



**Politecnico
di Torino**

Politecnico di Torino

Corso di Laurea Magistrale in ingegneria Aerospaziale

A. A. 2022/2023

Tesi di Laurea

**Ottimizzazione di manovre orbitali
per la rimozione di detriti in orbite
LEO, tramite l'implementazione di
algoritmi genetici**

Relatore:
Lorenzo Casalino

Candidato:
Lorenzo Poci

Indice

Lista Figure.....	5
Lista Tabelle.....	7
Sommario.....	9
Capitolo 1: Introduzione.....	11
1.1 Detriti spaziali.....	11
1.1.1 Meccanismi di formazione.....	12
1.1.2 Identificazione e monitoraggio.....	15
1.1.3 Strategie di mitigazione e contromisure.....	18
1.2 Competizione GTOC9.....	21
Capitolo 2: Richiami sulla dinamica orbitale.....	23
2.1 Problema dei due corpi.....	23
2.2 Parametri orbitali e sistemi di riferimento.....	28
2.3 Perturbazioni orbitali.....	31
2.3.1 Pressione solare.....	33
2.3.2 Resistenza atmosferica.....	34
2.3.3 Presenza del terzo corpo.....	35
2.3.4 Non sfericità della Terra ed effetto del J_2	37
2.4 Manovre orbitali.....	42
Capitolo 3: Metodi di ottimizzazione.....	46
3.1 Panoramica sui metodi di ottimizzazione.....	47
3.2 Algoritmi genetici.....	53
3.2.1 Codifica delle informazioni.....	54
3.2.2 Meccanismi di selezione.....	55
3.2.3 Operazioni di Crossover.....	56
3.2.4 Operazioni di Mutazione.....	58
3.3 Particle Swarm Optimization.....	61

Capitolo 4: Modello adottato.....	63
4.1 Caratteristiche della missione.....	63
4.2 Modello Dinamico.....	69
4.3 Vincoli della missione.....	71
4.4 Valutazione del costo delle trasferte.....	72
4.5 Metodologia adottata.....	80
 Capitolo 5: Analisi risultati.....	 84
5.1 Input del codice.....	84
5.2 Risultati.....	86
5.2.1 Variazioni di velocità.....	89
5.2.2 Tempi caratteristici della campagna (t_{TOF}, t_w, t_m).....	91
5.2.3 Divisione degli impulsi.....	93
5.2.4 Confronto con il metodo PSO.....	95
5.3 Considerazioni finali.....	98
 Conclusioni.....	 100
Appendice A.....	102
Appendice B.....	104
Appendice C.....	106
Bibliografia.....	111
Sitografia.....	112

Lista Figure

Figura 1: rappresentazione dei satelliti e detriti presenti nell'ambiente spaziale geostazionario.

Figura 2: rappresentazione di un evento di frammentazione dovuto all'esplosione di uno stadio abbandonato.

Figura 3: diagramma contenente la ripartizione delle maggiori cause della formazione di detriti

Figura 4: Radar Goldstone

Figura 5: Telescopio AMOS

Figura 6: immagine del cratere generato dall'impatto di un detrito con una MLI del telescopio Hubble

Figura 7: rappresentazione grafica della popolazione di detriti in orbita attorno alla terra alle diverse altitudini.

Figura 8: schema rappresentativo del problema dei due corpi ristretto.

Figura 9: rappresentazione grafica dell'origine delle diverse curve coniche.

Figura 10: rappresentazione di una curva conica rispetto alla sua retta direttrice.

Figura 11: orbita ellittica con il pianeta terra posizionato in uno dei due fuochi.

Figura 12: Sistema di riferimento Geocentrico Equatoriale.

Figura 13: rappresentazione tridimensionale di una generica orbita ellittica attorno al pianeta Terra.

Figura 14: evoluzione nel tempo di un qualsiasi parametro orbitale c causata dalle forze perturbative agenti sul corpo in orbita.

Figura 15: rappresentazione schematica della presenza del terzo corpo indicato dalla massa m_3

Figura 16: superfici caratteristiche terrestri.

Figura 17: rappresentazione tridimensionale del geoide

Figura 18: rappresentazione schematizzata dell'andamento delle diverse armoniche sulla superficie terrestre.

Figura 19: schema della manovra di Hohmann tra un'orbita di partenza interna e una di arrivo esterna (può essere effettuata anche al contrario).

Figura 20: rappresentazione della manovra di cambiamento del piano

Figura 21: rappresentazione della manovra di cambiamento della RAAN

Figura 22: schema rappresentativo dei valori assunti dal vettore di stato $\vec{x}(t)$ su ciascun sotto intervallo $[t_j, t_{j+1}]$, per un Direct Multiple-Shooting Method.

Figura 23: generico diagramma di funzionamento degli algoritmi genetici. Il termine N_g indica il numero della generazione corrente.

Figura 24: applicazione del Single point crossover.

Figura 25: applicazione del Two point crossover.

Figura 26: applicazione dell'Uniform crossover.

Figura 27: esempio schematico del meccanismo di funzionamento del Partially matched crossover.

Figura 28: applicazione della mutazione dei geni in più punti, nel caso di codifica binaria.

Figura 29: applicazione dell'inversione nel caso di singolo punto di inversione.

Figura 30: rappresentazione grafica della distribuzione delle orbite percorse dai detriti (indicati con i punti di color ciano) attorno alla Terra, per una certa epoca.

Figura 31: sulla sinistra sono raffigurati i diversi valori di $\dot{\Omega}$ associati alle orbite dei vari detriti mentre a destra è presente l'istogramma di $\dot{\Omega}$.

Figura 32: istogramma delle differenze di $\dot{\Omega}$ tra tutte le possibili coppie di detriti, indicati con i pedici i e j .

Figura 33: sulla sinistra sono raffigurati i diversi valori di semiasse maggiore che caratterizzano le orbite dei vari detriti, i quali sono stati indicati con il numero identificativo riportato in APPENDICE A, mentre a destra è riportato un utile istogramma.

Figura 34: sulla sinistra, analogamente al caso precedente, sono stati raffigurati i diversi valori di eccentricità associati alle orbite dei vari detriti, mentre a destra è presente l'istogramma delle eccentricità.

Figura 35: sulla sinistra sono riportati i diversi valori di inclinazione caratteristici delle orbite dei vari detriti e a destra è presente l'istogramma delle inclinazioni.

Figura 36: sulla sinistra sono riportati i diversi valori di Ω delle orbite dei vari detriti in corrispondenza di una rispettiva epoca (tempo di avvistamento), mentre a destra è presente l'istogramma delle RAAN.

Figura 37: sulla sinistra sono riportati i diversi valori di ω delle orbite dei vari detriti in corrispondenza di una rispettiva epoca (tempo di avvistamento) e a destra è presente l'istogramma degli ω .

Figura 38: sulla sinistra sono riportati i diversi valori di M delle orbite dei vari detriti per una rispettiva epoca (tempo di avvistamento) e a destra è presente l'istogramma delle M .

Figura 39: rappresentazione schematizzata della successione dei tempi caratteristici considerati per ciascuna fase della missione. I valori determinati dall'algorithm genetico corrispondono a $t_{w_i}^{\circ}, t_{TOF_i}^{\circ}, t_{m_j}$.

Figura 40: grafico contenente la variazione di velocità accumulata durante la missione, in funzione del tempo, calcolata tramite i risultati ottenuti dal JPL (Tabella 2).

Figura 41: rappresentazione dei ΔV accumulati durante le prime tre sequenze della campagna di rimozione utilizzando 200 individui per popolazione.

Figura 42: rappresentazione dei ΔV accumulati durante le prime tre sequenze della campagna di rimozione utilizzando 350 individui per popolazione.

Figura 43: dettaglio riguardante la fase della campagna compresa tra la prima sequenza di rimozione e la seconda.

Figura 44: rappresentazione dei ΔV accumulati durante l'intera campagna, determinati dal JPL, dall'utilizzo dell'AG e dal metodo di stima delle variazioni di velocità accoppiato ai tempi determinati dal JPL (Ref. [B15]).

Figura 45: all'interno del presente grafico è possibile osservare l'evoluzione dell'ultima sequenza secondo i tre approcci considerati (JPL, AG e metodo del tempo di trasferta limitato in funzione dei tempi determinati dal JPL).

Figura 46: confronto tra i ΔV accumulati ricavati dall'applicazione dei diversi modelli.

Figura 47: dettaglio raffigurante la differenza tra i valori determinati dal PSO e quelli ottenuti dall'AG, per alcuni archi della missione. Queste discrepanze possono essere ricondotte a diversi fattori e tra questi vi è la natura stocastica di entrambi i metodi o ancora la possibile convergenza del metodo PSO verso soluzioni di minimo locale.

Figura 48: raffigurazione dei valori finali, del ΔV accumulato, calcolati tramite i risultati del JPL, dell'AG e del PSO.

Lista Tabelle

Tabella 1: tabella contenente le epoche di inizio e fine espresse in MJD2000 (Modified Julian Day 2000), il numero di detriti rimossi e la sequenza di rimozione di questi ultimi per ciascuna missione della campagna di rimozione.

Tabella 2: tabella contenente i tempi di Rendez-Vous, i tempi delle trasferte e le variazioni di velocità richieste per ogni tratto di ciascuna missione, al fine di completare la rimozione dei 123 detriti

Tabella 3: tabella contenente le caratteristiche delle varie orbite in termini di energia meccanica specifica ed eccentricità.

Tabella 4: tabella contenente i valori delle variazioni di velocità per ogni arco della campagna calcolate dal gruppo del *JPL* e tramite l'utilizzo dell'*AG*.

Tabella 5: differenze assolute e relative tra i risultati ottenuti tramite l'applicazione dell'algoritmo genetico e i risultati raggiunti dal *JPL*.

Tabella 6: tabella contenente i tempi di trasferta per ciascun arco di ognuna delle dieci sequenze che costituiscono la campagna di rimozione.

Tabella 7: tabella contenente i tempi di attesa che caratterizzano ciascun arco di ognuna delle dieci sequenze che costituiscono la campagna di rimozione.

Tabella 8: tabella contenente i tempi che devono trascorrere tra la fine di una sequenza di rimozione e l'inizio della successiva.

Tabella 9: tabella contenente le differenze assolute e percentuali tra le diverse sequenze e l'intera missione, calcolate fra i risultati ottenuti dal *JPL* e quelli ricavati dall'*AG*.

Tabella 10: all'interno della tabella sono riportati gli impulsi forniti per ciascun arco della missione, tramite i quali è possibile distinguere chiaramente quale tipologia di manovra sia stata adottata (due impulsi, singolo impulso alla partenza, singolo impulso all'arrivo) per permettere l'ottimizzazione del costo globale.

Tabella 11: tabella contenente le differenze di RAAN fra l'orbita del detrito/chaser e l'orbita del successivo detrito da rimuovere in sequenza, calcolate in corrispondenza dei tempi t_p (tempo di partenza) e t_a (tempo di arrivo), del generico arco, ottimizzati dall'*AG*.

Tabella 12: differenze assolute e percentuali tra il costo delle sequenze e dell'intera campagna, determinate tramite l'utilizzo dei due metodi di ottimizzazione (*AG* e *PSO*).

Tabella A1: tabella contenente le principali caratteristiche dei detriti analizzati quali il numero identificativo (I colonna), il tempo di misurazione dei parametri (II colonna) e i parametri orbitali misurati in corrispondenza del tempo di misurazione (restanti colonne).

Tabella C1: tabella contenente i tempi di partenza da ciascun detrito ad eccezione della prima colonna, la quale indica il tempo di inizio della generica sequenza.

Tabella C2: tabella contenente i tempi di arrivo su ciascun detrito ad eccezione dell'ultima colonna, la quale indica il tempo di fine della generica sequenza.

Tabella C3: parametri m ed n caratteristici di ciascun arco della campagna di rimozione.

Tabella C4: contributo alla variazione di velocità risparmiato sfruttando l'effetto del J_2 .

Tabella C5: coefficienti di partizione caratteristici di ciascun arco della campagna.

Tabella C6: contributi costituenti la variazione di velocità necessaria per effettuare le manovre di ciascun arco della missione.

Tabella C7: confronto tra i ΔV ottenuti dall'*AG* e tramite l'utilizzo del *PSO*, per ciascun arco di ogni sequenza di rimozione.

Tabella C8: confronto tra le durate delle diverse trasferte che caratterizzano la campagna, determinate dall'AG e tramite l'utilizzo del PSO.

Tabella C9: confronto tra i tempi di attesa nelle vicinanze di ciascun detrito, determinati dall'AG e tramite l'utilizzo del PSO.

Tabella C10: tabella contenente le differenze assolute e percentuali tra le diverse sequenze e l'intera missione, calcolate fra i risultati ricavati dall'AG e quelli ottenuti dal PSO.

Sommario

Negli ultimi decenni le criticità legate alla generazione, all'individuazione e allo smaltimento dei detriti spaziali hanno suscitato un grande interesse da parte delle agenzie spaziali internazionali. Attualmente non è possibile trascurare l'impatto che questi detriti hanno sull'ambiente spaziale e in particolare il potenziale pericolo che costituiscono per quanto riguarda l'ambiente delle orbite LEO maggiormente popolate da satelliti operativi. Tra queste ultime possono essere citate le orbite Eliosincrone e Molniya.

Il lavoro svolto si inserisce nel contesto precedentemente introdotto basandosi sul problema proposto all'interno della *Global Trajectory Optimization Competition (9th Edition)*, e utilizzando un metodo in grado di effettuare una stima rapida dei costi di una campagna di rimozione di detriti, sfruttando le capacità di ottimizzazione di una classe di *algoritmi evolutivi di ricerca*, ovvero gli *algoritmi genetici*. I risultati ottenuti sono stati confrontati con la soluzione vincitrice della competizione, ricavata dal gruppo del JPL, che ha permesso di verificare la validità del metodo implementato.

È riportata di seguito la principale suddivisione tematica all'interno dei vari capitoli.

All'interno del **Capitolo 1** è stata effettuata una panoramica riguardante la tematica dei detriti spaziali, descrivendo i principali meccanismi di formazione, le diverse tipologie catalogate, gli strumenti e metodologie di individuazione comunemente adottati e infine le diverse tecniche adottate per la mitigazione del loro impatto anche attraverso la rimozione diretta. In seguito è stato brevemente descritto il problema sul quale è basato l'intero lavoro svolto, ovvero quello proposto all'interno del GTOC9, assieme alla soluzione vincitrice del JPL, che è stata utilizzata come base del lavoro e metro di paragone.

Il **Capitolo 2** contiene un richiamo generale su alcuni argomenti fondamentali di meccanica orbitale e in particolare è incentrato sulla descrizione delle principali perturbazioni che alterano il campo di moto dei corpi in orbita attorno alla Terra.

Il **Capitolo 3** ha come obiettivo quello di fornire una descrizione chiara dei principali metodi numerici comunemente utilizzati per l'ottimizzazione delle traiettorie e nello specifico è focalizzato sulla descrizione degli algoritmi genetici, i quali costituiscono il metodo di ottimizzazione utilizzato per l'intero lavoro.

Il **Capitolo 4** è dedicato alla descrizione della missione considerata, spiegando in maniera più approfondita i modelli utilizzati, i vincoli imposti e l'approccio adottato.

All'interno **Capitolo 5** sono riportati i principali risultati delle analisi svolte assieme al confronto con i risultati del JPL e i risultati ottenuti dall'applicazione di un ulteriore metodo di ottimizzazione ovvero il PSO.

Infine all'interno delle conclusioni sono riassunte le principali considerazioni e i possibili miglioramenti futuri che possono essere perseguiti.

Capitolo 1: Introduzione

Dall'inizio dell'esplorazione spaziale, il problema dei detriti orbitanti attorno alla Terra è diventato sempre più importante, e ad oggi è necessario effettuare un controllo attivo del numero di questi ultimi, oltre che un monitoraggio delle traiettorie da essi descritte, per evitare situazioni potenzialmente catastrofiche. In questo contesto si inserisce il seguente lavoro, che si pone l'obiettivo di svolgere un'analisi per l'ottimizzazione di manovre orbitali volte alla rimozione di detriti in orbita bassa terrestre. I detriti considerati fanno riferimento a quelli selezionati per la nona edizione del GTOC (***Global Trajectory Optimization Competition***), che ha tratto spunto dal problema posto in luce dall'astrofisico Donald J. Kessler dal quale la competizione ha tratto il nome "The Kessler Run". È stato quindi implementato un modello capace di effettuare il calcolo delle variazioni di velocità richieste in funzione dei tempi caratteristici delle missioni, per permettere il trasferimento tra le varie orbite dei detriti, consentendo così la loro rimozione. Data la necessità di rimuovere più detriti nel corso delle stesse missioni, è stato inoltre utilizzato un algoritmo genetico in grado di individuare i vari tempi di trasferta necessari per ottimizzare globalmente le missioni, minimizzandone i costi. Verranno quindi confrontati i risultati ottenuti da questo metodo semplificato, che permette una stima rapida del costo delle varie missioni in termini di variazioni di velocità, con quelli ottenuti dal **JPL (*Jet Propulsion Laboratory*)**, gruppo vincitore della competizione.



Figura 1: in [S1], rappresentazione dei satelliti e detriti presenti nell'ambiente spaziale geostazionario

1.1 Detriti spaziali

Il problema dei detriti spaziali non è mai stato così attuale come negli ultimi decenni, questo a causa del boom di missioni spaziali di diverso stampo, da quelle scientifiche a quelle commerciali, sia in orbita terrestre che al di fuori di essa. Si è quindi assistito ad una crescita del numero di satelliti che ha portato con sé un incremento esponenziale della presenza di rifiuti non direttamente controllabili e potenzialmente pericolosi per le missioni in corso e future.

La presenza di questi detriti costituisce una minaccia reale per tutti quei sistemi artificiali in orbita attorno alla terra, i quali possono essere irrimediabilmente danneggiati da frammenti decisamente

vari nelle dimensioni, in grado di viaggiare a velocità dell'ordine dei 10 km/s nelle orbite LEO. In queste orbite, inoltre, si raggiungono le concentrazioni massime di detriti, concentrati soprattutto tra gli 800 e i 1000 km e intorno ai 1400 km di altitudine.

Considerando l'attività umana dal 1957 anno di lancio dello Sputnik I (il primo satellite artificiale spedito in orbita attorno alla Terra), si possono contare più di 6400 lanci, per un totale superiore ai 10000 satelliti, e più di 640 malfunzionamenti responsabili della creazione di oltre 56000 detriti tracciabili. In realtà di questi ultimi, "solo" 34650 sono tutt'ora in orbita e vengono costantemente monitorati dalle stazioni di terra che propagano le orbite di ciascun detrito, per prevedere la loro posizione rispetto ai satelliti attualmente operativi e per programmare i lanci dalla superficie terrestre. I *detriti spaziali* indicano l'insieme di tutti quegli oggetti artificiali posti nello spazio dall'uomo, che non sono più in grado di svolgere le missioni per le quali sono stati progettati. All'interno dei detriti spaziali rientrano contemporaneamente i satelliti malfunzionanti o che hanno terminato la loro missione, alcuni stadi superiori dei lanciatori e frammenti dovuti ad impatti ed esplosioni. In particolare attualmente, a fronte di 8400 satelliti operativi, si possono contare circa:

- 2.040 stadi superiori di lanciatori abbandonati in orbita terrestre
- 2.150 satelliti non operativi
- 36.500 frammenti di dimensioni superiori ai 10 cm
- 1.000.000 di frammenti di dimensioni comprese tra 1 e 10 cm
- 130.000.000 di frammenti di dimensioni comprese tra 1 mm e 1 cm
- 21.300 detriti di altra natura

Questi numeri impressionanti danno idea della mole di detriti attualmente in orbita e non includono tutti quelli che non possono essere monitorati a causa delle loro dimensioni eccessivamente ridotte. Si può facilmente intuire come i satelliti in funzione siano minacciati da questi oggetti in moto ad altissime velocità, con i quali condividono lo spazio in orbita attorno alla Terra.

Può essere effettuata una distinzione tra i vari detriti, che risulta fondamentale per la classificazione e catalogazione di questi oggetti.

Più nello specifico si possono distinguere:

- ***Detriti di piccole dimensioni***, questi indicano tutti quei frammenti con diametro inferiore al millimetro. La conoscenza completa del numero di questa tipologia di detriti è limitata a causa delle dimensioni proibitive per il monitoraggio e l'individuazione dalla Terra; si possono solo avere delle stime statistiche riguardanti questa popolazione di detriti. Quello che caratterizza questi frammenti è il loro elevato coefficiente balistico (proporzionale al rapporto tra superficie crossezionale e massa), che implica un decadimento delle orbite da essi percorse più veloce rispetto alle altre tipologie di detriti.
- ***Detriti di medie dimensioni***, comprendono i corpi con diametro compreso tra 1 mm e 10 cm. Questa tipologia di detriti rappresenta la porzione più abbondante dei frammenti attualmente in orbita che possono essere in qualche modo monitorati, e tendenzialmente tendono ad originarsi a partire dai detriti di grandi dimensioni a causa di collisioni o esplosioni. Le dimensioni di questi detriti limitano la capacità di identificazione e monitoraggio alle sole orbite LEO, per cui è verosimile che il numero di questi frammenti sia notevolmente superiore a quello stimato.

- **Detriti di grandi dimensioni**, sono costituiti da tutti quei corpi con diametro superiore ai 10 cm. Questi detriti popolano maggiormente le orbite LEO e GEO e risultano essere quelli più facilmente individuabili date le loro dimensioni.

1.1.1 Meccanismi di formazione

Dopo aver introdotto la distinzione principale che caratterizza i vari detriti è necessario evidenziare quelli che sono i meccanismi che portano alla formazione di questi ultimi, fornendo anche alcuni esempi reali di *fenomeni di frammentazione*. La formazione dei detriti spaziali può essere causata da diverse dinamiche che comprendono principalmente le collisioni e le esplosioni, le quali costituiscono la prima causa di creazione di frammenti. Questi fenomeni possono essere dovuti a **operazioni svolte durante le missioni**, a **incidenti imprevisti** oppure ad **azioni intenzionali**.

La *formazione di detriti a seguito di azioni previste dalle missioni* è un avvenimento comune, infatti questi possono essere di varie dimensioni passando dagli stadi superiori dei lanciatori utilizzati per posizionare il payload, ai frammenti generati dalla separazione esplosiva delle giunzioni tra lo stadio e il payload stesso, fino alle particelle di propellente solido espulse durante la propulsione in grado di permanere in orbita per diverso tempo. Generalmente i detriti prodotti durante le singole missioni sono ridotti ma, soprattutto per le missioni che coinvolgono più lanci, possono costituire un problema non trascurabile.

Al contrario la probabilità che si verifichino degli *incidenti* in grado di produrre un considerevole numero di frammenti individuabili è più ridotta, ma questa è una delle cause principali responsabile della maggior parte dei detriti attualmente in orbita attorno alla Terra. Questi eventi sono caratterizzati principalmente da malfunzionamenti ed errori del segmento spaziale e/o di quello di terra, che portano ad esplosioni, a collisioni tra satelliti e detriti o persino a collisioni tra satelliti stessi.



Figura 2: in [S1], rappresentazione di un evento di frammentazione dovuto all'esplosione di uno stadio abbandonato.

Tra gli incidenti più significativi:

- Nel 1965 durante la prima attività extra veicolare americana, un guanto termico fuoriuscì dal portellone della capsula *Gemini IV*. Nel 1966, similmente, venne persa una telecamera al di fuori della capsula *Gemini X*.
- Nel 1981 il satellite *Cosmos 1275* subì un grave evento di frammentazione dovuto probabilmente ad un malfunzionamento del pacco batterie, che ne portò all'esplosione.
- Nel 1996 il satellite *Cerise* fu colpito e danneggiato da un detrito generato in un incidente che coinvolse un lanciatore Ariane nel 1986.
- Nel 2007 il satellite *Cosmos 1818*, alimentato con energia nucleare, iniziò a rilasciare frammenti metallici (sfere metalliche) generati probabilmente dal liquido refrigerante impiegato.
- Nel febbraio del 2009 ci fu il primo caso di collisione tra due satelliti di comunicazione *Iridium 33* e *Cosmos 2251*. La collisione provocò la frammentazione di entrambi i satelliti con la creazione di più di 1600 detriti catalogati.

L'ultimo aspetto da sottolineare è legato ai detriti causati da *azioni intenzionali*. Queste possono essere legate a protocolli di sicurezza che prevedono la distruzione in caso di *failure* durante il rientro in atmosfera dei satelliti o dei *booster*, o semplicemente sono il risultato di test militari. In relazione a questi ultimi, si ricordano i principali eventi avvenuti dall'inizio dell'esplorazione spaziale:

- Tra il 1961 e 1963 furono condotti dall'Air Force degli Stati Uniti degli esperimenti per il progetto West Ford. L'obiettivo della missione si basava sul rilasciare una grande quantità di piccoli fili di rame (lunghi pochi centimetri e spessi qualche micron) in un'orbita quasi polare, con lo scopo di creare un dispositivo passivo per le comunicazioni militari. L'esito delle missioni fu la creazione di diversi cluster di detriti con dimensioni maggiori oltre all'innumerevole quantità di fili non individuabili.
- Nel 1985 gli Stati Uniti condussero un esperimento militare *ASAT (antisatellite)* per abbattere un satellite tramite un missile sganciato da un velivolo. Il missile impattò con il satellite malfunzionante provocandone la frammentazione in 285 detriti tracciabili in orbita LEO.
- Nel 2007 la Cina condusse un altro esperimento missilistico distruggendo, tramite un missile balistico, il satellite *Fengyun-1C*. L'operazione provocò la creazione di più di 3000 detriti che nel corso degli anni si distribuirono su altitudini diverse, dai 175 km ai 3600 km.

Attualmente la popolazione di detriti in orbita è costituita dal 34% di satelliti non operativi, 8.1% di stadi superiori, 2.2% di detriti anomali, 8.3% di detriti causati da missioni e infine dal 47.4% di detriti generati da rotture e malfunzionamenti. Si può osservare che i detriti causati da *failure* costituiscono singolarmente quasi il 50% dell'intero numero di detriti in orbita e, in relazione a quanto espresso in precedenza, le cause che portano alla formazione di questi ultimi presentano la seguente ripartizione. La prima fonte di detriti tra i vari meccanismi noti è generata dalle esplosioni, innescate dalla rimanenza di propellente in alcuni stadi superiori in orbita. È necessario tuttavia soffermarsi sui detriti

originati a seguito di azioni volontarie, poiché queste influiscono maggiormente rispetto ad eventi di frammentazione dovuti a collisioni in orbita, al contrario di quanto si potrebbe erroneamente pensare.

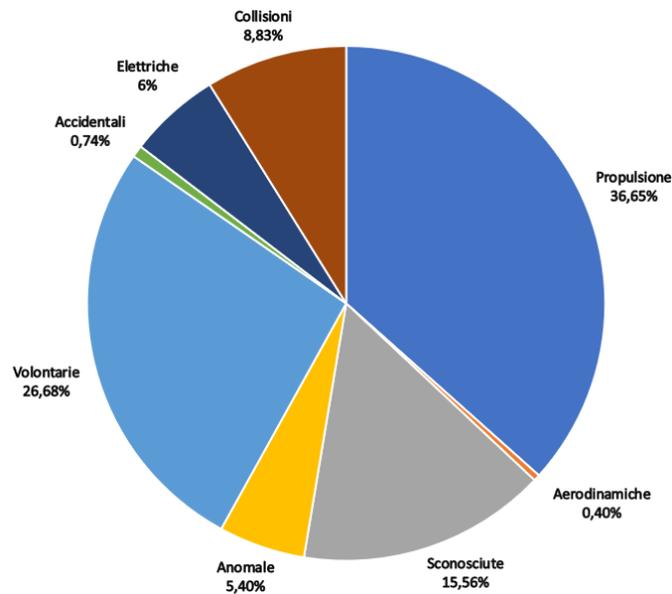


Figura 3: diagramma contenente la ripartizione delle maggiori cause della formazione di detriti

1.1.2 Identificazione e Monitoraggio

Il pericolo che i detriti spaziali rappresentano per tutti i sistemi operativi in orbita attorno alla terra e gli equipaggi a bordo delle capsule o delle stazioni orbitali, ha reso indispensabile la capacità di poter individuare e monitorare questi corpi per evitare possibili collisioni catastrofiche. Le principali difficoltà che si riscontrano nell'individuazione dei detriti sono legate alle varie dimensioni che ciascuno dei frammenti può assumere e alle diverse orbite che questi ultimi tendono a popolare. Nel corso dei decenni sono stati sviluppati degli strumenti sempre più potenti, e attualmente si è in grado di identificare frammenti di dimensioni fino ai 10 cm in diametro nelle orbite LEO grazie all'utilizzo dei radar, e corpi di dimensioni maggiori o uguali ad 1 m in orbita GEO sfruttando i telescopi ottici. Nel corso degli anni sono stati realizzati alcuni strumenti utili all'individuazione ed al monitoraggio come

- I radar Haystack, HAX (Haystack Auxiliary) e Goldstone rispettivamente situati in Massachusetts e in California.
- Il telescopio ottico MODEST (Michigan Orbital Debris Survey Telescope) situato in Chile e il complesso AMOS (Air Force Maui Optical and Supercomputing) nelle isole Hawaii.



Figura 4: in [S5], Radar Goldstone



Figura 5: in [S5], Telescopio AMOS

Oltre agli studi condotti dai dispositivi a terra, è stato fatto uso di sensori montati su satelliti appositi per cercare di compensare le limitazioni legate ai segmenti di terra. Un'altra tecnica fondamentale, per tutti i detriti che non rientrano nei range di dimensioni precedentemente introdotti, è stata l'analisi dei satelliti/capsule riportate sulla superficie terrestre. È stato possibile in questo modo effettuare delle stime statistiche riguardo alle dimensioni e composizioni chimiche dei detriti, studiando le zone di impatto/crateri generati dalle collisioni tra i frammenti e le superfici esterne. L'individuazione e caratterizzazione¹ dei detriti risulta essere oggi più che mai di fondamentale importanza, considerando il rinnovato interesse verso il settore spaziale. La diretta conseguenza della nuova "corsa allo spazio" è un maggior numero di satelliti in orbita e, di conseguenza, una maggiore probabilità che si generino detriti.

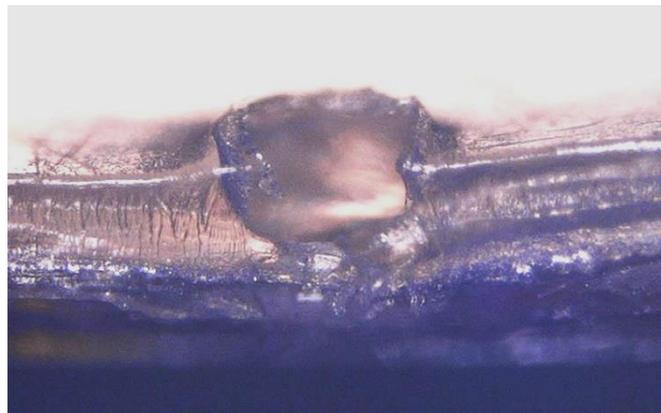


Figura 6: in [S5], immagine del cratere generato dall'impatto di un detrito con una MLI del telescopio Hubble

Alla necessità di individuare i detriti, si affianca la catalogazione e il monitoraggio di questi ultimi per avere una conoscenza dell'ambiente all'interno del quale coesistono contemporaneamente i detriti e i satelliti operativi.

¹ Il termine *caratterizzazione* indica la capacità di determinare le caratteristiche dell'oggetto osservato come la forma, la massa, la composizione e l'assetto.

Lo **Space Surveillance Network (SSN)**, ente fondato dagli Stati Uniti nell'ottobre del 1957, si occupa di effettuare l'individuazione, caratterizzazione, monitoraggio e catalogazione di varie tipologie di detriti in orbita terrestre. L'SSN fa uso di diversi radar e telescopi ottici per poter identificare la traiettoria compiuta da ciascun detrito, prevederne l'eventuale data e zona di rientro nell'atmosfera terrestre e informare i responsabili dei satelliti di possibili collisioni imminenti con altri detriti. Negli ultimi decenni, considerando la crescita del settore spaziale e l'avanzamento tecnologico, il numero medio di satelliti osservati e monitorati ogni giorno è cresciuto vertiginosamente.

L'ulteriore compito di questo ente consiste nel redigere lo **Space Catalog**, un documento contenente il numero aggiornato di detriti in orbita. L'SSN si occupa inoltre della determinazione delle orbite percorse da ciascun detrito, estrapolando i parametri orbitali tramite un numero variabile di misurazioni. Per detriti a quote relativamente alte il numero di osservazioni al giorno può essere ridotto, al contrario per le orbite più vicine alla superficie terrestre sono necessarie molte più misurazioni a causa delle maggiori perturbazioni dovute principalmente alla resistenza atmosferica.

L'enorme mole di dati può essere ridotta evitando un monitoraggio continuo, l'SSN infatti fa uso di tecniche predittive effettuando le osservazioni nelle porzioni di spazio all'interno delle quali dovrebbero passare i detriti, in accordo con la propagazione delle orbite effettuata. Questa tipologia di approccio non solo permette di ridurre il numero di dati da acquisire, ma risulta essere necessario per superare alcune limitazioni del segmento di terra, che spaziano dalle capacità dei dispositivi al loro posizionamento geografico sulla superficie terrestre. Le teorie e i modelli matematici a disposizione dell'SSN per la propagazione delle orbite si dividono in due principali categorie ovvero **General Perturbation** e **Special Perturbation**. Questi metodi sono basati rispettivamente sulla risoluzione analitica delle equazioni del moto introducendo semplificazioni sul modello delle forze in gioco, e su di un approccio numerico accoppiato ad un modello delle forze più accurato e complesso. Nel tempo si è deciso di adottare principalmente il primo metodo perché, pur essendo meno preciso rispetto allo **Special Perturbation**, risulta più veloce e ha un costo computazionale inferiore. Il metodo **Special Perturbation** viene attualmente utilizzato per quelle situazioni che necessitano di maggiore accuratezza nelle previsioni come per le manovre di **Collision Avoidance** o per determinare la data e posizione durante il rientro atmosferico di corpi di grandi dimensioni. Attualmente il catalogo comprende all'incirca 34650 detriti e l'SSN ne monitora l'evoluzione, introducendone di nuovi a seguito di ulteriori individuazioni e rimuovendo tutti quelli che decadono disintegrandosi naturalmente nell'atmosfera terrestre.

Analogamente allo Space Surveillance Network, nel 2009 è stato avviato il programma **Space Situational Awareness (SSA)** sviluppato dall'ESA. La nascita dell'SSA è stata necessaria per il raggiungimento dell'indipendenza dell'Europa dai sistemi di monitoraggio appartenenti alle diverse agenzie che si occupano di **Space Surveillance**. I compiti principali dell'SSA non sono limitati solamente all'individuazione e monitoraggio dei detriti e, nello specifico, possono essere individuati tre principali segmenti che costituiscono il cuore pulsante dell'SSA

- **Space Surveillance and Tracking**: responsabile del monitoraggio e catalogazione dei detriti nel senso più ampio del termine (satelliti dismessi, stadi superiori e frammenti in orbita).
- **Space Weather**: responsabile della valutazione dell'impatto che l'ambiente spaziale planetare e non e l'attività solare può avere sull'operatività dei satelliti e delle stazioni di terra.

- *Near-Earth Objects (NEO)*: responsabile dell'individuazione di potenziali oggetti naturali (meteoriti), in orbita attorno al Sole, in rotta di collisione con la Terra. I corpi che rientrano nella categoria NEO sono tutti gli asteroidi/comete con dimensioni comprese tra un metro e le decine di chilometri.

L'SSA fa uso di strumenti quali radar e telescopi ottici posizionati sul suolo europeo e contemporaneamente usufruisce dei dati sull'ambiente spaziale e sull'attività solare provenienti da satelliti posizionati in orbita attorno alla Terra o in corrispondenza dei punti lagrangiani L1 e L5.

1.1.3 Strategie di mitigazione e contromisure

Nel giugno del 1978 fu pubblicato, dal *Journal of Geophysical Research*, un articolo riguardante lo studio condotto dall'astrofisico Donald J. Kessler sul problema dei detriti spaziali e la loro evoluzione futura, specialmente focalizzata sul secolo corrente. In particolare Kessler, nell'articolo, si mostra preoccupato rispetto alla possibilità che l'eccessivo aumento del numero di lanci e satelliti in orbita attorno alla Terra, possa compromettere per un lungo periodo la possibilità per l'uomo di accedere allo spazio, a causa della formazione di una "fascia di detriti" orbitante attorno alla terra. Il meccanismo di formazione di quest'ultima, che prende il nome di *Kessler Syndrome*, prevederebbe una serie di collisioni a catena causate dai detriti formati dall'impatto precedente con i successivi satelliti o stadi superiori, con l'aumento progressivo delle probabilità di collisione e del numero di detriti generati. Inoltre, pur essendo un meccanismo analogo a quello che porta alla formazione delle fasce di asteroidi planetarie, quest'ultimo si potrebbe sviluppare in un intervallo di tempo estremamente più ridotto. Il flusso di detriti, all'interno della potenziale nube generata, potrebbe essere tale da superare le capacità di smaltimento naturale dovuto all'azione frenante dell'atmosfera, portando ad un aumento esponenziale del numero di frammenti in orbita.

Questo fenomeno, come è stato osservato da Kessler, potrebbe colpire maggiormente le orbite LEO a causa dell'elevata densità di satelliti e detriti presenti al di sotto dei 2000 km, comportando una seria minaccia per tutti i satelliti operativi in quelle orbite che sono attualmente indispensabili per innumerevoli applicazioni.

Con tali premesse risulta evidente la necessità di intervenire per arginare il pericolo costituito dai detriti spaziali; nel corso degli anni è stata raggiunta una maggior consapevolezza riguardo alle azioni da intraprendere per scongiurare preoccupanti scenari futuri come quello previsto da Kessler. Le principali contromisure adottate come quelle che prevedono la mitigazione del problema a monte, si identificano come contromisure di tipo passivo e hanno l'obiettivo di evitare la formazione di detriti e la loro crescita nel lungo periodo. Tutte quelle contromisure che, a differenza del caso precedente, prevedono la rimozione dei detriti in orbita attorno alla Terra tramite l'utilizzo di dispositivi esterni rientrano nella categoria di contromisure di tipo attivo.

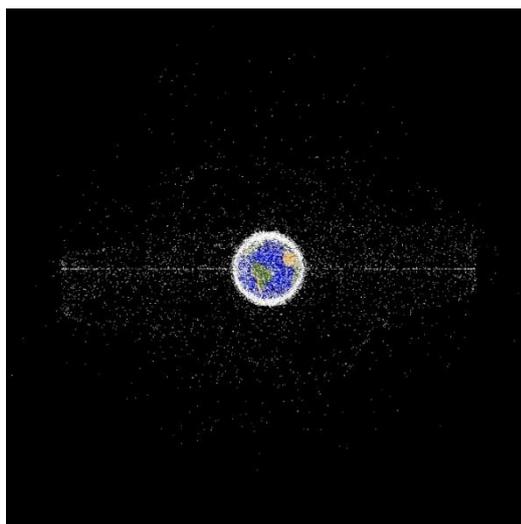


Figura 7: in [55], rappresentazione grafica della popolazione di detriti in orbita attorno alla terra alle diverse altitudini.

Per le **contromisure di tipo passivo** sono comunemente adottate alcune linee guida che prevedono

- la *passivazione dei corpi dismessi*: questa procedura prevede l'isolamento delle batterie dal circuito di alimentazione e lo svuotamento dei serbatoi dei satelliti dismessi o dei vari stadi superiori in orbita. In questo modo è possibile evitare gli eventi di frammentazione dovuti alle esplosioni a seguito di detonazioni del carburante residuo o di sovraccarico delle batterie.
- la *prevenzione dalle collisioni*: tramite l'utilizzo del SSA è possibile prevedere eventuali collisioni e conseguentemente effettuare manovre di *collision avoidance*, nei limiti delle capacità di individuazione dell'SSA.
- la *corretto design del satellite*: molti satelliti sono attualmente dotati di scudi per proteggere le parti più sensibili dalle collisioni con eventuali detriti che possono sfuggire al sistema SSA. Un altro aspetto fondamentale che viene considerato durante il processo di design è il comportamento che il satellite deve assumere durante il rientro in atmosfera in caso di De-Orbiting. Infatti è fondamentale che eventuali failure non rendano il satellite un potenziale pericolo per gli altri satelliti e per la popolazione a terra.
- *un'adeguata pianificazione della missione*: questa procedura è di fondamentale importanza per evitare la formazione di nuovi detriti a causa di eventi inattesi. È necessario tenere conto che per le operazioni che prevedono degli umani a bordo, i lanci dalla superficie terrestre devono essere programmati per evitare dei passaggi troppo ravvicinati con potenziali detriti. Inoltre risulta particolarmente importante considerare l'attività solare e la sua influenza sull'atmosfera, per essere a conoscenza dell'ambiente all'interno del quale si trovano ad operare i satelliti.

Per quanto riguarda le **contromisure di tipo attivo**, a seconda della distanza dei detriti dalla superficie terrestre si adottano strategie diverse.

In particolare per i detriti che occupano le orbite LEO si opta generalmente per delle manovre di *De-Orbiting* nell'atmosfera terrestre, causandone la distruzione. Questa tipologia di manovra può avvenire in maniera naturale, seguendo il decadimento delle orbite causato dalla resistenza aerodinamica dell'atmosfera alle basse quote (inferiori ai 500 km), o a seguito dell'attivazione di dispositivi appositi che agiscono direttamente sui parametri orbitali o sulla superficie esposta del detrito/satellite. Questo meccanismo di decadimento naturale delle orbite risulta essere indispensabile per la regolazione del flusso di detriti presente nelle orbite LEO poiché contrasta la crescita del numero di detriti, dovuto ai numerosissimi lanci effettuati negli ultimi anni. Al crescere della quota la maggior rarefazione dell'atmosfera comporta una diminuzione del *Drag aerodinamico*, questo rende il decadimento naturale sempre più lento e favorisce l'uso dei dispositivi precedentemente introdotti. In particolare questi ultimi comprendono:

- *propulsori elettrici/chimici* utilizzati per rallentare i satelliti durante il *disposal*, provocandone il rientro in atmosfera.
- *sistemi di aumento della resistenza aerodinamica* in grado di dispiegarsi, aumentando la resistenza e la velocità di decadimento dell'orbita del satellite/detrito.
- *veicoli esterni* in grado di effettuare il Rendez-Vous con i detriti e installare uno dei due dispositivi precedentemente menzionati, i quali prendono il nome di "*de-orbit package*".

Al contrario nel caso delle orbite GEO si fa uso di dispositivi in grado di allontanare i detriti/satelliti dismessi portandoli verso orbite morte definite "*grave yard orbits*", ovvero orbite poco popolate che permettono di ridurre le probabilità di generare nuovi detriti; un'altra soluzione è lo spostamento al di fuori del capo gravitazionale terrestre. Questo metodo di *Re-Orbiting* viene adottato poiché risulta essere meno dispendioso, in termini di carburante richiesto, rispetto all'effettuare un *De-Orbiting*. I dispositivi che possono essere impiegati per il completamento di questo tipo di operazioni spaziano dai propulsori chimici/elettrici alle vele solari, e possono essere già presenti sui satelliti oppure possono essere installati da veicoli esterni.

Altri possibili metodi per evitare la formazione di detriti o favorirne la rimozione possono prevedere l'utilizzo di

- laser provenienti da satelliti o dalla superficie terrestre, in grado di colpire i detriti deviandone le traiettorie per evitare possibili collisioni o semplicemente per velocizzare il decadimento dell'orbita nell'atmosfera
- l'utilizzo di veicoli dotati di grandi superfici (*Sweepers vehicle*), adibiti a deviare o catturare detriti di piccole-medie dimensioni tramite il contatto diretto con questi ultimi.
- l'utilizzo di reti, agganciate ad un veicolo trainante, volte a raccogliere i detriti senza la necessità di effettuare una manovra di Rendez-Vous.

1.2 Competizione GTOC9

Il tema preso in considerazione per l'intero lavoro svolto si basa su quello che è stato proposto durante la nona edizione del **Global Trajectory Optimization Competition (GTOC9)**, gara internazionale aperta a qualsiasi partecipante, indetta dall'European Space Agency ogni uno-due anni, durante la quale vengono proposti problemi di design di traiettorie interplanetarie e non.

L'Advanced Concept Team dell'ESTEC (European Space and Technology Center), gruppo vincitore dell'ottava edizione della sfida, ha avuto la possibilità di decidere il tema per la nona edizione. Prendendo spunto dalle osservazioni e preoccupazioni espresse dall'astrofisico D.J. Kessler sulla possibile formazione di una fascia di detriti attorno alla Terra, il gruppo vincitore ha proposto un problema di ottimizzazione volto alla minimizzazione dei consumi di una campagna di rimozione di 123 detriti su orbite LEO eliosincrone, tramite una serie di missioni successive. L'intera campagna è stata ambientata in un ipotetico futuro, non così remoto (nell'anno 2060), nel quale un evento di frammentazione improvviso ha provocato un effetto a catena (sindrome di Kessler) danneggiando profondamente l'ambiente LEO popolato dai satelliti sulle orbite eliosincrone e richiedendo un intervento di rimozione tempestivo di alcuni detriti per ripristinare l'operatività in questo ambiente.

Il gruppo dell'ESTEC ha sfruttato le complicazioni introdotte dall'effetto del J2, che riguardano principalmente la precessione della linea dei nodi per ciascun detrito, per rendere più complessa la determinazione delle lunghe sequenze di detriti da rimuovere, tramite l'intervento di veicoli in grado di installare dei *de-orbit package* sui detriti stessi. L'intera campagna di rimozione di questi ultimi è stata soggetta a vari vincoli riguardanti i diversi tempi caratteristici delle varie missioni, le possibili manovre da attuare e le masse caratteristiche del sistema (veicolo, propellente e *de-orbit packages*). Le restrizioni sulle durate delle varie fasi di ciascuna missione hanno contribuito a rendere più complesso il raggiungimento delle sequenze ottime di rimozione dei detriti impedendo l'attuazione di una strategia basata sul *tempo di fasamento ottimale* che avrebbe comportato dei consumi minori, poiché non sarebbe stato necessario effettuare le costose manovre per correggere la RAAN, ma al contempo una campagna di durata eccessiva (superiore ad otto anni) e incapace di rispettare i vincoli imposti.

