

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea
in Ingegneria Aerospaziale

Tesi di Laurea Magistrale

Analisi aeroelastiche di strutture di velivoli utilizzando teorie strutturali avanzate e DLM



Relatori

prof. Marco Petrolo
prof. Enrico Zappino

Candidato

Martina Santori

Aprile 2023

Alle persone a me più care

Sommario

Lo studio dei fenomeni aeroelastici rappresenta uno degli aspetti più importanti nella progettazione di strutture snelle, soprattutto in campo aeronautico. L'interazione tra forze elastiche, aerodinamiche e inerziali può determinare, in strutture che non sono completamente rigide, l'insorgenza di questi fenomeni di instabilità. Essi possono essere potenzialmente catastrofici e quindi devono essere evitati. Da ciò nasce l'esigenza di utilizzare modelli accurati e affidabili per prevedere il comportamento aeroelastico di strutture sempre più complesse, in modo da limitare le prove sperimentali.

In questa tesi vengono considerate strutture ad elevato allungamento. Per questo motivo, dal punto di vista del modello strutturale, i problemi tridimensionali vengono ridotti a modelli 1D (beam) in cui le variabili incognite dipendono solamente dalla coordinata assiale. Il modello strutturale usato è basato sulla Carrera Unified Formulation (CUF). Si utilizzano delle espansioni polinomiali di tipo Taylor e di tipo Lagrange per definire il campo di spostamento nella sezione trasversale. La CUF permette di scegliere l'ordine dell'espansione in modo arbitrario utilizzando la stessa formulazione.

Oltre al modello strutturale, per le analisi di flutter, è necessario introdurre un modello aerodinamico e in questo caso è stato scelto il Double Lattice Method. Questo approccio è adatto ad applicazioni in regime subsonico, ambito di questo lavoro. Per legare i due modelli, strutturale e aerodinamico, si utilizza il metodo di interpolazione detto spline.

Le prime analisi svolte riguardano il comportamento statico, dinamico e aeroelastico di modelli semplici di piastre isotrope. In seguito, si passa allo studio di configurazioni semplificate di velivoli interi per valutare le condizioni di instabilità aeroelastica. I risultati ottenuti dalle analisi di flutter permettono di ricavare anche la condizione di divergenza, un fenomeno aeroelastico di instabilità statica. Lo studio preliminare di frequenze e modi propri della struttura, tramite analisi dinamiche, risulta fondamentale per le analisi aeroelastiche perché permette di individuare i modelli più accurati per l'individuazione del flutter. Si evidenzia infatti che i modelli classici di Eulero-Bernoulli e di Timoshenko non sono adatti in questo ambito, non riuscendo a rilevare i modi torsionali della struttura. Inoltre, man mano che i gradi di libertà del modello aumentano, si raggiungono risultati sempre più accurati, a discapito però del costo computazionale che aumenta.

Dal confronto con i risultati di modelli piastra o solido ottenuti tramite il software Femap, si giunge alla conclusione che i modelli utilizzati basati sulla CUF hanno un buon livello di accuratezza mantenendo il vantaggio di avere un costo computazionale limitato.

Indice

Elenco delle tabelle	7
Elenco delle figure	9
1 Introduzione	11
1.1 Aeroelasticità	11
1.1.1 Cenni storici	12
1.2 Modello aeroelastico	13
1.3 Contenuto dell'elaborato	13
2 Fenomeni aeroelastici	15
2.1 Divergenza	15
2.2 Analisi di flutter di una sezione tipica	18
3 Modello strutturale	21
3.1 Relazioni geometriche e costitutive	21
3.2 Equazioni di governo	22
3.2.1 Analisi statica	23
3.2.2 Analisi delle vibrazioni libere	23
3.2.3 Analisi di risposta dinamica	23
3.3 Carrera Unified Formulation	24
3.3.1 Espansione di Taylor nel caso di modello 1D	24
3.3.2 Modelli classici di Eulero-Bernoulli e Timoshenko come casi particolari dell'espansione di Taylor del primo ordine	24
3.3.3 Espansione di Lagrange nel caso di modello 1D	25
3.4 Formulazione agli elementi finiti e CUF	28
3.4.1 Matrici di rigidezza e massa e vettore dei carichi	28
4 Modello aerodinamico	31
4.1 Vortex lattice method	31
4.2 Doublet lattice method	33

5	Modello aeroelastico	37
5.1	Il metodo spline	37
5.2	Pendenze nei punti di controllo	40
5.3	Spostamenti nei punti di controllo e di carico	42
5.4	Caso instazionario (DLM)	42
5.5	Metodo P-K per analisi di flutter	43
6	Software MUL2	45
6.1	Interfaccia	45
6.2	Utilizzo in ambito aeroelastico	50
7	Analisi dei risultati	55
7.1	Analisi statica e dinamica di una trave isotropa	55
7.1.1	Analisi statica	55
7.1.2	Analisi dinamica	60
7.2	Analisi aeroelastica di una piastra isotropa	65
7.2.1	Analisi dinamica	65
7.2.2	Analisi di flutter	68
7.2.3	Analisi aeroelastica statica	74
7.3	Analisi aeroelastica di un velivolo	77
7.3.1	Analisi dinamica dell'ala	78
7.3.2	Analisi di flutter dell'ala	81
7.3.3	Analisi dinamica del velivolo intero	82
7.3.4	Analisi di flutter del velivolo intero	90
7.3.5	Modifica del modello strutturale	94
8	Conclusioni	99

Elenco delle tabelle

3.1	Coordinate normalizzate dei 4 nodi dell'elemento di Lagrange LE4	26
3.2	Coordinate normalizzate dei 9 nodi dell'elemento di Lagrange LE9	27
7.1	Caratteristiche del materiale	55
7.2	Analisi statica	57
7.3	Analisi statica in Femap	60
7.4	Prime 10 frequenze proprie ottenuti da diversi modelli	61
7.5	Errore percentuale delle frequenze dei modelli TE1 e 1LE4 rispetto al modello TE4	62
7.6	Frequenze e modi propri ottenuti dal modello TE4	62
7.7	Frequenze [Hz] e modi propri ottenuti dai modelli TE1 e TE4	63
7.8	Analisi dinamica in Femap	65
7.9	Caratteristiche del materiale	66
7.10	Prime 10 frequenze proprie ottenuti da diversi modelli	67
7.11	Frequenze [Hz] e modi propri ottenuti dal modello TE4	67
7.12	Frequenze [Hz] e modi propri ottenuti con Femap	68
7.13	Condizioni di flutter per diversi modelli con mesh aerodinamica 30x8	70
7.14	Condizioni di flutter per diverse mesh aerodinamiche relative al modello 4LE9	70
7.15	Confronto tra le condizioni di flutter ottenute con Femap e con modello TE4 considerando una mesh aerodinamica 30x8	72
7.16	Condizioni di flutter per diverse mesh aerodinamiche relative al modello in Femap considerando una mesh strutturale 40x10	72
7.17	Condizioni di flutter per diverse mesh strutturali relative al modello in Femap considerando una pannellatura aerodinamica 30x8	72
7.18	Divergenza per diversi modelli e con Femap con mesh aerodinamica 30x8	73
7.19	Velocità di divergenza per diverse mesh aerodinamiche ottenute dal modello 4LE9 e dal modello in Femap	73
7.20	Condizioni di flutter per diversi modelli strutturali con mesh aerodinamica 30x8 e divisione in due superfici aerodinamiche	73
7.21	Divergenza per diversi modelli strutturali con mesh aerodinamica 30x8 e divisione in due superfici aerodinamiche	74
7.22	Spostamenti nel punto A e B e rotazioni a diverse velocità per $AoA = 1^\circ$ e modello TE4	75

