

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica -
orientamento progettazione degli impianti

Tesi di Laurea Magistrale

**Sviluppo di uno strumento di calcolo per valutare
le condizioni di comfort ottenute con sistemi
radianti ad alta temperatura**



**Politecnico
di Torino**

Relatore:

Prof. Marco Carlo Masoero

Relatori aziendali:

Dott. Sergio Strata - Ath Italia Srl

Ing. Filippo Trombetta - Iren Spa

Candidato:

Francesco Di Gesù

matricola 292819

ANNO ACCADEMICO 2023-2024

Abstract

Ad oggi i software utilizzati nella progettazione di impianti di riscaldamento sono principalmente di disegno tecnico assistito e non tengono conto del benessere dell'individuo. L'obiettivo del lavoro è sviluppare uno strumento di calcolo di ausilio che vada incontro a questa esigenza, soffermandosi sulle condizioni che determinano ciò che viene definito comfort termico. Il lavoro si concentra in particolare sul calcolo della temperatura media radiante all'interno di un ambiente, uno dei sei parametri del comfort individuati di Fanger durante i suoi studi. In conclusione, a seguito di ipotesi semplificative, si è giunti ad ottenere uno strumento di calcolo che permette di determinare la sensazione termica secondo il modello stazionario PMV/PPD sviluppato da Fanger, in un insieme di punti in cui l'ambiente è stato suddiviso.

Indice

- riscaldamento radiante infrarosso..... pag. 5
- Ath Italia s.r.l..... pag. 7
- obiettivi..... pag. 8
- analisi sul comfort termico..... pag. 9
 - termoregolazione del corpo umano..... pag. 9
 - bilancio energetico del corpo umano..... pag. 10
 - equazioni di Fanger..... pag. 12
- ipotesi e modello adottato per definire la geometria dell'ambiente studiato..... pag.14
- descrizione programma di calcolo..... pag. 16
 - temperatura media radiante T_{mr} dell'ambiente..... pag. 17
 - temperatura media radiante T_{mr} dell'ambiente, con i corpi scaldanti..... pag. 24
- risultati ottenuti con il modello PMV/PPD di Fanger..... pag. 34
- risultati ottenuti in termini di ERF..... pag. 37
- obiettivi raggiunti e possibili sviluppi futuri dello strumento di calcolo..... pag.41
- esempi con variazione della dimensione dell'ambiente e dei dispositivi impiegati..... pag.42
 - variazione delle dimensioni dell'ambiente di studio..... pag.42
 - variazione del numero e dell'altezza dei corpi scaldanti..... pag.44
 - variazione della potenza e della direzione di puntamento dei corpi scaldanti..... pag.46
- appendice A..... pag.49
 - calore sensibile perso attraverso la pelle..... pag.49
 - calore perso per evaporazione attraverso la pelle..... pag.50
 - calore perso attraverso la respirazione..... pag.51
- appendice B..... pag.52
- ringraziamenti..... pag.54
- bibliografia..... pag.55

Riscaldamento radiante ad infrarosso

Il sistema di riscaldamento radiante ad infrarosso è frequentemente applicato nel riscaldamento di hangar di aerei, capannoni industriali, magazzini, serre e palestre. Per riscaldare spazi esterni come dehors di ristoranti, aree di carico scarico, atri o durante gli eventi e le manifestazioni sportive all'aperto. Sono utili, inoltre per lo scioglimento di neve e ghiaccio.

Questi sistemi permettono di riscaldare le persone o i locali d'interesse senza contatto, mediante il trasferimento di calore da una sorgente termica attraverso la radiazione. Le lampade ad infrarosso, con temperatura della sorgente che varia da 150 a 2760 °C, sono suddivise in tre gruppi:

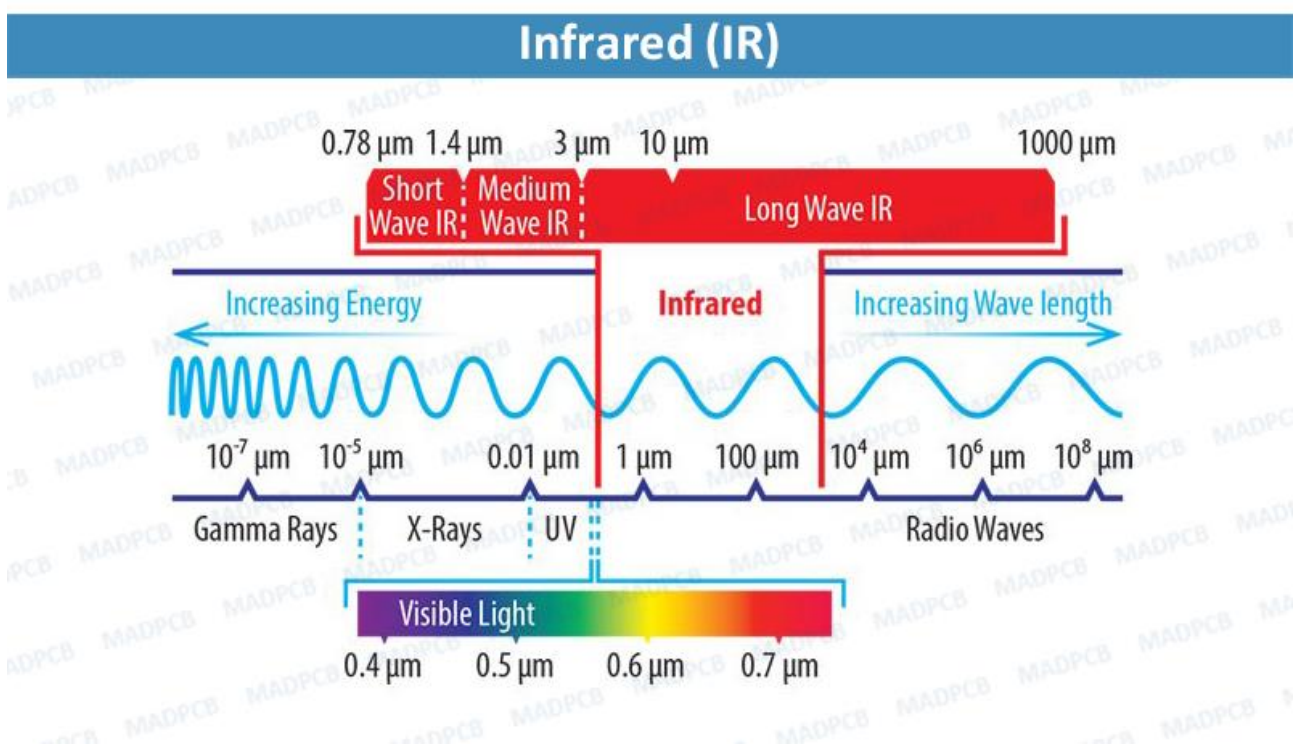


Figura 1. Spettro della radiazione elettromagnetica

- ad alta intensità, IR-A, riscaldatori ad infrarosso vicino, a lunghezza d'onda corta che operano con temperatura della sorgente da 980 fino a 2760 °C;
- a media intensità, IR-B, riscaldatori ad infrarosso medio, a lunghezza d'onda media che operano con temperatura della sorgente da 650 °C fino a 980 °C;
- a bassa intensità, IR-C, riscaldatori ad infrarosso lontano, a lunghezza d'onda lontana che operano con temperatura della sorgente da 150 fino a 650 °C.

I radiatori ad infrarosso sono efficaci nel riscaldare punti specifici di un ambiente, tuttavia, grazie alla loro alta efficienza, possono essere utilizzati anche per il riscaldamento totale di grandi aree e di interi edifici. Trasferiscono calore direttamente agli oggetti solidi mentre solo una piccola parte di calore è persa durante la trasmissione a causa dell'aria, in quanto basso

assorbitore di calore radiante. Inoltre, dato che non richiedono un mezzo di trasferimento intermedio come aria o acqua, non sono necessari ventilatori o pompe di ricircolo.

La radiazione emessa riscalda gli oggetti, i pavimenti, le pareti e tutte le superfici presenti nell'ambiente di interesse, che a loro volta rilasciano calore all'aria per convezione. Questo fenomeno di re-irradiazione degli oggetti circostanti e di calore rilasciato per convezione continua anche quando i dispositivi vengono spenti, quando non sono necessari. Una volta riaccesi diventano operativi in pochi minuti.

Ad oggi, i radiatori ad infrarossi sono di tipo a gas o elettrico. Nel primo caso è presente una specifica superficie radiante che viene riscaldata attraverso il contatto diretto con una fiamma o con i gas combustibili prodotti in una camera di combustione. Nel secondo si sfrutta il calore prodotto dalla corrente elettrica che passa in un filamento o un elemento sottile ad alta resistenza.

È verso questa seconda direzione che si muove ATH Italia Srl.

ATH Italia s.r.l.

L'azienda propone soluzioni innovative basate sull'utilizzo dell'energia elettrica per tutte le esigenze degli edifici ad energia positiva. È un'azienda dinamica, attenta ai problemi ambientali ed energetici. Le proposte per il riscaldamento ATH sono esclusivamente elettriche e sono specifiche per il comfort invernale degli ambienti, per la fruibilità di spazi esterni, di aree delimitate e di aree utilizzate saltuariamente, per la sicurezza dei percorsi esterni e per la protezione antigelo degli impianti.

Uno staff tecnico di lunga esperienza nel settore della progettazione e realizzazione di impianti termici (condizionamento, riscaldamento, ecc.), è in grado di offrire soluzioni e progetti per ogni applicazione e di offrire un servizio di assistenza professionale in tutte le fasi di sviluppo del progetto, dalla fase preventiva a quella esecutiva.

Può effettuare analisi energetiche e simulazioni sul comportamento dinamico dei locali dotati di impianti di riscaldamento e fornire supporto alla progettazione di tutti gli impianti che utilizzano i propri sistemi elettrici.

Tutti i prodotti ATH sono certificati secondo le norme europee.

Obiettivi

Ad oggi i software che vengono utilizzati come ausilio alla progettazione di impianti di riscaldamento sono tipicamente di disegno tecnico assistito e non tengono conto dello stato di benessere dell'individuo. L'obiettivo di questo lavoro è sviluppare un programma di calcolo che vada incontro a questa esigenza, ponendo al centro le condizioni che forniscono ciò che viene definito comfort termico: “quella condizione mentale che esprime soddisfazione con l'ambiente termico e corrisponde ad una valutazione soggettiva” (ASHRAE *Standard* 55). La definizione lascia aperto all'interpretazione il significato di cosa si intenda per “condizione mentale” o “soddisfazione”, ma enfatizza correttamente il concetto che il giudizio del comfort è un processo cognitivo che coinvolge diversi input, influenzati a loro volta da altri processi fisici, fisiologici e psicologici.

In generale, il comfort è raggiunto quando la temperatura del corpo è mantenuta entro certi limiti, il livello di umidità della pelle è basso, e lo sforzo fisiologico di regolazione del corpo umano è minimo. Il comfort dipende anche dai comportamenti incondizionati o condizionati, guidati dalla sensazione termica e di umidità volti a ridurre il discomfort. Alcuni esempi sono cambiare il proprio vestiario, cambiare l'attività che si sta svolgendo, cambiare la propria postura o posizione, modificare le impostazioni del termostato dell'ambiente, aprire una finestra, lamentarsi o semplicemente lasciare la stanza. Sorprendentemente, nonostante la differenza di clima, delle condizioni di vita e delle culture di tutto il mondo, la temperatura che le persone prediligono per il comfort, sotto simili condizioni di vestiario, attività, umidità e velocità dell'aria, si è scoperto essere molto simile.

Per lo sviluppo del programma di calcolo si è scelto di utilizzare Excel, garantendo una più semplice ed immediata comprensione.

Analisi sul comfort termico

La trattazione del comfort termico è stata effettuata per la prima volta da Povl Ole Fanger, ingegnere esperto nel campo del comfort termico e della percezione degli ambienti interni. Le equazioni del comfort di Fanger sono espressioni che correlano tra loro le grandezze che influenzano il comfort termoigrometrico di un individuo in un determinato ambiente. Per comfort termoigrometrico si intende la condizione per cui una persona non avverte sensazione di caldo o di freddo, ma si trova in equilibrio termico con l'ambiente che la circonda. Delle sei grandezze individuate da Fanger, quattro sono di tipo ambientale e due di tipo individuale.

Le grandezze ambientali sono:

- Temperatura dell'aria;
- Temperatura media radiante;
- Velocità dell'aria;
- Umidità relativa;

Le grandezze individuali sono:

- Livello di attività, metabolismo;
- Vestiario.

Fanger ottenne le espressioni del comfort termico attraverso considerazioni teoriche, ma anche mediante un numero elevato di prove sperimentali su persone di sesso, età, attività e vestiario differente, all'interno di sale climatiche dove era possibile variare le condizioni ambientali (quali temperatura, umidità, temperatura media radiante, velocità dell'aria). Alle persone negli ambienti climatizzati veniva chiesto un giudizio sulla sensazione di caldo e di freddo provata.

Termoregolazione del corpo umano

Il corpo umano si comporta come un termostato a 36,8 °C quando a riposo, anche per notevoli variazioni di temperatura ambiente. Questa è infatti la temperatura alla quale avvengono le reazioni biochimiche all'interno del nostro organismo e risultano più efficienti. Una temperatura interna del corpo inferiore a 28 °C circa può portare ad una seria aritmia cardiaca e alla morte mentre una temperatura superiore a 43 °C può causare un danno irreversibile al cervello; per cui, un'attenta regolazione della temperatura corporea è fondamentale sia per il comfort che per la salute dell'individuo. Il nostro corpo è in grado, dunque, di mantenere una temperatura interna pressoché costante grazie ad un sistema di regolazione in feed-back, che fa uso per la regolazione del segnale di determinati sensori.

L'organismo umano si comporta come una macchina termica, in cui viene prodotta una certa quantità di calore attraverso l'attività metabolica, viene effettuato un determinato lavoro e viene ceduta una certa quantità di calore all'ambiente esterno. In qualsiasi condizione di temperatura è sempre necessario che ciò avvenga, anche quando la temperatura esterna sia superiore a quella interna, mediante il meccanismo della traspirazione e della sudorazione. Una dissipazione di calore insufficiente porta ad un surriscaldamento interno,

o ipertermia, mentre una dissipazione di calore eccessiva comporta un raffreddamento del corpo, o ipotermia.

L'organo responsabile del controllo dei vari processi fisiologici che regolano la temperatura interna del corpo è l'ipotalamo. Il principale di questi processi è il controllo del flusso sanguigno che giunge alle zone periferiche del corpo e, di conseguenza, alla pelle; quando la temperatura interna sale eccessivamente, entra in gioco il meccanismo della vasodilatazione e si ha un maggior afflusso di sangue alla pelle. Se la differenza di temperatura tra superficie corporea ed ambiente esterno non è sufficiente a far smaltire il calore prodotto tramite il metabolismo, interviene anche il processo di sudorazione; se le condizioni sono favorevoli, l'evaporazione del sudore aumenta la dissipazione del calore in ambiente e raffredda la pelle. Quando la temperatura interna invece si abbassa, subentra la vasocostrizione, e il flusso di sangue si riduce per conservare il calore. Ad una temperatura ancora inferiore, la tensione dei muscoli cresce per generare calore addizionale; si ha una sensazione di brividi lungo tutto il corpo.

