Politecnico di Torino

DIPARTIMENTO DI SCIENZE MATEMATICHE

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Matematica

Tesi di Laurea Magistrale

Buona positura e propagazione del caos per modelli multi-agente con strategie ed effetti diffusivi

Relatore:
Prof. Marco Morandotti

Correlatore:
Dott. Anderson Melchor Hernandez

Candidato:
Alessandro Baldi
Matricola 290391

Anno Accademico 2022-2023

Sommario

La tesi è dedicata allo studio di un nuovo modello multi-agente in cui gli individui sono dotati di strategie e sono soggetti a effetti diffusivi. Il modello proposto rappresenta un'estensione del sistema introdotto nell'articolo *"Spatially Inhomogeneous Evolutionary Games"* (Ambrosio et al., CPAM 2021 [2]), dove gli autori elaborano un modello particellare in cui lo stato microscopico di ciascuno degli N agenti della popolazione è costituito da una posizione spaziale e da una misura di probabilità su uno spazio metrico compatto U; quest'ultimo viene interpretato come un insieme di strategie. Tale misura di probabilità (o *strategia mista*, adottando la terminologia propria della teoria dei giochi) determina la dinamica spaziale degli agenti e contestualmente evolve nel tempo attraverso un meccanismo di interazione binaria e non locale con gli altri individui della popolazione. L'evoluzione delle strategie miste segue un principio darwiniano: le strategie che massimizzano una data funzione di utilità J sono adottate dagli agenti con una frequenza progressivamente maggiore. L'obiettivo principale della tesi è l'estensione del modello di Ambrosio et al. tramite l'introduzione di un termine diffusivo che agisce sulle componenti spaziali degli agenti. La presenza di una fonte di aleatorietà conduce ad esprimere l'evoluzione dello stato microscopico degli agenti attraverso un processo stocastico a valori in $\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)$, trasformando il modello di Ambrosio, originariamente formulato mediante un'equazione differenziale ordinaria, in un'equazione differenziale stocastica. Il contributo della tesi consiste nella dimostrazione della buona positura del modello sotto ipotesi poco restrittive sui campi che ne governano la dinamica e sui dati iniziali; viene inoltre ricavata una stima a priori sui momenti delle soluzioni. Successivamente si fornisce una descrizione di campo medio del sistema, deducendone le relative proprietà di buona positura e studiando alcune proprietà probabilistiche delle sue soluzioni. Infine, viene dimostrato un risultato di propagazione del caos, dal quale si deduce che le soluzioni del modello con N particelle convergono, in un senso opportuno, alle soluzioni del modello di campo medio quando il numero di agenti tende all'infinito.

Indice

Indice **5**

1 Introduzione **7**
1.1 Modelli multi-agente . . . 7
1.2 Il modello oggetto della tesi . . . 8
1.3 Il quadro funzionale . . . 10

2 Buona positura del modello discreto **15**
2.1 Proprietà strutturali dei campi b_x e b_λ . . . 16
2.2 Esistenza delle soluzioni . . . 19
2.3 Unicità della soluzione . . . 32
2.3.1 Una stima a priori . . . 32
2.3.2 La dimostrazione di unicità . . . 37

3 Buona positura del modello di campo medio **41**
3.1 Una derivazione euristica del modello di campo medio . . . 41
3.2 Proprietà strutturali del campo b^Σ_λ . . . 43
3.3 Costruzione della soluzione al problema di campo medio . . . 49
3.4 Costruzione della soluzione del problema ausiliario . . . 50
3.5 Unicità della soluzione del problema ausiliario . . . 60
3.5.1 Una stima a priori per le soluzioni del problema ausiliario . . . 60
3.5.2 La dimostrazione di unicità per il problema ausiliario . . . 61
3.6 Costruzione della soluzione tramite il teorema delle contrazioni . . . 63

4 Propagazione del caos **71**

A Alcuni risultati di analisi e probabilità **81**
A.1 Misurabilità per funzioni a valori in spazi di Banach . . . 81
A.2 Integrale di Bochner . . . 82
A.3 Processi stocastici . . . 83
A.4 Ulteriori risultati utili . . . 84

Bibliografia **87**

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Modelli multi-agente

Negli ultimi decenni, i modelli multi-agente sono stati impiegati nella descrizione di numerosi fenomeni afferenti a molteplici discipline: dalla dinamica delle opinioni al moto delle folle e di gruppi di animali, dalla dinamica cellulare alla distribuzione della ricchezza, fino alla descrizione dell'allenamento di reti neurali e del comportamento di algoritmi di ottimizzazione particellari ([9],[10],[11],[13],[14],[19],[20],[24],[25]). Ciò che accomuna tutti questi fenomeni è la possibilità di essere descritti mediante una popolazione di individui o di entità elementari (gli *agenti*), tipicamente in numero elevato, i quali interagiscono fra loro secondo opportune regole.

Un modello multi-agente è essenzialmente caratterizzato da due elementi: lo *stato microscopico* degli agenti, ovvero l'insieme delle variabili necessarie ad individuare lo stato di un individuo della popolazione (ad esempio l'opinione di un cittadino su un dato argomento in un modello di dinamica delle opinioni oppure la posizione e la velocità di un volatile nella dinamica di uno stormo), e le *regole di interazione*, ovvero le leggi e i principi che determinano come lo stato microscopico di ciascun agente evolve nel tempo per effetto delle interazioni con gli altri agenti e con l'ambiente circostante.

La traduzione in termini matematici di un modello-multi agente dà solitamente luogo ad un sistema di equazioni differenziali ordinarie o di equazioni differenziali stocastiche, ciascuna delle quali descrive l'evoluzione temporale di un dato agente della popolazione. Tuttavia, come detto in precedenza, la popolazione degli agenti è tipicamente molto numerosa, circostanza che può rendere estremamente elevato il numero di equazioni che rappresentano il modello, inoltre, la presenza di interazioni fra gli individui fa sì che tali equazioni risultino accoppiate. Questi elementi di complessità fanno sì che una descrizione del sistema che mira a tenere traccia, istante per istante, dello stato microscopico di ogni singolo agente risulti poco pratica allo scopo di comprendere il comportamento e le proprietà del sistema modellizzato. Pertanto, accanto alla descrizione particellare, ossia microscopica, del sistema, è spesso utile formulare una descrizione aggregata, ossia macroscopica, dell'evoluzione della popolazione: si rinuncia alla conoscenza del destino individuale di ciascun agente a favore di una conoscenza del comportamento collettivo del sistema, espresso attraverso la descrizione del comportamento statistico di un singolo, generico individuo facente parte della popolazione.

Le metodologie che permettono di passare da una descrizione individuale (microscopica) a una descrizione collettiva (macroscopica) del sistema affondano storicamente le loro radici nella meccanica statistica e in particolare nella teoria cinetica dei gas (ed esempio le equazioni di tipo Boltzmann e i limiti di campo medio [22]) e permettono di descrivere la dinamica della popolazione tramite l'evoluzione della distribuzione degli agenti sullo spazio degli stati. Tale distribuzione esprime qual è la probabilità che, in un dato istante, un agente del sistema possegga un certo stato microscopico e contiene tutte le informazioni necessarie per una descrizione compiuta delle proprietà statistiche del sistema.

La grande varietà di applicazioni e le molteplici metodologie adottate per il loro studio fanno sì che la ricerca sui sistemi multi-agente risulti un ambito essenzialmente multidisciplinare.

Anche volendosi limitare alla sola ricerca sui sistemi multi-agente in ambito matematico, essa si configura come una disciplina che si pone all'intersezione tra la fisica matematica, l'analisi, la probabilità e il calcolo numerico. La ricchezza di idee e linguaggi matematici di cui essa si nutre la rende una tematica di grande fascino e interesse.

1.2 Il modello oggetto della tesi

Questa tesi nasce dal desiderio di generalizzare il modello multi-agente originariamente proposto da Ambrosio, Fornasier, Morandotti e Savaré nell'articolo *"Spatially Inhomogeneous Evolutionary Games"* del 2021 [2]. La generalizzazione che qui proponiamo consiste nell'introduzione, nella dinamica degli agenti, di elementi di aleatorietà e in particolare di effetti diffusivi, in origine non contemplati nel modello completamente deterministico di Ambrosio et al.

Veniamo ora alla descrizione del nuovo modello multi-agente che proponiamo e che sarà l'oggetto di studio di questa tesi. Stabiliamo un orizzonte temporale $[0, T]$, con $T > 0$, e consideriamo una popolazione di N agenti, ciascuno dei quali è caratterizzato, in ogni istante temporale $t \in [0, T]$, da uno stato microscopico $Y^i(t) = (X^i(t), \Lambda^i(t))$, dove l'indice $i \in \{1, \dots, N\}$ esprime l'attribuzione dello stato microscopico $Y^i(t)$ all'agente i-esimo della popolazione. Lo stato microscopico $Y^i(t)$ di ciascun individuo è costituito dalla coppia $(X^i(t), \Lambda^i(t))$, in cui il primo elemento $X^i(t)$ appartiene allo spazio euclideo d-dimensionale $\mathbb{R}^d$, mentre il secondo elemento $\Lambda^i(t)$ appartiene all'insieme $\mathcal{P}(U)$, ovvero l'insieme delle misure di probabilità di Borel sull'insieme U. Richiediamo che questo insieme U sia uno spazio metrico compatto.

L'inseme U è interpretato come un insieme di *strategie*, ovvero delle scelte, o delle azioni, che gli individui sono chiamati a compiere più e più volte nel corso del tempo. La misura di probabilità $\Lambda^i(t) \in \mathcal{P}(U)$ invece rappresenta la frequenza, o equivalentemente la probabilità, con cui l'agente i-esimo adotta una data strategia al tempo t: adottando la terminologia propria della teoria dei giochi, la misura di probabilità $\Lambda^i(t)$ è la *strategia mista* dell'agente i-esimo. Ad esempio, $\mathbb{R}^d$ potrebbe rappresentare lo spazio fisico e U potrebbe rappresentare l'insieme delle direzioni dello spazio lungo cui un individuo può scegliere di muoversi. In tal caso, la strategia mista $\Lambda^i(t)$ rappresenterebbe lo schema comportamentale dell'individuo i-esimo in relazione a tale scelta.

Il modello è descritto dalla seguente *equazione differenziale stocastica* (in forma integrale), la quale esprime come lo stato microscopico $Y^i(t) = (X^i(t), \Lambda^i(t))$ di ciascuno degli N agenti della popolazione evolve nel tempo:

$$\begin{cases} X^i(t) = X_0^i + \displaystyle\int_0^t f_x(X^i(s), \Lambda^i(s))\,\mathrm{d}s + \sqrt{2\sigma} B^i(t) \\ \Lambda^i(t) = \Lambda_0^i + \displaystyle\int_0^t \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f_\lambda(X^i(s), \Lambda^i(s), X^j(s), \Lambda^j(s))\,\mathrm{d}s \end{cases} \tag{1.2.1}$$

per $i = 1, \dots, N$.

Descriviamo ora i vari elementi che costituiscono il sistema di equazioni (1.2.1). $X_0^1, \dots, X_0^N$ sono variabili aleatorie assegnate, a valori in $\mathbb{R}^d$, che stabiliscono le posizioni iniziali degli agenti, mentre $\Lambda_0^1, \dots, \Lambda_0^N$ sono variabili aleatorie a valori in $\mathcal{P}(U)$, anch'esse assegnate, che determinano le relative strategie miste iniziali. Dunque, per ogni $i = 1, \dots, N$, la coppia $(X_0^i, \Lambda_0^i) =: Y_0^i$ assegna lo stato iniziale dell'agente i-esimo.

La componente spaziale X^i dello stato microscopico di ciascun agente evolve nel tempo per effetto di due termini: un termine di trasporto spaziale determinato da un campo vettoriale f_x a valori in $\mathbb{R}^d$ e un termine diffusivo costituito da un moto browniano d-dimensionale B^i il cui effetto è modulato da un parametro diffusivo $\sigma > 0$ assegnato. Il campo $f_x \colon \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U) \longrightarrow \mathbb{R}^d$ è definito come

$$(x, \lambda) \longmapsto \int_U e(x, u)\,\mathrm{d}\lambda(u), \tag{1.2.2}$$

dove $e \colon \mathbb{R}^d \times U \to \mathbb{R}^d$ è una funzione assegnata. Intuitivamente, possiamo immaginare che la dinamica di trasporto spaziale espressa dal campo (1.2.2) avvenga nel seguente modo: ogni agente sceglie aleatoriamente una strategia $u \in U$ secondo la misura di probabilità $\Lambda^i(t)$, come conseguenza, la scelta della strategia u produce una variazione della posizione spaziale $X^i(t)$ dell'agente nella direzione determinata dal vettore velocità $e(X^i(t), u)$; infine, la presenza della media sulle strategie u può essere interpretata come il risultato di numerose ripetizioni, nel corso del tempo, dell'operazione di scelta della strategia, e immaginando che la scala temporale in cui si svolge una singola ripetizione sia più breve rispetto a quella modellizzata.

La componente Λ^i relativa alle strategie miste, invece, evolve per effetto dell'interazione tra l'agente i-esimo e i restanti agenti della popolazione. In particolare, l'aggiornamento della strategia mista $\Lambda^i(t)$ è determinato da una media aritmetica delle quantità $f_\lambda(X^i(t), \Lambda^i(t), X^j(t), \Lambda^j(t))$, con $j = 1, \ldots, N$, ciascuna delle quali codifica un meccanismo di interazione binaria e non locale (in spazio) tra l'agente i-esimo e j-esimo, il quale è espresso dal campo $f_\lambda \colon \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U) \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U) \longrightarrow \mathcal{M}_0(U)$ (denotiamo con $\mathcal{M}_0(U)$ lo spazio vettoriale delle misure a media nulla su U) dato da

$$(x, \lambda, x', \lambda') \mapsto \left(\int_U J(x, \cdot, x', u') \,\mathrm{d}\lambda'(u') - \int_U \int_U J(x, w, x', u') \,\mathrm{d}\lambda'(u') \,\mathrm{d}\lambda(w) \right) \lambda, \qquad (1.2.3)$$

dove $J \colon \mathbb{R}^d \times U \times \mathbb{R}^d \times U \to \mathbb{R}$ è una funzione di utilità assegnata. In particolare, la quantità $J(x, u, x', u')$ esprime qual è il beneficio (*payoff*) che un agente situato in posizione x ottiene adottando la strategia u quando l'agente con cui interagisce si trova in posizione x' e sceglie la strategia u'.

L'espressione analitica (1.2.3) del campo f_λ è ispirata alla cosiddetta *equazione del replicatore* [2, Section 1.2] ed esprime un principio evolutivo di natura darwiniana: le strategie che garantiscono un maggiore payoff medio vengono scelte dagli agenti con una frequenza progressivamente maggiore; al contrario, le strategie che in media producono scarsi benefici vengono gradualmente abbandonate. Infatti per ogni $u \in U$ fissato, la quantità

$$\int_U J(x, u, x', u') \,\mathrm{d}\lambda'(u')$$

rappresenta il payoff medio prodotto dalla scelta della strategia u quando l'agente con cui si interagisce adotta la strategia mista λ', mentre la quantità

$$\int_U \int_U J(x, w, x', u') \,\mathrm{d}\lambda'(u') \,\mathrm{d}\lambda(w)$$

esprime il payoff medio prodotto dall'adozione della strategia mista λ nel momento in cui l'altro agente adotta la strategia mista λ'. Dunque la differenza fra queste due quantità costituisce una misura della bontà di ciascuna strategia u relativamente a J, pertanto possiamo definire la funzione $U \longrightarrow \mathbb{R}$

$$u \longmapsto \int_U J(x, u, x', u') \,\mathrm{d}\lambda'(u') - \int_U \int_U J(x, w, x', u') \,\mathrm{d}\lambda'(u') \,\mathrm{d}\lambda(w),$$

e il prodotto di tale funzione con la misura di probabilità λ dà come risultato la misura con segno e a media nulla che definisce $f_\lambda(x, \lambda, x', \lambda')$ in (1.2.3). Intuitivamente f_λ esprime la sottrazione, da parte dell'agente, di una certa massa di probabilità dalle strategie meno efficaci e la sua riassegnazione alle strategie che gli garantiscono un maggior beneficio, da cui l'affinità con i principi dell'evoluzione darwiniana.

Nel seguito, il modello (1.2.1), descrivendo la dinamica individuale di ciascuna delle N particelle del sistema, sarà chiamato *modello discreto* con N agenti.

Le novità rispetto al modello di Ambrosio et al.

Come detto in precedenza, il modello (1.2.1) si propone di estendere il modello di Ambrosio et al. [2] tramite l'introduzione di elementi di aleatorietà. Nello specifico, le generalizzazioni operate sono due: l'introduzione di aleatorietà sui dati iniziali e la presenza di un termine diffusivo che agisce sulle sole componenti spaziali degli agenti. La stocasticità così introdotta trasforma il modello di Ambrosio, originariamente formulato tramite l'equazione differenziale ordinaria (ODE)

$$\begin{cases} \dot{x}^i(t) = f_x(x^i(t), \lambda^i(t)) \\ \dot{\lambda}^i(t) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N f_\lambda(x^i(t), \lambda^i(t), x^j(t), \lambda^j(t)) \end{cases} \qquad i = 1, \dots, N \tag{1.2.4}$$

con dati iniziali $(x_0^i, \lambda_0^i) \in \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)$, in un'equazione differenziale stocastica (SDE). Questa modifica delle strutture matematiche che descrivono il modello rendono necessaria anche una revisione di alcune delle tecniche impiegate nel suo studio.

1.3 Il quadro funzionale

In questo paragrafo descriveremo il quadro funzionale in cui ambientiamo il problema discreto (1.2.1). Nonostante l'introduzione di effetti diffusivi abbia tramutato il modello di Ambrosio da una ODE in una SDE, il contesto funzionale sviluppato in [2] per lo studio del problema (1.2.4) si rivela di grandissima utilità anche per l'analisi del nuovo modello (1.2.1). Iniziamo richiamando alcune nozioni e strumenti analitici.

Notazioni e preliminari analitici

Sia $(\mathcal{X}, d_{\mathcal{X}})$ uno spazio metrico. Indichiamo con $\mathcal{M}(\mathcal{X})$ lo spazio vettoriale delle misure di Borel con segno e con variazione totale finita. Indichiamo invece con $\mathcal{M}_0(\mathcal{X})$ il sottospazio vettoriale delle misure con segno a media nulla, con $\mathcal{M}_+(\mathcal{X})$ il sottoinsieme convesso delle misure non negative e con $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ il sottoinsieme convesso delle misure di probabilità (per ulteriori dettagli su questi oggetti si veda ad esempio [12]).

Richiamiamo ora la nozione di *push-forward* di misure (o *misura immagine*)

Definizione 1.3.1 (Push-forward di misure)**.** *Siano $(\mathcal{X}, \mathscr{X}, \mu)$ uno spazio di misura (con μ misura non negativa) e $(\mathcal{Y}, \mathscr{Y})$ uno spazio misurabile. Data una funzione $f\colon \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ misurabile definiamo su $(\mathcal{Y}, \mathscr{Y})$ la misura $f_\sharp\mu$ ponendo*

$$f_\sharp\mu(B) = \mu(f^{-1}(B)), \qquad \forall B \in \mathscr{Y}. \tag{1.3.2}$$

$f_\sharp\mu$ è detta push-forward *(o* misura immagine*) di μ attraverso f.*

La misura immagine $f_\sharp\mu$ è per costruzione una misura non negativa e possiede la stessa massa totale di μ, per cui se $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ anche $f_\sharp\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$. Nel linguaggio probabilistico, se $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ è uno spazio di probabilità e $X : \Omega \longrightarrow \mathcal{Y}$ è una variabile aleatoria, la misura $X_\sharp\mathbb{P}$ su $\mathscr{Y}$ è detta *legge* della variabile aleatoria X. Vale il seguente teorema di cambio di variabili (o teorema di integrazione rispetto alla misura immagine)

Teorema 1.3.3 (Integrazione rispetto alla misura immagine)**.** *Siano $(\mathcal{X}, \mathscr{X}, \mu)$ uno spazio di misura (con μ misura non negativa), $(\mathcal{Y}, \mathscr{Y})$ uno spazio misurabile e $f\colon \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ una funzione misurabile. Data una funzione $\varphi\colon \mathcal{Y} \longrightarrow \mathbb{R}$ misurabile, vale la seguente formula di cambio di variabili*

$$\int_X \varphi(f(x))\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \varphi(y)\,\mathrm{d}(f_\sharp\mu)(y). \tag{1.3.4}$$

Ritorniamo ora nell'ambito delle misure di probabilità su spazi metrici e richiamiamo alcune importanti metriche definite su spazi di misure di probabilità, le *distanze di Wasserstein.*

Definizione 1.3.5 (Misure di probabilità con momento p-esimo finito)**.** *Sia $(\mathcal{X}, d_{\mathcal{X}})$ uno spazio metrico e sia $p \in [1, +\infty)$. L'insieme delle* misure di probabilità con momento p-esimo finito *$\mathcal{P}_p(\mathcal{X})$ è definito come*

$$\mathcal{P}_p(\mathcal{X}) := \left\{ \mu \in \mathcal{P}(\mathcal{X}) : \int_{\mathcal{X}} d_{\mathcal{X}}(x, x_0)^p\,\mathrm{d}\mu(x) < \infty \text{ per qualche } x_0 \in \mathcal{X} \right\} \tag{1.3.6}$$

Osserviamo che se $(\mathcal{X}, d_{\mathcal{X}})$ è uno spazio metrico compatto si ha che $\mathcal{P}_p(\mathcal{X}) = \mathcal{P}(\mathcal{X})$ per ogni $p \in [1, +\infty)$ poiché, fissato $x_0 \in \mathcal{X}$ arbitrario, la funzione $x \longmapsto d_{\mathcal{X}}(x, x_0)^p$ è continua sul compatto $\mathcal{X}$, dunque limitata, per cui l'integrale che compare nella (1.3.6) è necessariamente finito.

Tramite le distanze di Wasserstein è possibile dotare gli insiemi $\mathcal{P}_p(\mathcal{X})$ di una struttura di spazio metrico. Diamo ora la definizioni di tali distanze e ne riportiamo alcune proprietà notevoli tratte da [26].

Definizione 1.3.7. *(Distanza di Wasserstein di ordine p) Sia $(\mathcal{X}, d_{\mathcal{X}})$ uno spazio metrico completo e separabile e sia $p \in [1, +\infty)$. Per ogni $\mu, \nu \in \mathcal{P}_p(\mathcal{X})$ la* distanza di Wasserstein di ordine p *tra μ e ν è definita come*

$$W_p(\mu, \nu) \coloneqq \left(\inf_{\pi \in \Gamma(\mu,\nu)} \int_{\mathcal{X} \times \mathcal{X}} d_{\mathcal{X}}(x_1, x_2)^p \, \mathrm{d}\pi(x_1, x_2) \right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.3.8}$$

dove $\Gamma(\mu, \nu)$ denota l'insieme dei piani di trasporto *tra μ e ν, definito come*

$$\Gamma(\mu, \nu) \coloneqq \left\{ \pi \in \mathcal{P}(\mathcal{X} \times \mathcal{X}) : (p_1)_\sharp \pi = \mu, \ (p_2)_\sharp \pi = \nu \right\}$$

dove $p_1, p_2 \colon \mathcal{X} \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ denotano le proiezioni canoniche sul primo e secondo fattore rispettivamente.

La teoria generale del trasporto ottimale ([1],[2],[3], [23]) ci garantisce che l'estremo inferiore nella (1.3.8) è in realtà un minimo, per cui la definizione della distanza di Wasserstein è ben posta. Inoltre è possibile dimostrare che W_p soddisfa tutte le proprietà di una metrica.

Definizione 1.3.9 (Spazio di Wasserstein)**.** *Sia $(\mathcal{X}, d_{\mathcal{X}})$ uno spazio metrico completo e separabile e sia $p \in [1, +\infty)$. W_p definisce una distanza sull'insieme $\mathcal{P}_p(\mathcal{X})$ delle misure di probabilità con momento p-esimo finito. Lo spazio metrico $(\mathcal{P}_p(\mathcal{X}), W_p)$ è detto* spazio di Wasserstein *di ordine p.*

Gli spazi di Wasserstein ereditano da $(\mathcal{X}, d_{\mathcal{X}})$ le proprietà di completezza e separabilità.

Teorema 1.3.10. *Sia $(\mathcal{X}, d_{\mathcal{X}})$ uno spazio metrico completo e separabile e sia $p \in [1, +\infty)$. Allora lo spazio di Wasserstein $(\mathcal{P}_p(\mathcal{X}), W_p)$ è a sua volta completo e separabile.*

Concludiamo questo paragrafo preliminare con alcuni richiami relativi agli spazi di funzioni lipschitziane. Sia $(\mathcal{X}, d_{\mathcal{X}})$ uno spazio metrico e sia $\varphi \colon \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione lipschitziana. Chiamiamo *costante di Lipschitz* di φ la quantità

$$\mathrm{Lip}(\varphi) \coloneqq \sup_{\substack{x_1, x_2 \in \mathcal{X} \\ x_1 \neq x_2}} \frac{|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)|}{d_{\mathcal{X}}(x_1, x_2)}. \tag{1.3.11}$$

Indichiamo con $\mathrm{Lip}_b(\mathcal{X})$ l'insieme delle funzioni $\varphi \colon \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ lipschitziane e limitate su $\mathcal{X}$. $\mathrm{Lip}_b(\mathcal{X})$ è uno spazio vettoriale reale e può essere dotato della norma $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}$ definita come

$$\|\varphi\|_{\mathrm{Lip}} \coloneqq \sup_{x \in \mathcal{X}} |\varphi(x)| + \mathrm{Lip}(\varphi) \tag{1.3.12}$$

per ogni $\varphi \in \mathrm{Lip}_b(\mathcal{X})$. Nel caso in cui $(\mathcal{X}, d_{\mathcal{X}})$ sia uno spazio metrico compatto, in virtù del teorema di Weierstrass, $\mathrm{Lip}_b(\mathcal{X})$ coincide con lo spazio vettoriale delle funzioni $\varphi \colon \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ lipschitziane, che indicheremo semplicemente con $\mathrm{Lip}(\mathcal{X})$. Concludiamo ora questa parentesi di carattere generale e torniamo a considerare il problema discreto (1.2.1).

Lo spazio di Banach $F(U)$

Una delle peculiarità del sistema (1.2.1) risiede nel fatto che la dinamica delle strategie miste Λ^i avviene nell'insieme $\mathcal{P}(U)$, il quale di per sé non possiede una struttura lineare. Risulta dunque utile immergere preliminarmente l'insieme delle misure di probabilità $\mathcal{P}(U)$ in un opportuno spazio di Banach, in modo da potersi avvalere della struttura di spezio vettoriale, della struttura metrica e di alcuni strumenti analitici quali l'integrazione secondo Bochner (Appendice A.2); quest'ultima, come vedremo, permetterà di dare un senso preciso agli integrali in tempo che compaiono nella formulazione integrale (1.2.1). La costruzione che adottiamo è la medesima di Ambrosio [2] e qui ne riportiamo solo gli elementi e le proprietà essenziali, rimandando all'articolo originale per i dettagli. Consideriamo lo spazio metrico (U, d_U), che rappresenta l'insieme delle strategie selezionabili degli agenti, e che ricordiamo essere per ipotesi uno spazio metrico compatto. Per quanto detto nel paragrafo precedente, possiamo considerare lo spazio di Banach $(\mathrm{Lip}(U), \|\cdot\|_{\mathrm{Lip}})$ delle funzioni $\varphi\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ lipschitziane su U. A partire da esso possiamo costruire il suo duale topologico $(\mathrm{Lip}(U))^*$, dotato della consueta norma duale, che chiameremo norma BL, definita come

$$\|\ell\|_{\mathrm{BL}} \coloneqq \sup\Big\{ |\langle \ell, \varphi\rangle| : \varphi \in \mathrm{Lip}(U),\ \|\varphi\|_{\mathrm{Lip}} \leq 1 \Big\}. \tag{1.3.13}$$

per ogni $\ell \in (\mathrm{Lip}(U))^*$. Pensando le misure di probabilità su U come funzionali lineari e continui su $\mathrm{Lip}(U)$, possiamo definire lo spazio di Banach in cui immergere l'insieme $\mathcal{P}(U)$.

Definizione 1.3.14 (Spazio $F(U)$)**.** *Chiamiamo $F(U)$ il sottospazio chiuso dello spazio di Banach $((\mathrm{Lip}(U))^*, \|\cdot\|_{\mathrm{BL}})$ definito come*

$$F(U) \coloneqq \overline{\mathrm{span}(\mathcal{P}(U))}^{\|\cdot\|_{\mathrm{BL}}}, \tag{1.3.15}$$

dove $\mathrm{span}(\mathcal{P}(U))$ *indica l'insieme delle combinazioni lineari finite di elementi di $\mathcal{P}(U)$ e in cui si identifica ciascuna misura $\mu \in \mathcal{P}(U)$ con l'elemento di* $((\mathrm{Lip}(U))^*$

$$\begin{aligned} \mathrm{Lip}(U) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto \int_U \varphi(u)\,\mathrm{d}\mu(u). \end{aligned} \tag{1.3.16}$$

Lo spazio $F(U)$ è noto in letteratura come spazio di Arens-Eells [4] e si può dimostrare essere uno spazio di Banach separabile contenente $\mathcal{M}(U)$. Inoltre, $\mathcal{P}(U) \subset F(U)$ risulta essere un sottoinsieme compatto di $F(U)$. Vista l'importanza di queste proprietà nell'analisi che segue, ne diamo risalto con la seguente proposizione..

Proposizione 1.3.17 (Proprietà di $F(U)$)**.** *Sia (U, d_U) uno spazio metrico compatto. Allora lo spazio vettoriale normato $(F(U), \|\cdot\|_{\mathrm{BL}})$ costruito secondo la definizione 1.3.14 è uno spazio di Banach separabile. Inoltre il convesso $\mathcal{P}(U)$ risulta essere un suo sottoinsieme compatto.*

È possibile dimostrare che la convergenza di misure di probabilità rispetto alla norma $\|\cdot\|_{\mathrm{BL}}$ è strettamente legata alla convergenza rispetto alla distanza di Wasserstein W_1, che a sua volta è legata alla convergenza debole di misure di probabilità (cioè in dualità con le funzioni continue e limitate). Rimandiamo nuovamente a [2, Section 2.1] per i dettagli.

L'ambientazione del problema

Possediamo ora gli strumenti per fornire al problema (1.2.1) un'opportuna ambientazione funzionale. Ricordiamo che, per ogni agente, il rispettivo stato microscopico $Y^i(t) = (X^i(t), \Lambda^i(t))$ è un elemento di $\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)$ per ogni $t \in [0, T]$. Di conseguenza, avendo introdotto lo spazio di Banach $(F(U), \|\cdot\|_{\mathrm{BL}})$, il quale contiene $\mathcal{P}(U)$ come suo sottoinsieme, possiamo sempre considerare $\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)$ come un sottoinsieme dello spazio vettoriale propdotto $\mathbb{R}^d \times F(U)$. Lo spazio $\mathbb{R}^d \times F(U)$ si può dotare in maniera naturale della struttura di spazio di Banach considerando su di esso la norma prodotto $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^d \times F(U)}$, definita come

$$\|y\|_{\mathbb{R}^d \times F(U)} \coloneqq \|x\|_{\mathbb{R}^d} + \|\lambda\|_{\mathrm{BL}} \tag{1.3.18}$$

per ogni $y = (x, \lambda) \in \mathbb{R}^d \times F(U)$, dove $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^d}$ denota la consueta norma euclidea su $\mathbb{R}^d$ e $\|\cdot\|_{\mathrm{BL}}$ denota la norma BL su $F(U)$ definita dalla (1.3.13).

Spesso ci tornerà utile considerare gli spazi prodotto $(\mathbb{R}^d)^N$, $F(U)^N$ e $(\mathbb{R}^d \times (F(U)))^N$ (con $N \in \mathbb{N}^+$) che anche in questo caso dotiamo delle rispettive norme prodotto, date da

$$\|x\|_{(\mathbb{R}^d)^N} := \sum_{i=1}^{N} \|x_i\|_{\mathbb{R}^d}, \qquad \|\lambda\|_{(F(U))^N} := \sum_{i=1}^{N} \|\lambda_i\|_{\mathrm{BL}}$$

e

$$\|y\|_{(\mathbb{R}^d \times F(U))^N} := \sum_{i=1}^{N} \|x_i\|_{\mathbb{R}^d} + \sum_{i=1}^{N} \|\lambda_i\|_{\mathrm{BL}} = \|x\|_{(\mathbb{R}^d)^N} + \|\lambda\|_{(F(U))^N}$$

per ogni $x = (x_1, \dots, x_N) \in (\mathbb{R}^d)^N$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in (F(U))^N$ e $y = (x_1, \lambda_1, \dots, x_N, \lambda_N) \in (\mathbb{R}^d \times F(U))^N$. Poiché $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_{\mathbb{R}^d})$ e $(F(U), \|\cdot\|_{\mathrm{BL}})$ sono spazi di Banach separabili anche gli spazi prodotto $((\mathbb{R}^d)^N, \|\cdot\|_{(\mathbb{R}^d)^N})$, $((F(U))^N, \|\cdot\|_{(F(U))^N})$ e $((\mathbb{R}^d \times F(U))^N, \|\cdot\|_{(\mathbb{R}^d \times F(U))^N})$ lo sono a loro volta. Data l'importanza di tale proprietà la sottolineiamo con la seguente proposizione.

Proposizione 1.3.19. *Sia $N \in \mathbb{N}^+$ e (U, d_U) uno spazio metrico compatto. Gli spazi normati $((\mathbb{R}^d)^N, \|\cdot\|_{(\mathbb{R}^d)^N})$, $((F(U))^N, \|\cdot\|_{(F(U))^N})$ e $((\mathbb{R}^d \times F(U))^N, \|\cdot\|_{(\mathbb{R}^d \times F(U))^N})$ sono di Banach e separabili.*

Questo quadro funzionale ci permette di dare un'ambientazione più precisa anche ai campi f_x, f_λ, definiti nelle (1.2.2) e (1.2.3). Infatti, il campo f_x ora può essere pensato come una funzione definita sullo spazio metrico $\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)$, che consideriamo dotato della struttura metrica che esso eredita in qualità di sottoinsieme di $(\mathbb{R}^d \times F(U), \|\cdot\|_{\mathbb{R}^d \times F(U)})$, a valori in $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_{\mathbb{R}^d})$; mentre il campo f_λ può considerarsi definito sullo spazio metrico $\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U) \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)$, dotato della struttura metrica ereditata da $((\mathbb{R}^d \times F(U))^2, \|\cdot\|_{(\mathbb{R}^d \times F(U))^2})$, a valori nello spazio di Banach separabile $(F(U), \|\cdot\|_{\mathrm{BL}})$.

Ora possiamo dare un senso preciso a tutti gli elementi che compaiono nel sistema di equazioni (1.2.1), che riportiamo di seguito per comodità di lettura:

$$\begin{cases} X^i(t) = X_0^i + \underbrace{\int_0^t f_x(X^i(s), \Lambda^i(s))\,\mathrm{d}s}_{\text{Integrale di Lebesgue}} + \sqrt{2\sigma} B^i(t) & \text{(1.3.20a)} \\ \Lambda^i(t) = \Lambda_0^i + \underbrace{\int_0^t \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} f_\lambda(X^i(s), \Lambda^i(s), X^j(s), \Lambda^j(s))\,\mathrm{d}s}_{\text{Integrale di Bochner}} & \text{(1.3.20b)} \end{cases}$$

per $i = 1, \dots, N$. Per ogni $t \in [0, T]$ lo stato microscopico dell'agente i-esimo $Y^i(t) = (X^i(t), \Lambda^i(t)) \in \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)$ è considerato un elemento dello spazio di Banach $\mathbb{R}^d \times F(U)$. Pertanto, grazie alla struttura di spazio vettoriale di cui è dotato $F(U)$ risultano ben definite le operazioni di addizione che compaiono nelle equazioni di evoluzione delle strategie miste Λ^i (1.3.20b) (le operazioni di addizione in (1.3.20a) sono naturalmente ben definite grazie alla struttura di spazio vettoriale di $\mathbb{R}^d$). Assumono un senso preciso anche gli integrali in tempo che definiscono la formulazione integrale del problema (1.2.1): l'integrale che compare in (1.3.20a) si può definire tramite la teoria dell'integrazione di Lebesgue, in quanto integrale di una funzione $[0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$, mentre l'integrale che compare nella (1.3.20b) richiede l'integrazione di una funzione $[0, T] \longrightarrow F(U)$, dunque a valori in uno spazio di Banach. La generalizzazione della teoria dell'integrazione di Lebesgue a funzioni a valori in spazi di Banach è fornita dalla teoria dell'integrazione di Bochner, e proprio nel senso di Bochner intendiamo l'integrale in (1.3.20b). Alcuni elementi della teoria dell'integrale di Bochner sono riportati nell'Appendice A.2. Nuovamente possiamo apprezzare l'utilità di aver ambientato il nostro problema in uno spazio di Banach.

Capitolo 2

Buona positura del modello discreto

Data la novità del modello multi-agente (1.2.1), il primo problema che ci proponiamo di affrontare è la sua *buona positura*, dunque l'esistenza e l'unicità delle soluzioni dell'equazione differenziale stocastica che lo descrive. Iniziamo la nostra argomentazione precisando la nozione di soluzione che adotteremo nel corso di tutta la trattazione, quella di *soluzione forte*.

Definizione 2.0.1 (Soluzione forte del problema (1.2.1)). *Dati $T > 0$ e $N \in \mathbb{N}^+$, siano $B^i \colon \Omega \longrightarrow C([0,T], \mathbb{R}^d)$, per $i = 1, \dots, N$, moti browniani standard d-dimensionali definiti su uno spazio di probabilità filtrato $\big(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathbb{P}\big)$, siano $X_0^1, \dots, X_0^N \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ variabili aleatorie $\mathscr{F}_0$-misurabili e appartenenti a $L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ e siano $\Lambda_0^1, \dots, \Lambda_0^N \colon \Omega \longrightarrow \mathcal{P}(U)$ variabili aleatorie $\mathscr{F}_0$-misurabili. Si definisce* soluzione forte *del problema (1.2.1) un processo stocastico continuo*

$$Y \colon \Omega \longrightarrow C\big([0,T], (\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))^N\big)$$

(intendendo $Y(t) = (X^1(t), \Lambda^1(t), \dots, X^N(t), \Lambda^N(t))$ per ogni $t \in [0,T]$) che soddisfa l'equazione (1.2.1) $\mathbb{P}$-quasi certamente e per ogni $t \in [0,T]$.

La nozione di soluzione forte, o *soluzione per cammini*, si ritrova in vari lavori in cui le equazioni differenziali stocastiche sono impiegate nella modellizzazione di sistemi multi-agente, ad esempio [5], [9] e [13].

Riscriviamo ora il problema (1.2.1) in una forma del tutto equivalente, ma più compatta e sintetica. Introduciamo i processi stocastici $X \colon \Omega \longrightarrow C\big([0,T], (\mathbb{R}^d)^N\big)$ e $\Lambda \colon \Omega \longrightarrow C\big([0,T], (\mathcal{P}(U))^N\big)$, dove poniamo, per ogni $t \in [0,T]$, $X(t) = (X^1(t), \dots, X^N(t))$ e $\Lambda(t) = (\Lambda^1(t), \dots, \Lambda^N(t))$. Definiamo inoltre le variabili aleatorie, rispettivamente a valori in $(\mathbb{R}^d)^N$ e $(\mathcal{P}(U))^N$, $X_0 = (X_0^1, \dots, X_0^N) \in L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ e $\Lambda_0 = (\Lambda_0^1, \dots, \Lambda_0^N)$.

Introduciamo ora i campi $b_x \colon (\mathbb{R}^d)^N \times (\mathcal{P}(U))^N \longrightarrow (\mathbb{R}^d)^N$ e $b_\lambda \colon (\mathbb{R}^d)^N \times (\mathcal{P}(U))^N \longrightarrow (F(U))^N$ definiti da

$$(x_1, \dots, x_N, \lambda_1, \dots, \lambda_N) \mapsto (f_x(x_1, \lambda_1), \dots, f_x(x_N, \lambda_N)) \tag{2.0.2}$$

$$(x_1, \dots, x_N, \lambda_1, \dots, \lambda_N) \mapsto \left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N f_\lambda(x_1, \lambda_1, x_j, \lambda_j), \dots, \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N f_\lambda(x_N, \lambda_N, x_j, \lambda_j)\right) \tag{2.0.3}$$

rispettivamente, così da poter riscrivere il problema (1.2.1) come

$$\begin{cases} X(t) = X_0 + \displaystyle\int_0^t b_x(X(s), \Lambda(s))\,\mathrm{d}s + \sqrt{2\sigma}B(t) \\ \Lambda(t) = \Lambda_0 + \displaystyle\int_0^t b_\lambda(X(s), \Lambda(s))\,\mathrm{d}s \end{cases} \tag{2.0.4}$$

dove $(B(t))_{t\in[0,T]}$ è il moto browniano standard $d \times N$-dimensionale ottenuto giustapponendo i moti browninani $B^i(t)$. Osserviamo che i processi stocastici X e Λ raccolgono rispettivamente le posizioni e le strategie miste di tutti gli N agenti della popolazione, e che i campi b_x e b_λ ne governano rispettivamente l'evoluzione. Questa formulazione più sintetica risulterà comoda per le argomentazioni analitiche che seguono, le quali richiedono un diverso trattamento delle componenti spaziali e delle componenti relative alle strategie miste per via della loro differente natura. In virtù dell'equivalenza tra le formulazioni (1.2.1) e (2.0.4), nel seguito useremo l'espressione *soluzione forte del problema (2.0.4)* con lo stesso significato della definizione 2.0.1.

Durante tutta la trattazione supponiamo le funzioni $e\colon \mathbb{R}^d \times U \longrightarrow \mathbb{R}^d$ e $J\colon \mathbb{R}^d \times U \times \mathbb{R}^d \times U \longrightarrow \mathbb{R}$ lipschitziane: dunque esistono costanti $L_e, L_J > 0$ tali che

$$\|e(x_1,u_1) - e(x_2,u_2)\|_{\mathbb{R}^d} \leq L_e\big(\|x_1 - x_2\|_{\mathbb{R}^d} + d_U(u_1,u_2)\big) \tag{2.0.5a}$$

per ogni $(x_1,u_1),(x_2,u_2) \in \mathbb{R}^d \times U$ e

$$\begin{aligned} &|J(x_1,u_1,x_1',u_1') - J(x_2,u_2,x_2',u_2')| \\ &\leq L_J\big(\|x_1 - x_2\|_{\mathbb{R}^d} + d_U(u_1,u_2) + \|x_1' - x_2'\|_{\mathbb{R}^d} + d_U(u_1',u_2')\big) \end{aligned} \tag{2.0.5b}$$

per ogni $(x_1,u_1,x_1',u_1'),(x_2,u_2,x_2',u_2') \in \mathbb{R}^d \times U \times \mathbb{R}^d \times U$. Ricordiamo infine che abbiamo supposto che (U, d_U) sia uno spazio metrico compatto.

2.1 Proprietà strutturali dei campi b_x e b_λ

In questa sezione dimostriamo alcune proprietà strutturali dei campi b_x e b_λ. Iniziamo riportando alcune proprietà dei campi f_x e f_λ, la dimostrazione dei seguenti risultati è data in [2, Section 3.4].

Proposizione 2.1.1. *I campi f_x e f_λ sono lipschitziani e valgono le seguenti disuguaglianze: per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{P}(U)$*

$$\|f_x(x_1,\lambda_1) - f_x(x_2,\lambda_2)\|_{\mathbb{R}^d} \leq L_e(1 + \operatorname{diam} U)(\|x_1 - x_2\|_{\mathbb{R}^d} + \|\lambda_1 - \lambda_2\|_{F(U)}) \tag{2.1.2}$$

e per ogni $x_1, x_1', x_2, x_2' \in \mathbb{R}^d$ e $\lambda_1, \lambda_1', \lambda_2, \lambda_2' \in \mathcal{P}(U)$

$$\begin{aligned} &\|f_\lambda(x_1,\lambda_1,x_1',\lambda_1') - f_x(x_2,\lambda_2,x_2',\lambda_2')\|_{F(U)} \\ &\leq 2L_J(1 + \operatorname{diam} U)\big(\|x_1 - x_2\|_{\mathbb{R}^d} + \|\lambda_1 - \lambda_2\|_{F(U)} + \|x_1' - x_2'\|_{\mathbb{R}^d} + \|\lambda_1' - \lambda_2'\|_{F(U)}\big). \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

Proposizione 2.1.4. *Sia $\theta \in \mathbb{R}$ tale che $0 < \theta \leq (L_J \operatorname{diam} U)^{-1}$. Allora, per ogni $x, x' \in \mathbb{R}^d$ e $\lambda, \lambda' \in \mathcal{P}(U)$, si ha che*

$$\lambda + \theta f_\lambda(x,\lambda,x',\lambda') \in \mathcal{P}(U). \tag{2.1.5}$$

A partire dalle proposizioni 2.1.1 e 2.1.4 deduciamo le seguenti proprietà di b_x e b_λ.

