



**Politecnico  
di Torino**

Politecnico di Torino

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale  
A.a. 2022/2023  
Sessione di Laurea Luglio 2023

# **Traiettorie di Evasione dal Punto Lagrangiano $L_2$ nel sistema Sole-Terra**

Relatore:  
Prof. Lorenzo Casalino

Candidata:  
Marina Coco

*“So remember to look up at the stars  
and not down at your feet.  
Try to make sense of what you see and  
wonder about what makes the  
universe exist.  
Be curious.  
And however difficult life may seem,  
there is always something you can do  
and succeed at. It matters that you  
don't just give up.  
Unleash your imagination.  
Shape the future.”*

*Stephen Hawking*

# Sommario

Il lavoro svolto nella presente tesi riguarda lo studio delle traiettorie di evasione dal punto Lagrangiano  $L_2$  nel sistema Sole-Terra mediante l'utilizzo della propulsione elettrica. Sono state prese in considerazione cinque diverse date di partenza da orbite di Lyapunov e sono state analizzate diverse traiettorie di evasione, tenendo conto del punto di partenza lungo l'orbita e della durata totale dell'evasione. L'obiettivo è stato individuare le traiettorie ottimali per ciascun caso attraverso l'utilizzo di metodi indiretti di ottimizzazione.

Tra le traiettorie ottimali sono state prese in considerazione e analizzate quelle che minimizzano la durata della spinta del propulsore o, equivalentemente, che massimizzano la massa finale del veicolo spaziale.

Per l'analisi è stato utilizzato un codice Fortran f90 e il modello dinamico comprende quattro corpi gravitazionali (il satellite soggetto all'attrazione gravitazionale di Terra, Luna e Sole) utilizzando le effemeridi JPL per determinare le posizioni dei corpi nel tempo.

# Abstract

The work carried out in this thesis concerns the study of escape trajectories from the Lagrangian point  $L_2$  in the Sun-Earth system using electric propulsion. Departures from Lyapunov orbits on five different initial dates were considered, and various escape trajectories were analyzed by varying the departure point along the orbit and the total duration of the escape. The objective was to find the optimal trajectories for each of the analyzed cases using indirect methods of optimization.

The optimal trajectories were considered those that minimized the duration of the thruster burn or, equivalently, maximized the final mass of the spacecraft.

For the analysis, a Fortran f90 code was used, and the dynamical model includes four gravitational bodies (the satellite subject to the gravitational attraction of Earth, Moon and Sun) using JPL ephemerides to determine the positions of the bodies over time.

**Contenuti**

<b>Lista delle figure</b> .....	<b>vi</b>
<b>Lista delle tabelle</b> .....	<b>vii</b>
<b>1 Introduzione</b> .....	<b>1</b>
<b>2 Punto Lagrangiano <math>L_2</math> e orbita di Lyapunov</b> .....	<b>3</b>
2.1 Punto Lagrangiano $L_2$ nel sistema Sole-Terra .....	4
2.2 Orbita di Lyapunov .....	5
2.3 Overview missioni attorno a SEL2 .....	5
<b>3 Meccanica orbitale</b> .....	<b>10</b>
3.1 Sistemi di riferimento .....	10
3.1.1 Sistema di Riferimento Eliocentrico – Eclittica .....	10
3.1.2 Sistema di Riferimento Geocentrico Equatoriale .....	11
3.2 Legge di gravitazione universale di Newton.....	11
3.3 Problema dei due corpi .....	12
3.4 Problema dei tre corpi circolare ristretto.....	14
3.5 Punti Lagrangiani .....	16
3.6 Integrale di Jacobi e superfici a zero velocità .....	19
<b>4 Ottimizzazione Indiretta di Traiettorie Spaziali</b> .....	<b>21</b>
4.1 Teoria del controllo ottimale.....	21
4.2 Problema differenziale ai limiti.....	25
<b>5 Definizione del problema</b> .....	<b>30</b>
5.1 Modello dinamico.....	30
5.2 Perturbazioni.....	32
5.2.1 Effetto luni-solare .....	32
5.2 Ottimizzazione .....	34
5.3 Caso studio.....	35
<b>6 Risultati</b> .....	<b>36</b>
6.1 Condizione iniziale di spinta nulla .....	39
6.2 Traiettorie di evasione.....	44
<b>7 Conclusioni</b> .....	<b>61</b>
<b>Riferimenti</b> .....	<b>63</b>
<b>Appendice</b> .....	<b>64</b>

# Lista delle figure

Figura 1. Punti Lagrangiani nel sistema Sole-Terra [2] .....	3
Figura 2. Satellite intorno a SEL2 [3].....	4
Figura 3. ISEE mission poster [5] .....	6
Figura 4. Traiettorie e orbita di WMAP [7] .....	7
Figura 5. Traiettorie Gaia [8].....	7
Figura 6. Traiettorie JWST [9] .....	8
Figura 7. Traiettorie Euclid [11] .....	9
Figura 8. PLATO mission [12] .....	9
Figura 9. Sistema di riferimento Eliocentrico-Ellittica [13].....	11
Figura 10. Sistema di riferimento Geocentrico Equatoriale [14].....	11
Figura 11. . Sistema di riferimento geocentrico equatoriale e parametri orbitali [16].....	13
Figura 12. Corpi principali $m_1$ e $m_2$ in orbita circolare attorno al loro baricentro e massa secondaria $m$ [16]	14
Figura 13. Punti Lagrangiani in un generico sistema di riferimento sinodico .....	18
Figura 14. Livelli energetici dei punti Lagrangiani Sole-Terra [17] .....	19
Figura 15. Sistemi di riferimento EME2000 (I, J, K) e topocentrico (i, j, k) [1].....	31
Figura 16. Perturbazioni gravitazionali nel sistema di riferimento EME2000 [1].....	33
Figura 17. Caso 1 - $t_0=162.033$ .....	37
Figura 18. Caso 2 - $t_0=162.153$ .....	37
Figura 19. Caso 3 - $t_0=162.274$ .....	38
Figura 20. Caso 4 - $t_0=162.394$ .....	38
Figura 21. Caso 5 - $t_0=162.514$ .....	39
Figura 22. Soluzione senza spinta, 15/10/2025 (caso 1) .....	40
Figura 23. Confronto tra orbita senza spinta (rosso/giallo) e orbita di riferimento, 15/10/2025 (caso 1) .....	40
Figura 24. Confronto tra orbita senza spinta (rosso) e orbita di riferimento, 22/10/2025 (caso 2) .....	41
Figura 25. Confronto tra orbita senza spinta (rosso/giallo) e orbita di riferimento, 29/10/2025 (caso 3) .....	42
Figura 26. Confronto tra orbita senza spinta (rosso/giallo) e orbita di riferimento, 5/11/2025 (caso 4) .....	43
Figura 27. Confronto tra orbita senza spinta (rosso/giallo) e orbita di riferimento, 12/11/2025 (caso 5) .....	43
Figura 28. $t_1$ in funzione della durata totale dell'evasione .....	47
Figura 29. Punto di partenza ottimale in funzione della data di evasione .....	48
Figura 30. $t_1$ in funzione di $t_0$ .....	48
Figura 31. $t_1$ in funzione delle date di partenza.....	50
Figura 32. Traiettorie di evasione da orbita di Lyapunov riferita al caso 1 .....	51
Figura 33. Traiettorie di evasione da orbita di Lyapunov riferita al caso 2 .....	52
Figura 34. Traiettorie di evasione da orbita di Lyapunov riferita al caso 3 .....	53
Figura 35. Traiettorie di evasione da orbita di Lyapunov riferita al caso 4 .....	54
Figura 36. Traiettorie di evasione da orbita di Lyapunov riferita al caso 5 .....	55
Figura 37. Traiettorie di evasione 1/11/2025 (blu) e 6/11/2025 (rosso) .....	56
Figura 38. Traiettorie di evasione, durata 90 giorni .....	57
Figura 39. Traiettorie di evasione, durata 75 giorni .....	57
Figura 40. Traiettorie di evasione, durata 70 giorni .....	58
Figura 41. Traiettorie di evasione, durata 65 giorni .....	58
Figura 42. Traiettorie di evasione, durata 60 giorni .....	59
Figura 43. Traiettorie con $t_1$ minimo per le diverse durate .....	60

# Lista delle tabelle

Tabella 1. Casi studio analizzati .....	36
Tabella 2. Traiettorie ottimali caso 1.....	44
Tabella 3. Traiettorie ottimali caso 2.....	45
Tabella 4. Traiettorie ottimali caso 3.....	45
Tabella 5. Traiettorie ottimali caso 4.....	46
Tabella 6. Traiettorie ottimali caso 5.....	46
Tabella 7. $t_1$ massimo e $t_1$ minimo per le diverse durate .....	49
Tabella 8. Caso 1 – $t_0=162.033$ .....	64
Tabella 9. Caso 2 – $t_0=162.153$ .....	65
Tabella 10. Caso 3 – $t_0=162.274$ .....	65
Tabella 11. Caso 4 – $t_0=162.394$ .....	66
Tabella 12. Caso 5 – $t_0=162.514$ .....	66

# Capitolo 1

## Introduzione

Oggetto di questa tesi sono i punti di Lagrange e le orbite di evasione da questi punti mediante l'utilizzo della propulsione elettrica. Questi punti rappresentano una posizione nello spazio che offre al veicolo spaziale un equilibrio dinamico nel problema dei tre corpi.

In particolare l'attenzione è stata posta sul punto Lagrangiano  $L_2$  nel sistema Sole-Terra (SEL2). Nello specifico, il punto  $L_2$ , è ideale per le osservazioni astronomiche dello spazio profondo: infatti un veicolo spaziale orbitante nelle vicinanze del punto si trova a una distanza dalla Terra sufficiente a garantire una facile comunicazione e allo stesso tempo può mantenere una posizione non eclissata dal Sole, Terra e Luna mantenendo un'orbita relativamente stabile.

I punti Lagrangiani, per le loro posizioni strategiche e vantaggiose, sono di grande interesse per numerose missioni spaziali, presenti e future, poiché permettono di effettuare studi dello spazio profondo e partenze interplanetarie. Infatti è necessario un delta V propulsivo molto piccolo per effettuare evasioni da questi punti in traiettorie a bassa energia con una  $C_3$  finale sotto i  $0.5 \text{ (km/s)}^2$ : questi valori sono ideali per missioni verso Near Earth Asteroid [1].

A titolo di esempio, la missione "no name" dell'Agenzia Spaziale Europea prevede di utilizzare un'orbita attorno a  $L_5$  per studiare lo space weather; "Comet interceptor" o "Plato" sono pianificate nel punto SEL2; la NASA sta pianificando la costruzione della nuova stazione spaziale "Lunar Orbital Platform-Gateway" posizionata nel punto  $L_2$  nel sistema Terra-Luna.

Nell'ottica delle trasferte interplanetarie, nel presente lavoro di tesi sono state analizzate le manovre di evasione dal punto SEL2, utilizzando metodi indiretti di ottimizzazione e un modello dinamico molto accurato che considera la presenza di quattro corpi. Infatti numerose perturbazioni influenzano il moto di un satellite nei pressi dei punti Lagrangiani, che è soggetto a una complessa interazione gravitazionale tra Sole, Terra e Luna: per questo motivo è stato superato il modello dinamico dei tre corpi ristretto per avere una maggiore precisione nei risultati. L'obiettivo è quello di minimizzare il consumo di propellente in modo da massimizzare la massa finale. Tra le traiettorie trovate grazie al processo di ottimizzazione, sono state prese poi in considerazione per lo studio quelle che, al variare del punto di partenza su un'orbita di Lyapunov attorno a  $L_2$  e al variare della durata totale dell'evasione, avessero il minor tempo della fase di spinta.

La tesi è così organizzata.

Il capitolo 2 descrive più nel dettaglio il punto SEL2 e l'orbita di Lyapunov considerata come orbita di partenza per le traiettorie di evasione studiate nella presente tesi, per poi proporre un breve excursus sulle missioni spaziali effettuate in  $L_2$  a sottolineare l'importanza strategica di questo punto.

Il capitolo 3 offre una descrizione dei fondamenti della meccanica orbitale, background necessario per lo studio portato avanti nella tesi.

Il capitolo 4 tratta il metodo di ottimizzazione indiretta mediante l'applicazione della teoria del controllo ottimale.

Il capitolo 5 descrive il modello dinamico utilizzato nelle analisi condotte e presenta il caso oggetto di studio.

Il capitolo 6 presenta i risultati ottenuti mettendone in evidenza gli aspetti più importanti.

Il capitolo 7, infine, presenta un sommario dei principali risultati e propone future ricerche nello stesso ambito.

## Capitolo 2

### Punto Lagrangiano L<sub>2</sub> e orbita di Lyapunov

L'esplorazione spaziale ha l'obiettivo di ampliare la comprensione dell'universo, studiare l'origine e l'evoluzione dei corpi celesti, cercare segni di vita extraterrestre e sviluppare nuove tecnologie e capacità per supportare l'esplorazione futura. Per raggiungere tali obiettivi, sono state condotte numerose ricerche sulle traiettorie di trasferimento interplanetario. A differenza delle missioni che partono dalla Terra, che richiedono un sistema di propulsione ad alta potenza per superare l'attrazione gravitazionale terrestre, nei trasferimenti interplanetari spesso è vantaggioso utilizzare un sistema di propulsione ad alta spinta specifica, come la propulsione elettrica, al fine di ridurre la quantità di propellente necessario. Questo approccio consente di raggiungere le destinazioni interplanetarie in modo più efficiente e di ridurre la dipendenza da grandi quantità di carburante.

Nell'ottica dello studio delle trasferte interplanetarie, di fondamentale importanza sono i punti Lagrangiani, chiamati così in onore del matematico italiano Joseph-Louis Lagrange, che li ha studiati.

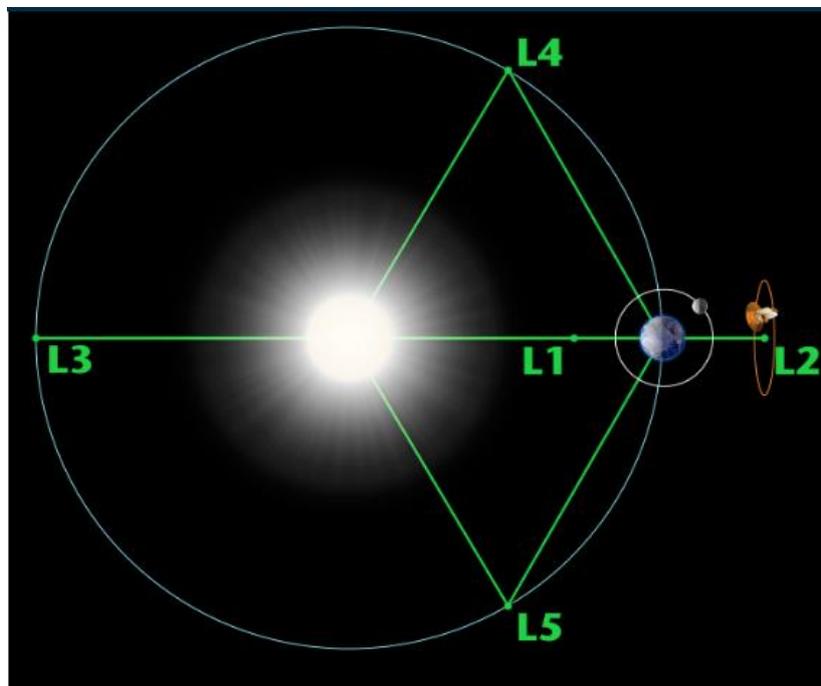


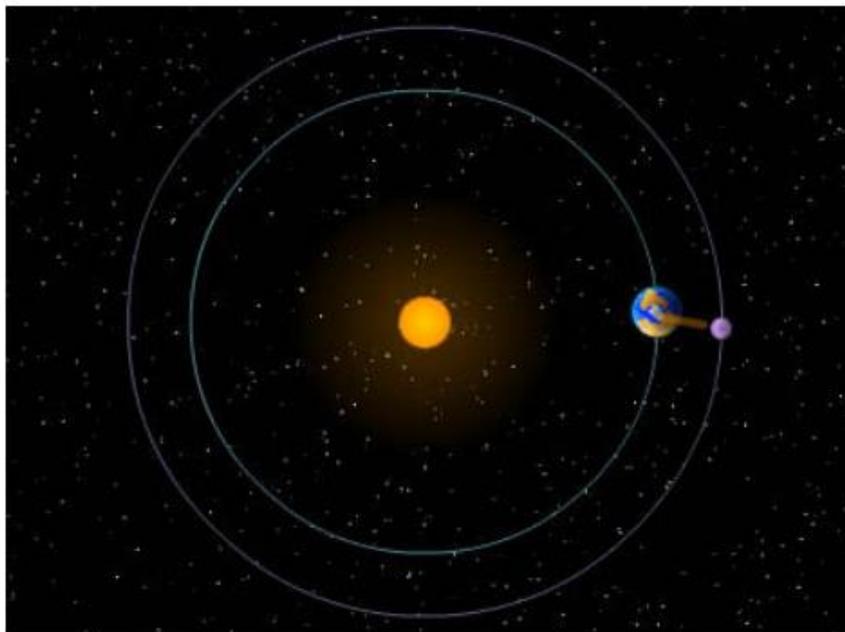
Figura 1. Punti Lagrangiani nel sistema Sole-Terra [2]

I punti di Lagrange rappresentano posizioni di equilibrio nella dinamica dei tre corpi: quando un satellite viene posizionato in un punto Lagrangiano, rimane stazionario rispetto al sistema di riferimento che ruota con i due corpi principali, dove i corpi principali possono essere Sole e Terra o

Terra e Luna. Questo equilibrio è raggiunto grazie alla compensazione tra le forze gravitazionali di attrazione e le forze inerziali. Di conseguenza, queste posizioni offrono vantaggi strategici sia per le missioni interplanetarie che per lo studio dello spazio profondo. La comunità scientifica nutre un grande interesse nell'esplorare questi punti e sono state programmate numerose missioni per farlo.

## 2.1 Punto Lagrangiano L<sub>2</sub> nel sistema Sole-Terra

Il punto di Lagrange L<sub>2</sub> nel sistema Sole-Terra (SEL2) è uno dei cinque punti di equilibrio: questo si trova all'esterno dell'orbita terrestre, oltre la posizione della Luna, a circa 1,5 milioni di chilometri dalla Terra in direzione opposta al Sole.



*Figura 2. Satellite intorno a SEL2 [3]*

Il punto L<sub>2</sub> è considerato interessante per diverse missioni spaziali. Una delle ragioni principali è la sua stabilità, che consente alle sonde spaziali di rimanere in posizione rispetto alla Terra e al Sole con un consumo di carburante relativamente basso. Questo punto può essere utilizzato per osservazioni scientifiche: offre, infatti, la possibilità di effettuare osservazioni continue di una vasta porzione del cielo, senza essere influenzati dall'ombra della Terra [3].

Tuttavia un'orbita attorno a L<sub>2</sub> risulta instabile su una scala temporale di circa 23 giorni, quindi i satelliti che si trovano in queste posizioni devono regolarmente correggere la loro traiettoria e l'assetto per mantenere la posizione desiderata.

Le missioni nello spazio che coinvolgono il punto  $L_2$  includono telescopi spaziali, satelliti per l'osservazione del Sole, satelliti meteorologici e missioni di esplorazione del sistema solare. La posizione strategica e la stabilità gravitazionale di questo punto lo rendono interessante per molte missioni di osservazione e esplorazione spaziale [4].

## 2.2 Orbita di Lyapunov

L'orbita di Lyapunov nel problema dei tre corpi ristretto è un'orbita periodica che si sviluppa attorno ai punti Lagrangiani e giace nel piano dei due corpi principali. Queste orbite hanno la caratteristica unica di essere stabili sia nelle direzioni radiali che tangenziali rispetto al punto Lagrangiano. Le orbite di Lyapunov si formano attorno ai punti  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$ , ma quelle attorno al punto  $L_2$  sono particolarmente interessanti per le missioni spaziali. Un oggetto in quest'orbita può mantenere una posizione costante rispetto al punto  $L_2$  senza richiedere un'elevata quantità di energia per le correzioni. Inoltre, le orbite di Lyapunov offrono un ambiente relativamente stabile in termini di perturbazioni gravitazionali. Ciò significa che gli oggetti in queste orbite richiedono meno correzioni e consumano meno energia per mantenere la loro posizione rispetto ad altre orbite: questo li rende adatti per missioni di lunga durata o per l'installazione di telescopi spaziali e strumenti scientifici sensibili.

Le orbite di Lyapunov sono di particolare interesse per le missioni spaziali perché offrono vantaggi strategici. Ad esempio, l'orbita di Lyapunov attorno al punto  $L_2$  può essere utilizzata per posizionare satelliti o sonde spaziali in una posizione che permette una vista costante sulla Terra e sul Sole. Questo è vantaggioso per missioni di osservazione terrestre, solare e astronomica, poiché consente di raccogliere dati a lungo termine e di monitorare continuamente specifiche regioni del cielo.

## 2.3 Overview missioni attorno a SEL2

Numerose missioni spaziali, passate, presenti e future, sfruttano la posizione di  $L_2$  per condurre osservazioni e ricerche scientifiche nell'ambito dell'astronomia e dell'astrofisica. Si riportano di seguito alcuni esempi.

- La prima missione scientifica in prossimità dei punti Lagrangiani del sistema Sole - Terra, è stata la "ISEE - International Sun Earth Explorer" del 1978. L'ISEE è un programma di cooperazione tra la NASA e l'ESA che comprende tre satelliti destinati a studiare le proprietà dinamiche della magnetosfera terrestre e il vento solare di fronte alla magnetosfera [5].

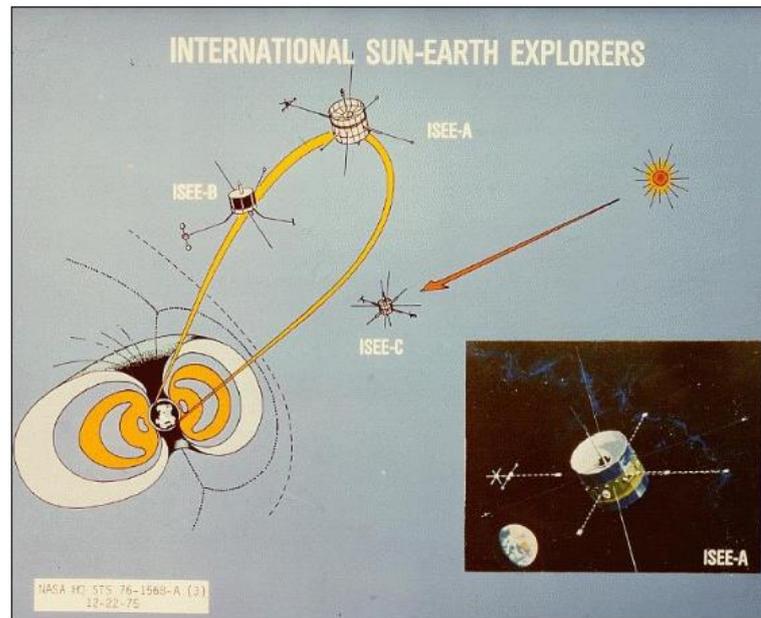


Figura 3. ISEE mission poster [5]

- Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) è la prima missione a usare un'orbita attorno a L2 come stazione di osservazione permanente. Lanciato nel 2001, il WMAP è stato un satellite che ha mappato la temperatura relativa del Cosmic Microwave Background (CMB) sull'intero cielo, fornendo importanti informazioni sulla struttura e l'evoluzione dell'universo. Osservando il cielo da un'orbita attorno a SEL2, l'osservatorio può sempre puntare lontano dal Sole, dalla Terra e dalla Luna, mantenendo una vista non ostruita dello spazio profondo. Il WMAP scandisce il cielo in modo da coprire circa il 30% del cielo ogni giorno e, poiché il punto L2 segue la Terra attorno al Sole, il WMAP osserva l'intero cielo ogni sei mesi [6].

