



POLITECNICO DI
TORINO

Corso di Laurea Magistrale
in Ingegneria Aerospaziale

Anno accademico 2023/2024

ANALISI DI MISSIONI VERSO NEAR EARTH ASTEROIDS
(NEAs)

Relatore:

Ing. Lorenzo Casalino

Candidato:

Antonio Simeone

ABSTRACT

La presente tesi verterà sullo studio ed ottimizzazione di possibili missioni verso i cosiddetti Near Earth Asteroids. Essi possono costituire un pericolo per il nostro Pianeta qualora ci fosse una collisione, con rischi non quantificabili. Allo stesso tempo, però, la loro vicinanza ha il vantaggio di portare a possibilità concrete di missioni di grande interesse scientifico. Infatti, dallo studio di questi corpi è possibile riuscire a capire di più sulla formazione del sistema solare e dell'Universo stesso.

Andremo a ricercare delle possibili missioni verso i NEAs di elevato ritorno scientifico. L'ottimizzazione sarà mirata a minimizzare il propellente necessario attraverso l'utilizzo della Teoria del Controllo Ottimale.

La tesi si articolerà in tre parti. La prima introdurrà le informazioni generali sugli asteroidi. La seconda tratterà il modello matematico e della teoria del controllo. Infine, la terza parte, si focalizzerà sull'applicazione di tali metodi ad una serie di asteroidi per ricercare delle possibili missioni.

INDICE

1. Gli Asteroidi	8
1.1. Classificazione	9
1.2. Near Earth Object	10
1.2.1. Scala Torino	12
1.2.2. Scala Palermo	13
1.3. Missioni Spaziali	14
2. Richiami Teoria Meccani del Volo Spaziale	16
2.1. Leggi di Keplero	16
2.2. Sistemi di Riferimento	18
2.2.1. Sistema Eliocentrico	18
2.2.2. Sistema Geocentrico	19
2.2.3. Sistema Perifocale	20
2.3. Elementi Orbitali Classici	21
2.4. Traiettoria	22
2.4.1. Equazione del Moto	22
2.4.2. Equazione della Traiettoria	24
2.5. Manovre Orbitali	27
2.5.1. Aggiustamento degli Apsidi	29
2.5.2. Rotazione Linea degli Apsidi	30
2.5.3. Cambio Piano Orbitale	31
2.6. Patched – Conics	32
2.7. Flyby	33
2.8. Rendez-vous	34
2.9. Propulsione Elettrica	34
3. Ottimizzazione Traiettorie	36
3.1. Teoria del Controllo Ottimale	37
3.2. Problema Differenziale ai Limiti (BVP)	42

4. Definizione Problema	47
4.1. Equazioni di Stato e Variabili Aggiunte	50
4.2. Condizioni Iniziali	53
4.3. Condizioni al Contorno	54
4.4. Condizioni Intermedie	55
5. Analisi Missioni	56
5.1. Analisi Preliminari	58
5.2. Ottimizzazione Missioni	59
5.2.1. Spinta 5 mN	60
5.2.2. Spinta 10 mN	61
6. Risultati	64
6.1. 5 mN	64
6.1.1. Apophis	64
6.1.2. 2001 QQ142	67
6.1.3. 2003 UC20	69
6.2. 10 mN	71
6.2.1. 2013 NK4	71
6.2.2. Wilson - Harrington	75
6.2.3. 2011 UL21	77
7. Conclusioni	78
8. Appendici	79
8.1. Apophis	79
8.1.1. 5 mN	79
8.1.2. 10 mN	79
8.2. 2001 QQ142	80
8.2.1. 5 mN	80
8.2.2. 10 mN	80
8.3. 2003 UC20	81
8.3.1. 5 mN	81
8.3.2. 10 mN	81

8.4. 2013 NK4	82
8.4.1. 5 mN	82
8.4.2. 10 mN	82
8.5. Wilson - Harrington	83
8.5.1. 5 mN	83
8.5.2. 10 mN	83
8.6. 2011 UL21	84
8.6.1. 5 mN	84
8.6.2. 10 mN	84
9. Bibliografia	85
9.1. Figure	85

1. Gli Asteroidi

Il termine fu coniato dal matematico inglese William Herschel nel 1802. Deriva dal greco "asteroeidēs", che significa "simile a una stella", questo perché essi si mostrano come dei punti di luce nei telescopi proprio come una stella.

Il primo asteroide scoperto fu *Cerere* (in onore della dea romana protettrice del grano e della Sicilia) nel gennaio del 1801 dall'astronomo italiano Giuseppe Piazzi. Egli pensava fosse una stella fissa, ma con le ulteriori osservazioni capì che aveva un moto proprio, tanto da essere considerato inizialmente come un pianeta. Solo successivamente venne poi classificato come asteroide. Da lì a poco ne furono scoperti tantissimi altri, ma, tutt'ora, *Cerere* risulta essere il più grande asteroide della *fascia principale*, seguito da *Pallade* e *Veste*. L'accumulo di una grande quantità di asteroidi in questa fascia è dovuta principalmente alla forte interazione gravitazionale di Giove.

Secondo la teoria *planetesimale* del russo Viktor Safranov, del 1969, essi non sono altro che degli ammassi di polveri, gas e metalli, detti planetesimi, che a causa di forze esterne non sono riusciti ad aggregarsi tra loro e a formare un protopianeta che, successivamente, sarebbe poi diventato un vero e proprio pianeta. Proprio per questa loro particolare formazione, diventa importante studiarne la composizione chimica così da riuscire a capire meglio l'origine del Sistema Solare e dell'Universo stesso.

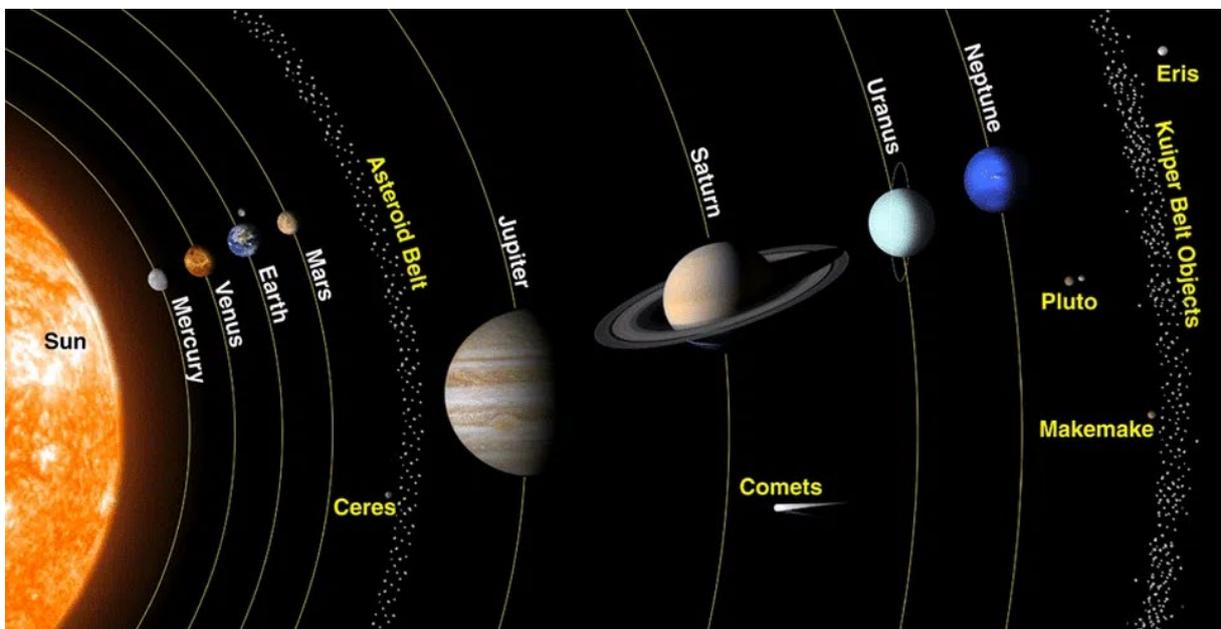


Figura 1. Fascia Principale

1.1 Classificazione

Ad oggi sono stati contati circa 1,25 milioni di asteroidi nella sola fascia principale. Ci sono diversi modi per catalogare gli asteroidi. Una prima suddivisione viene fatta in base alla conoscenza che si ha dei parametri del corpo stesso:

- **NUMBERED:** sono quelli i cui parametri orbitali sono noti e vengono classificati numericamente (sono circa 650 000);
- **UNNUMBERED:** quelli i cui parametri orbitali o non sono noti oppure sono determinati in maniera approssimativa, per questo vengono classificati in base alla data di scoperta. Necessitano per cui ulteriori osservazioni prima di passare nella categoria *numbered*.

Un altro tipo di classificazione è quella *spettrale*, in cui i corpi vengono distinti in base alla composizione chimica e all'albedo:

- **Tipo C:** asteroidi *carboniosi*. Costituiscono circa il 75% degli asteroidi totali e sono caratterizzati da un albedo prossimo allo zero (0,03). Essi si trovano pressoché nella regione esterna della fascia principale e tendono a riflettere pochissimo la luce solare;
- **Tipo S:** asteroidi *silicati*. Costituiscono il 15% della popolazione totale e sono presenti prevalentemente nella fascia interna;
- **Tipo M:** asteroidi *metallici*. Rappresentano il 10% della quantità totale e sono considerati ricchi di metalli, principalmente ferro e nichel.

Abbiamo poi anche delle particolari tipologie di asteroidi che appartengono ad una popolazione più piccola:

- **Tipo G:** simile al tipo C, ma si differenziano per l'assorbimento dell'ultravioletto. L'asteroide che rappresenta questa tipologia è *Cerere*;
- **Tipo E:** sono gli asteroidi "bianchi" caratterizzati da un alto valore di albedo, in cui l'enstatite predomina nella composizione;
- **Tipo R:** caratterizzati da un colore e da uno spettro rossastro, da qui appunto la lettera *R*;
- **Tipo V:** sono quella categoria che si pensa siano, per la similitudine della composizione chimica, frammenti dell'asteroide *Vesta*.

1.2 Near Earth Object

Si definiscono *Near Earth Objects (NEOs)* gli asteroidi o comete, con dimensioni variabili (dai metri a centinaia di chilometri), che orbitano attorno al Sole, la cui traiettoria è vicina a quella terrestre. Fanno parte di essi anche le *Near Earth Comets (NECs)*, ossia le comete che hanno un breve periodo orbitale (<200 anni) ed un perielio inferiore a 1,3 UA. La maggior parte dei NEOs è costituita da *Near Earth Asteroids (NEAs)* con perielio inferiore a 1,3 UA. I NEAs a loro volta vengono suddivisi in base ai parametri orbitali (a =semiasse maggiore; q =perielio; Q =afelio) in quattro famiglie:

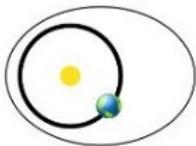
- **Atiras:** aventi asse maggiore inferiore a quello terrestre;



- $a < 1,0$ AU
- $Q < 0,983$ AU

Figura 2. Orbita Atiras

- **Amors:** caratterizzati da orbite esterne a quella terrestre, ma interne a quella marziana;



- $a > 1,0$ AU;
- $1,017$ AU $< q < 1,3$ AU;

Figura 3. Orbita Amors

- **Atens:** con semiasse maggiore inferiore a quello terrestre la cui orbita interseca quella terrestre;



- $a < 1,0$ AU
- $Q > 0,983$ AU

Figura 4. Orbita Atens

- **Apollos:** con semiasse maggiore superiore a quello terrestre la cui orbita interseca quella terrestre.



- $a > 1,0$ AU
- $q < 1,017$ AU

Figura 5. Orbita Apollos

Come si può notare gli *Atiras* e gli *Amors* non intersecano l'orbita terrestre, per cui non rappresentano un pericolo nell'immediato. La vita di questi asteroidi è relativamente breve (qualche milione di anni), questo ci fa capire che in realtà non si sono formati sulla loro orbita attuale, ma in punti differenti dello Spazio. I NEAs sono destinati a decadere nel Sole o ad essere espulsi (attraverso l'effetto fionda), ma la loro orbita è continuamente minacciata da effetti esterni quali l'attrazione gravitazionale di altri pianeti o da collisioni con altri asteroidi, il che rende la loro traiettoria variabile nel tempo rendendone necessaria la continua osservazione.

I *Potentially Hazardous Asteroids (PHAs)* sono definiti in base ad alcuni parametri che potrebbero portarli ad avvicinarsi troppo alla Terra. In particolare, sono considerati a tutti gli effetti PHAs tutti quegli asteroidi che hanno *distanza minima di intersezione dell'orbita terrestre (MOID, Minimum Orbit Intersection Distance)* inferiore a 0,05 UA e una *magnitudine assoluta (H)* inferiore a 22,0. Attraverso la magnitudine assoluta, che è la misura della luminosità del corpo, si può stimare la dimensione dell'asteroide^[1]:

$$D = \frac{1329}{\sqrt{p}} \cdot 10^{-0.2 \cdot H} [km] \quad (1.1)$$

La variabile p identifica l'albedo geometrico dell'asteroide e cioè il rapporto tra la frazione di luce incidente e quella riflessa.

Generalmente l'albedo viene approssimata attorno al 14%, ma il suo valore può variare dal 5% al 30%, questo porta tale espressione ad avere un certo errore, che può essere molto significativo soprattutto se si va a stimare il volume del corpo. Possiamo passare da $p=0,03$ per gli asteroidi di tipo C, fino ad un valore di 0,5 per quelli più luminosi.

Un corpo per essere considerato PHAs deve avere una dimensione di almeno 140 m e la possibilità di avvicinarsi alla Terra ad una distanza inferiore a 0,05 UA (=7 480 000 km).

La pericolosità di questi asteroidi viene stimata mediante due scale:

- **Scala Torino;**
- **Scala Palermo.**

1.2.1 Scala Torino

La scala Torino (*Torino Impact Hazard Scale*) è stata introdotta nel 1999 dall'*International Astronomical Union (IAU)* per poter classificare i possibili impatti tra asteroidi e Terra. È una scala di valori che va da 0 a 10 con un relativo codice cromatico. Lo 0 indica una minaccia trascurabile, mentre il 10 indica una potenziale catastrofe planetaria. Questa scala va a catalogare la possibilità di impatto, ma senza tenere conto del tempo che ci separa da esso.

Il codice cromatico è composto da 5 colori:

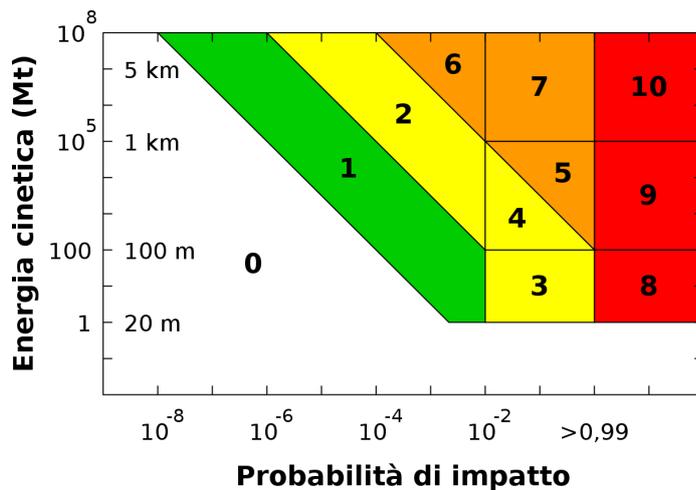


Figura 6. Scala Torino

- **Bianco:** rischio di impatto zero o prossimo allo zero (0);
- **Verde:** la probabilità di collisione è estremamente bassa (1);
- **Giallo:** indica degli incontri ravvicinati con degli asteroidi la cui probabilità di collisione è circa 1% (2, 3 e 4);
- **Arancione:** incontri ravvicinati con asteroidi che possono avere dimensioni considerevoli, tanto da portare, nel caso di impatto, ad una distruzione regionale, rendendo così necessarie delle analisi aggiuntive per capire dove e quando avverrà l'impatto (5, 6 e 7);
- **Rosso:** si tratta di collisione certa che può portare o ad una distruzione localizzata, se asteroidi piccoli, o ad una distruzione globale, se l'asteroide è abbastanza grande (8, 9 e 10).

Negli anni alcuni asteroidi sono stati classificati con un valore pari ad 1, salvo poi essere declassati tutti a 0. Ad oggi, nessun asteroide ha un valore nella scala Torino superiore allo 0. Un esempio di livello 10 è stata l'asteroide *Chicxulub* che ha portato all'estinzione dei dinosauri.

1.2.2 Scala Palermo

La scala Palermo (*Palermo Impact Hazard Scale*) è stata introdotta per riuscire a classificare e a dare una priorità ai vari potenziali eventi caratterizzati da un'ampia gamma di date, energie e probabilità di impatto. Tale scala è caratterizzata da un codice numerico:

- **PS < -2**: sono quegli eventi trascurabili;
- **-2 < PS < 0**: impatti che meritano un monitoraggio;
- **PS > 0**: l'impatto in questione merita una particolare attenzione;

Tale valore della scala viene definito attraverso un'equazione logaritmica^[2]:

$$PS = \log_{10} R \quad (1.2)$$

$$R = \frac{P_i}{f_b \cdot DT} \quad (1.3)$$

Dove:

- P_i : probabilità d'impatto;
- f_b : frequenza annuale di un impatto con energia cinetica (espressa in megatoni, E) almeno pari a quella dell'evento in oggetto, il cui valore si ottiene attraverso la formula^[3]:

$$f_b = 0.03 \cdot E^{-\frac{4}{5}}; \quad (1.4)$$

- DT: tempo fino all'impatto, in anni.

Ad oggi l'asteroide con il valore più alto è 1,10 relativo all'asteroide *Apothis*, il cui incontro ravvicinato con la Terra sarà nel 2029.

1.3 Missioni Spaziali

Ad oggi i NEAs conosciuti sono più di 30 000, con un continuo aggiornamento mensile da parte della NASA, di cui un terzo hanno dimensione superiore a 140 m, mentre circa 900 superiore al chilometro^[4]. Nel corso degli anni per poter mappare e gestire le informazioni relative a questi corpi sono nati numerosi enti, il più importante è il *Planetary Defense Coordination Office* (PDCO). Fu istituito nel 2016 dalla Nasa con il compito di gestire le missioni che prevedono la ricerca, il tracciamento e la comprensione di questi corpi che potrebbero costituire un rischio per la Terra.

Oltre ad esso possiamo citarne due europei: GAL Hassin (che fa anche parte del progetto PRISMA, che ha lo scopo di determinare le orbite e l'area di impatto delle cosiddette *fireball*); ESA ESRIN (centro di osservazione dell'ESA in Italia).

Il PDCO si occupa anche di tecniche e dimostrazioni tecnologiche per deflettere un asteroide da una possibile traiettoria di impatto con la Terra. Uno dei progetti più significativi è stato la missione DART^[5] (Double Asteroid Redirection Test) nel 2021. Esso aveva come obiettivo quello di dimostrare che è possibile deviare il moto spaziale di un asteroide evitando così un possibile impatto con la Terra. L'asteroide target era *Dydimos* e la sua luna *Dimorphos*. Il lancio è avvenuto nel Novembre del 2021 con il successivo impatto nel Settembre del 2022 andando ad alterare il moto del corpo celeste di 33 minuti, dimostrando la possibilità di successo.

Il progetto DART è, però, unico nel suo genere, infatti negli ultimi anni la maggior parte delle missioni sono volte a studiare e catalogare gli asteroidi, anche con l'intento di riportarne dei pezzi sulla Terra. Esse portano un notevolmente contribuito alla nostra comprensione di questi corpi ed hanno aperto a nuove prospettive sulla formazione e successiva evoluzione del Sistema Solare. Tra le missioni più importanti abbiamo:

- **NEAR Shoemaker(1996-2001)** ^[6]: Fu in assoluto la prima missione che portava uno spacecraft ad orbitare attorno ad un asteroide e, nonostante non fosse progettato per questo, fu anche il primo ad atterrare su un corpo celeste. Il progetto NEAR (Near Earth Asteroid Rendez-vous) Shoemaker della NASA lanciato nel febbraio del 1996 ha visitato l'asteroide *Eros*, atterrando con successo nel febbraio del 2001. La sonda ha condotto degli studi dettagliati sulla composizione, sulla struttura e sulla sua storia;

- **Hayabusa (2003-2010)** ^[7]: A differenza della NEAR Shoemaker, il progetto della JAXA (Japan Aerospace Exploration Agency) era volto a verificare la possibilità di atterrare su un asteroide e riportare dei campioni di esso sulla Terra. La sonda fu lanciata nel Maggio del 2003 verso l'asteroide *Itokawa* e nonostante alcuni problemi tecnici riuscì ad atterrare e riportare i campioni del corpo celeste. Successivamente, nel 2014, c'è stato il progetto *Hayabusa 2* verso l'asteroide *Ryugu* con lo stesso obiettivo;
- **OSIRIS-REx (2016-in corso)** ^[8]: La missione OSIRIS-Rex è la prima missione della NASA a riportare dei campioni di asteroidi sulla Terra. È stata lanciata nel Settembre del 2016 e nel Settembre del 2023 ha rilasciato una capsula con i campioni dell'asteroide *Bennu*, mentre la sonda non è atterrata, ma è diretta ad esplorare *Apophis*;
- **Lucy (2021-in corso)** ^[9]: Questa missione della NASA mira ad esplorare un alto numero di corpi celesti attraverso dei fly-by passando vicino a due asteroidi della fascia principale e ad otto asteroidi Troiani, che condividono un'orbita attorno al Sole con Giove. Il lancio è stato nell'Ottobre del 2021 ed il primo fly-by è avvenuto ne Novembre 2023;
- **Psyche (2023-2029)** ^[10]: La missione Psyche della NASA volta ad esplorare l'omonimo asteroide che si pensa possa essere il nucleo parziale di un planetesimale (corpo che si pensa abbia costituito lo stadio intermedio di aggregazione della polvere e dei gas della nebulosa primordiale). La sonda è stata lanciata nell'Ottobre del 2023 e dovrebbe giungere a destinazione nel 2029;

2 Richiami Teoria Meccanica del Volo Spaziale

2.1 Leggi di Keplero

Il 1609 viene considerato ufficialmente l'anno della nascita della moderna 'astrodinamica', ovvero lo studio del modo in cui pianeti e stelle si muovono nell'universo, grazie alla pubblicazione di Keplero delle prime due leggi.

Nel corso della storia, però, son stati numerosi i modelli emersi. Il primo fu quello *geocentrico*, proposto dall'astronomo greco *Eudosso*, discepolo di *Platone*, e perfezionato poi da *Callippo* e *Aristotele*. Esso rappresentava al centro di tutto la Terra e il resto girava attorno ad essa secondo delle traiettorie perfettamente circolari e concentriche.

Successivamente l'astronomo polacco *Copernico* introdusse il modello *eliocentrico* dove il Sole è al centro dell'Universo e tutto gira attorno ad esso, sempre su traiettorie concentriche. Il sistema copernicano riuscì così a spiegare alcuni fenomeni terrestri, ma non tutti.

