



Politecnico di Torino

Dipartimento di ingegneria Meccanica e Aerospaziale

Corso di Laurea in ingegneria Aerospaziale

Tesi di Laurea Magistrale

Ottimizzazione di traiettoria di allunaggio con dinamica rotazionale e deviazione laterale

Relatore:

Prof. Lorenzo Casalino

Candidato:

Tommaso Giovara

A.A. 2023/2024

ABSTRACT

Grazie al Programma Artemis, il rinnovato interesse per orbita e superficie lunari amplierà il numero e la varietà di missioni nel prossimo futuro. Queste missioni si concentreranno prevalentemente su esplorazione spaziale e planetaria, dimostrazione tecnologica e fornitura di servizi a stazioni e avamposti che si andranno a generare intorno e sulla Luna. Molte di queste missioni necessiteranno che tutta o una parte della missione venga svolta sulla superficie lunare: rover, avamposti, rifornimenti, esplorazione delle grotte lunari, recupero di campioni e risorse. La traiettoria di atterraggio sulla superficie lunare deve risultare precisa e sicura e ridurre i costi di costruzione e lancio della missione. La traiettoria definisce il consumo di propellente per l'allunaggio, a parità di massa utile, questo si ripercuote sulla massa dell'astronave in orbita lunare e sulla massa al lancio. Per estendere il numero di missioni coperte e la flessibilità nella risposta alle contingenze della missione la traiettoria deve essere parametrica e prevedere condizioni iniziali che si discostino dal caso ottimo. Alcune missioni di allunaggio possono vedere un disallineamento tra l'orbita di discesa e il punto di allunaggio selezionato. Questo può accadere quando non è possibile scegliere l'orbita di discesa (come nel caso di più veicoli di atterraggio inizialmente collegati) o l'orbita di discesa è diversa da quella desiderata (es.: causa malfunzionamento del propulsore o dei sensori o perturbazioni esterne). Il punto di atterraggio può cambiare ed essere ridefinito in fase di atterraggio come dimostra la tecnologia di *Terrain-Relative Navigation* sul rover *Perseverance*, capace di modificare il punto di atterraggio desiderato al fine di evitare di toccare il suolo in terreno accidentato o pendente. Il veicolo di atterraggio stesso modifica la traiettoria ottima sulla base della capacità di controllo d'assetto del lander. L'ottimizzazione prende in considerazione le limitazioni alla coppia massima del lander. Il lavoro in questa tesi è l'ottimizzazione per una traiettoria di atterraggio sulla superficie lunare che preveda la dinamica rotazionale e consideri un punto di atterraggio non allineato all'orbita di discesa sulla superficie. L'ottimizzazione della traiettoria ha l'obiettivo di massimizzare la massa finale a parità di massa iniziale. La formulazione del problema segue la Teoria del Controllo Ottimale per il soddisfacimento del Principio di Massimo di Pontryagin. La soluzione al *Boundary Value Problem* è ottenuta con l'impiego di *Indirect Method* per garantire un'alta precisione. L'algoritmo di ottimizzazione è testato su una versione in scala ridotta del Lunar Module della missione Apollo 11.

ABSTRACT (English Version)

Moon landing trajectory optimization with rotational dynamics and lateral deviation

The renovated attention given to lunar orbit and lunar surface by the Artemis Program will extend the number and variety of space missions in the near future. These missions will focus on space and planetary exploration, technology demonstration, and services to space stations and surface outposts. These scopes often require the entirety or part of the mission to be carried out on the lunar surface: rovers, outposts, delivery of supplies, lunar caves exploration, and sample and resource recovery. The landing trajectory for a lunar landing has to be safe and accurate and shall minimize the mission construction and launch costs. The landing trajectory defines propellant consumption, hence the spacecraft mass in lunar orbit and at launch. To extend the number of missions covered and to improve the flexibility of response to mission contingencies, the trajectory shall be parametric and foresee initial conditions which are suboptimal. Some Moon landing missions could have a descent orbit not aligned with the selected landing point. This happens when it is not possible to choose the descent orbit (e.g.: multiple landing vehicles which are linked at the start) or when the descent orbit differs from planned (e.g.: engine/sensors malfunction or external perturbations). The selected landing point itself could vary or be chosen during the descent phase as demonstrated by the Terrain-Relative Navigation technology on the Perseverance rover, capable of selecting the desired landing point to avoid tricky terrain. The choice of the lander itself changes the optimal trajectory based on the lander's attitude control. The optimization algorithm takes into consideration the lander's maximum torque. The thesis work is the optimization of a Moon landing trajectory considering attitude dynamics and a landing site not aligned with the descent orbit. The trajectory optimization scope is maximizing the final mass with fixed initial mass. The problem formulation follows the Optimal Control Theory to satisfy the Pontryagin's Maximum Principle. The solution to the Boundary Value Problem employs the Indirect Method to guarantee high accuracy. The optimization algorithm is tested on a scale model of the Lunar Module of Apollo 11.

INDICE

1 INTRODUZIONE	8
1.1 Contesto della tesi	8
1.2 Come leggere questa tesi	8
2 CONTESTO DELLE OPERAZIONI SULLA SUPERFICIE LUNARE.....	10
2.1 Programma spaziale lunare americano.....	10
2.2 Programma spaziale lunare cinese.....	12
3 BASI TEORICHE DEL PROBLEMA.....	14
3.1 Problema dei due corpi ristretto.....	14
3.1.1 Orbite Kepleriane.....	16
3.1.2 Manovre.....	16
3.1.3 Trasferta di Hohmann.....	17
3.1.4 Semplificazione del sistema di riferimento per la manovra di allunaggio	19
3.2 Equazione di Tsiolkowski	20
3.3 Dinamica di assetto	22
3.3.1 Angoli di Eulero.....	22
3.3.2 Semplificazione della dinamica rotazionale	23
3.4 Teoria del controllo ottimale.....	24
3.4.1 Principio di Massimo di Pontryagin	25
3.4.2 Bang-Bang Control	27
3.4.3 Formulazione del Boundary Value Problem.....	27
3.4.4 Calcolo della soluzione al Boundary Value Problem	29
3.5 Problema di Fuller	30
4 DESCRIZIONE DELLA MISSIONE.....	34
4.1 Fasi della missione.....	34
4.1.1 Lancio a un'orbita di parcheggio terrestre	34
4.1.2 Fase Trans-Lunare.....	35
4.1.3 Fase Cis-Lunare	36
4.1.4 Fase di operazioni in orbita lunare	36
4.1.5 Orbita di discesa	36
4.1.6 Manovra di Soft-Landing	38
4.2 Caratteristiche del Lander Lunare	40

5 ANALISI DEL MOTO TRIDIMENSIONALE	46
5.1 Sistema di riferimento	46
5.2 Condizioni assegnate di traslazione	46
5.3 Scomposizione del moto sui tre assi	47
5.3.1 Traslazione lungo l'asse X	48
5.3.2 Traslazione lungo l'asse Y	50
5.3.3 Traslazione lungo l'asse Z	53
5.4 Ottimizzazione del moto tridimensionale	57
6 SOLUZIONE AL PROBLEMA DI OTTIMIZZAZIONE	58
6.1 Introduzione	58
6.2 Assunzioni	58
6.3 Sistema di riferimento utilizzato	60
6.4 Angoli ottimali	62
6.5 Scelta dei controlli	64
6.6 Dinamica rotazionale di beccheggio	65
6.7 Discesa verticale	67
6.8 Dinamica rotazionale di imbardata	67
6.9 Archi di traiettoria	73
6.10 Variabili	74
6.11 Equazioni differenziali	75
6.12 Condizioni al contorno	78
6.13 Parametri e discontinuità	83
6.14 Dimensione del problema	83
6.15 Algoritmo risolutivo	84
7 RISULTATI DEL PROBLEMA DI OTTIMIZZAZIONE	85
8 CONCLUSIONI	94
BIBLIOGRAFIA	95

1

INTRODUZIONE

1.1 Contesto della tesi

Questo lavoro di tesi è in breve la continuazione di una precedente tesi sviluppata al Politecnico di Torino dal Dr. Davide Castellana. Nella sua tesi, Castellana costruisce un problema di allunaggio e poi ne trova una soluzione ottimizzata. Il lavoro di tesi qui presente il problema introdotto da Castellana viene espanso e si cerca una soluzione più generale includendo variazioni a vincoli che Castellana definiva per limitare la traiettoria a un problema bidimensionale. A partire dal medesimo codice, il problema è stato nuovamente studiato per formulare una soluzione tridimensionale che fosse applicabile alla soluzione di Castellana come un processo di generalizzazione.

1.2 Come leggere questa tesi

La tesi è suddivisa in capitoli che muovono il problema da una descrizione generale fino all'analisi della soluzione specifica e della sua implementazione nel codice di calcolo.

Si inizia da una descrizione del contesto in cui si inserisce la missione studiata, cercando di evitare le ripetizioni con la tesi di Castellana e introducendo le novità nella progettazione delle missioni del futuro che riguardano la superficie lunare.

Nel capitolo successivo sono introdotte le basi teoriche del problema, necessarie alla definizione del sistema di riferimento, degli angoli di rotazione e del problema di ottimizzazione. Viene introdotta la *Teoria del Controllo Ottimale* e si fa accenno al *Problema di Fuller* che Castellana utilizza per trovare gli archi di traiettoria soluzione del problema semplificato con moto contenuto nel piano longitudinale.

La missione viene introdotta da un capitolo descrittivo che descrive le fasi principali di una missione che prevede l'allunaggio, evidenziando similarità e differenze con missioni reali già lanciate come Apollo 11 e Chang'e-3 e caratterizzando la parte di traiettoria soggetta al problema di ottimizzazione. In questo capitolo è anche definito il *lander* lunare e le condizioni assegnate iniziali della traiettoria da ottimizzare.

Conclusasi la contestualizzazione della missione, si scompone il problema analizzandone separatamente i moti sui tre assi e ragionando sull'ottimizzazione della dinamica traslazionale.

Gli ultimi capitoli contengono la parte più densa del lavoro di tesi, la definizione del problema di ottimizzazione, includendo progressivamente le limitazioni alla dinamica rotazionale del *lander*, e i risultati ottenuti.

2

CONTESTO DELLE OPERAZIONI SULLA SUPERFICIE LUNARE

Nel ventunesimo secolo il numero di nazioni che hanno accesso all'orbita lunare e superficie lunare è aumentato, includendo USA, Russia, India, Unione Europea, Giappone. Si accennano i programmi di esplorazione lunare delle agenzie NASA (USA) e CNSA (Cina).

2.1 Programma spaziale lunare americano

L'esplorazione della Luna da parte della NASA ha una storia lunga, che data al luglio 1964 con il successo della missione *Ranger 7* nell'inviare foto della superficie lunare alla Terra. Le prime missioni di esplorazione della Luna furono sonde che fotografavano la superficie a distanze progressivamente minori fino a schiantarsi.

Dal concetto di *hard-landing* delle sonde come *Ranger 7*, nacque anche quello di *soft-landing*, la possibilità di atterrare sulla superficie senza distruggere il veicolo spaziale. Le missioni *Surveyor*, furono la risposta americana alle missioni *Luna 9* della USSR. Tali missioni prevedevano il *soft-landing* sulla superficie lunare.

La superficie lunare fu mappata dalle missioni *Lunar Orbiter*. Tale mappatura fu utilizzata nella scelta dei siti di atterraggio delle missioni successive.

Il programma NASA di esplorazione umana della Luna, *Apollo*, rappresenta ad oggi l'unico programma che abbia permesso all'uomo di atterrare su un altro corpo celeste. Il programma *Apollo* fu progettato a step, prima raggiungendo l'orbita della Luna con un equipaggio (*Apollo 8*) e successivamente puntando all'atterraggio sulla superficie lunare, effettuato nel luglio 1969 dalla missione *Apollo 11*. Per permettere allunaggio e ritorno degli astronauti sulla Terra, il veicolo spaziale fu progettato diviso in moduli: il modulo di comando era a controllo del veicolo di trasferimento che ospitò gli astronauti per la maggior parte della missione, il modulo lunare fu la parte che effettivamente eseguì la manovra di *soft-landing* sulla superficie lunare e risalì verso il modulo di comando. Il modulo lunare era suddiviso in uno stadio utilizzato per la discesa, che poi venne abbandonato sulla superficie, e uno stadio di risalita che poi avrebbe dovuto congiungersi nuovamente con il modulo di comando.

Negli anni 90' la NASA organizzò nuove missioni robotiche, tra le quali *Lunar Prospector*, una nuova missione di mappatura della Luna dall'orbita. Questa ebbe luogo tra il 1998 e il 1999.

Il presente e futuro dell'esplorazione lunare è il programma *ARTEMIS*, un programma di esplorazione lunare che si concentra sullo sviluppo di tecnologie per aumentare la sopravvivenza a

lungo termine dell'essere umano in un avamposto lunare e utilizzare le risorse in loco (ISRU – *In Situ Resource Utilization*).

La missione prevede l'utilizzo della navetta spaziale *Orion* come principale forma di trasporto per l'equipaggio e, in collaborazione tra la NASA, l'Agenzia Spaziale Europea (ESA), l'Agenzia Spaziale Giapponese (JAXA) e l'Agenzia Spaziale Canadese (CSA), si lancia sulla costruzione di una stazione spaziale che possa funzionare da hub in orbita intorno alla Luna, un avamposto orbitante chiamato *Lunar Gateway*.

Il programma è stato approvato come sostituto alla missione *Constellation*, una missione che prevedeva come obiettivo finale lo sbarco dell'uomo su Marte. Considerando la necessità di sviluppare a priori le tecnologie necessarie alla sopravvivenza planetaria a lungo termine e con l'idea di utilizzare la Luna come trampolino di lancio per missioni interplanetarie future, l'attenzione della NASA e di conseguenza di molte altre aziende spaziali pubbliche e private, si è spostata verso la Luna. Molte compagnie private si occupano di produrre soluzioni di *lander* per trasporti di rifornimento a un futuro avamposto lunare e missioni di esplorazione in situ. Compagnie private come la *Space Exploration Company* collaborano anche alla progettazione di sistemi di allunaggio per equipaggio umano.

Del programma è già stata lanciata la prima missione *ARTEMIS-I*, nella quale vengono testati la nave *Orion* priva di equipaggio e il vettore di lancio *Space Launch System (SLS)*. La missione ha avuto successo nella traiettoria prestabilita, che prevede il decollo dal *Kennedy Space Center*, l'immissione in orbita Terrestre per poi effettuare una trasferta per l'orbita lunare. Nella sfera di influenza lunare la capsula *Orion* effettuò alcune manovre per porsi in orbita lunare per poi ritornare sulla Terra sganciando il modulo dell'equipaggio per il rientro atmosferico. Il modulo dell'equipaggio ammarò l'11 dicembre 2022.



figura 1: Orion Spacecraft orbita intorno alla Luna, fonte: ARTEMIS I Press Kit

Le missioni *ARTEMIS II* e *ARTEMIS III* sono programmate per il 2024 e il 2025, con *ARTEMIS II* che avrà un profilo di missione simile a quello di *ARTEMIS I*, ma sarà con equipaggio. *ARTEMIS III* porterà al ritorno dell'uomo sulla superficie lunare, prevedendo l'allunaggio per due astronauti.

2.2 Programma spaziale lunare cinese

L'esplorazione della Luna è definita nel Programma di Esplorazione Lunare Cinese come una serie di step necessari a permettere la fondazione di una base di ricerca robotica e poi umana sulla superficie lunare. Per questa ragione quasi tutti i veicoli spaziali cinesi destinati all'esplorazione lunare sono dei dimostratori tecnologici. La dimostrazione tecnologica procede a step sempre più avanzati per collaudare tutte le tecnologie necessarie all'obiettivo finale del programma.

Il primo step è quello di orbitare intorno alla Luna. Tale obiettivo è stato raggiunto nel novembre 2007 dalla prima missione del programma Chang'e, l'*orbiter* Chang'e-1.

Il secondo step è quello di atterrare sulla luna con una manovra di *soft-landing*. Obiettivo raggiunto nel dicembre 2013 dal *lander* della missione Chang'e-3, che atterrò nella regione lunare Mare Imbrium. Questo allunaggio rappresenta il primo nella storia dell'esplorazione lunare cinese. Successivamente all'atterraggio, il *lander* dispiegò anche un *rover*.

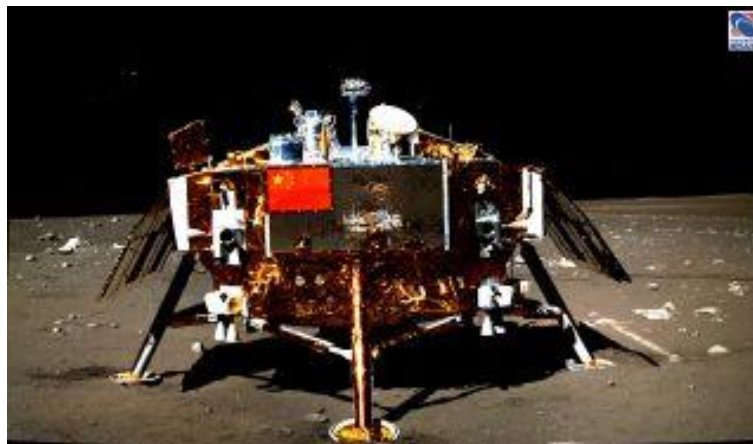


figura 2: Lander di Chang'e-3 sulla superficie della Luna, fotografato dal suo rover Yutu, fonte: CNSA/CLEP

Il terzo step è la possibilità di riportare sulla terra campioni del suolo lunare. Questo obiettivo richiede l'utilizzo di veicoli separati per le operazioni sul suolo lunare e l'operazione di ritorno del campione dall'orbita lunare a quella terrestre. La prima missione del programma a riportare campioni di suolo lunare fu Chang'e-5, costituita da un *lander* e da un *orbiter*, nel dicembre 2020.

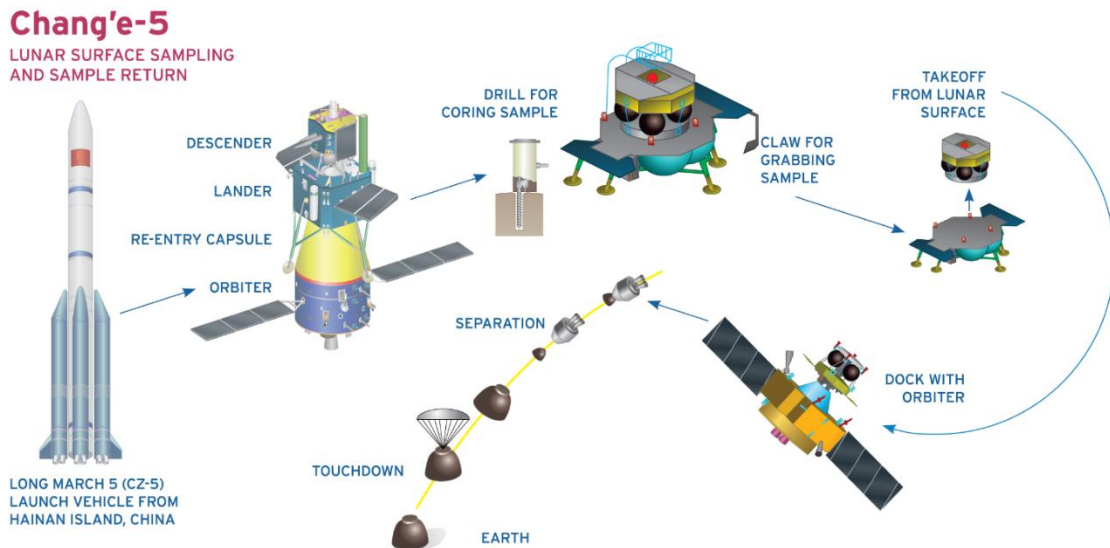


figura 3: Profilo di missione Chang'e-5, fonte: The Planetary Society

Le dimostrazioni tecnologiche sulla Luna permetteranno nella prospettiva cinese di replicare i risultati su Marte e altri pianeti, asteroidi e comete e spingersi più lontani dalla Terra con tecnologie collaudate.

Nel futuro prossimo, prima del 2030, il programma spaziale cinese intende costruire un avamposto di ricerca al polo sud della Luna, distribuendo la complessità di trasporto e montaggio dell'avamposto su 3-4 missioni. Anche in questo caso si identificano tre step:

- 1- La costruzione di un sistema di antenne che permetta di comunicare con l'avamposto, l'esplorazione del sito di costruzione dell'avamposto per definire la geometria della superficie e la distribuzione e composizione dei minerali in situ.
- 2- Il recupero di campioni del sito con una missione simile a Chang'e-5 e lo studio di questi sulla Terra.
- 3- Dimostrare la capacità ISRU (*In Situ Resource Utilization*), attraverso esperimenti di utilizzo di materiale lunare come materiale da costruzione o stampaggio 3D. La missione sarà probabilmente costituita da un *lander*, un *rover* e un veicolo volante per l'esplorazione della superficie.

Intanto la Cina sta aprendo a compagnie spaziali di altre nazioni per collaborare nella costruzione dell'avamposto.

3

BASI TEORICHE DEL PROBLEMA

In questa sezione vengono introdotti gli argomenti che verranno applicati al problema di ottimizzazione. Questo capitolo come un compendio di teoria alla comprensione del problema.

3.1 Problema dei due corpi ristretto

Si analizza il problema dei due corpi per fornire le basi alla determinazione del sistema di riferimento utilizzato nel problema di ottimizzazione e per descrivere la manovra di Hohmann

Considerato un sistema di riferimento inerziale, \mathcal{F}_I , solidale alle stelle fisse (cioè stelle così lontane da apparire ferme rispetto all'osservatore), si considerano due corpi di massa m_1 ed m_2 con posizioni \vec{R}_1 ed \vec{R}_2 nel sistema di riferimento \mathcal{F}_I .

I corpi immersi nello spazio sono soggetti alla forza di gravitazione universale, che agisce con uguale intensità sui due corpi e con verso opposto. La forza gravitazionale è attrattiva, ha origine nel corpo su cui è esercitata e punta (direzione e verso) verso il corpo che la genera. La forza agente sui due corpi ha modulo

$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{\|\vec{R}_2 - \vec{R}_1\|^2}$$

(1)

Dove $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$ è la costante di gravitazione universale, indipendente dalle caratteristiche dei corpi considerati.

La forza gravitazionale non è costante, ma cambia al variare della posizione reciproca dei corpi e della loro massa.

Si è considerata la forza gravitazionale come unica forza di campo generata dai corpi stessi, per questa ragione si trascura qualunque forza di campo elettrica o magnetica. Si considereranno invece le forze propulsive che agiranno su uno dei due corpi, queste si sommeranno vettorialmente con la forza gravitazionale. Si definiranno le forze esterne agenti sui corpi m_1 ed m_2 come \vec{F}_1 ed \vec{F}_2

Si descriveranno le velocità e le accelerazioni rispetto al sistema di riferimento iniziale utilizzando la simbologia $\dot{\vec{R}}$ ed $\ddot{\vec{R}}$.

Si può scrivere la legge seconda legge di Newton per ciascuno dei due corpi

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\vec{R}}_1 = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} + \vec{F}_1 \\ m_2 \ddot{\vec{R}}_2 = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} + \vec{F}_2 \end{cases}$$

(2)

Dove \vec{r} è il raggio vettore che da m_2 giunge a m_1 .

Per passare dal problema dei due corpi al problema dei due corpi ristretto, si vorrà esprimere le due equazioni utilizzando semplicemente la posizione relativa tra i due corpi. Se si seleziona m_2 come punto da cui misurare la posizione di m_1 si è generato un nuovo sistema di riferimento nel centro di massa del secondo corpo. Si perde l'informazione della posizione dei due corpi rispetto al sistema \mathcal{F}_I e sottraendo la seconda equazione alla prima e semplificando le masse dove possibile si ottiene

$$\ddot{\vec{r}} = -G \frac{m_1 + m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} + \vec{F}_1$$

(3)

Riconducendosi al caso di un sistema in cui il primo corpo è il veicolo spaziale e il secondo corpo è un corpo celeste, la Luna nel nostro caso, si ridefiniscono le masse come

$$m_1 = m$$

(4)

$$m_2 = M$$

(5)

E varrà l'assunzione

$$m \ll M$$

(6)

si può inoltre assumere che le forze esterne \vec{F}_2 agenti sul corpo celeste siano trascurabili.

Si può quindi semplificare la massa m nella somma $m + M \approx M$ per ottenere

$$\ddot{\vec{r}} = -G \frac{M}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} + \vec{F}_1 = -\frac{\mu}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} + \vec{F}_1$$

(7)

Dove $\mu = MG$ è la costante gravitazionale planetaria, dipendente dalla massa del corpo celeste per il quale è calcolata. Per la Luna $\mu = 4904 \frac{km^3}{s^2}$.

3.1.1 Orbite Kepleriane

Si ottiene un'orbita kepleriana quando sul corpo di massa inferiore m non agiscono altre forze oltre a quella gravitazionale, ottenendo la seguente formula dell'accelerazione

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

(8)

Si può dimostrare un'orbita kepleriana ha la forma di una conica e che il momento angolare della rotazione del corpo m intorno al corpo M si conserva. Per questa ragione le orbite kepleriane sono contenute in un piano, chiamato piano dell'orbita e perpendicolare al momento angolare. Essendo il campo gravitazionale conservativo, si può definire un'energia potenziale e vale la legge di conservazione dell'energia meccanica come somma scalare di energia cinetica ed energia potenziale del corpo.

$$\frac{\dot{r}^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \text{costante}$$

(9)

3.1.2 Manovre

Se ci si desidera spostare da un'orbita kepleriana a un'altra orbita kepleriana, sarà necessario rimuovere l'ipotesi di forze esterne assenti e fornire una forza \vec{F}_1 che porti alla variazione dei parametri che descrivono l'orbita: posizione e velocità nel punto di manovra.

Nel caso di utilizzo di propulsori chimici le forze generate dalla spinta del propulsore principale dei veicoli spaziali sono molto alte e permettono di fornire una notevole variazione di velocità in un tempo molto piccolo rispetto al periodo dell'orbita. Per questa ragione, nel caso di utilizzo di propulsori chimici, si parla di manovre impulsive. Una manovra impulsiva è considerata istantanea, come se l'impulso necessario alla variazione della velocità fosse fornito a spinta infinita in un intervallo infinitesimo. Per le manovre impulsive non si considera la spinta nel tempo, ma si guarda direttamente alla variazione di velocità fornita dalla manovra. A partire da una velocità iniziale \vec{V}_1 e fornendo un vettore variazione di velocità $\vec{\Delta V}$, la velocità immediatamente successiva alla manovra impulsiva sarà la somma vettoriale

$$\vec{V}_2 = \vec{V}_1 + \vec{\Delta V}$$

(10)

L'angolo di disallineamento della spinta è definito come l'angolo tra il vettore \vec{V}_1 e il vettore variazione di velocità $\vec{\Delta V}$.

Una manovra impulsiva permette solamente di spostarsi su un'orbita kepleriana che condivida con l'orbita di partenza il nodo di manovra.

3.1.3 Trasferta di Hohmann

Nel caso in cui si desideri spostare tra due orbite che non hanno punti in comune, sarà necessario effettuare due manovre impulsive, la prima manovra per spostarsi su un'orbita di trasferimento che abbia almeno un punto in comune sia con l'orbita di partenza che con l'orbita di arrivo e una seconda manovra per spostarsi dall'orbita di trasferimento all'orbita di arrivo. Le manovre saranno effettuate nei punti di intersezione tra l'orbita di trasferimento e le due orbite di partenza e di arrivo.

Nel caso in cui si desideri spostare tra due orbite circolari concentriche e complanari con due manovre impulsive, la manovra con il minore costo in termini di variazione complessiva di velocità, risulta essere la manovra di Hohmann.

Dato che due orbite circolari concentriche hanno una diversa energia meccanica, sarà necessario utilizzare la variazione di velocità per variare l'energia meccanica dell'orbita di partenza e poi dell'orbita di trasferimento. La variazione di energia meccanica non può avvenire tramite una variazione impulsiva di energia potenziale in quanto non è possibile variare impulsivamente la posizione. La manovra porta alla variazione dell'energia meccanica quando cambia il modulo della velocità. La variazione del modulo della velocità risulta massima quando l'angolo di disallineamento della spinta β è nullo oppure è uguale a 180° , infatti

$$V_2^2 = V_1^2 + \Delta V^2 - 2V_1\Delta V \cos \beta$$

(11)

Avere $\beta = 0, \pi$ porta alla massima variazione di energia cinetica e quindi alla massima efficienza nel trasferimento in esame.

La trasferta di Hohmann considera solo manovre impulsive in cui velocità iniziale, variazione di velocità e velocità finale sono allineate tra loro.