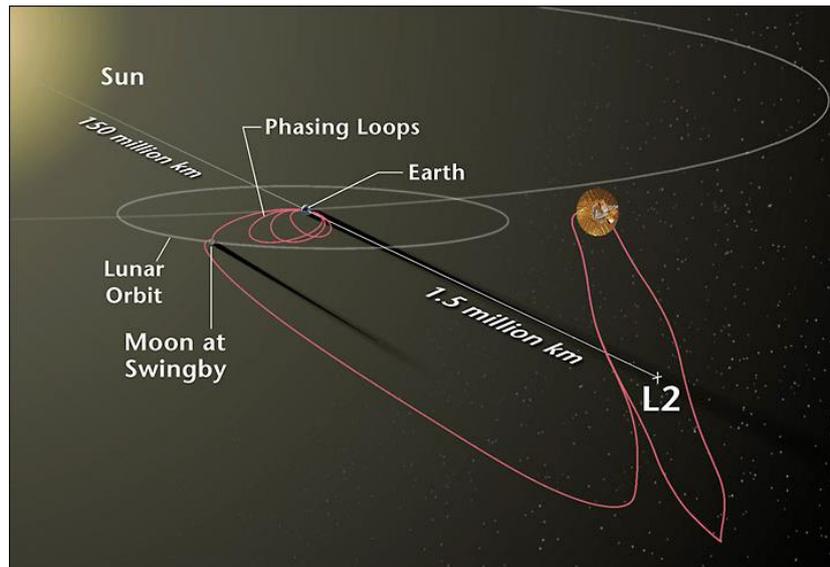


Figura 4. Traiettoria e orbita di WMAP [7]

- Gaia Astrometry Mission, lanciata nel 2013, è una missione astrometrica spaziale dell'ESA, con l'obiettivo di compilare un catalogo spaziale tridimensionale di oltre 1000 milioni di stelle della Via Lattea. La missione studierà anche circa 500.000 quasar distanti e fornirà rigorosi nuovi test della Teoria Generale della Relatività di Albert Einstein. Si trova su un'orbita di Lissajous intorno a SEL2 per i vantaggi precedentemente detti. Inoltre, L2 offre un ambiente di radiazioni moderate, il che favorisce la longevità dei rilevatori strumentali.

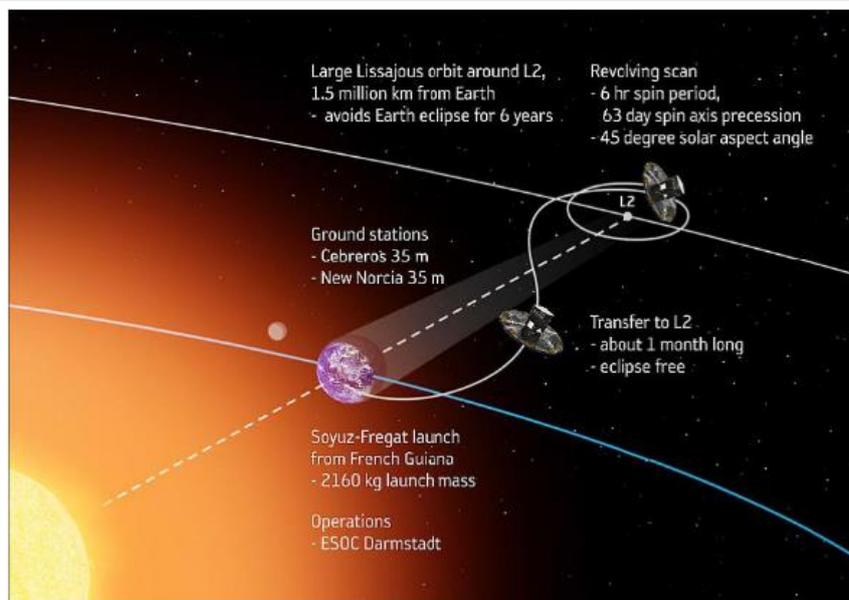


Figura 5. Traiettoria Gaia [8]

- Il JWST (James Webb Space Telescope) è un osservatorio ottico in orbita e un elemento chiave del programma Origins della NASA, ottimizzato per le osservazioni nella regione

infrarossa dello spettro elettromagnetico. È considerata la missione successiva all'HST (Telescopio Spaziale Hubble), operando su un diverso intervallo spettrale. Lanciato nel 2021, il JWST è in un'orbita di Lissajous intorno al punto di Lagrange L2. La posizione L2 è considerata vantaggiosa per l'osservazione degli oggetti astronomici (guardando verso l'universo) a causa delle condizioni di illuminazione quasi costanti (minimo di luce diffusa). Un altro vantaggio della posizione L2 è che offre un ambiente termico stabile. Il telescopio viene mantenuto in ombra perpetua guardando nella direzione dello spazio profondo [9].

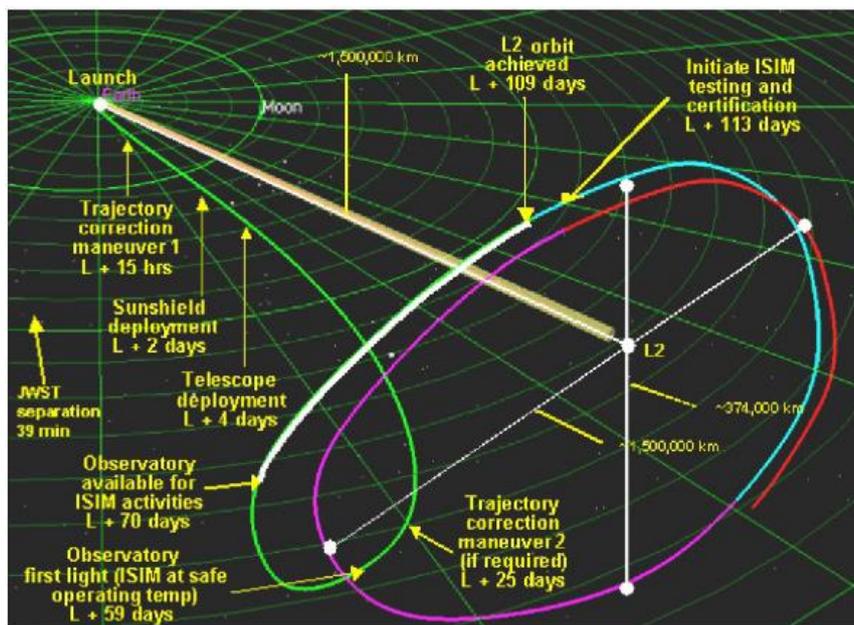


Figura 6. Traiettoria JWST [9]

- Euclid è un telescopio spaziale destinato a esplorare l'universo profondo che lanciato verso SEL2 l'1 luglio 2023. Il suo obiettivo principale è ampliare le conoscenze sulla materia e sull'energia oscura, che sono temi di grande interesse nell'astrofisica moderna. La missione di Euclid porterà alla creazione della mappa tridimensionale più grande e precisa dell'Universo mai realizzata, coprendo un periodo cosmico di 10 miliardi di anni. Attraverso le sue osservazioni, Euclid indagherà su come l'Universo si è espanso e su come la struttura su larga scala si è distribuita nel corso del tempo e nello spazio. Questo permetterà di ottenere informazioni cruciali sul ruolo della gravità e sulla natura dell'energia oscura e della materia oscura [10].

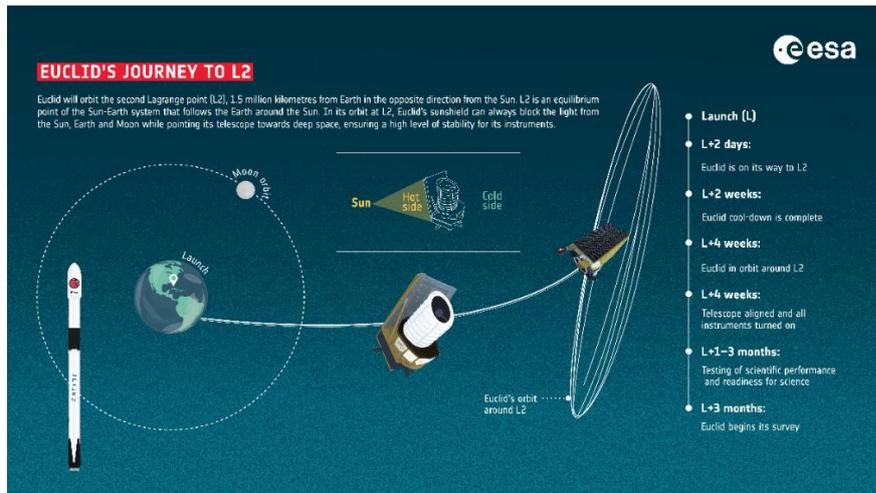


Figura 7. Traiettoria Euclid [11]

- PLATO, il cui lancio è previsto nel 2026, ha come obiettivo l'indagine delle questioni fondamentali dell'astronomia e dell'astrofisica mediante la scoperta e la caratterizzazione di pianeti extrasolari di tipo terrestre attorno a stelle simili al Sole, con particolare attenzione ai pianeti che si trovano nella cosiddetta "zona abitabile". La missione si svolgerà in un'orbita Halo attorno a SEL2 [12].

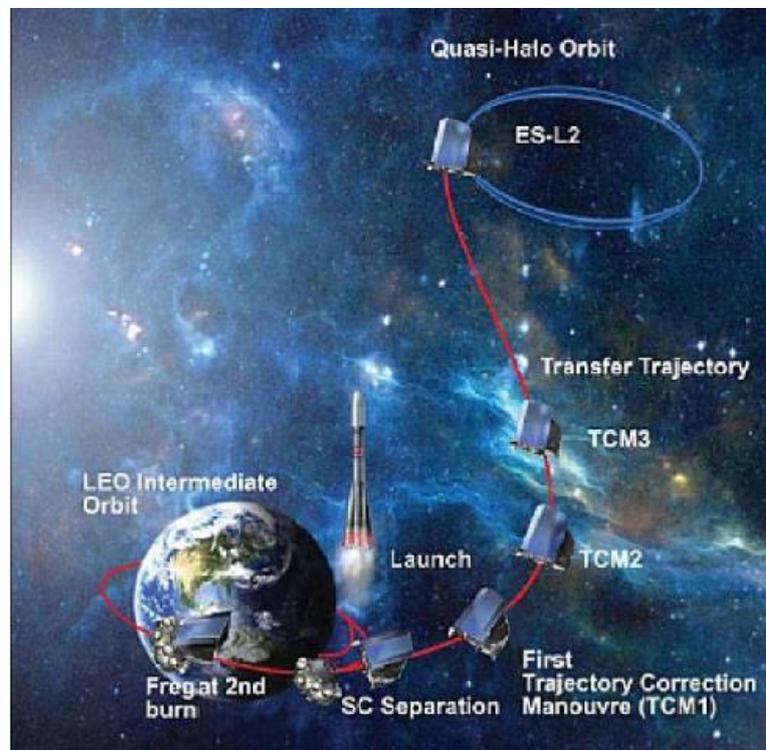


Figura 8. PLATO mission [12]

# Capitolo 3

## Meccanica orbitale

In questo capitolo verranno esposti i fondamenti di meccanica orbitale. Prima di entrare nel merito della discussione, però, sarà utile discutere dei principali sistemi di riferimento che verranno utilizzati in questo lavoro di tesi, per poi approfondire il problema dei due corpi, il problema dei tre corpi circolare ristretto, i punti di Lagrange e infine le superfici a zero velocità.

### 3.1 Sistemi di riferimento

Per descrivere un'orbita occorre definire innanzitutto il sistema di riferimento inerziale opportuno. Nel caso di orbite attorno al Sole, quali quelle di pianeti, asteroidi o per studiare orbite interplanetarie si utilizza un sistema di riferimento eliocentrico – eclittica; per descrivere il moto di un corpo attorno alla Terra, invece, si usa un sistema di riferimento geocentrico-equatoriale.

Per descriverli occorre definire:

- origine
- piano fondamentale
- verso positivo dell'asse z

#### 3.1.1 Sistema di Riferimento Eliocentrico – Eclittica

L'origine di questo sistema di riferimento si trova al centro del Sole. Il piano fondamentale X-Y coincide con l'eclittica, che è il piano su cui giace l'orbita della Terra attorno al sole e la direzione positiva dell'asse Z è orientata verso l'emisfero che contiene Polaris. L'asse X è definito dall'intersezione del piano dell'eclittica con il piano equatoriale terrestre e la direzione positiva di X è data dalla congiungente Terra-Sole nel giorno dell'equinozio di primavera, detta direzione dell'equinozio vernale.

Poiché l'asse terrestre non ha una direzione fissa, per via di fenomeni di nutazione e di precessione dovuti all'attrazione gravitazionale di sole e luna, la linea di intersezione tra eclittica e piano equatoriale varia nel tempo. Ne consegue che il sistema eliocentrico-eclittica non è propriamente inerziale [13].

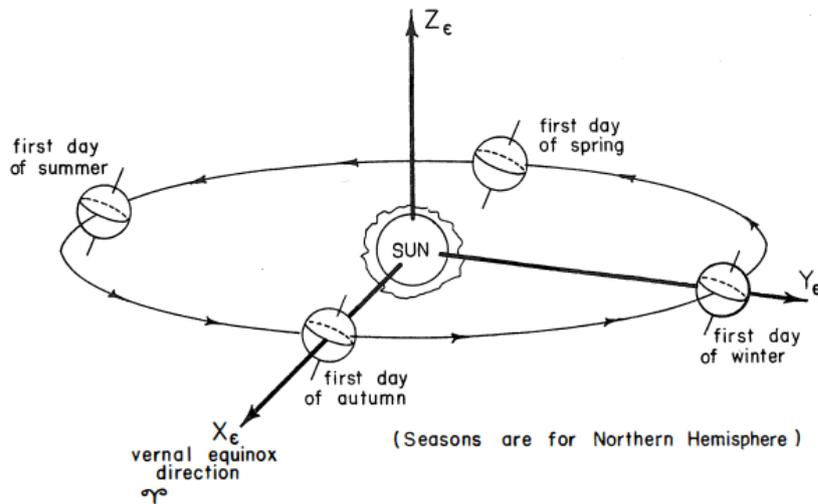


Figura 9. Sistema di riferimento Eliocentrico-Ellittica [13]

### 3.1.2 Sistema di Riferimento Geocentrico Equatoriale

L'origine del sistema di riferimento si trova al centro della Terra, il piano fondamentale coincide con il piano equatoriale e la direzione positiva dell'asse Z è rappresentata dal polo nord. L'asse X si trova nella direzione dell'equinozio vernale. Questo sistema non è fisso, ma ruota insieme alla Terra però è inerziale in quanto non rotante rispetto alle stelle fisse.

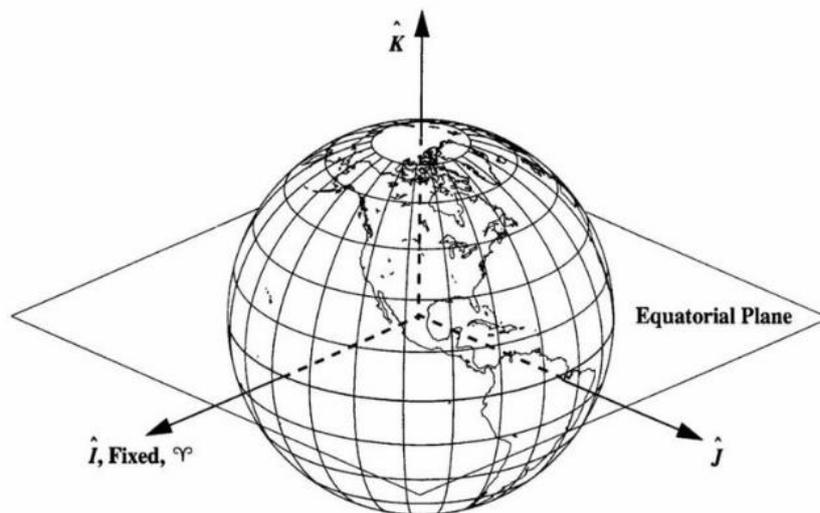


Figura 10. Sistema di riferimento Geocentrico Equatoriale [14]

### 3.2 Legge di gravitazione universale di Newton

La meccanica orbitale studia il moto dei corpi celesti che orbitano attorno ad altri corpi sotto l'influenza della gravità. Concetto fondamentale è il problema degli n corpi che riguarda il moto di

un corpo celeste sotto l'influenza delle attrazioni gravitazionali di altre masse e numerose forze esterne. Alla base di ciò si ha la legge di gravitazione universale di Newton che stabilisce che la forza di attrazione che agisce tra due corpi è direttamente proporzionale al prodotto delle due masse e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza:

$$\mathbf{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

Dove  $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg s^2}$  è la costante di gravitazione universale,  $\mathbf{r}$  è il vettore distanza tra i due corpi di masse  $M$  e  $m$ .

### 3.3 Problema dei due corpi

Il problema degli  $n$  corpi è particolarmente complesso e non ha una soluzione analitica generale.

Per trovare una soluzione in forma chiusa, punto di partenza per lo studio di problemi più complessi, si possono fare delle ipotesi semplificative e formulare il problema dei due corpi: si assume che i corpi possano essere considerati come punti di massa concentrata e che non agiscano altre forze oltre alla loro mutua attrazione gravitazionale.

L'equazione del moto relativo nel problema dei due corpi è un'equazione differenziale vettoriale:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

Dove  $\mu = G(M + m)$ . Quando si considera il moto di un pianeta attorno al Sole o il moto di un satellite attorno a un pianeta si ha che  $M \gg m$  per cui  $\mu = GM$  è il parametro gravitazione del corpo di massa  $M$  e l'equazione del moto diventa:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{\mu}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = 0$$

Integrando l'equazione del moto del problema dei due corpi si perviene all'equazione della traiettoria per un corpo di massa piccola orbitante attorno a un corpo di massa molto più grande:

$$r = \frac{h^2/\mu}{1 + e \cos \nu}$$

Dove  $h$  è il momento angolare specifico,  $e$  è l'eccentricità,  $\nu$  è l'anomalia vera.

Questo moto avviene nel piano orbitale: l'intersezione tra questo piano e il piano XY equatoriale è chiamata linea dei nodi e questa interseca l'orbita in due punti chiamati nodo ascendente e nodo discendente. In questo modo si andranno a definire due angoli: la longitudine del nodo ascendente e l'inclinazione che determineranno l'orientamento del piano orbitale e il verso del moto del corpo [15].

L'orbita del corpo di massa inferiore  $m$  attorno al corpo principale di massa  $M$  è una sezione conica e per definirla univocamente occorrono 6 parametri indipendenti detti parametri orbitali:

- Semi-asse maggiore,  $a$  – costante che definisce dimensione dell'orbita
- Eccentricità,  $e$  – costante che definisce la forma dell'orbita
- Inclinazione,  $i$  – angolo tra il versore  $\hat{K}$  e il vettore momento angolare  $\mathbf{h}$
- Argomento del periastro,  $\omega$  – angolo, nel piano dell'orbita, tra il nodo ascendente e il periastro
- Longitudine del nodo ascendente,  $\Omega$  – angolo, nel piano fondamentale, tra il versore  $\hat{I}$  e il punto in cui il satellite attraversa il piano fondamentale nella direzione nord, misurato in senso antiorario
- Anomalia vera all'epoca,  $v$  – angolo, nel piano orbitale, tra il perigeo e la posizione del satellite a un tempo particolare chiamato epoca.

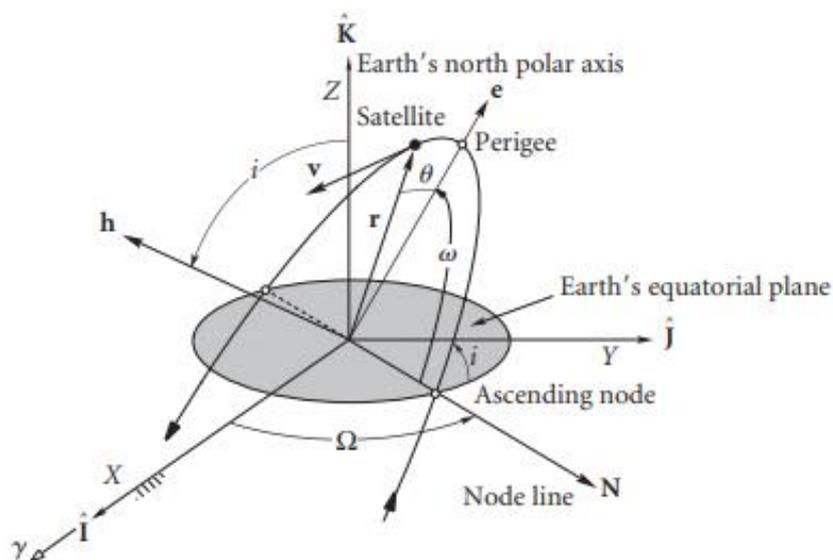


Figura 11. . Sistema di riferimento geocentrico equatoriale e parametri orbitali [16]

### 3.4 Problema dei tre corpi circolare ristretto

Il problema dei tre corpi circolare ristretto interessa il moto di tre corpi soggetti solo alla loro mutua interazione gravitazionale e richiede che il terzo corpo abbia massa  $m$  trascurabile rispetto agli altri due corpi detti principali ( $m_1, m_2$ ): in questo modo il moto dei due corpi principali non sarà influenzato dal terzo corpo. Le ipotesi fondamentali alla base di questa trattazione sono le seguenti:

- tre corpi di cui due principali e il terzo con  $m \ll m_1, m_2$
- le orbite descritte dai due corpi principali rispetto al loro centro di massa sono circolari

Si considera un sistema di riferimento non inerziale rotante attorno al centro di massa del sistema composto dai due corpi principali, come illustrato in Figura 12, che ruota con velocità angolare:

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{r_{12}^3}}$$

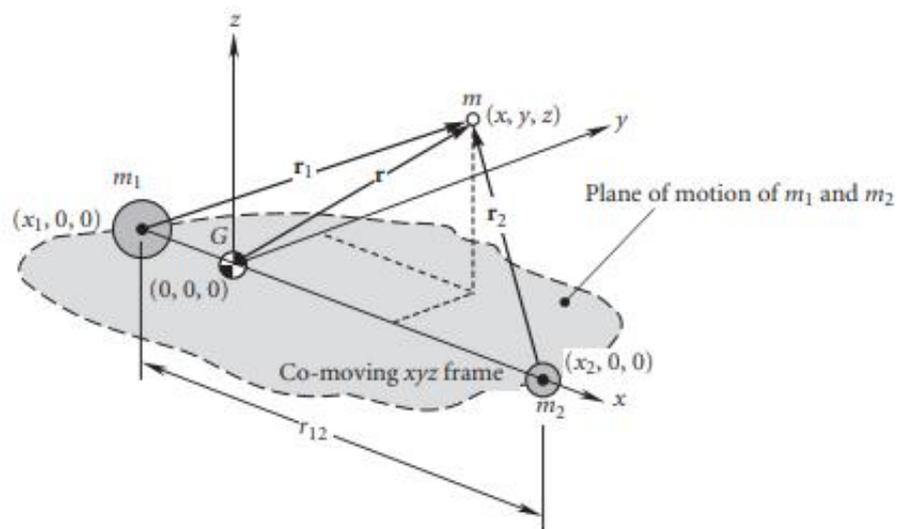


Figura 12. Corpi principali  $m_1$  e  $m_2$  in orbita circolare attorno al loro baricentro e massa secondaria  $m$  [16]

Interessandosi al moto del terzo corpo a causa del campo gravitazionale dei due corpi principali, applicando la legge di gravitazione universale di Newton, si trova una formulazione per il moto del corpo che, diversamente dal problema dei due corpi, non ha una soluzione in forma chiusa.

Si definisce:

$$M = m_1 + m_2$$

$$\mu = \frac{m_2}{M}$$

Allora le coordinate dei tre corpi rispetto al centro di massa del sistema saranno:

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} -\mu r_{12} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} (1 - \mu) r_{12} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Mentre la posizione del corpo secondario rispetto ai due corpi principali sarà:

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} x + \mu r_{12} \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} (x - (1 - \mu) r_{12}) \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

L'equazione del moto del corpo di massa  $m$  dovrà essere scritta considerando che il sistema di riferimento non è inerziale: andranno pertanto andranno aggiunti i termini relativi alle forze apparenti, considerando l'accelerazione di Coriolis e quella centripeta. L'equazione diventa:

$$\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega} \wedge \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{m} (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2)$$

Con:

$$\mathbf{F}_1 = -G \frac{(1 - \mu) M m}{r_1^3} \mathbf{r}_1$$

$$\mathbf{F}_2 = -G \frac{\mu M m}{r_2^3} \mathbf{r}_2$$

Andando ad esplicitare le componenti lungo le tre coordinate:

$$\ddot{x} - \omega^2 x - 2\omega \dot{y} = -GM \frac{1 - \mu}{r_1^3} (x + \mu r_{12}) - GM \frac{\mu}{r_2^3} [x - (1 - \mu) r_{12}]$$

$$\ddot{y} - \omega^2 y - 2\omega \dot{x} = -GM \frac{1-\mu}{r_1^3} y - GM \frac{\mu}{r_2^3} y$$

$$\ddot{z} = -GM \frac{1-\mu}{r_1^3} z - GM \frac{\mu}{r_2^3} z$$

Queste possono essere scritte in forma adimensionata tramite le seguenti sostituzioni:

$$\rho = \frac{\mathbf{r}}{r_{12}} \Rightarrow \xi = \frac{x}{r_{12}} \quad \eta = \frac{y}{r_{12}} \quad \zeta = \frac{z}{r_{12}}$$

$$\tau = t\omega \Rightarrow \frac{d}{dt} = \omega \frac{d}{d\tau}$$

Apportando queste sostituzioni nelle equazioni del moto scalari, si ottengono le equazioni del moto adimensionate:

$$\xi'' - \xi - 2\eta' = -(1-\mu) \frac{\xi + \mu}{\rho_1^3} - \mu \frac{\xi - (1-\mu)}{\rho_2^3}$$

$$\eta'' - \eta - 2\xi' = -(1-\mu) \frac{\eta}{\rho_1^3} - \mu \frac{\eta}{\rho_2^3}$$

$$\zeta'' = -(1-\mu) \frac{\zeta}{\rho_1^3} - \mu \frac{\zeta}{\rho_2^3}$$

Queste sono tre equazioni differenziali del secondo ordine, non lineari e accoppiate tra loro: l'unico modo per risolverle sarà l'integrazione numerica [16] [15] [13].