Proposizione 2.1.6. *I campi b_x e b_λ sono lipschitziani su $(\mathbb{R}^d)^N \times (\mathcal{P}(U))^N$, ovvero esistono costanti L_x , $L_\lambda > 0$ tali che*

$$\|b_x(x_1,\lambda_1) - b_x(x_2,\lambda_2)\|_{(\mathbb{R}^d)^N} \leq L_x(\|x_1 - x_2\|_{(\mathbb{R}^d)^N} + \|\lambda_1 - \lambda_2\|_{(F(U))^N}) \tag{2.1.7}$$

$$\|b_\lambda(x_1,\lambda_1) - b_\lambda(x_2,\lambda_2)\|_{(F(U))^N} \leq L_\lambda(\|x_1 - x_2\|_{(\mathbb{R}^d)^N} + \|\lambda_1 - \lambda_2\|_{(F(U))^N}) \tag{2.1.8}$$

per ogni $x_1, x_2 \in (\mathbb{R}^d)^N$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in (\mathcal{P}(U))^N$.

Dimostrazione. Dalla proposizione 2.1.1 sappiamo che per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{P}(U)$ si ha

$$\|f_x(x_1,\lambda_1) - f_x(x_2,\lambda_2)\|_{\mathbb{R}^d} \leq L_e(1 + \operatorname{diam} U)(\|x_1 - x_2\|_{\mathbb{R}^d} + \|\lambda_1 - \lambda_2\|_{F(U)})$$

e che per ogni $x_1, x_1', x_2, x_2' \in \mathbb{R}^d$ e $\lambda_1, \lambda_1', \lambda_2, \lambda_2' \in \mathcal{P}(U)$ vale

$$\begin{aligned}&\|f_\lambda(x_1,\lambda_1,x_1',\lambda_1') - f_x(x_2,\lambda_2,x_2',\lambda_2')\|_{F(U)}\\&\leq 2L_J(1+\operatorname{diam} U)\big(\|x_1-x_2\|_{\mathbb{R}^d} + \|\lambda_1-\lambda_2\|_{F(U)} + \|x_1'-x_2'\|_{\mathbb{R}^d} + \|\lambda_1'-\lambda_2'\|_{F(U)}\big).\end{aligned}$$

Pertanto,

$$\begin{aligned}\|b_x(x_1,\lambda_1) - b_x(x_2,\lambda_2)\|_{(\mathbb{R}^d)^N} &= \sum_{i=1}^N \|f_x(x_{1,i},\lambda_{1,i}) - f_x(x_{2,i},\lambda_{2,i})\|_{\mathbb{R}^d}\\&\leq \sum_{i=1}^N L_e(1+\operatorname{diam} U)(\|x_{1,i}-x_{2,i}\|_{\mathbb{R}^d} + \|\lambda_{1,i}-\lambda_{2,i}\|_{F(U)})\\&= L_e(1+\operatorname{diam} U)(\|x_1-x_2\|_{(\mathbb{R}^d)^N} + \|\lambda_1-\lambda_2\|_{(F(U))^N})\end{aligned}$$

per ogni $x_1, x_2 \in (\mathbb{R}^d)^N$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in (\mathcal{P}(U))^N$. Analogamente,

$$\begin{aligned}&\|b_\lambda(x_1,\lambda_1) - b_\lambda(x_2,\lambda_2)\|_{(F(U))^N}\\&= \sum_{i=1}^N \left\| \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N f_\lambda(x_{1,i},\lambda_{1,i},x_{j,i},\lambda_{j,i}) - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N f_\lambda(x_{2,i},\lambda_{2,i},x_{j,i},\lambda_{j,i})\right\|_{F(U)}\\&\leq \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N \|f_\lambda(x_{1,i},\lambda_{1,i},x_{j,i},\lambda_{j,i}) - f_\lambda(x_{2,i},\lambda_{2,i},x_{j,i},\lambda_{j,i})\|_{F(U)}\\&\leq \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N 2L_J(1+\operatorname{diam} U)\big(\|x_{1,i}-x_{2,i}\|_{\mathbb{R}^d} + \|\lambda_{1,i}-\lambda_{2,i}\|_{F(U)}\\&\qquad\qquad + \|x_{1,j}-x_{2,j}\|_{\mathbb{R}^d} + \|\lambda_{1,j}-\lambda_{2,j}\|_{F(U)}\big)\\&= 2L_J(1+\operatorname{diam} U)\big(\|x_1-x_2\|_{(\mathbb{R}^d)^N} + \|\lambda_1-\lambda_2\|_{(F(U))^N}\\&\qquad\qquad + \|x_1-x_2\|_{(\mathbb{R}^d)^N} + \|\lambda_1-\lambda_2\|_{(F(U))^N}\big)\\&= 4L_J(1+\operatorname{diam} U)(\|x_1-x_2\|_{(\mathbb{R}^d)^N} + \|\lambda_1-\lambda_2\|_{(F(U))^N})\end{aligned}$$

per ogni $x_1, x_2 \in (\mathbb{R}^d)^N$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in (\mathcal{P}(U))^N$. Dunque è sufficiente porre $L_x := L_e(1+\operatorname{diam} U)$ e $L_\lambda := 4L_J(1+\operatorname{diam} U)$ per ottenere quanto voluto. □

Dalla globale lipschitzianità di b_x e b_λ segue la loro sublinearità su $(\mathbb{R}^d)^N \times (\mathcal{P}(U))^N$, vale infatti la seguente proposizione.

Proposizione 2.1.9. *Esistono costanti $M_x, M_\lambda > 0$ tali che*

$$\|b_x(x,\lambda)\|_{(\mathbb{R}^d)^N} \leq M_x(1 + \|x\|_{(\mathbb{R}^d)^N} + \|\lambda\|_{(F(U))^N}) \tag{2.1.10}$$

$$\|b_\lambda(x,\lambda)\|_{(F(U))^N} \leq M_\lambda(1 + \|x\|_{(\mathbb{R}^d)^N} + \|\lambda\|_{(F(U))^N}) \tag{2.1.11}$$

per ogni $x \in (\mathbb{R}^d)^N$ e $\lambda \in (\mathcal{P}(U))^N$.

Dimostrazione. Siano $x_0 \in (\mathbb{R}^d)^N$ e $\lambda_0 \in (\mathcal{P}(U))^N$ punti arbitrari fissati, allora, in virtù di (2.1.7), si ha

$$\begin{aligned}&\|b_x(x,\lambda)\|_{(\mathbb{R}^d)^N} = \|b_x(x,\lambda) - b_x(x_0,\lambda_0) + b_x(x_0,\lambda_0)\|_{(\mathbb{R}^d)^N}\\&\leq \|b_x(x_0,\lambda_0)\|_{(\mathbb{R}^d)^N} + \|b_x(x,\lambda) - b_x(x_0,\lambda_0)\|_{(\mathbb{R}^d)^N}\\&\leq \|b_x(x_0,\lambda_0)\|_{(\mathbb{R}^d)^N} + L_x\big(\|x-x_0\|_{(\mathbb{R}^d)^N} + \|\lambda-\lambda_0\|_{(F(U))^N}\big)\\&\leq \|b_x(x_0,\lambda_0)\|_{(\mathbb{R}^d)^N} + L_x\big(\|x_0\|_{(\mathbb{R}^d)^N} + \|\lambda_0\|_{(F(U))^N} + \|x\|_{(\mathbb{R}^d)^N} + \|\lambda\|_{(F(U))^N}\big)\\&\leq M_x\big(1 + \|x\|_{(\mathbb{R}^d)^N} + \|\lambda\|_{(F(U))^N}\big)\end{aligned}$$

per ogni $x \in (\mathbb{R}^d)^N$ e $\lambda \in (\mathcal{P}(U))^N$ e per un'opportuna costante $M_x > 0$, da cui segue la sublinearità di b_x. La dimostrazione della sublinearità di b_λ segue dalla (2.1.8) ed è del tutto analoga. □

Proposizione 2.1.12. *Sia $\theta \in \mathbb{R}$ tale che*

$$0 < \theta \le \frac{1}{L_J \operatorname{diam} U}. \tag{2.1.13}$$

Allora, per ogni $x \in (\mathbb{R}^d)^N$ e $\lambda \in (\mathcal{P}(U))^N$, si ha che

$$\lambda + \theta b_\lambda(x, \lambda) \in (\mathcal{P}(U))^N. \tag{2.1.14}$$

Dimostrazione. Dalla proposizione 2.1.4 sappiamo che se la condizione (2.1.13) è soddisfatta allora per ogni $x, x' \in \mathbb{R}^d$ e $\lambda, \lambda' \in \mathcal{P}(U)$ si ha che $\lambda + \theta f_\lambda(x, \lambda, x', \lambda') \in \mathcal{P}(U)$. Siano dunque $x = (x_1, \ldots, x_N) \in (\mathbb{R}^d)^N$ e $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \in (\mathcal{P}(U))^N$, allora, per ogni $i = 1, \ldots, N$ si ha

$$\begin{aligned}\Big(\lambda + \theta b_\lambda(x, \lambda)\Big)_i &= \lambda_i + \theta \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f_\lambda(x_i, \lambda_i, x_j, \lambda_j) \\ &= \sum_{j=1}^N \frac{1}{N} \underbrace{\Big(\lambda_i + \theta f_\lambda(x_i, \lambda_i, x_j, \lambda_j)\Big)}_{\in \mathcal{P}(U)} \in \mathcal{P}(U)\end{aligned}$$

in virtù della proprietà di f_λ enunciata nella proposizione 2.1.4 e della convessità di $\mathcal{P}(U)$. Da ciò segue la tesi. □

Fissato $\theta \in \mathbb{R}$ tale da soddisfare la condizione (2.1.13), risulta ben definito un campo $g_\lambda \colon (\mathbb{R}^d)^N \times (\mathcal{P}(U))^N \longrightarrow (\mathcal{P}(U))^N$ dato da

$$(x, \lambda) \longmapsto g_\lambda(x, \lambda) \coloneqq \lambda + \theta b_\lambda(x, \lambda), \tag{2.1.15}$$

il quale ci permette di riscrivere b_λ come

$$b_\lambda(x, \lambda) = \frac{g_\lambda(x, \lambda) - \lambda}{\theta},$$

così da ottenere un campo di forma e proprietà analoghe a quello trattato in [8, Corollaire 1.1, Pag. 11] ad opera di Haïm Brézis. Da tale risultato abbiamo tratto alcune delle idee alla base della dimostrazione di buona positura.

Il campo g_λ eredita da b_λ le proprietà di lipschitzianità e di sublinearità su $(\mathbb{R}^d)^N \times (\mathcal{P}(U))^N$. Vale infatti la seguente proposizione.

Proposizione 2.1.16. *Esistono costanti $\widetilde{L}_\lambda$, $\widetilde{M}_\lambda$ positive tali che*

$$\|g_\lambda(x_1, \lambda_1) - g_\lambda(x_2, \lambda_2)\|_{(F(U))^N} \le \widetilde{L}_\lambda(\|x_1 - x_2\|_{(\mathbb{R}^d)^N} + \|\lambda_1 - \lambda_2\|_{(F(U))^N}) \tag{2.1.17}$$

$$\|g_\lambda(x, \lambda)\|_{(F(U))^N} \le \widetilde{M}_\lambda(1 + \|x\|_{(\mathbb{R}^d)^N} + \|\lambda\|_{(F(U))^N}) \tag{2.1.18}$$

per ogni $x_1, x_2, x \in (\mathbb{R}^d)^N$ e $\lambda_1, \lambda_2, \lambda \in (\mathcal{P}(U))^N$.

Dimostrazione. Dalla definizione di g_λ (2.1.15) e dalla (2.1.8) si ha che, per ogni $x_1, x_2 \in (\mathbb{R}^d)^N$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in (\mathcal{P}(U))^N$, vale

$$\begin{aligned}&\|g_\lambda(x_1, \lambda_1) - g_\lambda(x_2, \lambda_2)\|_{(F(U))^N} \\ &= \|\lambda_1 + \theta b_\lambda(x_1, \lambda_1) - \lambda_2 - \theta b_\lambda(x_2, \lambda_2)\|_{(F(U))^N} \\ &\le \|\lambda_1 - \lambda_2\|_{(F(U))^N} + \theta \|b_\lambda(x_1, \lambda_1) - b_\lambda(x_2, \lambda_2)\|_{(F(U))^N} \\ &\le \|\lambda_1 - \lambda_2\|_{(F(U))^N} + \theta L_\lambda(\|x_1 - x_2\|_{(\mathbb{R}^d)^N} + \|\lambda_1 - \lambda_2\|_{(F(U))^N}) \\ &\le \widetilde{L}_\lambda(\|x_1 - x_2\|_{(\mathbb{R}^d)^N} + \|\lambda_1 - \lambda_2\|_{(F(U))^N})\end{aligned}$$

dove si è posto $\widetilde{L}_\lambda \coloneqq \max\{1, \theta L_\lambda\}$. Infine, dalla globale lipschitzianità segue la sublinearità. □

2.2 Esistenza delle soluzioni

Veniamo ora alla questione dell'esistenza di soluzioni forti del problema (1.2.1). Facciamo uso del *metodo delle approssimazioni successive*: dopo aver fissato θ in modo tale da soddisfare la condizione (2.1.13), definiamo le iterate nel seguente modo:

$$\begin{cases} X_{n+1}(t) \coloneqq X_0 + \displaystyle\int_0^t b_x(X_n(s), \Lambda_n(s))\,\mathrm{d}s + \sqrt{2\sigma}B(t) \\ \Lambda_{n+1}(t) \coloneqq e^{-\frac{t}{\theta}}\Lambda_0 + \dfrac{1}{\theta}\displaystyle\int_0^t e^{\frac{s-t}{\theta}} g_\lambda(X_n(s), \Lambda_n(s))\,\mathrm{d}s \end{cases} \tag{2.2.1}$$

per ogni $t \in [0, T]$ e $n = 0, 1, 2, \ldots$ L'iterata iniziale è definita, per ogni $t \in [0, T]$, come

$$\begin{cases} X_0(t) \coloneqq X_0 \\ \Lambda_0(t) \coloneqq \Lambda_0 \end{cases}. \tag{2.2.2}$$

Ricaviamo ora alcune proprietà delle iterate appena definite.

Proposizione 2.2.3. *I processi stocastici X_n e Λ_n definiti dalle (2.2.1) e (2.2.2) sono continui e adattati alla filtrazione $(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$ per ogni $n = 0, 1, 2, \ldots$*

Dimostrazione. Mostriamo dapprima la continuità delle traiettorie dei processi. Sia $\omega \in \Omega$ fissato e procediamo per induzione su n. È immediato osservare che le iterate iniziali sono continue in quanto costanti; supponiamo ora che X_n e Λ_n siano processi continui, allora le applicazioni $s \longmapsto b_x(X_n(\omega, s), \Lambda_n(\omega, s))$ e $s \longmapsto g_\lambda(X_n(\omega, s), \Lambda_n(\omega, s))$ sono entrambe continue sull'intervallo $[0, T]$ in quanto ottenute tramite composizione di funzioni continue. Segue che le applicazioni

$$t \longmapsto \int_0^t b_x(X_n(\omega, s), \Lambda_n(\omega, s))\,\mathrm{d}s$$
$$t \longmapsto \frac{1}{\theta}\int_0^t e^{\frac{s-t}{\theta}} g_\lambda(X_n(\omega, s), \Lambda_n(\omega, s))\,\mathrm{d}s$$

risultano a loro volta continue su $[0, T]$. Infine, ricordando la continuità del moto browniano, concludiamo che l'applicazione

$$t \longmapsto X_0(\omega) + \int_0^t b_x(X_n(\omega, s), \Lambda_n(\omega, s))\,\mathrm{d}s + \sqrt{2\sigma}B(\omega, t) = X_{n+1}(\omega, t)$$

è continua su $[0, T]$, così come l'applicazione

$$t \longmapsto e^{-\frac{t}{\theta}}\Lambda_0(\omega) + \frac{1}{\theta}\int_0^t e^{\frac{s-t}{\theta}} g_\lambda(X_n(\omega, s), \Lambda_n(\omega, s))\,\mathrm{d}s = \Lambda_{n+1}(\omega, t).$$

Dall'arbitrarietà di $\omega \in \Omega$ deduciamo che X_{n+1} e Λ_{n+1} sono processi continui e per induzione su n segue la tesi.

Mostriamo ora che sia X_n sia Λ_n sono adattati alla filtrazione $(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$. Procediamo nuovamente per induzione su n. Le variabili aleatorie X_0 e Λ_0 sono $\mathscr{F}_0$-misurabili per ipotesi, dunque le iterate iniziali risultano adattate. Supponiamo ora che i processi X_n e Λ_n siano adattati: in virtù della continuità appena dimostrata e della proposizione A.3.7 risulta che X_n e Λ_n sono progressivamente misurabili, ovvero, per ogni $t \in [0, T]$, le applicazioni

$$\begin{aligned} \Omega \times [0, t] &\longrightarrow (\mathbb{R}^d)^N \\ (\omega, s) &\longmapsto X_n(\omega, s) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \Omega \times [0, t] &\longrightarrow (F(U))^N \\ (\omega, s) &\longmapsto \Lambda_n(\omega, s) \end{aligned}$$

sono $\mathscr{F}_t \otimes \mathscr{B}([0,t])$-misurabili. Vogliamo mostrare che, per ogni $t \in [0,T]$, le variabili aleatorie $X_{n+1}(t)$ e $\Lambda_{n+1}(t)$ sono $\mathscr{F}_t$-misurabili. Consideriamo dapprima le componenti spaziali: in virtù della progressiva misurabilità di X_n e Λ_n deduciamo che, per ogni $t \in [0,T]$, l'applicazione

$$\begin{aligned} \Omega \times [0,t] &\longrightarrow (\mathbb{R}^d)^N \\ (\omega, s) &\longmapsto b_x(X_n(\omega,s), \Lambda_n(\omega,s)) \end{aligned}$$

è a sua volta $\mathscr{F}_t \otimes \mathscr{B}([0,t])$-misurabile; ora, applicando il teorema di Fubini-Tonelli ([12], [17]) concludiamo che, per ogni $t \in [0,T]$, l'applicazione

$$\begin{aligned} \Omega &\longrightarrow (\mathbb{R}^d)^N \\ \omega &\longmapsto \int_0^t b_x(X_n(\omega,s), \Lambda_n(\omega,s))\, \mathrm{d}s, \end{aligned}$$

è $\mathscr{F}_t$-misurabile. Osservando infine che, per costruzione, la variabile aleatoria $B(t)$ è $\mathscr{F}_t$-misurabile, concludiamo che anche $X_{n+1}(t)$ è $\mathscr{F}_t$-misurabile, dunque il processo X_{n+1} è adattato, come voluto. La dimostrazione relativa a Λ_{n+1} si basa essenzialmente sulla stessa idea, tuttavia, essa risulta lievemente più delicata in quanto l'integrale che definisce il processo Λ_{n+1} in (2.2.1) non è un integrale di Lebesgue, per cui vale il teorema di Fubini-Tonelli, bensì un integrale di Bochner. Ricordiamo che il nostro obiettivo è quello di mostrare che, per ogni $t \in [0,T]$, la variabile aleatoria $\Lambda_{n+1}(t)\colon \Omega \longrightarrow (F(U))^N$ è $\mathscr{F}_t$-misurabile. Poiché $\Lambda_{n+1}(t)$ assume valori nello spazio di Banach separabile $((F(U))^N, \|\cdot\|_{(F(U))^N})$, in virtù del criterio di misurabilità espresso dalla proposizione A.1.3, possiamo equivalentemente dimostrare che, per ogni funzionale lineare e continuo $\varphi \in ((F(U))^N)^*$, l'applicazione

$$\begin{aligned} \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto \langle \varphi, \Lambda_{n+1}(t) \rangle, \end{aligned}$$

è $\mathscr{F}_t$-misurabile. Sia dunque $\varphi \in ((F(U))^N)^*$, si ha che

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \Lambda_{n+1}(t) \rangle &= \left\langle \varphi, e^{-\frac{t}{\theta}} \Lambda_0 + \frac{1}{\theta} \int_0^t e^{\frac{s-t}{\theta}} g_\lambda(X_n(s), \Lambda_n(s))\, \mathrm{d}s \right\rangle = \\ &= \langle \varphi, e^{-\frac{t}{\theta}} \Lambda_0 \rangle + \left\langle \varphi, \frac{1}{\theta} \int_0^t e^{\frac{s-t}{\theta}} g_\lambda(X_n(s), \Lambda_n(s))\, \mathrm{d}s \right\rangle = \\ &= e^{-\frac{t}{\theta}} \langle \varphi, \Lambda_0 \rangle + \frac{1}{\theta} \int_0^t e^{\frac{s-t}{\theta}} \Big\langle \varphi, g_\lambda(X_n(s), \Lambda_n(s)) \Big\rangle\, \mathrm{d}s \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

dove abbiamo utilizzato la proposizione A.2.6 per scambiare integrale in tempo e dualità. L'ultimo integrale della (2.2.4) è un integrale di Lebesgue, dunque ora possiamo ragionare in maniera analoga a quanto fatto per le componenti spaziali: l'applicazione

$$\begin{aligned} \Omega \times [0,t] &\longrightarrow \mathbb{R}^d \\ (\omega, s) &\longmapsto \langle \varphi, g_\lambda(X_n(\omega,s), \Lambda_n(\omega,s)) \rangle \end{aligned}$$

è $\mathscr{F}_t \otimes \mathscr{B}([0,t])$-misurabile, dunque, per il teorema di Fubini-Tonelli, l'applicazione

$$\begin{aligned} \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto \frac{1}{\theta} \int_0^t e^{\frac{s-t}{\theta}} \Big\langle \varphi, g_\lambda(X_n(s), \Lambda_n(s)) \Big\rangle\, \mathrm{d}s \end{aligned}$$

è $\mathscr{F}_t$-misurabile. Pertanto concludiamo che anche $\langle \varphi, \Lambda_{n+1}(t) \rangle$ è $\mathscr{F}_t$-misurabile e dall'arbitrarietà di φ segue che lo stesso vale per $\Lambda_{n+1}(t)$. Abbiamo dunque mostrato che anche il processo Λ_{n+1} è adattato e questo completa la dimostrazione. $\square$

Osservazione 1. Osserviamo che per ogni $n = 0, 1, 2, \dots$ e ogni $t \in [0, T]$ si ha $\Lambda_n(t) \in (\mathcal{P}(U))^N$. Infatti, per ipotesi, $\Lambda_0(t) \equiv \Lambda_0 \in (\mathcal{P}(U))^N$; inoltre, se $\Lambda_n(t) \in (\mathcal{P}(U))^N$ per ogni $t \in [0, T]$, ciò è vero anche per $\Lambda_{n+1}(t)$, infatti, poiché g_λ assume valori in $(\mathcal{P}(U))^N$, si ha

$$g_\lambda(X_n(s), \Lambda_n(s)) \in (\mathcal{P}(U))^N, \quad \forall s \in [0, T],$$

dunque, per ogni $t \in [0, T]$ risulta

$$\frac{\displaystyle\frac{1}{\theta}\int_0^t e^{\frac{s-t}{\theta}} g_\lambda(X_n(s), \Lambda_n(s))\,\mathrm{d}s}{\displaystyle\frac{1}{\theta}\int_0^t e^{\frac{s-t}{\theta}}\,\mathrm{d}s} \in (\mathcal{P}(U))^N$$

per via della convessità di $(\mathcal{P}(U))^N$. Notando che $\frac{1}{\theta}\int_0^t e^{\frac{s-t}{\theta}}\,\mathrm{d}s = 1 - e^{-\frac{t}{\theta}}$, si ha che

$$\frac{1}{\theta}\int_0^t e^{\frac{s-t}{\theta}} g_\lambda(X_n(s), \Lambda_n(s))\,\mathrm{d}s \in (1 - e^{-\frac{t}{\theta}})(\mathcal{P}(U))^N$$

da cui, nuovamente per la convessità di $(\mathcal{P}(U))^N$, risulta

$$\Lambda_{n+1}(t) = e^{-\frac{t}{\theta}}\Lambda_0 + \frac{1}{\theta}\int_0^t e^{\frac{s-t}{\theta}} g_\lambda(X_n(s), \Lambda_n(s))\,\mathrm{d}s \in (\mathcal{P}(U))^N$$

e l'asserto segue per induzione su n.

Questo ci garantisce che, per ogni $\omega \in \Omega$ fissato, l'applicazione $t \longmapsto \Lambda_n(\omega, t)$ descrive delle traiettorie continue che rimangono confinate nel convesso $(\mathcal{P}(U))^N$, regione in cui valgono le stime di lipschitzianità (2.1.7), (2.1.8), (2.1.17) e sublinearità (2.1.10), (2.1.11), (2.1.18) dei campi b_x, b_λ e g_λ.

Introduciamo ora le stime che risulteranno fondamentali nella dimostrazione di esistenza della soluzione del problema discreto (1.2.1).

Proposizione 2.2.5. *Valgono le seguenti disuguaglianze:*

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]}\|X_1(u) - X_0\|^2_{(\mathbb{R}^d)^N}\Big] \le 6M_x^2 t^2\Big(1 + \mathbb{E}\big[\|X_0\|^2_{(\mathbb{R}^d)^N}\big] + \mathbb{E}\big[\|\Lambda_0\|^2_{(F(U))^N}\big]\Big) + 16\sigma N^2 t \tag{2.2.6a}$$

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]}\|\Lambda_1(u) - \Lambda_0\|^2_{(F(U))^N}\Big] \le \frac{6}{\theta^2}\widetilde{M}_\lambda^2 t^2\Big(1 + \mathbb{E}\big[\|X_0\|^2_{(\mathbb{R}^d)^N}\big] + \mathbb{E}\big[\|\Lambda_0\|^2_{(F(U))^N}\big]\Big) + \frac{2}{\theta^2}t^2\mathbb{E}\big[\|\Lambda_0\|^2_{(F(U))^N}\big] \tag{2.2.6b}$$

per ogni $t \in [0, T]$ *e*

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]}\|X_{n+1}(u) - X_n(u)\|^2_{(\mathbb{R}^d)^N}\Big] \le 2tL_x^2\mathbb{E}\Big[\int_0^t \big(\|X_n(s) - X_{n-1}(s)\|^2_{(\mathbb{R}^d)^N} + \|\Lambda_n(s) - \Lambda_{n-1}(s)\|^2_{(F(U))^N}\big)\,ds\Big] \tag{2.2.6c}$$

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]}\|\Lambda_{n+1}(u) - \Lambda_n(u)\|^2_{(\mathbb{R}^d)^N}\Big] \le \frac{2}{\theta^2}t\widetilde{L}_\lambda^2\mathbb{E}\Big[\int_0^t \big(\|X_n(s) - X_{n-1}(s)\|^2_{(\mathbb{R}^d)^N} + \|\Lambda_n(s) - \Lambda_{n-1}(s)\|^2_{(F(U))^N}\big)\,ds\Big] \tag{2.2.6d}$$

per ogni $n = 1, 2, \dots$ *e* $t \in [0, T]$*, in cui* $M_x, \widetilde{M}_\lambda$ *e* $L_x, \widetilde{L}_\lambda$ *indicano le costanti di sublinearità e lipschitzianità dei campi* b_x *e* g_λ *rispettivamente.*

Dimostrazione. a) Sia $t \in [0,T]$ fissato e $u \in [0,t]$. Si ha che

$$\begin{aligned}
\|X_1(u) - X_0\|^2_{(\mathbb{R}^d)^N} &= \left\| \int_0^u b_x(X_0,\Lambda_0)\,\mathrm{d}s + \sqrt{2\sigma}B(u) \right\|^2_{(\mathbb{R}^d)^N} \leq \\
&\leq \left(\left\| \int_0^u b_x(X_0,\Lambda_0)\,\mathrm{d}s \right\|_{(\mathbb{R}^d)^N} + \left\| \sqrt{2\sigma}B(u) \right\|_{(\mathbb{R}^d)^N} \right)^2 \leq \\
&\leq 2\left(\left\| \int_0^u b_x(X_0,\Lambda_0)\,\mathrm{d}s \right\|^2_{(\mathbb{R}^d)^N} + \left\| \sqrt{2\sigma}B(u) \right\|^2_{(\mathbb{R}^d)^N} \right) \leq \\
&\leq 2\left(\int_0^u \|b_x(X_0,\Lambda_0)\|_{(\mathbb{R}^d)^N}\,\mathrm{d}s \right)^2 + 2\cdot 2\sigma \left(\sum_{i=1}^N \|B^i(u)\|_{\mathbb{R}^d} \right)^2 \leq \\
&\leq 2\left(\int_0^u \|b_x(X_0,\Lambda_0)\|_{(\mathbb{R}^d)^N}\,\mathrm{d}s \right)^2 + 2\cdot 2\sigma N \sum_{i=1}^N \|B^i(u)\|^2_{\mathbb{R}^d}
\end{aligned}$$

in cui abbiamo utilizzato la disuguaglianza (A.4.2) e le proprietà dell'integrale di Lebesgue; abbiamo inoltre esplicitato $B(u) = (B^1(u), \dots, B^N(u))$, dove $B^1(u), \dots, B^N(u)$ sono i moti browniani d-dimensionali che compaiono nella formulazione (1.2.1). Dalla disuguaglianza di Hölder segue che, per ogni $u \in [0,t]$,

$$\|X_1(u) - X_0\|^2_{(\mathbb{R}^d)^N} \leq 2u \int_0^u \|b_x(X_0,\Lambda_0)\|^2_{(\mathbb{R}^d)^N}\,\mathrm{d}s + 4\sigma N \sum_{i=1}^N \|B^i(u)\|^2_{\mathbb{R}^d}.$$

Sfruttiamo ora la sublinearità di b_x su $(\mathbb{R}^d)^N \times (\mathcal{P}(U))^N$ (2.1.10) e nuovamente la disuguaglianza (A.4.2) ottenendo

$$\begin{aligned}
\|b_x(X_0,\Lambda_0)\|^2_{(\mathbb{R}^d)^N} &\leq [M_x(1 + \|X_0\|_{(\mathbb{R}^d)^N} + \|\Lambda_0\|_{(F(U))^N})]^2 \leq \\
&\leq 3M_x^2(1 + \|X_0\|^2_{(\mathbb{R}^d)^N} + \|\Lambda_0\|^2_{(F(U))^N}),
\end{aligned}$$

che combinata con la precedente disuguaglianza dà

$$\begin{aligned}
\|X_1(u) - X_0\|^2_{(\mathbb{R}^d)^N} &\leq 2u^2 \|b_x(X_0,\Lambda_0)\|^2_{(\mathbb{R}^d)^N} + 4\sigma N \sum_{i=1}^N \|B^i(u)\|^2_{\mathbb{R}^d} \\
&\leq 6u^2 M_x^2(1 + \|X_0\|^2_{(\mathbb{R}^d)^N} + \|\Lambda_0\|^2_{(F(U))^N}) + 4\sigma N \sum_{i=1}^N \|B^i(u)\|^2_{\mathbb{R}^d}.
\end{aligned}$$

Prendiamo ora l'estremo superiore di entrambi i membri sull'intervallo $[0,t]$ (che in effetti è un massimo per via della continuità di tutte le funzioni coinvolte) e successivamente prendiamo i valori attesi. Otteniamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]} \|X_1(u) - X_0\|^2_{(\mathbb{R}^d)^N} \Big] &\leq 6u^2 M_x^2 \Big(1 + \mathbb{E}\big[\|X_0\|^2_{(\mathbb{R}^d)^N}\big] + \mathbb{E}\big[\|\Lambda_0\|^2_{(F(U))^N}\big] \Big) \\
&\quad + 4\sigma N \sum_{i=1}^N \mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]} \|B^i(u)\|^2_{\mathbb{R}^d} \Big],
\end{aligned}$$

usando la disuguaglianza di Doob (A.4.4) con $p = 2$ applicata ai moti browniani d-dimensionali B^i, $i = 1, \dots, N$, otteniamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]} \|X_1(u) - X_0\|^2_{(\mathbb{R}^d)^N} \Big] &\leq 6u^2 M_x^2 \Big(1 + \mathbb{E}\big[\|X_0\|^2_{(\mathbb{R}^d)^N}\big] + \mathbb{E}\big[\|\Lambda_0\|^2_{(F(U))^N}\big] \Big) \\
&\quad + 4\sigma N \sum_{i=1}^N 4\mathbb{E}\big[\|B^i(t)\|^2_{\mathbb{R}^d}\big];
\end{aligned}$$

osserviamo ora che

$$\mathbb{E}\big[\|B^i(t)\|^2_{\mathbb{R}^d}\big] = \mathrm{Var}(B^i(t)) = t, \quad i = 1, \dots, N$$

da cui la disuguaglianza

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]} \|X_1(u) - X_0\|^2_{(\mathbb{R}^d)^N}\Big] \leq 6M_x^2 t^2 \Big(1 + \mathbb{E}\big[\|X_0\|^2_{(\mathbb{R}^d)^N}\big] + \mathbb{E}\big[\|\Lambda_0\|^2_{(F(U))^N}\big]\Big) + 16\sigma N^2 t.$$

Dall'arbitrarietà di $t \in [0, T]$ segue la (2.2.6a).

b) Sia $t \in [0, T]$ fissato e $u \in [0, t]$. Si ha che

$$\begin{aligned}
\|\Lambda_1(u) - \Lambda_0\|^2_{(F(U))^N} &= \left\| \big(e^{-\frac{u}{\theta}} - 1\big)\Lambda_0 + \int_0^u \frac{1}{\theta} e^{\frac{s-u}{\theta}} g_\lambda(X_0, \Lambda_0)\,\mathrm{d}s \right\|^2_{(F(U))^N} \leq \\
&\leq \left(\big\|\big(e^{-\frac{u}{\theta}} - 1\big)\Lambda_0\big\|_{(F(U))^N} + \left\| \int_0^u \frac{1}{\theta} e^{\frac{s-u}{\theta}} g_\lambda(X_0, \Lambda_0)\,\mathrm{d}s \right\|_{(F(U))^N} \right)^2 \leq \\
&\leq 2\left(\big\|\big(e^{-\frac{u}{\theta}} - 1\big)\Lambda_0\big\|^2_{(F(U))^N} + \left\| \int_0^u \frac{1}{\theta} e^{\frac{s-u}{\theta}} g_\lambda(X_0, \Lambda_0)\,\mathrm{d}s \right\|^2_{(F(U))^N} \right) \leq \\
&\leq 2|e^{-\frac{u}{\theta}} - 1|^2 \|\Lambda_0\|^2_{(F(U))^N} + 2\left(\int_0^u \left| \frac{1}{\theta} e^{\frac{s-u}{\theta}} \right| \|g_\lambda(X_0, \Lambda_0)\|_{(F(U))^N}\,\mathrm{d}s \right)^2
\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato la proprietà dell'integrale di Bochner (A.2.5) e la disuguaglianza (A.4.2). Osserviamo ora che

$$|e^{-\frac{u}{\theta}} - 1| = 1 - e^{-\frac{u}{\theta}} \leq \frac{u}{\theta}, \quad \forall u \in [0, t]$$

per cui

$$|e^{-\frac{u}{\theta}} - 1|^2 \leq \frac{u^2}{\theta^2}, \quad \forall u \in [0, t];$$

osserviamo inoltre che per ogni u fissato e $s \in [0, u]$ si ha

$$\left| \frac{1}{\theta} e^{\frac{s-u}{\theta}} \right| = \frac{1}{\theta} e^{\frac{s-u}{\theta}} \leq \frac{1}{\theta}.$$

Dunque abbiamo che

$$\begin{aligned}
\|\Lambda_1(u) - \Lambda_0\|^2_{(F(U))^N} &\leq 2\frac{u^2}{\theta^2} \|\Lambda_0\|^2_{(F(U))^N} + 2\frac{1}{\theta^2} \left(\int_0^u \|g_\lambda(X_0, \Lambda_0)\|_{(F(U))^N}\,\mathrm{d}s \right)^2 \leq \\
&\leq 2\frac{u^2}{\theta^2} \|\Lambda_0\|^2_{(F(U))^N} + 2\frac{1}{\theta^2} u \int_0^u \|g_\lambda(X_0, \Lambda_0)\|^2_{(F(U))^N}\,\mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

in cui abbiamo utilizzato la disuguaglianza di Hölder nell'ultimo passaggio. Utilizziamo ora la sublinearità di g_λ su $(\mathbb{R}^d)^N \times (\mathcal{P}(U))^N$ (2.1.18) e nuovamente la disuguaglianza (A.4.2) ottenendo, analogamente al punto (a),

$$\begin{aligned}
\|g_\lambda(X_0, \Lambda_0)\|^2_{(F(U))^N} &\leq [\widetilde{M}_\lambda(1 + \|X_0\|_{(\mathbb{R}^d)^N} + \|\Lambda_0\|_{(F(U))^N})]^2 \leq \\
&\leq 3\widetilde{M}_\lambda^2(1 + \|X_0\|^2_{(\mathbb{R}^d)^N} + \|\Lambda_0\|^2_{(F(U))^N}),
\end{aligned}$$

da cui

$$\|\Lambda_1(u) - \Lambda_0\|^2_{(F(U))^N} \leq 2\frac{u^2}{\theta^2} \|\Lambda_0\|^2_{(F(U))^N} + 6\frac{u^2}{\theta^2} \widetilde{M}_\lambda^2 (1 + \|X_0\|^2_{(\mathbb{R}^d)^N} + \|\Lambda_0\|^2_{(F(U))^N})$$

per ogni $u \in [0, t]$.

Analogamente a quanto fatto per la stima (2.2.6a), prendiamo l'estremo superiore sull'intervallo $[0,t]$ di entrambi i membri e successivamente ne prendiamo i valori attesi, ottenendo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]}\|\Lambda_1(u)-\Lambda_0\|^2_{(F(U))^N}\Big] &\leq \frac{6}{\theta^2}\widetilde{M}^2_\lambda t^2\Big(1+\mathbb{E}\big[\|X_0\|^2_{(\mathbb{R}^d)^N}\big]\\ &\quad+\mathbb{E}\big[\|\Lambda_0\|^2_{(F(U))^N}\big]\Big)+\frac{2}{\theta^2}t^2\mathbb{E}\big[\|\Lambda_0\|^2_{(F(U))^N}\big]\end{aligned}$$

e dall'arbitrarietà di $t\in[0,T]$ segue la disuguaglianza (2.2.6b).

c) Siano ora $t\in[0,T]$ e $n\in\mathbb{N}^+$ fissati e sia $u\in[0,t]$. Si ha che

$$\begin{aligned}&\|X_{n+1}(u)-X_n(u)\|^2_{(\mathbb{R}^d)^N}=\\ &=\Big\|X_0+\int_0^u b_x(X_n(s),\Lambda_n(s))\,\mathrm{d}s+\sqrt{2\sigma}B(t)-\\ &-\Big(X_0+\int_0^u b_x(X_{n-1}(s),\Lambda_{n-1}(s))\,\mathrm{d}s+\sqrt{2\sigma}B(t)\Big)\Big\|^2_{(\mathbb{R}^d)^N}=\\ &=\Big\|\int_0^u b_x(X_n(s),\Lambda_n(s))\,\mathrm{d}s-\int_0^u b_x(X_{n-1}(s),\Lambda_{n-1}(s))\,\mathrm{d}s\Big\|^2_{(\mathbb{R}^d)^N}=\\ &=\Big\|\int_0^u\Big(b_x(X_n(s),\Lambda_n(s))-b_x(X_{n-1}(s),\Lambda_{n-1}(s))\Big)\,\mathrm{d}s\Big\|^2_{(\mathbb{R}^d)^N}\leq\\ &\leq\Big(\int_0^u\|b_x(X_n(s),\Lambda_n(s))-b_x(X_{n-1}(s),\Lambda_{n-1}(s))\|_{(\mathbb{R}^d)^N}\,\mathrm{d}s\Big)^2.\end{aligned}$$

In virtù della lipschitzianità di b_x su $(\mathbb{R}^d)^N\times(\mathcal{P}(U))^N$ (2.1.7) si ha che, per ogni $s\in[0,u]$,

$$\begin{aligned}&\|b_x(X_n(s),\Lambda_n(s))-b_x(X_{n-1}(s),\Lambda_{n-1}(s))\|_{(\mathbb{R}^d)^N}\leq\\ &\leq L_x(\|X_n(s)-X_{n-1}(s)\|_{(\mathbb{R}^d)^N}+\|\Lambda_n(s)-\Lambda_{n-1}(s)\|_{(F(U))^N}).\end{aligned}$$

Dalla disuguaglianza di Hölder e dalla lipschitzianità di b_x si trae

$$\begin{aligned}&\|X_{n+1}(u)-X_n(u)\|^2_{(\mathbb{R}^d)^N}=\\ &\leq\Big(\int_0^u\|b_x(X_n(s),\Lambda_n(s))-b_x(X_{n-1}(s),\Lambda_{n-1}(s))\|_{(\mathbb{R}^d)^N}\,\mathrm{d}s\Big)^2\leq\\ &\leq u\int_0^u\|b_x(X_n(s),\Lambda_n(s))-b_x(X_{n-1}(s),\Lambda_{n-1}(s))\|^2_{(\mathbb{R}^d)^N}\,\mathrm{d}s\leq\\ &\leq u\int_0^u\Big(L_x\big(\|X_n(s)-X_{n-1}(s)\|_{(\mathbb{R}^d)^N}+\|\Lambda_n(s)-\Lambda_{n-1}(s)\|_{(F(U))^N}\big)\Big)^2\,\mathrm{d}s\leq\\ &\leq 2uL_x^2\int_0^u\big(\|X_n(s)-X_{n-1}(s)\|^2_{(\mathbb{R}^d)^N}+\|\Lambda_n(s)-\Lambda_{n-1}(s)\|^2_{(F(U))^N}\big)\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Prendendo ora l'estremo superiore di entrambi i membri su $[0,t]$ e successivamente i valori attesi otteniamo

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]}\|X_{n+1}(u)-X_n(u)\|^2_{(\mathbb{R}^d)^N}\Big]\leq\\ &\leq 2tL_x^2\mathbb{E}\Big[\int_0^t\big(\|X_n(s)-X_{n-1}(s)\|^2_{(\mathbb{R}^d)^N}+\|\Lambda_n(s)-\Lambda_{n-1}(s)\|^2_{(F(U))^N}\big)\,\mathrm{d}s\Big],\end{aligned}$$

dall'arbitrarietà di $t\in[0,T]$ e $n\in\mathbb{N}^+$ segue (2.2.6c).

d) Siano, come prima, $t \in [0,T]$ e $n \in \mathbb{N}^+$ fissati; sia inoltre $u \in [0,t]$. Abbiamo che

$$\begin{aligned}
&\|\Lambda_{n+1}(u) - \Lambda_n(u)\|^2_{(F(U))^N} \\
&= \Big\| e^{-\frac{u}{\theta}}\Lambda_0 + \frac{1}{\theta}\int_0^u e^{\frac{s-u}{\theta}} g_\lambda(X_n(s),\Lambda_n(s))\,\mathrm{d}s - \\
&- \Big(e^{-\frac{u}{\theta}}\Lambda_0 + \frac{1}{\theta}\int_0^u e^{\frac{s-u}{\theta}} g_\lambda(X_{n-1}(s),\Lambda_{n-1}(s))\,\mathrm{d}s\Big)\Big\|^2_{(F(U))^N} = \\
&= \Big\| \int_0^u \frac{e^{\frac{s-u}{\theta}}}{\theta} g_\lambda(X_n(s),\Lambda_n(s))\,\mathrm{d}s - \int_0^u \frac{e^{\frac{s-u}{\theta}}}{\theta} g_\lambda(X_{n-1}(s),\Lambda_{n-1}(s))\,\mathrm{d}s\Big\|^2_{(F(U))^N} = \\
&= \Big\| \int_0^u \frac{e^{\frac{s-u}{\theta}}}{\theta}\Big(g_\lambda(X_n(s),\Lambda_n(s)) - g_\lambda(X_{n-1}(s),\Lambda_{n-1}(s))\Big)\,\mathrm{d}s\Big\|^2_{(F(U))^N} \le \\
&\le \Big(\int_0^u \Big|\frac{e^{\frac{s-u}{\theta}}}{\theta}\Big| \|g_\lambda(X_n(s),\Lambda_n(s)) - g_\lambda(X_{n-1}(s),\Lambda_{n-1}(s))\|_{(F(U))^N}\,\mathrm{d}s\Big)^2
\end{aligned}$$

Ricordiamo ora che $|e^{\frac{s-u}{\theta}}| = e^{\frac{s-u}{\theta}} \le 1$ per ogni u fissato e $s \in [0,u]$, da cui

$$\Big|\frac{1}{\theta}e^{\frac{s-u}{\theta}}\Big| = \frac{1}{\theta}e^{\frac{s-u}{\theta}} \le \frac{1}{\theta}.$$

La lipschitzianità di g_λ su $(\mathbb{R}^d)^N \times (\mathcal{P}(U))^N$ (2.1.17), inoltre, ci fornisce la disuguaglianza

$$\begin{aligned}
&\|g_\lambda(X_n(s),\Lambda_n(s)) - g_\lambda(X_{n-1}(s),\Lambda_{n-1}(s))\|_{(F(U))^N} \le \\
&\le \widetilde{L}_\lambda(\|X_n(s) - X_{n-1}(s)\|_{(\mathbb{R}^d)^N} + \|\Lambda_n(s) - \Lambda_{n-1}(s)\|_{(F(U))^N}).
\end{aligned}$$

per ogni $s \in [0,u]$.