In generale, una persona a riposo produce 100 W di calore come effetto del suo metabolismo. Dato che la maggior parte di questo calore è trasferito all'ambiente esterno attraverso la pelle, si definisce l'attività metabolica in termini di calore prodotto per unità di superficie della pelle stessa. Per una persona a riposo, basandosi sul valore medio europeo di area di pelle pari a 1,8 m², corrisponde a circa 58 W/m² ed è definito come 1 met.

Bilancio energetico del corpo umano

Il bilancio termico complessivo dell'organismo umano, che descrive la sua interazione con l'ambiente esterno, è il seguente:

$$M - W = q_{sk} + q_{res} + S = (C + R + E_{sk}) + (C_{res} + E_{res}) + (S_{sk} + S_{cr})$$

dove

M = metabolismo, [W/m²]

W = lavoro esterno, [W/m²]

q_{sk} = calore totale scambiato attraverso la pelle, [W/m²]

q_{res} = calore totale scambiato attraverso la respirazione, [W/m²]

S = accumulo di calore, [W/m²]

C + R = calore sensibile scambiato attraverso la pelle, [W/m²]

E_{sk} = calore totale perso per evaporazione attraverso la pelle, [W/m²]

C_{res} = quota convettiva di calore perso per respirazione, [W/m²]

E_{res} = quota evaporativa di calore perso per respirazione, [W/m²]

S_{sk} = accumulo di calore superficiale del corpo, [W/m²]

S_{cr} = accumulo di calore interno al corpo, [W/m²]

Tutti i termini sopra riportati sono espressi come flusso termico per unità di superficie corporea, in W/m^2 .

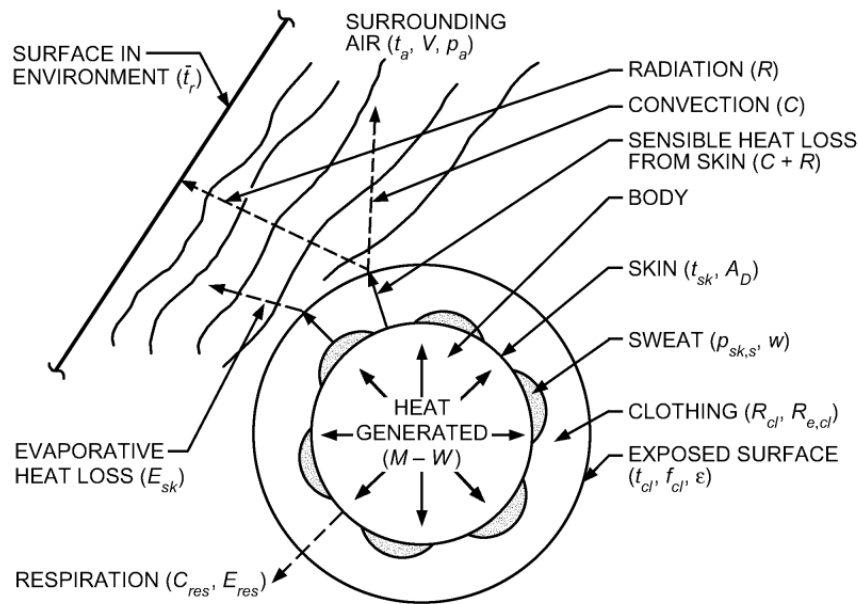


Figura 2. Interazione termica tra il corpo umano e l'ambiente

Il metabolismo M corrisponde alla quota richiesta affinché una persona svolga una particolare attività, più la quota richiesta per l'aumento della tensione nei muscoli quando i brividi si manifestano. Una parte dell'energia prodotta all'interno del corpo potrebbe essere trasformata in lavoro esterno W ; il calore netto prodotto $M - W$ è trasferito all'esterno attraverso la pelle, q_{sk} e tramite la respirazione, q_{res} , con l'aggiunta di un termine di accumulo S che può essere positivo o negativo, portando ad un aumento o decremento della temperatura interna del corpo.

Il calore interno viene dissipato attraverso diverse modalità di scambio termico: flusso di calore latente per l'evaporazione del sudore, E_{rsw} e per la diffusione del vapore attraverso la pelle, E_{dif} , flusso di calore sensibile per convezione durante la respirazione, C_{res} , flusso di calore latente per l'evaporazione dell'umidità durante la respirazione, E_{res} . Il calore sensibile attraverso la pelle, $C + R$, è invece disperso per conduzione, convezione e irraggiamento in modo complesso; i tre termini non sono indipendenti tra loro, dunque, si considera che il calore ceduto dalla pelle ai vestiti per conduzione è a sua volta ceduto all'ambiente per convezione ed irraggiamento.

In condizioni stazionarie il termine di accumulo di calore S deve essere pari a zero; l'organismo non deve né cedere né assorbire calore in totale, in caso contrario si riscalderebbe o si raffredderebbe.

Equazioni di Fanger

La descrizione matematica del bilancio energetico del corpo umano combina approcci razionali ed empirici per descrivere gli scambi termici con l'ambiente. I meccanismi di scambio termico sensibile e latente vengono descritti attraverso la teoria del trasferimento del calore mentre le espressioni empiriche vengono utilizzate per determinare i valori dei coefficienti che descrivono la velocità con cui questi scambi avvengono. Le equazioni empiriche sono anche utilizzate per descrivere i meccanismi di controllo termofisiologico messi in atto dall'organismo.

Fanger mise in relazione i dati sul comfort ricavati dai suoi esperimenti con le variabili fisiologiche. Egli notò che per un dato livello di attività metabolica, M e quando il corpo non è lontano dalla condizione di neutralità, gli unici parametri fisiologici che influenzano il bilancio termico sono la temperatura media della pelle, T_{sk} e la sudorazione, E_{rsw} . Ottenere il bilancio termico, tuttavia, non è sufficiente per stabilire il comfort termico; in un ampio range di condizioni ambientali per cui si può avere il bilancio termico, solo un piccolo range di queste fornisce il comfort termico. Fanger ricavò grazie ai suoi studi le equazioni che indicano i valori di T_{sk} e E_{rsw} che forniscono il comfort termico:

$$T_{sk,req} = 35,7 - 0,0275 \times (M - W)$$

$$E_{rsw,req} = 0,42 \times (M - W - 58,15)$$

La prima equazione indica la temperatura che deve avere la pelle, in funzione del metabolismo, perché la persona non avverta sensazioni di caldo o di freddo; se aumenta il metabolismo, la temperatura della pelle deve diminuire per avere comfort, e viceversa. La seconda equazione indica la dipendenza del calore perso per l'evaporazione del sudore sempre dal metabolismo.

Con queste due relazioni empiriche, Fanger riuscì a collegare le equazioni fisiologiche e di flussi termici, relative ai termini del bilancio energetico umano, con le percezioni di comfort termico. Sostituendo le due equazioni sopra riportate in quelle dei termini che compongono l'equazione di bilancio energetico, Fanger ottenne un'espressione in sei variabili, quattro ambientali e due individuali, che definisce il comfort in condizioni di stato stazionario. Questa equazione, funzione delle sei variabili del comfort già citate in precedenza, prende il nome di "equazione del comfort di Fanger"; quando cinque di queste variabili vengono fissate, la sesta è univocamente determinata.

$$\begin{aligned} M - W = & 3,96 \times 10^{-8} f_{cl} [(T_{cl} + 273)^4 - (\bar{T}_r + 273)^4] + f_{cl} h_c (T_{cl} - T_a) \\ & + 3,05 [5,73 - 0,007(M - W) - p_a] + 0,42 [(M - W) - 58,15] \\ & + 0,0173M(5,87 - p_a) + 0,0014M(34 - T_a) \end{aligned}$$

dove:

$$\begin{aligned} T_{cl} = & 35,7 - 0,0275(M - W) \\ & - R_{cl} \{ (M - W) - 3,05 [5,73 - 0,007(M - W) - p_a] - 0,42 [(M - W) - 58,15] \\ & - 0,0173M(5,87 - p_a) - 0,0014M(34 - T_a) \} \end{aligned}$$

Per i valori di h_c e f_{cl} Fanger usò le seguenti relazioni:

$$h_c = \begin{cases} 2,38(T_{cl} - T_a)^{0,25}, & 2,38(T_{cl} - T_a)^{0,25} > 12,1\sqrt{v} \\ 12,1\sqrt{v}, & 2,38(T_{cl} - T_a)^{0,25} < 12,1\sqrt{v} \end{cases}$$

$$f_{cl} = \begin{cases} 1,0 + 0,2I_{cl}, & I_{cl} < 0,5 \text{ clo} \\ 1,05 + 0,1I_{cl}, & I_{cl} > 0,5 \text{ clo} \end{cases}$$

Per le equazioni che descrivono i termini presenti all'interno del bilancio energetico del corpo umano si rimanda alla visione dell'appendice A, in fondo al seguente documento.

L'equazione del comfort di Fanger è stata in seguito generalizzata per includere un range di sensazioni termiche, usando un indice di voto medio previsto, o PMV. Questo parametro indica la risposta media di un grande numero di persone secondo la scala di sensazione termica sviluppata dall'ASHRAE:

- +3 molto caldo
- +2 caldo
- +1 leggermente caldo
- 0 neutro
- 1 leggermente freddo
- 2 freddo
- 3 molto freddo

Fanger correlò il PMV alla differenza tra il reale flusso di calore ceduto dal corpo in un dato ambiente e il flusso di calore richiesto per il comfort per una specifica attività:

$$PMV = [0,303e^{-0,036M} + 0,028]L$$

dove L è il carico termico dato dalla differenza tra i termini a sinistra e a destra dell'equazione del comfort di Fanger, calcolato con i valori reali delle condizioni ambientali; rappresenta dunque la differenza tra la produzione di calore interna al corpo e le perdite di calore nell'ambiente reale, per una persona mantenuta ipoteticamente a valori di comfort di T_{sk} e E_{rsW} per il reale livello di attività metabolica.

La temperatura del vestiario T_{cl} , difficile da stimare, è calcolata per iterazione:

$$T_{cl} = 35,7 - 0,028(M - W) - R_{cl}\{39,6 \times 10^{-9}f_{cl}[(T_{cl} + 273)^4 - (\bar{T}_r + 273)^4] + f_{cl}h_c(T_{cl} - T_a)\}$$

In seguito, Fanger correlò il PMV anche con la percentuale prevista di insoddisfatti, o PPD, dove con insoddisfatti si intende tutti coloro che non votano -1, 0, o +1. Una percentuale di individui insoddisfatti pari al 10% corrisponde ad un PMV di $\pm 0,5$, e anche con un PMV uguale a zero, rimane una percentuale di persone insoddisfatte del 5%.

$$PPD = 100 - 95e^{[-(0,03353PMV^4 + 0,2179PMV^2)]}$$

Ipotesi e modello adottato per definire la geometria dell'ambiente di studio

L'ambiente oggetto di studio è una generica chiesa, ma il programma può essere utilizzato per analizzare una qualsiasi tipologia di ambiente d'interesse. Gli elementi per riscaldare suddetto ambiente sono del tipo radianti ad infrarossi, già discussi in precedenza. Il caso considerato è stazionario.

Le ipotesi semplificative adottate sono le seguenti:

- l'ambiente modellato è un parallelepipedo;
- la persona è identificata come un punto situato all'interno di questo modello;
- le pareti, il pavimento ed il soffitto sono considerati come superfici ad una certa temperatura T , fissa;
- gli elementi riscaldanti sono considerati anch'essi come superfici ad una certa temperatura T ;
- i parametri del comfort di Fanger quali il metabolismo, M , il vestiario, R_{cl} , la temperatura dell'aria, T_a , la velocità dell'aria, v_a , e l'umidità relativa, RH sono considerati fissi.

Il modello adottato è il seguente: l'ambiente studiato è identificato da 1000 punti nello spazio ($10 \times 10 \times 10$). Ogni punto è a sua volta identificato da tre coordinate, secondo un sistema di riferimento ad assi cartesiani x , y , z .

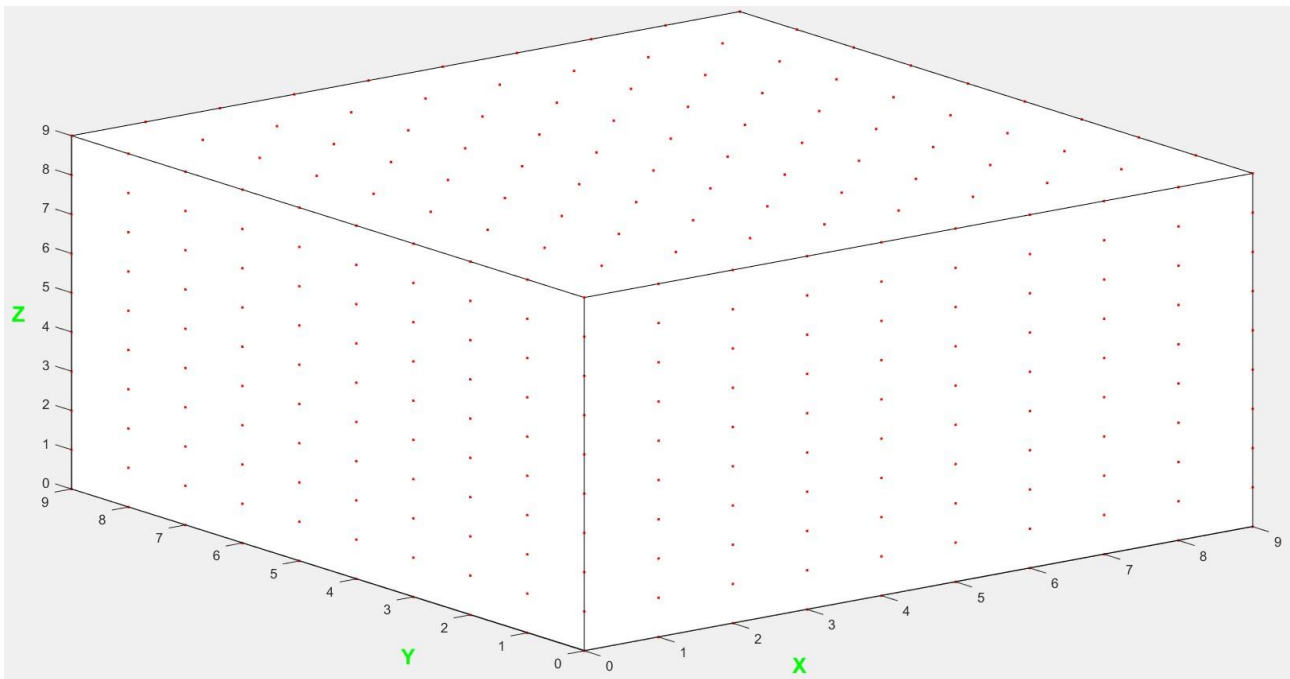


Figura 3. Punti 3D che identificano l'ambiente

Nella figura d'esempio sopra riportata si vede che tutte e tre le coordinate x, y, z variano da 0 a 9 compresi. Il punto [0, 0, 0] è dunque origine del sistema di coordinate adottato e parte dei mille punti che identificano l'ambiente.

Il valore associato alle coordinate dei punti è aggiornato in base alle dimensioni dell'ambiente d'interesse, inserite in input. A ciascun punto corrisponde una cella sul foglio di calcolo Excel. Tutti i punti sono inoltre equispaziati l'uno dall'altro.