### 3.5 Punti Lagrangiani

La formulazione del problema dei tre corpi ristretto è utile per ricavare la posizione di alcuni punti di equilibrio chiamati punti di librazione o di Lagrange. In questi punti il corpo di massa minore avrebbe accelerazione relativa nulla rispetto al sistema rotante: infatti si ha un equilibrio tra le forze gravitazionali e le forze inerziali. Per calcolare la posizione dei punti di equilibrio Lagrangiani bisogna risolvere le equazioni del moto con la condizione che tutte le derivate siano nulle. Si pone dunque:

$$\xi'' = \eta'' = \zeta'' = \xi' = \eta' = \zeta' = 0$$

Per riuscire a definire questi punti bisogna introdurre una grandezza, detta Funzione potenziale, così definita:

$$U = G \frac{m_1}{r_1} + G \frac{m_2}{r_2} + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

In forma adimensionale:

$$u = \frac{1 - \mu}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2} + \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2)$$

Derivando quest'ultima rispetto alle coordinate adimensionate e sostituendole nell'equazione del moto, si possono riscrivere le equazioni del moto nel seguente modo:

$$\xi'' - 2\eta' = \frac{\partial u}{\partial \xi}$$

$$\eta'' - 2\xi' = \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\zeta'' = \frac{\partial u}{\partial \zeta}$$

Dalla definizione di punto Lagrangiano, ponendo la funzione potenziale pari a zero, le equazioni del moto diventano:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0 = \xi - (1 - \mu) \frac{\xi + \mu}{\rho_1^3} - \mu \frac{\xi - (1 - \mu)}{\rho_2^3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 = \eta - (1 - \mu) \frac{\eta}{\rho_1^3} - \mu \frac{\eta}{\rho_2^3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta} = 0 = -(1 - \mu) \frac{\zeta}{\rho_1^3} - \mu \frac{\zeta}{\rho_2^3}$$

Quest'ultima equazione è verificata solo per

$$\zeta = 0$$

Ne consegue che i punti Lagrangiani giaceranno sul piano  $(\xi, \eta)$ , che rappresenta il piano fondamentale. I punti Lagrangiani sono, dunque, dei punti stazionari della funzione potenziale e rappresentano dei punti di minimo potenziale.

Ponendo anche

$$\eta = 0$$

Si otterranno tre punti di minimo potenziale che vengono chiamati punti collineari: giacciono sulla stessa linea, lungo l'asse  $\xi$ , e sono punti di equilibrio instabile. Gli altri due punti, chiamati punti equilateri, possono essere trovati ponendo

$$\rho_1 = \rho_2 = 1$$

rappresentano i vertici di due triangoli equilateri e sono punti di equilibrio stabili. I punti L1 e L2 sono approssimativamente alla stessa distanza dal corpo principale minore:

$$\rho_2 = \sqrt[3]{\frac{\mu}{3}}$$

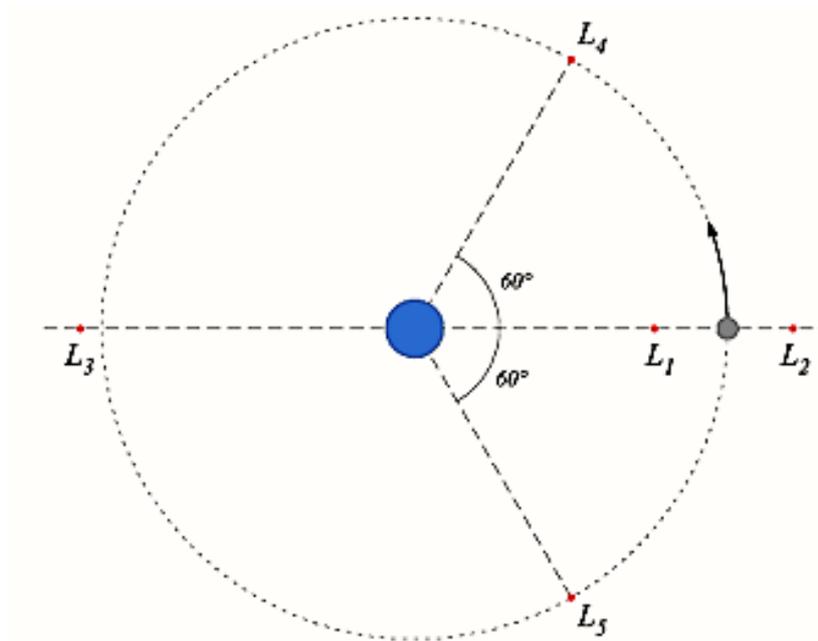


Figura 13. Punti Lagrangiani in un generico sistema di riferimento sinodico

### 3.6 Integrale di Jacobi e superfici a zero velocità

Considerando il set di equazioni del moto scritte con la funzione potenziale, moltiplicandole rispettivamente per  $\xi'$ ,  $\eta'$  e  $\zeta'$  e sommandole membro a membro si ottiene:

$$\xi''\xi' + \eta''\eta' + \zeta''\zeta' = \frac{\partial u}{\partial \xi}\xi' + \frac{\partial u}{\partial \eta}\eta' + \frac{\partial u}{\partial \zeta}\zeta'$$

Che integrata fornisce l'integrale di Jacobi:

$$V^2 = 2\mathcal{U} - \mathcal{J}_c$$

Dove  $V^2$  è il quadrato del modulo delle velocità nel sistema di riferimento sinodico,  $\mathcal{U}$  è la funzione potenziale e  $\mathcal{J}_c$  è la costante di Jacobi, definita dalle condizioni iniziali.

Imponendo la velocità relativa pari a zero nell'integrale di Jacobi

$$2\mathcal{U} - \mathcal{J}_c = 0$$

Si ottiene l'equazione di una superficie detta a zero velocità.

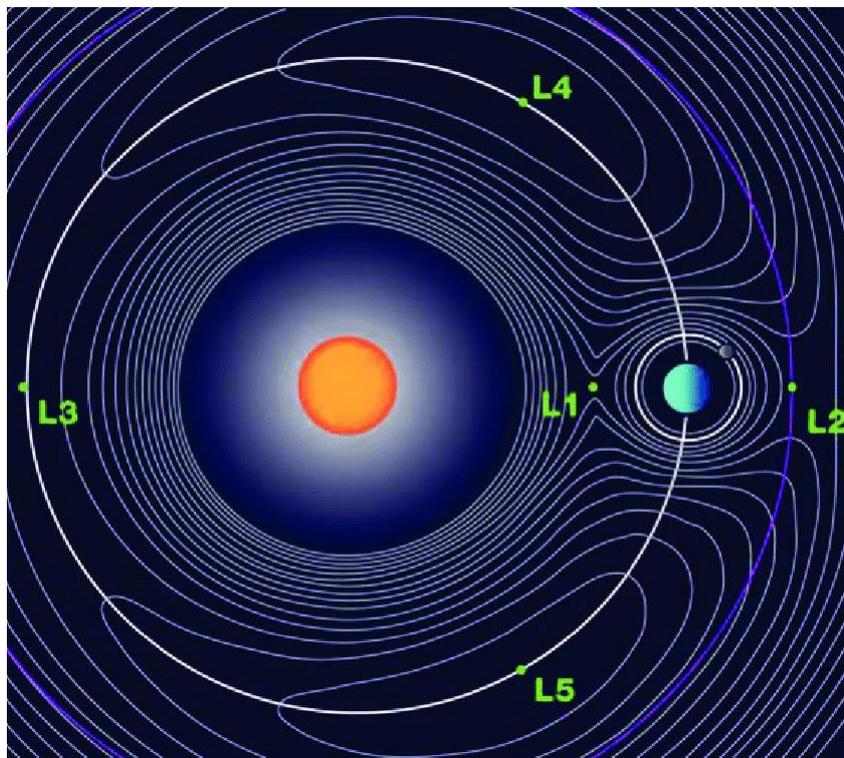


Figura 14. Livelli energetici dei punti Lagrangiani Sole-Terra [17]

Queste equazioni definiscono univocamente un valore di  $\mathcal{J}_c$  a seconda del valore del potenziale. Pertanto, diventa fondamentale il valore di velocità iniziale del satellite perché questa andrà a

definire il valore della costante di Jacobi che indicherà il valore di potenziale. Si ricorda, infatti, che i punti Lagrangiani sono punti di minimo potenziale, dunque possono essere raggiunti o superati solo se il valore della costante di Jacobi è almeno pari a  $2U$  del punto lagrangiano, in accordo con l'equazione di superficie a zero velocità [18].

## Capitolo 4

### Ottimizzazione Indiretta di Traiettorie Spaziali

In questo capitolo verrà descritto il metodo numerico utilizzato nella presente tesi per l'ottimizzazione delle traiettorie.

L'ottimizzazione indiretta si riferisce a un metodo il cui scopo è trovare la traiettoria ottimale mediante l'applicazione della teoria del controllo ottimale. Nel caso più generale, un problema di ottimizzazione mira a trovare la legge di controllo che rende massimo/minimo un determinato indice di prestazione. È di fondamentale importanza, infatti, nel design di traiettorie spaziali, minimizzare la quantità di propellente o, in modo equivalente, massimizzare la massa finale del veicolo spaziale.

Invece di cercare direttamente la traiettoria ottimale nel problema di controllo, l'ottimizzazione indiretta trasforma il problema di minimizzazione del propellente/massimizzazione della massa finale in un problema differenziale ai limiti (BVP, Boundary Value Problem). Tra i diversi metodi numerici, l'ottimizzazione indiretta offre un'alta precisione e tempi di calcolo brevi. Il metodo coinvolge l'applicazione di principi come il principio del massimo di Pontryagin o il principio di minimo di Hamilton, che consentono di determinare le condizioni ottimali da soddisfare.

Una volta definito il BVP, vengono usati algoritmi di ottimizzazione numerica, come il metodo di Newton, per risolvere il problema e trovare la traiettoria ottimale. Durante il processo iterativo, i valori delle variabili incognite vengono corretti fino a che la soluzione non soddisfi le condizioni di ottimo.

#### 4.1 Teoria del controllo ottimale

Per risolvere le equazioni differenziali del BVP, viene utilizzata la teoria del controllo ottimale che si basa sui principi di calcolo variazionale.

Si introduce il vettore variabili di stato  $\mathbf{x}$  e il vettore dei controlli  $\mathbf{u}$ . Allora, l'evoluzione nel tempo del sistema è descritto da equazioni differenziali, funzioni di  $\mathbf{x}$  e di  $\mathbf{u}$ , che presentano la generica forma:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$

mentre il tempo  $t$  è la variabile indipendente.

Nel caso specifico di ottimizzazione di traiettorie spaziali, è vantaggioso suddividere la traiettoria in un certo numero di intervalli (archi)  $n$ , in ognuno dei quali si ha continuità delle variabili. Difatti, le discontinuità si avranno solo nei punti di giunzione degli archi, che rappresentano le condizioni interne al confine. Ogni  $j$ -esimo arco inizia al tempo  $t_{(j-1)+}$  e termina al tempo  $t_{j-}$  e i valori che le variabili assumono ai suoi estremi sono  $\mathbf{x}_{(j-1)+}$  e  $\mathbf{x}_{j-}$ , con i segni  $-$  e  $+$  ad indicare rispettivamente i valori assunti subito prima e subito dopo il punto considerato.

Si impongono condizioni al contorno, in generale di tipo misto (sia contorni interni sia esterni), e non lineari, espresse come:

$$\chi(\mathbf{x}_{(j-1)+}, \mathbf{x}_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-}) = 0 \quad j = 1, \dots, n$$

Il problema consiste nella ricerca di valori di massimo o minimo relativi di un funzionale:

$$J = \varphi(\mathbf{x}_{(j-1)+}, \mathbf{x}_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-}) + \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} \Phi(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \quad j = 1, \dots, n$$

Introducendo i moltiplicatori di Lagrange, costanti  $\boldsymbol{\mu}$  associate alle condizioni al contorno e variabili  $\boldsymbol{\lambda}$ , dette variabili aggiunte, associate alle equazioni di stato, è possibile riscrivere il funzionale come:

$$J^* = \varphi + \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\chi} + \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} (\Phi + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{f} - \dot{\mathbf{x}})) dt \quad j = 1, \dots, n$$

Integrando per parti e differenziando si ottiene la variazione prima del funzionale:

$$\begin{aligned} \delta J^* = & \left( -H_{(j-1)+} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{(j-1)+}} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t_{(j-1)+}} \right) \delta t_{(j-1)+} + \left( H_{j-} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j-}} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t_{j-}} \right) \delta t_{j-} \\ & + \left( \boldsymbol{\lambda}^T_{(j-1)+} + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}_{(j-1)+}} + \boldsymbol{\mu}^T \left[ \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{x}_{(j-1)+}} \right] \right) \delta \mathbf{x}_{(j-1)+} \\ & + \left( -\boldsymbol{\lambda}^T_{j-} + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}_{j-}} + \boldsymbol{\mu}^T \left[ \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{x}_{j-}} \right] \right) \delta \mathbf{x}_{j-} \\ & + \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} \left( \left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T \right) \delta \mathbf{x} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} \right) dt \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Avendo definito l'Hamiltoniano del sistema come:

$$H = \Phi + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}$$

Avendo introdotto le variabili e le costanti aggiunte, con una loro opportuna scelta, si possono annullare contemporaneamente il coefficiente di ciascuna delle variazioni presenti nella equazione di variazione del funzionale e in questo modo si può assicurare la stazionarietà del funzionale stesso:

$$\delta J^* = 0$$

Questa infatti rappresenta la condizione necessaria di ottimo, qualunque sia la scelta delle variazioni delle variabili di stato, dei controlli e del tempo.

Annullando il coefficiente di  $\delta x$  all'interno dell'integrale per ogni punto della traiettoria si ottengono le equazioni differenziali di Eulero-Lagrange per le variabili aggiunte:

$$\frac{d\lambda}{dt} = - \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)^T$$

Mentre, annullando il coefficiente di  $\delta u$ , si ottengono le equazioni algebriche per i controlli:

$$\left( \frac{\partial H}{\partial u} \right)^T = 0$$

Da cui si evince una indipendenza nella ricerca di massimi o minimi di  $J$ .

Secondo il principio di massimo di Pontryagin, per determinare il controllo ottimale che massimizza o minimizza un funzionale, è necessario tenere conto non solo delle equazioni dinamiche del sistema, ma anche delle condizioni al contorno e delle equazioni di vincolo per i controlli: il controllo ottimale è tale che l'Hamiltoniano del sistema è massimo (o minimo) rispetto al controllo nel punto considerato. Si può avere un controllo localmente non vincolato, se il valore ottimale del controllo - ottenuto dalla precedente equazione - rientra nel dominio di ammissibilità, per cui il vincolo non influisce in quel punto; si avrà, invece, un controllo vincolato, se il valore ottimale è ai limiti del dominio - il controllo è massimo o minimo - e questo avviene se il valore ottenuto dall'equazione non rientra nel dominio di ammissibilità.

Caso particolare:  $H$  è lineare rispetto a uno dei controlli soggetti a vincolo,  $J$  allora non deve essere massimizzato. Stando così le cose, nell'equazione che definisce  $H$ , il coefficiente di controllo sarà diverso da zero, per cui un suo valore positivo massimizzerà  $H$  e un suo valore negativo lo minimizzerà; se, invece, il coefficiente è nullo in un intervallo di tempo - chiamato arco singolare - si deve imporre che tutte le derivate successive del coefficiente rispetto al tempo si annullino fino a

che non appare esplicitamente il controllo. In quest'ultimo caso, ponendo la derivata uguale a zero, si otterrà il controllo ottimale.

Per ottenere le condizioni al contorno, ci si riferisce al  $j$ -esimo contorno e lo si considera una volta estremo finale del  $(j-1)$ -esimo sotto intervallo e una volta come estremo iniziale del  $j$ -esimo sotto intervallo. Considerando l'equazione di  $\delta J^*$  e ponendo uguali a zero i coefficienti  $\delta x_{j-}$ ,  $\delta x_{j+}$ ,  $\delta t_{j-}$ ,  $\delta t_{j+}$ , avendo inteso con i pedici  $j_-$  e  $j_+$  i valori assunti subito prima e subito dopo il punto  $j$ , si ottengono:

$$\begin{aligned}
 -\lambda^T_{j-} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{j-}} + \boldsymbol{\mu}^T \left[ \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial x_{j-}} \right] &= 0 & j = 1, \dots, n \\
 \lambda^T_{j+} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{j+}} + \boldsymbol{\mu}^T \left[ \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial x_{j+}} \right] &= 0 & j = 0, \dots, n-1 \\
 H_{j-} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j-}} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t_{j-}} &= 0 & j = 1, \dots, n \\
 -H_{j+} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j+}} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t_{j+}} &= 0 & j = 0, \dots, n-1
 \end{aligned}$$

Ed eliminando da queste equazioni le costanti aggiunte, si hanno le condizioni al contorno di ottimo nella forma:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}_{(j-1)+}, \mathbf{x}_{j-}, \boldsymbol{\lambda}_{(j-1)+}, \boldsymbol{\lambda}_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-}) = 0$$

Questa, insieme alle condizioni assegnate, completeranno il sistema di equazioni differenziali.

Alcuni casi particolari che interessano le condizioni di ottimo relative alla variabile  $\boldsymbol{\lambda}_x$ :

- se al tempo iniziale o finale viene assegnata esplicitamente la variabile di stato  $x$ , la corrispondente variabile aggiunta risulta libera;
- se al tempo iniziale o finale il valore della variabile di stato non compare né nella funzione  $\varphi$  né nelle condizioni al contorno, la corrispondente variabile aggiunta risulta nulla;
- se una variabile di stato è continua e non è assegnata in un punto interno, la corrispondente variabile aggiunta è anch'essa continua;
- se una variabile di stato è continua e assegnata esplicitamente in un contorno interno, la corrispondente variabile aggiunta ha una discontinuità "libera" e i due valori assunti al

contorno sono indipendenti tra di loro e devono essere determinati dal processo di ottimizzazione.

Per quanto riguarda le altre due equazioni al contorno, se  $H$  non dipende esplicitamente dal tempo, si hanno dei casi particolari:

- se il tempo iniziale o il tempo finale non compare esplicitamente né nelle condizioni al contorno né in  $\varphi$ , l'Hamiltoniano è nullo all'istante iniziale o finale;
- se un tempo intermedio  $t_j$  non compare esplicitamente in  $\varphi$ , l'Hamiltoniano è continuo in  $j$ ;
- se il tempo  $t_j$  compare esplicitamente, l'Hamiltoniano avrà una discontinuità "libera" in  $j$ .

#### 4.2 Problema differenziale ai limiti

Nel metodo indiretto per ottimizzare i trasferimenti orbitali, si applica la teoria del controllo ottimale a un sistema di equazioni con condizioni al contorno specifiche, dipendenti dal tipo di orbita desiderata. Questo metodo richiede la risoluzione di un problema ai limiti, noto come BVP, in cui alcuni valori iniziali delle variabili sono sconosciuti. L'obiettivo è quello di determinare i valori iniziali che, una volta integrati nel sistema di equazioni differenziali, soddisfano tutte le condizioni al contorno imposte e di ottimo.

Questo problema presenta alcune caratteristiche specifiche:

- l'intervallo di integrazione viene suddiviso in sottointervalli in cui le equazioni differenziali possono assumere espressioni diverse;
- l'ampiezza di ogni sottointervallo è generalmente incognita;
- le variabili possono avere discontinuità nei contorni interni e il successivo valore può essere incognito;
- le condizioni al contorno possono essere non lineari e includere i valori delle variabili sia ai contorni esterni sia interni.

La soluzione del BVP si ottiene trasformandolo in una successione di problemi ai valori iniziali tramite il metodo di Newton.

Dato che la durata di ogni sottointervallo è incognita, si sostituisce  $t$  con una nuova variabile:

$$\varepsilon = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{\tau_j}$$

Così la durata in genere incognita del sottointervallo  $\tau_j$  permette di fissare i valori dei contorni interni ed esterni che corrisponderanno ai valori della nuova variabile indipendente  $\varepsilon$ .

Richiamando le equazioni introdotte nei paragrafi precedenti:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t)$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^T$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^T = 0$$

Si avrà adesso un problema differenziale nelle variabili di stato e aggiunte con  $y = (x, \lambda)$  :

$$\frac{dy}{dt} = f^*(y, t)$$

Introducendo un nuovo vettore  $z$  che contiene al suo interno sia  $y$  sia i parametri costanti  $c$ , e facendo un cambiamento di variabile, il sistema di equazioni differenziali diventa:

$$\frac{dz}{d\varepsilon} = f(z, \varepsilon)$$

Esplicitando il secondo membro si ha:

- variabili di stato e aggiunte:

$$\frac{dy}{d\varepsilon} = \tau_j \frac{dy}{dt}$$

- parametri costanti:

$$\frac{dc}{d\varepsilon} = 0$$

Mentre per le condizioni al contorno si scrive:

$$\Psi(s) = 0$$

Con  $s$  vettore dei valori assunti dalle variabili nei contorni e i parametri incogniti:

$$s = (y_0, y_1, \dots, y_n, c)$$

La soluzione del problema si ottiene andando a determinare iterativamente quali valori iniziali devono assumere le variabili per soddisfare le condizioni al contorno. Si fissa:

$$\mathbf{z}(0) = \mathbf{p}^r$$

Dove  $\mathbf{p}^r$  sono i valori iniziali trovati al termine della precedente iterazione. Per iniziare il calcolo bisogna inizializzare scegliendo i valori di tentativo  $\mathbf{p}^1$ . In questo modo si integreranno le equazioni lungo tutta la traiettoria tenendo conto di eventuali discontinuità ai contorni interni, in cui si calcoleranno i valori delle variabili di stato. In seguito all'integrazione, si calcolerà l'errore sulle condizioni al contorno alla r-esima iterazione  $\Psi^r$ . La variazione causata da un  $\Delta\mathbf{p}$  è:

$$\Delta\Psi = \begin{bmatrix} \partial\Psi \\ \partial\mathbf{p} \end{bmatrix} \Delta\mathbf{p}$$

Ovviamente l'obiettivo è annullare l'errore sulle condizioni al contorno, cioè avere:

$$\Delta\Psi = -\Psi^r$$

E per ottenere ciò, i valori iniziali vengono corretti ad ogni iterazione di una quantità:

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}^{r+1} - \mathbf{p}^r = - \begin{bmatrix} \partial\Psi \\ \partial\mathbf{p} \end{bmatrix}^{-1} \Psi^r$$

In questa relazione compare una matrice calcolata nel seguente modo:

$$\begin{bmatrix} \partial\Psi \\ \partial\mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial\Psi \\ \partial\mathbf{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial\mathbf{s} \\ \partial\mathbf{p} \end{bmatrix}$$

A loro volta, la prima matrice si ottiene semplicemente con una derivazione delle condizioni al contorno, mentre la seconda, poiché contiene le derivate dei valori delle variabili assunti ai contorni rispetto a quelli iniziali ed è quindi corrispondente ai valori assunti ai contorni dalla matrice:

$$\begin{bmatrix} \partial\mathbf{z} \\ \partial\mathbf{p} \end{bmatrix} = [\mathbf{g}(\varepsilon)],$$

si ottiene nel seguente modo:

$$[\dot{\mathbf{g}}] = \frac{d}{d\varepsilon} \begin{bmatrix} \partial\mathbf{z} \\ \partial\mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial \\ \partial\mathbf{p} \end{bmatrix} \left( \frac{d\mathbf{z}}{d\varepsilon} \right) = \begin{bmatrix} \partial\mathbf{f} \\ \partial\mathbf{p} \end{bmatrix}$$

Cioè integrando il sistema di equazioni differenziali ottenuto derivando il sistema principale rispetto a ogni valore iniziale. Questa può essere riscritta nel seguente modo esplicitando lo jacobiano del sistema principale:

$$[\dot{\mathbf{g}}] = \begin{bmatrix} \partial \mathbf{f} \\ \partial \mathbf{z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial \mathbf{z} \\ \partial \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial \mathbf{f} \\ \partial \mathbf{z} \end{bmatrix} [\mathbf{g}]$$

I valori iniziali del sistema omogeneo possono essere ottenuti:

$$[\mathbf{g}(0)] = \begin{bmatrix} \partial \mathbf{z}(0) \\ \partial \mathbf{p} \end{bmatrix} = [\mathbf{I}]$$

Come già anticipato, per risolvere le discontinuità nelle variabili, basta introdurre le seguenti relazioni per mettere in relazioni i valori assunti dalle variabili e dalla matrice  $\mathbf{g}$  prima e dopo la discontinuità:

$$\mathbf{z}_{i+} = \mathbf{h}(\mathbf{z}_{i-})$$

$$[\mathbf{g}_{i+}] = \begin{bmatrix} \partial \mathbf{h} \\ \partial \mathbf{z} \end{bmatrix} [\mathbf{g}_{i-}]$$

Per l'integrazione delle equazioni differenziali della presente trattazione viene utilizzato un metodo numerico a passo e ordine variabile: le formule di Adams- Moulton.

