

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

Tesi di Laurea Magistrale

Ottimizzazione della traiettoria di fuga
dal punto lagrangiano L2 del sistema
Terra-Sole con propulsore ad impulso
specifico variabile



Relatore:
Prof. Lorenzo Casalino

Candidato:
Marco Restagno

Aprile 2023

*A te,
cinque anni fa...*



Indice

Introduzione.....	1
1 Fondamenti di propulsione spaziale.....	3
1.1 <i>Equazione di Tsiolkovsky</i>	4
1.2 <i>Classificazione della propulsione</i>	5
1.2.1 Propulsori chimici	6
1.2.2 Propulsori elettrici.....	6
1.2.2.1 Propulsori elettrotermici	8
1.2.2.2 Propulsori elettrostatici	9
1.2.2.3 Propulsori ad effetto Hall	11
1.2.2.4 Propulsori elettromagnetici.....	13
1.2.2.5 Propulsore a impulso specifico variabile.....	17
2 Fondamenti di meccanica celeste	18
2.1 <i>Problema degli n corpi</i>	18
2.2 <i>Problema dei due corpi</i>	20
2.3 <i>Problema dei tre corpi ristretto</i>	20
2.3.1 Punti lagrangiani	22
2.4 <i>Sistemi di riferimento</i>	26
2.4.1 Sistema eliocentrico - eclittica	27
2.4.2 Sistema geocentrico - equatoriale	28
2.4.3 Sistema perifocale	29
2.5 <i>Elementi orbitali classici</i>	29
2.6 <i>Manovre orbitali</i>	31
2.6.1 Trasferita di Hohmann.....	31
2.6.2 Manovra di fuga/cattura	33
2.6.3 Manovra di Oberth	34
2.7 <i>Missioni interplanetarie</i>	35
2.8 <i>Effetti perturbativi</i>	37
2.8.1 Presenza di un terzo corpo	37
2.8.2 Potenziale terrestre ed effetti J_i	39
2.8.3 Radiazione solare	40
3 Variable Specific Impulse Magnetoplasma Rocket.....	42
3.1 <i>Helicon antenna - camera di ionizzazione</i>	44
3.2 <i>Ion cyclotronic resonance heating - booster stage</i>	44
3.3 <i>Specchio magnetico</i>	45

3.4	<i>Ugello magnetico</i>	47
3.5	<i>Regolazione della spinta</i>	48
3.6	<i>Propellenti</i>	49
3.7	<i>Criticità e problemi di sviluppo</i>	50
3.8	<i>Prototipi esistenti</i>	52
4	Metodi di ottimizzazione indiretti per traiettorie spaziali	54
4.1	<i>Teoria del controllo ottimale</i>	55
4.2	<i>Problema differenziale ai limiti</i>	58
4.3	<i>Modello matematico</i>	61
4.4	<i>Equazioni di stato e variabili aggiunte</i>	63
5	Casi studio e analisi risultati	65
5.1	<i>Analisi globale</i>	65
5.2	<i>Analisi di dettaglio</i>	73
5.2.1	<i>Influenze della Luna sulle traiettorie</i>	73
5.2.1.1	<i>Durata di 50 giorni</i>	74
5.2.1.2	<i>Durata di 80 giorni</i>	77
5.2.2	<i>Influenze del Sole sulla traiettoria</i>	82
5.2.2.1	<i>Durata di 50 giorni</i>	82
5.2.2.2	<i>Durata di 80 giorni</i>	85
	Conclusione	90
	Bibliografia	92

Elenco figure

Figura 2.1 - Propulsore elettrotermico	8
Figura 2.2 - Propulsore a ioni	9
Figura 2.3 - Propulsore ad effetto Hall.....	11
Figura 2.4 - Schema propulsore elettromagnetico.....	13
Figura 2.5 - Propulsore elettromagnetico	14
Figura 2.6 - Formula di Maecker e dati sperimentali	15
Figura 3.1 - Problema degli n corpi	19
Figura 3.2 - Problema dei tre corpi.....	21
Figura 3.3 - Funzione potenziale del sistema Terra-Luna	23
Figura 3.4 - Punti lagrangiani del sistema Terra-Luna.....	24
Figura 3.5 - Punti lagrangiani collineari del sistema Terra-Luna.....	25
Figura 3.6 - Sistema di riferimento eliocentrico-eclittico	27
Figura 3.7 - Effetti perturbativi dell'asse terrestre.....	28
Figura 3.8 - Sistema di riferimento geocentrico-equatoriale.....	28
Figura 3.9 - Sistema perifocale	29
Figura 3.10 - Elementi orbitali classici	30
Figura 3.11 - Trasferta di Hohmann	32
Figura 3.12 - Manovra di fuga diretta (1) e manovra di Oberth (2)	33
Figura 3.13 - Confronto manovra di fuga diretta e di Oberth	34
Figura 3.14 - Trasferta interplanetaria	36
Figura 3.15 - Schema perturbazione da terzo corpo.....	37
Figura 3.16 - Potenziale terrestre	40
Figura 4.1 - Storia temporale dello sviluppo del VaSIMR.....	42
Figura 4.2 - Architettura VaSIMR	43
Figura 4.3 - Specchio magnetico	46
Figura 4.4 - Regolazione della spinta a potenza.....	48
Figura 4.5 - Curva di apprendimento e prove sperimentali sul VX-200SS.....	53

Elenco tabelle

Tabella 2.1 - Punti lagrangiani del sistema Terra-Luna	26
Tabella 2.2 - Punti lagrangiani del sistema Terra-Sole	26
Tabella 5.1 - Conversione tempi di partenza	66
Tabella 5.2 - Massa finale	66
Tabella 5.3 - Velocità finale.....	66
Tabella 5.4 - Velocità orbitale finale al quadrato	67
Tabella 5.5 - Conversione tempo di partenza caso lunare	73
Tabella 5.6 - Confronto massa propellente richiesta caso lunare	81
Tabella 5.7 - Conversione tempo di partenza caso solare	82
Tabella 5.8 - Confronto massa propellente richiesta caso solare	89

Elenco grafici

Grafico 6.1 - Massa finale.....	67
Grafico 6.2 - Massa finale per 50 giorni di durata	68
Grafico 6.3 - Massa finale per 70 giorni di durata	68
Grafico 6.4 - Massa finale per 100 giorni di durata	69
Grafico 6.5 - Velocità finale	70
Grafico 6.6 - Velocità finale per $t_0=160$	70
Grafico 6.7 - Velocità finale per $t_0=170$	71
Grafico 6.8 - Velocità finale per 50 giorni di durata	71
Grafico 6.9 - Velocità finale per 100 giorni di durata.....	72
Grafico 6.10 - Velocità orbitale finale	72
Grafico 6.11 - Spinta caso lunare 50gg.....	74
Grafico 6.12 - Velocità efficace di scarico caso lunare 50gg.....	74
Grafico 6.13 - Massa caso lunare 50gg	75
Grafico 6.14 - Massa 3D caso lunare 50gg.....	76
Grafico 6.15 - Traiettoria di fuga caso lunare 50gg	77
Grafico 6.16 - Spinta caso lunare 80gg.....	77
Grafico 6.17 - Velocità efficace di scarico caso lunare 80gg.....	78
Grafico 6.18 - Massa caso lunare 80gg.....	79
Grafico 6.19 - Massa 3D caso lunare 80gg	79
Grafico 6.20 - Traiettoria caso lunare 80gg	80
Grafico 6.21 - Confronto velocità finale caso lunare	81
Grafico 6.22 - Spinta caso solare 50gg	82
Grafico 6.23 - Velocità efficace di scarico caso solare 50gg.....	83
Grafico 6.24 - Massa caso solare 50gg.....	83
Grafico 6.25 - Massa 3D caso solare 50gg	84
Grafico 6.26 - Traiettoria caso solare 50gg	85
Grafico 6.27 - Spinta caso solare 80gg	85
Grafico 6.28 - Velocità efficace di scarico caso solare 80gg.....	86
Grafico 6.29 - Massa caso solare 80gg	86
Grafico 6.30 - Massa 3D caso solare 80gg	87
Grafico 6.31 - Traiettoria caso solare 80gg.....	88
Grafico 6.32 - Confronto velocità finale caso solare	88

Introduzione

La tesi si concentra sull'utilizzo di un propulsore ad impulso specifico variabile per eseguire una manovra di fuga da un punto lagrangiano, in particolare il punto L2 del sistema Terra-Sole, per verificarne la fattibilità e l'efficacia.

Malgrado i calcoli si sviluppino attorno a questo punto, le conclusioni a cui si vuole arrivare vogliono essere estese al caso generico.

Diversi discorsi si potrebbero intrecciare in questo capitolo introduttivo ma i temi più importanti orbitano attorno al valore strategico, economico e sociale rivestito dallo sviluppo di un propulsore ad impulso specifico variabile nonché alla scelta del punto lagrangiano L2 come punto di partenza delle manovre.

In particolare, negli ultimi anni i punti lagrangiani hanno destato sempre maggior interesse perché utili per la realizzazione di missioni innovative. Essendo punti gravitazionalmente stabili, possono essere utilizzati per missioni di osservazione dello spazio profondo particolarmente sensibili ai disturbi o all'esposizione del Sole oppure per future stazioni spaziali da utilizzare come punti di appoggio per missioni più lunghe verso Marte o altri pianeti esterni.

L'argomento principale della tesi riguarda il valore ingegneristico e strategico dato dallo sviluppo di un propulsore che utilizzi l'impulso specifico come parametro di ottimizzazione. Da quando è stato proposto fino ad oggi, ma nello specifico negli ultimi 10 anni, il VaSIMR ha assunto sempre di più il ruolo di una tecnologia con il potenziale di innovare completamente il volo spaziale.

La capacità di variare i parametri dei gas esausti conferisce al propulsore un'alta flessibilità permettendogli di adattarsi a qualsiasi punto della traiettoria con il minimo consumo possibile, e quindi consentendo di imbarcare un carico pagante maggiore. Inoltre, la possibilità di variare l'impulso specifico consente anche di eseguire viaggi interplanetari più veloci e sicuri.

Nello specifico, la tesi si pone l'obiettivo di verificare l'efficacia del propulsore in una manovra di fuga dal punto lagrangiano SEL2 in tempi brevi e di determinarne le prestazioni. Tuttavia, come detto all'inizio, il discorso non vuole essere specifico ma applicabile al caso generico: in particolare, l'obiettivo ultimo di missione è la verifica e la dimostrazione delle potenzialità del propulsore VaSIMR e, solo in secondo luogo, lo studio delle traiettorie e dei consumi per le varie manovre.

Dunque, i primi due capitoli effettuano una panoramica teorica sui fondamenti di meccanica e propulsione spaziale al fine di rendere comprensibile il lavoro svolto. In

particolare, sono introdotti i principi della propulsione e descritti il problema dei due corpi, le manovre e gli effetti perturbativi delle orbite.

I successivi due capitoli rappresentano la parte tecnica della tesi, descrivendo il funzionamento del propulsore e dei metodi di ottimizzazione. Nello specifico, è descritto il funzionamento tecnico ma anche la storia dello sviluppo del VaSIMR delineando le tappe fondamentali fino ad oggi ed esponendo gli ultimi prototipi prodotti. Successivamente, si illustrano la teoria del controllo ottimale e il metodo indiretto di ottimizzazione utilizzato, definendo il modello matematico al quale è applicato e le condizioni al contorno del problema considerato.

Infine, sono presentati i risultati ottenuti evidenziando le dipendenze tra le varie quantità rilevanti in base al tempo di partenza e alla durata della manovra.

La tesi non vuole presentare una conclusione specifica ma piuttosto un'analisi preliminare delle potenzialità del propulsore, e quindi vuole essere un'apripista per future ricerche riguardo la propulsione con VaSIMR.

Capitolo 1

Fondamenti di propulsione spaziale

Il capitolo riassume brevemente i concetti base della propulsione spaziale, primo tra tutti l'equazione di Tsiolkovsky che permette di calcolare la differenza di velocità ideale per eseguire una certa manovra. Successivamente, il capitolo si concentra sulla definizione dei vari tipi di propulsione riassumendo pregi, difetti e applicazioni.

La propulsione è la capacità di generare una forza, detta spinta, per cambiare moto e traiettoria del sistema spaziale. Questa si differenzia in propulsione primaria necessaria a variare traiettoria e propulsione ausiliaria utilizzata per vincere le forze di attrito che modificano l'orbita del sistema.

Il punto di partenza della propulsione è stato fornito da Isaac Newton nel principio. Nella propria opera Newton enuncia le leggi della meccanica/dinamica:

- ogni oggetto materiale permane nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme se la risultante delle forze esterne su esso applicate è nulla;
- la variazione della quantità di moto di un oggetto materiale è proporzionale al vettore risultante delle forze esterne ad esso applicate;
- ad ogni azione applicata dall'esterno su un corpo corrisponde una reazione uguale e contraria sullo stesso corpo.

La propulsione si basa sul principio di azione/reazione di Newton: un corpo che esercita una forza su un secondo corpo riceve una forza uguale e contraria da questo. Per sfruttare questo principio, il sistema deve interagire con qualcosa per generare la spinta ma nello spazio è presente il vuoto e il sistema è isolato, e quindi non si trova un sistema esterno con cui scambiare quantità di moto.

Questo genera il problema principale della propulsione spaziale, cioè la necessità di avere propellente a bordo con il quale scambiare forza propulsiva.

L'effetto della spinta è descritto da alcune grandezze fondamentali.

Il primo di questi parametri è l'impulso totale

$$I_{\text{tot}} = \int_0^{\Delta t} T dt \quad (2.1)$$

da cui è possibile definire l'impulso specifico

$$I_{\text{sp}} = I_{\text{tot}}/m_p g_0 = T/m'_p g_0 = c/g_0, \quad (2.2)$$

dove g_0 è l'attrazione gravitazionale terrestre mentre m_p e m_p' sono la massa e la portata di propellente usati per generare la spinta. Nel caso in cui spinta e portata non siano costanti è possibile considerare dei valori medi.

L'impulso specifico rappresenta il tempo per cui il propulsore può fornire una spinta uguale al peso di propellente inizialmente imbarcato ed è una misura dell'efficienza del sistema propulsivo.

Insieme alla spinta rappresenta il parametro più importante nella propulsione.

1.1 Equazione di Tsiolkovsky

Per arrivare ad un'espressione numerica, si considera il comportamento di un sistema isolato di massa m con velocità v che, dopo un intervallo di tempo dt , perde una massa di propellente dm_p con velocità c . A seguito dell'espulsione del propellente lo spacecraft è accelerato alla velocità $v+dv$.

Sviluppando l'espressione di conservazione della quantità di moto

$$mv = (m - dm_p)(v + dv) - dm_p(c - v) \rightarrow mdv = dm_p c \quad (2.3)$$

si definisce la variazione della quantità di moto del residuo del satellite.

La manovra occupa un intervallo di tempo dt perché la propulsione si basa sull'espulsione continua di propellente, tutto si può riscrivere

$$m \frac{dv}{dt} = \frac{dm_p}{dt} c = m_p' c = T. \quad (2.4)$$

L'equazione è molto simile al secondo principio di Newton anche se il sistema varia la propria massa.

Tuttavia, per come è stata ricavata, l'equazione deve essere corretta. Nella definizione si considera un sistema perfettamente isolato e quindi si suppone che il propellente appena emesso smetta di interagire immediatamente con il satellite. Nella realtà, in caso di erogazione continua, il sistema non è più isolato perché in comunicazione con il propellente appena espulso.

All'uscita dell'ugello il propellente espulso non fa più parte del sistema satellite ma interagisce con il propellente interno attraverso una forza di pressione e quindi il sistema non è più perfettamente isolato. La spinta si modifica

$$T = m_p' u_e + A_e(p_e - p_0), \quad (2.5)$$

dove p_e è la pressione esterna che agisce su tutto il satellite.

In ambito spaziale p_0 è nulla perché si considera il vuoto mentre il termine $A_e p_e$ è in genere molto piccolo rispetto a $m_p' u_e$ e quindi trascurare il termine di pressione porta a commettere un errore molto piccolo.

A prescindere dall'espressione della spinta, è possibile definire la velocità efficace di scarico

$$c \approx u_e = \frac{T}{m_p'}; \quad (2.6)$$

in ambito spaziale si trascura il termine di spinta legato alla pressione e quindi si considera direttamente la velocità di scarico del propellente.

Ogni missione è definita da un impulso totale che è calcolabile solo dopo aver definito la missione. Il problema è evitato calcolando la variazione di velocità

$$\Delta v_{id} = \int_0^{\Delta t} \frac{T}{m} dt \quad (2.7)$$

che si ottiene se la spinta è parallela alla velocità ed è l'unica forza presente, per questo è detta variazione di velocità ideale.

Nella realtà, è sempre presente la forza di gravità di un altro corpo mentre in altri casi la spinta non è parallela alla velocità. In questi casi la variazione di velocità ideale può essere considerata solamente in prima approssimazione.

Andando a sviluppare l'espressione precedente

$$\Delta v_{id} = \int_0^{\Delta t} \frac{m'_p c}{m} dt = \int_{m_0}^{m_f} -\frac{c}{m} dm = c \ln \left(\frac{m_0}{m_f} \right), \quad (2.8)$$

detta equazione del razzo di Tsiokovsky. In caso la velocità di scarico dei gas non fosse costante è possibile considerare un opportuno valore medio.

Girando l'equazione è possibile anche scrivere

$$m_f = m_0 e^{-\Delta v/c}. \quad (2.9)$$

Fissata la missione, e quindi fissato l'impulso totale (da cui è possibile calcolare la differenza di velocità), tanto più grande è la velocità efficace di scarico e tanto più grande è la massa finale e quindi tanto più piccola è la massa iniziale. A pari costo una velocità di scarico elevata permette di trasportare massa maggiore.

In particolare, la velocità efficace di scarico è strettamente legata all'impulso specifico, per questo motivo si cerca di costruire ed utilizzare propulsori con alto impulso specifico.

1.2 Classificazione della propulsione

Nel propulsore l'energia viene fornita al propellente stivato a bordo affinché venga accelerato ed espulso per fornire una spinta.

La sorgente di energia potrebbe essere intrinseca nel propellente (definendo una propulsione chimica con propellente che brucia con reazione esotermica), interna alla navicella ma non inclusa nel propellente (propulsore nucleare termico con reattore a fissione che produce potenza termica per scaldare un gas) o esterna alla navicella (parabola che raccoglie la luce solare oppure fasci laser o microonde emessi dalla Terra per concentrare l'energia in un serbatoio).

Infine, è possibile discutere sui vari meccanismi utilizzati per accelerare il fluido propellente per cambiare la quantità di moto. Tipicamente, per endoreattori chimici si tratta di accelerazioni termofluidodinamiche con velocità di espulsione di 10km/s mentre su propulsori elettrostatici/elettromagnetici si sfruttano forze elettromagnetiche che accelerano le particelle del fluido con velocità di espulsione molto più elevate (arrivando anche a 100km/s).

Tenendo in conto la classificazione della fonte di energia e il meccanismo di accelerazione del fluido si possono definire vari tipi di propulsori.

1.2.1 Propulsori chimici

Primi propulsori storicamente sviluppati e per questo anche i più utilizzati.

Tra questi è necessario distinguere propellenti e gas combustivi: i primi sono le sostanze che vengono accelerate per ottenere la spinta mentre i secondi sono i gas esausti che escono dal propulsore.

Tipicamente, i propulsori chimici possono essere classificati in base alla fase in cui si trovano i propellenti stivati (solido, liquido o ibrido).

Nella propulsione chimica l'energia per creare la spinta arriva dalla composizione chimica dei propellenti: si trovano un ossidante e un comburente che reagiscono generando energia, e quindi l'energia totale a disposizione

$$m'_p E_{ch} = m'_p \frac{1}{2} c^2 \quad (2.10)$$

idealmente trasformata in energia cinetica quando i gas escono in ugello.

L'energia ottenibile dalla reazione è limitata dal potere calorifico del propellente e, volendo ottenere energie e potenze maggiori, è necessario aumentare la portata di propellente bruciato.

Ricapitolando, la propulsione chimica fornisce un impulso limitato insito nei propellenti utilizzati; in particolare, l'impulso massimo ottenibile si attesta intorno a 400s usando ossigeno e idrogeno liquidi.

Tuttavia, le spinte fornite sono molto elevate e, per questi motivi, i propulsori chimici sono utilizzati per il volo atmosferico dove il consumo è un problema secondario rispetto alla spinta e al tempo di ascesa del veicolo spaziale.

1.2.2 Propulsori elettrici

Nei propulsori elettrici, a differenza di quelli chimici, la fonte di energia è separata dal propellente e non dipende da esso, e quindi nella teoria non esiste limite all'impulso specifico ottenibile.

L'impulso specifico risulta essere arbitrariamente alto all'aumentare della potenza disponibile oppure al diminuire di spinta e portata di propellente. Tuttavia, spinte piccole corrispondono a grandi tempi di percorrenza mentre una potenza maggiore implica maggior peso per generatori di potenza più grandi.

Per questi motivi, la propulsione elettrica è preferibile per voli fuori atmosfera dove non sono necessarie grandi spinte per contrastare l'attrito con l'aria o la gravità del corpo principale ma è necessario un alto impulso specifico per consumare meno propellente possibile.

La dipendenza tra impulso specifico, potenza e portata è meglio quantificata introducendo il concetto di generatore di potenza, tipicamente pannelli solari, e considerando il peso proprio di questi.

Si assume che la massa della power source sia proporzionale alla potenza prodotta attraverso un parametro di massa specifica

$$m_s = \alpha P_s \quad (2.11)$$

dipendente dalla tecnologia di produzione dei generatori di potenza.

La massa del razzo è maggiore della massa del generatore e quindi l'accelerazione ottenibile dal sistema è minore dell'accelerazione che si potrebbe ottenere con il solo generatore

$$a_s = T/m_s = T/\alpha T_c / 2\eta_E = 2\eta_E/\alpha c \quad (2.12)$$

dove η_E è il rendimento del sistema elettrico per il trasferimento di potenza.

Si trova un limite di accelerazione intorno a 0.01m/s^2 che si traduce in un tempo maggiore di manovra. Il limite è dovuto esclusivamente a parametri tecnologici, cioè il rendimento del sistema elettrico e il parametro di massa specifica.

Avendo osservato la necessità di un generatore a bordo che presenta una certa massa, si arriva al problema caratteristico della propulsione elettrica. Per ogni missione da realizzare è necessario calcolare un impulso specifico ottimale fissate le condizioni al contorno (si parlerà della velocità dei gas di scarico).

Nel caso reale, la velocità efficace di scarico è minore di quella reale a causa di varie perdite. In particolare, è possibile distinguere perdite termiche, perdite per flussi congelati (frozen flow) e perdite aerodinamiche.

Le perdite termiche sono il risultato di una dispersione della potenza elettrica trasmessa al propellente ma non influenzano la temperatura in camera; avendo un certo numero di perdite è necessario solamente fornire una potenza elettrica maggiore che compensi alla perdita percentuale (ma che implica un peso maggiore e un impatto negativo sull'impulso specifico). Per contenere le perdite si isola il propulsore lontano dallo spacecraft o con scudi termici che riflettano l'energia dissipata all'esterno, limitando lo scambio di calore.

D'altra parte, le perdite per frozen flow sono dovute ad un'energia intrappolata nei gas espulsi. Questi, dopo la reazione in camera di combustione/riscaldamento, possono rimanere dissociati o ionizzati in ugello a causa della velocità troppo elevata all'uscita. Di solito, per contenere le perdite si utilizzano alte pressioni in camera in modo da limitare la dissociazione; tuttavia, alcuni propulsori lavorano con propellenti ionizzati o necessitano bassa pressione in camera.

Infine, le perdite aerodinamiche indicano tutte le perdite restanti, quali perdite per strato limite, perdite per divergenza e perdite per disuniformità del flusso; tutte queste perdite causano profili di velocità non uniformi in uscita e quindi una perdita propulsiva: è più conveniente accelerare uniformemente il flusso in uscita rispetto ad avere profili diversi.

A sua volta, la propulsione elettrica può essere divisa in diverse categorie a seconda del meccanismo di accelerazione del fluido. In generale, è possibile dividere la propulsione elettrica in tre grandi famiglie: propulsione elettrotermica, propulsione elettrostatica e propulsione elettromagnetica. Esulano da questo schema propulsori unici che si collocano a metà tra due famiglie.

1.2.2.1 Propulsori elettrotermici

La propulsione chimica sviluppa spinta lasciando espandere in ugello un gas caldo che deriva dalla reazione di combustione dei propellenti.

Il concetto più simile, e quindi più semplice, a quello del propulsore chimico prevede un gas scaldato non da reazioni esotermiche ma da una resistenza elettrica che dissipa potenza in calore. Il propellente si scalda passando vicino alla resistenza e si espande in ugello accelerando e generando spinta.

Lo schema adottabile è relativamente semplice: una camera di riscaldamento dove è presente la resistenza e un ugello convergente-divergente.

Il limite di questi propulsori è dovuto alla temperatura sopportabile dai materiali che costituiscono il propulsore, che si traduce in un limite alla velocità di uscita e quindi all'impulso specifico. Il limite si può spostare utilizzando propellenti con massa molecolare piccola per i quali gli impulsi specifici sono maggiori. Questo porterebbe l'idrogeno ad essere il propellente migliore ma le perdite tipiche relative all'utilizzo dell'idrogeno lo rendono meno appetibile.

Esistono due classi di propulsori elettrotermici, cioè resistogetti e arcogetti: i primi presentano una resistenza fisica mentre i secondi scaldano il gas attraverso un arco elettrico (scompare il limite di temperatura dovuto alla resistenza ma rimane il limite relativo al case del motore).

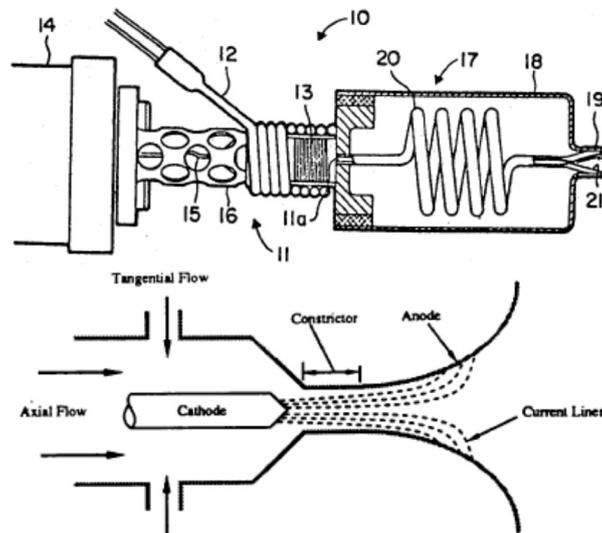


Figura 1.1 - Propulsore elettrotermico (resistogetto sopra e arcogetto sotto)

L'impulso specifico massimo ideale si attesta attorno 1000s (per arcogetti mentre i resistogetti sviluppano impulsi inferiori per il limite tecnologico della resistenza) ma intervengono diverse perdite a ridurne il valore.

Le perdite aerodinamiche sono presenti in entrambi i propulsori; tuttavia, le perdite per strato limite e le perdite di divergenza (usando ugelli conici con piccoli angoli),

sono piccole e costanti. Nei resistogetti pesano maggiormente le perdite per disuniformità, e quindi il rendimento aerodinamico è di solito molto alto (circa 0.95), mentre in media negli arcogetti risulta più basso.

Il rendimento termico è abbastanza alto ed è ottenuto isolando le parti più calde del propulsore dal resto della macchina; in questo modo si genera un gradiente termico minore che limita il flusso di calore.

Infine, le perdite per flussi congelati sono basse nei resistogetti perché presentano temperature contenute e alte pressioni in camera che contrastano la dissociazione, mentre sono molto più alte negli arcogetti che presentano temperature più elevate e quindi alta dissociazione in camera.

In media, i resistogetti presentano un rendimento globale attorno a 0.8 mentre per gli arcogetti risulta molto più basso (arrivando a 0.5) a causa delle perdite di disomogeneità e per flussi congelati che possono essere importanti.

1.2.2.2 Propulsori elettrostatici

Nei propulsori chimici il propellente accelera rilasciando un'energia assorbita precedentemente in camera di combustione ma lo stesso comportamento si può ottenere fornendo al propellente energia dall'esterno.

I propulsori elettrostatici sfruttano questo principio. Attraverso un catodo cavo il propellente arriva in camera dove è ionizzato, una griglia separa ioni positivi e negativi e solo i primi sono accelerati tramite un campo elettrostatico presente tra due griglie, dette griglia schermo e griglia acceleratrice.

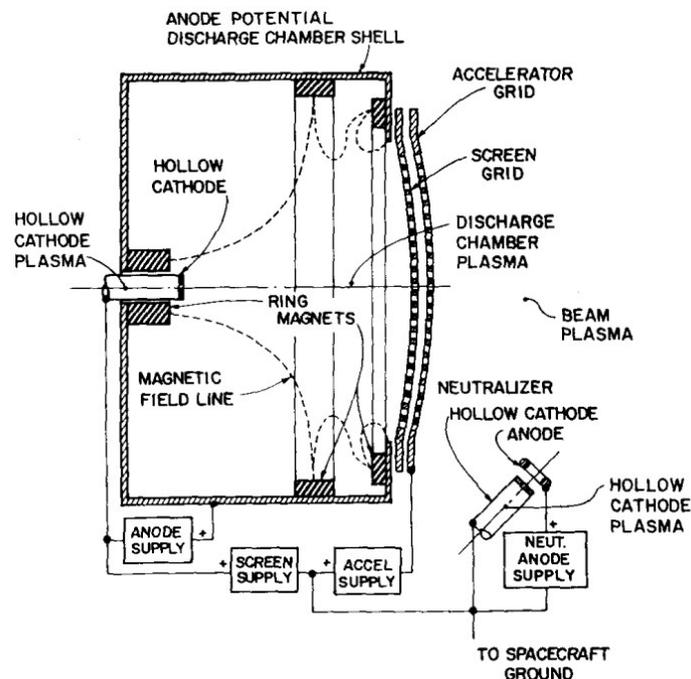


Figura 1.2 - Propulsore a ioni

Il propulsore genera spinta espellendo ioni positivi e quindi è necessario espellere lo stesso numero di cariche negative per evitare che lo spacecraft acquisisca una carica netta; questo compito è adempiuto da un secondo catodo cavo, detto neutralizzatore, inserito esterno al propulsore per neutralizzare il fascio uscente ed annullare la forza scambiata tra propellente ed elettrodi.

La propulsione elettrostatica permette di conoscere il valore di velocità di scarico sviluppabile dagli ioni e il valore di impulso specifico generabile dal propulsore. Il campo è conservativo e quindi, considerando un propellente fermo a voltaggio V_N all'ingresso della griglia schermo, questo è accelerato fino a potenziale nullo

$$qV_N = \frac{1}{2} m'_+ u_+^2 \rightarrow u_+ = (2qV_N/m'_+)^{1/2} \quad (2.13)$$

legame tra velocità efficace di scarico/impulso specifico, differenza di potenziale applicata agli elettrodi e caratteristiche del propellente (carica e massa).

La differenza di potenziale applicabile può essere arbitrariamente grande e quindi le velocità di scarico ottenibili sono teoricamente illimitate; l'unico limite presente all'impulso specifico è l'assenza di missioni che richiedano valori così elevati.

Attualmente, la velocità di uscita raggiunge 50km/s (impulso specifico di 5000s) e quindi il consumo di propellente risulta 10volte minore rispetto al consumo della propulsione chimica.

In prima approssimazione è possibile considerare il propellente interamente ionizzato ma la reale portata di propellente è leggermente maggiore della portata ionizzata. In particolare, la velocità efficace di scarico è legata all'effettiva velocità degli ioni attraverso un'efficacia di utilizzo del propellente

$$\eta_u = m'_+ / m'_p \quad (2.14)$$

dove gli atomi non contribuiscono alla spinta perché non accelerati.

La produzione di uno ione richiede un costo energetico che nel caso dello xenon si attesta a 12eV. Tuttavia, questo valore rispecchia il costo energetico del solo urto perfettamente elastico tra atomo ed elettrone; nella realtà l'energia richiesta è molto maggiore (circa 120eV) perché l'elettrone deve avere un'energia potenziale più elevata affinché possa ionizzare l'atomo qualsiasi urto avvenga.

Inoltre, non tutti gli elettroni prodotti collaborano alla creazione di altri ioni, alcuni di questi vengono persi senza riuscire a ionizzare atomi a loro volta.

Ad ogni modo, anche senza conoscere il costo di produzione degli ioni ϵ_b , si può affermare che questa energia rappresenta una perdita per flussi congelati: lo ione viene accelerato ma l'energia spesa per ionizzare l'atomo non viene recuperata. In questi propulsori viene detta perdita per ionizzazione.

Da questo, è possibile definire il rendimento ideale del propulsore

$$\eta_{id} = \frac{\frac{1}{2} m'_+ u_+^2}{\frac{1}{2} m'_+ u_+^2 + \epsilon_b} = \frac{1}{1 + \left(\frac{2\epsilon_b}{m'_+ u_+^2} \right)} \quad (2.15)$$

dove l'unica perdita considerata è quella di ionizzazione.

L'espressione diventa fondamentale per analizzare il propulsore: il costo di produzione deve rimanere basso per sfruttare una ionizzazione efficiente ma, fissato il costo, il rendimento è maggiore all'aumentare della massa.

Al contrario della propulsione elettrotermica, in quella elettrostatica conviene utilizzare propellenti con massa atomica o molecolare alta. Motivo per cui è più conveniente accelerare gli ioni rispetto agli elettroni.

Inoltre, l'equazione afferma che i propulsori elettrostatici sviluppano rendimenti alti solamente quando sviluppano velocità efficaci di scarico e impulsi specifici alti. Di conseguenza, propulsori di questo tipo sono applicabili solo per missioni che richiedono grandi differenze di velocità.

1.2.2.3 Propulsori ad effetto Hall

Il problema principale dei propulsori elettrostatici è rappresentato dal limite di densità di carica presente tra le due griglie. Accelerando ioni isolati, questi subiscono la forza repulsiva dovuta alla presenza degli altri ioni e quindi il singolo ione viene respinto dalla forza repulsiva degli ioni che lo precedono.

L'effetto reciproco degli ioni è globalmente nullo, in ingresso gli ioni frenano ma in uscita vengono spinti dagli ioni che li seguono; tuttavia, questo effetto limita la densità di corrente generabile.

L'effetto è riassunto dalla legge di Child

$$j_{\max} = \frac{4}{9} \epsilon_0 (2q/m)^{1/2} (V_G^{3/2} / x_A^2). \quad (2.16)$$

Volendo aggirare la limitazione è necessario accelerare ioni non isolati, e quindi in presenza di elettroni, in questo caso non ci sarebbe separazione di carica e sparirebbero le forze repulsive macroscopiche.

La soluzione presenta un problema. In presenza di ioni positivi ed elettroni le forze si annullano: la forza elettrostatica sugli ioni è bilanciata dalla forza sugli elettroni e la somma delle due restituisce spinta netta nulla. La simmetria delle forze è rotta introducendo un campo magnetico per sfruttare l'effetto Hall.

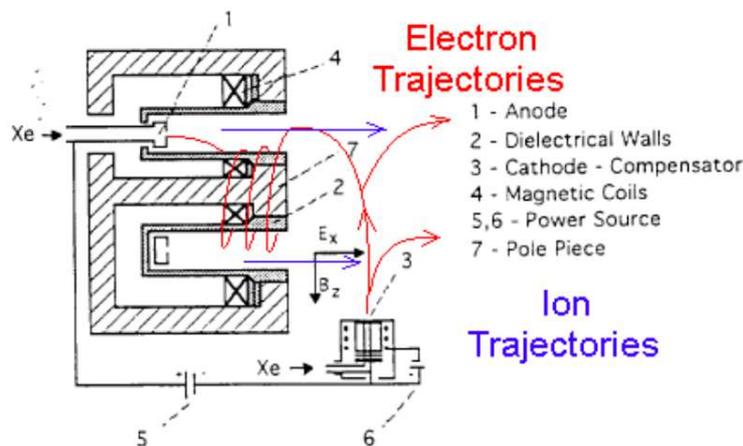


Figura 1.3 - Propulsore ad effetto Hall

In particolare, il parametro di Hall è dato dal rapporto tra la frequenza di Larmor

$$\omega = \frac{qB}{m}, \quad (2.17)$$

cioè la velocità angolare della particella dovuto al campo magnetico, e la frequenza delle collisioni

$$\Omega = \frac{\omega_B}{\nu_c} = \frac{qB}{m\nu_c} \quad (2.18)$$

e restituisce il numero di giri della cicloide rispetto al numero di collisioni avvenuti nello stesso intervallo di tempo.