Dunque otteniamo

$$\begin{aligned}
&\|\Lambda_{n+1}(u) - \Lambda_n(u)\|^2_{(F(U))^N} \le \\
&\le \frac{1}{\theta^2}\Big(\int_0^u \|g_\lambda(X_n(s),\Lambda_n(s)) - g_\lambda(X_{n-1}(s),\Lambda_{n-1}(s))\|_{(F(U))^N}\,\mathrm{d}s\Big)^2 \le \\
&\le \frac{u}{\theta^2}\int_0^u \|g_\lambda(X_n(s),\Lambda_n(s)) - g_\lambda(X_{n-1}(s),\Lambda_{n-1}(s))\|^2_{(F(U))^N}\,\mathrm{d}s \le \\
&\le 2\frac{u}{\theta^2}\widetilde{L}^2_\lambda \int_0^u \big(\|X_n(s) - X_{n-1}(s)\|^2_{(\mathbb{R}^d)^N} + \|\Lambda_n(s) - \Lambda_{n-1}(s)\|^2_{(F(U))^N}\big)\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Prendiamo ora l'estremo superiore di entrambi i membri su $[0,t]$ e successivamente prendiamo i valori attesi, ottenendo

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]} \|\Lambda_{n+1}(u) - \Lambda_n(u)\|^2_{(\mathbb{R}^d)^N}\Big] \le \\
&\le \frac{2}{\theta^2}t\widetilde{L}^2_\lambda \mathbb{E}\Big[\int_0^t \big(\|X_n(s) - X_{n-1}(s)\|^2_{(\mathbb{R}^d)^N} + \|\Lambda_n(s) - \Lambda_{n-1}(s)\|^2_{(F(U))^N}\big)\,\mathrm{d}s\Big]
\end{aligned}$$

dall'arbitrarietà di $t \in [0,T]$ e $n \in \mathbb{N}^+$ segue (2.2.6d). □

Osservazione 2. Osserviamo che, in virtù del teorema di Tonelli, possiamo scambiare l'integrale su $[0,t]$ con il valore atteso in (2.2.6c) e (2.2.6d) per via della positività degli integrandi. Per cui possiamo equivalentemente scrivere

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]} \|X_{n+1}(u) - X_n(u)\|^2_{(\mathbb{R}^d)^N}\Big] \le \\
&\le 2tL_x^2 \int_0^t \Big(\mathbb{E}\big[\|X_n(s) - X_{n-1}(s)\|^2_{(\mathbb{R}^d)^N}\big] + \mathbb{E}\big[\|\Lambda_n(s) - \Lambda_{n-1}(s)\|^2_{(F(U))^N}\big]\Big)\,\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]}\|\Lambda_{n+1}(u)-\Lambda_n(u)\|^2_{(\mathbb{R}^d)^N}\Big]\leq\\
&\leq\frac{2}{\theta^2}t\widetilde{L}_\lambda^2\int_0^t\Big(\mathbb{E}\big[\|X_n(s)-X_{n-1}(s)\|^2_{(\mathbb{R}^d)^N}\big]+\mathbb{E}\big[\|\Lambda_n(s)-\Lambda_{n-1}(s)\|^2_{(F(U))^N}\big]\Big)\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Osservazione 3. Osserviamo inoltre che, per via delle ipotesi fatte sul dato iniziale $X_0\in L^2(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$, la quantità $\mathbb{E}[\|X_0\|^2_{(\mathbb{R}^d)^N}]$ a secondo membro della (2.2.6a) e della (2.2.6b) è finita. La finitezza della quantità $\mathbb{E}[\|\Lambda_0\|^2_{(F(U))^N}]$ è invece garantita dalla limitatezza dell'insieme $\mathcal{P}(U)$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_{\mathrm{BL}}$. Infatti, per via della proposizione 1.3.17, sappiamo che $\mathcal{P}(U)$ è un sottoinsieme compatto dello spazio di Banach $(F(U),\|\cdot\|_{\mathrm{BL}})$ ed è pertanto limitato. Da ciò segue la limitatezza di $(\mathcal{P}(U))^N\subset(F(U))^N$ rispetto alla norma prodotto $\|\cdot\|_{(F(U))^N}$.

Introduciamo ora la successione di processi stocastici continui $\{Y_n\}_{n=0}^\infty$. Ciascuno di questi processi è definito da

$$Y_n(t):=\big(X_n^1(t),\Lambda_n^1(t),\dots,X_n^N(t),\Lambda_n^N(t)\big)\in(\mathbb{R}^d\times\mathcal{P}(U))^N \tag{2.2.7}$$

per ogni $t\in[0,T]$, in cui i processi $\{X_n^i\}_{i=0}^N$, $\{\Lambda_n^i\}_{i=0}^N$ sono, per ogni $n=0,1,2\dots$, le componenti dei processi X_n e Λ_n definiti mediante le iterate (2.2.1). Nel seguito costruiremo una soluzione del problema (2.0.4) come limite uniforme dei processi $\{Y_n\}_{n=0}^\infty$.

Proposizione 2.2.8. *Sia $\{Y_n\}_{n=0}^\infty$ la successione di processi stocastici continui e a valori in $(\mathbb{R}^d\times\mathcal{P}(U))^N$ definita dalla (2.2.7). Allora vale*

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]}\|Y_n(u)-Y_{n-1}(u)\|^2_{(\mathbb{R}^d\times F(U))^N}\Big]\leq\frac{(\mathcal{R}t)^n}{n!} \tag{2.2.9}$$

per ogni $n=1,2,\dots$ e per ogni $t\in[0,T]$. La costante $\mathcal{R}$ a secondo membro è un numero positivo dipendente da θ,σ,N,T, dalle costanti di sublinearità $M_x,\widetilde{M}_\lambda$ e di lipschitzianità $L_x,\widetilde{L}_\lambda$ rispettivamente dei campi b_x e g_λ e dai momenti secondi dei dati iniziali, ma non da n.

Dimostrazione. Procediamo per induzione su n. Mostriamo dapprima l'asserto per $n=1$: dalle disuguaglianze (2.2.6a) e (2.2.6b) si ha che

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]}\|Y_1(u)-Y_0\|^2_{(\mathbb{R}^d\times F(U))^N}\Big]=\\
&=\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]}\big(\|X_1(u)-X_0\|_{(\mathbb{R}^d)^N}+\|\Lambda_1(u)-\Lambda_0\|_{(F(U))^N}\big)^2\Big]\leq\\
&\leq 2\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]}\|X_1(u)-X_0\|^2_{(\mathbb{R}^d)^N}\Big]+2\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]}\|\Lambda_1(u)-\Lambda_0\|^2_{(F(U))^N}\Big]\leq\\
&\leq 12M_x^2t^2\Big(1+\mathbb{E}\big[\|X_0\|^2_{(\mathbb{R}^d)^N}\big]+\mathbb{E}\big[\|\Lambda_0\|^2_{(F(U))^N}\big]\Big)+32\sigma N^2t+\\
&+\frac{12}{\theta^2}\widetilde{M}_\lambda^2t^2\Big(1+\mathbb{E}\big[\|X_0\|^2_{(\mathbb{R}^d)^N}\big]+\mathbb{E}\big[\|\Lambda_0\|^2_{(F(U))^N}\big]\Big)+\frac{4}{\theta^2}t^2\mathbb{E}\big[\|\Lambda_0\|^2_{(F(U))^N}\big]\leq\\
&\leq\left(12M_x^2T+\frac{12}{\theta^2}\widetilde{M}_\lambda^2T\right)\Big(1+\mathbb{E}\big[\|X_0\|^2_{(\mathbb{R}^d)^N}\big]+\mathbb{E}\big[\|\Lambda_0\|^2_{(F(U))^N}\big]\Big)t\\
&+\frac{4}{\theta^2}T\mathbb{E}\big[\|\Lambda_0\|^2_{(F(U))^N}\big]t+32\sigma N^2t=:\mathcal{R}t,
\end{aligned}$$

dove nell'ultima disuguaglianza abbiamo maggiorato alcune delle t con T. Dunque otteniamo, come voluto,

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]}\|Y_1(u)-Y_0(u)\|^2_{(\mathbb{R}^d\times F(U))^N}\Big]\leq\mathcal{R}t,\quad\forall t\in[0,T],$$

dove $\mathcal{R}$ è una costante positiva che dipende da $\theta,\sigma,N,T,M_x,\widetilde{M}_\lambda$ e dai momenti secondi dei dati iniziali.

Sia ora $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, arbitrario e fissato. Supponiamo l'asserto vero per n e mostriamo che esso è vero per $n+1$. Vale

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]}\|Y_{n+1}(u)-Y_n(u)\|^2_{(\mathbb{R}^d\times F(U))^N}\Big] \leq \\
&\leq 2\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]}\|X_{n+1}(u)-X_n(u)\|^2_{(\mathbb{R}^d)^N}\Big] + 2\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]}\|\Lambda_{n+1}(u)-\Lambda_n(u)\|^2_{(F(U))^N}\Big] \leq \\
&\leq 4tL_x^2\mathbb{E}\Big[\int_0^t \big(\|X_n(s)-X_{n-1}(s)\|^2_{(\mathbb{R}^d)^N} + \|\Lambda_n(s)-\Lambda_{n-1}(s)\|^2_{(F(U))^N}\big)\,\mathrm{d}s\Big] + \\
&+ \frac{4}{\theta^2}t\widetilde{L}_\lambda^2\mathbb{E}\Big[\int_0^t \big(\|X_n(s)-X_{n-1}(s)\|^2_{(\mathbb{R}^d)^N} + \|\Lambda_n(s)-\Lambda_{n-1}(s)\|^2_{(F(U))^N}\big)\,\mathrm{d}s\Big] \leq \\
&\leq \Big(4TL_x^2 + \frac{4}{\theta^2}T\widetilde{L}_\lambda^2\Big)\mathbb{E}\Big[\int_0^t \big(\|X_n(s)-X_{n-1}(s)\|^2_{(\mathbb{R}^d)^N} + \|\Lambda_n(s)-\Lambda_{n-1}(s)\|^2_{(F(U))^N}\big)\,\mathrm{d}s\Big]
\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato le stime (2.2.6c) e (2.2.6d) e abbiamo nuovamente maggiorato alcune delle t con T. Osserviamo ora che $\forall s \in [0,t]$ si ha che

$$\|X_n(s)-X_{n-1}(s)\|^2_{(\mathbb{R}^d)^N} + \|\Lambda_n(s)-\Lambda_{n-1}(s)\|^2_{(F(U))^N} \leq 2\|Y_n(s)-Y_{n-1}(s)\|^2_{(\mathbb{R}^d\times F(U))^N}$$

in quanto, se $y=(x_1,\lambda_1,\dots,x_N,\lambda_N)$, $x=(x_1,\dots,x_N)$, $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_N)$, allora $\|x\|_{(\mathbb{R}^d)^N} \leq \|y\|_{(\mathbb{R}^d\times F(U))^N}$ e $\|\lambda\|_{(F(U))^N} \leq \|y\|_{(\mathbb{R}^d\times F(U))^N}$. In conseguenza di ciò, e ricordando che possiamo scambiare valori attesi e integrali in tempo, come notato in precedenza, si ottiene

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]}\|Y_{n+1}(u)-Y_n(u)\|^2_{(\mathbb{R}^d\times F(U))^N}\Big] \leq \\
&\leq 2\cdot\Big(4TL_x^2 + \frac{4}{\theta^2}T\widetilde{L}_\lambda^2\Big)\int_0^t \mathbb{E}\big[\|Y_n(s)-Y_{n-1}(s)\|^2_{(\mathbb{R}^d\times F(U))^N}\big]\,\mathrm{d}s \leq \\
&\leq 8T\Big(L_x^2 + \frac{\widetilde{L}_\lambda^2}{\theta^2}\Big)\int_0^t \mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,s]}\|Y_n(u)-Y_{n-1}(u)\|^2_{(\mathbb{R}^d\times F(U))^N}\Big]\,\mathrm{d}s \overset{\text{ipotesi induttiva}}{\leq} \\
&\leq 8T\Big(L_x^2 + \frac{\widetilde{L}_\lambda^2}{\theta^2}\Big)\int_0^t \frac{(\mathcal{R}s)^n}{n!}\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Ridefinendo eventualmente $\mathcal{R}$ come $\max\{8T\big(L_x^2+\frac{\widetilde{L}_\lambda^2}{\theta^2}\big),\mathcal{R}\}$ in tutte le argomentazioni precedenti si ha

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]}\|Y_{n+1}(u)-Y_n(u)\|^2_{(\mathbb{R}^d\times F(U))^N}\Big] \leq \\
&\leq 8T\Big(L_x^2 + \frac{\widetilde{L}_\lambda^2}{\theta^2}\Big)\int_0^t \frac{(\mathcal{R}s)^n}{n!}\,\mathrm{d}s \leq \mathcal{R}\int_0^t \frac{(\mathcal{R}s)^n}{n!}\,\mathrm{d}s = \frac{(\mathcal{R}t)^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

per ogni $t \in [0,T]$. Osserviamo che il valore della costante $\mathcal{R}$ è influenzato dai valori delle costanti $\theta,\sigma,N,T,M_x,\widetilde{M}_\lambda,L_x,\widetilde{L}_\lambda$ e dai momenti secondi dei dati iniziali, ma non dipende in alcun modo da n. Dunque per induzione segue la tesi. □

Osservazione 4. Riscalando gli indici e ponendo $t=T$ nella disuguaglianza (2.2.9) otteniamo

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[0,T]}\|Y_{n+1}(t)-Y_n(t)\|^2_{(\mathbb{R}^d\times F(U))^N}\Big] \leq \frac{(\mathcal{R}T)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad n=0,1,2,\dots$$

Nel seguito costruiremo una soluzione del problema (2.0.4) come limite uniforme dei processi $\{Y_n\}_{n=0}^\infty$. A tale scopo considereremo lo spazio vettoriale di funzioni continue $C([0,T],(\mathbb{R}^d\times F(U))^N)$ dotato della norma uniforme

$$\|f\|_\infty := \max_{t\in[0,T]}\|f(t)\|_{(\mathbb{R}^d\times F(U))^N}, \quad \forall f\in C([0,T],(\mathbb{R}^d\times F(U))^N).$$

Questa norma lo rende uno spazio di Banach in quanto, come enunciato nella proposizione 1.3.19, $((\mathbb{R}^d \times F(U))^N, \|\cdot\|_{(\mathbb{R}^d\times F(U))^N})$ è uno spazio di Banach. Di particolare importanza risulta il fatto che il sottoinsieme $C([0,T],(\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))^N)$, a cui appartengono le traiettorie dei processi stocastici Y_n, è chiuso in $(C([0,T],(\mathbb{R}^d \times F(U))^N),\|\cdot\|_\infty)$; la chiusura di tale sottoinsieme è conseguenza della chiusura di $\mathcal{P}(U)$ in $(F(U),\|\cdot\|_{\mathrm{BL}})$, la quale a sua volta segue dalla compattezza di $\mathcal{P}(U)$ in tale spazio di Banach (proposizione 1.3.17).

Proposizione 2.2.10. *Per quasi ogni $\omega \in \Omega$ la successione*

$$\{Y_n(\omega)\}_{n=0}^\infty \subseteq C([0,T],(\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))^N)$$

è di Cauchy in $(C([0,T],(\mathbb{R}^d \times F(U))^N),\|\cdot\|_\infty)$.

Dimostrazione. Utilizzando la disuguaglianza (2.2.9), oggetto della precedente proposizione, e la disuguaglianza di Markov (A.4.6) (applicata con $\delta = \frac{1}{2^n}$ e $\beta = 2$) otteniamo

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,T]}\|Y_{n+1}(t)-Y_n(t)\|_{(\mathbb{R}^d\times F(U))^N} > \frac{1}{2^n}\right) \le \\
&\le 2^{2n}\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\|Y_{n+1}(t)-Y_n(t)\|^2_{(\mathbb{R}^d\times F(U))^N}\right] \le \\
&\le 4^n\frac{(\mathcal{R}T)^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned} \tag{2.2.11}$$

per ogni $n = 0,1,2,\ldots$

Osserviamo ora che la successione all'ultimo membro della (2.2.11) è sommabile: ciò si può mostrare, ad esempio, notando che

$$a_n := \frac{4^n(\mathcal{R}T)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{4}\frac{(4\mathcal{R}T)^{n+1}}{(n+1)!}$$

è il termine generico di una serie esponenziale, per cui otteniamo

$$\sum_{n=0}^\infty a_n = \sum_{n=0}^\infty \frac{4^n(\mathcal{R}T)^{n+1}}{(n+1)!} < \infty.$$

Pertanto, applicando il lemma di Borel-Cantelli deduciamo che

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\limsup_n\left\{\sup_{t\in[0,T]}\|Y_{n+1}(t)-Y_n(t)\|_{(\mathbb{R}^d\times F(U))^N} > \frac{1}{2^n}\right\}\right) = \\
&= \mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,T]}\|Y_{n+1}(t)-Y_n(t)\|_{(\mathbb{R}^d\times F(U))^N} > \frac{1}{2^n} \text{ per infiniti indici } n\right) = 0,
\end{aligned}$$

Abbiamo dunque individuato un insieme $\mathcal{Z} \in \mathscr{F}$ trascurabile tale che, per ogni $\omega \in \mathcal{Z}^c$ fissato, risulta

$$\sup_{t\in[0,T]}\|Y_{n+1}(\omega,t)-Y_n(\omega,t)\|_{(\mathbb{R}^d\times F(U))^N} \le \frac{1}{2^n} \quad \text{definitivamente.}$$

Mostriamo ora che per ogni $\omega \in \mathcal{Z}^c$ (che è il complementare di un insieme $\mathbb{P}$-trascurabile) la successione di funzioni continue $\{Y_n(\omega)\}_{n=0}^\infty$ è di Cauchy nello spazio di Banach $(C([0,T],(\mathbb{R}^d \times F(U))^N),\|\cdot\|_\infty)$.

Iniziamo con un artificio: scriviamo, per ogni $n = 0,1,2,\ldots$, la funzione $Y_n(\omega)$ come una somma telescopica

$$Y_n(\omega) = Y_0(\omega) + \sum_{k=0}^{n-1}\big(Y_{k+1}(\omega) - Y_k(\omega)\big).$$

Siano ora $m, n \in \mathbb{N}$ con $m > n$, allora

$$Y_m(\omega, t) - Y_n(\omega, t) = \sum_{k=n}^{m-1} \big(Y_{k+1}(\omega, t) - Y_k(\omega, t)\big)$$

per ogni $t \in [0, T]$. Pertanto vale

$$\begin{aligned} &\sup_{t\in[0,T]} \|Y_m(\omega, t) - Y_n(\omega, t)\|_{(\mathbb{R}^d \times F(U))^N} \leq \\ &\leq \sum_{k=n}^{m-1} \left(\sup_{t\in[0,T]} \|Y_{k+1}(\omega, t) - Y_k(\omega, t)\|_{(\mathbb{R}^d \times F(U))^N} \right) \leq \\ &\leq \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{2^k} \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} \end{aligned} \tag{2.2.12}$$

per ogni n sufficientemente grande da garantire che $\sup_{t\in[0,T]} \|Y_{n+1}(\omega, t) - Y_n(\omega, t)\|_{(\mathbb{R}^d \times F(U))^N} \leq \frac{1}{2^n}$ per tutti i $k \geq n$.

Poiché nell'ultimo membro della (2.2.12) compare il resto di una serie geometrica di ragione < 1, dunque convergente, concludiamo che

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad : \quad \sup_{t\in[0,T]} \|Y_m(\omega, t) - Y_n(\omega, t)\|_{(\mathbb{R}^d \times F(U))^N} < \varepsilon$$

per ogni $m > n \geq \nu_\varepsilon$. Dunque la successione $\{Y_n(\omega)\}_{n=0}^\infty$ è di Cauchy rispetto alla norma $\|\cdot\|_\infty$, come voluto. □

Grazie alla precedente proposizione 2.2.10 possiamo definire il processo stocastico

$$Y : \Omega \longrightarrow C([0, T], (\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))^N)$$

come

$$Y(\omega, t) := \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} Y_n(\omega, t), & \omega \in \mathscr{Z}^c \\ \tilde{y}, & \omega \in \mathscr{Z} \end{cases} \tag{2.2.13}$$

per ogni $t \in [0, T]$, dove il limite che compare nella prima condizione è da intendersi come il limite uniforme della successione $\{Y_n(\omega)\}_{n=0}^\infty$ in $(C([0, T], (\mathbb{R}^d \times F(U))^N), \|\cdot\|_\infty)$ e $\tilde{y}$ è un elemento arbitrario di $(\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))^N$.

Proposizione 2.2.14. *Il processo stocastico Y definito dalla (2.2.13) è continuo e adattato alla filtrazione $(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$.*

Dimostrazione. Dimostriamo dapprima la continuità di Y. Sia $\omega \in \Omega$ fissato e consideriamo l'applicazione

$$\begin{aligned} [0, T] &\longrightarrow (\mathbb{R}^d \times F(U))^N \\ t &\longmapsto Y(\omega, t). \end{aligned}$$

Possono verificarsi due casistiche: se $\omega \in \mathscr{Z}$ si ha che $t \longmapsto Y(\omega, t)$ è l'applicazione costante uguale a $\tilde{y}$, dunque continua; se invece $\omega \in \mathscr{Z}^c$ allora $Y(\omega, t) = \lim_{n\to\infty} Y_n(\omega, t)$. Dalla proposizione (2.2.3) sappiamo che i processi Y_n sono continui, dunque l'applicazione $t \longmapsto Y(\omega, t)$ è limite uniforme di funzioni continue, per cui è a sua volta continua. Risulta dunque provata la continuità delle traiettorie di Y, come voluto.

Mostriamo ora che Y è adattato alla filtrazione $(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$, ovvero che per ogni $t \in [0, T]$ la variabile aleatoria $Y(t)$ (a valori in $(\mathbb{R}^d \times F(U))^N$) risulta $\mathscr{F}_t$-misurabile. Sia dunque $t \in [0, T]$ fissato. Osserviamo che se definiamo, per ogni $n = 0, 1, 2, \ldots$, la variabile aleatoria $\widetilde{Y}_n(t) \colon \Omega \longrightarrow (\mathbb{R}^d \times F(U))^N$ come

$$\widetilde{Y}_n(\omega, t) := \begin{cases} Y_n(\omega, t), & \omega \in \mathscr{Z}^c \\ \tilde{y}, & \omega \in \mathscr{Z} \end{cases}$$

possiamo scrivere che $Y(t) = \lim_{n\to\infty} \widetilde{Y}_n(t)$ puntualmente. Dalla proposizione 2.2.3 sappiamo che i processi Y_n sono adattati, dunque, per ogni $n = 0, 1, 2, \ldots$, le variabili aleatorie $Y_n(t)$ sono $\mathscr{F}_t$-misurabili. Notiamo ora che la filtrazione $(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$ è per ipotesi standard, dunque $\mathscr{F}_t$ contiene tutti gli insiemi $\mathbb{P}$-trascurabili di $\mathscr{F}$, fra cui $\mathcal{Z}$. Pertanto le variabili aleatorie $\widetilde{Y}_n(t)$ risultano $\mathscr{F}_t$-misurabili in quanto esse sono ottenute modificando sull'insieme $\mathcal{Z} \in \mathscr{F}_t$ le variabili aleatorie $\mathscr{F}_t$-misurabili $Y_n(t)$ tramite l'assegnazione di un valore costante. Dunque concludiamo che $Y(t)$ è limite puntuale di una successione di variabili aleatorie $\mathscr{F}_t$-misurabili. Poiché le variabili aleatorie $\widetilde{Y}_n(t)$ assumono valori nello spazio di Banach separabile $(\mathbb{R}^d \times F(U))^N$, per la seconda parte del teorema A.1.4 concludiamo che anche $Y(t)$ è $\mathscr{F}_t$-misurabile. Dall'arbitrarietà di $t \in [0, T]$ segue la tesi. □

Osservazione 5. Osserviamo che Y assume effettivamente valori nel convesso $(\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))^N$; infatti, per costruzione, per ogni $t \in [0, T]$ e $n \in \mathbb{N}$ si ha che $Y_n(t) \in (\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))^N$. La chiusura di $\mathcal{P}(U)$ rispetto alla norma BL ci garantisce che, passando al limite, $Y(t) \in (\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))^N$.

Nel seguito mostreremo che il processo continuo Y è una soluzione forte del problema (1.2.1). Analogamente a quanto fatto in precedenza, scriviamo Y come

$$Y(t) = (X^1(t), \Lambda^1(t), \ldots, X^N(t), \Lambda^N(t)), \quad \forall t \in [0, T]$$

e introduciamo i processi X e Λ, a valori in $(\mathbb{R}^d)^N$ e $(\mathcal{P}(U))^N$ rispettivamente, dati da

$$X(t) = (X^1(t), \ldots, X^N(t)), \quad \Lambda(t) = (\Lambda^1(t), \ldots, \Lambda^N(t)), \quad \forall t \in [0, T].$$

Per costruzione, si ha che $\forall \omega \in \mathcal{Z}^c$ le successioni di funzioni continue $\{X_n(\omega)\}_{n=0}^\infty$ e $\{\Lambda_n(\omega)\}_{n=0}^\infty$ convergono uniformemente a $X(\omega)$ e $\Lambda(\omega)$ rispettivamente.

Facciamo ora tendere $n \to \infty$ e passiamo al limite nella definizione delle iterate (2.2.1). Osserviamo innanzitutto che, per la lipschitzianità di b_x (2.1.7) e g_λ (2.1.17) su $(\mathbb{R}^d)^N \times (\mathcal{P}(U))^N$, si hanno le disuguaglianze

$$\sup_{t\in[0,T]} \|b_x(X_n(t), \Lambda_n(t)) - b_x(X(t), \Lambda(t))\|_{(\mathbb{R}^d)^N} \leq L_x \sup_{t\in[0,T]} \|Y_n(t) - Y(t))\|_{(\mathbb{R}^d \times F(U))^N}$$

e

$$\sup_{t\in[0,T]} \|g_\lambda(X_n(t), \Lambda_n(t)) - g_\lambda(X(t), \Lambda(t))\|_{(F(U))^N} \leq \widetilde{L}_\lambda \sup_{t\in[0,T]} \|Y_n(t) - Y(t))\|_{(\mathbb{R}^d \times F(U))^N}.$$

Poiché per ogni $\omega \in \mathcal{Z}^c$ si ha che $\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} \|Y_n(t) - Y(t))\|_{(\mathbb{R}^d \times F(U))^N} = 0$ deduciamo che le due successioni di funzioni continue

$$\begin{aligned} t \in [0, T] &\longmapsto b_x(X_n(\omega, t), \Lambda_n(\omega, t)) \in (\mathbb{R}^d)^N \\ t \in [0, T] &\longmapsto g_\lambda(X_n(\omega, t), \Lambda_n(\omega, t)) \in (\mathcal{P}(U))^N \end{aligned} \qquad n = 0, 1, 2. \ldots$$

convergono uniformemente alle funzioni

$$\begin{aligned} t \in [0, T] &\longmapsto b_x(X(\omega, t), \Lambda(\omega, t)) \in (\mathbb{R}^d)^N \\ t \in [0, T] &\longmapsto g_\lambda(X(\omega, t), \Lambda(\omega, t)) \in (\mathcal{P}(U))^N \end{aligned}$$

rispettivamente, e queste ultime risultano a loro volta continue. La convergenza uniforme di tali successioni di funzioni ci permette di concludere che su $\mathcal{Z}^c$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t b_x(X_n(s), \Lambda_n(s))\, \mathrm{d}s = \int_0^t b_x(X(s), \Lambda(s))\, \mathrm{d}s$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\theta} \int_0^t e^{\frac{s-t}{\theta}} g_\lambda(X_n(s), \Lambda_n(s))\, \mathrm{d}s = \frac{1}{\theta} \int_0^t e^{\frac{s-t}{\theta}} g_\lambda(X(s), \Lambda(s))\, \mathrm{d}s.$$

Pertanto otteniamo che quasi certamente su Ω vale

$$\begin{cases} X(t) = X_0 + \displaystyle\int_0^t b_x(X(s), \Lambda(s))\,\mathrm{d}s + \sqrt{2\sigma}B(t) \\ \Lambda(t) = e^{-\frac{t}{\theta}}\Lambda_0 + \dfrac{1}{\theta}\displaystyle\int_0^t e^{\frac{s-t}{\theta}} g_\lambda(X(s), \Lambda(s))\,\mathrm{d}s \end{cases} \tag{2.2.15}$$

per ogni $t \in [0, T]$.

Osserviamo che dall'uguaglianza (2.2.15) non è immediato concludere che il processo Y (qui espresso tramite i processi X e Λ) risolve il problema originario (2.0.4), cioè il problema formulato mediante i campi b_x e b_λ. Per concludere la dimostrazione di esistenza è necessario dimostrare la seguente

Proposizione 2.2.16. *Il processo stocastico continuo Y soddisfa, quasi certamente,*

$$\begin{cases} X(t) = X_0 + \displaystyle\int_0^t b_x(X(s), \Lambda(s))\,\mathrm{d}s + \sqrt{2\sigma}B(t) \\ \Lambda(t) = \Lambda_0 + \displaystyle\int_0^t b_\lambda(X(s), \Lambda(s))\,\mathrm{d}s \end{cases} \tag{2.2.17}$$

per ogni $t \in [0, T]$.

Dimostrazione. Sia $\omega \in \mathcal{Z}^c$ fissato; definiamo, per ogni $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} x(t) &:= X(\omega, t) = X_0(\omega) + \int_0^t b_x(X(\omega, s), \Lambda(\omega, s))\,\mathrm{d}s + \sqrt{2\sigma}B(\omega, t) \in (\mathbb{R}^d)^N \\ \lambda(t) &:= \Lambda(\omega, t) = e^{-\frac{t}{\theta}}\Lambda_0(\omega) + \frac{1}{\theta}\int_0^t e^{\frac{s-t}{\theta}} g_\lambda(X(\omega, s), \Lambda(\omega, s))\,\mathrm{d}s \in (\mathcal{P}(U))^N \\ \tilde{\lambda}(t) &:= \Lambda_0(\omega) + \int_0^t b_\lambda(X(\omega, s), \Lambda(\omega, s))\,\mathrm{d}s \in (\mathcal{P}(U))^N \end{aligned}$$

vogliamo mostrare che $\lambda(t) = \tilde{\lambda}(t)$, $\forall t \in [0, T]$, uguaglianza da cui segue la tesi. Osserviamo che entrambe le funzioni λ e $\tilde{\lambda}$ sono di classe C^1 rispetto alla norma $\|\cdot\|_{(F(U))^N}$ sull'intervallo $[0, T]$, mentre x è di classe C^0.

Definiamo ora la funzione

$$\begin{aligned} h\colon [0, T] &\longrightarrow (F(U))^N \\ t &\longmapsto h(t) := \lambda(t) - \tilde{\lambda}(t) \end{aligned}$$

e mostriamo che $h(t) = 0$, per ogni $t \in [0, T]$. Iniziamo calcolando la derivata prima di h; per ogni $t \in [0, T]$ vale $h'(t) = \lambda'(t) - \tilde{\lambda}'(t)$ e si ha

$$\begin{aligned} \lambda'(t) &= \frac{d}{dt}\left(e^{-\frac{t}{\theta}}\lambda(0) + \frac{1}{\theta}e^{-\frac{t}{\theta}}\int_0^t e^{\frac{s}{\theta}} g_\lambda(x(s), \lambda(s))\,\mathrm{d}s\right) = \\ &= -\frac{1}{\theta}e^{-\frac{t}{\theta}}\lambda(0) - \frac{1}{\theta^2}e^{-\frac{t}{\theta}}\int_0^t e^{\frac{s}{\theta}} g_\lambda(x(s), \lambda(s))\,\mathrm{d}s + \frac{1}{\theta}e^{-\frac{t}{\theta}}e^{\frac{t}{\theta}} g_\lambda(x(t), \lambda(t)) = \\ &= -\frac{1}{\theta}\left(e^{-\frac{t}{\theta}}\lambda(0) + \frac{1}{\theta}\int_0^t e^{\frac{s-t}{\theta}} g_\lambda(x(s), \lambda(s))\,\mathrm{d}s\right) + \frac{1}{\theta} g_\lambda(x(t), \lambda(t)). \end{aligned}$$

Ricordando ora la definizione di $\lambda(t)$ e la definizione (2.1.15) del campo g_λ si ottiene

$$\lambda'(t) = -\frac{1}{\theta}\lambda(t) + \frac{1}{\theta}\Big(\lambda(t) + \theta b_\lambda(x(t), \lambda(t))\Big) = b_\lambda(x(t), \lambda(t))$$

per ogni $t \in [0, T]$.

Derivando ora $\tilde{\lambda}$ si trae

$$\tilde{\lambda}'(t) = \frac{d}{dt}\left(\lambda(0) + \int_0^t b_\lambda(x(s), \lambda(s))\,\mathrm{d}s\right) = b_\lambda(x(t), \lambda(t))$$

per ogni $t \in [0, T]$.

Concludiamo dunque che $\forall t \in [0, T]$ si ha $h'(t) = 0$, da cui $h(t) = c$, con $c \in (F(U))^N$ costante opportuna. Osservando ora che per $t = 0$

$$h(0) = \lambda(0) - \tilde{\lambda}(0) = 0 \quad \text{si ha} \quad c = 0,$$

dunque $h(t) = 0$ $\forall t \in [0, T]$, come voluto. □

Risulta dunque dimostrata l'esistenza di una soluzione forte del problema (2.0.4).

2.3 Unicità della soluzione

Affrontiamo ora il problema dell'unicità della soluzione. Ciò che intendiamo mostrare è l'unicità *per cammini* delle soluzioni, nel senso espresso dalla seguente definizione.

Definizione 2.3.1 (Unicità delle soluzioni)**.** *Diciamo che vi è unicità della soluzione del problema (1.2.1) (o, equivalentemente, del problema (2.0.4)) se, date due soluzioni forti Y_1, Y_2 definite sul medesimo spazio di probabilità filtrato $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathbb{P})$ e relative ai medesimi moti browniani $B^1, \dots, B^N$, si ha che*

$$\mathbb{P}\Big(Y_1(t) = Y_2(t), \text{ per ogni } t \in [0, T]\Big) = 1 \tag{2.3.2}$$

Nelle argomentazioni che seguono faremo più volte uso del *lemma di Grönwall* A.4.7.

2.3.1 Una stima a priori

Prima di procedere alla dimostrazione dell'unicità delle soluzioni dimostreremo la validità di una stima a priori sui momenti di ordine p, con $p \geq 2$, delle soluzioni. Questa stima ci permetterà di portare a compimento la dimostrazione di unicità oltre ad essere di interesse di per sé.

Proposizione 2.3.3. *Sia Y una soluzione forte di*

$$\begin{cases} X(t) = X_0 + \displaystyle\int_0^t b_x(X(s), \Lambda(s))\,\mathrm{d}s + \sqrt{2\sigma}B(t) \\ \Lambda(t) = \Lambda_0 + \displaystyle\int_0^t b_\lambda(X(s), \Lambda(s))\,\mathrm{d}s \end{cases}$$

per ogni $t \in [0, T]$ (con il consueto significato dei processi X e Λ) e sia X_0 una variabile aleatoria in $L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ con $p \geq 2$. Allora vale la stima

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[0,T]} \|Y(t)\|^p_{(\mathbb{R}^d\times F(U))^N}\Big] \leq C\Big(1 + \mathbb{E}\big[\|X_0\|^p_{(\mathbb{R}^d)^N}\big]\Big), \tag{2.3.4}$$

in cui C è una costante positiva dipendente da σ, N, T, M_x, p.

Dimostrazione. Osserviamo preliminarmente che ogni variabile aleatoria a valori in $(\mathcal{P}(U))^N$ appartiene a $L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ per ogni $p \geq 1$; infatti, come affermato nella proposizione 1.3.17, $\mathcal{P}(U)$ è un sottoinsieme compatto di $(F(U), \|\cdot\|_{\mathrm{BL}})$ dunque, in particolare, è un insieme limitato. Di conseguenza $(\mathcal{P}(U))^N$ è a sua volta un sottoinsieme limitato di $((F(U))^N, \|\cdot\|_{(F(U))^N})$. Dunque se Λ è una variabile aleatoria a valori in $(\mathcal{P}(U))^N$ si ha, per un'opportuna costante $C_\lambda > 0$,

$$\|\Lambda\|_{(F(U))^N} \leq C_\lambda, \qquad \text{da cui} \qquad \|\Lambda\|^p_{(F(U))^N} \leq C_\lambda^p, \quad \forall p \geq 1,$$

per cui concludiamo che

$$\mathbb{E}\big[\|\Lambda\|^p_{(F(U))^N}\big] \leq C^p_\lambda < \infty, \quad \forall p \geq 1.$$

Dunque possiamo affermare che Λ ha momenti p-esimi finiti per ogni $p \geq 1$ oppure, equivalentemente, che $\Lambda \in L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ per ogni $p \geq 1$.

Di conseguenza, data una soluzione forte Y del problema (2.0.4), si ha che

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[0,T]} \|\Lambda(t)\|^p_{(F(U))^N}\Big] \leq C^p_\lambda$$

per ogni $p \geq 1$. Pertanto, nella dimostrazione della nostra stima a priori, non sarà necessario preoccuparsi della finitezza dei momenti p-esimi delle componenti relative alle strategie miste $\Lambda^i(t)$, $i = 1, \dots, N$. Al contrario, la finitezza dei momenti p-esimi delle componenti spaziali $X^i(t)$, $i = 1, \dots, N$, non è garantita a priori in quanto tali variabili aleatorie assumono valori in $\mathbb{R}^d$.

Questo motiva la strategia dimostrativa, la quale consiste nel dimostrare dapprima la stima a priori per un opportuno processo *arrestato* costruito a partire da Y e successivamente estenderla al processo Y tramite una procedura di approssimazione. Sia dunque Y una soluzione forte del problema (2.0.4) con dato iniziale delle componenti spaziali $X_0 \in L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ per $p \in [2, +\infty)$. Si fissi ora $R > 0$ e si definisca, per ogni $\omega \in \Omega$, l'insieme di tempi

$$\mathscr{T}_R(\omega) := \{t \in [0,T] \colon \|X(\omega,t)\|_{(\mathbb{R}^d)^N} \geq R\} \subseteq [0,T],$$

a partire da cui definiamo il tempo aleatorio

$$\tau_R(\omega) := \begin{cases} \inf \mathscr{T}_R(\omega) & \text{se } \mathscr{T}_R(\omega) \neq \emptyset \\ T & \text{se } \mathscr{T}_R(\omega) = \emptyset. \end{cases}$$

Intuitivamente, la variabile aleatoria τ_R esprime il tempo d'uscita del processo X dalla palla aperta di raggio R nello spazio $((\mathbb{R}^d)^N, \|\cdot\|_{(\mathbb{R}^d)^N})$.

La continuità del processo X ci garantisce che il tempo τ_R è un tempo di arresto in virtù di [6, Proposition 3.7]. In particolare, si tratta di un tempo d'arresto finito poiché $0 \leq \tau_R \leq T$. Tramite la variabile aleatoria τ_R possiamo definire il processo stocastico *arrestato* X_R dato da

$$X_R(t) := X(t \wedge \tau_R) \tag{2.3.5}$$

per ogni $t \in [0,T]$. (La continuità di X ci garantisce che X_R sia effettivamente un processo stocastico in virtù della dimostrazione di [6, Proposition 3.6]). Osserviamo che il processo X_R coincide con X sull'intervallo $[0, \tau_R]$, mentre successivamente all'istante d'arresto $t = \tau_R$ il processo assume il valore costante $X(\tau_R)$. Per ogni $t \in [0,T]$ vale l'uguaglianza

$$\begin{aligned} X_R(t) = X(t \wedge \tau_R) = X_0 + \int_0^{t\wedge\tau_R} b_x(X(s), \Lambda(s))\, \mathrm{d}s + \sqrt{2\sigma} B(t \wedge \tau_R) = \\ = X_0 + \int_0^t b_x(X(s), \Lambda(s)) \mathbb{1}_{[0,\tau_R]}(s)\, \mathrm{d}s + \sqrt{2\sigma} B(t \wedge \tau_R) = \\ = X_0 + \int_0^t b_x(X_R(s), \Lambda(s)) \mathbb{1}_{[0,\tau_R]}(s)\, \mathrm{d}s + \sqrt{2\sigma} B(t \wedge \tau_R). \end{aligned}$$

Sia ora $t \in [0,T]$ fissato e $u \in [0,t]$; si ha

$$\begin{aligned} &\|X_R(u)\|^p_{(\mathbb{R}^d)^N} \leq \\ &\leq 3^{p-1}\left(\|X_0\|^p_{(\mathbb{R}^d)^N} + \left\| \int_0^u b_x(X_R(s), \Lambda(s)) \mathbb{1}_{[0,\tau_R]}(s)\, \mathrm{d}s \right\|^p_{(\mathbb{R}^d)^N} + \|\sqrt{2\sigma} B(u \wedge \tau_R)\|^p_{(\mathbb{R}^d)^N} \right) \leq \\ &\leq 3^{p-1}\left(\|X_0\|^p_{(\mathbb{R}^d)^N} + \left(\int_0^u \big\|b_x(X_R(s), \Lambda(s)) \mathbb{1}_{[0,\tau_R]}(s)\big\|_{(\mathbb{R}^d)^N} \mathrm{d}s \right)^p + \|\sqrt{2\sigma} B(u \wedge \tau_R)\|^p_{(\mathbb{R}^d)^N} \right). \end{aligned}$$

Facendo uso della disuguaglianza di Hölder e della sublinearità di b_x su $(\mathbb{R}^d)^N \times (\mathcal{P}(U))^N$ (2.1.10) otteniamo

$$\begin{aligned}
&\|X_R(u)\|^p_{(\mathbb{R}^d)^N} \leq \\
&\leq 3^{p-1}\Bigg(\|X_0\|^p_{(\mathbb{R}^d)^N} + u^{p-1}\int_0^u \|b_x(X_R(s),\Lambda(s))\|^p_{(\mathbb{R}^d)^N}\,\mathrm{d}s + (2\sigma)^{\frac{p}{2}}\|B(u\wedge\tau_R)\|^p_{(\mathbb{R}^d)^N}\Bigg)\\
&\leq 3^{p-1}\Bigg(\|X_0\|^p_{(\mathbb{R}^d)^N} + u^{p-1}M_x^p\int_0^u \big(1+\|X_R(s)\|_{(\mathbb{R}^d)^N} + \|\Lambda(s)\|_{(F(U))^N}\big)^p\,\mathrm{d}s\\
&\qquad\qquad + (2\sigma)^{\frac{p}{2}}\|B(u\wedge\tau_R)\|^p_{(\mathbb{R}^d)^N}\Bigg)\\
&\leq 3^{p-1}\Bigg(\|X_0\|^p_{(\mathbb{R}^d)^N} + u^{p-1}M_x^p\int_0^u 3^{p-1}\big(1+\|X_R(s)\|^p_{(\mathbb{R}^d)^N} + \|\Lambda(s)\|^p_{(F(U))^N}\big)\,\mathrm{d}s\\
&\qquad\qquad + (2\sigma)^{\frac{p}{2}}\|B(u\wedge\tau_R)\|^p_{(\mathbb{R}^d)^N}\Bigg)
\end{aligned}$$

Prendiamo ora l'estremo superiore di entrambi e membri sull'intervallo $[0,t]$ e facciamo uso dell'osservazione che $\sup_{u\in[0,t]}\|B(u\wedge\tau_R)\|^p_{(\mathbb{R}^d)^N} \leq \sup_{u\in[0,t]}\|B(u)\|^p_{(\mathbb{R}^d)^N}$; da ciò traiamo la disuguaglianza

$$\begin{aligned}
&\sup_{u\in[0,t]}\|X_R(u)\|^p_{(\mathbb{R}^d)^N} \leq \\
&\leq 3^{p-1}\Bigg(\|X_0\|^p_{(\mathbb{R}^d)^N} + t^{p-1}M_x^p\int_0^t 3^{p-1}\big(1+\|X_R(s)\|^p_{(\mathbb{R}^d)^N} +\\
&+ \|\Lambda(s)\|^p_{(F(U))^N}\big)\,\mathrm{d}s + (2\sigma)^{\frac{p}{2}}\sup_{u\in[0,t]}\|B(u)\|^p_{(\mathbb{R}^d)^N}\Bigg);
\end{aligned}$$

prendendo infine i valori attesi di entrambi i membri deducendo che

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]}\|X_R(u)\|^p_{(\mathbb{R}^d)^N}\Big] \leq \\
&\leq 3^{p-1}\Bigg(\mathbb{E}\big[\|X_0\|^p_{(\mathbb{R}^d)^N}\big] + 3^{p-1}t^{p-1}M_x^p\int_0^t\Big(1+\mathbb{E}\big[\|X_R(s)\|^p_{(\mathbb{R}^d)^N}\big]+\\
&+\mathbb{E}\big[\|\Lambda(s)\|^p_{(F(U))^N}\big]\Big)\,\mathrm{d}s + (2\sigma)^{\frac{p}{2}}\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]}\|B(u)\|^p_{(\mathbb{R}^d)^N}\Big]\Bigg).
\end{aligned}\tag{2.3.6}$$

Nelle argomentazioni successive faremo uso dei fatti seguenti:

- l'assunzione sul dato iniziale spaziale, $X_0 \in L^p(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$, ci garantisce che
$$\mathbb{E}\big[\|X_0\|^p_{(\mathbb{R}^d)^N}\big] < \infty;$$
- la limitatezza del sottoinsieme $(\mathcal{P}(U))^N$ in $((F(U))^N, \|\cdot\|_{(F(U))^N})$ discussa in precedenza ci dà la stima
$$\mathbb{E}\big[\|\Lambda(u)\|^p_{(\mathbb{R}^d)^N}\big] \leq C_\lambda^p, \quad \forall u\in[0,t];$$
- per ogni $u\in[0,t]$ vale la disuguaglianza
$$\|B(u)\|^p_{(\mathbb{R}^d)^N} = \left(\sum_{i=1}^N\|B^i(u)\|_{\mathbb{R}^d}\right)^p \leq N^{p-1}\left(\sum_{i=1}^N\|B^i(u)\|^p_{\mathbb{R}^d}\right),$$
da cui segue
$$\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]}\|B(u)\|^p_{(\mathbb{R}^d)^N}\Big] \leq N^{p-1}\left(\sum_{i=1}^N\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]}\|B^i(u)\|^p_{\mathbb{R}^d}\Big]\right);$$

osserviamo inoltre che a ciascuno dei termini che compaiono a secondo membro della precedente disuguaglianza possiamo applicare la disuguaglianza di Doob (A.4.4) relativa ai moti browniani d-dimensionali B^i, $i = 1, \dots, N$:

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]} \|B^i(u)\|^p_{\mathbb{R}^d}\Big] \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}\big[\|B^i(t)\|^p_{\mathbb{R}^d}\big];$$

- esiste una costante $C_{\mathcal{N}} > 0$ tale che

$$\mathbb{E}\big[\|B^i(t)\|^p_{\mathbb{R}^d}\big] \le C_{\mathcal{N}}, \quad \forall t \in [0,T]$$

e per ogni $i = 1, \dots, N$. Infatti, per ogni $t \in [0,T]$, si ha per definizione che le variabili aleatorie d-dimensionali $B^i(t)$ hanno distribuzione gaussiana $\mathcal{N}(0, tI_d)$ (I_d denota la matrice identità $d \times d$), per cui

$$\|B^i(t)\|^p_{\mathbb{R}^d} = t^{\frac{p}{2}} \left\| \frac{B^i(t)}{t^{\frac{1}{2}}} \right\|^p_{\mathbb{R}^d} \le T^{\frac{p}{2}} \|N\|^p_{\mathbb{R}^d} =: C_{\mathcal{N}}, \quad \forall t \in [0,T]$$

dove N è una variabile aleatoria d-dimensionale con distribuzione gaussiana standard, da cui segue la stima voluta.

