



**Politecnico  
di Torino**

Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale

**Corso di Laurea Magistrale  
in Ingegneria Aerospaziale**

**Tesi di Laurea Magistrale**

**TRAIETTORIE TERRA - LUNA CON IMPULSO  
SPECIFICO VARIABILE**

A.A 2023/2024

CANDIDATO: DAVIDE GRECO  
RELATORE: LORENZO CASALINO



# INDICE

INTRODUZIONE.....	4
RINGRAZIAMENTI.....	5
1. DEFINIZIONE DELLA TRASFERTA TERRA-LUNA E BREVE STORIA DELLE MISSIONI LUNARI .....	6
1.1 Tipi di trasferta Terra-Luna .....	6
1.2 Low-energy Transfer .....	6
1.3 Direct Transfer .....	7
1.4 Low-Thrust Transfer .....	8
1.5 Cenni sull'utilità dell'impulso specifico variabile .....	9
1.6 Missioni lunari precedenti .....	10
2. MOTORI AD IMPULSO SPECIFICO VARIABILE .....	13
2.1 Introduzione al VASIMR.....	13
2.2 Principi di funzionamento .....	13
2.3 Vantaggi.....	14
2.4 Svantaggi.....	15
2.5 Sorgenti di potenza.....	15
2.6 Test sulla ISS.....	16
2.7 Sintesi dei recenti risultati.....	17
3. FONDAMENTI DELLA TEORIA DEL CONTROLLO OTTIMALE.....	18
3.1 Definizione dell'Hamiltoniano e del massimo di Pontryagin.....	18
3.2 Problema differenziale ai limiti.....	21
3.3 Definizione del problema.....	24
3.4 Equazioni di stato e variabili aggiunte.....	26
3.5 Condizioni al contorno.....	28
3.6 Condizioni iniziali.....	28
4. RISULTATI.....	31
4.1 Traiettorie piane LEO-Luna.....	31
4.1.1 Trasferimento LEO - GEO.....	32
4.1.2 Trasferimento GEO - LUNA.....	34
4.2 Traiettorie piane GEO-Luna.....	38
4.2.1 Durata della trasferta GEO - Luna: 4 giorni.....	41
4.2.2 Durata della trasferta GEO - Luna: 7 giorni.....	48
4.2.3 Durata della trasferta GEO - Luna: 10 giorni.....	53
4.3 Sintesi per missione piana GEO-Luna.....	56
4.4 Confronto con trasferta di Hohmann.....	56
4.5 Traiettorie GEO-Luna con cambio di piano.....	59
4.5.1 Durata di missione: 7 giorni.....	60
4.5.2 Durata di missione: 10 giorni.....	64
4.6 Considerazioni finali.....	66
5. CONCLUSIONI.....	67
BIBLIOGRAFIA.....	69

# INTRODUZIONE

La Luna è stata da secoli una delle più importanti fonti di ispirazione per l'uomo e lo testimoniano non soltanto i recenti traguardi raggiunti dall'industria aerospaziale ma anche i tributi rivolti al nostro Satellite naturale da parte di, pittori, artisti, scrittori (ad esempio Jules Verne con il celebre romanzo "Dalla Terra alla Luna") e musicisti (Beethoven con il primo movimento della Sonata detta comunemente "Al chiaro di Luna", Debussy con il brano "Claire de Lune").

Durante il secolo scorso, grazie al notevole lavoro delle più grandi agenzie spaziali, la Luna non è stata soltanto oggetto di semplice ammirazione ma una meta concreta per la scienza, un posto su cui poter mettere letteralmente piede con risvolti sulla nostra storia contemporanea che vanno ben al di là di una bandiera piantata su un suolo di regolite. Basti pensare per esempio all'utilizzo molto più massiccio dei computer durante le missioni Apollo della NASA, il cui impiego ha posto le basi per lo sviluppo tecnologico dei decenni successivi fino ad oggi. Ma cosa ancor più importante forse, l'allunaggio di Neil Armstrong del 20 luglio 1969 ha creato una consapevolezza nuova nel genere umano: i viaggi spaziali per l'uomo non erano più l'inseguimento di una chimera ma costituivano una nuova frontiera tutta da esplorare seppur con dei rischi.

Probabilmente i più eclatanti successi dell'esplorazione Lunare per l'opinione comune risultano proprio le missioni del programma Apollo con equipaggio iniziate appunto nel 1969 con l'Apollo 11 e terminate con l'Apollo 17 nel 1972; tuttavia l'interesse per il nostro Satellite da parte delle agenzie spaziali non è mai cessato e lo testimoniano il notevole numero di invii di orbiter e rover i quali hanno contribuito non solo ad accrescere la conoscenza del suo passato ma soprattutto ad alimentare la visione di una Luna utile come risorsa per il futuro. In tempi non sospetti infatti si parla di una possibile stabilizzazione permanente o semi-permanente dell'uomo sul suolo lunare per testare le sue capacità di sopravvivenza restando distante migliaia di chilometri dalla Terra. La Luna potrebbe così diventare una sorta di avamposto utile a testare i limiti umani con proiezione su destinazioni ancora più lontane come Marte.

In questo senso si può dire che si collocano perfettamente le recenti missioni del programma Artemis della NASA, intenzionata a mandare nell'immediato futuro nuovamente sulla Luna non solo l'uomo ma anche la donna dopo un'attesa durata più di 50 anni; un lasso di tempo in mezzo al quale sono passate diverse generazioni ma da cui almeno le ultime di queste potranno vivere una sorta di "Rinascimento" di quei famosi anni '60 e '70 del secolo scorso.

La presente tesi cerca quindi di coniugare i concetti e le competenze assimilate nel corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale con l'interesse e la voglia personale di esaminare più nel dettaglio, per quanto possibile, le possibili traiettorie che porterebbero un satellite o un cargo con equipaggio umano dall'orbita terrestre alla Luna. In particolare si è voluto esaminare il problema dell'ottimizzazione e applicarlo al caso espresso precedentemente data la notevole importanza che occupa l'esigenza di risparmiare sempre di più la quantità di propellente necessaria a favore di un maggior carico utile da trasportare, ad esempio una strumentazione più ampia o una maggiore quantità di viveri per l'equipaggio. Risolvere un problema di ottimo, come si vedrà, è estremamente complesso e sono state apportate alcune semplificazioni certamente non banali, come ad esempio ridurre il sistema Terra-Luna da un problema a tre corpi ad uno a due corpi, considerando quindi la Luna come un punto materiale. Tuttavia nell'ottica dell'apprendimento iniziale di questo tipo di problemi è stato ritenuto che tali semplificazioni potessero comunque portare un beneficio allo scopo di tale tesi, il quale non è quello di ottenere risultati estremamente precisi ma quello di ottenere dati e stime comunque molto vicine alla realtà e interpretarle nella maniera corretta.

# RINGRAZIAMENTI

Per la realizzazione di questo lavoro voglio ringraziare in primis il Professor Lorenzo Casalino, per aver accettato la mia proposta di Tesi e per essere stato sempre fortemente disponibile in ogni istante nonostante i suoi numerosissimi impegni: i suoi suggerimenti e consigli in alcune particolari fasi sono stati determinanti per il prosieguo del lavoro. Vorrei anche sottolineare il suo atteggiamento sempre positivo e sempre volto all'incoraggiamento nei momenti di difficoltà che ha contribuito a diminuire costruttivamente la classica "distanza" (dovuta ad un fisiologico "timore") che viene avvertita solitamente da noi studenti nei confronti dei Docenti.

Voglio ringraziare la mia famiglia per questi anni del corso di Laurea Magistrale al Politecnico, contornati prima dalla pandemia e successivamente dalla conseguente lontananza da casa dovuta alla frequentazione dei corsi. Non sono stati anni semplici, come credo sia normale per uno studente universitario, ci sono stati momenti di gioia ed esultanza ma anche situazioni dov'è stato vissuto il fallimento, anche se temporaneo. Non bastano di certo poche righe per descrivere tutto quello che hanno fatto per me, mi hanno sempre dimostrato il loro amore incoraggiandomi sempre anche nei momenti più difficili. In poche parole: non mi hanno fatto mancare davvero nulla.

Un ultimo grazie lo dedico alla mia ragazza, Elodie, sempre presente anche restando separati 1000 chilometri per diverso tempo. Grazie a lei ho ricevuto sempre conforto ed un rifugio sicuro nei momenti di maggiore paura e tensione, quando neanche un' estremamente adeguata preparazione al sostenimento dell'esame sembrava sufficiente a placare le mie preoccupazioni. Anche grazie a lei ho potuto inoltre ammirare sempre di più la bellezza del "Chiaro di Luna" osservando il nostro Satellite insieme durante le sere estive. Senza Elodie l'idea di questo lavoro forse non sarebbe mai nata.

A tutti voi ancora un immenso GRAZIE. E che questo sia solo l'inizio!

# CAPITOLO 1: DEFINIZIONE DELLA TRASFERTA TERRA LUNA E BREVE STORIA DELLE MISSIONI LUNARI

In questo capitolo verranno illustrati i tipi di traiettoria che definiscono la trasferta Terra-Luna e la loro applicazione pratica nel corso delle missioni lunari attraverso un breve excursus storico.

## 1.1 TIPI DI TRASFERTA TERRA-LUNA

Le trasferte Terra-Luna sono generalmente molto complesse per via del modello che generalmente viene scelto per ottenere traiettorie che siano le più accurate possibili. Tale modello si basa sul problema dei tre corpi il quale risulta più accurato per descrivere il sistema Terra-Luna data la massa del nostro satellite naturale la quale non è trascurabile rispetto a quella del corpo principale, in questo caso proprio la Terra. La massa della Luna è infatti circa 1/81 della massa terrestre e tale rapporto fa rientrare il sistema Terra-Luna nella casistica del problema a tre corpi, sicuramente da un lato molto più preciso ma d'altro canto anche molto più complesso da risolvere. Tuttavia si ricorda che ai fini di tale tesi, le traiettorie sono state ottenute utilizzando una modellazione che si basasse sul problema a due corpi, trattando quindi la luna come un punto materiale; sebbene si tratti di una semplificazione abbastanza forte, è stato ritenuto utile trattare un problema così complesso, ossia l'ottimizzazione di tali traiettorie contestualizzato a questo tipo di sistema "biplanetario", partendo da un'elaborazione più semplice che potesse comunque dare risultati che fossero sufficientemente significativi e formativi senza discostarsi eccessivamente dalla realtà. Questo potrebbe probabilmente testimoniare che una modellazione più complessa di un'altra ma che discende da quest'ultima non rende necessariamente quella più grossolana errata in senso assoluto ma appunto meno precisa. A seconda del grado di qualità dei risultati voluto si utilizza il modello che si ritiene più adatto a tal scopo.

In generale si può affermare che le trasferte Terra-Luna si articolano in tre passaggi successivi al lancio:

- Il più delle volte vengono eseguite delle rivoluzioni intorno alla Terra per permettere allo spacecraft di innalzare la propria quota, trasferendosi in orbite che abbiano un quantitativo maggiore di energia e nel contempo guadagnare velocità;
- Successivamente lo spacecraft si immette in una Lunar Transfer Orbit (LTO, in italiano "Orbita di trasferimento Lunare"), traiettoria che consente appunto di raggiungere l'orbita lunare, in questo caso l'orbita sul quale la Luna percorre la sua rivoluzione intorno alla Terra;
- Infine viene eseguita una o più manovre di approccio all'orbita attorno alla Luna in corrispondenza del quale si vuole far stabilire lo spacecraft. Tali manovre, specularmente al primo punto, servono a diminuire la velocità senza dover necessariamente far uso dei propulsori sfruttando la gravità della Luna stessa.

In particolare si vuole ora focalizzare l'attenzione sul secondo passaggio dell'intera trasferta, ossia sulla LTO, chiamata anche Trans Lunar Injection (TLI). Questa può essere fondamentalmente di due tipologie tipiche della propulsione chimica, le quali sono la Low Energy Lunar transfer e la Direct Lunar Transfer. Successivamente verrà analizzata la Low-thrust transfer, trasferta che invece include anche le rivoluzioni intorno alla Terra e che è tipica della propulsione elettrica.

## 1.2 LOW-ENERGY TRANSFER

La Low-Energy Transfer, è una manovra di trasferimento a basso costo, ossia a basso  $\Delta V$  e risulta più complessa da progettare e realizzare rispetto al Direct Transfer. Prevede tempi di trasferimento notevolmente lunghi, anche dell'ordine di più mesi ma permette di risparmiare una notevole quantità di propellente specialmente nel caso in cui l'orbita di destinazione sia un'orbita bassa lunare polare, dove sarebbe necessario dunque nella maggior parte dei casi un considerevole cambio di inclinazione.

Il concetto di base di tale traiettoria si basa sul trasferimento bi-parabolico: l'obiettivo è impostare una prima traiettoria parabolica verso un punto molto distante dal sistema Terra-Luna dove sarà possibile raggiungere velocità molto basse, praticamente vicine al valore nullo. A tale distanza risulta infatti proficuo realizzare il cambio di inclinazione, dato che il  $\Delta V$  per tali manovre com'è noto risulta direttamente proporzionale non solo all'entità dell'angolo  $\Delta i$  da coprire ma anche alla velocità tangenziale di quel punto. Successivamente si imposta una seconda traiettoria parabolica, sfruttando il  $\Delta V$  estremamente basso per immettersi in quest'ultima e il naturale aumento di velocità che si ha al suo termine, utile per immettersi nell'orbita lunare desiderata. Le manovre di cambio di inclinazione e immissione nella seconda parabola possono essere anche combinate. Tale trasferta risulta però notevolmente complessa se inserita nel contesto

del problema a 3 corpi dato il complesso design della traiettoria, la quale varia considerevolmente in base a fattori come l'orbita di arrivo, l'ascensione del nodo ascendente, l'argomento del perigeo ma i principi di base sono quelli fin qui espressi.

### 1.3 DIRECT TRANSFER

La Direct Transfer come suggerisce già il nome, è una trasferta Terra-Luna diretta e ritenuta dal settore in questione il metodo di trasferimento convenzionale. Tale tipologia di traiettoria dipende infatti solo dalle attrazioni gravitazionali di Terra e Luna, mentre quella del Sole può essere anche solo modellizzata come una perturbazione e si caratterizza per i tempi rapidi entro il quale può essere svolta la trasferta. Le durate possono infatti scendere fino ad 1 giorno, dove lo spacecraft dovrà necessariamente muoversi lungo un'iperbole ma possono anche estendersi per più giorni. Tipicamente le traiettorie più efficienti hanno durate di 4-5 giorni ed hanno forme ellittiche molto vicine a quelle previste da una manovra di trasferimento di Hohmann. È possibile vedere ciò nella tabella seguente dove vengono indicati alcuni  $\Delta V$  al variare della durata di trasferimento con partenza da un'orbita circolare a 185 km di quota dalla Terra ed arrivo un'orbita circolare a 100 km di quota dalla superficie lunare.

DURATE DI MISSIONE	$\Delta V_{TLI}$ [km/s]	$\Delta V_{LOI}$ [km/s]	$\Delta V_{TOT}$ [km/s]
(e) 1 giorno	3,831	3,024	6,854
(d) 2 giorni	3,240	1,248	4,488
(c) 3 giorni	3,152	0,893	4,045
(b) 4.5 giorni	3,134	0,813	3,948
(a) 6 giorni	3,138	0,829	3,966

Dove  $\Delta V_{TLI}$  è relativo all'immissione nell'orbita di trasferimento lunare mentre  $\Delta V_{LOI}$  risulta quello necessario alla circularizzazione dell'orbita di arrivo. In basso in figura 1.1 sono invece illustrate le traiettorie relative ai cinque casi menzionati nella tabella precedente nel piano cartesiano considerando un sistema di riferimento inerziale centrato sulla Terra.

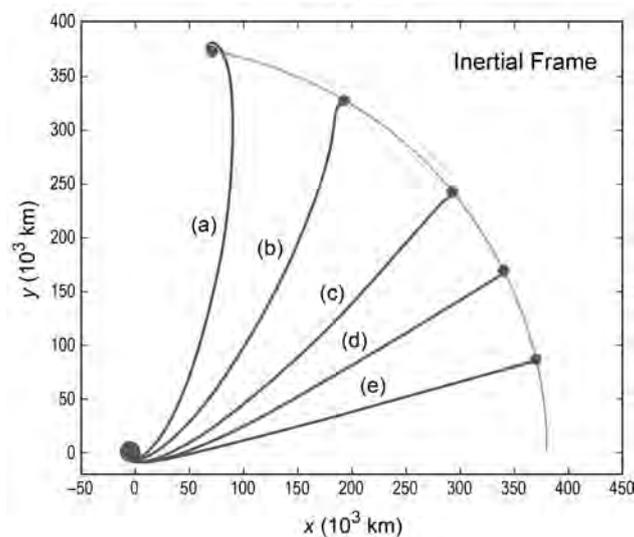


Figura 1.1

Come si può notare il  $\Delta V$  tendenzialmente diminuisce all'aumentare della durata e le traiettorie passano da iperboliche ad ellittiche. Inoltre si può osservare come non vi siano notevoli differenze in termini di  $\Delta V$  escludendo il caso di confronto tra 1 giorno e 2 giorni, e questo può essere il motivo per il quale le missioni Apollo, per le quali si è optato per un Direct Transfer, hanno avuto trasferite di 3 giorni e non ad esempio di 4.5 giorni. L'aumento in termini di  $\Delta V$  veniva infatti ampiamente compensato dal risparmio su altre risorse necessario all'equipaggio, come cibo, acqua ed energia elettrica. Nel direct transfer inoltre non si pone come destinazione finale della TLI la Luna, ma devono essere fatti dei passaggi ad una certa distanza dalla superficie per diminuire la velocità.

Se da un lato il Direct Transfer ha il vantaggio di minimizzare i tempi di viaggio, dall'altro lato si deve tener conto che i tempi necessari ad una eventuale manovra di correzione sono molto stretti, di solito dell'ordine delle ore o al massimo di un giorno. Se questi risultano insufficienti allo spacecraft si può optare per eseguire delle orbite di fasamento intorno alla Terra, tuttavia questo apre un'ulteriore problematica. Se infatti tali manovre possono compensare eventuali ritardi efficacemente, innalzare i tempi di missione facendo percorrere orbite a bassa quota più volte esporrebbe inevitabilmente lo spacecraft (e l'eventuale equipaggio a bordo) ad un incremento nella dose di radiazioni ricevute per via dei passaggi dalle fasce di Van Allen oltre che ad un aumento dei costi in generale della missione.

Solo alcuni esempi di missioni che hanno usufruito di tale metodo di trasferimento sono come menzionato prima le missioni Apollo, Luna 1 (la prima sonda ad aver fatto un passaggio ravvicinato a circa 6000 km dalla Luna), Clementine e Chandrayaan-1.

## 1.4 LOW - THRUST TRANSFER

Un'altra tipologia di trasferimento, usata come logica conseguenza dell'utilizzo di propulsione elettrica è il Low-Thrust Transfer, ossia il trasferimento a bassa spinta. I propulsori elettrici infatti hanno il vantaggio di raggiungere impulsi specifici maggiori rispetto a quelli chimici, garantendo quindi un consumo di propellente molto minore ma allo stesso tempo a parità di potenza una spinta anche molto più bassa. Tale fattore impone di progettare traiettorie ad-oc molto complesse da effettuarsi in tempi molto lunghi, addirittura in 12 mesi circa, come nella missione SMART-1 dell'ESA. La caratteristica principale di questo tipo di traiettoria che la contraddistingue dalle altre due tipologie di trasferimento è l'innumerabile presenza di "spiralì" dal semi-asse crescente dovute proprio alla bassa spinta che permette di innalzare l'apogeo dell'orbita di partenza con estrema gradualità ma al tempo stesso efficienza. Importante anche segnalare che tali traiettorie sfruttano la spinta gravitazionale della Luna anche quando il satellite si trova a distanze ancora elevate da quest'ultima (anche 180000 km circa) ma in corrispondenza di un preciso fasamento per proseguire l'innalzamento non solo del perigeo, bensì anche dell'argomento del perigeo stesso e perfino dell'inclinazione dell'orbita. Tale fenomeno è detto risonanza e permette di ottenere degli impulsi propulsivi praticamente "gratis" permettendo quindi di risparmiare ulteriore propellente.

Per maggiore chiarezza può essere esplicitato proprio l'esempio della missione START-1 effettuata dall'ESA che è stata la prima missione a servirsi di propulsione elettrica per evadere dall'orbita terrestre, per entrare nell'orbita di un altro corpo celeste nonché la prima missione lunare europea. Tralasciando le fasi finali di discesa nell'orbita lunare, la missione s'è articolata in:

1. Fase LEOP;
2. Evasione dalle fasce di Van Allen;
3. Evasione dalla Terra;
4. Risonanza Lunare e cattura.

Durante la fase LEOP (Launch and Early Orbit Phase), la sonda è stata trasferita dalle basse quote delle orbite LEO fino ad una quota pari a quella geostazionaria attraverso una manovra GTO (Geostationary Transfer Orbit) eseguita dal lanciatore Ariane 5. Successivamente è entrato in funzione effettivamente il propulsore elettrico della sonda, effettuando spinte la cui direzione era concorde a quella del vettore velocità per innalzare rapidamente il perigeo dell'orbita fino a circa 20000 km e l'apogeo fino a circa 58575 km. In tale fase è possibile vedere in maniera evidente la presenza delle tipiche spirali nella figura in basso evidenziate con colorazione blu le quali caratterizzano una traiettoria a bassa spinta. Nel marzo 2004 la linea degli absidi è stata in un primo momento ruotata per ovviare ad un'eclissi che avrebbe oscurato l'arco orbitale vicino all'apogeo mentre in un secondo momento tale linea è stata riportata nuovamente alla configurazione iniziale. Sono seguite poi delle spinte propulsive ancora una volta parallelamente al vettore velocità ed in prossimità del perigeo per incrementare ulteriormente l'apogeo.

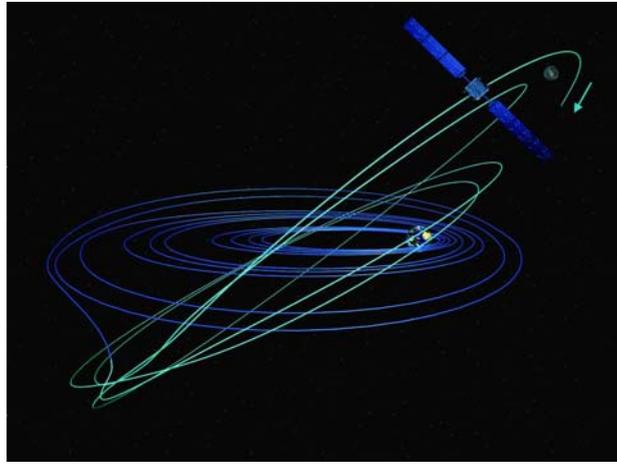


Figura 1.2

L'ultima fase è consistita nello sfruttamento del fenomeno della risonanza lunare, attuato attraverso un preciso timing di fasamento tale per cui l'apogeo dell'orbita coincideva con un passaggio della Luna. Fu scelto per tale missione un numero di risonanze pari a 3, ciascuno di essi eseguito a circa 27 giorni di distanza dal precedente, permettendo allo spacecraft di eseguire manovre di cambio dell'inclinazione, incremento dell'argomento perigeo e del perigeo stesso fino all'orbita lunare risparmiando ulteriore carburante. I passaggi in risonanza sono visibili nella figura 1.3 sottostante evidenziati come punti in rosso; si può notare come le risonanze siano avvenute a raggi di circa 230000 km, 280000 km e 330000 km, per cui SMART-1 riusciva in tal modo ad alzare l'orbita di circa 50000 km ogni 27 giorni.

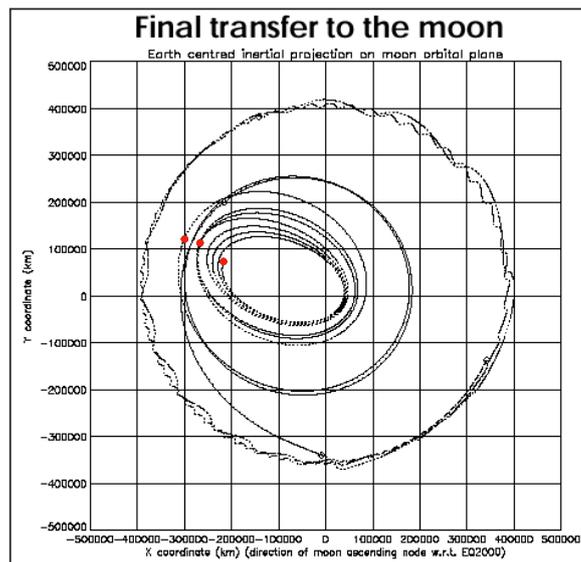


Figura 1.3

## 1.5 CENNI SULL' UTILITA' DELL' IMPULSO SPECIFICO VARIABILE

Il concetto di impulso specifico variabile è stato ipotizzato e introdotto ufficialmente per la prima volta nella decade degli anni 1990 essendo questo fortemente legato al propulsore che teoricamente lo sfrutterebbe, ossia il VASIMR; tale propulsore, iniziato a progettare dall'ingegnere Franklin Chang Diaz intorno agli anni '70, è stato soggetto ad un notevole progresso nella sperimentazione nel 1994.

Come si è potuto notare precedentemente, per ottimizzare al massimo il consumo di propellente in traiettorie a bassa spinta occorre propellere lo spacecraft in corrispondenza di punti ben precisi, in particolare in punti dell'orbita in cui la velocità è già elevata, ossia in prossimità del perigeo. Piccoli incrementi di velocità in prossimità del perigeo infatti garantiscono un guadagno notevole in termini di incremento del semiasse

maggiore all'aumentare dell'eccentricità della traiettoria rispetto ad eseguire gli stessi incrementi in prossimità dell'apogeo. Tale principio si sposa perfettamente con tutti i propulsori convenzionali in utilizzo oggi in cui l'impulso specifico è fisso. Si opta quindi nel dare spinte massime in prossimità del perigeo dell'orbita e spinte nulle per il resto della traiettoria alternando quindi brevi cicli di accensione a lunghi frangenti in cui il propulsore rimane inattivo.

In vantaggio che si ricaverebbe dal variare l'impulso specifico sarebbe proprio quello di poter mantenere il propulsore sempre acceso e variare la spinta lungo l'intera traiettoria in funzione della necessità o la convenienza del momento mantenendo comunque un'elevata efficienza.

La variazione dell'impulso specifico inoltre permetterebbe di effettuare eventuali manovre di correzione attraverso l'erogazione dell'esatta spinta necessaria ad attuarle.

## 1.6 MISSIONI LUNARI PRECEDENTI

La prime sonde ad essere passate vicino la superficie del nostro satellite naturale ed a toccarla effettivamente sono state quelle del programma sovietico Luna, il quale può essere classificato in 3 generazioni di satelliti. Della prima generazione facevano parte Luna-1 che è passata vicino la superficie l'1 febbraio 1959, Luna-2 il quale vi ha impattato, diventando il primo spacecraft in assoluto a toccare il suolo di un altro corpo celeste mentre Luna-3 ha consentito l'opportunità di osservare per la prima volta il lato nascosto della Luna. Tali spacecraft avevano tutti masse inferiori ai 400 kg, mentre con la seconda generazione si sono coinvolte masse maggiori, intorno ai 1600 kg per poter portare landers e orbiters. Tale incremento ha portato difficoltà in più trasformatesi anche in più tentativi falliti, eccetto Luna-9 che fu la prima sonda ad allunare e Luna-10 che costituì il primo satellite ad orbitare intorno ad un altro corpo celeste nel 1966. Della terza generazione si ricordano invece Luna-16, ricordata come la prima missione robotica a portare sulla Terra un campione di suolo lunare e Luna-17, la prima a far atterrare un rover su un altro mondo. Dell'agenzia sovietica si può menzionare anche il programma Zond, in particolare Zond-5 che fu la prima missione a far rientrare sulla Terra un satellite dall'orbita lunare.

Gli Stati Uniti, prima del noto programma Apollo, percorsero anche loro degli step intermedi per approfondire le conoscenze sulla Luna. Si ricordano infatti le missioni del programma Rangers, in particolare dopo i falliti tentativi di Ranger-1, Ranger-2 e Ranger-3, finalmente Ranger-4 riuscì ad inviare immagini televisive del lato nascosto Luna prima di impattarvi, risultando il primo oggetto artificiale ad atterrare su tale lato della Luna. Seguirono poi altre missioni di impatto condotte con successo da Ranger-5 fino a Ranger-9.

Tra il 1966 e il 1968 vi fu l'invio di landers ed orbiters, in particolare si ricordano i landers da circa 1000 kg delle missioni Surveyors atterrati in prossimità dell'equatore lunare che risultarono cruciali per ottenere informazioni sulle modalità di allunaggio; inoltre i Lunar Orbiters catturarono immagini dell'equatore lunare utili per localizzare i possibili siti di atterraggio delle future missioni Apollo con equipaggio umano. Proprio di quest'ultime si ricordano l'Apollo-8 del 1968, il quale divenne la prima missione umana ad orbitare su un'altro corpo celeste e l'Apollo-11, il quale il 20 Luglio 1969 portò il primo uomo sulla Luna (in figura 1.4), ossia anche qui il primo uomo su un altro mondo. Infine nel 1971 con Apollo-15 si portò sulla Luna il primo rover guidato dall'uomo mentre con Apollo-17 si chiuse tale programma nel 1972.

Da tale data in poi e per tutti gli anni '80 la Luna non fu oggetto di alcuna missione, mentre dal 1990 l'interesse per il nostro satellite naturale ritornò anche se in maniera diversa: l'obiettivo non era più quello di atterrare sulla superficie ma studiare il Satellite dal punto di vista dell'analisi di missione, sfruttando quindi la sua attrazione gravitazionale per elaborare nuove strategie che potessero abbassare il  $\Delta V$  per altre future missioni.

Ne è un esempio la missione giapponese Hiten che attraverso uno swing-by della Luna e una traiettoria WSB (Weak Stability Boundary) pose la sonda in un'orbita lunare fortemente ellittica. Con tale missione, condotta nell'arco di 6 mesi si riuscì a ridurre la massa di lancio a soli 196 kg. La missione Hiten avrebbe dovuto rilasciare il lander Hagoromo il quale però si schiantò sul suolo lunare, facendo tuttavia risultare il Giappone come terzo paese al mondo a toccare la superficie lunare.

