Corso di laurea magistrale in Ingegneria Aerospaziale

Analisi della vita a fatica mediante teorie strutturali avanzate

Anno Accademico 2022/2023

***Relatore**:*
Prof. Marco Petrolo
***Correlatore**:*
Prof. Matteo Filippi
Dottoranda Elisa Tortorelli

***Studente**:*
Ludovico Callegari

Ringraziamenti

Giunto al termine di un complesso e faticoso cammino di studi, contraddistinto da numerosi ostacoli che hanno più volte cercato di impedirne il compimento, sento il dovere di ringraziare principalmente me stesso, per la mia autostima, per la mia tenacia e caparbietà, per la mia capacità di sopraffare le avversità.

In secondo luogo la mia gratitudine è rivolta ai miei genitori: a mio padre, per la sua pazienza, per i lunghi viaggi in auto ad ogni esame e per il sostegno economico; a mia madre per essermi sempre stata accanto nei momenti più difficili trasferendomi l'attitudine a non mollare anche nei periodi più sfavorevoli. Ai miei zii Carla, Paola e Fe e a mio cugino Cesare e Titto per avermi sempre sostenuto.

Un dovesoro ringraziamento va al Politecnico di Torino, per avermi dato l'opportunità di svolgere un percorso formativo di alto livello. E' proprio stato una seconda casa.

La mia più sincera riconoscenza nei confronti dei professori Marco Petrolo e Matteo Filippi per aver creduto in me concedendomi la possibilità di svolgere questa tesi, per avermi trasmesso le loro grandi consocenze e per avermi dato consigli accurati e meticolosi sulla stesura dell' elaborato.

Un grazie speciale lo devo alla dottoranda Elisa Tortorelli per la sua presenza costante durante la stesura e per avermi supportato nei calcoli svolti. Grazie per la tua grande disponibilità.

Infine il mio ringraziamento più importante è rivolto ai miei nonni: Rita e Lino. Per avermi cresciuto, per avermi insegnato e trasmesso i valori della vita, per la vostra umanità, per la vostra saggezza, per la vostra umiltà. Tutto quello che sono e che sarò lo devo a voi.

Sommario

L'unione tra il fenomeno della fatica randomica e il concetto di materiali compositi costituisce un tema fondamentale nella progettazione aerospaziale. Le insidie nell'affrontare tale argomento sono da cercarsi non solo nella complessità teorica e pratica che si cela dietro alla fatica casuale ma anche in quella dei materiali composti, i quali, per le loro differenti possibili configurazioni, non possono conferire certezze ai metodi tradizionali conosciuti.
A dimostrazione di quanto detto finora in letteratura vi sono pochi dati accurati e validati in merito alla stima della vita a fatica casuale dei compositi. Questo studio vuole proporre un'analisi della vita a fatica utilizzando il metodo avanzato di Fuqiang Wu e WeiXing Yao per un laminato in materiale composito (grafite/epossidica), sottoposto a sollecitazioni randomiche nel tempo. I risutlati ottenuti sono stati in seguito confrontati con quelli ricavati da un materiale metallico (alluminio), per le stesse condizioni di carico e di geometria, adoperando un metodo tradizionale, noto come la legge del danno cumulativo di Palmgren-Miner.
Per studiare il comportamento di tale struttura si è utilizzato un metodo agli elementi finiti utilizzando la Formulazione Unificata di Carrera (CUF) e si è fatto uso del software Femap, riconosciuto in tutto il mondo come il più diffuso strumento di analisi a elementi finiti (FEA), per validare i risultati ottenuti.
Nel caso di sollecitazioni randomiche, la storia di carico assume caratteristiche aleatorie e tutte le grandezze ad essa associate diventano variabili anch'esse aleatorie che vanno trattate con metodi statistici. In questo elaborato la sollecitazione casuale viene modellata come un processo stocastico gaussiano stazionario, descritto dalla sua densità spettrale di potenza(PSD) nel dominio delle frequenze. Il vantaggio di utilizzare questo metodo nel dominio delle frequenze permette di collegare il danno a fatica direttamente alla PSD del processo, risparmiando notevole tempo. Tradotto il carico dal dominio nel tempo al dominio della frequenza tramite la trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione, si ottiene la PSD di input che in questa trattazione è rappresentata dal cosiddetto 'rumore bianco'.
Tramite l'utilizzo del codice MUL^2 , realizzato dal gruppo di ricerca del Politecnico di Torino, si ottengono i valori delle PSD di output in termini di spostamenti e soprattutto di sollecitazioni. Quest'ultime saranno il punto di partenza per il calcolo della vita a fatica delle strutture considerate.

Indice

Elenco delle tabelle

Elenco delle figure

Capitolo 1

Introduzione

In questo capitolo introduttivo sono descritte in maniera generale le varie tematiche presenti in questo lavoro. Si parte con la definizione del termine fatica e si analizza l'evoluzione storica che tale fenomeno ha avuto in ambito progettuale. Successivamente viene introdotta una breve distinzione del diverso comportamento al danneggiamento che i materiali compositi presentano rispetto ai materiali metallici. Infine si introduce il concetto di fatica casuale, elencando i principali metodi spettrali presenti in letteratura, per la stima della vita a fatica di materiali soggetti a fatica randomica.

1.1 Introduzione alla fatica. Definizione e cenni storici

Con il termine fatica si intende l'insieme di alterazioni che si hanno in un elemento strutturale, sottoposto a carichi variabili che si ripetono per un numero di cicli molto elevato e che possono portare col passare del tempo al suo cedimento, anche per sollecitazioni inferiori a quelle di rottura. Il termine "fatica", dal latino *fatigare*, ossia stancare, indica un fenomeno fisico ciclico che determina un indebolimento strutturale.
Un'importante definizione di fatica viene data dall'American Society for Testing and Materials (ASTM E1823 – 13, 2013), che descrive il fenomeno come "il processo di cambiamento progressivo e localizzato della microstruttura del materiale soggetto a condizioni di carico che producono tensioni e deformazioni cicliche e che si conclude con la presenza di fessure o la frattura completa dopo un numero sufficiente di cicli". Il termine *"progressivo"* indica come la fatica sia un fenomeno i cui effetti sono contrassegnati da un continuo e graduale incremento; il termine *"localizzato"* indica come tale processo sia circoscritto solo in corrispondenza di alcune aree che presentano elevati valori di tensione/deformazioni, o da imperfezioni intrinseche del materiale; il termine *"fessura"* indica la causa della rottura a fatica. L'aspetto centrale della fatica risiede infatti nell'analisi di una 'fessura', chiamata cricca, in particolare nello studio della sua nucleazione, passando per la sua crescita a seguito dell'applicazione di sollecitazioni, fino a

quando il materiale non è più in grado di sopportare le tensioni/deformazioni presenti, e quindi si verifica una rottura improvvisa; il termine *"frattura"* indica infine la parte finale del processo di fatica, caratterizzato dalla rottura del componente. [26] [59].
Per la complessità che si cela dietro al fenomeno della fatica, si potrebbe pensare che sia un problema relativamente recente, tuttavia le prime domande a rigurdo risalgono a Leonardo e Galileo. In ogni modo fino all'inizio dell'ottocento la fatica era una modalità di rottura sostanzialmente estranea dato che le teorie conosciute non erano in grado di darne una spiegazione esaustiva dal punto di vista sperimentale. La prima analisi sulla rottura per fatica, condotta da Wilhelm August Julius Albert [17] e pubblicata ufficialmente nel 1837, riguardava il cedimento di alcune catene di sollevamento. Egli capì che la rottura dipendeva dal carico utilizzato e dal numero di volte che questo era applicato. Successivamente nel 1839 Jean-Victor Poncelet [55] analizzando la particolare rottura che presentavano le molle soggette a una forza ciclica, attribuì a questi materiali metallici il termine "stanchi" [29]. Verso la metà dell'ottocento l'avvento del trasporto ferroviario portò a nuove scoperte. Il primo su tutti fu William John Macquorn Rankine che identificò la rottura per fatica di assali ferroviari essere dovuta all'innesco ed all'avanzamento di cricche. Studi più sistematici furono portati a termine da William Fairbairn e sopratutto da August Wöhler [73]. Quest'ultimo eseguì una serie di prove sperimentali su campioni di acciaio soggetti a carichi ciclici ad ampiezza costante. Spangenberg rappresentò qualche anno dopo i dati ottenuti dall'ingegnere tedesco in diagrammi relativi alla vita a fatica dell'elemento, espressa in termini di cicli di carico sopportabili per un dato valore dell'ampiezza del ciclo di carico applicato [62], individuando conseguentemente il cosiddetto limite di fatica del materiale, scoperta fondamentale in quanto tale limite rappresenta quel valore dell'ampiezza del ciclo di carico al di sotto del quale non avviene la rottura, neppure per un numero teoricamente infinito di cicli.
A inizio del novecento si riuscirono a stabilire le prime metodologie per il calcolo della resistenza a fatica di metalli in termini di numero di cicli a rottura [62] [4]. In particolare si distinse O.H. Basquin.
Successivamente i ricercatori concentrarono i loro studi sui carichi variabili nel tempo in modo irregolare. Uno su tutti Miner, che nel 1945 implementò un approccio sviluppato da Palmgren circa quindici anni prima che passò alla storia come la legge del danneggiamento cumulativo, secondo la quale il danno accumulato dal materiale è proporzionale al rapporto tra il numero di cicli che il componente ha subito, indicato con n, ed il numero di cicli, indicato con N, che provoca rottura al livello di sollecitazione considerato. Il danno complessivo accumulato dal materiale per effetto della sequenza di carichi ciclici, indicato con D è quindi ottenuto mediante la sommatoria dei danni relativi ad ogni livello di carico: la rottura di verifica quando: $D \geq 1$. A metà del novecento, grazie allo sviluppo tecnologico, il problema della fatica fu notato e studiato anche in ambito aerospaziale, e in seguito a gravi incidenti del trasporto civile, come quello del Comet si trovò conferma di come la propagazione di cricche fosse la principale

responsabile di tali eventi catastrofici. Si giunse così alla formulazione della legge di Paris-Erdogan per prevedere la propagazione di fessure per fatica in materiali soggetti a carichi ciclici ad ampiezza costante, servendosi dei concetti propri della Meccanica della Frattura, disciplina che studia il comportamento degli elementi fessurati [51] e [50].
Attualmente la progettazione a fatica di componenti strutturali metallici e sopratutto compositi costituisce un tema centrale nella progettazione aerospaziale e non. Infatti, la rottura per fatica rappresenta la causa più frequente di cedimenti di componenti strutturali in diversi settori industriali, provocando non solo danni economici, ma anche problematiche relative alla sicurezza.

1.2 Progetto a fatica

Le rotture per fatica costituiscono, come precedentemente affermato, la maggior parte dei casi di rotture in esercizio, provocando disastri e perdite di vite umane proprio a causa della loro natura improvvisa come accadde il 14 maggio 1977. Il Boeing 707-312C cargo di Dan-Air/IAS si schiantò durante l'avvicinamento all'aeroporto di Lusaka. Tutti gli occupanti muorirono. Le ore operative di volo del Boing al momento dell'incidente erano di 47.621 e aveva effettuato 16.723 atterraggi.
La causa dell'incidente era da ricercarsi in due aspetti: strutturale e di progetto. Per quanto riguarda il primo, la fatica aveva causato il cedimento dello stabilizzatore orizzontale destro, che si era guastato e staccato della struttura del longherone posteriore; il secondo riguardava la mancanza di un dispositivo fail-safe adeguato nel caso si fosse verificato un evento similare. L'indagine individuò quindi carenze a livello progettuale e nel modo in cui si effettuavano le ispezioni [47]. Come già detto, i carichi sulle strutture si ripetono in maniera ciclica e ogni ciclo distorce l'intima natura cristallina del materiale. Nel corso del tempo questo processo, chiamato danno cumulativo, porta, dopo un certo numero di cicli, alla rottura del componente. Tornando all'incidente, i timoni orizzontali del 707 furono progettati in modo tale da poter sopportare carichi anche in caso di cedimento di un componente primario (filosofia 'fail safe') per garantire la sicurezza ma ciò non avvenne.
Quando si parla di fatica nella progettazione aerospaziale si deve quindi introdurre prima un importante concetto, ossia quello di sicurezza, fondamentale per la realizzazione di velivoli aeronautici e/o spaziali. Una definizione di sicurezza fu data nella normativa MIL 721B, che afferma: *"la sicurezza è la conservazione della vita umana e dell' integrità delle persone, nonché la prevenzione dei danni alle macchine, nel rispetto dei requisiti di missione"*. Il come garantire tale sicurezza è l'aspetto centrale della progettazione aerospaziale. Il progetto aerospaziale è quindi un progetto a fatica. In questa direzione nasce quindi la necessità di trovare adeguate filosofie di progetto. L'evoluzione di queste è certamente collegata ad incidenti catastrofici che hanno messo in luce la necessità di prendere in considerazione in modo sempre più approfondito il binomio tra lo sviluppo del danno e l'integrità strutturale.

La prima filosofia di progetto venne introdotta tra gli anni quaranta e cinquanta del novecento e denominata “Safe life”. Essa sostiene che un componente deve essere progettato per non essere soggetto a cedimento entro un determinato periodo di tempo. Dunque secondo questo criterio, il componente deve essere in grado di sostenere carichi reali di esercizio per l’intera sua vita operativa. Gli svantaggi di tale criterio sono il sovradimensionamento dei componenti e quindi i pesi elevati. Non essendo in grado di stimare la vita a fatica effettiva dei componenti vengono introdotti fattori di sicurezza molto elevati [34]. Per superare i problemi e per aumentare la sicurezza d’esercizio, è stato introdotto l’approccio “Fail Safe”. Secondo tale filosofia il componente deve possedere una resistenza residua anche dopo un cedimento parziale, di modo tale che sia in grado si sopportare le sollecizione senza arrecare danno alla struttura. Tuttavia anche questa filosofia di progetto possiede alcune lacune di carattere progettuale. Per cercare di mitigarle agli inizi degli anni settanta si è sviluppata una terza filosofia denominata “Damage tolerance”. Questa, vista come un perfezionamento dell’approccio “Fail Safe” [70], prevede la capacità di un componente di essere performante anche in presenza di uno stato di danno [66]. La struttura possiede già intrinsecamente un difetto, e conseguentemente a questa ipotesi la filosofia si focalizza su due punti: il primo punto è la possibilità di stabilire il carico di rottura per una dimensione specifica della fessura iniziale; il secondo punto è quello di prevedere il periodo di tempo per la crescità della cricca e il raggiungimento di una dimensione critica che può generare cedimento.
I requisiti essenziali della Damage Tolerance sono quindi la previsione dell’evoluzione del danno e quella di cicli di manutenzione ispettiva, utilizzando coefficienti di sicurezza più bassi [65]. E’ importante sottolineare come la “Damage Tolerance” non ha eliminato le altre due filosofie di progetto, ma si pone come un miglioramento di esse [70].

1.3 Damage tolerance. Confronto tra materiali metallici e compositi

Con il costante progresso dell’industria aeronautica, i materiali compositi sono diventati predominianti nella progettazione. Attualmente l’obiettivo principale in ambito progettistico è quello di poter usare questa tipologia di materiali nella costruzione di strutture aeronautiche primarie, perchè garantisce riduzione di peso e di dimensioni assicurando sicurezza ed affidabilità, fattori essenziali in questo settore. L’analisi strutturale in tal senso si concentra sullo studio dei meccanismi attraverso i quali i materiali compositi arrivano a rottura con lo scopo di stabilire criteri e teorie per il danneggiamento progressivo. Sappiamo per esempio che i laminati in composito rinforzati con fibre in carbonio possono sviluppare rotture localizzate o anche solo dei danneggiamenti che possono assumere diverse forme: rotture delle fibre, crack della matrice, scollamento tra fibre e matrice e delaminazione. Tuttavia, la particolarità di questi materiali sta nel fatto che, a differenza delle classiche leghe metalliche, prima di giungere a definitiva rottura, possono continuare a sostenere carichi operativi pur presentando danneggiamenti locali. Dietro a questa complessità, dovuta al fatto che in natura esistono una molteplicità di fibre, matrici, sequenze di impilamento, metodi di produzione e molto altro (e quindi il numero di configuraizoni possibili sono molte), risiedono le principali problematiche relative all'utilizzo dei materiali in composito, in quanto non esiste un metodo che garantisca l'assoluta convergenza tra i risultati sperimentali e quelli analitici [61]. I compositi non sono materiali intrinsecamente tolleranti al danneggiamento: si dice appunto che siano poco sensibili alla fatica, poiché il loro cedimento è spesso fragile, al contrario di quelli metallici. Il comportamento a fatica dei materiali compositi è estremamente diverso da quello dei materiali metallici come mostrato in figura 1.1 [39], e per questo motivo i metodi precedentemente sviluppati e convalidati per la determinazione della resistenza a fatica dei materiali metallici non possono essere applicati direttamente ai materiali compositi.

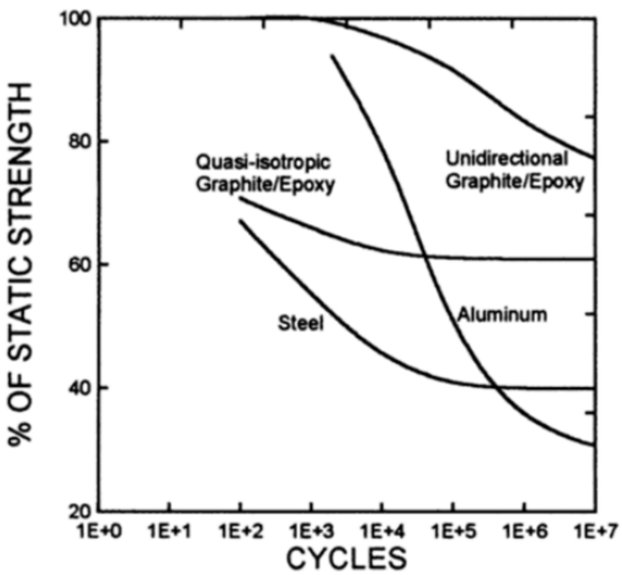

Figura 1.1: Comportamento a fatica dei materiali compositi rispetto a quelli metallici [39]

A differenza dei materiali metallici, i materiali compositi sono materiali non omogenei e anisotropi e hanno la tendenza ad accumulare danno in modo diffuso e progressivo invece che a localizzarlo in una singola macro-frattura. Per comprendere il problema della tolleranza al danneggiamento nelle strutture in composito è necessario comprendere il diverso comportamento dei metalli e dei compositi. Per essere tollerante ai danni, una struttura deve essere in grado, per definizione, di mantenere la capacità di carico limite per tutta la durata di vita del velivolo nonostante i possibili danni che possono verificarsi durante la sua vita operativa. I metalli mostrano poi un degrado graduale della loro resistenza residua a fatica, mentre per i materiali compositi questo degrado è di solito causato da un fattore esterno, come ad esempio un impatto, come mostrato in figura 1.2 [19]. La struttura in composito può perdere dunque la sua capacità di carico ultimo

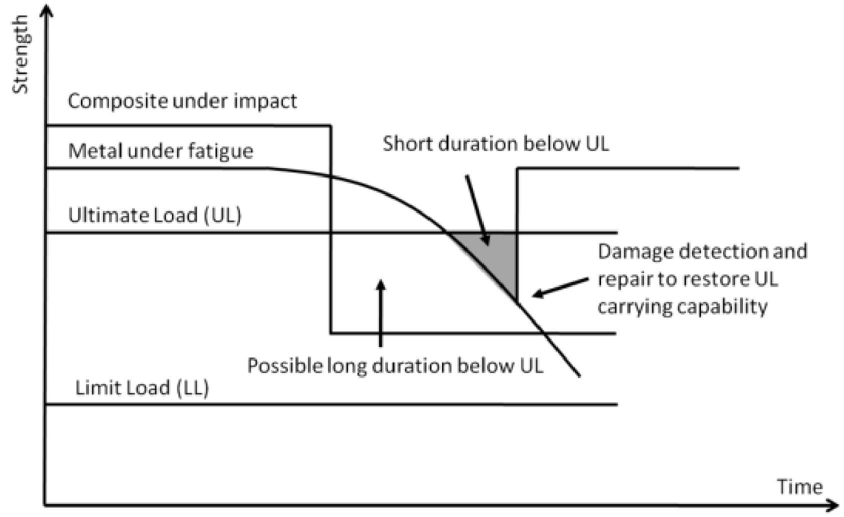

Figura 1.2: Resistenza residua del materiale composito rispetto a quello metallico sotto carico di fatica o d'urto o impatto [19]

(σ_{ult}) per un periodo di tempo più lungo rispetto ai metalli, prima che il danno possa essere rilevato e riparato. Perciò si può sostenere che i materiali compositi non sono tolleranti al danno. Quindi l'unico approccio possibile è il cosiddetto concetto di 'non crescita' denominato BVID, ossia Barely Visible Impact Damage. L'approccio prevede che un difetto presente all'interno del materiale ma non rilevabile non può propagarsi all'interno della struttura. Perciò quando si dimensiona un componente in materiale composito, è necessario valutare la dimensione massima ammissibile del difetto che non si propagherà sotto i carichi operativi.

1.4 La fatica casuale

Una delle modalità di cedimento più importanti nelle strutture ingegneristiche è quello per fatica e rappresenta, come già detto, più dell' 85% dei cedimenti strutturali. Generalmente, il carico di fatica può essere suddiviso in due tipologie: fatica ad ampiezza costante, fatica ad ampiezza variabile [28]. Della prima tipologia, già ampiamente analizzata in molte applicazioni, si hanno una serie di documentazioni che hanno portano nel tempo a risultati validati universalmente [77]. Per quanto riguarda invece la fatica ad ampiezza variabile, in particolare la fatica casuale, nonostante sia un argomento di ricerca da oltre cinquant'anni, lo studio è molto complesso ed è difficile ottenere dati sperimentali attendibili soprattutto quando si tratta di materiali compositi. Nonostante ciò il tema della fatica casuale è un argomento centrale nella progettazione aerospaziale e non solo, in quanto la maggior parte delle strutture civili sopporta inevitabilmente carichi casuali, come raffiche, turbolenze ecc.. Abitualmente lo studio della stima della vita a fatica si ottiene attraverso la curva S-N del materiale e un criterio del danno cumulativo (il più celebre è quell di Palmgren-Miner) [72]. Per quella

casuale i metodi di stima della vita a fatica sono divisi in metodo nel dominio del tempo e metodo nel dominio della frequenza. L'approccio tradizionale, cioè quello del dominio del tempo, consiste nell'esaminare la storia temporale della sollecitazione di risposta della struttura e, mediante un metodo di conteggio di cicli, il più ricorrente è denominato 'metodo del rainflow', proposto da Matsuishi e Endo [42]), [36], [80], si ottengono ampiezza, valore medio e tempi di ciclo della sollecitazione, parametri essenziali per il calcolo della vita a fatica [42].
Quando il modello da analizzare diventa complesso e bisogna utilizzare quindi accorre un approccio agli elementi finiti si predilige passare nel dominio delle frequenze [5]. Il metodo consiste nell'eseguire una trasformata di Fourier sul carico nel dominio del tempo, separando le varie componenti di frequenza del processo casuale e ottenendo cosi la densità spettrale di potenza (PSD), descrivendo così le grandezze con i relativi parametri spettrali [27]. La densità spettrale di potenza, che verrà approfondita più avanti è la "potenza" in una banda di frequenza unitaria [35] e [79]. In letteratura i primi lavori risalgono agli anni cinquanta e sessanta con Miles [44] e Bendat, tuttavia negli ultimi trent'anni si sono sviluppati decina di metodi, sopra di tutti quello di Dirlik (1985) e quello di Tovo-Benasciutti (2005). Questi due metodi spettrali di analisi nel dominio della frequenza hanno avuto grande successo per la loro elevata accuratezza e sono i migliori modelli spettrali riconsociuti dalla letteratura. Ciò che si è fin'ora descritto vale solo ed esclusivamente per i materiali metallici, in particolare leghe di alluminio e acciai. E per i materiali compositi ? La sfida di oggi sta proprio nel trovare metodi attendibili per lo studio della vita a fatica di materiali compositi soggetti a carichi randomici.

Capitolo 2

La fatica

Dopo aver ribadito il peso che il fenomeno della fatica ricopre nell'analisi progettuale, si passa alla descrizione dei principali parametri che descrivono, in termini generali un tipico ciclo a fatica. Successivamente, ricordando il rilievo che l'analisi agli elementi finiti riveste nello studio della fatica, vengono citate le tre metodologie per lo studio della fatica presenti in letteratura. Per lo scopo dell'elaborato ne viene descritto solo uno. Infine si illustrano i metodi per l'analisi della vita a fatica di strutture quando sono soggetto a fatica casuale, evidenziando l'importanza dell'approccio statistico nel dominio delle frequenza per la risoluzione del problema.

2.1 Definizione di fatica

In ambito aeronautico e aerospaziale la fatica è quel particolare fenomeno che si presenta quando un componente strutturale è sottoposto a carichi ciclici nel tempo. Ogni singolo ciclo di carico non porta a rottura, ma reca un piccolo danneggiamento che nel corso della vita operativa provoca la rottura dello stesso. Come affermato nella parte introduttiva, la fatica rappresenta quel processo progressivo, permanente e localizzato di cambiamento strutturale che si presenta in un materiale sottoposto a sollecitazioni cicliche che producono fessure che si traducono poi in una frattura completa del componente [63]. La rottura a fatica è particolarmente insidiosa perchè avviene in maniera quasi improvvisa, manifestandosi per carichi inferiori rispetto alla tensione di snervamento o massima e di solito tollerati dal materiale stesso.

2.2 Tipologia di carico a fatica

La fatica è essenzialmente caratterizzata dalla presenza di una sollecitazione periodica nel tempo. Essa può essere descritta da carichi ciclici ad ampiezza costante (CA) o ad ampiezza variabile (VA) come indicato in figura 2.1 e figura 2.2. In particolare la gestione di storie temporali di carico variabili come nella figura 2.2 può essere piuttosto complicato, poiché le sollecitazioni devono essere

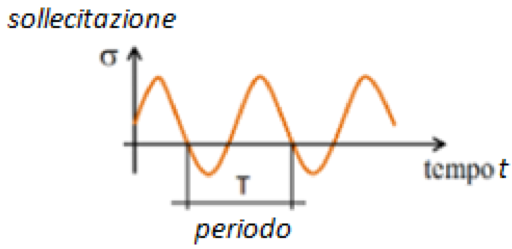

Figura 2.1: Carico ciclico ad ampiezza costante

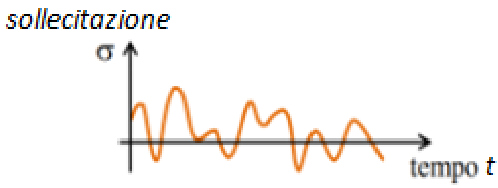

Figura 2.2: Carico ciclico ad ampiezza variabile

calcolate nel tempo in ogni punto di interesse. In questa sezione si considera l'analisi per un carico ad ampiezza costante e verrà enunciata la terminologia di base. L'andamento delle sollecitazioni può essere ricondotto a uno dei quattro casi presenti come mostrato in figura 2.3: sollecitazione alternata simmetrica, sollecitazione alternata asimmetrica, sollecitazione oscillante dall'origine e sollecitazione pulsante. In questi casi le sollecitazioni sono descritte da un comportamento sinusoidale nel tempo, che approssima meglio tale andamento. Tutti i

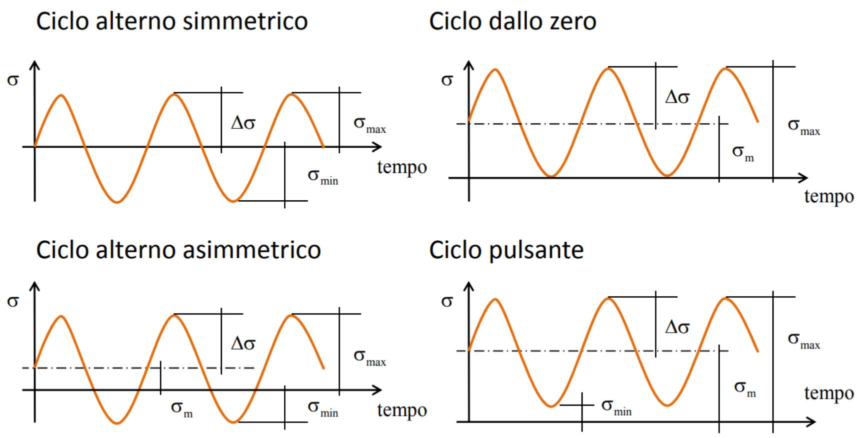

Figura 2.3: Varie tipologie di carico ciclico a fatica

casi di andamenti elencati possono essere ricondotti a una legge matematica di tipo sinusoidale, in particolare il valore della tensione σ può essere espresso come sovrapposizione di una tensione alternata pura di semiampiezza σ_a e pulsazione

ω, e una tensione statica σ_m per ogni istante t, come mostrato dalla relazione seguente:

$$\sigma = \sigma_m + \sigma_a sen(\omega t) \tag{2.1}$$

2.2.1 Sollecitazioni a fatica di carichi ciclici ad ampiezza costante. Terminologia

I parametri che caratterizzano i cicli a fatica sono indicati nella figura 2.4 e sono rispettivamente: -

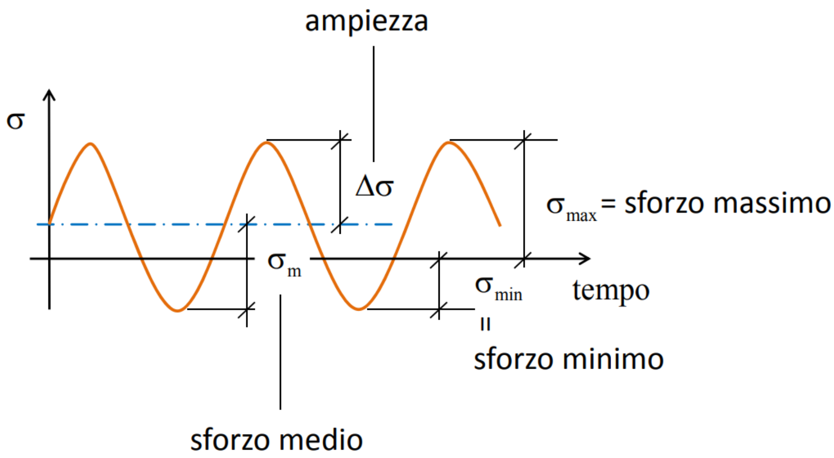

Figura 2.4: Notazione relativa alle sollecitazioni di un ciclo di carico ad ampiezza costante

- σ_{max}, sollecitazione massima: $\sigma_m + \sigma_a$
- σ_{min}, sollecitazione minima: $\sigma_m - \sigma_a$
- σ_m, sollecitazione media: $\frac{\sigma_{max}+\sigma_{min}}{2}$
- σ_a, semiampiezza delle sollecitazioni, indicata anche con $\Delta\sigma$: $\frac{\sigma_{max}+\sigma_{min}}{2}$
- R, rapporto di sollecitazione: $\frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$

Con riferimento ai quattro cicli temporali elencati sopra si ha che:

- per carichi alternati simmetrici, $\sigma_{max} = \sigma_{min} = \sigma_a$, con $\sigma_m = 0$, R = -1
- per carichi alternati asimmetrici, $\sigma_{max} > 0$, $\sigma_{min} < 0$, $-1 < R < 0$ $\sigma_m \neq 0$ e $\sigma_m < \sigma_a$
- per carichi oscillanti all'origine, $\frac{\sigma_{max}}{2} = \sigma_m = \sigma_a$, $\sigma_{min} = 0$, R = 0 o R = -∞
- per carichi pulsanti, $\sigma_m \neq 0$ e $\sigma_m > \sigma_a$, con $|\sigma_{max} - \sigma_{min}| > 0$, $0 < R < 1$

2.3 Introduzione ai modelli per la stima della vita a fatica

Le procedure di analisi della fatica nella progettazione delle strutture sono diventate nel corso degli anni più sofisticate. Attualmente esistono tecniche per prevedere la velocità con cui una cricca si svilupperà all'interno di una struttura (legge di Paris); tecniche per gestire la presenza di sollecitazioni in più di una direzione principale (fatica multiassiale) e tecniche per gestire le strutture soggette a fatica randomica, dove le risposte sono calcolate come PSD (Power Spectral Densities) delle sollecitazioni. Il processo di crescita delle cricche, fenomeno molto complesso, ricopre un ruolo fondamentale nello studio della fatica. In questa direzione si individuano tre diversi stadi dell'evoluzione della cricca [8]: la sua formazione, dovuta allo slittamento dei cristalli lungo la direzione massima di taglio; la sua crescita, caratterizzata dall'avanzamento di queste bande di scivolamento in direzione perpendicolare al carico; e infine il raggiungimento di una dimensione critica che porta alla rottura del componente.
Nella progettazione si sono affermate tre metodologie per lo studio della fatica: Stress-Life (S-N, sollecitazione nominale o vita totale) Strain-Life (Local-Stress-Strain, Crack-Initiation, Manson-Coffin o Critical-Location Approach - CLA) e Crack-Propagation. Le prime due non considerano affatto il processo di crescita delle cricche, ma determinano il numero di cicli fino al cedimento; il "cedimento" è definito come una lunghezza di cricca predeterminata. Il terzo metodo, più recente dei precedenti, sfrutta la meccanica della frattura: analizza la propagazione delle cricche e si basa sul fatto che le cricche dopo che si sono formate hanno un periodo di crescita stabile. Alla base vi è l'ipotesi che i tassi di crescita delle cricche siano proporzionali all'intensità della sollecitazione applicata. Attualmente la maggior parte dei calcoli riguardanti la progettazione a fatica si basa su uno di questi tre approcci. Tuttavia, con l'introduzione delle tecniche di analisi agli elementi finiti (FEA), è nata la possibilità di effettuare calcoli di fatica molto prima dell'esistenza di un prototipo, guadagnando cosi notevole tempo. L'inizio di un cedimento è infatti un processo strettamente locale e il fattore di rischio è quindi il punto esatto in cui inizia la cricca. Grazie all' analisi agli elementi finiti (FEA), si può scegliere una qualsiasi posizione all'interno di un modello e concentrare l'attenzione su di essa, sfruttando la capacità intrinseca della tecnica di introdurre effetti dinamici. In figura 2.5 viene rappresentato un tipico modello che descrive la procedura per il calcolo della vita a fatica utilizzando una analisi agli elementi finiti. Il contributo principale degli strumenti di calcolo basati sulla FEA è quello di garantire calcoli affidabili della vita a fatica in fase di progettazione molto prima che siano possibili i prototipi reali. Oggi, nonostante che l'utilizzo di strumenti agli elementi finiti abbia portato ad un miglioramento sostanziale, il tema centrale di molte critiche è l'accuratezza del modello. Quindi si conclude dicendo che affianco al FEA bisogna sempre servirsi delle formule empiriche valide quali per esempio la legge S-N. Non si riuscirà a trovare la vita a fatica assoluta, ma i vantaggi che la FEA ha portano sono superiori alle critiche mosse.