Combinando tutti questi elementi con la disuguaglianza (2.3.6) si ottiene che, per ogni $t \in [0,T]$, vale

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]} \|X_R(u)\|^p_{(\mathbb{R}^d)^N}\Big] \le C_1\Big(1 + \mathbb{E}\big[\|X_0\|^p_{(\mathbb{R}^d)^N}\big]\Big) + C_2 \int_0^t \mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,s]} \|X_R(u)\|^p_{(\mathbb{R}^d)^N}\Big]\,\mathrm{d}s,$$

dove C_1, C_2 sono opportune costanti positive che dipendono da σ, N, T, M_x, p, ma che non dipendono in alcun modo dal parametro R.

Definiamo ora la quantità

$$v(t) := \mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]} \|X_R(u)\|^p_{(\mathbb{R}^d)^N}\Big], \quad \forall t \in [0,T]$$

la quale ci permette di scrivere

$$v(t) \le C_1\Big(1 + \mathbb{E}\big[\|X_0\|^p_{(\mathbb{R}^d)^N}\big]\Big) + C_2 \int_0^t v(s)\,\mathrm{d}s, \quad \forall t \in [0,T].$$

Possiamo ora applicare il lemma di Grönwall A.4.7 a patto di dimostrare che, a priori, la funzione $t \longmapsto v(t)$ è limitata sull'intervallo $[0,T]$. Fissato $\omega \in \Omega$, possono infatti presentarsi due casistiche: si può avere che $\|X_R(\omega,0)\|_{(\mathbb{R}^d)^N} \ge R$, da cui segue che $X_R(t) = X_0$ per ogni $t \in [0,T]$, in quanto il processo viene arrestato immediatamente al tempo $t = 0$; oppure, in alternativa, può accadere che $\|X_R(\omega,0)\|_{(\mathbb{R}^d)^N} < R$ e in questo caso si ha che $\|X_R(\omega,t)\|_{(\mathbb{R}^d)^N} \le R$ per ogni $t \in [0,T]$. Concludiamo dunque che, quasi certamente,

$$\|X_R(t)\|_{(\mathbb{R}^d)^N} \le \|X_0\|_{(\mathbb{R}^d)^N} \vee R, \quad \forall t \in [0,T],$$

da cui

$$\|X_R(t)\|^p_{(\mathbb{R}^d)^N} \le \|X_0\|^p_{(\mathbb{R}^d)^N} \vee R^p, \quad \forall t \in [0,T].$$

Prendendo l'estremo superiore sull'intervallo $[0,t]$ e successivamente i valori attesi di entrambi i membri si ottiene

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]} \|X_R(u)\|^p_{(\mathbb{R}^d)^N}\Big] \le \mathbb{E}\big[\|X_0\|^p_{(\mathbb{R}^d)^N}\big] \vee R^p, \quad \forall t \in [0,T],$$

da cui segue che

$$v(t) \le \mathbb{E}\big[\|X_0\|^p_{(\mathbb{R}^d)^N}\big] \vee R^p \le \mathbb{E}\big[\|X_0\|^p_{(\mathbb{R}^d)^N}\big] + R^p, \quad \forall t \in [0,T],$$

da cui otteniamo la voluta limitatezza della funzione v su $[0,T]$. Ora possiamo finalmente applicare il lemma di Grönwall A.4.7 concludendo che, per ogni $t \in [0,T]$, si ha

$$v(t) \leq C_1\big(1 + \mathbb{E}\big[\|X_0\|^p_{(\mathbb{R}^d)^N}\big]\big)e^{\int_0^t C_2\,\mathrm{d}s}.$$

Valutando quest'ultima disuguaglianza in $t = T$ otteniamo la stima

$$v(T) \leq C_1\big(1 + \mathbb{E}\big[\|X_0\|^p_{(\mathbb{R}^d)^N}\big]\big)e^{C_2T},$$

da cui

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[0,T]}\|X_R(t)\|^p_{(\mathbb{R}^d)^N}\Big] \leq C_0\Big(1 + \mathbb{E}\big[\|X_0\|^p_{(\mathbb{R}^d)^N}\big]\Big) \tag{2.3.7}$$

in cui $C_0 := C_1e^{C_2T}$ è una costante positiva dipendente da σ, N, T, M_x, p, ma che non dipende in alcun modo da R.

Abbiamo così ottenuto la stima voluta per il processo arrestato X_R e risulta ora necessario estenderla al processo originario X: la strategia che adottiamo consiste nel mandare $R \longrightarrow +\infty$ nella (2.3.7). Notiamo innanzitutto che il secondo membro di tale disuguaglianza non dipende in alcun modo da R, per cui il passaggio al limite coinvolge essenzialmente il solo primo membro. Osserviamo ora che per quasi ogni $\omega \in \Omega$ vale l'uguaglianza

$$\sup_{t\in[0,T]}\|X_R(\omega,t)\|^p_{(\mathbb{R}^d)^N} = \sup_{t\in[0,\tau_R(\omega)]}\|X(\omega,t)\|^p_{(\mathbb{R}^d)^N},$$

per ogni $R \in [0,+\infty)$, e che la funzione

$$R \longmapsto \sup_{t\in[0,\tau_R(\omega)]}\|X(\omega,t)\|^p_{(\mathbb{R}^d)^N}$$

è monotona crescente. Inoltre si ha che

$$\begin{aligned}
&\lim_{R\to+\infty}\Big(\sup_{t\in[0,T]}\|X_R(\omega,t)\|^p_{(\mathbb{R}^d)^N}\Big) = \\
&= \lim_{R\to+\infty}\Big(\sup_{t\in[0,\tau_R(\omega)]}\|X(\omega,t)\|^p_{(\mathbb{R}^d)^N}\Big) = \\
&= \sup_{t\in[0,T]}\|X(\omega,t)\|^p_{(\mathbb{R}^d)^N}.
\end{aligned}$$

Possiamo dunque applicare il teorema di Beppo Levi nella (2.3.7) passando al limite sotto il valore atteso ottenendo, come voluto,

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[0,T]}\|X(t)\|^p_{(\mathbb{R}^d)^N}\Big] \leq C_0\Big(1 + \mathbb{E}\big[\|X_0\|^p_{(\mathbb{R}^d)^N}\big]\Big).$$

Concludiamo la dimostrazione ricavando la (2.3.3). Si ha

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[0,T]}\|Y(t)\|^p_{(\mathbb{R}^d\times F(U))^N}\Big] \leq \\
&\leq \mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[0,T]}\Big(\|X(t)\|_{(\mathbb{R}^d)^N} + \|\Lambda(t)\|_{(F(U))^N}\Big)^p\Big] \leq \\
&\leq 2^{p-1}\Big(\mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[0,T]}\|X(t)\|^p_{(\mathbb{R}^d)^N}\Big] + \mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[0,T]}\|\Lambda(t)\|^p_{(F(U))^N}\Big]\Big) \leq \\
&\leq 2^{p-1}C_0\Big(1 + \mathbb{E}\big[\|X_0\|^p_{(\mathbb{R}^d)^N}\big]\Big) + 2^{p-1}C^p_\lambda \leq \\
&\leq C\Big(1 + \mathbb{E}\big[\|X_0\|^p_{(\mathbb{R}^d)^N}\big]\Big),
\end{aligned}$$

dove C è una costante positiva dipendente da σ, N, T, M_x, p. Questo conclude la dimostrazione.
□

2.3.2 La dimostrazione di unicità

Veniamo ora alla dimostrazione dell'unicità delle soluzioni del problema discreto (2.0.4). Ricordiamo che la nozione di unicità che adottiamo è quella *per cammini* espressa dalla definizione 2.3.1.

Dimostrazione. Siano Y_1 e Y_2 due soluzioni forti del problema (2.0.4) definite sul medesimo spazio di probabilità filtrato $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathbb{P})$ e relative al medesimo moto browniano $B = (B^1, \dots, B^N)$. Allora Y_1, Y_2 sono due processi stocastici continui a valori in $(\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))^N$ che soddisfano, quasi certamente,

$$\begin{cases} X_i(t) = X_0 + \displaystyle\int_0^t b_x(X_i(s), \Lambda_i(s))\,\mathrm{d}s + \sqrt{2\sigma}B(t) \\ \Lambda_i(t) = \Lambda_0 + \displaystyle\int_0^t b_\lambda(X_i(s), \Lambda_i(s))\,\mathrm{d}s \end{cases}$$

per ogni $t \in [0, T]$ e $i = 1, 2$. (Qui i processi X_i e Λ_i, $i = 1, 2$, hanno il medesimo significato delle pagine precedenti). Sia ora $t \in [0, T]$ fissato e $u \in [0, t]$; valgono le disuguaglianze

$$\begin{aligned} &\|X_1(u) - X_2(u)\|^2_{(\mathbb{R}^d)^N} = \\ &= \left\| \int_0^u \Big(b_x(X_1(s), \Lambda_1(s)) - b_x(X_2(s), \Lambda_2(s)) \Big)\,\mathrm{d}s \right\|^2_{(\mathbb{R}^d)^N} \le \\ &\le \left(\int_0^u \|b_x(X_1(s), \Lambda_1(s)) - b_x(X_2(s), \Lambda_2(s))\|_{(\mathbb{R}^d)^N}\,\mathrm{d}s \right)^2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} &\|\Lambda_1(u) - \Lambda_2(u)\|^2_{(F(U))^N} = \\ &= \left\| \int_0^u \Big(b_\lambda(X_1(s), \Lambda_1(s)) - b_\lambda(X_2(s), \Lambda_2(s)) \Big)\,\mathrm{d}s \right\|^2_{(F(U))^N} \le \\ &\le \left(\int_0^u \|b_\lambda(X_1(s), \Lambda_1(s)) - b_\lambda(X_2(s), \Lambda_2(s))\|_{(F(U))^N}\,\mathrm{d}s \right)^2. \end{aligned}$$

Consideriamo la prima delle due; applicando la disuguaglianza di Hölder all'ultimo membro e facendo uso della lipschitzianità di b_x su $(\mathbb{R}^d)^N \times (\mathcal{P}(U))^N$ (2.1.7) otteniamo

$$\begin{aligned} &\|X_1(u) - X_2(u)\|^2_{(\mathbb{R}^d)^N} \le \\ &\le u \int_0^u \Big(\|b_x(X_1(s), \Lambda_1(s)) - b_x(X_2(s), \Lambda_2(s))\|_{(\mathbb{R}^d)^N} \Big)^2\,\mathrm{d}s \le \\ &\le u L_x^2 \int_0^u \Big(\|X_1(s) - X_2(s)\|_{(\mathbb{R}^d)^N} + \|\Lambda_1(s) - \Lambda_2(s)\|_{(F(U))^N} \Big)^2\,\mathrm{d}s; \end{aligned}$$

analogamente, considerando la seconda disuguaglianza, applicando la disuguaglianza di Hölder e la lipschitzianità di b_λ su $(\mathbb{R}^d)^N \times (\mathcal{P}(U))^N$ (2.1.8) si trae

$$\begin{aligned} &\|\Lambda_1(u) - \Lambda_2(u)\|^2_{(F(U))^N} \le \\ &\le u \int_0^u \Big(\|b_\lambda(X_1(s), \Lambda_1(s)) - b_\lambda(X_2(s), \Lambda_2(s))\|_{(F(U))^N} \Big)^2\,\mathrm{d}s \le \\ &\le u L_\lambda^2 \int_0^u \Big(\|X_1(s) - X_2(s)\|_{(\mathbb{R}^d)^N} + \|\Lambda_1(s) - \Lambda_2(s)\|_{(F(U))^N} \Big)^2\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Prendendo ora l'estremo superiore su $[0, t]$ e prendendo i valori attesi nelle due disuguaglianze sopra ottenute si ha

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]} \|X_1(u) - X_2(u)\|^2_{(\mathbb{R}^d)^N} \Big] \le \\ &\le \mathbb{E}\left[t L_x^2 \int_0^t \Big(\|X_1(s) - X_2(s)\|_{(\mathbb{R}^d)^N} + \|\Lambda_1(s) - \Lambda_2(s)\|_{(F(U))^N} \Big)^2\,\mathrm{d}s \right] \end{aligned}$$

e analogamente

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]}\|\Lambda_1(u)-\Lambda_2(u)\|^2_{(F(U))^N}\Big] \leq \\
&\leq \mathbb{E}\bigg[tL_\lambda^2\int_0^t\Big(\|X_1(s)-X_2(s)\|_{(\mathbb{R}^d)^N}+\|\Lambda_1(s)-\Lambda_2(s)\|_{(F(U))^N}\Big)^2\,\mathrm{d}s\bigg].
\end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di t segue che entrambe le disuguaglianze sono valide per ogni $t\in[0,T]$. Come conseguenza otteniamo che, per ogni $t\in[0,T]$, vale

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]}\|Y_1(u)-Y_2(u)\|^2_{(\mathbb{R}^d\times F(U))^N}\Big] = \\
&=\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]}\big(\|X_1(u)-X_2(u)\|_{(\mathbb{R}^d)^N}+\|\Lambda_1(u)-\Lambda_2(u)\|_{(F(U))^N}\big)^2\Big] \leq \\
&\leq 2\bigg(\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]}\|X_1(u)-X_2(u)\|^2_{(\mathbb{R}^d)^N}\Big]+\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]}\|\Lambda_1(u)-\Lambda_2(u)\|^2_{(F(U))^N}\Big]\bigg) \leq \\
&\leq 2t\big(L_x^2+L_\lambda^2\big)\mathbb{E}\bigg[\int_0^t\Big(\|X_1(s)-X_2(s)\|_{(\mathbb{R}^d)^N}+\|\Lambda_1(s)-\Lambda_2(s)\|_{(F(U))^N}\Big)^2\,\mathrm{d}s\bigg] \leq \\
&\leq 4tL^2\int_0^t\mathbb{E}\bigg[\Big(\|X_1(s)-X_2(s)\|_{(\mathbb{R}^d)^N}+\|\Lambda_1(s)-\Lambda_2(s)\|_{(F(U))^N}\Big)^2\bigg]\,\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo posto $L:=\max\{L_x,L_\lambda\}$ e abbiamo utilizzato il teorema di Fubini (data la positività degli integrandi) per scambiare il valore atteso con l'integrale in tempo. Dunque abbiamo che per ogni $t\in[0,T]$ si ha

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]}\|Y_1(u)-Y_2(u)\|^2_{(\mathbb{R}^d\times F(U))^N}\Big] \leq \\
&\leq 4tL^2\int_0^t\mathbb{E}\Big[\|Y_1(s)-Y_2(s)\|^2_{(\mathbb{R}^d\times F(U))^N}\Big]\,\mathrm{d}s \leq \\
&\leq 4TL^2\int_0^t\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,s]}\|Y_1(u)-Y_2(u)\|^2_{(\mathbb{R}^d\times F(U))^N}\Big]\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

ponendo ora,

$$v(t):=\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]}\|Y_1(u)-Y_2(u)\|^2_{(\mathbb{R}^d\times F(U))^N}\Big],\qquad \forall t\in[0,T]$$

concludiamo che

$$v(t)\leq 4TL^2\int_0^t v(s)\,\mathrm{d}s,\qquad \forall t\in[0,T].$$

Osserviamo che possiamo *quasi* applicare il lemma di Grönwall con $c=0$ e $w\equiv 1$ alla funzione v. L'unico ostacolo alla sua applicazione è ora dato dalla necessità di dimostrare a priori che la funzione v è limitata su $[0,T]$. Tuttavia proprio la stima a priori oggetto della proposizione 2.3.3 ci assicura che, per ogni $t\in[0,T]$, si ha

$$\begin{aligned}
v(t)&=\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]}\|Y_1(u)-Y_2(u)\|^2_{(\mathbb{R}^d\times F(U))^N}\Big] \leq \\
&\leq \mathbb{E}\bigg[\sup_{u\in[0,t]}\Big(\|Y_1(u)\|_{(\mathbb{R}^d\times F(U))^N}+\|Y_2(u)\|_{(\mathbb{R}^d\times F(U))^N}\Big)^2\bigg] \leq \\
&\leq 2\bigg(\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]}\|Y_1(u)\|^2_{(\mathbb{R}^d\times F(U))^N}\Big]+\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]}\|Y_2(u)\|^2_{(\mathbb{R}^d\times F(U))^N}\Big]\bigg) \leq \\
&\leq 4C\Big(1+\mathbb{E}\big[\|X_0\|^2_{(\mathbb{R}^d)^N}\big]\Big)
\end{aligned}$$

da cui segue la limitatezza di v su $[0, T]$.

Ora possiamo finalmente applicare il lemma di Grönwall A.4.7 ottenendo

$$v(t) = 0 \qquad \forall t \in [0, T].$$

Ponendo, in particolare, $t = T$ si deduce che

$$v(T) = \mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[0,T]} \|Y_1(t) - Y_2(t)\|^2_{(\mathbb{R}^d \times F(U))^N}\Big] = 0.$$

Pertanto possiamo concludere che

$$\mathbb{P}\Bigg(\sup_{t\in[0,T]} \|Y_1(t) - Y_2(t)\|^2_{(\mathbb{R}^d \times F(U))^N} = 0\Bigg) = 1$$

dunque

$$\mathbb{P}\Big(Y_1(t) = Y_2(t), \text{ per ogni } t \in [0, T]\Big) = 1$$

da cui l'unicità della soluzione. $\square$

Capitolo 3

Buona positura del modello di campo medio

3.1 Una derivazione euristica del modello di campo medio

Come di consueto accade nell'ambito dei sistemi multi-agente, il numero N di individui che costituiscono il sistema è idealmente molto elevato. Ciò può rendere particolarmente difficoltoso lo studio del sistema di SDE accoppiate (1.2.1) per via delle complesse dipendenze che si possono instaurare tra le variabili aleatorie $Y^i(t) = (X^i(t), \Lambda^i(t))$, $i = 1, \ldots, N$. Per ovviare a questa difficoltà, un approccio efficace consiste nel far tendere N all'infinito approssimando il sistema di SDE accoppiate con un'unica SDE che descrive la dinamica di una singola, generica particella, nello spirito delle teorie cinetiche: si rinuncia a conoscere l'evoluzione individuale di ogni singolo agente a favore di una descrizione, in termini statistici, del comportamento di un generico agente della popolazione. Questa procedura è nota in letteratura come *limite di campo medio*.

Per eseguire il limite di campo medio in maniera rigorosa è necessario dimostrare la cosiddetta *propagazione del caos*, ovvero che, quando $N \to \infty$, gli stati microscopici degli agenti $\{Y^i(t)\}_{i=1,\ldots,N}$ diventano indipendenti e identicamente distribuiti.

La trattazione rigorosa della propagazione del caos per il modello (1.2.1) sarà oggetto del successivo Capitolo 4. In questa fase iniziale dello studio, invece, scegliamo di *postulare* la validità della propagazione del caos effettuando il limite di campo medio in maniera puramente formale, in modo da poter congetturare una forma plausibile della descrizione di campo medio.

Le argomentazioni euristiche che seguono sono ispirate ai lavori [9], [20]. Il ragionamento procede nella maniera seguente: sia $\Xi_t \in \mathcal{P}((\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))^N)$ la legge congiunta dei vettori aleatori $\{Y^i(t)\}_{i=1,\ldots,N}$, soluzioni di (1.2.1), e sia $\Sigma_t \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))$ la legge di una delle marginali $Y^i(t)$ (ad esempio $Y^1(t)$). Supponiamo ora che, per $N \to \infty$, si abbia $\Xi_t = \bigotimes_{i=1}^N \Sigma_t$, ossia che i vettori aleatori $\{Y^i(t)\}_{i=1,\ldots,N}$ siano i.i.d. Da ciò discende che, per la legge dei grandi numeri, possiamo effettuare la seguente approssimazione

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_\lambda(x, \lambda, X^i(t), \Lambda^i(t)) \approx \int_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)} f_\lambda(x, \lambda, x', \lambda') \, \mathrm{d}\Sigma_t(x', \lambda'),$$

per ogni $(x, \lambda) \in \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)$.

In virtù di questa procedura puramente formale, e ricordando l'espressione del problema discreto (1.2.1), postuliamo che la formulazione di campo medio sia data dalla seguente equazione:

$$\begin{cases} \overline{X}(t) = \overline{X}_0 + \displaystyle\int_0^t f_x(\overline{X}(s), \overline{\Lambda}(s)) \, \mathrm{d}s + \sqrt{2\sigma}\,\overline{B}(t) \\ \overline{\Lambda}(t) = \overline{\Lambda}_0 + \displaystyle\int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)} f_\lambda(\overline{X}(s), \overline{\Lambda}(s), x', \lambda') \, \mathrm{d}\Sigma_s(x', \lambda') \right) \mathrm{d}s \end{cases} \tag{3.1.1}$$

Come possiamo notare, ora l'evoluzione del sistema non è più fornita dagli N processi stocastici $Y^i(t) = (X^i(t), \Lambda^i(t))$, $i = 1, \ldots, N$, come nella formulazione discreta, bensì da un unico processo stocastico $\overline{Y}(t) = (\overline{X}(t), \overline{\Lambda}(t))$ che descrive l'evoluzione nel tempo dello stato microscopico di una singola, generica particella. Osserviamo inoltre che ora il campo che governa l'evoluzione delle strategie miste dipende dalla legge Σ_t di $\overline{Y}(t)$.

Nelle prossime sezioni affronteremo, questa volta in modo rigoroso, la questione della buona positura del problema di campo medio che abbiamo dedotto in maniera euristica. Così come per il problema discreto, siamo interessati a provare l'esistenza e l'unicità delle *soluzioni forti* della formulazione di campo medio. Diamo quindi la seguente

Definizione 3.1.2 (Soluzioni forti del modello di campo medio)**.** *Siano assegnati un orizzonte temporale $T > 0$ e un moto browniano standard d-dimensionale $\overline{B}\colon \Omega \longrightarrow C([0,T], \mathbb{R}^d)$ definito su uno spazio di probabilità filtrato $\big(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathbb{P}\big)$. Siano inoltre assegnate una variabile aleatoria $\overline{X}_0\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ $\mathscr{F}_0$-misurabile e appartenente a $L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ e una variabile aleatoria $\overline{\Lambda}_0\colon \Omega \longrightarrow \mathcal{P}(U)$ e $\mathscr{F}_0$-misurabile. Chiamiamo* soluzione forte *del problema di campo medio un processo stocastico continuo*

$$\overline{Y} = (\overline{X}, \overline{\Lambda})\colon \Omega \longrightarrow C([0,T], \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))$$

tale che, posto $\Sigma := \mathrm{Law}(\overline{Y}) \in \mathcal{P}(C([0,T], \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)))$ e $\Sigma_t := (\mathrm{ev}_t)_\sharp \Sigma$, si abbia, quasi certamente,

$$\begin{cases} \overline{X}(t) = \overline{X}_0 + \displaystyle\int_0^t f_x(\overline{X}(s), \overline{\Lambda}(s))\,\mathrm{d}s + \sqrt{2\sigma}\,\overline{B}(t) \\ \overline{\Lambda}(t) = \overline{\Lambda}_0 + \displaystyle\int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)} f_\lambda(\overline{X}(s), \overline{\Lambda}(s), x', \lambda')\,\mathrm{d}\Sigma_s(x', \lambda') \right) \mathrm{d}s \end{cases} \tag{3.1.3}$$

per ogni $t \in [0,T]$.

Osservazione 6. Osserviamo che il campo che governa l'evoluzione della strategia mista $\overline{\Lambda}$ presenta una dipendenza dalla legge della soluzione, questa peculiarità richiederà un'estensione delle tecniche descritte nel precedente Capitolo 2 al fine di ottenere la dimostrazione di buona positura.

Osservazione 7. Osserviamo inoltre che se Σ è la legge del processo stocastico $\overline{Y}$ (pensato come variabile aleatoria a valori in uno spazio di funzioni continue) allora $\Sigma_t := (\mathrm{ev}_t)_\sharp \Sigma$ è effettivamente la legge della variabile aleatoria $\overline{Y}(t)$. Infatti, per costruzione, si ha che $\overline{Y}(t) = (\mathrm{ev}_t) \circ \overline{Y}$ inoltre, per definizione di legge di una variabile aleatoria, si ha che $\Sigma = \mathrm{Law}(\overline{Y}) = \overline{Y}_\sharp \mathbb{P}$; di conseguenza, per le proprietà del *push-forward* di misure, si ha

$$\mathrm{Law}(\overline{Y}(t)) = \mathrm{Law}((\mathrm{ev}_t) \circ \overline{Y}) = ((\mathrm{ev}_t) \circ \overline{Y})_\sharp \mathbb{P} = (\mathrm{ev}_t)_\sharp (\overline{Y}_\sharp \mathbb{P}) = (\mathrm{ev}_t)_\sharp \Sigma,$$

come voluto.

Allo scopo di rendere più agevoli e leggibili le successive argomentazioni, introduciamo una apposita notazione per il campo che governa l'evoluzione delle strategie miste. Assegnata una misura $\Sigma \in \mathcal{P}(C([0,T], \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)))$, definiamo il campo b_λ^Σ come

$$\begin{aligned} b_\lambda^\Sigma\colon \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U) \times [0,T] &\longrightarrow F(U) \\ (x, \lambda, t) &\longmapsto b_\lambda^\Sigma(x, \lambda, t) := \int_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)} f_\lambda(x, \lambda, x', \lambda')\,\mathrm{d}\Sigma_t(x', \lambda'), \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

dove abbiamo posto $\Sigma_t := (\mathrm{ev}_t)_\sharp \Sigma$. Osserviamo che il campo b_λ^Σ appena introdotto presenta un'esplicita dipendenza dal tempo. Osserviamo inoltre che, affinché la quantità $b_\lambda^\Sigma(x, \lambda, t)$ sia ben definita, è necessario che l'integrale di Bochner che la definisce sia convergente. In virtù della sublinearità del campo f_λ, una condizione sufficiente affinché ciò avvenga è che le misure Σ_t abbiano momento primo finito per ogni $t \in [0,T]$. Una condizione che garantisce questa proprietà è, ad esempio, che $\Sigma \in \mathcal{P}_1(C([0,T], \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)))$, ciò risulta vero in virtù della proposizione 3.2.1 dimostrata più avanti. Per uniformità di notazione, definiamo anche il campo $b_x \equiv f_x$, così da poter riscrivere il problema di campo medio nella forma equivalente

$$\begin{cases} \overline{X}(t) = \overline{X}_0 + \int_0^t b_x(\overline{X}(s), \overline{\Lambda}(s))\, \mathrm{d}s + \sqrt{2\sigma}\overline{B}(t) \\ \overline{\Lambda}(t) = \overline{\Lambda}_0 + \int_0^t b_\lambda^\Sigma(\overline{X}(s), \overline{\Lambda}(s), s)\, \mathrm{d}s \end{cases} \tag{3.1.5}$$

per ogni $t \in [0, T]$.

3.2 Proprietà strutturali del campo b_λ^Σ

In questa sezione dimostreremo le proprietà di lipschitzianità (uniforme in tempo) e di sublinearità del campo b_λ^Σ, le quali risulteranno utili nella dimostrazione di buona positura. Cominciamo enunciando due risultati preliminari

Proposizione 3.2.1. *Sia $\Sigma \in \mathcal{P}_p(C([0,T], \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)))$, con $p \in [1, +\infty)$, e sia $\Sigma_t := (\mathrm{ev}_t)_\sharp \Sigma$. Allora, per ogni $t \in [0,T]$, si ha che $\Sigma_t \in \mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))$ e vale la disuguaglianza*

$$M_p(\Sigma_t) \leq M_p(\Sigma), \tag{3.2.2}$$

dove M_p denota il momento p-esimo della relativa misura.

Dimostrazione. Sia $t \in [0,T]$ fissato. Utilizzando la definizione di momento p-esimo e la formula di integrazione rispetto alla misura immagine (1.3.3) otteniamo

$$\begin{aligned} M_p^p(\Sigma_t) &= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)} \|y\|^p_{\mathbb{R}^d \times F(U)}\, \mathrm{d}\Sigma_t(y) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)} \|y\|^p_{\mathbb{R}^d \times F(U)}\, \mathrm{d}((\mathrm{ev}_t)_\sharp \Sigma)(y) = \\ &= \int_{C([0,T], \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))} \|(\mathrm{ev}_t)(\varphi)\|^p_{\mathbb{R}^d \times F(U)}\, \mathrm{d}\Sigma(\varphi) = \\ &= \int_{C([0,T], \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))} \|\varphi(t)\|^p_{\mathbb{R}^d \times F(U)}\, \mathrm{d}\Sigma(\varphi) \leq \\ &\leq \int_{C([0,T], \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))} \left(\sup_{t \in [0,T]} \|\varphi(t)\|^p_{\mathbb{R}^d \times F(U)} \right) \mathrm{d}\Sigma(\varphi) = \\ &= \int_{C([0,T], \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))} \|\varphi\|^p_\infty\, \mathrm{d}\Sigma(\varphi) = M_p^p(\Sigma). \end{aligned}$$

Osserviamo ora che dall'ipotesi $\Sigma \in \mathcal{P}_p(C([0,T], \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)))$ e dalla disuguaglianza sui momenti p-esimi appena ottenuta segue che

$$M_p(\Sigma_t) \leq M_p(\Sigma) < \infty, \qquad \forall t \in [0,T],$$

da cui segue, per definizione, che $\Sigma_t \in \mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))$ per ogni $t \in [0,T]$. □

Proposizione 3.2.3. *Sia $\Sigma \in \mathcal{P}_p(C([0,T], \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)))$, con $p \in [1, +\infty)$. Allora l'applicazione*

$$\begin{aligned} [0,T] &\longrightarrow (\mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)), W_p) \\ t &\longmapsto \Sigma_t := (\mathrm{ev}_t)_\sharp \Sigma, \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

è continua. (W_p denota la distanza di Wasserstein p-esima (1.3.8)).

Dimostrazione. La proposizione 3.2.1 ci garantisce che $\Sigma_t \in \mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))$, per cui l'applicazione risulta ben definita. Veniamo ora alla continuità, mostreremo che, per ogni $t \in [0,T]$ si ha

$$\lim_{\Delta t \to 0} W_p(\Sigma_t, \Sigma_{t+\Delta t}) = 0.$$

Per definizione della metrica di Wasserstein (definizione 1.3.7) risulta

$$W_p^p(\Sigma_t, \Sigma_{t+\Delta t}) = \inf_{\pi \in \Gamma(\Sigma_t, \Sigma_{t+\Delta t})} \int_{(\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))^2} \|y_1 - y_2\|^p_{\mathbb{R}^d \times F(U)} \, \mathrm{d}\pi(y_1, y_2)$$

dove $\Gamma(\Sigma_t, \Sigma_{t+\Delta t})$ denota l'insieme dei piani di trasporto tra Σ_t e $\Sigma_{t+\Delta t}$:

$$\Gamma(\Sigma_t, \Sigma_{t+\Delta t}) = \Big\{ \pi \in \mathcal{P}((\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))^2) : (p_1)_\sharp \pi = \Sigma_t, \ (p_2)_\sharp \pi = \Sigma_{t+\Delta t} \Big\},$$

dove p_1, p_2 denotano le proiezioni canoniche sul primo e secondo fattore rispettivamente. Definiamo ora la misura di probabilità

$$\bar{\pi} := (\mathrm{ev}_t, \mathrm{ev}_{t+\Delta t})_\sharp \Sigma.$$

Per costruzione si ha che $\bar{\pi} \in \mathcal{P}((\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))^2)$, mostriamo ora che $\bar{\pi} \in \Gamma(\Sigma_t, \Sigma_{t+\Delta t})$: per le proprietà del *push-forward* risulta

$$\begin{aligned}(p_1)_\sharp \bar{\pi} &= (p_1)_\sharp((\mathrm{ev}_t, \mathrm{ev}_{t+\Delta t})_\sharp \Sigma) = \\ &= (p_1 \circ (\mathrm{ev}_t, \mathrm{ev}_{t+\Delta t}))_\sharp \Sigma = \\ &= (\mathrm{ev}_t)_\sharp \Sigma = \Sigma_t,\end{aligned}$$

e analogamente

$$\begin{aligned}(p_2)_\sharp \bar{\pi} &= (p_2)_\sharp((\mathrm{ev}_t, \mathrm{ev}_{t+\Delta t})_\sharp \Sigma) = \\ &= (p_2 \circ (\mathrm{ev}_t, \mathrm{ev}_{t+\Delta t}))_\sharp \Sigma = \\ &= (\mathrm{ev}_{t+\Delta t})_\sharp \Sigma = \Sigma_{t+\Delta t},\end{aligned}$$

per cui $\bar{\pi}$ è un piano di trasporto tra Σ_t e $\Sigma_{t+\Delta t}$, come voluto. Da ciò deduciamo che

$$\begin{aligned}W_p^p(\Sigma_t, \Sigma_{t+\Delta t}) &\leq \int_{(\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))^2} \|y_1 - y_2\|^p_{\mathbb{R}^d \times F(U)} \, \mathrm{d}\bar{\pi}(y_1, y_2) \leq \\ &\leq \int_{(\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))^2} \|y_1 - y_2\|^p_{\mathbb{R}^d \times F(U)} \, \mathrm{d}((\mathrm{ev}_t, \mathrm{ev}_{t+\Delta t})_\sharp \Sigma)(y_1, y_2) \leq \\ &\leq \int_{C([0,T], \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))} \|(\mathrm{ev}_t)(\varphi) - (\mathrm{ev}_{t+\Delta t})(\varphi)\|^p_{\mathbb{R}^d \times F(U)} \, \mathrm{d}\Sigma(\varphi) = \\ &= \int_{C([0,T], \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))} \|\varphi(t) - \varphi(t+\Delta t)\|^p_{\mathbb{R}^d \times F(U)} \, \mathrm{d}\Sigma(\varphi),\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato la definizione 1.3.7 di distanza di Wasserstein e il teorema di integrazione rispetto alla misura immagine (1.3.3). Mostriamo ora che l'ultimo membro della disuguaglianza appena ottenuta è infinitesimo per $\Delta t \to 0$. Scegliamo dunque $\varphi \in C([0,T], \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))$, la continuità di φ ci garantisce che

$$\lim_{\Delta t \to 0} \|\varphi(t) - \varphi(t+\Delta t)\|^p_{\mathbb{R}^d \times F(U)} = 0,$$

inoltre, per ogni $\varphi \in C([0,T], \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))$, vale la disuguaglianza

$$\begin{aligned}&\|\varphi(t) - \varphi(t+\Delta t)\|^p_{\mathbb{R}^d \times F(U)} \leq \\ &\leq 2^{p-1}\Big(\|\varphi(t)\|^p_{\mathbb{R}^d \times F(U)} + \|\varphi(t+\Delta t)\|^p_{\mathbb{R}^d \times F(U)}\Big) \leq \\ &\leq 2^{p-1} \cdot 2\Big(\sup_{t \in [0,T]} \|\varphi(t)\|^p_{\mathbb{R}^d \times F(U)}\Big) \leq \\ &\leq 2^p \|\varphi\|^p_\infty.\end{aligned}$$

Osserviamo che la funzione $\varphi \longmapsto 2^p\|\varphi\|_\infty^p$ è integrabile rispetto alla misura Σ in virtù del fatto che $\Sigma \in \mathcal{P}_p(C([0,T],\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)))$. Possiamo dunque applicare il teorema di convergenza dominata e passare al limite sotto il segno di integrale deducendo che

$$\lim_{\Delta t\to 0} \int_{C([0,T],\mathbb{R}^d\times\mathcal{P}(U))} \|\varphi(t) - \varphi(t+\Delta t)\|^p_{\mathbb{R}^d\times F(U)} \,\mathrm{d}\Sigma(\varphi) = 0,$$

da cui, per confronto,

$$\lim_{\Delta t\to 0} W_p^p(\Sigma_t, \Sigma_{t+\Delta t}) = 0,$$

come voluto. $\square$

Riportiamo ora alcune stime relative a b_λ^Σ dovute a [2, Proposition 4.3] e di cui, per completezza, ne riportiamo la dimostrazione.

Proposizione 3.2.5. *Siano $\Sigma, \Sigma^1, \Sigma^2 \in \mathcal{P}_p(C([0,T],\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)))$, con $p \in [1,+\infty)$. Allora valgono le seguenti disuguaglianze*

$$\|b_\lambda^\Sigma(x_1,\lambda,t) - b_\lambda^\Sigma(x_2,\lambda,t)\|_{\mathrm{BL}} \le L_\lambda\|x_1 - x_2\|_{\mathbb{R}^d} \tag{3.2.6a}$$
$$\|b_\lambda^\Sigma(x,\lambda_1,t) - b_\lambda^\Sigma(x,\lambda_2,t)\|_{\mathrm{BL}} \le L_\lambda\|\lambda_1 - \lambda_2\|_{\mathrm{BL}} \tag{3.2.6b}$$
$$\|b_\lambda^\Sigma(x,\lambda,t_1) - b_\lambda^\Sigma(x,\lambda,t_2)\|_{\mathrm{BL}} \le L_\lambda W_1(\Sigma_{t_1},\Sigma_{t_2}) \tag{3.2.6c}$$
$$\|b_\lambda^{\Sigma^1}(x,\lambda,t) - b_\lambda^{\Sigma^2}(x,\lambda,t)\|_{\mathrm{BL}} \le L_\lambda W_1(\Sigma^1_t,\Sigma^2_t). \tag{3.2.6d}$$

per ogni $x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$, $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{P}(U)$ e $t, t_1, t_2 \in [0,T]$. Qui L_λ indica la constante di Lipschitz del campo f_λ.

Dimostrazione. Osserviamo che la condizione $\Sigma \in \mathcal{P}_p(C([0,T],\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)))$, con $p \in [1,+\infty)$ ci garantisce che $\Sigma_t \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))$ in conseguenza della proposizione 3.2.1. Questo, unito alla sublinearità del campo f_λ (conseguenza della lipschitzianità globale (2.1.3)), fa sì che l'integrale di Bochner (3.1.4) che definisce la quantità $b_\lambda^\Sigma(x,\lambda,t)$ sia convergente per ogni $(x,\lambda,t) \in \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U) \times [0,T]$. Ragionamenti analoghi valgono per Σ^1 e Σ^2.

a) Utilizzando la lipschitzianità di f_λ su $\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U) \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)$ (2.1.3) e la proprietà dell'integrale di Bochner (A.2.5) risulta

$$\begin{aligned}
&\|b_\lambda^\Sigma(x_1,\lambda,t) - b_\lambda^\Sigma(x_2,\lambda,t)\|_{\mathrm{BL}} = \\
&= \left\| \int_{\mathbb{R}^d\times\mathcal{P}(U)} \big(f_\lambda(x_1,\lambda,x',\lambda') - f_\lambda(x_2,\lambda,x',\lambda')\big)\,\mathrm{d}\Sigma_t(x',\lambda') \right\|_{\mathrm{BL}} \le \\
&\le \int_{\mathbb{R}^d\times\mathcal{P}(U)} \|f_\lambda(x_1,\lambda,x',\lambda') - f_\lambda(x_2,\lambda,x',\lambda')\|_{\mathrm{BL}}\,\mathrm{d}\Sigma_t(x',\lambda') \le \\
&\le \int_{\mathbb{R}^d\times\mathcal{P}(U)} L_\lambda\|x_1 - x_2\|_{\mathbb{R}^d}\,\mathrm{d}\Sigma_t(x',\lambda') = L_\lambda\|x_1 - x_2\|
\end{aligned}$$

per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$, $\lambda \in \mathcal{P}(U)$ e $t \in [0,T]$.

b) ragionando in maniera analoga otteniamo che

$$\begin{aligned}
&\|b_\lambda^\Sigma(x,\lambda_1,t) - b_\lambda^\Sigma(x,\lambda_2,t)\|_{\mathrm{BL}} = \\
&= \left\| \int_{\mathbb{R}^d\times\mathcal{P}(U)} \big(f_\lambda(x,\lambda_1,x',\lambda') - f_\lambda(x,\lambda_2,x',\lambda')\big)\,\mathrm{d}\Sigma_t(x',\lambda') \right\|_{\mathrm{BL}} \le \\
&\le \int_{\mathbb{R}^d\times\mathcal{P}(U)} \|f_\lambda(x,\lambda_1,x',\lambda') - f_\lambda(x,\lambda_2,x',\lambda')\|_{\mathrm{BL}}\,\mathrm{d}\Sigma_t(x',\lambda') \le \\
&\le \int_{\mathbb{R}^d\times\mathcal{P}(U)} L_\lambda\|\lambda_1 - \lambda_2\|_{\mathrm{BL}}\,\mathrm{d}\Sigma_t(x',\lambda') = L_\lambda\|\lambda_1 - \lambda_2\|_{\mathrm{BL}}
\end{aligned}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^d$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{P}(U)$ e $t \in [0,T]$.