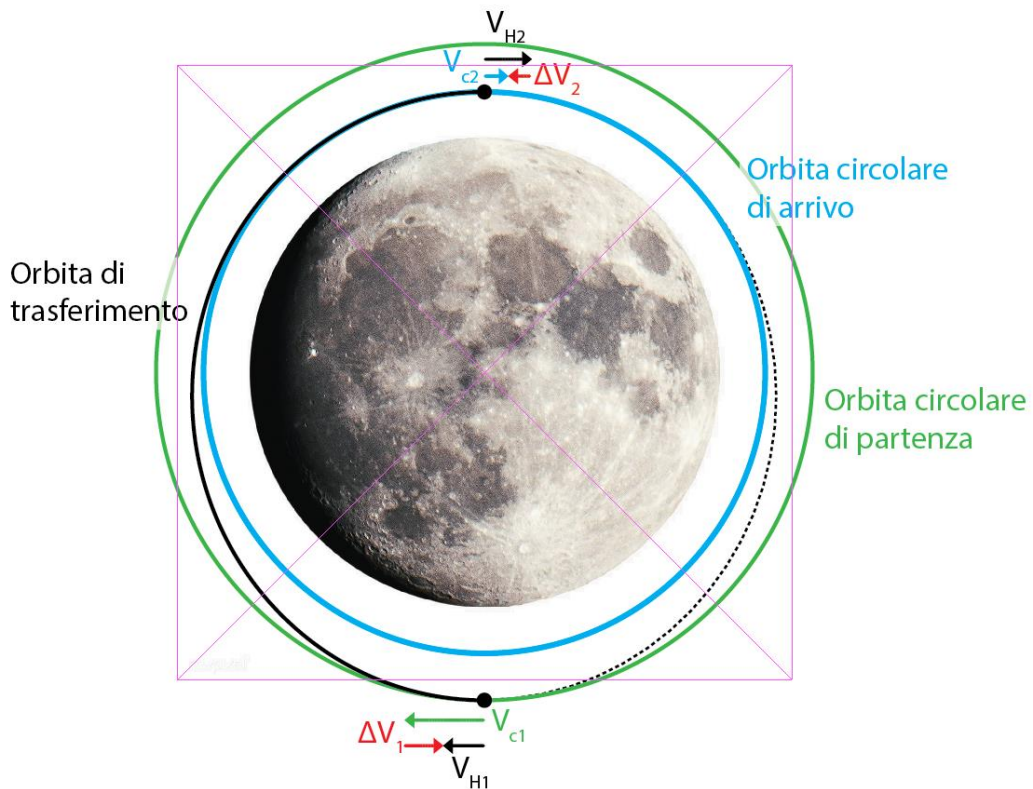


figura 4: Manovra di Hohmann verso un'orbita più bassa

In un'orbita kepleriana si l'energia meccanica si conserva e si può dimostrare che questa ha il valore

$$\mathcal{E} = \frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} \quad (12)$$

Dove a è il semiasse maggiore dell'orbita ellittica.

In un'orbita circolare il raggio è costante (e uguale al semiasse maggiore) e quindi, per conservazione dell'energia meccanica, anche la velocità è costante. Si può riarrangiare l'equazione (12) per trovare la velocità circolare di un'orbita.

$$V_c = \sqrt{\frac{\mu}{r}} \quad (13)$$

Si trova l'energia dell'orbita di trasferimento (identificata con il pedice H) sfruttando il semiasse maggiore

$$a_H = \frac{r_1 + r_2}{2} \quad (14)$$

Da questa si possono trovare le velocità per l'ellisse di trasferimento nei due punti di intersezione con orbita iniziale (pedice 1) e orbita finale (pedice 2) scrivendo la formula dell'energia nei punti di intersezione.

$$\mathcal{E}_H = \frac{V_{H1}^2}{2} - \frac{\mu}{r_1} = \frac{V_{H2}^2}{2} - \frac{\mu}{r_2} = -\frac{\mu}{2a_H} = -\frac{\mu}{r_1 + r_2} \quad (15)$$

e ottenendo

$$V_{H1} = V_{c1}^2 \left(\frac{2r_2}{r_1 + r_2} \right) \quad (16)$$

$$V_{H2} = V_{c2}^2 \left(\frac{2r_1}{r_1 + r_2} \right) \quad (17)$$

Dalle velocità circolari e le velocità appena calcolate si ricavano le variazioni di velocità, che vengono sommate per trovare il costo complessivo di variazione di velocità della manovra.

$$\Delta V_1 = |V_{H1} - V_{c1}| = V_{c1} \sqrt{\left| \frac{2r_2}{r_1 + r_2} - 1 \right|} \quad (18)$$

$$\Delta V_2 = |V_{H2} - V_{c2}| = V_{c2} \sqrt{\left| 1 - \frac{2r_1}{r_1 + r_2} \right|} \quad (19)$$

Si considera il modulo in quanto si sta calcolando appunto il modulo della variazione di velocità che sarà necessariamente sempre positivo.

$$\Delta V_{tot} = \Delta V_1 + \Delta V_2 \quad (20)$$

3.1.4 Semplificazione del sistema di riferimento per la manovra di allunaggio

Per semplificare il problema di ottimizzazione della traiettoria di *soft-landing*, si vuole rendere più semplice l'accelerazione gravitazionale agente sul *lander*

L'ipotesi è quella di avere un'accelerazione gravitazionale di modulo, direzione e verso costanti.

In termini di modulo le condizioni considerate considerano una quota di partenza di 15 km.

Si definisce la quota $h = 15 \text{ km}$, il raggio della Luna $R_L = 1738.1 \text{ km}$ e la costante gravitazionale della Luna $\mu = 4904 \frac{\text{km}^3}{\text{s}^2}$. Si calcola quindi l'errore relativo sull'accelerazione di gravità g_L tra i due estremi del moto lungo l'asse Z, ricordando che

$$g(r) = \frac{\mu}{r^2} \quad (21)$$

$$\text{errore modulo } g = \left| \frac{g(R_L + h) - g(R_L)}{g(R_L)} \right| = 1 - \frac{R_L^2}{(R_L + h)^2} = 1.704\% \quad (22)$$

In termini di direzione, non si modifica la direzione del vettore gravità, ma si ipotizza un sistema di riferimento in cui la curvatura del pianeta è nulla. In tal modo si ottiene un versore dell'accelerazione di gravità che punta sempre verso il basso con direzione verticale. L'errore viene commesso sulle distanze percorse, infatti trascurando la curvatura si ignora che lo stesso angolo spazzato dal centro della Luna da un veicolo spaziale porta a coprire distanze diverse in base all'altitudine. L'errore si calcola in modo simile al precedente

$$\text{angolo}(r) = \frac{\text{distanza}}{r} \quad (23)$$

$$\text{errore distanze} = \left| \frac{\text{angolo}(R_L + h) - \text{angolo}(R_L)}{\text{angolo}(R_L)} \right| = 1 - \frac{R_L}{R_L + h} = 0.856\% \quad (24)$$

3.2 Equazione di Tsiolkowski

Si ricava l'equazione di Tsiolkowski con l'obiettivo di mettere in relazione la variazione di velocità di una manovra e la riduzione che questa genera nella massa del veicolo spaziale che la esegue.

Nelle manovre spaziali la spinta è generata espellendo del propellente dal propulsore in modo da poter scambiare quantità di moto e muoversi in direzione opposta alla direzione di accelerazione del propellente per la terza legge di Newton. Nel far ciò il veicolo spaziale deve sacrificare costantemente parte della massa di propellente che si porta dietro e quindi si alleggerisce durante la manovra.

Si vuole trovare quale massa di propellente risulta necessaria per fornire una certa variazione di velocità ΔV necessaria a una manovra.

Si considera l'equazione di conservazione della quantità di moto sull'asse di spinta che mette a confronto la quantità di moto tra un'istante di tempo t e l'istante successivo $t + dt$, dove dt è un intervallo di tempo infinitesimo. Si avrà a primo membro la velocità iniziale V moltiplicata per la

massa iniziale m e a secondo membro la somma delle quantità di moto del veicolo spaziale con massa ridotta e della quantità infinitesima di propellente dm_p eiettata alla velocità c .

$$mV = (m - dm_p)(V + dV) - dm_p(c - V) \quad (25)$$

Semplificando gli infinitesimi di ordine superiore si trova

$$m dV = c dm_p \quad (26)$$

Si sono messe in relazione la massa di propellente infinitesima utilizzata con la variazione infinitesima di velocità. Si può integrare la formula per trovare la relazione con quantità finite. Si lascia a primo membro solo la variazione di velocità e si integra sulla velocità a primo membro e sulla massa a secondo membro.

$$\int_{V_0}^{V_f} dV = \int_{t_0}^{t_f} c \frac{dm_p}{m} \quad (27)$$

Dall'equazione di conservazione della quantità di moto si vede come alla quantità infinitesima dm_p corrisponde una variazione di massa infinitesima negativa $-dm$

$$dm_p = -dm$$

Sostituendo il valore e integrando si ottiene

$$V_f - V_0 = -c \ln\left(\frac{m_f}{m_0}\right) \quad (28)$$

Considerando costante la velocità di uscita dei gas dal propulsore c .

Questa legge è chiamata equazione di Tsiolkowski e mette in relazione la variazione di velocità fornita dal propulsore con la variazione di massa del veicolo spaziale dovuta alla riduzione della massa del propellente a bordo.

Si possono legare insieme la portata di propellente in massa \dot{m}_p e la spinta generata T utilizzando la velocità di uscita dei gas o velocità efficace di scarico c .

In vuoto si può considerare la pressione esterna nulla, così che la formula della spinta risulta essere

$$T = \dot{m}_p c \quad (29)$$

La velocità efficace di scarico rappresenta l'efficienza con la quale viene utilizzata la portata di propellente per generare spinta. Per questa ragione, a parità di variazione di massa, l'equazione di Tsiolkowski genera variazione di velocità proporzionale alla velocità efficace di scarico.

3.3 Dinamica di assetto

La dinamica di assetto descrive le coppie che agiscono sul veicolo spaziale e i cambiamenti di assetto che generano. Dato che il propulsore principale del problema considerato non permette nessun tipo di orientamento della spinta indipendente, risulterà necessario ruotare l'intero *lander* per modificare le componenti di spinta sui tre assi. Come si vedrà nella descrizione del lander, la spinta del propulsore principale è allineata al centro di massa, mentre i propulsori del sistema di controllo d'assetto sono capaci di generare solamente delle coppie. Questo rende la dinamica rotazionale indipendente dalla dinamica di traslazione e la dinamica di traslazione dipendente dalla dinamica rotazionale. In un problema privo di dinamica rotazionale in cui i comandi sono la distribuzione diretta della spinta sui tre assi, la velocità di variazione delle distribuzioni di spinta sui tre assi non è limitata. In un caso con dinamica rotazionale nella quale esistono dei limiti di coppia applicabile, si genera un accoppiamento tra assetto e traslazione.

3.3.1 Angoli di Eulero

L'orientamento di un corpo nello spazio si può definire attraverso tre angoli che descrivono la rotazione di tre assi di un sistema di riferimento corpo $\mathcal{F}_B = (X_b, Y_b, Z_b)$ rispetto ai tre assi di un sistema di riferimento inerziale $\mathcal{F}_I(X_I, Y_I, Z_I)$.

L'ordine di applicazione delle rotazioni non è commutativo ed è scelto per convenzione.

Definiti gli angoli

- Angolo di rollio ϕ intorno all'asse inerziale X_I
- Angolo di becchiaggio θ intorno all'asse inerziale Y_I
- Angolo di imbardata ψ intorno all'asse inerziale Z_I

Si possono definire anche degli angoli rispetto agli assi corpo, rispettivamente $(\phi_1, \theta_1, \psi_1)$ dai quali si ricava il vettore velocità angolare in assi corpo.

$$\vec{\omega}_1 = (\dot{\phi}_1, \dot{\theta}_1, \dot{\psi}_1)$$

(30)

Si può descrivere la velocità angolare ω_1 con gli angoli degli assi inerziali, ma la descrizione cambia in funzione dell'ordine di applicazione degli angoli di Eulero. Si vede qui di seguito il caso di ordine 3-2-1, cioè una rotazione dagli assi corpo agli assi inerziali applicando in ordine ψ, θ, ϕ . Da questa convenzione si ricava la formula per il calcolo della velocità angolare in assi corpo.

$$\vec{\omega}_1 = \begin{bmatrix} \omega_{x1} \\ \omega_{y1} \\ \omega_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \cos \theta \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

(31)

Invertendo la formula si trovano le formule per gli angoli in assi inerziali

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \omega_{x1} + \omega_{y1} \sin \phi \tan \theta + \omega_{z1} \cos \phi \tan \theta \\ \dot{\theta} = \omega_{y1} \cos \phi - \omega_{z1} \sin \phi \\ \dot{\psi} = \frac{\omega_{y1} \sin \phi}{\cos \theta} + \frac{\omega_{z1} \cos \phi}{\cos \theta} \end{cases}$$

(32)

3.3.2 Semplificazione della dinamica rotazionale

Nel caso di simmetria cilindrica intorno all'asse X corpo, come si vedrà essere il caso considerato, il rollio non è importante, viene fissato nullo e le equazioni si semplificano

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega_{y1} \\ \dot{\psi} = \frac{\omega_{z1}}{\cos \theta} \end{cases}$$

(33)

Si immaginano coppie direttamente applicate rispetto agli angoli di Eulero per assi inerziali

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega_y \\ \dot{\alpha} = \omega_z \\ \dot{\omega}_\theta = \frac{M_y}{I} \\ \dot{\omega}_\alpha = \frac{M_\alpha}{I} \end{cases}$$

(34)

si trascura il fattore $\frac{1}{\cos \theta}$ sulla variazione dell'angolo di imbardata, che verrà chiamato α nella trattazione.

Con la semplificazione si fa l'ipotesi di un angolo θ che rimane vicino ai 180° . Nella soluzione finale si avrà $\alpha \neq 0$ con un massimo discostamento di θ a 143° . Questo porta ad un errore locale massimo sull'angolo α

$$errore \alpha = 1 - \left| \frac{1}{\cos \theta_{min}} \right| = 25.21 \%$$

(35)

3.4 Teoria del controllo ottimale

Si introduce la teoria del controllo ottimale per avere lo strumento principale attraverso il quale è ricercata la soluzione ottima del problema.

La teoria del controllo ottimale pone il problema di massimizzare o minimizzare un funzionale scelto andando ad agire sui controlli del sistema.

In un generico sistema dinamico sono presenti tre tipologie di variabili:

- Variabile indipendente $t \in \mathbb{R}^1$
- Variabili di stato $X(t) \in \mathbb{R}^N$
- Variabili di controllo $u(t) \in \mathbb{R}^M$

L'evoluzione delle variabili di stato è definita dalle equazioni di stato

$$\dot{X}(t) = f(X(t), u(t), t) \tag{36}$$

e limitata agli estremi iniziali e finali dalle condizioni al contorno

$$\Psi(X_0, X_f, t_0, t_f) = 0 \tag{37}$$

Con $\Psi(X_0, X_f, t_0, t_f) \in \mathbb{R}^q$ e $q \leq 2n + 2$

Il problema, formulato come segue, è chiamato Problema di Bolza

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = f(X(t), u(t), t) \\ \Psi(X_0, X_f, t_0, t_f) = 0 \\ \max(J) \end{cases} \tag{38}$$

Dove

$$J = \phi(X_0, X_f, t_0, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \Phi(X(t), \dot{X}(t), t) dt \tag{39}$$

È il funzionale, la teoria del controllo ottimale applica la massimizzazione o minimizzazione sul funzionale per trovare la sequenza di controlli che ottimizza il problema.

Si vedono due guadagni, uno sulle condizioni al contorno e uno sulle variabili di stato e variabile indipendente. Se $\phi = 0$ si sta utilizzando la formulazione di Lagrange, mentre se $\Phi = 0$ si è nella formulazione di Meyer.

Si modifica il funzionale integrando le *adjoint variables* $\lambda \in \mathbb{R}^N$ e le *adjoint constants* $\mu \in \mathbb{R}^q$.

$$J^* = \phi + \mu^T \phi + \int_{t_0}^{t_f} [\Phi + \lambda^T (f - \dot{X})] dt \quad (40)$$

Si differenzia il funzionale modificato e si pone nullo.

$$dJ^* = 0 \quad \forall \delta X, \delta u, \delta X_f, \delta X_0, \delta t_f, \delta t_0 \quad (41)$$

Integrando per parti e definendo l'Hamiltoniano $H = \Phi + \lambda^T f$ si ottiene

$$\begin{aligned} dJ^* = & \left(\frac{\partial \phi}{\partial t_f} + \mu^T \frac{\partial \Psi}{\partial t_f} + H_f \right) dt_f + \left(\frac{\partial \phi}{\partial t_0} + \mu^T \frac{\partial \Psi}{\partial t_0} - H_0 \right) dt_0 + \left(-\lambda_f^T + \frac{\partial \phi}{\partial X_f} + \mu^T \frac{\partial \Psi}{\partial X_f} \right) dX_f \\ & + \left(\lambda_0^T + \frac{\partial \phi}{\partial X_0} + \mu^T \frac{\partial \Psi}{\partial X_0} \right) dX_0 + \int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial t} + \dot{\lambda}^T \right) dX + \frac{\partial H}{\partial u} du \right] dt = 0 \end{aligned} \quad (42)$$

3.4.1 Principio di Massimo di Pontryagin

La necessità di avere variazione nulla del funzionale per ogni variazione, porta alla costruzione di tutte le equazioni necessarie per risolvere il problema di ottimizzazione.

Le equazioni di Eulero-Lagrange sono N equazioni che descrivono l'evoluzione delle *adjoint variables* parallela a quella delle variabili di stato.

$$\frac{d\lambda}{dt} = - \left(\frac{\partial H}{\partial X} \right)^T \quad (43)$$

Le equazioni dei controlli ottimali sono M equazioni che descrivono la sequenza ottima di controlli per ottenere un funzionale massimo (o minimo)

$$\left(\frac{\partial H}{\partial u} \right)^T = 0 \quad (44)$$

Per le condizioni al contorno si hanno invece le condizioni al contorno di ottimo

$$\begin{cases} \lambda_0^T + \frac{\partial \phi}{\partial X_0} + \mu^T \frac{\partial \Psi}{\partial X_0} = 0 \\ -\lambda_f^T + \frac{\partial \phi}{\partial X_f} + \mu^T \frac{\partial \Psi}{\partial X_f} = 0 \end{cases}$$

(45)

Quando la variabile X_j non appartiene a uno dei due contorni, allora vale l'equazione relativa al contorno mancante che definisce nulla la relativa *adjoint variable* in quel contorno.

$$\begin{cases} \lambda_0^T = 0 \\ \lambda_f^T = 0 \end{cases}$$

(46)

Le condizioni di trasversalità sono poste al tempo iniziale e finale

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t_0} + \mu^T \frac{\partial \Psi}{\partial t_0} - H_0 = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial t_f} + \mu^T \frac{\partial \Psi}{\partial t_f} + H_f = 0 \end{cases}$$

(47)

Quando il tempo iniziale o finale non è determinato, allora non vi è dipendenza della relativa condizione al contorno dal tempo e l'Hamiltoniano sarà nullo in quel contorno.

$$\begin{cases} H_0 = 0 \\ H_f = 0 \end{cases}$$

(48)

Definite queste equazioni il Principio di Massimo di Pontryagin afferma che

Il valore del controllo ottimale, appartenente al dominio di ammissibilità, in ogni punto della traiettoria rende massimo (o minimo) l'Hamiltoniano H , in modo da massimizzare (o minimizzare) il funzionale J .

Quindi, identificando con $*$ la condizione ottimale,

$X^*(t), \lambda^*(t)$ rendono massimo (o minimo) il funzionale J^* , mentre

$u^* \in \Omega$ è il valore ottimale dei controlli, tale da rimanere all'interno del dominio di ammissibilità per il controllo.

Nel problema trattato i controlli di spinta e coppie sono limitati inferiormente e superiormente.

Nel caso di J^* massimo, allora

$$H(t, X^*(t), \lambda^*(t), u^*(t)) \geq H(t, X^*(t), \lambda^*(t), u(t))$$

(49)

3.4.2 Bang-Bang Control

Se l'Hamiltoniano dipende linearmente da u_j , allora dall'equazione (44), il termine $\frac{\partial H}{\partial u_j}$ non contiene u_j e il sistema risulta indeterminato. Per soddisfare il Principio di Massimo di Pontryagin si vuole massimizzare H , questo è possibile se il valore del controllo indagato è limitato inferiormente e superiormente. Si definisce una *switching function*

$$S_F = \frac{\partial H}{\partial u_j} \quad (50)$$

Dalla quale si determina il valore del controllo ottimale con un andamento detto *bang-bang*, cioè che può cambiare solo saltando dal limite superiore a quello inferiore e viceversa. Si ha il caso particolare nel quale anche la *switching function* è nulla. In tal caso si procede con la ricerca del controllo ottimale derivando la *switching function* fino a rendere esplicito il controllo. Ponendo tale derivata uguale a zero si ottiene il valore del controllo, che in questo caso può essere un valore che non appartiene agli estremi del dominio.

$$u_j = \begin{cases} u_{j,max} & \text{se } S_f > 0 \\ u_{j,min} & \text{se } S_f < 0 \\ \left(\frac{dH}{du_j}\right)^k (u_j) = 0 \rightarrow u_j & \text{se } S_f = 0 \end{cases} \quad (51)$$

3.4.3 Formulazione del Boundary Value Problem

Quando si hanno limitazioni sui comandi, si suddivide la traiettoria in archi in modo che per ogni arco di traiettoria sia definito se una limitazione su un comando specifico è attiva (cioè il comando ottimo per quell'arco giace all'estremo del dominio) oppure no (cioè il comando giace in un punto interno del dominio). La suddivisione in archi genera la possibilità di avere nuove condizioni al contorno e discontinuità nei contorni interni della traiettoria.

La formulazione del *Boundary Value Problem (BVP)* è la seguente:

- t variabile indipendente
- X variabili di stato, tali che $\frac{\partial X}{\partial t} = f$
- λ *adjoint variables*, tali che $\frac{\partial \lambda}{\partial t} = -\left(\frac{\partial H}{\partial X}\right)^T$
- u variabili di controllo, ottenute come funzioni di X e λ in modo da soddisfare il Principio di Massimo di Pontryagin.
- Condizioni al contorno su X , λ e t nei punti iniziale, finale e intermedi tra gli archi.

Dato che la durata $\tau_j = t_j - t_{j-1}$ degli archi j di traiettoria è essa stessa un parametro per ogni arco, si vuole utilizzare per la discretizzazione dei nodi sugli archi una variabile che sia davvero indipendente. Per tale ragione si definisce la variabile ε che varia da $j - 1$ a j per ogni arco j .

$$\varepsilon = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{\tau_j}$$

(52)

Le equazioni di stato e di Eulero-Lagrange si ridefiniscono come

$$\begin{cases} \frac{dX}{d\varepsilon} = \tau_j \frac{dx}{dt} \\ \frac{d\lambda}{d\varepsilon} = \tau_j \frac{d\lambda}{dt} \end{cases}$$

(53)

Si è costruito un problema nel quale sono presenti variabili di stato, *adjoint variables* e parametri costanti (tra cui le durate di ogni arco di traiettoria). I parametri costanti si definiscono come Y

$$\frac{dY}{d\varepsilon} = 0$$

(54)

Si definisce un vettore Z con tutte le incognite

$$Z = \begin{pmatrix} X \\ \lambda \\ Y \end{pmatrix}$$

(55)

Da cui le equazioni differenziali

$$\frac{\partial Z}{\partial \varepsilon} = g(Z, \varepsilon)$$

(56)

Il vettore S raccoglie tutti i valori di Z nei contorni interni ed esterni

$$S = (Z_{0+}, Z_{1\pm}, \dots, Z_f)$$

(57)

dove f sono è il numero di archi di traiettoria.

Le condizioni al contorno si scriveranno in funzione di S

$$\Psi(S) = 0$$

(58)

3.4.4 Calcolo della soluzione al Boundary Value Problem

L'algoritmo per la risoluzione del problema aggiorna i parametri iniziali incogniti attraverso una stima del valore calcolata al fondo di ogni ciclo iterativo. Per le iterazioni è utilizzato il metodo di Newton.

Definita come r l'iterata corrente e p il vettore dei valori iniziali,

$$p^{r+1} = p^r + \Delta p \quad (59)$$

dove

$$\Delta p = p^{r+1} - p^r = - \left[\frac{\partial \Psi}{\partial p} \right]^{-1} \Psi^r \quad (60)$$

Ψ^r è il vettore delle condizioni al contorno, ma anche l'errore dato che $\Psi = 0$.

L'equazione (60) si ricava dall'espansione in serie troncata al primo ordine del vettore delle condizioni al contorno

$$\Psi^r = \Psi + \frac{\partial \Psi}{\partial p} (p - p^r) \quad (61)$$

Le lettere senza l'apice dell'iterata corrente rappresentano i valori esatti.

Per risolvere il problema è necessario trovare la matrice $\left[\frac{\partial \Psi}{\partial p} \right]$, la quale può essere scomposta in

$$\left[\frac{\partial \Psi}{\partial p} \right] = \left[\frac{\partial \Psi}{\partial S} \right] \left[\frac{\partial S}{\partial p} \right] \quad (62)$$

$\left[\frac{\partial \Psi}{\partial S} \right]$ può essere ottenuta per derivazione, mentre $\left[\frac{\partial S}{\partial p} \right]$ rappresenta i valori nei contorni interni ed esterni di $\left[\frac{\partial Z}{\partial p} \right]$, che può essere ricavato integrando il sistema

$$\left[\frac{\partial \dot{Z}}{\partial p} \right] = \left[\frac{\partial g}{\partial Z} \right] \left[\frac{\partial Z}{\partial p} \right] \quad (63)$$

Nel problema trattato, $\left[\frac{\partial \Psi}{\partial p} \right]$ è stata calcolata in modo numerico variando p^r di piccole quantità, calcolando i risultati su S e poi computando l'errore rispetto alla variazione δp . Linearizzando si giunge a un'approssimazione della matrice.

3.5 Problema di Fuller

Si introduce il Problema di Fuller per poter modificare il problema di controllo di coppia di beccheggio del problema da un semplice arco singolare a una funzione a tratti. Nelle traiettorie spaziali spesso la definizione di una funzione a tratti risulta ottimale per controlli che appaiono lineari nel tempo all'interno delle equazioni. Il Problema di Fuller consiste nell'individuare la curva di commutazione ottimale, cioè quella che minimizza il funzionale.

La dinamica rotazionale di beccheggio può essere modellizzata mediante il Problema di Fuller con le seguenti conversioni:

$$x_1 \rightarrow \theta, \quad x_2 \rightarrow \omega_\theta, \quad \lambda_1 \rightarrow \lambda_\theta, \quad \lambda_2 \rightarrow \lambda_{\omega_\theta} \quad (64)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t) \\ u(t) \in [-1,1] \end{cases} \quad (65)$$

Si vuole minimizzare il funzionale

$$J(t) = - \int_0^T \frac{1}{2} x_1(t)^2 \cdot dt \quad (66)$$

Dove quindi il costo di Lagrange è

$$\Phi(x_1(t)) = -\frac{1}{2} x_1(t)^2 \quad (67)$$

Si fissano le condizioni al contorno

$$\begin{cases} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 0 \\ x_1(T) = \xi_1 \\ x_2(T) = \xi_2 \end{cases} \quad (68)$$

Per minimizzare il funzionale, per il Principio di Massimo di Pontryagin, si cerca di minimizzare l'Hamiltoniano.

$$H(t) = \Phi + \lambda^T = \lambda_1(t)x_2(t) + \lambda_2(t)u(t) - \frac{1}{2} x_1(t)^2 \quad (69)$$

Da cui le equazioni di Eulero-Lagrange

$$-\frac{\partial H(t)}{\partial x_1(t)} = \dot{\lambda}_2(t) = x_1(t) \quad (70)$$

$$-\frac{\partial H(t)}{\partial x_2(t)} = \dot{\lambda}_2(t) = -\lambda_1(t) \quad (71)$$

L'Hamiltoniano non dipende esplicitamente dal tempo nell'istante iniziale, quindi

$$H(0) = 0 \Rightarrow \lambda_1(0)x_2(0) + \lambda_2(0)u(0) - \frac{1}{2}x_1(0)^2 = 0 \quad (72)$$

Fissate le condizioni assegnate

$$\begin{cases} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 0 \end{cases} \quad (73)$$

Si trova

$$\lambda_{x_2}(0)u(0) = 0 \Rightarrow \lambda_{x_2}(0) = 0 \quad (74)$$

L'Hamiltoniano è lineare, per questo si costruisce una *switching function* come previsto per i controlli ottimali lineari nell'Hamiltoniano.

$$\frac{\partial H(t)}{\partial (u)} = \lambda_{x_2}(t) = SF(t) \quad (75)$$

Si utilizza la procedura per determinare il *bang-bang control*, trovando per il caso $\lambda_{\omega_\theta} \neq 0$

$$u^* = \text{sign}(\lambda_2(t)) \quad (76)$$

E per il caso $SF = \lambda_2(t) = 0$ si applica la derivazione della *switching function* fino a trovare esplicitamente il controllo $u(t)$, che viene esplicitato nella derivata quarta.

$$\dot{SF}(t) = \lambda_2(t) = -\lambda_1(t) = 0 \tag{77}$$

$$\ddot{SF}(t) = -x_1(t) = 0 \tag{78}$$

$$\dddot{SF}(t) = -x_2(t) = 0 \tag{79}$$

$$SF^{IV}(t) = -u(t) = 0 \tag{80}$$

Per soddisfare le condizioni imposte, al termine dell'arco singolare le due variabili della dinamica rotazionale e le relative *adjoint variable* devono annullarsi.