Nel 1994 la missione US Clementine raggiunse un'orbita lunare polare usando un Direct Transfer con orbite intermedie con una massa al lancio di 1690 kg e una trasferta lunga complessivamente 3 settimane.

Singolare è poi il caso della Hughes Global Services-1/Asiasat-3 del 1997/1998, missione che avrebbe dovuto portare direttamente dall'orbita bassa terrestre all'orbita geostazionaria il satellite Asiasat-3, appartenente all'omonima società di Hong Kong, per fornire servizi di telecomunicazione in Asia. A causa però di un malfunzionamento del quarto stadio del lanciatore il satellite venne rilasciato in un'orbita



Figura 1.4

fortemente ellittica e inclinata di  $51^\circ$  circa, decretando di fatto il fallimento dell'intera missione. Il satellite passò dunque alla Hughes Global Services, la quale studiò delle strategie per riutilizzare in qualche modo lo spacecraft apparentemente ormai privo di ogni scopo e arrivò a due possibili soluzioni. La prima elaborata da Edward Belbruno la quale consisteva in una traiettoria Low Energy Transfer della durata di 5 mesi che avrebbe fatto fare allo spacecraft uno swing-by della Luna coprendo nel frattempo l'intera manovra di azzeramento dell'inclinazione e lasciato il satellite nell'orbita GEO prevista. Tale soluzione risultò però non fattibile per via dell'impossibilità di tracciare il satellite alla distanza prevista dalla traiettoria. Venne invece optata la seconda soluzione elaborata da Jerry Salvatore, la quale prevedeva una traiettoria Direct Transfer/free-return (in stile Apollo-11) della durata di pochi giorni nel quale si sfruttavano due fly-by dalla Luna per diminuire di  $40^\circ$  gradi l'inclinazione (lasciando quindi circa  $11^\circ$  gradi) per poi rilasciare il satellite in un'orbita geosincrona. Questo fatto dimostra chiaramente la possibilità di sfruttare il campo gravitazionale lunare per incrementare l'energia orbitale senza dover far uso dei propulsori e dunque del carburante necessario ad una certa manovra.

Dagli anni 2000 in poi l'interesse per la Luna ha coinvolto altre agenzie spaziali mondiali: l'ESA grazie alla missione SMART-1 del 2003 è stato il quarto paese al mondo ad attecchire sul suolo lunare, l'India con il programma Chandrayaan il quinto nel 2008, la Cina con le missioni Chang'e il sesto nel 2009, Israele con Baresheet il settimo nel 2019, Lussemburgo con Manfred Memorial Moon Mission l'ottavo nel 2022 (anche se tale missione aveva avuto inizio nel 2014 trattandosi di orbiters), gli Emirati Arabi Uniti i noni con Emirates Lunar Mission sempre nel 2022, ed infine la Russia con Luna-25 nel 2023. Sebbene molte delle missioni qui elencate non costituiscano dei veri e propri allunaggi trattandosi di missioni fallite e quindi impattate involontariamente sulla Luna, ciò dimostrerebbe comunque che grazie al crescente fenomeno dell'economia spaziale, il raggiungimento della Luna è ritornato a tutti gli effetti un obiettivo di primo interesse.

Degno di particolare menzione è sicuramente il programma Artemis, elaborato in gran parte dalla NASA ma in cui collaborano anche ESA, JAXA (agenzia spaziale giapponese) e CSA (agenzia spaziale canadese). Il programma è iniziato nel 2017, mentre il primo lancio di Artemis-1 è avvenuto nel recente 2022, e si pone diversi obiettivi: l'obiettivo in vista principale è sicuramente quello di portare nuovamente l'uomo e per la prima volta anche la donna sulla Luna, in particolare nella regione Sud-polare, ma non in delle missioni unicamente esplorative del nostro Satellite. A fianco a questo scopo infatti si allacciano obiettivi probabilmente di importanza anche maggiore dal punto di vista scientifico e volendo anche filosofico, come testare e sviluppare l'autosufficienza del genere umano al di fuori della Terra, in un mondo alieno che tuttavia non risulti eccessivamente lontano dal pianeta Natale. Tale studio porrebbe le possibili basi non solo per permettere all'uomo di raggiungere mete ancora più lontane come la superficie di Marte ma anche la possibilità di sviluppare un' "economia lunare"; si incentiverebbe in tal modo la stabilizzazione permanente o semipermanente sulla Luna attraverso l'installazione di infrastrutture (abitazioni, serre per la coltura di piante, impianti energetici) e la fornitura di servizi (fornitura di cibo, acqua e ossigeno, messa in orbita satelliti per le telecomunicazioni o per la navigazione non solo tra Terra e Luna ma anche tra ambienti diversi della Luna stessa) e porre le basi anche per un futuro "turismo spaziale". Il programma Artemis fornirà

informazioni utili anche per il progetto Lunar Gateway, il quale prevede di dispiegare una stazione spaziale orbitante attorno alla Luna per facilitare comunicazioni, depositare macchinari e rover, eseguire esperimenti scientifici ed attraccare navicelle provenienti dalla Terra. In prospettiva futura, attraverso il programma Artemis si guarderebbe dunque al viaggio verso la Luna non solo come una tappa intermedia per altri mondi ma anche come un progetto parallelo e indipendente con degli scopi ben precisi e altrettanto importanti per il futuro dell'esplorazione umana dello Spazio.

# CAPITOLO 2: MOTORI AD IMPULSO SPECIFICO VARIABLE

In questo capitolo verrà illustrata una panoramica generale dell'unico propulsore ad impulso specifico variabile attualmente esistente anche se ancora in fase di sperimentazione, con un focus finale sui possibili vantaggi e svantaggi derivanti dal suo utilizzo e i recenti progressi fatti.

## 2.1 INTRODUZIONE AL VASIMR

Il propulsore VASIMR (VARIabile Specific Impulse Magnetoplasma Rocket) costituisce al momento l'unico prototipo di un motore ad impulso specifico variabile ed è il progetto principale dell'azienda Ad Astra Rocket Company, impresa statunitense fondata dall'ingegnere nucleare ed ex astronauta della NASA Franklin Chang Diaz, la quale studia soluzioni propulsive avanzate per lo spazio.

Nonostante lo sviluppo di tale progetto tuttavia abbia coinvolto in circa 40 anni di ricerca nel campo della propulsione al plasma, in primis la US Department of Energy (DoE) insieme all'agenzia spaziale statunitense NASA e solo in un secondo momento Ad Astra Rocket, quest'ultima costituisce di fatto al momento l'unica vera portavoce che promuove tale propulsore.

## 2.2 PRINCIPI DI FUNZIONAMENTO

La struttura del corpo propulsivo del VASIMR si articola in 3 componenti principali:

- Un primo accoppiatore a frequenze radio (RF);
- Un secondo accoppiatore funzionante sempre a radio frequenze;
- Un ugello magnetico.

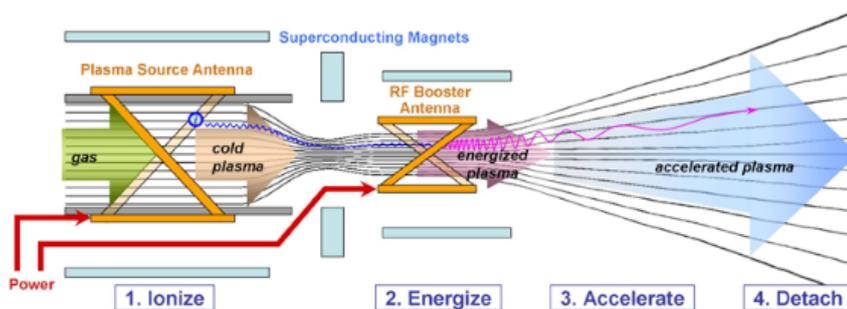


Figura 2.1

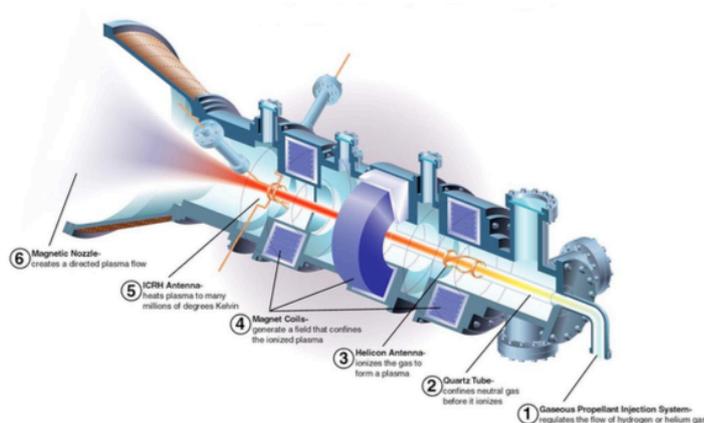


Figura 2.2

Il principio di funzionamento prevede che un gas, tipicamente Argon per questo tipo di propulsore, venga iniettato nel primo accoppiatore RF e riscaldato da questo finché il gas non si trasforma in plasma; è utile ricordare che il plasma viene classificato in fisica come il quarto stato della materia e può essere definito come una miscela di elettroni e ioni globalmente neutra.

Successivamente il plasma appena formatosi passa in un secondo accoppiatore RF che grazie alla combinazione di un campo magnetico e di una tensione ad un'appropriata radiofrequenza conferisce al plasma ulteriore energia: le particelle di plasma infatti per effetto di questa combinazione attuano un moto rotatorio attorno all'asse del propulsore il quale si sovrappone a quello di traslazione assiale facendo quindi percorrere alle particelle una traiettoria elicoidale. Tale movimento incrementa notevolmente temperatura degli ioni fino a milioni di gradi. Questo fenomeno viene chiamato riscaldamento ciclotronico a risonanza degli ioni (Ion-cyclotron resonance heating o ICR).

Il plasma altamente energizzato viene a questo punto espulso nell'ambiente esterno passando attraverso l'ugello magnetico il quale converte tutta l'energia termica e magnetica accumulata dal plasma in energia cinetica, generando così la spinta del propulsore.

L'energia cinetica convertita dall'ugello magnetica può essere molto elevata grazie alle elevatissime temperature raggiunte nel secondo stadio del motore costituito dal secondo accoppiatore. È singolare notare che normalmente temperature di milioni di gradi fonderebbero qualsiasi materiale attualmente conosciuto ma l'azione del campo magnetico non solo energizza il plasma ma lo isola anche dalle pareti interne del condotto principale del propulsore concentrandolo al centro di esso attraverso un moto elicoidale come detto in precedenza; questo poiché la forza di Lorentz risultante che si genera tra campo magnetico opportunamente direzionato e il vettore velocità degli ioni ha direzione centripeta. Tale isolamento magnetico potrebbe teoricamente portare il gas a temperature sempre superiori, ottenendo così velocità di scarico e quindi impulsi specifici che potrebbero superare i relativi valori di altri propulsori al plasma competitors.

I valori massimi per le prestazioni raggiunti al momento sono di un impulso specifico massimo di 5000 s , una spinta massima possibile di 6 N generate da una potenza di 200 kW e un rendimento del motore del 73%.

## 2.3 VANTAGGI

Il vantaggio principale del VASIMR risiederebbe sicuramente nella variabilità dell'impulso specifico, aspetto assente in tutti gli altri tipi di propulsori, che lo renderebbe altamente efficiente dal punto di vista del consumo del propellente. Questo renderebbe il propulsore altamente versatile non solo per diversi tipi di missione ma anche all'interno della singola missione stessa. È noto infatti che al diminuire o all'aumentare dell'impulso, con un comportamento speculare, cresce o decresce la spinta erogata dal motore e tale variabilità costituisce un fattore altamente congeniale con la teoria dell'ottimizzazione di traiettorie orbitali. Prendendo ad esempio il caso di una fase di missione in cui l'obiettivo fosse quello di innalzare il semiasse maggiore di un'orbita di partenza circolare si potrebbe far variare l'impulso specifico facendolo coincidere teoricamente ad ogni istante temporale al relativo valore ottimale dello stesso, tenendo il propulsore sempre acceso ed evitando quindi di eseguire continue successioni di accensione/spengimento a seconda che lo spacecraft si trovi o meno in prossimità del perigeo dell'orbita. In questo modo sarebbe possibile dunque dosare la quantità di propellente in funzione dell'effettiva necessità prestazionale e non in virtù di un funzionamento univoco del propulsore. In un certo senso si potrebbe dire che avere la possibilità di variare l'impulso specifico farebbe adattare più naturalmente lo spacecraft alla fisica del problema in questione e non viceversa, forzando quindi la traiettoria ad una limitazione in tal senso del propulsore.

Discorso analogo potrebbe essere fatto qualora invece l'obiettivo principale non fosse quello di ottimizzare il consumo di propellente ma di ridurre la durata di una fase o l'intera missione stessa abbassando l'impulso specifico e dunque aumentando la spinta. Questo discorso quindi potrebbe essere esteso e collegarsi di conseguenza alla versatilità di tale propulsore a missioni le quali richieste in termini di delta-V risultassero molto eterogenee, dalle missioni in LEO (orbita bassa terrestre), alle traiettorie Terra-Luna fino a traiettorie che prevedano come destinazione anche Marte. Nonostante il VASIMR sia di fatto ancora in fase di sperimentazione e sviluppo si ipotizza che in un futuro in cui sarà disponibile una sorgente energetica adeguata che garantisca sufficiente potenza, tale motore potrebbe portare l'uomo su Marte in circa 40 giorni.

Altro vantaggio del VASIMR sarebbe dovuto al mancato utilizzo degli elettrodi per spingere il gas ionizzato fuori dal motore in favore invece dell'utilizzo delle RF (radio frequenze). Altri propulsori ionici hanno infatti il problema dell'erosione di tali griglie da parte degli ioni compromettendone a lungo il termine non solo il rendimento ma anche la vita stessa del propulsore. L'utilizzo inoltre degli accoppiatori RF permetterebbe come detto prima di ottenere temperature del gas molto alte e quindi velocità di uscita molto elevate rispetto ai diretti propulsori competitor.

Il VASIMR inoltre, oltre ad essere in grado di processare notevoli quantità di potenza, sarebbe un motore teoricamente scalabile in base alla potenza stessa richiesta dalla missione. Ciò significa che sarebbe sufficiente progettare il design dell'unico propulsore che dovrà essere installato sullo spacecraft senza dover raggiungere la potenza richiesta attraverso l'installazione di più unità che complicherebbero inevitabilmente il design dell'intero sistema propulsivo, il quale non è fatto solo da propulsori ma da cablaggi e strutture.

## **2.4 SVANTAGGI**

Lo svantaggio principale al momento è costituito dall'elevata potenza di cui si servirebbe il propulsore per ottenere certi tipi di performance (specialmente per l'eventuale missione umana su Marte) che al momento non può essere fornita da nessuna sorgente energetica eccetto che da un reattore nucleare. Escludendo quindi tale possibilità andrebbe a cadere uno dei vantaggi menzionati precedentemente quale ad esempio la versatilità nel compiere certe missioni con una certa brevità. Lo sviluppo del VASIMR dipende quindi fortemente dal parallelo progresso nel campo dell'ingegneria nucleare e in questo senso risulterebbe fortemente vincolato.

Altra criticità è costituita dallo smaltimento dell'energia termica dispersa dai componenti utilizzati dal propulsore per il suo funzionamento; il calore generato da questi potrebbe essere notevole se si prende il caso di un propulsore da 100 kW e potrebbe danneggiare i materiali di cui sono composti compromettendone il corretto funzionamento.

Infine gli elettromagneti superconduttori utilizzati per il contenimento del plasma caldo al centro del core del propulsore evitando che questo vada a contatto per le pareti, genererebbero un campo magnetico dell'ordine del Tesla. Quest'ultimo oltre che a poter interferire con le operazioni di altri componenti, sotto effetto della magnetosfera terrestre potrebbe generare una coppia di forze (detta appunto coppia magnetica) indesiderata allo spacecraft. Tale problematica potrebbe essere risolta installando due unità propulsive in modo tale da generare due coppie che si annullino a vicenda ma verrebbe meno la scalabilità del VASIMR, che è stata pensata proprio per evitare tale provvedimento che complicherebbe tutto il sistema propulsivo e i sistemi ad esso adiacenti.

## **2.5 SORGENTI DI POTENZA**

Come evidenziato precedentemente, se da un lato il grosso dei vantaggi che porterebbe il VASIMR per quanto riguarda la notevole brevità delle missioni verso pianeti lontani sarebbero fortemente legati alla quantità di potenza disponibile per il suo funzionamento dall'altro lato tale propulsore risulterebbe scalabile, per cui adattabile alle fonti energetiche dell'immediato presente. Tuttavia si ricorda che il suo possibile utilizzo per il momento rimane esclusivamente nel campo delle ipotesi essendo ancora in piena fase di sperimentazione.

La più comune sorgente usata in gran parte delle missioni spaziali è costituita dai pannelli solari. Stando alle informazioni rilasciate da Ad Astra Rocket Company questi garantirebbero l'efficiente funzionamento del propulsore per il supporto di missioni Near-Earth, come la compensazione della resistenza aerodinamica in orbita LEO o missioni di trasporto cargo Terra-Luna, in cui la potenza necessaria risulterebbe dell'ordine delle decine o tutt'al più di poche centinaia di Kilo-Watt. Le innovazioni degli ultimi anni inoltre aprirebbero ad un'ottimistica visione sul futuro di tale tecnologia dato l'incremento di circa un'ordine di grandezza dell'energia solare utilizzabile rispetto al passato. Bisogna tuttavia contestualizzare anche le missioni Near-Earth in base alla quantità necessaria di carico che si intende trasportare: nella seguente tesi infatti si è pensato ad una massa totale dello spacecraft pari a 10000 kg la quale è stata ritenuta consona con le necessità scientifiche delle missioni verso la Luna programmate per il futuro, così come ampiamente visto nel capitolo precedente. Uno spacecraft di tale massa necessiterebbe di un propulsore la cui potenza dovrebbe essere

almeno di 1 MW, dunque di 3 ordini di grandezza superiore rispetto alle attuali possibilità da un VASIMR alimentato da pannelli solari.

Una possibile soluzione potrebbe essere l'utilizzo di sorgenti di tipo nucleare, le uniche al momento in grado di fornire la quantità di energia necessaria mantenendo una minima compatibilità con i valori delle masse relativi agli spacecraft. Tuttavia l'energia specifica data da un reattore nucleare risulta tutt'oggi ancora non ottimale, anche se le previsioni proprio di Ad Astra Company riguardo a tale tematica risultano abbastanza ottimistiche. Come si può vedere nel grafico in figura 2.3, elaborato da Ad Astra per prevedere una possibile missione su Marte in soli 39 giorni (fondamentalmente l'obiettivo ambito che si pone e che utilizza fortemente per promuovere il VASIMR), la potenza specifica per unità di massa di un VASIMR alimentato da energia elettro-nucleare avrebbe effettivamente fatto progressi notevoli negli ultimi 15 anni: si passerebbe infatti dai 10 kg/kW degli anni 2010 ai 4 kg/kW degli odierni 2020, con un valore che risulterebbe quindi più che dimezzato. Volendo dunque fare una stima del propulsore da 1 MW simulato nella seguente tesi si può facilmente dedurre che questo avrebbe una massa di 4000 kg, ossia circa il 40% del peso totale dello spacecraft. Un dimezzamento del peso si potrebbe avere invece negli anni 2030 con cui attraverso la stima di 2 kg/kW si potrebbe ottenere un propulsore della stessa potenza ma dalla massa di 2000 kg; ciò consentirebbe di riservare circa l'80% dello spacecraft al carico utile ed alla restante strumentazione, il che costituirebbe già un grosso balzo in avanti per l'utilizzo di tale tecnologia.

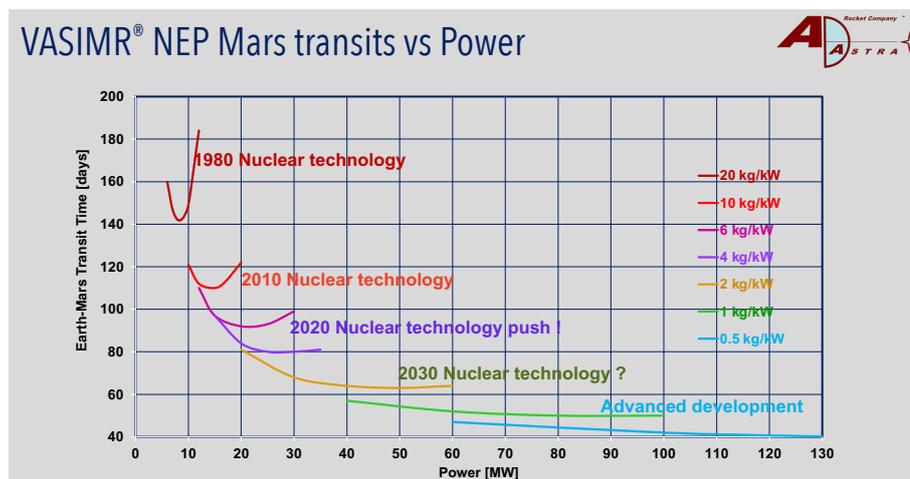


Figura 2.3

Ci sarebbe inoltre da risolvere ulteriori problematiche relative all'utilizzo dell'energia nucleare, la più importante riguarda la dannosità delle radiazioni; si dovrebbe infatti trovare una soluzione efficace ma soprattutto efficiente per la loro schermatura nel caso di missioni con equipaggio.

Il futuro del progetto VASIMR e della sua applicabilità, nonostante i vantaggi elencati precedentemente, dipende fortemente dall'evoluzione delle sorgenti energetiche, in particolare da quelle di tipo nucleare. Tuttavia un grosso contributo alla sua promozione anche in applicazioni odierne potrebbe essere dato dal test sulla Stazione Spaziale Internazionale, il primo vero step pratico che dovrà effettuare il VASIMR, del quale si parla nel paragrafo successivo.

## 2.6 TEST SULLA ISS

Ad Astra ha firmato con la NASA un contratto che prevede di testare un motore VASIMR dalla potenza complessiva di 200 kW, il VF-200TM, il quale sarebbe addetto alla manovra di compensazione della resistenza aerodinamica. Tale manovra viene effettuata periodicamente dalla ISS dai propulsori già presenti a bordo per evitare il decadimento orbitale della stazione. Sarebbe dunque a questo punto possibile testare il VF-200TM (composto da due unità propulsive VF-100 da 100 kW ciascuna) per verificare la stabilità del suo funzionamento in ottica di missioni future. Per ovviare all'impossibilità della ISS di fornire direttamente la

potenza necessaria al propulsore Ad Astra ha proposto di integrare un pacco batterie, la cui carica può essere fatta anche servendosi della bassa corrente elettrica disponibile sulla ISS; le batterie potrebbero così fornire la potenza necessaria al propulsore affinché questo possa garantire un funzionamento continuo per ciascun impulso della durata di circa 15 minuti.

## **2.7 SINTESI DEI RECENTI RISULTATI**

Tra gli anni 2010 e 2013 il prototipo del VASIMR VX-200TM costruito in laboratorio ha dato una grossa mole di risultati riguardanti le prestazioni; il propulsore ha operato con una potenza di 200 kW senza refrigerazione attiva completando circa 10000 impulsi ad alta potenza della durata massima di circa 2 minuti. A tali condizioni ha raggiunto dunque prestazioni le quali erano caratterizzate da un impulso specifico massimo di 4900 s ed un rendimento dei thrusters del 70% utilizzando l'argon come gas propulsivo.

Nel 2017, sulla base del VX-200TM, è stata avviata la progettazione di un nuovo modello, il VX-200SS, con lo scopo di migliorare le strategie di gestione dei carichi termici e di dimostrare la stabilità operativa in un ambiente privo di atmosfera. Gli esperimenti di Ad Astra hanno avuto luogo tra il 2020 e il 2021 dando risultati promettenti per funzionamenti al di sopra degli 80 kW.

Sempre durante stesso periodo un nuovo secondo stadio del propulsore, una PPU (Power Processor Unit) da 120 kW, la TRL-5 RF PPU è stata integrata nel VX-200SS, dimostrando una notevole stabilità dal punto di vista termico anche a piena potenza in ambiente a zero atmosfere. Questa unità schermata magneticamente dal peso di 55.5 kg ed efficienza del 98.3% è ora pienamente operativa sul propulsore dal 2020, garantendo alla componentistica generatrice di RF una potenza notevolmente affidabile.

Il prossimo step per Ad Astra sarà quello di ottenere risultati altrettanto promettenti per test condotti ad una potenza di 100 kW, i quali risulteranno l'ultimo passo prima del vero test in volo sulla ISS di cui parlato nel paragrafo precedente. L'obiettivo sarà sempre quello di proporre un propulsore che abbia alti rendimenti e una significativa durata di funzionamento anche ad alti regimi di potenza.

# CAPITOLO 3: FONDAMENTI DELLA TEORIA DEL CONTROLLO OTTIMALE

## 3.1 Definizione dell'Hamiltoniano e del massimo di Pontryagin

La teoria del controllo ottimale viene applicata facendo riferimento ad un generico sistema descritto da un vettore di variabili di stato  $x$ ; l'evoluzione nel tempo di tale sistema tra gli istanti iniziali e quelli finali (detti contorni esterni) viene descritta mediante un set di equazioni differenziali le quali sono funzioni di dello stesso vettore  $x$ , del vettore dei controlli  $u$  e della variabile indipendente tempo  $t$ :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t) \quad (1)$$

Al fine di ciò si procede a suddividere l'intera traiettoria in un numero  $n$  di sotto-intervalli definiti archi. Il  $j$ -esimo arco inizia al tempo  $t_{(j-1)+}$  e termina al tempo  $t_{j-}$ , dove le variabili di stato sono rispettivamente  $x_{(j-1)+}$  e  $x_{j-}$  (i segni “-“ e “+” indicano i valori assunti dalle variabili subito prima e subito dopo il punto considerato). In questo modo si tiene in conto anche delle discontinuità sulle variabili (ad esempio nel caso di una manovra impulsiva) e sul tempo (nel caso invece di una manovra di fly-by) tra archi adiacenti. All'interno degli archi le variabili di stato e le variabili di controllo sono continue mentre nei punti di connessione dei vari archi vengono applicati dei vincoli.

Vengono quindi imposte le condizioni al contorno di tipo misto, in genere non lineari, le quali tengono conto dei valori delle variabili di stato e della variabile indipendente tempo ai contorni esterni e anche a quelli interni:

$$\chi(x_{(j-1)+}, x_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-}) = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (2)$$

Lo scopo principale del problema di ottimo consiste nella ricerca dei valori di massimo e di minimo di un funzionale che viene descritto, nella sua forma più generale, come:

$$J = \varphi(x_{(j-1)+}, x_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-}) + \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} \Phi(x(t), u(t), t) dt \quad j = 1, \dots, n \quad (3)$$

Esso è composto da due termini: il primo il quale è funzione delle variabili di stato e del tempo valutate esclusivamente ai contorni (interni ed esterni) ed il secondo il quale è costituito dall'integrale esteso su tutta la traiettoria della funzione  $\Phi$ ; quest'ultima dipende dalle variabili di stato, dal vettore dei controlli valutate in ogni punto e dal tempo. Inoltre, introducendo le variabili ausiliarie ci si può ricondurre ai casi  $\varphi = 0$  (formulazione di Lagrange) o  $\Phi = 0$  (formulazione di Mayer, preferita in questo caso).

A questo punto risulta utile riformulare il funzionale inserendo i moltiplicatori di Lagrange, le costanti  $\mu$ , associati alle condizioni al contorno, e le cosiddette variabili aggiunte  $\lambda$ , che sono associate alle equazioni di stato. A seguito dell'introduzione di tali termini il funzionale assume la seguente formula:

$$J^* = \varphi + \mu^T \chi + \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} (\Phi + \lambda^T (f - \dot{x})) dt \quad j = 1, \dots, n \quad (4)$$

Entrambi i funzionali  $J$  e  $J^*$  dipendono dal tempo, dalle variabili di stato  $x$  e dalle loro derivate  $\dot{x}$  (in particolare dai valori che le variabili  $x_j$  e il tempo  $t_j$  assumono negli estremi di ogni arco) e dai controlli  $u$ . Se le condizioni al contorno e le equazioni di stato sono soddisfatte, i due funzionali e i loro valori agli estremi coincidono. Per eliminare la dipendenza dalle derivate delle variabili  $\dot{x}$  si integra per parti ottenendo:

$$J^* = \varphi + \mu^T \chi + \sum_j (\lambda_{(j-1)_+}^T x_{(j-1)_+} - \lambda_{j_-}^T x_{j_-}) + \sum_j \int_{t_{(j-1)_+}}^{t_{j_-}} (\Phi + \lambda^T f - \dot{\lambda}^T x) dt \quad j = 1, \dots, n \quad (5)$$

In seguito, si può eseguire un'operazione di differenziazione in modo da ottenere la variazione prima del funzionale stesso  $\delta J^*$  (in questo caso le parentesi quadre indicano una matrice):

$$\begin{aligned} \delta J^* = & \left( -H_{(j-1)_+} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{(j-1)_+}} + \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial t_{(j-1)_+}} \right) \delta t_{(j-1)_+} \\ & + \left( H_{j_-} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j_-}} + \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial t_{j_-}} \right) \delta t_{j_-} + \\ & + \left( \lambda_{(j-1)_+}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{(j-1)_+}} + \mu^T \left[ \frac{\delta \chi}{\delta x_{(j-1)_+}} \right] \right) \delta x_{(j-1)_+} + \\ & + \left( -\lambda_{j_-}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{j_-}} + \mu^T \left[ \frac{\delta \chi}{\delta x_{j_-}} \right] \right) \delta x_{j_-} + \\ & + \sum_j \int_{t_{(j-1)_+}}^{t_{j_-}} \left( \left( \frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda}^T \right) \delta x + \frac{\partial H}{\partial x} \delta u \right) dt \quad j = 1, \dots, n \quad (6) \end{aligned}$$

Dove il termine  $H$  prende il nome di *Hamiltoniano* del sistema e definito dalla seguente equazione:

$$H = \Phi + \lambda^T f \quad (7)$$

La condizione di ottimo si verifica quando il funzionale è stazionario ossia quando la sua derivata prima diviene nulla per qualunque scelta delle variazioni infinitesime  $\delta x$ ,  $\delta u$ ,  $\delta x_{(j-1)_+}$ ,  $\delta x_{j_-}$ ,  $\delta t_{(j-1)_+}$ ,  $\delta t_{j_-}$  che sia compatibile con le equazioni differenziali e le condizioni al contorno. Effettuando un'opportuna scelta delle costanti e delle variabili da introdurre infatti, è possibile annullare contemporaneamente il coefficiente di ciascuna delle variazioni nell'espressione (6) assicurando quindi la stazionarietà del funzionale espressa dalla condizione  $\delta J^* = 0$ . Per ogni punto della traiettoria vengono, quindi, annullati i coefficienti di  $\delta x$  e  $\delta u$  all'interno dell'integrale. Da tale annullamento derivano le equazioni differenziali di Eulero-Lagrange per le variabili aggrunte:

$$\frac{d\lambda}{dt} = - \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)^T \quad (8)$$

E le equazioni algebriche per i controlli:

$$\left( \frac{\partial H}{\partial u} \right)^T = 0 \quad (9)$$

Andando alla ricerca dei massimi o minimi di  $J$  risulta che sia le leggi di controllo sia le condizioni al contorno sono indipendenti.

