporzionale in modo da riportare la misura del segmento che vogliamo dividere fra la coppia di punti '100' sui due bracci;
- Mantenendo questa apertura, la distanza fra i punti '20' corrisponderà alla quinta parte del segmento dato. Se quindi si riporta questa misura per 5 volte sul segmento considerato, ne otterremo la divisione esatta in 5 parti.

Perché questo è vero?
Considerando il compasso con apertura tale che la distanza tra la coppia di punti '100' sia pari alla lunghezza del segmento (7 cm), si nota che si forma un triangolo con base data dal segmento disegnato e lati obliqui corrispondenti ai bracci del compasso. Unendo tra loro i punti '20', si forma un triangolo simile al precedente e quindi il rapporto tra i lati obliqui, cioè $100 : 20 = 5$, sarà lo stesso presente tra le basi. Perciò la base maggiore sarà 5 volte la base minore, e questo permette di dividere la base maggiore (cioè il segmento) in 5 parti uguali. Stiamo quindi usando la proporzione: $100 : 20 = 7 : x$, dove 7 è la lunghezza del segmento in questione (cioè la base maggiore) e x è la base del triangolo minore (figura 3.11).

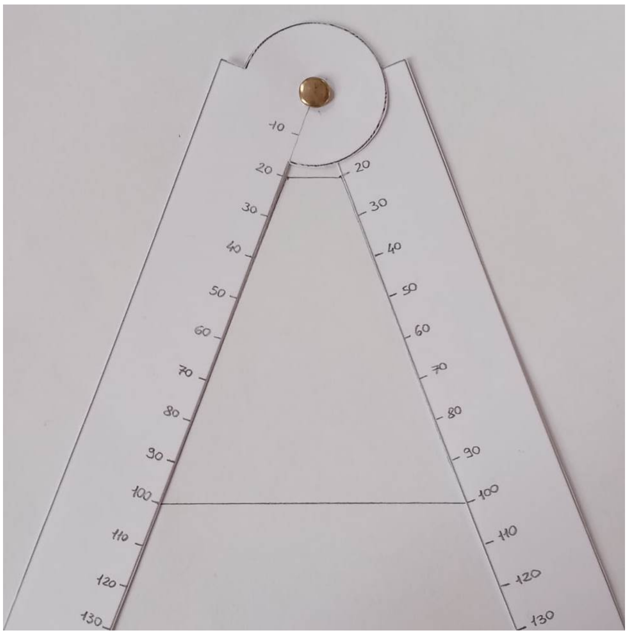


Figura 3.11: Utilizzo del compasso per la divisione di un segmento

Si invitano ora gli studenti a creare piccoli gruppi e si chiede loro di dividere un segmento da 12 cm in 8 parti uguali e di scrivere la proporzione che utilizzano.

Come passo ulteriore, proviamo ad utilizzare lo strumento per eseguire una moltiplicazione: supponiamo di voler calcolare $10.5 \cdot 2$. Dobbiamo fare i seguenti passi:

- Individuare sulle linee aritmetiche due numeri che stanno fra loro in un rapporto di 1 a 2, ad esempio 100 e 200;
- Disegnare un segmento lungo 10.5 cm (cioè il valore che vogliamo moltiplicare) e aprire il compasso proporzionale in modo da riportare la misura di tale segmento fra la coppia di punti '100' sui due bracci;
- Mantenendo questa apertura, la distanza fra i punti '200' corrisponderà a due volte la lunghezza del segmento dato. Se quindi lo misuriamo con il righello, otterremo il doppio di 10.5, cioè 21.

Stiamo cioè applicando la proporzione $10.5 : 1 = x : 2$. Il compasso può così diventare uno strumento di calcolo aritmetico, seppur si passi sempre per una costruzione geometrica e si utilizzi il righello, che ha in sé un'unità di misura (figura 3.12).

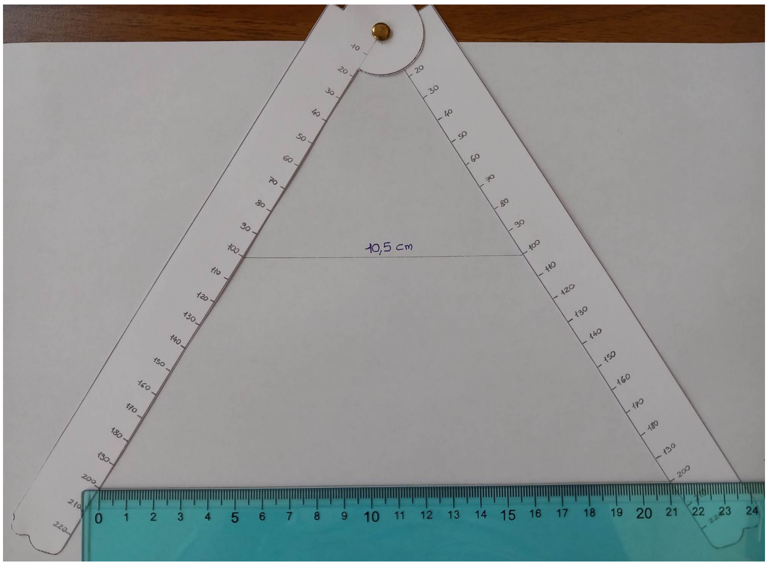


Figura 3.12: Moltiplicazione con il compasso

Per concludere, si chiede agli studenti, divisi a gruppi, di produrre uno schema di sintesi dell'intera attività, illustrando il funzionamento del regolo lineare, il motivo per cui lo abbiamo introdotto e descrivendo un contesto concreto in cui si utilizzano le proporzioni, con relativi esempi.

3.3 Analisi dei risultati

Nel proporre tale attività, si è notata una buona partecipazione da parte degli studenti, che si sono mostrati molto coinvolti e incuriositi dalla diversa modalità di fare lezione e dalla possibilità di ritagliare e manipolare loro stessi degli insoliti strumenti di calcolo. I ragazzi hanno seguito molto attentamente ciò che veniva loro detto, partecipando con numerose domande e osservazioni. Nessuno di loro ha sentito la necessità di usare la calcolatrice, ma si sono impegnati a capire e a ragionare su ciò che veniva chiesto.

Qualche considerazione va fatta sul lavoro in piccoli gruppi e sull'apprendimento all'interno di essi. Si è notato che gli studenti fossero in parte già abituati a confrontarsi con il proprio vicino di banco riguardo la risoluzione di un problema, e che quindi venisse loro spontaneo ragionare insieme. Inoltre, nei gruppi formati per tale attività, anche gli studenti che solitamente hanno più difficoltà con la matematica sono riusciti ad inserirsi bene, impegnandosi, ragionando e talvolta anche spiegando qualche concetto ai loro compagni, sorprendendo loro stessi. Questo ha provocato in loro molta soddisfazione, suscitando esclamazioni di sorpresa: "Wow, ho capito!" e ridando loro un po' di fiducia nei riguardi dell'apprendimento di questa materia, spesso definita "ostica".

Certamente la costruzione degli strumenti da parte di ciascuno studente ha richiesto diversi minuti, viste anche le differenti abilità manuali, che hanno fatto sì che i più veloci avessero un po' di tempo "vuoto". Anche in questo, però, si sono supportati e aiutati a vicenda, contribuendo a creare un buon clima all'interno delle classi. Inoltre, gli studenti erano contenti di avere il proprio strumento da poter usare e poi conservare, perciò possiamo dire che il tempo impiegato a ritagliare, segnare le tacche, eccetera, sia stato ben impiegato.

In questa sezione verrà presa in esame la risposta degli studenti all'attività che è stata loro proposta, con una particolare attenzione agli elaborati da loro prodotti durante ciascuna lezione, ovvero i manualetti per l'utilizzo del regolo lineare, lo svolgimento degli esercizi sui triangoli simili e le schede finali di sintesi, evidenziando anche l'atteggiamento degli alunni e alcune frasi significative da loro pronunciate.

In chiusura al capitolo, si faranno alcune considerazioni riguardo il lavoro svolto, mettendo in luce gli aspetti positivi e le criticità incontrate, riportando anche le osservazioni delle professoresse di matematica del liceo, che sono state in classe durante tutta la durata dell'attività.

3.3.1 Lezione 1: Il regolo lineare

All'inizio della lezione, dopo aver introdotto l'attività, i ragazzi hanno provato ad elencare alcuni strumenti di calcolo meccanici per eseguire le somme. Sono emersi principalmente l'abaco, il regolo fatto con i bastoncini colorati e le dita stesse, ma nessuno di loro aveva mai usato altri strumenti di calcolo meccanici. Dopo aver mostrato loro il regolo che avremmo costruito e utilizzato, si sono mostrati molto incuriositi e qualcuno ha esclamato: "Ma questi sono dei righelli! I regoli che conoscevamo noi erano diversi!". A questo punto, si è spiegato agli studenti come costruire il proprio regolo lineare, proiettando anche le istruzioni scritte, e hanno avuto del tempo per provare ad utilizzarlo, senza ancora fornire loro alcuna indicazione. I ragazzi hanno proposto molte strategie, e in alcuni casi la loro idea era di spostare il foglio interno durante l'operazione, facendo con esso proprio i "passi" richiesti dall'operazione, trattandolo quindi come una linea dei numeri. Ad esempio, se l'operazione da svolgere era $4 + 3$, partivano con il regolo nella posizione di base (lo 0 allineato con l'altro 0), e poi muovevano il foglio interno verso destra, senza badare a cosa ci fosse scritto sulle tacche, ma contando "1-2-3" salti. Ciascun passo corrispondeva quindi ad una coppia di tacche, cioè ad un numero intero, proprio come erano abituati a fare con i "salti" sulla linea dei numeri nella scuola primaria. Si è poi suggerito loro che si poteva lasciare il regolo fermo in una posizione comoda, utilizzando lo 0 come punto fisso per tale procedura. In questo modo tutti i gruppi hanno compreso la procedura corretta, reagendo con entusiasmo e soddisfazione.

A questo punto si è chiesto a ciascun gruppo di scrivere in poche righe una procedura chiara, che consentisse a chiunque di utilizzare lo strumento, e in particolare è stato detto loro di immaginare di doverlo spiegare ad un bambino che non conoscesse il significato di "somma". La consegna era:

"Descrivete brevemente le istruzioni per svolgere le somme utilizzando il regolo lineare".

Tutti i gruppi sono riusciti a descrivere un metodo abbastanza corretto. Molti di loro hanno astratto il procedimento al caso generale, commentando anche un esempio numerico, mentre i restanti gruppi hanno fornito le istruzioni basandosi unicamente su un esempio numerico. Un gruppo inoltre, ha deciso di servirsi anche di un'illustrazione grafica perché la procedura fosse maggiormente intuibile. Scambiandosi poi i manualetti, tutti i gruppi sono riusciti ad utilizzare le istruzioni scritte da altri, sebbene alcuni studenti abbiano notato che il linguaggio utilizzato non fosse rigoroso e hanno eseguito alcune correzioni. Le imprecisioni più frequenti sono state:

- non specificare di quale scala si parlasse, se inferiore o superiore, oppure indicare la scala attraverso il colore con la quale l'avevano segnata, che non è però universale;
- parlare di 'numeri' anziché di 'addendi', o di 'calcolo' anziché di 'somma';
- scrivere frasi come: "così si potrà vedere il risultato", senza esprimere in modo chiaro dove esso si potesse leggere.

Alcuni studenti, inoltre, hanno fatto domande come: ”Ma come faccio se voglio fare somme che vanno oltre il 9?”, dimostrando la loro curiosità nei riguardi dello strumento. È stato loro risposto che con lo strumento costruito non si può andare oltre i numeri scritti, ma che si possono costruire in modo analogo strumenti che facciano operazioni anche con numeri maggiori.

Qui di seguito sono riportati alcuni esempi di manualetti scritti dagli studenti con le eventuali correzioni fatte dai loro compagni.

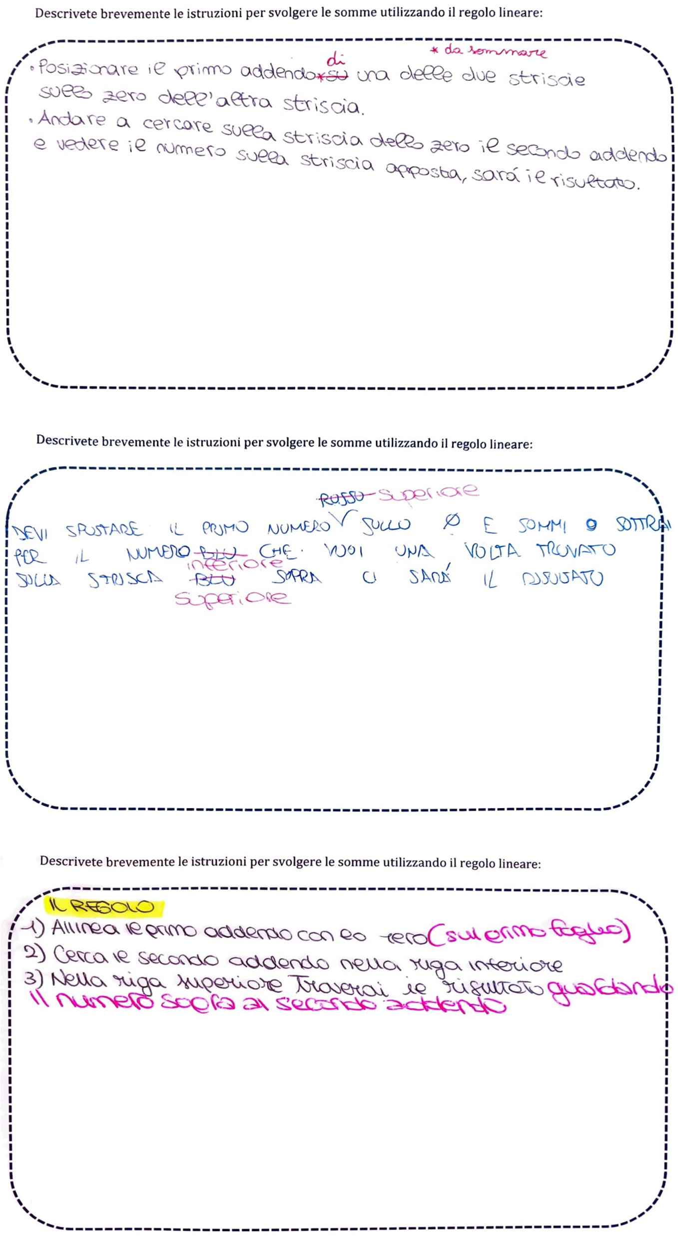


Figura 3.13: Manualetti sul funzionamento del regolo lineare

3.3.2 Lezione 2: Proporzioni e triangoli simili

In questa lezione, si è proposto ai ragazzi un ripasso del concetto di proporzione, che per loro era già molto chiaro, e si è poi chiesto qualche esempio di proporzioni nella vita quotidiana. Hanno citato moltissimi esempi, a conferma della loro padronanza del concetto: applicare uno sconto ad un capo di abbigliamento, tarare gli ingredienti per una ricetta, ottenere il voto della verifica sapendo quanti esercizi giusti sono stati fatti...

Si è allora spiegato il concetto di "oggetti in scala" prendendo come esempi un'immagine di Google Maps e i formati dei fogli di carta, e partendo da qui, si è introdotto il concetto di triangoli simili, completamente nuovo per gli studenti. Qualcuno ha subito chiesto: "Ma dire triangoli simili o congruenti è la stessa cosa?". Attraverso i triangoli di cartoncino che hanno ricevuto, hanno però visualizzato bene il concetto, e in particolare sono riusciti subito a comprendere la congruenza degli angoli. La costanza nel rapporto tra i lati, invece, è risultata più ostica e di difficile assimilazione. Attraverso gli esercizi proposti, sono però riusciti a capire come costruire due triangoli simili tra loro e a scrivere una proporzione che mettesse in relazione i lati.

Nello svolgere gli esercizi a coppie, i ragazzi chiedevano molto spesso una conferma rispetto a ciò che stavano facendo, per sapere se fosse giusto. Questo è probabilmente dovuto al fatto che non siano abituati a lavorare in autonomia, ma che seguano spesso lezioni frontali. In ogni caso, girando tra i banchi, si è riusciti a rispondere alle loro domande e a verificare che stessero proseguendo nel modo corretto. Alcuni studenti si sono stupiti di essere riusciti a comprendere gli esercizi e a svolgerli bene, abituati a fare molta fatica in matematica e geometria, e hanno esclamato frasi come: "Non ci credo! Quindi è giusto?".

Si è poi chiesto ai ragazzi, sempre a coppie, di fare una sintesi della lezione che si stava svolgendo, rispondendo alla consegna:
"Scrivete la definizione di triangoli simili e disegnatene due, spiegando come avete fatto".

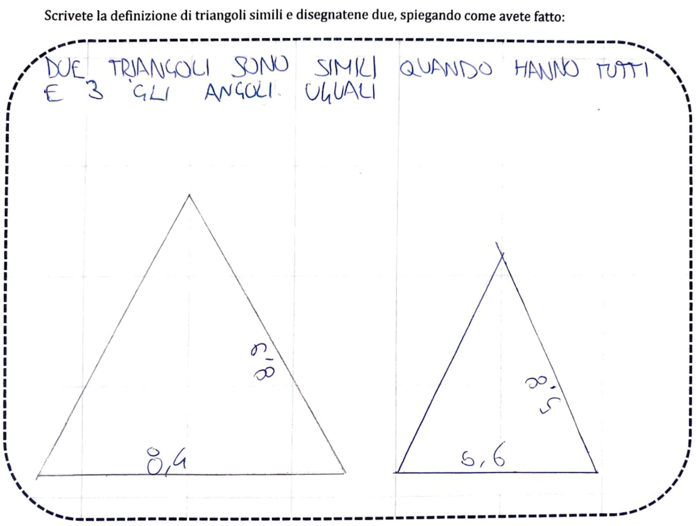
Per queste prime due lezioni si è deciso di lavorare a coppie per favorire la partecipazione di tutti all'interno della classe, dal momento che i concetti erano nuovi e fondanti per la terza lezione, e ci si voleva accertare che fossero assimilati da tutti.

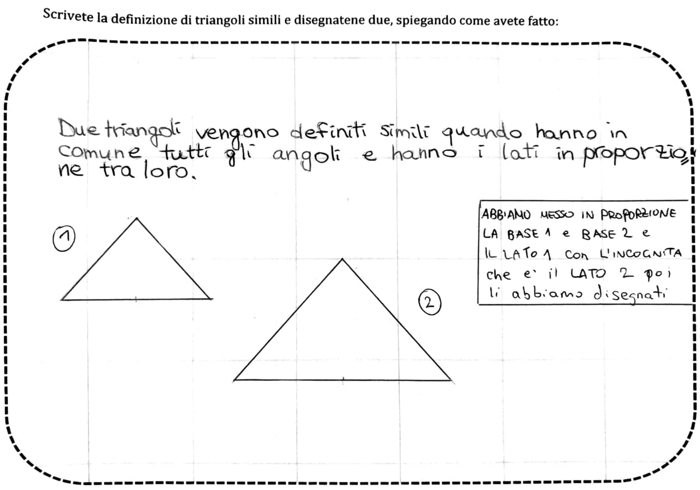
Le imprecisioni più frequenti riguardo questo elaborato sono state:

- Parlare di angoli o lati "uguali" anziché "congruenti";
- Dire che l'unica caratteristica dei triangoli simili è la congruenza degli angoli, senza citare i lati;
- Riconoscere che i lati sono in proporzione, ma non esplicitare quale sia la proporzione tra di essi, neanche a proposito della costruzione dei due triangoli;

- Non spiegare come i triangoli siano stati costruiti.

