

POLITECNICO DI TORINO

Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale



**Politecnico
di Torino**

Tesi di Laurea Magistrale

OTTIMIZZAZIONE DI ORBITE DI TRASFERIMENTO ATTRAVERSO ALGORITMI GENETICI E PARTICLE SWARM PER LA RIMOZIONE DI DETRITI SPAZIALI

Relatore:

Prof.

Lorenzo Casalino

Candidato:

Andrea Turigliatto

Mat. 303925

Aprile 2024

Alla nonna Camilla, la nonna Liliana e il nonno Gigi

Ringraziamenti

Vorrei ringraziare il professor Casalino per la disponibilità, pazienza e comprensione dimostrata nel corso di questi mesi e per gli spunti di riflessione che hanno reso possibile il completamento di questo percorso di tesi.

Ringrazio tutta la mia famiglia: mia madre, mio padre, mia sorella, i miei nonni, zii e cugine che mi hanno accompagnato in tutti questi anni fino ad arrivare a questo giorno, sostenendomi sotto ogni punto di vista e spingendomi a non mollare. Questo traguardo non è soltanto mio, ma anche vostro.

Un ringraziamento speciale ai miei amici, i quali hanno avuto un ruolo fondamentale nel rendere leggero il tempo dentro e fuori l'università, perché nonostante questa laurea rappresenti un passaggio fondamentale della mia vita, non sarebbe stata la stessa cosa se ad essa non fossero stati legati tutti i ricordi dei momenti passati insieme: le partite a ping-pong, le serate al computer, tutti i viaggi e le avventure di questi anni avranno sempre un posto speciale nel mio cuore.

Si apre ora un nuovo capitolo della mia vita, ma so che potrò sempre contare su tutte le persone che mi vogliono bene e a cui io voglio altrettanto bene.

Indice

1	Introduzione	1
1.1	Riduzione dei detriti	2
1.2	Obiettivi principali	5
2	Richiami di meccanica del volo spaziale	6
2.1	Problema dei due corpi ristretto	9
2.1.1	Energia di un'orbita	11
2.2	Perturbazione J_2	14
3	Manovre con propulsione elettrica	18
3.1	Equazione di Tsiolkovsky	19
3.2	Approssimazione di Edelbaum	23
4	Teoria del controllo ottimale	27
4.1	Trasferta biimpulsiva	28
4.2	Coefficienti di ripartizione	30
4.3	Calcolo di s_x , s_y e s_z	33
4.4	Definizione di t_*	34
4.4.1	Esempio numerico	36
4.4.2	Trasferta monoimpulsiva - impulso finale	37
4.4.3	Trasferta monoimpulsiva - impulso iniziale	39
4.4.4	Trasferta biimpulsiva	41

5	Algoritmi	50
5.1	Algoritmi genetici	50
5.2	Particle swarm optimization	53
6	Propulsione continua	56
7	Risultati	59
7.0.1	Requisiti e dati iniziali	62
7.1	Caso 1	64
7.1.1	Descrizione	64
7.1.2	Analisi dei risultati	65
7.1.3	Confronto GAO/PSO	69
7.2	Caso 2	73
7.2.1	Descrizione	73
7.2.2	GAO - primo metodo	74
7.2.3	PSO e GAO - secondo metodo	75
7.2.4	Analisi dei risultati	77
7.2.5	Confronto GAO/PSO	82
7.3	Caso 3	86
7.3.1	Descrizione	86
7.3.2	Modifiche ai parametri iniziali	88
7.3.3	Analisi dei risultati	92
7.3.4	Calcolo accelerazione minima	100
7.3.5	Algoritmo di calcolo dell'accelerazione minima	101
7.4	Caso 4	107
7.4.1	Descrizione	107
7.4.2	Modifiche ai parametri iniziali	108
7.4.3	Analisi dei risultati	110
7.4.4	Confronto GAO - PSO	112

8 Conclusioni	116
8.1 Risultati ottenuti	116
8.2 Possibili sviluppi futuri	117

Elenco delle figure

1.1	Rappresentazione dei detriti orbitanti attorno alla Terra	2
1.2	Distribuzione dei detriti spaziali in base alla tipologia	3
1.3	Previsioni del numero di detriti futuro	4
2.1	Sistema di riferimento e parametri orbitali	8
2.2	Geoide	14
2.3	Regressioni della linea dei nodi a causa del J_2	17
3.1	Conservazione della quantità di moto	19
3.2	Equazione del razzo	22
4.1	x, y e z all'aumentare della durata della trasferta	37
4.2	Impulso al tempo finale	38
4.3	Confronto tra impulso finale ed iniziale	40
4.4	Andamento di ΔV_A e ΔV_B	42
4.5	Andamento di $\Delta x + x$	43
4.6	Andamento di $x s_x$ e $x - x s_x + \Delta x$	44
4.7	Andamento di $y s_y$ e $y - y s_y$	45
4.8	Andamento di $z s_z$ e $z - z s_z$	46
4.9	Costo minimo in base al tempo di missione	47
5.1	Schema di funzionamento di un genetic algorithm	52
5.2	Schema di funzionamento della particle swarm optimization	55

7.1	Estratto della lista di detriti	59
7.2	Visualizzazione delle orbite dei 123 detriti	60
7.3	Distribuzione dei parametri orbitali tra i detriti	60
7.4	Tempo di ciascuna trasferta	65
7.5	Costo propulsivo di ciascuna trasferta	66
7.6	ΔV e tempi totali di missione	67
7.7	Evoluzione della massa dello spacecraft	68
7.8	Iterazioni GAO	69
7.9	Iterazioni PSO	70
7.10	Tempi di convergenza	71
7.11	Tempi di trasferta	77
7.12	Tempi di attesa	78
7.13	Costo propulsivo	79
7.14	ΔV e tempi totali di missione	80
7.15	Massa dello spacecraft	81
7.16	Iterazioni GAO - primo metodo	82
7.17	Iterazioni GAO - secondo metodo	83
7.18	Iterazioni PSO	84
7.19	Tempi di convergenza	85
7.20	Confronto tempi di trasferta per diversi valori di a	93
7.21	Caso $a = 0.001 \text{ m/s}^2$	94
7.22	Caso $a = 0.0005 \text{ m/s}^2$	95
7.23	Confronto costi propulsivi per diversi valori di a	96
7.24	ΔV e tempi totali di missione per diversi valori di a	98
7.25	Massa dello spacecraft per diversi valori di a	99
7.26	Costo della trasferta ad accelerazione minima	102
7.27	Tempi di spinta	103
7.28	ΔV e tempi totali di missione con accelerazione minima	104

7.29 Massa dello spacecraft per a_{min} 105

7.30 Prime 4 sequenze 111

7.31 Ultime 6 sequenze 111

7.32 Distribuzione dei ΔV per ciascuna trasferta 112

7.33 *Genetic algorithm* dopo un'ora di ottimizzazione 113

7.34 *Particle swarm* dopo un'ora di ottimizzazione 114

Elenco delle tabelle

4.1	Parametri orbitali al tempo t_0	36
7.1	ΔV e tempi totali di missione per diversi valori di a	92
7.2	Parametri per diversi valori di a	106
7.3	Tempi e costi propulsivi	110

Capitolo 1

Introduzione

Al giorno d'oggi l'avanzamento in campo tecnologico, sociale, politico ed economico della corsa allo spazio fa sì che quasi ogni giorno vengano lanciati in orbita nuovi satelliti, sonde o razzi. L'aumento vertiginoso del traffico spaziale ha portato ad includere l'impatto con detriti spaziali uno dei principali pericoli non solo per le fasi di lancio, ma anche per le fasi di orbita di tutto ciò che transita attraverso l'orbita bassa terrestre. Con l'espressione "detriti spaziali" si indicano tutti i manufatti dell'uomo che una volta svolto il rispettivo compito vengono abbandonati e lasciati ad orbitare intorno alla Terra. Essi possono ad esempio essere i primi stadi dei razzi che vengono espulsi una volta terminato il carburante al loro interno, ma anche vecchi satelliti o pezzi di essi. Inoltre non tutti i detriti spaziali sono di dimensioni dell'ordine dei metri: infatti nella definizione ricadono anche particelle dell'ordine dei centimetri o addirittura millimetri, come ad esempio pezzi di verniciatura o propellente.

La maggior parte dei detriti di dimensioni maggiori di 20 cm sono catalogati e tracciati dalle principali agenzie spaziali attraverso una tecnica radar la quale consente di misurare posizione e velocità dell'obiettivo; si stima che essi siano circa 9000, a cui si aggiungono decine di migliaia di detriti più piccoli e difficilmente tracciabili.

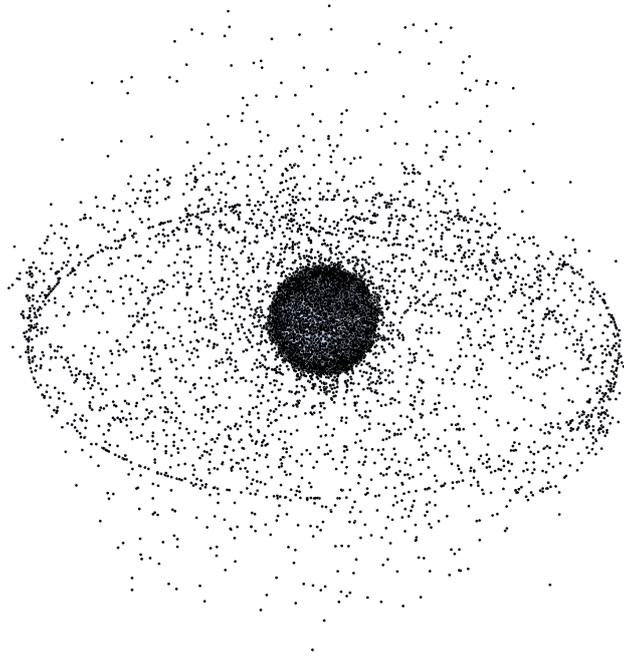


Figura 1.1: Rappresentazione dei detriti orbitanti attorno alla Terra

La minaccia di un impatto ha reso necessario il perfezionamento di sistemi di collision avoidance per la maggior parte dei satelliti e moduli spaziali di grandi dimensioni, come ad esempio la ISS. Un aumento dell'inquinamento orbitale potrebbe mettere in difficoltà la gestione dei satelliti attualmente funzionanti ed in orbita, accrescendo il numero di manovre necessarie durante la vita operativa di ciascuno spacecraft.

1.1 Riduzione dei detriti

I primi tentativi di riduzione del numero di detriti spaziali sono stati fatti a partire dagli anni '70, studiando un metodo di "non accrescimento" (o riduzione passiva) del numero di detriti attraverso precise direttive per quanto riguarda la gestione della vita operativa dei satelliti, specialmente nel momento del disposal, ovvero la fase in cui lo spacecraft ha esaurito i compiti da svolgere ed è prossimo all'abbandono.

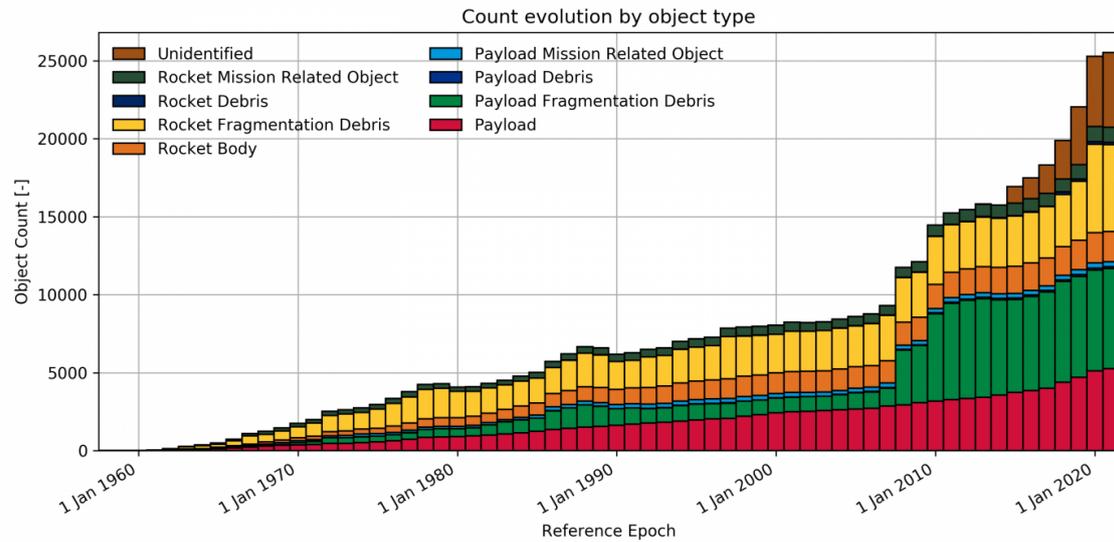


Figura 1.2: Distribuzione dei detriti spaziali in base alla tipologia

Le principali normative attive al giorno d'oggi impongono la completa distruzione o deorbita degli spacecraft in un lasso di tempo non superiore a 25 anni dal loro decommissioning, o l'utilizzo di apposite orbite chiamate "orbite cimitero" studiate in modo tale che non interferiscano con le principali traiettorie di lancio e orbita di nuovi satelliti e razzi.

Inoltre si è ridotta la probabilità di esplosioni attraverso la norma che riguarda la passivazione degli spacecraft: è infatti obbligatorio scaricare qualsiasi carburante rimasto attraverso una manovra che consumi le riserve o una espulsione diretta attraverso delle valvole.

Per quanto riguarda gli stadi esausti dei razzi è in ascesa la pratica di recuperare i serbatoi attraverso piccole manovre che permettano il rientro in atmosfera per poi effettuare un atterraggio controllato su piattaforme marine. Ciò ha due importanti benefici: il primo è la riduzione del numero di nuovi stadi che rimangono ad orbitare attorno alla Terra una volta esausti, mentre il secondo è la possibilità di riutilizzo dei suddetti stadi per lanci futuri, permettendo un risparmio sui costi da parte delle agenzie.

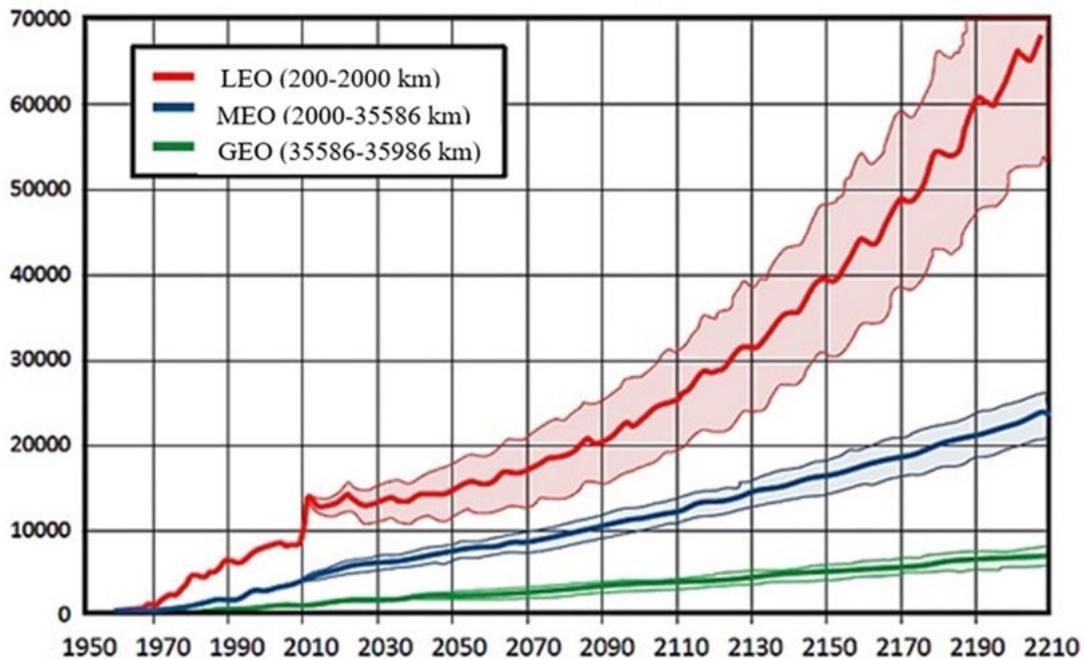


Figura 1.3: Previsioni del numero di detriti futuro

Questi sistemi per non aumentare l'inquinamento orbitale potrebbero però non bastare, dal momento che il numero di detriti già presenti nello spazio è piuttosto alto. Da ciò è nata l'idea di missioni specifiche per lo smaltimento di detriti già presenti in orbita, detta *active debris removal* (ADR).

Esistono molti tipi di ADR, ma per quanto riguarda il caso considerato in questa relazione si farà riferimento ai cosiddetti *Satellite-based ADR*, ovvero dei metodi di rimozione che sfruttano uno spacecraft chaser il quale attraverso l'applicazione di un kit propulsivo al target permette il suo deorbit, per poi ripartire e raggiungere un nuovo target. Ciò permette di rimuovere multipli detriti in una sola missione, andando a ridurre la spesa necessaria per una missione di rimozione.

1.2 Obiettivi principali

Il lavoro sviluppato in questa tesi si propone di ottenere delle stime di quantità di carburante e tempo necessari per una missione di rimozione di un determinato numero di detriti spaziali in una sequenza prestabilita andando a ottimizzare le orbite di trasferimento tra un detrito e il successivo, prima utilizzando degli spacecraft a propulsione chimica capaci di fornire impulsivamente i ΔV necessari per la trasferta da un detrito all'altro, per poi passare a schematizzare uno spacecraft a propulsione elettrica avente tempi di spinta non indifferenti a causa delle basse accelerazioni. A causa dell'alto numero di variabili e della complessità del problema, per ottenere i risultati verranno utilizzati due metodi di ottimizzazione quali genetic algorithm e particle swarms alorithm; i due verranno inoltre confrontati tra loro per stabilire se possa convenire l'uno rispetto all'altro e in quale caso. L'elaborato dimostrerà che le missioni di rimozioni dei detriti spaziali possono essere eseguite con costi impulsivi accettabili e facilmente calcolabili e dimostrando la fattibilità di tali missioni in un prossimo futuro, andando a rendere la zona LEO più sicura e riducendo il rischio di collisioni catastrofiche in orbita.

Capitolo 2

Richiami di meccanica del volo spaziale

Per definire la forma e la posizione delle varie orbite target e di transfer è necessario introdurre un sistema di riferimento costante durante tutta la trattazione e una serie di parametri che vadano a caratterizzare univocamente ciascuna orbita, in modo tale da poter calcolare il ΔV in base alla variazione di tali parametri.

Il sistema di riferimento utilizzato è il geocentrico equatoriale, un sistema a tre assi destrorso definito nel seguente modo:

- L'origine del sistema di riferimento coincide con il centro della Terra
- I due versori \hat{I} e \hat{J} del sistema giacciono sul piano equatoriale; il versore \hat{I} è diretto verso il *punto* γ , uno dei due punti dove l'equatore celeste interseca il piano dell'eclittica (opposto al *punto* Ω)
- Il versore \hat{J} è posizionato 90° a est del versore \hat{I} , in modo da completare la terna destrorsa con un versore \hat{K} diretto verso il polo Nord

Il *punto* γ (o *punto dell'Ariete*) può essere individuato facilmente come la direzione individuata dall'asse che congiunge Terra e Sole all'equinozio di primavera, il 21 marzo. Il sistema di riferimento scelto non è del tutto non inerziale, in quanto è

soggetto ad una rotazione dettata dalla precessione degli equinozi, la quale modifica la direzione del *punto* γ facendole compiere una rivoluzione ogni 26000 anni circa, ma per i lassi di tempo molto minori considerati in questa trattazione si può considerare invariabile.

A partire da questo sistema di riferimento possono essere introdotti 6 parametri orbitali, i quali definiscono forma, posizione e orientazione di ciascuna orbita nello spazio:

- e , eccentricità: determina la forma dell'orbita; per orbite ellittiche, ovvero le orbite target della trattazione, è un parametro compreso tra 0 e 1
- a , semiasse maggiore: determina la dimensione dell'orbita
- i , inclinazione: viene definita come l'angolo formato dal piano dell'orbita con il piano equatoriale
- ω , argomento del periastro: viene definito come l'angolo compreso tra la linea dei nodi (nel nodo acendente) e la direzione del periastro
- Ω , RAAN o longitudine del nodo ascendente: viene definito come l'angolo compreso tra il versore \hat{I} e la linea dei nodi
- ν , anomalia vera: viene definita come l'angolo tra la direzione del periastro e il vettore posizione di un corpo che sta percorrendo l'orbita

I punti in cui la traiettoria incrocia il piano fondamentale del sistema di riferimento sono detti nodi. Sono presenti un nodo ascendente e uno discendente, a seconda della posizione in cui si trova un corpo che attraversa questi punti. Se il corpo passa dall'emisfero sud a quello nord, il nodo è ascendente, mentre se passa dall'emisfero nord a quello sud il nodo è discendente. La linea che unisce i due nodi (e che giace sul piano fondamentale) è chiamata linea dei nodi.

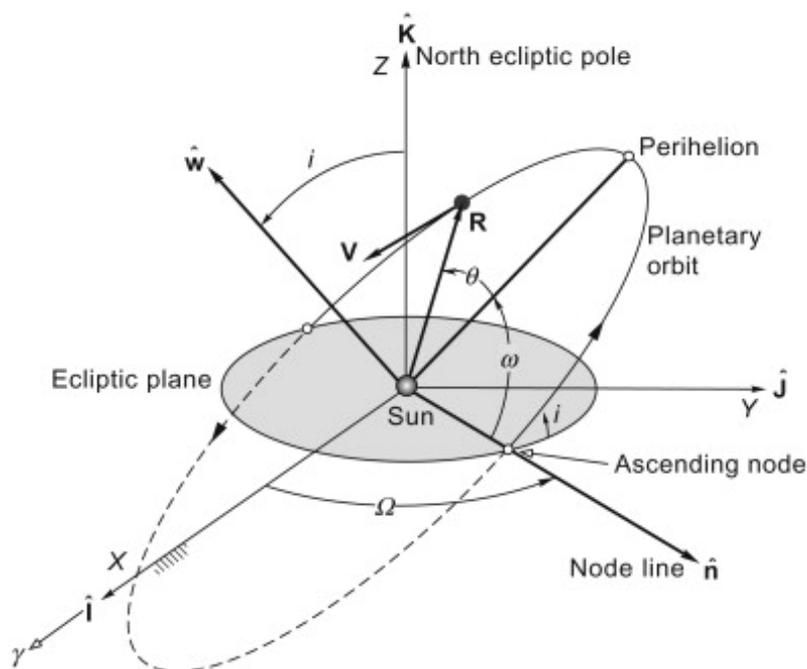


Figura 2.1: Sistema di riferimento e parametri orbitali

Esistono dei casi particolari di orbite in cui alcuni di questi parametri potrebbero non essere definibili. Essi si verificano quando si hanno orbite circolari o equatoriali:

- $e = 0$ (orbita circolare): il semiasse maggiore è uguale al raggio, quindi non è possibile definire ω ; al suo posto viene introdotto l'argomento della latitudine $u = \omega + \nu$
- $i = 0$ (orbita equatoriale): non è più definibile la linea dei nodi in quanto il piano su cui giace l'orbita è coincidente con quello fondamentale del sistema di riferimento, quindi non è possibile definire Ω ; al suo posto viene introdotta la longitudine del periastro $\Pi = \Omega + \omega$
- $e = 0, i = 0$ (orbita circolare ed equatoriale): non è definibile nè ω nè Ω ; al loro posto viene introdotta la longitudine vera $l = \Omega + \omega + \nu$

Orbite facenti parte di casi eccezionali non saranno argomento di indagine in questa tesi, ma è bene classificarle per completezza.

2.1 Problema dei due corpi ristretto

Il problema degli N corpi viene utilizzato per schematizzare le forze agenti su un numero N corpi in un sistema di riferimento inerziale. Per un sistema Terra-satellite è utile fissare $N = 2$, semplificando quindi il problema e considerando solamente l'influenza del campo gravitazionale terrestre su uno spacecraft in orbita. Le principali ipotesi su cui si basa il problema dei due corpi sono:

- i corpi sono puntiformi, e la loro massa è concentrata in tali punti
- le sole forze agenti nel sistema sono di tipo gravitazionale
- la massa di ogni corpo non varia

Con queste ipotesi si definisce il problema dei 2 corpi con cui si può modellare l'interazione Terra-Luna, ma è possibile aggiungere ancora una ipotesi semplificativa per rientrare nel caso del problema dei 2 corpi *ristretto*:

- la massa del corpo secondario trascurabile rispetto alla massa del corpo secondario

Quest'ultima ipotesi, come si vedrà in seguito, permette di ipotizzare nullo l'effetto del corpo secondario su quello primario, dal momento che non è di nostro interesse l'interazione tra corpi con masse simili.

Il corpo principale avrà massa M e distanza \bar{r}_M dal sistema di riferimento inerziale, mentre il corpo secondario avrà massa m e distanza \bar{r}_m .

La distanza tra i due corpi si può definire sottraendo vettorialmente le distanze dei due corpi dal centro del sistema di riferimento $\bar{r} = \bar{r}_m - \bar{r}_M$.

Dalla legge di gravitazione universale di Newton, è possibile ricavare la forza esercitata su entrambi i corpi date le masse e la distanza tra i due:

$$\bar{F} = -\frac{GMm\bar{r}}{r^2 r} \quad (2.1)$$

in cui $G = 6.67 \cdot 10^{-11} m^3 s^{-2} kg^{-1}$ è la costante di gravitazione universale. La forza che agisce sulle masse è uguale in modulo ma opposta in verso, quindi lungo la direzione \bar{r} si può dire che $F_M = -F_m$. Nota la forza, è possibile ricavare l'accelerazione di ciascun corpo dividendola per la massa, per cui

$$\ddot{\bar{r}}_M = \frac{\bar{F}_m}{M} = -\frac{Gm\bar{r}}{r^2 r} \quad (2.2)$$

$$\ddot{\bar{r}}_m = \frac{\bar{F}_M}{m} = -\frac{GM\bar{r}}{r^2 r} \quad (2.3)$$

Quando si parla di forze con il pedice M si indica l'effetto del campo gravitazionale causato dalla massa M sulla massa m , mentre viceversa per il pedice m .

Una volta calcolate le accelerazioni rispetto al sistema di riferimento inerziale, si può ottenere l'accelerazione tra le due masse:

$$\ddot{\bar{r}} = \ddot{\bar{r}}_m - \ddot{\bar{r}}_M = -\frac{G(m+M)\bar{r}}{r^2 r} \quad (2.4)$$

A questo punto entra in gioco l'ipotesi iniziale per cui $m \ll M$, dunque si può considerare trascurabile il termine della massa del corpo secondario nel calcolo della massa totale del sistema: $m + M \simeq M$. Si introduce inoltre il parametro gravitazionale $\mu = GM$, il quale per la Terra vale circa $398600 km^3 s^{-2}$. Si arriva quindi all'equazione

$$\ddot{\bar{r}} = -\frac{\mu\bar{r}}{r^2 r} \quad (2.5)$$

È possibile trovare una soluzione chiusa della precedente equazione introducendo il momento angolare specifico, definito come il prodotto vettoriale del vettore posizione con il vettore velocità:

$$\bar{h} = \bar{r} \wedge \dot{\bar{r}} \quad (2.6)$$

Questo vettore sarà sempre perpendicolare al piano creato dai due vettori e si può dimostrare che rimane costante nel tempo, dunque i due vettori saranno sempre compresi nello stesso piano orbitale. Partendo dalla definizione di \bar{h} e dall'equazione 2.5 è possibile arrivare a scrivere che

$$\bar{r} = \frac{h^2/\mu}{1 + \bar{B}/\mu \cdot \cos\nu} \quad (2.7)$$

Dove \bar{B} è un vettore costante ottenuto dall'integrazione della posizione e ν l'angolo compreso tra esso e il vettore posizione, variabile nel tempo.

Con un paio di sostituzioni è possibile ricondurre la precedente formula all'equazione di una conica:

$$p = \frac{h^2}{\mu} \quad (2.8)$$

$$e = \frac{B}{\mu} \quad (2.9)$$

Arrivando dunque alla forma

$$r = \frac{p}{1 + e \cdot \cos\nu} \quad (2.10)$$

la quale può descrivere un'ellisse, una parabola o un'iperbole a seconda del valore di e . Si definiscono

- e = eccentricità
- p = semilatus rectum

2.1.1 Energia di un'orbita

Si definisce energia dell'orbita la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale posseduta da un corpo su tale orbita riferita all'unità di massa:

$$E = K + U \quad (2.11)$$

Partendo dall'equazione del moto, è possibile dimostrare che l'energia dell'orbita è costante nel tempo. Se infatti si moltiplicano ambo i membri per $\dot{\vec{r}}$ si ottiene

$$\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^2} \frac{\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}}{r} = 0 \quad (2.12)$$

Ricordando che $\dot{\vec{r}} = \vec{V}$ è possibile riscrivere la precedente relazione mettendo in risalto la velocità e la sua derivata:

$$\dot{\vec{V}} \cdot \vec{V} + \frac{\mu}{r^2} V = 0 \quad (2.13)$$

Si possono esprimere i membri di questa equazione come la derivata temporale di una nuova funzione

$$\dot{\vec{V}} \cdot \vec{V} + \frac{\mu}{r^2} V = \frac{d}{dt} \left(\frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} + C \right) = 0 \quad (2.14)$$

Dove C è una costante di integrazione, mentre la funzione all'interno della derivata è proprio l'energia dell'orbita E . Per calcolare il valore di C si ipotizza che un corpo secondario fermo a una distanza infinita dal corpo principale non risenta più della forza gravitazionale dello stesso, per cui

$$\frac{0^2}{2} - \frac{\mu}{\infty} + C = 0 \quad (2.15)$$

da cui si ottiene $C = 0$. Si possono dunque esprimere i due componenti dell'energia K e U

$$K = \frac{V^2}{2} \quad (2.16)$$

$$U = -\frac{\mu}{r} \quad (2.17)$$

e dunque arrivare alla definizione di energia dell'orbita

$$E = K + U = \frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} \quad (2.18)$$

L'energia di un'orbita è un parametro molto importante dal momento il suo segno definisce la forma dell'orbita stessa. Inizialmente per descrivere i vari casi si ipotizzi una orbita ellittica e si introduca il parametro a , ovvero il semiasse

maggiore dell'ellisse il quale può essere legato ai valori di eccentricità e semilatus rectum come segue:

$$a = \frac{p}{1 - e^2} \quad (2.19)$$

Ottenuto il valore di a si possono inoltre calcolare i valori di periastro e apoastro, ovvero la distanza minima ($\nu = 0$) e massima ($\nu = \pi$) dal corpo principale:

$$r_p = a(1 - e) \quad (2.20)$$

$$r_a = a(1 + e) \quad (2.21)$$

È dimostrabile che il valore dell'energia di un'orbita è legato al valore del semiasse maggiore a come segue:

$$E = -\frac{\mu}{2a} \quad (2.22)$$

dunque rigirando l'equazione per mettere in evidenza a :

$$a = -\frac{\mu}{2E} \quad (2.23)$$

È inoltre possibile calcolare il valore dell'eccentricità e a partire dall'energia:

$$e = \sqrt{1 + 2E\left(\frac{h}{\mu}\right)^2} \quad (2.24)$$

In base al valore dell'energia E si possono verificare i seguenti casi:

- $E < 0 \longrightarrow a > 0, e = 0$: orbita circolare
- $E < 0 \longrightarrow a > 0, 0 < e < 1$: orbita ellittica
- $E = 0 \longrightarrow a \rightarrow \infty, e = 1$: orbita parabolica
- $E > 0 \longrightarrow a < 0, e > 1$: orbita iperbolica

2.2 Perturbazione J_2

La principale perturbazione orbitale considerata nell'elaborato è la perturbazione J_2 , causata dalla non perfetta sfericità della Terra: essa ha un raggio equatoriale di 6378 km e un raggio polare di 6357 km. Inoltre la distribuzione di massa non è costante, ma è variabile in base alla conformazione del terreno e alla presenza per esempio di depressioni come oceani.