Si può riscrivere la formulazione del Problema di Fuller con le *adjoint variables*

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t) \\ \dot{\lambda}_1(t) = \\ \dot{\lambda}_2(t) = -\lambda_1(t) \\ u(t) \in [-1; 1] \\ \max J(t) \end{cases} \tag{81}$$

e le condizioni al contorno

$$\begin{cases} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 0 \\ x_1(T) = \xi_1 \\ x_2(T) = \xi_2 \\ \lambda_2(0) = 0 \end{cases} \tag{82}$$

Come soluzione del Problema di Fuller si vuole evitare il solo arco singolare in modo da poter fissare delle condizioni al contorno per ξ_1 e ξ_2 diverse da zero.

Per la risoluzione del problema di tesi è necessario avere un arco singolare seguito da due archi non singolari. Si desidera evitare il fenomeno di *Chattering*, cioè uno passaggio continuo tra i due estremi opposti del controllo u con un numero infinito di *switches*.

Avendo le quattro variabili iniziali nulle per soddisfare l'arco singolare e generando un controllo $u(0^+) > 0$ si genererebbe una velocità angolare maggiore di zero, un angolo maggiore di zero e di conseguenza $\lambda_1(0^+) > 0 \Rightarrow \lambda_2(0^+) < 0$ che genererebbe un controllo negativo, opposto a $u(0^+)$.

Viceversa, se il controllo iniziale fosse negativo. Per evitare il *Chattering* per una continua inversione del controllo è necessario introdurre una discontinuità in modo da rispettare le condizioni per l'arco singolare a 0^- e permettere un numero finito di archi dopo l'arco singolare. x_1 e x_2 sono variabili di stato continue; quindi, si deve modificare l'*adjoint variable* λ_1 in modo che $\lambda_1(0^-) = 0$ e $\lambda_1(0^+) = free$

Con un $\lambda_1(0^+) > 0$ invece di arrivare subito a uno switch del controllo, si genererà un controllo negativo che farà ridurre velocità angolare e angolo e ridurrà quindi anche λ_1 fino ad annullarlo nello *switch*. Definire l'entità della discontinuità, significa definire lo *switch*. Situazione analoga ma opposta per $\lambda_1(0^+) < 0$.

Un $\lambda_1(0^+) > 0$ porterà λ_2 ad annullarsi entro un certo tempo. Ma questo può causare poi un'inversione dello stesso λ_1 , che farà nuovamente aumentare λ_2 portando a un altro switch e così via. Risulta quindi un nuovo parametro, il numero di switch all'interno della traiettoria.

Da un'analisi numerica, risulta che all'aumentare del numero di *switches* il tempo di convergenza aumenti, ma aumenti anche il funzionale. Volendo perseguire una soluzione di *minimum-time path*, si accetta un errore minimo sul funzionale per un miglior tempo di convergenza. La soluzione selezionata del Problema di Fuller è quindi una che in seguito all'arco singolare vede due archi non singolari, quindi un solo switch dei controlli.

4

DESCRIZIONE DELLA MISSIONE

Il tratto di missione spaziale considerato è la fase di *soft-landing* di una missione che abbia la traiettoria di discesa precedente al *soft-landing* non allineata con il sito di atterraggio. Si considererà una missione che, partendo dalla superficie terrestre, arrivi sulla Luna dopo aver effettuato tutte le manovre necessarie al moto tra le superfici della Terra e della Luna. Si ricerca un tipo di missione che fornisca questo tipo di condizioni iniziali. Vengono qui esposte tre possibili cause della presenza di *crossrange* all'inizio della manovra di *soft-landing*

- 1) L'orbita di partenza per la discesa non sorvola il punto di allunaggio;
- 2) Un errore di calcolo o un problema propulsivo nelle manovre precedenti generano uno sfasamento tra la direzione della velocità orizzontale e la proiezione del punto di allunaggio sul piano orizzontale;
- 3) Il punto di allunaggio viene scelto successivamente alla manovra di *Descent Orbit Insertion*.

4.1 Fasi della missione

Una generica missione di *soft-landing* sul suolo lunare risulta costituita dalle seguenti fasi

- Lancio a un'orbita di parcheggio terrestre
- Fase Trans-Lunare
- Fase Cis-Lunare
- Fase di operazioni in orbita lunare
- Orbita di discesa
- Soft-Landing

4.1.1 Lancio a un'orbita di parcheggio terrestre

Sul modello della missione Artemis I la missione viene lanciata da un sito di lancio sulla superficie terrestre (Kennedy Space Center per Artemis I) e sfruttando il vettore di lancio punta al raggiungimento di un'orbita bassa circolare intorno alla Terra. Per raggiungere l'orbita di parcheggio è necessario eguagliare la posizione e la velocità a quelli dell'orbita di parcheggio. Il vettore di lancio, (Space Launch System Block 1 per Artemis I) conferisce l'impulso iniziale che permette il sollevamento attraverso gli strati più densi dell'atmosfera. Successivamente allo spegnimento e separazione di tutti gli stadi del vettore di lancio il veicolo spaziale ha l'impulso necessario per raggiungere un apogeo all'altezza con l'orbita di parcheggio. Un terzo stadio o lo stadio di trasferimento lunare (come nel caso di Artemis I) circolarizza l'orbita con una manovra

all'apogeo nella direzione della velocità che permette di alzare il perigeo fino a eguagliare l'apogeo. L'orbita di parcheggio è scelta a quote basse per minimizzare l'energia necessaria a raggiungerla e minimizzare l'energia richiesta all'inserimento nell'orbita Trans-Lunare. Si considera un'altitudine tra i 200 e i 400 km. L'orbita di parcheggio terrestre deve avere un'inclinazione simile a quella dell'orbita lunare (le missioni Apollo questa ha un'inclinazione tra i 32.5° e i 28.5° rispetto all'equatore) per facilitare la manovra di trasferimento

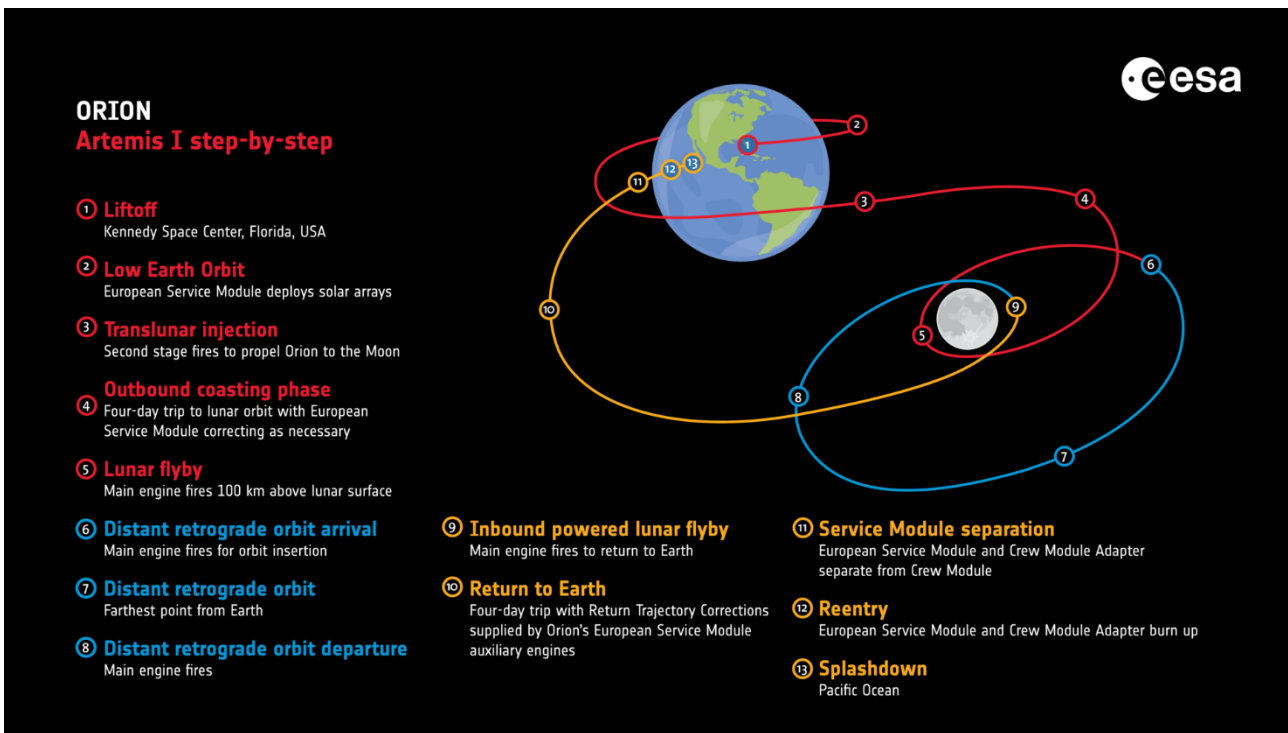


figura 5: Piano di volo per la missione Artemis I, fonte: ESA

4.1.2 Fase Trans-Lunare

L'inserimento nell'orbita Trans-Lunare a partire dall'orbita di parcheggio terrestre è affidata allo stadio di trasferimento. Il costo in ΔV è di circa 3.2 – 4 km/s se si considera un trasferimento di Hohmann con la semplificazione di *patched conics*. La manovra deve essere svolta da una posizione precisa lungo l'orbita di parcheggio terrestre, la quale permetta in *rendezvous* con la Luna. Durante il trasferimento viene rimosso lo stadio di trasferimento. Alcuni veicoli potrebbero non usare lo stadio di trasferimento, questo potrebbe comportare la necessità di un rifornimento di propellente prima della manovra di inserimento in orbita Trans-Lunare in modo da riservare sufficiente propellente per le manovre in fase Cis-Lunare e in orbita lunare e per l'allunaggio.

4.1.3 Fase Cis-Lunare

Nella fase Cis-Lunare il veicolo spaziale si porta con una o più manovre nell'orbita desiderata. Questa può essere un'orbita bassa lunare, un'orbita polare oppure l'orbita del Lunar Gateway. Generalmente queste manovre rientrano in un $\Delta V < 1 \text{ km/s}$

4.1.4 Fase di operazioni in orbita lunare

Una missione di allunaggio può comportare precedentemente alla manovra di discesa, una fase di operazioni in orbita lunare. Questa può includere:

- Ricognizione orbitale del punto di atterraggio
- *Rendezvous* e attracco con un secondo veicolo o stazione
- Dispiegamento di un veicolo orbitante fino a questa fase collegato al lander

Nel caso di ricognizione del sito di atterraggio il veicolo spaziale può inserirsi già in fase Cis-Lunare in un'orbita che sorvoli direttamente il punto di atterraggio ed eseguire eventuali correzioni di traiettoria prima della fase di discesa. Questo porta generalmente ad avere un punto di atterraggio sul piano dell'orbita di discesa.

Nel caso incontro con un altro veicolo spaziale di dispiegamento di un veicolo orbitante, è possibile che l'orbita di dispiegamento non sorvoli il sito di atterraggio. In questo caso il veicolo spaziale dovrà effettuare una manovra di cambio di inclinazione dell'orbita in modo che sorvoli il sito di atterraggio o accettare un disallineamento con la traiettoria di discesa. Spesso risulta vantaggioso manovrare per allinearsi quando ancora in orbita, ma per ragioni di numero di accensioni del motore principale o di staging della missione potrebbe non essere possibile.

4.1.5 Orbita di discesa

L'allunaggio è preceduto da un'orbita di discesa, cioè un'orbita più bassa rispetto a un'orbita ottenuta nella fase Cis-Lunare o al termine della fase di operazioni in orbita lunare. L'orbita di discesa per il problema trattato è definita immaginando una manovra di inserimento (DOI – *Descent Orbit Insertion*) da un'orbita circolare con una quota di 100 km (H_{Cis}). La DOI deve rallentare il velivolo in modo da far scendere il perilunio a 15 km (H_p) di altitudine (in linea con il programma Apollo, che però parte da un'orbita di 111 km di altitudine). Si modella la DOI come una trasferta di Hohmann senza arrivare all'orbita circolare finale, ma considerando V_{H2} come velocità di partenza per la fase di soft-landing.

Per la Luna la costante gravitazionale planetaria è $\mu = \mu_L = M_L \cdot G = 4902.7779 \frac{\text{km}^3}{\text{s}^2}$

e il raggio è $R_L = 1737.4 \text{ km}$

Si definiscono le caratteristiche dell'orbita di discesa

$$r_1 = R_L + H_{Cis} = 1837.4 \text{ km} \quad (83)$$

$$r_2 = R_L + H_p = 1752.4 \text{ km} \quad (84)$$

$$a_{DOI} = \frac{r_1 + r_2}{2} \quad (85)$$

$$e_{DOI} = \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2} \quad (86)$$

$$b_{DOI} = \sqrt{a(1 - e^2)} \quad (87)$$

Si ricavano le velocità

$$V_{c1} = \sqrt{\frac{\mu}{r}} \quad (88)$$

$$V_{H1} = V_{c1}^2 \left(\frac{2r_2}{r_1 + r_2} \right) \quad (89)$$

$$\Delta V = V_{H1} - V_{c1} \quad (90)$$

$$V_{H2} = V_{c2}^2 \left(\frac{2r_1}{r_1 + r_2} \right) \quad (91)$$

Tabella 1: Parametri per la manovra di Descent Orbit Insertion modellata con la manovra di Hohmann

Parametro	Nome parametro	Valore
H_{Cis}	Altitudine orbita di partenza	100 km
H_p	Altitudine perilunio	15 km
a_{DOI}	Semiassa maggiore orbita di discesa	1795.6 km
e_{DOI}	Eccentricità orbita di discesa	0.0237
b_{DOI}	Semiassa minore orbita di discesa	1795.1 km
V_{c1}	Velocità circolare orbita di partenza	1.6332 km/s
V_{H1}	Velocità orbita di trasferimento nel punto iniziale	1.6137 km/s
ΔV	Impulso necessario alla frenata	0.0195 km/s
V_{H2}	Velocità orbita di trasferimento nel punto finale	1.6920 km/s

4.1.6 Manovra di Soft-Landing

La manovra di atterraggio lunare presenta una serie di sottofasi caratteristiche della missione specifica. Le fasi differiscono dal fatto che la missione sia umana (manned) o robotica (unmanned), dalla possibilità di avere una selezione attiva del punto di atterraggio durante la discesa e dalla possibilità di avere un disconnessione di più lander durante l'orbita di discesa.

Come si vedrà più avanti, il lander considerato per il problema di ottimizzazione avrà una configurazione di geometria e propulsori semplificata ispirata al LEM della missione Apollo 11 e riscalato secondo i dati mediati del lander della missione Chang'e-3, al fine di simulare un lander robotico (generalmente di dimensioni inferiori a quelle di un lander con equipaggio). Per questa ragione si descrivono qui di seguito le manovre di allunaggio del *lander* della missione Chang'e-3

- Preparazione all'atterraggio: fase di calcolo interna che ha luogo durante la fase di discesa precedente alla fase di *soft-landing*. Dal calcolo si ricavano i tempi di accensione del propulsore principale in modo da avere l'accensione al perilunio della traiettoria.
- Decelerazione primaria: ha come obiettivo la riduzione della velocità orbitale fino a 3 km di quota.
- Aggiornamento rapido dell'assetto (*Quick Adjusting*): regolazione rapida del beccheggio per collegare la fase di decelerazione primaria alla fase di avvicinamento. Questo avviene tra i 3 km e i 2.4 km di quota.
- Fase di avvicinamento: fase di traiettoria a spinta ridotta ed assetto costante per permettere al sensore ottico di riprendere il sito d'atterraggio.
- *Hovering*: fase di sospensione in volo del *lander* ad altitudine di 100 m per facilitare l'osservazione del sito di atterraggio.
- *Hazard Avoidance*: dai rilevamenti nella fase precedente si evitano gli ostacoli sul terreno e si annulla la velocità orizzontale. La fase va dai 100 m e i 30 m di quota.
- Discesa verticale a bassa velocità: discesa verticale con propulsore a bassa potenza, la spinta è costante, calcolata in modo da raggiungere la superficie con una velocità all'interno dei requisiti per il carrello di atterraggio.

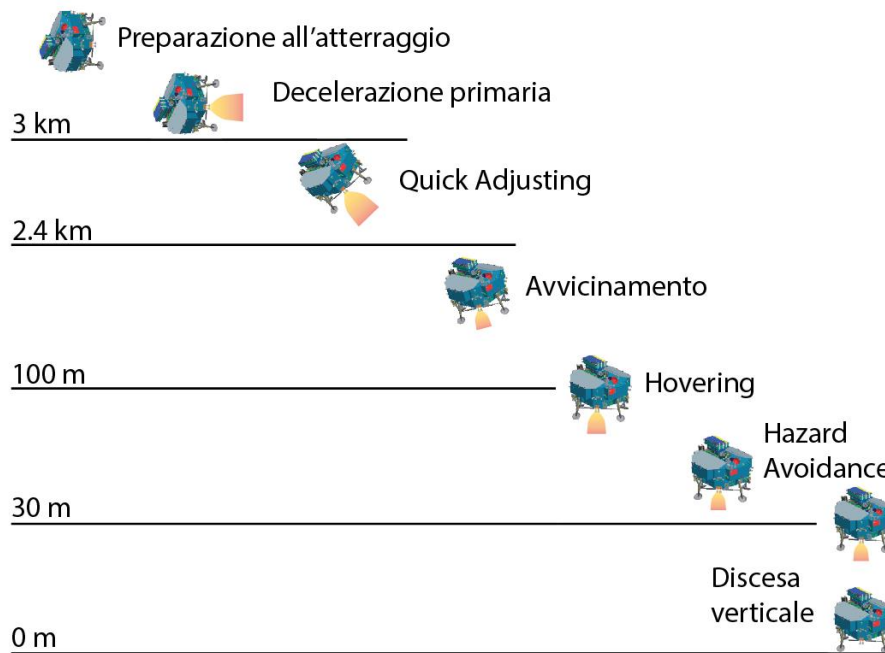


figura 6: Manovra di Soft-Landing per Chang'e-3, fonte: (Sun, et al., 2014)

Per il caso studiato si considera una manovra di atterraggio lunare semplificata nella quale il sito di atterraggio viene definito prima del raggiungimento del punto finale della trasferta di Hohmann. Il sito di atterraggio risulta essere alla distanza prevista lungo l'asse orizzontale che giace nel piano dell'orbita di discesa (*downrange*), ma si trova fuori dal piano stesso, avendo quindi una distanza laterale (*crossrange*) rispetto alla posizione iniziale. Nella traiettoria studiata non sono considerate fasi di osservazione della superficie lunare e di successiva manovra *Hazard Avoidance*.

Da queste considerazioni nascono le condizioni al contorno iniziali e finali sulle posizioni del problema trattato. Essendo il *downrange* quello previsto e assumendo il sito di atterraggio all'origine degli assi del sistema di riferimento, si trova che il *downrange* è tale da permettere di toccare il suolo lunare nell'origine degli assi e non è quindi definita in modo assoluto, ma varia in base allo spazio necessario all'arresto del lander. Per la risoluzione del problema si definisce un valore di *downrange* di tentativo di -500 km ispirato a quello delle missioni Apollo. A posteriori del calcolo, si modifica il *downrange* in modo da avere il sito di atterraggio all'origine degli assi. Si tratta di una semplice traslazione delle condizioni di partenza che ridefinisce semplicemente a priori il punto di manovra lungo l'orbita iniziale per l'inserimento nell'orbita di discesa. Nella figura 7 si può vedere un esempio grafico di una correzione in anticipo del tempo della *Descent Orbit Insertion* (dal quadrato rosso al quadrato verde nell'immagine) al fine di spostare il punto di atterraggio inizialmente calcolato (manovra in rosso) nel sito d'atterraggio all'origine degli assi (manovra in verde). Il problema è raffigurato con visuale sul piano longitudinale e non è quindi visibile il *crossrange* in questa immagine.

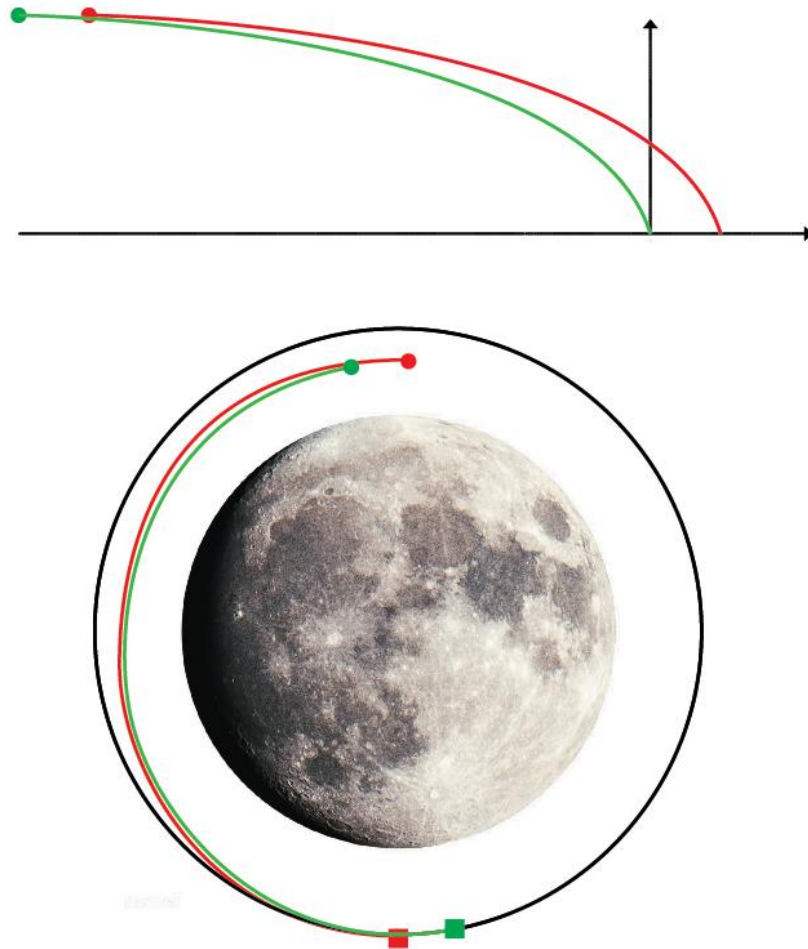


figura 7: Variazione della Descent Orbit Insertion per allunare nell'origine degli assi del sistema di riferimento per la manovra di Soft-Landing

4.2 Caratteristiche del Lander Lunare

Il lavoro di tesi rappresenta l'espansione di un problema trattato da una precedente tesi: *Ottimizzazione di Traiettorie di Atterraggio Lunare con Dinamica Rotazionale* del Dr. Davide Castellana.

Per questa ragione il lander utilizzato è lo stesso della sua tesi. La missione scelta è di tipo unmanned, per questo si è scelto di considerare un modello ridotto in scala del Lunar Module della missione Apollo 11. Riducendo la massa di un ordine di grandezza, la massa al decollo di 15103 kg del Lunar Module diventa una massa iniziale nel problema di 1600 kg. Le dimensioni del lander sono anch'esse scalate per un fattore $\sqrt[3]{10}$, caratterizzando un lander con un diametro di 2090 mm e un'altezza di 2013 mm. La geometria del lander viene semplificata e viene attribuita una simmetria cilindrica con due piani di simmetria. Qui il centro di massa coincide con il baricentro geometrico. La presenza delle gambe d'atterraggio è trascurata.

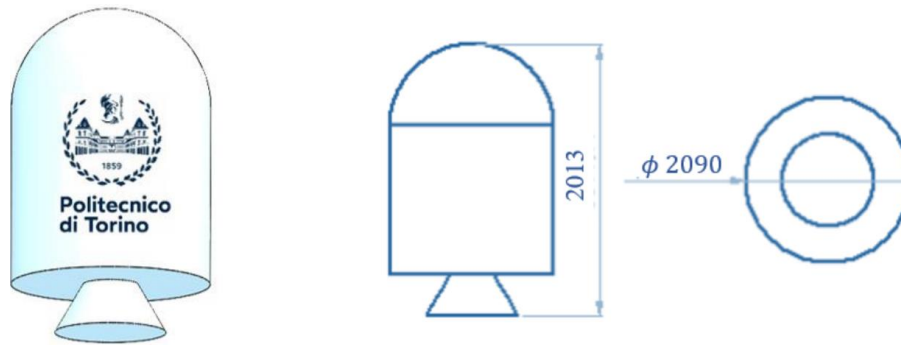


figura 8: Geometria del lander lunare, fonte: (Castellana, 2021-2022)

Il momento di inerzia attorno ad un asse ortogonale all'asse di simmetria del cilindro passante per il centro di massa del lander è

$$I = I_y = I_z = \frac{1}{12} m_0 \left(\frac{3}{4} d_{LLV}^2 + h_{LLV}^2 \right) = 1041.73 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

(92)

Nella soluzione al problema di ottimizzazione, si considererà I costante su entrambi gli assi di rotazione considerati.

Con tale semplificazione si trascura la variazione di I in seguito alla riduzione della massa e si trascura il fatto che la trattazione verrà svolta in assi inerziali e non in assi body, per questo motivo l'inerzia può in realtà variare per rotazioni intorno a entrambi gli assi ortogonali all'asse di simmetria.

Il lander considerato è più simile per dimensioni al Lander robotico della missione Chang'e-3. Per questo il valore di spinta del propulsore principale si ispira al propulsore a spinta variabile del Lunar Landing Vehicle della missione Chang'e-3, la cui spinta prodotta è T

$$1500 \text{ N} \leq T \leq 7500 \text{ N}$$

(93)

Per semplicità di implementazione si considera un propulsore a spinta costante che può essere acceso e spento. Essendo a spinta costante, si considera un livello di spinta intermedio di 4000 N . Si ottiene un propulsore a due modalità

$$\begin{cases} \text{Mode Off} \rightarrow T_{min} = 0 \text{ N} \\ \text{Mode On} \rightarrow T_{max} = 4000 \text{ N} \end{cases}$$

(94)

Il propulsore è posizionato alla base del lander e la spinta non è direzionabile. Sarà quindi necessario ruotare tutto il lander per direzionare la spinta. Il propulsore principale è posizionato lungo l'asse del cilindro che costituisce il lander. Risulta allineato al centro di massa e quindi non genera coppie sul lander.