Bisogna inoltre porre attenzione al fatto che i controlli potrebbero avere valori contenuti entro un certo intervallo, che matematicamente parlando si traduce nell'imporre un certo dominio di ammissibilità (la

spinta  $T$  come anche l'impulso specifico, se variabile come nel nostro caso, hanno un valore massimo ed uno minimo).

Il valore di ottimo di tali controlli, ammesso che appartenga a tale dominio, per definizione rende massimo o minimo l'Hamiltoniano in quel punto (a seconda che si cerchino i massimi o i minimi di tale funzione). Questa proprietà è evidenziata nel cosiddetto Principio di Massimo di Pontryagin. Si avranno quindi sostanzialmente due casi:

- Il caso di controllo non vincolato in cui il valore ottimale del controllo, se appartiene al dominio, è dato dall'equazione (9) e quindi il vincolo non interviene in quel punto;
- Il caso di controllo vincolato in cui il valore ottimale del controllo è agli estremi del dominio se il valore fornito dell'equazione (9) non appartiene al dominio stesso.

Se l'Hamiltoniano è lineare rispetto ad uno dei controlli vincolati si ha un caso particolare, in quanto nell'equazione (9) il controllo non compare esplicitamente e non può quindi essere determinato. Per massimizzare  $J$  si hanno nuovamente due possibilità:

- Se nell'equazione (7) il coefficiente di controllo non è nullo, allora  $H$  è massimizzato per il valore massimo o minimo del controllo a seconda che il coefficiente sia positivo o negativo, in accordo con il Principio di Pontryagin;
- Se nell'equazione (7) il coefficiente di controllo è nullo durante un intervallo finito di tempo (arco singolo), allora è necessario imporre l'annullamento di tutte le derivate successive del coefficiente rispetto al tempo, fino a quando in una di esse non appare esplicitamente il controllo. Il controllo ottimale viene quindi determinato azzerando quest'ultima derivata.

Si prosegue ora andando a generalizzare le condizioni al contorno per il  $j$ -esimo arco e per fare ciò si scrivono inizialmente le condizioni che derivano dal considerare tale arco un estremo finale del  $(j-1)$ -esimo sotto-intervallo o come estremo iniziale del  $j$ -esimo sotto-intervallo. Se si vanno ad annullare nell'ordine i coefficienti  $\delta x_{j-}$ ,  $\delta x_{j+}$ ,  $\delta t_{j-}$ ,  $\delta t_{j+}$  nell'espressione (6), si ottiene:

$$-\lambda_{j-}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{j-}} + \mu^T \left[ \frac{\partial \chi}{\partial x_{j-}} \right] = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (10)$$

$$\lambda_{j+}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{j+}} + \mu^T \left[ \frac{\partial \chi}{\partial x_{j+}} \right] = 0 \quad j = 0, \dots, n - 1 \quad (11)$$

$$H_{j-} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j-}} + \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial t_{j-}} = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (12)$$

$$-H_{j+} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j+}} + \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial t_{j+}} = 0 \quad j = 0, \dots, n - 1 \quad (13)$$

Dove i pedici  $j_-$  e  $j_+$  indicano i valori assunti rispettivamente subito prima e subito dopo il punto  $j$  (è necessaria la distinzione tra i due, in quanto, come già detto in precedenza, si possono verificare delle discontinuità nei punti di giunzione dei sotto-intervalli). Le equazioni (10) e (12) non hanno significato all'inizio della traiettoria ( $j = 0$ ), mentre le equazioni (11) e (13) non ne hanno alla sua fine ( $j = n$ ). Andando ad eliminare le costanti aggiunte  $\mu$  dalle equazioni (10), (11), (12) e (13) si ottengono le condizioni al contorno di ottimo del tipo:

$$\sigma(x_{(j-1)_+}, x_{j-}, \lambda_{(j-1)_+}, \lambda_{j-}, t_{(j-1)_+}, t_{j-}) = 0 \quad (14)$$

Quest'ultime completano il sistema di equazioni differenziali insieme alle equazioni (1) e (8) e alle condizioni assegnate (2).

Considerando una generica variabile di stato  $x$  con particolari condizioni al contorno, le equazioni (10) e (11) forniscono particolari condizioni di ottimo per la variabile aggiunta corrispondente  $\lambda_x$ :

- Se la variabile di stato  $x$  è assegnata esplicitamente all'istante iniziale (il vettore delle condizioni imposte  $\chi$  contiene l'equazione  $x_0 - a = 0$  con  $a$  valore assegnato), non ci sono condizioni sulla corrispondente variabile aggiunta;
- Se il valore iniziale della variabile di stato  $x_0$  non viene esplicitata né nella funzione  $\varphi$  né nelle condizioni al contorno, la corrispondente variabile aggiunta è nulla all'istante iniziale ( $\lambda_{x_0} = 0$ );
- Se una variabile di stato è continua e non assegnata al punto interno  $i$  ( $\chi$  contiene l'equazione  $x_{j_+} = x_{j-}$ ), la corrispondente variabile aggiunta è anch'essa continua ( $\lambda_{j_+} = \lambda_{j-}$ );
- Se una variabile di stato è continua e assegnata esplicitamente ad un contorno interno ( $x_{j_+} = x_{j-} = a$ ) ne consegue che la corrispondente variabile aggiunta ha una discontinuità "libera"; il valore di  $\lambda_{j_+}$  è dunque indipendente da  $\lambda_{j-}$  ed entrambi devono essere determinati dalla procedura di ottimizzazione.

Anche le equazioni (12) e (13) forniscono in alcuni casi particolari condizioni al contorno nel caso in cui l'Hamiltoniano  $H$  non dipenda esplicitamente dal tempo.:

- Se il tempo iniziale  $t_0$  non compare esplicitamente né nelle condizioni al contorno né nella funzione  $\varphi$ , l'Hamiltoniano è nullo all'istante iniziale;
- Se il tempo intermedio  $t_j$  non compare esplicitamente nella funzione  $\varphi$ , l'Hamiltoniano è continuo nel punto  $j$  ( $H_{j_+} = H_{j-}$ );
- Se il tempo  $t_j$  è esplicitamente assegnato, l'Hamiltoniano ha in quel punto  $j$  una discontinuità "libera".

### 3.2 Problema differenziale ai limiti

In questo paragrafo si andrà ad analizzare il metodo di tipo diretto utilizzato per ottimizzare i trasferimenti orbitali il quale applica la teoria del controllo ottimale al sistema di equazioni (1) dotato di condizioni al contorno che dipendono dal tipo di orbite coinvolte nella missione.

Il metodo di tipo diretto riformula il sistema di equazioni differenziali in un problema differenziale ai limiti (BVP) in cui alcuni dei valori iniziali delle variabili risultano incogniti. Per risolvere questo problema si vanno quindi a cercare i valori iniziali per i quali tutte le condizioni, imposte e di ottimo, risultano soddisfatte a seguito dell'integrazione numerica del sistema differenziale.

Come detto in precedenza la teoria del controllo ottimale può essere riassunta come un problema matematico dipendente da vincoli differenziali e algebrici. Tenendo conto che inizialmente parte dei valori iniziali delle variabili di stato e aggiunte sono incogniti, il problema di ottimo si esprime come un problema differenziale ai limiti descritto dalle equazioni differenziali (1) e (8) con i controlli che vengono stabiliti dalle equazioni algebriche (9), con le condizioni al contorno imposte (2) e con quelle di ottimo (14).

Le caratteristiche che rappresentano il problema sono le seguenti:

- L'intervallo d'integrazione è suddiviso in sotto-intervalli in cui le equazioni possono avere diverse espressioni;
- La durata di ciascun intervallo è incognita;
- Le condizioni al contorno possono essere non lineari e coinvolgere i valori delle variabili sia ai contorni esterni che a quelli interni;
- Le variabili possono essere discontinue ai contorni interni e il loro valore dopo la discontinuità può essere incognito.

Il problema maggiore di questa tecnica di ottimizzazione sta proprio nel risolvere il problema ai limiti la cui soluzione viene ottenuta riducendo quest'ultimo a diversi sotto-problemi ai valori iniziali che vengono portati alla convergenza applicando il metodo di Newton.

Dapprima si risolve l'indeterminatezza della durata di ciascun intervallo effettuando un cambio di variabile nell'integrazione passando dalla variabile  $t$  a quella adimensionalizzata  $\epsilon$ . Dato che questa viene specificata all'interno di ciascun sotto-intervallo si ottiene la seguente relazione:

$$\epsilon = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{\tau_j} \quad (15)$$

Con  $\tau_j$  il quale rappresenta la durata del sotto-intervallo (in genere incognita) e che delimita i contorni interni ed esterni del sotto-intervallo; questi ultimi corrispondono a valori interi consecutivi della nuova variabile indipendente  $\epsilon$  (gli estremi dell'integrale saranno infatti  $j - 1$  e  $j$ ).

Successivamente si manipola il sistema di equazioni algebriche dato da (1) e (8) e dalle equazioni dei controlli (9) ottenendo così un problema differenziale dalle variabili non più distinte tra quelle di stato e aggiunte:

$$\frac{dy}{dt} = f^*(y, t) \quad (16)$$

Si nota come il parametro  $\tau$  (che descrive la durata dei sottointervalli) e i valori delle variabili a seguito di discontinuità si aggiungano al vettore dei parametri costanti  $c$ , che assieme al vettore delle variabili di stato aggiunte  $y$  costituisce un nuovo vettore  $z = (y, c)$  il quale risulta di più facile adozione per il problema in esame. Si prosegue di seguito applicando un cambio di variabile indipendente. Il sistema di equazioni differenziali quindi diventa:

$$\frac{dz}{d\epsilon} = f(z, \epsilon) \quad (17)$$

Esplicitando il secondo membro delle equazioni (17), per le variabili di stato e aggiunte si ha:

$$\frac{dy}{d\epsilon} = \tau_j \frac{dy}{dt} \quad (18)$$

Mentre per i parametri costanti si ha:

$$\frac{dc}{d\epsilon} = 0 \quad (19)$$

Le condizioni al contorno sono genericamente espresse questa volta senza distinguere tra le condizioni imposte e di ottimo come:

$$\Psi(s) = 0 \quad (20)$$

Dove  $s$  è un vettore che contiene i valori che le variabili assumono in ogni contorno (interno ed esterno)  $\epsilon = 0, 1, \dots, n$  e i parametri incogniti:

$$s = (y_0, y_1, \dots, y_n, c) \quad (21)$$

Fatte queste premesse la ricerca della soluzione si riassume nel determinare i valori iniziali delle variabili attraverso un procedimento iterativo. I valori di alcune di queste variabili inizialmente sono incogniti, mentre alla fine della procedura devono assumere dei valori che soddisfino le equazioni delle condizioni al contorno (20). Si presuppone che all'inizio nessuno dei valori sia noto perciò per iniziare la procedura, alla prima iterazione è necessario scegliere i valori di tentativo  $p^1$ . In generale si ha che alla  $r$ -esima iterazione i valori  $p^r$  risultanti dall'iterazione precedente siano le condizioni iniziali così espresse:

$$z(0) = p^r \quad (22)$$

Sulla base di queste si prosegue integrando le equazioni (17) lungo l'intera traiettoria tenendo conto delle eventuali discontinuità ai contorni interni. Al termine dell'integrazione si determinano i valori finali delle variabili e si prosegue calcolando l'errore sulle condizioni al contorno  $\Psi^r$  alla  $r$ -esima iterazione.

Tenendo conto che una variazione pressochè infinitesima  $\Delta p$  genera la seguente variazione sulle condizioni al contorno:

$$\Delta \Psi = \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial p} \right] \Delta p \quad (23)$$

Si ha che, volendo annullare l'errore e imponendo per cui  $\Delta \Psi = -\Psi^r$ :

$$\Delta p = p^{r+1} - p^r = - \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial p} \right]^{-1} \Psi^r \quad (24)$$

Da cui si ricavano le condizioni iniziali  $p^{r+1}$  per l'iterazione successiva; il ciclo di iterazioni prosegue fin quando non si ottiene la precisione voluta sulle condizioni al contorno (20) rientrando nella tolleranza prefissata.

La matrice che compare nell'equazione (24) si può valutare anche numericamente. La  $i$ -esima riga viene ottenuta variando la  $i$ -esima componente del vettore  $p$  di una piccola quantità  $\Delta p$  ed in seguito integrando le equazioni (17). Di seguito si calcola la variazione delle condizioni al contorno  $\Delta \Psi(\Delta p)$  e, linearizzando, si ottiene la riga corrispondente a  $\Delta \Psi^T / \Delta p$ . L'adozione di questa procedura consente di risolvere in una maniera più rapida e semplice il problema differenziale ai limiti in alcuni casi, ma non sempre in grado di garantire la convergenza.

L'integrazione delle equazioni differenziali del sistema principale e di quello omogeneo avviene attraverso un metodo a passo e ordine variabile basato sulle formule di Adams. Quest'ultimo è un metodo lineare multi-step utilizzato per la soluzione numerica di sistemi di equazioni differenziali ordinarie.

Richiedendo una precisione pari a  $10^{-7}$ , viene dunque posto come requisito che l'errore massimo  $E_{max} = \max_i(\psi_i)$  sulle condizioni al contorno sia inferiore a tale tolleranza. Tuttavia la linearizzazione applicata per il calcolo della correzione  $\Delta p$  data dall'equazione (24) introduce errori che possono compromettere la convergenza facendo aumentare anziché diminuire l'errore sulle condizioni al contorno. Vengono quindi apportate delle modifiche per migliorare la procedura.

I valori iniziali vengono dapprima scalati con un coefficiente correttivo  $K_1$  compreso tra 0.1 e 1 a seconda che la soluzione di partenza sia lontana o vicina:

$$p^{r+1} = p^r + K_1 \Delta p \quad (25)$$

Alla fine di ogni iterazione, una volta che è stato definito il vettore di tentativo  $p^{r+1}$  con l'equazione precedente (25) e integrate le equazioni del moto, si confronta l'errore massimo sulle condizioni al contorno  $E_{max}^{r+1}$  con quello ottenuto al termine dell'iterazione precedente  $E_{max}^r$ . Se  $E_{max}^{r+1} < K_2 E_{max}^r$  si procede con una nuova iterazione. Il valore di  $K_2$  deve essere superiore all'unità, poiché nelle prime iterazioni per poter convergere alla soluzione, l'errore sulle condizioni al contorno può aumentare; un valore  $K_2 = 2 \div 3$  garantisce buoni risultati.

Se, al contrario, l'errore alla nuova iterazione risulta maggiore rispetto al precedente, si dimezza la correzione da apportare. I nuovi valori di tentativo saranno:

$$p^{r+1} = p^r + K_1 \Delta p / 2 \quad (26)$$

Si compara quindi, il nuovo errore massimo ottenuto con quello dell'iterazione precedente e, in caso sia necessario, si ripete nuovamente la bisezione. Viene impostato un numero massimo di 5 bisezioni, a seguito delle quali la procedura si interrompe; ciò significa che la soluzione di tentativo scelta non è in grado di portare alla convergenza per il caso preso in esame.

### 3.3 Definizione del problema

Per effettuare un'analisi preliminare delle traiettorie orbitali che sia significativa pur semplificando le equazioni che descrivono la fisica del problema si considerano i satelliti come masse puntiformi rotanti attorno ad un solo corpo celeste centrale di modo che si possa utilizzare il modello dei due corpi. Nel caso in esame per traiettorie Terra - Luna viene utilizzato un sistema di riferimento geocentrico mentre le equazioni differenziali che descrivono l'evoluzione del moto e della massa del satellite sono le seguenti:

$$\frac{dr}{dt} = V \quad (27)$$

$$\frac{dV}{dt} = g + \frac{T}{m} \quad (28)$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{T}{c} \quad (29)$$

Dove  $r$  è il vettore posizione,  $V$  il vettore velocità,  $g$  l'accelerazione gravitazionale terrestre,  $T$  il vettore spinta,  $m$  la massa del satellite e infine  $c$  la velocità di scarico del gas dagli ugelli.

L'Hamiltoniano invece assume la seguente formulazione:

$$H = \lambda_r^T v + \lambda_v^T \left( g + \frac{T}{m} \right) - \lambda_m \frac{T}{c} \quad (30)$$

Lo sviluppo delle equazioni di Eulero-Lagrange per le variabili aggiunte portano alle seguenti equazioni differenziali:

$$\left[ \frac{d\lambda_r}{dt} \right]^T = -\lambda_r^T \left[ \frac{\partial g}{\partial r} \right] \quad (31)$$

$$\left[ \frac{d\lambda_v}{dt} \right]^T = -\lambda_r^T \quad (32)$$

$$\frac{d\lambda_m}{dt} = \frac{\lambda_v T}{m^2} \quad (33)$$

Le equazioni dalla (27) alla (29) e dalla (31) alla (33) costituiscono il sistema di equazioni differenziali, che viene integrato numericamente. La direzione della spinta e il suo modulo sono tipicamente le variabili di controllo, le quali devono massimizzare  $H$  in accordo con il Principio di Massimo di Pontryagin. La direzione ottimale della spinta è ovviamente parallela al vettore aggiunto velocità  $\lambda_v$ .

Si introduce la *switching function*:

$$S_F = \frac{\lambda_V}{m} - \frac{\lambda_m}{c} \quad (34)$$

È possibile rielaborare dunque l'equazione (30):

$$H = \lambda_r^T v + \lambda_V^T g - TS_F \quad (35)$$

Nei casi di traiettorie a impulso specifico fisso il modulo della spinta assume il suo massimo quando la *switching function*  $S_F$  è positiva, altrimenti zero quando  $S_F$  è negativa. Quando invece  $S_F$  rimane uguale a zero durante un tempo finito si verificano archi singolari e l'equazione (35) non è sufficiente per decidere il modulo ottimale della spinta.

Per migliorare l'accuratezza del metodo numerico, la traiettoria viene suddivisa in archi in cui la spinta è massima e altri in cui la spinta è zero. Il numero e l'ordine degli archi vengono assegnati a priori mentre le lunghezze temporali dei singoli archi sono incognite. Le condizioni al contorno per la condizione di ottimo impongono che la '*switching function*'  $S_F$  sia uguale a zero nelle estremità di ogni arco di spinta. La procedura numerica fornisce la soluzione di ottimo che corrisponde alla struttura della traiettoria assegnata a priori.

La soluzione viene poi controllata in accordo con il Principio di Massimo di Pontryagin, se il PMP viene violato vengono rimossi o inseriti archi di spinta o archi con spinta zero, tenendo in conto sempre il comportamento di  $S_F$  per ottenere una soluzione migliore.

Nel caso in particolare si vogliono analizzare traiettorie con impulso specifico variabile e tenendo conto che la potenza viene assegnata a priori e assume un valore costante o tutt'al più è nulla ciò determina anche una variabilità nel modulo della spinta. Si ha infatti che:

$$P = \frac{Tc}{2} \quad (36)$$

Se  $S_F > 0$  allora  $P = P_{max}$  mentre se  $S_F < 0$  allora  $P = P_{min} = 0$ .

Inoltre il valore ottimale dell'impulso specifico è dato da:

$$c_{ott} = 2m \frac{\lambda_m}{\lambda_V} \quad (37)$$

Come detto precedentemente tale valore per poter essere valido deve rientrare in un dominio delimitato da un impulso specifico massimo ed uno minimo; in caso contrario come detto precedentemente si utilizzeranno i valori dati dagli estremi di tale dominio; in particolare quindi se  $c_{ott} > c_{max}$  allora  $c = c_{max}$  mentre se  $c_{ott} < c_{min}$  allora  $c = c_{min}$ . Volendo ragionare sulla spinta si avrà conseguentemente all'equazione (36) che nei due casi citati precedentemente (considerando il caso diverso da zero  $P = P_{max}$ ):

$$T_{max} = \frac{2P_{max}}{c_{min}} \quad (38)$$

$$T_{min} = \frac{2P_{max}}{c_{max}} \quad (39)$$

Nel caso invece in cui il valore dell'impulso specifico coincida con quello ottimo si ha che:

$$T = P \frac{\lambda_V}{m \lambda_m} \quad (40)$$

### 3.4 Equazioni di stato e variabili aggiunte

Riferendoci ad un sistema inerziale geocentrico in coordinate sferiche come quello mostrato in figura 3.1 la posizione di un satellite viene descritta dal raggio  $r$ , dalla longitudine  $\theta$  e dalla latitudine  $\phi$ :

$$\mathbf{r} = [r \ \theta \ \phi]^T \quad (41)$$

Diversamente invece la velocità viene descritta riferendosi ad un sistema di riferimento locale con la componente radiale  $u$  (diretta verso lo Zenit ossia lungo il versore  $\mathbf{j}$ ), la componente tangenziale  $v$  (diretta verso Est ossia lungo il versore  $\mathbf{i}$ ) e la componente  $w$  (diretto verso Nord ossia lungo il versore  $\mathbf{k}$ ):

$$\mathbf{V} = [u \ v \ w]^T \quad (42)$$

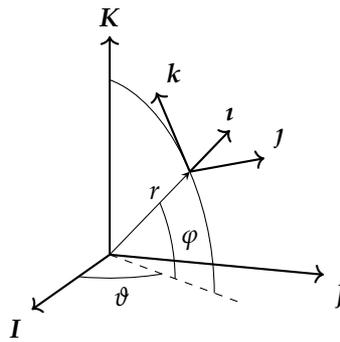


Figura 3.1

Le equazioni di stato per il sistema di riferimento considerato sono:

$$\frac{dr}{dt} = u \quad (43)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{r \cos\phi} \quad (44)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{w}{r} \quad (45)$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\mu}{r^2} + \frac{v^2}{r} + \frac{w^2}{r} + \frac{T}{m} \sin\gamma_T \quad (46)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{uv}{r} + \frac{vw}{r} \tan\phi + \frac{T}{m} \cos\gamma_T \cos\psi_T \quad (47)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{uv}{r} - \frac{vw}{r} \tan\phi + \frac{T}{m} \cos\gamma_T \sin\psi_T \quad (48)$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{T}{c} \quad (49)$$

Dove  $\gamma_T$  e  $\psi_T$  sono gli angoli di elevazione (flight path angle) e l'angolo di rotta (heading angle) del vettore spinta  $\mathbf{T}$  e ne determinano la direzione sul sistema di riferimento  $\hat{I}\hat{J}\hat{K}$ .

Considerando l'equazione (6) possiamo valutare l'Hamiltoniano  $H$ :

$$\begin{aligned}
H = & \lambda_r + \lambda_\theta \frac{v}{r \cos \phi} + \lambda_\phi \frac{w}{r} \\
& + \lambda_u \left( -\frac{\mu}{r^2} + \frac{v^2}{r} + \frac{w^2}{r} + \frac{T}{m} \sin \gamma_T \right) \\
& + \lambda_v \left( -\frac{uv}{r} + \frac{vw}{r} \tan \phi + \frac{T}{m} \cos \gamma_T \cos \psi_T \right) \\
& + \lambda_w \left( -\frac{uv}{r} - \frac{vw}{r} \tan \phi + \frac{T}{m} \cos \gamma_T \sin \psi_T \right) - \lambda_m \frac{T}{c}
\end{aligned} \tag{50}$$

Dalla teoria del controllo ottimale si possono ottenere le equazioni algebriche dei controlli:

$$\left( \frac{\partial H}{\partial u} \right)^T = 0 \tag{51}$$

Con questa ultima equazione è possibile determinare il valore ottimale del controllo  $\gamma_T$  e  $\psi_T$ , è sufficiente infatti derivare l'Hamiltoniano rispetto a  $\gamma_T$  e  $\psi_T$  e porli uguali a zero.

$$\frac{\partial H}{\partial \gamma_T} = 0 \tag{52}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \psi_T} = 0 \tag{53}$$

Da quest'ultime è possibile ottenere i valori ottimali per gli angoli di spinta:

$$\sin \gamma_T = \frac{\lambda_u}{\lambda_v} \tag{54}$$

$$\cos \gamma_T \cos \psi_T = \frac{\lambda_v}{\lambda_v} \tag{55}$$

$$\cos \gamma_T \sin \psi_T = \frac{\lambda_w}{\lambda_v} \tag{56}$$

dove  $\lambda_v = \sqrt{\lambda_u^2 + \lambda_v^2 + \lambda_w^2}$  è il modulo del vettore primario, parallelo alla direzione ottimale della spinta.

Ora, dalle equazioni di Eulero-Lagrange con la Teoria del Controllo Ottimale:

$$\frac{d\lambda}{dt} = - \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)^T \tag{57}$$

Lo sviluppo di quest'ultima per tutte le variabili porta alle seguenti equazioni differenziali:

$$\dot{\lambda}_r = \frac{1}{r^2} \left[ \lambda_\theta \frac{v}{\cos \phi} + \lambda_\phi w + \lambda_u \left( -\frac{2}{r} + v^2 + w^2 \right) + \lambda_v (-uv + vw \tan \phi) + \lambda_w (-uw - v^2 \tan \phi) \right] \tag{58}$$

$$\dot{\lambda}_\theta = 0 \tag{59}$$

$$\dot{\lambda}_\phi = \frac{1}{r \cos^2 \phi} (-\lambda_\theta v \sin \phi - \lambda_v v w + \lambda_w v^2) \quad (60)$$

$$\dot{\lambda}_u = \frac{1}{r} (-\lambda_r r + \lambda_v v + \lambda_w w) \quad (61)$$

$$\dot{\lambda}_v = \frac{1}{r} \left( -\lambda_\theta \frac{1}{\cos \phi} - 2\lambda_u v + \lambda_v (u - w \tan \phi) + 2\lambda_w v \tan \phi \right) \quad (62)$$

$$\dot{\lambda}_w = \frac{1}{r} \left( -\lambda_\phi - 2\lambda_u w - \lambda_v v \tan \phi + \lambda_w u \right) \quad (63)$$

$$\dot{\lambda}_m = \frac{T}{m^2} \lambda_v \quad (64)$$

Quest'ultime insieme alle equazioni di stato costituiscono il set di equazioni differenziali del sistema, ossia le equazioni scritte precedentemente in forma compatta (1) e (8).

### 3.5 Condizioni al contorno

Una volta ottenute le equazioni differenziali, è necessario imporre le condizioni al contorno. In questo lavoro sono state analizzate  $N$  traiettorie a partire da diverse tipologie di orbite terrestri al tempo  $t_0$ , ossia il tempo iniziale, con arrivo sulla Luna ai tempi  $t_{fN}$ , ossia i valori di tempo finale imposti per ciascuna traiettoria. Per ogni traiettoria tali condizioni al contorno sono state imposte innanzitutto al tempo  $t_0$ , in cui la posizione e la velocità del satellite deve essere corrispondente a quella imposta dalla fisica dell'orbita di partenza. Si suppone, per semplicità di calcolo, una massa iniziale alla partenza dall'orbita terrestre di 10000 kg e orbite circolari.

$$r_{S/C}(t_0) = r_{EO}(t_0) \quad (65)$$

$$V_{S/C}(t_0) = \sqrt{\frac{\mu_E}{r_{EO}(t_0)}} \quad (66)$$

$$m_0(t_0) = 10000 \text{ kg} \quad (67)$$

Alla fine della missione la velocità e la posizione del satellite saranno uguali a quelli del satellite di destinazione:

$$r_{S/C}(t_f) = r_{Moon}(t_f) \quad (68)$$

$$V_{S/C}(t_f) = V_{Moon}(t_f) = \sqrt{\frac{\mu_E}{r_{Moon}(t_f)}} \quad (69)$$

### 3.6 Condizioni iniziali

Una volta che si sono imposte le condizioni al contorno è possibile risolvere il sistema di equazioni differenziali. Per soddisfare le condizioni al contorno è necessario partire con le giuste condizioni iniziali,

contenute nel vettore  $y$ , le quali sono integrate dal sistema di equazioni differenziali. Tale vettore è esposto di seguito:

$$y = [t_0 \ t_f \ r_0 \ \theta_0 \ \phi_0 \ u_0 \ v_0 \ w_0 \ \lambda_{r_0} \ \lambda_{\theta_0} \ \lambda_{\phi_0} \ \lambda_{u_0} \ \lambda_{v_0} \ \lambda_{w_0}] \quad (70)$$

Come detto precedentemente  $r_0$ ,  $\theta_0$ , e  $\phi_0$  individuano la posizione iniziale e rappresentano rispettivamente il raggio, la longitudine e la latitudine in coordinate sferiche in un sistema di riferimento inerziale geocentrico. La velocità invece viene espressa da  $u_0$  (componente radiale verso lo Zenit),  $v_0$  (componente in direzione Est) e  $w_0$  (componente in direzione Nord) in un sistema di riferimento locale (centrato sullo spacecraft).

Le variabili aggiunte sono:  $\lambda_{r_0}$ ,  $\lambda_{\theta_0}$ ,  $\lambda_{\phi_0}$ ,  $\lambda_{u_0}$ ,  $\lambda_{v_0}$ ,  $\lambda_{w_0}$ . In particolare le variabili  $\lambda_{u_0}$ ,  $\lambda_{v_0}$ ,  $\lambda_{w_0}$ , come detto precedentemente, sono indispensabili per ottenere la direzione ottimale della la spinta; si possono infatti ottenere le seguenti relazioni esplicative:

$$T \sin \gamma_T = T \frac{\lambda_u}{\lambda_v} \quad (71)$$

$$T \cos \gamma_T \cos \phi_T = T \frac{\lambda_v}{\lambda_w} \quad (72)$$

$$T \cos \gamma_T \sin \phi_T = T \frac{\lambda_w}{\lambda_v} \quad (73)$$

La spinta ottenuta risulta così parallela al vettore primer  $\lambda_v$ .