Nel 1609 il tedesco *Johannes Keplero* basandosi sulle osservazioni del suo maestro *Brahe*, che prevedevano, e prevedono ancora, correttamente il moto dei pianeti nel sistema solare, formulò tre leggi sperimentali:

1. **Prima Legge:** un pianeta descrive un'orbita che è ellittica (giace su un piano) ed il Sole occupa uno dei due fuochi. Essa implica che la distanza pianeta-Sole cambi di continuo, introducendo così il concetto di *afelio* (punto di massima distanza) e *perielio* (punto di minima distanza). Comunemente chiamata anche *Legge delle orbite*;

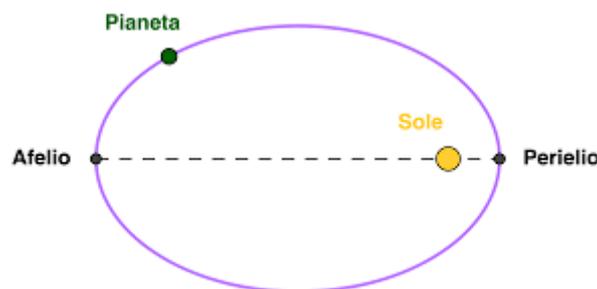


Figura 7. Afelio e Perielio sistema eliocentrico

2. **Seconda Legge:** il raggio vettore che collega il pianeta al Sole spazza aree uguali in tempi uguali. Per cui, i pianeti hanno velocità differenti lungo l'orbita, in particolare, sarà massima al perielio e minima all'afelio. Essa viene anche chiamata *Legge delle Aree*;

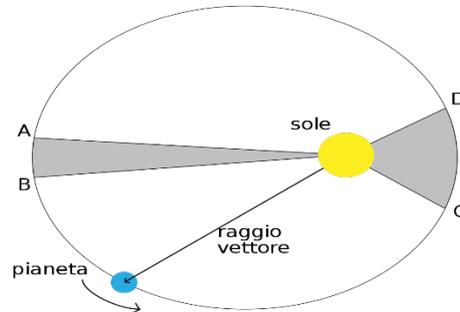


Figura 8. Aree uguali in tempi uguali

3. **Terza Legge:** il quadrato del periodo di rivoluzione di un pianeta è proporzionale al cubo della distanza media dal Sole. Il rapporto tra questi due valori è costante per tutti i pianeti, inoltre, la stessa legge, può essere applicata anche ai satelliti come la Luna. Tale legge viene detta *Legge dei Periodi*.

$$T^2 = k \cdot r^3 \quad (2.1)$$

Sono tre principi fondamentali che descrivono il movimento dei pianeti nel sistema solare. Essi hanno costituito una base essenziale per i successivi studi di Newton che gli ha permesso di sviluppare la *Legge di Gravitazione Universale*: due punti materiali esercitano l'uno sull'altro una forza attrattiva (F) diretta come il segmento che li unisce. Applicandolo al caso dei pianeti si ottiene:

$$F = -G \frac{M \cdot m}{||r^3||} \cdot r \quad (2.2)$$

G rappresenta la *Costante di Gravitazione Universale*, ed è pari a $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$, mentre M ed m rappresentano rispettivamente la massa del corpo centrale e quella dell'orbitante, con r che è il raggio vettore che unisce i centri di massa.

Questa legge si basa su delle masse puntiformi, per cui è valida se si considerano distanze superiori alla dimensione caratteristica dei corpi in oggetto.

2.2 Sistemi di Riferimento

2.2.1 Eliocentrico

Sistema centrato nel Sole, con il piano fondamentale (X_E, Y_E) che coincide con quello dell'eclittica (piano sul quale giace l'orbita della Terra). In particolare, l'asse X_E è dato dall'intersezione tra il piano dell'eclittica e quello equatoriale terrestre nell'equinozio invernale, con verso positivo in direzione della costellazione dell'*Ariete*. Per l'asse Z_E la direzione positiva è quella generata dal momento angolare del moto di rivoluzione terrestre attorno al Sole, di conseguenza viene poi definito Y_E .

A causa della precessione degli equinozi esso non è un vero sistema inerziale, questo perché la precessione porta ad una rotazione della linea dei nodi, effetto trascurabile per missioni di breve durata. La Terra sappiamo essere più massiva all'equatore, per cui le forze gravitazionali lunari e solari, più delle altre, cercano di attrarre tale parte per allinearla con l'eclittica. Otteniamo così una rotazione in senso orario che è la *precessione dell'asse terrestre*, che ruotando descrive un cono.

Possiamo definire due tipi di precessioni:

- **Precessione Luni-Solare:** ha un'incidenza di $0^\circ 0' 50,37''$ /anno;
- **Precessione Planetaria:** è nel senso opposto alla luni-solare con un'incidenza di $0^\circ 0' 0,11''$ /anno.

Avremo un'incidenza totale di $0,01395^\circ$ /anno, cioè l'asse terrestre compie un giro completo ogni circa 26 000 anni. Con questa rotazione si ha che gli equinozi anticipano di quasi un giorno ogni 71,63 anni tenendo conto dell'analogia gradi (360°) e giorni (365 in un anno). Andiamo per cui a definire:

- **Anno Sidereo:** il lasso di tempo in cui ci ritroveremo nello stesso punto rispetto alle stelle fisse dopo un giro completo ($360^\circ \rightarrow 365\text{g } 6\text{h } 9\text{m } 9\text{s}$);
- **Anno Tropico:** simile all'anno sidereo, ma rispetto al Sole, per cui avremo che la rotazione sarà di 360 meno la precessione ($359,10^\circ \rightarrow 365\text{g } 5\text{h } 48\text{m } 46\text{s}$).

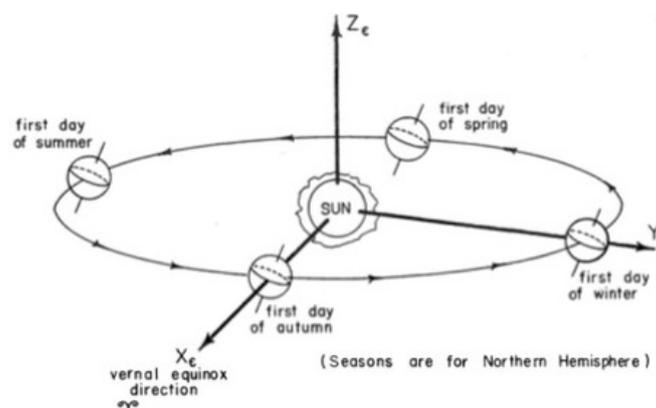


Figura 9. Sistema Eliocentrico

2.2.2 Geocentrico

Il sistema geocentrico ha come origine il centro della Terra e come piano fondamentale quello equatoriale. Al pari dell'eliocentrico, quello geocentrico ha l'asse **X** in direzione della costellazione dell'*Ariete*. L'asse **Z**, invece, risulta positivo in direzione del polo nord, mentre la direzione **Y** viene definita di conseguenza.

Il sistema geocentrico così ottenuto, però, è fisso rispetto alle stelle, eccezione fatta per la precessione degli equinozi, per cui, non ruota insieme alla Terra. Proprio per questo si preferisce utilizzare la notazione **IJK**, in primis per differenziarlo da quello eliocentrico ed, inoltre, per essere solidale con la rotazione terrestre. Viene definito l'asse **I** dall'intersezione tra il piano equatoriale e quello dell'eclittica nell'equinozio invernale, con direzione positiva verso la costellazione dell'*Ariete*. Viene chiamato anche *Earth Centred Inertial (ECI)*.

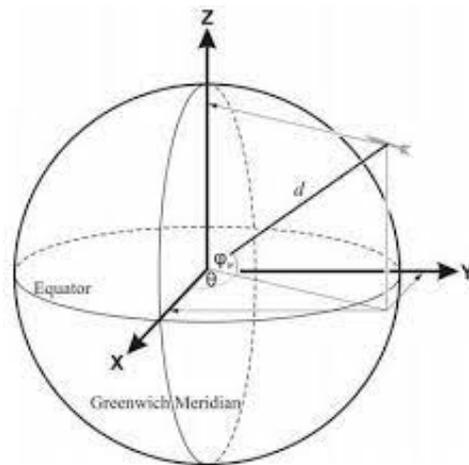


Figura 10. Sistema Geocentrico

2.2.3 Perifocale

Il sistema perifocale ha uno dei fuochi nel corpo centrale, mentre il piano fondamentale è quello in cui giace l'orbita del corpo piccolo. Esso ha l'asse X_w diretto lungo il periastro, Y_w ruotato di 90° nella direzione del moto orbitale, mentre Z_w è agente lungo la direzione del momento angolare h e va a completare la terna. Analogamente al geocentrico, si preferisce una notazione diversa da X_w, Y_w, Z_w utilizzando pq_w . Questo particolare tipo di sistema viene usato per descrivere il moto dei satelliti sulla proprio orbita.

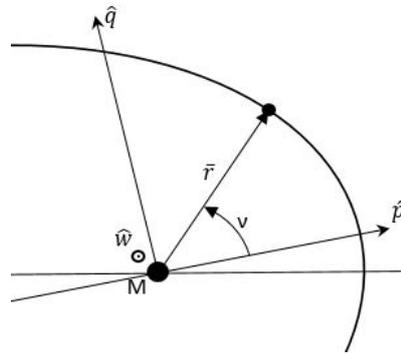


Figura 11. Piano Perifocale

2.3 Elementi Orbitali Classici

Gli elementi orbitali classici vengono definiti sul sistema geocentrico (IJK). Possiamo distinguere 2 parametri nel piano 3D, dati dall'orientamento del piano dell'orbita, ed ulteriori 4 nel piano 2D:

- Forma dell'orbita;
- Dimensione dell'orbita;
- Posizione del periastro;
- Posizione del corpo secondario rispetto al periastro.

Avremo per cui un totale di 6 parametri e 7 elementi orbitali classici:

- **Forma dell'orbita:** semi-asse maggiore (a) e il semi-latus rectum (p);
- **Eccentricità:** e ;
- **Argomento del periastro:** ω ;
- **Posizione:** definita dall'anomalia vera (v) all'istante t ;
- **Longitudine del nodo ascendente:** Ω ;
- **Inclinazione del piano dell'orbita:** i .

Questi permettono di definire in maniera univoca l'orbita di un corpo attorno alla Terra in coordinate geocentriche-equatoriali, o attorno al Sole in coordinate eliocentriche-eclittiche.

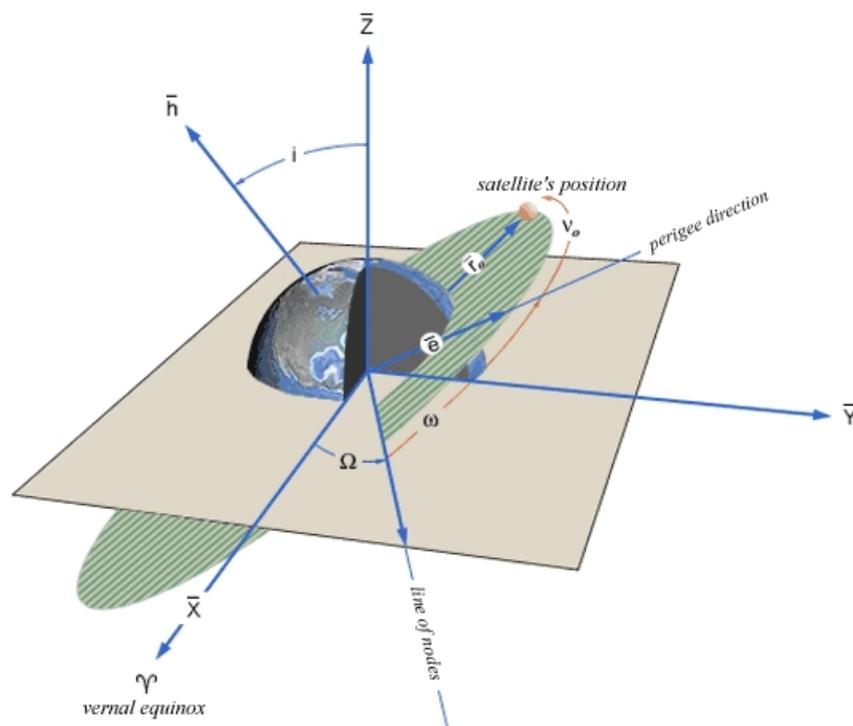


Figura 12. Elementi Orbitali Classici

2.4 Traiettoria

2.4.1 Equazione del moto

Partiamo dallo studio del problema degli N corpi considerando tre ipotesi fondamentali:

- Masse puntiformi;
- Masse costanti;
- Solo il contributo della forza gravitazionale.

Esso coinvolge il movimento degli N corpi in interazione gravitazione reciproca. Il problema cardine è andare a definire le traiettorie di ciascun corpo sotto l'influenza gravitazionale di tutti gli altri. Le equazioni del moto vengono definite partendo dalle equazioni differenziali alle derivate parziali delle leggi di Keplero o di Newton.

Considerando il solo contributo delle forze gravitazionali l'equazione del moto, nel sistema inerziale (F_i) e, quindi, fisso o di moto rettilineo uniforme con le stelle fisse, diventa:

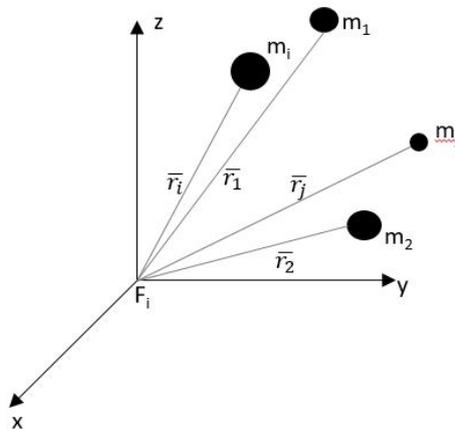


Figura 13. Problema degli n corpi

$$m_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_j + \vec{F}_N \quad (2.3)$$

Dove la forza F è definita dalla legge di gravitazione universale di Newton:

$$\vec{F} = -G \frac{m_i \cdot m_j}{\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|^2} \cdot \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|} \quad (2.4)$$

Sostituendo e dividendo tutto per m_i si ha:

$$\ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1}^N \left[-G \frac{m_j}{\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|^2} \cdot \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|} \right], \quad j \neq i \quad (2.5)$$

Otteniamo così N equazioni vettoriali del II ordine accoppiate e 3N equazioni scalari del II ordine accoppiate.

A causa dei molteplici corpi interessati, però, queste equazioni possono diventare molto complesse richiedendo metodi di integrazione numerica per la risoluzione.

Nel nostro caso andremo così a considereremo N=2 avendo così il *problema degli N corpi ristretto* o *problema dei due corpi*. In particolare, consideriamo due possibili coppie:

- Sole (M) + Pianeta (m);
- Spacecraft ($m_{s/c}$) + Terra (m_{\oplus}).

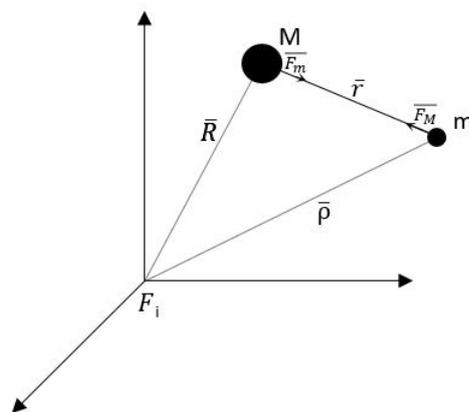


Figura 14. Problema dei due corpi

Anche in questo partiamo da 3 ipotesi:

- Masse puntiformi;
- $m \ll M$;
- Contributo solo forze gravitazionali.

Attraverso queste ipotesi andremo a scrivere le forze gravitazionali per entrambi i corpi e, sottraendole tra loro, definiremo l'*Equazione del Moto*:

$$\ddot{\vec{r}} \cong -\frac{G \cdot M}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \rightarrow \ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = 0 \quad (2.6)$$

Con μ indichiamo la *costante gravitazionale planetaria* data dal prodotto tra la *costante di gravitazione universale* (G) e la massa del corpo con alcuni valori noti:

- **Terra** $\rightarrow \mu = 398\,600 \text{ km}^3/\text{s}^2$;
- **Sole** $\rightarrow \mu = 4\,902 \text{ km}^3/\text{s}^2$;
- **Luna** $\rightarrow \mu = 132\,500 \cdot 10^6 \text{ km}^3/\text{s}^2$.

2.4.2 Equazione della traiettoria

Tenendo conto che energia meccanica e momento angolare si conservano possiamo integrare l'equazione del moto e riscriverla ottenendo l'*Equazione della Traiettoria*:

$$\bar{r} = \frac{h^2/\mu}{1 + B/\mu \cos v} \quad (2.7)$$

Dove:

- **h**: momento angolare specifico;
- **B**: costante integrativa;
- **v**: anomalia vera, è la misura angolare della posizione del corpo sulla traiettoria.

Il momento angolare è dato dal prodotto vettoriale $r \times V$, quindi deve sempre essere perpendicolare sia ad r che a V . Abbiamo che h è una costante, allora r e V devono restare sempre sullo stesso piano. Da qui si deduce che il moto del corpo è su un solo piano, chiamato *piano orbitale*.

Attraverso la trattazione del problema degli N corpi, in particolare con $N=2$, arriviamo a definire, in coordinate polari, l'equazione della traiettoria di un corpo che orbita attorno ad un altro:

$$r(v) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(v)}, \quad (2.8)$$

Il percorso descritto viene rappresentato da una sezione conica. In particolare, possiamo riscrivere l'equazione andando a definire la famiglia di coniche descritte dall'orbita del corpo:

$$\bar{r}(v) = \frac{p}{1+e \cos v} = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos v}, \quad (2.9)$$

con:

- r : raggio vettore che collega i due corpi;
- a : semiasse maggiore dell'ellisse;
- v : *anomalia vera*, parametro angolare che definisce la posizione del corpo sulla traiettoria;
- p : semi-latus rectum, distanza dal fuoco del punto in orbita caratterizzato da $v=\pi/2$;
- e : eccentricità definita dal rapporto c/a , dove c è la distanza tra i due fuochi. Rappresenta la deviazione della traiettoria da quella circolare:
 - $e=0$: orbita circolare;
 - $e<1$: orbita ellittica;
 - $e=1$: orbita parabolica;
 - $e>1$: orbita iperbolica;

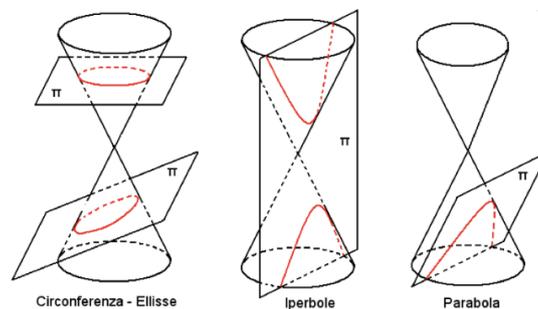


Figura 15. Curve coniche

In particolare dalla prima legge di Keplero abbiamo visto che le orbite descritte dai pianeti sono ellittiche, quindi l'eccentricità sarà compresa tra 0 e 1. In questo caso l'anomalia vera determina due punti fondamentali:

- **Periapside:** caratterizzato da una $v=0$ ed è il punto più vicino al fuoco principale;
- **Apoapside:** definito da una $v=\pi$ ed è il punto più lontano dal fuoco principale.

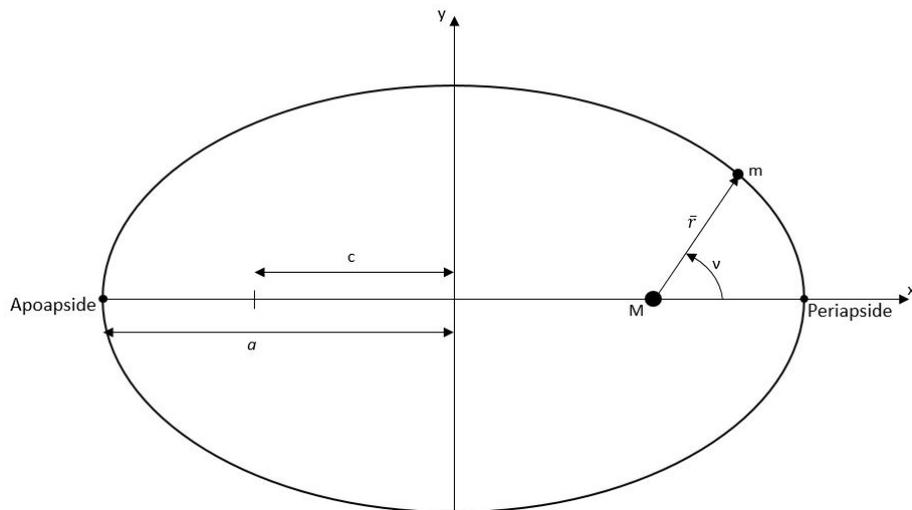


Figura 16. Ellisse

Questi cambiano poi nome in base al corpo che stiamo considerando:

- **Sole:** perielio e afelio;
- **Terra:** perigeo e apogeo;
- **Corpo qualsiasi:** periastro e apoastro.

2.5 Manovre Orbitali

Le manovre orbitali rappresentano una serie di azioni che vengono eseguite con lo scopo di trasferimento di orbita e/o compensazione delle perturbazioni. Queste sono realizzate attraverso la propulsione, che può essere chimica o elettrica, e mediante una spinta, che è ottenuta espellendo una certa quantità di propellente. Il costo di ogni singola manovra viene valutato in base al ΔV necessario ad effettuarla.

Consideriamo il modello di *manovre impulsive*, per cui ipotizzeremo di avere una spinta infinita per un tempo infinitesimo (*spinta impulsiva*).

Partiamo dalla II legge della dinamica:

$$\vec{F} = \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = 0 \quad (2.10)$$

Per generare la spinta viene espulsa una certa quantità di propellente, per cui anche la massa è variabile con il tempo avendo così:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{dm}{dt} = 0 \quad (2.11)$$

Dove con v indichiamo la velocità di emissione dei gas (c) e riscrivendo si ha:

$$d\vec{v} = -c \frac{dm}{m} \rightarrow \Delta V = c \cdot \ln \frac{m_i}{m_t} \quad (2.12)$$

Possiamo poi esplicitare la formula della velocità effettiva dei gas di scarico, c , ottenendo:

$$\Delta V = I_{sp} \cdot g_0 \cdot \ln \left(\frac{m_0}{m_f} \right) [km/s] \quad (2.13)$$

dove:

- I_{sp} : Impulso specifico;
- g_0 : costante di gravitazione al sea level;
- m_0 : massa iniziale;
- m_f : massa finale.

Possiamo avere diverse manovre classificate in base al numero di impulsi necessari:

- Manovre ad un impulso:
 - Aggiustamento apsidi;
 - Rotazione linea degli apsidi;
 - Cambio piano semplice;
- Manovre a due impulsi:
 - Fasamento dell'orbita;
 - Trasferimento tra due orbite circolari (Trasferimento di Hohmann);
 - Trasferimento di Hohmann non complanare;
- Manovre a tre impulsi:
 - Trasferimento bi-ellittico tra due orbite circolari;
 - Cambio di piano a 3 impulsi.

In questa tesi andremo a considerare solo le manovre ad un impulso.

2.5.1 Aggiustamento Apsidi

Questa è una manovra che porta ad una variazione del semiasse maggiore. Viene fatto sempre all'apside opposto rispetto a quello che si vuole alzare di un certo Δz :

- Innalzamento apoapside $\rightarrow \Delta V > 0$ al periapside $\Delta z = \Delta r_a$;
- Innalzamento periapside $\rightarrow \Delta V > 0$ all'apoapside $\Delta z = \Delta r_p$.