Occorre infine fare alcune osservazioni circa la procedura messa in atto nel presente calcolo di ottimizzazione. La linearizzazione utilizzata per calcolare la correzione  $\Delta \mathbf{p}$  da applicare ai valori iniziali di tentativo può introdurre errori che compromettono la convergenza; pertanto, per migliorare la procedura, sono stati adottati alcuni accorgimenti:

- Per evitare di allontanarsi troppo dalla soluzione, la correzione apportata è una frazione della correzione determinata. In particolare, viene utilizzata l'equazione

$$\mathbf{p}^{r+1} = \mathbf{p}^r + K_1 \Delta \mathbf{p}$$

con  $0.1 < K_1 < 1$ , scelto empiricamente in base alla distanza della soluzione di partenza dalla soluzione desiderata.

- Ad ogni iterazione, dopo aver determinato il nuovo vettore dei valori iniziali di tentativo  $\mathbf{p}^{r+1}$  utilizzando l'equazione precedente e aver integrato le equazioni del moto, si confronta l'errore massimo sulle condizioni al contorno  $\mathbf{E}^{r+1}_{max}$  con quello ottenuto nell'iterazione precedente  $\mathbf{E}^r_{max}$ . Se l'errore massimo è inferiore a un multiplo di quello precedente (cioè  $\mathbf{E}^{r+1}_{max} < K_2 \mathbf{E}^r_{max}$ ), si procede con la nuova iterazione. Un valore  $K_2$  compreso tra 2 e 3 garantisce buoni risultati.

- Se l'errore alla nuova iterazione è troppo grande rispetto a quello precedente, si applica la bisezione alla correzione apportata, dimezzandola. Le equazioni del moto vengono quindi integrate utilizzando i valori di tentativo

$$\mathbf{p}^{r+1} = \mathbf{p}^r + K_1 \frac{\Delta \mathbf{p}}{2}$$

Si ripete il confronto tra il nuovo errore massimo ottenuto e quello dell'iterazione precedente, e se necessario, si ripete la bisezione. È stato stabilito un numero massimo di 5 bisezioni, dopo il quale il processo si interrompe a testimoniare che la soluzione di tentativo scelta non è in grado di convergere [19].

## Capitolo 5

### Definizione del problema

In questo capitolo saranno introdotte le equazioni che forniscono una descrizione del problema in analisi secondo la teoria del controllo ottimale. Si utilizzerà il metodo di ottimizzazione indiretta per analizzare traiettorie a bassa spinta per l'evasione dalla sfera di influenza terrestre partendo dal punto di equilibrio L2 Sole-Terra. Il modello dinamico considera l'attrazione gravitazionale di quattro corpi e le effemeridi JPL.

#### 5.1 Modello dinamico

Il modello dinamico in oggetto considera il satellite come un punto di massa variabile. Le variabili di stato del problema sono la posizione  $\mathbf{r}$ , la velocità  $\mathbf{V}$  e la massa  $m$  del satellite:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{V}$$

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\frac{\mu \mathbf{r}}{r^3} + \frac{\mathbf{T}}{m} + \mathbf{a}_J + \mathbf{a}_{lsg} + \mathbf{a}_{srp}$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{T}{c}$$

Dove  $\mathbf{a}_J$  è l'accelerazione perturbatrice dovuta alla non sfericità della Terra,  $\mathbf{a}_{lsg}$  (lunar solar gravity) è l'accelerazione perturbatrice dovuta alla gravità di Luna e Sole (effetto lunisolare) e  $\mathbf{a}_{srp}$  è la perturbazione dovuta alla pressione della radiazione solare. La traiettoria del satellite è controllata dal vettore spinta  $\mathbf{T}$  e l'effettiva velocità di scarico  $c$  è ritenuta costante.

Nella presente trattazione vengono utilizzati il sistema di riferimento Earth Mean Equator and Equinox of Epoch J2000 (EME2000) con versori  $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$  - corrispondente quindi al sistema geocentrico - equatoriale introdotto nei capitoli precedenti - e il sistema di riferimento topocentrico con versori  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  ( che identificano rispettivamente la direzione radiale, est e nord) (Figura 15). Si introducono, inoltre, anche i seguenti angoli:  $\theta$ , ascensione retta, misurato nel piano dell'equatore celeste verso est a partire dalla direzione dell'equinozio vernale, e  $\varphi$ , misurato a partire dell'equatore celeste verso nord. Questi angoli servono ad identificare il vettore posizione  $\mathbf{r}$  che potrà essere scritto come:

$$\mathbf{r} = r \cos \theta \cos \varphi \mathbf{I} + r \sin \theta \cos \varphi \mathbf{J} + r \sin \varphi \mathbf{K}$$

Per passare dal sistema di coordinate geocentrico - equatoriale  $I, J, K$  al topocentrico  $i, j, k$  si utilizza la seguente trasformazione:

$$\begin{Bmatrix} i \\ j \\ k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \varphi & \sin \theta \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} I \\ J \\ K \end{Bmatrix}$$

In questo sistema di riferimento, i vettori posizione e velocità verranno scritti come:

$$\mathbf{r} = r\mathbf{i}$$

$$\mathbf{V} = \dot{\mathbf{r}} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$$

Essendo  $u, v$  e  $w$  le componenti di velocità nelle direzioni radiale, est e nord.

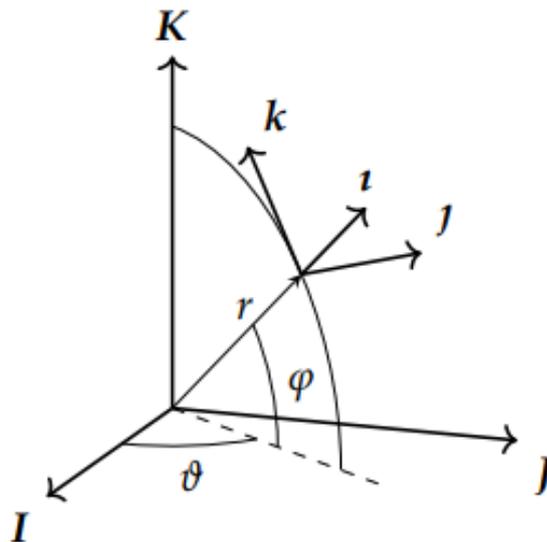


Figura 15. Sistemi di riferimento EME2000 ( $I, J, K$ ) e topocentrico ( $i, j, k$ ) [1]

Allora le equazioni di stato scalari saranno:

$$\frac{dr}{dt} = u$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{r \cos \varphi}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{w}{r}$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\mu}{r^2} + \frac{(v^2 + w^2)}{r} + \frac{T_u}{m} + (a_J)_u + (a_{isp})_u + (a_{srp})_u$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{(-uv + vw \tan \varphi)}{r} + \frac{T_v}{m} + (a_J)_v + (a_{lsp})_v + (a_{srp})_v$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{(-uw - v^2 \tan \varphi)}{r} + \frac{T_w}{m} + (a_J)_w + (a_{lsp})_w + (a_{srp})_w$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{T}{c}$$

Le condizioni al contorno conterranno i valori iniziali di posizione, velocità, massa e il valore finale del raggio dalla Terra, rispettivamente:  $r_0, \theta_0, \varphi_0, u_0, v_0, w_0, m_0, r_f$ . Ulteriori vincoli possono essere il valore finale di  $C_3$  o il tempo finale e l'obiettivo sarà sempre quello di massimizzare la massa finale.

## 5.2 Perturbazioni

Nel modello sono presenti la perturbazione dovuta al potenziale armonico della Terra, la pressione di radiazione solare e la perturbazione dovuta all'effetto luni-solare. Tuttavia, dal momento in cui le prime due hanno un'influenza quasi trascurabile sui risultati, l'attenzione verrà focalizzata sull'effetto luni-solare, essendo la perturbazione preponderante nella presente analisi.

### 5.2.1 Effetto luni-solare

La perturbazione luni-solare tiene in considerazione gli effetti di attrazione gravitazionale di Sole e Luna sull'orbita del satellite. Le posizioni di Luna e Sole sono prese dalle effemeridi DE430 JPL. Il pedice  $l$  è utilizzato per riferirsi alla Luna, il pedice  $s$  per il Sole, il pedice  $b$  per indicare un generico corpo la cui posizione  $\mathbf{r}_b$  è data in coordinate rettangolari rispetto alla Terra nel sistema di riferimento Celeste (ICRF). Poiché le differenze tra il sistema di riferimento ICRF e il EME2000 sono minime, quest'ultimo viene utilizzato nella presente analisi. La perturbazione gravitazionale dovuta alla presenza del corpo, avente parametro gravitazionale  $\mu_b$ , è data dalla differenza tra l'accelerazione gravitazionale sullo spacecraft e quella della Terra:

$$\mathbf{a}_{bg} = \frac{\mu_b}{R_b^3} \mathbf{R}_b - \frac{\mu_b}{r_b^3} \mathbf{r}_b$$

Dove  $\mathbf{R}_b = \mathbf{r} - \mathbf{r}_b$  è il vettore posizione del satellite e  $\mathbf{r}_b$  è il vettore posizione della Terra relativi al corpo perturbante Figura 16.

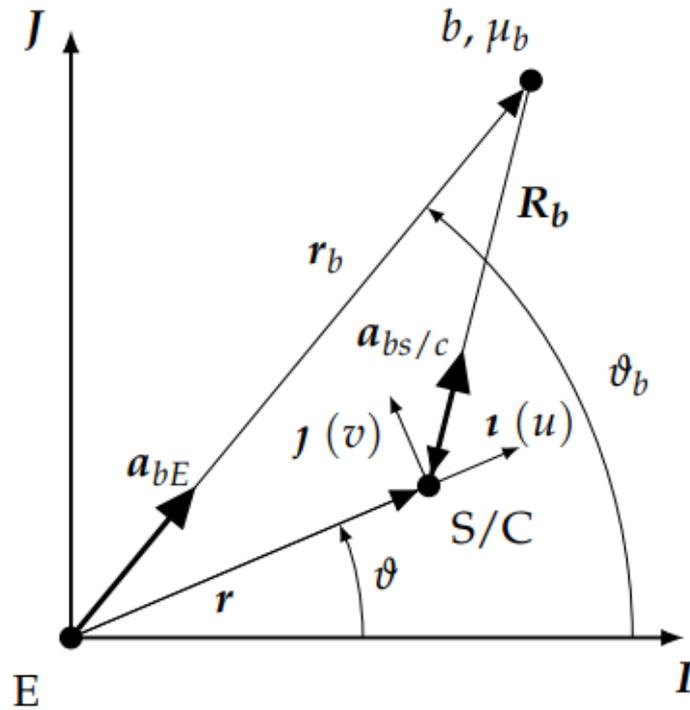


Figura 16. Perturbazioni gravitazionali nel sistema di riferimento EME2000 [1]

L'accelerazione in termini di componenti è ottenuta proiettandola nel sistema di riferimento topocentrico. Assumendo che il corpo perturbativo sia molto lontano rispetto alla distanza Terra-satellite e che le orbite siano coplanari, le componenti dell'accelerazione perturbativa tangenziali e radiali possono essere scritte come:

$$(\mathbf{a}_{ss/c} - \mathbf{a}_{sE}) \hat{\mathbf{u}}_j = \frac{3\mu_s}{2r_s^3} \sin[2(\theta_s - \theta)]$$

$$(\mathbf{a}_{ss/c} - \mathbf{a}_{sE}) \hat{\mathbf{u}}_i = \frac{3\mu_s}{2r_s^3} \{1 + \cos[2(\theta_s - \theta)]\}$$

Dove  $\hat{\mathbf{u}}_j$  e  $\hat{\mathbf{u}}_i$  sono rispettivamente i vettori unitari tangenziale e radiale.

Per stimare gli effetti della perturbazione solare durante l'evasione, dato che le componenti principali della velocità del satellite sono quella tangenziale e radiale, si possono includere questi effetti in due coefficienti:

$$\xi_v = \sin 2\Delta\theta$$

$$\xi_u = 1 + \cos 2\Delta\theta$$

Dove  $\Delta\theta$  è la differenza tra la posizione angolare del Sole e quella del satellite. Questo avrà effetto sull'energia del satellite che aumenterà, infatti, grazie alla componente di accelerazione lungo la direzione tangenziale. Un grande  $\xi_v$  si avrà quando il Sole si trova a  $0^\circ < \Delta\theta < 90^\circ$  o  $-180^\circ < \Delta\theta < -90^\circ$  (primo o terzo quadrante del sistema di riferimento rotante del satellite). La componente radiale non causerà una diminuzione di energia poiché si sta effettuando un allontanamento rispetto alla Terra, e avrà un'influenza massima quando il Sole si trova a  $-45^\circ < \Delta\theta < 45^\circ$  o  $\Delta\theta > 135^\circ$  e  $\Delta\theta < -135^\circ$  (quarto e primo quadrante). Quindi l'effetto benefico totale della perturbazione solare sull'energia del satellite si avrà quando il sole si troverà a  $-157.5^\circ$  o  $22.5^\circ$  rispetto alla direzione Terra-satellite.

## 5.2 Ottimizzazione

Per determinare la soluzione ottimale per l'evasione, si applica la teoria del controllo ottimale, descritta nei capitoli precedenti, al sistema di equazioni differenziali esposto nel paragrafo 5.1. L'obiettivo sarà massimizzare la massa finale del satellite e la variabile di controllo utilizzata è la spinta, il cui modulo è vincolato a variare tra 0 e il massimo. Alle equazioni di stato vengono accoppiate le variabili aggiunte  $\lambda$  - le cui equazioni differenziali sono date dalle equazioni di Eulero-Lagrange - e viene inoltre definito l'Hamiltoniano:

$$H = \lambda_r^T \mathbf{V} + \lambda_v^T \left( -\frac{\mu \mathbf{r}}{r^3} + \frac{\mathbf{T}}{m} + \mathbf{a}_J + \mathbf{a}_l + \mathbf{a}_s \right) - \lambda_m \frac{T}{c}$$

Dove  $H$  deve essere massimizzato dai controlli ottimi in accordo con il principio massimo di Pontryagin. La spinta  $\mathbf{T}$  deve essere parallela a  $\lambda_v$  e avrà valore massimo quando la switching function

$$S_F = \frac{\lambda_v}{m} - \frac{\lambda_m}{c} > 0$$

Mentre sarà nulla quando

$$S_F = \frac{\lambda_v}{m} - \frac{\lambda_m}{c} < 0$$

Avendo riscritto l'Hamiltoniano come:

$$H = \lambda_r^T \mathbf{V} + \lambda_v^T \left( -\frac{\mu \mathbf{r}}{r^3} + \frac{\mathbf{T}}{m} + \mathbf{a}_J + \mathbf{a}_l + \mathbf{a}_s \right) + T \left( \frac{\lambda_v}{m} - \frac{\lambda_m}{c} \right)$$

Per integrare le equazioni è stato utilizzato un metodo numerico multi-step basato sulle formule di Adams-Moulton. Per risolvere il problema ai valori al contorno viene adottato uno schema di Newton: si assumono valori provvisori per le incognite, perturbate da delle piccole quantità, e dopo l'integrazione viene determinato l'errore sulle condizioni al contorno. A ogni iterazione si correggono le incognite al fine di annullare gli errori [1].

Il codice utilizzato per la presente analisi è in Fortran.

### 5.3 Caso studio

Lo scopo della presente tesi è quello di trovare traiettorie di evasione dal punto Lagrangiano  $L_2$  nel sistema Sole- Terra, con l'obiettivo di massimizzare la massa finale del satellite. È stata considerata una massa iniziale del satellite di 850 kg, una potenza disponibile del propulsore di  $4.2/R_s^2$  kW, efficienza di 0.625 e un impulso specifico di 3300 s.

Per effettuare l'evasione da  $L_2$  è stata considerata un'orbita di Lyapunov come orbita di partenza, i cui dati sono stati inseriti in un file di input per l'integrazione. Nel codice l'orbita è divisa in 1000 punti, si ha il tempo  $t_0$  che indica la data di partenza adimensionata del satellite,  $t_1$  che rappresenta la durata di spinta del propulsore e  $t_2$  che è il tempo finale:  $t_1$  e  $t_2$  identificano le due fasi di accensione/spegnimento del propulsore. Le grandezze sono state normalizzate rispetto al semiasse maggiore dell'ellissoide terrestre  $r_E = 6378.1346$  km.

In particolare sono stati analizzati 5 casi diversi, al variare del tempo iniziale  $t_0$  e con una  $C_3$  (eccesso iperbolico di velocità) libera: per ognuno di questi casi sono state analizzate diverse durate e diversi punti di partenza al fine di trovare la soluzione ottimale, corrispondente al  $t_1$  minimo. Le cinque date scelte sono spaziate di una settimana e corrispondono a un mese sinodico della Luna che, pertanto, nell'ultima data si ritroverà alla stessa distanza relativa dalla Terra rispetto alla prima data cioè 384400 km.

## Capitolo 6

### Risultati

In questo capitolo vengono riportati i risultati ottenuti con il codice Fortran.

In Tabella 1 si riportano i casi analizzati considerando una partenza nel punto 1 della discretizzazione dell'orbita; più avanti nella tesi ci si riferirà agli stessi 5 casi al variare del punto di partenza varierà conseguentemente anche la data.

	Data di partenza, $t_0$ (adimensionata)	Data di partenza (gg/mm/aaaa)
Caso 1	162.033	15/10/2025
Caso 2	162.153	22/10/2025
Caso 3	162.274	29/10/2025
Caso 4	162.394	5/11/2025
Caso 5	162.514	12/11/2025

*Tabella 1. Casi studio analizzati*

Come file di input per l'integrazione, sono stati considerati i dati delle orbite di Lyapunov per i 5 casi di cui sopra. Si riportano i grafici corrispondenti che presentano in ascisse e ordinate le coordinate in un sistema di riferimento sinodico, adimensionate rispetto alla distanza Sole-Terra.

