



POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Matematica

Tesi di Laurea Magistrale

**Analisi dinamica di nastri  
trasportatori per la  
movimentazione di materiali  
sfusi**

**Relatore**

Prof. Stefano Marchesiello

**Candidato**

Lorenzo Pagliero

**Supervisore aziendale**

**Bedeschi S.p.a.**

Ing. Roberto Oddera

**ANNO ACCADEMICO 2023-2024**

# Sommario

Il calcolo delle tensioni nel nastro trasportatore mediante i criteri statici proposti dalle normative può spesso essere affetto da errori significativi, in particolare quando si considerano nastri di lunghezza elevata. Lo scopo del presente lavoro di tesi è quello di investigare nel dettaglio il comportamento dinamico completo di un nastro trasportatore allo start e allo stop, determinando quantitativamente l'evoluzione delle tensioni nel tempo e per ogni stazione fissa del nastro. L'analisi viene eseguita attraverso lo sviluppo di un modello matematico di un nastro trasportatore rettilineo e orizzontale composto da un tenditore a gravità e un'unità di comando. In questo modello si considerano le proprietà viscoelastiche del tappeto e resistenze dipendenti dal transito del materiale. L'equazione del moto considerata è un'equazione delle onde non omogenea con smorzamento proporzionale, formulata imponendo le leggi di conservazione della massa e di bilancio della quantità di moto per il sistema continuo. I modi di vibrare del sistema vengono determinati numericamente attraverso l'implementazione di un metodo agli elementi finiti, mentre l'evoluzione transitoria del sistema meccanico è calcolata analiticamente per una forzante cinematica specifica. I risultati numerici ottenuti dalle simulazioni Matlab del modello mostrano che, l'ampiezza delle onde di tensione nel tappeto aumenta con l'aumentare della pendenza della velocità di azionamento del nastro, tanto da poter causare slittamenti o, nei casi limite, provocare danni strutturali che compromettono la funzionalità dell'impianto.



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Modello matematico di un nastro trasportatore</b>	<b>9</b>
2.1	Equazione del moto . . . . .	9
2.1.1	Descrizione del sistema . . . . .	10
2.1.2	Cinematica del sistema continuo . . . . .	13
2.1.3	Carichi e resistenze . . . . .	16
2.1.4	Bilancio meccanico del sistema continuo . . . . .	19
2.1.5	Legame costitutivo viscoelastico lineare . . . . .	22
2.1.6	Condizioni al contorno . . . . .	24
2.1.7	Condizioni iniziali . . . . .	29
2.2	Analisi modale . . . . .	31
2.2.1	Problema agli autovalori . . . . .	32
2.2.2	Equazioni dinamiche . . . . .	34
2.2.3	Risposte libere del sistema . . . . .	35
2.2.4	Risposte all'impulso . . . . .	37
2.2.5	Forzante cinematica . . . . .	38
2.3	Analisi di start . . . . .	40
2.3.1	Soluzioni particolari di start . . . . .	42
2.3.2	Soluzione dinamica completa . . . . .	49
2.3.3	Soluzione a regime . . . . .	52
2.4	Analisi di stop . . . . .	56
2.4.1	Soluzioni particolari di stop . . . . .	56
2.5	Fase di carico . . . . .	58
<b>3</b>	<b>Risultati numerici</b>	<b>61</b>
3.1	Start . . . . .	62
3.2	Stop . . . . .	70
3.3	Caricamento . . . . .	76





# Capitolo 1

## Introduzione

I nastri trasportatori sono dei sistemi di trasporto che consentono lo spostamento continuo di merci e trovano impiego in diversi settori dell'industria, come per esempio l'alimentare, l'energetico e il siderurgico. Sono in grado di trasportare diverse tipologie di materie prime con ottime prestazioni in fatto di capacità di carico e una buona efficienza da un punto di vista energetico. In base agli standard soddisfatti, l'installazione dei nastri trasportatori viene ormai largamente adoperata in qualsiasi tipo di impianto che richieda la movimentazione di materiali sfusi per l'esercizio.

L'esigenza da parte degli esercenti di soddisfare portate di materiale sempre maggiori ha reso necessaria la realizzazione di nastri trasportatori sempre più grandi e performanti, con caratteristiche tecniche di velocità e capienza via via più alte. Talvolta la distanza richiesta per il trasporto di materiale, nonché la conformità del territorio sul quale l'impianto è locato hanno condotto allo sviluppo di nastri trasportatori di lunghezza elevata e alla pianificazione di layout curvilinei che permettano al materiale di fluire attraverso ampi valichi o vallate. Di conseguenza, al fine di garantire sia la corretta funzionalità del sistema con le specifiche previste sia una buona affidabilità in termini di tempi di vita utile delle componenti dello stesso è necessario provvedere, in fase di progettazione, al corretto dimensionamento dei motori e della struttura. Attualmente i criteri di progettazione dei nastri trasportatori si riferiscono principalmente alle normative DIN 22101 o CEMA, le quali forniscono parametri sperimentali e formule ottenute sotto l'ipotesi di corpo rigido. Poiché il nastro trasportatore è un tipo di sistema che opera per lo più in condizioni stazionarie, i risultati delle normative risultano accettabili per un'ampia gamma di nastri trasportatori. Tuttavia, per i nastri trasportatori particolarmente lunghi, tale ipotesi di corpo rigido ha condotto a diverse



Figura 1.1. Punta Catalina, Repubblica Dominicana

tipologie di problemi su campo, quali slittamenti del tappeto o cricche di rulli e tamburi, tanto da suggerire di intraprendere uno studio più approfondito del comportamento transitorio del sistema durante l'avviamento e lo spegnimento.

## Capitolo 2

# Modello matematico di un nastro trasportatore

In questo capitolo viene presentato il modello matematico utilizzato per l'analisi del comportamento dinamico completo del nastro trasportatore. Inizialmente si studia la propagazione delle onde di tensione lungo il nastro attraverso l'inclusione di opportune proprietà viscoelastiche del tappeto nell'equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale. Per questa parte si assume che la distribuzione delle masse in movimento e delle resistenze al moto siano stazionarie, restringendo l'applicabilità del modello al solo caso di partenza e fermata da scarico o partenza e fermata da completamente carico. Successivamente viene introdotto il carico del materiale al fine di simulare l'effetto del movimento delle masse sfuse sull'evoluzione delle tensioni. In questo caso si suppone che il fattore di smorzamento del sistema sia tale da dissipare del tutto le vibrazioni longitudinali entro il tempo di start previsto per il nastro, quindi prima del raggiungimento della velocità nominale.

### 2.1 Equazione del moto

L'obiettivo è di ricavare un'equazione differenziale che descriva l'andamento degli spostamenti longitudinali e delle tensioni nel nastro al variare del tempo.

L'approccio utilizzato nella procedura di deduzione del modello è un approccio di tipo idrodinamico ([3] e [4]), in cui nastro trasportatore, o meglio il tappeto di cui è composto, viene considerato come un corpo continuo e deformabile. L'equazione del moto che si ottiene imponendo la conservazione

della massa e il bilancio della quantità di moto su un generico tratto di nastro sarà un'equazione alle derivate parziali di tipo iperbolico ([5]).

### 2.1.1 Descrizione del sistema

La larghezza e lo spessore del tappeto si assumono trascurabili rispetto la lunghezza del tappeto stesso, suggerendo la definizione di una geometria monodimensionale. Di conseguenza le quantità considerate andranno intese come funzioni della variabile indipendente  $x$ , oltre che dal tempo  $t$ . In questo caso la posizione  $x$  denota l'ascissa curvilinea relativa al percorso seguito dal nastro trasportatore, ovvero la distanza in lunghezza cumulata di un generico punto fisso sul percorso dall'origine del sistema di riferimento.

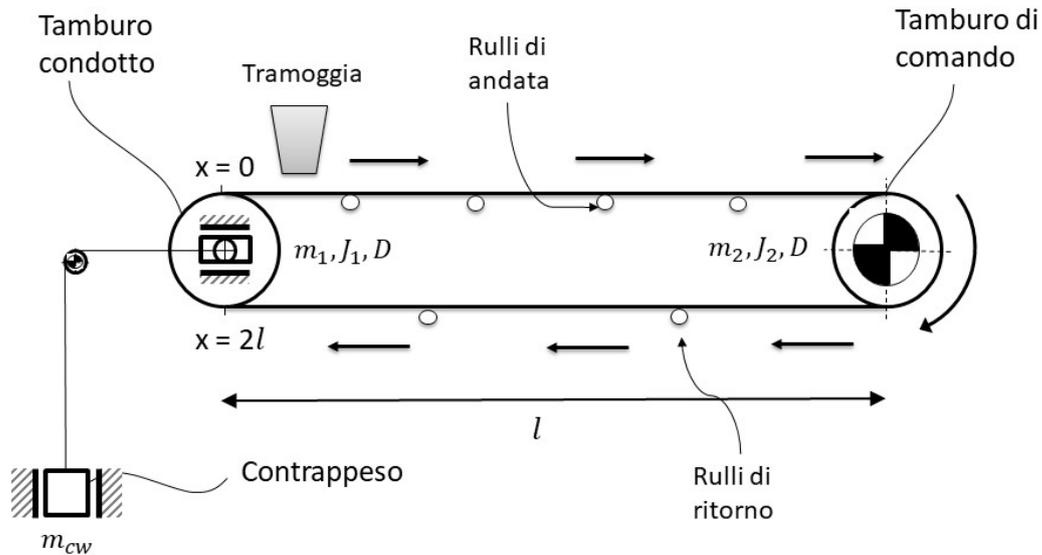


Figura 2.1. Layout di un nastro trasportatore semplice.

All'interno di questo capitolo la geometria del problema in oggetto farà riferimento al layout indicato in figura 2.1, dove a partire dal punto di contatto superiore tra tappeto e tamburo condotto, a cui è associata la coordinata

$x = 0$  del sistema di riferimento, si segue il percorso del nastro nella direzione del moto fino al raggiungimento del punto di contatto inferiore, a cui è associata la coordinata  $x = 2l$ . In questo semplice layout il nastro trasportatore, rettilineo, orizzontale e di lunghezza  $l$  nella sua configurazione iniziale, è composto da due tamburi di uguale diametro  $D$  ma masse  $m_1, m_2$  e momenti d'inerzia  $J_1, J_2$  diversi in generale. Alla guida mobile del tamburo condotto

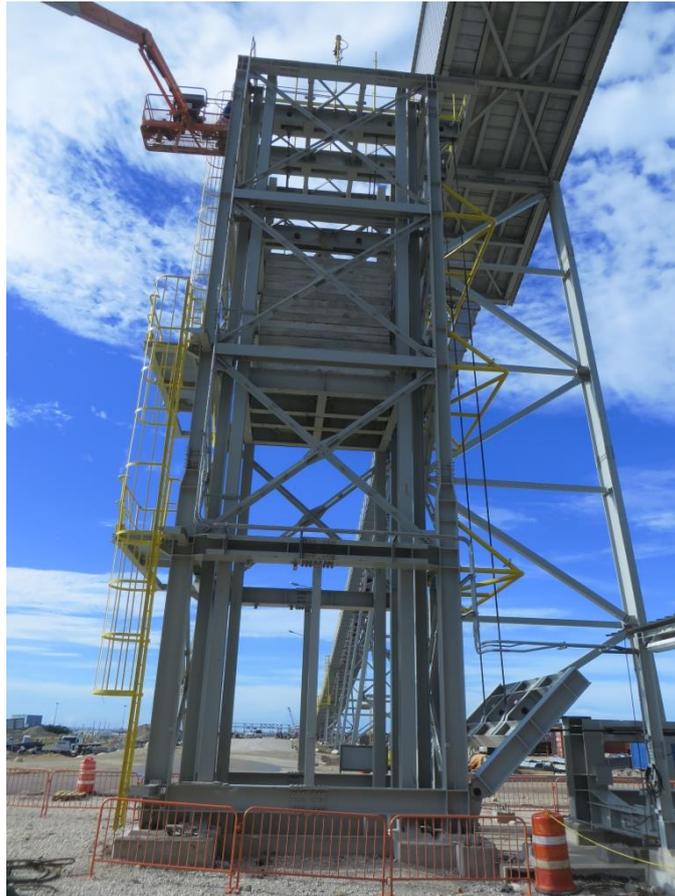


Figura 2.2. Contrappeso.

viene collegato, tramite fune e un sistema di pulegge, un contrappeso di massa  $m_{cw}$  libero di oscillare verticalmente (figura 2.2), il cui compito è quello di pretensionare il tappeto e fare in modo che il nastro possa sempre operare in condizioni ottimali ed evitare slittamenti. Il tamburo di comando invece è incernierato e i motori ad esso collegati devono avere potenza complessiva sufficiente per trasportare il materiale con la velocità desiderata. In prossimità del tamburo condotto giace la tramoggia di carico (figura 2.3), dove

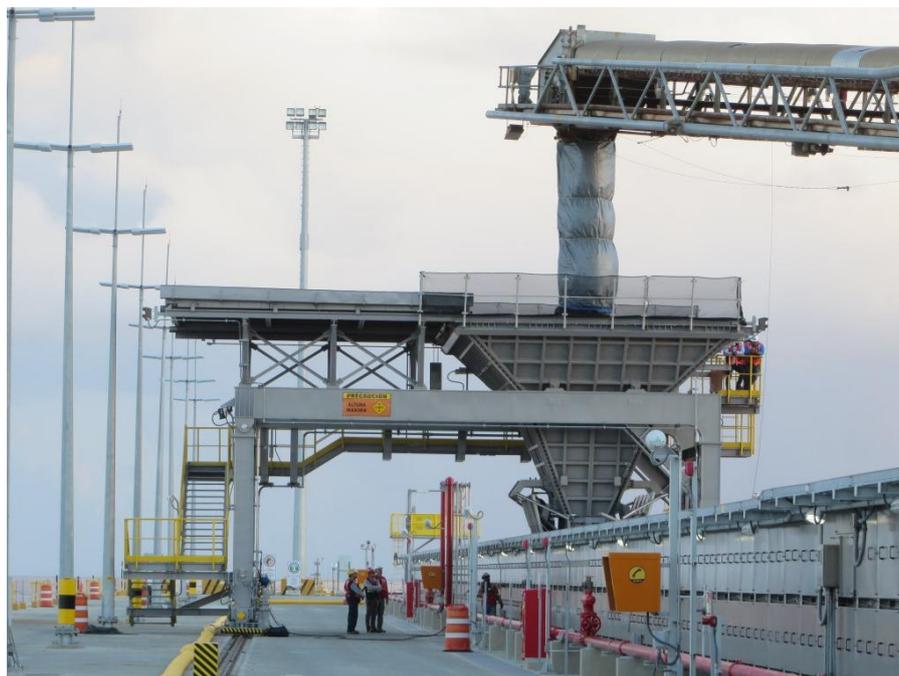


Figura 2.3. Tramoggia.

il materiale viene convogliato e portato fino al tamburo di comando per poi venire scaricato. Per questo motivo il tamburo condotto viene anche definito tamburo di coda, mentre quello di comando tamburo di testa.

Infine rimangono i rulli sostenitori di andata, al di sopra del quale il tappeto si appoggia e scorre senza strisciare, portando con sé il materiale e i rulli sostenitori di ritorno, su cui invece il tappeto scorre nella direzione opposta a quella di andata e in assenza di materiale (figura 2.4). Per questo motivo la spaziatura delle strutture di supporto dei rulli è scelta generalmente più ampia sul ramo di ritorno che su quello di andata, in modo da limitare il fenomeno dell'abbassamento del tappeto tra due appoggi successivi ed eventuali fuoriuscite di materiale. Di conseguenza, data la parità di estensione dei due rami del nastro trasportatore, si ha una maggiore densità di rulli sull'andata rispetto al ritorno.



Figura 2.4. Rulli.

### 2.1.2 Cinematica del sistema continuo

Prima di procedere con la stesura delle leggi di bilancio è utile descrivere la cinematica del sistema continuo, ponendo l'attenzione sui due principali punti di vista utilizzabili nella formulazione delle equazioni ([6]).

La funzione di spostamento indicata con  $\tilde{u}$  viene definita come la distanza compiuta dai punti materiali  $X$  della configurazione di riferimento del nastro a seguito di una generica azione esterna. In questo contesto si definisce la configurazione di riferimento indeformata l'insieme dei punti materiali  $X$  occupati dal nastro in condizioni di riposo, mentre con configurazione iniziale s'intende l'insieme dei punti occupati dal nastro a seguito dell'applicazione del contrappeso, quindi in parte già deformata, ma antecedente all'azionamento del motore. L'insieme dei punti dello spazio  $x$  occupati dal nastro durante il moto definiscono invece la configurazione attuale del nastro trasportatore e sono riconducibili ai punti materiali  $X$  della configurazione di riferimento tramite la funzione del moto

$$x = \chi(X; t) = X + \tilde{u}(X, t), \quad (2.1)$$

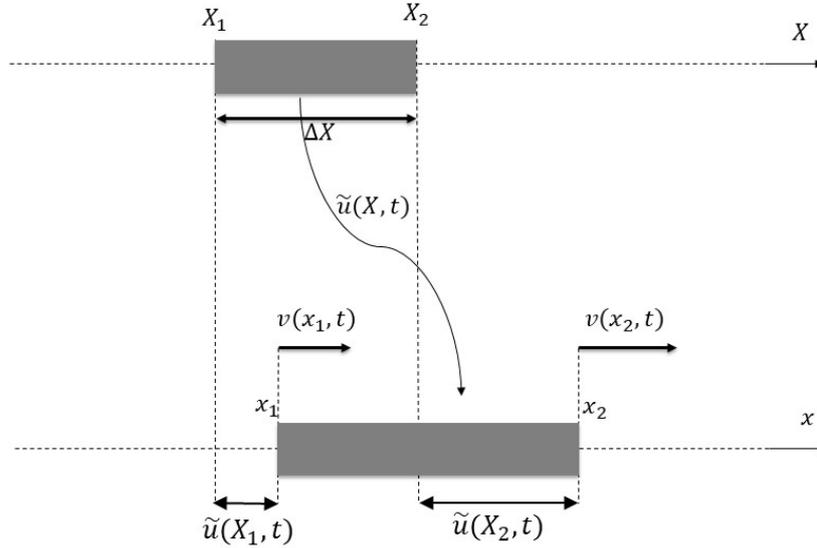


Figura 2.5. Cinematica di un generico tratto di nastro.

come evidenziato in figura 2.5. Questo cambio di coordinate, invertibile per ogni istante di tempo  $t$  fissato, rende possibile la definizione delle funzioni coinvolte nel problema sia rispetto alla configurazione di riferimento che rispetto la configurazione attuale. Per esempio, presa una certa funzione  $p$  si può scrivere

$$\begin{aligned}\tilde{p}(X, t) &= p(\chi(X; t), t) = p(x, t) \\ p(x, t) &= \tilde{p}(\chi^{-1}(x; t), t) = \tilde{p}(X, t)\end{aligned}\tag{2.2}$$

dove la notazione  $\tilde{\phantom{x}}$  verrà utilizzata per rimarcare la descrizione materiale di una funzione quando necessario. In base al tipo di descrizione materiale o spaziale scelta per il problema, si dice che l'approccio utilizzato è l'approccio di Lagrange quando riferito al primo caso, o approccio di Eulero quando riferito al secondo. Secondo il punto di vista di Lagrange si seguono infatti le particelle del nastro trasportatore nel corso del moto, mentre secondo il punto di vista di Eulero si fissa una certa porzione dello spazio entro cui il nastro si muove e dentro cui transitano diverse particelle istante dopo istante. Per il tipo di problema in esame le condizioni di conservazione della massa e di

bilancio della quantità di moto vengono ricavate in accordo con l'approccio di Eulero, quindi rispetto al sistema di coordinate  $(x, t)$  della configurazione attuale. Tuttavia l'equazione del moto verrà successivamente scritta rispetto al sistema di coordinate  $(X, t)$  della configurazione di riferimento tramite l'inversione (2.2), in modo da potervi includere lo spostamento  $\tilde{u}$  come funzione incognita, che per sua definizione descrive il moto dei punti materiali del nastro.

A partire dalla funzione di spostamento si definisce il campo delle deformazioni  $\tilde{\epsilon}(X, t)$  come

$$\tilde{\epsilon}(X, t) := \lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{\tilde{u}(X + \Delta X, t) - \tilde{u}(X, t)}{\Delta X} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X}, \quad (2.3)$$

anch'esso definito rispetto la configurazione di riferimento del nastro.

Il campo delle velocità periferiche può però essere definito sia come la velocità assunta da ciascun punto materiale  $X$  del nastro nel corso del moto, ovvero secondo l'interpretazione di Lagrange come

$$\tilde{v}(X, t) := \frac{\partial \chi}{\partial t}(X, t) = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(X, t), \quad (2.4)$$

sia come la velocità registrata da un osservatore esterno nelle posizioni fisse  $x$ , ovvero secondo l'interpretazione di Eulero come  $v(x, t) = \tilde{v}(\chi^{-1}(x; t), t)$ . La variazione nel tempo della velocità, così come per le altre quantità coinvolte, può differire in base ai due punti di vista adottabili: nel caso di moto stazionario non uniforme, come per esempio accade per un nastro trasportatore a regime in cui le tensioni non sono costanti lungo il percorso, la velocità periferica non cambia nel tempo in una certa posizione, ma può cambiare punto per punto a causa della differenza di tensione tra testa e coda. Pertanto la variazione totale nel tempo di una certa funzione  $p$  d'interesse si calcola come

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt}(x, t) &= \frac{dp}{dt}(\chi(X; t), t) = \frac{\partial p}{\partial t}(\chi(X; t), t) + \frac{\partial p}{\partial x}(\chi(X; t), t) \frac{\partial \chi}{\partial t}(X, t) = \\ &= \frac{\partial p}{\partial t}(x, t) + v(x, t) \frac{\partial p}{\partial x}(x, t) \end{aligned}$$

dove l'operatore  $\frac{\partial}{\partial t}$  denota la variazione locale rispetto al tempo.

In maniera del tutto analoga si riesce a fornire una correlazione formale tra gli operatori di derivazione rispetto allo spazio nei due distinti sistemi di coordinate. Utilizzando la regola della catena, la variazione in spazio di una generica funzione  $p$  si calcola come

$$\frac{\partial p}{\partial x}(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \tilde{p}(\chi^{-1}(x; t), t) = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial X}(\chi^{-1}(x; t), t) \frac{\partial \chi^{-1}}{\partial x}(x, t).$$

Tuttavia nel caso dei nastri trasportatori tale differenza risulta trascurabile, poiché le deformazioni relative del tappeto prodotte o dalla sollecitazione del contrappeso o dal motore sono circa dell'ordine del %1. Da un punto di vista matematico ciò significa che

$$\frac{\partial \chi}{\partial X}(X, t) = 1 + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X}(X, t) = 1 + \underbrace{\tilde{\epsilon}(X, t)}_{O(10^{-2})} \approx 1,$$

da cui segue che

$$\frac{\partial \chi^{-1}}{\partial x}(x, t) \approx 1. \quad (2.5)$$

### 2.1.3 Carichi e resistenze

Le funzioni coinvolte nella analisi dinamica dei nastri trasportatori sono le seguenti:

- $\tilde{u}$  spostamento assoluto [ $m$ ];
- $v$  velocità di spostamento [ $m/s$ ];
- $T$  tensione totale [ $N$ ];
- $q$  distribuzione delle masse in movimento nel nastro [ $kg/m$ ];
- $r$  resistenze al moto [ $N/m$ ];
- $f$  forza motrice applicata [ $N/m$ ];
- $c$  portata [ $kg/s * m^{-1}$ ].

Lo spostamento assoluto  $\tilde{u}(X, t)$  è costituito dall'allungamento provocato dal collegamento con il contrappeso e dal moto indotto dal tamburo di comando. Il primo tipo di spostamento è uno spostamento di natura statica, valido solo da nastro fermo, mentre il secondo descrive il moto vero e proprio dal nastro ed è composto sia dal moto di traslazione rigida sia del moto relativo di ciascun punto rispetto all'altro. Quest'ultimo sarà proprio l'oggetto di studio in questo capitolo.

Analogamente, anche la tensione totale  $T(x, t)$  è soggetta allo stesso tipo di differenziazione statico-dinamica.

La distribuzione  $q(x, t)$  è una massa per unità di lunghezza e comprende, oltre che la massa del tappeto  $q_b$  e del materiale trasportato  $q_m(x, t)$ , tutte le

masse equivalenti delle componenti in rotazione del nastro  $q_R(x)$ , cioè rulli e tamburi. Poiché il tappeto è omogeneo in tutta la sua estensione la sua densità lineare  $q_b$  è costante e, sebbene venga misurata per un tratto indeformato di tappeto, tale densità si assume che rimanga la medesima anche a valle della deformazione indotta dal contrappeso e dal motore. Questo perché, coerentemente con la geometria monodimensionale adottata per il modello, si trascurano le deformazioni nelle direzioni parallele alla sezione trasversale del nastro. Inoltre, da un punto di vista idrodinamico l'ipotesi  $q_b = cost$  durante il moto equivale all'ipotesi di incompressibilità del mezzo continuo, cioè

$$\underbrace{\frac{dq_b}{dt}}_{\approx 0} + q_b \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \implies \quad \frac{\partial v}{\partial x} \approx 0.$$

Generalmente questa ipotesi risulta legittima in tutti i casi in cui la velocità di propagazione del fronte d'onda nel mezzo è tale da attraversare tutto il corpo da un capo all'altro quasi istantaneamente, o equivalentemente, che la variazione nel tempo delle onde di tensione avviene su scale di ordini di grandezza inferiore alla scala temporale caratteristica del problema in esame. Questo aspetto è ben verificato per tutti i nastri di lunghezza medio/piccola, ma che si ritiene valido anche per strutture superiori.