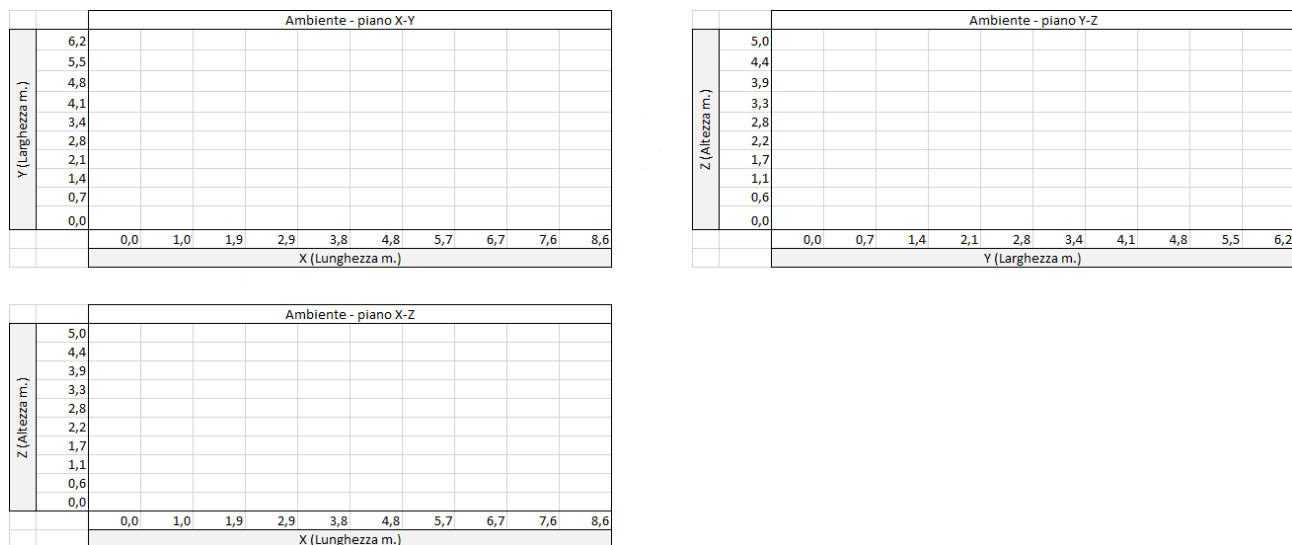


Figura 4. Vista dall'alto, frontale e laterale dell'ambiente sul foglio Excel

La figura sopra è relativa ad un ambiente con le seguenti dimensioni:

- lunghezza 8,6 m;
- larghezza 6,2 m;
- altezza 5 m.

Nel foglio di calcolo Excel si hanno così mille celle, associate a tre valori di coordinate x, y, z rispettivamente.

Descrizione del programma di calcolo

Il programma consiste, in generale, nel calcolo della temperatura media radiante T_{mr} percepita all'interno dell'ambiente d'interesse. Essendo uno dei sei parametri del comfort individuati da Fanger, la temperatura media radiante è direttamente coinvolta nei calcoli per ottenere il benessere dell'individuo. I dispositivi radianti ad infrarossi descritti in precedenza consentono proprio di aumentare la T_{mr} dell'ambiente, trasmettendo calore alla persona principalmente per irraggiamento.

La temperatura media radiante è definita come la temperatura uniforme di un ambiente chiuso immaginario, cioè uno spazio in cui l'individuo che si trova all'interno è avvolto completamente dall'insieme delle superfici che compongono suddetto ambiente, in cui il calore trasferito per irraggiamento dal corpo umano è uguale al calore radiante che viene trasferito nell'ambiente chiuso reale, non uniforme.

A partire da questa definizione, la temperatura media radiante può essere calcolata dalla temperatura misurata delle pareti e superfici circostanti e dalla posizione reciproca di quest'ultime rispetto alla persona. Inoltre, dato che la maggior parte dei materiali da costruzione hanno alta emissività ϵ , tutte le superfici della stanza si possono assumere corpi neri. Un corpo nero è un corpo che è in grado di assorbire tutto ciò che lo incide ed emetterlo a sua volta; una parte di radiazione che incide su un corpo reale viene invece riflessa e trasmessa, dunque, l'emissione derivata da questo corpo viene rapportata all'emissione di un corpo nero, che è la massima possibile. L'emissività ϵ di un corpo è data proprio da questo rapporto e, di conseguenza, è sempre minore di uno per tutti i corpi che non sono neri.

Per calcolare la temperatura media radiante si può quindi usare l'equazione seguente:

$$\bar{T}_r^4 = T_1^4 F_{p-1} + T_2^4 F_{p-2} + \dots + T_N^4 F_{p-N}$$

dove:

\bar{T}_r = temperatura media radiante, [K]

T_N = temperatura superficiale della superficie N, [K]

F_{p-N} = fattore angolare tra una persona e la superficie N

Dato che la somma dei fattori angolari è pari ad uno (l'individuo è completamente avvolto dalle superfici che compongono l'ambiente), la quarta potenza della temperatura media radiante è uguale al valore medio delle temperature delle superfici circostanti, elevate alla quarta potenza e moltiplicate dai rispettivi fattori angolari.

In generale, i fattori angolari sono difficili da determinare e dipendono normalmente dalla posizione e dall'orientazione della persona, come analizzato da Fanger. In questo programma, secondo le ipotesi adottate e descritte in precedenza, questi fattori angolari sono stati ridotti a degli angoli solidi tra le superfici che compongono l'ambiente studiato e l'individuo, idealizzato come un punto nello spazio.

Temperatura media radiante T_{mr} dell'ambiente

Il programma di calcolo è innanzitutto costituito da un insieme di fogli in cui si analizzano le superfici che compongono l'ambiente di studio. Ogni superficie è considerata singolarmente, ciascuna con un proprio foglio di calcolo dedicato.

Per prima cosa viene richiesto di impostare un'altezza di area di calcolo per la quale si vogliono ottenere i risultati. In generale, si considera un valore di altezza pari a 1 m per una persona in piedi e un valore pari a 0,6 m per una persona seduta e, dato che l'ambiente oggetto di studio è una chiesa dove i fedeli sono tipicamente seduti su delle panche, si è selezionato questo secondo valore.

A questo punto si procede con il calcolo dell'angolo solido sotteso dalla superficie presa in esame rispetto a tutti i punti che compongono la pianta dell'ambiente (vista dall'alto, assi x-y), alla altezza impostata in precedenza.

Altezza area valori 0,6

		Mappa dei punti											
Y (Larghezza m.)	6,2												
	5,5												
	4,8												
	4,1												
	3,4												
	2,8												
	2,1												
	1,4												
	0,7												
	0,0												
		0,0	1,0	1,9	2,9	3,8	4,8	5,7	6,7	7,6	8,6		
		X (Lunghezza m.)											

Figura 5. Area celle per il calcolo dell'angolo solido

La procedura per determinare gli angoli solidi è spiegata di seguito.

Innanzitutto, sono assegnati i valori delle tre coordinate x, y, z ad ogni punto e, dunque, ad ogni cella che compone la superficie d'interesse, collocandola in questo modo nello spazio.

Nella figura sotto riportata sono mostrate, a titolo di esempio, le celle con relative coordinate che costituiscono la superficie del pavimento dell'ambiente considerato. In verde si evidenziano le coordinate x, y, z rispettivamente del vertice collocato in alto a sinistra.

S1 (Pavimento)	0,0	1,0	1,9	2,9	3,8	4,8	5,7	6,7	7,6	8,6
	0,0	1,0	1,9	2,9	3,8	4,8	5,7	6,7	7,6	8,6
	0,0	1,0	1,9	2,9	3,8	4,8	5,7	6,7	7,6	8,6
	0,0	1,0	1,9	2,9	3,8	4,8	5,7	6,7	7,6	8,6
	0,0	1,0	1,9	2,9	3,8	4,8	5,7	6,7	7,6	8,6
	0,0	1,0	1,9	2,9	3,8	4,8	5,7	6,7	7,6	8,6
	0,0	1,0	1,9	2,9	3,8	4,8	5,7	6,7	7,6	8,6
	0,0	1,0	1,9	2,9	3,8	4,8	5,7	6,7	7,6	8,6
	0,0	1,0	1,9	2,9	3,8	4,8	5,7	6,7	7,6	8,6
	0,0	1,0	1,9	2,9	3,8	4,8	5,7	6,7	7,6	8,6
X (Lunghezza m.)										
S1 (Pavimento)	6,2	6,2	6,2	6,2	6,2	6,2	6,2	6,2	6,2	6,2
	5,5	5,5	5,5	5,5	5,5	5,5	5,5	5,5	5,5	5,5
	4,8	4,8	4,8	4,8	4,8	4,8	4,8	4,8	4,8	4,8
	4,1	4,1	4,1	4,1	4,1	4,1	4,1	4,1	4,1	4,1
	3,4	3,4	3,4	3,4	3,4	3,4	3,4	3,4	3,4	3,4
	2,8	2,8	2,8	2,8	2,8	2,8	2,8	2,8	2,8	2,8
	2,1	2,1	2,1	2,1	2,1	2,1	2,1	2,1	2,1	2,1
	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4
	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7
	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
Y (Larghezza m.)										
S1 (Pavimento)	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
Z (Altezza m.)										

Figura 6. Esempio di superficie contenente celle con coordinate x, y, z

A questo punto si fa uso della funzione “cerca” di Excel per ottenere le coordinate di un particolare punto d’interesse, selezionato tra quelli in pianta indicati nella figura 5. Questo è il punto rispetto al quale si vuole calcolare l’angolo solido e, dunque, le sue coordinate sono sottratte alle coordinate assolute della superficie per ricavarne le coordinate relative. In seguito, i quattro vertici della superficie vengono normalizzati, prendendo ciascuna delle coordinate e dividendole per il modulo delle coordinate stesse. Così facendo, si immagina di proiettare la superficie in esame su una sfera di raggio unitario, il cui centro coincide proprio con il punto rispetto al quale si sta calcolando l’angolo solido.

	X	Y	Z	modulo	Xnorm	Ynorm	Znorm
v1	-1,0	-5,5	-0,6	5,6	-0,2	-1,0	-0,1
v2	7,6	-5,5	-0,6	9,4	0,8	-0,6	-0,1
v3	7,6	0,7	-0,6	7,7	1,0	0,1	-0,1
v4	-1,0	0,7	-0,6	1,3	-0,7	0,5	-0,5

Figura 7. Normalizzazione dei vertici della superficie del pavimento

Le coordinate di ogni punto sono espresse rispetto ad un sistema di riferimento coincidente con il punto d'interesse, che a sua volta è espresso rispetto ad un sistema di riferimento fisso dell'ambiente analizzato, con origine nel punto di coordinate [0, 0, 0]; il modulo di queste coordinate, uguale alla radice quadrata della somma dei quadrati delle stesse, rappresenta quindi il modulo del vettore che unisce il punto considerato con i quattro vertici della superficie in esame.

Come già anticipato, si ha ora una superficie rettangolare che è stata proiettata su una sfera di raggio unitario, centrata nel punto d'interesse. L'angolo solido Ω cercato, misurato in steradiani [sr] e pari al rapporto tra la porzione di superficie sferica A e il quadrato del raggio della sfera R^2 , non è altro che l'area di questo quadrilatero sferico.

In geometria sferica, si definisce l'area di un poligono sferico come segue:

$$A = R^2(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n - (n - 2) * \pi)$$

dove:

A = area di un poligono sferico di n lati;

α_n = angolo interno al poligono n -esimo;

R = raggio della sfera.

Nel caso in esame, l'area del quadrilatero sferico è pari alla somma dei suoi angoli interni meno 2π .

Per trovare gli angoli interni del quadrilatero sferico si divide lo stesso in due triangoli e si applica la regola dei coseni sferica:

$$\cos(c) = \cos(a) \cos(b) + \text{sen}(a)\text{sen}(b)\cos(C)$$

dove a, b, c sono i generici lati di uno dei due triangoli ricavati tagliando il quadrilatero sferico con una diagonale e C è il generico angolo interno opposto a c , compreso tra i lati a e b .

In generale, i lati di un poligono sferico sono dei cerchi massimi, ottenuti intersecando la sfera unitaria con dei piani passanti per il suo centro. Il quadrilatero proiettato sulla sfera rappresenta, dunque, i quattro vertici normalizzati della superficie presa in esame, collegati tra loro nell'ordine corretto, appunto, da cerchi massimi.

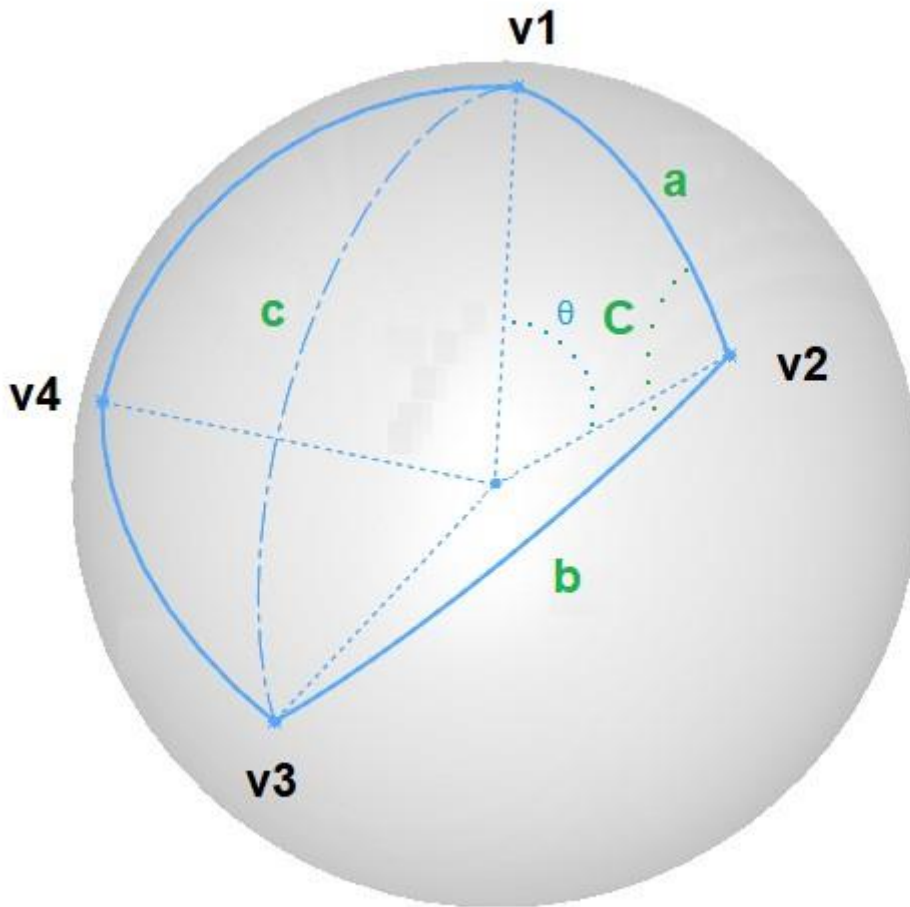


Figura 8. Esempio di quadrilatero sferico tagliato da una diagonale; i lati e la diagonale sono tutti cerchi massimi

Per ricavare il valore di questi lati e della diagonale è sufficiente effettuare il prodotto scalare tra i corrispondenti vettori normalizzati, calcolati in precedenza:

$$a = \vartheta * R = \vartheta$$

$$\vec{v1} \cdot \vec{v2} = |v1||v2| * \cos(a) = \cos(a)$$

dove:

a = lato di un poligono sferico, in geometria euclidea coincide con una generica corda;

R = raggio della sfera;

θ = generico angolo compreso tra i due vettori v1 e v2.