Nell'ipotesi che il parametro di Hall sia molto superiore a 1, gli elettroni seguono una traiettoria a cicloide con velocità media assiale pari alla velocità di drift

$$v_d = \frac{E}{B}, \quad (2.19)$$

mentre la forza magnetica media agente sugli elettroni

$$f_{Be} = n_e q v_e \times B = n_e q E = f_{Ee} \quad (2.20)$$

forza elettrostatica media ma dalla parte opposta. Gli elettroni non sono accelerati e si muovono con velocità costante proseguendo il moto di Hall.

D'altra parte, gli ioni presentano lo stesso comportamento degli elettroni ma con raggio di curvatura della cicloide molto maggiore.

Il punto chiave per far funzionare il propulsore è la dimensione dello stesso che deve essere intermedia ai due raggi di curvatura. In questo modo gli elettroni sono imprigionati nel moto di drift nel propulsore mentre gli ioni escono prima di poter curvare e quindi escono con l'effetto di accelerazione del solo campo elettrico.

Il parametro di Hall è elevato ma non infinito. Nella zona si sviluppa qualche collisione che ionizza gli atomi di propellente creando coppie ioni/elettroni: i primi avanzano lungo l'asse della macchina mentre i secondi sono imprigionati a loro volta nel moto di Hall e iniziano a muoversi verso l'anodo.

Questa corrente di elettroni che arriva all'anodo viene riportata al catodo in modo da continuare la generazione della spinta.

I punti chiave del propulsore sono l'alto parametro di Hall e quindi la pressione non può essere troppo alta (0.1bar) per evitare troppe collisioni, l'energia degli elettroni che deve essere sufficiente a ionizzare gli atomi (differenze di potenziale troppo piccole non accelerano abbastanza gli elettroni) e la scelta del campo magnetico che determina il confinamento affinché il raggio di curvatura degli ioni sia abbastanza grande da farli uscire prima di curvare.

Il rendimento di utilizzo del propellente è molto alto e tende all'unità perché il libero cammino medio degli atomi è minore della lunghezza del condotto. Nel cammino dall'anodo all'uscita l'atomo viene colpito da un numero sufficiente di elettroni da garantirne la ionizzazione. Inoltre, come risultato del processo molti ioni presentano carica doppia, tipicamente un 20% della portata complessiva che comporta un 10% di perdita di spinta.

I propulsori a effetto Hall sono ionizzatori molto efficienti e quindi il costo di produzione degli ioni è molto inferiore rispetto ai propulsori a ioni, tipicamente la metà. D'altra parte, mentre i propulsori a ioni hanno rendimenti sufficientemente alti per impulsi specifici superiori a 2500s, quelli a effetto Hall hanno rendimenti ideali uguali ai propulsori a ioni (presentano più perdite) per impulsi specifici più bassi (dai 1500s fino a 2500s) e quindi costituiscono una classe complementare ai primi andando a coprire la zona di impulsi specifici minori.

I problemi principali sono l'instabilità del plasma, e quindi oscillazioni di densità di elettroni che possono causare interferenze elettromagnetiche ed erosione delle pareti laterali e dell'anodo (il parametro di controllo dell'effetto è l'intensità del campo magnetico), la perdita di ioni alle pareti, gli ioni doppi e la divergenza del flusso causata da angoli di semiapertura di 30/40°.

Inoltre, si trova una piccola forza magnetica sugli ioni in direzione tangenziale che crea una piccola coppia che si traduce in un momento applicato sul propulsore (da tenere in conto con il sistema di controllo d'assetto).

1.2.2.4 Propulsori elettromagnetici

I propulsori elettromagnetici sfruttano campi elettrici e magnetici per generare la spinta dove l'effetto propulsivo può essere spiegato con uno schema 1D con campo elettrico in direzione y e campo magnetico uscente dal piano in direzione z.

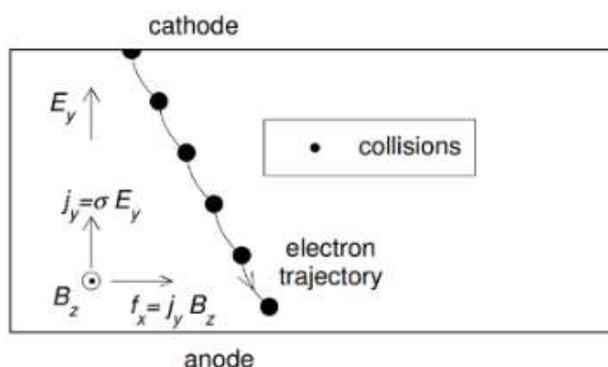


Figura 1.4 - Schema propulsore elettromagnetico

Per capire il funzionamento si segue il comportamento degli elettroni emessi dal catodo. A causa del campo elettrico, che tende ad accelerare il singolo elettrone verso l'anodo, la particella sviluppa una velocità v_e verso il basso.

Appena l'elettrone guadagna velocità nasce una forza magnetica

$$f_{Be} = qv_e \times B \quad (2.21)$$

in direzione x positivo e quindi l'elettrone inizia a curvare compiendo una cicloide di Hall verso il catodo. Tuttavia, a differenza dei propulsori che sfruttano l'effetto Hall, in quelli elettromagnetici la frequenza di collisioni è alta e il parametro di Hall è abbastanza minore di 1. In questo caso, l'elettrone collide e non completa la cicloide,

nella collisione si ferma trasmettendo tutta la propria quantità di moto all'atomo per poi seguire un nuovo pezzo di cicloide.

Nello schema generale, il campo elettrico fornisce energia e velocità agli elettroni mentre il campo magnetico ruota la velocità dalla direzione del campo elettrico ad una direzione perpendicolare a questa. La rotazione della velocità è necessaria a fornire direzione agli atomi espulsi; infatti, le collisioni trasferiscono la quantità di moto degli elettroni a tutto il propellente che viene accelerato come fosse un tutt'uno dalle collisioni generate dalla forza magnetica.

Come è intuibile dal meccanismo di funzionamento, questi propulsori presentano un comportamento fortemente collisionale dove il propellente si muove come fosse un unico elemento.

Data questa sua particolare condizione, per descrivere il moto del propellente si utilizza un approccio analogo all'aerodinamica detto magnetoplasmodinamica. L'approccio considerando il propellente come un unico elemento caratterizzato da grandezze macroscopiche quali temperatura e pressione accanto alle quali si trova la densità di corrente legata al campo elettrico.

In un'accelerazione magnetoplasmodinamica si fornisce energia sotto forma di calore e lavoro magnetico. Infatti, tipicamente i propulsori elettromagnetici sono considerati come un'evoluzione degli arcogetti: in questi prevale l'effetto Joule e il riscaldamento del propellente perché la corrente è relativamente bassa mentre in quelli prevale il termine di accelerazione magnetica.

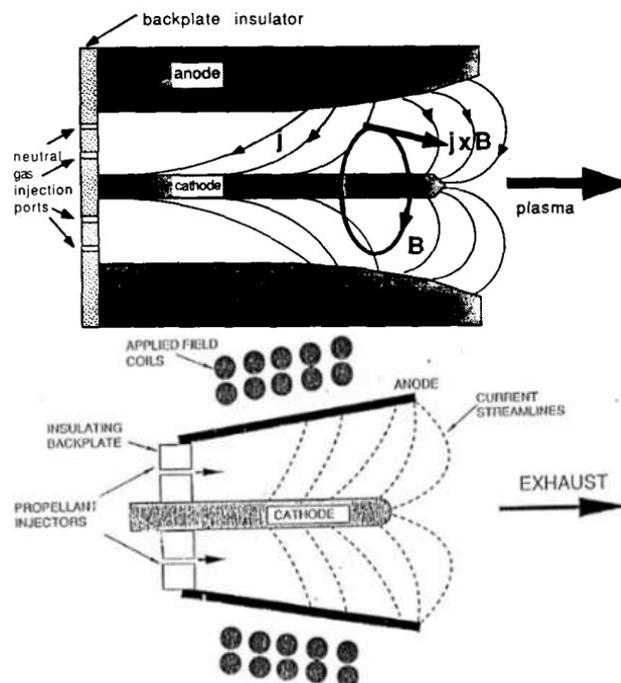


Figura 1.5 - Propulsore elettromagnetico (self-field sopra ed applied-field sotto)

L'accelerazione sviluppabile dal propulsore è proporzionale alla propria lunghezza e alla conducibilità elettrica del propellente. Quest'ultima dipendenza porta alla scelta di propellenti facilmente ionizzabili o all'utilizzo di un seed, cioè un secondo propellente più facilmente ionizzabile del primo, in modo da aumentare il numero di elettroni a disposizione. Infine, l'accelerazione è direttamente proporzionale all'intensità del campo elettrico e magnetico, per questo motivo il propulsore richiede potenze di alimentazioni molto elevate dell'ordine dei MW.

In base al campo magnetico, è possibile classificare i propulsori elettromagnetici come self-field e applied-field: il primo presenta campo magnetico autoindotto mentre il secondo presenta un proprio campo magnetico. Inoltre, è possibile dividere nuovamente le due categorie in base al funzionamento, che può essere stazionario o instazionario, cioè impulsivo.

La geometria tipica di un propulsore MPD è quella assialsimmetrica, analoga a quella di un arcogetto. Nei self-field il campo elettrico fluisce dalle pareti del propulsore al catodo centrale; in prima approssimazione è possibile considerare la corrente parallela al campo elettrico e quindi si sviluppa un campo magnetico in direzione tangenziale. Negli applied-field la geometria si mantiene simile ma viene applicato un campo magnetico esterno in direzione assiale avvolgendo il propulsore in un solenoide e si complicano le correnti sviluppate.

Malgrado le differenze sull'origine del campo magnetico, le due tipologie lavorano in modo analogo. Infatti, la spinta sviluppata da entrambi i propulsori può essere calcolata attraverso la formula di Maecker

$$T = \frac{\mu J^2}{4\pi} \left(\ln \left(\frac{r_a}{r_c} \right) + \frac{3}{4} \right) \quad (2.22)$$

che dimostra la debole dipendenza dalla geometria e una dipendenza dal quadrato della corrente; d'altra parte, si nota la totale indipendenza dalla portata, dalla pressione di alimentazione e dalla lunghezza del propulsore.

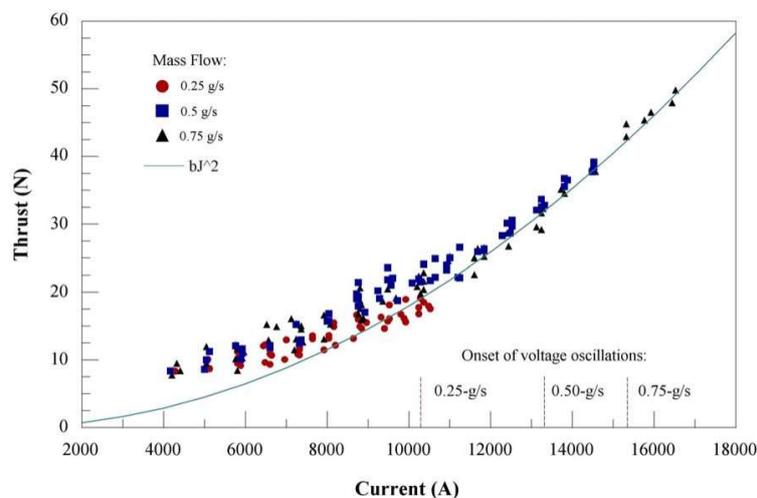


Figura 1.6 - Formula di Maecker e dati sperimentali

L'aspetto più importante dell'equazione è la sua precisione: diagrammando dati sperimentali di propulsori MPD si trovano curve che sono in quasi perfetto accordo con la formula, dimostrazione del fatto che riesce a cogliere gli aspetti più rilevanti del funzionamento del propulsore.

Le uniche discrepanze presenti si trovano alle basse correnti per le quali il campo magnetico generato è esiguo. L'accelerazione termica diventa importante e quindi aumenta la spinta fornita dal propulsore.

Malgrado presentino perdite per ionizzazione e dissociazione, le perdite principali dei propulsori MPD sono le perdite termiche all'anodo, legate all'energia che gli elettroni trasportano e cedono all'anodo quando vengono assorbiti da questo. In prima approssimazione si può considerare quest'ultima perdita come l'unica presente, da cui il rendimento

$$\eta = \frac{P_T}{P_T + P_{\text{anodo}}} = \frac{1}{1 + k''' \left(\frac{m_p'}{J^3} \right)}. \quad (2.23)$$

La relazione afferma che per ottenere alti rendimenti è necessario utilizzare un'alta corrente e una piccola portata affinché l'energia si trasferisca al campo magnetico. Tipicamente, nei propulsori MPD si parla di correnti di 10^3A e quindi potenze dell'ordine di 100kW o MW .

Le alte correnti e le piccole portate garantiscono velocità efficaci di scarico molto alte ($20'000\text{m/s}$), corrispondenti ad impulsi specifici sopra 2000s .

I propulsori MPD presentano grande potenza e grande impulso specifico e quindi sono adatti a missioni ad alta differenza di velocità grazie al loro basso consumo; inoltre, la grande potenza garantisce spinte maggiori che permettono di ottenere la differenza di velocità in tempi brevi.

Malgrado i vantaggi rappresentati dall'utilizzo della forza magnetica, i propulsori presentano due svantaggi principali collegati tra di loro.

In particolare, da una parte le perdite termiche portano il rendimento medio ad attestarsi intorno a 0.5 , e quindi metà della potenza fornita al propellente viene dissipata in calore, causando problemi di flussi termici molto elevati che devono essere gestiti opportunamente.

Dall'altra parte, volendo raccogliere l'enorme potenza richiesta attraverso dei pannelli solari, questi necessiterebbero aree di esposizione enormi causando problemi di trasporto, peso, ingombro e spiegamento.

Una soluzione per risolvere il secondo problema potrebbe essere l'utilizzo di un generatore nucleare. Tuttavia, oggi non esistono generatori certificati per il volo malgrado i molti anni di sviluppo e ricerca.

Ulteriore svantaggio presente nei propulsori MPD è il fenomeno dell'off-set, meno importante rispetto ai primi due ma comunque dimensionante per le applicazioni del motore. In particolare, è presente un limite al rapporto corrente/portata al di sopra del quale si instaurano comportamenti irregolari che prevedono oscillazioni della corrente ed erosione degli elettrodi.

A causa di questi svantaggi l'applicazione reale dei propulsori elettromagnetici ha subito un arresto benché la ricerca e lo sviluppo degli stessi sia stata portata avanti negli anni con prove e voli sperimentali.

1.2.2.5 Propulsore a impulso specifico variabile

L'unico propulsore attualmente in sviluppo che presenta la possibilità di variare l'impulso specifico durante la manovra è il VaSIMR, acronimo di Variable Specific Impulso Magnetoplasma Rocket, sviluppato dalla Ad Astra.

Il tipo di propulsore è non collisionale e ibrido tra la propulsione elettrotermica ed elettromagnetica perché il propellente viene ionizzato tramite trasferimento di calore senza collisioni tra particelle e lasciato accelerare in un ugello magnetico.

Il principale punto di forza del propulsore è proprio la possibilità di variazione dell'impulso specifico che, cambiando la portata e la ripartizione di potenza tra l'antenna di ionizzazione e di riscaldamento, permette una regolazione a potenza costante. Questa caratteristica lo rende appetibile per le missioni future.

Siccome la tesi ha l'obiettivo di verificare le potenzialità di questo propulsore, il capitolo 3 è dedicato ad una trattazione nel dettaglio.

Capitolo 2

Fondamenti di meccanica celeste

Nel capitolo vengono presentate rapidamente le conoscenze base della dinamica dei corpi celesti; sono introdotti i parametri orbitali, i vari modelli utilizzati per approssimare il problema degli N corpi e lo studio dei punti lagrangiani. Successivamente, si tratteranno i sistemi di riferimento, le manovre orbitali e le missioni interplanetarie.

Come già scritto nel capitolo 1, il punto di partenza della meccanica celeste è fornito dagli studi di Newton.

Nel principio, la legge più importante enunciata da Newton è stata la legge di gravitazione universale, cioè due corpi si attraggono vicendevolmente con una forza inversamente proporzionale al quadrato del raggio e proporzionale al prodotto delle masse dei corpi coinvolti

$$\mathbf{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{u}_r \quad (3.1)$$

dove $G=6.673 \cdot 10^{-11} \text{Nm}^2\text{kg}^{-2}$ è detta costante di gravitazione universale.

La legge è scritta sull'ipotesi di masse puntiformi ma il modello risulta valido anche per masse discrete considerando distanze molto maggiori della dimensione caratteristica dei corpi.

Dalla legge di gravitazione universale è possibile risalire alle leggi di Keplero:

- l'orbita di un pianeta è ellittica (quindi giace su un piano) e il Sole occupa uno dei fuochi dell'ellisse;
- il raggio congiungente il pianeta al Sole spazza aree uguali in tempi uguali;
- il quadrato del periodo di rivoluzione di un pianeta è proporzionale al cubo del semiasse maggiore dell'ellisse.

2.1 Problema degli n corpi

Per utilizzare le leggi della dinamica è necessario riferirsi ad un sistema inerziale. In particolare, un sistema si definisce inerziale nel caso in cui sia fermo o si muove di moto rettilineo uniforme rispetto alle stelle fisse. Quest'ultimo è un escamotage matematico per rappresentare un punto fermo nel cosmo perché la distanza delle stelle fisse è tale da renderle ferme all'osservazione.

Si distribuiscono nello spazio dei corpi celesti con massa m_i e distanza r_i rispetto al centro di massa. La trattazione del problema segue sotto le ipotesi semplificative di masse puntiformi, omogenee e costanti, e quindi si considera il solo centro di massa

di ciascun corpo. Inoltre, l'unica forza considerata nel campo di moto è la forza gravitazionale.

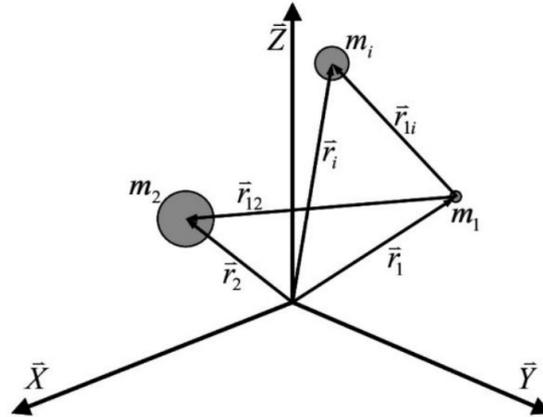


Figura 2.1 - Problema degli n corpi

Dato lo schema è possibile scrivere le equazioni del moto applicando la seconda legge della dinamica.

La massa i -esima produce sulla massa j -esima una forza

$$\mathbf{F}_{ij} = -G \frac{m_i m_j}{(r_i - r_j)^2} \mathbf{u}_{ij} \quad (3.2)$$

ed eseguendo la stessa operazione per tutte le masse è possibile calcolare la forza applicata sul corpo i -esimo

$$\mathbf{F}_i = -G \sum_{j=1}^{N-1} m_i m_j / (r_i - r_j)^2 \mathbf{u}_{ij}. \quad (3.3)$$

La seconda legge di Newton afferma

$$m_i \mathbf{r}_i'' = \sum_{j=1}^{N-1} \mathbf{F}_j \quad (3.4)$$

e quindi è possibile ottenere l'espressione dell'accelerazione della massa i -esima

$$\mathbf{r}_i'' = -G \sum_{j=1}^{N-1} m_j / (r_i - r_j)^2 \mathbf{u}_{ij}. \quad (3.5)$$

Per comprendere il moto assoluto della massa è necessario integrare due volte l'equazione ottenuta, in modo da ottenere l'andamento nel tempo della posizione $r_i(t)$. Tuttavia, l'integrazione non è possibile perché all'interno dell'equazione è presente anche la posizione del corpo j -esimo, cioè la distanza dal centro del sistema di riferimento.

Ne consegue che la forza non è costante ma cambia al variare della posizione reciproca di ciascun pianeta poiché, muovendosi all'interno dello stesso sistema, è necessario risolvere N equazioni del moto di secondo ordine accoppiate.

Nel caso di corpi celesti, se la massa da studiare m_j è quella dello spacecraft, allora è possibile trascurarla in quanto molto minore rispetto alle masse degli altri corpi. In letteratura, il problema viene detto problema degli n corpi ristretto.

Il sistema di equazioni non presenta soluzione analitica ed è necessario passare ad una rappresentazione discreta applicando il metodo numerico migliore.

2.2 Problema dei due corpi

L'unico modo per ottenere una soluzione analitica è semplificare il problema considerando solo due corpi. In questo caso la forza tra i due corpi

$$F_1 = F_2 = G \frac{m_1 m_2}{(r_1 - r_2)^2} \quad (3.6)$$

uguali e contrarie mentre l'equazione del moto per entrambi i corpi

$$m_i \mathbf{r}_i'' = \mathbf{F}_i. \quad (3.7)$$

Sottraendo le equazioni si ritrova un'equazione simile a quella degli n corpi

$$\mathbf{r}_2'' - \mathbf{r}_1'' = \mathbf{r}'' = -G \frac{m_1 + m_2}{r^2} \mathbf{u}_r \quad (3.8)$$

dove r è la distanza tra i due corpi considerati.

Il problema può essere ulteriormente semplificato considerando il caso ristretto, cioè considerando il caso in cui la massa del corpo primario sia molto maggiore della massa del corpo secondario $m_1 \gg m_2$.

In questo caso la forza esercitata dal corpo più piccolo è trascurabile e quindi è possibile riscrivere la legge del moto

$$\mathbf{r}'' = -\frac{\mu}{r^2} \mathbf{u}_r \quad (3.9)$$

dove $\mu = Gm_1$ è il parametro gravitazionale del corpo principale.

L'equazione vettoriale del secondo ordine è risolta per trovare la posizione del corpo secondario rispetto a quello principale.

Il problema dei due corpi (ristretto o non) è un caso ideale, nella realtà esistono disturbi gravitazionali dovuti alla presenza degli altri corpi celesti. Tuttavia, se i due corpi si trovano relativamente vicini tra di loro, il modello descrive bene la fisica del sistema con errori trascurabili.

2.3 Problema dei tre corpi ristretto

Il problema è sviluppato con la trattazione di Lagrange ma si arriva al risultato attraverso una serie di semplificazioni del problema completo. Queste portano ad equazioni non risolvibili analiticamente e sono necessarie integrazioni numeriche per ottenere la traiettoria del satellite rispetto ai due corpi principali.

Si considera il problema ridotto circolare, e quindi si trascura l'effetto della massa dello spacecraft perché molto minore rispetto alla massa dei due corpi principali e si considerano orbite circolari dei corpi principali.

Il problema è trattato con due parametri particolari, cioè la massa M presente all'interno del sistema, somma delle masse principali, e il rapporto μ tra massa

secondaria e totale. Definendo R la distanza tra i due corpi e x la distanza del centro di massa dal corpo principale, annullando la somma dei momenti

$$(1 - \mu)Mx = \mu M(R - x) \quad (3.10)$$

da cui è possibile calcolare $x = \mu R$.

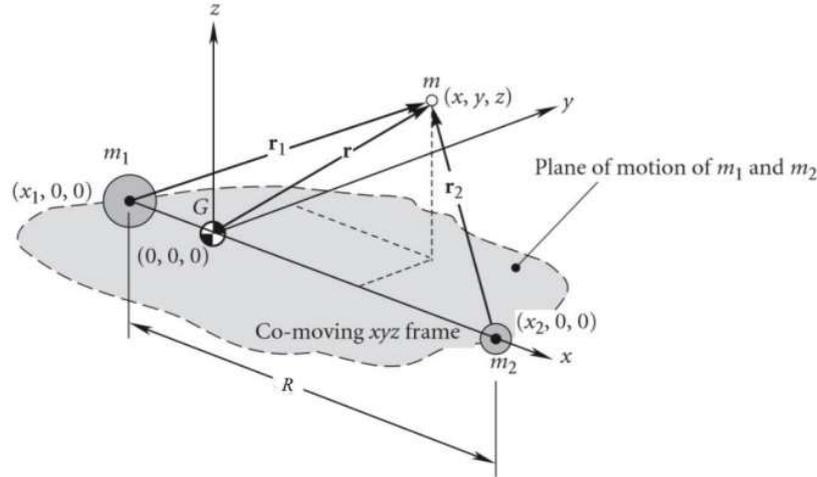


Figura 2.2 - Problema dei tre corpi

Il sistema di riferimento preso in considerazione presenta la congiungente dei due corpi come asse x, il piano dove ruotano i due corpi come piano fondamentale e l'asse z con direzione del vettore velocità angolare; l'asse y completa il sistema andando a formare una terza destrorsa.

I due corpi si trovano a distanza $-\mu R$ e $(1-\mu)R$ dal centro mentre il satellite presenta coordinate generiche (x,y,z) a distanza r dal centro di massa del sistema; inoltre, si definiscono le distanze tra satellite e corpi $r_1=(x+\mu R,y,z)$ e $r_2=(x(1-\mu)R,y,z)$.

Semplificando il calcolo con orbite circolari attorno al centro di massa, si calcola il periodo di rivoluzione

$$T = 2\pi \left(R^3 / GM \right)^{\frac{1}{2}} = 2\pi \left(R^3 / \mu_1 + \mu_2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.11)$$

da cui la velocità angolare

$$\omega = \left(GM / R^3 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.12)$$

che presenta solo componente lungo la direzione z.

Dal secondo principio della dinamica si scrive l'equazione del moto nel sistema rotante non inerziale utilizzando le forze apparenti, in questo caso si scrive

$$\mathbf{r}'' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' = \frac{\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2}{m} \quad (3.13)$$

dove F_1 e F_2 sono le forze gravitazionali esercitate dai corpi sul satellite.

Scrivendo l'equazione per ogni componente

$$x'' - \omega^2 x - 2\omega y' = -GM(1 - \mu) \frac{x + \mu R}{r_1^3} - GM\mu \frac{x - (1 - \mu)R}{r_2^3}, \quad (3.14)$$

$$y'' - \omega^2 y - 2\omega x' = -GM(1 - \mu) \frac{y}{r_1^3} - GM\mu \frac{y}{r_2^3}, \quad (3.15)$$

$$z'' = -GM(1 - \mu) \frac{z}{r_1^3} - GM\mu \frac{z}{r_2^3}. \quad (3.16)$$

Per semplificare il problema, le equazioni vengono adimensionalizzate. Il raggio viene adimensionalizzato con la distanza tra i due corpi principali $\rho=r/R$ da cui anche le coordinate (ξ, η, ζ) mentre il tempo viene adimensionato tramite la velocità angolare del sistema $\tau=t\omega$ da cui la derivata nel tempo $d/dt=\omega d/d\tau$.

Introducendo l'adimensionalizzazione, le equazioni si modificano

$$\xi'' - \xi - 2\eta' = -(1 - \mu) \frac{(\xi + \mu)}{\rho_1^3} - \mu \frac{(\xi - (1 - \mu))}{\rho_2^3}, \quad (3.17)$$

$$\eta'' - \eta + 2\xi' = -(1 - \mu) \frac{\eta}{\rho_1^3} - \mu \frac{\eta}{\rho_2^3}, \quad (3.18)$$

$$\zeta'' = -(1 - \mu) \frac{\zeta}{\rho_1^3} - \mu \frac{\zeta}{\rho_2^3}. \quad (3.19)$$

Le equazioni del moto sono differenziali del secondo ordine non lineari (per la presenza del termine al cubo) ma soprattutto sono equazioni accoppiate, e quindi l'unico modo per risolvere il sistema è un'integrazione numerica, di cui la più utilizzata sfrutta una condizione iniziale associata alla velocità di burnout.

Dato che il sistema è non lineare si ottengono traiettorie caotiche che non possono essere previste, generalmente a petalo intorno al centro di massa del sistema complessivo e, nel momento in cui è necessario eseguire una missione, è necessario definire la condizione iniziale per trial and error.

2.3.1 Punti lagrangiani

Nel problema dei tre corpi ristretto è possibile individuare punti particolari, detti punti lagrangiani, dove le forze gravitazionali e centrifughe sono in equilibrio.

Un terzo corpo che staziona in uno di questi punti presenta accelerazione nulla; nei punti lagrangiani il corpo è perfettamente in equilibrio e quindi sembra fermo rispetto al sistema rotante.

Per definire i punti lagrangiani è necessario introdurre la funzione potenziale del problema dei tre corpi ristretto

$$U = G \frac{m_1}{r_1} + G \frac{m_2}{r_2} + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) \quad (3.20)$$

dove l'ultimo termine è la forza centrifuga.

In questo modo è possibile definire accelerazione gravitazionale e centrifuga come gradienti della funzione potenziale.

Si considera l'espressione in forma adimensionale

$$U^* = \frac{1-\mu}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2} + \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2). \quad (3.21)$$

Eseguendo i vari gradienti

$$\frac{dU^*}{d\xi} = \xi - \frac{1-\mu}{\rho_1^2} \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} - \frac{\mu}{\rho_2^2} \frac{\partial \rho_2}{\partial \xi} = \xi - (1-\mu) \frac{\xi+\mu}{\rho_1^3} - \mu \frac{\xi-(1-\mu)}{\rho_2^3}, \quad (3.22)$$

$$\frac{dU^*}{d\eta} = \eta - \frac{1-\mu}{\rho_1^2} \frac{\partial \rho_1}{\partial \eta} - \frac{\mu}{\rho_2^2} \frac{\partial \rho_2}{\partial \eta} = \eta - (1-\mu) \frac{\eta}{\rho_1^3} - \mu \frac{\eta}{\rho_2^3}, \quad (3.23)$$

$$\frac{dU^*}{d\zeta} = -(1-\mu) \frac{\zeta}{\rho_1^3} - \mu \frac{\zeta}{\rho_2^3}, \quad (3.24)$$

questi possono essere usati per riscrivere le equazioni del moto

$$\xi'' - 2\eta' = \frac{\partial U^*}{\partial \xi}, \quad (3.25)$$

$$\eta'' + 2\xi' = \frac{\partial U^*}{\partial \eta}, \quad (3.26)$$

$$\zeta'' = \frac{\partial U^*}{\partial \zeta}. \quad (3.27)$$

Imponendo le forze gravitazionali in equilibrio con la forza centrifuga, i punti lagrangiani sono punti di equilibrio identificati dai punti stazionari della funzione potenziale, e quindi dai punti con gradiente del potenziale nullo.

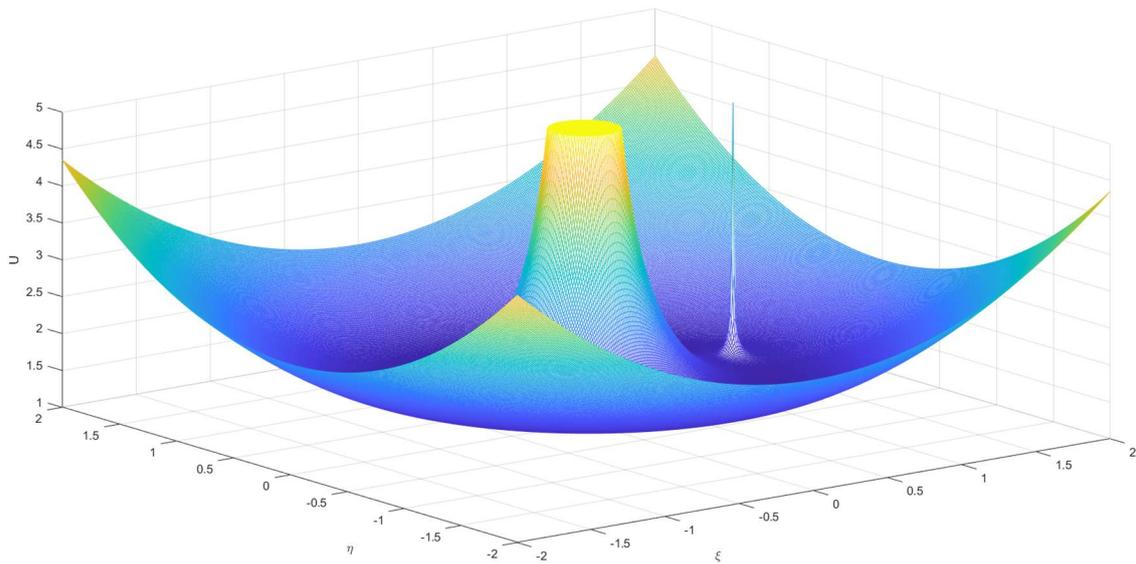


Figura 2.3 - Funzione potenziale del sistema Terra-Luna

I punti lagrangiani sono quindi caratterizzati dall'annullamento di tutti i termini derivati

$$\begin{aligned} \xi' &= 0 \text{ e } \xi'' = 0, \\ \eta' &= 0 \text{ e } \eta'' = 0, \\ \zeta' &= 0 \text{ e } \zeta'' = 0. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Prima di determinare i punti lagrangiani, è bene notare che l'ultima equazione del gradiente del potenziale può essere risolta solamente imponendo $\zeta=0$ e quindi tutti i punti lagrangiani giacciono sul piano fondamentale (ξ, η) .

Per diagrammare la funzione potenziale sul piano fondamentale si utilizzano delle curve ad iso-livelli, tenendo conto che la funzione andrà ad infinito sui corpi e ad infinito. In questo modo si identificano meglio i 5 punti lagrangiani.

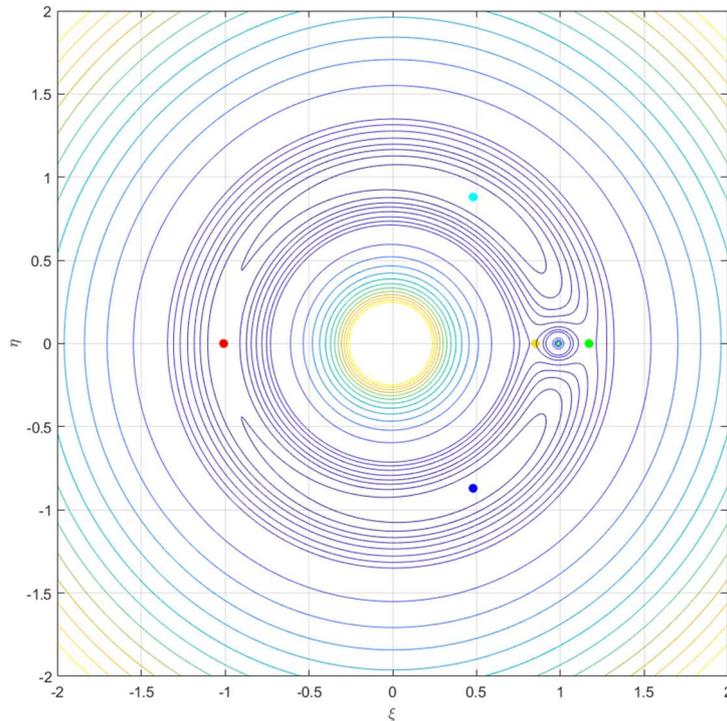


Figura 2.4 - Punti lagrangiani del sistema Terra-Luna

Come si nota anche dalla figura 3.4, la seconda equazione del gradiente può essere annullata imponendo $\eta=0$. La curva risultante dipende solamente da ξ e presenta 3 punti di minimo, detti punti collineari.