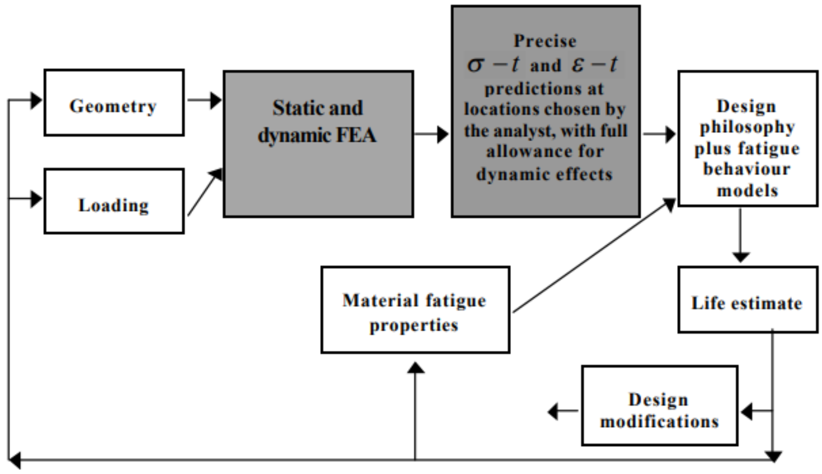

Figura 2.5: Schema concettuale per la stima della vita a fatica utilizzando un modello agli elementi finiti [8]

2.3.1 Approccio Stress-Life S-N

Stabilita la storia locale di sollecitazione-tempo per un punto che potrebbe essere critico, bisogna scegliere un metodo di analisi della fatica.
L'approccio Stress-Life ipotizza che tutte le sollecitazioni che agiscono sul componente, anche quelle locali, rimangano sempre al di sotto di un certo limite, chiamato limite elastico e indicato con σ_e. Tale modello funziona quando le sollecitaizoni applicate sono nominali e il numero di cicli al cedimento è elevato. Infatti lo si utilizza per problemi che rientrano nella categoria fatica ad elevati cicli HCF (high-cycles fatigue), e non funziona per bassi cicli LCF (low-cycles fatigue), dove le tensioni applicate hanno una componente plastica significativa. In questa regione, per esempio è più conveniente usare l'approccio Strain-Life basato sulle deformazioni. Per la fatica ad alti cicli la resistenza alla fatica è quindi comunemente espressa attraverso una curva S-N, che pone sull'asse delle ordinate la sollecitazione S e sul'asse delle ascisse il numero di cicli N. In letteratura sono presenti curve S-N lineari in figura 2.6, e bilineari in scala logaritmica in figura 2.7. La figura 2.6 mostra un tipico andamento delle curva S-N lineare. La resistenza a fatica viene determinata applicando vari livelli di sollecitazione ciclica al componente e misurando in seguito il numero di cicli necessari per giungere alla rottura. La resistenza a fatica è definita come la sollecitazione a cui si verifica il cedimento a un determinato numero di cicli di carico. Di solito il numero massimo di cicli è dell'ordine del 10^6 ma ovviamente varia al variare del materiale considerato. Se per i metalli si hanno a disposizione le curve S-N, per i materiali compositi non si può dire lo stesso proprio per la complessità che questi presentano. Nella pratica la curva S-N maggiormente utilizzata è quella in doppia scala logaritmica riportata in figura 2.7. Il punto di ginocchio (knee), che rappresenta il punto dove cambia la pendenza della curva, si trova a un determinato numero di cicli pari a 10^6 o 10^7 e la pendenza della retta m passa da un valore di m_1 (in genere di valore compreso tra 3÷10) a un valore di m_2.

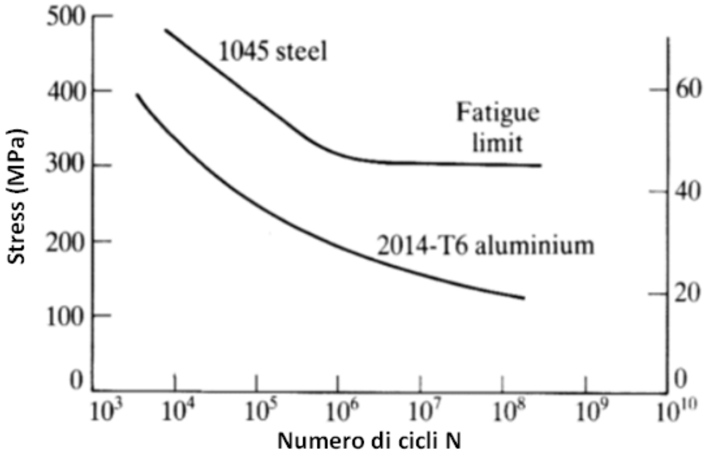

Figura 2.6: Curve a fatica S-N lineari

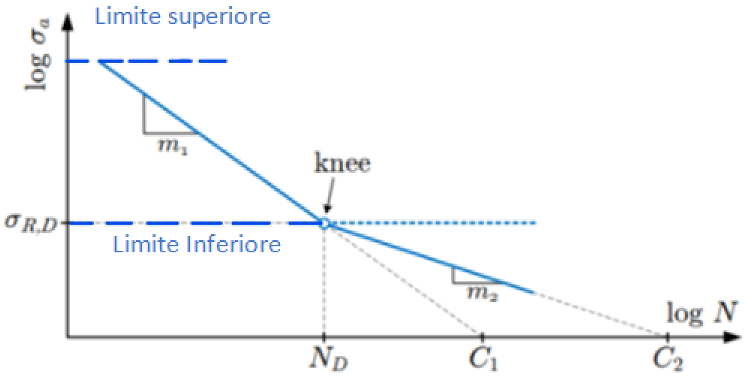

Figura 2.7: Curve a fatica S-N bilineare

Dalla figura emerge che il comportamento della curva S-N dopo il ginocchio può assumere due forme: piatta (acciai) o continuare a diminuire a un ritmo più lento (leghe di alluminio, magnesio, rame). In questo caso la curva S-N è espessa dalla seguente relazione:

$$N = C(\Delta\sigma)^{-m} \tag{2.2}$$

La curva presenta due limiti: uno superiore e uno inferiore. Il limite superiore definisce la fatica oligociclica, caratterizzata da alti valori di sollectaizoni $\Delta\sigma$ molto prossimi alla tensione di rottura per carico statico del materiale, e da valori di cicli N compresi tra $10 \div 10^4$. Il limite inferiore definisce il limite a fatica caratterizzato da bassi valori di sollecitazioni $\Delta\sigma$ e da valori di cicli N molto elevati ($> 10^8$). Il limite a fatica costituisce la massima sollecitaizone al di sotto della quale il materiale ha vita infinita, ossia non cede neanche dopo un numero elevato di cicli.
Questo valore risulta particolarmente importante quando si tratta carichi ran-

domici, i quali sono applicati un gran numero di volte ma presentato piccoli intervalli di variazione delle σ.

2.4 Fatica ad ampiezza variabile.

2.4.1 Metodo dei conteggi e danno accumulato

Le curve a fatica S-N sovracitate sono state determinate considerando storie di carico cicliche con variazioni costanti di tensione. Tuttavia nel caso reale, la storia di carico a cui è soggetta una struttura risulta essere costituita da più variazioni di tensione diverse tra loro come mostrato in figura 2.8. La storia

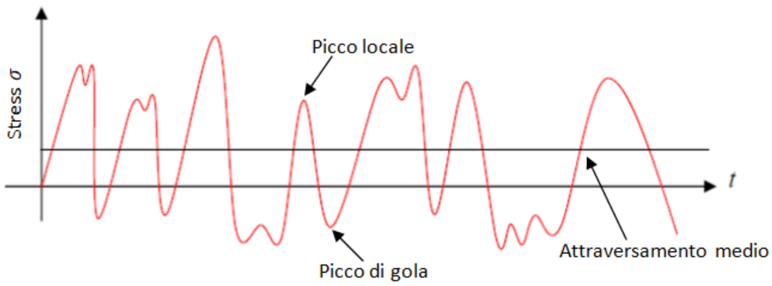

Figura 2.8: Storie di carico con cicli ad ampiezza e valor medio variabili in modo aleatorio

di carico è quindi la memorizzazione e registrazione di tutti gli eventi di carico che si verificano nel tempo. L'analisi della storia di carichi irregolari si ottiene mediante un processo di elaborazione dati che converte una sequenza di sollecitazioni variabili in una equivalente sequenza di sollecitazioni ad ampiezza costante. Il particolare processo prende il nome di conteggio. Esistono diversi metodi di conteggio:

- **Level crossing**
- **Simple range mean**
- **Serbatorio**
- **Rainflow**

Questi metodi consentono di trasformare una generica storia di carico in uno spettro di intervalli di variazione delle tensioni, il quale, a sua volta, può essere semplificato in un istogramma come mostrato in figura 2.9 [6]. Dall'immagine 2.9 si evince come lo spettro sia suddiviso in una serie di blocchi, ognuno dei quali presenta il massimo intervallo di variazione delle tensioni che si ha in quello stesso blocco [3]. Lo scopo è quello di stimare quanti di questi blocchi possono essere applicati prima di giungere a cedimento. La regola generalmente utilizzata è quella di Palmgren-Miner, che è definita legge di accumulazione del danno. Si

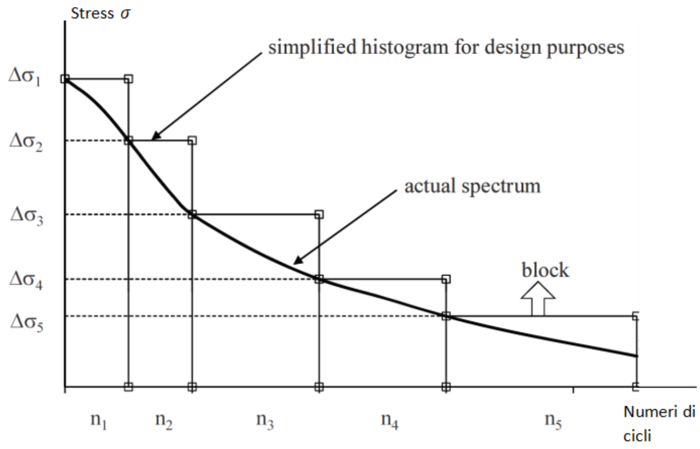

Figura 2.9: Spettro degli intervalli di variazione delle tensioni e corrispondente istogramma semplificato

basa sull'ipotesi di accumulo lineare del danno. Quando la storia di carico è costituita da un certo numero di intervalli di variazione delle tensioni $\Delta\sigma_i$ che si verificano n_i volte , il danno parziale può essere valutato come $\frac{n_i}{N_i}$, dove N_i rappresenta il numero di cicli che provoca la rottura per quella specifica$\Delta\sigma_i$. Il danno totale si esprime quindi nel seguente modo:

$$D = \sum_i D_i = \sum_i \frac{n_i}{N_i} \tag{2.3}$$

La condizione di rottura si verifica quando D = 1. Nonostante sia la legge di danno cumulativo più celebre, presenta due limiti:

1. **è lineare**. Si suppone che tutti i cicli di una determinata sollecitazione producano la stessa quantità di danni.

2. **non è interattivo**. Non tiene conto della sequenza temporale in cui sono applicate le tensioni. La presenza di $\Delta\sigma_2$ non influisce sul danno causato da $\Delta\sigma_1$.

La relazione di Miner permette di conoscere in ogni istante il danno subito da un struttura, indipendentemente dal modo con cui le sollecitazioni si susseguono. Nella realtà la teoria del danno cumulativo lineare di Miner quindi non sempre fornisce risultati accurati, perciò sono disponibili ulteriori teorie non lineari, come per esempio il criterio di Manson e Halford, di cui si riportano in seguito i passaggi più importanti [53]. Il danneggiamento di un componente può essere espresso in termini di rapporto tra la lunghezza iniziale della cricca a_i e la lunghezza della cricca al cedimento a_f.

$$D = \frac{a_i}{a_f} \tag{2.4}$$

Secondo M-H tale rapporto può essere espresso in funzione del numero di cicli a rottura n sul numero di cicli di vita N:

$$D = \frac{a_i}{a_f} = \left(\frac{n_i}{N_i}\right)^{\alpha} \tag{2.5}$$

dove

$$\alpha = \frac{2}{3} N^{0.4} \tag{2.6}$$

e quindi

$$D = \frac{a_i}{a_f} + \left(1 - \frac{a_i}{a_f}\right)\left(\frac{n_i}{N_i}\right)^{\alpha} \tag{2.7}$$

Se il componente non presenta una cricca iniziale, la 2.7 diventa:

$$D = \left(\frac{n_i}{N_i}\right)^{\alpha} \tag{2.8}$$

Se su un componente integro vengono applicate due sequenze di carico di cicli di differente ampiezza, a cui corrispondono N_1 e N_2 la relazione di M-H diventa:

$$D = \left[\left(\frac{n_1}{N_1}\right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} + \frac{n_2}{N_2}\right]^{\alpha_2} \tag{2.9}$$

Il criterio non linere di M-H sottolinea l'importanza dell'ordine della sequenza di applicazione del carico, poichè come si può vedere dalla formula 2.9, cambiando l'ordine di sequenza il danneggiamento complessivo del componente risulta differente. Se si è in presenza di carichi randomichi, in cui le ampiezze dei cicli si sussedono in modo aleatoriole, il danneggiamento calcolato con i criteri non lineari è riconducibile a quello al criterio di Miner.

2.4.2 Modelli spettrali per la stima del danneggiamento

I metodi di conteggio dei cicli e le leggi di accumulo lineare e non lineare del danno appena descritti forniscono ottimi risultati quando il carico è noto. Nel caso di sollecitazioni randomiche, la storia di carico assume caratteristiche aleatorio e tutte le grandezze ad essa associate diventano variabili aleatorie che vanno trattate con metodi statistici [68].

Nei cosiddetti metodi spettrali la sollecitazione casuale viene modellata come un processo stocastico gaussiano stazionario, descritto dalla sua densità spettrale nel dominio delle frequenze. Il vantaggio di utilizzare questo metodo nel dominio delle frequenze permette di collegare il danno a fatica direttamente alla PSD del processo, risparmiando notevole tempo in quanto si evitano i metodi di conteggio dei cicli [60]. Un processo stocastico gaussiano, stazionario ed ergodico avente valore medio nullo viene indicato in seguito con $X(t)$. Le grandezze fondamentali per la descrizione statistica dell'ampiezza del processo aleatorio sono: il valor medio, il valor quadratico medio e la varianza del processo definiti nel seguente modo:

$$m_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_X(x,t) dx \tag{2.10}$$

$$q_X(t) = E[X^2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_X(x,t) dx \tag{2.11}$$

$$\sigma_X^2(t) = E\big[[X(t) - m_X(t)]^2\big] = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - m_X(t)]^2 p_X(x,t) dx \tag{2.12}$$

nei quali $E[]$ è l'operatore di media stocastica, $p_X(x,t)$ è la funzione di densità di probabilità, che nel caso di processo gaussiano vale:

$$p_X(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X(t)} exp\bigg[-\frac{1}{2}\bigg(\frac{x - m_X(t)}{\sigma_X(t)}\bigg)^2\bigg] \tag{2.13}$$

In figura 2.10 vengono riportati esempi di funzioni di distribuzione di probabilità di tipo gaussiano(curva a campana). Tutte le variabili introdotte descrivono

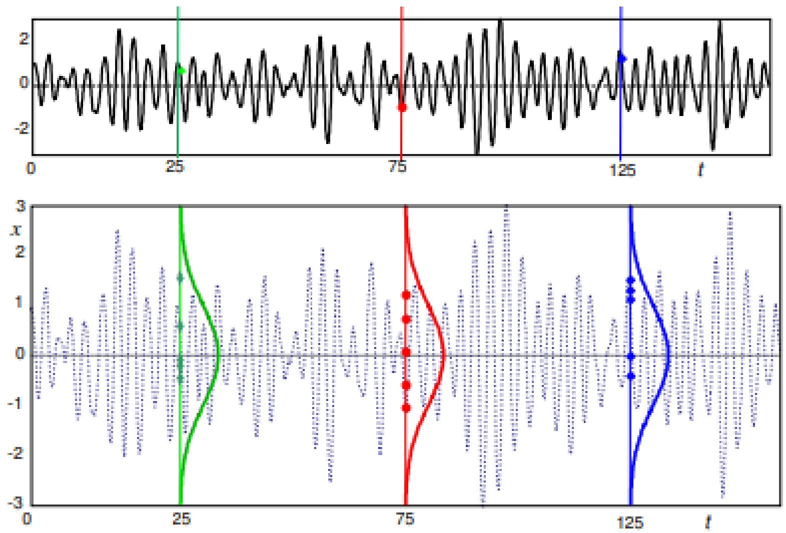

Figura 2.10: Distribuzioni di probabilità gaussiana dei processi aleatori relative a tre diversi istanti [54].

caratteristiche statistiche del processo in funzione del tempo. In questo dominio il processo è caratterizzato da una funzione, chiamata funzione di autocorrelazione e definita nel seguente modo:

$$R_X(t,\tau) = E[X(t)X(t+\tau)] \tag{2.14}$$

La funzione $R_X(t,\tau)$ dipende dal generico istante t e da un fattore temporale τ che separe il primo istante da quello successivo.
Un processo X(t) descritto nel dominio del tempo può essere univocamente tradotto nel dominio della frequenza applicando la trasformata di Fourier alla fun-

zione di autocorrelazione ottendo cosi la funzione Densità Spettrale di Potenza (Power Spectral Density) indicata con $S_X(\omega)$ [53]:

$$S_X(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau)e^{i\omega t}d\tau \tag{2.15}$$

La PSD è una funzione reale, pari e positiva, la cui area sottesa è uguale al valor quadratico medio del processo. Ciò si verifica ponendo $\tau = 0$ nella 2.14 e ricordando che $R_X(0) = E[x(t)^2]$.

$$R_X(0) = E[x(t)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega)d\omega \tag{2.16}$$

Generalmente la forma della PSD può essere a banda stretta (narrowband) se la sua PSD ha un picco attorno ad una singola frequenza; a banda larga (wide band) se la sua PSD ha un contenuto in frequenza distribuito in un intervallo più ampio [68] e [20]:; o di valore costante (rumore bianco).
Per stabilire se un processo è a banda stretta o a banda larga vengono introdotti i cosiddetti parametri spettrali. I primi sono i momenti spettrali λ_i che si definiscono nel seguente modo:

$$\lambda_i = 2\int_{0}^{+\infty} \omega^i S_X(\omega)d\omega \tag{2.17}$$

dove i = 0, 1, 2,..n. Risulta evidente come il momento spettrale zero coincida con l'area sottesa dalla PSD, come mostrato dalla relazione 2.18:

$$\lambda_0 = 2\int_{0}^{+\infty} S_X(\omega)d\omega = \sigma_X^2 \tag{2.18}$$

Il momento di ordine 2 coincide invece con la varianza della derivata del processo:

$$\lambda_2 = 2\int_{0}^{+\infty} \omega^2 S_X(\omega)d\omega = \sigma_{\dot{X}}^2 \tag{2.19}$$

Esistono poi parametri che definiscono la lunghezza di banda α_i,

$$\alpha_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_0 \lambda_{2i}} \tag{2.20}$$

Il loro valore è sempre compreso tra 0 e 1, e quello che definisce la propriamente la lunghezza della banda è α_2, chiamato anche fattore di irregolarità e definito nel seguente modo:

$$\alpha_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_0 \lambda_4} \tag{2.21}$$

Altri parametri importanti per l'analisi come il numero di attraversamenti dello zero con pendenza positiva [68] o il numero medio dei picchi al secondo. Essi sono definiti rispettivamente nel seguente modo:

$$n_0^+ = \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_0}} \tag{2.22}$$

$$n_p^+ = \sqrt{\frac{\lambda_4}{\lambda_2}} \tag{2.23}$$

Illustrate le caratteristiche principali dell'approccio spettrale e i parametri che definiscono le grandezze in gioco, per il calcolo della vita a fatica si deve utilizzare un appropriato metodo. In letteratura esistono molti metodi spettrali per il calcolo della vita per fatica casuale, tuttavia i due che hanno riscosso il maggior successo sono: il metodo di Dirlik(1985) e quello di Tovo-Benasciutti(2002-2005). In questa trattazione non verranno trattati e si rimanda a [20] la loro spiegazione, in quanto questi due modelli funzionano molto bene per materiali metallici e non per i compositi.
Per quanto riguarda il calcolo della vita a fatica del laminato in composito di questa tesi si partità sempre da un approccio spettrale nel dominio delle frequenze ma si utilizzerà il modello di Wu-Yao, descritto nel pagagrafo successivo.

2.4.3 Modello di danno per i materiali compositi di Fuqiang Wu e WeiXing Yao

In questa trattazione per il calcolo della vita a fatica del laminato in materiale composito viene utilizzato il modello Fuqiang Wu e WeiXing Yao, il quale associa il danneggiamento D direttamente alla variazione della rigidezza del materiale. Il modello di danno proposto è espresso dalla seguente relazione:

$$D(n) = \frac{E_0 - E(n)}{E_0 - E_f} = 1 - \left(1 - (\frac{n}{N})^B\right)^A \tag{2.24}$$

dove E_0 è il modulo di Young iniziale, E_f è il modulo di Young a rottura, E(n) è il modulo di Young del materiale sottoposto all'ennesimo carico ciclico, n è il ciclo, N è la vita a fatica, A e B sono parametri del modello, D(n) è il danno da fatica che è uguale a 0 quando n = 0, e uguale a 1 quando n = N [75]. Quindi i parametri A e B possono essere espressi come:

$$A = pB + q \tag{2.25}$$

dove $p = 0.67$ e $q = 0.44$. B descrive le caratteristiche del danno del laminato nel periodo iniziale ed è inversamente proporzionale al livello di carico :

$$B = k\frac{logN}{(1-R)(\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{ult}})} \tag{2.26}$$

dove σ_{max} è la sollecitazione massima, σ_{ult} è la sollecitaizone ultima a rottura e k è una costante proporzionale. La relazione 2.10 è quindi valida solo per sollecitazioni ciciche ad ampiezza costante. Sotto carichi di fatica ad ampiezza variabile, il danno prodotto nella fase di carico precedente influenzerà il danno prodotto nella fase di carico successiva, come indicato nella relazione 2.27:

$$D(n_i) = 1 - \left(1 - (\frac{n_i + n_{i,i-1}}{N_{i-1}})^{B_i}\right)^{A_i} \tag{2.27}$$

$$n_{i,i-1} = N_i \left(1 - \left(1 - (\frac{n_{i-1} + n_{i-1,i-2}}{N_{i-1}})^{B_{i-1}}\right)^{\frac{A_{i-1}}{A_i}}\right)^{B_i^{-1}} \tag{2.28}$$

dove A_i, A_{i-1}, B_i e B_{i-1} sono parametri dell'i-esimo e (i-1)-esimo carico di fatica; n_i e n_{i-1} sono i cicli sotto i-esimo e (i-1)esimo carico ciclico; N_i $N_i{-}1$ sono le vite a fatica corrispondenti all'i-esimo e (i-1)esimo carico applicato. La complessità nel calcolo della vita a fatica dei materili compositi è che non si hanno a disposizione curve S-N generalizzate, ma ogni composito avrà la sua specifica. Fuqiang Wu e WeiXing Yao hanno proposto un modello di curva S-N:

$$S = 1 + (m(exp(-(\frac{logN}{b})^a) - 1) \tag{2.29}$$

dove $S = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{ult}}$; a,b e m sono dei parametri sperimentali. Nella tabella 2.1 vengono riportati i valori più frequntemente utilizzati per i parametri appena citati: La formula che verrà utilizzata per il calcola a fatica del laminato composito

Parametro	Valore
a	1
b	1
k	0.06
m	0.1

Tabella 2.1: Valori numerici dei seguenti parametri presenti nel modello del danno di Fuqiang Wu e WeiXing Yao: a, b, k, m

grafite/epossidica nel capitolo 6 è una riformulazione della 2.15 ed è la seguente e presente in [76]:

$$\frac{100S}{\sigma_{ult}} = f - glogN \tag{2.30}$$

dove f vale 97.91 e g vale 7.75. Questa rappresenta la curve S-N del laminato grafite/epossidica che verrà trattato successivamente nel capitolo 6.

Capitolo 3

I materiali compositi

Questo capitolo è interamente dedicato alla descrizione dei materiali compositi, mettendo in rilievo la loro importanza nell'applicazioni aerospaziali. Dopo aver illustrato le varie tipologie di fibre e matrici, si evidenzia il loro comportamento a fatica, soffermandosi sui processi di danneggiamenti e sui fattori che ne influenzano la resistenza a fatica.

3.1 Introduzione

L'impiego dei materiali compositi nel settore industriale ha assunto nel corso del tempo una posizione predominante, tanto da aver sostituito quasi del tutto in molte strutture primarie e secondarie, in ambito aeronautico e aerospaziale, i materiali metallici che hanno governato la scena per molti anni. Il motivo principale di tale rilevanza è il grande vantaggio che i compositi possiedono: permettono la realizzazione di componenti strutturali, quali fusoliere, strutture alari, eliche e parti di lanciatori riducendo dimensioni e quindi il peso, alleggerendo il sistema complessivo. I compositi maggiormente utilizzati in questi ambiti sono costituiti da tessuti in fibra di carbonio impregnati in una matrice epossidica, in quanto forniscono eccellenti proprietà meccaniche abbinate ad un'ottima leggerezza.
L'evoluzione storica nell'utilizzo dei materiali compositi in strutture aeronautiche è mostrata in figura 3.1. Le principali caratteristiche dei materiali compositi sono:

- resistenza
- leggerezza
- comportamento a fatica
- rigidezza
- resistenza alla corrosione e all'usura

Tutti questi vantaggi ovviamente non si possono ottenere in un unico materiale; durante la fase di realizzazione e progettazione verrà trovato quindi il giusto

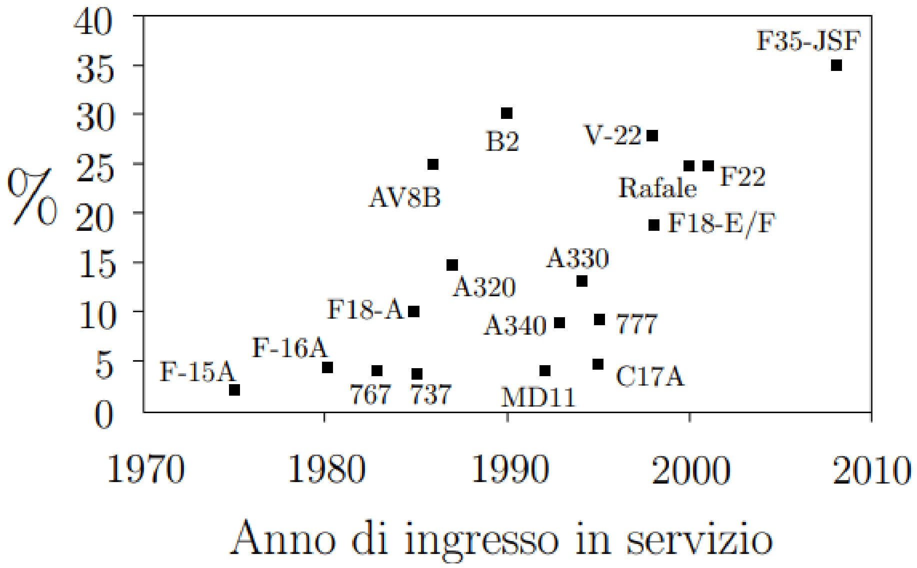

Figura 3.1: Crescita dell'impiego di compositi avanzati in strutture aeronautiche in percentuale del peso strutturale,[2]

compromesso, sfruttando in modo ottimale la proprietà che meglio soddisfa l'esigenza richiesta. Ciò ovviamente si traduce in un maggior costo di produzione. Si ricorda che i materiali compositi sono anisotropi, cioè che le loro proprietà dipendono dalla direzione lungo la quale vengono considerate, una delle principali peculiarità che li differenzia dai materiali metallici che invece sono isotropi, ovvero possiedono le medesime caratteristiche fisiche in tutte le direzioni.

3.2 Definizione e classificazione dei materiali compositi

In generale per materiale composito si intende una combinazione di due o più componenti, o fasi, di natura diversa e macroscopicamente distinguibili, che insieme portano alla realizzazione di un materiale con proprietà meccaniche e fisiche complessivamente superiori [30]. In un materiale composito si distinguono quattro fasi:

- **matrice**. E' il costituente continuo che regge il carico esterno e lo trasferisce al rinforzo, proteggendolo dai fattori ambientali e dall'usura;

- **rinforzo**. E' il costituente discontinuo che si presenta sotto forma di fibre o particelle; ha il compito di assicurare rigidezza e resistenza meccanica;

- **interfaccia**. La zona di contatto tra la fase di rinforzo e la matrice, è importante nel controllo del meccanismo di rottura e nella resistenza alla frattura;

- **porosità**. A causa dell'accoppiamento meccanico tra fibra e matrice esiste la possibilità che si vengano a creare delle imperfezioni, chiamate appunto porosità. [40]

Una prima classificazione dei compositi è legata al tipo di rinforzo. Si distinguono infatti:

1. **compositi particellari**. Sono rinforzati con particelle, la cui funzione è quella di ridurre la quantità di matrice impiegata e quindi il peso del materiale finale. Sono meno impiegati rispetto agli altri due perchè la presenza di particelle non riesce ad ostacolare in modo efficace la propagazione di eventuali cricche e difetti. Rispetto alle fibre, il principale vantaggio dell'utilizzo di particelle è quello di avere il rinforzo distribuito all'interno della matrice in modo non controllato, realizzando cosi dei compositi praticamente isotropi.[23];

2. **compositi fibro-rinforzati**. La fase dispersa è costituita da fibre, che possono essere lunghe, e quindi pari alla lunghezza del composito considerato, e prendono il nome di fibre continue, oppure corte e sono denominate fibre discontinue. Le fibre continue e allineate garantiscono la trasmissione delle sollecitazioni dal punto di applicazione del carico al vincolo; quelle corte consentono invece la realizzazione di materiali con forme irregolari, conferendo al materiale una resistenza più bassa ma uniforme in tutte le direzioni, ottenendo così un materiale quasi isotropo.[7]. Ad ogni modo questi compositi sono di gran lunga quelli più utilizzati nelle costruzioni aeronautiche per l'elevata resistenza specifica (resistenza/peso) e modulo specifico (rigidezza/peso) unito alla possibilità di variare il grado di anisotropia intervenendo sulla concentrazione e sull'orientamento del rinforzo;

3. **compositi strutturali**. In questa famiglia di compositi si trovano i pannelli sandwich e i laminati che sono molto utilizzati nel campo aerospaziale e soprattutto nell'automotive. Ci soffermeremo a descrivere brevemente i laminati, in quanto oggetto di analisi nel capitolo 6. I laminati si ottengono per stratificazione di lamine, disposte secondo differenti orientazioni e sono utilizzati quando sono richieste elevate prestazioni meccaniche in termini di rigidezza, resistenza e comportamento alla fatica. Le proprietà dipendono molto dall'orientamento delle fibre, permettendo di ottenere le qualità richieste lungo una o più direzioni specifiche. In fase di progettazione si cerca quindi di stabile la sequenza di impilamento più adatta.
   Un laminato si dice simmetrico se per ogni lamina orientata di un certo angolo, ad una certa distanza dall'asse x, ce n'è un'altra uguale dall'altra parte [3]. In figura 3.2 è rappresentato un laminato asimmetrico con relativa sequenza di impilamento.