7.23	Spostamenti nel punto A e B e rotazioni a diverse velocità per $AoA = 1^\circ$ e modello 1LE9	75
7.24	Spostamenti nel punto A e B e rotazioni a diverse velocità per $AoA = 1^\circ$ e modello in Femap	76
7.25	Dimensioni geometriche	77
7.26	Caratteristiche del materiale	77
7.27	Dimensioni geometriche della sezione	78
7.28	Frequenze relative ai primi 6 modi propri dell'ala incastrata	79
7.29	Frequenze relative ai primi 14 modi propri dell'ala intera non vincolata	80
7.30	Condizione di flutter nel caso di ala incastrata	82
7.31	Frequenze relative ai primi 18 modi propri	83
7.32	Confronto delle frequenze relative agli stessi modi dell'ala e del velivolo	85
7.33	Frequenze dei primi modi del velivolo con piano $y=0$ vincolato	86
7.34	Confronto delle frequenze relative agli stessi modi dell'ala e del velivolo vincolati	88
7.35	Frequenze dei primi modi del velivolo con piano $y=0$ vincolato e z libera	90
7.36	Condizione di flutter per il velivolo vincolato nel piano $y = 0$	91
7.37	Condizione di flutter per il velivolo vincolato nel piano $y = 0$ lasciando la z libera	92
7.38	Condizione di flutter per il velivolo non vincolato	93
7.39	Frequenze proprie ottenuti da diversi modelli del velivolo	95
7.40	Condizione di flutter per il velivolo non vincolato per diversi modelli	95

Elenco delle figure

1.1	Triangolo di Collar	11
2.1	Profilo alare	15
2.2	Andamento della variazione di portanza dovuto agli effetti aeroelastici . . .	18
2.3	Profilo alare	19
3.1	Elemento a 4 nodi di Lagrange in coordinate effettive e in coordinate normalizzate	26
3.2	Elemento a 9 nodi di Lagrange in coordinate effettive e in coordinate normalizzate	27
4.1	Vortex lattice method	32
4.2	Doublet lattice method	35
5.1	Sistemi di riferimento globale e locale e notazione per il wing segment . . .	38
6.1	Formato del file ANALYSIS	45
6.2	Formato del file BC	46
6.3	Formato del file EXP_CONN_01	46
6.4	Formato del file EXP_MESH_01	47
6.5	Formato del file CONNECTIVITY	47
6.6	Formato del file MATERIAL	48
6.7	Formato del file LAMINATION	48
6.8	Formato del file NODES	49
6.9	Formato del file VERSORS	49
6.10	Formato del file POSTPROCESSING	49
6.11	Formato del file NASTRAN_FLUTTER	50
6.12	Masse, rigidzze e smorzamenti generalizzati	51
6.13	Griglia di punti sulla superficie	51
6.14	Esempio di comando AERO	52
6.15	Esempio di comando CAERO1	52
6.16	Esempio di comando FLFACT	52
6.17	Numeri di Mach e frequenze ridotte	53
6.18	Metodo usato per le analisi di flutter	53
6.19	Esempio di SPLINE1	53
6.20	Esempio di MPC	53
6.21	Smorzamenti e frequenze al variare della velocità	54
7.1	Schema della trave	56
7.2	Nodi degli elementi beam	56

7.3	Nodi nella sezione della trave	57
7.4	distribuzione di tensione σ_{yy} relativa al modello TE4	59
7.5	Campo di spostamento u_z della trave ottenuto dal modello TE4	60
7.6	Modi di vibrare (modello TE4)	64
7.7	Geometria della piastra isotropa	66
7.8	Pannellatura aerodinamica	68
7.9	Frequenze e smorzamenti al variare della velocità relativi ai primi tre modi ottenuti con un modello TE4 con mesh aerodinamica 30x8	69
7.10	Frequenze e smorzamenti al variare della velocità relativi ai primi tre modi ottenuti con Femap utilizzando una mesh aerodinamica 30x8	71
7.11	Punti A e B in cui si valutano gli spostamenti in direzione z	74
7.12	Rotazioni del tip al variare della velocità (modello in Femap)	76
7.13	Schema del velivolo	77
7.14	Sezione dell'ala	78
7.15	Primi 6 modi di vibrare dell'ala incastrata	79
7.16	Modi di vibrare dell'ala intera non vincolata	80
7.17	Modi di vibrare dell'ala intera non vincolata	81
7.18	Frequenze e smorzamenti relativi ai primi 5 modi dell'ala incastrata al variare della velocità	82
7.19	Modi di vibrare del velivolo non vincolato	84
7.20	Modi di vibrare del velivolo non vincolato	85
7.21	Modi di vibrare del velivolo con piano $y=0$ vincolato	86
7.22	Modi di vibrare del velivolo con piano $y=0$ vincolato	87
7.23	Modi di vibrare del velivolo con piano $y=0$ vincolato	88
7.24	Modi di vibrare del velivolo con piano $y=0$ vincolato e z libera	88
7.25	Modi di vibrare del velivolo con piano $y=0$ vincolato e z libera	89
7.26	Frequenze e smorzamenti relativi ai primi 10 modi del velivolo vincolato al variare della velocità	91
7.27	Frequenze e smorzamenti relativi ai primi modi del velivolo vincolato con z libera al variare della velocità	92
7.28	Frequenze e smorzamenti relativi ai primi modi del velivolo non vincolato al variare della velocità	93
7.29	Modo di flutter del velivolo non vincolato	94
7.30	Frequenze e smorzamenti relativi ai primi modi del velivolo non vincolato al variare della velocità con TE2	96
7.31	Frequenze e smorzamenti relativi ai primi modi del velivolo non vincolato al variare della velocità con TE3	97
7.32	Frequenze e smorzamenti relativi ai primi modi del velivolo non vincolato al variare della velocità con TE4	98

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Aeroelasticità

L'aeroelasticità è lo studio dell'interazione tra le forze elastiche, aerodinamiche e inerziali. In [Collar et al. \[1946\]](#) viene mostrata tale correlazione attraverso il triangolo di Collar, riportato in una versione semplificata in figura 1.1. Ai vertici sono posizionate le seguenti discipline:

1. elasticità: calcola lo stato di deformazione del corpo sotto certe condizioni di carico
2. aerodinamica: calcola le forze agenti su un corpo dovute all'interazione con un fluido
3. dinamica: studia gli effetti inerziali e smorzamenti

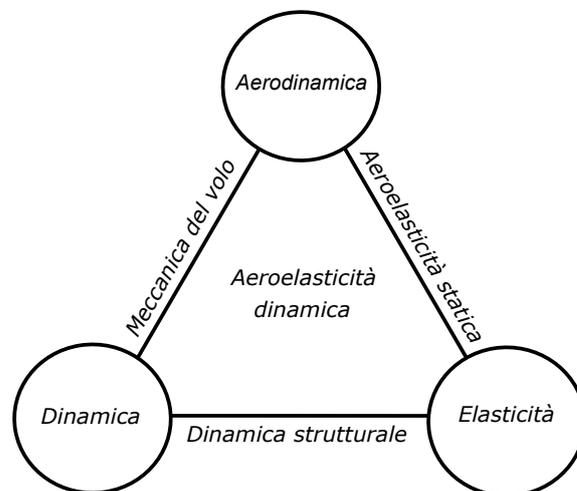


Figura 1.1. Triangolo di Collar

Le combinazioni tra due o tre di queste discipline di maggior interesse per questa tesi sono:

- la dinamica strutturale (tra forze elastiche e inerziali)
- l'aeroelasticità statica (tra forze aerodinamiche e elastiche)
- l'aeroelasticità dinamica (tra tutte e tre le forze)

Lo studio della dinamica strutturale è fondamentale in questo ambito perchè viene utilizzato come analisi preliminare ai fini dei calcoli aeroelastici, per determinare modi e frequenze proprie della struttura. Il problema aeroelastico nasce quando, l'applicazione di un carico aerodinamico causa una deformazione della struttura e quindi una variazione della sua incidenza, la quale a sua volta determina un aumento del carico aerodinamico. Ciò è dovuto al fatto che la struttura non è un corpo rigido ma deformabile. All'aumentare della velocità, i carichi aerodinamici aumentano e quando queste forze non vengono più bilanciate dalle forze elastiche, le deformazioni crescono indefinitamente portando al cedimento della struttura. In questo caso si parla di fenomeno di instabilità aeroelastica statica, o *divergenza*. Quando oltre alle forze elastiche e aerodinamiche, anche le forze inerziali hanno effetti importanti si parla di instabilità aeroelastica dinamica o *flutter*. Entrambi i fenomeni possono essere distruttivi per il velivolo e perciò è di vitale importanza lo studio preliminare delle condizioni di instabilità aeroelastiche per far sì che il velivolo operi in sicurezza.

1.1.1 Cenni storici

Nella storia del volo, l'aeroelasticità ha iniziato a ricoprire un ruolo sempre di maggiore importanza. In Collar [1978] vengono ripercorsi i primi cinquanta anni di storia dell'aeroelasticità.

Nel 1903 i fratelli Wright utilizzarono la curvatura delle ali per il raggiungimento del controllo laterale in volo. Ciò fu fondamentale data l'elevata instabilità del velivolo dovuto all'angolo di diedro elevato.

Nello stesso anno, Samuel Langley catapultò una macchina a motore da una casa galleggiante sul fiume Potomac. Entrambi i tentavi che fece, fallirono. Dopo la morte di Langley, il suo velivolo fu ricostruito e volò con successo grazie alle modifiche apportate: l'ala fu notevolmente irrigidita. Si scoprì quindi che il fallimento di Langley era dovuto alla divergenza statica a causa della bassa rigidità torsionale.

Durante la prima guerra mondiale, ci fu un incremento degli incidenti dovuti ai fenomeni aeroelastici. Il predominio dei biplani in questi anni, rispetto ai monoplani era dovuto al fatto che fossero meno soggetti alla divergenza torsionale grazie alla maggior rigidità.

Il primo caso registrato di flutter avvenne nel 1916 sul bombardiere Handley Page O/400. Il piano di coda iniziò ad oscillare in modo antisimmetrico, causando una torsione della fusoliera di $\pm 45^\circ$. Il fenomeno di instabilità fu causato dalla mancanza di un collegamento rigido tra gli equilibratori di sinistra e di destra. Divenne quindi requisito di progetto l'inserimento di una barra in acciaio per permettere di eliminare il grado di libertà relativo al movimento antisimmetrico della coda.

Nel 1925 R. A. Frazer e W. J. Duncan pubblicarono "The flutter of aeroplane wings" gettando le basi per lo studio del flutter, introducendo il concetto di struttura semi-rigida. Negli anni '30 Roxbee Cox e Pugsley proposero per la prima volta il nome "aeroelasticità"

e iniziarono a studiare un nuovo fenomeno aeroelastico statico, l'inversione dei comandi, dopo che, nel 1927, dei test sul Bristol Bagshot avevano fatto emergere che all'aumentare della velocità, la risposta degli alettoni diventava opposta a quella attesa.

Negli stessi anni, Theodorsen contribuì ulteriormente a gettare le basi per lo studio del flutter.

1.2 Modello aeroelastico

Per lo studio dei fenomeni aeroelastici, si devono definire il modello strutturale e il modello aerodinamico.

Nell'ambito di questa tesi, la componente strutturale si basa su modelli beam 1D. Infatti, in campo aerospaziale, hanno grande applicazione strutture snelle con sezioni molto inferiori all'allungamento. Le teorie 1D quindi si adattano bene e allo stesso tempo hanno un minore costo computazionale rispetto ai modelli piastra 2D o solido 3D. I modelli classici di Eulero-Bernoulli (EBBT) e Timoshenko (TBT) sono i più semplici tra le teorie 1D. La loro semplicità comporta però una bassa accuratezza e si adattano meglio alle analisi a flessione di strutture omogenee. In campo aeroelastico, in cui lo studio del comportamento torsionale della struttura risulta fondamentale, si utilizzano modelli strutturale 1D di ordine superiore. I modelli considerati si basano sulla *Carrera Unfined Formulation* (CUF) sviluppata dal professor Carrera del Politecnico di Torino ([Carrera et al. \[2014\]](#)). L'utilizzo della CUF per modelli trave viene riportato in [Carrera and Giunta \[2010\]](#). La CUF permette di avere una formulazione unificata per modelli differenti e l'ordine del modello diventa input dell'analisi. Nella definizione del campo di spostamenti sulla sezione trasversale della trave, in questa tesi, vengono adottati i polinomi di Taylor e i polinomi di Lagrange. Nel primo caso i termini dell'espansione non hanno senso fisico e quindi spesso viene preferito l'uso dei polinomi di Lagrange, le cui variabili sono gli spostamenti nei nodi degli elementi con cui viene modellizzata la struttura.