Le masse equivalenti dei tamburi rappresentano delle masse concentrate per il sistema e sono localizzate in punti ben definiti del nastro, mentre le masse equivalenti dei rulli possono essere assunte distribuite per via della spaziatura dei supporti degli stessi, generalmente piuttosto ridotta e in generale variabile nelle diverse tratte del nastro. Un grafico qualitativo della distribuzione delle masse equivalenti  $q_R(x)$  riferita al layout presentato è visibile in figura 2.6. Anche la forza motrice  $f(x, t)$  è da intendere come una forza localizzata ed è generata dall'applicazione di una coppia in corrispondenza della posizione del tamburo di comando.

Nei modelli matematici più realistici le resistenze  $r(x, t)$  sono definite come delle forze d'attrito dipendenti dalla velocità istantanea  $v(x, t)$  del nastro, oltre che dal carico  $q(x, t)$  ([7] e [8]). Per questi casi, il nastro comincia a muoversi solo dopo che la forza motrice applicata supera la soglia imposta dal coefficiente d'attrito statico del sistema, presentando comportamenti non lineari. In accordo con la normativa DIN 22101, nel modello matematico qui introdotto le resistenze vengono considerate per semplicità come delle forze attive linearmente dipendenti dal carico, che agiscono nella direzione opposta al moto e si attivano nello stesso istante in cui il nastro viene avviato. La resistenza d'indentazione, la principale per ogni nastro, può quindi essere

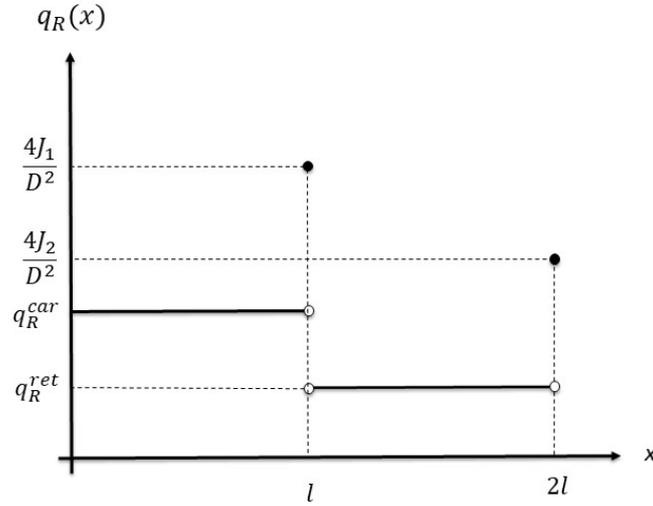


Figura 2.6. Distribuzione delle masse equivalenti dei rulli e dei tamburi lungo il nastro.

espressa come

$$r(x, t) = f_{DIN} g (q_R(x) + (q_b + q_m(x, t)) \cos \delta_C) = f_{DIN} g q(x, t) \quad (2.6)$$

dove  $\delta_C$  indica l'inclinazione del nastro rispetto al piano orizzontale ( $\delta_C = 0$  in questo caso) e  $f_{DIN}$  è il coefficiente d'attrito proposto dalla normativa. Riassumendo, sia la densità di carico  $q$  che di conseguenza anche le resistenze  $r$  sono delle distribuzioni costanti a tratti in  $x$ , fatta eccezione delle stazioni in cui sono presenti i tamburi o altri accessori di contorno. Nell'analisi di start e stop del nastro trasportatore entrambe si assumono fisse nel tempo, consentendo di intraprendere lo studio dei fenomeni vibrativi solo nel limite delle condizioni di partenza e fermata da scarico o partenza e fermata da completamente carico. Questa ipotesi di stazionarietà delle masse e delle resistenze non è tuttavia di grande impedimento, poiché la modalità standard di azionamento prevede che il materiale venga caricato sul nastro non prima di aver raggiunto la velocità nominale, in modo da evitare possibili fuoriuscite, mentre lo spegnimento avviene in tempi sufficientemente brevi

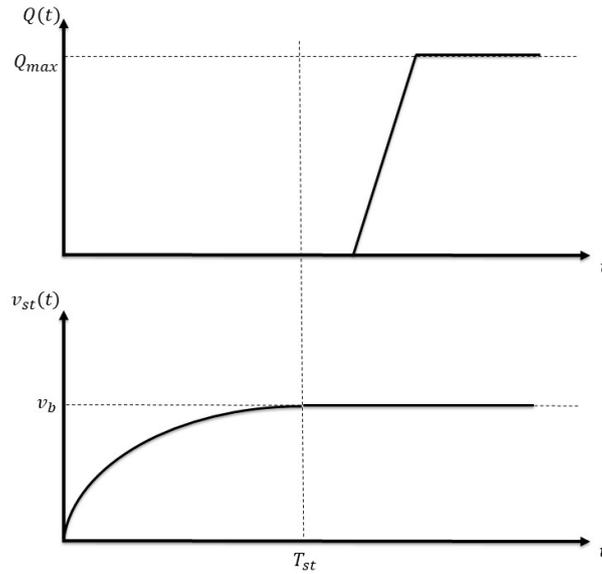


Figura 2.7. Confronto legge di carico e legge di start.

da sopporre con buona approssimazione che la massa totale caricata resti invariata durante lo stop, qualora questo avvenga in presenza di materiale. Si rimanda alla figura 2.7 per chiarimenti sulle possibili leggi di carico e di start.

La capacità  $Q(t)$  del nastro trasportatore è direttamente correlata alla portata distribuita di materiale  $c(x, t)$  secondo la relazione

$$Q(t) = \int_0^l c(x, t) dx.$$

In alcune situazioni pratiche può infatti accadere che il carico di materiale sul nastro avvenga su più punti del suo percorso, giustificando la dipendenza di  $c$  dalla posizione  $x$ .

#### 2.1.4 Bilancio meccanico del sistema continuo

Con riferimento alle figure 2.8 e 2.9 si scrivono le leggi di conservazione della massa e di bilancio della quantità di moto in un generico volume di controllo, compreso tra due posizioni fisse  $x_1$  e  $x_2$ . Le due leggi di bilancio vengono scritte inizialmente scritte senza perdita di generalità, per poi applicare tutte le considerazioni semplificative precedentemente fatte ed ottenere un'equazione del moto con le caratteristiche desiderate.

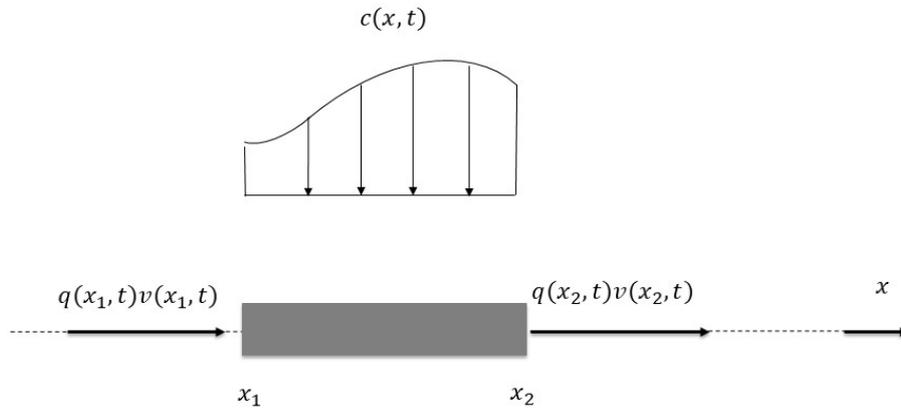


Figura 2.8. Sorgente e flusso di massa in un generico tratto di nastro.

La forma globale globale della conservazione della massa si esprime attraverso l'equazione

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} q(x,t) dx = q(x_1,t)v(x_1,t) - q(x_2,t)v(x_2,t) + \int_{x_1}^{x_2} c(x,t) dx \quad \forall x_1, x_2 \quad (2.7)$$

dove i termini  $q(x_1,t)v(x_1,t)$  e  $q(x_2,t)v(x_2,t)$  indicano il flusso di massa entrante e uscente rispettivamente.

La forma globale del bilancio della quantità di moto si esprime invece attraverso l'equazione

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} q(x,t)v(x,t) dx &= q(x_1,t)v^2(x_1,t) - q(x_2,t)v^2(x_2,t) + \\ &+ T(x_2,t) - T(x_1,t) - \int_{x_1}^{x_2} r(x,t) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x,t) dx \quad \forall x_1, x_2 \end{aligned} \quad (2.8)$$

che corrisponde alla condizione di equilibrio alla traslazione orizzontale del concio di nastro. I termini  $q(x_1,t)v^2(x_1,t)$  e  $q(x_2,t)v^2(x_2,t)$  indicano il flusso di quantità di moto entrante e uscente rispettivamente che combinati al

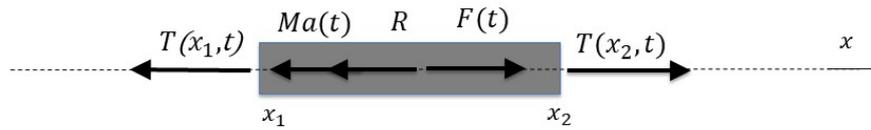


Figura 2.9. Diagramma di corpo libero di un tratto di nastro in movimento.

termine a primo membro di (2.8) determinano il corrispettivo della forza d'inerzia  $Ma(t)$  del disegno 2.9, mentre i restanti termini integrali a membro destro si riferiscono invece alla risultante delle resistenze  $R$  e la forza motrice complessiva  $F(t)$  agenti sul baricentro del tratto di nastro. Le tensioni rappresentano invece le forze superficiali di contatto e sono applicate sul bordo del tratto considerato.

Siccome i bilanci (2.7) e (2.8) sono stati formulati rispetto ad un osservatore fisso è possibile scambiare l'operazione di derivazione rispetto al tempo con l'operazione di integrazione in spazio. Pertanto le quantità a sinistra dei bilanci diventano

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} q(x, t) dx &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t} (q(x, t)) dx, \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} q(x, t)v(x, t) dx &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t} (q(x, t)v(x, t)) dx \end{aligned}$$

Dividendo poi i bilanci (2.7) e (2.8) per  $x_2 - x_1$  e passando al limite per  $x_2 \rightarrow x_1^+$  si ottiene il seguente sistema di equazioni di conservazione in forma

locale:

$$\begin{cases} \frac{\partial q}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial(qv)}{\partial x}(x, t) = c(x, t) \\ \frac{\partial(qv)}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial(qv^2)}{\partial x}(x, t) = \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) - r(x, t) + f(x, t). \end{cases} \quad (2.9)$$

Se si esplicitano i conti a primo membro del bilancio della quantità di moto e si omette per semplicità di notazione la dipendenza da  $(x, t)$  si ottiene

$$\frac{\partial q}{\partial t}v + q\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(qv)}{\partial x}v + qv\frac{\partial v}{\partial x} = \underbrace{\left(\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial(qv)}{\partial x}\right)}_{=c}v + q\overbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x}\right)}^{=\frac{dv}{dt}} \approx cv + q\frac{\partial v}{\partial t}.$$

Il termine  $c(x, t)v(x, t)$  ottenuto con l'applicazione della condizione di conservazione della massa altro non è che la resistenza dovuta al carico del materiale sul nastro che generalmente viene direttamente inclusa in  $r(x, t)$ . In ogni caso, da un confronto sugli andamenti dei grafici qualitativi della legge di start e di carico di figura 2.7 si evince che il carico è nullo prima del tempo di start  $T_{st}$ , dunque la resistenza di carico è ininfluenza sulla dinamica delle vibrazioni.

L'equazione del moto in forma euleriana rimane la seguente:

$$q(x)\frac{\partial v}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) - r(x) + f(x, t),$$

ma facendo uso del cambio i variabili (2.2) e ricordando la valenza dell'approssimazione (2.5) la forma lagrangiana dell'equazione del moto diventa

$$\tilde{q}(X)\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t}(X, t) = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial X}(X, t) - \tilde{r}(X) + \tilde{f}(X, t).$$

Applicando infine la definizione di velocità lagrangiana (2.4), facendo cadere il simbolo  $\tilde{\phantom{x}}$  e sostituendo la lettera  $x$  al posto di  $X$  per semplicità di notazione, si ottiene l'equazione del moto

$$q(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) - r(x) + f(x, t). \quad (2.10)$$

### 2.1.5 Legame costitutivo viscoelastico lineare

Per ottenere un'equazione del moto che abbia come unica funzione incognita la  $u(x, t)$  è necessario introdurre un legame costitutivo che metta in relazione le deformazioni del tappeto con le tensioni agenti su di esso. Seguendo

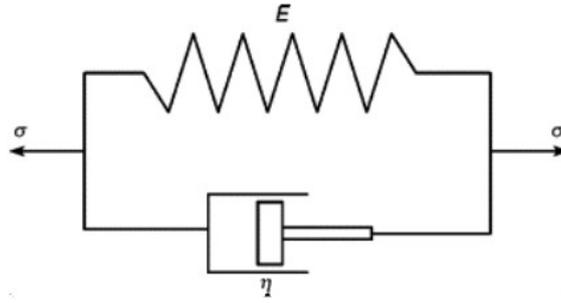


Figura 2.10. Modello viscoelastico a due parametri di *Voigt-Kelvin*.

l'impostazione introdotta in [9], [10] e [11], il modello costitutivo nel seguito adottato è il modello viscoelastico di *Voigt-Kelvin* visibile in figura 2.10. In alcuni casi questo modello a due parametri non risulta sufficientemente adeguato a descrivere i dettagli del reale comportamento meccanico del tappeto, ma è particolarmente utile in quanto consente di postulare un'equazione del moto lineare nelle funzioni incognite  $u$  e  $T$ . La disposizione in parallelo di una molla e di uno smorzatore porta infatti alla definizione di un legame tra sforzo normale  $\sigma$  e deformazione  $\epsilon$  del tipo

$$\sigma(x, t) = E\epsilon(x, t) + \eta \frac{\partial \epsilon}{\partial t}(x, t),$$

dove con  $E$  si indica il modulo di elasticità del tappeto e con  $\eta$  la viscosità dinamica dello stesso.

Dalla teoria dei solidi di *de Saint-Venant* è inoltre possibile mettere in relazione lo sforzo normale  $\sigma$  con la tensione totale  $T$  secondo la formula

$$\sigma(x, t) = \frac{T(x, t)}{A},$$

dove  $A$  rappresenta l'area della sezione trasversale del tappeto.

Ricorrendo infine alla relazione cinematica (2.3) si ricava il legame tensione-spostamenti

$$T(x, t) = EA \left( 1 + \mu \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \quad (2.11)$$

dove

$$\mu := \frac{\eta}{E}$$

è un tempo di ritardo legato alle proprietà reologiche del tappeto.

Sostituendo la relazione (2.11) nell'equazione (2.10) e portando a primo

membro il termine di variazione in spazio delle tensioni si ottiene l'equazione

$$q(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ EA \left( 1 + \mu \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial u}{\partial x} \right] = f(x, t) - r(x).$$

Essendo il tappeto un materiale omogeneo e a sezione costante l'equazione del moto diventa la seguente:

$$q(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EA \left( 1 + \mu \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) - r(x). \quad (2.12)$$

Si tratta di un'equazione delle onde con smorzamento proporzionale e termine forzante e dev'essere risolta con condizioni iniziali e condizioni al contorno adeguate.

### 2.1.6 Condizioni al contorno

Per definire le condizioni al contorno è necessario ispezionare nel dettaglio tutto il sistema di tensionamento del nastro trasportatore, studiandone le forze e i momenti delle forze che agiscono su di esso.



Figura 2.11. Tamburo condotto mobile.

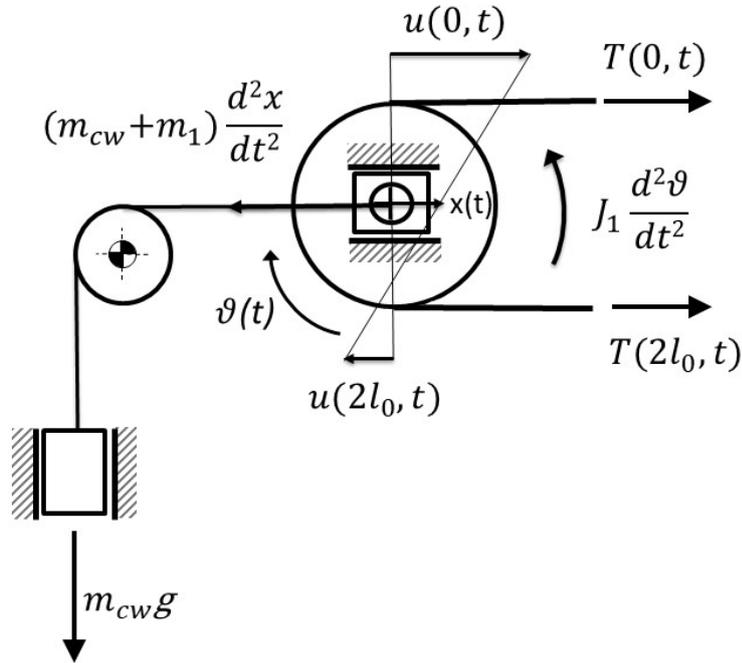


Figura 2.12. Diagramma di corpo libero del tamburo condotto.

Il sistema di tensionamento a gravità è composto da un contrappeso di massa  $m_{cw}$  collegato tramite fune e un sistema di pulegge al tamburo condotto, di massa  $m_1$ , momento d'inerzia  $J_1$  e diametro  $D$ , il quale è avvolto dal nastro con un angolo di  $180^\circ$ . Il tamburo di coda è montato su una guida mobile (figura 2.11) che gli permette, oltre che di traslare in orizzontale, di ruotare attorno al proprio asse a causa del moto del nastro, che scorre senza strisciare. Il contrappeso, anch'esso vincolato da una guida, può esclusivamente traslare lungo la verticale (figura 2.2).

In questo modello si assume che la fune di collegamento tra contrappeso e tamburo sia inestensibile e di massa trascurabile, così come si assumono trascurabili le masse equivalenti delle pulegge e gli attriti dei cuscinetti.

A partire dal diagramma di corpo libero del tamburo condotto schematizzato in figura 2.12 e con la convenzione di segno secondo cui gli spostamenti del tappeto sono assunti positivi quando concordi con la direzione del moto del nastro, si definiscono:

lo spostamento del centro del tamburo di coda

$$x(t) = \frac{u(0, t) - u(2l_0, t)}{2}, \quad (2.13)$$

che grazie all'ipotesi d'ineestensibilità della fune coincide con lo spostamento del contrappeso;

la rotazione del tamburo di coda

$$\theta(t) = \frac{u(0, t) + u(2l_0, t)}{D}. \quad (2.14)$$

Dalla convenzione di segno adottata per gli spostamenti del nastro viene ereditata la convenzione secondo cui lo spostamento del contrappeso è positivo se orientato verso l'alto e la rotazione del tamburo di coda è positiva se orientata in senso orario.

Si noti che gli spostamenti dei punti di contatto superiore e inferiore tra tamburo e nastro rispetto a un osservatore fisso possono differire in generale, ovvero  $u(0, t) \neq u(2l_0, t)$ . Il motivo è legato alla guida mobile del tamburo di coda, grazie al quale il ramo di andata e il ramo di ritorno del nastro possono muoversi, in una certa misura, in maniera indipendente l'uno dall'altro.

Si scrivono le condizioni di equilibrio alla traslazione e di equilibrio alla rotazione del tamburo di coda rispetto al suo centro:

$$\begin{aligned} \longrightarrow ) \quad & (m_{cw} + m_1) \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + m_{cw} g - T(0, t) - T(2l_0, t) = 0 \\ \curvearrowright ) \quad & J_1 \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + \frac{D}{2} \left( T(2l_0, t) - T(0, t) \right) = 0 \end{aligned}$$

Sostituendo le espressioni (2.13) e (2.14) nelle precedenti condizioni di equilibrio e ricorrendo al legame costitutivo (2.11) si trovano le condizioni al contorno:

$$\begin{cases} \frac{m_t}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(2l_0, t) \right) - EA \left( 1 + \mu \frac{\partial}{\partial t} \right) \left[ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) + \frac{\partial u}{\partial x}(2l_0, t) \right] = -m_{cw} g \\ \frac{2J_1}{D^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0, t) + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(2l_0, t) \right) - EA \left( 1 + \mu \frac{\partial}{\partial t} \right) \left[ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(2l_0, t) \right] = 0, \end{cases} \quad (2.15)$$

dove si è posto  $m_t = m_{cw} + m_1$  e si è diviso l'equilibrio alla rotazione per  $\frac{D}{2}$ . Il termine legato alla forza peso  $m_{cw} g$  è stato portato a membro destro per evidenziare il fatto che le condizioni al contorno appena trovate sono non-omogenee.

### Omogeneizzazione

Al fine di una più agevole trattazione analitica e numerica, queste condizioni al contorno necessitano di un'operazione di omogeneizzazione. Per farlo è sufficiente disaccoppiare il comportamento statico dal comportamento dinamico del nastro, andando a distinguere le tensioni e gli spostamenti che dipendono solo ed esclusivamente dall'azione del contrappeso, cioè a nastro fermo, da quelle che, al contrario, dipendono unicamente dal tiro del motore e che nascono al momento effettivo dell'avviamento. Da un punto di vista matematico ciò significa considerare le tensioni e gli spostamenti totali come somma di tensioni e spostamenti statici e tensioni e spostamenti dinamici, in formule:

$$\begin{aligned} T(x, t) &= T_s(x) + T_d(x, t) \\ u(x, t) &= u_s(x) + u_d(x, t). \end{aligned} \tag{2.16}$$

La quantificazione della funzione  $T_s(x)$  è piuttosto semplice, poiché a nastro fermo la forza peso del tenditore viene equipartita in uguale misura sul ramo di andata e sul ramo di ritorno. Pertanto la tensione statica è costante e uniformemente distribuita lungo tutto il nastro, pari a

$$T_s = \frac{m_{cw}g}{2}. \tag{2.17}$$

Ricorrendo ancora alla relazione tensioni-spostamenti (2.11), con la semplificazione statica per cui

$$T_s = EA \frac{\partial u_s}{\partial x},$$

si determina, tramite integrazione diretta, l'andamento lineare degli spostamenti statici

$$u_s(x) = \frac{m_{cw}g}{2EA}(x - l_0). \tag{2.18}$$

Questa espressione analitica di  $u_s(x)$  è ottenuta imponendo che il nastro non subisca alcuno spostamento di natura statica in corrispondenza del punto posto a metà della lunghezza totale del tappeto a riposo, cioè in  $x = l_0$ , che in questo caso coincide con la posizione del tamburo di comando. Da notare inoltre che gli spostamenti statici in corrispondenza dei punti di contatto superiore e inferiore tra il tamburo di coda e il tappeto, ovvero  $u_s(0)$  e  $u_s(2l_0)$ , sono uguali in modulo ma di segno opposto, a conferma del fatto che il punto superiore viene mosso dal contrappeso con verso opposto alla direzione del moto del nastro, mentre il punto inferiore si sposta con verso concorde. Ne

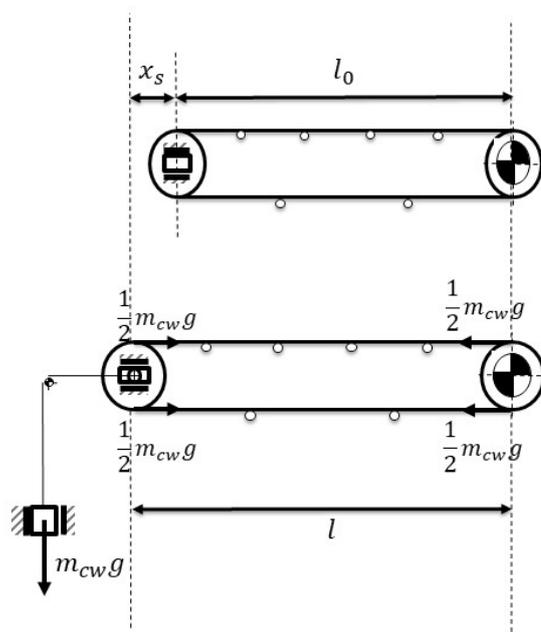


Figura 2.13. Allungamento statico del nastro.

risulta infatti che l'abbassamento statico del contrappeso, ricorrendo alla relazione (2.13), è pari a

$$x_s = \frac{u_s(0)}{2} - \frac{u_s(2l_0)}{2} = -\frac{m_{cw}g}{2EA}l_0.$$

Lo stesso risultato è confermato dalla più convenzionale formula per il calcolo dell'allungamento del nastro basato sull'analogia del nastro trasportatore col sistema dinamico a un grado di libertà composto da una massa collegata a due molle in parallelo, ciascuna di rigidità equivalente

$$k_{eq} = \frac{EA}{l_0}.$$

Con l'aiuto della figura 2.13 l'allungamento diventa calcolabile ricorrendo alla legge di Hooke

$$m_{cw}g = (k_{eq} + k_{eq})|x_s|$$

da cui segue che la lunghezza del nastro a valle dell'applicazione del contrappeso è data da

$$l = l_0 + |x_s| = l_0 \left( 1 + \frac{m_{cw}g}{2EA} \right).$$

Sostituendo la decomposizione statico-dinamica (2.16) nelle condizioni al contorno (2.15) con ricorso all'espressione analitica di  $u_s(x)$  riportata in (2.18) si giunge alla formulazione di nuove condizioni al contorno omogenee nella funzione incognita  $u_d(x, t)$ , di seguito riportate:

$$\begin{cases} \frac{m_t}{2} \left( \frac{\partial^2 u_d}{\partial t^2}(0, t) - \frac{\partial^2 u_d}{\partial t^2}(2l_0, t) \right) - EA \left( 1 + \mu \frac{\partial}{\partial t} \right) \left[ \frac{\partial u_d}{\partial x}(0, t) + \frac{\partial u_d}{\partial x}(2l_0, t) \right] = 0 \\ \frac{2J_1}{D^2} \left( \frac{\partial^2 u_d}{\partial t^2}(0, t) + \frac{\partial^2 u_d}{\partial t^2}(2l_0, t) \right) - EA \left( 1 + \mu \frac{\partial}{\partial t} \right) \left[ \frac{\partial u_d}{\partial x}(0, t) - \frac{\partial u_d}{\partial x}(2l_0, t) \right] = 0. \end{cases} \quad (2.19)$$

Questa procedura di riformulazione del problema rispetto alle variabili dinamiche va eseguita, oltre che sulle condizioni al contorno, anche sull'equazione del moto e sulle condizioni iniziali. Tuttavia l'equazione del moto continua a mantenere la stessa struttura anche a valle dello splitting statico-dinamico, poiché in essa vi compaiono solo operatori di derivazione del secondo ordine rispetto al tempo e allo spazio. Pertanto il termine  $u_s(x)$ , lineare e indipendente dal tempo, non modifica l'equazione (2.12), che d'ora in avanti sarà intesa come equazione nell'incognita  $u_d(x, t)$  invece che in  $u(x, t)$ .