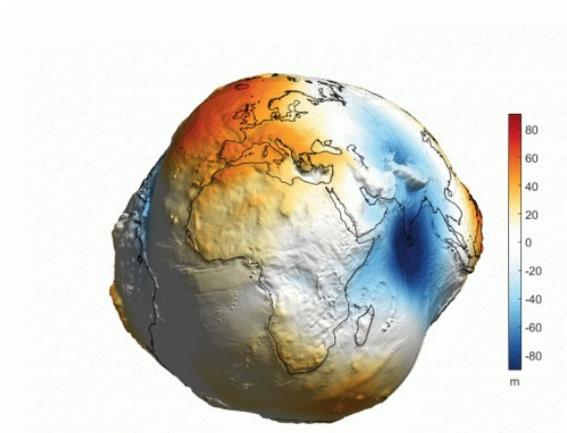


Figura 2.2: Geoide

Nell'ipotesi di geometria perfetta, fissata la distanza r tra il centro del pianeta e il corpo orbitante, il potenziale gravitazionale sarebbe costante in ogni punto sulla superficie di una sfera di raggio r , seguendo la formula

$$U = -\frac{\mu}{r} \quad (2.25)$$

La non sfericità della Terra porta il potenziale ad essere variabile anche se r è costante; per cercare di modellare matematicamente questo fenomeno si sfrutta un insieme di funzioni chiamate *polinomi di Legendre*. Il potenziale U viene dunque espresso come

$$U = -\frac{\mu}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{R_E}{r} \right)^2 P_n \sin(La) - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} J_{n,m} P_n^m \sin(La) \cos(Lo - Lo_{n,m}) \right] \quad (2.26)$$

dove:

- $P_n(x)$ = polinomio di Legendre
- La = latitudine
- Lo = longitudine
- J_n = armoniche zonali
- $J_{n,m}$ = armoniche tesserali e settoriali

Ogni armonica ha un effetto perturbativo, ma il preponderante è quello dell'armonica zonale J_2 , la quale è circa 3 ordini di grandezza maggiore delle altre ($J_2 = 1082.6 \cdot 10^{-3}$), perciò può essere trascurata la perturbazione causata dalle successive armoniche. La formula precedente si semplifica quindi nella seguente:

$$U = \frac{\mu}{r} \left[1 - \left(\frac{R}{r} \right)^2 J_2 P_2 \sin(\theta) \right] \quad (2.27)$$

E quindi:

$$U = -\frac{\mu}{r} + \frac{\mu J_2 R^2}{2r^3} (3 \sin^2 \theta - 1) \quad (2.28)$$

Dalla precedente equazione derivano i principali effetti subiti dall'orbita di un corpo intorno alla Terra, ovvero la regressione della linea dei nodi e la precessione della linea degli absidi.

La regressione della linea dei nodi è una variazione della RAAN opposta al verso di percorrenza dell'orbita secondo la seguente equazione:

$$\frac{d\Omega}{dt} = -3\pi J_2 \left(\frac{R}{p} \right)^2 \cos(i) n_0 \quad (2.29)$$

in cui:

- R = raggio della Terra
- p = semilatus rectum

- i = inclinazione
- n_0 = numero di rivoluzioni in un giorno

Nel caso in cui si volesse ottenere una misura in $[rad/s]$ è necessario dividere per il periodo orbitale

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \quad (2.30)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = -3\pi J_2 \left(\frac{R}{p}\right)^2 \cos(i) \frac{1}{T} \quad (2.31)$$

Per orbite dirette ($0 < i < \pi/2$) si ha $\cos(i) > 0$ e quindi $\frac{d\Omega}{dt} < 0$, mentre per orbite retrograde ($\pi/2 < i < \pi$) si ha $\cos(i) < 0$ e quindi $\frac{d\Omega}{dt} > 0$. Per orbite polari ($i = \pi/2$) si ha $\cos(i) = 0$ dunque l'effetto di regressione della linea dei nodi si annulla. La variazione di RAAN causata da questo effetto cresce al diminuire della quota e all'aumentare di $\cos(i)$, quindi per valori di inclinazione vicini a 0 e π .

Il secondo effetto causato da J_2 è la precessione della linea degli absidi, ovvero una rotazione della linea che unisce periastro e apoastro dell'orbita secondo l'equazione

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{3}{2}\pi J_2 \left(\frac{R}{p}\right)^2 [5\cos^2(i) - 1] \quad (2.32)$$

Il segno della perturbazione e il suo valore massimo è dato da $[5\cos^2(i) - 1]$, con due zeri quando $i = \arccos(\sqrt{\frac{1}{5}})$, ovvero se $i = 63.16^\circ$ o quando $i = 116.16^\circ$.

Se $i < 63.16^\circ$ o $i > 116.16^\circ$ allora la perturbazione avrà segno positivo, mentre se $63.16^\circ < i < 116.16^\circ$ la perturbazione avrà segno negativo.

La precessione della linea degli absidi è una perturbazione importante nel caso di orbite molto eccentriche, le quali hanno una differenza sostanziale tra apogeo e perigeo, mentre è poco risentita nel caso in cui l'eccentricità sia prossima allo zero. Dal momento che le orbite di cui ci si occuperà durante la trattazione hanno un'inclinazione molto elevata (di poco superiore a 90 gradi), è possibile semplificare i modelli utilizzati tenendo conto della regressione della linea dei nodi ma trascurando la precessione della linea degli absidi, in quanto quest'ultima tiene

conto di un infinitesimo di ordine maggiore della prima ($\cos^2(i)$ rispetto a $\cos(i)$). Inoltre ci si occuperà di orbite quasi circolari, dove l'eccentricità è minore di 0.1, per cui si rafforza l'ipotesi di ignorare l'effetto J_2 per quanto riguarda la precessione della linea degli apsidi.

Nella seguente figura è possibile vedere fisicamente la modifica della RAAN causata dalla perturbazione J_2 alla traiettoria di un corpo orbitante per un tempo di 0, 15, 30 e 45 giorni (rosso, arancione, giallo e bianco); l'inclinazione dell'orbita è di 97 gradi circa, per cui Ω aumenta nel tempo.

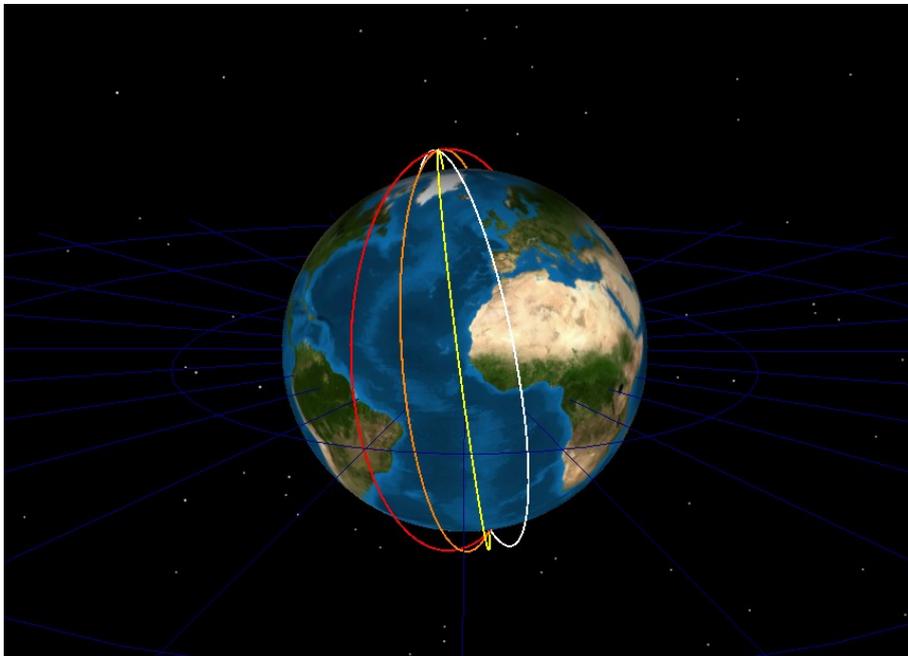


Figura 2.3: Regressione della linea dei nodi a causa del J_2

Capitolo 3

Manovre con propulsione elettrica

Al giorno d'oggi per compiere una manovra orbitale vengono utilizzati due classi di propulsori: propulsori chimici e propulsori elettrici. Ognuno ha i propri pregi e difetti; la principale differenza tra le due categorie è l'accelerazione fornita dal propulsore e il tempo in cui si somministra l'impulso. Ciò porta alla modellazione di due tipi di manovra, a seconda del tipo di propulsione utilizzata.

- Manovra impulsiva: il metodo più semplice per descrivere una manovra compiuta chimicamente, prevede un impulso in un tempo infinitesimo, dunque la velocità cambia istantaneamente
- Manovra continua: si utilizza per descrivere manovre compiute elettricamente, valori di spinta (e quindi accelerazione) troppo bassi per avere impulsi istantanei; si introduce un tempo di burn durante il quale il motore è acceso e la velocità cambia in modo continuo

Nonostante l'obiettivo dell'elaborato sia quello di ottimizzare orbite per il caso elettrico, nel corso della trattazione si farà uso di entrambi i tipi di manovra per semplificare il modello matematico.

3.1 Equazione di Tsiolkovsky

L'equazione di Tsiolkovsky lega il rapporto di massa iniziale e finale di un razzo in base al ΔV richiesto da una determinata manovra e la velocità di scarico c . Per arrivare alla stesura dell'equazione, si considera uno spacecraft di massa m il quale sta espellendo una quantità dm_p di propellente. Lo spacecraft e il propellente sono per ipotesi in un sistema isolato, per cui non esistono forze esterne che agiscono sull'uno o sull'altro componente. Il propellente viene inoltre espulso in direzione opposta al moto dello spacecraft.

Lo spacecraft si muove con una velocità V , mentre lo scarico del propellente avviene a una velocità c relativa allo spacecraft, per cui in un sistema di riferimento non inerziale, lo spacecraft si muove con velocità V e il propellente con velocità $c - V$.

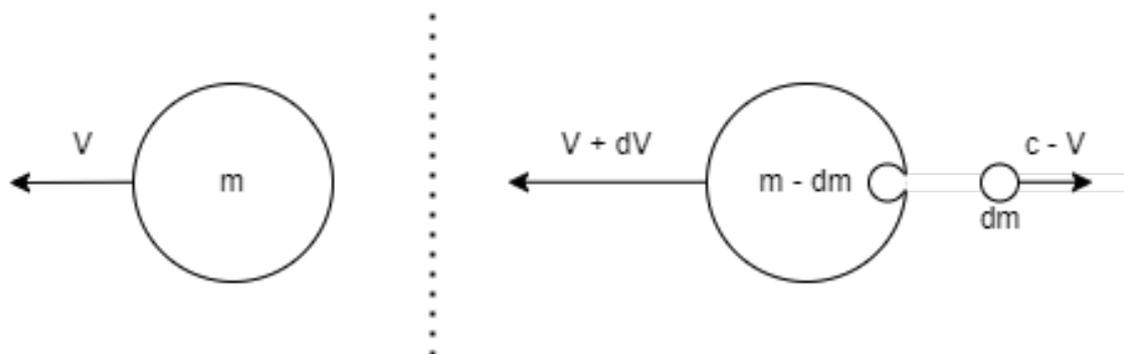


Figura 3.1: Conservazione della quantità di moto

Dal momento che il sistema è isolato, la variazione di quantità di moto nel tempo è nulla:

$$\frac{dq}{dt} = 0 \quad (3.1)$$

per cui si può scrivere la seguente uguaglianza:

$$mV = (m - dm_p)(V + dV) - dm_p(c - V) \quad (3.2)$$

Da cui deriva

$$mdV - dm_p dV - dm_p c = 0 \quad (3.3)$$

Rispetto agli altri due termini, $dm_p dV$ è un infinitesimo di ordine superiore, per cui può essere trascurato. Si ottiene dunque la relazione

$$m dV = dm_p c \quad (3.4)$$

Si introduce ora la portata in massa di propellente, definita come la derivata nel tempo della massa di propellente:

$$\dot{m}_p = \frac{dm_p}{dt} \quad (3.5)$$

Essa può essere fatta comparire nell'equazione risultante dalla conservazione della quantità di moto se si divide quest'ultima per dt

$$m \frac{dV}{dt} = \dot{m}_p c \quad (3.6)$$

Il prodotto tra portata di propellente \dot{m}_p e velocità efficace di scarico c è la spinta T :

$$T = \dot{m}_p c \quad (3.7)$$

Dal momento che la massa di combustibile all'interno dello spacecraft varia nel tempo a causa dell'espulsione di propellente, anche la massa dello spacecraft varia, diminuendo nel tempo fino a quando tutto il propellente è stato espulso. Ciò equivale a dire che

$$\frac{dm}{dt} = -\dot{m}_p \quad (3.8)$$

A questo punto è possibile legare la variazione di massa dello spacecraft alla spinta T e alla velocità efficace di scarico c :

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{T}{c} \quad (3.9)$$

Una volta ottenuta questa equazione è possibile andare ad integrare in un intervallo di tempo $[t_0, t_f]$ per ottenere la variazione di velocità dello spacecraft:

$$\Delta V = V_f - V_0 = \int_{t_0}^{t_f} \frac{T}{m} dt \quad (3.10)$$

Esprimendo T in funzione di c e della variazione di massa nel tempo si ottiene

$$\Delta V = V_f - V_0 = \int_{m_0}^{m_f} \frac{c}{m} dm \quad (3.11)$$

Integrando sulla massa si ottiene

$$\Delta V = c \cdot \log\left(\frac{m_0}{m_f}\right) \quad (3.12)$$

Questa relazione permette di calcolare il valore di ΔV ottenibile conoscendo la velocità di scarico e le masse iniziali e finali dello spacecraft. L'equazione diventa però ancora più utile se si esprime il rapporto delle masse in funzione degli altri parametri:

$$\frac{m_0}{m_f} = e^{-\frac{\Delta V}{c}} \quad (3.13)$$

Quest'ultima relazione è nota come *equazione del razzo* o *equazione di Tsiolkowsky*.

L'andamento della frazione di massa finale su quella iniziale è strettamente decrescente all'aumentare del rapporto tra ΔV e c , per cui è preferibile mantenere basso questo rapporto scegliendo dei propulsori capaci di avere alte velocità efficaci di scarico. Per esempio, se $\Delta V/c = 1$, allora la massa finale sarà pari al 37% della massa iniziale, mentre la restante parte sarà destinata al propellente necessario per compiere la manovra.

Una volta fissato c , la frazione di massa utile diminuisce al crescere di ΔV , ovvero è necessario stipare a bordo molto più combustibile, aumentando quindi anche le dimensioni dei serbatoi e il peso totale della struttura; è dunque utile ottimizzare il ΔV non solo per il costo propulsivo ma anche per aumentare la massa finale (e di conseguenza il payload) trasportabile.

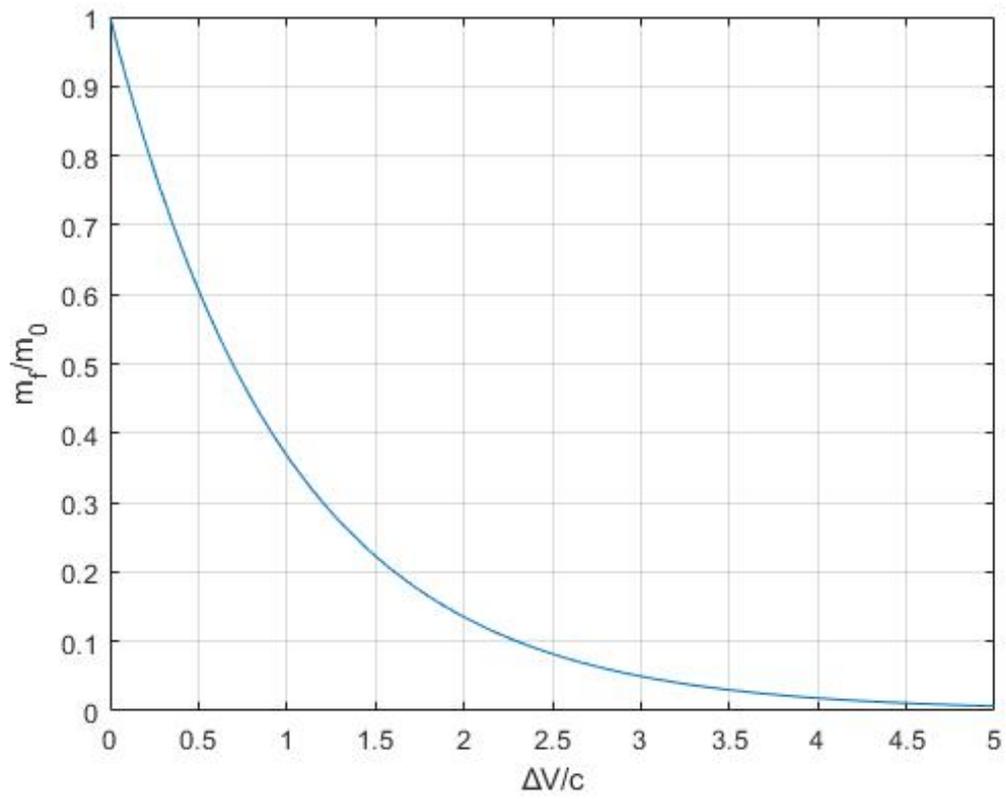


Figura 3.2: Equazione del razzo

3.2 Approssimazione di Edelbaum

Per modellare l'evoluzione dei parametri orbitali di un corpo soggetto a una propulsione di tipo elettrica, si introduce l'approssimazione dei Edelbaum, e con essa alcune ipotesi che si adattano al caso in questione:

- Orbite quasi-circolari: $e \simeq 0$, $r \simeq a \simeq p$
- Piccole variazioni di inclinazione: $\sin(i) \simeq i$, $\cos(i) \simeq 1$
- Piccoli valori di spinta (accelerazioni nell'ordine dei mm/s^2): $\frac{T}{m} \ll \frac{\mu}{r^2}$
- Anomalia vera uguale a eccentrica e media: $E \simeq \nu \simeq M$
- Angolo di spinta esterno al piano dell'orbita β costante

La velocità è circolare, quindi tangenziale e di valore $V = \sqrt{\frac{\mu}{r}}$. A partire da queste ipotesi si deduce che la velocità angolare è costante:

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \quad (3.14)$$

Inoltre si scompone il vettore accelerazione nelle tre direzioni parallela a V , radiale e perpendicolare al piano dell'orbita ($A = T/m$):

$$\begin{cases} a_T = A \cos \alpha \cos \beta \\ a_R = A \sin \alpha \cos \beta \\ a_W = A \sin \beta \end{cases} \quad (3.15)$$

Dal momento che si sono ipotizzate orbite quasi-circolari e inclinazioni piccole, per descrivere la posizione di un corpo al loro interno si utilizzerà la longitudine vera:

$$\theta = \Omega + \omega + \nu \quad (3.16)$$

Si possono ora riscrivere le equazioni di Gauss introducendo le ipotesi di Edelbaum:

$$\left\{ \begin{array}{l} V \frac{da}{dt} = 2a_T \\ V \frac{de}{dt} = 2\cos(\nu)a_T + \sin(\nu)a_R \\ V \frac{di}{dt} = \cos(\omega + \nu)a_W \\ iV \frac{d\Omega}{dt} = \sin(\omega + \nu)a_W \\ V \frac{d\omega}{dt} = -V \frac{d\Omega}{dt} + \frac{2\sin(\nu)a_T - \cos(\nu)a_R}{e} \\ \frac{d\theta}{dt} = n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = \frac{V}{r} \end{array} \right. \quad (3.17)$$

Osservando queste equazioni si può notare quali sono le componenti della spinta che influiscono su ciascun parametro orbitale. Più precisamente:

- a_T modifica il semiasse a , eccentricità e e argomento del periastro ω
- a_R modifica l'eccentricità e argomento del periastro
- a_W modifica l'inclinazione i e la RAAN Ω

I tre parametri principali su cui concentrarsi per il calcolo della spesa della manovra sono semiasse, inclinazione ed eccentricità. Per ognuno di questi parametri esiste una coppia di valori α e β che ottimizza la variazione:

- semiasse: $\alpha = 0$, $\beta = 0$, ovvero si spinge parallelamente alla velocità (nello stesso verso per avere una variazione positiva e in verso opposto per una negativa)
- inclinazione: $\alpha = n.d.$, $\beta = \pm \frac{\pi}{2}$ in base a dove si trova il corpo lungo l'orbita; se si vuole avere Δi positivo segno positivo se $\omega\nu > 0$, segno negativo se $\omega\nu < 0$. Più semplicemente, la spinta è sempre in direzione perpendicolare al piano, ma cambia di verso due volte per orbita.

- eccentricità: $\alpha = \arctan(\frac{1}{2}\tan\nu)$, $\beta = 0$ ovvero spingere senza mai cambiare la direzione, in modo da avere sempre un angolo di 90° rispetto alla linea degli absidi.

Quando si deve variare più di un parametro alla volta è consigliabile svolgere una manovra che modifichi contemporaneamente i parametri invece di variarne uno alla volta attraverso una combinazione di manovre.

Nel caso in cui si dovesse ottimizzare la variazione sia di semiasse che di inclinazione (lasciando invariata l'eccentricità) è possibile trovare nuovi valori di α e β :

$$\alpha = 0 \text{ e } \beta = \arctan(k\cos(\omega + \nu))$$

k è una costante che dipende dai valori di variazione dei parametri orbitali;

l'integrazione su una rivoluzione non possiede una soluzione chiusa, ma è possibile introdurre una ipotesi semplificativa in modo tale da ottenere una soluzione analitica. Invece di utilizzare un angolo β variabile si ipotizza che la spinta sia orientata con un angolo costante tra 0 e β massimo per metà rivoluzione e lo stesso angolo cambiato di segno per l'altra metà:

$$\begin{cases} \beta = |\bar{\beta}| & \text{se } \cos(\theta) > 0 \\ \beta = -|\bar{\beta}| & \text{se } \cos(\theta) < 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

Con la precedente semplificazione (la quale vale solamente per un'unica rivoluzione, quindi per piccole variazioni) è possibile calcolare il costo della manovra combinata:

$$\Delta V = \sqrt{V_0^2 + V_F^2 - 2V_0V_F\cos(\frac{\pi}{2}\Delta i)} \quad (3.19)$$

dove si sono considerate orbite di partenza e arrivo con valori di eccentricità trascurabili; l'equazione si può riscrivere in funzione delle variazioni dei parametri come segue:

$$\Delta V = V_0 \sqrt{\left(\frac{\pi}{2} \Delta i\right)^2 + \left(\frac{\Delta a}{2a_0}\right)^2} \quad (3.20)$$

Per completare il modello si introduce una spesa dovuta al cambio di RAAN, considerando la variazione $\Delta\Omega$ come la somma dell'effetto propulsivo e dell'effetto della perturbazione J_2 :

$$\Delta V_\Omega = \frac{\pi}{2} V_0 \sin(i_0) \Delta\Omega \quad (3.21)$$

$$\Delta\Omega = \Delta\Omega_T + \Delta\Omega_{J_2} \quad (3.22)$$

In questo modo è possibile scrivere un'unica equazione che racchiude le variazioni dei tre parametri principali:

$$\Delta V = \sqrt{\Delta V_i^2 + \Delta V_a^2 + \Delta V_\Omega^2} \quad (3.23)$$

che, esplicitando i vari termini, diventa:

$$\Delta V = V_0 \sqrt{\left(\frac{\pi}{2} \Delta i\right)^2 + \left(\frac{\Delta a}{2a_0}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2} \sin(i_0) \Delta\Omega\right)^2} \quad (3.24)$$

Capitolo 4

Teoria del controllo ottimale

Una volta definiti ciascun parametro dell'orbita e il costo in termini di ΔV necessario per modificarne il valore è possibile iniziare a valutare in che modo sia possibile passare da una orbita iniziale a una target sfruttando i risultati dei capitoli precedenti.

La missione consiste in un numero predefinito di orbite prestabilite da raggiungere in ordine, per cui definito n il numero di detriti spaziali, il numero di trasferte necessario per raggiungere ogni detrito sarà $n - 1$. L'obiettivo è trovare il tempo necessario per ciascuna trasferta in modo tale da minimizzare il costo propulsivo della missione.

Dal momento che la durata di ciascuna trasferta non è nota a priori, ma è compresa tra un valore minimo e massimo, non è possibile calcolare direttamente il valore di ΔV necessario, per cui si farà utilizzo di algoritmi genetici i quali troveranno attraverso meccanismi di ottimizzazione il valore minimo di ΔV all'interno di un dominio temporale prestabilito. Le condizioni riguardanti il tempo della missione saranno sia generali (come tempo totale della missione, o somma di tutte le trasferte), sia su ciascuna trasferta da un'orbita all'altra. Per analizzare ciascuna trasferta saranno utilizzate tre strategie propulsive, due monoimpulsive e una biimpulsiva. Le prime due sono piuttosto semplici da

comprendere, in quanto consistono in un unico impulso dato all'inizio o alla fine della trasferta, mentre la biimpulsiva è un tipo di strategia che richiede uno studio più approfondito, in quanto è necessario stabilire quale sia la suddivisione ottimale del ΔV totale tra i due impulsi. Nei seguenti paragrafi si illustreranno le equazioni che regolano la spinta iniziale e finale del modello biimpulsivo.

4.1 Trsferta biimpulsiva

Per schematizzare la manovra si farà inizialmente utilizzo di un modello a due impulsi di cui uno all'inizio della trasferta (t_0) e uno alla fine (t_f). Il tempo in cui l'impulso viene fornito sarà inizialmente considerato istantaneo; l'approssimazione di manovra continua verrà introdotta in seguito. Viene definito ΔV_A l'impulso iniziale e ΔV_B l'impulso finale.

I valori di ΔV_A e ΔV_B devono essere tali da garantire la variazione dei parametri orbitali dall'orbita di partenza a quella target, perciò deve valere la condizione

$$\Delta V_A + \Delta V_B = \sqrt{\Delta V_i^2 + \Delta V_a^2 + \Delta V_\Omega^2} \quad (4.1)$$

Dal momento che si farà utilizzo di manovre istantanee, si utilizzeranno per il calcolo dei ΔV due leggere correzioni per i valori riguardanti il cambio di inclinazione e ascensione retta. Nello specifico si va a rimuovere la costante $\pi/2$ dai due valori ΔV_Ω e ΔV_i ; il motivo è che una trasferta con impulsi istantanei richiede un ΔV minore rispetto ad una basata su una teoria di spinte basse come quelle elettriche, per cui se si facesse utilizzo dei valori di ΔV trovati con l'approssimazione di Edelbaum si tenderebbe a sovrastimare il costo delle trasferte. Si avrà dunque

$$\Delta V_\Omega = \Delta \Omega \sin i_0 V_0 \quad (4.2)$$

$$\Delta V_i = \Delta i V_0 \quad (4.3)$$

Considerando una trasferta qualsiasi, si definiscono con il pedice k i parametri legati all'orbita di partenza, mentre con il pedice $k + 1$ quelli dell'orbita di arrivo. Per alleggerire la notazione si introducono le seguenti sostituzioni:

$$\begin{cases} x = \Delta V_{\Omega} = \Delta\Omega \sin i_0 V_0 \\ y = \Delta V_a = \frac{\Delta a}{2a_0} V_0 \\ z = \Delta V_i = \Delta i V_0 \end{cases} \quad (4.4)$$

I termini con pedice 0 sono ottenuti attraverso una media tra il semiasse e l'inclinazione delle due orbite:

$$\begin{cases} a_0 = \frac{a_{k+1} + a_k}{2} \\ i_0 = \frac{i_{k+1} + i_k}{2} \\ V_0 = \sqrt{\frac{\mu}{a_0}} \end{cases} \quad (4.5)$$

Esplicitando il termine $\Delta\Omega$ si possono fare alcune osservazioni:

$$\Delta\Omega = \Omega_{k+1} - \Omega_k = \Omega_{k+1}(t_0) - \Omega_k(t_0) + [\dot{\Omega}_{k+1}(t_0) - \dot{\Omega}_k(t_0)]t = \Delta\Omega(t_0) + \Delta\dot{\Omega}t \quad (4.6)$$

si può notare che la variazione di RAAN (e quindi il costo in termini di spinta ΔV_{Ω}) dipende non solo dai parametri iniziali, ma anche dal tempo t impegnato per compiere la trasferta a causa delle perturbazioni orbitali descritte precedentemente. Il termine $\Delta\Omega(t_0)$ è ricavabile dalle condizioni iniziali delle orbite, mentre il termine $\Delta\dot{\Omega}$ viene calcolato attraverso le relazioni della perturbazione J_2 :

$$\Delta\dot{\Omega} = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}J_2\cos(i) \quad (4.7)$$

Per quanto riguarda i termini ΔV_a e ΔV_i non è presente una relazione con il tempo di manovra, quindi le altre due spese possono essere calcolate in base alle condizioni iniziali delle due orbite.

4.2 Coefficienti di ripartizione

Dal momento che l'effetto perturbativo di J_2 dipende da numerosi fattori come la quota e l'inclinazione, i quali possono variare molto in base al tipo di manovra effettuata, è necessario introdurre un termine correttivo Δx per il calcolo di ΔV_Ω .

Infatti una manovra che occupa un certo lasso di tempo a quote basse è più perturbata di una manovra che porta subito il chaser su orbite con un semiasse maggiore, per cui è possibile definire Δx come la misura del modificarsi della RAAN in base alla variazione di a e i causata da ΔV_A .

Per definire quanto ΔV si deve fornire nella prima spinta e quanto nella seconda, e per determinare il valore di Δx , si introducono dei coefficienti di ripartizione della spinta per ognuno dei tre parametri. Lo scopo dell'ottimizzazione è trovare il valore dei coefficienti di ripartizione tale per cui il valore della spinta totale necessaria sia minimo.

Sfruttando i due concetti appena introdotti, si possono riscrivere le equazioni per il calcolo delle due burn:

$$\Delta V_A = \sqrt{(s_x x)^2 + (s_y y)^2 + (s_z z)^2} \quad (4.8)$$

$$\Delta V_B = \sqrt{(x + \Delta x - s_x x)^2 + (y - s_y y)^2 + (z - s_z z)^2} \quad (4.9)$$

Per calcolare i valori di s_x , s_y e s_z è possibile cercare il minimo della funzione

$$\Delta V = \Delta V_A + \Delta V_B:$$

$$\Delta V = \sqrt{(s_x x)^2 + (s_y y)^2 + (s_z z)^2} + \sqrt{(x + \Delta x - s_x x)^2 + (y - s_y y)^2 + (z - s_z z)^2} \quad (4.10)$$

ma per semplicità di calcolo è utile cercare il minimo della funzione ΔV^2 ; così facendo si eliminano le radici quadrate, ma è necessario trascurare il doppio prodotto $2\Delta V_A \Delta V_B$. Si ottiene dunque

$$\Delta V^2 = (s_x x)^2 + (s_y y)^2 + (s_z z)^2 + (x + \Delta x - s_x x)^2 + (y - s_y y)^2 + (z - s_z z)^2 \quad (4.11)$$

Prima di andare a cercare il minimo di questa funzione è utile introdurre due nuovi parametri che saranno utilizzati per legare i coefficienti di ripartizione s_x , s_y e s_z ai rispettivi parametri di spinta x , y e z .

Il modo migliore per sfruttare il Δx causato dalla perturbazione J_2 è fare in modo che esso modifichi il valore della RAAN di partenza fino alla RAAN target in modo tale da non dover avere componenti di burn dedite alla variazione di Ω . Ciò si traduce in

$$x + \Delta x = 0 \quad (4.12)$$

quindi è possibile calcolare Δx , dal momento che esso sarà l'opposto di x .

Si introduce inoltre un'equazione differenziale che lega $\dot{\Omega}$ alle variazioni di semiasse e inclinazione dopo una manovra

$$\frac{\Delta \dot{\Omega}_A}{\dot{\Omega}_0} = -\frac{7}{2} \frac{\Delta a_A}{a_A} - \tan(i_A) \Delta i_A \quad (4.13)$$

dove i vari termini sono calcolati come:

$$\Delta a_A = a_k(t_A) - a_k(0)$$

$$\Delta i_A = i_k(t_A) - i_k(0)$$

$$a_A = \frac{a_k(t_A) + a_k(0)}{2}$$

$$i_A = \frac{i_k(t_A) + i_k(0)}{2}$$

$$\dot{\Omega}_0 = \frac{\dot{\Omega}_{k+1} + \dot{\Omega}_k}{2}$$

Ora è possibile esprimere x in base alla variazione dei parametri orbitali dopo la prima fase di spinta che inizia al tempo $t_0 = 0$ e termina al tempo t_A :

$$\Omega_{k+1} - \Omega_k = \Delta \dot{\Omega}_A t \quad (4.14)$$

$$x = (\Omega_{k+1} - \Omega_k) \sin(i_0) V_0 = (\Delta \dot{\Omega}_A t) \sin(i_0) V_0 \quad (4.15)$$

Sostituendo il valore di $\Delta\dot{\Omega}_A$ si ottiene:

$$\Delta x = -x = 7\dot{\Omega}_0 \sin(i_0) t \frac{\Delta a_A}{2a_A} V_0 + \tan(i_0) \dot{\Omega}_0 \sin(i_0) t \Delta i_A V_0 \quad (4.16)$$

Si può notare che esiste una correlazione tra le spinte y e z e le spinte parzializzate della prima burn A. Si ricorda infatti che le spinte totali riguardanti semiasse e inclinazione sono

$$y = \frac{\Delta a}{2a_0} V_0 \quad (4.17)$$

$$z = \Delta i V_0 \quad (4.18)$$

mentre le spinte ripartite della prima burn saranno

$$s_y y = \frac{\Delta a_A}{2a_A} V_0 \quad (4.19)$$

$$s_z z = \Delta i_A V_0 \quad (4.20)$$

Si può dunque scrivere l'espressione

$$\Delta x = m s_y y + n s_z z \quad (4.21)$$

m e n dipendono dal tempo t e dalla media dei parametri orbitali tra le due orbite; essi saranno usati per calcolare i vari coefficienti di ripartizione e sono così definiti:

$$m = 7\dot{\Omega}_0 \sin(i_0) t \quad (4.22)$$

$$n = \tan(i_0) \dot{\Omega}_0 \sin(i_0) t \quad (4.23)$$

4.3 Calcolo di s_x , s_y e s_z

Una volta introdotti i coefficienti m e n è possibile trovare una formula chiusa che lega essi ai coefficienti di ripartizione. Dal momento che si vuole minimizzare ΔV^2 , per trovare la soluzione di ottimo si pongono le derivate parziali rispetto ai coefficienti di ripartizione uguali a 0:

$$\frac{\partial \Delta V^2}{\partial s_x} = 0$$

$$\frac{\partial \Delta V^2}{\partial s_y} = 0$$

$$\frac{\partial \Delta V^2}{\partial s_z} = 0$$

Si ricorda che viene trascurato il doppio prodotto nel calcolo di ΔV^2 ; in precedenza si era ottenuto

$$\Delta V^2 = (s_x x)^2 + (s_y y)^2 + (s_z z)^2 + (x + \Delta x - s_x x)^2 + (y - s_y y)^2 + (z - s_z z)^2$$

Andando a differenziare si ottengono le tre seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Delta V^2}{\partial s_x} = 2x(2xs_x - mys_y - nzs_z - x) = 0 \\ \frac{\partial \Delta V^2}{\partial s_y} = 2y(-mxs_x + 2ys_y + m^2ys_y + mnzs_z - y + mx) = 0 \\ \frac{\partial \Delta V^2}{\partial s_z} = 2z(-nxs_x + mnys_y + 2zs_z + n^2zs_z - z + nx) = 0 \end{cases} \quad (4.24)$$

Si ottiene un sistema di equazioni a tre incognite, da cui si ricava

$$s_x = \frac{2x + my + nz}{(4 + m^2 + n^2)x} \quad (4.25)$$

$$s_y = -\frac{2mx - (4 + n^2)y + mnz}{(8 + 2m^2 + 2n^2)y} \quad (4.26)$$

$$s_z = -\frac{2nx + mny - (4m^2)z}{(8 + 2m^2 + 2n^2)z} \quad (4.27)$$

Si può notare come ogni coefficiente dipenda oltre che da m e n da ognuno dei tre valori di x , y e z ; si hanno delle singolarità quando uno dei tre valori a denominatore è nullo, ovvero quando il ΔV associato alla variabile è uguale a 0. Ciò non causa problemi dal momento che questa condizione equivale a dire che non c'è bisogno di correggere la differenza di i , a o Ω , per cui non è necessario calcolare il coefficiente di ripartizione di quella variabile, mentre gli altri coefficienti saranno calcolati normalmente.