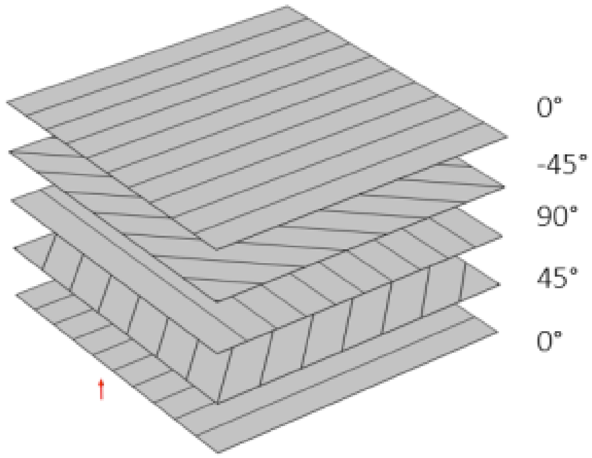

Figura 3.2: Esempio di laminato a 5 strati con relativa sequenza di impilamento [24]

3.3 Generalità sulle fibre

Nel materiale composito la fibra rappresenta il rinforzo con il compito principale di sostenere il carico, influenzando modulo e resistenza a trazione e compressione, resistenza a fatica, conducibilità termica ed elettrica, densità, e coefficiente di espansione termica. Nella pratica sono tre le fibre che vengono utilizzate: fibre di vetro, fibre di carbonio e fibre aramidiche.

3.3.1 Fibre di vetro

Le fibre di vetro sono utilizzate in molti settori industriali per la loro elevata resistenza. Il vetro è composto principalmente da silice in struttura tetraedrica, e in minor parte da ossidi di alluminio ed altri ioni metallici. Presentano sicuramente una buona resistenza, un elevato modulo di Young, una certa attitudine allo scorrimento viscoso ed una modesta resistenza a fatica, una stabilità dimensionale e una resistenza al caldo e alla corrosione. Il vetro utilizzato è essenzialmente di due tipi:

- Vetro S a maggiore contenuto di SiO2 (resistenza 4,30 GPa, modulo 86 GPa)
- Vetro E, costituito da calcio-allumino-borosilicato (resistenza 3,40 GPa, modulo 72 GPa)

3.3.2 Fibre di carbonio

Le fibre di carbonio sono impiegate per la realizzazione di materiali compositi ad elevate prestazioni meccaniche. Possiedono un comportamento a rottura fragile e sono meno sensibili ai fenomeni di scorrimento viscoso (creep). Le fibre di carbonio hanno in media le seguenti proprietà: modulo elastico (190-240 GPa), resistenza (3.1-4.5 GPa), densità (1500 kg/m3). Sono più costose rispetto alle altre due. In tabella 3.1 sono elencati i vantaggi e svantaggi di tali fibre:

Vantaggi	Svantaggi
Elevato modulo specifico a trazione	Bassa resistenza all' impatto
Elevata resistenza specifica a trazione	Elevata conducibilità elettrica
Basso coefficiente di espansione termica lineare	Elevato costo
Elevata resistenza a fatica	

Tabella 3.1: Vantaggi e svantaggi delle fibre di carbonio

3.3.3 Fibre aramidiche

Le fibre aramidiche sono fibre di natura organica, costituite da poliammidi aromatiche. Esse presentano caratteristiche meccaniche intermedie tra le fibre di vetro e quelle di carbonio, un comportamento viscoso paragonabile e una resistenza a rottura e a fatica maggiore. Sicuramente la peculiarità che li differenzia dalle altre due fibre è l'elevata tenacità. I principali vantaggi sono:

- valide proprietà meccaniche;
- elevata stabilità chimica;
- coefficiente di espansione termico negativo;
- allungamento a rottura elevato.

I principali svantaggi sono:

- scarsa resistenza alla compressione,
- elevata degradazione se esposte ai raggi ultravioletti.

3.4 Generalità sulle matrici

Come descritto precedentemente, la parte continua di un materiale composito è definita matrice. La matrice svolge differenti funzioni all'interno di un materiale composito:

- è responsabile del collegamento tra le fibre, cioè tiene le fibre stabili nella loro posizione, migliorando le proprietà meccaniche;
- mantiene le fibre separate, evitando di attribuire al composito un comportamento fragile;

- protegge le fibre dall'ambiente circostante, che può essere corrosivo o composto da agenti ossidanti;
- riesce a bloccare ipotetiche propagazioni delle cricche insorte nelle fibre [10];
- deve possedere in fase di produzione una bassa viscosità e tensione superficiale, che permettono di ottenere una buona bagnabilità tra le fibre, impregnadole tutte senza lasciare interstizi.

Le matrici si classificano in due grandi gruppi: matrici organiche (o polimeriche) e matrici inorganiche. Le prime sono maggiormente utilizzate perchè non richiedono particolari tecnologie avanzate di produzione e per i costi abbastanza contenuti. Esse si suddividono a loro volta in matrici termoindurenti e matrici termoplastiche. Le matrici inorganiche, meno utilizzate in constesti strutturali, si dividono in metalliche, ceramiche e vetrose.

3.4.1 Matrici termoindurenti

Le matrici termoindurenti sono quelle più largamente impiegate in ambito aeronautico per l'elevata stabilità termica, l'elevata rigidità, resistenza al creep e basso peso. Con il termine termoindurenti si indicano le proprietà di certi materiali polimerici di diventare infusibili ed insolubili dopo essere stati portati a fusione e successivamente raffreddati. Il motivo di ciò è da ricercare a livello molecolare, in quanto la presenza di forti legami covalenti, dopo la prima fusione, rende irreversibile il processo. In figura 3.3 vengono riportate le pricipali caratteristiche di tutte le resine termoindurenti. Tra le resine termoindurenti, quelle

Materiale	Densità (g/cm^3)	Resistenza allaTrazione (MPa)	Resistenza all'Impatto (J/m)	Rigidità Dielettrica (V/m)	Max temperatura di utilizzo (°C)
FENOLICHE:					
con cellulosa	1.34 – 1.45	34 – 62	11 – 32	10250 – 15750	150 – 177
con mica	1.65 – 1.92	38 – 48	16 – 21	13800 – 15750	120 – 150
con vetro	1.69 – 1.95	34 – 124	16 – 960	5500 – 15750	177 – 288
POLIESTERE:					
SMC con vetro	1.7 – 2.1	55 – 138	427 – 1175	12600 – 15750	150 – 177
BMC con vetro	1.7 – 2.3	28 – 69	800 – 855	11800 – 16550	150 – 177
MELAMMINICA:					
con cellulosa	1.45 – 1.52	34 – 62	11 – 21	13800 – 15750	120
con fiocco	1.50 – 1.55	48 – 62	21 – 27	11800 – 13000	120
con vetro	1.8 – 2.0	34 – 69	32 – 960	6700 – 11800	150 – 200
UREICA:					
con cellulosa	1.47 – 1.52	38 – 90	11 – 21	11800 – 15750	77
ALCHIDICA:					
con vetro	2.12 – 2.15	28 – 66	32 – 534	13800 - 17750	230
con minerali	1.60 – 2.30	21 – 62	16 – 27	13800 - 17750	150 - 230
EPOSSIDICA:					
non caricata	1.06 – 1.40	28 – 90	11 – 534	15750 – 25600	120 – 260
con minerali	1.6 – 2.0	34 – 103	16 – 21	11800 – 15750	150 – 260
con vetro	1.7 – 2.0	69 – 207	…	11800 – 15750	150 – 260

Figura 3.3: Caratteristiche principali delle resine termoindurenti [52]

epossidiche sono le più impiegate perchè presentano complessivamente le proprietà migliori. Sono trattate a temperature e pressioni non elevate, possiedono buone caratteristiche meccaniche, hanno resistenza chimica e all'umidità di gran lunga superiore rispetto alle altre. Hanno un costo moderato e un basso ritiro, rendendo quindi meno probabile l'eventuale formazione di cricche [23]. Le resine fenoliche sono impiegate in applicazioni ad elevate temperature ed elevate sollecitazioni. Esse sono utilizzate per le proprietà di isolamento termico e elettrico e sono le meno costose, ma sono estremamente pericolose per la salute dell'uomo in quanto la presenza di formaldeide provoca effetti cancerogeni.

3.4.2 Resine termoplastiche

Le resine termoplastiche derivano da polimeri lineari o poco ramificati con elevato peso specifico. Le matrici termoplastiche non presentano il fenomeno di reticolazione a differenza delle termoindurenti. Sono quindi più deformabili e meno fragili rispetto alle precedenti. Tra le resine termoplastiche si annovera:

- **Polietilene**. Si ottiene polimerizzando l'etilene. Viene impiegato per apparecchiature elettriche.

- **Polistirene**. Gli impieghi principali sono per isolamento termico e acustico.

- **Polivinilcloruro**. E' la resina più usata nel settore delle costruzioni per l'elevata resistenza a trazione e flessione, per la buona resistenza agli attacchi chimici, e per la resistenza all'abrasione.

3.4.3 Matrici metalliche e matrici ceramiche

Le matrici metalliche trovano applicazioni principalmente in campo aerospaziale. Hanno una temperatura di formazione molto elevata e ciò rende problematico il loro processo di produzione. Quando si vuole realizzare un composito ad elevata tenacità si predilige l'uso di matrici ceramiche, poichè sono caratterizzate da forti legami covalenti o ionici e perciò presentano un'alta refrattarietà ed inerzia chimica, nonchè alto modulo elastico e notevole durezza.[43].

3.5 La fatica nei materiali compositi

Introdotti i concetti generali, in questo paragrafo si passa ad affrontare l'argomento principale di questo lavoro, ossia il concetto di fatica nei materiali compositi, al quale si prova a conseguire, attraverso l'analisi numerica svolta nel capitolo 6, una validità pratica per gli studi futuri, non disponendo attualmente di sufficienti dati sperimentali. Come affermato, la fatica è il principale meccanismo di cedimento per le strutture sottoposte a carico ciclico.
Mentre per i materiali metallici sono stati compiuti molti progressi nella progettazione e nello sviluppo di metodologie per la previsione della vita a fatica, per

i materiali compositi diventa complesso condurre analisi sulla fatica in quanto le proprietà dei materiali costituenti del composito sono piuttosto diverse. Infatti il comportamento a fatica di un costituente può essere influenzato degli altri costituenti presenti e dalle regioni di interfaccia tra essi [1].

3.5.1 Processi di danneggiamento

Alla base dello studio del comportamento a fatica dei materiali compositi e, di conseguenza della stima della vita a fatica delle strutture vi è sicuramente il meccanismo di evoluzione del danno. E' risaputo che il danno da fatica dei materiali compositi è più complesso di quello dei metalli. Di seguito sono elencati quattro principali meccanismi di danneggiamento sotto carico ciclico:

- **scollamento della fibra**;
- **fessurazione della matrice**;
- **rottura della fibra**;
- **collamento delle lamine**.

Negli ultimi decenni gli studi sulla resistenza a fatica e sulla dissipazione di energia nei compositi si sono intensificati e sono stati sviluppati molti modelli di danno, descritti in [58],[41],[64],[22] e [75]. Tuttavia la maggior parte dei modelli è adatta solo a un tipo specifico di materiale composito e non è in grado di adattarsi ad altri. Il meccanismo di danneggiamento a fatica dei compositi è oggetto comunque di continui studi e ricerche.
Nei materiali metallici la nucleazione di una cricca è seguita da una crescita repentina esponenziale. Nei compositi invece il danneggiamento può iniziare anche prima del cedimento effettivo. I meccanismi di innesco ed evoluzione delle cricche sono quindi piuttosto complessi per i materiali compositi: le fessure possono iniziare in punti diversi e in direzioni diverse. Reifsnider sulla base delle sue analisi sperimentali aveva concluso che nei materiali compositi l'evoluzione del danno da fatica non è lineare. Generalmente durante il periodo iniziale, la formazione di cricche si verifica maggiormente nelle matrici. Con il passare del tempo aumentando la densità di tali fessure si giunge all'interazione con le fibre e ciò porta alla rottura di quest'ultime (delaminazione). Una rappresentazione di quanto appena detto è mostrato in figura 3.4. Come già affermato nella parte introduttiva lo studio della vita a fatica per i materiali compositi rimane ancora un processo complesso: non esistono infatti relazioni attendibili, ma ogni ricercatore prova a fornire un metodo per tale analisi e non si è ancora giunti a soluzioni condivise soprattutto nel caso di fatica casuale[82].

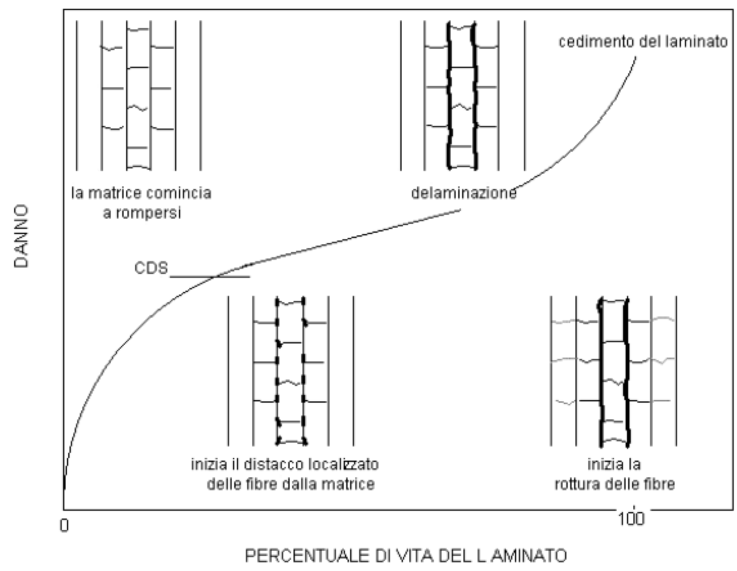

Figura 3.4: Evoluzione del danno a fatica nei laminati compositi [58]

3.5.2 Fattori che influenzano la resistenza a fatica nei compositi

Per la stima della vita a fatica dei materiali esistono diversi fattori che ne influenzano il calcolo. Sono in seguito riportati i parametri principali che determinano la vita a fatica di un composito:

- **materiale della matrice**. La scelta della matrice risulta essere fondamentale; nella fase di produzione bisogna infatti optare per matrici ad elevata resistenza e una buona adesione con la fibra utilizzata. Alcuni studi evidenziano come la resina epossidica, abbinata alle fibre di vetro, garantisce la maggior resistenza a fatica per alto numero di cicli;

- **percentuale volumetrica di fibre**. La resistenza a fatica di un composito aumenta all'aumentare della concentrazione volumetrica delle fibre;

- **orientamento delle fibre e sequenza di impacchettamento**. La massima resistenza a fatica in un composito si verifica quanto le varie lamine sono disposte con angoli di $\pm(5° \div 10°)$. La sequenza di impacchettamento ha un ruolo importante ai fini del calcolo della vita a fatica in quanto influenza le tensioni;

- **adesione fibra-matrice**. L'adesione fibra-matrice ricopre anch'essa un ruolo essenziale per il calcolo della vita a fatica. Lo si può migliorare in fase di produzione e con trattamenti superficiali;

- **tipo di sollecitazione**. Il tipo di sollecitazione, quali per esempio taglio o trazione, influenza la vita a fatica nei compositi. In particolare la tensione di taglio può essere più sfavorevole per un materiale piuttosto che per un altro e viceversa per la trazione. Ciò si traduce in un'impossibilità di standardizzare i risultati ottenuti;

- **tensione media applicata**. La tensione alternata σ_a è la responsabile della vita a fatica. Essa è strettamente legata alla tensione media σ_m, dalla relazione di Goudman-Boller. In particolare al crescere di σ_m la σ_a descresce fino a giungere lo zero quando la tensione media tende alla tensione di rottura σ_{ult};

- **frequenza di applicazione del carico**. Quando si aumenta la frequenza di carico si ha un aumento della temperatura nel materiale e ciò porta inevitabilmente ad un calo della resistenza a fatica;

- **condizioni ambientali**. Le condizioni ambientali in cui è posto il componente durante la sua vita operativa, giocano un ruolo centrale. I principali fattori ambientali che influenzano la resistenza a fatica sono la temperatura e umidità;

- **effetti di intaglio**. Per i materiali compositi la presenza di un intaglio provoca una riduzione della resistenza statica e della resistenza a fatica [82].

Capitolo 4

Formulazione Unificata

In questa sezione si utilizza la Formulazione Unificata di Carrera (CUF) per introdurre la teoria unificata delle travi e piastre che includono le non linearità geometriche. La CUF, proposta e descritta in seguito, permette di scrivere le equazioni relative ai campi di spostamento per qualsiasi teoria raffinata 1D, 2D o 3D in termini di nuclei fondamentali, la cui forma non dipende dalle assunzioni usate, quali tipo e ordine della funzione.

4.1 Equazioni di governo e relazioni geometriche

Si introducono il vettore generico di dislocazioni trasposto, degli sforzi e delle deformazioni:

$$u(x, y, z) = [u_x \quad u_y \quad u_z]^T \tag{4.1}$$

$$\sigma(x, y, z) = [\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{xz} \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_{xy}]^T \tag{4.2}$$

$$\epsilon(x, y, z) = [\epsilon_{xx} \quad \epsilon_{yy} \quad \epsilon_{zz} \quad \epsilon_{xz} \quad \epsilon_{yz} \quad \epsilon_{xy}]^T \tag{4.3}$$

Tramite la legge di Hooke si ricava la relazione costitutiva:

$$\sigma = C\epsilon \tag{4.4}$$

dove C rappresenta la matrice di rigidezza del materiale. La matrice C dipende dal coefficiente di Poisson, modulo di Young E e di taglio G. Per quanto riguarda le relazioni geometriche si considerano le componenti di deformazioni non lineari di Green-Lagrange. Pertanto le relazioni spostamento-deformazione sono espresse come:

$$\epsilon = \epsilon_l + \epsilon_{nl} = (b_l + b_{nl})u \tag{4.5}$$

dove b_l e b_{nl} sono rispettivamente gli operatori differenziali lineari e non lineari. Per completezza la loro espressione è riportata qui in seguito:

$$b_l = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z \\ \partial_z & 0 & \partial_x \\ 0 & \partial_z & \partial_y \\ 0 & \partial_y & \partial_x \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

$$b_nl = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\partial_x)^2 & \frac{1}{2}(\partial_x)^2 & \frac{1}{2}(\partial_x)^2 \\ \frac{1}{2}(\partial_y)^2 & \frac{1}{2}(\partial_y)^2 & \frac{1}{2}(\partial_y)^2 \\ \frac{1}{2}(\partial_z)^2 & \frac{1}{2}(\partial_z)^2 & \frac{1}{2}(\partial_z)^2 \\ (\partial_x\partial_z) & (\partial_x\partial_z) & (\partial_x\partial_z) \\ (\partial_x\partial_y) & (\partial_x\partial_y) & (\partial_x\partial_y) \\ (\partial_y\partial_z) & (\partial_y\partial_z) & (\partial_y\partial_z) \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

4.2 Formulazione unificata di Carrera

Nell'ambito della Formulazione Unificata di Carrera (CUF), il campo di spostamento tridimensionale u(x, y, z) può essere espresso come un'espansione generale delle incognite primarie in termini di nuclei fondamentali. Il generico campo di spostamento 3D è :

$$u = u(x, y, z) \tag{4.8}$$

dove u(x,y,z) è la funzione soluzione del problema. Di seguito verranno illustrate le formulazioni per il modello trave(1D) e piastra(2D)[14] [13].

4.2.1 Modello trave 1D

Si considera una struttura a trave la cui sezione trasversale giace sul piano xz di un sistema di riferimento cartesiano, dove l'asse della trave è posizionato lungo y e misura L, come mostrato in figura 4.1. Il campo di spostamento tridimensionale per il caso trave 1D è espresso nel seguente modo:

$$u(x, y, z) = F_s(x, z)u_s(y) \tag{4.9}$$

dove F_s rappresenta la funzione di espansione attraverso la sezione trasversale della trave (xz) ed è determinata a priori, in quanto dipende dal modello strutturale usato nell'analisi; invece u_s esprime lo spostamento e dipende dalla coordinata y. In particolare lo spostamento generalizzato dipende da una funzione di forma moltiplicata per gli spostamenti nodali come segue:

$$u_s = N_i(y)q_{is} \tag{4.10}$$

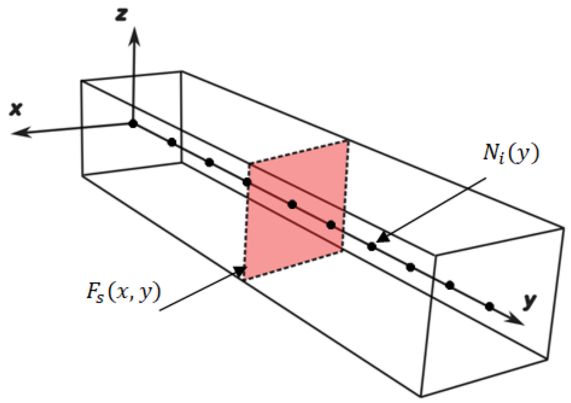

Figura 4.1: Configurazione del modello trave

dove i= 1,....,t+1 con t ordine delle funzioni di forma.
Si riassume quindi che le funzioni di forma N_i caratterizzano la discretizzazione lungo l'asse y, mentre quelle di espnsione discretizzano la sezione xz. Come sarà illustrato nelle sezioni successive le funzioni di espansioni possono essere polinomi di Lagrange o di Taylor.
Combinando le due espressioni si ottiene:

$$u_s = F_s(x,z)N_i(y)q_{is} \tag{4.11}$$

Ora si può riscrivere la relazione costitutiva nel seguente modo:

$$\epsilon = (b_l + b_{nl})u = (b_l + b_{nl})F_s(x,z)N_i(y)q_{is} = (B_l^{si} + B_{nl}^{si})q_{is} \tag{4.12}$$

dove le B_l^{si} e B_{nl}^{si} sono gli operatori di derivata applicati alle funzioni di forma e le funzioni di espansione lungo lo spessore e sono definite nel seguente modo:

$$B_l^{si} = b_l(F_sN_i) = \begin{bmatrix} F_{s_x}N_i & 0 & 0 \\ 0 & F_sN_{i_y} & 0 \\ 0 & 0 & F_{s_z}N_i \\ F_{s_z}N_i & 0 & F_{s_x}N_i \\ 0 & F_{s_z}N_i & F_{s_x}N_i \\ F_sN_{i_y} & F_{s_x}N_i & 0 \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

$$B_{nl}^{si} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} u_{x_x}F_{s_x}N_i & u_{y_x}F_{s_x}N_i & u_{z_x}F_{s_x}N_i \\ u_{x_y}F_sN_{i_y} & u_{y_y}F_sN_{i_y} & u_{z_y}F_sN_{i_y} \\ u_{x_z}F_{s_z}N_i & u_{y_z}F_{s_z}N_i & u_{z_z}F_{s_z}N_i \\ u_{x_x}F_{s_z}N_i + u_{x_z}F_{s_x}N_i & u_{y_x}F_{s_z}N_i + u_{y_z}F_{s_x}N_i & u_{z_x}F_{s_z}N_i + u_{z_z}F_{s_x}N_i \\ u_{x_y}F_{s_z}N_i + u_{x_z}F_sN_{i_y} & u_{y_y}F_{s_z}N_i + u_{y_z}F_{s_z}N_i & u_{z_y}F_{s_z}N_i + u_{z_z}F_sN_{i_y} \\ u_{x_y}F_sN_{i_y} + u_{x_y}F_{s_x}N_i & u_{y_x}F_sN_{i_y} + u_{y_y}F_{s_x}N_i & u_{z_x}F_sN_{i_y}0 + u_{z_y}F_{s_x}N_i \end{bmatrix} \tag{4.14}$$

4.2.2 Modello piastra 2D

La figura 4.2 raffigura il modello piastra 2D che verrà utilizzato nella seguente trattazione. Quando si considera un modello 2D come la piastra l'equazione dello

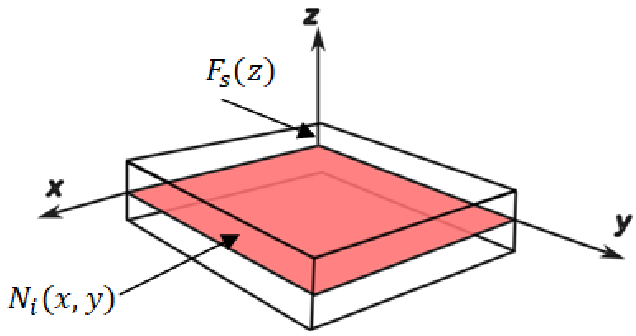

Figura 4.2: Configurazione del modello piastra

spostamento cambia:

$$u(x, y, z) = F_s(z)u_s(x, y) \tag{4.15}$$

ossia le funzioni di espansione si sviluppano lungo lo spessore z mentre lo spostamento ora dipenderà da due componenti x, y. Utilizzando quindi l'approssimazione classica del metodo agli elementi finiti l'equazione che descrive il campo degli spostamenti nel caso 2D si riscrive nel seguente modo:

$$u(x, y, z) = F_s(z)N_i(x, y)q_{is} \tag{4.16}$$

A differenza del modello trave, in aggiunta alle funzioni di espansione che dipendono solo dalla componente z, cambiano anche quelle di forma $N_i(x, y)$ che dipendono da x e y. Si può quindi riscrivere la relazione costititutiva:

$$\epsilon = (b_l + b_{nl})u = (b_l + b_{nl})F_s(x, z)N_i(y)q_{is} = (B_l^{si} + B_{nl}^{si})q_{is} \tag{4.17}$$

dove le B_l^{si} e B_{nl}^{si} sono gli operatori di derivata applicati alle funzioni di forma e di espansione lungo lo spessore e sono definite nel seguente modo:

$$B_l^{si} = b_l(F_sN_i) = \begin{bmatrix} F_sN_{i_x} & 0 & 0 \\ 0 & F_sN_{i_y} & 0 \\ 0 & 0 & F_{s_z}N_i \\ F_{s_z}N_i & 0 & F_sN_{i_x} \\ 0 & F_{s_z}N_i & F_sN_{i_y} \\ F_sN_{i_y} & F_sN_{i_x} & 0 \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

$$B_{nl}^{si} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} u_{x_x}F_sN_{i_x} & u_{y_x}F_sN_{i_x} & u_{z_x}F_sN_{i_x} \\ u_{x_y}F_sN_{i_y} & u_{y_y}F_sN_{i_y} & u_{z_y}F_sN_{i_y} \\ u_{x_z}F_{s_z}N_i & u_{y_z}F_{s_z}N_i & u_{z_z}F_{s_z}N_i \\ u_{x_x}F_sN_{i_x} + u_{x_z}F_sN_{i_x} & u_{y_x}F_{s_z}N_i + u_{y_z}F_sN_{i_x} & u_{z_x}F_{s_z}N_i + u_{z_z}F_sN_{i_x} \\ u_{x_y}F_{s_z}N_i + u_{x_z}F_sN_{i_y} & u_{y_y}F_{s_z}N_i + u_{y_z}F_{s_z}N_i & u_{z_y}F_{s_z}N_i + u_{z_z}F_sN_{i_y} \\ u_{x_y}F_sN_{i_y} + u_{x_y}F_sN_{i_x} & u_{y_x}F_sN_{i_y} + u_{y_y}F_sN_{i_x} & u_{z_x}F_sN_{i_y}0 + u_{z_y}F_sN_{i_x} \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

4.2.3 Espansioni di Taylor

Nella descrizione dei modelli 1D e 2D discussi precedentemente si è introdotto il concetto di funzione di espansione. La scelta di queste funzioni determina la classe del modello CUF da adottare. La prima tipologia di espansione analizzata è quella incentrata sui polinomi di Taylor, in seguito verrà indicata con TE. Nel caso di modelli mono-dimensionali, essi sono basati su espansioni polinomiali del tipo $x^i\ z^j$, con i e j numeri interi positivi, del campo degli spostamenti sulla sezione trasversale.
Un generico campo degli spostamenti di ordine N è espresso dalle seguenti equazioni:

$$u_x = \sum_{N_i=0}^{N}\left(\sum_{M=0}^{N_i} x^{N-M}z^M u_{x\,\frac{N(N+1)+M+1}{2}}\right) \tag{4.20}$$

$$u_y = \sum_{N_i=0}^{N}\left(\sum_{M=0}^{N_i} x^{N-M}z^M u_{y\,\frac{N(N+1)+M+1}{2}}\right) \tag{4.21}$$

$$u_z = \sum_{N_i=0}^{N}\left(\sum_{M=0}^{N_i} x^{N-M}z^M u_{z\,\frac{N(N+1)+M+1}{2}}\right) \tag{4.22}$$

dove N è l'ordine dell'espansione, di valore arbitrario stabilito precedentemente. La scelta di questo parametro dipende dall'analisi di convergenza. Si riporta un esempio di modello TE, riportato in [67] di secondo ordine N = 2. Il suo campo di spostamento vale:

$$u_x = u_x1 + xu_x2 + zu_x3 + x^2u_x4 + xzu_x5 + z^2u_x6 \tag{4.23}$$

$$u_y = u_y1 + xu_y2 + zu_y3 + x^2u_y4 + xzu_y5 + z^2u_y6 \tag{4.24}$$

$$u_z = u_z1 + xu_z2 + zu_z3 + x^2u_z4 + xzu_z5 + z^2u_z6 \tag{4.25}$$

Il modello appena descritto presenta 18 variabili di spostamento generalizzate: tre termini costanti, sei termini lineari e nove termini parabolici.
L'uso di espansioni basate sui polinomi di Taylor presenta limitazioni riguardanti le variabili utilizzate, i termini di ordine superiore, e se si o meno è in presenza di grandi rotazioni [49]. Per superare tali limitazioni vengono introdotte espansioni basate su polinomi di Lagrange, descritte nella sezione successiva.

4.2.4 Espansioni di Lagrange LE

L'espansione basata sui polinomi di Lagrange, indicata in seguito con LE, come già affermato, supera alcune limitazioni che i polinomi di Taylor presentano. La scelta di utilizzare un espansione di Lagrange come funzioni approssimanti porta ad avere solo variabili di spostamento traslazionali. Questo aspetto è di particolare interesse poichè ci permette di ottenere soluzioni più accurate rispetto ai modelli di Taylor di ordine elevato. Nel codice di calcolo sono stati utilizzati modelli LE nel caso 1D e 2D sulla sezione traversale e spessore, come elementi a 4 nodi (L4), a 9 nodi (L9) e a 16 nodi LQ16). I polinomi vengono definiti in un intervallo [-1;1]. Nelle relazioni seguenti si esprimono i polinomi di Lagrange per un caso di un elemento a 9 nodi (L9):

$$N_i = \frac{1}{4}(\zeta^2 + \zeta\zeta_i)(\eta^2 + \eta\eta_i), \quad i = 1, 3, 5, 7 \tag{4.26}$$

$$N_i = \frac{1}{2}\eta_i(\eta^2 + \eta\eta_i)(1 - \zeta^2) + \frac{1}{2}\zeta_i(\zeta^2 + \zeta\zeta_i)(1 - \eta^2), \quad i = 2, 4, 6, 8 \tag{4.27}$$

$$N_i = (1 - \zeta^2)(1 - \eta^2) \quad i = 9 \tag{4.28}$$

dove ζ e η variano tra -1 e 1.
Il campo degli spostamenti dato da un elemento L9 è:

$$u_x = F_1u_x1 + F_2u_x2 + F_3u_x3 + F_4u_x4 + F_5u_x5 + F_6u_x6 + F_7u_x7 + F_8u_x8 + F_9u_x9 \tag{4.29}$$

$$u_y = F_1u_y1 + F_2u_y2 + F_3u_y3 + F_4u_y4 + F_5u_y5 + F_6u_y6 + F_7u_y7 + F_8u_y8 + F_9u_y9 \tag{4.30}$$

$$u_z = F_1u_z1 + F_2u_z2 + F_3u_z3 + F_4u_z4 + F_5u_z5 + F_6u_z6 + F_7u_z7 + F_8u_z8 + F_9u_z9 \tag{4.31}$$

dove u_{x1}, ..., u_{z9} sono le variabili di spostamento del problema e rappresentano le componenti di spostamento traslazionale di ognuno dei nove punti dell'elemento.

4.3 Equazioni di governo non lineari

4.3.1 Equilibrio

In un sistema elastico in equilibrio sotto forze applicate e con vincoli geometrici assegnati vale il principio del lavoro virtuale, il quale afferma che la somma di tutti i lavori virtuali compiuti da forze interne ed esterne esistenti nel sistema vale zero [71]. La relazione 4.35 esprime quanto detto:

$$\delta L_{int} - \delta L_{ext} = 0 \tag{4.32}$$

dove δL_{int} rappresenta l' energia di deformazione, e δL_{ext} rappresenta il lavoro compiuto dalle forze esterne e δ la variazione virtuale. L'analisi delle grandi deformazioni dei sistemi elastici dà luogo a complessi problemi differenziali non lineari, la cui soluzione analitica non sempre è disponibile. Allora si può utilizzare il metodo FEM, il quale permette di allargare l'analisi a una serie di problemi ancora più ampi. La condizione di equilibrio della struttura può essere espressa in questo caso come un sistema di equazioni algebriche non lineari. Nel caso trave per esempio, utilizzando la CUF, le relazioni 4.12, 4.14 e 4.15, insieme alle condizioni di equilibrio e alle relative matrici di elementi finiti sono riscritte in maniera unificata e compatta come segue:

$$K_s^{\tau sij} q_{sj} - p_{sj} = 0 \tag{4.33}$$

L'equazione 4.36 rappresenta un insieme di tre equazioni algebriche, dove p_{sj} e $K_s^{\tau sij}$ sono rispettivamente i nuclei fondamentali (FN) del vettore dei carichi nodali e della matrice di rigidezza secante. L'equazione 4.36 può essere estesa anche ai modelli strutturali 2D e 3D. Assemblando quindi gli elementi finiti, si ottiene l'equazione globale associata alla struttura finale vale:

$$K_S q - p = 0 \tag{4.34}$$

dove K_S, q, p sono matrici di elementi finiti globali e assemblati della struttura finale.