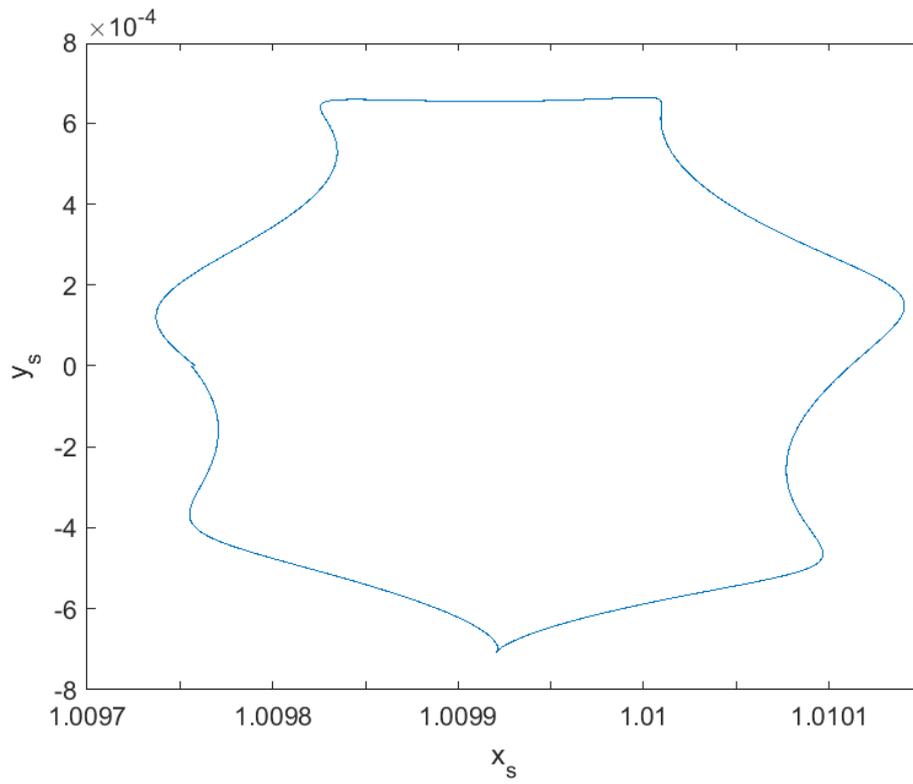


Figura 17. Caso 1 -  $t_0=162.033$

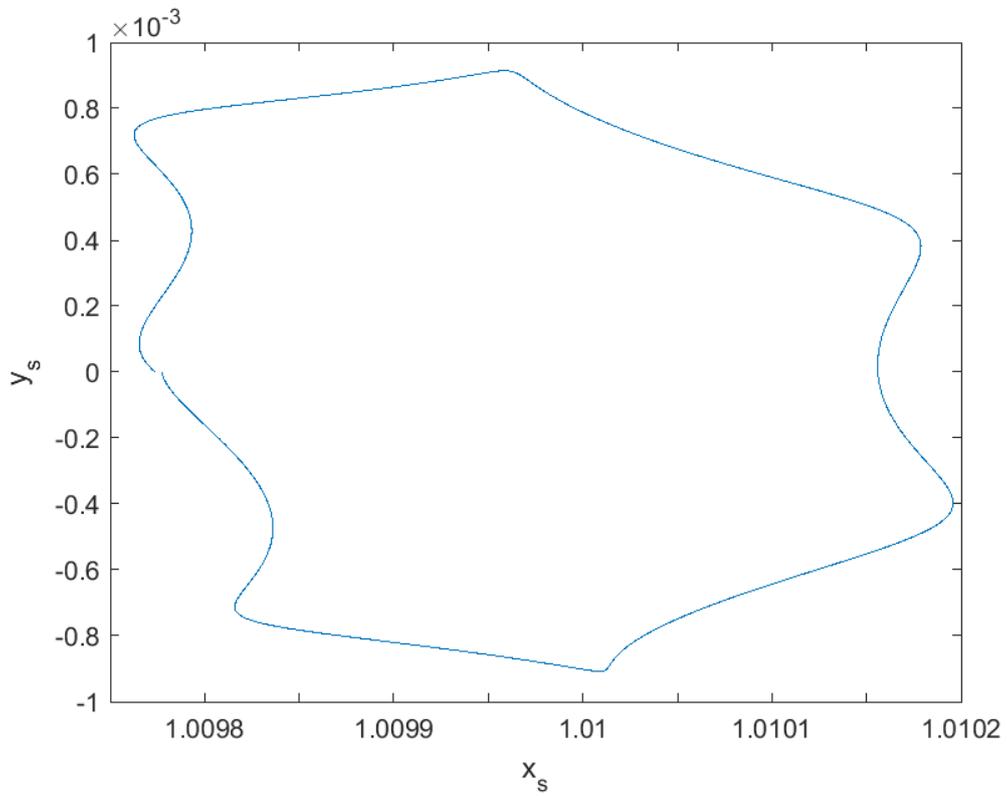


Figura 18. Caso 2 -  $t_0=162.153$

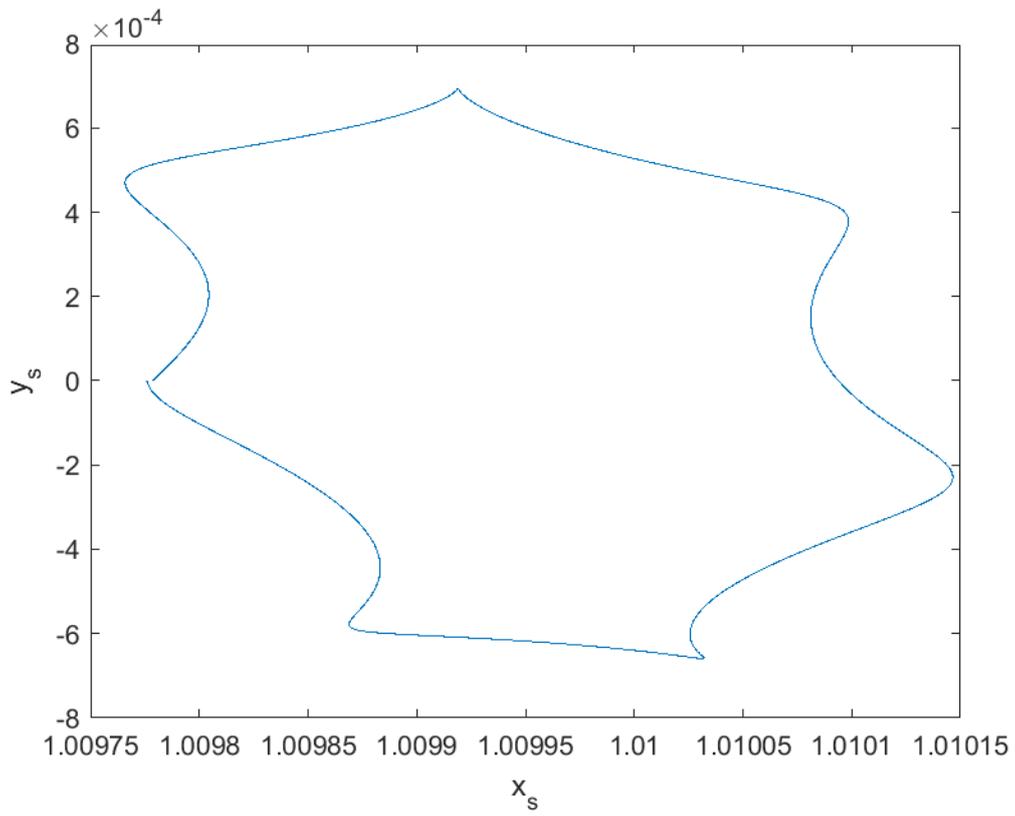


Figura 19. Caso 3 -  $t_0=162.274$

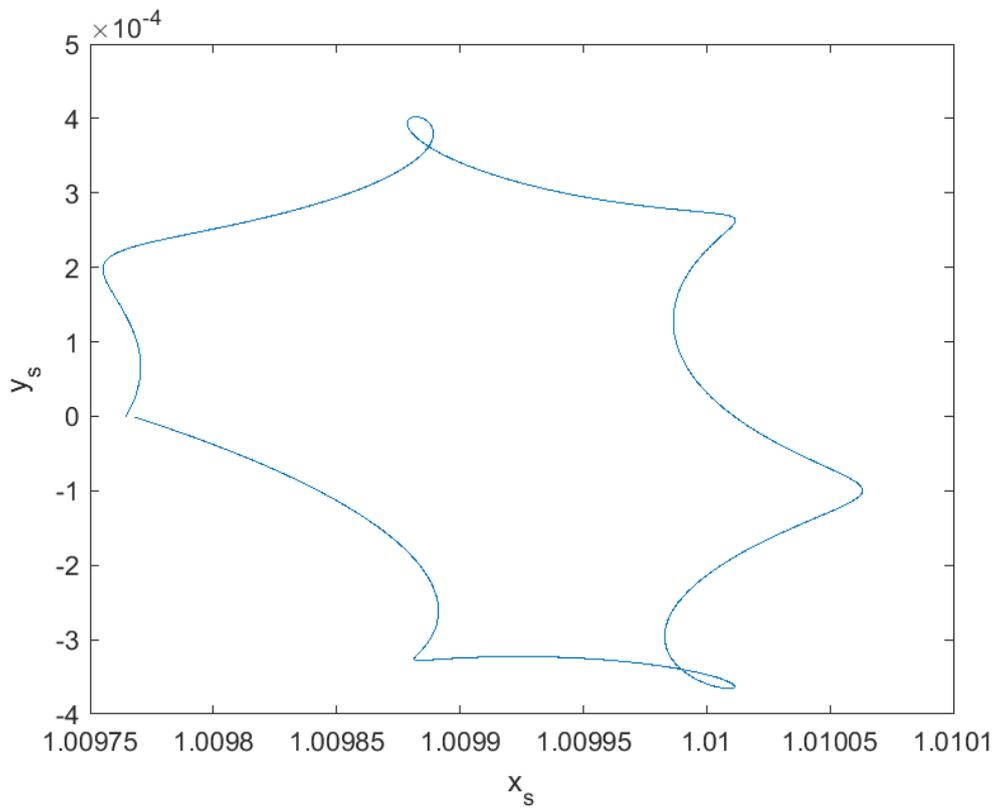


Figura 20. Caso 4 -  $t_0=162.394$

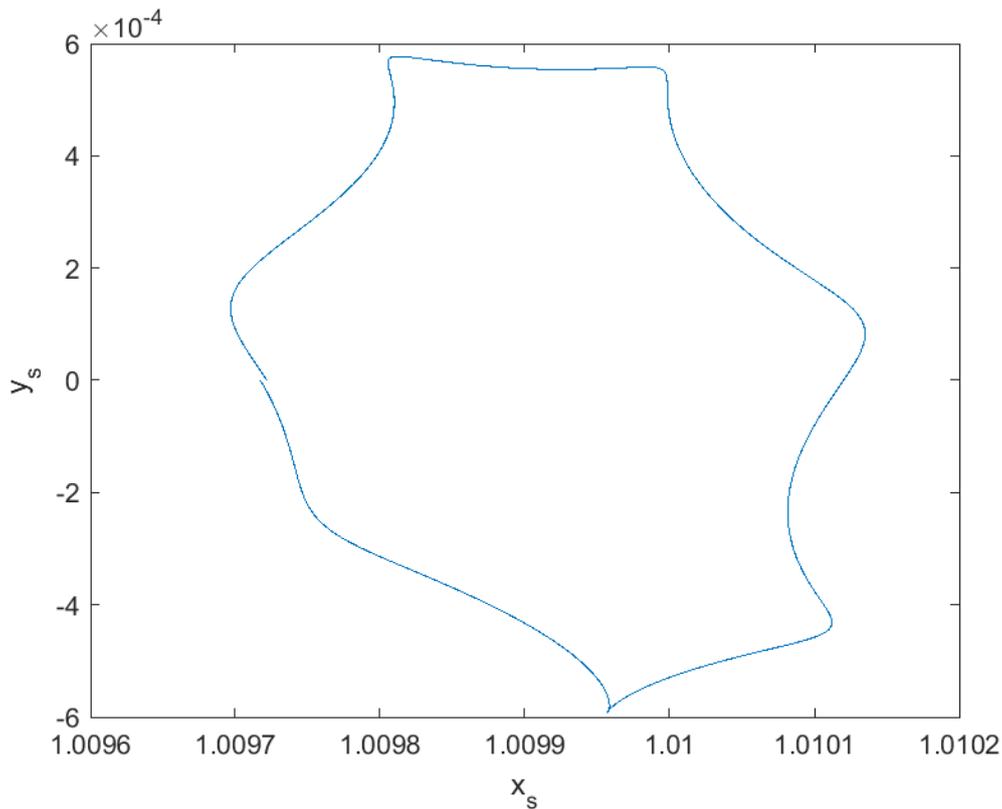


Figura 21. Caso 5 -  $t_0=162.514$

Queste traiettorie appaiono deformate, rispetto alla forma quasi-ellittica dell'orbita di Lyapunov, a causa del moto del baricentro Terra-Luna rispetto alla Terra. Queste orbite sono appunto posizionate nelle vicinanze del punto SEL2 e il punto di partenza è situato nella congiungente Sole-Terra-L<sub>2</sub> nel sistema di riferimento sinodico. Si nota, inoltre, come la loro forma sia fortemente dipendente dal tempo: considerando date di partenze diverse, infatti, la geometria delle orbite varia sensibilmente e non si possono evincere simmetrie tra la prima e l'ultima data in cui la Luna si trova alla stessa distanza relativa dalla Terra. Queste diverse forme e caratteristiche sono causate dalla complessa interazione gravitazionale che avviene tra il sistema Terra-Luna e il Sole.

### 6.1 Condizione iniziale di spinta nulla

Sono state fatte inizialmente delle analisi integrando le equazioni con condizione iniziale di spinta nulla: in questo modo sono state ottenute le soluzioni che si ricaverrebbero senza spingere, propagando fino a un tempo finale  $t_2$ . Si riportano le soluzioni dei 5 casi identificati confrontandoli con le rispettive orbite di input. I grafici sono stati realizzati ponendo in ascisse e ordinate le coordinate nel sistema di riferimento sinodico.

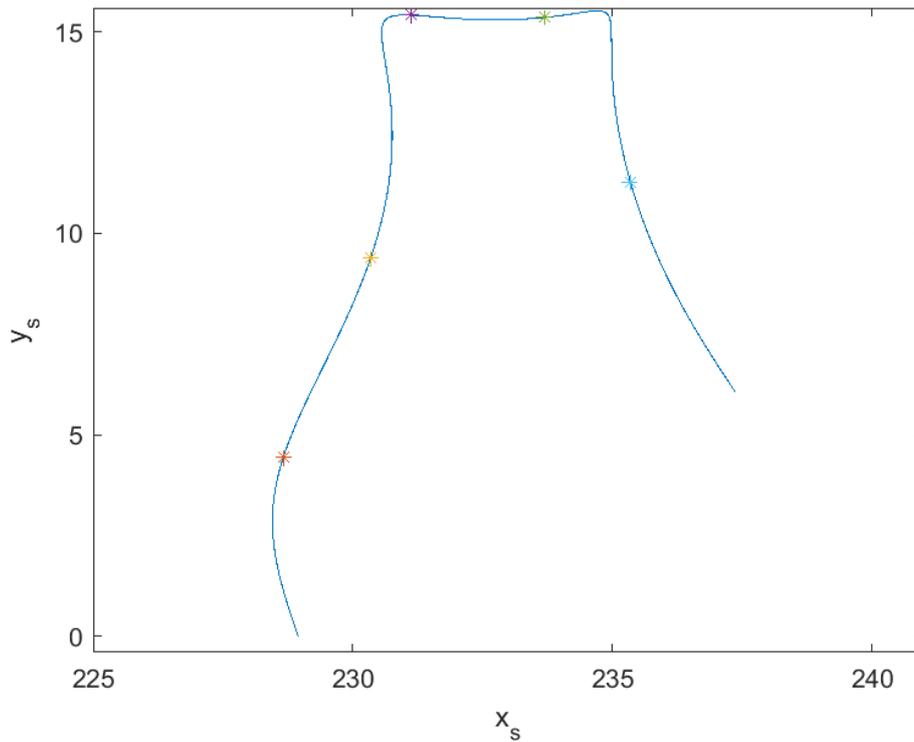


Figura 22. Soluzione senza spinta, 15/10/2025 (caso 1)

In Figura 22 è riportata la soluzione ottenuta per la data 15/10/2025 (caso 1) propagando fino a un tempo finale  $t_2=8000$  corrispondente a una evasione di durata 74.7 giorni. I punti segnati nel grafico corrispondono a un tempo finale rispettivamente di 1000, 2000, 4000, 5000, 7000.

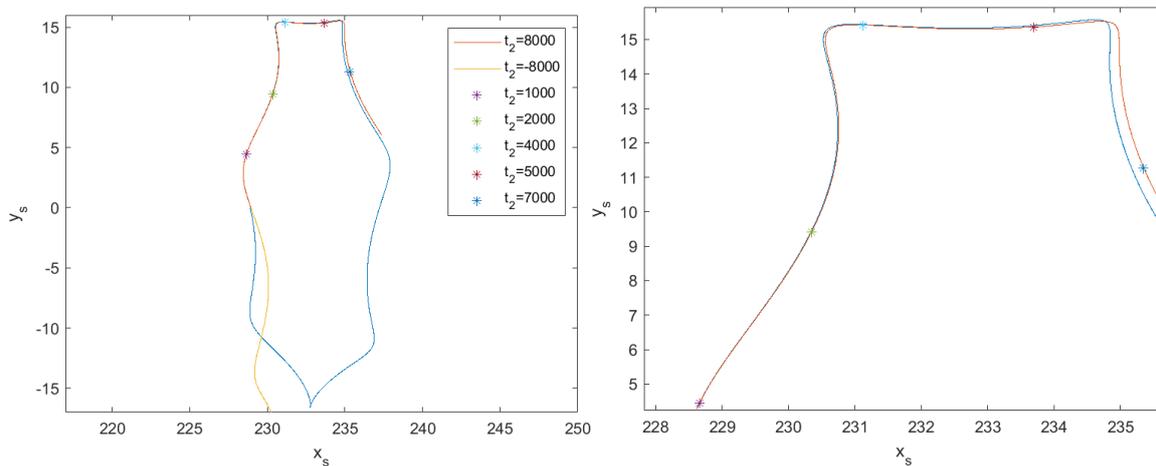


Figura 23. Confronto tra orbita senza spinta (rosso/giallo) e orbita di riferimento, 15/10/2025 (caso 1)

In Figura 23 si riporta invece il confronto con l'orbita in input (sinistra) e un ingrandimento della stessa (destra). In questo modo si può apprezzare che il satellite in assenza di spinta da parte del propulsore seguirebbe l'orbita di Lyapunov data in input più o meno fino a  $t_2=2000$ , dal momento che da quel punto in poi si inizia a notare un certo discostamento. La linea in giallo invece

corrisponde alla soluzione che si avrebbe integrando indietro nel tempo a partire dal punto 1 della discretizzazione dell'orbita: si nota, infatti, come il satellite si discosta nettamente dall'orbita di riferimento.

Lo stesso procedimento è stato eseguito per tutti gli altri casi, confrontando l'orbita di partenza con l'orbita che seguirebbe il satellite in assenza di spinta del propulsore. Si riporta il confronto nelle figure che seguono.

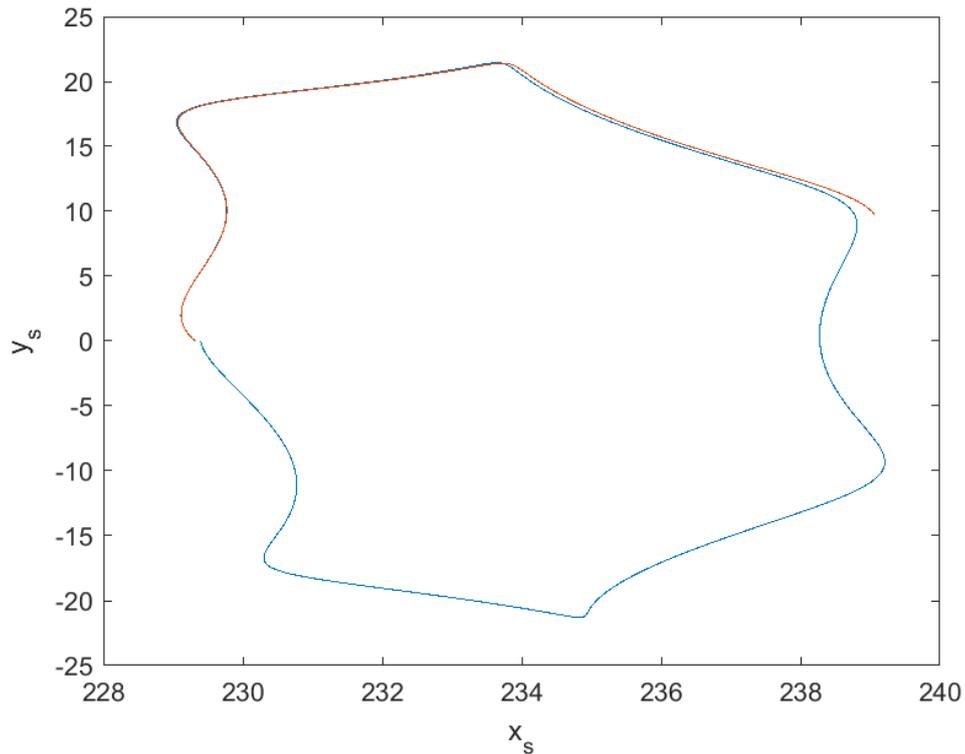


Figura 24. Confronto tra orbita senza spinta (rosso) e orbita di riferimento, 22/10/2025 (caso 2)

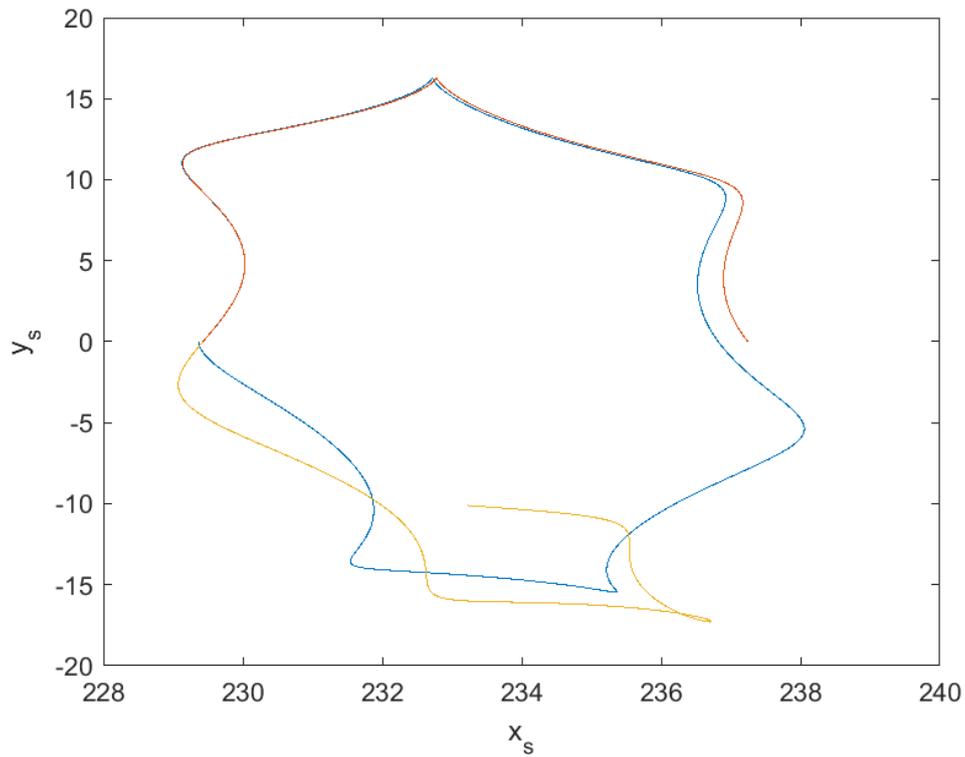


Figura 25. Confronto tra orbita senza spinta (rosso/giallo) e orbita di riferimento, 29/10/2025 (caso 3)

Nei casi 2 e 3 di Figura 24 e Figura 25, si nota come il discostamento dall'orbita di riferimento, inizia un po' in anticipo rispetto al caso 1: la spiegazione è da ricercarsi nella diversa posizione relativa tra Luna e Terra, che quindi causa delle perturbazioni che fanno deviare l'orbita. Inoltre, nel caso 3, l'orbita ottenuta integrando le equazioni indietro nel tempo con condizioni di spinta nulla si discosta totalmente dall'orbita di riferimento.

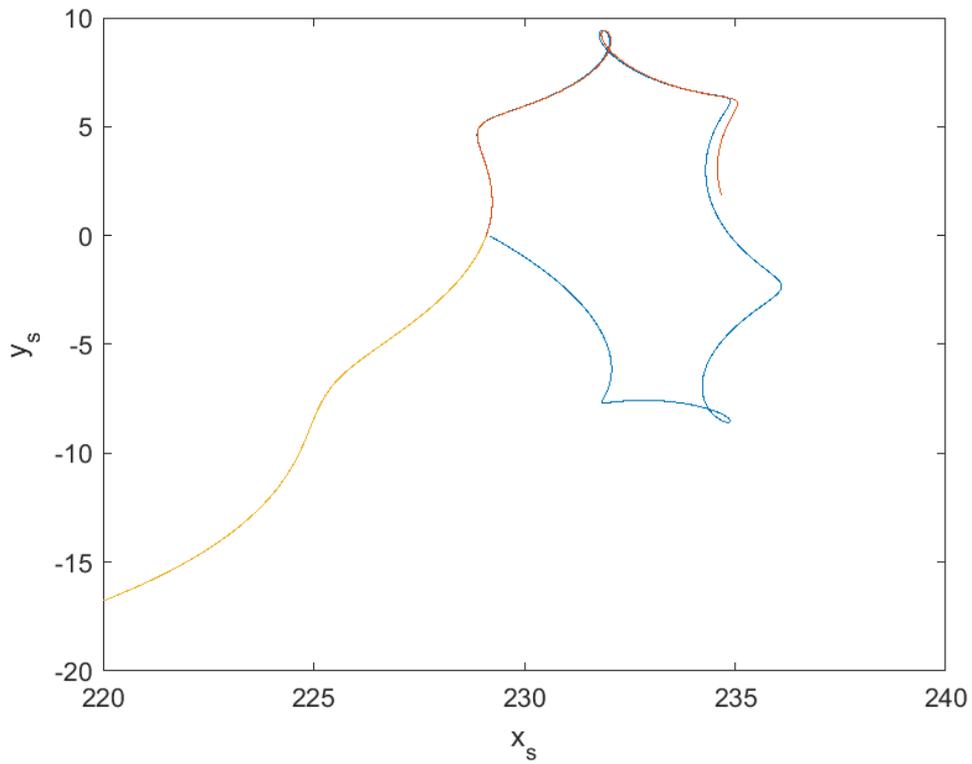


Figura 26. Confronto tra orbita senza spinta (rosso/giallo) e orbita di riferimento, 5/11/2025 (caso 4)

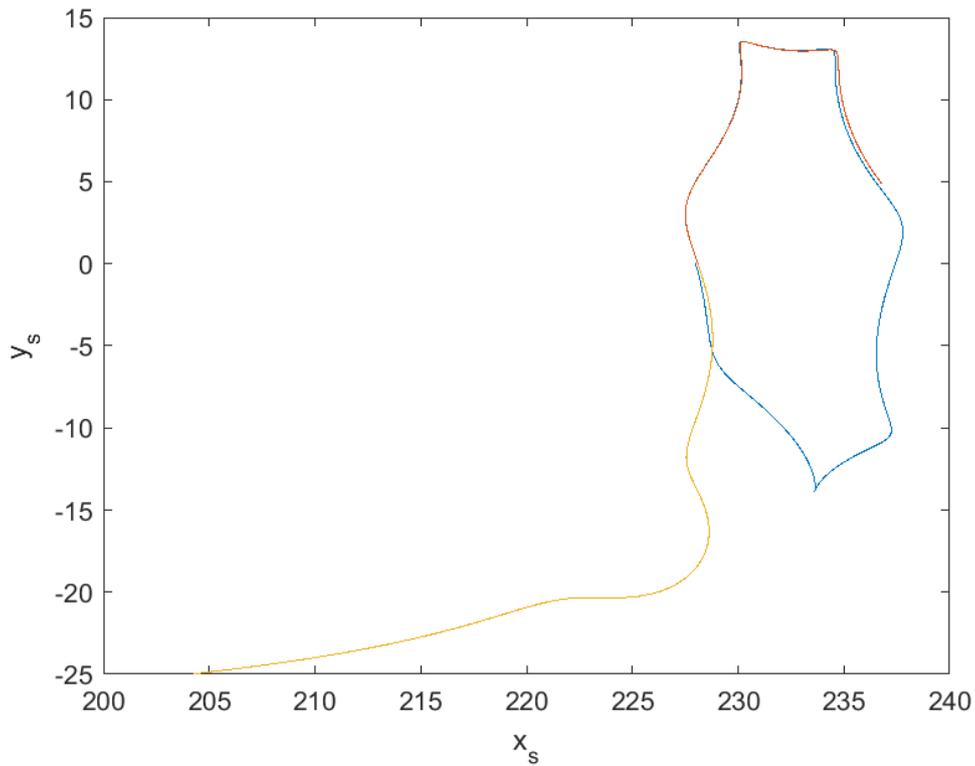


Figura 27. Confronto tra orbita senza spinta (rosso/giallo) e orbita di riferimento, 12/11/2025 (caso 5)

Nel caso 4 (Figura 26), l'orbita ottenuta integrando le equazioni indietro nel tempo (giallo), non segue quella di riferimento ma devia dalla parte opposta, in direzione del Sole. La medesima cosa accade

nel caso 5 (Figura 27), sebbene inizialmente sembrerebbe seguire quella di riferimento. Inoltre, nel caso 5, come nel caso 1, la Luna e la Terra si trovano alla stessa distanza relativa, pertanto si può chiaramente evincere che le differenze sono dovute al contributo netto del Sole.

Da questo confronto si evince che in assenza di spinta il satellite seguirebbe l'orbita in modo stabile fino a un certo istante di tempo, in seguito al quale le perturbazioni causerebbero una deviazione dall'orbita se non si interviene con una opportuna manovra correttiva.

## 6.2 Traiettorie di evasione

Per ciascun caso, sono state fatte diverse simulazioni al variare del punto di partenza sull'orbita e della durata totale dell'evasione, mantenendo una  $C_3$  libera.