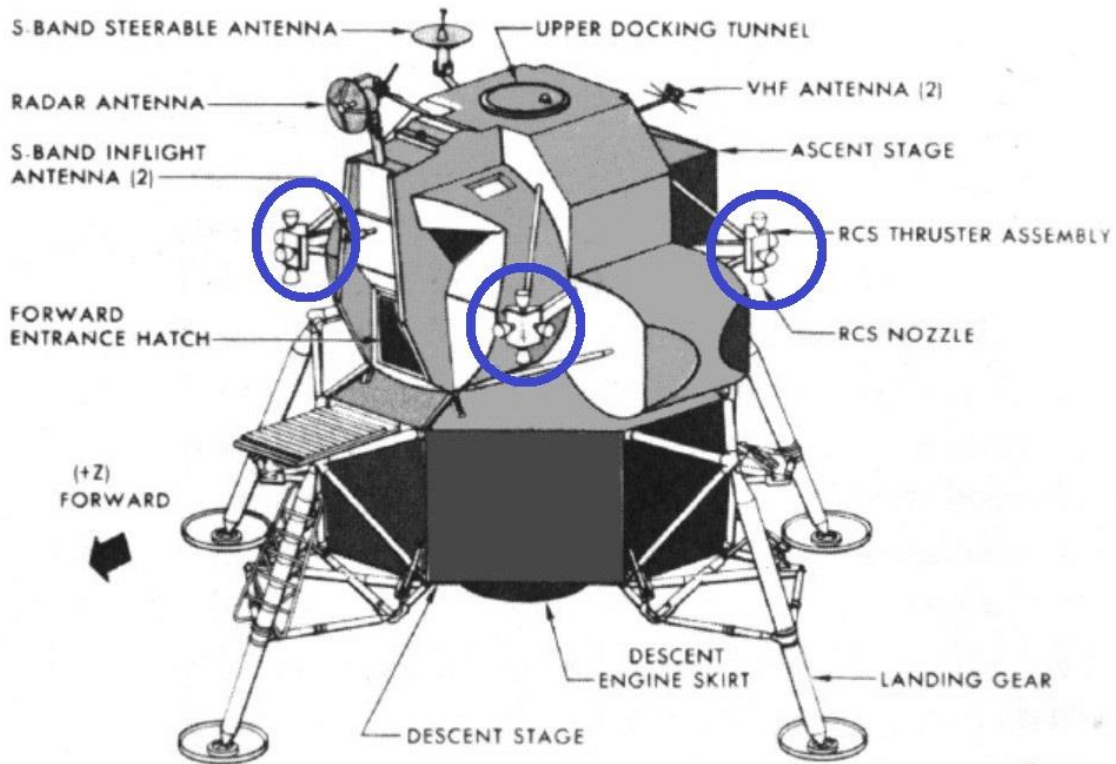


figura 9: Lunar Lander della missione Apollo 11 con evidenziati i controlli di assetto, fonte: NASA

Il sistema di controllo di assetto è un *Reaction Control System* (RCS) che utilizza propulsori secondari (*thrusters*). La dinamica d'assetto trattata prevede lo studio della rotazione sui piani inerziali longitudinale e orizzontale, per questa ragione si escludono le coppie generate dal RCS che portino a una rotazione del lander intorno all'asse di simmetria cilindrica. La disposizione dei propulsori è la stessa del Lunar Excursion Module della missione Apollo 11. Questi sono 16 *thruster* raggruppati in *cluster* da 4 propulsori, denominati *QUAD*, i *QUAD* sono disposti in una configurazione a quadrato, rispettando i due piani di simmetria della simmetria cilindrica e alla stessa altezza, lungo l'asse del cilindro, del centro di massa del *lander*. Per il problema considerato si immagina che il RCS possa fornire solamente coppie perpendicolari all'asse di simmetria cilindrica (e quindi all'asse di spinta del propulsore principale), per tale ragione si considerano solamente i *thruster* che hanno asse di spinta parallelo all'asse di simmetria del cilindro, per questi 8 propulsori, l'attivazione non è indipendente. Non potendo generare coppie, i propulsori possono attivarsi solo a due a due e in modo tale da generare una spinta risultante nulla sul *lander*. Quindi sono accoppiati le attivazioni delle coppie di thruster che si trovano su *QUAD* opposti rispetto all'asse di simmetria cilindrica e che hanno versi di spinta opposti, come suggerito in figura 10.

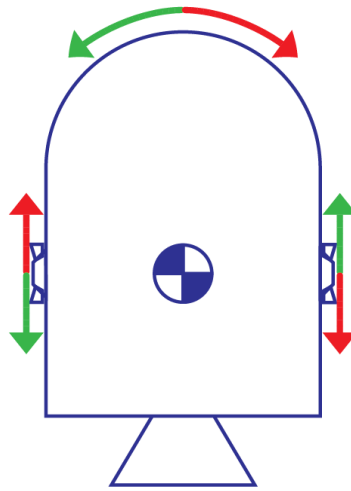


figura 10: Utilizzo del sistema di thruster per la generazione di coppia intorno ad un asse di rotazione

L'assetto intorno all'asse di simmetria cilindrica, che rimane costante nel problema, è tale da allineare i QUAD su due piani mobili per l'intera traiettoria. I due piani sono identificati immaginando un sistema di coordinate con un angolo di latitudine θ e uno di longitudine α rispetto all'asse di spinta del motore principale del *lander* (e quindi del *lander* stesso). In tal modo la dinamica rotazionale che determina i due angoli sarà determinata da due coppie di QUAD indipendenti.

La spinta dei propulsori è scalata ispirandosi al sistema RCS del Lunar Landing Vehicle della missione Chang'e-3. Il sistema utilizza due classi di propulsori per due diverse funzioni e in fasi di volo differenti:

- *Gross Attitude Control*: 16 *thruster* da 150 N di spinta, usati per il controllo di assetto durante la sottofase del *Soft-Landing* di *Quick Adjusting*
- *Accurate Attitude Control*: 12 *thruster* da 10 N di spinta, usati nella sottofase del *Soft-Landing* di *Hazard Avoidance*.

Nella traiettoria considerata non vi sono differenziazioni sui *thruster* utilizzati in funzione della fase di volo, si considera un valore di spinta intermedio tale da generare un valore intero di coppia, 45 N per *thruster*.

La coppia applicata intorno a un asse di rotazione viene definita considerando solamente i QUAD che giacciono sul piano perpendicolare all'asse di rotazione scelto. Ogni QUAD attiva uno dei due *thruster* con spinta parallela all'asse di simmetria cilindrica del *lander* e l'altro QUAD attiva il *thruster* rivolto in senso opposto. La coppia di *thruster* da attivare è scelta in funzione al verso della coppia da generare. Si trova la coppia prodotta dalla formula

$$M = T^{RCS} \cdot d_{LLV}$$

(95)

La spinta dei *thruster* del RCS è regolabile in modo da generare una coppia che può variare in modo continuo da una coppia nulla fino a una coppia massima, quando la spinta del RCS è massima, in entrambi i versi. Se si considera quindi il modulo della coppia come

$$M_{max} = T_{max}^{RCS} \cdot d_{LLV} = 133 \text{ N} \cdot \text{m} \quad (96)$$

allora la coppia su ogni asse di rotazione considerato risulterà essere

$$-M_{max} \leq M \leq M_{max} \quad (97)$$

Il consumo di propellente è definito dell'efficienza nell'uso del propellente. Il propellente è consumato dal RCS e dal propulsore principale, che impiegano propulsori con diversi impulsi specifici.

Da questi si calcola la velocità efficace di scarico

$$c = I_{sp} \cdot g_T \quad (98)$$

Dove $g_T = 9.81 \text{ m/s}^2$ è l'accelerazione di gravità sulla superficie terrestre.

Da cui il consumo di propellente m_p in massa

$$\frac{dm_p}{dt} = \frac{T}{c} \quad (99)$$

Dove T è la spinta del propulsore

Di conseguenza la massa si ridurrà nel tempo come

$$\frac{dm}{dt} = \frac{dm_p}{dt} = -\frac{T}{c} \quad (100)$$

Immaginando un'attivazione del propulsore principale e una coppia massima continua su un asse di rotazione si otterrà

$$\left(\frac{dm_p}{dt}\right)^{main} = 1.406 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \quad (101)$$

$$\left(\frac{dm_p}{dt}\right)^{RCS} = 0.0481 \frac{\text{kg}}{\text{s}} = 3.42\% \left(\frac{dm_p}{dt}\right)^{main} \quad (102)$$

L'equazione (102) di massa dovuta al RCS è trascurabile e si semplifica il problema considerando le variazioni di massa legate al consumo del solo propulsore principale. Nella pratica si noterà

come mentre il propulsore principale rimarrà acceso per tutto il tempo di volo, la coppia massima verrà applicata solo in brevi intervalli, facendo scendere la massa consumata dal RCS sotto al 1% di quella consumata dal propulsore principale.

Si riassumono in Tabella 2 le caratteristiche principali del *lander*.

Tabella 2: Parametri del *lander*

Parametro	Nome parametro	Valore
Proprietà geometriche		
d_{LLV}	Diametro del <i>lander</i>	2.013 m
h_{LVV}	Altezza del <i>lander</i>	2.090 m
Proprietà di massa		
m_0	Massa all'inizio della fase di <i>Soft-Landing</i>	1600 kg
$I = I_y = I_z$	Momento di inerzia per rotazioni perpendicolari all'asse del cilindro.	1041.73 kg · m ²
Propulsore principale		
T_{max}	Spinta del propulsore principale	4000 N
I_{sp}^{main}	Impulso specifico del propulsore principale	290 s
c_1	Velocità efficace di scarico del propulsore principale	2844.9 m/s
Sistema di controllo d'assetto		
T_{max}^{RCS}	Massima spinta di un <i>thruster</i> del RCS	66.07 N
M_{max}	Coppia massima RCS	133 N · m
I_{sp}^{RCS}	Impulso specifico del propulsore principale	280 s
c_{RCS}	Velocità efficace di scarico di un <i>thruster</i> del RCS	2746.8 m/s

5

ANALISI DEL MOTO TRIDIMENSIONALE

5.1 Sistema di riferimento

La scelta del sistema di riferimento deve essere un compromesso tra la semplificazione del problema e l'accuratezza della soluzione. Come mostrato nel *paragrafo 3.1.4*, il problema dei due corpi ristretto si può semplificare per la fase di *Soft-Landing* in un problema nel quale la superficie lunare si può considerare piana e con un'accelerazione di gravità costante e perpendicolare alla superficie. Come accennato nel *capitolo 4* si sceglie come origine degli assi il punto che rappresenterebbe il sito di atterraggio se la distanza percorsa lungo l'asse X durante la discesa fosse fissata a 500 km. Il piano dell'orbita di discesa costituisce il piano longitudinale. Sul piano longitudinale giacciono l'asse X, asse orizzontale con direzione e verso della velocità iniziale del *lander*, e l'asse Z, asse verticale (perpendicolare alla superficie lunare) che punta verso il cielo. L'asse Y giace insieme all'asse X sul piano orizzontale, è il secondo asse di una terna destrorsa con ordine X, Y, Z.

5.2 Condizioni assegnate di traslazione

Il problema considerato è l'ottimizzazione di una manovra di *Soft-Landing* nella quale il sito di atterraggio non si trova sul piano dell'orbita di discesa, le posizioni iniziale e finale lungo Y non coincidono e sono separate da una distanza laterale o *crossrange*.

Si definisce la distanza tra la posizione iniziale e il sito di atterraggio lungo X come *downrange*.

La posizione iniziale lungo Z è la quota iniziale.

Il parametro da massimizzare è la massa, questo significa che l'ottimizzazione ha come obiettivo la minimizzazione del propellente utilizzato per la manovra. Non viene trattato il caso di ottimizzazione nel quale si vuole minimizzare il tempo di volo.

Come condizioni assegnate esemplificative per la dinamica traslazionale si considerano quelle in Tabella 3.

Tabella 3: Condizioni al contorno per la dinamica di traslazione

Parametro	Nome parametro	Valore
$R_x(t_0)$	Posizione iniziale lungo X (<i>crossrange</i>)	500 km
$R_y(t_0)$	Posizione iniziale lungo Y (- <i>downrange</i>)	-50 km
$R_z(t_0)$	Posizione iniziale lungo Z (quota iniziale)	15 km
$V_x(t_0)$	Velocità iniziale lungo X (V_{H2} velocità finale trasferita di Hohmann)	1.6920 km/s
$V_y(t_0)$	Velocità iniziale lungo Y	0 km/s
$V_z(t_0)$	Velocità iniziale lungo Z	0 km/s
$R_x(t_f)$	Posizione finale lungo X	<i>free</i> (0 km)
$R_y(t_f)$	Posizione finale lungo Y	0 km
$R_z(t_f)$	Posizione finale lungo Z	0 km
$V_x(t_f)$	Velocità finale lungo X	0 km/s
$V_y(t_f)$	Velocità finale lungo Y	0 km/s
$V_z(t_f)$	Velocità finale lungo Z	0 km/s

Si noti come la posizione finale lungo X non sia fissata nulla come precedentemente dichiarato, ma è invece libera. Nel *paragrafo 4.1.5* si afferma che il *downrange* è uguale alla distanza necessaria per l'ottimizzazione della traiettoria. Questo significa che la distanza percorsa lungo l'asse X non è una condizione assegnata.

5.3 Scomposizione del moto sui tre assi

La semplificazione del sistema di riferimento permette di scomporre il moto tridimensionale sui tre assi. I tre moti hanno ciascuno condizioni al contorno differenti e questo rende i tre moti diversi l'uno dall'altro.

La comprensione dei tre moti è necessaria per capire come distribuire la spinta in modo ottimale lungo i tre assi. La spinta totale è infatti limitata e anche in assenza di limiti sulla dinamica rotazionale si avrà

$$\sqrt{T_x^2 + T_y^2 + T_z^2} \leq T_{max} = 4000 \text{ N}$$

(103)

5.3.1 Traslazione lungo l'asse X

Nel moto lungo X l'obiettivo è la riduzione della velocità fino ad annullarla.

Se si considera l'equazione della velocità lungo X

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{T_x}{m} \quad (104)$$

si integra e si sostituisce nella condizione al contorno sulla velocità finale

$$V_x(t_f) = 0 \quad (105)$$

si ottiene

$$V_x(t_0) + \int_{t_0}^{t_f} \frac{T_x}{m} dt = 0 \quad (106)$$

Riarrangiando la formula si ottiene che la distribuzione di spinta lungo X è necessaria al solo rallentamento dalla velocità $V_x(t_0) = V_{H2}$.

$$\int_{t_0}^{t_f} \frac{T_x}{m} dt = -V_x(t_0) \quad (107)$$

Se in questa equazione si considera la massa m come costante, allora risulta indifferente distribuire la spinta prima o dopo lungo la traiettoria, in quanto si avrebbe semplicemente l'intervallo di velocità dipendente dall'impulso fornito $(Imp)_x$. La fornitura di spinta su quest'asse perde la dipendenza dal tempo.

$$\int_{t_0}^{t_f} \frac{T_x}{m} dt = \frac{1}{m} \int_{t_0}^{t_f} T_x dt = \frac{(Imp)_x}{m} = -V_x(t_0) \rightarrow (Imp)_x = -\frac{V_x(t_0)}{m} \quad (108)$$

Dato che però la massa varia riducendosi nel tempo secondo la legge

$$m(t) = m_0 - \frac{T}{c_1} t \quad (109)$$

La fornitura di spinta alla fine della traiettoria è conveniente perché genera una maggiore variazione di velocità a parità di impulso fornito sull'asse X.

Si può quindi attribuire un valore alla fornitura di spinta lungo l'asse X dipendente dal tempo.

La fornitura di una spinta infinitesima dT_x al tempo t influisce quindi sulla velocità dV_x come nella formula

$$dV_x(t_f) = \int_{t_0}^t \frac{dT_x}{m_0 - \frac{T}{c_1} t} dt$$

(110)

Supponendo che T sia una spinta costante e massima somma vettoriale della spinta sui tre assi, allora

$$dV_x(t_f) = dT_x \int_{t_0}^t \frac{1}{m_0 - \frac{T}{c_1} t} dt = dT_x \cdot \frac{c_1}{T} \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - \frac{T}{c_1} t} \right)$$

(111)

Quindi la variazione di velocità dV_y rispetto alla spinta dT_y fornita al tempo t è

$$\frac{dV_x(t_f)}{dT_x} = \frac{c_1}{T} \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - \frac{T}{c_1} t} \right)$$

(112)

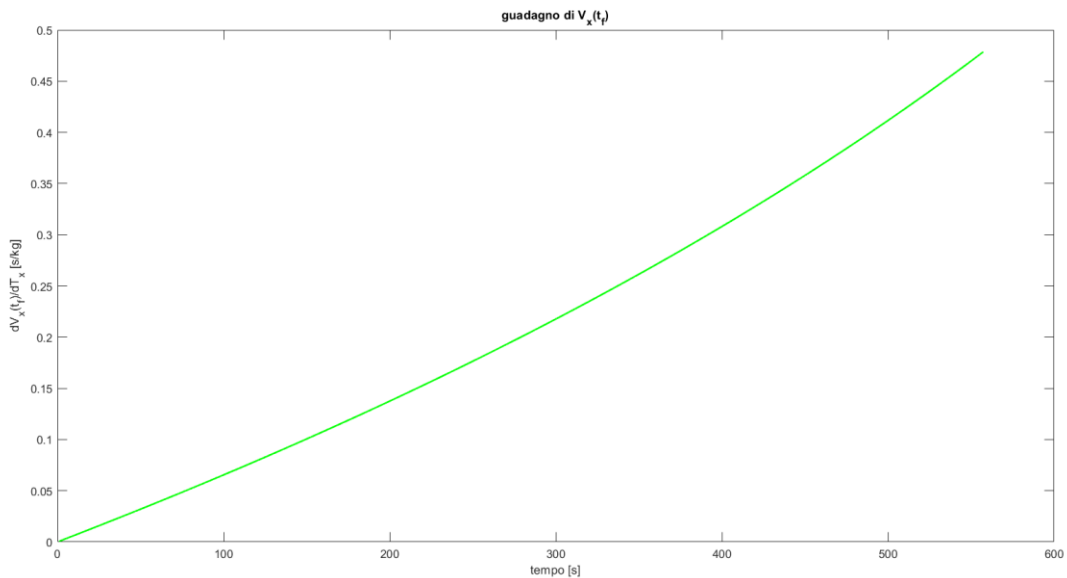


figura 11: Guadagno di velocità lungo X in funzione dell'istante di applicazione della spinta lungo X

5.3.2 Traslazione lungo l'asse Y

Nel moto lungo l'asse Y l'obiettivo è la copertura del *crossrange* con velocità iniziale e finale nulla.

Integrando le equazioni di stato di posizione e velocità

$$\begin{cases} \frac{dR_y}{dt} = V_y \\ \frac{dV_y}{dt} = \frac{T_y}{m} \end{cases}$$

(113)

e sostituendole dentro le condizioni al contorno finali

$$\begin{cases} R_y(t_f) = 0 \\ V_y(t_f) = 0 \end{cases}$$

Si ottengono le equazioni

$$\begin{cases} \int_{t_0}^{t_f} \left(\int_{t_0}^t \frac{T_y}{m} dt \right) dt = \text{crossrange} \\ \int_{t_0}^{t_f} \frac{T_y}{m} dt = 0 \end{cases}$$

Per semplicità analizziamo un caso in cui la massa è costante, nel quale m esce dall'integrale e

$$(Imp)_y = \int_{t_0}^{t_f} T_y dt$$

Si ottiene

$$\begin{cases} \int_{t_0}^{t_f} \left(\int_{t_0}^t T_y dt \right) dt = \text{crossrange} \cdot m \\ (Imp)_y = 0 \end{cases}$$

Sapendo che l'impulso totale è della spinta è nullo, si definisce una funzione di spinta $T_y(t)$ tale da avere integrale nullo.

Avendo un *crossrange* positivo, anche la velocità necessaria a coprirlo sarà positiva per l'intera traiettoria per annullarsi agli estremi. Si ipotizzano quindi alcune distribuzioni di spinta per capire quali sono i punti della traiettoria più convenienti per distribuire spinta sull'asse y.

Dato che la velocità è positiva per tutta la durata della traiettoria, si avrà un'accelerazione positiva per avere

$$V_y(t) = \frac{1}{m} \int_{t_0}^t T_y dt \geq 0$$

seguita da un'accelerazione negativa. Con la massa costante e le condizioni al contorno simmetriche agli estremi della traiettoria si può ipotizzare anche una distribuzione di spinta con una curva $T_y(t)$ simmetrica rispetto al tempo medio della traiettoria, cioè alla metà dell'intervallo di tempo necessario per compiere la manovra di *Soft-Landing*.

Dall'ipotesi di simmetria si procede ad analizzare il solo tratto di accelerazione lungo y e poi si trova il tratto di decelerazione specchiando la prima metà della componente Y della traiettoria.

$$\int_{t_0}^{\frac{t_f}{2}} V_y dt = \frac{\text{crossrange}}{2}$$

(114)

Nel tratto di accelerazione si dovrà percorrere per simmetria metà del *crossrange* totale, si può dimostrare che la velocità debba avere andamento monotono in questo tratto in quanto ridurre la velocità comporta un maggiore dispendio di spinta a parità di tempo $\frac{t_f}{2}$ e spazio $\frac{\text{crossrange}}{2}$.

A questo punto si definisce quanto una fornitura infinitesima di spinta dT_y al tempo $t \in \left[t_0; \frac{t_f}{2} \right]$ si ripercuote su un aumento dello spazio percorso $dR_y \left(\frac{t_f}{2} \right)$. dT_y produce un incremento infinitesimo di velocità dV_y

$$dV_y = \frac{dT_y \cdot dt}{m}$$

(115)

Si può integrare dV_y per trovare la variazione di spazio percorso $dR_y \left(\frac{t_f}{2} \right)$. Gli estremi di integrazione sono $\frac{t_f}{2}$ il finale e l'istante t iniziale, in quando è l'istante in cui compare dV_y

$$dR_y \left(\frac{t_f}{2} \right) = \int_t^{\frac{t_f}{2}} dV_y dt = dV_y \int_t^{\frac{t_f}{2}} dt = dV_y \cdot \left(\frac{t_f}{2} - t \right) = \frac{dT_y \cdot dt}{m} \cdot \left(\frac{t_f}{2} - t \right)$$

(116)

Riarrangiando l'equazione si ottiene

$$\frac{dR_y}{dT_y} \left(\frac{t_f}{2} \right) = \frac{dt}{m} \cdot \left(\frac{t_f}{2} - t \right)$$

(117)

All'aumentare del tempo t al quale viene fornita la spinta, l'effetto sulla variazione dello spazio percorso cala fino ad essere nullo quando si raggiunge $t = \frac{t_f}{2}$.

Simmetricamente si avrà il comportamento specchiato per $t \in \left[\frac{t_f}{2}; t_f\right]$

Dato che viene fornita una spinta negativa, si avrà che

$$dV_y = -\frac{dT_y \cdot dt}{m} \quad (118)$$

$$dR_y(t_f) = \int_{\frac{t_f}{2}}^t dV_y dt = (dV_y) \left(-\int_t^{\frac{t_f}{2}} dt \right) = \left(-\frac{dT_y \cdot dt}{m} \right) \left(-\left(\frac{t_f}{2} - t\right) \right) = \frac{dT_y \cdot dt}{m} \cdot \left(\frac{t_f}{2} - t\right) \quad (119)$$

Ci si riconduce quindi al caso per $t \in \left[t_0; \frac{t_f}{2}\right]$. Si può quindi concludere che la funzione di guadagno di spazio percorso rispetto alla spinta fornita al tempo t è

$$\frac{dR_y(t_f)}{dT_y} = \frac{dt}{m} \cdot \left(\frac{t_f}{2} - t\right) \quad \forall t \in \left[t_0; \frac{t_f}{2}\right] \quad (120)$$

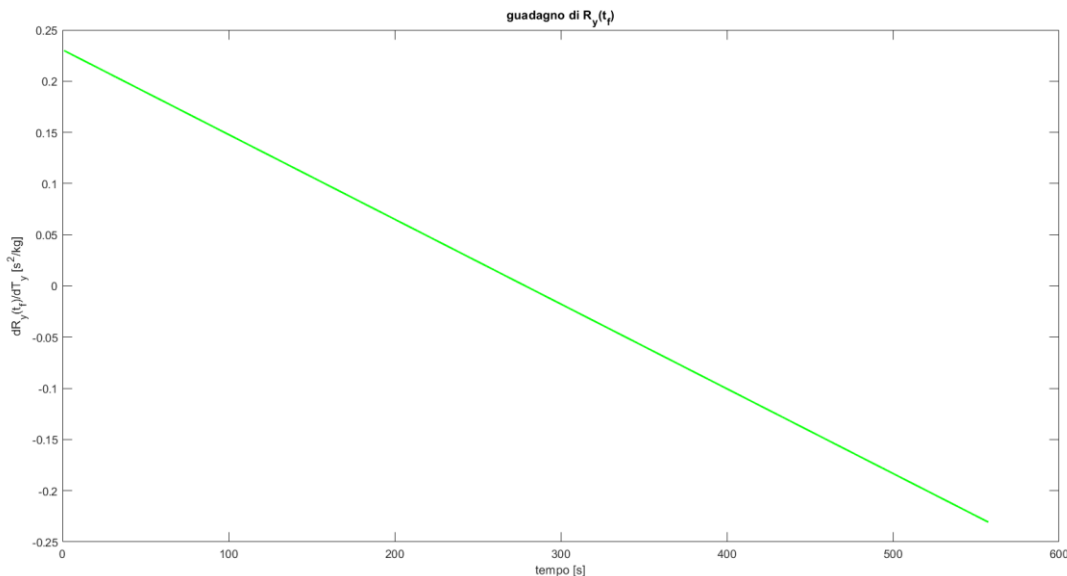


figura 12: Guadagno sullo spazio percorso lungo l'asse Y a fine traiettoria funzione dell'istante di applicazione della spinta lungo Y, caso con massa costante

Si considera ora il caso con massa variabile. Rende il guadagno asimmetrico rispetto a $\frac{t_f}{2}$. Il punto in cui $\frac{dR_y(t_f)}{dT_y}$ è nullo non sarà più $\frac{t_f}{2}$, ma un altro punto spostato oltre metà del tempo di volo.

Accelerare richiederà infatti un tempo maggiore rispetto a quello necessario a frenare e aumenta

la convenienza di accelerare e frenare più tardi rispetto al caso con massa costante. Come nel moto lungo X la variazione della massa tende a ritardare gli intervalli di tempo più convenienti per spingere lungo l'asse Y.

5.3.3 Traslazione lungo l'asse Z

Lungo l'asse Z si trova l'unica forza esterna, definita come un'accelerazione costante che aiuta la riduzione della quota. Allocare spinta all'asse Z non sarebbe necessario se non per controllare la velocità di discesa e portare all'annullamento di $V_z(t_f)$. Il modo in cui viene frenata la discesa lungo l'asse Z definisce il tempo di *touch down* del *lander* e quindi anche il tempo di volo e, considerando la spinta T massima e costante, il propellente utilizzato per la manovra

$$m_p = m(t_0) - m(t_f) = \frac{T}{c_1} t_f \quad (121)$$

Essendo questo valore da minimizzare, si vuole garantire il tempo minimo necessario per raggiungere gli obiettivi dei moti di traslazione sugli altri due assi.

Si può ottenere il tempo impiegato integrando le equazioni di stato di posizione e velocità

$$\begin{cases} \frac{dR_z}{dt} = V_y \\ \frac{dV_z}{dt} = \frac{T_y}{m} - g_L \end{cases} \quad (122)$$

e sostituendole dentro le condizioni al contorno finali

$$\begin{cases} R_y(t_f) = 0 \\ V_y(t_f) = 0 \end{cases} \quad (123)$$

Si ottengono le equazioni

$$\begin{cases} quota + \int_{t_0}^{t_f} \left(\int_{t_0}^t \frac{T_y}{m} dt \right) dt = \int_{t_0}^{t_f} \left(\int_{t_0}^t g_L dt \right) dt \\ \int_{t_0}^{t_f} \frac{T_z}{m} dt = \int_{t_0}^{t_f} g_L dt \end{cases} \quad (124)$$

Si possono integrare le accelerazioni esterne sull'intervallo di tempo $[t_0; t_f]$ per ottenere

$$\left\{ \begin{array}{l} quota + \int_{t_0}^{t_f} \left(\int_{t_0}^t \frac{T_y}{m} dt \right) dt = \frac{1}{2} g_L t_f^2 \\ \int_{t_0}^{t_f} \frac{T_z}{m} dt = g_L t_f \end{array} \right.$$

(125)

Nel caso di massa costante le equazioni si semplificano

$$\left\{ \begin{array}{l} quota + \frac{1}{m} \int_{t_0}^{t_f} \left(\int_{t_0}^t T_y dt \right) dt = \frac{1}{2} g_L t_f^2 \\ (Imp)_z = m \cdot g_L t_f \end{array} \right.$$

(126)

L'impulso della spinta lungo l'asse Z, $(Imp)_z$, risulta proporzionale al tempo di volo t_f .