La nona edizione del GTOC ha contato la partecipazione di 69 squadre iscritte da diverse regioni del mondo; ogni squadra ha adottato, nell'arco della durata della competizione pari ad un mese, strategie e metodologie differenti per sviluppare la propria originale soluzione.

Tra i vari partecipanti la squadra del JPL (*Jet Propulsion Laboratory*), vincitrice della competizione, è stata in grado di risolvere il problema ottenendo una soluzione per l'intera campagna di rimozione attraverso dieci missioni svolte in successione. Il gruppo ha fatto uso di diversi metodi e algoritmi, dei quali verrà fornita una breve descrizione nel capitolo successivo, per risolvere e determinare la migliore successione di detriti da rimuovere durante ciascuna missione, risolvendo un problema analogo a quello che comunemente prende il nome di "*problema del commesso viaggiatore*" (*Travelling Salesman Problem* o TSP²). In questo caso però, considerando l'influenza della non perfetta sfericità della terra sulla precessione della linea dei nodi di ciascun detrito, il problema da risolvere è risultato essere decisamente più insidioso, soddisfacendo la volontà degli organizzatori della nona edizione del GTOC. Superando queste difficoltà il gruppo del JPL è stato in grado di determinare le sequenze ottime

² Il TSP è un noto problema di ottimizzazione basato sull'identificazione del percorso migliore (più breve) che permette di congiungere diversi punti (città, individui ecc.) passando una sola volta da ciascuno di questi ultimi. La complessità del problema, così come il costo computazionale richiesto, tende ad aumentare molto velocemente all'aumentare del numero di punti considerati, poiché il numero di combinazioni possibili cresce esponenzialmente.

di rimozione e le conseguenti variazioni di velocità da imporre per ogni tratto di ciascuna missione tali da minimizzare la funzione obiettivo assegnata (Ref. [B13]).

Nelle seguenti tabelle sono riportati i principali risultati³ ottenuti dal JPL, come i tempi caratteristici di ogni missione e le variazioni di velocità calcolate.

Mission	Start MJD2000	End MJD2000	Launch Mass, kg	Number of objects	Debris ID	UTC
1	23557.18	23821.03	5665.38	14	23,55,79,113,25,20,27,117,121,50,95,102,38,97	20:17
2	23851.08	24024.53	4666.15	12	19,115,41,26,45,82,47,85,7,2,11,77	20:17
3	24057.47	24561.49	6589.58	21	72,107,61,10,28,3,64,66,31,90,73,87,57,35,69,65,8,43,71,4,29	21:42
4	24637.26	24916.44	5679.10	11	108,24,104,119,22,75,63,112,37,32,114	20:18
5	24946.47	25232.94	4906.59	14	84,59,98,1,40,51,36,67,62,99,54,122,76,15	20:18
6	25262.95	25455.15	5062.74	10	101,48,53,5,12,39,58,13,60,74	20:18
7	25485.20	25682.33	4082.33	10	49,9,70,93,105,46,88,118,18,91	20:18
8	25712.38	25915.53	3725.73	9	86,34,100,30,92,6,110,96,81	20:19
9	25946.06	26237.29	4897.35	12	33,68,116,106,14,52,120,80,16,94,83,89	20:19
10	26267.80	26416.00	3438.62	10	44,111,56,78,0,17,109,103,42,21	20:19

Tabella 1: in [B14], tabella contenente le epoche di inizio e fine espresse in MJD2000 (Modified Julian Day 2000), il numero di detriti rimossi e la sequenza di rimozione di questi ultimi per ciascuna missione della campagna di rimozione.

Mission	Rendezvous Duration, days
1	5.00,5.00,5.04,5.01,5.01,5.03,5.00,5.00,5.00,5.03,5.03,5.04,5.04,5.00
2	5.00,5.02,5.02,5.00,5.04,5.00,5.05,5.02,5.07,5.03,5.02,5.00
3	5.00,5.06,5.01,5.02,5.07,5.02,5.04,5.02,5.01,5.02,5.01,5.07,5.06,5.02,5.01,5.01,5.06,5.01,5.02,5.04,5.00
4	5.00,6.01,6.01,6.03,6.05,6.05,6.04,6.01,6.06,6.04,5.00
5	5.00,5.02,5.07,5.04,5.01,5.01,5.02,5.06,5.06,5.02,5.06,5.01,5.07,5.00
6	5.00,5.02,5.01,5.04,5.07,5.02,5.01,5.02,5.02,5.00
7	5.00,5.00,5.06,5.06,5.04,5.06,5.04,5.06,5.03,5.00
8	5.00,5.01,5.03,5.00,5.01,5.04,5.07,5.02,5.00
9	5.00,5.51,5.53,5.53,5.53,5.55,5.54,5.53,5.54,5.55,5.52,5.00
10	5.00,5.54,5.50,5.50,5.52,5.52,5.54,5.53,5.52,5.00

Mission	Transfer Duration, days
1	24.86,24.98,22.42,24.99,0.29,10.63,25.00,2.70,1.51,1.41,24.67,24.31,5.86
2	24.93,0.28,0.73,0.39,17.07,1.61,22.42,2.39,15.88,24.97,2.49
3	14.16,24.94,2.87,8.10,9.00,23.13,23.09,23.09,22.83,24.98,24.98,24.93,24.94,9.10,13.44,24.99,24.94,24.99,24.98,24.96
4	23.96,6.48,16.72,23.97,23.95,23.95,23.96,23.99,23.94,23.96
5	0.45,3.17,24.93,10.34,12.53,7.11,13.44,24.94,24.94,24.98,22.19,24.99,22.01
6	24.91,0.30,18.39,3.08,20.24,24.96,24.85,24.97,0.28
7	15.69,0.50,9.83,24.94,24.90,24.48,20.87,24.91,0.66
8	10.03,24.00,2.83,24.99,24.99,24.96,21.19,24.98
9	22.69,4.24,24.47,24.46,24.47,24.44,24.46,24.46,24.46,18.54,9.22
10	0.81,11.59,7.66,1.11,17.46,6.47,20.47,24.47,3.99

Mission	ΔV , m/s
1	161.8,139.2,65.8,208.2,115.2,300.1,564.9,78.3,105.0,233.3,453.5,340.4,300.8
2	659.0,301.1,252.1,143.8,146.8,68.6,40.6,84.2,105.3,448.5,148.0
3	219.1,80.8,105.2,55.2,140.2,85.5,95.0,237.6,205.9,149.9,245.2,71.6,197.3,160.4,132.2,240.0,161.2,364.3,230.4,232.5
4	86.1,103.1,62.6,222.9,709.1,553.9,219.9,233.9,739.0,232.6
5	129.6,45.2,172.9,52.6,160.7,280.8,221.1,163.5,98.2,115.7,164.8,674.8,291.1
6	156.0,198.0,305.8,71.2,194.4,920.5,314.1,353.0,272.8
7	400.6,173.6,211.3,374.4,109.6,171.2,145.1,194.3,233.0
8	287.9,111.9,112.2,144.5,540.0,260.1,198.8,82.7
9	83.3,148.1,495.9,464.9,405.2,285.9,254.8,62.3,156.6,36.5,174.9
10	189.4,112.9,110.0,121.3,117.9,280.1,300.4,120.6,70.2

Tabella 2: in [B14], tabella contenente i tempi di Rendez-Vous, i tempi delle trasferte e le variazioni di velocità richieste per ogni tratto di ciascuna missione, al fine di completare la rimozione dei 123 detriti

La soluzione raggiunta dal gruppo del JPL ha fornito un riferimento valido e attendibile per effettuare un confronto con i risultati ottenuti dal codice, sviluppato implementando un modello che verrà descritto in maniera più approfondita nel corso della seguente trattazione, così come le specifiche strategie che sono state adottate.

³ Maggiori informazioni sul GTOC9 e la soluzione ottenuta dal gruppo del JPL, dei quali sono state riportate alcune informazioni generali, sono presenti all'intero degli articoli [B13] e [B14] che contengono tutte le considerazioni e scelte effettuate per lo sviluppo e risoluzione del problema proposto.

Capitolo 2: Richiamo sulla dinamica orbitale

In generale nel corso dell'intera trattazione si farà riferimento al *problema dei due corpi* ("Two Body Problem" o 2BP) per descrivere il moto di un corpo qualsiasi in orbita attorno al pianeta Terra, considerando che le masse dei detriti e dei veicoli per il de-orbiting sono trascurabili rispetto alla massa di quest'ultima. Per comodità verrà inizialmente adottato il *problema dei due corpi* senza considerare le perturbazioni esterne semplificando così la trattazione, per poi introdurre il loro effetto sulle orbite percorse dai detriti considerati.

2.1 Problema dei due corpi

Nell'universo, tra i corpi dotati di massa si instaura una forza di attrazione gravitazionale direttamente proporzionale alle masse dei corpi ed inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza. Per affrontare il complesso argomento che riguarda il moto dei corpi nello spazio, è conveniente partire da un approccio semplificato, rispetto al problema degli N corpi, per comprenderne al meglio le principali caratteristiche. In particolare la forza di attrazione tra due corpi, è descritta dalla legge di gravitazione universale formulata da Newton, della quale è in seguito riportato il modulo

$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (2.1)$$

Dove $G = 6.67 * 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$ indica la costante gravitazionale universale; m_1, m_2 indicano rispettivamente la massa del primo e del secondo corpo; r indica la distanza tra i due corpi considerati.

Si può facilmente intuire che considerando tutti gli N-corpi, se si volesse studiare il moto di uno di questi ultimi si andrebbe in contro ad un problema estremamente complesso e non risolvibile analiticamente. Per questo motivo si introducono delle ipotesi semplificative volte a ridurre la complessità

- I corpi sono considerati puntiformi e la massa di uno deve essere molto inferiore a quella dell'altro ($m \ll M$ con $M = m_1$ e $m = m_2$).
- Si considera solamente l'azione delle forze di attrazione gravitazionale presenti tra i due corpi ($|F_{12}| = |F_{21}|$ e $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$).
- Si assume che nello spazio siano presenti solamente i due corpi considerati, trascurando completamente gli effetti degli altri corpi celesti e di forze esterne.

D'ora in poi verrà considerato come corpo principale il pianeta Terra; i detriti e i veicoli come corpi secondari.

Con l'ausilio di un SRI (Figura 8) è possibile ricavare l'equazione del moto applicando la seconda legge di Newton esprimendo le accelerazioni di entrambi i corpi rispetto al SRI come:

$$m\ddot{\vec{\rho}} = -G \frac{mM}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}; \quad M\ddot{\vec{R}} = G \frac{mM}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (2.2)$$

Calcolando l'accelerazione relativa come $\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{\rho}} - \ddot{\vec{R}}$, e ricordando la prima ipotesi effettuata si ricava la caratteristica *equazione del moto del problema dei due corpi*

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (2.3)$$

Dove $\mu = GM$ indica il parametro gravitazionale del corpo principale ($\mu_E = 398600.4418 * 10^9 =$ parametro gravitazionale terrestre); r indica la distanza relativa tra i due corpi

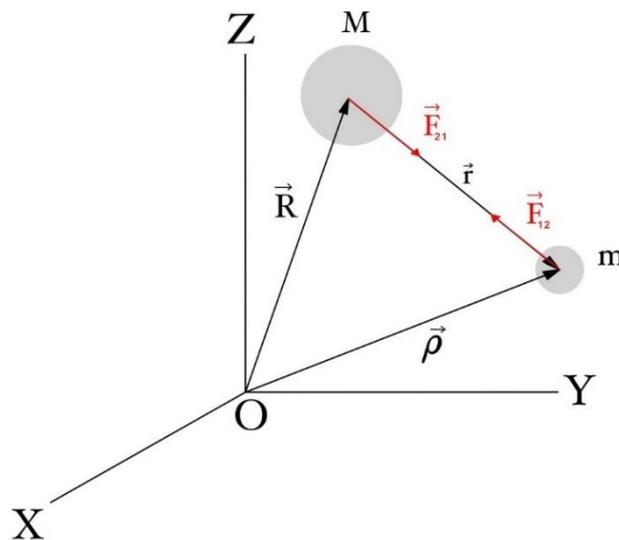


Figura 8: schema rappresentativo del problema dei due corpi ristretto.

L'equazione ottenuta permette di descrivere il moto del corpo secondario (massa inferiore) rispetto al corpo principale, e tramite la sua integrazione è possibile determinare la traiettoria percorsa dal corpo avente massa inferiore. Manipolando l'equazione del moto ed effettuando le dovute considerazioni (Ref. [B5]) è possibile risolvere analiticamente il problema dei due corpi ristretto, riconducendosi ad un'equazione ellittica che soddisfa le leggi di Keplero⁴.

Alcuni parametri fondamentali, necessari da ricordare per valutare le caratteristiche delle orbite sono

⁴ Le tre leggi di Keplero riguardano il moto degli astri in orbita attorno ad un corpo principale, descrivendone alcune delle caratteristiche fondamentali delle orbite percorse. Le tre leggi formulano rispettivamente

- Prima legge di Keplero: i pianeti descrivono orbite ellittiche attorno al Sole, che occupa uno dei due fuochi dell'ellisse.
- Seconda legge di Keplero: il raggio vettore congiungente il Sole al pianeta, spazza aree uguali in tempi uguali.
- Terza legge di Keplero: il quadrato del periodo di rivoluzione di un pianeta è proporzionale al cubo del semiasse maggiore dell'orbita descritta.

In Ref. [B5]

- *Energia Gravitazionale specifica* ($E_g = -\frac{\mu}{r}$): indica l'energia potenziale del corpo secondario all'interno del campo gravitazionale del corpo principale, in relazione alla loro distanza relativa. Questa espressione verrà in seguito modificata per tenere conto delle perturbazioni causate dalla non perfetta sfericità della Terra.
- *Energia meccanica specifica* ($E_m = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r}$): pari alla somma di energia gravitazionale specifica ed energia cinetica per unità di massa. È un parametro di fondamentale importanza e permette di classificare, in base al valore che assume, la tipologia di orbita.
- *Momento angolare specifico* ($\vec{h} = \vec{r} \wedge \vec{V}$): è un parametro caratteristico dell'orbita considerata ed è legato direttamente all'equazione della traiettoria del problema dei due corpi ristretto. \vec{r} indica il raggio vettore congiungente il corpo secondario e il corpo principale posizionato in uno dei due fuochi dell'orbita; \vec{V} indica il vettore velocità del corpo secondario in orbita attorno a quello principale.

In generale è possibile dimostrare (Ref. [B5]) che per le orbite Kepleriane, che rispettano dunque le 3 leggi di Keplero, vale la conservazione dell'energia meccanica specifica e del momento angolare specifico. L'equazione della traiettoria del problema dei due corpi presenta la seguente forma

$$r = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1 + \frac{B}{\mu} \cos(\nu)} \quad (2.4)$$

Dove h = momento angolare specifico dell'orbita; B = costante di integrazione legata alla posizione del periastro; ν = anomalia vera = posizione angolare sull'orbita del corpo secondario, rispetto al periastro.

Le diverse tipologie di traiettorie che possono essere descritte a partire dall'integrazione dell'equazione del moto, appartengono alla famiglia delle *coniche*, ovvero quei luoghi geometrici per i quali il rapporto tra la distanza di un punto dal fuoco e la distanza tra la retta direttrice e lo stesso punto risulta essere costante ($\frac{r}{d} = \text{costante}$) e prende il nome di *eccentricità* (e).

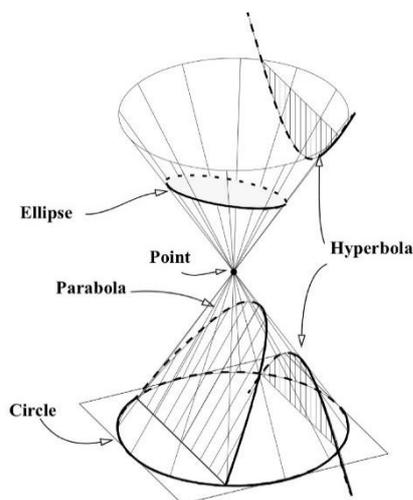


Figura 9: in [B5], rappresentazione grafica dell'origine delle diverse curve coniche.

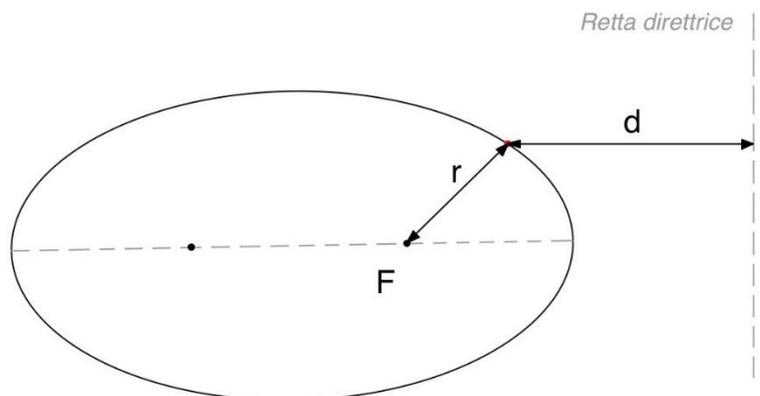


Figura 10: rappresentazione di una curva conica rispetto alla sua retta direttrice.

Esistono quattro principali tipologie di orbite che possono essere descritte dall'equazione della traiettoria, e nello specifico possono essere Circolari, Ellittiche, Paraboliche ed Iperboliche.

Orbite Circolari	$E_m < 0$	$e = 0$
Orbite Ellittiche	$E_m < 0$	$0 < e < 1$
Orbite Paraboliche	$E_m = 0$	$e = 1$
Orbite Iperboliche	$E_m > 0$	$e > 1$

Tabella 3: tabella contenente le caratteristiche delle varie orbite in termini di energia meccanica specifica ed eccentricità.

Per analizzare il caso più generale si prosegue con il descrivere alcune caratteristiche delle orbite ellittiche, considerando che la famiglia di detriti che caratterizza l'intera trattazione popola esattamente questa tipologia di orbite per quanto, come potrà essere osservato in seguito, la loro eccentricità sia ridotta.

L'ellisse è una particolare tipologia di curva conica caratterizzata dalla presenza di un asse maggiore, un asse minore e due fuochi interni alla curva chiusa, per la quale la somma delle distanze di un suo punto generico dai due fuochi risulta essere sempre costante. in un piano cartesiano, l'ellisse centrata nell'origine può essere descritta dalla seguente formula:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(2.5)

Dove a e b indicano rispettivamente la dimensione del semiasse maggiore e minore, mentre x e y indicano le generiche coordinate del piano cartesiano.

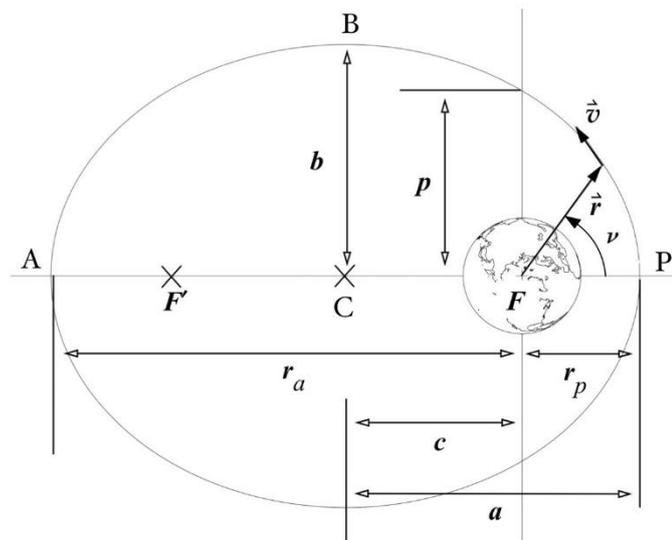


Figura 11: in [B7], orbita ellittica con il pianeta terra posizionato in uno dei due fuochi.

I principali parametri che caratterizzano una generica orbita ellittica Kepleriana sono evidenziati in Figura 11, infatti questi ultimi permettono di definire in maniera univoca l'orbita nel suo piano.

- ***a*: Semiasse maggiore.**
- ***b*: Semiasse minore.**
- ***c*: Semi distanza focale**, indica la distanza di ciascun fuoco dal centro dell'ellisse.
- ***e*: Eccentricità**, è una caratteristica legata alla distanza tra i fuochi ($e = \frac{c}{a}$); per un'ellisse può variare tra 0 e 1, che rispettivamente indicano le due condizioni limite di curva circolare e curva parabolica.
- **r_p : Raggio del periastro**, indica la distanza tra il fuoco occupato dal corpo principale (nel caso in analisi dalla Terra) e il punto dell'ellisse più vicino al fuoco stesso. Può essere espresso in funzione di a ed e infatti vale $r_p = a(1 - e)$.
- **r_a : Raggio dell'apoaastro**, grandezza che indica, a differenza del raggio del periastro, la distanza tra il fuoco occupato dal corpo principale e il punto dell'ellisse più lontano da quest'ultimo. Può essere espresso in funzione di a ed e infatti vale $r_a = a(1 + e)$.
- ***p*: Semilatus rectum**, indica la distanza tra uno dei due fuochi e un punto dell'ellisse, tale per cui il segmento congiungente risulta essere perpendicolare al semiasse maggiore. Questa grandezza può essere espressa in termini di a ed e tramite $p = a(1 - e^2)$.
- ***v*: Anomalia vera**, rientra nel gruppo dei parametri orbitali (Paragrafo 1.3.2) ed indica la posizione angolare del corpo in orbita rispetto alla direzione del Periastro.
- **\vec{v} : Velocità orbitale**, indica la velocità assunta dal corpo lungo l'orbita e risulta essere sempre tangente alla traiettoria.

Utilizzando questi parametri è possibile riformulare l'equazione della traiettoria e osservare interessanti analogie, nello specifico quella che lega p al momento angolare specifico dell'orbita tramite la relazione $p = \frac{h^2}{\mu}$ (Ref. [B5]).

La distanza tra il centro del corpo principale e il corpo secondario (modulo del raggio vettore), può essere ora calcolata utilizzando la seguente espressione

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(v)} = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1 + e \cos(v)} \quad (2.6)$$

Al variare dell'anomalia vera tra $[0, 2\pi]$, è possibile determinare l'intera traiettoria descritta dal corpo in orbita attorno al corpo principale.

Vengono ora riportati degli ulteriori parametri di grande importanza quali

- **φ : Flight path angle**, indica l'angolo compreso tra la direzione ortogonale al raggio vettore (orizzonte locale) e il vettore velocità. φ varia lungo l'orbita nel caso di traiettoria ellittica, e si annulla nei due apsi (periastro e apoastro). Risulta essere particolarmente utile per descrivere l'assetto del corpo secondario.
- **n : Velocità angolare media**, può essere ricavata a partire dal semiasse maggiore infatti $n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$, ed è legata al periodo orbitale da $T = \frac{2\pi}{n}$ (terza legge di Keplero). Indica una velocità angolare media poiché lungo un'orbita ellittica, il corpo si muove con velocità non uniforme.
- **E : Anomalia eccentrica**, è un parametro legato all'*anomalia vera* dalla relazione $\cos(E) = \frac{e + \cos(v)}{1 + e \cos(v)}$. Per la determinazione delle posizioni raggiunte del corpo sull'orbita al variare del tempo, è possibile adottare un approccio geometrico che fa uso di una circonferenza ausiliaria, con centro comune a quello dell'ellisse e raggio pari al semiasse maggiore di quest'ultima. L'anomalia eccentrica indica l'angolo individuato dalla linea degli apsi con il raggio congiungente il centro dell'ellisse e la proiezione della posizione del corpo secondario sulla circonferenza ausiliaria.
- **M : Anomalia media**, è una grandezza che indica la distanza angolare percorsa da un corpo fittizio in moto a velocità costante lungo un'orbita circolare con raggio pari al semiasse dell'ellisse, rispetto al periastro di quest'ultima. Questo parametro è di fondamentale importanza per la determinazione della posizione del corpo in orbita in funzione del tempo (Problema di Keplero [B5]), infatti l'anomalia media può essere espressa tramite la relazione $M = E - e \sin(E) = M_0 + n(t - t_0)$ dove t indica l'istante di tempo considerato, t_0 l'istante di tempo per il quale il corpo era in corrispondenza del periastro e M_0 il valore dell'anomalia media per $t = t_0$.

2.2 Parametri orbitali e sistemi di riferimento

Fino a questo momento sono state introdotte alcune caratteristiche delle orbite ellittiche nel piano, si passa ora ad estendere il discorso al caso tridimensionale e per farlo è necessario definire dei sistemi di riferimento adeguati. Nel corso della trattazione ci si focalizzerà principalmente sui detriti in orbita attorno alla Terra e per questo motivo i sistemi di riferimento adottati saranno principalmente *sistemi di riferimento Terrestri*. Uno dei principali sistemi di riferimento Terrestri che risulta necessario introdurre è il **Sistema di riferimento Geocentrico Equatoriale IJK**, caratterizzato da

- Un'origine nel centro della Terra
- Un piano fondamentale coincidente con il piano equatoriale (Figura 12)
- Un verso positivo del versore (\hat{K}) normale al piano equatoriale, uscente dal polo nord geografico

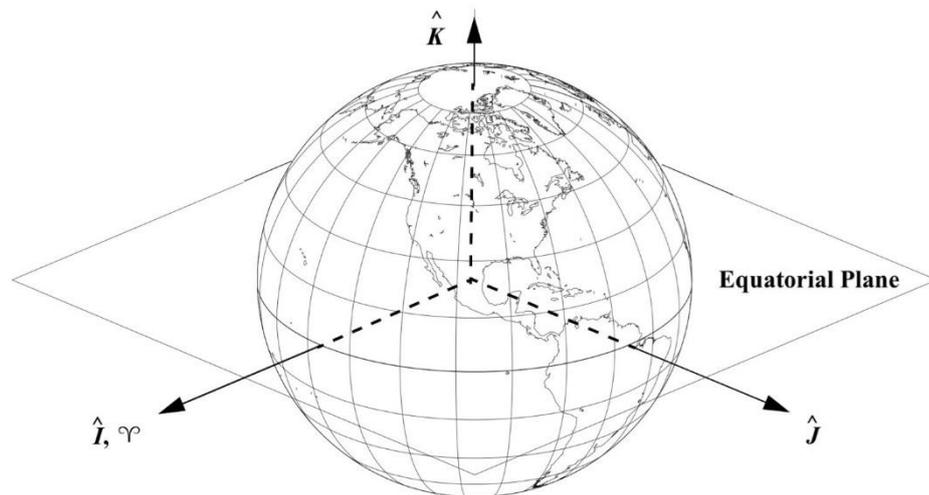


Figura 12: in [B5], Sistema di riferimento Geocentrico Equatoriale.

I versori di questo sistema di riferimento sono:

- Il versore \hat{I} è individuato dall'intersezione del piano equatoriale con il piano dell'*Eclittica*⁵ durante l'equinozio primaverile, e punta verso la costellazione dell'Ariete;
- il versore \hat{K} è il versore normale al piano equatoriale, punta verso l'emisfero contenente la stella polare e la sua direzione coincide con l'asse di rotazione terrestre;
- il versore \hat{J} completa la terna destrorsa e giace nel piano equatoriale.

Il sistema *Geocentrico Equatoriale* può essere definito *pseudo-inerziale* poiché, a causa della precessione della linea degli equinozi, la direzione del versore \hat{I} varia. A seconda delle necessità, possono essere utilizzati altri sistemi di riferimento terrestri come il **Sistema di riferimento Topocentrico SEZ**, oppure sistemi di riferimento orbitali come il **Sistema di riferimento Perifocale PQW**.

Dopo aver descritto il sistema di riferimento maggiormente utilizzato per l'intera trattazione, ci si focalizza sulla determinazione delle orbite nello spazio 3D. In generale, per descrivere completamente un'orbita, si utilizzano delle grandezze che comunemente prendono il nome di *parametri orbitali*, tre dei quali sono stati precedentemente introdotti (a , e e ν), mentre in Figura 13 sono raffigurati i restanti, ovvero Ω , ω e i .

⁵ L'*Eclittica* indica il piano sul quale giace mediamente l'orbita che la Terra compie attorno al Sole, ed è il piano fondamentale di un sistema di riferimento estremamente importante ovvero il sistema *Eliocentrico-Eclittica*. Questo è il sistema di riferimento centrato nel sole utilizzato per effettuare diverse tipologie di studi.

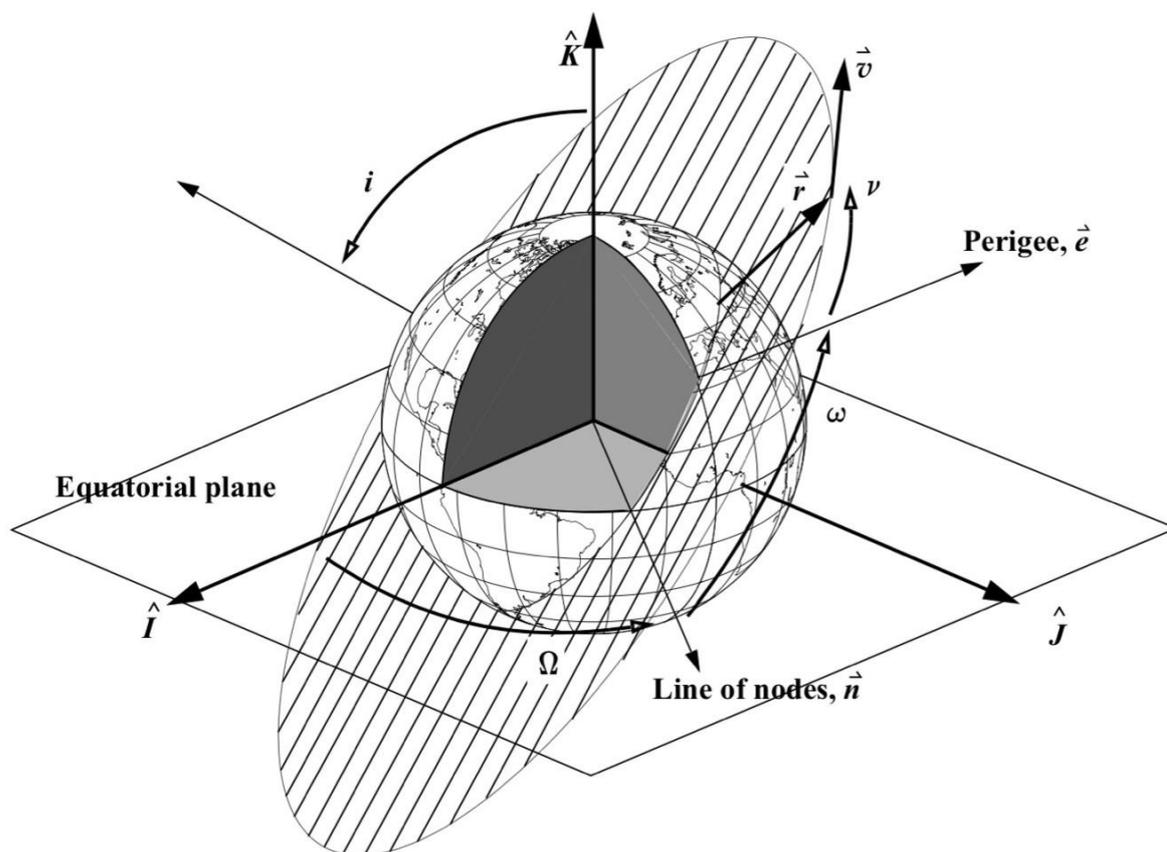


Figura 13: in [B5], rappresentazione tridimensionale di una generica orbita ellittica attorno al pianeta Terra.

Generalmente è necessario utilizzare sei parametri orbitali oppure i vettori posizione e velocità (\vec{r} e \vec{v}) noti per un certo istante di tempo, per poter definire lo stato del corpo in orbita, è possibile infatti calcolare i parametri orbitali a partire da $\vec{r}(t_{noto})$ e $\vec{v}(t_{noto})$ e viceversa.

Esistono diverse tipologie di parametri orbitali che possono rivelarsi utili in contesti diversi, infatti in alcuni casi risulta conveniente adottarne di differenti poiché si riesce a semplificare la descrizione dell'orbita considerata. In alcuni casi speciali, invece, può essere necessario combinare più parametri per riuscire a descrivere l'orbita, come nei casi di

- Orbita ellittica equatoriale: l'assenza del nodo ascendente comporta l'utilizzo di un parametro che prende il nome di *longitudine del periastro* $\tilde{\omega} = \Omega + \omega$.
- Orbita circolare con $i \neq 0^\circ$: l'assenza del periastro porta all'utilizzo di un parametro noto come *argomento della latitudine* $u = \omega + \nu$.
- Orbita circolare equatoriale: l'assenza contemporanea del nodo ascendente e del periastro comporta l'utilizzo della *longitudine vera* $\lambda = \Omega + \omega + \nu$.

Sono in seguito elencati i **parametri orbitali classici** o **Kepleriani**

- a : *semiasse maggiore*, fornisce informazioni sulle dimensioni dell'orbita e sulla sua energia meccanica
- e : *eccentricità*, fornisce informazioni sulla forma dell'orbita
- v : *anomalia vera*, fornisce informazioni sulla posizione occupata dal corpo in orbita
- Ω : *longitudine del nodo ascendente/RAAN*, è l'angolo misurato nel piano equatoriale compreso tra il versore \hat{I} , appartenente al sistema di riferimento Geocentrico equatoriale, e la direzione congiungente il fuoco occupato dal pianeta con il *nodo ascendente*. Quest'ultimo indica il punto di intersezione tra piano equatoriale e piano orbitale, attraversato da Sud verso Nord dal corpo in orbita.
- ω : *argomento del periastro*, è l'angolo nel piano orbitale che misura la posizione angolare del perigeo rispetto al nodo ascendente.
- i : *inclinazione*, indica l'angolo formato dal versore normale al piano orbitale, coincidente con la direzione del momento angolare dell'orbita, con il versore \hat{K} .

2.3 Perturbazioni orbitali

Effettuato il richiamo generale sulle caratteristiche delle orbite Kepleriane si introduce ora l'effetto delle perturbazioni, generate da fenomeni esterni, che permettono il passaggio da una trattazione ideale (orbite Kepleriane) ad una reale (orbite Kepleriane perturbate). Le perturbazioni delle orbite sono principalmente dovute alla presenza di corpi e di forze esterne, agenti sul corpo in orbita, non considerati *nel problema dei due corpi* a causa delle ipotesi semplificative.

In questo paragrafo verrà fornita una panoramica generale riguardante le principali perturbazioni che influenzano le orbite, soffermandosi maggiormente sulla descrizione della perturbazione dovuta alla non sfericità della Terra, poiché quest'ultima è risultata essere estremamente importante per l'intero lavoro svolto.

Le perturbazioni prese in considerazione sono legate alla

- Non sfericità del corpo centrale, in particolare della Terra
- Resistenza atmosferica
- Presenza del terzo corpo
- Pressione di radiazione solare

In realtà esistono molti altri meccanismi in grado di perturbare le orbite come l'effetto del campo magnetico o ancora l'effetto delle maree terrestri, ma volendo rendere più snella la trattazione ci si è limitati a introdurre le cause delle perturbazioni precedentemente elencate.

Una prima distinzione utile da effettuare riguarda la natura delle forze che generano queste perturbazioni, le quali possono essere divise in due principali categorie

- *Forze conservative*, per le quali vale la conservazione dell'energia meccanica totale ($E_m = costante$). Appartengono a questa categoria le forze dovute agli effetti gravitazionali e in particolare alla non sfericità del corpo centrale (Terra) e all'azione gravitazionale del terzo corpo (come il Sole o la Luna).
- *Forze non conservative*, per le quali non vale la conservazione dell'energia meccanica totale ($E_m \neq costante$). Appartengono a questa categoria le forze dovute ad effetti non gravitazionali come la pressione di radiazione solare e la resistenza atmosferica.

Volendo esprimere una relazione contenente l'effetto delle perturbazioni, si modifica l'equazione del moto del *problema dei due corpi* introducendo un termine legato alle forze perturbative, ottenendo

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} + \vec{a}_p \quad (2.7)$$

Dove \vec{a}_p indica l'accelerazione impressa dalle forze perturbative.

Le perturbazioni influenzano direttamente i parametri orbitali, causandone la variazione nel tempo e provocando uno scostamento dalla traiettoria ideale (Kepleriana) che rende più complessa la propagazione dell'orbita e la conseguente previsione della posizione occupata dal corpo lungo quest'ultima.

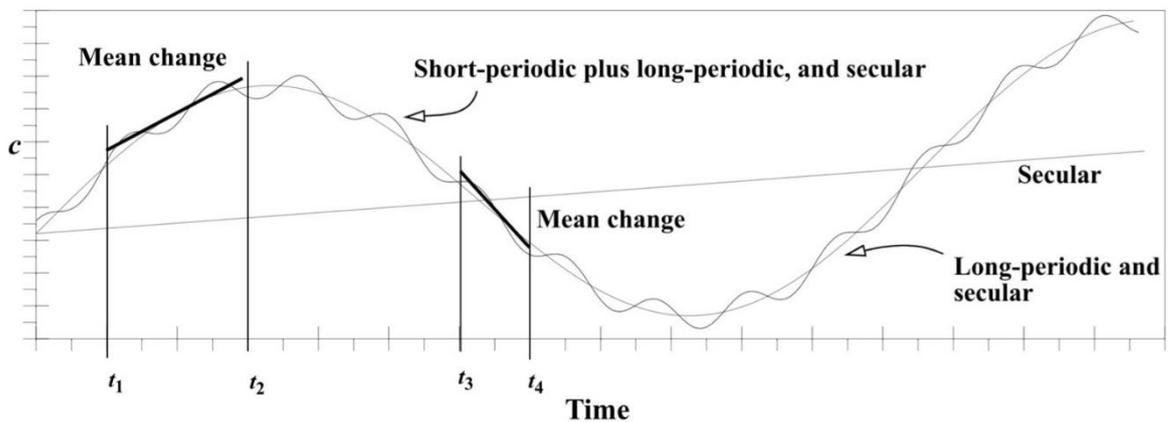


Figura 14: in [B5], evoluzione nel tempo di un qualsiasi parametro orbitale c causata dalle forze perturbative agenti sul corpo in orbita.

Come si può osservare in *Figura 14*, l'impatto delle perturbazioni sui parametri orbitali risulta evidente; nello specifico si possono distinguere due tipologie di effetti:

- **Secolari**: comportano una variazione dei parametri orbitali lineare nel tempo o come sua potenza, e in generale il loro scostamento dai valori ideali tende ad aumentare indefinitamente.

- **Periodici:** queste tipologie di effetti si ripetono nel tempo e a seconda della loro frequenza possono essere distinti in effetti **Periodici-Brevi** e **Periodici-Lunghi**. I primi sono caratterizzati da intervalli di ripetizione comparabili con la durata del periodo dell'orbita percorsa dal corpo; gli effetti **Periodici-Lunghi** presentano dei cicli di ripetizione di 1-2 ordini di grandezza in più rispetto al periodo orbitale del corpo considerato.

È necessario sottolineare che gli effetti precedentemente descritti non influenzano allo stesso modo ogni parametro orbitale, infatti questi ultimi possono essere soggetti ad entrambi gli effetti Secolari e Periodici (Ω , ω e M) oppure solamente a quelli Periodici (a , e e i).

Si evince quindi che l'equazione del moto del *problema dei due corpi* non può essere utilizzata per descrivere il moto di un corpo in orbita soggetto a fenomeni perturbativi. Per risolvere questa problematica, nel corso degli anni sono stati sviluppati dei metodi quali lo *Special Perturbation (SP)* e il *General Perturbation (GP)* (Capitolo 1.1.2) basati su tecniche analitiche, numeriche o ibride. I metodi appartenenti alla tipologia *SP* prevedono l'integrazione dell'equazione del moto modificata tramite l'utilizzo di metodi numerici appositi; i metodi *GP* utilizzano una procedura analitica per determinare gli effetti delle perturbazioni, valutando la variazione nel tempo dei parametri orbitali.

Verranno ora brevemente descritte le principali perturbazioni di origine *non gravitazionale* e *gravitazionale*.

2.3.1 Pressione solare

Questa tipologia di perturbazione, di natura *non gravitazionale* e *non conservativa*, è direttamente legata alle radiazioni emesse dal Sole che si propagano all'interno dell'intero sistema solare generando imprimendo una forza sui corpi.

Generalmente l'effetto di questa perturbazione risulta essere trascurabile per le orbite LEO, influenzate maggiormente dalla resistenza atmosferica e dagli effetti gravitazionali terrestri, diventando sempre più impattante all'aumentare della quota.

L'accelerazione impressa dalle radiazioni può essere espressa tramite la relazione

$$a_{srp} = \frac{C_r P_{srp} S}{m} \quad (2.8)$$

Dove m indica la massa del corpo in orbita; S indica la superficie del corpo esposta alle radiazioni solari; P_{srp} (*srp: solar radiation pressure*) indica la pressione esercitata dalle radiazioni sul corpo; C_r indica il coefficiente di riflessione della superficie del corpo.

Le maggiori difficoltà nella determinazione dell'effetto della pressione di radiazione solare sono principalmente dovute a:

- *Modellizzazione dei cicli solari*: lo studio dell'evoluzione dell'attività solare è molto complesso ma estremamente importante poiché in relazione alla fase attraversata dal Sole, l'effetto della pressione solare può essere più o meno accentuato.
- *Determinazione della superficie esposta*: la conoscenza dell'evoluzione nel tempo della superficie esposta alle radiazioni solari, risulta essere fondamentale per poter determinare l'effetto perturbativo. In generale è quindi necessario determinare l'esatta posizione del Sole e la relativa posizione del corpo considerato; l'assetto del corpo in orbita, per poter determinare la distribuzione di pressione; e l'effettivo coefficiente di riflessione della superficie del corpo, fondamentale nel meccanismo di scambio di quantità di moto.

2.3.2 Resistenza atmosferica

La *resistenza atmosferica* o *Drag atmosferico* è uno dei fenomeni che perturba maggiormente le orbite dei satelliti e in generale tutti i corpi in orbita bassa terrestre, infatti all'aumentare della quota questo effetto tende a sciamare diventando trascurabile rispetto alle perturbazioni dovute alla pressione solare e all'azione gravitazionale del terzo corpo. Le principali criticità che caratterizzano lo studio di questo fenomeno sono legate a:

- *Determinazione delle caratteristiche chimico fisiche dell'atmosfera*: lo studio delle caratteristiche dell'alta atmosfera terrestre risulta essere un tema tanto importante quanto complesso a causa dell'elevato numero di variabili in gioco, capaci di influire su di essa. Uno dei parametri che risulta essere estremamente complesso da determinare è la densità atmosferica ρ , quest'ultima infatti dipende da diversi fattori quali attività solare, fenomeni geomagnetici, quota, la composizione molecolare, che rendono più complessi i modelli matematici adottati, i quali devono essere in grado di considerare anche l'evoluzione nel tempo dei vari parametri.
- *Conoscenza della posizione, geometria e assetto del corpo in orbita*: per modellare l'effetto che il drag atmosferico esercita sul moto di un corpo in orbita, è fondamentale essere a conoscenza delle caratteristiche geometriche del corpo e dell'orbita stessa. Un altro parametro che, come la densità atmosferica, risulta difficile da stimare è la *cross-sectional area* (A), la quale indica l'area identificata dalla proiezione della superficie del satellite sul piano normale al vettore velocità del corpo. Si comprende facilmente che per poter valutare questo parametro con precisione, bisogna conoscere l'orientamento del corpo nello spazio.

La resistenza atmosferica, essendo un *fenomeno non conservativo* ($E_m \neq \text{costante}$), porta ad una dissipazione di energia con la progressiva diminuzione dell'*energia meccanica* e il decadimento dell'orbita stessa. L'attrito presente tra il corpo e le particelle atmosferiche influenza principalmente due parametri orbitali, ovvero il semiasse maggiore e l'eccentricità, modificando progressivamente la

forma e la dimensione dell'orbita stessa. Questa tipologia di perturbazione, come è stato introdotto nei paragrafi precedenti, è frequentemente utilizzata per favorire il *disposal* dei satelliti in LEO, portandoli ad una frammentazione nell'atmosfera terrestre una volta giunti al termine della loro vita operativa.

La classica relazione che esprime la resistenza aerodinamica può essere utilizzata per valutare l'azione perturbativa prodotta sul corpo, calcolando la decelerazione sperimentata da quest'ultimo come

$$\vec{a}_D = -\frac{1}{2} \frac{C_D A}{m} \rho v_{rel}^2 \hat{u}_{v_{rel}} \quad (2.9)$$

Dove C_D indica il *coefficiente di resistenza aerodinamica* e, a seconda del modello utilizzato, assume valori differenti ($C_D = 2.2$ per le lamine piane e $C_D = 2 \div 2.1$ per i corpi sferici); v_{rel} indica la velocità relativa tra il corpo e l'atmosfera; $\hat{u}_{v_{rel}}$ indica il versore nella direzione della velocità relativa.

Un utile parametro che è in grado di dare un'idea della capacità del corpo di sopportare la resistenza aerodinamica è il *Coefficiente Balistico (BC)* pari a $BC = \frac{m}{C_D A}$. Un coefficiente balistico elevato, tipico di satelliti con grande massa, con piccole aree cross-sezionali e/o basso C_D , corrisponde ad una minore decelerazione e conseguentemente un minore effetto del *Drag* sul corpo considerato, per un BC basso vale il viceversa.

2.3.3 Presenza del "terzo" corpo

Discostandosi dalle ipotesi del *problema dei due corpi*, una tipologia di perturbazione appartenente alla categoria di perturbazioni gravitazionali *conservative*, è associata alla presenza di un terzo corpo (comunemente Sole o Luna per problemi riguardanti le orbite terrestri) e al suo effetto sul moto del corpo considerato. La perturbazione generata dalla terza massa risulta essere sempre più impattante all'aumentare della distanza del secondo corpo da quello principale, poiché gli effetti gravitazionali del corpo centrale e del drag aerodinamico tendono a diminuire.