4.3.2 Metodo di risoluzione

L'equazione 4.34 costituisce il punto di partenza per il calcolo agli elementi finiti di sistemi geometrici non lineari e viene solitamente risolta attraverso il metodo di Newton-Raphson (metodo delle tangenti). Secondo il metodo di Newton-Raphson, l'equazione 4.34 è scritta come [57]:

$$\phi_{res} \equiv K_s q - p = 0 \tag{4.35}$$

dove ϕ_{res} è il vettore delle forze nodali residue. L'equazione 4.35 può ora essere linearizzata espandendo ϕ_{res} in serie di Taylor attorno a una soluzione nota (q, p). Omettendo i termini del secondo ordine, si ottiene:

$$\phi_{res}(q + \delta q, p + \delta p) = \phi_{res}(q, p) + \frac{\partial \phi_{res}}{\partial q}\delta q + \frac{\partial \phi_{res}}{\partial p}\delta\lambda p_{ref} \tag{4.36}$$

dove $\frac{\partial \phi_{res}}{\partial q}$ rappresenta K_T, ossia la matrice di rigidezza tangente, mentre il termine - $\frac{\partial \phi_{res}}{\partial p}$coincide con la matrice identità I. Nell'equazione 4.36 si è ipotizzato che il carico vari direttamente varia in maniera diretta con il carico di riferimento con un coefficiente angolare pari a λ tale che p = λ p_{ref}. L'equazione 4.39 può essere scritta in form più compatta nel seguente modo:

$$K_T \delta q = \delta\lambda p_{ref} - \phi_{res} \tag{4.37}$$

Poiché il parametro di scala del carico λ è assunto come variabile, è necessaria un'equazione di governo aggiuntiva, che è data da una relazione di vincolo, andando a formare il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} K_T \delta q = \delta\lambda p_{ref} - \phi_{res} \\ c(\delta q, \delta\lambda) = 0 \end{cases} \tag{4.38}$$

A seconda dell'equazione di vincolo, possono essere implementati diversi schemi incrementali.
Se per esempio l'equazione di vincolo fosse funzione sia della variazione dello spostamento che del carico allora il metodo da utilizzare sarebbe di tipo **path-following (arch-lenght)**. Le differenze tra i metodi di controllo del carico e

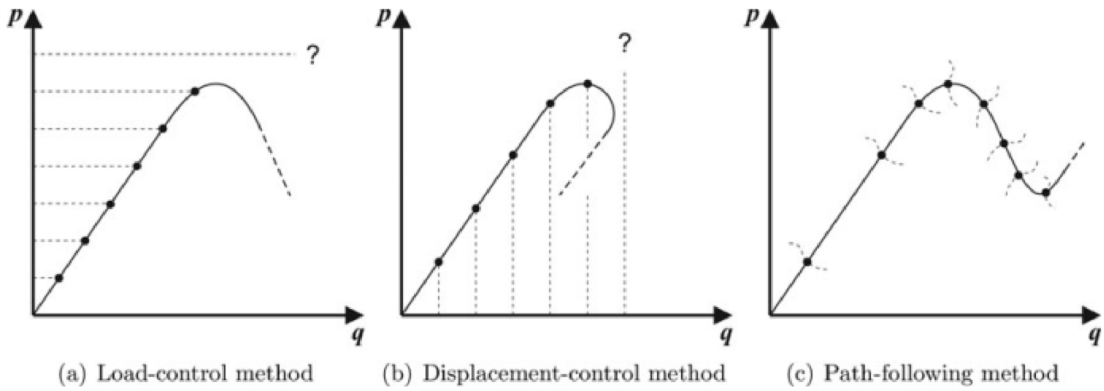

Figura 4.3: Rappresentazione e significato dell'equazione di governo dei vincoli: (a) metodo del controllo del carico, (b) metodo del controllo dello spostamento, (c) metodo della lunghezza dell'arco. [21]

dello spostamento e i metodi path-following sono illustrati nella Figura 4.3 e per maggiori dettagli si rimanda a [57] [11] [16]. In questa tesi si utilizzerà il metodo path-following, descritto ampiamente in [18].

4.3.3 Matrice di rigidezza secante

Analizzato dunque il metodo di risoluzione, nei paragrafi seguenti si introducono le espressioni delle matrici di rigidezza secante K_S e tangente K_T non lineari dell'elemento trave. Tali matrici sono descritte secondo la CUF in termini di nuclei fondamentali. La matrice di rigidità secante K_S può essere calcolata a partire dalla variazione virtuale dell'energia di deformazione δL_{int} che è espressa:

$$\delta L_{int} = \int_V \delta\epsilon^T \sigma dV \tag{4.39}$$

Il vettore di deformazione, come già visto detto, può essere espresso in termini di incognite nodali generalizzate q_{sj}. Riprendendo l'equazione 4.15 e derivandola, si ottiene:

$$\delta\epsilon = \delta((B_l^{sj} + B_{nl}^{sj})q_{sj}) = (B_l^{sj} + 2B_{nl}^{sj})\delta q_{sj} \tag{4.40}$$

il suo trasposto sarà quindi:

$$\delta\epsilon^T = \delta q_{sj}^T (B_l^{sj} + 2B_{nl}^{sj})^T \tag{4.41}$$

sostituendo ora l'equazione 4.41 in 4.39 si ottiene:

$$\begin{aligned}
\delta L_{int} &= \int_V \delta\epsilon^T \sigma dV = \\
&= \delta q_{sj}^T (B_l^{sj} + 2B_{nl}^{sj})^T \epsilon dV = \delta q_{sj}^T F_{int}^{sj} = \\
&= \int_V \delta q_{sj}^T (B_l^{sj} + 2B_{nl}^{sj})^T C (B_l^{\tau i} + B_{nl}^{\tau i}) q_{\tau i} dV = \\
&= \delta q_{sj}^T [\int_V (B_l^{sj})^T C B_l^{\tau i} dV] q_{\tau i} + \delta q_{sj}^T [\int_V (B_l^{sj})^T C B_{nl}^{\tau i} dV] q_{\tau i} + \\
&+ \delta q_{sj}^T [\int_V 2(B_{nl}^{sj})^T C B_l^{1taui} dV] q_{\tau i} + \delta q_{sj}^T [\int_V 2(B_{nl}^{sj})^T C 2(B_{nl}^{\tau i}) dV] q_{\tau i}
\end{aligned} \tag{4.42}$$

si ottengono quattro matrici 3x3 componenti della matrice secante definiti nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
K_{ll}^{\tau sij} &= [\int_V (B_l^{sj})^T C B_l^{\tau i} dV] \\
K_{lnl}^{\tau sij} &= [\int_V (B_l^{sj})^T C B_{nl}^{\tau i} dV] \\
K_{nll}^{\tau sij} &= [\int_V 2(B_{nl}^{sj})^T C B_l^{1taui} dV] \\
K_{nlnl}^{\tau sij} &= [\int_V 2(B_{nl}^{sj})^T C 2(B_{nl}^{\tau i}) dV]
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Quindi si può riscrivere la variazione di lavoro interno come :

$$\delta L_{int} = \delta q_{si}^T K_S^{ij\tau s} q_{\tau i} \tag{4.44}$$

dove $K_S^{ij\tau s}$ è la matrice di rigidezza secante data dalla somma dei quattro contributi dell'equazione 4.42. Ogni singolo contributo è dato in termini di nuclei fondamentali. Scegliendo quindi opportunamente la cinematica della trave, ossia le funzioni di espansione e di forma ed espandendo la sommatoria agli indici τ, s, i, j, si ottiene la matrice di rigidezza elementare. Una volta ottenuta la matrice di rigidezza secante elementere può essere assemblata ottenendo quella globale, come descritto in [14].

4.3.4 Matrice di rigidezza tangente

Il nucleo fondamentale della matrice di rigidità tangente $K_T^{\tau sij}$ è derivato dalla linearizzazione delle equazioni di equilibrio[81]. Si assume che il carico sia conservativo in modo che la linearizzazione della variazione virtuale dei carichi esterni sia nulla, cioè $\delta^2 L_{ext} = 0$. Allora si può scrivere:

$$
\begin{aligned}
\delta^2 L_{int} &= \int_V \delta(\delta\epsilon^T \sigma) dV \\
&= \int_V \delta\epsilon^T \delta\sigma dV + \int_V \delta(\delta\epsilon^T)\sigma dV \\
&= \delta q_{\tau i}^T (K_0^{\tau sij} + K_{T1}^{\tau sij} + K_{\sigma}^{\tau sij}) \delta q_{sj} \\
&= \delta q_{\tau i}^T K_T^{\tau sij} \delta q_{sj}
\end{aligned}
\tag{4.45}
$$

Ogni contributo non lineare nella parte destra dell'equazione 4.45, ossia $K_{T1}^{\tau sij}$ e $K_{\sigma}^{\tau sij}$ viene ora considerato separatamente.
Il primo termine $\int_V \delta\epsilon^T \delta\sigma dV$ richiede la linearizzazione delle relazioni costitutive, che, sotto l'ipotesi di coefficienti del materiali costanti($\delta C = 0$), si può riscrivere nel seguente modo:

$$
\delta\sigma = C\delta\epsilon = C(B_l^{sj} + 2B_{nl}^{sj})\delta q_{sj} \tag{4.46}
$$

quindi considerando le equazioni 4.41 e 4.46 si ottiene:

$$
\begin{aligned}
\int_V \delta\epsilon^T \delta\sigma dV &= \delta q_{sj}^T \int_V (B_l^{sj} + 2B_{nl}^{sj})^T C (B_l^{\tau i} + 2B_{nl}^{\tau i}) dV \delta q_{\tau i} \\
&= \delta q_{sj}^T K_{ll}^{ij\tau s} \delta q_{\tau i} + \delta q_{sj}^T 2K_{lnl}^{ij\tau s} \delta q_{\tau i} + \delta q_{sj}^T K_{nll}^{ij\tau s} \delta q_{\tau i} + \delta q_{sj}^T 2K_{nlnl}^{ij\tau s} \delta q_{\tau i} \\
&= \delta q_{sj}^T (K_{ll}^{ij\tau s} + K_{T1}^{ij\tau s}) \delta q_{sj}^T
\end{aligned}
\tag{4.47}
$$

dove $K_{T1}^{ij\tau s} = 2K_{lnl}^{ij\tau s} + K_{nll}^{ij\tau s} + 2K_{nlnl}^{ij\tau s}$ è la somma dei termini non lineari del primo e secondo ordine del nucleo fondamentale della matrice di rigidezza tangente dovuta alla linearizzazione della legge di Hooke. Le matrici $K_{ll}^{ij\tau s}$, $K_{lnl}^{ij\tau s}$, $K_{nll}^{ij\tau s}$ e $K_{nlnl}^{ij\tau s}$ sono anch'esse scritte in termini di nuclei fondamentali 3 x 3. Da sottolineare il fatto che queste matrici possono essere espanse per ottenere la matrice di rigidezza secante di qualsiasi modello trave, una volta date le funzioni sulla sezione trasversale $F_\tau = F_s$ e le funzioni di forma $N_i = N_j$. La valutazione del secondo contributo, ossia $\int_V \delta(\delta\epsilon^T)\sigma dV$, richiede la linearizzazione delle relazioni geometriche non lineari:

$$
\delta(\delta\epsilon^T) = \begin{bmatrix} \delta q_{X\tau i} \delta q_{Xsj} \\ \delta q_{Y\tau i} \delta q_{Ysj} \\ \delta q_{Z\tau i} \delta q_{Zsj} \end{bmatrix}^T (B_{nl}^*)^T \tag{4.48}
$$

dove, $(B_{nl}^*)^T$ vale:

$$
(B_{nl}^*)^T = \begin{bmatrix}
F_{\tau X} F_{s X} N_i N_j & F_{\tau X} F_{s X} N_i N_j & F_{\tau X} F_{s X} N_i N_j \\
F_{\tau Y} F_{s Y} N_i N_j & F_{\tau Y} F_{s Y} N_i N_j & F_{\tau Y} F_{s Y} N_i N_j \\
F_{\tau Z} F_{s Z} N_i N_j & F_{\tau XZ} F_{s Z} N_i N_j & F_{\tau Z} F_{s Z} N_i N_j \\
F_{\tau X} F_{s Z} N_i N_j + F_{\tau Z} F_{s X} N_i N_j & F_{\tau X} F_{s Z} N_i N_j + F_{\tau Z} F_{s X} N_i N_j & F_{\tau X} F_{s Z} N_i N_j + F_{\tau Z} F_{s X} N_i N_j \\
F_{\tau Z} F_s N_i N_{j Y} + F_\tau F_{s Z} N_{i Y} N_j & F_{\tau Z} F_s N_i N_{j Y} + F_\tau F_{s Z} N_{i Y} N_j & F_{\tau Z} F_s N_i N_{j Y} + F_\tau F_{s Z} N_{i Y} N_j \\
F_{\tau X} F_s N_i N_{j Y} + F_\tau F_{s X} N_{i Y} N_j & F_{\tau X} F_s N_i N_{j Y} + F_\tau F_{s X} N_{i Y} N_j & F_{\tau X} F_s N_i N_{j Y} + F_\tau F_{s X} N_{i Y} N_j
\end{bmatrix}
\tag{4.49}
$$

4.3.5 Matrice delle masse

Nell'analisi modale le forze di inerzia assumono una forte centralità. La variazione virtuale del lavoro delle forze inerziali è scritta nel seguente modo:

$$\delta L_{ine} = -\int_V \rho \delta u^T \ddot{u} dV \tag{4.50}$$

dove ρ è la massa volumica del materiale, e $\ddot{u}$ il vettore delle accelerazioni. Sostituendo le equazioni 4.12 e 4.13, l'espressione diventa:

$$\delta L_{ine} = -\delta q_{\tau i}^T \int_l N_i N_j dy \int_\Omega \rho F_\tau F_s d\Omega \ddot{q}_{sj} \delta u^T \ddot{u} dV = -\delta q_{\tau i}^T M^{ij\tau s} \ddot{q}_{sj} \tag{4.51}$$

in cui $\ddot{q}$ è il vettore delle accelerazioni nodali, e $M^{ij\tau s}$ rappresenta il nucleo fondamentale della matrice delle masse dell'elemento finito [49].

4.4 Vettore dei carichi nodali

Considerando un generico vettore P della forza esterna che agisce sull'elemento, esso si può scrivere come

$$P = [P_{u_x} \quad P_{u_y} \quad P_{u_z}]^T \tag{4.52}$$

L'espressione della variazione del lavoro delle forze esterne relativo ad un sistema di spostamenti virtuali è la seguente:

$$\delta L_{ext} = P \delta u^T \tag{4.53}$$

ora, sostituendo l'equazione 4.14 nella 4.57, si ottiene:

$$\delta L_{ext} = F_\tau N_i P \delta q_{\tau i}^T \tag{4.54}$$

Questa relazione individua le componenti del nucleo che porta all'assemblaggio vettore complessivo dei carichi nodali:

$$\delta L_{ext} = F_{\tau i} \delta q_{\tau i}^T \tag{4.55}$$

dove $F_{\tau i}$ ha dimensioni 3 x 1.

4.5 Assemblaggio della matrice di rigidezza globale

La CUF rende l'assemblaggio delle matrici un'operazione molto semplice da implementare. Si parte dal nucleo fondamentale del singolo elemento e, considerando il legame tra nodi del modello agli elementi finiti e nodi con espansione

CUF, si assembla la matrice di rigidezza globale. Prima di affrontare l'assemblaggio, si devono fare alcune precisazioni: gli indici τ e s rappresentano l'ordine di espansione del modello CUF(τ, s = 1, 2, ..., M) e determinano l'accuratezza del modello; gli indici i e j sono definiti dal numero di nodi del singolo elemento finito (i, j = 1, 2, ..., N_{ne}). Fatte tali premesse, si conclude affermando che il nucleo fondamentale di una matrice di rigidezza è una matrice 3x3. Come si può notare dalla relazione 4.56 la $K^{ij\tau s}$ si ottiene dal prodotto riga per colonna tra la matrice dell'operatore differenziale e il tensore di elasticità:

$$K^{ij\tau s} = \int_V (B^{sj})^T C B^{\tau i} = \begin{bmatrix} k_x^{ij}x & k_x^{ij}y & k_x^{ij}z \\ k_x^{ij}y & k_y^{ij}y & k_y^{ij}z \\ k_x^{ij}z & k_y^{ij}z & k_z^{ij}z \end{bmatrix} \tag{4.56}$$

dove $(B^{sj})^T$ è una matrice 3x6, C è una matrice 6x6 e infine $B^{\tau i}$ è una matrice 6x3. In figura 4.5 viene raffigurata la sequenza procedurale di assemblaggio: in particolare di evince come i loop su τ e s costruiscono la matrice per una data coppia di i e j, i loop su i e j danno la matrice degli elementi e il loop sugli elementi dà la matrice di rigidità globale sfruttando il nucleo.

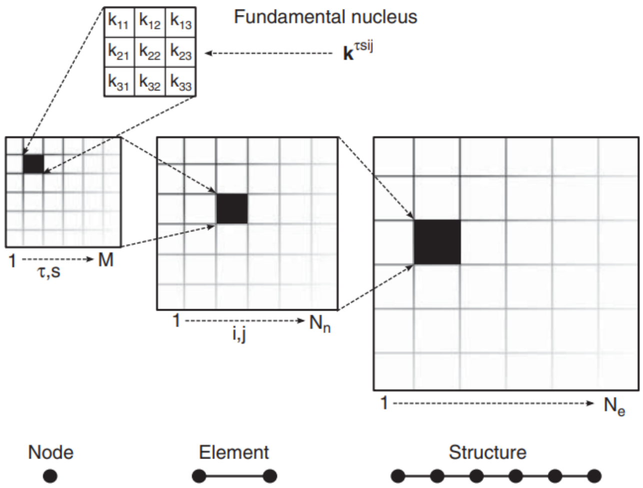

Figura 4.4: Rappresentazione della procedura di assemblaggio della matrice di rigidezza, partendo dai nuclei fondamentali fino alla struttura globale [14]

4.6 Tipiche equazioni di governo FE e procedure

In questa sezione vengono illustrate le tipiche equazioni di equilibro nei tipici problemi strutturali, nei quali, attraverso la formulazione del Principio dei Lavori Virtuali si possono valutare tre contributi fondamentali al bilancio di lavoro: il lavoro interno, che deriva dalla deformazione della struttura; il lavoro esterno, che deriva dai carichi applicati alla struttura; il lavoro inerziale, che deriva dalle forze inerziali [14].

4.6.1 Analisi della risposta statica

L'analisi della risposta statica comprende gli effetti delle forze elastiche e dei carichi esterni. Dunque il PVD nel caso statico afferma che la variazione del lavoro esterno coincide con la variazione del lavoro interno:

$$\delta L_{ext} = \delta L_{int} \tag{4.57}$$

che possono essere scritti rispettivamente come:

$$\delta L_{ext} = \delta U^T P \tag{4.58}$$

$$\delta L_{int} = \delta U^T K U \tag{4.59}$$

Il PVD afferma quindi

$$\delta U^T K U = \delta U^T P \tag{4.60}$$

che può essere scritto nella forma

$$KU = P \tag{4.61}$$

la cui risoluzione richiede il calcolo del vettore u. La soluzione è la seguente:

$$U = K^-1P \tag{4.62}$$

La matrice K può essere invertita se e solo se i moti del corpo rigido vengono rimossi. In realtà, le matrici non vengono mai invertite, ma fattorizzate. Uno dei metodi più diffusi è il metodo di fattorizzazione di Cholesky.

4.6.2 Analisi delle vibrazioni libere

L'analisi delle vibrazioni libere studia l'equilibrio tra forze elastiche e forze inerziali. Il PVD nelcaso dimanico si scrive nel seguente modo:

$$\delta L_{int} = -\delta L_{ine} \tag{4.63}$$

La variazione virtuale del lavoro inerziale può essere scritta come

$$\delta L_{ine} = \int_V \delta u \rho \ddot{u} dV \tag{4.64}$$

dove ρ è la densità del materiale e $\ddot{u}$ è l'accelerazione. Introducendo l'approssimazione FEM, la variazione del lavoro inerziale assume la forma

$$\delta L_{ine} = \delta U M \ddot{U} \tag{4.65}$$

Ora è possibile scrivere le equazioni di equilibrio:

$$\delta L_{ine} + \delta L_{int} = 0 \tag{4.66}$$

$$\delta U^T M \ddot{U} + \delta U^T K U = 0 \tag{4.67}$$

$$M\ddot{U} + KU = 0 \tag{4.68}$$

La soluzione deve essere calcolata risolvendo un problema di autovalori, facilmente risolto se si assume che la soluzione sia armonica. In questo caso, lo spostamento, la velocità e l'accelerazione diventano

$$U = \tilde{U} e^{i\omega t} \tag{4.69}$$

$$\dot{U} = i\omega \tilde{U} e^{i\omega t} \tag{4.70}$$

$$\ddot{U} = -\omega^2 \tilde{U} e^{i\omega t} \tag{4.71}$$

dove $\tilde{U}$ è l'ampiezza degli spostamenti e ω è la frequenza angolare. L'equazione (4.12) può essere riscritta nel dominio della frequenza come

$$-M\omega^2 \tilde{U} e^{i\omega t} + K\tilde{U} e^{i\omega t} = 0 \tag{4.72}$$

Si riduce il tutto ad un problema standand agli autovalori

$$\tilde{U} e^{i\omega t}(-M\omega^2 + K) = 0 \tag{4.73}$$

$$(-M\omega^2 + K) = 0 \tag{4.74}$$

la cui soluzione è

$$K^- 1M - \frac{1}{\omega^2} I = 0 \tag{4.75}$$

Le frequenze naturali possono essere ottenute dagli autovalori

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \tag{4.76}$$

Ogni frequenza dà un autovettore che è il vettore U che soddisfa

$$K^- 1MU = \frac{1}{\omega^2} U \tag{4.77}$$

4.6.3 Analisi della risposta dinamica

Considerando tutti i contributi inerziali, elastici e di lavoro esterno, il problema da risolvere può essere scritto, tramite il PVD, nella forma

$$\delta L_{ine} + \delta L_{int} = \delta L_{ext} \tag{4.78}$$

Nella forma FE si riscrive nel seguente modo

$$\delta U^T M\ddot{U} + \delta U^T K U = \delta U^T P \tag{4.79}$$

ossia

$$M\ddot{U} + KU = P \tag{4.80}$$

L'equazione 4.95 è scritta nel dominio del tempo. La soluzione di questa richiede l'uso di una tecniche particolare citate in [14].

Capitolo 5

Power Spectral Density

Il fenomeno della fatica casuale è uno degli aspetti fondamentali della progettazione aerospaziale. Quando si valuta la vita di un componente soggetto a fatica casuale si può procedere secondo due diversi approcci. Il primo riguarda la determinazione della storia di carico nel dominio del tempo. Questo metodo consiste nell'identificazione dei cicli tramite un metodo di conteggio, successivamente si utilizza la legge di accumulo lineare di danno per il calcolo della vita a fatica [45].
Nel dominio della frequenza invecei carichi randomici possono essere schematizzati come un processo aleatorio $X(t)$. Se il processo è gaussiano, stazionario ed ergodico le sue caratteristiche possono essere studiate mediante la funzione Densità Spettrale di Potenza (PSD) [54]. Operare nel dominio della frequenza si rivela particolarmente vantaggioso quando si ha a che fare con modelli complicati agli elementi finiti (FEM) [31] [38].

5.1 Definizione di PSD

La PSD è lo strumento che viene maggiormente utilizzato per analizzare una risposta dinamica di una struttura soggetta a fatica casuale nel dominio delle frequenze. Un processo casuale $X(t)$ è caratterizzato mediante la PSD $S_X(\omega)$, ottenuta applicando la Trasformata di Fourier alla funzione di autocorrelazione $R_x(\tau)$, come indicato nell' espressione 5.1, che consente di mettere in relazione il dominio del tempo con quello della frequenza.

$$S_X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{i\omega t} d\tau \tag{5.1}$$

Nei processi a media nulla la PSD coincide con la varianza del processo. Per comprendere meglio il significato della PSD si dice che l'energia associata a un qualiasi tipo di segnale sia proporzionale al quadrato di una grandezza caratte-sistica e al tempo nel quale agisce [53]. Cosi come nella dinamica della molla la potenza è direttamente proporzionale al quadrato dello spostamento, cosi in un generico circuito elettrico è proporzionale al quadrato della corrente.

Ritornando propriamente alla definizione di PSD, si ricorda quindi che la varianza è proporzionale alla potenza media espressa dal segnale e, poichè la varianza di processo a media nulla è direttamente proporziale all'area sottesa dalla PSD, anche la PSD è proporzionale alla potenza media espressa dal segnale [53].
La PSD stima dunque la distribuzione dell'intensità di un segnale (la sua potenza) su uno spettro di frequenze. Ogni termine che compone la sigla PSD, *densità spettrale di potenza*, ha un significato essenziale per cogliere gli aspetti più specifici dell'approccio utilizzato[46]:

- **Potenza**. L'ampiezza della PSD è il valore quadratico medio del segnale analizzato, ed esprime la potenza. Molto spesso ai fini sperimentali, come nel caso di questa tesi, si è soliti calcolare la radice quadrata di tale valore quadratico medio, ossia il root mean square (RMS).

$$RMS = \sqrt{\lambda_0} = \sigma_X \tag{5.2}$$

  dove λ_0 è il momento spettrale e σ_X è la varianza come è stato riportano nel capitolo 2.

- **Spettrale**. La PSD è funzione della frequenza. Essa rappresenta la distribuzione del segnale lungo lo spettro delle frequenze.

- **Densità**. La PSD viene divisa per larghezza di banda, in quanto l'ampiezza della distribuzione di un segnale dipende dal numero di bande considerato.

L'unità di misura della PSD per una generica grandezza G è la seguente:

$$PSD = \left[\frac{G^2}{Hz}\right] \tag{5.3}$$

5.2 Classificazione della PSD

In questo lavoro ogni sequenza temporale è descritta in termini di PSD nel dominio delle frequenze. In seguito sono rappresentate le diverse possibili tipologie di PSD. In particolare in figura 5.1 viene rappresentata un processo a banda larga ossia i valori significativi di PSD sono distribuiti su un ampio intervallo di frequenze. In figura 5.2 è invece rappresentato un processo a banda stretta ossia la sua PSD è distribuita in una banda di frequenze ristretta rispetto il valore della frequenza centrale. Infine in figura 5.3 viene mostrato il cosiddetto rumore bianco, che in questa trattazione sarà utilizzato per caratterizzare il carico aleatorio nel dominio delle frequenze. Come si evince la PSD è costante in frequenza.

Si definiscono processi di rumore bianco i processi stocastici caratterizzati dalla una funzione di densità di probabilità gaussiana con media nulla e varianza costante:

$$E[X(t)] = 0 \tag{5.4}$$

$$\sigma_X^2 = costante \tag{5.5}$$

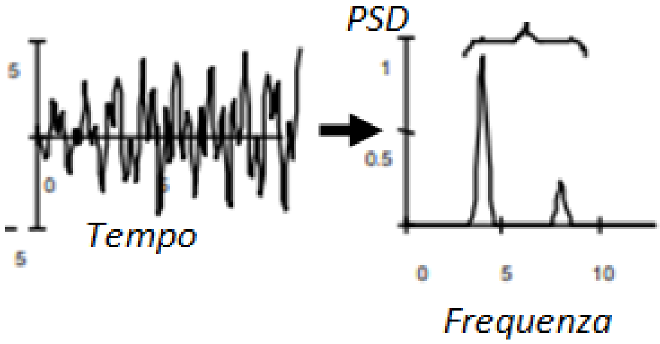

Figura 5.1: Processo a banda larga

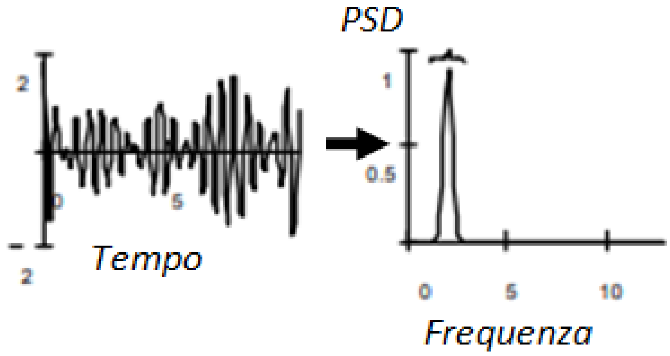

Figura 5.2: Processo a banda stretta

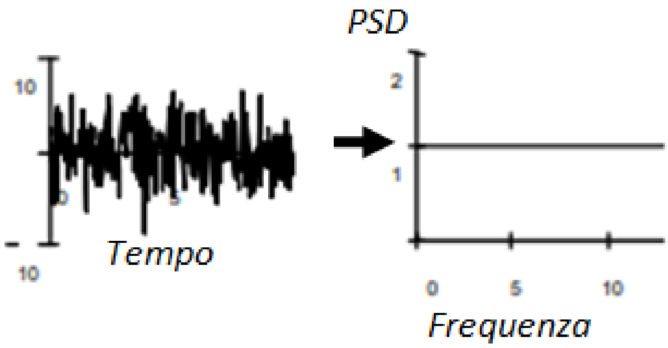

Figura 5.3: Rumore bianco

5.3 Analisi dinamica con PSD nella Formulazione Unificata di Carrera

L'analisi della risposta dinamica di una struttura sottoposta a raffiche o eccitazioni casuali è fondamentale per stimare le prestazioni a fatica e, di conseguenza, garantire una progettazione sicura. Le storie di sollecitazioni e spostamenti sono

calcolate utilizzando l'approccio PSD [48]. Per determinare in modo accurato gli spettri degli spostamenti e delle sollecitazioni delle strutture, è stato adottato il metodo degli elementi finiti (FE), utilizzando la CUF ampiamente descritta nel capitolo 4.
Le PSD degli spostamenti (S_u) e delle sollecitazioni (S_σ) (grandezze di output) in funzione delle frequenze sono correlate alla PSD del carico (S_F)(grandezza di input) mediante una funzione di trasferimento come espresso dalle relazioni 5.6 e 5.7.

$$S_{ui}(\omega) = \tilde{H_{ui}}(\omega) S_F(\omega) H_{ui}^T(\omega) \quad con \quad i = 1, 2, 3 \tag{5.6}$$

$$S_{\sigma j}(\omega) = \tilde{H_{\sigma j}}(\omega) S_F(\omega) H_{\sigma j}^T(\omega) \quad con \quad j = 1, ..., 6 \tag{5.7}$$

In particolare $H\tilde{(\omega)}$ e $H^T\tilde{(}\omega)$ rappresentano rispettivamente il coniugato complesso e la trasposta della matrice di ammettenza $\tilde{H_\omega}$), che si calcola attraverso metodo FE attuando tante analisi della risposta in frequenza quanti sono i termini non nulli nel vettore generallizato delle forze(nnz).
Considerando una coordinata arbitraria non nulla k, la matrice di ammittenza si calcola

$$H_{q_j}(\omega) = [q_{k1} q_{k2} ... q_{kL}] \quad con \quad k = 1, ..., nnz \quad L = 1, ..., fs \tag{5.8}$$

dove f rappresenta il numero di passi di frequenza, mentre q_k rappresenta il vettore colonna dei gradi di libertà e si descrive tramite la seguente relazione derivante dal modello FE:

$$q_k(\omega) = [-\omega^2 M + i\omega C + K]^{-1} F_k^* \tag{5.9}$$

dove F_k^* rappresenta il vettore delle forze; M rappresenta la matrice di massa, C rappresenta la matrice di smorzamento e K la matrice di ridigezza del modello FE come già ampiamente descritto nel capitolo 4.
Applicando una riduzione modale utilizzando gli autovettori x_j dell'equazione omogenea non smorzata, la relazione 5.8 diventa:

$$[-\omega_j^2 M + K] x_j e^{i\omega t} = 0 \quad con \quad j = 1, ..., nm \tag{5.10}$$

Per il calcolo della cross-spectral density matrix S_F dobbiamo rifarci al principio dei lavori virtuali (PVD) come descritto in [25].

$$\delta L_{int} = \delta L_{ext} \tag{5.11}$$

La variazione di lavoro interno si esprime:

$$\delta L_{int} = \delta u_{sj}^T K^{ij\tau s} u_{\tau i} \tag{5.12}$$

dove $K^{ij\tau s}$ rappresenta il nucleo fondamentale della matrice di rigidezza, mentre i, s, j, τ rappresentano i pedici della variazione virtuale degli spostamenti. Per il calcolo della variazione virtuale del lavoro esterno si considerano la sommatoria dei lavori svolti dalle forze di volume, di superficie e puntuali, come espresso nella relazione 5.12.

$$\delta L_{ext} = \int_V \delta u^T F_V dV + \int_A \delta u^T F_A dA + \delta u^T F_P \tag{5.13}$$

La S_F deriva dalle espressioni generallizate delle forze della relazione 5.13. Un esempio di calcolo viene riportato in [25].

Capitolo 6

Risultati numerici

In questo ultimo capitolo sono riportati i risultati numerici relativi all'analisi lineare, non lineare e dinamica dei modelli 1D e 2D. Si analizza la risposta dinamica di travi in alluminio e composito soggette a sollecitazioni casuali, rappresentate dal cosiddetto rumore bianco, ottendo cosi come output le PSD delle tensioni. Queste saranno il punto di partenza per il calcolo della vita a fatica con i metodi che sono stati illustrati nel capitolo 2.

