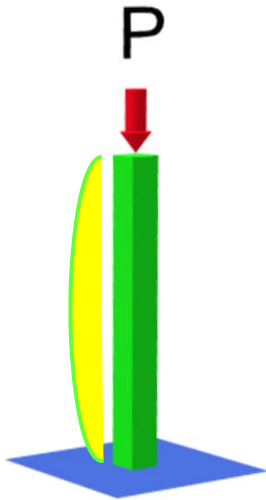


Instabilità (Buckling)

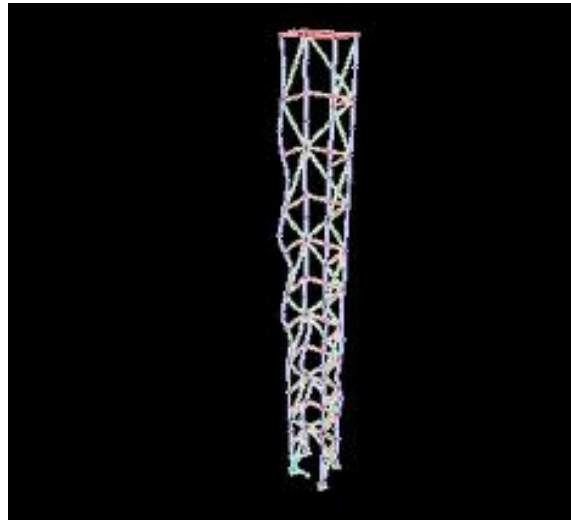
L'instabilità è rappresentata dall'insorgere di un fenomeno di campi di deformazione che presentano spostamenti per lo più ortogonali alla direzione della massima **compressione**

L'instabilità viene in genere presentata con l'analisi della trave di Eulero, che offre una immediata comprensione del fenomeno

Il meccanismo è sempre legato all'insorgere di fenomeni di carico a flessione (locali o globali) laddove si presenta uno stato di compressione più o meno diffuso



Classica condizione di carico di instabilità di trave di Eulero



Instabilità di un traliccio formato da insieme di travi



Instabilità di un binario innescata da alte Temp

Non necessariamente l'instabilità coinvolge l'intera struttura, ma può localizzarsi in singoli componenti particolarmente compressi staticamente o dinamicamente

Cedimento di un pilastro dovuto probabilmente a sfaldamento del cemento che ha trasferito il carico di compressione sui ferri, rendendoli instabili



il cedimento si è innescato dinamicamente in combinazione compressione assiale-flessione

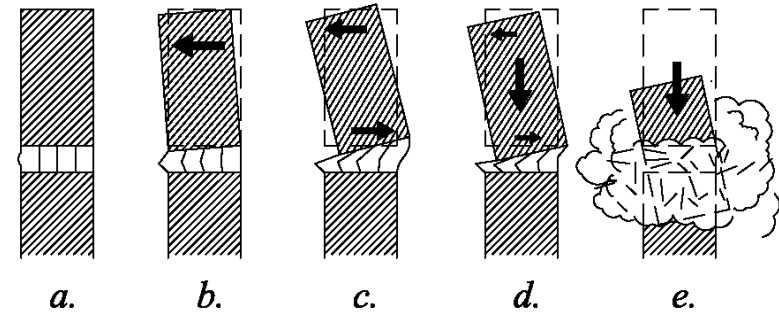
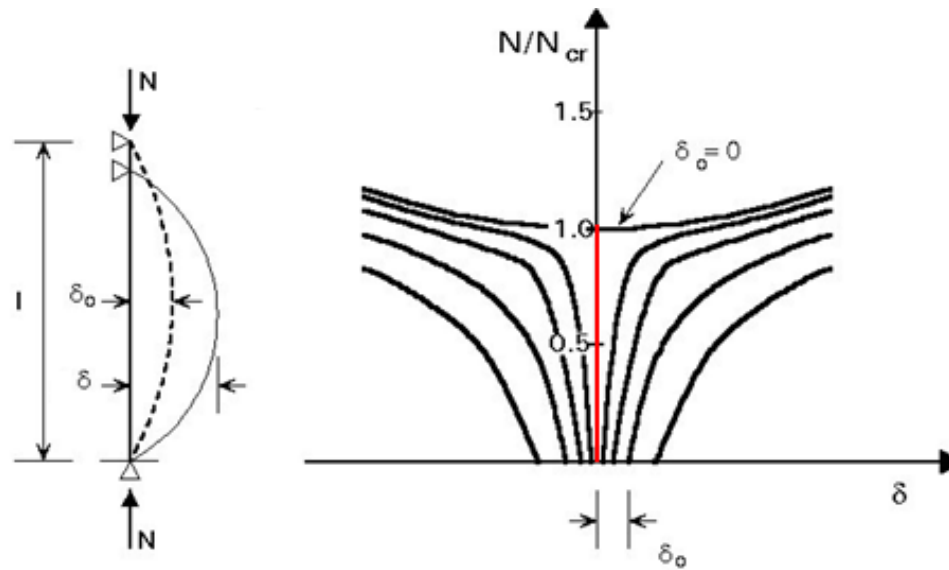


Cedimento di una sola ala laterale ma che ha coinvolto tutti i piani dell'edificio

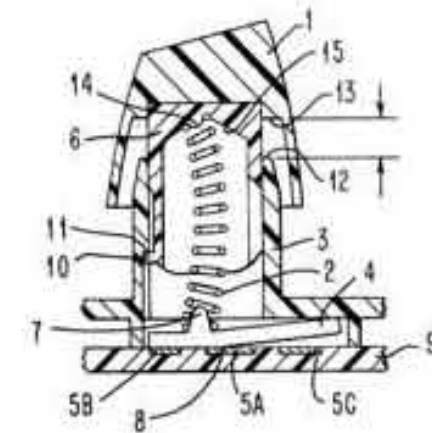


Cedimento di una gru telescopica durante il montaggio di un traliccio per elettrodotto

La presenza di imperfezioni locali ha effetti determinanti sull'insorgere del fenomeno



Le Twin Towers hanno ceduto per instabilità provocata dall'imperfezione generata da un pilastro che ha ceduto per indebolimento termico

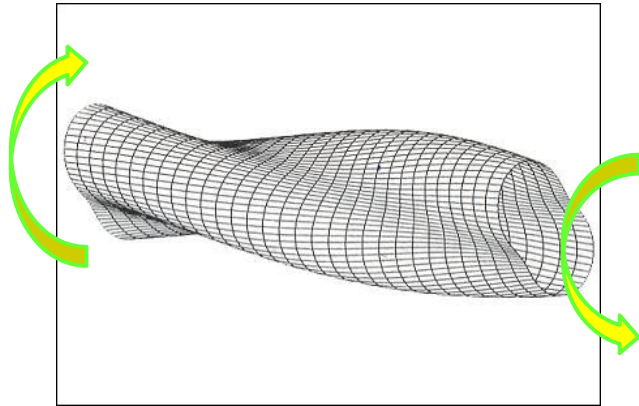


Maggiore è l'imperfezione e minore è il carico dove si rende evidente la flessione

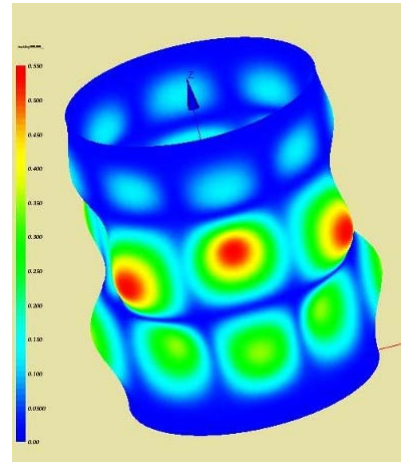
D'altra parte la presenza di imperfezioni rende più graduale il fenomeno

Instabilità non è solo sinonimo di sciagura, ma a volte viene sfruttata per ottenere particolari funzioni, ad es. contatti istantanei

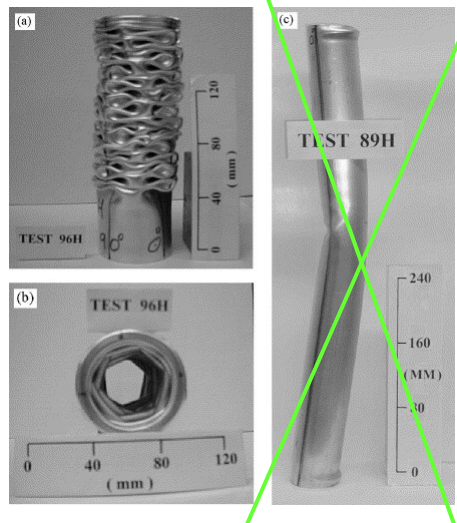
In determinate condizioni ci si riferisce a **instabilità di parete sottile** quando la flessione non riguarda il comportamento monodimensionale della struttura, ma direttamente la flessione localizzata sulle superfici sottili dell'elemento



Ovalizzazione per effetto di torsione su tubo in parete sottile



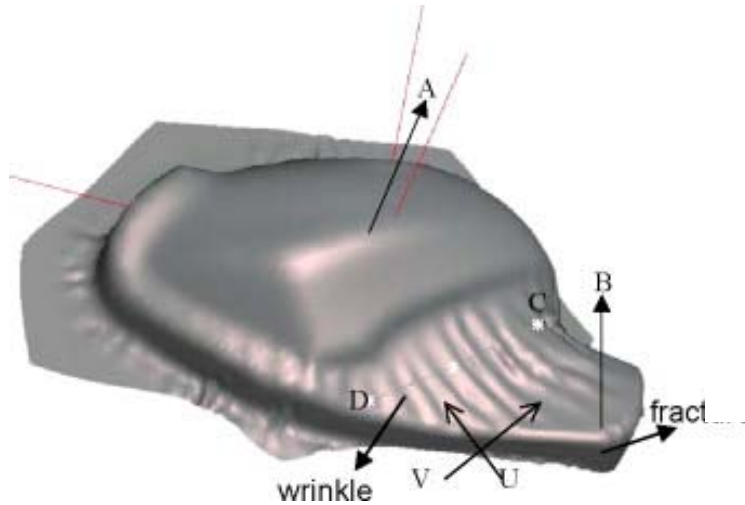
Formazione di lobi (fold) che provocano flessione sul mantello di un cilindro in parete sottile, previsione e prova