4.4 Definizione di t_*

Le coppie di orbite chaser-target possono essere divise in due categorie in base alla variazione di RAAN relativa nel tempo. L'effetto della perturbazione J_2 può infatti manifestarsi in due modi: avvicinando o allontanando i due piani orbitali. La condizione per cui due piani orbitali si avvicinino nel tempo è che

$$\Delta\Omega \cdot \Delta\dot{\Omega} < 0 \quad (4.28)$$

ovvero che la differenza iniziale di RAAN tra le due orbite e la differenza tra la variazione causata dalla non sfericità della terra abbiano segno opposto.

Nel caso in cui invece

$$\Delta\Omega \cdot \Delta\dot{\Omega} > 0 \quad (4.29)$$

i due piani si allontanano nel tempo, per cui risulta difficile articolare una missione sfruttante il J_2 in tempi brevi, dal momento che lo spacecraft dovrebbe attendere

che l'orbita "inseguita" faccia un'intera rivoluzione per tornare ad avere $\Delta\Omega$ e $\Delta\dot{\Omega}$ di segno opposto.

Durante lo svolgimento si considereranno quindi spostamenti tra orbite che rispettano la prima condizione, ovvero aventi differenze di RAAN che diminuiscono nel tempo.

Quando si parla di orbite che si avvicinano, è possibile calcolare il tempo impegnato per avere un annullamento della differenza di RAAN, chiamato t_* :

$$\Delta\Omega(t_0) + \Delta\dot{\Omega} \cdot t_* = 0 \quad (4.30)$$

$$t_* = -\frac{\Delta\Omega(t_0)}{\Delta\dot{\Omega}} \quad (4.31)$$

Nel caso in cui $\Delta\Omega(t_0)$ e $\Delta\dot{\Omega}$ siano concordi (ovvero le due orbite si stanno allontanando) il tempo t_* risulterebbe negativo; per tornare a ottenere un risultato fisicamente possibile si introduce nell'equazione il fatto di aspettare il doppiaggio dell'orbita la cui RAAN varia più velocemente rispetto all'altra:

$$\Delta\Omega(t_0) + \Delta\dot{\Omega} \cdot t_* + 2n\pi = 0 \quad (4.32)$$

ottenendo dunque

$$t_* = -\frac{\Delta\Omega(t_0) + 2n\pi}{\Delta\dot{\Omega}} \quad (4.33)$$

4.4.1 Esempio numerico

Per evidenziare le principali differenze tra le strategie di manovra attuabili in base al tempo di missione si farà uso del seguente esempio di trasferta tra due detriti (codice 016 e 118, $t_0 = 23557.18$):

	chaser	target
a [km]	7089	7144
i [rad]	1.7152	1.7052
e	0.0089	0.0053
Ω [rad]	2.5191	2.5280
$\dot{\Omega}_{J_2}$ [rad/giorno]	0.0173	0.0157

Tabella 4.1: Parametri orbitali al tempo t_0

Si possono immediatamente ricavare una serie di dati utili tra cui t_* :

$$t_* = -\frac{\Omega_T - \Omega_C}{\dot{\Omega}_T - \dot{\Omega}_C} = 5.53 \text{ giorni} \quad (4.34)$$

Inoltre sono calcolabili i valori di y e z i quali non saranno influenzati dalla lunghezza della missione, ma solo dalle caratteristiche delle orbite *chaser* e *target*. L'unica variabile che dipende da $t_{missione}$ è x , la quale segue un andamento lineare; la pendenza della retta è proporzionale a $\Delta\Omega$:

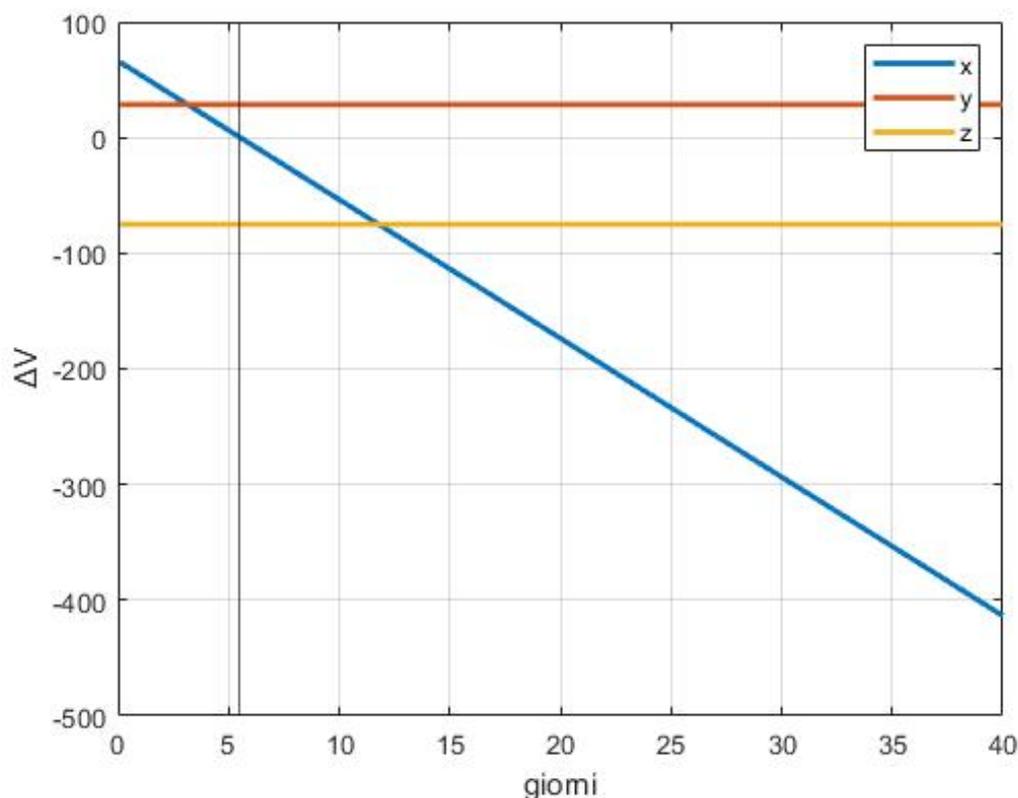


Figura 4.1: x, y e z all'aumentare della durata della trasferta

Si può notare come per $t = t_*$ si abbia $x = 0$; precedentemente il *chaser* è in ritardo rispetto al *target*, mentre una volta superato il punto t_* il valore di x diventa negativo e il *chaser* sorpassa il *target*, cambiando di segno il valore di $\Delta\Omega$.

4.4.2 Trasferta monoimpulsiva - impulso finale

Nel caso in cui il tempo di missione coincida con il tempo t_* , è possibile annullare la differenza di RAAN tra le due orbite senza compiere alcuna manovra, quindi $x = \Delta V_\Omega = 0$. La migliore strategia propulsiva sarà quindi aspettare che il $\Delta\Omega$ si annulli naturalmente, per poi fornire un impulso che vada a modificare inclinazione e altitudine per raggiungere l'orbita target; ciò rende la manovra monoimpulsiva, e dato che l'impulso avviene nell'istante finale della missione i coefficienti di

ripartizione si annullano: $s_x = s_y = s_z = 0$. Questo equivale a dire

$$\Delta V_A = 0 \quad (4.35)$$

$$\Delta V_B = \sqrt{y^2 + z^2} \quad (4.36)$$

e che $\Delta V_{TOT} = \Delta V_B$. Come si può evincere dal grafico, questa strategia propulsiva è economica in termini di ΔV se il tempo della missione è simile a t_* dal momento che la funzione del costo cresce in maniera piuttosto rapida una volta passata la condizione di ottimo.

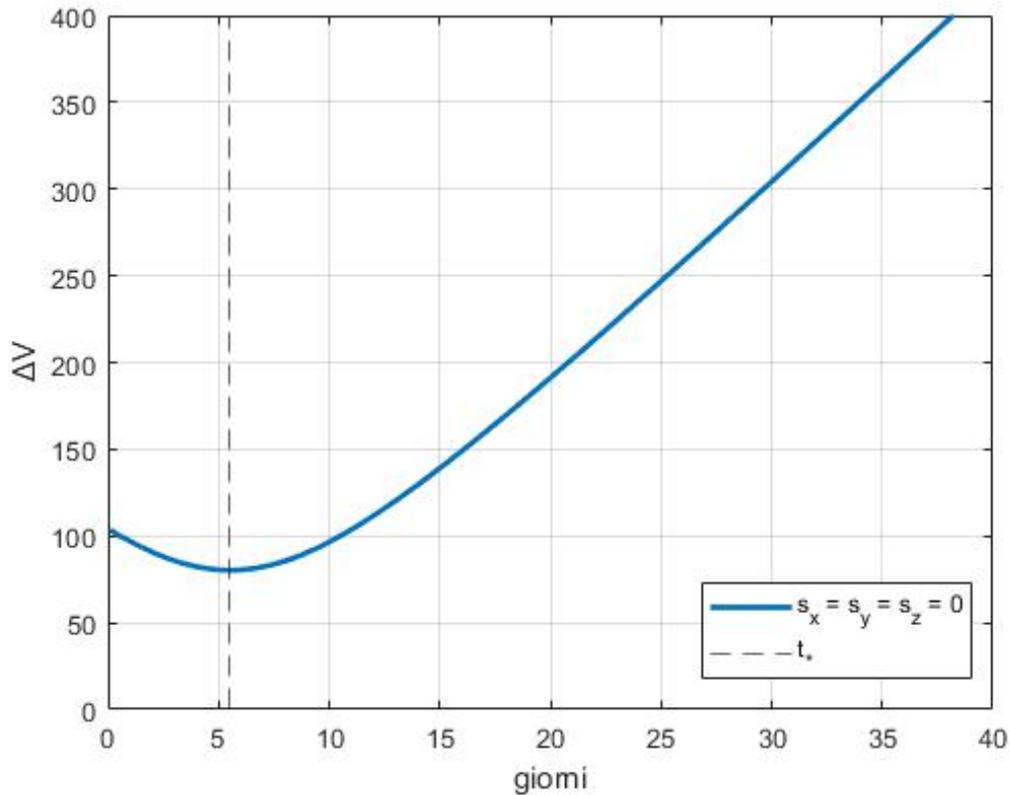


Figura 4.2: Impulso al tempo finale

4.4.3 Trasferta monoimpulsiva - impulso iniziale

Un'altro tipo di manovra possibile è una nuova manovra monoimpulsiva, ma invece di fornire la spinta al tempo finale, essa viene fornita al tempo iniziale. Ciò porta ad avere un costo slegato dal tempo di trasferta, ma solo variabile della situazione iniziale del sistema.

Per avere un solo impulso iniziale i coefficienti di ripartizione dovranno valere

$s_x = s_y = s_z = 1$, per cui

$$\Delta V_A = \sqrt{x_0^2 + y^2 + z^2} \quad (4.37)$$

$$\Delta V_B = 0 \quad (4.38)$$

con x_0 che non dipende dal tempo, ma dalla differenza di RAAN alla partenza:

$$x_0 = \frac{\pi}{2} \Delta \Omega \sin(i_0) V_0 \quad (4.39)$$

Dal momento che anche y e z sono costanti, il costo previsto da questa strategia propulsiva risulta costante; essa risulta dunque utile se i tempi sono o molto brevi per cui non è possibile svolgere un tipo di manovra più raffinata, oppure se i tempi di trasferta sono molto lunghi, dato che a differenza del metodo con impulso finale il quale ha un andamento crescente una volta superato $t > t_*$, il costo con l'altro tipo di strategia non varia. Guardando il seguente grafico verrebbe da pensare che l'impulso finale sia un'ottima strategia per la maggior parte dei tempi di trasferta, e in effetti è così se si considerano solamente trasferte monoimpulsive. In realtà questo metodo verrà poco utilizzato nel proseguo della tesi in quanto per la maggior parte del dominio temporale esso verrà oscurato da una strategia biimpulsiva più raffinata capace di raggiungere ΔV necessari minori, ma è comunque giusto menzionare la sua esistenza e applicabilità.

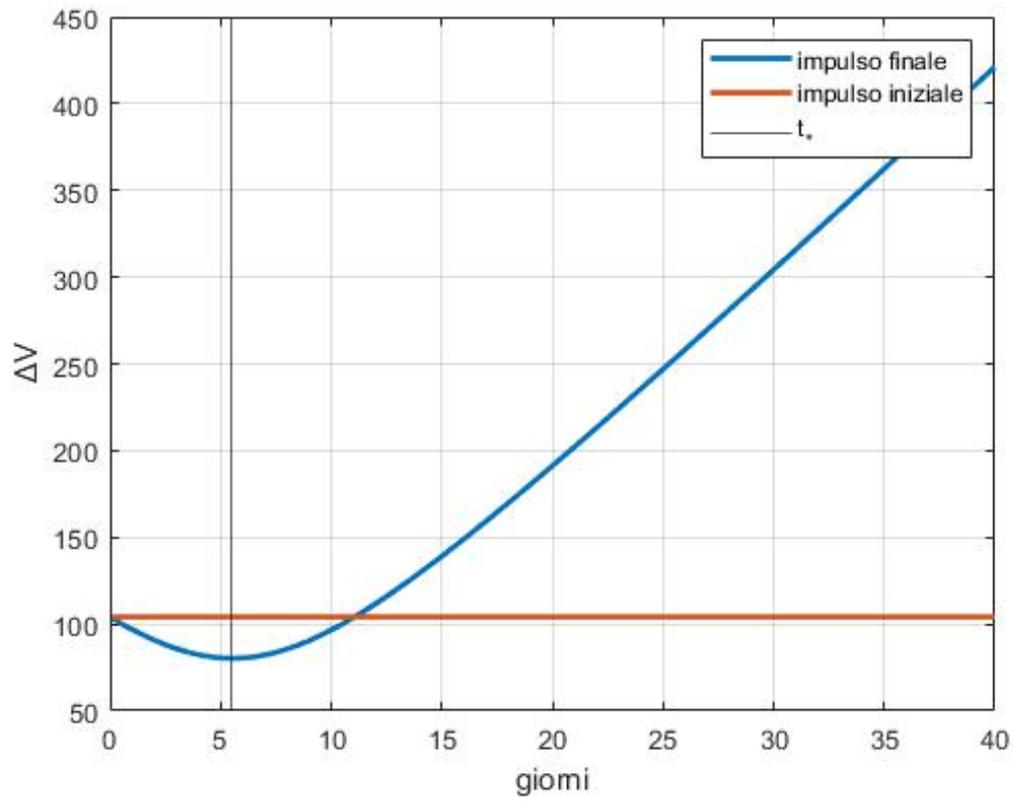


Figura 4.3: Confronto tra impulso finale ed iniziale

4.4.4 Trasferta biimpulsiva

I due metodi monoimpulsivi considerati sono piuttosto semplici, ma il principale difetto che posseggono è quello di essere una buona strategia propulsiva per degli intervalli di tempi piuttosto ridotti, per cui la maggior parte dei costi di trasferta da un detrito all'altro sarà analizzata seguendo la strategia biimpulsiva presentata precedentemente.

Ricordando i risultati ottenuti attraverso il calcolo dei parametri di ripartizione a partire dall'annullamento della derivata di ΔV^2 :

$$\begin{cases} s_x = \frac{2x + my + nz}{(4 + m^2 + n^2)x} \\ s_y = -\frac{2mx - (4 + n^2)y + mnz}{(8 + 2m^2 + 2n^2)y} \\ s_z = -\frac{2nx + mny - (4m^2)z}{(8 + 2m^2 + 2n^2)z} \end{cases} \quad (4.40)$$

è possibile studiare l'andamento della funzione di costo in base al tempo di trasferta con una strategia biimpulsiva, calcolando i valori delle due spinte:

$$\Delta V_A = \sqrt{(s_x x)^2 + (s_y y)^2 + (s_z z)^2} \quad (4.41)$$

$$\Delta V_B = \sqrt{(x + \Delta x - s_x x)^2 + (y - s_y y)^2 + (z - s_z z)^2} \quad (4.42)$$

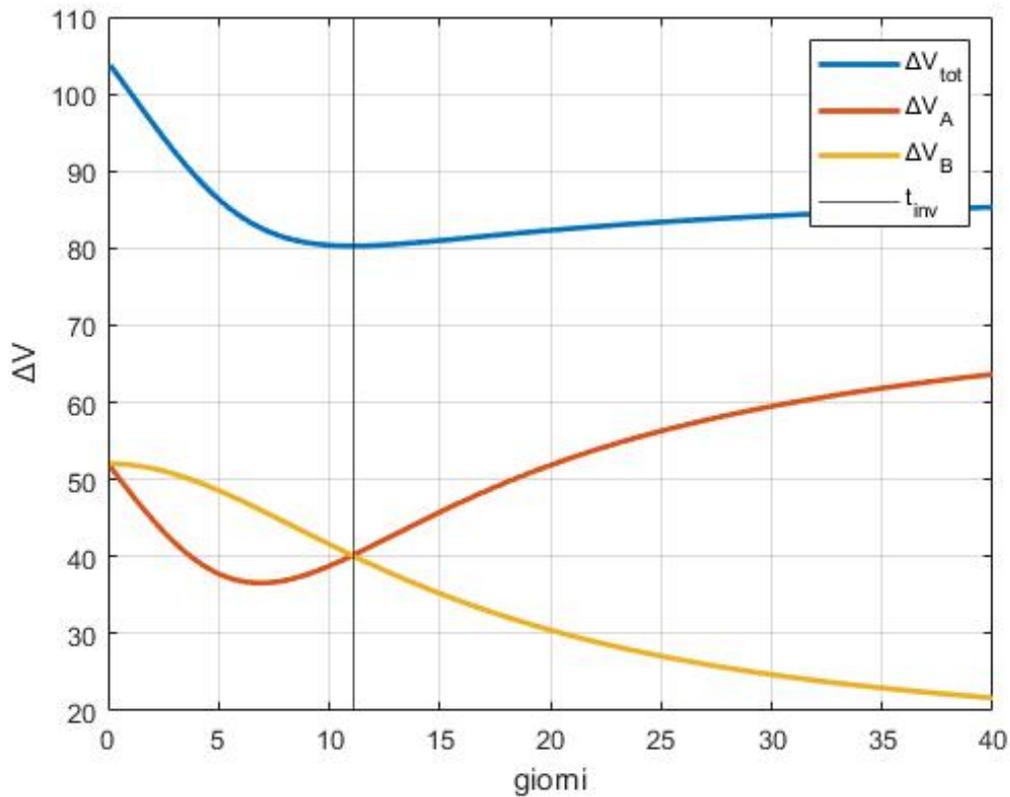


Figura 4.4: Andamento di ΔV_A e ΔV_B

Si può notare come l'andamento del costo totale presenti un minimo per un tempo $t > t_*$ e che tale tempo corrisponda al momento in cui $\Delta V_A = \Delta V_B$. Tale istante prende il nome t_{inv} e segna il punto in cui la funzione passa da decrescente a crescente nel tempo, oltre che il punto in cui $\Delta x + x = 0$:

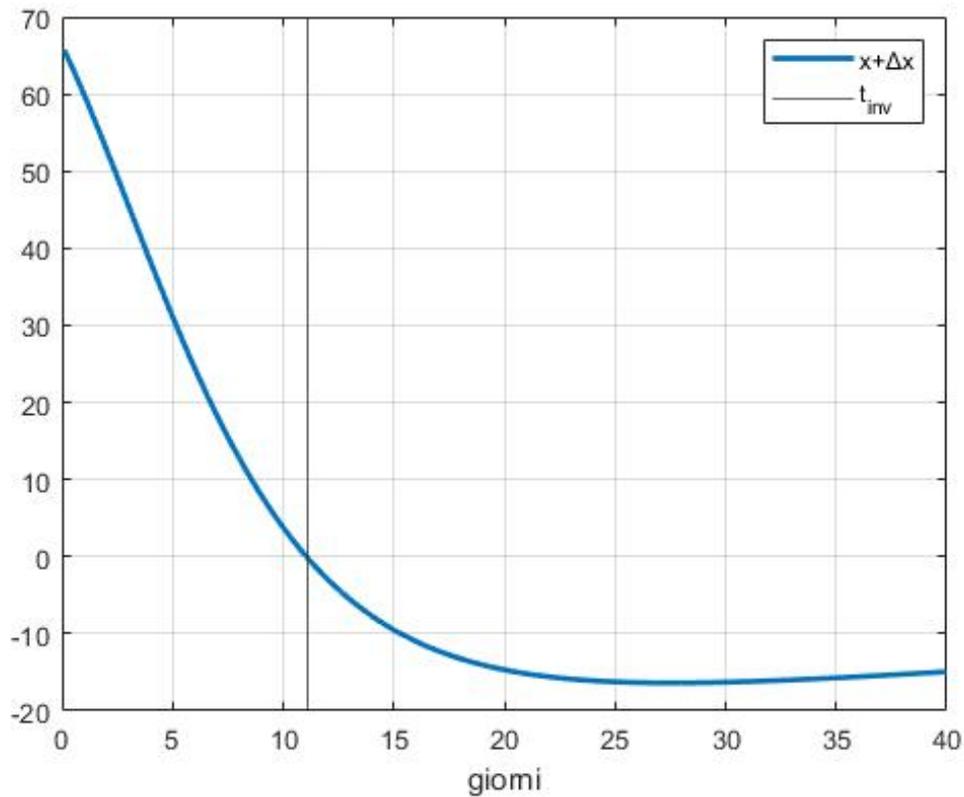


Figura 4.5: Andamento di $\Delta x + x$

Anche per il caso limite $t_{miss} = 0$ si hanno valori finiti di ΔV ; questo è un altro punto di forza di questa strategia propulsiva. Inoltre per $t_{miss} = 0$ si ottiene, come per $t_{miss} = t_{inv}$, che i ΔV del primo impulso e del secondo sono uguali. Inoltre è interessante studiare l'andamento dei singoli componenti di spinta di ciascun impulso, separando quindi il ΔV di x , y e z .

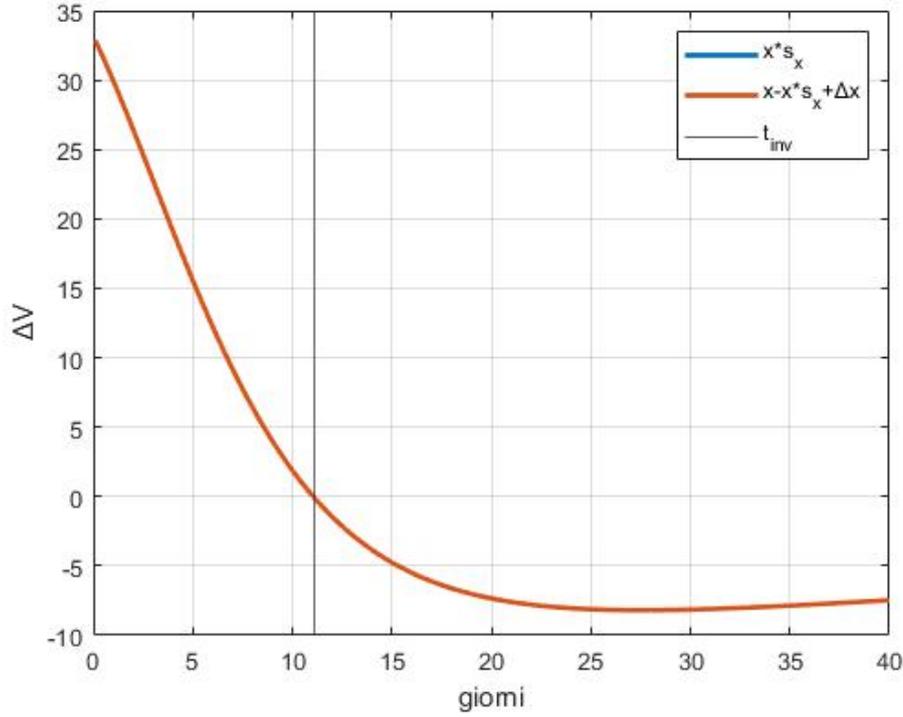


Figura 4.6: Andamento di xs_x e $x - xs_x + \Delta x$

Per quanto riguarda la componente di spinta che modifica la RAAN, ovvero x , si può notare che le curve relative a ΔV_A e ΔV_B sono sovrapposte e si annullano per $t = t_{inv}$, per cui si può individuare una correlazione tra t_* e t_{inv} , in quanto entrambi rappresentano per le relative strategie propulsive il tempo di trasferta ideale per cui non è necessaria una correzione attiva di Ω , la quale avviene sfruttando solamente la differenza di $\dot{\Omega}$ delle orbite di partenza e arrivo.

Dal momento che le curve sono identiche, si può scrivere che

$$xs_x = x - xs_x + \Delta x \quad (4.43)$$

per cui

$$xs_x = \frac{x + \Delta x}{2} \quad (4.44)$$

e quindi il modo migliore per dividere la spinta riguardante la modifica di Ω è quella di dare metà del totale nella manovra iniziale e l'altra metà in quella finale,

indipendentemente dal tempo impegnato dalla trasferta. Come si vedrà dai grafici successivi, la forma della curva determinata per la componente x è diversa dalle componenti y e z , in quanto non è solamente il valore di s_x a cambiare col tempo di trasferta, ma il valore di x stesso, mentre nel caso del controllo di inclinazione e altitudine i valori di y e z sono costanti, e sono i soli coefficienti di ripartizione a variare.

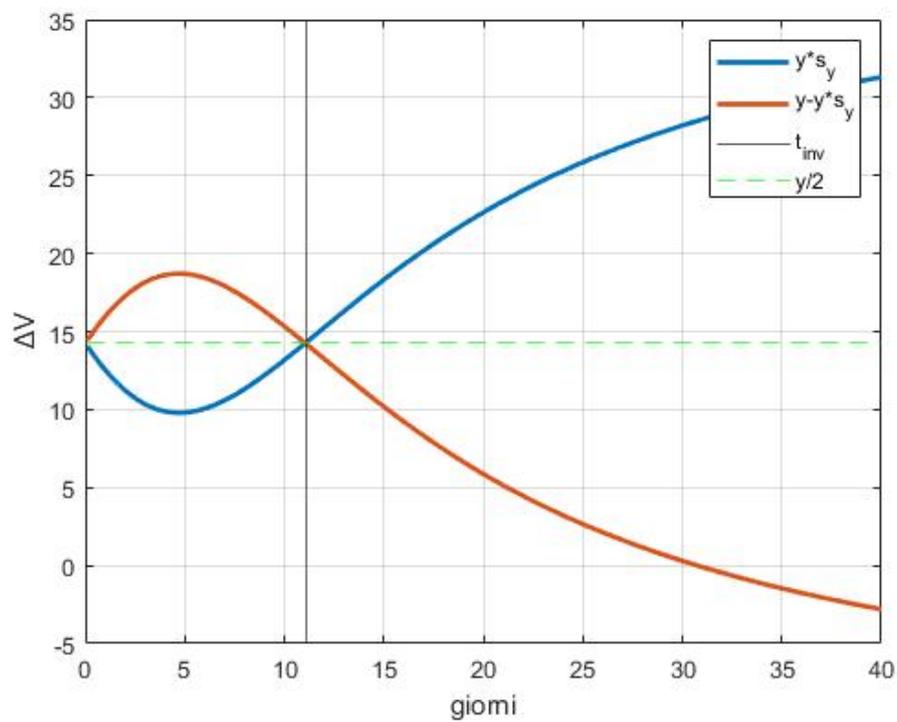


Figura 4.7: Andamento di ys_y e $y - ys_y$

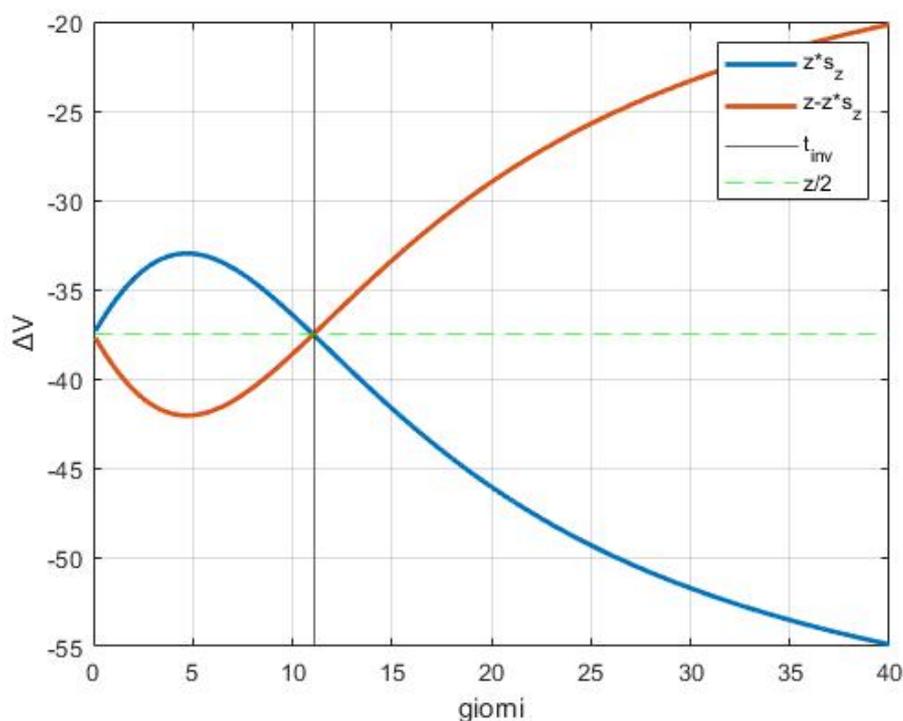


Figura 4.8: Andamento di zs_z e $z - zs_z$

Per quanto riguarda le componenti di spinta relative a y e z , è possibile notare come l'andamento della spinta durante il primo impulso e la spinta durante il secondo sia simmetrica rispetto alla metà del valore totale delle due variabili, calcolato a partire dai parametri orbitali delle orbite *target* e *chaser*.

Un'ulteriore osservazione riguarda il valore corrispondente a $t = t_{inv}$, infatti al contrario dell'andamento di xs_x le curve non si annullano, ma assumono lo stesso valore (dunque $y/2$ e $z/2$).