Le condizioni iniziali risentono invece di questo splitting e verranno prima presentate rispetto alla soluzione completa e successivamente rispetto alla soluzione dinamica.

### 2.1.7 Condizioni iniziali

Le condizioni iniziali utilizzabili possono essere di due tipi: quelle che verranno impiegate per l'analisi dello start e le altre impiegate per l'analisi dello stop. In entrambi i casi sarà necessario definire sia una condizione sulla posizione iniziale del nastro sia una sulla velocità locale di spostamento.

Per l'analisi dello start si considera, al tempo  $t = 0$ , una partenza con distribuzione degli spostamenti longitudinali lungo il nastro uguale alla distribuzione degli spostamenti statici e velocità locale nulla ovunque, in formule:

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_s(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0. \end{cases}$$

Per l'analisi dello stop si suppone invece, al tempo  $t = 0$ , che il nastro si trovi già nella condizione di esercizio a regime, cioè con una distribuzione degli spostamenti longitudinali lungo il nastro pari alla distribuzione stazionaria che si ottiene al termine del transitorio della simulazione di start. Questa distribuzione stazionaria verrà indicata con  $u_{reg}(x)$  e se ne ricaverà l'espressione analitica nel proseguo della trattazione.

La condizione sulla velocità per questo tipo di analisi è quella per cui ogni punto del nastro si muove con velocità nominale nella direzione del moto, ovvero

$$\begin{cases} u(x,0) = u_{reg}(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v_b \end{cases}$$

Sostituendo la decomposizione (2.16) nelle precedenti condizioni iniziali si ricava

$$\begin{cases} u_d(x,0) = 0 \\ \frac{\partial u_d}{\partial t}(x,0) = 0 \end{cases}$$

per l'analisi di start e

$$\begin{cases} u_d(x,0) = u_{reg}(x) - u_s(x) \\ \frac{\partial u_d}{\partial t}(x,0) = v_b \end{cases}$$

per l'analisi di stop. Più in generale si indicherà con  $u_0(x)$  una generica distribuzione iniziale degli spostamenti dinamici e con  $v_0(x)$  la distribuzione iniziale delle velocità. Alla luce di questa impostazione, il problema differenziale completo si esplicita come segue:

$$\begin{cases} q(x) \frac{\partial^2 u_d}{\partial t^2} - EA \left( 1 + \mu \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 u_d}{\partial x^2} = f(x,t) - r(x) & x \in (0, 2l_0), \quad t > 0 \\ \frac{m_t}{2} \left( \frac{\partial^2 u_d}{\partial t^2}(0,t) - \frac{\partial^2 u_d}{\partial t^2}(2l_0,t) \right) - EA \left( 1 + \mu \frac{\partial}{\partial t} \right) \left[ \frac{\partial u_d}{\partial x}(0,t) + \frac{\partial u_d}{\partial x}(2l_0,t) \right] = 0 & t > 0 \\ \frac{2J_1}{D^2} \left( \frac{\partial^2 u_d}{\partial t^2}(0,t) + \frac{\partial^2 u_d}{\partial t^2}(2l_0,t) \right) - EA \left( 1 + \mu \frac{\partial}{\partial t} \right) \left[ \frac{\partial u_d}{\partial x}(0,t) - \frac{\partial u_d}{\partial x}(2l_0,t) \right] = 0 & t > 0 \\ u_d(x,0) = u_0(x) & x \in (0, 2l_0) \\ \frac{\partial u_d}{\partial t}(x,0) = v_0(x) & x \in (0, 2l_0). \end{cases} \quad (2.20)$$

## 2.2 Analisi modale

Si prosegue con la trattazione analitica del modello matematico di nastro trasportatore introducendo l'ipotesi di separazione delle variabili. La soluzione dinamica  $u_d(x, t)$  si suppone si possa esprimere come prodotto di una funzione dipendente dalla variabile spaziale  $x$  e di una funzione dipendente dalla variabile temporale  $t$ , ovvero

$$u_d(x, t) = \phi(x)X(t). \quad (2.21)$$

L'obiettivo di tale separazione di variabili è proprio quello di riuscire a distinguere il problema dell'evoluzione temporale degli spostamenti longitudinali dal problema della distribuzione lungo il nastro degli stessi, andando a disaccoppiare il problema differenziale completo (2.20) in un problema per la  $\phi$  e uno per la  $X$ .

Il primo passo da fare è di considerare l'equazione del moto omogeneizzata, cioè in assenza di resistenze e forzanti esterne, e di introdurre l'espressione (2.21). Così facendo si ottiene

$$q(x)\phi(x)\ddot{X}(t) - EA(X(t) + \mu\dot{X}(t))\phi''(x) = 0, \quad (2.22)$$

dove la notazione ' denota l'operazione di derivazione rispetto allo spazio mentre il punto  $\cdot$  denota la derivata rispetto al tempo. Portando a membro destro il secondo termine della (2.22) e dividendo successivamente ambo i membri per le quantità diverse da zero quasi ovunque  $q(x)\phi(x)$  e  $(1 + \mu\frac{d}{dt})X(t)$  si arriva a scrivere

$$\frac{\dot{X}(t)}{(1 + \mu\frac{d}{dt})X(t)} = \frac{EA\phi''(x)}{q(x)\phi(x)} = -\nu^2. \quad (2.23)$$

L'uguaglianza tra le due funzioni razionali di cui sopra, in cui la prima dipende solo dal tempo e la seconda dipende solo dallo spazio, per ogni istante  $t$  e per ogni punto del nastro  $x$  porta infatti a concludere che tali quantità debbano necessariamente essere costanti. Per garantire la stabilità del sistema questa costante dev'essere inoltre non positiva, motivando l'introduzione di  $-\nu^2$ .

## 2.2.1 Problema agli autovalori

Introducendo la separazione delle variabili (2.21) nelle condizioni al contorno (2.19) si ottiene

$$\begin{cases} \frac{m_t}{2} \left( \phi(0) - \phi(2l_0) \right) \ddot{X}(t) - EA \left( 1 + \mu \frac{d}{dt} \right) X(t) \begin{bmatrix} \phi'(0) + \phi'(2l_0) \end{bmatrix} = 0 & t > 0 \\ \frac{2J_1}{D^2} \left( \phi(0) + \phi(2l_0) \right) \ddot{X}(t) - EA \left( 1 + \mu \frac{d}{dt} \right) X(t) \begin{bmatrix} \phi'(0) - \phi'(2l_0) \end{bmatrix} = 0 & t > 0 \end{cases} \quad (2.24)$$

che alla luce della relazione (2.23) porta alla formulazione del seguente problema differenziale ordinario:

$$\begin{cases} EA\phi''(x) + \nu^2 q(x)\phi(x) = 0 & x \in (0, 2l_0) \\ -\nu^2 \frac{m_t}{2} \left( \phi(0) - \phi(2l_0) \right) - EA \begin{bmatrix} \phi'(0) + \phi'(2l_0) \end{bmatrix} = 0 \\ -\nu^2 \frac{2J_1}{D^2} \left( \phi(0) + \phi(2l_0) \right) - EA \begin{bmatrix} \phi'(0) - \phi'(2l_0) \end{bmatrix} = 0. \end{cases} \quad (2.25)$$

Il sistema di cui sopra costituisce una formulazione in forma forte di un problema ellittico, piuttosto difficile da risolvere analiticamente per via della non uniformità della distribuzione delle masse in movimento  $q(x)$  lungo il nastro. Anche con la non realistica ipotesi in cui la massa trasportata per unità di lunghezza sia la medesima sul ramo di andata e sul ramo di ritorno, la determinazione della soluzione analitica risulterebbe comunque poco accessibile. Infatti, se si suppone per un istante  $q = cost$ , allora la soluzione è data dalla combinazione lineare di funzioni armoniche

$$\phi(x) = a \cos(\lambda x) + b \sin(\lambda x),$$

dove

$$\lambda^2 = \frac{\nu^2 q}{EA}$$

è il quadrato della lunghezza d'onda. Tuttavia tale lunghezza d'onda  $\lambda$ , per garantire l'esistenza di soluzioni non banali deve soddisfare un'equazione trascendente non risolvibile analiticamente, che prende il nome di equazione caratteristica e si ottiene con l'imposizione delle condizioni al contorno. Pertanto la risoluzione numerica del problema (2.25) è senza dubbio preferibile. Con il metodo agli elementi finiti è necessario riformulare il problema (2.25) secondo un approccio di tipo variazionale, che prevede che l'equazione differenziale in oggetto venga moltiplicata per un'opportuna funzione test, continua e differenziabile in senso debole in  $[0, 2l_0]$  e infine integrata sul medesimo

intervallo. Chiamata  $p$  la funzione test, il problema (2.25) ammette quindi la seguente formulazione debole, o integrale: trovare  $\phi \in C([0, 2l_0])$  tale per cui

$$\int_0^{2l_0} EA\phi''(x)p(x) dx + \nu^2 \int_0^{2l_0} q(x)\phi(x)p(x) dx = 0 \quad \forall p \in C([0, 2l_0]). \quad (2.26)$$

Procedendo con l'integrazione per parti del primo termine a membro sinistro la formulazione debole diventa

$$\begin{aligned} & \int_0^{2l_0} EA\phi'(x)p'(x) dx - EA\phi'(2l_0)p(2l_0) + EA\phi'(0)p(0) \\ & = \nu^2 \int_0^{2l_0} q(x)\phi(x)p(x) dx \quad \forall p \in C([0, 2l_0]). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Sommando e sottraendo le condizioni al contorno scritte in (2.25) si ricavano le relazioni

$$\begin{cases} EA\phi'(0) = -\nu^2\left(\frac{J_1}{D^2} + \frac{m_t}{4}\right)\phi(0) - \nu^2\left(\frac{J_1}{D^2} - \frac{m_t}{4}\right)\phi(2l_0) \\ EA\phi'(2l_0) = \nu^2\left(\frac{J_1}{D^2} - \frac{m_t}{4}\right)\phi(0) + \nu^2\left(\frac{J_1}{D^2} + \frac{m_t}{4}\right)\phi(2l_0), \end{cases} \quad (2.28)$$

che utilizzate in (2.27) permettono di definire il problema in forma debole: trovare  $\phi \in C([0, 2l_0])$  tale per cui

$$\begin{aligned} \int_0^{2l_0} EA\phi'(x)p'(x) dx = \nu^2 \left[ \int_0^{2l_0} q(x)\phi(x)p(x) dx + \right. \\ \left. + \left[ \left(\frac{J_1}{D^2} - \frac{m_t}{4}\right)\phi(0) + \left(\frac{J_1}{D^2} + \frac{m_t}{4}\right)\phi(2l_0) \right] p(2l_0) \right. \\ \left. + \left[ \left(\frac{J_1}{D^2} + \frac{m_t}{4}\right)\phi(0) + \left(\frac{J_1}{D^2} - \frac{m_t}{4}\right)\phi(2l_0) \right] p(0) \right] \\ \forall p \in C([0, 2l_0]). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Si tratta di un problema agli autovalori su uno spazio vettoriale di dimensione infinita con operatori autoaggiunti, che ha come soluzione l'insieme degli autovalori  $\{\nu_s^2\}_{s=0}^\infty$  e le autofunzioni  $\{\phi_s\}_{s=0}^\infty$  ad essi associate. Dalla teoria dall'analisi funzionale si può concludere che, essendo gli operatori del problema (2.29) autoaggiunti e semi-definiti positivi, allora gli autovalori  $\nu_s^2$  sono reali e non negativi e le autofunzioni  $\phi_s(x)$  costituiscono una base ortogonale dello spazio vettoriale in oggetto, ovvero

$$\int_0^{2l_0} q(x)\phi_s(x)\phi_r(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } r \neq s \\ m_r & \text{se } r = s. \end{cases} \quad (2.30)$$

In meccanica delle vibrazioni le  $m_s$  prendono il nome di masse modali del sistema, mentre le  $\nu_s$  e le  $\phi_s(x)$  sono dette pulsazioni e forme modali rispettivamente.

È bene precisare che, essendo il sistema non conservativo per via della presenza del parametro di smorzamento  $\mu$ , le pulsazioni  $\nu_s$  soluzioni del problema (2.29) non coincidono con le pulsazioni proprie del sistema. Tuttavia, chiamato  $\{\omega_s\}_{s=0}^{\infty}$  l'insieme delle pulsazioni proprie, si assumerà d'ora in avanti che

$$\nu_s \simeq \omega_s \quad \forall s \in \mathbb{N}.$$

Questa approssimazione è legittima quando lo smorzamento del sistema è piuttosto basso, come nel caso in esame.

### 2.2.2 Equazioni dinamiche

Supponendo di conoscere il valore delle pulsazioni proprie  $\omega_s$  e gli andamenti delle forme modali  $\phi_s(x)$  si può scrivere, ricorrendo al Teorema di espansione, la soluzione dinamica completa come segue

$$u_d(x, t) = \sum_{s=0}^{\infty} \phi_s(x) X_s(t), \quad (2.31)$$

che sostituita nell'equazione del moto porta a

$$\sum_{s=0}^{\infty} q(x) \phi_s(x) \ddot{X}_s(t) - \sum_{s=0}^{\infty} EA \left(1 + \mu \frac{d}{dt}\right) \phi_s''(x) X_s(t) = f(x, t) - r(x).$$

Grazie alla continuità degli operatori di massa e rigidezza lo scambio tra l'operazione di derivazione e l'operazione di serie è sempre consentito, così come lo scambio tra l'operazione di integrazione e quello di serie. Con la valenza di questo risultato matematico si continua la trattazione moltiplicando l'equazione precedente per una generica forma  $\phi_r$  e si integra su  $(0, 2l_0)$ :

$$\begin{aligned} & \sum_{s=0}^{\infty} \int_0^{2l_0} q(x) \phi_s(x) \phi_r(x) dx \ddot{X}_s(t) + \\ & - \sum_{s=0}^{\infty} \int_0^{2l_0} EA \phi_s''(x) \phi_r(x) dx (X_s(t) + \mu \dot{X}_s(t)) = \\ & = \int_0^{2l_0} f(x, t) \phi_r(x) dx - \int_0^{2l_0} r(x) \phi_r(x) dx \end{aligned}$$

Ricordano la validità della prima formulazione debole (2.26) del problema agli autovalori allora si ottiene

$$\begin{aligned} & \sum_{s=0}^{\infty} \int_0^{2l_0} q(x) \phi_s(x) \phi_r(x) dx \ddot{X}_s(t) + \\ & + \sum_{s=0}^{\infty} \omega_s^2 \int_0^{2l_0} q(x) \phi_s(x) \phi_r(x) dx (X_s(t) + \mu \dot{X}_s(t)) = \\ & = \int_0^{2l_0} f(x, t) \phi_r(x) dx - \int_0^{2l_0} r(x) \phi_r(x) dx \end{aligned}$$

e ricorrendo infine all'ortogonalità dei modi (2.30) si giunge alla definizione del sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\begin{aligned} & \ddot{X}_r(t) + \mu \omega_r^2 \dot{X}_r(t) + \omega_r^2 X_r(t) = \\ & = \frac{\int_0^{2l_0} f(x, t) \phi_r(x) dx}{m_r} - \frac{\int_0^{2l_0} r(x) \phi_r(x) dx}{m_r} \quad \forall r \geq 0 \end{aligned} \quad (2.32)$$

con condizioni iniziali

$$\begin{cases} X_r(0) = \frac{1}{m_r} \int_0^{2l_0} q(x) u_0(x) \phi_r(x) dx \\ \dot{X}_r(0) = \frac{1}{m_r} \int_0^{2l_0} q(x) v_0(x) \phi_r(x) dx \end{cases} \quad \forall r \geq 0. \quad (2.33)$$

Ciascuna di queste infinite equazioni è indipendente dalle altre e la soluzione completa è data dalla somma della soluzione dell'equazione omogenea associata  $X_r^{hom}(t)$ , che dipende dalle condizioni iniziali, e dalla soluzione particolare  $X_r^p(t)$ , che dipende esclusivamente dalla forzante esterna.

Ogni forma modale  $\phi_r$  evolverà quindi secondo la legge

$$X_r(t) = X_r^{hom}(t) + X_r^p(t)$$

da determinare.

### 2.2.3 Risposte libere del sistema

Prima di procedere con la determinazione delle risposte libere del sistema è bene notare che, l'approccio fin'ora adottato per l'analisi dinamica del nastro trasportatore è quello di utilizzare gli spostamenti assoluti come funzione incognita, invece che gli spostamenti relativi. Per distinguere il moto rigido di traslazione dalle vibrazioni pure sarà sufficiente separare il caso in cui  $r = 0$

dai restanti  $r \geq 1$ .

Scritta in una forma più conveniente, l'equazione da risolvere è la seguente:

$$\ddot{X}_r^{hom}(t) + 2\xi_r\omega_r\dot{X}_r^{hom}(t) + \omega_r^2 X_r^{hom}(t) = 0 \quad (2.34)$$

dove

$$\xi_r = \frac{\mu\omega_r}{2}$$

sono i fattori di smorzamento del sistema.

Un sistema dinamico si dice che è sottosmorzato, criticamente smorzato o sovrasmorzato quando il suo fattore di smorzamento  $\xi$  soddisfa le condizioni  $\xi < 1$ ,  $\xi = 1$  o  $\xi > 1$  rispettivamente. Al variare dei tre casi la soluzione di (2.34), quando  $r \geq 1$ , è data da:

- $\xi_r < 1$

$$X_r^{hom}(t) = e^{-\xi_r\omega_r t} (A_r \cos(\omega_{dr} t) + B_r \sin(\omega_{dr} t)) \quad (2.35)$$

- $\xi_r = 1$

$$X_r^{hom}(t) = (B_r t + A_r) e^{-\omega_r t}$$

- $\xi_r > 1$

$$X_r^{hom}(t) = e^{-\xi_r\omega_r t} (A_r \cosh(\omega_r \sqrt{\xi_r^2 - 1} t) + B_r \sinh(\omega_r \sqrt{\xi_r^2 - 1} t)) \quad (2.36)$$

dove

$$\omega_{dr} = \omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2}$$

sono le pulsazioni smorzate del sistema. Tuttavia nel proseguo di questo studio si considereranno solo il primo e il terzo caso, poiché la condizione di smorzamento critico è difficilmente raggiunta con esattezza.

Preso una certa fase  $\beta \in \mathbb{R}$ , si ricordano in questa sottosezione le relazioni di Eulero

$$\cos(\beta) = \frac{e^{i\beta} + e^{-i\beta}}{2} \quad \sin(\beta) = \frac{e^{i\beta} - e^{-i\beta}}{2i} \quad (2.37)$$

nonché le definizioni delle funzioni seno e coseno iperbolico

$$\cosh(\beta) = \frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{2} \quad \sinh(\beta) = \frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{2}, \quad (2.38)$$

che saranno utili durante la determinazione della soluzione particolare del moto per la distinzioni dei modi sottosmorzati dai modi sovrasmorzati del sistema.

La soluzione per  $r = 0$  si riferisce al moto di traslazione rigida del nastro trasportatore e necessita di una trattazione diversificata. Per un sistema dinamico a infiniti gradi di libertà i cui vincoli imposti al bordo sono tali da permetterne la traslazione rigida, come per il caso del nastro trasportatore, vale la proprietà che la prima pulsazione propria è nulla e la relativa forma modale è costante nel suo dominio, cioè

$$\begin{aligned}\omega_0 &= 0 \\ \phi_0 &= cost \quad \text{su } (0, 2l_0).\end{aligned}\tag{2.39}$$

Ne consegue che la soluzione dell'equazione omogenea associata è data da

$$X_0^{hom}(t) = B_0 t + A_0.$$

La determinazione dei coefficienti reali  $A_r$  e  $B_r$  avviene con l'applicazione delle condizioni iniziali (2.33), ma non prima di aver trovato anche le soluzioni particolari del moto.

## 2.2.4 Risposte all'impulso

Le risposte all'impulso del sistema sono quelle funzione tali per cui

$$\ddot{h}_r(t) + 2\xi_r \omega_r \dot{h}_r(t) + \omega_r^2 h_r(t) = \delta(t).\tag{2.40}$$

La distribuzione  $\delta(t)$  denota la delta di Dirac, che da un punto di vista matematico può essere intesa come la derivata in senso debole della funzione gradino  $H(t)$ , così definita:

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0. \end{cases}\tag{2.41}$$

Si può dimostrare, per esempio attraverso le proprietà della trasformata di Fourier, che le soluzioni dell'equazione (2.40) sono:

- $\xi_r < 1$

$$h_r(t) = \frac{e^{-\xi_r \omega_r t}}{\omega_{dr}} \sin(\omega_{dr} t) H(t)\tag{2.42}$$

- $\xi_r > 1$

$$h_r(t) = \frac{e^{-\xi_r \omega_r t}}{\omega_r \sqrt{\xi_r^2 - 1}} \sinh(\omega_r \sqrt{\xi_r^2 - 1} t) H(t).\tag{2.43}$$

Infatti, poiché per ogni generica funzione del tempo  $p(t)$ , differenziabile in senso debole, vale la proprietà

$$\mathcal{F}\left(\frac{dp(t)}{dt}\right)(\omega) = i\omega\mathcal{F}(p(t))(\omega)$$

e siccome

$$\mathcal{F}(\delta(t))(\omega) = 1,$$

applicando la trasformata di Fourier ad ambo i membri di (2.40) si ricava l'equazione algebrica

$$(i\omega)^2\hat{h}_r(\omega) + 2\xi_r\omega_r(i\omega)\hat{h}_r(\omega) + \omega_r^2\hat{h}_r(\omega) = 1$$

da cui segue che le risposte in frequenza del sistema all'impulso sono le funzioni

$$\hat{h}_r(\omega) = \frac{1}{\omega_r^2 - \omega^2 + 2i\xi_r\omega_r\omega} \quad (2.44)$$

Applicando la trasformata di Fourier inversa alle risposte in frequenza  $\hat{h}(\omega)$  si ritrovano infine le soluzioni fondamentali (2.42) e (2.43) relative ai due casi di sottosmorzamento e sovrasmorzamento. I passaggi algebrici necessari per svolgere l'antitrasformata della funzione razionale (2.44) saranno esplicitati nel seguito, nel corso della determinazione della soluzione particolare del moto. Ad operazione ultimata, ciò che rende possibile la distinzione della soluzione nei due casi di smorzamento sono le formule di Eulero (2.37), le quali permettono di esprimere le funzioni trigonometriche come combinazione lineare di esponenziali complessi.

Per semplicità di notazione, il simbolo  $\hat{\phantom{x}}$  verrà impiegato d'ora in avanti per indicare la trasformata di Fourier di una certa funzione.

### 2.2.5 Forzante cinematica

Per i nastri trasportatori dotati di inverter l'azionamento o spegnimento può essere programmato sia in anello di velocità, facendo sì che il motore segua una certa legge di velocità, che in anello di coppia, facendo sì che il motore segua una certa legge di coppia. Data una certa velocità di rotazione questo meccanismo permette al motore di erogare una coppia qualsiasi, nel limite delle coppie erogabili dal motore stesso. La completa indipendenza tra coppia e velocità angolare rende quindi possibile l'utilizzo di una condizione di tipo cinematico per lo start e per lo stop.