L'obiettivo è stato quello di trovare soluzioni che comportassero il minor tempo della spinta in modo da minimizzare i consumi e ottenere una massa finale maggiore. In appendice si riportano le tabelle con tutte le soluzioni trovate, in cui sono state messe in evidenza quelle ritenute ottimali. Di seguito si riassumono invece solo i risultati considerati ottimali, scelti in modo tale da avere una durata della spinta minore. Ci si riferisce agli stessi casi precedenti (da 1 a 5), in quanto le orbite di partenza considerate rimangono invariate e il  $t_0$  usato nell'integrazione delle equazioni è quello corrispondente ai 5 casi iniziali. Ovviamente la data di partenza non sarà analoga essendo stati variati i punti di partenza sull'orbita.

CASO 1	Data di partenza	Durata della fase di spinta ( $t_1$ )	Massa finale [Kg]	$C_3$ [ $\text{km/s}^2$ ]
Durata 90 (Punto 100)	1/11/2025	255.188375318270	848.972096420964	0.1734
Durata 75 (Punto 190)	16/11/2025	491.857075833770	848.003856542382	0.1653
Durata 70 (Punto 200)	18/11/2025	616.375700993327	847.496327920708	0.1733
Durata 65 (Punto 250)	26/11/2025	775.926513563452	846.838086456074	0.1699
Durata 60 (Punto 130)	6/11/2025	992.734390425441	845.985659521334	0.1710

Tabella 2. Traiettorie ottimali caso 1

CASO 2	Data di partenza	Durata della fase di spinta ( $t_1$ )	Massa finale [Kg]	$C_3$ [km/s <sup>2</sup> ]
Durata 90 (Punto 70)	3/11/2025	251.242350410131	848.986852791359	0.1581
Durata 75 (Punto 150)	17/11/2025	484.692572305230	848.032092476420	0.1548
Durata 70 (Punto 180)	22/11/2025	607.303126558223	847.528916394905	0.1547
Durata 65 (Punto 200)	26/11/2025	765.715455781408	846.880059343452	0.1640
Durata 60 (Punto 250)	4/12/2025	975.936533326228	846.013177568076	0.1605

Tabella 3. Traiettorie ottimali caso 2

CASO 3	Data di partenza	Durata della fase di spinta ( $t_1$ )	Massa finale [Kg]	$C_3$ [km/s <sup>2</sup> ]
Durata 90 (Punto 40)	5/11/2025	252.922857099022	848.979275081868	0.1627
Durata 75 (Punto 120)	18/11/2025	487.412076616325	848.020022431382	0.1601
Durata 70 (Punto 150)	23/11/2025	610.416761664611	847.515159036502	0.1602
Durata 65 (Punto 170)	27/11/2025	769.423048019202	846.863736557941	0.1703
Durata 60 (Punto 200)	2/12/2025	979.510090028093	846.000774654224	0.1795

Tabella 4. Traiettorie ottimali caso 3

CASO 4	Data di partenza	Durata della fase di spinta ( $t_1$ )	Massa finale [Kg]	$C_3$ [km/s <sup>2</sup> ]
Durata 90 (Punto 1)	5/11/2025	255.286065110943	848.969504405181	0.1746
Durata 75 (Punto 90)	19/11/2025	492.031746449881	848.000647370376	0.1698
Durata 70 (Punto 120)	24/11/2025	616.009356755687	847.492030108256	0.1712

Durata 65 (Punto 150)	28/11/2025	776.210696284978	846.834321611860	0.1762
Durata 60 (Punto 180)	3/12/2025	988.021463728211	845.964466512319	0.1871

Tabella 5. Traiettorie ottimali caso 4

CASO 5	Data di partenza	Durata della fase di spinta ( $t_1$ )	Massa finale [Kg]	$C_3$ [km/s <sup>2</sup> ]
Durata 90 (Punto 100)	28/11/2025	251.022942499768	848.976692602033	0.1768
Durata 75 (Punto 50)	20/11/2025	485.835008266545	848.024709061847	0.1625
Durata 70 (Punto 80)	25/11/2025	608.557539507817	847.520789301496	0.1625
Durata 65 (Punto 110)	30/11/2025	767.333943795887	846.868440535484	0.1659
Durata 60 (Punto 140)	5/12/2025	977.321085459621	846.005591451905	0.1748

Tabella 6. Traiettorie ottimali caso 5

Per comprendere meglio i risultati ottenuti, sono state diagrammate le soluzioni di ottimo per i 5 casi analizzati: in particolare, si riporta il  $t_1$  in funzione della durata dell'evasione Figura 28 e il punto di partenza ottimale in funzione della data di evasione adimensionata ( $t_0$ +durata), Figura 29.

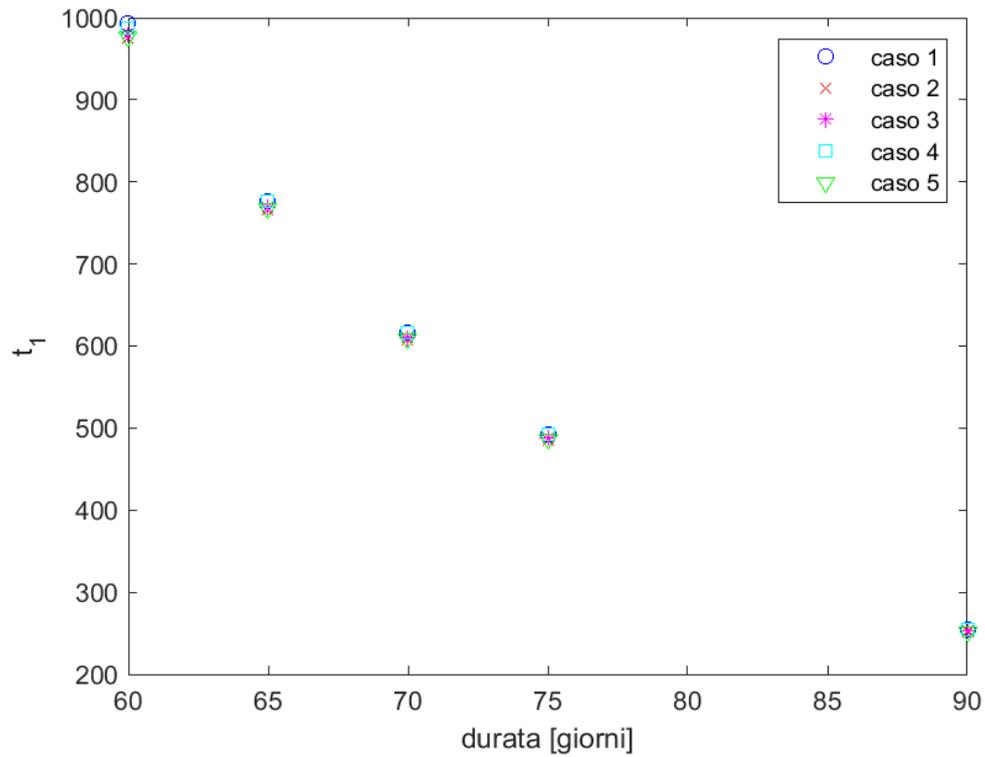


Figura 28.  $t_1$  in funzione della durata totale dell'evasione

Si nota come  $t_1$  vari solo con la durata dell'evasione ed è praticamente indipendente dalla data di partenza. Aumentando la durata il  $t_1$  diminuisce a parità di  $t_0$ , mentre fissata la durata, il consumo di propellente ed il tempo  $t_0$  sono praticamente indipendenti: questa piccola influenza è legata alla posizione iniziale della luna che va ad influenzare la traiettoria di evasione, soprattutto nella parte iniziale.

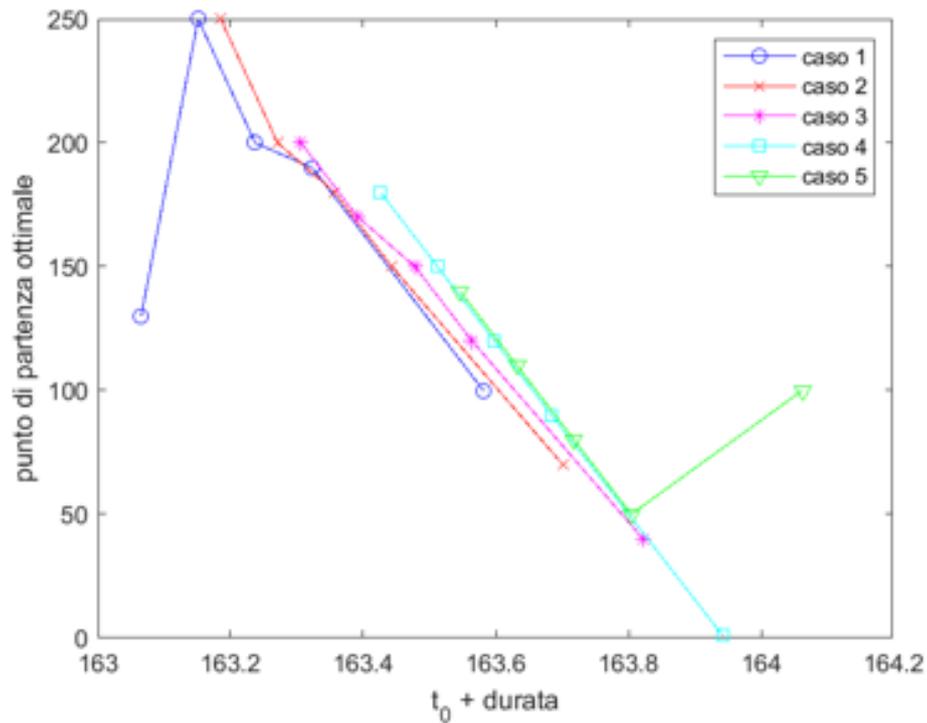


Figura 29. Punto di partenza ottimale in funzione della data di evasione

Si nota inoltre una dipendenza del punto di partenza ottimale dalla data di evasione: per i casi 2, 3 e 4, all'aumentare della data di evasione, risulta sempre più conveniente anticipare l'inizio della manovra di evasione mentre, per i casi 1 e 5, si ha un differente comportamento in corrispondenza della prima data per il caso 1 e dell'ultima data per il caso 5, che sono rispettivamente 6/11/2025 e 28/11/2025.

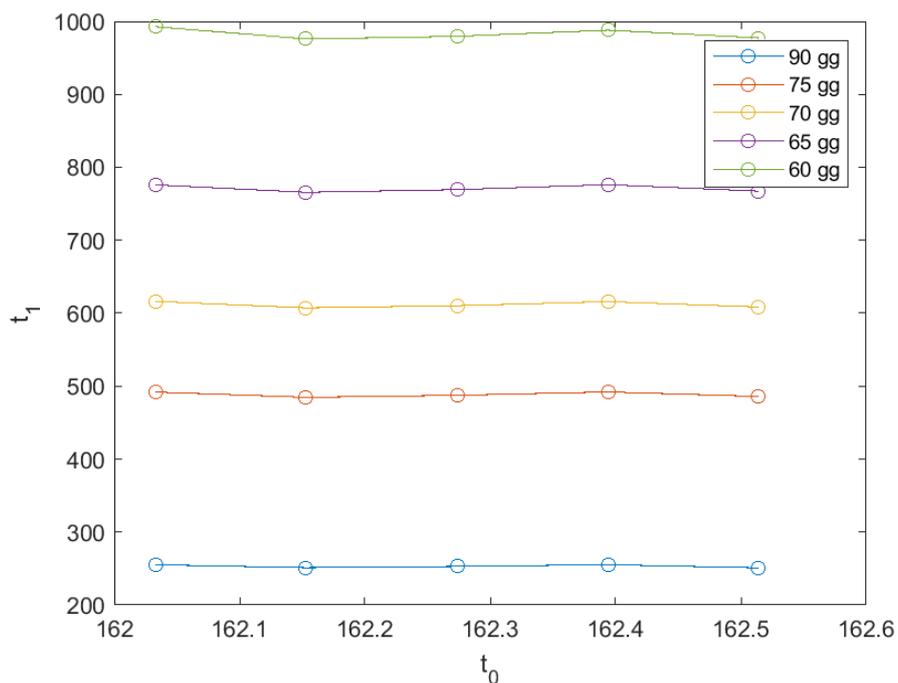


Figura 30.  $t_1$  in funzione di  $t_0$

A parità di durata, seppur minime, si notano delle differenze di  $t_1$  al variare della data di partenza: in Figura 30 si vede un andamento simile per le 5 durate analizzate.

In particolare, per le durate 75, 70, 65 e 60 giorni si può notare un minimo della durata della spinta in corrispondenza del caso 2, relativo alle traiettorie ottenute considerando l'orbita di partenza di Lyapunov con  $t_0=162.153$ ; per la durata 90 giorni si ha, invece, un minimo in corrispondenza del caso con  $t_0=162.514$ . Questo vuol dire che, per effettuare l'evasione dalla sfera di influenza terrestre, per quattro delle cinque traiettorie in Tabella 3 sarà richiesto meno propellente perché la spinta servirà per un tempo inferiore rispetto a tutte le altre traiettorie. Si potrà, di conseguenza, avere una maggiore massa finale del satellite.

Il massimo tempo della spinta, invece, si ha in corrispondenza delle date 5/11/25, 19/11/25, 18/11/25, 28/11/25 e 6/11/25 rispettivamente per le cinque diverse durate. Ognuna di queste date corrisponde a un'orbita di partenza diversa, pertanto, dal momento che tra le date non vi è una differenza così significativa da poter essere causata da una diversa posizione della Luna, la variazione di  $t_1$ , e quindi dei consumi, è attribuibile al diverso tempo  $t_0$  usato per l'integrazione delle equazioni, corrispondente a una diversa orbita di Lyapunov. In Tabella 7. Tabella 7 si riportano le date di partenza delle traiettorie che corrispondono al  $t_1$  massimo e  $t_1$  minimo:

	Durata 90 giorni	Durata 75 giorni	Durata 70 giorni	Durata 65 giorni	Durata 60 giorni
$t_1$ minimo	28/11/25	17/11/25	22/11/25	26/11/25	4/12/25
$t_1$ massimo	5/11/25	19/11/25	18/11/25	28/11/25	6/11/25

Tabella 7.  $t_1$  massimo e  $t_1$  minimo per le diverse durate

Comparando, invece, missioni per durate diverse (Figura 31), anche in giorni vicini tra di loro, la durata della spinta risulta nettamente minore per la durata 90 giorni.

Un esempio significativo è comparare la missione con data di partenza 5/11/2025, che ha durata 90 giorni, con quella con data di partenza 6/11/2025, che ha durata 60 giorni: si passa da un  $t_1=251.923$  per il primo caso, a un  $t_1=992.734$  per il secondo caso. Questo perché, nel caso in cui la missione debba avvenire in un tempo più lungo, potendo sfruttare l'accelerazione gravitazionale data dal Sole o eventualmente anche dalla Luna, si avrà un minore utilizzo della spinta e di conseguenza sarà

necessaria una minore quantità di propellente. Se, invece, la durata della missione deve essere più corta, si avrà un uso maggiore della spinta e quindi maggiore necessità di propellente.

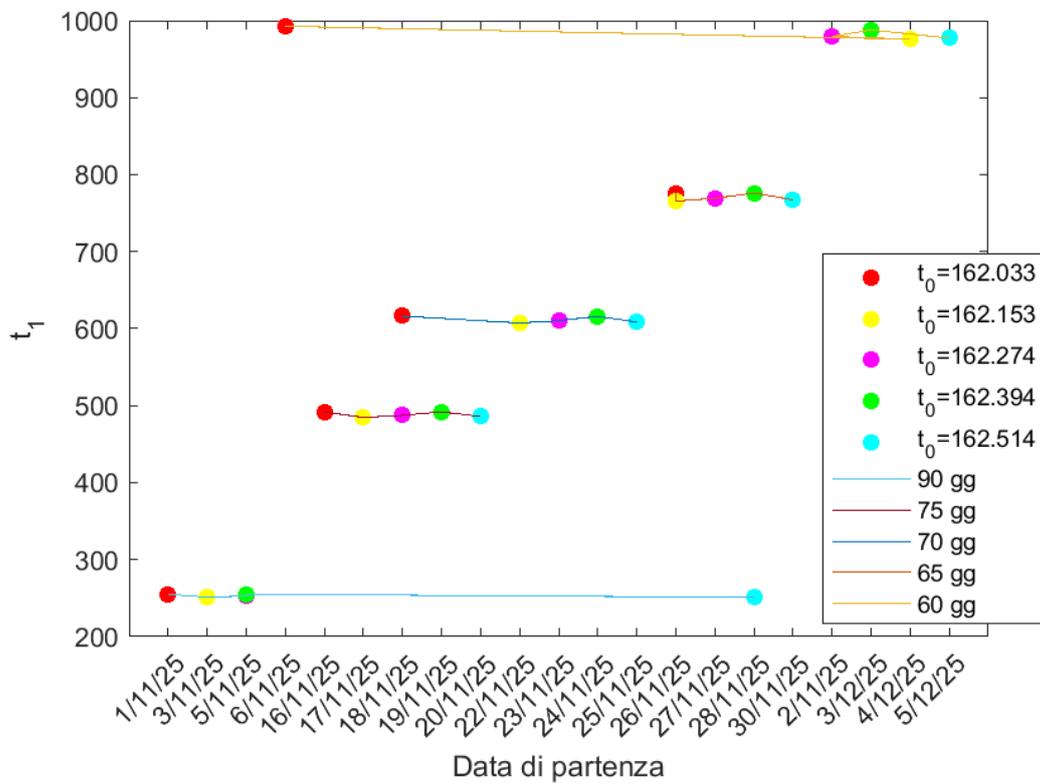


Figura 31.  $t_1$  in funzione delle date di partenza

Di seguito si riportano le traiettorie di evasione dei casi ottimali individuati. I grafici sono stati realizzati in modo da mettere in risalto il punto di partenza sull'orbita per ciascuna traiettoria di evasione e il sistema di riferimento è il sinodico.

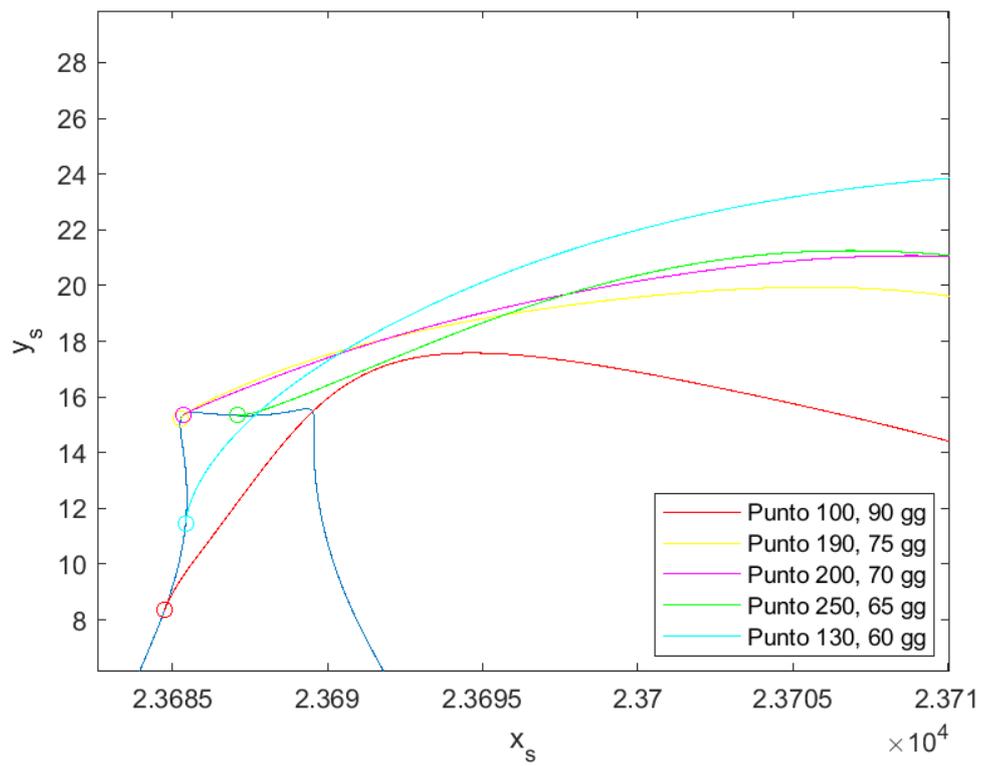
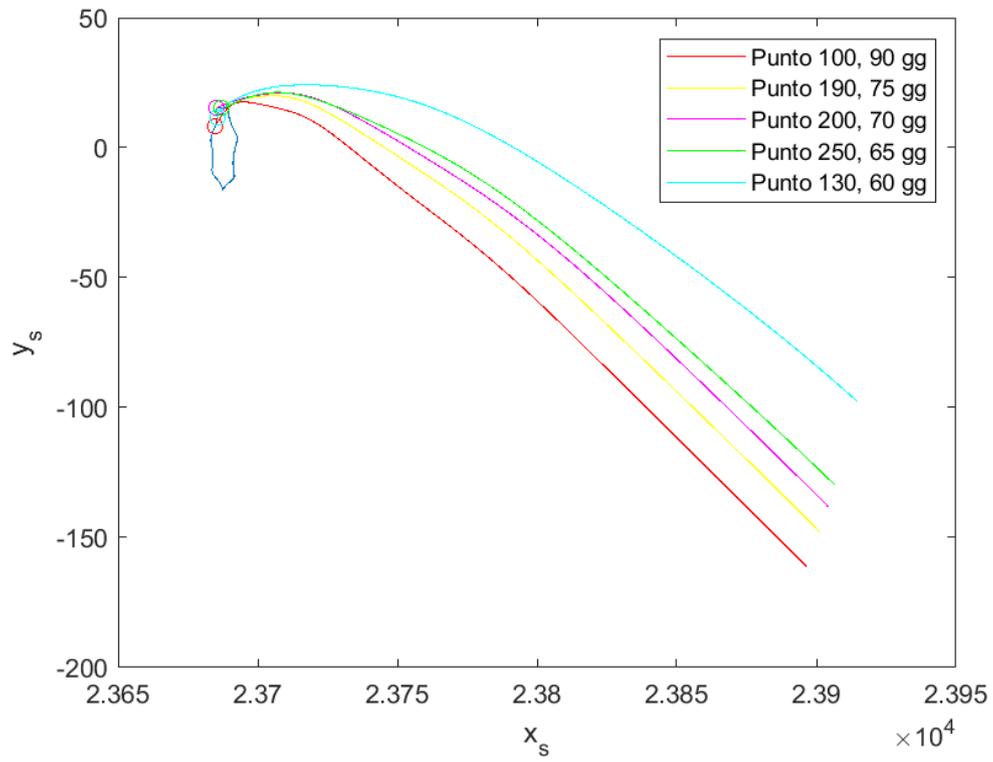