Confrontando le tre strategie propulsive in base al costo della manovra ΔV ottenuto per ciascuna di esse una volta fissato il tempo di trasferta, è possibile scegliere la più conveniente delle tre; si ottiene dunque un grafico rappresentante il minimo consumo:

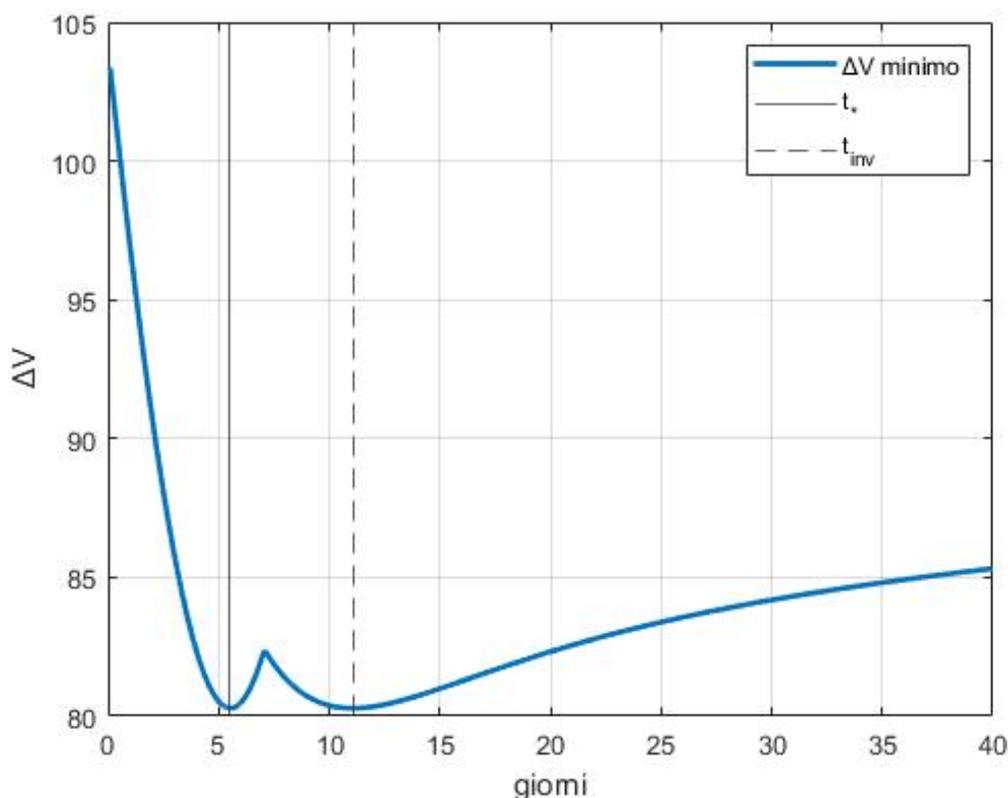


Figura 4.9: Costo minimo in base al tempo di missione

Si possono notare i due minimi della funzione in corrispondenza dei tempi t_* e t_{inv} , corrispondenti ai minimi valori di ΔV della trasferta monoimpulsiva con impulso finale e biimpulsiva. Nel caso in questione il ΔV necessario per conseguire una manovra impulsiva con impulso iniziale era troppo elevato, per cui la sua influenza nella scelta della strategia propulsiva migliore è nulla; ciò non esclude che possa essere una valida alternativa per trasferte riguardanti altre coppie di detriti. Per i tempi di trasferta compresi tra t_* e t_{inv} , precisamente per $t = 7.04$ giorni, il

costo presenta un massimo locale il cui valore è pari a quello ottenuto per $t \simeq 1.5t_{inv}$ per cui non sempre conviene accorciare la manovra se si è già nelle vicinanze di t_{inv} , mentre una volta superato $t = t_{inv}$ la funzione riprende il suo carattere monotono crescente.

Esiste inoltre una strategia propulsiva che permette di far risparmiare una piccola percentuale di ΔV quando il tempo di trasferta t_{miss} è superiore a t_* o a t_{inv} : essa consiste nell'esercitare una burn non più a fine missione bensì al tempo t_* o t_{inv} , per poi aspettare fino a t_{miss} il rendez-vous con il target.

Per esempio se nel caso in questione fosse fissata una durata di missione $t_{miss} = 8$ giorni, dal precedente grafico si può evincere come sia possibile arrivare al target con una manovra monoimpulsiva con un costo di 82.5 m/s circa. Sapendo però che la soluzione a ΔV minimo si può ottenere per un tempo $t_* = 5.53$ giorni, si può pensare di effettuare la manovra a $t = t_*$ e aspettare per un tempo $t_{miss} - t_* = 2.47$ giorni la fine della missione, invece che eseguire la burn a $t = t_{miss}$. Ciò permette di eseguire una trasferta di 8 giorni al costo minimo possibile.

Lo stesso ragionamento vale anche se t_{miss} è maggiore di t_{inv} ; in questo caso è possibile scegliere se fare una trasferta monoimpulsiva a $t = t_*$ oppure una trasferta biimpulsiva con burn iniziale al tempo $t = 0$ e seconda burn a $t = t_{inv}$ per poi aspettare fino ad arrivare a t_{miss} .

Sebbene sembri che questo metodo riesca a ottenere un $\Delta V = \Delta V_{min}$ per ogni durata di missione $t_{miss} \geq t_*$, è importante ricordare che non è sempre applicabile, in quanto possono esistere delle limitazioni riguardanti il tempo in cui si effettua ogni burn. Per esempio, nel caso di propulsione elettrica, le accelerazioni molto basse costringono ad avere tempi di burn dell'ordine di giorni, per cui è possibile che per una trasferta biimpulsiva il tempo necessario per ottenere ΔV_A sia maggiore di t_{inv} , per cui si perde la finestra temporale adatta a minimizzare il ΔV totale.

Il precedente metodo permette di risparmiare una percentuale di ΔV piuttosto

bassa se il tempo di missione fissato è abbastanza vicino a t_* e t_{inv} ; dal momento che le semplificazioni effettuate nei capitoli precedenti tendono già a sottostimare il ΔV necessario per la trasferta, si eviterà di utilizzare strategie in cui i tempi a cui sono effettuate le burn siano diversi da $t = 0$ o da $t = t_{miss}$ per delle manovre impulsive.

Capitolo 5

Algoritmi

5.1 Algoritmi genetici

Quando è necessario ottimizzare funzioni semplici, con poche variabili coinvolte e condizioni al contorno definite a priori, a volte si riesce a giungere ad una soluzione del problema in forma chiusa. Se ciò non è possibile, si può pensare di utilizzare algoritmi ricorsivi come il metodo del gradiente o simili per raggiungere una soluzione attraverso il calcolo numerico.

Esistono però delle funzioni che sono troppo complesse per essere ottimizzate con tali metodi; uno dei motivi può essere il numero di variabili coinvolte, o la dipendenza di una dalle altre: in questi casi è consigliabile l'utilizzo di algoritmi genetici.

Gli algoritmi genetici permettono di valutare diverse soluzioni di partenza e ricombinarle producendo nuove soluzioni, valutando di volta in volta le migliori e introducendo una serie di disturbi in modo tale da convergere verso una condizione di ottimo.

Il seguente schema riassume brevemente il funzionamento di un algoritmo genetico:

1. L'algoritmo inizia creando una popolazione iniziale casuale.
2. Successivamente, l'algoritmo crea una sequenza di nuove popolazioni. A ogni passo, l'algoritmo utilizza gli individui della generazione corrente per creare la popolazione successiva. Per creare la nuova popolazione, l'algoritmo esegue le seguenti operazioni:
 - (a) Valuta ogni membro della popolazione corrente calcolando il suo *valore di fitness*. Questi valori sono chiamati *punteggi di fitness grezzi* e vengono calcolati sulla base di una *fitness function*, la quale permette di associare ogni membro della popolazione ad un valore che esprime il suo grado rispetto al resto della popolazione.
 - (b) Scala i punteggi di fitness grezzi per convertirli in una gamma di valori più utilizzabili. Questi valori scalari sono chiamati *valori di aspettativa*.
 - (c) Seleziona i membri, chiamati genitori, in base ai loro *valori di aspettativa*. I membri peggiori della popolazione non diventano genitori e non partecipano alla creazione della nuova popolazione.
 - (d) Alcuni degli individui della popolazione attuale che hanno una fitness inferiore vengono scelti come *élite*. Questi individui d'*élite* passano alla popolazione successiva.
 - (e) Produce i figli dai genitori. I figli vengono prodotti apportando modifiche casuali a un singolo genitore (*mutazione*) o combinando le proprietà di una coppia di genitori (*incrocio*).
 - (f) Sostituisce la popolazione attuale con i figli per formare la generazione successiva.
3. L'algoritmo si ferma quando viene soddisfatto uno dei criteri di arresto.

4. Inoltre è possibile introdurre dei vincoli riguardanti la soluzione e dunque la popolazione dell'algoritmo. In questo caso, ogni nuova popolazione può essere adattata in base alle condizioni al contorno del problema.

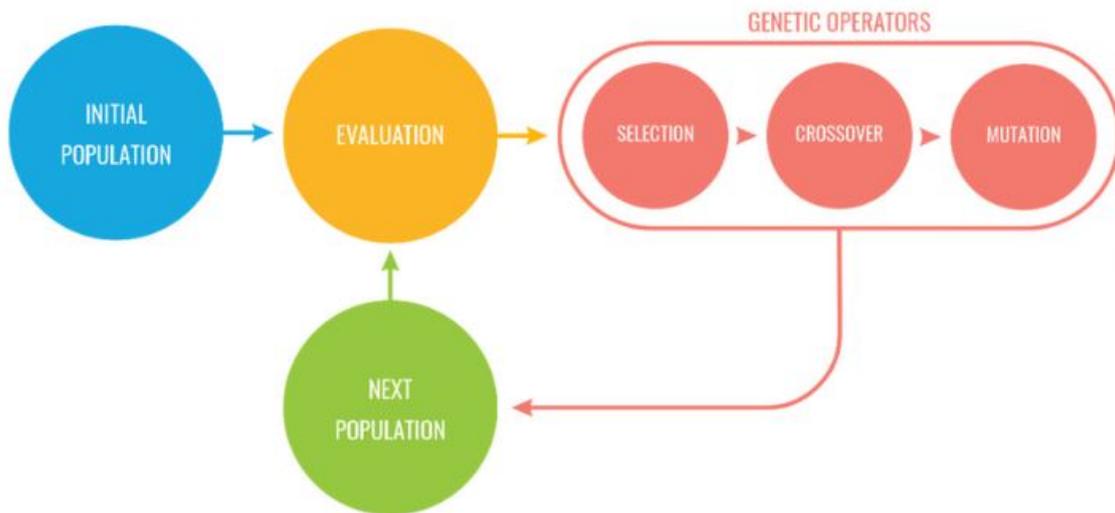


Figura 5.1: Schema di funzionamento di un genetic algorithm

5.2 Particle swarm optimization

La *particle swarm optimization* (PSO) è una tecnica di calcolo che deriva dal mondo animale, in particolare dal movimento degli stormi di uccelli e banchi di pesci e dalla loro abilità di mettere a disposizione l'esperienza di ciascun membro del gruppo al gruppo stesso per individuare un obiettivo comune. Un esempio concreto è la ricerca di cibo: anche se ogni uccello sta cercando in maniera casuale un punto dove trovare del cibo, lo stormo si muove in maniera ordinata seguendo la direzione più promettente fino a quel punto; se dovesse essere scoperta una zona più proficua da un membro dello stormo, tutto il gruppo aggiusterebbe la rotta verso il nuovo massimo.

Come nella GAO si sfrutta una popolazione di possibili soluzioni del problema, ma al contrario del caso precedente non è presente un rinnovamento della popolazione ad ogni ciclo, in quanto essa rimane costante. La ricerca del punto di ottimo (nel caso in questione il minimo globale di una funzione) avviene facendo muovere ogni membro della popolazione in uno spazio a N dimensioni in cui N è il numero di variabili del problema; ogni membro avrà quindi una posizione ed una velocità associata ad esso. Ad ogni iterazione dell'algoritmo, la popolazione si sposta in una nuova posizione e la velocità di ciascun membro viene aggiornata in base a tre parametri principali, ovvero:

- **inerzia**: indica quanto la particella tende a mantenere la propria velocità; valori bassi indicano che il membro della popolazione è facilmente manovrabile in direzioni diverse da quella che sta percorrendo
- **componente cognitiva o individua**: è legata alla distanza dal minimo locale trovato dal singolo membro della popolazione; se questo minimo non è quello globale, esso non viene trasmesso al resto della popolazione ma rimane nell'esperienza del membro che lo ha scoperto

- componente sociale: è legata alla distanza dal minimo globale trovato dalla popolazione fino a quella iterazione; ovvero è il minimo valore di tutti i minimi locali che formano la componente cognitiva di ogni membro. Quando viene trovato un minimo globale, tutta la popolazione ottiene l'informazione della sua posizione nelle iterazioni successive, e ciò rimane fino a quando un membro della popolazione trova un nuovo minimo globale.

L'equazione che aggiorna la velocità di ogni particella da un'iterazione all'altra è

$$\bar{V}_i^{t+1} = w\bar{V}_i^t + c_1r_1(\bar{P}_i^t - \bar{X}_i^t) + c_2r_2(\bar{G}^t - \bar{X}_i^t) \quad (5.1)$$

dove

- t è il numero di iterazione; viene utilizzata questa lettera per simulare la relazione tra posizione, velocità e tempo $X = X_0 + V \cdot t$ prendendo un tempo unitario come base di iterazione
- \bar{V}_i è la velocità di ciascun membro; al primo passo di iterazione, non avendo dati su cui basarsi da iterazioni precedenti, i valori di velocità saranno casuali
- \bar{X}_i è la posizione attuale di ciascun individuo; inizialmente si può decidere se spargere gli individui casualmente nel dominio o in maniera ordinata
- \bar{P}_i è il punto di ottimo locale migliore per ciascun individuo (*personal best*)
- \bar{G} è il punto di ottimo globale trovato fino all'iterazione d ; è da sottolineare che \bar{G} non ha pedice i in quanto il valore è comune a tutti gli individui della popolazione
- r è un valore casuale tra 0 e 1, il quale permette di distribuire in maniera meno schematica la velocità al passo successivo, in modo che due individui con stessa posizione e massimo locale trovato possano comunque muoversi in maniera differente

- w , c_1 e c_2 sono parametri di input dell'algoritmo e rappresentano il peso all'interno della ricerca del punto di ottimo della componente inerziale, cognitiva e sociale della popolazione. Negli algoritmi di *particle swarm* più raffinati è possibile aggiornare il termine w ad ogni iterazione per avere una convergenza più rapida

La posizione di ogni individuo viene poi aggiornata attraverso la nuova velocità:

$$\bar{X}_i^{t+1} = \bar{X}_i^t + \bar{V}_i^{t+1} \quad (5.2)$$

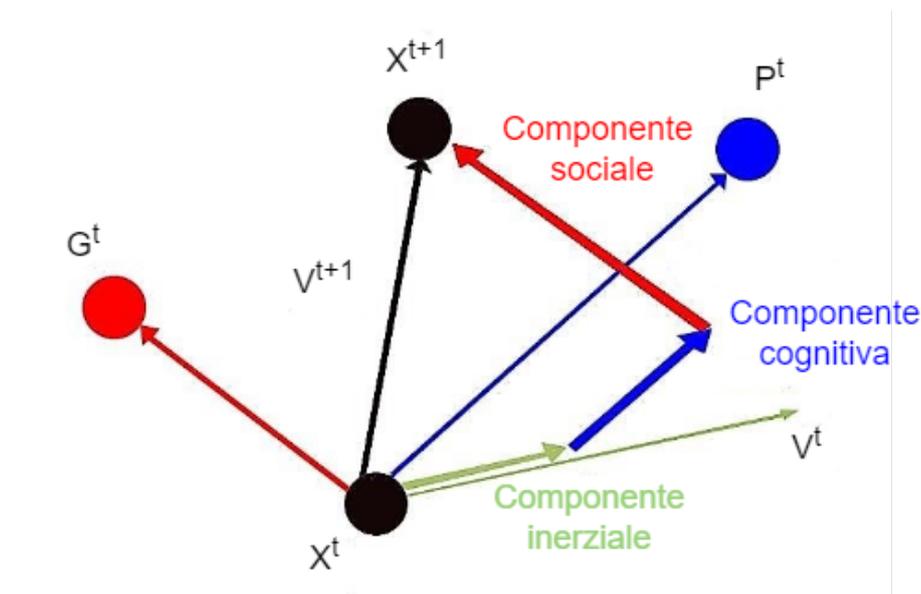


Figura 5.2: Schema di funzionamento della particle swarm optimization

Tutti gli individui della popolazione si troveranno dunque in una nuova posizione e con una nuova velocità; a questo punto il ciclo ricomincia fino a quando viene raggiunto un numero massimo di iterazioni o tutti i membri convergono verso una soluzione.

Capitolo 6

Propulsione continua

Le manovre impulsive non sono molto adatte a simulare una manovra compiuta attraverso l'utilizzo della propulsione elettrica, dal momento che essa è caratterizzata da valori di spinta molto bassi, i quali portano ad avere tempi di burn alti e non trascurabili. Tuttavia simulare una manovra con propulsione elettrica con precisione porterebbe ad avere calcoli molto complessi e difficilmente amalgamabili alle condizioni poste per il calcolo di ΔV nei capitoli precedenti. Per questo motivo l'estensione dei risultati alla propulsione continua avviene con un algoritmo di calcolo piuttosto semplice, ma che dà un'approssimazione migliore dei risultati rispetto alla sola spinta impulsiva.

Il metodo consiste nel correggere i tempi di spinta a valle del calcolo del ΔV illustrato in precedenza; la semplicità dell'algoritmo sta nel fatto che esso agisce solo in un secondo momento rispetto al caso impulsivo, di cui sfrutta i risultati. Si ipotizza che l'accelerazione dello spacecraft sia conosciuta e costante durante tutte le manovre; essa può essere ricavata dalla spinta del motore e dalla massa dello spacecraft secondo la relazione

$$a = \frac{T}{m} \tag{6.1}$$

Il caso impulsivo fornisce come risultati i ΔV_A e ΔV_B ottimi; da qui si possono ricavare i due tempi di burn t_A e t_B , sapendo che l'accelerazione è costante:

$$t = \frac{\Delta V}{a} \quad (6.2)$$

Per simulare un modello a propulsione continua, si ipotizza che la spinta di ciascuna burn rimanga impulsiva, ma che essa venga fornita non più al tempo t_0 e t_f , bensì a metà degli intervalli di tempo calcolati a partire dal caso impulsivo. Ciò equivale a dire che la prima burn avviene al tempo

$$t_{A,cont} = t_0 + \frac{t_A}{2} \quad (6.3)$$

mentre la seconda al tempo

$$t_{B,cont} = t_f - \frac{t_B}{2} \quad (6.4)$$

Ovviamente il modello è valido se le accelerazioni sono tali da garantire

$$t_A + t_B \leq t_f - t_0 \quad (6.5)$$

cioè che il tempo necessario alle due burn sia inferiore al tempo totale calcolato per la manovra nel caso impulsivo. Esiste quindi un'accelerazione minima per ogni manovra sotto la quale non è possibile usare la traiettoria scelta per la trasferta. Più è alto il valore dell'accelerazione e più ci si avvicina ai risultati del caso impulsivo, dal momento che un'accelerazione infinita porterebbe a tempi di spinta nulli e quindi per definizione una spinta impulsiva.

Si definisce tempo di *coasting* la eventuale fase non propulsa tra i due impulsi

$$t_{coast} = (t_f - t_0) - \frac{t_A}{2} - \frac{t_B}{2} \quad (6.6)$$

t_{coast} è nullo se $t_A + t_B = t_f - t_0$, ovvero se il secondo impulso inizia immediatamente alla fine del primo.

L'introduzione del precedente modello per la propulsione continua modifica i tempi in cui vengono ipotizzate le spinte impulsive da cui vengono calcolati nuovi valori

di ΔV e dunque nuovi tempi di burn, perciò è necessario un algoritmo che aggiorni volta per volta questi valori fino ad arrivare a convergenza.

Capitolo 7

Risultati

Per l'applicazione di quanto descritto in precedenza ad un caso pratico, si farà riferimento a una idea di missione relativa alla rimozione di un numero di detriti determinato da una sequenza considerata a priori e che sarà uguale per tutti i casi considerati. Si inizierà con un caso generale per poi aggiungere via via più condizioni per permettere di simulare una missione il più vicina ad un caso reale possibile. I parametri orbitali di ciascun detrito sono ricavati da una lista di oggetti orbitanti nota, contenente 123 possibili target di una missione di rimozione.

id	ref	epoch [mjd2000]	a [m]	e	i [rad]	W [rad]	w [rad]	M [rad]
000	2.1947649637665050E+04	7.1657396824464779E+06	1.4872294030037296E-03	1.7084949743764815E+00	5.4251494477699103E+00	5.1896466191474777E-01	3.2208883569328890E+00	
001	2.2167216339714400E+04	7.1194824568500286E+06	1.6818826066925901E-02	1.7190324556571761E+00	4.0302319446772756E+00	2.2497345785659948E+00	4.8807277888575742E+00	
002	2.1971814991607400E+04	7.1596212552715428E+06	3.7928260515825026E-03	1.6950996273137624E+00	2.9287068301393302E+00	4.4933242266297109E+00	6.2437606565086217E+00	
003	2.2169543272808445E+04	7.1105112426873706E+06	6.666298996063410E-03	1.6942903799536431E+00	6.2336478358175662E-01	3.41190926590909670E+00	4.7714199815539757E+00	
004	2.205222441592254E+04	7.1020000939046489E+06	1.0296158479309513E-03	1.7490728200660839E+00	2.6225638296225968E+00	2.3970723874904802E+00	3.1329207586641292E+00	
005	2.1974981005491496E+04	7.1734650347685460E+06	8.5007296809300539E-03	1.7250021365460082E+00	4.7168822657255580E+00	2.9873237970074014E+00	5.494481270940045E+00	
006	2.2148092594213187E+04	7.0580417103809919E+06	8.7234352836937229E-03	1.720673853059246E+00	3.5746425158521933E+00	4.9814352991997808E+00	4.1956188833732098E+00	
007	2.2142824876524191E+04	7.0596020528455991E+06	2.4932447158364495E-03	1.7069135576765333E+00	1.4559862537354920E+00	4.3020929502250089E+00	5.3481532423694276E+00	
008	2.2128717858909135E+04	7.1343239397846498E+06	1.6271597009714870E-02	1.7445269197014779E+00	1.3297786145266177E-01	5.8382098923205268E+00	5.5621781601339935E+00	
009	2.2037559358191760E+04	7.1472079797105445E+06	8.0077227049872458E-03	1.7054359870027067E+00	3.3787314329735190E+00	1.2760194010266370E+00	5.2234270395895157E+00	
010	2.2187763624733412E+04	7.1622151761647547E+06	2.4022908192228684E-03	1.7179524541970677E+00	2.6044168759567419E+00	1.8942795035536908E+00	4.3848444899363751E+00	
011	2.2091992995606113E+04	7.2325076497609392E+06	1.1773575210463410E-03	1.7066308859386896E+00	3.0516552852502272E+00	1.7076541122844591E+00	3.3574832859913597E+00	
012	2.1928718422188100E+04	7.1586430111981770E+06	1.0040189006720379E-02	1.7320255324625642E+00	7.2170125435764443E-01	2.9454391014605554E+00	3.2835498420677034E+00	

Figura 7.1: Estratto della lista di detriti

Il modo in cui la sequenza di detriti da rimuovere è stata ottenuta non è argomento di questa tesi, ma è utile sapere che la sequenza utilizzata non è l'unica possibile per cui si ottengono tempi e ΔV accettabili; esistono infatti altre sequenze con un numero di detriti raggiunti che può essere inferiore, uguale o superiore a quella selezionata.

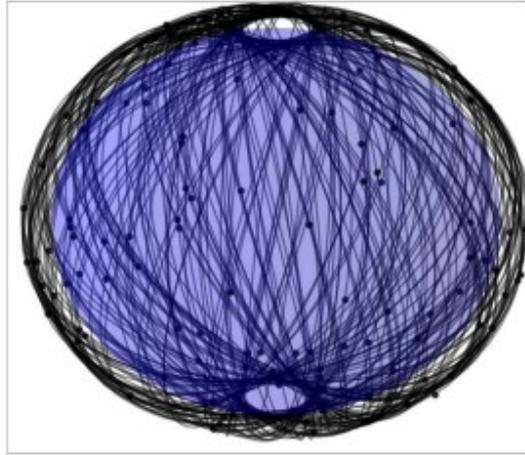


Figura 7.2: Visualizzazione delle orbite dei 123 detriti

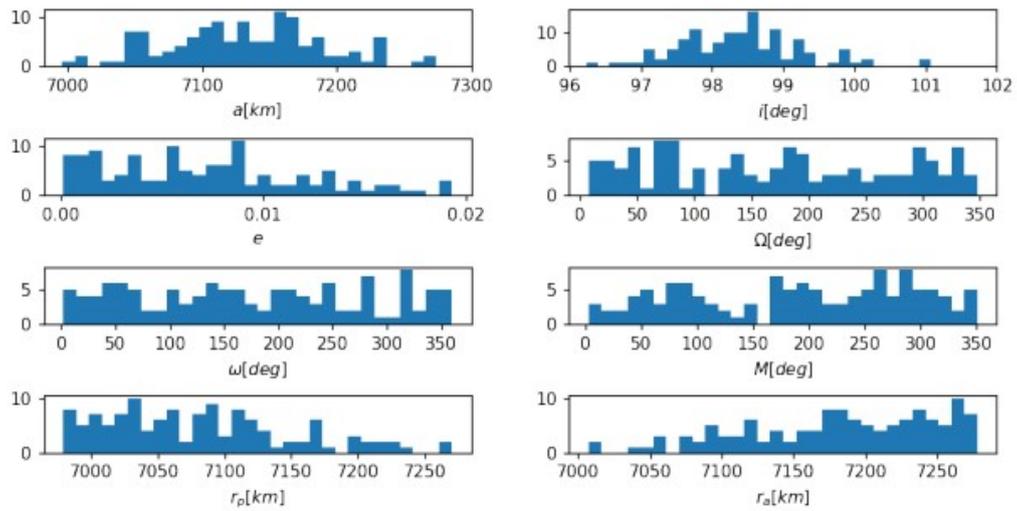


Figura 7.3: Distribuzione dei parametri orbitali tra i detriti

Per lo svolgimento dell'elaborato si farà riferimento al testo della 9^a edizione della Global Trajectory Optimization Competition (GTOC), una sfida aperta a istituzioni accademiche, aziende e privati nella quale si richiede di ottimizzare una determinata missione tenendo conto di determinate condizioni e limitazioni.

La richiesta della challenge è la seguente:

Progettare n missioni in grado di rimuovere complessivamente tutti i 123 detriti orbitanti. Una missione è una traiettoria con multipli rendez-vous dove un sottoinsieme di N elementi dei 123 detriti orbitanti viene rimosso tramite la consegna e l'attivazione di N dispositivi deorbitanti.

Dal momento che il seguente elaborato non si concentra sul trovare la migliore sequenza di rimozione dei detriti, bensì sulla minimizzazione del ΔV di trasferta tra degli obiettivi predefiniti, è stato scelto di semplificare il problema andando a ricalcare i passi di una soluzione consegnata dal team Jet Propulsion Laboratory JPL. Ciò permette di analizzare il problema sapendo in anticipo il numero n di missioni e la sequenza di detriti rimossa per ciascuna missione, in modo tale da concentrarsi solamente sul minimizzare il costo delle varie manovre.

7.0.1 Requisiti e dati iniziali

La missione ha tre principali requisiti:

- Il tempo complessivo (trasferta + smaltimento) tra due rendezvous non deve superare i 30 giorni. Pertanto, se l'epoca di arrivo a un detrito a è t_a e l'arrivo al detrito successivo b è t_b , allora $t_b - t_a \leq 30$ giorni.
- Non è possibile operare in parallelo con missioni diverse e tra due missioni consecutive deve intercorrere un tempo di almeno $\Delta t_M = 30$ [giorni], in modo che $t_j^f + 30 \leq t_i^s$ se $t_j^s \leq t_i^s$ per ogni $i \neq j$ (apice s = start della missione, f = fine della missione).
- Tutti gli eventi della missione (arrivi, partenze, manovre) devono avvenire in una finestra temporale consentita: per ogni evento che si verifica all'epoca t_{event} , deve valere che $23467 \leq t_{event} \leq 26419$ [MJD2000] (corrispondente a una finestra di 8 anni).

Per quanto riguarda il calcolo delle masse di propellente necessarie, si hanno due dati fissati a priori:

- Massa finale $m_f = 2000$ kg
- Impulso specifico $I_{sp} = 340$ s

Lo smaltimento di ciascun detrito avviene attraverso l'utilizzo di un *package* la quale attivazione ha un tempo minimo di 5 giorni, per cui è necessario che lo spacecraft rimanga nei pressi del detrito per tale lasso di tempo. Dopodichè lo spacecraft è libero di ripartire verso il prossimo detrito. Ogni *package* ha una massa fissa di 30 kg, la quale andrà sommata al peso a vuoto di 2000 kg e al peso del combustibile calcolato a partire dai valori di ΔV trovati durante l'ottimizzazione per ottenere il peso totale dello spacecraft all'inizio della missione.

Si ipotizza che una volta raggiunto un detrito, per il tempo di rimozione non sia necessario spendere ΔV e che i parametri orbitali dello spacecraft siano uguali a quelli del detrito fino alla nuova partenza.

In seguito alle strategie propulsive proposte nei capitoli precedenti, ogni trasferta avverrà in modo monoimpulsivo o biimpulsivo, e comunque non si avranno mai 3 o più impulsi per una sola trasferta.

Il fatto di utilizzare strategie biimpulsive potrebbe causare una leggera dissonanza coi dati relativi alla soluzione presentata dal JPL, in quanto essi sono stati calcolati potendo sfruttare un numero massimo di 5 *burn* per trasferta, ma comunque come si vedrà in seguito i ΔV ottenuti raramente variano più del 5% rispetto ai dati di riferimento.

Prima di cercare di risolvere l'intero problema della rimozione dei 123 detriti, si inizierà con casi più semplici riguardanti una sola sequenza di detriti. Nello specifico saranno studiati 4 casi qui riassunti:

- *Caso 1*: una sequenza, tempi di fermata su ciascun detrito costanti, spinta impulsiva
- *Caso 2*: una sequenza, tempi di fermata su ciascun detrito non costanti, spinta impulsiva
- *Caso 3*: una sequenza, ipotesi di spinta continua
- *Caso 4*: dieci sequenze, rimozione dei 123 detriti

Per la trattazione dei primi tre casi dell'elaborato è stata scelta una sequenza di 10 detriti, composta dai numeri di riferimento:

101 48 53 5 12 39 58 13 60 74

7.1 Caso 1

7.1.1 Descrizione

Per il primo caso di studio si faranno le seguenti ipotesi:

- Impulsi istantanei, quindi tempi di burn pari a 0 e spacecraft che cambia istantaneamente la sua velocità in seguito alla somministrazione di ΔV_A e ΔV_B
- Tempi di attesa su ciascun detrito fissi e pari a 5 giorni
- Lo spacecraft è inizialmente posizionato sul primo detrito. Non verrà quindi studiata la manovra che porta lo spacecraft dal lancio alla prima orbita target. Chiamato t_0 il momento di arrivo sul primo detrito della sequenza, lo spacecraft attenderà esattamente 5 giorni e poi inizierà la prima trasferta

Si introducono inoltre le seguenti condizioni:

- Tempo minimo di ciascuna trasferta: 0.1 giorni.
- Tempo massimo di trasferta: 25 giorni. Ciò permette di smaltire ciascun detrito in un tempo massimo di $25 + 5 = 30$ giorni.

Questo caso è il più semplice e meno dispendioso dal punto di vista del calcolo, in quanto le uniche incognite sono i tempi di trasferta da un detrito all'altro, quindi indicando con n il numero di detriti, le incognite saranno $n - 1$. Inoltre dal momento che non è ancora presente l'ipotesi di propulsione continua e tempi di burn diversi da 0, non è necessario introdurre un algoritmo ricorsivo che tenga conto del fenomeno, per cui si ottengono rapidamente i risultati dell'ottimizzazione sia con il metodo del *genetic algorithm* che la *particle swarm*. Tra i due tipi di ottimizzazione, la seconda è la più rapida a convergere, ma comunque i risultati ottenuti corrispondono sia per quanto riguarda i tempi che per i ΔV necessari per ogni manovra.