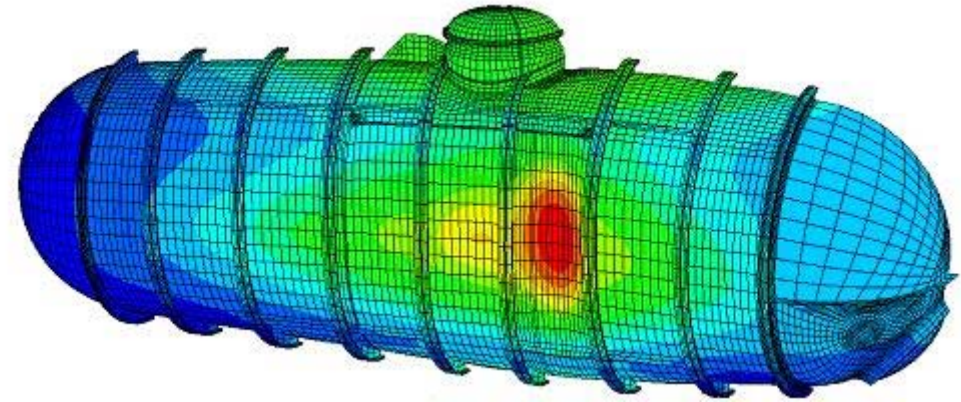
Per ottenere un'ottima capacità di assorbimento energetico all'urto occorre verificare che i componenti subiscano instabilità solo di parete sottile evitando lo sviluppo di cerniere plastiche globali



Altri casi interessanti (e perniciosi) di instabilità locali possono riguardare



Formazione di avvallamenti (wrinkle) durante lo stampaggio perché il flusso del materiale ha provocato un'eccessiva compressione locale non ben bilanciata da stampo e controstampo



Batiscafi che si trovano in compressione esterna crescente con la profondità e che rischiano il collasso

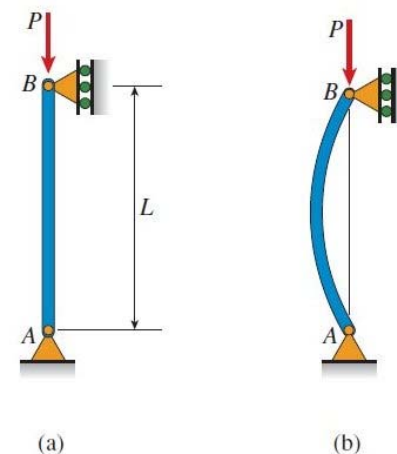
Pavimenti in parquet ove la deformabilità nel piano risulti dipendente dal tasso di umidità e si verifichi una perdita idraulica



Instabilità di colonne

Tipica delle strutture «snelle» compresse che, ad un certo punto, esibiscono una flessione laterale

L'instabilità, per definizione, sopraggiunge allorché una qualunque perturbazione provoca l'insorgere di fenomeni che si autoesaltano provocando profonde modificazioni



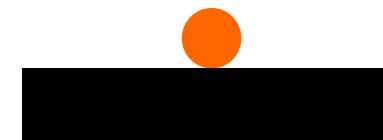
Condizione di equilibrio stabile



Condizione di stabilità per moderate perturbazioni



Instabilità



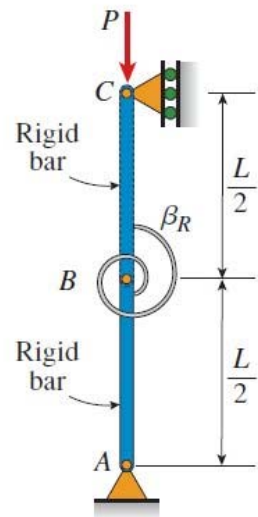
Equilibrio indifferente

La ricerca della instabilità sarà quindi dominata dallo studio del passaggio

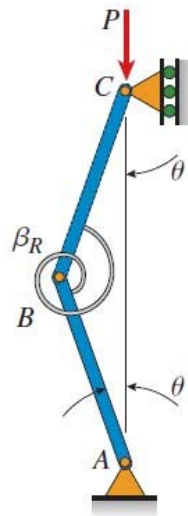
equilibrio stabile – equilibrio indifferente – condizione instabilità



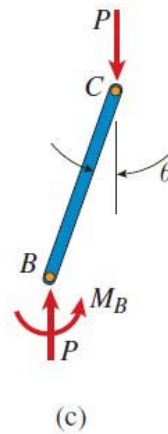
Si comincia dallo studio di un meccanismo composto da corpi rigidi ed una connessione elastica



(a)



(b)



(c)

La perturbazione che si applica assume la forma di un piccolo angolo θ che genera disallineamento del punto B

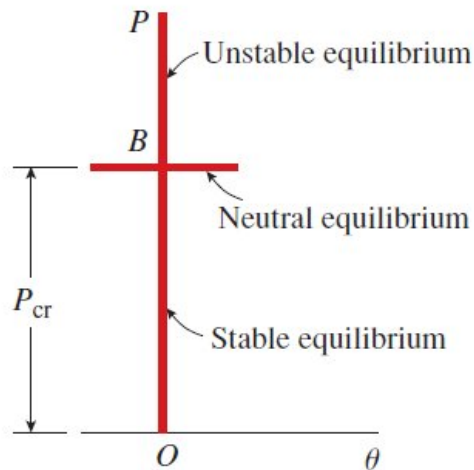
La trave BC subisce due effetti in contrasto

Momento elastico della molla che riallinea

$$M_E = 2\beta_R \vartheta$$

Momento di disallineamento

$$M_P = P \frac{\sin(\vartheta)L}{2} \approx P \frac{\vartheta L}{2}$$



Il prevalere di M_E determina una condizione di stabilità

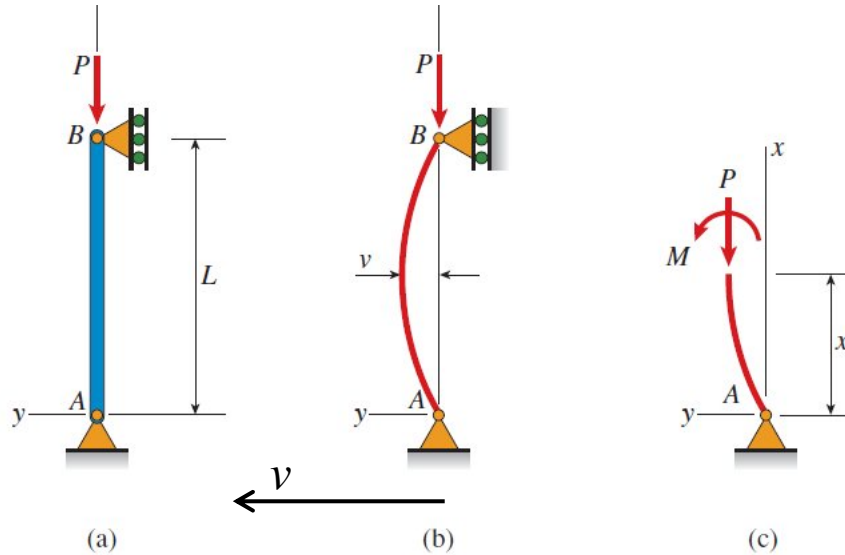
Se prevale M_P il piccolo piegamento si autoesalta

Esiste una condizione di indifferenza per piccole rotazioni che costituisce l'elemento di separazione tra i due comportamenti precedenti – Questa condizione ci dà il carico critico

$$P_{cr} = \frac{4\beta_R}{L}$$

$$\begin{cases} P < P_{cr} & \text{struttura stabile} \\ P > P_{cr} & \text{struttura instabile} \end{cases}$$

Consideriamo una trave elastica, perfettamente centrata, soggetta a carico P



In tutta la prima parte di applicazione del carico la trave è soggetta alla sola pressione

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

Incrementando il carico si raggiunge una condizione di equilibrio indifferente, nel quale ora la reazione elastica è fornita dalla curvatura assunta dalla trave

Oltre tale valore (P_{cr}) la trave svelle

Alla curvatura la trave risponde con un momento riequilibrante $M_e = EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$

Separando in due la trave, rispetto al punto A si può esprimere l'equilibrio dei momenti valido per ogni x

$$EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Pv = 0 \quad \text{Eq. diff. del II ordine a coefficienti costanti}$$

assumendo: $k = \sqrt{\frac{P}{EI}} \longrightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + k^2 v = 0 \longrightarrow v(x) = C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx)$

Questa è la soluzione generale alla quale occorre aggiungere le condizioni al contorno che definiscono univocamente C_1 e C_2

$$v(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx$$

Per la trave *double-pinned* le c.c. sono di spostamento nullo in $x=0$ e in $x=L$

$$\begin{cases} v(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \\ v(L) = 0 \Rightarrow C_1 \sin kL = 0 \end{cases}$$

L'annullarsi di un prodotto implica la nullità di uno dei due fattori

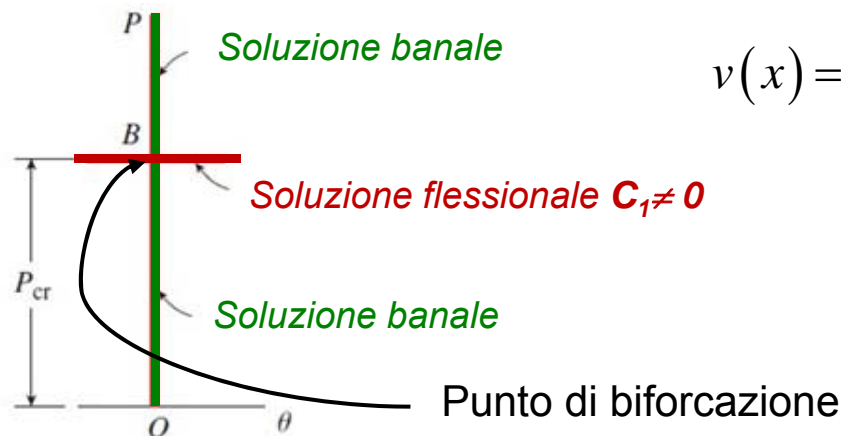
$C_1 = 0$ Soluzione banale – non si ha flessione

$$\sin kL = 0 \Rightarrow kL = n\pi \Rightarrow \boxed{P_{cr} = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} EI}$$

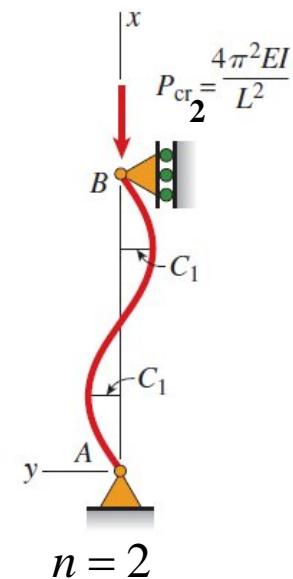
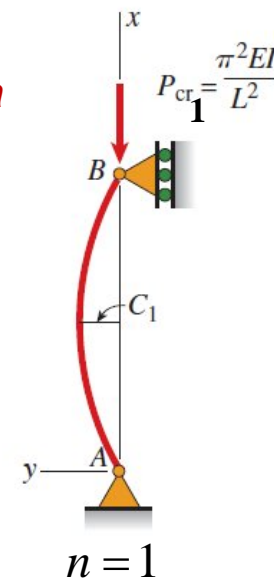
$$\left(k = \sqrt{\frac{P}{EI}} \right)$$