6.1 Modello trave 1D in alluminio soggetta a carico trasversale

In questa sezione sono riportati tutti i risultati ottenuti dall'analisi statica geometrica lineare, non lineare e dinamica per il modello trave, confermando come la CUF sia un ottimo metodo per ricavare soluzioni accurate [21]. Il primo caso di analisi è una trave a sbalzo in alluminio a sezione quadrata, soggetta a una grande deflessione dovuta ad un carico verticale che agisce lungo z come mostrato in figura 6.1. L'analisi è stata condotta considerando un rapporto spessore/lato pari a h/L = 0.01 e h/L = 0.01. Vengono elencate in seguito tutte le proprietà della trave considerata. Dati: Modulo di Young pari a E = 75 GPa ; il coefficiente di Poisson pari a ν = 0.33; lunghezza pari a L = 1 m con i momenti di inerzia pari a $I_1 = 8.33 \times 10^-6\ m^4$ e $I_2 = 8.33 \times 10^-10\ m^4$.

6.1.1 Analisi lineare

Il primo caso di studio riguarda l'analisi statica lineare. In figura 6.2 sono rappresentati i risultati relativi all'analisi lineare per la trave di rapporto h/L = 0.1 e h/L = 0.01. Il modello CUF utilizzato per discretizzare la trave è il medesimo per entrambi i casi: si considera una discretizzazzione lungo l'asse y della trave 20 elementi B4 e una discretizzazione della sezione della trave nel piano xz di nove nodi. Come si può notare in figura, a parità di carico normalizzato, la trave con spessore minore subisce una deformazione maggiore. In tabella 6.1 è rappresentato un confronto numerico in termini di spostamenti e carichi normalizzati in funzione dei due diversi spessori considerati.

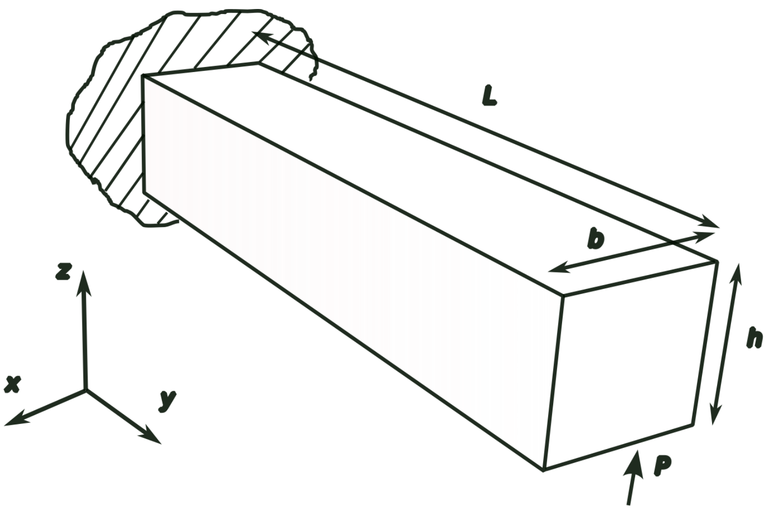

Figura 6.1: Modello trave 1D in alluminio a sezione quadrata soggetta a carico trasversale all'estremo libero

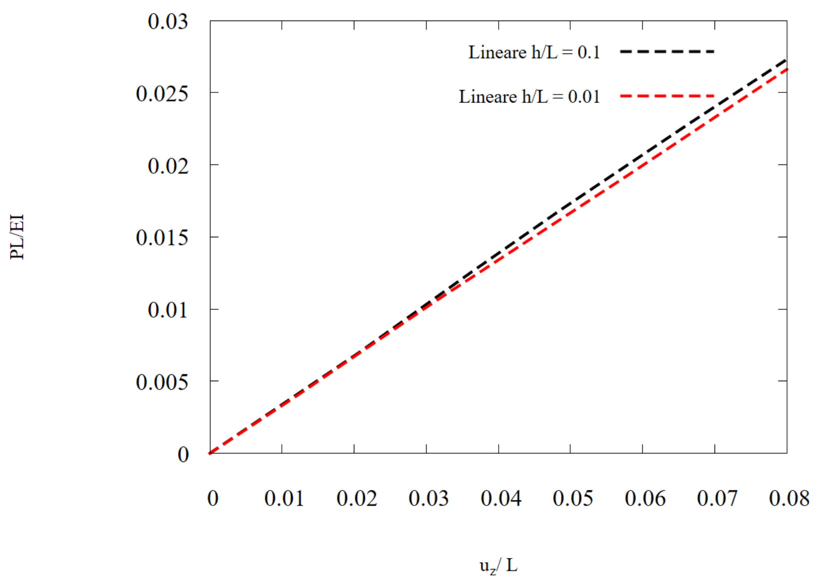

Figura 6.2: Confronto grafico delle soluzioni lineare CUF nel caso di h/L = 0.1 e h/L = 0.01

h/L	u_z/L	PL/EI
0.1	0.039	0.120
0.01	0.069	0.200

Tabella 6.1: Confronto numerico in termini di spostamenti e carichi normalizzati per la trave nel caso di h/L = 0.1 e h/L = 0.01.

6.1.2 Analisi dinamica

Nel campo della dinamica strutturale, l'analisi modale si può definire come un insieme di tecniche, il cui principale scopo è la caratterizzazione dinamica delle strutture. L'analisi modale dinamica consiste nella determinazione dei diversi modi di vibrare che le strutture possiedono quando soggette a carichi. Un sistema vibrante avrà tanti modi di vibrare quanti sono i suoi gradi di libertà. I modi propri di vibrare di una struttura rappresentano un numero di possibili deformate della struttura compatibili con i vincoli presenti su di essa. Nella tabella 6.2 vengono riportati i primi dieci modi propri di vibrare della struttura, ossia le dieci frequenze naturali per la trave in alluminio con rapporto h/L pari a 0.1 m.

Frequenza	Valore
1	0.851E+02
2	0.851E+02
3	0.512E+03
4	0.512E+03
5	0.809E+03
6	0.132E+04
7	0.1354E+04
8	0.1354E+04
9	0.242E+04
10	0.247E+04

Tabella 6.2: Rappresentazione delle 10 frequenze naturali della trave con rapporto h/L = 0.1 m e soggetta a carico trasversale

6.1.3 Analisi non lineare. Trave con rapporto h/L = 0.1

In questo paragrafo vengono riportati i risultati relativa all'analisi non lineare. Il primo confronto dei risultati riguarda la diversa scelta di discretizzazione lungo l'asse y per capire quale delle configurazioni meglio approssimi la soluzione non lineare di riferimento. Nelle figura 6.3 e 6.4 sono rappresentati i confronti grafici tra le tre curve di equilibrio per le seguenti soluzioni analitiche: la soluzione lineare di Eulero-Bernoulli (blu), la soluzione non linere di riferimento [9](rosso) e la soluzione non lineare ricavata dalla Formulazione Unificata di Carrera (nero). In particolare in figura 6.3 la soluzione non lineare CUF è caratterizzata da una discretizzazione di 10 elementi B4 lungo y, mentre nella figura 6.4 di 20 elementi B4 sempre lungo y. In entrambi la discretizzazione sulla sezione trasversale è costituita da elementi L9.
Si ricorda che in questa trattazione il carico P rappresenta il prodotto tra P_r e λ , dove P_r è il carico di riferimento 75 kN e λ è il fattore di carico che cambia ad ogni iterazione. In figura 6.3 si può notare come la discretizzazione a 10 elementi vada molto bene per carichi bassi, infatti la soluzione di riferimento si confonde con la soluzione ricavata con la CUF. Tuttavia man mano che il carico

aumenta la soluzione tende ad allontanarsi da quella non lineare di riferimento in particolare per $(PL^2)/EI > 6$. Come precedentemente detto, si è condotta

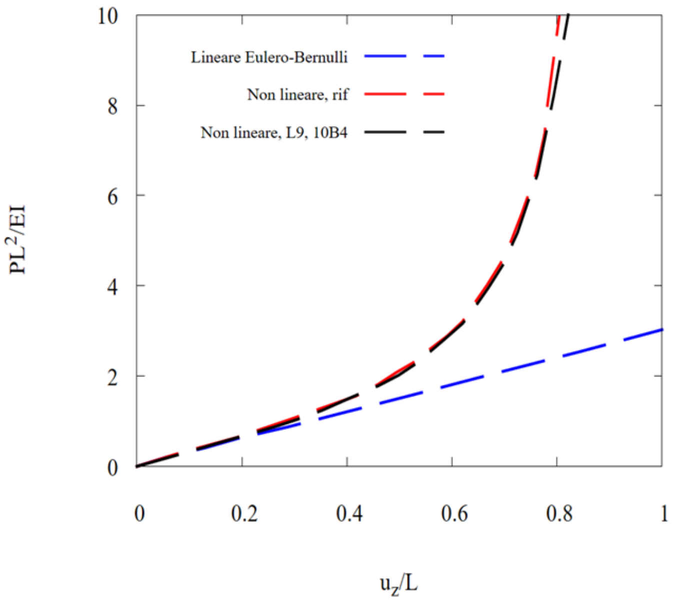

Figura 6.3: Curve di equilibrio della trave 1D in alluminio a sezione quadrata, soggetta a carico trasversale, L9, 10B4. Confronto grafico tra la soluzione lineare di Eulero-Bernoulli, la soluzione non lineare di riferimento e la soluzione non lineare calcolata con la CUF

un'analisi di convergenza per capire quali delle due soluzioni non lineari CUF meglio si avvicinasse alla soluzione di riferimento non lineare, e si è scelto la configurazione a 20B4, il cui andamento è raffigurato in figura 6.4. Come si nota dalla figura la soluzione non lineare a 20 elementi B4, e quindi con una mesh più precisa della precedente, fornisce una soluzione più accurata, che risulta appunto convergere con la soluzione di riferimento. In entrambe le figure si evince come la soluzione lineare di Eulero-Bernoulli garantisce degli ottimi risultati per cicli di carico bassi. Nella tabella 6.3 sono riportati i valori dei carichi normalizzati per le tre soluzioni riportate in figura 6.4 per tre diversi valori dello spostamento normalizzato, rispettivamente seguendo tale ordine 0.2, 0.4, 0.6. Una volta

u_z/L	Non lineare L9,20B4(CUF)	Non lineare di riferimento	Lineare E-B
0.2	0.662	0.662	0.591
0.4	1.515	1.442	1.182
0.6	3.215	3.049	1.797

Tabella 6.3: Confronto numerico tra le diverse soluzioni per tre valori di spostamento normalizzato 0.2, 0.4, 0.6 per la trave con rapporto h/L = 0.1

stabilita quindi che la configurazione scelta come miglior soluzione non lineare

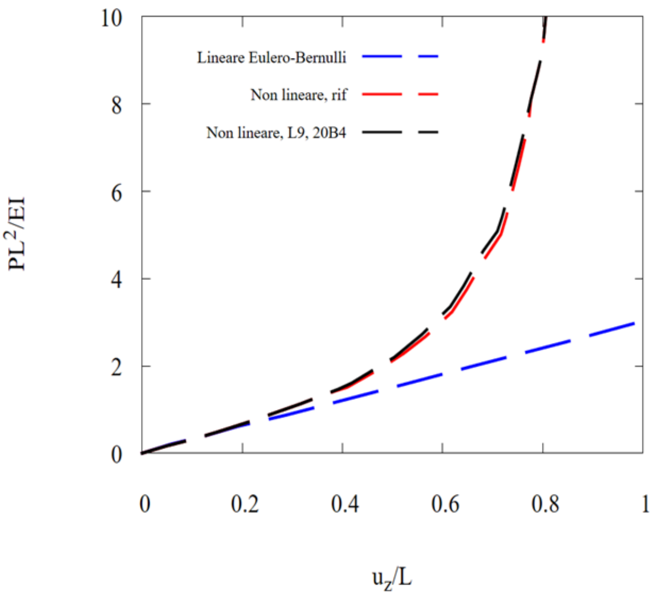

Figura 6.4: Curve di equilibrio della trave 1D in alluminio a sezione quadrata,soggetta a carico trasversale, L9, 20B4. Confronto grafico tra la soluzione lineare di Eulero-Bernoulli, la soluzione non lineare di riferimento e la soluzione non lineare calcolata con la CUF

è quella che presenta una discretizzazione a 20 elementi B4 lungo l'asse y, si è deciso di cambiare la discretizzazione lungo la sezione xz mantenendo fissa quella su y. In particolare si utilizza una discretizzazione a 4 nodi (L4) e a 9 nodi (L9). Nelle figure 6.5 e 6.6 sono illustrati gli andamenti ottenuti. Dal confronto dei due grafici si evince che la soluzione avente come discretizzazione nove nodi fornisce una soluzione più accurata rispetto a quella con quattro. Infatti dalla figura 6.6 si nota come la soluzione di riferimento e quella a L9 si sovrappongono fino a circa $u_z/L \cong 0.4$, per poi discostarsi leggermente fino a tornare a convergenza per $u_z/L \cong 0.77$. Per quanto riguarda la figura 6.5 si nota che per $u_z/L \cong 0.2$ le due curve iniziano già ad allontanarsi. Si osserva che la soluzione con L4 interseca 2 volte la soluzione di riferimento rispettivamente per $u_z/L = 0.70$ e $u_z/L = 0.75$, tornando poi a coincidere con la soluzione di riferimento per lo stesso valore della soluzione L9 ($u_z/L \cong 0.77$.). Da questi confronti si è arrivati quindi a scegliere la configurazione che prevede 20 elementi lungo l'asse y e discretizzata con 9 nodi lungo la sezione trasversale xz, in quanto rappresenta la soluzione più accurata e quella che converge alla soluzione non lineare di riferimento. In tabella 6.4 vengono riportati i valori numerici per i tre valori di spostamento normalizzato visti precedentemente.

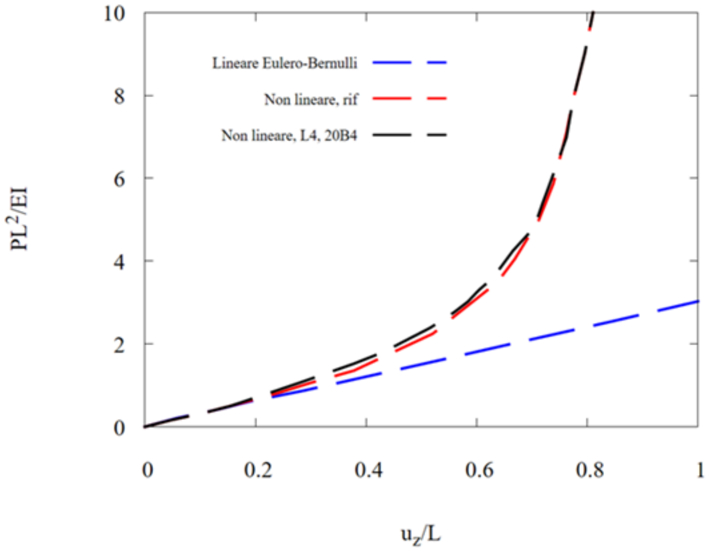

Figura 6.5: Curve di equilibrio della trave a sezione quadrata,soggetta a carico trasversale, L4, 20B4 h= 0.1 m. Confronto grafico tra la soluzione lineare di Eulero-Bernoulli, la soluzione non lineare di riferimento e la soluzione non lineare di CUF

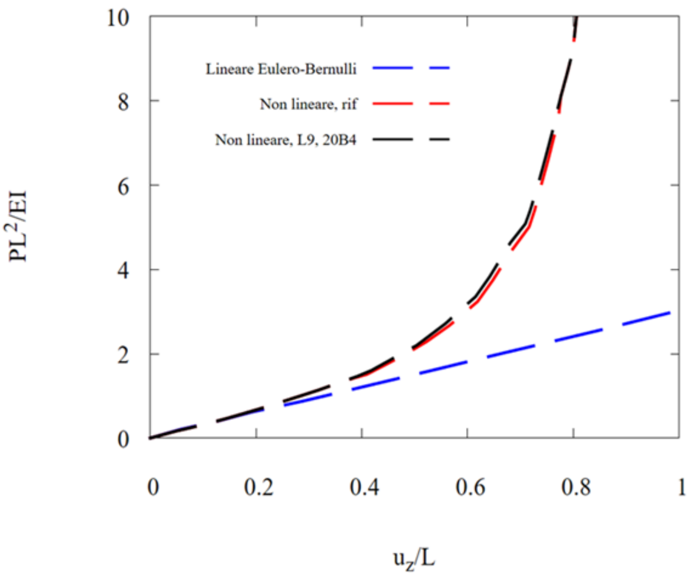

Figura 6.6: Curve di equilibrio della trave a sezione quadrata,soggetta a carico trasversale, L9, 20B4 per spessore h= 0.1 m. Confronto grafico tra la soluzione lineare di Eulero-Bernoulli, la soluzione non lineare di riferimento e la soluzione non lineare di CUF

u_z/L	Non lineare L4,20B4(CUF)	Non lineare L9,20B4(CUF)
0.2	0.794	0.662
0.4	1.752	1.513
0.6	3.317	3.215

Tabella 6.4: Confronto numerico tra le configurazioni L4, 20B4 e L9, 20B4 per tre valori di spostamento normalizzato pari a 0.2, 0.4, 0.6 per la trave con rapporto h/L = 0.1

6.1.4 Analisi non lineare. Trave con rapporto h/L = 0.01

Si analizza ora la trave avente come rapporto spessore/lunghezza 0.01, più snella della precedente di circa 10 ordini di grandezza. L'analisi è stata condotta con una suddivisione di 20 elementi lungo l'asse y e utilizzando una discretizzazione di 9 nodi lungo la sezione trasversale xz. Rispetto all'analisi precedente si è cambiato il valore del carico di riferimento pari a 13 N ed è cambiato conseguentemente anche il momento di inerzia I. I risultati ottenuti sono riportati nella figura 6.7 e in tabella 6.5 sono riportati i valori numerici per i tre valori di spostamento normalizzato. Dalla figura 6.8 si nota come la soluzione rappresentata

u_z/L	Non lineare L9,20B4(CUF)
0.2	0.645
0.4	1.435
0.6	3.014

Tabella 6.5: Valori numerici della soluzione non lineare ottenuta tramite CUF per tre valori di spostamento normalizzato pari a 0.2, 0.4, 0.6 per la trave con rapporto h/L = 0.01

dalla linea nera, che corrisponde alla soluzione ricavata dallo studio conseguito (CUF) coincida esattamente con la soluzione non lineare di riferimento (curva rossa). Pertanto anche in questo caso la soluzione ottenuta converge ai risultati di riferimento e per la trave di spessore h = 0.01 m la suddivisione in 20 elementi lungo l'asse y e la discretizzazione a 9 nodi lungo la sezione trasversale xz rappresenta la soluzione più accurata. Anche in questo caso di trave snella la soluzione lineare di Eulero-Bernoulli fornisce una soluzione ottimale per carichi normalizzati inferiori di 0.78. Grazie all'utilizzo del programma Paraview si ha la possibilità di poter visualizzare la deformazione in termini di spostamento della trave con rapporto h/L = 0.01 m per i vari livelli di carico come rappresentato nella figura 6.8.

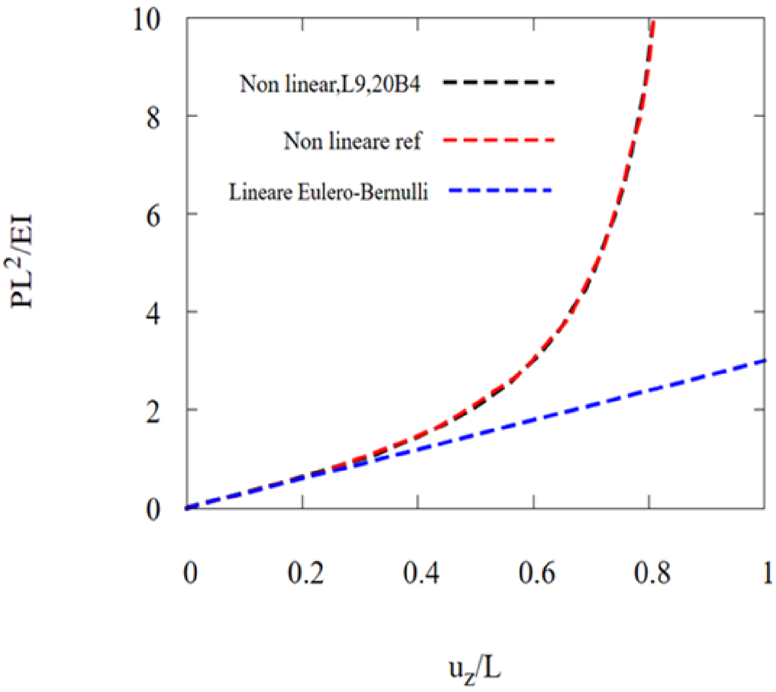

Figura 6.7: Curve di equilibrio della trave a sezione quadrata,soggetta a carico trasversale, L9, 20B4 con rapporto h/L = 0.01 m. Confronto grafico tra la soluzione lineare di Eulero-Bernoulli, la soluzione non lineare di riferimento e la soluzione non lineare di CUF

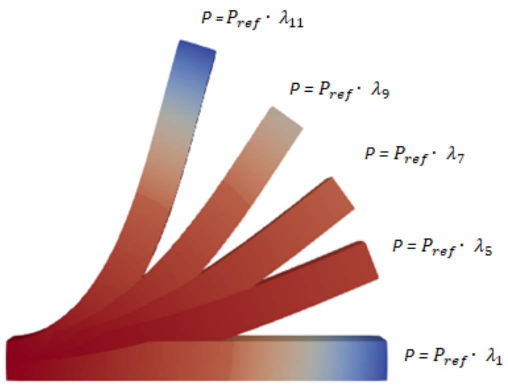

Figura 6.8: Rappresentazione grafica della deformata della trave di spessore 0.1 m per differenti condizioni di carico per $\lambda_1 = 0$, $\lambda_5 = 6.0$, $\lambda_7 = 10.90$, $\lambda_9 = 16.15$, $\lambda_{11} = 28.44$

6.1.5 Analisi non lineare delle sollecitaizoni assiali σ_{yy} per trave con rapporti h/L = 0.1 e h/L = 0.01

Ripetendo l'analisi svolta per il calcolo degli spostamenti si vuole ora studiare l'andamento delle sollecitazioni assiali (lungo l'asse y) sulla sezione trasversale lungo lo spessore. Si diagrammano le rispettive σ_{yy} normalizzate in funzione dello spessore anch'esso normalizzato come mostrato in figura 6.9 e figura 6.10. Le curve sono state tracciate per 4 diversi valori del rapporto PL^2/EI; esse presentano ognuna un andamento differente con valori compresi tra 1 e -1 per quanto riguarda l'asse delle ordinate e valori compresi tra -0.5 e 0.5 sull'asse x, ma tutte convergono in un punto prossimo allo zero in entrambi i casi di studio. In tabella 6.6 e 6.7 sono riportati i diversi valori che le curve assumono in funzione dei diversi valori di z/h rispettivamente. Il modello trave considerato descrive molto bene il comportamento dello stato di sollecitazioni e deformazioni. Se per quanto riguarda lo spostamento possiamo usufruire delle teorie classiche della trave poichè forniscono risultati attendibili, per lo studio delle distribuzioni di sollecitazioni occorre una cinematica di ordine superiore. In particolare le teorie classiche possono ancora essere utilizzate se la trave è lunga e sottile in quanto presenta un andamento pressoché lineare per ogni livello di carico. Nel caso di travi corte in flessione l'approssimazione al primo ordine non è appropriata perché l'andamento non è più lineare al crescere del carico. Non si possono quindi trascurare gli effetti di non linearità geometrica nello studio dello stato di sollecitazioni, in quanto l'analisi lineare sovrastima i valori.

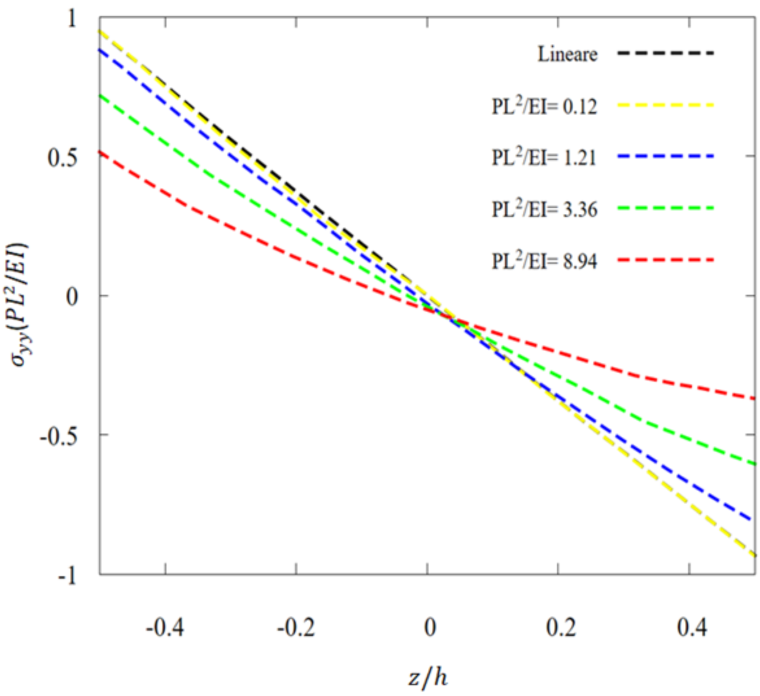

Figura 6.9: Distribuzione delle sollecitazioni assiali per la trave con rapporto h/L = 0.1 per differenti livelli di carico

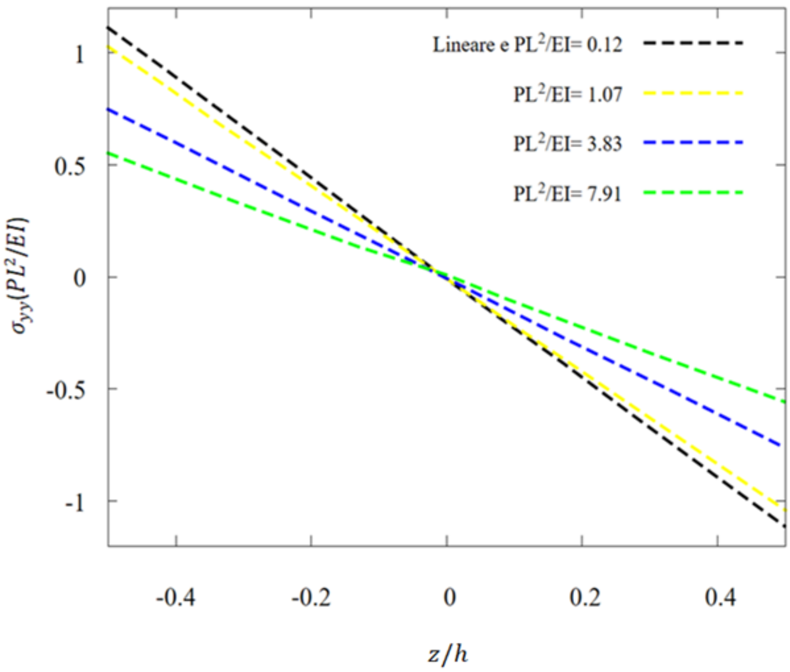

Figura 6.10: Distribuzione delle sollecitazioni assiali per la trave con rapporto h/L = 0.01 per differenti livelli di carico

z/h	Lineare	$PL^2/EI=$ 0.12	$PL^2/EI=$ 1.21	$PL^2/EI=$ 3.36	$PL^2/EI=$ 8.94
-0.4	0.760	0.760	0.698	0.553	0.372
-0.2	0.380	0.367	0.335	0.243	0.140
0.2	-0.372	-0.372	-0.359	-0.289	-0.202
0.4	-0.752	-0.752	-0.669	-0.516	-0.322

Tabella 6.6: Confronto numerico tra le diverse curve per rapporti z/h rispettivamente i -0.4, -0.2, 0.2, 0.4 per trave con rapporto h/L = 0.1

z/h	Lineare e $PL^2/EI=$ 0.12	$PL^2/EI=$ 1.01	$PL^2/EI=$ 3.83	$PL^2/EI=$ 7.91
-0.4	0.894	0.826	0.603	0.443
-0.2	0.463	0.429	0.307	0.225
0.2	-0.472	-0.433	-0.327	-0.235
0.4	-0.913	-0.850	-0.623	-0.448

Tabella 6.7: Confronto numerico tra le diverse curve per rapporti z/h rispettivamente i -0.4, -0.2, 0.2, 0.4 per trave con rapporto h/L=0.01

6.2 Analisi non lineare. Trave soggetta a compressione

Il secondo caso di analisi è una trave a sbalzo in alluminio a sezione quadrata, soggetta a una grande deflessione dovuta ad un carico assiale che agisce lungo y come mostrato in figura 6.11. L'analisi è stata condotta considerando la trave lunga e sottile di rapporto spessore/lato pari a 0.01. Come in precedenza si conduce un'analisi di convergenza con lo scopo di stabilire quale sia la miglior scelta di discretizzazione agli elementi finiti che approssimi la soluzione di riferimento. Sono di seguito riportati i dati di riferimento utilizzati: modulo di Young pari a E = 75 Gpa ; il coefficiente di Poisson pari a $\nu = 0.33$; lunghezza pari a L = 1 m; un momento di inerzia pari a $I = 8.33 \times 10^{-}10\ m^4$. Il carico di riferimento pari a P_{ref}= 75 kN, il carico d invece è pari a 0.002 N. In figura 6.11 viene rappresentato il modello 1D della trave considerata. Sulla trave agisco-

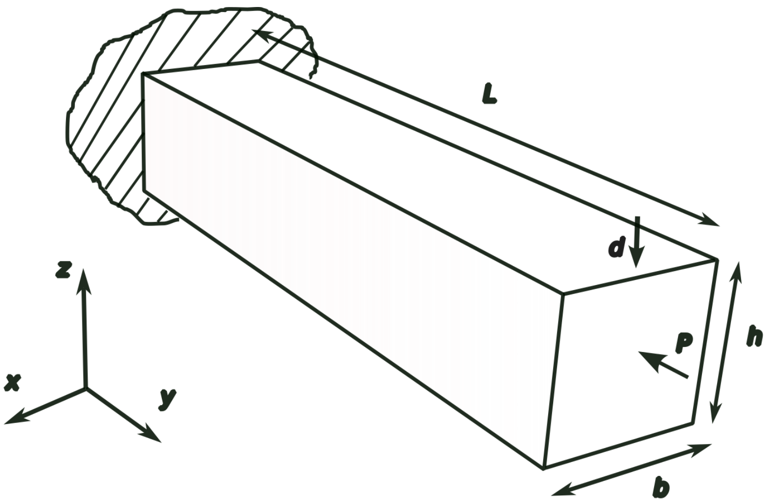

Figura 6.11: Modello 1D della trave incastrata soggettta a compressione e difetto di piccola entità all'estremo libero

no quindi due carichi: il carico di compressione agisce lungo l'asse y e il carico d di piccola entità che agisce in direzione z. Entrambi agiscono come indicato dalla figura all'estremo libero della trave. L'analisi di convergenza ha portato a utilizzare una discretizzazione di 61 nodi lungo l'asse y e L9 nodi sulla sezione trasversale xz in quanto essa approssima meglio la soluzione di riferiemento; la soluzione a L4 nella sezione trasversale andava a sovrastimare i valori. In entrambi i grafici riportati nelle figura 6.12 e 6.13, si rappresenta il carico critico di instabilità normalizzato in funizone dello spostamento u_z e u_y ed è evidente come per entrambi i casi la soluzione ricavata con la Formulazione Unificata di Carrera coincida quasi perfettamente con la soluzione di riferimento presente in letteratura[15]. Analizzando nello specifico le due immagini, lo spostamento normalizzato u_y presenta un andamento crescente all'aumentare del carico mentre lo spostamento normalizzato u_z presenta un andamento quasi lineare per carichi di bassa intensità fino a raggiungere un massimo di valore pari a circa 0.8 per un carico normalizzato pari a 2; dopodiche all'aumentare del carico si nota una rapida dimunuzione.