7.1.2 Analisi dei risultati

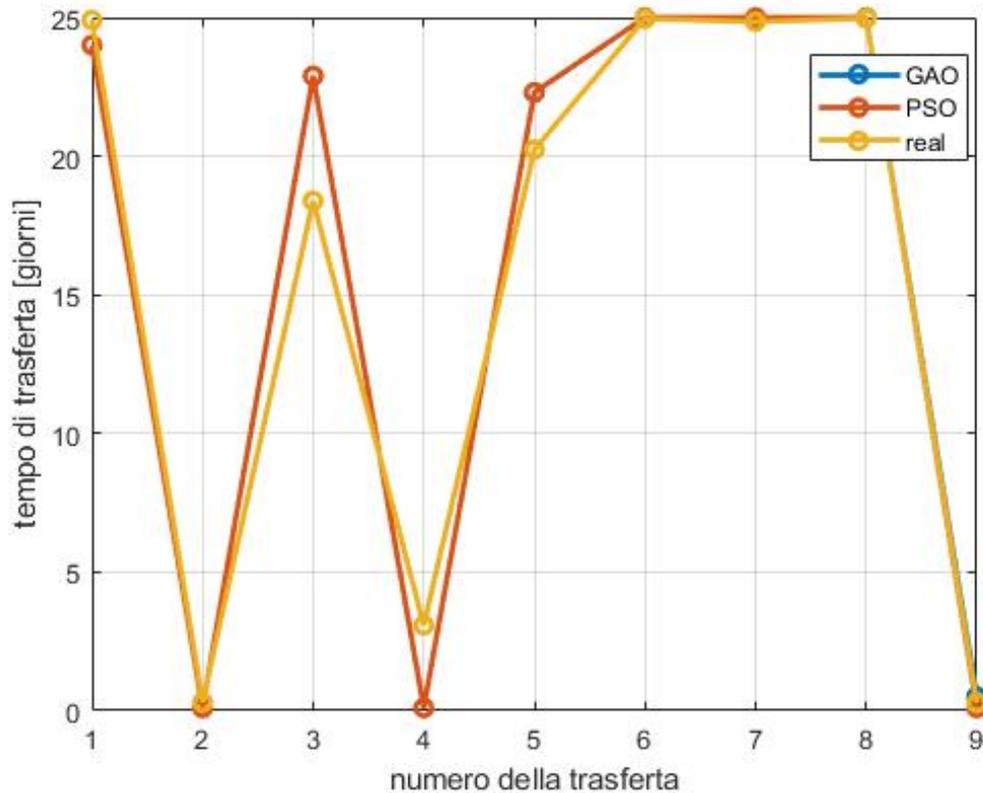


Figura 7.4: Tempo di ciascuna trasferta

Per quanto riguarda i tempi di trasferta è possibile notare come le soluzioni ottenute dai due metodi siano coincidenti fino all'ultima trasferta, dove si hanno due valori apparentemente discordanti. Il motivo di questa discrepanza può essere spiegato in due modi:

- L'ultima trasferta è l'unica la cui durata non influenza le altre trasferte in termini di ΔV , per cui è meno vincolabile e più soggetta alle fluttuazioni delle soluzioni trovate dalla GAO e dalla PSO
- Se l'ultima trasferta possiede un t_* abbastanza basso, le variazioni di ΔV ottenute sono abbastanza piccole da venire trascurate durante il calcolo del

minimo ΔV totale; in altre parole, se ad esempio $t_* = 10$, è possibile che i risultati ottenuti con un tempo di ultima trasferta di 10, 15, 20 o 25 giorni coincidano. Se ciò accade, l'ottimizzazione darà come risultato il primo trovato.

Come si può vedere dal grafico tempo- ΔV , nonostante la discrepanza riguardo l'ultima trasferta i valori di ΔV calcolati sono pressochè identici.

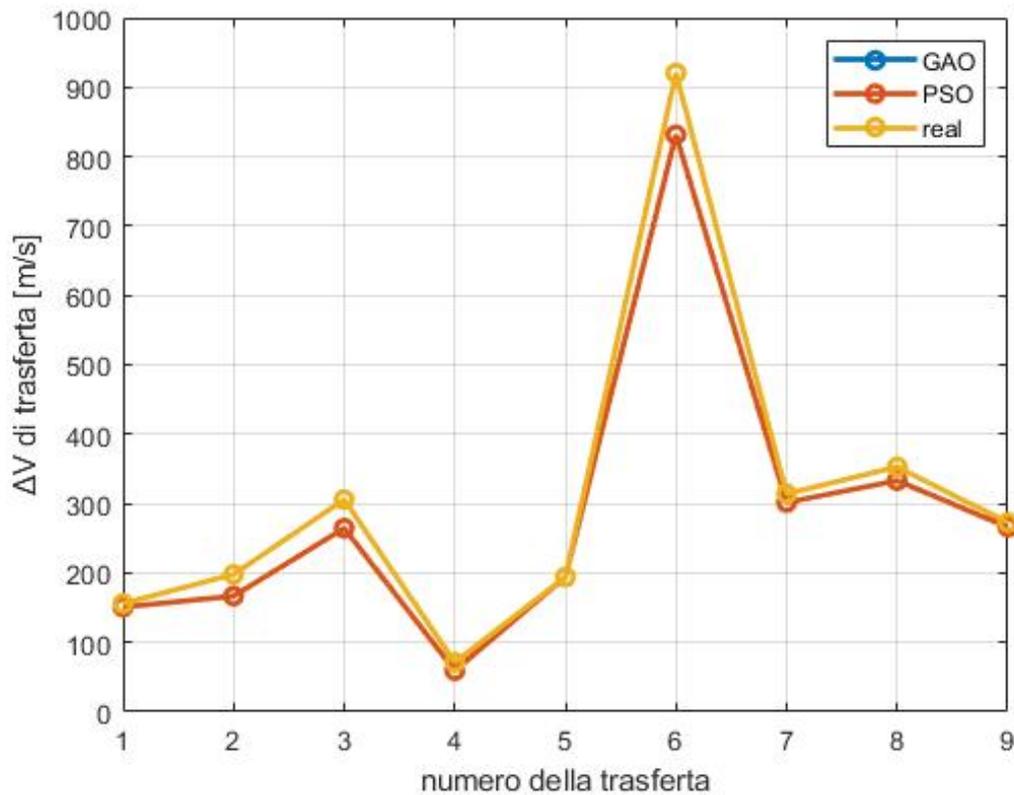


Figura 7.5: Costo propulsivo di ciascuna trasferta

Per avere una visualizzazione più chiara dei tempi e del costo totale per la rimozione della sequenza di detriti scelta è possibile combinare i precedenti grafici per ottenere un'evoluzione completa della missione dal tempo di partenza $t_0 = 0$ fino ad arrivare al tempo finale t_f . Il tempo finale è incognito a priori, in quanto è la somma di tempo di trasferta e tempo di permanenza su ciascun detrito.

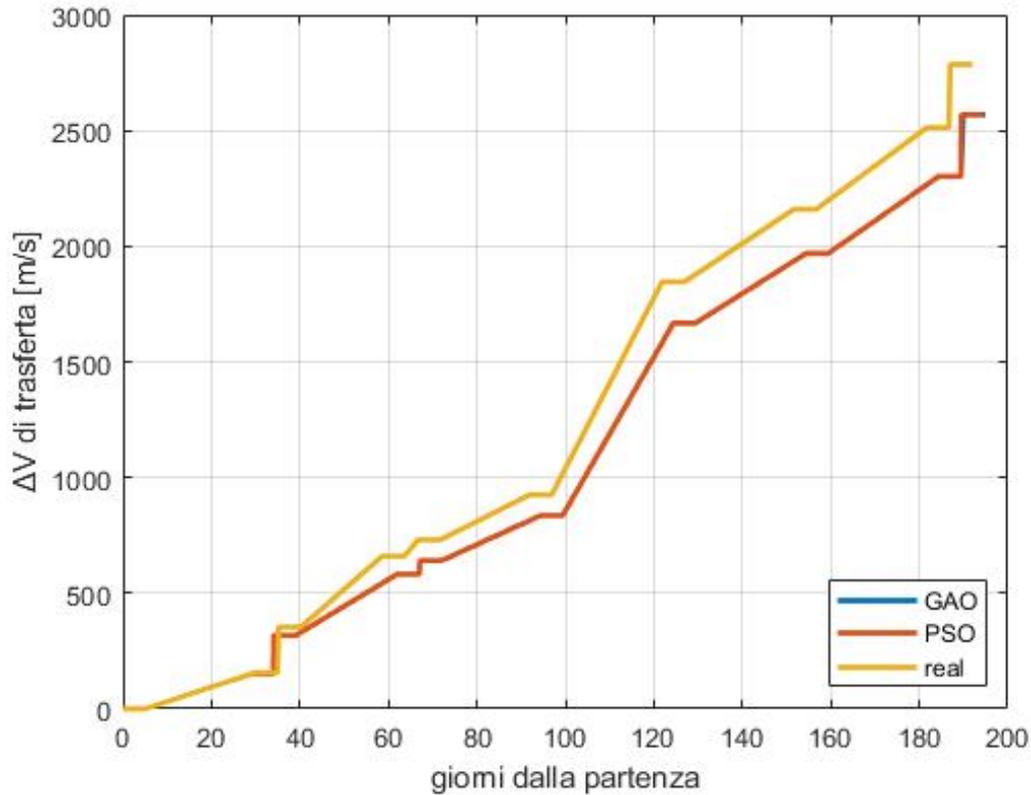


Figura 7.6: ΔV e tempi totali di missione

Una volta calcolati tutti i valori di ΔV necessari per ciascuna trasferta, usando l'equazione del razzo è possibile calcolare la massa totale di partenza. Si ricorda infatti che per ogni spedizione vale l'ipotesi di partenza $m_f = 2000$ kg. Alla massa di propellente calcolata andrà inoltre sommata la massa totale dei package deorbitanti consegnati, ovvero $30 \cdot n_{detríti}$.

Dai calcoli effettuati si ottiene:

- massa propellente $m_p = 2320$ kg
- massa totale dei *package* deorbitanti $m_u = 300$ kg
- massa finale spacecraft $m_f = 2000$ kg

La somma delle precedenti masse porta a trovare il valore m_0 della massa dello spacecraft a inizio missione:

$$m_0 = m_p + m_u + m_f = 4620 \text{ kg} \quad (7.1)$$

Viene qui invece rappresentato l'andamento della massa dello spacecraft via via che esso raggiunge un numero di detriti maggiore fino ad arrivare all'ultimo:

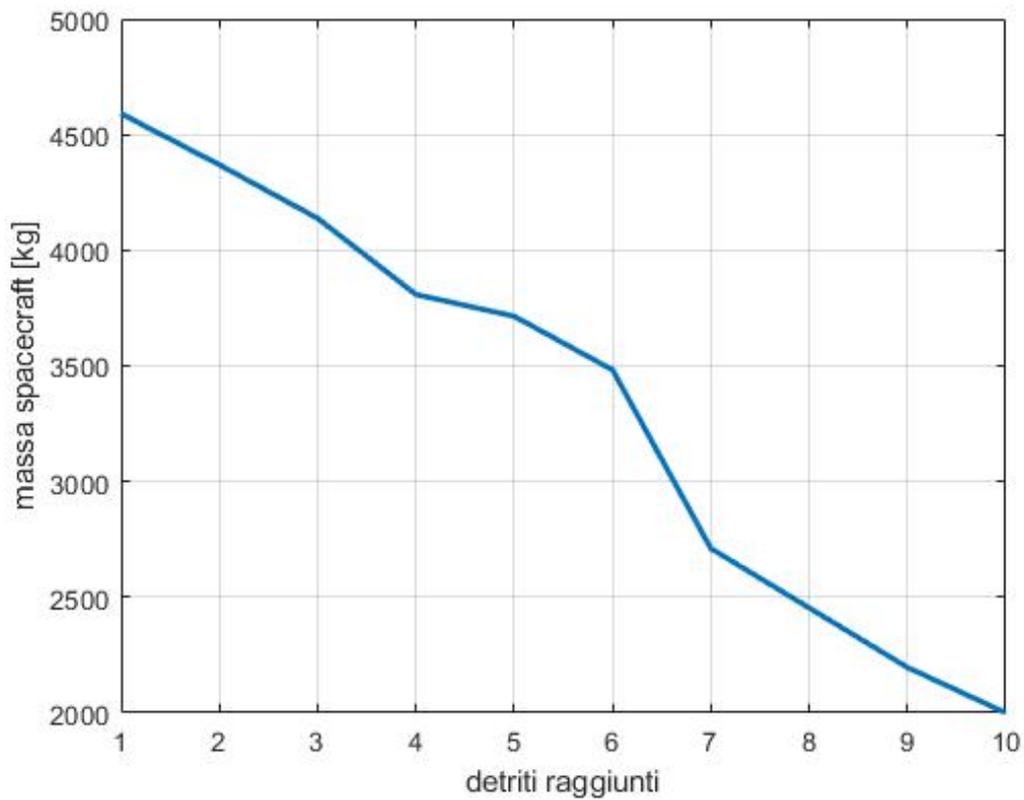


Figura 7.7: Evoluzione della massa dello spacecraft

7.1.3 Confronto GAO/PSO

Pur sapendo che i risultati ottenuti sono gli stessi, confrontando i due metodi si possono ottenere informazioni interessanti come velocità di convergenza del metodo e numero di iterazioni necessarie per giungere alla soluzione.

Si riporta per primo il grafico relativo a GAO:

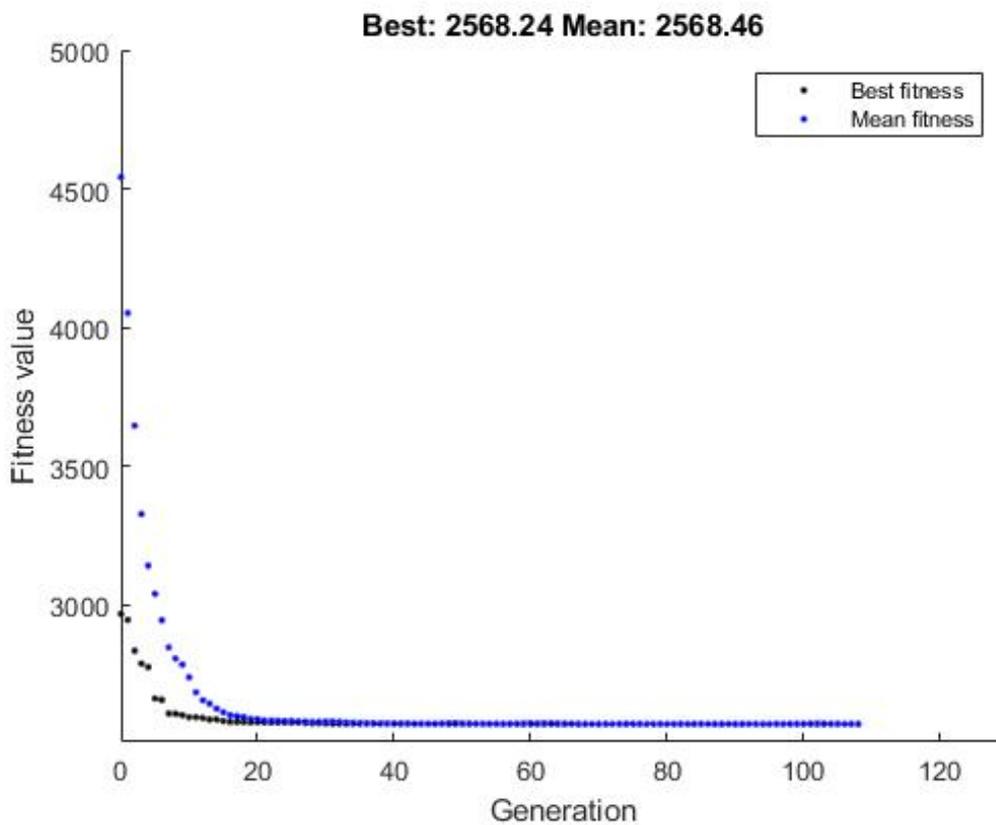


Figura 7.8: Iterazioni GAO

Si possono notare due particolari contraddistintivi di questo tipo di ottimizzazione:

- invece di *iterazioni*, nella GAO si parla di *generazioni* per specificare quante volte la popolazione di soluzioni è stata sostituita alla precedente. Sebbene non ci sia differenza in termini pratici, il termine *generazione* riporta alla mente il funzionamento di base della GAO, con soluzioni genitori che si

riproducono per dare vita a soluzioni figlie possedenti le caratteristiche migliori della coppia genitoriale

- oltre alla migliore soluzione trovata, il grafico mostra la *mean fitness*, ovvero il punteggio medio dell'intera popolazione in una determinata generazione. Quando la *mean fitness* risulta uguale al valore di ottimo globale (*best fitness*), allora la popolazione ha raggiunto le migliori caratteristiche possibili, per cui le nuove generazioni saranno quasi del tutto identiche a quelle precedenti; l'ottimizzazione può dunque avere termine.

Si riporta ora il grafico relativo alla PSO:

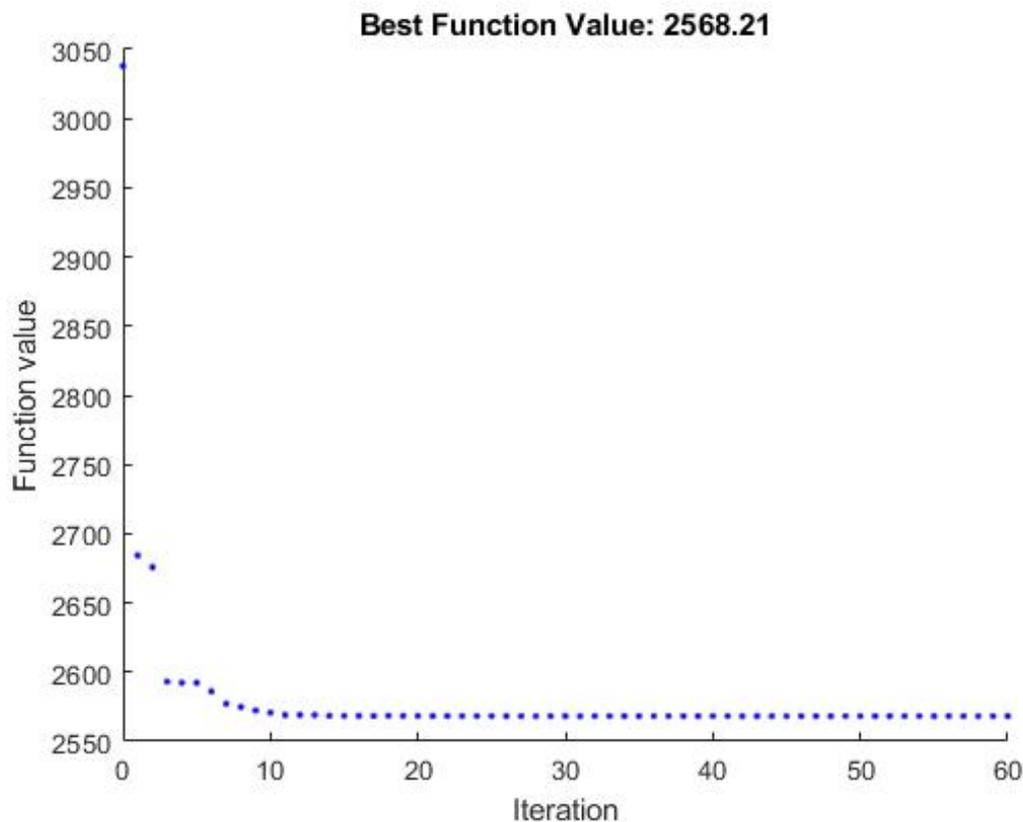


Figura 7.9: Iterazioni PSO

Questo metodo di ottimizzazione tende a convergere in un numero minore di iterazioni rispetto alla GAO: in questo caso sono bastate 48 iterazioni per avere lo

stesso risultato. La principale differenza tra i due metodi sta nel comportamento una volta arrivati ad un plateau: la GAO compie progressi costanti anche se molto piccoli, mentre la PSO tende a fare passare diverse iterazioni tra due soluzioni diverse.

Per come è stato impostato il problema, entrambi i metodi sono costretti a fermarsi una volta che sono trascorse 20 iterazioni senza miglioramenti; ciò spiega come la PSO converga più velocemente, dal momento che la GAO riesce a trovare piccoli miglioramenti anche se la soluzione trovata è molto vicina a quella ottimale. Dato che può essere complicato immaginare la lunghezza di un calcolo rapportandola alla durata di una iterazione, viene qui rappresentato il tempo per arrivare a convergenza dei due algoritmi in secondi:

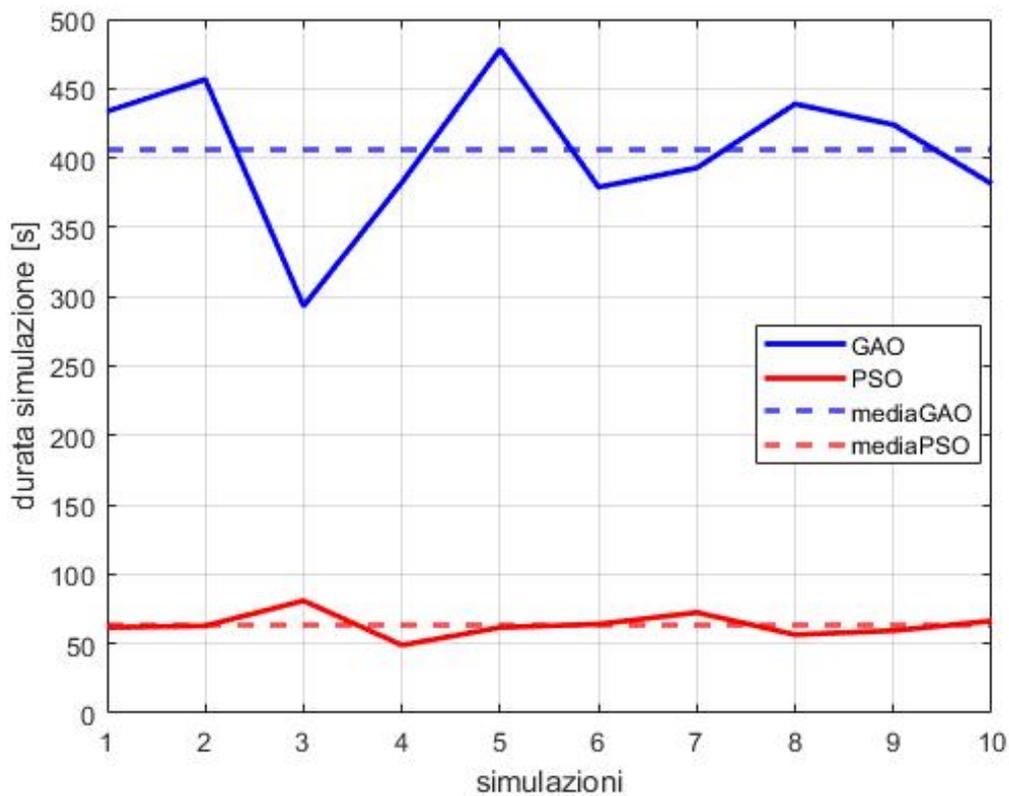


Figura 7.10: Tempi di convergenza

Se per la PSO il tempo di calcolo si aggira intorno al minuto, per la GAO bisogna attendere la soluzione molto più a lungo: si va da 5 a quasi 10 volte la durata che con l'altro metodo di ottimizzazione; inoltre la varianza dei tempi di calcolo della PSO è minore della sua corrispettiva, permettendo di potersi aspettare un risultato in tempi più prevedibili. Dal momento che i risultati ottenuti sono gli stessi, è consigliabile l'utilizzo della PSO quando possibile; si vedrà infatti anche negli altri casi di studio che la *particle swarm* sarà sempre la più veloce a convergere.

7.2 Caso 2

7.2.1 Descrizione

Per il secondo caso di studio si cambia l'ipotesi riguardante il tempo di stazionamento su ogni detrito rispetto al caso 1. Le ipotesi diventano dunque:

- Impulsi istantanei, quindi tempi di burn pari a 0 e spacecraft che cambia istantaneamente la sua velocità in seguito alla somministrazione di ΔV_A e ΔV_B
- Tempi di attesa su ciascun detrito variabili e incogniti
- Lo spacecraft è inizialmente posizionato sul primo detrito. Non verrà quindi studiata la manovra che porta lo spacecraft dal lancio alla prima orbita target. Chiamato t_0 il momento di arrivo sul primo detrito della sequenza, lo spacecraft attenderà un numero di giorni incognito (maggiore o uguale a 5 giorni) e poi inizierà la prima trasferta

Si introducono inoltre le seguenti condizioni:

- Tempo minimo di ciascuna trasferta: 0.1 giorni
- Tempo massimo di trasferta: 25 giorni. Ciò permette di smaltire ciascun detrito in un tempo massimo di $25 + 5 = 30$ giorni
- Tempo minimo di stazionamento su ciascun detrito: 5 giorni, in quanto il *package* da attivare per iniziare il deorbit dei detriti non varia rispetto al caso precedente
- Tempo massimo di stazionamento su ciascun detrito: 29.9 giorni, in modo tale da avere comunque un tempo di $0.1 + 29.9 = 30$ giorni nel caso di minimo tempo di trasferta

Rispetto al caso precedente, il numero delle incognite da calcolare è raddoppiato, in quanto per $n = 10$ detriti ci sono:

- $n - 1 = 9$ tempi di trasferta da un detrito all'altro
- $n - 1 = 9$ tempi di attesa su ciascun detrito. Il tempo trascorso sull'ultimo detrito non viene calcolato in quanto lo spacecraft non dovrà più ripartire per raggiungere una nuova orbita e quindi qualunque valore non influenza il ΔV necessario. Si può ipotizzare per semplicità che il tempo di permanenza sul detrito n sia di 5 giorni, come nel caso precedente.

7.2.2 GAO - primo metodo

Si comincerà dalla descrizione del metodo di utilizzo classico del *genetic algorithm*, ovvero attraverso la definizione di un sistema di disequazioni lineari che andranno a delimitare lo spazio delle soluzioni ottenibili. Si otterrà dunque una disequazione matriciale della forma $Ax \leq b$, dove nel caso in questione:

- A è una matrice 9×18 (nove condizioni sulle somme di tempi di trasferta e attesa, diciotto variabili)
- x è il vettore 18×1 contenente i 9 tempi di trasferta nelle prime 9 posizioni e i 9 tempi di attesa nelle ultime 9 posizioni
- b è un vettore 9×1 contenente i tempi massimi di attesa+trasferta, ovvero 30 giorni.

Nello specifico, i valori di A su ciascuna riga i sono nulli, a parte $a_{i,i} = a_{i,i+9} = 1$, dal momento che nel vettore x ogni tempo di attesa precedente alla trasferta i è posizionato nella $i+9$ colonna. Una volta inizializzati A , x e b è possibile procedere all'ottimizzazione come nel caso precedente.

7.2.3 PSO e GAO - secondo metodo

Al contrario della GAO, per quanto riguarda la *particle swarm optimization* non è possibile indicare a priori una limitazione sulla forma della soluzione in base a disequazioni (lineari o non) matriciali, per cui è necessario trovare uno stratagemma per poter comunque utilizzare questo tipo di ottimizzazione senza trascurare le condizioni imposte dal problema.

Nel caso di tempi di fermata su ciascun detrito non costanti si hanno il doppio delle incognite del caso in cui i tempi di rimanenza sono fissi e pari a cinque giorni; ciò complica il problema maggiormente di quanto si possa pensare, dal momento che:

- un numero doppio di incognite aumenta di molto la potenza di calcolo richiesta e i tempi per ottenere una soluzione
- dal momento che i tempi di rimanenza non sono più fissi, non è possibile fissare un intervallo assoluto per la durata di una tratta tra un detrito e l'altro, ma essa deve essere messa in relazione al tempo di attesa sul detrito di partenza in modo tale che la somma dei due tempi non superi il limite della missione

Il secondo punto si può spiegare come segue: nel caso di tempi di attesa costanti pari a 5 giorni, è sempre vero che

$$t_{wait} + t_{trans} \leq 30 \quad (7.2)$$

se $t_{trans} \leq 25$; ciò non è più vero nel secondo caso, dal momento che si potrebbe avere per esempio $t_{wait} = 8$ giorni, $t_{trans} = 24$ giorni e quindi un totale di 32 giorni, sforando così il tempo massimo per una trasferta.

Dunque è necessario imporre che la soluzione rispetti la condizione sopra descritta: se per la GAO è possibile farlo attraverso una serie di disequazioni nella forma $Ax \leq b$, per la PSO si deve invece trovare un modo per riscrivere t_{wait} in funzione di t_{trans} . Ciò avviene attraverso un nuovo parametro k , il quale varia tra 0 e 1 e

diventa una nuova incognita del problema sostituendo t_{wait} , la quale verrà calcolata a posteriori come

$$t_{wait_i} = 5 + k_i(25 - t_{trans_i}) \quad (7.3)$$

per $i = 1, \dots, n_{trasferte}$. Si segnala che il tempo di rimanenza sull'ultimo detrito non è calcolato in quanto non si avranno altre trasferte, per cui lo spacecraft è libero di scegliere per quanto tempo restare.

La formula precedente fa le veci del sistema $Ax \leq b$ della GAO in quanto crea un numero di disequazioni pari al numero di trasferte da compiere, ottimizzando sia i valori di t_{trans} sia di k per trovare il minimo valore di ΔV .

La riscrittura di t_{wait} ottenuta può essere inoltre riusata nella GAO, eliminando il sistema matriciale posto a priori per avere una formulazione del problema identica al caso della PSO; i risultati ottenuti possono poi essere confrontati con l'altro caso in modo da evidenziare possibili differenze o congruenze dei due metodi, i quali comunque dovrebbero portare a risultati simili.

7.2.4 Analisi dei risultati

In entrambi i metodi i tempi di trasferta vengono calcolati direttamente, per cui compaiono nei primi 9 posti del vettore delle incognite; è possibile notare come essi abbiano un andamento molto simile, a parte per l'ultima trasferta nella quale essi si distaccano dalla soluzione di riferimento, e inoltre la soluzione trovata attraverso il primo metodo usante GAO si distingue dalle altre due.

In tutti i seguenti grafici si indicherà con Ab la soluzione ottenuta da *genetic algorithm* sfruttando la condizione $Ax \leq b$, mentre con PSO e GAO si indicheranno le soluzioni ottenute con il secondo metodo attraverso *particle swarm* prima e *genetic algorithm* poi.

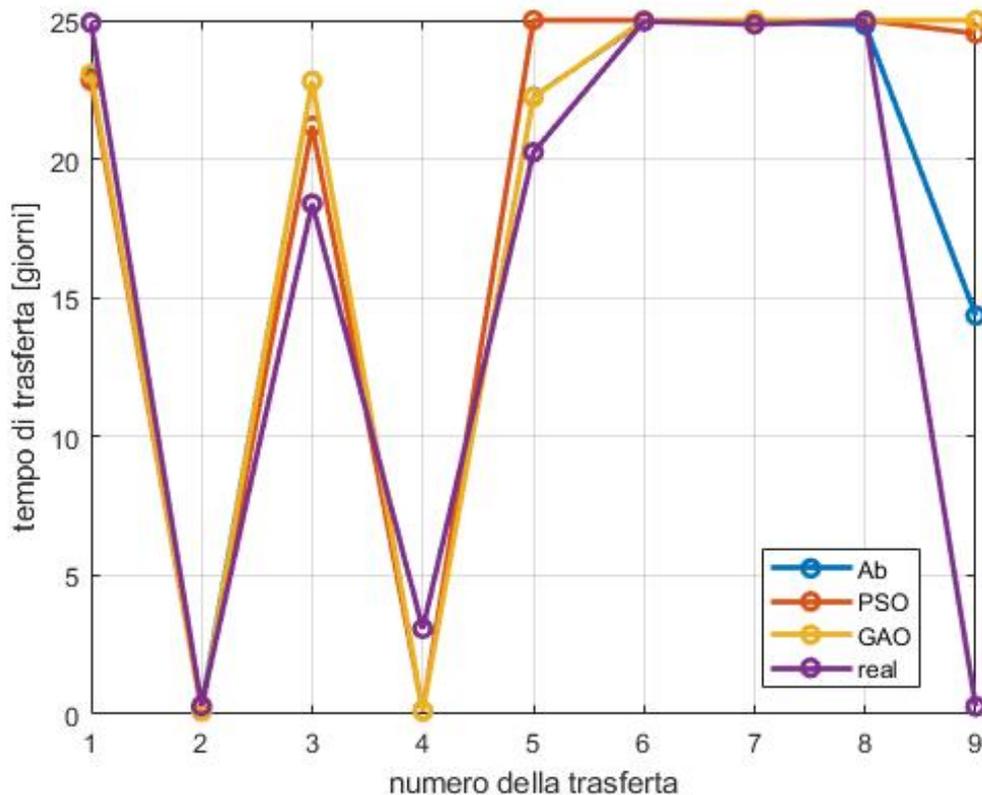


Figura 7.11: Tempi di trasferta

Si può notare come l'andamento dei tempi di trasferta sia estremamente simile al

caso dei tempi di attesa su ogni detrito fissi: la spiegazione del fenomeno si può trovare andando ad osservare i tempi di attesa calcolati. Si ricorda che nella GAO usando il sistema di disequazioni lineari è possibile trovare direttamente i valori dei tempi di attesa, mentre per il metodo usato per la PSO è necessario calcolarli sulla base dei tempi di trasferta e del parametro k ottenuti.