Tutti i disegni dei triangoli simili sono stati però eseguiti in modo corretto, e questo dimostra che il concetto era per loro chiaro, ma che non tutti sono riusciti a formalizzarlo con precisione. Qui di seguito si riportano alcuni esempi di tale lavoro.





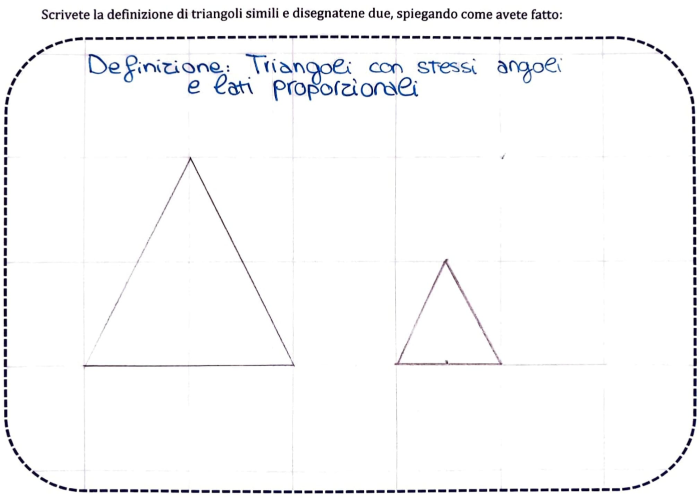


Figura 3.14: Elaborati degli studenti riguardo i triangoli simili

Si è poi introdotto il compasso geometrico e militare di Galileo, dando qualche cenno storico e qualche sua applicazione. Gli studenti si sono dimostrati molto curiosi sulle possibili operazioni di tale strumento e sono intervenuti spesso per fare domande e osservazioni. Successivamente, è stato spiegato il funzionamento del compasso di Galileo attraverso uno schema esemplificativo (figura 3.15), e i ragazzi non hanno avuto troppe difficoltà a riconoscere i due triangoli simili e la proporzione che li legava. Al termine della lezione, è stato detto loro che avremmo in seguito costruito un semplice compasso proporzionale, mostrandogliene uno come esempio.

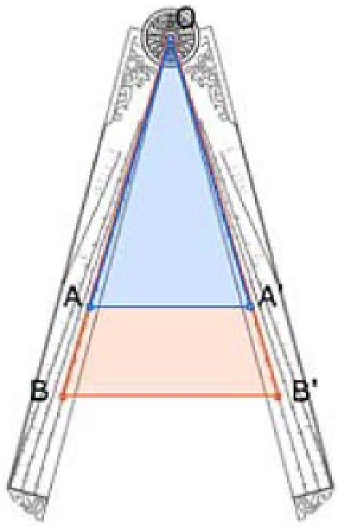


Figura 3.15: Triangoli simili nel compasso di Galileo

3.3.3 Lezione 3: Il compasso proporzionale

All'inizio della lezione si è ripreso il principio del funzionamento del compasso proporzionale, mostrando nuovamente i due triangoli che si formano e la proporzione che intercorre tra i loro lati. Successivamente si è fornito agli studenti il materiale necessario per la costruzione del proprio strumento, spiegando loro come fare e dando la possibilià di guardare le istruzioni proiettate sulla LIM. Tutti gli studenti si sono dimostrati molto coinvolti e concentrati sul lavoro che stavano svolgendo, ma si è notata un po' di fatica nell'eseguire le istruzioni che leggevano o che ascoltavano, manifestando la necessità di vedere un modello già costruito. Certamente la visualizzazione grafica è sempre la più immediata, ma questo fatto è ancora una volta indicativo della fatica del ragionamento autonomo e del passaggio non immediato tra un agire pratico e la sua verbalizzazione.

Non appena ciascuno studente ha concluso la costruzione del proprio compasso, si è mostrato loro come utilizzarlo per dividere un segmento in 5 parti uguali, proiettando ancora una volta le istruzioni tramite la LIM. Dopo che i ragazzi hanno svolto la procedura, si è spiegato loro il motivo di tali passaggi, citando ancora una volta i triangoli simili che si formano aprendo il compasso e chiedendo ai ragazzi di esprimere la proporzione che intercorreva tra i lati. Alcuni di loro sono subito intervenuti suggerendo la proporzione corretta, ma per fare in modo che fosse chiaro per tutti, si è chiesto loro di provare a dividere un altro segmento in 8 parti uguali. Girando tra i banchi si è visto che alcuni avevano già capito come fare, mentre per altri è stato necessario suggerire che bisognava trovare due numeri (sulle tacche del compasso) che fossero uno otto volte l'altro, così come precedentemente erano nel rapporto di 1:5. Dopo questo spunto, quasi tutti hanno deciso di prendere i numeri 20 e 160 sulle tacche, e sono riusciti a dividere il segmento in modo abbastanza preciso.

Nel programma della lezione, era previsto a questo punto un ulteriore passaggio, riguardante l'utilizzo del compasso come strumento di calcolo aritmetico, con l'obiettivo di svolgere delle moltiplicazioni. Per mancanza di tempo, però, in nessuna delle due classi si è riusciti a farlo, e si è dunque passati direttamente alla sintesi finale a gruppi dell'intera attività, chiedendo agli studenti di compilare la scheda di seguito riportata.

Scheda sintesi dell'attività

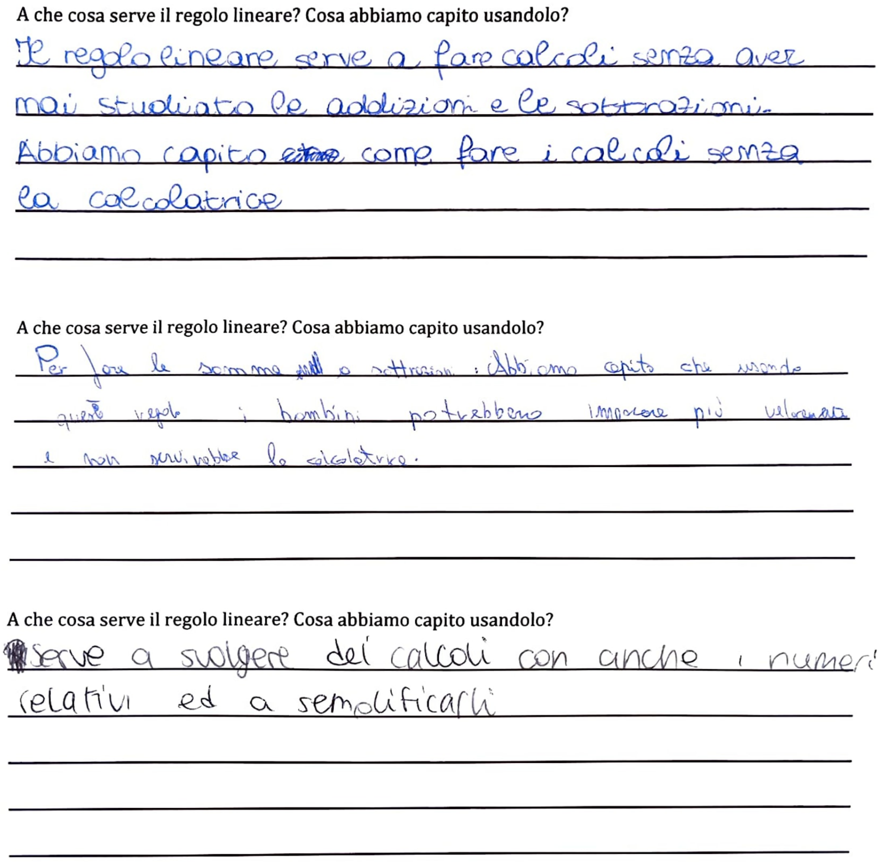
Gruppo composto da:

A che cosa serve il regolo lineare? Cosa abbiamo capito usandolo?

Scegliete un contesto in cui serve usare le proporzioni. Fate un esempio concreto nel contesto che avete scelto e scrivete la relativa proporzione.

Osservazioni varie sull'attività svolta in queste 3 ore:

Attraverso questa scheda è emerso che per tutti fosse chiaro il motivo dell'utilizzo del regolo lineare, e che tale strumento aiuti a vedere l'ordine dei numeri e a ragionare su di essi maggiormente di quanto si faccia con la calcolatrice. Qualche gruppo, inoltre, ha sottolineato come con tale strumento non sia necessario conoscere il significato di "somma" o "sottrazione" per poterle svolgere, e questa è proprio la specificità di uno strumento meccanico.


A che cosa serve il regolo lineare? Cosa abbiamo capito usandolo?

Il regolo lineare serve a fare calcoli senza aver mai studiato le addizioni e le sottrazioni. Abbiamo capito ~~[illegible]~~ come fare i calcoli senza la calcolatrice

A che cosa serve il regolo lineare? Cosa abbiamo capito usandolo?

Per fare le somme ~~[illegible]~~ o sottrazioni: Abbiamo capito che usando queste regole i bambini potrebbero imparare più velocemente e non servirebbe la calcolatrice.

A che cosa serve il regolo lineare? Cosa abbiamo capito usandolo?

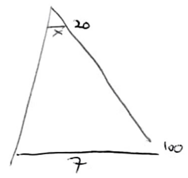
Serve a svolgere dei calcoli con anche i numeri relativi ed a semplificarli

Figura 3.16: Risposte degli studenti alla domanda relativa al regolo lineare

Per quello che riguarda la seconda domanda della scheda, invece, si sono ottenuti in generale dei buoni risultati, seppur ci sia stato qualche caso di lavoro incompleto. In particolare, qualche gruppo ha scritto l'ambito a cui si stava riferendo, come ad esempio "Nelle cartine geografiche", e ha scritto una proporzione, senza però spiegare bene a cosa facessero riferimento i vari termini. Qualche altro gruppo, invece, ha illustrato bene il contesto applicativo, senza però scrivere la relativa proporzione. Nel complesso, però, a tutti i gruppi è risultato chiaro il concetto di proporzione, in quanto non ci sono stati casi di proporzioni scorrette, di domande lasciate in bianco o di risposte fuori tema. Di seguito sono riportati alcuni esempi di tali lavori.

Scegliete un contesto in cui serve usare le proporzioni. Fate un esempio concreto nel contesto che avete scelto e scrivete la relativa proporzione.

Si possono usare nel ~~[illegible]~~ compasso proporzionale



$7 : \hat{x} = 100 : 20$

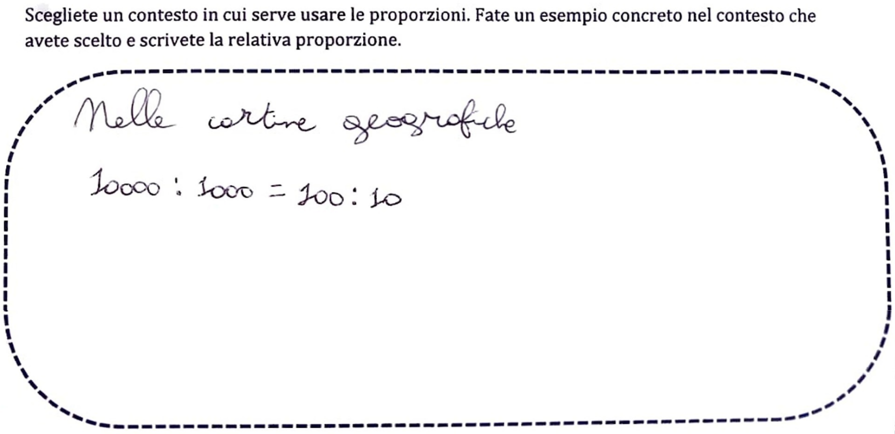
Scegliete un contesto in cui serve usare le proporzioni. Fate un esempio concreto nel contesto che avete scelto e scrivete la relativa proporzione.

Vado da ~~Ber~~ Bershka e trovo un jeans in sconto. Al prezzo totale del jeans ~~[illegible]~~ (35€) viene applicato uno sconto del 15%. Sull'etichetta non c'è il prezzo ridotto e ho bisogno di calcolare se i soldi mi bastano.

$35 : x = 100 : 15$ → 5,25 prezzo tolto dal totale

Scegliete un contesto in cui serve usare le proporzioni. Fate un esempio concreto nel contesto che avete scelto e scrivete la relativa proporzione.

Nelle ricette di cucina dove hai le dosi per 2 persone ma a te servono per 50



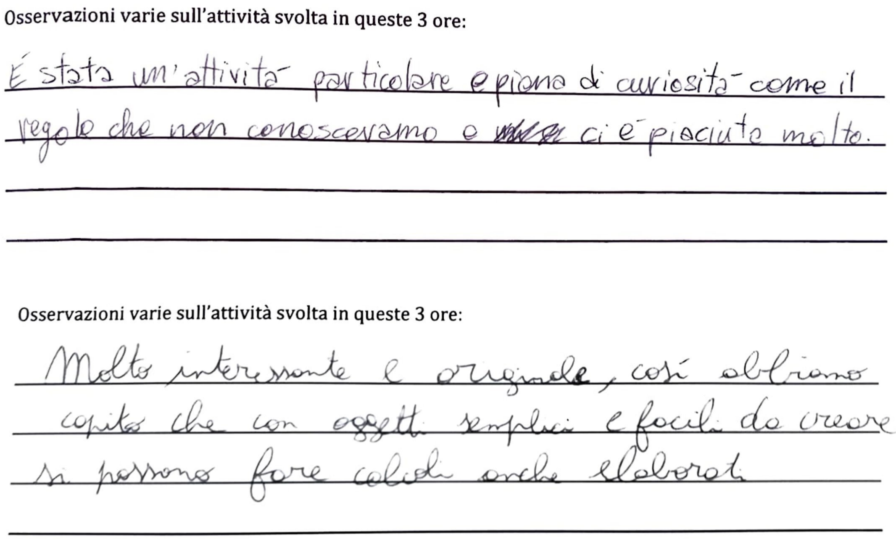
Scegliete un contesto in cui serve usare le proporzioni. Fate un esempio concreto nel contesto che avete scelto e scrivete la relativa proporzione.

Nelle cartine geografiche

10000 : 1000 = 100 : 10

Figura 3.17: Risposte degli studenti riguardo l'utilizzo pratico delle proporzioni

I commenti sull'attività svolta, infine, sono in generale positivi. Quasi tutti i gruppi hanno apprezzato che le lezioni fossero pratiche e interattive e che abbiano potuto costruire loro stessi gli strumenti di calcolo da usare. Molti studenti hanno detto di aver imparato cose nuove, tra cui alcune curiosità sulla storia della matematica, e di essersi anche divertiti. Un gruppo ha inoltre sottolineato come le proporzioni, tramite questa attività, siano sembrate più facili. Si riportano di seguito alcuni loro commenti.



Osservazioni varie sull'attività svolta in queste 3 ore:

É stata un'attività particolare e piena di curiosità come il regolo che non conoscevamo e ci è piaciuto molto.

Osservazioni varie sull'attività svolta in queste 3 ore:

Molto interessante e originale, così abbiamo capito che con oggetti semplici e facili da creare si possono fare calcoli anche elaborati

Figura 3.18: Osservazioni relative all'attività svolta

3.3.4 Conclusioni

Dall'analisi dei risultati è emerso in generale un buon grado di apprendimento dei concetti da parte degli studenti. Durante la terza lezione, in particolare, si è reso evidente che i ragazzi avessero seguito e assimilato tutti i passaggi loro proposti nella lezione precedente, senza i quali non avrebbero potuto capire il funzionamento del compasso di Galileo ed utilizzarlo loro stessi. L'ambiente che si è creato nelle due classi, inoltre, è risultato essere attivo e stimolante, favorendo una partecipazione attenta e proficua, dove lo studente non fosse frenato dalla paura di sbagliare o dal giudizio dei compagni.

Per quanto riguarda il programma svolto, è stato utile iniziare l'attività con un ripasso dei numeri relativi e del loro ordine, in quanto questo argomento, seppur sembri assodato, tende sempre a suscitare un po' di confusione. Si auspica, però, che la costruzione e l'utilizzo di uno strumento che permette la visualizzazione grafica dei numeri e delle operazioni tra di essi, abbia aiutato gli studenti ad avere in futuro meno difficoltà nell'eseguire somme algebriche con i numeri relativi. È stato inoltre positivo soffermarsi sulle proporzioni, argomento che è risultato familiare e di facile applicazione pratica per gli studenti, per poi approdare, a piccoli passi, alla nozione di triangoli simili. Certamente, i triangoli di cartoncino che sono stati consegnati, hanno aiutato i ragazzi a visualizzare e a mettere subito in pratica il concetto che era stato loro spiegato, prima che venisse dimenticato.

Un ultimo commento va fatto sugli strumenti di calcolo utilizzati. Il regolo lineare e il compasso proporzionale sono risultati familiari agli studenti, poiché assomigliavano rispettivamente ad un righello e ad un compasso tradizionale. Questa familiarietà, probabilmente, ha fatto sì che l'utilizzo di tali strumenti risultasse più immediato.

Anche da parte delle due professoresse di matematica del liceo "Maria Ausiliatrice", che sono rimaste nella propria classe come spettatrici dell'intera attività, è emersa soddisfazione per le modalità con cui si è operato e per la risposta degli studenti, esprimendo anche il desiderio di riproporre in futuro la medesima attività. Le due insegnanti hanno sottolineato l'adeguatezza delle istruzioni e dei contenuti proposti, sia rispetto al tempo impiegato per trattarli, sia in relazione al livello di preparazione delle due classi. Hanno inoltre notato come i ragazzi reagissero alle lezioni con interesse, curiosità e partecipazione, interagendo tra loro e coinvolgendo i docenti per esprimere dubbi e avere chiarimenti.

Rispetto ai contenuti, le due professoresse di matematica hanno apprezzato che in queste lezioni venisse trattato sia l'ordine dei numeri relativi, che i concetti di proporzionalità e di triangoli simili, che sono parte del programma di geometria euclidea, prevista per la fine dell'anno scolastico. Il loro consiglio, vista anche la risposta degli studenti, è quello di estendere l'attività per una durata di quattro ore, in modo da trattare alcune nozioni in modo più approfondito e di mostrare ai ragazzi ulteriori utilizzi del compasso.

Ipotizzare un'ora di lezione aggiuntiva permetterebbe di utilizzare maggiormente il compasso proporzionale e di trattarlo anche come strumento di calcolo aritmetico, aspetto che non è stato possibile affrontare per mancanza di tempo. D'altro canto, nel programmare l'attività si era scelto di utilizzare soltanto tre ore, per non influire troppo sul regolare svolgimento delle lezioni di matematica, che ammontano a tre per ciascuna settimana.

Capitolo 4

I logaritmi e il regolo calcolatore

4.1 Introduzione all'attività

Durante gli anni delle superiori, spesso gli studenti imparano procedure meccaniche per risolvere gli esercizi che sono loro proposti, senza però provare a capirne il senso. In questa attività, pensata per le classi quarte del liceo, si utilizzerà il regolo calcolatore (figura 4.1), per permettere agli studenti di vedere i logaritmi da una prospettiva insolita, applicando le loro proprietà per svolgere moltiplicazioni, divisioni e proporzioni.