Come anticipato in precedenza all'inizio qualcuno o nei casi peggiori tutti i valori del vettore sono sconosciuti, così il problema ai valori al contorno (Boundary Value Problem) diviene di fatto un problema ai valori iniziali (Initial Value Problem). Per risolvere tale problema viene adottata una soluzione di tentativo iniziale  $p_0$ . In questo caso assunto un valore per  $t_0$  è immediato avere i corrispondenti valori  $r_0$ ,  $\theta_0$ ,  $\phi_0$ ,  $u_0$ ,  $v_0$  e  $w_0$  relativi all'orbita terrestre di partenza mentre per le variabili aggiunte  $\lambda_{r_0}$ ,  $\lambda_{\theta_0}$ ,  $\lambda_{\phi_0}$ ,  $\lambda_{u_0}$ ,  $\lambda_{v_0}$ ,  $\lambda_{w_0}$  i valori iniziali sono incogniti.

Si possono a tal proposito utilizzare i valori di una soluzione precedente, ad esempio quella di un'altra traiettoria Terra - Luna con parametri simili a quella sottoposta ad analisi oppure, in assenza di una soluzione precedente, si sceglie il vettore primer  $\lambda_v = [\lambda_u \ \lambda_v \ \lambda_w]$  in modo che sia parallelo in direzione al vettore velocità  $V$  (con verso concorde o discorde). In questo modo si ha la *switching function*  $S_F > 0$ . Le restanti variabili aggiunte  $\lambda_{r_0}$ ,  $\lambda_{\theta_0}$  e  $\lambda_{\phi_0}$  invece vengono prese con valori vicini allo zero.

Definita la soluzione tentativo, la si integra all'interno del sistema di equazioni differenziali e si confronta la soluzione che ne viene fuori con le condizioni al contorno da soddisfare. Se l'errore che viene fuori dal confronto risulta minore della tolleranza imposta, si sono trovati i valori iniziali del problema, altrimenti sarà necessario modificare il vettore iniziale  $p_0$  e re-integrarlo fino a che l'errore sarà ridotto alla tolleranza richiesta.

Trovati i valori iniziali, si può ottenere la soluzione per la traiettoria ottimale da cui possono esserne fatte tutte le analisi necessarie. Conoscendo la massa iniziale e finale si può inoltre ottenere, tramite l'equazione di Tsiolkovsky, il  $\Delta V$ :

$$\Delta V = c \ln \frac{m_0}{m_f} \quad (74)$$

Per risolvere il problema ai valori iniziali è stato implementato un codice numerico il quale risolve il problema ai valori iniziali al contorno con un metodo indiretto che utilizza parametri adimensionali.



## CAPITOLO 4: RISULTATI

In questo capitolo verranno illustrati i risultati delle seguenti trasferte:

- Trasferte piane LEO - Luna (divisa in due sub-trasferte: LEO-GEO e GEO - Luna) con potenza del propulsore impostata a 10 MW;
- Trasferte piane GEO - Luna affrontando e comparando i casi di propulsori delle potenze di 1 MW e 2 MW;
- Trasferte con cambio di piano GEO - Luna con potenza del propulsore fissata a 1 MW e comparazione con le analoghe trasferte piane.

I risultati sono stati ottenuti attraverso un codice Fortran elaborato attraverso l'adattamento di altri codici numerici sviluppati in precedenza dal Politecnico di Torino. Si vuole far prestare attenzione al lettore sul fatto che tali risultati riguardanti le traiettorie sono il frutto di calcoli molto complicati dal punto di vista numerico per la forte non linearità del problema, in cui piccole variazioni nelle condizioni e nelle soluzioni di tentativo iniziali rischiano di creare notevoli variazioni nei risultati finali, i quali molte volte risultano incoerenti con quelli ottenuti precedentemente. Ne è un esempio il calcolo della traiettoria LEO-Luna in cui, come si vedrà meglio in seguito, il considerevole numero di giri causato dalla forza di attrazione gravitazionale terrestre nell'incremento dell'apogeo dell'orbita ha reso molto difficoltosa la prosecuzione nell'ottenimento dei dati rendendo necessaria la suddivisione della traiettoria in due sub-traiettorie.

Per la corretta lettura dei grafici è utile sottolineare che i valori di raggio e semiasse maggiore sono stati adimensionalizzati rispetto al raggio terrestre (6378 km) mentre la variabile "t" la quale indica la variabile tempo è stata per comodità adimensionalizzata (ai fini dell'implementazione del codice Fortran) con un coefficiente pari a circa  $k = 107$  soddisfacendo la seguente relazione:  $t = 107 = 1$  [giorno].

### 4.1 TRAIETTORIE PIANE LEO-LUNA

In questa sezione sono state analizzate trasferte piane verso la Luna (la cui orbita è stata approssimata come coplanare con l'equatore terrestre con il solo scopo di semplificare inizialmente il problema) impostando come orbita di partenza un'orbita LEO dell'altitudine di 640 km circa. In un primo momento si è cercato di impostare il codice in modo tale che potesse essere calcolata la soluzione ottimale come un singolo problema a due condizioni al contorno, costituite appunto dai valori di raggio e velocità nel punto iniziale, in orbita LEO, e nel punto finale, in orbita lunare. Tale metodo ha presentato innumerevoli problemi nell'ottenimento dei dati al crescere della durata di missione, i quali presentavano incongruenze con la logica del problema oltre i 3 giorni di missione. È stato ritenuto infatti che tale durata risultasse troppo breve per poter effettuare analisi e ragionamenti approfonditi e soprattutto consoni con la problematica della teoria dell'ottimo applicata al contesto della propulsione ionica, la quale esprime generalmente il suo massimo potenziale per durate di missione più lunghe.

È stato quindi deciso di suddividere il singolo problema in due sotto-problemi (ciascuno dei quali sempre sostenuto da due condizioni al contorno ossia raggio e velocità relativi alle orbite di partenza e arrivo) o volendo utilizzare un'altra terminologia, due sub-traiettorie:

- La prima sub-traiettoria dall'orbita LEO all'orbita Geostazionaria (GEO);
- La seconda sub-traiettoria dall'orbita GEO alla Luna.

Anche in questo caso sono ricomparsi i medesimi problemi descritti precedentemente ma solo nella prima traiettoria, ossia la LEO-GEO. Ciò ha fatto concludere che probabilmente il codice entrasse in difficoltà quando costretto a lavorare simulando quote molto basse all'allungare della missione, in cui la forza d'attrazione della Terra è molto elevata; ciò avrebbe costretto ad incrementare considerevolmente il numero di giri per l'innalzamento dell'orbita fino a valori talmente alti per cui lo stesso codice sarebbe andato in over-flow; di conseguenza tutti gli altri parametri di analisi hanno restituito valori non logici. Per tale motivo è stato inoltre impossibile scendere al di sotto dei 10 MW per l'impostazione della potenza del propulsore; tale scelta dunque non rispecchia una possibile situazione realistica poiché risulterebbe improponibile considerando la massa iniziale dello spacecraft in analisi di 10000 kg.

È utile anche aggiungere che in sessione di lavoro, in sporadici casi in cui invece il codice è riuscito a dare inizialmente risultati accettabili, a seguito dell'impostazione di una durata superiore (anche procedendo con step d'incremento piccoli e gradualmente) si ottenevano nuovi risultati il cui senso non era congruente con quello dei precedenti. Ad esempio la massa finale incrementava con la durata ma il numero di giri decresceva.

La seconda sub-traiettoria GEO-Luna non ha invece presentato problematiche e ciò è risultato determinante per poter continuare il lavoro analizzando tipi di missione verso la Luna che si basassero proprio su tale trasferta anche impostando potenze inferiori e dunque compatibili con le dimensioni e la massa dello spacecraft in analisi.

Effettuata questa premessa è doveroso concludere sostenendo che i risultati presentati qui di seguito non sono stati approfonditi proprio per le problematiche elencate precedentemente e per altre che verranno analizzate successivamente; tuttavia sono state evidenziate poche ma principali caratteristiche di base comuni a tutte le casistiche affrontate.

#### 4.1.1 TRASFERIMENTO LEO - GEO

Qui di seguito sono raffigurati gli andamenti della massa finale (in figura 4.1) e del numero di giri (in figura 4.2) in funzione della durata di missione per il trasferimento dello spacecraft da orbita LEO ad orbita GEO.

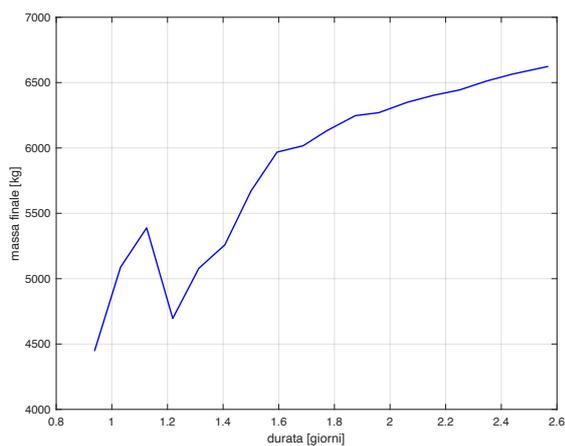


Figura 4.1

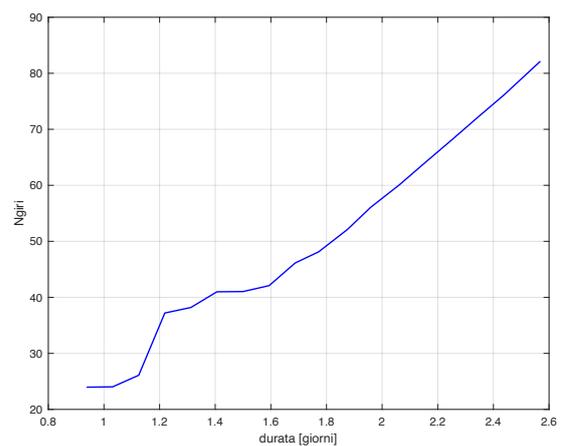


Figura 4.2

Si può notare come la massa finale così come il numero di giri cresca all'aumentare della durata del trasferimento tralasciando il primissimo intervallo di dati determinato dalle durate comprese tra 1 giorno e 1.2 giorni, in cui la massa finale decresce per un breve tratto. In tale breve intervallo si nota anche una crescita più ripida nel numero di giri. Proprio dal grafico del numero di giri si possono evidenziare gli elevati valori di tale variabile, conseguenza della forte attrazione gravitazionale terrestre ad altitudini molto basse che rendono abbastanza farraginoso la crescita della quota dello spacecraft come detto precedentemente; da qui ne consegue la forte limitazione nell'estendere la durata di tale trasferta oltre i 2 giorni e mezzo circa, al termine del quale si ottiene una massa di 6624 kg.

Si propone ora l'analisi di alcuni parametri della trasferta LEO-GEO fissando la durata di missione a circa 2.6 giorni, in corrispondenza della quale si ottiene la maggior massa finale possibile (da cui si ripartirà nella trasferta GEO-Luna).

In basso vengono proposti i grafici raffiguranti l'andamento del raggio (in figura 4.3) e dell'impulso specifico (o velocità di scarico dei gas in figura 4.4) in funzione del tempo.

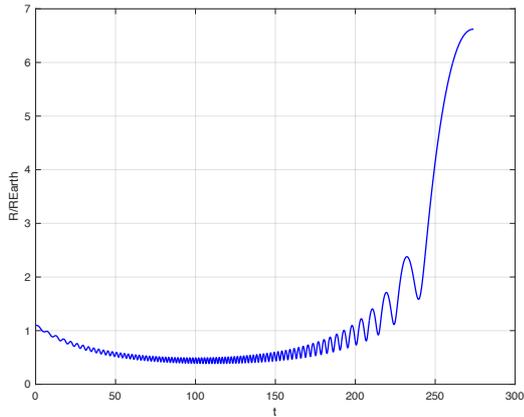


Figura 4.3

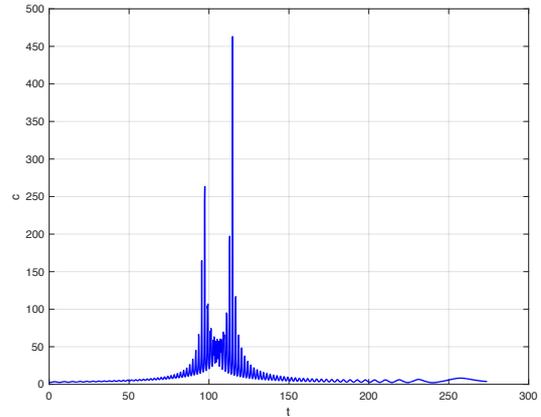


Figura 4.4

Come si può notare dai grafici sovrastanti un'ulteriore problematica relativa a tale tipo di trasferta emerge: lo spacecraft infatti parte dall'orbita LEO e tende ad abbassare la sua quota ulteriormente per aumentare l'eccentricità dell'orbita di partenza (che si ricorda essere circolare) ed aumentare la velocità sfruttando la conservazione del momento angolare. Tuttavia l'abbassamento di quota risulta eccessivo e dunque irrealistico dato che il raggio della traiettoria successivamente diventa abbondantemente minore del valore 1 (valore del raggio terrestre adimensionalizzato con se stesso). Ciò suggerisce che il codice necessiterebbe di un ulteriore vincolo rappresentante la presenza fisica della Terra, evitando così allo spacecraft di scendere oltre certe quote; tuttavia, ai fini del lavoro in questione, si è ritenuto che l'inserimento di tale vincolo fosse troppo complesso per problemi di ottimizzazione i quali presentano già intrinsecamente una difficoltà di implementazione notevole.

Ad ogni modo si è potuto in primis toccare con mano la complessità di tali problematiche e cercare una risoluzione per esse. In seconda battuta, guardando anche il grafico dell'impulso specifico si può notare come nell'intervallo di tempo  $80 < t < 130$  circa l'impulso specifico abbia dei valori in tale intervallo più alti rispetto ai precedenti, tralasciando alcuni di questi troppo elevati e dunque irrealistici. Nello stesso intervallo il raggio invece si mantiene pressochè costante, segno del fatto che lo spacecraft stia spingendo meno per mantenere tali quote in questo frangente della missione. Al contrario da  $t = 130$  l'impulso specifico si abbassa nuovamente, dunque i valori della spinta tornano più alti e di fatti il raggio aumenta fino ad arrivare alla quota desiderata, ossia in orbita geostazionaria.

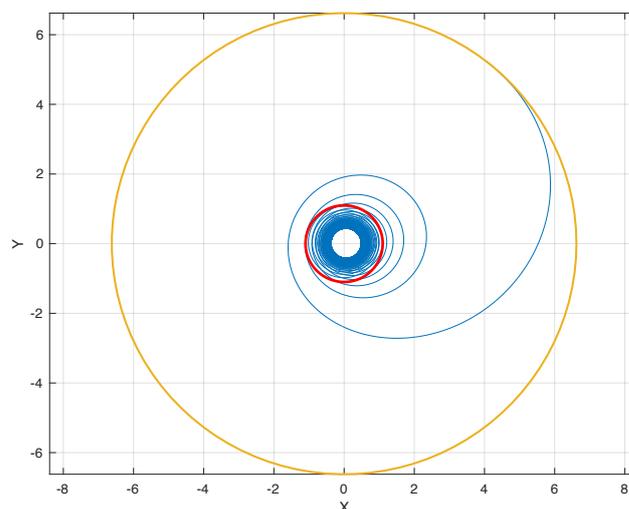


Figura 4.5

In figura 4.5 viene illustrata la traiettoria graficata in un piano cartesiano (in figura 4.5) in cui vi è indicata in rosso l'orbita LEO di partenza, in giallo l'orbita di arrivo GEO e in blu la traiettoria dello spacecraft.

#### 4.1.2 TRASFERIMENTO GEO - LUNA

Avendo quindi ottenuto al termine del trasferimento in orbita GEO una massa finale di 6624 kg si procede ora nel considerare traiettorie dall'orbita GEO alla Luna al variare della durata della missione, come mostrato nei grafici seguenti.

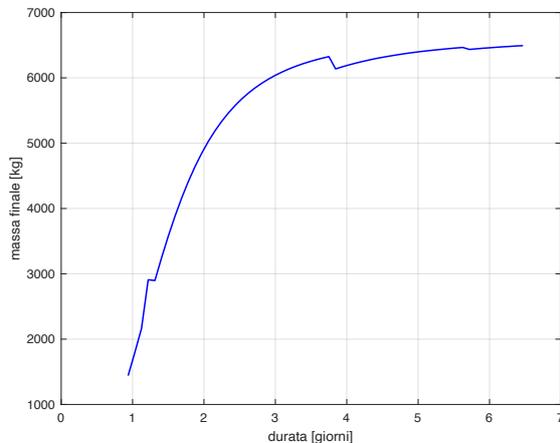


Figura 4.6

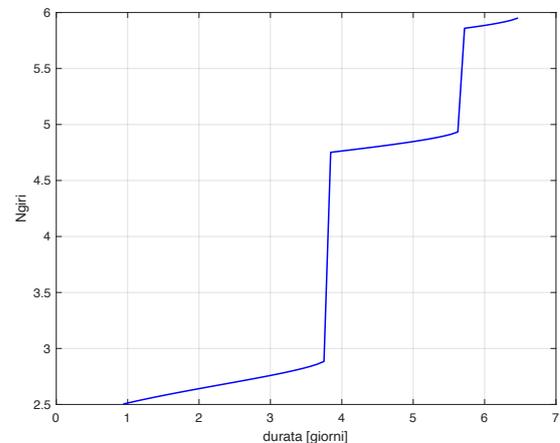


Figura 4.7

Nella figura 4.6 riportato il grafico raffigurante l'andamento della massa finale in funzione della durata di missione della seconda sub-traiettoria la quale è stata protratta da 1 fino a poco più di 6 giorni circa (per un totale dunque di poco più di 9 giorni di missione). Si può notare come previsto un andamento globalmente asintotico della massa finale verso il valore iniziale (6624 kg) con l'aumento della durata di missione, con una crescita quindi più rapida in corrispondenza di durate che vanno fino ai 3 giorni a cui segue un appiattimento verso l'asintoto per durate superiori.

L'andamento non risulta perfettamente regolare poichè come si può vedere nel grafico in figura 4.7, raffigurante il numero di giri in funzione sempre della durata, in corrispondenza di alcune durate (al termine dei 3 e 5 giorni) vi sono degli incrementi a gradino (detti comunemente anche "step") crescenti nel numero di giri che fanno sì che vi sia un lieve abbassamento nel trend della massa finale. A primo impatto ciò potrebbe sembrare illogico dato che avendo a disposizione un numero di giri ed un tempo maggiore per percorrere la trasferta si potrebbe pensare ad un risparmio di propellente e non al contrario ad un consumo maggiore. Come invece si potrà notare nei paragrafi successivi, osservando le traiettorie e i diversi grafici si può dedurre che ciò potrebbe essere dovuto al fatto che lo spacecraft tende a spingere maggiormente in corrispondenza del perigeo dell'orbita di percorrenza (per sfruttare correttamente l'aumento della velocità indotto dalla conservazione del momento angolare); se quindi lo spacecraft percorre un giro in più vuol dire anche che vi è un passaggio dal perigeo in più e quindi un'ulteriore spinta.

È vero inoltre che l'andamento nel numero di giri non risulta a sua volta regolare, dato che ci si aspetterebbe un incremento continuo del numero di giri al crescere della durata di missione. In precedenza si è ritenuto che ciò potesse essere dovuto ad un funzionamento non propriamente corretto del codice, con dati che venivano ottenuti per durate crescenti, partendo dalla durata minima di un giorno ed incrementando gradualmente i tempi fino alla massima durata desiderata. Andamenti più regolari, senza quindi dei salti, venivano invece ottenuti procedendo in questo senso a ritroso, partendo dalla durata massima e scendendo fino alla minima. In seguito tuttavia, confrontando questi due metodi, ci si è accorti che se pur grazie alla seconda tipologia di analisi si ottenevano grafici nel numero di giri più regolari di contro si raggiungevano masse inferiori a quelle ottenute invece con la prima tipologia. Ciò può essere intuitivamente notato prendendo in considerazione il tratto della curva compreso tra durate di missione comprese all'incirca tra i 4 e i 6 giorni di missione, corrispondenti ad un numero di giri compreso tra 3.5 e 4: se infatti si proiettasse tale tratto della curva della massa finale per durate inferiori si vedrebbe facilmente che essa si troverebbe al di sotto della curva ottenuta invece con il numero di giri previsto, ossia con valori da 1.5 a circa 2.

Si potrebbe dedurre quindi che andamenti di tali grafici non propriamente regolari fanno sì che il problema di ottimo, che in questo caso consiste nel massimizzare per quanto possibile la massa finale, sia correttamente risolto.

### DURATA DELLA TRASFERTA GEO-LUNA: 4 GIORNI

Nel seguente caso si vogliono esaminare alcuni aspetti di una trasferta della durata di 4 giorni analizzando l'evoluzione della traiettoria che trasferisce lo spacecraft dall'orbita geostazionaria alla Luna, in particolare gli andamenti del raggio e dell'impulso specifico in funzione del tempo.

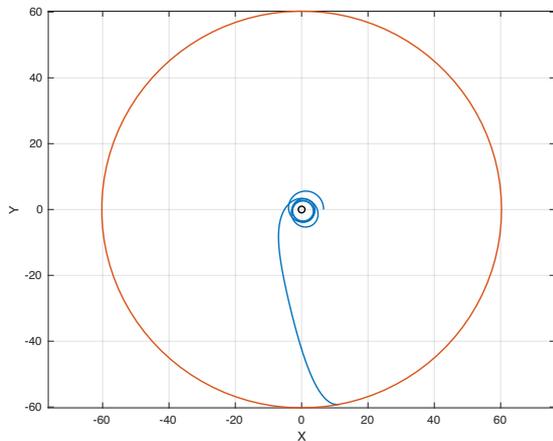


Figura 4.8

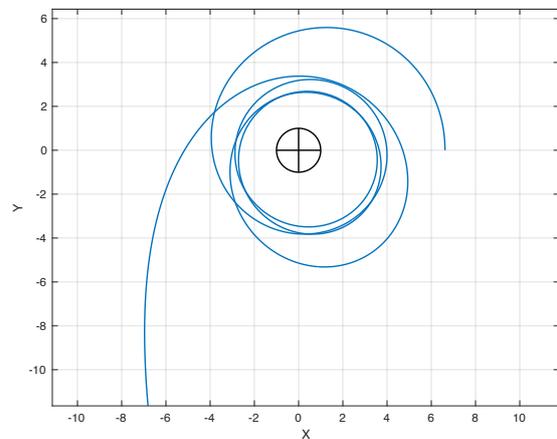


Figura 4.9

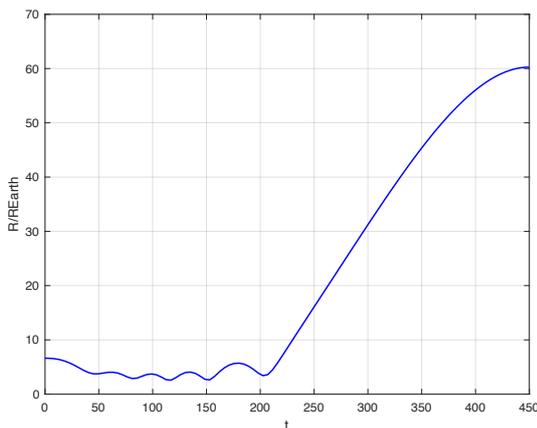


Figura 4.10

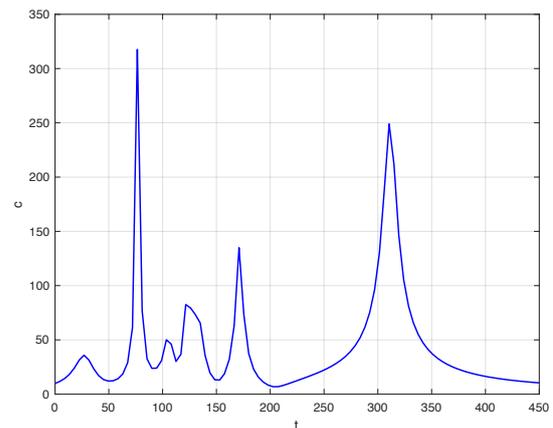


Figura 4.11

Nel grafico tempo - impulso specifico (in figura 4.11) si può notare come vi siano sostanzialmente due macro-picchi in corrispondenza grossomodo di  $t = 70, 310$  e quattro massimi relativi decisamente più modesti in corrispondenza di  $t = 25, 110, 125, 170$ . Spostandosi nel grafico a destra (durata - raggio della traiettoria normalizzato) si nota come i due macro-picchi vengano raggiunti in corrispondenza dei raggi  $r = 5, 30$  circa mentre per i 4 restanti massimi in corrispondenza di  $r = 6, 4, 4, 6$  circa.

Guardando poi i grafici nelle figure 4.8 e 4.9 raffiguranti la traiettoria, in particolare il grafico sulla sinistra raffigurante un ingrandimento intorno al centro del sistema di riferimento si nota come lo spacecraft scenda inizialmente di raggio per sfruttare il guadagno di velocità conseguente alla conservazione del momento angolare (considerando una traiettoria priva di disturbi esterni) raggiungendo il perigeo di questo primo tratto della traiettoria, e successivamente compia una serie di passaggi intorno alla Terra per poi allontanarsi definitivamente e raggiungere l'orbita lunare, come visibile nel grafico della traiettoria completa sulla destra.

La logica che dovrebbe seguire in questo caso anche la teoria dell'ottimizzazione direbbe che lo spacecraft dovrebbe spingere con valori maggiori e quindi con impulsi specifici bassi in corrispondenza dei relativi perigei delle varie orbite, quindi in corrispondenza dei raggi minimi. Conviene dunque focalizzarsi nel grafico dell'impulso specifico non sui massimi bensì sui minimi: tralasciando i punti estremi del grafico, si possono notare 5 impulsi specifici minimi esattamente quanti sono i raggi minimi ed esattamente in corrispondenza degli stessi istanti temporali.

### DURATA DELLA TRASFERTA GEO-LUNA: 6 GIORNI

Per trovare analogie o possibili differenze rispetto a quanto affermato nel paragrafo precedente viene qui analizzato un ulteriore caso, questa volta prendendo in considerazione una durata massima di missione di 6 giorni. Viene analizzata anche qui l'evoluzione della traiettoria con le variabili che la caratterizzano maggiormente.

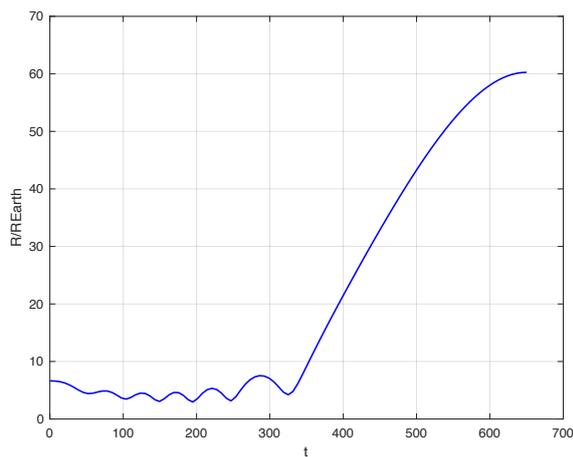


Figura 4.12

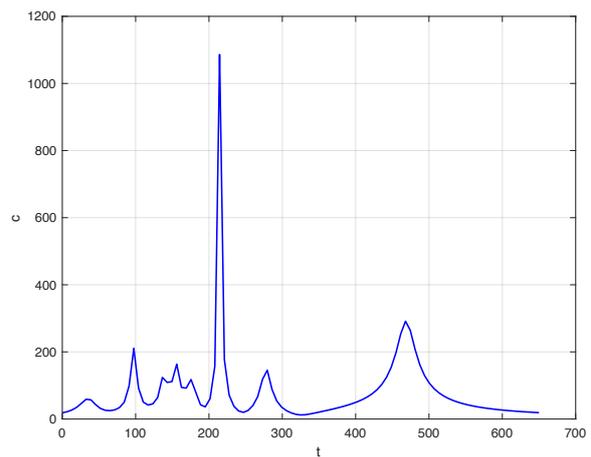


Figura 4.13

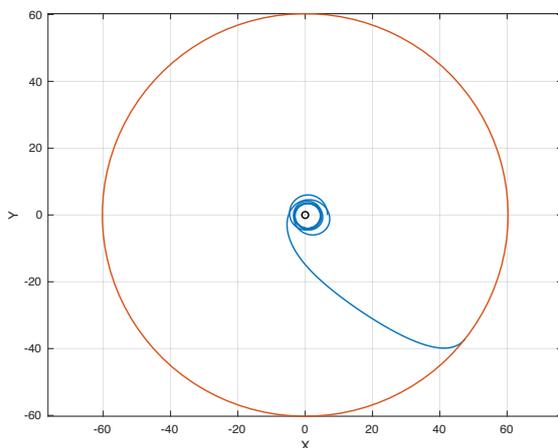


Figura 4.14

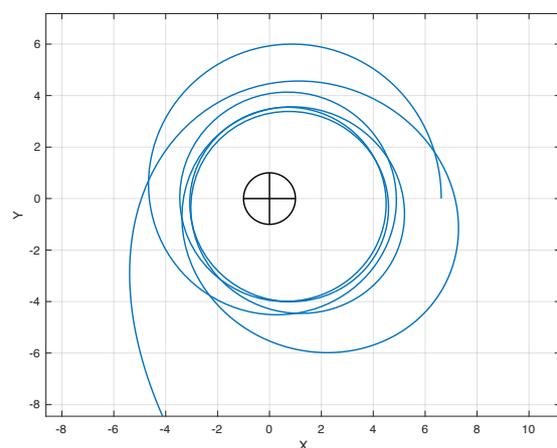


Figura 4.15

Nel caso di durata della trasferta di 6 giorni il numero di giri passa è di circa 5.8, a differenza del precedente caso in cui erano 4.5, di conseguenza il numero di passaggi ravvicinati intorno alla terra aumenta. Tale fenomeno è visibile nell'aumento dei raggi minimi (in figura 4.12) che in questo caso sono 6. Per verificare una possibile analogia con quanto detto nel paragrafo precedente si dovrebbe trovare lo stesso numero di impulsi specifici minimi che risultano invece 7, come possibile notare in figura 4.13. Si verificano le stesse corrispondenze temporali per tutti i minimi eccetto che per il raggio minimo in  $t = 150$  a cui corrisponderebbero due minimi nello stesso intorno dell'impulso specifico; si può notare come tuttavia il

primo dei due minimi si trovi effettivamente in  $t = 150$  mentre il secondo poco più in là, in  $t = 170$  circa. Quest'ultimo minimo nell'impulso specifico è contenuto tra due picchi molto vicini tra di loro i quali si potrebbero considerare come un unico massimo relativo e declinare tale anomalia come una leggera alterazione numerica dovuta al codice più che ad una variazione fenomenologica di fondo.