A questo punto, ripetendo l'operazione per tutti e sei gli angoli interni del quadrilatero sferico (sei angoli in quanto si è tagliato lo stesso quadrilatero in due triangoli), è possibile ricavare i valori di questi angoli attraverso la formula inversa della regola dei coseni sferica:

$$C = \cos^{-1} \frac{\cos(c) - \cos(a) \cos(b)}{\text{sen}(a)\text{sen}(b)}$$

dove, per ottenere il valore dei seni dei lati del quadrilatero, si è prima calcolato il valore del lato stesso con l'inverso della funzione coseno e applicato poi la funzione seno:

$$a = \cos^{-1} \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$$

$$\text{sen}(a) = \sin \cos^{-1} \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$$

In generale, gli angoli interni di un poligono sferico coincidono con gli angoli diedri di un generico cono costruito sui vettori dei vertici stessi. Un angolo diedro viene definito come la porzione di spazio formato tra due piani o semipiani aventi per origine la stessa retta; esso può essere considerato come l'estensione del concetto di angolo piano in uno spazio a tre dimensioni.

Una volta determinati tutti gli angoli interni del quadrilatero sferico, è possibile ricavare il valore dell'area del quadrilatero stesso applicando il teorema riportato in precedenza. Come già accennato, il valore dell'area coincide proprio con l'angolo solido sotteso dalla superficie considerata rispetto al punto selezionato.

Ripetendo il procedimento per tutte le celle mostrate in figura 5, si giunge ad ottenere un'area di valori di angoli solidi. Questi valori, per una maggiore comodità di impiego nella formula della temperatura media radiante T_{mr} , vengono resi unitari dividendo ciascun angolo solido per la totalità degli angoli solidi sottesi da una sfera di raggio R unitario, pari a 4π :

		Fattori angolari									
Y (Larghezza m.)	6,2										
	5,5	0,31683	0,34468	0,35307	0,35592	0,35592	0,35307	0,34468	0,31683		
	4,8	0,35528	0,38811	0,39800	0,40131	0,40131	0,39800	0,38811	0,35528		
	4,1	0,36831	0,40344	0,41424	0,41787	0,41787	0,41424	0,40344	0,36831		
	3,4	0,37289	0,40890	0,42011	0,42390	0,42390	0,42011	0,40890	0,37289		
	2,8	0,37289	0,40890	0,42011	0,42390	0,42390	0,42011	0,40890	0,37289		
	2,1	0,36831	0,40344	0,41424	0,41787	0,41787	0,41424	0,40344	0,36831		
	1,4	0,35528	0,38811	0,39800	0,40131	0,40131	0,39800	0,38811	0,35528		
	0,7	0,31683	0,34468	0,35307	0,35592	0,35592	0,35307	0,34468	0,31683		
	0,0										
		0,0	1,0	1,9	2,9	3,8	4,8	5,7	6,7	7,6	8,6
		X (Lunghezza m.)									

Figura 9. Fattori angolari relativi alla superficie del pavimento

Come si può vedere sopra, i valori dei fattori angolari sono stati calcolati per tutte le celle interne alla pianta mentre non sono stati calcolati per le celle perimetrali in quanto coincidenti con le pareti stesse dell'ambiente.

A questo punto, ripetendo quanto detto sopra per tutte e sei le superfici che compongono l'ambiente analizzato, è possibile ottenere la temperatura media radiante T_{mr} , secondo la formula riportata in precedenza, in ogni punto che è stato considerato:

		Temperatura media radiante in ogni punto, senza corpi scaldanti [°C]									
Y (Larghezza m.)	6,2										
	5,5	7,6	7,6	7,7	7,7	7,7	7,7	7,6	7,6		
	4,8	7,7	7,7	7,8	7,8	7,8	7,8	7,7	7,7		
	4,1	7,7	7,8	7,8	7,8	7,8	7,8	7,8	7,7		
	3,4	7,7	7,8	7,8	7,8	7,8	7,8	7,8	7,7		
	2,8	7,7	7,8	7,8	7,8	7,8	7,8	7,8	7,7		
	2,1	7,7	7,8	7,8	7,8	7,8	7,8	7,8	7,7		
	1,4	7,7	7,7	7,8	7,8	7,8	7,8	7,7	7,7		
	0,7	7,6	7,6	7,7	7,7	7,7	7,7	7,6	7,6		
	0,0										
		0,0	1,0	1,9	2,9	3,8	4,8	5,7	6,7	7,6	8,6
		X (Lunghezza m.)									

Figura 10. Temperatura media radiante, T_{mr} in ogni punto

I risultati sopra riportati sono relativi alle seguenti temperature delle superfici che circondano l'individuo:

- temperatura del pavimento pari a 9 °C, o 282 K;
- temperatura delle pareti pari a 8 °C, o 281 K;
- temperatura del soffitto pari a 7 °C, o 280 K.

A conferma della correttezza del procedimento di calcolo adottato, si riporta di seguito la somma dei sei fattori angolari sottesi dalle sei superfici che compongono l'ambiente per ogni cella che è stata considerata:

		Somma dei fattori angolari, ambiente									
Y (Larghezza m.)	6,2										
	5,5	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	
	4,8	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	
	4,1	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	
	3,4	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	
	2,8	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	
	2,1	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	
	1,4	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	
	0,7	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	
	0,0										
		0,0	1,0	1,9	2,9	3,8	4,8	5,7	6,7	7,6	8,6
		X (Lunghezza m.)									

Figura 11. Somma dei fattori angolari sottesi dalle sei superfici dell'ambiente, in ogni punto

Come si può vedere, la somma è correttamente uguale a uno in quanto la persona è interamente avvolta dalle superfici che costituiscono l'ambiente studiato. Per le figure sopra si ricorda che il valore dell'altezza dell'area, imposto all'inizio del calcolo, per la quale sono stati ottenuti i risultati è pari a 0,6 m.

Temperatura media radiante T_{mr} dell'ambiente, con i corpi scaldanti

Un secondo insieme di fogli viene ora impiegato per determinare la temperatura media radiante T_{mr} , sempre relativamente alle celle e, quindi, ai punti considerati sopra, in seguito all'inserimento all'interno dell'ambiente di alcuni dispositivi di riscaldamento radianti.

Innanzitutto, sono richiesti in input i dati relativi al corpo scaldante, in termini di temperatura della superficie e di dimensioni del corpo scaldante stesso impiegato. Le figure d'esempio che saranno riportate in seguito fanno riferimento ad un dispositivo radiante di questo tipo:

- altezza pari a 250 mm;
- lunghezza pari a 650 mm;
- temperatura della superficie pari a 1030 °C.

In realtà i produttori o fornitori di questo tipo di dispositivi sono soliti indicare la temperatura che raggiunge la sorgente, sia esso un filamento metallico od altro. A partire da queste informazioni, tuttavia, ai fini del programma di calcolo sviluppato, che si basa sul considerare gli elementi che compongono l'ambiente d'interesse come delle superfici radianti ad una certa temperatura, si è cercato appunto di ricavare un'ipotetica temperatura della superficie del dispositivo impiegato.

A questo punto, è possibile posizionare i corpi scaldanti selezionati all'interno dell'ambiente, segnandoli secondo una nomenclatura di tipo, C1, C2 ... Cn, che tenga conto anche del loro numero. L'inserimento viene effettuato all'interno delle celle, e dunque dei punti, visibili sul piano x-y in una vista dall'alto, come già mostrato in precedenza:

		Pianta dei corpi scaldanti									
Y (Larghezza m.)	6,2	C1								C4	
	5,5										
	4,8										
	4,1										
	3,4										
	2,8										
	2,1										
	1,4										
	0,7	C2								C3	
	0,0										
		0,0	1,0	1,9	2,9	3,8	4,8	5,7	6,7	7,6	8,6
		X (Lunghezza m.)									

Figura 12. Vista dall'alto dell'ambiente con corpi scaldanti, piano x-y

Dopo l'inserimento all'interno dell'ambiente, è anche richiesto di indicare l'altezza alla quale si desidera installare i dispositivi radianti e l'orientazione degli stessi:

Altezza corpo scaldante a scelta										
Asse	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10
z	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0

Altezza corpo scaldante	
z	4,0 m

Coordinate di puntamento dei corpi scaldanti										
Assi	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10
x	3,8	3,8	3,8	3,8	3,8	3,8	3,8	3,8	3,8	3,8
y	3,4	3,4	3,4	3,4	3,4	3,4	3,4	3,4	3,4	3,4
z	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6

Coordinate consigliate	
x	3,8 m
y	3,4 m
z	0,6 m

Figura 13. Altezza e coordinate di puntamento dei corpi scaldanti

Come si può vedere in figura 13, l'esempio fa riferimento ad un massimo di dieci dispositivi radianti inseribili contemporaneamente all'interno dell'ambiente. Inoltre, tutti i corpi scaldanti sono orientati nella stessa direzione verso un punto di coordinate della stanza pressoché baricentriche, come evidenziato in verde. L'altezza di installazione dei dispositivi è uguale a 4 m.

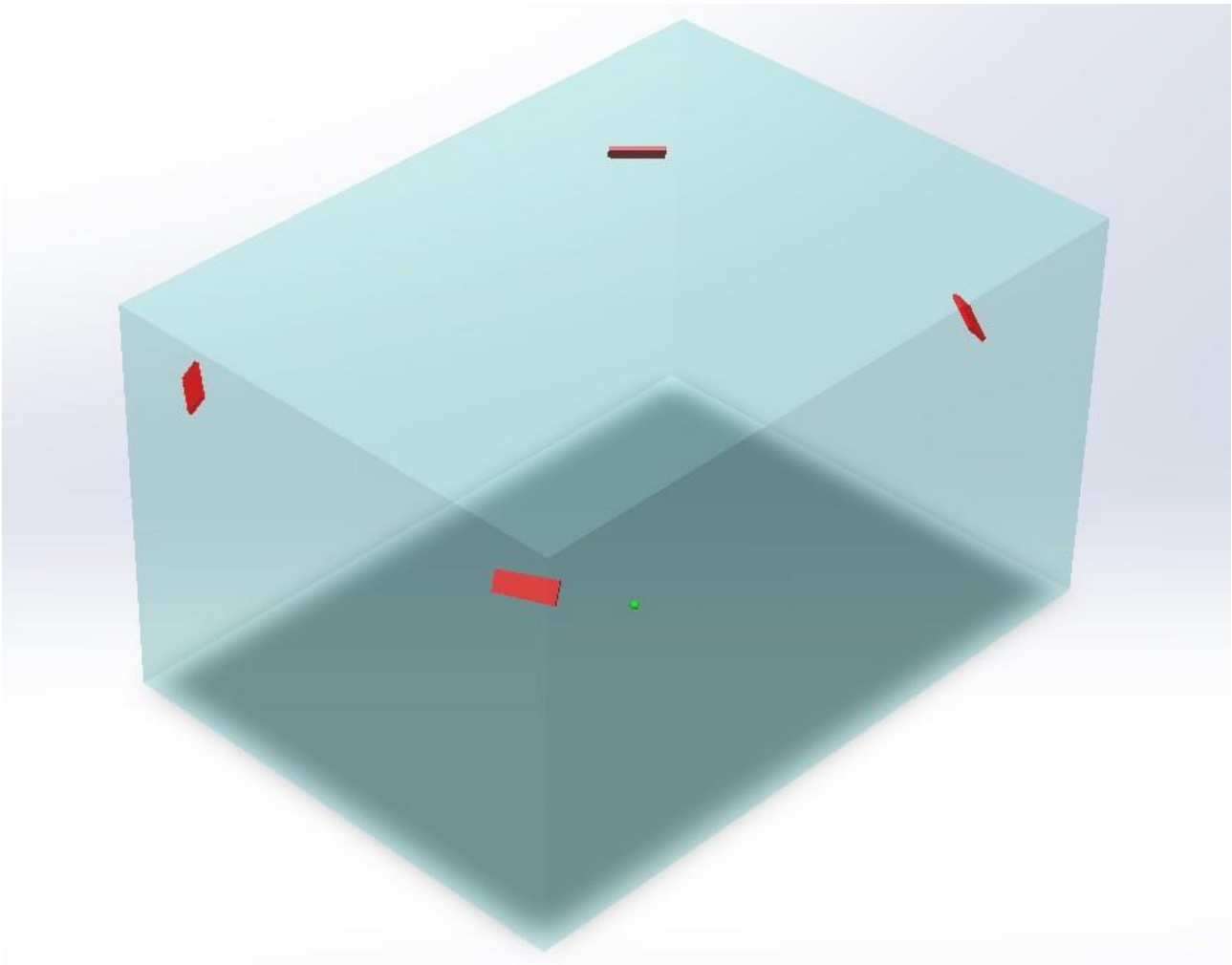


Figura 14. Esempio in 3D di ambiente con i corpi scaldanti

Avvenuto l’inserimento dei corpi scaldanti in ambiente, è ora necessario ricavare i valori delle coordinate rispetto al sistema di riferimento assoluto con origine nel punto [0, 0, 0] dei quattro vertici delle superfici rettangolari che li rappresentano. Per fare ciò si utilizza nuovamente la funzione “cerca” di Excel per individuare la posizione di ciascun dispositivo, data dalle proprie coordinate assolute x, y, z; questa è la posizione del baricentro del dispositivo radiante considerato.

Posizione del corpo scaldante										C1
0,0	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	0,0
6,2	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	6,2
										4,0

Figura 15. Rilevamento della posizione del corpo scaldante C1

Nella figura sopra è mostrato l'esempio di rilevamento della posizione del corpo scaldante C1; come si può vedere, viene effettuata una ricerca per colonne sia per la coordinata x sia per la coordinata y del dispositivo. La coordinata z assume il valore di altezza di installazione del dispositivo imposto all'inizio.

Successivamente, si determina il valore della posizione del dispositivo rispetto al punto verso il quale il dispositivo stesso è orientato, sottraendo le coordinate di suddetto punto; così facendo si ottengono delle coordinate relative.

Posizione	C1-X
del corpo scaldante	-3,8
rispetto al	2,8
punto	3,4
Modulo	5,8

Figura 16. Coordinate relative del corpo scaldante C1. È indicato anche il modulo

Le coordinate relative tra corpo scaldante e punto di orientazione permettono di calcolare l'angolo di rotazione sul piano del corpo scaldante rispetto ad un posizionamento orizzontale dello stesso. Inoltre, immaginando di tagliare il corpo scaldante con un piano trasversale allo stesso, è possibile ricavare anche l'angolo di inclinazione che il dispositivo assume quando è diretto verso il punto di orientazione. Di seguito si riportano gli angoli per il dispositivo radiante C1:

Rotazione del sdr-corpo scaldante rispetto al sdr-soggetto	
Piano x-y, longitudinale al corpo scaldante	
C1-X	Angolo [° gradi]
-3,8	144,21
2,8	
Piano xy-z, trasversale al corpo scaldante	
C1-X	Angolo [° gradi]
4,7	-35,81
3,4	

Figura 17. Angolo di rotazione ed inclinazione del corpo scaldante C1 su un piano longitudinale e trasversale allo stesso

Gli angoli così determinati in figura 17 sono quelli che trasformano un sistema di riferimento solidale al punto di orientazione in un sistema di riferimento solidale al corpo scaldante, così come è stato posizionato ed orientato. Per i passaggi che conducono a questa trasformazione si rimanda alla visione dell'appendice B riportata in fondo al seguente documento.