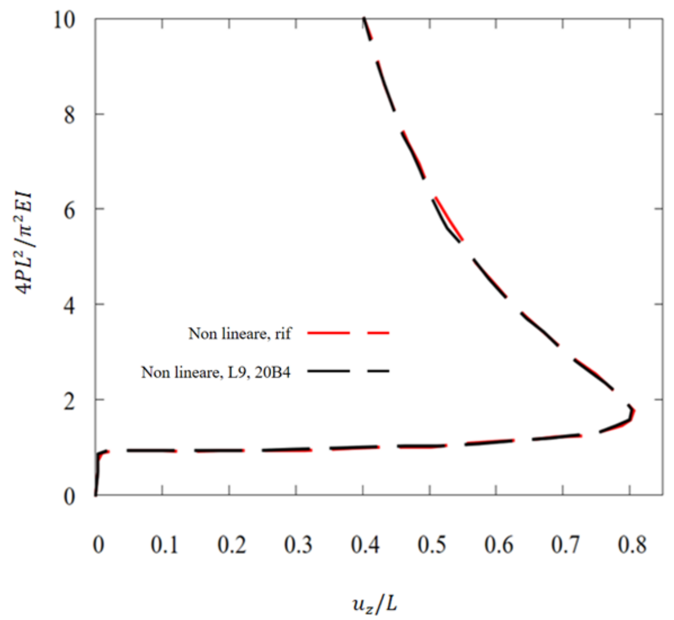

Figura 6.12: Confronto curve di equilibrio per la trave soggetta ad un carico di compressione assiale in funzione di u_z/L. Confronto tra soluzione non lineare di riferimento e soluzione non lineare CUF

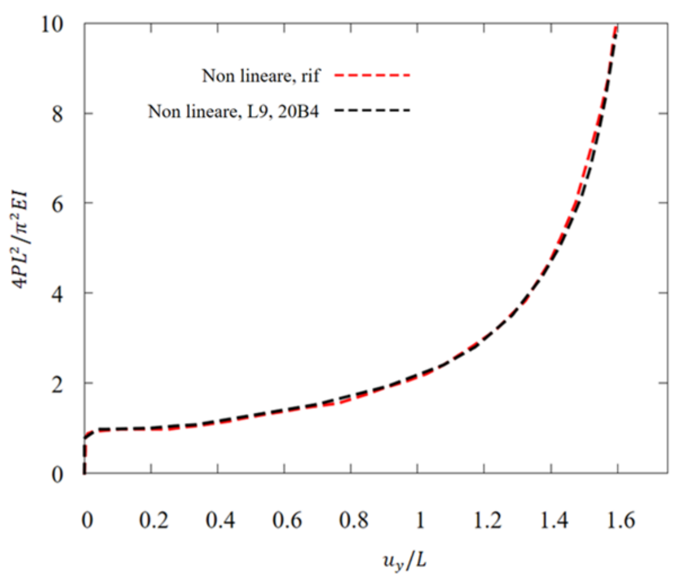

Figura 6.13: Confronto curve di equilibrio per la trave incastrata soggetta ad un carico di compressione assiale in funzione di u_y/L. Confronto tra soluzione non lineare di riferimento e soluzione non lineare CUF

6.3 Modello trave in composito. Analisi non lineare

In questa paragrafo si conduce un'analisi geometrica non lineare impiegando il metodo CUF per travi composite asimmetriche a due strati soggette a carico di compressione e carico trasversale mantenendo sempre le condizioni iniziali di incastro viste nel caso di studio di trave in alluminio [74]. In particolare

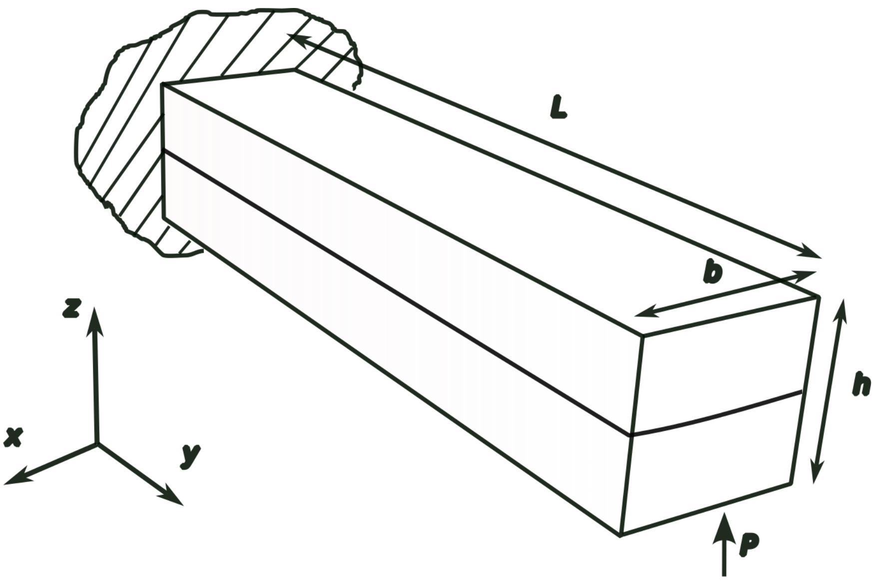

Figura 6.14: Modello trave composita a due strati soggetta a carico trasversale all'estremità libera

si considera una trave a sezione rettangolare costituita da materiale ortotropo AS4/3501-6 di fibra grafitica e matrice epossidica con le seguenti proprietà: moduli di Young pari a $E_1 = 144.8$ GPa, $E_2 = 9.65$ GPa, $E_3 = 9.65$ GPa; coefficienti di Poisson pari a $\nu_1 2 = 0.3$, $\nu_1 3 = 0.3$ e $\nu_2 3 = 0.4$; coefficienti di taglio pari a $G_1 2 = G_1 3 = 4.14$GPa e $G_2 3 = 3.45$ GPa; lunghezza della trave pari a L = 1 m; spessore pari a h = 0.06 m e larghezza pari a b = 0.1 m. Per quanto rigurda i carichi agenti sulla struttura, si utilizaano rispettivamente: un carico trasversale pari a 10 kN e un carico di compressione pari a 200 kN.
L'analisi è stata condotta per una laminazione [0°/45°] e [0°/90°], cioè le fibre nel primo strato hanno un orientazione di zero gradi rispetto alla lamina stessa, mentre nel secondo strato la fibra è orientata 45° o a 90°. Le considerazioni sul tipo di discretizzazione agli elementi finiti utilizzato per la trave in alluminio restano invariate. In figura 6.14 e 6.15 sono rappresentati i due modelli di trave considerati.

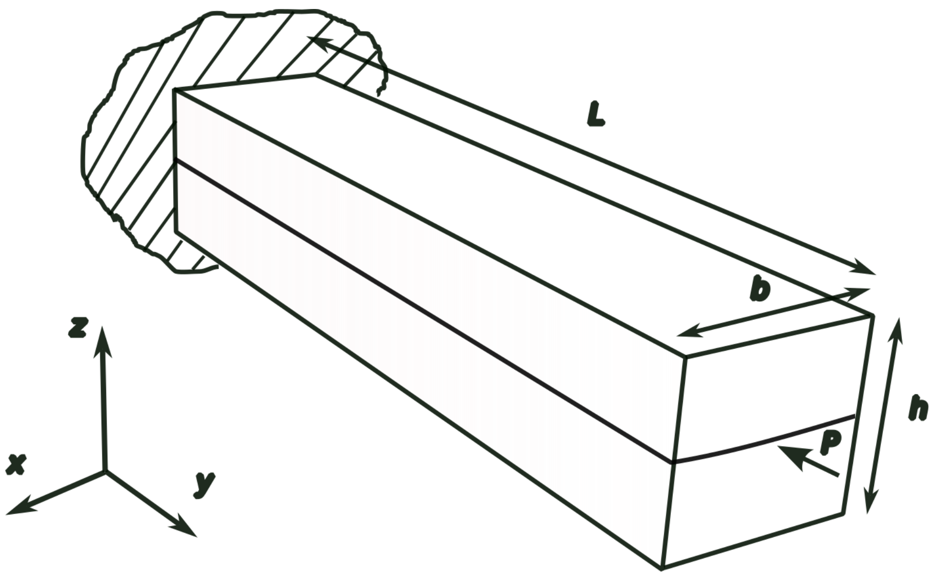

Figura 6.15: Modello trave composita a due strati soggetta a compressione all'estremità libera

6.3.1 Trave in composito soggetta a compressione

Si analizza ora il caso di trave composita soggetta a compressione. Per la discretizzazione del modello 1D trave si prende in esame solo il caso di discretizzazione a sedici nodi lungo la sezione xz con funzione di espansione biquadratica, in quanto per la complessità del materiale si è deciso di usare fin da subito una mesh più fitta.
Si procede quindi con un confronto tra le due diverse laminazioni. La forza di compressione che agisce sul tip della trave vale 200 KN. In figura 6.16 sono riportati i risultati ottenuti. Dall'immagine si evince che per carichi normalizzati inferiori a 0.70 e spostamenti normalizzati inferiori a 0.20, ossia il punto di biforcazione, la soluzione lineare classica di von Kármán si confonde con quella non lineare ed entrambe crescono linearmente [12].
Da quel punto in poi la trave deve essere trattata assolutamente con la soluzione non lineare in quanto fornisce risultati più accurati: in particolare il modello CUF (rosso) presenta un andamento crescente non lineare fino ad un valore di spostamento pari a 0.75, dopodiché per ulteriori aumento di carico lo spostamento tende a diminuire. La soluzione lineare di von Kármán invece dopo il punto di biforcazione rimane pressoché costante. Successivamente si è cambiato il tipo di laminazione [0°/90°]. L'andamento della curva è identico, quello che cambia sono i valori del punto di biforcazione e il punto di spostamento massimo dove poi la curva cambia di concavità come mostrato in figura 6.17.
Anche in questo caso si può concludere che la soluzione lineare di von Kármán vada bene per carichi bassi, ma deve essere considerata la soluzione non lineare in quanto come già detto garantisce una certa accuratezza nei risultati.

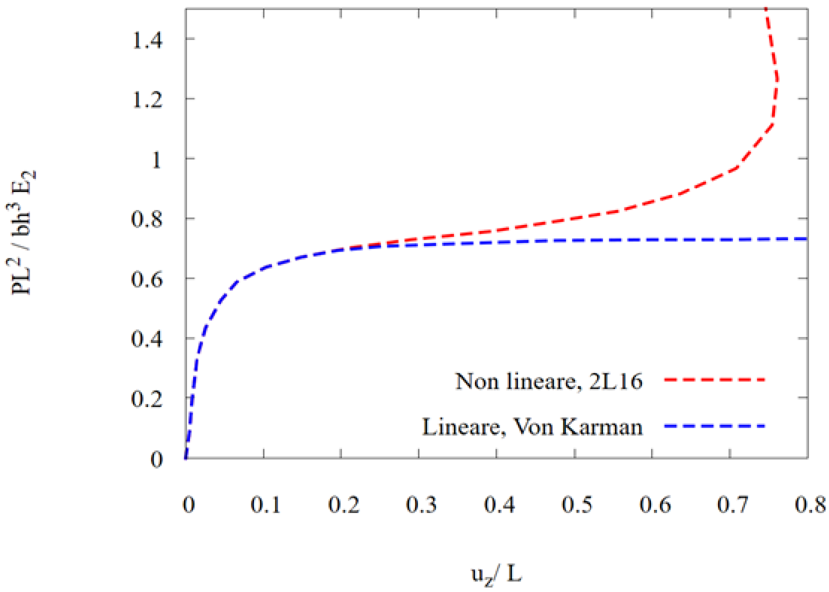

Figura 6.16: Curva di equilibrio post-buckling della trave a sbalzo asimmetrica a due strati [0°/45°] sottoposta a compressione

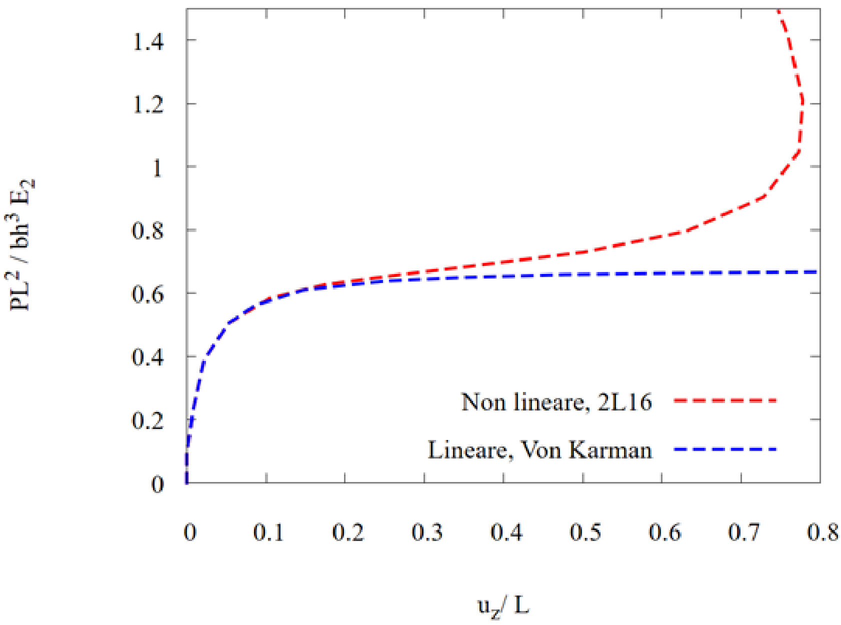

Figura 6.17: Curva di equilibrio post-buckling della trave a sbalzo asimmetrica a due strati [0°/90°] sottoposta a compressione

6.3.2 Trave in composito soggetta a carico trasversale

Si vuole ora analizzare la stessa trave soggetta a una forza pari a 10 kN che agisce sempre sul suo estremo libero ma in direzione z. La trave in questo caso è stata discretizzata con elementi 10B4 con 9 nodi sulla sezione trasversale xz.
Come ci si poteva aspettare dalla trattazione della trave in alluminio anche in questo caso l'andamento della curva è crescente, lineare nel primo tratto fino a un carico normalizzato pari a 2, dopo di che la curva cresce più rapidamente.Ciò è mostrato in figura 6.18. In figura 6.19 sono inoltre riportate le diverse deformazioni per differenti valori di carico ottenute tramite il programma Paraview.

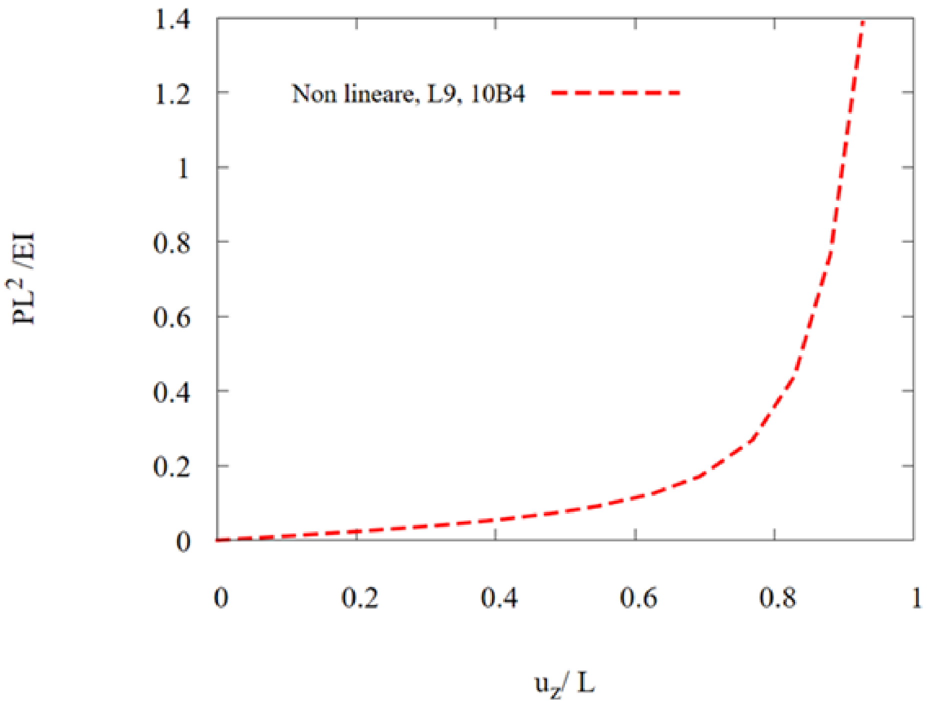

Figura 6.18: Curve di equilibrio della trave in composito a sezione rettangolare soggetta a carico trasversale con laminazione[0°/45°]

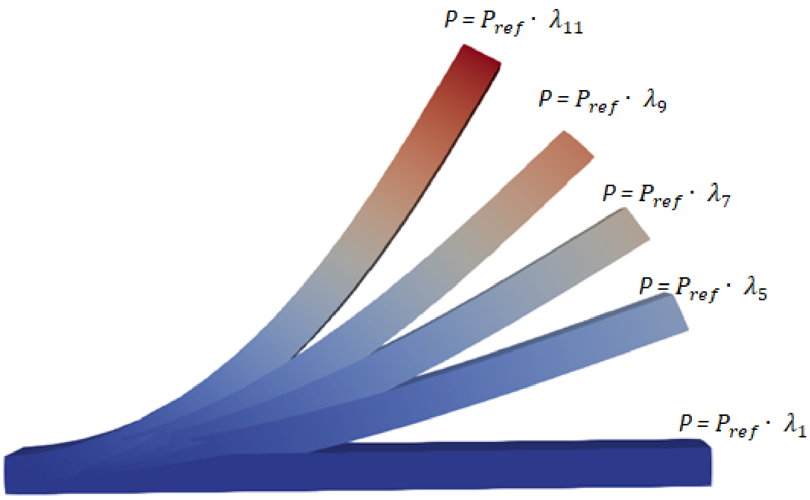

Figura 6.19: Deformazione della trave compoita in termini di spostamento per differenti condizioni di carico: $\lambda_1 = 0, \lambda_5 = 4.54, \lambda_7 = 7.92, \lambda_9 = 12.29$, $\lambda_{11} = 21.08$

6.3.3 Sollecitazioni assiali σ_{yy} per trave composita di laminazione[0°/45°]

Ripetendo l'analisi svolta per il calcolo degli spostamenti si vuole ora studiare l'andamento delle sollecitazioni assiali (lungo l'asse y) sulla sezione trasversale in particolare lungo lo spessore in mezzeria della trave in composito. In figura 6.20 è riportato l'andamento delle σ_{yy} normalizzate in funzione dello spessore anch'esso normalizzato, per un carico P pari a P = λ P_r, dove P_r vale 10kN e λ vale 19.
In figura 6.20 sono rappresentate la soluzione lineare di von Kármán (rosso) e la soluzione non lineare ricavata dalla CUF(blu). Per entrambe le curve il primo tratto è caratterizzato da un andamento pressochè lineare decrescente fino a spessore normalizzati prossimi allo zero, partendo da due diversi valori: circa 4 per la soluzione lineare di von Kármán, circa 6 per la soluzione CUF. Nel punto di spessore nullo , ossia nel punto di suddivisione dei due strati è presente una discontinuità evidente solo nella soluzione non lineare.
Successivamente, mentre per la soluzione lineare l'andamento rimane pressochè costante, per la soluzione non lineare CUF l'andamento è ancora decrescente, ma alla fine del secondo strato entrambe raggiungono lo stesso valore pari circa a 1.

6.4 Modello 2D piastra. Analisi non lineare

In questa sezione vengono riportati tutti i risultati ottenuti dall'analisi statica geometrica non lineare per il caso bidimensionale rappresentato da una piastra,

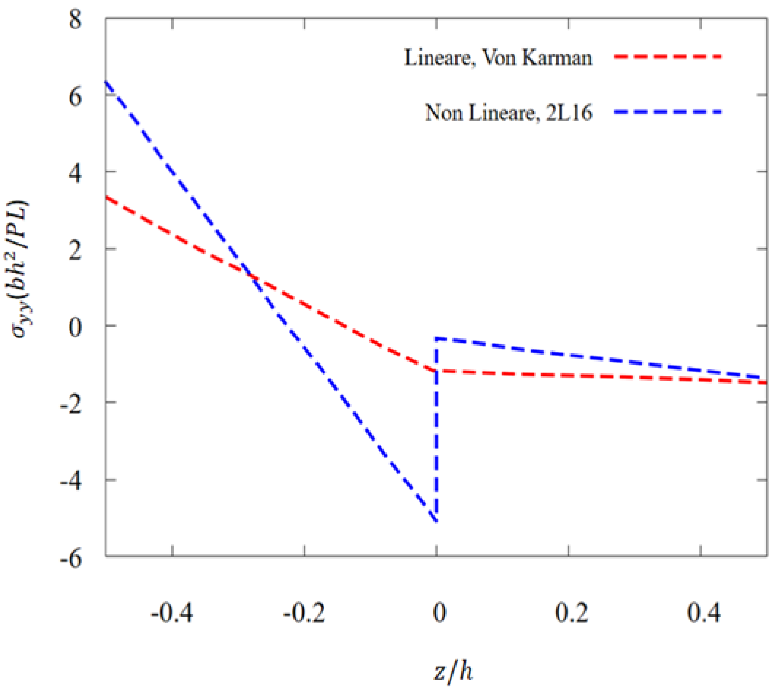

Figura 6.20: Distribuzione di sollecitazione assiale per trave in composito di spessore 0.06 m. Confronto tra soluzione lineare di von Kármán e soluzione non lineare CUF con discretizzazione 2L16

confermando come la Formulazione Unificata di Carrara sia un ottimo metodo per ricavare soluzioni accurate [78]. Si analizza il caso di una piastra costituita da materiale isotropo omogeneo a sezione quadrata, soggetta a una grande deflessione dovuta ad un carico trasversale che agisce lungo z indicato con p_z. L'analisi è stata condotta considerando nel primo caso un rapporto spessore/lato pari a h/a = 0.1 e nel secondo caso un rapporto pari a 0.02. In figura 6.21 vengono riportati le tre situazioni di studio, ossia piastra CCCC, SSSS, CSCS, come mostrato in figura 6.22. In seguito sono elencate tutte le proprietà della piastra prese in esame. Dati: modulo di Young E pari a = 75 GPa ; coefficiente di Poisson pari a $\nu = 0.3$; lunghezza pari a a = b = 1.2 m. Prima di studiare gli effetti delle diverse condizioni al contorno sulla piastra per i due diversi spessori, si analizza il caso di convergenza di un piastra SSSS spessa h/a = 0.1 con pressione normale uniforme applicata p_z per diverse tipo di mesh nel piano xy e, diversa tipologia di funzione di espansione lungo lo spessore z quali polinomi di Lagrange LD1 lineari a due nodi, LD2 quadratici a tre nodi e LD4 cubici a quattro nodi. Le discretizzazioni nel piano xy scelte sono : 2x2, 6x6, 8x8, 12x12.

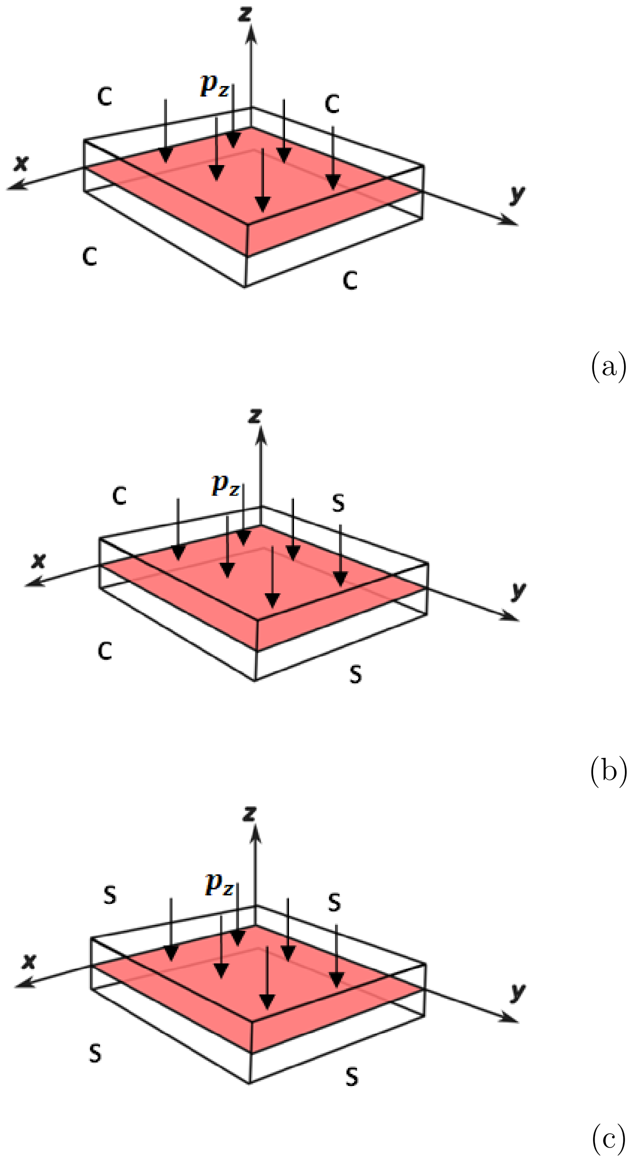

Figura 6.21: Modello piastra: (a) bloccata sui 4 lati CCCC; (b) bloccata su 2 e libera sugli altri 2 CSCS; (c) libera sui 4 lati SSSS; soggetta a carico costante

6.4.1 Piastra soggetta a carico trasversale con rapporto h/a = 0.1 per differenti tipi di discretizzazione

Sull'asse delle ordinate è indicato lo spostamento u_z normalizzato mentre sull'asse dell'ascisse il carico p_z normalizzato anch'esso. Considerando dunque la piastra $SSSS$ sulla quale agisce un carico uniforme P_z si può osservare nella figura 6.22 che tutte le soluzioni, tendono a confondersi per carichi bassi mentre per carichi alti una mesh più raffinata comporta una soluzione più accurata rispetto a quella di riferimento non lineare presa in considerazione in questa trattazione[69].

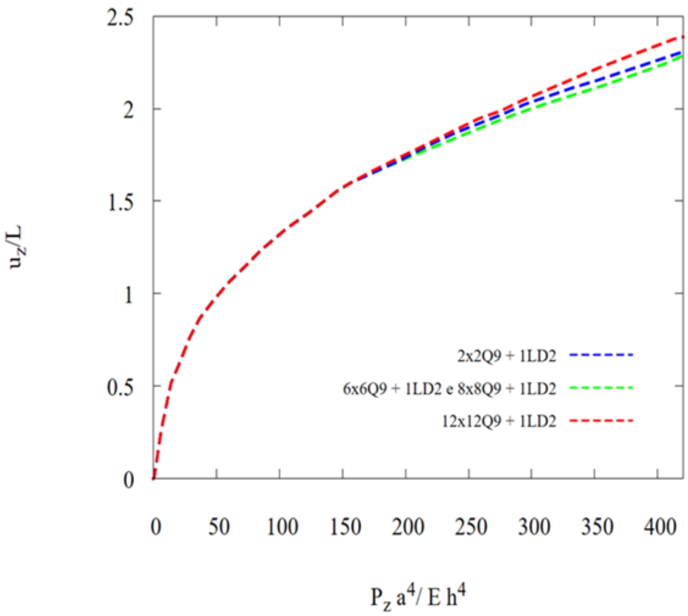

Figura 6.22: Curve di equilibrio della piastra soggetta a pressione trasversale uniforme con condizioni al contorno SSSS per diversi criteri di discretizzazione.

6.4.2 Piastra soggetta a carico trasversale con rapporto h/a = 0.1 per differenti tipi di funzione di espansione

Come si può notare dalla figura 6.23 la soluzione LD2 coincide con LD3 perciò si può affermare che l'utilizzo di una funzione di espansione quadratica fornisce un miglior grado di accuratezza rispetto sempre alla soluzione di riferimento non lineare considerata. Riassumendo da questi due risultati ottenuti si può affermare che la configurazione ottimale è quella 12x12-Q9-LD2 in quanto è quella che fornisce una soluzione più raffinata.

6.4.3 Piastra soggetta a carico trasversale con rapporto h/a = 0.02 per differenti condizioni al contorno

Come si può notare dalla figura 6.24 la soluzione ricavata tramite la Formulazione Unificata di Carrera per le diverse condizioni al bordo della piastra coincide quasi esattamente con la soluzione non lineare di riferimento, la quale è una riformulazione della teoria di von Kármán. Quindi per piastre sottili la teoria di von Kármán ci fornisce delle soluzioni accettabili. Come è lecito aspettarsi l'andamento della soluzione piastra semplicemente appoggiata, a parità di carico presenta un maggiore spostamento. In tabella 6.8 viene rappresentato un confronto numerico tra le varie condizioni al contorno.

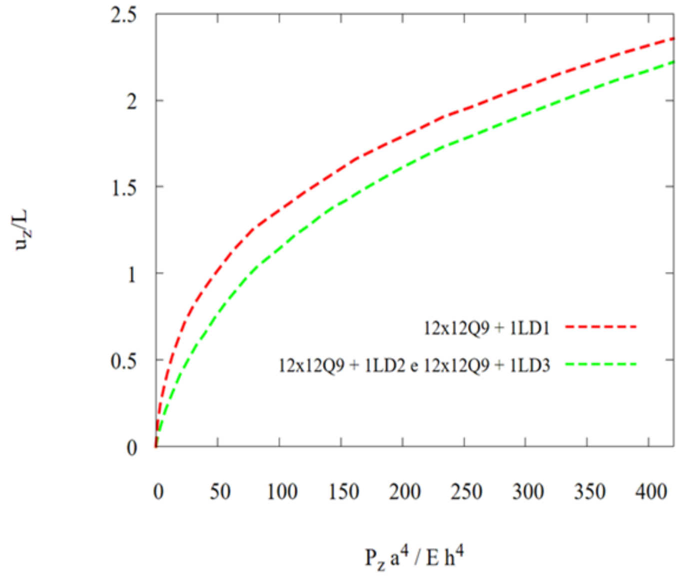

Figura 6.23: Curve di equilibrio della piastra soggetta a pressione trasversale uniforme con condizioni al contorno SSSS per diverse funzioni di espansioni con discretizzazione 12x12.

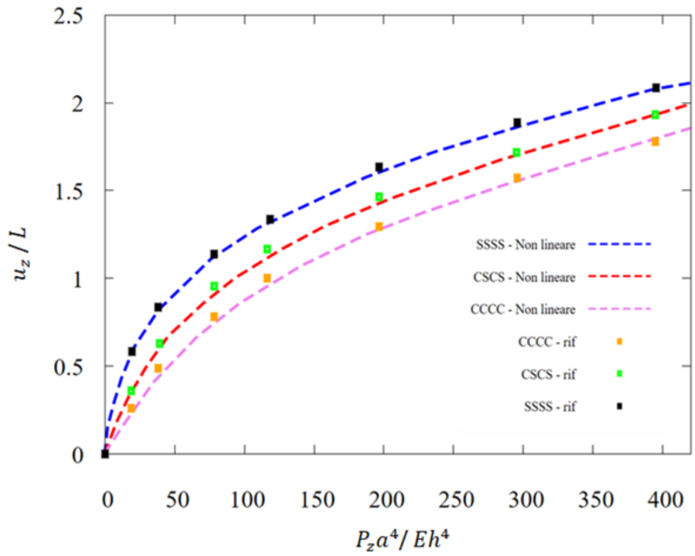

Figura 6.24: Curve di equilibrio della piastra soggetta a pressione trasversale uniforme con condizioni al contorno SSSS,CSCS,CCCC per spessore di h/a = 0.02

Carico	SSSS	CCCC	CSCS
50	0.933	0.716	0.548
150	1.467	1.301	1.126
250	1.789	1.620	1.475
375	2.084	1.933	1.801

Tabella 6.8: Confronto numerico tra gli spostamenti delle tre configurazioni della piastra per i seguenti carichi normalizzati: 50, 150, 250, 375 per spessore h/a = 0.02

6.4.4 Piastra soggetta a carico trasversale con rapporto h/a = 0.1 per differenti condizioni al contorno

A differenza del caso precedente qui lo spessore è superiore di un ordine di grandezza. Dalla figura 6.25 si può notare che la soluzione di riferimento si discosta dalla soluzione non lineare trovata con il modello CUF. Ciò porta a concludere che la teoria di von Kármán non fornisce soluzioni accettabili. In tabella 6.9 viene rappresentato un confronto numerico tra le varie condizioni al contorno.

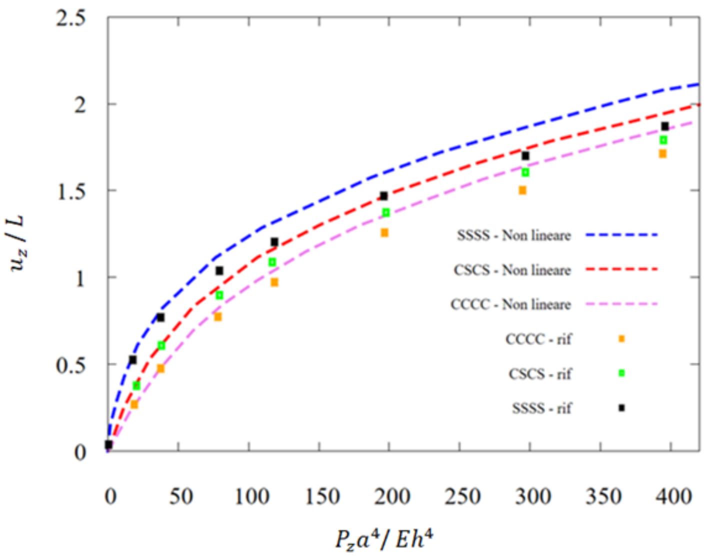

Figura 6.25: Curve di equilibrio della piastra soggetta a pressione trasversale uniforme con condizioni al contorno SSSS,CSCS,CCCC per spessore di h/a = 0.1

Carico	SSSS	CCCC	CSCS
50	0.929	0.749	0.634
150	1.467	1.320	1.224
250	1.788	1.666	1.544
375	2.088	1.948	1.852

Tabella 6.9: Confronto numerico tra gli spostamenti delle tre configurazioni della piastra per i seguenti carichi normalizzati: 50, 150, 250, 375 per spessore a/h = 0.1

6.4.5 Sollecitazione normale σ_{xx} al centro della piastra quadrata

Per l'analisi della tensione normale si è considerata una piastra incastrata sui quattro lati (CCCC) e con i medesimi dati della precedente con lo spessore di h/a = 0.02.
In figura 6.26 viene rappresentato l'andamento dello stress normale adimensionale nel punto di mezzeria, per cinque differenti livelli di carico. Il carico adimensionato è indicato con P_{ad} e definito nel seguente modo:

$$P_{ad} = \frac{P_z}{Eh^4}$$

Si nota che per tutti i livelli di carico indicati l'andamento è pressoché lineare. In particolare per carichi bassi lungo lo spessore la sigma non varia di molto, mentre subisce grandi variazioni per carichi elevati.
Infine nella tabella 6.10 viene condotto un confronto numerico delle sollecitazioni per le diverse condizioni di carico in funzione dei seguenti valori di spessore normalizzato: -0.4, -0.2, 0.2, 0.4.

z/h	$P_{ad} = 1$	$P_{ad} = 7$	$P_{ad} = 27.1$	$P_{ad} = 75.5$	$P_{ad} = 238.9$
-0.4	0.442	1.231	3.573	8.081	16.383
-0.2	0.442	0.922	2.124	5.256	12.053
0.2	0.383	0.082	-0.521	-0.515	2.733
0.4	0.323	-0.27	-1.906	-3.287	-0.285

Tabella 6.10: Confronto numerico delle sollecitazione σ_{XX} per diverse condizioni di carico adimensionato per i seguenti valori di spostamenti normalizzati: -0.4, -0.2, 0.2, 0.4.

