



**Politecnico
di Torino**

Politecnico di Torino

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

A.A. 2022/2023

25 ottobre 2023

**Sviluppo di modelli strutturali 1D e 2D per
il danneggiamento progressivo di strutture
in composito**

Relatori:

Prof. Marco Petrolo

Ing. Salvatore Saputo

Candidata:

Maura Colucci

Ringraziamenti

In primis vorrei ringraziare il Professor Petrolo che mi ha dato la possibilità di lavorare a questa tesi, guidandomi nell'impostazione ma lasciandomi sempre ampia libertà nella scelta delle tematiche e dei casi di studio da trattare.

Ringrazio in modo particolare l'Ingegnere Saputo che mi ha seguito e supportato durante tutto il percorso che ha portato alla stesura della tesi, sempre con estrema chiarezza, disponibilità e gentilezza nei miei confronti.

Grazie a tutti i miei compagni di corso, al Politecnico e nei sei mesi trascorsi in Erasmus all'IPSA, per avermi aiutato e arricchito sia a livello accademico che personale.

Al di fuori dell'ambito universitario un ringraziamento va certamente alla mia famiglia che mi ha sempre sostenuto e garantito la possibilità di studiare ciò che volevo nelle migliori condizioni possibili. La loro presenza è per me una sicurezza imprescindibile.

Grazie a Inno, per la presenza costante e la pazienza di ascoltarmi quando ho un problema o un momento di difficoltà.

Grazie ai miei amici di sempre, dai più ai meno geograficamente vicini, che sono un punto fermo su cui so di poter fare costante affidamento.

Grazie alle mie compagne di squadra, presenti e passate, per aver condiviso con me una passione che mi ha accompagnato in questi anni garantendomi sempre una valvola di sfogo e occasione di divertimento.

Infine, grazie a me stessa per essere arrivata fino a qui.

Abstract

Il problema del danneggiamento progressivo dei materiali compositi è di estremo interesse per l'industria aerospaziale: i campi di indagine sono molteplici, dai fenomeni di impatto immediatamente visibili sulle strutture al progressivo affaticamento dei materiali nel corso della vita operativa, a seconda della tipologia di carichi ad essi applicati. L'implementazione di modelli numerici efficienti per lo sviluppo di queste problematiche è essenziale per migliorare la previsione del comportamento dei componenti e degli eventuali rischi che possono presentarsi, ma richiede elevati sforzi computazionali e l'interfaccia con problematiche molto complesse.

Con il presente lavoro di tesi si vogliono studiare le principali teorie, i modelli strutturali, i criteri di failure e i meccanismi di danneggiamento a disposizione per i materiali compositi ingegneristici rinforzati con fibre lunghe, con una particolare attenzione verso la Formulazione Unificata di Carrera (CUF), dove l'aggiunta di funzioni di espansione di ordine e tipologia variabili permette di migliorare la cinematica del problema. Questo consente lo sviluppo di modelli 1D e 2D che garantiscono una precisione confrontabile con quella delle discretizzazioni 3D offerte dai codici di calcolo commerciali, ma uno sforzo computazionale significativamente ridotto in termini di tempi e gradi di libertà (DOFs). All'interno della tesi sono stati trattati diversi casi di analisi, sia implicite che esplicite, sia statiche che dinamiche: partendo da test di trazione, compressione e flessione di travi e piastre, si è successivamente passati a casi di impatto via via più complessi. Per la schematizzazione del contatto tra corpi, responsabile della non linearità dei problemi di impatto, si è considerato un approccio penalty di tipo node-to-surface, basato sui moltiplicatori di Lagrange. Infine, per l'implementazione del danneggiamento progressivo, basato sull'approccio del Continuum damage mechanics, si è utilizzato il modello del CODAM2 a confronto con la nuova routine Hashin + Puck, basata sui criteri di failure omonimi. La routine è stata verificata attraverso dei test a trazione, a compressione e di impatto a dimostrazione della sua utilizzabilità ed efficienza.

Abstract (English version)

The progressive damage modelling of composite materials is a central topic for the aerospace industry: there are various fields of investigation, from impact phenomena barely visible on structures to progressive damage and fatigue on composite materials during their service life, depending on the type of load applied. The implementation of efficient numerical models is fundamental to improve the predictions about the behavior of laminates and the hazards that can happen during the entire life of structures, but it is a challenging task because of the high computational effort required and the complexity of the phenomenon.

The aim of the present work is to deal with the main theories, structural models, failure criteria and damage mechanics for the analysis of fiber-reinforced laminates with a focus on the Carrera Unified Formulation (CUF), where the definition of additional expansion functions of various types and orders give the opportunity to improve the kinematic characterization of classical finite elements. This approach leads to the definition of 1D-CUF and 2D-CUF models that offer an high accuracy but a reduced time and computational cost if compared to the 3D models available on the market from commercial codes. In the present work different study cases have been considered, both implicit and explicit, static and dynamic: starting with traction, compression and bending tests we have then moved to more complex impact analysis. For the modelling of the node-to surface contact between bodies we have referred to a penalty approach based on the Lagrange multipliers. Finally, for the implementation of the progressive damage, based on the Continuum damage mechanics approach, it has been considered a comparison between the material model offered by CODAM2 and the new Hashin + Puck routine, based on homonymous failure criteria. The Hashin + Puck routine has been validated through numerical simulations in tension, compression and impacts to prove its usability and reliability.

Indice dei contenuti

INDICE DEI CONTENUTI	I
INDICE DELLE FIGURE	III
INDICE DELLE TABELLE	VI
1. INTRODUZIONE	2
1.1 I MATERIALI COMPOSITI	2
1.2 L'APPROCCIO "DAMAGE TOLERANCE"	5
1.3 TEORIE E MODELLI NUMERICI PER LO STUDIO DEI LAMINATI	9
1.4 L'IMPATTO SUI LAMINATI.....	10
1.4.1 La classificazione dei fenomeni di impatto.....	10
1.4.2 Le conseguenze dell'impatto sui laminati.....	10
1.5 GLI OBIETTIVI DELLA TESI.....	12
2. ANALISI PROGRESSIVA DEL DANNEGGIAMENTO: TEORIE E METODOLOGIE DI STUDIO.....	14
2.1 CARATTERIZZAZIONE DEI MATERIALI ORTOTROPI	14
2.2 TEORIE PER LO STUDIO DEI LAMINATI.....	16
2.2.1 Approccio Equivalent Single Layer	16
2.2.2. Approccio Layer-Wise	19
2.3 CRITERI DI FAILURE.....	20
2.3.1 Criterio della massima tensione e della massima deformazione.....	21
2.3.2 Criteri di rottura polinomiali	21
2.3.3 Criterio di Hashin	23
2.3.4 Criterio di Puck	25
2.4 MECCANISMI DI DANNEGGIAMENTO DEL MATERIALE.....	27
2.4.1 Material property degradation method.....	28
2.4.2 Continuum damage mechanics.....	29
3. LA FORMULAZIONE UNIFICATA DI CARRERA (CUF).....	31
3.1 DEFINIZIONE DELLA CUF.....	31
3.1.1 Le espansioni di Taylor	32
3.1.2 Le espansioni di Lagrange.....	33
3.1.3 Il modello Trave	33
3.1.4 Il modello Piastra	36
3.1.5 La matrice di rigidezza	38
3.2 TIPOLOGIE DI ANALISI	40
3.2.1 Analisi implicite	41
3.2.2 Analisi esplicite	43
3.3 DEFINIZIONE DEL CONTATTO NELLA CUF.....	45
3.3.1 Contatto Node-to-node	46
3.3.2 Contatto Node-to-surface	48
3.4 MODELLO DI DANNEGGIAMENTO INTRA-LAMINARE	49

3.4.1	CODAM2	49
3.4.2	Hashin + Puck	51
4.	SIMULAZIONI NUMERICHE.....	56
4.1	ANALISI STATICHE E LINEARI	56
4.1.1	Modelli 1D-CUF (travi)	56
4.2.1	Modelli 2D-CUF (piastre).....	64
4.5	ANALISI DINAMICHE, ESPLICITE E NON LINEARI.....	71
4.5.1	Test di trazione sul singolo elemento	71
4.5.2	Softening della fibra dopo il picco massimo	74
4.5.3	Test di compressione sul singolo elemento.....	75
4.5.4	Test di trazione su piastre con intaglio centrale	77
4.5.5	Test di compressione su laminati intagliati al centro	80
4.6	IMPATTI A BASSA VELOCITÀ	83
4.6.1	Impatti su piastre in Alluminio in campo lineare	83
4.6.2	Impatti su piastre in composito: passaggio al caso non lineare.....	88
4.6.3	Impatto non lineare con Hashin + Puck: piastra supportata.....	92
4.6.4	Impatto non lineare con Hashin + Puck: piastra con rinforzo a T.....	96
5.	CONCLUSIONI E PROSPETTIVE FUTURE.....	101
	BIBLIOGRAFIA.....	105

Indice delle Figure

Figura 1-1: Evoluzione dell'uso del composito in aeronautica negli ultimi 50 anni, aggiornata fino al 2020 [2].	5
Figura 1-2: Applicazione della "Damage Tolerance"	6
Figura 1-3: Approccio "no growth" (a sinistra) e "slow growth" (a destra) a confronto [4].	7
Figura 1-4: 2 tipologie di matrix cracks: (a) Tensile crack, (b) Shear crack [7].	11
Figura 1-5: Possibili orientazioni della delaminazione a nocciolina in un laminato [10].	12
Figura 2-1: Esempio di laminato e relativo sistema di riferimento SR [15].	14
Figura 2-2: Sistema di riferimento del laminato e della singola lamina a confronto, con l'evidenza dell'angolo di rotazione θ .	16
Figura 2-3: Rappresentazione esemplificativa del concetto di ESL in un laminato, con spostamenti s e deformazioni ε (entrambi riportati in colore rosso) continue [16].	17
Figura 2-4: Assunzioni delle teorie CLT, FSDT e HSDT a confronto in un caso unidimensionale [16].	18
Figura 2-5: Rappresentazione esemplificativa del concetto di LW in un laminato, con spostamenti s e deformazioni ε (entrambi riportati in colore rosso) continue all'interno di ciascuno strato di laminato [16].	19
Figura 2-6: Esempio di confronto tra modelli ESL e LW in termini di spostamenti e deformazioni.	20
Figura 2-7: Modi di rottura e piani di rottura.	24
Figura 2-8: Sistema di riferimento materiale 123 ruotato in LNT rispetto al piano di rottura del laminato [24].	26
Figura 2-9: Schema rappresentativo del funzionamento della Progressive Failure Analysis [25].	27
Figura 2-10: Schema rappresentativo delle tre possibili applicazioni del MPDM.	28
Figura 2-11: Evoluzione del danneggiamento fino alla rottura in un composito ingegneristico [26].	30
Figura 3-1: Sistema di riferimento del generico elemento beam, orientato lungo l'asse y .	31
Figura 3-2: Schematizzazione del modello CUF-1D [27].	33
Figura 3-3: Elementi 1D selezionabili e relative funzioni di interpolazione nodale. Il valore ξ può variare da +1 a -1 e indica la posizione del nodo all'interno del sistema naturale dell'elemento trave.	34
Figura 3-4: Espansioni LE1, LE2 e LE3 utilizzabili nella CUF-1D.	34
Figura 3-5: Schematizzazione del modello CUF-2D [27].	36
Figura 3-6: Esempio di passaggio dal modello di piastra reale alla schematizzazione tramite CUF, con formulazione agli elementi finiti (elemento Q9, con nodi evidenziati in rosso) e relativa espansione Lagrangiana (in azzurro).	36
Figura 3-7: Schema di costruzione della matrice di rigidità globale.	40
Figura 3-8: Schema riepilogativa del metodo iterativo Full Newton-Raphson usato nelle analisi implicite [28].	41
Figura 3-9: Rappresentazione del metodo di Newton-Raphson con evidenza del primo step di carico $\Delta P1$. All'interno di ogni step c'è un loop interno dove R_i rappresenta il resto, ovvero la differenza tra il valore atteso $\Delta P1$ e il primo valore di approssimazione	

considerato F1; il loop interno prosegue fino a che non si raggiunge la convergenza a $\Delta P1$, per poi passare al successivo step di carico [28].	42
Figura 3-10: Esempio di sistema non lineare, dove la risposta $F(t)$ viene calcolata tramite suddivisione in n passi di ampiezza Δt [30].	44
Figura 3-11: Rappresentazione schematica del contatto node-to-node [33].	46
Figura 3-12: Rappresentazione schematica del contatto node-to-surface [33].	49
Figura 3-13: Schematizzazione dei sistemi di riferimento 123 e LNT per il criterio di Puck della matrice a compressione [36].	52
Figura 3-14: Metodo SPIS nel caso di due massimi locali. θ rappresenta l'angolo di inclinazione del piano di frattura, indicato nel testo come α , mentre f_e corrisponde all'indice di failure Fmc [37].	53
Figura 4-1: Configurazione di carico e vincolo della trave 1 e relativa sezione.	57
Figura 4-2: Grafico dello spostamento relativo all'analisi di convergenza della trave 1.	57
Figura 4-3: Configurazione di carico e vincolo della trave 2 e relativa sezione.	58
Figura 4-4: Andamento dello stress di Von Mises relativo all'analisi di convergenza per la trave 4.	58
Figura 4-5: Configurazione di carico e vincolo della trave 3 e relativa sezione.	59
Figura 4-6: Grafico dello spostamento relativo all'analisi di convergenza della trave 1.	59
Figura 4-7: Configurazione di carico e vincolo della trave 4 e relativa sezione.	60
Figura 4-8: Grafico dello spostamento relativo all'analisi di convergenza della trave 4.	60
Figura 4-9: Configurazione di carico e vincolo della piastra 1.	64
Figura 4-10: Distribuzione dello stress di Von Mises in Abaqus e con la CUF a confronto per la piastra 1.	65
Figura 4-11: Grafico di confronto tra il numero di elementi Q4, Q9 e Q16 necessari per portare la mesh a convergenza.	67
Figura 4-12: Spostamento con Abaqus (a) e la CUF (b) a confronto nel caso della piastra 2.	69
Figura 4-13: Spostamento con Abaqus (a) e CUF (b) a confronto, nel caso della piastra 3.	70
Figura 4-14: Configurazione schematizzata del test di trazione sul singolo elemento.	72
Figura 4-15: Curve stress-strain per il singolo elemento nel caso di trazione uniassiale.	72
Figura 4-16: Risposta del laminato $[90/45/0/-45]_{4s}$ costituito da un unico elemento nel piano sottoposto ad un carico di trazione uniassiale in direzione y (equivalente all'orientamento a 90 gradi delle fibre).	73
Figura 4-17: Evoluzione del danno della fibra e della matrice all'interno di ogni layer con la nuova routine basata su Hashin 3D e Puck con angolo variabile.	73
Figura 4-18: Curve di Softening di tipo lineare e Linear-Brittle per la fibra a compressione dopo il raggiungimento del valore di picco. Il numero (20, 40, 60, 80) indica la percentuale del valore massimo utilizzato come resistenza residua.	74
Figura 4-19: Curve stress-strain per il singolo elemento nel caso di compressione uniassiale.	75
Figura 4-20: Risposta del laminato $[90/45/0/-45]_{4s}$ costituito da un unico elemento nel piano sottoposto ad un carico di compressione uniassiale in direzione y (equivalente all'orientamento a 90 gradi delle fibre).	76
Figura 4-21: Rappresentazione schematica del provino con intaglio centrale con laminazione $[45/90/-45/0]_{4s}$ con condizioni al contorno applicate.	77
Figura 4-22: Curve deformazione – tensione risultanti dalle analisi sul provino (Scala 8) al variare della mesh nel piano della piastra. Le curve ottenute sono il risultato dell'analisi di convergenza (a): il valore finale è confermato dai risultati sperimentali di riferimento [38] e dai valori numerici ottenuti con il CODAM2 (b).	78
Figura 4-23: Geometria e discretizzazione adottata nel piano della piastra (48 Q9).	80

Figura 4-24: Analisi di convergenza della mesh (FEM) della piastra forata a compressione. Stress a rottura della piastra forata [45/90/-45/0] _{4s} ; sul modello con 48 elementi Q9 si effettua anche il test variando l'espansione da LE1 a LE2 e LE3.....	81
Figura 4-25: Stress a rottura della piastra forata [45/90/-45/0] _{4s} con 48 elementi Q9 nel piano variando la tipologia di Softening e l'espansione per il caso Br-50, più vicino al risultato reale atteso di riferimento.....	81
Figura 4-26: Evoluzione del danneggiamento a compressione di fibra (a) e matrice (b).	83
Figura 4-27: Configurazione della piastra incastrata e dell'impattore, per la piastra 1.....	84
Figura 4-28: Distribuzione dello stress di Von Mises e deformata, nel caso della piastra 1. ..	84
Figura 4-29: Evoluzione dell'energia cinetica e interna durante l'impatto, nel caso della piastra 1.	84
Figura 4-30: Evoluzione dell'Artificial Strain Energy durante l'impatto, nel caso della piastra 1.	85
Figura 4-31: Evoluzione dello spostamento durante l'impatto nel punto di contatto con l'impattore, nel caso della piastra 1.	85
Figura 4-32: Schema della piastra in Alluminio e dell'impattore.....	86
Figura 4-33: Evoluzione dell'energia cinetica e interna durante l'impatto con la CUF (a) e con Abaqus (b).	87
Figura 4-34: Grafico di confronto tra lo spostamento massimo in funzione del tempo in Abaqus e con la CUF.	87
Figura 4-35: Configurazione della piastra incastrata e dell'impattore, nel caso della piastra 2.....	88
Figura 4-36: Distribuzione dello stress di Von Mises sulla deformata della piastra 2.....	89
Figura 4-37: Evoluzione dell'energia cinetica, interna e dell'Artificial Strain Energy durante l'impatto, nel caso della piastra 2.	89
Figura 4-38: Evoluzione dello spostamento e della forza durante l'impatto nel primo punto di contatto con l'impattore, nel caso della piastra 2.....	90
Figura 4-39: Distribuzione dello stress di Von Mises sulla deformata della piastra 2 con danneggiamento.	90
Figura 4-40: Evoluzione dell'energia cinetica, interna e dell'Artificial Strain Energy durante l'impatto, nel caso della piastra 2 con danneggiamento.	91
Figura 4-41: Evoluzione e confronto dello spostamento massimo (con e senza danneggiamento) e della forza durante l'impatto, nel punto di contatto con l'impattore. 91	
Figura 4-42: Valutazione della presenza del danno e della sua evoluzione durante l'impatto, nel punto di contatto con l'impattore, considerando fibre e matrice sottoposte a trazione e compressione.	92
Figura 4-43: Schema rappresentativo del sistema di impatto: geometria (a) e disegno virtuale (b).	93
Figura 4-44: Grafico forza – tempo del fenomeno di impatto con Abaqus, il CODAM2 e Hashin + Puck.	94
Figura 4-45: Danneggiamento lato impattato, matrice (DM_C) e fibra (DF_C) a compressione al termine del fenomeno di impatto (Hashin + Puck).	95
Figura 4-46: Danneggiamento lato opposto a quello impattato, matrice (DM_T) e fibra (DF_T) a trazione al termine del fenomeno di impatto (Hashin + Puck).	95
Figura 4-47: Geometria di piastra e impattore.	96
Figura 4-48: Modello virtuale dell'impatto (tagliato in corrispondenza del piano medio), con impattore e piastra con rinforzo a T.	97
Figura 4-49: Grafico forza – tempo a confronto con CODAM2 e Hashin + Puck.	97
Figura 4-50: Danneggiamento con il CODAM2 al termine del fenomeno di impatto.	98
Figura 4-51: Danneggiamento con Hashin + Puck al termine del fenomeno di impatto.	99

Indice delle Tabelle

Tabella 1-1: Proprietà meccaniche di singole lamine costituite da resina epossidica e fibre di vetro, Boro o Carbonio [1].	3
Tabella 2-1: Definizione dei coefficienti F_i , F_{ii} , F_{ij} per diversi criteri polinomiali.	22
Tabella 3-1: Spostamento e stress equivalente nella routine Hashin + Puck [37].	54
Tabella 4-1: Risultati in dettaglio dell'analisi statica lineare della trave di Figura 4-1.	57
Tabella 4-2: Analisi di convergenza per gli elementi B2 della trave 1; $\Delta u = (u_y, ref - u_y)/u_y, ref * 100$.	57
Tabella 4-3: Risultati in dettaglio dell'analisi statica lineare della trave di Figura 4-3.	58
Tabella 4-4: Analisi di convergenza della trave 2; $\Delta u = (u_z, ref - u_z)/u_z, ref * 100$; $\Delta \sigma = (\sigma_{ref} - \sigma)/\sigma_{ref} * 100$.	58
Tabella 4-5: Risultati in dettaglio dell'analisi statica lineare della trave di Figura 4-5.	59
Tabella 4-6: Analisi di convergenza per gli elementi B2 della trave 3; $\Delta u = (u_z, ref - u_z)/u_z, ref * 100$.	59
Tabella 4-7: Risultati in dettaglio dell'analisi statica lineare della trave di Figura 4-7.	60
Tabella 4-8: Analisi di convergenza per gli elementi B2 della trave 4; $\Delta u = (u_z, ref - u_z)/u_z, ref * 100$.	60
Tabella 4-9: Analisi della mesh con gli elementi B3 per la trave 1.	61
Tabella 4-10: Analisi di convergenza della mesh con elementi B4 per la trave 1.	61
Tabella 4-11: Analisi di convergenza per l'Espansione Lagrangiana LE1 della trave 1.	61
Tabella 4-12: Analisi di convergenza per l'Espansione Lagrangiana LE2 della trave 1.	61
Tabella 4-13: Analisi di convergenza per l'Espansione Lagrangiana LE3 della trave 1.	62
Tabella 4-14: Analisi della mesh con gli elementi B3 per la trave 2.	62
Tabella 4-15: Analisi della mesh con gli elementi B4 per la trave 2.	62
Tabella 4-16: Analisi di convergenza per l'Espansione Lagrangiana LE1 della trave 2.	62
Tabella 4-17: Analisi di convergenza per l'Espansione Lagrangiana LE2 della trave 2.	62
Tabella 4-18: Analisi di convergenza per l'Espansione Lagrangiana LE3 della trave 2.	62
Tabella 4-19: Analisi di convergenza della mesh con elementi B3 per la trave 3.	62
Tabella 4-20: Analisi di convergenza della mesh con elementi B4 per la trave 3.	62
Tabella 4-21: Analisi di convergenza per l'Espansione Lagrangiana LE1 della trave 3.	63
Tabella 4-22: Analisi di convergenza per l'Espansione Lagrangiana LE2 della trave 3.	63
Tabella 4-23: Analisi di convergenza per l'Espansione Lagrangiana LE3 della trave 3.	63
Tabella 4-24: Analisi della mesh con gli elementi B3 per la trave 4.	63
Tabella 4-25: Analisi della mesh con gli elementi B4 per la trave 4.	63
Tabella 4-26: Analisi di convergenza per l'Espansione Lagrangiana LE1 della trave 4.	63
Tabella 4-27: Analisi di convergenza per l'Espansione Lagrangiana LE2 della trave 4.	64
Tabella 4-28: Analisi di convergenza per l'Espansione Lagrangiana LE3 della trave 4.	64
Tabella 4-29: Risultati in dettaglio dell'analisi statica lineare della piastra di Figura 4-9.	65
Tabella 4-30: Analisi di convergenza della mesh con elementi Q9 per la piastra 1.	66
Tabella 4-31: Analisi di convergenza della mesh con elementi Q4 per la piastra 1; non si arriva a convergenza.	66
Tabella 4-32: Analisi di convergenza della mesh con elementi Q16 per la piastra 1.	66

Tabella 4-33: Analisi di convergenza della mesh con modello LE12 per Espansione Lagrangiana.....	67
Tabella 4-34: Analisi di convergenza della mesh con modello LE2 per Espansione Lagrangiana.....	68
Tabella 4-35: Analisi di convergenza della mesh con modello LE4 per Espansione Lagrangiana.....	68
Tabella 4-36: Risultati in dettaglio dell'analisi statica della piastra 2.	68
Tabella 4-37: Proprietà meccaniche del materiale composito IM7/8552.	69
Tabella 4-38: Risultati in dettaglio dell'analisi statica della piastra 3.	70
Tabella 4-39: Proprietà elastiche e ammissibili per l'IM7/8552, utilizzate per i test a compressione.....	71
Tabella 4-40: Scale di riferimento per l'analisi del provino intagliato sottoposto a trazione [38].	77
Tabella 4-41: Dettaglio dei modelli utilizzati per l'analisi del laminato intagliato sottoposto a trazione.	79
Tabella 4-42: Dimensioni della piastra forata di Figura 4-23 sottoposta a compressione.	80
Tabella 4-43: Dettaglio dei modelli utilizzati per l'analisi del laminato forato sottoposto a compressione.	82
Tabella 4-44: Confronto tra i valori di spostamento massimo in Abaqus e con la CUF.	88
Tabella 4-45: Proprietà elastiche, ammissibili e fracture toughness del T200GC/M21 [45]...	94

Capitolo 1

1. Introduzione

1.1 I materiali compositi

I materiali compositi sono il risultato della miscelazione di due o più fasi che rimangono tra loro macroscopicamente separate, le cui proprietà e prestazioni sono progettate in modo da essere superiori a quelle dei materiali costituenti presi singolarmente. Questo approccio, a partire dagli anni '60 del secolo scorso, ha permesso di sviluppare una nuova classe di materiali oltre a quelli tradizionali, che garantiscono variabilità e flessibilità nell'utilizzo in modo da venire in contro alle richieste sempre più importanti del mercato, ovvero quelle di ottenere un incremento della resistenza ai carichi contemporaneamente ad una riduzione di massa, unite alla necessità di utilizzare materiali ecosostenibili. I settori di interesse sono molteplici: dall'aeronautico, al navale, al biomedicale, all'automotive, all'elettrico. Sicuramente tra questi il settore aeronautico è sempre stato estremamente interessato a queste soluzioni, vista la continua ricerca di materiali ad alte proprietà specifiche che consentano una riduzione dei consumi di fuel e un incremento del carico utile trasportabile grazie alla riduzione del peso strutturale.

Nella forma più comune, il materiale composito è caratterizzato da una matrice e da un rinforzo, che può assumere diverse forme: fibre corte, fibre lunghe, particelle disperse, ecc. Da un punto di vista delle applicazioni strutturali, l'uso di fibre lunghe unidirezionali o in configurazione intrecciata è risultata la scelta più conveniente. I materiali per la realizzazione delle fibre sono stati storicamente ricercati tra quelli con minore densità, ovvero l'attenzione è stata rivolta verso quegli elementi che occupano i posti più bassi della tavola periodica: dopo Idrogeno ed Elio, si trovano Litio, Berillio, Boro e Carbonio. La scelta iniziale ricadde sul Boro negli Stati Uniti d'America, sul Carbonio in Giappone e in Inghilterra: entrambi i materiali selezionati garantivano infatti elevato modulo elastico, elevata resistenza alla rottura per trazione, sufficiente resistenza alla corrosione e alla fatica e buone caratteristiche di lavorabilità.

Le fibre di Boro furono prodotte per la prima volta con buoni risultati mediante il processo di Talley (1959) [1], nel quale un alogenuro di Boro viene ridotto su un filamento caldo di Tungsteno, in presenza di idrogeno. Per eseguire questa lavorazione sono necessarie alte temperature, comprese tra 900 e 1400 °C, in modo da permettere la decomposizione del composto e la deposizione del Boro sul filamento. La fibra così generata risulta spessa (0,14 ÷ 0,20 mm di diametro) con una superficie irregolare che va opportunamente rifinita

attraverso il controllo della velocità di produzione, in modo da eliminare eventuali vuoti e cricche. Ciò ha però il difetto di comportare elevati costi di produzione: per questo motivo, infatti, il Boro è stato limitato a pochi campi di utilizzo e gli sono state preferite altre soluzioni, dove possibile.

Le fibre di Carbonio sono invece state ottenute per la prima volta attraverso pirolisi del poli-acrilo-nitrile (PAN): questo composto aveva tutti i requisiti per l'ottenimento della fibra, in quanto presenta la temperatura di fusione maggiore di quella di decomposizione, un elevato contenuto di carbonio e l'assenza di ossigeno nella molecola, che altrimenti comporterebbe una riduzione delle proprietà meccaniche a trazione. Per un miglioramento del processo, si osservò che, applicando una trazione all'inizio della pirolisi, si otteneva un incremento delle proprietà del componente finale. Anche le fibre di Carbonio hanno però il difetto di essere molto costose; per questa ragione, come alternativa ad esse, sono nate le fibre di vetro. La composizione di queste fibre può essere molto variabile; le più comuni sono quelle a base di silice (al 50 ÷ 60 %) e la produzione tipica è basata su un processo di estrusione a caldo. Queste fibre hanno eccellente resistenza termica ed elettrica e buone proprietà meccaniche con costi di realizzazione più bassi rispetto alle fibre di Carbonio.

Con la capacità di produrre le fibre di rinforzo, sono nati i compositi ingegneristici, ovvero materiali ad alte prestazioni. Questi sono ottenuti dall'unione di fibre e matrice per costituire tipicamente due tipi di macro-materiali: i laminati, ottenuti per sovrapposizione di lamine di composito diversamente orientate, il cui comportamento meccanico macroscopico va opportunamente progettato; il sandwich, ovvero una soluzione caratterizzata da strati esterni tra cui si colloca un elemento di riempimento (core), utilizzata principalmente per pannelli fortemente sollecitati a flessione.

Le matrici più comuni nella composizione dei laminati sono i polimeri termoindurenti e termoplastici, tra cui si distinguono le resine epossidiche che unite alle fibre di Carbonio, vetro o Boro costituiscono uno dei materiali più utilizzati in ambito aeronautico. La matrice ha il compito di dare la forma al materiale finale e distribuire i carichi alle fibre, che hanno il ruolo strutturale e di resistenza ai carichi applicati; è inoltre responsabile della capacità di adesione tra le lamine.

Tabella 1-1: Proprietà meccaniche di singole lamine costituite da resina epossidica e fibre di vetro, Boro o Carbonio [1].

Property	Symbol	Units	Glass/Epoxy	Boron/epoxy	Graphite/epoxy
Fiber volume fraction	V_f		0,45	0,50	0,70
Longitudinal elastic modulus	E_1	GPa	38,6	204	181
Transverse elastic modulus	E_2	GPa	8,27	18,50	10,30
Major Poisson's ratio	ν_{12}		0,26	0,23	0,28
Shear modulus	G_{12}	GPa	4,14	5,59	7,17
Ultimate longitudinal tensile strength	$(\sigma_1^T)_{ult}$	MPa	1062	1260	1500
Ultimate longitudinal compressive strength	$(\sigma_2^T)_{ult}$	MPa	610	2500	1500

Ultimate transverse tensile strength	$(\sigma_1^C)_{ult}$	MPa	31	61	40
Ultimate transverse compressive strength	$(\sigma_2^C)_{ult}$	MPa	118	202	246
Ultimate in-plane shear strength	$(\tau_{12})_{ult}$	MPa	72	67	68
Longitudinal coefficient of thermal expansion	α_1	$\mu\text{m}/\text{m}/^\circ\text{C}$	8,6	6,1	0,02
Transverse coefficient of thermal expansion	α_2	$\mu\text{m}/\text{m}/^\circ\text{C}$	22,1	30,3	22,5
Longitudinal coefficient of moisture expansion	β_1	$\text{m}/\text{m}/\text{kg}/\text{kg}$	0,00	0,00	0,00
Transverse coefficient of moisture expansion	β_2	$\text{m}/\text{m}/\text{kg}/\text{kg}$	0,60	0,60	0,60

Complessivamente, i vantaggi dell'impiego di tali materiali sono:

- Leggerezza;
- Resistenza;
- Rigidezza;
- Buona resistenza alla fatica;
- Riduzione del peso e del costo dei giunti;
- Riduzione dei costi di fabbricazione, vista la possibilità di creare pezzi molto grandi in un'unica lavorazione;
- Flessibilità nella progettazione, con la possibilità di creare una laminazione specifica in base alle proprietà del prodotto finale ricercato.

Dall'altra parte sono presenti degli svantaggi principalmente legati ai costi di produzione delle fibre (in particolare delle fibre lunghe, utilizzate nei materiali ingegneristici) e al comportamento tipicamente fragile che si ottiene dal composito finale prodotto.

In ambito aeronautico, l'utilizzo dei materiali compositi viene registrato a partire dagli anni '70 del secolo scorso, quando per la prima volta fu impiegato un composito costituito da resina epossidica e fibre di Boro per il rivestimento degli impennaggi dei velivoli fighters americani F14 e F15. All'inizio, i compositi furono unicamente impiegati in componenti secondari degli aerei; solo quando i livelli di conoscenza sulla materia aumentarono si passò alla progettazione di strutture primarie, tra cui ali e fusoliera, sia per il campo civile che militare. La percentuale di utilizzo sul materiale totale complessivo è progressivamente aumentata negli anni, fino a toccare il picco del 50 % con il B787 (primo volo il 15 dicembre del 2009). L'uso del composito in fibra di carbonio ha consentito di accelerare significativamente i tempi di produzione rispetto ai velivoli classici e di risparmiare circa l'8% di fuel a confronto con velivoli equivalenti, grazie alla riduzione di peso ottenuta.

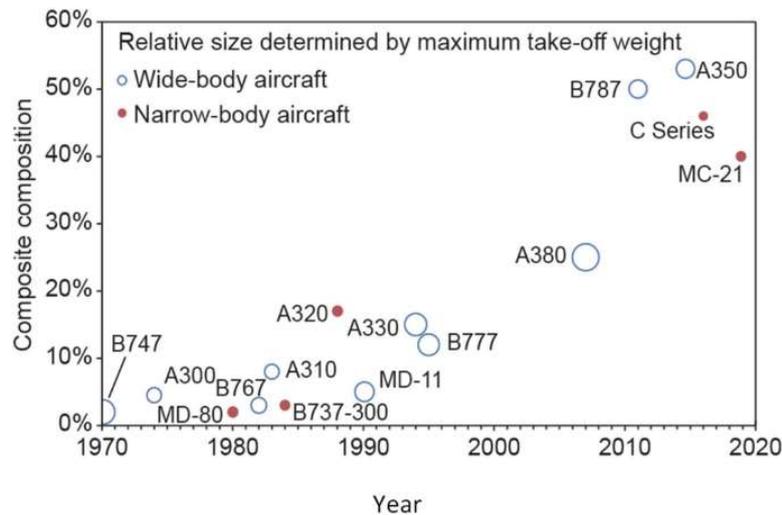


Figura 1-1: Evoluzione dell'uso del composito in aeronautica negli ultimi 50 anni, aggiornata fino al 2020 [2].

1.2 L'approccio "Damage Tolerance"

Nell'ambito della progettazione dei velivoli, l'impiego di nuovi materiali ha portato la necessità di modificare le filosofie classiche. In particolare, la conoscenza delle modalità di danneggiamento dovute alla fatica, all'impatto e all'usura sono state fondamentali nella ridefinizione degli approcci utilizzati dai progettisti, portando a sostituire le classiche filosofie "Safe Life" e "Fail Safe" con quella della "Damage Tolerance".

Il primo approccio storicamente introdotto è stato quello della "Safe Life", o "Vita sicura": in base ad esso, le strutture devono mantenersi integre e prive di cricche per una vita assegnata, tipicamente espressa in numero di ore di volo o numero di voli. Al termine del periodo prescritto, il componente deve essere ritirato ed eliminato, indipendentemente dal suo stato e dall'aver subito o meno danneggiamenti. Per assicurare la durabilità delle strutture ai fini del rilascio della Certificazione secondo normative, bisogna testare i componenti per una durata di tempo uguale alla vita operativa moltiplicata per un fattore di sicurezza k , detto "scatter factor". Tale coefficiente tiene in considerazione le incertezze sulle misure e la dispersione dei dati e assume tipicamente un valore compreso tra 3 e 4: ciò evidenzia come la progettazione risulti estremamente conservativa, comportando così la produzione di strutture più pesanti e resistenti. Per migliorare questo aspetto, grazie alla legge di Paris e allo studio dei comportamenti di fatica dei materiali, è stato possibile evolvere verso la filosofia "Fail Safe"; l'approccio "Safe Life" è comunque utilizzato per componenti primari e là dove è strettamente necessario garantire elevati margini di sicurezza.

L'approccio "Fail Safe" introduce la possibilità di danneggiamento del materiale durante la sua vita operativa: il componente deve comunque essere in grado di resistere ai carichi, mantenendo quindi una resistenza residua adeguata alle sue condizioni di utilizzo. Ai fini di garantire livelli di sicurezza congrui, si progetta considerando l'applicazione di sottostrutture ridondanti o meccanismi di arresto della cricca in modo che la rottura di un singolo

componente non conduca al collasso finale, come l'uso di crack stoppers e irrigidimenti longitudinali. In conclusione, la struttura deve essere iperstatica.

Questo approccio possiede però alcune lacune, connesse alla non chiara definizione di intervalli di ispezione per ciascun componente. La "Damage Tolerance" è quindi un'evoluzione del "Fail Safe" in cui si assume come ipotesi iniziale che il danneggiamento inteso come difetto o cricca possa esistere in ogni elemento strutturale e che esso sia presente nella configurazione più critica, dove gli sforzi sono più elevati. L'obiettivo è lo stesso del "Fail Safe", ovvero che la resistenza residua si mantenga entro un certo limite per tutta la vita operativa del componente, verificando che il danno iniziale non cresca oltre un certo valore critico prefissato e che gli effetti del fenomeno di fatica siano sotto controllo.

Per poter seguire questa filosofia di progetto, è necessario prima di tutto individuare quelle aree del velivolo definite come critiche, in cui rientrano due tipologie di componenti: quelli in cui un danneggiamento o un cedimento strutturale mettono a rischio la sicurezza dell'intero mezzo, quindi i componenti primari che richiedono maggiore attenzione e ispezioni frequenti; quelli situati in zone dove risulta particolarmente complesso avere accesso per i controlli, che quindi devono essere accuratamente progettate in fase di design. Il concetto della "Damage Tolerance" è illustrato dalla Figura 1-2. Questo approccio nasce per i materiali metallici ai fini di studiare e controllare gli effetti dei fenomeni di fatica, ma viene riadattato anche per i compositi.

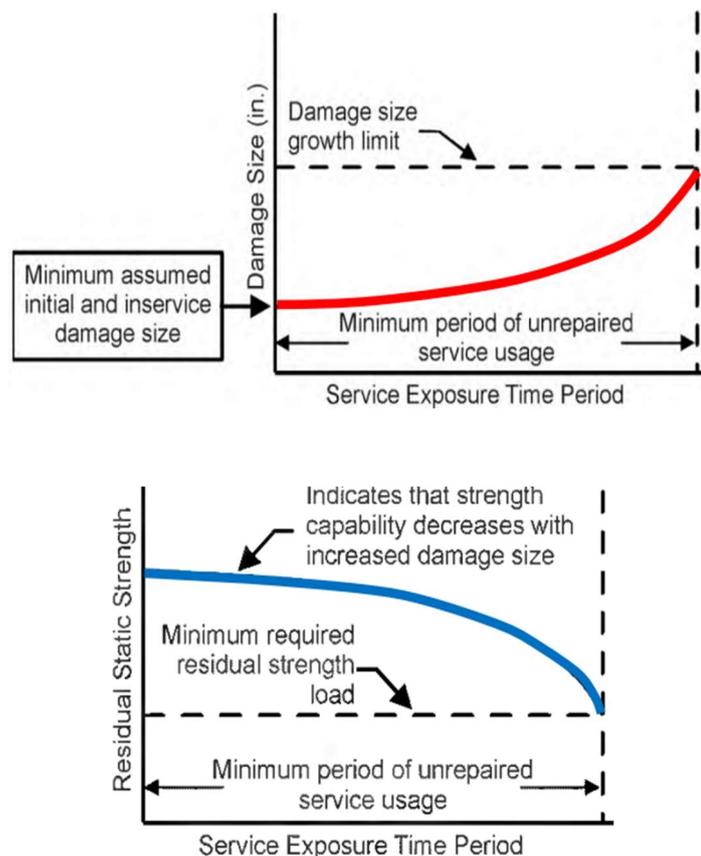


Figura 1-2: Applicazione della "Damage Tolerance"

Per quanto riguarda i materiali compositi, i fenomeni di fatica sono meno influenti e non costituiscono la principale causa di cedimento. Il materiale composito è invece più facilmente esposto a danni accidentali in fase di fabbricazione, di manutenzione e di utilizzo, come ad esempio per via di impatti con grandine, volatili, o oggetti come martelli o strumenti di lavoro. Per la progettazione di componenti primari in composito è attualmente necessario sottostare a requisiti normativi imposti dagli enti internazionali; in particolare, le norme di riferimento sono la FAR 25.571 negli USA e la CS 25.603 in Europa [3]. Per l'ottenimento della Certificazione, è necessario dimostrare che la "Damage Tolerance" nel caso delle strutture in composito sia rispettata: a questo fine sono pubblicate dagli enti regolatori dei documenti che suggeriscono le prove e i test da effettuare e le relative modalità di esecuzione. In particolare, queste informazioni sono contenute nell'Advisory Circular (AC) 20-107B della FAA e come Acceptable Means of Compliance (AMC) 20-29 dell'EASA. I carichi da considerare per i test si distinguono in "design limit load" e in "ultimate load": il primo corrisponde al massimo carico che ci si aspetta possa essere applicato sulla struttura nel corso della sua vita operativa, mentre il secondo è uguale al primo moltiplicato per un fattore di sicurezza, che è tipicamente pari a 1,5 in ambito aeronautico. Il valore del limit load può essere estrapolato da simulazioni numeriche o dall'applicazione di sensori sulle strutture operative, che consentono di avere maggior precisione e congruenza con le reali condizioni. La struttura deve essere testata con l'ultimate load quando non è danneggiata e deve garantire la capacità di resistere a tale carico; la presenza di un danneggiamento può ridurre la resistenza residua ad un livello inferiore rispetto all'ultimate load, senza però mai scendere al di sotto del carico limite. Le normative, in realtà, ammettono che in presenza di danneggiamento esteso la resistenza residua possa ridursi ulteriormente perché in questo caso è immediato riconoscere il problema e riparare l'aerea interessata in modo tempestivo, con rischi decisamente inferiori rispetto al caso di difetti di piccole dimensioni scoperti in ritardo.

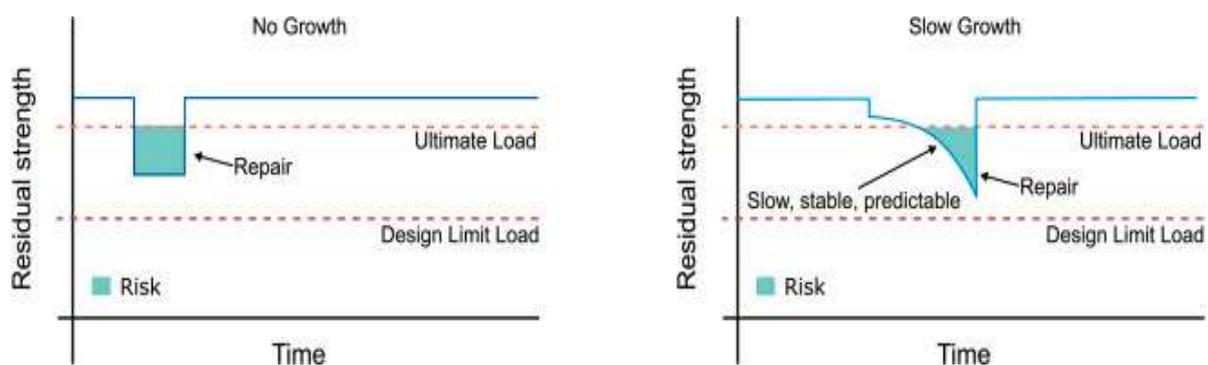


Figura 1-3: Approccio "no growth" (a sinistra) e "slow growth" (a destra) a confronto [4].

Gli approcci per trattare il problema del danneggiamento ai fini dell'ottenimento delle Certificazioni valide per il campo aeronautico sono due: il "no growth" e lo "slow growth", mostrati a confronto in Figura 1-3. Nel primo caso, il danno presente sul componente non deve evolvere, ovvero la resistenza residua deve rimanere costante: questo significa che i carichi applicati alla struttura danneggiata debbano mantenersi sotto un determinato valore

critico di soglia e spesso ciò comporta che le strutture siano progettate aumentando la massa in modo da compensare l'eventuale difetto. Nel secondo approccio invece è ammessa la crescita del difetto sotto l'effetto dei carichi e dell'ambiente esterno, così come è consentita la riduzione progressiva della resistenza residua della struttura fino a che il danno non viene individuato nelle preposte ispezioni, riparato e quindi ripristinata l'integrità strutturale. Anche in questo caso, ovviamente, il componente deve sempre essere in grado di resistere a carichi superiori al carico limite di progetto.