La traiettoria (nelle figure 4.14 e 4.15) di fatto risulta analoga a quella analizzata nel caso precedente ma con un giro in più e con il punto d'arrivo dello spacecraft più a destra, in accordo con il moto progrado della Luna.

## 4.2 TRAIETTORIE PIANE GEO-LUNA

In questa sezione vengono mostrati i risultati di traiettorie piane con partenza dall'orbita geostazionaria all'orbita Lunare supponendo che anche quest'ultima si trovi ad un'inclinazione relativa rispetto alla Terra di  $0^\circ$ , quindi che sia coplanare all'equatore. Ciò non è possibile nella realtà, dato che per la sua inclinazione rispetto all'eclittica di  $5^\circ$ , la Luna in realtà ha un'inclinazione rispetto all'equatore che varia nell'arco di 18 anni da  $18^\circ$  a  $28^\circ$  gradi circa. Tuttavia i risultati sono stati ottenuti impostando delle potenze massime di 1 MW e 2 MW, dunque l'obiettivo primario era semplificare per quanto possibile la traiettoria (dato che l'abbassamento della potenza del propulsore è stato notevole) per cercare di ottenere risultati utili alla causa e poter effettuare un confronto sia tra le potenze 1 MW e 2 MW, sia con i risultati ottenuti precedentemente con una potenza di 10 MW.

La massa iniziale in questo caso è di 10000 kg, supponendo quindi di far partire lo spacecraft direttamente dall'orbita GEO, ipotizzando quindi che fino a tale quota sia stato trasportato dal lanciatore (analogamente a quanto avvenuto ad esempio nella missione SMART-1 dell'ESA descritta nel capitolo 1).

### ANALISI DI MASSA FINALE E NUMERO DI GIRI: POTENZA 1 MW

Vengono qui di seguito mostrati i risultati in termini di massa finale e numero di giri in funzione della durata ottenuti impostando la potenza del motore ad 1 MW.

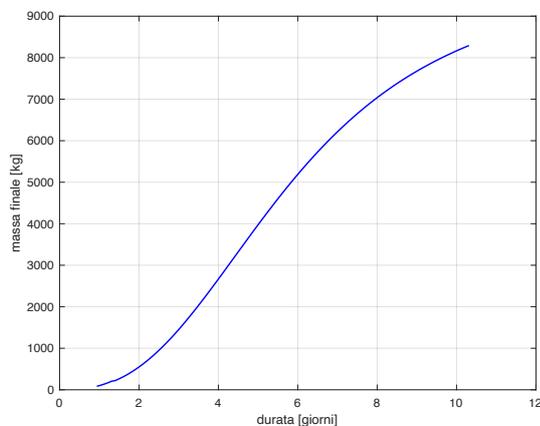


Figura 4.16

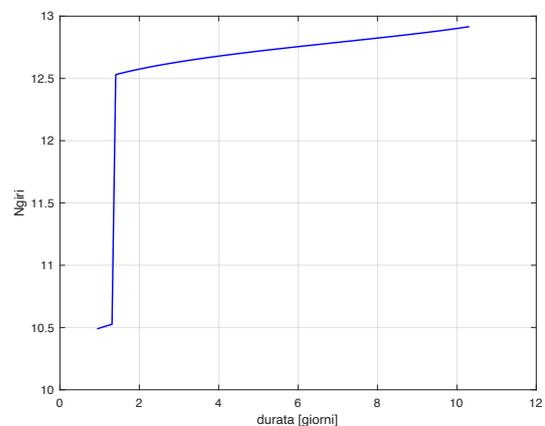


Figura 4.17

Nei seguenti grafici viene rappresentato in figura 4.16 l'andamento della massa finale in funzione della durata di missione mentre in figura 4.17 l'andamento del numero di giri eseguiti dallo spacecraft intorno alla Terra anche qui in funzione della durata di missione.

Analizzando il grafico durata-massa finale e confrontandolo con l'analogo del caso di motore da 10 MW si può da subito notare un andamento più regolare ove sembra mancare però la tipica tendenza asintotica al valore della massa iniziale. Questo accade fondamentalmente per due motivi connessi tra di loro: in primis la potenza notevolmente ridotta in questo specifico caso (il quale essere un decimo rispetto alla precedente) porta inevitabilmente ad ottenere una massa finale in percentuale inferiore a parità di durata di missione; nel caso con motore a 10 MW la tendenza all'asintoto era già evidente per durate intorno ai 4 giorni, con un notevole appiattimento della curva (non dimenticando poi il fatto che in questo caso il motore da 1 MW propelle uno spacecraft di 10000 kg mentre nel caso di motore di 10 MW si aveva uno spacecraft di circa 7000 kg, quindi al netto si ha un motore meno potente che deve spingere un carico anche più pesante). Il secondo motivo è da ricercare nel fatto che sono state volutamente analizzate durate massime di circa 10 giorni in corrispondenza del quale in questo caso sono state raggiunte masse finali intorno agli 8000 kg, quindi intorno al 80% della massa iniziale; nel caso con motore da 10 MW in corrispondenza di durate di missione di 8 giorni si raggiungeva circa il 98% della massa iniziale, dunque l'appiattimento all'asintoto risultava più evidente.

La maggiore regolarità nell'incremento della massa finale all'aumentare della durata di missione è dovuta

alla maggiore stabilità nell'andamento del numero di giri, nel quale si verifica un unico incremento a gradino praticamente per durate comprese tra 1 giorno (in corrispondenza del quale lo spacecraft deve compiere 10.5 giri circa) e 1.5 giorni circa (a cui corrispondono 12.5 giri circa); per le restanti durate massime di missione il valore rimane sempre nell'ordine dei 12 giri, valore più elevato rispetto al massimo numero di giri rilevato nel caso di motore da 10 MW date la minori prestazioni che inducono lo spacecraft ad effettuare più rivoluzioni intorno alla Terra.

### ANALISI DI MASSA FINALE E NUMERO DI GIRI: POTENZA 2 MW

Vengono qui di seguito mostrati grafici analoghi questa volta impostando un motore da 2 MW e successivamente viene fatto un confronto con i risultati ottenuti con il motore da 1 MW.

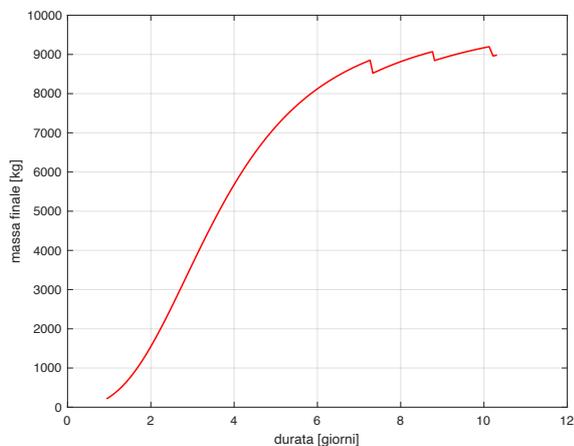


Figura 4.18

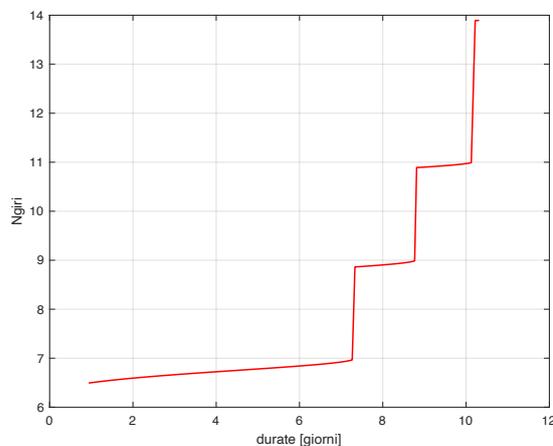


Figura 4.19

Nel caso di motore da 2 MW, quindi con una potenza doppia, gli andamenti di massa finale (in figura 4.18) e del numero di giri (in figura 4.19) risultano più irregolari, seppur risultino ad ogni modo entrambi crescenti all'aumentare della durata di missione. Si può notare come il numero di giri risulti inizialmente minore rispetto al caso di motore da 1 MW e questo rispecchia quanto previsto, data la maggior capacità di spinta del propulsore che esonera lo spacecraft dall'acquistare velocità scendendo a raggi molto bassi. Il numero di giri invece cresce quando le durate di missione si fanno più elevate, con diversi incrementi a gradino. Questi sono presenti in particolare per durate di missione che superano i 7 giorni e causano in corrispondenza di questi, come nel caso di motore da 10 MW, dei continui cali nella massa finale (anche questi a gradino) che si aggira sempre sul valore di 9000 kg. Si può dunque dire dall'analisi di tali grafici che non si trarrebbe alcun beneficio in termini di ottimizzazione del propellente nell'allungare la missione oltre i 7 giorni utilizzando questo tipo di propulsore. Per un'analisi più esaustiva può essere fatto un confronto con gli analoghi grafici ottenuti con potenza di 1 MW.

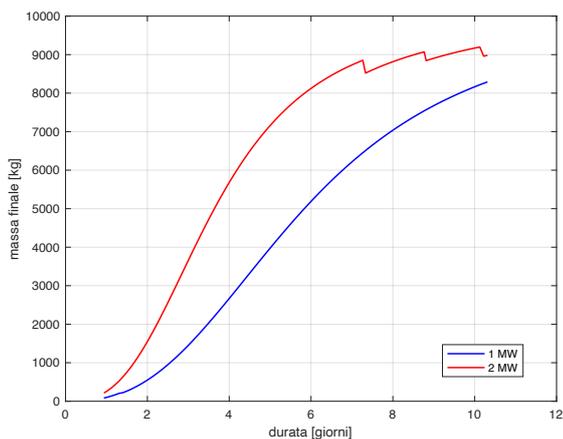


Figura 4.20

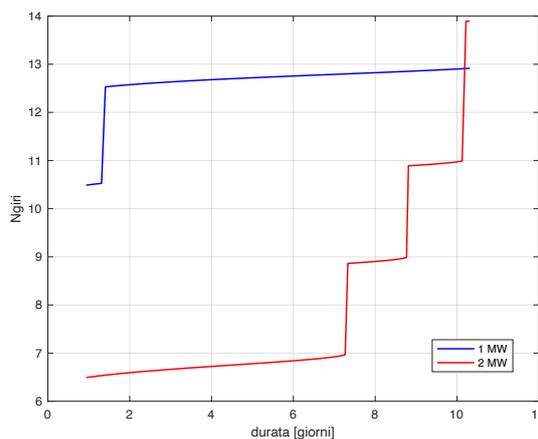


Figura 4.21

Dai grafici nelle figure 4.20 e 4.21, qualora l'obiettivo sia quello di massimizzare la massa finale, è possibile notare come sia teoricamente più conveniente avere un motore da 2 MW per durate inferiori ai 5-6 giorni mentre per durate superiori si potrebbe optare anche per un motore da 1 MW. In corrispondenza di 5 giorni circa infatti si avrebbe nel caso di motore da 1 MW una massa finale di circa 4000 kg, mentre con un motore potente il doppio si otterrebbe una massa di circa 7000 kg (il 70% di quella iniziale) con un aumento dunque del 75% circa. Per una durata di 6 giorni l'aumento della massa sarebbe del 60% circa, mentre per durate che vanno dai 7 giorni ai 10 giorni l'aumento calerebbe dal 40% al 12% circa.

Dotando dunque lo spacecraft di un motore più potente per certi scenari si avrà sicuramente il vantaggio di risparmiare propellente e di poter aumentare di conseguenza il carico utile ma anche lo svantaggio di dover allo stesso tempo riservare una quota parte della massa totale dello spacecraft proprio allo stesso motore che inevitabilmente avrà un peso maggiore. Bisognerà dunque trovare un compromesso, a seconda delle esigenze, per evitare che il peso guadagnato apparentemente in un primo momento venga annullato se non addirittura superato dal peso aggiuntivo di un motore con efficacia propulsiva maggiore (ipotizzando che il rendimento del motore rimanga grossomodo il medesimo sia per 1 MW e sia per 2 MW). Come evidenziato prima inoltre, in questo specifico caso, l'incremento nel numero di giri fa rimanere praticamente quasi invariata la massa finale intorno al valore di 9000 kg per durate che vanno dagli 8 ai 10 giorni. Ciò dimostrerebbe che se da un lato la teoria suggerisce che con un motore più potente si avrebbe a parità di spinta una portata di carburante necessaria inferiore e quindi un risparmio nel propellente stesso, la pratica applicata ad un problema di ottimo afferma che ciò non risulta comunque sempre vero.

Qui di seguito vengono riportate analisi più approfondite prendendo in esame delle singole durate di missione che sono risultate significative, in particolare non sono state considerate durate troppo brevi per via della loro infattibilità in situazioni reali le quali sono servite però come strumento di partenza per la raccolta di dati per durate superiori. Sono state perciò esaminate missioni con durate di 4, 7 e 10 giorni, le cui traiettorie per ciascuna di esse sono state costruite impostando potenze del propulsore di 1 MW e 2 MW.

## 4.2.1 DURATA DELLA TRASFERTA GEO - LUNA: 4 GIORNI

### CASO CON POTENZA 1 MW

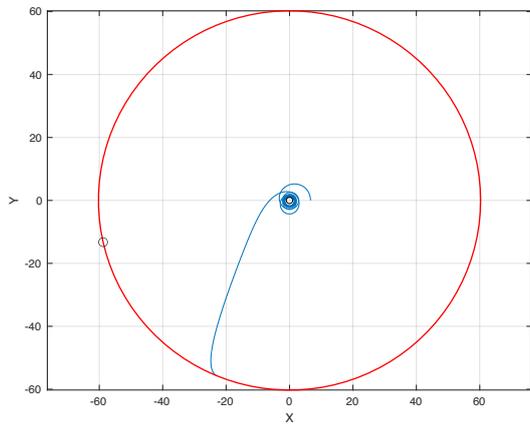


Figura 4.22

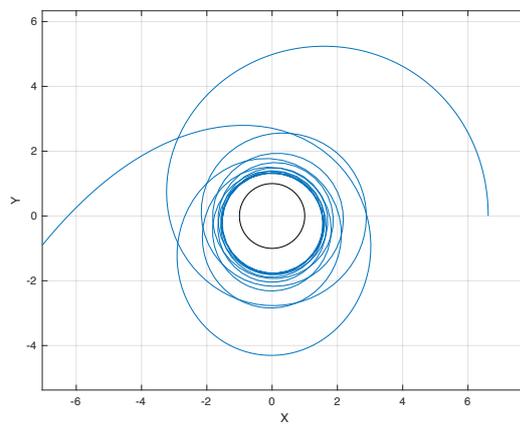


Figura 4.23

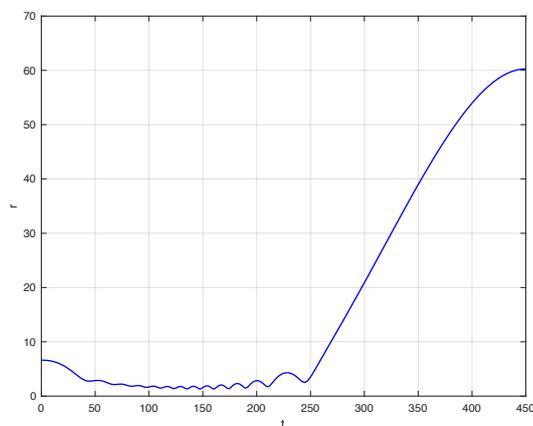


Figura 4.24

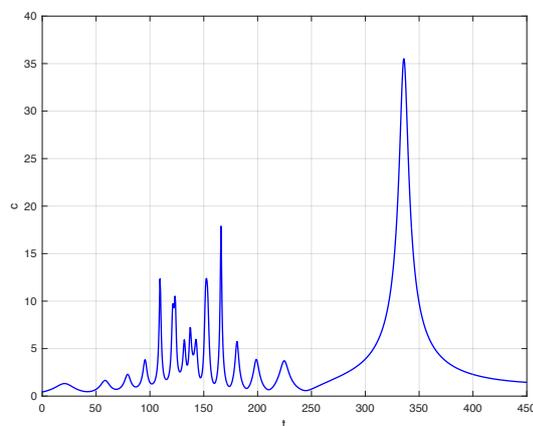


Figura 4.25

Nel grafico raffigurante l'andamento del raggio della traiettoria (in figura 4.24) è possibile notare la presenza di diversi minimi nell'intervallo di tempo  $0 < t < 250$ , segno del fatto (come è evidente dal grafico della traiettoria in figura 4.23) che lo spacecraft effettuò dei passaggi ravvicinati alla Terra per poter sfruttare al massimo il normale incremento della velocità dovuto alla conservazione del momento angolare. Come mostrato nel caso di missione analoga ma con motore da 10 MW, spingendo infatti in prossimità di tali punti (che si potrebbe dire costituiscono dei sorta di perigei dell'orbita, nonostante questa sia in continuo mutamento) lo spacecraft acquista ulteriore velocità necessaria ad allontanarsi definitivamente dalla Terra da  $t > 250$  circa (2.3 giorni circa di missione). Come si può notare in figura 4.26, dove sono stati graficati entrambi gli andamenti di impulso specifico (in viola) e raggio adimensionalizzato maggiorato di un coefficiente 10 (in verde), non vi è una coincidenza esatta tra i minimi nel raggio e nell'impulso specifico ma una lieve sfasatura che si manifesta tra il quarto raggio minimo e il settimo, precisamente nell'intervallo  $80 < t < 150$ .

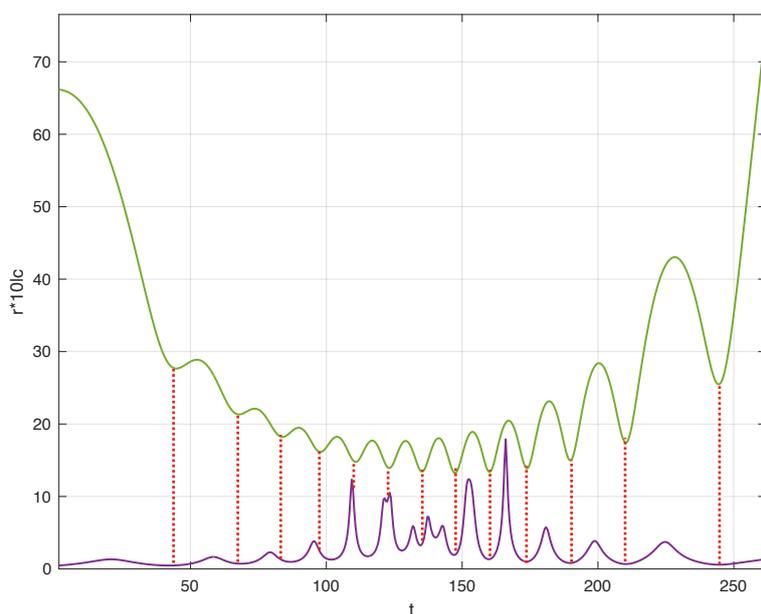


Figura 4.26

In tale intervallo temporale si può però notare come le quattro oscillazioni nell'andamento del raggio abbiano ampiezze del tutto simili, segno del fatto che lo spacecraft stia mantenendo in questo frangente della missione la quota senza variarla. Si deduce come tali orbite possano essere definite come delle rivoluzioni di "attesa" intorno alla Terra, in cui lo spacecraft in un certo senso prende tempo per allungare la missione rimanendo ad altitudini che consentano in qualsiasi istante di avere la velocità necessaria ad immettersi in una traiettoria TLI (Trans Lunar Injection); lo spacecraft dunque spinge (anche con entità molto più modeste) in corrispondenza di punti che siano diversi dai raggi minimi per mantenere l'orbita. Come prova di ciò è facile vedere come per  $t > 150$  in cui la coincidenza tra raggi e impulsi specifici minimi ritorna, le orbite abbiano via via quote maggiori fino a  $t = 250$  in cui vi è l'accelerazione definitiva per l'immissione nella traiettoria di trasferimento lunare. Il fenomeno può essere visto anche guardando il grafico in figura 4.27 raffigurante l'andamento del semiasse maggiore della traiettoria per  $0 < t < 250$ .

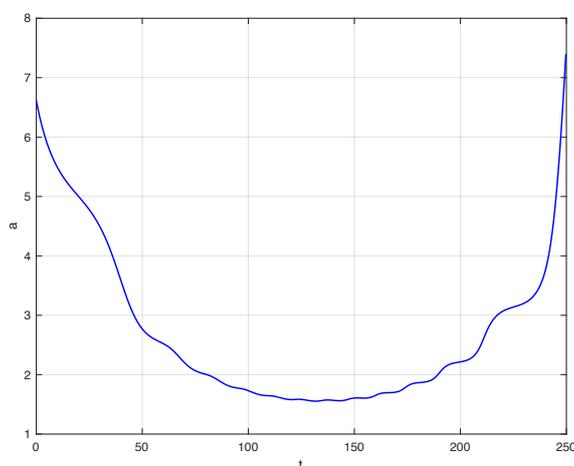


Figura 4.27

Il semiasse scende inizialmente per  $0 < t < 100$ , rimane quasi costante nelle orbite di attesa intorno alla Terra per  $100 < t < 150$  e cresce nuovamente per  $t > 150$ . È utile ricordare che i passaggi intorno alla Terra oltre che dare un contributo in termini di velocità necessaria ad allontanarsi dalla Terra stessa permettono di

allungare la missione fino alla durata desiderata attuando contemporaneamente il giusto fasamento che consentirà allo spacecraft di poter eseguire il rendez-vous con la Luna all'arrivo.

Tornando poi al grafico dell'impulso specifico si può osservare il massimo impulso specifico intorno a  $t = 330$ , ossia in corrispondenza di  $r = 40$  circa ( $2/3$  circa della distanza tra Terra e Luna) a cui segue un repentino calo, segno del fatto che lo spacecraft da questo punto in poi ha effettuato una frenata preventiva in vista dell'arrivo sulla Luna.

In figura 4.28, dove si raffigura l'andamento dell'eccentricità della traiettoria in funzione del tempo è possibile ottenere informazioni sull'evoluzione della forma della traiettoria lungo l'intera trasferta. A questo viene affiancato anche il grafico dell'andamento del semiasse maggiore, questa volta lungo l'intero tragitto, per completezza.

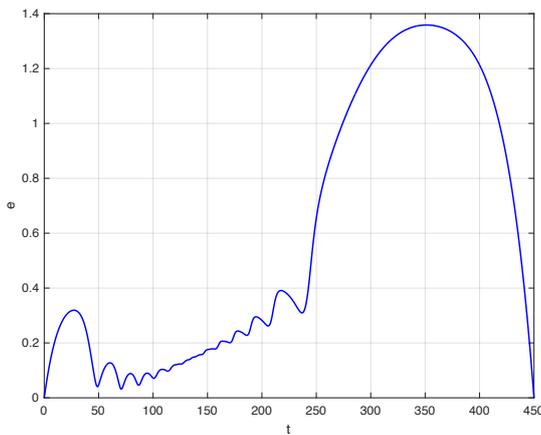


Figura 4.28

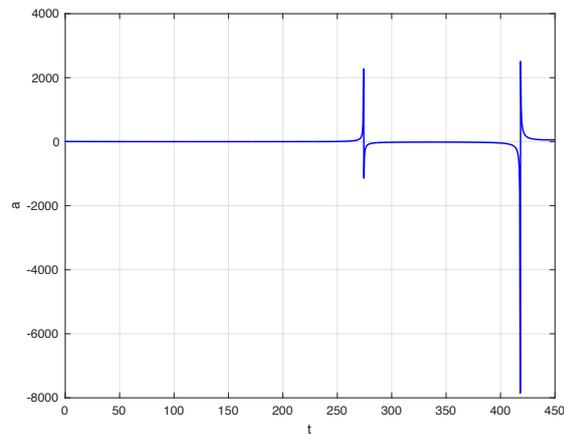


Figura 4.29

È utile ricordare a tal proposito che:

- Se  $e = 0$  allora la traiettoria è circolare ( $a > 0$ , anche se per una traiettoria circolare non ha senso definire un semiasse maggiore);
- se  $e < 1$  allora  $a > 0$  e la traiettoria è ellittica;
- se  $e = 1$  allora  $a \rightarrow +\infty$  e la traiettoria è parabolica;
- per  $e > 1$  allora  $a < 0$  e la traiettoria è invece iperbolica.

Precisato ciò risulta più semplice interpretare i grafici sovrastanti: per  $0 < t < 250$  lo spacecraft abbassa inizialmente l'orbita, compie le rivoluzioni di fasamento intorno alla Terra e innalza nuovamente l'energia per iniziare l'allontanamento definitivo; la traiettoria risulta in questo caso ellittica come già osservato precedentemente. Per  $250 < t < 350$ , in cui lo spacecraft si immette nell'orbita di trasferimento lunare (una TLI del modo Direct Transfer) la traiettoria passa da ellittica a iperbolica, con la tipica discontinuità presente in  $t = 270$  circa in cui dal passaggio da  $e < 1$  a  $e > 1$  l'eccentricità assume valore unitario, facendo tendere il semiasse maggiore ad un valore infinito e la traiettoria ad una forma parabolica. La traiettoria diventa iperbolica, con il semiasse maggiore che assume valori negativi; tale tipo di traiettoria è altamente energetica, permettendo allo spacecraft di raggiungere una velocità molto elevata. L'eccentricità raggiunge il massimo assoluto per  $t = 350$  circa, stesso istante temporale in cui in precedenza si era osservato anche il massimo assoluto nell'impulso specifico. Infine per  $350 < t < 450$  l'eccentricità cala nuovamente fino al valore nullo e la traiettoria diviene dapprima ellittica, passando nuovamente per la discontinuità in  $e = 1$  indotta dalla forma parabolica e successivamente circolare; ciò testimonia ancora una volta la decelerazione dello spacecraft per poter effettuare il rendez-vous con la Luna e la circolarizzazione sull'orbita lunare. Per facilitare la visualizzazione delle singole fasi descritte vengono proposti qui di seguito grafici rappresentanti l'andamento del semiasse in cui sono stati esclusi i punti di discontinuità causati dalle traiettorie istantaneamente paraboliche (nelle figure 4.30, 4.31 e 4.32).

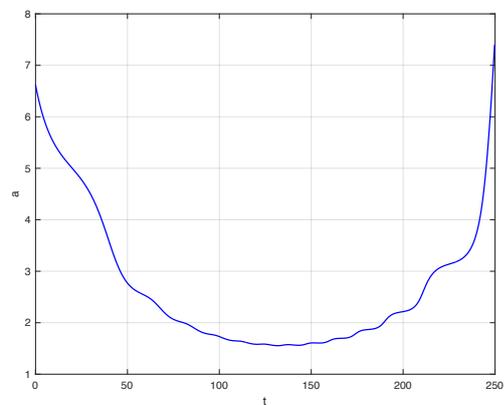


Figura 4.30

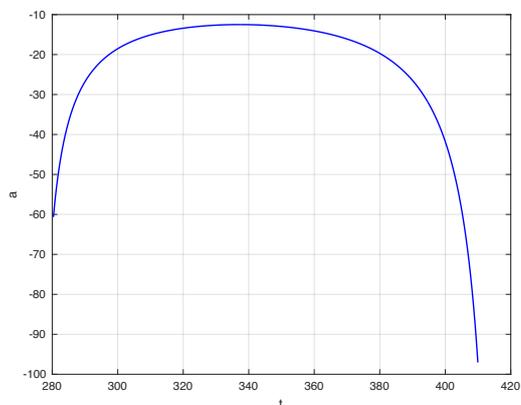


Figura 4.31

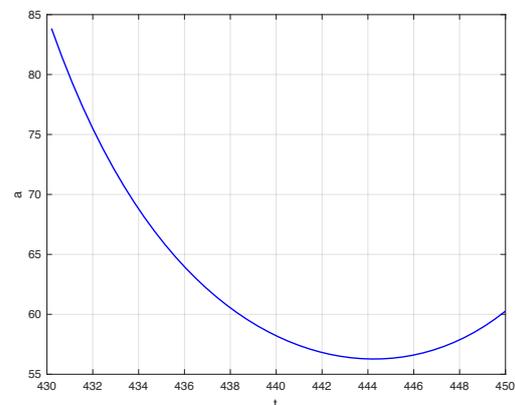


Figura 4.32

Nelle figure 4.33 e 4.34 è possibile notare il tratto finale della traiettoria con il passaggio della traiettoria da iperbolica ad ellittica e la finale circolarizzazione dell'orbita; viene inoltre ripresentata il grafico con la rappresentazione cartesiana dell'intera traiettoria dove è stata evidenziata con un simbolo circolare la posizione che la Luna dovrebbe assumere alla partenza dello spacecraft per effettuare con successo il rendezvous.

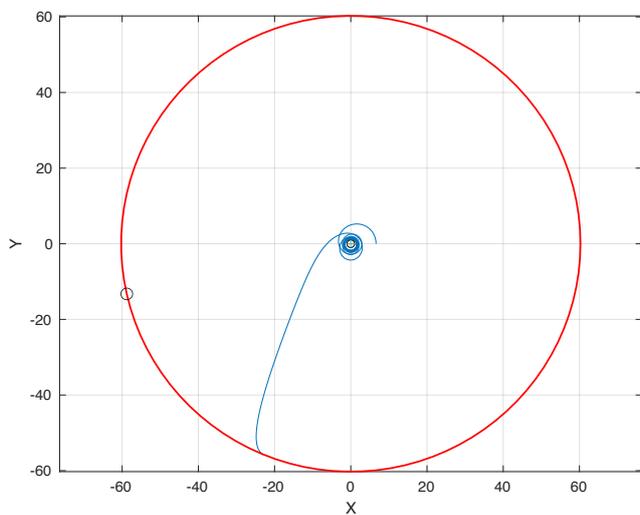


Figura 4.33

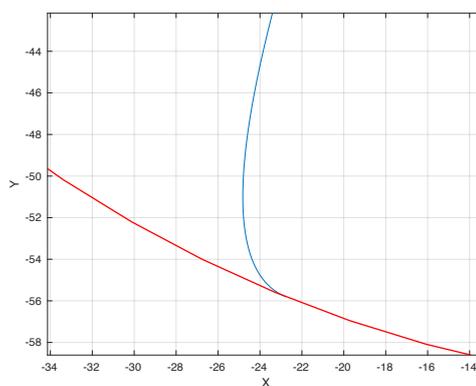


Figura 4.34

## CASO CON POTENZA 2 MW E CONFRONTO

Nel caso di utilizzo di motore da 2 MW, si può notare come nonostante vi siano delle differenze gli andamenti risultino molto simili. Con tali impostazioni, con una durata di missione di 4 giorni si ottiene una massa finale di circa 5800 kg con un numero di giri di circa 6.7.