Figura 32. Traiettorie di evasione da orbita di Lyapunov riferita al caso 1

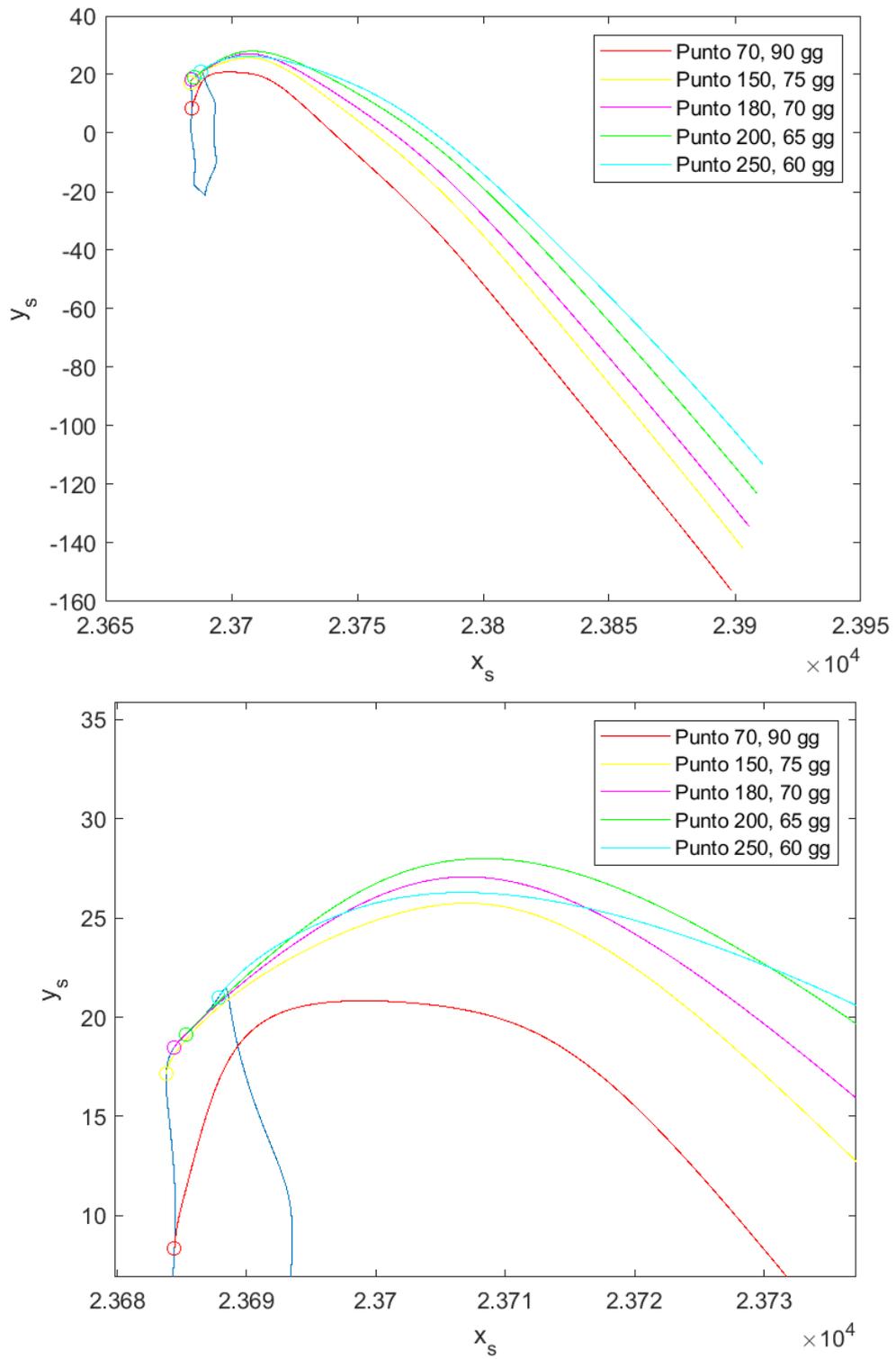


Figura 33. Traiettorie di evasione da orbita di Lyapunov riferita al caso 2

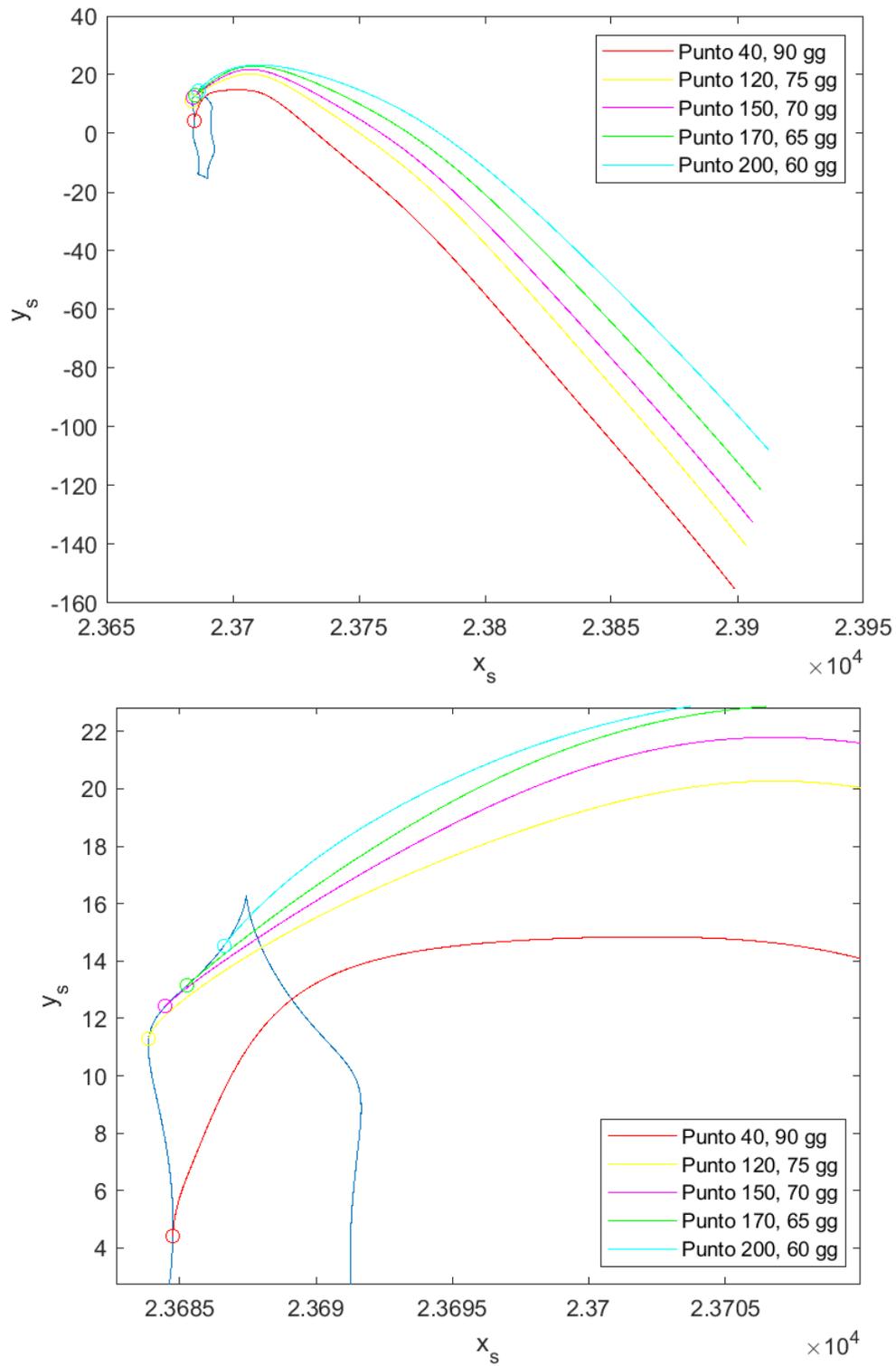


Figura 34. Traiettorie di evasione da orbita di Lyapunov riferita al caso 3

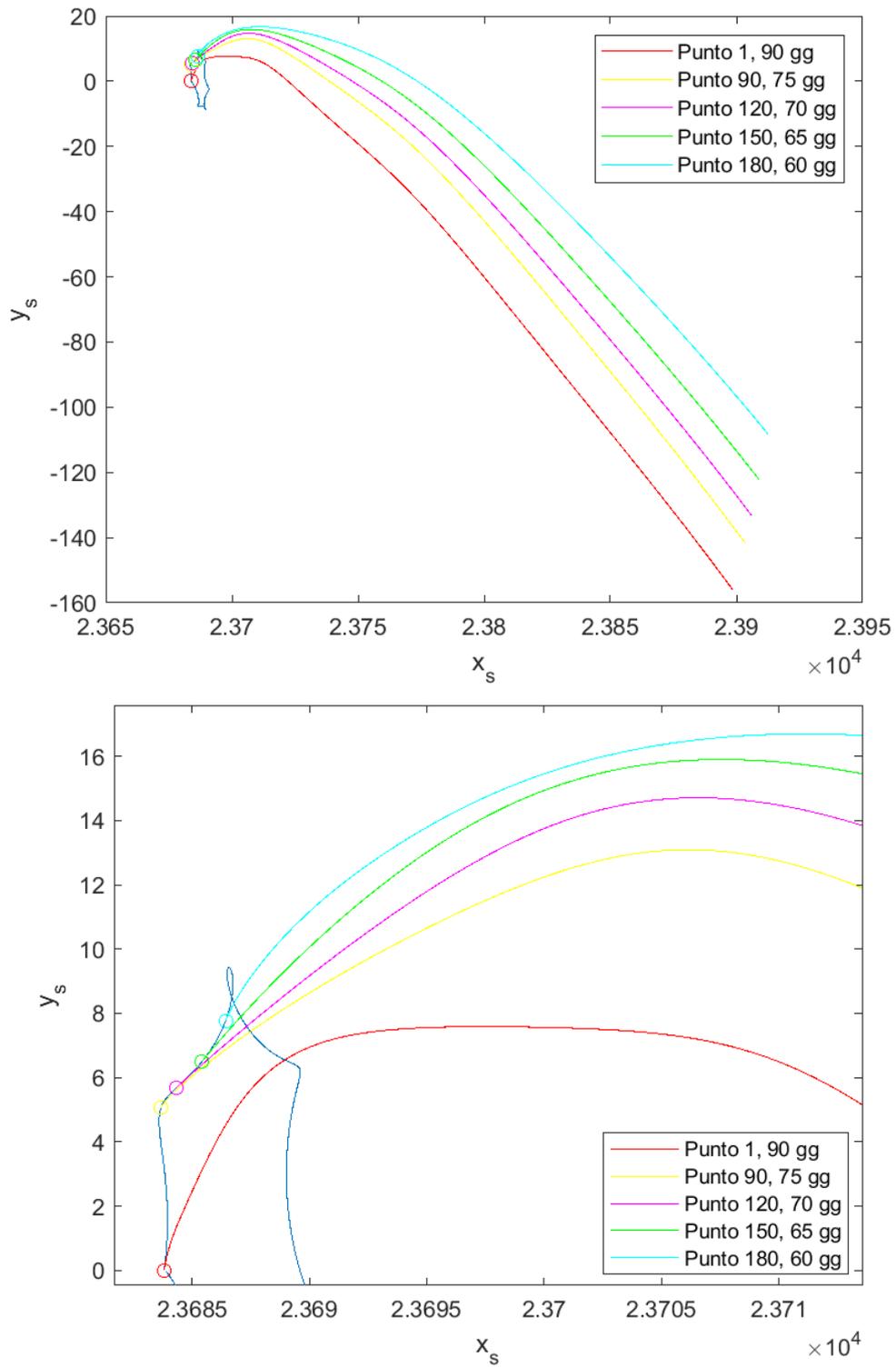


Figura 35. Traiettorie di evasione da orbita di Lyapunov riferita al caso 4

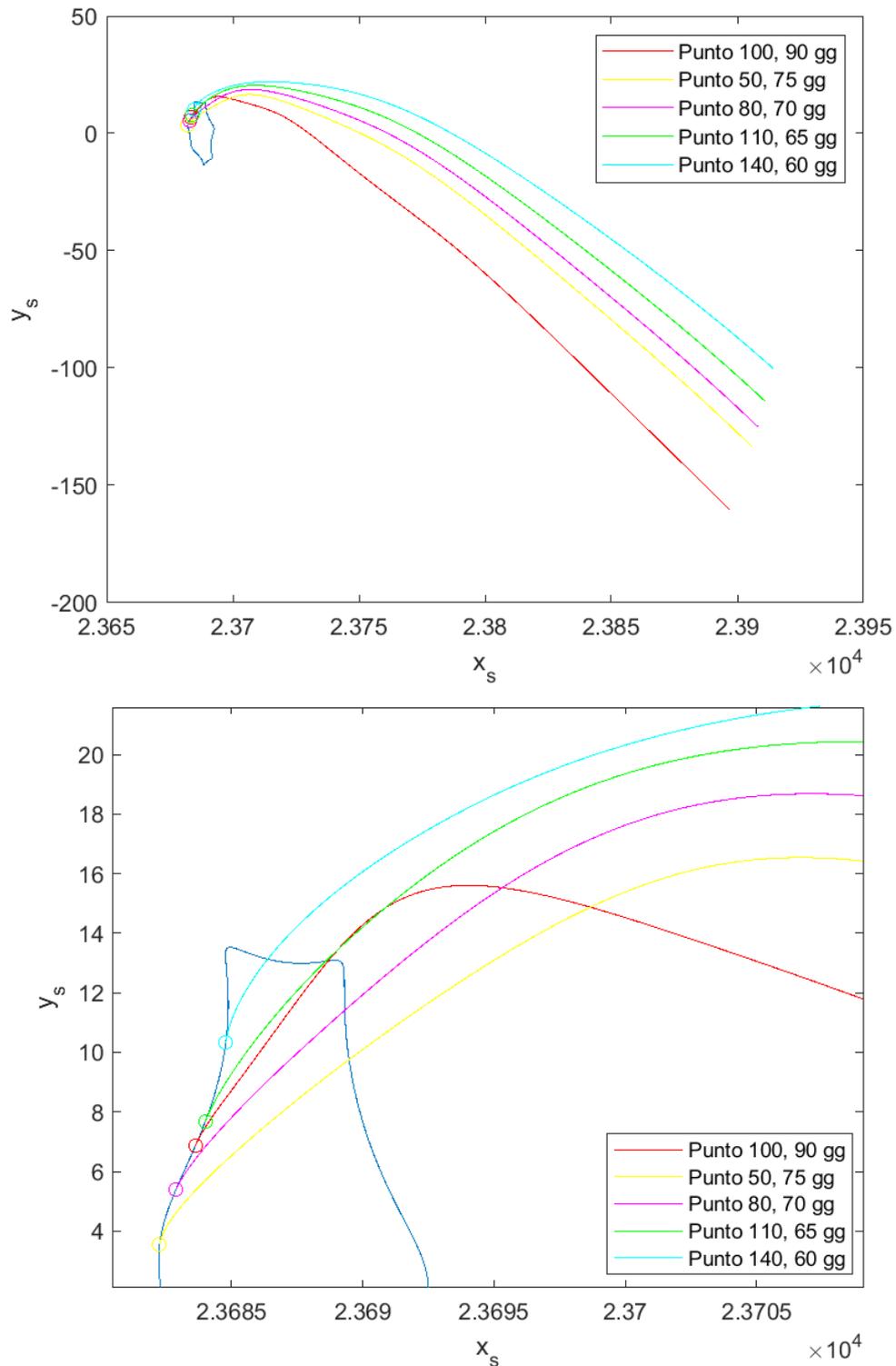


Figura 36. Traiettorie di evasione da orbita di Lyapunov riferita al caso 5

Queste traiettorie sono molto simili tra loro: sembrerebbe che ciascuna curva sia semplicemente ruotata a causa del diverso punto di partenza quando, in realtà, ogni traiettoria è diversa soprattutto a causa della diversa posizione della Luna, che cambia al variare della data di partenza, andando di conseguenza a variare la traiettoria perché attirerà a sé o spingerà più lontano il satellite a seconda della loro posizione relativa alla partenza. L'effetto della Luna è più evidente nelle prime fasi

dell'evasione, in cui il satellite è più vicino alla Luna. Infatti, le differenze principali tra le varie traiettorie si hanno nella fase iniziale in cui il satellite si trova ancora talmente vicino al sistema Terra-Luna da sentirne gli effetti perturbativi; nella fase finale, invece, la distanza con la Luna è tale per cui la sua perturbazione sia minima.

Altre differenze si possono notare a seconda della durata della manovra. Considerando per esempio la Figura 32, la curva con durata minore ha un andamento iniziale che rimane più a lungo vicino all'asse x rispetto alla curva con durata maggiore che invece si sposta nel quarto quadrante. Questo è riportato nella Figura 37: le traiettorie, una di durata 90 giorni e l'altra 60 giorni, hanno come data di partenza rispettivamente 1/11/2025 e 6/11/2025, quindi la variazione angolare della Luna non è così significativa da indurre una diversa perturbazione.

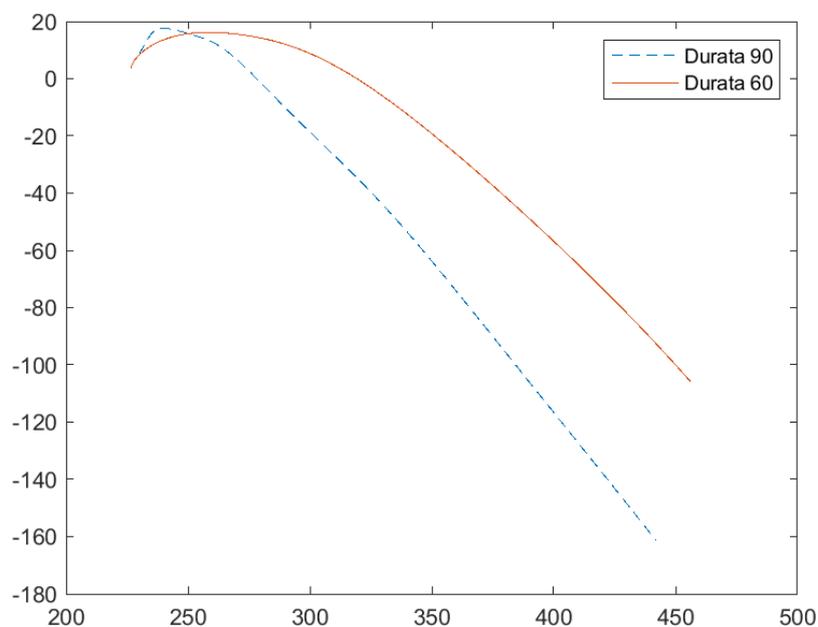


Figura 37. Traiettorie di evasione 1/11/2025 (blu) e 6/11/2025 (rosso)

Per le missioni di breve durata (durata 60 giorni in Figura 37) si nota che la traiettoria tende ad essere radiale, arrivando più velocemente al confine della sfera di influenza terrestre.

Per le missioni di lunga durata, invece, la traiettoria tende a mantenere un raggio basso più a lungo: in questo modo si può sfruttare meglio la perturbazione del Sole, risparmiando, di conseguenza, la quantità di propellente necessaria. Infatti, l'effetto perturbativo del Sole agisce positivamente sul satellite quando questo si trova a  $22.5^\circ$  rispetto alla congiungente Terra- Sole, per cui nelle missioni di lunga durata si può effettivamente sfruttare l'accelerazione gravitazionale del Sole favorendo un minor consumo della spinta.

Si riportano invece di seguito le traiettorie a parità di durata.