Per quanto riguarda il modello aerodinamico, viene adottato il *Doublet Lattice Method* (DLM) presentato in [Albano and Rodden \[1969\]](#) e proposto in una versione migliore in [Rodden et al. \[1998\]](#). Questo modello è adatto nel caso di flussi subsonici, oggetto di questa tesi. Inoltre viene presentato sotto le ipotesi di superfici planari e flussi incompressibili.

1.3 Contenuto dell'elaborato

Lo scopo della tesi è quello di svolgere analisi aeroelastiche utilizzando un modello strutturale di ordine elevato basato sulla CUF e il modello aerodinamico DLM.

Il primo capitolo presenta a livello generale la definizione di aeroelasticità e il suo ruolo nella storia del volo e descrive brevemente i modelli strutturale e aerodinamico utilizzati in questo lavoro.

Nel secondo capitolo si introducono i fenomeni aeroelastici di divergenza e flutter per casi semplici di sezioni alari.

Il modello strutturale viene presentato nel capitolo 3. Si introduce la CUF con particolare attenzione ai modelli 1D basate su espansioni polinomiali di tipo Taylor e Lagrange. I

modelli classici di Eulero-Bernoulli e Timoshenko possono essere ottenuti come casi particolari della CUF. Successivamente viene presentata la formulazione agli elementi finiti per il calcolo di soluzioni approssimate del modello strutturale e vengono definite le matrici di rigidezza, di massa e vettore delle forze attraverso nuclei fondamentali secondo la CUF utilizzando il Principio dei Lavori Virtuali (PLV).

Il capitolo 4 descrive il modello aerodinamico *Doublet Lattice Method* (DLM) partendo dalla presentazione del *Vortex Lattice Method* (VLM), il quale fornisce solo il contributo stazionario nelle analisi di flutter. Il DLM, che viene proposto nella versione quartica, permette di ottenere in contributo instazionario. Viene ipotizzato un caso di superfici planari e flusso incompressibile.

Il capitolo 5 si occupa del modello aeroelastico. In particolare viene prima descritto il metodo di spline che permette di accoppiare i modelli strutturale e aerodinamico nelle analisi aeroelastiche. Successivamente viene presentato il metodo P-K per la risoluzione delle equazioni del moto nelle analisi aeroelastiche.

Nel capitolo 6 viene descritta l'interfaccia del software MUL2 sviluppato dal gruppo di ricerca MUL2 del Politecnico di Torino, che consiste in una serie di file di input in cui vengono inseriti i parametri necessari per le analisi che si vogliono svolgere. Si descrive inoltre la sua applicazione in ambito aeroelastico.

I risultati numerici relativi ad analisi statiche, dinamiche e aeroelastiche su diversi modelli vengono riportati nel capitolo 7. Si parte da strutture semplici di trave e piastra per poi passare a configurazioni più complesse di velivoli interi. Lo scopo è quello di ottenere risultati relativi alle condizioni di flutter e alla divergenza di queste strutture, utilizzando il software MUL2. Questi vengono poi confrontati per verificare la correttezza attraverso il software Femap.

Infine il capitolo 8 riassume le conclusioni relative ai risultati ottenuti da questo lavoro e vengono mostrati alcuni sviluppi futuri.

Capitolo 2

Fenomeni aeroelastici

Il questo capitolo vengono introdotti i fenomeni aeroelastici di divergenza e flutter. Nel primo caso vengono valutati l'angolo relativo alle deformazioni elastiche e la velocità di divergenza di un'ala rigida con un supporto flessibile a torsione. Nella seconda parte invece si svolge un'analisi di flutter su una sezione di profilo alare di un'ala finita.

2.1 Divergenza

Il fenomeno aeroelastico di divergenza è dovuto al fatto che un corpo deformabile interagisce con il flusso d'aria determinando forze aerodinamiche su di esso ed è potenzialmente catastrofico. La condizione di divergenza deve essere sempre al di fuori del diagramma di involuppo affinché il velivolo, a qualunque velocità, durante la sua vita operativa, non incorra mai nel fenomeno di instabilità aeroelastico. [Hodges and Pierce \[2011\]](#), nella trattazione della divergenza, considerano un caso di ala con corda c costante e con sezione mostrata in figura 2.1.

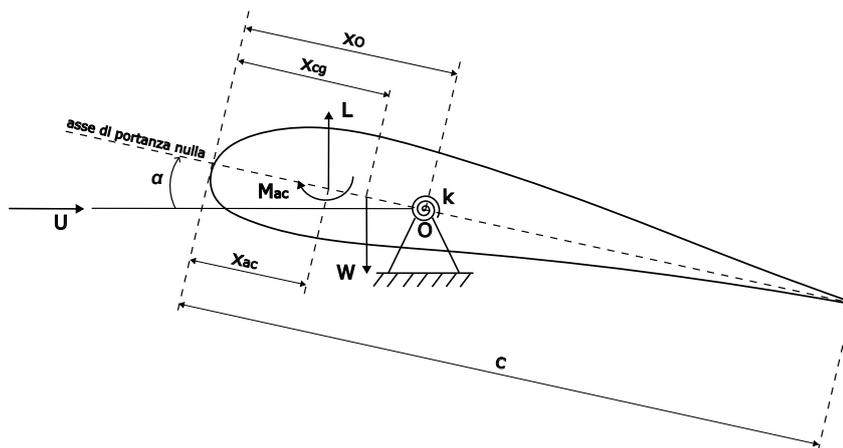


Figura 2.1. Profilo alare

L'equazione di equilibrio di momento intorno all'asse elastico "O" è:

$$M_{ac} + L(x_O - x_{ac}) - W(x_O - x_{cg}) - k\theta = 0 \quad (2.1)$$

L'angolo d'attacco dell'ala è dato dalla somma di due contributi:

$$\alpha = \alpha_R + \theta \quad (2.2)$$

dove α_R è l'angolo di attacco se l'ala fosse rigida, θ è l'angolo dovuto alle deformazioni elastiche. Si considera un caso lineare e gli angoli α e θ sono piccoli:

$$\sin \alpha \approx \alpha; \quad \cos \alpha \approx 1 \quad (2.3)$$

Indicando con U la pressione dinamica, ρ la densità dell'aria e con $q = \frac{1}{2}\rho U^2$ la pressione dinamica, la portanza e il momento aerodinamico sul profilo sono:

$$M_{ac} = qScC_{Mac} \quad (2.4)$$

$$L = qSC_{L\alpha}(\alpha_R + \theta) \quad (2.5)$$

dove S è la superficie dell'ala, C_{Mac} è il coefficiente di momento aerodinamico e $C_{L\alpha}$ è la pendenza della curva di portanza. Si sostituiscono le relazioni di portanza e momento nell'equazione 2.1:

$$qScC_{Mac} + qSC_{L\alpha}(\alpha_R + \theta)(x_O - x_{ac}) - W(x_O - x_{cg}) - k\theta = 0 \quad (2.6)$$