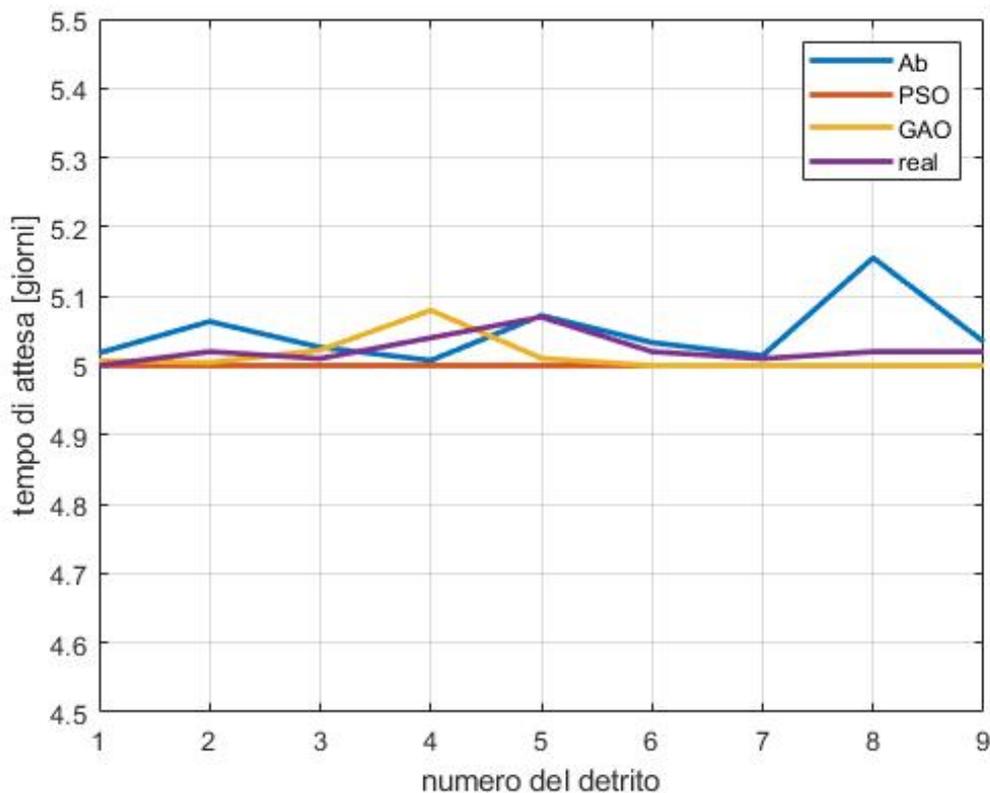


Figura 7.12: Tempi di attesa

Analizzando il grafico si può notare come i tempi di permanenza siano molto vicini ai 5 giorni del caso precedente; considerando che il loro valore poteva variare in un intervallo tra 5 e 29.9 giorni è possibile affermare che il caso precedente era già di per sè prossimo a una condizione di ottimo.

Facendo un confronto tra i metodi utilizzati, può sembrare che ci sia una grande variabilità, ma bisogna considerare che il grafico qui riportato non è scalato su

tutto l'intervallo disponibile, ovvero quasi 25 giorni. Ciò porta a considerare quasi ininfluenza una variazione di qualche centesimo di giorno ai fini del calcolo del ΔV minimo.

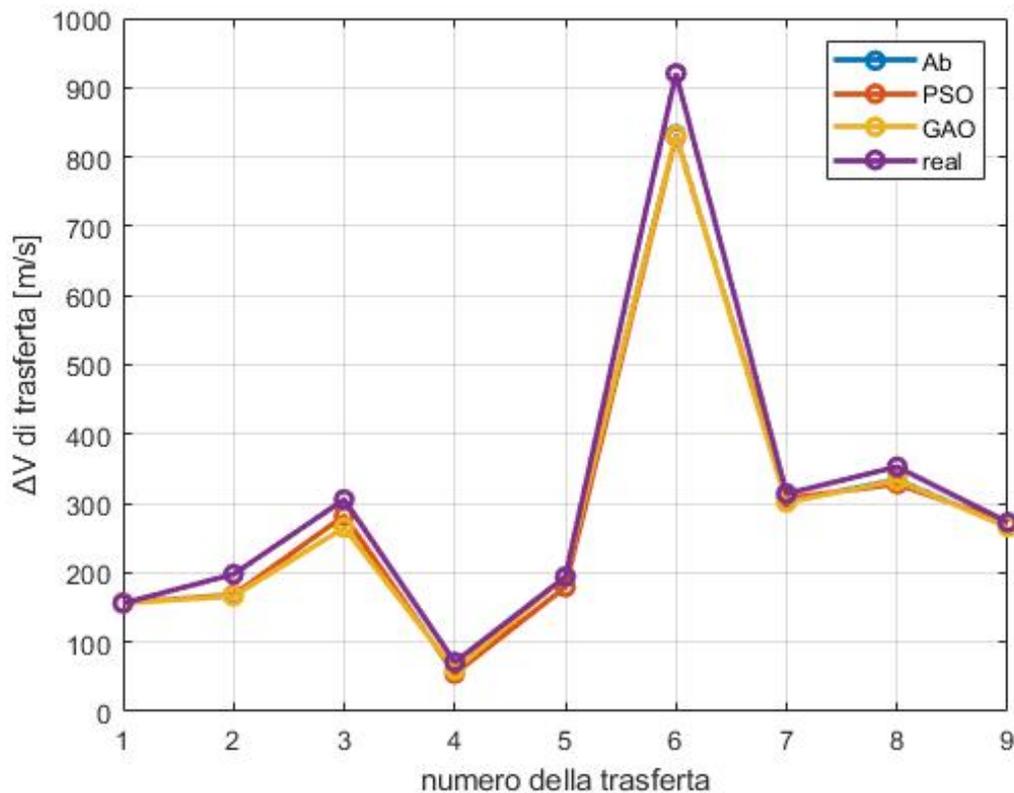


Figura 7.13: Costo propulsivo

Dal momento che sia i tempi di trasferta che di attesa ottenuti sono molto simili al caso precedente, anche i valori di ΔV necessari avranno un andamento simile. In totale è possibile ottenere un risparmio di ΔV di circa 10-15 m/s, quindi estremamente marginale rispetto ai quasi 2570 m/s necessari per completare la missione.

Andando a studiare l'evoluzione della missione nel suo insieme fino al tempo finale t_f si può notare come le spezzate combacino fino ad arrivare all'ultima trasferta, la cui durata è calcolata diversamente dai due metodi di calcolo. Sebbene sia

difficile da notare dal grafico, il metodo GAO sfruttante la condizione $Ax = b$ si dirama dagli altri due, i quali rimangono sovrapposti. Nonostante questa differenza, il ΔV raggiunto alla fine della missione è uguale in tutti e tre i casi, indicando che nonostante ci si trovi in una condizione di ottimo si ha comunque un piccolo margine di scelta per la strategia riguardante l'arrivo sull'ultimo detrito.

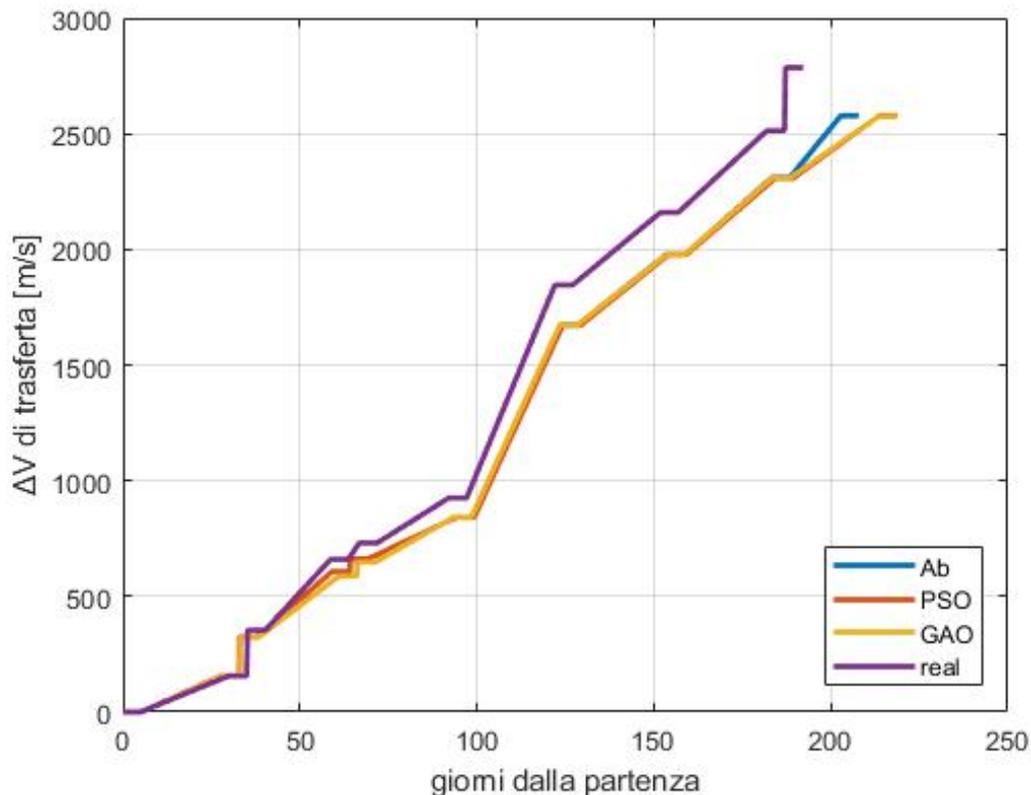


Figura 7.14: ΔV e tempi totali di missione

Come nel caso precedente è possibile calcolare la massa iniziale dello spacecraft e del propellente necessario utilizzando l'equazione del razzo. Dal momento che i ΔV ottenuti dai tre metodi di calcolo sono coincidenti, il calcolo delle masse avverrà prendendo in considerazione i soli ΔV_{PSO} . Si ottengono dunque:

- massa propellente $m_p = 2304$ kg

- massa totale dei *package* deorbitanti $m_u = 300$ kg
- massa finale spacecraft $m_f = 2000$ kg

La somma delle precedenti masse porta a trovare il valore m_0 della massa dello spacecraft a inizio missione:

$$m_0 = m_p + m_u + m_f = 4604 \text{ kg} \quad (7.4)$$

Si ottiene dunque un risparmio di 16 kg di carburante rispetto al caso in cui i tempi di permanenza su ciascun detrito sono fissi.

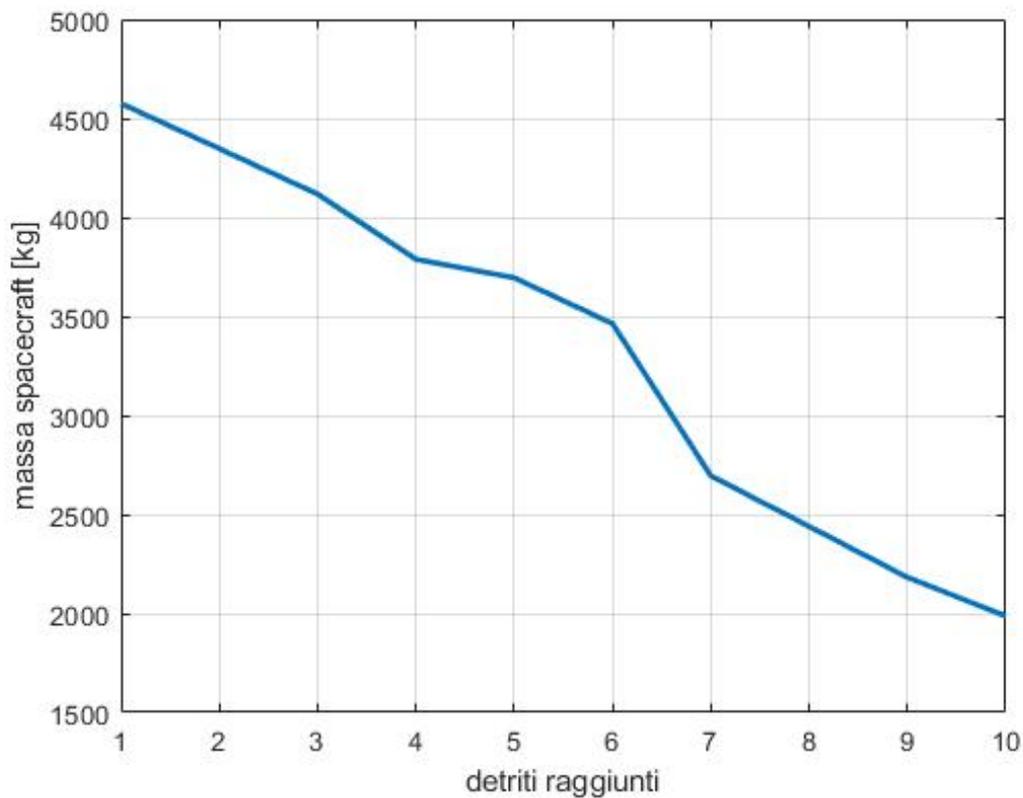


Figura 7.15: Massa dello spacecraft

7.2.5 Confronto GAO/PSO

Rispetto al caso precedente, il numero maggiore di variabili in gioco fa emergere delle differenze più marcate nella velocità e nella modalità in cui i due algoritmi arrivano a convergenza.

Per quanto riguarda la GAO si avranno due grafici, in quanto sono stati usati due metodi differenti per calcolare i tempi di attesa su ciascun detrito. Partendo dal primo metodo (sfruttante la condizione $Ax \leq b$) l'andamento che si ottiene è il seguente:

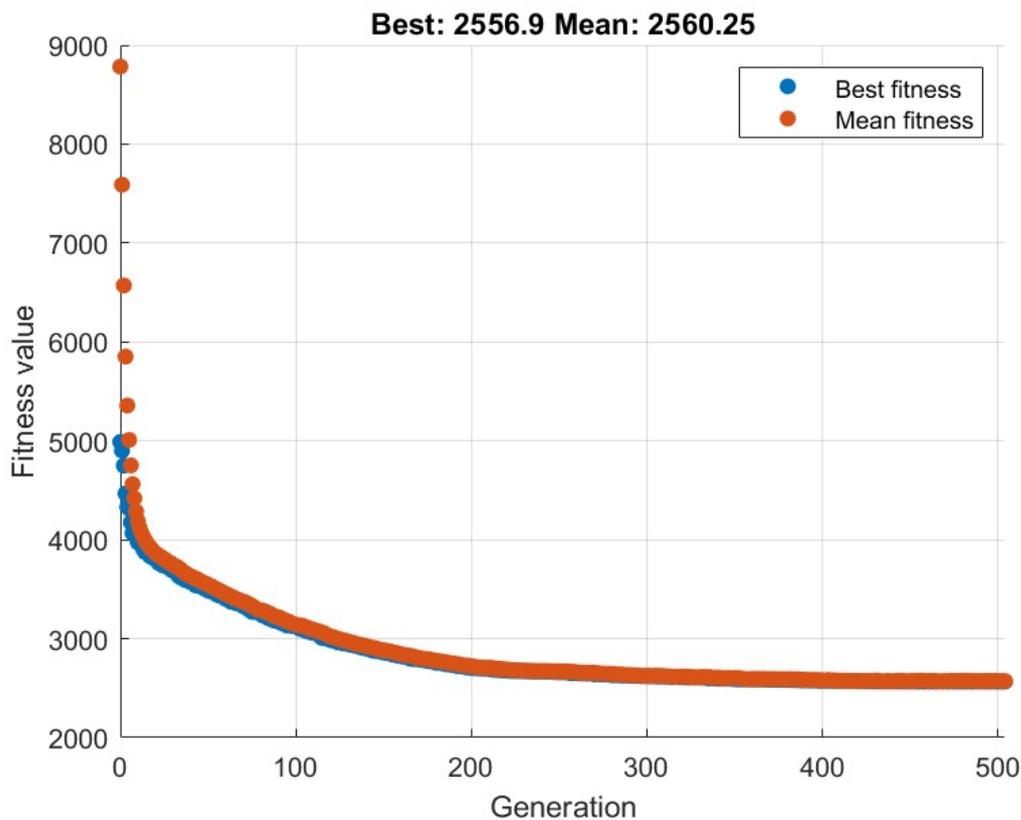


Figura 7.16: Iterazioni GAO - primo metodo

Si ripete ora il calcolo della GAO, usando però il metodo di sostituzione del tempo t_{wait} attraverso i coefficienti k , come nella PSO: Il metodo sfruttante i coefficienti k converge leggermente prima del metodo nominale della GAO; è ipotizzabile che la

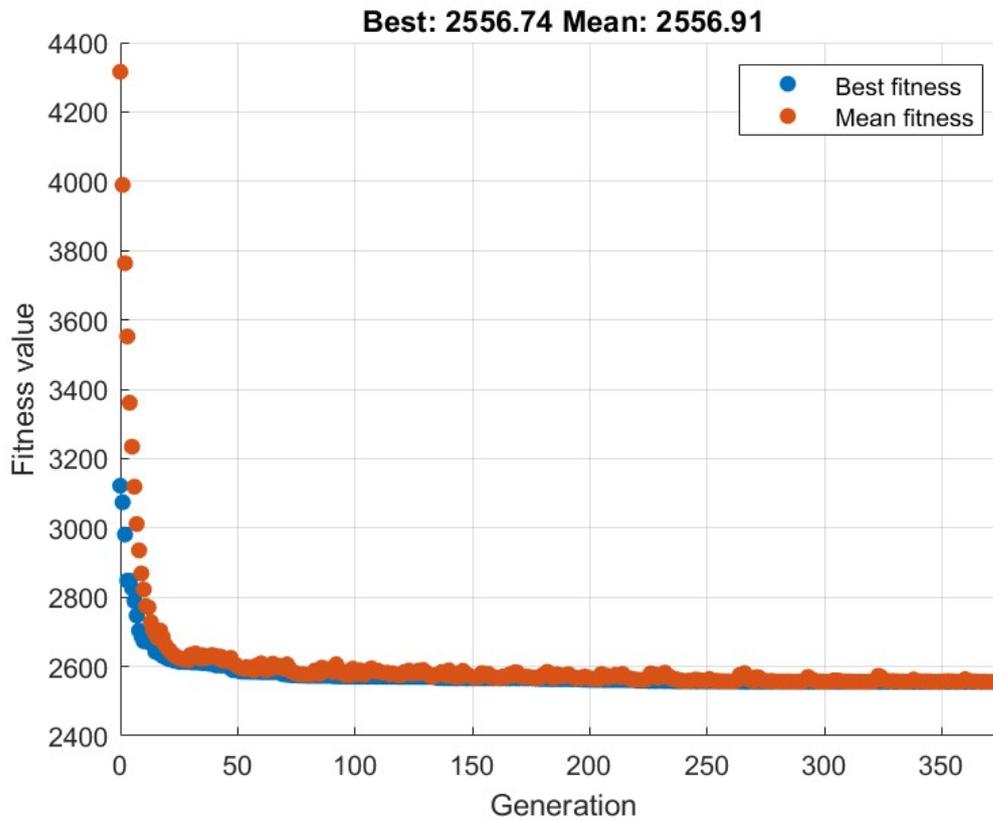


Figura 7.17: Iterazioni GAO - secondo metodo

ragione di tale velocità sia da ricercare negli intervalli in cui si cerca la soluzione del problema. Infatti nel primo metodo le variabili t_{wait} possono variare in un intervallo $[5 \ 29.9]$, mentre nel secondo le variabili k possono variare in un intervallo molto più corto, ovvero $[0 \ 1]$. Il tempo di calcolo e il numero di iterazione necessarie per convergere è definito da molti parametri, uno dei quali è la grandezza degli intervalli possibili per ogni variabile, dunque è logico pensare che il metodo GAO tragga beneficio dallo sfruttamento dei coefficienti k , rispetto alla imposizione delle condizioni al contorno della maniera nominale, dal momento che il calcolo della matrice $Ax \leq b$ richiede anch'esso un certo tempo computazionale, che con un numero elevato di iterazioni può risultare determinante sul tempo di calcolo totale.

Nonostante abbia bisogno di un numero di iterazioni quasi triplo rispetto al caso precedente, la PSO si conferma nuovamente il metodo più rapido a convergere; dato l'alto numero di variabili, stavolta il plateau è decisamente più lungo, segno che per molte iterazioni è possibile migliorare in modo impercettibile il risultato migliore dal punto di vista del costo della trasferta.

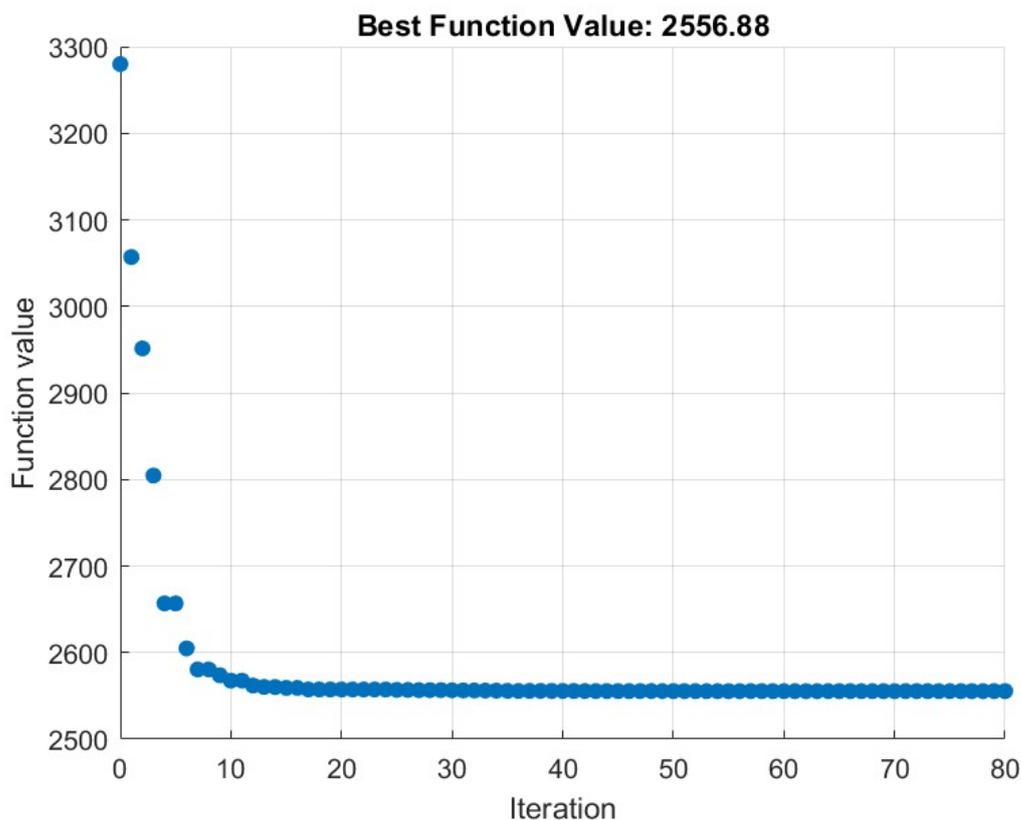


Figura 7.18: Iterazioni PSO

La rapidità con cui *particleswarm* raggiunge il plateau ha inoltre un beneficio rispetto al *genetic algorithm*, ovvero è possibile restringere il numero di iterazioni per avere una soluzione in tempi più brevi senza compromettere di troppo la bontà di tale soluzione rispetto all'ottimo globale. Per esempio, fermando la simulazione alla 100a iterazione, il valore trovato dalla PSO è praticamente uguale al minimo globale, mentre il valore della GAO è ancora circa 300 m/s superiore con il primo

metodo di calcolo e di 100 m/s con il secondo.

Come è possibile immaginare, i tempi di calcolo in secondi aumentano più del doppio rispetto al caso con metà delle variabili per ciascuna delle strategie di ottimizzazione. Rispetto al caso precedente è però differenziabile il tempo necessario per la GAO nei due metodi utilizzati:

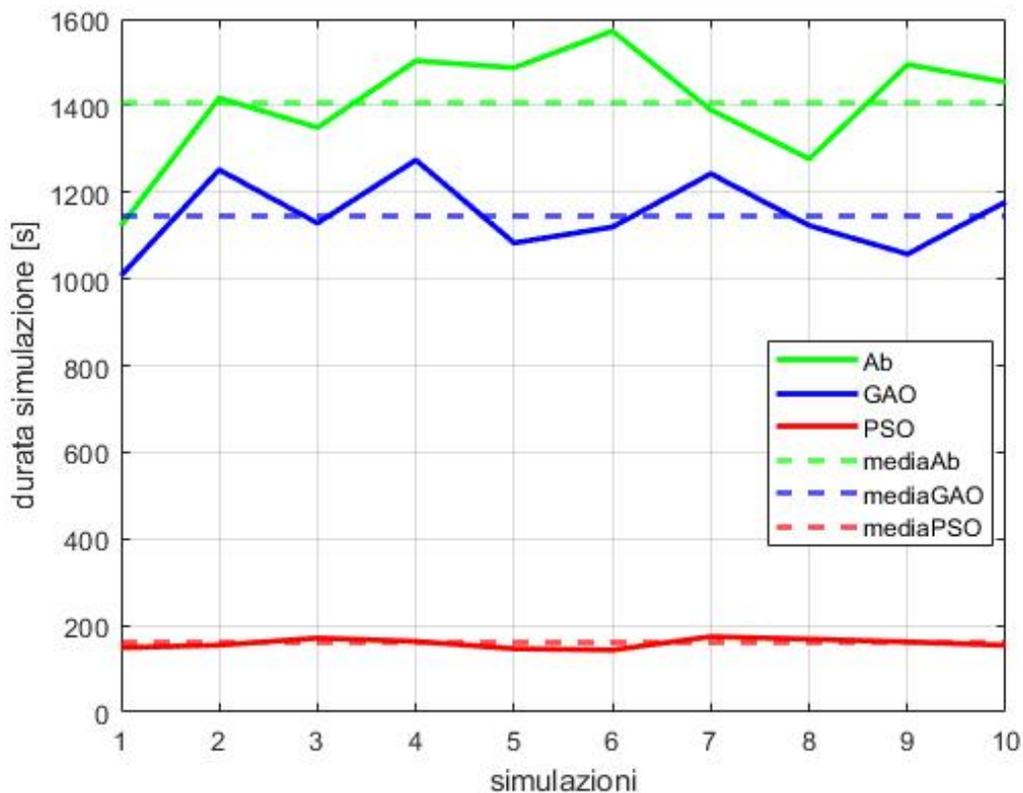


Figura 7.19: Tempi di convergenza

La PSO rimane l'algoritmo di ottimizzazione più veloce tra i due, e il margine tra i valori medi di tempo per giungere a un risultato aumentano all'aumentare del numero di variabili. Inoltre è possibile notare anche in questo grafico la piccola miglioria apportata dall'utilizzo dei coefficienti k per il calcolo del tempo di attesa, come estimoniato anche dai grafici riguardanti il numero di iterazioni.

7.3 Caso 3

7.3.1 Descrizione

Per il terzo caso di studio si faranno le seguenti ipotesi:

- Spinta continua; impulsi non istantanei quindi tempi di burn diversi da 0 e direttamente proporzionali a ΔV_A e ΔV_B
- Tempi di attesa su ciascun detrito fissi e pari a 5 giorni
- Lo spacecraft è inizialmente posizionato sul primo detrito. Non verrà quindi studiata la manovra che porta lo spacecraft dal lancio alla prima orbita target. Chiamato t_0 il momento di arrivo sul primo detrito della sequenza, lo spacecraft attenderà esattamente 5 giorni e poi inizierà la prima trasferta
- accelerazione dello spacecraft costante lungo tutto il tempo di missione

Si introducono inoltre le seguenti condizioni:

- Tempo minimo di ciascuna trasferta: 0.1 giorni.
- Tempo massimo di trasferta: 25 giorni. Ciò permette di smaltire ciascun detrito in un tempo massimo di $25 + 5 = 30$ giorni.

In particolare si studieranno 4 possibili valori di accelerazione dello spacecraft, partendo da un'accelerazione piuttosto alta per un propulsore elettrico e andando via via a dimezzarla:

$$0.001 \quad 0.0005 \quad 0.00025 \quad 0.000125 \text{ m/s}^2$$

L'ottimizzazione dei tempi di trasferta nel caso di spinta continua presenta una sostanziale differenza rispetto al caso impulsivo, in quanto i tempi dati in input agli algoritmi di ottimizzazione non riflettono i veri tempi di trasferta: infatti

bisogna tenere presente che l'estensione a propulsione continua modifica a ogni iterazione il tempo di trasferta t_{trans} rispetto al valore iniziale t_{trans_0} , perciò il solutore non può partire direttamente con le variabili t_{trans} ma deve invece calcolare i valori ottimali di t_{trans_0} i quali, dopo essere entrati in un ciclo calcolante i tempi di propulsione e coasting, restituiscano il valore minimo di ΔV necessario. Il dominio delle soluzioni t_{trans_0} è dunque diverso da quello utilizzato per i casi precedenti: se il valore massimo di tempo di trasferta possibile era 25, nel caso di spinta continua si possono ottenere valori di t_{trans_0} maggiori, dal momento che essi verranno ricalcolati e diminuiti più volte. Più è piccola l'accelerazione, più ampio sarà il dominio dei tempi t_{trans_0} in cui cercare le soluzioni, e dunque più sarà dispendioso il calcolo.

7.3.2 Modifiche ai parametri iniziali

Nonostante il numero di incognite dimezzato rispetto al caso precedente, il problema della simulazione di una spinta continua tende a richiedere tempi di calcolo molto più lunghi e non sempre è garantita la convergenza della soluzione a causa della maniera in cui è stato strutturato il codice di calcolo.

Nello specifico, all'interno di una singola iterazione avvengono le seguenti azioni:

1. viene calcolato il costo della trasferta impulsiva e si ottengono i valori di ΔV_A e ΔV_B
2. a partire dai valori ΔV_A e ΔV_B e dall'accelerazione scelta, si calcolano i tempi di trasferta e i tempi di coasting; coi nuovi tempi si calcolano i nuovi ΔV e il ciclo si ripete finchè non si giunge a convergenza (la quale richiede poche iterazioni di un ciclo interno)
3. inoltre avvengono tre principali controlli sulla soluzione:
 - $t_{trans} > 25$
 - $t_A + t_B > t_{trans}$
 - $t_{coast} < 0$

Se anche solo una delle precedenti disequazioni si scopre soddisfatta, la soluzione è da scartare, in quanto non soddisfa le condizioni al contorno o delle condizioni fisiche impossibili ma matematicamente accettabili, come per esempio avere l'inizio della seconda burn prima della fine della precedente.

La soluzione viene scartata tramite una condizione *if, then* in cui all'attivazione di un flag si imposta $\Delta V = 10^{23}$ m/s; ciò porta naturalmente i due algoritmi a scartare la soluzione di prova.

Dal momento che all'interno di una iterazione di GAO e PSO i tempi e i ΔV necessari vengono ricalcolati circa 5 volte, ci si può aspettare che un calcolo come

quello del caso 1 in cui il numero di variabili è lo stesso ma che, dato il suo carattere impulsivo, ha bisogno di effettuare i calcoli una sola volta, possa essere all'incirca 5 volte più veloce del caso in questione.

In realtà si hanno ulteriori complicazioni in quanto:

- il dominio delle soluzioni è allargato rispetto al caso impulsivo; in genere i tempi iniziali possono variare da 1 a 40 giorni invece che da 0.1 a 25
- dal momento che i tempi di input della funzione vengono ricalcolati svariate volte, è possibile ottenere grandi variazioni di ΔV necessario con piccole variazioni di tempi

Questi due motivi sono le principali cause di possibili inconvergenze del codice, specialmente se si utilizzano i parametri automatici di *genetic algorithm* e *particleswarm*.

I due algoritmi possono infatti passare anche 20 o 30 iterazioni senza trovare nessuna soluzione possibile, dando come risultato il $\Delta V = 10^{23}$ utilizzato come flag. Se ciò accade, si può ricadere in due casi:

- (a) l'accelerazione scelta è troppo bassa, per cui non esistono soluzioni realistiche che soddisfino le condizioni della missione
- (b) esistono delle soluzioni possibili, ma il numero di iterazioni utilizzato è troppo basso per ottenerle, per cui bisogna modificare i parametri delle funzioni di ottimizzazione in modo da facilitare la ricerca

Le principali modifiche apportate alle funzioni di ottimizzazione nel corso dello svolgimento sono state:

- aumento del numero di iterazioni di stallo, ovvero il numero di iterazioni in cui non è stato trovato un nuovo minimo rispetto all'iterazione precedente, da 20 a 50.

- applicazione di un tempo limite per il calcolo. Ciò si è reso necessario nel momento in cui il tempo necessario per terminare l'ottimizzazione passa da secondi/minuti dei precedenti casi a svariate ore nel caso in questione.
- aumento del numero di soluzioni di tentativo per ciascuna iterazione. Per esempio, nella GAO si utilizzano solitamente 20 individui se non è stato impostato manualmente il numero dall'utente, mentre per la PSO il numero di individui è 100. In entrambi i casi è stata impostata una popolazione iniziale pari a 5 volte quella nominale.
- scelta della popolazione di soluzioni di prova iniziale. Nei precedenti casi, sia la GAO che la PSO partivano da una popolazione iniziale casuale, per poi convergere rapidamente verso la condizione di ottimo. In questo caso non è più possibile completare l'ottimizzazione in un solo calcolo, per cui si è dovuto fare uso di una popolazione iniziale impostata a priori.

La combinazione di tutte le opzioni precedenti ha portato alla nascita della seguente strategia per l'ottenimento della soluzione globale, valida sia per la GAO che per la PSO:

1. Il primo passo è cercare di ottenere una soluzione ammissibile. Per accelerazioni molto basse questa è la fase più complessa del calcolo e si tratterà in seguito.
2. Una volta trovata una soluzione ammissibile, si crea una popolazione iniziale di individui identici tra loro e corrispondenti alla soluzione trovata. Si lascia dunque compilare il codice finché non si raggiunge il tempo massimo fissato (qualche ora).
3. Una volta finita la prima ottimizzazione, si ricomincia con una nuova popolazione uguale al risultato del punto precedente.

4. Il processo si ripete fino a quando la variazione della soluzione di ottimo è troppo poco rilevante per essere degna di nota o, se si è fortunati, se *genetic algorithm* e *particleswarm* riescono a trovare l'ottimo globale compiendo il numero massimo di iterazioni di stallo.