Questo significa che in caso di spinta T_z solo positiva, quindi con azione unicamente frenante della velocità di discesa, fornire spinta significa aumentare il tempo di volo. Si ricordi però la condizione al contorno che richiede di giungere a $R_y(t_f) = 0$ con velocità verticale nulla, quindi l'azione della spinta è unicamente di controllo degli effetti dell'accelerazione di gravità e azzeramento della velocità. Risulta vantaggioso coprire rapidamente la quota che separa dal suolo per ridurre l'impulso lungo Z, la distribuzione ottimale di spinta in questo caso è quella definita come *suicide burn*. Questo tipo di distribuzione di spinta è caratterizzato dalla fornitura della massima spinta nell'intervallo di tempo strettamente necessario a ridurre a zero la velocità nel momento dell'atterraggio. La spinta da fornire per massa costante si può calcolare facilmente eguagliando l'aumento di velocità fornito dalla sola accelerazione di gravità nella prima parte della traiettoria alla riduzione di velocità fornita dalla differenza tra la spinta massima e l'accelerazione di gravità durante il *suicide burn*. L'equazione della distanza uguaglia la quota alla somma degli integrali delle velocità nei due parti di traiettoria. Si introduce l'istante di partenza del *suicide burn* t_{sb} .

$$\left\{ \begin{array}{l} quota = \frac{1}{2} g_L t_{sb}^2 + \frac{1}{2} \left(g_L (t_f^2 - t_{sb}^2) - \frac{T}{m} (t_f - t_{sb})^2 \right) \\ g_L t_{sb} = (T - g_L) (t_f - t_{sb}) \end{array} \right.$$

(127)

Si può da qui trovare l'istante di inizio del *suicide burn* t_{sb} e il tempo di volo t_f .

$$\left\{ \begin{array}{l} t_{sb} = \sqrt{\frac{2 \cdot quota \cdot \left(\frac{T}{m} - g_L\right)}{\frac{T}{m} g_L}} \\ t_f = \sqrt{\frac{2 \cdot quota \cdot \frac{T}{m}}{\left(\frac{T}{m} - g_L\right) g_L}} \end{array} \right.$$

(128)

Sostituendo i valori si trovano

$$\left\{ \begin{array}{l} t_{sb} = 97.25 \text{ s} \\ t_f = 190.42 \text{ s} \end{array} \right.$$

(129)

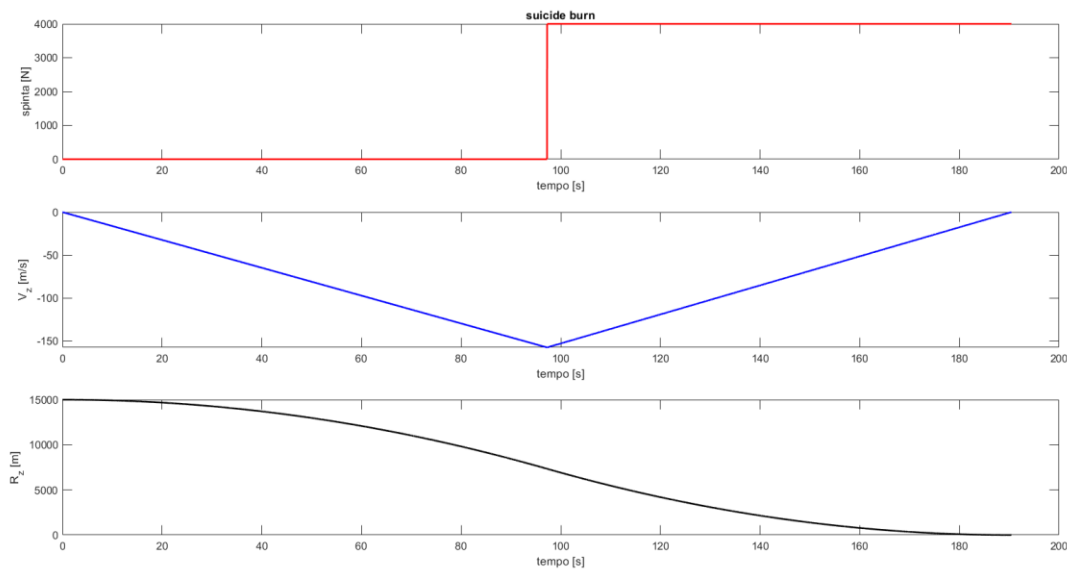


figura 13: Tipico profilo di spinta, velocità verticale e quota per il suicide burn

In particolare, questo valore di t_f è il minimo valore ottenibile considerando le sole condizioni assegnate lungo l'asse Z.

Nel problema accoppiato il tempo di volo necessario al raggiungimento degli obiettivi sugli altri due assi è superiore a questo tempo minimo, inoltre si noti come in tutti i moti sui tre assi (considerando *suicide burn* sull'asse Z) la distribuzione di spinta nella parte finale della traiettoria ha più valore e quindi non è assicurato che tutta la spinta T sia disponibile per il moto sull'asse Z a fine della traiettoria. Per queste due ragioni: tempo necessario agli altri moti e necessità di distribuire la spinta sui tre assi, il tempo della manovra sarà superiore al tempo minimo. L'obiettivo del moto lungo Z dovrebbe quindi essere quello di guadagnare il tempo necessario agli altri moti utilizzando la spinta in modo ottimale, cioè con il massimo risultato per unità di spinta. Si

cerca quindi, per massa costante, qual è il guadagno di tempo infinitesimo dt_f da una spinta infinitesima dT_z fornita al tempo t .

Immaginiamo un moto lungo l'asse Z perturbato dalla sola accelerazione di gravità g_L e per semplicità consideriamo la sola legge oraria

$$quota = \frac{1}{2} g_L t_f^2 \quad (130)$$

Si aggiunge una spinta dT_z all'istante t , che porta a una variazione di velocità dV_z all'istante $t' > t$

$$dV_z = \frac{dT_z}{m} (t' - t) \quad (131)$$

Integrando la variazione di velocità si trova dt_f

$$dt_f = \int_t^{t_f} \frac{dT_z}{m} (t' - t) dt = \frac{dT_z}{m} \cdot \frac{1}{2} (t_f - t)^2 \quad (132)$$

Si ha quindi un guadagno di tempo rispetto alla spinta fornita

$$\frac{dt_f}{dT_z} = \frac{(t_f - t)^2}{2m} \quad (133)$$

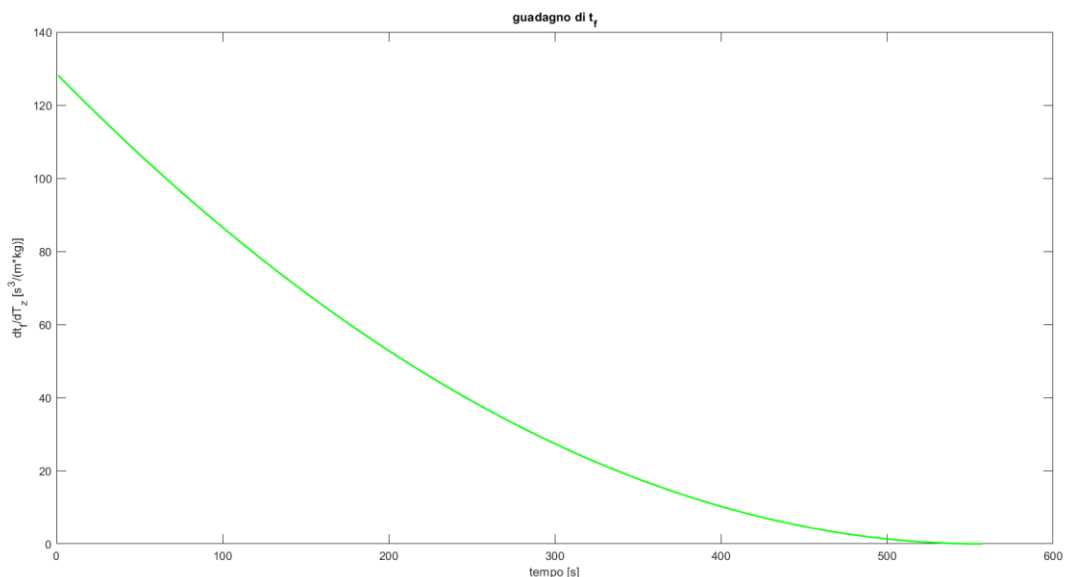


figura 14: Guadagno di tempo di volo in funzione dell'istante di applicazione di una spinta lungo l'asse Z, nel caso di massa costante

Si noti come a differenza degli altri guadagni questo ha una formula che contiene lo stesso t_f che si cerca di modificare, per questo motivo il guadagno è valutabile solo localmente, rispetto a una distribuzione di $T_z(t)$ simile. Il guadagno aumenta se la spinta è fornita prima e per questa ragione si può aumentare il tempo di volo nel modo più conveniente fornendo una spinta all'inizio della traiettoria.

A quest'ultimo ragionamento va aggiunto che la distribuzione $T_z(t)$ deve permettere il raggiungimento di $V_z(t_f) = 0$ e dovrà essere necessariamente presente anche nell'ultima fase di traiettoria per rallentare V_y e contrastare g_L .

Se si considera la variazione di massa, questa, come per i moti sugli altri due assi, porta a ritardare la convenienza nella fornitura di spinta per aumentare il tempo di volo. Si vedrà nei problemi numerici come questa tendenza non è particolarmente forte lungo l'asse Z e si abbia comunque due picchi di spinta lungo Z nelle prime e ultime fasi della traiettoria.

5.4 Ottimizzazione del moto tridimensionale

I criteri di guadagno che si sono visti nella scomposizione del moto sui tre assi rappresentano un guadagno isolato, cioè per un moto uniassiale, e sono quindi da tenere in considerazione per definire le tendenze generali di distribuzione della spinta. Questi guadagni vanno considerati tenendo conto dell'accoppiamento del moto sui tre assi.

Lungo l'asse X si è visto come spingere a fine traiettoria sia conveniente, ma è conveniente anche distribuire la spinta lungo l'asse Y agli estremi della traiettoria. Per questa ragione rimane ottima la distribuzione di T_y all'inizio della manovra di *Soft-landing* per accelerare lungo Y, ma si potrebbe pensare di anticipare la distribuzione di spinta necessaria alla decelerazione lungo Y in modo da ridurre l'impatto sulla performance lungo l'asse X o viceversa.

Lungo l'asse Z è conveniente spingere all'inizio e alla fine, ma così anche sull'asse Y, per tale ragione all'aumentare del *crossrange* la distribuzione T_z iniziale si sposterà verso il centro della traiettoria e diventerà sempre meno efficace. Per questo richiederà un impulso $(Imp)_z$ superiore.

La condizione lungo X è quella che richiede complessivamente un impulso $(Imp)_x$ maggiore, ma è anche il guadagno che meno dipende dall'istante in cui viene data la spinta, per questa ragione risulta assorbire in negativo i cambiamenti sugli altri due assi in funzione della variazione del *crossrange*.

Nel problema 1, dove è presente solo dinamica di traslazione, saranno ben visibili questi comportamenti perché ancora indipendenti dalla dinamica di rotazione.

6

SOLUZIONE AL PROBLEMA DI OTTIMIZZAZIONE

6.1 Introduzione

In questo capitolo si descrive il problema specifico della tesi e la sua implementazione. Si considerano le caratteristiche dell'algoritmo risolutivo e viene spiegato il modello fisico del problema. In questa parte si farà uso di riferimenti ai compendi del *capitolo 3*, al *capitolo 4* e all'analisi del moto tridimensionale nel *capitolo 5*.

L'obiettivo del problema di ottimizzazione è trovare la migliore sequenza di controlli per massimizzare la massa finale del *lander*.

6.2 Assunzioni

Qui di seguito si raggruppano le assunzioni e semplificazioni svolte per l'implementazione del problema di ottimizzazione con dinamica rotazionale e deviazione laterale.

1. Problema dei due corpi ristretto

Ci si pone nel problema dei due corpi ristretto nel quale il corpo principale è la Luna e il corpo secondario è il *lander*, la massa del *lander* è infatti trascurabile rispetto a quella della Luna.

2. Modulo costante dell'accelerazione di gravità lunare

Ad un'altitudine di 15 *km*, come si è visto nel *paragrafo 3.1.4*, la semplificazione del sistema di riferimento utilizzato per la manovra di allunaggio genera errori trascurabili. Si considera quindi l'accelerazione di gravità uguale a quella sulla superficie lunare in tutti i punti della traiettoria. Non vi sono coppie di nessun tipo legate a gradiente gravitazionale.

3. La curvatura della superficie lunare è trascurabile

Come si è visto *paragrafo 3.1.4*, l'errore nel trascurare la curvatura della Luna è inferiore all'errore legato alla seconda assunzione. Tale assunzione permette di considerare costante anche la direzione del campo gravitazionale, che risulta essere ortogonale alla superficie della Luna.

4. Si utilizza un sistema di riferimento inerziale centrato su un punto che giace sul piano della superficie lunare e sulla retta $(R_x, R_y = 0, R_z = 0)$.

Se la Luna rappresenta un sistema di riferimento inerziale, allora la sua rotazione, rivoluzione e tutte le forze apparenti derivanti da rotazione e vibrazione del corpo celeste vengono trascurate.

5. Si trascurano le forze interne ed esterne generate sul corpo secondario ad eccezione di forza di gravità e spinta del propulsore principale

Sul lander non si considerano forze di campo o di superficie diverse dalla forza gravitazionale e dalla spinta del propulsore principale. I propulsori del sistema di controllo d'assetto sono considerati in grado di generare solamente delle coppie. Non vi sono forze interne generate da perdite o movimento di propellente e non vi sono forze perturbative esterne quali resistenza aerodinamica dell'atmosfera rarefatta, campo magnetico, effetti della non perfetta sfericità della Luna, spinta fotonica sul *lander* e campo magnetico.

6. Si trascurano tutte le coppie perturbative interne ed esterne che agiscono sul *lander*, ad eccezione della coppia generata dal sistema di controllo d'assetto.

Si trascurano gli effetti di resistenza atmosferica e irraggiamento differenziale oltre che di coppia legata alla spinta della luce solare. Si trascurano coppie perturbative interne legate alla movimentazione di parti, alle vibrazioni, allo *sloshing* del propellente nei serbatoi

7. Si considera il *lander* come un veicolo a simmetria cilindrica intorno al suo asse di spinta. L'asse di spinta giace sull'asse di simmetria del cilindro

La simmetria cilindrica ha un'asse centrale che coincide con l'asse di spinta. Questo rende irrilevante la rotazione intorno all'asse di spinta. L'ipotesi afferma anche che se l'asse di spinta è costantemente coincidente con l'asse di simmetria allora il propulsore principale non è orientabile. La simmetria cilindrica garantisce uguali momenti di inerzia per le rotazioni di beccheggio e imbardata.

8. Si considerano angoli di assetto riferiti ad assi inerziali

Come si è visto nel *paragrafo 3.3.2*, si esegue una semplificazione della dinamica rotazionale per l'asse di imbardata, trascurando l'accoppiamento tra l'imbardata. Si tratta di una delle approssimazioni che generano maggior errore sulla soluzione del problema di ottimizzazione, ma permette di approcciarsi al moto sul piano laterale in modo inizialmente indipendente dal moto sugli altri due assi. Con questa approssimazione il momento di inerzia di beccheggio e imbardata viene considerato sugli assi inerziali come se questi ospitassero rotazioni indipendenti e uniche intorno all'asse considerato.

9. Si trascura la variazione del momento di inerzia in seguito alla riduzione della massa del *lander*

Questo rende il momento di inerzia e la dinamica rotazionale indipendente dalla massa variabile e quindi dal tempo di volo. Grazie all'ultima assunzione e alla precedente, una coppia applicata a uno dei due assi di beccheggio o di imbardata ha la stessa efficacia indipendentemente dall'assetto presente, dall'asse scelto e dall'istante in cui viene applicata la coppia.

10. Si trascura il consumo di propellente dovuto al sistema di controllo di assetto

Come calcolato nel *paragrafo 4.2*, il consumo del sistema di controllo di assetto, anche in caso di uso continuativo di coppia massima, è il 3.42% del consumo generato dal propulsore principale con accensione continuativa a spinta massima. Nella pratica il problema vedrà una spinta di modulo massimo e costante per l'intera manovra di *soft-landing*, mentre le coppie applicate saranno basse o nulle per la maggior parte del tempo di volo e verranno impiegate a intensità massima solo in brevi periodi. Questo rende la riduzione di massa dovuta al sistema RCS completamente trascurabile e l'errore generato è notevolmente inferiore a quello causato dall'utilizzare un momento di inerzia costante nel tempo.

11. I valori di spinta del propulsore principale e di coppia applicata per il beccheggio e l'imbardata sono limitati inferiormente e superiormente.

Come mostrato nel *paragrafo 4.2*, si considera una spinta con un controllo di tipo on/off che può essere massima o nulla, con $T_{min} = 0 N$, $T_{max} = 4000 N$

$$T_{min} \leq T \leq T_{max}$$

(134)

Le coppie di beccheggio e imbardata M_θ e M_α hanno le stesse limitazioni, dettate dalla spinta massima dei propulsori del sistema di controllo di assetto. La coppia minima è quindi uguale in modulo alla coppia massima: $M_{min} = -M_{max}$, con $M_{max} = 133 N \cdot m$

6.3 Sistema di riferimento utilizzato

Il sistema di riferimento implementato nel problema di ottimizzazione è descritto nel *paragrafo 5.1*. Il *downrange* è una quantità variabile in funzione della distanza necessaria alla decelerazione della velocità dell'orbita di discesa, come mostrato nello studio del moto lungo l'asse X che si compie nel *paragrafo 5.3.1*. In seguito all'unione dei moti di traslazione sui tre assi, l'ottimizzazione della distribuzione della spinta risulta un problema che accoppia il moto di traslazione sui tre assi e genera una variazione del *downrange* necessario al variare del *crossrange* definito come condizione al contorno. Se si definisse come origine degli assi il sito di atterraggio per il caso con *crossrange* nullo e si definissero le condizioni al contorno per qualsiasi variazione di *crossrange*, a parità di *downrange* fissato rispetto all'origine degli assi, si avrebbe un sito di atterraggio progressivamente più lontano dall'origine al crescere del *crossrange*. Riassumendo si può scegliere di fissare il punto di atterraggio come origine degli assi per ogni possibile *crossrange*, ma si avranno condizioni al contorno iniziali con un *downrange* differente per ogni variazione di *crossrange*, oppure si può scegliere di fissare un *downrange* arbitrario e definire una condizione di partenza comune sull'asse X per tutte le variazioni di *downrange*. La scelta è ricaduta sul secondo caso, al fine di avere condizioni di partenza lungo l'asse X uguali per ogni condizione imposta di *crossrange*. Si può quindi affermare che il sito di atterraggio giace sempre sull'asse X del sistema di riferimento utilizzato, ma che non necessariamente coincide con l'origine degli assi.

Definito il sistema di riferimento corpo del *lander* come una terna destrorsa con origine nel centro di massa del *lander*, asse X_B coincidente con l'asse di spinta e l'asse di simmetria cilindrica e assi Y_B e Z_B ortogonali al primo asse. L'asse Y_B è tale da appartenere sempre al piano orizzontale.

L'asse di spinta del *lander* viene orientato all'interno del sistema di riferimento inerziale attraverso gli angoli θ per il beccheggio e α per l'imbardata. Si identifica l'orientamento dell'asse X_B rispetto all'asse X inerziale con una rotazione α rispetto all'asse Z inerziale, quindi sul piano orizzontale, e una successiva rotazione θ intorno all'asse Y_B . La rotazione avviene sul piano longitudinale corpo che risulta perpendicolare al piano orizzontale ed è identificato dagli assi X_B e Z_B .

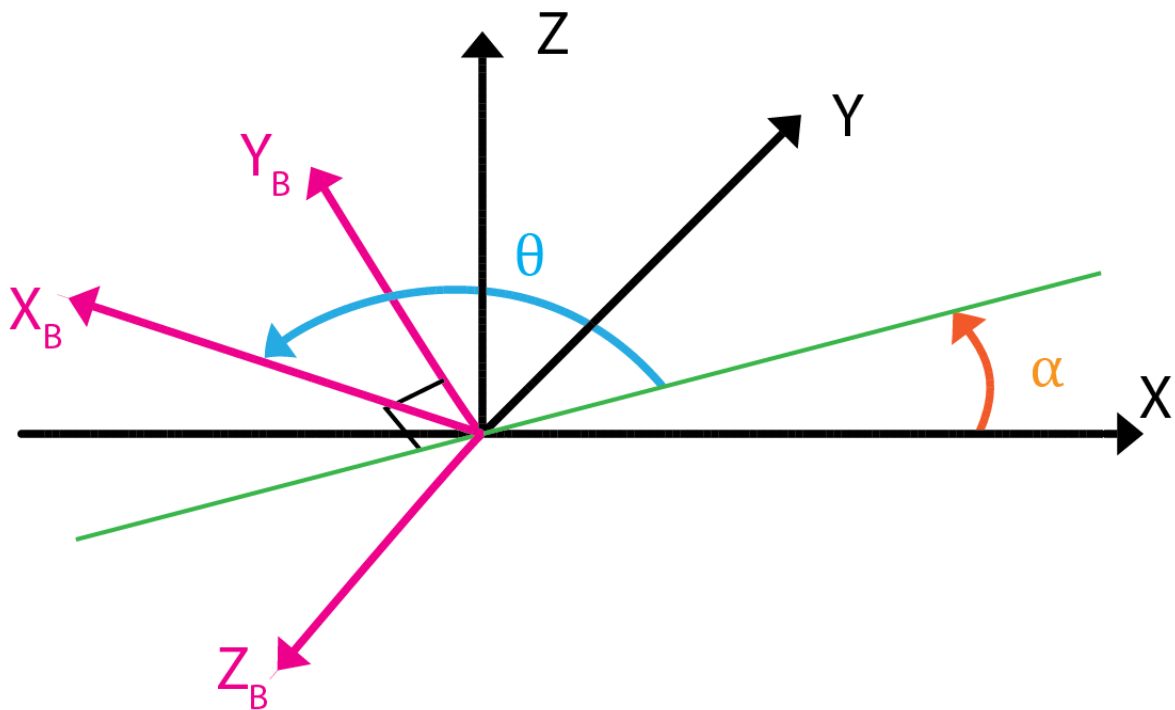


figura 15: Rotazione del sistema corpo (B - in magenta) rispetto al sistema di riferimento inerziale (in nero)

I domini degli angoli di rotazione sono

$$\theta \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi \right] \quad \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$$

(135)

Il dominio di α è limitato dalla modalità in cui sono stati definiti gli angoli, mentre l'angolo θ , che potrebbe ruotare da angolo nullo fino all'angolo semigiro è limitato dalla volontà di non avere un'accelerazione lungo l'asse X, ma solo una decelerazione della velocità iniziale $V_x(t_0)$, si desidera un andamento monotono di V_x .

Si possono definire le tre componenti della spinta in assi inerziali come

$$T_x = T \cos \theta \cos \alpha \quad (136)$$

$$T_y = T \sin \alpha \quad (137)$$

$$T_z = T \sin \theta \cos \alpha \quad (138)$$

6.4 Angoli ottimali

Considerato il problema di dinamica di traslazione descritto nel *capitolo 5* si cerca una traccia di θ e α ottimi che si avrebbero nel caso di coppie M_θ e M_α non limitate dalla spinta dei propulsori di assetto e senza condizioni al contorno sugli angoli iniziali e finali.

Gli angoli ottimi rappresentano l'accoppiamento tra le traslazioni sui tre assi cartesiani del sistema inerziale dovuto all'ottimizzazione della distribuzione di spinta per massimizzare la massa finale del *lander*. Trovare gli angoli ottimi è utile come traccia per confrontare la soluzione al problema con controlli vincolati alla soluzione con distribuzione ottima di spinta.

Gli angoli di assetto derivano dalle distribuzioni ottime di spinta al fine di avere velocità ottime.

$$\left(\frac{dV_x}{dt}\right) = \frac{T}{m} \cdot \cos \theta_{ott} \cos \alpha_{ott} = \frac{T_x}{m} = \frac{T}{m} \cdot \frac{\lambda_{V_x}}{\lambda_V} \quad (139)$$

$$\left(\frac{dV_y}{dt}\right) = \frac{T}{m} \cdot \sin \alpha_{ott} = \frac{T_y}{m} = \frac{T}{m} \cdot \frac{\lambda_{V_y}}{\lambda_V} \quad (140)$$

$$\left(\frac{dV_z}{dt}\right) = \frac{T}{m} \cdot \sin \theta_{ott} \cos \alpha_{ott} = \frac{T_z}{m} = \frac{T}{m} \cdot \frac{\lambda_{V_z}}{\lambda_V} \quad (141)$$

con $\lambda_V = \sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2}$

Da queste equazioni si ricavano gli angoli, tenendo in considerazione i loro domini espressi in (135).

$$\theta = \pi - \arcsin\left(\frac{a_z^2}{\sqrt{a_x^2 + a_z^2}}\right) = \pi - \arcsin\left(\frac{\lambda_{V_z}}{\sqrt{\lambda_{V_x}^2 + \lambda_{V_z}^2}}\right)$$

(142)

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}\right) = \arcsin\left(\frac{\lambda_{V_y}}{\lambda_V}\right)$$

(143)

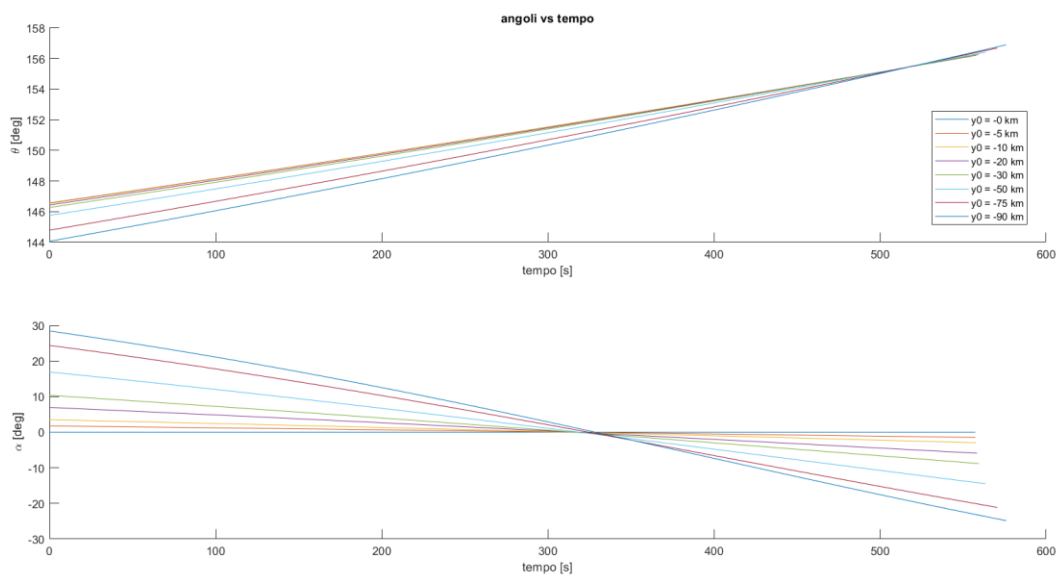


figura 16: Curve ottime degli angoli di assetto nel caso di sola dinamica di traslazione sui tre assi

Nell'analisi del moto di traslazione con dinamica rotazionale libera effettuata nel capitolo 5 sono gli angoli i controlli del sistema. Si possono definire i controlli ottimi (angoli ottimi) del sistema seguendo la teoria del controllo ottimale e utilizzando l'equazione (44) per trovare gli angoli da inserire nelle tre equazioni (139), (140) e (141).

6.5 Scelta dei controlli

Nella dinamica traslazionale il controllo è la spinta \vec{T} . La spinta può essere rappresentata attraverso le sue componenti cartesiane

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{pmatrix}$$

(144)

Oppure attraverso l'utilizzo di modulo e orientamento come nel *paragrafo 6.3*.

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} T \cos \theta \cos \alpha \\ T \sin \alpha \\ T \sin \theta \cos \alpha \end{pmatrix}$$

(145)

Il vettore dei controlli risulta in entrambe le scritture formato da tre componenti.

Si sceglie di descrivere la spinta con la seconda scrittura e si trova il vettore dei controlli nel caso di sola dinamica traslazionale

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} T \\ \theta \\ \alpha \end{pmatrix}$$

(146)

I vincoli della spinta sono già presenti nella dinamica traslazionale. Come suggerito dal *paragrafo 5.3.3*, conviene ridurre il tempo di volo per limitare le perdite, questo comporta la necessità di ridurre la velocità lungo l'asse X il più velocemente possibile, ragione per cui la spinta risulterà massima per tutta la traiettoria. Con questa considerazione viene bloccato il modulo della spinta, ma è ancora possibile applicare le equazioni dei controlli ottimali sugli angoli di rotazione fino a quando non si raggiungono i limiti di coppia applicabili per generare le rotazioni desiderate. La velocità di variazione degli angoli è definita dalla velocità angolare per ogni angolo e questa è a sua volta limitata nella sua variazione dalla coppia. La coppia può variare liberamente senza limitazioni sulla sua derivata prima, ma risulta limitata nel dominio.

Per esplicitare le limitazioni di coppia nei controlli è necessario ricondursi dai controlli di angolo ai controlli di coppia, transitando da un problema di sola traslazione definito dalla cinematica rotazionale a un problema controllato dal modulo della spinta e dalla dinamica di assetto del *lander*.

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} T \\ M_\theta \\ M_\alpha \end{pmatrix}$$

(147)

Con questa scelta del vettore \vec{u} , si esplicitano tutte le limitazioni sui controlli.

Nelle assunzioni si vede che le limitazioni dei controlli sono delle disequazioni. I termini di queste disequazioni si eguagliano solo in istanti specifici. Guardando all'andamento degli angoli ottimali si possono trovare gli intervalli nei quali i limiti di coppia non sarebbero soddisfatti e utilizzare questo sistema per restringere l'intervallo in cui le disequazioni diventano equazioni, cioè i limiti si attivano e il controllo considerato si sposta sul bordo del suo dominio.