Il punto L1 è posizionato tra i due corpi ad un valore $-\mu < \xi < 1-\mu$. In questo caso, la prima equazione del gradiente del potenziale

$$\xi - (1 - \mu) \frac{\xi + \mu}{\rho_1^3} - \mu \frac{\xi - (1 - \mu)}{\rho_2^3} = 0 \tag{3.29}$$

è messa a sistema con

$$\rho_1 + \rho_2 = 1, \tag{3.30}$$

da cui è possibile calcolare

$$\rho_2 = (\mu/3)^{1/3}. \tag{3.31}$$

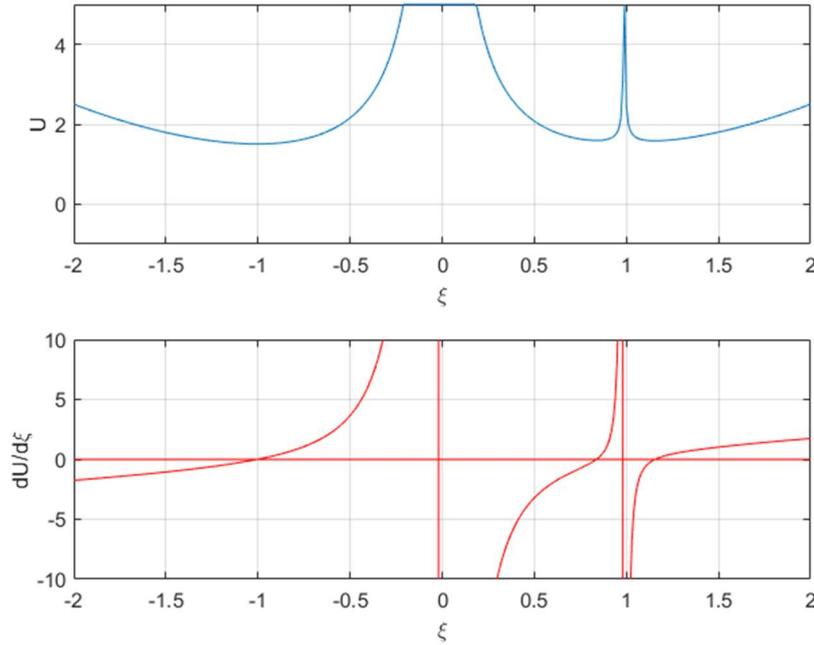


Figura 2.5 - Punti lagrangiani collineari del sistema Terra-Luna

Il punto L₂ è collocato oltre il secondo corpo ad un valore $\xi > 1 - \mu$, da cui l'equazione è messa a sistema con

$$\rho_1 = \rho_2 + 1 \quad (3.32)$$

calcolando

$$\rho_2 = (\mu/3)^{1/3}. \quad (3.33)$$

Il punto L₃ si trova oltre il primo corpo per $\xi < -\mu$ e mettendo a sistema con

$$\rho_2 = \rho_1 + 1 \quad (3.34)$$

si calcola

$$\rho_2 = 2. \quad (3.35)$$

Gli altri due punti lagrangiani, detti punti equilaterali, si calcolano risolvendo il sistema completo

$$\xi - (1 - \mu) \frac{\xi + \mu}{\rho_1^3} - \mu \frac{\xi - (1 - \mu)}{\rho_2^3} = 0, \quad (3.36)$$

$$\eta - (1 - \mu) \frac{\eta}{\rho_1^3} - \mu \frac{\eta}{\rho_2^3} = 0 \quad (3.37)$$

escludendo la soluzione banale $\eta=0$. Entrambi i punti presentano

$$\rho_1 = \rho_2 = 1 \quad (3.38)$$

e quindi rappresentano i vertici di un triangolo equilatero, e dimensionando

$$\xi = 1/2 - \mu \text{ e } \eta = \pm 3^{1/2}/2. \quad (3.39)$$

I punti lagrangiani sono punti di equilibrio ma non tutti di equilibrio stabile. In particolare, i punti collineari sono punti di sella, stabili solamente nella direzione perpendicolare alla congiungente dei due corpi mentre i punti equilaterali sono punti di equilibrio stabile perché punti a minore potenziale.

<i>LEM</i>	ξ	η	x [km]	y [km]
<i>L1</i>	0.8322	0	319'902	0
<i>L2</i>	1.1509	0	442'407	0
<i>L3</i>	-0.9929	0	-381'678	0
<i>L4</i>	0.4878	0.866	187'511	332'891
<i>L5</i>	0.4878	-0.866	187'511	-332'901

Tabella 2.1 - Punti lagrangiani del sistema Terra-Luna

<i>LSE</i>	ξ	η	x [km]	y [km]
<i>L1</i>	0.9899	0	148'098'443	0
<i>L2</i>	1.00997	0	151'091'557	0
<i>L3</i>	-0.999998	0	-149'599'737	0
<i>L4</i>	0.499997	0.866	74'799'551.2	129'557'400.4
<i>L5</i>	0.499997	-0.866	74'799'551.2	-129'557'400.4

Tabella 2.2 - Punti lagrangiani del sistema Terra-Sole

Le tabelle presentano la posizione dei punti lagrangiani del sistema Terra-Luna e Terra-Sole dove nel primo caso si considera un sistema di riferimento centrato sulla Terra mentre nel secondo caso un sistema di riferimento centrato sul Sole.

I valori riportati sono valori medi poiché le orbite non sono circolari ma ellittiche e quindi i punti lagrangiani variano durante l'orbita. Inoltre, sono sempre presenti le perturbazioni gravitazionali dei corpi celesti maggiori.

Per questi motivi, nella realtà non si trovano punti a costo zero che ruotano con la stessa velocità angolare del sistema stesso.

Eliminando l'ipotesi di traiettorie circolari, cioè considerando traiettorie ellittiche, non si trovano punti stazionari ma zone ampie attorno alle quali la trattazione teorica afferma la possibilità di orbite stazionarie.

Queste orbite vengono dette halo orbits, orbite ellittiche non planari che hanno come fuoco il punto lagrangiano e si estendono lungo l'asse ζ . Le orbite sono stazionarie ma teoriche perché derivate anch'esse da una trattazione semplificata, ottenuta troncando lo sviluppo in serie.

Nella realtà si trovano traiettorie quasi-periodiche dette orbite di Lissajous, simili alle orbite halo ma non periodiche.

2.4 Sistemi di riferimento

I sistemi di riferimento sono definiti da tre elementi: l'origine del sistema, il piano fondamentale (xy) e il verso positivo dell'asse z (sempre perpendicolare al piano fondamentale). Tutti i sistemi utilizzati sono destrorsi e quindi il verso del terzo asse è automaticamente determinato una volta definiti gli altri due.

Nello studio di orbite interplanetarie si utilizza il sistema eliocentrico mentre per lo studio di orbite intorno alla Terra si utilizza il sistema geocentrico.

2.4.1 Sistema eliocentrico - eclittica

Il sistema presenta il Sole come origine, il piano che contiene l'orbita terrestre (detto eclittica) come piano fondamentale e direzione positiva dell'asse z verso l'emisfero che contiene la Polaris (direzione del momento angolare del moto di rivoluzione della Terra intorno al Sole).

Per definizione, l'asse x si definisce come intersezione tra il piano equatoriale e il piano dell'eclittica durante l'equinozio vernale. In particolare, il piano equatoriale è inclinato di $23^{\circ}27'$ rispetto all'eclittica, l'intersezione tra i due piani determina un fascio di rette parallele e , definendo il verso dell'asse x nel giorno dell'equinozio vernale, il Sole si trova nella costellazione dell'ariete.

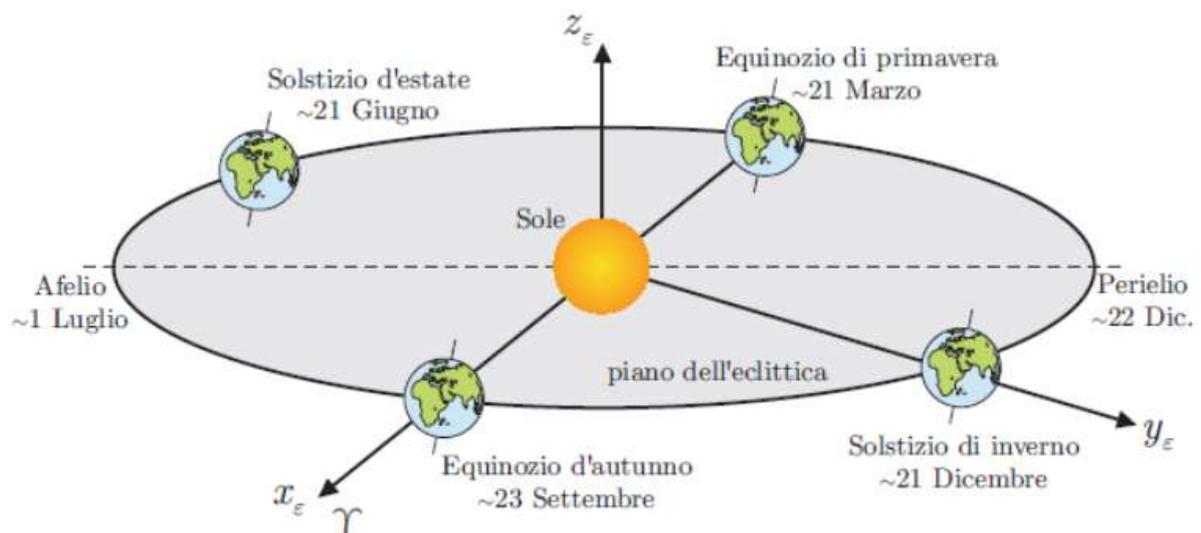


Figura 2.6 - Sistema di riferimento eliocentrico-eclittico

Tuttavia, questo sistema di riferimento non è perfettamente inerziale.

L'asse terrestre non è fisso a causa di fenomeni di nutazione e precessione dovuti all'interazione gravitazionale con Sole e Luna, per questo motivo la linea di intersezione tra eclittica e piano equatoriale varia nel tempo.

In particolare, la precessione dell'asse terrestre è composta da due contributi: l'effetto di Sole e Luna di $50.37''$ all'anno detto precessione lunisolare e l'effetto dei pianeti di $-0.11''$ all'anno detto effetto planetario.

La precessione totale di $50.25''$ all'anno causa un periodo di rotazione dell'asse di rotazione della Terra di $25'786$ anni, detto anno platonico.

D'altra parte, la nutazione è dovuta alla sola interazione con la Luna che genera una coppia agente sull'asse terrestre il quale oscilla con periodo di 18.6 anni.

Nella rotazione dell'asse terrestre ruota anche l'intersezione tra eclittica e piano equatoriale. Si sviluppa un fenomeno di precessione della linea degli equinozi: rispetto alla traiettoria gli assi ruotano in senso antiorario di $50.25''$ all'anno e quindi ogni 71.63 anni l'asse degli equinozi anticipa di un grado/giorno.

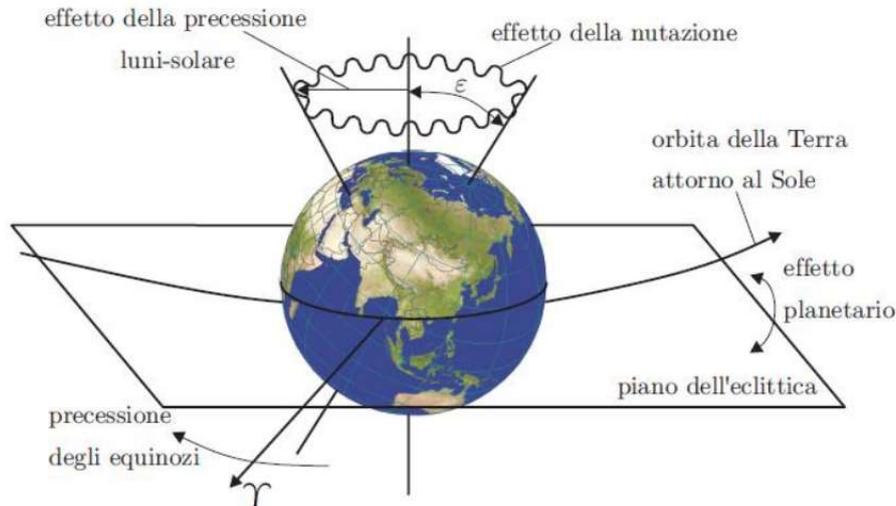


Figura 2.7 - Effetti perturbativi dell'asse terrestre

2.4.2 Sistema geocentrico - equatoriale

Il sistema presenta il centro di massa della Terra come origine, il piano equatoriale come piano fondamentale e direzione positiva dell'asse z verso l'emisfero che contiene la Polaris. Inoltre, l'asse x è quello del sistema eliocentrico.

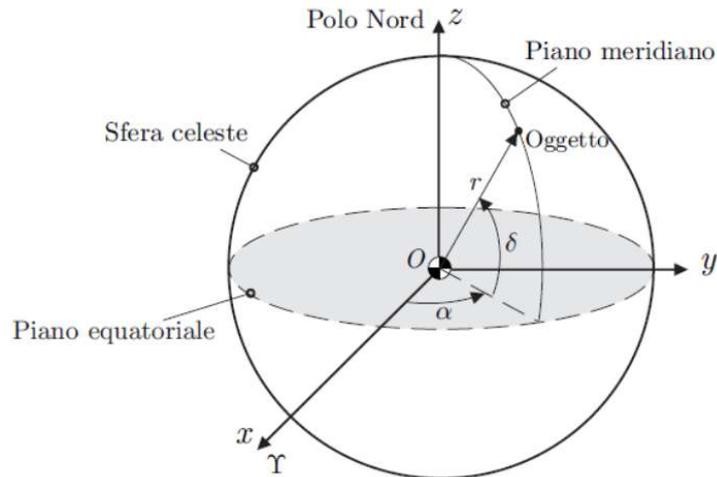


Figura 2.8 - Sistema di riferimento geocentrico-equatoriale

Il sistema è inerziale e quindi trasla con il moto di rivoluzione della Terra attorno al Sole senza variare la sua orientazione, e quindi non è solidale al movimento di rotazione della Terra attorno a sé stessa.

Solitamente, si preferisce utilizzare la notazione **IJK** rispetto alla notazione **XYZ** che individua il sistema eliocentrico.

Il sistema è anche chiamato Earth-centered inertial - ECI.

2.4.3 Sistema perifocale

Tipicamente usato per descrivere il moto dei satelliti, il sistema presenta il corpo principale a cui orbita il satellite come origine, il piano dell'orbita come piano fondamentale e vero dell'asse z nella direzione del momento angolare.

Inoltre, l'asse x è diretto lungo la direzione del periastro dell'orbita, cioè il punto più vicino al corpo principale.

Anche in questo caso, come per il geocentrico, si preferisce la notazione **PQW**.

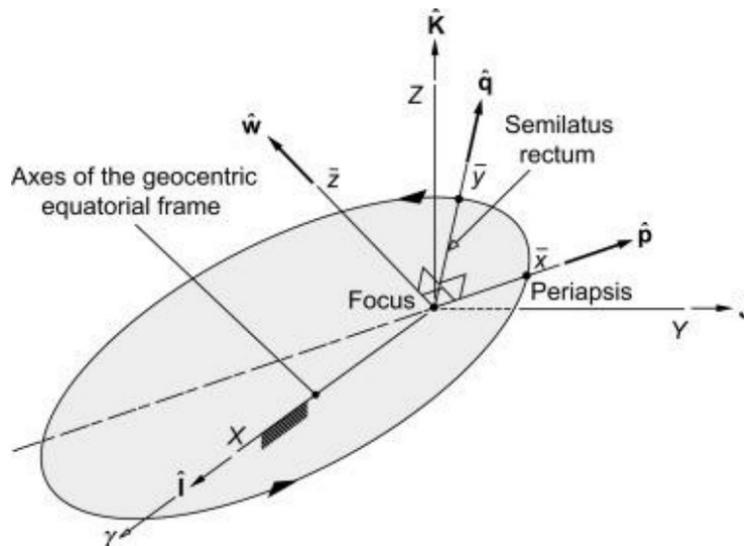


Figura 2.9 - Sistema perifocale

2.5 Elementi orbitali classici

Un'orbita è caratterizzata da 6 parametri, cioè le componenti della posizione e della velocità al tempo iniziale, date le quali è possibile determinare univocamente la traiettoria. Tuttavia, note la posizione e la velocità iniziali è difficile risalire alle posizioni e alle velocità vere nei vari istanti di tempo.

Per risolvere il problema, si definiscono 6 parametri diversi che devono definire la traiettoria in modo univoco. Questi parametri sono detti parametri o elementi orbitali classici e si legano ad alcune grandezze costanti della traiettoria.

I parametri orbitali classici prevedono 4 parametri che forniscono la forma e la dimensione dell'orbita sul piano, la posizione del periastro e la posizione del corpo secondario rispetto al periastro.

A questo punto sono necessari altri due parametri che forniscano l'orientamento del piano dell'orbita rispetto al sistema di riferimento, cioè la posizione del nodo ascendente, e l'inclinazione dell'orbita.

La forma è definita dall'eccentricità: si passa da orbite circolari con $e=0$ ad orbite ellittiche con $0 < e < 1$, per arrivare all'orbita parabolica $e=1$ ed iperbolica $e > 1$.

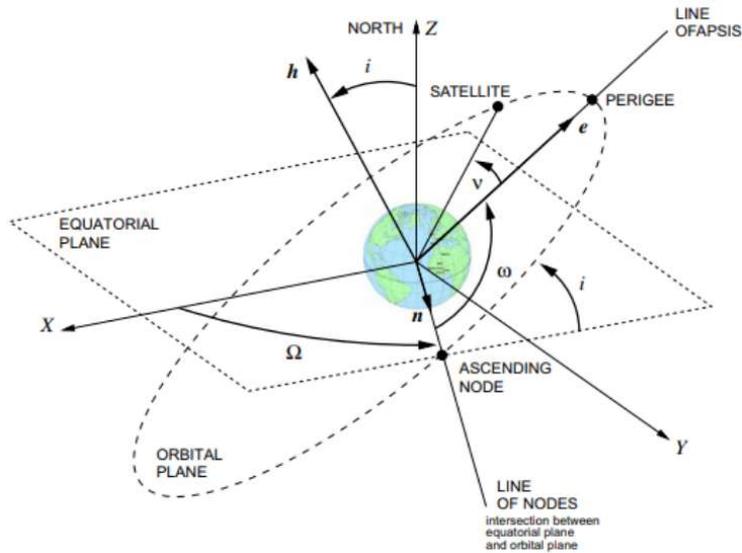


Figura 2.10 - Elementi orbitali classici

La dimensione è fornita dal semiasse maggiore, che definisce anche l'energia

$$E = -\frac{\mu}{2a} \quad (3.40)$$

In particolare, le orbite circolari ed ellittiche presentano energia negativa, le orbite paraboliche presentano energia nulla mentre le orbite iperboliche presentano energia positiva con semiasse maggiore negativo.

La posizione del periastron, o direzione della linea degli apsi, è fornita dall'angolo compreso tra il periastron e la linea dei nodi, detto argomento del periastron ω .

La posizione del nodo ascendente della traiettoria è fornita da un secondo angolo, detto longitudine del nodo ascendente Ω , compreso tra il versore \mathbf{I} del sistema di riferimento e il nodo ascendente, cioè il punto in cui il satellite incontra il piano fondamentale durante la salita.

L'inclinazione dell'orbita i è un angolo compreso tra il versore \mathbf{K} del sistema di riferimento e il vettore del momento angolare del corpo.

Infine, l'anomalia vera ad una certa epoca ν restituisce la posizione del corpo secondario lungo l'orbita al tempo iniziale ed è calcolata come angolo tra il periastron e il corpo secondario al tempo iniziale.

Tra tutte le orbite possibili, esistono orbite particolari con uno o più elementi orbitali nulli. Queste orbite speciali prestano parametri alterativi:

- nel caso in cui l'inclinazione $i=0$ l'orbita si trova sul piano fondamentale, non è più possibile definire l'intersezione tra piano fondamentale e orbitale e quindi non si distingue la longitudine del nodo ascendente; è definito l'angolo $\Pi=\omega+\Omega$ tra versore \mathbf{I} e linea degli apsi, detto longitudine del periastron;

- nel caso in cui l'eccentricità $e=0$ non è più possibile definire la posizione del periastron, e quindi si definisce l'angolo $u(t)=\omega+\nu(t)$ misurato dal nodo ascendente, detto argomento della latitudine al tempo t ;

- nel caso in cui inclinazione ed eccentricità siano entrambi nulli, si trova un'orbita circolare geostazionaria equatoriale, si definisce l'angolo $l(t)=\omega+\Omega+v(t)$ compreso tra il versore \mathbf{I} e il raggio che definisce la posizione del corpo secondario, detto longitudine vera al tempo t .

I parametri orbitali nel problema dei due corpi sono costanti mentre posizione e velocità cambiano nel tempo; d'altra parte, in caso di problema degli n corpi, si calcola l'influenza delle forze perturbative sui parametri orbitali del problema dei due corpi associato. La costanza dei parametri orbitali è legata a considerazioni fisiche, cioè alla conservatività del campo gravitazionale.

Oltre a questi, esistono parametri diversi che permettono di risolvere condizioni in cui altri elementi classici sono indeterminati permettendo un'implementazione più facile dei codici di calcolo. Tuttavia, questi prevedono delle finezze che non li rendono troppo versatili e quindi risultano poco utilizzati.

2.6 Manovre orbitali

Come detto nel capitolo precedente, l'orbita di un corpo è costante nel tempo a meno di fenomeni perturbativi. Per effettuare cambiamenti di orbita si utilizza la propulsione, agendo non sulla posizione ma sulla velocità del corpo.

L'utilizzo della propulsione consente il cambiamento dei parametri orbitali; le manovre conseguenti sono utili per compensare le varie perturbazioni, correggere eventuali errori o effettuare trasferte.

Durante la manovra, l'applicazione della spinta causa una variazione della velocità del corpo determinando una variazione di energia oppure induce un cambiamento di direzione ad energia costante.

Nel momento in cui ci si sposta da una traiettoria all'altra è necessario ipotizzare che il punto di manovra sia in comune tra le due traiettorie.

Un corpo in orbita presenta energia totale somma tra energia potenziale e cinetica

$$E = \frac{1}{2}V^2 - \frac{\mu}{r} \quad (3.41)$$

che differenziata a raggio costante

$$dE = VdV; \quad (3.42)$$

si osserva che, a parità di propellente speso, la variazione di energia è maggiore ad alte velocità. L'obiettivo è effettuare manovre spendendo la differenza di velocità ΔV minima per limitare il consumo di combustibile e quindi, dovendo cambiare energia, conviene spingere a raggi piccoli dove le velocità sono maggiori.

In generale, le manovre con propulsori chimici sono modellizzate con manovre impulsive mentre propulsori elettrici richiedono modelli a spinta continua.

2.6.1 Trasferta di Hohmann

Tra tutte le manovre possibili tra orbite circolari complanari a due impulsi, la manovra di Hohmann è quella che presenta la differenza di velocità minima. La

manovra riprende in certo senso i concetti di perdite gravitazionali e variazione di energia per affermare che conviene spingere a quote basse, dove le velocità sono più elevate, e parallelamente alla velocità.

In generale, se le due orbite presentano almeno un punto in comune, è possibile eseguire un cambio di orbita con una manovra ad un impulso. Tuttavia, nel caso di orbite circolari il passaggio ad unico impulso è impossibile: la manovra viene eseguita con l'ausilio di un'orbita di supporto e due impulsi, uno sull'orbita di partenza e uno sull'orbita di arrivo.

L'orbita ausiliaria è detta orbita di trasferimento e deve soddisfare due condizioni: il periastro deve essere minore del raggio dell'orbita più bassa e l'apoaastro deve essere maggiore del raggio dell'orbita più alta.

Tra tutte le trasferte possibili, la trasferta di Hohmann è quella che corrisponde alla minima eccentricità, cioè presenta uguaglianza tra raggio dell'apoaastro e del periaastro e raggi delle due orbite.

Dal punto di vista geometrico, la trasferta di Hohmann percorre mezza ellisse, cioè un angolo $\Delta v = 180^\circ$, passando dal periaastro all'apoaastro e viceversa.

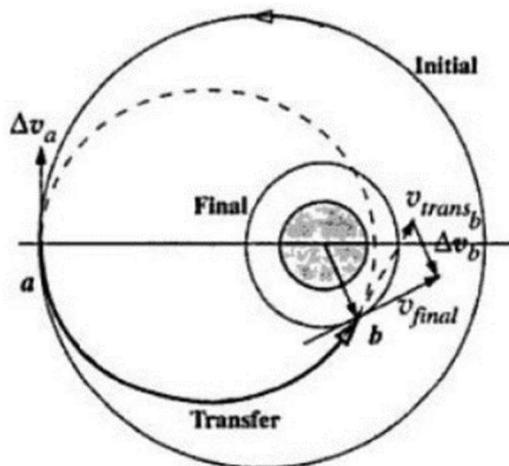


Figura 2.11 - Trasferta di Hohmann

Per calcolare l'impulso necessario alla manovra è necessario conoscere le velocità che competono alla trasferta. In generale, il modulo della velocità si può esprimere sfruttando la conservazione dell'energia

$$E_H = \frac{1}{2} V^2 - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a_H} = -\frac{\mu}{r_1 + r_2} \quad (3.43)$$

da cui

$$V_H = \left(2\mu \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1 + r_2} \right) \right)^{1/2} \quad (3.44)$$

distinguendo $r=(r_1, r_2)$, perché l'energia meccanica è costante sull'orbita.

La trasferta di Hohmann prevede una spinta maggiore ai raggi bassi in direzione tangenziale, senza perdite per disallineamento, e riduce al minimo le perdite per

gravità. Queste ultime perdite si manifestano salendo durante la trasferta ma sono arginate guadagnando più velocità possibile a bassi raggi.

Sull'orbita di arrivo l'impulso previsto dalla manovra ha lo scopo di circularizzare l'orbita fornendogli un'energia maggiore.

2.6.2 Manovra di fuga/cattura

Le due manovre sono analoghe: gli impulsi ad accelerare nell'evasione sono gli stessi impulsi a frenare nella cattura. Il discorso si sviluppa attorno alla manovra di fuga ma può essere trasposto alla manovra di cattura.

La manovra di fuga è attuata per evadere dal campo gravitazionale di un corpo, tipicamente un pianeta ma anche una luna o il Sole.

Per esaminare le manovre è utile introdurre il concetto di sfera di influenza di un corpo. Questa è definita come una sfera virtuale che lo circonda all'interno della quale è possibile considerare la sola gravità del corpo principale trascurando tutte le influenze gravitazionali dovute ad altri corpi.

Tipicamente, per applicazioni interne al sistema solare, superato il raggio della sfera di influenza del corpo, la forza gravitazionale di questo diventa trascurabile e il satellite può essere considerato soggetto alla sola gravità del Sole o del pianeta attorno a cui orbita il corpo principale.

La trattazione è sviluppata considerando un'orbita attorno alla Terra.

La manovra di fuga prevede una generica traiettoria iperbolica di fuga con raggio del periastro uguale al raggio dell'orbita del corpo. L'impulso iniziale accelera il corpo portandolo dalla velocità dell'orbita V_{c1} alla velocità che compete all'iperbole V_{i1} e converte l'energia dell'orbita che da negativa diventa positiva.

All'infinito il corpo presenterà una velocità non nulla V_{∞} , detta eccesso iperbolico di velocità, che sopravvive alle perdite per gravità. In caso di traiettoria di fuga parabolica l'impulso annulla l'energia dell'orbita e l'eccesso di velocità.

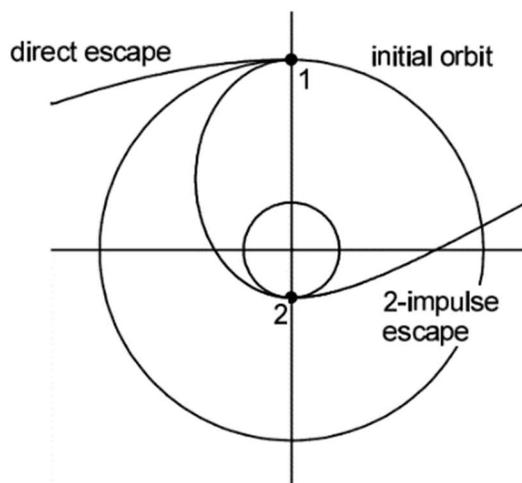


Figura 2.12 - Manovra di fuga diretta (1) e manovra di Oberth (2)

La velocità iniziale che compete all'iperbole è calcolata dall'equazione dell'energia conoscendo l'eccesso iperbolico necessario dopo la fuga

$$V_i = \left(V_\infty^2 + \frac{2\mu}{r_1} \right)^{1/2} = (V_\infty + V_{esc}^2)^{1/2} \quad (3.45)$$

dove la velocità di fuga si può calcolare

$$V_{esc} = (2V_c^2)^{1/2}. \quad (3.46)$$

2.6.3 Manovra di Oberth

Tra tutte le manovre di fuga risalta maggiormente la manovra di Oberth che, pur rimanendo una manovra a due impulsi, prevede una fuga più efficiente in termini di impulso totale rispetto all'evasione diretta su un'iperbole.

Dato che i cambi di energia sono più efficienti a velocità maggiori, la manovra prevede l'attuazione dell'impulso necessario ad inserirsi sulla traiettoria dopo aver diminuito la quota del satellite.

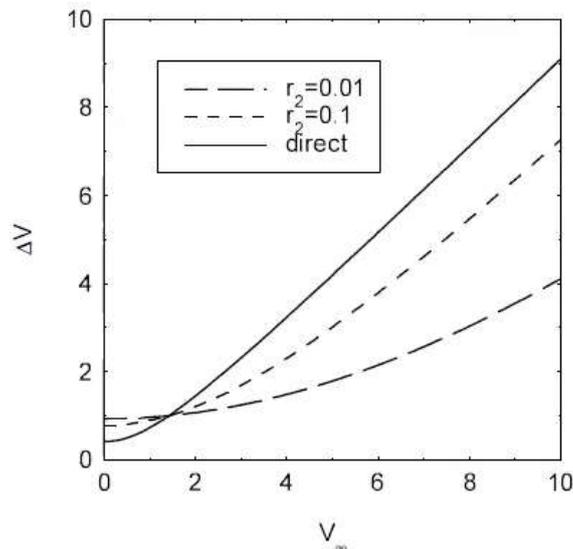


Figura 2.13 - Confronto manovra di fuga diretta e di Oberth

Nel caso in cui il guadagno di energia richiesto sia molto alto, e quindi il satellite debba presentare un eccesso iperbolico elevato, diventa conveniente spendere affinché il guadagno di energia maggiore sia ottenuto ad alte velocità.

In particolare, la manovra diventa più conveniente se l'eccesso di velocità

$$V_\infty > 2^{1/2} V_{c1}. \quad (3.47)$$

Dal grafico si osserva che minore è il raggio intermedio e maggiore è il vantaggio della manovra; perciò, quando conviene la manovra, è conveniente scendere al minor raggio possibile. In aggiunta, la trasferta per scendere di quota richiede un tempo minimo e quindi la penalità temporale non è troppo importante.

2.7 Missioni interplanetarie

Nella fase di progettazione e studio di fattibilità delle missioni interplanetarie, le manovre sono analizzate e sviluppate attraverso il metodo delle patched-conics - PCM, metodo approssimato che permette di calcolare l'ordine di grandezza della differenza di velocità necessaria e i tempi di missione, e quindi permette di avere una stima iniziale della quantità di combustibile da imbarcare.

Inoltre, durante la finestra di lancio, il metodo può fornire un punto di partenza per l'integrazione numerica delle equazioni del moto che contengono gli effetti delle forze gravitazionali dei pianeti e gli effetti perturbativi.

La traiettoria calcolabile con l'integrazione numerica non è data dall'unione delle coniche ma rappresenta un efficace punto di partenza nel metodo numerico di ottimizzazione della traiettoria.

Il metodo delle patched-conics divide la missione interplanetaria in tre fasi totali, cioè due fasi planetarie di fuga e cattura e una fase centrale eliocentrica, e quindi si appoggia alla definizione di sfera di influenza, e in ogni fase il moto del satellite è studiato con traiettorie kepleriane indipendenti tra di loro.

La sfera di influenza, detta anche sfera di Roche-Hill, di un corpo di massa m che orbita a distanza R attorno ad un corpo di massa M molto maggiore è calcolata rispetto al corpo principale come raggio r in cui le accelerazioni gravitazionali dei due corpi si annullano. In particolare, si trova l'espressione

$$r = \left(\frac{m}{M}\right)^{2/5} R. \quad (3.48)$$

Nel momento il satellite esce dalla sfera di influenza di un corpo per entrare in quella di un altro, cambia il parametro gravitazionale μ e il livello energetico che compete alla traiettoria. Infatti, malgrado il satellite non riceva alcuna spinta atta a variare il contributo energetico, cambiando il corpo che occupa il fuoco della traiettoria cambia anche l'energia associata ad essa.

Tra le tre fasi, quella eliocentrica presenta un'importanza maggiore perché quella che occupa più tempo, e quindi l'analisi di questa permette di definire le specifiche necessarie per le altre due fasi, cioè fuga e cattura.

Tipicamente, soprattutto per semplicità di calcolo, la trasferta interplanetaria che compete alla fase eliocentrica è rappresentata da una trasferta di Hohmann. Il passaggio tra la velocità dell'orbita e della trasferta non avviene attraverso degli impulsi, il satellite evade dal pianeta (e si fa catturare) con un eccesso iperbolico tale da portarlo immediatamente sulla trasferta di Hohmann.

Nella fase iniziale della missione è importante il concetto di finestra di lancio. In una missione interplanetaria è fondamentale che il satellite e il pianeta di arrivo raggiungano concordi al punto finale, la finestra di lancio è l'intervallo di tempo durante il quale il satellite deve partire.

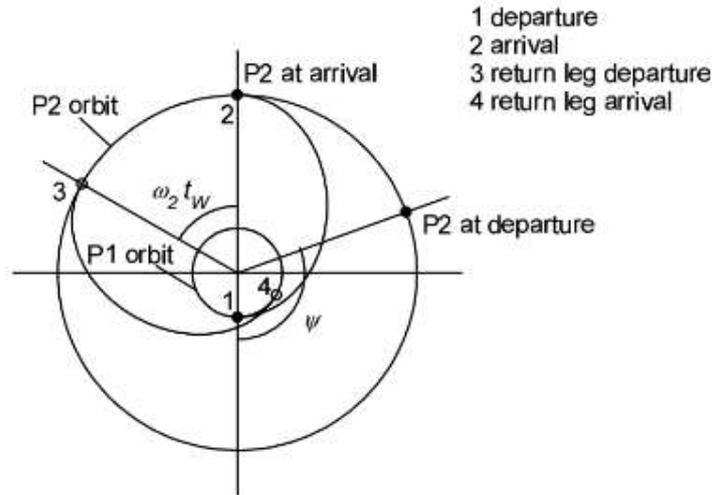


Figura 2.14 - Trasferta interplanetaria

Nella figura sopra il pianeta 1 si trova nel punto 1 al tempo t_1 di partenza mentre il pianeta 2 si trova nel punto 2 al tempo t_2 di arrivo. Per poter definire la data di lancio, e di conseguenza la finestra di lancio, è necessario conoscere la posizione del pianeta 2 al tempo t_1 , cioè l'angolo di fase ψ tra i due pianeti al tempo iniziale. Siccome la trasferta di Hohmann prevede un angolo piatto, si può scrivere

$$\pi = \psi + \omega_2 \frac{1}{2} T_H \quad (3.49)$$

dove il periodo della trasferta

$$T_H = 2\pi \left(\frac{a_H^3}{\mu_{\text{Sole}}} \right)^{1/2} \quad (3.50)$$

In caso di mancato lancio durante la finestra disponibile è necessario aspettare un intervallo di tempo, detto periodo sinodico, affinché si ripresenti un'altra finestra utile. Questo periodo si può determinare con due ragionamenti analoghi: la stessa configurazione si ripresenta quando il pianeta interno doppia il pianeta esterno oppure, ponendosi in un sistema di riferimento che ruota con velocità angolare del pianeta interno ω_1 , il corpo esterno compie un giro completo.

In entrambi i casi è possibile calcolare il tempo sinodico

$$\tau_s = \frac{2\pi}{|\omega_2 - \omega_1|} \quad (3.51)$$

Infine, volendo compiere la trasferta di ritorno al pianeta di partenza, è necessario determinare il tempo di attesa del satellite attorno al secondo pianeta. Assumendo lo stesso tempo di trasferta dell'andata, l'angolo di fase per la trasferta di ritorno è uguale e contrario all'angolo di fase dell'andata.

Eseguito alcuni passaggi di uguaglianza angolare è possibile scrivere

$$t_w = \frac{2\psi}{|\omega_1 - \omega_2|} \quad (3.52)$$

Ovviamente, trasferte diverse presentano angoli e tempi diversi ma i ragionamenti sono applicabili anche per trasferte non Hohmann.