Questa strategia permette di dividere un calcolo che durerebbe ore (se non giorni) in una serie di compilazioni più brevi, in modo da salvare i progressi fatti di volta in volta nel caso in cui si dovesse ripetere una parte del calcolo, oppure per controllare manualmente la bontà dei risultati ottenuti fino a quel punto.

7.3.3 Analisi dei risultati

Applicando quanto illustrato fino ad adesso al caso in questione, si scopre che solamente 2 delle possibili 4 accelerazioni portano a convergenza il calcolo, mentre le rimanenti sono troppo piccole per terminare la trasferta da un detrito all'altro in meno di 25 giorni. Si andranno dunque a confrontare il caso impulsivo con le due accelerazioni $a = 0.001 \text{ m/s}^2$ e $a = 0.0005 \text{ m/s}^2$.

$a \text{ [m/s}^2\text{]}$	ΔV_{tot} [m/s]	t_{tot} [giorni]	$\% \Delta V_{tot}$	$\% t_{tot}$
impulsivo	2568	194	0	0
$1e - 03$	2635	205	+2.6%	+5.6%
$5e - 04$	2716	190	+5.7%	-2.0%
$2.5e - 04$	/	/	/	/
$1.125e - 04$	/	/	/	/

Tabella 7.1: ΔV e tempi totali di missione per diversi valori di a

Come si può notare, il ΔV totale necessario aumenta al diminuire dell'accelerazione fornita, mentre non si può dire la stessa cosa per quanto riguarda il tempo totale di missione, il quale può essere più lungo o più corto a seconda dei ΔV di ciascuna trasferta.

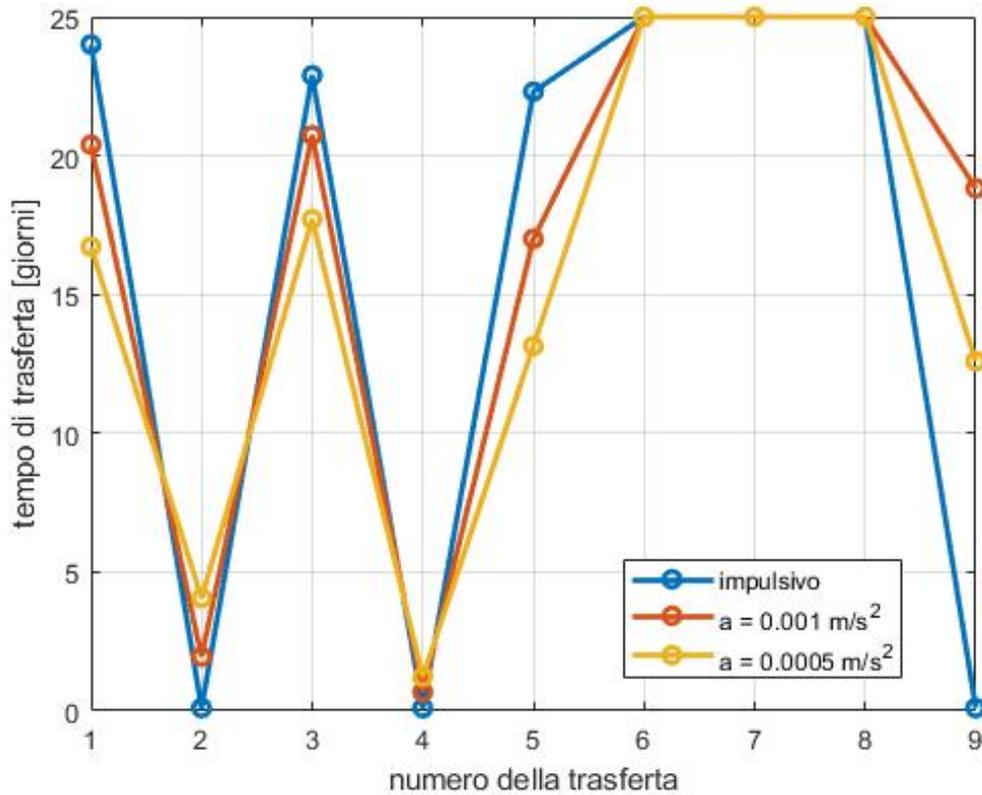


Figura 7.20: Confronto tempi di trasferta per diversi valori di a

Per avere un'idea più chiara di cosa effettivamente avvenga all'interno della trasferta, si può dividere il tempo totale nei suoi tre intervalli principali:

- tempo di prima propulsione t_A
- tempo di coasting t_{coast} non propulso
- tempo di seconda propulsione t_B

Ognuno di questi tre tempi può essere uguale o diverso da 0 a seconda della strategia propulsiva che comporti la minima spesa in termini di ΔV ; solitamente però si avranno tempi di spinta brevi e tempi di coasting alti per accelerazioni alte e viceversa per accelerazioni basse.

Un aspetto molto importante da sottolineare è che il tempo di coasting qui mostrato non equivale al tempo di coasting utilizzato per il passaggio da propulsione istantanea a continua nel capitolo 6, in quanto la formula precedentemente utilizzata:

$$t_{coast} = (t_f - t_0) - \frac{t_A}{2} - \frac{t_B}{2} \quad (7.5)$$

approssima la spinta fornita durante i tempi t_A e t_B come istantanea nel punto medio di ciascun intervallo. Nella realtà invece il tempo di coast si deve esprimere andando a considerare gli interi intervalli di t_A e t_B , dunque si avrà

$$t_{coast} = (t_f - t_0) - t_A - t_B \quad (7.6)$$

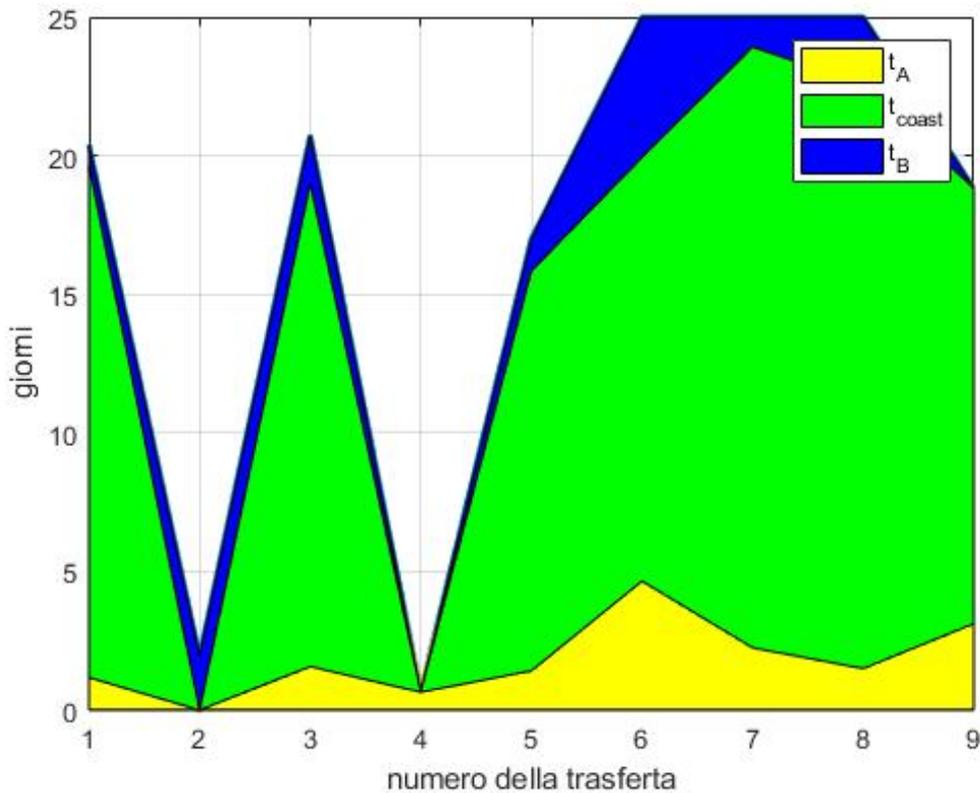
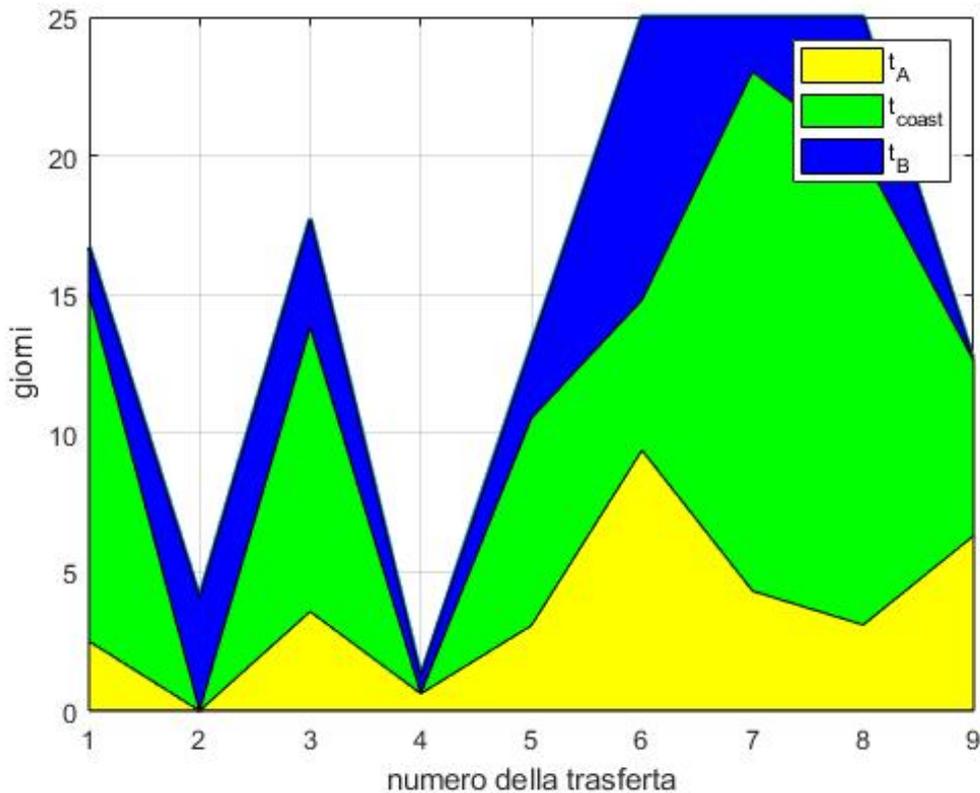


Figura 7.21: Caso $a = 0.001 \text{ m/s}^2$

Figura 7.22: Caso $a = 0.0005 \text{ m/s}^2$

Dato il valore di accelerazione piuttosto alto, il caso $a = 0.001 \text{ m/s}^2$ presenta ampi tempi di coasting quando i tempi di trasferta sono alti (superiori ai 10 giorni), in quanto il motore riesce a fornire in breve tempo il ΔV_A e il ΔV_B necessari. Per le trasferte inferiori a 10 giorni invece si predilige una strategia monoimpulsiva, come ad esempio la trasferta numero 2 dove $\Delta V_A = 0$ o la trasferta numero 4 dove $\Delta V_B = 0$.

Per quanto riguarda il caso $a = 0.0005 \text{ m/s}^2$ si può notare come la strategia propulsiva sia molto simile al caso precedente, con la differenza che i tempi di coasting siano di molto ridotti a causa dell'ampio tempo necessario allo spacecraft per modificare la propria velocità; la trasferta numero 6, nello specifico, presenta intervalli di tempi propulsi molto grandi, lasciando poco tempo per la fase di

coasting. È dunque logico pensare che sia proprio la trasferta numero 6 il "collo di bottiglia" per quanto riguarda il valore minimo di accelerazione possibile per completare la missione soddisfacendo tutti i requisiti, e non a caso essa è la trasferta con il ΔV più elevato. Per avere un'approssimazione del valore minimo di a ammissibile, si può pensare di utilizzare la formula

$$a_{min} = \frac{\Delta V_{MAX}}{t_{max}} \quad (7.7)$$

con ΔV_{MAX} uguale al costo della manovra più dispendiosa e t_{MAX} il tempo massimo per una singola trasferta, per cui 25 giorni. Tale valore di accelerazione va preso solo come un'indicazione del possibile ordine di grandezza di a_{min} ; si vedrà in seguito un metodo molto più raffinato per trovare l'accelerazione minima possibile.

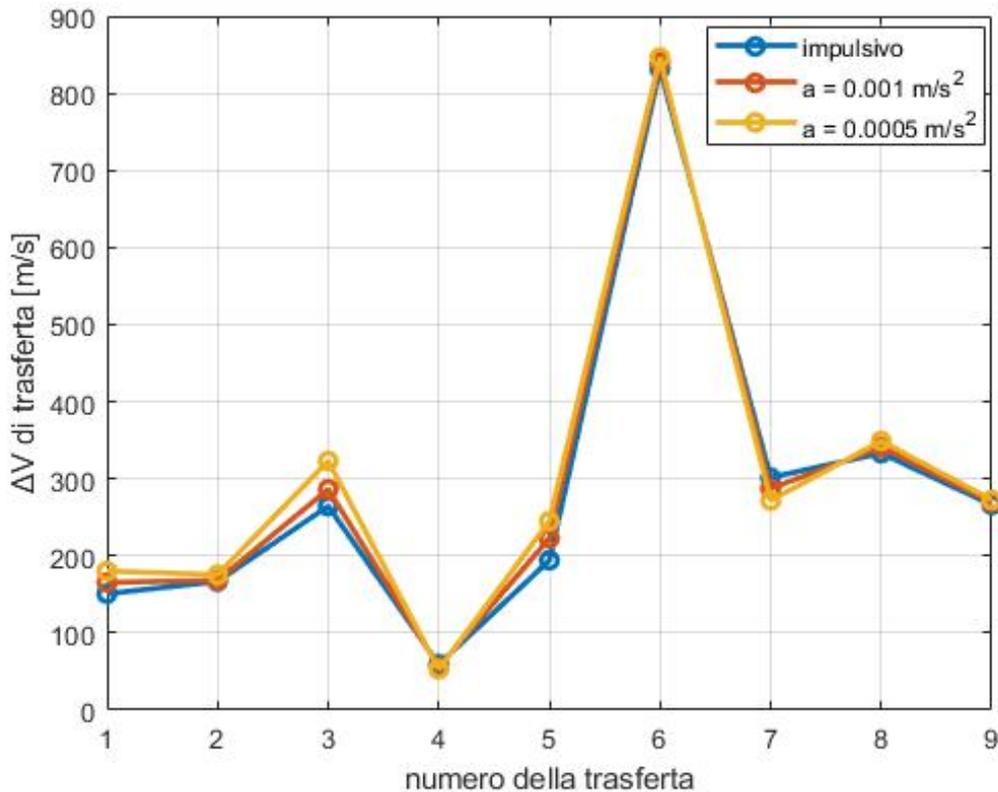


Figura 7.23: Confronto costi propulsivi per diversi valori di a

Andando ad analizzare il grafico dei ΔV per ciascuna trasferta, è interessante notare come il ΔV necessario per la trasferta di maggior costo propulsivo rimanga quasi costante al variare dell'accelerazione; ciò può essere spiegato nel seguente modo:

1. per ogni valore di accelerazione, esiste un valore limite di ΔV ottenibile in 25 giorni; esso è ovviamente dato dalla formula

$$\Delta V_{lim} = a \cdot t_{MAX} \quad (7.8)$$

per esempio, il valore massimo di ΔV ottenibile in 25 giorni (completamente propulsi) con $a = 0.0005 \text{ m/s}^2$ è

$$\Delta V_{lim} = 0.0005 \cdot 25 \cdot 86400 = 1080 \text{ m/s} \quad (7.9)$$

dunque coi costi del caso impulsivo si è già piuttosto vicini al valore massimo teorico

2. l'esistenza di un tetto al valore massimo di ΔV obbliga l'algoritmo a cercare una soluzione per cui ogni trasferta stia sotto a questa soglia
3. se come nel caso in questione il valore massimo ottenuto per il caso impulsivo è prossimo alla soglia, possono accadere due cose: il calcolo non riesce a convergere (questo succede per accelerazioni molto basse o nel caso in cui ci siano molte trasferte con un ΔV prossimo a ΔV_{lim}) oppure l'algoritmo risolutivo modifica tutti i tempi delle altre trasferte in modo tale da minimizzare il ΔV della trasferta di costo massimo, mantenendola invariata (se non addirittura leggermente inferiore) al caso impulsivo
4. andando a modificare i tempi delle altre trasferte però si tende ad aumentare il loro ΔV , quindi in parole povere l'algoritmo tende a mantenere costante il valore di picco andando ad innalzare il ΔV delle altre trasferte

Nel seguente grafico vengono riassunte le evoluzioni della missione per ogni valore di accelerazione:

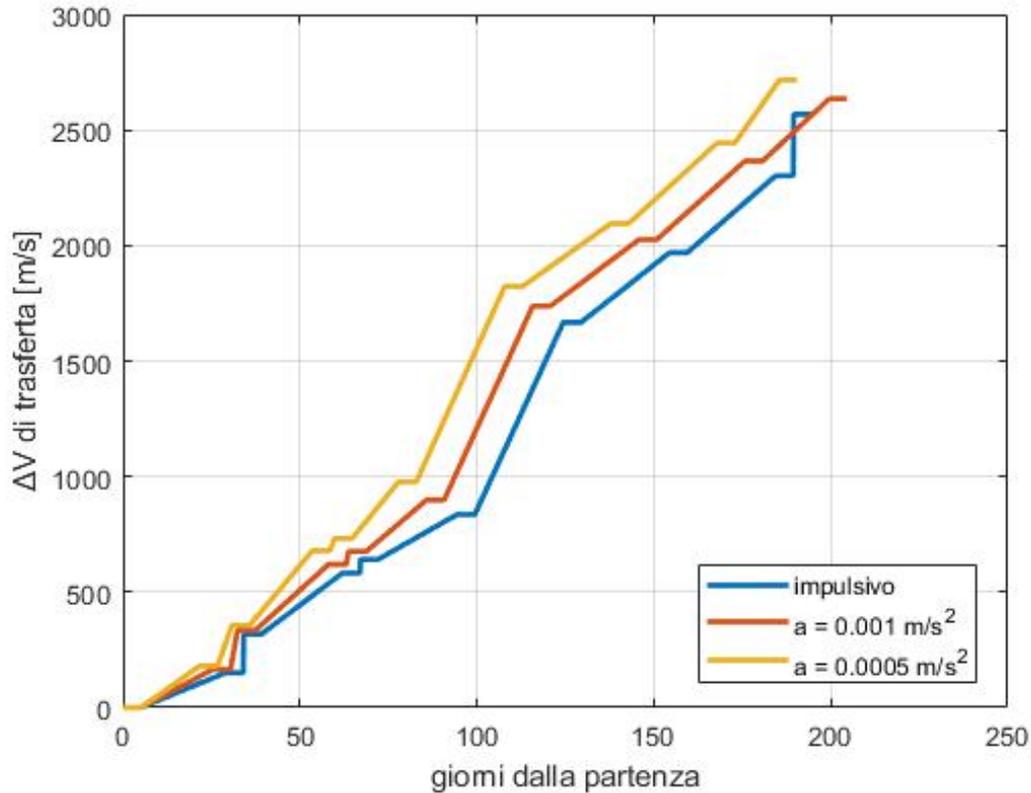


Figura 7.24: ΔV e tempi totali di missione per diversi valori di a

Si nota che come ci si poteva aspettare il ΔV totale necessario aumenta al diminuire dell'accelerazione, mentre i tempi totali non sono strettamente crescenti, ma possono essere sia maggiori che minori del caso impulsivo. È importante sottolineare inoltre che i ΔV nel caso di spinta continua sarebbero stati più alti se si fosse fissata a priori la lunghezza della missione uguale a quella del caso impulsivo; i risultati ottenuti finora sono i migliori per ciascun valore di a permettendo al tempo di missione totale di variare entro i limiti precedentemente imposti, per cui non bisogna stupirsi se l'aumento percentuale di ΔV sia minore di quanto fosse prevedibile, come potrebbe trasparire osservando l'andamento delle

due accelerazioni.

Infine si calcolano le masse degli spacecraft nel caso di propulsione continua, considerando che le masse dei *package* restano invariate:

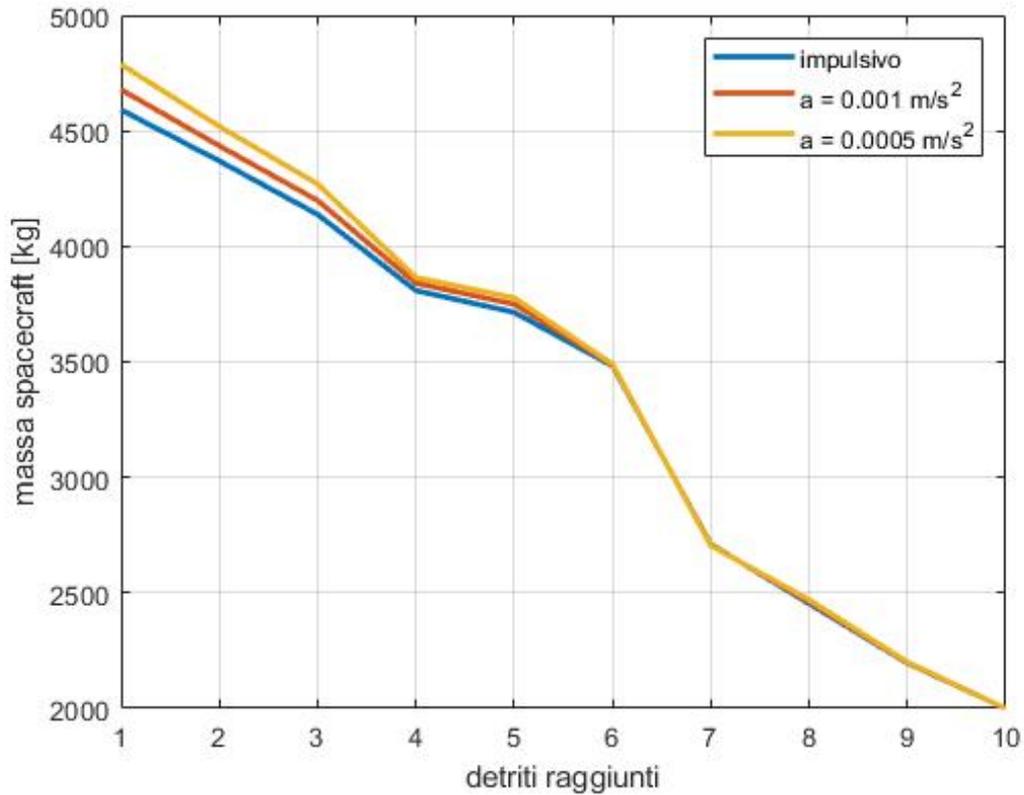


Figura 7.25: Massa dello spacecraft per diversi valori di a

Le masse iniziali ottenute si attestano su $m_0 = 4678 \text{ kg}$ per $a = 0.001 \text{ m/s}^2$ e $m_0 = 4787 \text{ kg}$ per $a = 0.0005 \text{ m/s}^2$.

7.3.4 Calcolo accelerazione minima

Dopo aver appurato il fatto che la realizzazione di una missione o meno in un determinato intervallo di tempo dipenda dal valore di accelerazione fornita dal motore, viene naturale chiedersi quale sia il valore minimo che rende possibile tempi di trasferta non superiori a 25 per una determinata sequenza di detriti. Esistono sostanzialmente due modi per determinare l'accelerazione minima:

- il primo metodo è quello di ricercare per ogni trasferta il valore di accelerazione che rende nullo il tempo di coasting t_{coast} . Infatti è possibile pensare a quest'ultimo come un tempo "sprecato" dal momento che è una fase non propulsa della trasferta, perciò finchè esso è maggiore di zero è possibile trasformare t_{coast} in Δt_A e Δt_B con un valore di accelerazione minore, fino a quando l'intera trasferta viene propulsa.
- il secondo metodo è quello di aggiungere l'accelerazione dello spacecraft alle incognite del codice utilizzato finora per calcolare i tempi di trasferta ottimi, utilizzando dunque le GAO e PSO per trovare i valori minimi accettabili.

Ognuno dei due metodi ha i suoi pregi e difetti; il primo ad esempio è un metodo molto meno dispendioso dal punto di vista della potenza di calcolo necessaria rispetto al secondo, ma il fattore decisivo nella scelta tra le due possibilità è stato la durata incognita di ciascuna trasferta.

Il primo metodo infatti è molto veloce a convergere a patto che si conosca a priori la durata totale della trasferta da un detrito all'altro, ma nel caso in questione essa non è fissa in quanto è uno dei parametri da ottimizzare; l'unico dato a priori è che la durata può variare da 1 a 25 giorni, ma non basta per poter utilizzare l'annullamento del tempo di coasting come modo di calcolare l'accelerazione minima.

Il secondo metodo invece è molto più robusto da questo punto di vista, in quanto esso tenterà di trovare una soluzione ai tempi di trasferta e al valore di

accelerazione minima contemporaneamente; esso arriverà più lentamente a convergenza ma sarà possibile applicarlo a qualsiasi caso di studio. Verrà ora spiegato più nel dettaglio come sia necessario modificare il codice di calcolo per trovare a_{min} .

7.3.5 Algoritmo di calcolo dell'accelerazione minima

Dal momento che l'accelerazione sarà una nuova incognita del problema, una sequenza di n detriti porterà a calcolare $n - 1$ tempi di trasferta e un valore di a_{min} , per un totale di n incognite. Tutte le condizioni al contorno sui tempi di trasferta espresse precedentemente sono ancora valide, per cui resta solo da definire le condizioni riguardanti l'accelerazione a .

Il range di accelerazioni in cui cercare a_{min} è dato da un estremo sinistro il cui valore è un'accelerazione abbastanza bassa da garantire la non convergenza, mentre l'estremo destro è un'accelerazione abbastanza alta da permettere di trovare una soluzione. Per esempio, nel caso in questione i due estremi saranno rispettivamente 0.00025 e 0.0005 m/s^2 . Ciò garantisce di trovare l'accelerazione minima in questo intervallo.

L'ottimizzazione attraverso *genetic algorithm* e *particle swarm* permette di minimizzare un solo output della funzione che prendono in input; fino ad ora tale output da minimizzare era il ΔV totale della missione. Nel caso in cui si voglia minimizzare anche a , bisogna legare i due valori in qualche modo. La maniera più rapida di farlo è quella di definire un nuovo output Φ tale che

$$\Phi = \Delta V_{tot} a^m \quad (7.10)$$

dove m è un valore inserito in modo da aumentare l'importanza della minimizzazione di a rispetto a quella di ΔV_{tot} . Nel caso in questione è stato imposto $m = 4$.

Un enorme vantaggio del calcolare contemporaneamente t_{trans_0} e a è quello di poter utilizzare come popolazione iniziale per gli algoritmi di ottimizzazione una

soluzione già nota dai paragrafi precedenti, come per esempio i tempi ottenuti nel caso in cui $a = 0.0005 \text{ m/s}^2$. Partire da una soluzione già conosciuta evita inoltre di incappare in problemi di non convergenza già precedentemente discussi.

Applicando quanto appena descritto al caso in questione si ottiene un'accelerazione minima pari a $a_{min} = 0.00038424 \text{ m/s}^2$. Ci si poteva aspettare un valore prossimo a 0.0005 m/s^2 in quanto già per questo valore di accelerazione i tempi di coasting erano molto brevi, per cui il risultato ottenuto è congruo a quanto osservato finora.

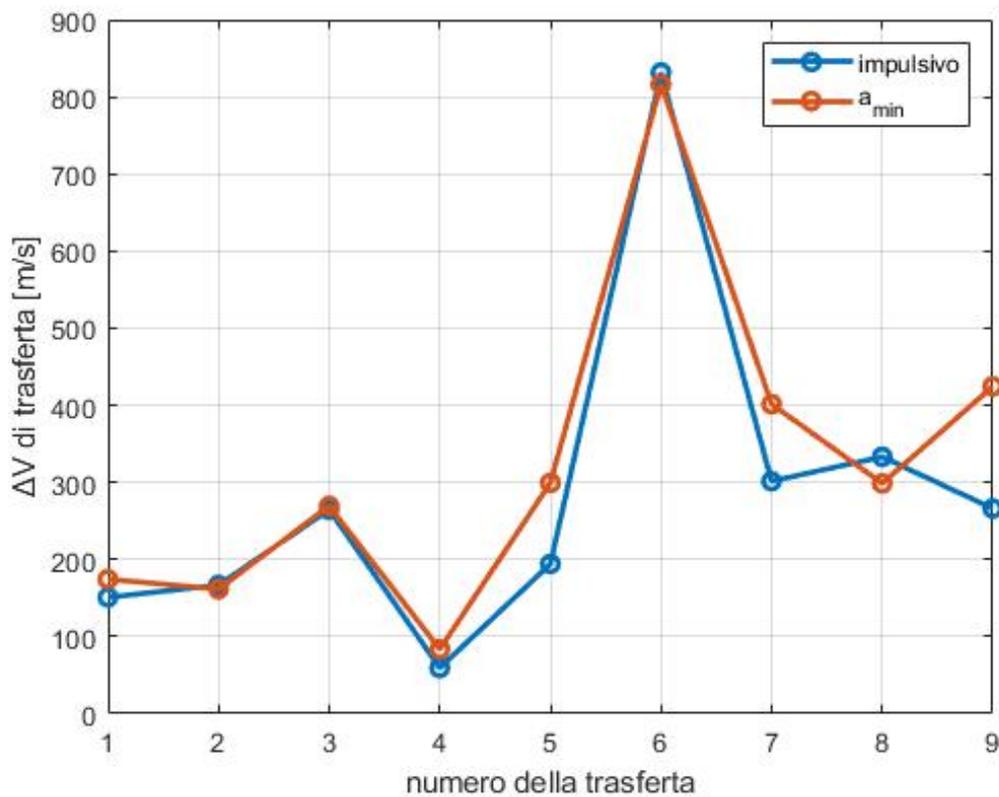


Figura 7.26: Costo della trasferta ad accelerazione minima

Andando ad analizzare il grafico relativo ai tempi di spinta e di coasting si può chiaramente vedere come sia fisicamente impossibile scendere verso accelerazioni minori continuando a soddisfare il vincolo sul tempo totale di trasferta di 25 giorni:

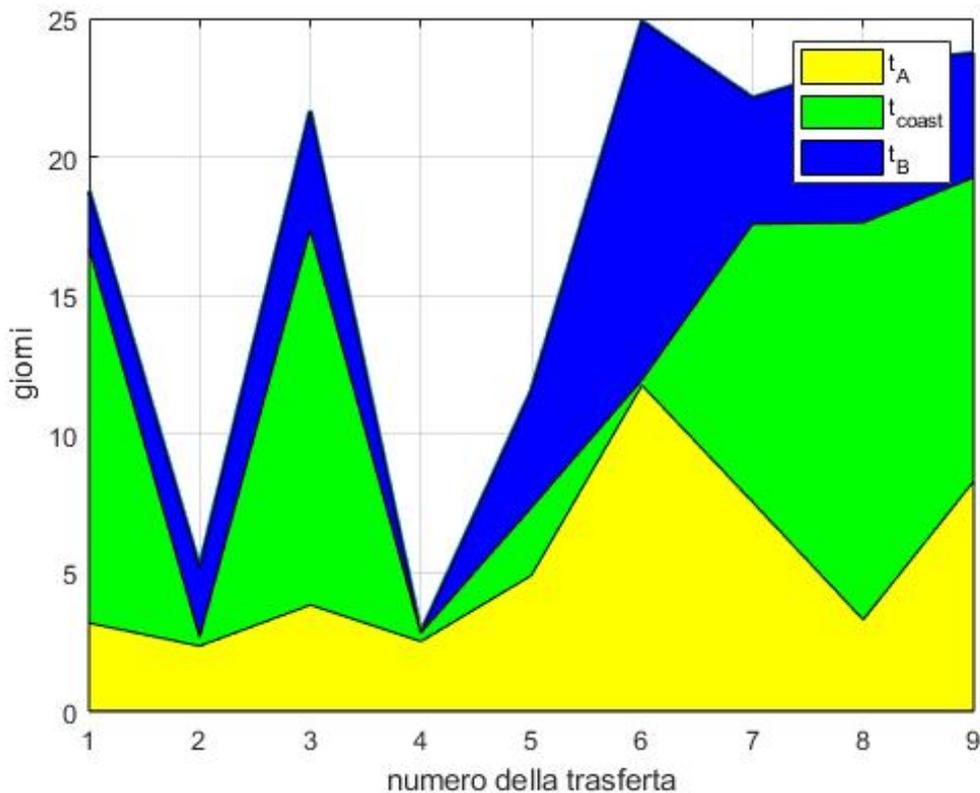


Figura 7.27: Tempi di spinta

La zona verde relativa al coasting è nulla per la trasferta numero 6, che diventa dunque totalmente propulsa. Inoltre cambiano ancora alcune scelte riguardanti la strategia propulsiva: la seconda trasferta non viene più effettuata con un'unica burn come nei casi precedenti, ma risulta più conveniente sfruttare una manovra biimpulsiva.