È noto che la forza motrice  $f(x, t)$  da applicare sul nastro per poter trasportare la quantità di materiale prevista dev'essere pari alla somma del contributo inerziale e della risultante di tutte le resistenze, in formule:

$$F(t) = M\tilde{a}(t) + \int_0^{2l_0} r(x) dx H(t).$$

In questo caso  $M$  indicata la massa totale in movimento, compreso il materiale e le componenti rotanti, mentre la  $\tilde{a}(t)$  contraddistingue la legge di accelerazione o decelerazione impostata per lo start o per lo stop. Tale forza motrice viene erogata dal tamburo di comando, che si trova in testa al nastro a una distanza  $l_0$  dall'origine del sistema di riferimento. L'approccio modellistico adottato in questo capitolo prevede che si utilizzi nuovamente la distribuzione delta di Dirac per localizzare il punto di applicazione della forza motrice, trascurando in prima approssimazione tutto l'arco di contatto tra tappeto e tamburo di comando. Pertanto la forza motrice diventa

$$f(x, t) = F(t)\delta(x - l_0) = \left[ M\tilde{a}(t) + \int_0^{2l_0} r(x) dx H(t) \right] \delta(x - l_0).$$

Il ricorso alla delta di Dirac risulta lecito osservato che la lunghezza del nastro trasportatore è molto maggiore dell'arco di avvolgimento del tappeto sul tamburo di comando, ovvero  $l_0 \gg \frac{D}{2}\alpha$  dove  $\alpha$  denota l'angolo di avvolgimento in radianti. L'introduzione di questo termine localizzante è necessario anche per fare in modo che l'equazione sia dimensionalmente corretta e la forzante, in qualità di forza distribuita, venga espressa in  $\frac{N}{m}$ .

Seguendo questo tipo di approccio modellistico si può inoltre scrivere il termine noto in (2.32) come prodotto di dualità, cioè con la notazione

$$\int_0^{2l_0} f(x, t)\phi_r(x) dx = F(t)\langle \phi_r, \delta_{l_0} \rangle$$

che per la teoria delle distribuzioni diventa

$$F(t)\langle \phi_r, \delta_{l_0} \rangle = F(t)\phi_r(l_0). \quad (2.45)$$

Il sistema di equazioni da risolvere rimane quindi

$$\begin{aligned} \ddot{X}_r^p(t) + 2\xi_r\omega_r\dot{X}_r^p(t) + \omega_r^2 X_r^p(t) &= \\ &= \frac{1}{m_r} \left[ M\tilde{a}(t) + \int_0^{2l_0} r(x) dx H(t) \right] \phi_r(l_0) + \\ &- \frac{1}{m_r} \int_0^{2l_0} r(x)\phi_r(x) dx H(t) \quad \forall r \geq 0, \end{aligned}$$

ma rimaneggiando il membro sinistro si ottiene

$$\begin{aligned} \ddot{X}_r^p(t) + 2\xi_r\omega_r\dot{X}_r^p(t) + \omega_r^2X_r^p(t) &= \\ = \frac{M}{m_r}\phi_r(l_0)\tilde{a}(t) + \frac{1}{m_r}\int_0^{2l_0} r(x)[\phi_r(l_0) - \phi_r(x)]dx H(t) &\quad \forall r \geq 0. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Si noti che per il calcolo dell'integrale a membro sinistro del sistema di equazioni dinamiche appena scritto è necessario considerare eventuali resistenze localizzate sul nastro trasportatore, dovute ad esempio alle masse equivalenti dei tamburi o alla presenza di alcuni accessori di contorno. Queste resistenze localizzate entrano in gioco nella determinazione del termine noto delle equazioni attraverso la proprietà del prodotto di dualità (2.45).

## 2.3 Analisi di start

Fissato un tempo di ritardo  $\gamma > 0$ , la legge di velocità presa in esame per questo capitolo è data da

$$v_{st}(t) = v_b(1 - e^{-\frac{t}{\gamma}})H(t) \quad (2.47)$$

dove  $v_b$  rappresenta la velocità nominale del nastro e  $H(t)$  indica la funzione gradino, scritta in (2.41). Con l'aiuto del grafico 2.14 si può notare che tanto più il ritardo  $\gamma$  è piccolo tanto più il profilo di velocità tende alla funzione gradino stessa, ma con ampiezza  $v_b$ , e che la pendenza iniziale del profilo di velocità è tale da raggiungere l'85% della velocità nominale entro il 40% del tempo di start programmato. Per questo motivo si dice che la legge di velocità (2.47) simula la partenza diretta del nastro, partenza che nella pratica viene adoperata solo per nastri che soddisfano criteri di potenza piuttosto restrittivi, ma che preserva delle proprietà utili ai fini della trattazione analitica. Infatti, integrando e derivando (2.47) si ottengono facilmente il trend del moto allo start

$$x_{st}(t) = v_b(t - \gamma(1 - e^{-\frac{t}{\gamma}}))H(t) \quad (2.48)$$

e l'accelerazione

$$a_{st}(t) = \frac{v_b}{\gamma}e^{-\frac{t}{\gamma}}H(t). \quad (2.49)$$

Più precisamente, l'espressione dell'accelerazione permetterà un più agevole calcolo della soluzione particolare del moto  $X_r^p(t)$ , che si determina svolgendo l'integrale di convoluzione tra le risposte all'impulso  $h_r(t)$  e la forza motrice

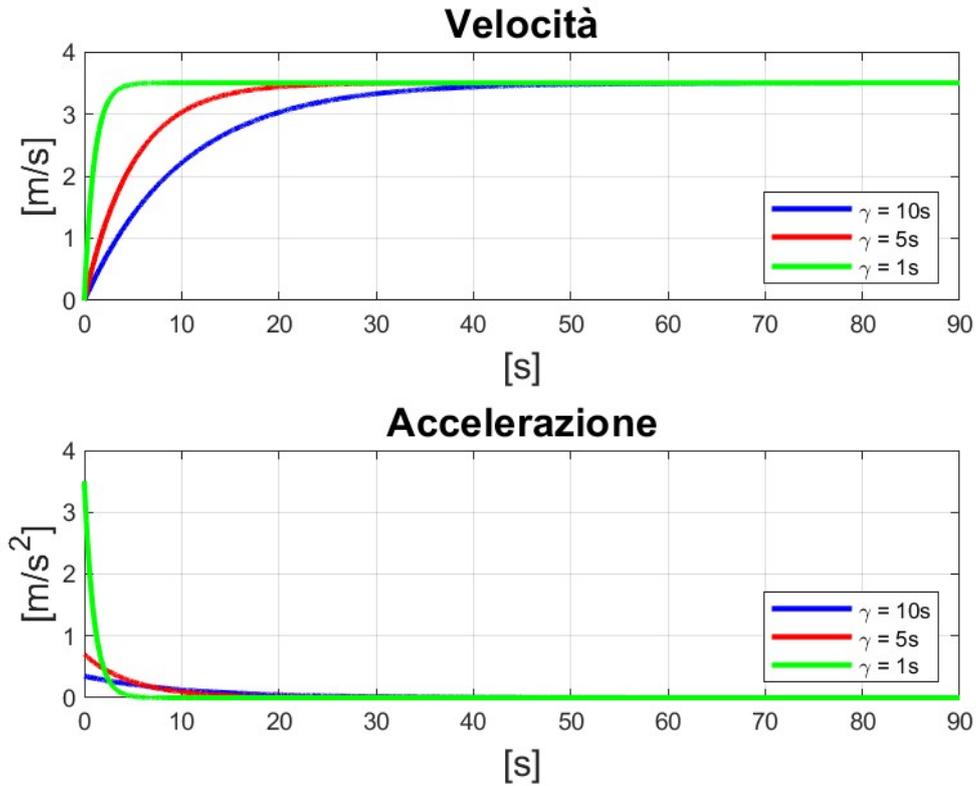


Figura 2.14. Partenza diretta.

$f(x, t)$ .

Altri più comuni profili di velocità utilizzati nella pratica per lo start introdotti dagli autori *Harrison* e *Nordell* sono visibili in figura 2.15. Le espressioni analitiche sono le seguenti:

$$v_{st,lin} = \begin{cases} v_b \frac{t}{T_{st}} & 0 < t \leq T_{st} \\ v_b & t > T_{st} \end{cases}$$

$$v_{st,par} = \begin{cases} v_b \frac{2t^2}{T_{st}^2} & 0 < t \leq T_{st}/2 \\ v_b \left( -1 + \frac{4t}{T_{st}} - \frac{2t^2}{T_{st}^2} \right) & T_{st}/2 < t \leq T_{st} \end{cases}$$

$$v_{st,sin} = \begin{cases} \frac{v_b}{2} \left( 1 - \cos\left(\pi \frac{t}{T_{st}}\right) \right) & 0 < t \leq T_{st} \\ v_b & t > T_{st} \end{cases}$$

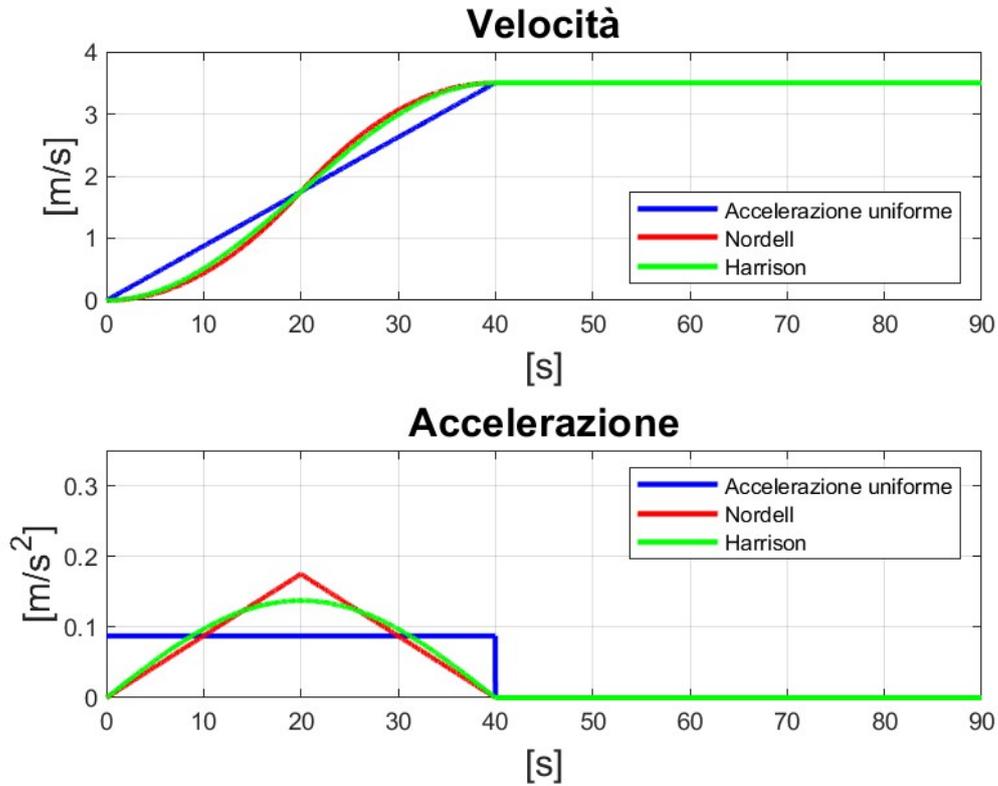


Figura 2.15. Profili di velocità e di accelerazioni utilizzati per l'avviamento.

e rappresentano rispettivamente la partenza lineare con accelerazione uniforme, la partenza parabolica con accelerazione lineare e la partenza sinusoidale. Per questi casi, si dice che  $T_{st}$  è il tempo di start previsto per il nastro.

### 2.3.1 Soluzioni particolari di start

Ricordando la decomposizione già discussa degli spostamenti dinamici assoluti in moto rigido e moto relativo, esprimibile come

$$u_d(x, t) = u_{rig}(t) + u_{rel}(x, t) = \phi_0 X_0(t) + \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x) X_r(t)$$

e riprendendo il sistema di equazioni dinamiche (2.46) si arriva a scrivere, attraverso le proprietà (2.39), l'equazione di evoluzione della prima forma

modale:

$$\begin{aligned} \ddot{X}_0^p(t) + 2\xi_0\omega_0\dot{X}_0^p(t) + \omega_0^2 X_0^p(t) &= \\ &= \frac{M}{m_0}\phi_0\tilde{a}(t) + \frac{1}{m_0} \int_0^{2l_0} r(x) \overbrace{[\phi_0(l_0) - \phi_0(x)]}^{=0} dx H(t). \end{aligned}$$

A valle di tutte le semplificazioni l'equazione di evoluzione per la prima forma modale rimane

$$\ddot{X}_0^p(t) = \frac{M}{m_0}\phi_0\tilde{a}(t),$$

ma siccome sussiste la relazione

$$a_{st}(t) = \frac{d^2 u_{rig}}{dt^2}(t)$$

tra moto rigido e legge di start impostata, allora svolgendo tutti i passaggi si ottiene

$$\frac{d^2 u_{rig}}{dt^2}(t) = \phi_0 \ddot{X}_0(t) = \phi_0 \left( \ddot{X}_0^p(t) + \cancel{\ddot{X}_0^{hom}(t)} \right) = \phi_0 \ddot{X}_0^p(t) = \frac{M}{m_0} \phi_0^2 \tilde{a}(t),$$

da cui segue l'espressione della forzante cinematica:

$$\tilde{a}(t) = \frac{m_0}{M\phi_0^2} \frac{v_b}{\gamma} e^{-\frac{t}{\gamma}} H(t).$$

A questo punto per i restanti  $r \geq 1$  modi di vibrare l'equazione dinamica risulta

$$\begin{aligned} \ddot{X}_r^p(t) + 2\xi_r\omega_r\dot{X}_r^p(t) + \omega_r^2 X_r^p(t) &= \\ &= \frac{m_0}{m_r} \frac{\phi_r(l_0)}{\phi_0^2} \frac{v_b}{\gamma} e^{-\frac{t}{\gamma}} H(t) + \frac{1}{m_r} \int_0^{2l_0} r(x) [\phi_r(l_0) - \phi_r(x)] dx H(t). \end{aligned}$$

Chiamata  $g(t)$  la funzione esponenziale decrescente  $e^{-\frac{t}{\gamma}} H(t)$  e definite le funzioni

$$z_r(t) := \left( g * h_r \right)(t), \quad y_r(t) := \left( H * h_r \right)(t)$$

le soluzioni particolari del moto si esprimono come

$$X_r^p(t) = \frac{m_0}{m_r} \frac{\phi_r(l_0)}{\phi_0^2} \frac{v_b}{\gamma} z_r(t) + \frac{1}{m_r} \int_0^{2l_0} r(x) [\phi_r(l_0) - \phi_r(x)] dx y_r(t), \quad (2.50)$$

dove la notazione  $*$  denota il prodotto di convoluzione tra due funzioni.

### Calcolo in frequenza

Nel seguito si procede con la determinazione in frequenza delle risposte  $z_r(t)$  del sistema massa-molla-smorzatore alla funzione esponenziale decrescente  $g(t)$  e successivamente si utilizza la stessa metodologia per dimostrare le più comuni risposte  $y_r(t)$  del sistema alla funzione gradino  $H(t)$ .

Il prodotto di convoluzione  $p$  tra due generiche funzioni  $v$  e  $w$  è definito come

$$p(t) = \left( v * w \right) (t) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(\tau) w(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t - \tau) w(\tau) d\tau.$$

Per i casi in esame, tale prodotto si esplicita col calcolo degli integrali seguenti:

- $\xi_r < 1$

$$\begin{aligned} z_r(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t - \tau) h_r(\tau) d\tau = \int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{\gamma}} \frac{e^{-\xi_r \omega_r \tau}}{\omega_{dr}} \sin(\omega_{dr} t) d\tau H(t) \\ y_r(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} H(t - \tau) h_r(\tau) d\tau = \int_0^t \frac{e^{-\xi_r \omega_r \tau}}{\omega_{dr}} \sin(\omega_{dr} t) d\tau H(t) \end{aligned} \quad (2.51)$$

- $\xi_r > 1$

$$\begin{aligned} z_r(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t - \tau) h_r(\tau) d\tau = \int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{\gamma}} \frac{e^{-\xi_r \omega_r \tau}}{\omega_r \sqrt{\xi_r^2 - 1}} \sinh(\omega_r \sqrt{\xi_r^2 - 1} t) d\tau H(t) \\ y_r(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} H(t - \tau) h_r(\tau) d\tau = \int_0^t \frac{e^{-\xi_r \omega_r \tau}}{\omega_r \sqrt{\xi_r^2 - 1}} \sinh(\omega_r \sqrt{\xi_r^2 - 1} t) d\tau H(t). \end{aligned} \quad (2.52)$$

Sebbene il calcolo analitico di questi integrali sia abbastanza accessibile sia per  $z_r(t)$  che per  $y_r(t)$ , si preferisce svolgere il conto nel dominio della frequenza, ricorrendo ancora alla trasformata di Fourier. In questo modo si evita di dover trattare separatamente il conto per i due casi di smorzamento e si riesce a trovare un'unica espressione comune della risposta in frequenza. Inoltre per l'operazione di convoluzione vale la proprietà per cui la trasformata di Fourier del prodotto di convoluzione è pari al prodotto semplice delle trasformate di Fourier delle funzioni coinvolte, ovvero

$$p(t) = \left( v * w \right) (t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{p}(\omega) = \hat{v}(\omega) \hat{w}(\omega). \quad (2.53)$$

Pertanto, calcolando i prodotti

$$\hat{z}_r(\omega) = \hat{g}(\omega)\hat{h}_r(\omega), \quad \hat{y}_r(\omega) = \hat{H}(\omega)\hat{h}_r(\omega)$$

e applicandovi la trasformata di Fourier inversa si giunge alle stesse espressioni analitiche a cui conducono gli integrali (2.51) e (2.52). Le espressioni delle risposte all'impulso del sistema nel dominio della frequenza  $\hat{h}_r(\omega)$  sono note e riportate in (2.44), mentre le trasformate di Fourier delle funzione  $g(t)$  e  $H(t)$  vanno determinate.

Per il calcolo di  $\hat{g}(\omega)$  è sufficiente utilizzare la definizione di trasformata di Fourier e sostituirvi l'espressione di  $g(t)$ :

$$\hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-i\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(\frac{1}{\gamma}+i\omega)t} dt = \frac{1}{\frac{1}{\gamma} + i\omega}.$$

Di conseguenza le risposte del sistema in frequenza all'esponenziale decrescente sono

$$\begin{aligned} \hat{z}_r(\omega) &= \frac{1}{\left(\frac{1}{\gamma} + i\omega\right)\left[\omega_r^2 - \omega^2 + 2i\xi_r\omega_r\omega\right]} = \\ &= \left(\omega_r^2 - 2\frac{\xi_r\omega_r}{\gamma} + \frac{1}{\gamma^2}\right)^{-1} \left[ \frac{1}{\frac{1}{\gamma} + i\omega} - \frac{2\xi_r\omega_r - \frac{1}{\gamma} + i\omega}{\omega_r^2 - \omega^2 + 2i\xi_r\omega_r\omega} \right] = \\ &= \left(\omega_r^2 - 2\frac{\xi_r\omega_r}{\gamma} + \frac{1}{\gamma^2}\right)^{-1} \left[ \frac{1}{\frac{1}{\gamma} + i\omega} - \underbrace{\left(\frac{\xi_r\omega_r + i\omega}{\omega_r^2 - \omega^2 + 2i\xi_r\omega_r\omega}\right)}_{\hat{c}(\omega)} + \frac{\xi_r\omega_r - \frac{1}{\gamma}}{\omega_r\sqrt{\xi_r^2 - 1}} \underbrace{\left(\frac{\omega_r\sqrt{\xi_r^2 - 1}}{\omega_r^2 - \omega^2 + 2i\xi_r\omega_r\omega}\right)}_{\hat{s}(\omega)} \right]. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Tramite un'operazione algebrica le funzioni della frequenza  $\hat{c}(\omega)$  e  $\hat{s}(\omega)$  appena definite possono essere riscritte come

$$\begin{aligned} \hat{c}(\omega) &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\xi_r\omega_r - \omega_r\sqrt{\xi_r^2 - 1} + i\omega} + \frac{1}{\xi_r\omega_r + \omega_r\sqrt{\xi_r^2 - 1} + i\omega} \right) \\ \hat{s}(\omega) &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\xi_r\omega_r - \omega_r\sqrt{\xi_r^2 - 1} + i\omega} - \frac{1}{\xi_r\omega_r + \omega_r\sqrt{\xi_r^2 - 1} + i\omega} \right) \end{aligned}$$

le quali rappresentano rispettivamente le trasformate di Fourier delle funzioni del tempo

$$\begin{aligned} c(t) &= \frac{1}{2} \left( e^{(-\xi_r\omega_r + \omega_r\sqrt{\xi_r^2 - 1})t} H(t) + e^{(-\xi_r\omega_r - \omega_r\sqrt{\xi_r^2 - 1})t} H(t) \right) = \\ &= e^{-\xi_r\omega_r t} \left( \frac{e^{\omega_r\sqrt{\xi_r^2 - 1}t} + e^{-\omega_r\sqrt{\xi_r^2 - 1}t}}{2} \right) H(t) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{1}{2} \left( e^{(-\xi_r \omega_r + \omega_r \sqrt{\xi_r^2 - 1})t} H(t) - e^{(-\xi_r \omega_r - \omega_r \sqrt{\xi_r^2 - 1})t} H(t) \right) = \\ &= e^{-\xi_r \omega_r t} \left( \frac{e^{\omega_r \sqrt{\xi_r^2 - 1} t} - e^{-\omega_r \sqrt{\xi_r^2 - 1} t}}{2} \right) H(t). \end{aligned}$$

Con le formule di Eulero (2.37) e le formule (2.38) si conclude facilmente che la trasformata di Fourier inversa delle funzioni  $\hat{z}_r(\omega)$  riportate in (2.54), o meglio le risposte  $z_r(t)$  del sistema massa-molla-smorzatore alla funzione esponenziale decrescente  $g(t)$  sono, nei due casi di smorzamento:

- $\xi_r < 1$

$$z_r(t) = \left( \omega_r^2 - 2 \frac{\xi_r \omega_r}{\gamma} + \frac{1}{\gamma^2} \right)^{-1} \left[ e^{-\frac{t}{\gamma}} - e^{-\xi_r \omega_r t} \left( \cos(\omega_{dr} t) + \frac{\xi_r \omega_r - \frac{1}{\gamma}}{\omega_{dr}} \sin(\omega_{dr} t) \right) \right] H(t) \quad (2.55)$$

- $\xi_r > 1$

$$\begin{aligned} z_r(t) &= \left( \omega_r^2 - 2 \frac{\xi_r \omega_r}{\gamma} + \frac{1}{\gamma^2} \right)^{-1} \\ &\left[ e^{-\frac{t}{\gamma}} - e^{-\xi_r \omega_r t} \left( \cosh(\omega_r \sqrt{\xi_r^2 - 1} t) + \frac{\xi_r \omega_r - \frac{1}{\gamma}}{\omega_r \sqrt{\xi_r^2 - 1}} \sinh(\omega_r \sqrt{\xi_r^2 - 1} t) \right) \right] H(t). \end{aligned} \quad (2.56)$$

Alcuni andamenti quantitativi delle risposte  $z_r(t)$  normalizzate sono riportati in figura 2.16.

Per quanto riguarda il calcolo delle risposte  $y_r(t)$  del sistema massa-molla-smorzatore alla funzione gradino  $H(t)$  si può procedere in maniera del tutto analoga e operare nel dominio della frequenza, per poi arrivare a determinare i noti andamenti nel tempo:

- $\xi_r < 1$

$$y_r(t) = \frac{1}{\omega_r^2} \left[ 1 - e^{-\xi_r \omega_r t} \left( \cos(\omega_{dr} t) + \frac{\xi_r}{\sqrt{1 - \xi_r^2}} \sin(\omega_{dr} t) \right) \right] H(t) \quad (2.57)$$

- $\xi_r > 1$

$$y_r(t) = \frac{1}{\omega_r^2} \left[ 1 - e^{-\xi_r \omega_r t} \left( \cosh(\omega_r \sqrt{\xi_r^2 - 1} t) + \frac{\xi_r}{\sqrt{\xi_r^2 - 1}} \sinh(\omega_r \sqrt{\xi_r^2 - 1} t) \right) \right] H(t). \quad (2.58)$$

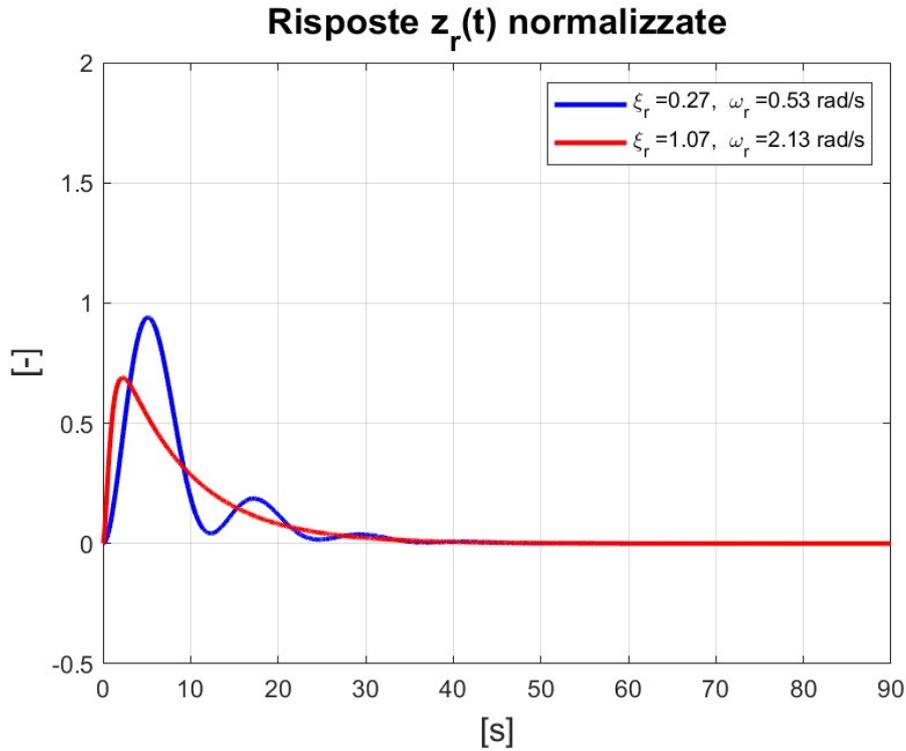


Figura 2.16. Risposta del sistema massa-molla-smorzatore all'esponezionale decrescente.