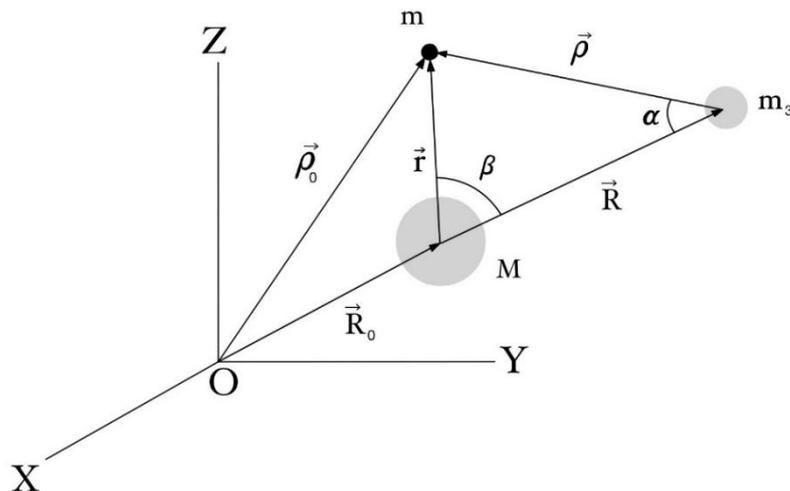


Figura 15: rappresentazione schematica della presenza del terzo corpo indicato dalla massa m_3

Utilizzando come riferimento la schematizzazione In *Figura 15*, è possibile scrivere il seguente sistema di equazioni rispetto al *SR1* applicando la seconda legge di Newton

$$\begin{cases} m\ddot{\vec{\rho}}_0 = -G \frac{Mm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} - G \frac{m_3 m}{\rho^2} \frac{\vec{\rho}}{\rho} \\ m\ddot{\vec{R}}_0 = +G \frac{Mm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} - G \frac{m_3 M}{R^2} \frac{\vec{R}}{R} \end{cases} \quad (2.10)$$

Alle equazioni possono essere accoppiate le seguenti relazioni:

$$\vec{r} = \vec{\rho} - \vec{R} = \vec{\rho}_0 - \vec{R}_0 \quad \text{e} \quad R = r \cos(\beta) + \rho \cos(\alpha) \quad (2.11)$$

Manipolando il sistema di equazioni e considerando trascurabile la massa m , come fatto per il problema dei due corpi, è possibile ottenere l'equazione del moto del corpo secondario in presenza del terzo corpo

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{\rho}}_0 - \ddot{\vec{R}}_0 = -\frac{\mu_E}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} + \mu_3 \left(\frac{\vec{R}}{R^3} - \frac{\vec{\rho}}{\rho^3} \right) \quad (2.12)$$

Da quest'ultima si può estrarre l'espressione dell'*accelerazione perturbatrice*: $\vec{a}_p = \mu_3 \left(\frac{\vec{R}}{R^3} - \frac{\vec{\rho}}{\rho^3} \right)$

Dopo aver determinato l'espressione di \vec{a}_p , effettuando diversi passaggi e considerazioni (Ref [17]), quest'ultima può essere riscritta in una forma che permette una valutazione più intuitiva dell'effetto gravitazionale, ovvero:

$$a_p = \mu_3 \frac{r}{R^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \beta} \quad (2.13)$$

In base all'angolo β (*Figura 15*) tra il secondo e il terzo corpo, l'azione perturbativa cambia intensità e in particolare possono essere identificati due casi:

- *Congiunzione/Opposizione*: si manifesta rispettivamente per $\beta = 0, \pi$. In questa posizione la perturbazione risulta essere massima $a_p \cong 2\mu_3 \frac{r}{R^3}$.
- *Quadratura*: si manifesta per $\beta = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$. In questa posizione la perturbazione risulta essere minima $a_p \cong \mu_3 \frac{r}{R^3}$.

2.3.4 Non sfericità della Terra ed effetto del J_2

In questo paragrafo verrà descritto il principale fenomeno perturbativo considerato all'interno dell'intera trattazione, ovvero l'effetto delle asimmetrie gravitazionali della Terra e in particolare la perturbazione dovuta alla non sfericità del pianeta. Analogamente alla presenza del terzo corpo, questo tipo di perturbazione provoca effetti *gravitazionali conservativi*, non comportando la variazione dell'energia meccanica totale dell'orbita.

Per analizzare la natura di questa perturbazione è nuovamente necessario abbandonare le ipotesi effettuate per il *problema dei due corpi*, e nello specifico quelle riguardanti la perfetta geometria sferica e distribuzione di massa uniforme del corpo principale (Terra).

Volendo descrivere con maggiore precisione la geometria del pianeta Terra, quest'ultima può essere approssimata ad un *ellissoide*, con semiassi (a, b, c) , e in particolare ad uno *sferoide (ellissoide di rivoluzione)* caratterizzato da due semiassi uguali. Lo *sferoide* considerato appartiene alla tipologia *oblate*⁶ (a, a, b) per il quale il semiasse minore b è pari al raggio polare e coincide con l'asse di rotazione terrestre, mentre il semiasse maggiore è pari al raggio equatoriale. In generale l'*ellissoide di rivoluzione* fornisce una buona approssimazione della geometria terrestre e in particolare dello "schiacciamento" del pianeta ai poli, ma è necessario considerare l'ulteriore eccentricità che caratterizza l'equatore terrestre.

I principali parametri caratteristici dello sferoide sono:

- $R_E = 6378.1363 \text{ km}$, raggio medio equatoriale terrestre
- $b_E = 6356.7516005 \text{ km}$, semiasse minore o asse polare
- $f = \frac{R_E - b_E}{R_E} = \frac{1}{298.257}$, schiacciamento Terrestre
- $e_E = 0.081819221456$, eccentricità equatoriale

Considerando ora la *distribuzione di massa non uniforme*, questa comporta un'ulteriore deviazione dalla geometria sferoidale, quando si vuole determinare la *superficie della terra in corrispondenza del livello medio del mare*.

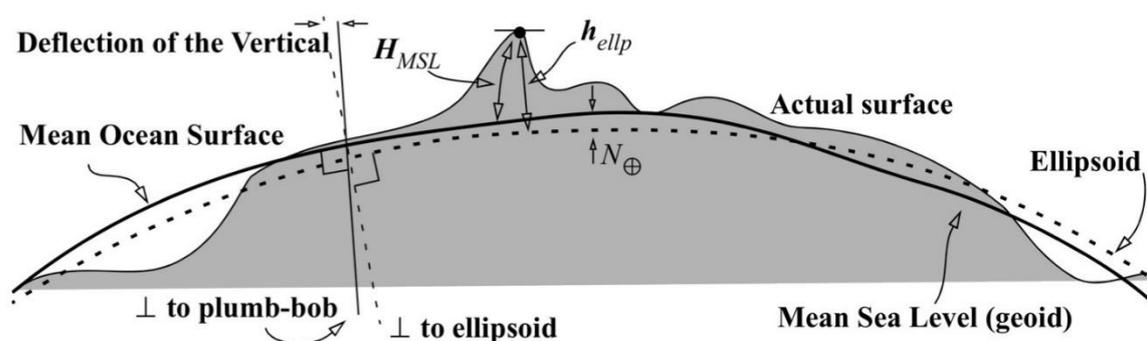


Figura 16: in [B5], superfici caratteristiche terrestri.

⁶ Il concetto di corpo *oblate* (oblato) è legato alla deviazione dalla geometria sferica, e in particolare un corpo *oblato* è caratterizzato da un raggio equatoriale maggiore del raggio ai poli.

In particolare si adotta la superficie equipotenziale al livello medio del mare (*MSL, Mean Sea Level*) denominata **geoide**, caratterizzata da un potenziale gravitazionale uguale in ogni suo punto, una direzione del campo gravitazionale sempre perpendicolare alla superficie stessa e inoltre questa superficie funge da riferimento per mappare le caratteristiche topografiche della Terra (*Figura 16*).

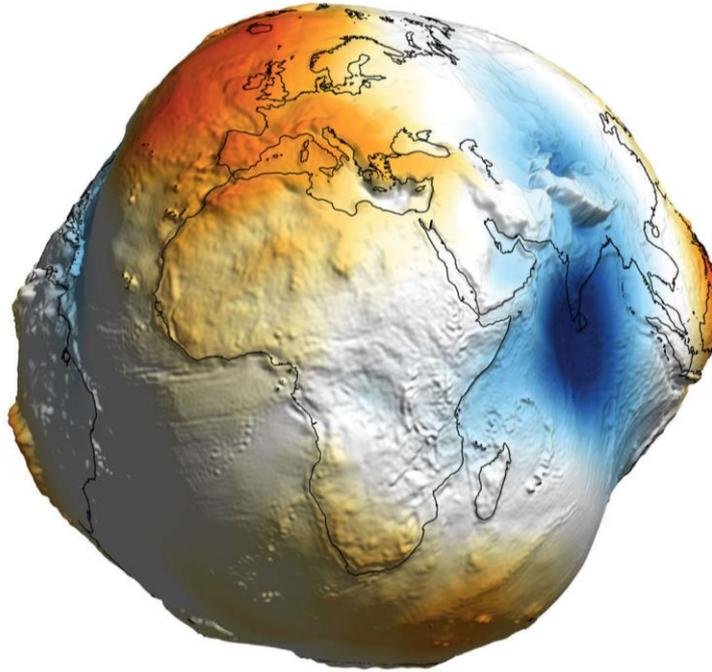


Figura 17: in [S9], rappresentazione tridimensionale del geoide

Le deviazioni dalla geometria sferica e distribuzione di massa ideale, generano la necessità di sviluppare un modello gravitazionale più accurato per considerare gli effetti delle perturbazioni generate. Per descrivere le forze perturbative si fa uso della così detta *aspherical-potential function* U ovvero una funzione in grado di descrivere la forza di attrazione gravitazionale ($\vec{F}_g = m\nabla U$), in termini di energia potenziale, generata da un corpo (Terra) caratterizzato da una geometria non sferica (schiacciamento ai poli, eccentricità dell'equatore) e da una distribuzione di massa non uniforme.

La *funzione potenziale* U , caratteristica del pianeta Terra, può assumere la seguente forma:

$$U(r, \lambda_{sat}, \phi_{gc_{sat}}) = \frac{\mu_E}{r} \left[1 - \sum_{l=2}^{\infty} J_l \left(\frac{R_E}{r} \right)^l P_l \sin(\phi_{gc_{sat}}) + \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=1}^l \left(\frac{R_E}{r} \right)^l P_{l,m} \sin(\phi_{gc_{sat}}) \{C_{l,m} \cos(m\lambda_{sat}) + S_{l,m} \sin(m\lambda_{sat})\} \right] \quad (2.14)$$

Dove:

- $\phi_{gc_{sat}}$: *latitudine del corpo secondario (satellite o detrito)* rispetto al sistema geocentrico. Indica l'angolo compreso tra il piano equatoriale e la direzione congiungente i centri di massa dei due corpi.
- λ_{sat} : *longitudine del corpo secondario* rispetto al sistema geocentrico. Indica l'angolo compreso tra la direzione congiungente il centro della Terra ed il meridiano di Greenwich, e la direzione congiungente il centro della Terra con la proiezione della posizione del corpo sul piano equatoriale.
- l, m : rispettivamente *grado dell'armonica* e *ordine dell'armonica*. Parametri associati all'espansione polinomiale (Ref. [B5])
- $P_{l,m}$: *Funzioni di Legendre associate*. Definito come:

$$P_{l,m}(\gamma) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d}{d\gamma} (1 - \gamma^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{(l+m)}}{d\gamma^{(l+m)}} (\gamma^2 - 1)^l \quad (2.15)$$

- $C_{l,m}, S_{l,m}$: coefficienti che rappresentano la modellazione matematica della forma della Terra (Ref. [B5]).
- J_l : indica la diversa notazione utilizzata per il coefficiente $C_{l,m}$, legata alle *armoniche zonali*. In particolare la relazione che lega questi coefficienti è $J_l = -C_{l,0}$.

La funzione potenziale U può essere separata in due contributi principali quali l'energia gravitazionale del modello Kepleriano ($U_{id} = \frac{\mu_E}{r}$) e il termine perturbativo definito come

$$U_p(r, \lambda_{sat}, \phi_{gc_{sat}}) = \frac{\mu_E}{r} \left[\sum_{l=2}^{\infty} J_l \left(\frac{R_E}{r}\right)^l P_l \sin(\phi_{gc_{sat}}) - \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=1}^l \left(\frac{R_E}{r}\right)^l P_{l,m} \sin(\phi_{gc_{sat}}) \{C_{l,m} \cos(m\lambda_{sat}) + S_{l,m} \sin(m\lambda_{sat})\} \right] \quad (2.16)$$

Il quale tiene conto degli effetti reali (non perfetta sfericità della Terra e distribuzione di massa non uniforme) che influenzano l'attrazione gravitazionale esercitata nei confronti del secondo corpo.

La complessa espressione del termine perturbativo nasconde al suo interno diversi contributi che permettono di valutare le variazioni del campo gravitazionale terrestre al variare della latitudine e longitudine. In particolare le diverse combinazioni di valori assunti da m e l identificano una serie di funzioni utili per valutare il diverso impatto della distribuzione di massa non uniforme sulla superficie e all'interno del pianeta Terra, e l'effetto delle asimmetrie geometriche come l'ellitticità dell'equatore. Possono quindi essere distinte diverse tipologie di armoniche che descrivono l'andamento della funzione potenziale attorno alla Terra.



Figura 18: rappresentazione schematizzata dell'andamento delle diverse armoniche sulla superficie terrestre.

- **Armoniche Zonali:** si manifestano in corrispondenza di $m = 0$. Il potenziale perturbativo U_p risulta essere indipendente dalla longitudine e le armoniche identificano degli intervalli di latitudini, al variare del grado dell'armonica, all'interno dei quali assumono valori crescenti e al di fuori valori decrescenti annullandosi lungo alcuni paralleli. Tra tutti i coefficienti J_l , il J_2 genera la maggiore perturbazione poiché quest'ultimo risulta essere legato allo schiacciamento della Terra ai poli e alla conseguente concentrazione di massa maggiore nella zona equatoriale. Il suo valore numerico è il maggiore tra i restanti J_l (con $l = [3, \infty)$) ed è pari a $J_2 = 1.08262669 \cdot 10^{-3}$; risulta essere all'incirca 1000 volte più grande del J_3 , ovvero il secondo coefficiente più grande. In generale le armoniche zonali di grado pari forniscono informazioni riguardo la simmetria di distribuzione di massa rispetto al piano equatoriale, mentre quelle di grado dispari sono legate all'asimmetria tra i due emisferi.
- **Armoniche Settoriali:** si manifestano in corrispondenza di $m = l$ e, a differenza delle armoniche zonali, identificano degli intervalli di longitudine. In questo caso le funzioni si annullano in corrispondenza di alcuni meridiani che dividono la superficie terrestre in "spicchi", caratterizzati da concentrazioni di massa differenti.
- **Armoniche Tesserali:** si manifestano in corrispondenza di $m \neq l \neq 0$, e identificano delle zone simili a tasselli. In generale questa tipologia di armoniche cercano di esprimere la deviazione di alcune zone della Terra dalla geometria sferica, considerando le conseguenze a livello gravitazionale.

Dopo aver determinato la funzione potenziale ($U = U_{id} - U_p$), per valutare gli effetti gravitazionali legati alle perturbazioni è necessario esprimere la forza di attrazione perturbata e la relativa accelerazione percepita dal corpo secondario. Ricordando quanto introdotto in precedenza, tramite il gradiente del potenziale perturbativo (specifico) è possibile ricavare l'accelerazione perturbativa ($\vec{a}_p = \nabla U_p$) (Ref. [B5]) riuscendo così a valutare l'effetto delle perturbazioni sul moto del corpo e sull'orbita da esso percorsa, e in particolare verranno ora brevemente introdotti i principali effetti del J_2 .

Effetto del J_2

Come è stato accennato in precedenza, lo schiacciamento dei poli (legato al J_2), risulta essere il fattore che influenza maggiormente il campo gravitazionale terrestre e il moto dei corpi a suo interno. I principali effetti generati dalle armoniche zonali, delle quali consideriamo solo il J_2 , influenzano solamente i tre parametri orbitali Ω , ω e M causandone la variazione (a differenza delle orbite Kepleriane), e più nello specifico causano:

- **Precessione della linea dei nodi**

Tramite diversi passaggi matematici e adeguate considerazioni, è possibile esprimere l'effetto del coefficiente J_2 sulla RAAN tramite la seguente espressione

$$\dot{\Omega} = \frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3}{2} \left(\frac{R_E}{p}\right)^2 n J_2 \cos(i) \quad (2.17)$$

Dove p indica il *Semilatus rectum*; i indica l'inclinazione dell'orbita; n indica la velocità angolare media; $\dot{\Omega}$ indica il rateo di variazione nel tempo della RAAN.

La posizione del nodo ascendente subisce una variazione nel tempo e lo spostamento angolare di quest'ultimo può avvenire in *senso orario*, se l'orbita è retrograda ($\frac{\pi}{2} \leq i \leq \pi$) e il fenomeno prende il nome di *Precessione*, oppure in *senso antiorario* se l'orbita è diretta ($0 \leq i \leq \frac{\pi}{2}$) e il fenomeno prende il nome di *Regressione*. Questo fenomeno non è sempre considerato deleterio, come avremo modo di osservare nel corso della trattazione, e in particolare costituisce il meccanismo alla base delle *orbite eliosincrone*, le quali sfruttano questa perturbazione per mantenere l'angolo tra il piano orbitale e la congiungente Terra-Sole, circa costante nel corso dell'anno imponendo $\dot{\Omega} = 0.98564736 \frac{^\circ}{\text{giorno}}$ (velocità angolare media della Terra attorno al Sole).

- **Precessione della linea degli apsidi**

La relazione che descrive questo effetto è la seguente

$$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{3}{4} \left(\frac{R_E}{p}\right)^2 n J_2 [5 \cos^2(i) - 1] \quad (2.18)$$

Dove ω indica l'argomento del periastro.

Analogamente al caso precedente, anche la linea degli apsidi (congiungente apogeo e perigeo) subisce una rotazione a causa del J_2 . Esistono due valori di inclinazione per i quali quest'ultimo non ha effetto sugli apsidi, ovvero $i = 63.4^\circ$ e 116.6° , pari agli zeri della funzione $\dot{\omega}(i)$. Questi valori di inclinazione sono stati adottati per le cosiddette orbite Molnya, ovvero orbite con elevata eccentricità che necessitano di mantenere fissi gli apsidi. È possibile, inoltre, determinare la direzione di rotazione di questi ultimi e nello specifico:

- Per $i \leq 63.4^\circ$ o $i \geq 116.6^\circ$, $\dot{\omega} > 0$ quindi si ha la Precessione della linea degli apsi
- Per $63.4^\circ \leq i \leq 116.6^\circ$, $\dot{\omega} < 0$ quindi si ha la Regressione della linea degli apsi
- **Variatione dell'anomalia media**
Anche l'anomalia media M risente dell'effetto dello schiacciamento dei poli terrestri e la sua evoluzione nel tempo segue la seguente espressione

$$\dot{M} = \frac{dM}{dt} = n + \frac{3}{4} \left(\frac{R_E}{p} \right)^2 n J_2 \sqrt{1 - e^2} [3 \cos^2(i) - 1] \quad (2.19)$$

2.4 Manovre orbitali

Tutte le azioni successive all'inserimento del corpo in orbita, che comportano delle variazioni volontarie dell'orbita o di alcuni suoi parametri, appartengono alla famiglia delle **manovre orbitali**. L'avvento di queste ultime risale agli anni successivi al lancio dello Sputnik, e da allora gli studi e le innovazioni hanno permesso il raggiungimento di livelli sempre più alti di precisione, in particolare per quanto riguarda le manovre di *Rendez-Vous*⁷.

Alla base delle manovre orbitali vi è la capacità di poter variare la velocità del corpo in orbita, tramite l'utilizzo di un sistema propulsivo capace di fornire il ΔV (*variazione di velocità*) necessario per compiere la manovra stessa. La variazione di velocità può essere descritta dalla famosa *equazione di Tsiolkowsky* o *equazione del razzo*, che permette di descrivere il contributo propulsivo alla variazione di velocità:

$$\Delta V = c \ln \left(\frac{m_i}{m_f} \right) \quad (2.20)$$

Dove $c = g_0 I_{sp}$ indica la velocità effettiva del gas di scarico; I_{sp} indica l'impulso specifico del propulsore e, nel caso di propulsori chimici, risulta essere vincolato dalla tipologia di propellente; g_0 indica l'accelerazione gravitazionale percepita sulla Terra; m_i, m_f indicano rispettivamente la massa iniziale e finale del corpo prima e dopo la spinta.

Il valore del ΔV è un indice dell'efficienza della manovra, poiché risulta essere legato al consumo di propellente utilizzato per quest'ultima. Se idealmente è auspicabile l'utilizzo di manovre dal minimo consumo, nella realtà bisogna tenere conto delle tempistiche legate ai requisiti della missione e risulta necessario raggiungere un compromesso. Questo aspetto sarà maggiormente approfondito nei prossimi capitoli.

⁷ Il *Rendez-Vous*, è una particolare tipologia di manovra orbitale caratterizzata dal progressivo avvicinamento di un corpo definito *chaser* ad un *target*, quest'ultimo generalmente preso come punto di riferimento e di arrivo per il primo. Questa manovra può essere suddivisa in più parti che permettono al *chaser* di effettuare il fasamento con il target, raggiungere l'orbita di quest'ultimo e l'avvicinamento fino al contatto controllato.

La variazione di velocità impartita al corpo può essere schematizzata principalmente in due modi, ovvero

- ΔV *istantaneo*: prevede che l'intera variazione di velocità richiesta per effettuare la manovra, avvenga in un'istante a seguito di una spinta di tipo impulsivo. È un modello semplificato ma sufficiente per determinare con buona approssimazione le principali traiettorie descritte dal corpo e i ΔV richiesti per completare la manovra stessa.
- ΔV *continuo*: è un modello più realistico e complesso poiché prende in considerazione la durata temporale della spinta fornita, e conseguentemente l'evoluzione temporale del ΔV .

Nell'intera trattazione verrà adottata l'ipotesi semplificativa di manovre impulsive, utilizzata per i propulsori chimici.

In generale le manovre possono essere suddivise in due grandi categorie ovvero *manovre coplanari*, per le quali il piano orbitale resta invariato, e manovre *non coplanari* caratterizzate dalla variazione di quest'ultimo. A seconda della direzione di applicazione della spinta è possibile modificare diversi parametri orbitali; infatti, se quest'ultima giace nel piano orbitale è in grado di influenzare il semiasse maggiore a , l'eccentricità e e l'argomento del periastro ω , mentre se la si applica in direzione normale al piano è possibile far variare la longitudine del nodo ascendente Ω e l'inclinazione i del piano. Le varie manovre non sono vincolate ad essere eseguite singolarmente ma possono essere *combinare* e questo, come potrà essere osservato, può generare un vantaggio in termini di consumi di propellente richiedendo un ΔV complessivo minore della somma dei ΔV forniti in sequenza.

Sono in seguito riportate alcune caratteristiche manovre orbitali di interesse per il lavoro svolto:

- ***Manovra di trasferimento tra due orbite:***

Permette il passaggio del corpo da un'orbita di partenza ad una di arrivo, tramite un arco di conica. È caratterizzata principalmente dalla variazione di a e di e (forma e dimensione dell'orbita) se le orbite sono coplanari, altrimenti è necessario considerare anche la variazione di i . Per minimizzare i consumi legati a questa tipologia di manovra, la spinta impulsiva fornita deve essere tangenziale all'orbita di partenza (e di arrivo), e il *flight path angle* ϕ deve essere nullo. I punti delle orbite che rispettano questi vincoli sono gli apsi, per i quali la velocità del corpo è tangenziale all'orbita e il $\phi = 0^\circ$.

Nel caso coplanare più generale questa tipologia di manovra può avvenire tra due orbite ellittiche aventi lo stesso fuoco, tramite:

- *Due impulsi tangenziali in corrispondenza degli apsi*: permette di ridurre al minimo i consumi (nessuna perdita per disallineamento) e, nel caso di trasferimento tra due orbite circolari, prende il nome di *manovra di Hohmann* la quale prevede il trasferimento lungo una semi ellisse tangente alle due orbite nei suoi apsi.
- *Un solo impulso tangenziale*: permette un trasferimento più rapido tra le due orbite, ma comporta un consumo maggiore ($\Delta V \uparrow$).

- *Due impulsi non tangenziali*: permette di utilizzare una qualsiasi orbita di trasferimento, ma la determinazione delle variazioni di velocità necessarie risulta essere più complessa.

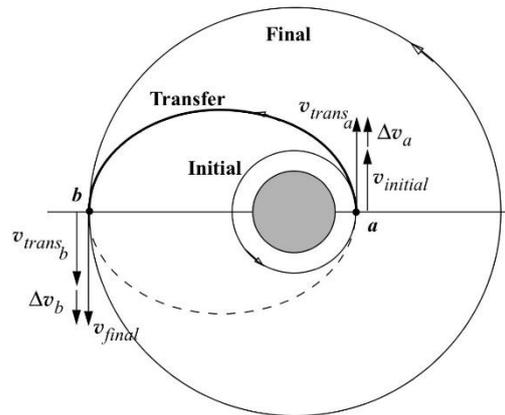


Figura 19: in [B5], schema della manovra di Hohmann tra un'orbita di partenza interna e una di arrivo esterna (può essere effettuata anche al contrario).

Effettuando i vari passaggi matematici richiesti (Ref. [B5]), è in seguito riportato il valore del ΔV totale necessario per effettuare un trasferimento di tipo Hohmann:

$$\Delta V_H = \Delta V_a + \Delta V_b = \sqrt{\frac{\mu}{r_a}} \left(\sqrt{2 \frac{r_b}{r_a + r_b}} - 1 \right) + \sqrt{\frac{\mu}{r_b}} \left(1 - \sqrt{2 \frac{r_a}{r_a + r_b}} \right) \quad (2.21)$$

Dove $\Delta V_a, \Delta V_b$ indicano rispettivamente le variazioni di velocità alla partenza e all'arrivo; r_a, r_b indicano rispettivamente il raggio dell'orbita di partenza, coincidente con il raggio del periastro dell'orbita di trasferimento, e il raggio dell'orbita di arrivo coincidente con il raggio dell'apoaastro dell'orbita di trasferimento.

- **Manovra di cambiamento del piano**

Coinvolge la variazione dell'inclinazione dell'orbita, e prevede che la spinta fornita sia in direzione normale al piano orbitale iniziale. Per evitare l'accoppiamento tra la variazione di i e Ω , è necessario fornire l'impulso in corrispondenza del nodo ascendente (o discendente).

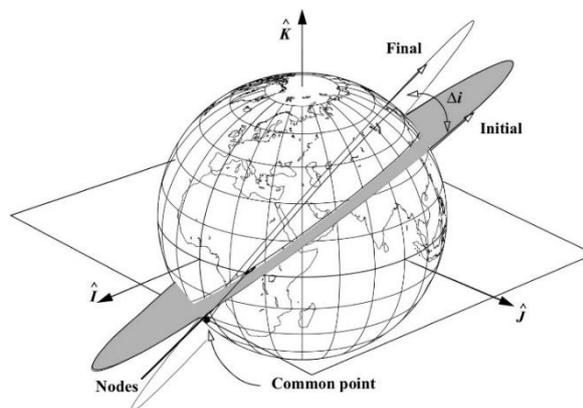


Figura 20: in [B5], rappresentazione della manovra di cambiamento del piano

il ΔV necessario per effettuare un cambio di piano semplice è pari a:

$$\Delta V_i = 2 v_{tan} \sin\left(\frac{\Delta i}{2}\right) \quad (2.22)$$

Dove $v_{tan} = v \cos \phi$ indica la velocità tangenziale del corpo lungo l'orbita; Δi indica la variazione di inclinazione voluta.

- **Manovra di cambiamento della RAAN**

Prevede la variazione di Ω tramite un impulso normale al piano orbitale, in corrispondenza di un punto dell'orbita leggermente a Est (per le orbite dirette) rispetto a quello di massima latitudine (Ref. [B5]).

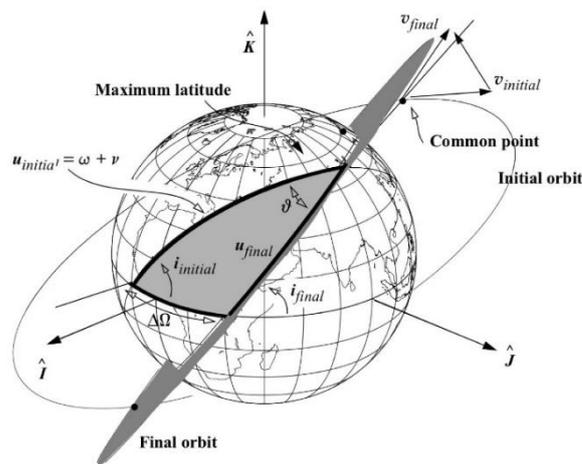


Figura 21: in [B5], rappresentazione della manovra di cambiamento della RAAN

il ΔV necessario per effettuare un singolo cambio di RAAN è:

$$\Delta V_{\Omega} = 2 v_{tan} \sin\left(\frac{\Delta \theta}{2}\right) \quad \text{con} \quad \cos(\theta) = \cos^2(i) + \sin^2(i) \cos(\Delta \Omega) \quad (2.23)$$

Dove $\Delta \Omega$ indica la variazione di RAAN voluta; $\Delta \theta$ indica l'angolo del quale bisogna far ruotare il piano orbitale per ottenere la variazione di Ω desiderata.

Capitolo 3: Metodi di ottimizzazione

I metodi di ottimizzazione costituiscono degli importanti strumenti che nel corso degli anni sono stati in grado di suscitare un grande interesse, favorendo la ricerca e lo sviluppo di metodologie sempre più complesse, che attualmente vedono applicazioni in svariati settori dell'ingegneria e non solo. All'interno di questo capitolo verrà fatto riferimento ai *metodi di ottimizzazione di traiettorie* comunemente adottati, e in generale ai metodi di risoluzione del *problema del controllo ottimo*, con un approfondimento riguardante il *metodo diretto* selezionato ed implementato all'interno del lavoro ovvero gli **algoritmi genetici**. Il controllo ottimo, e nello specifico l'ottimizzazione delle traiettorie, consiste nella determinazione dei parametri di *input ottimi* del sistema dinamico associato, in grado di massimizzare/minimizzare una specifica caratteristica (*Performance index*) rispettando al contempo gli eventuali *vincoli* che possono essere imposti sul sistema. In generale gli input di quest'ultimo possono essere parametri statici o funzioni, e a causa della grande complessità del problema è generalmente necessario l'utilizzo di metodi numerici per la risoluzione.

Dato un *sistema dinamico* della generica forma:

$$\dot{\vec{x}}(t) = f[\vec{x}(t), \vec{u}(t), \vec{p}, t] \quad (3.1)$$

Soggetto a diverse tipologie di vincoli quali:

- Vincoli sul percorso (**path constraints**), $C_{min} \leq C[\vec{x}(t), \vec{u}(t), \vec{p}, t] \leq C_{max}$
- Condizioni al contorno (**boundary conditions**), $\phi_{min} \leq \phi[\vec{x}(t_0), t_0, \vec{x}(t_f), t_f, \vec{p}] \leq \phi_{max}$

Dove $\vec{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ indica il *vettore degli stati*; $\vec{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ indica il *vettore dei controlli*; $\vec{p} \in \mathbb{R}^q$ indica il *vettore contenente i parametri statici*; $t_0 \in \mathbb{R}$ indica il *tempo iniziale*; $t_f \in \mathbb{R}$ indica il *tempo finale*.

Si determinano $\vec{x}(t), \vec{u}(t), \vec{p}, t_0$ e t_f tali da ottimizzare l'*Indice Obiettivo J (funzionale)*:

$$J = \phi[\vec{x}(t_0), t_0, \vec{x}(t_f), t_f, \vec{p}] + \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{L}[\vec{x}(t), \vec{u}(t), \vec{p}, t] dt \quad (3.2)$$

Quest'ultimo è composto da un termine legato al valore assunto dal vettore di stato negli estremi dell'intervallo di tempo considerato ($t \in [t_0, t_f]$) e un termine legato all'evoluzione nel tempo del vettore di stato e del controllo (termine integrale). Il *performance index* di un problema di ottimizzazione di traiettorie può essere utilizzato per classificare queste ultime in base alla loro "bontà", permettendo la selezione della traiettoria più adatta per la missione considerata.

3.1 Panoramica sui metodi di ottimizzazione

In riferimento a quanto precedentemente introdotto, alla base dei diversi metodi di ottimizzazione e della risoluzione dei problemi di controllo ottimo vi è la capacità di *risolvere numericamente i sistemi di equazioni differenziali* descritti dalla dinamica del problema, ricavando l'evoluzione del vettore di stato del sistema dinamico.

Partendo dal generico *problema di Cauchy*:

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}}(t) = f[\vec{x}(t), t], & t \in [t_0, t_f] \\ \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \end{cases} \quad (3.3)$$

e dividendo l'intervallo $[t_0, t_f]$ in n sotto intervalli $[t_i, t_{i+1}]$ (con $i = 0, 1, 2, \dots, n$ e $t_{n+1} \equiv t_f$) sui quali si vuole valutare la soluzione dell'equazione differenziale, è possibile esprimere tramite l'integrazione del sistema e le dovute approssimazioni ($\vec{x}_i \cong \vec{x}(t_i)$, $\vec{x}_{i+1} \cong \vec{x}(t_{i+1})$) la seguente relazione, dalla quale si diramano i diversi metodi numerici

$$\vec{x}_{i+1} = \vec{x}_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{\vec{x}}(t) dt = \vec{x}_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f[\vec{x}(t), t] dt \quad (3.4)$$

Tra le strategie adottate per la risoluzione numerica delle equazioni differenziali, sono di seguito riportate le principali:

- **Time Marching Methods**

Come suggerisce il nome, questo metodo permette di calcolare in sequenza (per ogni estremo successivo dei sotto intervalli) le soluzioni del sistema di equazioni differenziali, sfruttando quelle ricavate in corrispondenza dell'estremo considerato -attuale o precedente.

Possono essere identificate due principali tipologie, ovvero i *metodi a più step (Multiple-Step Methods)* e i *metodi a più stadi (Multiple-Stage Methods)*.

Per quanto riguarda i primi, a seconda del numero di step temporali (j) considerati, la soluzione in corrispondenza del generico estremo t_{i+1} dipende da tutti i valori calcolati negli estremi appartenenti a $[t_{i-j}, t_i]$.

Il metodo più elementare, appartenente a questa tipologia, è il *Metodo di Eulero* per il quale $j = 1$ (*Single-Step Method*) e la generica soluzione del sistema di equazioni differenziali presenta la seguente forma

$$\vec{x}_{i+1} = \vec{x}_i + h_i [\alpha f(\vec{x}_i, \vec{u}_i, t_i) + (1 - \alpha) f(\vec{x}_{i+1}, \vec{u}_{i+1}, t_{i+1})] = \vec{x}_i + h_i [\alpha f_i + (1 - \alpha) f_{i+1}] \quad (3.5)$$

Dove $\alpha = [0, 1]$ parametro utilizzato per valutare i contributi degli estremi; h_i indica l'ampiezza dell' i -esimo intervallo.

Il valore assunto da α permette di effettuare un'importante distinzione tra i metodi implementati, e in questo caso tra il *metodo di Eulero Esplicito* ($\alpha = 0$) e *Implicito* ($\alpha = 1$). Nei metodi *Espliciti* la soluzione \vec{x}_{i+1} dipende solamente dalle informazioni legate allo step

temporale precedente $(f_i, h_i, \vec{x}_i, t_i)$, mentre per i metodi *Impliciti* il termine \vec{x}_{i+1} compare in maniera implicita (in f_{i+1}) nella parte destra dell'espressione. I metodi impliciti risultano più complessi della loro controparte esplicita, richiedono infatti un costo computazionale maggiore e tecniche di risoluzione avanzate, ma allo stesso tempo sono meno soggetti ai problemi di instabilità che affliggono i metodi espliciti.

Per quanto riguarda i *Multiple-Stage Method* si adotta un approccio differente basato sulla suddivisione di ciascun sotto intervallo $[t_i, t_{i+1}]$ in m ulteriori step intermedi $[\tau_j, \tau_{j+1}]$ (con $j = 1, 2, \dots, m$; $\tau_j = t_i + h_i \beta_j$ e $\beta_j \in [0, 1]$), e sull'approssimazione dell'integrale $\int_{t_i}^{t_{i+1}} f[\vec{x}(t), t] dt$ su ciascun sotto intervallo tramite delle formule di *quadratura* analoghe alla seguente:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f[\vec{x}(t), t] dt \cong h_i \sum_{j=1}^m \beta_j f[\vec{x}(\tau_j), \tau_j] \quad (3.6)$$

Questi metodi prendono il nome di *metodi di Runge-Kutta* e permettono di valutare la soluzione del sistema di equazioni differenziali in ogni estremo t_{i+1} a partire dalla somma tra la soluzione ottenuta per t_i e l'approssimazione dell'integrale di $f[\vec{x}(t), t]$ sul sotto intervallo considerato.

- **Collocation Methods**

Questo metodo prevede l'approssimazione diretta $\vec{X}(t)$ del vettore di stato $\vec{x}(t)$, sul generico sotto intervallo $[t_i, t_{i+1}]$ (analogo ai casi precedenti), tramite l'utilizzo di un polinomio di grado M espresso come:

$$\vec{x}(t) \cong \vec{X}(t) = \sum_{p=0}^M a_p (t - t_i)^p; \quad t \in [t_i, t_{i+1}] \quad (3.7)$$

I vari coefficienti a_p (con $p = 0, \dots, M$) sono selezionati in modo da garantire la condizione $\vec{X}(t_i) = \vec{x}(t_i)$, ovvero l'uguaglianza del polinomio e dello stato nell'estremo iniziale di ogni sotto intervallo.

Si impone inoltre la relazione (che caratterizza il metodo di collocazione, Ref [B8])

$$\dot{\vec{X}}(\tau_j) = f[\vec{x}(\tau_j), \tau_j] \quad \text{con } j = 1, \dots, M \quad (3.8)$$

Dove $\tau_j = t_i + h_i \beta_j$ (con $\beta_j \in [0, 1]$) indicano gli step intermedi all'interno di ciascun sotto intervallo $[t_i, t_{i+1}]$.

Per risolvere i problemi di controllo ottimo e ottimizzazione di traiettorie, si può fare affidamento su due principali categorie di metodi di ottimizzazione:

Metodi indiretti (Indirect Methods)

Usufruiscono delle strategie per la risoluzione dei sistemi di equazioni differenziali precedentemente introdotte e comportano l'introduzione di metodologie numeriche per il calcolo delle soluzioni di sistemi di equazioni non lineari.

In relazione alla loro formulazione (Ref. [B8]), i metodi indiretti fanno uso del così detto *calculus of variations*, ovvero quella branca dell'analisi matematica volta alla determinazione di funzioni in grado di ottimizzare uno specifico *funzionale* (funzione di una funzione). In particolare le condizioni necessarie per la determinazione dei valori che caratterizzano la traiettoria negli estremi, possono essere ricavate dal seguente sistema Hamiltoniano (Ref. [B8]):

$$\mathcal{H}(\vec{x}, \vec{\lambda}, \vec{\mu}, \vec{u}, t) = \mathcal{L}(\vec{x}, \vec{u}, t) + \vec{\lambda}^T \vec{f} - \vec{\mu}^T \vec{C} \quad (3.9)$$

Dove $\vec{\lambda}(t) \in \mathbb{R}^n$ indica il così detto co-stato; $\vec{\mu}(t) \in \mathbb{R}^c$ indica il vettore dei moltiplicatori di Lagrange legati ai vincoli sul percorso (*path constraint*).

Un esempio di condizioni di ottimalità che possono essere ricavate dal sistema descritto nell'equazione (3.9) e che esprimono il legame esistente tra il vettore di stato e il co-stato, sono:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{\lambda}} \right]^T \quad e \quad \dot{\vec{\lambda}}(t) = - \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{x}} \right]^T \quad (3.10)$$

Le restanti condizioni sono raccolte e sintetizzate all'interno della Ref. [B8].

Ciò che vale la pena sottolineare è che qualsiasi valore assunto dal vettore di stato e co-stato, dal vettore del controllo e dai diversi moltiplicatori di Lagrange viene considerato un *estremo* se quest'ultimo soddisfa le condizioni al contorno e qualsiasi vincolo imposto nei punti interni.

I metodi indiretti richiedono quindi la risoluzione di un problema ai valori al contorno in più punti, e questo comporta la riformulazione del problema del controllo ottimo in un sistema di equazioni non lineari.

In generale, per risolvere un sistema di equazioni non lineari della forma $f(\vec{z}) = 0$, esistono diversi metodi numerici che permettono di calcolare gli zeri (le *radici*) di ciascuna equazione e tra i più utilizzati figura il *metodo di Newton*. Quest'ultimo è basato sullo sviluppo troncato al primo ordine di ciascuna equazione del sistema e sull'ipotesi che deve essere effettuata riguardo il valore iniziale del vettore delle radici (\vec{z}_0), che influenza la convergenza del metodo.

L'algoritmo di *Newton* può essere espresso tramite:

$$\vec{z}_{k+1} = \vec{z}_k - \left[\frac{df}{d\vec{z}}(\vec{z}_k) \right]^{-1} f(\vec{z}_k) \quad (3.11)$$

Dove $\left[\frac{df}{d\vec{z}}(\vec{z}_k) \right]^{-1}$ indica l'inversa della *matrice jacobiana* associata al sistema, valutata in \vec{z}_k (se la matrice jacobiana risulta essere singolare, il metodo non può essere utilizzato); k indica il numero dell'iterazione del metodo.

I principali metodi indiretti che possono essere citati sono:

- **Indirect Shooting Method:** questa tecnica consiste nell'effettuare un'ipotesi iniziale riguardo il valore incognito di una delle condizioni al contorno, che caratterizzano i problemi di ottimizzazione di traiettorie, in uno dei due estremi dell'intervallo $[t_0, t_f]$. Attraverso l'utilizzo di questa prima ipotesi combinata alla conoscenza delle condizioni iniziali, è possibile ricavare il valore del vettore di stato in corrispondenza dell'altro estremo tramite integrazione numerica del sistema descritto dall'equazione (3.10). Valutando la differenza tra le condizioni terminali desiderate e quelle raggiunte tramite l'ipotesi iniziale, se questa è maggiore di una soglia imposta (δ), il valore inizialmente ipotizzato viene corretto in maniera opportuna e l'intero metodo viene ripetuto fino al raggiungimento di un valore in grado di soddisfare la soglia considerata.
- **Indirect Multiple-Shooting Method:** questo metodo cerca di limitare la principale criticità associata all'utilizzo dell'*indirect shooting method*, ovvero la necessità di effettuare un'ipotesi iniziale relativamente vicina alla soluzione effettiva, per evitare che la discrepanza tra queste ultime si propaghi e amplifichi fino a divergere. In particolare questa tecnica prevede la suddivisione dell'intervallo iniziale $[t_0, t_f]$ in $M + 1$ sotto-intervalli $[t_j, t_{j+1}]$ (con $j = 1, \dots, M$), e l'applicazione dell'*indirect shooting method* su ciascuno di essi per ricavare i valori incogniti del vettore di stato e co-stato in ogni estremo interno. Per ciascuno di questi ultimi viene inoltre imposta la condizione di continuità espressa tramite:

$$\vec{y}(t_j^-) = \begin{bmatrix} \vec{x}(t_j^-) \\ \vec{\lambda}(t_j^-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{x}(t_j^+) \\ \vec{\lambda}(t_j^+) \end{bmatrix} = \vec{y}(t_j^+) \quad (3.12)$$

- **Indirect Collocation Method:** questo metodo prevede la parametrizzazione del vettore di stato e del co-stato su ciascun sotto intervallo $[t_i, t_{i+1}]$, attraverso una serie di polinomi analoghi a quelli definiti precedentemente per i *Collocation Method*. Il problema si riduce alla determinazione delle radici per il quale il vettore da determinare coincide con i coefficienti dei polinomi.

Metodi diretti (Direct Methods)

Questa tipologia di metodi differisce da quelli indiretti poiché, sebbene facciano uso delle medesime strategie di risoluzione numerica dei sistemi di equazioni differenziali, sono maggiormente incentrati sull'ottimizzazione e in particolare sull'*ottimizzazione non lineare (Nonlinear Optimization)*, la quale viene accoppiata con le soluzioni numeriche ottenute.

Essere in grado di determinare la soluzione dei *problemi di ottimizzazione non lineare (o Nonlinear Programming Problems, NLPs)* risulta fondamentale per la risoluzione dei problemi di controllo ottimo. In generale un *NLP* prevede la determinazione del vettore $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ (*vettore di decisione*) tale da minimizzare la *funzione obiettivo/costo* $f(\vec{x})$ soggetta ai generici vincoli algebrici

$$g(\vec{x}) = 0; \quad h(\vec{x}) \leq 0 \quad (3.9)$$

Dove $g(\vec{x}) \in \mathbb{R}^m$ e $h(\vec{x}) \in \mathbb{R}^p$ (Ref.[9]).

I *problemi di ottimizzazione non lineare* sono caratterizzati da un numero di variabili e vincoli che può variare significativamente (da poche centinaia fino a milioni), e i principali metodi utilizzati per la risoluzione di questi ultimi sono i *metodi basati sul calcolo del gradiente (Gradient Based Methods)* e i *metodi euristici (Heuristic Methods)*.

I *Gradient Based Methods* sono metodi volti all'ottimizzazione della *funzione obiettivo* e sono in grado di individuare generalmente delle soluzioni ottime a livello **locale**. Questi metodi, dopo aver effettuato un'ipotesi iniziale sul valore del vettore di decisione (\vec{x}_0), sfruttano un processo iterativo che permette l'aggiornamento del vettore \vec{x} tramite l'espressione:

$$\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k + \alpha_k \vec{d}_k; \quad k = 0, 1, \dots, N_{\text{iterazioni}} \quad (3.10)$$

Dove α_k indica lo *step length*, ovvero l'entità della variazione di \vec{x}_k ; \vec{d}_k indica la *search direction*, ovvero la direzione ottima in \mathbb{R}^n che il vettore \vec{x}_k deve "seguire".