6.6 Dinamica rotazionale di beccheggio

Si utilizzano i ragionamenti del *paragrafo 6.5* per trovare una legge di controllo che possa generare un angolo di beccheggio θ ottimo quando questo soddisfa i limiti di M_θ . La legge di controllo deve limitare M_θ uscendo dalla condizione ottima per il caso svincolato quando il limite di coppia viene raggiunto.

Nel caso di dinamica rotazionale svincolata, ma con condizione al contorno finale di *lander* in assetto verticale per permettere l'atterraggio, si nota una rapida variazione dell'assetto con un beccheggio che assomiglia alla fase di *Quick Adjusting* della missione Chang'e-3 descritta nel *paragrafo 4.1.6*. In quella fase il *lander* tende a raggiungere un orientamento della spinta più verticale per prepararsi alla decelerazione verticale finale prima dell'allunaggio. In questa fase i limiti di coppia non verrebbero rispettati, risulta necessario imporre dei tratti a coppia massima per permettere al beccheggio di raggiungere l'orientamento verticale del *lander*.

A livello implementativo la necessità di limitare la spinta in alcuni tratti della traiettoria si traduce nella suddivisione di questa in archi in cui il controllo è libero e può generare un angolo ottimo e archi in cui il controllo è vincolato e rimane costante e uguale al suo limite superiore o inferiore.

Dalle assunzioni sugli angoli e dall'ordine di applicazione di α e θ la dinamica sul piano longitudinale dipende da entrambi gli angoli. Immaginando nullo l'angolo α in corrispondenza del raggiungimento dei limiti di coppia M_θ si riconduce la dinamica sul piano longitudinale alla sola dipendenza dall'angolo di beccheggio θ .

Si definisce un arco con angolo ottimo simile alla fase di decelerazione primaria per la missione Chang'e-3 succeduto da due archi con M_θ ai limiti del dominio. I due archi di traiettoria a coppia limitata si differenziano per il limite del dominio su cui è fissata M_θ , si tratta di archi con coppia controrotante. Sono necessari due archi con coppia contro rotante allo scopo di ottenere un orientamento verticale del *lander*, in quanto, regolando la durata dei due archi, è possibile generare una variazione di velocità angolare che porta l'angolo a $\theta = \frac{\pi}{2}$ per un *lander* verticale e la velocità angolare ω_θ ad annullarsi nello stesso istante.

L'utilizzo della soluzione trovata al Problema di Fuller nel *paragrafo 3.5* permette di generare un arco singolare seguito da due archi a coppia massima in modulo e controrotante, attraverso l'utilizzo del *Bang-Bang Control*.

Si può riscrivere il Problema di Fuller sostituendo le variabili e le condizioni del problema di ottimizzazione. Il primo tratto della traiettoria è un arco singolare, le equazioni delle *adjoint variable* risulteranno nulle a causa della disposizione delle condizioni al contorno del problema.

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_\theta(t) = 0 \\ \dot{\lambda}_{\omega_\theta}(t) = 0 \end{cases}$$

(148)

Si introducono le condizioni al contorno sulle *adjoint variables* per l'arco singolare

$$\begin{cases} \lambda_\theta(t_0) = 0 \\ \lambda_{\omega_\theta}(t_0) = 0 \\ \lambda_\theta(t_1) = 0 \\ \lambda_{\omega_\theta}(t_1) = 0 \end{cases}$$

(149)

Le condizioni sulle variabili di stato si hanno solo alla fine della traiettoria

$$\begin{cases} \theta(T) = \frac{\pi}{2} \\ \omega_\theta(T) = 0 \end{cases}$$

(150)

Non è possibile imporre nullo il valore di θ alla fine dell'arco singolare, perché condizione al contorno interna derivante dall'arco singolare stesso.

Per garantire la possibilità di generare un numero finito di archi a coppia massima ed evitare il fenomeno di *Chattering* si introduce la discontinuità della variabile

$$\lambda_\theta(t_1^+) = \lambda_{\theta+} = free$$

(151)

Si sono definiti due archi a coppia massima controrotante, per questa ragione si avrà nel secondo arco una *switching function* λ_{ω_θ} di segno opposto rispetto ai valori del primo arco. Per passare da un limite all'altro seguendo il *Bang-Bang Control* la *switching function*, continua, deve annullarsi nel contorno intermedio tra i due archi. Definito come t_2 l'istante tra i due archi a coppia massima, allora

$$\lambda_{\omega_\theta}(t_2) = 0$$

(152)

6.7 Discesa verticale

Seguendo una pratica tipica presente nella missione di Chang'e-3, si desidera rendere più sicura la traiettoria di allunaggio garantendo un margine a una quota di 100 m dal suolo nel quale il *lander* discende con sola velocità verticale e con orientamento verticale pronto per l'atterraggio. Questa fase di volo è definita discesa verticale. Risulta possibile modellizzare l'intera fase di volo aggiungendo un quarto arco di traiettoria nel quale le variabili di assetto rimangono costanti così come il moto sugli assi orizzontali e la traiettoria si può riassumere in un moto decelerato uniassiale.

6.8 Dinamica rotazionale di imbardata

In modo analogo alla dinamica sul piano longitudinale, si può ricondurre la dinamica laterale all'angolo α .

Si mantiene l'assunzione fatta nel *paragrafo 6.6* per la quale l'angolo rimane costante e nullo durante gli archi di traiettoria che applicano *Bang-Bang Control*. Per questo motivo e dato che l'assetto è bloccato durante la discesa verticale, si possono considerare l'angolo e la velocità angolare variabili solamente durante l'arco singolare, mentre

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \omega_\alpha = 0 \end{cases} \quad \forall t \in [t_1; t_4]$$

(153)

Considerando il guadagno di $\frac{dR_y}{dT_y}$ per il moto lungo Y dal *paragrafo 5.3.2*, Ci si può ricondurre all'andamento dell'angolo ottimale nel *paragrafo 6.4*. Si noti come α può essere approssimato a lineare sull'arco singolare e sia quindi possibile generare un andamento di α semplificato.

, tale da poterlo caratterizzare con una funzione polinomiale.

Guardando all'andamento di $\alpha(t)$ si avrà un tratto principale lineare nel quale la variazione dell'angolo è molto vicina a quella ottimale.

$$\frac{d\alpha}{dt}(t) = \omega_l t \quad \text{per } t \in [t_{l1}; t_{l2}]$$

(154)

Dove $\omega_l = \text{costante}$ e t_{l1} e t_{l2} sono gli estremi del tratto lineare.

Gli estremi della curva per α ottimale sono i punti più lontani da $\alpha = 0$. Per soddisfare le condizioni al contorno su angolo e velocità angolare si devono aggiungere degli archi di traiettoria prima e dopo l'arco lineare, tali da generare gli estremi desiderati del tratto lineare: $\alpha(t_{l1})$ e $\alpha(t_{l2})$ e $\omega_\alpha(t_{l1}) = \omega_\alpha(t_{l2}) = \omega_l$. L'arco lineare e gli archi aggiuntivi devono essere contenuti nell'arco singolare $[t_0, t_1]$ come precedentemente imposto, quindi $t_{l1} > t_0$ e $t_{l2} < t_1$. Si vuole

ridurre il più possibile il discostamento dall'angolo ottimale, per questo si vuole minimizzare la durata degli archi prima e dopo l'arco lineare. Per raggiungere le condizioni dell'arco lineare il più rapidamente possibile è necessario impiegare coppia massima, ma dato che le condizioni in entrata all'arco lineare sono due, si avrà bisogno di due archi a coppia massima controrotante in modo da poter regolare α e ω_α . Il ragionamento è lo stesso dei due archi con coppia controrotante M_θ che si trovano al fondo dell'arco singolare per l'angolo θ . Per un *crossrange* positivo sarà necessario fornire coppia positiva per ruotare ad α positivi e successivamente una seconda coppia negativa per annullare la velocità angolare positiva e trasformarla in ω_l negativa. Se $\alpha(t_{l1}) > 0$, risulta noto che $\omega_l < 0$ in quanto si vuole avere un annullamento dell'angolo α all'interno dell'arco lineare. Al termine dell'arco lineare sarà necessaria una coppia positiva per invertire la velocità angolare e far crescere α fino alla condizione $\alpha(t_1) = 0$. Una seconda coppia controrotante permetterà di ridurre la velocità angolare positiva in modo da arrivare a t_1 con $\omega_\alpha(t_1) = 0$.

Si necessita quindi di scomporre l'arco singolare di θ in cinque archi più piccoli necessari a definire la curva $\alpha(t)$. Questi cinque archi si differenziano per il valore di coppia intorno all'asse Z, M_α . Gli istanti di inversione di coppia da positiva a negativa prima e dopo l'arco lineare vengono definiti come istanti di switch, da cui la lettera *s* che identifica i tempi di switch t_{s1} e t_{s2} tali che, se *crossrange* > 0 ,

$$t_0 < t_{s1} < t_{l1} < t_{l2} < t_{s2} < t_1 < t_2 < t_3 < t_4$$

(155)

Per la natura della curva i tempi t_{s1} , t_{l1} , t_{l2} , t_{s2} sono parametri dipendenti a due a due e possono essere calcolati a partire da altri due parametri: la velocità angolare $\omega_\alpha(t_{l1}) = \omega_l$ e il tempo di azzeramento dell'angolo α durante il tratto lineare t_{zero} .

$$\left\{ \begin{array}{l} t_{s1} = \frac{I\omega_l}{M} + \sqrt{\frac{I\omega_l}{M} \left(\frac{I\omega_l}{2M} - t_{zero} \right)} \\ t_{l1} = \frac{I\omega_l}{M} + 2 \sqrt{\frac{I\omega_l}{M} \left(\frac{I\omega_l}{2M} - t_{zero} \right)} \\ t_{l2} = t_1 - \frac{I\omega_l}{M} - 2 \sqrt{\frac{I\omega_l}{M} \left(\frac{I\omega_l}{2M} + t_{zero} - t_1 \right)} \\ t_{l2} = t_1 - \frac{I\omega_l}{M} - \sqrt{\frac{I\omega_l}{M} \left(\frac{I\omega_l}{2M} + t_{zero} - t_1 \right)} \end{array} \right.$$

(156)

Dove M rappresenta il modulo la massima coppia applicabile, cioè $M = M_{max}$.

A causa della variazione di massa si avrà che la distribuzione di spinta necessaria a ridurre la velocità lungo l'asse Y nella seconda parte della traiettoria sarà inferiore alla distribuzione necessaria ad accelerare nella stessa direzione. Per questa ragione la curva $\alpha(t)$ non sarà simmetrica rispetto all'asse tempo, ma avrà

$$t_{zero} > \frac{t_1}{2}$$

(157)

Si ottiene così la funzione a tratti che tiene conto della variazione di massa, delle condizioni al contorno e delle limitazioni di coppia intorno all'asse Z

$$M_\alpha = \begin{cases} M & \text{se } t_0 \leq t < t_{s1} \\ -M & \text{se } t_{s1} \leq t < t_{y1} \\ 0 & \text{se } t_{l1} \leq t < t_{l2} \\ M & \text{se } t_{l2} \leq t < t_{s2} \\ -M & \text{se } t_{s2} \leq t < t_1 \\ 0 & \text{se } t_1 \leq t \leq t_4 \end{cases}$$

(158)

Si può integrare analiticamente la funzione costante a tratti della coppia per ottenere quella della velocità angolare $\omega_\alpha(t)$.

$$\omega_\alpha = \begin{cases} \frac{M}{I} t & \text{se } t_0 \leq t < t_{s1} \\ \frac{M}{I} (2t_{s1} - t) & \text{se } t_{s1} \leq t < t_{y1} \\ \frac{M}{I} (2t_{s1} - t_{l1}) & \text{se } t_{l1} \leq t < t_{l2} \\ \frac{M}{I} (2t_{s1} - t_{l1} - t_{l2} + t) & \text{se } t_{l2} \leq t < t_{s2} \\ \frac{M}{I} (2t_{s1} - t_{l1} - t_{l2} + 2t_{s2} - t) & \text{se } t_{s2} \leq t < t_1 \\ 0 & \text{se } t_1 \leq t \leq t_4 \end{cases}$$

(159)

Si può integrare di nuovo analiticamente la funzione ottenuta per calcolare $\alpha(t)$.

$$\alpha = \begin{cases} \frac{M}{I} \cdot \frac{t^2}{2} & \text{se } t_0 \leq t < t_{s1} \\ -\frac{M}{I} \cdot \frac{t^2 - 4t_{s1}t + 2t_{s1}^2}{2} & \text{se } t_{s1} \leq t < t_{y1} \\ -\frac{M}{I} \cdot \frac{-t_{l1}^2 + 2t_{l1}t + 2t_{s1}^2 - 4t_{s1}t}{2} & \text{se } t_{l1} \leq t < t_{l2} \\ \frac{M}{I} \cdot \frac{(t - t_{l2})(t - 2t_{l1} - t_{l2} + 4t_{s1}) - (t_{l1}^2 + 2t_{l1}t_{l2} + 2t_{s1}^2 - 4t_{s1}t_{l2})}{2} & \text{se } t_{l2} \leq t < t_{s2} \\ -\frac{M}{I} \cdot \frac{t^2 + 2t_{l1}t + 2t_{l2}t - 4t_{s1}t - 4t_{s2}t - t_{l1}^2 - t_{l2}^2 + 2t_{s1}^2 + 2t_{s2}^2}{2} & \text{se } t_{s2} \leq t < t_1 \\ 0 & \text{se } t_1 \leq t \leq t_4 \end{cases}$$

(160)

figura 18 e figura 19 rappresentano le curve per una rotazione intorno a Z basata sui valori di *crossrange* e t_1 relativi al caso $R_y(t_0) = -50 \text{ km}$ del problema precedente. La procedura di

calcolo è effettuata iterando con due cicli annidati i valori di ω_l e t_{zero} , che vengono aggiornati utilizzando queste espressioni

$$t_{zero} - (t_{zero})^k = - \left(\frac{dV_y(t_1)}{dt_{zero}} \right)^{-1} \cdot \left(V_y(t_1) - (V_y(t_1))^k \right) \quad (161)$$

$$\omega_\alpha(t_{l1}) - (\omega_\alpha(t_{l1}))^k = - \left(\frac{dR(t_1)}{d\omega_\alpha(t_{l1})} \right)^{-1} \cdot \left(R_y(t_1) - (R_y(t_1))^k \right) \quad (162)$$

Con k indicatore dell'iterata corrente.

Il calcolo può essere riassunto con lo schema in figura 17

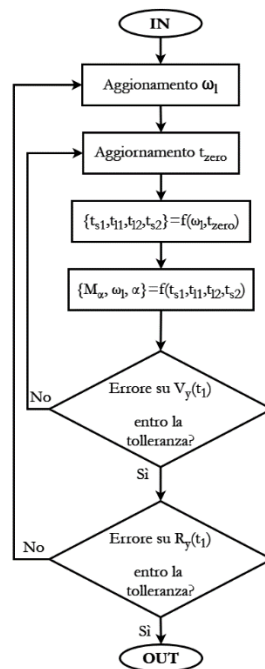


figura 17: Processo di calcolo della rotazione intorno all'asse di imbardata tale da garantire il soddisfacimento delle condizioni al contorno sulla dinamica di traslazione lungo l'asse Y e la dinamica di imbardata

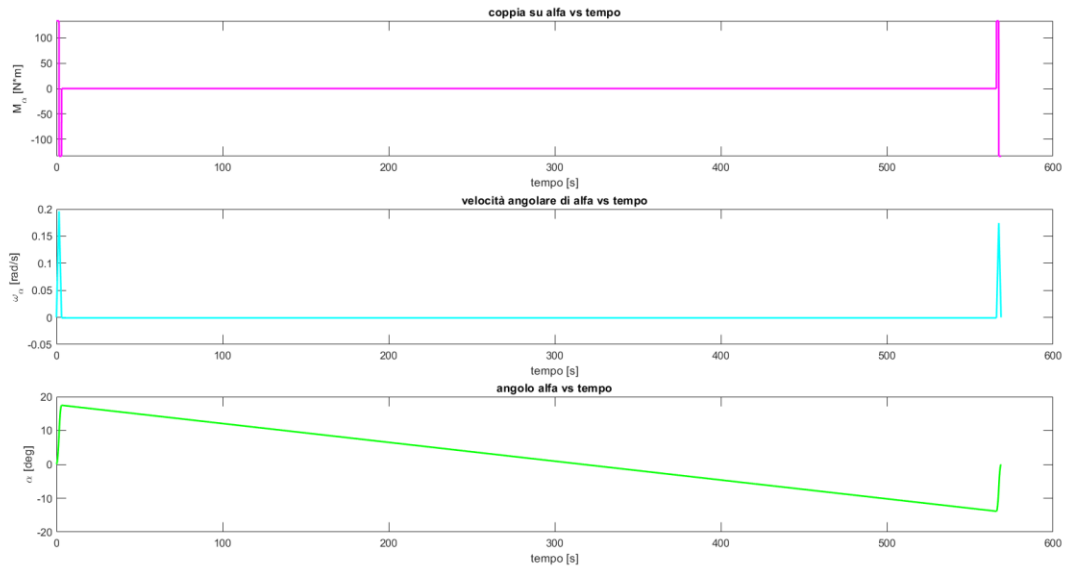


figura 18: Dinamica di imbardata con curva polinomiale per l'angolo di assetto e coppia costante a tratti

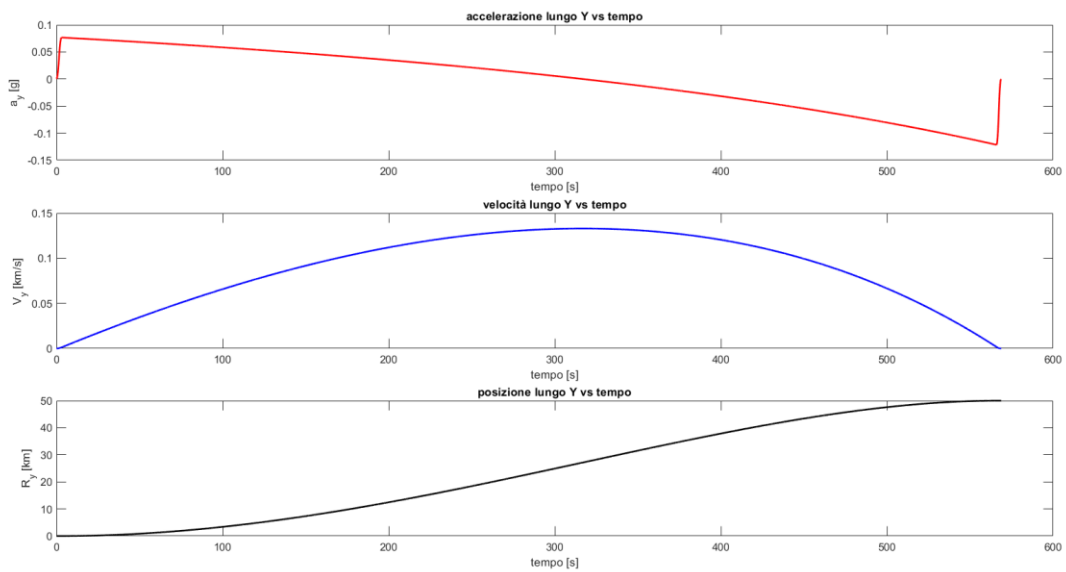


figura 19: Traslazione lungo l'asse Y per un orientamento della spinta con una funzione polinomiale come angolo di assetto nel tempo e un modulo di spinta costante

Per rendere più visibile i raccordi del grafico superiore viene mostrato un dettaglio dei primi due archi di traiettoria per i valori di coppia, velocità angolare e angolo.

Si noti che passando dalla prima approssimazione a tre archi all'approssimazione della curva $\alpha(t)$ con cinque archi, α diventa quadratico negli archi con coppia M_α applicata, mentre è imposto lineare nell'arco centrale con $M_\alpha = 0$.

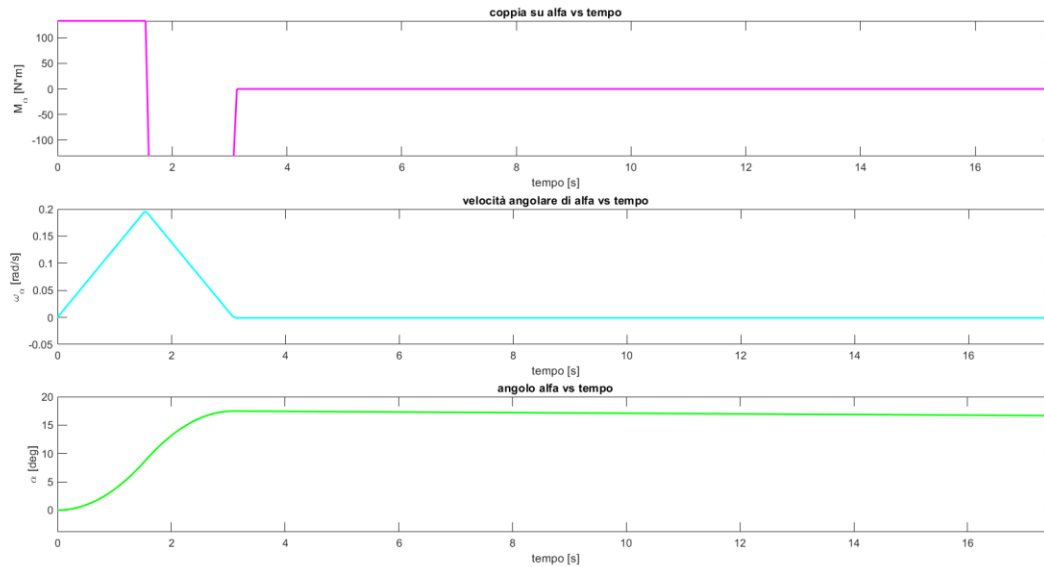


figura 20: Ingrandimento della sezione iniziale sull'asse tempo per la dinamica di imbardata

Per l'implementazione del problema t_{zero} viene descritto con parametri identificabili in uno degli estremi interni o esterni della traiettoria, in questo caso nell'estremo interno all'istante $t = t_{l1}$

$$\alpha(t_{l1}) = -\omega_{\alpha}(t_{l1}) \cdot (t_{zero} - t_{l1})$$

(163)

Per l'implementazione del problema risulta necessario semplificare le condizioni al contorno per la struttura di α , elevando al quadrato le definizioni dei tempi in modo da escludere le radici quadrate che hanno dominio limitato. Ci si riconduce dagli istanti di transizione tra due fasi di manovra alla durata di ogni fase di manovra. Il trattamento di intervalli invece che di istanti temporali impedisce lo scambio dell'ordine delle manovre e facilita la convergenza del calcolo iterativo.

$$YP(1) = t_{s1} - t_0$$

(164)

$$YP(2) = t_{l1} - t_{s1}$$

(165)

$$YP(3) = t_{l1} - t_{l2}$$

(166)

$$YP(4) = t_{s2} - t_{l2}$$

(167)

$$YP(5) = t_1 - t_{s2}$$

(168)

Le equazioni dei tempi sono riformulate e semplificate

$$\begin{cases} \frac{I\omega_\alpha(t_{l1})}{M_{max}} - YP(1) + YP(2) = 0 \\ \frac{I\omega_\alpha(t_{l1})}{M_{max}} \left(\frac{I\omega_\alpha(t_{l1})}{2M_{max}} + \frac{\alpha(t_{l1})}{\omega_\alpha(t_{l1})} - YP(1) - YP(2) \right) - (YP(2))^2 = 0 \\ \frac{I\omega_\alpha(t_{l1})}{M_{max}} \left(\frac{I\omega_\alpha(t_{l1})}{2M_{max}} - \frac{\alpha(t_{l1})}{\omega_\alpha(t_{l1})} - YP(3) - YP(4) - YP(5) \right) - (YP(4))^2 = 0 \\ \frac{I\omega_\alpha(t_{l1})}{M_{max}} + YP(4) - YP(5) = 0 \end{cases}$$

(169)

6.9 Archi di traiettoria

Gli archi di traiettoria sono in tutto otto e permettono la separazione tra gli archi a coppia massima dei due angoli.

Tabella 4: Archi di traiettoria del problema di ottimizzazione

Nome arco	Estremi temporali		Valore controlli		
	iniziale	finale	T	M_θ	M_α
Primo arco quadratico	t_0	t_{s1}	T_{max}	$2\omega_\theta I \cdot \frac{\lambda_{R_x} \cos \theta + \lambda_{R_z} \sin \theta}{\lambda_{V_x} \cos \theta + \lambda_{V_z} \sin \theta}$	M_{max}
Secondo arco quadratico	t_{s1}	t_{l1}	T_{max}	$2\omega_\theta I \cdot \frac{\lambda_{R_x} \cos \theta + \lambda_{R_z} \sin \theta}{\lambda_{V_x} \cos \theta + \lambda_{V_z} \sin \theta}$	$-M_{max}$
Arco lineare	t_{l1}	t_{l2}	T_{max}	$2\omega_\theta I \cdot \frac{\lambda_{R_x} \cos \theta + \lambda_{R_z} \sin \theta}{\lambda_{V_x} \cos \theta + \lambda_{V_z} \sin \theta}$	0
Terzo arco quadratico	t_{l2}	t_{s2}	T_{max}	$2\omega_\theta I \cdot \frac{\lambda_{R_x} \cos \theta + \lambda_{R_z} \sin \theta}{\lambda_{V_x} \cos \theta + \lambda_{V_z} \sin \theta}$	M_{max}
Quarto arco quadratico	t_{s2}	t_1	T_{max}	$2\omega_\theta I \cdot \frac{\lambda_{R_x} \cos \theta + \lambda_{R_z} \sin \theta}{\lambda_{V_x} \cos \theta + \lambda_{V_z} \sin \theta}$	$-M_{max}$
Coppia minima su θ	t_1	t_2	T_{max}	$-M_{max}$	0
Coppia massima su θ	t_2	t_3	T_{max}	M_{max}	0
Discesa verticale	t_3	t_4	T_{max}	0	0

6.10 Variabili

L'analisi del problema ha descritto i moti traslazionali concentrandosi inizialmente su posizioni e velocità

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix}, \quad \vec{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$$

(170)

Considerando l'accoppiamento tra i moti di traslazione dovuto all'ottimizzazione della distribuzione di spinta sui tre assi si sono considerate le rotazioni di beccheggio e imbardata e le loro velocità angolari, definendo la dinamica rotazionale

$$\vec{\Theta} = \begin{pmatrix} 0 \\ \theta \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_\theta \\ \omega_\alpha \end{pmatrix}$$

(171)

Per la dinamica traslazionale e la dinamica rotazionale di beccheggio si è applicata la teoria del controllo ottimale generando un numero uguale di *adjoint variable* utili al problema di ottimizzazione.

La massa è la variabile da massimizzare a fine della traiettoria, per questo avrà anch'essa una *adjoint variable*.

Per la dinamica rotazionale di imbardata si è preferito un approccio semplificato approssimando l'angolo ottimale nel solo arco singolare dell'angolo θ . Tale approssimazione permette di definire un angolo α la cui curva è una funzione polinomiale di secondo grado a tratti. Risultando così definito, α è più simile a un controllo gestito da una serie di parametri che a una variabile di stato. Per questa ragione non dispone di una variabile aggiuntiva per l'ottimizzazione e non ne dispone neanche la sua velocità angolare.

Tabella 5: Variabili del problema di ottimizzazione

Variabili di stato		Adjoint variables	
Nome	Simbolo	Nome	Simbolo
Posizione lungo X	R_x	Adjoint variable posizione lungo X	λ_{R_x}
Posizione lungo Y	R_y	Adjoint variable posizione lungo Y	λ_{R_y}
Posizione lungo Z	R_z	Adjoint variable posizione lungo Z	λ_{R_z}
Velocità lungo X	V_x	Adjoint variable velocità lungo X	λ_{V_x}
Velocità lungo Y	V_y	Adjoint variable velocità lungo Y	λ_{V_y}
Velocità lungo Z	V_z	Adjoint variable velocità lungo Z	λ_{V_z}
Angolo teta	θ	Adjoint variable angolo teta	λ_θ
Velocità angolare di teta	ω_θ	Adjoint variable velocità angolare di teta	λ_{ω_θ}
Angolo alfa	α	Adjoint variable angolo alfa	λ_α
Velocità angolare di alfa	ω_α		
Massa	m		

6.11 Equazioni differenziali

Le equazioni differenziali del problema sono le equazioni di stato che descrivono l'evoluzione delle variabili di stato e le equazioni di Eulero-Lagrange che descrivono l'evoluzione delle *ajoint variables*.