Come detto, questo comporta una variazione del semiasse maggiore:

$$a_2 = a_1 + \frac{\Delta z}{2} \quad (2.14)$$

Attraverso la conservazione dell'energia possiamo ricavare la v_2 e successivamente il ΔV adatto alla nostra manovra:

$$\Delta E_g = \frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} = -\frac{\mu}{2a_2} + \frac{\mu}{2a_1} \rightarrow \quad (2.15)$$

$$\rightarrow v_2 = \sqrt{v_1^2 - \frac{\mu}{a_2} + \frac{\mu}{a_1}}, \quad (2.16)$$

$$\Delta V = v_2 - v_1 \quad (2.17)$$

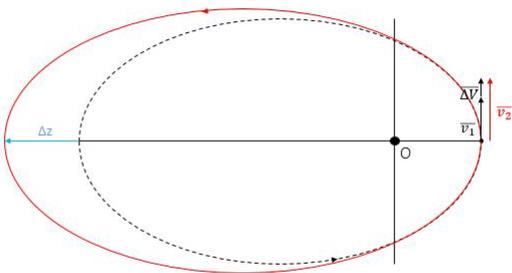


Figura 17. Aggiustamento apoapside

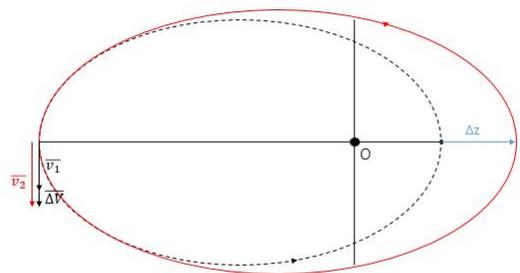


Figura 18. Aggiustamento periapside

Per piccole variazioni di quota possiamo scrivere l'equazione differenziale:

$$da = \frac{2a^2}{\mu} VdV \rightarrow \quad (2.18)$$

$$\rightarrow dz = \frac{4a^2}{\mu} VdV \quad (2.19)$$

2.5.2 Rotazione linea degli Apsidi

Per passare da un'ellisse ad un'altra, ottenendo così una rotazione della linea degli apsi, è necessario farlo nei punti comuni, A o B. Andremo ad applicare un impulso ΔV nel piano ottenendo una rotazione di $\Delta\omega$ della linea degli apsi. In questa particolare manovra si ha:

- Energia meccanica costante

$$E = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} = \text{cost} \rightarrow |v| = \text{cost.} \quad (2.20)$$

- Momento angolare costante

$$h = \vec{r} \times \vec{v} = \text{cost} \rightarrow \quad (2.21)$$

$$\rightarrow |h| = r \cdot v_{\theta} = \text{cost} \rightarrow v_{\theta} = \text{cost} \quad (2.22)$$

Esprimiamo ora la rotazione della linea degli apsi in funzione dell'anomalia vera:

- **Punto A:** $v = \pi + \Delta\omega/2$
- **Punto B:** $v = \Delta\omega/2$

$$\Delta V = 2|v_r| = 2\frac{\mu}{h} \cdot e \cdot |\sin v| \quad (2.23)$$

Sostituendo poi nel caso del punto A e del punto B si ottiene la formula finale della rotazione degli apsi, in cui, l'impulso necessario ad ottenere una rotazione di $\Delta\omega$ è:

$$\Delta V = 2\frac{\mu}{h} \cdot e \cdot \sin \frac{\Delta\omega}{2} \quad (2.24)$$

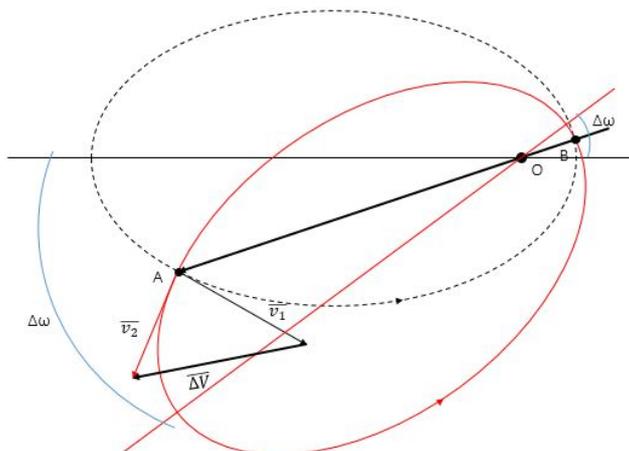


Figura 19. Rotazione linea degli Apsidi

2.5.3 Cambio di piano orbitale

In questo caso andremo a cambiare l'inclinazione della nostra orbita, per cui il nostro target sarà proprio il Δi che vogliamo.

Andremo a dare un impulso al nostro corpo che sarà al di fuori del piano, al contrario di quanto fatto con le manovre precedenti, ottenendo così la Δi necessaria.

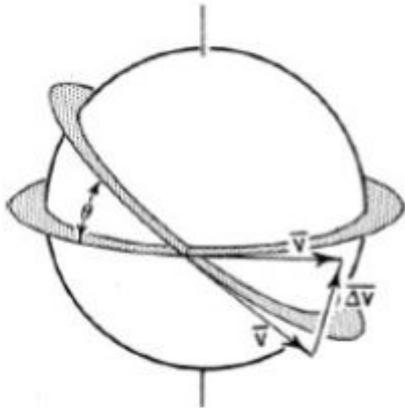


Figura 20. Variazione inclinazione

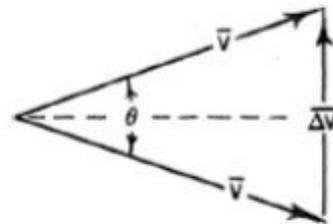


Figura 21. ΔV necessario

Si evince per cui che il nostro ΔV non va a modificare il modulo della velocità, ma solo la sua inclinazione. Dall'immagine possiamo definire:

$$\Delta V = 2\bar{V}_\theta \cdot \sin \frac{\Delta\theta}{2} \quad (2.25)$$

Dalla formula si capisce subito che conviene variare l'inclinazione a velocità basse. Avremo che V_θ è minima quando il $\cos v = -1$, per cui quando $v=\pi$, quindi tale manovra viene fatta all'apoapside, così da ridurre i costi.

Il costo può essere ulteriormente diminuito se effettuata in combinazione con l'aggiustamento dell'altezza degli apsi.

2.6 Patched – Conics

Il metodo delle Patched-Conics ci garantisce di individuare una delle possibili condizioni iniziali per un processo di ottimizzazione. Esso prevede l'unione di più archi per andare a definire una traiettoria che non sarà quella finale, ma richiederà, successivamente, un'integrazione numerica. Quindi, il metodo delle patched conics è sì approssimativo, ma permette di fare una prima stima sui tempi e sui costi, in termini di ΔV , della missione che si andrà ad affrontare.

Alla base di tale metodo avremo il *problema dei due corpi* ed il concetto di *sfera di influenza del corpo*.

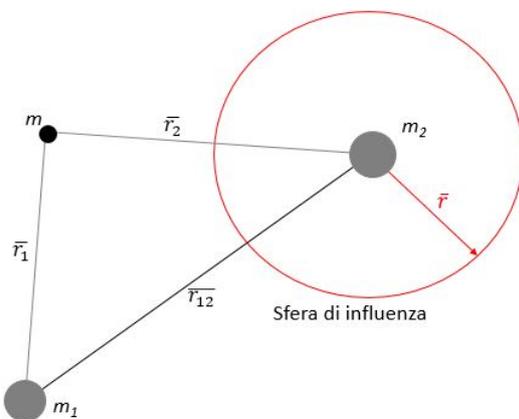


Figura 22. Sfera di Influenza del Corpo

Andiamo a definire due corpi di massa rispettivamente m_1 e m_2 , con $m_1 \gg m_2$, e, attraverso un vettore congiungente i centri di massa, la distanza r_{12} . Supponiamo di prendere lo spacecraft di massa m ($m \ll m_1, m_2$) definendo i raggi r_1 ed r_2 che sono rispettivamente la distanza dal primo e dal secondo corpo. Per capire se m è sotto l'influenza di m_2 o m_1 , bisogna capire quale sia la sfera di influenza dei due corpi.

Si definisce *sfera di influenza del corpo* il luogo di punti in cui le accelerazioni generate dalle forze

gravitazionali di m_1 ed m_2 si equivalgono. Da questa equivalenza si ottiene:

$$\bar{r} = \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{\frac{2}{5}} \cdot \bar{r}_{12}, \quad (2.26)$$

Prendendo il sistema solare dove m_1 è il Sole ed m_2 è un generico pianeta, la sfera di influenza non dipende solo dalla distanza dal Sole, ma anche da quanto il pianeta è massivo rispetto ad esso. Ogni corpo avrà un proprio raggio di influenza. In particolare, per la Terra esso ha un valore pari a $0,61 \div 0,63$ UA ($= 0,91 \div 0,94 \cdot 10^6$ km).

Se ci troviamo all'interno della sfera di influenza terrestre possiamo studiare il moto del satellite rispetto alla Terra attraverso l'uso del problema dei due corpi, potendo sfruttare così le traiettorie kepleriane viste precedentemente (sezione 2.3.2).

Una volta fuori dall'influenza terrestre, con una velocità detta *velocità di eccesso iperbolico* (V_∞), entreremo in quella solare, dove il nostro fuoco diventerà proprio il Sole. Anche qui, grazie all'approssimazione della sfera di influenza studieremo la traiettoria come se fosse kepleriana. Questa è detta *fase eliocentrica*, mentre la precedente viene chiamata fase *planetocentrica*. Successivamente,

in prossimità della sfera gravitazionale di un altro oggetto massivo (che può essere Marte, Giove, grande corpo celeste, ...) riutilizziamo ancora il problema dei due corpi e quindi orbite kepleriane. Così facendo andremo ad unire serie di coniche.

Come è facile intuire, ciò che cambia da una sfera ad un'altra è proprio il parametro gravitazionale che usiamo a seconda di essere nella fase planetocentrica o eliocentrica. Il satellite, pur non ricevendo una spinta, avrà un'energia di traiettoria differente, in quanto viene vista rispetto al corpo che avremo al fuoco dell'orbita.

La continuità tra i vari pezzi di traiettoria viene garantita attraverso la correzione dei parametri orbitali ove necessario.

2.7 Flyby

Il flyby prevede un passaggio ad alta velocità, con durata molto breve (ordine di qualche ora), in prossimità di un pianeta o di un corpo celeste.

Nel primo caso permette di sfruttare il cosiddetto *effetto fionda* per aumentare l'energia della traiettoria senza dover usare i propulsori. Questo effetto è legato alla legge di conservazione della quantità di moto. Infatti, confrontando quest'ultima prima e dopo il flyby noteremo un suo incremento.

A seconda delle condizioni di velocità, flight path angle e traiettoria che ha il satellite, attraverso questo passaggio, possiamo arrivare a raddoppiarne la velocità senza usare i propulsori.

Quando, invece, si parla di flyby di un corpo celeste, quindi un corpo molto meno massivo, si intende una manovra mirata ad uno studio esplorativo di un corpo sconosciuto. Questo non richiede un eccessivo sforzo in termini di propellente o di complicazioni nella realizzazione. Successivamente a questi studi si può poi passare a realizzare una missione specifica che potrebbe arrivare a prevedere un rendez-vous per quel particolare corpo.

Per la nostra missione, che va verso un NEO, viene usato il flyby della Terra ottenendo un *Earth Gravity Assist (EGA)*. Questo viene fatto sfruttando un passaggio dietro al pianeta dopo circa 15 mesi dalla partenza, guadagnando così una spinta maggiore senza l'utilizzo dei motori che ci permetterà di uscire dalla sfera di influenza terrestre e raggiungere successivamente l'asteroide oggetto della missione.

2.8 Rendez-vous

L'obiettivo finale della nostra missione è il rendez-vous. A differenza del flyby il rendez-vous è una manovra complessa, questo perché per avvenire deve rispettare determinate condizioni legate a velocità e posizione del satellite rispetto all'asteroide di arrivo. In particolare, è necessario che all'incontro spacecraft e corpo abbiano stessa velocità e posizione. Lo scopo è avere un grande ritorno scientifico che permetta di effettuare uno studio sulla composizione chimica così da riuscire a capire meglio l'origine del nostro Sistema Solare e dell'Universo stesso.

2.9 Propulsione Elettrica

La propulsione elettrica è caratterizzata da valori di spinta piccoli che necessitano un certo intervallo di tempo per raggiungere il massimo. Essa è vero che offre impulsi specifici superiori alla propulsione chimica, ma, in termini di spinta, i valori raggiunti sono sensibilmente inferiori rispetto a quest'ultima. Inoltre, proprio a causa dell'intervallo di tempo a raggiungere la spinta massima cade anche l'ipotesi di manovre impulsive.

Considereremo valide le ipotesi di *Edelbaum*, le quali prevedono l'uso di orbite quasi circolari, a bassa inclinazione (e ed i molto piccole e circa zero) e con accelerazioni piccole rispetto alla velocità circolare legata all'orbita stessa. Per cui, la velocità varia in modo graduale e la traiettoria prende la forma di una spirale. Queste approssimazioni permettono di semplificare le equazioni di Gauss per la variazione dei parametri orbitali, ottenendo:

$$V\dot{a} = a2a_T \quad (2.27)$$

$$V\dot{e} = [2a_T \cos \nu + a_R \sin \nu] \quad (2.28)$$

$$V\dot{i} = \cos(\nu + \omega) a_W \quad (2.29)$$

Possiamo riscrivere le accelerazioni in funzione della spinta introducendo due angoli:

- α : angolo tra spinta e direzione tangenziale;
- β : angolo tra spinta e piano orbitale.

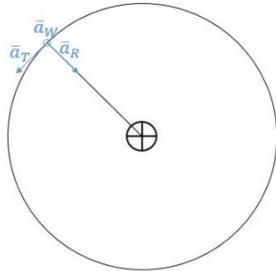


Figura 23. Accelerazioni Orbitali

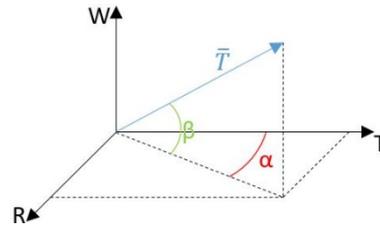


Figura 24. Terna accelerazioni

Definendo così:

$$a_T = \frac{T}{m} \cos \alpha \cos \beta \quad (2.30)$$

$$a_R = \frac{T}{m} \sin \alpha \cos \beta \quad (2.31)$$

$$a_W = \frac{T}{m} \sin \beta \quad (2.32)$$

Indicando con:

- a_T : accelerazione tangenziale
- a_R : accelerazione radiale
- a_W : accelerazione fuori dal piano.

Da qui è possibile dimostrare che:

- $\alpha = \beta = 0^\circ$: si ha una spinta tangenziale che massimizza la variazione del semiasse maggiore, in particolare con $\beta = 0^\circ$, se $\alpha = 0^\circ$ il semiasse aumenta, se $\alpha = 180^\circ$ il semiasse decresce;
- $\alpha = \frac{1}{2} \text{tg}(v)$ e $\beta = 0^\circ$: si massimizza la variazione di eccentricità e per v piccolo, quindi $\alpha \approx v$, la spinta sarà perpendicolare al periastro;
- $\beta = \pm 90^\circ$: massimizzeremo la variazione di inclinazione dell'orbita.

3. Ottimizzazione Traiettorie

Come anticipato in precedenza la continuità della traiettoria e la sua ottimizzazione incide sul costo e sulla fattibilità della missione stessa. Diventa molto importante andare a minimizzare il consumo di propellente così da massimizzare il carico utile.

Il problema dell'ottimizzazione è nel cercare una legge di controllo che renda massimo o minimo un particolare parametro. Nel nostro caso cercheremo di rendere di minimizzare la massa di propellente usata. Trovare una soluzione non è, però, così semplice e ci si avvale o di soluzioni approssimate o di metodi numerici. In particolare, avremo 3 tecniche di ricerca dell'ottimo^[11]:

- **Tecniche Enumerative:** cercano la soluzione in tutti i punti del dominio, discretizzato, della funzione;
- **Tecniche Numeriche:** sfruttano un serie di condizioni che devono essere soddisfatte dalla soluzione del problema di ottimizzazione. A loro volta possono essere distinte in:
 - *Dirette:* la ricerca della soluzione è guidata dal gradiente della funzione obiettivo;
 - *Indirette:* ricercano in maniera iterativa la soluzione svolgendo funzioni non lineari (*Non Linear Programming*) fino ad ottenere il gradiente della funzione obiettivo nullo;
- **Tecniche Probabilistiche:** sono simili a quelle enumerativa, ma utilizzano informazioni aggiuntive per arrivare alla soluzione e possono essere viste come tecniche evolutive.

In ambito aerospace vengono preferite le tecniche indirette, che permettono di ridurre i costi di calcolo e limitando il numero di parametri utilizzati. Questo implica però derivare le espressioni analitiche rispetto alle condizioni necessarie e potendo avere un intervallo di convergenza piccolo potrebbe essere necessario introdurre delle variabili aggiunte per arrivare alla soluzione.

Nelle sezioni successive verrà approfondita la *Legge del Controllo Ottimale* basata sugli studi del russo Pontryagin e dello statunitense Bellman.

3.1. Teoria del Controllo Ottimale

Introduciamo un vettore di variabili di stato x . Le sue variazioni tra inizio e fine dominio vengono descritte da equazioni differenziali che sono funzioni oltre che di x stesso anche di:

- u : vettore di controllo
- t : variabile indipendente

Definiamo il sistema non lineare:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t) \quad (3.1)$$

Suddivideremo la nostra traiettoria in n intervalli (o archi). Il j -esimo intervallo sarà racchiuso tra $t = t_{(j-1)+}$ e $t = t_{j-}$, in cui i valori della variabile di stato sono rispettivamente $x_{(j-1)+}$ e x_{j-} , dove con i segni $+$ e $-$ indichiamo le quantità subito prima e subito dopo il punto di giunzione tra due archi successivi. Tali indici sono molto importanti a causa delle possibili discontinuità che potremmo riscontrare. Per questo in tali punti vengono imposti dei vincoli che non sono altro che le condizioni al contorno, mentre le variabili di stato e di controllo all'interno dell'intervallo sono continue.

Le condizioni di vincolo sono miste, quindi devono soddisfare sia delle condizioni di Neumann, nel caso di vincolo sulla derivata della soluzione agli estremi del dominio, o di Dirichlet, nel caso, invece, di vincolo sulla soluzione agli estremi. Tali condizioni sono non lineari e sono espresse come segue:

$$\chi(x_{(j-1)+}, x_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-}) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.2)$$

L'obiettivo dell'ottimo è quello di trovare il massimo o il minimo di un funzionale J definito da:

$$J = \varphi(x_{(j-1)+}, x_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-}) + \sum_{j=1}^n \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} \phi(x(t), u(t), t) dt \quad (3.3)$$

Possiamo notare che tale funzionale viene espresso come la somma di due contributi: funzione ϕ , che dipende dai valori del vettore di stato e dalla variabile indipendente t agli estremi del singolo intervallo considerato; integrale di ϕ , che, al contrario, dipende dal valore di x, u e t in ogni sotto intervallo.

A seconda della formulazione adottata possiamo avere un'approssimazione di questo funzionale:

- Formulazione Lagrangiana $\rightarrow \phi=0$;
- Formulazione di Mayer $\rightarrow \phi=0$.

Introduciamo ora i moltiplicatori di Lagrange:

- μ : sono costanti ed associati alle condizioni al contorno;
- λ : sono delle variabili associate alle equazioni di stato.

Possiamo allora riscrivere il funzionale ottenendo:

$$J^* = \varphi + \mu^T \chi + \sum_{j=1}^n \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} (\phi + \lambda^T (f - \dot{x})) dt \quad (3.4)$$

I valori dei due funzionali J e J^* agli estremi possono coincidere se le condizioni al contorno e le equazioni di stato sono soddisfatte, infatti, in questo caso avremo $\chi = 0$ e $\dot{x} = f$.

Se integriamo per parti J^* possiamo svincolarci dalla derivata di \dot{x} ottenendo:

$$J^* = \varphi + \mu^T \chi + \sum_{j=1}^n (\lambda^T x_{(j-1)+} - \lambda^T x_{j-}) + \sum_{j=1}^n \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} (\phi + \lambda^T - \lambda^T x) dt \quad (3.5)$$

Andando ora a fare la variazione del primo ordine del funzionale dove indicheremo con le parentesi quadre le matrici.

$$\begin{aligned} \delta J^* &= \left(-H_{(j-1)+} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{(j-1)+}} + \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial t_{(j-1)+}} \right) \delta t_{(j-1)+} + \left(-H_{j-} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j-}} + \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial t_{j-}} \right) \delta t_{j-} + \\ &+ \left(\lambda_{(j-1)+}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{(j-1)+}} + \mu^T \left[\frac{\partial \chi}{\partial x_{(j-1)+}} \right] \right) \delta x_{(j-1)+} + \left(-\lambda_{j-}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{j-}} + \mu^T \left[\frac{\partial \chi}{\partial x_{j-}} \right] \right) \delta x_{j-} + \\ &+ \sum_{j=1}^n \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} \left(\left(\frac{\partial H}{\partial x} \lambda^T \right) \delta x + \frac{\partial H}{\partial u} \delta u \right) dt \end{aligned} \quad (3.6)$$

Si nota la presenza dell'*Hamiltoniano* del sistema (H). Esso è una funzione che esprime l'istantaneo incremento dell'espressione lagrangiana del problema, che all'interno della teoria del controllo ottimale viene espressa con:

$$H = \phi + \lambda^T f \quad (3.7)$$

Come detto la ricerca dell'ottimo sta nel trovare un punto di massimo o di minimo del funzionale, quindi la sua variazione del primo ordine deve essere pari a zero ($\delta J^* = 0$). Con le adeguate variabili e costanti aggiunte possiamo rendere nullo il coefficiente di ogni variazione del funzionale ottenendo così un potenziale nullo.

Ponendo la variazione prima uguale a zero otteniamo le *equazioni di Eulero-Lagrange* relative alle variabili aggiunte e ai relativi controlli, ottenendo rispettivamente:

$$\dot{\lambda} = - \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^T \quad (3.8)$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial u} \right)^T = 0 \quad (3.9)$$

Se nell'ottimizzazione introduciamo anche le variabili di tempo o posizione avremo un ulteriore set di variabili date dalle *condizioni di trasversalità* che riguarda la finestra temporale che andiamo a considerare.

$$\lambda_f = \frac{\partial \beta}{\partial x_f} \quad (3.10)$$

$$H_f = - \frac{\partial \beta}{\partial t_f} \quad (3.11)$$

Possiamo notare come scritte in questo modo le leggi di controllo siano indipendenti dalla ricerca dell'ottimo del funzionale J^* . Alcuni controlli possono essere, però, soggetti a dei vincoli e quindi essere limitati all'interno di un certo dominio che possono anche dipendere dal tempo o dalle variabili di stato. Noi considereremo solo i vincoli espliciti e costanti. In presenza di tale valore di vincolo, il valore ottimale di controllo in ogni punto del dominio è quello che rende massimo/minimo l'Hamiltoniano nel punto considerato, questo è il *Principio del Massimo di Pontryagin*.

Possiamo avere due tipi di controllo:

- **Controllo Non Vincolato:** in questo caso se il valore ottimale di controllo rientra nel dominio di ammissibilità allora sarà dato direttamente dall'equazione (3.9);
- **Controllo Vincolato:** se invece il valore fornito dall'equazione (3.9) non rientra nel dominio allora il valore ottimale è agli estremi e quindi assume il valore di massimo o minimo.

Può succedere che l'Hamiltoniano sia lineare rispetto ad uno dei controlli soggetto a vincolo, in questo caso il controllo non compare esplicitamente nella (3.9). Entreremo in una particolare eventualità in cui si avranno ulteriori due possibilità per massimizzare J:

- Se nell'equazione (3.7) il coefficiente del controllo è diverso da zero, avremo due possibilità:
 - Coefficiente positivo: H è massimizzato per il valore di massimo del controllo;
 - Coefficiente negativo: H è massimizzato per il valore di minimo del controllo (noto come metodo *bang-bang*);
- Se nell'equazione (3.7) il coefficiente è, invece, nullo allora bisogna imporre l'annullamento delle derivate successive del coefficiente rispetto al tempo, fino a che in una di esse non appare esplicitamente il controllo, dalla quale, ponendola uguale a zero se ne ottiene il controllo ottimale.

Passando alle condizioni al contorno mancanti, per ottenerle è necessario riferirsi al j-esimo contorno e porre pari a zero i coefficienti nell'espressione della variazione di primo ordine di J^* , ottenendo:

$$-H_{(j-1)+} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{(j-1)+}} + \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial t_{(j-1)+}} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n-1 \quad (3.12)$$

$$-H_{j-} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j-}} + \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial t_{j-}} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.13)$$

$$\lambda_{(j-1)+}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{(j-1)+}} + \mu^T \left[\frac{\partial \chi}{\partial x_{(j-1)+}} \right] = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n-1 \quad (3.14)$$

$$-\lambda_{j-}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{j-}} + \mu^T \left[\frac{\partial \chi}{\partial x_{j-}} \right] = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.15)$$

Se eliminiamo il set di costanti aggiunte μ otteniamo le condizioni al contorno ottimali:

$$\sigma = (x_{(j-1)+}, x_{j-}, \lambda_{(j-1)+}, \lambda_{j-}) = 0 \quad (3.16)$$

Che unite alle precedenti condizioni (3.2) completano il sistema differenziale dato dal sistema di equazioni (3.1) e (3.8).