Per la dimostrazione dei punti (c) e (d) ricorreremo a due risultati di carattere generale: il primo è la formula di dualità di Kantorovich-Rubinstein [26, Pag. 60], la quale afferma che, dato uno spazio metrico $(\mathcal{X}, d_{\mathcal{X}})$ completo e separabile, per ogni $\mu, \nu \in \mathcal{P}_1(\mathcal{X})$, si ha

$$W_1(\mu,\nu) = \sup\left\{ \int_X \varphi \,\mathrm{d}\mu - \int_X \varphi \,\mathrm{d}\nu \ : \ \mathrm{Lip}(\varphi) \le 1 \right\}, \tag{3.2.7}$$

il secondo è la formula della norma per dualità, valida in ogni sazio vettoriale normato $(E, \|\cdot\|_E)$, data da

$$\|x\|_E = \max_{\substack{\xi \in E^* \\ \|\xi\|_{E^*} \le 1}} |\xi(x)| = \max_{\substack{\xi \in E^* \\ \|\xi\|_{E^*} \le 1}} \xi(x) \tag{3.2.8}$$

per ogni $x \in E$.

c) Siano ora $x \in \mathbb{R}^d$, $\lambda \in \mathcal{P}(U)$, $t_1, t_2 \in [0,T]$ fissati. Utilizzando la formula per il calcolo della norma per dualità (3.2.8) applicata allo spazio normato $(F(U), \|\cdot\|_{\mathrm{BL}})$ e le proprietà degli integrali di Bochner rispetto ai funzionali lineari (A.2.6) otteniamo

$$\begin{aligned}
&\|b_\lambda^\Sigma(x,\lambda,t_1) - b_\lambda^\Sigma(x,\lambda,t_2)\|_{\mathrm{BL}} = \\
&= \left\| \int_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)} f_\lambda(x,\lambda,x',\lambda') \,\mathrm{d}\Sigma_{t_1}(x',\lambda') - \int_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)} f_\lambda(x,\lambda,x',\lambda') \,\mathrm{d}\Sigma_{t_2}(x',\lambda') \right\|_{\mathrm{BL}} = \\
&= \sup_{\substack{\xi \in F(U)^* \\ \|\xi\|_{F(U)^*} \le 1}} \xi\left(\int_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)} f_\lambda(x,\lambda,x',\lambda') \,\mathrm{d}\big(\Sigma_{t_1} - \Sigma_{t_2}\big)(x',\lambda') \right) = \\
&= \sup_{\substack{\xi \in F(U)^* \\ \|\xi\|_{F(U)^*} \le 1}} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)} \xi\big(f_\lambda(x,\lambda,x',\lambda')\big) \,\mathrm{d}\big(\Sigma_{t_1} - \Sigma_{t_2}\big)(x',\lambda') = \\
&= L_\lambda \cdot \sup_{\substack{\xi \in F(U)^* \\ \|\xi\|_{F(U)^*} \le 1}} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)} \frac{\xi\big(f_\lambda(x,\lambda,x',\lambda')\big)}{L_\lambda} \,\mathrm{d}\big(\Sigma_{t_1} - \Sigma_{t_2}\big)(x',\lambda').
\end{aligned}$$

Osserviamo ora che, scelto arbitrariamente $\xi \in F(U)^*$ con $\|\xi\|_{F(U)^*} \le 1$, la funzione

$$\begin{aligned}
\bar{\varphi}_\xi \colon \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U) &\longrightarrow \mathbb{R} \\
(x',\lambda') &\longmapsto \frac{\xi\big(f_\lambda(x,\lambda,x',\lambda')\big)}{L_\lambda},
\end{aligned}$$

che appare nell'ultimo integrale, è lipschitziana con constante di Lipschitz $\mathrm{Lip}(\bar{\varphi}_\xi) \le 1$. Infatti, per ogni $(x_1', \lambda_1'), (x_2', \lambda_2') \in \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)$, vale

$$\begin{aligned}
|\bar{\varphi}_\xi(x_1',\lambda_1') - \bar{\varphi}_\xi(x_2',\lambda_2')| &= \frac{1}{L_\lambda} \big| \xi\big(f_\lambda(x,\lambda,x_1',\lambda_1')\big) - \xi\big(f_\lambda(x,\lambda,x_2',\lambda_2')\big) \big| = \\
&= \frac{1}{L_\lambda} \big| \xi\big(f_\lambda(x,\lambda,x_1',\lambda_1') - f_\lambda(x,\lambda,x_2',\lambda_2')\big) \big| \le \\
&\le \frac{1}{L_\lambda} \|\xi\|_{F(U)^*} \|f_\lambda(x,\lambda,x_1',\lambda_1') - f_\lambda(x,\lambda,x_2',\lambda_2')\|_{\mathrm{BL}} \le \\
&\le \frac{1}{L_\lambda} \|\xi\|_{F(U)^*} L_\lambda \big(\|x_1' - x_2'\|_{\mathbb{R}^d} + \|\lambda_1' - \lambda_2'\|_{\mathrm{BL}} \big) \le \\
&\le \|x_1' - x_2'\|_{\mathbb{R}^d} + \|\lambda_1' - \lambda_2'\|_{\mathrm{BL}},
\end{aligned}$$

come voluto. Dunque, invocando la formula di dualità di Kantorovich-Rubinstein (3.2.7), otteniamo

$$\begin{aligned}
&\|b_\lambda^\Sigma(x,\lambda,t_1) - b_\lambda^\Sigma(x,\lambda,t_2)\|_{\mathrm{BL}} = \\
&= L_\lambda \cdot \sup_{\substack{\xi \in F(U)^* \\ \|\xi\|_{F(U)^*} \le 1}} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)} \overline{\varphi}_\xi(x',\lambda')\,\mathrm{d}\big(\Sigma_{t_1} - \Sigma_{t_2}\big)(x',\lambda') \le \\
&\le L_\lambda \cdot \sup_{\varphi\,:\,\mathrm{Lip}(\varphi)\le 1} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)} \varphi(x',\lambda')\,\mathrm{d}\big(\Sigma_{t_1} - \Sigma_{t_2}\big)(x',\lambda') = \\
&= L_\lambda W_1(\Sigma_{t_1}, \Sigma_{t_2}).
\end{aligned}$$

d) La dimostrazione è del tutto analoga a quella della disuguaglianza (c). □

Corollario 3.2.9. *Siano $\Sigma, \Sigma^1, \Sigma^2 \in \mathcal{P}_p(C([0,T],\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)))$, con $p \in [1,+\infty)$. Allora, per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{P}(U)$, $t_1, t_2 \in [0,T]$, valgono le disuguaglianze*

$$\|b_\lambda^\Sigma(x_1,\lambda_1,t_1) - b_\lambda^\Sigma(x_2,\lambda_2,t_2)\|_{\mathrm{BL}} \le L_\lambda\big(\|x_1 - x_2\|_{\mathbb{R}^d} + \|\lambda_1 - \lambda_2\|_{\mathrm{BL}} + W_1(\Sigma_{t_1}, \Sigma_{t_2})\big) \quad (3.2.10)$$

e

$$\|b_\lambda^{\Sigma^1}(x_1,\lambda_1,t) - b_\lambda^{\Sigma^2}(x_2,\lambda_2,t)\|_{\mathrm{BL}} \le L_\lambda\big(\|x_1 - x_2\|_{\mathbb{R}^d} + \|\lambda_1 - \lambda_2\|_{\mathrm{BL}} + W_1(\Sigma^1_t, \Sigma^2_t)\big). \quad (3.2.11)$$

Dimostrazione. Sfruttando le stime oggetto della proposizione 3.2.5 e applicando più volte la disuguaglianza triangolare alle norme $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^d}$, $\|\cdot\|_{\mathrm{BL}}$ e alla metrica W_1 si ha che

$$\begin{aligned}
&\|b_\lambda^\Sigma(x_1,\lambda_1,t_1) - b_\lambda^\Sigma(x_2,\lambda_2,t_2)\|_{\mathrm{BL}} = \\
&= \|b_\lambda^\Sigma(x_1,\lambda_1,t_1) - b_\lambda^\Sigma(x_2,\lambda_1,t_1) + b_\lambda^\Sigma(x_2,\lambda_1,t_1) - b_\lambda^\Sigma(x_2,\lambda_2,t_2)\|_{\mathrm{BL}} \le \\
&\le \|b_\lambda^\Sigma(x_1,\lambda_1,t_1) - b_\lambda^\Sigma(x_2,\lambda_1,t_1)\|_{\mathrm{BL}} + \|b_\lambda^\Sigma(x_2,\lambda_1,t_1) - b_\lambda^\Sigma(x_2,\lambda_2,t_2)\|_{\mathrm{BL}} \le \\
&\le L_\lambda\|x_1 - x_2\|_{\mathbb{R}^d} + \|b_\lambda^\Sigma(x_2,\lambda_1,t_1) - b_\lambda^\Sigma(x_2,\lambda_2,t_1) + b_\lambda^\Sigma(x_2,\lambda_2,t_1) - b_\lambda^\Sigma(x_2,\lambda_2,t_2)\|_{\mathrm{BL}} \le \\
&\le L_\lambda\|x_1 - x_2\|_{\mathbb{R}^d} + \|b_\lambda^\Sigma(x_2,\lambda_1,t_1) - b_\lambda^\Sigma(x_2,\lambda_2,t_1)\|_{\mathrm{BL}} + \|b_\lambda^\Sigma(x_2,\lambda_2,t_1) - b_\lambda^\Sigma(x_2,\lambda_2,t_2)\|_{\mathrm{BL}} \le \\
&\le L_\lambda\|x_1 - x_2\|_{\mathbb{R}^d} + L_\lambda\|\lambda_1 - \lambda_2\|_{\mathrm{BL}} + L_\lambda W_1(\Sigma_{t_1}, \Sigma_{t_2})
\end{aligned}$$

per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{P}(U)$, $t_1, t_2 \in [0,T]$, da cui la (3.2.10). Analogamente si ha che

$$\begin{aligned}
&\|b_\lambda^{\Sigma^1}(x_1,\lambda_1,t) - b_\lambda^{\Sigma^2}(x_2,\lambda_2,t)\|_{\mathrm{BL}} = \\
&= \|b_\lambda^{\Sigma^1}(x_1,\lambda_1,t) - b_\lambda^{\Sigma^1}(x_2,\lambda_1,t) + b_\lambda^{\Sigma^1}(x_2,\lambda_1,t) - b_\lambda^{\Sigma^2}(x_2,\lambda_2,t)\|_{\mathrm{BL}} \le \\
&\le \|b_\lambda^{\Sigma^1}(x_1,\lambda_1,t) - b_\lambda^{\Sigma^1}(x_2,\lambda_1,t)\|_{\mathrm{BL}} + \|b_\lambda^{\Sigma^1}(x_2,\lambda_1,t) - b_\lambda^{\Sigma^2}(x_2,\lambda_2,t)\|_{\mathrm{BL}} \le \\
&\le L_\lambda\|x_1 - x_2\|_{\mathbb{R}^d} + \|b_\lambda^{\Sigma^1}(x_2,\lambda_1,t) - b_\lambda^{\Sigma^1}(x_2,\lambda_2,t) + b_\lambda^{\Sigma^1}(x_2,\lambda_2,t) - b_\lambda^{\Sigma^2}(x_2,\lambda_2,t)\|_{\mathrm{BL}} \le \\
&\le L_\lambda\|x_1 - x_2\|_{\mathbb{R}^d} + \|b_\lambda^{\Sigma^1}(x_2,\lambda_1,t) - b_\lambda^{\Sigma^1}(x_2,\lambda_2,t)\|_{\mathrm{BL}} + \|b_\lambda^{\Sigma^1}(x_2,\lambda_2,t) - b_\lambda^{\Sigma^2}(x_2,\lambda_2,t)\|_{\mathrm{BL}} \le \\
&\le L_\lambda\|x_1 - x_2\|_{\mathbb{R}^d} + L_\lambda\|\lambda_1 - \lambda_2\|_{\mathrm{BL}} + L_\lambda W_1(\Sigma^1_t, \Sigma^2_t)
\end{aligned}$$

per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{P}(U)$, $t \in [0,T]$, da cui segue la (3.2.11). □

Le disuguaglianze (3.2.10) e (3.2.11) appena ottenute ci permettono di dedurre le importanti proprietà di lipschitzianità e sublinearità del campo b_λ^Σ. Vale infatti la seguente proposizione.

Proposizione 3.2.12. *Sia $\Sigma \in \mathcal{P}_p(C([0,T],\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)))$, con $p \in [1,+\infty)$. Allora il campo b_λ^Σ è continuo su $\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U) \times [0,T]$, lipschitziano su $\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)$ uniformemente in t ed è sublineare su $\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)$. Valgono infatti le seguenti disuguaglianze:*

$$\|b_\lambda^\Sigma(x_1,\lambda_1,t) - b_\lambda^\Sigma(x_2,\lambda_2,t)\|_{\mathrm{BL}} \le L_\lambda\big(\|x_1 - x_2\|_{\mathbb{R}^d} + \|\lambda_1 - \lambda_2\|_{\mathrm{BL}}\big) \quad (3.2.13)$$

per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{P}(U)$ e $t \in [0,T]$ e

$$\|b_\lambda^\Sigma(x,\lambda,t)\|_{\mathrm{BL}} \le M_\lambda^\Sigma\big(1 + \|x\|_{\mathbb{R}^d} + \|\lambda\|_{\mathrm{BL}}\big) \quad (3.2.14)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^d$, $\lambda \in \mathcal{P}(U)$, $t \in [0,T]$, dove M_λ^Σ è una costante positiva dipendente da L_λ e dalla misura Σ.

Dimostrazione. La continuità su $\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U) \times [0,T]$ segue della disuguaglianza (3.2.10) e della proposizione 3.2.3. La lipschitzianità di b_λ^Σ uniforme in tempo è conseguenza immediata della disuguaglianza (3.2.10): infatti, ponendo $t_1 = t_2 = t$, si ha che

$$\|b_\lambda^\Sigma(x_1,\lambda_1,t) - b_\lambda^\Sigma(x_2,\lambda_2,t)\|_{\mathrm{BL}} \le L_\lambda\big(\|x_1 - x_2\|_{\mathbb{R}^d} + \|\lambda_1 - \lambda_2\|_{\mathrm{BL}}\big)$$

per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{P}(U)$ e $t \in [0,T]$. Per quanto riguarda la sublinearità, invece, consideriamo $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $\lambda_0 \in \mathcal{P}(U)$, $t_0 \in [0,T]$ arbitrari e applichiamo nuovamente la disuguaglianza (3.2.10) ottenendo

$$\begin{aligned}
&\|b_\lambda^\Sigma(x,\lambda,t)\|_{\mathrm{BL}} = \|b_\lambda^\Sigma(x,\lambda,t) - b_\lambda^\Sigma(x_0,\lambda_0,t_0) + b_\lambda^\Sigma(x_0,\lambda_0,t_0)\|_{\mathrm{BL}} \le \\
&\le \|b_\lambda^\Sigma(x_0,\lambda_0,t_0)\|_{\mathrm{BL}} + \|b_\lambda^\Sigma(x,\lambda,t) - b_\lambda^\Sigma(x_0,\lambda_0,t_0)\|_{\mathrm{BL}} \le \\
&\le \|b_\lambda^\Sigma(x_0,\lambda_0,t_0)\|_{\mathrm{BL}} + L_\lambda\big(\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^d} + \|\lambda - \lambda_0\|_{\mathrm{BL}} + W_1(\Sigma_t, \Sigma_{t_0})\big) \le \\
&\le \|b_\lambda^\Sigma(x_0,\lambda_0,t_0)\|_{\mathrm{BL}} + L_\lambda\big(\|x\|_{\mathbb{R}^d} + \|x_0\|_{\mathbb{R}^d} + \|\lambda\|_{\mathrm{BL}} + \|\lambda_0\|_{\mathrm{BL}} + W_1(\Sigma_t, \Sigma_{t_0})\big).
\end{aligned}$$

Osserviamo ora che la funzione

$$\begin{aligned}
[0,T] &\longrightarrow \mathbb{R} \\
t &\longmapsto W_1(\Sigma_t, \Sigma_{t_0})
\end{aligned}$$

è continua sul compatto $[0,T]$. Essa è infatti composizione dell'applicazione

$$\begin{aligned}
[0,T] &\longrightarrow (\mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)), W_1) \\
t &\longmapsto \Sigma_t := (\mathrm{ev}_t)_\sharp \Sigma,
\end{aligned}$$

che è continua in virtù della proposizione 3.2.3, e dell'applicazione

$$\begin{aligned}
(\mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)), W_1) &\longrightarrow \mathbb{R} \\
\Pi &\longmapsto W_1(\Pi, \Sigma_{t_0}),
\end{aligned}$$

che è continua per le proprietà generali delle metriche. Deduciamo dunque, tramite il teorema di Weierstrass, che esiste una costante positiva C^Σ, dipendente dalla misura Σ, tale che

$$W_1(\Sigma_t, \Sigma_{t_0}) \le C^\Sigma, \qquad \forall t \in [0,T].$$

Pertanto concludiamo che

$$\begin{aligned}
&\|b_\lambda^\Sigma(x,\lambda,t)\|_{\mathrm{BL}} \le \\
&\le \|b_\lambda^\Sigma(x_0,\lambda_0,t_0)\|_{\mathrm{BL}} + L_\lambda\big(\|x\|_{\mathbb{R}^d} + \|x_0\|_{\mathbb{R}^d} + \|\lambda\|_{\mathrm{BL}} + \|\lambda_0\|_{\mathrm{BL}} + W_1(\Sigma_t, \Sigma_{t_0})\big) \le \\
&\le \|b_\lambda^\Sigma(x_0,\lambda_0,t_0)\|_{\mathrm{BL}} + L_\lambda\big(\|x\|_{\mathbb{R}^d} + \|x_0\|_{\mathbb{R}^d} + \|\lambda\|_{\mathrm{BL}} + \|\lambda_0\|_{\mathrm{BL}} + C^\Sigma)\big) \le \\
&\le M_\lambda^\Sigma\big(1 + \|x\|_{\mathbb{R}^d} + \|\lambda\|_{\mathrm{BL}}\big)
\end{aligned}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^d$, $\lambda \in \mathcal{P}(U)$ e $t \in [0,T]$, dove M_λ^Σ è un'opportuna costante positiva dipendente da L_λ e da C^Σ, dunque dalla misura Σ. □

Anche nella formulazione di campo medio vale una proprietà analoga a quella espressa dalla proposizione 2.1.12. Vale infatti

Proposizione 3.2.15. *Sia $\Sigma \in \mathcal{P}_p(C([0,T], \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)))$, con $p \in [1, +\infty)$, e θ un numero reale tale che $0 < \theta \le (L_J \operatorname{diam} U)^{-1}$. Allora, per ogni $x \in \mathbb{R}^d$ e $\lambda \in \mathcal{P}(U)$, $t \in [0,T]$, si ha che*

$$\lambda + \theta b_\lambda^\Sigma(x,\lambda,t) \in \mathcal{P}(U). \tag{3.2.16}$$

Dimostrazione. Dalla proposizione 2.1.4 sappiamo che se $0 < \theta \leq (L_J \operatorname{diam} U)^{-1}$ allora per ogni $x, x' \in \mathbb{R}^d$ e $\lambda, \lambda' \in \mathcal{P}(U)$ si ha che $\lambda + \theta f_\lambda(x, \lambda, x', \lambda') \in \mathcal{P}(U)$. Sfruttando il fatto che, per ogni $t \in [0, T]$, $\Sigma_t \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))$ otteniamo che

$$
\begin{aligned}
&\lambda + \theta b_\lambda^\Sigma(x, \lambda, t) = \\
&= \lambda + \theta \int_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)} f_\lambda(x, \lambda, x', \lambda') \, \mathrm{d}\Sigma_t(x', \lambda') = \\
&= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)} \underbrace{\big(\lambda + \theta f_\lambda(x, \lambda, x', \lambda')\big)}_{\in \mathcal{P}(U)} \, \mathrm{d}\Sigma_t(x', \lambda').
\end{aligned}
$$

Osserviamo ora che l'integrale di Bochner all'ultimo membro, per definizione, è il limite di una successione di combinazioni lineari convesse di elementi di $\mathcal{P}(U)$. In virtù della convessità e della chiusura rispetto alla norma $\|\cdot\|_{\mathrm{BL}}$ di $\mathcal{P}(U)$ (conseguenza della sua compattezza, enunciata dalla proposizione 1.3.17) concludiamo che $\lambda + \theta b_\lambda^\Sigma(x, \lambda, t) \in \mathcal{P}(U)$. $\square$

3.3 Costruzione della soluzione al problema di campo medio: schema generale della dimostrazione

Veniamo ora alla questione della buona positura della formulazione di campo medio. Ricapitoliamo gli ingredienti essenziali del problema che ci proponiamo di risolvere. Fissato un orizzonte temporale $T > 0$ e assegnati

- un moto browniano standard d-dimensionale $\overline{B}$ definito su uno spazio di probabilità filtrato $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F})_{t \in [0,T]}, \mathbb{P})$;
- una variabile aleatoria $\overline{X}_0 \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ $\mathscr{F}_0$-misurabile e appartenente a $L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, con $p \in [2, +\infty)$;
- una variabile aleatoria $\overline{\Lambda}_0 \colon \Omega \longrightarrow \mathcal{P}(U)$ e $\mathscr{F}_0$-misurabile;

ricerchiamo un processo stocastico continuo

$$\overline{Y} = (\overline{X}, \overline{\Lambda}) \colon \Omega \longrightarrow C([0, T], \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))$$

tale da soddisfare, quasi certamente, l'equazione

$$
\begin{cases}
\overline{X}(t) = \overline{X}_0 + \displaystyle\int_0^t b_x(\overline{X}(s), \overline{\Lambda}(s)) \, \mathrm{d}s + \sqrt{2\sigma} \overline{B}(t) \\
\overline{\Lambda}(t) = \overline{\Lambda}_0 + \displaystyle\int_0^t b_\lambda^\Sigma(\overline{X}(s), \overline{\Lambda}(s), s) \, \mathrm{d}s,
\end{cases}
\tag{3.3.1}
$$

per ogni $t \in [0, T]$. Dove i campi $b_x \colon \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U) \longrightarrow \mathbb{R}^d$ e $b_\lambda^\Sigma \colon \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U) \times [0, T] \longrightarrow F(U)$ sono dati da

$$
\begin{aligned}
b_x(x, \lambda) &= f_x(x, \lambda) \\
b_\lambda^\Sigma(x, \lambda, t) &= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)} f_\lambda(x, \lambda, x', \lambda') \, \mathrm{d}\Sigma_t(x', \lambda')
\end{aligned}
$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^d$, $\lambda \in \mathcal{P}(U)$, $t \in [0, T]$ e in cui si richiede che

$$\Sigma = \operatorname{Law}(\overline{Y}),$$

posto che $\Sigma_t = (\mathrm{ev}_t)_\sharp \Sigma$. La necessità che Σ, la quale definisce il campo b_λ^Σ (che a sua volta governa l'evoluzione della soluzione), coincida con la legge della soluzione stessa, rappresenta la principale novità rispetto al problema della buona positura nel caso discreto. Per affrontare questa difficoltà costruiremo la soluzione attraverso un argomento di punto fisso, seguendo una strategia adottata di frequente in letteratura (per esempio [5],[9]).

L'argomentazione si articolerà in due fasi: fissato $p \in [2, +\infty)$ in modo tale che $\overline{X}_0 \in L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, e fissata $\Psi \in \mathcal{P}_p(C([0,T], \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)))$, dapprima costruiremo una soluzione $\overline{Y}^\Psi = (\overline{X}^\Psi, \overline{\Lambda}^\Psi)$ del problema ausiliario

$$\begin{cases} \overline{X}^\Psi(t) = \overline{X}_0 + \displaystyle\int_0^t b_x(\overline{X}^\Psi(s), \overline{\Lambda}^\Psi(s))\,\mathrm{d}s + \sqrt{2\sigma}\overline{B}(t) \\ \overline{\Lambda}^\Psi(t) = \overline{\Lambda}_0 + \displaystyle\int_0^t b_\lambda^\Psi(\overline{X}^\Psi(s), \overline{\Lambda}^\Psi(s), s)\,\mathrm{d}s; \end{cases} \tag{3.3.2}$$

successivamente mostreremo che $\overline{Y}^\Psi \in L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ (dunque la soluzione eredità la medesima integrabilità del dato iniziale delle componenti spaziali $\overline{X}_0$) e che sussiste l'unicità per cammini delle soluzioni del problema ausiliario. Risulterà pertanto ben definita un'applicazione

$$\begin{aligned} \mathcal{T} \colon \mathcal{P}_p\big(C([0,T], \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))\big) &\longrightarrow \mathcal{P}_p\big(C([0,T], \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))\big) \\ \Psi &\longmapsto \mathcal{T}(\Psi) := \mathrm{Law}(\overline{Y}^\Psi) \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

che associa a ciascuna misura $\Psi \in \mathcal{P}_p\big(C([0,T], \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))\big)$ la legge del processo stocastico $\overline{Y}^\Psi$, soluzione del problema ausiliario (3.3.2). Il fatto che $\overline{Y}^\Psi \in L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ ci garantirà che $\mathcal{T}$ è effettivamente un'applicazione da $\mathcal{P}_p\big(C([0,T], \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))\big)$ in sé, mentre l'unicità per cammini ci garantirà che, per ogni Ψ, la misura $\mathcal{T}(\Psi)$ risulti univocamente determinata. La seconda fase dell'argomentazione, invece, prevede di mostrare che l'applicazione $\mathcal{T}$ è una contrazione rispetto ad un'opportuna metrica che rende $\mathcal{P}_p\big(C([0,T], \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))\big)$ uno spazio metrico completo. Come vedremo, la metrica che utilizzeremo consisterà in un'appropriata distanza di Wasserstein. A questo punto sarà possibile applicare il *teorema delle contrazioni di Banach-Caccioppoli* e ottenere l'esistenza di un'unica misura $\Sigma \in \mathcal{P}_p\big(C([0,T], \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))\big)$ tale da soddisfare l'equazione di *punto fisso*

$$\mathcal{T}(\Sigma) = \mathrm{Law}(\overline{Y}^\Sigma) = \Sigma. \tag{3.3.4}$$

Ponendo dunque $\overline{Y} := \overline{Y}^\Sigma$ otterremo la soluzione cercata del problema di campo medio (3.3.1). Nei prossimi paragrafi affronteremo nel dettaglio la costruzione di tale soluzione.

3.4 Costruzione della soluzione del problema ausiliario

Nelle pagine seguenti descriveremo la costruzione della soluzione al problema ausiliario (3.3.2), successivamente ricaveremo una stima a priori sui momenti delle soluzioni e infine ne proveremo l'unicità per cammini. Iniziamo con la dimostrazione di esistenza delle soluzioni: assegnati il moto browniano $\overline{B}$ e i dati iniziali $\overline{X}_0$, $\overline{\Lambda}_0$, fissiamo $p \in [2, +\infty)$ in modo tale che risulti $\overline{X}_0 \in L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ (ciò è possibile per via delle ipotesi fatte sul dato iniziale delle componenti spaziali) e fissiamo inoltre una misura di probabilità

$$\Psi \in \mathcal{P}_p\big(C([0,T], \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))\big).$$

In virtù della proposizione 3.2.12, il campo b_λ^Ψ è lipschitziano uniformemente in tempo e sublineare su $\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)$, dunque esistono costanti positive L_λ, M_λ^Ψ, quest'ultima dipendente anche da Ψ, tali che

$$\|b_\lambda^\Psi(x_1, \lambda_1, t) - b_\lambda^\Psi(x_2, \lambda_2, t)\|_{\mathrm{BL}} \le L_\lambda\big(\|x_1 - x_2\|_{\mathbb{R}^d} + \|\lambda_1 - \lambda_2\|_{\mathrm{BL}}\big) \tag{3.4.1}$$

per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{P}(U)$, $t \in [0,T]$ e

$$\|b_\lambda^\Psi(x, \lambda, t)\|_{\mathrm{BL}} \le M_\lambda^\Psi\big(1 + \|x\|_{\mathbb{R}^d} + \|\lambda\|_{\mathrm{BL}}\big) \tag{3.4.2}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^d$, $\lambda \in \mathcal{P}(U)$, $t \in [0,T]$. Per completezza, ricordiamo che il campo b_x (che non è altro che il campo f_x, ma che abbiamo deciso di rinominare per uniformità di notazione) gode delle proprietà di lipschitzianità e sublinearità su $\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)$. Pertanto esistono costanti positive L_x, M_x tali che

$$\|b_x(x_1, \lambda_1, t) - b_x(x_2, \lambda_2, t)\|_{\mathbb{R}^d} \le L_x\big(\|x_1 - x_2\|_{\mathbb{R}^d} + \|\lambda_1 - \lambda_2\|_{\mathrm{BL}}\big) \tag{3.4.3}$$

per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{P}(U)$, $t \in [0, T]$ e

$$\|b_x(x, \lambda, t)\|_{\mathrm{BL}} \le M_x\big(1 + \|x\|_{\mathbb{R}^d} + \|\lambda\|_{\mathrm{BL}}\big) \tag{3.4.4}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^d$, $\lambda \in \mathcal{P}(U)$, $t \in [0, T]$.

Anche la dimostrazione di esistenza del problema ausiliario si fonda sul *metodo delle approssimazioni successive* e sulle proprietà strutturali dei campi b_x e b_λ^Σ, più precisamente la loro lipschitzianità, sublinearità e la proprietà di chiusura contenuta nella proposizione (3.2.15). Osserviamo che, a differenza del problema discreto, il problema ausiliario presenta un'esplicita dipendenza dal tempo dei campi, tuttavia, come vedremo, le tecniche impiegate nel caso discreto possono essere estese in modo da poter affrontare anche la buona positura del problema ausiliario (3.3.2).

Prima di procedere con la costruzione della soluzione di (3.3.2), riscriviamo il problema in una forma equivalente. Fissato un numero reale θ tale che $0 < \theta \le (L_J \operatorname{diam} U)^{-1}$, introduciamo il campo

$$\begin{aligned} g_\lambda^\Psi \colon \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U) \times [0, T] &\longrightarrow \mathcal{P}(U) \\ (x, \lambda, t) &\longmapsto g_\lambda^\Psi(x, \lambda, t) := \lambda + \theta b_\lambda^\Psi(x, \lambda, t); \end{aligned}$$

il fatto che g_λ^Ψ assuma valori in $\mathcal{P}(U)$ discende dalla proposizione 3.2.15. Il campo appena introdotto ci permette di riscrivere b_λ^Ψ come

$$b_\lambda^\Psi(x, \lambda, t) = \frac{g_\lambda^\Psi(x, \lambda, t) - \lambda}{\theta},$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^d$, $\lambda \in \mathcal{P}(U)$, $t \in [0, T]$, consentendoci di riformulare il problema ausiliario (3.3.2) come

$$\begin{cases} \overline{X}^\Psi(t) = \overline{X}_0 + \displaystyle\int_0^t b_x(\overline{X}^\Psi(s), \overline{\Lambda}^\Psi(s))\, \mathrm{d}s + \sqrt{2\sigma}\,\overline{B}(t) \\ \overline{\Lambda}^\Psi(t) = \overline{\Lambda}_0 + \displaystyle\int_0^t \frac{g_\lambda^\Psi(\overline{X}^\Psi(s), \overline{\Lambda}^\Psi(s), s) - \overline{\Lambda}^\Psi(s)}{\theta}\, \mathrm{d}s. \end{cases} \tag{3.4.5}$$

Questa riformulazione ci permette di evidenziare l'analogia formale tra l'equazione che governa l'evoluzione delle strategie miste e l'equazione oggetto di [8, Corollaire 1.1], dalla cui dimostrazione abbiamo tratto alcune idee rilevanti nella argomentazione che proponiamo.

Osserviamo infine che il campo g_λ^Ψ eredita da b_λ^Ψ le proprietà di lipschitzianità uniforme in tempo e di sublinearità.

Proposizione 3.4.6. *Il campo g_λ^Ψ è continuo su $\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U) \times [0, T]$, lipschitziano su $\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)$ uniformemente in t ed è sublineare su $\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)$. Valgono infatti le seguenti disuguaglianze:*

$$\|g_\lambda^\Psi(x_1, \lambda_1, t) - g_\lambda^\Psi(x_2, \lambda_2, t)\|_{\mathrm{BL}} \le \widetilde{L}_\lambda\big(\|x_1 - x_2\|_{\mathbb{R}^d} + \|\lambda_1 - \lambda_2\|_{\mathrm{BL}}\big) \tag{3.4.7}$$

per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{P}(U)$ e $t \in [0, T]$ e

$$\|g_\lambda^\Psi(x, \lambda, t)\|_{\mathrm{BL}} \le \widetilde{M}_\lambda^\Psi\big(1 + \|x\|_{\mathbb{R}^d} + \|\lambda\|_{\mathrm{BL}}\big) \tag{3.4.8}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^d$, $\lambda \in \mathcal{P}(U)$, $t \in [0, T]$; $\widetilde{L}_\lambda$ dove $\widetilde{M}_\lambda^\Psi$ sono costanti positive e quest'ultima dipende dalla misura Ψ.

Dimostrazione. La continuità di g_λ^Ψ è conseguenza immediata della continuità di di b_λ^Ψ. Invece, dalla definizione di g_λ^Ψ e dalla lipschitzianità di b_λ^Ψ espressa dalla disuguaglianza (3.2.13) segue che

$$\begin{aligned}
&\|g_\lambda^\Psi(x_1,\lambda_1,t) - g_\lambda^\Psi(x_2,\lambda_2,t)\|_{\mathrm{BL}} = \\
&= \|\lambda_1 + \theta b_\lambda^\Psi(x_1,\lambda_1,t) - \lambda_2 - \theta b_\lambda^\Psi(x_2,\lambda_2,t)\|_{\mathrm{BL}} \leq \\
&\leq \|\lambda_1 - \lambda_2\|_{\mathrm{BL}} + \theta L_\lambda\big(\|x_1 - x_2\|_{\mathbb{R}^d} + \|\lambda_1 - \lambda_2\|_{\mathrm{BL}}\big) \leq \\
&\leq \widetilde{L}_\lambda\big(\|x_1 - x_2\|_{\mathbb{R}^d} + \|\lambda_1 - \lambda_2\|_{\mathrm{BL}}\big)
\end{aligned}$$

per un'opportuna costante positiva $\widetilde{L}_\lambda$. Analogamente, dalla sublinearità di b_λ^Ψ (disuguaglianza (3.2.14)) otteniamo che

$$\begin{aligned}
&\|g_\lambda^\Psi(x,\lambda,t)\|_{\mathrm{BL}} = \|\lambda + \theta b_\lambda^\Psi(x,\lambda,t)\|_{\mathrm{BL}} \leq \\
&\leq \|\lambda\|_{\mathrm{BL}} + \theta\|b_\lambda^\Psi(x,\lambda,t)\|_{\mathrm{BL}} \leq \\
&\leq \|\lambda\|_{\mathrm{BL}} + \theta M_\lambda^\Psi\big(1 + \|x\|_{\mathbb{R}^d} + \|\lambda\|_{\mathrm{BL}}\big) \leq \\
&\leq \widetilde{M}_\lambda^\Psi\big(1 + \|x\|_{\mathbb{R}^d} + \|\lambda\|_{\mathrm{BL}}\big)
\end{aligned}$$

per un'opportuna costante positiva $\widetilde{M}_\lambda^\Psi$. Osserviamo che la dipendenza di M_λ^Ψ, stabilita nella proposizione 3.2.12, si ripercuote sulla costante di sublinearità $\widetilde{M}_\lambda^\Psi$. □

Osservazione 8. Sottolineiamo che solamente la costante di sublinearità M_λ^Ψ dipende dalla misura Ψ, mentre la costante di lipschitzianità $\widetilde{L}_\lambda$ non presenta alcuna dipendenza da essa. Infatti, $\widetilde{L}_\lambda$ risulta essenzialmente determinata dalla costante di lipschitzianità del campo f_λ, la quale è a sua volta dettata dalle quantità L_J e $\operatorname{diam} U$. L'ininfluenza di Ψ sulla costante $\widetilde{L}_\lambda$ sarà di fondamentale importanza nella dimostrazione della contrattività della mappa $\mathcal{T}$, come vedremo successivamente.

Notazione. Per alleggerire la notazione, nel seguito indicheremo la soluzione del problema ausiliario costruita a partire dalla misura Ψ semplicemente come $\overline{Y}$, invece di della più completa, ma più pesante, $\overline{Y}^\Psi$. Questa scelta è giustificata dal fatto che, in tutto questo paragrafo, considereremo la misura Ψ fissata una volta per tutte.

Procediamo ora alla costruzione della soluzione del problema ausiliario (3.3.2) tramite il *metodo delle approssimazioni successive.* Definiamo induttivamente le iterate come segue:

$$\begin{cases}
\overline{X}_{n+1}(t) := \overline{X}_0 + \displaystyle\int_0^t b_x(\overline{X}_n(s), \overline{\Lambda}_n(s))\,\mathrm{d}s + \sqrt{2\sigma}\overline{B}(t) \\
\overline{\Lambda}_{n+1}(t) := e^{-\frac{t}{\theta}}\overline{\Lambda}_0 + \dfrac{1}{\theta}\displaystyle\int_0^t e^{\frac{s-t}{\theta}} g_\lambda^\Psi(\overline{X}_n(s), \overline{\Lambda}_n(s), s)\,\mathrm{d}s
\end{cases} \tag{3.4.9}$$

per ogni $t \in [0,T]$ e $n = 0,1,2,\dots$ L'iterata iniziale è definita, per ogni $t \in [0,T]$, come

$$\begin{cases}
\overline{X}_0(t) = \overline{X}_0 \\
\overline{\Lambda}_0(t) = \overline{\Lambda}_0
\end{cases}. \tag{3.4.10}$$

Anticipiamo che molti dei ragionamenti che seguono sono del tutto analoghi a quelli seguiti per la costruzione della soluzione al problema discreto (2.0.4), con l'eccezione di alcune piccole modifiche. Pertanto, per non appesantire la trattazione, dimostreremo per esteso solo alcune proposizioni relative all'esistenza e all'unicità delle soluzioni problema ausiliario, mentre di altre riporteremo solo un cenno della dimostrazione, segnalandone la stretta analogia con le dimostrazioni elaborate nel caso discreto.

Proposizione 3.4.11. *I processi stocastici $\overline{X}_n$ e $\overline{\Lambda}_n$ definiti dalle (3.4.9) e (3.4.10) sono continui e adattati alla filtrazione $(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$ per ogni $n = 0,1,2,\dots$*

Dimostrazione. La dimostrazione è del tutto analoga a quella della proposizione 2.2.3. □

Osservazione 9. Per ogni $n = 0, 1, 2, \dots$ e per ogni $t \in [0, T]$ si ha che $\overline{\Lambda}_n(t) \in \mathcal{P}(U)$. Infatti, per ipotesi, $\overline{\Lambda}_0(t) \equiv \overline{\Lambda}_0 \in \mathcal{P}(U)$; inoltre, se $\overline{\Lambda}_n(t) \in \mathcal{P}(U)$ per ogni $t \in [0, T]$, ciò è vero anche per $\overline{\Lambda}_{n+1}(t)$, infatti, per via del fatto che g_λ^Ψ assume valori in $\mathcal{P}(U)$, conseguenza della proposizione 3.2.15, si ha

$$g_\lambda^\Psi(\overline{X}_n(s), \overline{\Lambda}_n(s), s) \in \mathcal{P}(U), \quad \forall s \in [0, T],$$

dunque, per ogni $t \in [0, T]$, risulta

$$\frac{\dfrac{1}{\theta}\displaystyle\int_0^t e^{\frac{s-t}{\theta}} g_\lambda^\Psi(\overline{X}_n(s), \overline{\Lambda}_n(s), s)\,\mathrm{d}s}{\dfrac{1}{\theta}\displaystyle\int_0^t e^{\frac{s-t}{\theta}}\,\mathrm{d}s} \in \mathcal{P}(U)$$

per via della convessità di $\mathcal{P}(U)$. Notando che $\frac{1}{\theta}\int_0^t e^{\frac{s-t}{\theta}}\,\mathrm{d}s = 1 - e^{-\frac{t}{\theta}}$ si ha che

$$\frac{1}{\theta}\int_0^t e^{\frac{s-t}{\theta}} g_\lambda^\Psi(\overline{X}_n(s), \overline{\Lambda}_n(s), s)\,\mathrm{d}s \in (1 - e^{-\frac{t}{\theta}})\mathcal{P}(U)$$

da cui, nuovamente per la convessità di $\mathcal{P}(U)$, risulta

$$\overline{\Lambda}_{n+1}(t) = e^{-\frac{t}{\theta}}\overline{\Lambda}_0 + \frac{1}{\theta}\int_0^t e^{\frac{s-t}{\theta}} g_\lambda^\Psi(\overline{X}_n(s), \overline{\Lambda}_n(s), s)\,\mathrm{d}s \in \mathcal{P}(U)$$

e l'asserto segue per induzione su n. Il fatto che $\overline{\Lambda}_n(t) \in \mathcal{P}(U)$ ci assicura che, per ogni $\omega \in \Omega$ fissato, l'applicazione $t \longmapsto \overline{\Lambda}_n(\omega, t)$ descriva delle traiettorie continue che rimangono confinate nel convesso $\mathcal{P}(U)$, regione in cui valgono le stime di lipschitzianità uniforme in tempo e sublinearità dei campi b_x e g_λ^Ψ espresse dalle equazioni (3.4.3), (3.4.4), (3.4.7) e (3.4.8).

Introduciamo le quattro stime che rappresentano l'analogo, per il problema ausiliario (3.3.2), delle disuguaglianze (2.2.6a), (2.2.6a), (2.2.6a) e (2.2.6a) utilizzate della dimostrazione della buona positura del problema discreto.

Proposizione 3.4.12. *Valgono le seguenti disuguaglianze:*

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]}\|\overline{X}_1(u) - \overline{X}_0\|_{\mathbb{R}^d}^2\Big] \le 6M_x^2t^2\Big(1 + \mathbb{E}\big[\|\overline{X}_0\|_{\mathbb{R}^d}^2\big] + \mathbb{E}\big[\|\overline{\Lambda}_0\|_{\mathrm{BL}}^2\big]\Big) + 16\sigma t \tag{3.4.13a}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]}\|\overline{\Lambda}_1(u) - \overline{\Lambda}_0\|_{\mathrm{BL}}^2\Big] \le \frac{6}{\theta^2}(\widetilde{M}_\lambda^\Psi)^2t^2\Big(1 + \mathbb{E}\big[\|\overline{X}_0\|_{\mathbb{R}^d}^2\big] + \mathbb{E}\big[\|\overline{\Lambda}_0\|_{\mathrm{BL}}^2\big]\Big)\\ + \frac{2}{\theta^2}t^2\mathbb{E}\big[\|\overline{\Lambda}_0\|_{\mathrm{BL}}^2\big]\end{aligned} \tag{3.4.13b}$$

per ogni $t \in [0, T]$ e

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]}\|\overline{X}_{n+1}(u) - \overline{X}_n(u)\|_{\mathbb{R}^d}^2\Big] \le 2tL_x^2\mathbb{E}\Big[\int_0^t \big(\|\overline{X}_n(s) - \overline{X}_{n-1}(s)\|_{\mathbb{R}^d}^2\\ + \|\overline{\Lambda}_n(s) - \overline{\Lambda}_{n-1}(s)\|_{\mathrm{BL}}^2\big)\,\mathrm{d}s\Big]\end{aligned} \tag{3.4.13c}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]}\|\overline{\Lambda}_{n+1}(u) - \overline{\Lambda}_n(u)\|_{\mathbb{R}^d}^2\Big] \le \frac{2}{\theta^2}t\widetilde{L}_\lambda^2\mathbb{E}\Big[\int_0^t \big(\|\overline{X}_n(s) - \overline{X}_{n-1}(s)\|_{\mathbb{R}^d}^2\\ + \|\overline{\Lambda}_n(s) - \overline{\Lambda}_{n-1}(s)\|_{\mathrm{BL}}^2\big)\,\mathrm{d}s\Big]\end{aligned} \tag{3.4.13d}$$

per ogni $n = 1, 2, \dots$ e ogni $t \in [0, T]$, dove $M_x, \widetilde{M}_\lambda^\Psi$ e $L_x, \widetilde{L}_\lambda$ indicano le costanti di sublinearità e lipschitzianità dei campi b_x e g_λ^Ψ rispettivamente.