Si riporta ora il grafico relativo al costo complessivo della missione e alla sua durata totale:

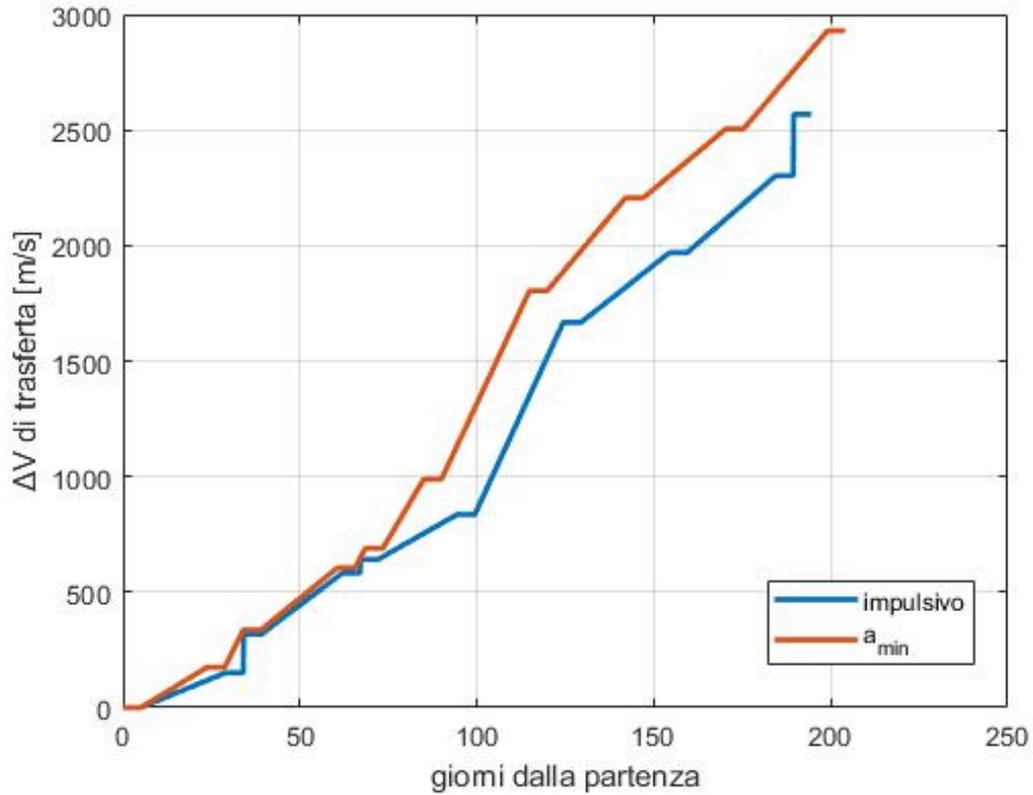


Figura 7.28: ΔV e tempi totali di missione con accelerazione minima

Il costo propulsivo calcolato è $\Delta V = 2929 \text{ m/s}$, per un aumento percentuale del 14% rispetto al caso impulsivo, mentre il tempo totale di missione è 203 giorni, ovvero un aumento del 4.6%.

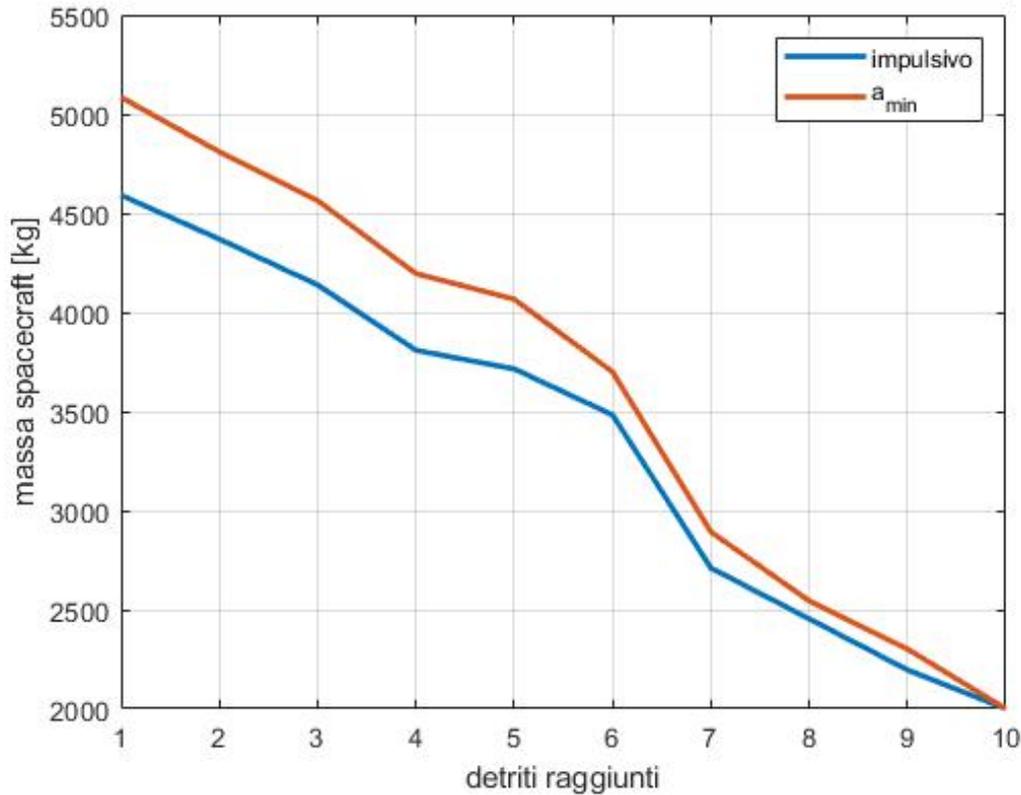


Figura 7.29: Massa dello spacecraft per a_{min}

Le masse ottenute utilizzando l'accelerazione minima possibile sono:

- massa propellente $m_p = 2815$ kg
- massa totale dei *package* deorbitanti $m_u = 300$ kg
- massa finale spacecraft $m_f = 2000$ kg

per una massa totale alla partenza $m_0 = 5115$ kg.

Per riassumere quanto osservato finora, viene ora presentata una tabella mostrante la ripartizione dei costi propulsivi e dei tempi di spinta delle due *burn* andandosi a concentrare su una trasferta specifica per ogni valore di accelerazione. Nello specifico i dati fanno riferimento alla trasferta numero 6, quindi dal detrito 39 al detrito 58 della lista.

È importante far notare che i dati racchiusi in questa tabella non sono stati ottenuti partendo dallo stesso istante di tempo, in quanto il momento in cui lo spacecraft incomincia la sesta trasferta varia per ogni valore di accelerazione considerato, essendo funzione anche della durata delle rimanenti trasferte. Ciò spiega perchè il valore di ΔV_{TOT} corrispondente all'accelerazione minima sia minore di tutti gli altri.

<i>acc</i>	∞	0.001	0.0005	a_{min}
ΔV_{TOT}	829.0	839.4	846.4	816.2
ΔV_A	396.9	402.1	405.6	390.5
ΔV_B	432.1	437.3	440.8	425.7
t_{trans}	25.00	25.00	25.00	25.00
t_A	0.00	4.64	9.39	11.96
t_B	0.00	5.06	10.20	13.04
t_{coast}	25.00	15.28	5.41	0.00

Tabella 7.2: Parametri per diversi valori di a

7.4 Caso 4

7.4.1 Descrizione

L'ultimo caso che verrà considerato riguarda la pianificazione di una possibile missione atta a rimuovere tutti e 123 i detriti della lista in un tempo massimo di circa 8 anni, organizzata in 10 sequenze predefinite di detriti.

Assegnando ogni sequenza ad uno spacecraft, si avranno 10 spacecraft necessari per portare a termine la missione. Le sequenze hanno un numero di detriti che varia da 9 fino a 21 detriti, per cui ci si può aspettare che tempi e ΔV necessari possano variare di molto da uno spacecraft all'altro.

Dal momento che dovranno essere calcolati e ottimizzati un numero di variabili pari al numero di detriti, per semplificare lo svolgimento si farà utilizzo delle ipotesi del caso 1; nello specifico:

- Impulsi istantanei, quindi tempi di burn pari a 0 e spacecraft che cambia istantaneamente la sua velocità in seguito alla somministrazione di ΔV_A e ΔV_B
- Tempi di attesa su ciascun detrito fissi e pari a 5 giorni
- Lo spacecraft è inizialmente posizionato sul primo detrito. Non verrà quindi studiata la manovra che porta lo spacecraft dal lancio alla prima orbita target. Chiamato t_1 il momento di arrivo sul primo detrito della sequenza, lo spacecraft attenderà esattamente 5 giorni e poi inizierà la prima trasferta. Il tempo t_1 non è noto a priori, in quanto deve essere calcolato il momento migliore per iniziare la missione, la quale comunque ha un tempo minimo di partenza $t_0 = 23467$ [MJD2000].

Si introducono inoltre le seguenti condizioni:

- Tempo minimo di ciascuna trasferta: 0.1 giorni.

- Tempo massimo di trasferta: 25 giorni. Ciò permette di smaltire ciascun detrito in un tempo massimo di $25 + 5 = 30$ giorni.
- Epoca massima finale $t_f = 26419$ [MJD2000], la quale determina una durata massima della missione di $t_f - t_0 = 2952$ giorni.
- Tempo minimo tra il completamento dello smaltimento di una sequenza di detriti e l'inizio dello smaltimento della sequenza successiva: 30 giorni.
- Tempo massimo tra il completamento dello smaltimento di una sequenza di detriti e l'inizio dello smaltimento della sequenza successiva: 100 giorni.

7.4.2 Modifiche ai parametri iniziali

Rispetto ai casi considerati precedentemente, il numero di incognite del problema è ora aumentato in maniera considerevole: per la precisione esse sono 123 divise in:

- 1 tempo determinante l'inizio della missione
- 113 tempi di trasferta da un detrito all'altro
- 9 tempi di attesa tra la fine dello smaltimento di una sequenza di detriti e l'inizio dello smaltimento di una nuova

In termini di ΔV , le variabili direttamente collegate al costo totale della missione sono le 113 trasferte tra un detrito e l'altro, mentre le rimanenti 10 incognite non aumentano di per sé il ΔV totale in quanto sono semplicemente tempi di attesa, ma andando ad ottimizzare anche quest'ultime è possibile fare partire ogni spacecraft al momento opportuno per minimizzare il costo propulsivo di ogni sequenza di detriti.

Nonostante l'alto numero di incognite, non si sono registrati problemi computazionali per nessuno dei metodi di ottimizzazione utilizzati, per cui non si sono dovute effettuare particolari modifiche ai parametri iniziali; dal momento però

che i tempi di calcolo si attestavano sulle ore, si è diviso il calcolo in varie parti la cui durata non superasse un'ora, utilizzando come popolazione iniziale per ogni calcolo il risultato ottenuto dal calcolo precedente; ciò permette di semplificare il calcolo ma allo stesso tempo introduce un rischio maggiore di tendere verso un minimo locale invece del minimo globale, ma analizzando i risultati ottenuti si può escludere di essere incappati in questo problema, o comunque la soluzione ottenuta è abbastanza soddisfacente da poter essere considerata globalmente la migliore.

7.4.3 Analisi dei risultati

Si illustrano di seguito in modo numerico e grafico i risultati ottenuti dal paper di riferimento del JPL rispetto a quelli estrapolati dal codice di calcolo, insieme al numero di elementi di ciascuna sequenza. Per la precisione, la sequenza numero 6 di 10 elementi è proprio la sequenza utilizzata per l'analisi dei casi precedenti.

seq	n detriti	t_s real	t_s calc	ΔV real	ΔV calc
1	14	23557	23562	3066	2879
2	12	23851	23842	2398	2159
3	21	24057	24053	3409	3258
4	11	24637	24650	3163	2876
5	14	24946	24940	2571	2549
6	10	25263	25270	2786	2638
7	10	25485	25468	2013	1922
8	9	25712	25710	1738	1648
9	12	25946	25972	2568	2449
10	10	26268	26273	1423	1311

Tabella 7.3: Tempi e costi propulsivi

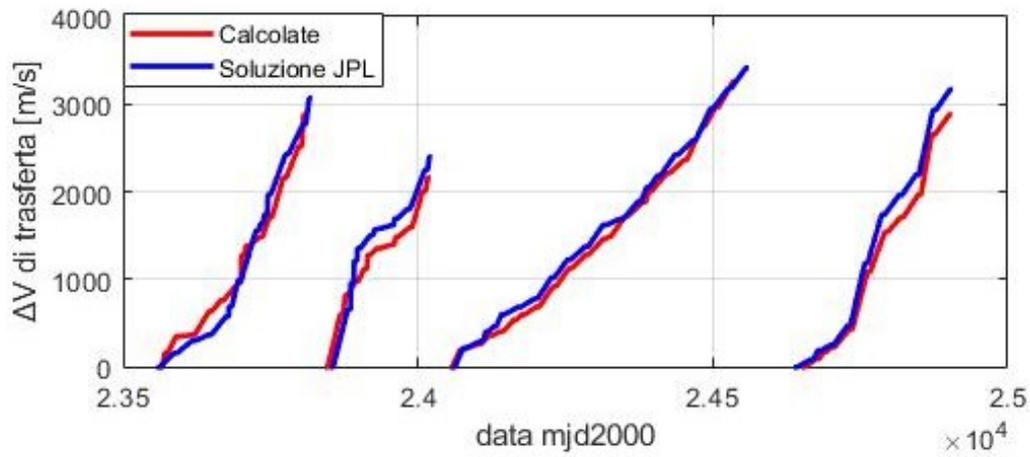


Figura 7.30: Prime 4 sequenze

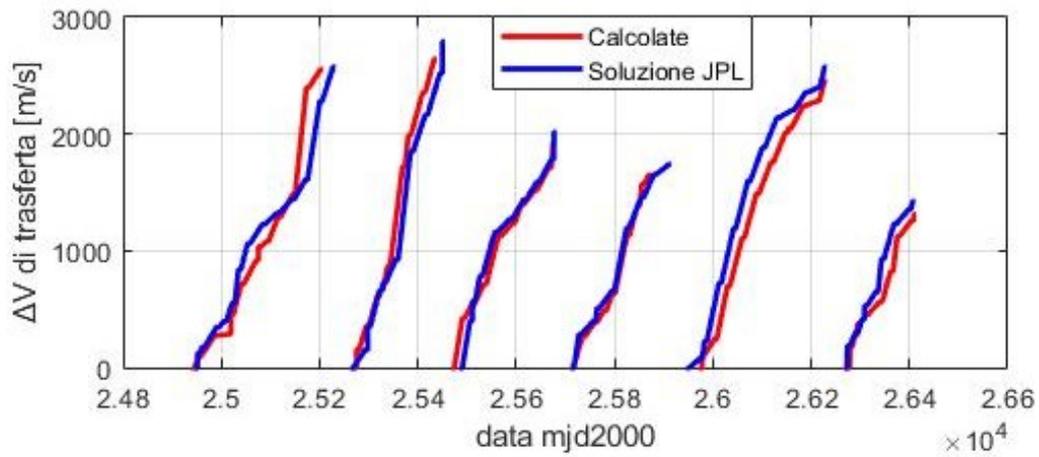
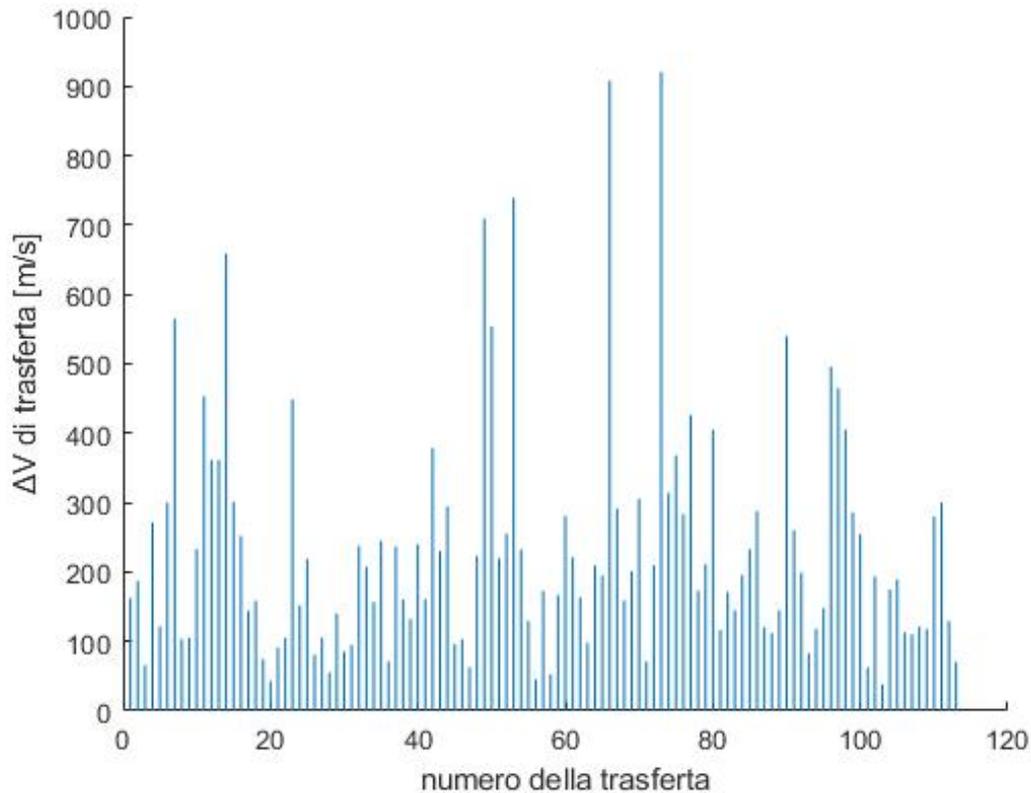


Figura 7.31: Ultime 6 sequenze

Per avere un'idea più chiara dei valori di ΔV di ciascuna trasferta, nel seguente grafico vengono riportate tutte le 113 trasferte con il rispettivo costo; facendo una media si ottiene un valore ΔV_{medio} intorno ai 217 m/s.

Figura 7.32: Distribuzione dei ΔV per ciascuna trasferta

7.4.4 Confronto GAO - PSO

Dal momento che il calcolo per l'ottimizzazione è stato diviso in più parti sia per la GAO che per la PSO, risulta complesso ottenere un confronto sul tempo di convergenza totale dei due algoritmi, per cui è più semplice fissare un tempo massimo di calcolo per entrambi e andare ad analizzare quale dei due metodi di ottimizzazione si avvicina di più al risultato finale. Per cercare di ricreare delle condizioni di confronto simili ai casi precedenti, non sono state fatte alcune modifiche ai parametri dei due algoritmi (a parte l'inserimento del tempo massimo di 1 ora) e tantomeno si è inserita una soluzione iniziale.

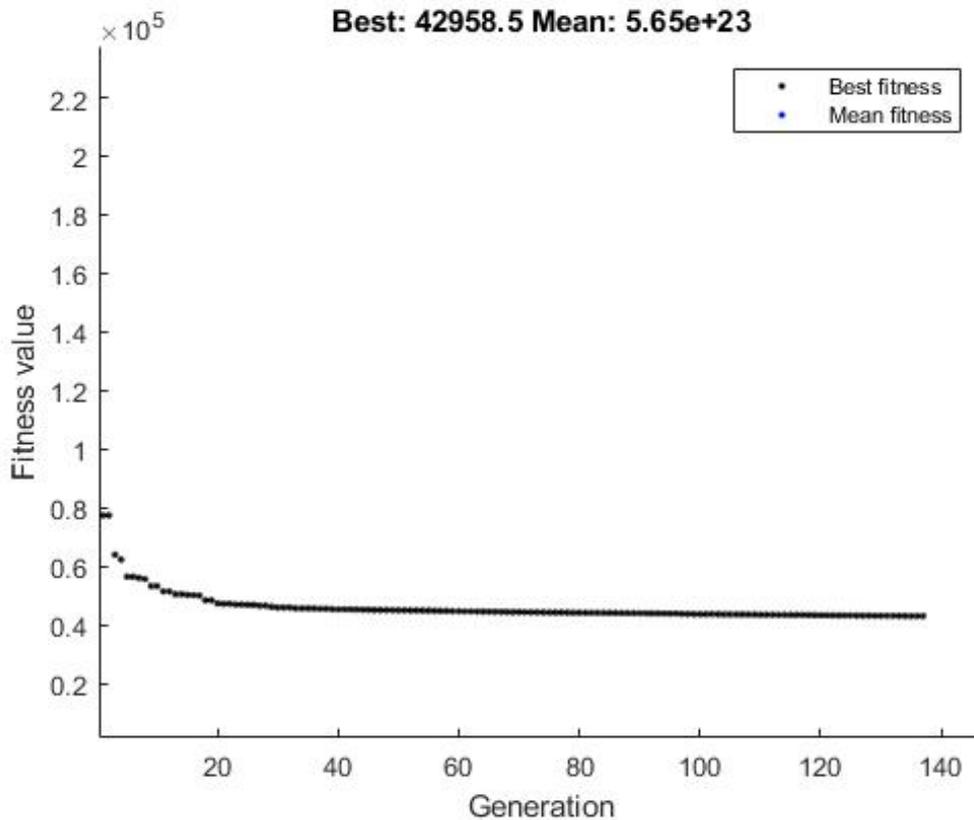


Figura 7.33: *Genetic algorithm* dopo un'ora di ottimizzazione

Passata un'ora è possibile notare come la GAO sia ben lungi dal valore di minimo globale in quanto c'è ancora un margine di quasi 18000 m/s da eliminare; inoltre si può evidenziare come la *mean fitness*, ovvero il punteggio medio della popolazione, non sia rappresentata graficamente in quanto il suo valore è dell'ordine di 10^{23} . Ciò è imputabile al metodo usato per scartare le soluzioni non idonee, ovvero quelle che non rispettano i limiti di tempo imposti a monte del problema; a ciascuna di esse viene assegnato il flag di penalità e anche nel caso in cui un solo membro della popolazione non riesca a fornire una soluzione accettabile il punteggio medio viene inficiato, per cui non è più possibile utilizzarlo per studiare l'andamento di una popolazione di partenza casuale.

Il problema non sussiste invece se si inizia l'ottimizzazione partendo da delle

soluzioni a priori accettabili, in quanto modifiche tali da fare scattare i flag sarebbero subito scartate dall'algoritmo.

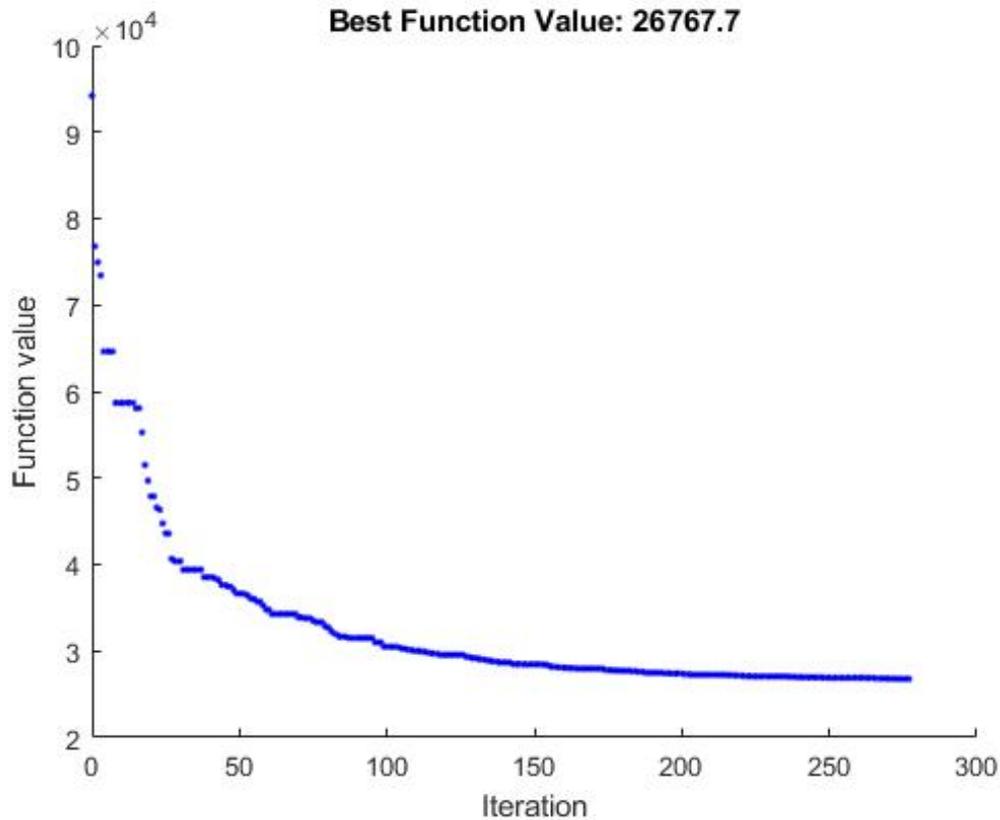


Figura 7.34: *Particle swarm* dopo un'ora di ottimizzazione

Per quanto riguarda la PSO si nota subito come la convergenza sia molto più rapida in quanto il valore minimo raggiunto dall'ottimizzazione dopo un'ora sia molto più vicino a quello globale rispetto alla GAO.

La PSO riesce a compiere nello stesso arco di tempo un numero di iterazioni doppio rispetto al metodo di ottimizzazione precedente dimostrandosi ancora una volta un algoritmo molto più leggero dal lato computazionale, ma non è solamente il numero di iterazioni maggiore a permettere di avvicinarsi maggiormente al minimo globale. Infatti se si analizza il risultato ottenuto per un numero di

iterazioni uguale a quello della GAO (circa 138) si scopre che il valore calcolato dalla PSO è comunque inferiore del 30% a quello della GAO.

Per entrambi i meccanismi di ottimizzazione va fatto presente che la prima ora è il lasso di tempo in cui si ha la massima velocità di discesa del costo totale della missione; andando avanti con l'ottimizzazione si avranno sempre meno miglioramenti visibili fino ad arrivare a calcoli che a fronte di un tempo computazionale molto lungo forniscono miglioramenti di pochi m/s.

La soluzione ottenuta nello svolgimento di questo elaborato non è dunque da considerarsi finale, in quanto il calcolo della soluzione di ottimo è stato arrestato nel momento in cui non sono stati pervenuti miglioramenti del ΔV_{tot} significativi; ciò non esclude che continuando l'ottimizzazione con computer più potenti e con una capacità di calcolo maggiore possa essere trovata una soluzione migliore.

Capitolo 8

Conclusioni

8.1 Risultati ottenuti

Quella che è stata presentata è una procedura atta a semplificare il calcolo del costo di trasferta tra obiettivi fissati a priori, sfruttando degli algoritmi di ottimizzazione piuttosto semplici e poco pesanti dal punto di vista computazionale. Sfruttando la soluzione presentata dal JPL al quesito posto nella GTOC, è stato possibile appurare la correttezza del metodo proposto; nonostante sia una procedura basata su un numero di ipotesi semplificative non indifferente, è stato dimostrato che i risultati rientrano in un range accettabile, anche se tendono a sottostimare leggermente i ΔV necessari per le trasferte.

Per quanto riguarda gli algoritmi di ottimizzazione utilizzati, è risultato preferibile utilizzare *particle swarm* rispetto a *genetic algorithm* per la maggior parte dei calcoli, specialmente nei casi dove il numero delle incognite è superiore alla decina. Il numero di iterazioni minore e la velocità per arrivare a convergenza dimostra che la scelta di utilizzare il primo dei due metodi possa portare ad una soluzione anche per problemi molto complessi con un numero di incognite superiore alle centinaia. L'ostacolo più grande nell'utilizzo di questi algoritmi di ottimizzazione si è riscontrato nel caso 3, ovvero nell'ipotesi di propulsione elettrica.

L'implementazione della spinta continua attraverso un loop interno aggiornante i tempi di trasferta ha messo a dura prova la stabilità della PSO e GAO, obbligando a cambiare più volte i parametri dei due algoritmi (ad esempio aumentando la popolazione iniziale o il numero di iterazioni di stallo).

Per i rimanenti casi invece entrambi sono riusciti a convergere anche senza partire da soluzioni già note, e questo è un risultato non da poco, in quanto esistono molteplici algoritmi capaci di convergere più velocemente dei due analizzati, come ad esempio quelli basati sul metodo del gradiente; essi però hanno bisogno di una soluzione di partenza nota per poter essere implementati, andando a limitare la loro usabilità per i casi più complessi. Avere invece una popolazione "sparpagliata" per tutto il dominio di possibili soluzioni incrementa di molto la probabilità di ottenere un risultato soddisfacente.

8.2 Possibili sviluppi futuri

Sulla base dei risultati ottenuti da questo studio, è possibile proporre alcuni spunti per ampliare il lavoro svolto finora implementando nuove tecniche o teorie, specialmente per quanto riguarda il passaggio da propulsione istantanea a propulsione continua.

Sebbene si sia dimostrato come sia possibile ricavare un'approssimazione dei ΔV necessari per una trasferta sfruttante un motore elettrico, il calcolo necessario per ottenere il risultato è molto pesante dal punto di vista computazionale nel momento in cui si inserisce all'interno di un algoritmo di ottimizzazione: per questo motivo i risultati ottenuti con propulsione continua si limitano allo studio di una sola sequenza di detriti. Con l'attuale potenza di calcolo e gli algoritmi di ottimizzazione considerati all'interno dell'elaborato è impossibile trovare una soluzione accettabile considerando contemporaneamente tutte e 10 le sequenze, per cui ci si dovrà limitare per il momento a una stima del ΔV necessario per il solo

caso di tempi di propulsione infinitesimi. In futuro si potrebbero utilizzare le seguenti strategie per cercare di aggirare il problema:

- *utilizzare ulteriori algoritmi di ottimizzazione*: un esempio può essere l'algoritmo *fminunc* in Matlab, ma comunque esso non risolverebbe totalmente il problema, in quanto la maggior parte dei meccanismi di ottimizzazione richiedono un valore di ingresso intorno al quale cercare la soluzione di ottimo; ciò non permette di garantire di trovare il punto di minimo assoluto della funzione. Inoltre per problemi molto complessi con oltre 100 variabili come quello in questione, utilizzare algoritmi di ricerca di minimi locali rende la soluzione troppo dipendente dal valore di ingresso.
- *migliorare la ricerca di soluzioni valide*: nel corso dell'elaborato per selezionare quali soluzioni fossero valide e quali no si è usato un semplice metodo di flag all'interno del codice di calcolo; questa semplicità è diventata però una limitazione nel momento in cui sono entrati in gioco la GAO e PSO. Assegnando un valore di $\Delta V = 10^{23}$ alle soluzioni con tempi di missione negativi o superiori a 25 giorni, si è andato ad intralciare il meccanismo di ricerca semicasuale delle soluzioni da parte dei due metodi. Ciò significa che le soluzioni leggermente fuori dall'intervallo di accettabilità (ad esempio 9 tempi di trasferta minori di 25 giorni e uno di 25.1) fossero scartate allo stesso modo di soluzioni chiaramente impossibili (10 trasferte da 35 giorni o -10 giorni), rendendo dunque impossibile cercare una soluzione accettabile nell'intorno di una leggermente inaccettabile.
Un secondo difetto di questo metodo è l'allungamento delle iterazioni di stallo, dal momento che è molto più probabile trovare una soluzione non accettabile che una accettabile, per cui la GAO e PSO rimangono per molte iterazioni al livello di flag se non viene dato un input iniziale.
- *studiare 10 sequenze separate*: il modo più intuitivo di procedere è dunque

quello di rinunciare a studiare l'ottimizzazione della missione nella sua interezza e andare a studiare il punto di ottimo per ciascuna delle 10 sequenze. Nonostante questa soluzione renda i calcoli più semplici e sia meno pesante dal punto di vista computazionale, essa presenta due grossi problemi. Il primo è il fatto che l'ottimizzazione delle 10 sequenze non garantisce l'ottimizzazione della missione completa, dal momento che possono esistere soluzioni subottimali per ciascuna trasferta la cui somma è minore della somma delle soluzioni di ottimo.

Il secondo problema risiede nel fatto che studiando una sequenza alla volta si è schiavi della soluzione ottenuta per la trasferta precedente, ovvero una volta ottimizzata la sequenza 1 si avrà un tempo $t_{1,end}$ da cui dovrà partire lo smaltimento della sequenza 2 e così via. Avendo numerose sequenze, è possibile che si arrivi ad un punto in cui non è possibile trovare una soluzione accettabile per la sequenza i partendo dal tempo $t_{i-1,end}$ e l'accelerazione imposta. Se ciò accade, è necessario ricominciare da capo inserendo dei nuovi paletti alle soluzioni precedenti, per cui la apparente semplicità del metodo viene meno. Inoltre, per lo stesso motivo, è molto più difficile trovare un valore di accelerazione minima come fatto nel caso 3 delle soluzioni.

Bibliografia

Simple ΔV Approximation for Optimization of Debris-to-Debris Transfers,
Hong-Xin Shen, Lorenzo Casalino

The Kessler Run: On the Design of the GTOC9 Challenge, Dario Izzo , Marcus
Martens

GTOC9: Results from the Jet Propulsion Laboratory (team JPL)

Particle swarm optimization algorithm: an overview, Dongshu Wang¹, Dapei
Tan¹, Lei Liu²

Genetic Algorithm Based on Natural Selection Theory for Optimization Problems