2.8 Effetti perturbativi

Il modello utilizzato per descrivere le orbite dei satelliti attorno ad un pianeta si appoggia su ipotesi iniziali stringenti, cioè le ipotesi del problema dei due corpi: presenza di due corpi e simmetrie sferiche di massa e inerzia; per questo motivo si definiscono orbite ideali dette kepleriane.

Tuttavia, considerando condizioni realistiche, le orbite effettive diventano delle orbite kepleriane perturbate con una certa deviazione: la trattazione del problema non cambia ma è necessario valutare l'effetto e le diverse cause.

Le orbite kepleriane possono essere utilizzate come orbite di riferimento, dette osculatrici, utili per interpolare l'orbita reale, che sono cambiate ogni qualvolta si verifica una variazione importante dei parametri tra orbita reale e osculatrice.

Di seguito sono descritti gli effetti perturbativi più importanti.

2.8.1 Presenza di un terzo corpo

Il primo effetto perturbativo considerabile è dato dall'attrazione gravitazionale di un terzo corpo esterno al sistema. In particolare, il modello rappresenta molto bene l'effetto lunisolare sull'orbita dei satelliti intorno alla Terra.

Data la presenza del corpo perturbatore di massa m_p a distanza ρ dal satellite e a distanza R dal centro della Terra, è possibile definire un angolo α tra i due raggi e un angolo β tra il raggio R e il raggio r tra satellite e Terra.

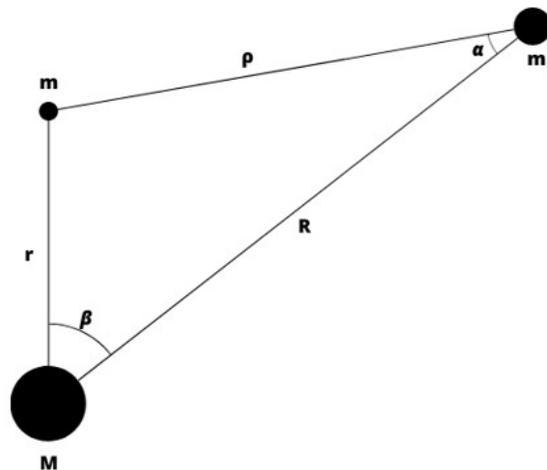


Figura 2.15 - Schema perturbazione da terzo corpo

Per analizzare l'influenza del corpo esterno è necessario riscrivere le equazioni del moto del satellite e della Terra in un sistema inerziale.

In particolare, il satellite presenta accelerazione

$$m\boldsymbol{\rho}_0'' = -G \frac{Mm}{r^2} \mathbf{u}_r - G \frac{mm_p}{\rho^2} \mathbf{u}_\rho \quad (3.53)$$

mentre l'accelerazione a cui è soggetta la Terra

$$M\mathbf{R}_0'' = G Mm/r^2 \mathbf{u}_r - G Mm_p/R^2 \mathbf{u}_R; \quad (3.54)$$

eseguendo la sottrazione tra le due equazioni del moto si ricava l'accelerazione del satellite nel sistema di riferimento inerziale

$$\mathbf{r}'' = -G M + m/r^2 \mathbf{u}_r - G m_p/\rho^2 \mathbf{u}_\rho + G m_p/R^2 \mathbf{u}_R. \quad (3.55)$$

Di fatto, siccome la massa del satellite è sicuramente inferiore alla massa dei due corpi celesti, questa può essere semplificata, e quindi è possibile riscrivere

$$\mathbf{r}'' = -\mu/r^2 \mathbf{u}_r - \mu_p/\rho^2 \mathbf{u}_\rho + \mu_p/R^2 \mathbf{u}_R. \quad (3.56)$$

Rispetto all'equazione del moto risultante dal problema dei due corpi, si nota che l'accelerazione del satellite è perturbata da due termini aggiuntivi che dipendono dal parametro gravitazionale del corpo perturbatore. L'azione perturbativa deriva dalla differenza delle forze attrattive sui due corpi.

Importante analizzare la variazione dell'azione perturbativa in base alla posizione dello spacecraft e al corpo perturbante.

Per Carnot, il rapporto tra perturbazione e costante gravitazionale del corpo perturbante a_p/μ_p , si può esprimere come

$$a_p/\mu_p = \left((1/R^4) + (1/\rho^4) - (2 \cos \alpha / R^2 \rho^2) \right)^{1/2} \quad (3.57)$$

che può essere riscritta

$$a_p = \left(\mu_p/\rho^2 \right) \left(1 - 2 \left(\rho^2/R^2 \right) \cos \alpha + \left(\rho^4/R^4 \right) \right)^{1/2}. \quad (3.58)$$

La trattazione si divide in due casistiche. Nel primo caso si suppone lo spacecraft vicino al corpo perturbante $\rho \ll R$ da cui l'azione perturbatrice

$$a_p = \mu_p/\rho^2 \quad (3.59)$$

si riduce alla forza attrattiva della massa perturbatrice sullo spacecraft rientrando nel problema dei tre corpi. D'altra parte, nel secondo caso si considera la massa perturbante alla stessa distanza dalla Terra e dallo spacecraft $\rho=R$.

In particolare, in quest'ultimo caso si considera il corpo perturbante lontano, cioè un rapporto $\varepsilon=r/R \ll 1$ da cui è possibile scrivere

$$\rho/R \cos \alpha = 1 - \varepsilon \cos \beta \quad (3.60)$$

e l'azione perturbatrice si può riscrivere

$$a_p = \left(\mu_p/R^2 \right) \left(R^2/\rho^2 \right) \left(1 + \left(\rho^4/R^4 \right) - 2(\rho/R)(1 - \varepsilon \cos \beta) \right)^{1/2}. \quad (3.61)$$

Attraverso il teorema di Carnot è possibile sviluppare

$$\rho^2 = r^2 + R^2 - 2rR \cos \beta \rightarrow \left(\rho/R \right)^2 = 1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon \cos \beta = 1 + x; \quad (3.62)$$

espandendo la relazione in serie binomiale di Newton si ottiene

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{1}{2} n(n-1)x^2 + o(x^2). \quad (3.63)$$

Da questo è possibile ricavare i due rapporti necessari allo sviluppo

$$\left(\frac{\rho}{R}\right)^4 = (1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 = 1 + 2\varepsilon^2 - 4\varepsilon \cos \beta + 4\varepsilon^2 \cos^2 \beta, \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{R} &= (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 = \\ &= 1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 - \varepsilon \cos \beta - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \cos^2 \beta. \end{aligned} \quad (3.65)$$

troncando ciò che è superiore a ε^2 perché trascurabile.

Sostituendo il tutto all'interno dell'azione perturbatrice

$$a_p = \left(\frac{\mu_p}{R^2}\right) \left(\frac{R^2}{\rho^2}\right) (\varepsilon^2 + 3\varepsilon^2 \cos^2 \beta)^{1/2}; \quad (3.66)$$

siccome il rapporto tra i raggi è unitario per ipotesi, l'azione perturbatrice risulta

$$a_p = \left(\frac{\mu_p}{R^2}\right) \varepsilon (1 + 3 \cos^2 \beta)^{1/2} = \mu_p \left(\frac{r}{R^3}\right) (1 + 3 \cos^2 \beta). \quad (3.67)$$

Tutti i termini sono riconducibili al problema dei due corpi e si sviluppano diverse situazioni a seconda dell'angolo β : lo spacecraft è in congiunzione/opposizione se $\beta=0,\pi$ mentre è in quadratura di fase se $\beta=\pm 1/2\pi$.

Da questo è possibile calcolare un'azione perturbatrice

$$a_p = 2\mu_p \left(\frac{r}{R^3}\right) \text{ se } \beta = 0, \pi, \quad (3.68)$$

$$a_p = \mu_p \left(\frac{r}{R^3}\right) \text{ se } \beta = \pm 1/2 \pi. \quad (3.69)$$

Interessante calcolare le perturbazioni su uno spacecraft in orbita geostazionaria causate dalla Luna e dal Sole. Malgrado l'enorme differenza di massa tra i due corpi, il Sole genera un'azione perturbativa sullo spacecraft di circa $1.64 \cdot 10^{-9} \text{km/s}^2$ mentre la Luna sviluppa una perturbazione di circa $3.65 \cdot 10^{-9} \text{km/s}^2$, doppia rispetto a quella del Sole a causa della differente distanza tra spacecraft e corpo perturbatore.

Per questo motivo, la Luna ricopre un ruolo più importante del Sole per quanto riguarda gli effetti perturbativi agenti sulle traiettorie intorno alla Terra, influenza che aumenta all'aumentare della quota dello spacecraft.

2.8.2 Potenziale terrestre ed effetti J_i

Un'ipotesi fondamentale del problema dei due corpi è la distribuzione uniforme e sferica della massa affinché sia possibile concentrare tutta la massa del singolo corpo nel baricentro. Tuttavia, la Terra non è perfettamente sferica e omogenea, e quindi presenta effetti gravitazionali triassiali importanti.

In generale, non potendo usare la modellazione classica per l'energia potenziale terrestre, si ipotizza il potenziale composto da un termine principale dato dalla massa omogenea e una serie di termini che tengono conto delle disomogeneità del pianeta. L'equazione del potenziale si modifica

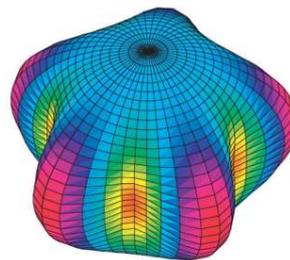
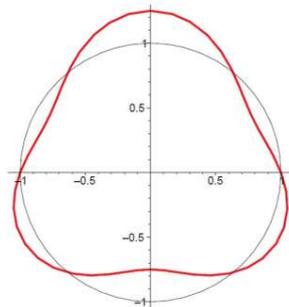
$$\begin{aligned} E_g = -\mu_T/r &\left(1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{R_T}{r}\right)^n P_n \sin La \right. \\ &\left. - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} J_{nm} \left(\frac{R_T}{r}\right)^n P_n^m \sin La \cos nLo \cos nL_o \right) \end{aligned} \quad (3.70)$$

dove P_n^m sono i polinomi di Legendre di ordine n e grado m rappresentativi della latitudine, i termini J_n sono detti armoniche zonali mentre J_{nm} sono armoniche tesserali se $n \neq m$ e armoniche settoriali se $n = m$.

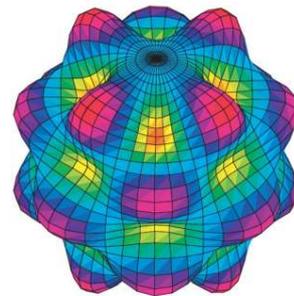
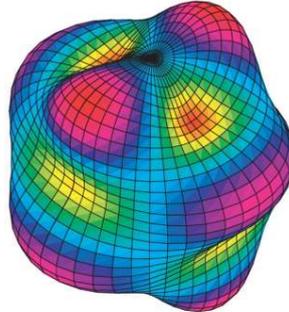
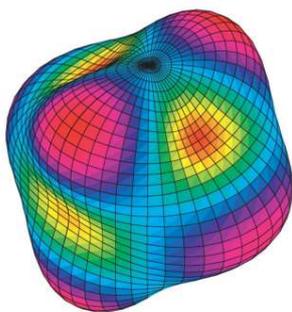
La Terra non è più rappresentata come una sfera ma come un geoide, cioè come la superficie equipotenziale del campo gravitazionale terrestre che meglio si adatta nel senso dei minimi quadrati al livello medio globale del mare, cioè il livello del mare in assenza di onde e maree. La definizione del geoide è strettamente legata con la definizione dell'energia potenziale.

Il primo modello di potenziale gravitazionale terrestre globale proposto risale al 1984 ed è rappresentato dal modello WGS84, dove il geoide è descritto come un ellissoide. Attualmente, tutti i termini aggiuntivi dell'energia potenziale rendono il geoide qualcosa di molto più complesso.

In particolare, tutti gli effetti pari descrivono una simmetria rispetto al piano equatoriale mentre gli effetti dispari un'asimmetria.



Zonal $J_3: l = 3, m = 0$ Sectorial: $l = 5, m = 5$



Tesseral $l = 4, m = 2$ Tesseral $l = 5, m = 2$ Tesseral $l = 8, m = 4$

Figura 2.16 - Potenziale terrestre

2.8.3 Radiazione solare

Ultimo effetto, spesso trascurato, è rappresentato dalla radiazione solare, cioè la pressione esercitata dal Sole su qualsiasi superficie ad esso esposta. In particolare, si rileva una variazione della quantità di moto dovuta all'impatto fisico di un fascio di fotoni sulla superficie.

Come già scritto, generalmente l'effetto è trascurabile a meno che il satellite non presenti un rapporto volume/massa molto grande.

A livello numerico, l'effetto perturbativo della radiazione solare si può calcolare

$$a_{SR} = P_s S / m \quad (3.71)$$

dove la pressione solare P_s è una funzione che dipende dal quadrato della distanza rispetto al Sole ma per i satelliti terrestri $P_s = 4.5 \cdot 10^{-6} \text{N/m}^2$.

Tuttavia, nel momento in cui la radiazione impatta la superficie, è possibile che questa possa essere più o meno riflettente causando una riflessione dei fotoni e quindi diminuendo l'effetto perturbativo della radiazione solare.

Il fenomeno deve essere analizzato a seconda del satellite considerato ma, per la maggior parte dei casi, la perturbazione può essere trascurata.

Capitolo 3

Variable Specific Impulse Magnetoplasma Rocket

Il capitolo riassume il meccanismo di funzionamento del propulsore con riferimenti alla storia di sviluppo dietro ad esso, arrivando ai prototipi degli ultimi anni.

Come scritto nel capitolo 1, il VaSIMR è un propulsore ibrido che si colloca tra propulsione elettrotermica ed elettromagnetica e presenta 40anni di sviluppo.

In particolare, il concetto del propulsore nasce nel 1977 dall'ex astronauta NASA Franklin Chang Diaz ed è stato studiato prima al MIT Plasma Science and Fusion Center e successivamente, a metà degli anni '90, all'Advanced Space Propulsion Laboratory del Johnson Space Center della NASA. Negli anni successivi furono programmati una serie di test sul prototipo VX-200 ma la mancanza di fondi e l'aumento dei costi ne obbligarono l'annullamento.

Per questo, nel 2005 Chang-Diaz propose una privatizzazione della tecnologia alla NASA attraverso uno "Space Act Agreement" e fondò la Ad Astra Rocket Company vicino a Houston. La mossa permise di ottenere fondi da US, Europa e Costa Rica per decine di milioni di dollari e l'avanzamento della tecnologia del VaSIMR da TRL2 a TRL6 in circa 5anni, passo importante se paragonato ai 25anni necessari ad arrivare al livello di maturità tecnologica precedente TRL2.

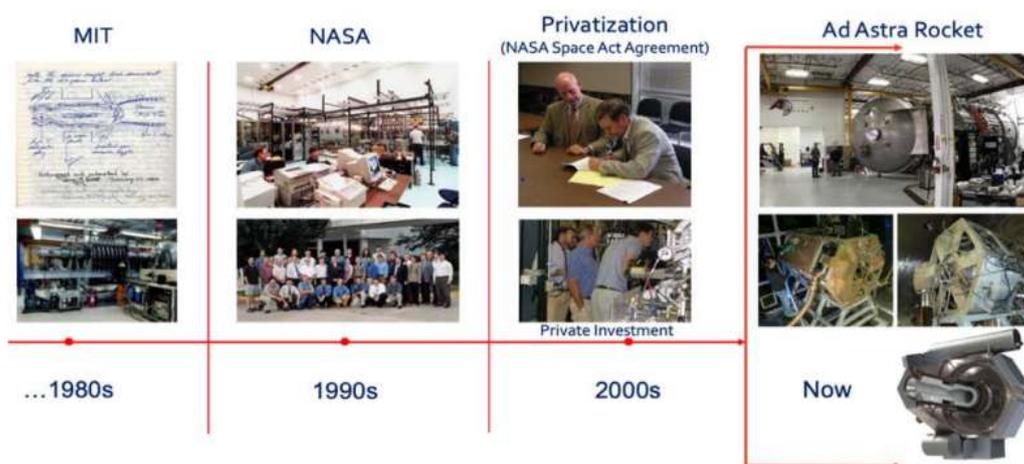


Figura 3.1 - Storia temporale dello sviluppo del VaSIMR

La caratteristica principale del motore è descritta dal suo nome, cioè la possibilità di variare il proprio impulso specifico. La caratteristica conferisce al propulsore un'alta flessibilità che lo rende adatto a differenti ambienti spaziali e lo definisce come ponte tra i propulsori elettrici ad alto impulso specifico ma bassa spinta e i propulsori chimici ad alta spinta ma basso impulso specifico.

Il VaSIMR è nato in risposta ai requisiti critici dei trasporti interplanetari ad alta velocità. Infatti, la possibile regolazione, l'eventuale sviluppo di alte spinte relative e la libera scelta del propellente rendono il motore idoneo per utilizzi ad alta potenza e, uniti al design senza elettroni, garantiscono lunga vita dei componenti perché esente da erosione da plasma e altre complicazioni dei materiali.

La lunga vita operativa prevista rende il propulsore particolarmente competitivo per missioni di compensazione di resistenza aerodinamica, riposizionamento di satelliti, missioni cargo dalla Luna a Marte/Terra e missioni interplanetarie.

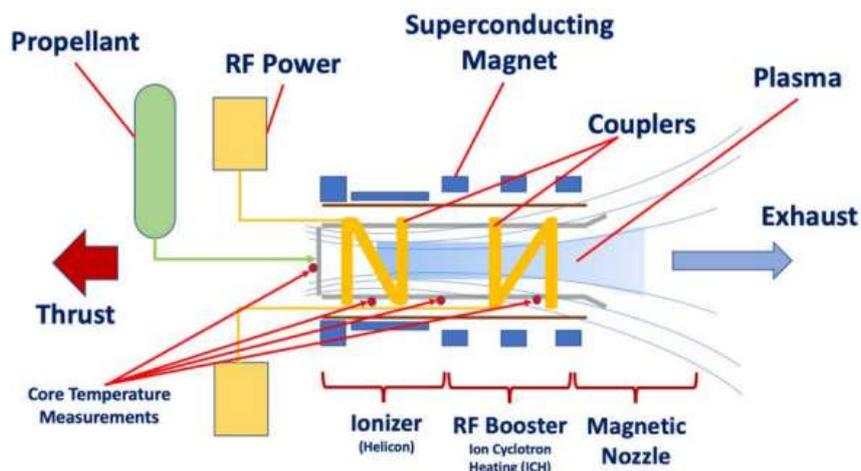


Figura 3.2 - Architettura VaSIMR

Il design eredita molto dalle tecnologie di fusione nucleare. In particolare, il controllo magnetico del plasma permette di ionizzare, contenere e accelerare in modo efficiente grandi quantità di plasma garantendo prestazioni ad alta potenza e alta spinta o impulso specifico.

Inoltre, i gas espulsi dall'ugello sono un plasma globalmente neutro; l'affidabilità del motore aumenta perché non è più necessario inserire un neutralizzatore per i gas di scarico, componente critico dei propulsori elettrici.

Il propulsore è composto da un totale di tre stadi. In particolare, nel primo stadio il propellente iniettato da valle viene ionizzato, nel secondo stadio il plasma viene riscaldato e accelerato mentre il terzo stadio è composto da un ugello magnetico che converte la velocità disordinata tangenziale del plasma in velocità ordinata assiale per generare la spinta. Gli stadi sono legati tra di loro da un campo magnetico assiale di circa 2T generato da magneti superconduttori raffreddati criogenicamente necessario a confinare il plasma lontano dalle pareti.

All'interno del plasma, gli ioni sono confinati dentro le linee di campo obbligati a seguire una traiettoria circolare definita dal raggio di Larmor

$$r_b = \frac{m_+ v_{\text{perp}}}{qB}; \quad (4.1)$$

affinché il plasma rimanga confinato lontano dalla parete, il raggio definito dal campo magnetico deve essere minore del raggio della camera dello stadio.

La schermatura del campo magnetico permette l'utilizzo di materiali standard: si trovano zone localmente più calde che potrebbero essere causate dalla convezione ma la massima temperatura della parete osservata non supera 500°C.

Inoltre, per manovre ad alta spinta in ambienti ad alta gravità si può progettare un post-bruciatore per il plasma attraverso un'iniezione coassiale ipersonica di gas neutro al fine di formare uno strato limite. Questo incrementa la portata di massa totale e potrebbe aiutare a recuperare alcune perdite dovute ai flussi congelati (cioè dovute alla ionizzazione del propellente) sotto forma di energia cinetica.

3.1 Helicon antenna - camera di ionizzazione

Il primo stadio consiste in una camera di ionizzazione per il propellente composta da un tubo di quarzo dentro cui scorre il gas inizialmente neutro, detto helicon antenna perché circondato da un'antenna elicoidale.

L'avvio del motore necessita l'innescò di una scintilla per ionizzare un piccolo volume di gas, in questo modo le radiofrequenze emesse dall'antenna possono accelerare gli elettroni liberi del plasma affinché collidano contro gli atomi neutri rimanenti per generare nuove coppie ione/elettrone.

In particolare, l'helicon antenna induce campi elettrici polarizzati circolarmente a destra, l'intensità del campo non varia nel singolo punto ma la sua direzione varia con frequenza angolare ω ; l'interazione con un campo magnetico assiale produce onde elicoidali o whistler nel propellente con frequenza di 10/50MHz.

Le onde elettromagnetiche prodotte energizzano gli elettroni liberi nel gas ancora neutro affinché ionizzino le altre molecole per collisione, generando un plasma freddo a circa 60'000K. Il processo crea una reazione a catena molto efficiente che permette il raggiungimento di un alto rateo di ionizzazione, molto vicino al 100%; questo è raggiunto grazie alle qualità uniche dell'antenna.

Una volta ionizzato il plasma fluisce liberamente lungo le linee di campo.

3.2 Ion cyclotronic resonance heating - booster stage

Il propellente ionizzato arriva al secondo stadio, che accoglie il plasma freddo e lo scalda attraverso una seconda antenna che utilizza una risonanza ciclotronica che depositare l'energia all'interno degli ioni. In particolare, l'antenna emette onde radio polarizzate circolarmente a sinistra sfasate di 90° tra di loro alla frequenza naturale degli ioni, cioè la frequenza di Larmor

$$\omega_b = v_{\text{perp}}/r_b = qB/m_+ \quad (4.2)$$

detta anche ciclotronica, determinata dal campo magnetico. La risonanza con le onde prodotte permette agli ioni di aumentare la propria energia cinetica.

La tecnica utilizzata per scaldare il plasma prende il nome di ion cyclotron resonance heating - ICRH e rappresenta la parte di design ereditata dalle ricerche sulla fusione. Infatti, la stessa tecnologia si ritrova nei reattori a fusione tokamak (acronimo russo per “camera toroidale con spire magnetiche) per il confinamento magnetico del plasma e l’applicazione per uso propulsivo deriva da uno spin-off investigativo sui divertori degli stessi reattori.

Tuttavia, al contrario dei reattori tokamak dove il plasma circola continuamente all’interno del case, gli ioni passano sotto l’antenna una sola volta.

Il fenomeno di risonanza presenta due parametri critici, cioè la carica dell’antenna e il voltage standing wave ratio - VSWR, misura dell’accoppiamento tra potenza della radiofrequenza e plasma come carico resistivo.

Inoltre, poiché il cuore è relativamente poco denso, il riscaldamento può avvenire solamente attraverso radiazione o bombardamento del gas neutro, processi di riscaldamento meno efficienti di convezione o contatto diretto. Per questo motivo, un buon accoppiamento di frequenze dipende dal mantenimento di un plasma più denso possibile vicino all’antenna e quindi dalle prestazioni dell’helicon.

Il passaggio nel secondo stadio riesce a portare il plasma ad altissime temperature, dagli 1.8 ai 10 milioni di Kelvin.

Recenti studi hanno osservato che alcune manipolazioni del campo magnetico possono portare all’attivazione della seconda armonica ciclotronica degli ioni con un importante accoppiamento tra potenza della radiofrequenza e armonica.

Il risultato ha stimolato la ricerca di altri meccanismi in aggiunta alla risonanza ciclotronica degli ioni che potrebbero essere implementati all’interno del secondo stadio per migliorare l’accoppiamento delle onde.

3.3 Specchio magnetico

L’effetto di specchio magnetico, duale all’effetto di ugello magnetico, si manifesta in presenza di un campo magnetico disuniforme e non costante. A causa della loro topologia aperta, gli specchi magnetici presentano intrinsecamente delle perdite; tuttavia, sebbene vada a discapito della fusione controllata, la caratteristica è effettivamente utile nelle applicazioni propulsive.

Il campo magnetico è un campo conservativo e solenoidale, queste due proprietà sono alla base dell’effetto di specchio/ugello magnetico.

In particolare, la solenoidalità del campo determina un aumento di intensità dove le linee di campo si avvicinano e una diminuzione dove si allontanano, perché il flusso su una superficie chiusa deve rimanere nullo; d’altra parte, la conservatività del campo genera una forza magnetica perpendicolare alla velocità della particella su cui agisce affinché il lavoro sia nullo e l’energia cinetica rimanga costante.

In presenza di un campo magnetico costante la particella si può indefinitamente muovere lungo un'elica con passo e raggio noti, dati dal raggio di Larmor; tuttavia, in caso di campo magnetico variabile, anche il raggio dell'elica varia andando a modificare le componenti di velocità perpendicolare e parallela della particella.

In particolare, l'effetto di specchio magnetico è ottenuto aumentando assialmente l'intensità del campo magnetico; le linee di campo si avvicinano causando una diminuzione del raggio di Larmor e un aumento della velocità perpendicolare. Lo specchio magnetico agisce come una differenza di potenziale per le particelle cariche in movimento nel campo magnetico.

Approcciandosi allo specchio magnetico, la singola particella inizia a ruotare con frequenza maggiore e raggio sempre più piccolo, e la velocità parallela al campo diminuisce per mantenere costante l'energia.

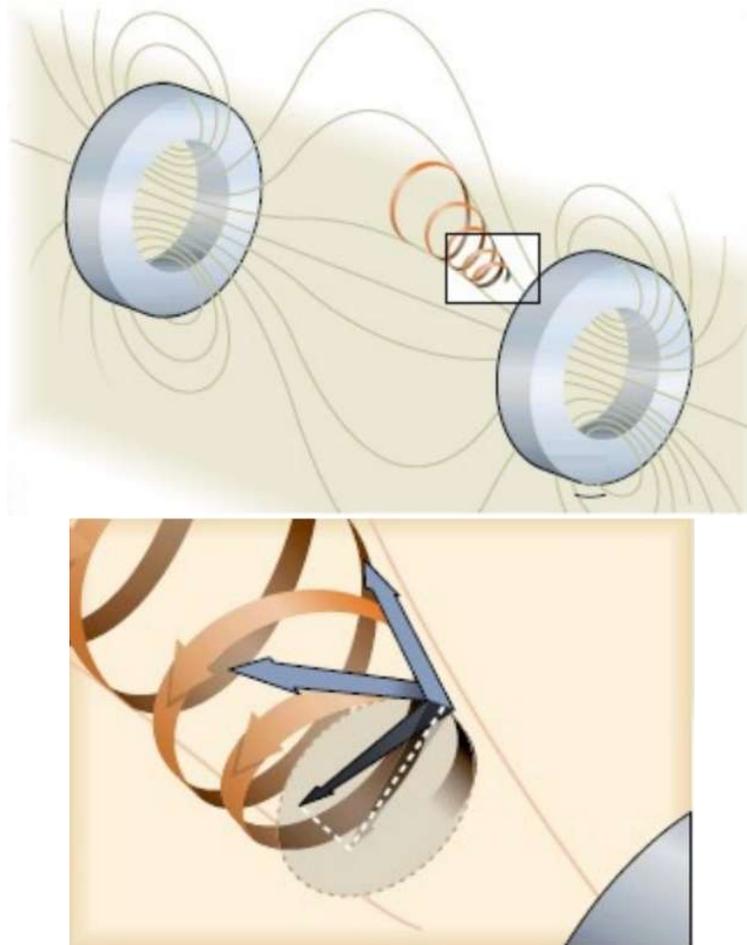


Figura 3.3 - Specchio magnetico

In base al contenuto energetico della particella, questa può essere riflessa o fuggire all'effetto magnetico. In caso di basso contenuto energetico, la velocità parallela della

particella si annulla: il moto verso l'aumento del campo è impedito dall'alta intensità di quest'ultimo e un piccolo disturbo potrebbe riflettere la particella in direzione opposta, causando un aumento di velocità in quella direzione. D'altra parte, in caso di alto contenuto energetico, la particella può passare lo specchio e continuare il suo moto riacquisendo la velocità iniziale.

Il primo prototipo del VaSIMR, cioè il VX-10, prevedeva due specchi magnetici nel secondo stadio per obbligare gli ioni a passare più volte sotto l'antenna ICRH: gli specchi ricoprivano una funzione di filtro che permetteva il passaggio ai soli ioni con il contenuto energetico voluto.

Tuttavia, già dal secondo prototipo, cioè il VX-50, lo specchio magnetico è stato accantonato a causa dello sviluppo di un'antenna più efficiente che permetteva al plasma di raggiungere il target energetico con un solo passaggio sotto di essa.

3.4 Ugello magnetico

Come detto nel paragrafo precedente, l'ugello magnetico è l'effetto opposto dello specchio magnetico, e quindi è dovuto ad una diminuzione assiale del campo magnetico, cioè un allontanamento delle linee di campo.

Al contrario dello specchio magnetico, che ha una funzione di filtro e trasforma la velocità assiale in velocità rotazionale, l'ugello è utilizzato per convertire l'energia rotazionale caotica degli ioni in energia cinetica parallela al campo. La particella carica avanza assialmente lungo l'ugello percependo un campo magnetico minore: il raggio di Larmor aumenta diminuendo la velocità perpendicolare, e quindi, per la conservazione dell'energia, la velocità parallela al campo aumenta.

L'ugello magnetico rappresenta il terzo e ultimo stadio del motore, con il compito di accelerare il plasma caldo in arrivo dal secondo fino alla velocità di Alfvén

$$v_A = B / (\mu_0 n_i m_i)^{1/2} \quad (4.3)$$

velocità caratteristica a cui si propagano le perturbazioni nel campo magnetico dove n_i è la densità del numero di ioni e m_i la massa degli ioni.

La velocità di Alfvén negli ugelli magnetici è l'analogo della velocità del suono negli ugelli aerodinamici: entrambi definiscono un punto di transizione oltre il quale la dinamica del flusso a valle non ha effetto sui parametri a monte. E, analogamente agli ugelli aerodinamici, un ugello magnetico progettato opportunamente stacca il plasma a distanze di qualche metro dalla gola alfvénica.

Il distacco del plasma nell'ugello comporta la perdita di una piccola quantità di campo magnetico che viene staccata insieme ad esso, la spesa energetica di questa distorsione pone una piccola tassa sulle prestazioni del propulsore.

La natura non fisica dell'ugello indica la sua innata adattabilità che gli permette di adeguare i gas in uscita in risposta alle condizioni di volo. Un ugello con una tale versatilità utilizza meglio la potenza disponibile del propulsore e quindi permette di raggiungere prestazioni migliori.

3.5 Regolazione della spinta

La nota distintiva principale del VaSIMR è la possibile regolazione della spinta a potenza costante, derivata dalla gestione di quest'ultima tra i primi due stadi. Ad oggi, è l'unico motore in grado di regolare la spinta a potenza costante.

In particolare, il propulsore può produrre alte spinte o alti impulsi specifici in base alla fase di missione: fasi in forti ambienti gravitazionali necessitano alte spinte per ridurre i tempi di permanenza e le possibili perdite per gravità mentre fasi in ambienti gravitazionali deboli impiegano alti impulsi specifici per ottimizzare il propellente e ridurre il consumo.

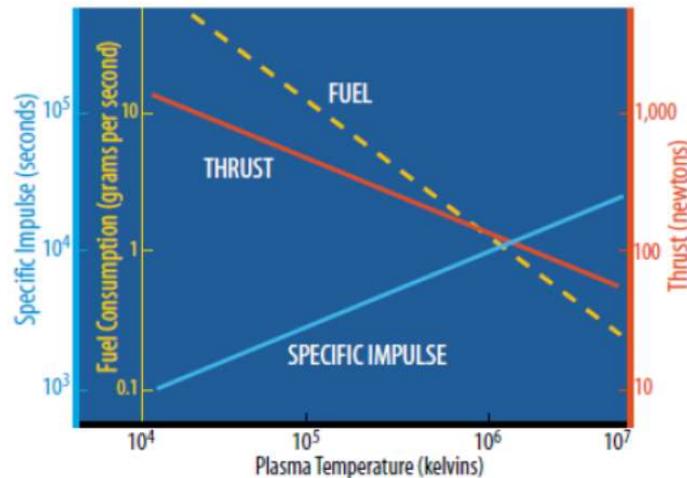


Figura 3.4 - Regolazione della spinta a potenza costante e consumo di propellente

La regolazione è attuata ripartendo differentemente l'energia tra l'helicon antenna del primo stadio e l'antenna ICRH del secondo stadio. In particolare, affinché il propulsore sviluppi alti impulsi specifici, si fornisce maggior potenza all'antenna ICRH per aumentare l'energia cinetica del plasma in uscita; la restante potenza all'helicon antenna è sufficiente a ionizzare una portata di propellente minore che determina una spinta inferiore. D'altra parte, affinché il propulsore sviluppi alte spinte, si fornisce maggior potenza all'helicon antenna per ionizzare una portata di propellente più elevata; la potenza rimanente all'antenna ICRH limita l'energia per riscaldare il plasma e determina una velocità efficace di scarico minima.

Vecchi test del 2001 sulla modalità ad alta spinta hanno ottenuto una velocità del flusso in uscita di 15km/s anche senza il riscaldamento dato dal secondo stadio, portando allo sviluppo di propulsori più semplici e leggeri composti dalla sola helicon antenna, detti helical plasma thrusters.

Uno dei vantaggi principali della regolazione della spinta a potenza costante è la flessibilità aggiuntiva di poter interrompere missioni interplanetarie (anche con equipaggio) in tempi ragionevoli.

In caso di emergenza, i propulsori chimici devono aspettare il successivo sparo per poter attuare una manovra dato che prevedono manovre single-burn con lunghi periodi di coasting; d'altra parte, i propulsori elettrici attuano manovre continue ma a bassa spinta, e quindi sono limitati dai lunghi tempi di manovra.

Il VaSIMR è l'unico propulsore con un design in grado di reagire prontamente ad un'emergenza con spinte e tempi ragionevoli.

3.6 Propellenti

Come detto all'inizio di questo capitolo, una delle caratteristiche più vantaggiose del VaSIMR è la libera scelta del propellente; infatti, durante le prove sperimentali sui prototipi, sono stati analizzati diversi propellenti leggeri, tra i quali idrogeno, elio, deuterio, ma anche propellenti pesanti, come argon e xeno.

Le limitazioni presenti sulla tecnologia attuale dei superconduttori si ripercuotono sulla capacità di confinamento del campo magnetico, per questo motivo il sistema favorisce propellenti leggeri. Tuttavia, l'utilizzo di gas leggeri mostra anche propri vantaggi; in particolare, propellenti più leggeri permettono di risparmiare massa nelle missioni interplanetarie e quindi incrementare la massa disponibile per il payload e il sistema di potenza elettrica. Inoltre, questi presentano un tempo di burning ridotto e necessitano di una potenza minore per raggiungere la differenza di velocità necessaria alla manovra. D'altra parte, l'helicon antenna del primo stadio ionizza più efficientemente gas più pesanti.

Importante ricordare che l'utilizzo di propellenti criogenici apre la possibilità di un design di rigenerazione termica delle pareti degli stadi e dell'ugello.

Infine, il propellente potrebbe anche derivare dai rifiuti gassosi dei sistemi di supporto vitale aperti o ibridi.

La flessibilità sulla scelta del propellente è permessa grazie ad una variazione della forza del campo magnetico o la frequenza ciclotronica dell'antenna del secondo stadio, in questo modo il VaSIMR può adattarsi a qualsiasi gas.

L'hardware del motore rimane uguale per qualsiasi configurazione di propellente e, dato che gli elettrodi non entrano in contatto con il plasma, è possibile ignorare i possibili problemi di configurazione, rivestimento e materiale.