La ricerca della direzione ottima da seguire per ogni iterazione permette di determinare il vettore di decisione \vec{x} in grado di ottimizzare (massimizzare o minimizzare) $f(\vec{x})$ (Ref. [B8]).

Al contrario i *Metodi Euristici* permettono di individuare una soluzione ottima a livello **globale**, tramite una ricerca di quest'ultima per via *stocastica*, ovvero probabilistica/casuale, e non *deterministica*, propria dei metodi basati sul calcolo del gradiente. Esistono diverse famiglie di metodi euristici e tra queste possono essere evidenziati i **Genetic Algorithms**, dei quali verrà fornita una spiegazione più approfondita nel paragrafo seguente, il **Particle Swarm Optimization** e il **Simulated Annealing** (Ref. [B8]).

Per dare un'idea del *modus operandi* dei metodi diretti, sono in seguito riportati alcuni esempi caratteristici:

- **Direct Shooting Method:** questa tecnica è basata sulla *parametrizzazione del vettore dei controlli*, sull'intervallo $[t_0, t_f]$, tramite un'apposita somma di funzioni:

$$\vec{u}(t) \cong \sum_{i=1}^m \vec{a}_i \psi_i(t); \quad i = 1, \dots, m \quad (3.15)$$

Dove \vec{a}_i indica il generico vettore dei parametri che permettono l'ottimizzazione; $\psi_i(t)$ indica la generica funzione nota, utilizzata per approssimare il controllo. Dopo aver effettuato un'ipotesi iniziale sul valore dei diversi parametri, si procede con l'integrazione numerica del sistema di equazioni differenziali tramite approcci della tipologia *Time Marching*, e si ricava il valore della funzione di costo J tramite apposite tecniche di quadratura. Se il valore di quest'ultima non risulta essere ottimizzato (massimo o minimo) o i vincoli esterni (*NLP*) non sono soddisfatti, il valore dei parametri viene aggiornato in maniera opportuna e l'algoritmo effettua nuovamente i calcoli fino ad arrivare a convergenza.

- **Direct Multiple-Shooting Method:** è un metodo che prevede l'applicazione del *Direct-Shooting Method* su ciascun sotto intervallo di $[t_0, t_f]$. Quest'ultimo infatti viene suddiviso in $M + 1$ sotto-intervalli $[t_j, t_{j+1}]$ (con $j = 1, \dots, M$), a causa dei quali è necessario imporre una *condizione di continuità* negli estremi degli intervalli:

$$\vec{x}(t_i^-) = \vec{x}(t_i^+) \quad (3.16)$$

Questa condizione può essere facilmente trasformata in un problema non lineare (Ref. [B8]), che vincola ulteriormente i valori assunti dai parametri utilizzati per ottimizzare la funzione di costo. Questo metodo, pur aumentando il numero di parametri considerati rispetto al **Direct Shooting Method**, permette generalmente di ottenere soluzioni più accurate.

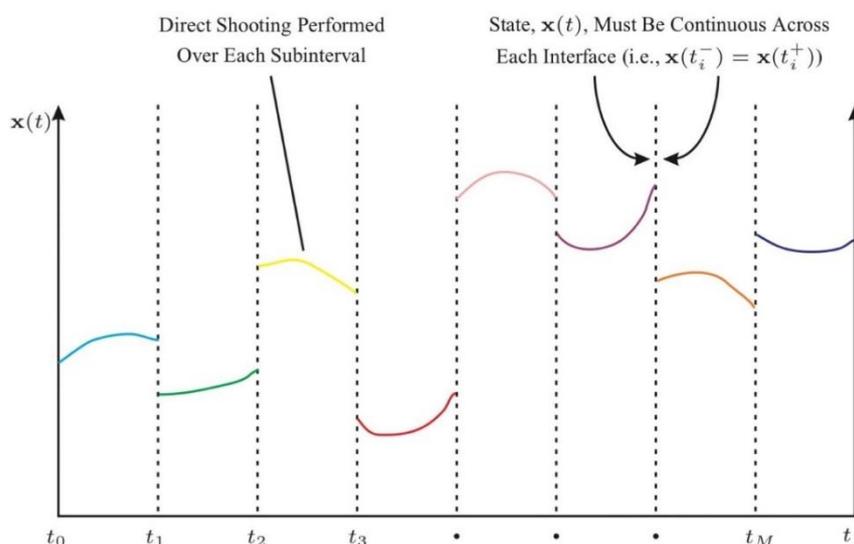


Figura 22: in [B8], schema rappresentativo dei valori assunti dal vettore di stato $\vec{x}(t)$ su ciascun sotto intervallo $[t_j, t_{j+1}]$, per un *Direct Multiple-Shooting Method*.

- **Direct Collocation Method:** a differenza dei due casi precedenti, questa tipologia di metodo prevede la parametrizzazione di entrambi il *vettore di stato* e il *vettore dei controlli*, tramite espressioni analoghe a quella introdotta per gli *Shooting Methods*. In generale l'approccio adottato è simile a quello introdotto per i *Direct Multiple-Shooting Methods*, per quanto riguarda la suddivisione in diversi sotto intervalli e l'imposizione della condizione di continuità negli estremi. In questo caso i metodi numerici, impiegati per la risoluzione dei sistemi di equazioni differenziali, comprendono i metodi di Runge-Kutta e i metodi di collocazione.

3.2 Algoritmi Genetici

L'ottimizzazione di una funzione obiettivo può essere decisamente complessa poiché se quest'ultima presenta più punti di minimo e massimo locali oppure vincoli molto stringenti, i classici algoritmi di ricerca esatti (*deterministici*) possono impiegare un tempo eccessivo per ricavare la soluzione, o ancora possono convergere verso soluzioni *localmente ottime* perdendo di vista la ricerca dell'ottimo a *livello globale*. In questo contesto si inseriscono i metodi euristici di ricerca che, come è stato introdotto in precedenza, sfruttano delle tecniche stocastiche per ottimizzare a livello globale la funzione obiettivo con un certo grado di approssimazione.

All'interno della famiglia dei *metodi euristici di ricerca*, gli *Algoritmi Evoluzionistici (EA)* occupano un ruolo importante e tra questi *gli algoritmi genetici (GA)* rappresentano una classe ben conosciuta ed utilizzata per l'ottimizzazione (a livello globale) dei *Non Linear Programming Problems (NLP)*.

La nascita di questi algoritmi risale alla prima metà degli anni Settanta (1975), a seguito degli studi compiuti dal fisico *John Henry Holland* riguardo la teoria evolutiva Darwiniana e la sua possibile integrazione ed utilizzo all'interno di metodi numerici di ottimizzazione. Il funzionamento di questa tipologia di algoritmi è basato sull'imitazione del *processo di evoluzione biologica*, il quale prevede diversi meccanismi come la riproduzione, ricombinazione, mutazione e selezione naturale che tendono a favorire *la sopravvivenza dell'individuo più adatto*.

Questi algoritmi appartengono alla tipologia *Population-based*, infatti basano il loro funzionamento sulla generazione casuale, nei limiti dei vincoli che caratterizzano il problema considerato, di una popolazione iniziale di N individui (soluzioni candidate alla risoluzione del problema) che viene fatta evolvere creando generazioni successive tramite l'azione di appositi *operatori "genetici"* (di *codifica, selezione, crossover, mutazione*).

A ciascun individuo della popolazione è associata una funzione di qualità (*fitness function*), generalmente normalizzata tra 0 e 1, che risulta essere legata alla capacità della singola soluzione di ottimizzare la funzione obiettivo o, da un punto di vista "biologico", descrive quanto il singolo individuo sia adatto all'ambiente circostante e conseguentemente a potersi riprodurre trasmettendo i suoi geni. Sfruttando la *fitness function* è possibile sviluppare dei metodi di selezione degli individui appartenenti alla generazione considerata; infatti, tutti quelli caratterizzati da valori elevati della *fitness function* tendono ad avere più possibilità nell'essere utilizzati per la creazione della generazione successiva. Questi individui rientrano quindi nella categoria dei *"genitori"* ed hanno la possibilità di trasmettere le loro caratteristiche (geni) alla seguente generazione, tramite l'azione di appositi operatori genetici, la quale è costituita dai cosiddetti *"figli"*. Seppur le variazioni tra le generazioni successive possano essere contenute, le caratteristiche migliori tendono ad accumularsi ed emergere e questo costituisce uno dei punti di forza degli *algoritmi genetici*.

Fissato il massimo numero di individui per ogni generazione e il criterio di arresto dell'algoritmo, che per esempio può riguardare il numero massimo di generazioni o l'accuratezza della soluzione ottenuta, gli algoritmi genetici sono in grado di ottenere una buona approssimazione della soluzione ottima. Questi algoritmi rientrano nella categoria dei metodi deboli, infatti, pur partendo da una popolazione casuale, caratterizzata generalmente da bassi valori di *fitness*, e senza essere a conoscenza delle caratteristiche del problema, tramite la mimesi dell'evoluzione biologica, sono in grado di produrre soluzioni sempre più accurate (*fitness* maggiore), sviluppando una conoscenza via via più approfondita del sistema da ottimizzare.

Gli *algoritmi genetici*, benché ancora utilizzati con cautela, trovano applicazione per la risoluzione *NLP* in svariati ambiti che possono spaziare dall'ingegneria, soprattutto per la risoluzione di problemi di

ottimizzazione e controllo, all'economia o ancora al campo della medicina, grazie alla loro grande versatilità.

Nel corso degli anni sono state sviluppate molteplici varianti dei *GA* ad esempio i *MOGA* (*Multi Objective GA*), i *Parallel GA* o ancora i *Chaotic GA*, per cercare di migliorare ed estendere le capacità dei comuni algoritmi genetici (Ref. [B11]).

È necessario sottolineare che per la successiva descrizione, così come per l'intera trattazione, verrà considerato il modello base degli *algoritmi genetici*.



Figura 23: generico diagramma di funzionamento degli algoritmi genetici. Il termine N_g indica il numero della generazione corrente.

Nelle seguenti pagine ci si focalizzerà in maniera più approfondita sui principali metodi e strumenti che caratterizzano gli *algoritmi genetici*.

3.2.1 Codifica delle informazioni

Uno degli aspetti fondamentali sul quale si basa il funzionamento dell'algoritmi genetici è la capacità di esprimere/codificare gli individui di una popolazione. Nel caso dei *GA* ogni individuo appartenente alla popolazione può essere espresso tramite una stringa di bit, con dimensione costante, ciascuno dei quali rappresenta il singolo *gene* contenuto all'interno del *cromosoma/individuo*. Lo schema di codifica varia a seconda delle caratteristiche del problema considerato, e in generale le principali codifiche adottate sono della tipologia:

- **Binaria:** è lo schema di codifica più comune e prevede la rappresentazione del generico cromosoma tramite una stringa di valori pari a 0 o ad 1. A seconda della dimensione N dei cromosomi, è possibile generare 2^N stringhe differenti per rappresentarli.
- **Ottale:** prevede la rappresentazione del generico cromosoma tramite una stringa di valori interi compresi tra 0 e 7.
- **Esadecimale:** prevede la rappresentazione del generico cromosoma tramite una stringa di valori interi compresi tra 0 e 9 e lettere dalla *A* alla *F*.

Ulteriori metodi di codifica da menzionare sono il *permutation encoding*, *value-based encoding* e il *tree encoding* (Ref. [B11])

Volendo sfruttare il legame esistente tra gli *algoritmi genetici* e le caratteristiche biologiche di un individuo, si può sottolineare che i diversi valori che possono essere assunti dai bit all'interno di una stringa codificata rappresentano i vari *alleli*, ovvero varianti dei corrispondenti geni considerati. Se la totalità dei geni, che costituiscono il cromosoma, rappresenta il *genotipo*, ovvero l'insieme delle caratteristiche genetiche che identificano ogni individuo, quest'ultimo risulta direttamente influenzato dai valori assunti da ciascun bit che compone la stringa (*cromosoma*). Per quanto riguarda le caratteristiche manifestate e visibili dell'individuo, indicate col termine *fenotipo*, queste risultano essere strettamente dipendenti dal patrimonio genetico (*genotipo*), e la *fitness function* permette di valutare il legame tra questi due aspetti fondamentali.

3.2.2 Meccanismi di selezione

Ricordando quanto introdotto in precedenza, gli algoritmi genetici fanno leva sul principio evolutivo della *sopravvivenza del più adatto* all'ambiente circostante, e i principali metodi per la selezione degli individui in grado di riprodursi sono basati sulla valutazione della *fitness function* associata ad ogni soluzione. Quest'ultima rappresenta la decodifica del *cromosoma/individuo*, ed esprime il legame tra patrimonio genetico e caratteristiche manifestate da quest'ultimo.

Non tutti gli individui appartenenti ad una generazione vengono considerati nel processo di riproduzione e in particolare, tra le tecniche maggiormente conosciute per la selezione degli individui più adatti, possono essere elencate:

- ***Roulette wheel selection***: questa tecnica prevede l'inserimento di tutte le stringhe, che identificano gli individui della popolazione, ciascuna all'interno di un settore della "ruota per la roulette". Il posizionamento di ogni stringa viene effettuato in base al valore della *fitness function* associata a quest'ultima, e la selezione degli individui che parteciperanno alla riproduzione (*genitori*) avviene per via stocastica tramite la rotazione casuale della ruota. I principali vantaggi di questo metodo di selezione sono la semplicità di implementazione e la bassa complessità, ma al contempo questa tecnica può provocare una convergenza prematura verso soluzioni localmente ottime.
- ***Rank selection***: questa metodologia rappresenta una variante della precedente; infatti, per la determinazione degli individui appartenenti alla categoria dei genitori viene assegnata a ciascun individuo una probabilità di selezione basata sul suo *Rango*, il quale risulta essere legato al valore della *fitness function* dell'individuo considerato.
- ***Tournament selection***: questo metodo sfrutta la *Roulette wheel selection* per selezionare delle coppie di individui all'interno della popolazione corrente. Successivamente l'individuo caratterizzato dal valore di *fitness* maggiore entra a far parte del gruppo dei *genitori*, i quali daranno vita alla generazione successiva.

- **Elitism selection:** questa tecnica permette di limitare la perdita di informazioni (*geni*) nel caso in cui l'individuo caratterizzato dal valore massimo di *fitness*, non risultasse essere presente nella generazione successiva (perdita di geni adatti) dopo aver effettuato la selezione tramite il metodo adottato (*Roulette wheel selection, Rank selection, Tournament selection*). Se ciò dovesse accadere l'individuo verrebbe automaticamente inserito nella generazione dei *figli*, preservando i geni che risultano essere particolarmente adatti.

Le varie strategie di selezione risultano quindi determinanti nella creazione della famiglia dei *genitori* e conseguentemente nella successiva generazione dei *figli*. In alcuni casi, come per il *modello Elitario*, l'individuo appartenente alla categoria dei genitori può essere inserito nella generazione successiva se le sue caratteristiche (*geni e fitness*) risultano essere particolarmente performanti; questa tecnica assume il nome di **uplicazione**.

Quest'ultima risulta essere fondamentale per la preservazione dei geni "buoni", in grado di migliorare le soluzioni ottenute, e in alcuni casi può essere adottata per mantenere costante il numero di individui presenti in ciascuna generazione.

3.2.3 Operazioni di Crossover

L'operazione di *Crossover* è lo step fondamentale nella generazione dei *figli*, e consiste nella ricombinazione delle caratteristiche genetiche (stringhe) dei *genitori* tramite l'incrocio di questi ultimi e può avvenire con l'ausilio di diverse tecniche.

Tramite questa operazione l'AG è in grado di generare le diverse popolazioni, mantenendo degli individui caratterizzati da un buon grado di *fitness*, capaci quindi di giungere alla soluzione ottima.

Alcuni dei meccanismi classici adottati per il *crossover* sono:

- **Single point crossover:** selezionati due individui appartenenti al gruppo dei *genitori*, viene scelto in maniera casuale un punto di crossover all'interno delle stringhe che rappresentano quest'ultimi. Tutti i geni a valle del punto selezionato vengono scambiati tra i due individui, generando in questo modo i rispettivi figli che entreranno a far parte della generazione successiva. Questo metodo risulta essere estremamente semplice, ma allo stesso tempo comporta una minore diversità nella popolazione dei *figli*. Questa tipologia di operazione può essere schematizzata indicando con \bar{G} e \bar{g} le stringhe che rappresentano i generici genitori:

$$\bar{G} = \langle G_1, G_2, G_3, \dots, G_k, G_{k+1}, \dots, G_M \rangle; \quad \bar{g} = \langle g_1, g_2, g_3, \dots, g_k, g_{k+1}, \dots, g_M \rangle$$

Dove G_i e g_i indicano i vari geni che costituiscono i cromosomi dei *genitori*, con $i = 1, 2, \dots, M$ ed M indica la dimensione delle stringhe.

Applicando l'operazione di *crossover* nella generica posizione k , possono essere ottenuti i figli:

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle G_1, G_2, G_3, \dots, G_k, G_{k+1}, \dots, G_M \rangle \\ \langle g_1, g_2, g_3, \dots, g_k, g_{k+1}, \dots, g_M \rangle \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \langle G_1, G_2, G_3, \dots, g_k, g_{k+1}, \dots, g_M \rangle \\ \langle g_1, g_2, g_3, \dots, G_k, G_{k+1}, \dots, G_M \rangle \end{array} \right.$$

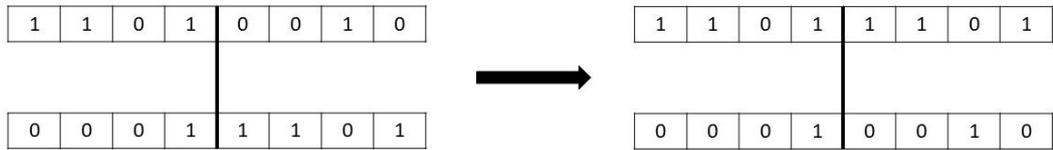


Figura 24: applicazione del Single point crossover.

- **Two point & k-point crossover:** analogamente al caso precedente, dopo aver selezionato due *genitori*, si procede con la scelta casuale di due o più punti (k punti) di crossover. I segmenti delle stringhe (serie di geni) che possono essere individuati tra i punti di crossover partecipano allo scambio tra i due individui.

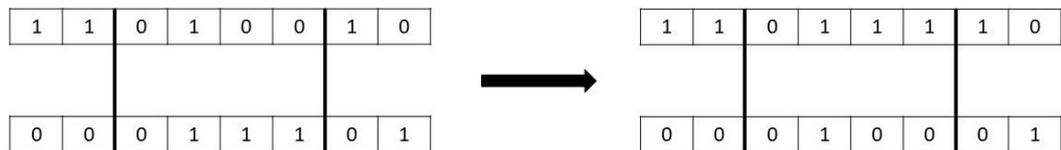


Figura 25: applicazione del Two point crossover.

- **Uniform crossover:** questa tecnica di *crossover* prevede lo scambio tra uno o più geni selezionati casualmente, tra i due *genitori*. Questo metodo permette di ricombinare i geni in maniera più efficace.

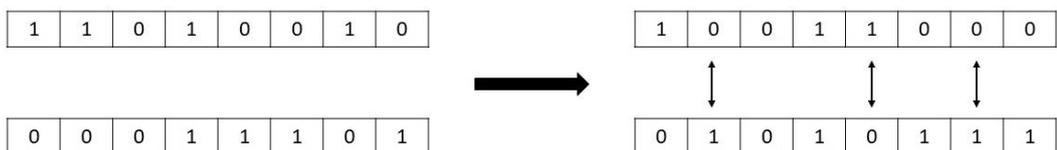


Figura 26: applicazione dell'Uniform crossover.

- **Partially matched crossover:** dopo aver selezionato i due individui da far accoppiare, si individuano delle sequenze di geni all'interno di ciascuno di questi ultimi (*genitori*) i quali vengono trasmessi direttamente alla progenie. I geni contenuti nella corrispondente sequenza all'interno del cromosoma dell'altro genitore partecipano in maniera parziale e casuale alla formazione del nuovo individuo (*figlio*), mentre i restanti bit vengono direttamente ricopiati (Figura 27).

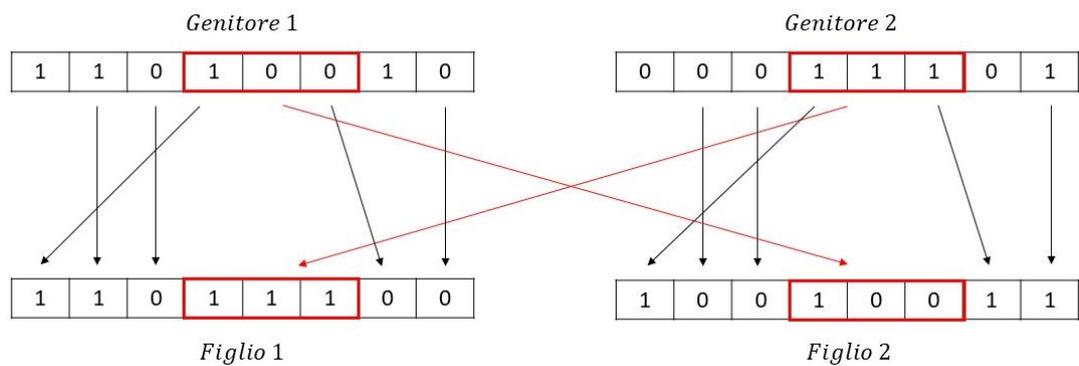


Figura 27: esempio schematico del meccanismo di funzionamento del Partially matched crossover.

È necessario, tuttavia, sottolineare che il *crossover*, pur essendo il meccanismo che permette la creazione di nuove generazioni, può portare in alcuni casi alla nascita di individui con caratteristiche inferiori rispetto a quelle dei *genitori*. Questo aspetto non deve essere sottovalutato per evitare la convergenza prematura e l'ottenimento di soluzioni subottimali.

3.2.4 Operazioni di Mutazione

Se le operazioni di crossover e duplicazione permettono la generazione di individui dotati di buone caratteristiche, è vero che i geni appartenenti ai vari cromosomi risultano essere gli stessi di generazione in generazione, seppur ricombinati in sequenze differenti e generalmente migliori. È necessaria l'applicazione di operatori di mutazione, i quali hanno principalmente il compito di mantenere la diversità genetica tra i vari cromosomi ed estendere la ricerca di soluzioni ottime in un dominio più ampio, evitando la convergenza prematura degli *AG* verso una soluzione di ottimo locale. Nel caso più generale la mutazione consiste nella modifica di uno o più bit (*geni*) appartenenti alla stringa considerata e può avvenire attraverso due principali azioni quali:

- *Lo scambio dei valori* di uno o più bit con i corrispondenti *alleli*. Nel caso di *codifica binaria*, la generica mutazione applicata ad un singolo gene può essere schematizzata tramite:

$$\langle G_1, G_2, G_3, \dots, G_k = 1, \dots, G_M \rangle \Rightarrow \langle G_1, G_2, G_3, \dots, G_k = 0, \dots, G_M \rangle$$

In Figura 28 è possibile osservare un esempio dell'applicazione della mutazione multipla su di un generico cromosoma.



Figura 28: applicazione della mutazione dei geni in più punti, nel caso di codifica binaria.

- *La modifica dell'ordine* dei geni all'interno del cromosoma. Il meccanismo più elementare che può essere rappresentato è l'*inversione* ad un punto (scelto casualmente):

$$\langle G_1, G_2, G_3, \dots, G_k, G_{k+1}, \dots, G_M \rangle \Rightarrow \langle G_1, G_2, G_3, \dots, G_M, G_{M-1}, \dots, G_k \rangle$$

In Figura 29 può essere visualizzata l'applicazione di questa tipologia di meccanismo.

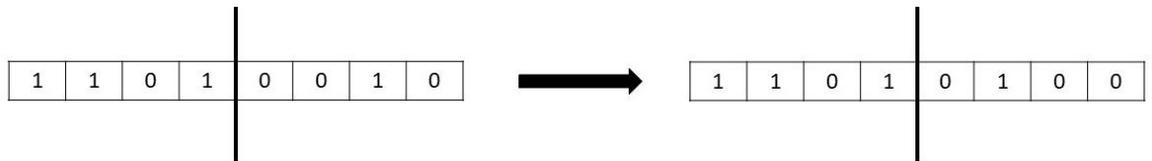


Figura 29: applicazione dell'inversione nel caso di singolo punto di inversione.

L'azione di ogni *operatore genetico* all'interno degli *AG* è associata ad una *probabilità* e, per quanto riguarda la mutazione degli individui, quest'ultima risulta generalmente essere bassa analogamente alla probabilità che avvengano mutazioni nel processo di evoluzione biologica di un individuo.

Tra le principali tecniche utilizzate per la mutazione dei cromosomi, possono essere elencate:

- **Simple inversion mutation:** questa tecnica prevede la selezione di una sequenza di geni tra due punti generici all'interno della stringa, l'inversione della porzione di stringa individuata e il posizionamento casuale di quest'ultima all'interno del cromosoma.
- **Scrumble mutation:** questa tipologia di mutazione consiste nella disposizione casuale dei geni del cromosoma e nella valutazione dell'eventuale miglioramento delle prestazioni dell'individuo (maggiore *fitness*), selezionando quello più performante.

Volendo ricapitolare il meccanismo di funzionamento del generico *algoritmo genetico* di base, quest'ultimo può essere suddiviso nei seguenti step:

- I. Generazione della popolazione iniziale contenente N individui/cromosomi.
- II. Calcolo delle *fitness function* di ciascun individuo appartenente alla popolazione.
- III. Processo di selezione delle coppie di *genitori* (tramite i metodi precedentemente elencati).
- IV. Generazione di nuovi individui tramite l'operatore di *crossover*.
- V. Eventuale mutazione casuale all'interno di uno o più cromosomi ad opera dell'operatore di *mutazione*.
- VI. Duplicazione degli individui "migliori" dalla generazione precedente alla successiva.
- VII. Raggiungimento di una popolazione di N nuovi cromosomi (*figli*) e calcolo delle nuove *fitness function*.
- VIII. Ripetizione ciclica degli step precedenti partendo dalla selezione delle nuove coppie di individui che daranno origine alla progenie.
- IX. Stop dell'algoritmo al raggiungimento dei criteri di arresto imposti.

3.3 Particle Swarm Optimization

Nell'ambito delle tecniche di ottimizzazione, può essere brevemente introdotto un ulteriore metodo ovvero il **Particle Swarm Optimization**.

Il *PSO* è un metodo euristico di natura stocastica fondato sul concetto di **SI (Swarm Intelligence)**, ovvero quel ramo al quale appartengono tutte le tecniche di ottimizzazione basate sull'interazione dei componenti di un sistema con l'ambiente circostante, il quale comprende i componenti stessi, in grado di far emergere un comportamento collettivo volto alla sopravvivenza dell'insieme. Come può essere intuito dal nome, i metodi *PSO* cercano di mimare il comportamento degli "sciame" e in particolare prendono ispirazione dal comportamento degli stormi di uccelli, osservando come il singolo individuo si comporta all'interno della collettività e l'impatto che può avere su quest'ultima. Una caratteristica peculiare di questa tipologia di metodi è legata alle diverse tipologie di interazioni che possono essere sfruttate, le quali possono diversificarsi in due principali categorie:

- 1) *Interazione diretta*: questa interazione tra i componenti dell'insieme avviene sfruttando lo scambio di informazioni che, dall'analogia con gli stormi di uccelli, possono derivare dai sensi dei componenti ovvero da un'interazione fisica tra questi ultimi.
- 2) *Interazione indiretta*: indica la tipologia di interazione che avviene tramite l'ambiente esterno. In particolare i diversi componenti del sistema possono comunicare variando le proprietà dell'ambiente circostante (Ref. [B17]).

Volendo descrivere nello specifico i meccanismi che caratterizzano il metodo *PSO* deve essere sottolineato che ogni potenziale soluzione generata da quest'ultimo (in analogia all'*AG*) viene trattata come una particella avente una determinata velocità di volo, in moto all'interno dello spazio, proprio come un singolo individuo di uno stormo di uccelli. L'ottimizzazione svolta dal *PSO* scaturisce dalla metodologia tramite la quale vengono determinati i valori delle velocità e delle posizioni delle particelle di iterazione in iterazione. Queste ultime infatti sono ottenute combinando in maniera opportuna, per ciascuna particella, i valori raggiunti in corrispondenza della sua miglior posizione fino a quel momento e i migliori valori raggiunti all'interno dell'intero sciame, sempre fino al momento considerato. Da un'iterazione all'altra le particelle si muovono quindi verso la loro precedente posizione migliore e contemporaneamente verso la posizione migliore a livello globale. Questo evidenzia che il comportamento dell'individuo (particella) influenza quello dell'intero insieme tramite lo scambio di informazioni tra le particelle "vicine", il quale permette di progredire verso una soluzione di ottimo globale.

Quanto è stato espresso può essere descritto, come è stato effettuato in Ref. [B17], tramite le seguenti espressioni per il calcolo della velocità e posizione di ciascuna particella per la generica iterazione k :

$$\bullet \quad \vec{v}_i^{k+1} = \omega \vec{v}_i^k + c_1 \vec{r}_1 (\vec{p}_{migliore_i}^k - \vec{x}_i^k) + c_2 \vec{r}_2 (\vec{g}_{migliore_i}^k - \vec{x}_i^k) \quad (3.17)$$

$$\bullet \quad \vec{x}_i^{k+1} = \vec{x}_i^k + \vec{v}_i^{k+1} \quad (3.18)$$

Dove:

- \vec{v}_i^k e \vec{x}_i^k rappresentano rispettivamente la velocità e la posizione dell' i -esima particella per la k -esima iterazione.
- \vec{v}_i^{k+1} e \vec{x}_i^{k+1} rappresentano rispettivamente la velocità e la posizione dell' i -esima particella per la $k + 1$ -esima iterazione.
- ω rappresenta il coefficiente di inerzia, il quale viene utilizzato per bilanciare la sovrapposizione degli effetti locali ($\vec{p}_{migliore_i}^k$) e globali ($\vec{g}_{migliore_i}^k$).
- $\vec{p}_{migliore_i}^k$ e $\vec{g}_{migliore_i}^k$ indicano rispettivamente la precedente migliore posizione occupata dalla i -esima particella e la precedente migliore posizione a livello globale all'interno dell'insieme di individui.
- \vec{r}_1 ed \vec{r}_2 rappresentano dei vettori casuali che possono assumere valori all'interno dell'intervallo $[0,1]$.
- c_1 e c_2 sono dei coefficienti di "accelerazione".

Nell'equazione 3.17, può essere osservata la presenza di tre principali contributi legati alla velocità assunta dalla particella in corrispondenza della precedente iterazione ($\omega \vec{v}_i^k = \text{componente inerziale}$), al moto della particella verso la sua precedente posizione migliore ($c_1 \vec{r}_1 [\vec{p}_{migliore_i}^k - \vec{x}_i^k] = \text{componente cognitiva}$) e infine al moto della particella verso la miglior soluzione raggiunta a livello globale dovuto all'effetto collettivo dell'insieme ($c_2 \vec{r}_2 [\vec{g}_{migliore_i}^k - \vec{x}_i^k] = \text{componente sociale}$).

Capitolo 4: Missione e Modello adottato

Il seguente capitolo si pone l'obiettivo di fornire una descrizione più approfondita delle principali caratteristiche della missione considerata, ovvero quella proposta all'interno del *GTOC9* (*Capitolo 1.2*), cercando di valutare il comportamento dei detriti spaziali e del *chaser* per l'intera durata temporale della campagna di rimozione.

Verrà in seguito approfondito il lavoro svolto e in particolare i metodi e i modelli adottati per ottenere una stima rapida dei costi della campagna di rimozione, considerando i vari vincoli e restrizioni (riguardanti le tempistiche) che caratterizzano quest'ultima.

4.1 Caratteristiche della missione

Come è stato precedentemente accennato all'interno del *Capitolo 1.2*, la missione proposta dal *GTOC9* prevede l'ottimizzazione di una campagna di rimozione di 123 detriti in orbita LEO Eliosincrona quasi circolare attorno alla Terra, tramite diverse missioni caratterizzate da Rendez-Vous multipli.

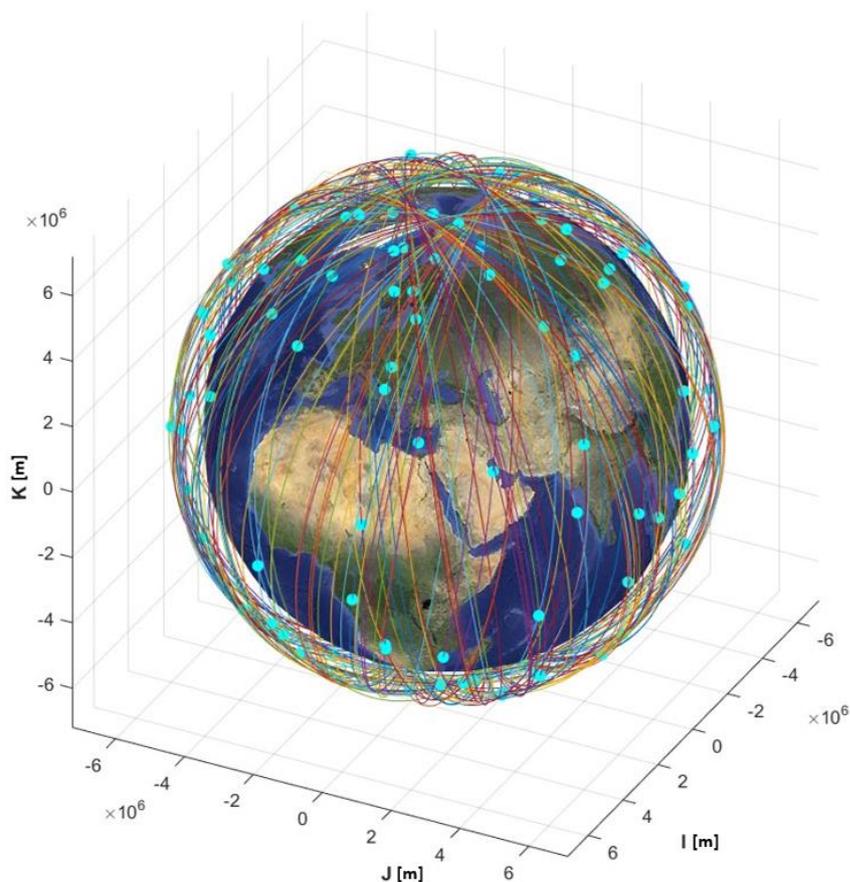


Figura 30: rappresentazione grafica della distribuzione delle orbite percorse dai detriti (indicati con i punti di color ciano) attorno alla Terra, per una certa epoca.

La vicinanza al pianeta Terra comporta generalmente diverse complicazioni che riguardano principalmente la presenza delle perturbazioni (Capitolo 2.3), le quali rendono più complessa la determinazione e lo studio del moto dei detriti nello spazio. Nell'ambito del problema proposto dal gruppo dell'ESTEC e nella seguente trattazione, sono state adottate alcune ipotesi semplificative che riguardano principalmente gli effetti delle perturbazioni considerate. Sono stati assunti come unici effetti perturbativi presenti, i disturbi gravitazionali del campo terrestre e nello specifico l'effetto dello schiacciamento ai poli caratteristico della superficie della Terra (J_2) il quale provoca la rotazione (precessione/regressione) della linea dei nodi, della linea degli apsidi e dell'anomalia media delle orbite percorse dai detriti. Le altre tipologie di perturbazioni come l'azione gravitazionale esercitata dalla presenza di altri corpi celesti, l'azione della pressione solare o ancora l'effetto della resistenza atmosferica sono stati volutamente trascurati per enfatizzare l'analisi del complesso campo di moto dei detriti sotto l'effetto del J_2 e incentivare lo sviluppo di strategie volte allo sfruttamento di quest'ultimo, per l'ottimizzazione della campagna di rimozione.

Sebbene i detriti considerati percorrano orbite caratterizzate da

- Valori di semiasse simili, con $a \in [6996.104, 7273.982] \text{ km}$
- Bassi valori di eccentricità, con $e \in [0.000131, 0.019318]$
- Valori di inclinazione simili, con $i \in [96.236, 101.067]^\circ$

Spesso queste ultime non giacciono nello stesso piano (anche se ciascuna orbita avesse la medesima inclinazione) a causa dei diversi valori di Ω da esse raggiunti sotto l'effetto del J_2 . Questo generalmente comporta costi esorbitanti (in termini di ΔV richiesto) per effettuare i costosi cambi di piano necessari per le trasferte volte alla rimozione dei detriti.

Benché l'effetto del J_2 renda decisamente più complesso lo studio del moto dei detriti, allo stesso tempo è possibile utilizzare a proprio favore quest'ultimo quando si affrontano missioni che prevedono Rendez-Vous multipli. Nello specifico il diverso rateo di variazione della RAAN ($\dot{\Omega}$), che caratterizza ogni detrito (Figura 31) in base al valore dell'inclinazione, del semiasse e dell'eccentricità dell'orbita percorsa (equazione 2.18), può essere utilizzato per ridurre i ΔV richiesti per effettuare le varie trasferte. È infatti possibile sfruttare i diversi $\dot{\Omega}$ che caratterizzano le orbite dei detriti, per raggiungere la condizione di "coplanarità" (a meno della differente inclinazione di queste ultime) dopo un adeguato tempo di attesa, riducendo drasticamente il costo della manovra di trasferta da un detrito verso il successivo. Questo metodo sfrutta il fenomeno della *precessione differenziale*

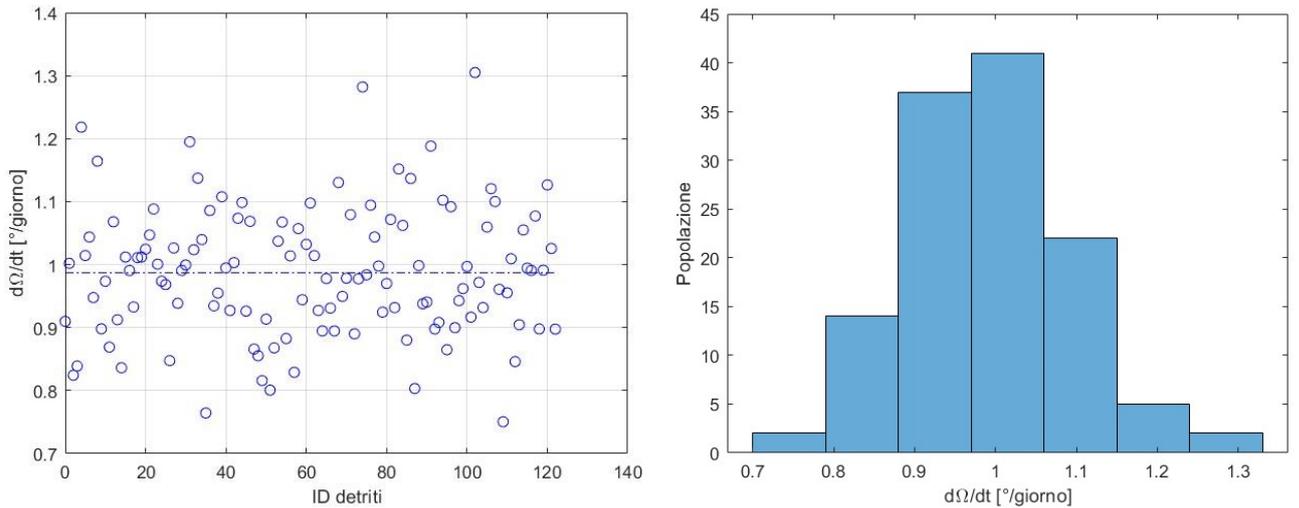


Figura 31: **sulla sinistra** sono raffigurati i diversi valori di $\dot{\Omega}$ associati alle orbite dei vari detriti. Il valore medio assunto da quest'ultimo è pari a $\dot{\Omega} = 0.9870 \frac{\circ}{\text{giorno}}$ e da un'idea della capacità perturbativa del J_2 perpetrata nel tempo. **A destra** è presente l'istogramma di $\dot{\Omega}$ attraverso il quale è possibile ricavare che circa 100 detriti appartengono al range di $\dot{\Omega} \in [0.88, 1.15] \frac{\circ}{\text{giorno}}$.

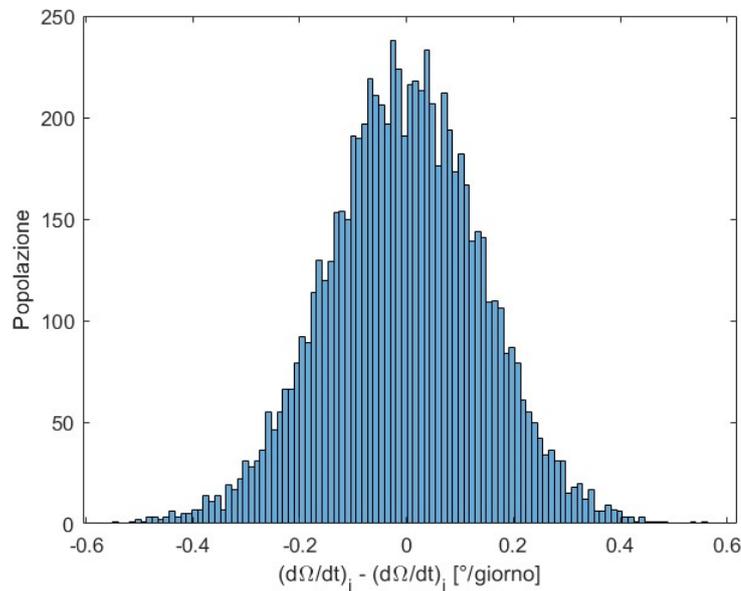


Figura 32: istogramma delle differenze di $\dot{\Omega}$ tra tutte le possibili coppie di detriti, indicati con i pedici i e j .

Sebbene questo fenomeno sia in grado di ridurre considerevolmente i ΔV legati alle manovre, è necessario sottolineare che nel caso di studio, i ratei di variazione della *RAAN* dei detriti considerati risultano essere relativamente simili tra loro ($\dot{\Omega} \in [0.7505, 1.3049] \frac{\circ}{\text{giorno}}$), come può essere osservato in Figura 31.

Conseguentemente, come riportato in Figura 32, si evince che per la grande maggioranza delle possibili coppie di detriti (i, j), la differenza tra i ratei di variazione della *RAAN* ($\Delta\dot{\Omega}_{ij} = \dot{\Omega}_i - \dot{\Omega}_j$) risulta essere contenuta e ciò pone un grande limite per l'utilizzo della *precessione differenziale* come strumento di riduzione dei costi della campagna. In particolare, se la differenza tra i valori delle *RAAN* di due detriti da rimuovere in successione dovesse essere elevata e allo stesso tempo questi ultimi fossero

caratterizzati da un valore di $\Delta\dot{\Omega}_{ij}$ molto piccolo, l'attesa dell'annullamento del $\Delta\Omega$ iniziale (coplanarità) tramite la variazione di Ω_i e Ω_j richiederebbe un tempo decisamente elevato.

Per questo motivo non è sempre possibile adottare una strategia che prevede l'attesa della coplanarità (strategia del *tempo di fasamento ottimale*, Capitolo 1.2), ma nel caso in cui dovessero essere presenti delle restrizioni sulla durata della missione, analogamente al caso in esame, è necessario l'utilizzo di un metodo capace di sfruttare l'effetto del J_2 e allo stesso tempo soddisfare i vincoli imposti. Quest'ultima strategia sarà descritta in maniera più approfondita all'interno della trattazione.

Un ulteriore aspetto che emerge dal problema proposto all'interno del *GTOC9* è la necessità di effettuare un'opportuna scelta dell'ordine di rimozione dei vari detriti, dei tempi di trasferta e di attesa delle diverse missioni (problema di calcolo combinatorio), infatti quest'ultimi risultano cruciali per l'ottimizzazione dell'intera campagna. Questa problematica si presenta come una variante del *TSP*, e in particolare può essere considerata un *TDSP (Time Dependent TSP)*, essendo legata contemporaneamente alla ricerca della sequenza di rimozione dei detriti e dei tempi che permettono il raggiungimento del consumo minimo (in analogia al percorso più breve), tenendo conto che con la rimozione dei detriti la determinazione di manovre "economiche" fra i detriti rimanenti diventa sempre più difficoltosa. Nella seguente trattazione verrà fatto riferimento alle sequenze di rimozione determinate dal gruppo del JPL (Ref. [B14]), riportate in Tabella 1.

Volendo fornire un'idea della distribuzione dei detriti considerati all'interno dell'ambiente LEO, sono in seguito riportati dei grafici contenenti i valori dei parametri orbitali e degli istogrammi in grado di evidenziare il numero di detriti appartenenti ai diversi range di valori. La tabella che contiene i numeri identificativi, le epoche di avvistamento e i parametri orbitali dei relativi detriti, è riportata in APPENDICE A.