Si può dimostrare che la trasformata di Fourier della funzione gradino  $H(t)$  è la distribuzione

$$\hat{H}(\omega) = \frac{1}{i\omega} + \frac{\delta(\omega)}{2}$$

e quindi le risposte in frequenza del sistema alla funzione gradino sono

$$\hat{y}_r(\omega) = \hat{H}(\omega)\hat{h}_r(\omega) = \frac{\hat{h}_r(\omega)}{i\omega} + \frac{1}{2}\hat{h}_r(\omega)\delta(\omega).$$

Ancora in merito alla delta di Dirac vale la proprietà per cui il prodotto di una generica funzione  $p$  per la delta corrisponde al prodotto di  $p$  valutata nel punto di applicazione della delta per la delta stessa, cioè

$$\hat{p}(\omega)\delta(\omega - \omega_*) = \hat{p}(\omega_*)\delta(\omega - \omega_*)$$

in generale. Per il caso in oggetto vale quindi

$$\hat{h}_r(\omega)\delta(\omega) = \hat{h}_r(0)\delta(\omega)\frac{1}{\omega_r^2}\delta(\omega)$$

e le espressioni in frequenza delle risposte al gradino diventano

$$\hat{y}_r(\omega) = \frac{1}{i\omega} \frac{1}{\omega_r^2 - \omega^2 + 2i\xi_r\omega_r\omega} + \frac{1}{\omega_r^2} \frac{\delta(\omega)}{2}.$$

Tramite dei rimaneggiamenti algebrici si giunge alla scrittura equivalente

$$\begin{aligned} \hat{y}_r(\omega) &= \frac{1}{\omega_r^2} \left[ \frac{1}{i\omega} - \frac{2\xi_r\omega_r + i\omega}{\omega_r^2 - \omega^2 + 2i\xi_r\omega_r\omega} + \frac{\delta(\omega)}{2} \right] = \\ &= \frac{1}{\omega_r^2} \left[ \frac{1}{i\omega} + \frac{\delta(\omega)}{2} - \left( \frac{\xi_r\omega_r + i\omega}{\omega_r^2 - \omega^2 + 2i\xi_r\omega_r\omega} + \frac{\xi_r\omega_r}{\omega_r\sqrt{\xi_r^2 - 1}} \frac{\omega_r\sqrt{\xi_r^2 - 1}}{\omega_r^2 - \omega^2 + 2i\xi_r\omega_r\omega} \right) \right], \end{aligned}$$

che conduce, grazie alla considerazioni sulla trasformata di Fourier inversa precedentemente fatte, alle soluzioni (2.57) e (2.58).

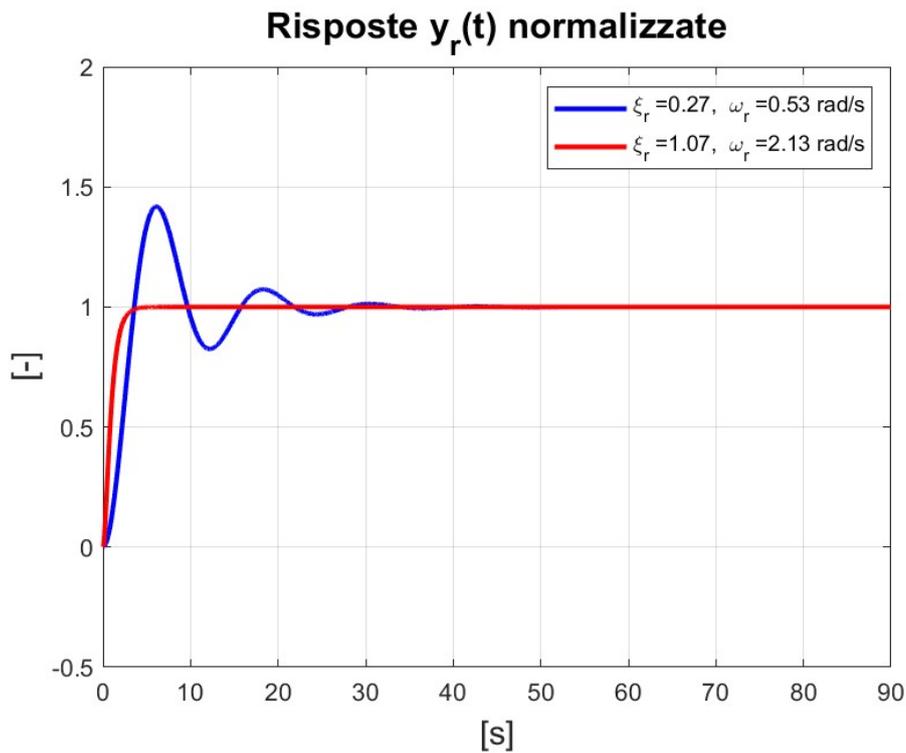


Figura 2.17. Risposta del sistema massa-molla-smorzatore alla funzione gradino.

Alcuni andamenti quantitativi delle risposte  $y_r(t)$  normalizzate sono riportati in figura 2.17.

### 2.3.2 Soluzione dinamica completa

La somma della soluzione dell'equazione omogenea associata e della soluzione particolare del moto porta alla definizione del transitorio del sistema meccanico. Nella determinazione della dinamica completa del nastro trasportatore restano però da calcolare i coefficienti  $A_r$  e  $B_r$  delle risposte libere (2.35) e (2.36), i quali si trovano imponendo le condizioni iniziali (2.33) sulle soluzioni complete  $X_r(t)$ . Si verifica però, dopo pochi passaggi matematici, che tutte le soluzioni particolari trovate per lo start con la forzante cinematica adottata non alterano le condizioni iniziali e quindi non sono rilevanti ai fini della determinazione dei coefficienti delle risposte libere del sistema. Più precisamente s'intende dire che

$$\begin{cases} X_r^p(0) = 0 \\ \dot{X}_r^p(0) = 0 \end{cases} \quad \forall r \geq 0. \quad (2.59)$$

Di conseguenza si ridefiniscono le stesse condizioni iniziali adottate per la soluzione completa sulle funzioni  $X_r^{hom}(t)$ :

$$\begin{cases} X_r^{hom}(0) = \frac{1}{m_r} \int_0^{2l_0} q(x) u_0(x) \phi_r(x) dx \\ \dot{X}_r^{hom}(0) = \frac{1}{m_r} \int_0^{2l_0} q(x) v_0(x) \phi_r(x) dx \end{cases} \quad \forall r \geq 0. \quad (2.60)$$

La dimostrazione di (2.59) segue in due parti: si valutano la posizione e la velocità iniziale prima per il caso  $r = 0$  e poi per i restanti  $r \geq 1$ .

Per  $r = 0$  si è già discusso nel paragrafo precedente il fatto che

$$u_{rig}(t) = \phi_0 X_0^p(t) = x_{st}(t), \quad \frac{du_{rig}}{dt}(t) = \phi_0 \dot{X}_0^p(t) = v_{st}(t),$$

pertanto dalle espressioni della legge di start (2.48) e (2.47) si verificano subito le condizioni

$$\begin{cases} X_0^p(0) = x_{st}(0) = 0 \\ \dot{X}_0^p(0) = v_{st}(0) = 0. \end{cases}$$

Quando  $r \geq 1$  la condizione sulla posizione iniziale  $X_r^p(0) = 0$  è presto verificata, poiché la stessa condizione è soddisfatta sia dalle risposte del sistema  $z_r(t)$  all'esponenziale decrescente che dalle risposte  $y_r(t)$  al gradino, ovvero

$$z_r(0) = y_r(0) = 0.$$

Non è però altrettanto banale la verifica delle condizioni sulla velocità iniziale

$$\dot{z}_r(0) = \dot{y}_r(0) = 0, \quad (2.61)$$

difficili da evincere anche dai grafici in figura 2.16 e 2.17, ma immediate se si ricorre a due proprietà utili:

- il prodotto di convoluzione di una generica funzione  $p$  con la delta di Dirac è data dalla traslata di  $p$  nel punto di applicazione della delta, cioè

$$\left(p * \delta_{t_0}\right)(t) = p(t - t_0); \quad (2.62)$$

- la derivata debole di un prodotto di convoluzione tra due generiche funzioni  $v$  e  $w$  è data da

$$\frac{d}{dt}\left(v * w\right)(t) = \left(\frac{dv}{dt} * w\right)(t) = \left(v * \frac{dw}{dt}\right)(t). \quad (2.63)$$

Le proprietà (2.62) e (2.63) applicate alle risposte  $z_r(t)$  e  $y_r(t)$  del sistema portano velocemente al calcolo delle seguenti derivate:

$$\begin{aligned} \dot{z}_r(t) &= \left(\dot{g} * h_r\right)(t) = \left(\left(-\frac{1}{\gamma}g + \delta_0\right) * h_r\right)(t) = \\ &= -\frac{1}{\gamma}\left(g * h_r\right)(t) + \left(\delta_0 * h_r\right)(t) = -\frac{z_r(t)}{\gamma} + h_r(t) \end{aligned}$$

e

$$\dot{y}_r(t) = \left(\dot{H} * h_r\right)(t) = \left(\delta_0 * h_r\right)(t) = h_r(t),$$

ma dal momento che  $z_r(0) = 0$  e  $h_r(0) = 0$  allora segue facilmente la tesi (2.61).

Tutti i coefficienti  $A_r$  sono automaticamente determinati osservando il fatto che

$$X_r^{hom}(0) = A_r \quad \forall r \geq 0,$$

da cui seguono

$$A_r = \frac{1}{m_r} \int_0^{2l_0} q(x)u_0(x)\phi_r(x) dx \quad \forall r \geq 0.$$

Per la determinazione dei coefficienti  $B_r$  si calcola invece la derivata delle risposte libere del sistema quando  $r = 0$  e nei due casi di smorzamento:

- $r = 0$

$$\dot{X}_0^{hom}(t) = B_0$$

- $\xi_r < 1$

$$\dot{X}_r^{hom}(t) = -\xi_r \omega_r X_r^{hom}(t) + \omega_{dr} e^{-\xi_r \omega_r t} (-A_r \sin(\omega_{dr} t) + B_r \cos(\omega_{dr} t))$$

- $\xi_r > 1$

$$\begin{aligned} \dot{X}_r^{hom}(t) &= -\xi_r \omega_r X_r^{hom}(t) \\ &+ \omega_r \sqrt{\xi_r^2 - 1} e^{-\xi_r \omega_r t} (A_r \sinh(\omega_r \sqrt{\xi_r^2 - 1} t) + B_r \cosh(\omega_r \sqrt{\xi_r^2 - 1} t)) \end{aligned}$$

e le si valutano in  $t = 0$ :

- $r = 0$

$$\dot{X}_0^{hom}(0) = B_0$$

- $\xi_r < 1$

$$\dot{X}_r^{hom}(0) = -\xi_r \omega_r A_r + \omega_{dr} B_r$$

- $\xi_r > 1$

$$\dot{X}_r^{hom}(0) = -\xi_r \omega_r A_r + \omega_r \sqrt{\xi_r^2 - 1} B_r.$$

Noti i valori di  $X_r^{hom}(0)$  e quindi gli  $A_r$  seguono infine i valori dei coefficienti  $B_r$  per  $r = 0$  e nei due casi di smorzamento:

- $r = 0$

$$B_0 = \frac{\phi_0}{m_0} \int_0^{2l_0} q(x) v_0(x) dx$$

- $\xi_r < 1$

$$B_r = \frac{1}{\omega_{dr} m_r} \left( \int_0^{2l_0} q(x) v_0(x) \phi_r(x) dx + \xi_r \omega_r \int_0^{2l_0} q(x) u_0(x) \phi_r(x) dx \right)$$

- $\xi_r > 1$

$$B_r = \frac{1}{m_r \omega_r \sqrt{\xi_r^2 - 1}} \left( \int_0^{2l_0} q(x) v_0(x) \phi_r(x) dx + \xi_r \omega_r \int_0^{2l_0} q(x) u_0(x) \phi_r(x) dx \right).$$

### 2.3.3 Soluzione a regime

Nota il transitorio diventa possibile determinare la soluzione stazionaria tramite l'operazione di limite per  $t \rightarrow +\infty$ . Poiché la soluzione dinamica  $u_d(x, t)$  è stata introdotta come espansione in serie, al fine di ottenere un'espressione della soluzione a regime in forma chiusa si adopera lo scambio tra l'operazione di serie e quella di limite.

Nel seguito si pone l'attenzione sugli spostamenti longitudinali relativi e sulle tensioni totali. A rigore è possibile attuare l'operazione di limite e determinare le soluzioni a regime anche a monte del calcolo dei coefficienti  $A_r$  e  $B_r$  delle risposte libere del sistema, poiché essendo presente uno smorzamento tali risposte tendono a zero per tempi sufficientemente lunghi, ovvero

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} X_r^{hom}(t) = 0 \quad \forall r \geq 1$$

indipendentemente dalle condizioni iniziali  $u_0(x)$  e  $v_0(x)$ . Dalle espressioni (2.55) e (2.56) si evince facilmente che anche le risposte  $z_r(t)$  del sistema all'esponenziale decrescente  $g(t)$  decrescono rapidamente verso zero, cioè

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} z_r(t) = 0 \quad \forall r \geq 1.$$

Restano quindi le risposte  $y_r(t)$  le uniche ad avere un contributo non nullo a regime; infatti dalle espressioni (2.57) e (2.58) si determina il valore asintotico di ciascuna risposta al gradino, pari a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y_r(t) = \frac{1}{\omega_r^2} \quad \forall r \geq 1,$$

da cui seguono, tramite la relazione (2.50), i valori nominali di ciascuna soluzione particolare

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} X_r^p(t) = \frac{1}{m_r \omega_r^2} \int_0^{2l_0} r(x) [\phi_r(l_0) - \phi_r(x)] dx \quad \forall r \geq 1$$

e si conclude, con l'espansione in serie (2.31), che la distribuzione asintotica degli spostamenti longitudinali relativi è data da

$$u_{reg}(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\phi_r(x)}{m_r \omega_r^2} \int_0^{2l_0} r(x) [\phi_r(l_0) - \phi_r(x)] dx + u_s(x). \quad (2.64)$$

Questa espressione in serie dimostra che tale distribuzione asintotica degli spostamenti longitudinali relativi dipende dalle resistenze al moto del nastro

e dell'azione del contrappeso, ma non dalla legge di start. Per le tensioni dinamiche vale invece l'espansione in serie

$$T_d(x, t) = EA \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r'(x) \left(1 + \mu \frac{d}{dt}\right) X_r(t)$$

da cui emerge la necessità di calcolare il limite per  $t \rightarrow \infty$  anche per la derivata prima delle soluzioni complete  $X_r(t)$ , così scritte:

$$\begin{aligned} \dot{X}_r(t) &= \dot{X}_r^{hom}(t) + \dot{X}_r^p(t) = \\ &= \dot{X}_r^{hom}(t) + \frac{m_0}{m_r} \frac{\phi_r(l_0)}{\phi_0^2} \frac{v_b}{\gamma} \dot{z}_r(t) + \frac{1}{m_r} \int_0^{2l_0} r(x) [\phi_r(l_0) - \phi_r(x)] dx \dot{y}_r(t) = \\ &= \dot{X}_r^{hom}(t) + \frac{m_0}{m_r} \frac{\phi_r(l_0)}{\phi_0^2} \frac{v_b}{\gamma} \left( -\frac{z_r(t)}{\gamma} + h_r(t) \right) + \\ &\quad + \frac{1}{m_r} \int_0^{2l_0} r(x) [\phi_r(l_0) - \phi_r(x)] dx h_r(t). \end{aligned}$$

Siccome le risposte libere tendono a zero per tempi lunghi, allora necessariamente anche la loro derivata prima presenta lo stesso comportamento asintotico. Poiché dalle espressioni (2.42) e (2.43) delle risposte all'impulso  $h_r(t)$  risulta che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} h_r(t) = 0 \quad \forall r \geq 1,$$

a dimostrazione del fatto che il sistema ritorna spontaneamente nella sua configurazione d'equilibrio stabile dopo la sollecitazione impulsiva, si trova che la distribuzione a regime delle tensioni totali lungo il nastro è data da

$$T_{reg}(x) = EA \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\phi_r'(x)}{m_r \omega_r^2} \int_0^{2l_0} r(x) [\phi_r(l_0) - \phi_r(x)] dx + T_s. \quad (2.65)$$

In alternativa, la distribuzione nominale delle tensioni può essere ricavata a partire dall'equazione (2.10) e dalle condizioni al contorno (2.15), con l'assunzione che non vi siano più variazioni nel tempo nel sistema. Da un punto di vista matematico ciò significa non considerare tutti i termini in cui sono presenti derivate temporali di ordine superiore o uguale al primo, ovvero con le semplificazioni seguenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} q(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) - r(x) + f(x, t) \\ \frac{m_t}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(2l_0, t) \right) - EA(1 + \mu \frac{\partial}{\partial t}) \left[ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) + \frac{\partial u}{\partial x}(2l_0, t) \right] = -m_{cw}g \\ \frac{2J_1}{D^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0, t) + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(2l_0, t) \right) - EA(1 + \mu \frac{\partial}{\partial t}) \left[ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(2l_0, t) \right] = 0. \end{array} \right. \quad (2.66)$$

Anche la coppia erogata dal gruppo di comando è da intendere come stabilizzata e costante. Di conseguenza, chiamata

$$R_{tot} = \int_0^{2l_0} r(x) dx$$

la resistenza totale, la forzante cinematica a regime è pari a

$$f(x, t \rightarrow +\infty) = R_{tot} \delta(x - l_0).$$

Applicando inoltre il legame tensioni-spostamenti (2.11) al sistema (2.66) con

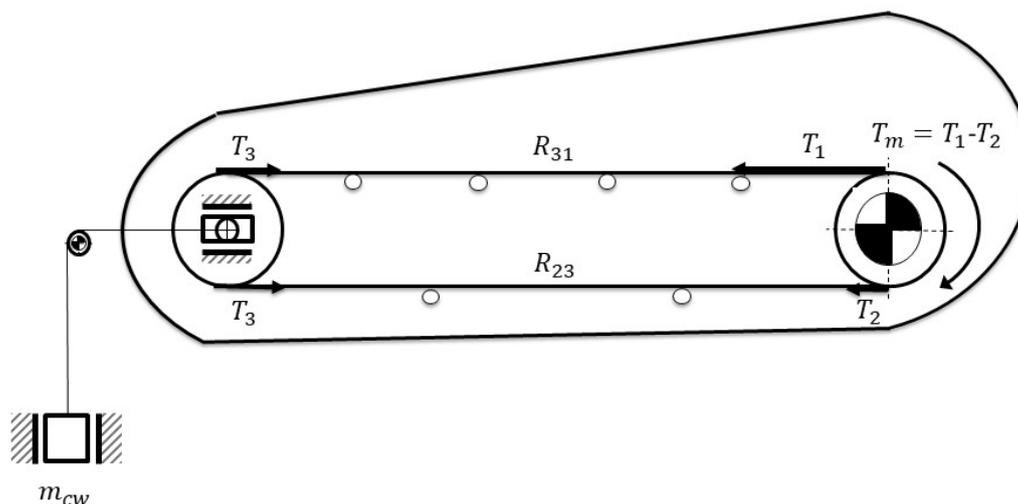


Figura 2.18. Distribuzione delle tensioni nominali lungo il nastro.

la semplificazione di moto stazionario il problema differenziale che descrive gli andamenti delle tensioni nominali lungo il nastro diventa

$$\begin{cases} T'_{reg}(x) = r(x) - R_{tot} \delta(x - l_0) \\ T_{reg}(0) = T_{reg}(2l_0) = \frac{m_{cw}g}{2} \end{cases} \quad (2.67)$$

e può essere risolto analiticamente per certe semplici distribuzioni delle resistenze al moto. Infatti, con riferimento alla figura 2.18, se si assumono uniformi le resistenze lungo i rami di andata e di ritorno diventa possibile calcolare le tensioni ai capi di ogni tamburo risolvendo il sistema lineare di 4 equazioni in 4 incognite

$$\begin{cases} T_3 = \frac{m_{cw}g}{2} \\ T_1 - T_3 = R_{31} \\ T_3 - T_2 = R_{23} \\ T_m = T_1 - T_2 \end{cases}$$

da cui si deduce l'andamento lineare a tratti delle tensioni lungo il nastro

$$T_{reg}(x) = \begin{cases} \frac{R_{31}}{l_0}x + \frac{m_{cw}g}{2} & 0 \leq x < l_0 \\ \frac{R_{23}}{l_0}(x - l_0) + \frac{m_{cw}g}{2} - R_{23} & l_0 \leq x < 2l_0. \end{cases} \quad (2.68)$$

In questo caso le quantità  $R_{31}$  e  $R_{23}$  rappresentano il totale delle resistenze sui rami di andata e ritorno rispettivamente e possono differire in generale, mentre  $T_m$  indica la forza motrice.

Nel capitolo 3 verrà mostrata la convergenza dell'espansione in serie (2.65) alla soluzione lineare a tratti (2.68) con discontinuità di salto nel punto  $x = l_0$  di ampiezza  $T_m$ .

Per questo specifico caso si può ancora ricavare l'espressione analitica degli spostamenti longitudinali a regime tramite la relazione tensione-spostamenti (2.11), sempre sotto l'ipotesi di stazionarietà del moto. Procedendo per integrazione diretta di (2.68) si ottiene infatti

$$u_{reg}(x) = \frac{1}{EA} \begin{cases} \frac{R_{31}}{2l_0}x^2 + \frac{m_{cw}g}{2}x + c_1 & 0 \leq x < l_0 \\ \frac{R_{23}}{2l_0}x^2 + \left(\frac{m_{cw}g}{2} - 2R_{23}\right)x + c_2 & l_0 \leq x < 2l_0 \end{cases}$$

e imponendo la condizione di continuità in  $x = l_0$

$$\lim_{x \rightarrow l_0^-} u_{reg}(x) = \lim_{x \rightarrow l_0^+} u_{reg}(x)$$

si ricava, a meno di una costante additiva  $d$ , l'espressione degli spostamenti longitudinali relativi a regime nel caso di resistenze uniformemente distribuite:

$$u_{reg}(x) = \frac{1}{EA} \begin{cases} \frac{R_{31}}{2l_0}x^2 + \frac{m_{cw}g}{2}x - \frac{R_{31}}{2}l_0 - \frac{3R_{23}}{2}l_0 + d & 0 \leq x < l_0 \\ \frac{R_{23}}{2l_0}x^2 + \left(\frac{m_{cw}g}{2} - 2R_{23}\right)x + d & l_0 \leq x < 2l_0. \end{cases}$$

L'espressione analitica appena trovata di  $u_{reg}(x)$ , sebbene non ancora scritta nella sua forma definitiva, è sufficiente per determinare lo spostamento del contrappeso durante la condizione di esercizio a regime tramite la relazione (2.13), da cui si trova

$$x_{reg} = \frac{u_{reg}(0) - u_{reg}(2l_0)}{2} = -\frac{R_{31} - R_{23}}{4EA} l_0 - \underbrace{\frac{m_{cw}g}{2EA} l_0}_{x_s}, \quad (2.69)$$

a dimostrazione del fatto che, a nastro stabilizzato, se  $R_{31} > R_{23}$  il contrappeso si abbassa rispetto la sua posizione statica iniziale. Più in generale si può dire che il nastro in movimento si allunga ogni volta in cui la somma delle resistenze che intercorrono tra il contrappeso e il tamburo di comando sono maggiori della somma delle resistenze che intercorrono tra il tamburo di comando e il contrappeso.

Sebbene il parametro di smorzamento  $\mu$  incida sulla durata del transitorio e quindi sul tempo di decadimento delle onde di tensione, la soluzione (2.65) dimostra che tale parametro è ininfluenza sulla distribuzione asintotica delle tensioni lungo il nastro. Tuttavia, valutare quantitativamente i massimi picchi di tensione raggiunti durante l'avviamento è di fondamentale importanza al fine del corretto dimensionamento dei motori e per le verifiche di resistenza delle componenti rotanti del nastro trasportatore.