L'intervallo di tempo tra il momento in cui il danno diventa rilevabile e quello in cui la resistenza residua si abbassa sotto il limit load corrisponde alla finestra di ispezione: tipicamente, almeno tre ispezioni vengono pianificate all'interno di questa finestra. Di conseguenza, conoscere questo intervallo di tempo diventa determinante per un corretto piano di ispezioni e per la capacità di volare sempre in modo sicuro: in questo periodo di tempo, la cricca deve quindi crescere in modo lento, stabile e predicibile.

I principali step da effettuare per progettare secondo l'approccio "slow growth Damage Tolerance" possono quindi essere così riassunti:

- Determinare e quantificare il danno inizialmente presente: un danneggiamento iniziale è sempre ipotizzato: può trattarsi di un difetto del materiale o di una cricca dovuta a impatti o carichi ripetuti applicati ad un certo componente.
- Determinare una legge che esprima la tendenza di propagazione del danno nel tempo: la crescita del difetto aumenta nel tempo e può essere predetta grazie alla conoscenza del materiale, delle condizioni ambientali e delle condizioni operative in generale che caratterizzano la vita operativa della struttura.
- Determinare la condizione critica del danneggiamento: la filosofia basata sulla crescita lenta del difetto individua questo stato con la dimensione della cricca che porta la resistenza residua uguale al carico limite. Ogni ulteriore incremento può determinare una riduzione della resistenza strutturale in modo non più controllato e non predicibile, con conseguenze potenzialmente drammatiche per la struttura.
- Determinare la finestra di ispezione: l'obiettivo ultimo del progettista è quello di pianificare opportunamente le ispezioni durante la vita della struttura, in modo da essere in grado di osservare la crescita lenta del danneggiamento e tenerla sotto controllo fino alla necessità dell'intervento di riparazione.

Per i materiali compositi diventa quindi fondamentale capire come un danneggiamento possa evolvere nella struttura e possa influenzare la resistenza residua del componente. Tra le varie cause di danneggiamento, i fenomeni di impatto sono sicuramente tra i più frequenti e i più critici: le differenze rispetto ai materiali classici non sono trascurabili e devono essere opportunamente considerate.

1.3 Teorie e modelli numerici per lo studio dei laminati

Diverse teorie e modelli strutturali sono stati sviluppati nel corso degli anni per lo studio dei laminati, con l'obiettivo di caratterizzare in modo sempre più preciso il comportamento di tali materiali. Con l'aumento della conoscenza sui compositi, da teorie come la Classical Lamination Theory (CLT) e la First-Order Shear Deformation Theory (FSDT), si è passati allo sviluppo di teorie di ordine superiore, che hanno portato vantaggi in termini di accuratezza dei risultati. Tra queste, la Formulazione Unificata di Carrera (CUF) con l'introduzione di funzioni di espansione di diverso ordine e tipologia ha consentito lo sviluppo di modelli 1D e 2D che risultano confrontabili con i modelli tridimensionali dei codici commerciali a disposizione sul mercato, ma che consentono una riduzione importante dei tempi e dei costi computazionali.

Per ottenere tali formulazioni la CUF prevede l'integrazione delle funzioni di espansione (Lagrangiane o di Taylor) con i modelli agli elementi finiti: ciò consente di ottenere in ogni specifico caso la discretizzazione più opportuna, con espansioni 1D o 2D adeguate a ridurre il più possibile i gradi di libertà in gioco. La CUF, sviluppata nel programma Mul2, segue l'approccio Layer-Wise, ovvero consente di differenziare i diversi strati del laminato analizzandoli in modo indipendente gli uni dagli altri: eventuali interazioni inter-laminari possono essere implementate, ma nel presente lavoro di tesi sono state tralasciate per concentrarsi sugli effetti intra-laminari.

Per quanto riguarda la rottura dei materiali compositi, in letteratura sono presenti diversi possibili criteri di failure che consentono di stabilire, strato per strato, se è presente o meno una rottura. Tra questi, è possibile considerare l'interazione di più condizioni di sollecitazione applicate contemporaneamente sul pezzo oppure separare le tensioni sentite da fibre e matrice di ogni layer: al primo caso appartengono criteri quali Tsai-Hill, Tsai-Wu, Azzi-Tsai, Hoffman, Hashin e Puck, mentre al secondo i criteri di massima tensione e di massima deformazione. Ogni criterio può essere una valida alternativa per lo studio a rottura dei laminati, a seconda delle necessità degli utilizzatori e dei valori ricercati. Tali criteri vengono implementati nei codici di calcolo con modelli numerici, che consentono di visualizzare anche il danneggiamento progressivo all'interno di ogni lamina. A questo fine, di primaria importanza è lo sviluppo della Progressive Failure Analysis (PFA), sotto alla quale è possibile ricondurre diversi approcci per la schematizzazione del danno: nel modello materiale del CODAM2 ci si rifà alla soluzione della Continuum Damage Mechanics (CDM), che prevede una riduzione graduale della resistenza residua del componente come risposta alla continua sollecitazione applicata su di esso. Lo stesso approccio viene seguito anche nella routine Hashin + Puck, basata sugli omonimi criteri, che viene presentata nel presente lavoro di tesi come possibile alternativa al CODAM2, sempre nell'ottica di formulare modelli 1D e 2D alternativi ai classici 3D proposti dai codici commerciali. In particolare, questi codici possono essere utilizzati per l'implementazione di problemi di trazione, compressione, flessione ma anche per casi di impatto, passando quindi da applicazioni statiche, implicite e lineari a casi di analisi esplicite, dinamiche e non lineari.

1.4 L'impatto sui laminati

1.4.1 La classificazione dei fenomeni di impatto

Il danno da impatto è estremamente frequente nelle strutture aeronautiche e si può manifestare sia durante la vita operativa del velivolo che in fase di produzione e di manutenzione. Le tipologie di fenomeni di impatto sono distinguibili in impatti a bassa velocità (Low Velocity Impact, LVI) e impatti ad alta velocità (High Velocity Impact, HVI), tra cui sono possibili diverse condizioni intermedie indicate come impatti a media velocità [2]. La distinzione tra di essi è legata all'energia e alla velocità dell'impattore così come agli effetti del fenomeno sul corpo oggetto di studio. In generale, gli impatti a bassa velocità sono i più complessi da individuare e di conseguenza i più pericolosi, in quanto portano al danneggiamento del materiale composito senza implicazioni visive; in questo ambito, molto importanti sono i controlli non distruttivi e la corretta definizione di un piano di ispezioni per garantire il mantenimento della necessaria integrità strutturale del componente.

Una possibile classificazione è quella basata sulle velocità di impatto, proposta da Cantwell e Morton [5]: i LVI, tipicamente correlati a impatti legati alla caduta di oggetti, sono caratterizzati da una velocità uguale o inferiore ai 10 m/s; gli HVI sono invece legati all'ambito balistico e sono di solito il risultato dello scoppio di un proiettile o frammenti di esso con velocità di impatto superiori ai 50 m/s; è poi possibile considerare anche il caso di impatti a velocità ipersoniche (>1000 m/s), limitate però all'ambito spaziale. Tra gli LVI e gli HVI, si collocano gli impatti a velocità intermedia, tra 10 e 50 m/s. In generale, negli HVI il materiale non ha il tempo di reagire all'impatto, che produce un danno spesso coincidente con la penetrazione della struttura a livello locale; per questa ragione, nonostante siano distruttivi sono facilmente individuabili e non pericolosi. Per questo motivo, la trattazione oggetto del lavoro di tesi si concentra sull'ambito di studio degli impatti a bassa velocità e delle loro conseguenze sui laminati.

1.4.2 Le conseguenze dell'impatto sui laminati

In molti casi i LVI non producono alcun effetto sulla superficie del laminato, a differenza di ciò che accade per i materiali classici. Invece, all'interno del laminato si propaga un danno interno che può risultare significativo e che comporta la riduzione della resistenza residua e del tempo di vita del componente. Il fenomeno di impatto si può in questo caso approssimare come un modello quasi-statico, principalmente legato al rapporto delle masse tra impattore e corpo impattato e alla velocità di impatto. La risposta dinamica del componente risulta importante perché la durata del contatto tra i corpi è sufficiente per garantire una maggior quantità di energia assorbita rispetto al caso degli HVI. L'energia di impatto in un LVI viene per prima assorbita nella forma di energia di deformazione elastica, poi come energia di rottura [6].

I modi di failure di un laminato per effetto di un impatto a bassa velocità sono [10]:

- La rottura della matrice;

- La delaminazione;
- La rottura delle fibre;
- La rottura per penetrazione.

La rottura della matrice è un danneggiamento che tipicamente include la generazione di cricche, il distacco tra le fibre e la matrice o l'iniziazione della laminazione. Nel caso di laminati unidirezionali, le cricche originate sono orientate lungo piani paralleli alla direzione di deposizione delle fibre e prendono il via dal punto di contatto con l'impattore. Inoltre, si generano sforzi di taglio importanti a causa del contatto tra i due corpi: anch'essi possono essere responsabili dell'apertura di cricche all'interno del laminato. A seconda della forma e delle caratteristiche geometriche del laminato, il fenomeno di matrix cracking può essere di diversa tipologia: ad esempio, se si considera un provino lungo e sottile sottoposto ad un impatto l'effetto dominante che si genera è legato alla deflessione del provino stesso e dunque si originano prevalentemente cricche dovute agli sforzi normali nel piano (tensile cracks, Figura 1-4-a) ; al contrario, per un provino corto e spesso la flessione risulta quasi nulla o comunque trascurabile, mentre la forza di contatto scambiata tra i corpi diventa molto intensa comportando così la generazione delle cricche per taglio (shear cracks, Figura 1-4-b).

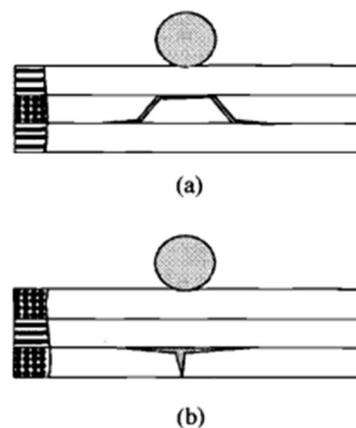


Figura 1-4: 2 tipologie di matrix cracks: (a) Tensile crack, (b) Shear crack [7].

La delaminazione, ovvero il distacco tra layer adiacenti tra loro, avviene a seguito di impatto con la formazione di un'area oblunga il cui asse maggiore è tipicamente orientato nella direzione di deposizione delle fibre dello strato opposto a quello su cui avviene l'impatto [9]. La forma così ottenuta prende il nome di delaminazione "a nocciolina" e la sua principale origine è la presenza di sforzi di flessione applicati su strati con diverse orientazioni del laminato. Maggiore è il mismatch del coefficiente di bending tra i layer, maggiore sarà la delaminazione prodotta. È possibile quantificare l'energia elastica assorbita dal materiale in corrispondenza del punto di impatto: al crescere dello spessore e della rigidità flessionale del corpo soggetto all'impatto, l'energia elastica assorbita nel punto di failure si riduce.

La delaminazione indotta da un impatto trasversale si verifica nel momento in cui si supera un certo valore di energia di soglia; inoltre, la presenza di matrix cracking si può correlare ad

essa per la tendenza ad incrementare lo stress di taglio inter-laminare e all'interfaccia, sia nel caso di bending che di shear cracks. In particolare, se ci si riferisce a 1 e 2 per indicare le direzioni nel piano del laminato e 3 per quella perpendicolare corrispondente, la crescita della delaminazione è guidata dagli stress di taglio σ_{13} e dagli stress trasversali nel piano σ_{22} nello strato al di sotto dell'interfaccia di laminazione, e dagli stress di taglio σ_{23} in quello al di sopra di essa. Durante l'evoluzione della delaminazione, si osserva infine che l'energia assorbita per unità di superficie nell'area interessata si mantiene costante.

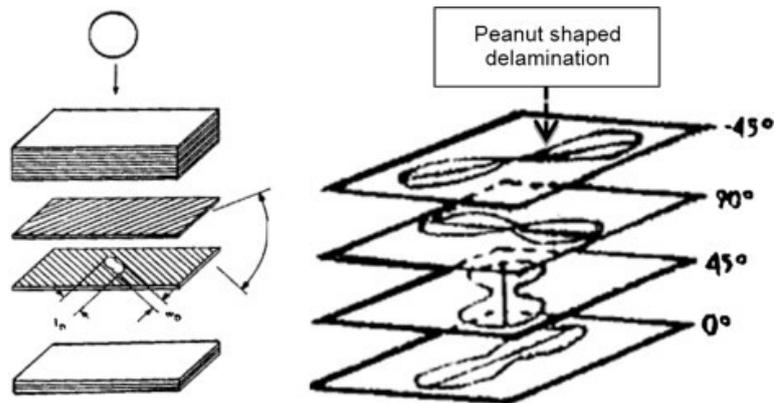


Figura 1-5: Possibili orientazioni della delaminazione a nocciolina in un laminato [10].

La rottura delle fibre è una modalità di danneggiamento che si verifica dopo il matrix cracking [11] e la delaminazione; generalmente precede la condizione catastrofica della penetrazione dell'impattore nel corpo impattato. La rottura delle fibre è infatti legata agli effetti diretti dell'impatto: dal lato impattato la rottura è dovuta agli elevati stress che si concentrano nella zona di contatto tra i corpi o eventualmente agli stress introdotti dall'impronta dell'impattore sulla superficie; dal lato opposto sono invece gli stress dovuti alla flessione ad essere responsabili del fenomeno [12].

Infine, come ultimo possibile effetto dell'impatto si considera la penetrazione [13]. Tale effetto è di tipo macroscopico e si raggiunge quando la rottura delle fibre ha superato un'estensione definita critica per cui l'impattore riesce a penetrare completamente il materiale composito. L'energia necessaria alla penetrazione è direttamente correlata allo spessore del provino: più quest'ultimo è grande, più complesso sarà per il corpo impattante attraversarlo in modo completo [14].

1.5 Gli obiettivi della tesi

Il lavoro di tesi si propone quindi di affrontare le tematiche del danneggiamento progressivo dei materiali compositi, sia da un punto di vista teorico che numerico. Si vuole infatti passare in rassegna l'ampia letteratura a disposizione per lo studio e la caratterizzazione dei materiali compositi ingegneristici, con lo scopo di comprendere la necessità dello sviluppo di modelli e teorie di ordine superiore.

Si vuole inoltre porre attenzione ai diversi criteri di failure a disposizione per la previsione della rottura dei laminati, uniti alle modalità di indagine del danneggiamento progressivo a seguito di carichi applicati continuativamente nel tempo o di casi di impatto. In tal modo, si mettono in evidenza tutte le informazioni per la comprensione della Formulazione Unificata di Carrera e dei modelli numerici da essa ricavati: i modelli 1D e 2D vengono quindi testati attraverso una serie di simulazioni numeriche fino ad arrivare a casi di impatto. L'obiettivo è quello di mostrare la validità e la consistenza di tali soluzioni in termini di accuratezza e costo computazionale, come alternativa conveniente ai modelli 3D dei codici di calcolo commerciali. Si vuole inoltre presentare la routine Hashin + Puck integrata nel Mul2, in alternativa al CODAM2, come modello materiale per il danneggiamento progressivo e lo studio a rottura dei laminati: i test di verifica effettuati vogliono confermarne la validità.

Capitolo 2

2. Analisi progressiva del danneggiamento: teorie e metodologie di studio

In questo capitolo ci si propone di passare in rassegna le teorie strutturali più rilevanti per lo studio dei materiali compositi, la ragione di utilizzo delle high-order theories, i criteri di failure e i modelli sviluppati per l'osservazione e l'analisi del danneggiamento progressivo. Questa indagine risulta il primo passo per la comprensione della Formulazione Unificata di Carrera (CUF) e dei criteri implementati nei diversi codici di analisi che verranno utilizzati nel prosieguo del lavoro.

2.1 Caratterizzazione dei materiali ortotropi

Il laminato è una struttura multistrato costituita da strati in sequenza, ognuno caratterizzato dalla presenza di fibre e matrice. In ciascuna lamina si considera come direzione 1 quella orientata secondo l'angolo di deposizione della fibra, come direzione 2 quella perpendicolare ad essa nel piano, e come direzione 3 quella fuori dal piano, ortogonale alle altre due. A livello globale è invece definito un sistema di riferimento materiale in x , y e z , come mostrato in Figura 2-1.

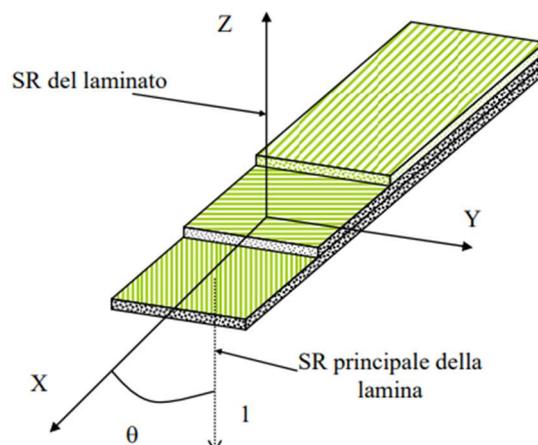


Figura 2-1: Esempio di laminato e relativo sistema di riferimento SR [15].

Rispetto a questo sistema $\langle xyz \rangle$ si può definire il campo di spostamenti in ogni punto del laminato:

$$u(x, y, z) = \begin{Bmatrix} u_x(x, y, z) \\ u_y(x, y, z) \\ u_z(x, y, z) \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

Inoltre, si definiscono i vettori delle sollecitazioni σ e delle deformazioni ε e le relative componenti:

$$\sigma = \{\sigma_{xx} \sigma_{yy} \sigma_{zz} \sigma_{yz} \sigma_{xz} \sigma_{xy}\}^T \quad (2.2)$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz} \varepsilon_{yz} \varepsilon_{xz} \varepsilon_{xy}\}^T \quad (2.3)$$

Secondo la teoria classica dell'elasticità, gli spostamenti possono essere collegati alle deformazioni attraverso una matrice D di operatori differenziali con la formula seguente:

$$\varepsilon = \mathbf{D}u \quad (2.4)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z \\ \partial_z & 0 & \partial_x \\ 0 & \partial_z & \partial_y \\ \partial_y & \partial_x & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Per correlare tensioni e deformazioni all'interno di ognuna delle k lamine è sempre possibile ricorrere alla legge di Hooke, dove la matrice di rigidezza considerata è equivalente a quella di un materiale ortotropo per via delle caratteristiche del composito rinforzato con fibre. Il sistema di riferimento locale per ciascuno strato è $\langle 123 \rangle$; l'equazione di riferimento e la matrice di rigidezza sono:

$$\sigma_k = \mathbf{C}\varepsilon_k \quad (2.5)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Dove i termini della matrice \mathbf{C} , simmetrica, sono funzione del modulo di Young E del materiale nella direzione delle fibre (E_1) e della matrice (E_2), dei coefficienti di Poisson ν e dai moduli di taglio G .

Nel sistema di riferimento di ogni lamina è quindi possibile definire direttamente tensioni, deformazioni e relazione costitutiva. I vettori di stress e strain sono in questo caso:

$$\sigma_k = \{\sigma_{11} \sigma_{22} \sigma_{33} \sigma_{23} \sigma_{13} \sigma_{12}\}^T \quad (2.7)$$

$$\varepsilon_k = \{\varepsilon_{11} \varepsilon_{22} \varepsilon_{33} \varepsilon_{23} \varepsilon_{13} \varepsilon_{12}\}^T \quad (2.8)$$

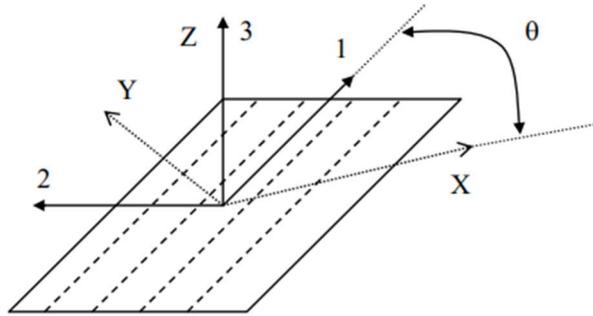


Figura 2-2: Sistema di riferimento del laminato e della singola lamina a confronto, con l'evidenza dell'angolo di rotazione θ .

Per poter passare dal riferimento locale a quello globale del laminato, è necessario ricorrere ad una matrice di rotazione T : considerando l'asse 3 e l'asse z coincidenti, si ha solo una rotazione nel piano dell'asse 1 rispetto all'asse x di un angolo pari a θ , quindi la legge di Hooke in coordinate globali si ottiene come:

$$\sigma = TCT^T \varepsilon = \tilde{C} \varepsilon \quad (2.9)$$

Dove la matrice di rotazione è:

$$T = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 0 & 0 & 0 & -\sin 2\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 0 & 0 & 0 & \sin 2\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \sin\theta\cos\theta & -\sin\theta\cos\theta & 0 & 0 & 0 & \cos 2\theta \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

I coefficienti della matrice \tilde{C} sono quindi dipendenti dalle proprietà meccaniche del materiale composito di riferimento e dall'angolo di deposizione θ delle fibre in ciascuno strato della sequenza di laminazione adottata.

2.2 Teorie per lo studio dei laminati

Per lo studio e lo sviluppo di modelli validi per l'analisi dei materiali compositi si possono adottare diversi approcci, che effettuano delle considerazioni di carattere generale e definiscono delle modalità specifiche di valutazione degli stress e delle deformazioni nei componenti. La scelta dell'approccio è quindi essenziale per conoscere in maniera più o meno globale e più o meno dettagliata la distribuzione ricercata per le indagini successive nel laminato.

2.2.1 Approccio Equivalent Single Layer

Le teorie basate sull'approccio Equivalent Single Layer (ESL) sono quelle in cui un componente realizzato attraverso una laminazione eterogenea viene considerato al pari di un unico strato di materiale equivalente, che viene descritto da opportune equazioni costitutive e da proprietà che rappresentano una media di quelle dei singoli layer. Le ipotesi alla base

delle teorie che seguono questo approccio sono caratterizzate dall'assumere che il campo di spostamenti e le sue derivate siano continui attraverso l'intero laminato e quindi di classe C^1 . La conseguenza è che spostamenti e deformazioni risultano continui, con andamenti costanti, lineari o di ordine superiore a seconda del tipo di modello che si vuole utilizzare.

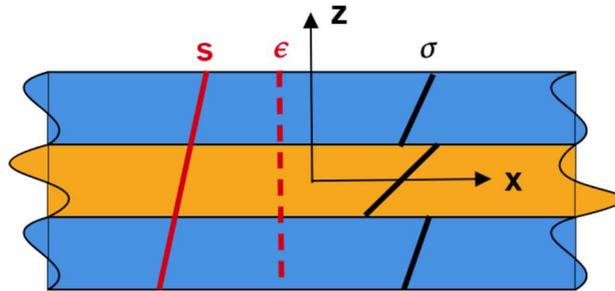


Figura 2-3: Rappresentazione esemplificativa del concetto di ESL in un laminato, con spostamenti s e deformazioni ϵ (entrambi riportati in colore rosso) continue [16].

Il limite principale di queste teorie è proprio legato al concetto di omogeneizzazione: la precisione all'interfaccia tra gli strati dei valori delle tensioni trasversali è ridotta, così come l'accuratezza delle soluzioni trovate a livello locale. Nonostante le semplificazioni necessarie per l'applicazione di tale approccio, il vantaggio primario ad esso collegato è invece la possibilità di usufruire di un ridotto numero di equazioni risolutive di sistema, con il numero di incognite del problema indipendenti dal numero di layer del laminato.

Tra i modelli utilizzabili nell'approccio dell'ESL si trovano diverse soluzioni [16]: la teoria classica della laminazione (CLT) [17], la First-order Shear Deformation Theory (FSDT) [18] e le relative modifiche di raffinamento fino alle teorie di ordine superiore o Higher-order Theories (HOT). In successione, tali teorie aumentano il livello di precisione nella valutazione di stress e strain grazie a diverse definizioni del campo di spostamenti per la macro-meccanica del laminato.

La CLT segue, nel caso di piastre, la teoria di Kirchoff, rappresentata dal seguente campo di spostamenti:

$$\begin{cases} u_i(x, y, z) = u_i^0(x, y) - zu_{i,z}^0(x, y) & \text{con } i = 1,2 \text{ oppure } i = x, y \\ u_3(x, y, z) = u_3^0(x, y) \end{cases} \quad (2.11)$$

L'assunzione fondamentale della teoria, oltre a quelle di tutti i modelli ESL, è che un segmento normale al piano medio resta ad esso ortogonale anche durante e dopo la deformazione, senza cambiare la sua lunghezza (tale assunzione è equivalente al modello di Eulero-Bernoulli nel caso trave): fisicamente ciò si interpreta ponendo gli scorrimenti trasversali fuori dal piano γ_{xz} e γ_{xy} uguali a zero, così come la deformazione normale ϵ_{zz} . Caratteristica dalle CLT è quindi l'ipotesi di un valore di spostamento costante attraverso il laminato.

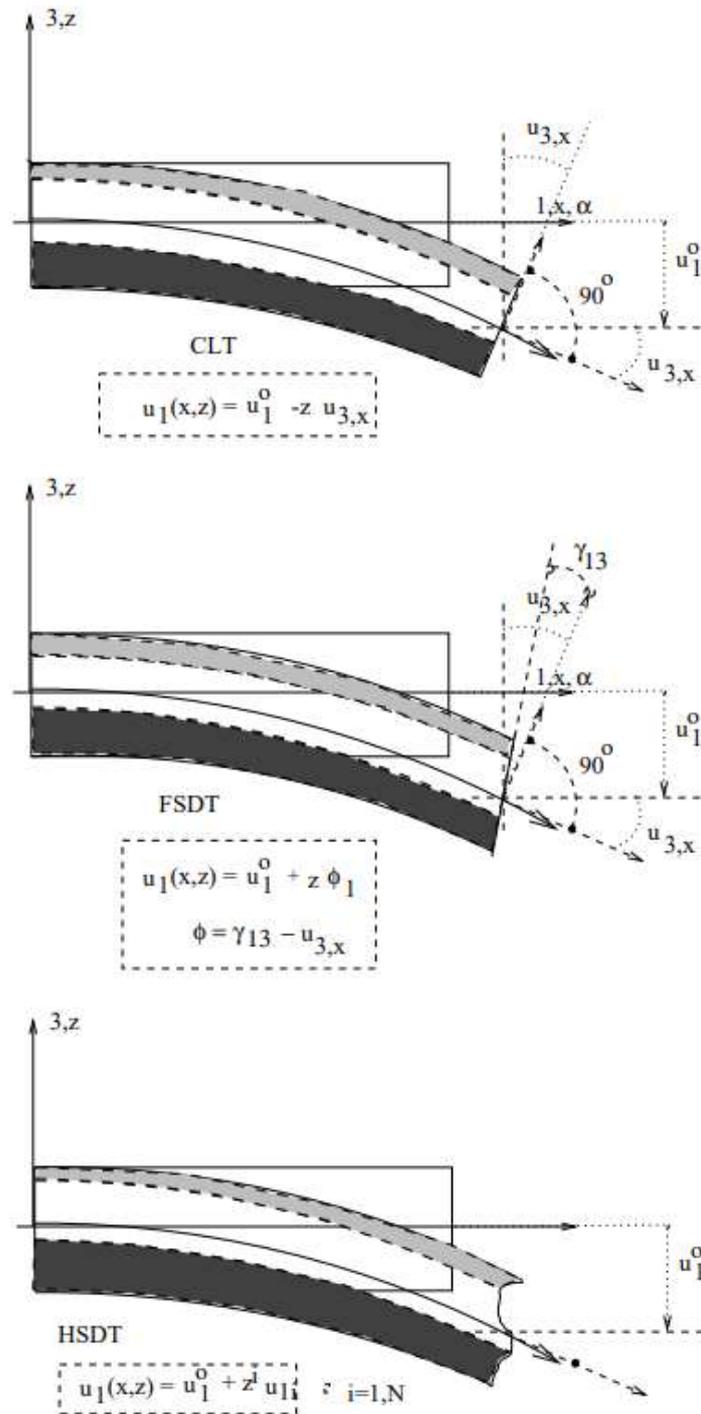


Figura 2-4: Assunzioni delle teorie CLT, FSDT e HSDT a confronto in un caso unidimensionale [16].

Con il passaggio alla FSDT si ipotizza invece una variazione lineare del campo di spostamenti. Nel caso di piastre, la teoria di riferimento è quella di Reissner-Mindlin:

$$\begin{cases} u_1(x, y, z) = u_i^0(x, y) + z\varphi_i(x, y) & \text{con } \varphi_i = u_{3i} - \gamma_{3i}, i = 1,2 \text{ oppure } i = x, y \\ u_3(x, y, z) = u_3^0(x, y) \end{cases} \quad (2.12)$$

In questo caso, rispetto alla teoria di Kirchoff cade l'ipotesi di ortogonalità del segmento rispetto al piano medio di riferimento: ciò significa che il modello include la presenza delle deformazioni di taglio, adesso diverse da zero.

Infine, con i modelli di ordine superiore HOT (o HODT) è possibile includere sia gli effetti del taglio con la presenza degli scorrimenti trasversali, sia le deformazioni in direzione normale. I modelli di spostamento risultano molto più complessi e seguono la seguente rappresentazione generica:

$$u_i(x, y, z) = u_1^0 + zu_{i1} + z^2u_{i2} + \dots + z^{N_i}u_{iN_i} \quad i = 1,2,3 \quad (2.13)$$

Dove N_i rappresenta l'ordine dell'espansione utilizzata per la descrizione delle variabili di spostamento.

Un confronto tra le diverse teorie presentate in questo paragrafo è rappresentato in Figura 2-4.

2.2.2. Approccio Layer-Wise

Il vantaggio dell'ESL, come già riportato in precedenza, è la presenza di un numero costante di variabili incognite indipendentemente dal numero di strati utilizzati nella laminazione. Utilizzando le HOT con diverse teorie cinematiche per la definizione degli scorrimenti a taglio trasversale e della deformazione normale, è possibile affinare i risultati a livello di comportamento macroscopico del laminato: indipendentemente dalla precisione raggiunta, però, l'approccio ESL resta comunque limitato all'analisi globale della struttura [19]. L'approccio Layer-Wise (LW) nasce quindi con lo scopo di differenziare i singoli layer e studiarli in maniera individuale: questa soluzione è quella con cui meglio può essere analizzato il fenomeno del danneggiamento progressivo, perché consente di individuare la modalità di rottura (fibra o matrice) in ciascuna lamina del componente.

In questo approccio, mentre gli spostamenti mantengono la continuità all'interfaccia come per l'ESL, le deformazioni presentano delle discontinuità tra gli strati, come rappresentato nella schematizzazione in Figura 2-5. Le tensioni trasversali sono quindi costanti in tutto il laminato. Il campo di spostamenti è adesso quindi di classe C^0 .

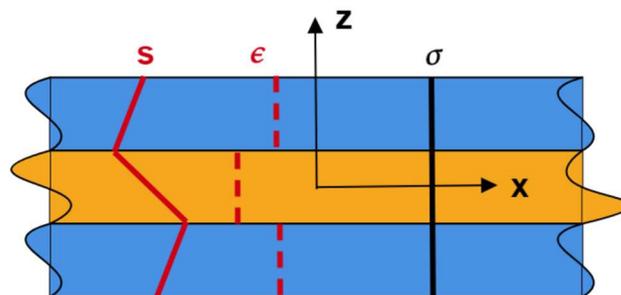


Figura 2-5: Rappresentazione esemplificativa del concetto di LW in un laminato, con spostamenti s e deformazioni ϵ (entrambi riportati in colore rosso) continue all'interno di ciascuno strato di laminato [16].

In questo campo di analisi le teorie precedentemente studiate per l'ESL sono nuovamente applicate, ma per ciascuno strato separatamente. Considerando un laminato costituito da un numero k di layer, è quindi possibile definire un campo di spostamenti seguendo le formulazioni CLT, FSDT oppure HOT per ogni strato k -esimo. La generica formulazione è:

$$\begin{cases} u_x^k(x, y, z) = f(x, y, z) \\ u_y^k(x, y, z) = g(x, y, z) \\ u_z^k(x, y, z) = h(x, y, z) \end{cases} \quad (2.14)$$

In conclusione, gli approcci ESL e LW possono essere confrontati attraverso lo schema di Figura 2-6.

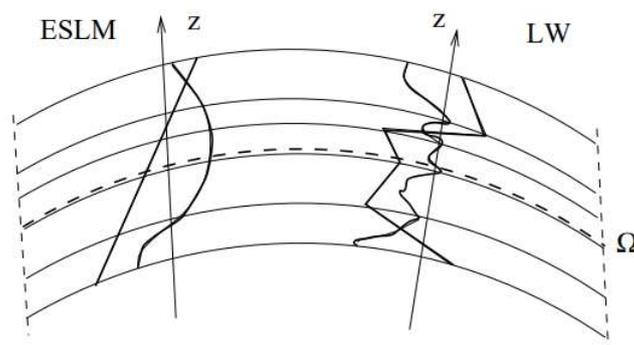


Figura 2-6: Esempio di confronto tra modelli ESL e LW in termini di spostamenti e deformazioni.

2.3 Criteri di failure

La rottura di un materiale viene determinata attraverso il confronto tra lo stato di sollecitazione presente al suo interno e un valore di riferimento corrispondente al massimo ammissibile, tipicamente determinato attraverso una serie di prove sperimentali in presenza di sollecitazioni semplici quindi taglio, trazione e compressione. Nel caso di materiali isotropi, che preservano le stesse proprietà lungo ogni direzione, la resistenza e il comportamento del materiale sono indipendenti dall'orientamento delle tensioni principali, quindi la direzione di applicazione della sollecitazione non ha alcuna influenza sulla risposta del componente. Al contrario, per i materiali ortotropi come i compositi ingegneristici oggetto di studio, la risposta può risultare fortemente dipendente dall'orientamento della sollecitazione; all'interno della singola lamina la resistenza viene individuata attraverso cinque parametri: resistenza a trazione longitudinale, resistenza a trazione trasversale, resistenza a compressione longitudinale, resistenza a compressione trasversale e resistenza a taglio.

In letteratura sono quindi presenti una serie di criteri di failure che, seguendo diversi possibili principi guida, permettono di predire rotture macroscopiche all'interno del laminato basandosi sull'analisi delle singole lamine presenti: se i valori di stress risultanti all'interno di un layer di materiale superano gli ammissibili calcolati secondo il criterio scelto, allora si

verifica un danno all'interno del componente che, progredendo all'interno del materiale, può portare fino alla rottura completa [20]. Una possibile caratterizzazione dei criteri può essere fatta distinguendo tra criteri interattivi e non-interattivi e tra criteri intra e inter-laminari. La prima distinzione riguarda la considerazione da parte del metodo della compresenza di diverse sollecitazioni, che possono avere effetti di reciproca interazione; la seconda è invece relativa alla capacità di studiare gli effetti di rottura individualmente all'interno di ogni lamina (criteri intra-laminari) o considerarne l'interazione all'interfaccia tra di esse (criteri inter-laminari).

2.3.1 Criterio della massima tensione e della massima deformazione

Questi criteri di tipo non-interattivo comparano la tensione o la deformazione presente in ogni direzione del riferimento cartesiano del materiale con i relativi ammissibili: la rottura avviene quando una di esse, anche da sola, supera il limite corrispondente. Le condizioni che portano al cedimento, nel caso del massimo stress, sono:

$$\sigma_{11} \geq X_T \text{ oppure } \sigma_{11} \leq -X_C \quad (2.15)$$

$$\sigma_{22} \geq Y_T \text{ oppure } \sigma_{22} \leq -Y_C \quad (2.16)$$

$$\tau_{12} \geq S_L \quad (2.17)$$

Dove σ_{11} e σ_{22} sono le componenti normali di stress nel piano, τ_{12} è lo sforzo di taglio nel piano, X_T e X_C rappresentano rispettivamente le componenti di resistenza a trazione e compressione del materiale nella direzione delle fibre, Y_T e Y_C sono i limiti in direzione normale alle fibre e S_L la resistenza a taglio longitudinale.

Analogamente, nel criterio del massimo strain, si ha:

$$\varepsilon_{11} \geq \varepsilon_T \text{ oppure } \varepsilon_{11} \leq -\varepsilon_C \quad (2.18)$$

$$\varepsilon_{22} \geq \varepsilon_T \text{ oppure } \varepsilon_{22} \leq -\varepsilon_C \quad (2.19)$$

$$\gamma_{12} \geq \gamma_L \quad (2.20)$$

Dove ε_{11} e ε_{22} sono le componenti normali di deformazione nel piano, γ_{12} è lo scorrimento angolare a taglio nel piano, ε_T e ε_C rappresentano rispettivamente i limiti a tensione e compressione del materiale e γ_L è il limite di scorrimento a taglio.

Entrambi i criteri non permettono di considerare in modo complessivo la sollecitazione applicata al materiale; tuttavia, data la loro semplicità e storicità, sono ancora ampiamente utilizzati.

2.3.2 Criteri di rottura polinomiali

I criteri di rottura polinomiali sono criteri intra-laminari di tipo interattivo che ricorrono a equazioni polinomiali di secondo ordine o superiore per la definizione del limite di rottura e del corrispondente indice di failure. In genere, queste formulazioni matematiche vengono dedotte a partire dalle curve risultanti da prove di rottura sperimentali.

Appartengono a questa famiglia di criteri Tsai-Wu, Tsai-Hill, anche indicato come l'estensione del criterio di Von Mises ai materiali non isotropi, Azzi-Tsai e Hoffman [21]. La formulazione generale, a partire dal primo di questi criteri, è rappresentata dall'espressione seguente:

$$F_1\sigma_{11} + F_2\sigma_{22} + F_3\sigma_{33} + F_{11}\sigma_{11}^2 + F_{22}\sigma_{22}^2 + F_{33}\sigma_{33}^2 + 2F_{12}\sigma_{11}\sigma_{22} + 2F_{23}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2F_{13}\sigma_{11}\sigma_{33} + F_{44}\tau_{13}^2 + F_{55}\tau_{23}^2 + F_{66}\tau_{12}^2 \geq 1 \quad (2.21)$$

Nel caso particolare di stato di tensione piano, i termini σ_{33} , τ_{13} e τ_{23} risultano nulli e l'espressione di partenza viene opportunamente semplificata:

$$F_1\sigma_{11} + F_2\sigma_{22} + F_{11}\sigma_{11}^2 + F_{22}\sigma_{22}^2 + 2F_{12}\sigma_{11}\sigma_{22} + F_{66}\tau_{12}^2 \geq 1 \quad (2.22)$$

I coefficienti presenti davanti a ciascun termine tensionale sono distinguibili in termini lineari F_i e termini quadratici F_{ij} : i primi sono relativi alla direzione dello stress, i secondi si riferiscono alla forma ellissoidale della curva rappresentativa dello stato tensionale nella lamina sottoposta ad analisi. La determinazione di tali coefficienti è di carattere sperimentale; in particolare, nel criterio di Tsai-Wu la difficoltà principale è la derivazione dei termini F_{12} , F_{13} e F_{23} , che si ottengono attraverso prove biassiali, di difficile implementazione e interpretazione. È inoltre richiesto di rispettare la seguente disuguaglianza:

$$F_{ii}F_{jj} - F_{ij}^2 \geq 0 \quad (2.23)$$

A seconda del criterio polinomiale scelto, si utilizza quindi la relativa formulazione riportata in Tabella 2-1 per il calcolo dei coefficienti andando così a sostituire i valori risultanti all'interno dell'espressione (2.21) di partenza.

Tabella 2-1: Definizione dei coefficienti F_i , F_{ii} , F_{ij} per diversi criteri polinomiali.

	Tsai-Wu	Tsai-Hill	Azzi-Tsai	Hoffman
F_1	$\frac{1}{X_T} - \frac{1}{X_C}$	0	0	$\frac{1}{X_T} - \frac{1}{X_C}$
F_2	$\frac{1}{Y_T} - \frac{1}{Y_C}$	0	0	$\frac{1}{Y_T} - \frac{1}{Y_C}$
F_3	$\frac{1}{Z_T} - \frac{1}{Z_C}$	0	0	$\frac{1}{Z_T} - \frac{1}{Z_C}$
F_{12}	$-\frac{1}{2\sqrt{X_T X_C Y_T Y_C}}$	$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2}\right)$	$-\frac{1}{X^2}$	$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{X_T X_C} + \frac{1}{Y_T Y_C} - \frac{1}{Z_T Z_C}\right)$
F_{13}	$-\frac{1}{2\sqrt{X_T X_C Z_T Z_C}}$	$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{Z^2} + \frac{1}{X^2} - \frac{1}{Y^2}\right)$	0	$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{X_T X_C} + \frac{1}{Z_T Z_C} - \frac{1}{Y_T Y_C}\right)$
F_{23}	$-\frac{1}{2\sqrt{X_T X_C Y_T Y_C}}$	$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{Z^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{X^2}\right)$	0	$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{Z_T Z_C} + \frac{1}{Y_T Y_C} - \frac{1}{X_T X_C}\right)$
F_{11}	$\frac{1}{X_T X_C}$	$\frac{1}{X^2}$	$\frac{1}{X^2}$	$\frac{1}{X_T X_C}$

F ₂₂	$\frac{1}{Y_T Y_C}$	$\frac{1}{Y^2}$	$\frac{1}{Y^2}$	$\frac{1}{Y_T Y_C}$
F ₃₃	$\frac{1}{Z_T Z_C}$	$\frac{1}{Z^2}$	0	$\frac{1}{Z_T Z_C}$
F ₄₄	$\frac{1}{s_{23}^2}$	$\frac{1}{s_{23}^2}$	0	$\frac{1}{s_{23}^2}$
F ₅₅	$\frac{1}{s_{13}^2}$	$\frac{1}{s_{13}^2}$	0	$\frac{1}{s_{13}^2}$
F ₆₆	$\frac{1}{s_{12}^2}$	$\frac{1}{s_{12}^2}$	$\frac{1}{s_{12}^2}$	$\frac{1}{s_{12}^2}$

Il principale limite di questi criteri polinomiali è l'impossibilità di determinare il modo di rottura del materiale, anche se grazie agli studi di Reddy sono state identificate delle metodologie che consentono di dedurre se la rottura interessi le fibre o la matrice attraverso l'analisi del contributo relativo di ogni stress [22]. Questa informazione è sicuramente necessaria per lo studio del danneggiamento progressivo.

2.3.3 Criterio di Hashin

Il criterio di Hashin è un criterio interattivo che permette di conoscere il modo di rottura del laminato [23]. Questo criterio, sviluppato nel 1980, riprende la formulazione quadratica del criterio di Tsai-Wu per ottenere un criterio valido in ambito tridimensionale per compositi unidirezionali. Innanzi tutto, si definisce un sistema di riferimento con asse 1 disposto lungo la direzione delle fibre (x_1), ed altri due assi, 2 (x_2) e 3 (x_3), perpendicolari tra loro e all'asse 1. Le caratteristiche del composito nel piano (in questa trattazione identificato dagli assi 2 e 3) sono indipendenti dall'orientazione con cui gli assi sono assunti. Si procede così all'identificazione degli invarianti I_1, I_2, I_3, I_4 e I_5 :

$$I_1 = \sigma_{11} \quad (2.24)$$

$$I_2 = \sigma_{22} + \sigma_{33} \quad (2.25)$$

$$I_3 = \sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{33} \quad (2.26)$$

$$I_4 = \sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 \quad (2.27)$$

$$I_5 = 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{13} - \sigma_{22}\sigma_{13}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2 \quad (2.28)$$

Dato che il segno degli sforzi di taglio non ha influenza sulla rottura del laminato, l'invariante I_5 non deve essere considerato nelle analisi di failure.

L'approssimazione quadratica del criterio di Hashin per il caso generico di un materiale trasversalmente isotropo diventa:

$$A_1 I_1 + B_1 I_1^2 + A_2 I_2 + B_2 I_2^2 + C_{12} I_1 I_2 + A_3 I_3 + A_4 I_4 = 1 \quad (2.29)$$

I valori limite in ciascuna direzione principale sono indicati nel seguente modo:

σ_A^+ = tensione di rottura a trazione nella direzione delle fibre;

σ_A^- = tensione di rottura a compressione nella direzione delle fibre (in valore assoluto);

σ_T^+ = tensione di rottura a trazione nella direzione perpendicolare a quella delle fibre;

σ_T^- = tensione di rottura a compressione nella direzione perpendicolare a quella delle fibre (in valore assoluto);

τ_T = limite a rottura di taglio in direzione trasversale, indicato come σ_{nt} in Figura 2-7;

τ_A = limite a rottura di taglio in direzione assiale, indicato come σ_{ln} in Figura 2-7.