Dimostrazione. a) Consideriamo $t \in [0,T]$ fissato e $u \in [0,t]$. Vale

$$\begin{aligned}
\|\overline{X}_1(u) - \overline{X}_0\|^2_{\mathbb{R}^d} &= \left\| \int_0^u b_x(\overline{X}_0, \overline{\Lambda}_0)\,\mathrm{d}s + \sqrt{2\sigma}\,\overline{B}(u) \right\|^2_{\mathbb{R}^d} \leq \\
&\leq \left(\left\| \int_0^u b_x(\overline{X}_0, \overline{\Lambda}_0)\,\mathrm{d}s \right\|_{\mathbb{R}^d} + \left\| \sqrt{2\sigma}\,\overline{B}(u) \right\|_{\mathbb{R}^d} \right)^2 \leq \\
&\leq 2\left(\left\| \int_0^u b_x(\overline{X}_0, \overline{\Lambda}_0)\,\mathrm{d}s \right\|^2_{\mathbb{R}^d} + \left\| \sqrt{2\sigma}\,\overline{B}(u) \right\|^2_{\mathbb{R}^d} \right) \leq \\
&\leq 2\left(\int_0^u \left\| b_x(\overline{X}_0, \overline{\Lambda}_0) \right\|_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}s \right)^2 + 2\cdot 2\sigma \|\overline{B}(u)\|^2_{\mathbb{R}^d} \leq \\
&\leq 2\left(\int_0^u \left\| b_x(\overline{X}_0, \overline{\Lambda}_0) \right\|_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}s \right)^2 + 2\cdot 2\sigma \|\overline{B}(u)\|^2_{\mathbb{R}^d},
\end{aligned}$$

in cui abbiamo utilizzato le proprietà dell'integrale di Lebesgue e la disuguaglianza (A.4.2). Come conseguenza della disuguaglianza di Hölder si ha che, per ogni $u \in [0,t]$,

$$\|\overline{X}_1(u) - \overline{X}_0\|^2_{\mathbb{R}^d} \leq 2u \int_0^u \left\| b_x(\overline{X}_0, \overline{\Lambda}_0) \right\|^2_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}s + 4\sigma \|\overline{B}(u)\|^2_{\mathbb{R}^d}.$$

Facendo uso della sublinearità di b_x su $\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)$ (3.4.4) e nuovamente della disuguaglianza (A.4.2) si ottiene

$$\begin{aligned}
\|b_x(\overline{X}_0, \overline{\Lambda}_0)\|^2_{\mathbb{R}^d} &\leq [M_x(1 + \|\overline{X}_0\|_{\mathbb{R}^d} + \|\overline{\Lambda}_0\|_{\mathrm{BL}})]^2 \leq \\
&\leq 3M_x^2(1 + \|\overline{X}_0\|^2_{\mathbb{R}^d} + \|\overline{\Lambda}_0\|^2_{\mathrm{BL}}),
\end{aligned}$$

che combinata con la disuguaglianza precedente fornisce

$$\begin{aligned}
&\|\overline{X}_1(u) - \overline{X}_0\|^2_{\mathbb{R}^d} \leq 2u^2 \left\| b_x(\overline{X}_0, \overline{\Lambda}_0) \right\|^2_{\mathbb{R}^d} + 4\sigma \|\overline{B}(u)\|^2_{\mathbb{R}^d} \\
&\leq 6u^2 M_x^2 (1 + \|\overline{X}_0\|^2_{\mathbb{R}^d} + \|\overline{\Lambda}_0\|^2_{\mathrm{BL}}) + 4\sigma \|\overline{B}(u)\|^2_{\mathbb{R}^d}.
\end{aligned}$$

Prendiamo ora l'estremo superiore di entrambi i membri sull'intervallo $[0,t]$ e successivamente prendiamo i valori attesi ottenendo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]} \|\overline{X}_1(u) - \overline{X}_0\|^2_{\mathbb{R}^d} \Big] \leq 6u^2 M_x^2 \Big(1 + \mathbb{E}\big[\|\overline{X}_0\|^2_{\mathbb{R}^d}\big] + \mathbb{E}\big[\|\overline{\Lambda}_0\|^2_{\mathrm{BL}}\big] \Big) \\
+ 4\sigma \mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]} \|\overline{B}(u)\|^2_{\mathbb{R}^d} \Big],
\end{aligned}$$

applicando la disuguaglianza di Doob (A.4.4) con $p = 2$ al moto browniano d-dimensionale $\overline{B}$ deduciamo che

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]} \|\overline{X}_1(u) - \overline{X}_0\|^2_{\mathbb{R}^d} \Big] \leq 6u^2 M_x^2 \Big(1 + \mathbb{E}\big[\|\overline{X}_0\|^2_{\mathbb{R}^d}\big] + \mathbb{E}\big[\|\overline{\Lambda}_0\|^2_{\mathrm{BL}}\big] \Big) \\
+ 4\sigma \cdot 4\mathbb{E}\big[\|\overline{B}(t)\|^2_{\mathbb{R}^d} \big];
\end{aligned}$$

osserviamo ora che

$$\mathbb{E}\big[\|\overline{B}(t)\|^2_{\mathbb{R}^d}\big] = \mathrm{Var}(\overline{B}(t)) = t,$$

da cui segue la disuguaglianza

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]} \|\overline{X}_1(u) - \overline{X}_0\|^2_{\mathbb{R}^d} \Big] \leq 6M_x^2 t^2 \Big(1 + \mathbb{E}\big[\|\overline{X}_0\|^2_{\mathbb{R}^d}\big] \\
+ \mathbb{E}\big[\|\overline{\Lambda}_0\|^2_{\mathrm{BL}}\big] \Big) + 16\sigma t.
\end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di $t \in [0,T]$ segue la (3.4.13a).

b) Consideriamo $t \in [0,T]$ fissato e $u \in [0,t]$. Vale

$$\begin{aligned}
\|\bar{\Lambda}_1(u) - \bar{\Lambda}_0\|_{\mathrm{BL}}^2 &= \left\| \left(e^{-\frac{u}{\theta}} - 1\right)\bar{\Lambda}_0 + \int_0^u \frac{1}{\theta} e^{\frac{s-u}{\theta}} g_\lambda^\Psi(\bar{X}_0, \bar{\Lambda}_0, s)\, \mathrm{d}s \right\|_{\mathrm{BL}}^2 \leq \\
&\leq \left(\|\left(e^{-\frac{u}{\theta}} - 1\right)\bar{\Lambda}_0\|_{\mathrm{BL}} + \left\| \int_0^u \frac{1}{\theta} e^{\frac{s-u}{\theta}} g_\lambda^\Psi(\bar{X}_0, \bar{\Lambda}_0, s)\, \mathrm{d}s \right\|_{\mathrm{BL}} \right)^2 \leq \\
&\leq 2\left(\|\left(e^{-\frac{u}{\theta}} - 1\right)\bar{\Lambda}_0\|_{\mathrm{BL}}^2 + \left\| \int_0^u \frac{1}{\theta} e^{\frac{s-u}{\theta}} g_\lambda^\Psi(\bar{X}_0, \bar{\Lambda}_0, s)\, \mathrm{d}s \right\|_{\mathrm{BL}}^2 \right) \leq \\
&\leq 2|e^{-\frac{u}{\theta}} - 1|^2 \|\bar{\Lambda}_0\|_{\mathrm{BL}}^2 + 2\left(\int_0^u \left| \frac{1}{\theta} e^{\frac{s-u}{\theta}} \right| \left\| g_\lambda^\Psi(\bar{X}_0, \bar{\Lambda}_0, s) \right\|_{\mathrm{BL}} \mathrm{d}s \right)^2,
\end{aligned}$$

in cui abbiamo utilizzato la proprietà dell'integrale di Bochner (A.2.5) e la disuguaglianza (A.4.2). Notiamo ora che

$$|e^{-\frac{u}{\theta}} - 1| = 1 - e^{-\frac{u}{\theta}} \leq \frac{u}{\theta}, \quad \forall u \in [0,t]$$

da cui

$$|e^{-\frac{u}{\theta}} - 1|^2 \leq \frac{u^2}{\theta^2}, \quad \forall u \in [0,t];$$

notiamo inoltre che per ogni u fissato e $s \in [0,u]$ si ha

$$\left| \frac{1}{\theta} e^{\frac{s-u}{\theta}} \right| = \frac{1}{\theta} e^{\frac{s-u}{\theta}} \leq \frac{1}{\theta}.$$

Di conseguenza otteniamo che

$$\begin{aligned}
\|\bar{\Lambda}_1(u) - \bar{\Lambda}_0\|_{\mathrm{BL}}^2 &\leq 2\frac{u^2}{\theta^2}\|\bar{\Lambda}_0\|_{\mathrm{BL}}^2 + 2\frac{1}{\theta^2}\left(\int_0^u \left\| g_\lambda^\Psi(\bar{X}_0, \bar{\Lambda}_0, s) \right\|_{\mathrm{BL}} \mathrm{d}s \right)^2 \leq \\
&\leq 2\frac{u^2}{\theta^2}\|\bar{\Lambda}_0\|_{\mathrm{BL}}^2 + 2\frac{1}{\theta^2} u \int_0^u \left\| g_\lambda^\Psi(\bar{X}_0, \bar{\Lambda}_0, s) \right\|_{\mathrm{BL}}^2 \mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato la disuguagalianza di Hölder nell'ultimo passaggio. Facciamo ora uso della sublinearità di g_λ^Ψ su $\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)$ (3.4.8) e nuovamente della disuguaglianza (A.4.2) ottenendo, analogamente al punto (a),

$$\begin{aligned}
\|g_\lambda^\Psi(\bar{X}_0, \bar{\Lambda}_0, s)\|_{\mathrm{BL}}^2 &\leq [\widetilde{M}_\lambda^\Psi(1 + \|\bar{X}_0\|_{\mathbb{R}^d} + \|\bar{\Lambda}_0\|_{\mathrm{BL}})]^2 \leq \\
&\leq 3(\widetilde{M}_\lambda^\Psi)^2(1 + \|\bar{X}_0\|_{\mathbb{R}^d}^2 + \|\bar{\Lambda}_0\|_{\mathrm{BL}}^2),
\end{aligned}$$

da cui

$$\|\bar{\Lambda}_1(u) - \bar{\Lambda}_0\|_{\mathrm{BL}}^2 \leq 2\frac{u^2}{\theta^2}\|\bar{\Lambda}_0\|_{\mathrm{BL}}^2 + 6\frac{u^2}{\theta^2}(\widetilde{M}_\lambda^\Psi)^2(1 + \|\bar{X}_0\|_{\mathbb{R}^d}^2 + \|\bar{\Lambda}_0\|_{\mathrm{BL}}^2)$$

per ogni $u \in [0,t]$.

In maniera simile alla dimostrazione della stima (3.4.13a), prendiamo l'estremo superiore sull'intervallo $[0,t]$ di entrambi i membri e successivamente prendiamo i valori attesi, ottenendo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]} \|\bar{\Lambda}_1(u) - \bar{\Lambda}_0\|_{\mathrm{BL}}^2\Big] &\leq \frac{6}{\theta^2}(\widetilde{M}_\lambda^\Psi)^2 t^2 \Big(1 + \mathbb{E}\big[\|\bar{X}_0\|_{\mathbb{R}^d}^2\big] \\
&\quad + \mathbb{E}\big[\|\bar{\Lambda}_0\|_{\mathrm{BL}}^2\big]\Big) + \frac{2}{\theta^2} t^2 \mathbb{E}\big[\|\bar{\Lambda}_0\|_{\mathrm{BL}}^2\big]
\end{aligned}$$

e dall'arbitrarietà di $t \in [0,T]$ segue la disuguaglianza (3.4.13b).

c) Consideriamo ora $t \in [0,T]$ e $n \in \mathbb{N}^+$ fissati e sia $u \in [0,t]$. Abbiamo che

$$\begin{aligned}
&\|\overline{X}_{n+1}(u) - \overline{X}_n(u)\|^2_{\mathbb{R}^d} = \\
&= \bigg\| \overline{X}_0 + \int_0^u b_x(\overline{X}_n(s), \overline{\Lambda}_n(s))\, \mathrm{d}s + \sqrt{2\sigma}\,\overline{B}(t) - \\
&- \Big(\overline{X}_0 + \int_0^u b_x(\overline{X}_{n-1}(s), \overline{\Lambda}_{n-1}(s))\, \mathrm{d}s + \sqrt{2\sigma}\,\overline{B}(t) \Big) \bigg\|^2_{\mathbb{R}^d} = \\
&= \bigg\| \int_0^u b_x(\overline{X}_n(s), \overline{\Lambda}_n(s))\, \mathrm{d}s - \int_0^u b_x(\overline{X}_{n-1}(s), \overline{\Lambda}_{n-1}(s))\, \mathrm{d}s \bigg\|^2_{\mathbb{R}^d} = \\
&= \bigg\| \int_0^u \Big(b_x(\overline{X}_n(s), \overline{\Lambda}_n(s)) - b_x(\overline{X}_{n-1}(s), \overline{\Lambda}_{n-1}(s)) \Big)\, \mathrm{d}s \bigg\|^2_{\mathbb{R}^d} \le \\
&\le \left(\int_0^u \big\| b_x(\overline{X}_n(s), \overline{\Lambda}_n(s)) - b_x(\overline{X}_{n-1}(s), \overline{\Lambda}_{n-1}(s)) \big\|_{\mathbb{R}^d}\, \mathrm{d}s \right)^2 .
\end{aligned}$$

Per la lipschitzianità di b_x su $\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)$ (3.4.3) si ha che, per ogni $s \in [0,u]$,

$$\begin{aligned}
&\|b_x(\overline{X}_n(s), \overline{\Lambda}_n(s)) - b_x(\overline{X}_{n-1}(s), \overline{\Lambda}_{n-1}(s))\|_{\mathbb{R}^d} \le \\
&\le L_x(\|\overline{X}_n(s) - \overline{X}_{n-1}(s)\|_{\mathbb{R}^d} + \|\overline{\Lambda}_n(s) - \overline{\Lambda}_{n-1}(s)\|_{\mathrm{BL}}).
\end{aligned}$$

Dalla disuguaglianza di Hölder e dalla lipschitzianità di b_x si deduce che

$$\begin{aligned}
&\|\overline{X}_{n+1}(u) - \overline{X}_n(u)\|^2_{\mathbb{R}^d} = \\
&\le \left(\int_0^u \big\| b_x(\overline{X}_n(s), \overline{\Lambda}_n(s)) - b_x(\overline{X}_{n-1}(s), \overline{\Lambda}_{n-1}(s)) \big\|_{\mathbb{R}^d}\, \mathrm{d}s \right)^2 \le \\
&\le u \int_0^u \big\| b_x(\overline{X}_n(s), \overline{\Lambda}_n(s)) - b_x(\overline{X}_{n-1}(s), \overline{\Lambda}_{n-1}(s)) \big\|^2_{\mathbb{R}^d}\, \mathrm{d}s \le \\
&\le u \int_0^u \Big(L_x\big(\|\overline{X}_n(s) - \overline{X}_{n-1}(s)\|_{\mathbb{R}^d} + \|\overline{\Lambda}_n(s) - \overline{\Lambda}_{n-1}(s)\|_{\mathrm{BL}}\big) \Big)^2 \mathrm{d}s \le \\
&\le 2uL_x^2 \int_0^u \big(\|\overline{X}_n(s) - \overline{X}_{n-1}(s)\|^2_{\mathbb{R}^d} + \|\overline{\Lambda}_n(s) - \overline{\Lambda}_{n-1}(s)\|^2_{\mathrm{BL}}\big)\, \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Prendendo ora l'estremo superiore di entrambi i membri su $[0,t]$ e successivamente i valori attesi otteniamo

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\sup_{u \in [0,t]} \|\overline{X}_{n+1}(u) - \overline{X}_n(u)\|^2_{\mathbb{R}^d} \Big] \le \\
&\le 2tL_x^2 \mathbb{E}\bigg[\int_0^t \big(\|\overline{X}_n(s) - \overline{X}_{n-1}(s)\|^2_{\mathbb{R}^d} + \|\overline{\Lambda}_n(s) - \overline{\Lambda}_{n-1}(s)\|^2_{\mathrm{BL}}\big)\, \mathrm{d}s \bigg],
\end{aligned}$$

dall'arbitrarietà di $t \in [0,T]$ e $n \in \mathbb{N}^+$ segue (3.4.13c).

d) Consideriamo, come prima, $t \in [0,T]$ e $n \in \mathbb{N}^+$ fissati; sia inoltre $u \in [0,t]$. Abbiamo che

$$
\begin{aligned}
&\|\overline{\Lambda}_{n+1}(u) - \overline{\Lambda}_n(u)\|^2_{\mathrm{BL}} \\
&= \Bigg\| e^{-\frac{u}{\theta}}\overline{\Lambda}_0 + \frac{1}{\theta}\int_0^u e^{\frac{s-u}{\theta}} g^\Psi_\lambda(\overline{X}_n(s), \overline{\Lambda}_n(s), s)\,\mathrm{d}s - \\
&- \left(e^{-\frac{u}{\theta}}\overline{\Lambda}_0 + \frac{1}{\theta}\int_0^u e^{\frac{s-u}{\theta}} g^\Psi_\lambda(\overline{X}_{n-1}(s), \overline{\Lambda}_{n-1}(s), s)\,\mathrm{d}s \right)\Bigg\|^2_{\mathrm{BL}} = \\
&= \left\| \int_0^u \frac{e^{\frac{s-u}{\theta}}}{\theta} g^\Psi_\lambda(\overline{X}_n(s), \overline{\Lambda}_n(s), s)\,\mathrm{d}s - \int_0^u \frac{e^{\frac{s-u}{\theta}}}{\theta} g^\Psi_\lambda(\overline{X}_{n-1}(s), \overline{\Lambda}_{n-1}(s), s)\,\mathrm{d}s \right\|^2_{\mathrm{BL}} = \\
&= \left\| \int_0^u \frac{e^{\frac{s-u}{\theta}}}{\theta} \Big(g^\Psi_\lambda(\overline{X}_n(s), \overline{\Lambda}_n(s), s) - g^\Psi_\lambda(\overline{X}_{n-1}(s), \overline{\Lambda}_{n-1}(s), s)\Big)\,\mathrm{d}s \right\|^2_{\mathrm{BL}} \leq \\
&\leq \left(\int_0^u \left| \frac{e^{\frac{s-u}{\theta}}}{\theta} \right| \big\| g^\Psi_\lambda(\overline{X}_n(s), \overline{\Lambda}_n(s), s) - g^\Psi_\lambda(\overline{X}_{n-1}(s), \overline{\Lambda}_{n-1}(s), s)\big\|_{\mathrm{BL}}\,\mathrm{d}s \right)^2
\end{aligned}
$$

Ricordiamo ora che $|e^{\frac{s-u}{\theta}}| = e^{\frac{s-u}{\theta}} \leq 1$ per ogni u fissato e $s \in [0,u]$, da cui

$$
\left| \frac{1}{\theta} e^{\frac{s-u}{\theta}} \right| = \frac{1}{\theta} e^{\frac{s-u}{\theta}} \leq \frac{1}{\theta}.
$$

La lipschitzianità uniforme in tempo di g^Ψ_λ (3.4.7), inoltre, ci dà la disuguaglianza

$$
\begin{aligned}
&\|g^\Psi_\lambda(\overline{X}_n(s), \overline{\Lambda}_n(s), s) - g_\lambda(\overline{X}_{n-1}(s), \overline{\Lambda}_{n-1}(s), s)\|_{\mathrm{BL}} \leq \\
&\leq \widetilde{L}_\lambda(\|\overline{X}_n(s) - \overline{X}_{n-1}(s)\|_{\mathbb{R}^d} + \|\overline{\Lambda}_n(s) - \overline{\Lambda}_{n-1}(s)\|_{\mathrm{BL}}).
\end{aligned}
$$

per ogni $s \in [0,u]$.

Dunque otteniamo

$$
\begin{aligned}
&\|\overline{\Lambda}_{n+1}(u) - \overline{\Lambda}_n(u)\|^2_{\mathrm{BL}} \leq \\
&\leq \frac{1}{\theta^2}\left(\int_0^u \big\| g^\Psi_\lambda(\overline{X}_n(s), \overline{\Lambda}_n(s), s) - g^\Psi_\lambda(\overline{X}_{n-1}(s), \overline{\Lambda}_{n-1}(s), s)\big\|_{\mathrm{BL}}\,\mathrm{d}s \right)^2 \leq \\
&\leq \frac{u}{\theta^2}\int_0^u \big\| g^\Psi_\lambda(\overline{X}_n(s), \overline{\Lambda}_n(s), s) - g^\Psi_\lambda(\overline{X}_{n-1}(s), \overline{\Lambda}_{n-1}(s), s)\big\|^2_{\mathrm{BL}}\,\mathrm{d}s \leq \\
&\leq 2\frac{u}{\theta^2}\widetilde{L}^2_\lambda \int_0^u \big(\|\overline{X}_n(s) - \overline{X}_{n-1}(s)\|^2_{\mathbb{R}^d} + \|\overline{\Lambda}_n(s) - \overline{\Lambda}_{n-1}(s)\|^2_{\mathrm{BL}}\big)\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

Prendiamo infine l'estremo superiore di entrambi i membri su $[0,t]$ e successivamente prendiamo i valori attesi, ottenendo

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]} \|\overline{\Lambda}_{n+1}(u) - \overline{\Lambda}_n(u)\|^2_{\mathbb{R}^d} \Big] \leq \\
&\leq \frac{2}{\theta^2} t \widetilde{L}^2_\lambda \mathbb{E}\left[\int_0^t \big(\|\overline{X}_n(s) - \overline{X}_{n-1}(s)\|^2_{\mathbb{R}^d} + \|\overline{\Lambda}_n(s) - \overline{\Lambda}_{n-1}(s)\|^2_{\mathrm{BL}}\big)\,\mathrm{d}s \right]
\end{aligned}
$$

dall'arbitrarietà di $t \in [0,T]$ e $n \in \mathbb{N}^+$ segue (3.4.13d). □

Osservazione 10. Osserviamo che le quantità $\mathbb{E}[\|\overline{X}_0\|^2_{\mathbb{R}^d}]$ e $\mathbb{E}[\|\overline{\Lambda}_0\|^2_{\mathrm{BL}}]$ a secondo membro della (3.4.13a) e della (3.4.13b) risultano entrambe finite. La prima risulta finita per via dell'ipotesi sul dato iniziale $\overline{X}_0 \in L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, mentre la seconda risulta finita per via della limitatezza di $\mathcal{P}(U)$ in $(F(U), \|\cdot\|_{\mathrm{BL}})$, la quale è conseguenza della compattezza di $\mathcal{P}(U)$ in tale spazio di Banach (proposizione 1.3.17).

Possiamo ora definire la successione di processi stocastici continui $\{\overline{Y}_n\}_{n=0}^{\infty}$ tramite cui costruiremo la soluzione al problema ausiliario (3.3.2). Per ogni $n = 0, 1, 2, \dots$ poniamo

$$\overline{Y}_n(t) := \big(\overline{X}_n(t), \overline{\Lambda}_n(t)\big) \in \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U) \tag{3.4.14}$$

per ogni $t \in [0, T]$, dove i processi $\overline{X}_n$, $\overline{\Lambda}_n$ sono definiti mediante le iterate (3.4.9). Una soluzione del problema (3.3.2) sarà ottenuta come limite uniforme dei processi $\{\overline{Y}_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Proposizione 3.4.15. *Sia $\{\overline{Y}_n\}_{n=0}^{\infty}$ la successione di processi stocastici continui e a valori in $\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)$ definita dalla (3.4.14). Allora vale*

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]} \|\overline{Y}_n(u) - \overline{Y}_{n-1}(u)\|^2_{\mathbb{R}^d\times F(U)}\Big] \leq \frac{(\mathcal{R}t)^n}{n!} \tag{3.4.16}$$

per ogni $n = 1, 2, \dots$ e per ogni $t \in [0, T]$. La costante $\mathcal{R}$ a secondo membro è un numero positivo dipendente da θ, σ, T, dalle costanti di sublinearità $M_x, \widetilde{M}^{\Psi}_{\lambda}$ e di lipschitzianità $L_x, \widetilde{L}_{\lambda}$ rispettivamente dei campi b_x e g^{Ψ}_{λ} e dai momenti secondi dei dati iniziali, ma non da n.

Dimostrazione. Ci limitiamo a dare una traccia dell'argomentazione. La dimostrazione viene condotta in maniera del tutto simile a quella della disuguaglianza (2.2.9), con le stime (3.4.13) a svolgere il ruolo delle stime (2.2.6). □

Nel seguito costruiremo una soluzione del problema di campo medio come limite uniforme dei processi $\{\overline{Y}_n\}_{n=0}^{\infty}$. A tale scopo considereremo lo spazio vettoriale di funzioni continue $C([0, T], \mathbb{R}^d \times F(U))$ dotato della norma uniforme

$$\|f\|_\infty := \max_{t\in[0,T]} \|f(t)\|_{\mathbb{R}^d\times F(U)}, \quad \forall f \in C([0, T], \mathbb{R}^d \times F(U)).$$

Questa norma lo rende uno spazio di Banach in virtù della completezza di $\mathbb{R}^d \times F(U)$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^d\times F(U)}$. Inoltre il sottoinsieme $C([0, T], \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))$, a cui appartengono le traiettorie dei processi stocastici $\overline{Y}_n$, risulta chiuso in $(C([0, T], \mathbb{R}^d \times F(U)), \|\cdot\|_\infty)$. La chiusura di tale sottoinsieme è conseguenza della chiusura di $\mathcal{P}(U)$ in $(F(U), \|\cdot\|_{\mathrm{BL}})$ (ricordiamo che $\mathcal{P}(U)$ è un sottoinsieme compatto dello spazio di Banach $(F(U), \|\cdot\|_{\mathrm{BL}})$ per via della proposizione 1.3.17 ed è dunque chiuso).

Proposizione 3.4.17. *Per quasi ogni $\omega \in \Omega$ la successione*

$$\{\overline{Y}_n(\omega)\}_{n=0}^{\infty} \subseteq C([0, T], \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))$$

è di Cauchy in $(C([0, T], \mathbb{R}^d \times F(U)), \|\cdot\|_\infty)$.

Dimostrazione. Per via dell'analogia formale tra la disuguaglianza (2.2.9) e la disuguaglianza (3.4.16) la dimostrazione risulta del tutto analoga a quella della proposizione 2.2.10. □

La precedente proposizione individua un insieme $\mathcal{Z} \in \mathscr{F}$, $\mathbb{P}$-trascurabile, tale per cui la successione $\{\overline{Y}_n(\omega)\}_{n=0}^{\infty}$ è di Cauchy in $(C([0, T], \mathbb{R}^d \times F(U)), \|\cdot\|_\infty)$ per ogni $\omega \in \mathcal{Z}^c$. Possiamo dunque definire il processo stocastico

$$\overline{Y} \colon \Omega \to C([0, T], \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))$$

come

$$\overline{Y}(\omega, t) := \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \overline{Y}_n(\omega, t), & \omega \in \mathcal{Z}^c \\ \tilde{y}, & \omega \in \mathcal{Z} \end{cases} \tag{3.4.18}$$

per ogni $t \in [0, T]$; dove il limite che compare nella prima condizione è da intendersi come il limite uniforme della successione $\{\overline{Y}_n(\omega)\}_{n=0}^{\infty}$ in $(C([0, T], \mathbb{R}^d \times F(U)), \|\cdot\|_\infty)$ e $\tilde{y}$ è un elemento arbitrario di $\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)$.

Proposizione 3.4.19. *Il processo stocastico $\overline{Y}$ definito dalla (3.4.18) è continuo e adattato alla filtrazione $(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$.*

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga a quella della proposizione 2.2.14. □

Osservazione 11. Osserviamo inoltre che $\overline{Y}$ assume effettivamente valori nel convesso $\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)$; infatti, per costruzione, per ogni $t \in [0,T]$ e $n \in \mathbb{N}$ si ha che $\overline{Y}_n(t) \in \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)$. La chiusura di $\mathcal{P}(U)$ rispetto alla norma BL, conseguenza della sua compattezza (proposizione 1.3.17), ci garantisce che, passando al limite, $\overline{Y}(t) \in \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)$.

Il processo continuo $\overline{Y}$ si rivelerà essere una soluzione del problema ausiliario (3.3.2). Osserviamo che possiamo scrivere $\overline{Y}$ come

$$\overline{Y}(t) = (\overline{X}(t), \overline{\Lambda}(t)), \quad \forall t \in [0,T]$$

con $\overline{X}$ e $\overline{\Lambda}$ processi stocastici a valori in $\mathbb{R}^d$ e $\mathcal{P}(U)$ rispettivamente. Per costruzione, si ha che $\forall \omega \in \mathscr{Z}^c$ le successioni di funzioni continue $\{\overline{X}_n(\omega)\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{\overline{\Lambda}_n(\omega)\}_{n=0}^{\infty}$ convergono uniformemente a $\overline{X}(\omega)$ e $\overline{\Lambda}(\omega)$ rispettivamente.

Facciamo ora tendere $n \to \infty$ e passiamo al limite nella definizione delle iterate (3.4.9). Osserviamo che, per via la lipschitzianità di b_x (3.4.3) e g_λ^Ψ (3.4.7), si hanno le disuguaglianze

$$\sup_{t\in[0,T]} \|b_x(\overline{X}_n(t), \overline{\Lambda}_n(t)) - b_x(\overline{X}(t), \overline{\Lambda}(t))\|_{\mathbb{R}^d} \leq L_x \sup_{t\in[0,T]} \|\overline{Y}_n(t) - \overline{Y}(t))\|_{\mathbb{R}^d \times F(U)}$$

e

$$\sup_{t\in[0,T]} \|g_\lambda^\Psi(\overline{X}_n(t), \overline{\Lambda}_n(t), t) - g_\lambda^\Psi(\overline{X}(t), \overline{\Lambda}(t), t)\|_{\mathrm{BL}} \leq \widetilde{L}_\lambda \sup_{t\in[0,T]} \|\overline{Y}_n(t) - \overline{Y}(t))\|_{\mathbb{R}^d \times F(U)}.$$

Poiché per ogni $\omega \in \mathscr{Z}^c$ si ha che $\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} \|\overline{Y}_n(t) - \overline{Y}(t))\|_{\mathbb{R}^d \times F(U)} = 0$ deduciamo che le due successioni di funzioni continue

$$\begin{aligned} t \in [0,T] &\longmapsto b_x(\overline{X}_n(\omega,t), \overline{\Lambda}_n(\omega,t)) \in \mathbb{R}^d \\ t \in [0,T] &\longmapsto g_\lambda^\Psi(\overline{X}_n(\omega,t), \overline{\Lambda}_n(\omega,t), t) \in \mathcal{P}(U) \end{aligned} \qquad n = 0,1,2\dots$$

convergono uniformemente alle funzioni

$$\begin{aligned} t \in [0,T] &\longmapsto b_x(\overline{X}(\omega,t), \overline{\Lambda}(\omega,t)) \in \mathbb{R}^d \\ t \in [0,T] &\longmapsto g_\lambda^\Psi(\overline{X}(\omega,t), \overline{\Lambda}(\omega,t), t) \in \mathcal{P}(U) \end{aligned}$$

rispettivamente, e queste ultime risultano a loro volta continue. La convergenza uniforme di tali successioni di funzioni ci permette di concludere che su $\mathscr{Z}^c$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t b_x(\overline{X}_n(s), \overline{\Lambda}_n(s))\,\mathrm{d}s = \int_0^t b_x(\overline{X}(s), \overline{\Lambda}(s))\,\mathrm{d}s$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\theta} \int_0^t e^{\frac{s-t}{\theta}} g_\lambda^\Psi(\overline{X}_n(s), \overline{\Lambda}_n(s), s)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{\theta} \int_0^t e^{\frac{s-t}{\theta}} g_\lambda^\Psi(\overline{X}(s), \overline{\Lambda}(s), s)\,\mathrm{d}s.$$

Pertanto otteniamo che quasi certamente su Ω vale

$$\begin{cases} \overline{X}(t) = \overline{X}_0 + \displaystyle\int_0^t b_x(\overline{X}(s), \overline{\Lambda}(s))\,\mathrm{d}s + \sqrt{2\sigma}\overline{B}(t) \\ \overline{\Lambda}(t) = e^{-\frac{t}{\theta}}\overline{\Lambda}_0 + \dfrac{1}{\theta}\displaystyle\int_0^t e^{\frac{s-t}{\theta}} g_\lambda^\Psi(\overline{X}(s), \overline{\Lambda}(s), s)\,\mathrm{d}s \end{cases} \tag{3.4.20}$$

per ogni $t \in [0,T]$. A partire dall'uguaglianza (3.4.20) è possibile dedurre che il processo $\overline{Y} = (\overline{X}, \overline{\Lambda})$ risolve il problema originario (3.3.2). Vale infatti la seguente proposizione.

Proposizione 3.4.21. *Il processo stocastico continuo $\overline{Y}$ definito dalla (3.4.18) soddisfa, quasi certamente,*

$$\begin{cases} \overline{X}(t) = \overline{X}_0 + \displaystyle\int_0^t b_x(\overline{X}(s), \overline{\Lambda}(s))\,\mathrm{d}s + \sqrt{2\sigma}\overline{B}(t) \\ \overline{\Lambda}(t) = \overline{\Lambda}_0 + \displaystyle\int_0^t b_\lambda^\Psi(\overline{X}(s), \overline{\Lambda}(s), s)\,\mathrm{d}s \end{cases} \tag{3.4.22}$$

per ogni $t \in [0, T]$.

Dimostrazione. La dimostrazione è del tutto analoga a quella della proposizione 2.2.16 per il problema discreto. □

Risulta dunque dimostrata l'esistenza di una soluzione del problema ausiliario (3.3.2).

3.5 Unicità della soluzione del problema ausiliario

Mostriamo ora l'unicità per cammini delle soluzioni del problema ausiliario (3.3.2). Ricordiamo che, in questa sezione, tutte le soluzioni del problema (3.3.2) sono determinate a partire da una misura di probabilità $\Psi \in \mathcal{P}_p(C([0,T], \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)))$ fissata. Analogamente a quanto fatto per il problema discreto, precisiamo la nozione di unicità che adottiamo tramite la seguente

Definizione 3.5.1 (Unicità delle soluzioni per il problema ausiliario (3.3.2))**.** *Diciamo che vi è unicità della soluzione del problema (3.3.2) se, date due soluzioni $\overline{Y}_1, \overline{Y}_2$ definite sul medesimo spazio di probabilità filtrato $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathbb{P})$, relative alla medesima misura di probabilità $\Psi \in \mathcal{P}_p(C([0,T], \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)))$ e al medesimo moto browniano $\overline{B}$, si ha che*

$$\mathbb{P}\Big(\overline{Y}_1(t) = \overline{Y}_2(t), \text{ per ogni } t \in [0,T]\Big) = 1 \tag{3.5.2}$$

3.5.1 Una stima a priori per le soluzioni del problema ausiliario

Prima di procedere alla dimostrazione dell'unicità per cammini delle soluzioni del problema ausiliario (3.3.2), enunciamo una stima a priori sui momenti p-esimi delle soluzioni del tutto analoga alla (2.3.4).

Proposizione 3.5.3. *Sia $\overline{Y} = (\overline{X}, \overline{\Lambda})$ una soluzione di*

$$\begin{cases} \overline{X}(t) = \overline{X}_0 + \displaystyle\int_0^t b_x(\overline{X}(s), \overline{\Lambda}(s))\,\mathrm{d}s + \sqrt{2\sigma}\overline{B}(t) \\ \overline{\Lambda}(t) = \overline{\Lambda}_0 + \displaystyle\int_0^t b_\lambda^\Psi(\overline{X}(s), \overline{\Lambda}(s), s)\,\mathrm{d}s \end{cases}$$

per ogni $t \in [0,T]$. Siano inoltre $\Psi \in \mathcal{P}_p(C([0,T], \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)))$ e $\overline{X}_0$ una variabile aleatoria a valori in $\mathbb{R}^d$ appartenente a $L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, con $p \geq 2$. Allora vale la stima

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[0,T]} \|\overline{Y}(t)\|^p_{\mathbb{R}^d \times F(U)}\Big] \leq C\Big(1 + \mathbb{E}\big[\|\overline{X}_0\|^p_{\mathbb{R}^d}\big]\Big), \tag{3.5.4}$$

in cui C è una costante positiva dipendente da σ, T, M_x, p.

Dimostrazione. Anche in questo caso diamo un cenno della dimostrazione. Sfruttando la sublinearità di b_x su $\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)$ (3.4.4), la continuità del processo $\overline{X}$ e la limitatezza dell'insieme $\mathcal{P}(U)$ in $(F(U), \|\cdot\|_{\mathrm{BL}})$ è possibile argomentare come nella dimostrazione della proposizione 2.3.3. □

3.5.2 La dimostrazione di unicità per il problema ausiliario

Veniamo ora alla dimostrazione dell'unicità delle soluzioni del problema ausiliario (3.3.2).

Dimostrazione. Così come accaduto per la proposizione 3.5.3, anche in questo caso la dimostrazione procede in maniera simile a quella dell'analogo risultato per il problema discreto. Scegliamo tuttavia di riportarla per esteso.

Siano $\overline{Y}_1$ e $\overline{Y}_2$ due soluzioni del problema ausiliario (3.3.2) definite sul medesimo spazio di probabilità filtrato $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathbb{P})$, relative alla medesima misura di probabilità $\Psi \in \mathcal{P}_p(C([0,T], \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)))$ e al medesimo moto browniano $\overline{B}$. Allora $\overline{Y}_1$, $\overline{Y}_2$ sono due processi stocastici continui a valori in $\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)$ che soddisfano, quasi certamente,

$$\begin{cases} \overline{X}_i(t) = \overline{X}_0 + \displaystyle\int_0^t b_x(\overline{X}_i(s), \overline{\Lambda}_i(s))\,\mathrm{d}s + \sqrt{2\sigma}\overline{B}(t) \\ \overline{\Lambda}_i(t) = \overline{\Lambda}_0 + \displaystyle\int_0^t b_\lambda^\Psi(\overline{X}_i(s), \overline{\Lambda}_i(s), s)\,\mathrm{d}s \end{cases}$$

per ogni $t \in [0,T]$ e $i = 1, 2$. Sia ora $t \in [0,T]$ fissato e $u \in [0,t]$; valgono le disuguaglianze

$$\begin{aligned} &\|\overline{X}_1(u) - \overline{X}_2(u)\|^2_{\mathbb{R}^d} = \\ &= \left\| \int_0^u \Big(b_x(\overline{X}_1(s), \overline{\Lambda}_1(s)) - b_x(\overline{X}_2(s), \overline{\Lambda}_2(s)) \Big)\,\mathrm{d}s \right\|^2_{\mathbb{R}^d} \leq \\ &\leq \left(\int_0^u \|b_x(\overline{X}_1(s), \overline{\Lambda}_1(s)) - b_x(\overline{X}_2(s), \overline{\Lambda}_2(s))\|_{\mathbb{R}^d}\,\mathrm{d}s \right)^2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} &\|\overline{\Lambda}_1(u) - \overline{\Lambda}_2(u)\|^2_{\mathrm{BL}} = \\ &= \left\| \int_0^u \Big(b_\lambda^\Psi(\overline{X}_1(s), \overline{\Lambda}_1(s), s) - b_\lambda^\Psi(\overline{X}_2(s), \overline{\Lambda}_2(s), s) \Big)\,\mathrm{d}s \right\|^2_{\mathrm{BL}} \leq \\ &\leq \left(\int_0^u \|b_\lambda^\Psi(\overline{X}_1(s), \overline{\Lambda}_1(s), s) - b_\lambda^\Psi(\overline{X}_2(s), \overline{\Lambda}_2(s), s)\|_{\mathrm{BL}}\,\mathrm{d}s \right)^2. \end{aligned}$$

Consideriamo la prima delle due; applicando la disuguaglianza di Hölder all'ultimo membro e facendo uso della lipschitzianità di b_x su $\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)$ (3.4.3) otteniamo

$$\begin{aligned} &\|\overline{X}_1(u) - \overline{X}_2(u)\|^2_{\mathbb{R}^d} \leq \\ &\leq u \int_0^u \Big(\|b_x(\overline{X}_1(s), \overline{\Lambda}_1(s)) - b_x(\overline{X}_2(s), \overline{\Lambda}_2(s))\|_{\mathbb{R}^d} \Big)^2 \mathrm{d}s \leq \\ &\leq u L_x^2 \int_0^u \Big(\|\overline{X}_1(s) - \overline{X}_2(s)\|_{\mathbb{R}^d} + \|\overline{\Lambda}_1(s) - \overline{\Lambda}_2(s)\|_{\mathrm{BL}} \Big)^2 \mathrm{d}s; \end{aligned}$$

analogamente, considerando la seconda disuguaglianza, applicando la disuguaglianza di Hölder e la lipschitzianità di b_λ^Ψ, uniforme in tempo, su $\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)$ (3.2.13) si trae

$$\begin{aligned} &\|\overline{\Lambda}_1(u) - \overline{\Lambda}_2(u)\|^2_{\mathrm{BL}} \leq \\ &\leq u \int_0^u \Big(\|b_\lambda^\Psi(\overline{X}_1(s), \overline{\Lambda}_1(s)) - b_\lambda^\Psi(\overline{X}_2(s), \overline{\Lambda}_2(s))\|_{\mathrm{BL}} \Big)^2 \mathrm{d}s \leq \\ &\leq u L_\lambda^2 \int_0^u \Big(\|\overline{X}_1(s) - \overline{X}_2(s)\|_{\mathbb{R}^d} + \|\overline{\Lambda}_1(s) - \overline{\Lambda}_2(s)\|_{\mathrm{BL}} \Big)^2 \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Prendendo ora l'estremo superiore su $[0,t]$ e prendendo i valori attesi nelle due disuguaglianze sopra ottenute si ha

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]} \|\overline{X}_1(u) - \overline{X}_2(u)\|^2_{\mathbb{R}^d} \Big] \leq \\ &\leq \mathbb{E}\left[t L_x^2 \int_0^t \Big(\|\overline{X}_1(s) - \overline{X}_2(s)\|_{\mathbb{R}^d} + \|\overline{\Lambda}_1(s) - \overline{\Lambda}_2(s)\|_{\mathrm{BL}} \Big)^2 \mathrm{d}s \right] \end{aligned}$$

e analogamente

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]}\|\overline{\Lambda}_1(u)-\overline{\Lambda}_2(u)\|^2_{\mathrm{BL}}\Big]\leq\\&\leq\mathbb{E}\bigg[tL_\lambda^2\int_0^t\Big(\|\overline{X}_1(s)-\overline{X}_2(s)\|_{\mathbb{R}^d}+\|\overline{\Lambda}_1(s)-\overline{\Lambda}_2(s)\|_{\mathrm{BL}}\Big)^2\,\mathrm{d}s\bigg].\end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di t segue che entrambe le disuguaglianze sono valide per ogni $t\in[0,T]$. Come conseguenza otteniamo che, per ogni $t\in[0,T]$, vale

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]}\|\overline{Y}_1(u)-\overline{Y}_2(u)\|^2_{\mathbb{R}^d\times F(U)}\Big]=\\&=\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]}\big(\|\overline{X}_1(u)-\overline{X}_2(u)\|_{\mathbb{R}^d}+\|\overline{\Lambda}_1(u)-\overline{\Lambda}_2(u)\|_{\mathrm{BL}}\big)^2\Big]\leq\\&\leq2\bigg(\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]}\|\overline{X}_1(u)-\overline{X}_2(u)\|^2_{\mathbb{R}^d}\Big]+\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]}\|\overline{\Lambda}_1(u)-\overline{\Lambda}_2(u)\|^2_{\mathrm{BL}}\Big]\bigg)\leq\\&\leq2t\big(L_x^2+L_\lambda^2\big)\mathbb{E}\bigg[\int_0^t\Big(\|\overline{X}_1(s)-\overline{X}_2(s)\|_{\mathbb{R}^d}+\|\overline{\Lambda}_1(s)-\overline{\Lambda}_2(s)\|_{\mathrm{BL}}\Big)^2\,\mathrm{d}s\bigg]\leq\\&\leq4tL^2\int_0^t\mathbb{E}\bigg[\Big(\|\overline{X}_1(s)-\overline{X}_2(s)\|_{\mathbb{R}^d}+\|\overline{\Lambda}_1(s)-\overline{\Lambda}_2(s)\|_{\mathrm{BL}}\Big)^2\bigg]\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo posto $L:=\max\{L_x,L_\lambda\}$ e abbiamo utilizzato il teorema di Fubini (data la positività degli integrandi) per scambiare il valore atteso con l'integrale in tempo. Dunque abbiamo che per ogni $t\in[0,T]$ si ha

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]}\|\overline{Y}_1(u)-\overline{Y}_2(u)\|^2_{\mathbb{R}^d\times F(U)}\Big]\leq\\&\leq4tL^2\int_0^t\mathbb{E}\Big[\|\overline{Y}_1(s)-\overline{Y}_2(s)\|^2_{\mathbb{R}^d\times F(U)}\Big]\,\mathrm{d}s\leq\\&\leq4TL^2\int_0^t\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,s]}\|\overline{Y}_1(u)-\overline{Y}_2(u)\|^2_{\mathbb{R}^d\times F(U)}\Big]\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

ponendo ora,

$$v(t):=\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]}\|\overline{Y}_1(u)-\overline{Y}_2(u)\|^2_{\mathbb{R}^d\times F(U)}\Big],\qquad\forall t\in[0,T]$$

concludiamo che

$$v(t)\leq4TL^2\int_0^t v(s)\,\mathrm{d}s,\qquad\forall t\in[0,T].$$

Osserviamo che possiamo *quasi* applicare il lemma di Grönwall (A.4.7) con $c=0$ e $w\equiv1$ alla funzione v. L'unico ostacolo alla sua applicazione è ora dato dalla necessità di dimostrare a priori che la funzione v è limitata su $[0,T]$. Tuttavia proprio la stima a priori oggetto della proposizione 3.5.3 ci assicura che, per ogni $t\in[0,T]$, si ha

$$\begin{aligned}v(t)&=\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]}\|\overline{Y}_1(u)-\overline{Y}_2(u)\|^2_{\mathbb{R}^d\times F(U)}\Big]\leq\\&\leq\mathbb{E}\bigg[\sup_{u\in[0,t]}\Big(\|\overline{Y}_1(u)\|_{\mathbb{R}^d\times F(U)}+\|\overline{Y}_2(u)\|_{\mathbb{R}^d\times F(U)}\Big)^2\bigg]\leq\\&\leq2\bigg(\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]}\|\overline{Y}_1(u)\|^2_{\mathbb{R}^d\times F(U)}\Big]+\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]}\|\overline{Y}_2(u)\|^2_{\mathbb{R}^d\times F(U)}\Big]\bigg)\leq\\&\leq4C\Big(1+\mathbb{E}\big[\|\overline{X}_0\|^2_{\mathbb{R}^d}\big]\Big)\end{aligned}$$

da cui segue la limitatezza di v su $[0,T]$.