## 2.4 Analisi di stop

In questa sezione si prende in esame la fermata naturale del nastro trasportatore, così chiamata per il tipo di spegnimento che avviene solo per effetto delle resistenze d'attrito senza l'applicazione di un'ulteriore decelerazione imposta dal tamburo di comando.

### 2.4.1 Soluzioni particolari di stop

Poiché durante una procedura standard di spegnimento di un nastro trasportatore si prevede che il sistema si trovi già in una situazione di esercizio stazionario, l'espressione della forza motrice per il caso di fermata naturale si scrive come

$$f(x, t) = \int_0^{2l_0} r(x) dx \chi_{[0, T]}(t) \delta(x - l_0)$$

con forzante cinematica  $\tilde{a}(t)$  nulla. La funzione del tempo  $\chi_{[0, T]}(t)$  denota la funzione porta di ampiezza  $T$  e rappresenta il fatto che, a partire dall'istante

iniziale di analisi il motore esercita ancora la forza necessaria a vincere tutte le resistenze del moto, ma solo per un tempo  $T$ , oltre il quale la forza esercitata si annulla. Da un punto di vista matematico la funzione porta di ampiezza  $T$  può essere espressa come

$$\chi_{[0,T]}(t) = H(t) - H(t - T).$$

A questo punto il sistema di equazioni dinamiche (2.32) per l'analisi di stop naturale diventa:

$$\begin{aligned} \ddot{X}_r^p(t) + \mu\omega_r^2 \dot{X}_r^p(t) + \omega_r^2 X_r^p(t) &= \\ &= \frac{1}{m_r} \int_0^{2l_0} r(x) [\phi_r(l_0) - \phi_r(x)] dx \chi_{[0,T]}(t) + \\ &- \frac{1}{m_r} \int_0^{2l_0} r(x) \phi_r(x) dx H(t - T) \quad \forall r \geq 0. \end{aligned}$$

Quando  $r = 0$  l'equazione dinamica rimane

$$\ddot{X}_0^p(t) = -\frac{\phi_0}{m_0} \int_0^{2l_0} r(x) dx H(t - T)$$

da cui segue la soluzione particolare della prima forma modale:

$$X_0^p(t) = -\frac{\phi_0}{m_0} \int_0^{2l_0} r(x) dx \frac{(t - T)^2}{2} H(t - T)$$

Il moto di traslazione rigida allo stop è quindi dato da

$$\begin{aligned} u_{rig}(t) &= \phi_0 X_0(t) = \phi_0 (X_0^{hom} + X_0^p(t)) = \\ &= \phi_0 (A_0 + B_0 t) - \frac{\phi_0^2}{m_0} \int_0^{2l_0} r(x) dx \frac{(t - T)^2}{2} H(t - T), \end{aligned}$$

ma poiché le forze di resistenza sono state poste, in questo modello, come delle forze attive per il sistema, è bene imporre una condizione aggiuntiva che impedisca al nastro trasportatore di muoversi nel senso di marcia opposto dopo essersi fermato. Ciò significa selezionare

$$u_{rig}(t) = cost \quad \forall t > T + T_{sp},$$

dove  $T_{sp}$  è il tempo impiegato dal nastro per passare dalla velocità nominale alla velocità nulla, ovvero la quantità tale per cui

$$\frac{du_{rig}}{dt}(T + T_{sp}) = 0.$$

Derivando la (2.4.1) si trova facilmente che il tempo di stop naturale impiegato dal nastro trasportatore è

$$T_{sp} = \frac{B_0 m_0}{\phi_0 \int_0^{2l_0} r(x) dx} = \frac{v_b m_0}{\phi_0^2 \int_0^{2l_0} r(x) dx} \quad (2.70)$$

e che quindi, in definitiva, il moto di traslazione rigida per il nastro trasportatore allo stop viene corretto come segue:

$$u_{rig}(t) = \phi_0(A_0 + B_0 t) + \frac{\phi_0^2}{m_0} \int_0^{2l_0} r(x) dx \left( \frac{(t-T)^2}{2} \chi_{[T, T+T_{sp}]}(t) + T_{sp} t H(t - (T + T_{sp})) \right)$$

Per i restanti  $r \geq 1$  modi di vibrare la soluzione particolare, alla luce della proprietà (2.62), è data da

$$X_r^p(t) = \frac{1}{m_r} \int_0^{2l_0} r(x) [\phi_r(l_0) - \phi_r(x)] dx \left( y_r(t) - y_r(t-T) \right) + \frac{1}{m_r} \int_0^{2l_0} r(x) \phi_r(x) dx y_r(t-T),$$

e i coefficienti  $A_r$  e  $B_r$  delle risposte libere si determinano, grazie al fatto che  $y_r(0) = 0$ , con le medesime formule ottenute per l'analisi di start, ma con diverse condizioni iniziali  $u_0(x)$  e  $v_0(x)$ .

## 2.5 Fase di carico

In questa sezione si riprende la condizione di conservazione della massa introdotta all'inizio del capitolo per analizzare l'effetto dell'attraversamento del materiale sulle tensioni. In altre parole si studia il transitorio di carico.

L'ipotesi alla base di questa analisi è che il parametro di smorzamento  $\mu$  del sistema sia tale da stabilizzare il nastro entro il tempo di start, in modo che la distribuzione del materiale  $q_m(x, t)$  non venga influenzata dalle oscillazioni del tappeto. Da un punto di vista matematico questo significa riprendere l'equazione del moto (2.10) ma con la semplificazione secondo cui il termine inerziale è nullo, cioè

$$q(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) - r(x, t) + f(x, t),$$

e risolverla tenendo conto della variabilità del carico e delle resistenze nel tempo. Si ricorda che, in accordo con la normativa DIN 22101 le resistenze primarie dipendono linearmente dal carico di materiale  $q_m(x, t)$  tramite la relazione (2.6), la cui evoluzione risponde alla dinamica descritta dall'equazione

$$\frac{\partial q_m}{\partial t}(x, t) + v_b \frac{\partial q_m}{\partial x}(x, t) = c(x, t). \quad (2.71)$$

Si tratta di un'equazione del trasporto non omogenea con sorgente di materiale  $c(x, t)$ , ottenuta dalla legge di conservazione della massa scritta in (2.9) a valle della semplificazione secondo cui il tappeto si muove rigidamente alla velocità nominale  $v_b$ . Prendendo in esame la partenza da nastro scarico, cioè con la condizione iniziale

$$q_m(x, t = 0) = 0 \quad \forall x \in [0, 2l_0], \quad (2.72)$$

la soluzione in forma chiusa dell'equazione (2.71) è data da

$$q_m(x, t) = \int_0^t c(x + v_b(\tau - t), \tau) d\tau.$$

Essendo che sulla struttura in esame è predisposta una sola stazione di carico localizzata a livello della coda ( $x = 0$ ), la sorgente di carico diventa

$$c(x, t) = Q(t)\delta(x)$$

e la soluzione assume la seguente espressione:

$$q_m(x, t) = \begin{cases} \frac{Q(t - \frac{x}{v_b})}{v_b} & \text{se } 0 \leq x \leq v_b t \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2.73)$$

dove la funzione  $Q(t)$  denota una generica legge di carico. Chiaramente la soluzione (2.73) vale solo per i punti  $x$  che giacciono sul ramo di andata del nastro, quindi fintanto che  $v_b t < l_0$ . Infatti, oltre il tempo  $t_* = \frac{l_0}{v_b}$  il materiale raggiunge la testa del nastro, dove viene scaricato segnando la fine del transitorio.

Nota l'evoluzione della distribuzione della massa del materiale  $q_m(x, t)$  allora l'evoluzione delle tensioni è determinabile a partire dal seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) = r(x, t) - R_{tot}(t)\delta(x - l_0) & x \in (0, 2l_0), \quad t > 0 \\ T(0, t) = T(2l_0, t) = \frac{m_{cw}g}{2} & t > 0 \\ T(x, 0) = T_{reg}(x), \end{cases} \quad (2.74)$$

dove la forzante  $f(x, t)$  é diventata

$$f(x, t) = R_{tot}(t)\delta(x - l_0)$$

con

$$R_{tot}(t) = \int_0^{2l_0} r(x, t) dx$$

risultante delle resistenze evolutive dipendenti dal carico in movimento. Si può notare che le condizioni iniziali scritte in (2.72) e (2.74) per l'analisi di carico non sono relative all'istante di azionamento del nastro come fatto per l'analisi di start, bensì all'istante in cui il nastro inizia ad essere caricato. Per questo motivo si utilizza la condizione  $T(x, 0) = T_{reg}(x)$ , sottointendendo che il nastro si trovi già in una condizione di equilibrio dinamico al momento del carico.

## Capitolo 3

# Risultati numerici

Nel seguito si presentano i risultati numerici ottenuti dalle simulazioni in ambiente Matlab del modello matematico di nastro trasportatore introdotto nel capitolo 2 e risolto col metodo agli elementi finiti. Le simulazioni sono state svolte per tutte le casistiche transitorie precedentemente affrontate, ovvero durante la partenza, la fermata non controllata e durante il carico del materiale sul nastro. In particolare, per quanto riguarda l'analisi di start e di stop si sono considerati sia il caso di nastro scarico che il caso di nastro completamente carico. I grafici qui mostrati sono volti a rappresentare l'effetto dell'elasticità del tappeto sulle tensioni totali e sulle velocità periferiche locali in stazioni fisse distinte, mettendo in evidenza gli allungamenti dinamici del nastro.

Massa del tappeto: $q_b$	24.8 [kg/m]
$q_R^{car}$	3.52 [kg/m]
$q_R^{ret}$	2.32 [kg/m]
Velocità nominale: $v_b$	3.5 [m/s]
Portata: $Q$	1000 [t/h]
Coefficiente d'attrito: $f_{DIN}$	0.022 [-]
Spessore tappeto: $s$	12 [mm]
Larghezza tappeto: $B$	1600 [mm]
Modulo di elasticità $E$	8000 [N/mm]
Tempo di ritardo $\mu$ :	1 [s]
Lunghezza del nastro: $l$	1346 [m]
Massa contrappeso: $m_{cw}$	10000 [kg]
Momento d'inerzia tamburo di comando: $J_2$	2.57 [kg * m <sup>2</sup> ]
Momento d'inerzia tamburo condotto: $J_1$	0 [kg * m <sup>2</sup> ]
Diametro tamburo di comando: $D_2$	630 [mm]
Diametro tamburo condotto: $D_1$	500 [mm]
Fattore di riduzione: $\tau_2$	17.45 [-]
Tempo di start: $T_{st}$	40 [s]

I dati utilizzati per le simulazioni sono elencati in tabella 3 e si assume per semplicità che le uniche resistenze al moto siano le resistenze d'indentazione scritte in (2.6).

### 3.1 Start

In figura 3.1 si riportano gli abbassamenti del contrappeso, o equivalentemente gli allungamenti totali del nastro, ottenuti per le 4 distinte condizioni di start presentate nel corso della tesi. Da un primo confronto quantitativo tra i due casi di partenza da scarico e partenza da carico, sebbene gli andamenti risultino simili, emerge immediatamente la differenza in ampiezza delle oscillazioni. Essendo infatti gli allungamenti del nastro molto contenuti quando quest'ultimo viene avviato senza la presenza di materiale si è subito portati a prendere in esame con maggiore attenzione il caso di partenza da carico. Ad ogni modo, si può subito notare come la partenza diretta sia quella per cui si ottiene l'allungamento maggiore nei primi istanti dopo l'avviamento e di come tutte le modalità di start conducano, su tempi sufficientemente lunghi, allo stesso allungamento asintotico del nastro. Come dimostra la formula (2.69),

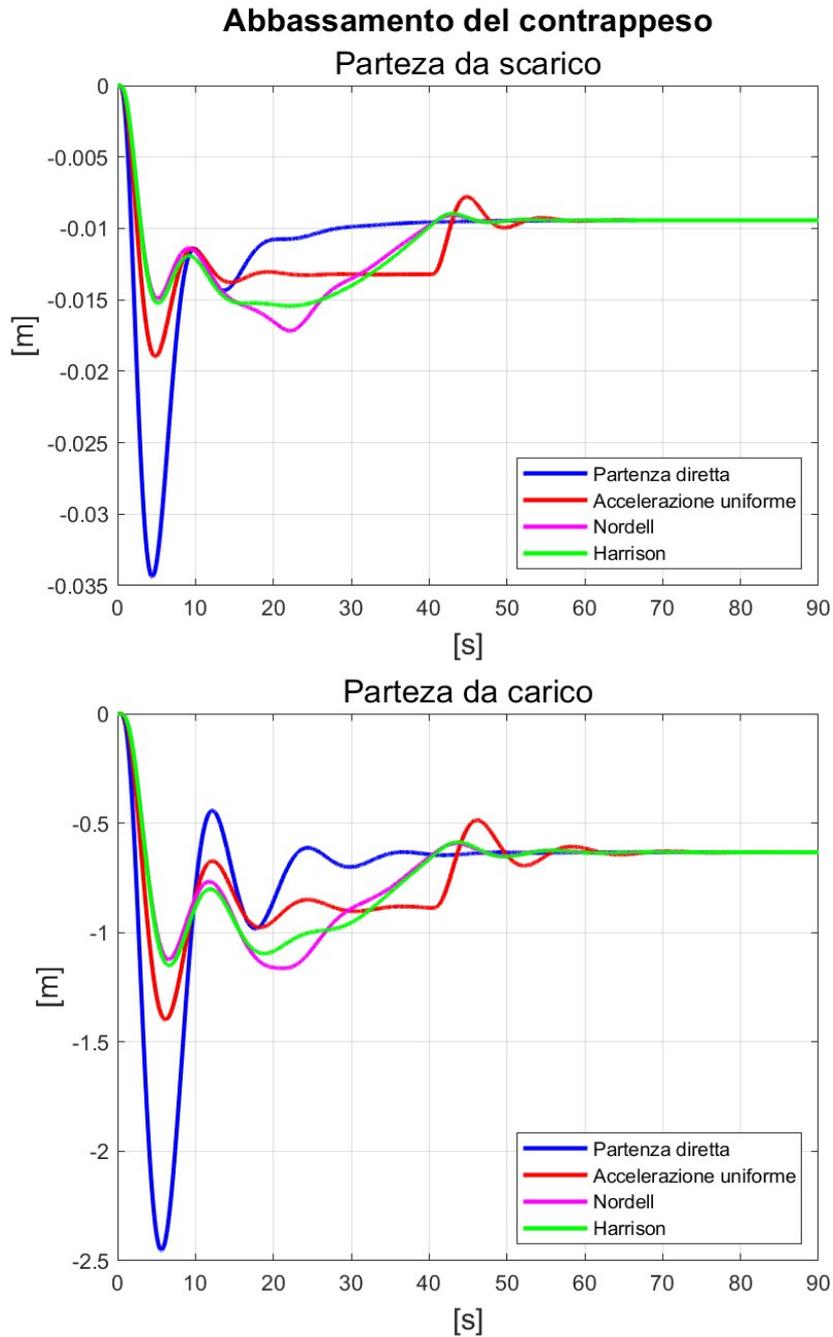


Figura 3.1. Spostamenti dinamici del contrappeso ottenuti per diverse condizioni di start.

tale allungamento asintotico dipende, oltre che dalla rigidità assiale del nastro, dalla differenza tra la resistenza totale di andata e la resistenza totale

di ritorno, la quale diventa tanto più grande tanto più il carico aumenta.

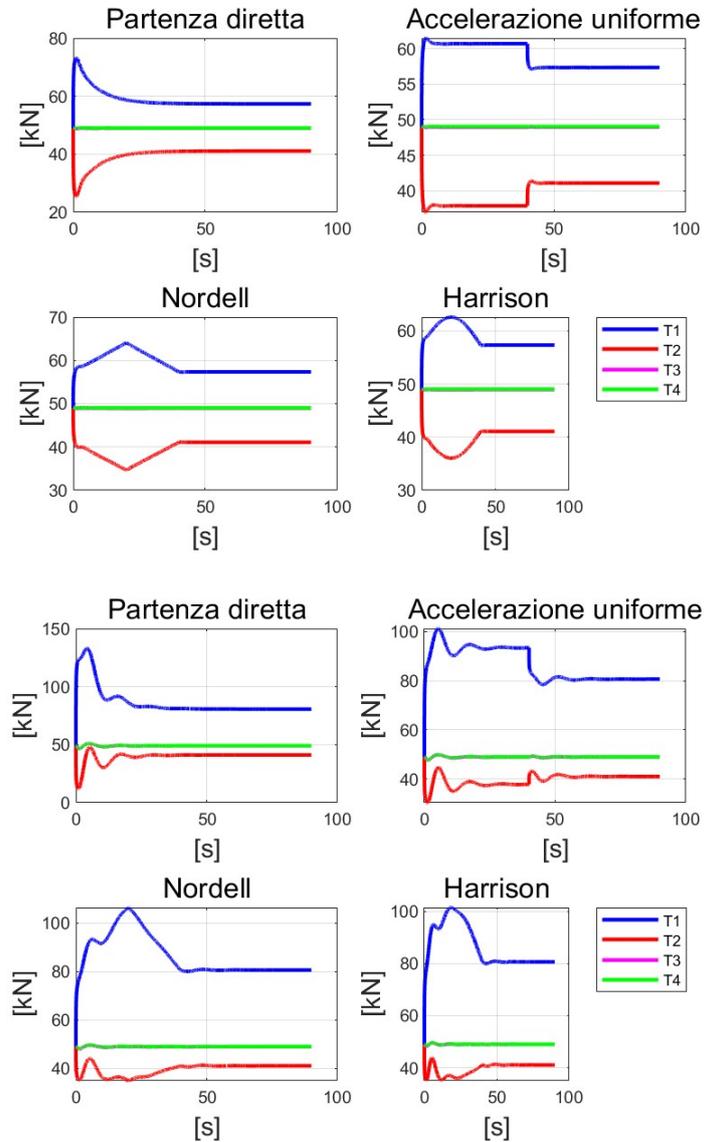


Figura 3.2. Evoluzione delle tensioni agenti sui tamburi durante l'avviamento.

In figura 3.2 sono riportati gli andamenti delle tensioni nel tempo che si hanno in ingresso e in uscita da ciascun tamburo del nastro trasportatore. In questo caso, le quantità  $T_1$  e  $T_2$  rappresentano rispettivamente la tensione in ingresso e in uscita dal tamburo di testa, mentre le quantità  $T_3$  e  $T_4$  quelle in ingresso e in uscita dal tamburo di coda. Dato che il tamburo di testa

è un tamburo di comando per il nastro considerato, la tensione in ingresso è maggiore della tensione in uscita, in quanto su di esso viene applicata la forza motrice. Per il tamburo di comando è sempre necessario assicurarsi che sia rispettata la condizione di non slittamento, ovvero che  $T_1$  e  $T_2$  soddisfino la relazione

$$T_1 \leq T_2 e^{\mu\alpha} \quad (3.1)$$

dove  $\mu$  è il coefficiente d'attrito tra il tamburo e il tappeto e  $\alpha$  è l'angolo di avvolgimento in radianti. Al contrario il tamburo di coda è un tamburo condotto di tensionamento e come tale, le tensioni in ingresso e in uscita sono pressoché equivalenti se si assume trascurabile il momento d'inerzia del tamburo, costanti durante il transitorio e di modulo pari alla metà della forza peso indotta dal tenditore a gravità.

Da grafici risulta che il picco massimo di  $T_1$  e il minimo assoluto di  $T_2$  sono raggiunti praticamente nello stesso istante per ogni modalità di start. Il momento in cui il tamburo di comando è maggiormente soggetto a possibili slittamenti è concentrato nei primi secondi dopo l'avviamento, in particolare quando si adotta una partenza diretta o una partenza con accelerazione uniforme. Fissati i parametri  $\mu$  e  $\alpha$ , questo tipo di problema può essere risolto aumentando la massa del contrappeso o più semplicemente aumentando il tempo di start.

Gli andamenti della forza motrice visibili in figura 3.3 ottenuti come differenza tra la tensione in ingresso al tamburo di comando e la tensione in uscita ripercorrono abbastanza fedelmente le leggi di accelerazione impostate all'inverter delle figure 2.14 e 2.15. Chiaramente tutte le forzanti dinamiche convergono al medesimo valore asintotico, che risulta pari alla somma di tutte le resistenze del nastro.

Prendendo ora in esame il solo caso di partenza diretta, in quanto la più critica sotto diversi aspetti, si analizza l'andamento delle velocità periferiche locali che si ottengono ai capi del nastro. Dalla figura 3.4, la ripartenza da carico mette meglio in evidenza come la velocità di spostamento del tappeto a livello del tamburo condotto assume dei valori negativi nei primi istanti dopo l'avviamento. Questo accade perché l'azionamento del tamburo di comando, che si trova in testa al nastro, genera un'onda di tensione che propaga sul ramo di andata con velocità

$$v^{car} = \sqrt{\frac{EA}{q_b + q_R^{car} + q_m}} \quad (3.2)$$

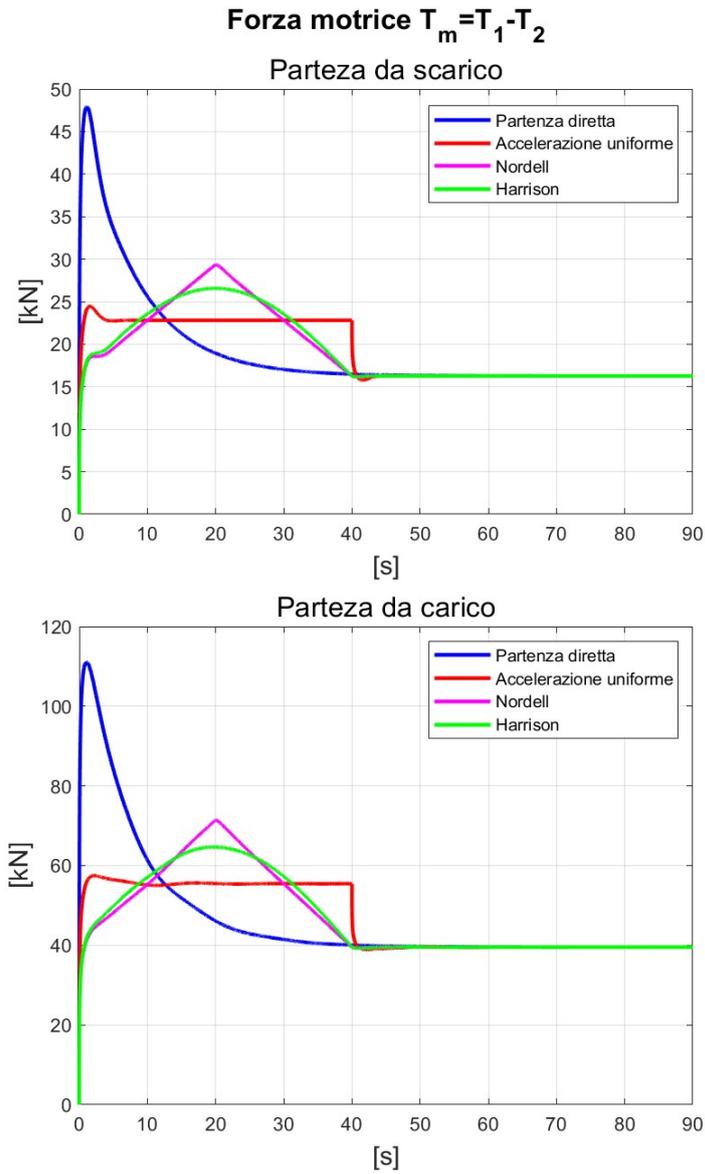


Figura 3.3. Forza motrice effettiva durante l'avviamento.

e verso opposto a quello del moto e un'onda di compressione che propaga sul ramo di ritorno con velocità

$$v^{ret} = \sqrt{\frac{EA}{q_b + q_R^{ret}}} \quad (3.3)$$

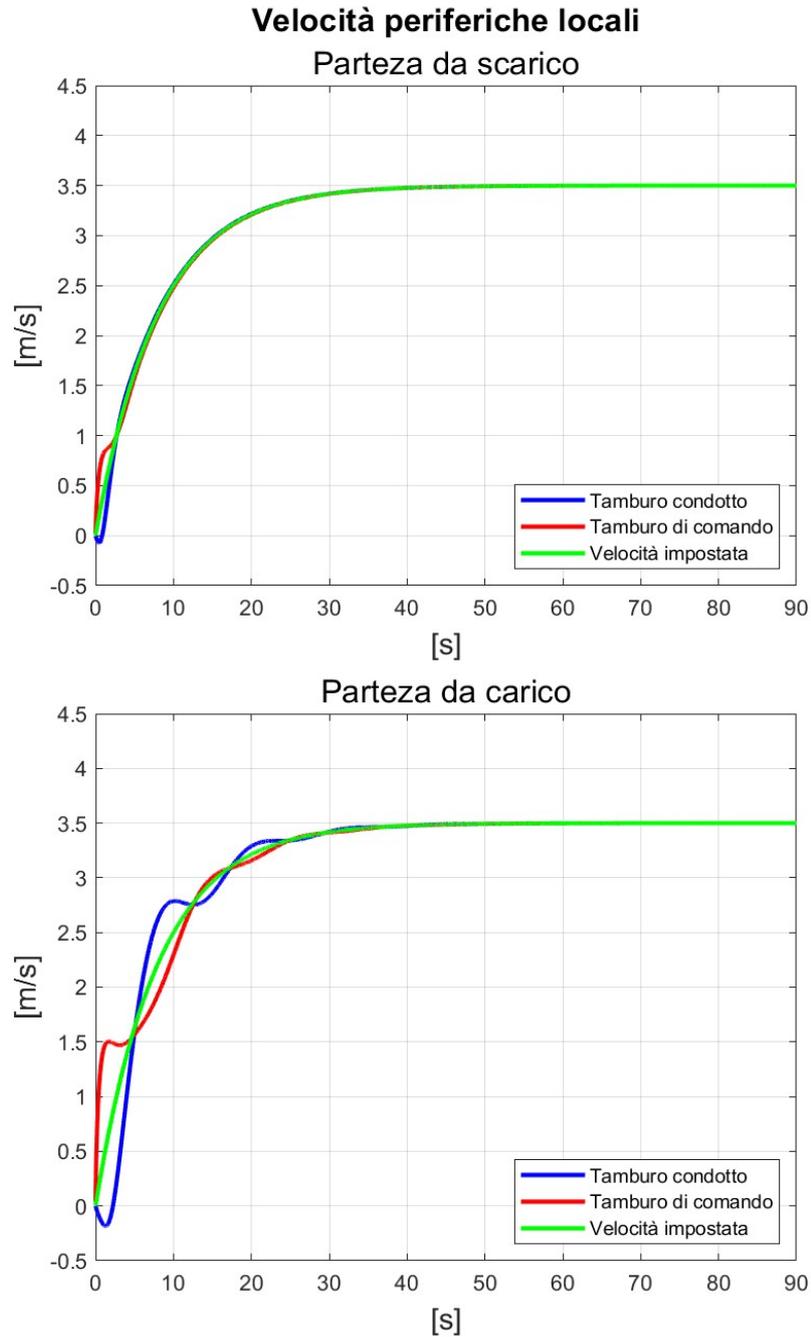


Figura 3.4. Evoluzione della velocità periferica locale in due distinte stazioni del nastro.

e verso concorde a quello del moto. Siccome  $v^{ret} > v^{car}$ , l'onda di compressione è la prima a raggiungere la coda del nastro destabilizzando, l'equilibrio

statico del tenditore a gravità e provocando una breve rotazione in senso antiorario del tamburo condotto nonché l'abbassamento del contrappeso.