In caso di un unico sforzo di taglio applicato, la determinazione di A_3 e di A_4 dipende esclusivamente dal tipo di carico, puramente trasversale o assiale:

$$A_3 = \frac{1}{\tau_T^2} \quad (2.30)$$

$$A_4 = \frac{1}{\tau_A^2} \quad (2.31)$$

A questo punto della trattazione, si effettua la distinzione tra fiber mode e matrix mode, ovvero rottura del composito unidirezionale per rottura delle fibre o della matrice; in ciascuno di questi casi è poi possibile distinguere tra cedimento per trazione o per compressione. Nel caso di fiber mode il piano di rottura risultante è perpendicolare alle fibre; al contrario nel matrix mode risulta essere ad esse parallelo, come mostrato in Figura 2-7.

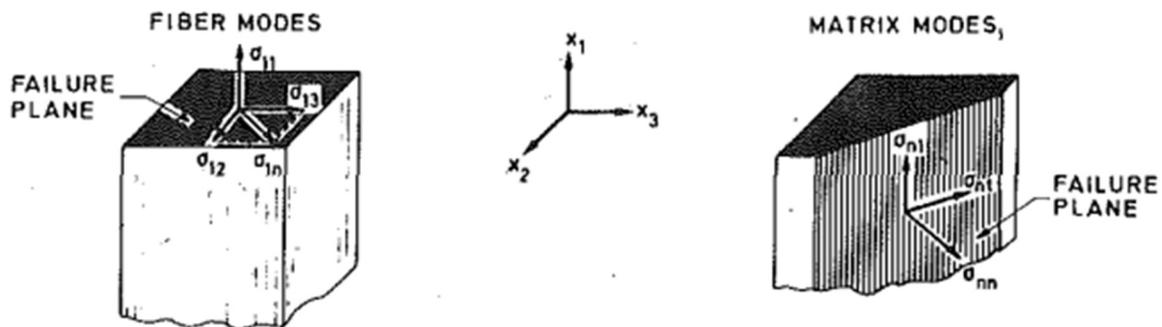


Figura 2-7: Modi di rottura e piani di rottura.

Per il fiber mode il piano di frattura è quindi circa coincidente con il piano x_2x_3 , perciò gli stress responsabili della rottura sono σ_{11} , σ_{12} e σ_{13} . Per il matrix mode invece, con un ragionamento equivalente, si deduce che gli stress responsabili della frattura sono σ_{nn} , σ_{nt} e σ_{ln} , di cui i primi due possono essere espressi nei termini delle tensioni σ_{22} , σ_{33} e σ_{23} mentre l'ultimo con i termini σ_{12} e σ_{13} ; di conseguenza, la componente di stress σ_{11} non collabora a questo tipo di rottura. Combinando queste informazioni con le espressioni quadratiche di riferimento, si ricavano le equazioni generali che definiscono il fiber e il matrix mode:

Fiber mode:

$$A_f \sigma_{11} + B_f \sigma_{11}^2 + \frac{1}{\tau_A^2} (\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2) = 1 \quad (2.32)$$

Matrix mode:

$$A_m (\sigma_{22} + \sigma_{33}) + B_m (\sigma_{22} + \sigma_{33})^2 + \frac{1}{\tau_T^2} (\sigma_{23}^2 - \sigma_{22} \sigma_{33}) + \frac{1}{\tau_A^2} (\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2) = 1 \quad (2.33)$$

Il criterio permette quindi di valutare attraverso queste due uniche espressioni sia la casistica a compressione che a trazione, che possono essere facilmente specializzate per adattare la forma del criterio alla condizione che ha portato alla rottura del pezzo.

Nel caso bidimensionale, il criterio può essere semplificato e riformulato come segue.

Rottura a compressione delle fibre:

$$-\frac{\sigma_{11}}{X_C} \geq 1 \text{ se } \sigma_{11} < 0 \quad (2.34)$$

Rottura a trazione delle fibre:

$$\left(\frac{\sigma_{11}}{X_T}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S_{12}}\right)^2 \geq 1 \text{ se } \sigma_{11} > 0 \quad (2.35)$$

Rottura a compressione della matrice:

$$\left(\frac{\sigma_{22}}{S_{23}}\right)^2 + \left[\left(\frac{Y_C}{2S_{23}}\right)^2 - 1\right] \frac{\sigma_{22}}{Y_C} + \left(\frac{\tau_{12}}{S_{12}}\right)^2 \geq 1 \text{ se } \sigma_{22} < 0 \quad (2.36)$$

Rottura a trazione della matrice:

$$\left(\frac{\sigma_{22}}{Y_T}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S_{12}}\right)^2 \geq 1 \text{ se } \sigma_{22} > 0 \quad (2.37)$$

Dove X_C , X_T , Y_C e Y_T rappresentano i valori di stress ammissibili per compressione e tensione nelle direzioni principali della lamina; S_{12} , S_{23} e S_{13} sono i limiti per lo sforzo di taglio nei vari piani di scorrimento; Z è lo stress ammissibile in direzione trasversale al piano principale.

2.3.4 Criterio di Puck

Nel 1998 Puck e Schurmann, partendo dal criterio di Hashin, approfondirono il problema e apportarono alcuni miglioramenti al criterio precedentemente esistente. Rispetto all'originale, la nuova formulazione consente di studiare la rottura della fibra facendo riferimento alle sue proprie caratteristiche e non a quelle dell'intera lamina; inoltre, per la rottura della matrice è ora possibile ricondursi a tre diverse condizioni di carico, ovvero la tensione trasversale o modo A, la compressione trasversale moderata o modo B, e la compressione trasversale estesa o modo C [24]. Un'ulteriore novità è da attribuirsi alla caratterizzazione degli angoli variabili del piano di frattura e dei corrispondenti parametri di inclinazione, che risultano essenziali per la comprensione della frattura e della sua evoluzione.

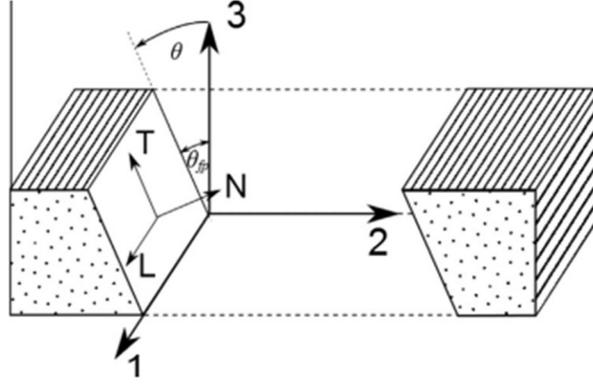


Figura 2-8: Sistema di riferimento materiale 123 ruotato in LNT rispetto al piano di rottura del laminato [24].

La formulazione del criterio è la seguente:

- Rottura a trazione delle fibre:

$$\frac{1}{\varepsilon_{1T}} \left(\varepsilon_1 + \frac{\nu_{f12}}{E_{f1}} m_{\sigma f} \sigma_{22} \right) \geq 1 \quad (2.38)$$

- Rottura a compressione delle fibre:

$$\frac{1}{\varepsilon_{1C}} \left| \varepsilon_1 + \frac{\nu_{f12}}{E_{f1}} m_{\sigma f} \sigma_{22} \right| + 10\gamma_{21}^2 \geq 1 \quad (2.39)$$

- Rottura della matrice con tensione trasversale:

$$\sqrt{\left(\frac{\tau_{12}}{S_{21}} \right)^2 + \left(1 - p_{vp}^+ \frac{Y_T}{S_{21}} \right)^2 \left(\frac{\sigma_{22}}{Y_T} \right)^2} + p_{vp}^+ \frac{\sigma_{22}}{S_{21}} + \frac{\sigma_{11}}{\sigma_{11D}} \geq 1 \quad (2.40)$$

- Rottura della matrice con compressione trasversale moderata:

$$\frac{1}{S_{21}} \left(\sqrt{\tau_{21}^2 + (p_{vp}^- \sigma_{22})^2} + p_{vp}^- \sigma_{22} \right) + \frac{\sigma_{11}}{\sigma_{11D}} \geq 1 \quad (2.41)$$

- Rottura della matrice con compressione trasversale estesa:

$$\left[\left(\frac{\tau_{21}}{2(1 + p_{vv}^-) S_{21}} \right) + \left(\frac{\sigma_{22}}{Y_C} \right)^2 \right] \frac{Y_C}{(-\sigma_{22})} + \frac{\sigma_{11}}{\sigma_{11D}} \geq 1 \quad (2.42)$$

Dove:

- ε_{1T} e ε_{1C} sono le deformazioni massime a rottura, rispettivamente a trazione e a compressione;
- ν_{f12} e E_{f1} sono il coefficiente di Poisson e il modulo di Young della fibra, nella direzione principale;
- $m_{\sigma f}$ è il fattore di ingrandimento medio di stress nella direzione trasversale, ovvero il magnification factor;

- σ_{11} e σ_{22} sono rispettivamente gli stress nella direzione principale e in quella trasversale;
- γ_{21} è lo scorrimento angolare;
- τ_{21} è lo sforzo di taglio;
- σ_{11D} è il valore di stress che si avrebbe nel caso di degradazione lineare del materiale;
- p_{vp}^+ , p_{vp}^- e p_{vv} sono i parametri di inclinazione del piano di frattura.

Per i materiali compositi a matrice polimerica, i parametri di inclinazione del criterio di Puck sono stati valutati sperimentalmente. I valori determinati sono:

- $p_{vp}^+ = 0,35$;
- $p_{vp}^- = 0,30$;
- $p_{vv} = 0,25-0,30$.

2.4 Meccanismi di danneggiamento del materiale

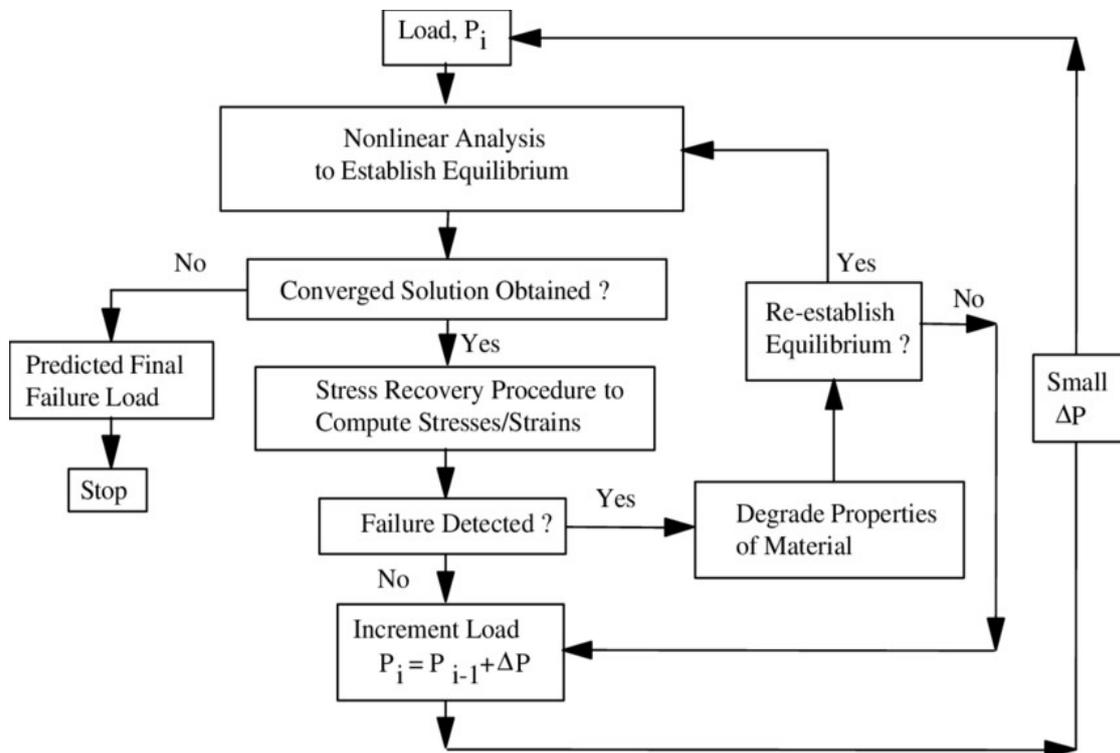


Figura 2-9: Schema rappresentativo del funzionamento della Progressive Failure Analysis [25].

Per valutare lo stato del materiale e la sua utilizzabilità esistono diversi criteri; in fase di progetto, tipicamente, si fa riferimento alle condizioni che portano al First Ply Failure (FPF) per il dimensionamento dei componenti. Il cedimento del primo layer, tuttavia, quasi mai coincide con la rottura completa del pezzo: per questa ragione, in modo da considerare con precisione maggiore il reale comportamento delle strutture, è stato necessario sviluppare dei modelli più accurati e introdurre il danneggiamento progressivo del laminato.

I modelli di cedimento progressivo (Progressive Failure Analysis, PFA) del materiale presenti in letteratura sono molteplici e spaziano da soluzioni più semplici come il Material Property Degradation Method (MPDM), a modelli più complessi quale il Continuum Damage Mechanics (CDM). Una possibile schematizzazione del metodo di analisi è rappresentata in Figura 2-9.

2.4.1 Material property degradation method

Questo metodo di analisi si basa sulla possibilità di modellare il materiale considerando la degradazione dei suoi valori di resistenza. In particolare, valutando le sollecitazioni esterne applicate, l'approccio considerato permette di valutare se i vari strati del laminato rimangono perfettamente integri o vanno incontro ad un indebolimento strutturale e ad una conseguente rottura. Man mano che il danno procede tra i ply, questo si riflette sulla resistenza del componente, che si abbassa attraverso la considerazione di un fattore di degradazione SRC (Stiffness Reduction Coefficient) delle sue rigidezze. La soluzione più semplice è quella di considerare i fattori di degradazione costanti e pari a valori piccoli, ma diversi da zero per non creare singolarità nella matrice di rigidezze; tuttavia, questa decisione porta a valori di carico ultimo strettamente dipendenti alla scelta del fattore SRC.

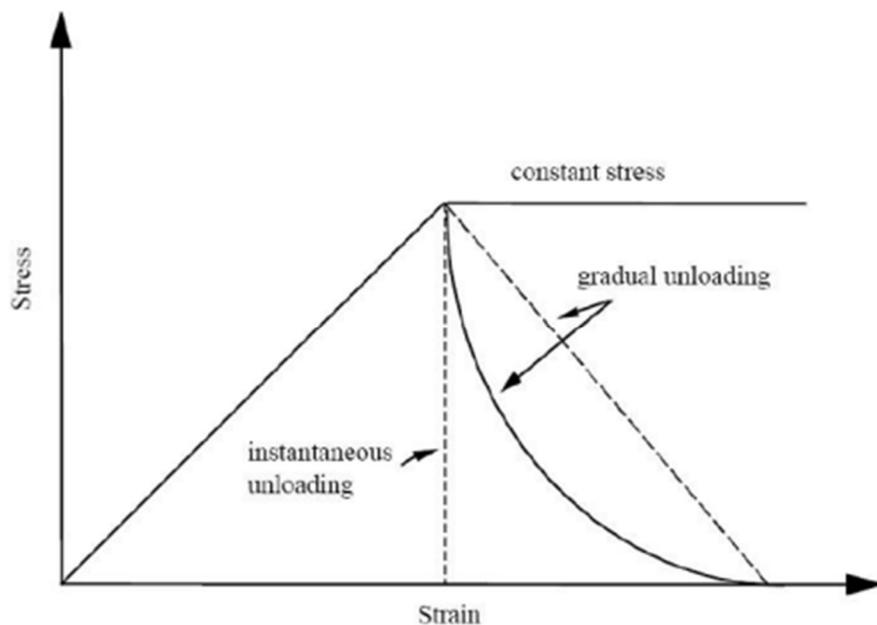


Figura 2-10: Schema rappresentativo delle tre possibili applicazioni del MPDM.

In generale, il MPDM prevede tre alternative principali: la degradazione istantanea del materiale, la degradazione graduale o l'approccio basato su un valore di stress costante.

Nel caso della degradazione istantanea le caratteristiche di rigidezza del materiale vengono ridotte di default ad una frazione del valore iniziale (diversa da zero) non appena si verifica la condizione di failure. Il SRC deve quindi assumere un valore inferiore all'unità; il range

tipico è estremamente variabile, ma valori di SRC pari a 10^{-3} sono generalmente sufficienti ad ottenere dei risultati accurati.

La degradazione graduale, a differenza del caso istantaneo, permette una riduzione delle rigidità del materiale senza portarle direttamente ad annullarsi. Questa soluzione applica dei valori di SRC che consentono quindi una progressiva riduzione del massimo carico sopportabile dal materiale, simulando così in modo più accurato la realtà. La scelta del valore del fattore di riduzione diventa ovviamente essenziale per una corretta implementazione del metodo: è necessario un compromesso tra valori non troppo piccoli, che trascurerebbero la progressione del danno, e valori vicini all'unità, che porterebbero a procedure di valutazione molto onerose in termini di tempistiche e costo computazionale.

Infine, l'approccio basato sull'idea del "constant stress" considera costante la sollecitazione dopo il raggiungimento della condizione di failure, in modo che i valori di stress rimangano sempre uguali all'interno dello strato danneggiato.

L'implementazione del metodo di analisi del danneggiamento dipenderà poi dal criterio di failure che si vuole utilizzare, con diverse valutazioni da effettuare a seconda che quest'ultimo sia in grado di distinguere il modo di rottura (fibra o matrice) o meno.

2.4.2 Continuum damage mechanics

Il CDM è un metodo più complesso e preciso per modellare il danneggiamento progressivo di un laminato: questo approccio si basa sulla definizione di variabili di stato interne che consentono di rilevare la presenza del danno. In particolare, si vanno a definire delle equazioni costitutive del tutto simili a quelle elastiche, dove però i coefficienti sono funzione delle variabili di stato selezionate. Sono possibili diverse formulazioni a seconda del criterio di failure considerato e del tipo di valutazione che si vuole effettuare.

Un possibile schema di riferimento è quello di Figura 2-11; il valore di stress aumenta fino al raggiungimento o al superamento dell'ammissibile, corrispondente al punto A e allo spostamento δ_{eq}^0 : da questo momento il danneggiamento interno deve essere considerato nelle equazioni costitutive del materiale, fino al raggiungimento del valore di spostamento limite prima della rottura δ_{eq}^f . L'energia assorbita dal materiale fino a rottura corrisponde alla fracture toughness G^C , ovvero l'energia da fornire al materiale per portarlo ad un cedimento fragile di schianto. La definizione del danneggiamento è quindi:

$$d = \frac{\delta_{eq}^f (\delta_{eq} - \delta_{eq}^0)}{\delta_{eq} (\delta_{eq}^f - \delta_{eq}^0)} \quad (2.43)$$

Tale valutazione deve essere effettuata sia per le fibre che per la matrice, sia a trazione che a compressione.

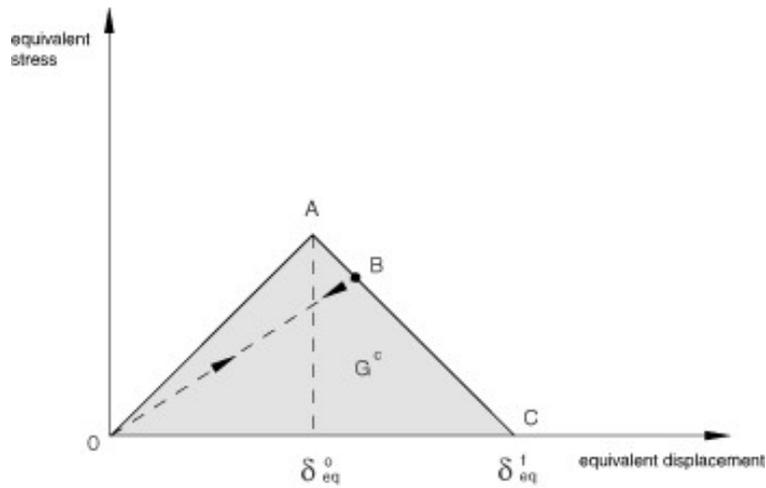


Figura 2-11: Evoluzione del danneggiamento fino alla rottura in un composito ingegneristico [26].

Uno dei modelli più utilizzati nella Continuum Damage Mechanics è il MLT (Matzenmiller-Lubliner-Taylor), che utilizza una funzione di Weibull per descrivere la natura statistica dei difetti e delle rotture all'interno del laminato. L'andamento della variabile di danno viene espressa attraverso la seguente formulazione:

$$d_{MLT} = 1 - e^{-\frac{1}{m} \left(\frac{\varepsilon_I}{\varepsilon_{I,f}} \right)^m} \quad (2.44)$$

Dove m è il fattore di Weibull, che identifica un parametro di controllo della densità di energia di deformazione in un certo punto del materiale; ε_I è la deformazione nella direzione I-esima considerata e $\varepsilon_{I,f}$ è l'equivalente di ε_I ma a rottura.

Capitolo 3

3. La Formulazione Unificata di Carrera (CUF)

In questo capitolo si descrive con maggiore dettaglio la Formulazione Unificata di Carrera, spiegando le scelte effettuate e i modelli di analisi implementati nel programma di riferimento Mul2. Si riporta poi una possibile alternativa per lo studio del danneggiamento progressivo attraverso Hashin 3D e Puck, per la sostituzione del codice attualmente in uso (CODAM2) con l'integrazione della subroutine Hashin + Puck.

3.1 Definizione della CUF

La Formulazione Unificata di Carrera è un modello generalizzato gerarchico per derivare teorie strutturali di ordine superiore, in particolare sfruttato per i casi 1D (trave) e 2D (piastra). Il concetto fondamentale del metodo è l'introduzione di funzioni di espansione accanto a quelle di interpolazione già note della formulazione agli elementi finiti: questo consente di ottenere modelli del tutto confrontabili in accuratezza rispetto a soluzioni 3D, ma con un costo computazionale significativamente inferiore.

Più in generale, la formulazione matematica della CUF è formalmente identica indipendentemente dal modello che si vuole utilizzare (Trave, Piastra o Solido). Il campo di spostamenti può essere definito come segue:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \sum_{\tau} F_{\tau} \mathbf{u}_{\tau} = F_{\tau} \mathbf{u}_{\tau} \quad (3.1)$$

Dove il termine F_{τ} si riferisce alle funzioni di forma, che consentono di modellizzare in modo completo la struttura a seconda della soluzione scelta (1D, 2D o 3D).

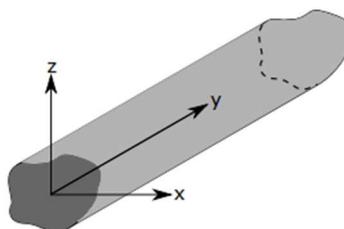


Figura 3-1: Sistema di riferimento del generico elemento beam, orientato lungo l'asse y.

Il sistema di riferimento usato dalla CUF è rappresentato in Figura 3-1. Se l'obiettivo è modellizzare una trave (1D), allora le funzioni di forma andranno a definire la sezione risultando dipendenti da x e z ; se invece si vuole schematizzare una piastra (2D), le funzioni di forma saranno dipendenti solo da z in quanto si va a rappresentare lo spessore della struttura; infine, nel caso di un solido (3D), le funzioni di forma assumono valori costanti. Ciò si può riassumere come:

$$\text{caso 1D: } F_{\tau}(x, z) = f(x, z) \quad (3.2)$$

$$\text{caso 2D: } F_{\tau}(z) = f(z) \quad (3.3)$$

$$\text{caso 3D: } F_{\tau} = 1 \quad (3.4)$$

Il pedice τ della funzione di forma può assumere valori da 1 a M , in base al numero di termini di cui è costituita l'espansione, sulla base della scelta dell'utilizzatore della teoria. Nella CUF, le espansioni utilizzate sono di due tipi: i polinomi di Lagrange e i polinomi di Taylor, con le funzioni di forma corrette a seconda della formulazione scelta.

Una volta definite le espansioni e le funzioni di forma, il resto della struttura viene modellata attraverso la formulazione agli elementi finiti (FEM): per le travi (1D) si ricorre a funzioni N_i unidimensionali dipendenti dalla coordinata y , per le piastre (2D) a funzioni bidimensionali N_i dipendenti da y e x ; per i solidi (3D) si usano invece funzioni N_i dipendenti da tutte e tre le coordinate.

$$\text{caso 1D: } N_i(y) \quad (3.5)$$

$$\text{caso 2D: } N_i(x, y) \quad (3.6)$$

$$\text{caso 3D: } N_i(x, y, z) \quad (3.7)$$

Infine, si può definire per ciascun caso il relativo campo di spostamenti e le incognite $\mathbf{u}_{\tau i}$:

$$\text{caso 1D: } \mathbf{u} = F_{\tau}(x, z)N_i(y)\mathbf{u}_{\tau i} \quad (3.8)$$

$$\text{caso 2D: } \mathbf{u} = F_{\tau}(z)N_i(x, y)\mathbf{u}_{\tau i} \quad (3.9)$$

$$\text{caso 3D: } \mathbf{u} = F_{\tau}N_i(x, y, z)\mathbf{u}_{\tau i} \quad (3.10)$$

3.1.1 Le espansioni di Taylor

Le espansioni di Taylor (TE) si basano sull'uso delle serie di Taylor, con un numero di termini polinomiali M definito dall'utente in base alle scelte e agli obiettivi dell'analisi [25]. Per esempio, l'espansione di Taylor del primo ordine ($M = 1$), contenente 9 termini, può essere scritta nel seguente modo:

$$u_x = u_{x_1} + zu_{x_2} + zu_{x_3} \quad (3.11)$$

$$u_y = u_{y_1} + xu_{y_2} + zu_{y_3} \quad (3.12)$$

$$u_z = u_{z_1} + xu_{z_2} + zu_{z_3} \quad (3.13)$$

Dalla teoria del primo ordine è sempre possibile passare alla CLT con la rimozione sistematica di alcuni dei termini del polinomio. Ad esempio, volendo applicare la teoria delle travi di Timoshenko, il polinomio si riduce da 9 a 5 termini partendo dalle equazioni (3.11), (3.12) e (3.13):

$$u_x = u_{x_1} \quad (3.14)$$

$$u_y = u_{y_1} + x\varphi_z + z\varphi_x \quad (3.15)$$

$$u_z = u_{z_1} \quad (3.16)$$

Indipendentemente dalla teoria di riferimento, le espansioni di Taylor sono però utilizzabili esclusivamente nell'approccio ESL: per questa ragione non sono state considerate nei casi di studio che saranno esaminati nei capitoli successivi della trattazione.

3.1.2 Le espansioni di Lagrange

Le espansioni Lagrangiane (LE) sono funzioni per la descrizione cinematica del modello strutturale basate sui polinomi di Lagrange, definiti con la scrittura L_n , dove n si riferisce al numero di nodi dell'elemento, che possono variare a seconda delle scelte di design. Queste funzioni sono esclusivamente correlate ai gradi di libertà traslazionali di ogni nodo nel sistema di riferimento globale del modello: ciò consente di ottenere un vantaggio significativo rispetto alle TE, ovvero non sono influenzate dall'ordine scelto. Aumentare il numero di gradi di libertà non ha implicazioni sul raffinamento dell'analisi.

Le espansioni Lagrangiane permettono quindi di costruire un modello anche secondo l'approccio Layer-Wise, dove agli elementi di ogni lamina sono associate una o più funzioni di Lagrange [26].

Tale soluzione è quella usata per le analisi numeriche riportate nei capitoli successivi, quindi verrà ripresa nello specifico sia per il modello Trave che per il modello Piastra all'interno dei relativi paragrafi.

3.1.3 Il modello Trave

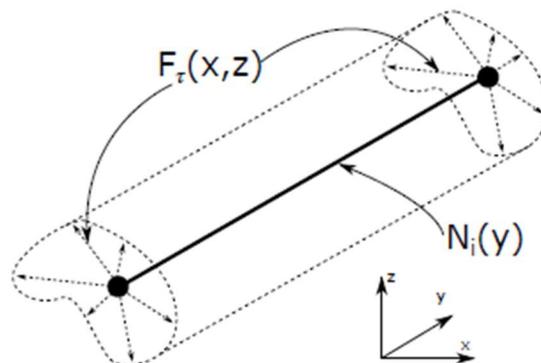


Figura 3-2: Schematizzazione del modello CUF-1D [27].

Per ottenere il modello trave, la cui rappresentazione è riportata in Figura 3-2, si uniscono la formulazione CUF-1D e la discretizzazione FEM. In particolare, la trave viene schematizzata con elementi unidimensionali lungo il proprio asse, dove ad ogni nodo della discretizzazione agli elementi finiti corrisponde un'espansione della relativa sezione trasversale. Per gli elementi unidimensionali, la scelta può ricadere su elementi lagrangiani B2, B3 o B4, le cui formulazioni e differenze sono riportate in Figura 3-3.

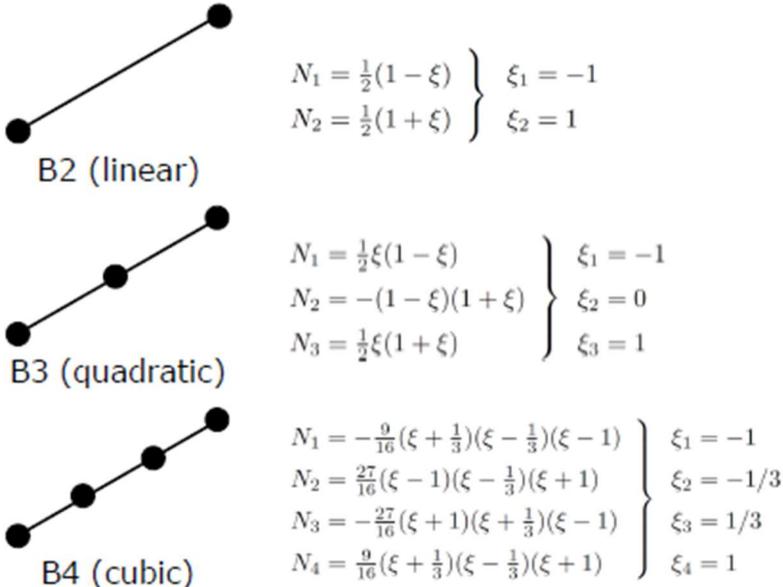


Figura 3-3: Elementi 1D selezionabili e relative funzioni di interpolazione nodale. Il valore ξ può variare da +1 a -1 e indica la posizione del nodo all'interno del sistema naturale dell'elemento trave.

Questi elementi B2, B3 e B4 seguono quindi una formulazione basata sui polinomi di Lagrange, che sono funzione della sola coordinata y del sistema di riferimento della trave; ad ogni nodo così definito è poi associata la corrispondente espansione, funzione di x e z , che nelle analisi effettuate è sempre di tipo Lagrangiano. La scelta può in questo caso ricadere su espansioni LE1, LE2 o LE3, che sono rappresentate in Figura 3-4.

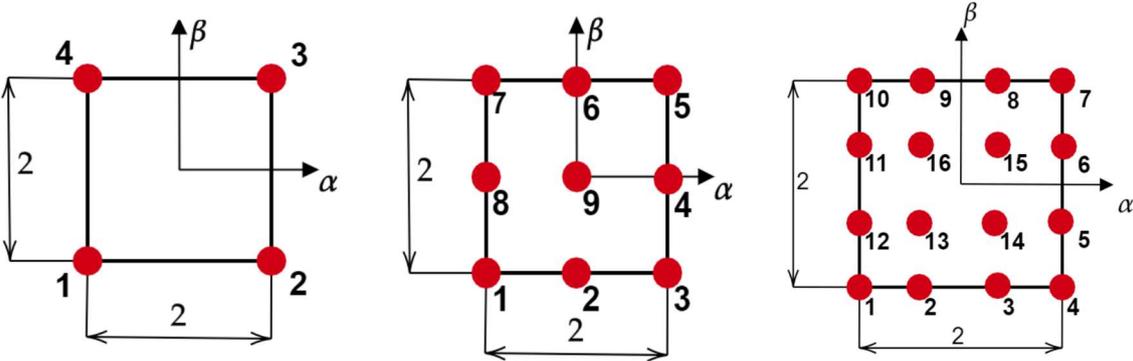


Figura 3-4: Espansioni LE1, LE2 e LE3 utilizzabili nella CUF-1D.

Il primo tipo di espansione si basa su elementi a quattro nodi, dove per ciascun nodo l'equazione ha la stessa espressione, che è un prodotto di funzioni lineari rispetto ad α e β , coordinate normalizzate dell'elemento:

$$F_\tau = \frac{1}{4}(1 + \alpha\alpha_\tau)(1 + \beta\beta_\tau), \quad \tau = 1,2,3,4 \quad (3.17)$$

L'espansione LE2 si basa invece su elementi a nove nodi e su equazioni di secondo grado paraboliche in α e β , in questo caso differenziate a seconda della posizione dei nodi stessi nell'elemento:

$$F_\tau = \frac{1}{4}(\alpha^2 + \alpha\alpha_\tau)(\beta^2 + \beta\beta_\tau), \quad \tau = 1,3,5,7 \quad (3.18)$$

$$F_\tau = \frac{1}{2}\beta_\tau(\beta^2 + \beta\beta_\tau)(1 - \alpha^2) + \frac{1}{2}\alpha_\tau(\alpha^2 + \alpha\alpha_\tau)(1 - \beta^2), \quad \tau = 2,4,6,8 \quad (3.19)$$

$$F_\tau = (1 - \alpha^2)(1 - \beta^2), \quad \tau = 9 \quad (3.20)$$

Si nota quindi che le formule sono diverse per i nodi ai quattro vertici, per quelli al centro dei lati e per il nodo centrale.

Infine, l'espansione LE3 utilizza elementi a sedici nodi e funzioni cubiche in α e β :

$$F_\tau = \frac{81}{256}(1 + \alpha\alpha_\tau)\left(\frac{1}{9} - \alpha^2\right)(1 + \beta\beta_\tau)\left(\frac{1}{9} - \beta^2\right), \quad \tau = 1,4,7,10 \quad (3.21)$$

$$F_\tau = \frac{243}{256}(1 - \alpha^2)\left(\beta^2 - \frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{3} + 3\alpha\alpha_\tau\right)(1 + \beta\beta_\tau), \quad \tau = 2,3,8,9 \quad (3.22)$$

$$F_\tau = \frac{243}{256}(1 - \beta^2)\left(\alpha^2 - \frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{3} + 3\beta\beta_\tau\right)(1 + \alpha\alpha_\tau), \quad \tau = 5,6,11,12 \quad (3.23)$$

$$F_\tau = \frac{729}{256}(1 - \alpha^2)(1 - \beta^2)\left(\frac{1}{3} + 3\alpha\alpha_\tau\right)\left(\frac{1}{3} + 3\beta\beta_\tau\right), \quad \tau = 13,14,15,16 \quad (3.24)$$

Nei modelli 1D-CUF così ottenibili, il campo di spostamenti risultante è quindi quello riportato nell'equazione (3.8): le variabili da determinare, rappresentate dal vettore $\mathbf{u}_{\tau i}$, sono:

$$\mathbf{u}_{\tau i} = \{u_{x,\tau i}, u_{y,\tau i}, u_{z,\tau i}\}^T \quad (3.25)$$

Dove $\tau = 1, \dots, M$ corrisponde al numero di termini polinomiali usati nell'espansione LE e $i = 1, \dots, N_E$ è uguale al numero del nodo dell'elemento. I termini incogniti sono indipendenti dalle coordinate x , y e z .

I gradi di libertà totali (DOFs) del modello trave, dopo aver unito gli elementi della discretizzazione FEM e quelli dell'espansione, possono essere calcolati come segue:

$$DOFs = (3 * M) * [(N_E - 1) * NBE + 1] \quad (3.26)$$

Dove M è il numero totale di nodi (ciascuno con 3 gradi di libertà), N_E il numero di nodi di ciascun elemento e NBE il numero complessivo di elementi trave. In particolare, il prodotto $(3 * M)$ rappresenta il numero di DOFs per nodo.

3.1.4 Il modello Piastra

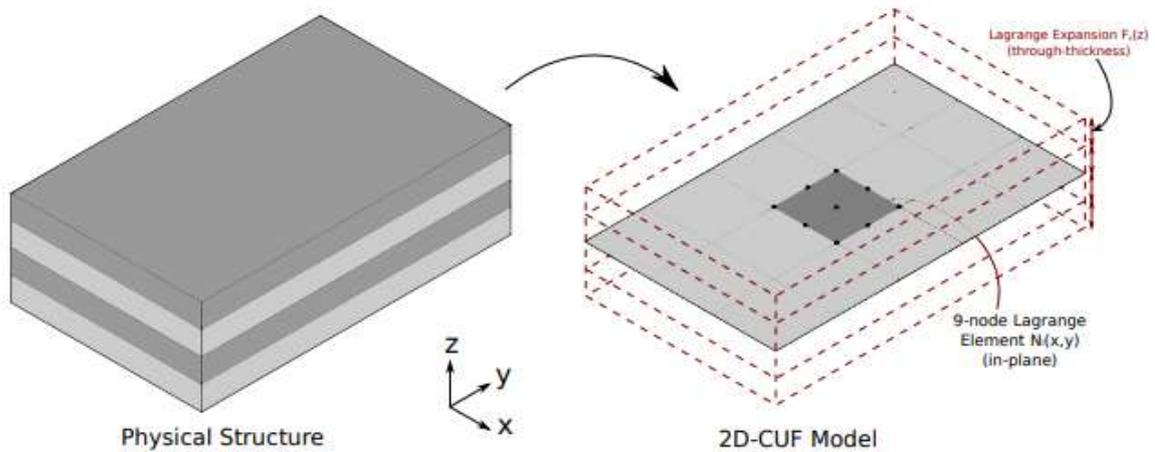


Figura 3-5: Schematizzazione del modello CUF-2D [27].

Per ottenere il modello piastra, la cui rappresentazione è riportata in Figura 3-5, si uniscono la formulazione CUF-2D e la discretizzazione FEM. In particolare, la piastra viene schematizzata con elementi bidimensionali nel suo piano medio Ω , per i quali ad ogni nodo della discretizzazione agli elementi finiti corrisponde un'espansione lungo lo spessore. Un esempio di modellizzazione è riportato in Figura 3-6.

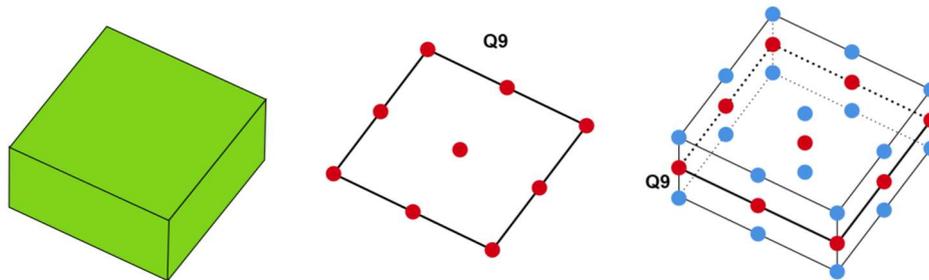


Figura 3-6: Esempio di passaggio dal modello di piastra reale alla schematizzazione tramite CUF, con formulazione agli elementi finiti (elemento Q9, con nodi evidenziati in rosso) e relativa espansione Lagrangiana (in azzurro).

Per gli elementi bidimensionali, la scelta può ricadere su elementi Q4, Q9 e Q16 di tipo Lagrangiano. La rappresentazione grafica è equivalente a quella di Figura 3-4 con ξ e η al posto di α e β , mentre le formulazioni matematiche sono le seguenti:

Elemento Q4

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i), \quad i = 1,2,3,4 \quad (3.27)$$

Elemento Q9

$$N_i = \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi\xi_i)(\eta^2 + \eta\eta_i), \quad i = 1,3,5,7 \quad (3.28)$$

$$N_i = \frac{1}{2}\eta_i(\eta^2 + \eta\eta_i)(1 - \xi^2) + \frac{1}{2}\xi_i(\xi^2 + \xi\xi_i)(1 - \eta^2), \quad i = 2,4,6,8 \quad (3.29)$$

$$N_i = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2), \quad i = 9 \quad (3.30)$$

Elemento Q16

$$N_i = \frac{81}{256}(1 + \xi\xi_i)\left(\frac{1}{9} - \xi^2\right)(1 + \eta\eta_i)\left(\frac{1}{9} - \eta^2\right), \quad i = 1,4,7,10 \quad (3.31)$$

$$N_i = \frac{243}{256}(1 - \xi^2)\left(\eta^2 - \frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{3} + 3\xi\xi_i\right)(1 + \eta\eta_i), \quad i = 2,3,8,9 \quad (3.32)$$

$$N_i = \frac{243}{256}(1 - \eta^2)\left(\xi^2 - \frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{3} + 3\eta\eta_i\right)(1 + \xi\xi_i), \quad i = 5,6,11,12 \quad (3.33)$$

$$N_i = \frac{729}{256}(1 - \xi^2)(1 - \eta^2)\left(\frac{1}{3} + 3\xi\xi_i\right)\left(\frac{1}{3} + 3\eta\eta_i\right), \quad i = 13,14,15,16 \quad (3.34)$$

Le coordinate naturali di riferimento sono quindi ξ e η , che variano tra +1 e -1. Se si considera una piastra rettangolare generica con lati a e b rispettivamente lungo la direzione x e y e se si indicano con x_1 e y_1 le coordinate del nodo in posizione 1 nel sistema globale, le coordinate si definiscono come:

$$\xi = \frac{2(x-x_1)-a}{a} \quad (3.35)$$

$$\eta = \frac{2(y-y_1)-b}{b} \quad (3.36)$$

Per l'espansione lungo lo spessore, invece, si può scegliere tra LE1, LE2 o LE3 a seconda del grado del polinomio Lagrangiano usato per la rappresentazione dell'elemento corrispondente, unidimensionale. La rappresentazione schematica è la stessa di Figura 3-3.

Si riportano di seguito le rispettive formulazioni matematiche, che utilizzano come riferimento la coordinata naturale ζ_i , che varia tra -1 e +1 e dove ζ si riferisce alla posizione di ogni nodo nel sistema naturale dell'elemento (ξ, η) :

Espansione LE1 (equazioni lineari)

$$F_1 = \frac{1}{2}(1 - \zeta), \quad F_2 = \frac{1}{2}(1 + \zeta), \quad \begin{cases} \zeta_1 = -1 \\ \zeta_2 = +1 \end{cases} \quad (3.37)$$

Espansione LE2 (equazioni paraboliche)

$$F_1 = \frac{1}{2}\zeta(1 - \zeta), \quad F_2 = \frac{1}{2}\zeta(1 + \zeta), \quad F_3 = -(1 - \zeta)(1 + \zeta), \quad \begin{cases} \zeta_1 = -1 \\ \zeta_2 = +1 \\ \zeta_3 = 0 \end{cases} \quad (3.38)$$

Espansione LE3 (equazioni cubiche)

$$F_1 = -\frac{9}{16}\left(\zeta + \frac{1}{3}\right)\left(\zeta - \frac{1}{3}\right)(\zeta - 1), \quad F_2 = \frac{9}{16}\left(\zeta + \frac{1}{3}\right)\left(\zeta - \frac{1}{3}\right)(\zeta + 1), \quad (3.39)$$

$$F_3 = \frac{27}{16} (\zeta + 1) \left(\zeta - \frac{1}{3} \right) (\zeta - 1), \quad F_4 = -\frac{27}{16} (\zeta + 1) \left(\zeta + \frac{1}{3} \right) (\zeta - 1), \quad \begin{cases} \zeta_1 = -1 \\ \zeta_2 = +1 \\ \zeta_3 = 0 \end{cases}$$

A questo punto, seguendo gli stessi passaggi già considerati per il modello trave, è possibile calcolare i DOFs del modello piastra così ottenuto:

$$DOFs = (3 * M) * N_N \quad (3.40)$$

Dove N_N è il numero totale di nodi.