Quindi la deflessione elastica è:

$$\theta = \frac{qScC_{Mac} + qSC_{L\alpha}\alpha_R(x_O - x_{ac}) - W(x_O - x_{cg})}{k - qSC_{L\alpha}(x_O - x_{ac})} \quad (2.7)$$

Il termine al denominatore $-qSC_{L\alpha}(x_O - x_{ac})$ è detto rigidità apparente aerodinamica perchè va a modificare la rigidità torsionale k . Se il denominatore è piccolo, le deformazioni elastiche diventano molto grandi, causando la rottura dell'ala. La condizione di divergenza si verifica quando il denominatore diventa nullo:

$$k - qSC_{L\alpha}(x_O - x_{ac}) = 0 \quad (2.8)$$

da cui si ricava la pressione dinamica di divergenza, che, per questo caso, viene indicata con q_D :

$$q = q_D = \frac{k}{SC_{L\alpha}(x_O - x_{ac})} \quad (2.9)$$

Esplicitando la pressione dinamica, si può trovare la velocità di divergenza U_D :

$$U_D = \sqrt{\frac{2k}{\rho SC_{L\alpha}(x_O - x_{ac})}} \quad (2.10)$$

Si nota che U_D è indipendente dal peso W e dalla posizione del centro di massa. Si possono verificare tre casi:

- $x_O = x_{ac} \Rightarrow$ la velocità di divergenza tende all'infinito
- $x_O < x_{ac} \Rightarrow$ la divergenza non si verifica perchè la pressione di divergenza diventa negativa e non ha quindi senso fisico
- $x_O > x_{ac} \Rightarrow$ la velocità di divergenza assume un valore finito positivo

Come ipotesi semplificativa, si considera un profilo simmetrico ($C_{Mac} = 0$) e centro di gravità coincidente con la posizione dell'asse elastico ($x_{cg} = x_O$). Le considerazioni seguenti valgono anche senza queste ipotesi ma si utilizzano per semplificare le equazioni. L'equazione 2.7 diventa:

$$\theta = \frac{qSC_{L\alpha}\alpha_R(x_O - x_{ac})}{k - qSC_{L\alpha}(x_O - x_{ac})} \quad (2.11)$$

Si esplicita il rapporto tra deflessioni elastiche e incidenza dell'ala rigida:

$$\frac{\theta}{\alpha_R} = \frac{q}{q_D - q} = \frac{\frac{q}{q_D}}{1 - \frac{q}{q_D}} \quad (2.12)$$

Questo rapporto può essere espresso anche come:

$$\frac{\theta}{\alpha_R} = \frac{qSC_{L\alpha}\theta}{qSC_{L\alpha}\alpha_R} = \frac{\Delta L}{L_R} \quad (2.13)$$

dove ΔL è variazione di portanza dovuta al contributo elastico e L_R è la portanza dell'ala se fosse rigida.

Uguagliando le equazioni 2.12 e 2.13, si ottiene la seguente relazione:

$$\frac{\Delta L}{L_R} = \frac{\frac{q}{q_D}}{1 - \frac{q}{q_D}} \quad (2.14)$$

La figura 2.2 mostra l'andamento di $\frac{\Delta L}{L_R}$ in funzione del rapporto $\frac{q}{q_D}$ secondo la formula 2.14.

A basse velocità il contributo di ΔL è piccolo. Man mano che aumenta U e quindi q aumentano gli effetti aeroelastici, fino a quando per $q \rightarrow q_D$, $\frac{\Delta L}{L_R} \rightarrow \infty$. Nella realtà, prima di arrivare all'infinito, entrano in gioco fenomeni fisici che non si sono considerati: alte incidenze (α e θ non piccoli), aerodinamica non lineare, stallo e non linearità strutturali.

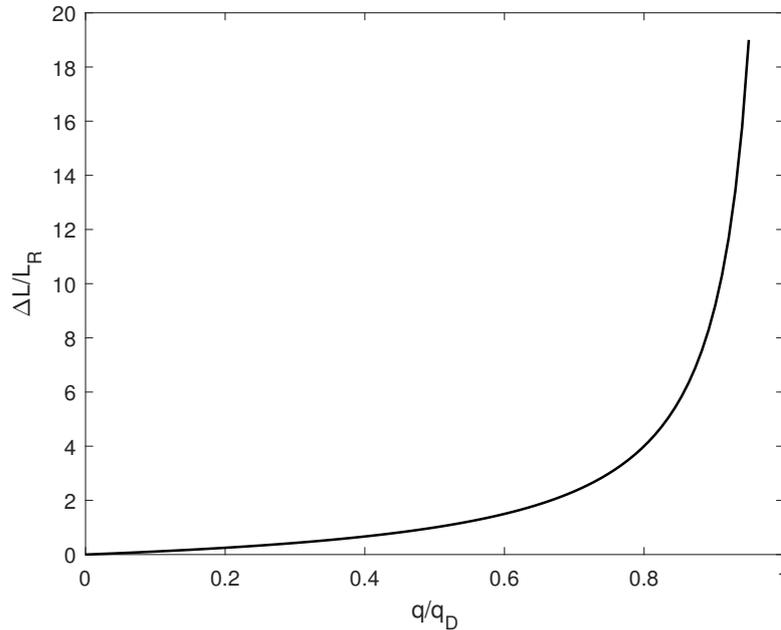


Figura 2.2. Andamento della variazione di portanza dovuto agli effetti aeroelastici

2.2 Analisi di flutter di una sezione tipica

Il flutter consiste in oscillazioni non smorzate auto-eccitate dovuto all'accoppiamento tra le forze aerodinamiche su un corpo deformabile e i modi propri di vibrare della struttura. Quando l'ampiezza delle oscillazioni aumenta troppo, la struttura giunge al cedimento. Si considera un modello semplice per dimostrare l'analisi di flutter. La figura 2.3 mostra la sezione di un profilo alare lungo un'ala finita.

Le due molle con rigidezze k_h e k_θ rappresentano le rigidezze flessionale e torsionale dell'ala. I punti caratteristici Q, C, P, T sono rispettivamente il centro aerodinamico, il centro di massa, il punto relativo all'asse elastico e il punto ai $\frac{3}{4}$ della corda. Con b è indicato la semi-corda, mentre a e e sono parametri adimensionali compresi tra -1 e 1 . La differenza tra distanza del centro di massa e l'asse elastico viene indicata con $x_\theta = e - a$. Per trovare le equazioni del moto si usa l'equazione di Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (2.15)$$

dove q_i è l' i -esimo grado di libertà, $L = K - P$ è la funzione lagrangiana ed è pari alla differenza tra energia cinetica K e potenziale P , Q_i è l' i -esima forza generalizzata. L'energia potenziale per il caso considerato si esprime come:

$$P = \frac{1}{2}k_h h^2 + \frac{1}{2}k_\theta \theta^2 \quad (2.16)$$

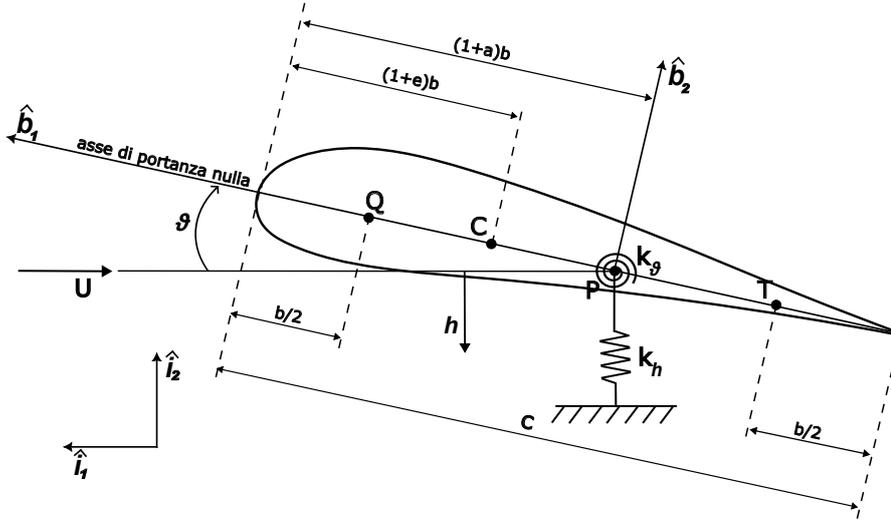


Figura 2.3. Profilo alare

L'energia cinetica è invece:

$$K = \frac{1}{2}m\mathbf{V}_C \cdot \mathbf{V}_C + \frac{1}{2}I_C\dot{\theta}^2 \quad (2.17)$$

dove m è la massa, I_C è il momento di inerzia relativo al punto C e \mathbf{V}_C è la velocità nel punto C e si esprime come:

$$\mathbf{V}_C = -\dot{h}\hat{i}_2 + [(1+a)b - (1+e)b]\dot{\theta}\hat{b}_2 = -\dot{h}\hat{i}_2 - x_\theta b\dot{\theta}\hat{b}_2 \quad (2.18)$$

Sostituendo nella relazione dell'energia cinetica:

$$K = \frac{1}{2}m(-\dot{h} - x_\theta b\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}I_C\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m(-\dot{h}^2 - 2x_\theta b\dot{h}\dot{\theta}) + \frac{1}{2}I_P\dot{\theta}^2 \quad (2.19)$$

dove $I_P = I_C + mb^2x_\theta^2$.

Per trovare i carichi esterni si utilizza il principio dei lavori virtuali. Lo spostamento virtuale indotto nel punto Q rispetto al grado di libertà h è:

$$\delta\mathbf{p}_Q = -\delta h\hat{i}_2 + b\left(\frac{1}{2} + a\right)\delta\theta\hat{b}_2 \quad (2.20)$$

La variazione del lavoro delle forze aerodinamiche è:

$$\delta W = L\delta h + b\left(\frac{1}{2} + a\right)\delta\theta + M_{1/4}\delta\theta \quad (2.21)$$

Le forze generalizzate sono quindi:

$$Q_h = -L \quad (2.22)$$

$$Q_\theta = M_{1/4} + b\left(\frac{1}{2} + a\right)L \quad (2.23)$$

Applicando le equazioni di Lagrange, le equazioni del moto sono:

$$\begin{cases} m\ddot{h} + mx_{\theta}b\ddot{\theta} + k_h h = -L \\ mx_{\theta}b\ddot{h} + I_P\ddot{\theta} + k_{\theta}\theta = b\left(\frac{1}{2} + a\right)L + M_{1/4} \end{cases} \quad (2.24)$$

che in forma matriciale diventano:

$$\begin{bmatrix} m & mx_{\theta}b \\ mx_{\theta}b & I_P \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_h & 0 \\ 0 & k_{\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -L \\ b\left(\frac{1}{2} + a\right)L + M_{1/4} \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

L'aerodinamica può essere stazionaria ($L = f(\theta)$), quasi-stazionaria ($L = f(\theta, \dot{h}, \dot{\theta})$) o instazionaria. Nel caso instazionario, rispetto agli altri due, la portanza L presenta una differenza di fase rispetto ai gradi di libertà k e θ . Il sistema di equazioni può essere scritto come:

$$[M + M_A]\ddot{\mathbf{x}} + C_A\dot{\mathbf{x}} + [K + K_A]\mathbf{x} = 0 \quad (2.26)$$

Il metodo che si può usare per risolvere il sistema e calcolare le condizioni di flutter è il P-K method.

Capitolo 3

Modello strutturale

In questo capitolo viene introdotto un approccio unificato (*Carrera Unified Formulation*) per la definizione del campo degli spostamenti che permette di utilizzare modelli con ordini differenti, senza cambiare la formulazione. L'ordine della teoria utilizzata diventa un input dell'analisi. Questo approccio unificato viene poi utilizzato nella formulazione agli elementi finiti.

3.1 Relazioni geometriche e costitutive

Si definisce il vettore degli spostamenti u :

$$\mathbf{u}^T = \{u_x, u_y, u_z\} \quad (3.1)$$

Nel caso di problemi lineari le componenti di deformazione sono:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (3.2)$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad (3.3)$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (3.4)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad (3.5)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \quad (3.6)$$

$$\gamma_{zy} = \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \quad (3.7)$$

che in notazione compatta, possono essere scritte come:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{b} \mathbf{u} \quad (3.8)$$

in cui la matrice \mathbf{b} è:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

e il vettore delle deformazione è:

$$\boldsymbol{\epsilon}^T = \{\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \gamma_{zx}, \gamma_{zy}, \gamma_{xy}\} \quad (3.10)$$

Le componenti di tensione sono legate a quelle di deformazione dalla legge di Hooke:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\epsilon} \iff \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{S}\boldsymbol{\sigma} \quad (3.11)$$

dove \mathbf{C} è la matrice dei coefficienti di rigidezza e \mathbf{S} è la matrice dei coefficienti elastici di deformabilità. Per un materiale isotropo la matrice \mathbf{C} è:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

dove:

$$C_{11} = 2G + \lambda, \quad C_{12} = \lambda, \quad \frac{C_{11} - C_{12}}{2} = G \quad (3.13)$$

Il modulo di taglio G , nel caso di materiale isotropo, dipende dal modulo di Young E e dal coefficiente di Poisson ν :

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (3.14)$$

Il coefficiente λ è:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (3.15)$$

3.2 Equazioni di governo

Le diverse analisi strutturali possono essere studiate tramite il principio degli spostamenti virtuali (PVD). Esistono tre contributi di lavoro:

- il lavoro interno si riferisce alle sole forze elastiche
- il lavoro esterno dovuto alle forze esterne applicate
- il lavoro inerziale che deriva dalle forze inerziali

3.2.1 Analisi statica

Nel caso di analisi statica non ci sono forze inerziali dovute all'accelerazione della struttura. Quindi il lavoro delle forze interne si eguaglia al lavoro esterno:

$$\delta L_{int} = \delta L_{ext} \quad (3.16)$$

La variazione virtuale del lavoro interno può essere espresso come:

$$\delta L_{int} = \int_V \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon} dV = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} \quad (3.17)$$

dove \mathbf{K} è la matrice di rigidezza e \mathbf{U} è il vettore degli spostamenti nei nodi. La variazione virtuale del lavoro esterno è invece:

$$\delta L_{ext} = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{P} \quad (3.18)$$

in cui \mathbf{P} è il vettore delle forze esterne. Quindi dall'uguaglianza dei due lavori si ottiene la seguente relazione:

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{P} \quad (3.19)$$

La soluzione dell'equazione è:

$$\mathbf{U} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{P} \quad (3.20)$$

facendo attenzione che la matrice di rigidezza deve essere invertibile e quindi viene fattorizzata.