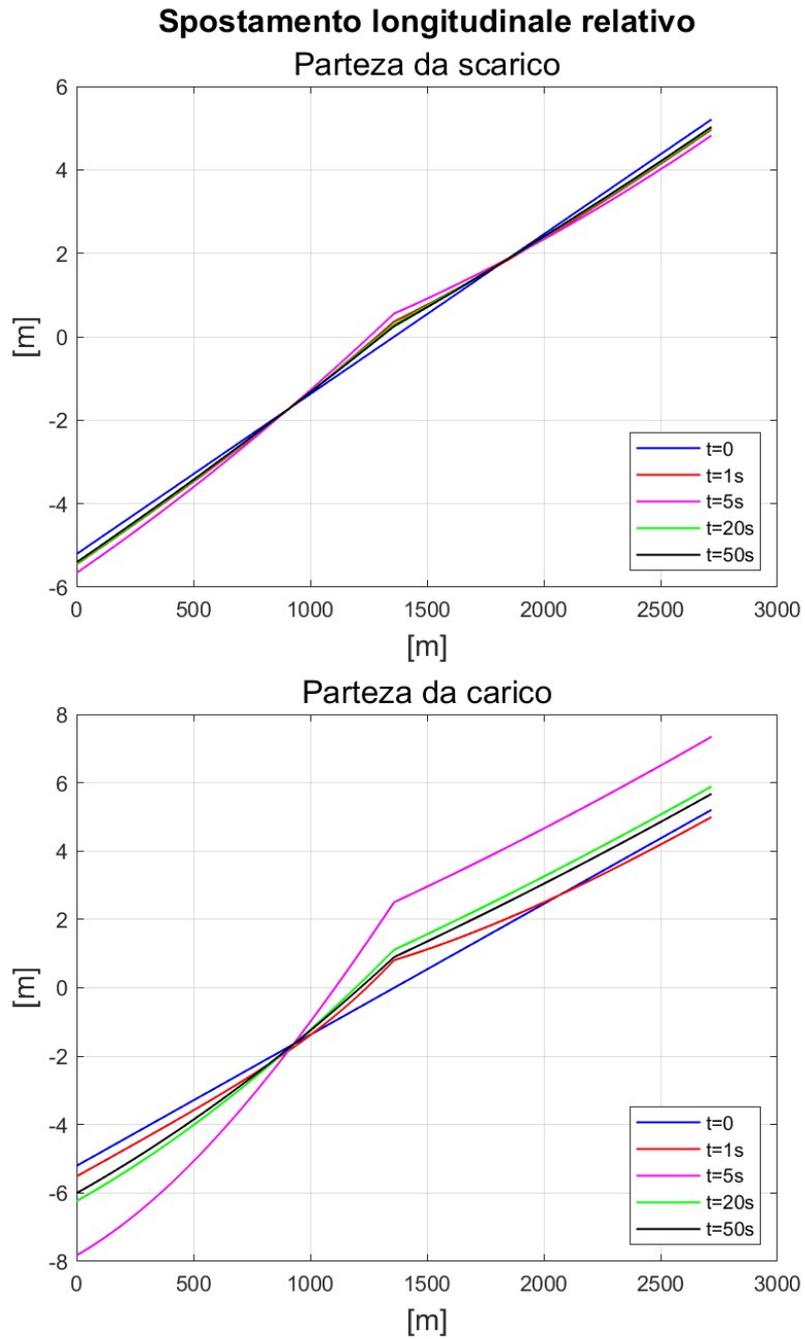


Figura 3.5. Evoluzione degli spostamenti longitudinali relativi lungo nastro.

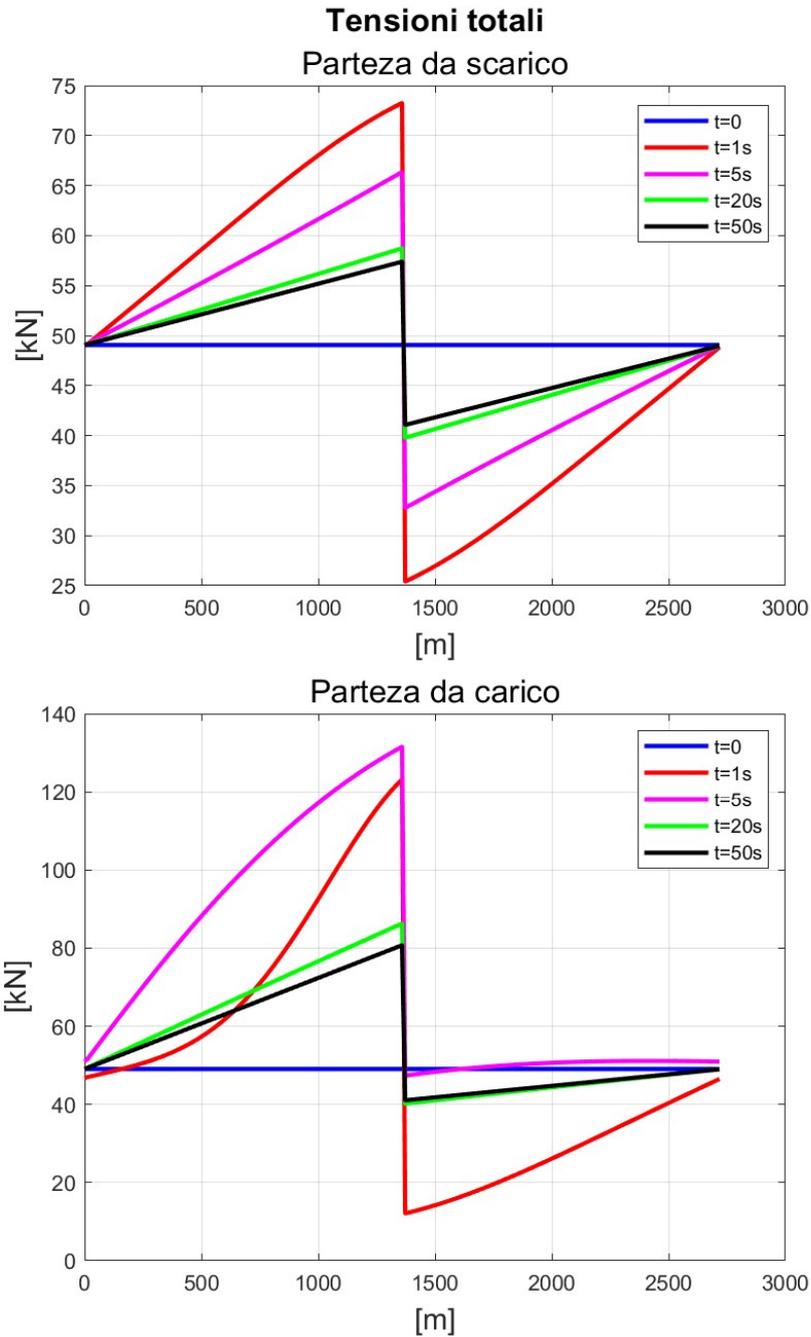


Figura 3.6. Distribuzione delle tensioni totali lungo il nastro al variare del tempo.

I grafici 3.5 e 3.6 mostrano infine la distribuzione lungo il nastro degli spostamenti longitudinali relativi del tappeto e delle tensioni totali in diversi

istanti di tempo. Si può infatti notare che tra i punti di ascissa  $x = 0$  e  $x = l_0$  i grafici si riferiscono alle soluzioni del problema sul ramo di andata, mentre tra i punti di ascissa  $x = l_0$  e  $x = 2l_0$  si riferiscono alla soluzione sul ramo di ritorno. La mancanza di regolarità delle soluzioni nel punto  $x = l_0$ , che si esprime attraverso una discontinuità di salto sulle tensioni, è dovuta all'applicazione della coppia motrice che accade proprio in corrispondenza della posizione del tamburo di comando. Il valore di tensione alla sinistra della discontinuità coincide con la quantità  $T_1$  precedentemente considerata, mentre quello a destra col valore  $T_2$ .

## 3.2 Stop

Le stesse quantità presentate per lo start del nastro trasportatore vengono qui riprese per l'analisi di stop non controllato. L'obiettivo è di verificare che, a partire dalle soluzioni asintotiche prima determinate, dopo lo spegnimento del motore tutti i grafici convergano ai corrispettivi valori d'equilibrio statico di partenza.

La prima variabile in esame è lo spostamento del contrappeso. Dalla figura 3.7 si può notare come, indipendentemente dalla presenza del materiale sul nastro, il contrappeso ritorna alla sua originaria posizione iniziale, fissata all'altezza zero. A rigore, poiché il tappeto sospeso tra due appoggi si comporta come una corda pesante, la presenza di materiale provoca un piccolo abbassamento del tappeto stesso nel mezzo di ciascuna terna di supporto del ramo di andata. Nel complesso, più il nastro trasportatore è esteso più questo effetto ha un impatto maggiore sull'allungamento totale del tappeto e quindi anche sullo spostamento del contrappeso. Ciononostante, questo aspetto non è stato preso in considerazione in questo modello e quindi non ha modo di presentarsi sulle simulazioni di stop da carico.

Il grafico 3.8 mostra l'evoluzione delle tensioni sui tamburi durante lo spegnimento. Dopo poche oscillazioni tutte le tensioni convergono alla metà della forza peso applicata dal contrappeso, come volevasi dimostrare. La differenza tra le tensioni in ingresso e in uscita dal tamburo comando, visibile nel grafico 3.9, mostra come la forza motrice effettiva si avvicini abbastanza fedelmente alla curva di spegnimento ideale, in cui istantaneamente si passa da un valore di coppia nominale non nullo a zero.

Il grafico delle velocità periferiche locali 3.10 mostra un decadimento lineare verso la velocità nulla, coerentemente con quanto detto nella sezione 2.4. Con l'aiuto della formula (2.70) si dimostra che il tempo  $T_{sp}$  richiesto dal

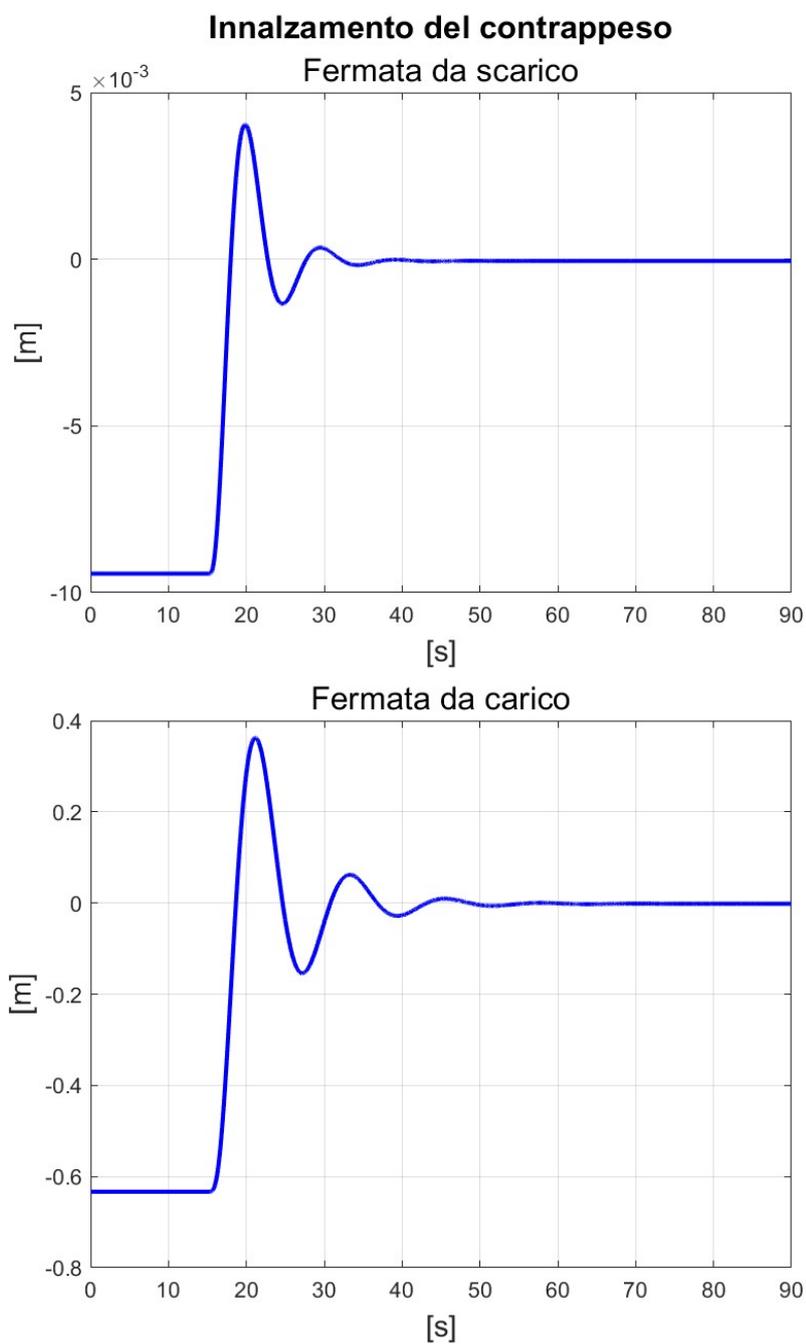


Figura 3.7. Spostamenti dinamici del contrappeso durante lo spegnimento.

nastro trasportatore per fermarsi senza l'applicazione di una coppia inversa

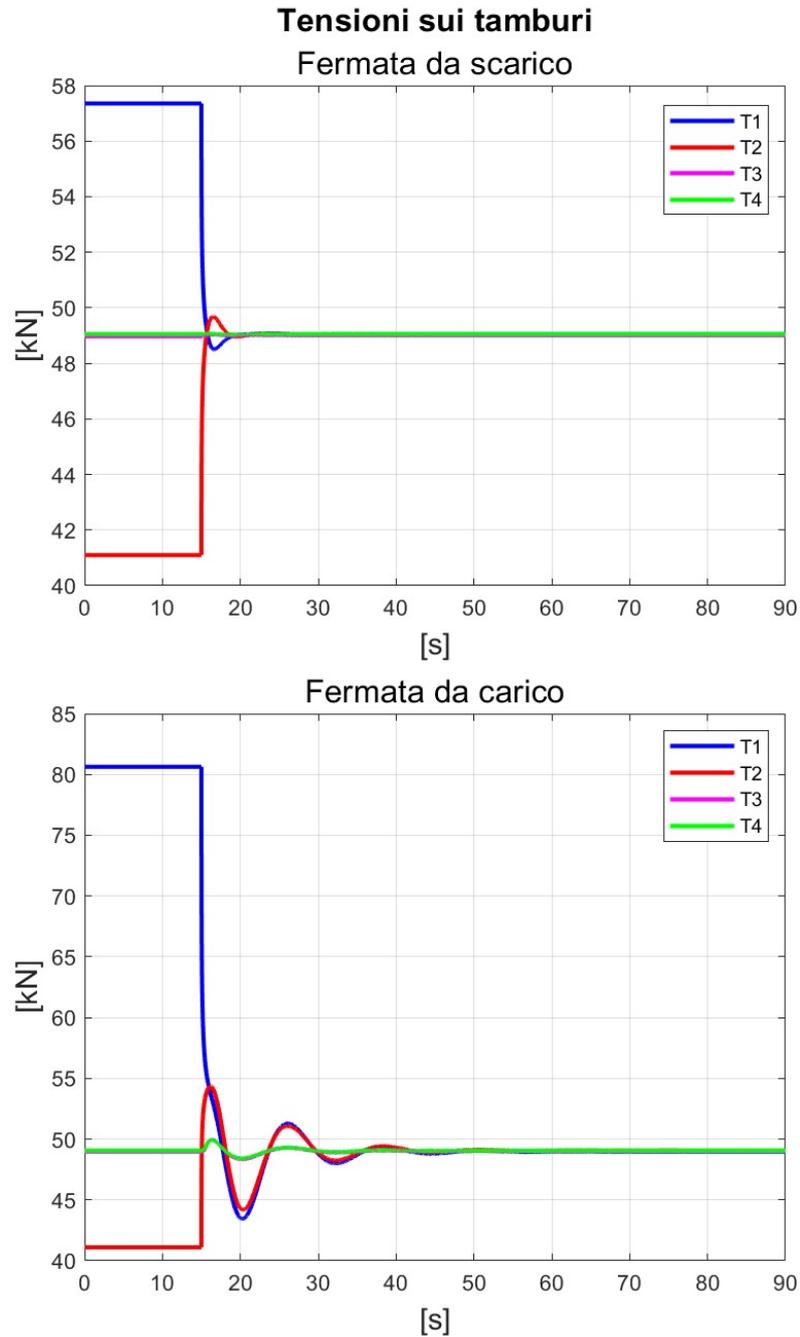


Figura 3.8. Evoluzione delle tensioni agenti sui tamburi durante lo spegnimento.

da parte del motore cresce al crescere della velocità di avanzamento del nastro e decresce al crescere delle resistenze totali. Nonostante la significativa

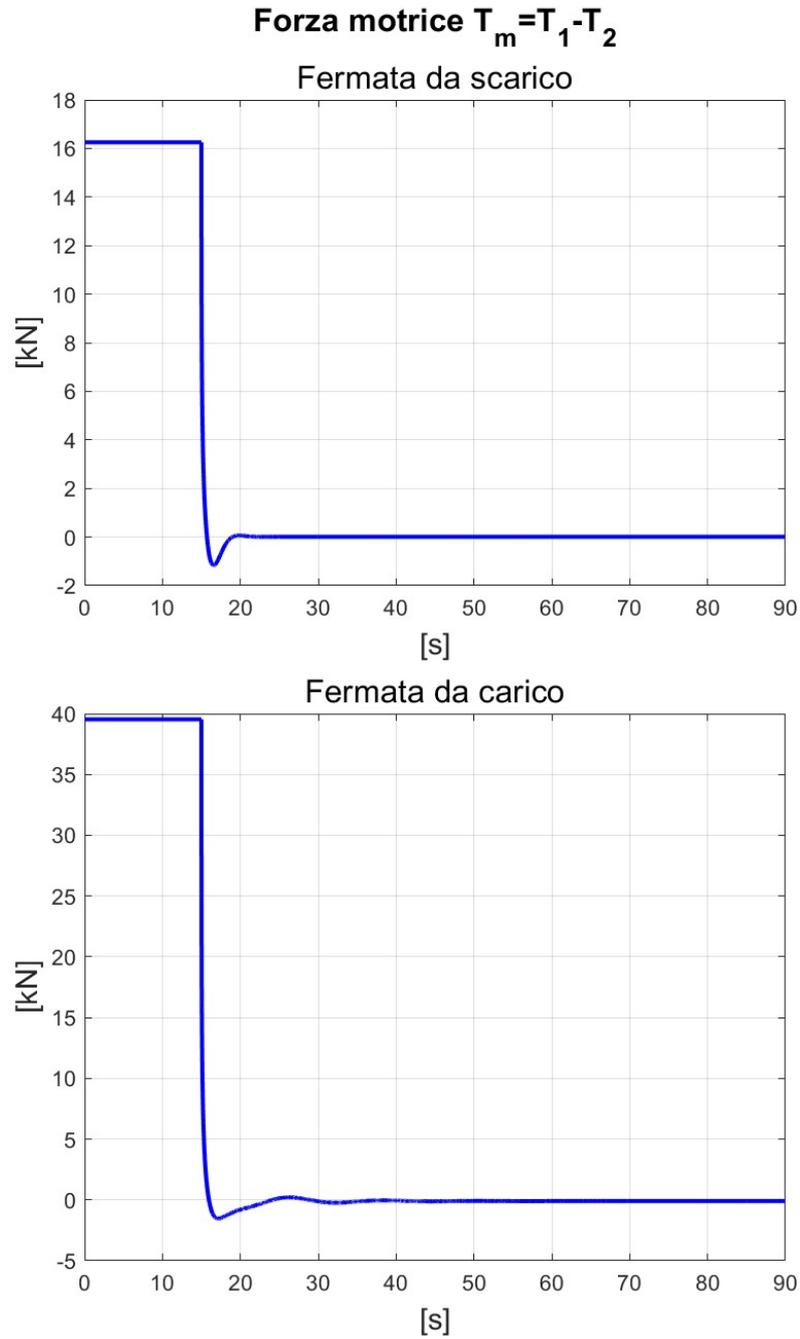


Figura 3.9. Forza motrice effettiva durante lo spegnimento.

differenza nelle resistenze tra il caso in cui il nastro è carico e quello in cui il nastro è vuoto, a parità di velocità nominale il tempo di stop è risultato

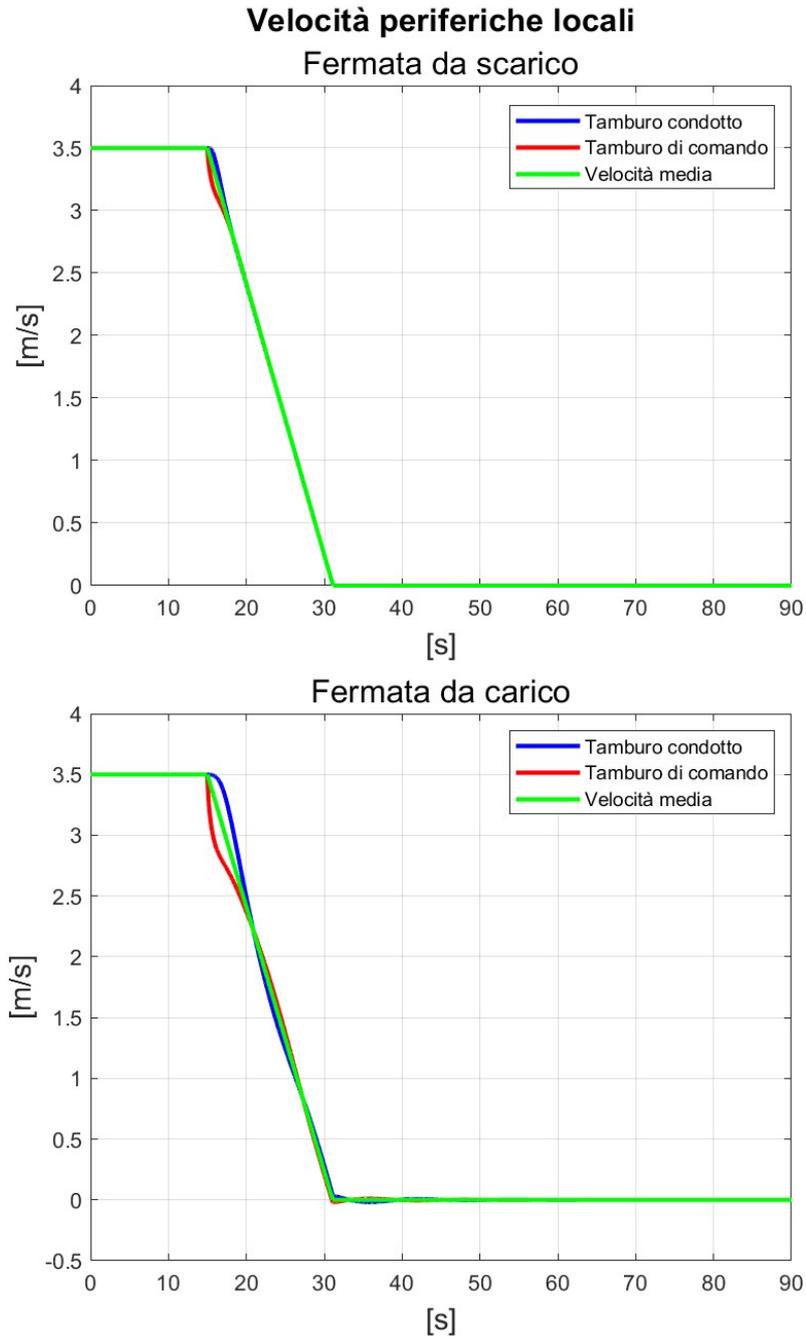


Figura 3.10. Evoluzione della velocità periferica effettiva in due distinte stazioni del nastro.

pressoché identico nei due casi.