Ora possiamo finalmente applicare il lemma di Grönwall ottenendo

$$v(t) = 0 \qquad \forall t \in [0,T].$$

Ponendo, in particolare, $t = T$ si deduce che

$$v(T) = \mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[0,T]} \|\overline{Y}_1(t) - \overline{Y}_2(t)\|^2_{\mathbb{R}^d\times F(U)}\Big] = 0.$$

Pertanto possiamo concludere che

$$\mathbb{P}\bigg(\sup_{t\in[0,T]} \|\overline{Y}_1(t) - \overline{Y}_2(t)\|^2_{\mathbb{R}^d\times F(U)} = 0\bigg) = 1$$

dunque

$$\mathbb{P}\Big(\overline{Y}_1(t) = \overline{Y}_2(t), \text{ per ogni } t \in [0,T]\Big) = 1$$

da cui l'unicità della soluzione. □

3.6 Costruzione della soluzione tramite il teorema delle contrazioni

I risultati della sezione precedente ci permettono di affermare che, data una misura $\Psi \in \mathcal{P}_p(C([0,T],\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)))$, un moto browniano standard d-dimensionale $\overline{B}$ e dati iniziali $\overline{X}_0 \in L^p(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ e $\overline{\Lambda}_0$ con $p \in [2,+\infty)$, possiamo costruire una soluzione $\overline{Y}^\Psi$ (in questa sezione torniamo ad esplicitare, nella notazione, la dipendenza delle soluzioni dalla misura Ψ) del problema ausiliario (3.3.2). Inoltre, la stima a priori (3.5.4) asserisce che

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[0,T]} \|\overline{Y}^\Psi(t)\|^p_{\mathbb{R}^d\times F(U)}\Big] \le C\Big(1 + \mathbb{E}\big[\|\overline{X}_0\|^p_{\mathbb{R}^d}\big]\Big) < \infty,$$

dove C è una costante positiva dipendente da σ, T, M_x, p. Di conseguenza, il processo stocastico $\overline{Y}^\Psi$, pensato come variabile aleatoria a valori in $(C([0,T],\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)), \|\cdot\|_\infty)$, ha momento p-esimo finito; pertanto la sua legge

$$\mathrm{Law}(\overline{Y}^\Psi) \in \mathcal{P}_p(C([0,T],\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))).$$

Infine, osserviamo che tale legge è univocamente determinata dalla misura Ψ: infatti, l'unicità per cammini fa sì che, comunque date due soluzioni $\overline{Y}_1^\Psi$ e $\overline{Y}_2^\Psi$ del problema ausiliario, risulti

$$\mathbb{P}\Big(\overline{Y}_1^\Psi(t) = \overline{Y}_2^\Psi(t), \text{ per ogni } t \in [0,T]\Big) = 1;$$

di conseguenza i due processi stocastici, sempre pensati come variabili aleatorie a valori in $C([0,T],\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))$, coincidono $\mathbb{P}$-quasi ovunque. Poiché due variabili aleatorie che sono uguali quasi certamente hanno la stessa legge concludiamo che

$$\mathrm{Law}(\overline{Y}_1^\Psi) = \mathrm{Law}(\overline{Y}_2^\Psi).$$

Di conseguenza risulta ben definita un'applicazione $\mathcal{T}$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}\colon \mathcal{P}_p(C([0,T],\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))) &\longrightarrow \mathcal{P}_p(C([0,T],\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))) \\ \Psi &\longmapsto \mathcal{T}(\Psi) := \mathrm{Law}(\overline{Y}^\Psi) \end{aligned} \tag{3.6.1}$$

che associa a ogni misura Ψ la legge della soluzione $\overline{Y}^\Psi$ del problema ausiliario (3.3.2). Per ottenere una soluzione del problema di campo medio (3.3.1) è necessario individuare una misura $\Sigma \in \mathcal{P}_p(C([0,T],\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)))$ tale per cui si abbia

$$\mathrm{Law}(\overline{Y}^\Sigma) = \Sigma.$$

Questa relazione si può riscrivere come

$$\mathcal{T}(\Sigma) = \Sigma, \tag{3.6.2}$$

ovvero come un problema di *punto fisso* per l'applicazione $\mathcal{T}$. Questo cambio di prospettiva sul problema ci suggerisce di ricercare la misura Σ attraverso un *teorema di punto fisso.* In particolare, faremo uso del *teorema delle contrazioni di Banach-Caccioppoli.*

Per poter applicare il teorema delle contrazioni all'applicazione $\mathcal{T}$, risulta necessario dotare l'insieme $\mathcal{P}_p(C([0,T],\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)))$ di una distanza che lo renda uno spazio metrico completo. Iniziamo a perseguire tale scopo scegliendo un numero reale $\gamma > 0$ a partire dal quale costruiamo una norma sullo spazio vettoriale di funzioni continue $C([0,T],\mathbb{R}^d \times F(U))$. Definiamo la norma

$$\|f\|_{\infty,\gamma} := \sup_{t\in[0,T]} e^{-\gamma t}\|f(t)\|_{\mathbb{R}^d\times F(U)}, \qquad \forall f \in C([0,T],\mathbb{R}^d \times F(U)).$$

La norma $\|\cdot\|_{\infty,\gamma}$ appena introdotta è equivalente alla norma $\|\cdot\|_{\infty}$, dunque lo spazio normato $(C([0,T],\mathbb{R}^d \times F(U)), \|\cdot\|_{\infty,\gamma})$ risulta anch'esso di Banach e separabile. Possiamo ora dotare l'insieme $C([0,T],\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)) \subseteq C([0,T],\mathbb{R}^d \times F(U))$ della metrica che la norma $\|\cdot\|_{\infty,\gamma}$ induce su di esso. Poiché $C([0,T],\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))$ è un sottoinsieme chiuso rispetto alla convergenza uniforme, possiamo affermare che anche lo spazio metrico $(C([0,T],\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)), \|\cdot\|_{\infty,\gamma})$ è a sua volta completo, ed è inoltre separabile (è un cosiddetto *spazio polacco*).

A partire dalla metrica $\|\cdot\|_{\infty,\gamma}$, di cui abbiamo dotato $C([0,T],\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))$ possiamo costruire la relativa distanza di Wasserstein p-esima sull'insieme di misure di probabilità $\mathcal{P}_p(C([0,T],\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)))$. Questa sarà indicata con $W_{p,\gamma}$ e, ricordando la definizione 1.3.7, è data da

$$W_{p,\gamma}(\Psi^1,\Psi^2) := \left(\inf_{\pi\in\Gamma(\Psi^1,\Psi^2)} \int_{(C([0,T],\mathbb{R}^d\times\mathcal{P}(U)))^2} \|\varphi_1 - \varphi_2\|^p_{\infty,\gamma}\, \mathrm{d}\pi(\varphi_1,\varphi_2) \right)^{\frac{1}{p}}$$

dove $\Gamma(\Psi^1,\Psi^2)$, come al solito, denota l'insieme dei piani di trasporto tra Ψ^1 e Ψ^2, dato da

$$\Gamma(\Psi^1,\Psi^2) = \Big\{ \pi \in \mathcal{P}(C([0,T],\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))^2) : (p_1)_\sharp \pi = \Psi^1,\ (p_2)_\sharp \pi = \Psi^2 \Big\},$$

in cui $p_1, p_2 \colon (C([0,T],\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)))^2 \longrightarrow C([0,T],\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))$ denotano le proiezioni canoniche sul primo e secondo fattore rispettivamente.

Dal teorema 1.3.10 sappiamo che, poiché $(C([0,T],\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)), \|\cdot\|_{\infty,\gamma})$ è uno spazio metrico completo e separabile, anche $(\mathcal{P}_p(C([0,T],\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))), W_{p,\gamma})$ è a sua volta uno spazio metrico completo e separabile.

Abbiamo dunque individuato una metrica che rende $\mathcal{T}$ un'applicazione da uno spazio metrico completo in sé. Resta ora da provare che $\mathcal{T}$ è una contrazione rispetto alla metrica $W_{p,\gamma}$.

Iniziamo con un risultato preliminare.

Proposizione 3.6.3. *Siano* $\Psi^1, \Psi^2 \in \mathcal{P}_p(C([0,T],\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)))$ *(con* $p > 1$*) e siano, come di consueto,* $\Psi^i_t := (\mathrm{ev}_t)_\sharp \Psi^i \in \mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))$, $i = 1, 2$. *Per ogni* $t \in [0,T]$ *vale la disuguaglianza*

$$\left(\int_0^t W_1(\Psi^1_s, \Psi^2_s)\, \mathrm{d}s \right)^p \le \frac{t^{p-1}}{p\gamma} e^{p\gamma t} W^p_{p,\gamma}(\Psi^1,\Psi^2), \tag{3.6.4}$$

dove W_1 *è la distanza di Wasserstein su* $\mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))$ *associata alla metrica* $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^d\times F(U)}$.

Dimostrazione. Sia $\tilde\pi \in \Gamma(\Psi^1,\Psi^2)$ un piano di trasporto ottimale per la distanza $W_{p,\gamma}$, ovvero un piano di trasporto tra Ψ^1 e Ψ^2 che realizza l'estremo inferiore nella definizione della quantità $W_{p,\gamma}(\Psi^1,\Psi^2)$. L'esistenza di misura siffatta è garantita dal fatto che $(C([0,T],\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)), \|\cdot\|_{\infty,\gamma})$ è uno spazio metrico completo e separabile e dalla teoria generale del trasporto ottimale ([1],[3],[23],[26]). Dunque, per costruzione, si ha che

$$W^p_{p,\gamma}(\Psi^1,\Psi^2) := \int_{(C([0,T],\mathbb{R}^d\times\mathcal{P}(U)))^2} \|\varphi_1 - \varphi_2\|^p_{\infty,\gamma}\, \mathrm{d}\tilde\pi(\varphi_1,\varphi_2).$$

Osserviamo ora che, per ogni $t \in [0,T]$, la misura

$$\tilde{\pi}_t := (\mathrm{ev}_t, \mathrm{ev}_t)_\sharp \tilde{\pi} \in \mathcal{P}((\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))^2)$$

è un piano di trasporto tra Ψ_t^1 e Ψ_t^2, infatti si ha che

$$\begin{aligned}(p_i)_\sharp \tilde{\pi}_t &= (p_i)_\sharp((\mathrm{ev}_t, \mathrm{ev}_t)_\sharp \tilde{\pi}) = (p_i \circ (\mathrm{ev}_t, \mathrm{ev}_t))_\sharp \tilde{\pi} = \\ &= (\mathrm{ev}_t \circ p_i)_\sharp \tilde{\pi} = (\mathrm{ev}_t)_\sharp((p_i)_\sharp \tilde{\pi}_i) = \\ &= (\mathrm{ev}_t)_\sharp(\Psi^i) = \Psi_t^i\end{aligned}$$

per $i = 1, 2$, dove, con un piccolo abuso di notazione, abbiamo denotato con p_i sia la proiezione sull'i-esimo fattore $(C([0,T], \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)))^2 \longrightarrow C([0,T], \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))$ che la proiezione $(\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))^2 \longrightarrow \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)$. Dunque $\tilde{\pi}_t \in \Gamma(\Psi_t^1, \Psi_t^2)$ e di conseguenza

$$W_1(\Psi_t^1, \Psi_t^2) \leq \int_{(\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))^2} \|y_1 - y_2\|_{\mathbb{R}^d \times F(U)} \, \mathrm{d}\tilde{\pi}_t(y_1, y_2)$$

per ogni $t \in [0,T]$.

In conseguenza di queste considerazioni, applicando due volte la disuguaglianza di Hölder e il teorema di integrazione rispetto alla misura immagine 1.3.3, otteniamo

$$\begin{aligned}&\left(\int_0^t W_1(\Psi_s^1, \Psi_s^2) \, \mathrm{d}s\right)^p \leq t^{p-1} \int_0^t \left(W_1(\Psi_s^1, \Psi_s^2)\right)^p \mathrm{d}s \\ &\leq t^{p-1} \int_0^t \left(\int_{(\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))^2} \|y_1 - y_2\|_{\mathbb{R}^d \times F(U)} \, \mathrm{d}\tilde{\pi}_s(y_1, y_2)\right)^p \mathrm{d}s \\ &\leq t^{p-1} \int_0^t \left(\int_{(\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))^2} \|y_1 - y_2\|_{\mathbb{R}^d \times F(U)}^p \, \mathrm{d}\tilde{\pi}_s(y_1, y_2)\right) \mathrm{d}s \\ &= t^{p-1} \int_0^t \left(\int_{(\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))^2} \|y_1 - y_2\|_{\mathbb{R}^d \times F(U)}^p \, \mathrm{d}((\mathrm{ev}_s, \mathrm{ev}_s)_\sharp \tilde{\pi})(y_1, y_2)\right) \mathrm{d}s \\ &= t^{p-1} \int_0^t \left(\int_{(C([0,T], \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)))^2} \|(\mathrm{ev}_s)(\varphi_1) - (\mathrm{ev}_s)(\varphi_2)\|_{\mathbb{R}^d \times F(U)}^p \, \mathrm{d}\tilde{\pi}(\varphi_1, \varphi_2)\right) \mathrm{d}s \\ &= t^{p-1} \int_0^t \left(\int_{(C([0,T], \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)))^2} \|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)\|_{\mathbb{R}^d \times F(U)}^p \, \mathrm{d}\tilde{\pi}(\varphi_1, \varphi_2)\right) \mathrm{d}s \\ &= t^{p-1} \int_0^t \left(\int_{(C([0,T], \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)))^2} e^{p\gamma s} e^{-p\gamma s} \|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)\|_{\mathbb{R}^d \times F(U)}^p \, \mathrm{d}\tilde{\pi}(\varphi_1, \varphi_2)\right) \mathrm{d}s \\ &\leq t^{p-1} \int_0^t e^{p\gamma s} \left(\int_{(C([0,T], \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)))^2} \|\varphi_1 - \varphi\|_{\infty,\gamma}^p \, \mathrm{d}\tilde{\pi}(\varphi_1, \varphi_2)\right) \mathrm{d}s\end{aligned}$$

Ricordando ora che $\tilde{\pi}$ è un piano di trasporto tra Ψ^1 e Ψ^2 ottimale per la distanza $W_{p,\gamma}$, concludiamo che

$$\begin{aligned}&\left(\int_0^t W_1(\Psi_s^1, \Psi_s^2) \, \mathrm{d}s\right)^p \leq \\ &\leq t^{p-1} \int_0^t e^{p\gamma s} \left(\int_{(C([0,T], \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)))^2} \|\varphi_1 - \varphi\|_{\infty,\gamma}^p \, \mathrm{d}\tilde{\pi}(\varphi_1, \varphi_2)\right) \mathrm{d}s = \\ &= t^{p-1} \int_0^t \left(e^{p\gamma s} \cdot W_{p,\gamma}^p(\Psi^1, \Psi^2)\right) \mathrm{d}s = t^{p-1} \left(\int_0^t e^{p\gamma s} \, \mathrm{d}s\right) W_{p,\gamma}^p(\Psi^1, \Psi^2) = \\ &= t^{p-1} \left(\frac{e^{p\gamma t} - 1}{p\gamma}\right) W_{p,\gamma}^p(\Psi^1, \Psi^2) \leq \frac{t^{p-1}}{p\gamma} e^{p\gamma t} W_{p,\gamma}^p(\Psi^1, \Psi^2)\end{aligned}$$

da cui la disuguaglianza (3.6.4), come voluto. $\square$

Dimostriamo ora che il risultato principale di questa sezione

Proposizione 3.6.5. *Scelto $\gamma > 0$ sufficientemente grande, l'applicazione*

$$\begin{aligned} \mathcal{T} \colon (\mathcal{P}_p(C([0,T],\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))), W_{p,\gamma}) &\longrightarrow (\mathcal{P}_p(C([0,T],\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))), W_{p,\gamma}) \\ \Psi &\longmapsto \mathrm{Law}(\overline{Y}^{\Psi}) \end{aligned}$$

è una contrazione. Dunque esiste $0 \le \rho_\gamma < 1$ tale che

$$W_{p,\gamma}(\mathcal{T}(\Psi^1), \mathcal{T}(\Psi^2)) \le \rho_\gamma W_{p,\gamma}(\Psi^1, \Psi^2) \tag{3.6.6}$$

per ogni $\Psi^1, \Psi^2 \in \mathcal{P}_p(C([0,T],\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)))$.

Dimostrazione. Consideriamo due misure $\Psi^1, \Psi^2 \in \mathcal{P}_p(C([0,T],\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)))$ e indichiamo rispettivamente con $\overline{Y}^1$ e $\overline{Y}^2$ le soluzioni del problema ausiliario (3.3.2) costruite a partire da esse. Per definizione si ha che $\mathcal{T}(\Psi^1) = \mathrm{Law}(\overline{Y}^1)$ e $\mathcal{T}(\Psi^2) = \mathrm{Law}(\overline{Y}^2)$. Osserviamo che la legge congiunta dei due processi Y^1 e Y^2, che indichiamo con $P^{(\overline{Y}^1, \overline{Y}^2)}$, è un piano di trasporto tra $\mathcal{T}(\Psi^1)$ e $\mathcal{T}(\Psi^2)$, in quanto, per costruzione, le leggi marginali della variabile aleatoria $(\overline{Y}^1, \overline{Y}^2)$ corrispondono proprio a $\mathcal{T}(\Psi^1)$ e $\mathcal{T}(\Psi^2)$. Di conseguenza abbiamo che

$$\begin{aligned} &W_{p,\gamma}^p(\mathcal{T}(\Psi^1), \mathcal{T}(\Psi^2)) = \\ &= \inf_{\pi \in \Gamma(\mathcal{T}(\Psi^1), \mathcal{T}(\Psi^2))} \int_{(C([0,T],\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)))^2} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\infty,\gamma}^p \, \mathrm{d}\pi(\varphi_1, \varphi_2) \le \\ &\le \int_{(C([0,T],\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)))^2} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\infty,\gamma}^p \, \mathrm{d}P^{(\overline{Y}^1, \overline{Y}^2)}(\varphi_1, \varphi_2) = \mathbb{E}\big[\|\overline{Y}^1 - \overline{Y}^2\|_{\infty,\gamma}^p\big]. \end{aligned}$$

La disuguaglianza

$$W_{p,\gamma}^p(\mathcal{T}(\Psi^1), \mathcal{T}(\Psi^2)) \le \mathbb{E}\big[\|\overline{Y}^1 - \overline{Y}^2\|_{\infty,\gamma}^p\big] = \mathbb{E}\Big[\sup_{t \in [0,T]} e^{-p\gamma t} \|\overline{Y}^1(t) - \overline{Y}^2(t)\|_{\mathbb{R}^d \times F(U)}^p\Big]$$

ci permette di stimare la distanza tra $\mathcal{T}(\Psi^1)$ e $\mathcal{T}(\Psi^2)$ attraverso disuguaglianze che coinvolgono direttamente le soluzioni $\overline{Y}^1$ e $\overline{Y}^2$ del problema ausiliario. In quanto soluzioni di (3.3.2), $\overline{Y}^1 = (\overline{X}^1, \overline{\Lambda}^1)$ e $\overline{Y}^2 = (\overline{X}^2, \overline{\Lambda}^2)$ soddisfano

$$\begin{cases} \overline{X}^i(t) = \overline{X}_0 + \displaystyle\int_0^t b_x(\overline{X}^i(s), \overline{\Lambda}^i(s)) \, \mathrm{d}s + \sqrt{2\sigma} \overline{B}(t) \\ \overline{\Lambda}^i(t) = \overline{\Lambda}_0 + \displaystyle\int_0^t b_\Lambda^{\Psi^i}(\overline{X}^i(s), \overline{\Lambda}^i(s), s) \, \mathrm{d}s; \end{cases}$$

per ogni $t \in [0,T]$ e $i = 1, 2$.

Dunque sia $t \in [0,T]$ fissato e sia $u \in [0,t]$. Abbiamo che

$$\begin{aligned} &\|\overline{X}^1(u) - \overline{X}^2(u)\|_{\mathbb{R}^d} = \\ &= \left\| \int_0^u b_x(\overline{X}^1(s), \overline{\Lambda}^1(s)) \, \mathrm{d}s - \int_0^u b_x(\overline{X}^2(s), \overline{\Lambda}^2(s)) \, \mathrm{d}s \right\|_{\mathbb{R}^d} = \\ &= \left\| \int_0^u \Big(b_x(\overline{X}^1(s), \overline{\Lambda}^1(s)) - b_x(\overline{X}^2(s), \overline{\Lambda}^2(s)) \Big) \, \mathrm{d}s \right\|_{\mathbb{R}^d} \le \\ &\le \int_0^u \Big\| b_x(\overline{X}^1(s), \overline{\Lambda}^1(s)) - b_x(\overline{X}^2(s), \overline{\Lambda}^2(s)) \Big\|_{\mathbb{R}^d} \, \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Ricorriamo ora alla lipschitzianità di b_x sfruttando la disuguaglianza (3.4.3), da cui

$$\begin{aligned} &\|\overline{X}^1(u) - \overline{X}^2(u)\|_{\mathbb{R}^d} \le \\ &\le \int_0^u L_x\big(\|\overline{X}^1(s) - \overline{X}^2(s)\|_{\mathbb{R}^d} + \|\overline{\Lambda}^1(s) - \overline{\Lambda}^2(s)\|_{\mathrm{BL}}\big) \, \mathrm{d}s = \\ &= L_x \int_0^u \|\overline{Y}^1(s) - \overline{Y}^2(s)\|_{\mathbb{R}^d \times F(U)} \, \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

In maniera analoga otteniamo che

$$
\begin{aligned}
&\|\overline{\Lambda}^1(u) - \overline{\Lambda}^2(u)\|_{\mathrm{BL}} = \\
&= \left\| \int_0^u b_\lambda^{\Psi^1}(\overline{X}^1(s), \overline{\Lambda}^1(s), s)\,\mathrm{d}s - \int_0^u b_\lambda^{\Psi^2}(\overline{X}^2(s), \overline{\Lambda}^2(s), s)\,\mathrm{d}s \right\|_{\mathrm{BL}} = \\
&= \left\| \int_0^u \left(b_\lambda^{\Psi^1}(\overline{X}^1(s), \overline{\Lambda}^1(s), s) - b_\lambda^{\Psi^2}(\overline{X}^2(s), \overline{\Lambda}^2(s), s) \right) \mathrm{d}s \right\|_{\mathrm{BL}} \leq \\
&\leq \int_0^u \left\| b_\lambda^{\Psi^1}(\overline{X}^1(s), \overline{\Lambda}^1(s), s) - b_\lambda^{\Psi^2}(\overline{X}^2(s), \overline{\Lambda}^2(s), s) \right\|_{\mathrm{BL}} \mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

Applichiamo ora la disuguaglianza (3.2.11), da cui traiamo

$$
\begin{aligned}
&\|\overline{\Lambda}^1(u) - \overline{\Lambda}^2(u)\|_{\mathrm{BL}} \leq \\
&\leq L_\lambda \int_0^u \left(\|\overline{X}^1(s) - \overline{X}^2(s)\|_{\mathbb{R}^d} + \|\overline{\Lambda}^1(s) - \overline{\Lambda}^2(s)\|_{\mathrm{BL}} + W_1(\Psi_s^1, \Psi_s^2) \right) \mathrm{d}s \leq \\
&= L_\lambda \int_0^u \left(\|\overline{Y}^1(s) - \overline{Y}^2(s)\|_{\mathbb{R}^d \times F(U)} + W_1(\Psi_s^1, \Psi_s^2) \right) \mathrm{d}s \leq
\end{aligned}
$$

Ponendo ora $L := \max\{L_x, L_\lambda\}$ e combinando le due disuguaglianze appena ottenute deduciamo che, per ogni $u \in [0, t]$, vale

$$
\begin{aligned}
&\|\overline{Y}^1(u) - \overline{Y}^2(u)\|_{\mathbb{R}^d \times F(U)} \leq \\
&\leq 2L \int_0^u \|\overline{Y}^1(s) - \overline{Y}^2(s)\|_{\mathbb{R}^d \times F(U)}\,\mathrm{d}s + L \int_0^u W_1(\Psi_s^1, \Psi_s^2)\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

Dalla disuguaglianza (A.4.2) segue che

$$
\begin{aligned}
&\|\overline{Y}^1(u) - \overline{Y}^2(u)\|_{\mathbb{R}^d \times F(U)}^p \leq \\
&\leq 2^{p-1} \left[\left(2L \int_0^u \|\overline{Y}^1(s) - \overline{Y}^2(s)\|_{\mathbb{R}^d \times F(U)}\,\mathrm{d}s \right)^p + \left(L \int_0^u W_1(\Psi_s^1, \Psi_s^2)\,\mathrm{d}s \right)^p \right] \leq \\
&\leq \tilde{c} \left[\left(\int_0^u \|\overline{Y}^1(s) - \overline{Y}^2(s)\|_{\mathbb{R}^d \times F(U)}\,\mathrm{d}s \right)^p + \left(\int_0^u W_1(\Psi_s^1, \Psi_s^2)\,\mathrm{d}s \right)^p \right]
\end{aligned}
$$

per un'opportuna costante $\tilde{c}$ dipendente da L_x, L_λ e p. Stimiamo ora i due termini che compaiono tra parentesi quadre: applicando la disuguaglianza di Hölder al primo dei due otteniamo

$$
\begin{aligned}
&\left(\int_0^u \|\overline{Y}^1(s) - \overline{Y}^2(s)\|_{\mathbb{R}^d \times F(U)}\,\mathrm{d}s \right)^p \leq \\
&\leq u^{p-1} \int_0^u \|\overline{Y}^1(s) - \overline{Y}^2(s)\|_{\mathbb{R}^d \times F(U)}^p\,\mathrm{d}s = \\
&= u^{p-1} \int_0^u e^{p\gamma s} e^{-p\gamma s} \|\overline{Y}^1(s) - \overline{Y}^2(s)\|_{\mathbb{R}^d \times F(U)}^p\,\mathrm{d}s \leq \\
&\leq u^{p-1} e^{p\gamma u} \int_0^u \Big(\sup_{r \in [0,s]} e^{-p\gamma r} \|\overline{Y}^1(r) - \overline{Y}^2(r)\|_{\mathbb{R}^d \times F(U)}^p \Big)\,\mathrm{d}s \leq \\
&\leq T^{p-1} e^{p\gamma u} \int_0^u \Big(\sup_{r \in [0,s]} e^{-p\gamma r} \|\overline{Y}^1(r) - \overline{Y}^2(r)\|_{\mathbb{R}^d \times F(U)}^p \Big)\,\mathrm{d}s;
\end{aligned}
$$

per quanto riguarda il secondo, invece, ricorriamo alla proposizione 3.6.3 dimostrata in precedenza, la quale ci consente di affermare che

$$
\left(\int_0^u W_1(\Psi_s^1, \Psi_s^2)\,\mathrm{d}s \right)^p \leq \frac{u^{p-1}}{p\gamma} e^{p\gamma u} W_{p,\gamma}^p(\Psi^1, \Psi^2) \leq \frac{T^{p-1}}{p\gamma} e^{p\gamma u} W_{p,\gamma}^p(\Psi^1, \Psi^2).
$$

Pertanto concludiamo che, per ogni $u \in [0,t]$, vale la disuguaglianza

$$\begin{aligned} &e^{-p\gamma u}\|\overline{Y}^1(u)-\overline{Y}^2(u)\|^p_{\mathbb{R}^d\times F(U)} \leq \\ &\leq \tilde{c}T^{p-1}\Big[\int_0^u\Big(\sup_{r\in[0,s]} e^{-p\gamma r}\|\overline{Y}^1(r)-\overline{Y}^2(r)\|^p_{\mathbb{R}^d\times F(U)}\Big)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{p\gamma}W^p_{p,\gamma}(\Psi^1,\Psi^2)\Big]. \end{aligned}$$

Prendendo ora l'estremo superiore di entrambi i membri sull'intervallo $[0,t]$ e successivamente i valori attesi otteniamo

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]} e^{-p\gamma u}\|\overline{Y}^1(u)-\overline{Y}^2(u)\|^p_{\mathbb{R}^d\times F(U)}\Big] \leq \\ &\leq \tilde{c}T^{p-1}\Big[\int_0^t \mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,s]} e^{-p\gamma u}\|\overline{Y}^1(u)-\overline{Y}^2(u)\|^p_{\mathbb{R}^d\times F(U)}\Big]\,\mathrm{d}s + \frac{1}{p\gamma}W^p_{p,\gamma}(\Psi^1,\Psi^2)\Big], \end{aligned}$$

dove abbiamo potuto portare il valore atteso all'interno dell'integrale in tempo in virtù del teorema di Fubini e della positività dell'integranda.

Osserviamo ora che possiamo riscrivere quest'ultima disuguaglianza come

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]} e^{-p\gamma u}\|\overline{Y}^1(u)-\overline{Y}^2(u)\|^p_{\mathbb{R}^d\times F(U)}\Big] \leq \\ &\leq C_1\int_0^t \mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,s]} e^{-p\gamma u}\|\overline{Y}^1(u)-\overline{Y}^2(u)\|^p_{\mathbb{R}^d\times F(U)}\Big]\,\mathrm{d}s + \frac{C_2}{\gamma}W^p_{p,\gamma}(\Psi^1,\Psi^2), \end{aligned}$$

in cui C_1 e C_2 sono due opportune costanti positive, dipendenti esclusivamente da L_x, L_λ, p e T.

Definiamo ora, per ogni $t \in [0,T]$, la quantità

$$v(t) := \mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]} e^{-p\gamma u}\|\overline{Y}^1(u)-\overline{Y}^2(u)\|^p_{\mathbb{R}^d\times F(U)}\Big]$$

la quale ci permette di scrivere

$$v(t) \leq C_1\int_0^t v(s)\,\mathrm{d}s + \frac{C_2}{\gamma}W^p_{p,\gamma}(\Psi^1,\Psi^2), \quad \forall t \in [0,T].$$

Siamo ora nelle condizioni di applicare il lemma di Grönwall A.4.7, a patto di riuscire a dimostrare che la funzione $t \longmapsto v(t)$ è limitata sull'intervallo $[0,T]$. A tale scopo, osserviamo che, in virtù della disuguaglianza (A.4.2) e della stima a priori (3.5.4), si ha che

$$\begin{aligned} v(t) &= \mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]} \underbrace{e^{-p\gamma u}}_{\leq 1}\|\overline{Y}^1(u)-\overline{Y}^2(u)\|^p_{\mathbb{R}^d\times F(U)}\Big] \leq \\ &\leq \mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]} \|\overline{Y}^1(u)-\overline{Y}^2(u)\|^p_{\mathbb{R}^d\times F(U)}\Big] \leq \\ &\leq 2^{p-1}\Big(\mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[0,T]}\|\overline{Y}^1(t)\|^p_{\mathbb{R}^d\times F(U)}\Big] + \mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[0,T]}\|\overline{Y}^2(t)\|^p_{\mathbb{R}^d\times F(U)}\Big]\Big) \leq \\ &\leq 2^{p-1}\Big(C\Big(1+\mathbb{E}\big[\|\overline{X}_0\|^p_{\mathbb{R}^d}\big]\Big) + C\Big(1+\mathbb{E}\big[\|\overline{X}_0\|^p_{\mathbb{R}^d}\big]\Big)\Big) \end{aligned}$$

per ogni $t \in [0,T]$. La limitatezza della funzione v ci permette finalmente di applicare il lemma di Grönwall ottenendo la disuguaglianza

$$v(t) \leq \frac{C_2 e^{C_1 T}}{\gamma}W^p_{p,\gamma}(\Psi^1,\Psi^2)$$

per ogni $t \in [0,T]$. Ponendo ora $C_0 := C_2 e^{C_1 T}$ e valutando quest'ultima disuguaglianza in $t = T$ si ha

$$v(T) = \mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[0,T]} e^{-p\gamma t}\|\overline{Y}^1(t)-\overline{Y}^2(t)\|^p_{\mathbb{R}^d\times F(U)}\Big] \leq \frac{C_0}{\gamma}W^p_{p,\gamma}(\Psi^1,\Psi^2).$$

Dunque concludiamo che

$$W_{p,\gamma}^{p}(\mathcal{T}(\Psi^1), \mathcal{T}(\Psi^2)) \leq \frac{C_0}{\gamma} W_{p,\gamma}^{p}(\Psi^1, \Psi^2)$$

dove C_0 è una costante positiva dipendente da L_x, L_λ, p, T ma che non dipende in alcun modo da Ψ^1, Ψ^2 o da γ. Posto quindi

$$\rho_\gamma := \left(\frac{C_0}{\gamma}\right)^{\frac{1}{p}}$$

è possibile scegliere γ sufficientemente grande affinché risulti

$$0 \leq \rho_\gamma < 1$$

e dunque

$$W_{p,\gamma}(\mathcal{T}(\Psi^1), \mathcal{T}(\Psi^2)) \leq \rho_\gamma W_{p,\gamma}(\Psi^1, \Psi^2).$$

Dall'arbitrarietà delle misure Ψ^1, Ψ^2 segue la tesi. □

Grazie al precedente risultato, possiamo applicare il *teorema delle contrazioni di Banach-Caccioppoli* deducendo che esiste un'unica misura $\Sigma \in \mathcal{P}_p(C([0,T], \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)))$ tale per cui si abbia

$$\mathcal{T}(\Sigma) = \mathrm{Law}(\overline{Y}^{\Sigma}) = \Sigma.$$

Pertanto, il processo $\overline{Y}^{\Sigma}$, soluzione del problema ausiliario (3.3.2) costruita a partire dalla misura Σ, risolve l'originario problema di campo medio (3.3.1).

Capitolo 4

Propagazione del caos

Quest'ultimo capitolo è dedicato alla dimostrazione della *propagazione del caos* per il modello discreto (1.2.1) e della convergenza, in un senso opportuno, delle soluzioni del problema discreto alle soluzioni del problema di campo medio (3.1.3) quando il numero di agenti N tende all'infinito.

Per l'intera durata della trattazione che segue supporremo che tutte le variabili aleatorie coinvolte siano definite su un medesimo spazio di probabilità $\big(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathbb{P}\big)$, che i dati iniziali sulle componenti spaziali appartengano a $L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ per un certo $p \in [2, +\infty)$ e siano $\mathscr{F}_0$-misurabili, e che i dati iniziali sulle strategie miste siano $\mathscr{F}_0$-misurabili. Ricordiamo che sotto tali ipotesi valgono i risultati di buona positura per il problema discreto e per il problema di campo medio discussi nei capitoli 2 e 3.

Iniziamo dimostrando un'interessante proprietà della mappa $\mathcal{T}$, già utilizzata nella costruzione della soluzione al problema di campo medio (3.1.3).

Proposizione 4.0.1. *L'applicazione*

$$\begin{aligned} \mathcal{T}\colon \mathcal{P}_p\big(C([0,T], \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))\big) &\longrightarrow \mathcal{P}_p\big(C([0,T], \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))\big) \\ \Psi &\longmapsto \mathcal{T}(\Psi) := \mathrm{Law}(\overline{Y}) \end{aligned} \tag{4.0.2}$$

che, assegnati il dato iniziale $\overline{Y}_0 = (\overline{X}_0, \overline{\Lambda}_0)$ e il moto browniano $\overline{B}$, associa a ogni misura $\Psi \in \mathcal{P}_p\big(C([0,T], \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))\big)$ la legge del processo stocastico $\overline{Y}$, soluzione del problema ausiliario (3.3.2)

$$\begin{cases} \overline{X}(t) = \overline{X}_0 + \displaystyle\int_0^t b_x(\overline{X}(s), \overline{\Lambda}(s))\,\mathrm{d}s + \sqrt{2\sigma}\overline{B}(t) \\ \overline{\Lambda}(t) = \overline{\Lambda}_0 + \displaystyle\int_0^t b_\lambda^\Psi(\overline{X}(s), \overline{\Lambda}(s), s)\,\mathrm{d}s; \end{cases} \tag{4.0.3}$$

dipende solo dalla legge congiunta della variabile aleatoria $(\overline{Y}_0, \overline{B})$.

Dimostrazione. Supponiamo che le variabili aleatorie $(\overline{Y}_0^1, \overline{B}^1)$ e $(\overline{Y}_0^2, \overline{B}^2)$ abbiano la stessa legge congiunta, dove $\overline{Y}_0^1 = (\overline{X}_0^1, \overline{\Lambda}_0^1)$ e $\overline{Y}_0^2 = (\overline{X}_0^2, \overline{\Lambda}_0^2)$ sono due dati iniziali e $\overline{B}^1$ e $\overline{B}^2$ sono due moti browniani standard d-dimensionali. Indichiamo ora con la notazione più esplicita $\mathcal{T}(\cdot; \overline{Y}_0^i, \overline{B}^i)$ l'applicazione $\mathcal{T}$ costruita a partire da $\overline{Y}_0^i$ e $\overline{B}^i$, con $i = 1, 2$. Vogliamo dimostrare che

$$\mathcal{T}(\Psi; \overline{Y}_0^1, \overline{B}^1) = \mathcal{T}(\Psi; \overline{Y}_0^2, \overline{B}^2)$$

per ogni $\Psi \in \mathcal{P}_p\big(C([0,T], \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))\big)$.

Analizziamo quindi come si giunge alla costruzione della misura $\mathcal{T}(\Psi; \overline{Y}_0^i, \overline{B}^i)$, $i = 1, 2$. Essa è ottenuta come la legge del processo stocastico $\overline{Y}^i$, limite ($\mathbb{P}$-quasi ovunque) della successione dei processi $\overline{Y}^i_n = (\overline{X}^i_n, \overline{\Lambda}^i_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, definiti dalle iterate

$$\begin{cases} \overline{X}^i_{n+1}(t) := \overline{X}^i_0 + \int_0^t b_x(\overline{X}^i_n(s), \overline{\Lambda}^i_n(s))\,\mathrm{d}s + \sqrt{2\sigma}\overline{B}^i(t) \\ \overline{\Lambda}^i_{n+1}(t) := e^{-\frac{t}{\theta}}\overline{\Lambda}^i_0 + \frac{1}{\theta}\int_0^t e^{\frac{s-t}{\theta}} g^\Psi_\lambda(\overline{X}^i_n(s), \overline{\Lambda}^i_n(s), s)\,\mathrm{d}s \end{cases}$$

e con l'iterata iniziale definita, per ogni $t \in [0, T]$, come

$$\begin{cases} \overline{X}^i_0(t) = \overline{X}^i_0 \\ \overline{\Lambda}^i_0(t) = \overline{\Lambda}^i_0. \end{cases}$$

Per cui possiamo scrivere sinteticamente che

$$\overline{Y}^i_{n+1} = \mathscr{I}(\overline{Y}^i_n; \overline{Y}^i_0, \overline{B}^i)$$

per $n = 0, 1, 2, \dots$, dove $\mathscr{I}$ è la mappa che produce l'iterazione successiva a partire da quella precedente.

Vogliamo mostrare che, per ogni $n = 0, 1, 2, \dots$, si ha che

$$\mathrm{Law}(\overline{Y}^1_n) = \mathrm{Law}(\overline{Y}^2_n).$$

Osserviamo ora che, per via del fatto che $(\overline{Y}^1_0, \overline{B}^1)$ e $(\overline{Y}^2_0, \overline{B}^2)$ sono identicamente distribuiti e poiché $\overline{Y}^i_1 = \mathscr{I}(\overline{Y}^i_0; \overline{Y}^i_0, \overline{B}^i)$, si ha che

$$\mathrm{Law}(\overline{Y}^1_1) = \mathrm{Law}(\overline{Y}^2_1).$$

Inoltre si ha che per ogni $n = 2, 3, \dots$ l'iterata n-esima dipende solo dalla coppia $(\overline{Y}^i_0, \overline{B}^i)$; infatti per $n = 2$ vale

$$\overline{Y}^i_2 = \mathscr{I}(\overline{Y}^i_1; \overline{Y}^i_0, \overline{B}^i) = \mathscr{I}(\mathscr{I}(\overline{Y}^i_0; \overline{Y}^i_0, \overline{B}^i); \overline{Y}^i_0, \overline{B}^i);$$

per $n = 3$, si ha

$$\overline{Y}^i_3 = \mathscr{I}(\overline{Y}^i_2; \overline{Y}^i_0, \overline{B}^i) = \mathscr{I}(\mathscr{I}(\mathscr{I}(\overline{Y}^i_0; \overline{Y}^i_0, \overline{B}^i); \overline{Y}^i_0, \overline{B}^i); \overline{Y}^i_0, \overline{B}^i)$$

e procedendo induttivamente si ottiene che, per ogni $n = 1, 2, \dots$, l'iterata n-esima $\overline{Y}^i_n$ dipende esclusivamente dalla coppia $(\overline{Y}^i_0, \overline{B}^i)$. Dunque possiamo scrivere

$$\overline{Y}^i_n = \Phi_n(\overline{Y}^i_0, \overline{B}^i)$$

per opportune applicazioni Φ_n, per $n = 0, 1, 2, \dots$. Dunque concludiamo che

$$\mathrm{Law}(\overline{Y}^1_n) = \mathrm{Law}(\overline{Y}^2_n),$$

per ogni $n = 0, 1, 2, \dots$ come voluto.

Per completare la dimostrazione dobbiamo far vedere che la legge dei processi $\overline{Y}^1$ e $\overline{Y}^2$, soluzioni dei rispettivi problema ausiliari, è la medesima. A tale scopo ricordiamo che, per costruzione, si ha

$$\lim_{n\to\infty} \overline{Y}^1_n = \overline{Y}^1,$$
$$\lim_{n\to\infty} \overline{Y}^2_n = \overline{Y}^2$$

quasi certamente. Poiché la convergenza $\mathbb{P}$-quasi ovunque di una successione di variabili aleatorie implica la convergenza debole (cioè in dualità con le funzioni continue e limitate) delle rispettive leggi si ha che

$$\mathrm{Law}(\overline{Y}^1_n) \rightharpoonup \mathrm{Law}(\overline{Y}^1),$$
$$\mathrm{Law}(\overline{Y}^2_n) \rightharpoonup \mathrm{Law}(\overline{Y}^2).$$

Ma dalle precedenti argomentazioni sappiamo che $\{\mathrm{Law}(\overline{Y}^1_n)\}_n$ e $\{\mathrm{Law}(\overline{Y}^2_n)\}_n$ sono in realtà la medesima successione di misure di probabilità. Pertanto, per unicità del limite debole [7], si ha che

$$\mathrm{Law}(\overline{Y}^1) = \mathrm{Law}(\overline{Y}^2)$$

e di conseguenza

$$\mathcal{T}(\Psi; \overline{Y}^1_0, \overline{B}^1) = \mathcal{T}(\Psi; \overline{Y}^2_0, \overline{B}^2).$$

Dall'arbitrarietà di Ψ segue la tesi. □

Proposizione 4.0.4. *Sia $\{(\overline{Y}^n_0, B^n)\}_{n=1}^\infty$ una successione di variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite, dove $\{\overline{Y}^n_0\}_{n=1}^\infty$ è una successione di variabili aleatorie a valori in $\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)$ e $\{\overline{B}^n\}_{n=1}^\infty$ è una successione di moti browniani standard d-dimensionali. Allora, indicata con $\overline{Y}^n$ la soluzione del problema di campo medio (3.1.3) ottenuta a partire dal dato iniziale $\overline{Y}^n_0$ e dal moto browniano $\overline{B}^n$ (per ogni $n \in \mathbb{N}^+$), si ha che i processi stocastici $\{\overline{Y}^n\}_{n=1}^\infty$ risultano indipendenti e identicamente distribuiti.*

Dimostrazione. Ricordiamo che, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, la legge della soluzione al problema di campo medio (3.1.3) è individuata dall'unico punto fisso Σ^n dell'applicazione $\mathcal{T}(\cdot; \overline{Y}^n_0, \overline{B}^n)$. Tuttavia, dalla precedente proposizione 4.0.1 sappiamo che tale applicazione dipende solo dalla legge della variabile aleatoria $(\overline{Y}^n_0, \overline{B}^n)$. Poiché, per ipotesi, le variabili aleatorie $\{(\overline{Y}^n_0, \overline{B}^n)\}_{n=1}^\infty$ sono identicamente distribuite concludiamo che, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, si ha

$$\mathrm{Law}(\overline{Y}^n) = \Sigma^n = \Sigma, \tag{4.0.5}$$

dove Σ denota il comune punto fisso delle applicazioni $\{\mathcal{T}(\cdot; \overline{Y}^n_0, \overline{B}^n)\}_{n=1}^\infty$, le quali risultano tutte coincidenti. Questo ci permette di affermare che i processi $\{\overline{Y}^n\}_{n=1}^\infty$ sono identicamente distribuiti.