Andiamo ora a considerare una generica variabile di stato x , che se sottoposta a particolari condizioni al contorno, le equazioni (3.14) e (3.15) forniscono delle condizioni di ottimo per la corrispondente variabile aggiunta λ_x :

- Se la variabile di stato è esplicitamente assegnata all'istante iniziale (con un'espressione simile a $x_0 - a = 0$, quindi con valore assegnato), allora la variabile aggiunta λ_{x_0} è libera, discorso analogo se è assegnata all'istante finale;
- Se la variabile di stato iniziale non compare né in ϕ né nelle condizioni al contorno allora la variabile aggiunta λ_{x_0} è nulla, analogo per il caso all'istante finale;
- Se si ha una variabile di stato che è continua e non assegnata al punto interno i (quindi nel vettore χ è presente l'espressione $x_{j+} = x_{j-}$), allora anche la variabile aggiunta ad essa corrispondente è continua;
- Se si ha una variabile di stato che è continua ed assegnata esplicitamente ad un contorno interno (quindi risulta presente l'espressione $x_{j+} = x_{j-} = a$ nel vettore χ), allora la corrispondente variabile aggiunta vede una discontinuità libera, cioè i valori λ_{j+} e λ_{j-} sono indipendenti e determinati dall'ottimizzazione.

Discorso analogo può essere fatto se l'Hamiltoniano non dovesse dipendere esplicitamente dal tempo, in questo caso, infatti, le equazioni (3.12) e (3.13) darebbe luogo a delle particolari condizioni al contorno:

- Se il tempo iniziale non compare esplicitamente né nelle condizioni al contorno né nella ϕ , allora $H_{t_0} = 0$, analogamente per il caso del tempo finale;
- Se non compare esplicitamente in tempo intermedio t_j nella funzione ϕ , possiamo considerare continuo l'Hamiltoniano con $H_{j+} = H_{j-}$;
- Se il tempo intermedio viene assegnato (quindi nel vettore χ compare l'espressione $t_{j+} = t_{j-} = a$), allora l'Hamiltoniano ha una discontinuità libera in quel punto.

3.2. Problema Differenziale ai Limiti (BVP)

L'utilizzo del metodo indiretto per l'ottimizzazione della traiettoria prevede l'applicazione della teoria del controllo ottimale al sistema di equazioni (3.1), dove le condizioni al contorno dipendono dal tipo di orbite che abbiamo. Tale teoria va a formulare un nuovo sistema di equazioni differenziali ai limiti (*Boundary Value Problem*) in cui avremo i valori iniziali delle variabili incogniti. L'obiettivo è andare ad ottenere le condizioni iniziali tali per cui si riesce a soddisfare sia le condizioni imposte sia quelle di ottimo attraverso l'integrazione numerica del sistema.

Il controllo ottimale non è altro che un problema matematico soggetto a vincoli differenziali e algebrici. Avendo alcune variabili iniziali incognite si ha un problema BVP descritto dalle equazioni (3.1) e (3.8). Le variabili di controllo vengono stabilite dalle equazioni algebriche (3.9) e supportate dalle condizioni imposte (3.2) e di ottimo (3.14). Il sistema è caratterizzato da:

- Intervallo di integrazione suddiviso in sotto intervalli, all'interno dei quali le equazioni possono avere espressioni differenti;
- Durata degli intervalli sconosciuta;
- Possibili condizioni al contorno non lineari e coinvolgimento dei valori delle variabili al contorno;
- Variabili che possono essere discontinue nei contorni interni, il che porta ad avere dei valori incogniti successivamente ad una discontinuità.

Risulta molto difficile risolvere un problema ai limiti, per questo quello che si fa è ridurlo ad un problema dei valori iniziali che vengono portati alla convergenza attraverso l'applicazione del metodo di Newton. La prima cosa da fare è togliere la dipendenza dal tempo, in quanto la durata degli intervalli (τ_j) non è nota. Introduciamo un cambio di variabile per il generico intervallo così da fissarne gli estremi:

$$\varepsilon = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{\tau_j} \quad (3.17)$$

Sostituendo l'espressione (3.9) nel sistema di equazioni generico dato dalle espressioni (3.1) e (3.8) otterremo un sistema differenziale nelle variabili, non più distinte tra stato e aggiunte, $y(x, \lambda)$:

$$\frac{dy}{dt} = f^*(y, t) \quad (3.18)$$

Avendo in questo sistema alcuni parametri costanti (durata sotto intervalli, variabili dopo le discontinuità, ...) ci viene comodo introdurre un nuovo vettore $z = (y, c)$. Esso contiene in y le variabili di stato e quelle aggiunte, mentre in c i parametri costanti.

Unendo il tutto al cambio di variabile sul tempo avremo:

$$\frac{dz}{d\varepsilon} = f(z, \varepsilon) \quad (3.19)$$

Esplicitando poi la f :

$$\frac{dz}{d\varepsilon} = \tau_i \frac{dy}{dt} \quad (3.20)$$

Mentre per i parametri costanti:

$$\frac{dc}{d\varepsilon} = 0 \quad (3.21)$$

Le condizioni al contorno imposte e quelle di ottimo vengono entrambe scritte con un'unica equazione:

$$\psi(s) = 0 \quad (3.22)$$

Dove s contiene i valori che le variabili assumono in ogni bordo (interno ed esterno), i parametri incogniti e quelli costanti:

$$s = (y_0, y_1, \dots, y_n, c) \quad (3.23)$$

Essendo alcune variabili incognite bisogna trovare i valori tali da per soddisfare le equazioni (3.22) attraverso un processo iterativo.

Assumiamo che i valori iniziali siano tutti sconosciuti, per cui si parte da una soluzione tentativo come prima iterazione p^1 . Quello che si fa è integrare le equazioni (3.19) con p^r , i cui valori iniziali sono stati ottenuti dall'iterazione precedente, per cui si fissa:

$$z(0) = p^r \quad (3.24)$$

A questo punto vengono integrate le equazioni lungo tutta la traiettoria tenendo conto delle possibili discontinuità delle variabili ai contorni interni. In ogni contorno viene ottenuto il valore delle variabili di stato e successivamente all'integrazione si calcola l'errore al contorno (ψ^r) della r -esima iterazione.

Ad una variazione dei valori di tentativo Δp corrisponde una variazione dell'errore sulle condizioni al contorno descritto dalla seguente espressione:

$$\Delta\psi = \left[\frac{\partial\psi}{\partial p} \right] \Delta p \quad (3.25)$$

Questo errore è da eliminare e per farlo ad ogni iterazione avremo una correzione dei valori iniziali di una certa quantità:

$$\Delta p = p^{r+1} - p^r = - \left[\frac{\partial\psi}{\partial p} \right]^{-1} \psi^r \quad (3.26)$$

La matrice dell'equazione (3.25) deriva da un prodotto tra due matrici:

$$\left[\frac{\partial\psi}{\partial p} \right] = \left[\frac{\partial\psi}{\partial s} \right] \left[\frac{\partial s}{\partial p} \right] \quad (3.27)$$

La prima è facilmente ottenibile derivando le condizioni al contorno rispetto alle grandezze che avremo. La seconda contiene i valori che vengono assunti ai contorni $\epsilon = 0, 1, \dots, n$ (derivate dei valori delle variabili nei contorni rispetto ai valori iniziali) dalla matrice:

$$\left[\frac{\partial z}{\partial p} \right] = [g(\epsilon)] \quad (3.28)$$

Questa viene calcolata integrando il sistema di equazioni differenziali ottenuto dalla derivazione del sistema (3.19) rispetto ad ogni valore iniziale:

$$[\dot{g}] = \frac{dg}{d\epsilon} = \frac{d}{d\epsilon} \left[\frac{\partial z}{\partial p} \right] = \left[\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial z}{\partial \epsilon} \right) \right] = \left[\frac{\partial f}{\partial p} \right] \quad (3.29)$$

Esplicitando ora lo Jacobiano dell'espressione (3.19) possiamo riscrivere l'equazione (3.29):

$$[\dot{g}] = \frac{dg}{d\epsilon} = \left[\frac{\partial f}{\partial z} \right] \left[\frac{\partial z}{\partial p} \right] = \left[\frac{\partial f}{\partial z} \right] [g] \quad (3.30)$$

In questo sistema omogeneo i valori iniziali sono dati dalla derivata dell'espressione (3.24), ottenendo così la matrice identità:

$$[g(0)] = \left[\frac{\partial z(0)}{\partial p} \right] = [I] \quad (3.31)$$

In questo modo possiamo occuparci anche delle discontinuità. Considerando una discontinuità locale nel punto i che stiamo trattando, possiamo aggiornare le variabili z e g con una relazione, h , che lega i valori delle variabili prima e dopo tale discontinuità:

$$z_{i+} = h(z_{i-}) \quad (3.32)$$

$$[g_{i+}] = \left[\frac{\partial h}{\partial z} \right] [g_{i-}] \quad (3.33)$$

Riusciamo così a semplificare notevolmente il nostro problema, infatti, questo aggiornamento ci permette di mettere in relazione i vettori y_{i+} e y_{i-} , all'interno del vettore s , rendendoli una funzione dell'altro, attraverso proprio h , e del vettore c . Il vettore p viene sostanzialmente ridotto alla stima delle sole componenti incognite di $z(0)$, invece, il vettore ψ si riduce alle sole condizioni al contorno non esplicitate al tempo iniziale.

La matrice dell'equazione (3.26) può essere valutata numericamente. Di fatto, la sua i -esima riga la si ottiene variando l' i -esima componente di p di una piccola Δp ed integrando successivamente le equazioni (3.19).

Possiamo ora trovare la variazione delle condizioni al contorno $\Delta\psi(\Delta p)$ e attraverso una linearizzazione ottenere la riga corrispondente con il rapporto $\Delta\psi^T/\Delta p$. Attraverso delle analisi empiriche si è visto che il valore più adatto della Δp si aggira attorno a $10^{-6} \div 10^{-7}$.

Una procedura di questo tipo permette di avere una soluzione più semplice e rapida del BVP in alcuni casi, ma non sempre garantisce la convergenza. Infatti, essendo un problema molto sensibile alle approssimazioni numeriche, le approssimazioni nella determinazione della matrice nell'espressione (3.25) potrebbe inficiarne la convergenza.

Per il calcolo dello Jacobiano e della matrice $[\partial\psi/\partial s]$ si preferisce tenere una valutazione analitica. L'integrazione di tutte le equazioni differenziali viene ottenuta con un metodo basato sulle formule di Adams con passo e ordine variabile. L'introduzione stessa della linearizzazione per il calcolo della correzione Δp , applicata ai valori iniziali di tentativo, porta con sé degli errori che potrebbero compromettere la convergenza. Vengono allora introdotte alcune assunzioni:

- Per evitare di avere degli errori troppo grandi si utilizza una frazione della correzione ottenuta introducendo un coefficiente K_1 , determinato empiricamente con valori tra 0.1 e 1:

$$p^{r+1} = p^r + K_1 \Delta p; \quad (3.34)$$

- Alla fine di ogni iterazione si va a confrontare l'errore. Tenendo conto che, soprattutto nelle prime iterazioni, l'errore sulle condizioni al contorno deve crescere, viene inserito un nuovo coefficiente K_2 , i cui valori sono compresi tra 2 e 3. Esso viene usato per confrontare due errori massimi successivi. Se:

$$E_{max}^{r+1} < K_2 E_{max}^r \quad (3.35)$$

Si passa all'iterazione successiva;

- Al contrario, se la disequazione precedente non è verificata si usa la bisezione della correzione, per cui la linearizzazione (3.34) viene fatta considerando $\Delta p/2$. Si ripete fino a verificare la (3.35).

4. Definizione del Problema

Come anticipato nell'introduzione del metodo delle Patched-Conics, l'analisi preliminare delle traiettorie interplanetarie viene esaminata assumendo la massa del satellite puntiforme e l'influenza di un solo corpo, così da poter utilizzare il problema dei due corpi ed ottenere delle traiettorie kepleriane. Utilizzeremo un sistema di riferimento eliocentrico che sfrutta le equazioni del problema dei due corpi per descrivere il moto del satellite ed ottenere delle soluzioni ottimali. Di seguito vengono espresse le equazioni differenziali del moto:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V} \quad (4.1)$$

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{g} + \frac{\vec{T}}{m} \quad (4.2)$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{T}{c} \quad (4.3)$$

Dove avremo:

- \vec{r} : vettore posizione;
- \vec{V} : vettore velocità;
- \vec{g} : accelerazione gravitazionale;
- \vec{T} : spinta;
- c : velocità efficace di scarico.

Considerando ora il problema presentato possiamo introdurre l'Hamiltoniano dell'equazione (3.7):

$$H = \vec{\lambda}_V^T \cdot \vec{V} + \vec{\lambda}_g^T \cdot \vec{g} + S_F \cdot \vec{T} \quad (4.4)$$

Il coefficiente S_F è la *Switching Function* definita come segue:

$$S_F = \frac{\vec{\lambda}_V^T T/T}{m} - \frac{\lambda_{mq}}{T} \quad (4.5)$$

Dalle equazioni di Eulero-Lagrange per le variabili aggiunte (3.8) otteniamo:

$$\left[\frac{d\vec{\lambda}_r}{dt} \right]^T = \vec{\lambda}_r^T \left[\frac{\partial g}{\partial r} \right] \quad (4.6)$$

$$\left[\frac{d\vec{\lambda}_v}{dt} \right]^T = -\vec{\lambda}_r^T \quad (4.7)$$

$$\frac{d\lambda_m}{dt} = \frac{\vec{\lambda}_v^T \vec{T}}{m^2} \quad (4.8)$$

Il sistema di equazioni differenziali composto da (4.1), (4.2), (4.3), (4.6) e (4.7) verrà integrato numericamente.

In accordo con il Principio del massimo di Pontryagin le variabili ottimizzate devono poter massimizzare l'Hamiltoniano in ogni punto della traiettoria. Avendo modulo e direzione di spinta come variabili di controllo, si deduce che quest'ultima debba essere parallela al vettore aggiunto di velocità λ_v , da cui si ottiene:

$$S_F = \frac{\lambda_v}{m} - \lambda_m \frac{q}{T} \quad (4.9)$$

Se consideriamo di avere la velocità efficace di scarico (c) costante possiamo semplificarla ulteriormente:

$$S_F = \frac{\lambda_v}{m} - \frac{\lambda_m}{c} \quad (4.10)$$

In questo modo l'unica variabile di controllo rimane il modulo della spinta. Essa è massima se $S_F > 0$, mentre è nulla se $S_F < 0$, in entrambi i casi si massimizza l'Hamiltoniano.

Se la $S_F = 0$ avremo il cosiddetto *arco singolare* e, in tal caso, l'equazione (4.4) non è sufficiente per ottenere il modulo ottimale della spinta. Mentre il valore ottimale della velocità efficace di scarico si determina come segue:

$$\frac{\partial H}{\partial c} = 0 \rightarrow c_{opt} = 2 \frac{\lambda_m}{\lambda_v} m \quad (4.11)$$

Avremo che la velocità di scarico è vincolata, per cui $c_{\min} \leq c \leq c_{\max}$. Possiamo avere 3 casi:

- $C_{opt} > C_{max} \rightarrow C = C_{max}$;
- $C_{opt} < C_{min} \rightarrow C = C_{min}$;
- $C_{min} < C_{opt} < C_{max} \rightarrow C = C_{opt}$.

La condizione di potenza massima è quella per $S_F > 0$, viceversa si ha la potenza minima. In particolare, la *switching function* assume valore minimo quando c è minima, per cui, la S_F è sempre positiva per $c_{min}=0$.

Se consideriamo ora una velocità di scarico ottimale possiamo definire la spinta come segue:

$$T = \frac{2\eta P}{c_{opt}} = \frac{2\eta P \lambda_v}{2m\lambda_m} = \frac{P\lambda_v}{m\lambda_m} \eta \quad (4.12)$$

Se poi assumiamo rendimento unitario ($\eta=1$) si ottiene:

$$\frac{T}{m} = \frac{P\lambda_v}{m^2\lambda_m} \quad (4.13)$$

Se però c non è vincolato allora possiamo assumere che il denominatore $m^2\lambda_m = \text{cost}$ e di conseguenza si ha che $T/m \propto \lambda_v$. Per massimizzare l'Hamiltoniano è necessario massimizzare il prodotto:

$$T \cdot S_F = T \left(\frac{\lambda_v}{m} - \frac{\lambda_m q}{T} \right) = \frac{\lambda_v}{m} \left(T - \frac{m\lambda_m}{\lambda_v} q \right) \quad (4.14)$$

Quindi deve essere massimizzata:

$$\bar{H} = T - \frac{m\lambda_m}{\lambda_v} q = T - Kq \quad (4.15)$$

Si evince quindi che H è data dalla combinazione lineare tra T e q attraverso un parametro K , noto lungo tutta la traiettoria, ma che varia lungo essa.

Al fine di migliorare l'accuratezza del metodo numerico suddividiamo la traiettoria in vari archi distinti dalla spinta, cioè avremo archi con spinta massima e altri con spinta nulla. Il numero e l'ordine di questi ultimi è assegnata a priori, mentre gli intervalli temporali ad essi associati sono sconosciuti.

Per le condizioni al contorno assumiamo che la *switching function* agli estremi di ogni arco sia zero. In questo modo forniremo la soluzione di ottimo corrispondente alla traiettoria assegnata a priori. Successivamente tale soluzione viene controllata attraverso il *principio di massimo di Pontryagin*. Nel caso di violazione del principio verranno aggiunti/rimossi archi di spinta in funzione della S_F così da ottenere una migliore soluzione.

4.1. Equazioni di Stato e Variabili Aggiunte

Come riferimento useremo un sistema inerziale basato sul piano equatoriale, potendo così sfruttare le coordinate sferiche e definire il vettore posizione del satellite come segue:

$$\vec{r} = [r \ \theta \ \phi] \quad (4.16)$$

In cui avremo:

- r : raggio;
- θ : longitudine;
- ϕ : latitudine.

La velocità viene descritta da un sistema di riferimento locale (Zenit-Est-Nord):

$$\vec{V} = [u \ v \ w] \quad (4.17)$$

Andiamo ora a proiettare le equazioni di stato sul sistema di riferimento:

$$\frac{dr}{dt} = u \quad (4.18)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{r \cos \phi} \quad (4.19)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{w}{r} \quad (4.20)$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\mu}{r^2} + \frac{v^2}{r} + \frac{w^2}{r} + \frac{T}{m} \sin \gamma_T \quad (4.21)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{uv}{r} + \frac{vw}{r} \tan \phi + \frac{T}{m} \cos \gamma_T \cos \psi_T \quad (4.22)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{uw}{r} - \frac{v^2}{r} \tan \phi + \frac{T}{m} \cos \gamma_T \sin \psi_T \quad (4.23)$$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{T}{c} \quad (4.24)$$

Nelle equazioni sopra vengono introdotti due angoli:

- ψ : angolo di *heading*, misurato in senso antiorario dal parallelo, con angoli positivi verso Nord;
- γ : angolo di elevazione detto anche *flight path angle*, misurato dal piano orizzontale con angoli positivi verso l'alto.

Nel caso in cui questi angoli non abbiano nessun pedice fanno riferimento alla velocità relativa (V_r):

$$\sin \gamma = \frac{u}{V_r} \quad (4.25)$$

$$\cos \gamma \sin \psi = \frac{v - wr \cos \phi}{V_r} \quad (4.26)$$

$$\cos \gamma \sin \psi = \frac{w}{V_r} \quad (4.27)$$

Definiamo poi il modulo della velocità relativa:

$$V_r = \sqrt{u^2 + (v - wr \cos \phi)^2 + w^2} \quad (4.28)$$

Invece, se presentano il pedice T, permettono di determinare la direzione della spinta.

Possiamo ottenere i valori ottimali di entrambi gli angoli esplicitando l'Hamiltoniano e annullandone le derivate rispetto ad essi:

$$\sin \gamma_T = \frac{\lambda_u}{\lambda_V} \quad (4.29)$$

$$\cos \gamma_T \psi_T = \frac{\lambda_v}{\lambda_V} \quad (4.30)$$

$$\cos \gamma_T \sin \psi_T = \frac{\lambda_w}{\lambda_V} \quad (4.31)$$

Dove:

$$\lambda_V = \sqrt{\lambda_u^2 + \lambda_v^2 + \lambda_w^2} \quad (4.32)$$

Questo è il modulo del vettore primario, che sarà parallelo alla direzione ottimale di spinta.

Avvalendoci nuovamente delle equazioni di Eulero-Lagrange otteniamo le espressioni delle variabili aggiunte che sono inserite nel sistema di equazioni differenziali:

$$\dot{\lambda}_r = \frac{1}{r^2} \left[\lambda_\theta \frac{v}{\cos \phi} + \lambda_\phi w + \lambda_u \left(-\frac{2}{r} + v^2 + w^2 \right) + \lambda_v (-uw + vw \tan \phi) + \lambda_w (-uw - v^2 \tan \phi) \right] \quad (4.33)$$

$$\dot{\lambda}_\theta = 0 \quad (4.34)$$

$$\dot{\lambda}_\phi = \frac{1}{r \cos^2 \phi} (-\lambda_\theta v \sin \phi - \lambda_v vw + \lambda_w v^2) \quad (4.35)$$

$$\dot{\lambda}_v = \frac{1}{r} \left[-\lambda_\phi \frac{1}{\cos \phi} - 2\lambda_u v + \lambda_v (u - w \tan \phi) + 2\lambda_w v \tan \phi \right] \quad (4.36)$$

$$\dot{\lambda}_w = \frac{1}{r} [-\lambda_\phi - 2\lambda_u w - \lambda_v v \tan \phi + \lambda_w u] \quad (4.37)$$

$$\dot{\lambda}_m = \frac{T}{m^2} \lambda_v \quad (4.38)$$

4.2. Condizioni Iniziali

Per risolvere il problema dell'ottimo d'ora in avanti andremo ad utilizzare un *fortran* che utilizza un processo iterativo per valutare la massa finale ed il costo ΔV .

Considereremo delle missioni con partenza dalla Terra e come obiettivo un rendez-vous su un asteroide della fascia principale con dei flyby intermedi. I parametri orbitali di Terra e corpo vengono estrapolati da alcuni file.

Il parametro che determina le dimensioni del nostro problema è N . In particolare, avremo 17 grandezze di cui solo una è nota ($\lambda_m=1$), per cui le incognite sono 16 ($k=N-1$). Di queste 17, 13 sono delle variabili, contenute nel vettore NY , e 4 sono dei parametri costanti, tenute nel vettore YP :

$$NY = [r, \theta, \phi, u, v, w, \lambda_r, \lambda_\phi, \lambda_u, \lambda_v, \lambda_w, \lambda_m, m] \quad (4.39)$$

$$YP = [t_0, t_1, \lambda_\theta, V_\infty] \quad (4.40)$$

Quest'ultimo viene aggiornato ad ogni iterazione partendo dalla soluzione tentativo fino ad ottenere i corretti valori iniziali. Andremo quindi a definire un vettore Y contenente un set di condizioni iniziali dal quale partire con l'integrazione:

$$Y = [t_0, t_f, r_0, \theta_0, \phi_0, u_0, v_0, w_0, \lambda_{r0}, \lambda_{\theta0}, \lambda_{\phi0}, \lambda_{u0}, \lambda_{v0}, \lambda_{w0}] \quad (4.41)$$

Dove:

- t : rappresenta il tempo di partenza dalla Terra e di arrivo al primo asteroide;
- r, θ, ϕ : posizione iniziale dello spacecraft;
- u, v, w : componenti della velocità iniziale dello spacecraft;
- $\lambda_r, \lambda_\theta, \lambda_\phi, \lambda_u, \lambda_v, \lambda_w$: sono le variabili aggiunte.

Non essendo tutte le componenti note a priori, si passa dal problema alle condizioni al contorno (BVP) a quello alle condizioni iniziali (IVP). Il metodo risolutivo è comunque analogo prevedendo un'ipotesi di soluzione iniziale e successivamente un'integrazione del sistema di equazioni differenziali. Ciò che si ottiene è poi confrontato con le condizioni al contorno e se l'errore commesso è inferiore ad una certa tolleranza si considera buona la soluzione di partenza. In caso contrario si passa all'iterazione successiva.

4.3. Condizioni al Contorno

La missione viene divisa in n fasi:

- $n=1$: avremo solo il rendez-vous dell'asteroide;
- $n=2$: un flyby + rendez-vous;
- $n=3$: due flyby + rendez-vous;
- $n=4$: tre flyby + rendez-vous.

La traiettoria sarà divisa in n archi, ognuno dei quali avrà le proprie condizioni al contorno.