La costante C_1 – che rappresenta il massimo spostamento – rimane indeterminata, potendo assumere qualsivoglia valore (ciò rappresenta la condizione di indifferenza)

Si è trovato un valore del carico al quale corrisponde uno spostamento trasversale indeterminato ma non nullo lungo la trave, di complessità legata al valore del numero naturale n



$$v(x) = C_1 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$



Nelle condizioni critiche ci si trova in stato di equilibrio indifferente, come si vede ricalcolando i momenti di reazione elastica e di sbilanciamento, per ogni valore di x

$$M_e = EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -EI \frac{\pi^2}{L^2} C_1 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

$$M_P \approx P_{cr} v = \frac{\pi^2}{L^2} EI C_1 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

I Carichi critici successivi crescono rapidamente con n^2 e sono di scarso interesse pratico

Notare che il carico critico di Eulero:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2}{L^2} EI$$

non dipende dal carico limite (*snervamento per acciaio*)

Cresce linearmente con momento di inerzia sezione

Cresce linearmente con modulo Young

Decresce quadraticamente con la lunghezza

Se le condizioni critiche si attuano per l'insorgere di fenomeni di instabilità elastica non si ha alcun beneficio a utilizzare acciai più pregiati in quanto E è quasi sempre lo stesso

*Utilizzare sezioni tubolari aumenta il valore di I , a parità di peso; tuttavia non si può allontanare troppo il materiale dal baricentro della sezione, in quanto se le pareti diventano troppo sottili si presenta un'altra tipologia di instabilità: **Instabilità locale***

Per una trave generica, caricata a compressione, e libera di svellere in qualunque direzione (cerniere sferiche) essa svellerà lungo la direzione di minimo momento inerzia

Si calcola facilmente un valore di stress critico (che non è legato al cedimento del materiale ma piuttosto alle sue caratteristiche elastiche)

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{L^2 A}$$

È consuetudine utilizzare la definizione di raggio di girazione

$$r = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}$$



$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2}$$

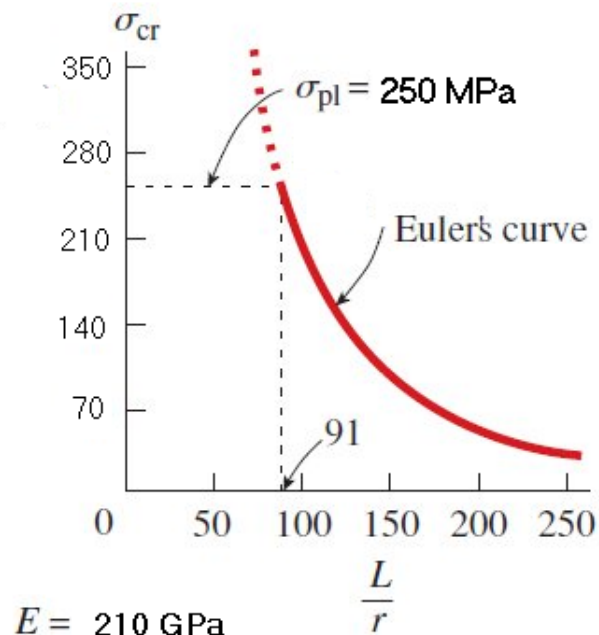
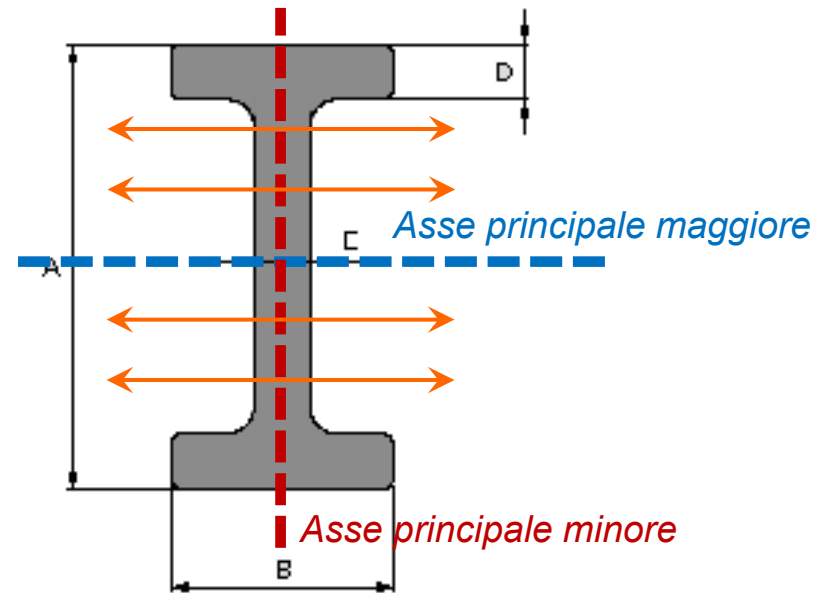
In tal modo si fa diretto uso della definizione di snellezza di una trave

$$\lambda = \frac{L}{r}$$

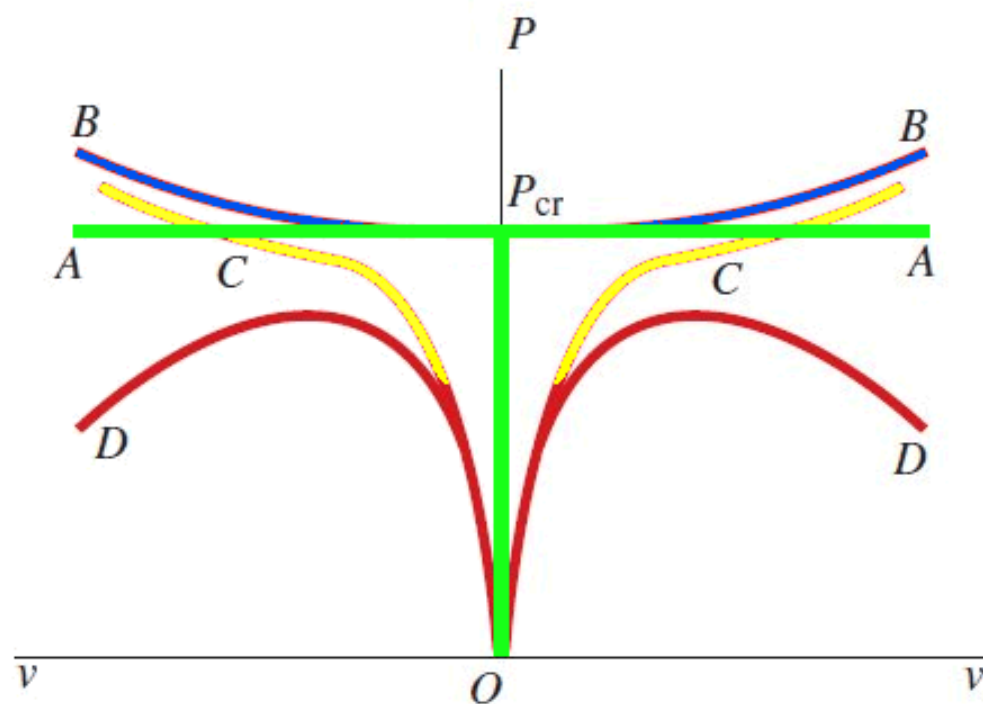
$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

Nel calcolo si è assunto il comportamento lineare del materiale quindi i risultati sono limitati alla tensione di flusso plastico

Valori usuali per la snellezza sono compresi tra 30 e 150



Effetto di grandi spostamenti, imperfezioni, comportamento elasto-plastico

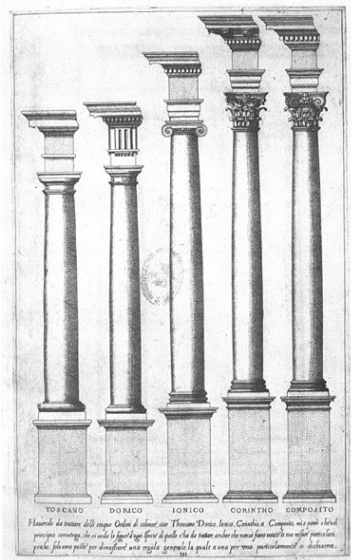


Limitandoci ai casi elastici, appare ragionevole utilizzare il valore teorico P_{cr} come riferimento in quanto eccessivi spostamenti laterali non sono comunque ammissibili

- A ■ *Comportamento ideale, elastico, perfetto allineamento e piccoli spostamenti*
- B ■ *Il carico tende a crescere quando si considera la curvatura vera*
- C ■ *Le imperfezioni tendono a evidenziare la flessione da subito, quando poi le frecce diventano molto più grandi delle imperfezioni iniziali il loro effetto si affievolisce e la tendenza torna ad essere quella di B*
- D ■ *Quando la plasticità interviene si verifica un collasso plastico catastrofico in quanto la curva diviene instabile*

Ottimizzazione delle forme delle colonne

1) Si può incrementare il momento d'inerzia della sezione laddove il momento flettente risulta massimo

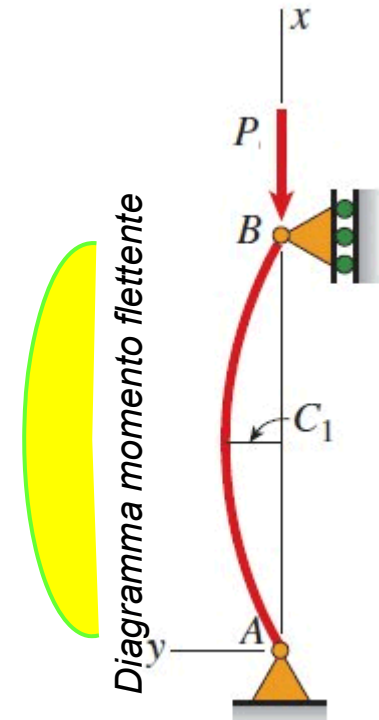
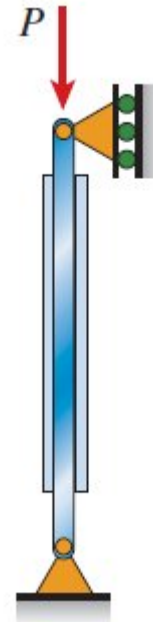


Entasi colonna greca



Incremento della sezione che tenta di opporsi al momento risultante

Presenza di un parziale rinforzo nella parte centrale



2) Si può ottimizzare la forma della sezione

Quale tra le sezioni presenti, a parità di area, presenta il massimo valore per il più basso dei momenti di inerzia?