La legge oraria è

$$\frac{dR_x}{dt} = V_x \quad (172)$$

$$\frac{dR_y}{dt} = V_y \quad (173)$$

$$\frac{dR_z}{dt} = V_z \quad (174)$$

La variazione di velocità si ricava dalla seconda legge di Newton considerando come forze presenti la spinta e l'accelerazione di gravità

$$\vec{g}_L = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g_L \end{pmatrix} \quad (175)$$

La variazione di velocità dipende dall'orientamento della spinta e quindi dagli angoli di assetto

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{T}{m} \cos \theta \cos \alpha \quad (176)$$

$$\frac{dV_y}{dt} = \frac{T}{m} \sin \alpha \quad (177)$$

$$\frac{dV_z}{dt} = \frac{T}{m} \sin \theta \cos \alpha - g_L \quad (178)$$

La dinamica rotazionale è definita dalle stesse equazioni di stato per i due assi, la variazione di angolo come velocità angolare

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_\theta \quad (179)$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega_\alpha \quad (180)$$

E la variazione di velocità angolare come applicazione della legge di variazione del momento della quantità di moto

$$\frac{d\omega_\theta}{dt} = \frac{M_\theta}{I} \quad (181)$$

$$\frac{d\omega_\alpha}{dt} = \frac{M_\alpha}{I} \quad (182)$$

La massa varia in modo lineare secondo la portata in massa di propellente utilizzato dal propulsore principale.

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{T}{c_1} \quad (183)$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange si derivano dall'Hamiltoniano

$$H = \lambda_{R_x} V_x + \lambda_{R_y} V_y + \lambda_{R_z} V_z + \frac{T}{m} \left(\lambda_{V_x} \cos \theta \cos \alpha + \lambda_{V_y} \sin \alpha \lambda_{V_z} \sin \theta \cos \alpha \right) - \lambda_{V_z} g_L + \lambda_\theta \omega_\theta \quad (184)$$

secondo l'equazione (43).

$$\frac{d\lambda_{R_x}}{dt} = 0 \quad (185)$$

$$\frac{d\lambda_{R_y}}{dt} = 0 \quad (186)$$

$$\frac{d\lambda_{R_z}}{dt} = 0 \quad (187)$$

$$\frac{d\lambda_{V_x}}{dt} = -\lambda_{R_x} \quad (188)$$

$$\frac{d\lambda_{V_y}}{dt} = -\lambda_{R_y} \quad (189)$$

$$\frac{d\lambda_{V_z}}{dt} = -\lambda_{R_z} \quad (190)$$

$$\frac{d\lambda_\theta}{dt} = \frac{T}{m} (\lambda_{V_x} \sin \theta - \lambda_{V_z} \cos \theta) \cos \alpha \quad (191)$$

$$\frac{d\lambda_{\omega_\theta}}{dt} = -\lambda_\theta \quad (192)$$

$$\frac{d\lambda_m}{dt} = \frac{T}{m^2} \left((\lambda_{V_x} \cos \theta + \lambda_{V_z} \sin \theta) \cos \alpha + \lambda_{V_y} \sin \alpha \right) \quad (193)$$

6.12 Condizioni al contorno

Le condizioni al contorno si dividono in condizioni assegnate, condizioni ottime e tutte le altre condizioni necessarie a definire i parametri del problema.

Le condizioni assegnate sono imposte dalla descrizione della missione.

La posizione iniziale

$$R_x(t_0) = -500 \text{ km} \quad (194)$$

$$R_y(t_0) = -\text{crossrange} \quad (195)$$

Il problema viene risolto per diversi valori di *crossrange*: [0, 5, 10, 30, 50, 75, 90] km.

$$R_z(t_0) = 15 \text{ km} \quad (196)$$

La velocità iniziale è unicamente quella dell'orbita di discesa

$$V_x(t_0) = 1.685 \text{ km/s} \quad (197)$$

$$V_y(t_0) = 0 \text{ km/s} \quad (198)$$

$$V_z(t_0) = 0 \text{ km/s} \quad (199)$$

La massa iniziale dipende dal *lander* considerato,

$$m(t_0) = 1600 \text{ kg} \quad (200)$$

Le condizioni assegnate alla fine della traiettoria sono tali da garantire il *soft-landing* al *crossrange* desiderato

$$R_y(t_4) = 0 \text{ km} \quad (201)$$

$$R_z(t_4) = 0 \text{ km} \quad (202)$$

$$V_y(t_4) = 0 \text{ km/s} \quad (203)$$

$$V_z(t_4) = 0 \text{ km/s} \quad (204)$$

La fase di discesa verticale richiede una condizione al contorno aggiuntiva

$$R_z(t_3) = 0.1 \text{ km} \quad (205)$$

e l'anticipazione di alcune delle condizioni assegnate

$$V_x(t_3) = 0 \text{ km/s} \quad (206)$$

$$\theta(t_3) = \frac{\pi}{2} \quad (207)$$

$$\omega_\theta(t_3) \quad (208)$$

Non è necessario anticipare $V_y(t_4) = 0$ dato che l'angolo α si annullerà prima e V_y non potrà più variare.

Considerando la missione e le motivazioni che portano al *crossrange*, raccontate nel capitolo 4, si identifica un assetto iniziale del *lander* che non prevede *crossrange*, cioè con angolo e velocità angolare nulle per la rotazione intorno all'asse Z.

Al termine della traiettoria il *lander* dovrà atterrare verticalmente ed è quindi imposto che angolo $\alpha(t_f)$ e velocità angolare $\omega_\alpha(t_f)$ debbano essere nulli, come per la rotazione intorno all'asse Y.

Le condizioni al contorno sull'assetto e velocità di rotazione finali risultano anticipate a t_3 dalla presenza dell'arco di discesa verticale, ma sono ulteriormente anticipate a t_1 per la decisione di definire un α variabile solo all'interno dell'arco singolare.

$$\alpha(t_0) = 0 \quad (209)$$

$$\omega_\alpha(t_0) = 0 \text{ rad/s} \quad (210)$$

$$\alpha(t_1) = 0 \quad (211)$$

$$\omega_\alpha(t_1) = 0 \text{ rad/s} \quad (212)$$

Per tutte quelle variabili che non sono definite in un contorno esterno, allora si avrà che la relativa *adjoint variable* sia nulla in quel contorno

$$\lambda_{\theta}(t_0) = 0 \tag{213}$$

$$\lambda_{\omega_{\theta}}(t_0) = 0 \tag{214}$$

$$\lambda_{R_x}(t_0) = 0 \tag{215}$$

Per trovare le condizioni al contorno per λ_m si deve guardare alle equazioni di trasversalità, dalle quali si ottiene

$$\lambda_m(t_4) = 1 \tag{216}$$

Tuttavia se si sostituisce in J , la variabile $m_f = m(t_4)$ allo stesso valore moltiplicato per una costante,

$$J = k \cdot m_f = k \cdot m(t_4) \tag{217}$$

massimizzare m_f o $k \cdot m_f$ è uguale in quanto si sta moltiplicando la massa finale per un parametro costante. In tal caso si otterrà

$$\lambda_m(t_4) = k \tag{218}$$

Si può scegliere k tale da fornire una condizione $\lambda_m(t_0) = 1$. Per tale ragione si può sostituire la condizione implicita nell'equazione (218) con la condizione esplicita

$$\lambda_m(t_0) = 1 \tag{219}$$

Per determinare la durata dell'arco singolare si pone nullo il valore dell'Hamiltoniano in quel contorno interno. La scelta di quel contorno interno al posto del contorno esterno finale deriva dal fatto che la condizione vale solo se è possibile per le variabili seguire il valore ottimale senza limitazione, cosa che è possibile nell'arco singolare, ma non negli archi successivi.

$$H(t_1) = 0 \tag{220}$$

Con l'Hamiltoniano che si trova dall'equazione (184).

Per generare l'arco singolare è necessario che le derivate della *switching function* si annullino fino a ottenere esplicitamente il comando, che poi si pone uguale a zero per ricavare la legge di controllo.

Ordine di derivazione $k = 1$

$$\dot{S}_M = \frac{\dot{\lambda}_\omega}{I_y} = -\lambda_\theta = 0 \quad (221)$$

La derivata prima della *switching function* rimane invariata e quindi anche la condizione

$$\lambda_\theta = 0 \quad (222)$$

Ordine di derivazione $k = 2$

$$\dot{S}_M = -\dot{\lambda}_\theta = \frac{T}{m} (\lambda_{V_x} \sin \theta - \lambda_{V_z} \cos \theta) \cos \alpha = 0 \quad (223)$$

Dato che la spinta T rimane costante e non nulla e la massa m è sempre positiva, rimane la relazione

$$(\lambda_{V_x} \sin \theta - \lambda_{V_z} \cos \theta) \cos \alpha = 0 \quad (224)$$

Un'ipotesi verificata dalla simulazione dimostra che $\alpha \neq \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \alpha \neq 0$.

$$(\lambda_{V_x} \sin \theta - \lambda_{V_z} \cos \theta) = 0 \quad (225)$$

Ordine di derivazione $k = 3$

$$\begin{aligned} \ddot{S}_M = -\ddot{\lambda}_\theta &= -\frac{d}{dt} \left(\frac{T}{m} (\lambda_{V_x} \sin \theta - \lambda_{V_z} \cos \theta) \cos \alpha \right) = \\ &= -\frac{d}{dm} \left(\frac{T}{m} \right) \cdot \frac{dm}{dt} \cdot (\lambda_{V_x} \sin \theta - \lambda_{V_z} \cos \theta) \cos \alpha - \frac{T}{m} (\dot{\lambda}_{V_x} \sin \theta - \dot{\lambda}_{V_z} \cos \theta) \cos \alpha + \\ &\quad - \frac{T}{m} (\lambda_{V_x} \cos \theta + \lambda_{V_z} \sin \theta) \cdot \dot{\theta} \cdot \cos \alpha - \frac{T}{m} (\lambda_{V_x} \sin \theta - \lambda_{V_z} \cos \theta) \cdot (-\sin \alpha) \cdot \dot{\alpha} \end{aligned} \quad (226)$$

Il primo termine è nullo e il quarto termine viene annullato dall'imposizione $\dot{S}_M = 0$.

Sostituendo $\dot{\lambda}_{V_x} = -\lambda_{R_x}$, $\dot{\lambda}_{V_z} = -\lambda_{R_z}$ e $\dot{\theta} = \omega_\theta$ si ottiene:

$$\ddot{S}_M = \frac{T}{m} (\lambda_{R_x} \sin \theta - \lambda_{R_z} \cos \theta) \cos \alpha - \frac{T}{m} (\lambda_{V_x} \cos \theta + \lambda_{V_z} \sin \theta) \cdot \omega_\theta \cdot \cos \alpha \quad (227)$$

Imponendo $\ddot{S}_M = 0$ so trova la velocità angolare ω_θ in funzione del parametro Λ , del pitch angle θ e delle *adjoint variables* λ_{R_x} e λ_{R_z} :

$$\omega_\theta = \frac{\lambda_{R_x} \sin \theta - \lambda_{R_z} \cos \theta}{\lambda_{V_x} \cos \theta + \lambda_{V_z} \sin \theta} = \frac{\lambda_{R_x} \sin \theta - \lambda_{R_z} \cos \theta}{\sqrt{\lambda_{V_x}^2 + \lambda_{V_z}^2}} = \frac{\lambda_{R_x} \sin \theta - \lambda_{R_z} \cos \theta}{\Lambda}$$

(228)

$$\begin{aligned} S_M^{(IV)} = -\ddot{\lambda}_\theta = & -\frac{T}{m^2} \cdot \dot{m} \cdot (\lambda_{R_x} \sin \theta - \lambda_{R_z} \cos \theta) \cos \alpha + \\ & + \frac{T}{m} (\dot{\lambda}_{R_x} \sin \theta - \dot{\lambda}_{R_z} \cos \theta) \cos \alpha + \\ & + \frac{T}{m} \omega_\theta (\lambda_{R_x} \cos \theta + \lambda_{R_z} \sin \theta) \cos \alpha + \\ & - \frac{T}{m} (\lambda_{R_x} \sin \theta - \lambda_{R_z} \cos \theta) \sin \alpha \cdot \dot{\alpha} + \\ & + \frac{T}{m^2} \cdot \dot{m} \cdot \omega_\theta (\lambda_{V_x} \cos \theta + \lambda_{V_z} \sin \theta) \cos \alpha + \\ & - \frac{T}{m} \omega_\theta (\dot{\lambda}_{V_x} \cos \theta + \dot{\lambda}_{V_z} \sin \theta) \cos \alpha + \\ & - \frac{T}{m} \omega_\theta^2 (-\lambda_{V_x} \sin \theta + \lambda_{V_z} \cos \theta) \cos \alpha + \\ & - \frac{T}{m} \dot{\omega}_\theta (\lambda_{V_x} \cos \theta + \lambda_{V_z} \sin \theta) \cos \alpha + \\ & + \frac{T}{m} \omega_\theta (\lambda_{V_x} \cos \theta + \lambda_{V_z} \sin \theta) \sin \alpha \cdot \dot{\alpha} \end{aligned}$$

(229)

Il secondo termine è nullo in quanto $\lambda_{R_x} = 0$ e $\lambda_{R_z} = 0$ e il settimo termine è nullo da $\dot{S}_M = 0$. Si sostituiscono $\dot{\lambda}_{V_x} = -\lambda_{R_x}$, $\dot{\lambda}_{V_z} = -\lambda_{R_z}$ e $\dot{\omega}_\theta = \frac{M_\theta}{I_\theta}$, mentre si è già sostituita $\dot{\theta} = \omega_\theta$.

Raccogliendo i termini terzo, sesto e ottavo, primo e quinto, quarto e nono, si ottiene:

$$\begin{aligned} S_M^{(IV)} = & \frac{T}{m} \left[2\omega_\theta (\lambda_{R_x} \cos \theta + \lambda_{R_z} \sin \theta) - \frac{M_\theta}{I_\theta} (\lambda_{V_x} \cos \theta + \lambda_{V_z} \sin \theta) \right] \cos \alpha + \\ & - \frac{\dot{m}}{m} \left[\frac{T}{m} (\lambda_{R_x} \sin \theta - \lambda_{R_z} \cos \theta) \cos \alpha - \frac{T}{m} \omega_\theta (\lambda_{V_x} \cos \theta + \lambda_{V_z} \sin \theta) \cos \alpha \right] + \\ & - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \dot{\alpha} \left[\frac{T}{m} (\lambda_{R_x} \sin \theta - \lambda_{R_z} \cos \theta) \cos \alpha - \frac{T}{m} \omega_\theta (\lambda_{V_x} \cos \theta + \lambda_{V_z} \sin \theta) \cos \alpha \right] \end{aligned}$$

(230)

I termini secondo e terzo si semplificano grazie all'imposizione $\ddot{S}_M = 0$.

Il valore del controllo ottimale è ottenuto imponendo $S_M^{(IV)} = 0$.

$\cos \alpha$ si semplifica e si ottiene la formula per il comando:

$$\begin{aligned} M_\theta^* &= 2\omega_\theta I_\theta \cdot \frac{\lambda_{R_x} \cos \theta + \lambda_{R_z} \sin \theta}{\lambda_{V_x} \cos \theta + \lambda_{V_z} \sin \theta} = 2\omega_\theta I_\theta \cdot \frac{\lambda_{R_x} \cos \theta + \lambda_{R_z} \sin \theta}{\sqrt{\lambda_{V_x}^2 + \lambda_{V_z}^2}} \\ &= 2\omega_\theta I_\theta \cdot \frac{\lambda_{R_x} \cos \theta + \lambda_{R_z} \sin \theta}{\Lambda} \end{aligned} \quad (231)$$

Nella dinamica rotazionale di imbardata sono state quattro condizioni al contorno per definire i quattro archi aggiuntivi. Le condizioni al contorno sono dipendenti a due a due, quindi si includono nel problema solo due delle quattro condizioni al contorno:

$$\frac{I\omega_\alpha(t_{l1})}{M_{max}} - YP(1) + YP(2) = 0 \quad (232)$$

$$\frac{I\omega_\alpha(t_{l1})}{M_{max}} + YP(4) - YP(5) = 0 \quad (233)$$

6.13 Parametri e discontinuità

I parametri sono caratterizzati dai tempi $t_{s1}, t_{l1}, t_{l2}, t_{s2}, t_1, t_2, t_3, t_4$.

Si ha una discontinuità in $\lambda_\theta(t_2)$ con

$$\lambda_\theta(t_2^+) = \lambda_{\theta+} = free \quad (234)$$

6.14 Dimensione del problema

La dimensione del problema è definita dalle variabili di stato e aggiuntive, ma anche dalle discontinuità e dal numero di archi di traiettoria, che inserisce un ugual numero di parametri nella forma di durate di ogni arco. Il numero di condizioni al contorno indipendenti deve equilibrare la dimensione del problema.

Tabella 6: Calcolo della dimensione del problema

Numero di variabili di stato del problema	$N_x = 11$
Numero di adjoint variable del problema	$N_\lambda = 9$
Numero di discontinuità libere	$N_d = 1$
Numero di archi della traiettoria	$N_t = 8$
Numero di variabili del problema	$NY = N_x + N_\lambda = 20$
Parametri introdotti nel BVP	$KP = N_d + N_t = 9$
Dimensione del problema	$N = NY + KP = 29$
Numero di condizioni assegnate	$N_{ABC} = 18$
Numero di condizioni ottime	$N_{OBC} = 4$
Numero di condizioni per arco singolare	$N_{SA} = 2$
Numero di condizioni per switch della coppia	$N_F = 1$
Numero di condizioni su Hamiltoniano	$N_H = 1$
Numero di condizioni per discesa verticale	$N_{VD} = 1$
Numero di condizioni per struttura di α	$N_\alpha = 4$
Numero di condizioni al contorno	$N_{BO} = N_{ABC} + N_{OBC} + N_{SA} + N_F + N_H + N_{VD}$ $= 31$

6.15 Algoritmo risolutivo

Il codice di calcolo utilizzato ha origine da Gasparo, Macconi e Pasquali dell'Università di Firenze ed è stato modificato dal Professor Lorenzo Casalino (Politecnico di Torino) e dal Professor Guido Colasurdo (Università Sapienza di Roma) per permettere l'inserimento di archi multipli e discontinuità nei contorni interni, condizioni al contorno non lineari. Il codice utilizza un integratore a passo e ordine variabile, derivato dalle formule di Adams. Il codice lavora su un problema adimensionalizzato iterando sull'errore delle condizioni al contorno implicite. La precisione sulle condizioni al contorno è 10^{-7} . Il codice è stato infine modificato durante la tesi di Davide Castellana, che ha implementato un sistema ad archi per l'ottimizzazione di un problema di allunaggio con dinamica rotazionale per un moto contenuto nel piano longitudinale. Nel calcolo del fattore correttivo Δp è fornito un guadagno riduttivo $0.1 \leq k \leq 1$ in modo da ridurre la variazione rispetto al passo precedente e rendere il codice più robusto agli errori di approssimazione dei valori iniziali.

Per l'implementazione della soluzione la dimensione del problema è aumentata, si sono scritte le equazioni per la dinamica rotazionale di imbardata e aggiornate le equazioni già presenti includendo la dipendenza dall'angolo α . Il valore di coppia di beccheggio è stato ridefinito su otto archi temporali e si è introdotta la coppia di imbardata. Le opzioni legate alla convergenza del codice non sono state modificate.

7

RISULTATI DEL PROBLEMA DI OTTIMIZZAZIONE

Sono proposti di seguito i grafici che mostrano la variazione delle variabili di stato in funzione del tempo di volo.

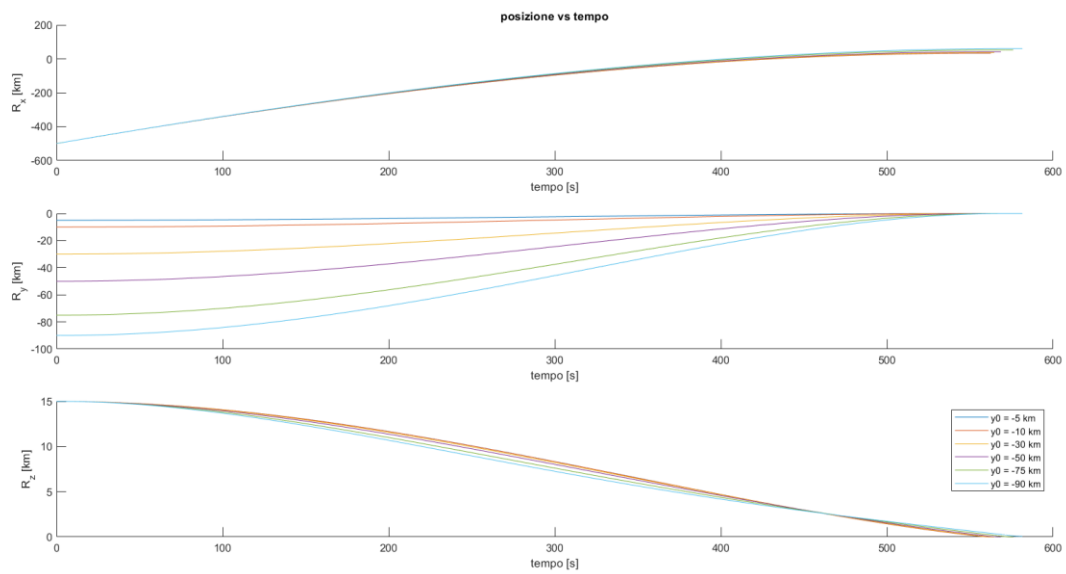


figura 21: legge oraria della soluzione del problema di ottimizzazione

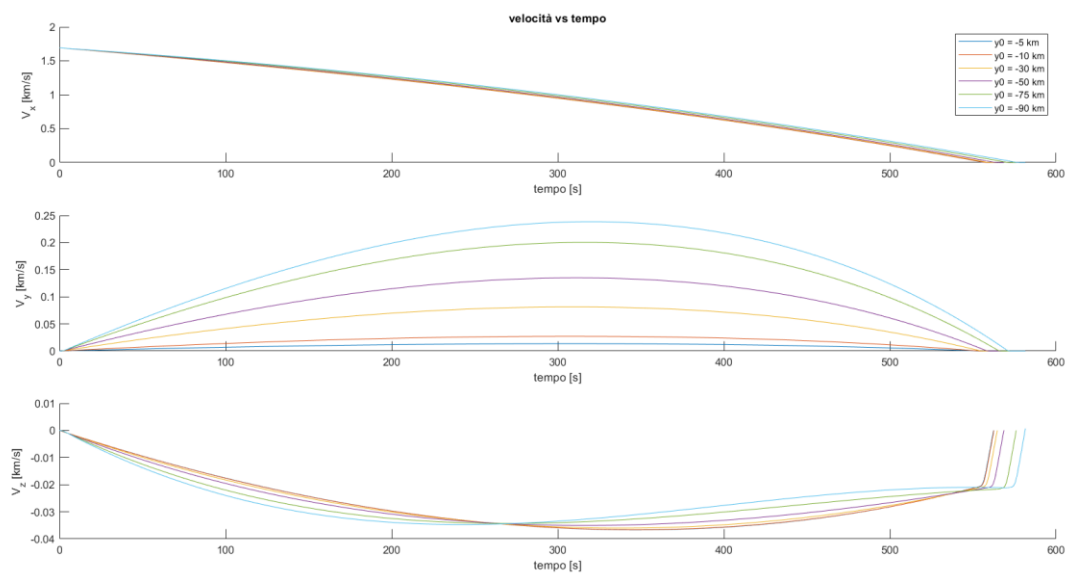


figura 22: Curva della velocità in funzione del tempo per la soluzione al problema di ottimizzazione

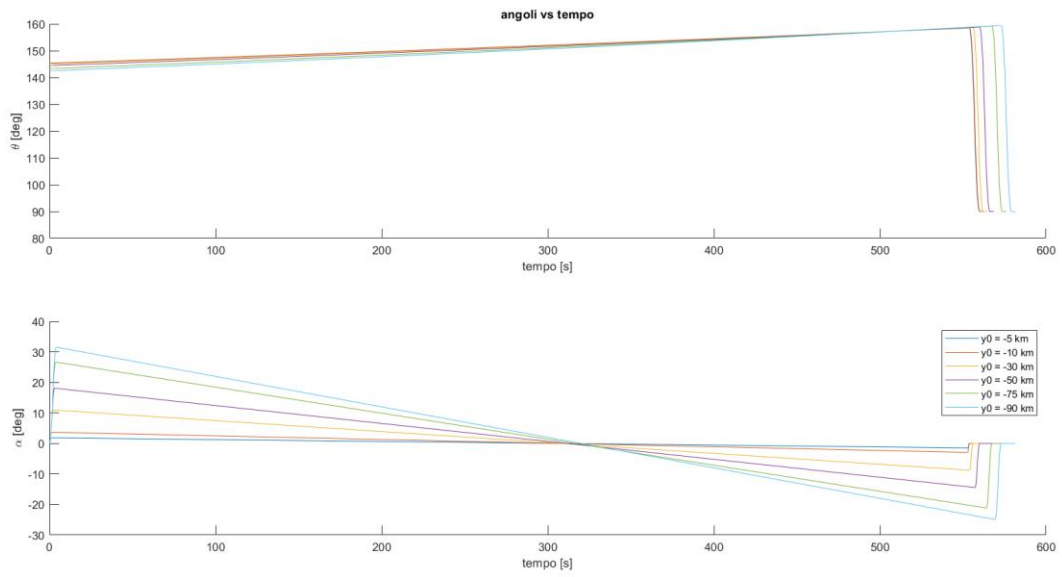


figura 23: Angoli di assetto in funzione del tempo per beccheggio e imbardata

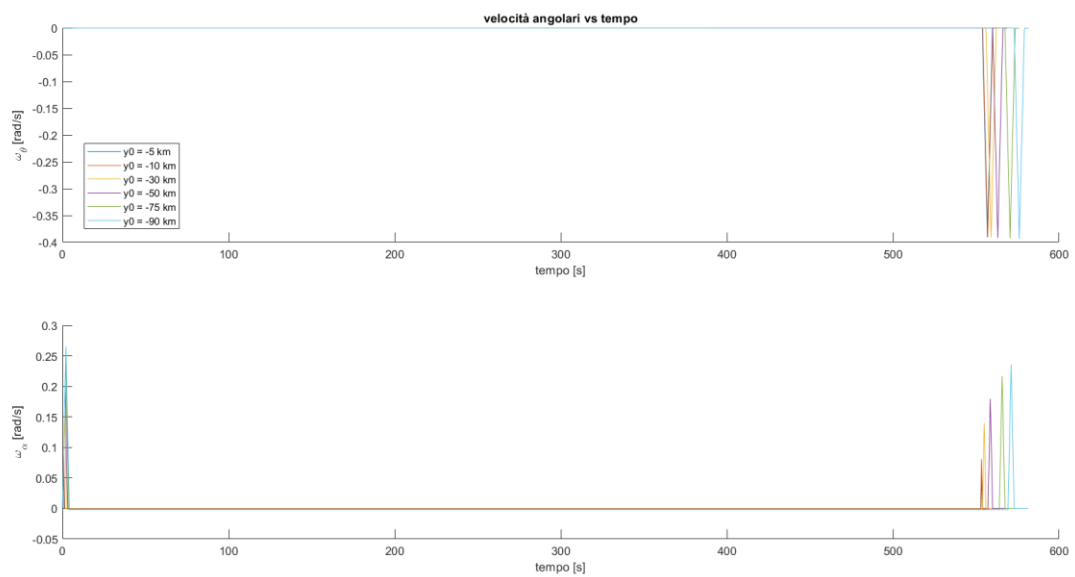


figura 24: Velocità angolari in funzione del tempo per beccheggio e imbardata

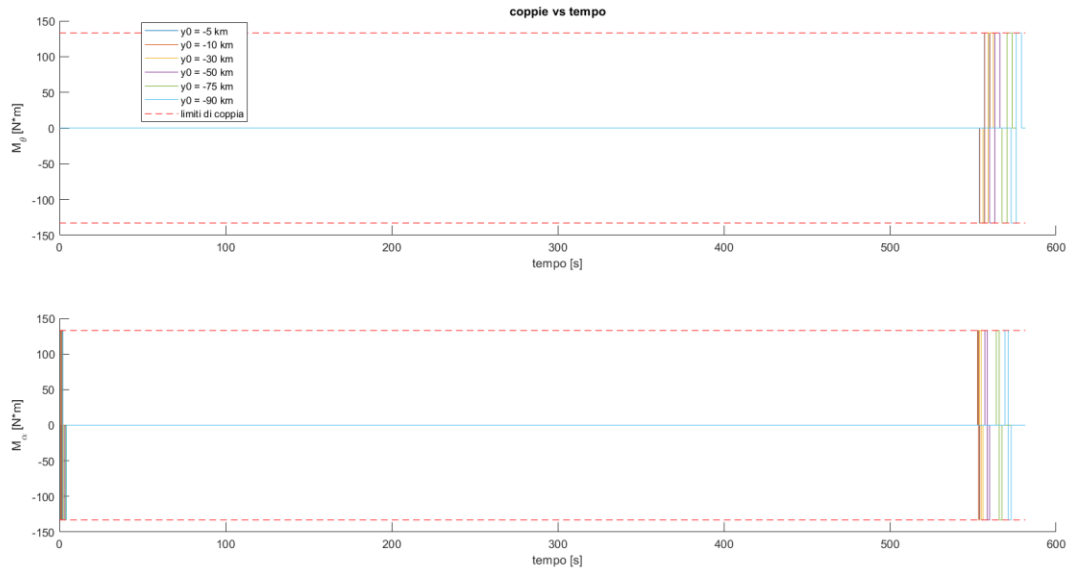


figura 25: Coppie in funzione del tempo per beccheggio e imbardata

Oltre ai valori delle variabili in funzione del tempo, viene raffigurata anche la traiettoria compiuta