Passando allo spacecraft le condizioni iniziali di posizione e velocità coincidono con quelle della Terra:

$$r_{s/c}(t_0) = r_{Earth}(t_0) \quad (4.42)$$

$$V_{s/c}(t_0) = V_{Earth}(t_0) \quad (4.43)$$

$$m(t_0) = 21 \text{ Kg} \quad (4.44)$$

Per quel che riguarda invece le condizioni finali devono coincidere con quelle del corpo di arrivo:

$$r_{s/c}(t_f) = r_{NEO}(t_f) \quad (4.45)$$

$$V_{s/c}(t_f) = V_{NEO}(t_f) \quad (4.46)$$

4.4. Condizioni Intermedie

Passiamo ora alle condizioni intermedie, ovvero quelle dettate dalla presenza di uno o più flyby. Analogamente alle condizioni al contorno nel caso del rendez-vous, nel momento in cui vogliamo effettuare un flyby di un asteroide basta che coincidano le posizioni:

$$r_{s/c}(t_{i-}) = r_{NEO-i}(t_{i-}) \quad (4.47)$$

Tale manovra ha bisogno di un certo intervallo di tempo, per cui, alla ripartenza le condizioni sono cambiate, ma devono comunque coincidere con quelle dell'asteroide al quale ci troviamo:

$$r_{s/c}(t_{i+}) = r_{NEO-i}(t_{i+}) \quad (4.48)$$

Il lasso di tempo necessario ad effettuare una manovra simile è comunque molto piccolo rispetto alle tempistiche della missione. Quello che si fa è, quindi, trascurare il tempo di flyby e considerare coincidenti le condizioni di arrivo e ripartenza dello spacecraft:

$$r_{s/c}(t_{i-}) = r_{s/c}(t_{i+}) \quad (4.49)$$

$$V_{s/c}(t_{i-}) = V_{s/c}(t_{i+}) \quad (4.50)$$

5. Analisi Missioni

Come anticipato nel precedente capitolo per le analisi ci avvarremo di un *fortran* in cui andremo ad inserire alcune informazioni necessarie al codice per svolgere le analisi. Gli input da inserire sono:

- **r_{min}**: frazione di correzione applicata (i valori di usati sono 0,1 e 0,01);
- **pbis**: indica di quanto può aumentare l'errore da un'iterazione all'altra (=2);
- **j_{max}**: il numero massimo di iterazioni;
- **Durata**: può essere fissata (assegniamo noi il valore) o libera (assegnando valore 0) ed in tal caso è il codice stesso che va ad ottenere la durata ottimale;
- **Ast**: asteroide di partenza (0 corrisponde alla Terra);
- **Ast**: l'asteroide al quale effettuare il rendez-vous;
- **am0**: massa iniziale posta sempre uguale a 1;
- **t0**: analogamente alla durata può essere fisso o libero, in questo caso è sempre il codice che va a ricercare il tempo iniziale ottimale per la nostra missione.

Come anticipato nel capitolo 1, gli asteroidi vengono divisi in *numbered* e *unnumbered*. Questa distinzione è molto importante nel momento in cui compiliamo gli input del codice, infatti avremo due notazioni differenti a seconda del gruppo al quale appartengono:

- **Numbered**: sono catalogati all'interno del file '*astn*' e numerati da 1 in poi. Al numero di riga al quale corrisponde il nostro asteroide aggiungiamo 1 000 000 (valore al quale coincide il punto Lagrangiano L5);
- **Unnumbered**: vengono inseriti in un file '*astu*' e sono catalogati in base alla data di scoperta. Per introdurli nel nostro *fortran* andiamo ad inserire il numero della riga corrispondente alla quale sottraiamo 2.

```

C:\ Documents and Settings\Nto'\Desktop\CODICE>codice
rmin, pbis, jmax ?
.01 2 2000
82.3758581587560
4.999999888241291E-003 4.015040125212590E-002
Durata? 0.000000000000000E+000 oppure 0 [niente vincoli massimo]
0
0.000000000000000E+000
NY: 13 N: 17 K: 16
ncmp: 1 nfb1: 0
ast (<0=terra>)?
0
Earth
ast (<0=terra>)?
1099942
Apophis
am0
1
t0 (<0 for optimal>)?
0
0.000000000000000E+000 8.881784197001252E-015 9.663381206337363E-013
2.557361874350184E-017 -5.193761890604319E-015 -9.992006939133621E-015
-1.609372571219652E-017 -0.213326198127899 -2.02989686086637
1.431637976207982E-002 -0.406792032286173 -6.317733905539802E-002

```

Figura 25. Input Fortran

Alla fine delle iterazioni il codice ci restituirà dei valori. Quello più importante, che ci definirà anche l'esito della nostra analisi, è il BVNGL, dove ogni valore equivale ad particolare esito, i più importanti sono:

- -4: convergenza;
- -3: errori troppo piccoli per essere corretti. Di fatto possiamo considerarla una buona soluzione;
- -1: il codice ha raggiunto il massimo numero di iterazioni senza arrivare a convergenza;
- 5: errori troppo grandi.

```

C:\ Prompt dei comandi - codice
0.9244 10.2775 0.0246 -0.1986 1.0183 0.0539 -1.1335 0.3010 -0.2315 -1.022
0 1.0584 0.7995 1.2886
risultato hvngl -4
mf (kg)= 16.7886890336633
Dt = 6.68741150390699
Dt (days)= 388.75553804477
Uinf (km/s)= -2.006698620300096E-020
27/ 5/2027
0.704748351978196
2027 5 27 16 54 50
-62220715.0486999 -138216630.290514 4279.92924426067
26.6783630335936 -12.3386786766197 3.488422076393903E-004
2028 6 19 11 2 50
-4655070.97153344 -151941820.889103 4639.21945716951
29.2898522182769 -1.02283522574082 1.002224530836122E-006
19/ 6/2028
r th fi Earth
1.01322232749479 4.28939528777609 2.823621148052021E-005
COMP. UINF0
9.420218197511709E-009 -3.426558703445437E-009 1.463668822373945E-011
1.007029364560082E-002 0.986814745001111 1.142778389907936E-005
dv, km/s 4.60928049140979
1 4.473342007594167E-006
caso valido ? [s/N]

```

Figura 26. Risultato Fortran

5.1. Analisi Preliminari

Di seguito vengono riportate le analisi preliminari con solo rendez-vous sugli asteroidi di interesse. Andremo ad usare due valori di spinta: 5 mN e 10 mN. Quello che ci aspettiamo è che variando la spinta vari anche la massa finale andando a crescere, mentre il costo dovrebbe decrescere.

Gli asteroidi che prenderemo in esame sono:

- **Apophis:** scoperto nel giugno del 2004. Le prime osservazioni indicavano un'alta probabilità di collisione con la Terra nel 2029. Successivamente si è poi esclusa questa possibilità attraverso la determinazione della sua orbita grazie ad ulteriori osservazioni. Ad oggi è l'asteroide con il valore più alto nella scala Palermo (1,10);
- **2001 QQ142:** è passato vicino alla Terra il 6 dicembre 2023 ad una distanza di più di 5 milioni di km. Il JPL della NASA ha classificato questo asteroide come potenzialmente pericoloso a causa dei suoi passaggi vicini alla Terra;
- **2003 UC20:** è un asteroide di medie dimensioni che potrebbe arrivare in prossimità della Terra, classificato per questo come potenzialmente pericoloso dalla JPL della NASA;
- **2013 NK4:** fa parte della classe *Apollo* ed è caratterizzato da una forte eccentricità;
- **Wilson-Harrington:** osservato la prima volta nel 1949 da Albert Wilson e Robert Harrington. Inizialmente fu considerato una cometa non venendo più avvistato. Successivamente venne rivisto nel 1979 da Helin ed infine nel 1992 venne classificato come asteroide appartenente anche esso alla classe *Apollo*. È caratterizzato da una forte eccentricità ed un elevato semiasse maggiore;
- **2011 UL21:** scoperto nel 2011 e si tratta di un corpo potenzialmente pericoloso della classe *Apollo* che ha 1 come indice nella *scala Torino*. Si contraddistingue per un elevato semiasse maggiore, una forte eccentricità ed un'inclinazione orbitale di quasi 35°.

Di seguito vengono indicati i principali parametri orbitali:

ASTEROIDE	Semiasse Maggiore [UA]	Eccentricità	Inclinazione [°]
APOPHIS	0,92	0,19	3,34
2001 QQ142	1,42	0,31	9,32
2003 UC20	0,78	0,34	3,79
2013 NK4	1,02	0,55	6,53
WILSON-HARRINGTON	2,63	0,63	2,79
2011 UL21	2,12	0,65	34,85

Tabella 1. Parametri Orbitali

Attraverso le analisi preliminari siamo arrivati ai primi risultati riportati in tabella 2.

ASTEROIDE	5 mN				10 mN			
	Partenza	Arrivo	ΔV [km/s]	m_f [kg]	Partenza	Arrivo	ΔV [km/s]	m_f [kg]
AOPHIS	27/05/2027	19/06/2028	4,60	16,80	27/05/2027	28/05/2028	4,40	16,95
2001 QQ142	31/03/2027	21/08/2029	8,00	14,24	31/03/2027	17/09/2029	7,37	14,68
2003 UC20	31/12/2027	07/06/2030	8,83	13,68	31/12/2027	21/05/2030	7,70	14,45
2013 NK4	17/03/2027	11/02/2030	10,50	12,61	17/03/2027	30/12/2029	9,96	12,95
WILSON- HARRINGTON	21/01/2025	05/08/2028	12,25	11,58	20/01/2025	19/02/2027	9,87	13,01
2011 UL21	13/08/2025	24/12/2031	22,71	6,97	13/08/2025	27/04/2030	21,72	7,31

Tabella 2. Analisi Missioni

Per gli asteroidi con parametri orbitali simili a quelli terrestri, quindi bassa eccentricità e inclinazione e semiasse maggiore prossimo ad 1 UA useremo una spinta di 5 mN. Al contrario, per gli altri approfondiremo le missioni con 10 mN con ausilio dell'*Earth Gravity Assist*.

5.2. Ottimizzazione Missioni

Il fortran ci restituisce un minimo locale per l'anno che va a considerare, per cui, quello che faremo è andare ad ottimizzare ulteriormente la missione cercando il miglior anno di partenza per ogni asteroide.

Come detto dividiamo le missioni in due gruppi:

- Spinta 5 mN e senza l'utilizzo del flyby terrestre;
- Spinta 10 mN con l'ausilio dell'*Earth Gravity Assist*.

5.2.1. Spinta 5 mN

Gli asteroidi adatti a questo tipo di spinta sono i primi tre della *tabella 2*:

- Apophis;
- 2001 QQ142;
- 2003 UC20.

Andiamo ad anticipare e/o posticipare la data della nostra missione per ottimizzare ulteriormente i costi.

I risultati vengono schematizzati nella seguente tabella:

Asteroide	Partenza	Arrivo	ΔV (km/s)	m_f (kg)	Durata
Apophis	27/05/2027	19/06/2028	4,60	16,79	7
	03/07/2028	14/08/2029	4,54	16,84	7
	17/06/2029	29/07/2030	6,20	15,54	7
2001 QQ142	31/03/2027	21/08/2029	8,00	14,24	14,2
	16/04/2028	09/07/2030	9,61	13,17	14
	18/03/2025	10/06/2027	7,85	14,34	14
2003 UC20	31/12/2027	07/06/2030	8,83	13,68	15,3
	10/03/2029	30/07/2031	7,12	14,85	15
	15/02/2030	06/07/2032	9,25	13,4	14

Tabella 3. Ottimizzazione Partenza caso 5 mN

Possiamo notare come per l'asteroide Apophis e UC20 convenga ritardare la missione rispettivamente di uno e due anni, così da ottenere una migliore soluzione sia in termini di costi che di massa finale. Invece, per quanto riguarda QQ142 il discorso è inverso, infatti andremo ad anticipare la partenza di circa due anni. Riepilogando le date saranno:

- Apophis: 03/07/2028;
- 2001 QQ142: 18/03/2025;
- 2003 UC20: 10/03/2029.

5.2.2. Spinta 10 mN

Andremo a fare la stessa cosa con il secondo gruppo di asteroidi:

- 2013 NK4;
- Wilson-Harrington;
- 2011 UL21.

Schematizziamo i risultati nella seguente tabella:

Asteroide	Partenza	Arrivo	ΔV (km/s)	m_f (kg)	Durata
2013 NK4	17/03/2027	30/12/2029	9,96	12,95	17,5
	16/04/2026	29/12/2028	9,44	13,28	17
	19/04/2025	02/01/2028	9,20	13,43	17
	26/05/2028	09/02/2031	9,96	12,95	17
Wilson - Harrington	20/01/2025	19/02/2027	9,87	13,00	13,07
	17/10/2025	12/11/2027	10,43	12,65	13
2011 UL21	13/08/2025	27/04/2030	21,72	7,31	29,55
	14/05/2026	21/02/2031	20,45	7,78	30
	12/01/2027	22/10/2031	22,22	7,14	30

Tabella 4. Ottimizzazione Partenza caso 10 mN

Analogamente al caso precedente le migliori date di partenza della nostra missione saranno:

- 2013 NK4: 19/04/2025;
- Wilson – Harrington: 20/01/2025;
- 2011 UL21: 14/05/2026;

Come detto questi asteroidi sono caratterizzati da forte eccentricità/inclinazione e/o semiasse maggiore superiore ad 1 UA, per cui, ci avvarremo dell'*Earth Gravity Assist* per ridurre i costi di missione. Per effettuare questa manovra è necessario un certo lasso di tempo pari a circa 15 mesi. Per cui, la nostra missione non partirà nella data indicata nella *tabella 4*, ma verrà anticipata di poco più di un anno per permettere il flyby terrestre. Alla luce di ciò diventa importante andare a creare un nuovo tipo di soluzione tentativo differente dalle analisi precedenti. Infatti, essa è caratterizzata da:

- t_0 : tempo di partenza;
- **Tempo primo flyby;**
- λ_θ : valore nel primo tratto (Terra primo flyby);
- **Tempo secondo flyby:** posto uguale al primo per avere un solo flyby;
- λ_θ : stavolta è nel secondo tratto, quindi post flyby;
- **Tempo finale:** tempo di arrivo all'asteroide;
- λ_θ : uguale a quello post flyby;
- **Due tempi fittizi:** due valori pari a 0;
- $u, v, w, \lambda_r, \lambda_\phi, \lambda_u, \lambda_v, \lambda_w$: valori dopo il primo flyby;
- $u, v, w, \lambda_r, \lambda_\phi, \lambda_u, \lambda_v, \lambda_w$: valori dopo il secondo flyby, che sono uguali al primo in quanto consideriamo la presenza di un solo flyby;
- V_∞ : con valore molto piccolo (ordine 10^{-20})
- $r, \theta, \phi, u, v, w, \lambda_r, \lambda_\phi, \lambda_u, \lambda_v, \lambda_w, m, \lambda_m$: sono i valori alla partenza.

Utilizzeremo la soluzione ottenuta precedentemente per il tratto diretto Terra-Asteroide, con opportune variazioni, per ottenere le nostre nuove condizioni di partenza:

- Il tempo iniziale viene anticipato di 15 mesi (circa 7,5);
- Anche il θ_0 viene anticipato di 7,5 al netto di 2π ;
- Il tempo del flyby è invece la vecchia partenza, quindi il t_0 che avevamo;
- Il tempo di arrivo è quello che abbiamo trovato dalle analisi di ottimizzazione;
- Come condizioni iniziali usiamo quelle della Terra;
- λ_θ del primo tratto (flyby terrestre) è quello della soluzione con condizioni iniziali dalla Terra, mentre per il secondo tratto (flyby asteroide) è quello delle missioni ottenute;
- I valori post flyby sono quelli di partenza della nostra missione.

In questo caso la schermata degli input del nuovo *fortran* sarà differente dal caso precedente. Come richieste avremo:

- r_{\min} : frazione di correzione applicata (i valori di usati sono 0,1 e 0,01);
- $pbis$: indica di quanto può aumentare l'errore da un'iterazione all'altra (=2);
- j_{\max} : il numero massimo di iterazioni;
- **Asteroide**: corpo del rendez-vous;
- **Partenza**: nel nostro caso è la Terra;
- **Tipo di flyby**: se libero o vincolato;
- t_0 : tempo di partenza;
- t_f : tempo di arrivo;

Successivamente vengono riportati errori e valori delle variabili in gioco.

```

C:\WINDOWS\system32\cmd.exe - flyby
C:\Documents and Settings\Nto'\Desktop\Codice FLYBY>flyby
RMIN, PBIS, JMAX ?
.001 2 2000
lsp (s), T (N) ? 2100.000000000000 1.0000000000000000E-002
/
asteroide ?
1415029
1.000000431000000 1.669803430000000E-002 1.795058788200000
75.4483285006000 3.051870000000000E-005 3.10780620574951
2.122089300000000 0.653184820000000 3.49676104771826
94.7957792086087 0.608309552574320 4.80935790282917
partenza L4(+1) o L5(-1) ?
0
fb libero (2, default) vincolato (3)
2
t0 <0 per ottimo>
0
tf <0 per ottimo>
0
0.000000000000000E+000 -2.668143449806948E-002 3.246773873010866E-003
-6.044332127832908E-002 1.305674653582154E-002 2.477951910589193E-002
2.936132727185544E-005 0.866042046745715 0.842332746940089
-0.390286437365681 0.613308325855740 0.625286871952015
-0.247338797766825 -1.093879462344822E-019 6.727878023049527E-005

```

Figura 27. Input Codice EGA

Per ottenere la soluzione di partenza è necessario inserire un r_{\min} pari a zero così da impedire al codice di iterare facendoci stampare direttamente gli errori. Una volta che questi ultimi sono sufficientemente piccoli passiamo alle iterazioni vere e proprie per ottenere la soluzione della nostra missione.

6. Risultati

Dalle precedenti analisi abbiamo ottenuto vari file tra cui 'out.2' che ci ha permesso di generare dei grafici temporali delle nostre missioni. In particolare, andremo ad illustrare i risultati ottenuti per i 6 asteroidi attraverso 4 grafici:

- Semiasse maggiore;
- Apoastro;
- Periastro;
- Inclinazione.

6.1. 5 mN

6.1.1. Apophis

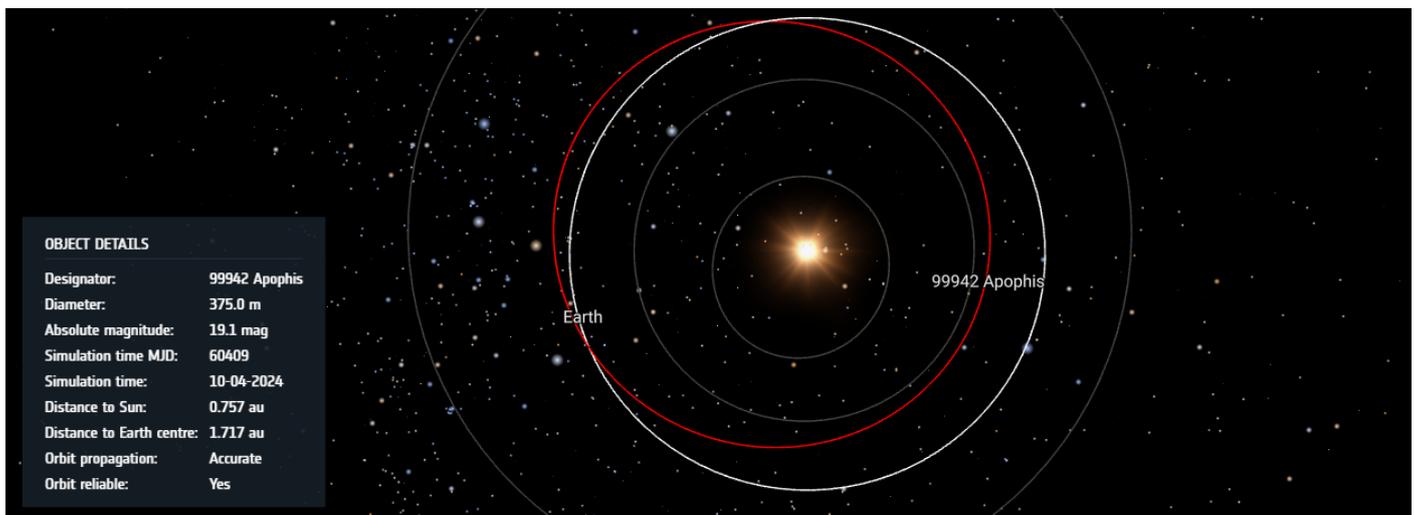


Figura 28. Orbita Asteroide Apophis

Nella *figura 28.* viene rappresentata l'orbita dell'asteroide Apophis e possiamo osservare come questa sia più piccola rispetto all'orbita terrestre. Per questo, dai risultati, ci aspettiamo che il semiasse maggiore vada a decrescere, mentre l'inclinazione vada ad aumentare rispetto alla Terra. Di seguito viene riportata la traiettoria in 3D (*figura 29.*), dove l'asse Z è generato per chiarezza, e 2D (*figura 30.*) che seguirà il nostro satellite per raggiungere il target.