3.1.5 La matrice di rigidità

La costruzione della matrice di rigidità viene effettuata attraverso l'applicazione del Principio dei Lavori Virtuali (PLV), secondo il quale per un corpo in equilibrio il lavoro virtuale interno totale è uguale alla somma dei lavori virtuali esterni. Ciò si traduce con l'espressione seguente:

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{u}_{\tau i} \rho \ddot{\mathbf{u}} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} \delta \boldsymbol{\sigma}_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}_{\tau i} \mathbf{b}_i d\Omega + \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}_{\tau i} \mathbf{t}_i d\Gamma \quad (3.41)$$

Dove $\boldsymbol{\sigma}$ è il tensore degli stress, $\boldsymbol{\varepsilon}$ il tensore delle deformazioni, \mathbf{u} il vettore degli spostamenti, $\ddot{\mathbf{u}}$ la derivata seconda parziale degli spostamenti, \mathbf{b} e \mathbf{t} i vettori dei carichi esterni applicati al corpo. In particolare, i quattro termini dell'uguaglianza rappresentano nell'ordine la variazione virtuale del lavoro dovuto alle forze inerziali, all'energia di deformazione interna, alle forze esterne (termine a destra dell'uguale).

Se si considera il solo contributo dell'energia di deformazione e la scrittura in forma matriciale, si può scrivere:

$$\delta L_{int} = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \delta L_{est} \quad (3.42)$$

Le equazioni costitutive e il legame tra deformazioni e spostamenti è stato scritto per i materiali ortotropi nel primo paragrafo di questo capitolo e del precedente. Riprendendo le formule (2.4), (2.9) e (3.10), l'espressione (3.42) può essere espansa nel seguente modo:

$$\delta L_{int} = \int_V \delta \mathbf{u}_{\tau i}^T \mathbf{D}^T \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{D} \mathbf{u}_{\tau i} dV \quad (3.42)$$

$$\delta L_{int} = \int_{\Omega} \int_l \delta \mathbf{u}_{\tau i}^T F_{\tau} N_i \mathbf{D}^T \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{D} F_s N_j \mathbf{u}_{s j} d\Omega dl \quad (3.43)$$

$$\delta L_{int} = \delta \mathbf{u}_{\tau i}^T \mathbf{k}^{ij\tau s} \mathbf{u}_{s j} \quad (3.44)$$

Dove $\mathbf{k}^{ij\tau s}$ è la matrice di rigidità scritta nella forma dei nuclei fondamentali (Fundamental Nucleus, FN); il FN è una matrice di dimensione 3x3 formalmente indipendente dall'ordine del modello, con la seguente forma:

$$\mathbf{k}^{ij\tau s} = \begin{bmatrix} k_{\tau s i j}^{xx} & k_{\tau s i j}^{xy} & k_{\tau s i j}^{xz} \\ k_{\tau s i j}^{xy} & k_{\tau s i j}^{yy} & k_{\tau s i j}^{yz} \\ k_{\tau s i j}^{xz} & k_{\tau s i j}^{yz} & k_{\tau s i j}^{zz} \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

A scopo esemplificativo, si riporta la formulazione completa dei primi due termini della matrice FN:

$$\begin{aligned}
k_{\tau sij}^{xx} = & (\tilde{C}_{11}F_{s,x}N_j + \tilde{C}_{51}F_{s,z}N_j + \tilde{C}_{61}F_{s,y}N_j)F_{\tau,x}N_i \\
& + (\tilde{C}_{15}F_{s,x}N_j + \tilde{C}_{55}F_{s,z}N_j + \tilde{C}_{65}F_{s,y}N_j)F_{\tau,z}N_i \\
& + (\tilde{C}_{16}F_{s,x}N_j + \tilde{C}_{56}F_{s,z}N_j + \tilde{C}_{66}F_{s,y}N_j)F_{\tau,y}N_i
\end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned}
k_{\tau sij}^{xy} = & (\tilde{C}_{12}F_{s,x}N_j + \tilde{C}_{52}F_{s,z}N_j + \tilde{C}_{62}F_{s,y}N_j)F_{\tau,y}N_i \\
& + (\tilde{C}_{14}F_{s,x}N_j + \tilde{C}_{54}F_{s,z}N_j + \tilde{C}_{64}F_{s,y}N_j)F_{\tau,z}N_i \\
& + (\tilde{C}_{16}F_{s,x}N_j + \tilde{C}_{56}F_{s,z}N_j + \tilde{C}_{66}F_{s,y}N_j)F_{\tau,x}N_i
\end{aligned} \quad (3.47)$$

Gli altri termini possono essere ricavati in modo del tutto analogo.

La procedura seguita per l'estensione della scrittura del lavoro virtuale interno dovuto all'energia di deformazione può essere ripresa anche per il secondo termine del lavoro interno, ovvero quello dei carichi inerziali:

$$\delta L_{inerzia} = \delta \mathbf{u}_{sj} \int_V N_j F_s \rho \mathbf{I} N_i F_\tau dV \ddot{\mathbf{u}}_{\tau i} = \delta \mathbf{u}_{sj} \mathbf{m}_{\tau sij} \ddot{\mathbf{u}}_{\tau i} \quad (3.48)$$

Dove ρ è la densità del materiale e \mathbf{I} la matrice identità. L'espressione finale in forma compatta contiene $\mathbf{m}_{\tau sij}$, ovvero il nucleo fondamentale della matrice di massa che può essere valutata in modo del tutto simile a quella di rigidità.

Lo stesso procedimento si può seguire anche per il termine di destra dell'equazione (3.41); la variazione del lavoro virtuale esterno in forma estesa diventa:

$$\delta L_{est} = \int_V \delta \mathbf{u}_{\tau i}^T \mathbf{g} dV + \int_S \delta \mathbf{u}_{\tau i}^T \mathbf{q} dS + \int_l \delta \mathbf{u}_{\tau i}^T \mathbf{r} dl + \delta \mathbf{u}_{\tau i}^T P_m \quad (3.49)$$

Dove \mathbf{g} è il vettore delle forze applicate sul volume, \mathbf{q} è il vettore delle forze di superficie, \mathbf{r} è il vettore delle forze agenti lungo una linea e P_m è una forza concentrata (agente nel punto m). L'equazione si può riscrivere nella seguente forma:

$$\delta L_{est} = \delta \mathbf{u}_{sj} \left(\int_V N_j F_s \mathbf{g} dV + \int_S N_j F_s \mathbf{q} dS + \int_l N_j F_s \mathbf{r} dl + N_j F_s P_m \right) = \delta \mathbf{u}_{sj} \mathbf{p}_{sj} \quad (3.50)$$

Dove \mathbf{p}_{sj} rappresenta il vettore dei carichi.

Le matrici e i vettori globali associati al modello computazionale definito per le analisi, sia per la rigidità, sia per la massa che per il vettore dei carichi, vengono costruiti andando ad assemblare il relativo Nucleo Fondamentale facendo variare i pedici τ, s, i, j : in particolare, $\tau, s = 1, 2, \dots, M$ e $i, j = 1, 2, \dots, p+1$.

Le formulazioni complete si riportano di seguito:

$$K = \sum_{n=1}^{n_{elem}} \sum_{i,j=1}^{p+1} \bigcup_{\tau,s=1}^M k_{\tau sij} \quad (3.51)$$

$$M = \sum_{n=1}^{n_{elem}} \sum_{i,j=1}^{p+1} \bigcup_{\tau,s=1}^M m_{\tau sij} \quad (3.52)$$

$$P = \sum_{n=1}^{n_{elem}} \sum_{j=1}^{p+1} \bigcup_{s=1}^M k_{sj} \quad (3.53)$$

Dove il simbolo Σ si riferisce alla somma dei contributi di ciascuno degli elementi finiti e il simbolo \bigcup si riferisce all'operatore di assemblaggio della CUF. Tale operazione di assemblaggio delle matrici può essere schematicamente riassunta nello schema di Figura 3-7.

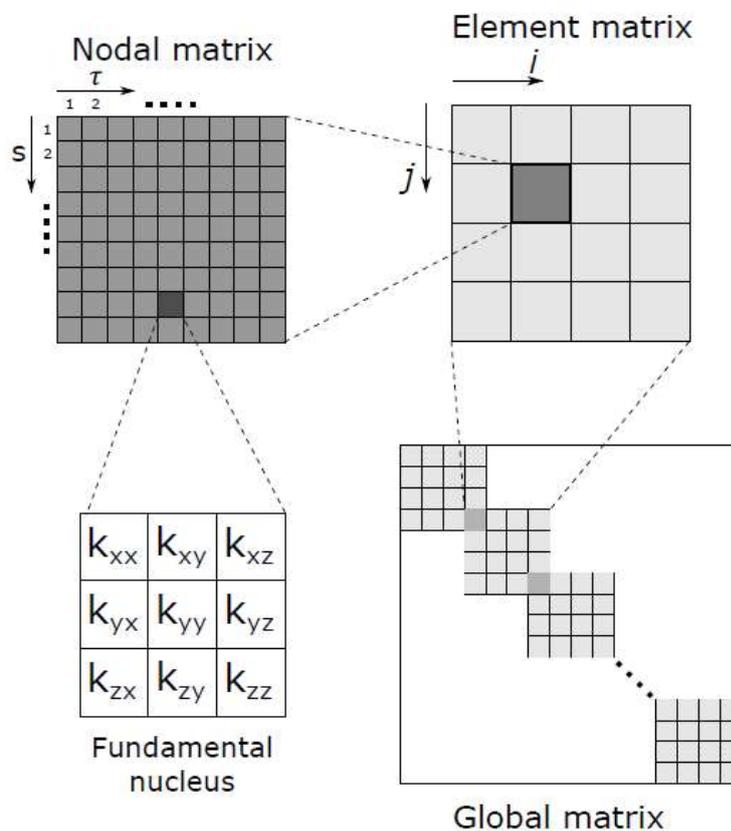


Figura 3-7: Schema di costruzione della matrice di rigidezza globale.

3.2 Tipologie di analisi

Nell'ambito dell'analisi strutturale è possibile affrontare casi di studio lineari e non lineari; entrambi verranno passati in rassegna nelle simulazioni numeriche effettuate nei capitoli successivi. In generale, la descrizione di un problema legato alle strutture presenta sempre

delle non linearità dovute alla natura stessa del materiale e al comportamento da esso assunto, in base alle condizioni al contorno applicate. Per questa ragione ci si è successivamente concentrati sulle analisi non lineari e in particolare sul problema dell'impatto, dove la non linearità è introdotta attraverso il contatto tra i corpi.

Nell'ambito delle analisi non lineari, è possibile effettuare una distinzione in soluzioni implicite ed esplicite, che si vogliono approfondire di seguito con i rispettivi metodi di implementazione nella CUF.

3.2.1 Analisi implicite

Le analisi implicite vengono principalmente utilizzate per la risoluzione di problemi statici e quasi-statici, sia nel caso lineare che non lineare. Vista la natura quasi-statica del problema, l'equazione di governo risulta:

$$\mathbf{K}(\mathbf{u}) \mathbf{u} = \mathbf{F}_{est} \quad (3.54)$$

Dove $\mathbf{K}(\mathbf{u})$ è la matrice di rigidità globale non lineare, funzione del vettore degli spostamenti (incognite del problema) \mathbf{u} e \mathbf{F}_{est} è il vettore dei carichi esterni.

L'equazione di equilibrio del problema, trascurando le componenti di natura dinamica, è:

$$\mathbf{F}_{int}(\mathbf{u}) - \mathbf{F}_{est} = 0 \quad (3.55)$$

Dove $\mathbf{F}_{int}(\mathbf{u})$ è il vettore dei carichi interni, anch'essi dipendenti dal vettore degli spostamenti.

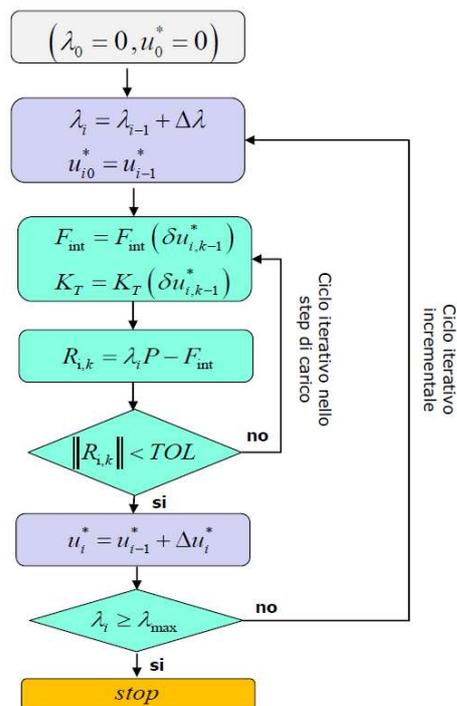


Figura 3-8: Schema riepilogativa del metodo iterativo Full Newton-Raphson usato nelle analisi implicite [28].

Il metodo utilizzato per la risoluzione del problema è quello di Newton-Raphson (NR), che è un metodo iterativo incrementale usato nelle analisi non lineari, come mostrato nello schema di Figura 3-8. Esso prevede la rappresentazione dell'incremento globale di carico esterno attraverso la sua parametrizzazione con un fattore moltiplicativo λ . L'equazione (3.55) si riscrive quindi come:

$$\mathbf{F}_{int}(\mathbf{u}) - \lambda_n \mathbf{F}_{est} = 0 \quad (3.56)$$

Dove il pedice n si riferisce al numero dell'incremento considerato.

Il metodo NR consente di convergere alla soluzione finale \mathbf{u}_{n+1} attraverso una serie di iterazioni per ogni step di carico, sempre partendo dalla soluzione allo step precedente \mathbf{u}_n . La procedura può essere schematizzata come in Figura 3-9.

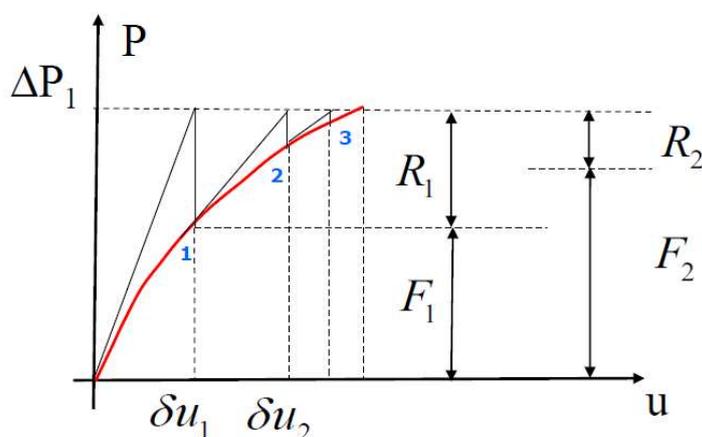


Figura 3-9: Rappresentazione del metodo di Newton-Raphson con evidenza del primo step di carico ΔP_1 . All'interno di ogni step c'è un loop interno dove R_i rappresenta il resto, ovvero la differenza tra il valore atteso ΔP_1 e il primo valore di approssimazione considerato F_1 ; il loop interno prosegue fino a che non si raggiunge la convergenza a ΔP_1 , per poi passare al successivo step di carico [28].

Il vettore delle forze interne ad ogni step di carico si valuta attraverso un'espansione in serie di Taylor [29]:

$$\mathbf{F}_{int}(\mathbf{u}_{n+1}^{k+1}) = \mathbf{F}_{int}(\mathbf{u}_{n+1}^k) + \frac{\partial \mathbf{F}_{int}(\mathbf{u}_{n+1}^k)}{\partial \mathbf{u}_{n+1}^k} (\mathbf{u}_{n+1}^{k+1} - \mathbf{u}_{n+1}^k) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{int}(\mathbf{u}_{n+1}^k)}{\partial \mathbf{u}_{n+1}^k{}^2} (\mathbf{u}_{n+1}^{k+1} - \mathbf{u}_{n+1}^k)^2 + \dots \quad (3.57)$$

Dove k è l'indice di iterazione per ogni incremento $[n, n+1]$ e $(\mathbf{u}_{n+1}^{k+1} - \mathbf{u}_{n+1}^k)$ è lo spostamento incrementale $\Delta \mathbf{u}$. Vista la quasi-staticità del problema, ogni step si può considerare al pari di un problema lineare: dall'equazione (3.57) è possibile trascurare tutti i termini non lineari, ottenendo la forma linearizzata seguente:

$$\mathbf{F}_{in}(\mathbf{u}_{n+1}^{k+1}) = \mathbf{F}_{int}(\mathbf{u}_{n+1}^k) + \frac{\partial \mathbf{F}_{int}(\mathbf{u}_{n+1}^k)}{\partial \mathbf{u}_{n+1}^k} \Delta \mathbf{u} \quad (3.58)$$

Infine, è necessario valutare la matrice delle rigidezze \mathbf{K} , che comprende una componente lineare ed una non lineare, funzione del vettore degli spostamenti incogniti. La somma dei due contributi è indicata come matrice tangente \mathbf{K}^T e viene ricalcolata ad ogni incremento di carico (Full Newton-Raphson) come:

$$\mathbf{K}^T = \frac{\partial F_{int}(\mathbf{u}_{n+1}^k)}{\partial \mathbf{u}_{n+1}^k} \quad (3.59)$$

Utilizzando la scrittura compatta definita per la formulazione CUF, le due equazioni (3.55) e (3.59) diventano rispettivamente:

$$\mathbf{k}_{ij\tau s}^T \mathbf{u}_{\tau i} - \mathbf{p}_{js} = 0 \quad (3.60)$$

$$\mathbf{k}_{ij\tau s}^T \Delta \mathbf{u}_{\tau i} = \boldsymbol{\varphi}_{js} \quad (3.61)$$

Dove $\boldsymbol{\varphi}_{js}$ è il vettore del residuo (per il vettore dei carichi) e $\mathbf{k}_{ij\tau s}^T$ è il FN della matrice di rigidezza tangente.

Il metodo Full Newton-Raphson è computazionalmente oneroso, quindi non adatto a problemi caratterizzati da elevata non linearità o variazioni di essa, ma converge in modo quasi quadratico alla soluzione: ciò vuol dire che poche iterazioni per ogni step di carico sono sufficienti per raggiungere la convergenza.

3.2.2 Analisi esplicite

Le analisi esplicite sono le soluzioni più efficaci per affrontare problemi di natura dinamica, dove è presente la dipendenza dalla variabile tempo. Inoltre, sono molto convenienti per problemi fortemente non lineari come quelli relativi al danneggiamento dei materiali compositi, in quanto riescono a raggiungere con maggiore rapidità la convergenza della soluzione. Al contrario, le tecniche di risoluzione implicite applicate nell'ambito della degradazione progressiva di compositi fibrosi spesso comportano problemi di convergenza e quindi assenza di un risultato dall'analisi.

Il solutore esplicito è basato sul metodo delle differenze centrali: tale metodo rientra nella categoria basata sull'integrazione progressiva o a passi. La risposta del sistema viene calcolata incrementando progressivamente il tempo di studio, suddiviso complessivamente in n passi, di intervalli arbitrari Δt , di cui per ognuno si calcola la soluzione a partire dalle caratteristiche sviluppate in base all'intervallo precedente.

In particolare, si parte dalla formulazione generale dell'equazione di D'Alembert nel caso di problemi di natura dinamica:

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} \quad (3.54)$$

Dove \mathbf{M} è la matrice di massa, \mathbf{K} la matrice di rigidezza, \mathbf{D} la matrice di smorzamento, \mathbf{u} il vettore degli spostamenti (con $\dot{\mathbf{u}}$ e $\ddot{\mathbf{u}}$ le sue derivate, rispettivamente velocità e accelerazione) e \mathbf{F} il vettore dei carichi esterni applicati al corpo, in funzione del tempo.

L'equazione (3.54) può essere riformulata in forma compatta come segue, per ogni incremento Δt :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} = \mathbf{F}_{est}^{t+\Delta t} - \mathbf{F}_{int}^{t+\Delta t} \quad (3.55)$$

Dove $\mathbf{F}_{est}^{t+\Delta t}$ rappresenta il vettore dei carichi esterni al passo $t+\Delta t$ e $\mathbf{F}_{int}^{t+\Delta t}$ l'equivalente ma per le forze interne (inerzia, smorzamento).

La soluzione dell'equazione (3.55) viene calcolata con il metodo delle differenze centrali: calcolando il valore incognito dello spostamento e delle sue derivate al termine di ogni intervallo partendo dai valori di spostamento, velocità e accelerazione al termine dell'intervallo precedente, il comportamento non lineare del problema viene approssimato come una sequenza di sistemi lineari consecutivi. Per avviare il ciclo di calcolo si inizializzano i valori sopracitati, indicati con \mathbf{u}^0 , $\dot{\mathbf{u}}^0$ e $\ddot{\mathbf{u}}^0$.

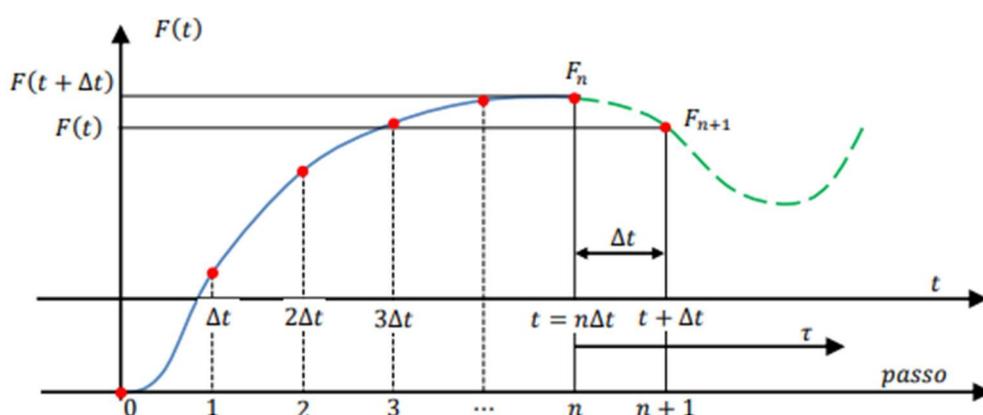


Figura 3-10: Esempio di sistema non lineare, dove la risposta $F(t)$ viene calcolata tramite suddivisione in n passi di ampiezza Δt [30].

In particolare, la velocità e l'accelerazione sono approssimate con le seguenti formule:

$$\dot{\mathbf{u}}_n = \frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_{n-1}}{2\Delta t} \quad (3.56)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_n = \frac{\mathbf{u}_{n+1} - 2\mathbf{u}_n + \mathbf{u}_{n-1}}{(\Delta t)^2} \quad (3.57)$$

Tali equazioni (3.56) e (3.57) si ottengono sviluppando in serie di Taylor la funzione spostamento, prima in avanti e poi all'indietro:

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \dot{\mathbf{u}}_n \Delta t + \frac{\ddot{\mathbf{u}}_n}{2} (\Delta t)^2 + \frac{\dddot{\mathbf{u}}_n}{6} (\Delta t)^3 + \dots \quad (3.58)$$

$$\mathbf{u}_{n-1} = \mathbf{u}_n - \dot{\mathbf{u}}_n \Delta t + \frac{\ddot{\mathbf{u}}_n}{2} (\Delta t)^2 - \frac{\dddot{\mathbf{u}}_n}{6} (\Delta t)^3 + \dots \quad (3.59)$$

In seguito, sottraendo e sommando la (3.58) e la (3.59) si ottiene rispettivamente:

$$\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_{n-1} = 2\dot{\mathbf{u}}_n \Delta t + \frac{\ddot{\mathbf{u}}_n}{3} (\Delta t)^3 + \dots \quad (3.60)$$

$$\mathbf{u}_{n+1} + \mathbf{u}_{n-1} = 2\mathbf{u}_n + \dot{\mathbf{u}}_n(\Delta t)^2 + \dots \quad (3.61)$$

Infine, trascurando i termini di ordine superiore a $(\Delta t)^2$ si ricavano le equazioni di partenza (3.56) e (3.57). Di conseguenza, l'approssimazione alle differenze centrali comporta un errore proporzionale al termine $(\Delta t)^2$: ciò implica che minore è il passo d'integrazione scelto, maggiore è la precisione del metodo e quindi della soluzione finale, a scapito di un maggior costo computazionale. Inoltre, per garantire la stabilità del metodo, diventa necessario scegliere un passo Δt minore del valore minimo di soglia consentito ($\Delta t_{critico}$):

$$\Delta t_{critico} = \frac{2}{\omega_{MAX}} \quad (3.62)$$

Dove ω_{MAX} è la massima frequenza o frequenza di soglia del sistema [31].

Per arrivare alla soluzione finale del problema, una volta calcolati gli spostamenti al nuovo passo di integrazione è possibile ricavare le deformazioni, gli stress e di conseguenza il relativo vettore delle forze interne e di quelle esterne. Ad ogni step è sempre richiesta l'inversione della matrice di massa:

$$\ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F}_{est}^{t+\Delta t} - \mathbf{F}_{int}^{t+\Delta t}) \quad (3.63)$$

L'inversione della matrice è un'operazione computazionalmente molto onerosa, ma il problema si può risolvere semplificandola nella versione "lumped":

$$M_{ii}^{lumped} = \sum_j M_{ij} \quad (3.64)$$

In conclusione, la procedura esplicita con il metodo di integrazione nel tempo alle differenze centrate nella CUF può essere riassunta con i seguenti step [32]:

- 1) Inizializzazione dei valori \mathbf{u}^0 , $\dot{\mathbf{u}}^0$;
- 2) Valutazione della matrice di massa "lumped";
- 3) Calcolo del valore di velocità a metà dell'intervallo iniziale con l'applicazione delle differenze centrali (3.56);
- 4) Ad ogni successivo passo di integrazione: valutazione dello spostamento, calcolo dell'incremento di spostamento, calcolo e aggiornamento degli strain, degli stress e dei vettori delle forze interne ed esterne, calcolo del nuovo valore di accelerazione con l'inversione della matrice di massa con la (3.63), calcolo del valore di velocità allo step successivo con la (3.56).

3.3 Definizione del contatto nella CUF

La CUF consente di elaborare problemi non lineari come quelli di impatto. Per implementare tali modelli, diventa necessario rappresentare correttamente il contatto tra corpi, sia a livello teorico che numerico. Nel seguito, si effettua la distinzione tra due possibili schematizzazioni, ovvero il contatto node-to-node e quello node-to-surface.

3.3.1 Contatto Node-to-node

Si considerino due strutture distinte Ω_1 e Ω_2 , come mostrato in Figura 3-11: i due punti distinti X_1 e X_2 , inizialmente posizionati sul bordo di ciascuno dei due corpi, entrano in contatto per effetto di una deformazione φ . Ciò comporta il raggiungimento di una nuova posizione per i punti X_i :

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{X}_i + \mathbf{u}_i \text{ con } i=1,2 \quad (3.65)$$

Dove \mathbf{u}_i è il vettore spostamento riferito ad ognuno degli \mathbf{X}_i . I due punti di riferimento diventano quindi tra loro coincidenti, ovvero occupano la stessa posizione nello spazio.

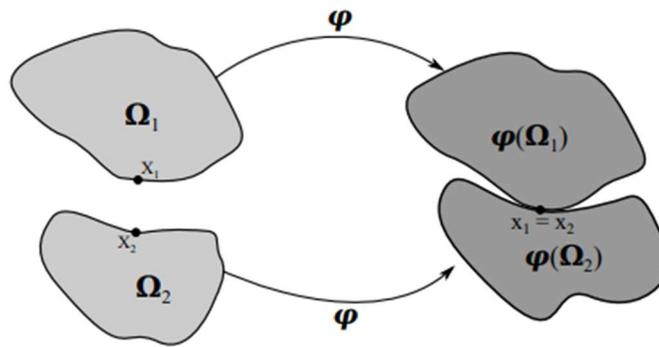


Figura 3-11: Rappresentazione schematica del contatto node-to-node [33].

Il contatto può essere modellizzato attraverso delle condizioni geometriche che prevengono la penetrazione reciproca dei corpi attraverso la definizione di una funzione gap g_N :

$$g_N = (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \mathbf{n}_1 \geq 0 \quad (3.65)$$

Dove \mathbf{n}_1 è il vettore normale riferito al corpo Ω_1 . Ipotizzando una cinematica lineare della geometria, l'equazione (3.65) diventa:

$$g_N = [(\mathbf{X}_2 - \mathbf{u}_1) - (\mathbf{X}_1 - \mathbf{u}_1)] \mathbf{n}_1 \geq 0 = [(\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1) - (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1)] \mathbf{n}_1 \geq 0 \quad (3.66)$$

La forma di riferimento finale dell'equazione diventa:

$$g_N = (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \mathbf{n}_1 + g_0 \geq 0 \quad (3.67)$$

Dove g_0 è la funzione gap iniziale riferita ai punti \mathbf{X}_1 e \mathbf{X}_2 :

$$g_0 = (\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1) \mathbf{n}_1 \quad (3.68)$$

In questo tipo di approccio, nel sistema si verifica il contatto quando la funzione gap g_N è uguale a zero. In questa condizione, la componente normale dello stress rappresenta il valore della pressione di contatto p_N , che è uguale e opposta per i due corpi in corrispondenza del punto $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2$. Il valore della pressione non si ricava direttamente dalle equazioni costitutive del modello ma viene calcolata come conseguenza dei vincoli imposti per il contatto:

$$g_N \geq 0, p_N \leq 0, g_N p_N = 0 \quad (3.69)$$

La (3.69) corrisponde ad un set di equazioni definite di Kuhn-Tucker.

A questo punto, per trattare il problema del contatto si ricorre nuovamente all'applicazione del PLV. Oltre al contributo del lavoro virtuale interno ed esterno, si aggiunge un termine dovuto all'effetto del contatto che, data la condizione di non penetrazione (3.67), introduce la disuguaglianza nell'espressione iniziale:

$$\partial L_{int} \geq \partial L_{est} + \partial L_c \quad (3.70)$$

La disuguaglianza introduce così una non linearità nel modello, indipendentemente dalla geometria e dal materiale, che possono anche essere entrambi lineari. La risoluzione del problema così impostato avviene attraverso tecniche implicite, basate sul metodo di Newton-Raphson. La variazione virtuale ∂L_c è definita come segue:

$$\partial L_c = \int_{\partial\Omega_c} \varepsilon_N g_N \partial g_N d\Omega \quad (3.71)$$

Dove ε_N è il parametro di penalty per il contatto in direzione normale (N) e Ω_c è la superficie di contatto.

L'equazione (3.71) viene poi discretizzata e risolta numericamente con il metodo degli elementi finiti, a seconda che il tipo di contatto sia node-to-node o node-to-surface.

Nel primo caso, i vincoli del contatto vengono applicati a livello nodale: per questa ragione è richiesta la compatibilità delle mesh tra i corpi impattanti, così da avere un nodo per ciascuno di essi in corrispondenza del punto di contatto. Ciò è attuabile solo se la geometria è di tipo lineare, ovvero se è garantito che, nell'ambito delle piccole deformazioni, i nodi rimangano allineati anche nella configurazione deformata. Utilizzando l'approccio di tipo penalty, l'equazione di equilibrio globale del sistema diventa:

$$[\mathbf{K} + \mathbf{K}^p] \mathbf{u} = \bar{\mathbf{F}} \quad (3.72)$$

Dove \mathbf{K}^p è la matrice di rigidezza penalty, che viene sommata a quella strutturale \mathbf{K} . La \mathbf{K}^p globale viene composta a partire dai termini di rigidezza relativi a ciascuna i-esima coppia di nodi di contatto:

$$\mathbf{k}_i^p = \varepsilon_N \mathbf{n}_i^T \mathbf{n}_i, \text{ con } \mathbf{n}_i = \{n_x, n_y, n_z\} \quad (3.73)$$

Dove \mathbf{n}_i è il versore normale tra la coppia i di nodi e ε_N è il parametro di penalty.

La pressione di contatto in questo caso prende origine dai nodi stessi e della forza ad essi associata:

$$\mathbf{F}_i^c = \varepsilon_N g_N \mathbf{n} \quad (3.74)$$

Questo termine aggiuntivo viene sommato al vettore delle forze esterne per ottenere il termine di destra dell'equazione (3.72):

$$\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{F}^c + \mathbf{F}_{est} \quad (3.75)$$

3.3.2 Contatto Node-to-surface

Il contatto node-to-node è certamente il più semplice da implementare; tuttavia, ha delle limitazioni nell'applicazione connesse alla necessità di avere corpi con mesh compatibili e di rimanere nell'ambito di deformazioni contenute: per queste ragioni, è necessario passare a metodi più complessi come il node-to-surface.

In questo caso, il contatto su una delle due superficie è imposto a livello nodale, mentre sull'altra a livello di superficie. Questo modello è quello di riferimento per le analisi di impatto, come quelle che verranno presentate nel capitolo di simulazioni numeriche. Il solutore è in questo caso di tipo esplicito, vista la dipendenza dalla variabile tempo.

Per rappresentare l'accoppiamento tra nodi e superficie, si ricorre al metodo basato sui moltiplicatori di Lagrange: l'algoritmo finale che viene utilizzato deve però subire delle modifiche ulteriori per assicurare la non singolarità del sistema. Oltre a seguire lo schema di integrazione a step delle differenze centrali, è necessario infatti accoppiare gli spostamenti incogniti allo step t_{n+1} con i moltiplicatori di Lagrange dello step precedente t_n .

Per la risoluzione di problemi di impatto e contatto tra corpi, l'equazione incrementale del moto è:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_n + \mathbf{F}_{int}(\mathbf{u}_n, \dot{\mathbf{u}}_n) + \mathbf{G}_{n+1}^T \boldsymbol{\lambda}_n = \mathbf{F}_{est} \quad (3.76)$$

Con

$$\mathbf{G}_{n+1}[\mathbf{u}_{n+1} + \mathbf{X}] = 0 \quad (3.77)$$

Dove \mathbf{M} è la matrice di rigidità lumped, \mathbf{G} è la matrice contenente i vincoli del contatto e $\boldsymbol{\lambda}$ è il vettore dei moltiplicatori di Lagrange.

Le equazioni (3.76) e (3.77) vengono integrate con metodo esplicito, ottenendo:

$$\mathbf{u}_{n+1} + \mathbf{u}_{n+1}^* = \mathbf{u}_{n+1}^c \quad (3.78)$$

Dove:

$$\dot{\mathbf{u}}_n = \frac{1}{\Delta t} [\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n-1}] \quad (3.79)$$

$$\mathbf{u}_{n+1}^* = \Delta t^2 \mathbf{M}^{-1} [\mathbf{F}_{est} + \mathbf{F}_{int}] + 2\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n-1} \quad (3.80)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_n = [\Delta t^2 \mathbf{G}_{n+1} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G}_{n+1}^T]^{-1} \mathbf{G}_{n+1} \{\mathbf{u}_{n+1}^* + \mathbf{X}\} \quad (3.81)$$

$$\mathbf{u}_{n+1}^c = -\Delta t^2 \mathbf{G}_{n+1}^T \boldsymbol{\lambda}_n \quad (3.82)$$

Per ottenere le soluzioni presentate nelle equazioni (3.79)-(3.82), per prima cosa si definisce un valore di spostamento incrementale di tentativo (\mathbf{u}_{n+1}^*), dove l'influenza delle forze di contatto è trascurata. Si prosegue poi alla valutazione del vettore posizione dei nodi di contatto ($\mathbf{u}_{n+1}^* + \mathbf{X}$), che viene utilizzato per il controllo sulla penetrazione tra i corpi. Successivamente, la matrice \mathbf{G} dei vincoli sul contatto viene calcolata e utilizzata per determinare i moltiplicatori di Lagrange; infine, con l'equazione (3.82) si calcola l'incremento di spostamento effettivo dovuto alle forze di contatto. In tal modo, è possibile

aggiornare correttamente il valore di spostamento allo step considerato e passare a quello seguente.

Per la discretizzazione effettiva del modello di contatto node-to-surface, la superficie impattata viene schematizzata attraverso elementi 2D, mentre per quella dell'impattore si ricorre ai nodi di contatto, come mostrato in Figura 3-12.

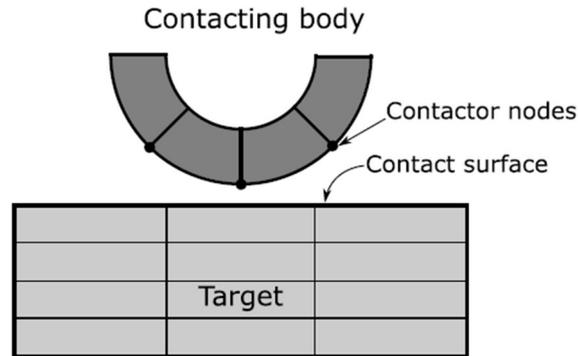


Figura 3-12: Rappresentazione schematica del contatto node-to-surface [33].

La matrice di contatto \mathbf{G} è definita nel seguente modo:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_m & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_m & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_m & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

Dove N è la funzione di forma nodale dell'elemento finito in corrispondenza della superficie di contatto e m è il numero di nodi di ciascun elemento.

3.4 Modello di danneggiamento intra-laminare

Per simulare la progressione del danneggiamento all'interno di ciascuna lamina è possibile ricorrere a diversi modelli: tra questi, quelli che si presentano nel seguente paragrafo sono il CODAM2 e Hashin + Puck, basato sui criteri omonimi. Entrambi i modelli sono delineati per analisi di tipo intra-laminare e possono essere utilizzati nella struttura della CUF per casi di analisi esplicite.

3.4.1 CODAM2

Il Composite Damage Model (CODAM) è un modello per la simulazione del danneggiamento progressivo che segue l'approccio della CDM; dal momento della sua prima formulazione ha poi subito un processo di miglioramento fino alla versione attuale CODAM2 [34], che consente di ottenere una maggiore accuratezza della previsione del danno per la macro e la meso scala.

Nel modello CODAM2 l'inizio del danneggiamento nella lamina avviene nel momento in cui la funzione di indice di failure relativa F_I raggiunge o supera l'unità ($F_I \geq 1$). Nella direzione

della fibra (1) il fenomeno viene guidato dal criterio della massima sollecitazione, con i campi di stress e deformazione opportunamente valutati dopo l'applicazione della matrice di rotazione \mathbf{T} per passare nelle coordinate del sistema materiale. Per inizializzare invece il danno nella direzione trasversale alla fibra (2) si ricorre al criterio di failure di Hashin 2D; complessivamente si ottiene quindi:

$$\begin{cases} F_I^{fT} = \left(\frac{\sigma_{11}}{X^T}\right)^2 \\ F_I^{mT} = \left(\frac{\sigma_{22}}{Y^T}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{S_{12}}\right)^2 \\ F_I^{fC} = \left(\frac{\sigma_{11}}{X^C}\right)^2 \\ F_I^{mC} = \left(\frac{\sigma_{22}}{2S_{12}}\right)^2 + \left[\left(\frac{Y^C}{2S_{12}}\right)^2 - 1\right] \left(\frac{\sigma_{22}}{Y^C}\right) + \left(\frac{\sigma_{12}}{S_{12}}\right)^2 \end{cases} \quad (3.84)$$

La valutazione degli strain e degli stress avviene attraverso i relativi valori equivalenti, da sostituire all'interno dei criteri di failure selezionati. Le espressioni dei primi sono:

$$\varepsilon_1^{eq} = |\varepsilon_{11}| \quad \text{e} \quad \varepsilon_2^{eq} = \sqrt{(\gamma_{12}^e)^2 + (\varepsilon_{22})^2} \quad (3.85)$$

Dove γ_{12}^e rappresenta la componente elastica dello scorrimento di taglio nel piano. Si assume infatti la presenza di due componenti distinte per γ_{12} , come conseguenza dell'ipotesi di non linearità del taglio.

Le espressioni dei secondi, invece, sono:

$$\sigma_1^{eq} = |\sigma_{11}| \quad \text{e} \quad \sigma_2^{eq} = \frac{\tau_{12}\gamma_{12}^e + \sigma_{22}\varepsilon_{22}}{\sqrt{(\gamma_{12}^e)^2 + (\varepsilon_{22})^2}} \quad (3.86)$$

Una volta raggiunta la condizione di inizio danneggiamento ($F_\alpha = 1$), è possibile valutare le deformazioni corrispondenti ε_α^i nei layer applicando la seguente formula:

$$\varepsilon_\alpha^i = \varepsilon_\alpha^{eq} |_{F_\alpha=1} \quad \text{con} \quad \alpha = 1,2 \quad (3.87)$$

Nella condizione di rottura finale del componente, quindi quando il materiale risulta completamente degradato, i massimi valori di strain ε_α^s possono essere valutati come segue:

$$\varepsilon_1^s = \frac{2g_1^f}{X^T} \quad \text{e} \quad \varepsilon_2^s = \frac{2g_2^f}{T} \quad \text{con} \quad T = \sigma_2^{eq} |_{F_2=1} \quad (3.88)$$

Dove g_1^f e g_2^f sono le densità di energia di frattura e T rappresenta il valore di picco dello stress σ_2^{eq} .

La dipendenza dalla mesh è assicurata dalla scalabilità dell'energia di rottura G_α^f , seguendo l'approccio crack-band:

$$g_\alpha^f = \frac{G_\alpha^f}{l^*} \quad \text{con} \quad \alpha = 1,2 \quad (3.89)$$

Dove l^* rappresenta il parametro di lunghezza equivalente della mesh, definita come:

$$l^* = V_{GP}^{1/3} \quad (3.90)$$

Con V_{GP} corrispondente al volume elementare costruito rispetto ai Gauss point di ogni elemento della discretizzazione.

Noti gli andamenti di stress e strain prima e dopo il danneggiamento, con il CODAM2 è possibile quantificare l'estensione del danno stesso; a tale scopo, si definiscono due parametri ω_1 e ω_2 , rispettivamente per la direzione longitudinale e quella trasversale:

$$\omega_\alpha = \left(\frac{\langle \varepsilon_\alpha^{eq} - \varepsilon_\alpha^i \rangle}{\varepsilon_\alpha^s - \varepsilon_\alpha^i} \right) \left(\frac{\varepsilon_\alpha^s}{\varepsilon_\alpha^{eq}} \right) \quad \text{con } \alpha = 1,2 \quad (3.91)$$

Dove le parentesi $\langle \rangle$ si riferiscono all'operatore di Macaulay.

Una volta noti i parametri di danneggiamento ω_α è possibile calcolare la matrice di rigidezza secante \mathbf{C} del materiale. La forma generale di tale matrice è riportata nell'equazione (3.94). Relativamente ad essa, si definiscono i seguenti parametri:

Denominatore Δ

$$\Delta = 1 - R_2 \nu_{23} \nu_{32} - R_1 R_2 \nu_{12} \nu_{21} - 2R_1 R_2 \nu_{31} \nu_{23} - R_1 \nu_{31} \nu_{13} \quad (3.92)$$

Fattore di riduzione della rigidezza R_α

$$R_\alpha = (1 - \omega_\alpha) \quad \text{con } \alpha = 1,2 \quad (3.93)$$

$$\mathbf{C}^{dam} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} (1 - R_2 \nu_{23} \nu_{32}) R_1 E_1 & (\nu_{12} + \nu_{23} \nu_{31}) R_1 R_2 E_1 & (\nu_{31} + R_2 \nu_{21} \nu_{32}) R_1 E_1 & 0 & 0 & 0 \\ & (1 - R_2 \nu_{23} \nu_{32}) R_1 E_1 & (\nu_{32} + R_1 \nu_{31} \nu_{12}) R_2 E_2 & 0 & 0 & 0 \\ & & (1 - R_1 R_2 \nu_{21} \nu_{12}) E_3 & 0 & 0 & 0 \\ & Sym & & \Delta R_1 R_2 G_{12} & 0 & 0 \\ & & & & \Delta G_{12} & 0 \\ & & & & & 0 \\ & & & & & \Delta G_{13} \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

Nota la matrice, è possibile conoscere lo stato di tensione del componente con la relazione costitutiva modificata:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^{dam} \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{con } \alpha = 1,2 \quad (3.95)$$

A partire da questa formulazione generale, è possibile ricondursi a tutte le condizioni di sollecitazione applicabili al componente, con le opportune semplificazioni.

3.4.2 Hashin + Puck

La routine Hashin + Puck è stata formulata per l'analisi di materiali ortotropi [35], utilizzando i criteri di failureomonimi, già trattati nei paragrafi 2.3 e 2.4. Anche se inizialmente implementata per analisi implicite, è stata proposta una versione di tipo esplicito. In questo paragrafo si vuole presentare nel dettaglio il funzionamento della routine modificata, utilizzata per le valutazioni numeriche riportate successivamente nel lavoro di tesi.