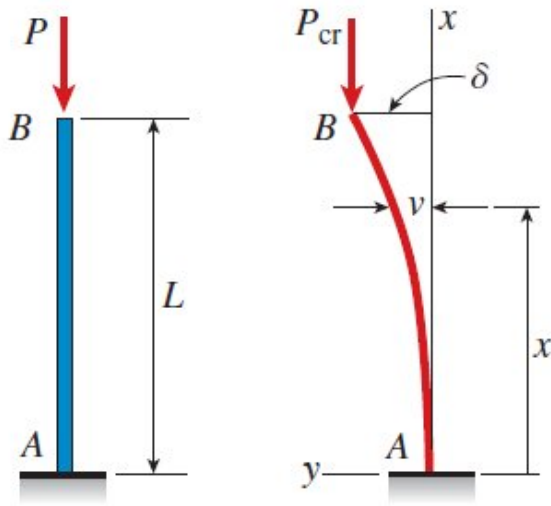


Non la circolare come viene spontaneo pensare, ma è il triangolo equilatero!



SOLUZIONE PER ALTRE CONDIZIONI VINCOLARI

Trave incastrata - libera



Il momento di disallineamento risulta, ad una coordinata x

$$M_P(x) = P(\delta - v)$$

Per l'equilibrio momenti in x :

$$EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + P(v - \delta) = 0$$

Si ottiene una eq. diff del II ordine
a coefficienti costanti e forzata

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + k^2 v = k^2 \delta$$

$$k = \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

Come è noto, la soluzione si ottiene sommando alla soluzione della omogenea associata (già calcolata prima) una soluzione particolare

$$v_{part} = \delta$$

Assai elementare qui

$$v(x) = \delta + C_1 \sin kx + C_2 \cos kx \quad \text{Necessitano 3 c.c.}$$

Due condizioni al contorno sono riferite a $x=0$

$$\frac{\delta v}{\delta x} = k C_1 \cos kx - k C_2 \sin kx$$

$$\begin{cases} v(0) = 0 \Rightarrow C_2 = -\delta \\ \left. \frac{\delta v}{\delta x} \right|_{x=0} = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \end{cases}$$

$$v(x) = \delta(1 - \cos kx)$$

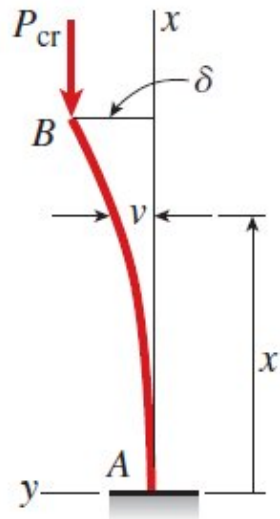
La terza c.c. si applica in sommità e ci fornisce $v(L) = \delta$ ossia: $\delta \cos kL = 0$

Similmente a prima abbiamo una soluzione banale ($\delta = 0$) ed un'altra, che lascia δ *indefinito*

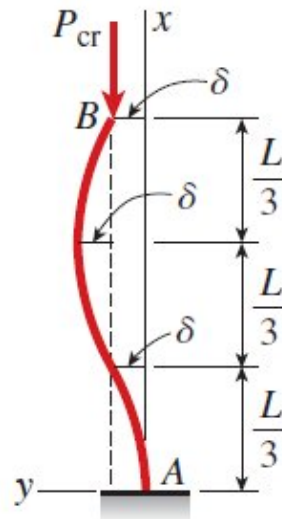
$$\cos kL = 0 \quad \Rightarrow \quad kL = n \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad P_{cr} = \frac{n^2 \pi^2}{4L^2} EI$$

La soluzione generale (autovettore a meno di un fattore di scala) risulta

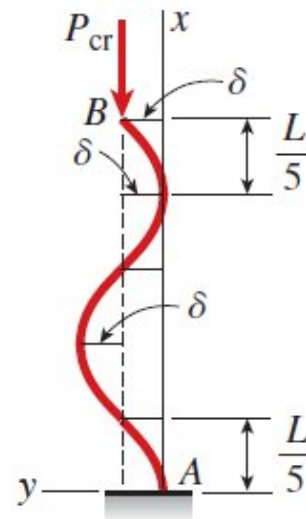
$$v(x) = \delta \left(1 - \cos \frac{n\pi x}{2L} \right)$$



$$P_{cr_1} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$$



$$P_{cr_2} = \frac{9\pi^2 EI}{4L^2}$$



$$P_{cr_3} = \frac{25\pi^2 EI}{4L^2}$$

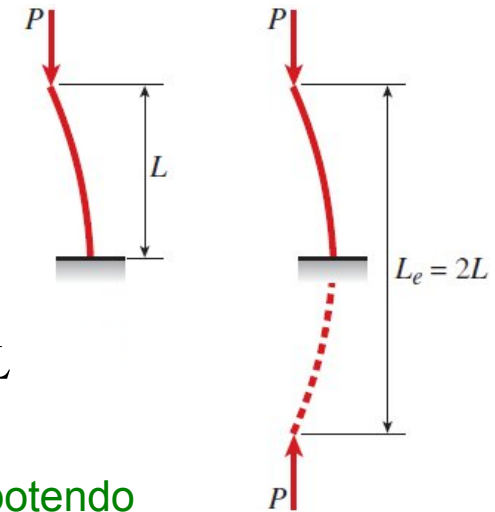
Ecco come risultano le
forme modali di
complessità crescente

Uso del concetto di lunghezza equivalente

Ribaltando verticalmente la forma della deformata incastrata libera si intuisce immediatamente la possibile analogia fra i due casi

La curvatura corrisponde esattamente facendo riferimento ad una trave pinned-pinned di lunghezza doppia

$$L_{eq} = 2L$$



Tale concetto verrà ripreso anche per altre configurazioni vincolari, potendo scrivere l'espressione del I carico critico in forma assolutamente generale

$$P_{cr} = \frac{\pi^2}{L_{eq}^2} EI$$

Od anche mediante l'utilizzo di un fattore effettivo di lunghezza K

$$P_{cr} = \frac{\pi^2}{(KL)^2} EI$$

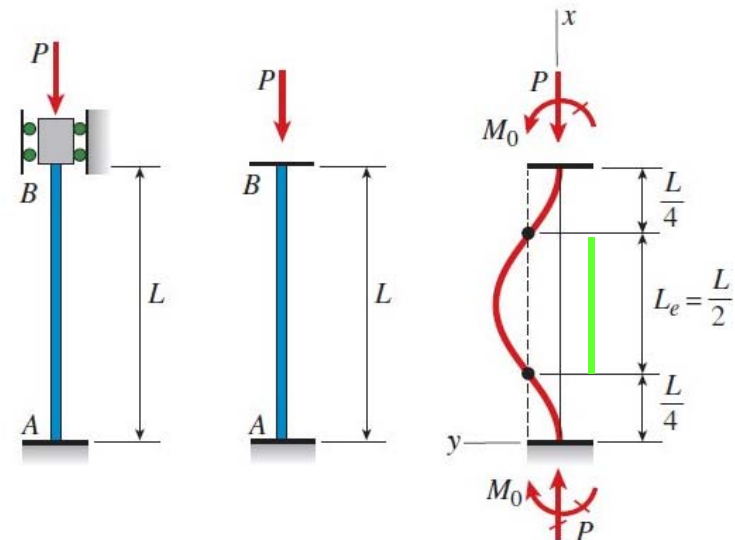
$$\left[K_{inc-lib} = 2 \right]$$

Trave incastrata - incastrata

Essendo la deformata di tipo sinusoidale, considerazioni geometriche semplici ci permettono di utilizzare il parallelismo con il I caso studiato

$$L_{eq} = \frac{L}{2}$$

$$\left[K_{inc-inc} = \frac{1}{2} \right]$$



Trave incastrata - incernierata

Le due reazioni orizzontali dovranno essere uguali ed opposte

Il momento di reazione alla base dipende solo da R

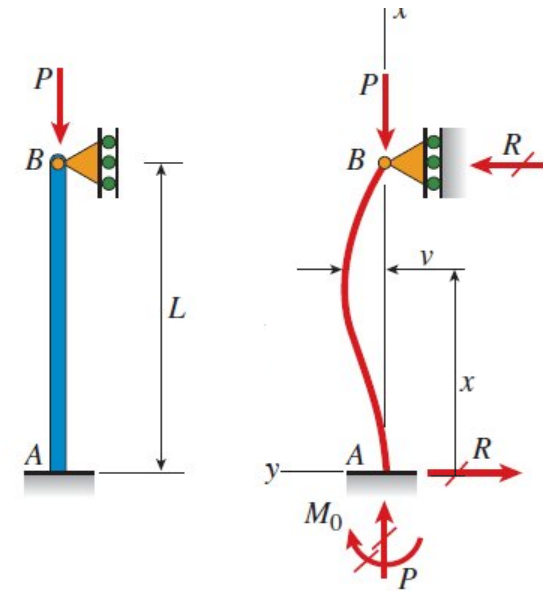
$$M_0 = RL \quad M(x) = M_0 - Pv - Rx$$

$$\Rightarrow EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -Pv + R(L - x)$$

Solita eq. diff. del II ordine a coefficienti costanti e forzata

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + k^2 v = \frac{R}{EI}(L - x)$$

$$k = \sqrt{\frac{P}{EI}}$$



3 incognite

La soluzione generale è

$$v(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + \frac{R}{P}(L - x)$$

Necessitano 3 c.c.