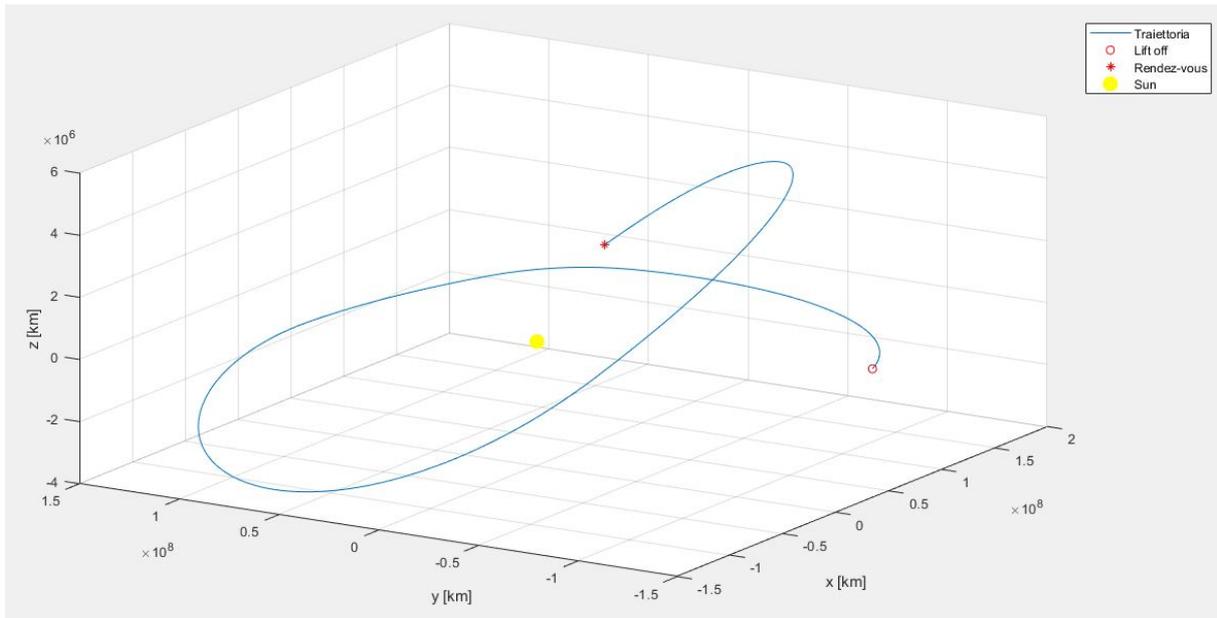


Figura 29. Traiettorie 3D Terra – Apophis

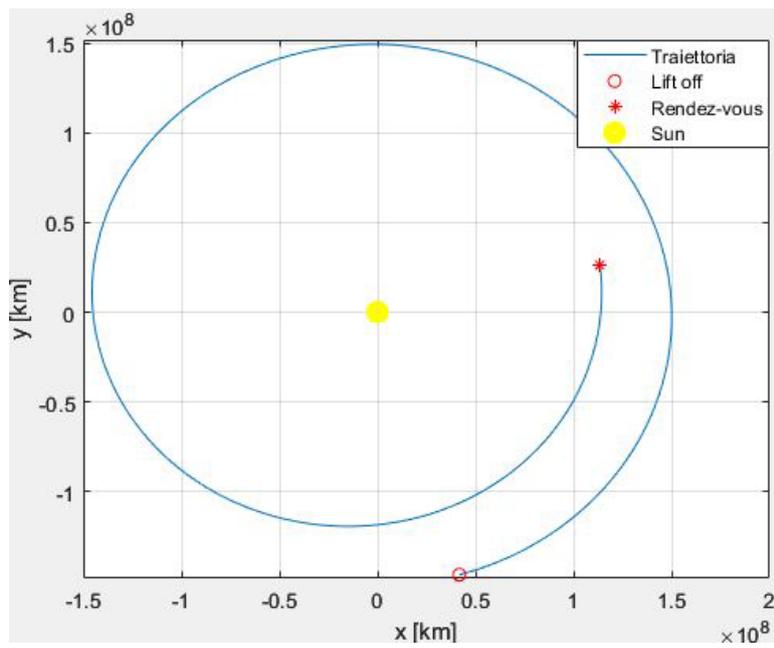


Figura 30. Traiettoira 2D Terra – Apophis

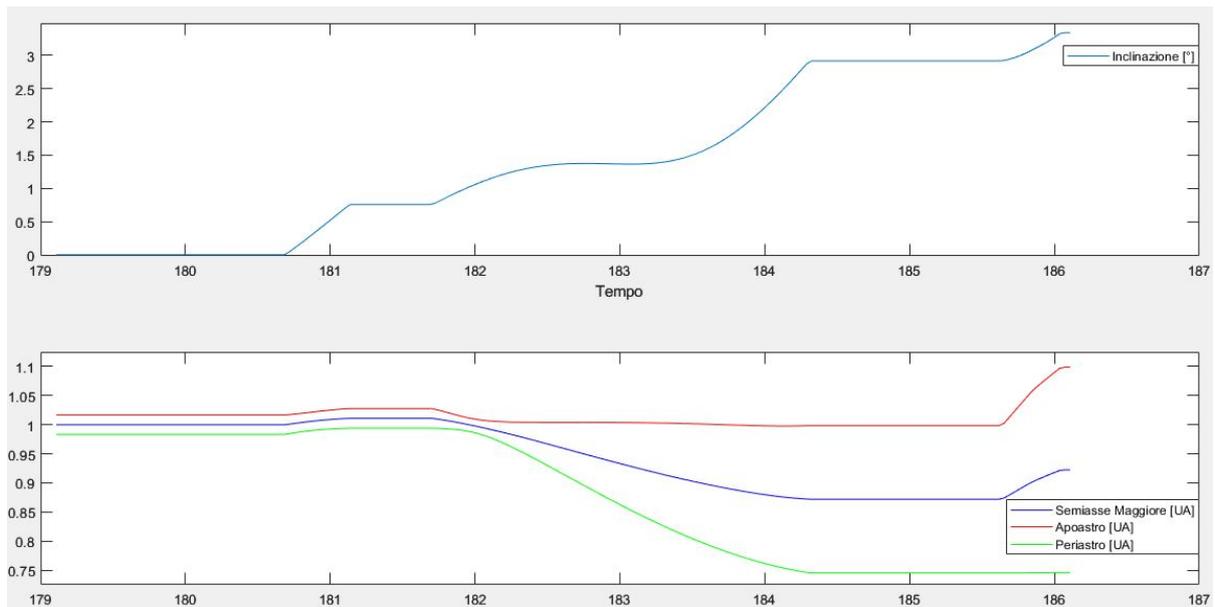


Figura 31. Parametri Orbitali

Dalla *figura 31*, è facile individuare i tratti a motori accesi e spenti. Infatti i tratti costanti sono caratterizzati da una *switching function* minore o uguale a zero che contraddistingue gli archi a motori spenti. La prima cosa che notiamo è che le due manovre di cambiamento di piano semplice e di aggiustamento degli apsi viene fatta in combinazione, questo permette di ridurre i costi di missione. Possiamo vedere come all'inizio sia l'inclinazione che il semi-asse dell'orbita del satellite seguano i valori terrestri. Successivamente, in seguito ad una spinta perpendicolare al piano, avremo una prima variazione dell'inclinazione che precede un nuovo tratto costante. A seguire, con un'altra spinta fuori dal piano, avremo un aumento dell'inclinazione con una contemporanea diminuzione di semi-asse e periastro. Poi si ha un nuovo tratto a motori spenti prima dell'ultima spinta che ci porta ad incontrare Apophis nella sua orbita.

6.1.2. 2001 QQ142

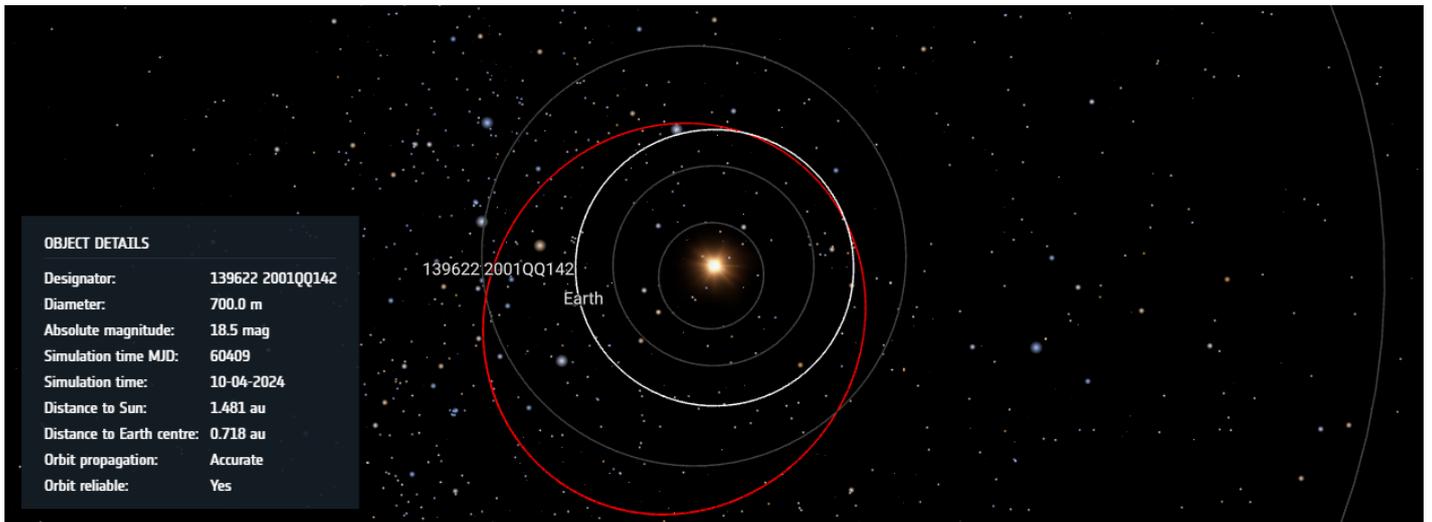


Figura 32. Orbita Asteroide 2001 QQ142

Anche qui nella *figura 32*. rappresentiamo su un piano 2D l'orbita dell'asteroide 2001 QQ142. Essa è caratterizzata da un semiasse di 1,42 UA ed una inclinazione di circa 9°.

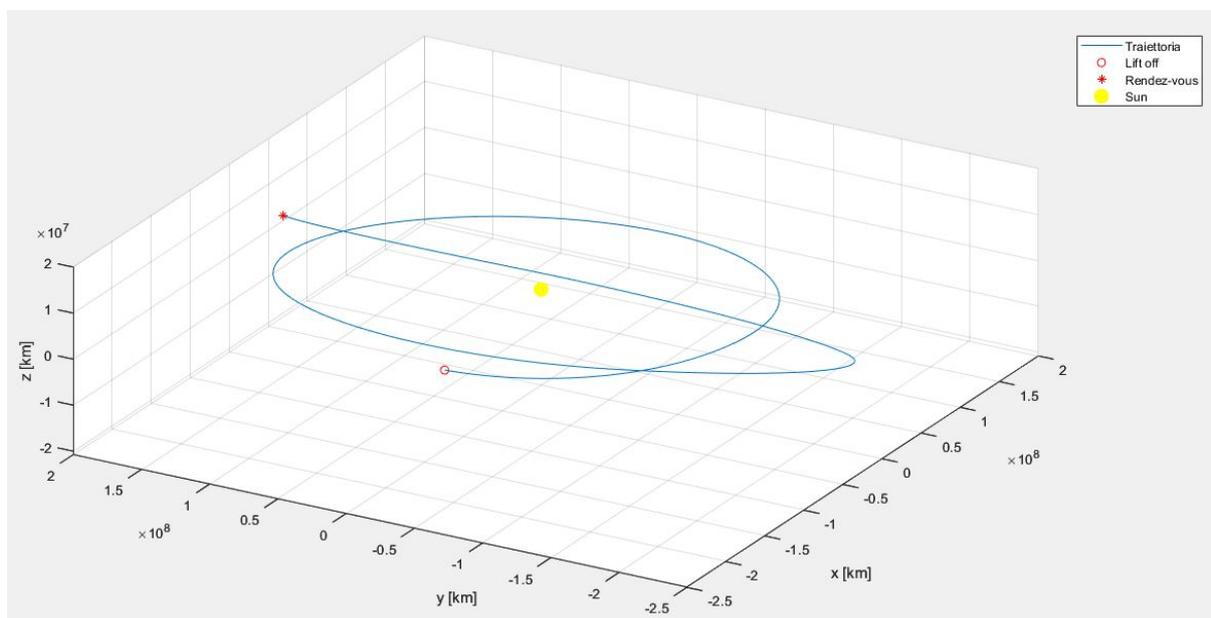


Figura 33. Traiettoria 3D Terra - 2001 QQ142

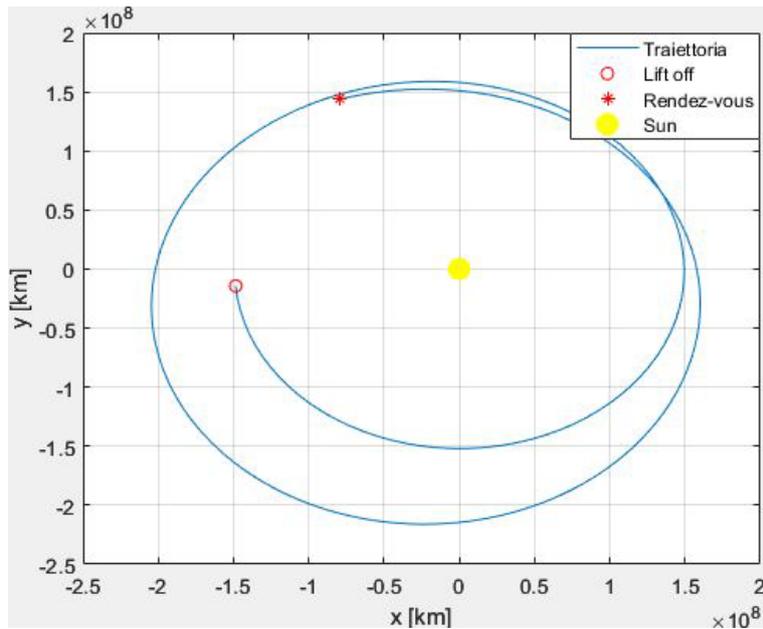


Figura 34. Traiettoria 2D Terra - 2001 QQ142

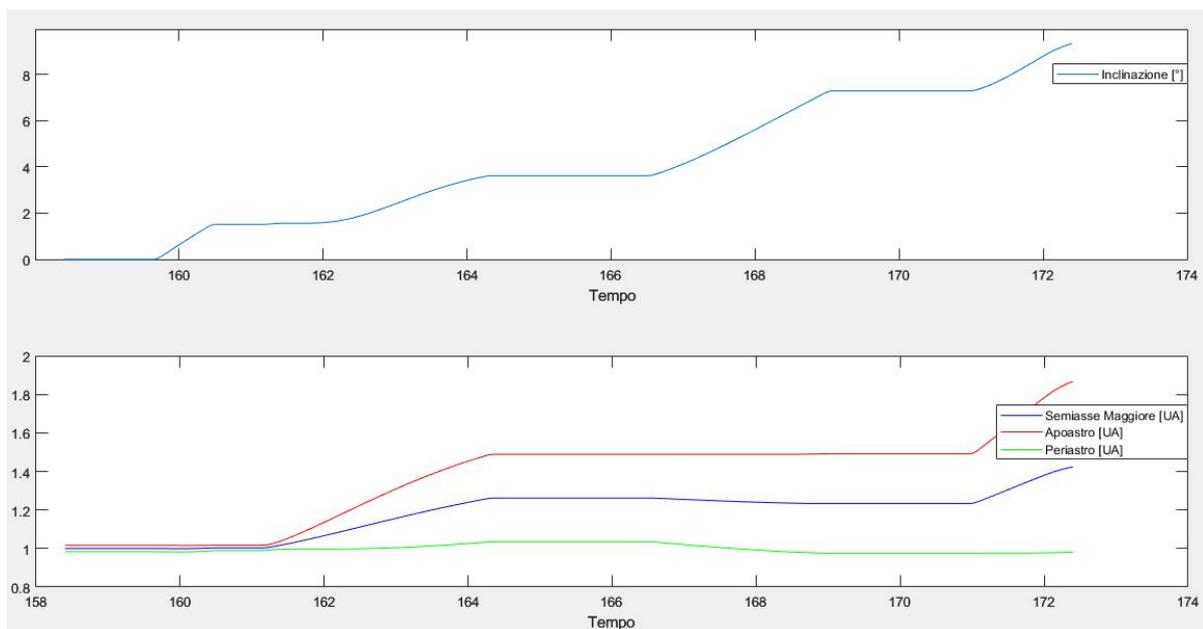


Figura 35. Parametri Orbitali

Nel primo tratto seguiamo la traiettoria terrestre. Con la prima spinta avremo la sola variazione dell'inclinazione tenendo costati semiasse, periastro e apoastro. Successivamente ad un tratto costante avremo una nuova spinta che porta ad incrementare l'inclinazione e i valori di semiasse e periastro e così via fino ad incontrare l'asteroide sulla sua orbita. Possiamo notare come il periastro subisca piccole variazioni durante tutta la missione. Questo ci dice che le manovre con spinta per variare l'inclinazione e l'eccentricità sono fatte nella sua prossimità.

6.1.3. 2003 UC20

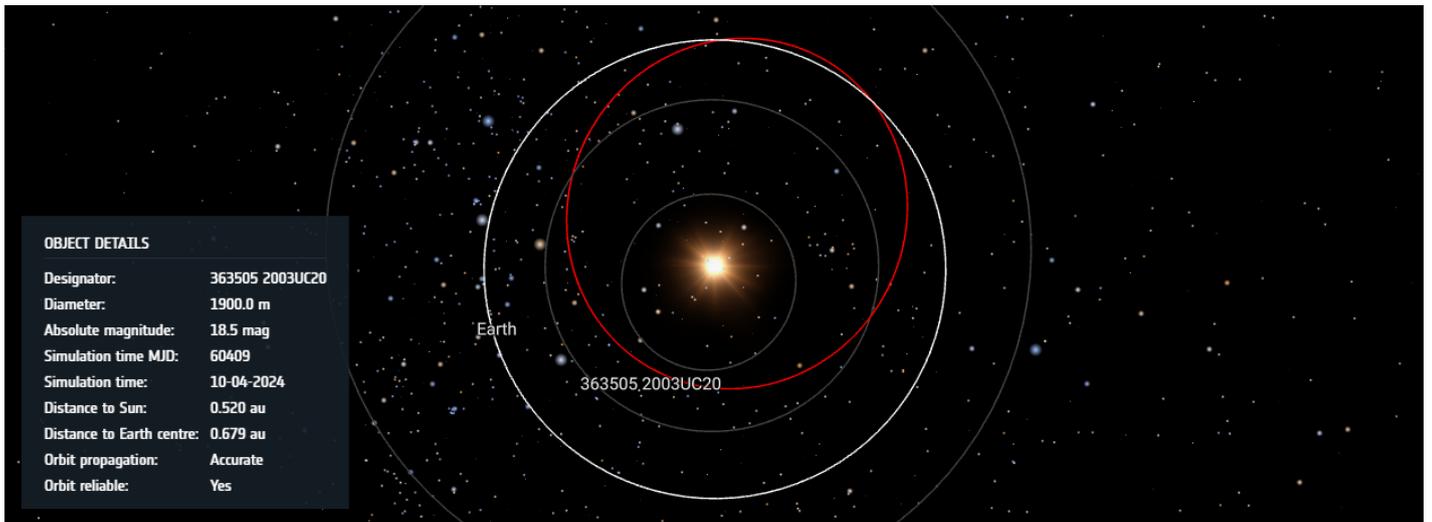


Figura 36. Orbita Asteroide 2003 UC20

Nella *figura 36*. viene rappresentata su un piano 2D l'orbita dell'asteroide 2003 UC20 rispetto alla terrestre. Essa è caratterizzata da un semiasse maggiore inferiore rispetto a quello della Terra ed una inclinazione di circa 3°.

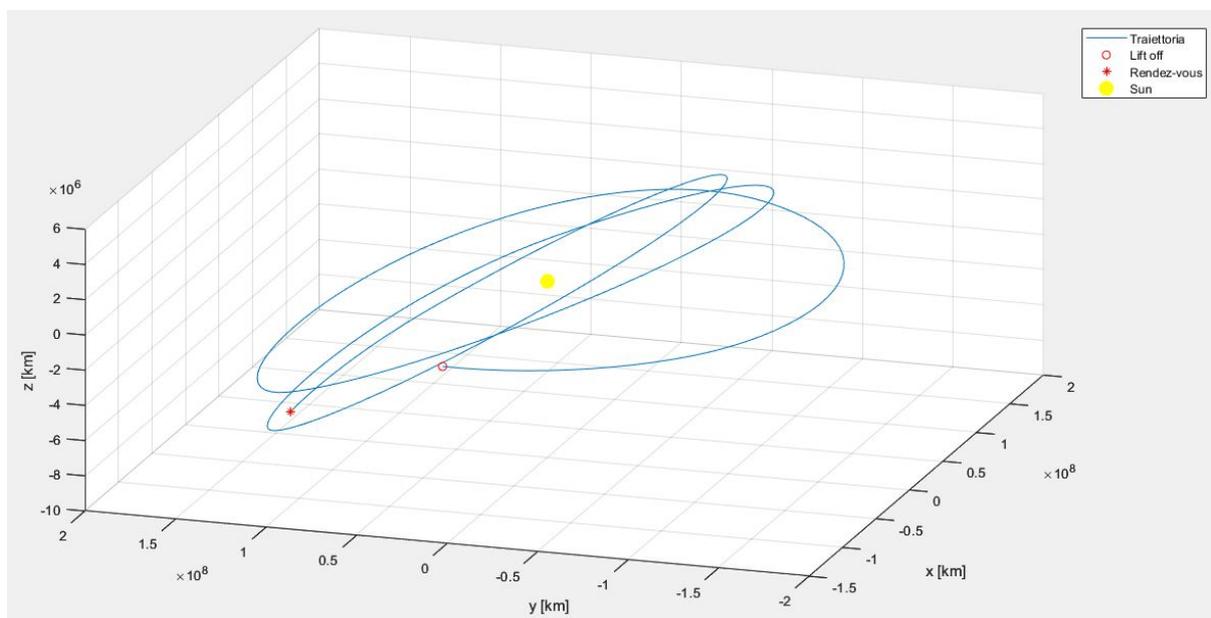


Figura 37. Traiettoria 3D Terra - 2003 UC20

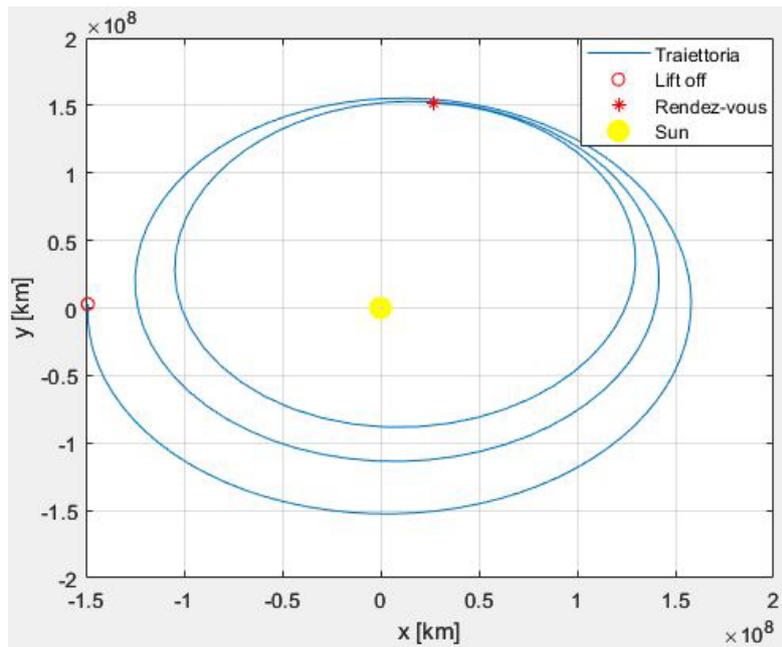


Figura 38. Traiettoria 2D Terra - 2003 UC20

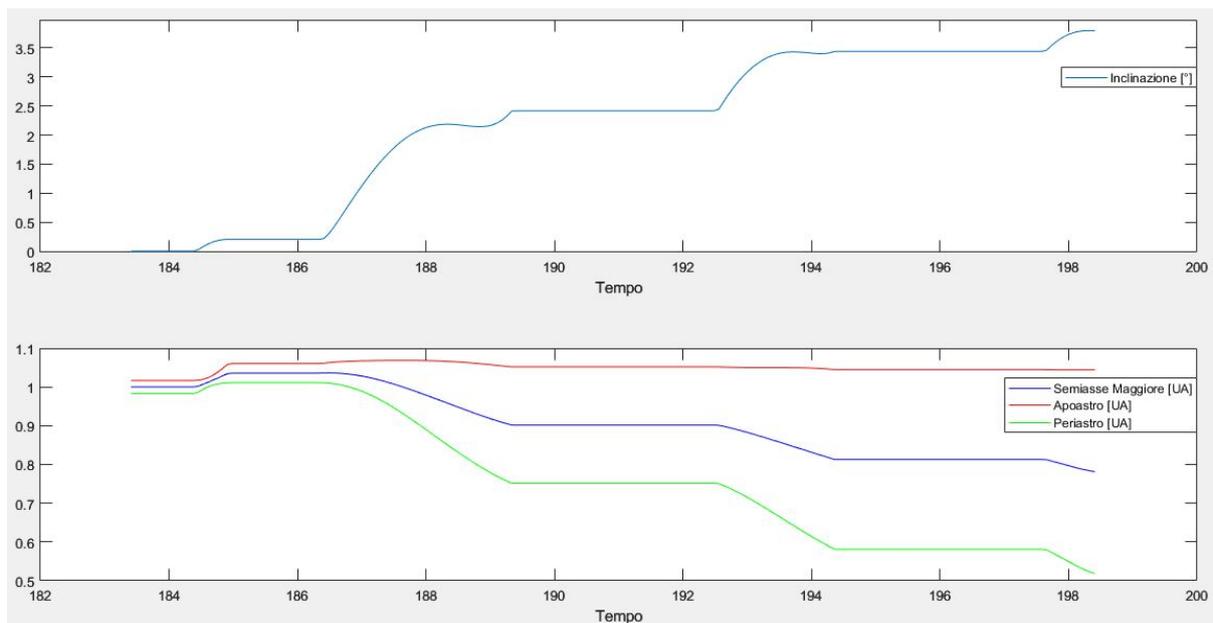


Figura 39. Parametri Orbitali

Anche in questo caso, analogamente alle due missioni precedenti possiamo vedere la presenza di tratti costanti ed una sostanziale diminuzione dei valori di semiasse e periastro, mentre l'apoaastro resta circa costante. A differenza di 2001 QQ142, in cui era costante il periaastro, in questo caso possiamo ipotizzare che le spinte vengono effettuate per la maggior parte in prossimità dell'apoaastro dove la velocità è più bassa.