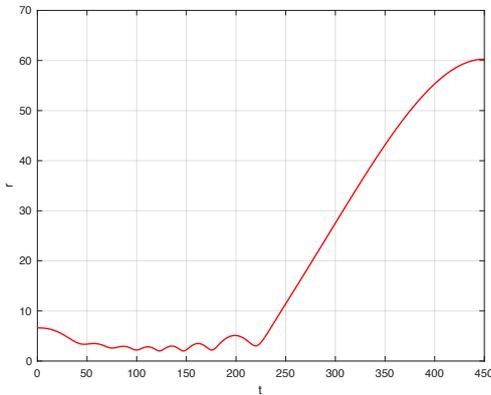


Figura 4.35

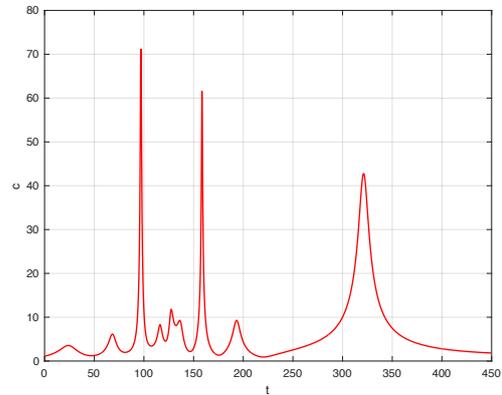


Figura 4.36

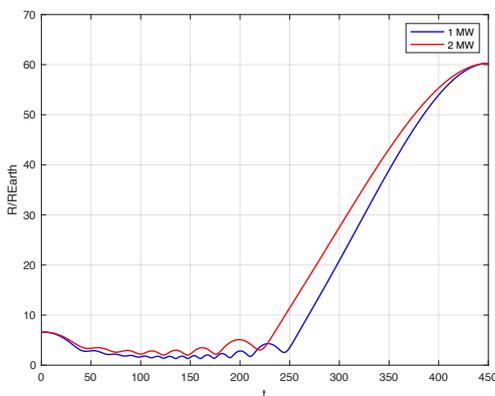


Figura 4.37

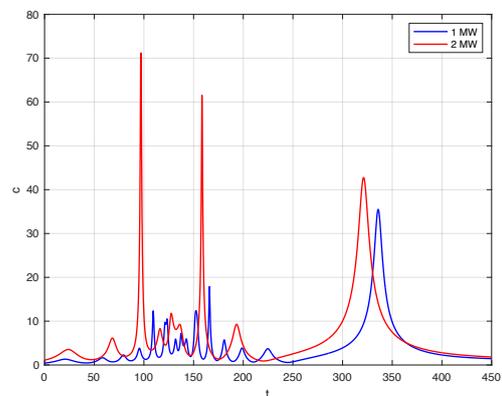


Figura 4.38

Prendendo singolarmente i grafici di raggio (in Figura 4.35) e impulso specifico (in Figura 4.36) in funzione del tempo utilizzando un motore da 2 MW, si constatarebbe come gli andamenti risultino analoghi, con lo spacecraft che abbassa dapprima la sua quota per eseguire delle rivoluzioni di fasamento/attesa intorno alla Terra per poi successivamente immettersi nella TLI in  $t = 225$  circa. Guardando però il grafico in Figura 4.37, dove viene eseguito un confronto tra i dati ottenuti con i due diversi motori, è possibile notare come i raggi minimi nel caso di propulsore da 2 MW siano minori in numero, coerentemente con il più basso numero di giri impiegati, e le orbite abbiano un'altitudine tendenzialmente maggiore, coerentemente con le maggiori prestazioni del motore da 2 MW (le quali non richiedono una velocità di base dello spacecraft troppo elevata per lasciare la Terra). Guardando all'impulso specifico (in Figura 4.38) si possono notare valori molto più alti nel caso di motore di 2 MW nell'intervallo  $80 < t < 170$  probabilmente per la maggior facilità in questo caso nel mantenere le quote durante le orbite di rivoluzione/fasamento attorno alla Terra occorrendo una spinta minore. Si nota inoltre un leggero anticipo sia nell'immissione nella traiettoria TLI (guardando al grafico del raggio), sia nel principio di decelerazione (guardando il grafico dell'impulso specifico) in  $t = 320$  per il caso di motore da 2 MW, il quale comunque avviene in corrispondenza di  $r = 40$ . Da ciò si deduce che cambiando la potenza del motore ma mantenendo invariata la durata di missione, la struttura geometrica di base della trasferta rimane grossomodo la stessa.

In basso (in Figura 4.39) viene riportato il grafico in cui vengono raffigurati entrambi gli andamenti di raggio adimensionalizzato e maggiorato di un coefficiente 10 e l'impulso specifico in funzione del tempo nel caso di motore da 2 MW. Si nota in questo caso una maggiore corrispondenza tra raggi minimi ed impulsi specifici minimi rispetto al caso con propulsore da 1 MW, con delle sfasature che appaiono nell'intervallo più ristretto  $70 < t < 120$ . Ciò potrebbe essere dovuto al minor numero di rivoluzioni intorno alla Terra usate unicamente come orbite di parcheggio temporaneo.

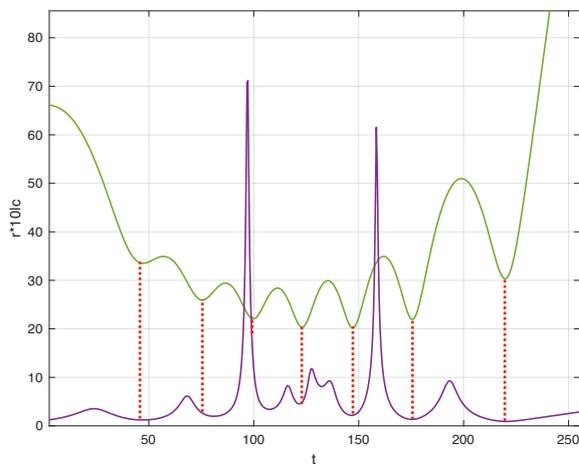


Figura 4.39

I restanti grafici presentati successivamente testimoniano ancora la somiglianza negli andamenti delle variabili di semiasse maggiore (in Figura 4.40) ed eccentricità (in Figura 4.41), con differenze che si evidenziano principalmente nei valori e negli anticipi dal punto di vista temporale in corrispondenza dei passaggi da traiettorie ellittiche a traiettorie iperboliche. Ad esempio si può notare la minor eccentricità massima relativa alla parte iperbolica della trasferita con propulsore da 2 MW in  $t = 320$  affiancata quindi da una minor energia raggiunta, segno del fatto che lo spacecraft in questo caso essendosi allontanato dalla Terra a quote maggiori ed in anticipo necessita di traiettorie meno energetiche per raggiungere la Luna. L'eccentricità massima viene raggiunta anche in questo caso in corrispondenza di un massimo relativo nell'impulso specifico.

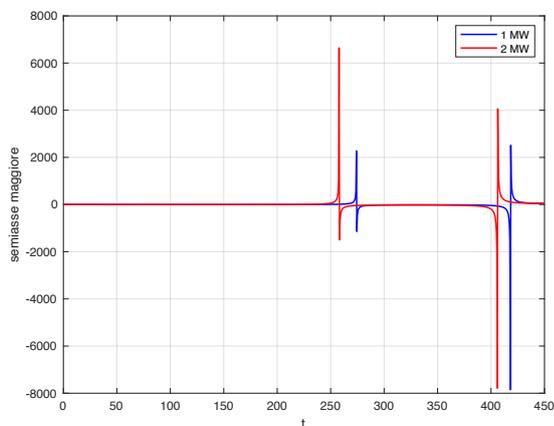


Figura 4.40

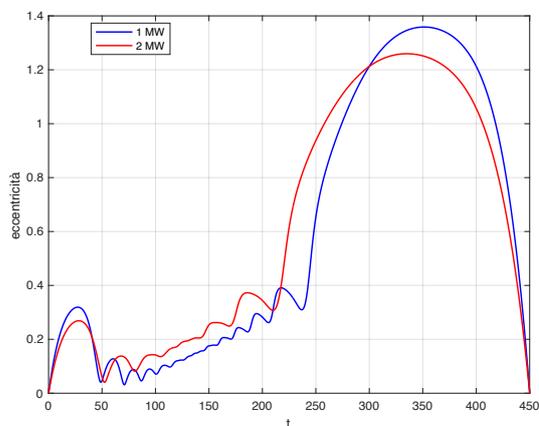


Figura 4.41

Dai grafici nelle figure 4.42, 4.43 e 4.44 con focus sul semiasse maggiore si possono evidenziare i leggeri anticipi temporali della traiettoria con potenza di 2 MW.

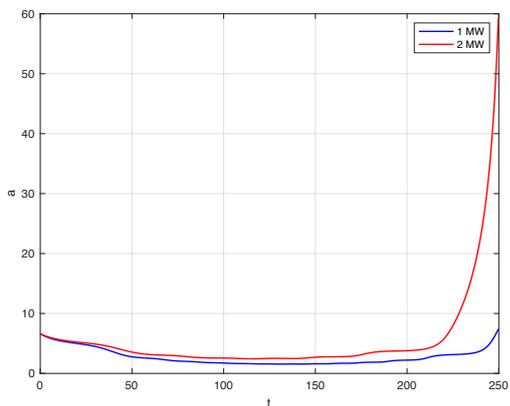


Figura 4.42

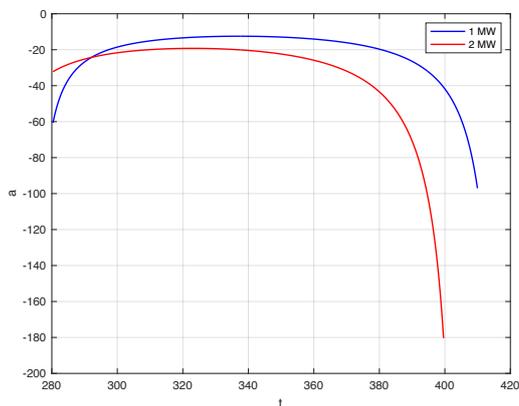


Figura 4.43

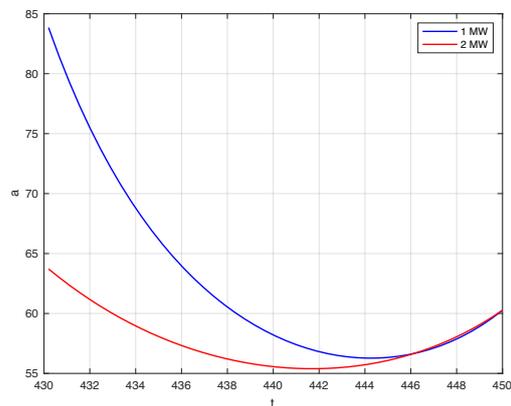


Figura 4.44

Infine vengono mostrati i grafici i quali illustrano la traiettoria nel piano cartesiano in Figura 4.45 (evidenziata anche in questo caso la posizione di partenza della Luna con un simbolo circolare), con particolari focus sui passaggi intorno alla Terra in figura 4.46 e la circolarizzazione finale all'orbita Lunare in figura 4.47.

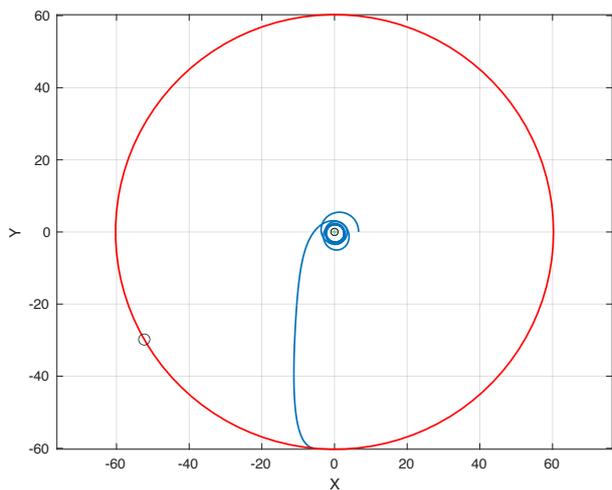


Figura 4.45

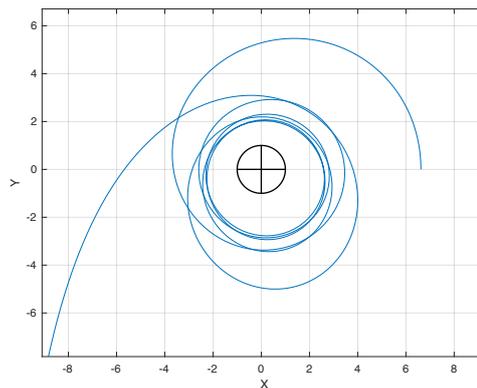


Figura 4.46

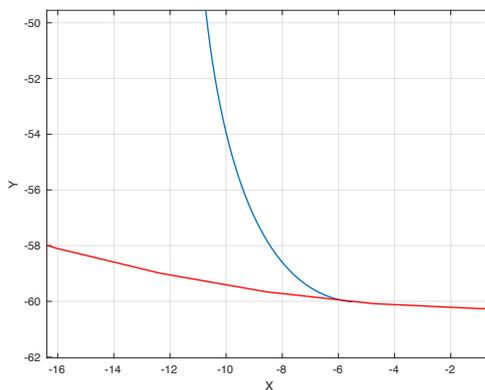


Figura 4.47

## 4.2.2 DURATA DELLA TRASFERTA GEO - LUNA: 7 GIORNI

### CASO CON POTENZA 1 MW

Nel caso di durata di missione di 7 giorni, la massa finale ottenuta con un motore da 1 MW è di 6300 kg circa mentre il numero di giri è di 12.8 giri circa, quindi dello stesso ordine di grandezza del caso di missione con durata di 4 giorni. Essendo il numero di giri fondamentalmente lo stesso ci si aspetta di trovare risultati simili per alcune variabili come negli andamenti di raggio e impulso specifico in funzione del tempo, come visibile qui di seguito.

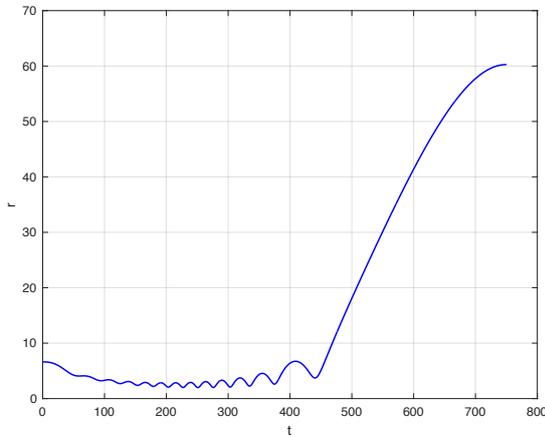


Figura 4.48

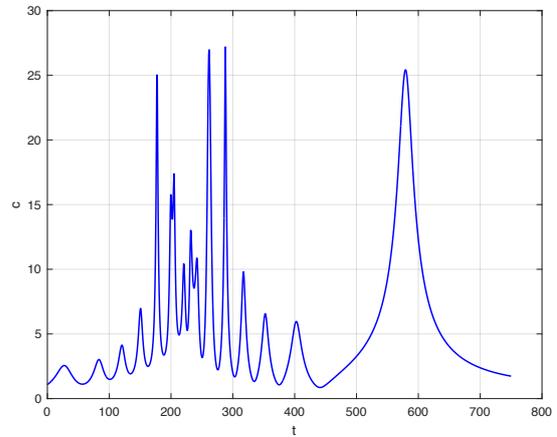


Figura 4.49

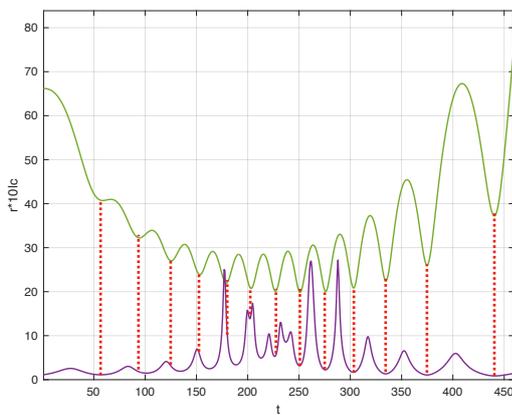


Figura 4.50

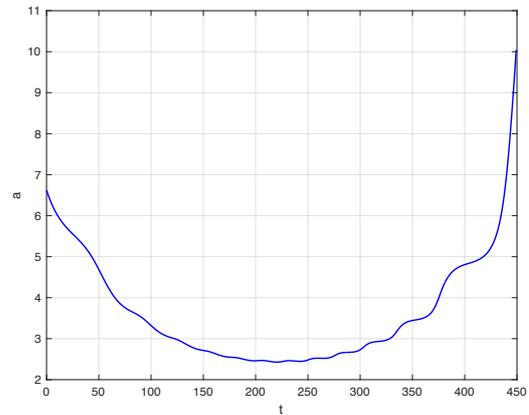


Figura 4.51

Si riscontra anche in questo caso la presenza di 13 minimi nel grafico relativo al raggio (in Figura 4.48) e 15 minimi in quello relativo all'impulso specifico (in Figura 4.49). Tuttavia le oscillazioni dovute alle orbite di rivoluzione intorno alla Terra sono maggiormente dilatate per via del maggior arco temporale entro il quale avvengono ( $0 < t < 450$ , ossia circa 4 giorni dei 7 di missione). Anche i valori nell'impulso specifico sono mediamente più alti e ciò è facilmente spiegabile con la maggior disposizione di tempo da parte dello spacecraft, che per eseguire la trasferta avrà bisogno globalmente di meno spinta, fattore che incide direttamente sul risparmio in massa. In figura 4.50 viene illustrato il grafico raffigurante il raggio adimensionalizzato e maggiorato di un coefficiente 10 e l'impulso specifico durante i passaggi attorno alla Terra. È possibile notare anche qui un leggero sfasamento tra le due variabili maggiormente evidente per  $150 < t < 250$ , in cui il massimo impulso specifico corrisponde ai minimi nel raggio e non ai massimi, il che permetterebbe allo spacecraft di mantenere una certa quota per contribuire al giusto fasamento con la Luna e all'allungamento della missione fino a 7 giorni. Tale fenomeno può essere visto anche nel grafico a

fianco raffigurante il semiasse maggiore (in Figura 4.51), in cui per  $150 < t < 250$  si può notare un appiattimento della curva. Per  $t = 450$  lo spacecraft si inserisce nella traiettoria di trasferimento lunare, quindi esattamente in corrispondenza del 60% della durata completa di missione (nel caso di missione di 4 giorni ciò accadeva in corrispondenza 55%, valori dunque molto simili). È possibile inoltre notare come ancora l'ultimo massimo nell'impulso specifico abbia luogo in corrispondenza di  $r = 40$ .

Analizzando i grafici di eccentricità (in Figura 4.52) e semiasse maggiore (in Figura 4.53) in funzione del tempo si può osservare come in questo caso la traiettoria sia in prevalenza di natura ellittica o fortemente ellittica e raggiunga l'iperbolicità per un breve tratto compreso nell'intervallo temporale  $550 < t < 630$  seppur quest'ultimo abbia un semiasse maggiore rispetto all'analogo del caso precedente. Ciò è dovuto al maggior tempo a disposizione da parte dello spacecraft per condurre la trasferta che vanifica la necessità di percorrere traiettorie eccessivamente energetiche. Si possono notare anche in questo caso le discontinuità in corrispondenza dei passaggi da traiettoria ellittica ad iperbolica e viceversa, troncate sui focus del semiasse nelle figure 4.54, 4.55 e 4.46. Inoltre anche in questo caso l'eccentricità raggiunge il valore massimo in corrispondenza di  $t = 600$  circa, ossia in corrispondenza dell'ultimo picco di impulso specifico ed in corrispondenza dunque di  $r = 40$ .

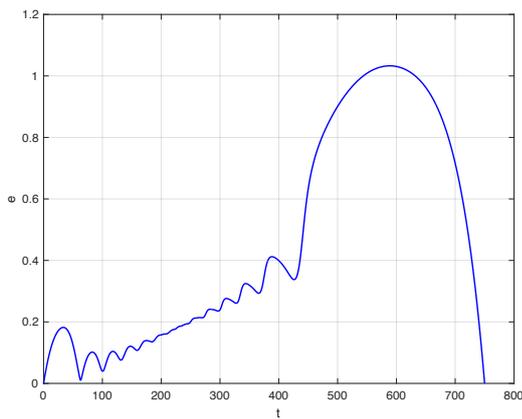


Figura 4.52

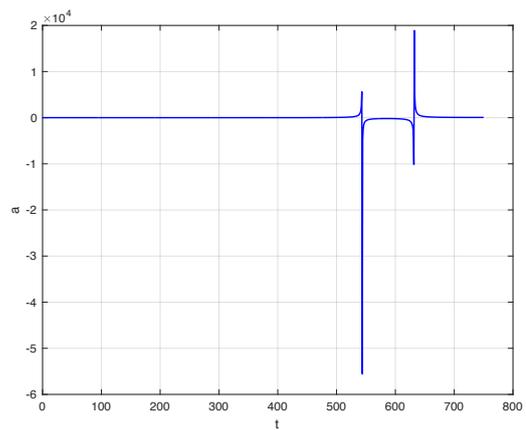


Figura 4.53

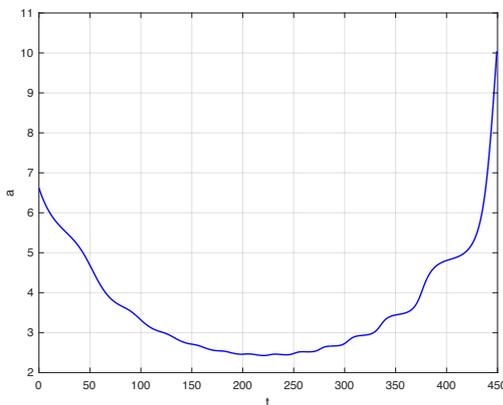


Figura 4.54

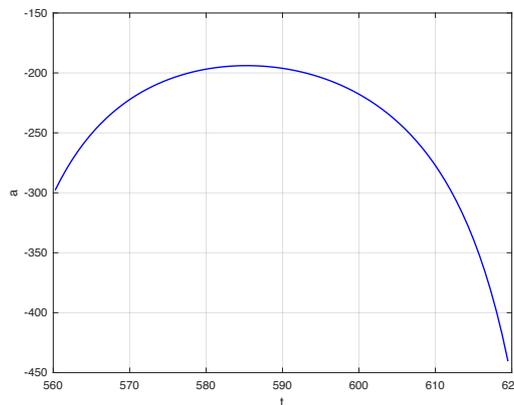


Figura 4.55

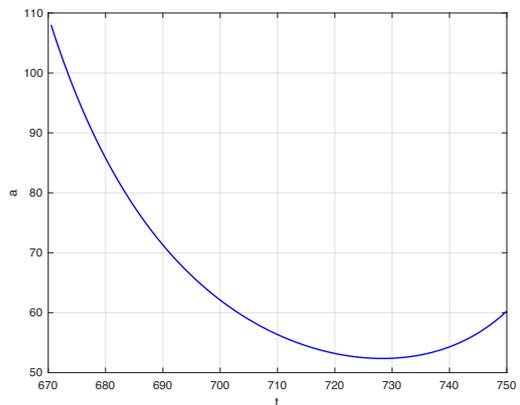


Figura 4.56

Qui di seguito viene messa a confronto la traiettoria su piano cartesiano per il caso in esame (in Figura 4.58) con quella relativa al caso di durata di 4 giorni (in Figura 4.57).

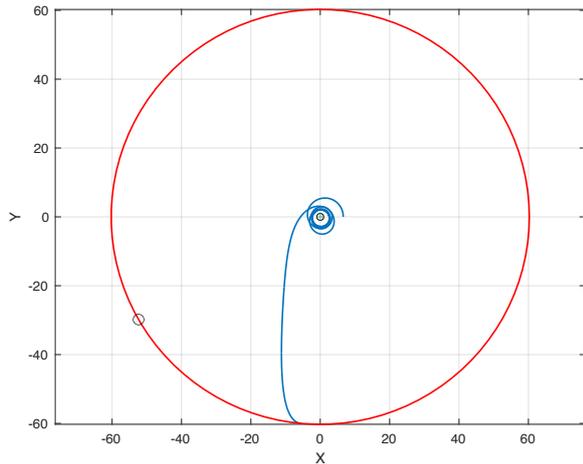


Figura 4.57

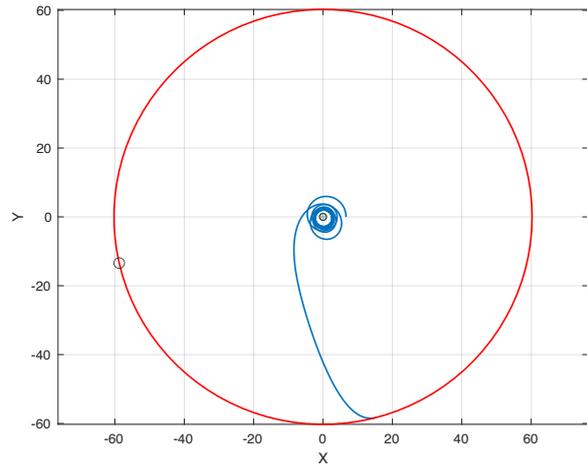


Figura 4.58

È possibile notare una maggior curvatura, anche se lieve, nella traiettoria TLI nel caso di missione da 7 giorni (a destra) rispetto all'andamento più rettilineo della stessa nel caso di missione in 4 giorni (a sinistra). I punti di arrivo tuttavia non sono molto distanti, per cui è possibile apprezzare maggiormente la diversa posizione di partenza della Luna nei due casi.

## POTENZA 2 MW

Nel caso di motore da 2 MW, in 7 giorni di missione, si ottiene una massa finale di 8700 kg circa in 6.9 giri; quest'ultimo rimanendo nell'ordine di grandezza del caso analogo precedente di missione in 4 giorni predispone a dei risultati simili per raggio e impulso specifico.

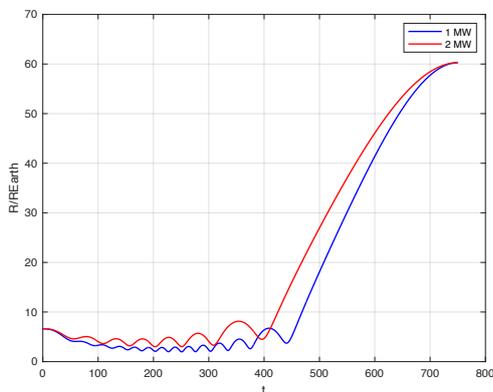


Figura 4.59

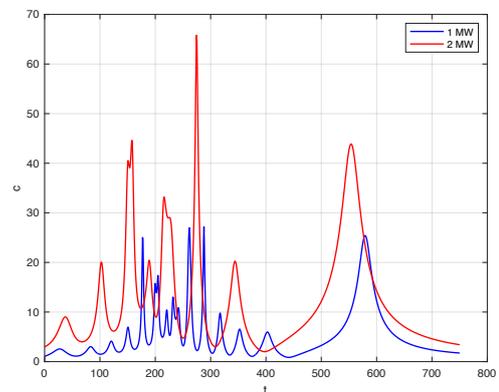


Figura 4.60

Com'è possibile notare infatti, gli aspetti da sottolineare sono sostanzialmente gli stessi evidenziati nel caso di trasferta entro i 4 giorni: i passaggi ravvicinati (visibili nel grafico del raggio in figura 4.59) sono meno in numero ed hanno orbite generalmente caratterizzate da un'altitudine maggiore, l'immissione nell'orbita di trasferimento lunare è leggermente in anticipo rispetto al caso con motore da 1 MW ed avviene a circa il 50% dell'intera durata di missione, i picchi nell'impulso specifico (in Figura 4.60) hanno valori maggiori e

l'ultimo di questi avviene in corrispondenza di  $r = 40$  circa. Vi è però questa volta una corrispondenza praticamente esatta tra le valli nel raggio e le valli nell'impulso specifico (in Figura 4.61) che sono in entrambi i casi 7 in numero (senza contare quelli in corrispondenza di  $t = 160$  e  $t = 215$  che nonostante siano dei minimi dal punto di vista strettamente matematico non assumono particolare significato nel ragionamento che è stato fatto in questo tipo di situazione).

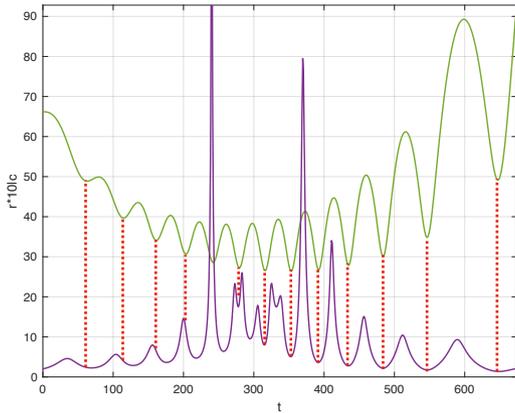


Figura 4.61

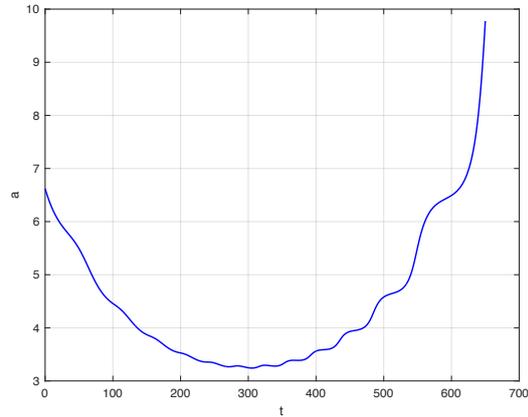


Figura 4.62

Com'è possibile invece notare nei grafici di semiasse maggiore (in Figura 4.63) ed eccentricità (in Figura 4.64), la traiettoria con propulsore da 2 MW assume una forma completamente ellittica o fortemente ellittica, tendendo per  $500 < t < 600$  a divenire una parabola; ciò è dato come evidenziato anche precedentemente dall'allungamento della missione che rende la traiettoria maggiormente curvilinea e quindi meno energetica, non avendo la necessità di raggiungere velocità troppo elevate.