$$v(0) = 0 \Rightarrow C_2 + \frac{RL}{P} = 0$$

$$\left. \frac{\delta v}{\delta x} \right|_{x=0} = 0 \Rightarrow C_1 k - \frac{R}{P} = 0$$

$$v(L) = 0 \Rightarrow C_1 \sin kL + C_2 \cos kL = 0$$

Eliminando R dalle prime 2

$$C_2 = -C_1 kL$$

Nella terza

$$kL = \tan kL$$

La soluzione si ricava solo per via numerica

$$kL = 4.4934$$

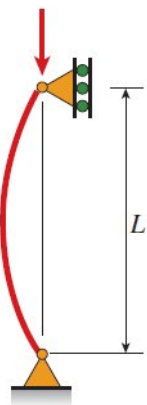
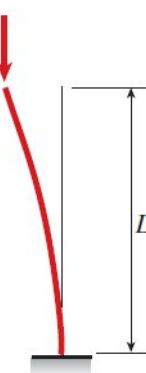
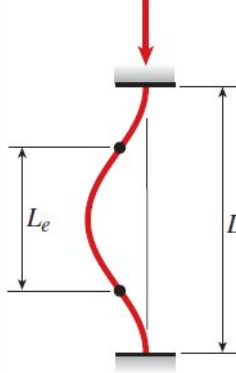
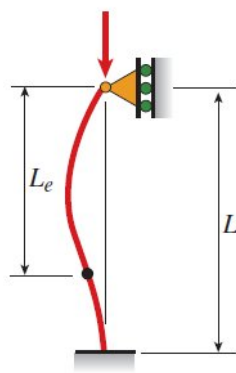
$$k = \sqrt{\frac{P_{cr}}{EI}} = \frac{4.4934}{L} \quad \longrightarrow \quad P_{cr} = 20.19 \frac{EI}{L^2} = 2.046 \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad \left[P_{cr} = \frac{\pi^2}{L_{eq}^2} EI \right]$$

Si giunge così ad una definizione numerica della lunghezza equivalente

$$L_{eq} = 0.699L \approx 0.7L$$

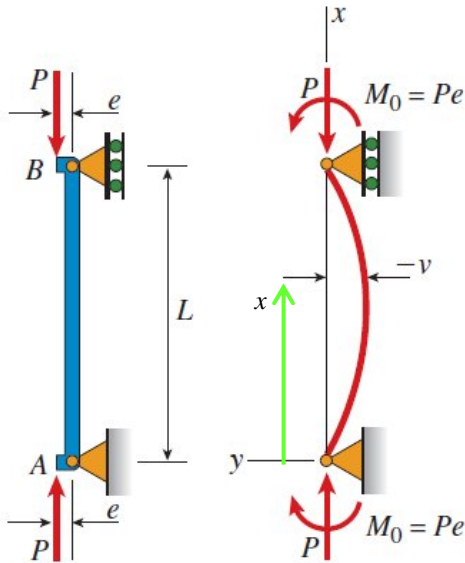
$$\left[K_{inc-cern} = 0.699 \right]$$

... riassumendo ...

(a) Pinned-pinned column	(b) Fixed-free column	(c) Fixed-fixed column	(d) Fixed-pinned column
$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$	$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$	$P_{cr} = \frac{2.046 \pi^2 EI}{L^2}$
			
$L_e = L$	$L_e = 2L$	$L_e = 0.5L$	$L_e = 0.699L$
$K = 1$	$K = 2$	$K = 0.5$	$K = 0.699$

ECCESTRICITÀ DEL CARICO ASSIALE APPLICATO

Determinando la condizione di equilibrio dei momenti in una generica posizione x si ottiene



$$M(x) = Pe - P v(x) = P(e - v)$$

$$EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = P(e - v) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + k^2 v = k^2 e$$

$$k = \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

La soluzione generale si ottiene immediatamente

$$v(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + e$$

Le c.c. da applicare sono le tipiche dell'app-app:

$$v(0) = 0 \quad ; \quad v(L) = 0$$

$$C_2 = -e$$

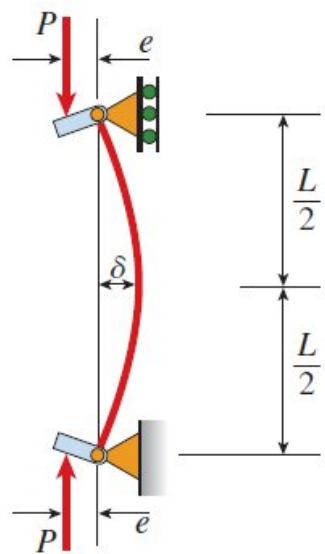
$$0 = C_1 \sin kL + e(1 - \cos kL) \quad \Rightarrow \quad C_1 = -e \tan \frac{kL}{2}$$

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= 2 \sin \alpha/2 \cos \alpha/2 \\ \cos \alpha &= \cos^2 \alpha/2 - \sin^2 \alpha/2 \end{aligned}$$

E si può ora scrivere la soluzione per sistema app-app:
$$v(x) = -e \left(\tan \frac{kL}{2} \sin kx + \cos kx - 1 \right)$$

Come si deduce esaminando la soluzione, essa è sempre finita, qualunque sia il carico applicato

Si esamina il massimo valore dello spostamento trasversale, che si verifica in mezzzeria:



$$\delta = -v\left(\frac{L}{2}\right) = e\left(\tan\frac{kL}{2}\sin\frac{kL}{2} + \cos\frac{kL}{2} - 1\right)$$

... semplificando $\delta = e\left(\sec\frac{kL}{2} - 1\right)$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

Ricordando la
definizione di k

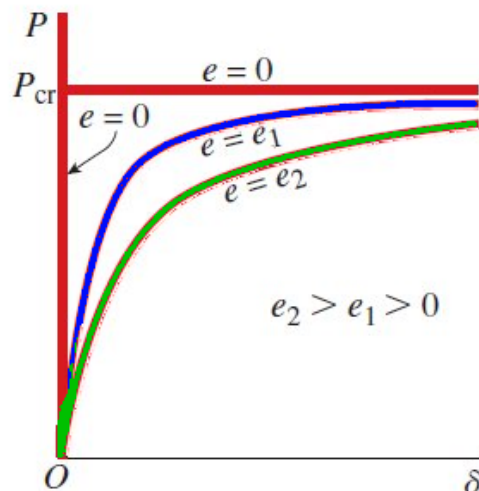
$$k = \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

e il valore del carico
critico app-app

$$P_{cr} = \frac{\pi^2}{L^2} EI$$

Si ottiene una relazione dove compare esplicitamente il rapporto tra il carico e il carico critico ad eccentricità nulla

$$\delta = e\left[\sec\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}\right) - 1\right]$$



Questa espressione si annulla quando $e = 0$ e diviene infinita quando $P = P_{cr}$

☀ Al crescere di e le curve si spostano proporz. verso destra

☀ Il valore di P_{cr} del caso ideale rimane punto di riferimento

☀ Quando la deflessione è troppo elevata la soluzione perde di significato perché si è fuori dalle ipotesi di lavoro

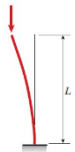
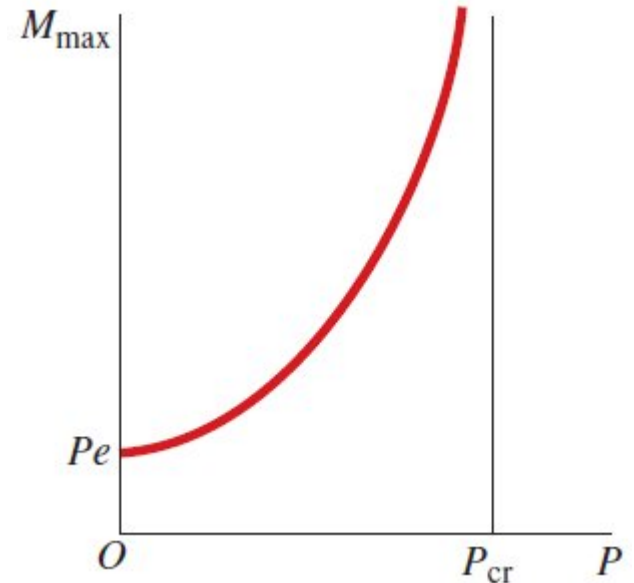
È opportuno evidenziare che, pur avendo svolto tutti i calcoli in regime di piccoli spostamenti ed elasticità lineare, la deflessione massima non risulta proporzionale al carico applicato.

Questa non linearità è indotta dal fatto che la deformabilità flessionale agisce nel senso di modificare il carico applicato andando a incrementare il braccio del momento della forza P

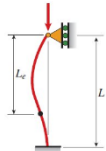
Si determina ora il valore massimo del momento (in mezzzeria):

$$M_{\max} = P(e + \delta) = Pe \sec\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}\right)$$

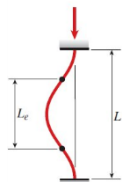
Nella figura viene rappresentato come il momento massimo varia non linearmente in funzione del carico applicato



Per questo caso le soluzioni sono desumibili dall'apprendendo $L'=2L$



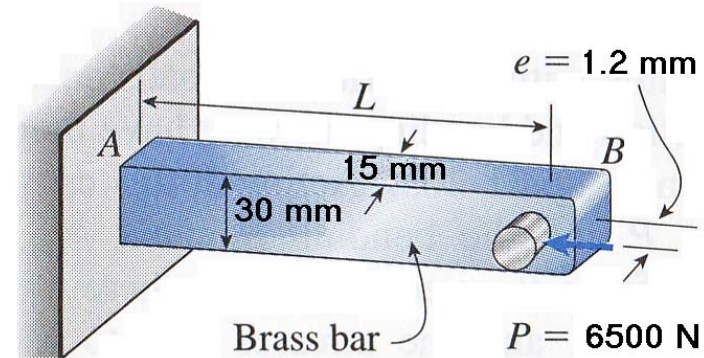
Non si può utilizzare la lunghezza equivalente $L'=0.699L$ e sostituirla alle espressioni precedenti – le soluzioni vanno ricercate per il caso specifico



Non ha alcun senso introdurre il concetto di eccentricità del carico in quanto il momento agli estremi è supportato dal vincolo stesso

Esempio

Una barra di ottone è sollecitata assialmente con un carico posto in posizione eccentrica. Se la massima deflessione ammissibile è 30 mm, qual è la massima lunghezza ammissibile?



$$E_{\text{ottone}} = 110 \text{ GPa}$$

Si tratta del caso inc-lib per cui vale la: $P_{cr} = \frac{\pi^2}{4L^2} EI$ (*)

Il momento di inerzia della sezione inflessa è: $I = \frac{bh^3}{12} = \frac{30 \cdot 15^3}{12} = 1.265 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$

La formula che da la massima inflessione (considerando attuale P_{cr}) coincide a quella del caso app-app

$$\delta = e \left[\sec \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} \right) - 1 \right]$$

Questa viene risolta in termini di P_{cr} :

$$P_{cr} = \frac{\pi^2}{4} P \left[\arccos \left(\frac{e}{e + \delta} \right) \right]^2 = \frac{\pi^2}{4} \cdot 6500 \cdot \arccos^2 \left(\frac{1.2}{1.2 + 30} \right) = 37658 \text{ N}$$

Dalla (*) si risolve in L_{amm}

$$L_{amm} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{EI}{P_{cr}}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{110000 \cdot 1.265 \cdot 10^5}{37658}} = 954.8 \text{ mm}$$