3.2.2 Analisi delle vibrazioni libere

Nell'analisi delle vibrazioni libere le forze elastiche si equilibrano alle forze inerziali. La variazione virtuale del lavoro inerziale è:

$$\delta L_{ine} = \int_V \delta \mathbf{u} \rho \ddot{\mathbf{u}} dV = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} \quad (3.21)$$

dove ρ è la densità del materiale, $\ddot{\mathbf{u}}$ è l'accelerazione e \mathbf{M} è la matrice di massa.

Il principio degli spostamenti virtuali può essere scritto:

$$\delta L_{ine} + \delta L_{int} = 0 \quad (3.22)$$

Quindi secondo l'approssimazione FEM:

$$\delta \mathbf{U}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \delta \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} = 0 \quad (3.23)$$

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \mathbf{U} = 0 \quad (3.24)$$

3.2.3 Analisi di risposta dinamica

Si considerano tutti e tre i contributi dei lavori virtuali e il problema può essere scritto come:

$$\delta L_{ine} + \delta L_{int} = \delta L_{ext} \quad (3.25)$$

Quindi:

$$\delta \mathbf{U}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \delta \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{P} \quad (3.26)$$

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{P} \quad (3.27)$$

3.3 Carrera Unified Formulation

La Carrera Unified Formulation (CUF) permette di ottenere una formulazione unificata che non dipende dall'ordine del modello considerato, il quale invece è input dell'analisi. Secondo la CUF, il campo degli spostamenti può essere scritto nella seguente forma (Carrera et al. [2014]):

$$\mathbf{u} = F_\tau \mathbf{u}_\tau \quad \tau = 1, 2, \dots, M \quad (3.28)$$

dove \mathbf{u}_τ è il vettore degli spostamenti incogniti, F_τ è la funzione di espansione (Taylor, Lagrange, ...) e M è il numero dei termini dell'espansione, che determina l'accuratezza della teoria. Nell'ambito di questa tesi, considerando strutture molto allungate con sezione di piccole dimensioni, è utile considerare il modello trave 1D. Le funzioni di approssimazione F_τ variano sulla sezione trasversale e sono funzione di x e z . Le due espansioni considerate di seguito sono quelle basate sui polinomi di Taylor (TE) e Lagrange (LE).

3.3.1 Espansione di Taylor nel caso di modello 1D

Una possibile scelta del tipo di espansione può ricadere in quella polinomiale di Taylor sulle variabili x e z . Considerando un generico ordine N di espansione e indicando con M il numero del termine dell'espansione considerato, il campo di spostamenti ha la seguente forma:

$$\begin{cases} u_x = \sum_{N_i=0}^N \left(\sum_{M=0}^{N_i} x^{N_i-M} z^M u_{x \frac{N_i(N_i+1)}{2} + M + 1} \right) \\ u_y = \sum_{N_i=0}^N \left(\sum_{M=0}^{N_i} x^{N_i-M} z^M u_{y \frac{N_i(N_i+1)}{2} + M + 1} \right) \\ u_z = \sum_{N_i=0}^N \left(\sum_{M=0}^{N_i} x^{N_i-M} z^M u_{z \frac{N_i(N_i+1)}{2} + M + 1} \right) \end{cases} \quad (3.29)$$

Ad esempio, se si sceglie un modello di Taylor del secondo ordine, per cui $N = 2$ e $M = 6$, si ottiene la seguente espansione parabolica:

$$\begin{cases} u_x = u_{x_1} + x u_{x_2} + z u_{x_3} + x^2 u_{x_4} + xz u_{x_5} + z^2 u_{x_6} \\ u_y = u_{y_1} + x u_{y_2} + z u_{y_3} + x^2 u_{y_4} + xz u_{y_5} + z^2 u_{y_6} \\ u_z = u_{z_1} + x u_{z_2} + z u_{z_3} + x^2 u_{z_4} + xz u_{z_5} + z^2 u_{z_6} \end{cases} \quad (3.30)$$

3.3.2 Modelli classici di Eulero-Bernoulli e Timoshenko come casi particolari dell'espansione di Taylor del primo ordine

Le ipotesi fondamentali della teoria classica di Eulero-Bernoulli sono:

1. la sezione trasversale rimane piana una volta deformata
2. l'altezza della trave rimane invariata
3. la sezione trasversale rimane perpendicolare all'asse della trave dopo la deformazione

Secondo la prima ipotesi, lo spostamento assiale u_y è lineare nelle coordinate x e z . Dalla seconda ipotesi invece, si deduce che gli spostamenti u_x e u_z sono costanti nella generica sezione e dipendono solamente dalla coordinata y . Il campo degli spostamenti ha quindi la seguente forma:

$$\begin{cases} u_x(x, y, z) = u_{x_1}(y) \\ u_y(x, y, z) = u_{y_1}(y) + \phi_z(y)x + \phi_x(y)z \\ u_z(x, y, z) = u_{z_1}(y) \end{cases} \quad (3.31)$$

Infine, in accordo con la terza ipotesi, le deformazioni a taglio γ_{yz} e γ_{xy} sono nulle. Da ciò si possono trovare le relazioni degli angoli di rotazione ϕ_x e ϕ_z :

$$\begin{cases} \gamma_{xy} = u_{y,x} + u_{x,y} = \phi_z + u_{x_1,y} = 0 \Rightarrow \phi_z = -u_{x_1,y} \\ \gamma_{yz} = u_{y,z} + u_{z,y} = \phi_x + u_{z_1,y} = 0 \Rightarrow \phi_x = -u_{z_1,y} \end{cases} \quad (3.32)$$

Il campo di spostamenti si può riscrivere introducendo queste relazioni:

$$\begin{cases} u_x = u_{x_1} \\ u_y = u_{y_1} - u_{x_1,y} x - u_{z_1,y} z \\ u_z = u_{z_1} \end{cases} \quad (3.33)$$