L'ultimo prototipo del motore, cioè il VX-200, fu testato con un'alimentazione ad argon, malgrado questo non sia un propellente leggero, perché la velocità efficace di scarico di 50km/s del gas si abbinava bene a quella necessario per le operazioni spaziali in orbita terrestre e per le applicazioni a breve termine

All'inizio degli anni 2000, esperimenti sulla miscela dei propellenti, ad esempio l'aggiunta di 10% di idrogeno nell'elio o nel deuterio, mostrarono l'esistenza di una popolazione di ioni minoritari con alta energia a velocità maggiore di 150km/s. Al tempo, il meccanismo di accelerazione non fu totalmente compreso ma l'utilizzo del nuovo gruppo di ioni avrebbe potuto portare all'introduzione di un altro parametro di controllo per la miscela dei propellenti.

Tuttavia, nei report successivi il fenomeno fu completamente dimenticato.

3.7 Criticità e problemi di sviluppo

Il VaSIMR rappresenta la tecnologia più promettente per missioni interplanetarie umane configurandosi come precursore dei futuri propulsori a fusione; tuttavia, la stessa tecnologia necessaria al motore non ha ancora raggiunto un livello di maturità sufficiente e lo sviluppo dell'architettura migliore è ancora in corso, con molti problemi ancora da risolvere.

Trascurando le criticità legate alla complessità e alle dimensioni del motore, il problema più ostico da risolvere è dovuto all'elevato campo magnetico necessario al confinamento del plasma e alle onde radio necessarie al riscaldamento e alla ionizzazione del propellente. In particolare, è possibile che questi due possano generare interferenze con molti sottosistemi di bordo, tra cui le telecomunicazioni e gli strumenti del payload. Il problema potrebbe essere risolto - o parzialmente ridotto - implementando schermature o modulazioni delle onde a radiofrequenze, ma questo aumenterebbe la complessità del sistema (già molto elevata) limitando la gamma di payload possibili.

Inoltre, quando il campo magnetico esterno varia, l'elevato campo del motore potrebbe indurre coppie nei solenoidi superconduttori causando complicazioni per il sistema di controllo d'assetto. La forza di Lorentz tenderebbe ad allineare il campo magnetico del circuito con quello esterno, e quindi sarebbero necessarie continue correzioni per mantenere un certo puntamento.

La soluzione proposta prevede un'architettura che accoppia due motori uguali con direzioni opposte del campo interno, detta "zero-torque magnetic quadruple"; tuttavia, le instabilità di una tale configurazione rappresentano rischi importanti che devono essere mitigati teoricamente e sperimentalmente.

Infine, malgrado un ampio campo magnetico potrebbe proteggere gli astronauti dall'ambiente spaziale, una lunga esposizione ad un campo così intenso e a microonde con frequenza nell'ordine dei GHz potrebbe portare a seri problemi di salute per l'astronauta.

L'organizzazione mondiale della sanità ha indetto un approfondimento sui campi elettromagnetici, detto "electromagnetic fields project", per analizzare i rischi per la salute associati a tecnologie che emettono radiazioni non ionizzanti.

Nel 2007, i risultati dello studio hanno dimostrato lo sviluppo di complicazioni gravi legate all'esposizione a campi superiori a $100\mu\text{T}$. In particolare, i risultanti degli effetti a breve termine pronosticano una stimolazione continua di nervi e muscoli e cambiamenti nell'eccitabilità delle cellule nervose nel sistema nervoso centrale mentre i risultati degli effetti a lungo termine non sono ancora conclusivi ma mostrano segnali di leucemia infantile e possibile cancro.

Da notare che i campi oggetto di studio erano 10'000 volte più deboli di quelli del nucleo del VaSIMR. Per questo motivo, per progettare veicoli spaziali per missioni

umane, la priorità principale è lo sviluppo e la costruzione di una schermatura efficace e sicura contro le onde elettromagnetiche.

Queste sono le criticità più importanti ma si trovano tutta una serie di severe sfide tecnologiche ancora da risolvere per un'applicazione futura.

Il distacco efficiente del plasma attraverso la transizione superalfvenica del flusso è stato dimostrato sperimentalmente nel 2013.

Tuttavia, nei successivi report sulle prestazioni del funzionamento del VX-200 a piena potenza, si sono notati alcuni ioni seguire le linee di campo magnetico senza staccarsi. In realtà, a causa della loro massa inferiore, le particelle più inclini a seguire le linee di campo sono gli elettroni, lo stesso comportamento seguito dagli ioni comporta una perdita.

A causa del limitato controllo termico e dei limiti del pompaggio a vuoto, i test sperimentali sono durati solo 5 secondi. In futuro sono necessarie accensioni più lunghe per verificare che il veicolo spaziale non si carichi in maniera significativa e le varie instabilità del plasma non influenzino il distacco.

Inoltre, è necessario appurare che il plasma espanso presenti abbastanza direttività per spingere il veicolo in modo controllato e stabile e che la transizione alfvenica sia confinata in intervalli di regolazione dell'impulso specifici utili e a distanza sufficiente per assicurare direttività ed efficienza degli ugelli.

Un altro problema tecnologico prioritario è rappresentato dal sistema di controllo termico. Malgrado il plasma non entri mai in contatto diretto con i componenti del motore, il bombardamento di gas neutro non ionizzato e l'irraggiamento del plasma rappresentano sfide urgenti per i materiali del motore.

La soluzione attuale propone una conduzione passiva del calore dal nucleo ai radiatori tramite materiali conduttivi, cioè tubi di calore, comportando un elevato aumento del peso del motore. Per attenuare il problema, è stata anche suggerito l'utilizzo di materiali termici a cambiamento di fase - una cera che assorbe il calore durante il funzionamento e lo dissipa durante i periodi di coasting - affinché le dimensioni dei radiatori possano essere ridotte.

A causa dei limiti del controllo termico, l'uso di una spinta continua a potenza costante, utile a trarre reale vantaggio dalla capacità di variazione dell'impulso specifico del motore, è ancora un obiettivo lontano.

Ultima sfida degna di nota è quella energetica. Il VaSIMR è intrinsecamente un dispositivo ad alta potenza che necessita di un elevato quantitativo di energia per poter lavorare ininterrottamente.

L'unica soluzione attualmente disponibile per generare un elevato quantitativo di energia sono i pannelli fotovoltaici o i reattori nucleari. Tuttavia, per potenze superiori a 100kW, i pannelli solari attuali perdono di affidabilità: a causa del rapporto efficienza/peso, raggiungendo la potenza del VX-200, le dimensioni e il peso degli array diventano eccessivi. D'altra parte, i reattori qualificati per il volo attualmente raggiungono potenze di 10kW (ad esempio il Topaz I) mentre sistemi più grandi, come il reattore a fissione SP-100, sono stati cancellati.

Un'evidente difficoltà nell'utilizzo dei reattori nucleari è l'efficienza di conversione dell'energia da termica ad elettrica. In particolare, il Topaz I presenta un'efficienza del 7% e quindi, applicato al VX-200 che necessita 200kW di potenza elettrica, il motore dovrebbe irradiare 2.8MW di calore di scarto. Pertanto, per alimentare un motore energivoro come il VaSIMR, sono necessari progressi nel campo della fissione/fusione nucleare e nel campo dell'efficienza dei pannelli solari.

3.8 Prototipi esistenti

Durante gli anni di sviluppo del motore, sono stati costruiti diversi prototipi per studiare le architetture e le tecnologie scelte per il modello teorico.

Dal primo prototipo, cioè il VX-10, alimentato da 10kW di potenza, si è arrivati a sviluppare il VX-200 e il VX-200SS, dove la sigla SS indica lo steady-state del motore, entrambi alimentati da 200kW di potenza elettrica continua.

L'attuale versione sperimentale del VaSIMR presenta come componente chiave un magnete superconduttore in grado di creare un campo magnetico massimo di circa 2T, consentendo contenimento e accelerazioni efficienti del plasma.

Fino al 2009, la tecnologia non consentiva la costruzione di camere a vuoto con sufficienti dimensioni e pompaggio da permettere misurazioni accurate. Infatti, i test eseguiti negli anni precedenti sono stati realizzati con intensità del campo magnetico che non consentivano un riscaldamento efficiente dell'argon attraverso la risonanza ciclotronica e presentavano pressioni residue superiori a 10millitorr nella camera a vuoto che avrebbero potuto influenzare le misurazioni. Inoltre, i componenti utilizzati non erano rilevanti per il volo spaziale.

Per questo motivo, il prototipo VX-200 è nato allo scopo di attuare test end-to-end dei componenti rilevanti per il volo spaziale in ambiente di vuoto costruiti con una tecnologia più matura. Infatti, il prototipo è stato testato all'interno di una camera a vuoto in grado di fornire pressioni inferiori a $4 \cdot 10^{-4}$ torr.

Gli esperimenti condotti hanno mostrato una produzione di plasma di argon con basso costo di ionizzazione (circa 78eV/ione) nel primo stadio e hanno verificato l'operatività continua a massima potenza del secondo stadio. Inoltre, i test hanno collaudato l'efficienza dei generatori di radiofrequenze a stato solido in presenza del massimo campo magnetico generabile dai magneti superconduttori.

La grande camera a vuoto ha permesso di ottenere risultati affidabili riducendo l'influenza dei disturbi dovuti al gas rimanente e all'interazione con la parete.

Nel 2013, il VX-200 ha raggiunto un'efficienza del 72% e un impulso specifico di 4900s a massima potenza, usando l'argon come propellente e operando impulsi di qualche minuto con raffreddamento attivo limitato.

D'altra parte, il VX-200SS è una versione modificata del primo prototipo costruita nel 2015, che presenta una nuova unità di elaborazione della potenza da 120kW che potenzia il secondo stadio del motore.

Inoltre, il prototipo è una delle tre tecnologie di propulsione elettrica selezionate dalla NASA per dimostrare il funzionamento stazionario a 100kW di potenza. A causa dei limiti di budget, il prototipo non monta il magnete superconduttore ad alta temperatura richiesto (che doveva produrre un campo magnetico con picco maggiore) ma utilizza quello del VX-200. Questa limitazione ha causato problemi di gestione termica più impegnativi e ha reso inaffidabili i dati sull'erosione; tuttavia, il programma ha prodotto risultati rivoluzionari testando tutti i principali sottosistemi ad alta potenza in condizioni stazionarie.

Il sistema di gestione termica integrato del VX-200SS ha permesso di superare i pochi minuti di accensione che limitavano il precedente prototipo permettendo l'analisi delle condizioni stazionarie del plasma nel motore. Inoltre, successivi test, eseguiti dalla metà del 2018 all'inizio del 2019, hanno consentito di migliorare il design della gestione termica.

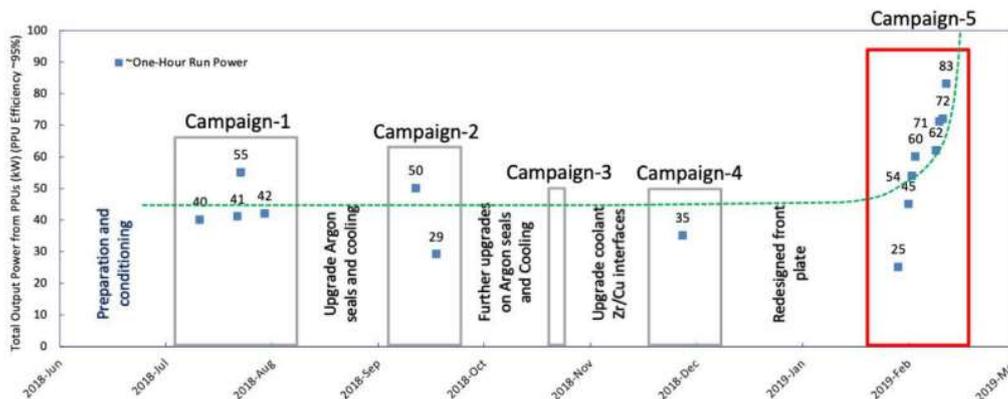


Figura 3.5 - Curva di apprendimento e prove sperimentali sul VX-200SS

Quest'ultima prova sperimentale ha permesso di arrivare al record di 88ore di funzionamento continuo a 80kW nell'estate del 2021. Malgrado l'enorme successo di questo record, la campagna in corso della Ad Astra mira a raggiungere uno stato termico stazionario continuo a 100kW di potenza.

Gli ultimi due prototipi forniscono eccellenti banchi di prova per sperimentare, e successivamente implementare, cambiamenti nel design del VaSIMR.

Inoltre, tutte le varie prove sperimentali hanno permesso lo sviluppo di un sistema costo efficiente di controllo termico ad alta potenza.

La tecnologia del motore può potenzialmente aprire ad una nuova scala di potenza per la propulsione elettrica. Infatti, la maturazione tecnologia mira a superare le sfide progettuali del VaSIMR affinché sia possibile una prova di volo.

Capitolo 4

Metodi di ottimizzazione indiretti per traiettorie spaziali

Il problema in analisi tratta l'ottimizzazione della traiettoria di fuga dal punto SEL2. Il capitolo si pone l'obiettivo di descrivere in maniera concisa i metodi di ottimizzazione indiretti, in particolare il metodo di single shooting implementato nel codice utilizzato per il problema in analisi.

Il problema di ottimizzazione spinge alla ricerca di una legge di controllo che massimizzi o minimizzi un particolare indice di prestazione. Nel caso di traiettorie interplanetarie il parametro più stringente è il peso del veicolo spaziale e quindi l'ottimizzazione della traiettoria ha come obiettivo la ricerca, tra le infinite traiettorie possibili, di quella caratterizzata dal consumo di propellente minore, cioè quella che presenta maggior massa finale.

Il problema può anche considerare più parametri discordanti, cioè con massimi e minimi non coincidenti. In questo caso, la funzione costo complessiva deve pesare opportunamente i vari indici di prestazione richiesti.

Per proseguire è necessario distinguere gli approcci dai metodi.

In particolare, esistono due tipi di approcci, cioè analitico e numerico. L'approccio analitico si può utilizzare in pochissimi casi per un problema di trasferta orbitale; tuttavia, spesso restituisce soluzioni affette da errori, e quindi i risultati sono di scarso interesse perché senza fini pratici. Per questo motivo, la maggior parte degli studi di ottimizzazione prevedono l'applicazione di approcci numerici.

A loro volta, gli approcci numerici si dividono in metodi diretti e indiretti.

I metodi diretti approssimano la soluzione attraverso una parametrizzazione delle variabili di stato e degli input di controllo, comportando una discretizzazione della variabile temporale; tali metodi consentono di raggiungere la convergenza più facilmente ma non garantiscono la sua ottimalità.

D'altra parte, pur utilizzando le stesse tecniche, i metodi indiretti presentano condizioni analitiche aggiuntive per ricercare la soluzione ottimale e raggiungono tale soluzione con elevata precisione numerica e limitato numero di parametri (e quindi minor costo computazionale) senza semplificazioni che ne compromettano l'utilità pratica. In particolare, le condizioni analitiche aggiuntive consentono di spostare il problema di ottimizzazione sulla determinazione di alcuni parametri,

detti moltiplicatori di Lagrange, spesso definiti come co-stato perché evolvono insieme al vettore di stato. Il dominio di ricerca di questi parametri, basato sul principio di Pontryagin, è reso più complesso dalla varianza dei moltiplicatori di Lagrange che possono variare in un insieme illimitato.

Malgrado i molti punti di forza che li rendono viabili, i metodi indiretti presentano una bassa robustezza e un'innata dipendenza dalla soluzione di tentativo fornita all'inizio della procedura di calcolo, e quindi una difficoltà di convergenza.

4.1 Teoria del controllo ottimale

La teoria descrive il sistema generico attraverso un vettore di variabili di stato \mathbf{x} , e quindi l'evoluzione del sistema viene descritta dalle equazioni differenziali della stessa variabile di stato

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad (5.1)$$

dove \mathbf{u} è il vettore dei controlli e t la variabile indipendente tempo.

La traiettoria viene suddivisa in n intervalli, detti archi, così che le discontinuità possano essere spostate alle interfacce di queste lasciando le variabili continue all'interno. In questo modo, il generico intervallo j inizia al tempo $t_{(j-1)+}$ e finisce al tempo $t_{(j)-}$ e analogamente le variabili assumono valore $\mathbf{x}_{(j-1)+}$ e $\mathbf{x}_{(j)-}$ dove i segni indicano il valore assunto a destra (+) o sinistra (-) del punto.

Le condizioni al contorno del sistema possono essere imposte ai contorni esterni e interni, e quindi sono miste, e coinvolgere valori delle variabili di stato e della variabile indipendente

$$\chi(\mathbf{x}_{(j-1)+}, \mathbf{x}_{(j)-}, t_{(j-1)+}, t_{(j)-}) = 0 \text{ con } j = 1, \dots, n. \quad (5.2)$$

La ricerca della condizione di ottimo diventa una ricerca dei valori dei massimi o minimi locali del funzionale

$$J = \varphi(\mathbf{x}_{(j-1)+}, \mathbf{x}_{(j)-}, t_{(j-1)+}, t_{(j)-}) + \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{(j)-}} \Phi(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \quad (5.3)$$

con $j=1, \dots, n$

somma di due termini, cioè la funzione φ che dipende dalle condizioni al contorno e la funzione Φ che dipende dalla traiettoria.

Introducendo nuove variabili ausiliarie è possibile riscrivere il problema in modo da ricondursi alla formulazione di Lagrange con $\varphi=0$ o a quella di Mayer con $\Phi=0$.

L'ultima formulazione è quella utilizzata nell'analisi del problema trattato.

Per ricondursi alla formulazione di Mayer, il funzionale è riscritto introducendo i moltiplicatori di Lagrange, che si dividono in costanti μ associati alle condizioni al contorno e in variabili λ associate all'equazione di stato

$$J^* = \varphi + \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\chi} + \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{(j)-}} (\Phi + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{f} - \mathbf{x}')) dt \text{ con } j = 1, \dots, n. \quad (5.4)$$

I due funzionali J e J^* presentano le stesse dipendenze e coincidono se sono soddisfatte l'equazione di stato, le condizioni al contorno e i loro valori esterni.

Integrando per parti l'ultimo funzionale in modo da eliminare le derivate

$$J^* = \varphi + \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{x} + \sum_j (\lambda_{(j-1)+}^T \boldsymbol{x}_{(j-1)+} - \lambda_{(j)-}^T \boldsymbol{x}_{(j)-}) + \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{(j)-}} (\Phi + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f} - \boldsymbol{\lambda}'^T \mathbf{x}) dt \text{ con } j = 1, \dots, n \quad (5.5)$$

e differenziando

$$\begin{aligned} \delta J^* = & \left(-H_{(j-1)+} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{(j-1)+}} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t_{(j-1)+}} \right) \delta t_{(j-1)+} \\ & + \left(H_{(j)-} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{(j)-}} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t_{(j)-}} \right) \delta t_{(j)-} \\ & + \left(-\boldsymbol{\lambda}_{(j-1)+}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}_{(j-1)+}} + \boldsymbol{\mu}^T \left[\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \mathbf{x}_{(j-1)+}} \right] \right) \delta \mathbf{x}_{(j-1)+} \\ & + \left(-\boldsymbol{\lambda}_{(j)-}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}_{(j)-}} + \boldsymbol{\mu}^T \left[\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \mathbf{x}_{(j)-}} \right] \right) \delta \mathbf{x}_{(j)-} \\ & + \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{(j)-}} \left(\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \boldsymbol{\lambda}'^T \right) + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} \right) dt \text{ con } j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (5.6)$$

dove H rappresenta l'Hamiltoniano

$$H = \Phi + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f} = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f} \quad (5.7)$$

perché si considera la formulazione di Mayer.

La condizione di ottimo si ottiene ricercando la condizione di stazionarietà del funzionale, cioè l'annullamento della sua derivata prima per qualsiasi variazione compatibile con le equazioni differenziali e le condizioni al contorno.

La stazionarietà può essere raggiunta scegliendo opportunamente i coefficienti di Lagrange; così facendo, si ottengono le equazioni differenziali di Eulero-Lagrange per i coefficienti variabili

$$d\boldsymbol{\lambda}/dt = -\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}\right)^T \quad (5.8)$$

e le equazioni algebriche per i controlli

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}}\right)^T = 0. \quad (5.9)$$

Si nota come le leggi di controllo siano indipendenti dalla ricerca dell'ottimo del funzionale e quindi, imponendo una condizione di vincolo definendo un dominio per l'ottimo, in ogni punto della traiettoria il valore di ottimo del controllo è quello che rende massimo o minimo l'Hamiltoniano.

In particolare, secondo il principio di massimo di Pontryagin, si delineano due possibilità: se il valore di ottimo cade all'interno del dominio il vincolo imposto non interviene in quel punto, detto controllo non vincolato, mentre se il valore cade fuori dal dominio il controllo ottimo assume valore massimo o minimo, detto controllo vincolato. Inoltre, nel caso in cui l'Hamiltoniano fosse lineare rispetto ad uno dei controlli vincolati, si rientra in un caso particolare nel quale il controllo non compare in modo esplicito e quindi risulta indeterminare.

In quest'ultimo caso, si trovano altre due modi per massimizzare il funzionale: se il controllo è diverso da zero allora l'Hamiltoniano è massimizzato per il valore massimo o minimo dipendentemente dal segno positivo o negativo del funzionale, detto controllo bang-bang, mentre se il controllo è nullo in un certo intervallo di tempo, detto arco singolare, è necessario imporre nulle tutte le derivate rispetto al tempo dei coefficienti finché non compare esplicitamente il controllo in una di queste, il controllo ottimo è determinato annullando l'ultima derivata.

Per chiudere il problema di ottimizzazione è necessario imporre le condizioni al contorno agli estremi degli archi. In particolare, si considera il punto j -esimo come estremo finale dell'intervallo $(j-1)$ -esimo ed iniziale dell'intervallo j -esimo.

Annullando i coefficienti dei differenziali

$$\delta x_{(j)-} = -\lambda_{(j)-}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{(j)-}} + \mu^T \left[\frac{\partial \chi}{\partial x_{(j)-}} \right] = 0 \text{ con } j = 1, \dots, n, \quad (5.10)$$

$$\delta x_{(j)+} = \lambda_{(j)+}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{(j)+}} + \mu^T \left[\frac{\partial \chi}{\partial x_{(j)+}} \right] = 0 \text{ con } j = 0, \dots, n-1, \quad (5.11)$$

$$\delta t_{(j)-} = H_{(j)-} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{(j)-}} + \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial t_{(j)-}} = 0 \text{ con } j = 1, \dots, n, \quad (5.12)$$

$$\delta t_{(j)+} = -H_{(j)+} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{(j)+}} + \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial t_{(j)+}} = 0 \text{ con } j = 0, \dots, n-1. \quad (5.13)$$

Di queste condizioni al contorno la prima e la terza non hanno significato all'inizio della traiettoria ($j=0$) mentre la seconda e la quarta non hanno significato alla fine della traiettoria ($j=n$).

Infine, eliminando le costanti μ dal set delle equazioni precedenti, si ottengono le condizioni al contorno di ottimo

$$\sigma(x_{(j-1)+}, x_{(j)-}, \lambda_{(j-1)+}, \lambda_{(j)-}, t_{(j-1)+}, t_{(j)-}) = 0 \text{ con } j = 1, \dots, n \quad (5.14)$$

che completa il set di equazioni differenziali che descrive il problema.

Considerando un certo vettore di stato x soggetto a determinate condizioni al contorno, le prime due precedenti equazioni forniscono le corrispondenti condizioni di ottimo per la variabile aggiunta corrispondente:

- se la variabile di stato è assegnata all'istante iniziale o finale la corrispondente variabile aggiunta è libera in quel punto mentre se il valore iniziale o finale della variabile di stato non è presente nella condizione al contorno χ e nella funzione φ la corrispondente variabile aggiunta è nulla in quel punto;

- se la variabile è continua e libera in un punto interno la corrispondente variabile aggiunta è continua in quel punto mentre se la variabile è continua e assegnata in un punto interno la corrispondente variabile aggiunta ha una discontinuità libera in quel punto, cioè il valore destro è indipendente dal valore sinistro e viene determinato attraverso una procedura di ottimizzazione.

Analogamente, se l'Hamiltoniano non dipende esplicitamente dal tempo le ultime due equazioni precedenti forniscono ulteriori condizioni al contorno:

- se il tempo iniziale o finale non compaiono nella condizione al contorno χ e nella funzione φ l'Hamiltoniano è nullo nel punto mentre se è assegnato l'Hamiltoniano è libero nel punto;
- se un tempo intermedio non compare esplicitamente, e quindi l'unica condizione in cui è coinvolto è la condizione di continuità ai confini interni, l'Hamiltoniano è continuo nel punto mentre se il tempo è esplicitamente assegnato l'Hamiltoniano ha una discontinuità libera in quel punto.

4.2 Problema differenziale ai limiti

Come detto nell'introduzione del capitolo, il metodo indiretto di ottimizzazione si basa sull'applicazione della teoria del controllo ottimale. Tuttavia, le condizioni al contorno del sistema di equazioni differenziali, analizzate nel capitolo precedente, dipendono dalla tipologia delle orbite tra le quali è eseguito il trasferimento.

La teoria usata definisce un nuovo sistema di equazioni differenziali ai limiti in cui alcuni valori delle variabili iniziali sono incognite; è necessario cercare valori iniziali che soddisfino tutte le condizioni al contorno, imposte o ottime, attraverso l'integrazione numerica del sistema differenziale.

Tuttavia, in questo modo il problema da risolvere presenta alcune peculiarità: l'integrazione avviene in vari sotto intervalli, la durata di ciascun sotto-intervallo è sconosciuta, le condizioni al contorno possono essere non lineari e coinvolgere valori ai confini interni ed esterni, le variabili possono essere discontinue ai confini interni e il loro valore dopo la discontinuità può essere incognito.

Il problema ai limiti è riformulato come una successione di problemi ai valori iniziali, portati a convergenza tramite il metodo di Newton. Inoltre, per risolvere il problema di indeterminazione della durata di ogni intervallo, la variabile tempo indipendente è sostituita durante l'integrazione con una nuova variabile

$$\varepsilon = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{\tau_j} \quad (5.15)$$

dove τ_j è la durata ignota dell'intervallo j -esimo. In questo modo gli estremi di integrazione sono fissati e corrispondono a valori interni consecutivi della nuova variabile indipendente ε .

Il cambio di variabile indipendente porta alla definizione del sistema di equazioni differenziali in forma

$$\frac{dy}{d\varepsilon} = \mathbf{f}^*(\mathbf{y}, t) \text{ con } \mathbf{y} = (\mathbf{x}, \lambda) \quad (5.16)$$

dove \mathbf{y} è il nuovo vettore delle variabili (di stato e aggiunte).

D'altra parte, il problema in esame presenta anche parametri incogniti costanti (durata dei sotto-intervalli, valori delle variabili dopo le discontinuità, ...) e quindi è comodo introdurre un nuovo vettore $\mathbf{z}(\mathbf{y}, \mathbf{c})$ che tenga conto delle nuove variabili di stato e dei parametri costanti da cui

$$\frac{dz}{d\varepsilon} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{c}). \quad (5.17)$$

Esplicitando il secondo membro dell'equazione precedente

$$\frac{dy}{d\varepsilon} = \tau_j \frac{dy}{dt} \quad (5.18)$$

mentre per i parametri costanti

$$\frac{dc}{d\varepsilon} = 0. \quad (5.19)$$

Le condizioni al contorno sono inserite in un unico vettore senza distinguere condizioni imposte e di ottimo

$$\Psi(\mathbf{s}) = 0 \quad (5.20)$$

dove \mathbf{s} contiene i valori delle variabili in ogni contorno e i parametri incogniti.

Per determinare i valori delle variabili, di solito si opera un processo iterativo: ipotizzando incogniti i valori iniziali, la prima iterazione obbliga la scelta di valori di tentativo \mathbf{p}_1 perché la j -esima iterazione di integrazione della derivata è ottenuta utilizzando i valori iniziali \mathbf{p}_j ottenuti all'iterazione precedente.

L'integrazione delle equazioni è eseguita in contemporanea su tutti gli intervalli della traiettoria tenendo conto delle possibili discontinuità ai contorni interni. In particolare, calcolato il valore delle variabili attraverso l'integrazione, è calcolato l'errore relativo e assoluto sulle condizioni al contorno Ψ_j rispetto alle condizioni iniziali $\Psi(\mathbf{s})$. Il metodo è detto metodo di shooting.

Considerando una piccola perturbazione $\Delta\mathbf{p}$ sulle condizioni al contorno, questa può portare ad una variazione degli errori sulle condizioni stesse

$$\Delta\Psi = \left[\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{p}} \right] \Delta\mathbf{p} \quad (5.21)$$

trascurando i termini superiori al primo ordine.

Ad ogni iterazione i valori iniziali sono corretti con questa perturbazione

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_{j+1} - \mathbf{p}_j = - \left[\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{p}} \right]^{-1} \Psi_j \quad (5.22)$$

finché le condizioni al contorno non sono soddisfatte con un errore inferiore alla tolleranza richiesta, in modo da annullarne l'errore.

La matrice che compare nell'equazione precedente si può sviluppare

$$\left[\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{p}} \right] = \left[\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{s}} \right] \left[\frac{\partial\mathbf{s}}{\partial\mathbf{p}} \right] \quad (5.23)$$

derivata delle condizioni al contorno rispetto alle variabili e derivata delle variabili nei contorni rispetto alle condizioni iniziali, cioè i valori assunti dalla matrice

$$\left[\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial\mathbf{z}} \right] = [\mathbf{g}(\varepsilon)] \text{ con } \varepsilon = 0, 1, \dots, n. \quad (5.24)$$

Quest'ultima matrice è ottenuta integrando il sistema di equazioni differenziali che si ottiene derivando il sistema principale rispetto ai valori iniziale

$$\left[\frac{d\mathbf{g}}{d\varepsilon} \right] = \frac{d}{d\varepsilon} \left[\frac{\partial\mathbf{z}}{\partial\mathbf{p}} \right] = \left[\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}} \left(\frac{d\mathbf{z}}{d\varepsilon} \right) \right] = \left[\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{p}} \right]. \quad (5.25)$$

Esplicitando il jacobiano è possibile riscrivere l'equazione

$$\left[\frac{d\mathbf{g}}{d\varepsilon} \right] = \left[\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{z}} \right] = \left[\frac{\partial\mathbf{z}}{\partial\mathbf{p}} \right] = \left[\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{z}} \right] [\mathbf{g}] \quad (5.26)$$

sistema omogeneo i cui valori iniziali si calcolano

$$g[0] = \left[\frac{\partial z(0)}{\partial p} \right] = [I]. \quad (5.27)$$

Inoltre, il metodo riesce a gestire le discontinuità delle variabili: considerando una discontinuità localizzata in un punto j , si aggiorna il vettore delle variabili z e la matrice g attraverso una relazione che leghi i valori delle variabili prima e dopo la discontinuità considerata

$$z_{j+} = h(z_{j-}) \quad (5.28)$$

$$[g_{i+}] = \left[\frac{\partial h}{\partial z} \right] [g_{i-}]. \quad (5.29)$$

Il problema reale presenta alcune variabili iniziali note e quindi il vettore \mathbf{p} si riduce alla stima delle sole componenti incognite di $\mathbf{z}(0)$ mentre il vettore Ψ si riduce alle sole condizioni al contorno non esplicite al tempo iniziale.

Tornando all'equazione dell'errore sulle condizioni al contorno, la matrice che compare può essere valutata numericamente, infatti la j -esima riga della matrice può essere calcolata variando la j -esima componente del vettore p di una piccola quantità Δp , fissando le altre variabili, per poi integrare le equazioni. In questo modo è possibile calcolare le variazioni $\Delta \Psi(\Delta p)$ e, linearizzando, ottenere la riga corrispondente come $\Delta \Psi^T / (\Delta p)$. La stessa procedura può essere utilizzata per calcolare il jacobiano e la matrice $[\partial \Psi / \partial s]$.

Tuttavia, malgrado permetta di ridurre i tempi di calcolo, la procedura non garantisce la convergenza del metodo perché la determinazione della matrice è meno accurata del calcolo attraverso la soluzione del sistema omogeneo.

Analogamente, la linearizzazione utilizzata per valutare le correzioni Δp delle soluzioni di tentativo introduce errori che possono compromettere la convergenza delle iterazioni. Pertanto, la procedura di calcolo numerico prevede alcuni accorgimenti particolari per rendere il metodo più stabile.

Per non allontanarsi troppo dalla soluzione, la correzione attuata è una frazione di quella calcolata

$$p_{j+1} = p_j + K_1 \Delta p \quad (5.30)$$

dove K_1 è determinato empiricamente durante le prime prove del codice e dipende dalla bontà della soluzione di partenza.

Ad ogni iterazione, l'errore massimo sulle condizioni al contorno è confrontato con l'errore massimo alla precedente iterazione: il processo di iterazione continua se l'errore è inferiore a un multiplo dell'errore precedente

$$E_{(j+1)\max} < K_2 E_{j\max}; \quad (5.31)$$

dato che l'errore può aumentare nei primi passi, il valore proprio di K_2 è maggior dell'unità e normalmente i valori vanno da 2 a 3.

D'altra parte, se l'errore dell'iterazione è molto maggiore di quello precedente, si può utilizzare una bisezione della correzione stessa

$$p_{j+1} = p_j + K_1 \frac{\Delta p}{2}. \quad (5.32)$$

La bisezione è ripetuta fino ad ottenere un errore che rispetti il vincolo precedente, andando non oltre un massimo di cinque bisezioni. Superato questo limite il

procedimento si arresta perché la soluzione di tentativo scelta non è in grado di portare a convergenza l'integrazione.

Allo scopo di rendere più leggibili i risultati, è necessario specificare il valore di due quantità adimensionali alle quali ci si riferisce. In particolare, i tempi di missione sono forniti attraverso un valore angolare in modo tale che 1anno sia collegato a 2π mentre le distanze sono adimensionalizzate con l'unità astronomica

$$1\text{AU} = 149'597'870.691\text{km}$$

cioè la distanza tra Terra e Sole. Infine, i tempi di missione sono misurati a partire da un tempo $t_0=0$ che corrisponde al primo gennaio 2000.

4.3 Modello matematico

Come spiegato nel capitolo 2, l'analisi della traiettoria di fuga viene affrontata considerando la massa del satellite puntiforme e sottoposta all'influenza di un solo corpo celeste secondo l'approssimazione patched conics.

Per descrivere il moto dello spacecraft sono utilizzate le equazioni del problema dei due corpi scritte in un sistema di riferimento eliocentrico, più conveniente data l'assenza di accelerazioni di trascinamento e di Coriolis

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} \quad (5.32)$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\mu\mathbf{r}}{r^3} + \frac{\mathbf{T}}{m} + \mathbf{a}_p \quad (5.33)$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{T}{c} \quad (5.34)$$

dove \mathbf{a}_p rappresenta l'accelerazione perturbatrice composta da tre termini

$$\mathbf{a}_p = \mathbf{a}_j + \mathbf{a}_{lsg} + \mathbf{a}_{srp} \quad (5.35)$$

perturbazioni dovute alla non sfericità della Terra, alla gravità lunare e solare e alla pressione della radiazione solare.

Introducendo l'Hamiltoniano definito nel capitolo precedente, tradotto in termini del problema in esame

$$H = \Phi + \lambda^T f = \lambda_r^T + \lambda_v^T (\mathbf{g} + \frac{\mathbf{T}}{m}) - \lambda_m q, \quad (5.36)$$

può essere riscritto

$$H = \lambda_r^T \mathbf{v} + \lambda_v^T \mathbf{g} + \mathbf{T} S_F \quad (5.37)$$

dove S_F rappresenta la switching function

$$S_F = \lambda_v^T \mathbf{u}_T / m - \lambda_m q / T. \quad (5.38)$$

Nelle equazioni il coefficiente λ_m rappresenta il coefficiente di Lagrange della massa mentre λ_v incarna le variabili aggiunte che competono alle tre equazioni della dinamica, cioè quelle della velocità (u,v,w).

Le variabili aggiunte sono calcolate attraverso l'equazione di Eulero-Lagrange

$$\left[\frac{d\lambda_r}{dt} \right]^T = \lambda_r^T \left[\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{r}} \right], \quad (5.39)$$

$$\left[\frac{d\lambda_v}{dt} \right]^T = -\lambda_r^T, \quad (5.40)$$

$$d\lambda_m/dt = \lambda_v \mathbf{T} / m^2; \quad (5.41)$$

la somma di tutte queste equazioni costituisce il sistema differenziale integrato numericamente all'interno del codice.