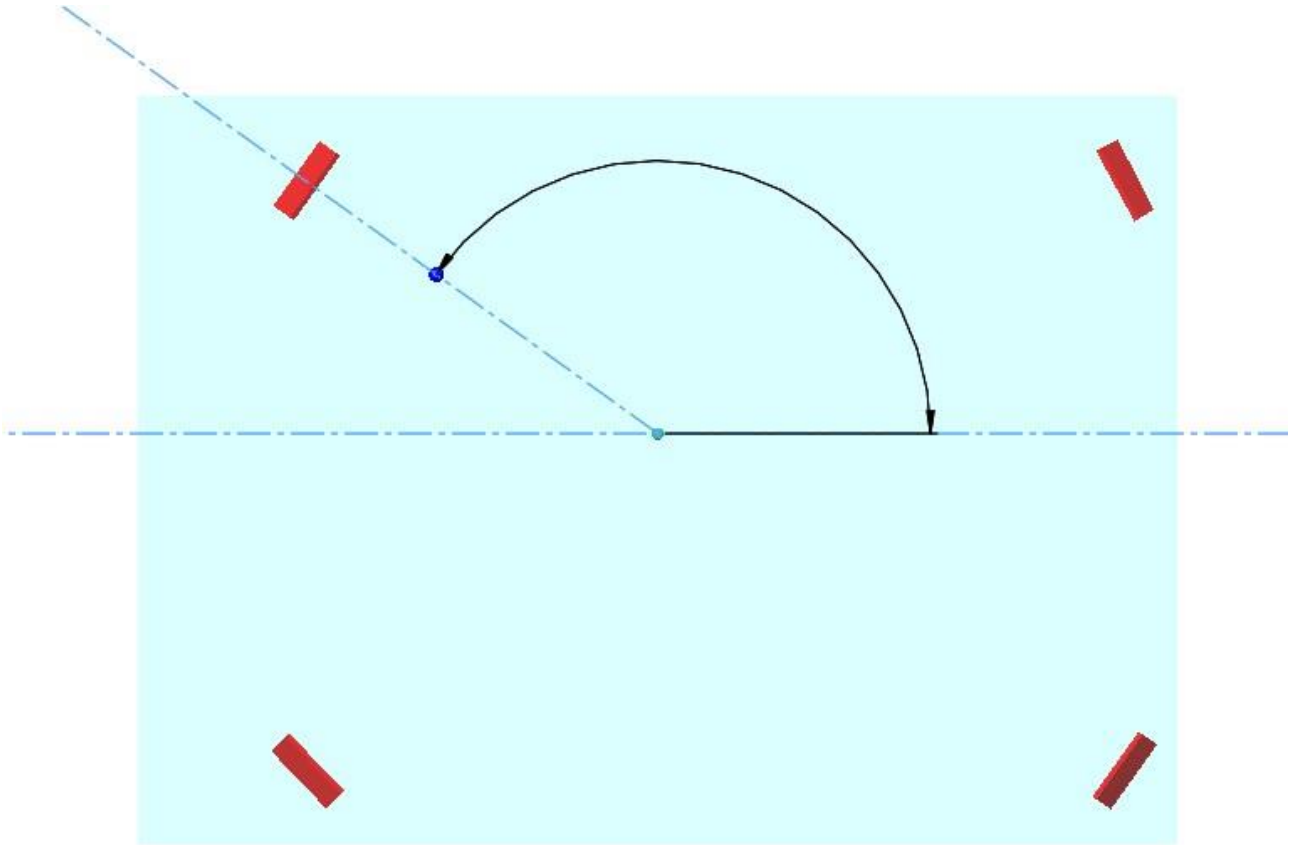


Figura 18. Esempio di angolo di rotazione del corpo scaldante

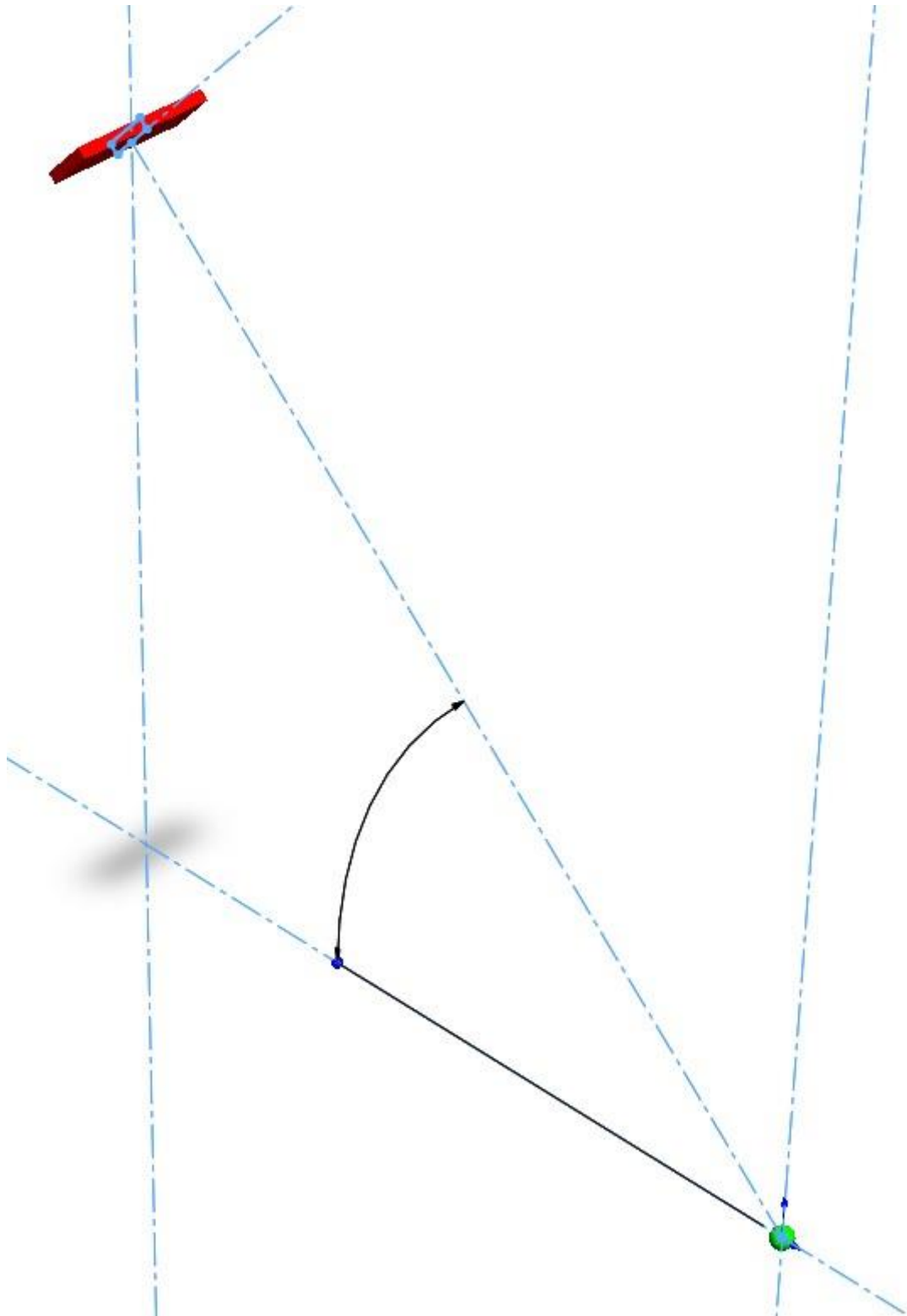


Figura 19. Esempio di angolo di elevazione del corpo scaldante

A questo punto, in un sistema di riferimento di questo tipo è possibile sommare l'altezza e la lunghezza del corpo scaldante al suo baricentro per ottenere le coordinate dei suoi quattro vertici. Le coordinate così ricavate vengono poi riferite nuovamente al sistema di riferimento fisso dell'ambiente, con origine nel punto $[0, 0, 0]$.

Nella figura sotto si riporta un esempio di coordinate dei vertici per il dispositivo C1:

V1				V3			
deltax	0 x-C1	0,1307 x	0,13	deltax	0 x-C1	-0,1307 x	-0,13
deltay	-0,325 y-C1	0,3064 y	6,51	deltay	0,325 y-C1	-0,3064 y	5,89
deltaz	-0,125 z-C1	-0,1014 z	3,90	deltaz	0,125 z-C1	0,1014 z	4,10
V2				V4			
deltax	0 x-C1	-0,2494 x	-0,25	deltax	0 x-C1	0,2494 x	0,25
deltay	0,325 y-C1	-0,2209 y	5,98	deltay	-0,325 y-C1	0,2209 y	6,42
deltaz	-0,125 z-C1	-0,1014 z	3,90	deltaz	0,125 z-C1	0,1014 z	4,10

Figura 20. Coordinate assolute dei vertici della superficie del corpo scaldante C1

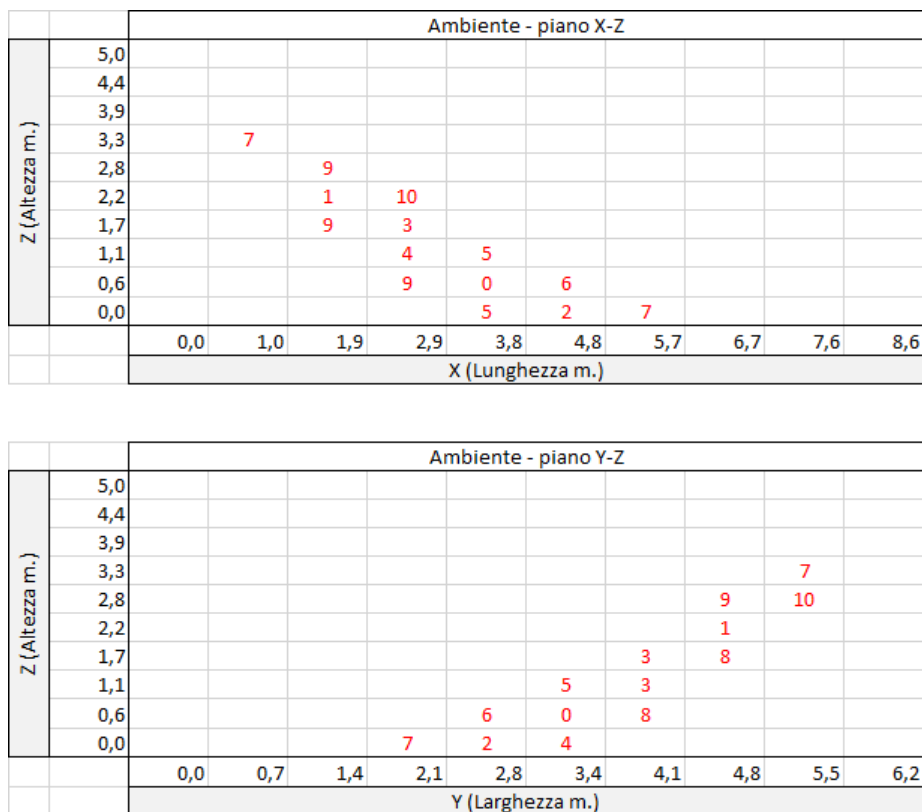


Figura 21. Direzione di puntamento del corpo scaldante C1 nelle viste x-z e y-z

In figura 21 sono mostrate le viste sul piano x-z e sul piano y-z in cui si può osservare la direzione di puntamento del dispositivo radiante C1, come evidenziato dalla scia di valori numerici evidenziati in rosso. Questi valori sono gli angoli formati da un vettore che unisce la posizione del baricentro del dispositivo con i punti o celle considerati sui piani x-z e y-z, rispetto al vettore che unisce il baricentro del dispositivo con il punto di orientazione.

Ripetendo il procedimento sopra descritto per tutti i possibili corpi scaldanti che popolano l'ambiente, si determinano i quattro vertici delle superfici rettangolari di tutti i dispositivi. Una volta ricavati questi valori, si può effettuare nuovamente la procedura per il calcolo dell'angolo solido sotteso da ciascuna superficie, esattamente come già descritto in precedenza per le superfici che compongono l'ambiente studiato. Di seguito si riportano i valori dei fattori angolari per il corpo scaldante C1:

		Fattori angolari									
Y (Larghezza m.)	6,2										
	5,5	0,00081	0,00074	0,00059	0,00045	0,00034	0,00026	0,00020	0,00016		
	4,8	0,00077	0,00071	0,00058	0,00045	0,00034	0,00026	0,00021	0,00016		
	4,1	0,00068	0,00063	0,00053	0,00042	0,00033	0,00026	0,00020	0,00016		
	3,4	0,00056	0,00054	0,00047	0,00038	0,00031	0,00024	0,00019	0,00016		
	2,8	0,00046	0,00045	0,00040	0,00034	0,00028	0,00023	0,00018	0,00015		
	2,1	0,00037	0,00037	0,00034	0,00029	0,00025	0,00021	0,00017	0,00014		
	1,4	0,00030	0,00030	0,00028	0,00025	0,00022	0,00019	0,00016	0,00013		
	0,7	0,00024	0,00025	0,00024	0,00022	0,00019	0,00017	0,00014	0,00012		
	0,0										
		0,0	1,0	1,9	2,9	3,8	4,8	5,7	6,7	7,6	8,6
		X (Lunghezza m.)									

Figura 22. Fattori angolari relativi al corpo scaldante C1

Come si vede in figura, i fattori angolari sono stati calcolati in tutte le celle fatta eccezione per quelle perimetrali, come già avvenuto per le superfici dell'ambiente. I valori ottenuti sono giustamente inferiori rispetto a quelli determinati in precedenza date le ridotte dimensioni delle superfici dei corpi scaldanti.

La temperatura media radiante T_{mr} rappresenta per definizione la temperatura alla quale avviene lo scambio di calore per irraggiamento e che le superfici dell'ambiente assumono in media. Sfruttando proprio questo concetto, alla sfera di temperatura media radiante T_{mr} dell'ambiente che avvolge l'individuo, si sono potuti sovrapporre i contributi, in termini di angoli solidi sottesi, di tutti i dispositivi che sono stati inseriti all'interno dell'ambiente e per i quali si sono effettuati i calcoli dei fattori angolari.

Nella figura sottostante è riportata la somma di tutti i fattori angolari sottesi da tutti i dispositivi radianti in ogni punto o cella considerata:

		Somma dei fattori angolari, corpi scaldanti									
Y (Larghezza m.)	6,2										
	5,5	0,00147	0,00149	0,00144	0,00141	0,00144	0,00149	0,00147	0,00128		
	4,8	0,00152	0,00155	0,00151	0,00148	0,00151	0,00155	0,00152	0,00133		
	4,1	0,00152	0,00156	0,00154	0,00152	0,00154	0,00156	0,00152	0,00134		
	3,4	0,00152	0,00157	0,00155	0,00153	0,00155	0,00157	0,00152	0,00133		
	2,8	0,00152	0,00156	0,00154	0,00152	0,00154	0,00156	0,00152	0,00134		
	2,1	0,00152	0,00155	0,00151	0,00148	0,00151	0,00155	0,00152	0,00133		
	1,4	0,00147	0,00149	0,00144	0,00141	0,00144	0,00149	0,00147	0,00128		
	0,7	0,00135	0,00137	0,00133	0,00130	0,00133	0,00137	0,00135	0,00115		
	0,0										
		0,0	1,0	1,9	2,9	3,8	4,8	5,7	6,7	7,6	8,6
		X (Lunghezza m.)									