In particolare, la routine si basa sul criterio di Hashin per la valutazione dell'inizio del danneggiamento della fibra (trazione e compressione) e della matrice a trazione [36], mentre su quello di Puck per la matrice a compressione:

- Fibra a trazione ($\sigma_{11} \geq 0$):

$$F_{ft} = \left(\frac{\sigma_{11}}{X^T}\right)^2 + \alpha_f \left(\frac{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2}{S_{12}^2}\right) = 1 \quad (3.96)$$

- Matrice a trazione ($\sigma_{22} \geq 0$):

$$F_{mt} = \left(\frac{\sigma_{22} + \sigma_{33}}{Y^T}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{33}}{S_{23}^2}\right) \left(\frac{\sigma_{12}^2 - \sigma_{13}^2}{S_{12}^2}\right) = 1 \quad (3.97)$$

- Fibra a compressione ($\sigma_{11} < 0$):

$$F_{fc} = \left(\frac{\sigma_{11}}{X^C}\right)^2 = 1 \quad (3.98)$$

- Matrice a compressione ($\sigma_{22} < 0$):

$$F_{mc} = \left(\frac{\sigma_{TN}}{S_{23}^A + \mu_{TN}\sigma_{NN}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{LN}}{S_{12} + \mu_{LN}\sigma_{NN}}\right)^2 = 1 \quad (3.99)$$

Dove il coefficiente α_f nell'equazione (3.96) denota il contributo del taglio alla rottura a trazione della fibra; S_{23}^A è il limite di taglio trasversale nel piano di frattura, calcolato dall'ammissibile di taglio e dall'angolo α corrispondente all'inclinazione del piano di frattura; μ_{TN} e μ_{LN} sono i coefficienti di attrito rispettivamente nella direzione trasversale e longitudinale al piano di frattura.

Nell'equazione (3.99) i termini σ_{ij} ($i, j = L, N, T$) corrispondono al tensore degli stress σ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) ruotato dell'angolo α tramite la matrice di trasformazione $\mathbf{T}(\alpha)$ secondo la legge:

$$\boldsymbol{\sigma}_{LNT} = \mathbf{T}(\alpha)\boldsymbol{\sigma}_{123}\mathbf{T}(\alpha)^T \quad (3.100)$$

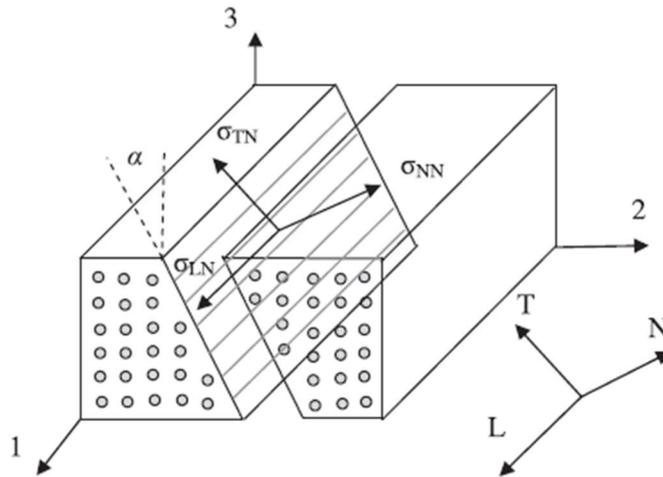


Figura 3-13: Schematizzazione dei sistemi di riferimento 123 e LNT per il criterio di Puck della matrice a compressione [36].

In particolare, si ha:

$$\begin{cases} \sigma_{NN} = \sigma_{22} \cos^2(\alpha) + \sigma_{33} \sin^2(\alpha) + 2\sigma_{23} \cos(\alpha) \sin(\alpha) \\ \sigma_{TN} = (\sigma_{33} - \sigma_{22}) \sin(\alpha) \cos(\alpha) \\ \sigma_{LN} = \sigma_{13} \sin(\alpha) + \sigma_{12} \cos(\alpha) \end{cases} \quad (3.101)$$

Il concetto fondamentale alla base del criterio di Puck è la capacità di conoscere l'inclinazione del più probabile piano di frattura attraverso il calcolo del valore dell'angolo α ; con il metodo agli elementi finiti è possibile andare a valutarlo per ogni divisione della discretizzazione nel range compreso tra -90° e 90° , per cui l'angolo di frattura sarà quello in corrispondenza del quale si ottiene il massimo valore di F_{mc} . Tale implementazione risulta tuttavia onerosa in termini di costo computazionale e tempistiche, oltre che complessa da un punto di vista della programmazione.

Si è quindi adottata una procedura numerica alternativa nota con il nome di Simple Parabolic Interpolation Search (SPIS): il metodo consiste nel dividere l'intervallo complessivo di 180° in 18 sotto parti comprese tra 19 punti di riferimento, per ciascuno dei quali viene valutato l'indice di failure F_{mc} . Gli intervalli compresi tra punti a cui corrispondono gli indici di failure più bassi vengono successivamente isolati, in quanto i più probabili sottoinsiemi in cui trovare un massimo locale o globale. Per non intercettare un massimo locale al posto di quello globale ricercato, tra i punti isolati si mantiene esclusivamente quello con il valore di indice di failure maggiore trascurando tutti gli altri, come mostrato in Figura 3-14.

Una volta definito il range di ricerca, l'angolo α viene individuato con un'interpolazione parabolica.

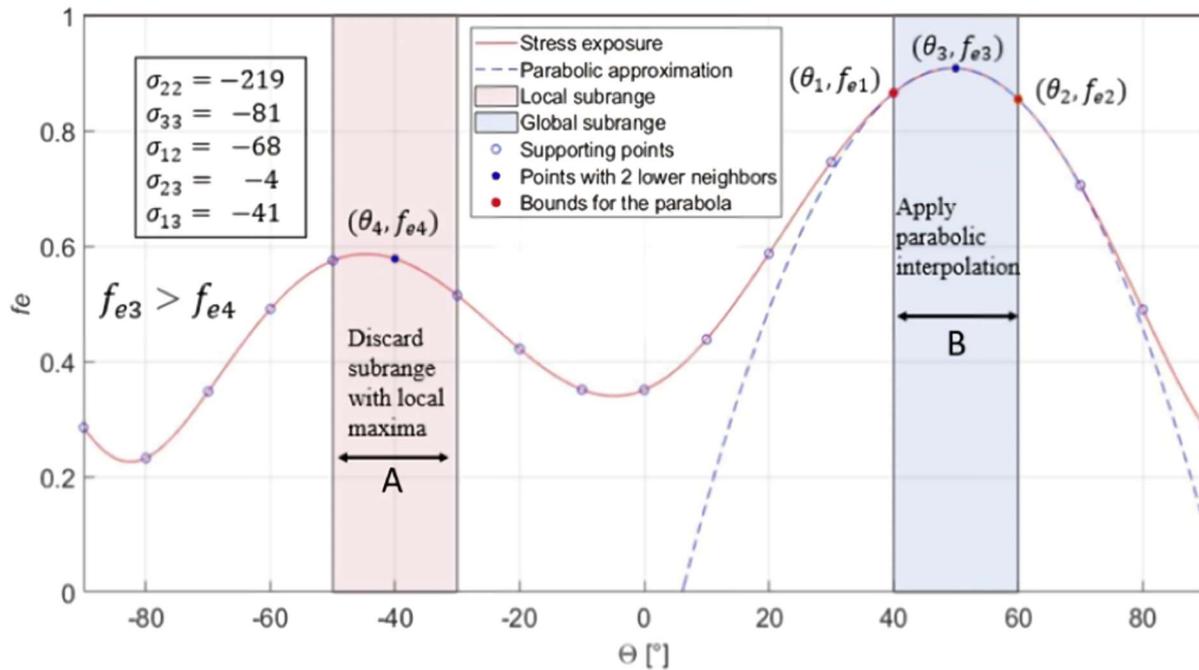


Figura 3-14: Metodo SPIS nel caso di due massimi locali. θ rappresenta l'angolo di inclinazione del piano di frattura, indicato nel testo come α , mentre f_e corrisponde all'indice di failure F_{mc} [37].

Con riferimento alla Figura 3-14, i punti isolati sono in questo caso f_{e3} e f_{e4} , in quanto hanno i valori di failure index maggiori rispetto ai punti circostanti. Tra i due si scarta f_{e4} effettuando così la valutazione dell'angolo α nell'intervallo $[\theta_1, \theta_2]$ con la formula di interpolazione parabolica seguente:

$$\alpha \approx \theta_2 - \frac{1}{2} \frac{(\theta_2 - \theta_1)^2 (f_{e2} - f_{e3}) - (\theta_2 - \theta_3)^2 (f_{e2} - f_{31})}{(\theta_2 - \theta_1)(f_{e2} - f_{e3}) - (\theta_2 - \theta_3)(f_{e2} - f_{31})} \quad (3.102)$$

Seguendo questa procedura, al posto delle 180 valutazioni dello stress da effettuare secondo il metodo agli elementi finiti ne sono sufficienti solo 19, comportando un notevole risparmio di costo computazionale tanto che, a parità di modello e discretizzazione, Hashin + Puck e il CODAM2 richiedono tempi di analisi equivalenti.

Come già visto per il CODAM2, la valutazione degli strain e degli stress avviene attraverso i relativi valori equivalenti, da sostituire all'interno dei criteri di failure selezionati. In questo caso, si riportano i valori equivalenti dello spostamento (da cui viene ricavato lo strain attraverso la lunghezza caratteristica l_c) e dello stress in Tabella 3-1.

Tabella 3-1: Spostamento e stress equivalente nella routine Hashin + Puck [37].

Modo di failure	Spostamento equivalente δ_{eq}	Stress equivalente σ_{eq}
FT	$\delta_{eq}^{fT} = l_c \sqrt{\langle \varepsilon_{11} \rangle^2 + \varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2}$	$\sigma_{eq}^{fT} = \frac{l_c (\langle \sigma_{11} \rangle \langle \varepsilon_{11} \rangle + \sigma_{12} \varepsilon_{12} + \sigma_{13} \varepsilon_{13})}{\delta_{eq}^{fT}}$
FC	$\delta_{eq}^{fC} = l_c \langle -\varepsilon_{11} \rangle$	$\sigma_{eq}^{fC} = \frac{l_c \langle -\sigma_{11} \rangle \langle -\varepsilon_{11} \rangle}{\delta_{eq}^{fC}}$
MT	$\delta_{eq}^{mT} = l_c \sqrt{\langle \varepsilon_{22} \rangle^2 + \langle \varepsilon_{33} \rangle^2 + \varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{13}^2}$	$\sigma_{eq}^{mT} = \frac{l_c (\langle \sigma_{22} \rangle \langle \varepsilon_{22} \rangle + \langle \sigma_{33} \rangle \langle \varepsilon_{33} \rangle + \sigma_{12} \varepsilon_{12} + \sigma_{23} \varepsilon_{23} + \sigma_{13} \varepsilon_{13})}{\delta_{eq}^{mT}}$
MC	$\delta_{eq}^{mC} = l_c \sqrt{\langle -\varepsilon_{22} \rangle^2 + \langle -\varepsilon_{33} \rangle^2 + \varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{13}^2}$	$\sigma_{eq}^{mC} = \frac{l_c (\langle -\sigma_{22} \rangle \langle -\varepsilon_{22} \rangle + \langle -\sigma_{33} \rangle \langle -\varepsilon_{33} \rangle + \sigma_{12} \varepsilon_{12} + \sigma_{23} \varepsilon_{23} + \sigma_{13} \varepsilon_{13})}{\delta_{eq}^{mC}}$

La degradazione è nuovamente basata sull'energia di rottura, con il valore di massimo spostamento equivalente calcolabile come:

$$\delta_{eq}^f = \frac{2G_{IC}}{\sigma_{eq}^0} \quad (3.103)$$

Con la fracture toughness e lo stress equivalente di inizio danneggiamento corrispondenti al modo di failure considerato e l'evoluzione calcolata come riportato nell'equazione (2.43), secondo il modello della CDM.

I valori di spostamento e stress equivalente di inizio danneggiamento sono:

$$\begin{cases} \delta_{eq,I}^0 = \frac{\delta_{eq,I}}{\sqrt{F_I}} & \text{con } I = [fT, fC, mT, mC] \\ \sigma_{eq,I}^0 = \frac{\sigma_{eq,I}}{\sqrt{F_I}} & \text{con } I = [fT, fC, mT, mC] \end{cases} \quad (3.104)$$

Infine, per la valutazione del danneggiamento progressivo è necessario aggiornare ad ogni step di calcolo la matrice di rigiditàza \mathbf{C}^{dam} , secondo la correzione riportata di seguito [37]:

$$\mathbf{C}^{dam} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{44} & 0 & 0 & \\ Sym & & & C_{55} & 0 & \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad (3.105)$$

Dove i termini della matrice sono:

$$\begin{cases} C_{11} = d_f E_{11} (1 - d_m \nu_{23} \nu_{32}) \\ C_{22} = d_m E_{22} (1 - d_f \nu_{13} \nu_{31}) \\ C_{33} = E_{33} (1 - d_f d_m \nu_{12} \nu_{21}) \\ C_{12} = d_f d_m E_{11} (\nu_{21} + \nu_{23} \nu_{31}) \\ C_{13} = d_f E_{11} (\nu_{31} + d_m \nu_{21} \nu_{32}) \\ C_{23} = d_m E_{22} (\nu_{32} + d_f \nu_{12} \nu_{31}) \\ C_{44} = \Lambda d_f d_m G_{12} \\ C_{55} = \Lambda d_f d_m G_{23} \\ C_{66} = \Lambda d_f d_m G_{13} \end{cases} \quad (3.106)$$

Con:

$$\begin{cases} d_f = (1 - d_{fT})(1 - d_{fC}) \\ d_m = (1 - d_{mT})(1 - d_{mC}) \\ \Delta = 1 - d_f d_m \nu_{12} \nu_{21} - d_m \nu_{23} \nu_{32} - d_f \nu_{13} \nu_{31} - 2d_f d_m \nu_{21} \nu_{32} \nu_{13} \end{cases} \quad (3.107)$$

Dove $d_{fT}, d_{fC}, d_{mT}, d_{mC}$ sono i parametri di danneggiamento di fibra e matrice a trazione e a compressione che si calcolano come riportato nell'espressione (2.43).

Capitolo 4

4. Simulazioni numeriche

Questo capitolo riporta tutti i casi di studio analizzati: in una prima fase, l'intenzione è quella di operare su modelli di studio semplici ed esemplificativi in modo da avere una panoramica generale delle prerogative di Abaqus e della CUF, portando avanti un confronto tra i due software. Si affrontano quindi analisi statiche e dinamiche su travi e piastre, sia in materiale isotropo che in composito, progressivamente introducendo gli elementi necessari all'analisi del danneggiamento con la CUF. Parallelamente si procede alla verifica della routine Hashin + Puck nella versione esplicita integrata nel Mul2, con test sul singolo elemento, di trazione e di compressione; infine, si riportano i casi di impatto.

4.1 Analisi statiche e lineari

I primi test considerati sono analisi con solutore implicito di tipo statico e lineare. Non si considera, cioè, il danneggiamento progressivo, linearizzando quindi il comportamento del materiale. I casi di studio sono stati analizzati con la CUF, con Abaqus e per via analitica in modo da effettuare dei confronti e verificare i risultati ottenuti.

4.1.1 Modelli 1D-CUF (travi)

Si considerano nel seguente paragrafo una serie di travi ad asse rettilineo e sezione costante di cui si varierà lunghezza, dimensioni e condizioni al contorno, con l'obiettivo di eseguirne l'analisi statica. I risultati ottenuti con la CUF e con il software commerciale Abaqus verranno confrontati con il metodo analitico di De Saint-Venant e con i valori di spostamento ricavabili attraverso l'applicazione dell'equazione della linea elastica. Le travi analizzate sono composte dalla lega di Alluminio 2024-T3 di tipico uso strutturale, le cui proprietà meccaniche sono: modulo di Young $E = 73,1$ GPa, coefficiente di Poisson $\nu = 0,3$ e densità $\rho = 2780$ kg/m³.

In ciascuno dei quattro casi di questo paragrafo, per poter considerare affidabile il modello è stato necessario effettuare l'analisi di convergenza: per quanto riguarda i risultati con Abaqus, non si approfondisce questo aspetto in quanto si può assumere la correttezza vista la congruenza con i risultati analitici. In questi casi di travi semplici, la teoria analitica di Saint-Venant così come l'uso dell'equazione della linea elastica risulta corretta e assumibile

come valore di riferimento nelle analisi (u_{ref} per lo spostamento e σ_{ref} per lo stress di Von Mises). Ci si concentra quindi sull'analisi di convergenza della mesh per i modelli realizzati con la CUF, valutando lo spostamento come criterio di convergenza.

Il primo caso di studio è una trave di lunghezza $L = 1000$ mm con sezione quadrata di lato $l = 20$ mm. Si considera la struttura incastrata ad un estremo e sottoposta ad un carico di compressione assiale all'estremo opposto, rappresentato da una forza puntuale di 1000 N.

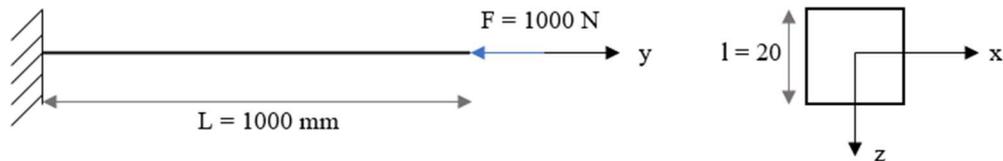


Figura 4-1: Configurazione di carico e vincolo della trave 1 e relativa sezione.

Tabella 4-1: Risultati in dettaglio dell'analisi statica lineare della trave di Figura 4-1.

Metodo	σ_{yy} (MPa)	$\sigma_{Von Mises}$ (MPa)	u_y max (mm)
SOL101			
50 B2 x 4 L4	-2,4	2,4	-3,49 E-02
ABAQUS 1D	-2,5	2,5	-3,42 E-02
Analitico			
De Saint-Venant e linea elastica	-2,5	2,5	-3,42 E-02

Tabella 4-2: Analisi di convergenza per gli elementi B2 della trave 1; $\Delta u = \frac{u_{y,ref} - u_y}{u_{y,ref}} * 100$.

B2	u_y (mm)	Δu
1	8,00 E-02	-134%
5	7,60 E-02	-122%
10	4,50 E-02	-31,6%
20	4,20 E-02	-22,8%
40	3,50 E-02	-2,34%
50	3,49 E-02	-2,05%
80	3,49 E-02	-2,05%

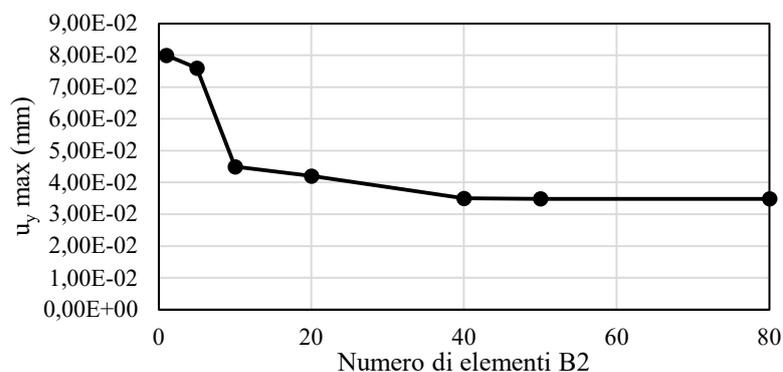


Figura 4-2: Grafico dello spostamento relativo all'analisi di convergenza della trave 1.

Il secondo caso di studio è del tutto simile al primo, ma si vuole indagare il carico di trazione. Si considera quindi una trave di lunghezza $L = 500$ mm, con sezione quadrata di lato $l = 40$ mm, incastrata ad un estremo e sottoposta ad un carico di trazione di 1000 N dall'altro.

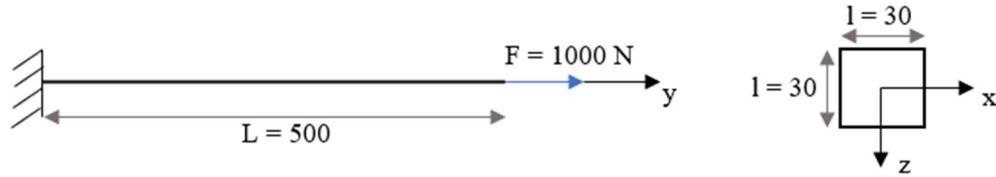


Figura 4-3: Configurazione di carico e vincolo della trave 2 e relativa sezione.

Tabella 4-3: Risultati in dettaglio dell'analisi statica lineare della trave di Figura 4-3

Metodo	σ_{yy} (MPa)	$\sigma_{Von\ Mises}$ (MPa)	u_y max (mm)
SOL101			
200 B2 x 4 L4	1,11	1,11	7,6 E-03
ABAQUS 1D	1,11	1,11	7,6 E-03
Analitico			
De Saint-Venant	1,11	1,11	7,6 E-03

Per la trave 2, a differenza del caso precedente, è stato necessario considerare per l'analisi di convergenza oltre al valore di spostamento anche quello dello stress di Von Mises in quanto aumentando il numero di elementi si sono ottenute differenze non trascurabili.

Tabella 4-4: Analisi di convergenza della trave 2; $\Delta u = \frac{u_{z,ref} - u_z}{u_{z,ref}} * 100$; $\Delta \sigma = \frac{\sigma_{ref} - \sigma}{\sigma_{ref}} * 100$.

B2	u_y (mm)	Δu	$\sigma_{Von\ Mises}$ (MPa)	$\Delta \sigma$
1	7,2 E-03	5,26%	4,6 E-01	58,2%
5	7,6 E-03	0,00%	4,6 E-01	58,2%
10	7,6 E-03	0,00%	7,6 E-01	30,9%
50	7,6 E-03	0,00%	8,6 E-01	21,8%
100	7,6 E-03	0,00%	9,2 E-01	16,4%
200	7,6 E-03	0,00%	1,11	0,00%
500	7,6 E-03	0,00%	1,11	0,00%

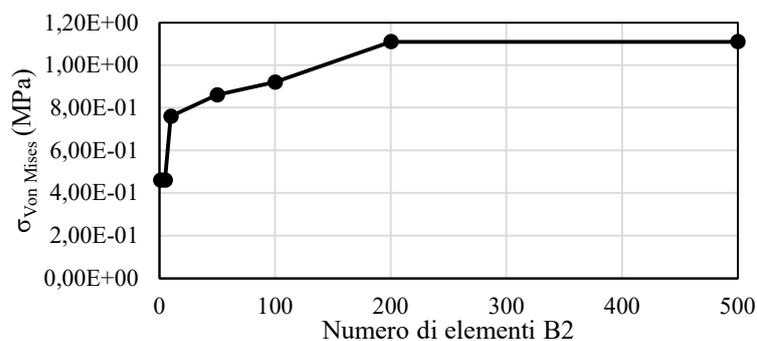


Figura 4-4: Andamento dello stress di Von Mises relativo all'analisi di convergenza per la trave 4.

Il terzo caso di studio considera una trave di lunghezza $L = 1000$ mm e sezione rettangolare, i cui lati misurano $a = 50$ mm e $b = 100$ mm. Si considera la trave incastrata ad un estremo e caricata a taglio all'estremo opposto, con una forza puntuale di 100 N.

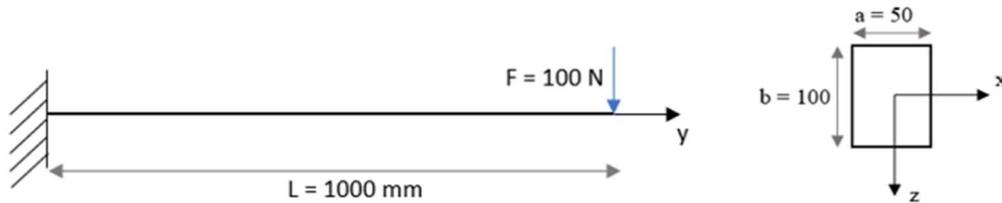


Figura 4-5: Configurazione di carico e vincolo della trave 3 e relativa sezione.

Tabella 4-5: Risultati in dettaglio dell'analisi statica lineare della trave di Figura 4-5.

Metodo	σ_{yy} (MPa)	$\sigma_{Von Mises}$ (MPa)	u_z max (mm)
SOL101			
40 B2 x 1 L9	1,19	1,19	-1,1 E-01
ABAQUS 1D	1,199	1,199	-1,1 E-01
Analitico			
De Saint-Venant	1,20	1,20	-1,1 E-01

Tabella 4-6: Analisi di convergenza per gli elementi B2 della trave 3; $\Delta u = \frac{u_{z,ref} - u_z}{u_{z,ref}} * 100$.

B2	u_z (mm)	Δu
1	2,90 E-02	73,6%
5	4,40 E-02	60,0%
10	8,00 E-02	27,3%
20	1,02 E-01	7,27%
30	1,08 E-01	1,02%
40	1,10 E-01	0,00%
50	1,10 E-01	0,00%

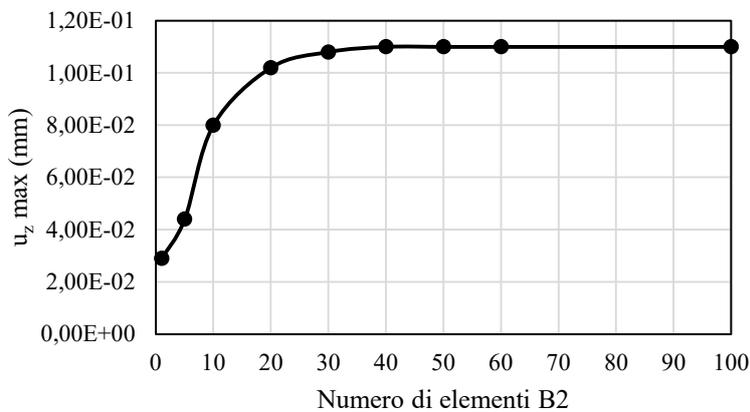


Figura 4-6: Grafico dello spostamento relativo all'analisi di convergenza della trave 1.

Infine, il quarto caso di studio è una trave di lunghezza $L = 500 \text{ mm}$, con sezione rettangolare di altezza $a = 20 \text{ mm}$ e larghezza $b = 2 \text{ mm}$. Si considera ancora un caso di flessione pura, dove la trave è incastrata ad un'estremità e caricata con una forza di taglio $F = 50 \text{ N}$ all'estremità opposta.

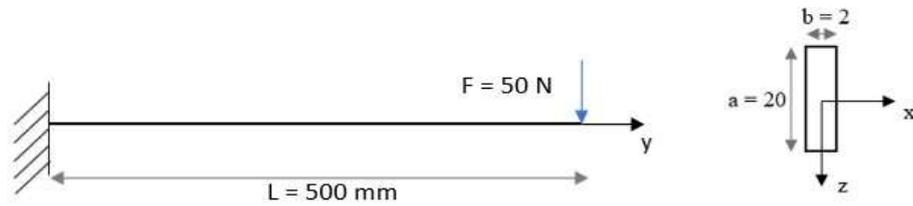


Figura 4-7: Configurazione di carico e vincolo della trave 4 e relativa sezione.

Tabella 4-7: Risultati in dettaglio dell'analisi statica lineare della trave di Figura 4-7.

Metodo	σ_{yy} (MPa)	$\sigma_{Von Mises}$ (MPa)	$u_z \text{ max}$ (mm)
SOL101			
500 B2 x 16L4	187,5	187,5	21,3
ABAQUS 1D	187,4	187,4	21,4
Analitico			
De Saint-Venant e linea elastica	187,5	187,5	21,4

Tabella 4-8: Analisi di convergenza per gli elementi B2 della trave 4; $\Delta u = \frac{u_{z,ref} - u_z}{u_{z,ref}} * 100$.

B2	u_z (mm)	Δu
1	8,87 E-02	99,6%
10	6,23	70,9%
50	19,4	9,35%
100	20,8	2,80%
200	21,2	0,09%
500	21,3	0,05%
625	21,3	0,05%

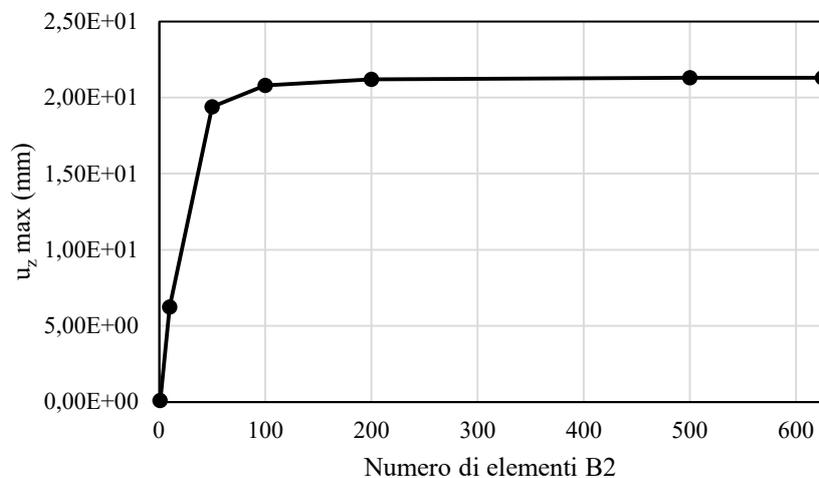


Figura 4-8: Grafico dello spostamento relativo all'analisi di convergenza della trave 4.

Dai risultati ottenuti nei quattro casi di studio, si può concludere che i modelli costruiti con Abaqus e con la CUF risultano tra loro coerenti; con la CUF si ha però il vantaggio di modificare la cinematica e la configurazione strutturale delle travi andando ad utilizzare tipologie di elementi diversi non solo per la mesh ma anche per le Espansioni Lagrangiane, nella definizione dei nuclei della sezione. Questa caratteristica del codice permette quindi di ridurre il numero di elementi della mesh necessari, grazie ad una maggior precisione dovuta all'Espansione.

Si è quindi ripetuta l'analisi di convergenza considerando prima il passaggio ad elementi B3 (Three-Node Beam) e B4 (Four-Node Beam), mantenendo gli elementi LE1 per l'Espansione, poi variando l'Espansione con LE2 e LE3.

Nelle tabelle seguenti, l'indicazione Δu corrisponde all'espressione degli spostamenti (4.1) e $\Delta \sigma$ a quella dello stress di Von Mises (4.2):

$$\Delta u = (u_{ref} - u) / u_{ref} \quad (4.1)$$

$$\Delta \sigma = (\sigma_{ref} - \sigma) / \sigma_{ref} \quad (4.2)$$

Tabella 4-9: Analisi della mesh con gli elementi B3 per la trave 1.

B3	u_y (mm)	Δu
1	5,32 E-02	-53,5%
3	4,52 E-02	-32,1%
10	3,49 E-02	-2,05%
15	3,49 E-02	-2,05%

Tabella 4-10: Analisi di convergenza della mesh con elementi B4 per la trave 1.

B4	u_y (mm)	Δu
1	3,65 E-02	6,72%
2	3,49 E-02	-2,05%
4	3,49 E-02	-2,05%

Tabella 4-11: Analisi di convergenza per l'Espansione Lagrangiana LE1 della trave 1.

LE1	u_y (mm)	Δu
1x1	3,49 E-02	-2,05%
2x2	3,49 E-02	-2,05%

Tabella 4-12: Analisi di convergenza per l'Espansione Lagrangiana LE2 della trave 1.

LE2	u_y (mm)	Δu
1x1	3,49 E-02	-2,05%
1x2	3,49 E-02	-2,05%

Tabella 4-13: Analisi di convergenza per l'Espansione Lagrangiana LE3 della trave 1.

LE3	u_y (mm)	Δu
1x1	3,49 E-02	-2,05%
1x2	3,49 E-02	-2,05%

Tabella 4-14: Analisi della mesh con gli elementi B3 per la trave 2.

B3	u_y (mm)	Δu	$\sigma_{\text{Von Mises}}$ (MPa)	$\Delta \sigma$
1	7,7 E-03	-1,31%	1,06	4,54%
2	7,6 E-03	0,00%	1,11	0,00%
3	7,6 E-03	0,00%	1,11	0,00%

Tabella 4-15: Analisi della mesh con gli elementi B4 per la trave 2.

B4	u_y (mm)	Δu	$\sigma_{\text{Von Mises}}$ (MPa)	$\Delta \sigma$
1	7,6 E-03	0,00%	1,11	0,00%
2	7,6 E-03	0,00%	1,11	0,00%

Tabella 4-16: Analisi di convergenza per l'Espansione Lagrangiana LE1 della trave 2.

LE1	u_y (mm)	Δu
1x1	7,6 E-03	0,00%
2x2	7,6 E-03	0,00%

Tabella 4-17: Analisi di convergenza per l'Espansione Lagrangiana LE2 della trave 2.

LE2	u_y (mm)	Δu
1x1	7,6 E-03	0,00%
2x2	7,6 E-03	0,00%

Tabella 4-18: Analisi di convergenza per l'Espansione Lagrangiana LE3 della trave 2.

LE3	u_y (mm)	Δu
1x1	7,6 E-03	0,00%
2x2	7,6 E-03	0,00%

Tabella 4-19: Analisi di convergenza della mesh con elementi B3 per la trave 3.

B3	u_z (mm)	Δu
1	8,5 E-02	22,7%
3	9,3 E-02	15,4%
5	1,1 E-01	0,00%
10	1,1 E-01	0,00%

Tabella 4-20: Analisi di convergenza della mesh con elementi B4 per la trave 3.

B4	u_z (mm)	Δu
1	1,0 E-01	9,09%
2	1,1 E-01	0,00%
4	1,1 E-01	0,00%

Tabella 4-21: Analisi di convergenza per l'Espansione Lagrangiana LE1 della trave 3.

LE1	u_z (mm)	Δu
1x1	-1,01 E-01	8,18%
1x2	-1,08 E-01	1,85%
2x4	-1,10 E-01	0,00%
4x8	-1,10 E-01	0,00%

Tabella 4-22: Analisi di convergenza per l'Espansione Lagrangiana LE2 della trave 3.

LE2	u_z (mm)	Δu
1x1	-1,10 E-01	0,00%
1x2	-1,10 E-01	0,00%

Tabella 4-23: Analisi di convergenza per l'Espansione Lagrangiana LE3 della trave 3.

LE3	u_z (mm)	Δu
1x1	-1,10 E-01	0,00%
1x2	-1,10 E-01	0,00%

Tabella 4-24: Analisi della mesh con gli elementi B3 per la trave 4.

B3	u_z (mm)	Δu
1	15,5	27,6%
5	19,5	8,88%
10	21,1	1,40%
15	21,2	0,09%
25	21,3	0,05%
30	21,3	0,05%

Tabella 4-25: Analisi della mesh con gli elementi B4 per la trave 4.

B4	u_z (mm)	Δu
1	20,1	6,07%
2	20,7	3,27%
4	21,1	1,40%
10	21,2	0,09%
20	21,3	0,05%
25	21,3	0,05%

Tabella 4-26: Analisi di convergenza per l'Espansione Lagrangiana LE1 della trave 4.

LE1	u_z (mm)	Δu
1x1	19,4	5,15%
1x2	20,8	2,80%
2x4	21,2	0,09%
2x8	21,3	0,05%
4x8	21,3	0,05%

Tabella 4-27: Analisi di convergenza per l'Espansione Lagrangiana LE2 della trave 4.

LE2	u_z (mm)	Δu
1x1	21,3	0,05%
1x2	21,3	0,05%

Tabella 4-28: Analisi di convergenza per l'Espansione Lagrangiana LE3 della trave 4.

LE3	u_z (mm)	Δu
1x1	21,3	0,05%
1x2	21,3	0,05%

Dall'analisi dei casi di studio considerati, si osserva che l'utilizzo degli elementi B3 e B4 risulta ottimale per la definizione del modello strutturale della trave; infatti, le mesh così costituite hanno il vantaggio di convergere molto rapidamente, portando quindi ad un risultato accurato con una mesh complessivamente meno fitta rispetto agli elementi B2.

In base ai risultati ottenuti per le travi 1 e 2, si può inoltre dedurre che nel caso di carichi di trazione e compressione la tipologia di espansione Lagrangiana scelta non influisca sul risultato dell'analisi; al contrario, nei casi di flessione si osserva che le espansioni LE1 portano a risultati di minor precisione e richiedono una mesh più fitta per raggiungere la convergenza dell'analisi. Per questa ragione, sono le meno indicate per queste applicazioni.

4.2.1 Modelli 2D-CUF (piastre)

Si procede ora con lo studio del codice CUF e il confronto con Abaqus e metodi analitici attraverso l'analisi di piastre sottili, con geometrie, materiali e condizioni di carico e vincolo differenti. In particolare, si fa ricorso a solutori impliciti per casi statici e lineari; gli elementi utilizzati per il confronto sono gli S4R e gli S8R (Continuum Shell) di Abaqus, corrispondenti ai Q4 e ai Q9 della CUF, di cui si procede anche alla valutazione delle altre possibilità.

Il primo caso di studio è una piastra rettangolare di dimensioni 60 x 30 mm e spessore 1 mm, incastrata ai due estremi sul lato corto e caricata al centro con una forza di taglio di 10 N. Il materiale di cui è costituita la piastra è la lega di Alluminio 2024-T3, le cui proprietà meccaniche sono: modulo di Young $E = 73,1$ GPa, coefficiente di Poisson $\nu = 0,3$ e densità $\rho = 2780$ kg/m³.

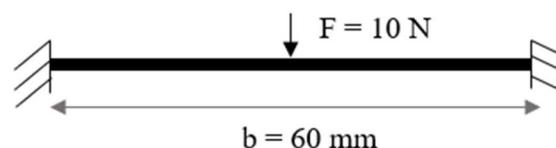


Figura 4-9: Configurazione di carico e vincolo della piastra 1.

Tabella 4-29: Risultati in dettaglio dell'analisi statica lineare della piastra di Figura 4-9.

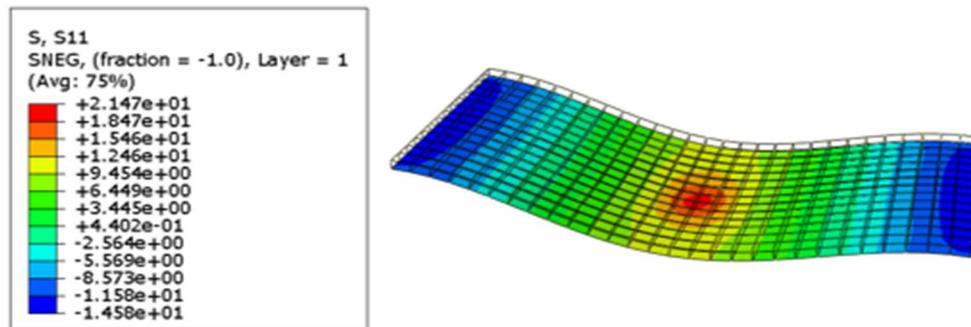
Metodo	σ_{xx} (MPa)	σ_{yy} (MPa)	u_z max (mm)
SOL101			
10x20 Q16, 20L2	21,5	15,0	-6,02 E-02
ABAQUS, 2D	21,5	15,0	-6,02 E-02
Analitico			-6,15 E-02

Il risultato di spostamento calcolato analiticamente si riferisce all'approssimazione della piastra a flessione incastrata ai due lati come se fosse una trave, secondo il modello di Eulero-Bernoulli. La formula utilizzata in Tabella 4-29 per il metodo analitico è:

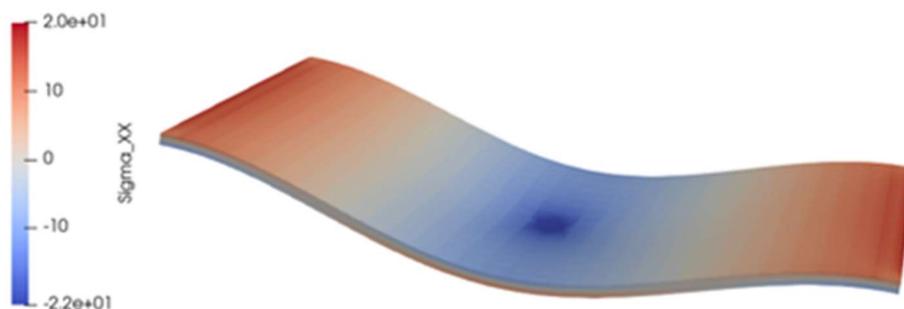
$$u_{z,max} = \frac{FL^3}{192EI} \quad (4.3)$$

Dove L è la lunghezza caratteristica, in questo caso coincidente con il lato di maggior lunghezza della piastra e I è il momento d'inerzia della sezione rettangolare, individuata dal secondo lato e dallo spessore.

Essendo il valore di spostamento così ottenuto il risultato di un'approssimazione non lo si può considerare esatto, ma è comunque utilizzabile come parametro di confronto con i modelli numerici.



(a) Tensione σ_{xx} Abaqus



(b) Tensione σ_{xx} CUF

Figura 4-10: Distribuzione dello stress di Von Mises in Abaqus e con la CUF a confronto per la piastra 1.

Tabella 4-30: Analisi di convergenza della mesh con elementi Q9 per la piastra 1.

Elementi Q9	u_z (mm)	Δu
2x2	-2,04 E-03	96,7%
4x4	-4,42 E-02	28,1%
4x8	-5,53 E-02	10,1%
6x12	-5,80 E-02	5,69%
8x16	-5,88 E-02	4,39%
10x20	-5,94 E-02	3,41%
15x30	-6,02 E-02	2,11%

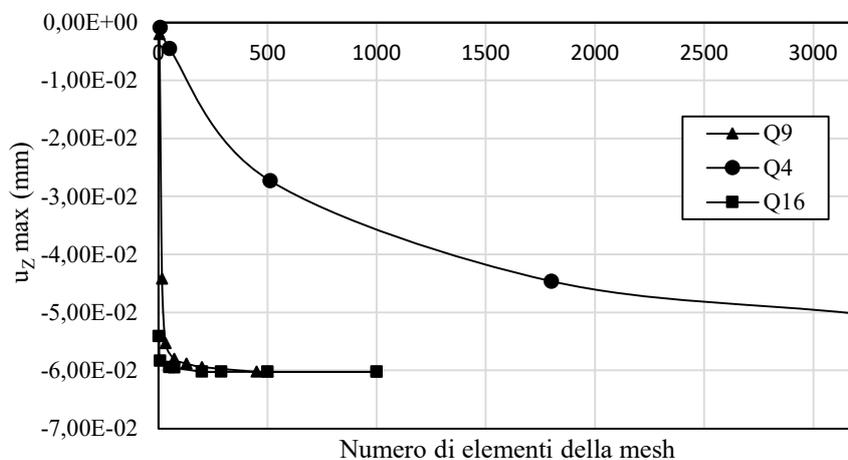
Si ripete ora l'analisi considerando diversi modelli strutturali, applicando come tipologia di elementi per la definizione della mesh le alternative Q4 e Q16, mantenendo come Espansione Lagrangiana l'opzione LE1.

Tabella 4-31: Analisi di convergenza della mesh con elementi Q4 per la piastra 1; non si arriva a convergenza.

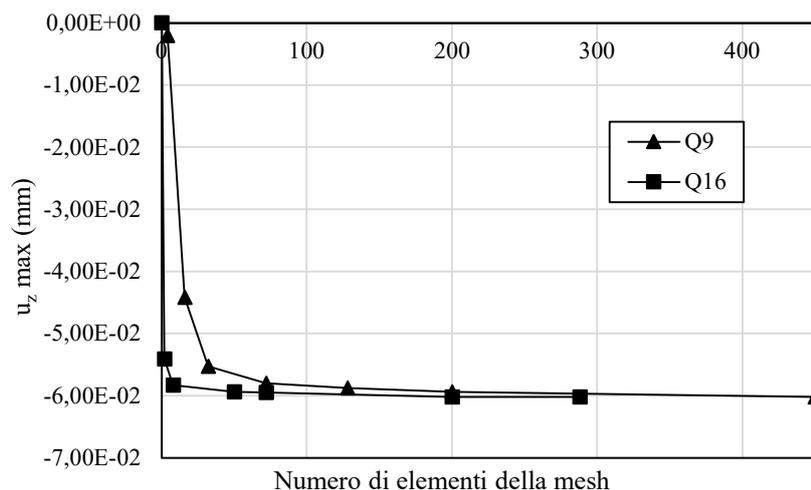
Elementi Q4	u_z (mm)	Δu
2x4	-8,7 E-04	98,6%
5x10	-4,52 E-03	92,6%
16x32	-2,73 E-02	55,6%
30x60	-4,46 E-02	27,5%
40x80	-5,02 E-02	18,4%

Tabella 4-32: Analisi di convergenza della mesh con elementi Q16 per la piastra 1.

Elementi Q16	u_z (mm)	Δu
1x2	-5,41 E-02	12,0%
2x4	-5,83 E-02	5,20%
5x10	-5,94 E-02	3,41%
6x12	-5,95 E-02	3,25%
10x20	-6,02 E-02	2,11%
12x24	-6,02 E-02	2,11%



(a) Grafico di confronto tra Q4, Q9 e Q16.