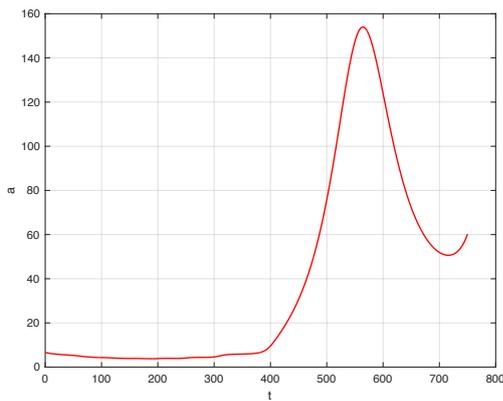


Figura 4.63

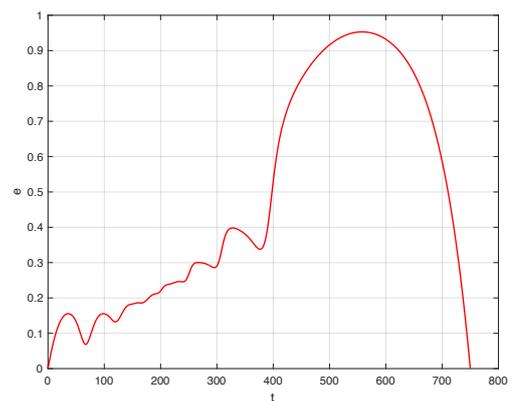


Figura 4.64

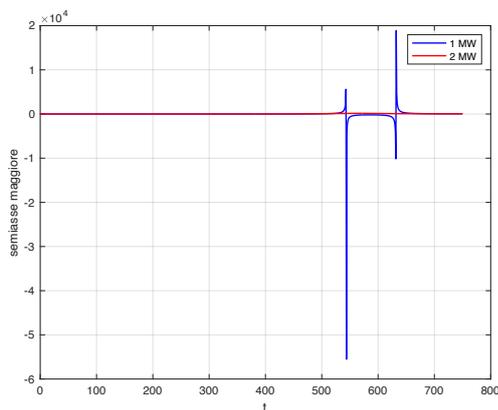


Figura 4.65

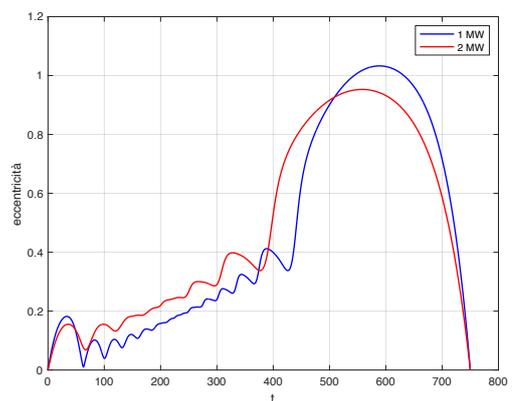


Figura 4.66

Tale fatto è possibile vederlo ancora meglio nella figura sottostante raffigurante l'evoluzione dell'intera trasferta nel piano cartesiano per una missione di 7 giorni condotta utilizzando un propulsore da 2 MW.

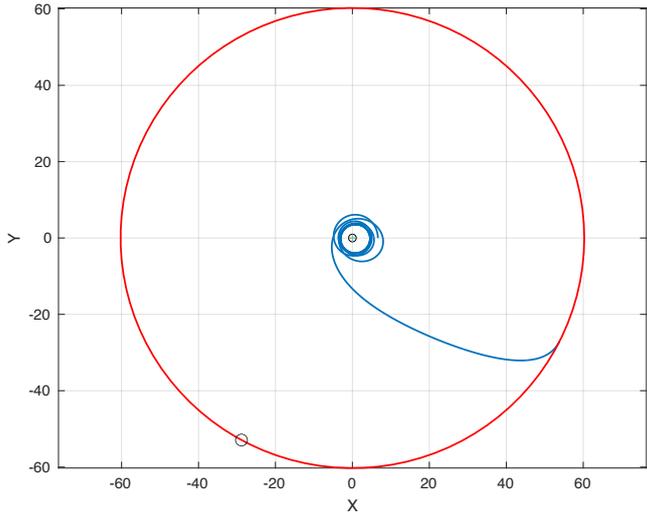


Figura 4.67

## 4.2.3 DURATA DELLA TRASFERTA GEO - LUNA: 10 GIORNI

### CASO CON POTENZA 1 MW

Nel caso di trasferta condotta in 10 giorni con un propulsore da 1 MW, la massa finale dello spacecraft sale a poco più 8000 kg, mentre il numero di giri rimane sempre dello stesso ordine di grandezza degli altri casi (circa 12.9 - 13 giri).

Per tale ragione, per quanto riguarda gli andamenti di raggio (in Figura 4.68) e impulso specifico (in Figura 4.69) in funzione del tempo valgono le stesse considerazioni effettuate in precedenza poichè gli andamenti risultano analoghi con differenze che risiedono sostanzialmente nei valori.

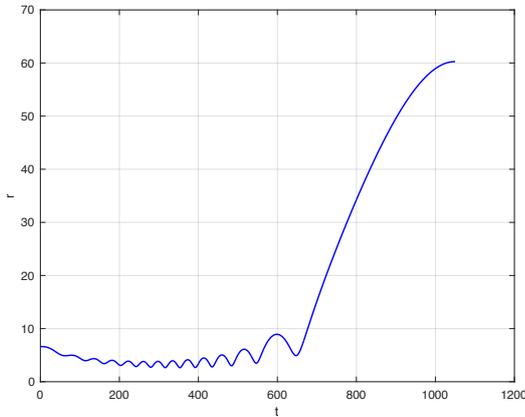


Figura 4.68

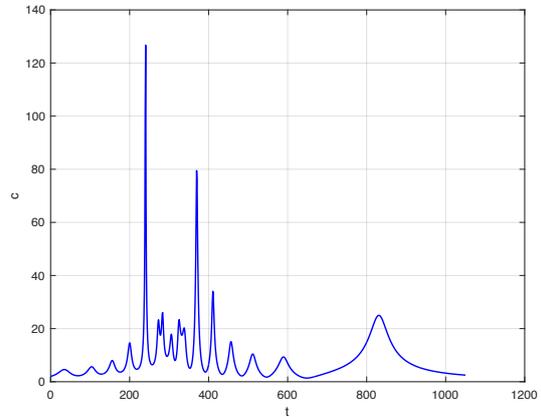


Figura 4.69

Alcune riflessioni in più possono essere fatte su alcune tempistiche dei fenomeni che si sono analizzati finora. La leggera sfasatura tra minimi nel raggio e minimi nell'impulso specifico è contenuta in questo caso nell'intervallo temporale  $120 < t < 320$  circa, rendendo la quota grossomodo stazionaria per  $225 < t < 380$  su una missione che ha come durata massima  $t = 1050$ . In proporzione dunque le orbite che si aggirano a quote molto simili prendono il 15% circa della durata di missione. Analizzando i casi precedenti si può notare come in questi la percentuale si aggiri ad un valore molto simile. Anche in questo specifico caso inoltre la durata delle orbite di rivoluzione e il successivo inserimento nell'orbita di trasferimento lunare avviene a circa il 60% della durata di missione, mentre l'ultimo picco nell'impulso specifico massimo avviene ancora una volta in corrispondenza di  $r = 40$ , ossia in corrispondenza dell'80% della missione (negli altri casi ciò avveniva a circa il 75% e il 77% della missione, dunque anche qui i valori sono comparabili). Ciò testimonia ancora una volta che nonostante la durata complessiva sia diversa, la struttura della missione rimane grossomodo la stessa.

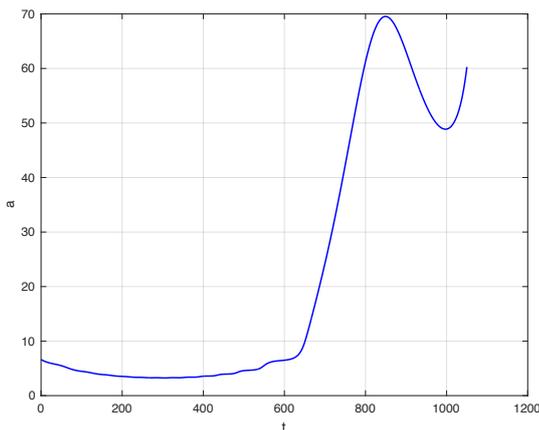


Figura 4.70

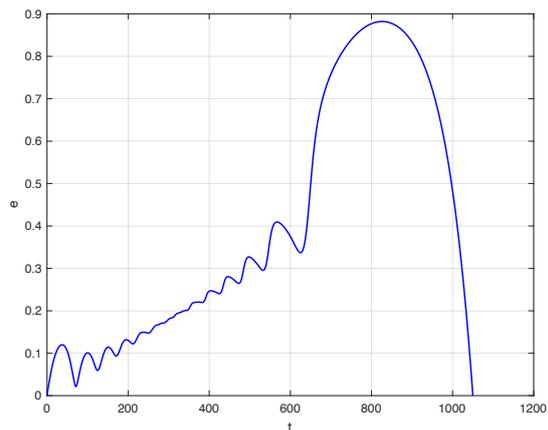


Figura 4.71

Come si può ben notare inoltre dai grafici di semiassse maggiore (in Figura 4.70) ed eccentricità (in Figura 4.71) per una durata di missione che coinvolga 10 giorni circa la traiettoria diviene interamente ellittica, segno del fatto che le velocità necessarie come previsto diminuiscono per cui l'escape dalla Terra diviene più "dolce" e la curvatura complessiva della traiettoria aumenta per effetto della forza d'attrazione gravitazionale terrestre.

In basso sono raffigurate nel piano cartesiano le traiettorie dei 3 casi analizzati fin qui con motore da 1 MW, dove in figura 4.72 è rappresentato il caso di missione in 4 giorni, in figura 4.73 quello di 7 giorni e in figura 4.74 quello di 10 giorni. Si può apprezzare la crescente curvatura della traiettoria all'aumentare della durata di missione. Sono evidenziate inoltre le posizioni di partenza della Luna, in particolare si può notare come nel caso di missione in 10 giorni la Luna debba compiere un angolo di circa 120 gradi, ossia 1/3 di giro così come 10 giorni sono circa 1/3 di un mese, che è grossomodo il periodo di rivoluzione della Luna attorno alla Terra (circa 27 giorni).

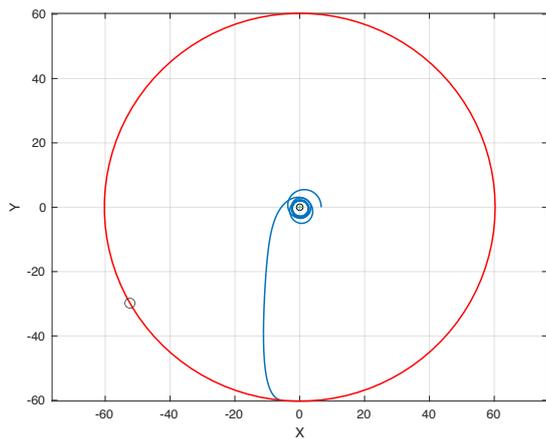


Figura 4.72

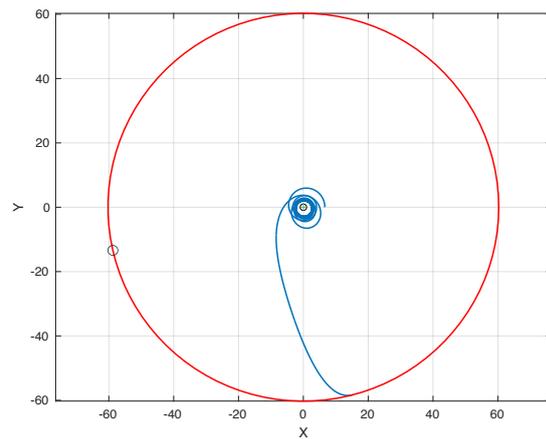


Figura 4.73

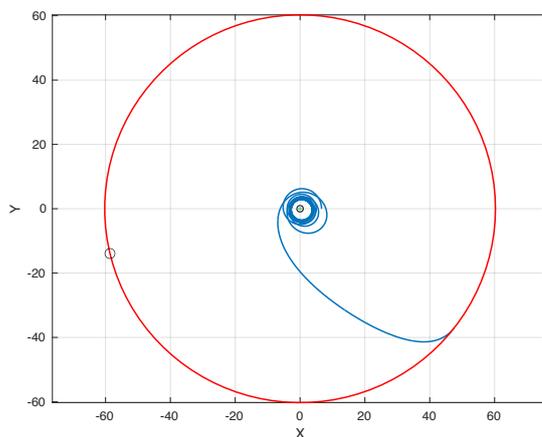


Figura 4.74

## POTENZA 2 MW

Nel caso di motore da 2 MW si ottiene per una missione della durata di 10 giorni una massa finale di 9200 kg per un numero di giri di 13.8 circa, con quest'ultimo valore molto vicino a quello del corrispettivo caso con motore da 1 MW (circa 13 giri). Ci si aspetta dunque di trovare maggiori convergenze in questo confronto.

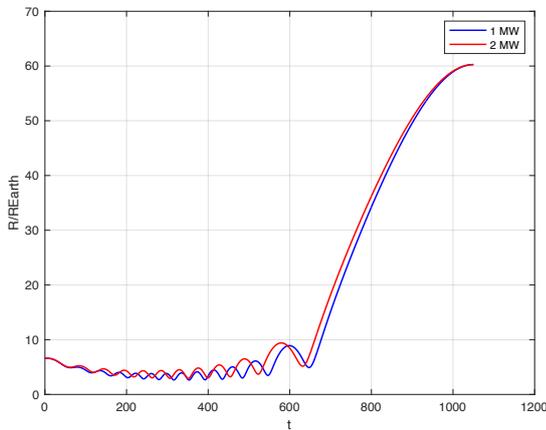


Figura 4.75

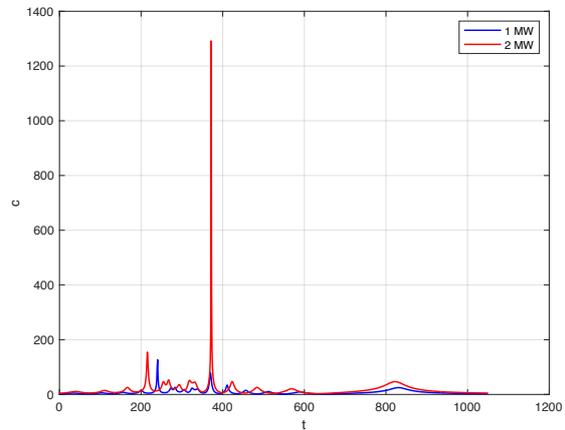


Figura 4.76

Osservando per esempio il grafico del raggio in funzione del tempo (in Figura 4.75) si può osservare come i due andamenti sarebbero quasi sovrapponibili se non vi fosse la presenza di una leggera sfasatura maggiormente evidente nel tratto  $400 < t < 650$ . Le differenze nei valori sono maggiori nell'impulso specifico (in Figura 4.76), a cui corrispondono tendenzialmente valori più alti al caso di utilizzo di un propulsore da 2 MW, come evidenziato anche in altri casi in cui la parità di spinta implica maggiori valori nell'impulso al crescere della potenza. Anche per tale andamento tuttavia si riscontra una certa sovrapponibilità contrastata da una leggera sfasatura.

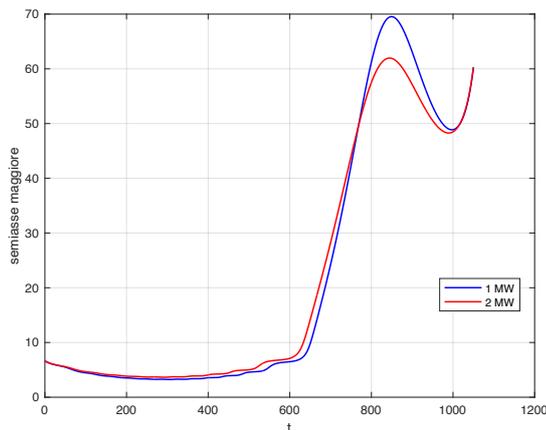


Figura 4.77

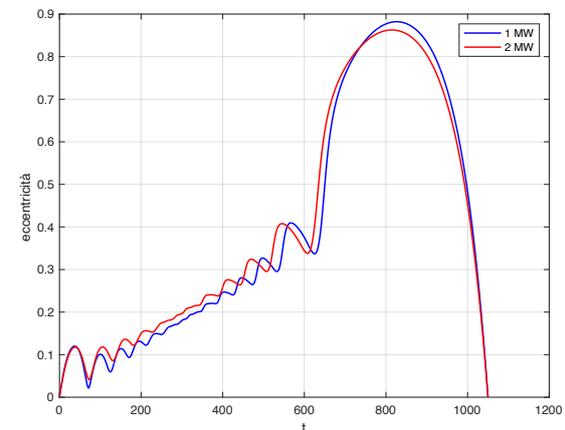


Figura 4.78

Considerazioni analoghe possono essere condotte per gli andamenti di semiasse maggiore (in Figura 4.77) ed eccentricità (in Figura 4.78). Da ciò si può avere la conferma di quanto detto precedentemente, ossia che all'aumentare della durata di missione le maggiori prestazioni date da un propulsore più potente non si traducono necessariamente in vantaggi concreti in termini di massa risparmiata. Le masse finali ottenute nei due casi risultano paragonabili (8000 kg per 1 MW e 9200 kg per 2 MW) e ciò è dovuto alla somiglianza tra

le traiettorie nei due casi: vi sono forti affinità nel numero di giri, e di conseguenza nella forma delle due traiettorie, entrambe ellittiche.

### 4.3 SINTESI PER MISSIONE PIANA GEO-LUNA

Dai casi analizzati simulando la presenza di un propulsore da 1 MW, si è potuto notare che se da un le traiettorie tendono ad essere più iperboliche per brevi durate ed interamente ellittiche per durate più ampie, mutando quindi la loro forma al variare della durata, conservano dall'altro lato una certa struttura di fondo. Per tutti i casi infatti, la trasferta GEO-Luna si è articolata sostanzialmente in 4 fasi:

- FASE 1: Abbassamento iniziale dall'orbita GEO verso orbite LEO;
- FASE 2: Rivoluzioni intorno alla Terra a tali orbite LEO, le quali fungono da orbite di parcheggio affinché lo spacecraft attui il giusto fasamento con la Luna;
- FASE 3: Accelerazione definitiva ed immissione nella traiettoria TLI;
- FASE 4: Inizio della decelerazione (in traiettoria TLI);
- FASE 4: Approccio all'orbita Lunare e circolarizzazione finale.

Ciascuna di queste 4 fasi è stata scandita da frazioni temporali abbastanza precise e ripetitive per ciascuna durata: nella fase 2 le orbite di puro fasamento (le orbite che non mutavano sostanzialmente la loro quota) avevano luogo per circa il 15-16% della missione. Il termine della fase 2 che sanciva di conseguenza l'inizio della fase 3 avveniva grossomodo entro il 60 % della durata di missione, mentre l'inizio della fase 4 intorno al 75-80% e comunque sempre in corrispondenza di  $r=40$  (ad un raggio di circa 254840 km e dunque sempre a circa 130000 km dalla Luna), dell'impulso specifico e dell'eccentricità massime. Questa rigida schematicità in parte si può spiegare con la metodologia con cui sono stati ricavati i suddetti dati: si è partiti infatti da delle soluzioni iniziali di tentativo per durate più basse da cui sono state ricavate le soluzioni per durate maggiori. Tuttavia si potrebbe dedurre che è proprio tale rigosità nel timing di ciascuna fase che rende possibile la ricerca delle soluzioni di ottimo per problemi le cui situazioni operative, in questo caso la durata di missione, risultino apparentemente molto diverse tra loro.

### 4.4 CONFRONTO CON TRASFERTA DI HOHMANN

Per avere un quadro ancor più completo dei risultati ottenuti, si può effettuare un confronto con i valori ottenuti con una trasferta di Hohmann piana da un'orbita geostazionaria all'orbita lunare (approssimata anche in questo caso come circolare) effettuata da uno spacecraft con stessa massa iniziale (10000 kg) e dotato di un propulsore chimico, con impulso specifico fisso di circa 450 s. Tale trasferta presupporrebbe manovre di tipo impulsivo, alle quali sono associate accelerazioni molto elevate per l'estrema brevità di erogazione del  $\Delta V$ , al contrario delle manovre continue utilizzate dai propulsori ionici (quindi anche dal VASIMR), alle quali sono associate accelerazioni molto più basse. Tuttavia la trasferta di Hohmann ha la sua caratteristica principale nel costituire la traiettoria più efficiente in termini di massa finale nel caso di manovre impulsive, di conseguenza in tale ottica questo confronto potrebbe essere visto come un'interessante comparazione tra due problemi di ottimo.

Qui di seguito vengono calcolati i parametri caratterizzanti la trasferta di Hohmann.

Considerando che un giorno sidereo è lungo 23 ore, 56 minuti e 4 secondi circa, ossia 86164 secondi, risulta facile calcolare il raggio dell'orbita geostazionaria, il cui periodo orbitale è pari proprio ad un giorno sidereo. Si hanno dunque i valori di raggio e velocità tangenziale:

$$2\pi\sqrt{\frac{r_{GEO}^3}{\mu}} = 86164 [s] \Rightarrow r_{GEO} = 42164 [km]; v_{GEO} = \sqrt{\frac{\mu}{r_{GEO}}} = 3.075 [km/s]$$

Per l'orbita lunare invece si hanno:

$$r_{Luna} = 384000 [km]; v_{Luna} = \sqrt{\frac{\mu}{r_{Luna}}} = 1.019 [km/s].$$

Il semiasse della relativa orbita di Hohmann è:

$$a_H = \frac{r_{GEO} + r_{Luna}}{2} = 213082 [km].$$

Dopo di ciò possono essere calcolati di due  $\Delta V$  da erogare per immettersi nella trasferta di Hohmann e per la circularizzazione in orbita lunare:

$$\Delta V_1 = \sqrt{\mu \left( \frac{2}{r_{GEO}} - \frac{1}{a_H} \right)} - v_{GEO} = 1.053 [km/s];$$

$$\Delta V_2 = v_{Luna} - \sqrt{\mu \left( \frac{2}{r_{Luna}} - \frac{1}{a_H} \right)} = 0.5656 [km/s];$$

Da cui il  $\Delta V$  totale risulta:

$$\Delta V_{TOT} = \Delta V_1 + \Delta V_2 = 1.6185 [km/s].$$

Dall'equazione del razzo è possibile ottenere la massa finale dello spacecraft al termine della trasferta:

$$m_f = m_0 e^{-\frac{\Delta V_{TOT}}{I_{sp} g}} = 6979 [kg].$$

La trasferta di Hohmann invece ha la seguente durata espressa in giorni:

$$\tau_H = \frac{\pi \sqrt{\frac{a_H^3}{\mu}}}{86400} = 5.66 [giorni].$$

Riproponendo il grafico raffigurante l'andamento della massa finale in funzione del tempo (in Figura 4.79) si può notare come la stessa massa finale ottenuta con una trasferta di Hohmann in 5 giorni e mezzo (circa 7000 kg) venga conseguita attraverso l'utilizzo di un propulsore ad impulso specifico variabile da 2 MW in un tempo anche inferiore, ossia meno di 5 giorni.

Inoltre il risultato mostrato precedentemente evidenzerebbe e confermerebbe i vantaggi legati alla propulsione ionica con la possibilità di variare l'impulso specifico già per partenze da orbite sì distanti ma non eccessivamente, come quella geostazionaria.

Una massa finale di 7000 kg verrebbe invece ottenuta da un propulsore ad impulso variabile da 1 MW dopo un tempo che se pur maggiore, ossia circa 8 giorni, risulta assolutamente ragionevole ed in linea con il tempo impiegato attraverso una trasferta di Hohmann. Si può però inoltre notare come attraverso tale propulsore vi possa essere una maggior flessibilità potendo raggiungere altre soluzioni di ottimo allungando ulteriormente la missione ed aumentando ulteriormente la massa finale. Con una trasferta di Hohmann attraverso un propulsore chimico se pur impiegando un minor tempo, non si avrebbe la possibilità di modificare o rinviare la missione con la stessa efficienza, essendo appunto tale tipo di trasferta l'unica soluzione ottimale in questo contesto. Si può osservare ancora una volta come la massa finale tendenzialmente maggiore ottenuta da un propulsore a 2 MW rispetto a quella ottenuta da un propulsore da 1 MW sia da imputare ai valori di impulso specifico più elevati nel primo. In linea di massima infatti imporre la stessa durata equivale ad imporre

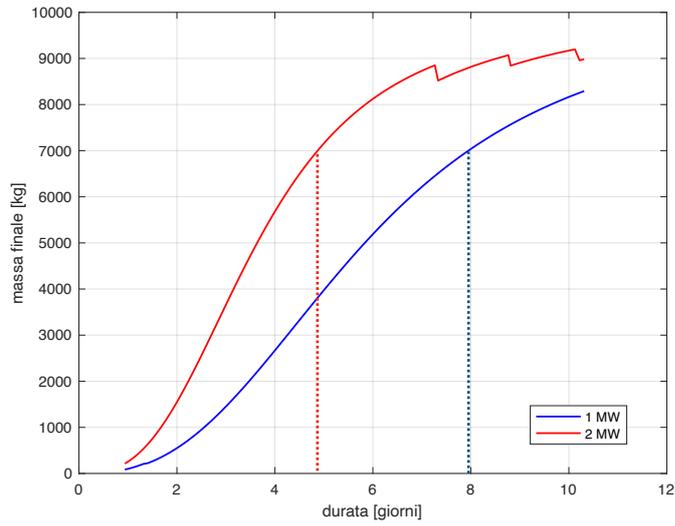


Figura 4.79

grossomodo la stessa spinta, con ripercussioni dunque sull'impulso specifico e sul consumo dunque di propellente.

## 4.5 TRAIETTORIE GEO-LUNA CON CAMBIO DI PIANO

In questa sezione vengono analizzate traiettorie Terra-Luna con orbita di partenza ancora una volta geostazionaria (raggio 42164 km ed inclinazione pari a  $0^\circ$ ) e con destinazione finale l'orbita lunare, inclinata questa volta di  $28^\circ$  rispetto all'equatore terrestre. È noto che la luna ha un'inclinazione rispetto all'eclittica di circa  $5^\circ$ ; per il moto di precessione lunare che si sviluppa nell'arco di 18 anni l'inclinazione apparentemente cambia di circa 10 gradi, oscillando quindi da  $-5^\circ$  a  $5^\circ$  gradi circa. L'equatore terrestre è inclinato rispetto all'eclittica di circa  $23^\circ$ , per cui l'inclinazione dell'orbita lunare rispetto all'equatore oscilla tra i  $18^\circ$  e i  $28^\circ$ . È stato quindi analizzato il caso che prevederebbe il cambio di inclinazione maggiore utilizzando il motore meno performante da 1 MW, in modo da mettersi nelle condizioni peggiori possibili nel valutare l'impatto della manovra di cambio di piano sulla massa finale. Sono state analizzate anche qui nel dettaglio due durate di missione analizzate precedentemente (7 e 10 giorni) così da poter effettuare un confronto con le traiettorie piane analoghe già discusse nei paragrafi precedenti.

### ANALISI MASSA FINALE E NUMERO DI GIRI

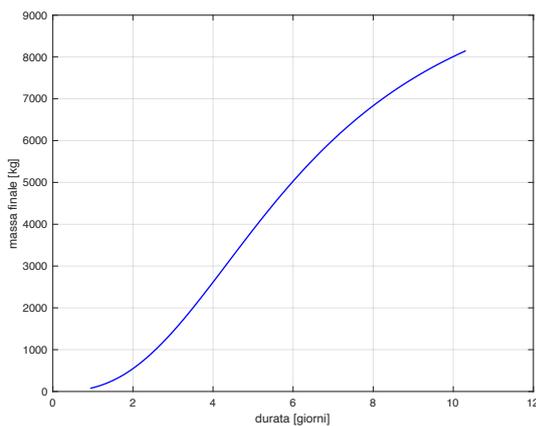


Figura 4.80

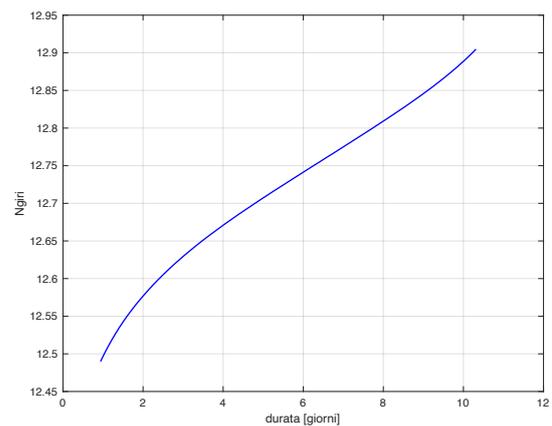


Figura 4.81

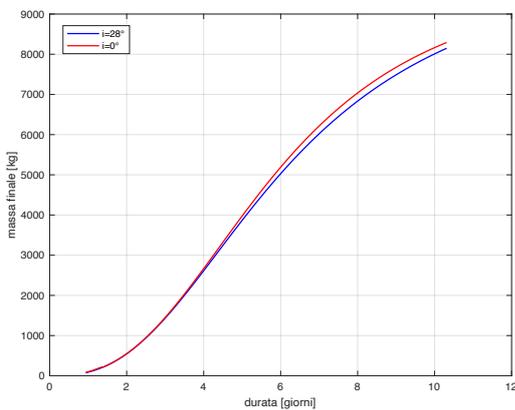


Figura 4.82

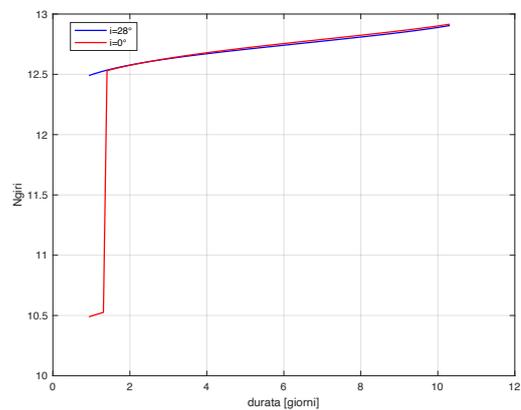


Figura 4.83

Nei grafici della massa finale e del numero di giri entrambi in funzione del tempo rispettivamente nelle figure 4.80 e 4.81 si possono osservare andamenti del tutto simili a quelli osservati nel caso di traiettoria piana. Ciò trova conferma negli analoghi grafici di figure 4.82 e 4.83, in cui differenze apprezzabili (seppur minime) nella massa finale sono visibili per durate che vanno dai 4 giorni in poi; questo può avere come ragione la prevalenza in percentuale della massa di propellente destinata ad innalzare l'orbita rispetto a quella necessaria a cambiare l'inclinazione man mano che le durate di missione si fanno più brevi. Tuttavia

questo scarto minimo tra la massa finale nei due casi tende a crescere leggermente dalle missioni della durata di 4 giorni a quelle di 8 giorni per poi mantenersi grossomodo costante.