CARICO CRITICO PER UNA TRAVE IMPERFETTA

Il massimo valore di sollecitazione di compressione, presente in mezzzeria per la trave app-
app, si determina sommando i contributi di sforzo assiale e flessione

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{M_{\max} c}{I} \quad \left[\begin{array}{l} c = \text{max distanza in} \\ \text{compressione dal} \\ \text{baricentro sezione} \end{array} \right]$$

$$M_{\max} = Pe \sec \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} \right) = Pe \sec \left(\frac{L}{2\bar{r}} \sqrt{\frac{P}{EA}} \right)$$

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{ec}{\bar{r}^2} \sec \left(\frac{L}{2\bar{r}} \sqrt{\frac{P}{EA}} \right) \right]$$

Nota come formula della secante

$$\text{Rapporto eccentricità} = \frac{ec}{\bar{r}^2}$$

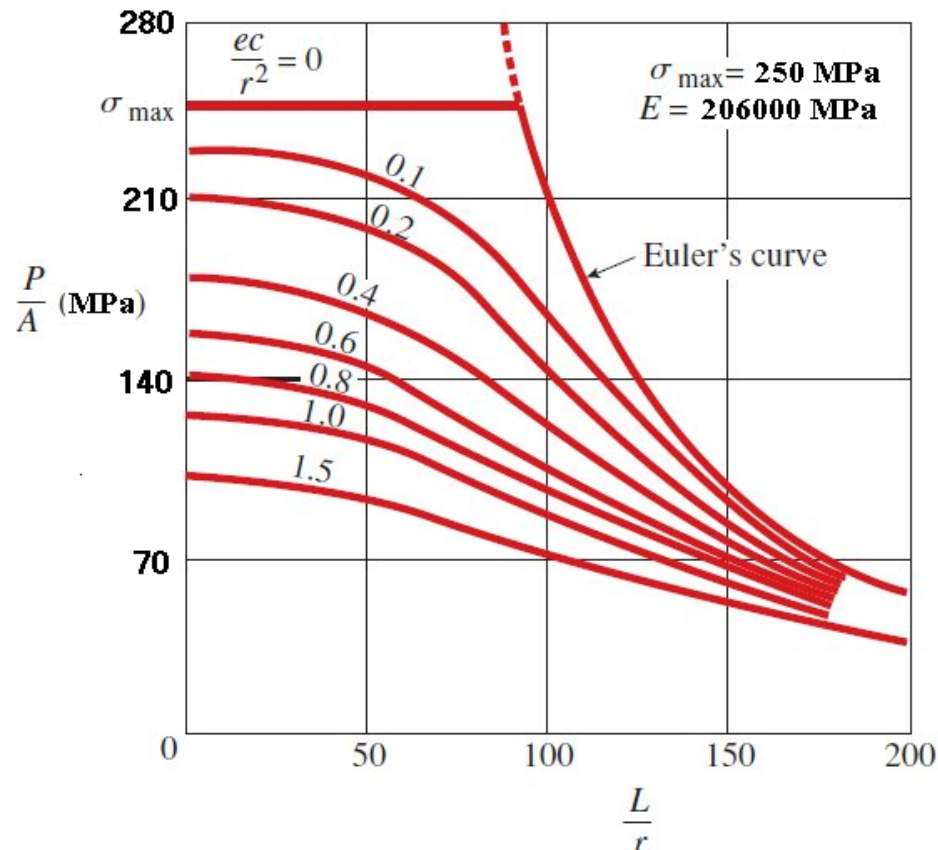
$$\bar{r} = \sqrt{I/A} \quad \text{Raggio di girazione}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2}{L^2} EI$$

Il valore del rapporto di eccentricità, può variare tra 0 e 3; tuttavia nei casi pratici risulta sempre < 1 . Nella pratica costruttiva si tende semplicemente a prenderlo = 1

La formula della secante può essere utilizzata come strumento di progetto noto che sia il valore dello stress ammissibile oppure come verifica del coefficiente di sicurezza rispetto al valore limite della tensione

Si noti che il coefficiente di sicurezza non viene calcolato rispetto al caso ideale $\sigma_{cr} = \frac{\pi^2}{L^2} \frac{EI}{A}$



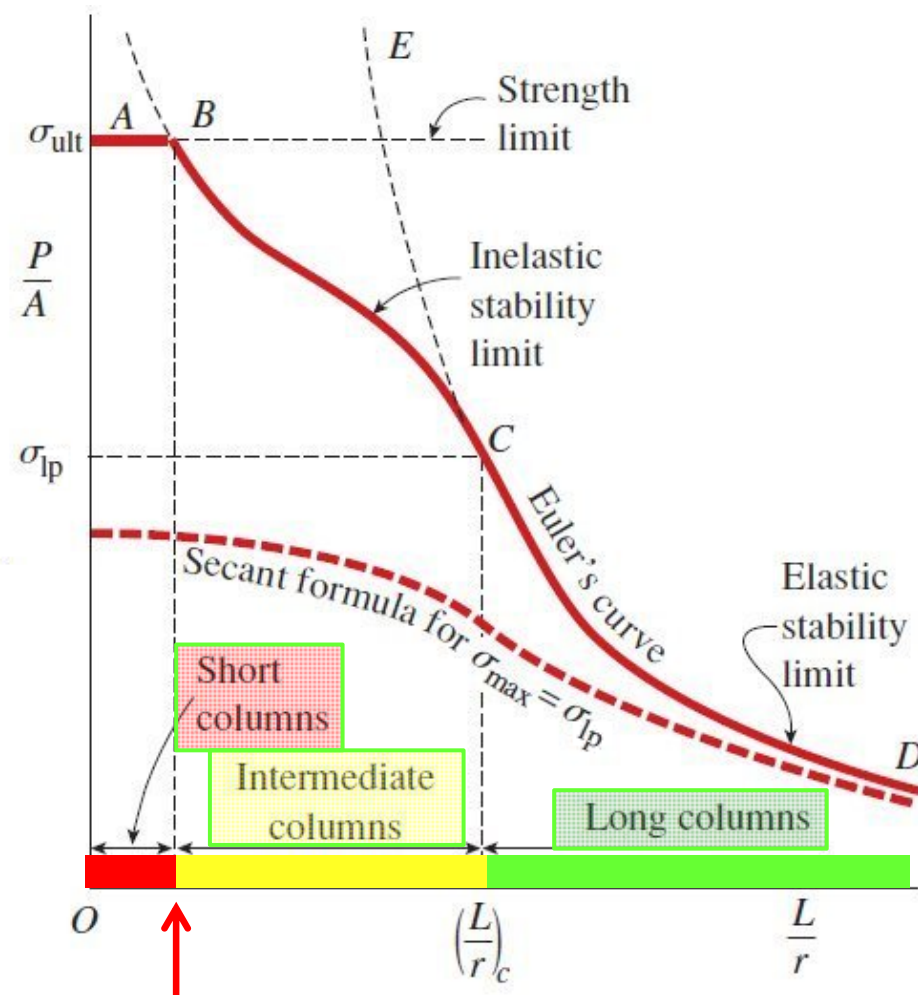
- Al crescere della snellezza la tensione ammissibile diminuisce fortemente
- L'effetto delle imperfezioni abbassa significativamente il carico ammissibile, tanto più quanto la trave è tozza
- La formula è applicabile ai soli casi di app-app e inc-lib mediante la L_{eq}
- Le colonne in compressione sono soggette sempre ad imperfezioni: centraggio appoggi, iniziale curvatura, carichi decentrati, ... si assume che il rapporto di eccentricità possa descrivere affidabilmente tali effetti

- Valori accettabili per il rapporto di eccentricità sono compresi tra 1 e 0.25 in funzione della precisione della applicazione
- Il coefficiente di sicurezza esprime il rapporto tra il carico letto dalla figura e quello effettivamente applicato
- Il valore di σ_{max} presente nel grafico andrebbe inteso come stress al limite della proporzionalità o tensione di snervamento

Instabilità elasto-plastica di colonne

Finora si è considerato solo il caso di materiali sollecitati al di sotto del loro limite di proporzionalità

Tuttavia, se la snellezza dell'elemento diminuisce, si entra in una zona non rappresentata dal comportamento elastico, ma all'interno della quale occorre considerare fenomeni inelastici



Si può determinare un valore critico di snellezza, che limita l'utilizzo di Eulero (**CD**) perché si supera lo stress di proporzionalità

$$\lambda_{cr} = \left(\frac{L}{r} \right)_{cr} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{lp}}}$$

Allo stesso modo si può determinare un collasso plastico finale (**AB**), comunque non superabile anche per snellezza molto bassa

Vi è dunque una zona intermedia, di instabilità inelastica dove l'andamento non banale (**BC**) raccorda i tratti **AB** e **CD**

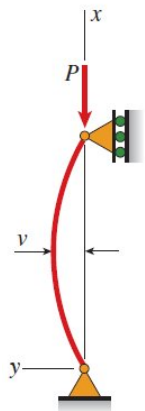
Nella formula secante si impone il valore di σ_{lp} su tutto il tratto tratteggiato

Nella zona intermedia non si può più considerare il comportamento lineare del materiale, si ricade in una zona ove la pendenza della curva *stress-strain* diminuisce per cui il carico critico dovrà risultare minore della previsione di Eulero

La curva **ABCD** viene utilizzata come curva di riferimento nella progettazione, utilizzando coefficienti di sicurezza sullo stress spesso uguali circa a 2

Teoria del modulo tangente

Superato il limite di proporzionalità la pendenza della curva diminuisce e si può definire E_t localmente

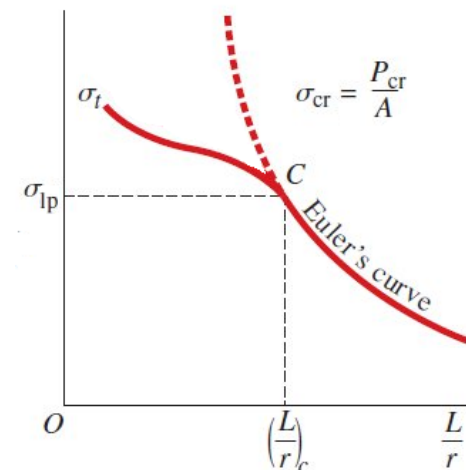
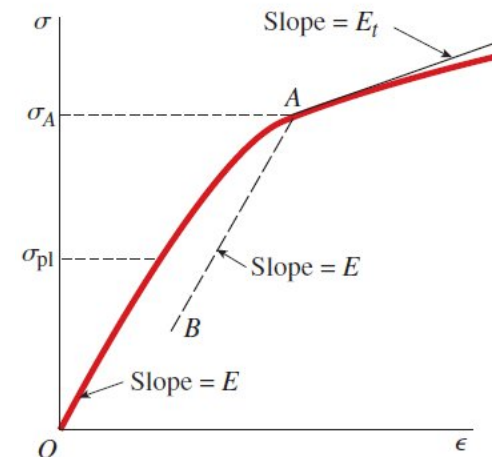


$$E_t(\varepsilon) = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$$

La trave rimane perfettamente rettilinea finché non sbanda, per cui si può applicare direttamente la soluzione di Eulero, utilizzando il modulo tangente