6.5 Modello trave composita multistrato. Analisi dinamica nel dominio delle frequenze

In questa sezione si conduce un analisi dimanica nel dominio delle frequenze per una trave multistrato per differenti condizioni.

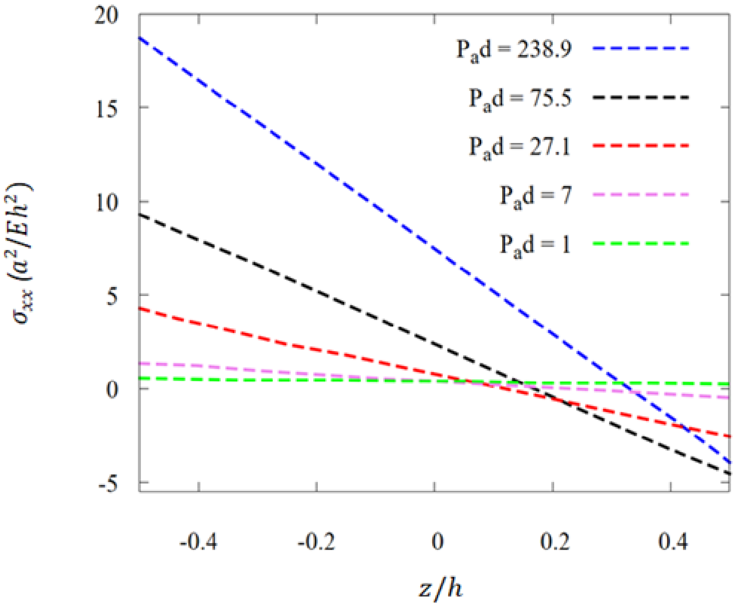

Figura 6.26: Distribuzione lungo lo spessore dello stress normale adimensionale $\sigma_{xx}a^2/(Eh^2)$ nel punto di mezzeria con condizioni al contorno CCCC e sotto differenti carichi di pressione

6.5.1 Analisi dinamica. Trave con differenti lay-up e condizioni al contorno

Si vuole determinare ora la risposta dinamica di una trave composita simmetrica AS4/3501-6 a quattro strati con diverso orientamento di laminazione e differenti condizioni al contorno. La trave è soggetta a un carico sinusoidale posizionato a un quarto della lunghezza ossia a y = 0.25 m. I dati sono i seguenti: lughezza L pari a 1 m, spessore h pari a 0.005 m, larghezza b pari a 0.02 m; moduli di Young E_{xx} = 147 GPa,E_{yy} = E_{zz} = 9 GPa; coefficienti di Poissoin ν_{yz} = 0.42, ν_{xy} = ν_{xz} = 0.3; moduli di taglio G_{xy} = G_{xz} = 5 GPa, G_{yz}= 0.3 GPa; densità pari ρ = 1580 kg/m^3, come è presente nel riferimento utilizzato per questa trattazione[32]. Successivamente si farà il confronto con Femap, software per l'analisi di elementi finiti che sarà impiegato da qui fino a fine trattazione come mezzo per convalidare i risultati ottenuti. In figura 6.27 e 6.28 vengono raffigurati i modelli trave utilizzati nella trattazione. Per questa analisi si è fatto riferimento alla trattazione presente in [32], in cui si prende come modello la teoria classica dei laminati, derivate da Reddy [56] per il calcolo della matrice di rigidezza. In questo studio, a differenza dal [32], non si tiene conto dello smorzamento. Si analizzano le frequenze naturali proprie della trave in composito per le differenti configurazioni di lay-up e condizioni al contorno. Inizialmente si condurrà un confronto tra i risultati già ottenuti in [33] e il modello CUF e successivamente si valideranno i risultati utilizzando Femap.

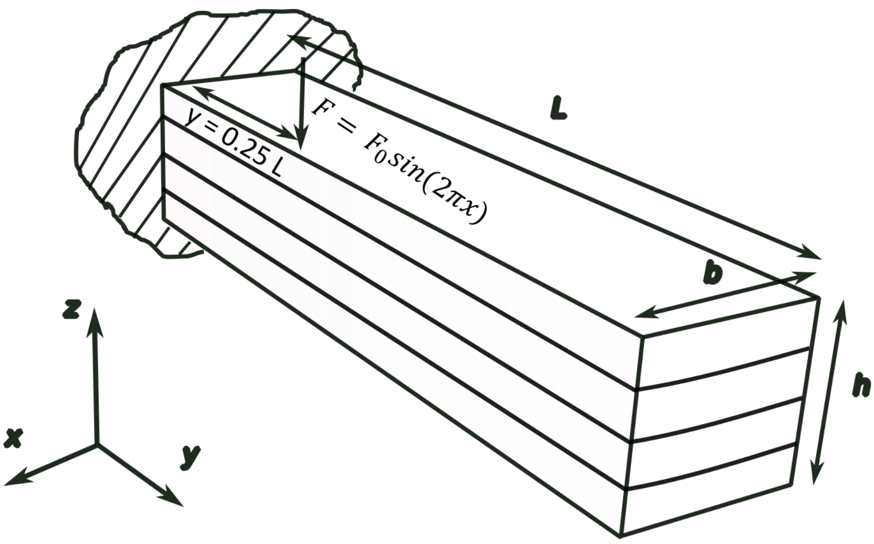

Figura 6.27: Trave composita a quattro strati simmetrica AS4/3501-6 , incastrata da un lato e soggetta a una forza sinusoidale a y = 0.25 L

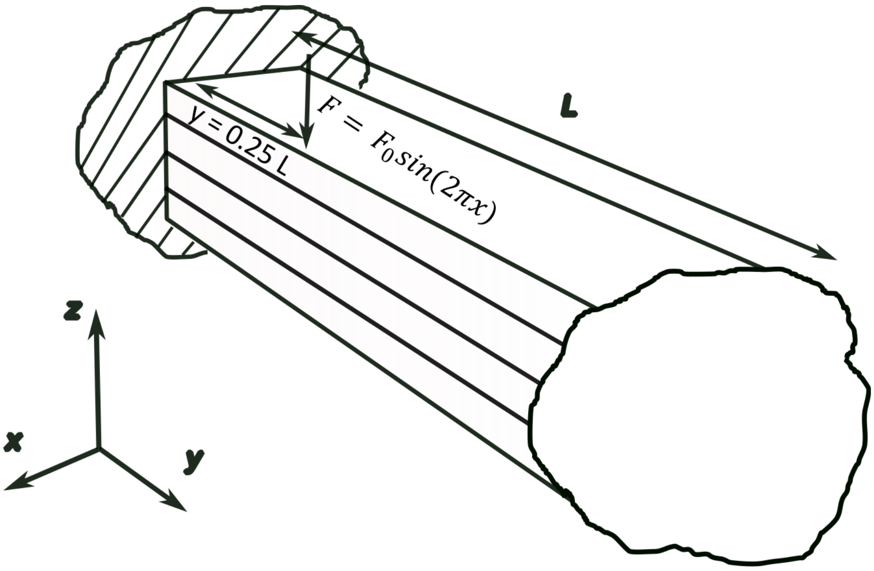

Figura 6.28: Trave composita a quattro strati simmetrica AS4/3501-6 , incastrata da entrambi i lati e soggetta a una forza sinusoidale a y = 0.25 L

Confronto tra modello Matlab e CUF

Sono state prese in considerazione le prime tre frequenza naturali, calcolate utilizzando il metodo CUF e successivamente sono state confrontate con quelle presenti in [33],che sono state calcolate utilizzando il codice Matlab, che nella tabella 6.11 è indicato con Rif. Nella soluzione di riferimento il modello utilizzato è basato sugli elementi finiti, e in tal senso si utilizzano 20 elementi di discretizzazione lungo y. La risposta dinamica della trave è ricavata utilizzando il metodo di integrazione di Newmark, ampiamente utilizzato nella dinamica strutturale. In questa trattazione per determinare le frequenze naturali del sistema si utilizza la Formulazione Unificata di Carrera con una discretizzazione della trave a 8 elementi B4 lungo y e una discretizazione a L9 nodi lungo la sezione xz. Dalla tabella 6.11 si evince un buon accordo tra i risultati numerici ottenuti.

	f_n1		f_n2		f_n3	
	CUF	Rif	CUF	Rif	CUF	Rif
Incastro-Incastro						
$[0/45]_s$	46.13	46.36	126.81	126.02	249.13	241.82
$[90]_{2s}$	12.34	12.14	34.02	33.00	66.70	63.33
$[45/-45]_s$	16.25	16.38	44.91	44.53	88.45	85.44
Incastro-Libero						
$[0/45]_s$	7.49	7.33	46.58	45.65	129.00	126.22
$[90]_{2s}$	1.89	1.92	11.82	11.96	32.92	33.05
$[45/-45]_s$	2.56	2.58	15.95	16.13	44.47	44.60

Tabella 6.11: Confronto numerico delle prime tre frequenze naturali calcolate utilizzando due differenti metodi agli elementi finiti: CUF e quello presente in [33] della trave composita simmetrica AS4/3501-6

Confronto CUF e Femap

Per quanto riguarda Femap il modello agli elementi finiti prevede la discretizzazione della trave in 4800 elementi solidi cubici a 8 nodi. In tabella 6.12 vengono riportati i valori ottenuti e confrontati con i risutati CUF ottenuti precedentemente. Si è preso in considerazione solo il caso Incastro-Libero in quanto successivamente, una volta validati tali risultati, si considererà solo quest'ultimo per una laminazione $[0/45]_s$ Una volta validate le frequenze naturali si analizza la particolare risposta in frequenza della trave composita per diverse tipologie di orientamento degli strati in particolare $[0/45]_s$, $[90]_{2s}$, $[45/-45]_s$ e diverse condizioni al contorno: incastro-libero (I-L) e incastro incastro (I-I) come mostrato in figura 6.29 e 6.30.

La figura 6.29 mostra la risposta in frequenza dello spostamento della trave composita con diverse sequenze di lay-up. Le risposte in spostamento sono calcolate

	f_n1		f_n2		f_n3	
	CUF	Femap	CUF	Femap	CUF	Femap
Incastro-Libero						
$[0/45]_s$	7.49	7.55	46.58	45.90	129.00	128.22
$[90]_{2s}$	1.89	1.92	11.82	11.96	32.92	33.05
$[45/-45]_s$	2.56	2.66	15.95	16.05	44.47	45.02

Tabella 6.12: Confronto numerico delle prime tre frequenze naturali calcolate utilizzando due differenti metodi agli elementi finiti: CUF e Femap della trave composita simmetrica AS4/3501-6

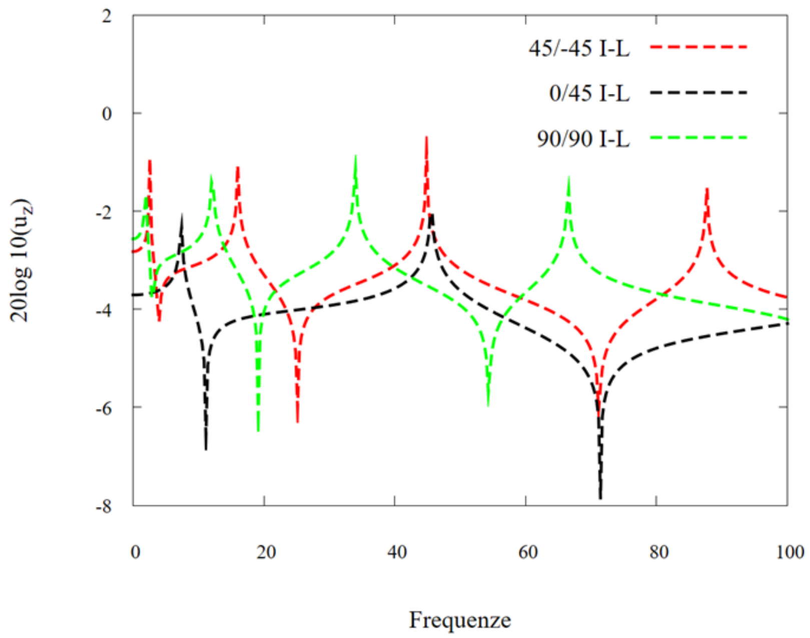

Figura 6.29: Risposta in frequenza della trave in composito simmetrica AS4/3501-6 incastrata da un lato e libera dall'altro per i differenti tipi di lay-up

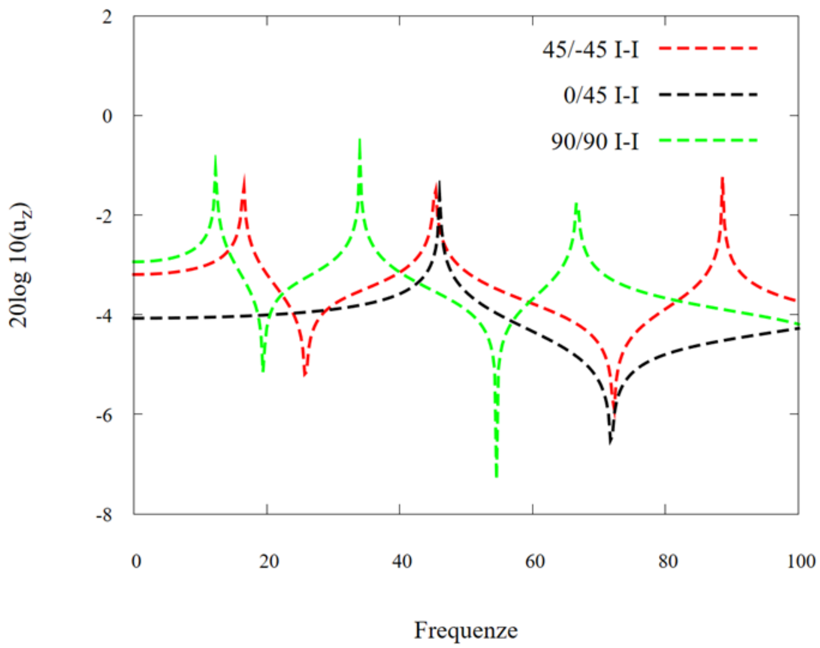

Figura 6.30: Risposta in frequenza della trave in composita simmetrica AS4/3501-6 incastrata da entrambi i lati per i differenti tipi di lay-up

per il punto della trave situato a x = 0,25 L al fine di mostrare due o più frequenze di risonanza nella risposta in frequenza. Si osserva che le configurazioni con laminazione $[45/-45]_s$ e $[90]_{2s}$ presentano quattro frequenze di risonanza con quest'ultima in anticipo di fase rispetto alla prima; la configurazione con laminazione $[0/45]_s$ presenta due frequenze di risonanza con la seconda che coincide quasi esattamente con quella di $[45/-45]_s$. La stratificazione $[0/90]_s$ presenta frequenze di risonanza minori e di conseguenza spostamenti di risonanza maggiori a causa della sua ridotta rigidità flessionale. La figura 6.30 rappresenta la risposta in frequenza della trave composita incastrata da entrambi i lati: si può notare come l'andamento delle configuraizoni rimane il medesimo del precendete, con una frequenza di risonanza in meno.

6.5.2 Trave soggetta a rumore bianco

Questo paragrafo presenta risultati numerici relativi alla dinamica strutturale di una trave composita multistrato di laminazione $[0/45]_{2s}$ soggetta a eccitazioni casuali, in particolare il carico randomico è tradotto nel dominio delle frequenza come un rumore bianco (PSD costante). In questo caso si prendono in considerazione tre carichi casuali di valore 1 N, assimilabili appunto al rumore bianco (white noise), applicati al tip della trave in tre punti specifici come mostrato in figura 6.31. Lo schema di soluzione si basa sull'approccio agli elementi finiti e sull'uso di densità di potenza spettrale (PSD). Il modello di discretizzazione

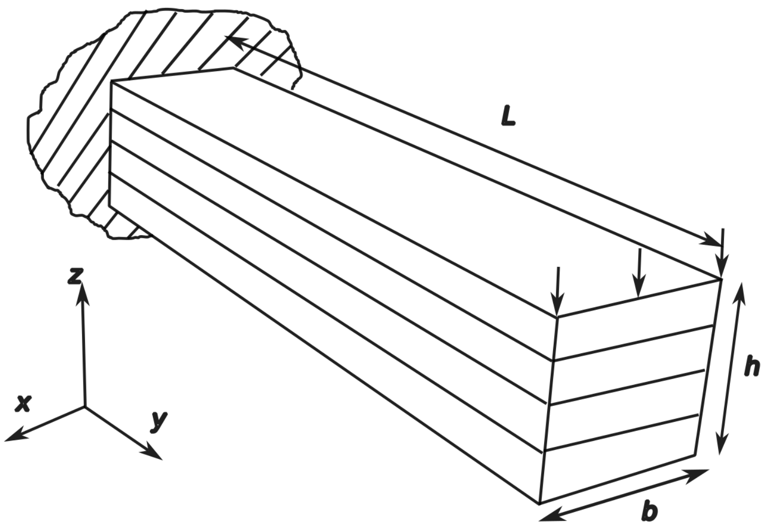

Figura 6.31: Trave composita a quattro strati simmetrica AS4/3501-6 , incastrata da un lato e soggetta a tre carichi che rappresentano un rumore bianco al tip della stessa

CUF e Femap utilizzato per questa trattazione è il medesimo di quello presente nel paragrafo precedente.
Nella risoluzione CUF, vengono utilizzate variabili di spostamento sulla sezione trasversale approssimate con i modelli TE-1, TE-4, TE-6 e LE-9. Si ricorda che lo smorzamento è sempre nullo. I risultati vengono rappresentati in figura 6.32. Dalla figura si evince un ottimo accordo tra le diverse teorie selezionate e Femap. Gli andamenti delle singole curve si sovrappongono, tranne che per TE6, che pre-

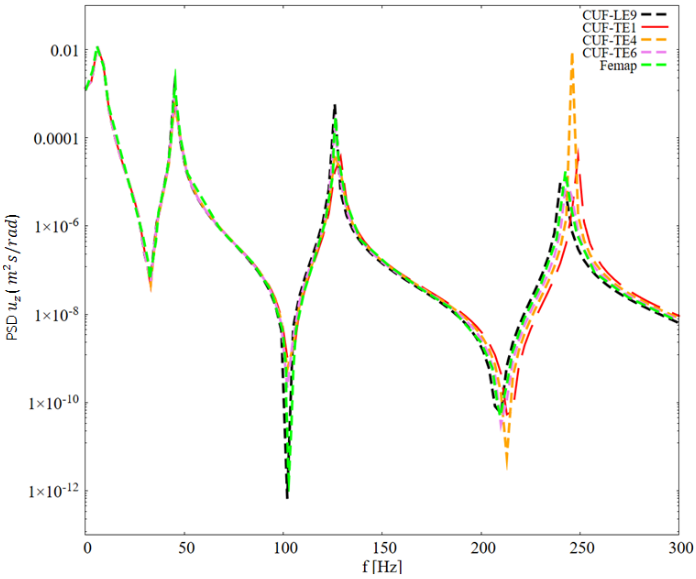

Figura 6.32: PSD dello spostamento verticale u_z al tip della trave y= 1 m della trave composita simmetrica AS4/3501-6

senta la quarta frequenza di risonanza a valori piu alti. In corrispondenza delle frequenze di risonanza è lecito aspettarsi qualche scostamento in quanto in quel punto il valore potrebbe andare ad infinito, visto che ci troviamo in risonanza, ma in realtà non ci va e quindi rimane accettabile questo margine. La figura

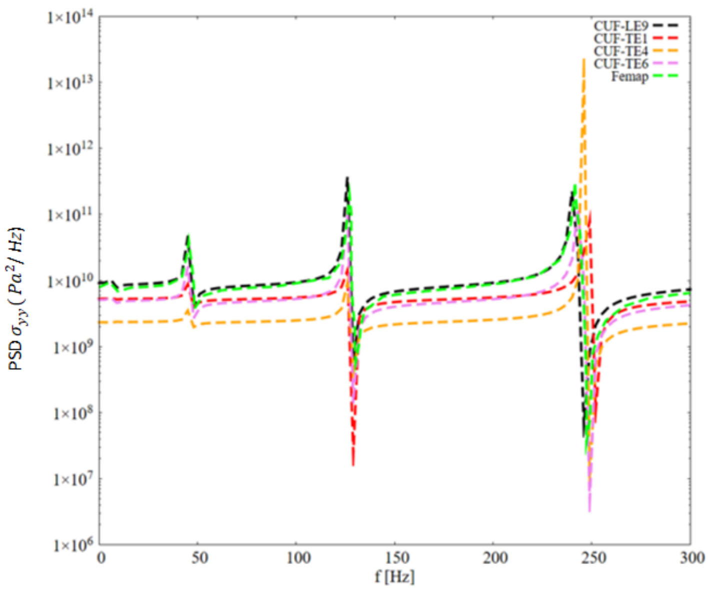

Figura 6.33: PSD delle σ_{yy} a y=0.016 m della trave composita simmetrica AS4/3501-6

6.33 raffigura gli andamenti delle PSD σ_{yy} per le varie teorie e modelli presi in considerazione. Si nota che TE-1, nonostante presenti i picchi alle medesime frequenze, si discosta molto dagli altri modelli di riferimento, benchè l'andamento sia simile. Ciò significa che, per giungere a convergenza, utilizzando i modelli TE, occorre salire di grado. Infatti il caso TE6 coincide molto con la soluzione basata sui polinomi di Lagrange e Femap. Il costo computazionale però per TE6 è alto, quindi si può affermare che la soluzione LE sia quella che meglio converga a risultati rappresentati dalla curva verde di Femap. Sono in seguito riportati i valori di RMS delle sollecitzioni normali assiali σ_{yy} e di taglio σ_{yz}.

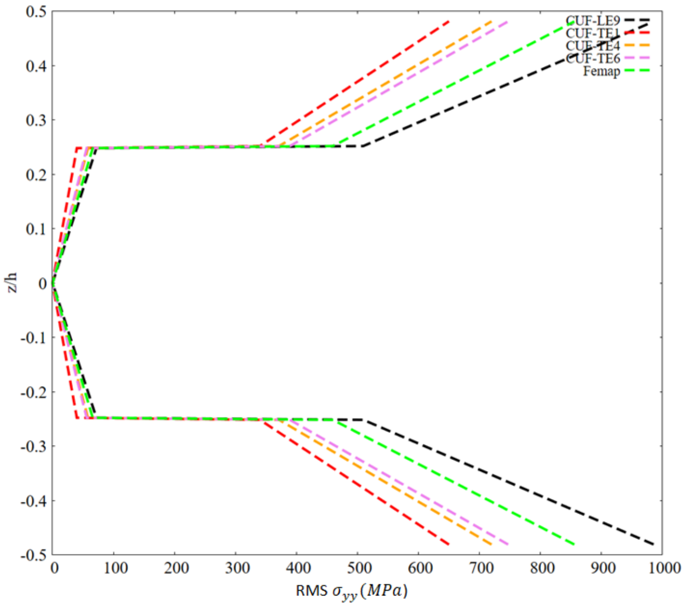

Figura 6.34: RMS delle σ_{yy} a y=0.016 m in funzione dello spessore normalizzato della trave composita simmetrica AS4/3501-6

6.6 Metodi risolutivi per il calcolo della vita a fatica

6.6.1 Calcolo della vita a fatica di una trave scatolare in alluminio soggetta a 'rumore bianco'

Si vuole determinare la vita a fatica di una trave scatolare in alluminio forata incastrata da lato e soggetta a tre carichi casuali costanti di valore pari a 1 N al tip in tre punti specifici come riportato in figura 6.36. I dati sono i seguenti: lughezza pari a L = 2 m, spessore pari a h= 0.05 m, larghezza pari a b = 0.250 m; un modulo di Young pari a E = 71.3 GPa, un coefficiente di Poisson pari a $\nu = 0.3$ e una densità pari a $\rho = 2700 kg/m^3$. La trave è stata discretizzata nel seguente modo: attraverso la Formulazione Unificata di Carrera, con 10 elementi B4 lungo y e con L9 nodi lungo la sezione xz; attraverso Femap, con l'utilizzo di

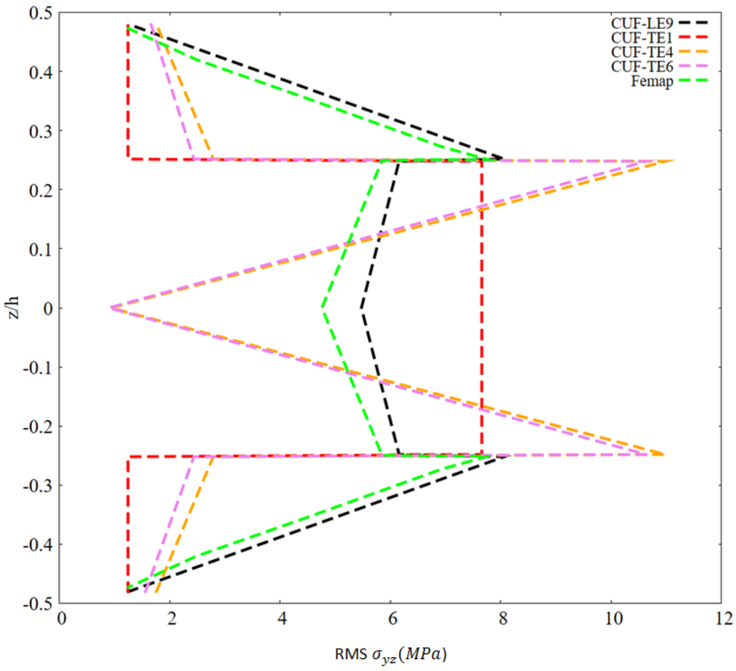

Figura 6.35: RMS delle σ_{yz} a y=0.016 m in funzione dello spessore normalizzato della trave composita simmetrica AS4/3501-6

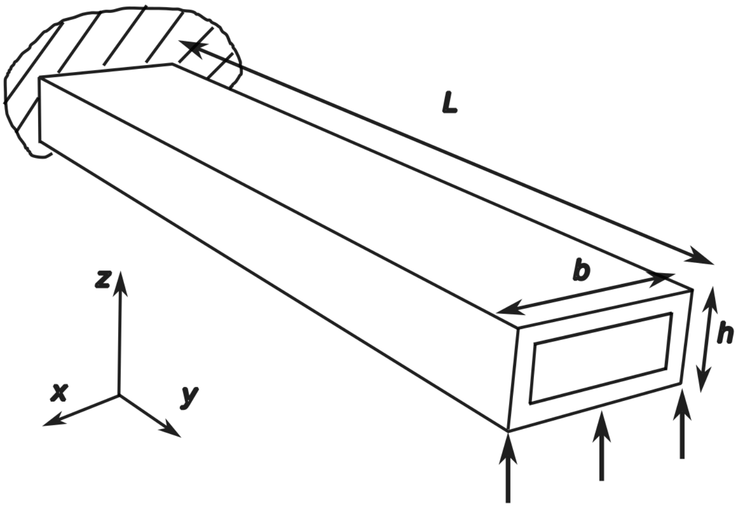

Figura 6.36: Trave scatolare in alluminio incastrata da un lato e soggetta a tre carichi costanti al tip della stessa

2800 elementini solidi cubici a 8 nodi. Si riportano in figura 6.37 e 6.38 i risultati relativi alle PSD degli spostamenti u_z e delle σ_{yy}, mostrando ancora una volta che per arrivare a convergenza utilizzando i modelli TE il costo computazionale è elevato. Femap convalida anche in questo caso i risultati basati sui modelli LE.
Vengono in seguito riportati i valori di RMS delle sollecitzioni normali assiali

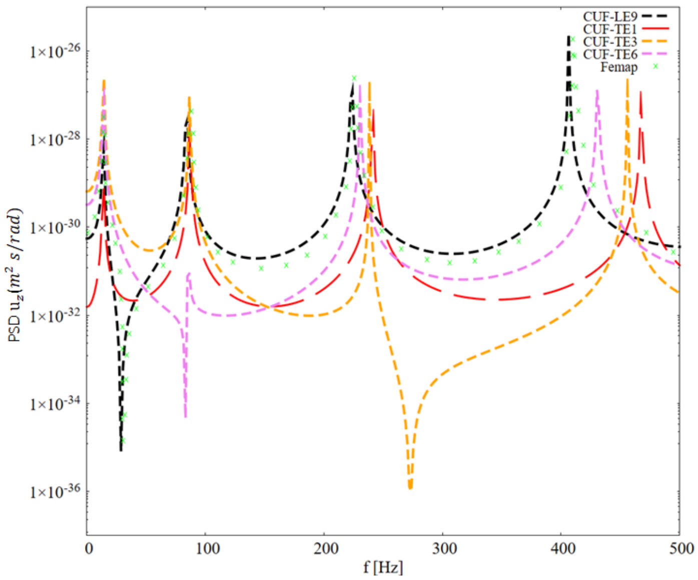

Figura 6.37: PSD dello spostamento verticale u_z all'incastro della trave scatolare in alluminio

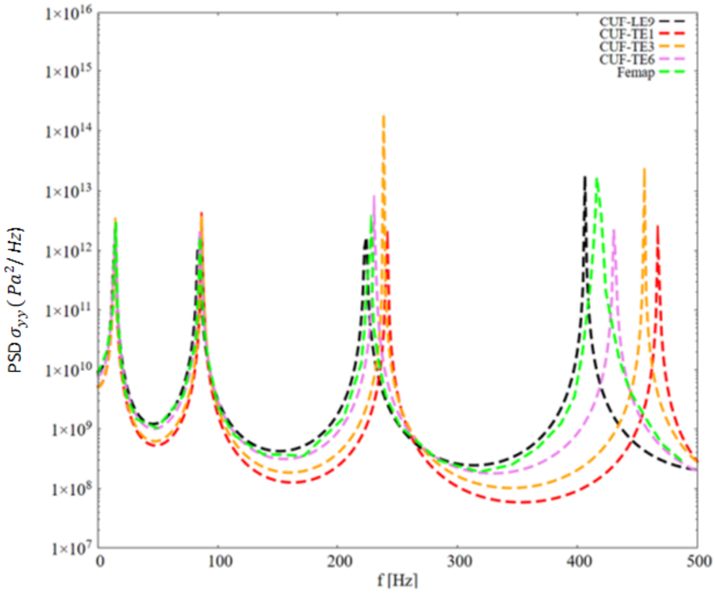

Figura 6.38: PSD delle σ_{yy} all'incastro della trave scatolare in alluminio

σ_{yy} in figura 6.39. Una volta condotta l'analisi dimanica della trave scatolare soggetta ad eccitazioni casuali, si hanno tutti i mezzi per poter inizare lo studio della vita a fatica. In particolare si ricorda che un sistema soggetto a vibrazioni casuali non presenta un'unica sollecitazione risultante ma i risultati delle stesse seguono tipicamente una distribuzione gaussiana (curva a campana) già spiegata nel capitolo 5. La distribuzione gaussiana consente di riportare i risultati delle sollecitazioni in modo statistico: considerando una volta il valore di sigma 1σ, si

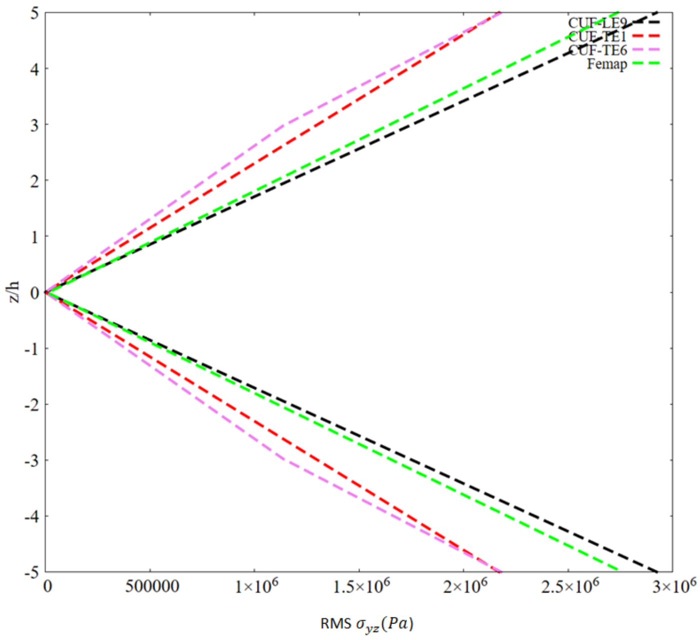

Figura 6.39: Rms delle σ_{yy} all'incastro della trave scatolare in alluminio

avrà una copertura di quella curva a campana del 68% ossia le sollecitazioni che il sistema probabilmente subirà il 68% delle volte. Il livello di sollecitazione 2σ copre il 95% dei casi e il livello 3σ copre il $99,7\%$. Ovviamente un sistema viene progettato in base al livello di sollecitazione 3σ. Il valore di tale σ, che da qui in poi chiameremo σ equivalente, viene calcolato tramite il criterio di Von Mises:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{(\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2) - (\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{xx}\sigma_{zz}) + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)} \tag{6.1}$$

Si conducono i vari passaggi e calcoli numerici solo per il caso Femap confrontato con modello lagrangiano LE della CUF.
In tabella 6.13 viene riportato il valore della sigma equivalente preso due e tre volte per il modello LE e Femap. Ora, considerando la relazione della curva S-N