Le variabili di controllo ottime devono massimizzare l'Hamiltoniano in accordo al principio del massimo di Pontryagin citato nel capitolo precedente. Tipicamente, le variabili di controllo sono il modulo e la direzione della spinta, da cui è evidente che la direzione ottimale della spinta è quella parallela al vettore aggiunto della velocità λ_v . La switching function diventa

$$S_F = \lambda_v / m - \lambda_m q / T \quad (5.42)$$

e, in caso di velocità di scarico costante

$$S_F = \lambda_v / m - \lambda_m / c. \quad (5.43)$$

In questo caso, il modulo della spinta rimane l'unica variabile di controllo e, per massimizzare l'Hamiltoniano, è massimo quando la switching function è positiva mentre è nullo quando è negativa.

Tuttavia, la caratteristica fondamentale del propulsore in analisi è la possibilità di adattare l'impulso specifico alla traiettoria e quindi anche la velocità di scarico è soggetta ad ottimizzazione. Questo si riflette anche sul tipo di regolazione attuata sul motore: il parametro fondamentale non è più la potenza, che rimane costante e massima, ma appunto l'impulso specifico.

Questo non varia incondizionatamente, ma è confinato da due limiti, inseriti per evitare contesti fisicamente impossibili di spinta infinita o consumo nullo.

L'attenzione viene spostata dalla potenza all'impulso specifico e dall'impulso alla velocità efficace di scarico dei gas che diventa il nuovo parametro di regolazione del motore. La velocità non è più costante come nei propulsori classici ma varia in ogni intervallo in cui è divisa la traiettoria totale. In particolare, per definire il valore ottimale della velocità efficace di scarico si deriva l'Hamiltoniano rispetto a questa e si pone la derivata nulla, ottenendo

$$c_{opt} = 2m \lambda_m / \lambda_v \quad (5.44)$$

che va a definire la spinta ottimale del propulsore e gli altri parametri.

I limiti imposti all'impulso specifico si ripercuotono sulla velocità di scarico dei gas; in particolare, se $c_{ott} > c_{max}$ allora $c = c_{max}$, se $c_{ott} < c_{min}$ allora $c = c_{min}$ mentre se $c_{min} < c_{ott} < c_{max}$ allora $c = c_{ott}$.

Calcolata la velocità efficace di scarico ottimale, la spinta

$$T = 2\eta P / c_{opt} = 2\eta P \lambda_v / 2m \lambda_m \quad (5.45)$$

da cui, assumendo rendimento unitario,

$$T/m = \lambda_v P / \lambda_m m^2. \quad (5.46)$$

Nel tratto di traiettoria dove la velocità di scarico non è vincolata, si ottiene $\lambda_m m^2$ costante e quindi il rapporto spinta/massa dipende linearmente dalla variabile aggiunta della velocità. In questo caso l'Hamiltoniano da massimizzare

$$H = T - m\lambda_m/\lambda_v q \quad (5.47)$$

è una combinazione lineare di spinta e portata e dipende dal parametro $K=m\lambda_m/\lambda_v$ che varia lungo la traiettoria ma è noto in ogni punto di essa.

Analogamente, anche la switching function varia e assume l'espressione

$$S_F = \lambda_v/m - \lambda_m/c_{\max}; \quad (5.48)$$

in questo caso, il discorso sviluppato per il modulo della spinta si riflette identico per la potenza: per massimizzare l'Hamiltoniano, questa è massima se la switching function è positiva mentre è nulla se la switching function è negativa.

La switching function assume valore minimo quando la velocità efficace di scarico è minima ed è facile notare che, se la velocità efficace di scarico non è limitata superiormente (o limitata a valori molto elevati) la switching function è sempre positiva. Tuttavia, questa casistica non rappresenta il problema in esame.

4.4 Equazioni di stato e variabili aggiunte

Il modello utilizza coordinate sferiche all'interno di un sistema di riferimento inerziale con piano equatoriale come piano fondamentale: la posizione del velivolo è descritta dal raggio r , dalla longitudine θ e dalla latitudine φ mentre la velocità è descritta componente in direzione radiale u , est v e nord w , cioè

$$\mathbf{r} = [r; \theta; \varphi] \text{ e } \mathbf{v} = [u, v, w].$$

Nel sistema così definito, le equazioni di stato si scrivono

$$\frac{dr}{dt} = u \quad (5.49)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{r} \cos \varphi \quad (5.50)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{w}{r} \quad (5.51)$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{r^2} + \frac{v^2}{r} + \frac{w^2}{r} + \frac{T}{m} \sin \gamma_T \quad (5.52)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{uv}{r} + \frac{vw}{r} \tan \varphi + \frac{T}{m} \cos \gamma_T \cos \psi_T \quad (5.53)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{uw}{r} + \frac{v^2}{r} \tan \varphi + \frac{T}{m} \cos \gamma_T \sin \psi_T \quad (5.54)$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{T}{c} \quad (5.55)$$

dove γ_T e ψ_T sono l'angoli di elevazione e di rotta della spinta misurati dal piano orizzontale con angoli positivi verso l'alto e in senso antiorario dal parallelo.

Gli angoli di spinta sono i controlli che ne determinano la direzione. In particolare, esplicitando l'Hamiltoniano e annullandone le derivate parziali rispetto a questi, è possibile ricavare gli angoli di ottimo, cioè la direzione ottimale della spinta

$$\sin \gamma_T = \lambda_u / \lambda_V \quad (5.56)$$

$$\cos \gamma_T \cos \psi_T = \lambda_v / \lambda_V \quad (5.57)$$

$$\cos \gamma_T \sin \psi_T = \lambda_w / \lambda_V \quad (5.58)$$

con

$$\lambda_V = \sqrt{\lambda_u^2 + \lambda_v^2 + \lambda_w^2} \quad (5.59)$$

modulo del vettore primario parallelo alla direzione della spinta ottimale.

Infine, dalle equazioni di Eulero-Lagrange si ricavano le equazioni differenziali per le variabili aggiunte

$$\lambda'_r = 1/r^2 [\lambda_\theta v / \cos \varphi + \lambda_\theta w + \lambda_u (-2/r + v^2 + w^2) + \lambda_v (-uv + vw \tan \varphi) + \lambda_w (-uw - v^2 \tan \varphi)] \quad (5.60)$$

$$\lambda'_\theta = 0 \quad (5.61)$$

$$\lambda'_\varphi = 1/r \cos^2 \varphi (-\lambda_\theta \sin \varphi - \lambda_v vw + \lambda_w v^2) \quad (5.62)$$

$$\lambda'_u = 1/r (-\lambda_r r + \lambda_v v + \lambda_w w) \quad (5.63)$$

$$\lambda'_v = 1/r (-\lambda_\theta v / \cos \varphi - 2\lambda_u v + \lambda_v (u - w \tan \varphi) + 2\lambda_w v \tan \varphi) \quad (5.64)$$

$$\lambda'_w = 1/r (-\lambda_\theta w - 2\lambda_u w - \lambda_v v \tan \varphi + \lambda_w u) \quad (5.65)$$

$$\lambda'_m = T/m^2 \lambda_v \quad (5.66)$$

Questo set di equazioni, sommato al set di equazioni di stato, compone il sistema differenziale del problema.

Capitolo 5

Casi studio e analisi risultati

La tesi si concentra sulla ricerca della traiettoria di fuga ottimale con propulsore ad impulso specifico variabile dal punto lagrangiano L2 del sistema Terra-Sole. L'analisi si concentra sul punto L2 perché quello che ha destato maggior interesse negli ultimi anni e unico punto lagrangiano che permette un'evasione dalla Terra.

Come spiegato nel capitolo precedente, per convergere alla soluzione si utilizza un metodo di shooting: attraverso la procedura descritta, a partire da una soluzione di tentativo, si esegue una serie di iterazioni integrando le equazioni del problema e calcolando l'errore relativo e assoluto sulle condizioni al contorno rispetto a quelle iniziali fino ad abbatterlo sotto una tolleranza dell'ordine di 10^{-7} .

Inoltre, anche i parametri del motore sono fissi per ogni caso eseguita in modo da definire le stesse condizioni iniziali; infatti, si impone una massa iniziale di 50 tonnellate (elevata per evidenziare le potenzialità del motore) e una potenza totale di 100kW sulla falsa riga del VX-200SS con rendimento di 0.625 (valore tipico dei motori magnetici). In modo analogo, i limiti imposti sull'impulso specifico sono estratti dai risultati degli ultimi test eseguiti sul prototipo, che riportano un limite inferiore di 2000s e un limite superiore di 10000s.

L'analisi avviene senza considerare un target preciso ma osservando la velocità orbitale a fine evasione; infatti, come già detto, lo scopo della tesi è verificare la fattibilità della manovra di fuga in tempi brevi.

In particolare, lo studio si concentra sull'analisi della massa e della velocità finale dello spacecraft considerando tempi di partenza e di manovra diversi; inoltre, si considerano le single traiettorie per analizzare la spinta e l'impulso specifico sviluppati nonché la traiettoria vera e propria.

5.1 Analisi globale

Per impostare una prima analisi si sono considerati 11 tempi di partenza e 6 durate prese senza troppo criterio; nello specifico, sono stati utilizzati tempi di partenza che vanno da 160 a 170 con passo 1 durate che vanno da 50 a 100 giorni con passo 10.

Da notare - soprattutto per anticipare l'analisi - la ricorrenza delle date a distanza 6; infatti, essendo espresse in radianti, un anno solare è calcolato come $2\pi=6,28318$, che è circa uguale a 6.

160	19/06/2025 4:34:22.54605	165	05/04/2026 20:27:57.00061
161	16/08/2025 7:45:5.43696	166	02/06/2026 23:38:39.89152
162	13/10/2025 10:55:48.32787	167	31/07/2026 2:49:22.78244
163	10/12/2025 14:6:31.21878	168	27/09/2026 6:0:5.67335
164	06/02/2026 17:17:14.10970	169	24/11/2026 9:10:48.56426
		170	21/01/2027 12:21:31.45517

Tabella 5.1 - Conversione tempi di partenza

[kg]	50	60	70	80	90	100
160	49206.72	49682.28	49858.17	49934.80	49968.08	49982.91
161	49228.45	49696.08	49868.35	49942.21	49973.22	49986.98
162	49225.65	49700.73	49872.08	49944.88	49972.95	49987.97
163	49177.75	49683.24	49859.86	49936.59	49969.31	49984.04
164	49091.34	49647.90	49834.30	49918.78	49956.85	49975.22
165	49016.96	49618.18	49812.23	49903.12	49943.30	49967.05
166	48995.14	49609.59	49806.07	49899.15	49943.30	49965.48
167	49000.73	49615.54	49811.66	49903.82	49947.24	49968.61
168	48984.74	49618.91	49815.61	49906.88	49949.60	49970.23
169	48904.39	49604.15	49805.62	49899.19	49943.70	49965.43
170	48710.46	49572.73	49782.53	49881.45	49930.08	49954.56

Tabella 5.2 - Massa finale

[km/s]	50	60	70	80	90	100
160	0.76153	0.66906	0.66154	0.64208	0.62983	0.64616
161	0.77244	0.68275	0.67650	0.66391	0.65208	0.68098
162	0.79342	0.70087	0.69235	0.68331	0.66714	0.69296
163	0.80942	0.70670	0.69208	0.68299	0.66144	0.68013
164	0.81268	0.69599	0.67486	0.66594	0.64054	0.65340
165	0.80765	0.68111	0.65652	0.65077	0.62934	0.63638
166	0.80293	0.67649	0.65182	0.65143	0.62934	0.64086
167	0.80969	0.68795	0.66369	0.66842	0.64998	0.66107
168	0.83066	0.70853	0.68125	0.68799	0.67095	0.67678
169	0.85769	0.72148	0.68644	0.69111	0.67282	0.66924
170	0.89466	0.71641	0.67267	0.67432	0.65516	0.64343

Tabella 5.3 - Velocità finale

[km²/s²]	50	60	70	80	90	100
160	0.31419	0.18191	0.17190	0.14653	0.13095	0.17038
161	0.33093	0.20042	0.19192	0.17505	0.15948	0.19800
162	0.36379	0.22548	0.21361	0.20118	0.17935	0.21446
163	0.38942	0.23369	0.21324	0.20074	0.17177	0.19684
164	0.39472	0.21866	0.18970	0.17774	0.14456	0.16120
165	0.38657	0.19818	0.16528	0.15777	0.13034	0.13925
166	0.37896	0.19190	0.15914	0.15863	0.13034	0.14496
167	0.38986	0.20754	0.17475	0.18105	0.15674	0.17128
168	0.42426	0.23628	0.19836	0.20760	0.18443	0.19230
169	0.46990	0.25480	0.20546	0.21190	0.18696	0.18215
170	0.53468	0.24750	0.18675	0.18898	0.16350	0.14827

Tabella 5.4 - Velocità orbitale finale al quadrato

Per completezza, il codice può essere utilizzato anche inserendo la velocità orbitale finale come parametro dimensionante, in aggiunta alla durata della manovra o come unico parametro presente; tuttavia, l'analisi impone libero il parametro. Si inseriscono le tabelle in grafici a reticolo per visualizzarne gli andamenti.

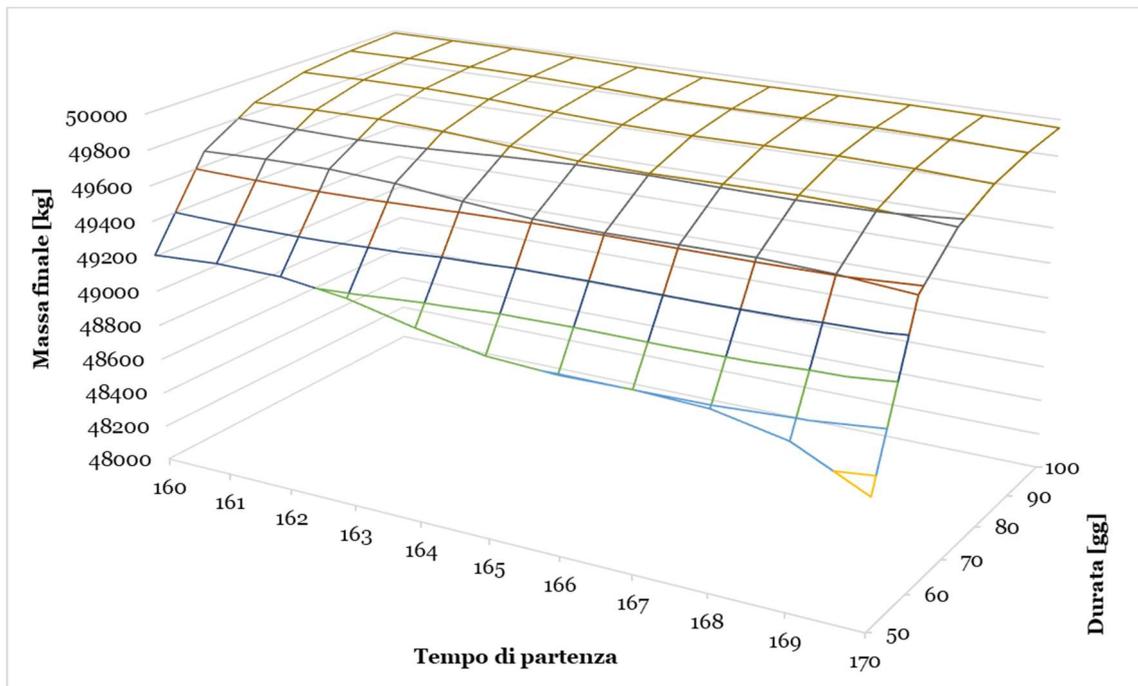


Grafico 5.1 - Massa finale

L'andamento della massa finale mostra un chiaro aumento - in accordo alla teoria - all'aumentare della durata: con un tempo maggiore la manovra ottimale impone una spinta iniziale minore garantendo un consumo minore.

Oltretutto, al variare del tempo di partenza, si nota una differenza di massa finale maggiore per brevi durate che si appiana all'aumentare del tempo di manovra; tuttavia, è complicato analizzare il tipo di dipendenza.

Per questo motivo, conviene tagliare il grafico in 2D scegliendo specifiche durate da analizzare. Dunque, si scelgono 3 durate facoltative per valutarne gli andamenti in funzione del tempo di partenza, nello specifico 50, 70 e 100 giorni per avere un quadro generale per durate basse, intermedie e alte.

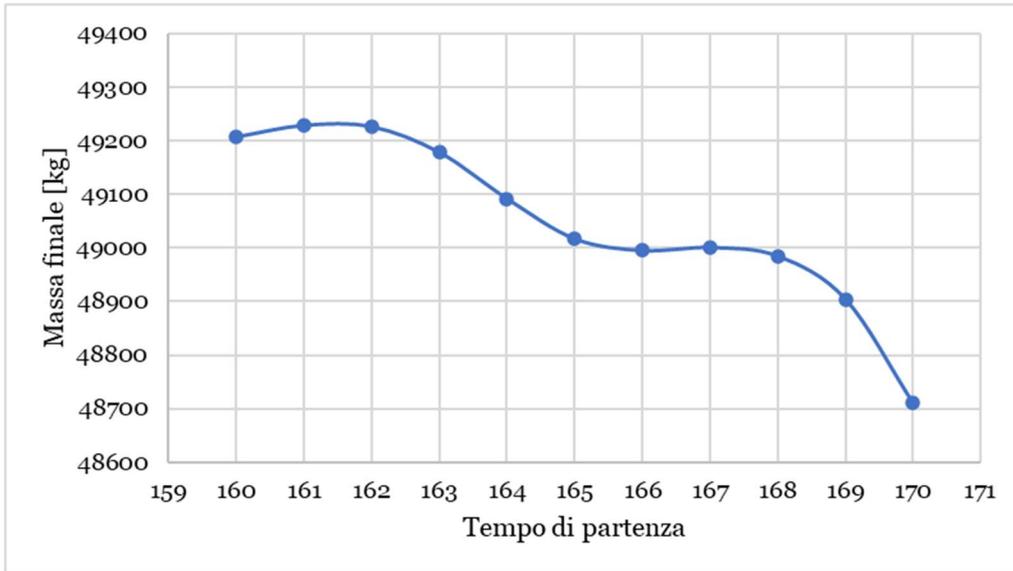


Grafico 5.2 - Massa finale per 50 giorni di durata

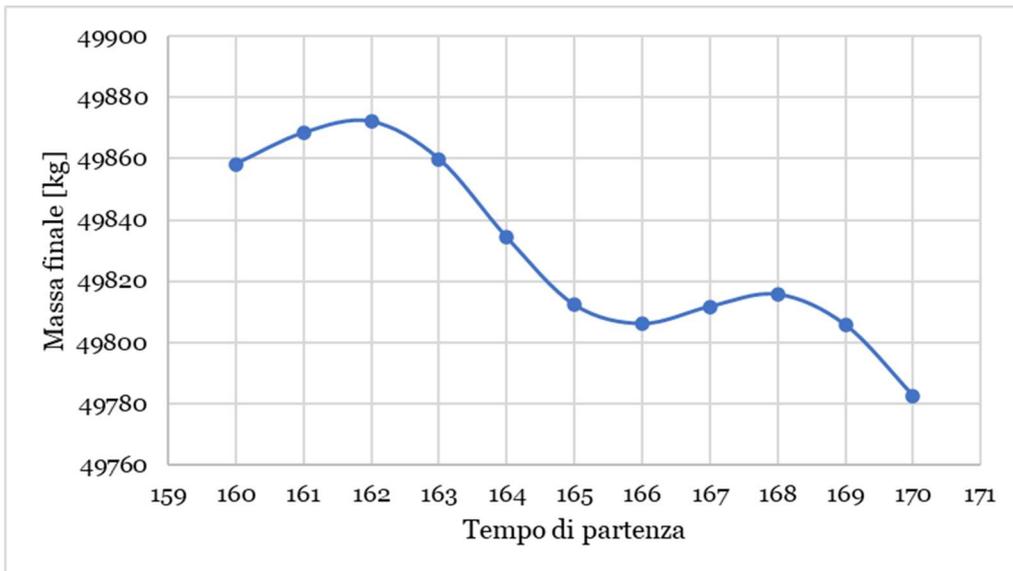


Grafico 5.3 - Massa finale per 70 giorni di durata

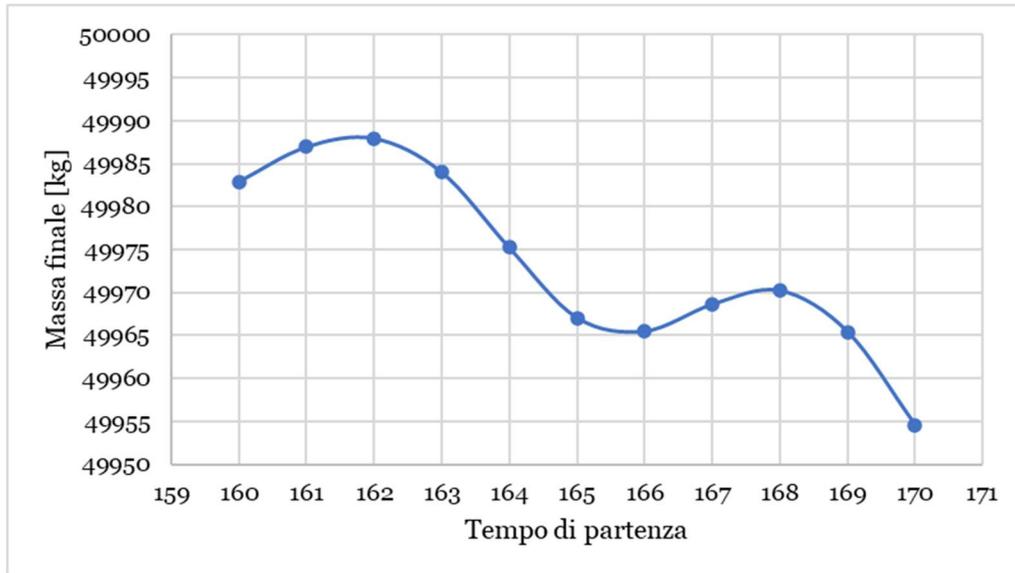


Grafico 5.4 - Massa finale per 100 giorni di durata

In tutti e tre i grafici si può evidenziare una certa somiglianza negli andamenti, malgrado la differenza massima diminuisca all'aumentare della durata: si passa da 517.9976kg per 50 giorni di manovra a 89.5438kg per 70 giorni fino ad arrivare a soli 33.4111kg per 100 giorni.

Oltre a questo, si può osservare anche la ricorrenza delle date precedentemente discussa che provoca un andamento simile della massa - e, come si vedrà, anche della velocità finale - al variare del tempo di partenza. Tuttavia, l'andamento non è uguale negli anni e si nota una differenza di massa finale tra due manovre eseguite a distanza di un anno solare, dovuta perturbazioni gravitazionali diverse.

In particolare, la perturbazione maggiormente responsabile deriva dall'attrazione lunisolare che varia a causa di un cambiamento della posizione relativa della Luna e del Sole rispetto al sistema fisso Terra-spacecraft. Da questo, è possibile stabilire che gli stessi risultati si ripropongono considerando due date a distanza di 19 anni solari - detto periodo metonico - poiché intervallo temporale affinché la posizione relativa di Sole, Terra e Luna si ripresenti.

Dalla sola analisi della massa finale è possibile stabilire che non solo la durata ma anche il tempo di partenza influisce sulla manovra ottimale.

Al contrario della massa, la velocità finale presenta un andamento complicato e non monotono. Si nota un andamento quasi inverso rispetto a quello della massa, la velocità finale è maggiore per brevi durate e diminuisce all'aumentare di questa perché un breve tempo di manovra impone un'alta spinta nei primi giorni e quindi una maggior velocità iniziale che si riflette all'arrivo.

Tuttavia, questa propensione non è mantenuta all'aumentare della durata perché, probabilmente, entrano in gioco altre quantità dimensionanti. Se per manovre di breve durata è logico utilizzare la massima spinta per poter evadere nel più breve

tempo possibile, potendo disegnare la traiettoria in maggior tempo entrano in gioco altri parametri per ottimizzare al meglio l'evasione.

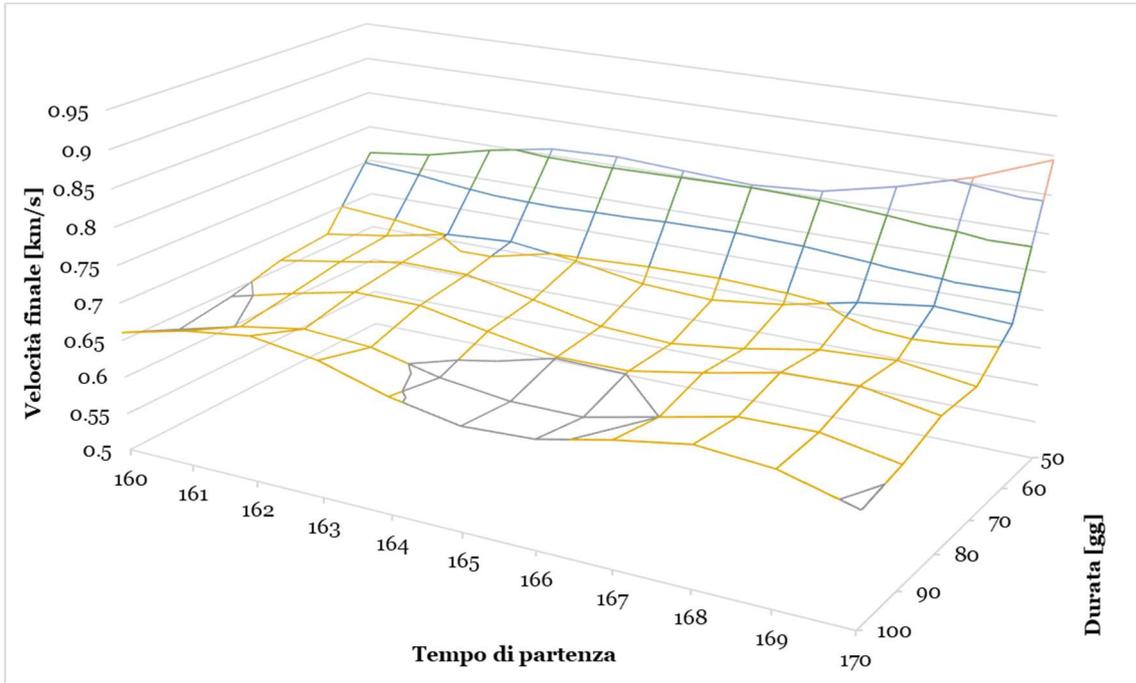


Grafico 5.5 - Velocità finale

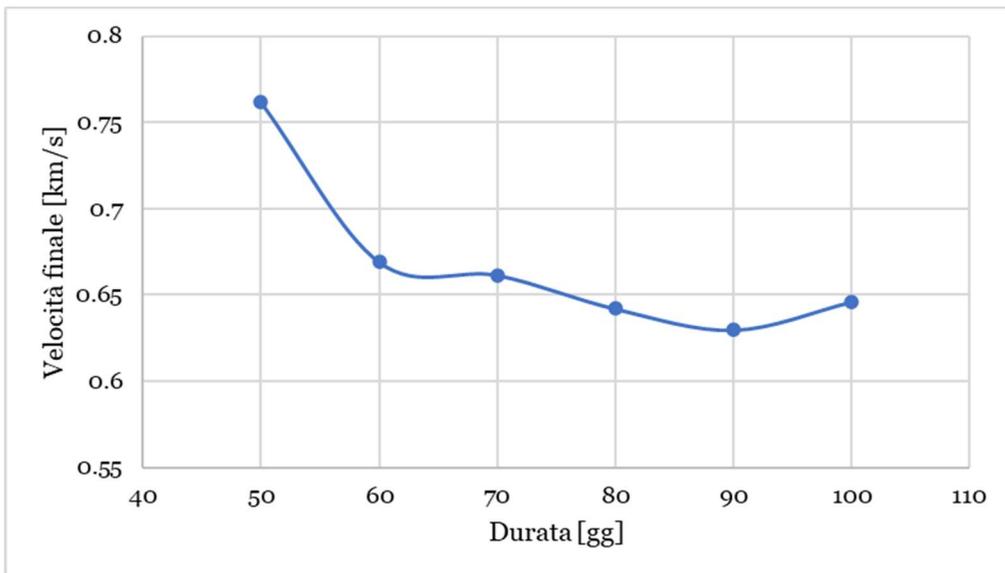


Grafico 5.6 - Velocità finale per $t_0=160$

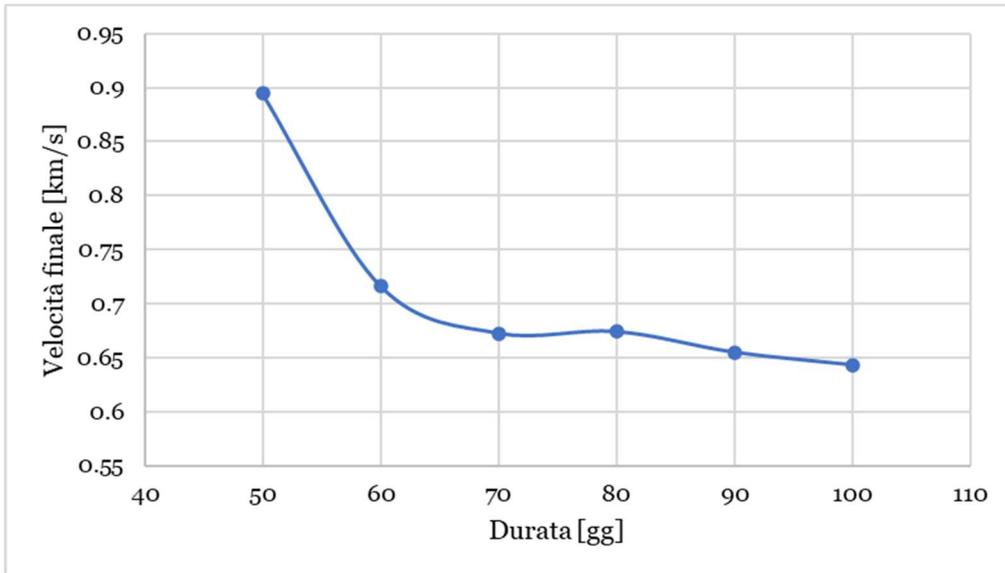


Grafico 5.7 - Velocità finale per $t_0=170$

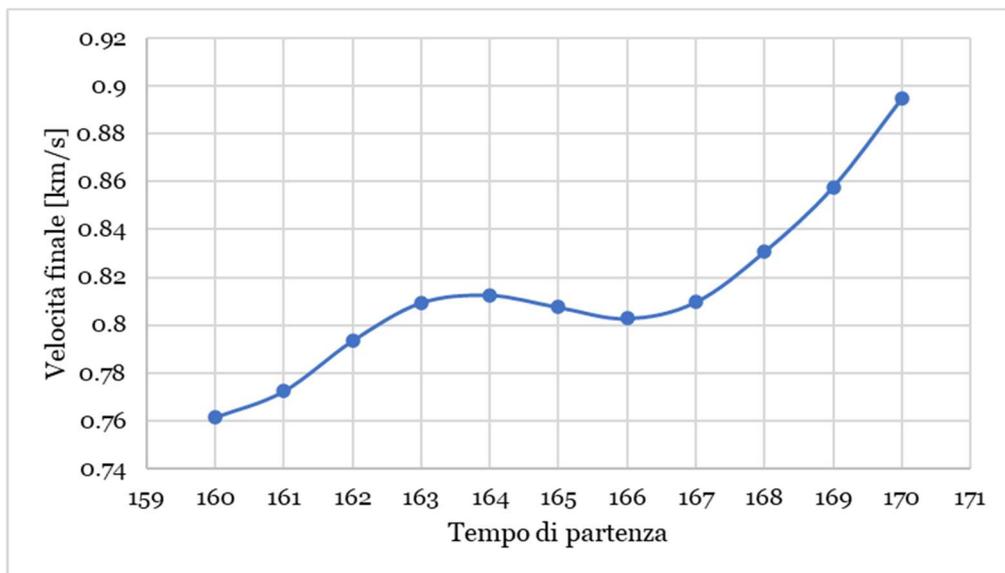


Grafico 5.8 - Velocità finale per 50 giorni di durata

Come per la massa si può affettare il grafico tridimensionale con tempi di partenza o durate specifiche. Siccome la scelta è sempre facoltativa, in questo caso si è scelto di considerare solamente le durate e le date di partenza agli estremi per ridurre la quantità di grafici, cioè 50 e 100 giorni e tempo di partenza 160 e 170 in modo da osservare le dipendenze per entrambi i parametri.

Malgrado si possa individuare una sorta di somiglianza nell'andamento al variare della durata, questo non si può dire anche per i grafici a tempo di manovra fisso che mostrano andamenti totalmente differenti.

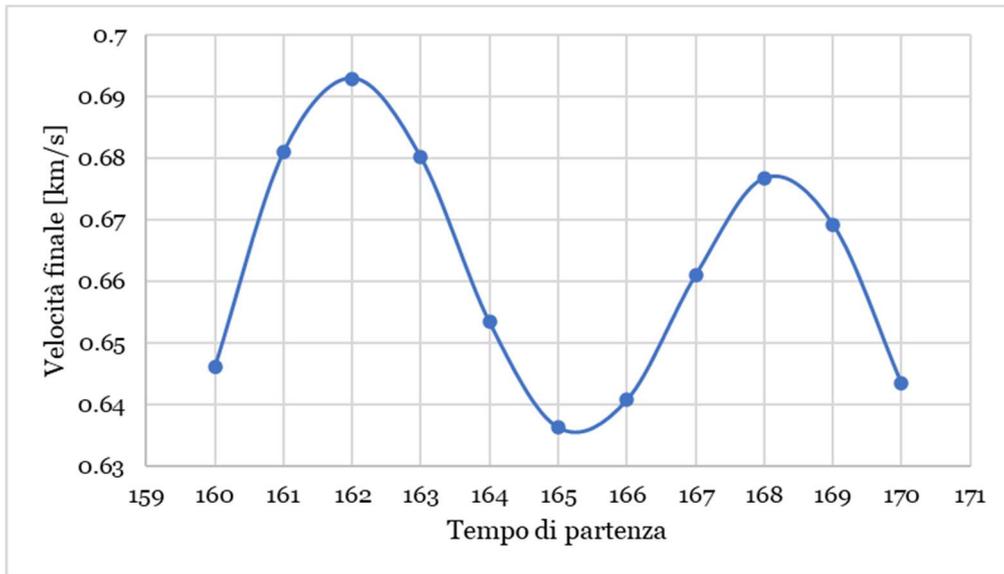


Grafico 5.9 - Velocità finale per 100 giorni di durata

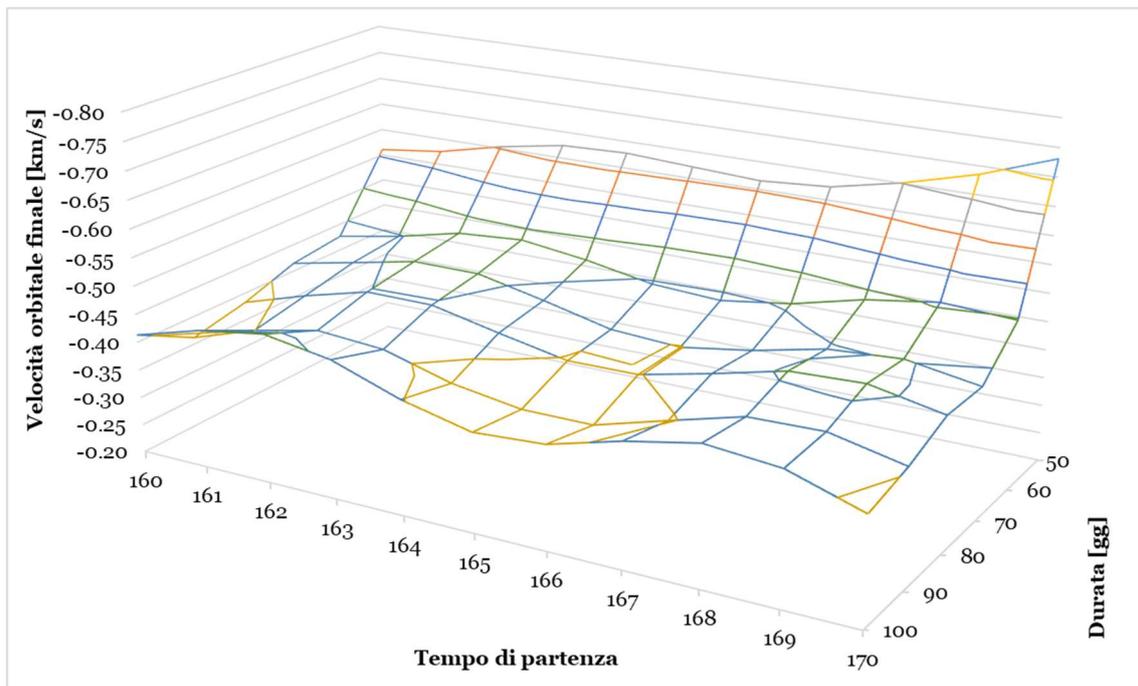


Grafico 5.10 - Velocità orbitale finale

Per concludere, si analizza la velocità orbitale finale. Il segno negativo è dovuto all'orientamento del sistema di riferimento: il verso di rivoluzione della Terra è preso come verso positivo e lo spacecraft esce con velocità relativa opposta.