Il regolo calcolatore è stato inventato nel 1624 da Edmund Gunter, matematico inglese, che per primo propose l'utilizzo di scale logaritmiche per la risoluzione delle operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione. Nel 1671, grazie a Seth Patridge, il regolo ha assunto la forma poi mantenuta fino al XX secolo, ossia con una parte scorrevole all'interno di una scanalatura in un corpo fisso. Nel tempo, vi è stata una progressiva evoluzione di tale strumento, con l'aumento del numero delle operazioni previste, come le scale dei quadrati, dei cubi, delle funzioni trigonometriche, dei logaritmi e delle radici. Il regolo continuò ad essere uno dei più comuni strumenti di calcolo, soprattutto in ambito ingegneristico, fino agli anni '70 del secolo scorso, quando la diffusione delle calcolatrici elettroniche, ad un prezzo economico, ne comportò la scomparsa dal mercato. [9]

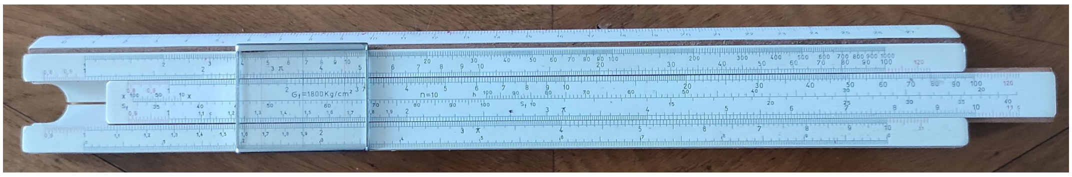


Figura 4.1: Regolo calcolatore (dal sito "storiAmestre" [12])

Poiché si è data importanza alla costruzione degli strumenti da parte degli studenti stessi, si è deciso di non fornire loro un regolo calcolatore di carta già graduato, da ritagliare e assemblare, come proposto nell'attività "Logarithmic scales and the slide rule" del professor Marco Abrate,[1] bensì di fare in modo che ciascuno studente costruisse la propria scala logaritmica, e con essa il regolo. Per questo motivo, si è deciso di costruire inizialmente un regolo lineare, per prendere familiarità con la tipologia di strumento, e in seguito di utilizzare il grafico del $\log_{\sqrt{2}}(x)$ per costruire con esso una scala logaritmica sufficientemente distesa (come proposto anche dal professor Abrate), sfruttando infine tale scala per costruire un regolo calcolatore.

Questo lavoro si pone come obiettivi di proporre agli studenti uno strumento che funzioni sulla base del concetto di scala logaritmica, da loro appena appreso, e, d'altra parte, di fare in modo che si impadroniscano della nozione di logaritmo e delle sue proprietà, attraverso degli esercizi che coinvolgano anche la manualità e l'utilizzo di un artefatto da loro costruito.

L'attività è stata eseguita in due classi quarte del liceo, una di indirizzo Linguistico e l'altra Scienze Umane con opzione Economico-Sociale, per una durata di 4 ore ciascuna. In particolare, la prima ora è stata spesa per la costruzione e l'utilizzo del regolo lineare, nella seconda ora si è analizzato il grafico della funzione logaritmica e le sue proprietà, nella terza ci si è poi concentrati sulla scala logaritmica e sulla costruzione del regolo calcolatore e nella quarta ora, infine, si sono svolte alcune operazioni con i regoli calcolatori veri e propri, forniti dal Politecnico. Nelle sezioni successive si riportano la scheda completa di quanto svolto in classe e l'analisi dei risultati ottenuti.

[1] Comunicazione personale

4.2 Descrizione dell'attività

Materiali necessari per ciascuno studente:

- Due fogli bianchi interi e due tagliati a metà sulla lunghezza
- Grafico in A3 del logaritmo in una base qualsiasi (uno per gruppo)
- Grafico in A3 del logaritmo in base 2 e base 4 sullo stesso grafico (uno per gruppo)
- Grafico in A3 del logaritmo in base $\sqrt{2}$
- Fogli su cui scrivere le varie istruzioni e elaborati richiesti e schema riassuntivo finale (uno per gruppo)
- Squadrette e regoli calcolatori "veri"

4.2.1 Lezione 1: Costruzione e utilizzo del regolo lineare

Per questa prima parte dell'attività, gli studenti rimangono seduti ai loro posti ma vengono coinvolti nella spiegazione. Si inizia spiegando loro che le moltiplicazioni, in generale, sono difficili da svolgere senza l'ausilio di una calcolatrice, mentre le somme risultano molto più facili. Ci piacerebbe allora poter partire da un problema semplice, come eseguire una somma, per arrivare poi ad un problema più complesso, che nel nostro caso riguarda le moltiplicazioni, trasformando queste ultime in somme, in modo da poterle eseguire con una calcolatrice meccanica. Questo stesso processo è stato svolto nella storia della matematica, e prima di trovare una soluzione ci è voluto molto tempo. Quale potrebbe essere un'idea per meccanizzare la somma? Stiamo cioè cercando un'idea per svolgere le somme in modo meccanico, senza necessariamente conoscerne il significato e le sue proprietà. Alcune soluzioni potrebbero essere l'abaco, oppure il regolo. Si mostra agli studenti un modello di regolo semplice, come quello in figura 4.2.

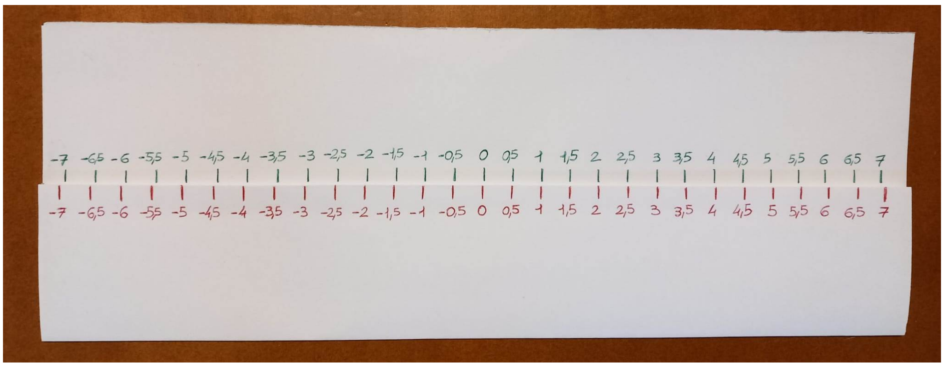


Figura 4.2: Regolo lineare

A questo punto si fornisce loro il materiale necessario (un foglio intero e uno tagliato a metà sul lato corto) per costruire il proprio regolo lineare. Si fanno insieme i seguenti passi:

- Si piega il foglio intero a metà sulla lunghezza e poi una metà ancora a metà, verso l'interno;
- Si infila l'altro foglio all'interno di quello piegato, in modo che scorra;
- Si segnano su entrambi i fogli (dove si uniscono) delle tacche di distanza pari a 2 quadretti e si scrive su ciascuna un numero, partendo dallo 0 al centro (sopra e sotto) e procedendo verso destra con i numeri positivi e a sinistra con quelli negativi (mettendo anche i mezzi numeri). Per praticità, si scrivono con colori diversi i numeri sulla riga superiore e quelli sulla riga inferiore.

Si chiede agli studenti, divisi a gruppi di 3-4 persone, di ipotizzare come si usi lo strumento, facendo qualche tentativo e scrivendo poi, sul foglio fornito, la procedura che ritengono corretta per il suo utilizzo. A questo punto i gruppetti si scambiano le istruzioni e provano ad eseguire le istruzioni ricevute, per verificarne il corretto funzionamento e per discutere collettivamente eventuali imprecisioni.
Si mostrano ora le istruzioni corrette, per essere certi che ciascuno abbia appreso la procedura esatta:

- Allineare il primo addendo (sulla scala superiore) con lo 0 della scala inferiore;
- Cercare il secondo addendo sulla scala inferiore;
- Leggere il risultato in corrispondenza di quest'ultimo.

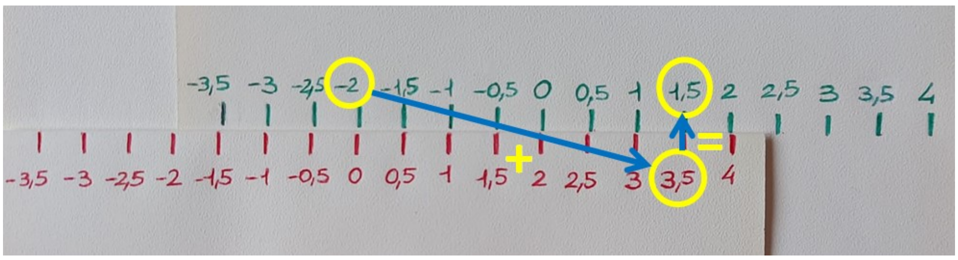


Figura 4.3: Esempio di utilizzo del regolo per svolgere una somma

4.2.2 Lezione 2: Il grafico del logaritmo

Abbiamo visto che bastano due righelli per poter eseguire le somme, ma apparentemente moltiplicare non risulta così facile.

Cerchiamo allora una funzione che ci permetta di trasformare i prodotti in somme, ovvero che abbia questa proprietà: $f(b) + f(c) = f(b \cdot c)$.

Si chiede agli studenti di dividersi in gruppetti da 3-4 persone, e a ciascun gruppo si fornisce il grafico di una funzione logaritmica (senza ancora rendere noto il suo nome), ciascuna con base diversa. Con l'aiuto della griglia disegnata sul grafico, l'obiettivo è quello di verificare con il righello, che questa funzione soddisfi la proprietà sopra indicata, e che quindi valga, ad esempio: $f(6) = f(2) + f(3)$.

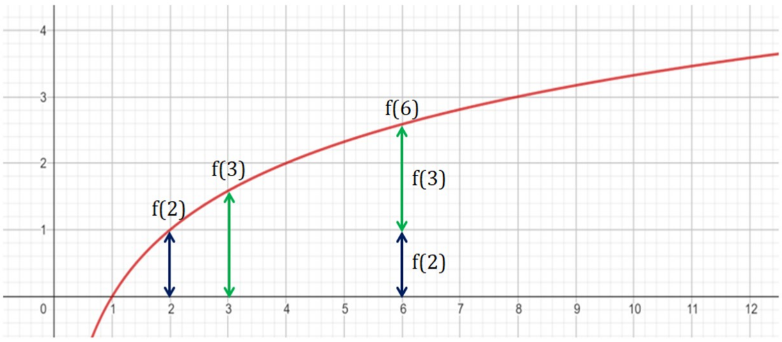


Figura 4.4: Grafico che mostra la proprietà: $f(6) = f(2) + f(3)$

Si chiede ora agi ragazzi di eseguire con il grafico alcuni prodotti non immediati, come ad esempio $1.3 \cdot 5; 2.2 \cdot 5$ e di sintetizzare in una frase la procedura svolta, scrivendola su un foglio che viene loro fornito.

Si fanno con loro alcune osservazioni sui grafici che hanno sottomano. Sebbene non siano tutti uguali tra loro, hanno delle caratteristiche comuni:

- Si sviluppano solo per le x positive
- Passano tutti per il punto $(1, 0)$
- Sono funzioni crescenti
- Per valori piccoli di x si riescono a fare conti più precisi, perché il grafico risulta più disteso

Possiamo adesso dare il nome a questa funzione: essa si chiama logaritmo. La introduciamo ricordandone la definizione e le proprietà:

Definizione: siano a e b due numeri reali, entrambi positivi e con $a \neq 1$. Definiamo il logaritmo in base a di b e scriviamo $\log_a(b)$ per indicare quel numero reale c che realizza l'uguaglianza $a^c = b$.
Chiamiamo:
a: base del logaritmo
b: argomento del logaritmo
c: valore del logaritmo

Proprietà: siano a, b, c tre numeri reali, positivi e con $a \neq 1$, p numero reale, allora:

$$\log_a(b) + \log_a(c) = \log_a(b \cdot c)$$
$$\log_a(b) - \log_a(c) = \log_a\left(\frac{b}{c}\right)$$
$$\log_a(b^p) = p \cdot \log_a(b)$$

Ora, divisi di nuovo in gruppi, si chiede loro di calcolare alcuni logaritmi utilizzando solo la loro definizione e applicando le proprietà, riportando poi su un sistema di assi cartesiani i punti trovati, in modo da costruire un grafico indicativo. Ad esempio, per costruire un grafico in base 2, chiediamo di calcolare: $\log_2(8)$, $\log_2(4)$, $\log_2(1)$, $\log_2(\frac{1}{2})$, e così via.

Per aiutare gli studenti a comprendere l'importanza dell'introduzione dei logaritmi, si racconta brevemente il contesto storico e le motivazioni che hanno portato al loro utilizzo.

Un po' di storia: Il concetto di logaritmo è molto antico. Sia i Babilonesi che gli Egizi studiarono problemi legati alla vita quotidiana che utilizzano progressioni aritmetiche e geometriche, che sono alla base dei logaritmi. Nel 1614 il matematico John Napier introdusse i logaritmi, grazie ai quali si diede un forte slancio allo sviluppo di macchine in grado di eseguire operazioni come moltiplicazioni, divisioni ed elevamento a potenza, trasformando operazioni complesse in addizioni e sottrazioni. All'inizio i calcoli venivano eseguiti utilizzando le cosiddette "tavole logaritmiche" nelle quali erano presenti i valori dei logaritmi di tutti i numeri maggiori di 1. Per moltiplicare due numeri con queste tavole, è sufficiente prendere i loro logaritmi e sommarli, ottenendo il logaritmo del risultato, attraverso cui si può ottenere il risultato finale.
Esempio: se vogliamo usare le tavole per calcolare $83 \cdot 14$, dobbiamo cercare il valore di $\log_{10}(83)$ e di $\log_{10}(14)$ e sommare i due valori trovati. Cercando poi quest'ultimo valore sulle tavole, troveremmo che corrisponde al $\log_{10}(1162)$. Il risultato della moltiplicazione tra 83 e 14 è dunque 1162.

Si fa ora notare che i grafici che hanno ricevuto non sono tutti uguali, in quanto la funzione logaritmica può avere basi diverse, ma le proprietà valgono indipendentemente dalla base. Si chiede ai vari gruppi di identificare la base del loro grafico, sfruttando le proprietà appena viste. Gli studenti dovrebbero arrivare a capire che la base del loro grafico è quel numero la cui ordinata è pari ad 1. A questo punto, mettiamo tutti i grafici in ordine crescente di base e chiediamo loro di capire cosa cambia tra di essi. Noteremo che, aumentando la base, il grafico risulta sempre più schiacciato verso l'asse x.
Come ultimo passo, distribuiamo a tutti i gruppi il grafici di $\log_2(x)$ e $\log_4(x)$ e chiediamo loro di verificare quale sia il rapporto tra i due. Noteranno che il rapporto risulta essere sempre pari a 2, e questo deriva ancora una volta dalle proprietà dei logaritmi.

4.2.3 Lezione 3: La scala logaritmica e il regolo calcolatore

Torniamo alla storia: siccome le tavole erano molto ingombranti e il loro utilizzo era laborioso, nel 1620 Edmund Gunter ideò la scala logaritmica: un righello sul quale la distanza di ciascun numero dall'origine è proporzionale al suo logaritmo.

Per costruire la scala logaritmica con gli studenti si procede in questo modo:

- Si distribuisce a ciascuno il grafico della funzione $\log_{\sqrt{2}}(x)$, con alcuni punti segnati sull'asse x (figura 4.5)

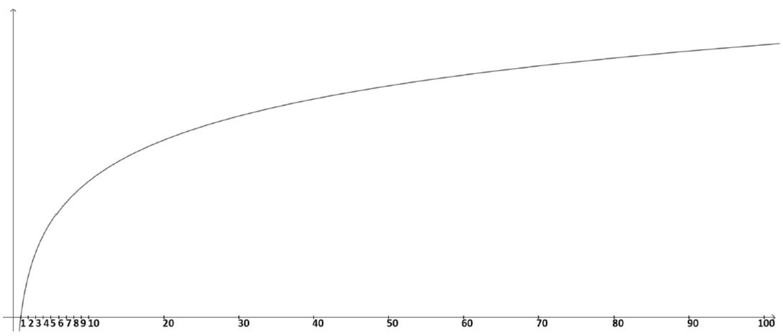


Figura 4.5: Grafico di una funzione logaritmica

- Con l'aiuto delle squadrette, si riportano sull'asse y le immagini dei numeri presenti sull'asse delle ascisse (figura 4.6)

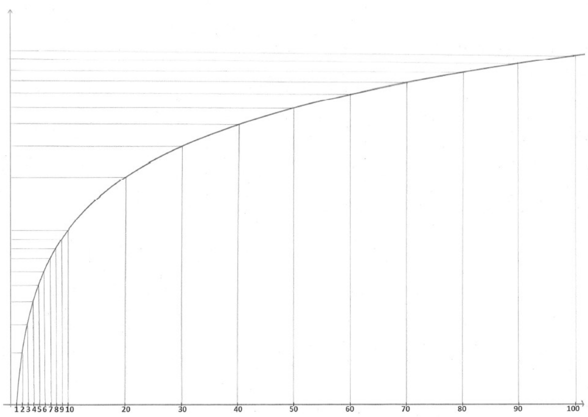


Figura 4.6: Grafico del logaritmo completato

- Si ruota il foglio di 90° in senso orario e si scrivono anche sull'asse y i numeri che hanno trovato sull'asse x: in questo modo, orizzontalmente, appare una scala logaritmica, in quanto la distanza di ciascun numero dall'origine è proporzionale al suo logaritmo! (figura 4.7)

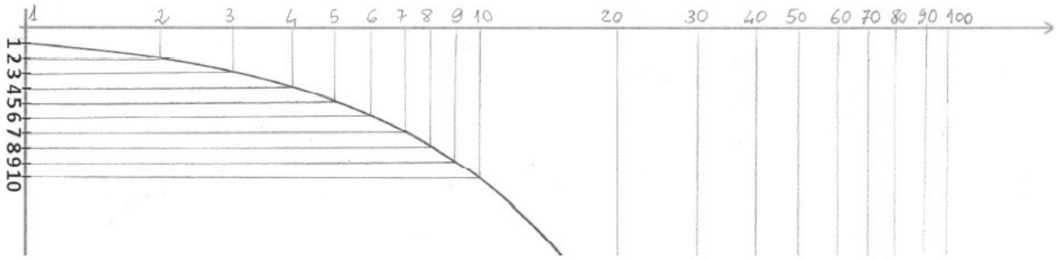


Figura 4.7: Scala logaritmica

Si spiega che è possibile costruire uno strumento basato proprio sulla scala logaritmica da loro costruita, che permette quindi di eseguire moltiplicazioni in modo meccanico, sfruttando le proprietà dei logaritmi. Si mostra agli studenti un modello di regolo calcolatore (figura 4.8) e si fornisce loro nuovamente un foglio intero e uno tagliato a metà sul lato corto. Si procede in modo analogo al regolo lineare:

- Si piega il foglio intero a metà sulla lunghezza e poi una metà ancora a metà, verso l'interno;
- Si infila l'altro foglio all'interno di quello piegato, in modo che scorra;
- Si segnano su entrambi i fogli (dove si uniscono) delle tacche, in corrispondenza delle tacche della scala logaritmica da loro costruita.