Figura 23. Somma dei fattori angolari relativi a tutti i corpi scaldanti presenti in ambiente

Applicando, dunque, ancora una volta la formula della temperatura media radiante T_{mr} , si è giunti ad ottenere appunto il valore di temperatura media radiante in seguito all'inserimento dei dispositivi radianti all'interno dell'ambiente in esame, sempre in tutti i punti o celle considerate:

		Temperatura media radiante in ogni punto, con corpi scaldanti [°C]									
Y (Larghezza m.)	6,2										
	5,5	46,6	47,0	45,9	45,3	45,9	47,0	46,6	42,2		
	4,8	47,6	48,3	47,4	46,9	47,4	48,3	47,7	43,4		
	4,1	47,7	48,7	48,1	47,7	48,1	48,7	47,8	43,6		
	3,4	47,6	48,7	48,3	48,0	48,3	48,8	47,7	43,5		
	2,8	47,7	48,7	48,1	47,7	48,1	48,7	47,8	43,6		
	2,1	47,7	48,3	47,4	46,9	47,4	48,3	47,7	43,5		
	1,4	46,6	47,0	45,9	45,4	46,0	47,1	46,7	42,3		
	0,7	43,8	44,4	43,4	42,8	43,4	44,4	43,8	39,2		
	0,0										
		0,0	1,0	1,9	2,9	3,8	4,8	5,7	6,7	7,6	8,6
		X (Lunghezza m.)									

Figura 24. Temperatura media radiante T_{mr} dell'ambiente con corpi scaldanti

Come si può vedere in figura, anche in questo caso i calcoli non sono stati effettuati per le celle perimetrali in quanto coincidenti con le pareti dell'ambiente.

I valori sono stati ottenuti sottraendo al prodotto tra la temperatura media radiante dell'ambiente senza corpi scaldanti e il fattore angolare unitario della sfera, il prodotto tra la temperatura superficiale dei corpi scaldanti e i rispettivi fattori angolari.

Risultati ottenuti con il modello PMV/PPD di Fanger

Una volta determinata la temperatura media radiante T_{mr} nelle celle d'interesse come già mostrato sopra, è possibile implementare un algoritmo per il calcolo degli indici di sensazione termica PMV e PPD secondo il modello sviluppato da Fanger.

L'algoritmo indicato si basa sui passaggi di un esempio di programma da eseguire al computer, riportato all'interno dello *Standard ISO 7730*. Questo codice di calcolo riprende le equazioni già illustrate in precedenza, nella sezione dedicata all'analisi sul comfort termico, ed effettua un calcolo iterativo per ottenere la temperatura superficiale del vestiario T_{cl} , molto difficile da determinare.

Di seguito si riportano brevemente i passaggi svolti dall'algoritmo:

- in input sono richiesti i valori delle sei variabili del comfort di Fanger, quali metabolismo M , vestiario I_{cl} , temperatura dell'aria T_a , temperatura media radiante T_{mr} , velocità dell'aria v_a e umidità relativa RH . Inoltre, è richiesto il valore del lavoro esterno W , in genere uguale a zero;
- si eseguono alcune trasformazioni di unità di misura dei parametri inseriti e vengono introdotte alcune variabili temporanee utili per effettuare i calcoli che seguono. Ad esempio, si ricava il valore della pressione di vapore esistente in ambiente p_a a partire dal valore di umidità relativa RH , introducendo una nuova variabile chiamata FNPS, ovvero la pressione di saturazione del vapore d'acqua alla temperatura ambiente T_a ;
- si determinano i valori di alcuni parametri necessari per risolvere le equazioni successive secondo le relazioni usate da Fanger, come ad esempio per il fattore del vestiario f_{cl} ;
- si imposta un valore iniziale di T_{cl} e si esegue il calcolo iterativo. All'interno del ciclo iterativo il valore del coefficiente di scambio di calore convettivo h_c è determinato secondo le relazioni di Fanger;
- infine, si ricavano i valori delle componenti di perdita di calore per convezione, per radiazione, per sudorazione, per diffusione del vapore acqueo attraverso la pelle e di perdita di calore latente e sensibile per respirazione.
- in output si ottiene il valore di PMV relativo ai parametri ambientali e individuali inseriti; in funzione del PMV si determina anche il PPD previsto.

Per l'algoritmo completo e tutti i passaggi che si effettuano si rimanda alla visione dell'appendice D, presente all'interno dello *Standard ISO 7730*, riportata in allegato al fondo del documento.

Come già anticipato, sfruttando il linguaggio di programmazione Visual Basic integrato in Excel, sono state create le funzioni PMV e PPD rispettivamente, che ripercorrono i passaggi dell'algoritmo sopra descritto.

Di seguito si riportano i risultati ottenuti per la situazione mostrata nei capitoli precedenti:

		PMV									
Y (Larghezza m.)	6,2										
	5,5	0,5	0,6	0,5	0,4	0,5	0,6	0,6	-0,1		
	4,8	0,7	0,8	0,7	0,6	0,7	0,8	0,7	0,1		
	4,1	0,7	0,8	0,8	0,7	0,8	0,9	0,7	0,1		
	3,4	0,7	0,9	0,8	0,7	0,8	0,9	0,7	0,1		
	2,8	0,7	0,8	0,8	0,7	0,8	0,9	0,7	0,1		
	2,1	0,7	0,8	0,7	0,6	0,7	0,8	0,7	0,1		
	1,4	0,6	0,6	0,5	0,4	0,5	0,6	0,6	0,0		
	0,7	0,2	0,2	0,1	0,0	0,1	0,2	0,2	-0,5		
	0,0										
		0,0	1,0	1,9	2,9	3,8	4,8	5,7	6,7	7,6	8,6
		X (Lunghezza m.)									

Figura 25. Valori di PMV relativi alla situazione analizzata

		PPD [%]									
Y (Larghezza m.)	6,2										
	5,5	11%	13%	9%	8%	9%	13%	11%	5%		
	4,8	15%	18%	14%	12%	14%	18%	16%	5%		
	4,1	16%	20%	17%	16%	17%	20%	16%	5%		
	3,4	15%	20%	18%	17%	18%	21%	16%	5%		
	2,8	16%	20%	17%	16%	18%	20%	16%	5%		
	2,1	15%	18%	14%	13%	15%	18%	16%	5%		
	1,4	11%	13%	9%	8%	9%	13%	12%	5%		
	0,7	6%	6%	5%	5%	5%	6%	6%	9%		
	0,0										
		0,0	1,0	1,9	2,9	3,8	4,8	5,7	6,7	7,6	8,6
		X (Lunghezza m.)									

Figura 26. Valori di PPD relativi alla situazione analizzata

I risultati in figura 25 e 26 sono ottenuti impostando, da un menu a tendina sul foglio di calcolo, i valori dei parametri del comfort di Fanger come segue:

- vestiario pari ad 1 clo, valore tipico invernale;
- metabolismo pari ad 1 met, valore tipico per attività sedentaria;
- lavoro esterno pari a 0 met, valore che si considera di solito;
- temperatura dell'aria ambiente pari a 10 °C, valore tipico rilevabile all'interno di una chiesa in inverno;
- velocità dell'aria pari a 0,2 m/s, valore limite per il quale si considera aria ferma;
- umidità relativa pari al 60%, valore tipicamente invernale;
- temperatura media radiante pari a quelle determinate in figura 24.

Come si vede dai risultati ottenuti sopra, i valori di PMV in tutti i punti sono tra -1, 0, +1 risultando in una condizione accettabile di benessere generale del corpo umano. A riprova di ciò, i valori corrispondenti di PPD rimangono tutti all'incirca tra il 5 e 20%, ancora accettabili.

Per una migliore visibilità grafica, i valori di PMV e PPD accettabili sono messi in evidenza da un colore arancione e verde tenue rispettivamente, come si può notare dalle figure sopra.

Risultati ottenuti in termini di ERF

È possibile interpretare i risultati sopra ottenuti, in termini di PMV e PPD, anche secondo il concetto di ERF. Quest'ultimo viene definito come il campo radiante effettivo dell'ambiente in esame, e rappresenta lo scambio radiante addizionale con il corpo umano quando la temperatura media radiante T_{mr} è diversa dalla temperatura dell'aria T_a .

L'ERF, o effective radiant flux, è ricavato a partire dall'equazione di equilibrio che descrive lo scambio di calore tra la superficie della pelle alla temperatura media T_{sk} e l'ambiente radiante considerato. La relazione è la seguente:

$$M' - E_{sk} - F_{cle} [h_r(T_{sk} - \bar{T}_r) + h_c(T_{sk} - T_o)] = 0$$

dove:

- M' è la produzione netta di calore del corpo (M-W) meno le perdite dovute alla respirazione;
- F_{cle} è il rendimento termico effettivo del vestiario; si esprime come il rapporto tra la perdita di calore sensibile reale e quella di un corpo nudo alle stesse condizioni.
- T_o è la temperatura operativa, definita come la media pesata tra la temperatura media radiante T_{mr} e la temperatura dell'aria ambiente T_a :

$$T_o = \frac{h_r \bar{T}_r + h_c T_a}{h_r + h_c}$$

essa rappresenta la temperatura di un ambiente uniforme che trasferisce calore sensibile alla stessa velocità come nell'ambiente reale.

Dalla definizione della temperatura operativa T_o , con semplici passaggi algebrici, si ottiene:

$$M' + ERF \times F_{cle} = E_{sk} + (h_r + h_c)(T_{sk} - T_a)F_{cle}$$

dove:

$$ERF = h_r(\bar{T}_r - T_a)$$

Nell'equazione così manipolata, l'ultimo termine descrive lo scambio di calore con un ambiente uniformemente riscaldato alla temperatura T_a .

A partire dalla stessa equazione lineare ricavata sopra, è possibile esprimere l'ERF anche con la legge della radiazione alla quarta potenza; assumendo che l'emissività della superficie del corpo umano sia unitaria, la relazione diventa la seguente:

$$ERF = \sigma \left(\frac{A_r}{A_D} \right) [(\bar{T}_r + 273)^4 - (T_a + 273)^4] F_{cle}$$

Sfruttando la definizione della temperatura media radiante T_{mr} , che rappresenta la temperatura che equivale alla radiazione di diverse superfici a differenti temperature (T_1, T_2, \dots, T_j), l'ERF è uguale alla somma dei campi radianti causati da ciascuna superficie alla temperatura T_j :

$$ERF = ERF_1 + ERF_2 + \dots + ERF_j$$

dove:

$$ERF_j = \sigma \left(\frac{A_r}{A_D} \right) \alpha_j F_{m-j} [(T_j + 273)^4 - (T_a + 273)^4] F_{cle}$$

- σ è la costante di Stefan Boltzmann, pari a $5,67 \times 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$;
- F_{m-j} è il fattore angolare relativo alla sorgente j rispetto al soggetto m ;
- α_j è l'assorbività della superficie della pelle o del vestiario per sorgenti che irradiano ad una temperatura T_j .

Come si può notare, solamente sorgenti con una temperatura T_j diversa dalla temperatura dell'aria ambiente T_a contribuiscono all'ERF.

Dalla definizione dell'ERF e della temperatura operativa T_o , si ricava l'equazione di comfort per il calore radiante:

$$T_o(\text{di comfort}) = T_a + \frac{ERF(\text{di comfort})}{h}$$

Da questa relazione ne consegue che la temperatura operativa per la quale si ottenga il comfort è la temperatura dell'aria ambiente più un incremento di temperatura pari a ERF/h , rapporto che rappresenta l'efficacia del riscaldamento radiante incidente sull'occupante. Con maggiori movimenti dell'aria, infatti, aumentano i valori dei coefficienti di scambio termico h o h_c e ciò comporta una riduzione dell'efficacia dei sistemi di riscaldamento radiante. Un abbigliamento più consistente, invece, abbassa la temperatura operativa T_o per il comfort agevolando il raggiungimento della neutralità termica.

Di seguito si riportano i risultati ottenuti in termini di ERF per la situazione e per le condizioni ambientali analizzate in precedenza:

		ERF [W/m ²], complessivo									
Y (Larghezza m.)	6,2										
	5,5	228	231	223	219	223	231	228	196		
	4,8	236	241	234	231	234	241	236	205		
	4,1	237	244	240	237	240	244	237	206		
	3,4	236	244	241	238	241	244	236	206		
	2,8	237	244	240	237	240	244	237	206		
	2,1	236	241	234	231	235	241	237	205		
	1,4	228	232	223	219	223	232	229	197		
	0,7	208	212	205	201	205	212	208	175		
	0,0										
		0,0	1,0	1,9	2,9	3,8	4,8	5,7	6,7	7,6	8,6
		X (Lunghezza m.)									

Figura 27. Valori di ERF relativi alla situazione analizzata

I valori sopra riportati sono stati ottenuti applicando la formula per il calcolo dell'ERF con le temperature alla quarta potenza delle superfici e dei corpi scaldanti che compongono l'ambiente studiato. Nelle celle perimetrali non sono stati effettuati calcoli come già detto in precedenza.

		ERF [W/m ²], dovuto ai soli corpi scaldanti									
Y (Larghezza m.)	6,2										
	5,5	240	243	235	230	235	243	240	209		
	4,8	248	252	246	242	246	252	248	217		
	4,1	248	255	251	248	251	255	248	218		
	3,4	248	255	252	250	252	255	248	217		
	2,8	248	255	251	248	251	255	248	218		
	2,1	248	252	246	242	246	252	248	217		
	1,4	240	243	235	230	235	243	240	209		
	0,7	220	224	216	212	216	224	220	188		
	0,0										
		0,0	1,0	1,9	2,9	3,8	4,8	5,7	6,7	7,6	8,6
		X (Lunghezza m.)									

Figura 28. Valori di ERF con il solo contributo dei corpi scaldanti all'interno dell'ambiente

Nella figura sopra sono riportati i valori di ERF considerando il solo contributo dei corpi scaldanti al campo radiante dell'ambiente, secondo quanto già descritto per la figura 27.

Obiettivi raggiunti e possibili sviluppi futuri dello strumento di calcolo

Il lavoro descritto sopra ha condotto allo sviluppo di uno strumento di calcolo che permetta di valutare gli effetti, in termini di sensazione termica percepita, di una combinazione di condizioni che si generano in un ambiente d'interesse, a seguito dell'impiego di dispositivi di riscaldamento radianti. Il lavoro svolto può essere un primo passo verso l'utilizzo di strumenti di calcolo di assistenza alla progettazione che vadano in questa direzione, cercando di soddisfare lo stato di comfort della persona.

Naturalmente, per semplicità, molte ipotesi sono state prese in considerazione. Tra le variabili che influenzano il benessere di un individuo, secondo quanto appreso dagli studi di Fanger, solamente la temperatura media radiante T_{mr} è cambiata in seguito all'inserimento di più o meno corpi scaldanti all'interno dell'ambiente analizzato mentre le altre condizioni sono state assunte fisse. Il modello PMV/PPD adottato per ottenere i risultati finali è infatti di tipo stazionario e non prende in considerazione l'ipotesi che le variabili possano variare nel tempo. In merito a ciò si potrebbe immaginare di utilizzare un modello alternativo, come ad esempio il modello "a due nodi", dove viene introdotta la variabile temporale. Nel modello a due nodi la persona viene suddivisa in due zone, una coincidente con la parte interna del corpo ed una superficiale, coincidente con la parte più esterna e periferica del corpo, in prossimità della superficie della pelle.