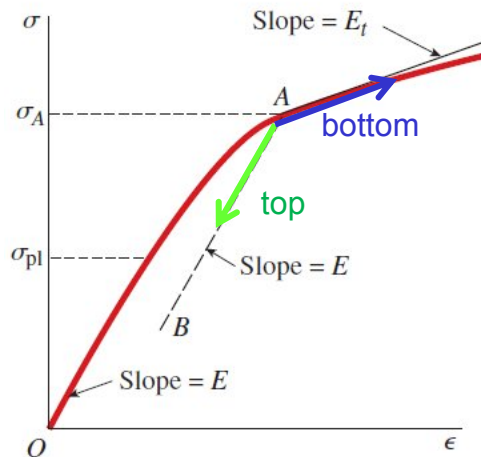
$$P_t(\varepsilon) = \frac{\pi^2 E_t(\varepsilon) I}{L^2} \quad ; \quad \sigma_t(\varepsilon) = \frac{P}{A} = \frac{\pi^2 E_t(\varepsilon)}{(L/\bar{r})^2}$$

Il metodo di calcolo si dimostra quindi essere iterativo, partendo da un E_t iniziale si calcola P_t , si trova il corrispondente σ_t e quindi un nuovo valore aggiornato di E_t da cui ripartire, fino a che tutti i valori convergono



Teoria del modulo ridotto

La precedente teoria presenta una difficoltà concettuale: quando avviene lo sbandamento la flessione genera: un incremento dello stress nel **bottom** compresso, uno scarico nel **top** flessionalmente in tensione

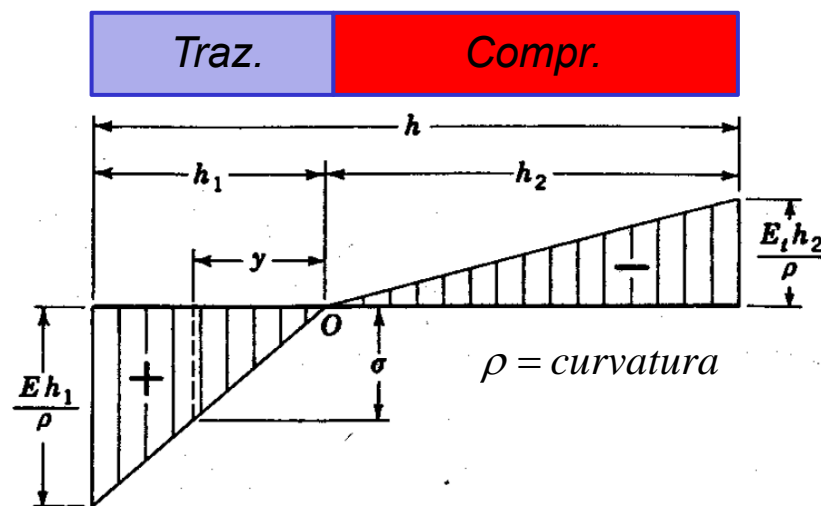


In pratica la trave si comporta come se fosse realizzata con due materiali differenti, uno con modulo tangente E_t , l'altro con il modulo di Young elastico

La difficoltà che risulta è che per il calcolo del bending bisogna anche tenere in considerazione lo sviluppo della sezione della trave

Si determina un modulo di Young ridotto E_{rid} che sarà maggiore del precedente E_t

Per una trave a sezione rettangolare si forma il seguente diagramma di sollecitazione:



$$\sigma = \frac{M}{J} y \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ}$$

$$\sigma = \frac{E y}{\rho}$$

Tensione risultante se si impone una curvatura

Ipotizzando che la flessione che si aggiunge al carico di compressione globale, sia a risultante assiale nulla:

$$\frac{1}{2} \frac{E h_1^2}{\rho} = \frac{1}{2} \frac{E_t h_2^2}{\rho}$$

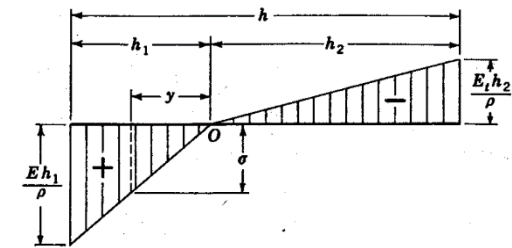
Questa, unita alla condizione geometrica

$$h_1 + h_2 = h$$

Fornisce una soluzione per i due valori di h_1 ed h_2 :

$$h_1 = \frac{h \sqrt{E_t}}{\sqrt{E} + \sqrt{E_t}} \quad h_2 = \frac{h \sqrt{E}}{\sqrt{E} + \sqrt{E_t}}$$

Ora si può calcolare il momento risultante, considerando le sollecitazioni nelle due zone in trazione e compressione



$$E h_1^2 = E_t h_2^2$$

$$M = \frac{E h_1}{\rho} \frac{b h_1}{2} \frac{2}{3} h_1 + \frac{E_t h_2}{\rho} \frac{b h_2}{2} \frac{2}{3} h_2$$

$$M = \frac{E h_1^2 b}{3 \rho} (h_1 + h_2) = \frac{E h_1^2 b}{3 \rho} h$$

Sostituendo il valore di h_1 calcolato in precedenza:

$$M = \frac{b h^2}{12 \rho} \cdot \frac{4 E E_t}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_t})^2}$$

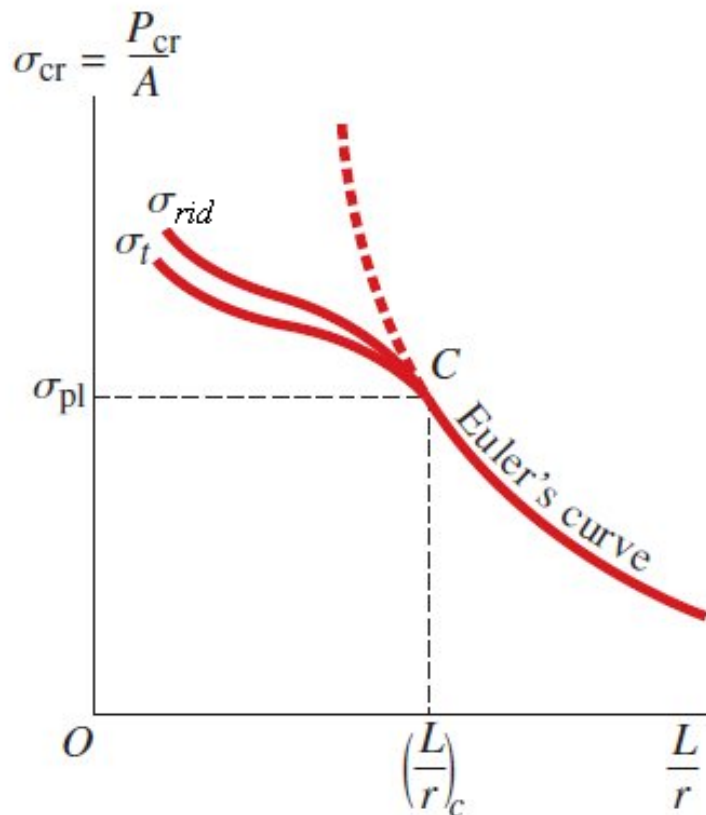
Dal confronto con la formula valida per un monomateriale

$$M = \frac{b h^2}{12 \rho} \cdot E$$

Quindi, per la sezione rettangolare, si ha un modulo risultante E_{rid}

$$E_{rid}(\varepsilon) = \frac{4EE_t}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_t})^2}$$

Si deduce che il modulo di Young ridotto dipende sia dalle caratteristiche del materiale, che dallo sviluppo geometrico della sezione della trave



$$P_{rid}(\varepsilon) = \frac{\pi^2 E_{rid}(\varepsilon) I}{L^2} \quad ; \quad \sigma_{rid}(\varepsilon) = \frac{P}{A} = \frac{\pi^2 E_{rid}(\varepsilon)}{(L/\bar{r})^2}$$

La teoria che tiene in considerazione il modulo ridotto fornisce carichi di instabilità un poco superiori a quella precedente

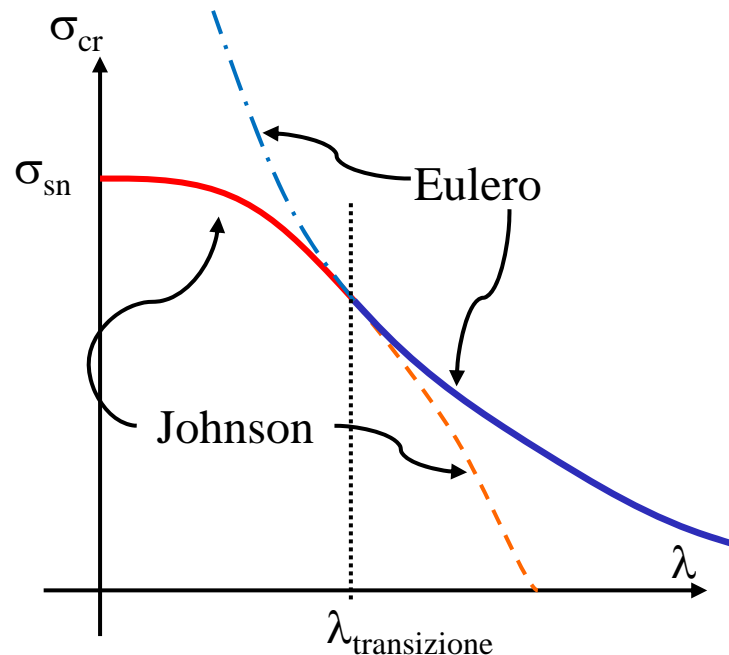
Per altre forme di sezioni occorre inserire nel calcolo anche la variabilità di b ottenendo risultati differenti

Anche in questo caso sarà necessario determinare la soluzione attraverso una procedura iterativa

Modello pratico di Johnson

Secondo tale modello, nella zona a comportamento elasto-plastico si evidenzia un andamento parabolico del tipo

$$\sigma_{cr,pl} = \sigma_{sn} - k\lambda^2 \quad \text{con} \quad k = \left(\frac{\sigma_{sn}}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{E}$$