6.2. 10 mN

Attraverso le analisi effettuate non siamo riusciti a giungere ad una convergenza. Questo può essere dovuto a molteplici cause, una su tutte potrebbe essere l'utilizzo di un metodo indiretto. Avendo esso un dominio di convergenza limitato, anche delle piccole variazioni della soluzione di tentativo potrebbe inficiare il risultato finale delle analisi. Al netto di ciò, abbiamo visto come la traiettoria diretta Terra – Asteroide abbia portato a dei risultati comunque promettenti dai quali partire. Per questo di seguito verranno riportate le analisi delle traiettorie dirette.

6.2.1. 2013 NK4

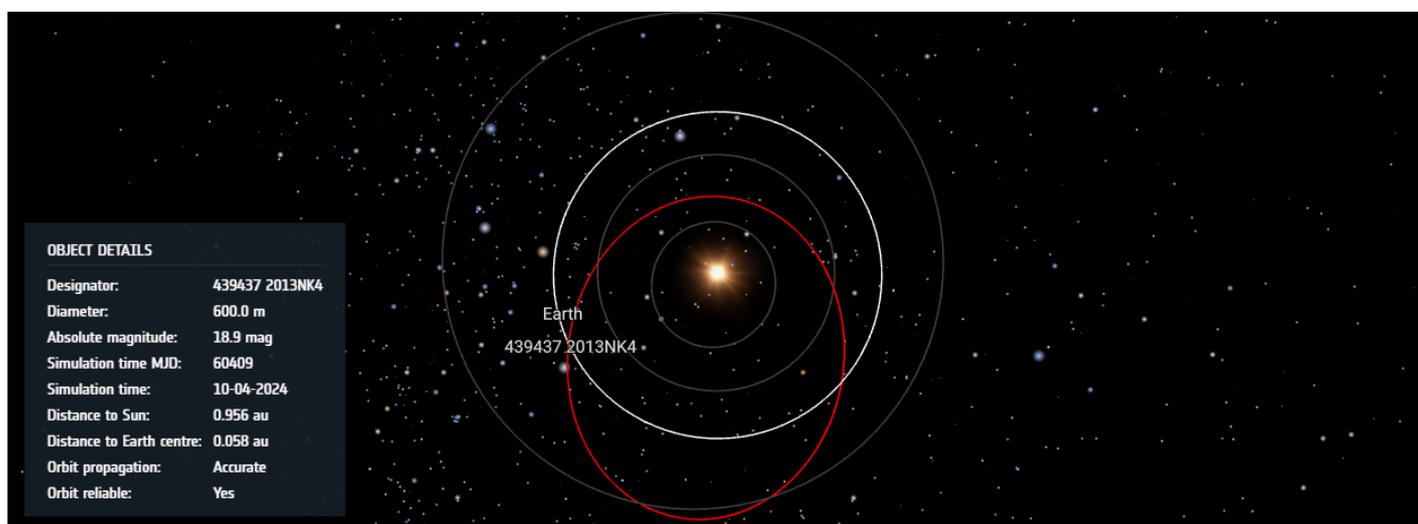


Figura 40. Orbita Asteroide 2013 NK4

Dalla *figura 40*, possiamo notare la differenza di eccentricità tra le orbite del corpo NK4 e della Terra. Una differenza che in questa immagine non si vede è quella dell'inclinazione che arriva fino a poco più di 6°. Nelle figure sottostanti viene rappresentata la traiettoria descritta dal satellite sia nel caso 3D (*figura 41*.) che 2D (*figura 42*.).

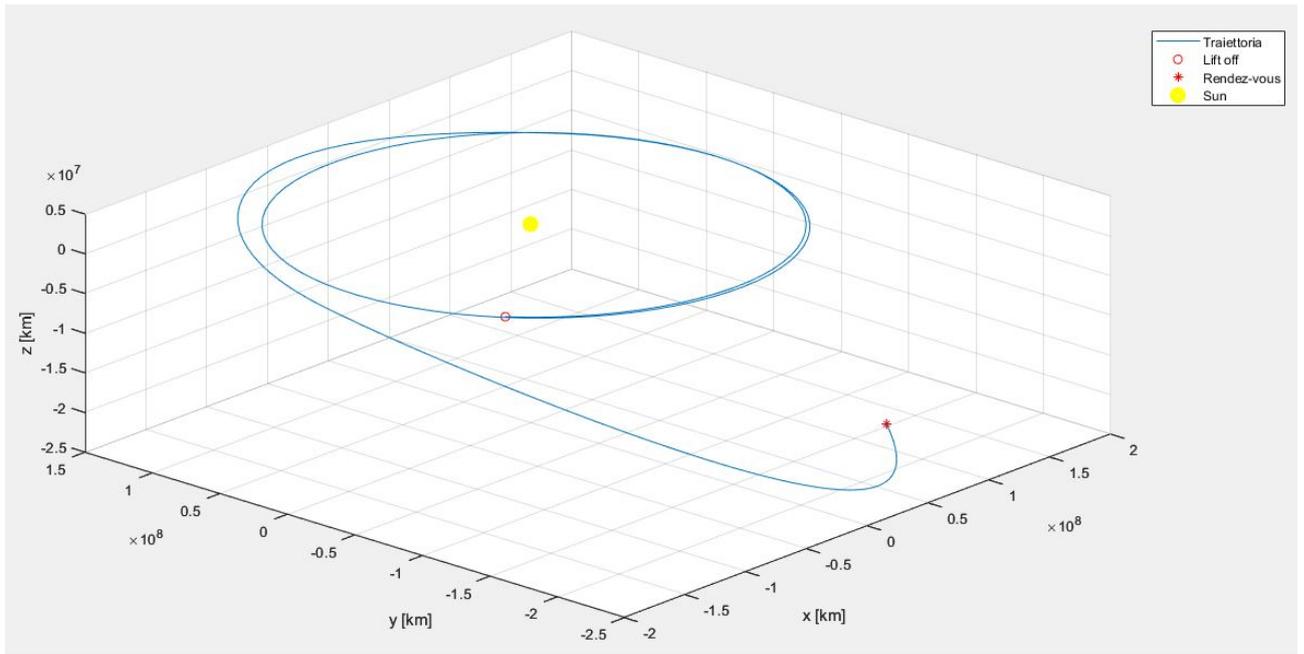


Figura 41. Traiettoria 3D Terra - 2013 NK4

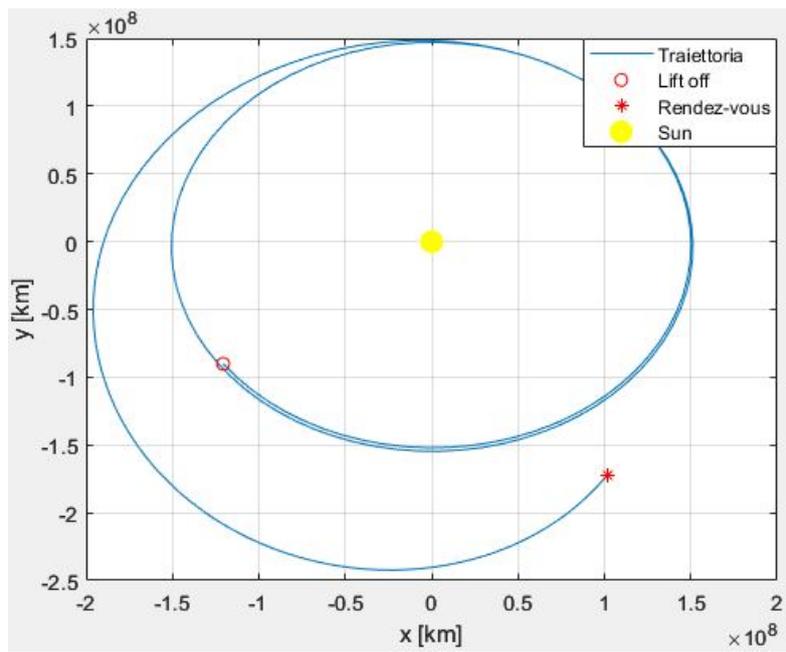


Figura 42. Traiettoria 2D Terra - 2013 NK4

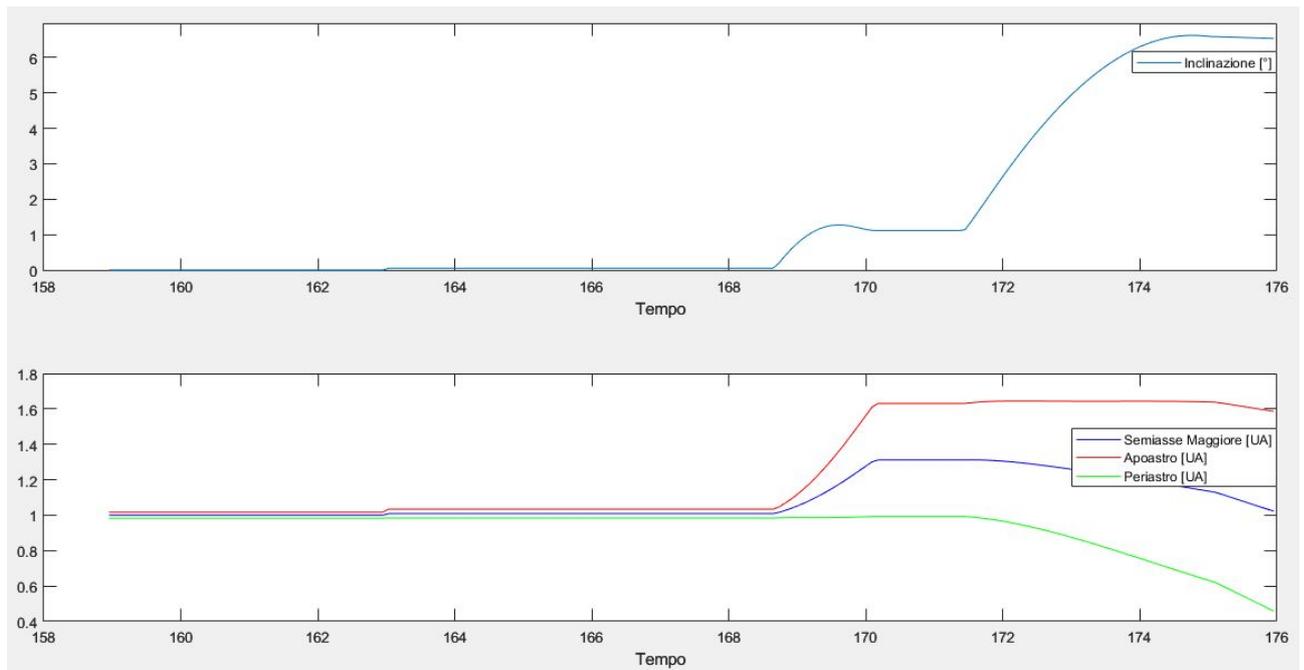


Figura 43. Parametri Orbitali

Notiamo subito un intervallo di orbita a motori spenti più lunga rispetto ai casi precedenti. Questo lo vediamo anche dalla traiettoria 3D del satellite che orbita quasi due volte attorno alla Terra prima di effettuare una spinta tale da variare il proprio cammino.

6.2.2. Wilson - Harrington

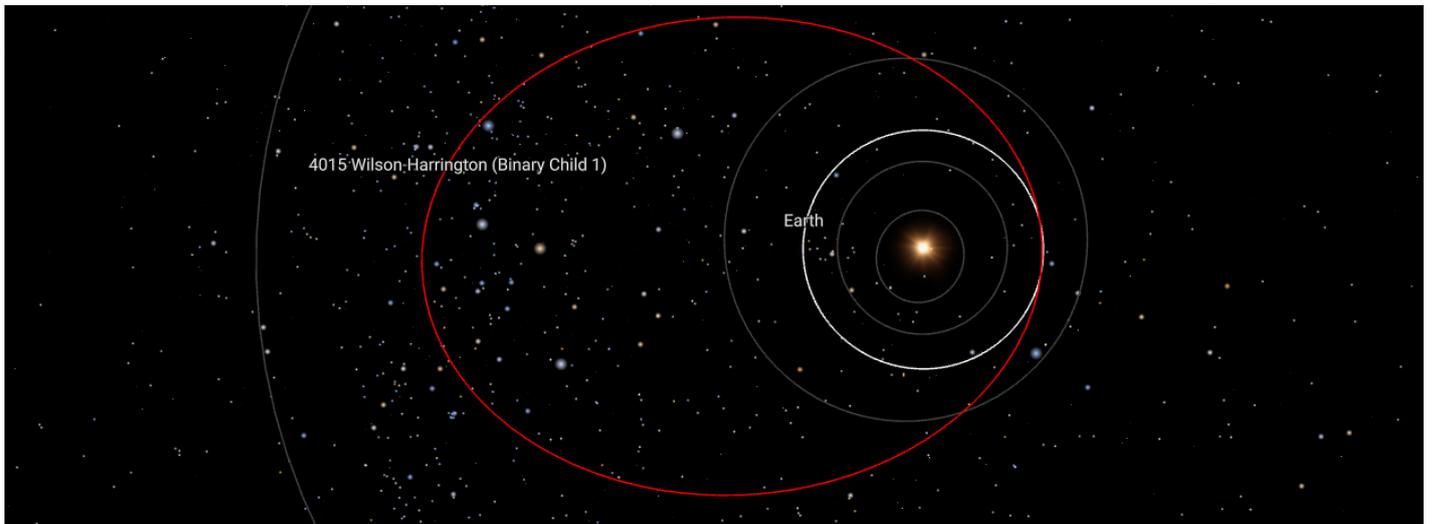


Figura 44. Orbita Asteroide Wilson - Harrington

Questo, insieme all'asteroide UL21 è quello con un'orbita che più differisce da quella terrestre. Successivamente vengono riportati i risultati ottenuti dalle analisi svolte.

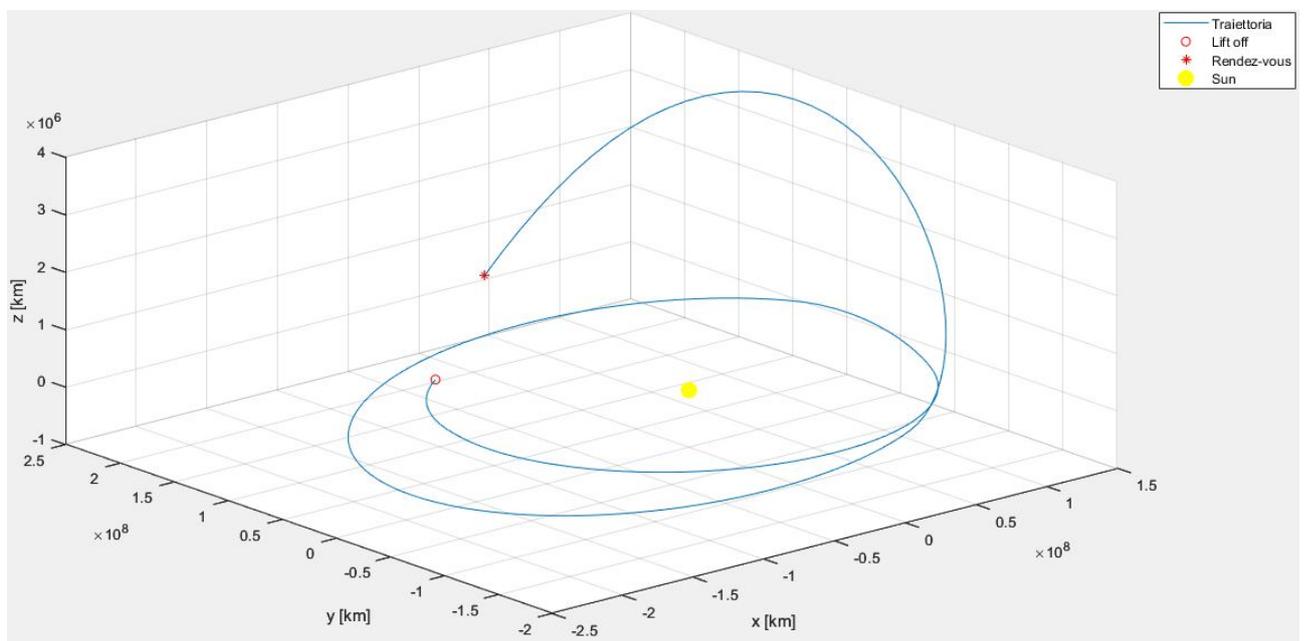


Figura 45. Asteroide 3D Terra - Wilson Harrington

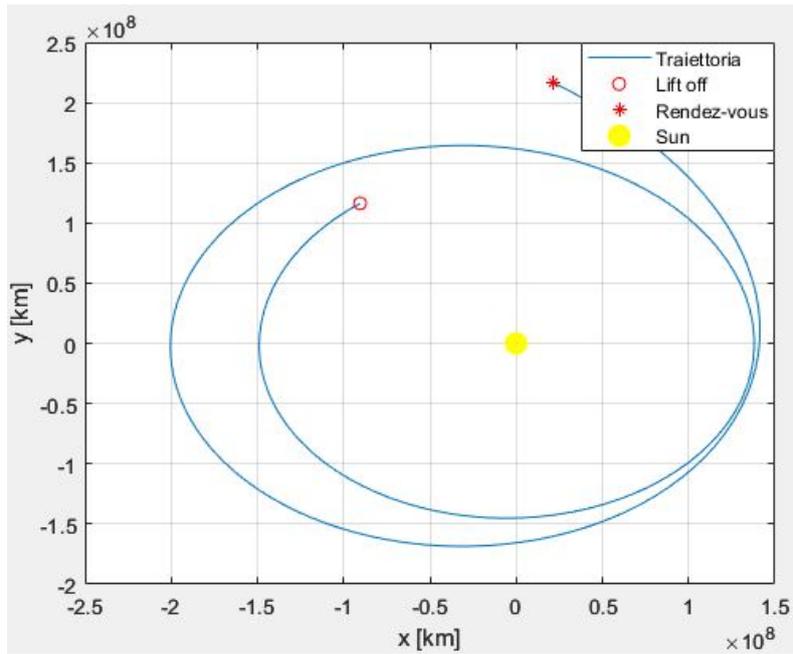


Figura 46. Traiettorie 2D Terra - Wilson Harrington

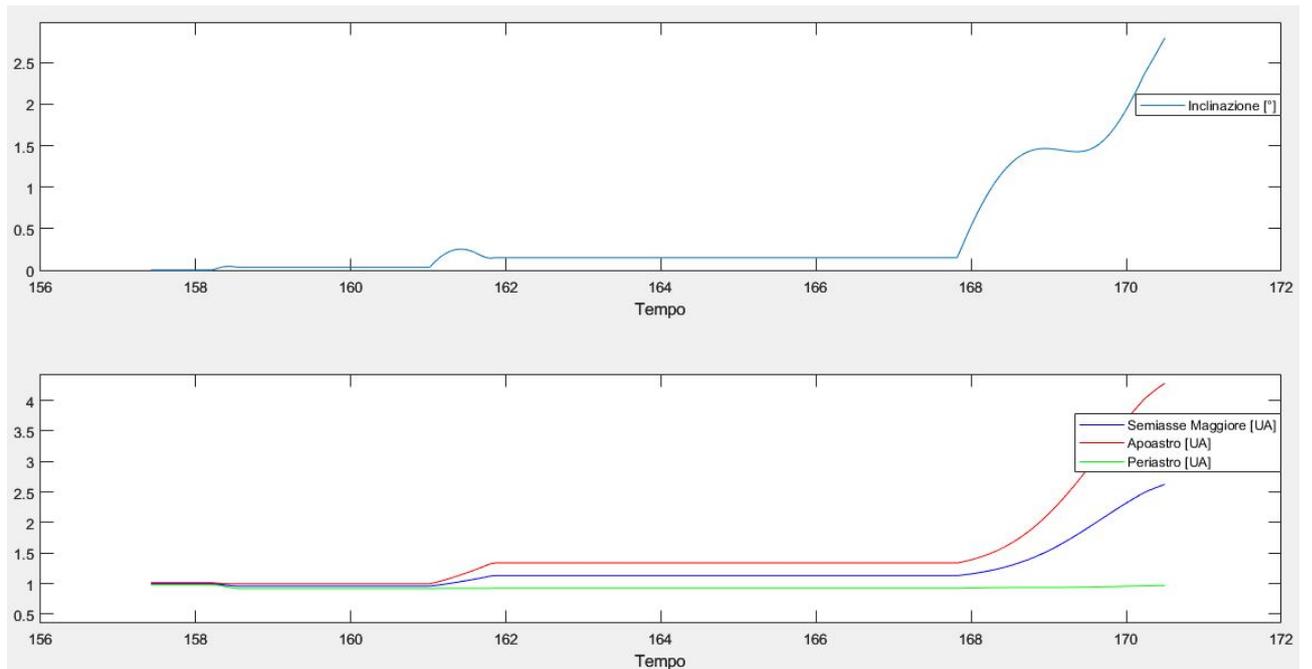


Figura 47. Parametri Orbitali

Anche qui possiamo notare una predominanza della fase a motori spenti. Avremo poi 3 impulsi che portano il nostro satellite a raggiungere il corpo target.

6.2.3. 2011 UL21

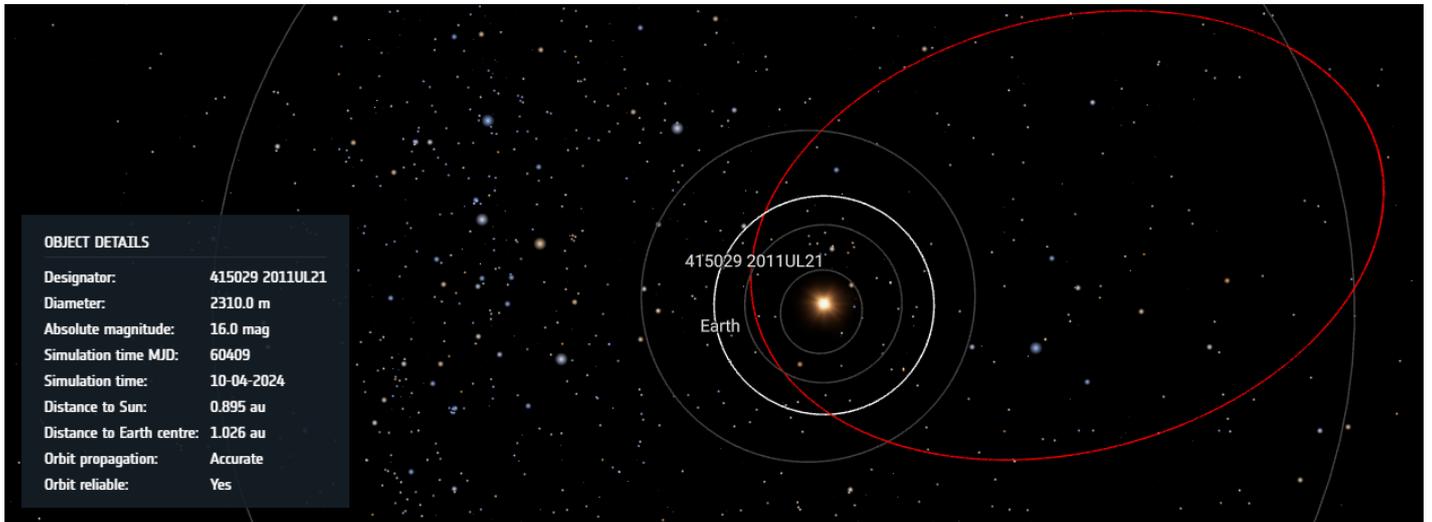


Figura 48. Orbita Asteroide 2011 UL21

Come si nota in *figura 48*, questo è il corpo con i parametri orbitali che più si allontanano da quelli terrestri. Si arriva ad una inclinazione intorno ai 34° e con un semiasse maggiore che supera le 2 UA.