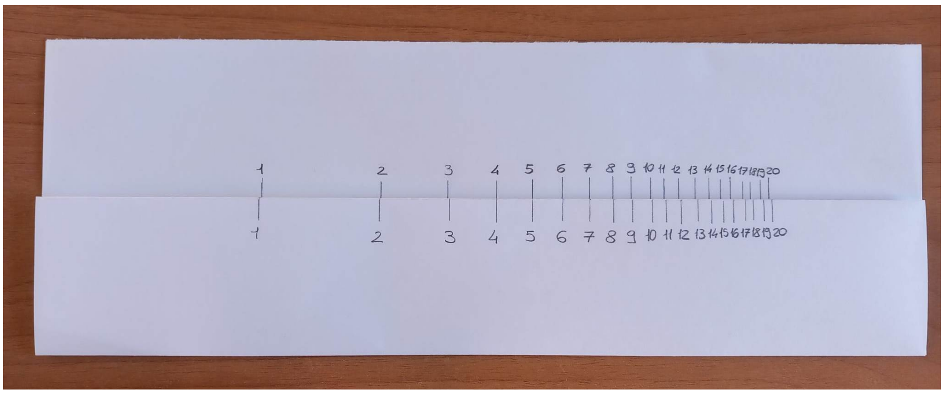


Figura 4.8: Regolo calcolatore con scala logaritmica

Agli studenti viene dato il compito di ipotizzare una procedura per moltiplicare due numeri utilizzando lo strumento costruito, in modo analogo a quanto fatto per il regolo lineare, e di scrivere qualche riga di istruzioni.

Si spiega poi la procedura corretta, per essere certi che sia chiara per tutti. Moltiplichiamo ad esempio $2 \cdot 3$:

- Allineare il 2 della scala superiore (cioè il primo fattore che stiamo considerando) con l'1 della scala inferiore: in questo modo la scala superiore si sposta di una lunghezza pari a $\log(2)$;
- Cercare sulla scala inferiore il numero 3 (cioè il secondo fattore che consideriamo);
- Leggere il risultato del prodotto tra i due fattori, nel nostro caso 6, sulla scala superiore, in corrispondenza del 3, secondo fattore: il punto è posto ad una distanza di $\log(2) + \log(3) = \log(2 \cdot 3)$ dal punto 1 sulla scala inferiore. Il valore letto corrisponde al numero che ha $\log(2 \cdot 3)$ come logaritmo, cioè $2 \cdot 3$, cioè 6.

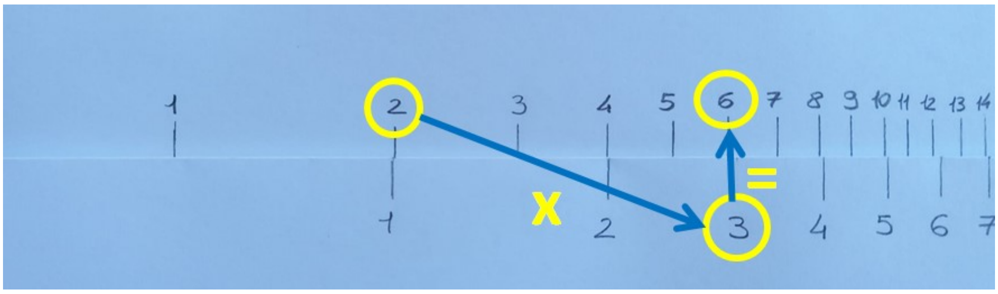


Figura 4.9: Esempio di utilizzo del regolo per svolgere una moltiplicazione

4.2.4 Lezione 4: Ulteriori operazioni con il regolo logaritmico e conclusioni

Si distribuisce a ciascun gruppo un regolo calcolatore vero e proprio e, dopo aver mostrato loro le scale da utilizzare (C e D), si chiede agli studenti di eseguire alcuni calcoli: $2 \cdot 4$; $1.9 \cdot 1.5$; $24 \cdot 20$; $0.2 \cdot 5$. Negli ultimi due casi sorgerà il dubbio che sia impossibile effettuare tali calcoli con lo strumento fornito. In realtà, si fa notare agli studenti che il numero 3 sulle scale, può essere interpretato anche come 30, 300, 0.3, 0.03, ecc, facendo attenzione ad attribuire il giusto ordine di grandezza al risultato, in base a quello che ci aspettiamo. In questo modo i ragazzi imparano a sviluppare un ragionamento critico nei confronti dei risultati che ottengono, e questo può anche aiutarli ad usare la calcolatrice elettronica in modo più attento e critico, portandoli ad evitare errori grossolani.

Si chiede poi agli studenti di trovare un modo per visualizzare la tabellina del 2 con il regolo. Si scopre che è sufficiente allineare il 2 della scala superiore con l'1 della scala inferiore per vedere in corrispondenza dell'1,2,3,4... della scala inferiore, i corrispondenti valori moltiplicati per 2.

Ai ragazzi viene ora chiesto di ipotizzare come si possano fare le divisioni, scoprendo che in questo caso si utilizza la proprietà di sottrazione dei logaritmi. Questa volta si procede allineando tra loro dividendo (scala superiore) e divisore (scala inferiore), e si legge il risultato in corrispondenza dell'1 della scala inferiore. Come prima, si prova ad eseguire alcuni calcoli: $90 : 15$, $8 : 6$, $4 : 3$.

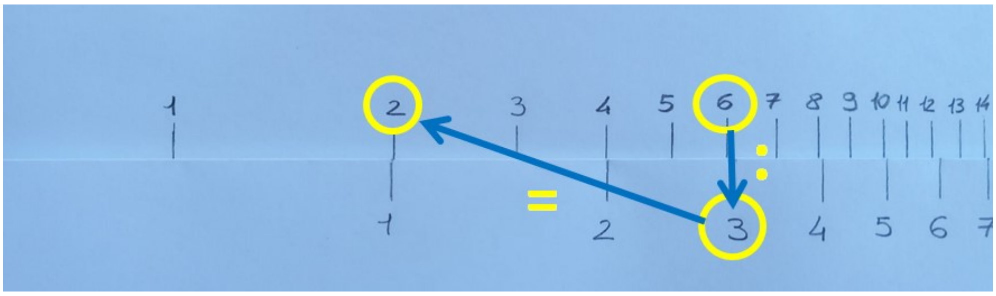


Figura 4.10: Esempio di utilizzo del regolo per svolgere una divisione

Effettuando le ultime due operazioni, si accorgeranno che non hanno dovuto muovere il regolo tra una e l'altra, cioè che il loro rapporto è costante. Dunque questo strumento ci permette anche di risolvere delle proporzioni! Supponiamo di voler risolvere $\frac{2}{1.1} = \frac{4}{x}$. Possiamo allineare il numero 2 della scala superiore con il numero 1.1 della scala inferiore. Il risultato si può leggere sulla scala inferiore, in corrispondenza del numero 4 sulla scala superiore. In modo analogo chiediamo di risolvere $\frac{12}{4} = \frac{x}{10}$.

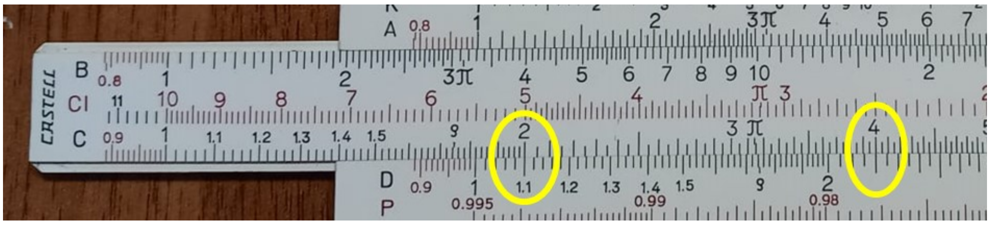


Figura 4.11: Esempio di utilizzo del regolo per svolgere una proporzione

Per concludere, si chiede agli studenti, divisi a gruppi, di compilare uno schema che sintetizzi l'intera attività, dove disegnare il grafico del logaritmo, scrivere le formule che si ricordano, spiegare a cosa serve il regolo e fare qualche osservazione sull'attività proposta.

4.3 Analisi dei risultati

Nel proporre tale attività si è notato un buon coinvolgimento da parte degli allievi, incuriositi dalla diversa modalità di fare lezione e dalla possibilità di manipolare e creare loro stessi degli strumenti di calcolo. Dopo aver introdotto brevemente il progetto e aver mostrato loro il primo regolo lineare, qualche studente più scettico ha esclamato: "Ma a cosa serve? Tanto abbiamo la calcolatrice!" In realtà, però, la maggior parte degli allievi, per l'intero corso dell'attività, è stata fedele alle istruzioni proposte e non ha ricercato nell'uso della calcolatrice una facile scorciatoia. Si sono anzi stupiti di poterne fare a meno e di come nella storia si sia arrivati ad alcuni strumenti di calcolo meccanici. Da questo punto di vista, è stato quindi raggiunto l'obiettivo di aiutare gli studenti a vedere gli strumenti di calcolo solo come mezzi e come aiuto, senza però rinunciare alla capacità di ragionamento critico.

Alcune altre considerazioni devono essere fatte sul lavoro in gruppi e sull'apprendimento all'interno di essi. Sebbene questo modo di operare abbia in parte rallentato il lavoro, si è notato come nella maggior parte dei gruppi si creasse una buona collaborazione, con l'obiettivo comune di arrivare al risultato. Nella maggioranza dei casi gli studenti stessi hanno fatto attenzione che tutti comprendessero il ragionamento fatto. Inoltre, nel confronto con la professoressa di matematica delle due classi, è emerso che l'impegno e i risultati maggiori siano stati raggiunti anche da studenti che normalmente non ottengono esiti eccellenti nelle materie scientifiche. Soprattutto in questi ultimi ragazzi, si è notato molto stupore e soddisfazione quando riuscivano ad ottenere un risultato corretto o a spiegare un ragionamento ai loro compagni. Questo prova che le attività di laboratorio stimolino l'apprendimento e l'interesse verso la materia e creino un ambiente di lavoro più disteso, cosa che non sempre avviene quando gli studenti sono preoccupati della valutazione che riceveranno. Inoltre, in questo modo, cresce anche la fiducia che hanno in loro stessi e la matematica perde un po' la triste fama di "ostacolo insormontabile".

In una delle due classi, la quarta linguistico, non era mai stato introdotto il concetto del logaritmo, dunque per loro rimarrà probabilmente legato al significato che gli è stato dato a partire dal grafico, come funzione che soddisfa la proprietà $f(b) + f(c) = f(b \cdot c)$ e non soltanto come operazione inversa dell'esponenziale, e questa è una definizione molto potente.

In questa sezione verrà preso in esame il riscontro degli studenti all'attività che è stata loro proposta, e in particolare le risposte date dai vari gruppi ai quesiti assegnati alla fine di ciascuna lezione e alla sintesi finale dell'interà attività. Si analizzeranno quindi le istruzioni per l'utilizzo del regolo lineare, poi la procedura per il calcolo di un prodotto partendo dal grafico di una funzione logaritmica, le istruzioni per l'utilizzo del regolo logaritmico, e infine la scheda riassuntiva finale, mettendo anche in risalto l'atteggiamento degli alunni e alcune frasi significative da loro pronunciate.

In chiusura al capitolo, saranno evidenziati gli aspetti positivi e le criticità incontrate durante la messa in opera dell'attività, proponendo in tal senso soluzioni e possibili miglioramenti, e infine si tireranno le fila del lavoro svolto complessivamente, anche grazie alle osservazioni della professoressa di matematica del liceo, che è stata in classe durante tutta la durata dell'attività.

4.3.1 Lezione 1: Il regolo lineare

All'inizio della lezione, dopo aver introdotto l'attività, si è chiesto ai ragazzi di elencare alcuni strumenti di calcolo meccanici per eseguire le somme. Hanno citato l'abaco e il regolo fatto con i bastoncini colorati, ma nessuno di loro aveva mai usato altri strumenti di calcolo meccanici. Dopo aver mostrato loro il regolo che avremmo costruito e utilizzato, molti si sono mostrati incuriositi e qualcuno ha esclamato: "Ma sono delle linee dei numeri!". A questo punto, gli studenti hanno costruito il proprio regolo lineare e hanno avuto del tempo per provare ad utilizzarlo, senza ancora fornire loro alcuna indicazione. Hanno fatto qualche tentativo, e alcuni gruppi sono riusciti a vedere il risultato dell'addizione che stavano svolgendo, senza però riuscire a trovare una regola universale. Dopo aver suggerito loro l'importanza dello zero come punto fisso per tale procedura, quasi tutti i gruppi hanno compreso la procedura corretta, che funzionasse per tutti i casi, e in molti hanno reagito con stupore e soddisfazione, con frasi come: "Funziona!", oppure: "Ho capito!".

Alcuni studenti di quarta hanno faticato più dei ragazzi di prima a comprendere l'utilizzo dello strumento. Questo può essere dovuto alla minore curiosità, che non li spingeva a trovare nuove strategie, o forse alla loro abitudine a svolgere calcoli in modo meccanico, ormai lontani dagli anni in cui si facevano aiutare dall'abaco, dalle dita, o da approcci laboratoriali. Quest'ultimo approccio, purtroppo, viene spesso trascurato nella scuola secondaria di primo e secondo grado, facendo sì che gli studenti perdano un po' di quella elasticità mentale che avevano sviluppato nei primi anni di apprendimento scolastico.

Dopo che tutti hanno compreso la procedura corretta, si è chiesto a ciascun gruppo di scrivere in poche righe una procedura chiara, che consentisse a chiunque di utilizzare lo strumento. La consegna era:

"Descrivete brevemente le istruzioni per svolgere le somme utilizzando il regolo lineare".

Tutti i gruppi sono riusciti a descrivere un metodo esatto, sebbene non tutti abbiamo individuato lo stesso. La maggior parte di loro ha astratto il procedimento al caso generale, commentando anche un esempio numerico, mentre i restanti gruppi hanno fornito delle istruzioni basandosi unicamente su un esempio numerico. Qualche gruppo inoltre, ha deciso di servirsi anche di un'illustrazione grafica perché la procedura fosse maggiormente intuibile. Scambiandosi poi i manualetti, tutti i gruppi sono riusciti ad utilizzare le istruzioni scritte da altri, sebbene alcuni studenti abbiano notato che il linguaggio utilizzato non fosse rigoroso e hanno eseguito alcune correzioni.

Le imprecisioni più frequenti sono state:

- non specificare di quale scala si parlasse, se inferiore o superiore;
- parlare di 'numeri' anziché di addendi;
- scrivere frasi come: "così si potrà vedere il risultato", senza esprimere in modo chiaro dove esso si potesse leggere.

Qui di seguito sono riportati alcuni esempi di manualetti scritti dagli studenti con le eventuali correzioni fatte dai loro compagni.

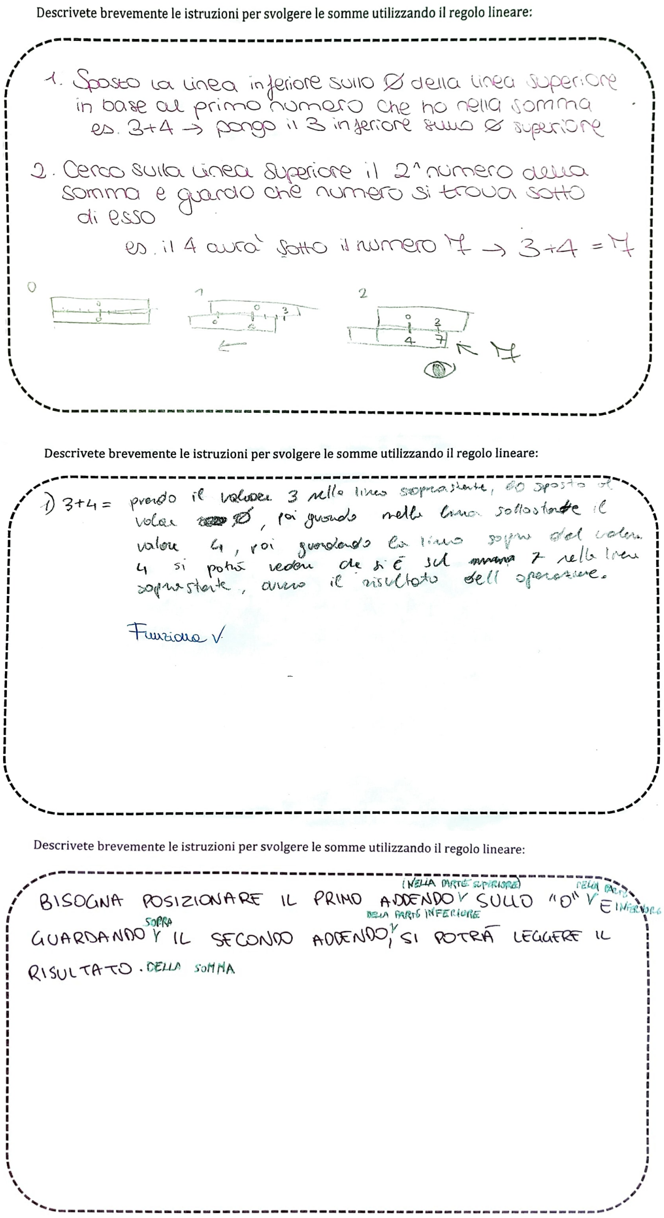


Figura 4.12: Manualetti sul funzionamento del regolo lineare

4.3.2 Lezione 2: Il grafico del logaritmo

Dopo aver fornito agli studenti il grafico di una funzione logaritmica, si chiede loro di verificare che soddisfi la proprietà: $f(b) + f(c) = f(b \cdot c)$, mostrando loro la seguente immagine che esemplifica la procedura:

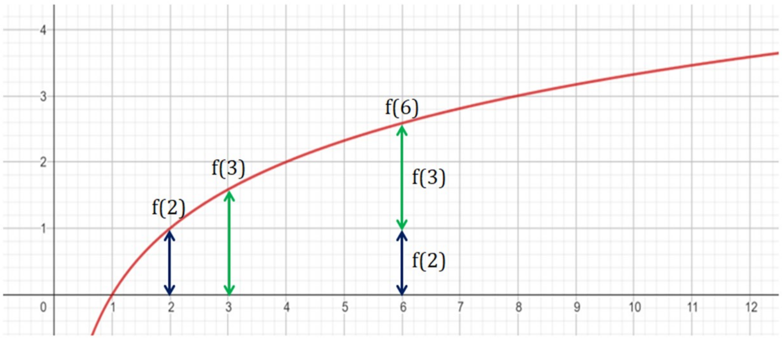


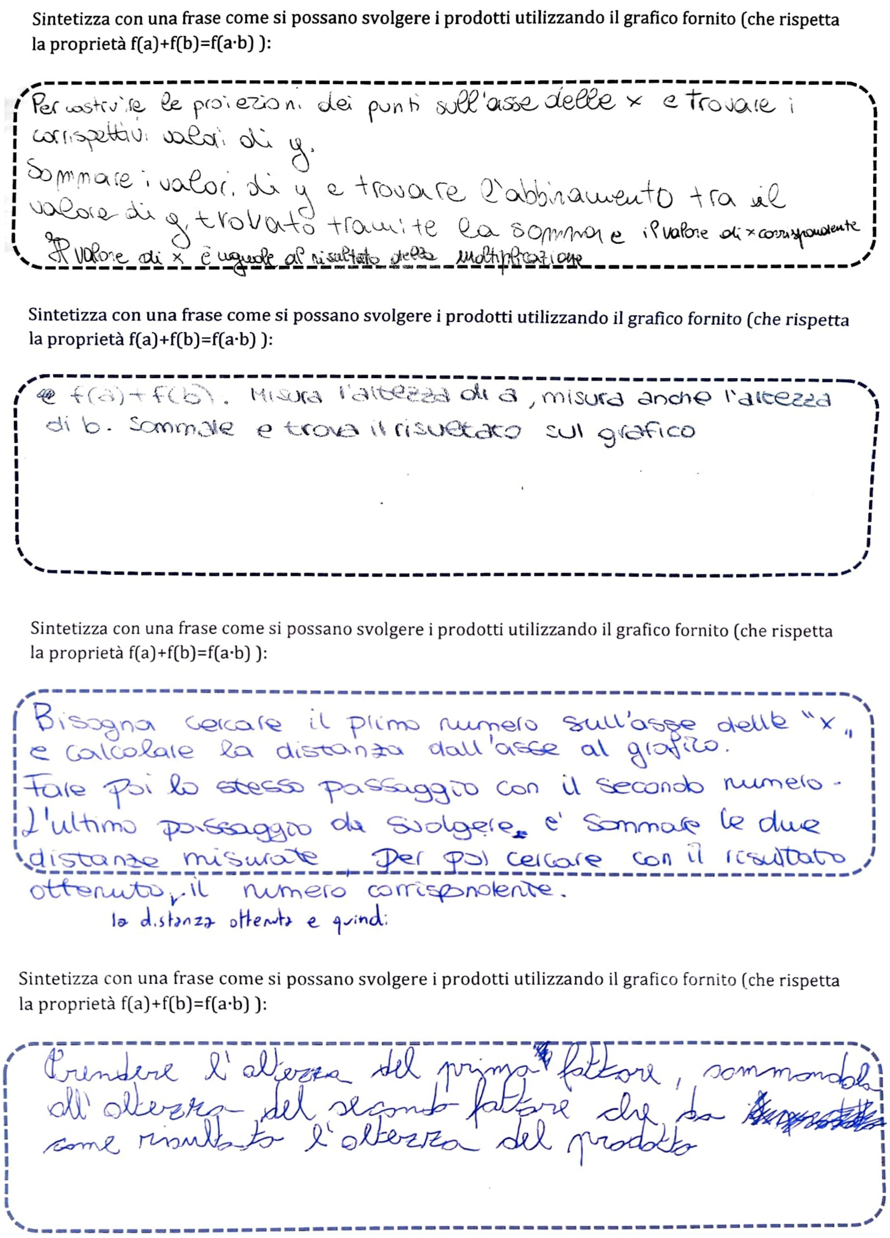
Figura 4.13: Grafico che mostra la proprietà: $f(6) = f(2) + f(3)$

Si chiede poi di astrarre il procedimento e di usarlo per calcolare altri prodotti non banali, partendo dal grafico. Tale passaggio non è risultato facile, e molti gruppi hanno chiesto aiuto per capire come procedere. Questa piccola difficoltà è anche dovuta al fatto che non fossero molto abituati a leggere un grafico usando la notazione $f(x)$ e che il passaggio da moltiplicazione a somma non fosse scontato. A questo punto, i gruppi hanno provato a sintetizzare la procedura utilizzata per eseguire tali moltiplicazioni, rispondendo alla consegna: "Sintetizza con una frase come si possano svolgere i prodotti utilizzando il grafico fornito, che rispetta la proprietà $f(b) + f(c) = f(b \cdot c)$".

Neppure il passaggio alla formalizzazione verbale è risultato semplice, e alcuni gruppi, pur essendo riusciti a svolgere le moltiplicazioni, non sono riusciti a formalizzarlo in modo rigoroso. Le imprecisioni più frequenti sono state:

- non specificare che le altezze che stavano misurando fossero relative al grafico, e corrispondessero quindi alle $f(x)$;
- scrivere frasi come: "sommando le altezze si troverà il risultato sul grafico", senza indicare che la somma trovata dovesse corrispondere all'altezza del grafico in un punto, e che tale punto fosse proprio il risultato del prodotto;
- parlare di "numeri" o di "punti sull'asse delle ascisse", senza specificare che si trattasse dei fattori della moltiplicazione.

Qui di seguito sono riportati alcuni esempi di tale lavoro.



Sintetizza con una frase come si possano svolgere i prodotti utilizzando il grafico fornito (che rispetta la proprietà f(a)+f(b)=f(a·b)):

Per costruire le proiezioni dei punti sull'asse delle x e trovare i corrispettivi valori di y.
Sommare i valori di y e trovare l'abbinamento tra il valore di y trovato tramite la somma e il valore di x corrispondente
Il valore di x è uguale al risultato della moltiplicazione

Sintetizza con una frase come si possano svolgere i prodotti utilizzando il grafico fornito (che rispetta la proprietà f(a)+f(b)=f(a·b)):

f(a)+f(b). Misura l'altezza di a, misura anche l'altezza di b. Sommale e trova il risultato sul grafico

Sintetizza con una frase come si possano svolgere i prodotti utilizzando il grafico fornito (che rispetta la proprietà f(a)+f(b)=f(a·b)):

Bisogna cercare il plimo numero sull'asse delle "x" e calcolale la distanza dall'asse al grafico.
Fale poi lo stesso passaggio con il secondo numero.
L'ultimo passaggio da svolgere è sommare le due distanze misurate. Per poi cercare con il risultato ottenuto, il numero corrispondente.
la distanza ottenuta e quindi

Sintetizza con una frase come si possano svolgere i prodotti utilizzando il grafico fornito (che rispetta la proprietà f(a)+f(b)=f(a·b)):

Prendere l'altezza del primo fattore, sommandola all'altezza del secondo fattore che da ~~[illegible]~~ come risultato l'altezza del prodotto

Figura 4.14: Manualetti riguardo le moltiplicazioni a partire dal grafico

Dopo aver commentato con loro gli errori e le imprecisioni più frequenti, si è suggerita loro una frase che fosse precisa e sintetica: "Considerare i due fattori della moltiplicazione come punti sull'asse delle ascisse e misurare le loro ordinate sul grafico. Sommare le due altezze trovate e verificare qual è l'ascissa corrispondente a tale ordinata sul grafico. Tale ascissa è il risultato della moltiplicazione."

Si è poi fatta qualche osservazione sul grafico e si è svelato loro che si trattava di una funzione logaritmica. La classe che aveva già introdotto questo concetto, è riuscita a riconoscere il grafico prima che venisse loro detto, mentre per gli altri è stata una novità. In seguito, quando si è chiesto loro di costruire il grafico del $\log_2$ calcolandone alcuni punti, non è stato immediato per gli studenti capire che l'argomento del logaritmo corrispondesse all'ascissa, mentre il risultato alla sua ordinata, e molti di loro hanno fatto domande come: "Ma dopo che ho calcolato i logaritmi, cosa devo fare per avere il grafico?". Dopo aver chiarito questo, riprendendo il grafico in A3 che avevano ricevuto come gruppo, molti studenti sono riusciti a comprendere che la base del grafico logaritmico risultava essere quell'ascissa la cui ordinata fosse pari ad 1.

Se questa attività dovesse essere riproposta in futuro, si potrebbe pensare di fermarsi più a lungo sui concetti che hanno causato maggiori difficoltà in questa lezione, tralasciando magari qualcuna delle osservazioni finali. In particolare, ci si potrebbe soffermare sulla notazione $f(x)$, chiedendo loro di estrarre alcuni punti dal grafico che è stato loro fornito, e di inserirli in una tabella che contenga le x nella colonna di sinistra e le $f(x)$ in quella di destra, dove le $f(x)$ sono misurate come altezze del grafico nel punto x corrispondente. Questo piccolo esercizio potrebbe favorire la verifica della proprietà $f(b) + f(c) = f(b \cdot c)$, avendo ormai chiaro che la notazione $f(x)$ sia legata ad un'altezza sul grafico. Inoltre, si potrebbe specificare meglio che si sta svolgendo un prodotto all'interno dell'argomento della funzione, ma che questo corrisponda a una somma tra due funzioni: in questo senso la moltiplicazione è trasformata in somma. Un altro concetto che potrebbe essere sottolineato è il fatto che questo non sia vero per qualunque funzione, ma è vero per la funzione che stiamo studiando, che, in particolare, ha la proprietà di essere iniettiva.

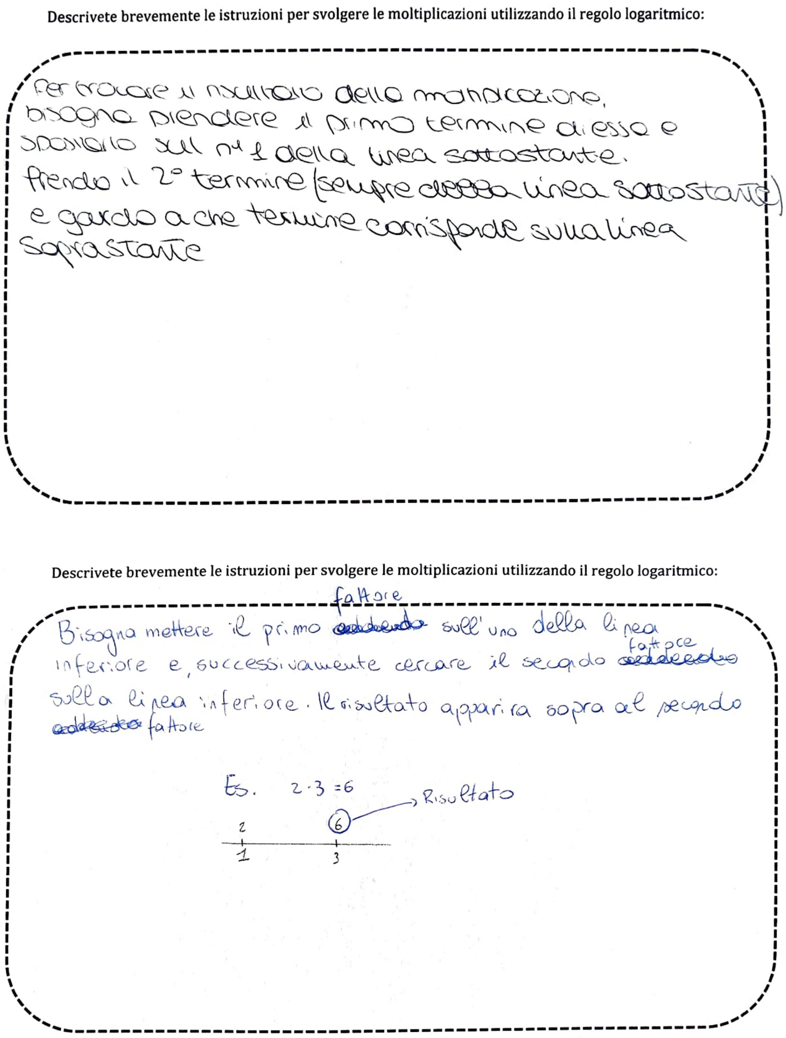
4.3.3 Lezione 3: Il regolo calcolatore logaritmico

Dopo aver accompagnato gli studenti nella costruzione del proprio regolo calcolatore in scala logaritmica, si chiede loro di fare qualche tentativo per provare ad usarlo. Subito dicono frasi del tipo: "Qui lo 0 non c'è, quindi non possiamo usarlo come punto fisso!" e quindi li si fa ragionare sul fatto che l'elemento neutro sia diverso per addizione e moltiplicazione. Chiarito questo punto, gli allievi riescono a capire senza difficoltà il modo in cui utilizzare lo strumento, e che quindi il primo fattore sia da allineare con l'1. Gli studenti che si chiedevano: "Ma è giusto che i numeri grandi siano tutti schiacciati, mentre tra i numeri piccoli ci sia una distanza così grande?", riescono ora a comprendere la differenza tra una scala lineare e una logaritmica, e come quest'ultima permetta di trasformare i prodotti in somme.

Anche in questo caso si chiede loro di scrivere qualche riga di istruzioni in modo che chiunque sia in grado di usare lo strumento, rispondendo quindi alla consegna:

"Descrivete brevemente le istruzioni per svolgere le moltiplicazioni utilizzando il regolo logaritmico".

Poiché era la seconda volta che descrivevano un'operazione di questo tipo, i ragazzi sono riusciti maggiormente ad astrarre il procedimento al caso generale, aggiungendo poi anche un esempio numerico. Qui di seguito si riportano alcuni di questi manualetti.



Descrivete brevemente le istruzioni per svolgere le moltiplicazioni utilizzando il regolo logaritmico:

Per trovare il risultato della moltiplicazione, bisogna prendere il primo termine di essa e spostarlo sul n° 1 della linea sottostante. Prendo il 2° termine (sempre della linea sottostante) e guardo a che termine corrisponde sulla linea soprastante

Descrivete brevemente le istruzioni per svolgere le moltiplicazioni utilizzando il regolo logaritmico:

Bisogna mettere il primo ~~addendo~~ fattore sull'uno della linea inferiore e, successivamente cercare il secondo ~~addendo~~ fattore sulla linea inferiore. Il risultato apparirà sopra al secondo ~~addendo~~ fattore

Es. 2 · 3 = 6

Figura 4.15: Manualetti sul funzionamento del regolo logaritmico

Alcuni studenti hanno chiesto: "Ma con questo regolo, come si possono fare operazioni più complesse?". Si è loro spiegato che nel regolo calcolatore ci sono moltissime scale diverse, per svolgere numerose operazioni, e che si possono eseguire moltiplicazioni con numeri grandi anche con una scala non troppo estesa, facendo però attenzione ad attibuire il giusto ordine di grandezza al risultato, come avremmo visto nella lezione successiva.

4.3.4 Lezione 4: Ulteriori operazioni e sintesi dell'attività

Nel corso dell'ultima lezione è stato chiesto agli studenti di svolgere con il regolo altre operazioni, come la divisione e le proporzioni. Concettualmente, non è stato per loro difficile passare a tali operazioni, e qualcuno aveva già anticipato la possibilità di eseguire anche la divisione come operazione inversa della moltiplicazione.

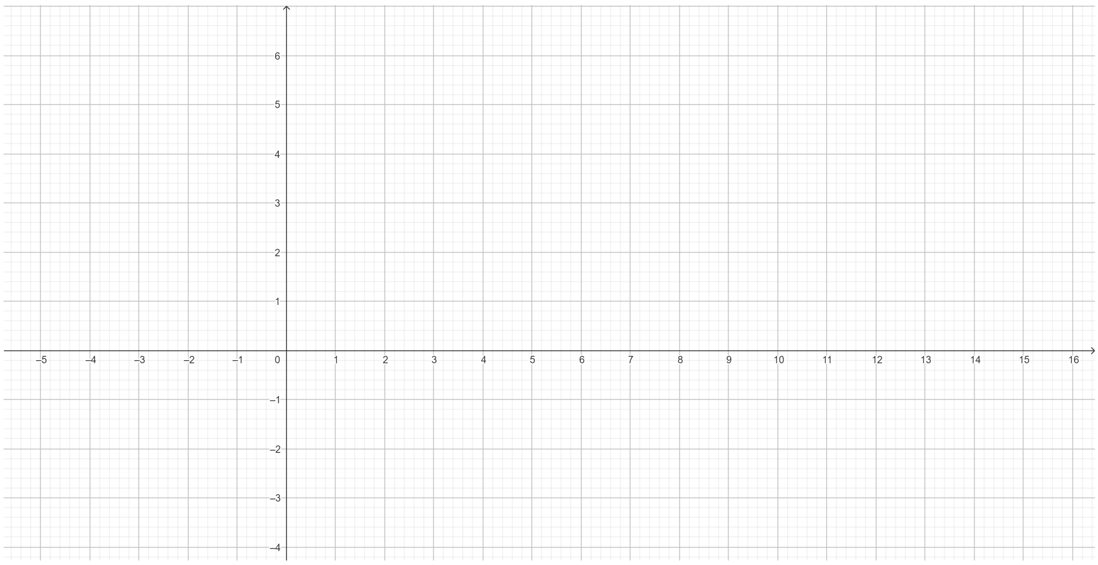
Inoltre, in quest'ultima lezione è stato dato a ciascun gruppo un regolo calcolatore "vero" e con esso hanno avuto la possibilità di svolgere conti più precisi. Con tale strumento in mano, si sono resi conto di come effettivamente potesse essere utilizzato fino a pochi decenni fa, precedendo le moderne calcolatrici elettroniche, e si sono stupiti di quante scale esso contenesse, spingendoli a fare domande sulle possibili operazioni che questo strumento è in grado di eseguire. Qualcuno, svolgendo una proporzione ha esclamato: "Per fare le proporzioni questo è più comodo della calcolatrice! Si legge direttamente il risultato!". Inoltre, sono riusciti a comprendere l'importanza degli ordini di grandezza, per avere la possibilità di eseguire anche operazioni fuori dalla scala dello strumento.

Infine, è stato chiesto loro di produrre una sintesi a gruppi dell'intera attività svolta, compilando la scheda di seguito riportata.

Scheda sintesi dell'attività

Gruppo composto da:

Disegnate un grafico logaritmico:



Quali formule vi ricordate tra quelle viste?

A che cosa serve il regolo?

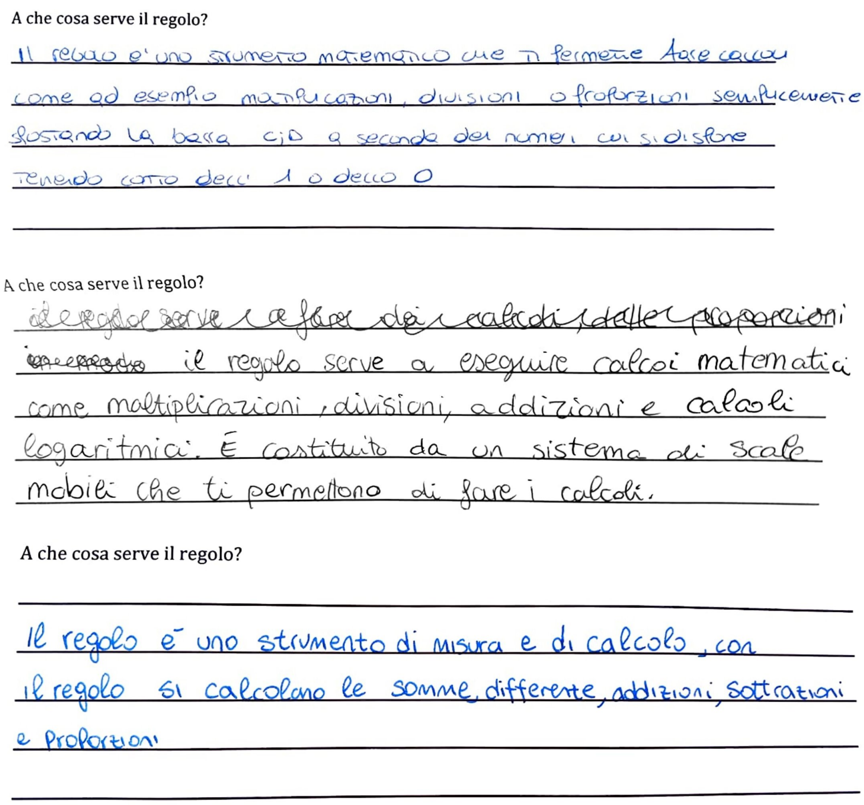
Osservazioni varie sull'attività svolta in queste 4 ore:

Da queste schede è emerso che l'andamento della funzione logaritmica e la sua definizione fossero chiare a tutti, sebbene pochi studenti avessero preso appunti nel corso dell'attività. Questo indica che partendo dal grafico e svolgendo numerosi conti su di esso, gli studenti abbiano avuto modo di fare propri tali concetti.