(b) Grafico dei soli casi Q9 e Q16, per evidenziarne meglio il confronto.

Figura 4-11: Grafico di confronto tra il numero di elementi Q4, Q9 e Q16 necessari per portare la mesh a convergenza.

Dai risultati riportati nella Tabella 4-32 e dal grafico di Figura 4-11, si può notare come nel caso degli elementi Q4 la convergenza della mesh risulti più lenta e comporti un elevato numero di elementi necessari: con 3200 elementi ancora non si è in grado di ottenere un risultato accettabile. Per l'analisi delle piastre a flessione, quindi, gli elementi Q4 risultano funzionali nel caso di geometrie semplici e regolari, ma comportano una convergenza più lenta; per il caso di piastra rettangolare analizzato non risultano una scelta ottimale, in quanto richiedono maggior tempo per l'implementazione del codice. Gli elementi Q9 sono invece un'alternativa valida, così come gli elementi Q16, dato che portano rapidamente a convergenza la mesh con risultati accurati.

Per la definizione dell'espansione Lagrangiana (1D), nei casi precedentemente analizzati si sono utilizzati 20 elementi LE1: anche in questo caso è possibile effettuare un'analisi di convergenza e valutare l'utilizzo delle alternative LE2 e LE3. Tale studio si riporta nelle Tabella 4-33, Tabella 4-34 e Tabella 4-35, relative alla configurazione strutturale della piastra con elementi Q16.

Tabella 4-33: Analisi di convergenza della mesh con modello LE12 per Espansione Lagrangiana.

LE1	u_z (mm)	Δu
1	-4,96 E-02	19,3%
2	-5,65 E-02	8,13%
5	-5,97 E-02	2,93%
10	-6,01 E-02	2,27%
20	-6,02 E-02	2,11%
25	-6,02 E-02	2,11%

Tabella 4-34: Analisi di convergenza della mesh con modello LE2 per Espansione Lagrangiana.

LE2	u_z (mm)	Δu
1	-6,01 E-02	2,27%
2	-6,02 E-02	2,11%
3	-6,02 E-02	2,11%

Tabella 4-35: Analisi di convergenza della mesh con modello LE4 per Espansione Lagrangiana

LE3	u_z (mm)	Δu
1	-6,02 E-02	2,11%
2	-6,02 E-02	2,11%

Dalle analisi effettuate, l'utilizzo dell'espansione LE1 risulta una scelta valida e convergente, ma più dispendiosa in termini di numero di elementi richiesti rispetto alle tipologie LE2 e LE3. Queste ultime, infatti, rispettivamente con due o un solo elemento portano immediatamente a convergenza il risultato.

Il secondo caso di studio è una piastra quadrata di lato $l = 100$ mm e spessore 6 mm, realizzata in Alluminio, con le stesse proprietà del caso di studio 1. Si considera la piastra semplicemente appoggiata sul contorno e si applica un carico sinusoidale secondo la legge:

$$p_z = p_0 \sin\left(\frac{x\pi}{l}\right) \sin\left(\frac{y\pi n}{l}\right) \quad (4.4)$$

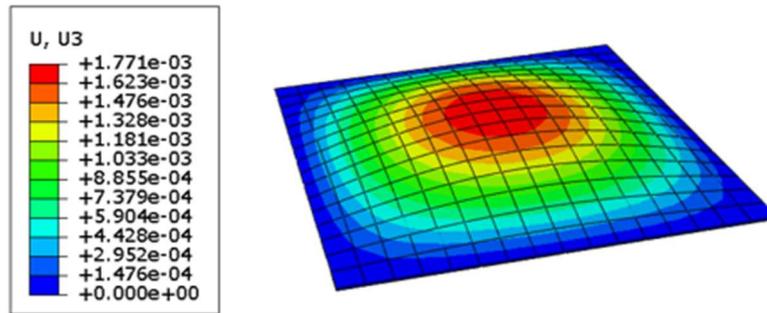
Dove p_0 rappresenta l'ampiezza del carico di pressione (1000 Pa). Nel caso in analisi, m ed n si considerano di valore unitario.

Visto il risultato dell'analisi di convergenza e dei modelli strutturali svolta per la piastra del caso 1, si è scelto di utilizzare 3 elementi B3 per definire l'espansione Lagrangiana LE3 e gli elementi Q4 per la mesh, data la regolarità e simmetria del caso.

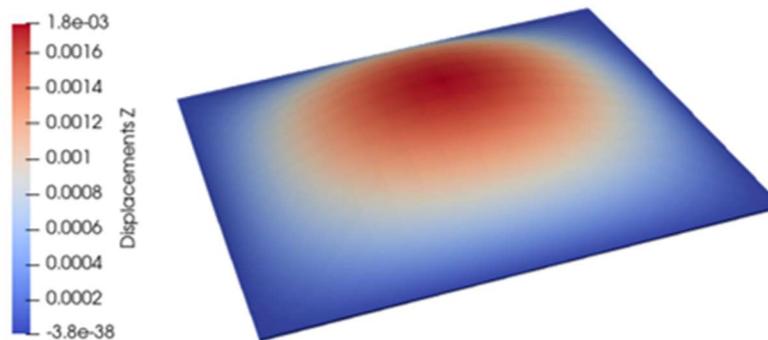
Tabella 4-36: Risultati in dettaglio dell'analisi statica della piastra 2.

Metodo	σ_{xx} (MPa)	σ_{yy} (MPa)	u_z max (mm)
SOL101			
16x16 Q4, 3 L4	-5,46	5,46	1,76
ABAQUS 2D	-5,40	5,40	1,77
Analitico			
CLT			1,77

Per la valutazione analitica del valore di spostamento si è ricorso alla CLT, descritta nel paragrafo 2.2.



(a) Spostamento massimo Abaqus



(b) Spostamento massimo CUF

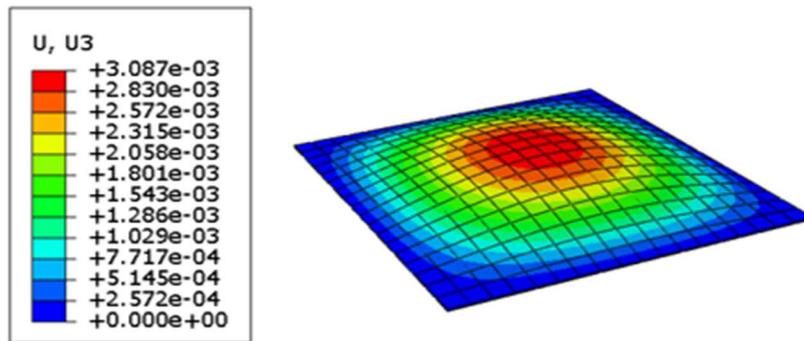
Figura 4-12: Spostamento con Abaqus (a) e la CUF (b) a confronto nel caso della piastra 2.

Il terzo caso di studio è una piastra analoga al caso precedente ma realizzata in materiale composito. In particolare, si considera il materiale composito IM7/8552 a matrice polimerica, rinforzato con fibre di carbonio le cui proprietà sono note in letteratura e si riportano in Tabella 4-37. La densità del materiale è $\rho = 1700 \text{ kg/mm}^3$.

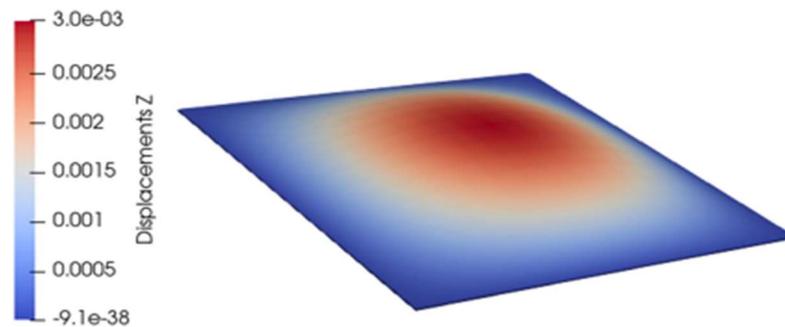
Tabella 4-37: Proprietà meccaniche del materiale composito IM7/8552.

Material	E1 [GPa]	E2 [GPa]	E3 [GPa]	G12 [GPa]	G13 [GPa]	G23 [GPa]	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}
IM7/8552	165,0	9,0	9,0	5,6	5,6	2,8	0,34	0,34	0,5

La sequenza di laminazione utilizzata per la piastra è $[0/90/0]$ ed ogni strato è caratterizzato da uno spessore di 2 mm.



(a) Spostamento massimo Abaqus



(b) Spostamento massimo CUF

Figura 4-13: Spostamento con Abaqus (a) e CUF (b) a confronto, nel caso della piastra 3.

Tabella 4-38: Risultati in dettaglio dell'analisi statica della piastra 3.

Metodo	σ_{xx} (MPa)	$\sigma_{Von Mises}$ (MPa)	u_z max (mm)
SOL101			
16x16 Q4, 3 L4	15,5	15,3	3,03
ABAQUS 2D	15,0	15,5	3,09
Analitico			
CLT			3,09

Per il calcolo analitico (Classical Lamination Theory) è stata usata la formula semplificata:

$$u_{z MAX} = \frac{6p_0b^4}{10^3t^3E_T} \quad (4.5)$$

La minima differenza di risultati riscontrata tra Abaqus e CUF, osservata sia nel caso della prima che della seconda piastra sottoposta a carico di pressione sinusoidale, è dovuta alla differente modalità di definizione del carico stesso: in Abaqus è possibile applicare la pressione distribuita replicando perfettamente il caso analitico, mentre nella CUF deve essere applicata sottoforma di forza concentrata nei nodi. La relazione generale è:

$$F_0 = \frac{p_0 A}{4} \quad (4.6)$$

Dove A rappresenta l'area di ciascun elemento e p_0 l'ampiezza della pressione sinusoidale. In realtà, l'applicazione di questa formula non è completamente esatta dato che la suddivisione della forza sui quattro nodi di ciascun elemento Q4 si somma con quella dei nodi degli elementi vicini, in funzione della posizione dell'elemento stesso.

Per quanto riguarda invece la piastra 1 considerata, i risultati ottenuti con Abaqus e la CUF sono del tutto equivalenti.

4.5 Analisi dinamiche, esplicite e non lineari

Questo paragrafo presenta i risultati di una serie di analisi esplicite e non lineari utilizzate come test per la convalida della routine Hahn + Puck esplicita nel caso della trazione e della compressione, dove si fa riferimento ai criteri di failure di Hashin 3D e a Puck con angolo variabile nella definizione del modello materiale e del danneggiamento progressivo.

Il materiale utilizzato per i casi analizzati è il composito a matrice polimerica rinforzato con fibre di carbonio IM7/8552 (Tabella 4-37), i cui parametri di rottura per la trazione e per la compressione sono riportati nella Tabella 4-39.

Tabella 4-39: Proprietà elastiche e ammissibili per l'IM7/8552, utilizzate per i test a compressione.

E_1 [GPa]	E_2 [GPa]	E_3 [GPa]	G_{12} [GPa]	G_{13} [GPa]	G_{23} [GPa]	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}
150,0	11,0	11,0	5,8	5,8	2,9	0,34	0,34	0,48
X_T [MPa]	X_C [MPa]	Y_T [MPa]	Y_C [MPa]	S_{12} [Mpa]	G_1^T [kJ/m ²]	G_2^T [kJ/m ²]	G_1^C [kJ/m ²]	G_2^C [kJ/m ²]
2560,0	1690,0	73,0	250,0	90,0	120,0	2,6	80,0	4,2

4.5.1 Test di trazione sul singolo elemento

I primi test effettuati sono relativi all'analisi del singolo elemento sottoposto a trazione; questi test sono usati in letteratura e portano il vantaggio di analizzare i modi di failure separatamente gli uni dagli altri. In particolare, l'elemento analizzato ha dimensioni 1 mm x 1 mm ed è costituito da un singolo ply di 0,125 mm di spessore: la modellizzazione viene fatta attraverso un unico elemento Q4 nel piano e un'espansione lineare LE1. L'orientazione della fibra viene modificata da 0° a 90° come mostrato in Figura 4-14, per focalizzare lo studio del comportamento prima sul danneggiamento a rottura delle fibre e successivamente su quello della matrice. In seguito, si è ripetuta l'analisi nel caso di un singolo elemento Q4 caratterizzato da una laminazione $[90/45/0/-45]_{2s}$ nelle stesse condizioni di carico. Come termini di paragone, si sono utilizzati i risultati del CODAM2 già sviluppati nei lavori di letteratura precedenti [37] e validati sulla base dei relativi valori sperimentali.

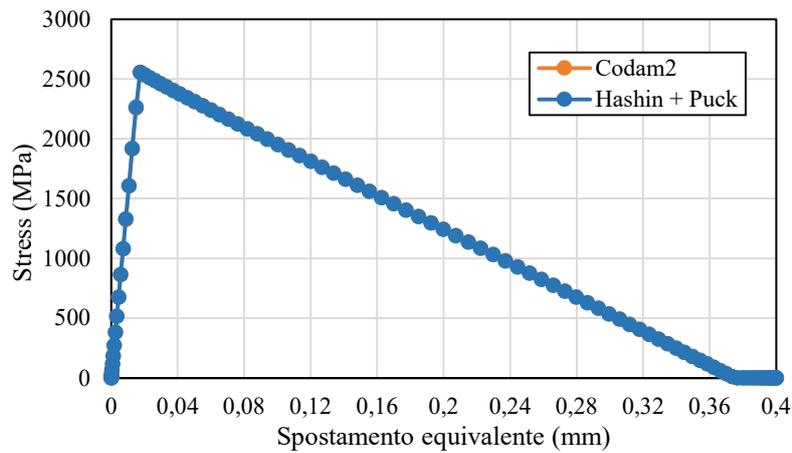
Dalle analisi eseguite sono state tracciate le curve tensione (σ)-spostamento equivalente (δ) che hanno prodotto gli andamenti riportati in Figura 4-15, 4-16, 4-17.



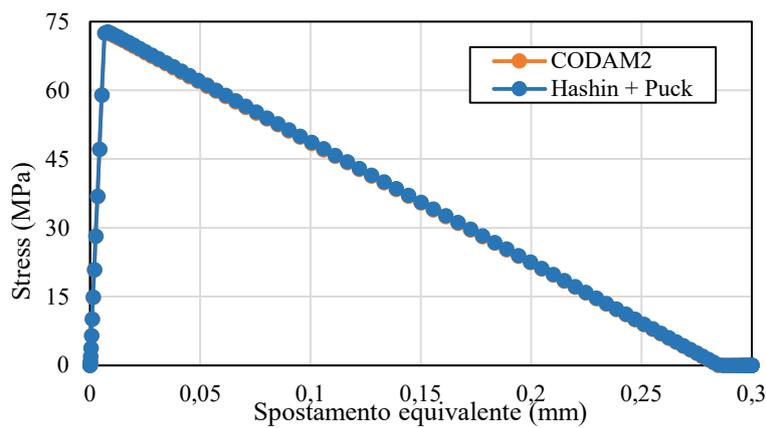
(a) Schema per l'analisi delle fibre

(b) Schema per l'analisi della matrice

Figura 4-14: Configurazione schematizzata del test di trazione sul singolo elemento.



(a) Carico longitudinale (fibre)



(b) Carico trasversale (matrice)

Figura 4-15: Curve stress-strain per il singolo elemento nel caso di trazione uniassiale.

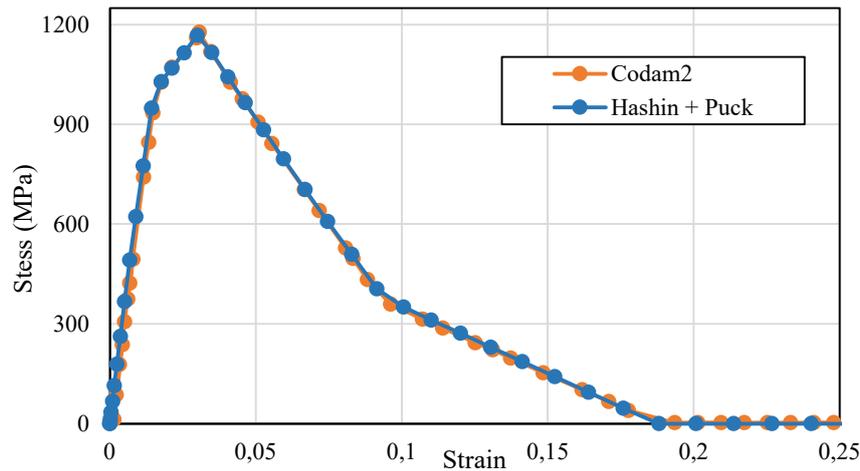


Figura 4-16: Risposta del laminato $[90/45/0/-45]_{4S}$ costituito da un unico elemento nel piano sottoposto ad un carico di trazione uniassiale in direzione y (equivalente all'orientamento a 90 gradi delle fibre).

Si possono quindi effettuare le osservazioni seguenti:

1. Le curve stress-spostamento equivalente per la fibra e per la matrice a trazione del singolo elementino, così come il laminato risultano perfettamente sovrapponibili con i valori di riferimento del CODAM2, sia per il valore di picco massimo dello stress σ_{0eq} sia per i valori di spostamento all'inizio del danneggiamento δ_1^{0T} e in corrispondenza della condizione di failure δ_1^{fT} . I valori di tensione sono coerenti con gli ammissibili imposti come input per il materiale.
2. In generale, gli andamenti ottenuti con Hashin 3D e il criterio di Puck ad angolo variabile sono in accordo con le aspettative sul comportamento del materiale composito analizzato.

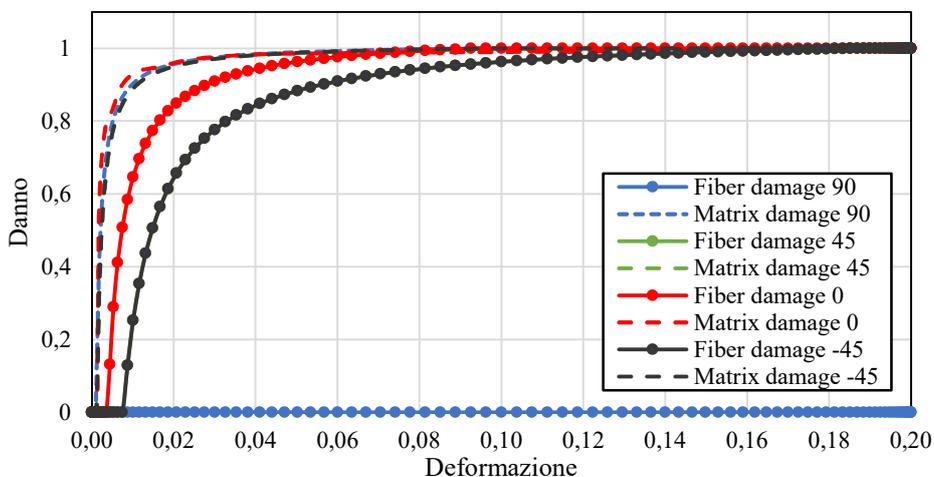


Figura 4-17: Evoluzione del danno della fibra e della matrice all'interno di ogni layer con la nuova routine basata su Hashin 3D e Puck con angolo variabile.

4.5.2 Softening della fibra dopo il picco massimo

La formulazione del danneggiamento utilizzata in Hashin + Puck, che segue un andamento lineare, è adeguata alla trazione ma porta a limitazioni significative quando si passa ai casi di compressione. In questa condizione di carico, infatti, è molto comune che una volta raggiunto il picco massimo le fibre vadano incontro al fenomeno di micro-buckling: ciò comporta una rapida perdita di rigidità con il raggiungimento di un plateau rappresentativo della resistenza residua e della nuova condizione di stabilità delle fibre.

Un possibile approccio per tenere in considerazione questo fenomeno e migliorare le previsioni di una curva di degradazione lineare è quello di introdurre un effetto di smorzamento o Softening. Il Softening può seguire diversi principi: si passa dal Softening lineare alla soluzione Linear-Brittle, ovvero ad un brusco calo del valore di tensione residua dopo il raggiungimento del picco. Il valore residuo viene calcolato come una percentuale del massimo, a seconda della famiglia di curve che si sta utilizzando, come mostrato in Figura 4-18. Indipendentemente dalla soluzione di smorzamento scelta l'energia di rottura della fibra (corrispondente all'area sottesa da ciascuna curva) rimane sempre costante.

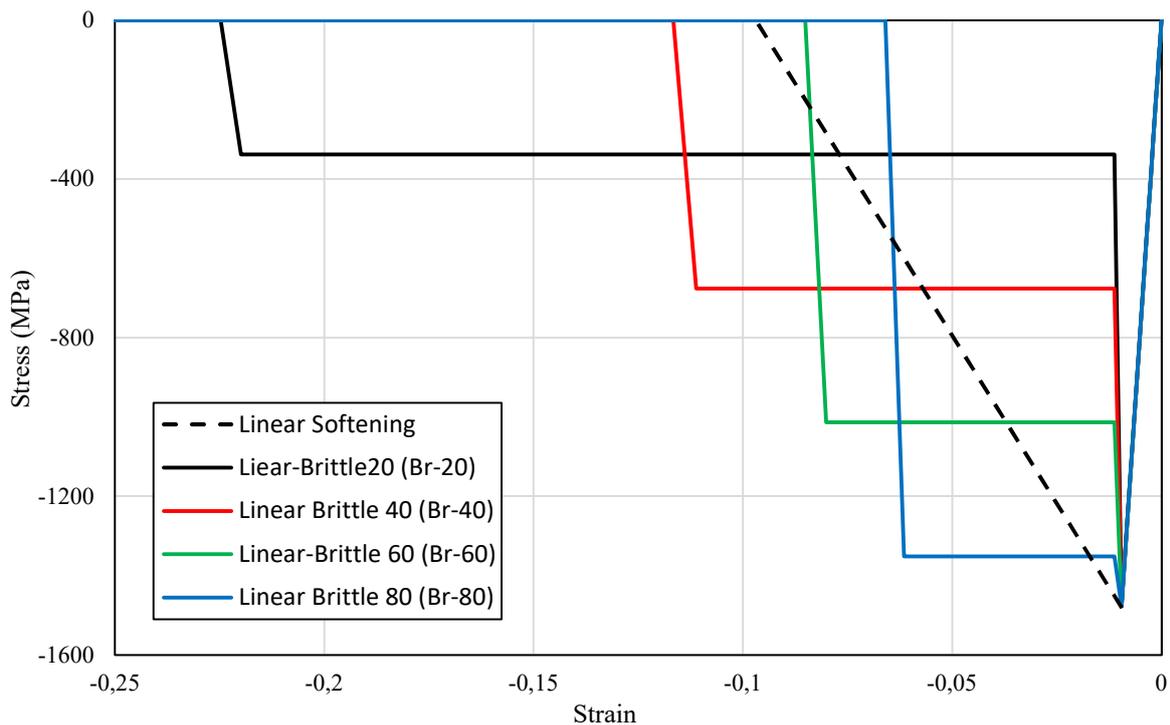
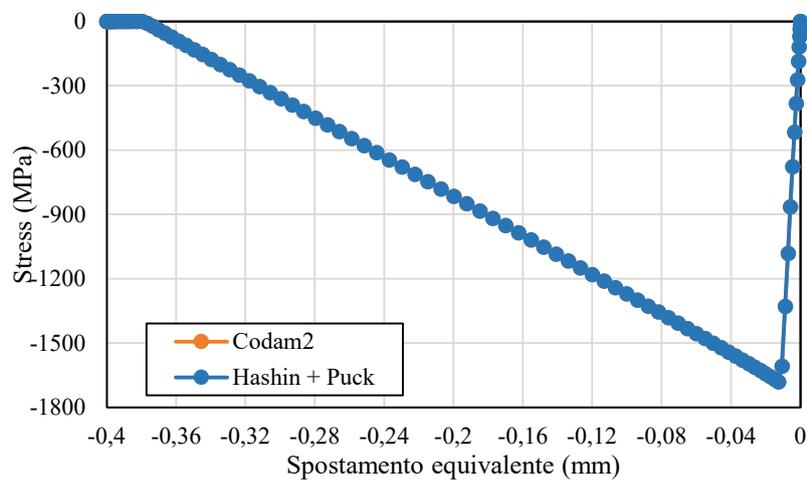


Figura 4-18: Curve di Softening di tipo lineare e Linear-Brittle per la fibra a compressione dopo il raggiungimento del valore di picco. Il numero (20, 40, 60, 80) indica la percentuale del valore massimo utilizzato come resistenza residua.

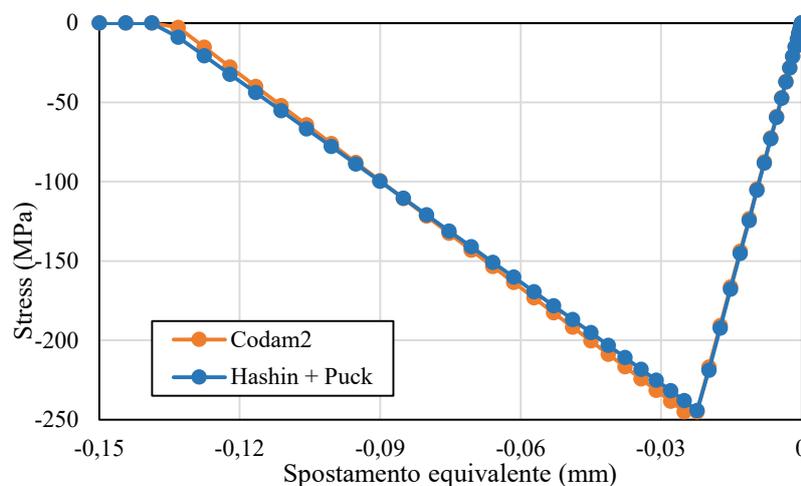
4.5.3 Test di compressione sul singolo elemento

La prima serie di test per la verifica a compressione della routine è basata sull'analisi del singolo elemento, per poter considerare indipendente la rottura delle fibre e della matrice. L'elemento è rappresentativo di una singola lamina unidirezionale, di dimensioni 1 mm x 1 mm, sottoposta ad un carico di compressione uniassiale.

La lamina è discretizzata come un elemento Q4 nel piano e con un'espansione Lagrangiana LE1 lungo lo spessore. Il test viene eseguito due volte, prima caricando la lamina nella direzione di deposizione delle fibre (0°) e poi in quella ad esse ortogonale (90°), per ottenere un danneggiamento guidato dalla progressiva riduzione delle relative proprietà meccaniche; la rappresentazione schematizzata dell'elementino è la stessa di Figura 4-14. Le curve stress-spostamento equivalente vengono riportate per ciascun caso in Figura 4-19.



(a) Carico longitudinale (fibre)



(b) Carico trasversale (matrice)

Figura 4-19: Curve stress-strain per il singolo elemento nel caso di compressione uniassiale.

Successivamente, si ripete il test di compressione ma considerando il singolo elemento come rappresentativo di un laminato, la cui sequenza di laminazione è $[90/45/0/-45]_{2s}$ e dove lo spessore di ogni strato è 0,125 mm, corrispondente ad uno spessore complessivo di 2 mm. L'espansione Lagrangiana LE1 è in questo caso caratterizzata da un elemento per ciascun layer, mentre nel piano si ricorre nuovamente ad un unico elemento Q4. La curva stress-strain per questo caso è riportata in Figura 4-20.

Dai risultati ottenuti è possibile ricavare le osservazioni seguenti:

1. I valori di picco massimo sono in accordo con i valori del CODAM2 e con gli ammissibili a compressione imposti per il materiale.
2. Per la fibra e il laminato a compressione gli andamenti stress-strain e stress-spostamento sono del tutto sovrapponibili con quelli del CODAM2, sia per il valore di picco massimo dello stress σ_{0eq} sia per i valori di strain all'inizio del danneggiamento δ_1^{OC} e in corrispondenza della condizione di failure δ_1^{FC} .
3. Nel caso della matrice a compressione il picco massimo viene raggiunto in corrispondenza dello stesso valore di strain del CODAM2 ε_2^{OC} ma nella fase post-picco procede con una pendenza differente. Si osserva in particolare un danneggiamento più spinto subito dopo l'innescò, per poi rallentare fino a raggiungere la rottura con ritardo rispetto al CODAM2: questo aspetto è giustificabile per via dei diversi criteri di failure implementati nelle due routine, nelle quali si passa da Hashin a Puck ad angolo variabile.

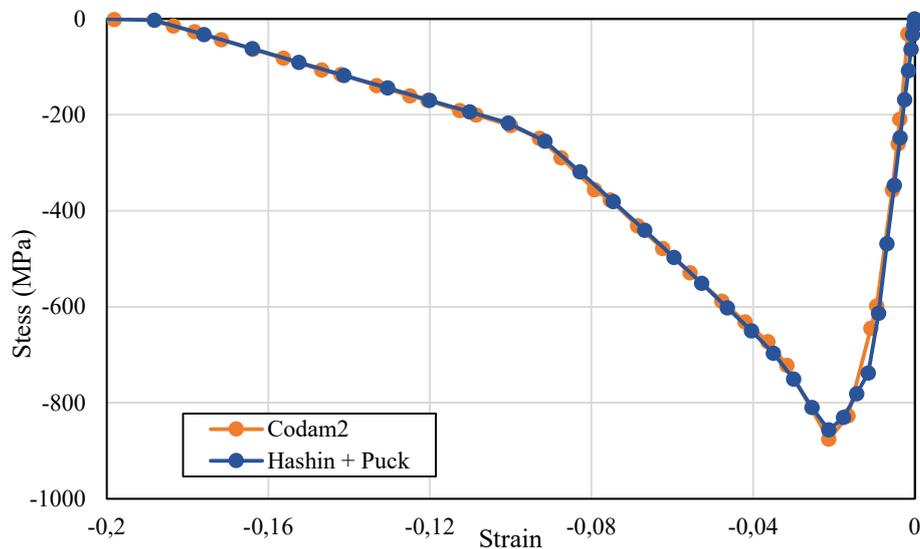


Figura 4-20: Risposta del laminato $[90/45/0/-45]_{4s}$ costituito da un unico elemento nel piano sottoposto ad un carico di compressione uniassiale in direzione y (equivalente all'orientamento a 90 gradi delle fibre).

4.5.4 Test di trazione su piastre con intaglio centrale

Questa seconda tipologia di test ha lo scopo di verificare il corretto funzionamento e la capacità della routine di studiare il danneggiamento nel caso di provini realistici, realizzati attraverso laminazione.

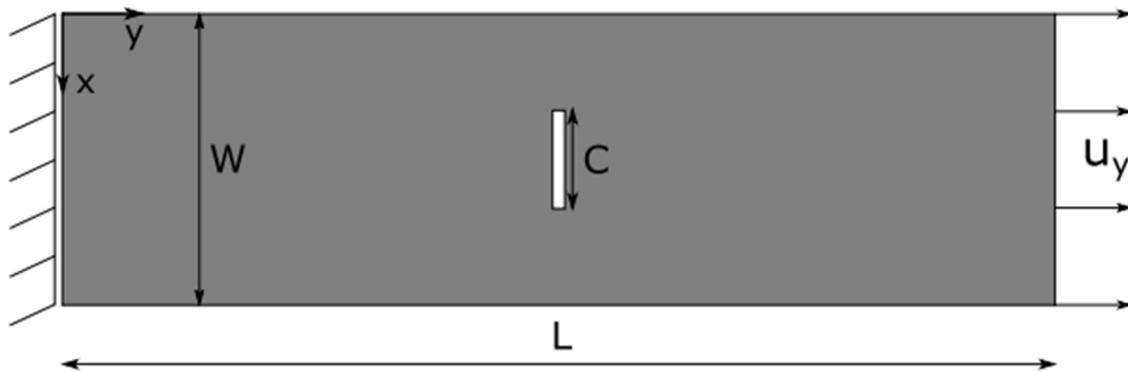


Figura 4-21: Rappresentazione schematica del provino con intaglio centrale con laminazione $[45/90/-45/0]_{4s}$ con condizioni al contorno applicate.

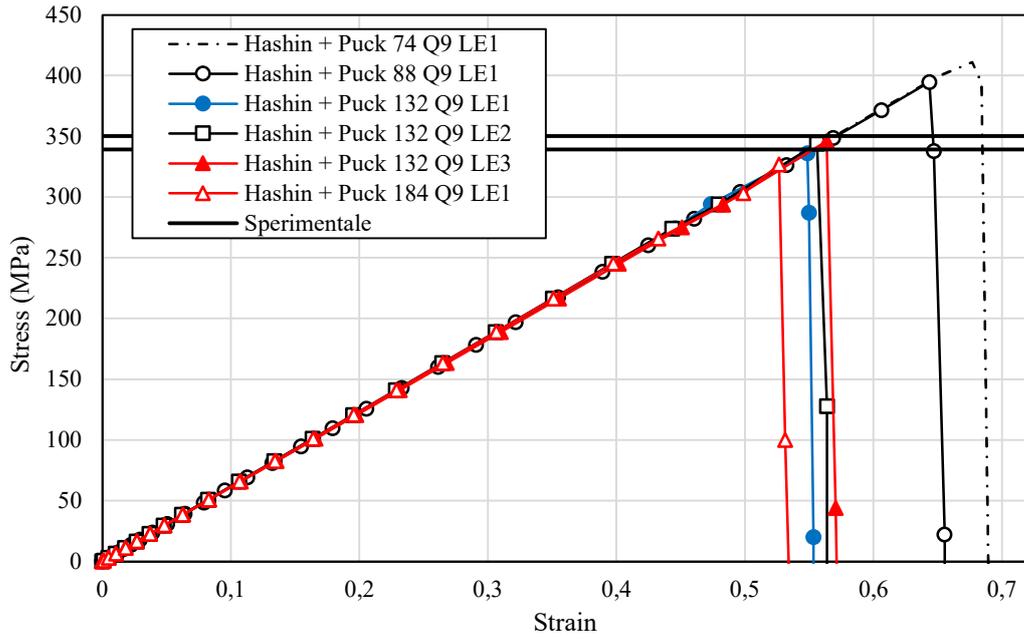
Come riferimento si considera un provino rettangolare intagliato al centro come quello di Figura 4-21, con diverse possibili scale di misura (riportate in Tabella 4-40). In particolare, per la costruzione del modello si ricorre alle dimensioni geometriche indicate nella riga corrispondente alla Scala 8, per la quale si considera uno spessore dell'intaglio di 0,250 mm.

Il riassunto dei modelli utilizzati per l'analisi è riportato in Tabella 4-41.

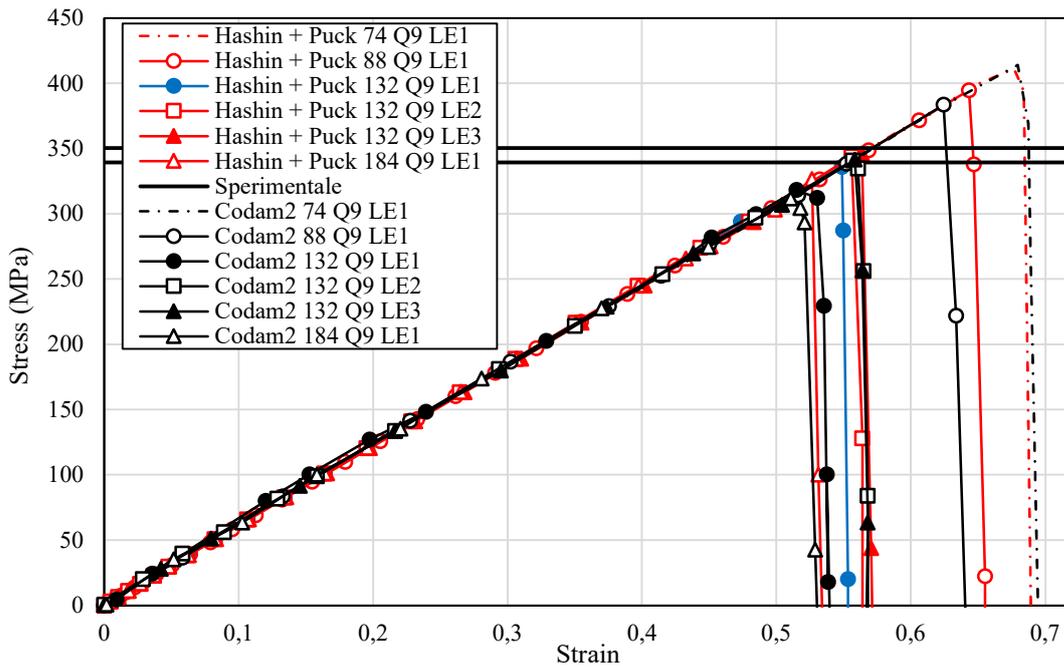
Tabella 4-40: Scale di riferimento per l'analisi del provino intagliato sottoposto a trazione [37].

Scala	Lunghezza dell'intaglio C [mm]	Larghezza del provino W [mm]	Lunghezza del provino L [mm]
1	3,2	15,9	63,5
2	6,4	31,8	127,0
4	12,7	63,5	254,0
8*	25,4	127,0	508,0
16	50,8	254,0	508,0
24	76,2	381,0	1016,0

* Valore scelto per le analisi numeriche proposte.



(a) Analisi di convergenza con Hashin + Puck.



(b) Confronto tra CODAM2, Hashin + Puck e sperimentali.

Figura 4-22: Curve deformazione – tensione risultanti dalle analisi sul provino (Scala 8) al variare della mesh nel piano della piastra. Le curve ottenute sono il risultato dell’analisi di convergenza (a): il valore finale è confermato dai risultati sperimentali di riferimento [37] e dai valori numerici ottenuti con il CODAM2 (b).

Il laminato oggetto di studio è caratterizzato dalla sequenza di laminazione $[45/90/-45/0]_{4s}$ e da uno spessore di 0,125 mm per strato, per un corrispondente valore complessivo di 4 mm. La struttura è incastrata da un lato e viene trazionata da quello opposto, con uno spostamento imposto u_y : nelle analisi effettuate si è applicato un valore di 6 mm in quanto sufficiente a portare a rottura la piastra nel tempo di studio totale di 1,4 ms.

L'analisi è stata effettuata discretizzando la struttura con elementi Q9, secondo il modello 2D della CUF e variando l'espansione (LE1, LE2 e LE3) una volta raggiunta la convergenza. Come per il primo caso esaminato, i risultati sono stati messi a confronto con quelli ottenuti dal CODAM2 con cui sono stati analizzati gli stessi modelli a parità di mesh ed espansione.

I valori di picco associati ad ogni caso di studio e gli andamenti stress – strain sono stati riportati nei grafici di Figura 4-22. In base ai risultati ottenuti possono essere effettuate le seguenti osservazioni:

1. In riferimento al grafico (a) di Figura 4-22, la convergenza viene raggiunta a partire dalla discretizzazione basata su 132 elementi Q9 che raggiunge il picco di 334 MPa. Anche se il modello con 184 Q9 abbassa ulteriormente il valore di stress massimo a 326 MPa, la differenza con il caso precedente è minima e non risulta conveniente per via dell'incremento del costo computazionale e dei tempi di calcolo.
2. I valori di stress di picco ottenuti una volta raggiunta la convergenza della mesh sono accurati se messi a paragone con i valori sperimentali attesi, dimostrando così la capacità della routine di predire correttamente il comportamento di tali provini.
3. La variazione dell'espansione da LE1 a soluzioni di ordine superiore non modifica sostanzialmente il risultato dell'analisi, con il picco massimo che rimane all'incirca costante. Ciò invece non è riscontrabile con il CODAM2, dove il passaggio a espansioni LE2 e LE3 porta un incremento del picco massimo di circa 40 MPa, con una variazione di oltre il 10 % rispetto al caso lineare. Da tale confronto si può quindi concludere che la nuova routine risulta più stabile e meno influenzata dalla scelta dell'espansione, con un conseguente miglioramento rispetto al CODAM2.

Tabella 4-41: Dettaglio dei modelli utilizzati per l'analisi del laminato intagliato sottoposto a trazione.

Modello	Discretizzazione	DOF
H+P 74 Q9 LE1	74 elementi Q9 nel piano, 1 LE1 per layer	34188
H+P 88 Q9 LE2	88 elementi Q9 nel piano, 1 LE1 per layer	40656
H+P 132 Q9 LE1	132 elementi Q9 nel piano, 1 LE1 per layer	60984
H+P 132 Q9 LE2	132 elementi Q9 nel piano, 1 LE2 per layer	120120
H+P 132 Q9 LE3	132 elementi Q9 nel piano, 1 LE3 per layer	179256
H+P 184 Q9 LE1	184 elementi Q9 nel piano, 1 LE1 per layer	85008

4.5.5 Test di compressione su laminati intagliati al centro

Questo test a compressione è relativo alla capacità della nuova routine di prevedere correttamente la resistenza massima a rottura. In particolare, l'analisi viene effettuata su piastre in laminato con la presenza di un foro circolare al centro e confrontata con i risultati sperimentali di Lee e Soutis [42] e con i valori di riferimento del CODAM2.

La piastra oggetto di studio è quasi-isotropa, caratterizzata dalla sequenza di laminazione $[45/90/-45/0]_{4s}$ e dallo spessore complessivo di 4 mm. Si propone nel seguito un'analisi di convergenza considerando un Softening lineare; successivamente, sul modello convergente con 48 elementi Q9 nel piano della piastra si effettua nuovamente la simulazione andando ad utilizzare volta per volta una diversa soluzione di tipo Linear-Brittle. In tutti questi casi si è considerata un'espansione LE1 con un elemento B2 per ciascuno strato di materiale; si è poi studiata l'influenza dell'ordine dell'espansione variando LE2 e LE3 in alcuni casi maggiormente significativi. Il riassunto di tutti i casi di studio considerati è riportato in Tabella 4-43.

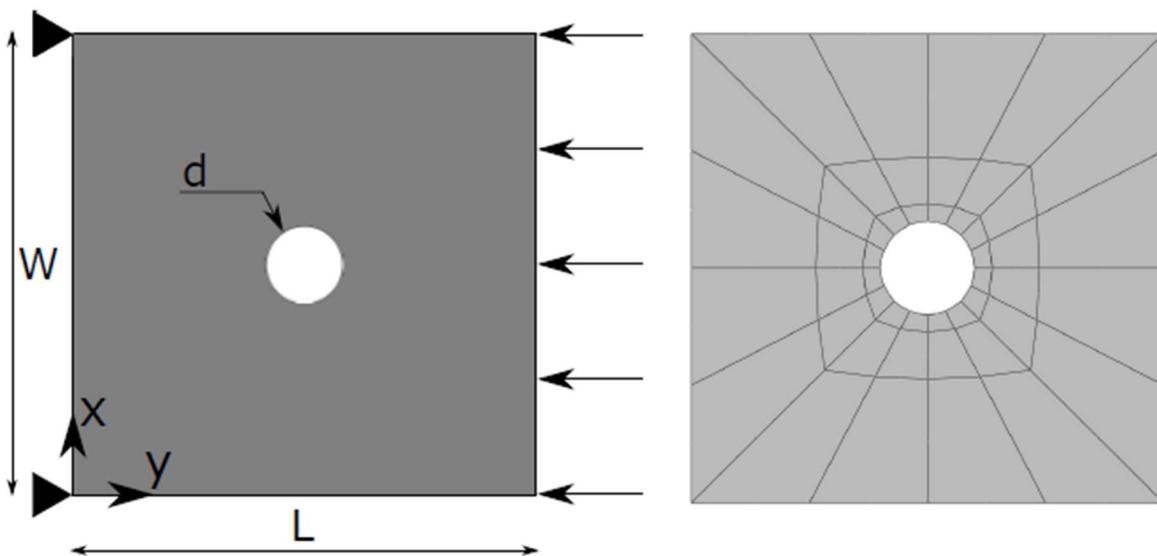


Figura 4-23: Geometria e discretizzazione adottata nel piano della piastra (48 Q9).

Tabella 4-42: Dimensioni della piastra forata di Figura 4-23 sottoposta a compressione.