Si nota facilmente che l'andamento della velocità orbitale rispecchia quello della velocità finale poiché il raggio al tempo finale è uguale per ogni manovra - si può considerare un parametro fisso delle traiettorie - e quindi emerge la dipendenza lineare tra le due velocità. Per questo motivo, i commenti espressi per la velocità finale si ripropongono inalterati per la velocità orbitale.

In conclusione, è necessario decidere con un'analisi preliminare la manovra più conveniente in termini di costo e velocità finale scegliendo tra una manovra non ottimale con la velocità di fuga desiderata, una manovra ottimale seguita da un impulso a rallentare o accelerare oppure una combinazione tra queste due.

5.2 Analisi di dettaglio

Avendo esaminato in maniera generale i risultati ottenuti, si passa ad un'analisi più approfondita mirata ad esaminare gli andamenti della spinta, della velocità efficace di scarico e della massa totale nel tempo nonché la traiettoria disegnata dalla manovra. Nello specifico, le traiettorie sono tracciate nel sistema sinodico, sistema co-rotante avente origine nel baricentro del sistema con asse x lungo la congiungente delle masse.

Avendo limitato l'impulso specifico del propulsore tra 2000s e 10'000s, si trovano andamenti di spinta e velocità efficace di scarico a loro volta limitati tra 1.274645N e 6.373226N e tra 19613.3m/s e 98066.5m/s.

Alla luce di quanto detto nel paragrafo precedente, si divide l'analisi in due: si considera un tempo di osservazione di un mese per esaminare le influenze lunari e un tempo di osservazione di un anno per esaminare le influenze solari.

5.2.1 Influenze della Luna sulle traiettorie

Per esaminare le influenze lunari sulle prestazioni del motore e sulla manovra, è necessario considerare il periodo di rivoluzione della Luna, cioè un mese.

Per questo motivo sono state scelte 5 tempi di partenza a distanza temporale di 0.125, cioè una settimana, per coprire un mese con tempo iniziale 160. D'altra parte, per quanto riguarda le durate, nel paragrafo precedente si è evidenziata la somiglianza negli andamenti delle velocità per durate intermedie e lunghe; perciò, per alleggerire il carico di grafici, si sceglie un tempo di manovra corto di 50 giorni e un tempo intermedio di 80 giorni così da coprire entrambe le casistiche.

		160.25	3/7/2025 17:22:3.26877
160	19/06/2025 4:34:22.54605	160.375	10/7/2025 23:45:53.63014
160.125	26/6/2025 10:58:12.90741	160.5	18/7/2025 6:9:43.99150

Tabella 5.5 - Conversione tempo di partenza caso lunare

5.2.1.1 Durata di 50 giorni

Come per l'analisi generale, si mettono a grafico gli andamenti delle prestazioni per analizzarne le variazioni nel dettaglio.

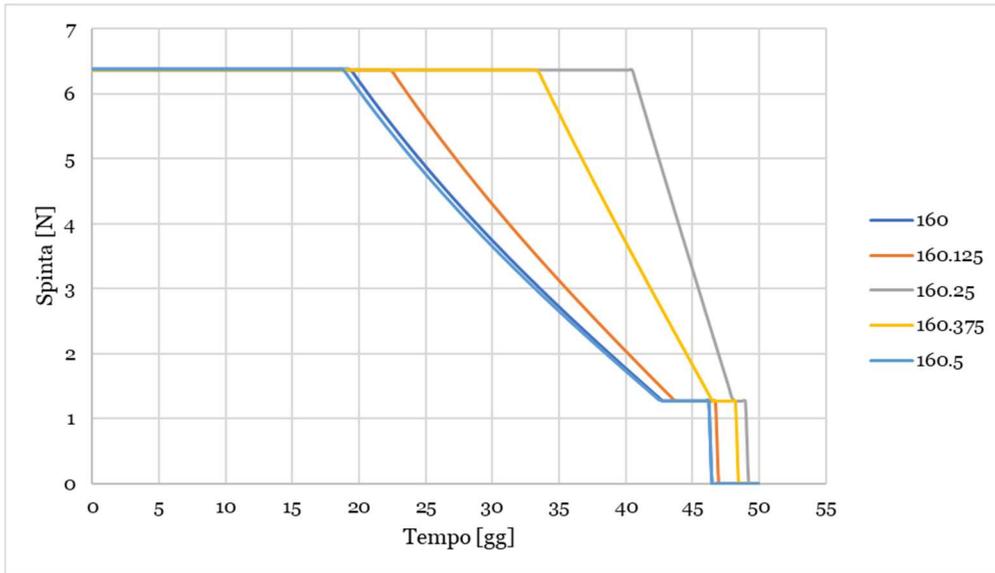


Grafico 5.11 - Spinta caso lunare 50gg

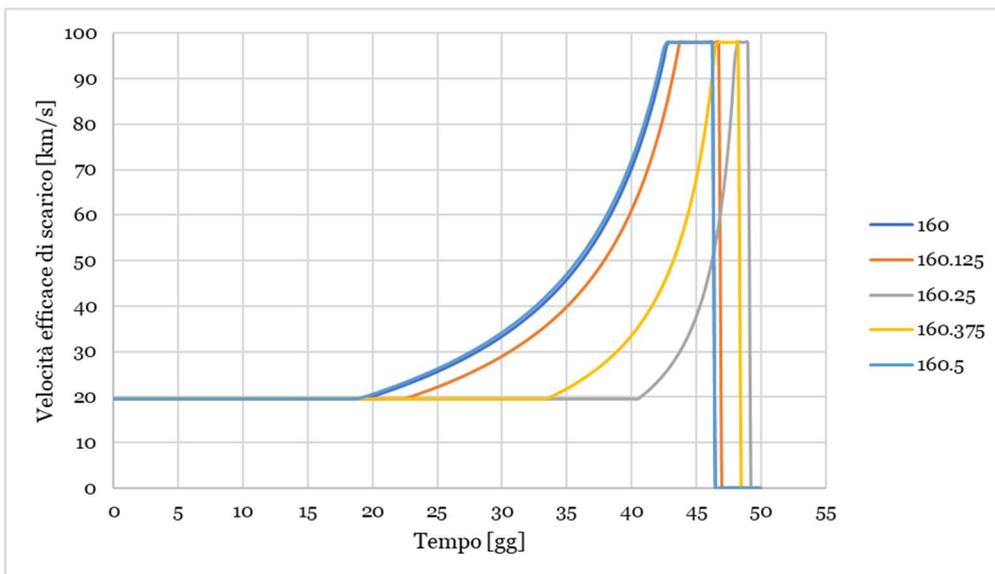


Grafico 5.12 - Velocità efficace di scarico caso lunare 50gg

Da questi primi due grafici - che sono l'uno specchio dell'altro - è possibile notare la presenza dei due limiti menzionati precedentemente ma anche lo spegnimento del motore dovuto alla negativizzazione della switching function.

Gli andamenti del propulsore presentano una tendenza simile con spinta massima i primi giorni e minima o nulla solamente gli ultimi; tuttavia, è facile notare come, variando il tempo di partenza, lo sforzo del propulsore cambi drasticamente.

Si osserva che la manovra eseguita al tempo 160.5, quasi analoga a quella eseguita al tempo 160, sia la più efficiente tra quelle in analisi; d'altra parte, la manovra eseguita al tempo 160.25 presenta prestazioni al limite con propulsore chiamato a lavorare a massimo regime per quasi tutta la traiettoria. L'analisi è ancora più chiara osservando il tempo di spegnimento del motore delle varie manovre per il quale si nota un andamento crescente e massimo proprio al tempo 160.25.

La differenza presente tra i parametri del propulsore nelle manovre è causata dalla diversa posizione relativa della Luna rispetto alla Terra. Il punto di partenza dello spacecraft rimane fisso ma la differente posizione della Luna genera perturbazioni diverse: al tempo 160.25 la Luna determina una perturbazione opposta all'evasione che obbliga il propulsore a lavorare a pieno regime.

Infine, il riproporsi dello stesso andamento a distanza 0.5, cioè a distanza di un mese, conferma la periodicità dell'influenza lunare. Tuttavia, le due curve non combaciano perfettamente a causa dell'influenza del Sole: la posizione della Luna rispetto alla Terra si ripete ogni mese ma la posizione del Sole è differente.

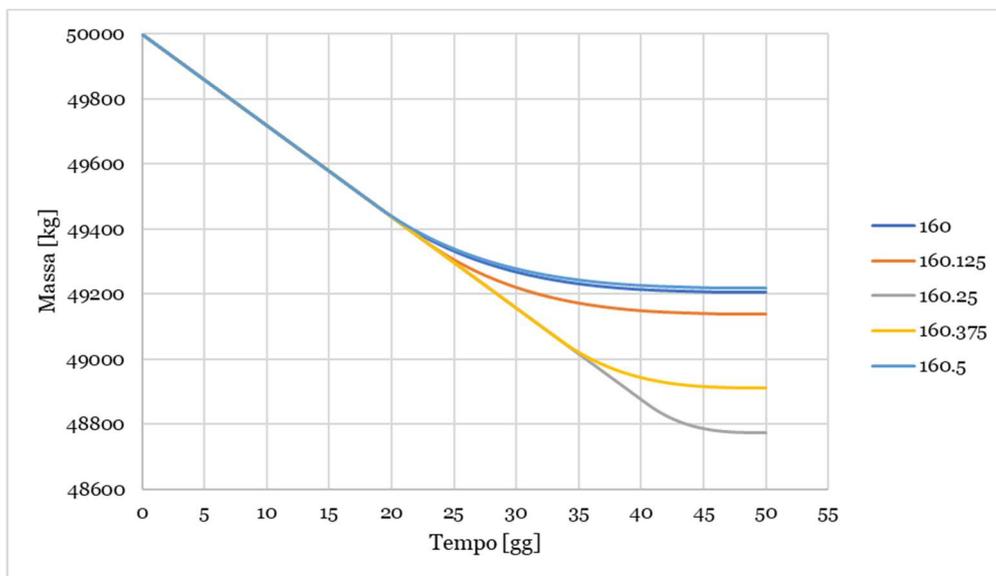


Grafico 5.13 - Massa caso lunare 50gg

Se i primi due grafici si riflettono tra di loro, il grafico dell'andamento della massa si può considerare il prodotto di questi due; infatti, si può notare come le curve si separino in corrispondenza del tempo di riduzione della spinta.

Si osserva nuovamente la similitudine tra le manovre al tempo 160 e 160.5 e la non efficienza della manovra al tempo 160.25; inoltre, interpolando gli andamenti delle

masse in un grafico a reticolo si può notare una valle in corrispondenza del tempo 160.25 che conferma la ciclica azione perturbativa della Luna.

Un aspetto su cui è bene concentrarsi è la maggior sensibilità del grafico rispetto a quello del paragrafo precedente. L'analisi preliminare si è concentrata su date a distanza 1 l'una dall'altra, cioè a distanza di 2 mesi, e quindi non inquadrano le piccole variazioni dovute al variare della posizione relativa della Luna.

La maglia più fine assicurata da tempi più ravvicinati permette di comprendere al meglio le oscillazioni generate dal moto lunare e fornisce un livello di precisione maggiore per ottimizzare la traiettoria di fuga.

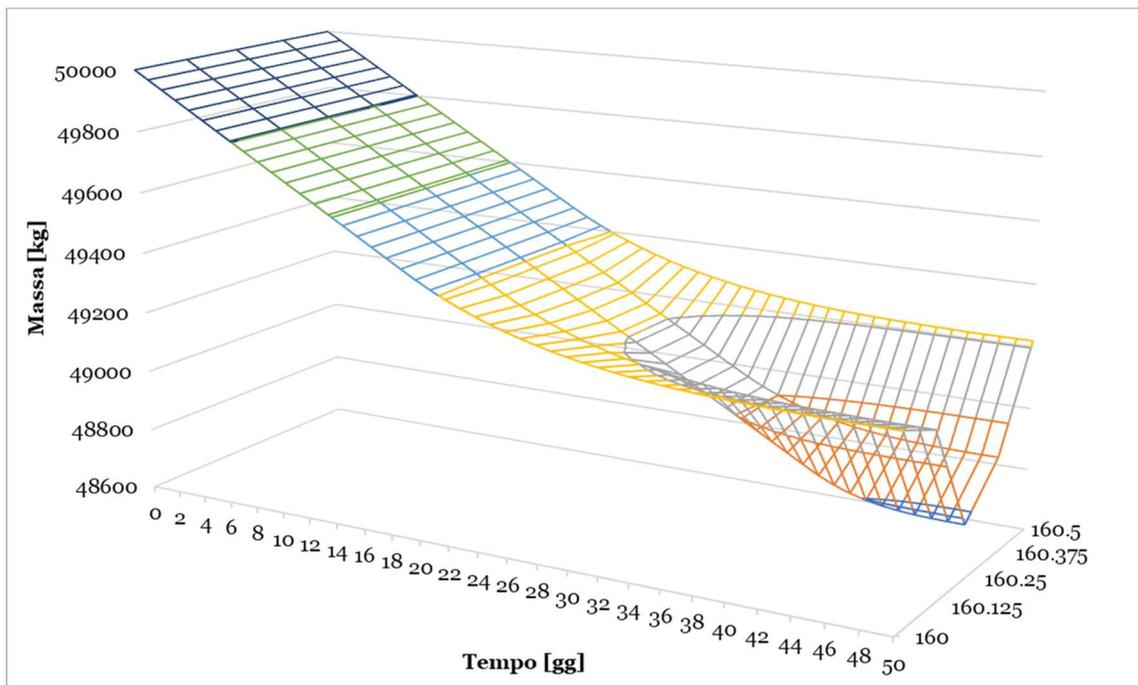


Grafico 5.14 - Massa 3D caso lunare 50gg

Per ultimo, si passa a rappresentare le traiettorie sul piano sinodico.

La prima caratteristica da notare è il punto di partenza dello spacecraft che - come scritto anche nel paragrafo precedente - è quasi uguale per ogni tempo di partenza (si commette un errore massimo inferiore a 0.06%).

Si osserva che l'evasione è effettuata spingendo in direzione concorde al moto di rivoluzione della Terra: lo spacecraft anticipa la Terra nel suo moto per poi essere lasciato indietro allontanandosi dal punto lagrangiano di partenza.

Ultima peculiarità da notare è l'influenza della Luna sulle traiettorie. Le manovre migliori presentano la stessa geometria perché, a distanza di un mese, subiscono le stesse perturbazioni lunari, la lieve differenza tra le due traiettorie è dovuta alle perturbazioni del Sole. D'altra parte, le restanti manovre disegnano traiettorie con geometrie diverse tra loro perché affette da perturbazioni lunari diverse che

influiscono negativamente sulla traiettoria. In particolare, si chiarisce l'inefficacia della manovra al tempo 160.25 causata dall'azione totalmente opposta della Luna.

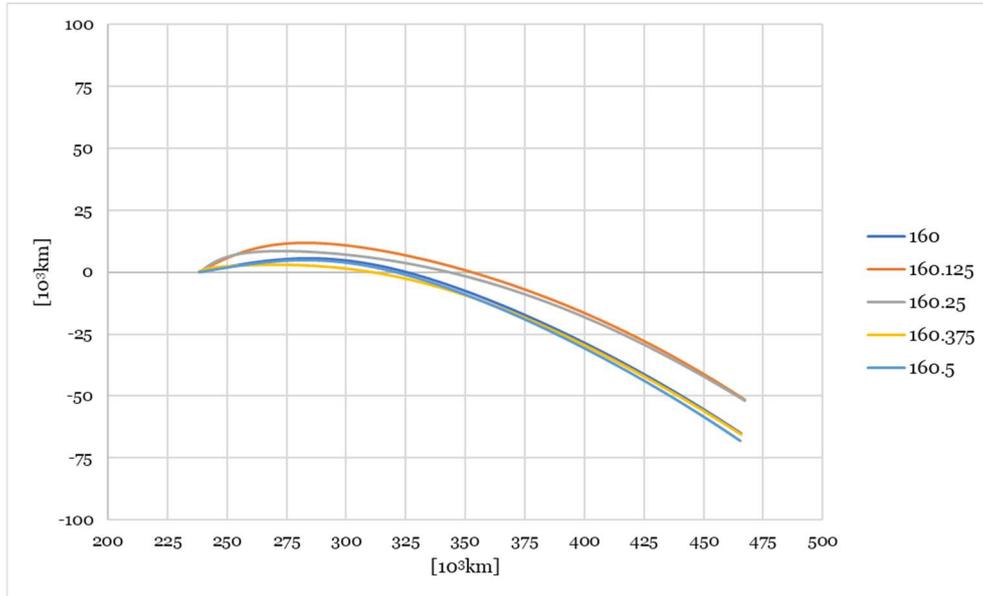


Grafico 5.15 - Traiettoria di fuga caso lunare 50gg

5.2.1.2 Durata di 80 giorni

Siccome nello scorso paragrafo è già stata discussa l'influenza delle perturbazioni lunari sulle prestazioni del propulsore e sulla traiettoria, il discorso si concentrerà soprattutto sulle discrepanze date da una durata di manovra differente.

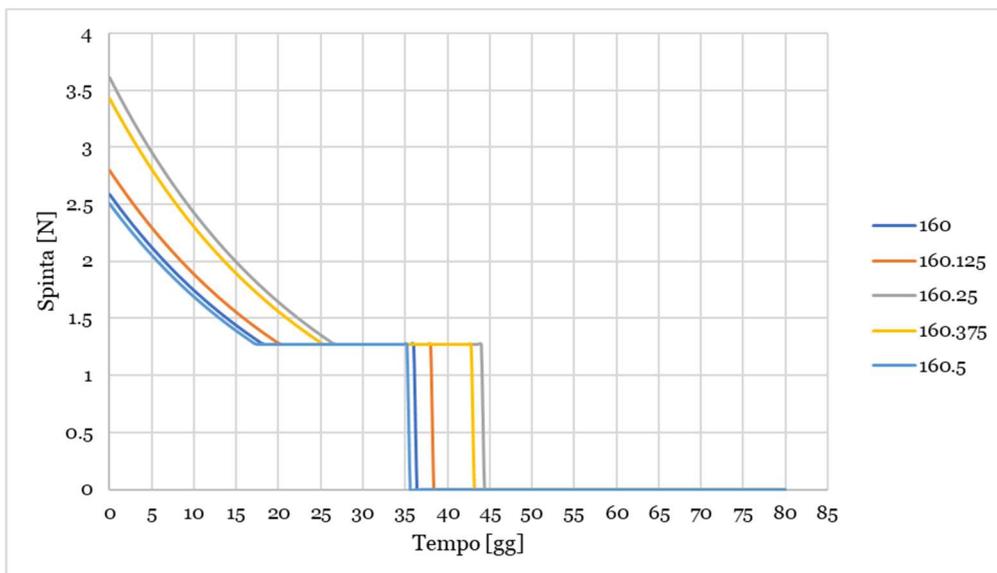


Grafico 5.16 - Spinta caso lunare 80gg

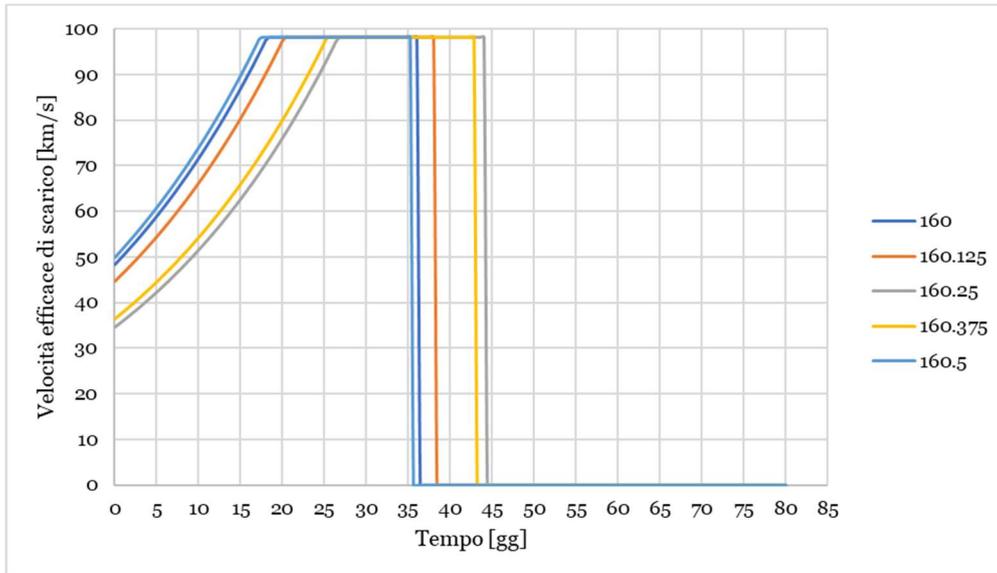


Grafico 5.17 - Velocità efficace di scarico caso lunare 80gg

A differenza delle manovre precedenti, in questo caso il propulsore è utilizzato a regime intermedio già dai primi istanti di manovra: un maggior tempo di manovra permette l'utilizzo di spinte minori e quindi consumi assoluti minori.

D'altra parte, anche in questo caso si nota che la manovra meno efficiente è quella eseguita al tempo 160.25, confermando il ruolo antagonista della Luna in questa evasione, mentre le due più efficienti sono quelle effettuate al tempo 160 e 160.5.

Anche l'andamento della switching function si ripresenta analogo ma il tempo di spegnimento relativo - come è intuibile dalla teoria - diminuisce.

Potendosi sviluppare su un intervallo temporale maggiore, la manovra ottimale presenta una fase di propulsione attiva minore rispetto alle manovre a più breve durata. La manovra a 50 giorni di durata presenta una fase propulsiva maggiore del 90% della durata totale mentre in questo caso la fase occupa il 56% della durata e scende sotto il 50% per le due manovre più efficienti.

D'altra parte, il grafico dell'andamento della massa permette qualche discussione aggiuntiva. Al contrario delle manovre a 50 giorni che mostravano un andamento simile per gran parte della traiettoria, in questo caso l'andamento della massa si distacca tra le varie manovre sin dai primi giorni di evasione.

Potendo svilupparsi in maggior tempo, l'ottimizzazione della manovra considera fattori differenti e non richiede più solamente di sviluppare il massimo regime del propulsore per gran parte della durata.

Questa caratteristica è ancora più visibile inserendo gli andamenti delle masse in un grafico a reticolo, il quale mostra fin da subito l'avvallamento che, nelle manovre a 50 giorni, è visibile solamente negli ultimi giorni di manovra.

Un'altra peculiarità da evidenziare è la presenza del punto zero della switching function: siccome la fase propulsiva non occupa tutta la durata della manovra si può

osservare un intervallo temporale a massa costante invisibile per le manovre di durata inferiore perché di durata trascurabile.

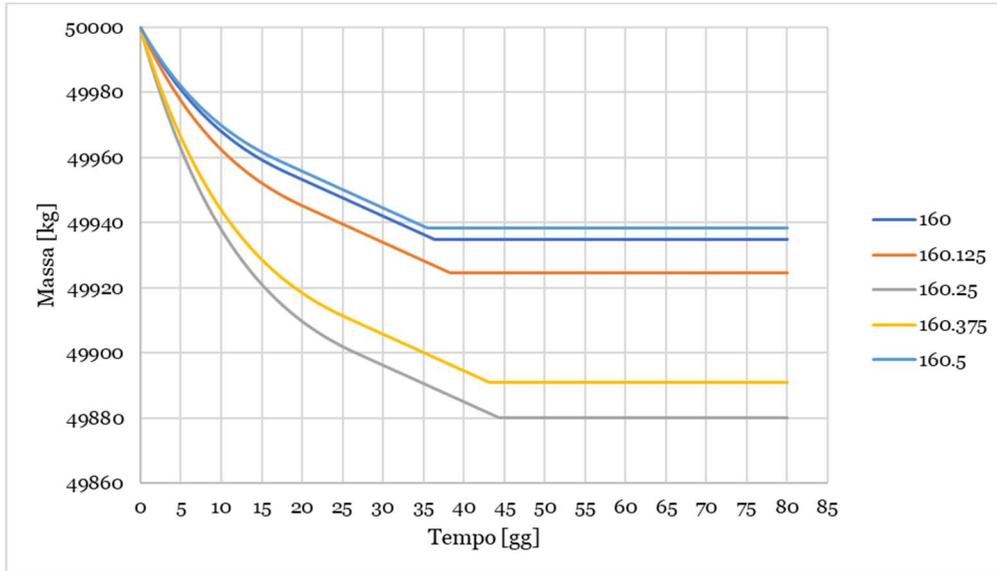


Grafico 5.18 - Massa caso lunare 80gg

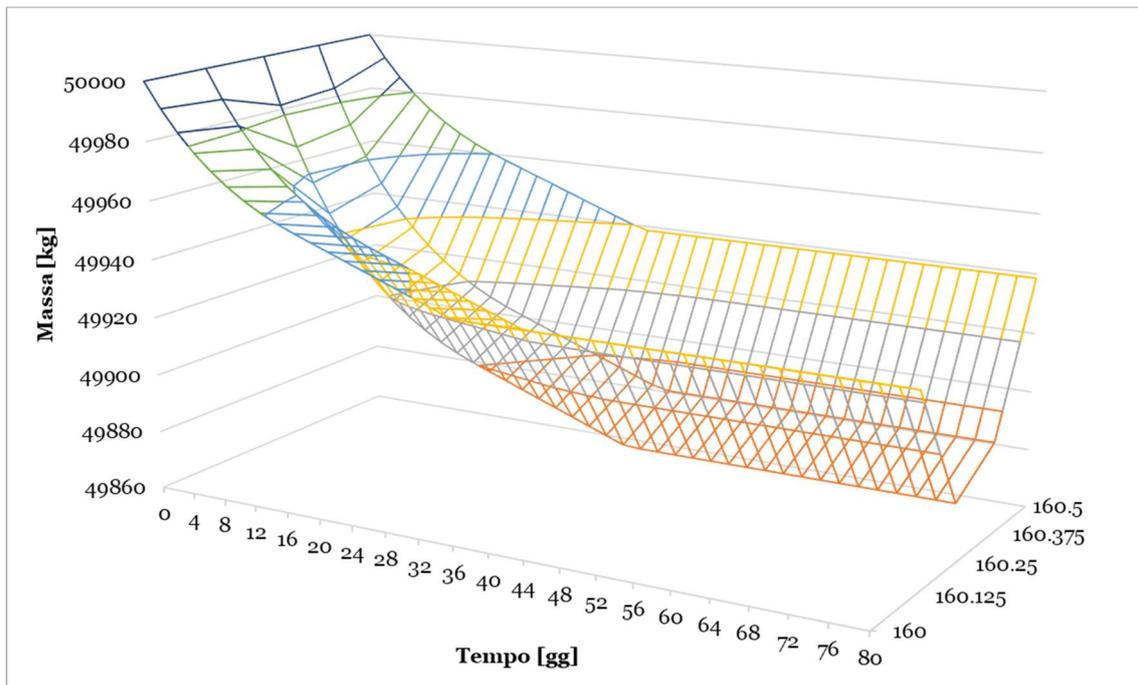


Grafico 5.19 - Massa 3D caso lunare 80gg

Per finire la trattazione si analizzano le traiettorie tracciate.

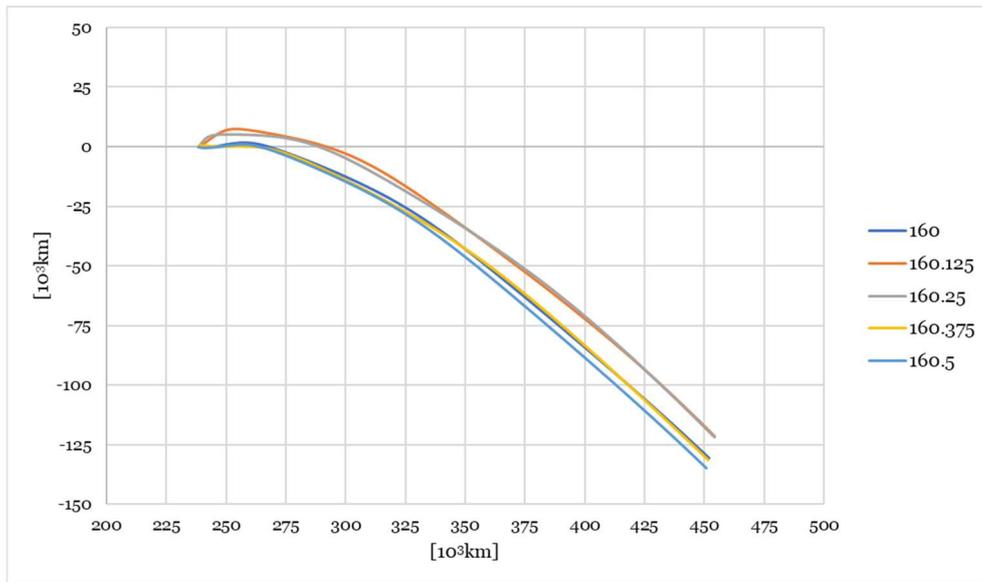


Grafico 5.20 - Traiettorie caso lunare 80gg

Il punto di partenza si riconferma uguale per ogni manovra (anche in questo caso il massimo errore percentuale commesso è inferiore a 0.06%). Come per le traiettorie di 50 giorni, anche in questo caso le manovre più efficienti mostrano geometria simile mentre le altre tracciano linee differenti a causa dell'influenza negativa della Luna che non permette un'evasione facile.

Infatti, come si può notare dalla traccia delle due evasioni migliori, la manovra ottimale non prevede una spinta nella direzione del moto della Terra ma solo radiale: lo spacecraft non anticipa la Terra nel suo moto di rivoluzione ma viene lasciato indietro durante la rotazione del pianeta attorno al Sole.

Inoltre - come discusso per le manovre di 50 giorni -, la variazione della posizione relativa del Sole separa le due traiettorie migliori eseguite a distanza di un mese che però mostrano la stessa geometria perché sottoposte alle stesse perturbazioni lunari. Analogamente, le altre manovre disegnano traiettorie con geometrie molto diverse tra di loro perché devono compensare le influenze negative della Luna.

Confrontando le due analisi a durata di manovra differente, si può affermare che questa influenza non solo i parametri del propulsore - come si può intuire dalla teoria - ma anche la traiettoria stessa. In particolare, si può notare una grossa variazione lungo la coordinata parallela al movimento della Terra e quindi, come detto per l'analisi generale, è necessario valutare la manovra più conveniente considerando non solo il tempo di partenza, importante per valutare le perturbazioni della Luna e garantire il minimo consumo possibile, ma anche la durata della stessa per definire il punto di arrivo dello spacecraft.

D'altra parte, come si vede dal grafico, si può affermare che le perturbazioni lunari non influenzino troppo la velocità finale dello spacecraft.

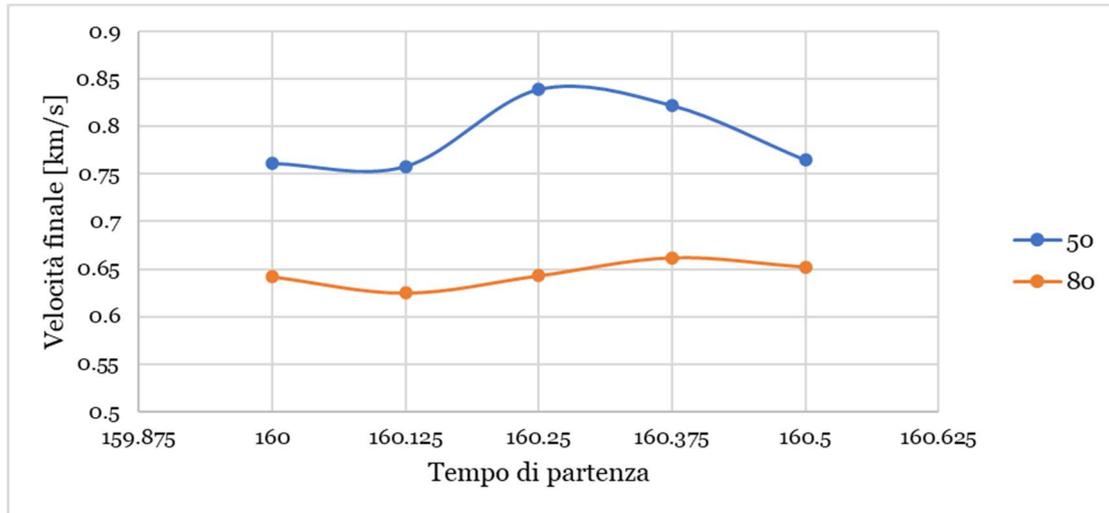


Grafico 5.21 - Confronto velocità finale caso lunare

Oltre ad un incremento di velocità all'aumentare della durata della manovra, si possono rilevare delle piccole variazioni dovute all'influenza della Luna. Nello specifico, le manovre meno efficienti presentano una velocità finale maggiore perché l'azione negativa della Luna su di esse le obbliga a sfruttare maggiormente il propulsore e quindi costringe un'evasione con velocità maggiore.

Perciò, è possibile affermare che l'influenza delle perturbazioni lunari, e in particolare della variazione di queste, è molto più evidente per durate lunghe e intermedie perché permettono di sviluppare una manovra più efficiente.

Per concludere la trattazione inerente alle influenze della Luna sulla traiettoria e sul funzionamento del propulsore, è bene analizzare nel dettaglio il consumo di propellente, dato per scontato nell'analisi dell'andamento della massa.

Durante il periodo lunare, la massa di propellente richiesta varia notevolmente con un aumento rilevante per tempi di partenza 160.25 e 160.375 - in linea con i risultati ottenuti per la spinta e la velocità efficace di scarico nonché la traiettoria -: per durata di 80 giorni la richiesta di propellente raddoppia.

Inoltre, si nota un aumento percentuale all'aumentare della durata dell'evasione: la perturbazione negativa causata da una posizione relativa della Luna opposta alla traiettoria di fuga dello spacecraft influenza maggiormente le manovre che si sviluppano su durate maggiori perché permangono maggiormente nell'ambiente gravitazionale lunare e quindi il consumo percentuale di propellente aumenta.

[kg]	160	160.125	160.25	160.375	160.5
50	793.2858	860.9335	1225.5142	1088.2392	781.0745
80	65.1959	75.1663	119.8982	108.8485	61.4449

Tabella 5.6 - Confronto massa propellente richiesta caso lunare

5.2.2 Influenze del Sole sulla traiettoria

Analogamente a quanto fatto in quest'ultimo paragrafo, per analizzare le influenze solari sulle prestazioni del propulsore e sulla manovra è necessario considerare il periodo di rivoluzione del Sole attorno alla Terra, cioè un anno.

Anche in questo caso si scelgono 5 tempi di partenza a distanza temporale di 1.5, cioè 3 mesi; la precisione dell'analisi è inferiore rispetto a quella dell'analisi generale, per la quale si considerava una distanza temporale di 1 ma è sufficiente a catturare gli effetti legati alla variazione della posizione relativa del Sole.

Inoltre, anche in questo caso, per alleggerire la mole totale di grafici, si considera un tempo di manovra di 50 giorni per rappresentare le durate corte e un tempo di manovra di 80 giorni per le durate intermedie e lunghe.

Si riporta la tabella di conversione dei tempi di partenza.