Circa la metà dei gruppi è riuscita anche a riportare in modo corretto le proprietà del logaritmo, mentre gli altri hanno avuto qualche difficoltà. Da quanto hanno scritto, appare la confusione di qualcuno a distinguere la base dall'argomento del logaritmo, ma questo è anche dovuto al fatto che, come detto precedentemente, una delle due classi di studenti non avesse familiarità con il concetto di funzione logaritmica, in quanto è stato loro introdotto per la prima volta nel corso di questa attività e in modo abbastanza rapido.

A tutti gli studenti è poi risultato chiaro a cosa servisse il regolo e la differenza tra le due scale, lineare e logaritmica. Qualche gruppo, tra le operazioni che è possibile eseguire con il regolo, ha scritto i logaritmi. Questa è un'imprecisione perché non si è mai parlato di logaritmi eseguiti attraverso il regolo, bensì si è detto che il logaritmo è l'operazione alla base dello strumento. Di seguito si riportano alcune risposte alla domanda:

"A cosa serve il regolo?"



A che cosa serve il regolo?

Il regolo e' uno strumento matematico che ti permette fare calcoli come ad esempio moltiplicazioni, divisioni o proporzioni semplicemente spostando la barra ciò a seconda dei numeri cui si dispone tenendo conto dell' 1 o dello 0

A che cosa serve il regolo?

~~il regolo serve a fare dei calcoli, delle proporzioni~~

il regolo serve a eseguire calcoi matematici come moltiplicazioni, divisioni, addizioni e calcoli logaritmici. È costituito da un sistema di scale mobili che ti permettono di fare i calcoli.

A che cosa serve il regolo?

Il regolo è uno strumento di misura e di calcolo, con il regolo si calcolano le somme, differente, addizioni, sottrazioni e proporzioni

Figura 4.16: Risposte degli studenti alla domanda relativa al regolo lineare

Per quello che riguarda le osservazioni sull'attività svolta, i commenti sono in generale positivi. Gli studenti hanno apprezzato la novità dell'attività proposta, rispetto alla frontalità delle lezioni a cui sono abituati; hanno riconosciuto di aver messo in atto le loro abilità logiche e di ragionamento e di aver imparato che nella storia sono stati usati strumenti di calcolo molto potenti, sebbene non fossero elettronici. Si riportano qui di seguito alcuni dei loro commenti.

Osservazioni varie sull'attività svolta in queste 4 ore:

Riteniamo che questa attività sia stata molto arricchente per la nostra esperienza matematica. Sicuramente riflettere su come i grandi matematici della storia potessero calcolare senza gli strumenti tecnologici odierni.

Osservazioni varie sull'attività svolta in queste 4 ore:

Molto interessante, abbiamo scoperto nuovi metodi di calcolo che prima non sapevano esistessero, inoltre anche nuovi strumenti di calcolo.
Dopo aver utilizzato i vari regoli più di una volta diventa più semplice utilizzarli e capire il calcolo

Osservazioni varie sull'attività svolta in queste 4 ore:

È STATO MOLTO INTERESSANTE E ISTRUTTIVO, VISTO CHE NON ABBIAMO MAI UTILIZZATO CALCOLATORI SEMPLICI COME QUESTI.

Osservazioni varie sull'attività svolta in queste 4 ore:

L'attività svolta in queste 4 ore ci ha aiutato a comprendere l'utilizzo del regolo e che non abbiamo sempre bisogno della calcolatrice.
Questa attività ha ampliato le nostre capacità logiche, poiché abbiamo imparato a utilizzare anche strumenti poco usali nella vita quotidiana.

Figura 4.17: Osservazioni relative all'attività svolta

4.3.5 Conclusioni

Attraverso gli elaborati prodotti e le risposte fornite, gli studenti hanno dimostrato una buona assimilazione e padronanza dei concetti che sono stati loro spiegati, sebbene non abbiano avuto molto tempo per elaborarli. Nell'ultima lezione, in particolare, è emerso che molti ragazzi si ricordassero la proprietà dei logaritmi su cui l'intera attività si è basata, ovvero $\log(a) + \log(b) = \log(a \cdot b)$, nonostante la maggior parte di loro non avesse né preso appunti, né studiato tale proprietà. Questo dimostra che, insistendo su alcune nozioni, e facendo sì che gli studenti le tocchino con mano, anche l'apprendimento e la memorizzazione risultano più immediati.

Per quanto riguarda la costruzione degli strumenti, gli studenti hanno dimostrato molto impegno, mettendosi in gioco per piegare, costruire e misurare, sebbene frequentassero la quarta superiore e non svolgessero attività di questo tipo da molti anni. Molti di loro, soprattutto a proposito del regolo con scala logaritmica, erano preoccupati del fatto che il proprio strumento non fosse preciso, ma sono poi riusciti ad ottenere un risultato abbastanza soddisfacente, anche grazie all'aiuto reciproco.

La professoressa di matematica del liceo "Maria Ausiliatrice", che è rimasta in classe per l'intera durata dell'attività, si è dimostrata in generale soddisfatta nei confronti del tipo di lavoro svolto e della risposta degli studenti, sottolineando la buona collaborazione, la curiosità e l'interesse nati in molti dei ragazzi.

Da parte dell'insegnante, era stato chiesto che l'attività venisse svolta in entrambe le classi quarte, pur mettendo in conto che in una delle due sezioni si sarebbero potute verificare alcune difficoltà a livello disciplinare. In effetti, in una classe, è risultato più complesso tenere l'attenzione e l'ordine, in considerazione anche dell'alta percentuale di studenti con disturbi specifici dell'apprendimento (più della metà della classe). Occorre tuttavia rilevare che, quando i ragazzi sono stati invitati a costruire manualmente gli strumenti o ad utilizzare i regoli reali, si sono dimostrati particolarmente partecipi e attenti, a riprova del fatto che la manipolazione di oggetti concreti favorisca la concentrazione. In altre fasi, tuttavia, si è registrata una maggiore fatica nel portare a termine quanto programmato, principalmente quando era loro richiesto di ascoltare qualche breve spiegazione, ed è emerso che, in alcuni contesti, non sia sufficiente proporre un'attività laboratoriale per interessare gli studenti, ma anzi, che essa possa favorire occasioni di distrazione. Nonostante questo, mettendo in campo alcuni accorgimenti che hanno permesso di arginare l'esuberanza dei ragazzi, quali un'oculata suddivisione in gruppi che favorisse il lavoro di tutti, e grazie alla presenza autorevole della professoressa, si sono ottenuti risultati abbastanza buoni.

Secondo l'opinione dell'insegnante, le istruzioni e i contenuti proposti sono risultati adeguati al livello delle due classi, sebbene all'interno di esse ci fossero capacità logico-matematiche molto diverse a seconda degli studenti. Inoltre, a suo avviso, l'attività ha portato gli studenti ad essere più consapevoli nei confronti dell'ordine e del valore dei numeri, soprattutto per quanto riguarda l'insieme dei relativi, ed ha aiutato a comprendere il concetto di funzione e le proprietà logaritmiche.

Se si dovesse riproporre in futuro questa attività, il consiglio della professoressa è di estenderla ad una durata di cinque ore anziché quattro, per consolidare meglio alcuni concetti, e in particolare quelli trattati nella seconda e terza lezione, riguardo il grafico della funzione e la costruzione del regolo tramite la scala logaritmica. Si potrebbe citare inoltre qualche esempio di applicazione dei logaritmi alla vita concreta, per dimostrare che la matematica non è disgiunta dalla realtà. Alcuni esempi potrebbero riguardare la musica, dove l'aumento della frequenza dell'onda sonora segue un andamento logaritmico crescente, oppure le dinamiche classiche di evoluzione delle popolazioni.

A proposito della seconda lezione, come è già stato proposto nelle sezioni precedenti, ci si potrebbe soffermare maggiormente sulla notazione $f(x)$ e sulla lettura del grafico, mentre per quello che riguarda la costruzione della scala logaritmica e del regolo calcolatore, sarebbe forse utile sottolineare con più forza il principio del funzionamento dello strumento. In particolare, si potrebbe chiedere ai ragazzi di scrivere in modo esplicito la proprietà utilizzata per svolgere le moltiplicazioni con il regolo. Ad esempio, eseguendo il calcolo: $4 \cdot 0.5 = 2$, gli studenti dovrebbero individuare la proprietà dei logaritmi: $\log(4) + \log(0.5) = \log(2)$, esplicitando ancora una volta in che modo lo strumento operi.

Capitolo 5

Considerazioni finali

Il lavoro che è stato presentato nei capitoli precedenti ha certamente richiesto agli studenti di essere attivi e partecipi nei confronti di quanto ascoltavano, mettendosi in gioco in prima persona. Con le lezioni frontali, invece, non sempre si riesce a favorire questo atteggiamento, in quanto gli studenti tendono a sottovalutare l'importanza di capire i concetti durante la spiegazione, preferendo riguardarli in un secondo tempo. In questo modo, però, si rischia che ad un certo punto della lezione alcuni ragazzi rinuncino a seguire, perché non hanno appreso un concetto precedente. Partecipando attivamente alla lezione, inoltre, nella classe si crea un ambiente stimolante, dove gli studenti sono meno tentati dalle distrazioni, con il vantaggio che il lavoro a casa risulti di gran lunga ridotto e semplificato. D'altro canto, anche l'impegno preliminare dell'insegnante risulta premiato dalla soddisfazione nel vedere, nell'immediato, i frutti del suo lavoro.

Occorre mettere in conto, tuttavia, che gli studenti della scuola secondaria di secondo grado potrebbero fraintendere le attività laboratoriali, scambiandole per un momento di svago, approfittando anche delle dinamiche di gruppo. Tale problema emergerà maggiormente nelle classi dove sono presenti problemi disciplinari, ma è possibile superarlo grazie all'autorevolezza dell'insegnante e alla sua capacità di mettere in campo attività ben preparate e tecniche che consentano un'adeguata divisione nei gruppi, in modo che ciascuno studente sia portato a lavorare bene. Al termine di questa esperienza, inoltre, sembrerebbe di poter dire che proprio nelle classi più esuberanti bisognerebbe osare maggiormente con proposte innovative, senza arrendersi di fronte alle oggettive difficoltà, perché i risultati nel lungo termine potrebbero essere molto apprezzabili.

Durante lo svolgimento di questa attività, inoltre, si è osservato come gli studenti non siano abituati al formalismo matematico, e che quindi facciano molta fatica a verbalizzare un concetto, seppur lo abbiano compreso. Anche il processo inverso non risulta scontato, in quanto, come accennato nelle sezioni precedenti, i ragazzi tendono sempre a ricercare una visualizzazione grafica o una spiegazione verbale in parole semplici, anziché sforzarsi di leggere delle istruzioni scritte in modo formale. Certamente, è da tenere in conto che tale formalismo matematico è più importante in una scuola di indirizzo scientifico, mentre per altri corsi di studio non risulta essere prioritario.

Attraverso il confronto con le professoresse del liceo è emerso che anche gli studenti che presentano qualche Disturbo Specifico dell'Apprendimento (DSA) siano riusciti a rimanere al passo e a lavorare bene, sia in modo autonomo che nei gruppi. Inoltre, anche i ragazzi che solitamente non ottengono risultati eccellenti nelle materie scientifiche, hanno avuto modo di sorprendere loro stessi e i compagni, presentando soluzioni adeguate e spiegazioni chiare in risposta alle domande che venivano loro poste. Questo ha permesso loro di riacquistare un po' di fiducia nella possibilità di comprendere la matematica e li ha portati ad essere soddisfatti dei risultati ottenuti.

Il laboratorio di matematica, se proposto con continuità durante il ciclo scolastico secondario, potrebbe efficacemente tenere ancorata questa materia alla realtà, offrendo agli studenti numerosi riferimenti legati agli oggetti e alla vita concreta. In particolare, una professoressa del liceo Maria Ausiliatrice ritiene che bisognerebbe sviluppare alcune attività pratiche relative agli argomenti più critici affrontati nel corso del liceo, quali la scomposizione fattoriale dei polinomi e il passaggio dal calcolo numerico a quello letterale. La scomposizione dei polinomi ritorna più volte nel corso degli anni liceali, dai prodotti notevoli allo studio di funzioni, e sembrerebbe che gli allievi fatichino ad apprenderla una volta per tutte. Tale argomento, in realtà, rimanda alla scomposizione numerica, riguardo alla quale si potrebbe introdurre qualche attività laboratoriale già nei percorsi scolastici precedenti. Per quanto concerne il calcolo letterale, invece, potrebbe essere importante motivare maggiormente la sua introduzione e la sua utilità, facendo sperimentare agli studenti stessi l'impossibilità di scrivere una formula universale senza l'ausilio delle lettere.

Ci si potrebbe inoltre chiedere se il laboratorio di matematica aiuti la memorizzazione dei concetti a lungo termine, specialmente per gli studenti che fanno più fatica a collegare un nuovo argomento ad un altro visto in precedenza. Certamente possiamo dire che nell'ambito scolastico è solitamente privilegiata la memoria uditiva, mentre le attività pratiche tendono a coinvolgere anche gli altri sensi, in particolare il tatto e la vista, favorendo gli studenti che hanno più predisposizione verso questi tipi di apprendimento. Per avere un quadro più preciso, però, bisognerebbe procedere con un'osservazione più duratura nel tempo, che confronti dinamiche laboratoriali e spiegazioni frontali.

Personalmente, inoltre, posso affermare che l'esperienza descritta in queste pagine sia risultata estremamente positiva, in quanto ho potuto allargare gli orizzonti e far tesoro di tante accortezze utili per il futuro, sia in relazione alle modalità d'insegnamento che per quello che riguarda il rapporto con gli studenti. Sicuramente è stato molto vantaggioso presentare le attività in un ambiente scolastico già conosciuto e a dei ragazzi con i quali avevo già avuto modo di lavorare con il tirocinio, seppur il mio ruolo sia cambiato tra le due fasi.

Non è stato un mutamento troppo radicale, in quanto avevo già avuto modo di spiegare alle classi qualche esercizio dalla posizione della cattedra, ma esso ha richiesto da parte mia un cambio di prospettiva, concentrandomi sull'obiettivo dell'essere chiara e di tenere viva l'attenzione. Un aspetto che ho trovato molto importante, sia durante la fase di tirocinio che durante le dinamiche laboratoriali, è stato il passare tra i banchi. Questo mi ha consentito, da un lato, di non risultare distaccata dagli studenti ma di costruire una relazione con loro, e dall'altro mi ha permesso di visionare il loro lavoro e le modalità di operare, intervenendo qualora ci fossero dubbi.

Da quanto emerso dal lavoro svolto, si può dunque affermare che l'uso degli strumenti concreti, e nello specifico gli strumenti di cacolo, favorisca l'apprendimento degli allievi, collegando la matematica alla realtà, insegnando procedure di astrazione, stimolando l'interesse e l'attenzione, agevolando la collaborazione e l'integrazione di chi solitamente ha più difficoltà con la materia.

In conclusione, credo che l'esperienza sia stata proficua e arricchente per tutti coloro che, a diverso titolo, ne hanno preso parte. Questo è testimoniato anche dalle insegnanti del liceo, le quali hanno osservato i propri allievi interfacciarsi con una diversa modalità di apprendimento e constatato il raggiungimento di risultati buoni e talvolta positivamente sorprendenti. Ritengo dunque auspicabile che attività di questo tipo siano proposte con maggiore frequenza, in quanto garantiscono un ambiente stimolante, sia per chi le progetta sia per chi ne usufruisce, e permettono di diffondere sempre di più le pratiche relative al laboratorio di matematica.

Appendice A

Materiale utilizzato per le attività didattiche

In questa appendice sono riportati i materiali utilizzati, in forma cartacea, e le schede con gli esercizi proposti al termine di ciascuna lezione per le due attività in esame. I grafici sono stati disegnati attraverso il software "Geogebra".

A.1 Attività 1: "Le proporzioni e il compasso proporzionale"