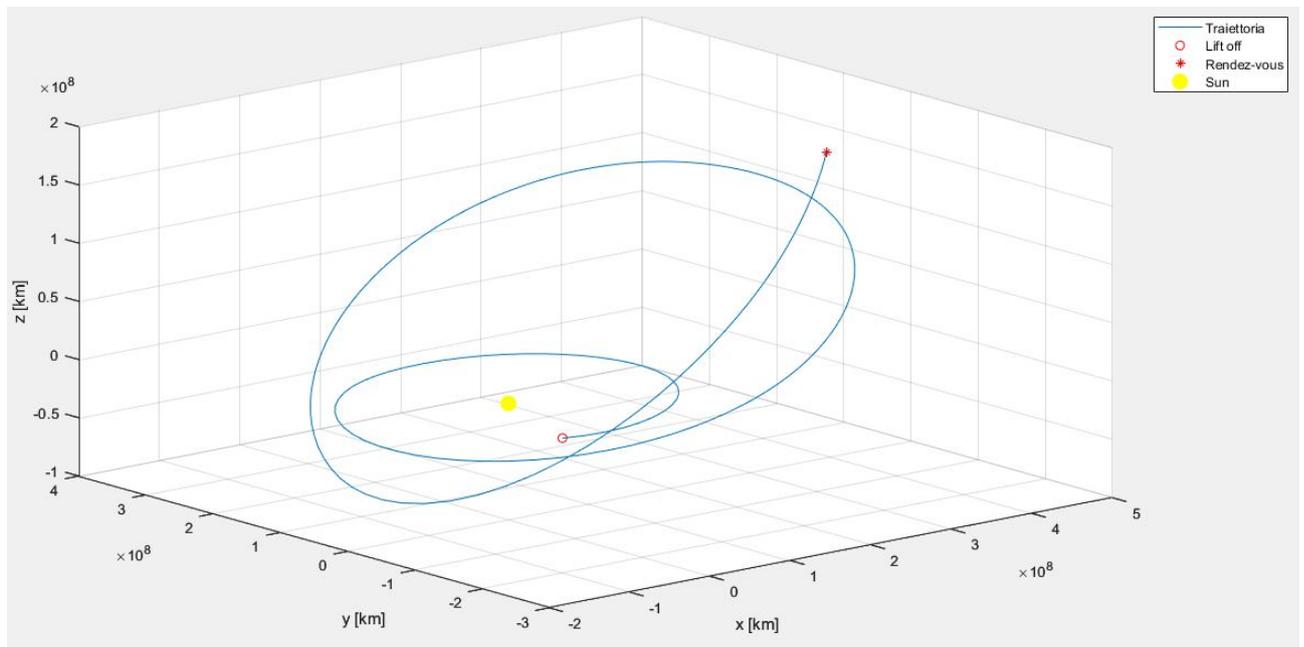


Figura 49. Traiettoria 3D Terra - 2011 UL21

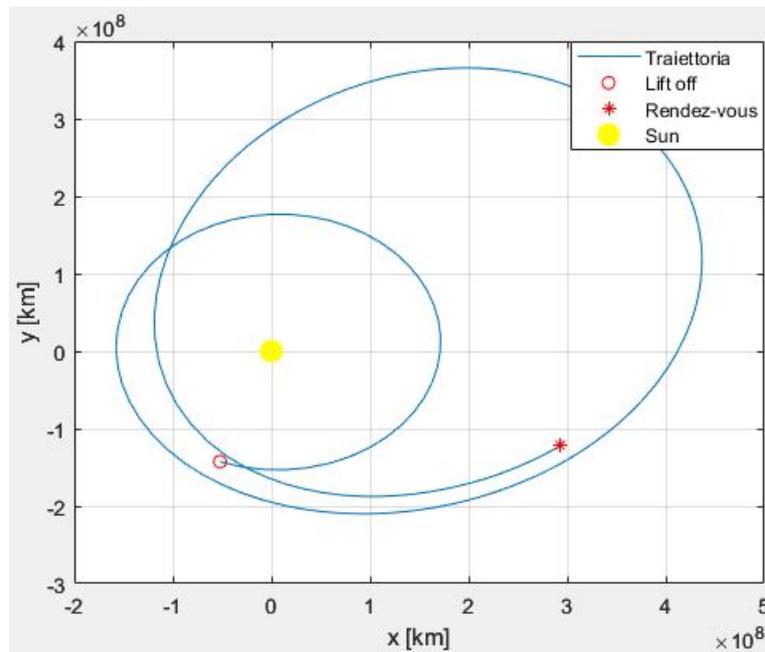


Figura 50. Traiettoria 2D Terra - 2011 UL21

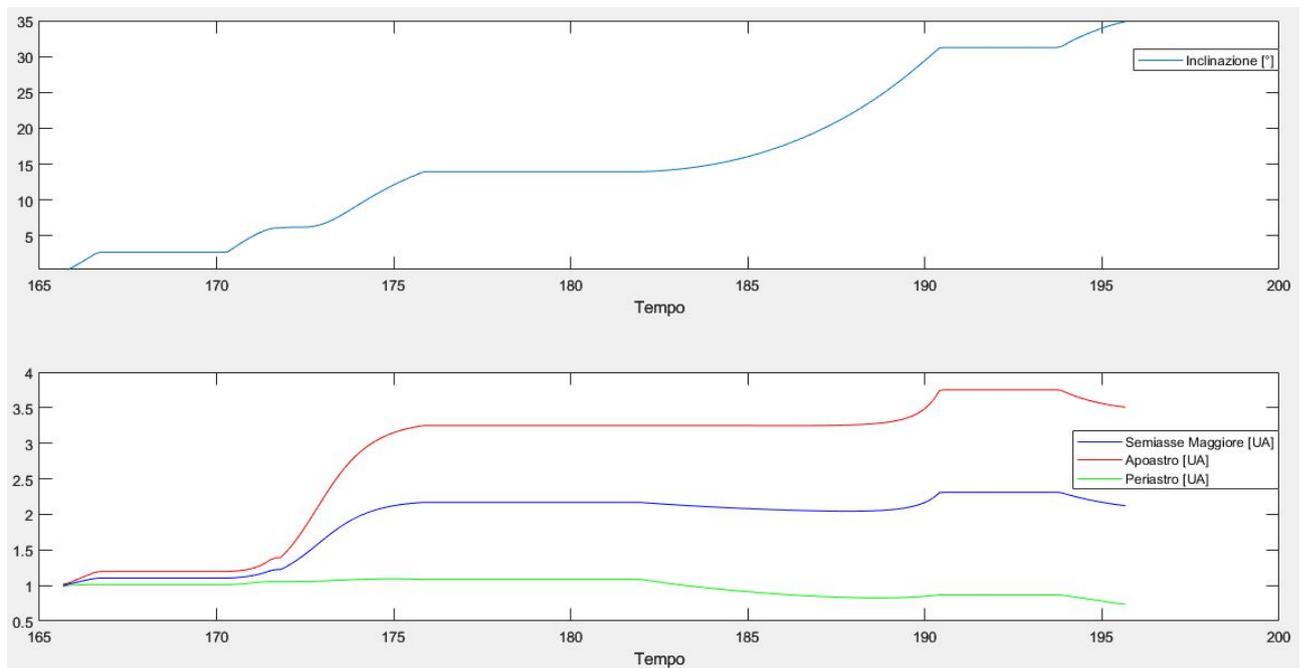


Figura 51. Parametri Orbitali

Possiamo notare subito un primo impulso seguito da un fase a motori spenti relativamente corta. L'incremento maggiore di apoastro, periastro e semi-asse maggiore si ha con il secondo impulso, mentre l'inclinazione va ad aumentare gradualmente fino a raggiungere i circa 34° dell'asteroide.

7. Conclusioni

Nella presente tesi abbiamo realizzato uno studio preliminare di ottimizzazione di possibili missioni verso i NEAs. Per le analisi siamo partiti da una prima selezione di asteroidi e attraverso l'ottimizzazione con il metodo indiretto abbiamo ottenuto i risultati sopra descritti. Essi dimostrano la fattibilità di questo tipo di missioni anche con l'utilizzo della propulsione elettrica. Infatti, i valori di ΔV ottenuti sono compatibili con quelli ottenibili dai motori elettrici.

Lo studio riportato in questa tesi ha delle limitazioni come il già citato utilizzo per l'ottimizzazione di un metodo indiretto. Questo ci ha indotti ad escludere alcune soluzioni che, magari attraverso un altro metodo numerico, avrebbero potuto darci dei risultati migliori. Inoltre, la prima selezione potrebbe aver escluso dei corpi con condizioni migliori rispetto a quelli scelti.

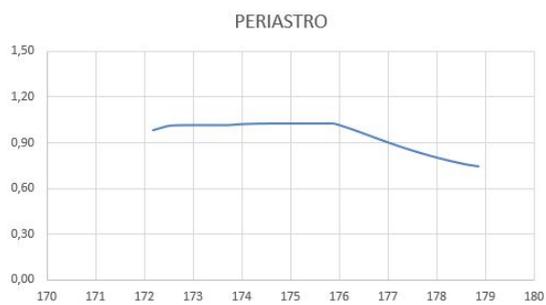
Al netto di ciò, questa potrebbe essere una possibile base di partenza per approfondire i risultati ottenuti ed arrivare successivamente alla realizzazione vera e propria di alcune di queste missioni, in particolare per quelle in cui non si arrivati alla convergenza.

8. Appendici

8.1. Apophis

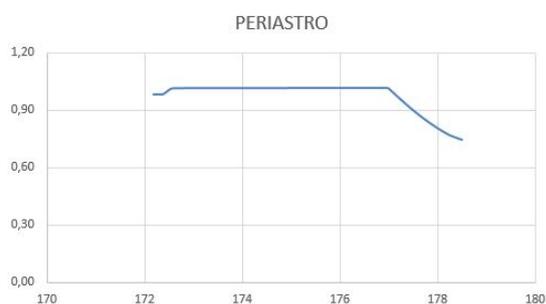
8.1.1. 5 mN

27/05/2027 - 19/06/2028 - $\Delta V = 4.60$ km/s - $m_f = 16.8$ Kg.



8.1.2. 10 mN

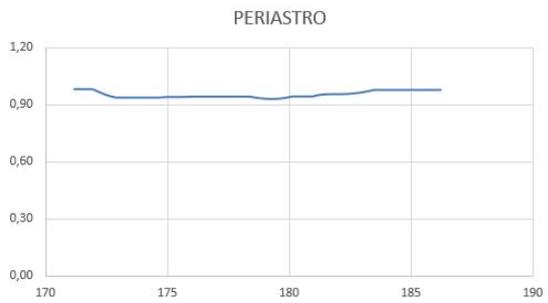
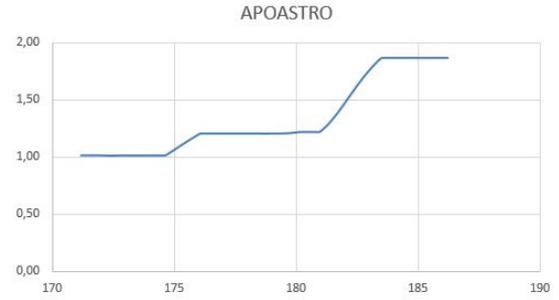
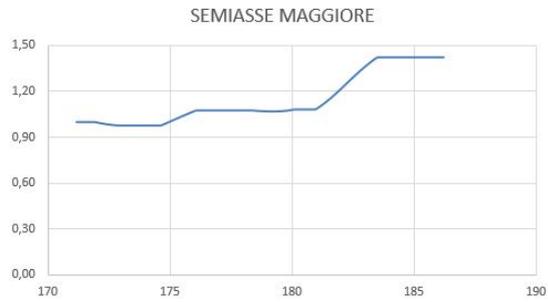
27/05/2027 - 28/05/2028 - $\Delta V = 4.40$ km/s - $m_f = 16.95$ Kg.



8.2. 2001 QQ142

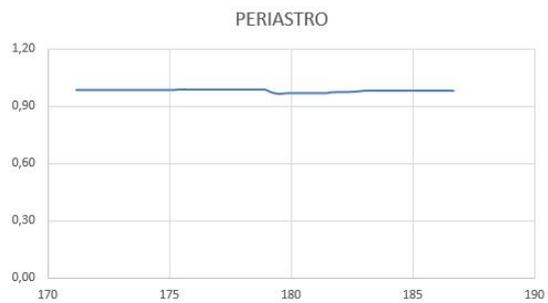
8.2.1. 5 mN

31/03/2027 - 21/08/20329 - $\Delta V = 8.00$ km/s - $m_f = 14.24$ Kg.



8.2.2. 10 mN

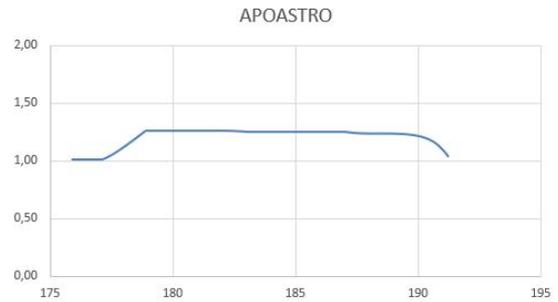
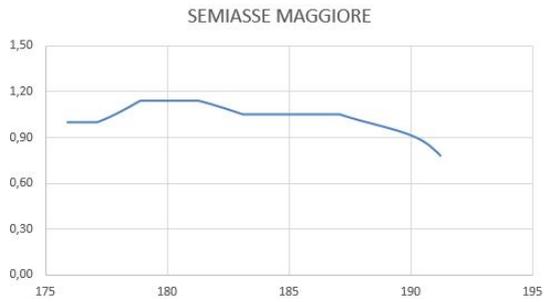
31/03/2027 - 17/09/2029 - $\Delta V = 7.37$ km/s - $m_f = 14.68$ Kg.



8.3. 2003 UC20

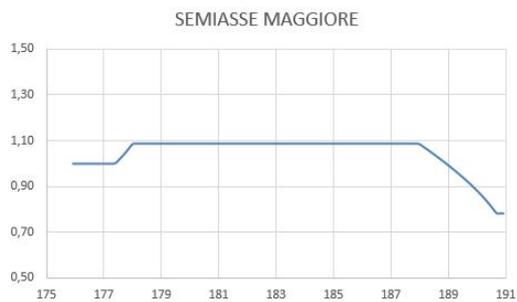
8.3.1. 5 mN

31/12/2027 - 07/06/2030 - $\Delta V = 8.83$ km/s - $m_f = 13.68$ Kg.



8.3.2. 10 mN

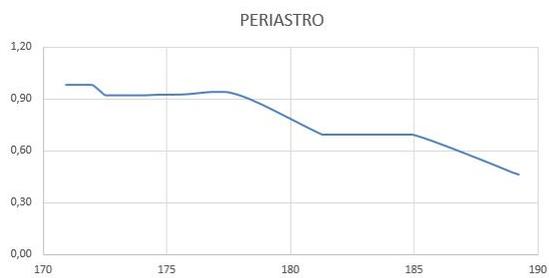
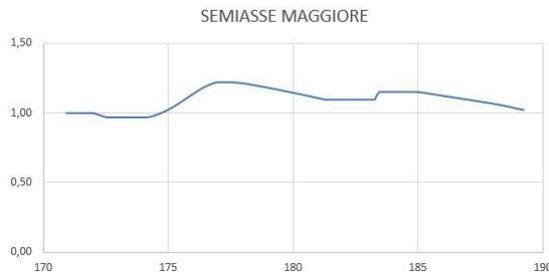
31/12/2027 - 21/05/2030 - $\Delta V = 7.70$ km/s - $m_f = 14.45$ Kg.



8.4. 2013 NK4

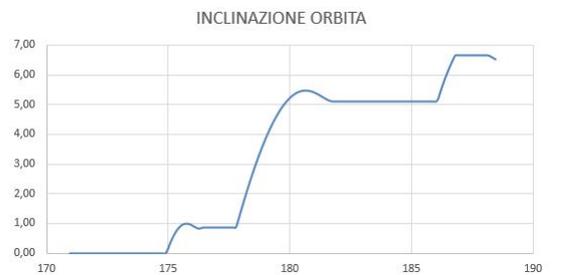
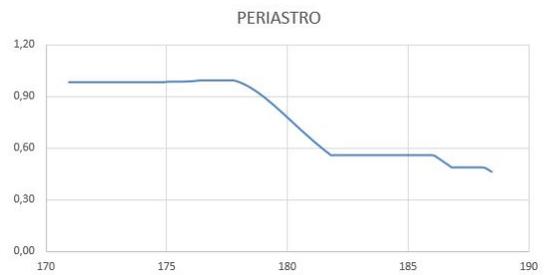
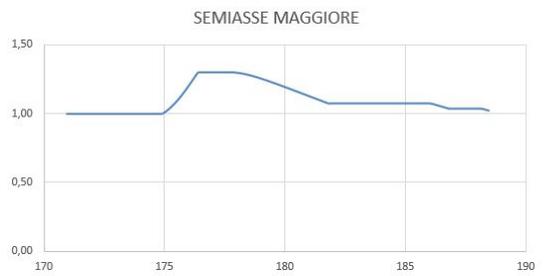
8.4.1. 5 mN

17/03/2027 - 11/02/2030 - $\Delta V = 10.50$ km/s - $m_f = 12.61$ Kg.



8.4.2. 10 mN

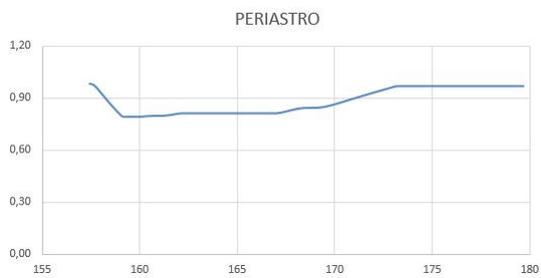
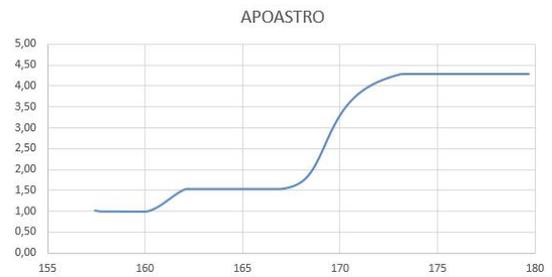
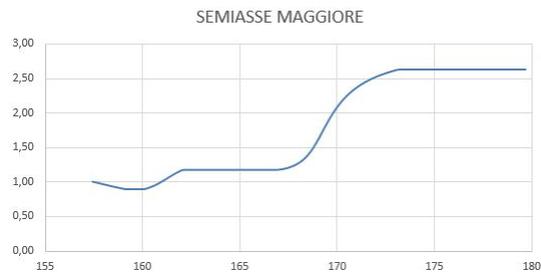
17/03/2027 - 30/12/2029 - $\Delta V = 9.96$ km/s - $m_f = 12.95$ Kg.



8.5. Wilson Harrington

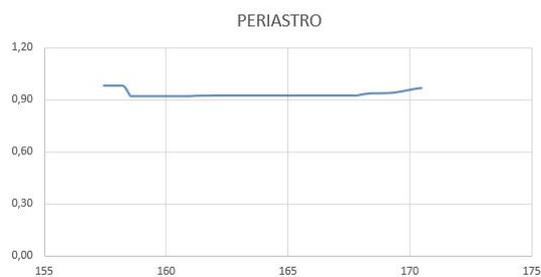
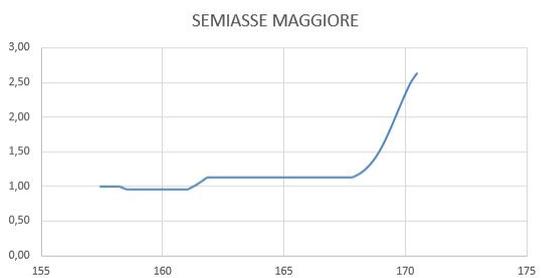
8.5.1. 5 mN

13/05/2027 - 05/05/2031 - $\Delta V = 9.83$ km/s - $m_f = 13.03$ Kg.



8.5.2. 10 mN

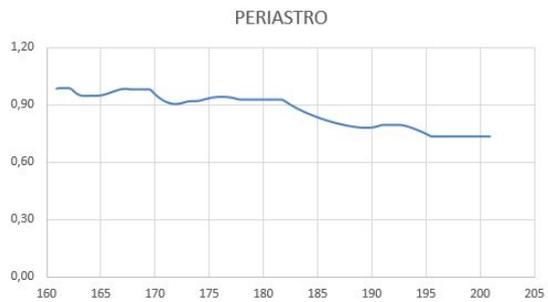
13/05/2027 - 22/01/2032 - $\Delta V = 10.98$ km/s - $m_f = 12.32$ Kg.



8.6. 2011 UL21

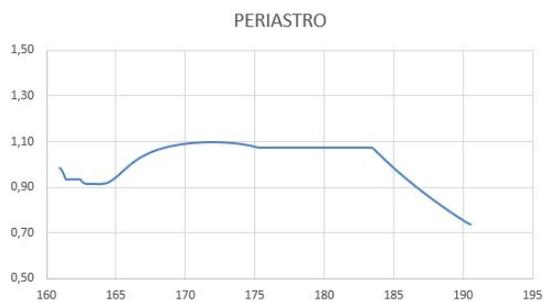
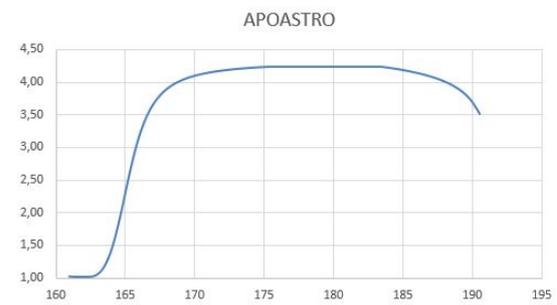
8.6.1. 5 mN

13/08/2025 - 21/12/2031 - $\Delta V = 22.71$ km/s - $m_f = 6.97$ Kg.



8.6.2. 10 mN

13/08/2025 - 27/04/2030 - $\Delta V = 21.72$ km/s - $m_f = 7.31$ Kg.



9. Bibliografia

- [1] <https://www.astronomia.com/2013/06/11/asteroidi-la-magnitudine-e-la-fase/>
- [2] https://cneos.jpl.nasa.gov/sentry/palermo_scale.html
- [3] https://cneos.jpl.nasa.gov/sentry/palermo_scale.html
- [4] <https://science.nasa.gov/science-research/planetary-science/planetary-defense/near-earth-asteroids-as-of-september-2023/>
- [5] <https://science.nasa.gov/mission/dart/>
<https://dart.jhuapl.edu/>
- [6] <https://science.nasa.gov/mission/near-shoemaker/>
- [7] <https://www.isas.jaxa.jp/en/missions/spacecraft/past/hayabusa.html>
- [8] <https://science.nasa.gov/mission/osiris-rex/>
- [9] <https://science.nasa.gov/mission/lucy/>
- [10] <https://science.nasa.gov/mission/psyche/>
- [11] https://didattica-2000.archived.uniroma2.it/pa/deposito/pa_cap_3.pdf

9.1. Figure

- Figura 1. <https://blogparsec.blogspot.com/2015/03/le-fasce-di-asteroidi-del-sistema-solare.html>
- Figura 2. https://cneos.jpl.nasa.gov/about/neo_groups.html
- Figura 3. https://cneos.jpl.nasa.gov/about/neo_groups.html
- Figura 4. https://cneos.jpl.nasa.gov/about/neo_groups.html
- Figura 5. https://cneos.jpl.nasa.gov/about/neo_groups.html
- Figura 6. https://it.wikipedia.org/wiki/Scala_Torino
- Figura 7. <https://moodle.olimpiadi.inaf.it/mod/page/view.php?id=970>
- Figura 8. https://it.m.wikipedia.org/wiki/File:Keplero_legge_delle_aree.svg
- Figura 12. <https://asteroidiedintorni.blog/2019/10/19/a-caccia-di-satelliti-artificiali/>
- Figura 15. [https://www.competenzamatematica.it/2018/01/22/le-sezioni-coniche-e-la-figura-di-ipazia/](https://www.competenzamatematica.it/2018/01/22/le-sezioni-coniche-e-la-figura-di-<u>ipazia</u>/)
- Figura 28. <https://neo.ssa.esa.int/search-for-asteroids?sum=1&des=99942%20Apothis>
- Figura 32. <https://neo.ssa.esa.int/search-for-asteroids?sum=1&des=139622%20001QQ142>
- Figura 36. <https://neo.ssa.esa.int/search-for-asteroids?sum=1&des=363505%20003UC20>
- Figura 40. <https://neo.ssa.esa.int/search-for-asteroids?sum=1&des=439437%202013NK4>
- Figura 44. <https://neo.ssa.esa.int/search-for-asteroids?sum=1&des=4015%20Wilson-Harrington>
- Figura 48. <https://neo.ssa.esa.int/search-for-asteroids?sum=1&des=415029%202011UL21>