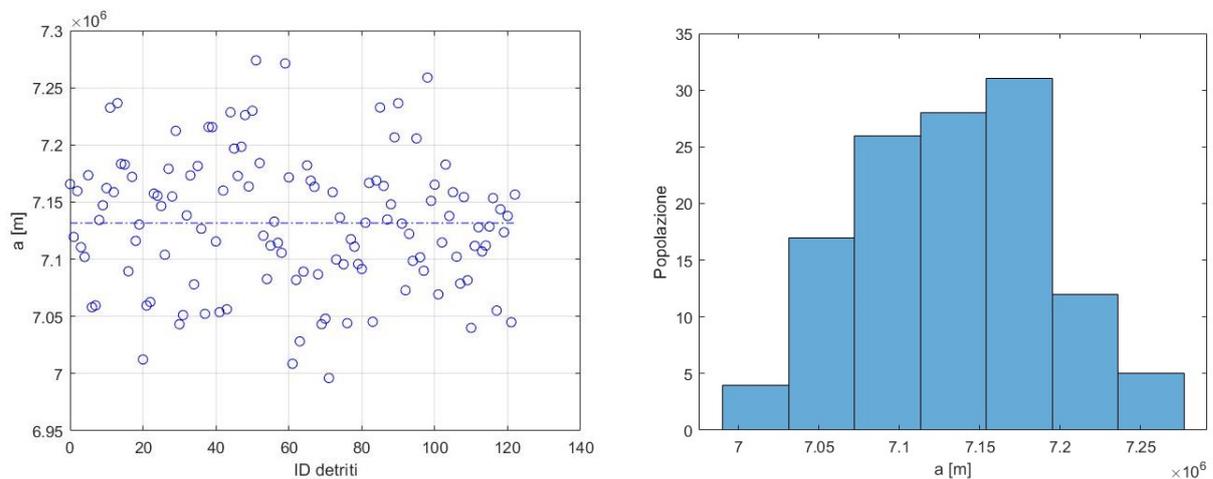


Figura 33: *sulla sinistra* sono raffigurati i diversi valori di semiasse maggiore che caratterizzano le orbite dei vari detriti, i quali sono stati indicati con il numero identificativo riportato in APPENDICE A. È stato inoltre riportato il valore medio del semiasse maggiore pari ad $a = 7.13159 \cdot 10^6$ m. In generale i valori assunti dai diversi semiasse maggiori, risultano essere relativamente elevati e questo permette di semplificare la trattazione trascurando l'effetto del Drag che alle quote elevate risulta essere sempre meno impattante. *A destra* è riportato un istogramma utile per visualizzare facilmente i range dei valori di semiasse più densamente popolati, ovvero $a \in [7.072 \cdot 10^6, 7.195 \cdot 10^6]$ m contenente 85 detriti.

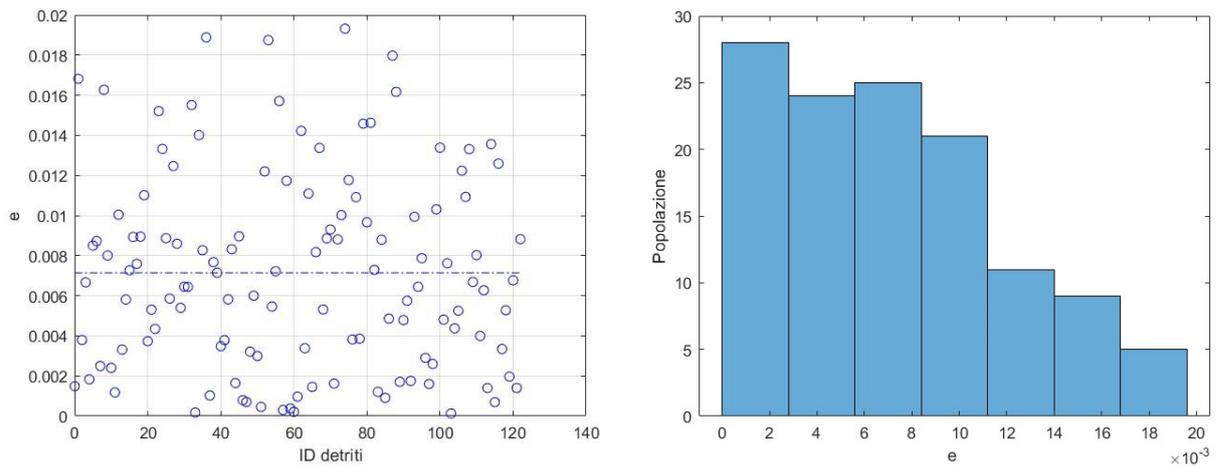


Figura 34: **sulla sinistra**, analogamente al caso precedente, sono stati raffigurati i diversi valori di eccentricità associati alle orbite dei vari detriti. Il valore medio assunto da quest'ultima è pari ad $e = 0.007144$ e questo rafforza le ipotesi di orbite quasi circolari, considerando i bassi valori assunti. **A destra** è presente l'istogramma delle eccentricità, ed è possibile osservare che la grande maggioranza dei detriti risulta essere caratterizzata da valori bassi di eccentricità, infatti ben 92 detriti appartengono al range di $e \in [0, 0.0112]$.

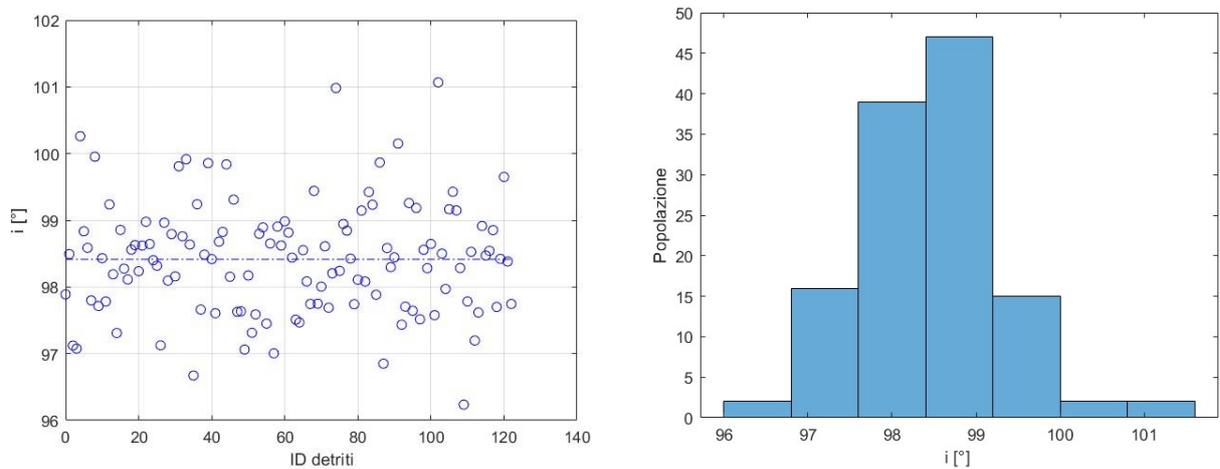


Figura 35: **sulla sinistra** sono riportati i diversi valori di inclinazione caratteristici delle orbite dei vari detriti. Il valore medio assunto da questo parametro è pari ad $i = 98.4147^\circ$, questo risultato non stupisce ricordando che le orbite percorse dai detriti sono Eliosincrone e, in conseguenza, caratterizzate da valori di inclinazione prossimi a 90° . **A destra** è presente l'istogramma delle inclinazioni, ed è possibile osservare che più di 80 detriti appartengono al range di $i \in [97.6, 99.2]^\circ$.

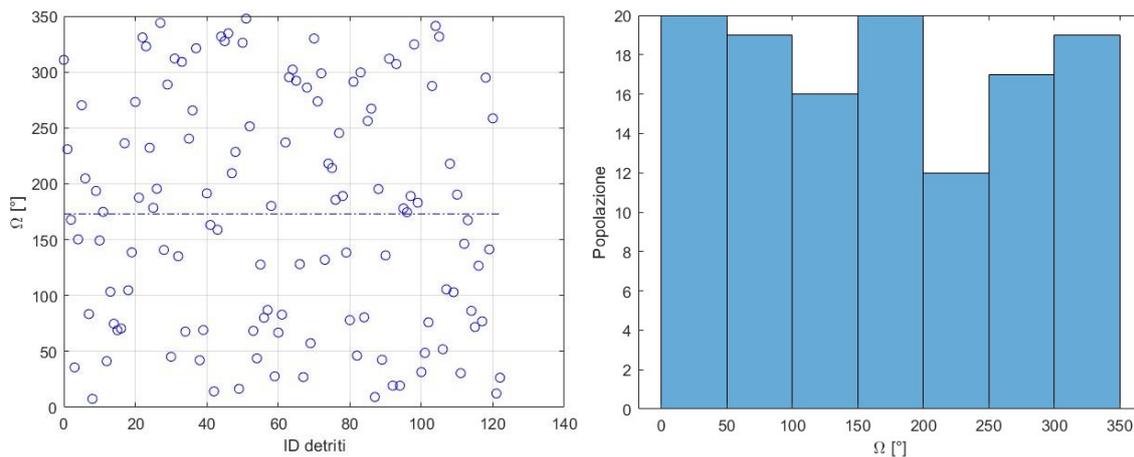


Figura 36: **sulla sinistra** sono riportati i diversi valori di Ω delle orbite dei vari detriti in corrispondenza di una rispettiva epoca (tempo di avvistamento). La conoscenza di quest'ultima (APPENDICE A) è fondamentale poiché, a differenza dei parametri precedenti (a , e ed i), la RAAN di ciascuna orbita non è costante ma, nell'ambito delle ipotesi effettuate, è soggetta all'azione dello schiacciamento della Terra ai poli che ne comporta la variazione nel tempo. Si può osservare facilmente l'impatto di questo effetto nel tempo osservando che i valori di Ω di ciascuna orbita sono distribuiti in maniera quasi uniforme all'interno dei 360° disponibili. Ciascuna orbita, in base ai suoi parametri orbitali a , e ed i , sperimenta un $\dot{\Omega}$ differente. **A destra** è presente l'istogramma delle RAAN ed è possibile osservare nuovamente la distribuzione dei valori misurati per le rispettive epoche.

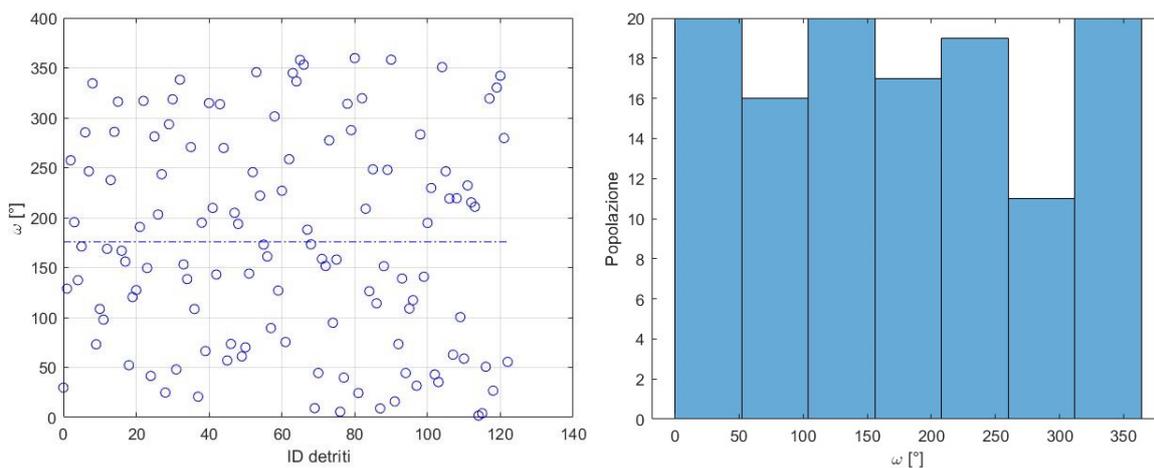


Figura 37: **sulla sinistra** sono riportati i diversi valori di ω delle orbite dei vari detriti in corrispondenza di una rispettiva epoca (tempo di avvistamento). Analogamente al caso della RAAN, i valori di ω variano nel tempo a causa dell'effetto del J_2 . **A destra** è presente l'istogramma degli ω ed è possibile osservare anche in questo caso la distribuzione quasi uniforme all'interno dei 360° .

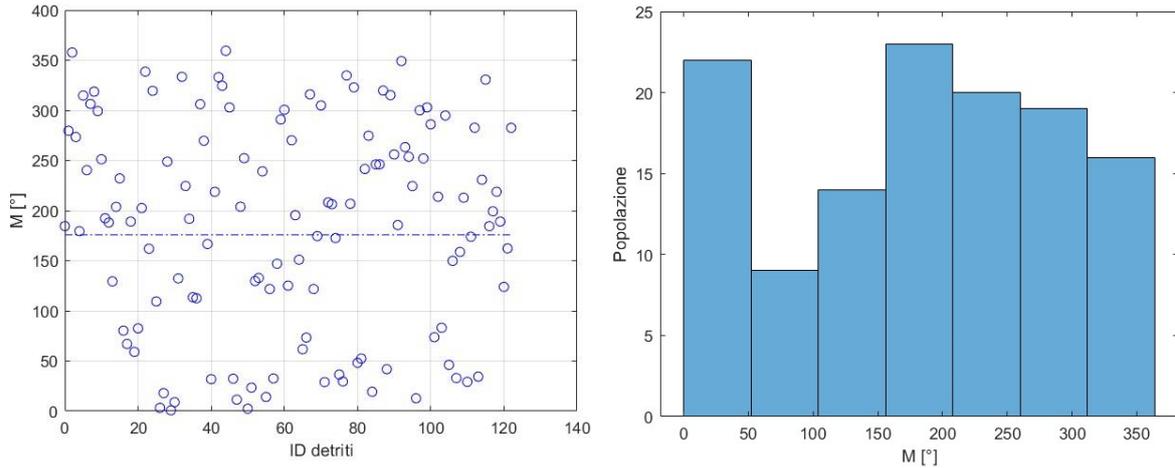


Figura 38: **sulla sinistra** sono riportati i diversi valori di M delle orbite dei vari detriti per una rispettiva epoca (tempo di avvistamento). In analogia ai due casi precedenti, anche per l'anomalia media l'effetto del J_2 risulta essere impattante. In particolare quest'ultimo comporta una variazione nel tempo aggiuntiva (equazione 1.19), rispetto al caso non perturbato per il quale si ha semplicemente che $\dot{M} = n$. **A destra** è presente l'istogramma delle M ed è possibile osservare anche in questo caso la distribuzione quasi uniforme all'interno dei 360° .

4.2 Modello dinamico

Per descrivere il moto dei detriti attorno al pianeta Terra, considerando l'effetto delle perturbazioni, sono stati sviluppati nel corso degli anni diversi metodi che permettono la propagazione delle orbite. Naturalmente a causa della grande complessità del campo di moto in presenza delle perturbazioni, questi metodi permettono di effettuare delle predizioni limitate, che necessitano di un aggiornamento dei parametri orbitali ripetuto nel tempo. Tra questi metodi, quello che comunemente viene utilizzato è l'*SGP4* (*Simplified General Perturbation*, Ref. [B6]), il quale permette di determinare le orbite dei detriti partendo dalle informazioni contenute nella codifica TLE (*Two Line Elements*).

Nella seguente trattazione verrà invece utilizzato un modello semplificato, il quale tiene conto esclusivamente dell'effetto perturbativo del J_2 e prevede l'utilizzo dei parametri orbitali osculatori riportati in APPENDICE A, per propagare le orbite di ciascun detrito. Ricordando le equazioni introdotte nel Capitolo 2.3.4:

$$\dot{\Omega} = \frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3}{2} \left(\frac{R_E}{p}\right)^2 n J_2 \cos(i) \quad (2.17)$$

$$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{3}{4} \left(\frac{R_E}{p}\right)^2 n J_2 [5 \cos^2(i) - 1] \quad (2.18)$$

$$\dot{M} = \frac{dM}{dt} = n + \frac{3}{4} \left(\frac{R_E}{p}\right)^2 n J_2 \sqrt{1 - e^2} [3 \cos^2(i) - 1] \quad (2.19)$$

Avendo trascurato tutte le perturbazioni in grado di modificare l'energia meccanica delle orbite (Capitolo 2.3), è stata effettuata un'ulteriore ipotesi riguardante alcuni dei loro parametri orbitali, ovvero a , e ed i . Questi ultimi infatti sono considerati costanti e ciò rende possibile esprimere i valori di Ω , ω e M in funzione del tempo poiché $\dot{\Omega}$, $\dot{\omega}$ e \dot{M} , dalle equazioni (2.17), (2.18) e (2.19), possono essere considerati con buona approssimazione valori costanti, essendo dipendenti da a , e ed i . Integrando le equazioni precedentemente elencate, possono essere facilmente ricavate le relazioni che descrivono l'evoluzione dei tre parametri in funzione del tempo:

$$\Omega = \Omega_0 + \dot{\Omega} (t - t_0) \quad (4.1)$$

$$\omega = \omega_0 + \dot{\omega} (t - t_0) \quad (4.2)$$

$$M = M_0 + \dot{M} (t - t_0) \quad (4.3)$$

Dove t_0 indica l'epoca di avvistamento del generico detrito (APPENDICE A), ovvero il momento in corrispondenza del quale è stata effettuata la misurazione; Ω_0 , ω_0 e M_0 indicano i valori misurati per $t = t_0$.

Conoscendo i valori iniziali dei parametri orbitali misurati in corrispondenza di una determinata epoca per ciascun detrito, è possibile valutare il valore assunto da questi ultimi per qualsiasi $t > t_0$ tramite le equazioni (4.1), (4.2) e (4.3). Accoppiando a queste ultime l'equazione caratteristica del *problema di Keplero*, ovvero:

$$M = E - e \sin(E) \quad (4.4)$$

È possibile ricavare il valore dell'*anomalia eccentrica* (E) e successivamente quello dell'*anomalia vera* (v), tramite la relazione geometrica:

$$\tan\left(\frac{E}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan\left(\frac{v}{2}\right) \quad (4.5)$$

Sfruttando le equazioni precedentemente elencate, possono essere determinate facilmente le posizioni e le velocità assunte da ciascun detrito al variare del tempo, come è riportato in APPENDICE B.

La propagazione effettuata tramite il modello semplificato risulta essere sufficientemente accurata per questa analisi preliminare e, tramite la comparazione con i risultati ottenuti con l'SGP4 (Ref. [B15],[B16]), risulta approssimare bene molti dei parametri orbitali come a , e , i e Ω .

Al contrario, per quanto riguarda ω e M i risultati ottenuti si discostano sensibilmente da quelli dell'SGP4, ma questo non comporta problemi eccessivi per il calcolo dei ΔV per ogni arco/tratto delle missioni grazie alla bassa *eccentricità* che caratterizza le diverse orbite (ΔV_ω , contenuto) e al basso costo delle eventuali manovre di fasamento (ΔV_v , contenuto), rispetto ai ΔV della missione.

4.3 Vincoli della missione

All'interno di questo paragrafo verranno elencati le principali tipologie di vincoli precedentemente accennati, che sono stati imposti sull'intera campagna di rimozione e che, come si osserverà in seguito, hanno avuto un grande impatto sull'ottimizzazione delle diverse missioni considerate.

È utile sottolineare che i vincoli imposti permettono di effettuare la ricerca delle soluzioni in un dominio più ristretto, rendendo più agevole e rapido il raggiungimento della condizione ottimale a seguito della diminuzione del numero di possibili soluzioni valide.

Ricordando che ciascuna missione è caratterizzata da manovre di *Rendez-Vous multiple*, le restrizioni imposte condizionano allo stesso tempo l'intera missione e ciascun arco/tratto ad essa appartenente, influenzando direttamente i costi da sostenere per portare a termine l'intera campagna di rimozione.

I principali vincoli imposti sono in seguito elencati (Ref. [B13]):

- I tempi di attesa (t_w) tra l'arrivo in corrispondenza del detrito e la successiva partenza, devono essere maggiori o uguali a cinque giorni ($t_w \geq 5$ giorni). Questo vincolo è legato al tempo di *Rendez-Vous* minimo ($t_{RV_{min}} = 5$ giorni) con ciascun detrito, necessario al veicolo per installare il *de-orbit package*.
- Il tempo trascorso tra l'inizio di due *Rendez-Vous* successivi non deve superare i trenta giorni ($t_{TOF} + t_w \leq 30$ giorni), con t_{TOF} (time of flight) che indica la durata della singola trasferta
- la durata complessiva dell'intera campagna di rimozione non deve superare gli otto anni ($t_{TOT} \leq 8$ anni). In particolare, la finestra di tempo a disposizione dell'intera campagna è definita come: $23467 \leq t_{mission} \leq 26419$ MJD2000 (*Modified Julian Day 2000*⁸).
- Il tempo trascorso tra la fine di una missione (t_e) e l'inizio della successiva (t_s) deve essere maggiore o uguale a 30 giorni ($t_m = t_{s_{i+1}} - t_{e_i} \geq 30$ giorni, con i = numero della missione).
- Possono essere implementate solamente manovre di tipo impulsivo, con conseguenti variazioni di velocità istantanee. Inoltre, il massimo numero di impulsi per ciascuna trasferta non può essere maggiore di 5.

Analizzando i vincoli introdotti, si osserva immediatamente che le restrizioni che questi ultimi pongono in termini di tempistiche sulle varie missioni rendono più complesso il raggiungimento di costi contenuti ed obbligano ad effettuare una scelta riguardante i metodi e modelli adottati per la risoluzione del problema, i quali saranno approfonditi nel paragrafo successivo.

⁸ Il Modified Julian Day 2000 indica il numero di giorni trascorsi dalla mezzanotte UTC (*Coordinated Universal Time*) del 1° gennaio del 2000. Questo sistema di numerazione delle date è stato sviluppato per semplificare e uniformare il calcolo dei giorni partendo dai diversi calendari che si sono susseguiti nel corso dei secoli.

4.4 Valutazione del costo delle trasferte

Avendo presente l'obiettivo da raggiungere ovvero la minimizzazione del costo dell'intera campagna di rimozione, risulta necessario essere in grado di determinare i ΔV richiesti per ciascuna manovra di Rendez-Vous appartenente alla k -esima sequenza caratteristica di rimozione, con $k = 1,2,3 \dots, 10$ (Tabella 1). In particolare, verrà in seguito effettuata una descrizione più approfondita del metodo utilizzato per la stima dei ΔV di ciascun arco/tratto della sequenza considerata, in funzione dei vari tempi di trasferta (t_{TOF}) e indirettamente dei tempi di attesa (t_w).

Ricordando quanto introdotto in precedenza rispetto all'utilizzo dell'effetto perturbativo del J_2 per ridurre il costo delle manovre di rimozione sfruttando il fenomeno della *precessione differenziale* e tenendo conto dei vincoli che agiscono sul sistema, è facile comprendere che la strategia adottata all'interno del lavoro non è basata sull'attesa del "*fasamento ottimale*", del quale per completezza verrà in seguito fornita una breve descrizione, poiché quest'ultimo può richiedere tempi molto elevati affinché si manifesti la condizione ottimale. A causa dei tempi ristretti che vincolano ciascuna sequenza, la strategia utilizzata è basata sul considerare la limitatezza del tempo di trasferta disponibile per ciascun arco, pur sfruttando ove possibile i diversi valori assunti da $\dot{\Omega}$ per ciascun detrito per ridurre i costi delle manovre.

Lo schema generale adottato per ogni fase della campagna di rimozione prevede, in corrispondenza dell'epoca di inizio della missione analizzata (Tabella 1, Ref. [B14]), che lo *spacecraft* utilizzato per la rimozione di ciascun detrito venga considerato direttamente in condizioni di Rendez-Vous con il primo detrito della corrispondente sequenza, non includendo in questo modo (all'interno dell'ottimizzazione svolta) le operazioni e i costi legati al posizionamento di quest'ultimo tramite l'utilizzo del lanciatore. Dopo aver completato le operazioni di *Rendez-Vous* necessarie all'installazione del *de-orbit package*, che permette la rimozione del detrito visitato, e trascorso il t_w (Paragrafo 4.3) il *chaser* prosegue in maniera analoga effettuando una manovra di avvicinamento verso il detrito successivo fino alla rimozione completa dell'intera sequenza che caratterizza la missione. È necessario sottolineare che, nell'ambito del lavoro svolto, ciascun detrito può essere considerato rimosso se il *chaser* resta in prossimità del detrito stesso per un tempo superiore a 5 giorni (Paragrafo 4.3) completando il *Rendez-Vous* e, in aggiunta, se per una certa epoca la posizione e la velocità dello *spacecraft* coincidono con quelle assunte dal detrito da rimuovere.

In particolare la dinamica del *chaser* può essere descritta tramite l'utilizzo di due modelli differenti a seconda della fase della missione considerata. Durante la fase di *Rendez-Vous*, il moto di quest'ultimo coincide con quello del corrispondente detrito ed è descritto dal modello introdotto nel Paragrafo 4.2; per quanto riguarda la modellazione della dinamica del *chaser* durante la trasferta da un detrito verso il successivo, questa risulta essere determinata utilizzando delle relazioni che verranno descritte in maniera più approfondita in seguito. In generale queste ultime permettono di considerare e sfruttare l'effetto del J_2 durante la trasferta pur semplificandone la valutazione.

Prima di passare alla descrizione del metodo utilizzato per la valutazione dei ΔV , il quale considera le restrizioni imposte sui tempi di trasferta (Metodo del **Tempo di Trasferta Limitato**), si riporta brevemente il metodo alternativo che permetterebbe idealmente di ridurre i consumi della campagna attendendo il tempo ottimale (di fasamento) tra le orbite dei detriti considerati (Metodo del **Tempo di Fasamento Ottimale**) (Ref. [B15]).

Tempo di Fasamento ottimale

Come è stato più volte accennato all'interno del Capitolo presente, questa tecnica sfrutta la variazione delle Ω dei detriti (causata dal J_2) per ottenere il fasamento ottimale tra le RAAN delle coppie di detriti visitati in successione (coplanarità) riducendo in questo modo il ΔV da fornire per ciascun arco, non dovendo più effettuare la correzione dei valori della RAAN poiché la condizione $\Delta\Omega_{ij} = \Omega_i - \Omega_j = 0$ (con i, j che indicano i due detriti considerati) risulta verificata.

Il tempo di attesa ottimale, per il quale si ha $\Delta\Omega_{ij} = 0$, può essere facilmente determinato imponendo l'uguaglianza dei valori assunti dalle Ω dei rispettivi detriti indicati con le lettere i e j . Ricordando l'equazione (4.1), si ricava immediatamente:

$$\Omega_i(t) = \Omega_i(t_0) + t \dot{\Omega}_i \quad (4.6)$$

$$\Omega_j(t) = \Omega_j(t_0) + t \dot{\Omega}_j \quad (4.7)$$

$$\Omega_i(t_0) + t_{ott} \dot{\Omega}_i = \Omega_j(t_0) + t_{ott} \dot{\Omega}_j + 2K\pi \quad (4.8)$$

Dove:

- t_0 rappresenta l'epoca di inizio della missione tra i due detriti successivi considerati, assumendo che il *chaser* sia in condizioni di *Rendez-Vous* con il primo detrito della sotto-sequenza (detrito i);
- $\Omega_i(t_{0_i})$ e $\Omega_j(t_{0_j})$ indicano i valori delle RAAN dei detriti in corrispondenza del rispettivo tempo di riferimento;
- $\dot{\Omega}_i$ e $\dot{\Omega}_j$ rappresentano la variazione nel tempo delle rispettive RAAN;
- t_{ott} indica il tempo in corrispondenza del quale le variazioni $\dot{\Omega}_i$ e $\dot{\Omega}_j$ comportano $\Omega_i(t_{ott}) = \Omega_j(t_{ott})$, ovvero il perfetto fasamento della RAAN dei due detriti considerati;
- K è un parametro scelto per ottenere il minimo $t_{ott} > 0$.

Dall'espressione (4.8) può essere ricavata la relazione esplicita del t_{ott} , la quale è riportata in segui

$$t_{ott} = \frac{\Omega_j(t_{0_j}) - \Omega_i(t_{0_i}) + 2K\pi}{\dot{\Omega}_i - \dot{\Omega}_j} \quad (4.9)$$

Ancora una volta è possibile osservare che la differenza tra i ratei di precessione $\Delta\dot{\Omega}_{ij}$ influenza pesantemente il tempo richiesto per raggiungere la condizione ottima $\Delta\Omega_{ij} = \Delta\Omega = 0$ e generalmente comporta il superamento dei vincoli imposti sulle tempistiche delle missioni.

Per quanto riguarda la determinazione del costo di ogni trasferta tra ciascuna coppia di detriti, viene utilizzata una relazione empirica basata sulle variazioni dei parametri orbitali. Considerando che la popolazione di detriti risulta essere caratterizzata da valori di a relativamente simili (Figura 33), il

contributo fornito al ΔV di ciascuna manovra necessario per la variazione del semiasse maggiore, può essere espresso tramite la valutazione del costo di una manovra di Hohmann caratterizzata da piccole variazioni di r (o analogamente di a) per la quale vale la relazione $\frac{\Delta V}{V_m} = \frac{1}{2} \frac{\Delta r}{r_m}$ (Ref. [B15])

Introducendo empiricamente i contributi dovuti alle restanti variazioni ($\Delta i, \Delta e$), non considerando il costo necessario per il fasamento della posizione del chaser rispetto al secondo detrito e l'aggiustamento della linea degli apsi, si ricava l'espressione utilizzata per la stima del costo delle trasferte:

$$\frac{\Delta V}{V_m} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a_m}\right)^2 + (\Delta i)^2 + (\Delta e)^2} \quad \text{con } \Delta \Omega = 0 \quad (4.10)$$

Dove $\Delta e, \Delta i$ e Δa rappresentano le variazioni di *eccentricità*, *inclinazione* e *semiasse maggiore* necessarie per la trasferta tra i due detriti da parte del *chaser*; a_m indica il valore medio tra i semiassi dei due detriti considerati; V_m indica la velocità circolare di riferimento calcolata tramite l'utilizzo di a_m ; $\Delta \Omega = 0$ indica la condizione di fasamento delle RAAN.

Tempo di trasferta limitato

Nella seguente sezione verrà fornita una descrizione approfondita della metodologia adottata per la determinazione del costo di ogni manovra effettuata per il completamento della campagna di rimozione.

A differenza del caso precedente questa tecnica non prevede l'attesa della condizione di "coplanarità" ($\Delta \Omega = 0$) raggiunta tramite la *precessione differenziale*, ma è basata sul calcolo del ΔV di ciascuna trasferta, esprimendolo in funzione del tempo necessario all'esecuzione di quest'ultima (t_{TOF}) e delle diverse epoche di partenza (t_p) da ciascun detrito della sequenza selezionata, tenendo in considerazione le limitazioni imposte dai vincoli agenti sulle missioni.

Per quanto riguarda l'ottimizzazione del problema considerato, questa risulta essere legata alla determinazione dei tempi ottimi (in grado di minimizzare i costi dell'intera campagna rispettando i vincoli temporali) i quali possono essere ricavati tramite l'utilizzo di un algoritmo genetico che, come verrà descritto nel prossimo paragrafo, ricerca il minimo globale del problema affrontato.

Riassumendo quanto è stato introdotto, le principali assunzioni che caratterizzano questo metodo possono essere espresse tramite:

- $\Omega_{k+1}(t_a) \neq \Omega_k(t_a)$
- $a_{k+1} \neq a_k$
- $i_{k+1} \neq i_k$

Per maggiore chiarezza, i detriti appartenenti alle generiche coppie rimosse in successione sono stati indicati con i pedici k e $k + 1$, analoghi a i e j , per indicare rispettivamente l'ordine di rimozione.

Le tre disuguaglianze elencate risultano fondamentali per impostare i calcoli che verranno in seguito riportati e, nello specifico, la prima evidenza la differenza rispetto alla metodologia precedentemente descritta; infatti, generalmente si assume che in corrispondenza del tempo di fine della trasferta i valori delle *RAAN* dei due detriti non coincidono.

Come è riportato in Ref. [B15], i diversi contributi che permettono la determinazione del ΔV della generica trasferta, possono essere calcolati tramite le seguenti espressioni:

$$x = (\Omega_{k+1}(t_a) - \Omega_k(t_a)) \sin(i_0) V_0 \quad (4.11)$$

$$y = \frac{a_{k+1} - a_k}{2a_0} V_0 = \frac{1}{2} V_0 \frac{\Delta a}{a_0} \quad (4.12)$$

$$z = (i_{k+1} - i_k) V_0 = V_0 \Delta i \quad (4.13)$$

Dove:

- $a_0 = \frac{a_{k+1} + a_k}{2}$, è pari al valore medio di semiasse tra i due detriti considerati
- $i_0 = \frac{i_{k+1} + i_k}{2}$, indica il valore medio di inclinazione tra i due detriti
- $V_0 = \sqrt{\frac{\mu}{a_0}}$, rappresenta la velocità circolare di riferimento calcolata per $a = a_0$
- x, y e z rappresentano i principali contributi, alla variazione di velocità, richiesti rispettivamente per effettuare la variazione della *RAAN* (ΔV_Ω), del semiasse maggiore (ΔV_a) e dell'inclinazione (ΔV_i). Bisogna sottolineare che x è calcolato per $t = t_a$ con $t_a =$ tempo di fine trasferta, ovvero l'istante in corrispondenza del quale il chaser raggiunge l'orbita del secondo detrito.

Analogamente al metodo precedente descritto (*tempo di fasamento ottimale*), anche in questo caso i contributi di velocità necessari per ottenere le variazioni $\Delta\omega = \omega_{k+1}(t) - \omega_k(t)$ e $\Delta M = M_{k+1}(t) - M_k(t)$, sono stati considerati trascurabili rispetto a x, y e z .

All'interno del lavoro svolto questa tecnica ha permesso di schematizzare ciascuna trasferta tramite un modello semplificato a due impulsi (Paragrafo 4.3). Nello specifico quest'ultima prevede la ripartizione delle variazioni x, y e z tra i due impulsi, tramite l'utilizzo dei coefficienti/pesi s_x, s_y e s_z . Il generico valore del primo impulso può essere espresso, tramite una relazione empirica della forma:

$$\Delta V_1 = \sqrt{(s_x x)^2 + (s_y y)^2 + (s_z z)^2} \quad (4.14)$$

I parametri s_x, s_y e s_z , non essendo soggetti ad alcun tipo di vincolo/restrizione, possono causare delle variazioni $\Delta\Omega, \Delta a$ e Δi potenzialmente diverse (maggiori o minori) rispetto a quelle calcolate tramite le equazioni (4.11) (4.12) e (4.13). Ciò può essere impiegato assieme all'effetto del J_2 per ridurre la differenza delle *RAAN* tra i due detriti diminuendo il costo associato alla sua variazione, specialmente quando questa risulta essere molto elevata, e permette di calcolare i valori dei parametri in grado di minimizzare il ΔV della trasferta.

In particolare, nel caso in esame di *piccole variazioni di semiasse ed inclinazione*, differenziando l'equazione (2.17) rispetto ad a ed i si ricava facilmente:

$$\frac{\delta\dot{\Omega}}{\dot{\Omega}} = -\frac{7}{2} \frac{\delta a}{a} - \tan(i) \delta i \quad (4.15)$$

Consapevoli che il primo impulso permette delle variazioni volute di a ed i , In relazione a quanto espresso nell'equazione (4.15), queste comportano la generazione di una differenza di *RAAN* ulteriore durante il t_{TOF} poiché modificano l' $\dot{\Omega}$ del *chaser* variando la dinamica di quest'ultimo (effetto del J_2). Questa differenza risulta quindi essere legata ai contributi $s_y y$ e $s_z z$ (variazioni di velocità del primo impulso) tramite le relazioni:

$$\Delta x = -m s_y y - n s_z z \quad (4.16)$$

$$m = 7 \dot{\Omega}_0 \sin(i_0) t_{TOF} \quad (4.17)$$

$$n = \dot{\Omega}_0 \tan(i_0) \sin(i_0) t_{TOF} \quad (4.18)$$

Dove $\dot{\Omega}_0 = \frac{\dot{\Omega}_{k+1} + \dot{\Omega}_k}{2}$ rappresenta il rateo medio di variazione della *RAAN*; m ed n rappresentano i coefficienti che indicano il contributo delle variazioni di semiasse e di inclinazione e possono essere ricavati combinando opportunamente l'equazione (4.15) alle relazioni (4.12) e (4.13).

Tenendo conto di questa variazione aggiuntiva, il valore del secondo impulso può essere calcolato tramite:

$$\Delta V_2 = \sqrt{(x - s_x x - \Delta x)^2 + (y - s_y y)^2 + (z - s_z z)^2} \quad (4.19)$$

Si ottiene Infine il costo totale della trasferta, il quale risulta essere pari a:

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = \sqrt{(s_x x)^2 + (s_y y)^2 + (s_z z)^2} + \sqrt{(x - s_x x - \Delta x)^2 + (y - s_y y)^2 + (z - s_z z)^2} \quad (4.20)$$

Come può essere facilmente intuito, la minimizzazione del ΔV può risultare complicata data la complessa forma assunta da quest'ultimo (equazione (4.20)). Per questo motivo si introduce un'approssimazione, descritta nel paragrafo 6.5.1 ("Minimum-Inclination Maneuvres") all'interno della Ref. [B5], che consiste nell'elevare al quadrato tutti i termini dell'equazione (sia a destra che a sinistra) trascurando la presenza dei doppi prodotti, per eliminare i problemi legati alle radici e permettere un'analisi analitica.

Calcolando in seguito le derivate parziali del valore approssimato $\Delta V^2 = \Delta V_1^2 + \Delta V_2^2$ rispetto ai tre parametri introdotti (Ref. [B15]) e ponendo queste ultime pari a zero è possibile ricavare i valori incogniti di s_x , s_y e s_z che minimizzano ΔV , tramite le seguenti relazioni:

$$s_x = \frac{2x + my + nz}{(4 + m^2 + n^2)x} \quad (4.21)$$

$$s_y = -\frac{2mx - (4 + n^2)y + mnz}{(8 + 2m^2 + 2n^2)y} \quad (4.22)$$

$$s_z = -\frac{2nx + mny - (4 + m^2)z}{(8 + 2m^2 + 2n^2)z} \quad (4.23)$$

Sostituendo i valori dei parametri calcolati, tramite le espressioni (4.21) (4.22) e (4.23), all'interno dell'equazione (4.20) è possibile calcolare il costo della trasferta effettuata.

È interessante sottolineare la validità della relazione:

$$s_x x = x - \Delta x - s_x x \quad (4.24)$$

Quest'ultima può essere ricavata sostituendo i valori di s_y e s_z all'interno dell'equazione (4.16) ed esprime l'equivalenza tra la variazione della *RAAN* impartita tramite il primo ed il secondo ed ultimo impulso ($\Delta\Omega_1 = \Delta\Omega_2$). Considerando l'espressione (4.24) può essere effettuata un'ulteriore riflessione poiché, nel caso di $s_x = 0$, questa si riduce a $x = \Delta x$ indicando che l'intera variazione della *RAAN* viene raggiunta indirettamente tramite le variazioni del semiasse e dell'inclinazione dovute all'azione del primo impulso. Questo meccanismo può essere sfruttato quando si ha a disposizione un tempo sufficientemente elevato oppure la differenza iniziale tra le *RAAN* risulta essere particolarmente ridotta.

All'interno di questo modello può essere inoltre considerato l'aggiuntivo costo necessario per garantire l'annullamento del Δe tra le orbite dei detriti considerati, viene introdotta un'ulteriore relazione empirica per la valutazione del ΔV_e nel caso di piccole variazioni di eccentricità (Ref. [B15]):

$$\Delta V_e = \frac{1}{2} V_0 \sqrt{\Delta e_y^2 + \Delta e_x^2} \quad (4.25)$$

Dove:

- $\Delta e_y = e_{y_{k+1}} - e_{y_k}$, e il generico valore dell'eccentricità può essere calcolato tramite l'espressione $e_y = e \sin(\omega)$
- $\Delta e_x = e_{x_{k+1}} - e_{x_k}$, e il generico valore dell'eccentricità può essere calcolato tramite l'espressione $e_x = e \cos(\omega)$

Assumendo una *ripartizione perfetta* del contributo ΔV_e tra i due impulsi, si ottiene l'espressione del ΔV_{tot} della manovra, il quale assume la forma riportata in seguito:

$$\Delta V_{tot} = \sqrt{\Delta V_1^2 + \left(\frac{1}{2} \Delta V_e\right)^2} + \sqrt{\Delta V_2^2 + \left(\frac{1}{2} \Delta V_e\right)^2} \quad (4.26)$$

In generale questa tipologia di approssimazione può essere introdotta (Ref. [B15]), ma all'interno del lavoro svolto è stato deciso di focalizzarsi maggiormente sui contributi precedentemente descritti.

È necessario sottolineare che, nell'ottica della minimizzazione del costo della campagna di rimozione, all'interno di questa analisi preliminare è stata considerata la possibilità di utilizzare manovre di trasferta caratterizzate da un **singolo impulso**.

In particolare, queste ultime sono state suddivise in due principali categorie caratterizzate da:

- Un *singolo impulso* effettuato in corrispondenza di $t = t_p$, con t_p pari al tempo di inizio trasferta corrispondente a quello utilizzato per la manovra a due impulsi.
- Un *singolo Impulso* effettuato in corrispondenza di $t = t_a$, con t_a pari al tempo di fine trasferta corrispondente a quello utilizzato per la manovra a due impulsi.

Per questa tipologia di manovre non si ha la necessità di determinare i parametri di partizione (s_x, s_y e s_z), poiché le intere variazioni desiderate sono fornite tramite un singolo impulso.

Nel *primo caso* (impulso per $t = t_p$), analogamente a quanto è stato effettuato in precedenza, è necessario valutare il termine:

$$x_0 = \left(\Omega_{k+1}(t_p) - \Omega_k(t_p) \right) \sin(i_0) V_0 \quad (4.27)$$

Overo la variazione di velocità necessaria ad annullare il $\Delta \Omega(t_p)$.

Per quanto riguarda i valori di y e z , questi ultimi restano invariati rispetto al caso a due impulsi. È possibile esprimere il primo impulso tramite:

$$\Delta V_1 = \sqrt{(x_0)^2 + (y)^2 + (z)^2} \quad (4.28)$$

Ricordando che la manovra prevede un solo impulso quindi $\Delta V_2 = 0$, può essere automaticamente determinato il valore del ΔV totale della trasferta, pari a $\Delta V = \Delta V_1$.

Nel *secondo caso* (impulso per $t = t_a$), i valori di x, y e z coincidono con quelli calcolati tramite le relazioni (4.11), (4.12) e (4.13).

Utilizzando per comodità la notazione adottata per le manovre a due impulsi con $\Delta V_1 = 0$, è facile calcolare il valore della variazione di velocità totale imposta, che risultano essere pari a:

$$\Delta V = \Delta V_2 = \sqrt{(x)^2 + (y)^2 + (z)^2} \quad (4.29)$$

L'ulteriore modifica che può essere attuata al modello delle manovre a singolo impulso può prevedere la valutazione del contributo ΔV_e (precedentemente descritto) alla variazione di velocità richiesta per l'intera manovra. In questo caso però l'intera variazione di eccentricità viene effettuata all'interno del singolo impulso, poiché non è prevista la ripartizione di quest'ultimo.

In conclusione, come verrà descritto più nel dettaglio all'interno del successivo paragrafo, il codice utilizzato permette di effettuare la valutazione del ΔV_{tot} ottenuto per ciascuna trasferta tramite il modello della manovra a due impulsi e delle due tipologie di manovra a singolo impulso, selezionando tra queste ultime quella che permette di ottenere la minima variazioni di velocità richiesta.

4.5 Metodologia adottata

Per concludere la descrizione contenuta all'interno di questo capitolo riguardante le caratteristiche della missione e dei modelli adottati, verrà fornita una spiegazione dell'approccio utilizzato per l'ottimizzazione del problema considerato.

Per poter descrivere il lavoro svolto, è necessario sottolineare che i metodi e i modelli introdotti poc'anzi per effettuare una rapida stima preliminare dei costi della campagna di rimozione sono già stati sviluppati e validati all'interno di precedenti lavori (Ref. [B15], [B16]) basandosi sui risultati ottenuti dal gruppo del *JPL* (Ref. [B14]). Questi ultimi riguardano nello specifico le sequenze di rimozione, le epoche di inizio di ciascuna missione, le durate delle trasferte e i tempi di attesa associati a ciascun detrito (Tabelle 1-2).

Il lavoro svolto all'interno della tesi cerca di compiere un ulteriore passo, utilizzando questi modelli per l'approssimazione della dinamica dei detriti e per il calcolo dei ΔV di ciascuna trasferta, accoppiandoli con un *algoritmo genetico* volto all'individuazione dei vari tempi (t_{TOF} , t_w e t_m) in grado di ottimizzare globalmente, minimizzando i costi delle diverse missioni che costituiscono l'intera campagna di rimozione. La differenza fondamentale tra il lavoro svolto e i precedenti studi consiste nell'utilizzare i valori dei tempi calcolati dall'*AG*, determinati per raggiungere la condizione di ottimalità, in alternativa rispetto ai tempi di attesa e di trasferta individuati dal *JPL*.

In relazione a quanto è stato espresso, può essere sottolineato che il codice sviluppato fa uso delle sequenze di rimozione individuate dal gruppo del *JPL* (Tabella 1) cercando di raggiungere l'ottimizzazione globale del costo della campagna. I risultati ottenuti in termini di ΔV di ciascuna trasferta, sono stati confrontati con quelli del gruppo vincitore del *GTOC9* per validare il codice.

Una delle caratteristiche che maggiormente ha favorito la selezione degli algoritmi genetici per l'ottimizzazione delle traiettorie considerate riguarda la capacità di questi ultimi, se opportunamente configurati, di esplorare diverse possibili soluzioni e ricercare il minimo globale della funzione obiettivo, considerando che il problema affrontato presenta diversi punti di minimo locale verso i quali gli algoritmi di ottimizzazione possono prematuramente convergere.

Un fattore che ha reso più semplice l'implementazione degli *AG* è il vincolo imposto sulla tipologia di manovre effettuabili (manovre impulsive), le quali possono essere descritte tramite un numero di parametri minore rispetto alla loro controparte (manovre continue).

Tenendo conto che all'interno del lavoro è stato fatto uso del metodo del *Tempo di trasferta limitato* (paragrafo 4.4), date le limitazioni sulle tempistiche di ciascun tratto delle sequenze e sull'intera missione, è risultato necessario essere in grado di determinare i tempi che caratterizzano i vari archi delle sequenze (t_{TOF} , t_w , t_m) tramite i quali poter calcolare le variazioni di velocità richieste per il completamento delle rimozioni. Nello specifico i tempi determinati dall'algoritmo genetico implementato possono essere divisi in tre principali parametri:

- t_{TOFi} : rappresentano la durata temporale di ciascuna trasferta indicata con il pedice i .
- t_{wi} : indicano il tempo di attesa che trascorre tra l'arrivo sull'orbita del detrito e la successiva partenza verso il detrito successivo. Come è stato precedentemente rilevato, il tempo di attesa

che caratterizza ciascun arco della missione risulta essere maggiore o al limite uguale al t_{RV} necessario per installare il *de-orbit package*.