A.1.1 Materiale utilizzato

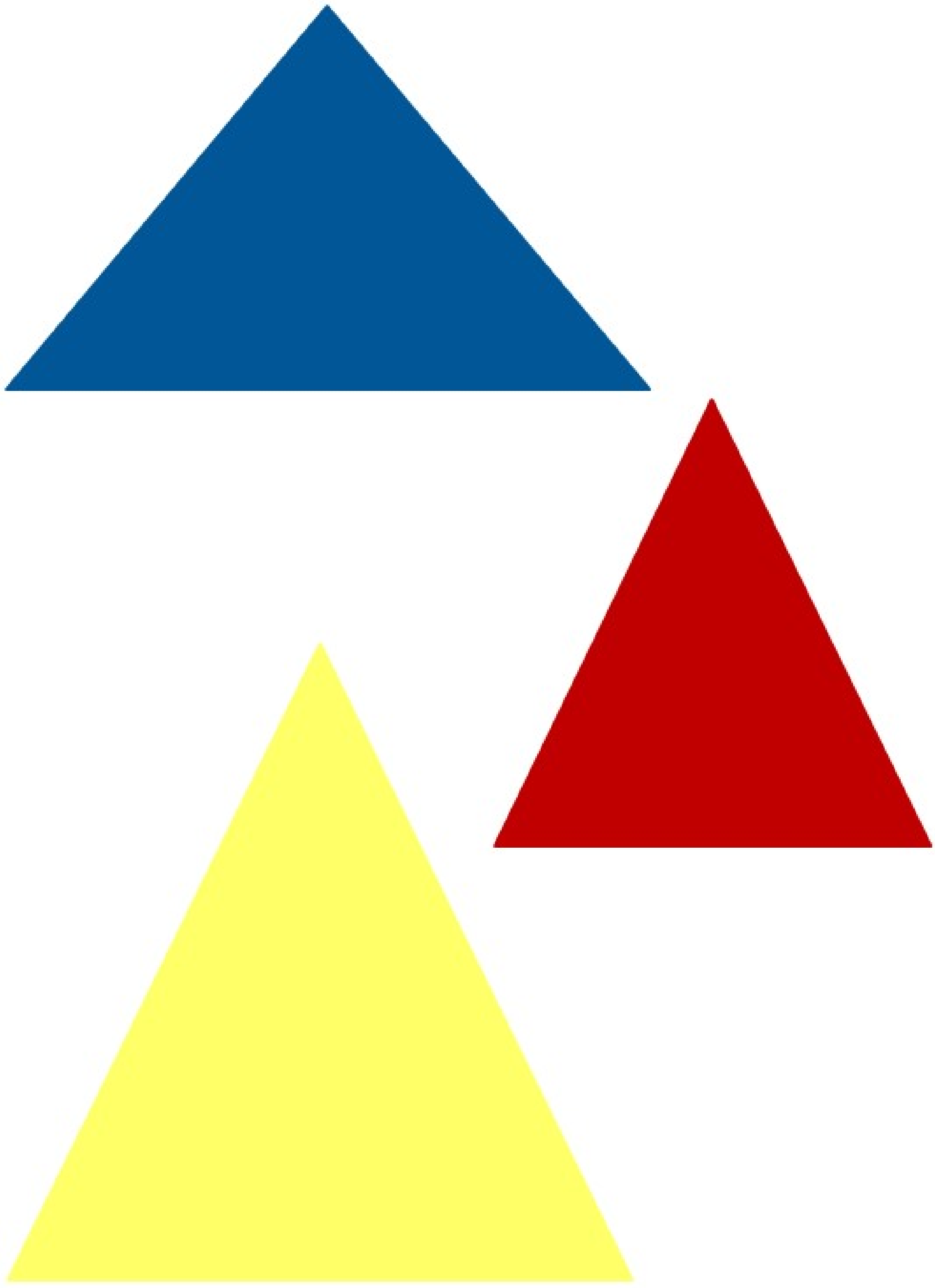


Figura A.1: Triangoli simili e non

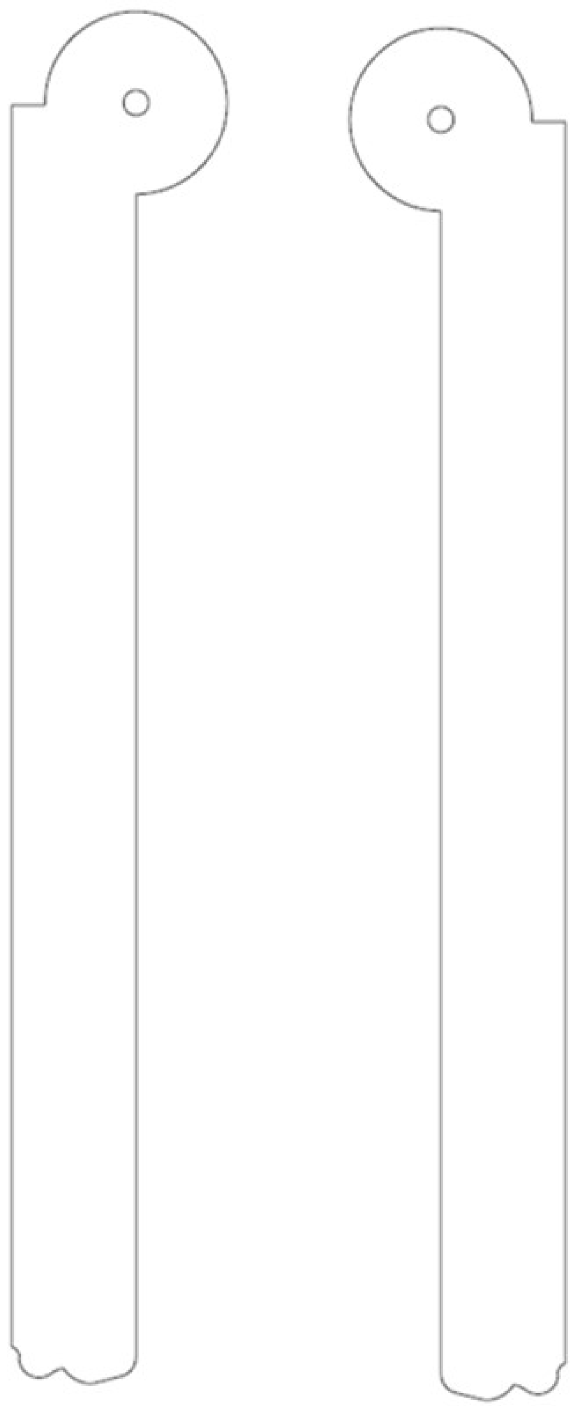


Figura A.2: Tavole per la costruzione del compasso

A.1.2 Esercizi proposti

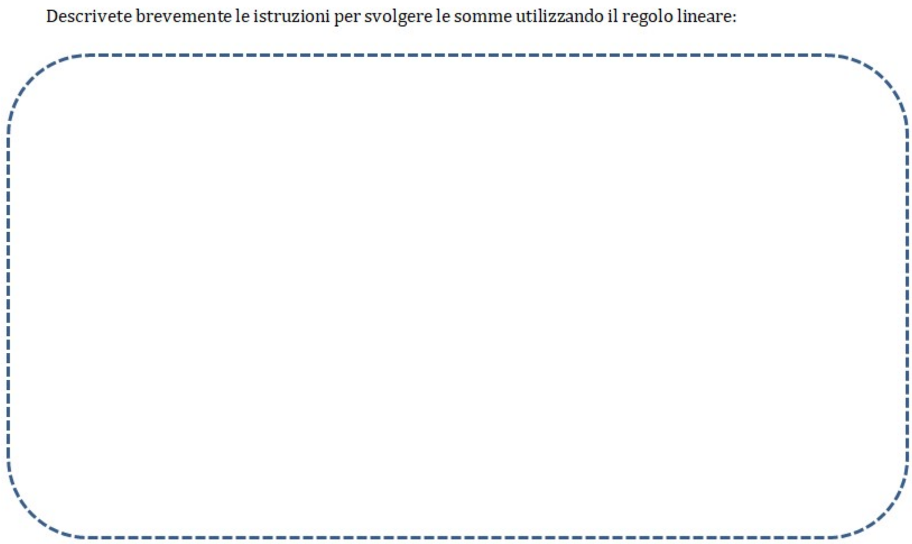


Figura A.3: Esercizio proposto come sintesi della prima ora di lezione

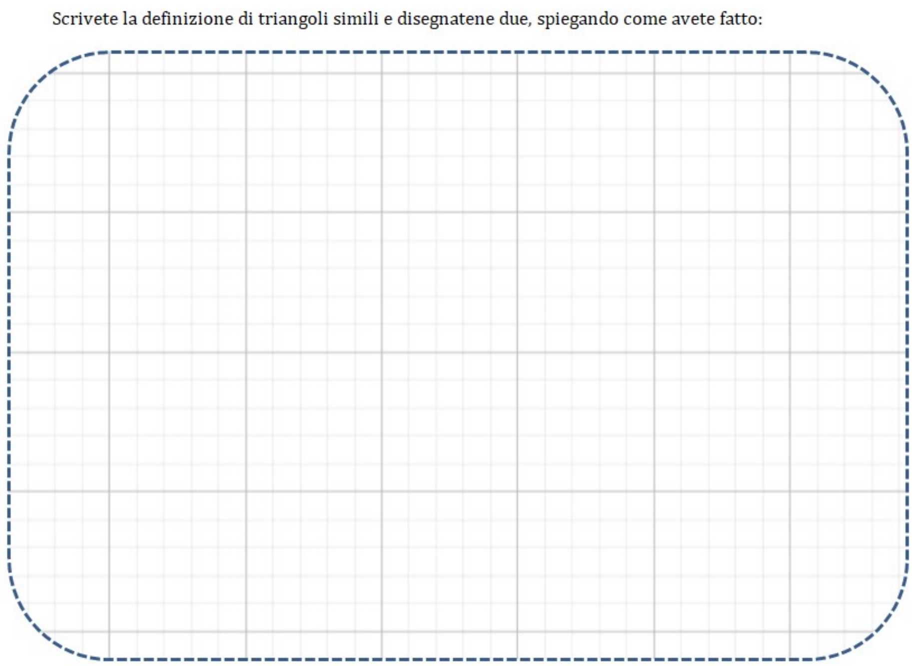


Figura A.4: Esercizio proposto come sintesi della seconda ora di lezione

Sintesi dell'attività

Gruppo composto da:

A che cosa serve il regolo lineare? Cosa abbiamo capito usandolo?

Scegliete un contesto in cui serve usare le proporzioni. Fate un esempio concreto nel contesto che avete scelto e scrivete la relativa proporzione.

Osservazioni varie sull'attività svolta in queste 3 ore:

Figura A.5: Scheda sintesi dell'intera attività

A.2 Attività 2: "I logaritmi e il regolo calcolatore"