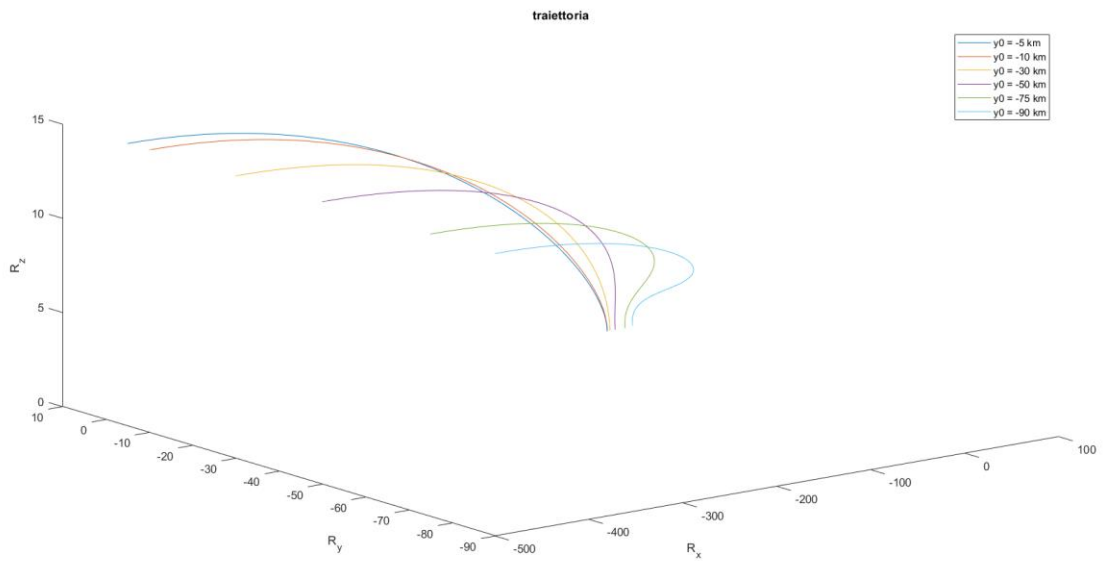


figura 26: Grafico tridimensionale della traiettoria soluzione al problema di ottimizzazione per diversi valori di crossrange

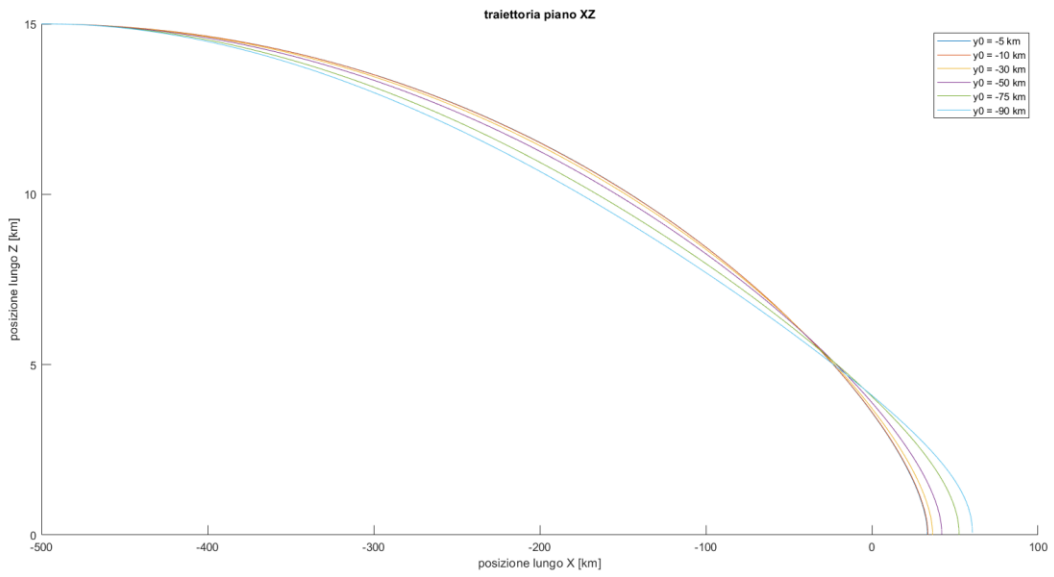


figura 27: Traiettoria sul piano longitudinale XZ per la soluzione del problema di ottimizzazione

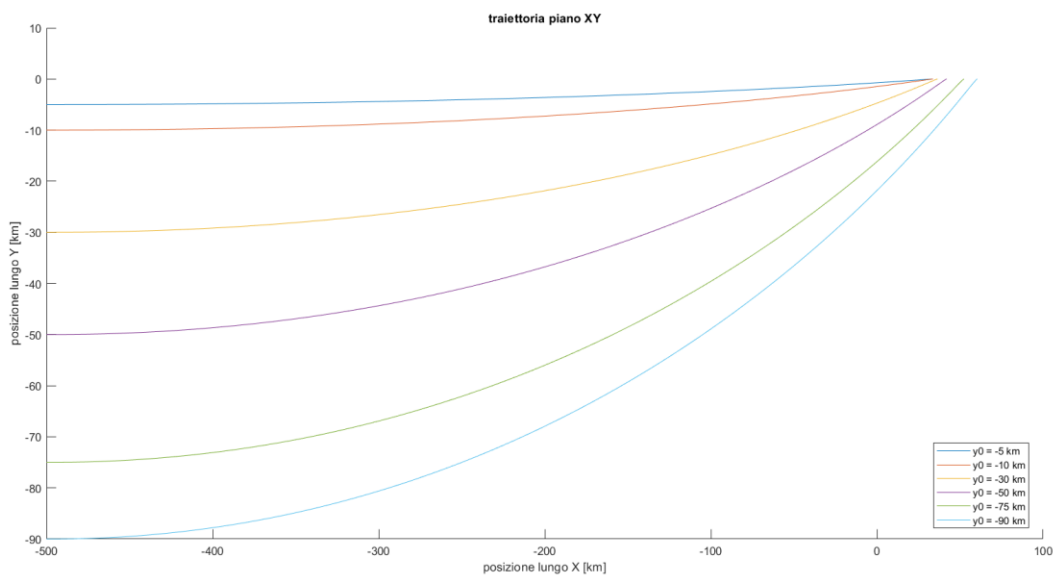


figura 28: Traiettoria sul piano laterale XY per la soluzione al problema di ottimizzazione

Da figura 21, figura 22, figura 23 e figura 24 si osserva che il codice di calcolo arriva a convergenza.

Si noti, in particolare nella figura 27, come all'aumentare del *crossrange* la traiettoria sia progressivamente più bassa, indice di una minore distribuzione di spinta lungo l'asse Z all'inizio della traiettoria. Questo comportamento rispecchia quanto descritto nel *paragrafo 5.4*.

La figura 23 mostra nel primo grafico come all'inizio della traiettoria la spinta sia in realtà più verticale sul piano longitudinale all'aumentare del *crossrange*. Questa evidenza appare in contraddizione con quanto espresso dalla traiettoria, ma è invece coerente, la risposta del moto verticale all'aumento del *crossrange* è il tentativo di guadagnare più tempo di volo, ma l'aumento verticalità della spinta non compensa interamente la riduzione della spinta sul piano longitudinale che viene invece distribuita sul piano laterale in misura particolare all'inizio e alla fine della manovra. Per questo motivo la traiettoria si abbassa con l'aumento del *crossrange* anche se compensando con una riduzione dell'angolo θ iniziale.

La maggiore distribuzione di spinta lungo l'asse verticale all'inizio della traiettoria impatta sulla pendenza di $\theta(t)$ per la necessità di portarsi a inclinazioni più orizzontali e compensare la ridotta componente di spinta iniziale lungo l'asse X.

L'angolo α ha un andamento monotono con angolo iniziale $\alpha_0 > 0$ e angolo finale $\alpha_f < 0$ e $\alpha = 0$ intorno alla metà del tempo di volo. La pendenza della curva cresce all'aumentare della deviazione laterale $|R_y(t_f) - R_y(t_0)|$.

L'andamento dell'angolo α risulta dall'ottimizzazione del moto lungo Y, che richiede la fornitura di spinta agli estremi della traiettoria in modo da avere più tempo ad alta velocità per coprire la deviazione laterale e potersi permettere un picco di velocità laterale più basso a parità di distanza percorsa.

Dato che non viene sfruttato tutto il tempo di volo per il moto lungo Y, si avranno $R_y(t)$ e $V_y(t)$ nulle per $t_1 \leq t \leq t_4$, come si può vedere dagli ingrandimenti del caso $R_y(t_0) = -50 \text{ km}$ in figura 29.

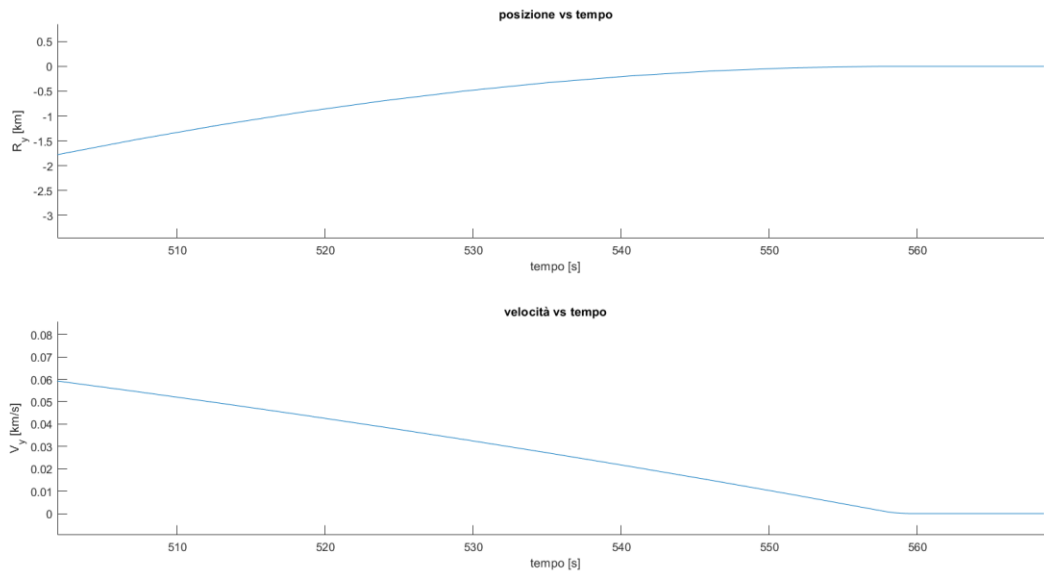


figura 29: Ingradimento sulla parte finale della traiettoria per posizione e velocità lungo l'asse Y

Si fanno alcuni confronti tra i risultati ottenuti (P3) e casi semplificati in cui gli angoli sono liberi (P1) o viene applicata solamente la dinamica rotazionale di beccheggio (P2)

Si noti come, dall'errore relativo percentuale tra le velocità lungo l'asse Y tra un caso con imbardata a controlli vincolati e uno con imbardata libera

$$err V \% = \frac{V_{y,P3} - V_{y,P2}}{\max(V_{y,P2})} \cdot 100$$

(235)

la velocità sia distribuita maggiormente nella prima parte della traiettoria per il caso con imbardata vincolata. Nella figura 30 si nota anche l'intervallo iniziale a bassa accelerazione lungo l'asse Y necessario all'aumento dell'angolo α , in relazione a un angolo α_{ott} che non vede la condizione al contorno $\alpha(t_0) = 0$. Nella seconda parte della traiettoria, si ha un intervallo ampio negativo dove la velocità nel caso ottimale è superiore. Ciò dovuto alla necessità di frenare prima nel vincolato, avendo la condizione al contorno sulla velocità anticipata alla fine dell'arco singolare.

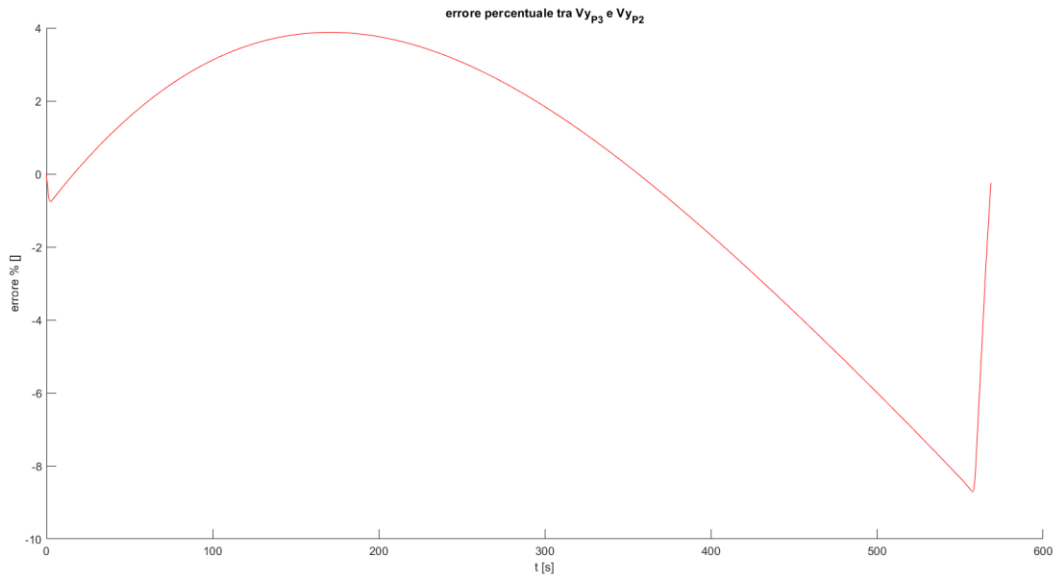


figura 30: Errore relativo percentuale sulla velocità lungo l'asse Y tra il problema con dinamica di imbardata bloccata (P3) e il problema con dinamica di imbardata libera (P2), nel caso con crossrange di 50 km

Nella figura 31, per il caso con $R_y(t_0) = -50 \text{ km}$, si possono vedere a confronto gli angoli di imbardata per i casi con (P3) e senza (P2) limiti di coppia sull'imbardata. In entrambi i casi è presente la dinamica di beccheggio limitata.

Se si escludono gli archi necessari a soddisfare le condizioni al contorno e si confrontano solamente α ottimale nell'arco singolare con l'arco in cui α è lineare nel caso P3, l'errore massimo è di 11.35 %, dove l'errore è calcolato come

$$\text{err } \alpha \% = \frac{\alpha_{P3} - \alpha_{P2}}{\max(\alpha_{P2})} \cdot 100$$

(236)

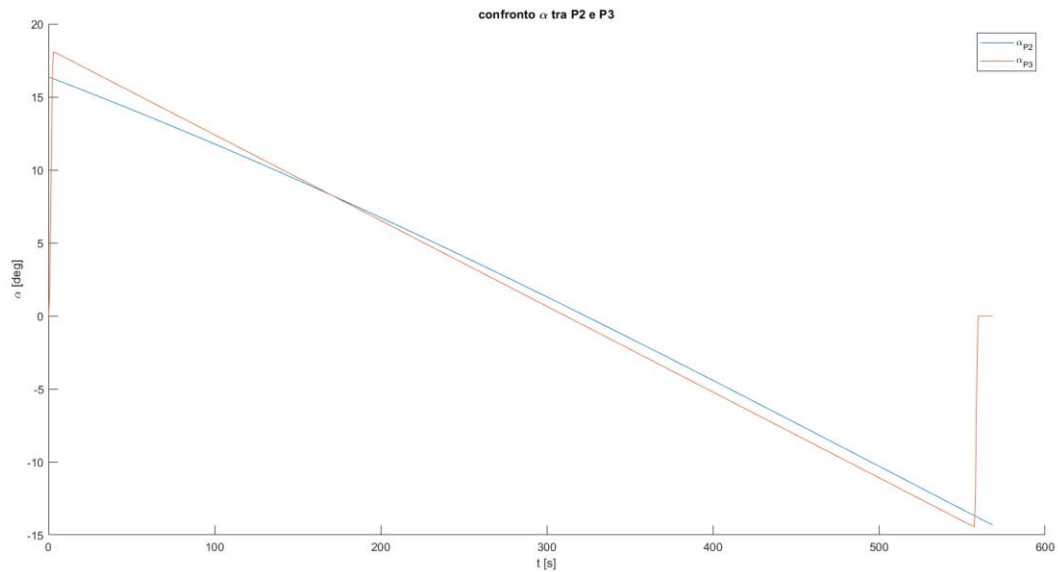


figura 31: Confronto tra gli angoli di imbardata di un problema con dinamica di imbardata bloccata (P3) e uno con dinamica di imbardata libera (P2), nel caso con crossrange di 50 km

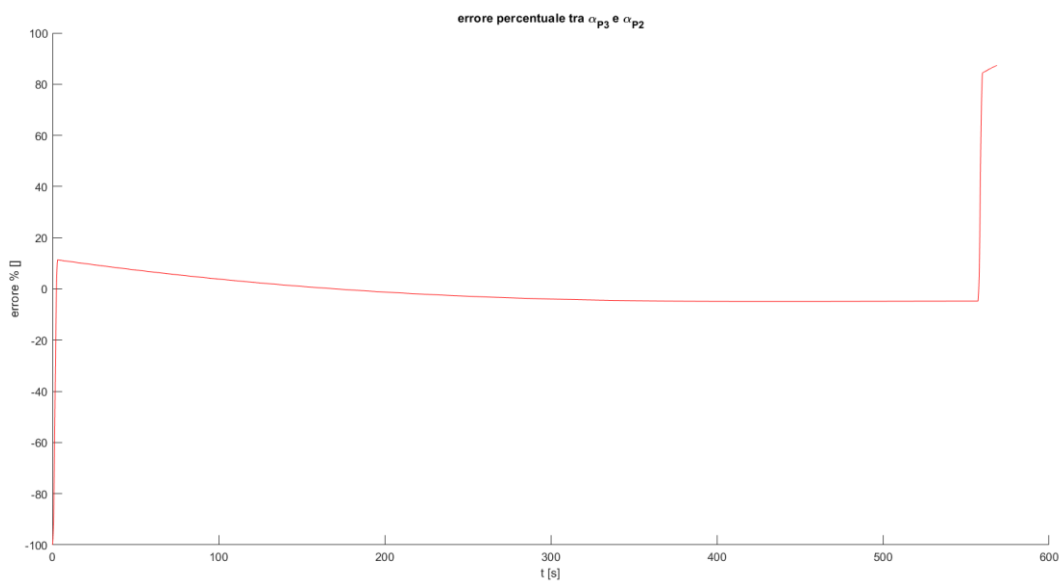


figura 32: Errore relativo percentuale sull'angolo di imbardata di un problema con dinamica di imbardata bloccata (P3) rispetto a un problema con dinamica di imbardata libera (P2), per il caso con crossrange di 50 km

Si noti infine come in figura 33 il tempo di volo cresce progressivamente all'aumentare dei vincoli nel problema. Mentre lo scarto rimane costante tra P1 e P2 all'aumentare del *crossrange*, l'errore è poco consistente tra P2 e P3 e il tempo di volo non vede un netto aumento per P3. Questo risultato può essere indice della migliore distribuzione di spinta lungo Y, compressa nell'arco singolare in modo da lasciare più spinta per le operazioni di frenata finale. Si noti come l'approssimazione lineare dell'angolo α ottimali generi risultati consistenti a parità di condizioni sulla dinamica di beccheggio.

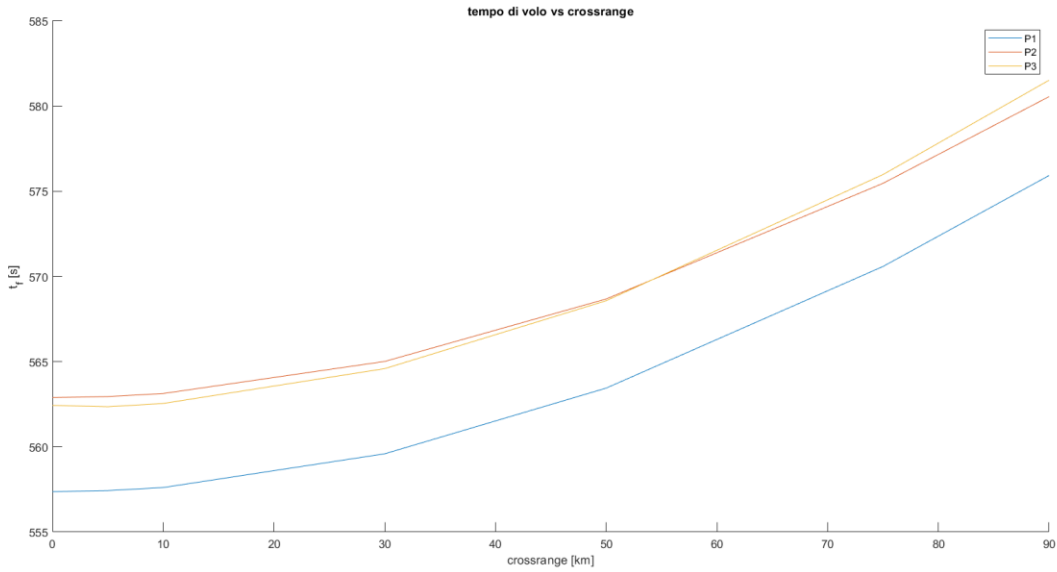


figura 33: Tempi di volo al crescere del crossrange per un problema con dinamica di rotazione libera (P1), un problema con sola dinamica di imbardata libera e dinamica di beccheggio bloccata (P2) e un problema con dinamica di rotazione bloccata sui due assi (P3)

Tabella 7: Massa finale al crescere del crossrange per un problema con dinamica di rotazione libera (P1), un problema con sola dinamica di imbardata libera e dinamica di beccheggio bloccata (P2) e un problema con dinamica di rotazione bloccata sui due assi (P3)

Distanza laterale [km]	Massa finale P1 [kg]	Massa finale P2 [kg]	Massa finale P3 [kg]
0	816.06	809.14	808.94
5	815.98	809.06	809.05
10	815.71	808.80	808.78
30	812.93	806.14	805.90
50	807.51	800.95	800.30
75	797.47	791.35	789.88
90	789.96	784.14	782.09

8

CONCLUSIONI

Nel lavoro di tesi si è considerato un primo approccio a traiettorie tridimensionali con una trattazione semplificata. La dinamica rotazionale è semplificata applicando le coppie di controllo direttamente sugli assi del sistema di riferimento inerziale. La dinamica di rotazione sui due assi considerati ne risulta disaccoppiata, semplificando il problema perché rende possibile trattare le due rotazioni in modo indipendente. La trattazione semplificata dell'angolo α di imbardata porta a un errore stimato massimo superiore a 1/10 rispetto al caso in cui si applichino le equazioni derivanti dal Principio di Massimo di Pontryagin all'angolo α . Dalla stima degli errori rispetto al problema con trattazione completa, l'integrazione delle equazioni della trattazione approssimata porta a tempi di volo e masse finali consistenti con il caso ottimo con un errore massimo sulle masse finali inferiore allo 0.3% per valori di deviazione laterale fino a sei volte la quota di partenza.

Nell'analisi del problema ridotto si è seguita la strada di integrare analiticamente l'intero problema dalla coppia applicata fino alla posizione sull'asse Y. L'integrazione analitica si è rivelata impossibile oltre l'angolo α , ma ha suggerito possibili variazioni alla funzione di approssimazione dell'angolo α che avrebbero potuto generare integrali analitici. L'utilizzo di integrali analitici per la risoluzione di un problema di questo tipo porta all'indipendenza certa della soluzione dai valori di tentativo. Una soluzione integrata analiticamente non ha infatti valori di tentativo da cui partire, ma genera gli andamenti del moto di rotazione e di traslazione a partire dalla legge di controllo. Tale pratica può risultare utile nel caso si trovi una legge che approssima il controllo ottimale, perché rende possibile ridurre la dimensione del problema riconducendo i limiti del controllo fino alla all'ultima variabile dipendente da un unico controllo della quale sia possibile trovare un integrale analitico.

I possibili sviluppi futuri del problema sono la trattazione delle stesse condizioni al contorno superando l'ipotesi di dinamica rotazionale disaccoppiata e definendo una soluzione esatta al problema di ottimizzazione per tutti gli angoli di assetto del *lander*.

BIBLIOGRAFIA

- Adimurthy, V. (1976). Launch Vehicle Trajectory Optimization including Rotational Dynamics. *J. Spacecraft - Engineering Notes*, 59-61.
- (2022). *ARTEMIS-I Press Kit*. NASA.
- Ascher, U., & Spiteri, R. (1995). Collocation Software for Boundary Value Differential-Algebraic Equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*.
- Bryson, A., & Ho, Y.-C. (1975). *Applied Optimal Control*. New York: Taylor & Francis.
- Canale, M. (n.d.). Introduction to Linear Quadratic optimal control.
- Casalino, L. (2021). Optimization Methods for Space Trajectories.
- Castellana, D. (2021-2022). *Ottimizzazione di Traiettorie di Atterraggio Lunare con Dinamica Rotazionale*. Politecnico di Torino.
- Cho, D.-H., Kim, D., & Leeghim, H. (2015). Optimal Lunar Landing Trajectory Design for Hybrid Engine. *Mathematical Problems in Engineering, Hindawi Publishing Corporation*, p. 8.
- Colasurdo, G., & Casalino, L. (2013). Indirect Methods for Optimization of Spacecraft Trajectories. In G. Fasano, & J. Pintér, *Modeling and Optimization in Space Engineering*. New York: Springer.
- Davis, J. (2022, Agosto 9). *Artemis I launch guide: What to expect*. Retrieved from The Planetary Society:
<https://web.archive.org/web/20220815211743/https://www.planetary.org/articles/artemis-i-launch-guide>
- Gasparo, M., Macconi, M., & Pasquali, A. (1979). *Risoluzione numerica di problemi ai limiti per equazioni differenziali ordinarie mediante problemi ai valori iniziali*. Università di Firenze.
- Grammatico, M., & Casalino, L. (2020-2021). *Fuel-Optimal Lander Trajectory for Lunar Soft-Precision Landing*.
- Jones, A. (2020, Settembre 23). *China's Chang'e 3 lunar lander still going strong after 7 years on the moon*. Retrieved from Space.com: <https://www.space.com/china-change-3-moon-lander-lasts-7-years>
- Murray, B. (2018, Settembre 23). *Chang'e-5 mission profile*. Retrieved from The Planetary Society: <https://www.planetary.org/space-images/change-5-mission-profile>
- Narrillos, C. (n.d.). *Indirect Trajectory Optimization Including Third Body Perturbation*.
- NASA- NSSCDA *Spacecraft Details - Chang'e 5*. (2020, Novembre 16). Retrieved from NASA.
- NASA, O. o. (2020). *NASA's Management of the Orion Multi-Purpose Crew Vehicle Program*.

- Sostaric, R. (2007). Powered Descent Trajectory Guidance and Some Considerations for Human Lunar Landing. *30th Annual AAS Guidance and Control Conference*. Breckenridge, Colorado, USA: American Astronautical Society.
- Spudis, P. (n.d.). *History of Lunar Exploration*. Retrieved from NASA: <https://moon.nasa.gov/exploration/history/>
- Sun, Z., Zhang, T., Zhang, H., Jia, Y., Zhang, H., Chen, J., . . . Shen, Z. (2014). The Technical design and achievements of Chang'E-3 probe. *Scientia Sinica Technologica*, 331-343.
- Xu, L., Zou, Y., & Jia, Y. (2018). China's Planning for Deep Space Exploration and Lunar Exploration before 2030. *Chinese Journal of Space Science*, 591-592.
- Zeng, Y., Ouyang, Z., Li, C., Liu, J., & Zou, Y. (2008). China's Lunar Exploration Program: Present and Future. *Planetary and Space Science*, pp. 881-886.