Se da un lato dunque si trova conferma del fatto che aggiungendo una manovra di cambiamento di piano si ottengono masse finali inferiori a parità di durata di missione (ed ovviamente a parità di destinazione) dall'altro lato l'impatto risulterebbe meno gravoso del previsto. Gli andamenti relativi al numero di giri sono praticamente coincidenti tralasciando la primissima parte del grafico, e questo può essere dovuto al fatto che la soluzione della casistica con cambio di piano è stata ottenuta inserendo nel codice Fortran la stessa soluzione iniziale di tentativo della traiettoria piana.

Le similitudini discusse fin qui fanno presagire che stabilita una certa durata di missione la maggior parte dei parametri relativi alle singole traiettorie con cambio di piano non dovrebbero variare considerevolmente rispetto ai corrispettivi casi di traiettorie piane. Ciò sarà possibile vederlo nei paragrafi successivi in cui verranno analizzati due scenari di missione della durata rispettivamente di 7 e 10 giorni.

#### 4.5.1 DURATA DI MISSIONE: 7 GIORNI

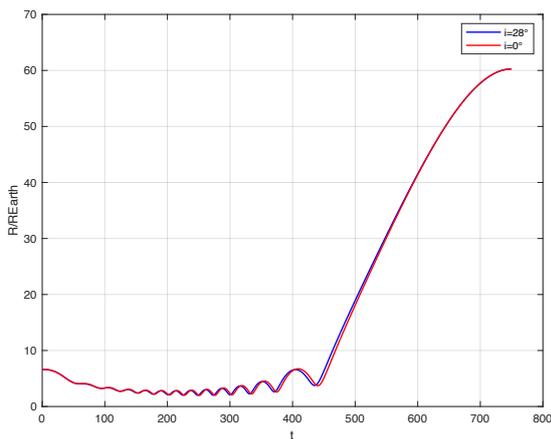


Figura 4.84

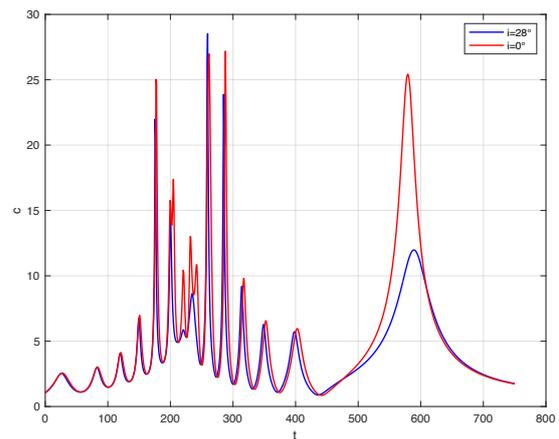


Figura 4.85

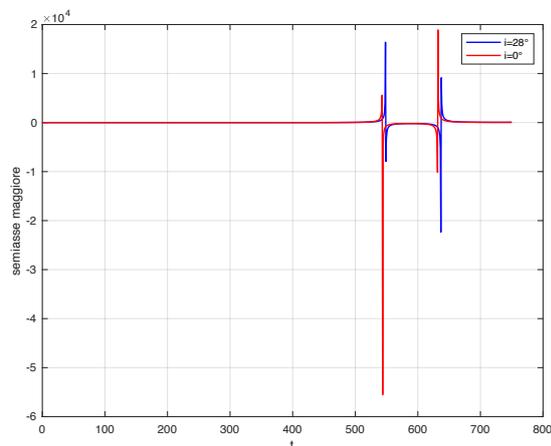


Figura 4.86

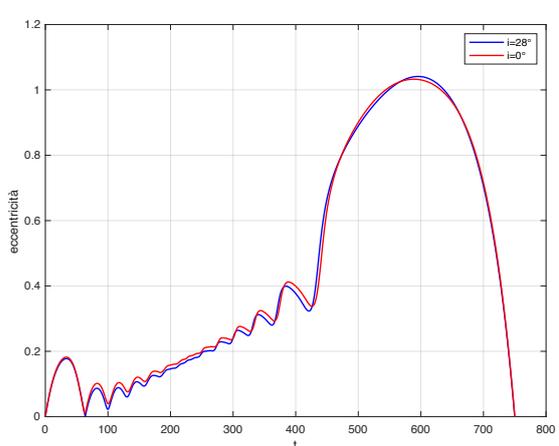


Figura 4.87

Come si può evidenziare dal grafico del raggio in funzione del tempo (in Figura 4.84) vi è una coincidenza quasi perfetta nell'andamento della traiettoria con cambio di piano rispetto al corrispettivo caso di traiettoria piana; gli andamenti infatti presentano una sfasatura appena accennata, a dimostrazione del fatto che anche in questo tipo di confronto lo schema ricalcato rimane il medesimo. Si può infatti ancora una volta evidenziare, come descritto nel paragrafo "sintesi" una fase 1 con l'abbassamento iniziale ad orbite LEO, una fase 2 con delle rivoluzioni di phasing attorno alla Terra, una fase 3 con l'immissione nell'orbita di trasferimento lunare e una fase 4 finale con approccio all Luna e successiva circolarizzazione; tali fasi sono

eseguite con le medesime tempistiche. Commenti analoghi possono essere riservati per i grafici riguardanti gli andamenti del semiasse maggiore (in Figura 4.86) e dell'eccentricità (in Figura 4.87), in cui le uniche discrepanze nel primo citato stanno nell'indeterminatezza della discontinuità; il semiasse infatti, tendendo in quei punti a infinito, assume valori molto alti le cui differenze in termini di modulo non sarebbero importanti ai fini del discorso condotto fin ora, e ciò trova conferma nel grafico delle eccentricità delle due traiettorie praticamente coincidenti.

La situazione osservata nel grafico dell'impulso specifico (in Figura 4.85) risulta sostanzialmente la medesima, dove anche in questo caso lo schema di base riguardante il timing delle spinte risulta lo stesso, con le uniche differenze risiedenti nei valori, così come ci si sarebbe aspettato. È possibile notare infatti impulsi specifici tendenzialmente più bassi, e quindi spinte più alte nel caso di traiettoria con cambio di piano per via dell'aggiunta delle manovre di cambiamento di inclinazione che innalzano il computo totale del  $\Delta V$  - budget, richiedendo uno sforzo in più al propulsore.

L'estrema somiglianza anche negli andamenti del semiasse può essere visualizzata meglio nei grafici seguenti nelle figure 4.88, 4.89 e 4.90 ottenuti rimuovendo i punti di discontinuità creati dalla traiettorie istantaneamente paraboliche.

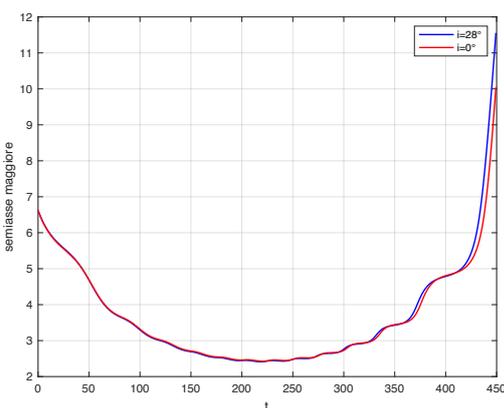


Figura 4.88

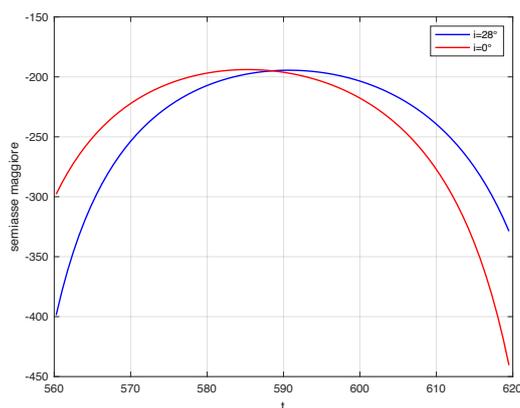


Figura 4.89

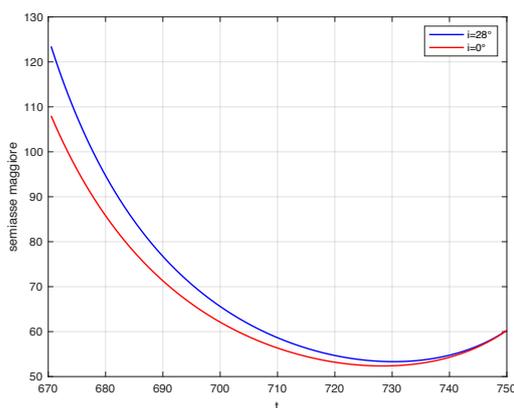


Figura 4.90

Analizzando l'evoluzione dell'inclinazione della traiettoria nel tempo raffigurata in figura 4.91 si può osservare come il tasso di inclinazione totale da colmare sia stato realizzato in 3 frazioni: una prima frazione  $\Delta i_1 = 12.5^\circ$  colmata prima della TLI, una seconda  $\Delta i_2 = 22.5^\circ$  colmata proprio in piena TLI, facendo a questo punto incrementare l'inclinazione a  $35^\circ$  e una terza quindi negativa  $\Delta i_3 = -7^\circ$  per raggiungere i  $28^\circ$  richiesti. Il motivo per il quale l'inclinazione della traiettoria dello spacecraft abbia oltrepassato quella necessaria di circa 7 gradi per poi decrementare fino al valore desiderato potrebbe risiedere proprio nella conservazione dello schema che è alla base del corrispettivo caso di traiettoria piana. Si può notare come il picco nell'inclinazione venga raggiunto in corrispondenza del picco dell'eccentricità e dunque dell'ultimo picco nell'impulso specifico.

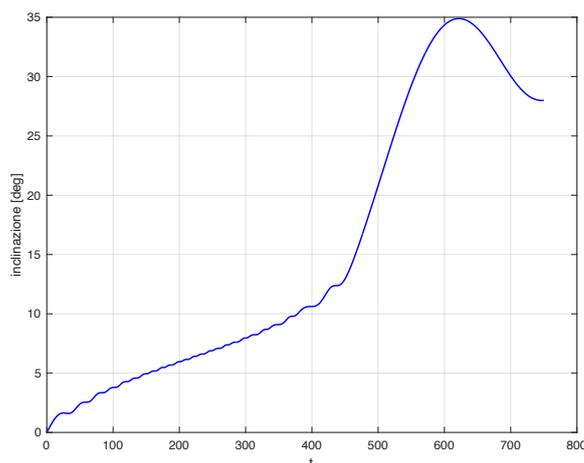


Figura 4.91

Da un lato si può comunque sottolineare come di fondo sia corretto partizionare il tasso di inclinazione totale in più frazioni per alleggerire il computo del  $\Delta V$  rispetto al caso in cui si decidesse di effettuare l'intero cambio di piano alla fine. Di solito la partizione prevede però una distribuzione più eterogenea con cambi di piccola entità in prossimità delle orbite più basse, dove la velocità è maggiore e cambi più corposi in modulo presso le orbite ove la quota sia la più alta possibile, dove la velocità è bassa. Com'è possibile infatti nell'equazione seguente, il  $\Delta V$  necessario ad una variazione del piano della traiettoria non è proporzionale solo al  $\Delta i$  da colmare ma anche alla velocità tangenziale corrispondente al punto di manovra:

$$\Delta V_{incl} = 2v_{\theta} \sin\left(\frac{\Delta i}{2}\right)$$

Tale logica viene perseguita ad esempio nel caso di trasferimenti verso la Luna a bassa energia (Low Energy Transfer), come discusso nel capitolo 1.

Dall'altro lato la modalità con cui è stata effettuata partizione in questo caso dunque non sembrerebbe apparentemente del tutto ottimale data l'omogeneità delle frazioni, in particolare della prima, la quale è quasi la metà del cambio di inclinazione totale. Tuttavia ciò potrebbe risiedere in alcune piccole criticità del codice relative a missioni con durate più alte, oltre che alla schematicità di base evidenziata precedentemente. Di seguito infatti viene proposta l'evoluzione dell'inclinazione nel tempo per la simulazione di una missione della durata di 1 giorno circa in figura 4.92, praticamente infattibile nella realtà ma presentata qui al solo scopo di chiarire tale tematica.

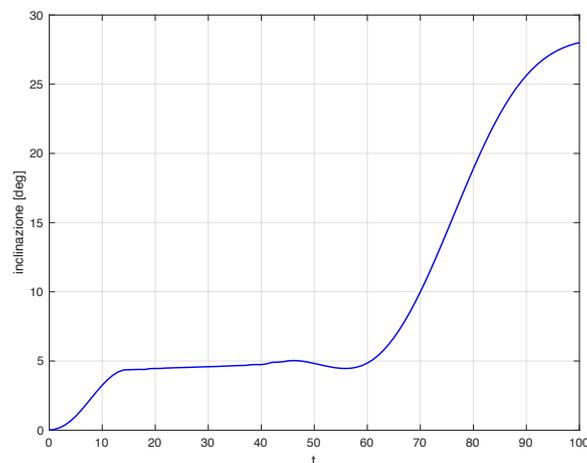


Figura 4.92

Si può notare come in questo caso oltre ad esserci una più corretta partizione con un primo cambio di inclinazione di soli  $5^\circ$  ed il restante di  $23^\circ$  distribuito lungo la TLI, non vi sono manovre di aggiustamento dell'inclinazione stessa, la quale incrementa gradualmente fino al valore desiderato al termine della missione.

Tornando invece al caso in esame di una missione lunga 7 giorni viene infine qui proposta la traiettoria in grafici cartesiani a tre dimensioni, dove sono stati indicate la posizione iniziale della Luna all'inizio della missione e in rosso il tragitto eseguito da quest'ultima lungo la sua orbita durante la trasferta dello spacecraft, indicata invece in blu (in Figura 4.93). Si può apprezzare l'eccessiva inclinazione raggiunta ad eccentricità massima della traiettoria (in Figura 4.94).

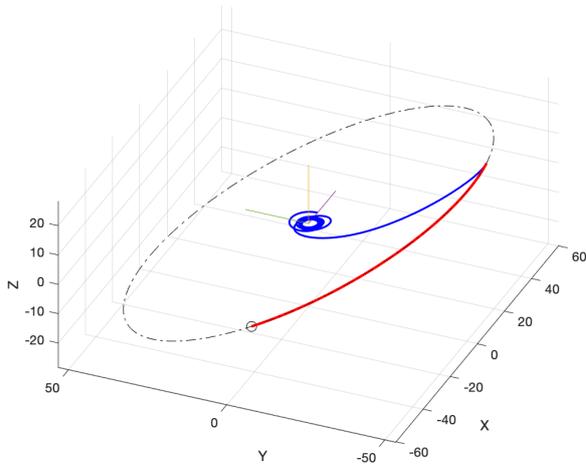


Figura 4.93

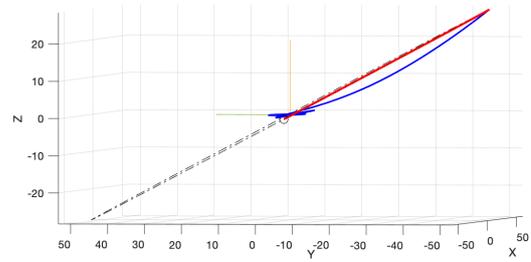


Figura 4.94

## 4.5.2 DURATA DI MISSIONE: 10 GIORNI

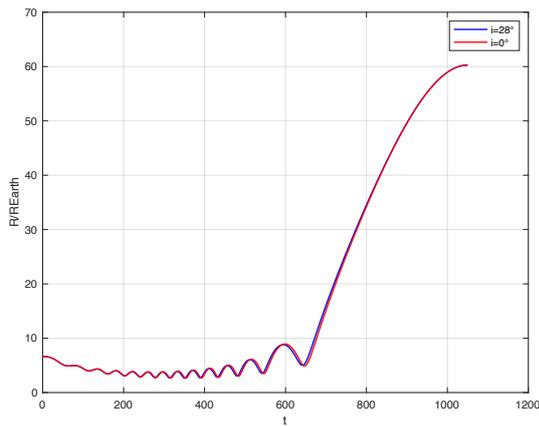


Figura 4.95

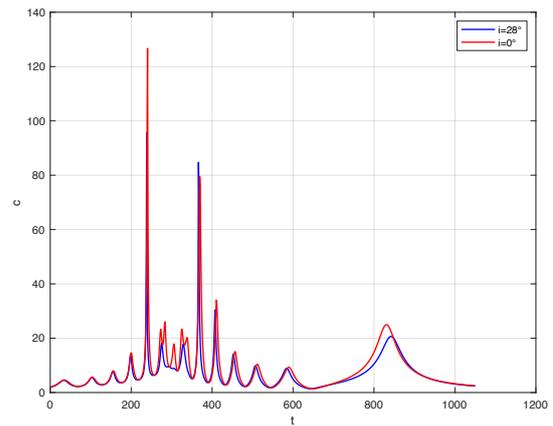


Figura 4.96

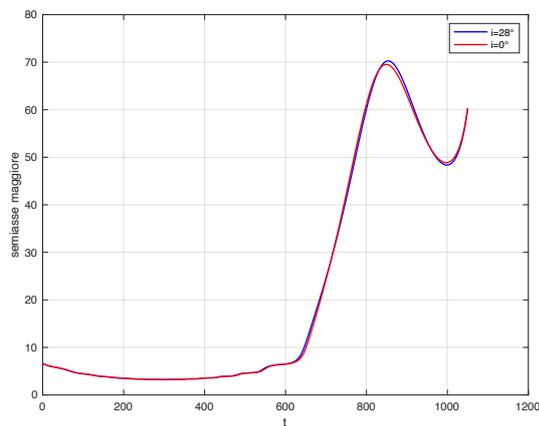


Figura 4.97

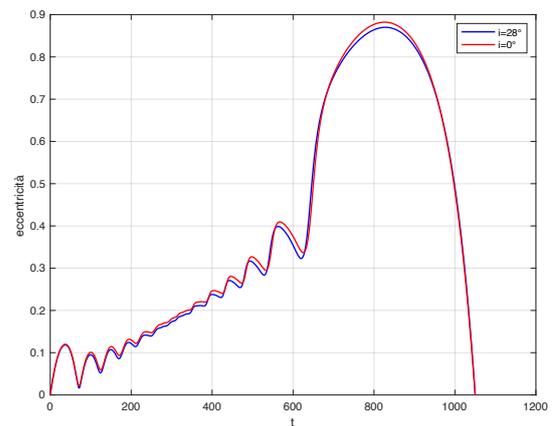


Figura 4.98

Nel caso di missione della durata di 10 giorni valgono le stesse considerazioni effettuate nel caso precedente, in cui il cambio di piano non modifica di fatto la struttura della trasferta la quale segue lo stesso impianto della corrispondente traiettoria piana. Le differenze vengono riscontrate unicamente nei valori dell'impulso specifico (in Figura 4.96), anche qui tendenzialmente più bassi nel caso di traiettoria con cambiamento di piano, i quali si rispecchiano nel decremento della massa finale rispetto al caso di traiettoria piana. In particolare si può evidenziare come la coincidenza tra i due casi venga raggiunta perfettamente anche negli andamenti del semiasse maggiore in figura 4.97, con le traiettorie che risultano entrambe interamente ellittiche (figura 4.98).

Per quanto riguarda l'evoluzione dell'inclinazione nel tempo (in Figura 4.99) si nota sostanzialmente lo stesso andamento del caso precedente (durata di missione di 7 giorni) eccetto che per il tratto finale, in cui nonostante venga raggiunta un'inclinazione pari a  $26^\circ$  circa in corrispondenza di  $t = 850$  (e quindi in corrispondenza dell'eccentricità massima e dell'ultimo picco nell'impulso specifico), l'inclinazione non incrementa ulteriormente fino al valore desiderato ma dapprima decrementa fino a  $23^\circ$  per poi salire nuovamente a  $28^\circ$  in prossimità dell'orbita lunare. Tali anomalie riscontrate anche nel caso precedente potrebbero essere dovute a delle criticità del codice Fortran; tuttavia i risvolti in termini di massa finale non risultano fortemente impattanti.

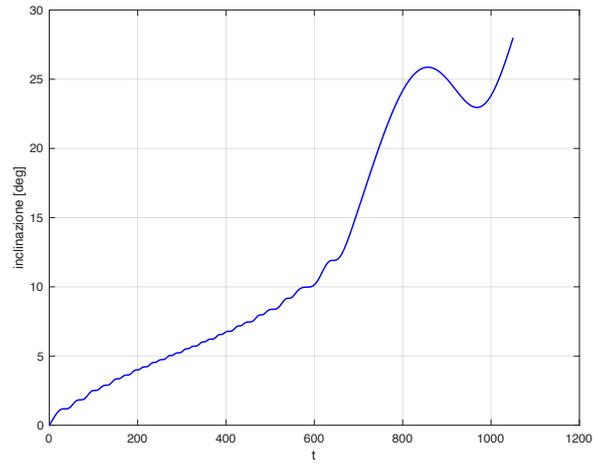


Figura 4.99

In basso vengono nuovamente proposti i grafici cartesiani della traiettoria (nelle Figura 4.100 e 4.101), in cui ancora una volta è possibile notare l'anomalia dell'inclinazione nel tratto finale.

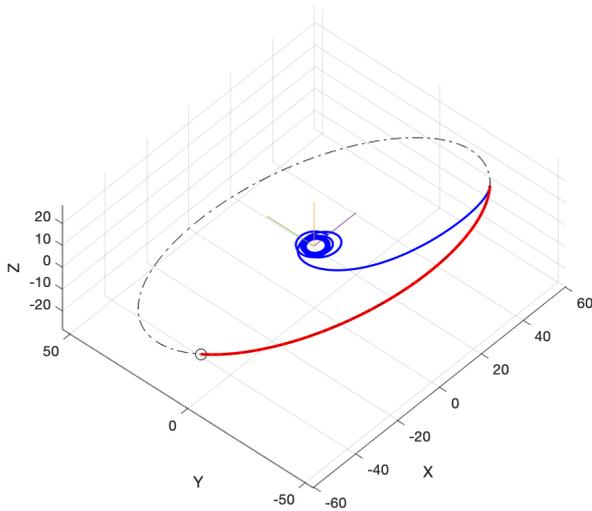


Figura 4.100

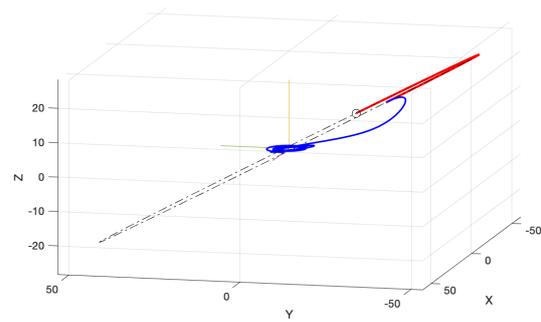


Figura 4.101

## 4.6 CONSIDERAZIONI FINALI

Dalla totalità delle considerazioni fatte in precedenza si può infine notare come tutte le traiettorie analizzate, in particolare quelle relative alle trasferte GEO - Luna, rispecchiano le caratteristiche del Direct Transfer spiegato nel capitolo 2. In particolare nel caso di trasferta piana GEO-Luna si è potuto notare come le missioni più efficienti avevano durate che si aggiravano effettivamente tra i 4 e i 7 giorni come evidenziato nel capitolo 1, nonostante si sia ridotto il sistema Terra-Luna-spacecraft ad un problema a due corpi, con corpo centrale coincidente con la Terra.

Le traiettorie risultano certo approssimate rispetto ai casi reali, tuttavia anche le semplificazioni apportate hanno permesso comunque di capire maggiormente fenomeni e aspetti non solo legati alla problematica dell'ottimizzazione ma anche all'utilizzo e al funzionamento simulato di propulsori ad impulso specifico variabile.

## CAPITOLO 5: CONCLUSIONI

L'elaborazione di questa tesi, come tutti i lavori in cui ci si approccia per la prima volta ad un problema del tutto nuovo, non è stata semplice ed ha richiesto sacrificio e pazienza. Come affermato nell'introduzione al capitolo 4, affrontare un problema di ottimo al sistema Terra-Luna, nonostante la riduzione del problema da 3 a 2 corpi, ha comunque creato notevoli difficoltà impostando una LEO come orbita di partenza dello spacecraft. Tale tesi infatti aveva come obiettivo originario quello di dare un maggior approfondimento e spazio anche per le traiettorie LEO-Luna, ritenute di notevole importanza per il contesto storico del momento.

La forte non linearità del problema ha reso il calcolo delle traiettorie molto complicato dal punto di vista numerico, ed anche piccole variazioni, costituite dai piccoli incrementi nella durata della missione stravolgevano i risultati privandoli di coerenza con i risultati ottenuti per durate minori. In particolare si è scoperto che ciò era dovuto per gran parte alla variabile  $\theta$ , ossia al numero di giri, il quale crescendo spropositatamente per via della forte attrazione gravitazionale ad orbite LEO rendeva impraticabile l'ottenimento di dati sensati sulla massa finale nonostante le non elevate durate di missione imposte. Un altro dei problemi riscontrati è stato ad esempio l'ottenimento di masse finali decrescenti al crescere della durata nonostante almeno per il numero di giri si fosse riuscito a trovare dei valori ragionevoli.

Le seguenti difficoltà che hanno reso il percorso iniziale di tale tesi molto farraginoso (facendo impiegare anche qualche mese in più di lavoro) hanno determinato la decisione di dividere l'intera traiettoria LEO-Luna in due sub-traiettorie: la prima costituita da una trasferta LEO-GEO e la seconda dalla trasferta GEO-Luna. Anche se tale metodo ha risolto solo in parte i problemi sopra citati relativi alle basse quote, dato che anche la traiettoria LEO-GEO è divenuta a quel punto quella che ha creato le medesime difficoltà, ha dato comunque la possibilità di "scaricare" l'onere degli incrementi di durata sulla traiettoria GEO-Luna, la quale si è rivelata invece molto positiva e fluida nell'ottenimento dei risultati. Ha dato inoltre la possibilità di ottenere dati preziosi dal punto di vista formativo sulla costruzione di traiettorie ad impulso specifico variabile e sull'utilità di quest'ultimo specifico fattore il quale ha costituito il fulcro attorno al quale è ruotato l'intero lavoro; di fatto quindi lo studio della traiettoria GEO-Luna non è stato solo un mezzo per completare l'analisi di una traiettoria più estesa (la LEO-Luna originaria) bensì è divenuto con il tempo il tema più corposo di tale tesi che ha permesso anche di analizzare traiettorie con cambi di piano (i quali sarebbero stati impensabili con la LEO-Luna).

La sub-traiettoria LEO-GEO come si è detto precedentemente ha creato comunque delle difficoltà nell'ottenimento di dati oltre una certa durata di missione; inoltre ci si è accorti che in assenza di un vincolo che rappresentasse la presenza fisica della Terra e della sua atmosfera, dunque l'imposizione a non scendere oltre un certo raggio, la traiettoria dello spacecraft scendeva a quote molto basse rendendo tali risultati non realistici, almeno parzialmente. Tuttavia anche tali risultati hanno fatto comprendere ancor di più l'estrema complessità della risoluzione di un problema di ottimo da più punti di vista, in maniera particolare se applicato anche al contesto preso in esame.

Tutto ciò ha reso tale tesi un lavoro, se pur difficoltoso, estremamente soddisfacente: misurarsi con un problema così complesso riuscendo a trarne risultati che siano non solo per la maggior parte coerenti ma soprattutto estremamente formativi è stato motivo di grande appagamento. Si ricorda sempre che sono state apportate notevoli semplificazioni a tale problematica che ne hanno permesso l'approccio; ma tali semplificazioni hanno comunque permesso di compiere un primo passo il quale si pensa possa aver dato comunque i suoi frutti.



# BIBLIOGRAFIA

- [1] <https://descanso.jpl.nasa.gov/monograph/series12/LunarTraj--05Chapter4TransferstoLowLunarOrbits.pdf>
- [2] <http://electricrocket.org/IEPC/245.pdf>
- [3] <https://www.esa.int/esapub/bulletin/bullet103/biesbroek103.pdf>
- [4] [https://www.colorado.edu/faculty/kantha/sites/default/files/attached-files/webber\\_vasimr.pdf](https://www.colorado.edu/faculty/kantha/sites/default/files/attached-files/webber_vasimr.pdf)
- [5] [https://www.adastrarocket.com/wp-content/uploads/2022/06/VASIMR\\_IEPC2022\\_525-Paper-final.pdf](https://www.adastrarocket.com/wp-content/uploads/2022/06/VASIMR_IEPC2022_525-Paper-final.pdf)
- [6] <https://www.adastrarocket.com/our-engine/>
- [7] [https://nucleus.iaea.org/sites/fusionportal/Atoms%20for%20Space/02\\_Ad%20Astra%20Rocket%20Company%20Developing%20the%20VASIMR%20Engine%20Historical%20Perspective,%20Present%20Status%20and%20Future%20Plans.pdf](https://nucleus.iaea.org/sites/fusionportal/Atoms%20for%20Space/02_Ad%20Astra%20Rocket%20Company%20Developing%20the%20VASIMR%20Engine%20Historical%20Perspective,%20Present%20Status%20and%20Future%20Plans.pdf)
- [8] Lorenzo Casalino, "Ottimizzazione Indiretta di traiettorie spaziali".
- [9] Lorenzo Casalino, "Equazioni in coordinate sferiche".
- [10] Howard D. Curtis, "Orbital Mechanics for Engineering Students", Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005