In alternativa si potrebbe effettuare un'analisi degli scambi termici che avvengono all'interno dell'ambiente e come essi varino nel tempo, applicando di volta in volta il modello PMV/PPD stazionario di Fanger per individuare la sensazione termica percepita corrispondente.

La chiesa, presa come ambiente d'esempio, è costituita da pareti, soffitto e pavimento ad una temperatura uniforme. In quest'ottica, un altro sviluppo potrebbe essere quello di non considerare più tutti i punti che suddividono le superfici della chiesa alla stessa temperatura, ma che le stesse possano essere differenti.

Infine, riguardo allo stesso modello di chiesa, che è stato esemplificato con un parallelepipedo, potrebbe essere complicato ulteriormente per rispecchiare l'ambiente reale in maniera più congrua dal punto di vista geometrico. Lo stesso discorso è possibile anche per la persona che è stata identificata come un punto all'interno dell'ambiente studiato; si potrebbe adottare un parallelepipedo od altro che la rappresenti maggiormente.

Per concludere, a seguito di quanto riportato sopra, lo strumento di calcolo sviluppato deve essere ancora ampliato e migliorato a dovere, ma potrebbe già ritenersi utile per avere un'idea di massima di come progettare considerando anche il benessere dell'individuo, che prima non c'era. Un sistema di riscaldamento efficiente che garantisca le condizioni di comfort, con sempre meno costi e consumi, è ciò che si richiede in un mondo sempre più green.

Esempi con variazione della dimensione dell'ambiente e dei dispositivi impiegati

Di seguito si riportano una serie di esempi di risultati ottenuti cambiando alcuni parametri d'interesse.

Variazione delle dimensioni dell'ambiente di studio:

		Somma dei fattori angolari, corpi scaldanti									
Y (Larghezza m.)	9,0										
	8,0	0,00097	0,00084	0,00071	0,00066	0,00071	0,00084	0,00097	0,00077		
	7,0	0,00094	0,00085	0,00074	0,00070	0,00074	0,00085	0,00094	0,00077		
	6,0	0,00088	0,00084	0,00075	0,00071	0,00075	0,00084	0,00088	0,00072		
	5,0	0,00086	0,00083	0,00075	0,00072	0,00075	0,00083	0,00086	0,00070		
	4,0	0,00088	0,00084	0,00075	0,00071	0,00075	0,00084	0,00088	0,00072		
	3,0	0,00094	0,00085	0,00074	0,00070	0,00074	0,00085	0,00094	0,00077		
	2,0	0,00097	0,00084	0,00071	0,00066	0,00071	0,00084	0,00097	0,00077		
	1,0	0,00089	0,00077	0,00065	0,00061	0,00065	0,00077	0,00089	0,00066		
	0,0										
		0,0	1,7	3,3	5,0	6,7	8,3	10,0	11,7	13,3	15,0
		X (Lunghezza m.)									

Figura 29. Esempio 1 - Somma dei fattori angolari

		Temperatura media radiante in ogni punto, con corpi scaldanti [°C]									
Y (Larghezza m.)	9,0										
	8,0	35,0	31,7	28,3	27,2	28,3	31,7	35,0	30,0		
	7,0	34,3	32,1	29,2	28,1	29,2	32,1	34,4	29,9		
	6,0	32,9	31,8	29,5	28,6	29,5	31,8	32,9	28,8		
	5,0	32,3	31,6	29,6	28,7	29,6	31,6	32,3	28,2		
	4,0	32,9	31,8	29,5	28,6	29,5	31,8	33,0	28,8		
	3,0	34,3	32,1	29,2	28,1	29,2	32,1	34,4	30,0		
	2,0	35,0	31,8	28,4	27,2	28,4	31,8	35,1	30,1		
	1,0	33,0	30,1	26,9	25,8	26,9	30,1	33,0	27,0		
	0,0										
		0,0	1,7	3,3	5,0	6,7	8,3	10,0	11,7	13,3	15,0
		X (Lunghezza m.)									

Figura 30. Esempio 1 - Temperatura media radiante

I valori sopra riportati fanno riferimento ad un ambiente di dimensioni:

- lunghezza 15 m;
- larghezza 9 m;
- altezza 7 m.

Le posizioni dei corpi scaldanti all'interno dell'ambiente non sono variate rispetto a quelle considerate nelle figure d'esempio dei capitoli precedenti; ciò che è cambiato è il valore delle coordinate x, y, z delle mille celle o punti che suddividono l'ambiente, aggiornate secondo le dimensioni indicate sopra. I dispositivi puntano ancora in un punto dell'ambiente pressoché baricentrico [6,7, 5, 0,6], con altezza sempre pari a 0,6 m per simulare una persona seduta.

		PMV									
Y (Larghezza m.)	9,0										
	8,0	-1,0	-1,4	-1,8	-2,0	-1,8	-1,4	-1,0	-1,6		
	7,0	-1,1	-1,4	-1,7	-1,8	-1,7	-1,4	-1,1	-1,6		
	6,0	-1,3	-1,4	-1,7	-1,8	-1,7	-1,4	-1,3	-1,8		
	5,0	-1,3	-1,4	-1,7	-1,8	-1,7	-1,4	-1,3	-1,8		
	4,0	-1,3	-1,4	-1,7	-1,8	-1,7	-1,4	-1,3	-1,8		
	3,0	-1,1	-1,4	-1,7	-1,8	-1,7	-1,4	-1,1	-1,6		
	2,0	-1,0	-1,4	-1,8	-2,0	-1,8	-1,4	-1,0	-1,6		
	1,0	-1,3	-1,6	-2,0	-2,1	-2,0	-1,6	-1,2	-2,0		
	0,0										
		0,0	1,7	3,3	5,0	6,7	8,3	10,0	11,7	13,3	15,0
		X (Lunghezza m.)									

Figura 31. Esempio 1 - Valori di PMV

		PPD [%]									
Y (Larghezza m.)	9,0										
	8,0	26%	46%	68%	75%	68%	46%	26%	57%		
	7,0	30%	44%	63%	69%	63%	44%	30%	58%		
	6,0	38%	46%	61%	67%	61%	46%	38%	65%		
	5,0	42%	47%	60%	66%	60%	47%	42%	69%		
	4,0	38%	46%	61%	67%	60%	46%	38%	65%		
	3,0	30%	44%	63%	69%	63%	43%	29%	58%		
	2,0	26%	46%	68%	75%	68%	46%	26%	57%		
	1,0	38%	57%	76%	82%	76%	57%	37%	76%		
	0,0										
		0,0	1,7	3,3	5,0	6,7	8,3	10,0	11,7	13,3	15,0
		X (Lunghezza m.)									

Figura 32. Esempio 1 - Valori di PPD

A causa della maggiore distanza dei corpi scaldanti, i fattori angolari complessivi non sono sufficienti per ottenere una temperatura media radiante tale per cui si abbia comfort, come si può notare dai valori di PMV negativi inferiori al limite accettabile di -1. In questa situazione, secondo Fanger, si inizia a percepire una sensazione di freddo e, come conseguenza, la percentuale di insoddisfatti, o PPD, supera il 40% nella maggior parte dei punti o celle considerate.

Variazione del numero e dell'altezza dei corpi scaldanti:

		Pianta dei corpi scaldanti									
Y (Larghezza m.)	9,0	C1			C5					C4	
	8,0										
	7,0										
	6,0										
	5,0										
	4,0										
	3,0										
	2,0										
	1,0	C2					C6			C3	
	0,0										
		0,0	1,7	3,3	5,0	6,7	8,3	10,0	11,7	13,3	15,0
		X (Lunghezza m.)									

Figura 33. Esempio 2 - Vista x-y dell'ambiente con corpi scaldanti

		Somma dei fattori angolari, corpi scaldanti									
Y (Larghezza m.)	9,0										
	8,0		0,00133	0,00138	0,00141	0,00134	0,00123	0,00122	0,00126	0,00101	
	7,0		0,00131	0,00140	0,00144	0,00139	0,00130	0,00127	0,00125	0,00100	
	6,0		0,00125	0,00136	0,00141	0,00139	0,00134	0,00129	0,00121	0,00096	
	5,0		0,00121	0,00132	0,00137	0,00139	0,00137	0,00132	0,00121	0,00094	
	4,0		0,00121	0,00129	0,00134	0,00139	0,00141	0,00136	0,00125	0,00097	
	3,0		0,00125	0,00127	0,00130	0,00139	0,00144	0,00140	0,00131	0,00102	
	2,0		0,00126	0,00122	0,00123	0,00134	0,00141	0,00138	0,00133	0,00102	
	1,0		0,00116	0,00111	0,00111	0,00122	0,00129	0,00126	0,00121	0,00088	
	0,0										
		0,0	1,7	3,3	5,0	6,7	8,3	10,0	11,7	13,3	15,0
		X (Lunghezza m.)									

Figura 34. Esempio 2 - Somma dei fattori angolari

Come si vede sopra, riprendendo le misure dell'ambiente dell'esempio precedente e aggiungendo due nuovi corpi scaldanti, C5 e C6, si ottengono fattori angolari maggiori; ne consegue che anche la temperatura media radiante nei punti o celle considerate sarà aumentata.

		Temperatura media radiante in ogni punto, con corpi scaldanti [°C]									
Y (Larghezza m.)	9,0										
	8,0	43,4	44,7	45,4	43,7	41,3	41,0	42,0	35,9		
	7,0	43,1	45,2	46,1	44,9	42,9	42,2	41,8	35,9		
	6,0	41,7	44,3	45,5	45,0	43,8	42,7	40,9	34,8		
	5,0	40,7	43,3	44,6	45,0	44,6	43,4	40,8	34,4		
	4,0	40,9	42,7	43,8	45,0	45,5	44,4	41,7	35,0		
	3,0	41,8	42,2	42,9	44,9	46,1	45,2	43,2	36,2		
	2,0	42,0	41,1	41,3	43,8	45,5	44,8	43,5	36,2		
	1,0	39,5	38,5	38,5	40,9	42,5	41,8	40,7	32,8		
	0,0										
		0,0	1,7	3,3	5,0	6,7	8,3	10,0	11,7	13,3	15,0
		X (Lunghezza m.)									

Figura 35. Esempio 2 - Temperatura media radiante

L'altezza di installazione dei due nuovi dispositivi inseriti è pari a 5 m; è stata, dunque, cambiata rispetto a quella degli altri dispositivi, che è rimasta a 4 m come negli esempi dei capitoli precedenti. Questa variazione è stata imposta per cercare di ottenere valori accettabili sia in termini di PMV sia di PPD, che altrimenti sarebbero stati troppo elevati, corrispondenti ad una sensazione di caldo percepita dagli occupanti.

		PMV									
Y (Larghezza m.)	9,0										
	8,0	0,1	0,3	0,4	0,2	-0,2	-0,2	-0,1	-0,9		
	7,0	0,1	0,4	0,5	0,3	0,0	-0,1	-0,1	-0,9		
	6,0	-0,1	0,2	0,4	0,3	0,2	0,0	-0,2	-1,0		
	5,0	-0,3	0,1	0,3	0,3	0,3	0,1	-0,2	-1,1		
	4,0	-0,2	0,0	0,2	0,3	0,4	0,2	-0,1	-1,0		
	3,0	-0,1	-0,1	0,0	0,3	0,5	0,4	0,1	-0,8		
	2,0	-0,1	-0,2	-0,2	0,2	0,4	0,3	0,1	-0,8		
	1,0	-0,4	-0,6	-0,5	-0,2	0,0	-0,1	-0,3	-1,3		
	0,0										
		0,0	1,7	3,3	5,0	6,7	8,3	10,0	11,7	13,3	15,0
		X (Lunghezza m.)									

Figura 36. Esempio 2 - Valori di PMV

		PPD [%]									
Y (Larghezza m.)	9,0										
	8,0	5%	7%	8%	5%	6%	6%	5%	21%		
	7,0	5%	8%	10%	7%	5%	5%	5%	22%		
	6,0	5%	6%	8%	7%	6%	5%	6%	27%		
	5,0	6%	5%	6%	7%	7%	5%	6%	29%		
	4,0	6%	5%	6%	7%	8%	6%	5%	26%		
	3,0	5%	5%	5%	7%	10%	8%	5%	20%		
	2,0	5%	6%	6%	6%	8%	7%	5%	20%		
	1,0	9%	11%	11%	6%	5%	5%	6%	39%		
	0,0										
		0,0	1,7	3,3	5,0	6,7	8,3	10,0	11,7	13,3	15,0
		X (Lunghezza m.)									

Figura 37. Esempio 2 - Valori di PPD

I risultati sopra sono ottenuti con i dispositivi che sono ancora direzionati tutti verso un punto sul pavimento di coordinate all'incirca baricentriche [6,7, 5, 0]. Come si può notare l'area sulla destra non è ancora in condizioni di comfort.

Variazione della potenza e della direzione di puntamento dei corpi scaldanti:

		Pianta dei corpi scaldanti									
Y (Larghezza m.)	9,0	C1			C5		C7				
	8,0									C4	
	7,0										
	6,0										
	5,0										
	4,0										
	3,0										
	2,0										
	1,0	C2			C8		C6			C3	
	0,0										
		0,0	1,7	3,3	5,0	6,7	8,3	10,0	11,7	13,3	15,0
		X (Lunghezza m.)									

Figura 38. Esempio 3 - Vista x-y dell'ambiente con corpi scaldanti

A partire dalla situazione già analizzata nel caso precedente, in questo esempio viene variata la potenza dei dispositivi impiegati, portando la temperatura superficiale degli stessi a 900 °C; così facendo sono stati aggiunti due nuovi corpi scaldanti C7 e C8, otto in totale,

sempre posti ad una altezza di 5 m. Inoltre, per ottenere una distribuzione di calore più omogenea che investisse anche la zona dell'ambiente sulla destra, la direzione di puntamento dei dispositivi C3 e C4 e la posizione di quest'ultimo è stata cambiata, risultando così non più fisso alla parete, ma spostato in avanti, ancorato magari ad un colonnato vicino.

L'orientazione dei corpi scaldanti rimanenti è stata anch'essa modificata. In tal modo si è rivolta l'attenzione solo ad una zona di particolare interesse, ad esempio quella in cui sono situate le panche dei fedeli e l'altare, trascurando le aree dell'ambiente che non necessitano di riscaldamento, come mostrato dai valori di PMV e PPD ottenuti.