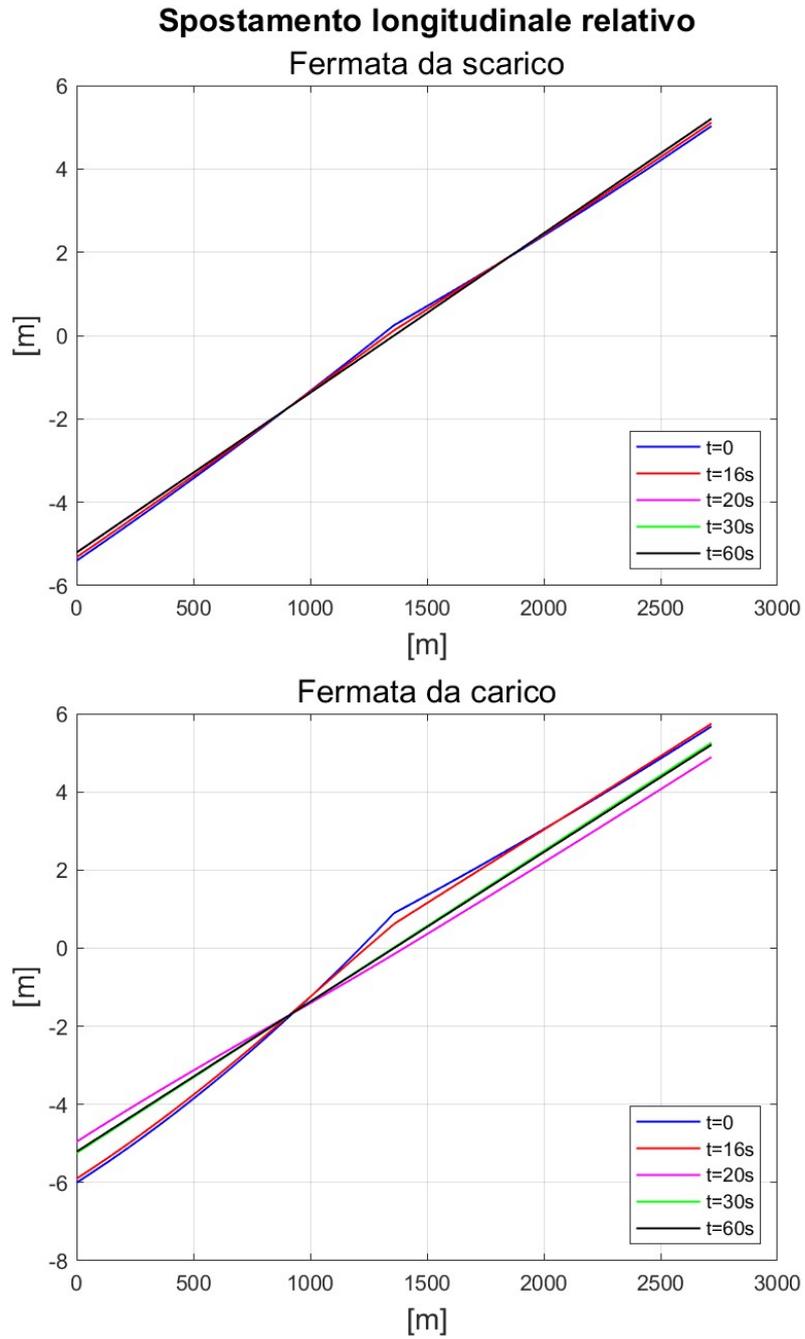


Figura 3.11. Evoluzione degli spostamenti longitudinali relativi lungo nastro.

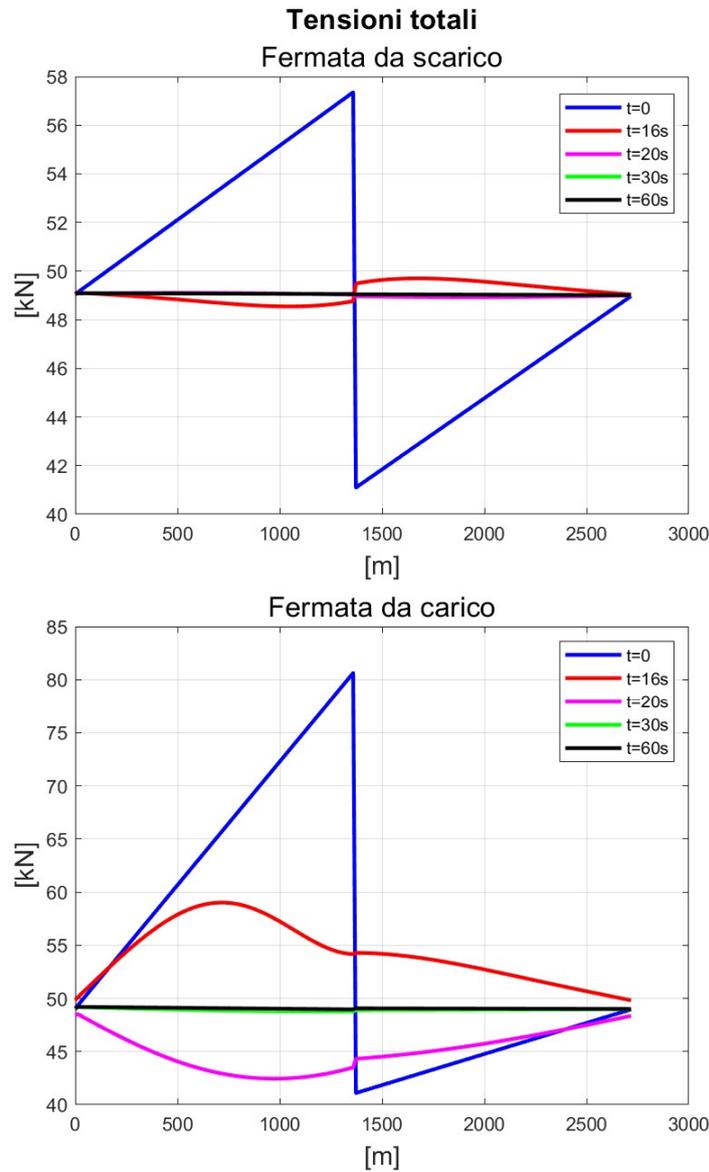


Figura 3.12. Distribuzione delle tensioni totali lungo il nastro al variare del tempo.

### 3.3 Caricamento

La simulazione della fase di carico ha come obiettivo quello di fare da collegamento tra la condizione di partenza da scarico e la condizione di partenza da carico. In base ai risultati ottenuti, si verifica che per ciascuna delle quantità mostrate nella sezione 3.1 i valori assunti al termine della simulazione di

partenza da scarico transitano verso i valori assunti al termine della partenza da carico.

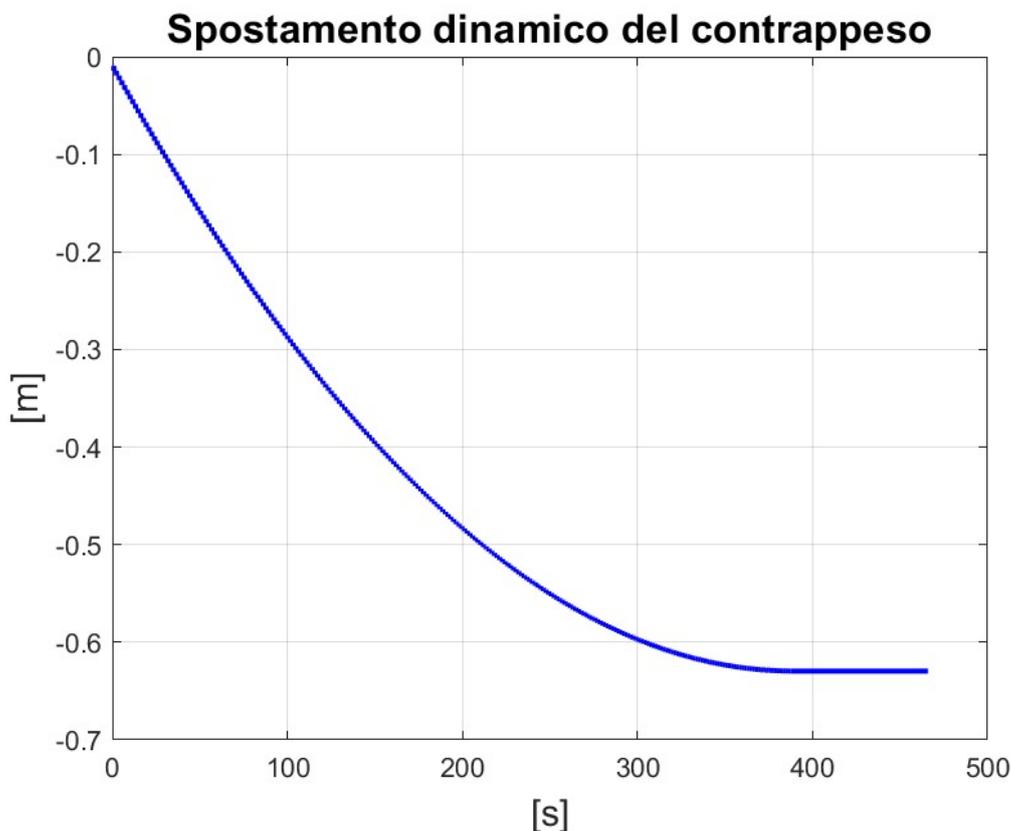


Figura 3.13. Spostamenti dinamici del contrappeso durante la fase di carico.

La prima quantità in esame è nuovamente l'abbassamento del contrappeso, visibile in figura 3.13. Il profilo di abbassamento del contrappeso segue una legge parabolica, in cui a partire da un abbassamento iniziale di circa  $9\text{mm}$  si giunge all'abbassamento nominale di  $633\text{mm}$  in un tempo di transito di  $\frac{l_0}{v_b}$ , che corrisponde al tempo di percorrenza del materiale sul nastro.

Dal grafico 3.14 si nota come la tensione  $T_1$  in ingresso al tamburo di comando è l'unica a risentire del carico ed evolve dal valore minimo al valore massimo con legge lineare. Le restanti tensioni agenti sui tamburi rimangono costanti durante il carico, di conseguenza la forza motrice  $T_m$  ottenuta come differenza tra la  $T_1$  e la  $T_2$  segue una legge lineare con la stessa pendenza di quella relativa a  $T_1$ . In particolare, la tensione rimane costante durante il carico in ogni punto del ramo di ritorno, come mostrato nel grafico 3.16, e non solo quelle di bordo.

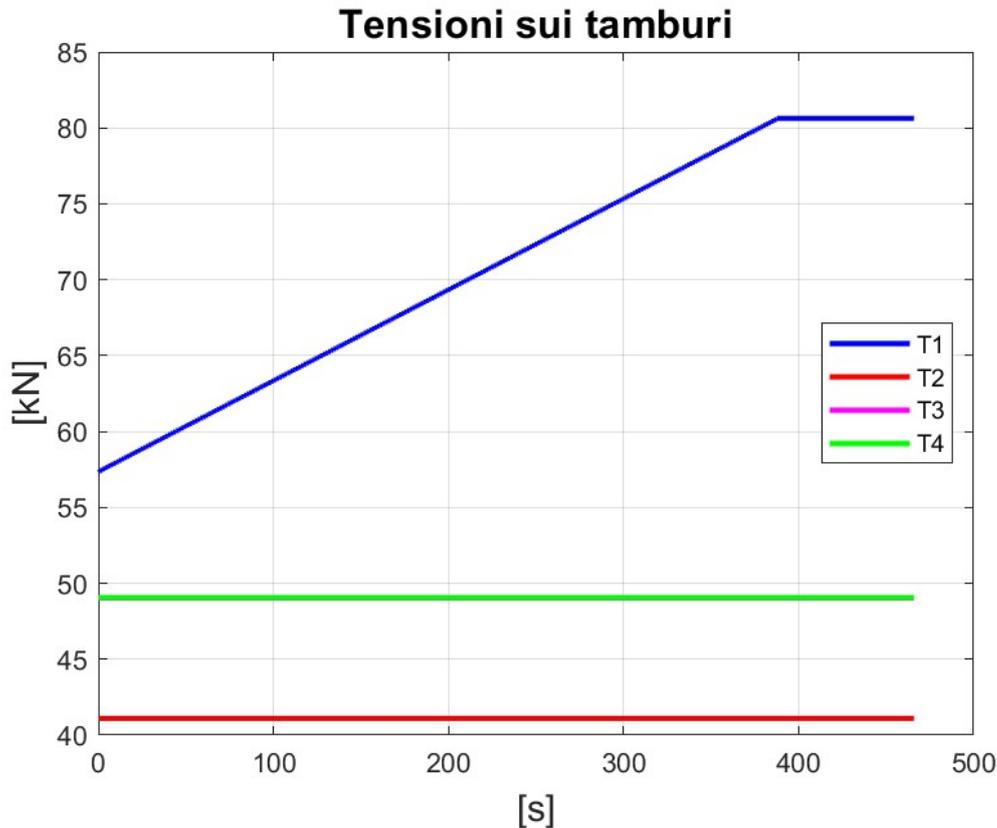


Figura 3.14. Tensioni totali agenti sui tamburi durante la fase di carico.

I grafici 3.15 e 3.16 mostrano l'evoluzione nel tempo delle distribuzioni degli spostamenti longitudinali relativi e delle tensioni totali lungo il nastro. Si può apprezzare come la tensione sul ramo di andata presenti un andamento lineare a tratti, il cui punto di intersezione tra le due rette muove da sinistra verso destra con velocità costante. Questo meccanismo descrive esattamente l'effetto del transito del materiale dalla coda alla testa del nastro trasportatore e l'ascissa del punto d'intersezione mobile tra le due rette a diversa pendenza rappresenta proprio la distanza percorsa dal materiale fino a quell'istante. Una volta raggiunto il tamburo di comando, quindi oltre il tempo di percorrenza  $\frac{l_0}{v_b}$ , il materiale viene scaricato e il sistema ritorna stazionario.

Il grafico dello spostamento longitudinale relativo è ottenuto a partire dalla tensione per integrazione diretta, imponendo fisso il punto in cui sia la soluzione asintotica di start da scarico che la soluzione asintotica di start da

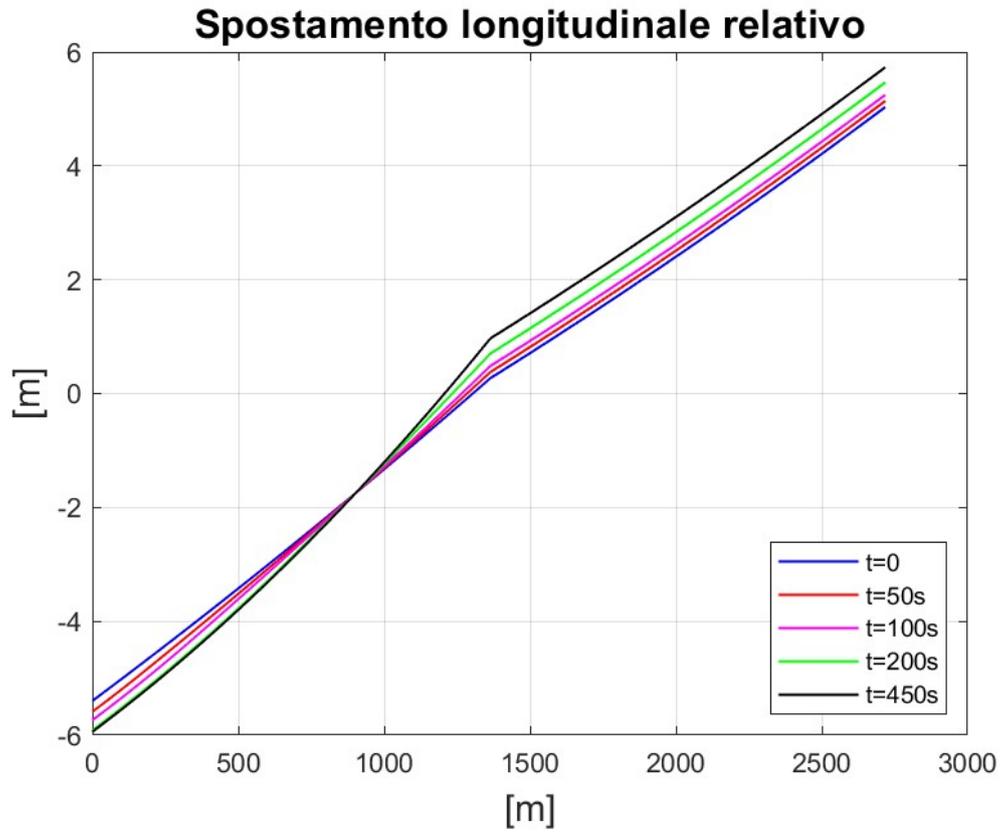


Figura 3.15. Spostamenti longitudinali relativi durante la fase di carico.

carico eguagliano lo spostamento statico, ovvero il punto  $x_*$  tale per cui

$$u_{reg}(x_*) = u_s(x_*) \quad (3.4)$$

che in questo caso corrisponde a  $x_* = 902.4m$ .

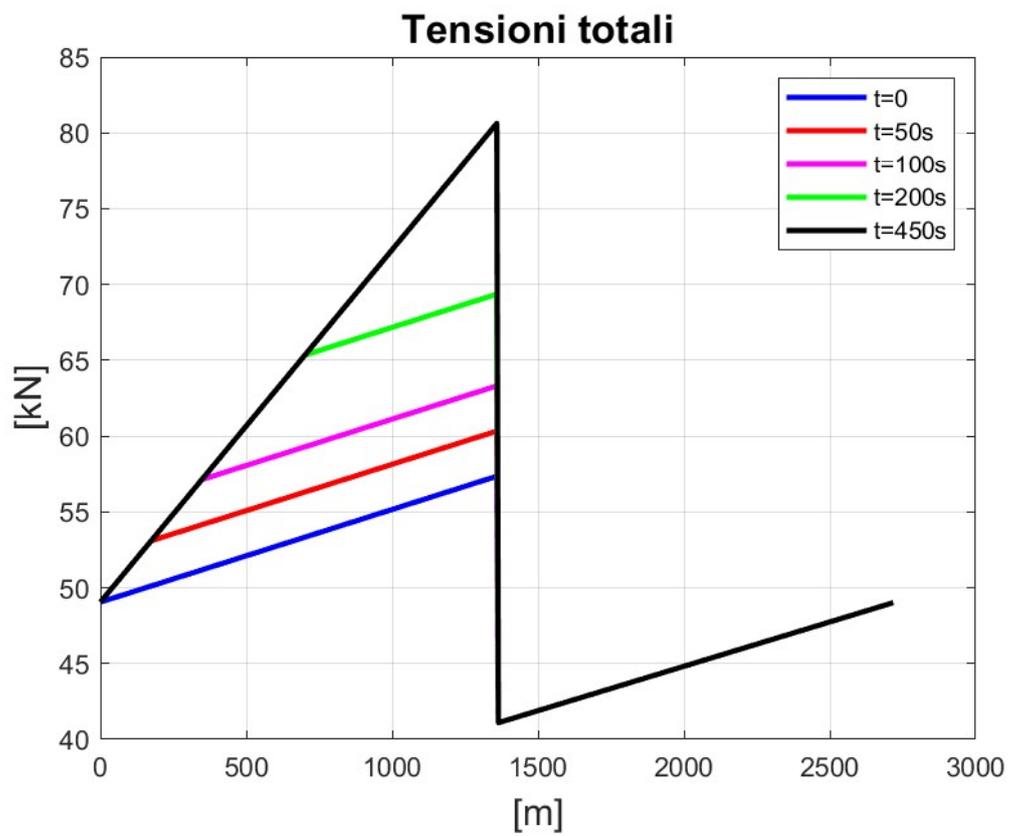


Figura 3.16. Distribuzione delle tensioni totali lungo il nastro durante la fase di carico.

# Bibliografia

- [1] DIN 22101, *Belt conveyors for loose bulk material - basics for calculation and dimensioning*, 2002.
- [2] CEMA, *Belt conveyors for bulk materials*, 7-th edition.
- [3] Pihnastyi O.M. e Khodusov V.D., *Hydrodynamic model of transport system*, East European Journal of Physics, Vol. 1, pp. 121-136, 2020.
- [4] Pihnastyi O.M. e Khodusov V.D., *Hydrodynamic Kelvin-Voigt model transportation system*, East European Journal of Physics, Vol. 4, pp. 95-109, 2020.
- [5] Ellis D. e Miller K., *A mathematical analysis of tension shocks in long belt conveyors*, Math. Modelling, Vol 9, Num 8, pp. 613-623, 1987.
- [6] Forte S., Preziosi L. e Vianello M., *Meccanica dei continui*, Springer, 2019.
- [7] Rudolphi T.J. e Reicks A., *Viscoelastic indentation and resistance to motion of conveyor belts using a generalized Maxwell model of the backing material*, Rubber Chemistry and Technology, 2006.
- [8] Lu Y., Lin F.Y. e Wang Y.C., *Investigation on influence of speed on rolling resistance of belt conveyor based on viscoelastic properties*, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 45, Num. 3, pp. 53-68, 2015.
- [9] Pang X., Li J. e Kou Z., *Longitudinal vibrations of the viscoelastic moving belt*, Shock and Vibrations, 2015.
- [10] Li J., Pang Y. e Li Y., *Research of dynamic characteristic in belt conveyor*, 2017.
- [11] Li J. e Pang X., *Belt conveyor dynamic characteristics and influential factors*, Shock and Vibrations, 2018.
- [12] Harrison A., *Criteria for minimising stress in conveyor belts*, 1983.
- [13] Karolewski B., Ligocki P., *Modelling of long belt conveyors*, Eksploatacja i Niezawodnosc – Maintenance and Reliability, 16 (2): 179–187, 2014.
- [14] Harrison A., *Flexural behavior of tensioned conveyor belts*, Bulk Solids Handling, Vol. 4, 1984.

- [15] Nordell L.K. e Ciozda Z.P., *Transient belt stresses during starting and stopping: elastic response simulated by finite element methods*, Bulk Solids Handling, Vol. 4, Num. 1, 1984.
- [16] Harrison A., *Reducing dynamic loads in belt powered by three wound rotor motors*, Bulk Solids Handling, Vol. 5, Num. 6, 1985.
- [17] *Dynamic analysis of conveyor belts at iscor's mining division*, 2007.
- [18] Yang G., *Dynamic analysis and modelling of rubber belt in large mine belt conveyors*, Sensors and Transducers, Vol. 181, pp. 210-218, 2014.
- [19] Kozhushko G.G., Yampolsky D.A. e Lukashuk M.D., *Analysis of forced vibrations of conveyor belts*, IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 2020.
- [20] Lodewijks G., *Dynamic of belt system*, PhD Thesis, 1996.
- [21] He D., Pang Y., Lodewijks G. e Liu X., *Healthy speed control of belt conveyors on conveying bulk materials*, Powder Technology 327, pp. 408-410, 2018.
- [22] Robinson P., *Dynamics of open and closed conveyor systems incorporating multiple drives*, PhD Thesis, 2016.
- [23] Abrate S., *Vibrations of belts and belt drives*, Mechanism and Machine Theory, Vol. 27, Num. 6, pp. 645-659, 1992.
- [24] Guo Y. e Wang F., *Multi body dynamic equations of belt conveyor and the reasonable starting mode*, 2020.

# Ringraziamenti

Vorrei riservare questo spazio finale della mia tesi di laurea ai ringraziamenti verso tutti coloro che hanno contribuito, con il loro instancabile supporto, alla realizzazione della stessa. In primis desidero ringraziare il mio relatore Stefano Marchesiello, per i suoi consigli puntuali e le sue critiche costruttive. Ringrazio il mio tutor Roberto Oddera per il suo prezioso aiuto nel condurre lo studio, oggetto della mia tesi, presso l'azienda Bedeschi S.p.a. Un grazie sentito a tutto il personale dell'azienda Bedeschi, in cui ho svolto un tirocinio formativo della durata di 5 mesi e complementare alla stesura della tesi, per l'ospitalità e per le conoscenze acquisite sul campo. Ringrazio infinitamente la mia famiglia, che mi ha sempre sostenuto, i miei amici più cari e soprattutto la mia compagna Marta, che ha condiviso con me gioie e dolori di questo percorso universitario.