160	19/06/2025 4:34:22.54605	163	10/12/2025 14:6:31.21878
161.5	14/ 9/2025 9:20:26.88241	164.5	7/ 3/2026 18:52:35.55515
		166	02/06/2026 23:38:39.89152

Tabella 5.7 - Conversione tempo di partenza caso solare

5.2.2.1 Durata di 50 giorni

L'analisi segue lo stesso svolgimento del caso precedente.

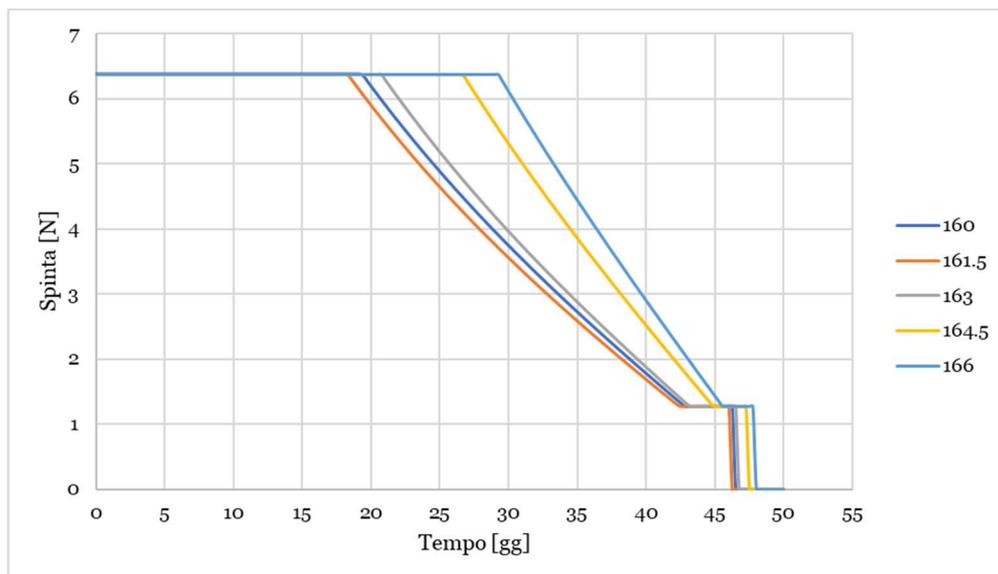


Grafico 5.22 - Spinta caso solare 50gg

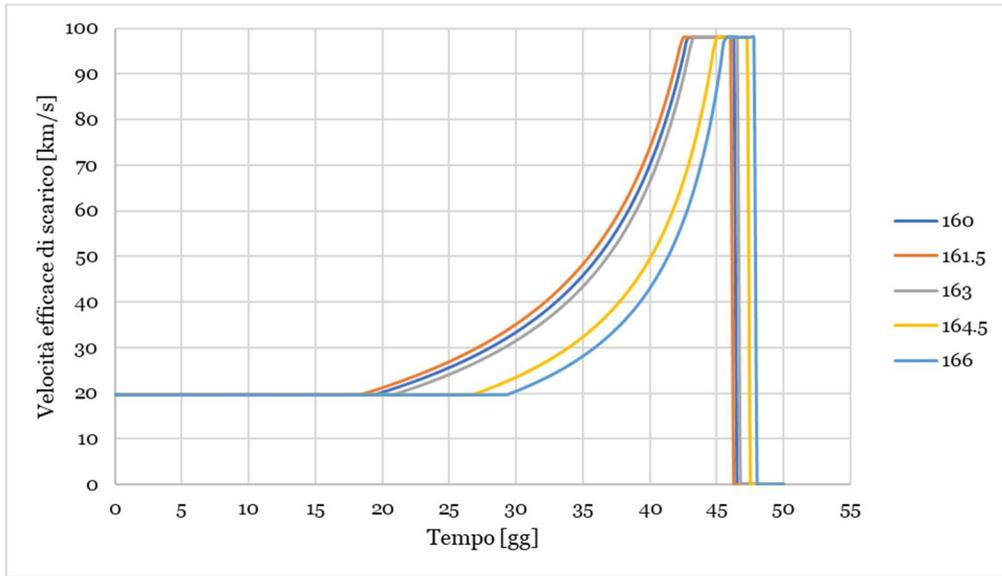


Grafico 5.23 - Velocità efficace di scarico caso solare 50gg

Analogamente alle altre manovre di 50 giorni, l'andamento del propulsore descrive un lavoro a pieno regime per quasi tutta la durata della traiettoria con minime differenze in base al tempo di partenza; tuttavia, il comportamento non sembra ripetersi a distanza di un anno - comportamento già rilevabile dall'analisi generale. Nello specifico, come le piccole differenze tra due manovre eseguite a distanza di un mese sono attribuibili alle influenze del Sole, in questo caso il grande divario tra le due manovre eseguite a distanza di un anno è causato dalle influenze della Luna.

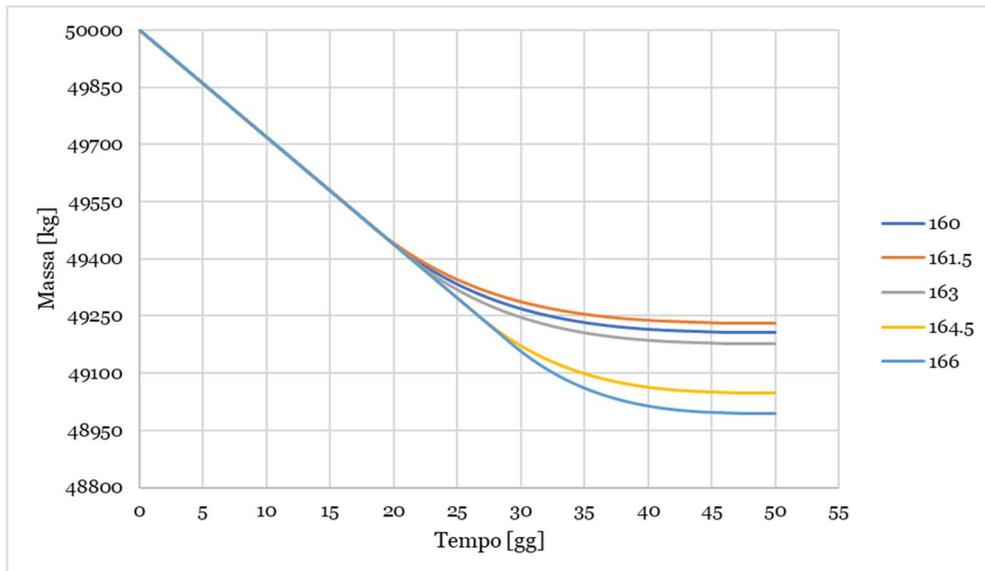


Grafico 5.24 - Massa caso solare 50gg

Come è stato calcolato nel capitolo 2, le perturbazioni generate sul sistema Terra-spacecraft dalla Luna sono maggiori di quelle generate dal Sole perché, malgrado l'enorme differenza di massa tra i due corpi, la distanza che separa la Luna dal sistema le permette di generare azioni perturbative maggiori rispetto al Sole.

L'effetto perturbativo dovuto alla differente posizione della Luna si osserva ancora meglio nell'andamento della massa; infatti, si nota che, a distanza di un anno, la manovra peggiora drasticamente, diventando la più costosa.

Come per le altre manovre da 50 giorni, siccome al propulsore è chiesto di lavorare a massimo regime per gran parte della durata, la massa diminuisce linearmente per gran parte di essa, comportamento che si osserva ancora meglio inserendo i dati in un grafico tridimensionale.

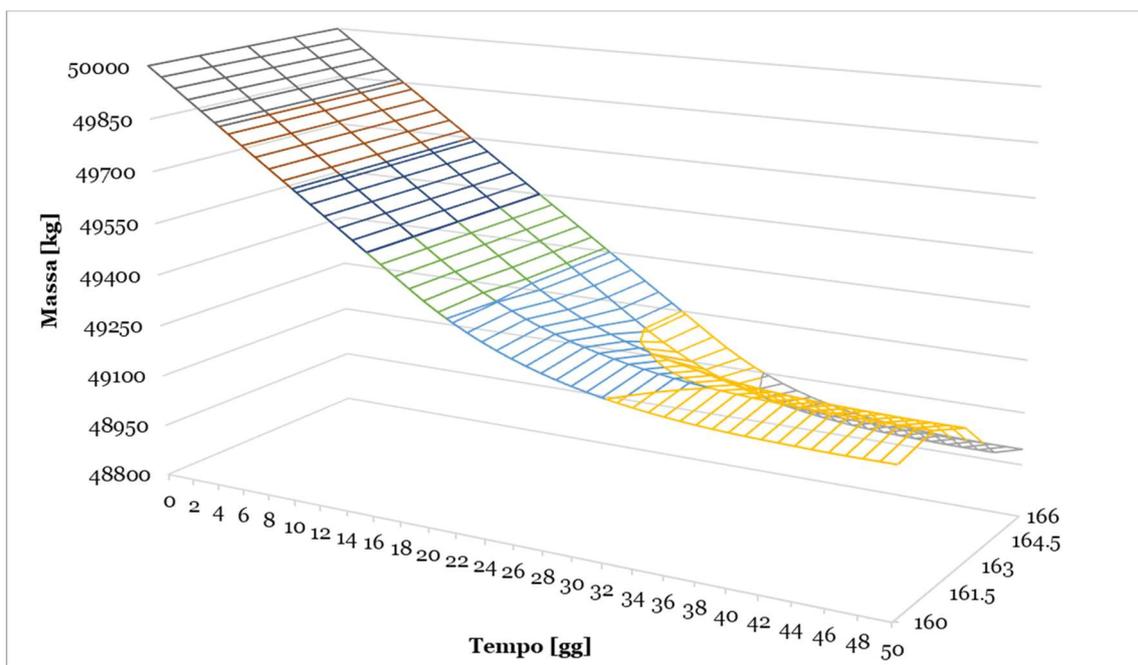


Grafico 5.25 - Massa 3D caso solare 50gg

Infine, si passa a disegnare le traiettorie nel sistema sinodico.

In questo caso non è possibile considerare un unico punto di partenza. Al variare del tempo di partenza varia la distanza tra Sole e Terra e quindi varia leggermente anche la posizione del punto lagrangiano L2; inoltre, anche le perturbazioni della Luna influiscono sul punto di partenza della traiettoria. In particolare, considerando un punto di partenza comune per ogni manovra si commette un errore relativo del 3%. D'altra parte, le traiettorie presentano una geometria quasi uguale grazie alle lievi perturbazioni generate dal Sole, inferiori a quelle della Luna.

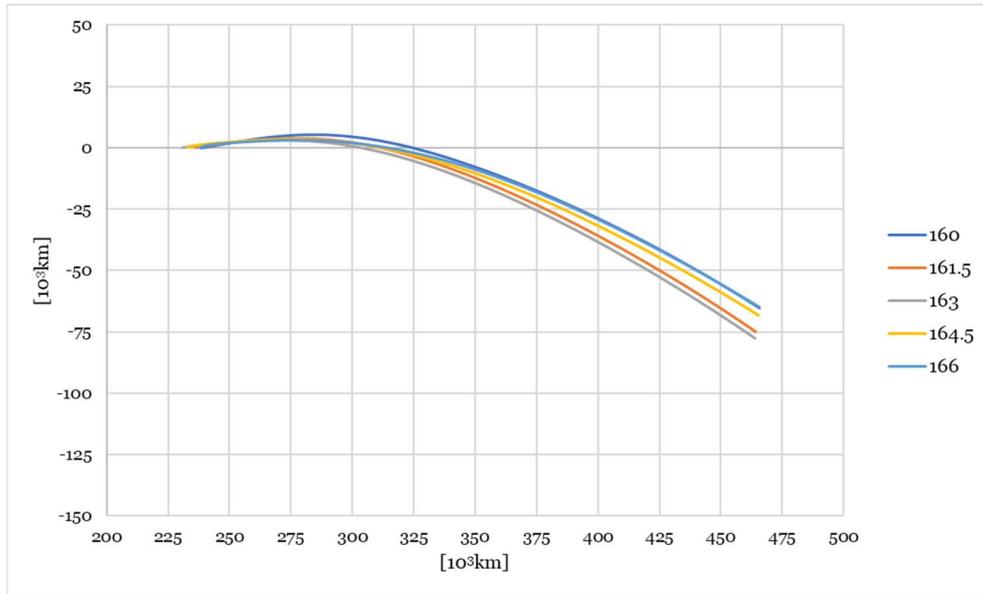


Grafico 5.26 - Traiettorie caso solare 50gg

5.2.2.2 Durata di 80 giorni

Passando ad una durata maggiore si evidenziano le differenze causate da un tempo di manovra intermedio rispetto al tempo breve precedente.

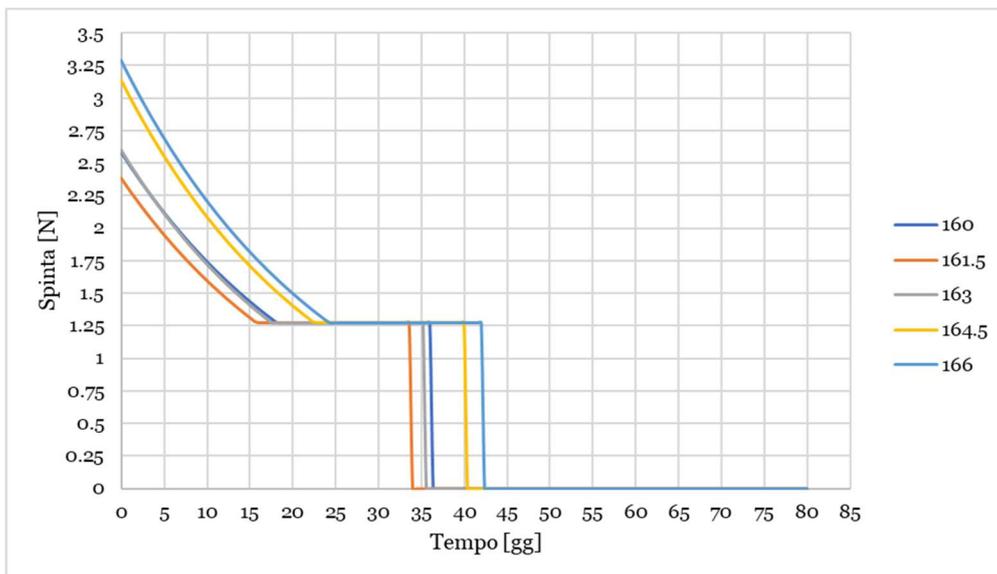


Grafico 5.27 - Spinta caso solare 80gg

Come accade anche all'interno di un mese, aumentando la durata della manovra il propulsore non è più vincolato a lavorare a pieno regime.

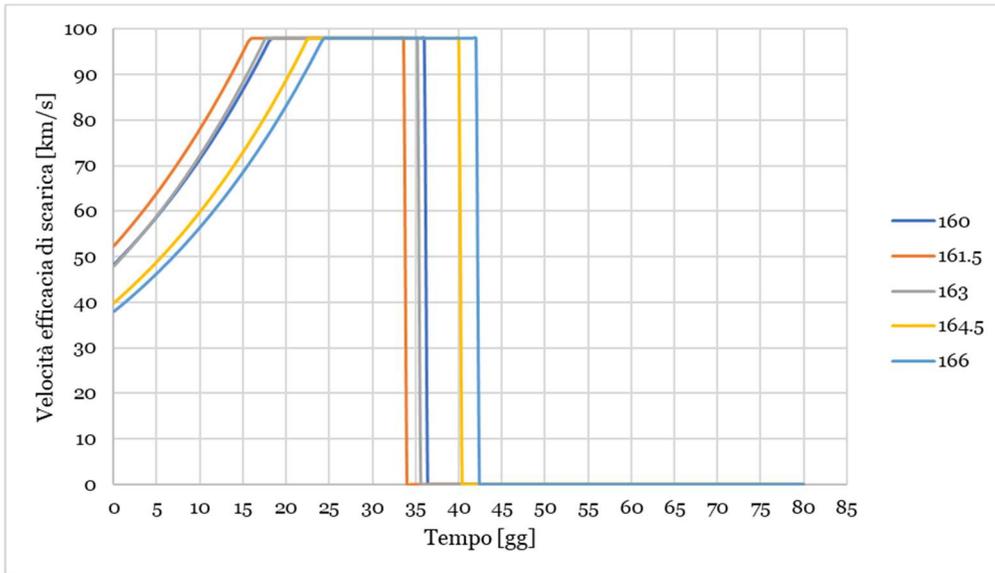


Grafico 5.28 - Velocità efficace di scarica caso solare 80gg

La fase propulsiva si sviluppa in una finestra temporale minore ma l'andamento della switching function varia rispetto alla manovra da 50 giorni; infatti, a differenza del caso precedente, si nota che la manovra al tempo 163 anticipa lo spegnimento rispetto alla manovra eseguita al tempo 160.

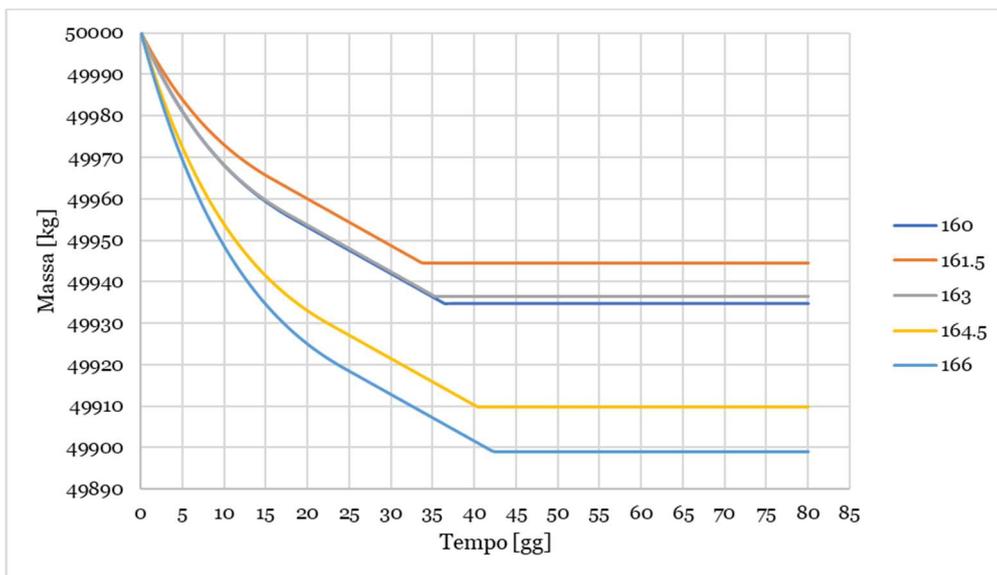


Grafico 5.29 - Massa caso solare 80gg

Tuttavia, anche in questo caso si trova una differenza importante tra le manovre eseguite a distanza di un anno, passando da una manovra quasi efficiente alla meno

efficiente del gruppo scelto, confermando nuovamente l'influenza negativa della Luna sui consumi e le prestazioni del propulsore.

Questo dimostra l'importanza del concetto di finestra di lancio - già discusso nel capitolo 2 in merito alle missioni interplanetarie -, cioè l'intervallo temporale da attendere per eseguire la missione più efficiente.

Analogamente a quanto successo per le altre manovre a 80 giorni, anche in questo caso è possibile individuare un distacco marcato degli andamenti già nei primi giorni. Anche dall'andamento tridimensionale della massa si può notare la tendenza a diminuire all'aumentare del tempo di partenza.

Questo comportamento non può essere esteso a tutti gli intervalli considerabili: siccome le discrepanze nei valori finali di manovre a distanza di un anno sono causate dalle perturbazioni della Luna, a distanza di 19 anni - come già spiegato nell'analisi generale delle prove - si ritrovano gli stessi risultati, e quindi è possibile trovare intervalli temporali di un anno in cui la massa tende ad aumentare.

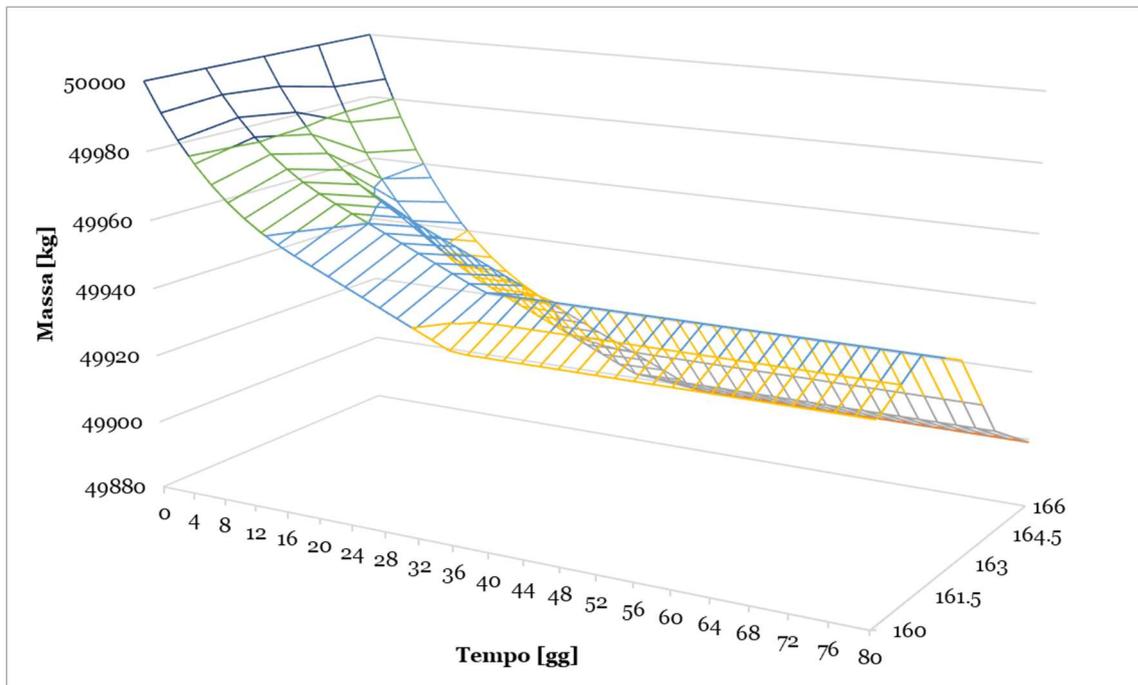


Grafico 5.30 - Massa 3D caso solare 80gg

Osservando le traiettorie sul piano sinodico è possibile notare che, sviluppando manovre meno impegnative, lo spacecraft evade facendosi lasciare indietro nel moto di rivoluzione della Terra senza anticiparla. Inoltre, anche in questo caso le manovre a distanza di un anno presentano più o meno la stessa traiettoria.

In conclusione, è possibile affermare che, anche per durate intermedie, gli effetti gravitazionali dovuti al Sole sono minimi se paragonati a quelli della Luna. Nello specifico, manovre a distanza di un anno solare non si ripetono simili tra di loro ma

presentano forti differenze per quanto riguarda i valori di spinta e consumo del propulsore, mentre la traiettoria sembra ripetersi negli anni.

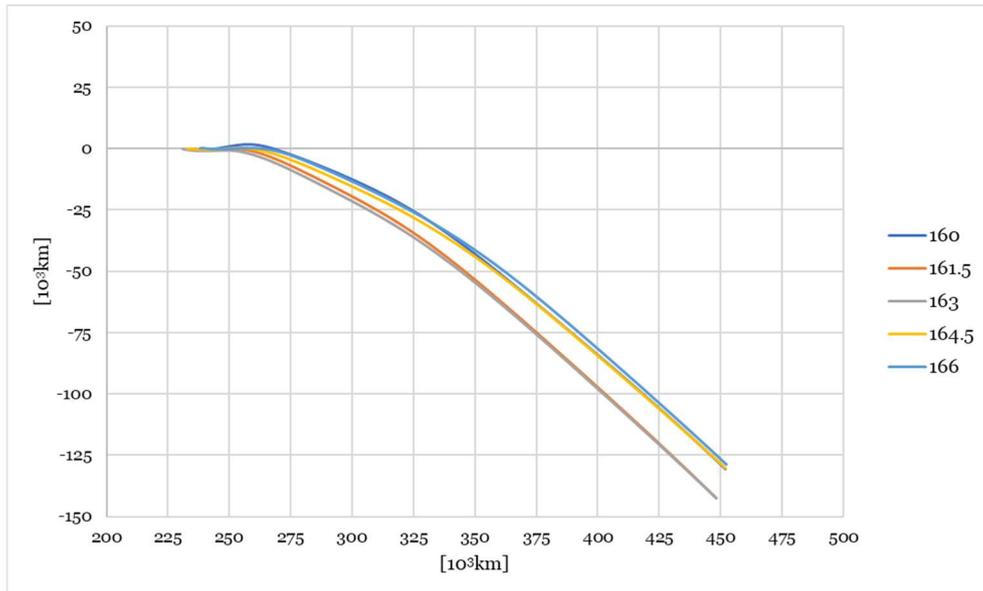


Grafico 5.31 - Traiettoria caso solare 80gg

Come specificato per le manovre di breve durata, durante la definizione della manovra è necessario analizzare a priori la finestra di lancio affinché si sviluppi la manovra più efficiente possibile nel corso del periodo metonico.

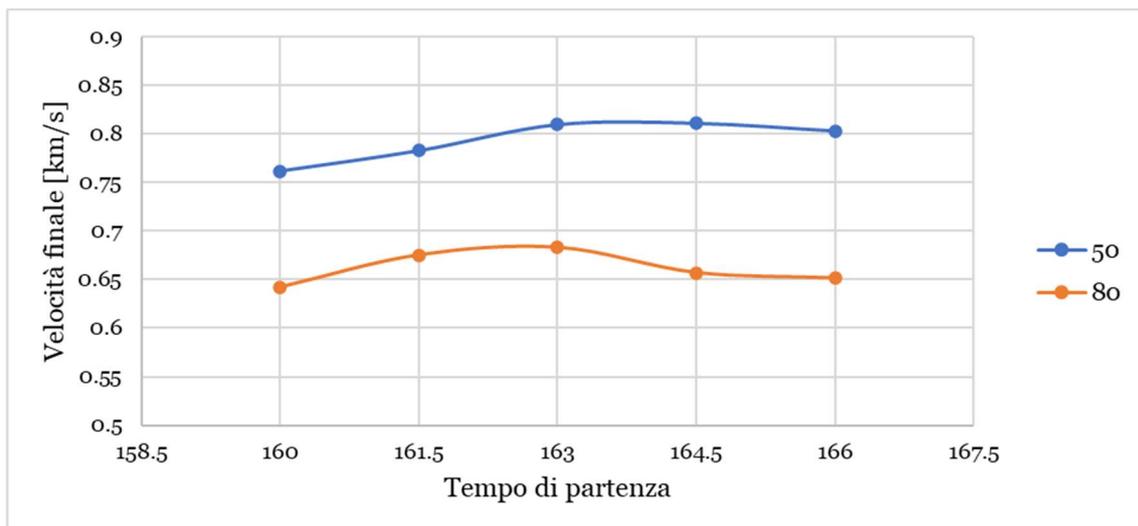


Grafico 5.32 - Confronto velocità finale caso solare

Confrontando le velocità finali tra le manovre eseguite lungo l'anno, si nota una lieve influenza del tempo di partenza, che deve quindi essere tenuta in conto durante la

definizione della manovra stessa. In particolare, a distanza di un anno la manovra presenta consumi maggiori ma velocità finale maggiore.

Oltre ad un incremento di velocità all'aumentare della durata della manovra, si rilevano piccole variazioni dovute all'influenza della Luna e del Sole più contenute rispetto a quanto rilevato su un mese ma non periodiche.

Per concludere la trattazione, come fatto per le influenze lunari, è bene analizzare nel dettaglio il consumo di propellente.

Durante il periodo solare analizzato, la massa di propellente richiesta presenta un andamento oscillatorio ma non periodico. In particolare, diminuisce al tempo 161.5 e aumenta in maniera monotona fino al tempo 166.

Nel periodo lunare la massa di propellente richiesta oscilla molto di più: si parla di una differenza massima di quasi 450kg per manovre di 50 giorni e di quasi 60kg per manovre di 80 giorni; d'altra parte, per il periodo solare studiato la differenza arriva a circa 240kg per manovre da 50 giorni e 45.5kg per manovre da 80 giorni.

Tuttavia, mentre per il caso lunare la differenza di massa di propellente richiesta tra le manovre a distanza di un mese era quasi trascurabile - poco meno di 4kg per le traiettorie da 50 giorni e 12.2kg per quelle da 80 giorni -, nel caso solare analizzato la differenza di massa di propellente richiesta tra le manovre a distanza di un anno solare è paragonabile a quella massima. In particolare, si calcola una differenza di 211.5kg per manovre da 50 giorni e 35.5kg per manovre da 80 giorni.

[kg]	160	161.5	163	164.5	166
50	793.2858	768.2863	822.2549	951.2878	1004.8634
80	65.1959	55.3620	63.4072	90.1823	100.8514

Tabella 5.8 - Confronto massa propellente richiesta caso solare

Alla fine dell'analisi di dettaglio, è possibile affermare che le perturbazioni del Sole influenzino maggiormente le traiettorie di fuga tracciate mentre le perturbazioni lunari influenzano maggiormente gli andamenti del propulsore, e in particolare il consumo di propellente.

Dunque, il titolo del paragrafo è fallace: durante l'analisi è possibile circoscrivere lo studio ai soli effetti perturbativi causati dalla Luna ma non è possibile analizzare i soli effetti solari che sono mischiati a quelli lunari - preponderanti - considerando un intervallo di tempo di un anno.

In generale, per concludere l'analisi, considerando un mese si trovano risultati molto oscillanti ma periodici mentre, considerando manovre all'interno di un anno, i risultati sono più compatti ma non si ripetono a distanza di un anno ed è necessario considerare 19 anni prima che si ripresenti lo stesso andamento.

Conclusione

Nel capitolo precedente sono presentati e discussi i risultati ottenuti dallo studio; lo scopo di quest'ultimo capitolo è riassumere i concetti fondamentali discussi prima e soprattutto nell'analisi delle traiettorie ottenute.

La tesi si concentra sull'analisi delle traiettorie di fuga dal punto lagrangiano L2 del sistema Terra-Sole ottimizzate attraverso l'utilizzo di metodi inversi. Tuttavia, lo scopo ultimo della tesi non è l'analisi ma la comprensione delle potenzialità del propulsore utilizzato per le manovre.

In particolare, il problema di ottimo si concentra sulle manovre di fuga dal punto L2 perché, negli anni, sta guadagnando sempre maggior interesse. La posizione fornisce un'illuminazione stabile del Sole e un ottimo puntamento verso lo spazio profondo; tuttavia, rappresenta anche un ottimo punto di partenza per missioni interplanetarie o dirette verso oggetti interstellari.

L'evasione viene calcolata per uno spacecraft molto massivo, cioè 50 tonnellate, per mettere ancora più in risalto il potenziale del propulsore. Infatti, malgrado la massa elevata, le manovre di fuga riescono a scendere a 50 giorni di durata.

Il VaSIMR presenta caratteristiche totalmente innovative rispetto ai propulsori attualmente disponibili nel panorama dell'esplorazione spaziale. In particolare, è proprio la possibilità di variare l'impulso specifico che permette al propulsore di sviluppare manovre veloci ma efficienti. Infatti, questa caratteristica conferisce al propulsore una flessibilità unica nel suo genere che gli permette di ottimizzare il consumo di propellente a potenza costante.

I risultati dimostrano non solo la fattibilità di una manovra di breve durata con propulsore ad impulso specifico variabile ma evidenziano anche il funzionamento di questo in una manovra di evasione confermandone l'efficienza e le potenzialità per trasporti interplanetari ad alta velocità.

Per ultimo, l'analisi delle manovre ha confermato e chiarito le perturbazioni della Luna e del Sole sulle traiettorie e sul funzionamento del propulsore. In particolare, la Luna presenta un'influenza maggiore sul consumo di propellente e, in secondo luogo, una lieve influenza mensilmente ciclica sulle traiettorie; d'altra parte, il Sole è legato esclusivamente all'andamento macroscopico delle traiettorie e, a distanza di un anno solare, il punto di partenza e arrivo della traiettoria è uguale.

In conclusione, la tesi rappresenta solo una prima parte di quella che potrebbe essere l'analisi completa delle potenzialità del VaSIMR.

Possibili sviluppi futuri, supportati anche dall'eventuale evoluzione del propulsore stesso e dalle prove di funzionamento che verranno eseguite nei prossimi anni, possono essere riassunti in tre grosse categorie:

- l'utilizzo di un punto di partenza differente per la manovra di escape, cambiando il punto lagrangiano o il sistema di riferimento, cioè analizzando le manovre di fuga dai punti lagrangiani del sistema Terra-Luna;
- l'analisi di manovre interplanetarie complete, inserendo un target specifico e non concentrandosi solamente sull'evasione;
- la definizione di parametri e vincoli differenti, cioè i vincoli dell'impulso specifico e la massa e la potenza del propulsore, che possano assecondarne l'evoluzione.

Bibliografia

L. Mascolo, L. Casalino, Escape Trajectories from Lagrangian Points with Electric Propulsion, 2022

L. Casalino, Appunti del corso di Propulsione Spaziale, anno 2021/2022

M. Battipede, Appunti del corso di Meccanica del volo Spaziale, anno 2021/2022

Andrea Iapichello, Ottimizzazione di traiettorie per missioni a fly-by multipli con Asteroidi Near-Earth, Politecnico di Torino, 2022

Ivan Felli, Optimization of interplanetary trajectories to near-Earth asteroids using electric propulsion, Politecnico di Torino, 2022

Donato Russo, Ottimizzazione traiettoria Terra-Marte con propulsione a impulso specifico variabile (VASIMR) ai fini della futura esplorazione umana, Politecnico di Torino, 2022

Chiara Mugoni, Manovre di escape da orbite Lyapunov attorno al punto L2 Terra-Sole con propulsione elettrica, Politecnico di Torino, 2022

Simone Arca, Ottimizzazione di traiettorie con metodi indiretti, Politecnico di Torino, 2022

F.R. Chang Diaz, Jared P. Squire, Andrew Petro, Tri X. Nguyen, *The Evolution of the VASIMR Engine*, 2001

E.A. Bering, F.R. Chang-Diaz, J.P. Squire, M. Brukardt, T.W. Glover, R.D. Bengtson, V.T. Jacobson, G.E. McCaskill, L. Cassady, *Electromagnetic ion cyclotron resonance heating in the VASIMR*, 2007

M.C. Pedro Andres, Tolyarenko Nikolai, The VASIMR Engine: Benefits, Drawbacks, and Technological Challenges, 2011

Jared P. Squire, Mark D. Carter, Franklin R. Chang Díaz, Matthew Giambusso, Timothy W. Glover, Andrew V. Ilin, Jorge Ogilve-Araya, Christopher S. Olsen,

Edgar A. Bering, Benjamin W. Longmier, *VASIMR Spaceflight Engine System Mass Study and Scaling with Power*, 2013

Shane Lynn, John Ringwood and Juan Ignacio Del Valle Gamboa, *State Estimation for the VASIMR Plasma Engine*, 2008

Leonard D. Cassady, William J. Chancery, Ben W. Longmier, Chris Olsen, Greg McCaskill, Mark Carter, Tim W. Gloverk, Jared P. Squire, Franklin R. Chang Diaz, Edgar A. Bering, *VASIMR Technological Advances and First Stage Performance Results*, 2009

F.R. Chang Diaz, Jared P. Squire, Edgar A. Bering, F. Wally Baitty, Richard H. Goulding, Roger D. Bengtson, *The VASIMR Engine: Project Status and Recent Accomplishments*, 2004

Franklin R. Chang Diaz, Matthew Giambusso, Aidan M. H. Corrigan, Lawrence O. Dean, Mohanad F. Warrayat, *Recent Progress on the VASIMR Engine*, 2022

Chris R. Webber, Plasma, Ion-Thrusters, and VASIMR, 2011

Aidan M. H. Corrigan, Mark D. Carter, Jared P. Squire, Franklin R. Chang Diaz, Lawrence Dean, Matthew Giambusso, Greg McCaskill, Joseph Farrias, and Tiffany Yao, *Enhancing VASIMR with Maturing Technologies*, 2018

L. Casalino, G. Colasurdo, Optimization of Variable-Specific-Impulse Interplanetary Trajectories, 2004

*Ringrazio chi è rimasto
e chi si è allontanato
per avermi aiutato
a maturare in questi anni...*