- t_{m_j} : rappresentano i tempi trascorsi tra la fine di una sequenza di rimozione e l'inizio della successiva (paragrafo 4.3), con pedice $j = 1, 2, \dots, 9$ il quale indica l'intervallo tra due sequenze successive.

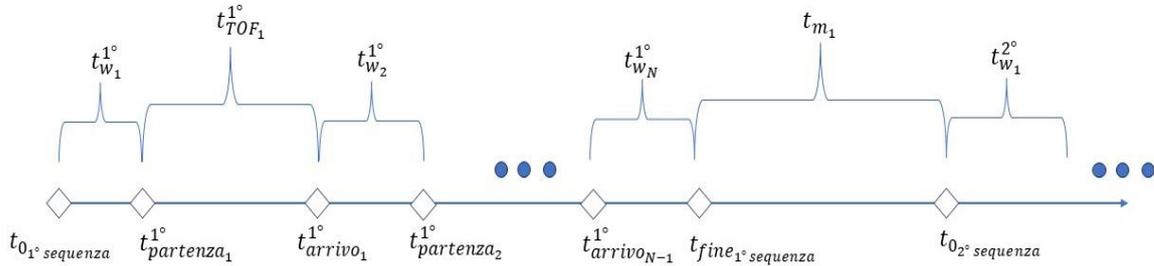


Figura 39: rappresentazione schematizzata della successione dei tempi caratteristici considerati per ciascuna fase della missione. I valori determinati dall' algoritmo genetico corrispondono a $t_{w_i}^j$, $t_{TOF_i}^j$, t_{m_j} .

In relazione ai parametri evidenziati è utile sottolineare che, se da un lato un valore di t_{w_i} elevato può favorire la diminuzione della differenza tra le *RAAN* dei due detriti da rimuovere in successione grazie all'effetto della precessione differenziale delle orbite dei detriti, dall'altro può occupare un'elevata porzione del tempo a disposizione di ogni arco della missione e, considerando i diversi limiti sulle tempistiche che caratterizzano quest'ultima, può portare a dei t_{TOF_i} eccessivamente ridotti con un conseguente aumento dei ΔV_i . In generale quindi sono preferibili dei valori di t_{w_i} contenuti, come quelli determinati dal gruppo del *JPL* (Ref. [B14]).

Per poter descrivere e comprendere il funzionamento dell'*AG* utilizzato, deve essere sottolineato che quest'ultimo è stato implementato tramite l'*Optimization Tool* disponibile all'interno del software Matlab. Questo ambiente di lavoro permette di utilizzare diverse tipologie di metodi di ottimizzazione, tra cui gli algoritmi genetici, e di personalizzare le caratteristiche assunte da questi ultimi attraverso il comando *options*.

La sintassi generale per richiamare l'algoritmo genetico all'interno del software è la seguente:

$$[\vec{x}_{ott}, f_{ob}(\vec{x}_{ott})] = ga(f_{ob}, n_{par}, A, B, A_{eq}, B_{eq}, lb, ub, f_{nl}, options) \quad (4.10)$$

Dove:

- \vec{x}_{ott} , rappresenta il **vettore dei parametri** che ottimizzano la funzione obiettivo e può essere espresso tramite:

$$\vec{x}_{ott} = [\vec{t}_{TOF}, \vec{t}_w, \vec{t}_m]$$

- $f_{ob}(\vec{x}_{ott})$, indica il **valore ottimizzato** assunto dalla **funzione obiettivo**.

- n_{par} , indica il **numero complessivo di parametri** che costituiscono il vettore \vec{x} .
- A e B , rappresentano rispettivamente la matrice e il vettore dei termini noti che permettono di descrivere i **vincoli lineari** che possono essere espressi da **disuguaglianze**, tramite l'imposizione del sistema

$$A\vec{x} \leq B$$

- A_{eq} e B_{eq} , analogamente al caso precedente rappresentano la matrice ed il vettore dei termini noti, ma in questo caso permettono di considerare i **vincoli lineari** che possono essere espressi sotto forma di **uguaglianze**

$$A_{eq}\vec{x} = B_{eq}$$

Nel caso in esame, non essendo presente alcun vincolo di questa tipologia, i valori di A_{eq} e B_{eq} non sono rilevanti e conseguentemente sono stati inseriti all'interno dell'espressione 4.30 con valore nullo (" $A_{eq} = []$, $B_{eq} = []$ ").

- lb e ub , indicano rispettivamente i **lower bounds** e gli **upper bounds** che possono essere imposti per esprimere i range di valori che l'algoritmo genetico può utilizzare per generare le possibili soluzioni. Permettono di restringere il campo all'interno del quale l'AG effettua la ricerca delle soluzioni, velocizzando quest'ultima.
- f_{nl} , indica la funzione che permette di considerare gli eventuali **vincoli non lineari**. Per il problema in esame questi vincoli non sono presenti (" $f_{nl} = []$ ").
- *Options*, è un comando che permette di modificare le diverse **caratteristiche dell'algoritmo genetico** quali le metodologie di selezione degli individui, di crossover e di mutazione, o ancora il numero di individui all'interno di ciascuna popolazione e il numero massimo di generazioni che devono essere determinate. Questo comando permette inoltre di imporre i criteri di arresto dell'algoritmo genetico, fondamentali per raggiungere una soluzione. Un'ulteriore opzione che può essere introdotta, riguarda la possibilità di effettuare le analisi parallelizzando i calcoli, ovvero sfruttando la capacità computazionale dei diversi processori dell'hardware utilizzato e non solo (*parallelizzazione cluster*), riducendo considerevolmente i tempi di calcolo necessari per la determinazione della condizione ottimale.

Ricordando i principi che regolano il funzionamento degli algoritmi genetici (Capitolo 3.2), è fondamentale definire una funzione obiettivo da ottimizzare ed essere capaci di generare delle popolazioni di possibili soluzioni da far evolvere fino al raggiungimento dei valori ottimi, rispettando i criteri di arresto.

Sapendo che le diverse popolazioni generate dall'AG implementato riguardano i valori assunti dai parametri precedentemente introdotti (t_{TOF} , t_w , t_m) può essere individuata una funzione obiettivo da minimizzare, pari alla sommatoria dei ΔV di ciascuna trasferta effettuata nella campagna.

La funzione obiettivo utilizzata assume quindi la seguente forma:

$$f_{ob}(\Delta V_i^j) = \sum_{j=1}^{N_{sequenze}} \sum_{i=1}^{N_{arco}} \Delta V_i^j (t_{TOF_i}^j, t_{w_i}^j, t_{m_j}) \quad (4.31)$$

Dove il ΔV_i indica il valore della variazione di velocità corrispondente al i -esimo arco della j -esima sequenza; $t_{TOF_i}^j$ e $t_{w_i}^j$ indicano rispettivamente il tempo di trasferta e di attesa che caratterizzano l' i -esimo arco della j -esima sequenza; t_{m_j} indica il tempo trascorso tra la fine della sequenza j e l'inizio della sequenza $j + 1$.

Un'osservazione necessaria per comprendere e contestualizzare i risultati ottenuti dal codice sviluppato e valutare le differenze di questa stima preliminare semplificata, rispetto alla soluzione ottenuta dal JPL, riguarda la struttura della funzione obiettivo definita.

Quest'ultima, rispetto a quella proposta dal gruppo dell'*ESTEC* all'interno del *GTOC9* (Ref. [B13]), è determinata esclusivamente dai contributi delle variazioni di velocità su ciascun arco della missione trascurando tutti quei parametri che caratterizzano la funzione obiettivo del *GTOC9* quali il costo economico di base della missione, la sua evoluzione nel tempo e le masse in gioco.

Questa semplificazione è volta a favorire un confronto diretto tra le variazioni di velocità determinate dell'algoritmo genetico e quelle ricavate dal *JPL*, valutando in questo modo la capacità di effettuare una stima preliminare adeguatamente accurata.

Ciò che ci si aspetta dai risultati ottenuti è la minimizzazione del costo globale della campagna attraverso l'ottimizzazione di ciascuna sequenza di rimozione ottenuta tramite la determinazione dei parametri (t_{TOF}, t_w, t_m) svolta dell'*AG*. In particolare è auspicabile che il costo globale ricavato risulti inferiore a quello determinato dal *JPL*, data la differente funzione obiettivo e le semplificazioni introdotte, ma contemporaneamente comparabile nei limiti di questa trattazione semplificata.

L'utilizzo dell'algoritmo genetico fornisce un vantaggio dal punto di vista della capacità di ricerca della condizione ottima, infatti è possibile che i tempi determinati da quest'ultimo siano tali da rendere il costo della generica manovra di trasferta maggiore o minore (rispetto a quello determinato dal gruppo vincitore della competizione) per favorire il raggiungimento di un costo minore dell'intera campagna (minimo globale).

I principali risultati ottenuti, confrontati con la soluzione del *JPL*, saranno descritti in maniera più approfondita nel capitolo successivo.

Capitolo 5: Analisi dei risultati

In quest'ultimo capitolo saranno descritti i principali risultati raggiunti dal codice sviluppato e verrà effettuato il confronto con quelli ricavati dal gruppo del JPL, per poterne valutare l'efficacia. Verranno brevemente descritti gli input legati al problema considerato e sarà effettuato un approfondimento riguardo il comportamento dell' algoritmo genetico utilizzato, in particolare per quanto riguarda la sua capacità di gestione di un numero elevato di parametri.

5.1 Input del codice

Il primo passo fondamentale per ricercare la soluzione di ottimo del problema considerato consiste nell'effettuare una corretta definizione dei vari input del sistema per consentire un adeguato funzionamento del codice.

Il primo input sul quale è basato l'intero lavoro svolto è il file messo a punto dagli organizzatori della competizione (riportato in APPENDICE A), contenente al suo interno i principali parametri orbitali, le epoche di misurazione e i codici identificativi di ciascun detrito.

Nello specifico, il contenuto di quest'ultimo è soggetto alla seguente suddivisione:

- La prima colonna della tabella riportata in APPENDICE A contiene al suo interno i codici identificativi di ciascun detrito, i quali variano assumendo valori interi tra 0 e 122.
- Nella seconda colonna, sono riportate le epoche di avvistamento/misurazione dei detriti, fondamentali per poter determinare i valori assunti dai parametri orbitali al variare del tempo.
- All'interno delle restanti colonne sono inseriti rispettivamente i valori del semiasse (a [m]), l'eccentricità (e), l'inclinazione (i [rad]), la longitudine del nodo ascendente (Ω [rad]), l'argomento del periastro (ω [rad]) e l'anomalia media (M [rad]), misurati in corrispondenza delle epoche di avvistamento del rispettivo detrito.

Procedendo con la descrizione degli input del codice, devono essere citati i vincoli che caratterizzano il problema studiato. In generale i vincoli principali riguardano le tempistiche della missione e in particolare possono essere ricordati i seguenti:

- La durata minima di ciascun tempo di attesa deve essere superiore al tempo minimo per completare le operazioni di *Rendez-Vous* ($t_{RV_{min}} = 5$ giorni)

$$t_{w_i} \geq 5 \text{ giorni}$$

- La durata complessiva di ogni arco della missione non deve superare i trenta giorni

$$t_{TOF_i} + t_{w_i} \leq 30 \text{ giorni}$$

- La durata di ciascuna trasferta, a seguito dei vincoli precedentemente introdotti, deve essere minore di venticinque giorni

$$t_{TOF_i} \leq 25 \text{ giorni}$$

- Il tempo che deve trascorrere tra la fine di una sequenza di rimozione e l'inizio della successiva, deve essere superiore a trenta giorni

$$t_{m_j} \geq 30 \text{ giorni}$$

- La durata complessiva della missione deve essere tale da garantire il completamento della rimozione della totalità dei detriti in una finestra temporale di otto anni

$$\sum_{j=1}^{N_{sequenze}} \left[\sum_{i=1}^{N_{archi}} (t_{TOF_i}^j + t_{w_i}^j) + t_{m_j} \right] \leq (t_{f_{campagna}} - t_{0_{campagna}}) \text{ giorni}$$

Dove $t_{f_{campagna}} = 26419$ giorni, indica il tempo massimo entro il quale deve essere completata la campagna; $t_{0_{campagna}} = 24557.18$ giorni, pari al tempo di inizio della campagna determinato dal gruppo del *JPL*, ed utilizzato per l'intera analisi svolta.

In fine è necessario introdurre i valori di alcuni ulteriori parametri utilizzati per effettuare le valutazioni, quali

- Raggio della Terra: $R_e = 6378.157 \text{ km}$
- Costante gravitazionale terrestre: $\mu = 398600.4418 \cdot 10^9 \frac{m^3}{s^2}$
- Armonica zonale: $J_2 = 1.08262668 \cdot 10^{-3}$

5.2 Risultati

Prima di passare alla descrizione dei principali e più significativi risultati ottenuti, sono in seguito riportati alcuni esempi che permettono di comprendere il comportamento dell'algorithm genetico al variare di alcune caratteristiche introdotte all'interno della simulazione, consentendo di sottolineare le principali problematiche che possono essere associate all'utilizzo di questa tipologia di algoritmi. In generale, la bontà dei risultati ottenuti, oltre che dalle tabelle riassuntive, potrà essere osservata direttamente tramite il confronto visivo tra i grafici raffiguranti la variazione di velocità accumulata in funzione del tempo della missione, la quale è stata calcolata tramite le soluzioni ottenute dall'AG, i risultati del JPL e tramite il modello per la determinazione delle variazioni di velocità (*tempo di trasferta limitato*) accoppiato con i tempi determinati dal JPL (Tabella 2).

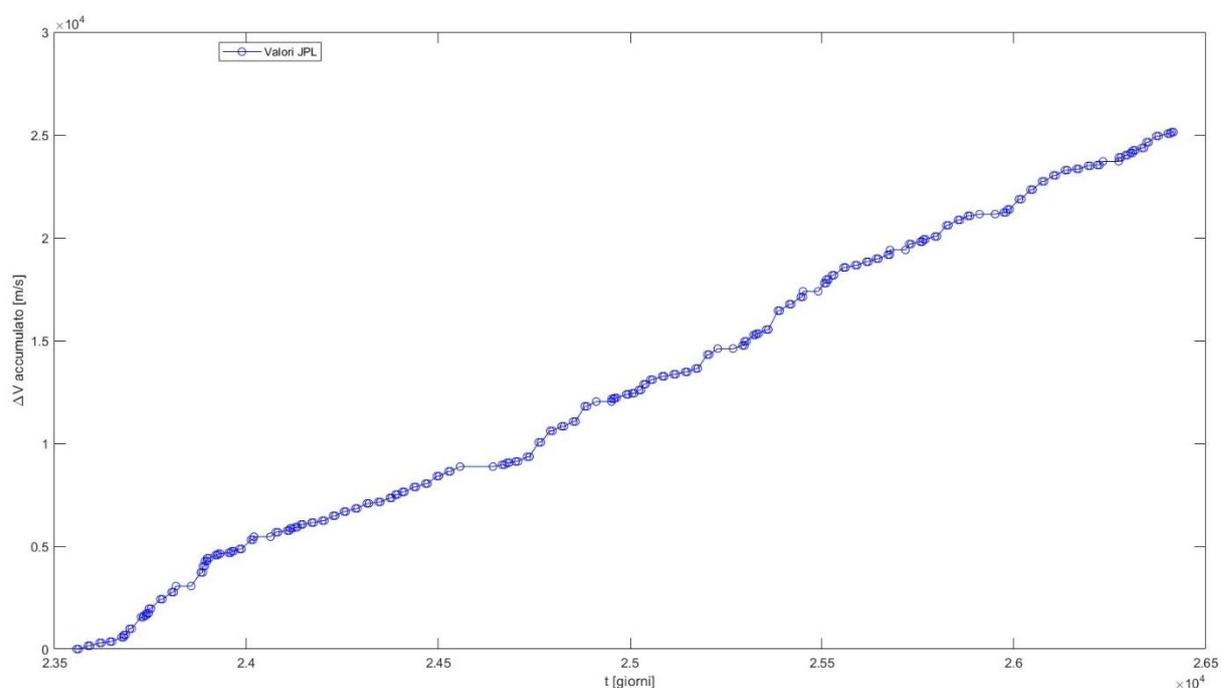


Figura 40: grafico contenente la variazione di velocità accumulata durante la missione, in funzione del tempo, calcolata tramite i risultati ottenuti dal JPL (Tabella 2).

Per comprendere ed osservare il comportamento del codice, ed in particolare dell'algorithm genetico utilizzato, sono state effettuate diverse simulazioni considerando un numero di sequenze di rimozione crescente (maggior numero di detriti). Queste simulazioni sono state necessarie poiché, data la natura stocastica dell'algorithm genetico implementato (metodo euristico), la possibilità che effettuando N volte la medesima simulazione con gli stessi parametri possano essere ottenuti N risultati differenti è concreta. Per cercare di mitigare queste oscillazioni è in generale consigliato l'aumento del numero di individui generati per popolazione, cercando in questo modo di raggiungere l'assestamento dell'algorithm genetico verso un valore costante poiché quest'ultimo ha a disposizione una varietà genetica adeguata per poter effettuare la ricerca e raggiungere la soluzione ottima come si può vedere nell'esempio riportato in Figura 41 e 42.

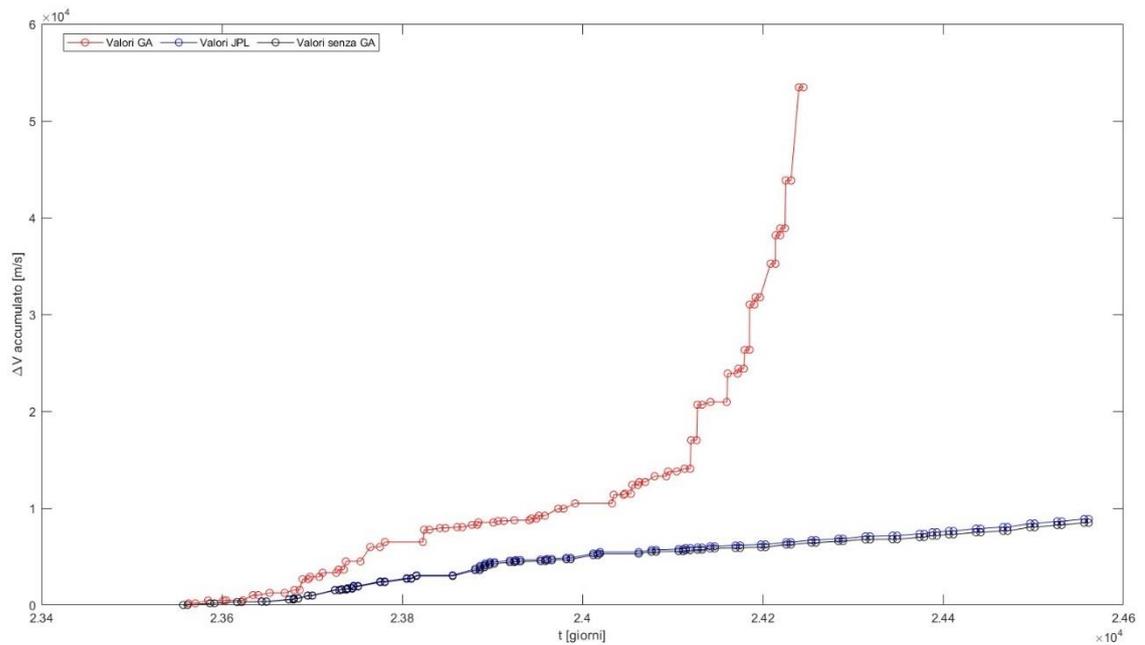


Figura 41: Rappresentazione dei ΔV accumulati durante le prime tre sequenze della campagna di rimozione. Sono riportati i valori legati ai risultati del JPL, dell'algorithm genetico e del metodo di valutazione del costo delle trasferte con l'utilizzo dei tempi determinati dal JPL. Si può facilmente osservare che i risultati ottenuti dall'algorithm genetico sono estremamente distanti da quelli desiderati e questo esito può essere attribuito ad una popolazione iniziale generata particolarmente "inadatta", dovuta alla natura stocastica dell'algorithm, e ad un basso numero di individui per popolazione (in questo caso 200) che non consentono una adeguata ricerca a causa della bassa diversità genetica a disposizione dell'AG.

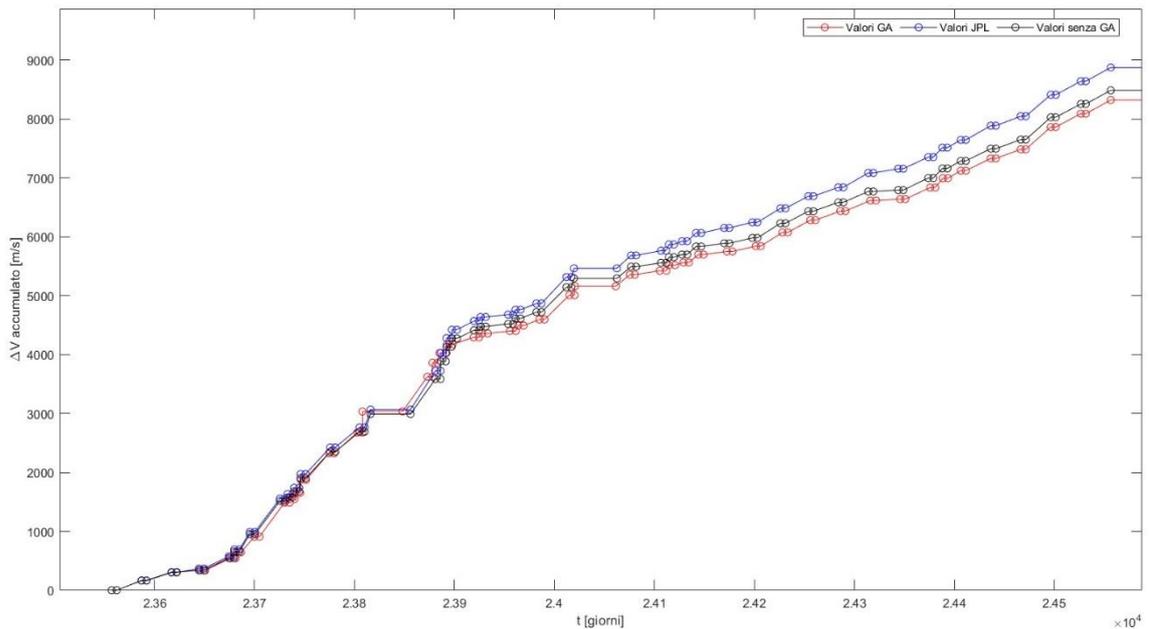


Figura 42: analogamente al caso precedente sono riportate le variazioni di velocità accumulate durante le prime tre sequenze di rimozione. Ciò che è interessante osservare è che all'aumentare del numero di individui, che in questo caso sono 350 per ciascuna popolazione generata, il valore del ΔV complessivo determinato dall'algorithm genetico risulta essere inferiore rispetto a quello del JPL, questo risultato non stupisce poiché una maggiore varietà genetica favorisce la ricerca del minimo globale e considerando che l'AG ottimizza una funzione obiettivo esclusivamente legata alle variazioni di velocità su ciascun arco della missione, ci si aspetta il raggiungimento di valori finali inferiori rispetto a quelli determinati dal gruppo del JPL.

Decidendo di utilizzare come metodo di ottimizzazione gli *AG*, bisogna tener conto che il raggiungimento del minimo/massimo globale della funzione obiettivo da ottimizzare non sia immediato e possa richiedere diversi tentativi e simulazioni per l'ottenimento di risultati soddisfacenti. In generale è quindi possibile imbattersi in simulazioni "fortunate", ovvero tutti quei casi in cui l'algoritmo genetico parte da una popolazione iniziale particolarmente adatta, che quindi permette una ricerca della soluzione ottima più agevole. Questi casi possono portare a dei risultati migliori anche con un basso numero di individui per generazione, ma più comunemente è possibile ottenere soluzioni migliori all'aumentare del numero di individui considerati.

Un'ulteriore osservazione che richiama quanto è stato introdotto nel precedente capitolo riguarda principalmente la capacità dell'algoritmo genetico implementato di determinare i diversi tempi caratteristici (Capitolo 4.5) in modo tale da permettere il raggiungimento della condizione di minimo globale della funzione obiettivo, anche a costo di aumentare localmente il costo di alcuni degli archi (ΔV_i) che costituiscono le sequenze.

Quanto è stato espresso può essere osservato chiaramente in Figura 43, infatti quest'ultima rappresenta un dettaglio della campagna di rimozione e in particolare la fase che caratterizza la fine della prima sequenza e l'inizio della seconda. Durante questa fase, come si può notare, i risultati determinati dall'algoritmo genetico prevedono inizialmente una durata minore dell'ultima trasferta della prima sequenza, la quale comporta una partenza anticipata dal successivo detrito rispetto ai risultati del *JPL*. Questa variazione causa un aumento locale del costo degli archi successivi, ma in seguito quest'ultimo torna ad essere inferiore rispetto al costo ricavato dal gruppo vincitore della competizione.

Questo fenomeno è inoltre legato alle caratteristiche della funzione obiettivo considerata ricordando che quest'ultima, a differenza di quella caratteristica del *GTOC9*, è legata esclusivamente alle variazioni di velocità da imprimere per effettuare le diverse trasferte.

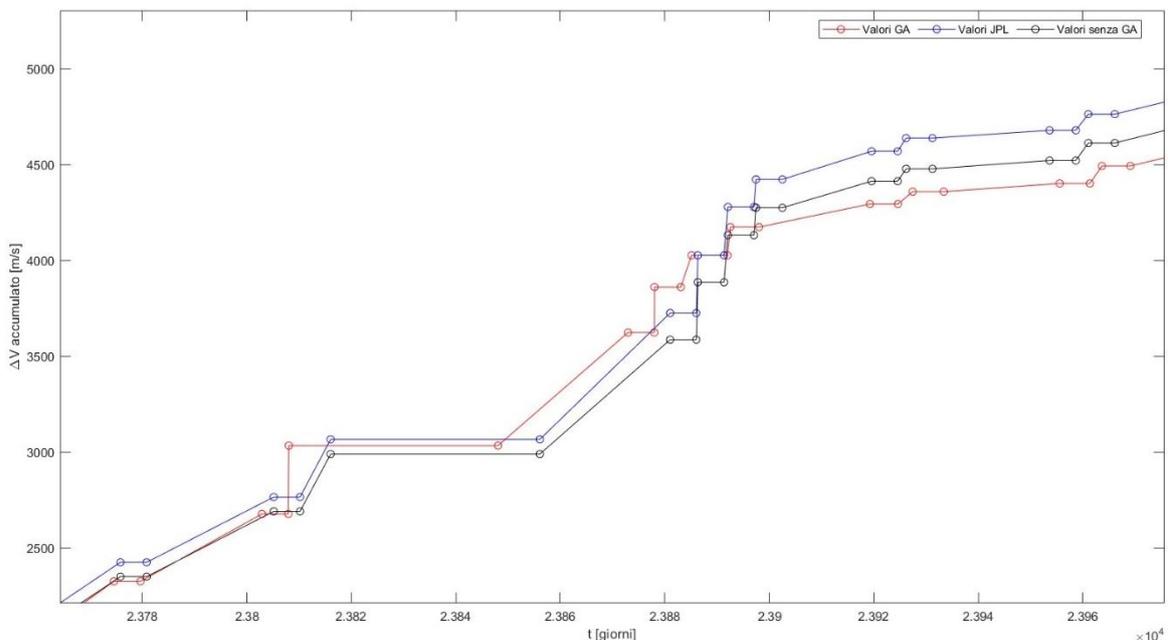


Figura 43: dettaglio riguardante la fase della campagna compresa tra la prima sequenza di rimozione e la seconda.

Dopo aver sottolineato questi aspetti fondamentali, si passa ora a descrivere i risultati finali ottenuti tramite l'applicazione dell'AG all'intera campagna di rimozione. In generale, all'interno delle varie simulazioni svolte, si è cercato di imporre un numero di individui per popolazione pari a dieci volte il numero di variabili considerate, questo per garantire una sufficiente varietà genetica e consentire una ricerca più agevole della soluzione di minimo globale. Purtroppo però non è stato sempre possibile adottare questa strategia a causa delle limitazioni dell'hardware utilizzato e in particolare delle difficoltà riscontrate da quest'ultimo nel gestire il grande numero di individui da generare per ciascuna popolazione, quando il numero di variabili considerate (t_{TOF} , t_w e t_m) risultava troppo elevato, come nel caso dell'intera campagna di rimozione ($n_{variabili} = 235$). Per questo motivo è stato necessario effettuare diverse simulazioni, cercando di sfruttare per quanto possibile la natura stocastica di questa tipologia di algoritmi, fino a quando l'AG è stato in grado di generare una popolazione iniziale "favorevole" che ha permesso di raggiungere dei risultati soddisfacenti pur con un numero di individui per popolazione ridotto rispetto a quello previsto (650 individui rispetto a circa 2300 individui necessari) e un numero di generazioni pari a circa 6000. Sono in seguito riportati i principali risultati delle analisi svolte.

5.2.1 Variazioni di velocità

		ΔV [m/s]																			
1° sequenza	AG	165,7	140,7	31,6	204,7	100,7	266,3	576,1	65,1	100,8	221,8	452,4	351,6	356,6							
	JPL	161,8	139,2	65,8	208,2	115,2	300,1	564,9	78,3	105,0	233,3	453,5	340,4	300,8							
2° sequenza	AG	589,6	237,0	165,4	147,5	120,3	64,4	42,8	91,3	103,0	414,3	150,9									
	JPL	659,0	301,1	252,1	143,8	146,8	68,6	40,6	84,2	105,3	448,5	148,0									
3° sequenza	AG	196,4	65,9	95,6	44,0	135,2	52,6	90,6	233,9	207,7	155,2	178,0	23,2	196,7	158,8	127,8	207,7	154,7	378,9	225,5	231,9
	JPL	219,1	80,8	105,2	55,2	140,2	85,5	95,0	237,6	205,9	149,9	245,2	71,6	197,3	160,4	132,2	240,0	161,2	364,3	230,4	232,5
4° sequenza	AG	88,2	57,2	60,1	202,8	657,2	469,9	183,3	245,9	682,1	228,0										
	JPL	86,1	103,1	62,6	222,9	709,1	553,9	219,9	233,9	739,0	232,6										
5° sequenza	AG	97,9	37,5	128,7	10,1	165,4	262,0	198,5	104,7	43,1	90,6	159,4	646,6	261,8							
	JPL	129,6	45,2	172,9	52,6	160,7	280,8	221,1	163,5	98,2	115,7	164,8	674,8	291,1							
6° sequenza	AG	150,3	167,9	279,5	55,6	206,9	850,6	276,2	362,8	280,9											
	JPL	156,0	198,0	305,8	71,2	194,4	920,5	314,1	353,0	272,8											
7° sequenza	AG	409,9	123,2	181,8	388,6	116,8	154,8	121,1	197,8	213,1											
	JPL	400,6	173,6	211,3	374,4	109,6	171,2	145,1	194,3	233,0											
8° sequenza	AG	276,6	120,4	96,6	146,7	498,1	254,0	186,7	35,9												
	JPL	287,9	111,9	112,2	144,5	540,0	260,1	198,8	82,7												
9° sequenza	AG	86,0	124,1	445,4	465,4	376,4	269,6	271,0	23,3	146,3	35,8	171,4									
	JPL	83,3	148,1	495,9	464,9	405,2	285,9	254,8	62,3	156,6	36,5	174,9									
10° sequenza	AG	181,2	94,7	87,0	75,8	118,4	254,9	300,3	131,1	54,6											
	JPL	189,4	112,9	110,0	121,3	117,9	280,1	300,4	120,6	70,2											

Tabella 4: tabella contenente i valori delle variazioni di velocità per ogni arco della campagna calcolate dal gruppo del JPL e tramite l'utilizzo dell'AG.

	ΔV tot [m/s]		Scarto assoluto [m/s]	Scarto %	Scarto assoluto tot [m/s]	Scarto % tot
1° sequenza	AG	3034,2	-32,30	-1,05	-1868,27	-7,43
	JPL	3066,5				
2° sequenza	AG	2126,5	-271,47	-11,32		
	JPL	2398,0				
3° sequenza	AG	3160,4	-249,09	-7,31		
	JPL	3409,5				
4° sequenza	AG	2874,8	-288,32	-9,11		
	JPL	3163,1				
5° sequenza	AG	2206,3	-364,73	-14,19		
	JPL	2571,0				
6° sequenza	AG	2630,7	-155,12	-5,57		
	JPL	2785,8				
7° sequenza	AG	1907,0	-106,06	-5,27		
	JPL	2013,1				
8° sequenza	AG	1615,1	-123,01	-7,08		
	JPL	1738,1				
9° sequenza	AG	2414,8	-153,60	-5,98		
	JPL	2568,4				
10° sequenza	AG	1298,2	-124,58	-8,76		
	JPL	1422,8				

Tabella 5: differenze assolute e relative tra i risultati ottenuti tramite l'applicazione dell'algoritmo genetico e i risultati raggiunti dal JPL

Osservando la Tabella 4, all'interno della quale sono contenute le diverse variazioni di velocità per ciascun arco appartenente ad ogni sequenza di rimozione, è possibile notare che i valori ottenuti tramite l'utilizzo dell'AG risultano essere generalmente in linea con quelli ricavati dal gruppo vincitore della competizione. Volendo evidenziare le discrepanze tra questi ultimi, in Tabella 5 è possibile osservare le differenze assolute e percentuali sia per le singole sequenze che per l'intera campagna. Quello che è interessante osservare è che i risultati ottenuti tramite l'ottimizzazione svolta dall'AG risultano essere inferiori rispetto alla soluzione vincitrice del *GTOC9*, e ciò può essere ricondotto a due principali aspetti

1. Considerando che l'ottimizzazione svolta mira alla minimizzazione di una funzione obiettivo profondamente diversa da quella imposta all'interno del *GTOC9* (Ref. [B13]) e che la f_{ob} (equazione 4.31) è basata esclusivamente sulla valutazione delle diverse variazioni di velocità che caratterizzano le manovre della campagna, risulta essere prevedibile il raggiungimento di un valore di ΔV totale inferiore rispetto a quello determinato dal *JPL*.
2. Sapendo che il problema considerato è caratterizzato da molteplici punti di minimo locale, è verosimile che l'AG implementato sia in grado di determinare dei risultati più vicini alla condizione di minimo globale ottimizzando i tempi caratteristici della missione (t_{TOF} , t_w e t_m) e permettendo quindi una riduzione dei costi della campagna di rimozione.

Per comprendere immediatamente l'entità dell'ottimizzazione svolta dall'algorithm genetico ed in particolare l'effetto che le variazioni anche contenute dei tempi caratteristici hanno avuto sul risultato finale, è in seguito riportato un grafico analogo a quello raffigurato in Figura 40, all'interno del quale sono riportati i ΔV accumulati durante l'intera campagna.

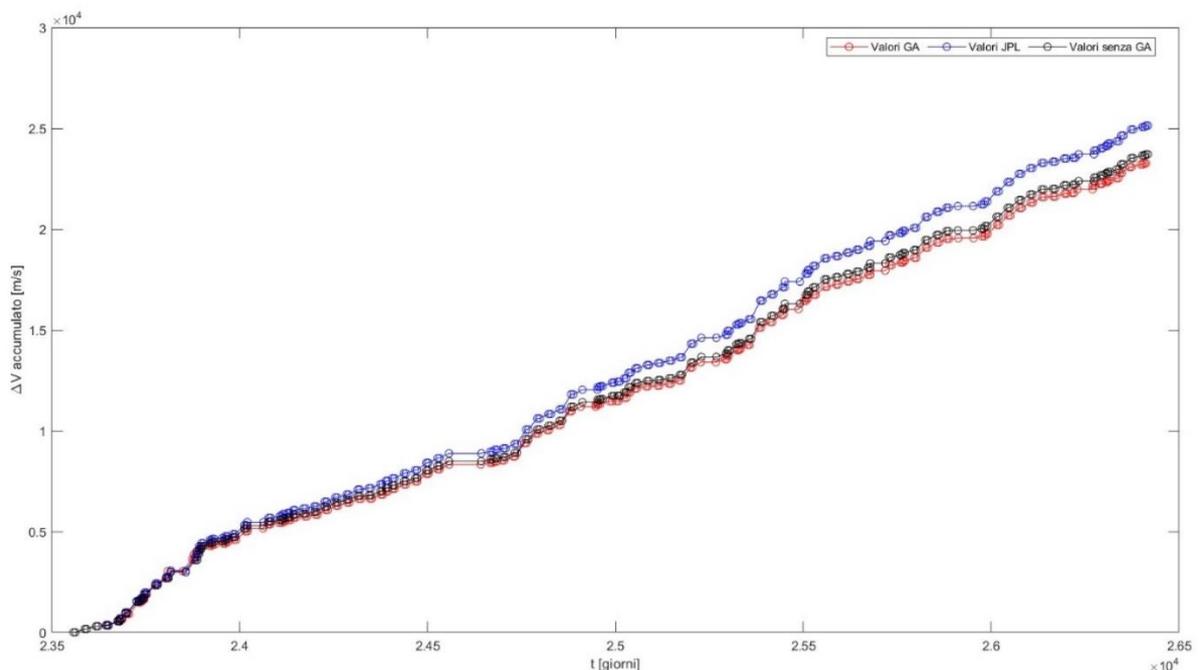


Figura 44: rappresentazione dei ΔV accumulati durante l'intera campagna, determinati dal JPL, dall'utilizzo dell'AG e dal metodo di stima delle variazioni di velocità accoppiato ai tempi determinati dal JPL (Ref. [B15]).

Se inizialmente i valori delle variazioni di velocità ricavati dai diversi approcci risultano essere molto simili, nel proseguire della missione l'AG è stato in grado di determinare dei tempi (t_{TOF} , t_w e t_m) tali da consentire una riduzione evidente del costo della campagna. Quest'ultimo è evidenziato all'interno della seguente figura, la quale rappresenta un focus sull'ultima sequenza di rimozione considerata.

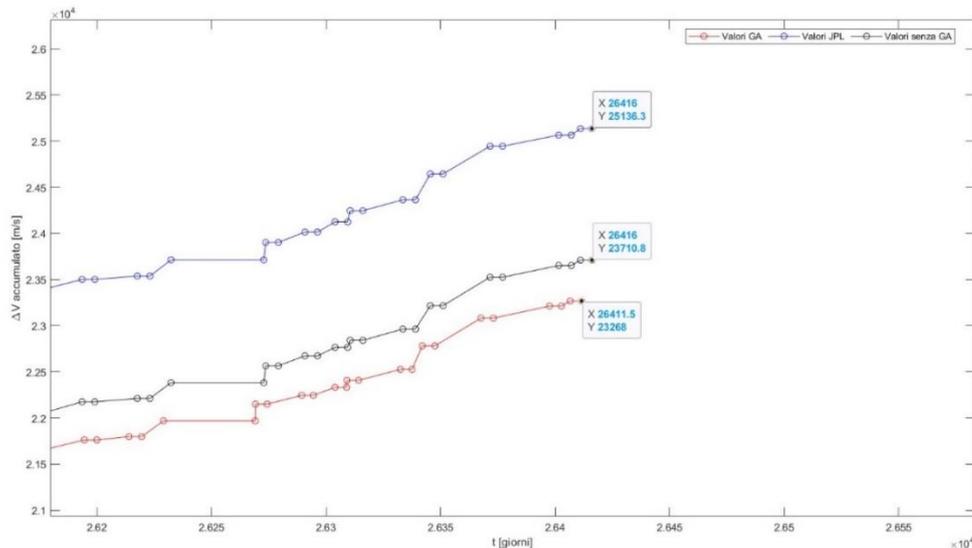


Figura 45: all'interno del presente grafico è possibile osservare l'evoluzione dell'ultima sequenza secondo i tre approcci considerati (JPL, AG e metodo del tempo di trasferta limitato in funzione dei tempi determinati dal JPL). È interessante osservare la differenza tra il costo finale determinato dal gruppo vincitore della competizione, pari a circa 25136 m/s, e quello ricavato dall'applicazione dell'algoritmo genetico, circa 23268 m/s. l'utilizzo dell'AG ha permesso oltre che la diminuzione del costo complessivo della campagna, anche un tempo complessivamente minore per il suo completamento all'incirca pari a cinque giorni in meno (ulteriori considerazioni riguardanti i tempi determinati saranno fornite nel seguente paragrafo).

5.2.2 Tempi caratteristici della campagna (t_{TOF} , t_w , t_m)

All'interno di questo paragrafo verranno presentati i risultati e in particolare i tempi caratteristici frutto dell'ottimizzazione svolta dall'AG, sottolineando le principali differenze con i tempi determinati dal JPL.

		TOF: Durate delle trasferte [giorni]																				
1° sequenza	AG	24,85	24,98	23,33	24,98	0,34	13,64	24,97	0,09	0,31	0,89	23,07	23,25	0,08								
	JPL	24,86	24,98	22,42	24,99	0,29	10,63	25,00	2,70	1,51	1,41	24,67	24,31	5,86								
2° sequenza	AG	24,88	0,04	2,05	0,56	21,22	2,81	22,18	2,30	15,95	24,96	0,48										
	JPL	24,93	0,28	0,73	0,39	17,07	1,61	22,42	2,39	15,88	24,97	2,49										
3° sequenza	AG	13,97	24,89	2,91	8,40	9,43	23,30	23,32	21,64	22,64	24,96	24,94	24,25	24,91	7,69	12,89	24,99	24,93	24,98	24,97	24,96	
	JPL	14,16	24,94	2,87	8,10	9,00	23,13	23,09	23,09	22,83	24,98	24,98	24,93	24,94	9,10	13,44	24,99	24,94	24,99	24,98	24,96	
4° sequenza	AG	24,76	5,19	14,88	24,64	24,91	24,86	24,02	24,97	24,51	24,56											
	JPL	23,96	6,48	16,72	23,97	23,95	23,95	23,96	23,99	23,94	23,96											
5° sequenza	AG	0,25	1,82	24,92	11,57	14,75	4,88	12,92	24,66	24,91	24,96	22,17	24,99	22,96								
	JPL	0,45	3,17	24,93	10,34	12,53	7,11	13,44	24,94	24,94	24,98	22,19	24,99	22,01								
6° sequenza	AG	24,15	0,23	21,55	0,12	18,78	24,97	24,89	24,97	0,15												
	JPL	24,91	0,30	18,39	3,08	20,24	24,96	24,85	24,97	0,28												
7° sequenza	AG	14,41	0,06	15,92	24,92	24,89	24,27	20,46	24,88	0,08												
	JPL	15,69	0,50	9,83	24,94	24,90	24,48	20,87	24,91	0,66												
8° sequenza	AG	12,39	24,49	0,79	24,98	24,98	24,95	21,88	24,88													
	JPL	10,03	24,00	2,83	24,99	24,99	24,96	21,19	24,98													
9° sequenza	AG	23,53	3,40	24,88	24,93	24,46	24,22	24,45	24,45	24,43	14,05	9,51										
	JPL	22,69	4,24	24,47	24,46	24,47	24,44	24,46	24,46	24,46	18,54	9,22										
10° sequenza	AG	0,12	15,11	9,42	0,12	18,30	4,44	20,09	24,50	3,82												
	JPL	0,81	11,59	7,66	1,11	17,46	6,47	20,47	24,47	3,99												

Tabella 6: tabella contenente i tempi di trasferta per ciascun arco di ognuna delle dieci sequenze che costituiscono la campagna di rimozione.

Tw: Tempi di attesa [giorni]																						
1° sequenza	AG	5,00	5,00	5,49	5,01	5,22	5,04	5,01	5,05	5,02	5,03	5,04	5,09	5,04	5,00							
	JPL	5,00	5,00	5,04	5,01	5,01	5,03	5,00	5,00	5,00	5,03	5,03	5,04	5,04	5,00							
2° sequenza	AG	5,00	5,03	5,03	6,88	5,49	5,37	5,96	5,79	5,42	5,03	5,03	5,00									
	JPL	5,00	5,02	5,02	5,00	5,04	5,00	5,05	5,02	5,07	5,03	5,02	5,00									
3° sequenza	AG	5,00	5,06	6,48	5,90	5,43	5,29	5,57	5,05	5,35	5,02	5,01	5,59	5,05	5,04	5,05	5,01	5,06	5,01	5,02	5,04	5,00
	JPL	5,00	5,06	5,01	5,02	5,07	5,02	5,04	5,02	5,01	5,02	5,01	5,07	5,06	5,02	5,01	5,01	5,06	5,01	5,02	5,04	5,00
4° sequenza	AG	5,00	5,80	5,99	5,25	5,08	5,08	5,94	5,02	5,48	5,19	5,00										
	JPL	5,00	6,01	6,01	6,03	6,05	6,05	6,04	6,01	6,06	6,04	5,00										
5° sequenza	AG	5,00	5,17	5,07	6,12	5,76	6,09	5,03	5,22	5,06	5,03	5,08	5,01	5,05	5,00							
	JPL	5,00	5,02	5,07	5,04	5,01	5,01	5,02	5,06	5,06	5,02	5,06	5,01	5,07	5,00							
6° sequenza	AG	5,00	5,04	5,04	5,04	5,05	5,02	5,01	5,02	5,03	5,00											
	JPL	5,00	5,02	5,01	5,04	5,07	5,02	5,01	5,02	5,02	5,00											
7° sequenza	AG	5,00	5,05	5,08	5,05	5,04	5,08	5,07	5,06	5,05	5,00											
	JPL	5,00	5,00	5,06	5,06	5,04	5,06	5,04	5,06	5,03	5,00											
8° sequenza	AG	5,00	5,01	5,09	5,00	5,01	5,04	5,25	5,05	5,00												
	JPL	5,00	5,01	5,03	5,00	5,01	5,04	5,07	5,02	5,00												
9° sequenza	AG	5,00	5,48	5,04	5,03	5,52	5,67	5,51	5,54	5,53	5,48	5,54	5,00									
	JPL	5,00	5,51	5,53	5,53	5,53	5,55	5,54	5,53	5,54	5,55	5,52	5,00									
10° sequenza	AG	5,00	5,08	5,08	5,08	5,07	5,51	5,47	5,17	5,00												
	JPL	5,00	5,54	5,50	5,50	5,52	5,52	5,54	5,53	5,52	5,00											

Tabella 7: tabella contenente i tempi di attesa che caratterizzano ciascun arco di ognuna delle dieci sequenze che costituiscono la campagna di rimozione.