Di seguito sono riassunte le altezze e le coordinate di puntamento x, y, z dei dispositivi:

- C1: [5, 6, 0] altezza 4 m;
- C2: [5, 3, 0] altezza 4 m;
- C3: [13,3, 5, 0] altezza 4 m;
- C4: [13,3, 5, 0] altezza 4 m;
- C5: [6,7, 6, 0] altezza 5 m;
- C6: [10, 3, 0] altezza 5 m;
- C7: [10, 6, 0] altezza 5 m;
- C8: [6,7, 3, 0] altezza 5 m;

		Temperatura media radiante in ogni punto, con corpi scaldanti [°C]									
Y (Larghezza m.)	9,0										
	8,0	33,5	35,1	37,4	38,9	39,2	38,3	38,7	38,7		
	7,0	33,2	35,7	38,2	39,8	40,3	40,0	41,2	41,3		
	6,0	32,2	35,4	38,0	39,8	40,4	40,6	41,4	40,8		
	5,0	31,8	35,3	38,0	39,7	40,5	40,7	41,1	39,7		
	4,0	32,3	35,7	38,3	40,1	40,8	40,8	41,0	39,6		
	3,0	33,6	36,3	38,9	40,6	41,2	40,9	41,2	40,3		
	2,0	34,4	36,2	38,7	40,4	40,7	40,0	40,4	40,1		
	1,0	33,1	34,5	36,8	38,3	38,5	37,3	37,1	36,7		
	0,0										
		0,0	1,7	3,3	5,0	6,7	8,3	10,0	11,7	13,3	15,0
		X (Lunghezza m.)									

Figura 39. Esempio 3 - Temperatura media radiante

		PMV									
Y (Larghezza m.)	9,0										
	8,0	-1,2	-1,0	-0,7	-0,5	-0,5	-0,6	-0,5	-0,5		
	7,0	-1,2	-0,9	-0,6	-0,4	-0,3	-0,3	-0,2	-0,2		
	6,0	-1,4	-0,9	-0,6	-0,4	-0,3	-0,3	-0,2	-0,2		
	5,0	-1,4	-1,0	-0,6	-0,4	-0,3	-0,3	-0,2	-0,4		
	4,0	-1,3	-0,9	-0,6	-0,3	-0,2	-0,2	-0,2	-0,4		
	3,0	-1,2	-0,8	-0,5	-0,3	-0,2	-0,2	-0,2	-0,3		
	2,0	-1,1	-0,8	-0,5	-0,3	-0,2	-0,3	-0,3	-0,3		
	1,0	-1,2	-1,1	-0,8	-0,6	-0,5	-0,7	-0,7	-0,8		
	0,0										
		0,0	1,7	3,3	5,0	6,7	8,3	10,0	11,7	13,3	15,0
		X (Lunghezza m.)									

Figura 40. Esempio 3 - Valori di PMV

		PPD [%]									
Y (Larghezza m.)	9,0										
	8,0	35%	26%	15%	10%	9%	12%	11%	11%		
	7,0	37%	23%	12%	8%	7%	7%	6%	6%		
	6,0	43%	24%	13%	8%	7%	7%	5%	6%		
	5,0	46%	25%	13%	8%	7%	6%	6%	8%		
	4,0	42%	23%	12%	7%	6%	6%	6%	8%		
	3,0	34%	20%	10%	6%	6%	6%	6%	7%		
	2,0	29%	20%	11%	7%	6%	8%	7%	7%		
	1,0	37%	29%	17%	12%	11%	15%	16%	18%		
	0,0										
		0,0	1,7	3,3	5,0	6,7	8,3	10,0	11,7	13,3	15,0
		X (Lunghezza m.)									

Figura 41. Esempio 3 - Valori di PPD

Appendice A

I termini presenti nell'equazione del bilancio energetico umano sono i seguenti:

- calore sensibile perso attraverso la pelle;
- calore perso per evaporazione attraverso la pelle;
- calore perso attraverso la respirazione.

Calore sensibile perso attraverso la pelle

Il calore sensibile scambiato dalla pelle con l'ambiente esterno deve passare attraverso i vestiti. Questi percorsi sono trattati in serie e, dunque, si possono descrivere in termini di trasferimento di calore tra la superficie esterna della pelle, passando per la resistenza termica del vestiario, e superficie esterna del vestiario stesso e in termini di trasferimento di calore tra la superficie esterna del vestiario e l'ambiente circostante.

Nel secondo caso si hanno i termini C ed R, già visti sopra:

$$C = f_{cl} h_c (T_{cl} - T_a)$$

$$R = f_{cl} h_r (T_{cl} - \bar{T}_r)$$

In genere questi due termini sono combinati tra loro per descrivere lo scambio di calore sensibile totale, C+R, per mezzo della temperatura operativa T_o e il coefficiente di scambio termico combinato h:

$$C + R = f_{cl} h (T_{cl} - T_o)$$

dove:

$$T_o = \frac{h_r \bar{T}_r + h_c T_a}{h_r + h_c}$$

$$h = h_r + h_c$$

f_{cl} è un coefficiente che descrive l'aumento della superficie della persona, dato che indossa dei vestiti.

Nel primo caso il reale trasporto di calore sensibile attraverso il vestiario coinvolge la conduzione, la convezione e l'irraggiamento. Di solito è conveniente combinare queste modalità di trasferimento di calore in un unico termine di resistenza del vestiario, R_{cl} , espressa in $(m^2 \cdot K)/W$:

$$C + R = \frac{(T_{sk} - T_{cl})}{R_{cl}}$$

Rimuovendo il termine della temperatura della superficie del vestiario T_{cl} spesso inconveniente per i calcoli, l'espressione finale diventa:

$$C + R = \frac{(T_{sk} - T_o)}{R_{cl} + \frac{1}{(f_{cl} h)}}$$

Calore perso per evaporazione attraverso la pelle

Il calore perso per evaporazione dipende dalla quantità di umidità presente nella pelle e dalla differenza tra la pressione del vapore acqueo a livello della pelle e nell'ambiente circostante:

$$E_{sk} = \frac{w(p_{sk,s} - p_a)}{R_{e,cl} + \frac{1}{(f_{cl}h_e)}}$$

dove:

- w è un coefficiente adimensionale, che definisce la quantità di pelle umida;
- p_a è la pressione del vapore acqueo nell'aria ambiente, kPa;
- $p_{sk,s}$ è la pressione del vapore acqueo a livello della pelle, di solito assunta pari alla pressione di saturazione a T_{sk} , in kPa;
- $R_{e,cl}$ è la resistenza termica di evaporazione del vestiario, in $(m^2 \cdot kPa)/W$;
- h_e è il coefficiente di scambio termico di evaporazione, in $W/(m^2 \cdot kPa)$.

La porzione di pelle umida, w , è definita come il rapporto tra la reale perdita di calore per evaporazione E_{sk} e la perdita di calore per evaporazione massima possibile, E_{max} , con le stesse condizioni e con la pelle completamente bagnata ($w=1$).

In realtà, il calore perso per evaporazione dalla pelle è una combinazione dell'evaporazione del sudore prodotto a causa dei meccanismi termoregolatori del corpo umano, E_{rsw} , e della naturale diffusione dell'acqua attraverso la pelle, E_{dif} :

$$E_{sk} = E_{rsw} + E_{dif}$$

Il calore perso per una sudorazione regolare è direttamente proporzionale alla velocità di generazione del sudore:

$$E_{rsw} = \dot{m}_{rsw} h_{fg}$$

dove:

- h_{fg} è calore di vaporizzazione dell'acqua pari a $2,43 \times 10^6$ J/kg a $30^\circ C$;
- \dot{m}_{rsw} è velocità alla quale il sudore è generato, $kg/(s \cdot m^2)$.

La porzione w_{rsw} di pelle del corpo che deve essere bagnata per permette al sudore prodotto di evaporare è:

$$w_{rsw} = \frac{E_{rsw}}{E_{max}}$$

Quando non avviene la sudorazione, la quantità di pelle umida a causa della diffusione è all'incirca 0,06 in condizioni normali. Quando avviene la sudorazione, questo valore si applica solo alla porzione di pelle che non è ricoperta dal sudore, dunque:

$$E_{dif} = (1 - w_{rsw})0,06E_{max}$$

Calore perso attraverso la respirazione

Durante la respirazione, il corpo perde sia calore sensibile per convezione sia calore latente per evaporazione dell'acqua, dal tratto respiratorio all'aria inalata dall'ambiente esterno. Questa quantità di calore perso non è affatto trascurabile considerando che l'aria è inspirata alle condizioni ambiente ed è espirata prossima alla saturazione, ad una temperatura solo leggermente inferiore a quella interna del corpo, T_{cr} .

Le perdite di calore totali e di umidità dovute alla respirazione sono dunque:

$$q_{res} = C_{res} + E_{res} = \frac{\dot{m}_{res}(h_{ex} - h_a)}{A_D}$$

$$\dot{m}_{w,res} = \frac{\dot{m}_{res}(W_{ex} - W_a)}{A_D}$$

dove:

- \dot{m}_{res} è la portata di ventilazione polmonare, in kg/s;
- h_{ex} è l'entalpia dell'aria espirata, in J/kg;
- h_a è l'entalpia dell'aria inspirata, in J/kg;
- $\dot{m}_{w,res}$ è la portata d'acqua polmonare persa, in kg/s;
- W_{ex} è l'umidità dell'aria espirata, in kg(vapore acqueo)/kg(aria secca);
- W_a è l'umidità dell'aria inspirata, in kg(vapore acqueo)/kg(aria secca).

Le perdite di calore per respirazione sono tipicamente espresse in termini di perdite di calore sensibile e latente:

$$C_{res} = 0,0014M(34 - T_a)$$

$$E_{res} = 0,0173M(5,87 - p_a)$$

dove p_a è espressa in kPa mentre T_a in °C.

Le due equazioni sopra, riportate in letteratura, sono ottenute a seguito di approssimazioni semplificative.

Appendice B

Esprimere un sistema di riferimento rispetto ad un altro significa definirne la posa di uno rispetto all'altro. La posa di un generico sistema di riferimento è identificata da una matrice 4x4, dove il minore 3x3 ne definisce l'orientazione mentre il minore 3x1 ne definisce la posizione, rispetto ad un sistema base al quale ci si sta riferendo:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & x_{C1} \\ 0 & 1 & 0 & y_{C1} \\ 0 & 0 & 1 & z_{C1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Una volta definita la posa di un sistema di riferimento, chiamato mobile, rispetto ad un altro sistema di riferimento, chiamato fisso, è possibile modificarla applicando gli operatori di rotazione Rot(asse, angolo), matrice 4x4 o di traslazione Tras(asse, angolo), matrice 4x4. Gli operatori pre-moltiplicano o post-moltiplicano una matrice di posa: nel primo caso si avrà una rotazione o una traslazione, rispettivamente, rispetto agli assi o all'origine del sistema di riferimento fisso; nel secondo caso si avrà una rotazione o una traslazione, rispettivamente, rispetto agli assi o all'origine del sistema di riferimento mobile.

Seguendo questa seconda possibilità relativa alla situazione analizzata sopra, si riportano gli operatori di rotazione rispetto all'asse z e y, secondo gli angoli individuati:

$$\begin{array}{cccc} \cos \vartheta_z & -\sin \vartheta_z & 0 & 0 \\ \sin \vartheta_z & \cos \vartheta_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \cos \vartheta_y & 0 & \sin \vartheta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \vartheta_y & 0 & \cos \vartheta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Gli angoli θ_z e θ_y sono i generici angoli di rotazione attorno all'asse z e asse y, rispettivamente, del sistema di riferimento mobile.

A questo punto post-moltiplicando la matrice di posa prima per un operatore di rotazione e poi per l'altro, si ottiene una matrice di posa del sistema di riferimento mobile solidale al corpo scaldante, con asse x, asse y, asse z rispettivamente entrante, longitudinale e trasversale al dispositivo:

$$\begin{array}{cccc} \cos \vartheta_z \cos \vartheta_y & -\sin \vartheta_z & \cos \vartheta_z \sin \vartheta_y & x_{C1} \\ \sin \vartheta_z \cos \vartheta_y & \cos \vartheta_z & \sin \vartheta_z \sin \vartheta_y & y_{C1} \\ -\sin \vartheta_y & 0 & \cos \vartheta_y & z_{C1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Infine, applicando un generico operatore di traslazione $\text{Tras}(\mathbf{s})$, dove \mathbf{s} è un vettore 1×3 con le componenti x, y, z di traslazione voluta nel sistema di riferimento mobile, quindi sempre post-moltiplicandolo per la matrice di posa ottenuta sopra, si ricava:

$$\begin{array}{cccc}
 \cos \vartheta_z \cos \vartheta_y & -\sin \vartheta_z & \cos \vartheta_z \sin \vartheta_y & -\sin \vartheta_z a + \cos \vartheta_z \sin \vartheta_y b + x_{C1} \\
 \sin \vartheta_z \cos \vartheta_y & \cos \vartheta_z & \sin \vartheta_z \sin \vartheta_y & \cos \vartheta_z a + \sin \vartheta_z \sin \vartheta_y b + y_{C1} \\
 -\sin \vartheta_y & 0 & \cos \vartheta_y & \cos \vartheta_y b + z_{C1} \\
 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array}$$

dove l'operatore di traslazione applicato è il seguente:

$$\begin{array}{cccc}
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & a \\
 0 & 0 & 1 & b \\
 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array}$$

Come si può vedere, dalla matrice di posa sopra calcolata, si ottiene la nuova posizione del sistema di riferimento mobile, che conserva le sue tre coordinate originali con l'aggiunta della traslazione rispetto al suo stesso sistema di riferimento, dopo che questo aveva cambiato la sua orientazione rispetto al sistema di riferimento base o fisso.

Da questo risultato, noti i valori degli angoli di rotazione θ_z, θ_y e le componenti x_{C1}, y_{C1}, z_{C1} dell'origine del sistema di riferimento mobile, è possibile ricavare nuovi punti a seguito dell'entità della traslazione d'interesse applicata; nel caso in esame, applicando quattro traslazioni simmetriche rispetto all'origine stessa considerata, si ricavano i valori dei quattro vertici di un'ipotetica superficie rettangolare.

Ringraziamenti

Si ringrazia in particolare il professore M. Masoero per il supporto fornito come guida allo sviluppo del lavoro di suddetta tesi. Il dott. S. Strata titolare di Ath Italia Srl e le sue collaboratrici e collaboratori, le sue colleghe e colleghi per la disponibilità e cordialità dimostrata durante lo sviluppo del lavoro svolto in azienda, nonché dell'aiuto fornito. L'ingegnere F. Trombetta per tutte le consultazioni e suggerimenti in merito allo sviluppo dello strumento di calcolo.

Bibliografia

ASHRAE Handbook – Fundamentals – Chapter 9 Thermal comfort – 2017.

AHSRAE Handbook – HVAC Systems and Equipment – Chapter 16 Infrared radiant heating – 2020.

UNI EN ISO 7730 – Ergonomia degli ambienti termici – febbraio 2006.

ANSI/AHSRAE *Standard 55* – Thermal environmental conditions for human occupancy – April 16, 2004.

ASHRAE Handbook – HVAC Systems – Chapter 54 Radiant heating and cooling – 2011.

Richard J. Mathar – Max-Planck Institute of Astronomy, Germany – Solid Angle of a Rectangular Plate – January 28, 2020.

Ing. G. Bovesecchi – Appunti di Termotecnica, didatticaweb.uniroma2.it – Equazioni del Comfort di Fanger – 2020/2021.

Software dinamici per la matematica, Wordpress.com – I poligoni sferici – 2011.

Mathoverflow.net – Calculation of solid angle for rectangle in 6DOF – November 2022.

M. H. Vorre, R. L. Jensen, J. Le Dréau – Aalborg University Copenhagen, Denmark – Radiation exchange between persons and surfaces for building energy simulations - May 2015.

A. Polito, F. Peron, P. Romagnoni – AICARR Journal #24 – Radiante nelle chiese – Considerazioni sui sistemi di riscaldamento radiante a combustione diretta in chiese storiche – 2014.