Lunghezza L (mm)	Altezza W (mm)	Diametro del foro (mm)
32	32	6,35

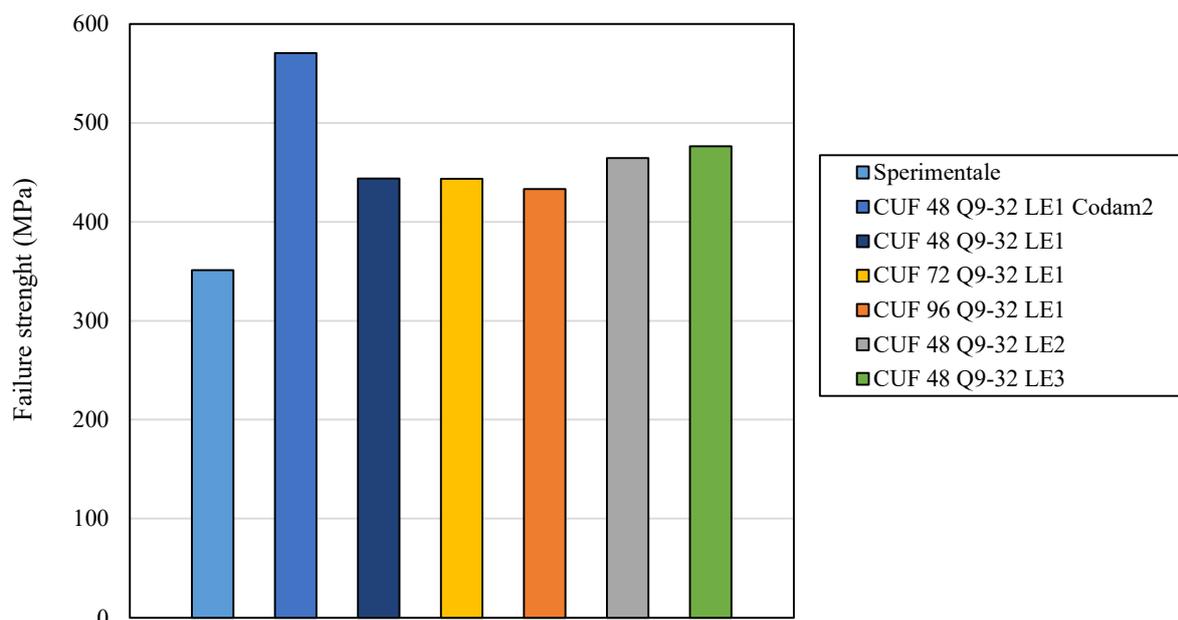


Figura 4-24: Analisi di convergenza della mesh (FEM) della piastra forata a compressione. Stress a rottura della piastra forata $[45/90/-45/0]_{4s}$; sul modello con 48 elementi Q9 si effettua anche il test variando l'espansione da LE1 a LE2 e LE3.

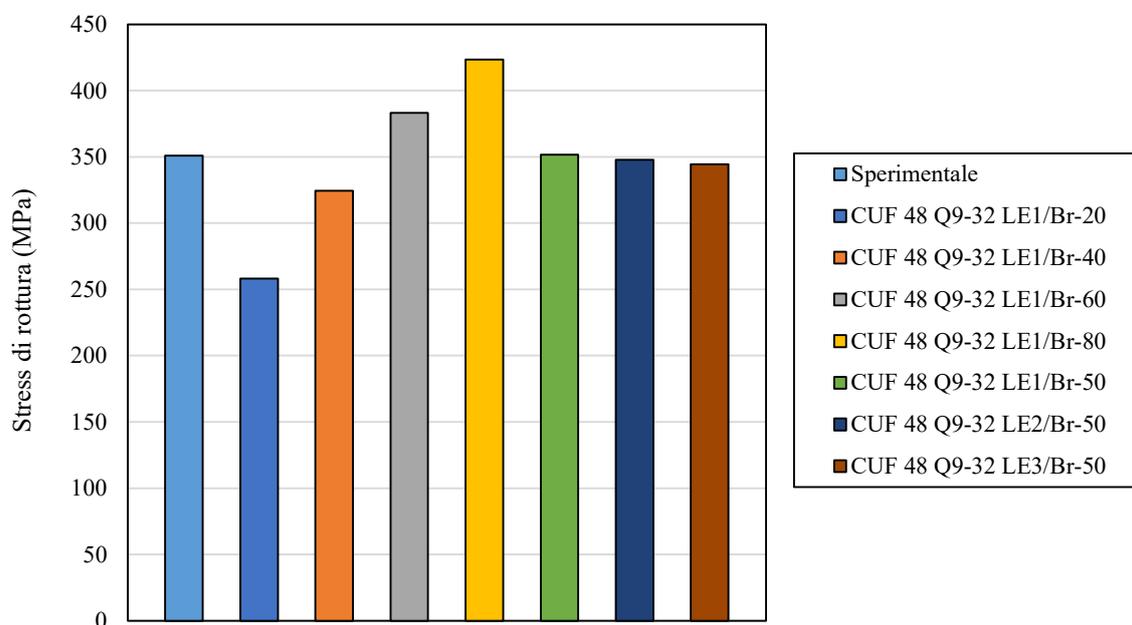


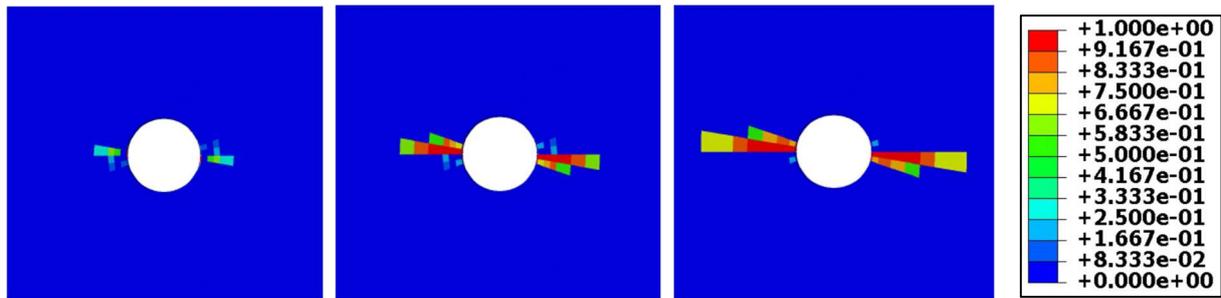
Figura 4-25: Stress a rottura della piastra forata $[45/90/-45/0]_{4s}$ con 48 elementi Q9 nel piano variando la tipologia di Softening e l'espansione per il caso Br-50, più vicino al risultato reale atteso di riferimento.

Tabella 4-43: Dettaglio dei modelli utilizzati per l'analisi del laminato forato sottoposto a compressione.

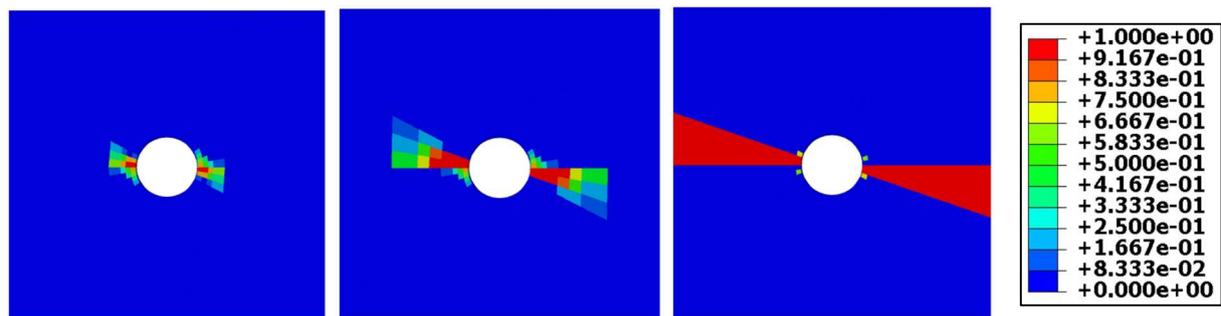
Modello	Discretizzazione	DOF
H+P 48 Q9- 32LE1	48 elementi Q9 nel piano, 1 LE1 per layer	22176
H+ P 48 Q9-32LE2	48 elementi Q9 nel piano, 1 LE2 per layer	43680
H+ P 48 Q9-32LE3	48 elementi Q9 nel piano, 1 LE3 per layer	65184
H+ P 72 Q9-32LE1	72 elementi Q9 nel piano, 1 LE1 per layer	33264
H+ P 96 Q9-32LE1	96 elementi Q9 nel piano, 1 LE1 per layer	44352

In base ai risultati ottenuti è possibile riportare le seguenti osservazioni:

1. La soluzione di Softening lineare sovrastima di circa il 20 % il valore di stress di failure a compressione. Anche attraverso il raffinamento della mesh, con l'infittimento degli elementi nel piano della piastra da 48 a 72 e a 96 Q9, il valore massimo raggiunto risulta all'incirca costante. Si può quindi considerare il modello con 48 elementi Q9 quello convergente, in quanto conveniente a livello di costo computazionale e tempi di analisi e accurato come i modelli più raffinati.
2. Rispetto al CODAM2 la nuova routine presenta una migliore capacità di previsione del comportamento a compressione, con valori di massimo inferiori del 25 % circa rispetto ad essa per il Softening lineare, consentendo quindi un avvicinamento ai valori sperimentali reali di riferimento.
3. La variazione dell'espansione da LE1 a LE2 e LE3 nel caso del Softening lineare produce un incremento del valore massimo di stress che tuttavia si può considerare trascurabile e che risulta del tutto coerente con quanto osservato per il CODAM2.
4. La soluzione Linear-Brittle 50 (Br-50 nel grafico di Figura 4-25) è quella che risulta più adatta a prevedere il comportamento a rottura della piastra, in accordo con i risultati sperimentali. La variazione dell'espansione da LE1 a LE2 e Le3 ha un impatto trascurabile sul valore di picco a compressione.
5. L'evoluzione della compressione in termini di danneggiamento progressivo è rappresentata in Figura 4-26.



(a) Evoluzione del danneggiamento della fibra.



(b) Evoluzione del danneggiamento della matrice.

Figura 4-26: Evoluzione del danneggiamento a compressione di fibra (a) e matrice (b).

4.6 Impatti a bassa velocità

I seguenti esempi numerici si prestano allo studio di casi di impatto tramite analisi dinamiche di tipo esplicito, lineari e non lineari. Partendo da materiali isotropi e compositi senza l'implementazione del danneggiamento si va progressivamente ad aggiungere la non linearità fino ai casi conclusivi di verifica con Hashin + Puck.

4.6.1 Impatti su piastre in Alluminio in campo lineare

Il primo caso considerato è un'analisi di impatto di tipo esplicito, dinamico ma lineare, in quanto il materiale considerato è un isotropo. La piastra impattata oggetto di studio è a sezione rettangolare, con lunghezza e larghezza rispettivamente di 50 e 70 mm, ed ha uno spessore di 1 mm. Due delle estremità della piastra sono incastrate, mentre gli altri due lati sono liberi; nel centro si posiziona un elemento solido indicato come "Impattore", di massa pari a 2 kg e in movimento con una velocità iniziale di 3,87 m/s per un'energia di impatto di 15 J. Il materiale considerato è l'Alluminio, con modulo di Young $E = 70$ GPa, coefficiente di Poisson $\nu = 0,3$ e densità $\rho = 2700$ kg/m³. Il tempo di studio è 3 ms.

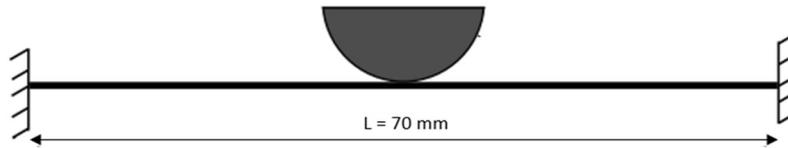


Figura 4-27: Configurazione della piastra incastrata e dell'impattore, per la piastra 1.

I risultati ottenuti dall'analisi dinamica hanno prodotto i seguenti risultati, tra cui si riportano la distribuzione dello stress di Von Mises nell'istante in cui si raggiunge lo spostamento massimo nel punto di contatto, in Figura 4-28, e l'evoluzione dell'energia cinetica e dell'energia interna, dell'Artificial Strain energy e dello spostamento in funzione del tempo, rispettivamente in Figura 4-29, in Figura 4-30 e in Figura 4-31.

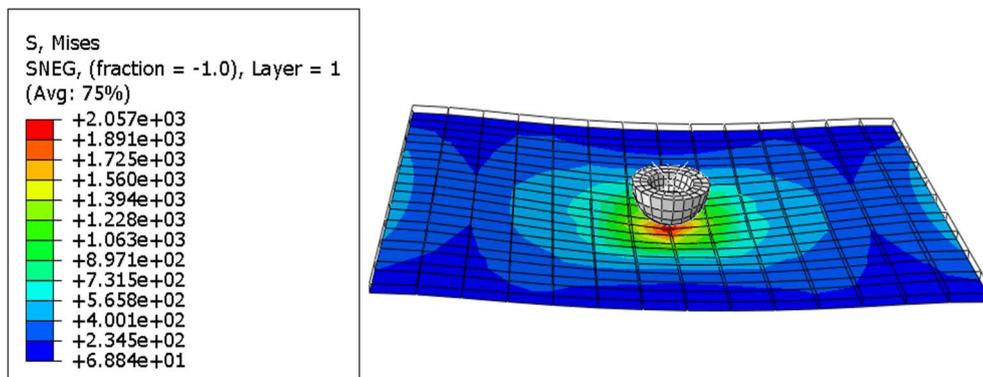


Figura 4-28: Distribuzione dello stress di Von Mises e deformata, nel caso della piastra 1.

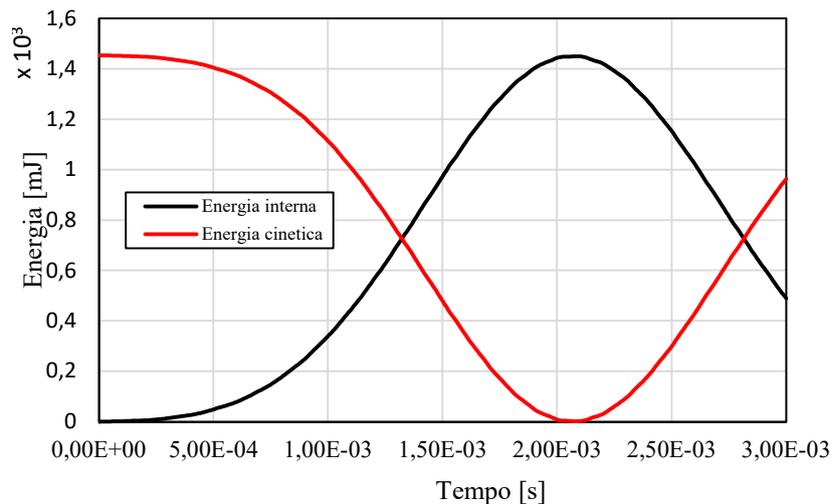


Figura 4-29: Evoluzione dell'energia cinetica e interna durante l'impatto, nel caso della piastra 1.

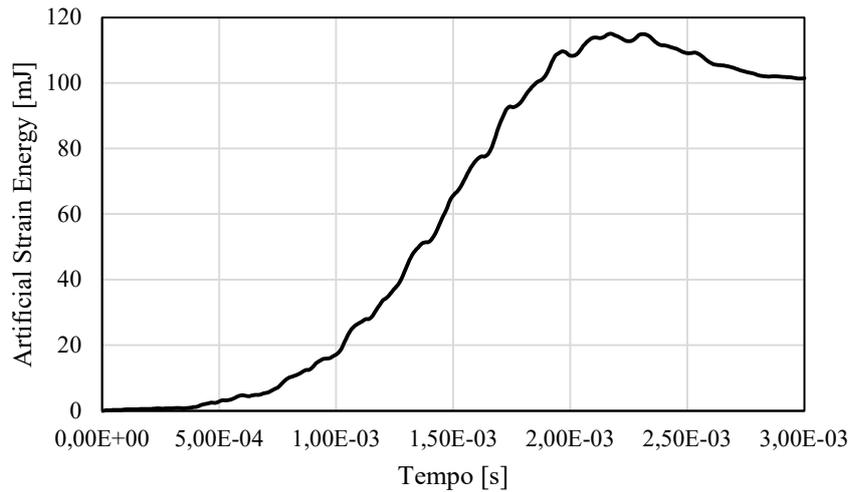


Figura 4-30: Evoluzione dell'Artificial Strain Energy durante l'impatto, nel caso della piastra 1.

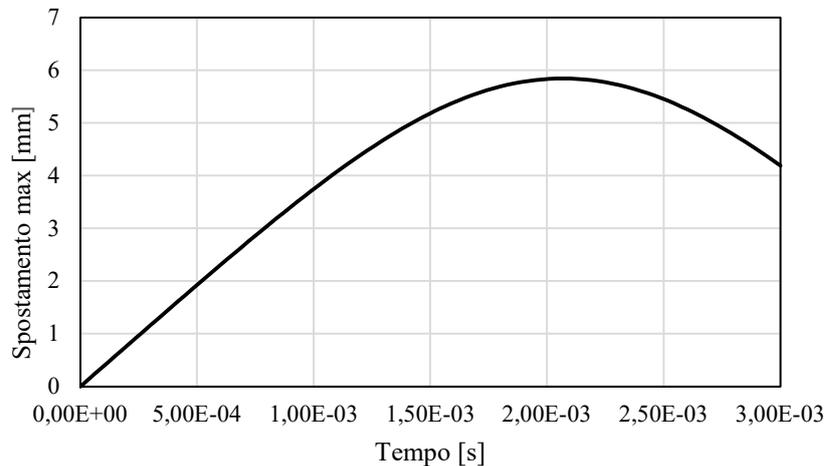


Figura 4-31: Evoluzione dello spostamento durante l'impatto nel punto di contatto con l'impattore, nel caso della piastra 1.

Dalla distribuzione dello stress nella piastra, si può dedurre che l'impatto danneggia il componente fino alla rottura: il valore di stress, riportato in MPa, è infatti un ordine di grandezza superiore rispetto ai tipici valori di carico di rottura dell'Alluminio.

I grafici relativi all'energia cinetica e interna descrivono l'evoluzione dell'impatto: inizialmente l'energia interna è nulla perché la piastra è indeformata, mentre l'energia cinetica è 15 J per via del movimento dell'impattore. In seguito, parte dell'energia cinetica viene progressivamente assorbita dal materiale, con il conseguente aumento dell'energia interna: poco dopo 2 ms, tutta l'energia cinetica si è trasformata in energia interna.

La risposta del materiale all'impatto conduce a due fenomeni principali, che sono il ritorno elastico e il danneggiamento fino all'eventuale rottura, come nel caso in analisi. Per effetto del primo fenomeno, parte dell'energia interna viene nuovamente convertita in cinetica: le due curve si incrociano infatti in un secondo punto, che suddivide l'energia totale di 15 J in

due tratti di uguale ampiezza, di cui il superiore rappresenta l'energia assorbita dal materiale e dunque l'energia dell'impatto.

L'energia interna si compone di diversi termini, tra cui l'Artificial strain energy. Questo valore di energia è legato alla resistenza opposta dal materiale alla presenza di modi spuri o a clessidra, cioè quei modi per cui l'energia interna associata risulta complessivamente nulla, dovuti all'utilizzo di metodi di integrazione numerica. Convenzionalmente, perché la mesh utilizzata sia considerata adeguata al modello il valore dell'Artificial strain energy deve essere non superiore al 10 % dell'energia totale; al contrario, un valore maggiore indica la necessità di un affinamento della mesh o comunque di un suo cambiamento. Nel caso in analisi, il valore massimo ottenuto è di circa 120 mJ, che risulta pari allo 0,8 % dell'energia totale; si può quindi dedurre che la mesh utilizzata risulta adeguata per lo studio effettuato.

In questo caso, nonostante il tempo di studio non mostri l'intera evoluzione del fenomeno, non è necessario prolungarlo: il comportamento lineare assunto porta ai principali risultati per l'analisi nel momento in cui si raggiunge il massimo spostamento nella piastra, essendo la condizione di maggior criticità.

Il secondo caso analizzato, questa volta implementato sia con la CUF che con Abaqus, è quello di una piastra quadrata sempre in Alluminio, di lato $l = 80$ mm e spessore $t = 1$ mm. La piastra è incastrata su due lati e libera lungo gli altri due; su di essa va ad impattare un corpo rigido di massa 2 kg e raggio esterno ed interno rispettivamente pari a 6 mm e 8 mm, che viene lasciato cadere con una velocità iniziale di 3,362 m/s. Il tempo di studio del fenomeno è di 3 ms, adeguato a visualizzare l'istante di massimo spostamento del nodo della piastra in cui avviene l'impatto.

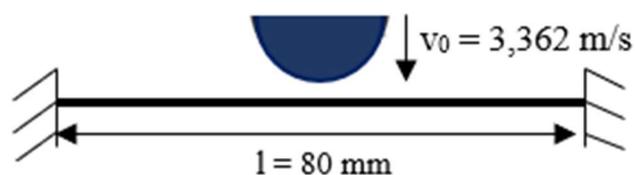
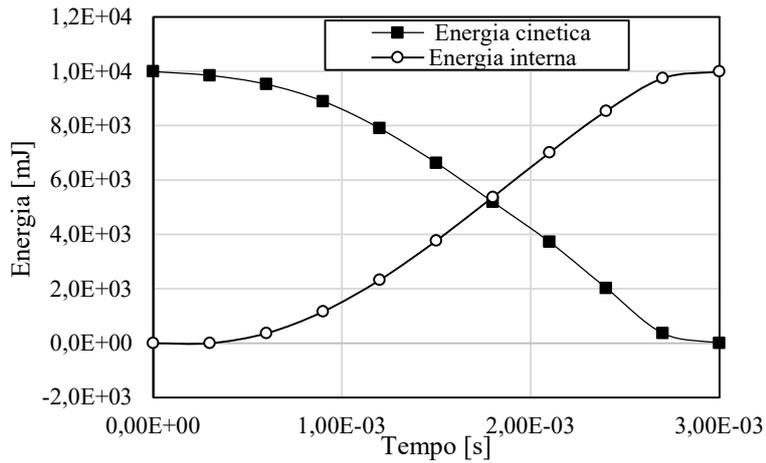
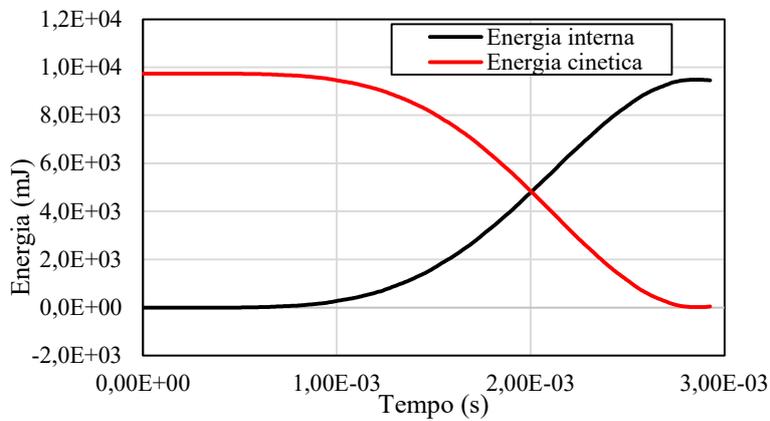


Figura 4-32: Schema della piastra in Alluminio e dell'impattore.

Per l'analisi in Abaqus sono stati scelti elementi bidimensionali di tipo Shell (S4R) distribuiti in modo uniforme sulla piastra, andando progressivamente ad infittire la mesh fino ad arrivare a convergenza. Per la CUF si è definita la mesh con elementi Q4, equivalenti agli S4R di Abaqus, per un totale di 676 elementi (26 per ciascun lato); per l'espansione LE1 si è considerato un unico elemento, dato il ridotto spessore della piastra e la sua geometria regolare. I due modelli implementati sono risultati tra loro coerenti, come dimostrano i risultati nei grafici di Figura 4-33, di Figura 4-34 e nella Tabella 4-44.



(a) CUF



(b) Abaqus

Figura 4-33: Evoluzione dell'energia cinetica e interna durante l'impatto con la CUF (a) e con Abaqus (b).

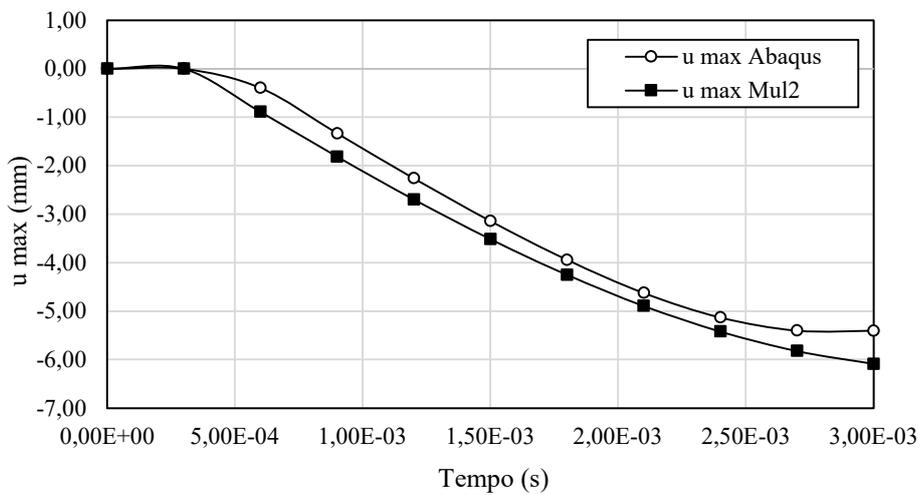


Figura 4-34: Grafico di confronto tra lo spostamento massimo in funzione del tempo in Abaqus e con la CUF.

Tabella 4-44: Confronto tra i valori di spostamento massimo in Abaqus e con la CUF.

Metodo	u_z max (mm)
SOL603 16x16 Q4 1 L2	-6,0887
ABAQUS 2D (Shell, 64000 S4R)	-5,4444
Errore	11 %

Gli andamenti di spostamento trovati per il punto di contatto tra piastra e impattore sono coerenti nei due modelli implementati. La differenza principale è nel costo computazionale richiesto per la risoluzione, che risulta superiore in Abaqus: prima di arrivare a convergenza è stato infatti necessario infittire significativamente la mesh. In particolare, è necessario passare da 676 elementi Q4 della CUF a 64000 elementi Shell in Abaqus. È presente una differenza tra i valori di spostamento, che si mantiene all'incirca costante per tutta l'evoluzione e si assesta intorno al 10%.

4.6.2 Impatti su piastre in composito: passaggio al caso non lineare

L'esempio considerato si riferisce ad un caso simile a quelli in Alluminio ma applicato ad una piastra in composito. Si ripete due volte la stessa analisi: nel primo caso non si introduce la parte relativa ai criteri di failure per lo studio del danneggiamento progressivo nel materiale, mentre successivamente si va ad approfondire anche questo aspetto.

La piastra oggetto di studio è a sezione rettangolare, con lunghezza e larghezza rispettivamente di 50 e 100 mm, ed ha uno spessore complessivo di 3,5 mm. Due delle estremità della piastra sono incastrate, mentre gli altri due lati sono liberi; il fenomeno di impatto è caratterizzato dagli stessi dati descritti nel paragrafo 4.3.1. L'impattore è un elemento di dimensioni ridotte rispetto alla piastra e nel caso di studio specifico risulta caratterizzato da un raggio esterno di 5 mm ed uno interno di 3 mm. Il materiale considerato è il composito IM7/8552, già usato per la piastra 3 trattata per l'analisi statica, le cui proprietà sono riportate nella Tabella 4-37 e la cui densità è $\rho = 1700 \text{ kg/m}^3$. La laminazione è simmetrica, costituita dalla sequenza $[0/90]_s$: ogni ply è caratterizzato dalla stesso valore di spessore, pari a 0,875 mm. Il tempo di studio del fenomeno di impatto è 3 ms, in quanto permette di evidenziare il comportamento del materiale composito durante l'impatto e subito dopo di esso.

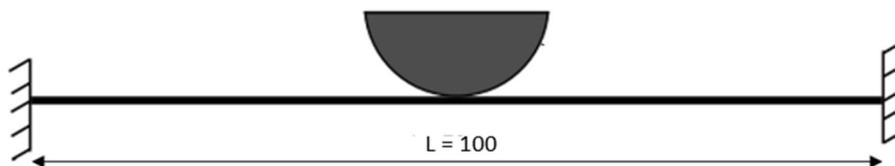


Figura 4-35: Configurazione della piastra incastrata e dell'impattore, nel caso della piastra 2.

Si riportano nel seguito i grafici dell'energia (Figura 4-37), dello spostamento massimo (nel nodo corrispondente al punto di impatto) e della forza applicata (in corrispondenza dell'interazione tra i due oggetti) in funzione del tempo di studio (Figura 4-38) e la configurazione deformata a seguito dell'impatto, con la distribuzione di stress di Von Mises mediato sui quattro strati definiti in un istante di tempo subito successivo al contatto tra i due corpi (in particolare a $t = 2,2$ ms), in Figura 4-36.

Con il tempo di studio selezionato l'impatto risulta completamente avvenuto, come si evince dal grafico rappresentativo dell'evoluzione dell'energia cinetica e interna in Figura 4-37. L'Artificial Strain Energy risulta al massimo pari a 80 mJ, equivalente allo 0,53 % dell'energia totale di impatto (15 J), dunque la mesh utilizzata per il modello risulta adeguata all'analisi.

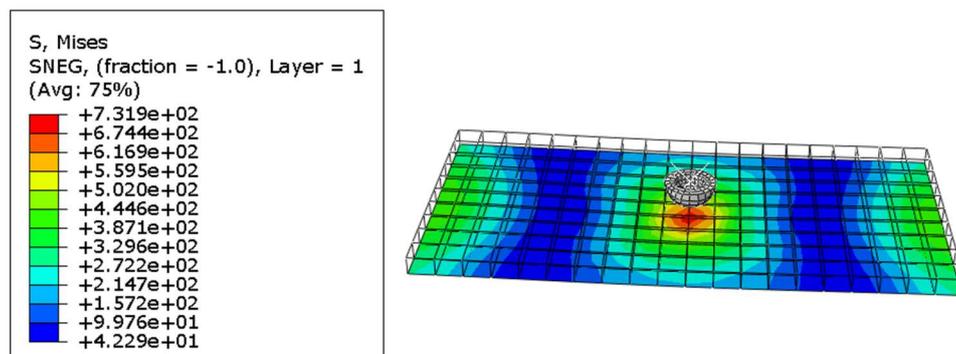


Figura 4-36: Distribuzione dello stress di Von Mises sulla deformata della piastra 2.

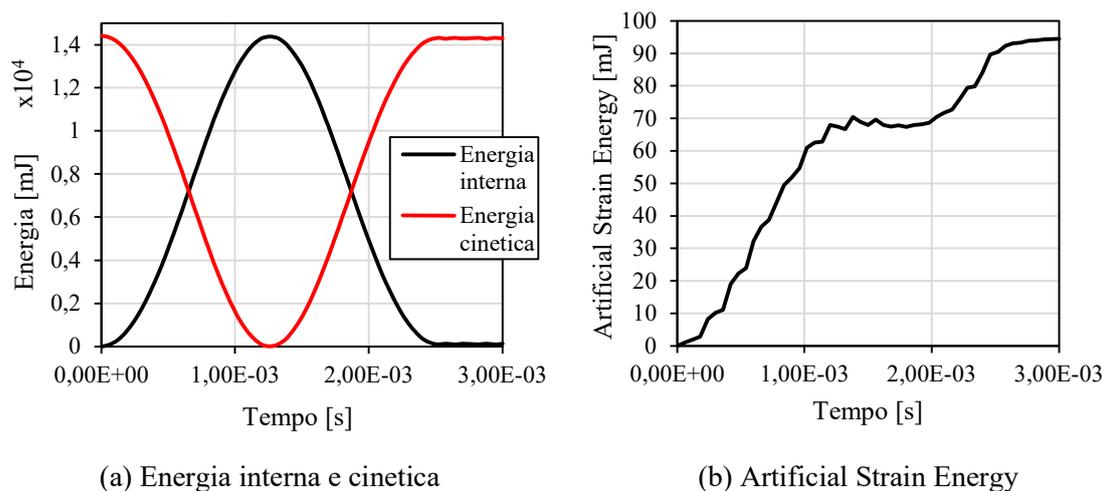
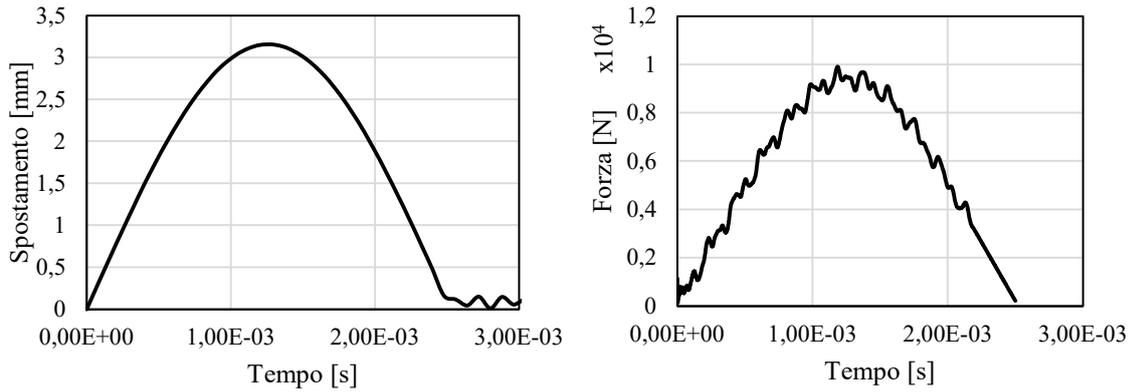


Figura 4-37: Evoluzione dell'energia cinetica, interna e dell'Artificial Strain Energy durante l'impatto, nel caso della piastra 2.



(a) Spostamento massimo

(b) Forza

Figura 4-38: Evoluzione dello spostamento e della forza durante l'impatto nel primo punto di contatto con l'impattore, nel caso della piastra 2.

Si ripete ora il caso di studio considerato con l'aggiunta come input nella descrizione del materiale dei parametri ad esso relativi per il criterio di Hashin e l'introduzione del danneggiamento progressivo, in modo da poter considerare quanto si è in prossimità di una condizione di failure per le fibre o per la matrice (per effetto di trazione o compressione) e per l'effetto dei carichi di taglio. I dati relativi alle proprietà elastiche del materiale e ai parametri del criterio di Hashin sono gli stessi di quelli in Tabella 4-39.

Si riportano nel seguito i grafici dell'energia (Figura 4-40) e della forza in funzione del tempo (come conferma dell'equivalenza della prova rispetto al caso precedente, Figura 4-37), mentre la visualizzazione della deformatata, dello stress di Von Mises (Figura 4-39) e dello spostamento nel nodo di impatto rappresentano il punto di partenza per confrontare i due modelli. Si riportano inoltre i grafici relativi all'iniziazione e all'evoluzione del danno secondo il criterio di Hashin, in Figura 4-42.

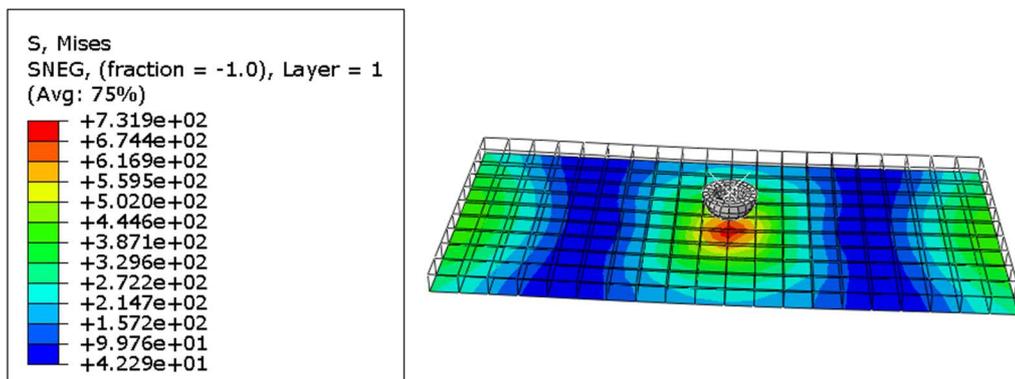
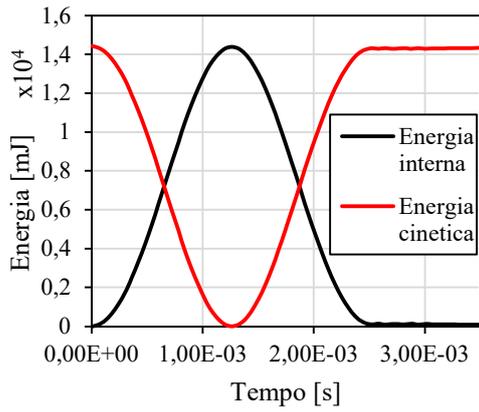
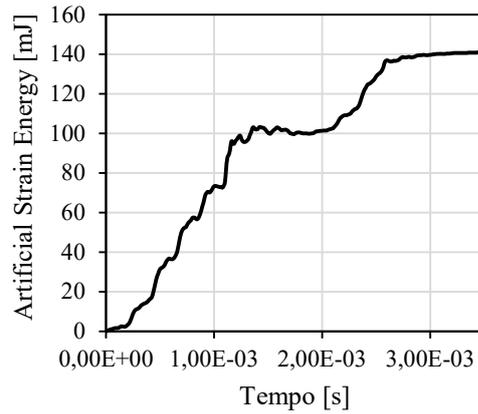


Figura 4-39: Distribuzione dello stress di Von Mises sulla deformatata della piastra 2 con danneggiamento.

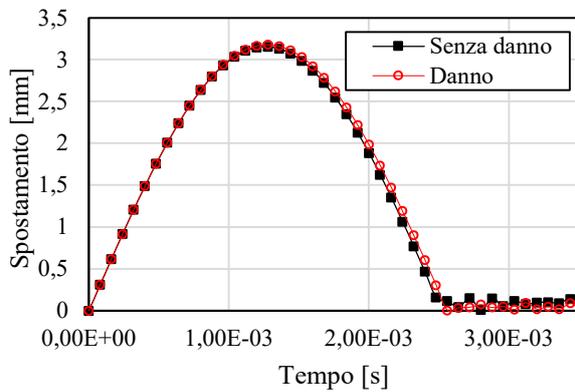


(a) Energia interna e cinetica

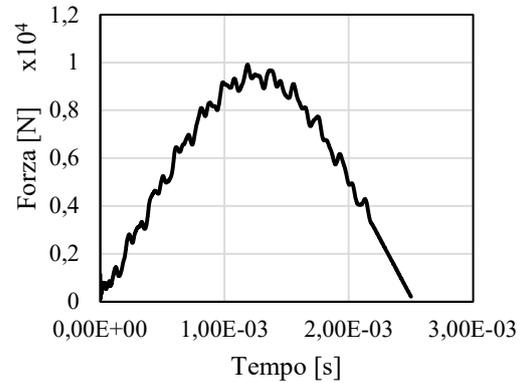


(b) Artificial Strain Energy

Figura 4-40: Evoluzione dell'energia cinetica, interna e dell'Artificial Strain Energy durante l'impatto, nel caso della piastra 2 con danneggiamento.

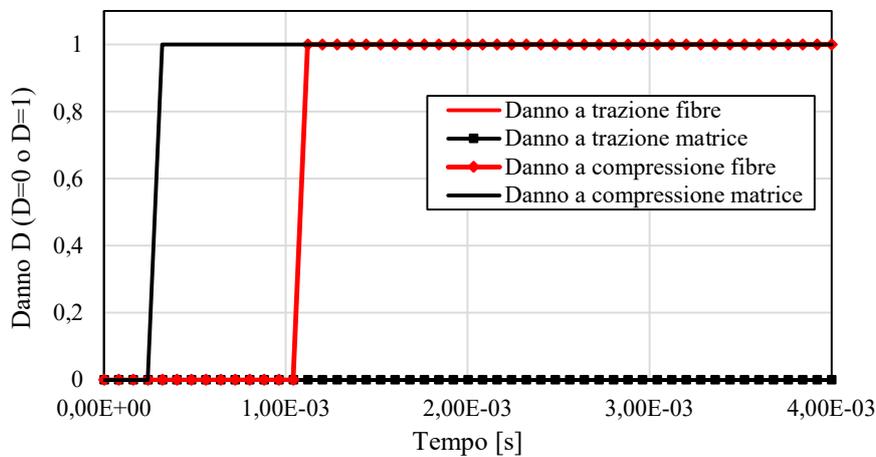


(a) Spostamento massimo con e senza danneggiamento

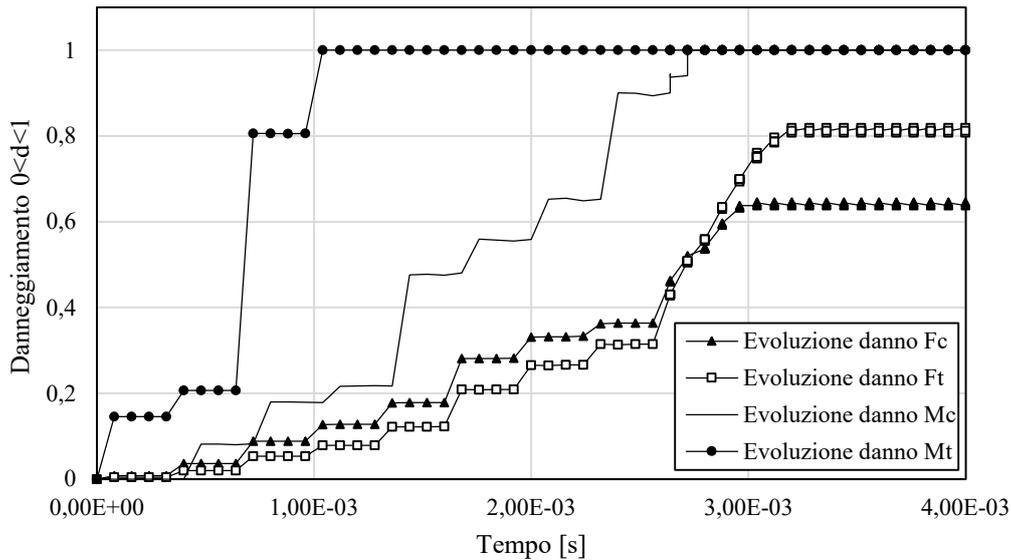


(b) Forza

Figura 4-41: Evoluzione e confronto dello spostamento massimo (con e senza danneggiamento) e della forza durante l'impatto, nel punto di contatto con l'impattore.



(a) Presenza ($D = 1$) o assenza ($D = 0$) del danno nelle fibre e nella matrice all'avanzare del tempo delle prova.



(b) Evoluzione del danno nelle fibre (F) e nella matrice (M) a tensione (t) e a compressione (c).

Figura 4-42: Valutazione della presenza del danno e della sua evoluzione durante l'impatto, nel punto di contatto con l'impatto, considerando fibre e matrice sottoposte a trazione e compressione.

La forza e l'evoluzione dell'energia interna e cinetica durante l'impatto sono analoghe al caso precedente. L'Artificial Strain Energy è al massimo pari a 110 mJ, ovvero il modello e la mesh risultano adeguati essendo tale valore di energia pari allo 0,73 % dell'energia totale dell'impatto.

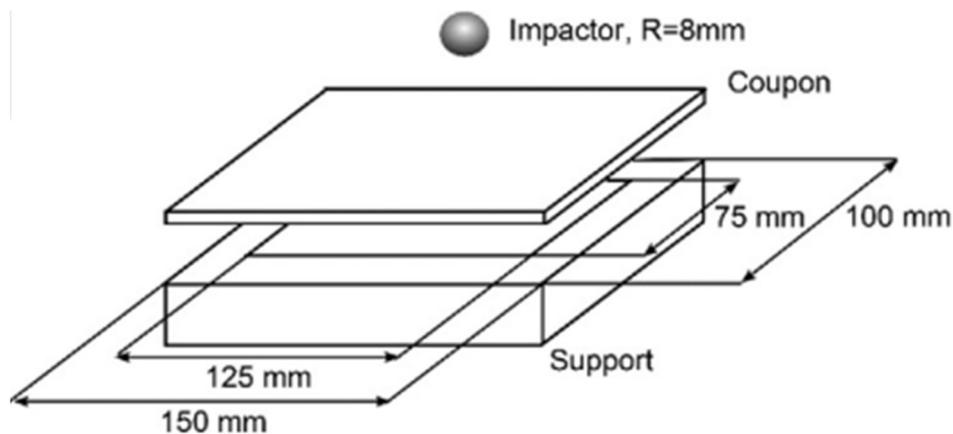
La considerazione degli effetti del danneggiamento progressivo del materiale è visibile nei valori di spostamento: il valore massimo raggiunto in questo ultimo caso di analisi è pari a 3,178 mm che risulta, seppur di poco, superiore a quello precedente (pari a 3,155 mm); ciò è dovuto alla riduzione delle proprietà meccaniche del composito. Per lo stesso motivo, anche lo spostamento residuo a seguito dell'impatto mantiene valori maggiori.