Tempo di attesa tra due sequenze successive [giorni]	AG	JPL
1°	30,05	30,05
2°	30,92	32,94
3°	74,42	75,77
4°	30,05	30,03
5°	30,05	30,01
6°	30,06	30,05
7°	30,02	30,05
8°	30,57	30,53
9°	30,05	30,51

Tabella 8: tabella contenente i tempi di attesa tra la fine di una sequenza di rimozione e l'inizio della successiva.

	Durata complessiva delle sequenze [giorni]		Scarto assoluto [giorni]	Scarto %	Scarto assoluto tot [giorni]	Scarto % tot
1° sequenza	AG	255,8	-8,02	-3,04	-0,73	-0,03
	JPL	263,9				
2° sequenza	AG	182,5	9,03	5,21		
	JPL	173,4				
3° sequenza	AG	505,0	0,96	0,19		
	JPL	504,0				
4° sequenza	AG	276,1	-3,07	-1,10		
	JPL	279,2				
5° sequenza	AG	289,4	2,96	1,03		
	JPL	286,5				
6° sequenza	AG	190,1	-2,12	-1,11		
	JPL	192,2				
7° sequenza	AG	200,4	3,25	1,65		
	JPL	197,1				
8° sequenza	AG	204,8	1,62	0,80		
	JPL	203,2				
9° sequenza	AG	286,6	-4,61	-1,58		
	JPL	291,2				
10° sequenza	AG	147,5	-0,74	-0,50		
	JPL	148,2				

Tabella 9: tabella contenente le differenze assolute e percentuali tra le diverse sequenze e l'intera missione, calcolate fra i risultati ricavati dall'AG e quelli ottenuti dal JPL.

All'interno delle tabelle precedentemente riportate è possibile osservare i tempi determinati dall'algoritmo genetico, ed in particolare in Tabella 9 possono essere osservati i valori delle differenze assolute e percentuali tra le durate complessive delle sequenze determinate dall'AG e dal JPL.

Un'osservazione interessante che può essere effettuata riguarda sicuramente le durate delle sequenze di rimozione caratterizzate da valori che, sebbene risultino essere simili a quelli determinati dal gruppo vincitore della competizione, sono ottenuti a fronte di diverse durate delle trasferte e dei tempi di attesa.

In particolare richiamando l'esempio introdotto in precedenza (Figura 43) si può osservare che, per quanto riguarda la prima sequenza di rimozione, la durata dell'ultima trasferta determinata dall'algoritmo genetico risulta essere significativamente inferiore al valore ottenuto dal JPL (Tabella 6), poiché anticipando l'arrivo sull'ultimo detrito della prima sequenza di rimozione, l'AG ha individuato una possibilità per il raggiungimento del valore minimo globale del problema considerato. L'algoritmo genetico ha permesso, oltre alla riduzione del costo complessivo della campagna, anche una leggera diminuzione della durata di quest'ultima che, rispetto a quella determinata dal JPL caratterizzata da un'epoca di conclusione della campagna pari a 26416 MJD2000, si conclude in corrispondenza del 26411,52 MJD2000.

Per quanto riguarda i tempi di attesa, può essere utile sottolineare che ogni valore assunto in corrispondenza dell'inizio e della fine di ciascuna sequenza di rimozione è stato considerato pari al tempo minimo di *Rendez-Vous* ovvero 5 giorni, analogamente a quanto è stato fatto dal JPL.

Concludendo il discorso riguardante i tempi determinati tramite l'applicazione dell'algoritmo genetico si può sicuramente osservare che, sebbene la differenza tra quest'ultimi e i tempi determinati dal gruppo del JPL sia contenuta, il suo effetto risulta essere incisivo sulla variazione di velocità totale richiesta per l'intera missione, permettendo una riduzione del costo complessivo di quest'ultima.

5.2.3 Divisione degli impulsi

Per comprendere meglio l'utilizzo delle diverse tipologie di manovre descritte all'interno del Capitolo 4.4, sono in seguito riportate le tabelle che riassumono la suddivisione degli impulsi e i valori di $\Delta\Omega(t)$ che influenzano la selezione di una tipologia di manovra rispetto ad un'altra

		Divisione degli impulsi [m/s]																			
1° sequenza	$\Delta V1$	98,17	55,59	22,34	81,58	0,00	132,74	305,34	65,09	100,82	0,00	452,37	0,00	0,00							
	$\Delta V2$	67,56	85,14	9,29	123,15	100,68	133,56	270,77	0,00	0,00	221,76	0,00	351,61	356,64							
2° sequenza	$\Delta V1$	300,81	237,01	165,40	0,00	58,24	64,39	18,90	91,32	102,99	190,80	150,87									
	$\Delta V2$	288,81	0,00	0,00	147,50	62,06	0,00	23,91	0,00	0,00	223,51	0,00									
3° sequenza	$\Delta V1$	107,37	32,62	95,61	21,29	135,15	24,18	90,62	233,92	136,43	89,07	177,96	23,18	74,00	158,80	127,83	207,74	0,00	191,41	225,54	0,00
	$\Delta V2$	89,07	33,30	0,00	22,74	0,00	28,41	0,00	0,00	71,30	66,14	0,00	0,00	122,66	0,00	0,00	0,00	154,65	187,52	0,00	231,86
4° sequenza	$\Delta V1$	39,56	57,24	0,00	133,58	293,05	254,37	120,35	91,14	310,79	103,25										
	$\Delta V2$	48,64	0,00	60,15	69,19	364,15	215,57	62,96	154,77	371,28	124,76										
5° sequenza	$\Delta V1$	97,88	18,80	82,50	4,74	0,00	128,75	109,67	73,08	29,77	0,00	100,11	255,54	157,95							
	$\Delta V2$	0,00	18,65	46,15	5,35	165,40	133,25	88,86	31,66	13,33	90,60	59,32	391,10	103,81							
6° sequenza	$\Delta V1$	94,66	0,00	132,32	55,58	115,00	408,40	187,87	139,57	0,00											
	$\Delta V2$	55,63	167,92	147,18	0,00	91,91	442,18	88,28	223,27	280,92											
7° sequenza	$\Delta V1$	230,16	123,21	69,22	242,48	61,47	57,28	121,07	62,83	0,00											
	$\Delta V2$	179,76	0,00	112,56	146,11	55,37	97,48	0,00	134,93	213,12											
8° sequenza	$\Delta V1$	159,73	74,19	0,00	104,31	199,35	155,62	186,74	11,28												
	$\Delta V2$	116,88	46,22	96,63	42,37	298,75	98,41	0,00	24,60												
9° sequenza	$\Delta V1$	44,03	0,00	179,25	321,50	176,56	0,00	173,85	0,00	0,00	0,00										
	$\Delta V2$	41,99	124,11	266,10	143,93	199,87	269,59	97,15	23,32	146,31	35,85	171,40									
10° sequenza	$\Delta V1$	181,19	46,18	47,01	0,00	51,79	254,90	0,00	54,61	54,64											
	$\Delta V2$	0,00	48,57	40,01	75,85	66,65	0,00	300,30	76,53	0,00											

Tabella 10: all'interno della tabella sono riportati gli impulsi forniti per ciascun arco della missione, tramite i quali è possibile distinguere chiaramente quale tipologia di manovra sia stata adottata (due impulsi, singolo impulso alla partenza, singolo impulso all'arrivo) per permettere l'ottimizzazione del costo globale.

		$\Delta\Omega$ [deg] calcolati alla partenza (T_p) e all'arrivo (T_a)																				
1° sequenza	$\Delta\Omega_p$	0,42	-2,92	-0,25	-4,06	-0,56	-2,77	9,88	-0,16	-0,05	1,68	0,47	-351,17	2,54								
	$\Delta\Omega_a$	-2,51	-1,87	-0,72	-2,46	-0,54	-2,75	11,15	-0,16	-0,08	1,64	10,62	0,69	2,53								
2° sequenza	$\Delta\Omega_p$	-10,32	-1,58	-1,16	-0,34	-1,87	-0,15	-0,48	0,05	-0,02	-7,30	0,08										
	$\Delta\Omega_a$	-10,76	-1,58	-1,32	-0,29	-1,75	-0,33	-0,16	0,20	-1,99	-6,18	0,16										
3° sequenza	$\Delta\Omega_p$	-1,12	0,64	0,02	0,18	0,02	-0,74	0,01	-0,05	1,51	1,93	0,01	-0,03	4,00	0,09	-0,01	0,75	2,10	6,98	0,22	6,60	
	$\Delta\Omega_a$	1,82	0,58	-0,34	-0,11	-0,92	0,56	0,85	5,67	-4,25	2,85	-4,33	0,59	2,39	1,51	0,35	5,40	-0,16	7,13	3,69	0,92	
4° sequenza	$\Delta\Omega_p$	-1,69	-0,04	-0,95	2,37	-346,76	-7,43	-2,03	-5,29	-12,83	-4,48											
	$\Delta\Omega_a$	-1,37	-0,26	-0,07	4,77	10,63	-8,83	-3,98	-3,08	-10,64	-3,71											
5° sequenza	$\Delta\Omega_p$	-0,18	-0,28	1,23	0,06	2,90	-0,81	0,80	-0,58	0,31	-2,82	0,97	-13,94	-3,46								
	$\Delta\Omega_a$	-0,21	-0,29	2,70	-0,02	0,04	0,58	-1,67	2,37	-1,00	-0,18	-2,79	-9,02	-5,35								
6° sequenza	$\Delta\Omega_p$	-1,45	-0,41	4,73	0,13	2,44	16,16	-2,97	-7,75	-0,84												
	$\Delta\Omega_a$	-2,93	-0,37	4,24	0,14	3,19	14,90	-6,57	-4,76	-0,81												
7° sequenza	$\Delta\Omega_p$	4,09	0,81	2,83	4,35	2,00	3,11	-0,29	-4,52	-0,38												
	$\Delta\Omega_a$	5,27	0,81	1,70	8,12	2,22	1,41	-2,35	-1,70	-0,37												
8° sequenza	$\Delta\Omega_p$	-1,97	-1,52	-0,26	-0,97	-10,48	-3,19	0,06	0,88													
	$\Delta\Omega_a$	-3,17	-2,56	-0,26	-3,51	-6,83	-5,40	3,05	0,38													
9° sequenza	$\Delta\Omega_p$	-0,62	0,63	-9,63	-3,77	-6,56	-6,23	-1,60	-0,57	-3,27	-0,66	2,22										
	$\Delta\Omega_a$	-0,78	0,15	-6,40	-10,86	-5,79	0,04	-5,43	-0,07	-0,54	0,03	0,19										
10° sequenza	$\Delta\Omega_p$	-0,05	-1,20	-0,72	0,06	-1,79	-0,40	-4,38	-2,66	0,09												
	$\Delta\Omega_a$	-0,06	-1,13	-0,88	0,05	-1,38	-1,21	0,07	-1,89	0,25												

Tabella 11: tabella contenente le differenze di RAAN fra l'orbita del detrito/chaser e l'orbita del successivo detrito da rimuovere in sequenza, calcolate in corrispondenza dei tempi t_p (tempo di partenza) e t_a (tempo di arrivo), del generico arco, i quali sono stati ottimizzati dall'AG.

Come è stato precedentemente introdotto, il metodo adottato per effettuare la stima della variazione di velocità del generico arco considerato (metodo del *tempo di trasferta limitato*, Capitolo 4.4), prevede la valutazione contemporanea delle tre possibili manovre attuabili (manovra a due impulsi, manovra a singolo impulso per $t = t_p$ e manovra a singolo impulso per $t = t_a$) e la successiva selezione della manovra meno dispendiosa dal punto di vista del ΔV richiesto.

Questa selezione dipende principalmente dal valore dei parametri orbitali, calcolati in corrispondenza dei tempi caratteristici t_p e t_a , della coppia di detriti tra i quali viene effettuata la manovra. Ricordando che gli unici contributi (al ΔV della manovra) considerati dal modello di stima semplificato sono legati alle variazioni $\Delta\Omega(t)$, Δa e Δi (equazioni 4.11-4.12-4.13) e sapendo che i valori del semiasse maggiore e dell'inclinazione di ciascun detrito sono considerati costanti, il principale fattore che influenza la scelta della tipologia di manovra è la differenza della RAAN valutata in corrispondenza dei tempi precedentemente indicati.

Il fenomeno della *precessione differenziale* infatti permette in alcuni casi una sufficiente riduzione della differenza di Ω tra un detrito della sequenza e il successivo, tale da diminuire consistentemente il ΔV richiesto per correggere la RAAN e favorire a seconda dei casi una tipologia di manovra rispetto ad un'altra.

In particolare, effettuando un confronto diretto tra la Tabella 10 e 11, è possibile evidenziare una certa corrispondenza tra gli archi caratterizzati da manovre a singolo impulso (calcolate sia per $t = t_p$ che $t = t_a$) e gli archi di missione caratterizzati da valori di $\Delta\Omega(t_p)$ e $\Delta\Omega(t_a)$ contenuti o da una grande differenza tra questi ultimi. È importante sottolineare che piccole differenze di RAAN incentivano l'utilizzo di manovre a singolo impulso poiché il costo legato alla correzione di quest'ultima non risulta essere eccessivo; nel caso in cui il $\Delta\Omega(t)$ dovesse risultare molto elevato, la variazione di velocità richiesta per effettuare la correzione sarebbe eccessiva per poter essere raggiunta tramite un singolo impulso e si opterebbe per una manovra a due impulsi in grado sfruttare l'effetto del J_2 a proprio vantaggio (ricorda il Δx , equazione 4.16) riducendo il costo complessivo dell'arco della missione.

Volendo effettuare un esempio per chiarire al meglio questo discorso, considerando la penultima trasferta della prima sequenza di rimozione può essere osservato che quest'ultima è caratterizzata da una manovra a singolo impulso effettuata per $t = t_a$, infatti si ha che $|\Delta\Omega_a| = 0,69^\circ < 8,83^\circ = |\Delta\Omega_p|$. La disuguaglianza espressa giustifica in questo caso l'adozione di questa tipologia di manovra, ma

volendo sottolineare che la scelta di quest'ultima viene effettuata in base alla convenienza dal punto di vista del ΔV può essere ancora osservata la prima trasferta appartenente alla prima sequenza di rimozione. Quest'ultima, infatti, sebbene sia caratterizzata da $|\Delta\Omega_p| = 0,42^\circ < 2,51^\circ = |\Delta\Omega_a|$ adotta una manovra a due impulsi poiché essa risulta essere più conveniente dal punto di vista del costo della trasferta stessa.

5.2.4 Confronto con il metodo PSO

Nel seguente paragrafo verrà effettuato un rapido confronto fra i risultati ottenuti dall'*AG* e quelli ricavati dall'applicazione del ***PSO (Particle Swarm Optimization)***, per valutare l'affidabilità dei risultati raggiunti tramite l'utilizzo dell'algoritmo genetico.

In riferimento alla descrizione dei meccanismi che regolano il funzionamento del *PSO* effettuata all'interno del Capitolo 3.3, è in seguito riportata una figura contenente il confronto tra i ΔV accumulati in funzione del tempo della missione, calcolati tramite i risultati del *JPL*, i risultati dell'*AG* e i valori ricavati dall'applicazione del *PSO*.

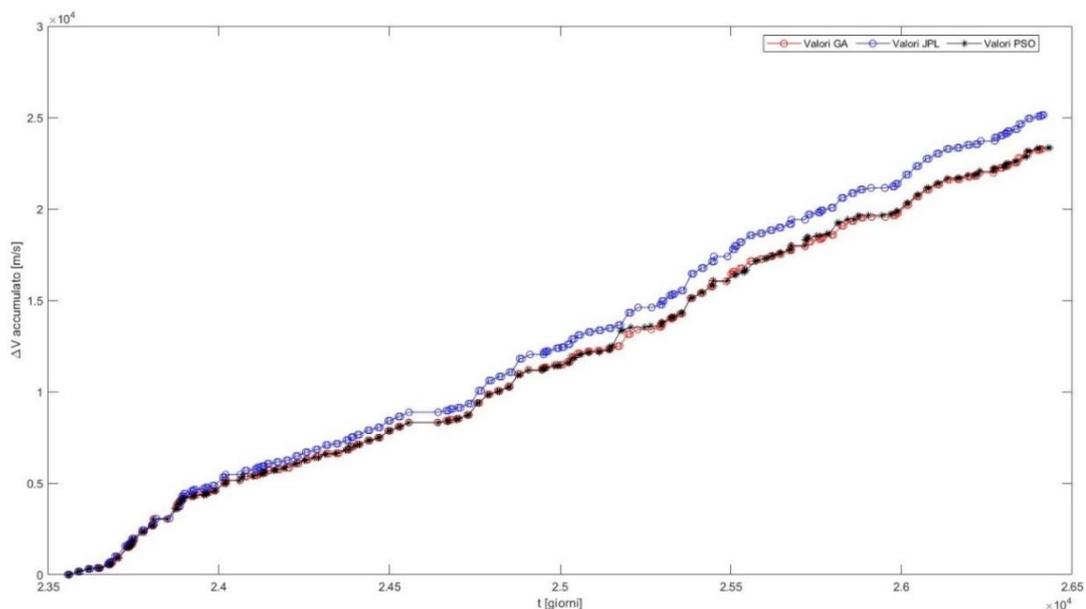


Figura 46: confronto tra i ΔV accumulati ricavati dall'applicazione dei diversi modelli. La simulazione svolta tramite l'utilizzo del metodo *PSO* ha coinvolto un numero di particelle, decisamente maggiore del numero di individui utilizzati per l'*AG*, pari a circa 6000. Questa grande differenza è basata principalmente sui diversi meccanismi che regolano i due metodi e sul minor numero di coefficienti che caratterizzano il metodo *PSO* e che rendono quest'ultimo capace di gestire un elevato numero di individui/particelle in maniera relativamente semplice.

Può essere interessante osservare che l'andamento generale descritto dai risultati ottenuti dal metodo *PSO* non si discosta eccessivamente dai risultati ottenuti tramite l'*AG*. In particolare per una gran parte della missione i valori delle variazioni di velocità accumulate, determinati tramite i due diversi metodi, risultano essere quasi del tutto coincidenti (in APPENDICE C sono riportati i principali risultati), a meno di alcuni archi della campagna come quelli riportati in Figura 47.

Naturalmente considerando che il *Particle Swarm Optimization* è basato su meccanismi di tipo stocastico, è possibile che effettuando ulteriori simulazioni possano essere ottenute delle soluzioni più performanti.

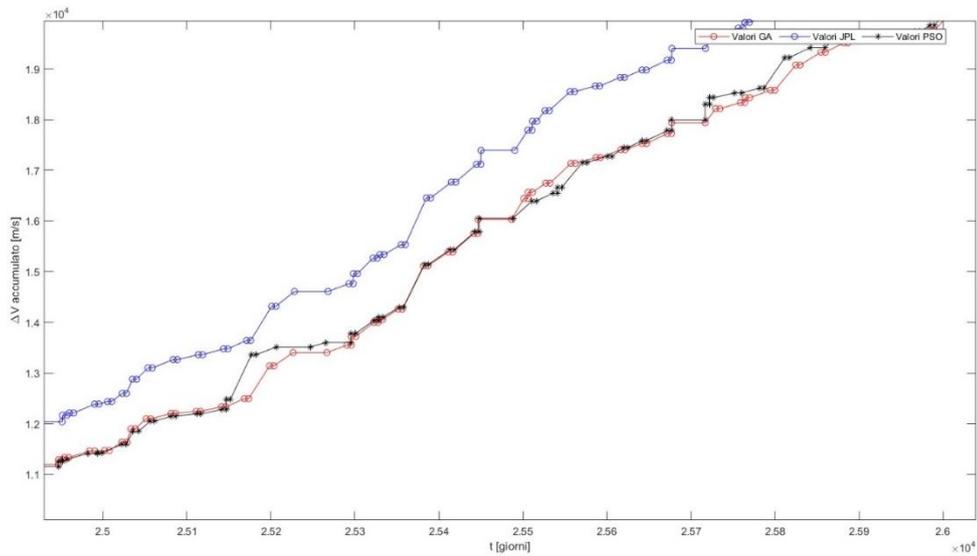


Figura 47: dettaglio raffigurante la differenza tra i valori determinati dal PSO e quelli ottenuti dall'AG per alcuni archi della missione. Queste discrepanze possono essere ricondotte a diversi fattori e tra questi vi è la natura stocastica di entrambi i metodi o ancora la possibile convergenza del metodo PSO verso soluzioni di minimo locale.

Concentrandosi sui risultati finali ottenuti dall'applicazione di questo metodo, deve essere sottolineato che il *Particle Swarm Optimization* nasce come metodo di ottimizzazione di problemi **non vincolati**, per questo motivo è stato necessario riformulare i parametri utilizzati per la risoluzione del problema, manipolandoli in maniera adeguata. Tra i vari vincoli che caratterizzano il problema affrontato (Capitolo 4.3), non è stato possibile riformulare quello riguardante la durata massima dell'intera campagna come può facilmente essere osservato in Figura 48.

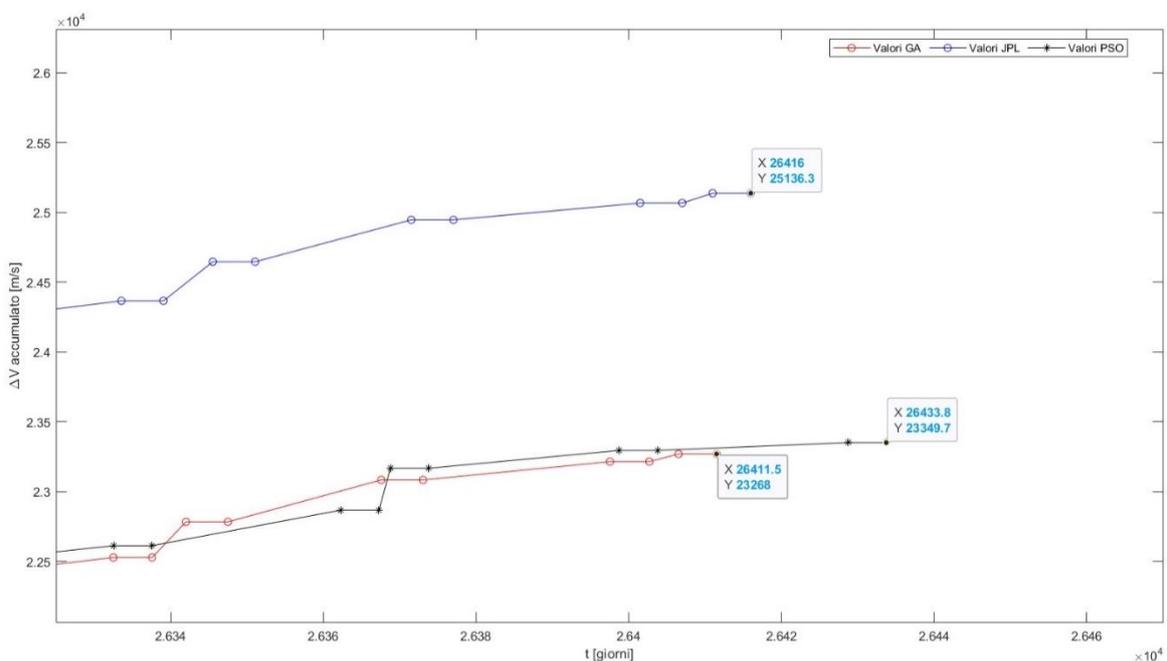


Figura 48: raffigurazione dei valori finali, del ΔV accumulato, calcolati tramite i risultati del JPL, dell'AG e del PSO.

	ΔV tot [m/s]		Scarto assoluto [m/s]	Scarto %	Scarto assoluto tot [m/s]	Scarto % tot
	AG	PSO				
1° sequenza	AG	3034,2	5,74	0,19	-81,65	-0,35
	PSO	3028,5				
2° sequenza	AG	2126,5	10,25	0,48		
	PSO	2116,3				
3° sequenza	AG	3160,4	-4,28	-0,14		
	PSO	3164,7				
4° sequenza	AG	2874,8	26,92	0,95		
	PSO	2847,9				
5° sequenza	AG	2206,3	-150,23	-6,38		
	PSO	2356,5				
6° sequenza	AG	2630,7	91,66	3,61		
	PSO	2539,0				
7° sequenza	AG	1907,0	-38,17	-1,96		
	PSO	1945,2				
8° sequenza	AG	1615,1	-40,86	-2,47		
	PSO	1656,0				
9° sequenza	AG	2414,8	15,84	0,66		
	PSO	2399,0				
10° sequenza	AG	1298,2	1,48	0,11		
	PSO	1296,7				

Tabella 12: differenze assolute e percentuali tra il costo delle sequenze e dell'intera campagna, determinate tramite l'utilizzo dei due metodi di ottimizzazione (AG e PSO).

Dal confronto grafico in Figura 48 e dai dati contenuti in Tabella 12 può essere osservato che lo scarto totale, per quanto riguarda le variazioni di velocità accumulate durante l'intera campagna, tra i due diversi metodi di ottimizzazione risulta essere particolarmente contenuto. Nello specifico i risultati ottenuti dall'applicazione dell'AG portano ad un costo totale leggermente inferiore rispetto a quelli del PSO, per il quale si ottiene un costo della campagna pari a circa $82 \frac{m}{s}$ in più.

Naturalmente bisogna tenere conto del fatto che le soluzioni raggiunte tramite il PSO non riescono a rispettare il vincolo sulla durata totale dell'intera campagna, la quale risulta essere pari a 26433.9 giorni rispetto al valore massimo di 26419 giorni.

Anche se quest'ultimo aspetto può sembrar costituire un problema, bisogna ricordare lo scopo di questo breve confronto non è focalizzato sull'effettuare la stessa medesima analisi condotta tramite l'utilizzo dell'AG, ma quello di comprendere se l'andamento generale delle soluzioni ricavate da quest'ultimo sia confrontabile con quello ottenuto tramite l'applicazione di un differente metodo di ottimizzazione euristico, senza dover effettuare particolari operazioni di calibrazione dei parametri di quest'ultimo (PSO).

Un ultimo importante fattore che differenzia i due metodi utilizzati è il tempo di calcolo impiegato per raggiungere i risultati e ottimizzare il problema considerato. In particolare può essere evidenziato che l'applicazione del metodo PSO comporta un tempo totale di calcolo pari a 5529,66 secondi, rispetto al valore decisamente maggiore che caratterizza il tempo necessario per il completamento dell'ottimizzazione da parte dell'AG, per il quale è stato necessario attendere 8590,64 secondi, pari ad una durata di circa il 55% in più rispetto al PSO. Questa differenza può essere associata ai differenti meccanismi adottati dai due metodi per la generazione delle soluzioni, di iterazione in iterazione. In particolare se l'algoritmo genetico prevede la creazione di popolazioni di soluzioni che si susseguono nelle diverse generazioni usufruendo dell'azione dei vari operatori genetici, il metodo PSO permette di utilizzare la popolazione iniziale aggiornando "solamente" i valori della velocità e della posizione di ciascuna particella nel corso della ricerca della soluzione ottimale. In generale quindi la minore complessità che caratterizza le iterazioni del Particle Swarm Optimization può costituire la causa del minor tempo di calcolo impiegato. È auspicabile che, a patto di essere in grado di definire adeguatamente i parametri in modo da rispettare implicitamente i vincoli imposti, il PSO possa essere

utilizzato per effettuare in maniera più rapida un maggior numero di simulazioni rispetto agli *AG*, per i quali i tempi di calcolo tendono ad aumentare rapidamente con il numero di individui generati.

A valle di questo confronto può essere concluso che, i risultati ottenuti dall'*AG* e dal *PSO* sono relativamente simili e possono costituire una buona stima preliminare e successivamente una base per ulteriori modifiche e per l'applicazione di metodi alternativi.

5.3 Considerazioni finali

Dopo aver descritto i risultati ottenuti dalle simulazioni effettuate, alla luce di quanto è stato analizzato possono essere espresse alcune considerazioni finali riguardanti i metodi adottati e in particolare i vantaggi/svantaggi associati al loro utilizzo.

Per quanto riguarda il metodo utilizzato per effettuare la stima delle variazioni di velocità (Capitolo 4.4), quest'ultimo è risultato essere un valido strumento per poter effettuare una rapida valutazione preliminare dei ΔV richiesti per ciascuna manovra, riducendo la complessità associata al problema della determinazione del valore di ciascun impulso. D'altro canto se si volesse effettuare una stima più accurata sarebbe necessario modificare quest'ultimo, introducendo al suo interno i contributi che sono stati trascurati come quelli legati alla correzione dell'*eccentricità*, dell'*argomento del periastro* e dell'*anomalia vera*, o ancora considerando gli ulteriori disturbi, oltre all'effetto del J_2 , agenti sull'intera dinamica del sistema considerato.

Il discorso riguardante l'algoritmo genetico utilizzato è più complesso poiché, sebbene il suo utilizzo sia stato fondamentale, alcune delle sue caratteristiche intrinseche hanno comportato alcune difficoltà non trascurabili.

Il principale aspetto positivo legato all'utilizzo dell'*AG* è la possibilità di poter effettuare il calcolo di ogni tempo caratteristico all'interno di una singola simulazione. Le capacità dell'*AG* di ricercare la soluzione ottima a livello globale è sicuramente una caratteristica estremamente utile per poter effettuare la stima iniziale dei diversi valori dei tempi caratteristici, fornendo una buona base per ulteriori modifiche e aggiustamenti futuri.

Può essere infine evidenziato che, nel caso del lavoro svolto, l'implementazione dell'algoritmo genetico è stata relativamente semplice poiché all'interno del software *Matlab*, e in particolare tramite l'*Optimization Tool*, è stato possibile usufruire di un ambiente all'interno del quale sono presenti le funzioni che caratterizzano i diversi step che identificano un algoritmo genetico.

Passando ora alle problematiche riscontrate nell'utilizzo di questa tipologia di algoritmi, prima fra tutte vi è la natura stocastica di questi ultimi, che comporta una maggior difficoltà nel ricavare dei risultati soddisfacenti a seguito di simulazioni "sfortunate" caratterizzate da una popolazione iniziale inadatta alla risoluzione del problema.

Un'ulteriore difficoltà incontrata nell'utilizzo degli *AG* è legata alla volontà di effettuare una stima preliminare dei costi della campagna, non potendo quindi contare su una popolazione iniziale da poter imporre per guidare la ricerca. La mancanza di quest'ultima impatta negativamente sulla quantità e

sui tempi di simulazione richiesti per poter ottenere una popolazione iniziale, generata casualmente dall'algoritmo, sufficientemente adatta alla risoluzione del problema.

Sebbene questi metodi euristici riescano a gestire problemi dalla natura complessa, dalle analisi effettuate può essere evidenziato che all'aumentare del numero di variabili considerate dall'algoritmo, il numero di calcoli che quest'ultimo deve effettuare cresce in maniera vertiginosa e ciò può essere problematico dal punto di vista delle capacità dell'hardware utilizzato per le analisi.

Effettuate queste considerazioni finali, si procede infine con il trarre le conclusioni dal lavoro svolto.

Conclusioni

Il lavoro svolto all'interno di questa tesi è stato focalizzato sull'utilizzo di un *algoritmo genetico* volto alla ricerca delle manovre "favorevoli" in grado di minimizzare il costo complessivo della campagna di rimozione di detriti spaziali, tramite l'ottimizzazione dei tempi caratteristici delle varie fasi dell'intera missione proposta all'interno della nona edizione della *Global Trajectory Optimization Competition*. L'algoritmo genetico è stato accoppiato ad un codice in grado di effettuare una stima preliminare del costo di una generica trasferta in funzione dei tempi determinati dall'*AG* (Capitolo 4.5), permettendo di utilizzare delle manovre a doppio o a singolo impulso in base alla convenienza di queste ultime, rendendo possibile la diminuzione del ΔV richiesto complessivamente per portare a termine la missione. È stato infine effettuato un confronto tra le soluzioni ricavate dall'*AG* e quelle ottenute dall'implementazione di un ulteriore metodo di ottimizzazione, ovvero il *PSO* (*Particle Swarm Optimization*), per effettuare una prima verifica dell'attendibilità dei risultati ottenuti.

Sebbene gli algoritmi genetici appartengano ad una classe di metodi di ottimizzazione *euristici*, affetti quindi da un certo grado di casualità, i risultati ottenuti risultano essere sufficientemente accurati e non eccessivamente distanti da quelli ottenuti dal JPL.

È fondamentale a questo punto sottolineare che la problematica legata alla possibile convergenza prematura dell'algoritmo genetico verso soluzioni di minimo locale è stata affrontata cercando di aumentare, entro i limiti dell'hardware utilizzato, il numero di individui generati per ciascuna popolazione, in modo tale da ampliare la diversità genetica tra i diversi individui e limitare la proliferazione di soluzioni decisamente distanti dall'ottimo, favorendo quindi l'esplorazione di soluzioni "migliori".

Parallelamente all'incremento della popolazione costituente ciascuna generazione, è stato deciso di aumentare il numero massimo di generazioni da poter sviluppare per favorire l'assestamento dell'algoritmo e limitare le oscillazioni dei risultati dovute alla natura stocastica di quest'ultimo.

A fronte del lavoro svolto può essere sicuramente sottolineato che, sebbene gli algoritmi genetici costituiscano un valido strumento per l'ottimizzazione di problemi dall'elevata complessità computazionale, permettendo una stima più rapida della soluzione di ottimo del problema considerato, la convergenza di questi ultimi può essere minata dalla loro natura intrinsecamente stocastica e dalle capacità dell'hardware utilizzato. Un esempio di questa problematica è stato riscontrato all'interno del lavoro svolto poiché la soluzione ricavata, per quanto sia soddisfacente, è stata ottenuta a seguito di un elevato numero di simulazioni "sfortunate" che hanno rallentato l'intero processo di analisi.

È necessario inoltre tener conto che, aumentando ulteriormente il numero di individui per popolazione generata ed effettuando delle analisi successive, è potenzialmente possibile ottenere soluzioni più performanti (ΔV_{tot} inferiore) proprio a causa della natura probabilistica dell'algoritmo e della moltitudine di punti di minimo locale che caratterizzano il problema affrontato. La possibilità di effettuare ulteriori analisi utilizzando nuovamente gli algoritmi genetici o diverse tipologie di metodi, a partire dai risultati ottenuti, è lasciata ad ulteriori iterazioni future.

Possono essere infine elencati i potenziali miglioramenti futuri auspicabili per aumentare le performance del codice sviluppato dal punto di vista della stima effettuata e della convergenza ottenuta:

1. Aumentare l'accuratezza della stima dei costi di ogni trasferta riducendo il grado di semplificazione tramite l'introduzione degli ulteriori contributi al ΔV relativi alle manovre di correzione degli apsi, dell'eccentricità e dell'anomalia vera, o ancora considerando un numero maggiore di impulsi, passando quindi da una trattazione a singolo o doppio impulso a modelli a numero di impulsi superiore. Potrebbero inoltre essere introdotti all'interno del modello gli ulteriori disturbi agenti sul sistema dinamico, che sono stati trascurati all'interno di questa stima preliminare.
2. Fornire una maggiore "libertà" all'algoritmo genetico di ricercare le condizioni ottime, svincolandosi dal tempo di partenza determinato dal *JPL* e dalle durate imposte per il *RV* dei rispettivi detriti di inizio e fine sequenza.
3. Effettuare un'analisi più approfondita delle caratteristiche dell'algoritmo genetico implementato migliorandone le performance tramite un'opportuna scelta delle operazioni di codifica, selezione, crossover e mutazione.
4. Utilizzare degli hardware più potenti per permettere analisi caratterizzate da un numero di variabili e parametri maggiore, cercando di aumentare la precisione e le capacità di ricerca dell'algoritmo implementato, rendendo quest'ultimo più robusto.
5. Possibile parallelizzazione del lavoro tramite l'utilizzo in *locale* (divisione del carico computazionale su più *core* del processore integrato) o tramite *cluster* (utilizzo di più nodi i quali possono essere fisici oppure in cloud). Questa tecnica permetterebbe idealmente di ridurre i tempi computazionali richiesti dall'algoritmo genetico, suddividendo il lavoro tra più unità, a patto di configurare in maniera opportuna il numero di core utilizzati e la loro comunicazione/interfaccia.

Appendice A

A.1 Parametri orbitali dei detriti considerati

ID Detriti	Epoca di riferimento [mjd2000]	a [m]	e	i [rad]	Ω [rad]	ω [rad]	M [rad]
0	2,19476E+04	7,16574E+06	1,48723E-03	1,70849E+00	5,42515E+00	5,18965E-01	3,22089E+00
1	2,21672E+04	7,11948E+06	1,68188E-02	1,71903E+00	4,03023E+00	2,24973E+00	4,88073E+00
2	2,19718E+04	7,15962E+06	3,79283E-03	1,69510E+00	2,92871E+00	4,49332E+00	6,24376E+00
3	2,21695E+04	7,11051E+06	6,66630E-03	1,69429E+00	6,23365E-01	3,41191E+00	4,77142E+00
4	2,20522E+04	7,10200E+06	1,82962E-03	1,74987E+00	2,62256E+00	2,39707E+00	3,13292E+00
5	2,19750E+04	7,17347E+06	8,50073E-03	1,72500E+00	4,71688E+00	2,98732E+00	5,49448E+00
6	2,21481E+04	7,05804E+06	8,72344E-03	1,72067E+00	3,57464E+00	4,98144E+00	4,19562E+00
7	2,21428E+04	7,05960E+06	2,49324E-03	1,70691E+00	1,45599E+00	4,30209E+00	5,34815E+00
8	2,21287E+04	7,13432E+06	1,62716E-02	1,74453E+00	1,32978E-01	5,83821E+00	5,56218E+00
9	2,20376E+04	7,14721E+06	8,00772E-03	1,70544E+00	3,37873E+00	1,27602E+00	5,22343E+00
10	2,21878E+04	7,16222E+06	2,40229E-03	1,71795E+00	2,60442E+00	1,89428E+00	4,38484E+00
11	2,20920E+04	7,23251E+06	1,17736E-03	1,70663E+00	3,05166E+00	1,70765E+00	3,35748E+00
12	2,21928E+04	7,15864E+06	1,00402E-02	1,73203E+00	7,21701E-01	2,94544E+00	3,28355E+00
13	2,21784E+04	7,23649E+06	3,31235E-03	1,71375E+00	1,80437E+00	4,14807E+00	2,25817E+00
14	2,21344E+04	7,18344E+06	5,81161E-03	1,69838E+00	1,30497E+00	4,99069E+00	3,55625E+00
15	2,20579E+04	7,18286E+06	7,26777E-03	1,72535E+00	1,20353E+00	5,51763E+00	4,05139E+00
16	2,20291E+04	7,08947E+06	8,93267E-03	1,71522E+00	1,23044E+00	2,91252E+00	1,40085E+00
17	2,19766E+04	7,17202E+06	7,58935E-03	1,71240E+00	4,12316E+00	2,72357E+00	1,16976E+00
18	2,19757E+04	7,11605E+06	8,94592E-03	1,72019E+00	1,82798E+00	9,10803E-01	3,29991E+00
19	2,19316E+04	7,13032E+06	1,10132E-02	1,71238E+00	2,41914E+00	2,10260E+00	1,03095E+00
20	2,19568E+04	7,01236E+06	3,73064E-03	1,71456E+00	4,76791E+00	2,22421E+00	1,44076E+00
21	2,20755E+04	7,05952E+06	5,30357E-03	1,72127E+00	3,27372E+00	3,32868E+00	3,53557E+00
22	2,20693E+04	7,06256E+06	4,34429E-03	1,72748E+00	5,77471E+00	5,53221E+00	5,91038E+00
23	2,19487E+04	7,15740E+06	1,52122E-02	1,72165E+00	5,63636E+00	2,61083E+00	2,82720E+00
24	2,20293E+04	7,15553E+06	1,33214E-02	1,71744E+00	4,05251E+00	7,24032E-01	5,57596E+00
25	2,21302E+04	7,14648E+06	8,86901E-03	1,71600E+00	3,11497E+00	4,91012E+00	1,90993E+00
26	2,20613E+04	7,10393E+06	5,85691E-03	1,69515E+00	3,41273E+00	3,54562E+00	5,61643E-02
27	2,20318E+04	7,17907E+06	1,24664E-02	1,72724E+00	6,00337E+00	4,24896E+00	3,13089E-01
28	2,21065E+04	7,15489E+06	8,59013E-03	1,71210E+00	2,45722E+00	4,32171E-01	4,34380E+00
29	2,19793E+04	7,21228E+06	5,39563E-03	1,72427E+00	5,03954E+00	5,12251E+00	1,29199E-02
30	2,21719E+04	7,04310E+06	6,44948E-03	1,71320E+00	7,89655E-01	5,59934E+00	1,55340E-01
31	2,21009E+04	7,05117E+06	6,44043E-03	1,74200E+00	5,44630E+00	8,37217E-00	2,31017E+00
32	2,20875E+04	7,13832E+06	1,55107E-02	1,72369E+00	2,35917E+00	5,90223E+00	5,81960E+00
33	2,20894E+04	7,17333E+06	1,75888E-02	1,74386E+00	5,39423E+00	2,67247E+00	3,91948E+00
34	2,19835E+04	7,07797E+06	1,40099E-02	1,72153E+00	1,18238E+00	2,41697E+00	3,34846E+00
35	2,21903E+04	7,18153E+06	8,26941E-03	1,68725E+00	4,19537E+00	4,72482E+00	1,98283E+00
36	2,20906E+04	7,12664E+06	1,88847E-02	1,73209E+00	4,63614E+00	1,89361E+00	1,96487E+00
37	2,20091E+04	7,05225E+06	1,02261E-03	1,70452E+00	5,60558E+00	3,61641E+00	5,34317E+00
38	2,19317E+04	7,21564E+06	7,67538E-03	1,71890E+00	7,35201E-01	3,40252E+00	4,70634E+00
39	2,20735E+04	7,21559E+06	7,14479E-03	1,74283E+00	1,20674E+00	1,15855E+00	2,90912E+00
40	2,21066E+04	7,11554E+06	3,48228E-03	1,71773E+00	3,34141E+00	5,49411E+00	5,56703E-01
41	2,21815E+04	7,05373E+06	3,78622E-03	1,70355E+00	2,84741E+00	3,66083E+00	3,81828E+00
42	2,20724E+04	7,16006E+06	5,81705E-03	1,72229E+00	2,49414E-01	2,49645E+00	5,81408E+00
43	2,20724E+04	7,05623E+06	8,31861E-03	1,72484E+00	2,77275E+00	5,47303E+00	5,66409E+00
44	2,20552E+04	7,22852E+06	1,64327E-03	1,74250E+00	5,78970E+00	4,70900E+00	6,27283E+00
45	2,19709E+04	7,19679E+06	8,96203E-03	1,71311E+00	5,71682E+00	9,93884E-01	5,28605E+00
46	2,20442E+04	7,17285E+06	7,91592E-04	1,73329E+00	5,83974E+00	1,28346E+00	5,63965E-01
47	2,21165E+04	7,19838E+06	7,01110E-04	1,70392E+00	3,65564E+00	3,57538E+00	1,99537E-01
48	2,21552E+04	7,22607E+06	3,20787E-03	1,70406E+00	3,98819E+00	3,38150E+00	3,55854E+00
49	2,19193E+04	7,16363E+06	6,00222E-03	1,69404E+00	2,88962E-01	1,06642E+00	4,40355E+00
50	2,21827E+04	7,22988E+06	2,99176E-03	1,71343E+00	5,69262E+00	1,22331E+00	4,13190E-02
51	2,20449E+04	7,27398E+06	4,55019E-04	1,69844E+00	6,06951E+00	2,51267E+00	4,08602E-01
52	2,20734E+04	7,18406E+06	1,22009E-02	1,70324E+00	4,38753E+00	4,28573E+00	2,26496E+00
53	2,22052E+04	7,12060E+06	1,87485E-02	1,72435E+00	1,19404E+00	6,03383E+00	2,31807E+00
54	2,21788E+04	7,08271E+06	5,46243E-03	1,72601E+00	7,65129E-01	3,87511E+00	4,17419E+00
55	2,19191E+04	7,11195E+06	7,21940E-03	1,70085E+00	2,22876E+00	3,02046E+00	2,46080E-01
56	2,21665E+04	7,13288E+06	1,57106E-02	1,72181E+00	1,39922E+00	2,81272E+00	2,12557E+00
57	2,21785E+04	7,11438E+06	3,04211E-04	1,69305E+00	1,51934E+00	1,55997E+00	5,68255E-01
58	2,20063E+04	7,10563E+06	1,17329E-02	1,72623E+00	3,14418E+00	5,26115E+00	2,56638E+00
59	2,21632E+04	7,27125E+06	3,76220E-04	1,72128E+00	4,83958E-01	2,21600E+00	5,07725E+00
60	2,21773E+04	7,17160E+06	2,10479E-04	1,72760E+00	1,16637E+00	3,96084E+00	5,24670E+00