Per quanto riguarda l'indipendenza, osserviamo che, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, il processo stocastico $\overline{Y}^n$ è costruito a partire dalla misura Σ, dal dato iniziale $\overline{Y}^n_0$ e dal moto browniano $\overline{B}^n$. L'indipendenza delle variabili aleatorie $\{(\overline{Y}^n_0, \overline{B}^n)\}_{n=1}^\infty$ implica l'indipendenza dei dati iniziali $\{\overline{Y}^n_0\}_{n=1}^\infty$ e dei moti browniani $\{\overline{B}^n\}_{n=1}^\infty$, che a sua volta si traduce nell'indipendenza dei processi stocastici $\{\overline{Y}^n\}_{n=1}^\infty$. □

Teorema 4.0.6. *Sia $\{(Y^n_0, B^n)\}_{n=1}^\infty$ una successione di variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite, in cui $\{Y^n_0\}_{n=1}^\infty$ è una successione di variabili aleatorie a valori in $\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)$, dove $Y^n_0 = (X^n_0, \Lambda^n_0)$, e $\{B^n\}_{n=1}^\infty$ è una successione di moti browniani standard d-dimensionali. Indichiamo ora, per ogni $N \in \mathbb{N}^+$ fissato, con $Y^{1,N}, \ldots, Y^{N,N}$ i processi stocastici che risolvono il problema discreto*

$$\begin{cases} X^{n,N}(t) = X^n_0 + \displaystyle\int_0^t f_x(X^{n,N}(s), \Lambda^{n,N}(s))\,\mathrm{d}s + \sqrt{2\sigma}B^n(t) \\ \Lambda^{n,N}(t) = \Lambda^n_0 + \displaystyle\int_0^t \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N f_\lambda(X^{n,N}(s), \Lambda^{n,N}(s), X^{i,N}(s), \Lambda^{i,N}(s))\,\mathrm{d}s \end{cases}$$

e con $\overline{Y}^1, \ldots, \overline{Y}^N$ i processi stocastici che risolvono il problema di campo medio

$$\begin{cases} \overline{X}^n(t) = X^n_0 + \displaystyle\int_0^t f_x(\overline{X}^n(s), \overline{\Lambda}^n(s))\,\mathrm{d}s + \sqrt{2\sigma}B^n(t) \\ \overline{\Lambda}^n(t) = \Lambda^n_0 + \displaystyle\int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}^d\times\mathcal{P}(U)} f_\lambda(\overline{X}^n(s), \overline{\Lambda}^n(s), x', \lambda')\,\mathrm{d}\Sigma_s(x', \lambda')\right)\mathrm{d}s \end{cases}$$

con $\Sigma := \mathrm{Law}(\overline{Y}^1) = \cdots = \mathrm{Law}(\overline{Y}^N)$ e $\Sigma_t := (\mathrm{ev}_t)_\sharp \Sigma$.

Allora vale

$$\lim_{N\to\infty}\left(\max_{1\le n\le N} \mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[0,T]} \|Y^{n,N}(t) - \overline{Y}^n(t)\|_{\mathbb{R}^d\times F(U)}\Big]\right) = 0. \tag{4.0.7}$$

Dimostrazione. Per ogni $N \in \mathbb{N}^+$ definiamo la misura empirica

$$\Sigma^N := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \delta_{Y^{i,N}}$$

costruita a partire dalle soluzioni del problema di discreto, e la misura empirica

$$\overline{\Sigma}^N := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \delta_{\overline{Y}^i},$$

costruita invece a partire dalle soluzioni del problema di campo medio. Osserviamo che sia Σ^N che $\overline{\Sigma}^N$ sono variabili aleatorie a valori in $\mathcal{P}_p(C([0,T], \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)))$. Osserviamo inoltre che, per ogni $t \in [0,T]$ abbiamo che

$$\Sigma_t^N := (\mathrm{ev}_t)_\sharp \Sigma^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \delta_{Y^{i,N}(t)}$$

e, analogamente,

$$\overline{\Sigma}_t^N := (\mathrm{ev}_t)_\sharp \overline{\Sigma}^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \delta_{\overline{Y}^i(t)}.$$

Per costruzione, sia Σ_t^N che $\overline{\Sigma}_t^N$ sono variabili aleatorie a valori in $\mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))$.

Sia ora $t \in [0,T]$ fissato e $u \in [0,t]$. Fissiamo inoltre $N \in \mathbb{N}^+$. Per ogni $n = 1, \dots, N$, abbiamo che

$$\begin{aligned}
&\|X^{n,N}(u) - \overline{X}^n(u)\|_{\mathbb{R}^d} = \\
&= \left\| \int_0^u \left(f_x(X^{n,N}(s), \Lambda^{n,N}(s)) - f_x(\overline{X}^n(s), \overline{\Lambda}^n(s)) \right) \mathrm{d}s \right\|_{\mathbb{R}^d} \leq \\
&\leq \int_0^u \|f_x(X^{n,N}(s), \Lambda^{n,N}(s)) - f_x(\overline{X}^n(s), \overline{\Lambda}^n(s))\|_{\mathbb{R}^d} \, \mathrm{d}s \leq \\
&\leq L_x \int_0^u \left(\|X^{n,N}(s) - \overline{X}^n(s)\|_{\mathbb{R}^d} + \|\Lambda^{n,N}(s) - \overline{\Lambda}^n(s)\|_{\mathrm{BL}} \right) \mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

in cui abbiamo fatto ricorso alla lipschitzianità di f_x (2.1.2). Analogamente, riscrivendo il termine di interazione del problema discreto tramite la misura empirica Σ^N, e facendo uso della disuguaglianza (3.2.11), otteniamo

$$\begin{aligned}
&\|\Lambda^{n,N}(u) - \overline{\Lambda}^n(u)\|_{\mathrm{BL}} = \\
&= \Bigg\| \int_0^u \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} f_\lambda(X^{n,N}(s), \Lambda^{n,N}(s), X^{j,N}(s), \Lambda^{j,N}(s)) \, \mathrm{d}s - \\
&- \int_0^u \left(\int_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)} f_\lambda(\overline{X}^n(s), \overline{\Lambda}^n(s), x', \lambda') \, \mathrm{d}\Sigma_s(x', \lambda') \right) \mathrm{d}s \Bigg\|_{\mathrm{BL}} = \\
&= \Bigg\| \int_0^u \left(\int_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)} f_\lambda(X^{n,N}(s), \Lambda^{n,N}(s), x', \lambda') \, \mathrm{d}\Sigma_s^N(x', \lambda') \right) \mathrm{d}s - \\
&- \int_0^u \left(\int_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)} f_\lambda(\overline{X}^n(s), \overline{\Lambda}^n(s), x', \lambda') \, \mathrm{d}\Sigma_s(x', \lambda') \right) \mathrm{d}s \Bigg\|_{\mathrm{BL}} = \\
&\leq \int_0^u \|b_\lambda^{\Sigma^N}(X^{n,N}(s), \Lambda^{n,N}(s), s) - b_\lambda^{\Sigma}(\overline{X}^n(s), \overline{\Lambda}^n(s), s)\|_{\mathrm{BL}} \, \mathrm{d}s \leq \\
&\leq L_\lambda \int_0^u \left(\|X^{n,N}(s) - \overline{X}^n(s)\|_{\mathbb{R}^d} + \|\Lambda^{n,N}(s) - \overline{\Lambda}^n(s)\|_{\mathrm{BL}} + W_1(\Sigma_s^N, \Sigma_s) \right) \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Ponendo ora $L := \max\{L_x, L_\lambda\}$ e combinando le due disuguaglianze appena ricavate si ha

$$\begin{aligned}&\|Y^{n,N}(u) - \overline{Y}^n(u)\|_{\mathbb{R}^d\times F(U)} = \\ &= \|X^{n,N}(u) - \overline{X}^n(u)\|_{\mathbb{R}^d} + \|\Lambda^{n,N}(u) - \overline{\Lambda}^n(u)\|_{\mathrm{BL}} \leq \\ &\leq 2L\int_0^u \|Y^{n,N}(s) - \overline{Y}^n(s)\|_{\mathbb{R}^d\times F(U)}\,\mathrm{d}s + L\int_0^u W_1(\Sigma_s^N, \Sigma_s)\,\mathrm{d}s..\end{aligned} \tag{4.0.8}$$

Concentriamoci ora sull'ultimo termine della (4.0.8). Dalla disuguaglianza triangolare applicata alla metrica W_1 si ha che

$$\int_0^u W_1(\Sigma_s^N, \Sigma_s)\,\mathrm{d}s \leq \int_0^u W_1(\Sigma_s^N, \overline{\Sigma}_s^N)\,\mathrm{d}s + \int_0^u W_1(\overline{\Sigma}_s^N, \Sigma_s)\,\mathrm{d}s. \tag{4.0.9}$$

Osserviamo ora che la misura (aleatoria)

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{(Y^{i,N}(s),\overline{Y}^i(s))} \in \mathcal{P}((\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U))^2)$$

è un piano di trasporto tra le misure (aleatorie) Σ_s^N e $\overline{\Sigma}_s^N$. Di conseguenza otteniamo la disuguaglianza

$$\begin{aligned}&W_1(\Sigma_s^N, \overline{\Sigma}_s^N) \leq \\ &\leq \int_{(\mathbb{R}^d\times\mathcal{P}(U))^2} \|y_1 - y_2\|_{\mathbb{R}^d\times F(U)}\,\mathrm{d}\bigg(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{(Y^{i,N}(s),\overline{Y}^i(s))}\bigg)(y_1,y_2) = \\ &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \|Y^{i,N}(s) - \overline{Y}^i(s)\|_{\mathbb{R}^d\times F(U)}\end{aligned}$$

dunque concludiamo che

$$\int_0^u W_1(\Sigma_s^N, \overline{\Sigma}_s^N)\,\mathrm{d}s \leq \int_0^u \bigg(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \|Y^{i,N}(s) - \overline{Y}^i(s)\|_{\mathbb{R}^d\times F(U)}\bigg)\,\mathrm{d}s.$$

Stimiamo ora l'ultimo termine della (4.0.9). Argomentando in maniera simile alla dimostrazione proposizione 3.6.3, consideriamo una misura $\tilde{\pi}$ ottimale per $W_1(\overline{\Sigma}^N, \Sigma)$. Allora la misura $\tilde{\pi}_s := (\mathrm{ev}_s, \mathrm{ev}_s)_\sharp \tilde{\pi} \in \Gamma(\overline{\Sigma}_s^N, \Sigma_s)$ e abbiamo

$$\begin{aligned}&\int_0^u W_1(\overline{\Sigma}_s^N, \Sigma_s)\,\mathrm{d}s \\ &\leq \int_0^u \bigg(\int_{(\mathbb{R}^d\times\mathcal{P}(U))^2} \|y_1 - y_2\|_{\mathbb{R}^d\times F(U)}\,\mathrm{d}\tilde{\pi}_s(y_1,y_2)\bigg)\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^u \bigg(\int_{(C([0,T],\mathbb{R}^d\times\mathcal{P}(U)))^2} \|(\mathrm{ev}_s)(\varphi_1) - (\mathrm{ev}_s)(\varphi_2)\|_{\mathbb{R}^d\times F(U)}\,\mathrm{d}\tilde{\pi}(\varphi_1,\varphi_2)\bigg)\,\mathrm{d}s \\ &\leq \int_0^u \bigg(\int_{(C([0,T],\mathbb{R}^d\times\mathcal{P}(U)))^2} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty\,\mathrm{d}\tilde{\pi}(\varphi_1,\varphi_2)\bigg)\,\mathrm{d}s = uW_1(\overline{\Sigma}^N, \Sigma).\end{aligned}$$

Pertanto deduciamo la disuguaglianza

$$\int_0^u W_1(\overline{\Sigma}_s^N, \Sigma_s)\,\mathrm{d}s \leq uW_1(\overline{\Sigma}^N, \Sigma).$$

Dunque, a partire dalla (4.0.9), otteniamo la stima

$$\int_0^u W_1(\Sigma_s^N, \Sigma_s)\,\mathrm{d}s \leq \int_0^u \bigg(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \|Y^{i,N}(s) - \overline{Y}^i(s)\|_{\mathbb{R}^d\times F(U)}\bigg)\,\mathrm{d}s + uW_1(\overline{\Sigma}^N, \Sigma).$$

Ora, in virtù della disuguaglianza (4.0.8), possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
&\|Y^{n,N}(u) - \overline{Y}^n(u)\|_{\mathbb{R}^d\times F(U)} \leq \\
&\leq 2L \int_0^u \|Y^{n,N}(s) - \overline{Y}^n(s)\|_{\mathbb{R}^d\times F(U)}\, \mathrm{d}s + \\
&+ L \int_0^u \Big(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \|Y^{i,N}(s) - \overline{Y}^i(s)\|_{\mathbb{R}^d\times F(U)}\Big)\, \mathrm{d}s + LuW_1(\overline{\Sigma}^N, \Sigma).
\end{aligned}$$

per ogni $n = 1, \ldots, N$ e per ogni $u \in [0, t]$.

Prendendo ora l'estremo superiore sull'intervallo $[0, t]$ otteniamo

$$\begin{aligned}
&\sup_{u\in[0,t]} \|Y^{n,N}(u) - \overline{Y}^n(u)\|_{\mathbb{R}^d\times F(U)} \leq \\
&\leq 2L \int_0^t \|Y^{n,N}(s) - \overline{Y}^n(s)\|_{\mathbb{R}^d\times F(U)}\, \mathrm{d}s + \\
&+ L \int_0^t \Big(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \|Y^{i,N}(s) - \overline{Y}^i(s)\|_{\mathbb{R}^d\times F(U)}\Big)\, \mathrm{d}s + LtW_1(\overline{\Sigma}^N, \Sigma) \leq \\
&\leq 2L \int_0^t \sup_{u\in[0,s]} \|Y^{n,N}(u) - \overline{Y}^n(u)\|_{\mathbb{R}^d\times F(U)}\, \mathrm{d}s + \\
&+ L \int_0^t \Big(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \sup_{u\in[0,s]} \|Y^{i,N}(u) - \overline{Y}^i(u)\|_{\mathbb{R}^d\times F(U)}\Big)\, \mathrm{d}s + LTW_1(\overline{\Sigma}^N, \Sigma)
\end{aligned}$$

per ogni $n = 1, \ldots, N$. Prendendo successivamente il valore atteso di entrambi i membri, e notando che grazie al teorema di Tonelli e alla positività dell'integranda possiamo scambiare il valore atteso con l'integrale in tempo, deduciamo che

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]} \|Y^{n,N}(u) - \overline{Y}^n(u)\|_{\mathbb{R}^d\times F(U)}\Big] \leq \\
&\leq 2L \int_0^t \mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,s]} \|Y^{n,N}(u) - \overline{Y}^n(u)\|_{\mathbb{R}^d\times F(U)}\Big]\, \mathrm{d}s + \\
&+ L \int_0^t \Big(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,s]} \|Y^{i,N}(u) - \overline{Y}^i(u)\|_{\mathbb{R}^d\times F(U)}\Big]\Big)\, \mathrm{d}s + LT\mathbb{E}\Big[W_1(\overline{\Sigma}^N, \Sigma)\Big]
\end{aligned}$$

per ogni $t \in [0, T]$ e per ogni $n = 1, \ldots, N$. Poiché tale stima vale per ogni $1 \leq n \leq N$ possiamo infine scrivere

$$\begin{aligned}
&\max_{1\leq n\leq N} \mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]} \|Y^{n,N}(u) - \overline{Y}^n(u)\|_{\mathbb{R}^d\times F(U)}\Big] \leq \\
&\leq 3L \int_0^t \max_{1\leq n\leq N} \mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,s]} \|Y^{n,N}(u) - \overline{Y}^n(u)\|_{\mathbb{R}^d\times F(U)}\Big]\, \mathrm{d}s + LT\mathbb{E}\Big[W_1(\overline{\Sigma}^N, \Sigma)\Big].
\end{aligned}$$

Definendo ora, per ogni $t \in [0, T]$, la quantità

$$v(t) := \max_{1\leq n\leq N} \mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]} \|Y^{n,N}(u) - \overline{Y}^n(u)\|_{\mathbb{R}^d\times F(U)}\Big] \tag{4.0.10}$$

possiamo riscrivere la precedente disuguaglianza come

$$v(t) \leq LT\mathbb{E}\Big[W_1(\overline{\Sigma}^N, \Sigma)\Big] + 3L \int_0^t v(s)\, \mathrm{d}s, \quad \forall t \in [0, T]. \tag{4.0.11}$$

Siamo ora nelle condizioni di applicare il lemma di Grönwall A.4.7, a patto di dimostrare che la funzione $t \longmapsto v(t)$ è limitata sull'intervallo $[0, T]$. A tale scopo, ricordiamo che per il problema discreto vale la stima a priori (2.3.4), dalla quale si trae

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[0,T]}\|Y^{n,N}(t)\|^2_{(\mathbb{R}^d\times F(U))^N}\Big] \le \overline{C}_1\Big(1+\mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^N\|X_0^i\|^2_{\mathbb{R}^d}\Big]\Big),$$

mentre la stima a priori per il problema di campo medio (3.5.4) ci fornisce la disuguaglianza

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[0,T]}\|\overline{Y}^n(t)\|^2_{\mathbb{R}^d\times F(U)}\Big] \le \overline{C}_2\Big(1+\mathbb{E}\big[\|X_0^n\|^2_{\mathbb{R}^d}\big]\Big) \le \overline{C}_2\Big(1+\mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^N\|X_0^i\|^2_{\mathbb{R}^d}\Big]\Big)$$

per opportune costanti $\overline{C}_1$, $\overline{C}_2$ e per ogni $n=1,\dots,N$. Dunque deduciamo che

$$\begin{aligned}
v(t) &= \max_{1\le n\le N}\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]}\|Y^{n,N}(u)-\overline{Y}^n(u)\|_{\mathbb{R}^d\times F(U)}\Big] \le \\
&\le \max_{1\le n\le N}\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]}\|Y^{n,N}(u)\|_{\mathbb{R}^d\times F(U)}\Big] + \max_{1\le n\le N}\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]}\|\overline{Y}^n(u)\|_{\mathbb{R}^d\times F(U)}\Big] \le \\
&\le \max_{1\le n\le N}\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]}\|Y^{n,N}(u)\|^2_{\mathbb{R}^d\times F(U)}\Big]^{\frac{1}{2}} + \max_{1\le n\le N}\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[0,t]}\|\overline{Y}^n(u)\|^2_{\mathbb{R}^d\times F(U)}\Big]^{\frac{1}{2}} \le \\
&\le \overline{C}_1^{\frac{1}{2}}\Big(1+\mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^N\|X_0^i\|^2_{\mathbb{R}^d}\Big]\Big)^{\frac{1}{2}} + \overline{C}_2^{\frac{1}{2}}\Big(1+\mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^N\|X_0^i\|^2_{\mathbb{R}^d}\Big]\Big)^{\frac{1}{2}} < \infty
\end{aligned}$$

da cui segue la limitatezza di v sull'intervallo $[0,T]$.

Ora possiamo finalmente applicare il lemma di Grönwall A.4.7 concludendo che

$$v(t) \le e^{3Lt}LT\mathbb{E}\Big[W_1(\overline{\Sigma}^N,\Sigma)\Big] \le C_0\mathbb{E}\Big[W_1(\overline{\Sigma}^N,\Sigma)\Big]$$

per ogni $t\in[0,T]$, dove abbiamo posto $C_0 := e^{3LT}LT$. Valutando la disuguaglianza appena ottenuta in $t=T$ otteniamo

$$v(T) = \max_{1\le n\le N}\mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[0,T]}\|Y^{n,N}(t)-\overline{Y}^n(t)\|_{\mathbb{R}^d\times F(U)}\Big] \le C_0\mathbb{E}\Big[W_1(\overline{\Sigma}^N,\Sigma)\Big];$$

in virtù dell'arbitrarietà di N, tale stima vale per ogni $N\in\mathbb{N}^+$. Sottolineiamo che la costante C_0 non dipende in alcun modo da N, essendo influenzata esclusivamente da L_x, L_λ, costanti di Lipschitz dei campi f_x e f_λ rispettivamente, e dall'orizzonte temporale T.

Grazie alla proposizione 4.0.4, sappiamo che i processi $\{\overline{Y}_n\}_{n=1}^\infty$ sono indipendenti e identicamente distribuiti, inoltre la loro legge comune $\Sigma\in\mathcal{P}_p\big(C([0,T],\mathbb{R}^d\times\mathcal{P}(U))\big)$ con $p\in[2,+\infty)$. Infine osserviamo che $(C([0,T],\mathbb{R}^d\times\mathcal{P}(U)),\|\cdot\|_\infty)$ è uno spazio metrico completo e separabile, per cui possiamo applicare il lemma di convergenza delle misure empiriche A.4.10 concludendo che

$$\lim_{N\to\infty}\mathbb{E}\Big[W_1(\overline{\Sigma}^N,\Sigma)\Big]=0,$$

da cui, per confronto,

$$\lim_{N\to\infty}\Big(\max_{1\le n\le N}\mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[0,T]}\|Y^{n,N}(t)-\overline{Y}^n(t)\|_{\mathbb{R}^d\times F(U)}\Big]\Big)=0,$$

come voluto. □

Conclusioni

Il questa tesi abbiamo proposto una generalizzazione del modello multi-agente di Ambrosio et al. [2] tramite l'introduzione di stocasticità sui dati iniziali e di effetti diffusivi sulle componenti spaziali degli agenti.

Abbiamo studiato la buona positura del nuovo modello discreto con N agenti, dimostrando l'esistenza e l'unicità delle soluzioni sotto ipotesi relativamente poco restrittive sui campi che governano la dinamica e sui dati iniziali; abbiamo inoltre ricavato una stima a priori sui momenti delle soluzioni.

Successivamente, abbiamo individuato una formulazione di campo medio del modello, dimostrandone i relativi risultati di buona positura e un'analoga stima a priori.

Infine, sotto opportune ipotesi di indipendenza sui dati iniziali, abbiamo mostrato la validità della *propagazione del caos*, ovvero che quando il numero N di individui che costituiscono il sistema tende all'infinito i processi stocastici che descrivono l'evoluzione degli agenti diventano indipendenti e identicamente distribuiti. Contestualmente abbiamo dimostrato la convergenza, in un senso opportuno, delle soluzioni del problema discreto alle soluzioni del problema di campo medio.

Ulteriori prospettive di ricerca consistono nell'introduzione di effetti diffusivi più generali, ad esempio ammettendo la dipendenza spaziale del coefficiente di diffusione σ oppure considerando elementi di aleatorietà che agiscono non solo sulle componenti spaziali ma anche sulle strategie miste. Un'ulteriore strada da esplorare è la possibilità di esprimere la formulazione di campo medio, da noi data per mezzo di una SDE, tramite un'equazione alle derivate parziali nello spazio infinito dimensionale $\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(U)$, in maniera analoga a quanto fatto in [2]. Congetturiamo che la PDE di campo medio abbia la forma di un'equazione di Fokker-Planck, tuttavia, gli strumenti tecnici con cui passare dalla SDE di campo medio a un'equazione alle derivate parziali in grado di descrivere l'evoluzione della distribuzione Σ_t sono, nel nostro caso, ancora da individuare.

Infine, osserviamo che tutte le argomentazioni che abbiamo condotto in questa tesi non si basano in alcun modo sulla particolare forma analitica dei campi f_x, f_λ che governano la dinamica del sistema, ma solo su alcune loro proprietà strutturali, ovvero la loro lipschitzianità globale e una particolare proprietà di carattere geometrico del campo f_λ. Questo apre la possibilità di estendere, nello spirito di [15], l'analisi svolta a modelli multi-agente più generali, sia nella forma delle regole di interazione sia nella loro interpretazione modellistica.

Appendice A

Alcuni risultati di analisi e probabilità

In questa appendice raccogliamo, senza darne dimostrazione, alcuni risultati di natura analitica e probabilistica impiegati nella tesi.

A.1 Misurabilità per funzioni a valori in spazi di Banach

Sia $(A, \mathscr{A})$ uno spazio misurabile e sia $(E, \|\cdot\|_E)$ uno spazio di Banach reale. La topologia che la norma $\|\cdot\|_E$ induce su E ci permette di costruire la σ-algebra di Borel $\mathscr{B}(E)$, ovvero la σ-algebra generata dagli aperti di tale topologia. Consideriamo ora una funzione $f\colon A \longrightarrow E$, diciamo che f è *$\mathscr{A}$-misurabile* se per ogni insieme $B \in \mathscr{B}(E)$ si ha che $f^{-1}(B) \in \mathscr{B}(E)$. Tuttavia possiamo dare delle definizioni alternative di misurabilità, in generale non equivalenti a quella classica.

Definizione A.1.1. *Sia $(A, \mathscr{A})$ uno spazio misurabile e sia $(E, \|\cdot\|_E)$ uno spazio di Banach. Diciamo che $f\colon A \longrightarrow E$ è*

i) fortemente $\mathscr{A}$-misurabile *se esiste una successione di funzioni semplici $f_n\colon A \longrightarrow E$ tali che $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ puntualmente;*

ii) debolmente $\mathscr{A}$-misurabile *se per ogni funzionale lineare e continuo $\varphi \in E^*$ la funzione a valori reali $\langle \varphi, f\rangle\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ è $\mathscr{A}$-misurabile.*

Ricordiamo che, dato uno spazio misurabile $(A, \mathscr{A})$ e uno spazio di Banach E, una funzione $f\colon A \longrightarrow E$ è detta *semplice* se si può esprimere come $f = \sum_{n=1}^{N} x_n \mathbb{1}_{A_n}$ dove $x_n \in E$ e $A_n \in \mathscr{A}$ per ogni $n = 1, \dots, N$.

La relazione tra le tre definizioni di misurabilità è chiarita dal seguente teorema.

Teorema A.1.2 (di misurabilita di Pettis)**.** *Sia $(A, \mathscr{A})$ uno spazio misurabile e sia $(E, \|\cdot\|_E)$ uno spazio di Banach. Per una funzione $f\colon A \longrightarrow E$ le seguenti proprietà sono equivalenti:*

a) f è fortemente $\mathscr{A}$-misurabile;

b) f è debolmente $\mathscr{A}$-misurabile ed esiste un sottospazio $E_0 \subseteq E$ chiuso e separabile tale che $f(A) \subseteq E_0$;

c) f è $\mathscr{A}$-misurabile ed esiste un sottospazio $E_0 \subseteq E$ chiuso e separabile tale che $f(A) \subseteq E_0$.

Osserviamo che se $(E, \|\cdot\|_E)$ è uno spazio di Banach separabile le tre definizioni di misurabilità diventano del tutto equivalenti.

Teorema A.1.3 (di misurabilita di Pettis per spazi di Banach separabili)**.** *Sia $(A, \mathscr{A})$ uno spazio misurabile e sia $(E, \|\cdot\|_E)$ uno spazio di Banach separabile. Per una funzione $f\colon A \longrightarrow E$ le seguenti proprietà sono equivalenti:*

a) f è fortemente $\mathscr{A}$-misurabile;

b) f è debolmente $\mathscr{A}$-misurabile;

c) f è $\mathscr{A}$-misurabile.

Riportiamo infine un risultato che esprime la chiusura della classe delle funzioni misurabili per limiti puntuali.

Teorema A.1.4. *Sia $(A, \mathscr{A})$ uno spazio misurabile e sia $(E, \|\cdot\|_E)$ uno spazio di Banach. Il limite puntuale $f\colon A \longrightarrow E$ di una successione di funzioni $f_n\colon A \longrightarrow E$ fortemente $\mathscr{A}$-misurabili è una funzione fortemente $\mathscr{A}$-misurabile. Se inoltre lo spazio di Banach $(E, \|\cdot\|_E)$ è separabile la medesima proprietà vale anche per successioni di funzioni debolmente $\mathscr{A}$-misurabili e $\mathscr{A}$-misurabili.*

A.2 Integrale di Bochner

Questo paragrafo è dedicato all'integrale di Bochner, il quale costituisce una generalizzazione dell'integrale di Lebesgue a funzioni che assumono valori in spazi di Banach. L'idea alla base della costruzione dell'integrale di Bochner consiste nel definire dapprima l'integrale per funzioni semplici e successivamente estenderlo a funzioni qualunque tramite una procedura di approssimazione. Il principale riferimento di questa sezione è [2].

Sia $(A, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio di misura σ-finito e sia $(E, \|\cdot\|_E)$ uno spazio di Banach. Diciamo che una funzione $f\colon A \longrightarrow E$ è *μ-semplice* se si può esprimere come $f = \sum_{n=1}^{N} x_n \mathbb{1}_{A_n}$, dove $x_n \in E$, $A_n \in \mathscr{A}$, e $\mu(A_n) < +\infty$ per ogni $n = 1, \ldots, N$. Per le funzioni μ-semplici l'integrale di Bochner è definito come

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu \coloneqq \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) x_n \in E.$$

Diamo ora la seguente definizione.

Definizione A.2.1. *Un funzione $f\colon A \longrightarrow E$ è detta* fortemente μ-misurabile *se esiste una successione di funzioni $f_n\colon A \longrightarrow E$ μ-semplici tali che $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ μ-quasi ovunque.*

Possiamo ora definire la classe di funzioni integrabili secondo Bochner

Definizione A.2.2 (Funzioni integrabili secondo Bochner)**.** *Una funzione $f\colon A \longrightarrow E$ è detta* μ-integrabile secondo Bochner *se esiste una successione di funzioni $f_n\colon A \longrightarrow E$ μ-semplici tali che*

i) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ μ-quasi ovunque (μ-misurabilità forte);

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_A \|f_n - f\|_E \,\mathrm{d}\mu = 0$

Se f è μ-integrabile secondo Bochner, il suo integrale di Bochner è definito come

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu \coloneqq \lim_{n\to\infty} \int_A f_n \,\mathrm{d}\mu;$$

si può dimostrare che tale limite esiste in $(E, \|\cdot\|_E)$ ed indipendente dalla successione $\{f_n\}_n$. Riportiamo ora alcune proprietà dell'integrale di Bochner.

Proposizione A.2.3. *(Criterio di integrabilità) Una funzione $f\colon A \longrightarrow E$ fortemente μ-misurabile è μ-integrabile secondo Bochner se e solo se*

$$\int_A \|f\|_E \,\mathrm{d}\mu < +\infty \tag{A.2.4}$$

e in tal caso vale la disuguaglianza

$$\left\| \int_A f \, \mathrm{d}\mu \right\|_E \leq \int_A \|f\|_E \, \mathrm{d}\mu. \tag{A.2.5}$$

Proposizione A.2.6. *(Integrale di Bochner e funzionali lineari) Se $f\colon A \longrightarrow E$ è una funzione μ-integrabile secondo Bochner allora*

$$\left\langle \varphi, \int_A f \, \mathrm{d}\mu \right\rangle = \int_A \langle \varphi, f \rangle \, \mathrm{d}\mu$$

per ogni $\varphi \in E^*$.

Concludiamo con una proprietà valida se $(E, \|\cdot\|_E)$ è uno spazio di Banach separabile.

Proposizione A.2.7. *Se $(E, \|\cdot\|_E)$ è uno spazio di Banach separabile ogni funzione continua $f\colon A \longrightarrow E$ è fortemente μ-misurabile.*

Osservazione 12. In questa tesi, l'integrale di Bochner è applicato esclusivamente a funzioni continue $f\colon [0,T] \longrightarrow E$, dove E è uno spazio di Banach separabile e μ è la classica misura di Lebesgue m sull'intervallo $[0,T]$. Di conseguenza la precedente proposizione A.2.7 ci garantisce la m-misurabilità forte di f, inoltre, la continuità di f e la compattezza di $[0,T]$ ci garantiscono la limitatezza di f, da cui si ha che $\int_0^T \|f\|_E \, \mathrm{d}s < +\infty$. Pertanto, il criterio di integrabilità A.2.3 è automaticamente soddisfatto, dunque tutte le funzioni considerate in questa tesi sono m-Bochner integrabili e possiamo avvalerci di risultati come la disuguaglianza (A.2.5) o la proposizione A.2.6.

A.3 Processi stocastici

In questo paragrafo riportiamo alcune generalità riguardanti i processi stocastici. Dopo alcune definizioni di carattere generale, ci concentreremo sui processi stocastici a valori in spazi di Banach separabili. I principali riferimenti per questa sezione sono [6] e [21]. Sia $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità e sia $I \subseteq \mathbb{R}^+$ un intervallo della retta reale.

Definizione A.3.1. *(Filtrazione) Una famiglia $(\mathscr{F}_t)_{t\in I}$ di sotto-σ-algebre di $\mathscr{F}$ è detta* filtrazione *se per ogni $s \leq t$ si ha $\mathscr{F}_s \subseteq \mathscr{F}_t$. In tal caso chiamiamo la quaterna $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\in I}, \mathbb{P})$* spazio di probabilità filtrato*.*

Sia ora $(X(t))_{t\in I}$ una famiglia di variabili aleatorie definite sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ e a valori in uno spazio misurabile $(E, \mathscr{E})$. Diamo le seguenti definizioni.

Definizione A.3.2. *(Famiglia di variabili aleatorie adattate a una filtrazione) Diciamo che la famiglia di variabili aleatorie $(X(t))_{t\in I}$ è* adattata *alla filtrazione $(\mathscr{F}_t)_{t\in I}$ se per ogni $t \in I$ la variabile aleatoria $X(t)$ è $\mathscr{F}_t$-misurabile.*

Definizione A.3.3. *(Processo stocastico) Si dice* processo stocastico *definito sullo spazio di probabilità filtrato $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\in I}, \mathbb{P})$ e a valori in $(E, \mathscr{E})$ una famiglia $(X(t))_{t\in I}$ di variabili aleatorie definite sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ e a valori in uno spazio misurabile $(E, \mathscr{E})$ adattata alla filtrazione $(\mathscr{F}_t)_{t\in I}$.*

Definizione A.3.4. *(Filtrazioni e processi standard) Una filtrazione $(\mathscr{F}_t)_{t\in I}$ si dice* standard *se per ogni $t \in I$ si ha che $\mathscr{F}_t = \bigcap_{\varepsilon>0} \mathscr{F}_{t+\epsilon}$ (*continuità da destra*) e $\mathscr{F}_t$ contiene gli insiemi trascurabili di $\mathscr{F}$. Un processo stocastico si dice* standard *se lo è la filtrazione su cui è definito.*

D'ora in poi supporremo che E sia uno spazio di Banach separabile (relativamente alla norma $\|\cdot\|_E$) e che $\mathscr{E}$ sia la σ-algebra di Borel $\mathscr{B}(E)$, ossia la σ-algebra generata dagli aperti della topologia indotta dalla norma $\|\cdot\|_E$. Supponiamo inoltre che $I = [0,T] \subset \mathbb{R}^+$ con $T > 0$. Diamo le ulteriori definizioni:

Definizione A.3.5. *(Continuità) Un processo stocastico $(X(t))_{t\in[0,T]}$ è detto* continuo *se le sue traiettorie sono continue, ovvero se per ogni $\omega \in \Omega$ fissato si ha che l'applicazione*

$$\begin{aligned} [0,T] &\longrightarrow E \\ t &\longmapsto X(\omega,t) \end{aligned}$$

è continua.

Definizione A.3.6. *(Progressiva misurabilità) Un processo stocastico $(X(t))_{t\in[0,T]}$ è detto* progressivamente misurabile *se, per ogni $t \in [0,T]$, l'applicazione*

$$\begin{aligned} \Omega \times [0,t] &\longrightarrow E \\ (\omega,s) &\longmapsto X(\omega,s) \end{aligned}$$

è $\mathscr{F}_t \otimes \mathscr{B}([0,t])$-misurabile.

Il seguente risultato lega continuità e progressiva misurabilità.

Proposizione A.3.7. *Sia $(X(t))_{t\in[0,T]}$ un processo stocastico continuo (e adattato) a valori in uno spazio di Banach separabile $(E, \|\cdot\|_E)$. Allora $(X(t))_{t\in[0,T]}$ è un processo progressivamente misurabile.*

Concludiamo con un risultato che, all'occorrenza, ci permette di cambiare punto di vista sui processi stocastici, pensandoli come variabili aleatorie a valori in spazi di funzioni.

Proposizione A.3.8. *Sia $(X(t))_{t\in[0,T]}$ un processo stocastico continuo (e adattato) a valori in uno spazio di Banach separabile $(E, \|\cdot\|_E)$. Allora l'applicazione*

$$\begin{aligned} \Omega &\longrightarrow C([0,T],E) \\ \omega &\longmapsto \{t \longmapsto X(\omega,t)\} \end{aligned}$$

è una variabile aleatoria a valori in $C([0,T],E)$.

A.4 Ulteriori risultati utili

Concludiamo quest'appendice con alcuni risultati ulteriori di analisi matematica e calcolo delle probabilità.

Proposizione A.4.1 ([6, Equation 9.11])**.** *Siano $p \geq 1$ e $m \in \mathbb{N}$ fissati. Comunque scelti m numeri reali $a_1, \dots, a_m \geq 0$ vale la disuguaglianza*

$$(a_1 + \cdots + a_m)^p \leq m^{p-1}(a_1^p + \cdots + a_m^p). \tag{A.4.2}$$

Proposizione A.4.3 (Disuguaglianza massimale di Doob [5, Theorem 2.2])**.** *Sia $(B(t))_{t\in[0,T]}$ un moto browniano k-dimensionale e $p > 1$. Allora vale la disuguaglianza*

$$\mathbb{E}\Big[\max_{t\in[0,T]} \|B(t)\|_{\mathbb{R}^k}^p\Big] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}\big[\|B(T)\|_{\mathbb{R}^k}^p\big] \tag{A.4.4}$$

Proposizione A.4.5 (Disuguaglianza di Markov [6, Equation 1.6])**.** *Sia X una variabile aleatoria reale tale che $X \geq 0$. Siano inoltre δ, β numeri reali positivi. Allora*

$$\mathbb{P}(X > \delta) \leq \frac{\mathbb{E}[X^\beta]}{\delta^\beta}. \tag{A.4.6}$$

Lemma A.4.7 (di Grönwall [6, Lemma 9.1])**.** *Siano w, v funzioni reali non negative definite sull'intervallo $[a,b]$, con w integrabile e v misurabile e limitata. Sia inoltre $c \geq 0$ e si assuma che per ogni $t \in [a,b]$*

$$v(t) \leq c + \int_a^t w(s)v(s)\,\mathrm{d}s \tag{A.4.8}$$

allora, per ogni $t \in [a,b]$, vale le disuguaglianza

$$v(t) \leq c\,e^{\int_a^t w(s)\,\mathrm{d}s}. \tag{A.4.9}$$

Lemma A.4.10 (Convergenza delle misure empiriche in distanza di Wasserstein [18, Lemma 4.7.1])**.** *Sia* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una successione di variabili aleatorie a valori in uno spazio metrico completo e separabile* $(\mathcal{X}, d_{\mathcal{X}})$*. Indichiamo con* μ *la legge comune di tali variabili aleatorie e per, ogni* $N \in \mathbb{N}^+$*, la misura empirica*

$$\mu^N := \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \delta_{X_n}.$$

Se $\mu \in \mathcal{P}_p(\mathcal{X})$ *(con* $p \geq 1$*) allora*

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\Big[W_p(\mu^N, \mu)\Big] = 0,$$

dove W_p *è la distanza di Wasserstein di ordine* p *associata alla metrica* $d_{\mathcal{X}}$*.*

Bibliografia

[1] L. Ambrosio, E. Brué e D. Semola. *Lectures on Optimal Transport.* Collana Unitext. Springer, 2021.

[2] L. Ambrosio, M. Fornasier, M. Morandotti e G. Savaré. «Spatially Inhomogeneous Evolutionary Games». In: *Communications on Pure and Applied Mathematics* 71.7 (2021), pp. 1353–1402.

[3] L. Ambrosio, N. Gigli e G. Savaré. *Gradient Flows in Metric Spaces and in the Space of Probability Measures.* Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser, 2008.

[4] R. F. Arens e J. Eells Jr. «On embedding uniform and topological spaces». In: *Pacific J. Math* 6 (1956), pp. 397–403.

[5] G. Ascione, D. Castorina e F. Solombrino. «Mean field sparse optimal control of systems with additive white noise». arXiv. arXiv:2204.02431. 2022.

[6] Paolo Baldi. *Stochastic Calculus: an Introduction Through Theory and Exercises.* Collana Universitext. Springer, 2017.

[7] Patrick Billingsley. *Convergence of Probability Measures.* Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley & Sons, 1999.

[8] Haïm Brézis. *Operateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert.* North-Holland Mathematics Studies. North- Holland, Amsterdam-London; American Elsevier, New York, 1973.

[9] J. A. Carrillo, Y. Choi, C. Totzeck e O. Tse. «An analytical framework for consensus-based global optimization method». In: *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 28.06 (2018), pp. 1037–1066.

[10] F. Cucker e S. Smale. «Emergent behavior in flocks». In: *IEEE Transactions on automatic control* 52.5 (2007), pp. 852–886.

[11] Z. Ding, S. Chen, Q. Li e S. Wright. «Overparameterization of deep ResNet: zero loss and mean-field analysis». In: *Journal of Machine Learning Research* 23 (2023), pp. 1–65.

[12] Gerald B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications.* Pure and Applied Mathematics. John Wiley & Sons, 1999.

[13] S. Grassi e L. Pareschi. «From particle swarm optimization to consensus based optimization: Stochastic modeling and mean-field limit». In: *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 31.08 (2021), pp. 1625–1657.

[14] E. F. Keller e L. A. Segel. «Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability». In: *Journal of Theoretical Biology* 26.3 (1970), pp. 399–415.

[15] M. Morandotti e F. Solombrino. «Mean-field Analysis of Multipopulation Dynamics with Label Switching». In: *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 52.02 (2020), pp. 1427–1462.

[16] Bernt Øksendal. *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications.* Springer, 2000.

[17] T. D'Aprile P. Cannarsa. *Introduzione alla teoria della misura e all'analisi funzionale.* Collana Unitext. Springer, 2008.

[18] V. Panaretos e Y. Zemel. *An Invitation to Statistics in Wasserstein Space*. SpringerBriefs in Probability and Mathematical Statistics. Cambridge University Press, 2020.

[19] L. Pareschi e G. Toscani. «Wealth distribution and collective knowledge: a Boltzmann approach». In: *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 372.2028 (2014).

[20] R. Pinnau, C. Totzeck, O. Tse e S. Martin. «A consensus-based model for global optimization and its mean-field limit». In: *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 27.01 (2017), pp. 183–204.

[21] G. Da Prato e J. Zabczyk. *Stochastic Equations in Infinite Dimensions*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 1992.

[22] M. Pulvirenti e S. Simonella. «Propagation of chaos and effective equations in kinetic theory: a brief survey». In: *Math. and Mech. of Complex Syst.* 4.3 (2016), pp. 255–274.

[23] Filippo Santambrogio. *Optimal Transport for Applied Mathematicians*. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications. Birkhäuser, 2015.

[24] G. Toscani, A. Tosin e M. Zanella. «Opinion modeling on social media and marketing aspects». In: *Phys. Rev. E* 98.2 (2018), p. 022315.

[25] Giuseppe Toscani. «Kinetic models of opinion formation». In: *Communications in mathematical sciences* 4.3 (2006), pp. 481–496.

[26] Cédric Villani. *Optimal Transport: Old and New*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer, 2009.