	1σ [MPa]	2σ[MPa]	3σ [MPa]
LE	4.30	8.61	12.92
Femap	4.13	8.20	12.31

Tabella 6.13: Valori delle sigma equivalenti per il modello LE e Femap

per l'alluminio, si riesce a ricavare il numero di cicli per la rispettiva sigma:

$$S = 229.37 N_f^{(-0.128)} \tag{6.2}$$

dove S rappresenta la sigma equivante. Dalla relazione 6.2 si ricavano il numero di cicli N_f, i cui valori sono riportati in tabella 6.14. Utilizzando ora la legge

	N_{f1}	N_{f2}	N_{f3}
LE	3.14e+13	1.42e+11	5.98e+09
Femap	4.51e+13	2.00e+11	8.43e+09

Tabella 6.14: Valori dei numeri di cicli per le rispettive sigma equivalenti per il modello LE e Femap

del danno cumulativo di Miner per lo studio della vita a fatica, indicata dalla relazione 6.3

$$D = \frac{n_1}{N_{f1}} + \frac{n_2}{N_{f2}} + \frac{n_3}{N_{f3}} \tag{6.3}$$

si ricavano il numero di cicli a rottura n. La curva S-N indica quindi che sono necessari N_1 cicli ad una sollecitazione S_1 per provocare il cedimento dovuto alla fatica. La teoria quindi stabilisce che ogni ciclo provoca un fattore di danno D_1 che consuma $1/N_1$ della vita della struttura. E cosi per S_2 e S_3. Dunque il danno totale provocato da un numero di cicli di sollecitazione è uguale alla somma dei danni provocati da singoli cicli di sollecitazione. Il cedimento dovuto alla fatica si verifica quando il fattore di danno raggiunge 1. Allora la relazione 6.3 diventa:

$$1 = \frac{0.683n}{N_{f1}} + \frac{0.271n}{N_{f2}} + \frac{0.043n}{N_{f3}} \tag{6.4}$$

In termini statistici, il valore di sollecitazione che rappresenta il valore $1\sigma_{eq}$ si verificherà il $68,3\%$ delle volte. Una sollecitazione $2\sigma_{eq}$ si verificherà il $27,1\%$ delle volte e un valore $3\sigma_{eq}$ si verificherà il $4,33\%$ delle volte. Questi valori rappresentano il 99,73% delle sollecitazioni che la trave subirà nel punto considerato, ossia allo spigolo destro superiore dell'incastro. Dalla relazione 6.5 si ricava che il numero di cicli a rottura per i due casi esaminati, è pari a:

$$n_{LE} = 1.09e + 10$$

$$n_{Femap} = 1.58e + 10$$

Se la struttura vibra ad una frequenza pari a positive crossing, che in questo caso è pari a 225.86 Hz, la vita a fatica della trave scatolare è pari a:

$$t_{tofail} = \frac{n}{f_{pc}}[s] \tag{6.5}$$

. Divendo per 3600, si ottiene il risultato in ore:

$$t_{tofail_{LE}} = 13400h.$$

$$t_{tofail_{Femap}} = 18600h.$$

6.6.2 Calcolo della vita a fatica di una trave a quattro strati di un laminato in composito soggetta a 'rumore bianco'

Si vuole determinare la vita a fatica di una trave a quattro strati in composito con laminaizone $[\pm 45]_{2s}$, incastrata da lato e soggetta a tre carichi casuali costanti di valore pari a 1 N al tip in tre punti specifici come riportato in figura 6.40. Il

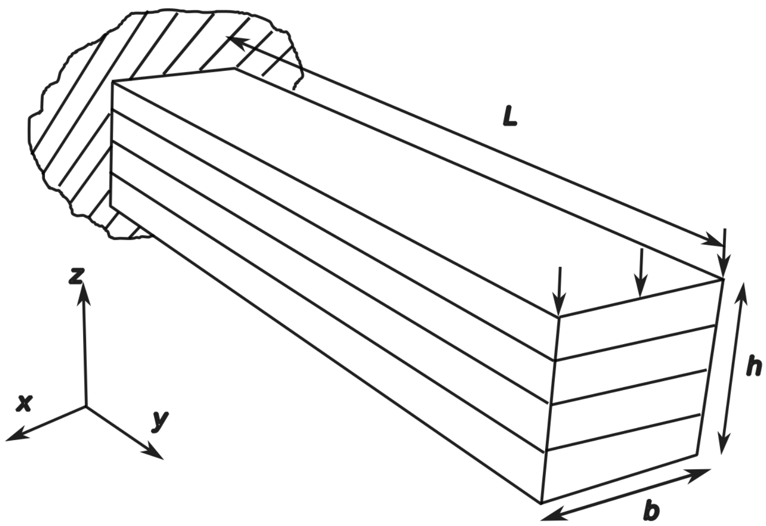

Figura 6.40: Trave composita a quattro strati del composito grafite/epossidica di laminazione $[\pm 45]_{2s}$, incastrata da un lato e soggetta a tre carichi costanti al tip della stessa

materiale in questione è caratterizzato da fibre di grafite con matrice epossidica con le seguenti proprietà: lughezza pari a L = 1 m, spessore pari a h= 0.05 m, larghezza pari a b = 0.0250 m; i seguenti moduli di Young $E_{xx} = 132.38 GPa$, $E_{yy} = E_{zz} = 10.76$ GPa; coefficienti di Poissoin $\nu_{yz} = 0.49$, $\nu_{xy} = \nu_{xz} = 0.24$; moduli di taglio $G_{xy} = G_{xz} = 5.65$ GPa, G_{yz}= 3.38 GPa; densità pari $\rho = 1800 kg/m^3$. Come da prassi vengono in seguito riportati i valori della PSD u_z, PDS σ_{yy} e i rispettivi valori di $RMS_{\sigma_{yy}}$ nelle figure 6.41, 6.42, 6.43.

Si può ora procedere con il calcolo della vita a fatica del laminato. Verrà condotta l'analisi per il modello lagrangiano LE, per i modelli di Taylor TE1, TE2, TE3, TE4 e Femap. Si procede quindi come per la trave scatolare in alluminio con il calcolo della sigma equivalente di Von Mises nei tre casi, e i risultati ottenuti sono riportati in tabella 6.15. Una volta calcolate le sollecitazioni equivalenti, si utilizza la curva S-N del materiale, riportata in [76], per il calcolo dei numeri di cicli N. La formula utilizzata è la seguente:

$$\frac{100S}{\sigma_{ult}} = f - g log N \tag{6.6}$$

e in tabella 6.16 sono riportati i risultati. Per il calcolo del numero di cicli a rottura n si utilizza una legge di danneggiamento presente in [75]. Essa si

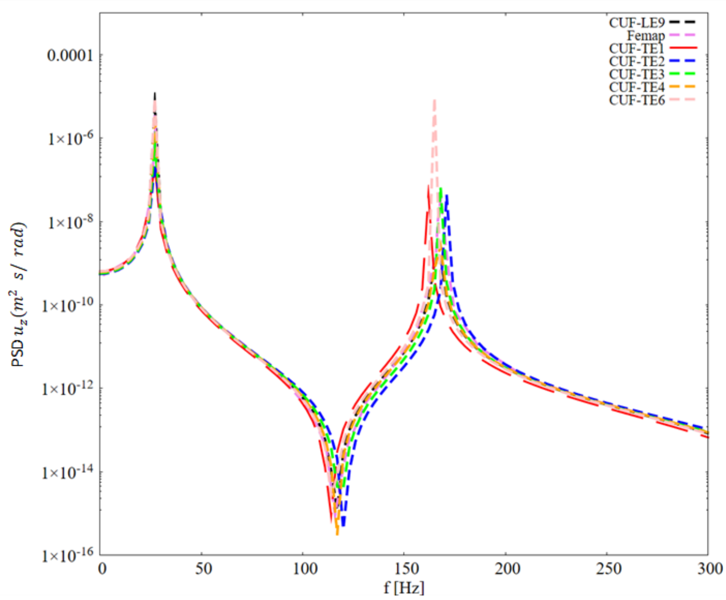

Figura 6.41: PSD dello spostamento verticale u_z all tip della trave in grafite/epossidica

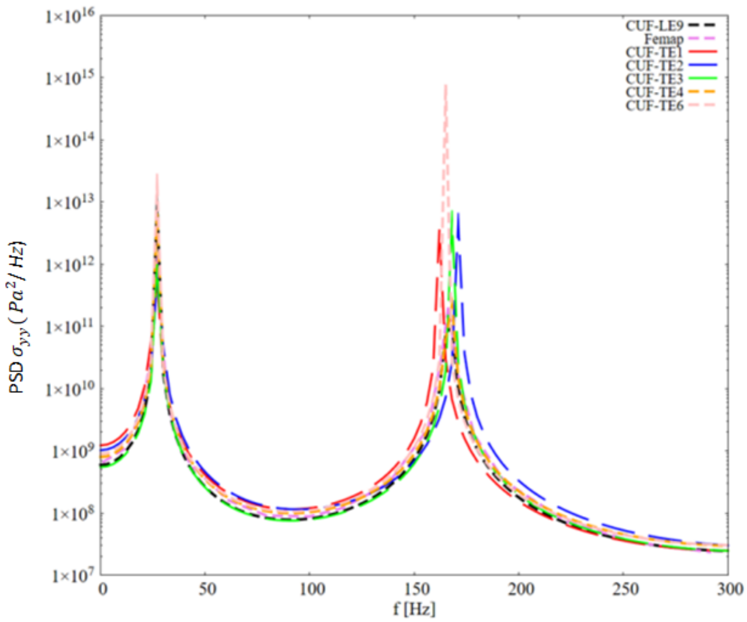

Figura 6.42: PSD delle σ_{yy} al tip della trave in grafite/epossidica

differenzia dalla classica legge di danneggiamento di Miner, per la presenza di due coefficienti, A e B.

$$D(n) = 1 - \left(1 - (\sum_i \frac{n_i}{N_i})^B\right)^A \tag{6.7}$$

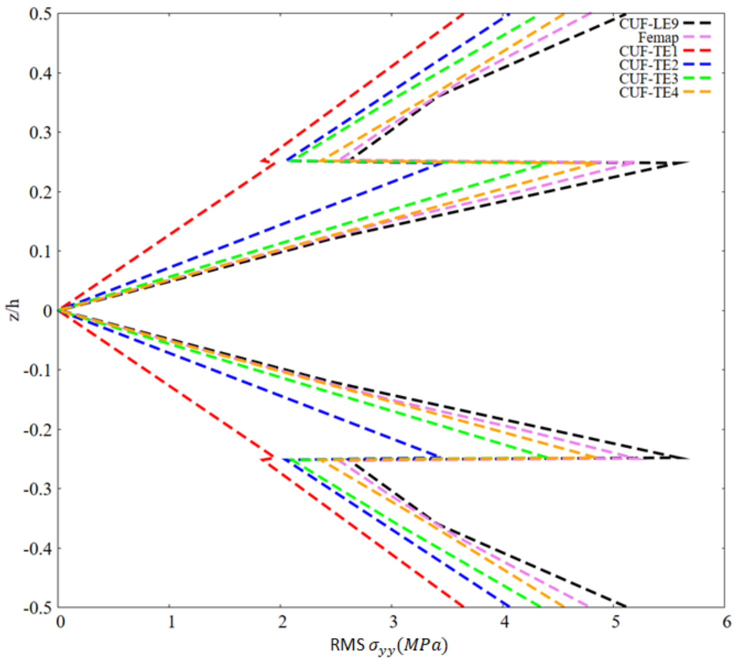

Figura 6.43: Rms delle σ_{yy} all'incastro della trave in grafite/epossidica

Modello di espansione	1σ [MPa]	2σ[MPa]	3σ[MPa]
LE	9.13	18.27	27.41
TE 1	4.80	9.60	13.40
TE 2	5.11	10.22	15.33
TE 3	7.41	14.83	22.24
TE 4	8.18	16.36	25.55
Femap	9.57	18.78	28.10

Tabella 6.15: Valori delle sigma equivalenti per i modelli LE, Femap, e TE1, TE2, TE3, T4 per la trave in grafite/epossidica

Modello di espansione	N_1	N_2	N_3
LE	12.00	11.39	10.78
TE 1	12.42	12.21	12.00
TE 2	12.31	11.98	11.66
TE 3	12.11	11.63	11.13
TE 4	12.05	11.46	10.91
Femap	11.96	11.32	10.67

Tabella 6.16: Valori del numero di cicli N per i modelli LE, Femap, e TE1, TE2, TE3, T4 per la trave in grafite/epossidica

Le relazioni per il calcolo dei coefficiente A e B sono riportate in seguito:

$$B = k\frac{logN}{(1-R)(\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{ult}})} \qquad (6.8)$$

dove σ_{max} è la sollecitazione massima, σ_{ult} è la sollecitaizone ultima a rottura e k è una costante proporzionale.

$$A = pB + q \tag{6.9}$$

dove $p = 0.67$ e $q = 0.44$. Considerando sempre l'approccio statistico utilizzato per la trave scatolare in alluminio, la sommatoria presente nella formula 6.7 viene calcolata nel seguente modo:

$$\sum_i \frac{n_i}{N_i} = \frac{0.683n}{N_1} + \frac{0.271n}{N_2} + \frac{0.043n}{N_3} \tag{6.10}$$

dove gli N_i sono quelli calcolati nella tabella 6.16. Il cedimento dovuto alla fatica si verifica quando il fattore di danno raggiunge 1. Si riportano nella tabella 6.17 i valori di n per tutti i modelli di studio. Ora si procede con il calcolo della vita a fatica in ore utilizzando la seguente relazione:

$$t_{tofail} = \frac{n}{3600 f_{pc}} \tag{6.11}$$

Nella tabella 6.18 sono riportate le stime della vita a fatica in termini di ore. E' stata svolta dunque un'analisi di convergenza che ha portato a dire che la soluzione che meglio approssima il modello lagrangiano è rappresentata dal modello Femap, mentre tra i modelli di Taylor, la soluzione rappresentata da TE4 è la piu accurata.

Modello di espansione	n
LE	1.48e10
TE 1	1.37e11
TE 2	7.69e10
TE 3	4.60e10
TE 4	1.83e10
Femap	1.33e10

Tabella 6.17: Valori del numero di cicli a rottura n per i modelli LE, Femap, e TE1, TE2, TE3, T4 per la trave in grafite/epossidica

6.6.3 Confronto numerico della vita a fatica di alluminio e composito grafite/epossidica

Per avere maggiori dati a disposizione e per conferire maggior rilievo al lavoro condotto si è infine calcolata la vita a fatica delle stesse strutture presenti nelle

Modello di espansione	t_{vita} [ore]
LE	18202
TE 1	169077
TE 2	94576
TE 3	64445
TE 4	22607
Femap	16780

Tabella 6.18: Valori del tempo di vita a fatica per i modelli LE, Femap, e TE1, TE2, TE3, T4 per la trave in grafite/epossidica

sottosezioni precedenti scambiando per ognuna il materiale. Si ottiene così un confronto numerico utile per capire quale dei due materiali considerari tollera meglio il fenomeno della fatica. In tabella 6.19 viene riportato il confronto numerico della vita a fatica della trave scatolare in l'allunimio e per il composito grafite/epossidica. Bisogna ricordare che sono stati utilizzati due metodi dif-

Materiale	t_{LE} [ore]	t_{Femap} [ore]
Alluminio	13400	18600
Grafite/epossidica	6670	10500

Tabella 6.19: Confronto numerico tra i valori del tempo di vita a fatica per i modelli LE e Femap per la trave scatolare in alluminio e in composito grafite/epossidica

Materiale	t_{LE} [ore]	t_{Femap} [ore]
Alluminio	25800	21620
Grafite/epossidica	18202	16780

Tabella 6.20: Confronto numerico tra i valori del tempo di vita a fatica per i modelli LE e Femap per trave in alluminio e in composito grafite/epossidica

ferenti per il calcolo della vita a fatica. Per l'alluminio si è utilizzata la curva S-N propria del materiale e successivamente la regola di Miner. Per il materiale composito si è utilizzata una particolare curva S-N introdotta da Wu e il modello di danno Wu-Yao. Dai risultati ottenuti si evince che l'alluminio possiede una vita a fatica migliore rispetto al composito costituito da fibre di grafite e matrice epossidica. L'alluminio e le sue leghe sono ancora largamente impiegati nella progettazione aerospaziale in particolare perchè caratterizzate da un'elevata resistenza meccanica, buona tenacità, buona saldabilità e resistenza alla corrosione abbinate a una leggerezza strutturale eccellente se confrontato con altri materiali. Tuttavia componenti in grafite/epossidica permettono un risparmio del 20% in termini di peso rispetto all'alluminio. La progettazione aerospaziale si pone l'obiettivo di creare componenti che minimizzino il rapporto peso-resistenza, e in tal senso questi materiali compositi rappresentano la soluzione migliore. Si precisa che questo lavoro non ha come scopo quello di scegliere quale materiale meglio soddisfi la resistenza a fatica, in quanto le analisi svolte per il materiale composito si basano su un modello di Wu-Yao, al quale si sono cambiati alcuni dati, come per esempio la resistenza ultima di rottura e le condizioni di carico. Di quel modello si sono presi in prestito la curva S-N del materiale grafite/epossidica, e la formula per il calcolo del danno cumulativo, nella quale è stata apportata una modifica, introducendo nella relazione l'approccio statistico considerato. Sapendo che in letteratura i risultati sulla stima della vita a fatica per i materiali compositi soggetti a sollecitazioni randomiche sono limitali, l'analisi condotta in questa tesi vuole solo portare un contributo su un argomento che è oggetto di continui studi e ricerche.

Capitolo 7

Conclusioni

L'obiettivo della tesi è stato quello di fornire dei risultati attendibili circa la stima della vita a fatica di un materiale composito costituito da fibre grafitiche e matrice epossidica, quando è sopposto a sollecitazioni cicliche casuali. Dal momento che in letteratura sono presenti molti dati sperimentali sulla vita a fatica di processi randomici basati su approcci spettrali per i materiali metallici, due su tutti il medoto di T. Dirlik e D.Bonasciutti- R.Tovo, per quanto concerne i materiali compositi non si può dire altrettanto. Lo studio condotto rappresenta quindi un arricchimento su un argomento che è oggetto di continui studi e ricerche.
La stima della vita a fatica dei componenti strutturali in composito, soggetti a sollecitazioni randomiche, costituisce un aspetto centrale nella progettazione areospaziale, nonostante tutte le insidie che presenta. Attualmente i potenti strumenti di calcolo, sfruttando la modellazione agli elementi finiti FE, permettono di condurre analisi dinamiche avanzate nel dominio del tempo e della frequenza [37], a cui è stata data preferenza in questa trattazione poichè garantisce una capacità di sintesi delle informazioni ottimizzando i tempi di calcolo.
In questa ottica, la tesi mette in luce la buona affidabilità dell'utilizzo dei modelli CUF, avanzato metodo di calcolo di strutture, non solo per travi semplici ma anche per strutture in laminato multistrato, sottilineando come il modello di espansione basato sui polinomi di Lagrange assicuri soluzioni numeriche accurate se confrontate con il robusto software commerciale Femap, che rappresentava il punto di partenza pratico di questa tesi: ricavare soluzioni numeriche con il modello CUF che potessero trovare validazioni in un software di calcolo avanzato riconosciuto in tutto il mondo.
Si può quindi essere soddisfatti del lavoro perchè, come si evince dai risultati numerici ottenuti, il tempo di vita a fatica calcolato con il modello CUF, utilizzando una funzione di espansione LE, fornisce valori che non si discostano molto da quelli trovati usando Femap.
Lo studio condotto rappresenta un punto di partenza per eventuali sviluppi futuri. Dal momento che l'analisi è stata svolta per modelli 1D, si potrebbe pensare di estendere lo studio a modelli 2D, mantenendo le stesse condizioni di carico. Oppure si potrebbe utilizzare lo stesso metodo di Wu-Yao ma cambiando le con-

dizioni al contorno, per esempio considerando una trave incastrata su entrambi i lati; oppure ancora più specificatamente cambiare le condizioni di carico, ossia utilizzare una PSD non più costante ma a banda stretta, o a banda larga o con le cosiddette raffiche di von Kármán, ricordando però che nel caso si volesse cambiare il materiale composito, si dovrebbero ricavare nuove curve S-N specifiche per il materiale selezionato e ciò è molto difficile in quanto non sono facilmente reperibili in letteratura.

Bibliografia

[1] M. Antoniazzi. Analisi del comportamento a fatica di laminati in materiale composito e nanocomposito. *Università di Padova*, 2013.

[2] A.A. Baker. *Composite materials for aircraft structures.* AIAA, 2004.

[3] D. Baraccani. Analisi del comportamento a fatica di un laminato al variare della sequenza di impilamento e delle dimensioni. *Università di Bologna*, 2015.

[4] J. Bauschinger. *Ueber die Veranderung der elasticitatsgrenge und der festigkeit des eisens und stahls durch strecken und quetschn, durch erwarmen und abkuhlen und durch oftmal wiederholte beanspruchung.* Mitteilungen aus dem Mechanisch-Technischen Laboratorium der K. Technischen Hochschule in Munchen, 1886.

[5] M. Bennebach, H. Rognon, and O. Bardou. Fatigue of structures in mechanical vibratory environment. from mission profiling to fatigue life prediction. *Procedia Engineering*, 66:508–521, 2013.

[6] M. Bettiga. Analisi degli effetti delle fasi costruttive e della precompressione sul comportamento a fatica di impalcati da ponte a struttura mista acciaio-calcestruzzo. *Politecnico di Torino*, 2018.

[7] A. e Sala G. Bettini, P. e Airoldi et al. Strutture chirali composite per il morphing dei profili alari: analisi numeriche e sviluppo di un processo produttivo. *Elsevier*, 2010.

[8] F. Bishop, N. e Sherratt. *Calcoli della fatica basati sugli elementi finiti.* Nafems, 2000.

[9] K. e Drucker Bisshopp et al. *Ampia deflessione di travi a sbalzo*, volume 3. 1945.

[10] W.D. Callister Jr and D. G. Rethwisch. *Callister's materials science and engineering.* John Wiley & Sons, 2020.

[11] E. Carrera. Uno studio sui metodi di tipo arc-length e sui loro fallimenti operativi illustrati da un semplice modello. *Computer strutture*, 50, 1994.

[12] E. e Parisch H. Carrera. Una valutazione degli effetti geometrici non lineari di gusci compositi multistrato sottili e moderatamente spessi. *strutture composite*, 1997.

[13] M. Carrera, E. e Petrolo. *Elementi trave rifiniti con solo variabili di spostamento e capacità piastra/guscio*, volume 47. 2012.

[14] M. e Petrolo M. Carrera, E. e Cinefra and other. *Analisi agli elementi finiti delle strutture attraverso la formulazione unificata.* John Wiley & Figli, 2014.

[15] L. Cedolin and other. *Stabilità delle strutture: teorie elastiche, anelastiche, della frattura e del danno.* World Scientific, 2010.

[16] V. Ciampi. Analisi agli elementi finiti non lineare di solidi e strutture. *Springer*, 1997.

[17] D. Colombo, R. e Firrao. *Sulla storia degli studi di frattura in Italia.* Gruppo Italiano Frattura, 2011.

[18] M.A. Crisfield. Metodi computazionali nella meccanica solida e strutturale non lineare. *Elsevier*, 1981.

[19] C. Davies, C. e Ashforth and other. *Composite Materials Handbook-17 (CMH-17) Vol 5A—Ceramic Matrix Composites.* FAA/Materiali e strutture, 2022.

[20] T. Dirlik and T. Benasciutti. Dirlik and tovo-benasciutti spectral methods in vibration fatigue: a review with a historical perspective. *Metals*, 2021.

[21] Pagani A. e Carrera E. Formulazione unificata di teorie su travi rifinite geometricamente non lineari. *Meccanica di materiali e strutture avanzate*, 25(1), 2018.

[22] P.D. Epaarachchi, J.A. e Clausen. Un nuovo modello di danno da fatica cumulativo per compositi plastici rinforzati con fibra di vetro sottoposti a carico graduale/discreto. *Compositi Parte A: Scienze applicate e produzione*, 2005.

[23] M.P. Falaschetti. Caratterizzazione meccanica di materiali compositi mediante attrezzatura clc. *Università di Bologna*, 2013.

[24] C. Federico. Severità dei meccanismi di danneggiamento nelle strutture in materiale composito: analisi numerica e sperimentale mediante tecnica non distruttiva. *Politecnico di Torino*, 2022.

[25] M. Filippi, M. e Petrolo and other. Teorie strutturali raffinate per la risposta casuale di strutture composite rinforzate con fibre e sandwich. In *Forum AIAA SCITECH 2022*, 2022.

[26] H. O. Fuchs. *Metal fatigue in engineering.* Wiley, 1980.

[27] D.Y. Gao, W.X. Yao, and T. Wu. A damage model based on the critical plane to estimate fatigue life under multi-axial random loading. *International Journal of Fatigue*, 129:104729, 2019.

[28] Q. Han, J. Li, J. Xu, et al. A new frequency domain method for random fatigue life estimation in a wide-band stationary g aussian random process. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 42(1):97–113, 2019.

[29] R. W. Hertzberg, R. P. Vinci, and J. L. Hertzberg. *Deformation and fracture mechanics of engineering materials.* John Wiley & Sons, 2020.

[30] R.M. Jones. *Meccanica dei materiali compositi.* 2018.

[31] C.J. Kim, Y.J. Kang, et al. Experimental spectral damage prediction of a linear elastic system using acceleration response. *Mechanical systems and signal processing*, 2011.

[32] Z. Kiral. *Analisi della risposta armonica di travi composite laminate simmetriche con diverse condizioni al contorno*, volume 21. Scienza e ingegneria dei materiali compositi, 2014.

[33] Z. Kiral. Harmonic response analysis of symmetric laminated composite beams with different boundary conditions. *Science and Engineering of Composite Materials*, 21(4):559–569, 2014.

[34] R. Lazzeri. A comparison between safe life, damage tolerance and probabilistic approaches to aircraft structure fatigue design. *On Aerotecnica*, 2002.

[35] Z. Li and A. Ince. A new modeling framework for fatigue damage of structural components under complex random spectrum. *Procedia Structural Integrity*, 19:528–537, 2019.

[36] G. Lindgren and I. Rychlik. Rain flow cycle distributions for fatigue life prediction under gaussian load processes. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 10(3):251–260, 1987.

[37] G Lori and D Pioli. Comportamento a fatica di componenti meccanici soggetti a sollecitazioni random: analisi critica dei metodi in frequenza. *Atti del XXXII Convegno Nazionale AIAS*, 2003.

[38] Y.M. Low. A method for accurate estimation of the fatigue damage induced by bimodal processes. *Probabilistic engineering mechanics*, 25(1):75–85, 2010.

[39] P.K. Mallick. *Manuale di ingegneria dei compositi.* 1997.

[40] F. Manfrin. Materiali compositi per l'automotive. *Università di Padova*, 2013.

[41] S. Mao, H. e Mahadevan. Modellazione del danno a fatica dei materiali compositi. *Strutture composite*, 2002.

[42] M. Matsuishi and T. Endo. Fatigue of metals subjected to varying stress. *Japan Society of Mechanical Engineers, Fukuoka, Japan*, 68(2):37–40, 1968.

[43] S. Mazumdar. *Produzione di compositi: ingegneria dei materiali, dei prodotti e dei processi*. Elsevier, 2001.

[44] J.W. Miles. Sulla fatica strutturale sotto carico casuale. *Giornale delle Scienze Aeronautiche*, 1954.

[45] J. Mrdnik, M. e Slavic et al. Metodi nel dominio della frequenza per una stima delle vibrazioni-fatica-vita–applicazione a dati reali. *Giornale internazionale della fatica*, 2013.

[46] F. Muscara. Analisi dinamica supporto cassetta porta munizioni su veicolo ltatv. *Politecnico di Torino*, 2021.

[47] Tench W. N. Department of trade accident investigation branch. 8 febrary 1979.

[48] M.D. Olson. Un metodo coerente agli elementi finiti per problemi a risposta casuale. *Computer Strutture*, 1972.

[49] A Pagani. Modelli "component-wise" per analisi statica, dinamica e aeroelastica di strutture alari. *Politecnico di Torino*, 2011.

[50] P. Paris and F. Erdogan. Un'analisi critica delle leggi sulla propagazione delle cricche. 1963.

[51] P. C. e Tada Paris and other. *Danni da fatica da carico di servizio.Una prospettiva storica*, volume 21. Elsevier, 1999.

[52] M. Pasquali. Termoindurenti. *Università di Roma*.

[53] G. Petrucci et al. Lezioni di costruzione di macchine. *Universita di Palermo*, 2007.

[54] G. Petrucci et al. Determinazione della durata a fatica di componenti soggetti a sollecitazioni schematizzabili come processi aleatori a banda st. *AIAS 2016-699*, 2016.

[55] J. V. Poncelet. *Introduction à la mécanique industrielle, physique ou expérimentale, Mme.* Thiel Éditeur, Paris, seconda edizione, 1841.

[56] J. N. Reddy. *Meccanica di lastre e gusci compositi laminati: teoria e analisi.* Press CRC, 2003.

[57] J.N. Reddy. *Un'introduzione all'analisi degli elementi finiti non lineari seconda edizione: con applicazioni al trasferimento di calore, meccanica dei fluidi e meccanica dei solidi.* OUP Oxford, 2014.

[58] K.L. Reifsnider, E.G. Henneke, W.W. Stinchcomb, et al. Damage mechanics and nde of composite laminates. pages 399–420. Elsevier, 1983.

[59] C. Ronchei. *Sviluppo e applicazione di nuovi criteri per la verifica a fatica multiassiale di componenti strutturali in leghe di acciaio e alluminio.* PhD thesis, 2016.

[60] C. Ronchei. Sviluppo e applicazione di nuovi criteri per la verifica a fatica multiassiale di componenti strutturali in leghe di acciaio e alluminio. *Università degli Studi di Parma.*, 2016.

[61] C. Saggese. Analisi agli elementi finiti del danneggiamento progressivo di strutture in composito. *Politecnico di Torino*, 2019.

[62] L. Spangenburg. *The Fatigue of Metals Under Repeated Strains: With Various Tables of Results of Experiments.* Number 23. D. Van Nostrand, 1876.

[63] A. Stephens, R.I. e Fatemi and other. Meccanismi di fatica e caratteristiche microscopiche. *Fatica dei metalli in ingegneria, 2a ed. Canada: Wiley-IEEE*, 2001.

[64] K.L. Subramanian, S. e Reifsnider and other. Un modello di danno cumulativo per prevedere la vita a fatica dei laminati compositi compreso l'effetto di un'interfase fibra-matrice. *Giornale Internazionale della Fatica*, 1995.

[65] T. Swift. Verification of methods for damage tolerance evaluation of aircraft structures to faa requirements. In *Proceedings of the 12th Symposium of the International Committee on Aeronautical Fatigue (ICAF), Toulouse, France*, 1983.

[66] G. Tecchio. Progettazione a fatica per strutture aeronautiche. *Università di Padova*, 2022.

[67] E. Tortorelli. Modelli 2d avanzati per lo studio di strutture in materiale iperelastico. 2022.

[68] A. Tosini. Verifica sperimentale di metodologie di test tailoring con eccitazione stocastica monoassiale e multiassiale. *Università di Ferrara*, 2014-2017.

[69] GJ. e Osman MY. Turvey. *Analisi elastica di grande deflessione di lastre di Mindlin rettangolari isotropiche*, volume 32. 1990.

[70] S. Vaglietti. Messa a punto e applicazione del processo di qualifica della tolleranza al danno da impatto di laminati in composito. *Politecnico di Milano*, 2014.

[71] K. Washizu. Metodo variazionale in elasticità e plasticità. *Serie internazionale di monografie in aeronautica e astronautica*, 1968.

[72] H. Wei, P. Carrion, J. Chen, et al. Multiaxial high-cycle fatigue life prediction under random spectrum loadings. *International Journal of Fatigue*, 134:105462, 2020.

[73] A. Wohler. *Uber die festigkeitsversuche mit eisen und stahl.* Ernst & Korn, 1870.

[74] A. Wu, B. e Pagani and other. Campi di sollecitazione accurati di travi composite lamellari post-instabilità che tengono conto di varie cinematiche. *Giornale internazionale di meccanica non lineare*, pages 60–71, 2019.

[75] F. Wu and W. Yao. A fatigue damage model of composite materials. *International Journal of Fatigue*, 2010.

[76] L.J. Wu, W.F. e Lee and other. Uno studio sul danno da fatica e sulla durata a fatica dei laminati compositi. *Giornale dei materiali compositi*, 1996.

[77] Z. Wu, Y. Zhao, J. Liang, et al. A frequency domain approach in residual stiffness estimation of composite thin-wall structures under random fatigue loadings. *International Journal of Fatigue*, 124:571–580, 2019.

[78] Filippi M. Wu B., Pagani A. and other. Analisi di grande deflessione e post-instabilità di piastre rettangolari isotropiche mediante carrera unified formulation. *Giornale internazionale di meccanica non lineare*, 116, 2019.

[79] J. Xia, L. Yang, Q. Liu, et al. Comparison of fatigue life prediction methods for solder joints under random vibration loading. *Microelectronics Reliability*, 95:58–64, 2019.

[80] B. Yeter, Y. Garbatov, and C.G. Soares. Fatigue damage assessment of fixed offshore wind turbine tripod support structures. *Engineering Structures*, 101:518–528, 2015.

[81] R.L. Zienkiewicz, O.C. e Taylor. *Il metodo degli elementi finiti per la meccanica solida e strutturale.* Elsevier, 2005.

[82] B. Zuccarello. Progettazione meccanica con materiali non convenzionali. *Università di Palermo*, 2008.