ID Detriti	Epoca di riferimento [mjd2000]	a [m]	e	i [rad]	Ω [rad]	ω [rad]	M [rad]
61	2,20171E+04	7,00860E+06	9,66578E-04	1,72465E+00	1,44745E+00	1,31603E+00	2,18441E+00
62	2,22110E+04	7,08191E+06	1,42230E-02	1,71811E+00	4,13575E+00	4,51254E+00	4,71508E+00
63	2,19484E+04	7,02822E+06	3,38138E-03	1,70186E+00	5,15473E+00	6,01945E+00	3,41029E+00
64	2,21890E+04	7,08918E+06	1,10947E-02	1,70113E+00	5,27256E+00	5,87367E+00	2,63589E+00
65	2,19855E+04	7,18210E+06	1,45404E-03	1,72005E+00	5,09914E+00	6,24899E+00	1,07706E+00
66	2,20794E+04	7,16873E+06	8,17458E-03	1,71189E+00	2,23511E+00	6,16340E+00	1,28010E+00
67	2,19980E+04	7,16333E+06	1,33732E-02	1,70598E+00	4,72528E-01	3,28142E+00	5,51387E+00
68	2,20460E+04	7,08679E+06	5,31416E-03	1,73557E+00	4,99268E+00	3,02477E+00	2,12551E+00
69	2,20456E+04	7,04319E+06	8,85997E-03	1,70605E+00	1,00075E+00	1,60519E-01	3,04694E+00
70	2,20934E+04	7,04802E+06	9,30194E-03	1,71052E+00	5,75908E+00	7,75468E-01	5,32222E+00
71	2,21850E+04	6,99610E+06	1,61952E-03	1,72108E+00	4,77635E+00	2,76968E+00	5,05319E-01
72	2,21865E+04	7,15866E+06	8,80931E-03	1,70499E+00	5,21483E+00	2,64638E+00	3,63333E+00
73	2,21762E+04	7,09974E+06	1,00223E-02	1,71401E+00	2,30392E+00	4,84182E+00	3,60255E+00
74	2,20908E+04	7,13651E+06	1,93181E-02	1,76249E+00	3,80526E+00	1,65328E+00	3,01377E+00
75	2,20201E+04	7,09557E+06	1,17724E-02	1,71463E+00	3,73615E+00	2,75760E+00	6,35784E-01
76	2,20690E+04	7,04407E+06	3,81678E-03	1,72692E+00	3,23982E+00	9,78479E-02	5,16407E-01
77	2,21376E+04	7,11754E+06	1,09151E-02	1,72517E+00	4,28236E+00	6,93951E-01	5,84385E+00
78	2,22095E+04	7,11099E+06	3,85652E-03	1,71785E+00	3,29975E+00	5,48040E+00	3,60993E+00
79	2,20097E+04	7,09582E+06	1,45820E-02	1,70592E+00	2,41659E+00	5,02063E+00	5,63619E+00
80	2,19489E+04	7,09146E+06	9,66411E-03	1,71234E+00	1,36129E+00	6,27970E+00	8,40651E-01
81	2,19934E+04	7,13192E+06	1,46250E-02	1,73042E+00	5,08330E+00	4,25160E-01	9,14570E-01
82	2,20687E+04	7,16672E+06	7,28554E-03	1,71187E+00	8,06763E-01	5,57801E+00	4,21573E+00
83	2,21869E+04	7,04527E+06	1,20559E-03	1,73528E+00	5,22878E+00	3,64570E+00	4,79468E+00
84	2,21831E+04	7,16882E+06	8,79449E-03	1,73195E+00	1,40510E+00	2,20482E+00	3,37105E-01
85	2,21994E+04	7,23270E+06	9,04718E-04	1,70840E+00	4,47150E+00	4,33640E+00	4,29476E+00
86	2,21592E+04	7,16408E+06	4,85581E-03	1,74298E+00	4,66338E+00	1,99339E+00	4,29622E+00
87	2,20130E+04	7,13474E+06	1,79725E-02	1,69036E+00	1,61188E-01	1,55840E-01	5,58210E+00
88	2,20127E+04	7,14802E+06	1,61638E-02	1,72061E+00	3,40846E+00	2,64284E+00	7,30163E-01
89	2,21420E+04	7,20660E+06	1,70800E-03	1,71562E+00	7,43203E-01	4,32638E+00	5,50108E+00
90	2,21009E+04	7,23644E+06	4,78551E-03	1,71819E+00	2,37185E+00	6,25280E+00	4,46832E+00
91	2,20961E+04	7,13120E+06	5,74923E-03	1,74795E+00	5,44320E+00	2,77329E-01	3,23988E+00
92	2,21378E+04	7,07288E+06	1,74982E-03	1,70555E+00	3,38758E-01	1,28007E+00	6,09439E+00
93	2,21967E+04	7,12223E+06	9,93797E-03	1,70528E+00	5,36047E+00	2,42628E+00	4,59594E+00
94	2,20788E+04	7,09858E+06	6,44629E-03	1,73239E+00	3,38278E-01	7,74795E-01	4,42839E+00
95	2,19218E+04	7,20561E+06	7,87166E-03	1,70421E+00	3,10611E+00	1,90102E+00	3,91816E+00
96	2,19594E+04	7,10171E+06	2,89860E-03	1,73111E+00	3,04629E+00	2,04784E+00	2,23835E-01
97	2,19776E+04	7,08995E+06	1,59940E-03	1,70196E+00	3,29885E+00	5,52486E-01	5,23781E+00
98	2,20926E+04	7,25887E+06	2,59781E-03	1,72016E+00	5,66662E+00	4,94454E+00	4,39914E+00
99	2,19982E+04	7,15108E+06	1,03092E-02	1,71534E+00	3,19529E+00	2,45750E+00	5,28690E+00
100	2,21494E+04	7,16523E+06	1,33834E-02	1,72169E+00	5,50650E-01	3,39871E+00	4,99311E+00
101	2,21653E+04	7,06929E+06	4,80512E-03	1,70304E+00	8,49631E-01	4,00950E+00	1,28691E+00
102	2,21844E+04	7,11467E+06	7,62036E-03	1,76396E+00	1,32711E+00	7,50106E-01	3,73234E+00
103	2,22114E+04	7,18282E+06	1,31219E-04	1,71916E+00	5,01713E+00	6,15749E-01	1,45141E+00
104	2,20273E+04	7,13782E+06	4,37414E-03	1,70990E+00	5,95431E+00	6,12265E+00	5,14645E+00
105	2,20133E+04	7,15865E+06	5,24832E-03	1,73077E+00	5,78830E+00	4,30072E+00	8,04826E-01
106	2,21329E+04	7,10217E+06	1,22382E-02	1,73534E+00	9,07007E-01	3,82486E+00	2,61543E+00
107	2,20427E+04	7,07874E+06	1,09269E-02	1,73046E+00	1,84192E+00	1,09545E+00	5,75639E-01
108	2,19774E+04	7,15436E+06	1,33119E-02	1,71539E+00	3,80316E+00	3,82942E+00	2,77168E+00
109	2,21796E+04	7,08161E+06	6,68486E-03	1,67964E+00	1,79763E+00	1,75206E+00	3,71554E+00
110	2,21715E+04	7,03998E+06	8,02462E-03	1,70664E+00	3,32025E+00	1,02607E+00	5,09358E-01
111	2,20978E+04	7,11167E+06	3,99454E-03	1,71963E+00	5,33709E-01	4,05374E+00	3,03591E+00
112	2,19273E+04	7,12794E+06	6,27081E-03	1,69641E+00	2,55298E+00	3,75823E+00	4,93408E+00
113	2,20060E+04	7,10685E+06	1,39678E-03	1,70375E+00	2,92074E+00	3,68018E+00	6,00195E-01
114	2,21286E+04	7,11201E+06	1,35620E-02	1,72639E+00	1,50641E+00	3,02184E-02	4,02838E+00
115	2,22031E+04	7,12857E+06	6,93826E-04	1,71866E+00	1,25377E+00	7,10714E-02	5,77156E+00
116	2,20567E+04	7,15346E+06	1,25885E-02	1,71988E+00	2,21085E+00	8,84462E-01	3,22005E+00
117	2,21877E+04	7,05512E+06	3,34293E-03	1,72529E+00	1,34244E+00	5,57357E+00	3,47901E+00
118	2,21207E+04	7,14368E+06	5,27506E-03	1,70520E+00	5,14791E+00	4,66579E-01	3,81887E+00
119	2,19855E+04	7,12361E+06	1,96717E-03	1,71779E+00	2,46582E+00	5,76430E+00	3,29992E+00
120	2,20469E+04	7,13784E+06	6,76815E-03	1,73922E+00	4,51287E+00	5,97147E+00	2,16233E+00
121	2,20472E+04	7,04492E+06	1,39947E-03	1,71710E+00	2,17377E-01	4,88274E+00	2,83276E+00
122	2,19977E+04	7,15655E+06	8,82148E-03	1,70599E+00	4,62600E-01	9,69779E-01	4,93183E+00

Tabella A1: tabella contenente le principali caratteristiche dei detriti analizzati quali il numero identificativo (1° colonna), il tempo di misurazione dei parametri (2° colonna) e i parametri orbitali misurati in corrispondenza del tempo di misurazione (restanti colonne).

Appendice B

B.1 Propagazione delle orbite dei detriti tramite l'utilizzo dei parametri orbitali

Conoscendo il valore dei parametri orbitali osculatori e avendo determinato il valore dell'anomalia vera a partire da quella media (Problema di Keplero, Capitolo 3.2), è possibile ricavare le posizioni e le velocità di ciascun detrito lungo la propria orbita al variare del tempo.

Calcolando il *flight path angle* ϕ tramite:

$$\tan(\phi) = \frac{e \sin(v)}{1 + e \cos(v)} \quad (B. 1)$$

E ricordando l'espressione del modulo del raggio vettore e della velocità, la quale può essere ricavata dalla formulazione dell'*energia meccanica*:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(v)} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(v)} \quad (B. 2)$$

$$v = \sqrt{\frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}} \quad (B. 3)$$

Possono essere determinate le componenti nel piano Geocentrico-Equatoriale di \vec{r} e \vec{v} :

$$r_x = r [\cos(v + \omega) \cos(\Omega) - \sin(v + \omega) \cos(i) \sin(\Omega)]; \quad (B. 4)$$

$$r_y = r [\cos(v + \omega) \sin(\Omega) + \sin(v + \omega) \cos(i) \cos(\Omega)]; \quad (B. 5)$$

$$r_z = r [\sin(v + \omega) \sin(i)]; \quad (B. 6)$$

$$v_x = v [-\sin(v + \omega - \phi) \cos(\Omega) - \cos(v + \omega - \phi) \cos(i) \sin(\Omega)]; \quad (B. 7)$$

$$v_y = v [-\sin(v + \omega - \phi) \sin(\Omega) + \cos(v + \omega - \phi) \cos(i) \cos(\Omega)]; \quad (B. 8)$$

$$v_z = v [\cos(v + \omega - \phi) \sin(i)]; \quad (B. 9)$$

Queste relazioni permettono di esprimere la posizione e la velocità assunte dal generico detrito in funzione dei parametri orbitali e conseguentemente in funzione del tempo.

B.2 Determinazione dei parametri m ed n

Partendo dall'equazione introdotta nel Capitolo 4.4:

$$\frac{\delta \dot{\Omega}}{\dot{\Omega}} = -\frac{7}{2} \frac{\delta a}{a} - \tan(i) \delta i \quad (4.15)$$

Può essere osservato che quest'ultima rappresenta una linearizzazione della variazione relativa di $\dot{\Omega}$ nelle variabili a ed i . Questo aspetto è fondamentale per comprendere l'entità della variazione di $\Delta\Omega$ a seguito di una piccola variazione del semiasse e dell'inclinazione.

Manipolando l'equazione 4.15 e considerando piccole variazioni di a , i ed $\dot{\Omega}$, quest'ultima può essere integrata nel tempo ricavando:

$$\Delta[\Delta\Omega(t)] = -\frac{7}{2} \dot{\Omega}_0 \frac{\Delta a}{a_0} t - \dot{\Omega}_0 \tan(i_0) \Delta i t \quad (B.10)$$

Dove i termini $\dot{\Omega}_0$, a_0 e i_0 indicano i valori di riferimento dell'equazione, e possono essere espressi rispettivamente come $\dot{\Omega}_0 = \frac{\dot{\Omega}_{k+1} + \dot{\Omega}_k}{2}$, $a_0 = \frac{a_{k+1} + a_k}{2}$ e $i_0 = \frac{i_{k+1} + i_k}{2}$, ovvero i valori medi tra le caratteristiche del *chaser* e del *target*.

Moltiplicando ambo i membri per $\sin(i_0) V_0$, si ottiene:

$$\Delta[\Delta\Omega(t) \sin(i_0) V_0] = -7 \dot{\Omega}_0 \frac{\Delta a}{2a_0} \sin(i_0) V_0 t - \dot{\Omega}_0 \tan(i_0) \sin(i_0) t V_0 \Delta i \quad (B.11)$$

Ricordando a questo punto le espressioni 4.11, 4.12 e 4.13 è possibile riscrivere nuovamente:

$$\Delta x(t) = -7 \dot{\Omega}_0 \sin(i_0) y t - \dot{\Omega}_0 \tan(i_0) \sin(i_0) z t \quad (B.12)$$

Da questa espressione possono facilmente essere ricavati i parametri m ed n , i quali permettono di esprimere la variazione di *RAAN* dovuta alle variazioni del semiasse maggiore e dell'inclinazione, come:

$$\Delta x(t) = -m s_y y - n s_z z \quad (B.13)$$

Dove sono stati aggiunti i termini s_y ed s_z per tenere conto della frazione di impulso fornito.

I parametri m ed n sono frutto di una linearizzazione del problema, che permette di valutare in maniera più agevole il $\Delta x(t)$.

Appendice C

C.1 Ulteriori risultati dell'analisi svolta dall'AG

		Tp: Tempi di partenza [giorni]																				
1° sequenza	AG	23557,18	23562,18	23592,03	23622,5	23650,84	23681,04	23686,42	23705,07	23735,09	23740,2	23745,55	23751,48	23779,64	23807,94							
	JPL	23557,18	23562,18	23592,04	23622,06	23649,49	23679,49	23684,81	23700,44	23730,44	23738,14	23744,68	23751,12	23780,83	23810,18							
2° sequenza	AG	23843,08	23848,08	23877,98	23883,06	23891,98	23898,03	23924,62	23933,4	23961,36	23969,09	23990,06	24020,06									
	JPL	23851,08	23856,08	23886,03	23891,33	23897,06	23902,49	23924,56	23931,22	23958,66	23966,12	23987,03	24017,02									
3° sequenza	AG	24056,46	24061,46	24080,49	24111,86	24120,67	24134,5	24149,21	24178,09	24206,46	24233,44	24261,1	24291,07	24321,6	24350,9	24380,84	24393,59	24411,49	24441,54	24471,48	24501,47	24531,49
	JPL	24057,47	24062,47	24081,69	24111,64	24119,53	24132,7	24146,72	24174,89	24203	24231,1	24258,95	24288,94	24318,99	24348,98	24378,94	24393,05	24411,5	24441,55	24471,5	24501,51	24531,53
4° sequenza	AG	24635,86	24640,86	24671,42	24682,59	24702,71	24732,43	24762,42	24793,22	24822,26	24852,71	24882,42										
	JPL	24637,26	24642,26	24672,23	24684,72	24707,47	24737,49	24767,49	24797,48	24827,45	24857,5	24887,48										
5° sequenza	AG	24942,03	24947,03	24952,45	24959,33	24990,38	25007,71	25028,54	25038,46	25056,59	25086,31	25116,25	25146,28	25173,46	25203,5							
	JPL	24946,47	24951,47	24956,94	24965,18	24995,15	25010,5	25028,04	25040,17	25058,67	25088,67	25118,63	25148,67	25175,87	25205,93							
6° sequenza	AG	25261,5	25266,5	25295,7	25300,96	25327,56	25332,73	25356,53	25386,52	25416,43	25446,42											
	JPL	25262,95	25267,95	25297,88	25303,19	25326,62	25334,77	25360,03	25390	25419,87	25449,86											
7° sequenza	AG	25481,63	25486,63	25506,09	25511,22	25532,2	25562,15	25592,12	25621,47	25646,99	25676,92											
	JPL	25485,2	25490,2	25510,89	25516,45	25531,34	25561,32	25591,28	25620,8	25646,73	25676,67											
8° sequenza	AG	25712,03	25717,03	25734,43	25764	25769,79	25799,78	25829,8	25860	25886,92												
	JPL	25712,38	25717,38	25732,42	25761,45	25769,28	25799,28	25829,31	25859,34	25885,55												
9° sequenza	AG	25947,37	25952,37	25981,38	25989,81	26019,73	26050,18	26080,31	26110,04	26140,02	26170	26199,91	26219,5									
	JPL	25946,06	25951,06	25979,26	25989,03	26019,03	26049,02	26079,04	26109,02	26139,01	26169,01	26199,02	26223,08									
10° sequenza	AG	26264,05	26269,05	26274,25	26294,43	26308,94	26314,14	26337,52	26347,46	26373,03	26402,7											
	JPL	26267,8	26272,8	26279,15	26296,24	26309,4	26316,03	26339,01	26351,02	26377,02	26407,01											

Tabella C1: tabella contenente i tempi di partenza da ciascun detrito ad eccezione della prima colonna, la quale indica il tempo di inizio della generica sequenza.

		Ta: Tempi di arrivo [giorni]																				
1° sequenza	AG	23587,03	23617,01	23645,83	23675,83	23681,38	23700,06	23730,04	23735,18	23740,51	23746,44	23774,55	23802,89	23808,02	23813,02							
	JPL	23587,04	23617,02	23644,48	23674,48	23679,78	23695,44	23725,44	23733,14	23739,65	23746,09	23775,79	23805,14	23816,04	23821,04							
2° sequenza	AG	23872,95	23878,02	23885,11	23892,54	23919,25	23927,43	23955,58	23963,66	23985,03	24015,03	24020,54	24025,54									
	JPL	23881,01	23886,31	23892,06	23897,45	23919,56	23926,17	23953,64	23961,05	23982	24012	24019,51	24024,51									
3° sequenza	AG	24075,43	24105,38	24114,77	24129,07	24143,93	24172,51	24201,41	24228,1	24256,08	24286,06	24316,02	24345,85	24375,81	24388,53	24406,48	24436,48	24466,46	24496,45	24526,44	24556,44	24561,44
	JPL	24076,63	24106,63	24114,51	24127,63	24141,7	24169,85	24197,98	24226,09	24253,93	24283,93	24313,92	24343,92	24373,92	24388,04	24406,49	24436,49	24466,49	24496,49	24526,49	24556,49	24561,49
4° sequenza	AG	24665,62	24676,6	24697,46	24727,35	24757,34	24787,28	24817,24	24847,23	24877,23	24906,98	24911,98										
	JPL	24666,22	24678,71	24701,44	24731,44	24761,44	24791,44	24821,44	24851,44	24881,44	24911,44	24916,44										
5° sequenza	AG	24947,28	24954,26	24984,26	25001,95	25022,46	25033,43	25051,38	25081,26	25111,22	25141,2	25168,45	25198,45	25226,46	25231,46							
	JPL	24951,92	24960,11	24990,11	25005,49	25023,03	25035,15	25053,61	25083,61	25113,61	25143,61	25170,86	25200,86	25227,94	25232,94							
6° sequenza	AG	25290,66	25295,93	25322,52	25327,68	25351,52	25381,5	25411,41	25441,4	25446,57	25451,57											
	JPL	25292,86	25298,18	25321,58	25329,7	25355,01	25384,99	25414,85	25444,84	25450,14	25455,14											
7° sequenza	AG	25501,04	25506,15	25527,14	25557,11	25587,04	25616,39	25641,93	25671,87	25677,01	25682,01											
	JPL	25505,89	25511,39	25526,28	25556,28	25586,22	25615,76	25641,67	25671,64	25677,33	25682,33											
8° sequenza	AG	25729,41	25758,91	25764,79	25794,77	25824,76	25854,75	25881,87	25911,8	25916,8												
	JPL	25727,41	25756,42	25764,28	25794,27	25824,27	25854,27	25880,53	25910,53	25915,53												
9° sequenza	AG	25975,9	25984,78	26014,7	26044,65	26074,64	26104,53	26134,49	26164,47	26194,44	26213,96	26229,01	26234,01									
	JPL	25973,75	25983,5	26013,5	26043,49	26073,49	26103,48	26133,48	26163,47	26193,47	26212,56	26232,3	26237,3									
10° sequenza	AG	26269,17	26289,36	26303,86	26309,07	26332,45	26341,95	26367,55	26397,53	26406,52	26411,52											
	JPL	26273,61	26290,74	26303,9	26310,51	26333,49	26345,48	26371,49	26401,49	26411	26416											

Tabella C2: tabella contenente i tempi di arrivo su ciascun detrito ad eccezione dell'ultima colonna, la quale indica il tempo di fine della generica sequenza.

		Parametri: m, n																			
1° sequenza	m	2,83	2,73	2,58	2,83	0,04	1,69	3,17	0,01	0,04	0,10	3,02	3,16	0,01							
	n	-2,86	-2,93	-2,74	-2,89	-0,04	-1,60	-2,89	-0,01	-0,04	-0,10	-2,62	-2,62	-0,01							
2° sequenza	m	3,02	0,01	0,22	0,06	2,38	0,31	2,34	0,25	1,71	2,56	0,06									
	n	-2,87	-0,01	-0,24	-0,06	-2,39	-0,32	-2,46	-0,26	-1,87	-2,80	-0,05									
3° sequenza	m	1,68	3,30	0,36	0,97	1,02	2,45	2,58	2,78	2,92	2,89	2,69	2,40	2,41	0,80	1,50	3,23	3,36	3,25	3,46	3,32
	n	-1,62	-2,98	-0,34	-0,95	-1,09	-2,74	-2,70	-2,52	-2,59	-2,82	-2,91	-2,82	-2,87	-0,90	-1,50	-2,83	-2,90	-3,02	-2,97	-2,83
4° sequenza	m	2,89	0,60	1,73	3,09	3,12	2,87	2,58	2,69	2,90	3,08										
	n	-2,82	-0,59	-1,72	-2,89	-2,94	-2,97	-2,86	-2,95	-2,87	-2,83										
5° sequenza	m	0,03	0,21	2,93	1,40	1,60	0,56	1,55	2,85	2,97	3,06	2,63	3,01	2,92							
	n	-0,03	-0,20	-2,79	-1,34	-1,66	-0,55	-1,48	-2,86	-2,89	-2,89	-2,57	-2,93	-2,66							
6° sequenza	m	2,59	0,03	2,67	0,02	2,46	3,26	2,96	2,93	0,02											
	n	-2,77	-0,03	-2,46	-0,01	-2,09	-2,82	-2,82	-2,77	-0,02											
7° sequenza	m	1,50	0,01	1,82	2,96	3,19	3,03	2,35	2,87	0,01											
	n	-1,65	-0,01	-1,88	-2,85	-2,81	-2,75	-2,34	-2,87	-0,01											
8° sequenza	m	1,63	3,01	0,10	2,87	2,93	3,02	2,71	3,25												
	n	-1,43	-2,83	-0,09	-2,99	-2,98	-2,99	-2,59	-2,87												
9° sequenza	m	3,21	0,44	3,17	2,95	2,53	2,92	3,09	2,90	3,09	1,91	1,20									
	n	-2,69	-0,39	-3,17	-2,86	-2,86	-2,76	-2,75	-2,83	-2,88	-2,86	-1,66	-1,10								
10° sequenza	m	0,01	1,85	1,15	0,01	2,04	0,45	2,10	2,92	0,47											
	n	-0,01	-1,75	-1,09	-0,01	-2,07	-0,51	-2,32	-2,76	-0,44											

Tabella C3: parametri m ed n caratteristici di ciascun arco della campagna di rimozione.

		Δx (m/s)																				
1° sequenza		-297,59	-180,75	-78,86	-235,33	1,17	-203,53	1196,55	-0,31	-2,28	-1,78	1222,55	-28,48	-0,28								
2° sequenza		-1132,61	-0,19	-14,84	2,75	-165,14	-13,34	-10,42	10,55	-207,82	-607,21	5,44										
3° sequenza		215,68	61,82	-24,65	-17,46	-81,44	75,06	97,71	651,36	-510,37	306,01	-504,32	68,55	217,34	120,01	35,42	623,70	-41,93	771,13	436,78	34,09	
4° sequenza		-137,46	-16,80	17,39	532,41	1100,71	-946,79	-434,27	-291,10	-1084,45	-379,94											
5° sequenza		-1,89	-0,89	297,46	-3,97	-76,23	87,63	-188,78	283,32	-120,29	12,39	-334,24	-892,41	-574,78								
6° sequenza		-316,59	2,62	411,68	0,43	308,41	1560,00	-727,19	-452,39	2,30												
7° sequenza		411,16	0,32	112,73	894,05	236,17	125,04	-257,50	-141,77	0,96												
8° sequenza		-256,01	-280,97	-0,01	-401,51	-677,82	-600,83	350,10	34,67													
9° sequenza		-83,82	-26,71	-638,96	-1219,77	-569,55	84,67	-616,79	-0,61	-24,14	19,65	-69,50										
10° sequenza		-0,67	-88,62	-49,40	-0,69	-111,87	-63,16	89,49	-185,31	12,92												

Tabella C4: contributo alla variazione di velocità risparmiato sfruttando l'effetto del J_2 .

		Coefficienti di partizione: Sx Sy Sz																				
1° sequenza	Sx	0,04	0,13	0,07	0,13	0,51	0,21	0,08	0,49	0,39	0,50	0,05	0,66	0,50								
	Sy	-0,30	-4,47	2,04	3,31	0,49	1,23	3,45	0,49	0,50	0,91	2,77	-1,27	0,51								
	Sz	0,62	-0,69	1,08	-0,15	0,57	-0,14	-11,49	0,50	0,50	0,42	0,71	0,27	0,49								
2° sequenza	Sx	0,09	0,50	0,46	0,54	0,13	0,35	0,25	0,30	0,10	0,12	0,37										
	Sy	-210,17	0,49	0,83	0,51	-1,82	0,64	0,85	0,51	0,91	3,71	0,50										
	Sz	9,51	0,50	0,65	0,50	4,42	0,54	0,30	0,41	0,76	-1,04	0,50										
3° sequenza	Sx	0,04	0,09	0,22	-0,12	0,16	-0,02	0,06	0,05	0,03	0,08	0,05	0,05	0,15	0,19	0,11	0,05	-0,50	0,08	0,04	0,36	
	Sy	0,69	0,79	0,52	0,71	0,09	0,36	0,31	1,40	0,77	1,11	2,57	0,95	-1,07	0,71	0,45	2,79	0,93	4,40	-0,13	-0,71	
	Sz	0,54	0,28	0,53	0,48	0,58	0,46	0,60	0,72	0,63	-0,87	0,73	0,78	-1,02	0,62	0,54	0,77	0,40	-3,63	0,64	0,19	
4° sequenza	Sx	0,11	0,25	1,43	0,07	0,10	0,09	0,08	0,14	0,11	0,10											
	Sy	46,24	0,24	-1,05	2,52	-11,81	-3,52	1,51	-1,33	5,19	-4,98											
	Sz	-1,28	0,54	0,31	1,34	-1,61	2,05	1,95	-0,82	-0,97	-2,93											
5° sequenza	Sx	0,46	0,49	0,07	-0,22	7,61	-0,09	0,06	0,04	0,03	0,77	0,04	0,12	0,08								
	Sy	0,50	0,21	1,00	0,70	0,10	0,48	1,02	0,88	0,67	-0,26	0,95	-2,98	1,66								
	Sz	0,50	0,71	-3,65	0,46	0,26	0,49	0,55	0,68	0,80	0,18	0,61	-0,78	7,09								
6° sequenza	Sx	0,08	0,53	0,12	0,49	0,12	0,09	0,07	0,13	0,51												
	Sy	0,99	0,49	-2,75	0,51	-1,58	5,53	1,79	-2,96	0,47												
	Sz	-5,07	0,50	17,52	0,50	1,15	-1,51	1,40	-0,56	0,50												
7° sequenza	Sx	0,20	0,50	0,25	0,07	0,09	0,16	0,08	0,18	0,51												
	Sy	12,29	0,50	-0,75	-5,48	-4,80	3,80	-11,30	-3,39	0,52												
	Sz	1,81	0,50	-0,80	1,08	2,33	0,09	0,73	0,00	0,50												
8° sequenza	Sx	0,19	0,08	0,50	0,06	0,12	0,07	0,06	0,15													
	Sy	-0,87	1,32	0,49	2,99	-18,96	-7,43	-0,42	-0,24													
	Sz	0,84	-29,40	0,51	0,93	-0,53	1,22	0,66	-1,52													
9° sequenza	Sx	0,08	1,18	0,11	0,06	0,12	-7,72	0,06	0,46	0,33	-2,09	1,93										
	Sy	0,20	0,36	-4,97	3,63	345,26	-1,91	-2,17	-4,99	7,77	0,23	0,17										
	Sz	0,68	0,46	-0,65	0,97	-2,87	0,30	0,80	0,23	0,25	0,20	0,32										
10° sequenza	Sx	0,46	0,20	0,28	0,55	0,18	0,30	-4,63	0,12	0,30												
	Sy	0,50	2,88	-1,09	0,50	10,73	0,28	1,30	-3,08	0,54												
	Sz	0,50	-1,03	1,09	0,50	-0,67	0,55	0,34	-1,22	0,21												

Tabella C5: coefficienti di partizione caratteristici di ciascun arco della campagna.

		Contributi alla variazione di velocità: x y z [m/s]																			
1ª sequenza	x	-324,46	-242,59	-92,71	-318,04	-70,49	-355,28	1438,80	-20,96	-10,53	210,54	1364,91	88,88	326,98							
	y	-23,80	-8,50	5,81	20,80	-71,08	88,05	-65,17	-5,44	96,83	-12,50	-47,38	52,55	-65,59							
	z	-155,54	38,01	-16,28	91,62	-10,74	95,01	-14,60	-61,59	-27,43	-68,53	445,82	-336,11	-126,41							
2ª sequenza	x	-1387,99	-204,76	-171,78	-37,80	-225,81	-43,09	-21,03	26,01	-257,75	-796,11	20,80									
	y	-0,91	-39,56	26,60	48,48	-15,59	16,42	17,67	-90,45	52,67	37,69	-59,72									
	z	-20,30	-113,31	-63,03	134,08	-9,24	-59,21	33,28	-11,07	-88,46	85,82	138,19									
3ª sequenza	x	234,61	74,99	-44,06	-14,11	-118,87	72,41	110,08	731,48	-546,75	366,45	-560,96	76,52	309,12	195,66	45,87	694,30	-21,05	925,84	477,71	118,12
	y	-42,00	-37,46	81,31	-3,82	-23,26	-11,26	41,72	-61,90	96,86	-71,10	18,40	-10,69	35,08	-72,81	73,10	-24,90	-41,25	-32,23	56,48	57,49
	z	190,56	-43,71	-50,22	-43,70	-133,11	51,25	80,44	225,49	-177,90	-31,15	-177,00	20,12	-43,28	140,70	104,85	182,62	-147,56	-28,30	216,50	-191,05
4ª sequenza	x	-176,20	-32,99	-9,32	616,72	1377,12	-1147,33	-517,28	-400,03	-1378,24	-478,13										
	y	0,61	-9,26	-7,45	-32,26	17,50	-35,83	52,87	-40,02	45,46	-13,81										
	z	15,30	-56,28	58,95	72,68	-96,39	-95,94	-40,97	60,82	143,67	20,24										
5ª sequenza	x	-26,44	-36,49	347,19	-2,77	5,36	74,48	-214,77	306,08	-128,73	-23,28	-360,91	-1167,21	-690,81							
	y	52,70	-6,31	-72,19	-2,07	81,95	-76,12	19,17	-42,76	36,37	-35,95	38,80	-59,35	73,02							
	z	-79,29	-8,33	-8,36	-9,75	-143,56	250,34	-195,02	90,73	-20,67	79,84	-149,85	156,82	-11,71							
6ª sequenza	x	-377,98	-48,08	546,09	17,76	408,27	1913,87	-845,88	-610,54	-103,65											
	y	81,90	-54,80	27,62	-7,71	29,50	-57,29	68,03	-33,50	-18,31											
	z	7,64	151,27	4,85	52,38	80,50	-123,89	-93,05	103,02	260,45											
7ª sequenza	x	681,18	105,45	221,08	1047,80	285,23	181,39	-303,07	-220,21	-47,09											
	y	-8,56	-52,36	39,28	19,06	7,39	-12,94	-2,27	-14,49	7,95											
	z	85,04	38,12	-39,33	190,48	18,77	-94,63	-115,10	112,09	207,70											
8ª sequenza	x	-408,70	-330,96	-33,85	-456,60	-887,03	-702,10	394,68	49,10												
	y	-45,23	45,83	-64,38	15,85	-7,89	-9,63	32,77	15,88												
	z	-160,47	1,18	-63,61	-95,04	151,13	-105,53	183,70	-5,12												
9ª sequenza	x	-100,51	19,54	-824,62	-1400,26	-746,57	5,15	-701,00	-8,59	-69,47	3,79	24,32									
	y	-45,38	35,03	-26,90	42,50	0,32	-24,08	-24,40	-1,05	4,81	-28,29	84,66									
	z	-61,99	-117,45	115,68	-276,16	36,22	268,46	-201,23	21,65	-128,67	21,68	-147,03									
10ª sequenza	x	-8,26	-145,94	-113,19	6,88	-177,43	-156,68	8,73	-243,34	32,84											
	y	-60,76	11,14	-11,50	28,66	3,27	-47,44	53,05	-11,83	-52,94											
	z	-170,56	16,31	-29,61	-69,89	29,09	-245,00	295,45	23,33	-7,58											

Tabella C3: contributi costituenti la variazione di velocità necessaria per effettuare le manovre di ciascun arco della missione.

C.2 Principali risultati dell'analisi svolta dal PSO

		ΔV [m/s]																			
1ª sequenza	AG	165,7	140,7	31,6	204,7	100,7	266,3	576,1	65,1	100,8	221,8	452,4	351,6	356,6							
	PSO	165,8	140,2	30,7	200,3	96,8	263,2	578,6	67,6	102,5	223,0	450,7	351,6	357,4							
2ª sequenza	AG	589,6	237,0	165,4	147,5	120,3	64,4	42,8	91,3	103,0	414,3	150,9									
	PSO	587,2	236,4	163,9	149,5	110,5	67,3	41,9	92,0	103,0	413,3	151,3									
3ª sequenza	AG	196,4	65,9	95,6	44,0	135,2	52,6	90,6	233,9	207,7	155,2	178,0	23,2	196,7	158,8	127,8	207,7	154,7	378,9	225,5	231,9
	PSO	195,1	66,4	95,6	44,1	135,2	52,5	90,7	234,0	202,6	143,7	178,0	23,0	219,7	158,4	127,8	205,8	154,4	378,6	225,2	233,9
4ª sequenza	AG	88,2	57,2	60,1	202,8	65,2	469,9	183,3	245,9	682,1	228,0										
	PSO	85,8	58,7	60,9	197,4	65,7	466,6	174,0	247,2	674,2	225,1										
5ª sequenza	AG	97,9	37,5	128,7	10,1	165,4	262,0	198,5	104,7	43,1	90,6	159,4	646,6	261,8							
	PSO	97,6	37,6	121,8	11,5	165,3	261,8	196,0	100,3	43,3	89,1	194,0	882,4	155,8							
6ª sequenza	AG	150,3	167,9	279,5	55,6	206,9	850,6	276,2	362,8	280,9											
	PSO	87,2	172,8	288,5	56,6	201,3	845,8	287,2	352,0	267,6											
7ª sequenza	AG	409,9	123,2	181,8	388,6	116,8	154,8	121,1	197,8	213,1											
	PSO	336,2	162,6	109,8	496,1	123,2	165,2	140,6	197,6	213,9											
8ª sequenza	AG	276,6	120,4	96,6	146,7	498,1	254,0	186,7	35,9												
	PSO	301,9	135,0	92,3	96,4	601,0	196,6	186,6	46,2												
9ª sequenza	AG	86,0	124,1	445,4	465,4	376,4	269,6	271,0	23,3	146,3	35,8	171,4									
	PSO	83,7	124,8	445,0	462,9	370,8	269,6	267,5	23,2	145,4	35,6	170,4									
10ª sequenza	AG	181,2	94,7	87,0	75,8	118,4	254,9	300,3	131,1	54,6											
	PSO	181,3	69,1	115,6	78,2	114,1	254,7	300,2	127,3	56,2											

Tabella C7: confronto tra i ΔV ottenuti dall'AG e tramite l'utilizzo del PSO, per ciascun arco di ogni sequenza di rimozione.

		TOF: Durate delle trasferte [giorni]																			
1° sequenza	AG	24,85	24,98	23,33	24,98	0,34	13,64	24,97	0,09	0,31	0,89	23,07	23,25	0,08							
	PSO	25,00	25,00	24,97	25,00	0,00	13,99	25,00	0,00	0,00	0,03	23,37	21,65	0,00							
2° sequenza	AG	24,88	0,04	2,05	0,56	21,22	2,81	22,18	2,30	15,95	24,96	0,48									
	PSO	25,00	0,00	3,93	0,00	23,77	4,03	1,22	0,23	16,35	25,00	0,00									
3° sequenza	AG	13,97	24,89	2,91	8,40	9,43	23,30	23,32	21,64	22,64	24,96	24,94	24,25	24,91	7,69	12,89	24,99	24,93	24,98	24,97	24,96
	PSO	6,48	25,00	20,04	0,00	0,31	3,68	21,13	24,29	20,70	25,00	18,63	25,00	25,00	0,16	12,39	25,00	23,77	25,00	25,00	24,35
4° sequenza	AG	24,76	5,19	14,88	24,64	24,91	24,86	24,02	24,97	24,51	24,56										
	PSO	25,00	0,30	0,09	25,00	25,00	25,00	25,00	25,00	25,00	25,00										
5° sequenza	AG	0,25	1,82	24,92	11,57	14,75	4,88	12,92	24,66	24,91	24,96	22,17	24,99	22,96							
	PSO	0,00	0,00	25,00	0,01	23,80	8,41	13,70	20,24	25,00	24,98	0,00	25,00	24,86							
6° sequenza	AG	24,15	0,23	21,55	0,12	18,78	24,97	24,89	24,97	0,15											
	PSO	19,08	0,19	22,72	0,00	19,97	25,00	25,00	25,00	0,00											
7° sequenza	AG	14,41	0,06	15,92	24,92	24,89	24,27	20,46	24,88	0,08											
	PSO	22,47	20,54	0,00	25,00	25,00	13,81	17,05	25,00	0,00											
8° sequenza	AG	12,39	24,49	0,79	24,98	24,98	24,95	21,88	24,88												
	PSO	0,00	0,00	24,92	21,64	25,00	25,00	12,27	25,00												
9° sequenza	AG	23,53	3,40	24,88	24,93	24,46	24,22	24,45	24,45	24,43	14,05	9,51									
	PSO	25,00	12,55	25,00	25,00	25,00	24,99	25,00	0,75	24,98	3,74	6,56									
10° sequenza	AG	0,12	15,11	9,42	0,12	18,30	4,44	20,09	24,50	3,82											
	PSO	0,00	23,58	0,00	0,00	19,60	24,78	1,51	25,00	25,00											

Tabella C8: confronto tra le durate delle diverse trasferte che caratterizzano la campagna, determinate dall'AG e tramite l'utilizzo del PSO.

		Tw: Tempi di attesa [giorni]																				
1° sequenza	AG	5,00	5,00	5,49	5,01	5,22	5,04	5,01	5,05	5,02	5,03	5,04	5,09	5,04	5,00							
	PSO	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00	5,06	5,00	6,65	5,00	5,00							
2° sequenza	AG	5,00	5,03	5,03	6,88	5,49	5,37	5,96	5,79	5,42	5,03	5,03	5,00									
	PSO	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00	26,27	5,00	6,57	5,00	5,00	5,00									
3° sequenza	AG	5,00	5,06	6,48	5,90	5,43	5,29	5,57	5,05	5,35	5,02	5,01	5,59	5,05	5,04	5,05	5,01	5,06	5,01	5,02	5,04	5,00
	PSO	5,00	5,00	5,19	5,00	7,01	26,31	5,00	5,00	9,30	5,00	11,37	5,00	5,00	10,53	13,46	5,00	6,23	5,00	5,00	5,65	5,00
4° sequenza	AG	5,00	5,80	5,99	5,25	5,08	5,08	5,94	5,02	5,48	5,19	5,00										
	PSO	5,00	5,01	23,49	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00										
5° sequenza	AG	5,00	5,17	5,07	6,12	5,76	6,09	5,03	5,22	5,06	5,03	5,08	5,01	5,05	5,00							
	PSO	5,00	5,00	5,00	11,13	5,69	5,00	6,68	5,08	5,00	5,02	5,00	5,00	5,00	5,00							
6° sequenza	AG	5,00	5,04	5,04	5,04	5,05	5,02	5,01	5,02	5,03	5,00											
	PSO	5,00	29,46	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00											
7° sequenza	AG	5,00	5,05	5,08	5,05	5,04	5,08	5,07	5,06	5,05	5,00											
	PSO	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00											
8° sequenza	AG	5,00	5,01	5,09	5,00	5,01	5,04	5,25	5,05	5,00												
	PSO	5,00	5,00	5,08	8,36	5,00	5,00	17,73	5,00	5,00												
9° sequenza	AG	5,00	5,48	5,04	5,03	5,52	5,67	5,51	5,54	5,53	5,48	5,54	5,00									
	PSO	5,00	5,16	5,00	5,00	5,00	5,01	5,00	29,25	5,02	18,79	5,64	5,00									
10° sequenza	AG	5,00	5,08	5,08	5,08	5,08	5,07	5,51	5,47	5,17	5,00											
	PSO	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00											

Tabella C9: confronto tra i tempi di attesa nelle vicinanze di ciascun detrito, determinati dall'AG e tramite l'utilizzo del PSO.

	Durata complessiva delle sequenze [giorni]		Scarto assoluto [giorni]	Scarto %	Scarto assoluto tot [giorni]	Scarto % tot
1° sequenza	AG	255,8	0,12	0,05	-21,63	-0,84
	PSO	255,7				
2° sequenza	AG	182,5	0,10	0,05		
	PSO	182,4				
3° sequenza	AG	505,0	-1,00	-0,20		
	PSO	506,0				
4° sequenza	AG	276,1	2,23	0,81		
	PSO	273,9				
5° sequenza	AG	289,4	19,83	7,35		
	PSO	269,6				
6° sequenza	AG	190,1	-21,37	-10,11		
	PSO	211,4				
7° sequenza	AG	200,4	1,50	0,76		
	PSO	198,9				
8° sequenza	AG	204,8	9,77	5,01		
	PSO	195,0				
9° sequenza	AG	286,6	-10,81	-3,63		
	PSO	297,4				
10° sequenza	AG	147,5	-22,00	-12,98		
	PSO	169,5				

Tabella C10: tabella contenente le differenze assolute e percentuali tra le diverse sequenze e l'intera missione, calcolate fra i risultati ricavati dall'AG e quelli ottenuti dal PSO.

Bibliografia

- [B1] L. Hall, *"The History of Space Debris"*, Space Traffic Management Conference, 2014.
- [B2] "HANDBOOK FOR LIMITING ORBITAL DEBRIS", NASA-Handbook, 2018
- [B3] Donald J. Kessler, Burton G. Cour-Palais, *"Collision Frequency of Artificial Satellites: The Creation of a Debris Belt"*, Journal of Geophysical Research, 1978.
- [B4] Thomas J. Colvin, J. Karcz, G. Wusk, *"Cost and Benefit Analysis of Orbital Debris Remediation"*, NASA-Office of technology, Policy, and Strategy, 2023.
- [B5] David A. Vallado, Wayne D. McClain, *"Fundamentals of Astrodynamics and Applications"*, Space Technology Library, Fourth Edition, 2001
- [B6] D. Vallado, P. Crawford, *"SGP4 Orbit Determination"*, AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference, 2008.
- [B7] Howard Curtis, *"Orbital Mechanics for Engineering Students"*, Elsevier, 2005.
- [B8] Anil V. Rao, *"A Survey of Numerical Methods for Optimal Control"*, Advance in the Astronautical Science, 2010.
- [B9] John T. Betts, *"Survey of Numerical Methods for Trajectory Optimization"*, Journal of Guidance, Control and Dynamics Vol. 21, 1998.
- [B10] G. Folino, *"Algoritmi evolutivi e programmazione genetica: strategia di progettazione e parallelizzazione"*, ICAR, 2003.
- [B11] S. Katoch, S.S. Chauhan, V. Kumar, *"A review on genetic algorithm: past, present, and future"*, Springer, 2020.
- [B12] Matteo R. Sentinella, Lorenzo Casalino, *"Cooperative evolutionary algorithm for space trajectory optimization"*, Springer, 2009.
- [B13] Dario Izzo, Marcus Märten, *"The Kessler Run: On the Design of the GTOC9 Challenge"*, Acta Futura 11, 2018.
- [B14] A. Petropoulos, D. Grebow, D. Jones, G. Lantoine, A. Nicholas, J. Roa, J. Senent, J. Stuart, N. Arora, T. Pavlak, T. Lam, T. Mcelrath, R. Roncoli, D. Garza, N. Bradley, D. Landau, Z. Tarzi, F. Laipert, E. Bonfiglio, M. Wallace, J. Sims, *"GTOC9: Results from the Jet Propulsion Laboratory (team JPL)"*, Acta Futura, 2018.
- [B15] Hong-Xin Shen, Lorenzo Casalino, *"Simple ΔV Approximation for Optimization of Debris-to_Debri Transfer"*, Journal of Spacecraft and Rockets, 2021.
- [B16] Hong-Xin Shen, Lorenzo Casalino, *"Explicit Approximation for J2-Perturbed Low-Thrust Transfers between Circular Orbits"*, Journal of Guidance, Control and Dynamics, 2021.
- [B17] Ahmed G. Gad, *"Particle Swarm Optimization and its Applications: A Systematic Review"*, Springer, 2022.

Sitografia

[S1] “About space debris”, ESA - https://www.esa.int/Space_Safety/Space_Debris/About_space_debris

[S2] “Updated UNOOSA and ESA space debris infographics and podcasts”, Office of Outer Space Affairs, 2023 - <https://www.unoosa.org/osa/en/informationfor/media/unoosa-and-esa-release-infographics-and-podcasts-about-space-debris.html>

[S3] “Space debris by the numbers”, ESA - https://www.esa.int/Space_Safety/Space_Debris/Space_debris_by_the_numbers

[S4] “Orbital Debris Quarterly News”, NASA - <https://orbitaldebris.jsc.nasa.gov/quarterly-news>

[S5] “Orbital Debris Photo Gallery”, NASA - <https://orbitaldebris.jsc.nasa.gov/photo-gallery>

[S6] “SSA Programme overview”, ESA - https://www.esa.int/Space_Safety/SSA_Programme_overview

[S7] “About SSA”, ESA - https://www.esa.int/Space_Safety/About_SSA

[S8] “Orbital Debris Program Office”, NASA - <https://orbitaldebris.jsc.nasa.gov>

[S9] “Geoid”, ESA - <https://www.esa.int/esearch?q=geoid>