Appare chiaro che per fare una verifica occorre preliminarmente valutare dal valore della snellezza quale delle due formule sia più opportuna

$$\sigma_{cr,E} = \sigma_{cr,J} \Rightarrow \frac{\pi^2 E}{\lambda_t^2} = \sigma_s - \left(\frac{\sigma_s}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{E} \lambda_t^2$$

L'equazione di IV grado risolvibile ha il determinante nullo, le due curve sono tangenti

$$\lambda_t = \sqrt{\frac{2\pi^2 n E}{\sigma_s}}$$

Per valori più elevati della snellezza di transizione si utilizza il collasso di Eulero, per valori più bassi l'instabilità parabolica di Johnson

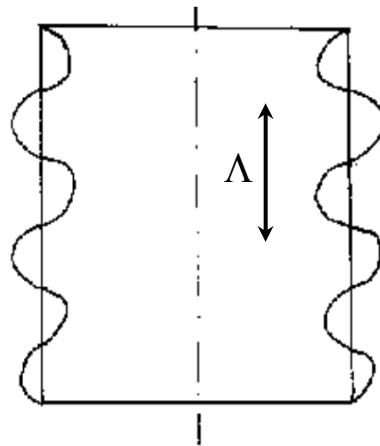
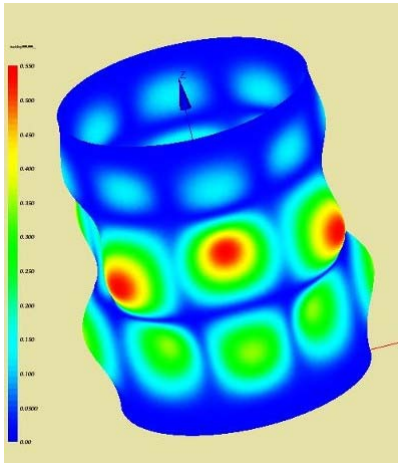
Esempio

acciaio, se $\sigma_s = 500$ MPa, $\lambda_t = 90,1$
se $l = 1000$ mm, $d_t = 44.39$ mm

Diametro $> d_t$ collasso plastico

Diametro $< d_t$ collasso elastico

Collasso elastico di tubi in parete sottile (Instabilità globale)



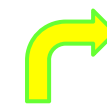
Λ è la lunghezza d'onda della deformazione associata all'insorgere della instabilità

La lunghezza assiale del tubo deve essere sufficiente a contenere alcune (almeno 3) lunghezze d'onda per poter del tutto trascurare l'irrigidimento dovuto agli effetti bordo

Il raggio deve essere altresì molto maggiore dello spessore (almeno 20 volte)

Per un cilindro di spessore s e raggio medio R :

$$\Lambda = \frac{2\pi}{\sqrt[4]{12(1-\nu^2)}} \sqrt{Rs}$$



Segue dimostrazione

Si può altresì dimostrare che la tensione critica assume il valore:

$$\sigma_{cr} = \frac{E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \left(\frac{s}{R} \right)$$

Analogamente a prima, per un tubo a spessore sottile, si calcola la lunghezza libera di inflessione che comporta il passaggio tra una instabilità locale elastica ed una globale elastica.

$$\frac{\pi^2 E J}{A L^2} = \frac{E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \left(\frac{s}{R} \right) \quad \Rightarrow \quad L^2 = \frac{\pi^2 \sqrt{3(1-\nu^2)}}{8} \frac{(R_e + R_i)(R_e^2 + R_i^2)}{R_e - R_i}$$

In un tubo di alluminio ($\nu=0.33$), raggio esterno e interno $R_e = 50$ mm, $R_i = 48$ mm, risulta $L = 689$ mm, a cui corrisponde, ($E=70000$ MPa), una tensione critica di **197.5 MPa**. ($\Lambda=34.2$ mm)

Dimostrazione

Un tubo sottile può pensarsi come formato da una serie di elementi monodimensionali lateralmente connessi

Se anche i carichi sono assialsimmetrici, il comportamento di un singolo elemento può caratterizzare l'intero tubo, il problema diviene monodimensionale, su fondazione elastica

Imponendo l'equilibrio radiale per una lunghezza assiale unitaria:

$$Ku R d\vartheta = 2 \sigma_c s \frac{d\vartheta}{2}$$

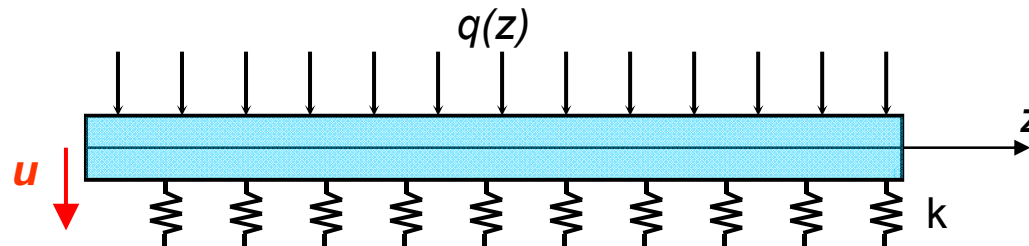
[Si assume che la σ_a sia ininfluyente circonferenzialmente]

La tensione circonferenziale in funzione di u : $\sigma_c = E \varepsilon_c = E \frac{2\pi(R-u) - 2\pi R}{2\pi R} = -E \frac{u}{R}$

Sostituendo tale valore si determina il valore di K (ora per unità di superficie) equivalente al trattenimento circonferenziale del mantello

$$K = \frac{E s}{R^2} \quad k = 2\pi R K = 2\pi \frac{E s}{R}$$

Quindi la tubazione sottile, caricata assialsimmetricamente, può essere trattata come una trave su fondazione elastica



Ora si può studiare comportamento di un concio di trave su fondazione elastica soggetto a carico assiale P

$$\frac{dV}{dz} = w + ku$$

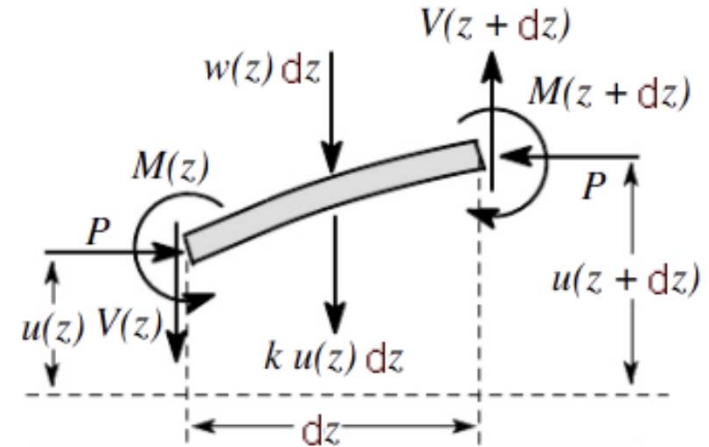
$$\frac{dM}{dz} = P \frac{du}{dz} + V$$

$$M = -E'I \frac{d^2u}{dz^2}$$

Considerando assente il carico distribuito w



$$\frac{d^4u}{dz^4} + \frac{P}{E'I} \frac{d^2u}{dz^2} + \frac{ku}{E'I} = 0$$



La soluzione, del tipo $u = Ae^{az}$, si determina cercando gli zeri della soluzione algebrica

$$a^4 + \frac{P}{E'I} a^2 + \frac{k}{E'I} = 0$$

$$a^2 = \frac{1}{2} \left(-\frac{P}{E'I} \pm \sqrt{\left(\frac{P}{E'I} \right)^2 - \frac{4k}{E'I}} \right)$$

Nella soluzione che si ricava, il termine di decadenza esponenziale si annulla se si annulla la precedente radice

$$P = P_0 = \sqrt{4kE'I}$$

In tale caso il carico critico comporta la criticità estesa a tutto lo sviluppo longitudinale della trave su fondazione elastica, con l'apparire, in tutta la sua estensione di numerosi *fold*

Il momento di inerzia complessivo vale: $I = \frac{2\pi R s^3}{12}$

Nelle sollecitazioni bidimensionali con deformazione laterale impedita, il modulo del rapporto tra tensione e deformazione relativa assume il valore

$$E' = \frac{E}{1-\nu^2}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_c = (\sigma_c - \nu\sigma_a)/E = 0 \\ \varepsilon_a = (\sigma_a - \nu\sigma_c)/E \end{cases}$$



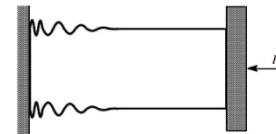
$$\sigma_a = \frac{E}{1-\nu^2} \varepsilon_a$$

La rigidezza equivalente era stata calcolata come $k = 2\pi \frac{E s}{R}$

$$P_0 = \sqrt{4kE'I} \quad P_0 = \sqrt{4 \cdot \left(2\pi \frac{E s}{R}\right) E' \left(\frac{2\pi R s^3}{12}\right)} \quad P_0 = \frac{2\pi E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} s^2$$

Passando ora al calcolo della tensione critica assiale:

$$\sigma_{cr} = \frac{P_0}{2\pi R s} = \frac{E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \left(\frac{s}{R}\right)$$



Questo calcolo è valido purché la lunghezza assiale del tubo sia sufficientemente lunga per assicurare la formazione dei *fold*

Per quanto riguarda la lunghezza d'onda Λ possiamo considerare i termini della soluzione ottenuta annullando i termini della equazione caratteristica:

La soluzione generale, avendo prima azzerato la radice per determinare P_0 , assume la forma

$$u = A'e^{i\sqrt{P_0/2E'I} \cdot z} + B'e^{-i\sqrt{P_0/2E'I} \cdot z} = A\sin\left(\sqrt{P_0/2E'I} \cdot z\right) + B\cos\left(\sqrt{P_0/2E'I} \cdot z\right)$$

Possiamo ora imporre che la soluzione sia periodica dopo una lunghezza Λ :

$$\sqrt{P_0/2E'I} \cdot \Lambda = 2\pi$$

Sostituendo i valori già calcolati per P_0 , E' e I

$$\frac{2\pi E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} s^2 \cdot \frac{(1-\nu^2)}{2E} \cdot \frac{12}{2\pi R s^3} \cdot \Lambda^2 = 4\pi^2$$

$$\left[\begin{array}{l} P_0 = \frac{2\pi E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} s^2 \\ E' = \frac{E}{1-\nu^2} \\ I = \frac{2\pi R s^3}{12} \end{array} \right.$$

Semplificando la precedente si ottiene infine la lunghezza d'onda della deformata

$$\Lambda = \frac{2\pi}{\sqrt[4]{12(1-\nu^2)}} \sqrt{Rs} \approx 3.45 \sqrt{Rs}$$

Lunghezza d'onda delle pieghe longitudinali, valore in genere molto piccolo e facilmente superabile