A.2.1 Materiale utilizzato

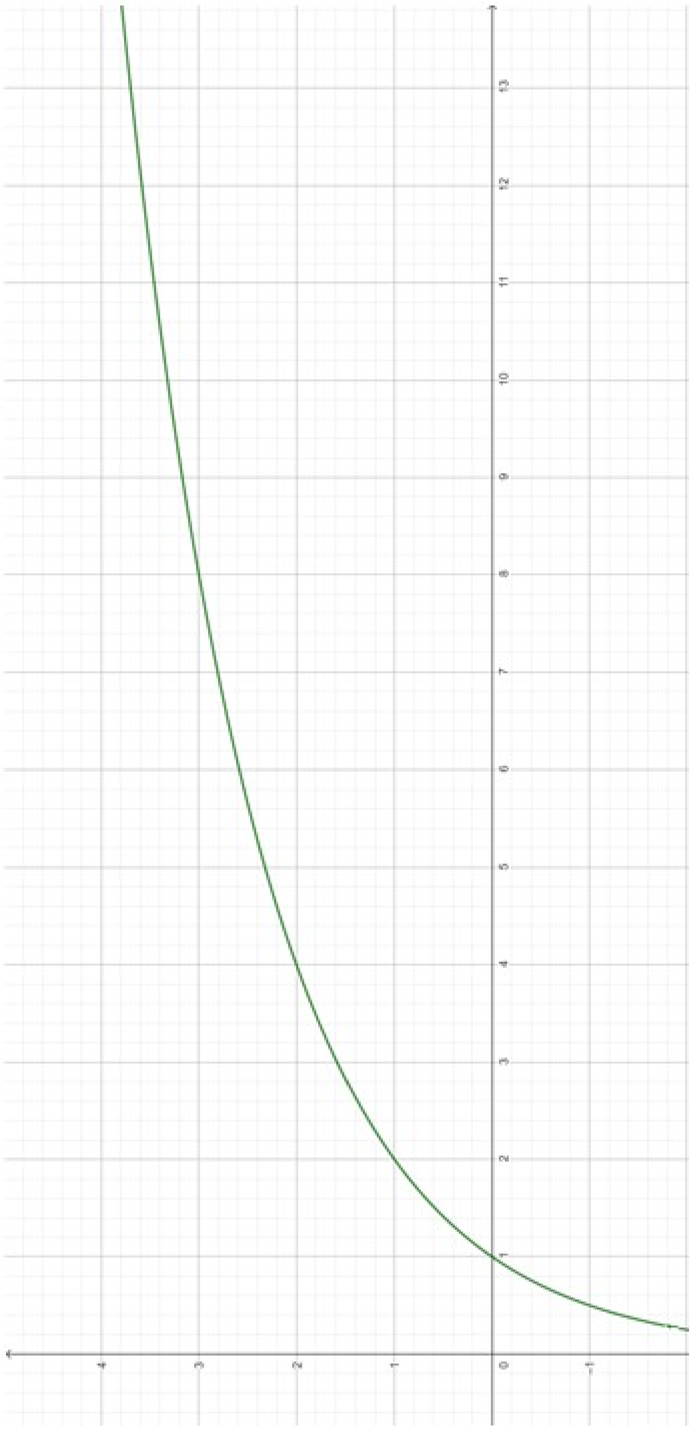


Figura A.6: Grafico del $\log_2(x)$

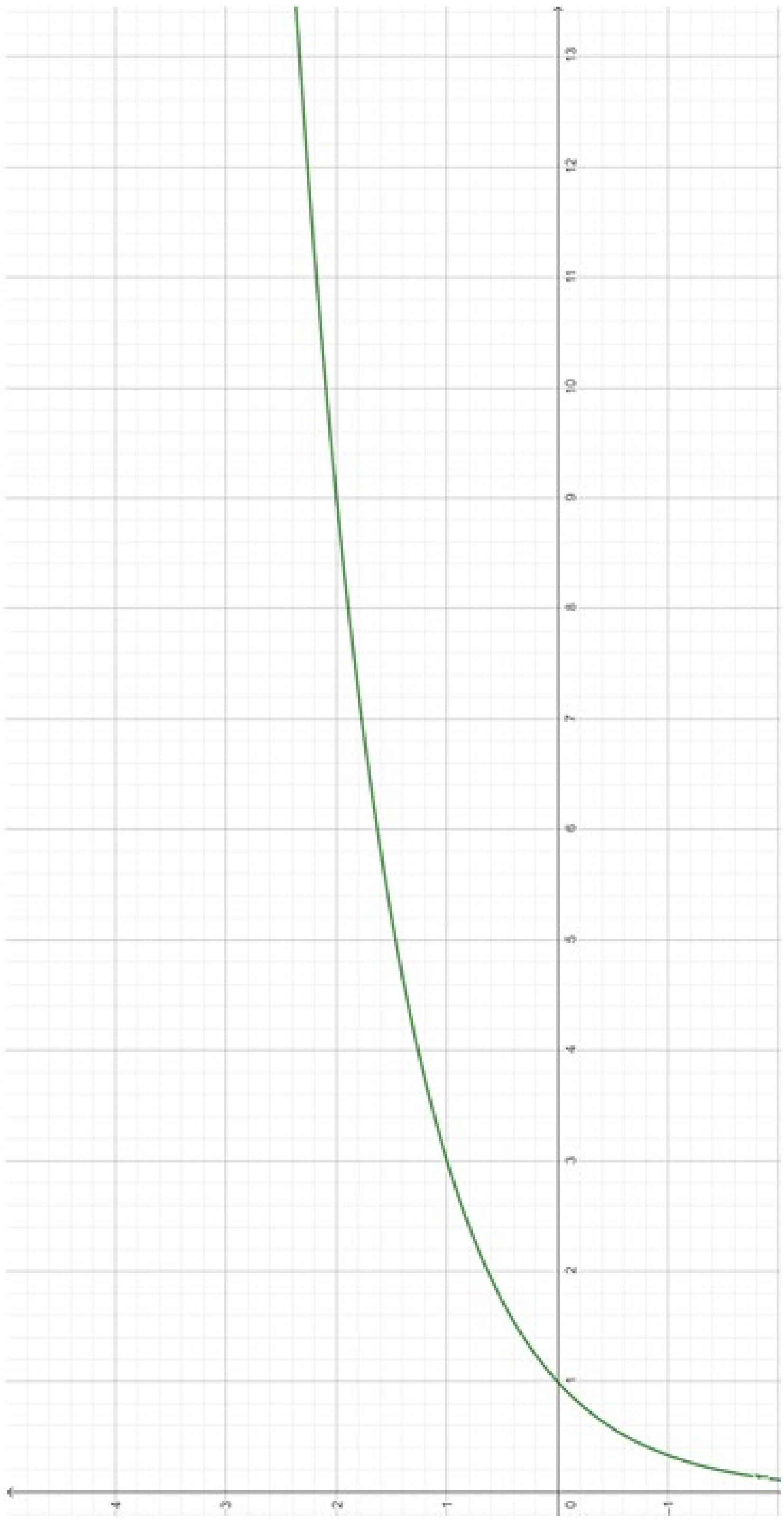


Figura A.7: Grafico del $\log_3(x)$

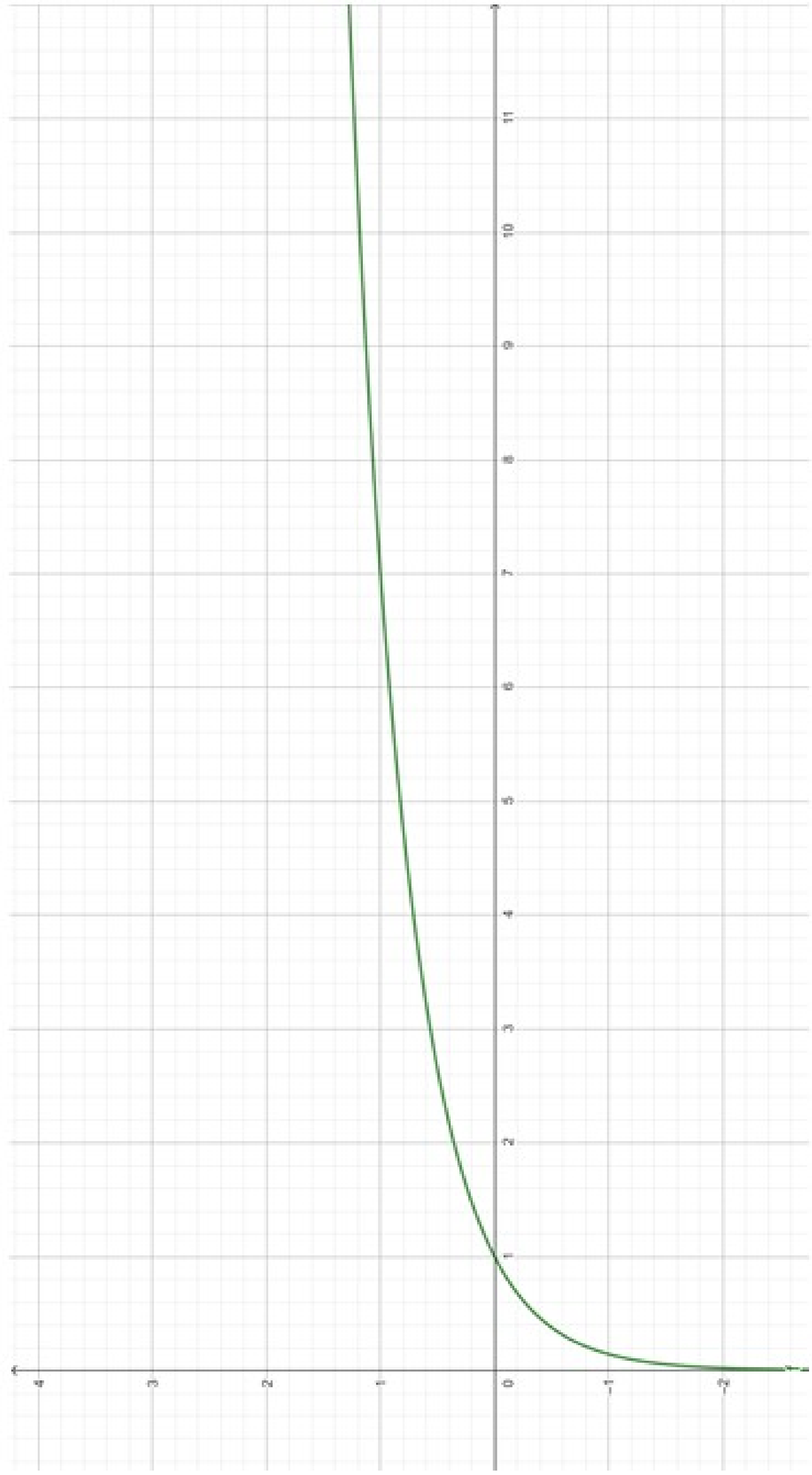


Figura A.8: Grafico del $\log_7(x)$

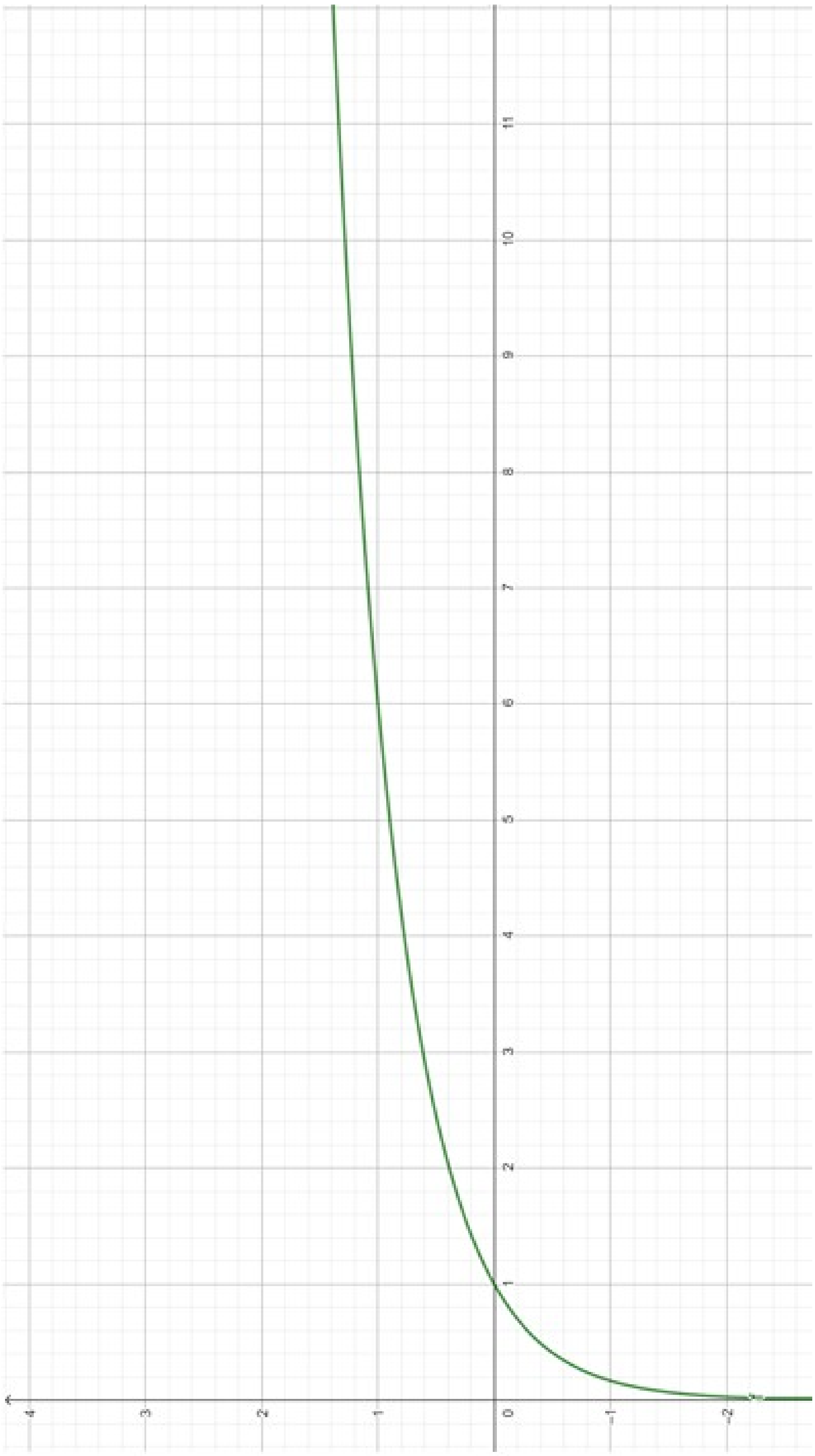


Figura A.9: Grafico del $\log_6(x)$

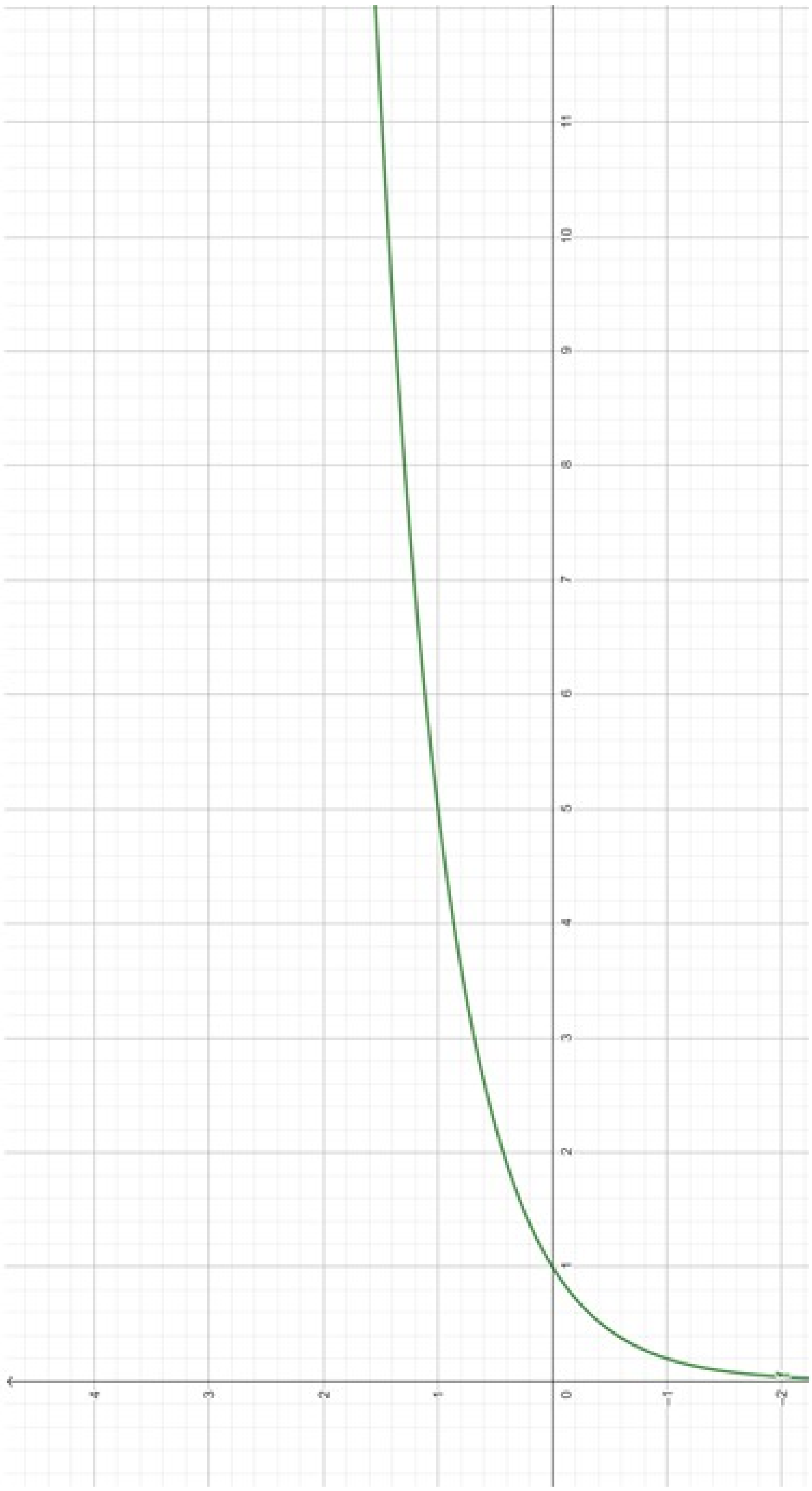


Figura A.10: Grafico del $\log_5(x)$

Figura A.11: Grafico del $\log_4(x)$

Figura A.12: Grafico del $\log_2(x)$ e $\log_4(x)$ sovrapposti

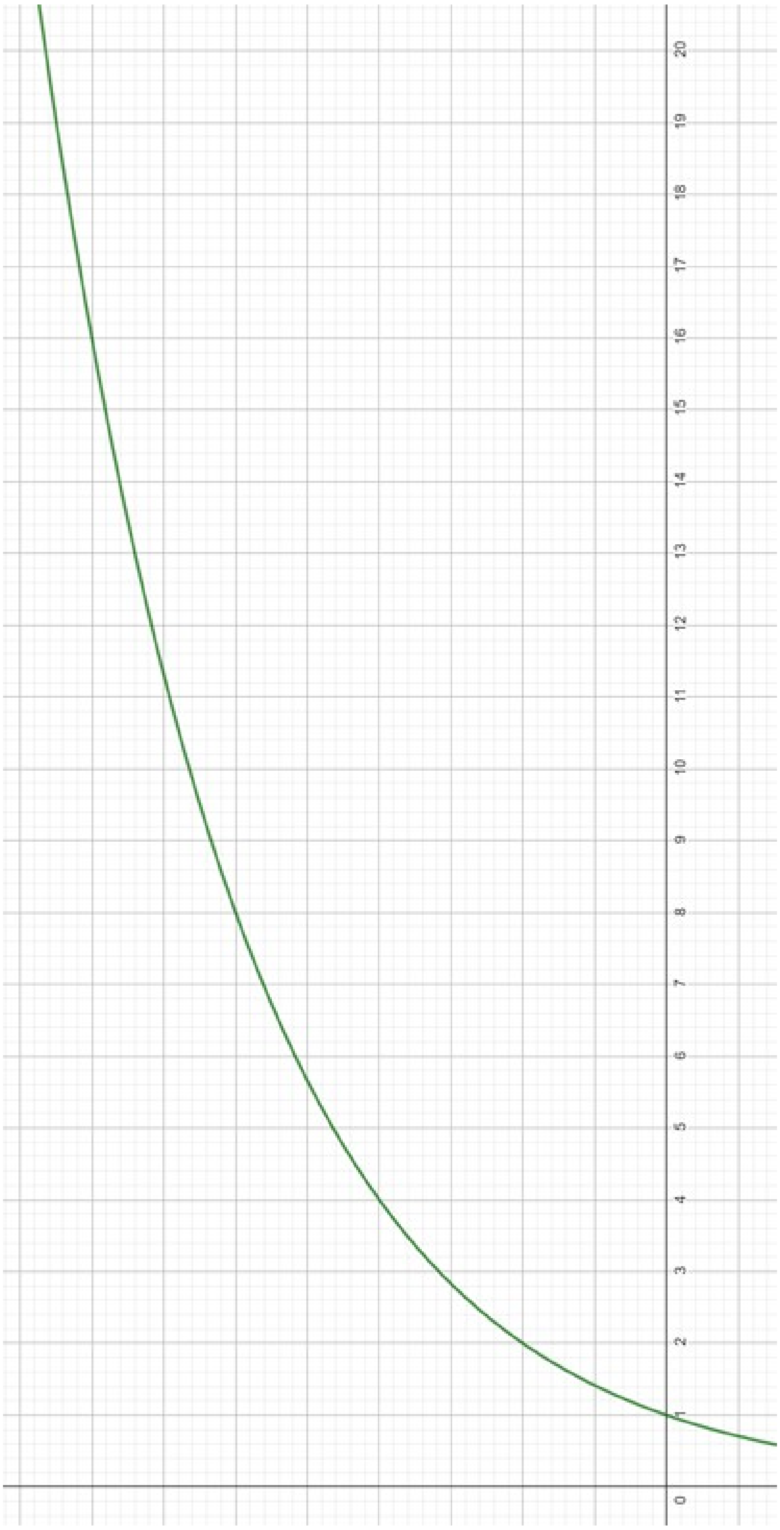


Figura A.13: Grafico del $\log_{\sqrt{2}}(x)$

A.2.2 Esercizi proposti

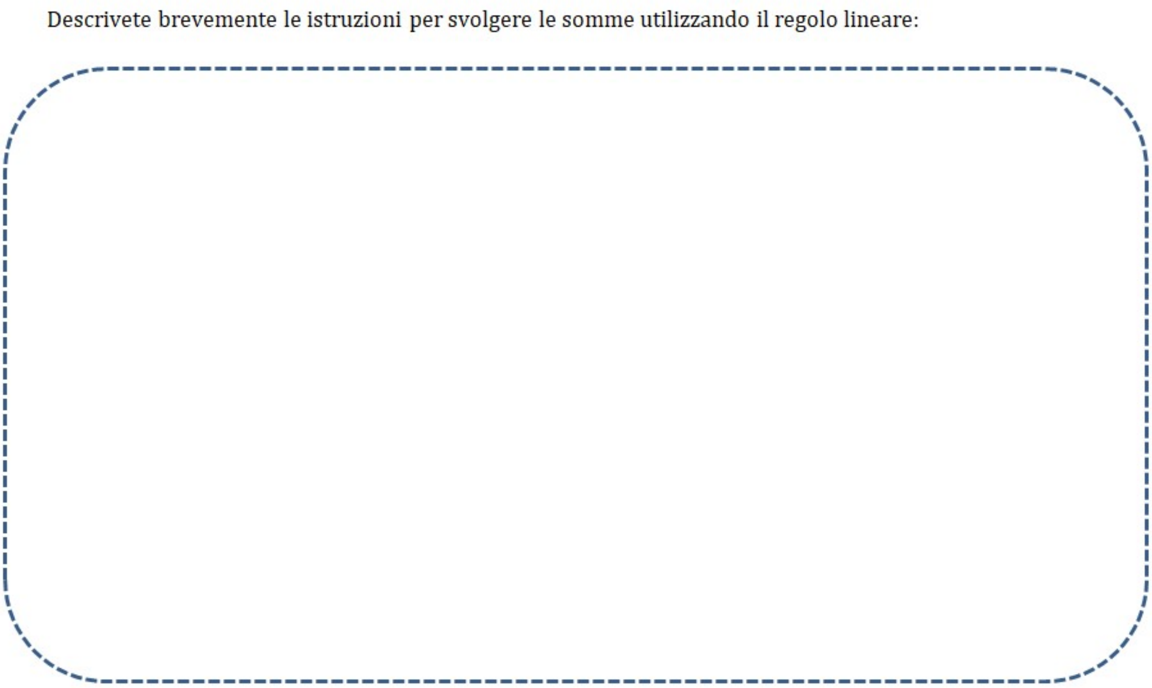

Descrivete brevemente le istruzioni per svolgere le somme utilizzando il regolo lineare:

Figura A.14: Esercizio proposto come sintesi della prima ora di lezione

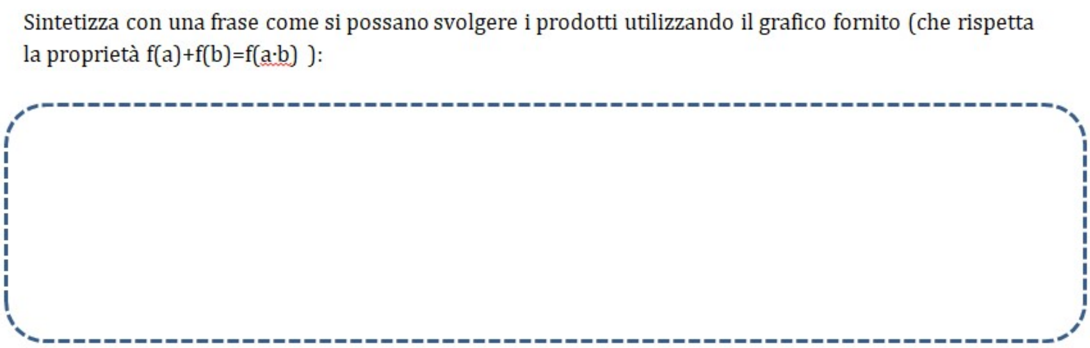

Sintetizza con una frase come si possano svolgere i prodotti utilizzando il grafico fornito (che rispetta la proprietà f(a)+f(b)=f(a·b)):

Figura A.15: Esercizio proposto come sintesi della seconda ora di lezione

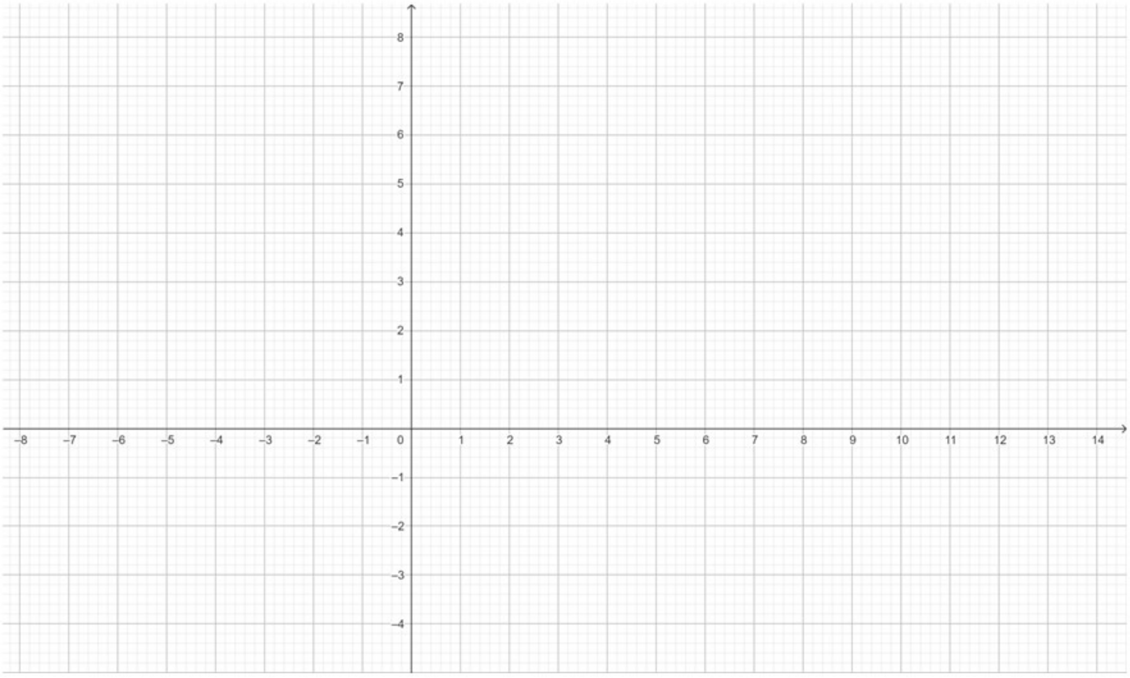
Descrivete brevemente le istruzioni per svolgere le moltiplicazioni utilizzando il regolo logaritmico:

Figura A.16: Esercizio proposto come sintesi della terza ora di lezione

Sintesi dell'attività

Gruppo composto da:

Disegnate un grafico logaritmico:



Quali formule vi ricordate tra quelle viste?

A che cosa serve il regolo?

____

____

____

____

____

Osservazioni varie sull'attività svolta in queste 4 ore:

Figura A.17: Scheda sintesi dell'intera attività

Bibliografia

[1] G. Anichini et al. *Matematica 2003*. Matteoni Stampatore, 2004.

[2] Michèle Artigue. “Le sfide dell’insegnamento della matematica nell’educazione di base”. In: *La Matematica nella Società e nella Cultura, Rivista dell’Unione Matematica Italiana* 4 (2011), pp. 211–259.

[3] M.G. Bartolini Bussi e Maria Alessandra Mariotti. “Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective”. In: *Handbook of international research in mathematics education* 746 (2008).

[4] M.G. Bartolini Bussi, D. Taimina e M. Isoda. “Concrete models and dynamic instruments as early technology tools in classrooms at the dawn of ICMI: from Felix Klein to present applications in mathematics classrooms in different parts of the world”. In: *ZDM* 42 (2010).

[5] Emma Castelnuovo. “È possibile un’educazione al “saper vedere” in matematica”. In: *Bollettino della Unione Matematica Italiana* 22 (1967), pp. 539–549.

[6] I. A. Comenius. *Didactica Magna*. Akal Ediciones, 1657.

[7] *Emma Castelnuovo, Insegnare in piedi (Franco Lorenzoni)*. URL: https://www.cencicasalab.it/il-blog/emma-castelnuovo-insegnare-in-piedi/.

[8] *History of ICMI*. URL: https://www.icmihistory.unito.it/portrait/castelnuovo.

[9] *Lombardia Beni Culturali, Scienza - Tecnologia*. URL: https://www.lombardiabeniculturali.it/scienza-tecnologia/schede/ST120-00185/.

[10] John Monaghan, Luc Trouche e Jonathan M Borwein. *Tools and mathematics*. Vol. 110. Springer, 2016.

[11] *Museo Galileo, Istituto e Museo di Storia della Scienza*. URL: https://www.museogalileo.it/it/museo/esplora/incontra-galileo/31-opere/452-le-operazioni-del-compasso-geometrico-e-militare-1606.html.

[12] *StoriAmestre, Regolo Calcolatore*. URL: https://storiamestre.it/regolo-calcolatore-anni-trenta-cinquanta/.