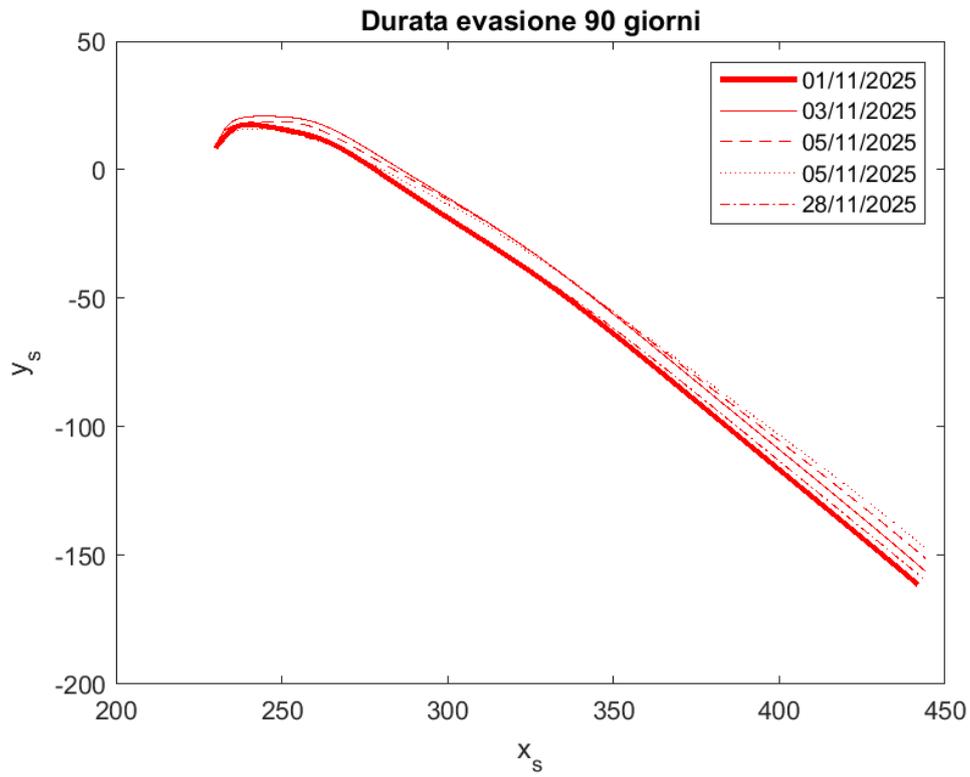


Figura 38. Traiettorie di evasione, durata 90 giorni

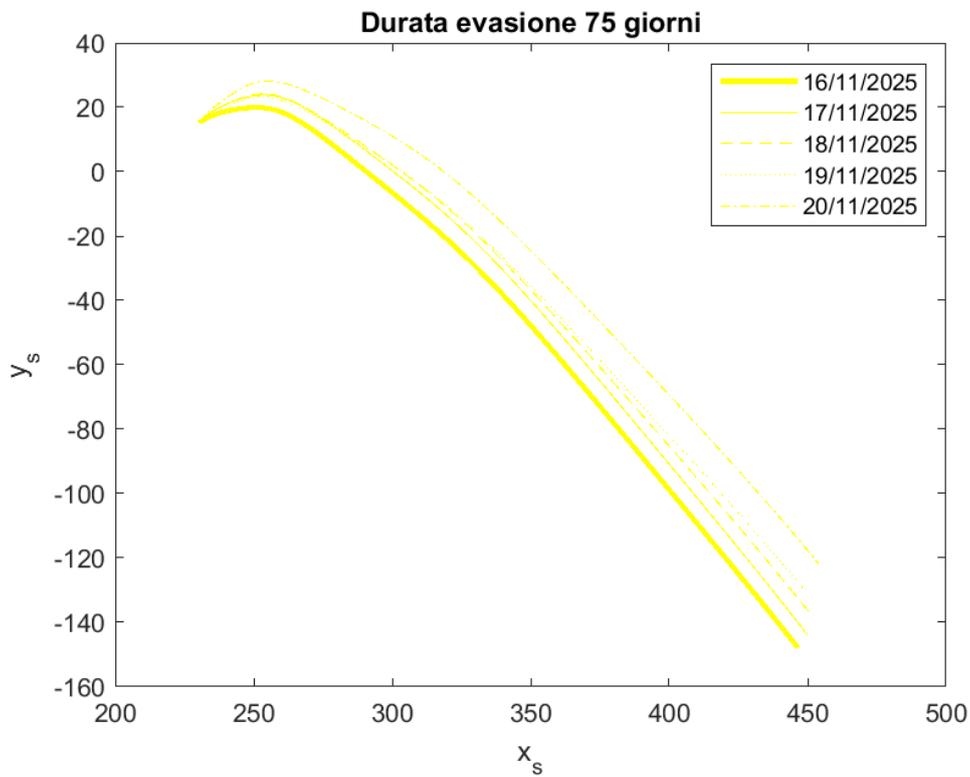


Figura 39. Traiettorie di evasione, durata 75 giorni

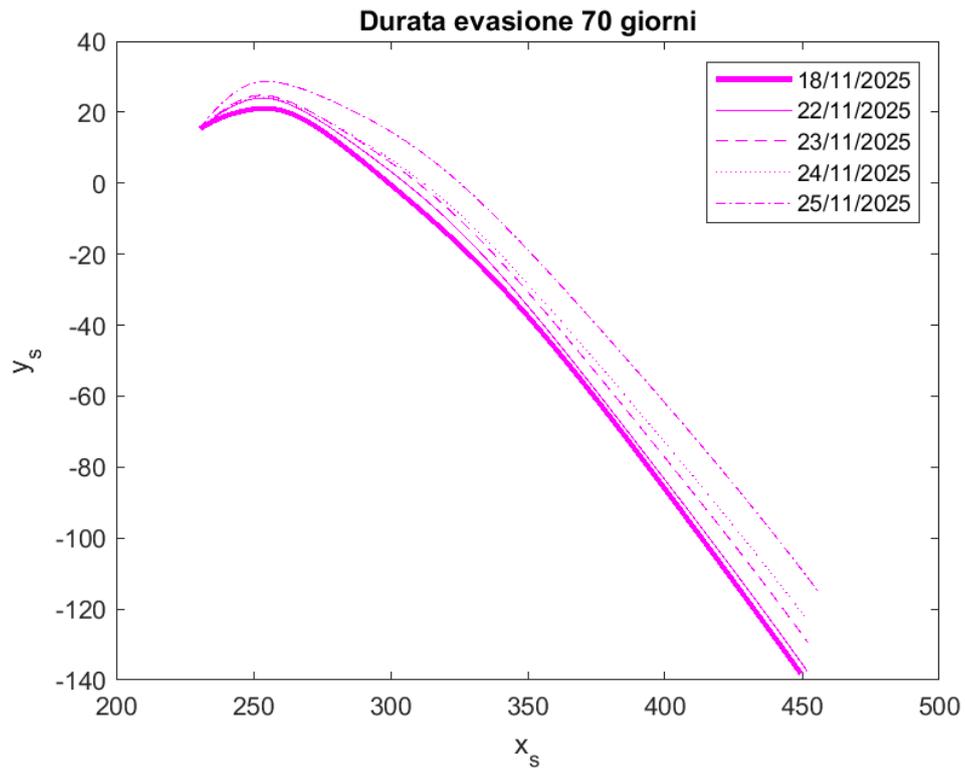


Figura 40. Traiettorie di evasione, durata 70 giorni

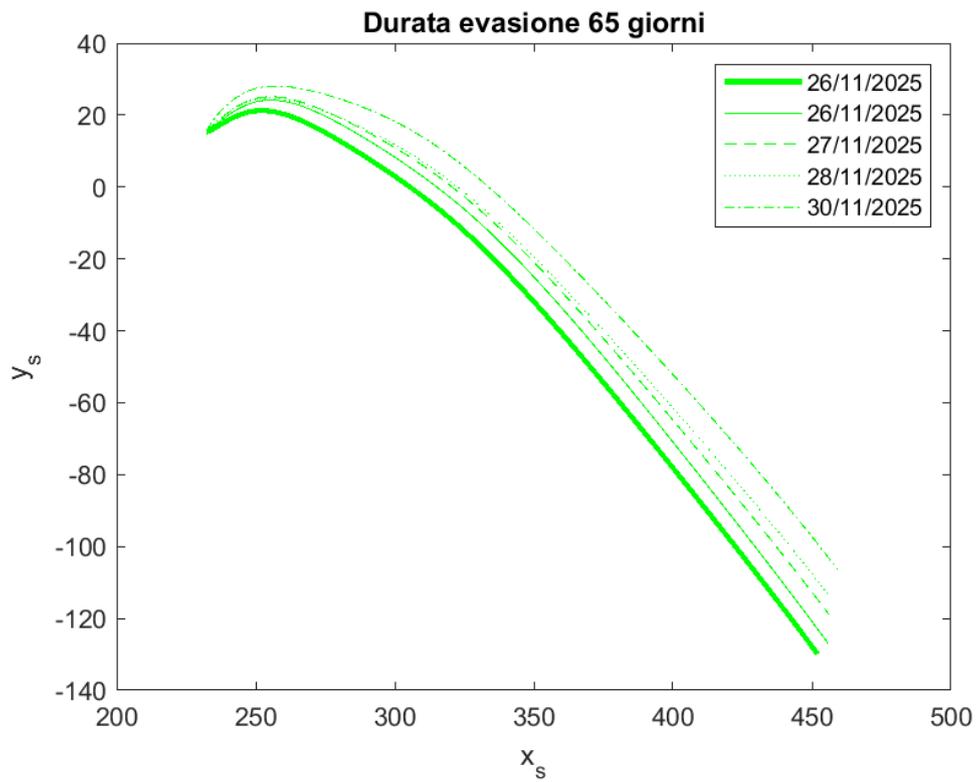


Figura 41. Traiettorie di evasione, durata 65 giorni

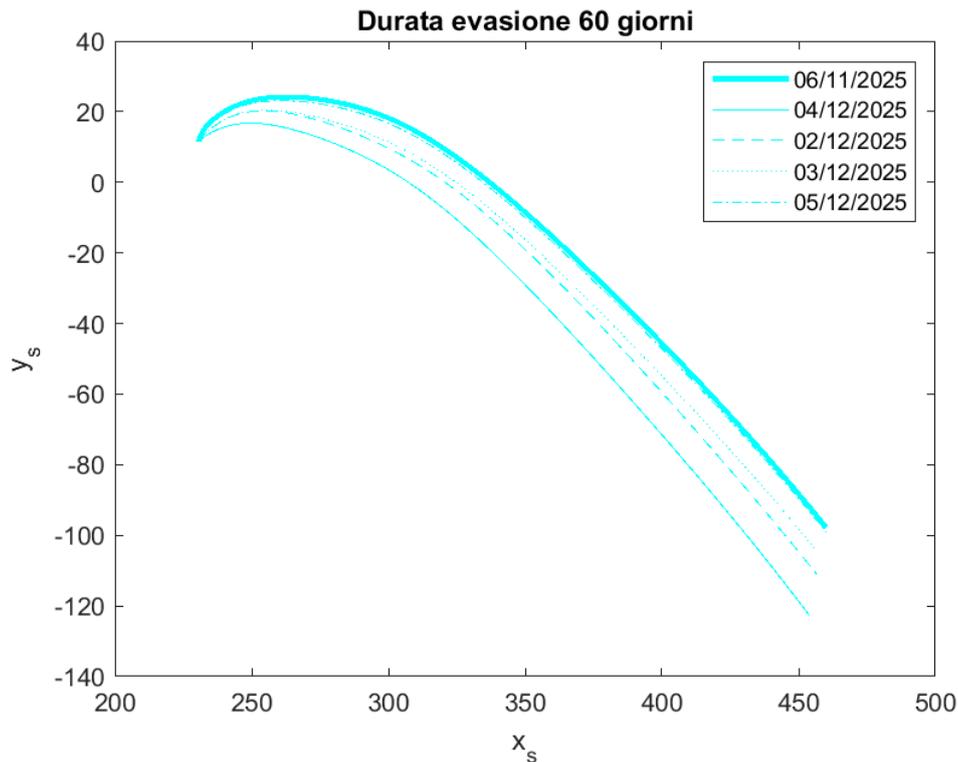


Figura 42. Traiettorie di evasione, durata 60 giorni

Le differenze più importanti si possono cogliere tra le traiettorie di durata 90 giorni e quelle di durata 60, le cui forme sono molto diverse. Considerando questi due casi, si notano inoltre delle differenze significative in termini di durata della spinta. Infatti per le missioni di lunga durata, le differenze di  $t_1$  tra un caso e l'altro sono molto piccole, mentre per missioni di breve durata le differenze sono più significative: si passa infatti da un  $t_1$  massimo di 992,7 a un valore minimo di 975,9. Pertanto per le missioni di breve durata, diventa fondamentale scegliere correttamente il punto di partenza sull'orbita.

I due diversi valori di  $t_1$  nominati sopra, si hanno in corrispondenza delle date di partenza 06/11/2025 e 04/12/2025 in cui la Luna ha compiuto un mese sinodico, quindi si ritrova alla stessa posizione relativa dal satellite, provocando così effetti analoghi su di esso. Si può così apprezzare il contributo netto del Sole a seconda della sua posizione relativa alla Terra. In questi casi due casi in esame, pertanto, le differenze in termini di  $t_1$  non saranno attribuibili all'effetto della Luna, ma alla variazione della distanza Terra-Sole. In particolare, dal modello dinamico descritto nel capitolo 5, si evince che sono presenti due posizioni in cui l'effetto perturbativo del Sole agisce positivamente sul satellite, quando cioè il Sole si troverà a  $-157.5^\circ$  o  $22.5^\circ$  rispetto alla direzione Terra-satellite.

Infine, sono state diagrammate in Figura 43 le traiettorie che, per ciascuna durata di evasione, prevedano il minor tempo della spinta e quindi il minor consumo di propellente.

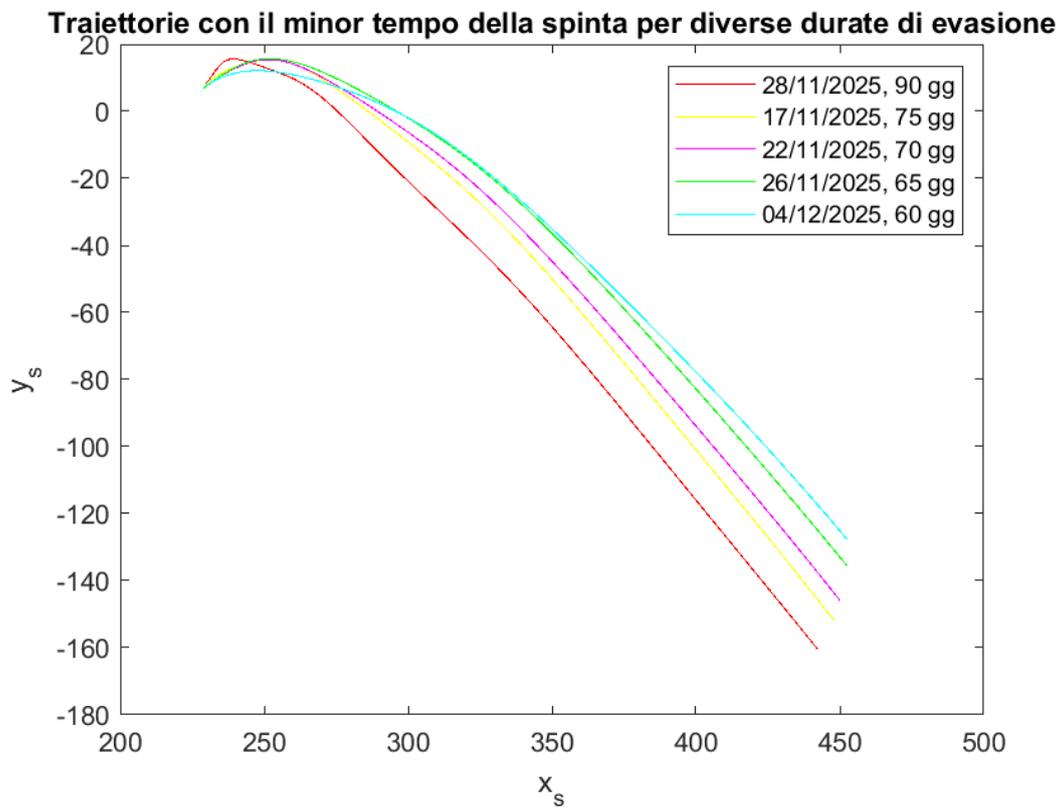


Figura 43. Traiettorie con  $t_1$  minimo per le diverse durate

Ognuna di queste traiettorie, comporterà una  $C_3$  finale diversa, in particolare:

Data di partenza	28/11/25	17/11/25	22/11/25	26/11/25	04/12/25
$C_3$	0.1768	0.1548	0.1547	0.1640	0.1605

Infatti, il valore finale di  $C_3$  è importante perché a seconda della specifica missione da compiere, è necessario evadere dalla sfera di influenza terrestre con un valore ben definito di eccesso iperbolico di velocità.

## Capitolo 7

### Conclusioni

Nel capitolo precedente sono stati presentati e discussi i risultati ottenuti utilizzando un metodo indiretto di ottimizzazione per trovare traiettorie di evasione da diverse orbite di Lyapunov attorno al punto Lagrangiano  $L_2$  nel sistema Sole-Terra.

Nella prima parte del capitolo, è stato messo in luce che si tratta di orbite quasi-stabili: infatti è necessaria una piccola quantità di spinta per mantenere un'orbita stabile attorno a  $L_2$  poiché dopo un certo intervallo di tempo il satellite si discosta dall'orbita di riferimento se non si interviene con una manovra correttiva.

Le traiettorie studiate presentano sempre due archi di spinta: un primo arco propulsivo ( $t_1$ ) per correggere l'orbita del satellite e un secondo arco di coasting in cui viene sfruttata l'influenza del Sole per accelerare il satellite fino al limite della sfera di influenza terrestre.

Per ricavare le soluzioni precedentemente presentate, è stato utilizzato un codice Fortran e sono stati variati diversi parametri, quali il tempo iniziale, il punto di partenza sull'orbita e la durata totale dell'evasione: infatti al variare delle soluzioni di tentativo sono state ottenute diverse traiettorie e, tra tutte, sono state riportate e analizzate quelle considerate ottimali. Come criterio di scelta è stato preso il  $t_1$  minimo, cioè la minima durata della spinta per ciascuna durata.

Quello che è emerso è che il tempo della spinta varia con la durata dell'evasione ed è praticamente indipendente dalla data di partenza. In particolare, le traiettorie con durata maggiore comportano il minor tempo della spinta e di conseguenza un minore consumo di propellente e una maggiore massa finale. A parità di durata sono state trovate delle differenze minime in termini di tempo della spinta e questa piccola variazione è legata alla posizione della Luna che, a seconda di dove si trova alla data di partenza, va ad influenzare la traiettoria di evasione soprattutto nella parte iniziale.

Inoltre è da considerare anche l'influenza del Sole, che risulta essere la perturbazione più importante: per le traiettorie di lunga durata, si può sfruttare l'accelerazione gravitazionale del Sole che agisce positivamente sul satellite quando questo si trova nel quarto quadrante. In questo modo si ottengono tempi della spinta minori e di conseguenza sarà necessaria una minore quantità di propellente, potendo ottenere una massa finale utile maggiore. Al variare della data di partenza,

invece, le differenze di  $t_1$  nelle traiettorie di evasione ottenute sono da ricondursi alla diversa posizione della Luna ma anche al cambiamento della distanza Terra-Sole.

Infine, sono state diagrammate le traiettorie che, a seconda della durata, comportassero un tempo della spinta inferiore ed è stato messo in evidenza come l'eccesso iperbolico di velocità del satellite ai confini della sfera di influenza terrestre fosse diverso di caso in caso. Questo, infatti, è un parametro molto importante perché a seconda dell'obiettivo specifico della missione occorrerà un preciso valore di  $C_3$ .

Quest'ultimo aspetto è molto importante e potrà essere oggetto di futuri studi per avere una panoramica più completa sulle manovre di evasione e sulla loro fattibilità.

Inoltre, sarebbe opportuno approfondire lo studio sulla perturbazione luni-solare, per capire il momento più favorevole per l'evasione in termini di accelerazione gravitazionale, in modo da ridurre la quantità di propellente necessaria e aumentare la massa finale disponibile.

## Riferimenti

- [1] L. C. Luigi Mascolo, «Optimal Escape From Sun-Earth and Earth-Moon L2 with Electric Propulsion».
- [2] «The Lagrange Points,» [Online]. Available: [https://map.gsfc.nasa.gov/mission/observatory\\_l2.html](https://map.gsfc.nasa.gov/mission/observatory_l2.html).
- [3] «What are Lagrange Points?,» [Online]. Available: [https://www.esa.int/Enabling\\_Support/Operations/What\\_are\\_Lagrange\\_points](https://www.esa.int/Enabling_Support/Operations/What_are_Lagrange_points).
- [4] «What is a Lagrange Point,» [Online]. Available: <https://solarsystem.nasa.gov/resources/754/what-is-a-lagrange-point/>.
- [5] «ISEE (International Sun-Earth Explorer,» [Online]. Available: <https://www.eoportal.org/satellite-missions/isee#references>.
- [6] «WMAP Mission Overview,» [Online]. Available: <https://map.gsfc.nasa.gov/mission/>.
- [7] «WMAP facts,» [Online]. Available: <https://map.gsfc.nasa.gov/news/facts.html>.
- [8] «Gaia,» [Online]. Available: [https://www.esa.int/Science\\_Exploration/Space\\_Science/Gaia/Gaia\\_overview](https://www.esa.int/Science_Exploration/Space_Science/Gaia/Gaia_overview).
- [9] «JWST (James Webb Space Telescope),» [Online]. Available: <https://www.eoportal.org/satellite-missions/jwst#jwst-james-webb-space-telescope>.
- [10] «Euclid,» [Online]. Available: <https://www.asi.it/esplorazione/cosmologia/euclid/>.
- [11] «Euclid's journey to L2,» [Online]. Available: [https://www.esa.int/ESA\\_Multimedia/Images/2023/05/Euclid\\_s\\_journey\\_to\\_L2](https://www.esa.int/ESA_Multimedia/Images/2023/05/Euclid_s_journey_to_L2).
- [12] «PLATO (PLANetary Transits and Oscillation of Stars,» [Online]. Available: <https://www.eoportal.org/satellite-missions/plato#eop-quick-facts-section>.
- [13] D. D. M. J. E. W. W. S. Roger R. Bate, *Fundamentals of Astrodynamics*, Second Edition a cura di, New York: Dover Publications, 1971.
- [14] «Geocentric Equatorial System,» [Online]. Available: [https://www.researchgate.net/figure/Fig-5-6-Geocentric-Equatorial-Coordinate-System-IJK\\_fig17\\_311486304](https://www.researchgate.net/figure/Fig-5-6-Geocentric-Equatorial-Coordinate-System-IJK_fig17_311486304).
- [15] H. F. R. S. K. F. W. J. W. Cornelisse, *Rocket Propulsion and Spaceflight Dynamics*, London: Pitman Publishing Limited, 1979.
- [16] H. D. Curtis, *Orbital Mechanics for Engineering Students*, Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005.
- [17] «Location of Lagrange Points in Sun-Earth system,» [Online]. Available: [https://www.researchgate.net/figure/Location-of-the-Lagrange-points-of-the-Sun-Earth-system-not-to-scale-also-showing-the\\_fig1\\_327530587](https://www.researchgate.net/figure/Location-of-the-Lagrange-points-of-the-Sun-Earth-system-not-to-scale-also-showing-the_fig1_327530587).
- [18] *Appunti del corso Meccanica del Volo Spaziale*.
- [19] L. Casalino, «Ottimizzazione Indiretta di Traiettorie Spaziali».

# Appendice

Punto	t1 DURATA 120	t1 DURATA 110	t1 DURATA 100	t1 DURATA 95	t1 DURATA 90	t1 DURATA 85	t1 DURATA 80	t1 DURATA 75	t1 DURATA 70	t1 DURATA 65	t1 DURATA 60
1	70.5692	107.7525	166.8477	208.0135	258.6401	321.1310	399.7750	501.3024	633.0690	803.2402	1025.3062
10	70.6326	107.8104			258.4330			499.7677	630.8184	801.0516	1023.7184
20	70.7145				258.1728			498.4013	628.3860	798.3969	1021.6782
30	70.7808				257.8458			497.4136	626.1240	795.5482	
40	70.8240				257.4410			496.7872	624.1574	792.6037	
50	70.8493	108.6012	165.7139	206.0252	256.9765			496.4629	622.6014	789.7079	1013.3148
60	70.8675				256.4857			496.3525	621.5188	787.0284	
70	70.8932				256.0089			496.3640	620.8985	784.7368	
80	70.9421				255.5998			496.4124	620.6590	782.9720	
90					255.3120			496.4238	620.6781	781.7974	
100	71.1553	109.4000	167.0758		255.1883	317.8919	397.2102	496.3341	620.8259	781.1789	996.8477
110					255.2450			496.0942	620.9864	781.0164	994.7341
120					255.4804			495.6793	621.0692	781.1499	993.3703
130								495.0983	621.0108	781.4387	992.7343
140								494.3939	620.7723	781.7577	992.6997
150						317.4073	394.4243	493.6331	620.3327	781.9975	993.0765
160								492.9018	619.6943	782.0636	993.6605
170								492.2965	618.8912	781.8822	994.2635
180								491.9147	617.9955	781.4116	994.7275
190								491.8570	617.1140	780.6534	994.9276
200	73.5758	111.5317	169.3149	209.7817	259.8229	321.0295	396.5732	492.1142	616.3757	779.6604	994.7763
250									618.1676	775.9265	
300									625.6812	782.7252	
400	76.8420	117.7176	178.1160	219.7373	271.7917			510.1311	632.6036	793.4165	1008.7672
800	102.7128	142.9499	204.6066	246.2647	298.5130			554.3961	685.6712	853.8329	1078.2568
900	137.7751										
1000	211.9149	252.7028	316.2090	358.7213	411.0116			669.9263	807.6526	983.2964	1216.5228

Tabella 8. Caso 1 –  $t_0=162.033$

Punto	t1 DURATA 90	t1 DURATA 75	t1 DURATA 70	t1 DURATA 65	t1 DURATA 60
1	255.067860008157	495.475171567656	623.608201979153	793.260725892478	1019.07482445982
10	254.316613743322	494.579128647692	621.468047266627	789.705662082195	1015.08005256786
20	253.512832078644	493.865921013227	619.641653406268		
30	252.761012011746	493.315998421783	618.343567402636		
40	252.110061589813	492.833898524117	617.473083878465		
50	251.618484876967	492.340136611457	616.895175063532	778.474317786028	997.010342352945
60	251.324805746451	491.766622544627	616.471365535852		
70	251.242350410131	491.062933712364	616.081188133886		
80	251.364524047344	490.208431804124	615.632503587238		
90	251.661605099544	489.219993525102	615.062852054087		
100	252.101562086462	488.149960506936	614.333720240960	775.394431103480	986.500249953160
110		487.074750629252	613.426210029566		
120		486.089612418252	612.350119203649		
130		485.298904578291	611.153077832972		
140		484.800019400703	609.925428519397		
150		484.692572305230	608.791525815643	771.568990590839	985.537302415012
160		484.935164876813	607.889949219740	770.128029409584	
170		485.559043712433	607.361823425362	768.639864650531	
180		486.421333616991	607.303126558223	767.288458027816	
190			607.736309304453	766.257338942744	
200	256.284675282821	488.838817500713	608.624805765156	765.715455781408	978.375097562027
210				765.772201687197	976.735131141397
250				771.147263907268	975.936533326228
260					977.555485501532
270					979.724765097769
300					987.526462935537
400	272.954511374670	514.965765019836	637.282505504479	793.142091440512	
800	274.183829485273	526.414402506329	661.967848485328	835.809761346534	1060.93897472288
999	287.335045206804	531.616575630053	662.765060285083	835.308131580415	1063.21018498095

Tabella 9. Caso 2 – t0=162.153

Punto	t1 DURATA 90	t1 DURATA 75	t1 DURATA 70	t1 DURATA 65	t1 DURATA 60
1	254.168498305280	497.505345155784	623.189266330964	787.068697339288	1009.06602864049
10	253.608800852002	496.971899152205	622.633312284751	785.453085310791	
20	253.189014465755	496.317541263201	622.161879340757		
30	252.965037551280	495.520124844348	621.697765065141		
40	252.922857099022	494.557491456683	621.153409987959		
50	253.042481467219	493.445461861690	620.471894358983	782.475480576506	995.876886257164
60	253.288387424217				
70	253.624741137661				
100	254.737232295922	487.958077869225	614.524168760990	778.970423254669	994.036658499491
110		487.486010157684			
120		487.412076616325			
130		487.609656712424			
140		488.131699306366	610.471560572284		
150	255.392002617148	488.871462494359	610.416761664611	771.009468334845	987.396192171142
160			610.801574655111	769.955874658978	
170				769.423048019202	
180				769.462990472268	
190				770.037509290781	980.149885882702
200	256.495567349531	492.987405622471	614.958203542812	771.046645068542	979.510090028093
210					979.596830800524
400	271.269059465079	512.418194729157	637.911754893921	796.358549721188	1003.34557643068
800	297.667275538298	548.840265063089	683.274823621203	858.578394347148	1087.73625100778
1000	382.533563316987	637.515883615323	772.625402999495	951.626873468372	1192.37768656651

Tabella 10. Caso 3 – t0=162.274

Punto	t1 DURATA 90	t1 DURATA 75	t1 DURATA 70	t1 DURATA 65	t1 DURATA 60
1	255.286065110943	499.026252711732	626.565541623150	789.225951458884	1004.34825509088
10	255.356681631423				
20	255.540838917180				
30	255.793303919172				
40	256.073745591322				
50	256.346069886212	493.919097729368	622.441553071487	787.860456218067	1003.62371997300
60		493.068416126056			
70		492.455893674932			
80		492.141295445458			
90		492.031746449881			
100	256.798594381453	492.200446942754	616.599826835405	781.051753472318	1000.22370721254
110					
120			616.009356755687		
130			616.242854180710		
140				776.376740092164	
150			617.493290844661	776.210696284978	
160				776.476851636569	
170					988.346117910743
180					988.021463728211
190					988.279862407160
200	257.926420155627	495.850358648981	621.029805674140	780.098597079355	989.048306712514
250					995.965962451092
400	268.913854821820	508.745345563687	635.442622788436	795.904274065218	1004.89240626769
800	330.941462928937	583.357336811210	718.966905941383	893.419823366128	1119.66963964087
1000	508.585261819287	775.128114347331	920.187368705859	1110.74436634922	1362.54424029699

Tabella 11. Caso 4 –  $t_0=162.394$

Punto	t1 DURATA 90	t1 DURATA 75	t1 DURATA 70	t1 DURATA 65	t1 DURATA 60
1	252.154246118476	490.141063442994	619.183376875434	785.084348949825	1001.79313846323
40		486.071757478338			
50	251.974440581208	485.835008266545	610.376297792537	775.253380015528	994.861172214989
60		485.870469211657			
70		486.118083963586	608.733561547303		
80			608.557539507817		
90	251.074296110004		608.736116519815		
100	251.022942499768	487.358678401350	609.178412593128	767.439154187439	981.619261499288
110	251.122872742485		609.768933222740	767.333943795887	
120	251.393653376501			767.655799434075	
130					977.382313622566
140					977.321085459621
150					977.843869151905
200	257.272593046474	486.889246885458	610.746633003488	772.264784710850	983.596593036941
400	274.733627984211	511.118095782990	634.550002324020	796.664437007685	1011.34812446191
800	346.981136473868	609.842593767112	743.853109364288	917.985934613431	1152.91133807269
1000	590.224432491774	873.264415857056	1021.31331006822	1213.73520400659	1476.63599934721

Tabella 12. Caso 5 –  $t_0=162.514$