Dai grafici relativi al criterio di Hashin per determinare il danneggiamento del materiale, si evince che l'impatto porta a rottura la matrice per effetto della trazione nel punto di contatto con l'impatto e a compressione nella posizione uguale e opposta, sull'altra faccia della piastra. Anche le fibre subiscono un danneggiamento, che comporta la riduzione progressiva e non lineare delle relative proprietà meccaniche; in questo caso, non si arriva comunque a rottura. Dai grafici riportati, si nota come il danneggiamento prosegua anche dopo il momento del contatto, fino a raggiungere e mantenere poi un livello costante.

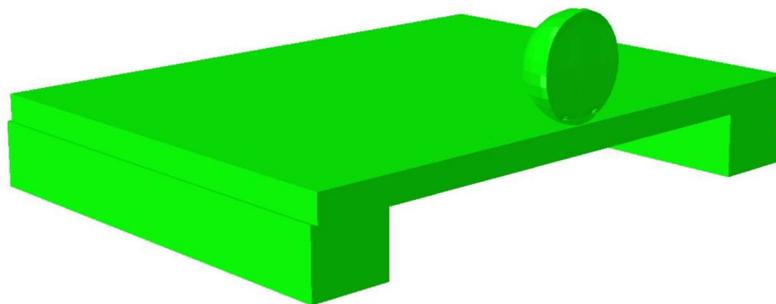
4.6.3 Impatto non lineare con Hashin + Puck: piastra supportata

In questo paragrafo si vuole descrivere un caso di impatto noto in letteratura e svolto sperimentalmente [44] per testare la routine Hashin + Puck in un caso più complesso. In

particolare, si fa riferimento ai risultati numerici di Tan et al. [45] e ci si propone di riottenerli con la CUF.



(a) Schema semplificato con le indicazioni sulla geometria dei corpi [45].



(b) Rappresentazione virtuale con Abaqus del sistema di impatto (tagliato in corrispondenza del piano medio).

Figura 4-43: Schema rappresentativo del sistema di impatto: geometria (a) e disegno virtuale (b).

Il sistema di impatto oggetto di studio è costituito da tre corpi: l'impattore, la piastra rettangolare impattata e il relativo supporto. Le caratteristiche dimensionali sono riportate in Figura 4-43. L'energia di impatto è 25 J, con la velocità iniziale dell'impattore sferico (di 16 mm di diametro) pari a $v_0 = 5$ m/s. La piastra in composito è quasi-isotropa, con una sequenza di laminazione $[0_2/45_2/90_2/-45_2]_2$, dove ogni strato ha uno spessore di 0,26 mm per un valore totale di 4,16 mm dell'intero laminato. Il materiale costituente la piastra è il CFRP T700GC/M21, le cui proprietà sono indicate in Tabella 4-45.

La mesh adottata è caratterizzata da 308 elementi Q9 nel piano della piastra, con espansione LE2 comprendente 8 elementi B3 lungo lo spessore. Il supporto è invece in materiale isotropo (acciaio) ed è costituito da 24 elementi Q9 nel piano ed espansione LE2, comprendente un unico elemento.

Tabella 4-45: Proprietà elastiche, ammissibili e fracture toughness del T200GC/M21 [45].

E_1 [GPa]	E_2 [GPa]	E_3 [GPa]	G_{12} [GPa]	G_{13} [GPa]	G_{23} [GPa]	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}
130,0	7,7	7,7	4,8	4,8	3,8	0,33	0,33	0,35
X_T [MPa]	X_C [MPa]	Y_T [MPa]	Y_C [MPa]	S_{12} [Mpa]	G_1^T [kJ/m ²]	G_2^T [kJ/m ²]	G_1^C [kJ/m ²]	G_2^C [kJ/m ²]
2080,0	1250,0	60,0	290,0	110,0	133,0	40,0	0,6	2,1

L'obiettivo dell'analisi esplicita, condotta in un intervallo di tempo di 4 ms, è quello di osservare il danneggiamento progressivo in ciascun layer e di valutare la forza di impatto durante il tempo di studio del fenomeno. I risultati sono riportati nei grafici e nelle immagini di Figura 4-44, Figura 4-45 e Figura 4-46.

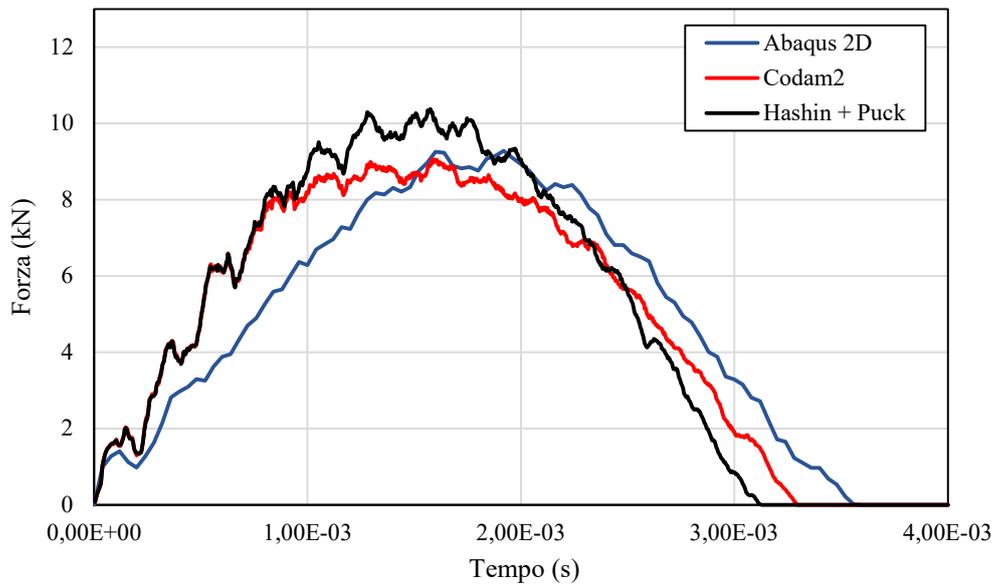


Figura 4-44: Grafico forza – tempo del fenomeno di impatto con Abaqus, il CODAM2 e Hashin + Puck.

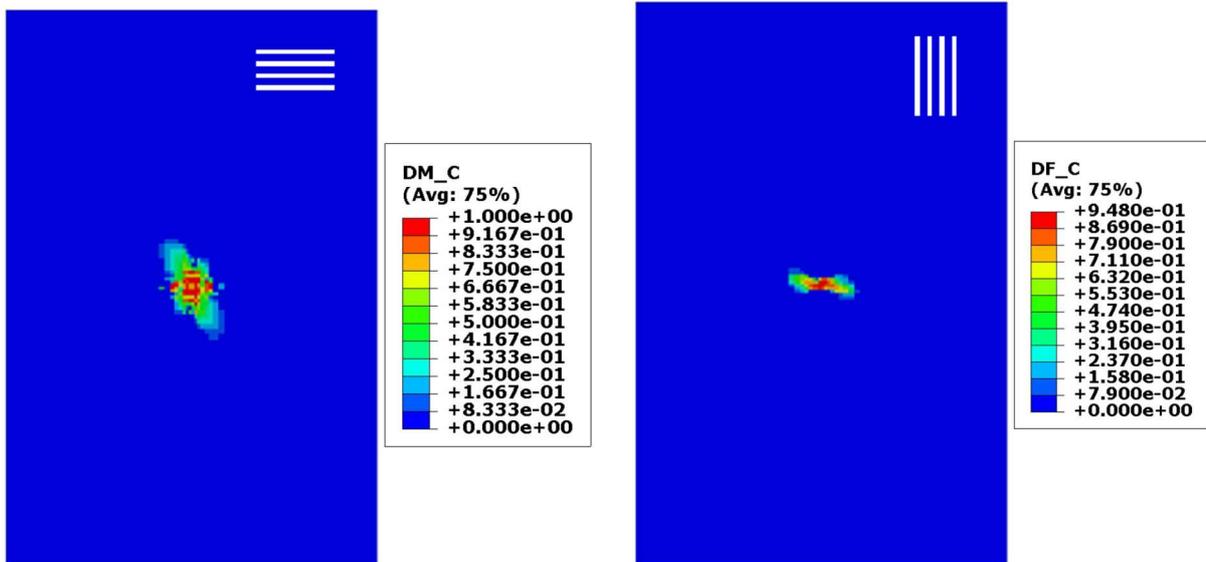


Figura 4-45: Danneggiamento lato impattato, matrice (DM_C) e fibra (DF_C) a compressione al termine del fenomeno di impatto (Hashin + Puck).

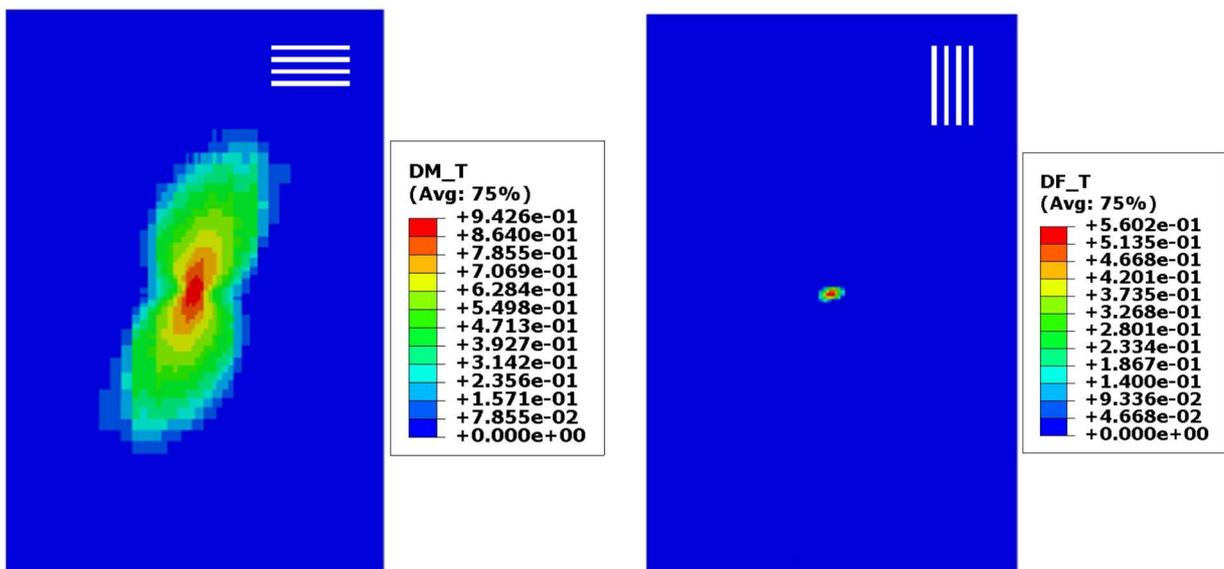


Figura 4-46: Danneggiamento lato opposto a quello impattato, matrice (DM_T) e fibra (DF_T) a trazione al termine del fenomeno di impatto (Hashin + Puck).

In base ai valori riscontrati è possibile effettuare le osservazioni seguenti:

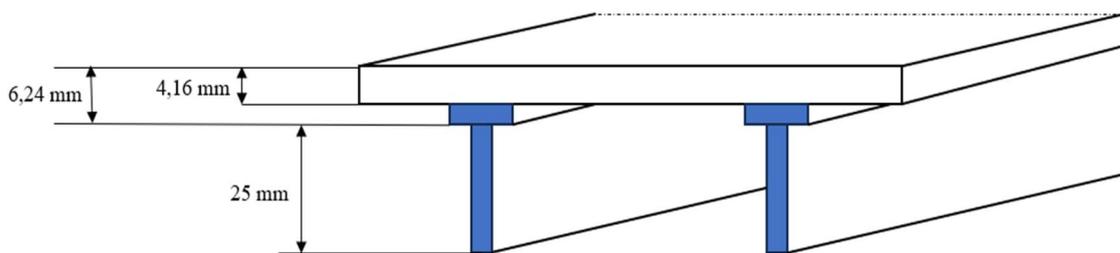
1. L'andamento della forza di impatto è coerente con le aspettative; rispetto al CODAM2 e ad Abaqus, tuttavia, la routine Hashin + Puck sovrastima il valore di picco con una differenza dell'ordine di 1 kN da entrambi. Ciò è legato alle differenze tra i criteri di failure e al meccanismo di danneggiamento implementato.
2. La modellazione Layer-Wise adottata permette di osservare la progressione del danneggiamento all'interno di ogni ply; durante il fenomeno dell'impatto la

degradazione aumenta progressivamente fino alla rottura di alcuni strati, guidata dal meccanismo di failure della matrice.

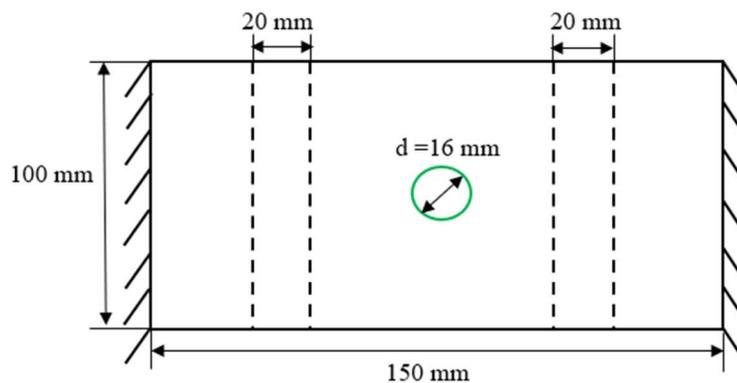
3. Il danneggiamento di fibra a trazione, fibra a compressione e matrice a compressione risulta in linea con quello del CODAM2; la matrice a trazione, invece, pur mantenendo la stessa forma raggiunge valori di degradazione più bassi. Ciò spiega l'incremento del picco della forza di impatto massima riscontrata sopra, dovuta quindi ad una maggior rigidità complessiva della piastra impattata.
4. Nel caso di impatto analizzato non sono stati implementati gli elementi coesivi, con cui si introduce l'effetto della delaminazione e più in generale di danneggiamento inter-laminare: tale aggiunta permetterebbe un miglioramento dei risultati e un'analisi più realistica dell'impatto, con una maggiore quantità di energia assorbita da tali elementi e una conseguente riduzione della rigidità e quindi della forza di impatto massima raggiunta.

4.6.4 Impatto non lineare con Hashin + Puck: piastra con rinforzo a T

A conclusione dei test sulla routine Hashin + Puck, si effettua un secondo caso di impatto per valutare ulteriormente le differenze e le similitudini con il CODAM2.



(a) Spessori della piastra e dei rinforzi a T.



(b) Vista frontale del sistema impatto, con l'indicazione delle misure geometriche di riferimento per piastra e impattore e dei vincoli di incastro.

Figura 4-47: Geometria di piastra e impattore.

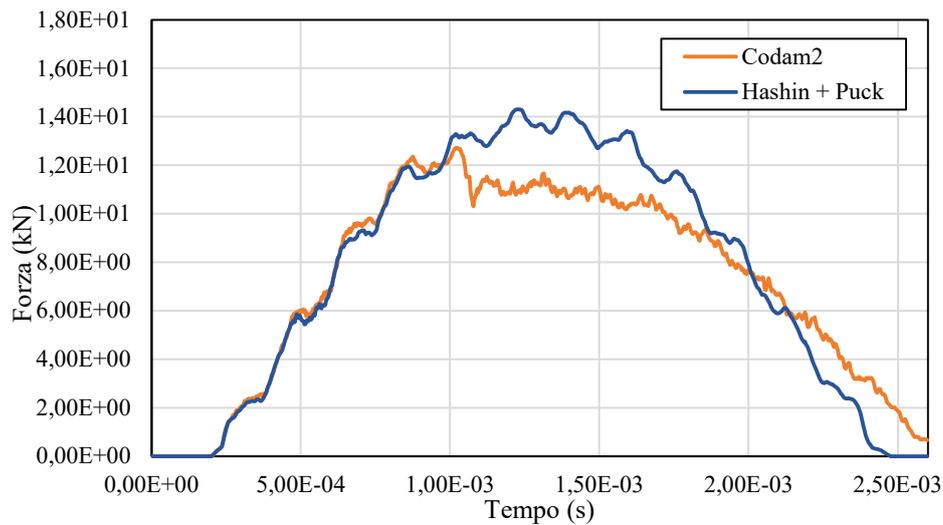


Figura 4-48: Grafico forza – tempo a confronto con CODAM2 e Hashin + Puck.

In particolare, si considera una piastra 100 mm x 150 mm realizzata con il materiale composito IM7/8552 (Tabella 4-39) già utilizzato per le analisi di prova a compressione, caratterizzata da una sequenza di laminazione simmetrica $[0/45/90/-45]_s$, corrispondente ad uno spessore complessivo di 4,16 mm. La piastra è rinforzata simmetricamente rispetto al suo piano medio nella direzione della lunghezza principale attraverso due correnti a T, di cui la soletta è stata schematizzata come componente 2D aggiungendo una laminazione ulteriore $[-45/90/45/0]$ a quella già presente della piastra, mentre l'anima come elemento 1D con espansione nella sezione. La piastra viene impattata da un impattore rigido di forma semisferica (materiale: $E = 200 \text{ E}+05 \text{ MPa}$, $\nu = 0,3$, $\rho = 1,9324 \text{ E}-06 \text{ t/mm}^3$) con una velocità iniziale di 5 m/s; l'impattore è caratterizzato da un diametro di 16 mm e da una massa di 2 kg, generando così un impatto a bassa velocità caratterizzato da un'energia di 25 J. La geometria del sistema di impatto è indicata in Figura 4-47.

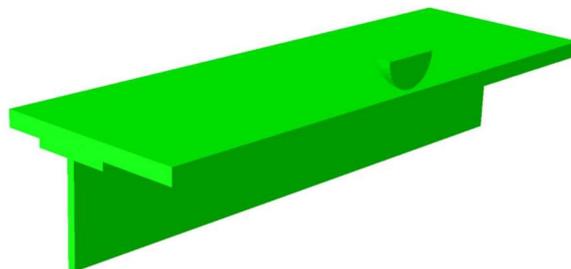
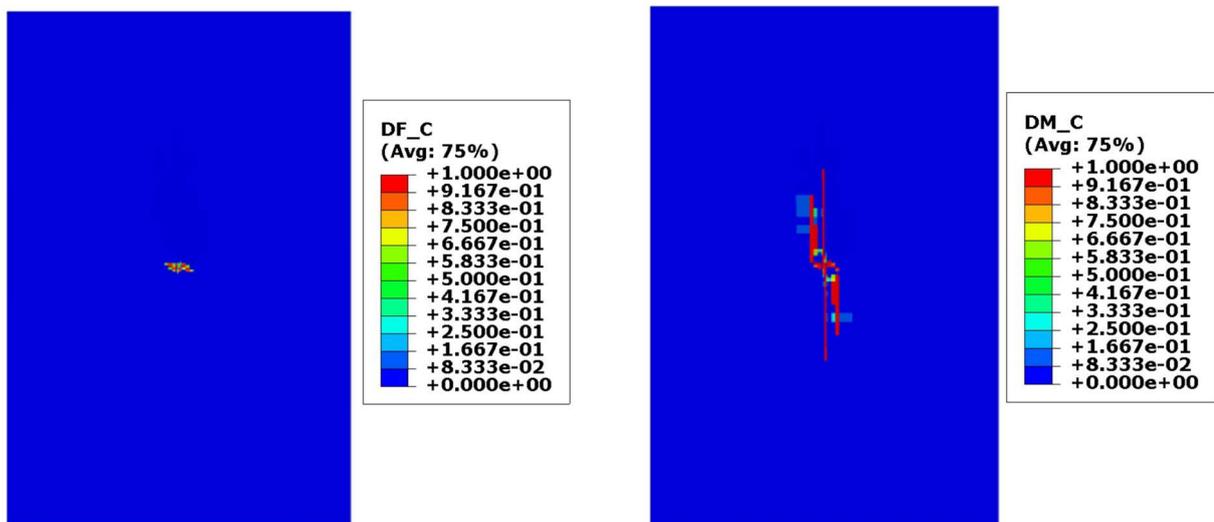


Figura 4-49: Modello virtuale dell'impatto (tagliato in corrispondenza del piano medio), con impattore e piastra con rinforzo a T.

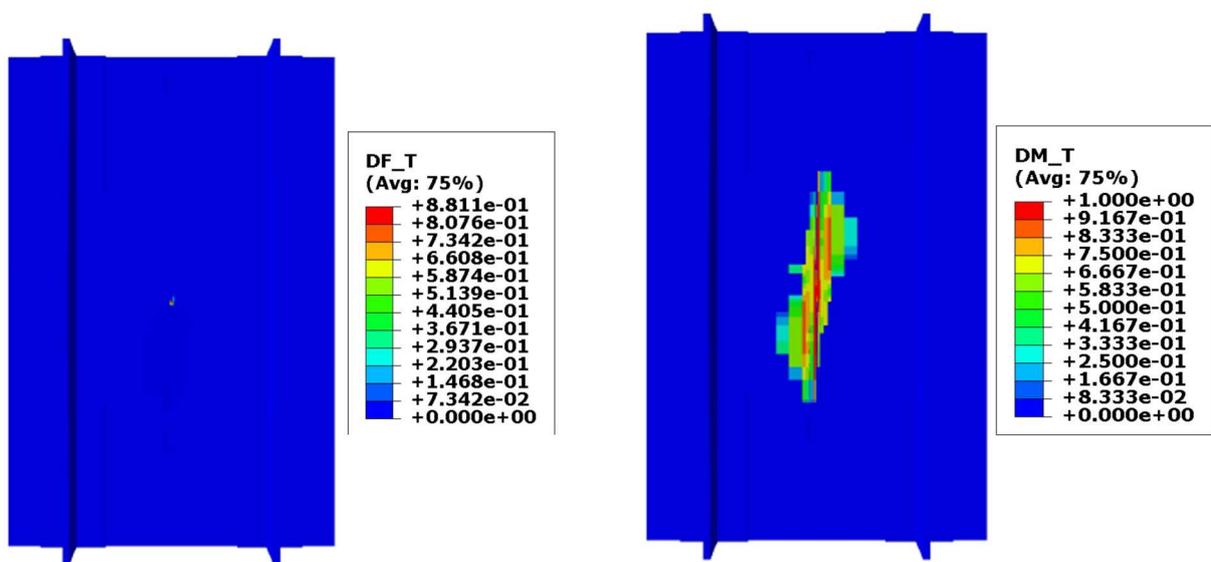
La mesh adottata è caratterizzata da 294 elementi Q9 nel piano della piastra, con espansione LE1 comprendente 8 elementi B2 per lo spessore complessivo e 12 elementi B2 in corrispondenza dei rinforzi. Per il modello 1D dell'anima del corrente si sono invece utilizzati

42 elementi B3 lungo lo spessore e 2 elementi Q9 per rappresentare la sezione attraverso un'espansione LE2. Per assegnare il corretto materiale al modello 1D si è applicato un isotropo equivalente all'IM7/8552. Il modello virtuale del sistema di impatto è rappresentato in Figura 4-49.

Similmente al caso di impatto del paragrafo 4.7.1 l'obiettivo dell'analisi esplicita, condotta in un intervallo di tempo di 2,6 ms, è quello di osservare il danneggiamento progressivo in ciascun layer e di valutare la forza di impatto durante il tempo di studio del fenomeno. I risultati di Hashin + Puck e del CODAM2 a confronto sono riportati nei grafici e nelle immagini di Figura 4-48, Figura 4-50 e Figura 4-51.

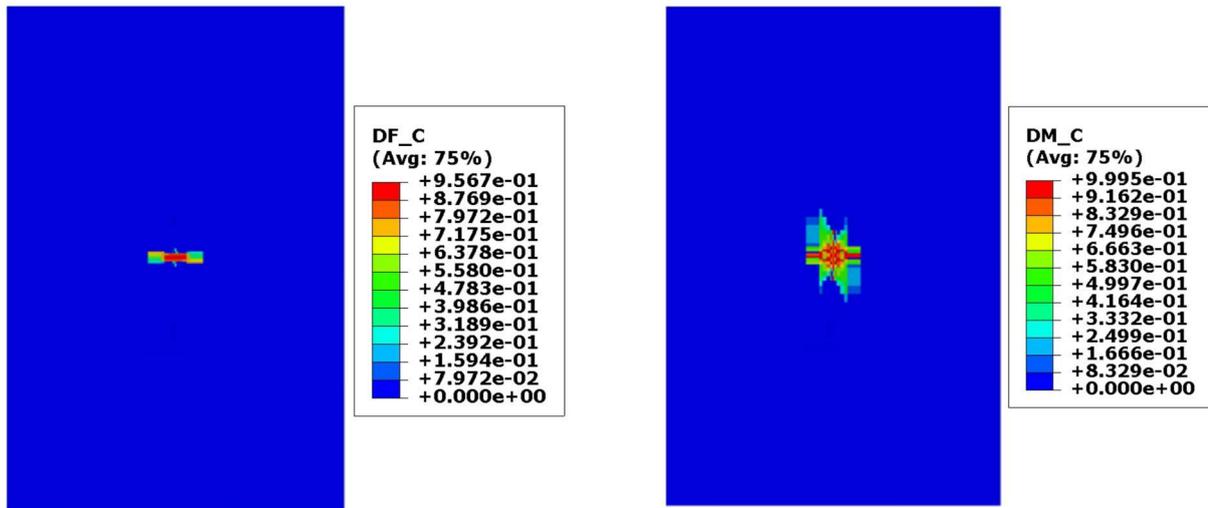


(a) Danneggiamento a compressione di fibra (DF_C) e matrice (DM_C) con il CODAM2.

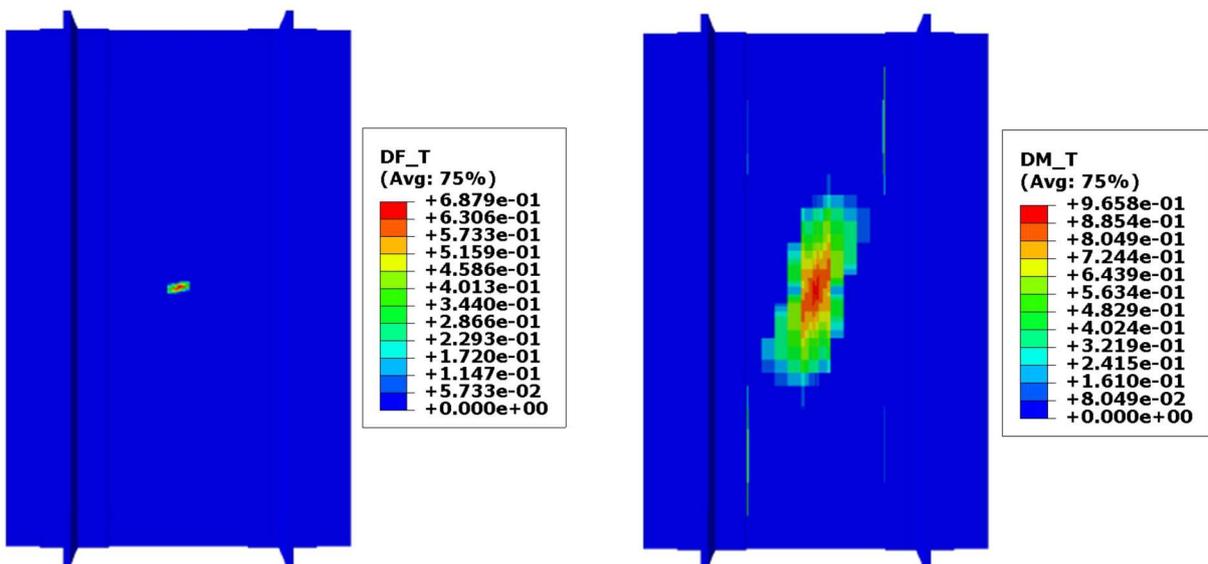


(b) Danneggiamento a compressione di fibra (DF_C) e matrice (DM_C) con il CODAM2.

Figura 4-50: Danneggiamento con il CODAM2 al termine del fenomeno di impatto.



(a) Danneggiamento a compressione di fibra (DF_C) e matrice (DM_C) con Hashin + Puck.



(b) Danneggiamento a compressione di fibra (DF_C) e matrice (DM_C) con Hashin + Puck.

Figura 4-51: Danneggiamento con Hashin + Puck al termine del fenomeno di impatto.

In base ai risultati ottenuti è possibile riportare le osservazioni seguenti:

1. Gli andamenti forza – tempo con le due metodologie di analisi sono coerenti tra loro, ma il valore massimo raggiunto con Hashin + Puck è maggiore di 1,4 kN rispetto al CODAM2: ciò comporta che la nuova routine vada a sovrastimare la rigidità della piastra con conseguente innalzamento del valore massimo della forza supportabile.
2. La fibra a trazione e a compressione si comportano in modo del tutto simile nelle due analisi, nonostante il danneggiamento finale risulti di poco inferiore con la nuova routine; lo stesso vale per la matrice a trazione e a compressione, dove i valori di danno sono più alti con il CODAM2 ma la forma dell'area danneggiata e la variazione

progressiva della superficie degradata sono maggiormente realistici con Hashin + Puck.

3. Come per il caso di impatto del paragrafo 4.7.1, l'assenza degli elementi coesivi impedisce di conoscere l'effettivo comportamento della piastra durante l'impatto in quanto non viene considerato il danneggiamento inter-laminare.

Capitolo 5

5. Conclusioni e prospettive future

Riassunto e conclusioni del lavoro di tesi

L'obiettivo primario del presente lavoro di tesi è quello di sviluppare e analizzare modelli 1D e 2D validi per lo studio di strutture in composito, alternativi a quelli tridimensionali offerti dai codici commerciali a disposizione sul mercato. In particolare, usando teorie strutturali di ordine superiore derivate dalla CUF si vogliono analizzare i problemi di danneggiamento progressivo a seguito di carichi di trazione, compressione, flessione e casi di impatto. Nello specifico, si vuole testare l'accuratezza di tali modelli e la convenienza che da essi può essere ricavata.

Il Capitolo 2 si propone di passare in rassegna le teorie e i modelli a disposizione in letteratura per lo studio dei materiali compositi. Partendo da una breve descrizione del laminato e delle sue leggi costitutive, si delinea la distinzione tra approcci Equivalent Single Layer e Layer-Wise con le teorie strutturali potenzialmente applicabili. L'approccio Layer-Wise è quello seguito nel Mul2, dove è quindi possibile distinguere gli andamenti di stress e strain in maniera individuale per ciascuno strato della laminazione. Si analizzano in seguito i criteri di failure principali, distinguendo tra criteri inter-laminari e intra-laminari e tra interattivi e non. Infine, si discutono gli approcci utilizzabili per la descrizione e resa del danneggiamento del materiale, con l'importanza della Progressive Failure Analysis e le differenze tra il Material property degradation method e la Continuum damage mechanics; quest'ultima è quella di riferimento per lo sviluppo del CODAM2 e della routine Hashin + Puck.

Il Capitolo 3 contiene una trattazione teorica di maggior dettaglio della CUF e dei modelli Trave e Piastra da essa ricavabili, con la descrizione delle espansioni di Lagrange e Taylor, il modello agli elementi finiti e la procedura di costruzione della matrice di rigidezza con un approfondimento sul concetto di Fundamental Nucleus. Successivamente si è presentata la distinzione tra le analisi implicite ed esplicite con i relativi metodi numerici di implementazione, ovvero rispettivamente Newton-Raphson e le differenze centrali. Infine, ci si è concentrati sui modelli numerici del CODAM2 e di Hashin + Puck per la schematizzazione del danneggiamento progressivo del laminato e i rispettivi criteri di failure. In questo modo il Capitolo 3 fornisce tutte le informazioni principali necessarie a

comprendere la CUF e le sue prerogative per analizzare le simulazioni numeriche e i risultati prodotti nel prosieguo del lavoro.

Il Capitolo 4 contiene la presentazione e i risultati di tutti i casi di studio affrontati a supporto della teoria descritta nei capitoli precedenti. In particolare, i casi riportati partono da semplici casi di trazione, compressione e flessione di travi e piastre: questa prima parte di simulazioni numeriche ha lo scopo di valutare la bontà dei modelli 1D e 2D sviluppati dalla CUF attraverso il programma di analisi Mul2, confrontando i risultati prodotti con quelli di Abaqus, software commerciale di uso comune: ciò dimostra l'accuratezza e la riduzione dei DOFs e dei tempi di analisi tra i due programmi. In seguito, si presentano alcuni casi di impatto sviluppati esclusivamente tramite Abaqus: queste analisi hanno fatto parte del percorso di formazione seguito nel lavoro di tesi per la comprensione dei fenomeni di impatto e consentono di introdurre il concetto di danneggiamento progressivo, con il confronto tra casi con e senza l'implementazione di esso per il calcolo dei risultati. Successivamente si è riportato un semplice caso di impatto di confronto con la CUF e Abaqus in ambito lineare, per iniziare a considerare il problema dell'impatto con il passaggio all'uso di solutore esplicito e la schematizzazione del contatto. Per l'introduzione del danneggiamento nel Mul2 si è utilizzata la routine Hashin + Puck, basata appunto sui criteri di Hashin 3D e Puck ad angolo variabile: prima di presentare i casi di impatto conclusivi si è dimostrata la validità di tale routine attraverso una serie di test a trazione e compressione, seguendo le procedure e le casistiche indicate in letteratura. I risultati prodotti con Hashin + Puck sono quindi stati confrontati con i risultati sperimentali dei lavori di riferimento e con quelli prodotti dal CODAM2, che è già stato sottoposto al processo di validazione, dimostrando di essere un'alternativa valida implementabile dei modelli 1D e 2D per il danneggiamento progressivo dei laminati.

Le principali conclusioni che si possono trarre dal lavoro di tesi sono quindi le seguenti:

- L'approccio Layer-Wise consente di utilizzare funzioni di ordine polinomiale differente a seconda dei casi di studio: la scelta di ricorrere a modelli di ordine superiore è essenziale dove si richiede un'accuratezza elevata per la valutazione di stress inter-laminari e per casistiche dove i carichi di impatto rendono il problema fortemente non lineare, mentre si può ridurre a funzioni lineari per schematizzare casi di carichi nel piano del laminato nell'ambito del danneggiamento progressivo. Il grande vantaggio della formulazione CUF è infatti legato alla libertà nella modellizzazione delle strutture oggetto di studio.
- I modelli 1D e 2D sviluppati dalla formulazione CUF si dimostrano molto performanti per la predizione del comportamento a trazione, compressione, flessione e del danneggiamento progressivo dei materiali compositi laminati, come osservato dalle simulazioni numeriche effettuate e dal confronto con Abaqus.
- I modelli 2D-CUF, su cui ci si è concentrati per la seconda parte delle simulazioni numeriche, riescono a schematizzare correttamente l'evoluzione di spostamento, energie e forza nei casi di impatto, sia nell'ambito lineare che non lineare.

- I modelli 2D-CUF con Hashin Puck per l'evoluzione del danneggiamento progressivo si dimostrano idonei per le analisi sui compositi e garantiscono livelli di accuratezza comparabili con quelli dei casi sperimentali e con quelli dei modelli del CODAM2 equivalenti. Rimane tuttavia da approfondire la differenza nella forza di impatto e nel danneggiamento della matrice.
- La soluzione di modelli 1D e 2D, grazie alla dimostrata accuratezza, porta il vantaggio di ridurre significativamente i costi computazionali e quindi i tempi di analisi e il numero di DOFs necessari per la descrizione dei problemi strutturali.

Sviluppi futuri

Nel presente lavoro di tesi si sono approfonditi alcuni aspetti relativi al danneggiamento progressivo con il CODAM2 e Hashin + Puck. Per completare la verifica della routine e per approfondire la reale capacità di previsione dei risultati rispetto ai valori sperimentali, potrebbero essere considerati in futuro alcuni aspetti elencati di seguito:

1. Completamento dell'attività di validazione sia a trazione che a compressione con ulteriori casistiche e con gli stessi modelli al variare della scala di riferimento. Ciò permetterebbe di dare maggiore solidità alle conclusioni qui riportate e confermare l'applicabilità della routine per queste casistiche di danneggiamento progressivo.
2. Inserimento degli elementi coesivi in modo da considerare l'effetto della delaminazione e del danneggiamento inter-laminare nei casi di studio, rendendo maggiormente realistiche le simulazioni numeriche.
3. Miglioramento del criterio di Puck nella ricerca dell'angolo α , per aumentare il livello di precisione nel trovare il valore effettivo ricercato e ridurre il livello di approssimazione.

Bibliografia

- [1] Scuor, N., (2019). Introduzione: fibre. Materiali Compositi, Università degli studi di Trieste.
- [2] Norkhairunnisa, M., Chai Hua, T., Sapuan, S. M., Ilyas, R. A., (2022). Evolution of Aerospace Composite Materials.
- [3] EASA, (2007). Certification Specifications for Large Aircrafts, CS-25.
- [4] Pascoe, J.-A., (2021). Slow-growth damage tolerance for fatigue after impact in FRP composites: Why current research won't get us there. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 116, 103127.
- [5] Caputo, F., Riccio, A., Lamanna, G., Scaramuzzino, F., Soprano, A., (2012). Studio di una metodologia numerica per l'analisi strutturale di laminati in composito soggetti a urti a bassa velocità. AIAS 2012 41mo convegno Associazione Italiana per l'Analisi delle Sollecitazioni.
- [6] Maio, L., Monaco, E., Ricci, F., Lecce, L. (2013). Simulation of low velocity impact on composite laminates with progressive failure analysis. *Composite Structures*, Volume 103, 75-85.
- [7] Abrate, S. (2011). *Impact Engineering on Composite Structures*.
- [8] Shi, Y., Pinna, C., and Soutis, C. (2014). Modelling impact damage in composite laminates: a simulation of intra-and inter-laminar cracking. *Composite Structures*, 114:10–19.
- [9] Shi, Y., Swait, T., and Soutis, C. (2012). Modelling damage evolution in composite laminates subjected to low velocity impact. *Composite Structures*, 94(9):2902–2913.
- [10] Abrate, S. (1998). *Impact on Composite Structures*.
- [11] Reiner, J., Veidt, M., Dargusch, M., and Gross, L. (2017). A progressive analysis of matrix cracking-induced delamination in composite laminates using an advanced phantom node method. *Journal of Composite Materials*, 51(20):2933–2947.
- [12] Reiner, J., Zobeiry, N., and Vaziri, R. (2020). A stacked sublaminar-based damage-plasticity model for simulating progressive damage in composite laminates under impact loading. *Thin-Walled Structures*, 156:107009.
- [13] Riccio, A., De Luca, A., Di Felice, G., and Caputo, F. (2014). Modelling the simulation of impact induced damage onset and evolution in composites. *Composites Part B: Engineering*, 66:340–347.
- [14] Nagaraj, M. H., Petrolo M., Carrera, E. (2020). Progressive damage analysis of composite laminates subjected to low-velocity impact using 2D Layer-Wise structural models. *International Journal of Non- Linear Mechanics*, 127, 103591.
- [15] Vannucci, P. (2007). *Materiali compositi per impiego strutturale: Metodi di analisi e*

- di progetto, Doctoral, Università di Pisa, Italy.
- [16]Carrera, E. (2002). Theories and finite elements for multilayered, anisotropic, composite plates and shells, *Archives of Computational Methods in Engineering*.
- [17]Jones, R.M. (1975). *Mechanics of Composite Materials*, Mc Graw–Hill, New York.
- [18]Reissner, E. (1945). The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, *Journal of Applied Mechanics*, 12, 69-76.
- [19]Creja, I., Sabik, A. (2019). Analytical Solution for Bending Stress Intensity Factor from Reissner’S Plate Theory, *Acta Mech* 230, 2827–2851.
- [20]Zuccarello, B. (2008). *Progettazione meccanica con materiali non convenzionali, Modalità di rottura e criteri di resistenza (Cap. 6)*, Publications.
- [21]Reddy, J., Pandey, A. (1987). A First-Ply Failure Analysis of composites laminates, *Computers and Structures*, vol. 25, n. 3, pp. 371-393.
- [22]Reddy, Y., Reddy, J. (1993). Three Dimensional Finite Element Progressive Failure Analysis of Composite Laminates under Axial Compression, *Journal of Composite Technology and Research*, vol. 15, n. 2.
- [23]Hashin, Z. (1980). Failure Criteria for unidirectional composites, *Journal of applied mechanics* 47:329-334.
- [24]Puck, A., Schurmann, H. (1998). Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models. *Compos Sci Technol*, 58:1045-67.
- [25]Sleight, D.W. (1999). *Progressive Failure Analysis Methodology for Laminated Composites*.
- [26]Lapczyk, I., Hurtado, J.A. (2007). Progressive damage modeling in fiber-reinforced materials. *Composites Part A: Applied Science Manufacturing*, 38:2333–2341.
- [27]Nagaraj, M. H., Carrera, E., Petrolo, M. (2020). Progressive damage analysis of composites laminates subjected to low-velocity impact using 2D Layer-Wise structural models. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 127.
- [28]Gherlone, M., Cestino, E. (a.a. 2022/2023). *Analisi di strutture aerospaziali con l’impiego di codici FEM. Introduzione*.
- [29]Bathe, K.-J. (2006). *Finite element procedures*.
- [30]Università degli Studi di Cagliari, Facoltà di Ingegneria e Architettura *Analisi Dinamica delle Strutture*, (a.a. 2020/2021). *Metodi per l’integrazione diretta delle equazioni del moto*.
- [31]Petrolo, M., Kaleel, I., De Pietro, G., Carrera, E. (2018). Wave propagation in compact, thin-walled, layered, and heterogeneous structures using variable kinematics finite elements. *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, 19:207:220.
- [32]De Borst, R., Crisfield, M. A., Remmers, J. J. C., and Verhoosel, C. V. (2012). *Nonlinear finite element analysis of solids and structures*. John Wiley & Sons.
- [33]Nagaraj, M. H., Kaleel, I., Carrera, E. & Petrolo, M. (2020). Contact analysis of laminated structures including transverse shear and stretching. *European Journal of*

Mechanics-A/Solids, 80, 103899.

- [34] Reiner, J., Feser, T., Schueler, D., Waimer, M., Vaziri, R. (2019). Comparison of two preprogressive damage models for studying the notched behavior of composite laminates under tension. *Composite Structures* 207: 385-396.
- [35] Arruda, M. R. T., Trombini, M., Pagani, A. (2023). Implicit to Explicit Algorithm for ABAQUS Standard User-Subroutine UMAT for a 3D Hashin-Based Orthotropic Damage Model. *Applied Sciences* 13(2):1155.
- [36] Shi, Y., Swait, T., Soutis, C. (2012). Modelling damage evolution in composite laminates subjected to low velocity impact. *Composites Structures* 94: 2902-2913.
- [37] Rezasefat, M., Badel Torres, D., Gonzalez-Jimenez, A., Giglio, M. & Manes, A. A fast fracture plane orientation search algorithm for Puck's 3D IFF criterion for UD composites. *Materials Today Communications* 28, 102700. I S S N: 2352-4928.
- [38] Reiner, Johannes, et al. "Comparison of two progressive damage models for studying the notched behavior of composite laminates under tension." *Composite Structures* 207 (2019): 385-396.
- [39] Kaddour, A. S., Hinton, M. J., Smith, P. A., and Li, S. (2013). Mechanical properties and details of composite laminates for the test cases used in the third world-wide failure exercise. *Journal of Composite Materials*, 47(20-21):2427–2442.
- [40] Zobeiry, N., Vaziri, R., and Poursartip, A. (2015). Characterization of strain-Softening behavior and failure mechanisms of composites under tension and compression. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 68:29–41.
- [41] Nagaraj, M. H. (2021). Higher-order Layer-Wise models for the progressive damage and impact analysis of composite structures. Doctoral dissertation, Politecnico di Torino.
- [42] Lee, J. and Soutis, C. (2008). Measuring the notched compressive strength of composite laminates: Specimen size effects. *Composites Science and Technology*, 68(12):2359–2366.
- [43] Xu, X., P, A., Sun, X., and Wisnom, M. (2020). An experimental study of scaling effects in notched quasi-isotropic carbon/epoxy laminates under compressive loads. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 137:106029.
- [44] Rivallant, S., Bouvet, C., & Hongkarnjanakul, N. (2013). Failure analysis of CFRP laminates subjected to compression after impact: FE simulation using discrete interface elements. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 55, 83-93.
- [45] Tan, W., Falzon, B. G., Chiu, L. N., & Price, M. (2015). Predicting low velocity impact damage and Compression-After-Impact (CAI) behaviour of composite laminates. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 71, 212-226.