Nel modello classico di Timoshenko, decade l'ipotesi di perpendicolarità della sezione trasversale con l'asse della trave. Le due deformazioni a taglio γ_{yz} e γ_{xy} non sono più nulle e il campo di spostamenti è:

$$\begin{cases} u_x(x, y, z) = u_{x_1}(y) \\ u_y(x, y, z) = u_{y_1}(y) + \phi_z(y)x + \phi_x(y)z \\ u_z(x, y, z) = u_{z_1}(y) \end{cases} \quad (3.34)$$

I modelli di Eulero-Bernoulli e Timoshenko possono essere visti come casi particolari di un'espansione lineare cioè con ordine di espansione $N = 1$, per cui il campo di spostamenti è:

$$\begin{cases} u_x = F_1 u_{x_1} + F_2 u_{x_2} + F_3 u_{x_3} \\ u_y = F_1 u_{y_1} + F_2 u_{y_2} + F_3 u_{y_3} \\ u_z = F_1 u_{z_1} + F_2 u_{z_2} + F_3 u_{z_3} \end{cases} \quad (3.35)$$

in cui le funzioni di espansione sono $F_1 = 1$, $F_2 = x$ e $F_3 = z$ e gli spostamenti u_{x_2} , u_{x_3} , u_{z_2} e u_{z_3} sono nulli. Nel caso Eulero-Bernoulli, come ulteriore condizione, bisogna introdurre la penalizzazione di γ_{yz} e γ_{xy} .

3.3.3 Espansione di Lagrange nel caso di modello 1D

Altra possibile scelta è quella di utilizzare un modello 1D CUF basato sull'espansione di Lagrange. In tali modelli, le funzioni di espansione F_r coincidono con i polinomi di

Lagrange. Questi possono essere definiti tramite le coordinate effettive ma di solito si preferisce normalizzare le coordinate e sfruttare una formulazione isoparametrica. Il caso più semplice è quello di elemento della sezione trasversale a 4 nodi (LE4) mostrato in figura 3.1 e i relativi polinomi di Lagrange sono:

$$F_\tau = \frac{1}{4}(1 + \alpha\alpha_\tau)(1 + \beta\beta_\tau) \quad \tau = 1, 2, 3, 4 \quad (3.36)$$

in cui con α e β sono indicate le coordinate normalizzate mentre α_τ e β_τ sono le coordinate dei 4 nodi (tabella 3.1).

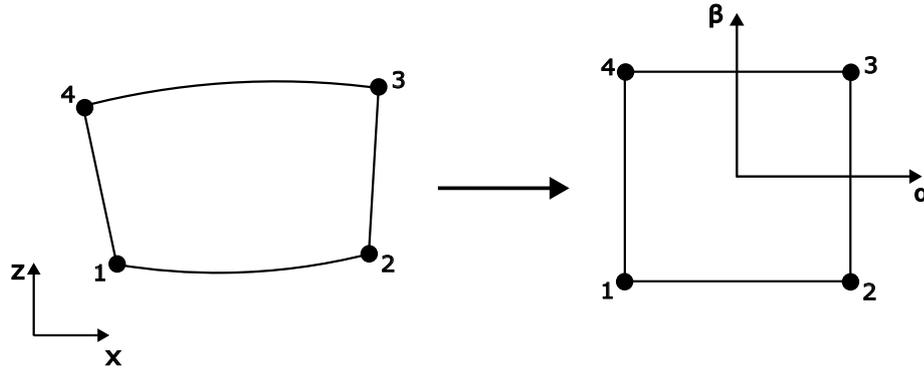


Figura 3.1. Elemento a 4 nodi di Lagrange in coordinate effettive e in coordinate normalizzate

Nodi	α_τ	β_τ
1	-1	-1
2	1	-1
3	1	1
4	-1	1

Tabella 3.1. Coordinate normalizzate dei 4 nodi dell'elemento di Lagrange LE4

Il campo di spostamenti per un modello con elemento a 4 nodi è:

$$\begin{cases} u_x = F_1 u_{x1} + F_2 u_{x2} + F_3 u_{x3} + F_4 u_{x4} \\ u_y = F_1 u_{y1} + F_2 u_{y2} + F_3 u_{y3} + F_4 u_{y4} \\ u_z = F_1 u_{z1} + F_2 u_{z2} + F_3 u_{z3} + F_4 u_{z4} \end{cases} \quad (3.37)$$

in cui F_1, \dots, F_4 sono i polinomi di Lagrange scritti precedentemente e u_{x1}, \dots, u_{z4} sono le incognite di spostamento nelle tre direzioni x, y, z dei 4 nodi.

Se invece si sceglie un modello di Lagrange con elemento a 9 nodi (LE9) mostrato in figura 3.2, le nove funzioni di espansione, considerando le coordinate normalizzate, sono:

$$\begin{aligned}
 F_\tau &= \frac{1}{4}(\alpha^2 + \alpha\alpha_\tau)(\beta^2 + \beta\beta_\tau) & \tau = 1, 3, 5, 7 \\
 F_\tau &= \frac{1}{2}\beta_\tau^2(\beta^2 + \beta\beta_\tau)(1 - \alpha^2) + \frac{1}{2}\alpha_\tau^2(\alpha^2 + \alpha\alpha_\tau)(1 - \beta^2) & \tau = 2, 4, 6, 8 \\
 F_\tau &= (1 - \alpha^2)(1 - \beta^2) & \tau = 9
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

Le coordinate normalizzate dei 9 nodi sono mostrate in tabella 3.2.

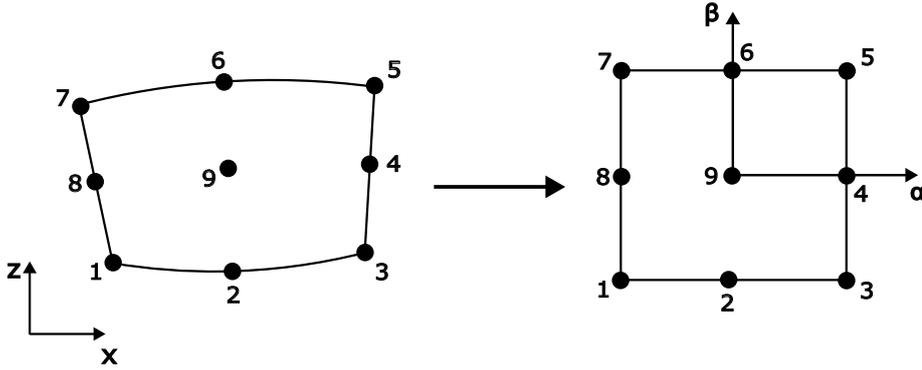


Figura 3.2. Elemento a 9 nodi di Lagrange in coordinate effettive e in coordinate normalizzate

<i>Nodi</i>	α_τ	β_τ
1	-1	-1
2	0	-1
3	1	-1
4	1	0
5	1	1
6	0	1
7	-1	1
8	-1	0
9	0	0

Tabella 3.2. Coordinate normalizzate dei 9 nodi dell'elemento di Lagrange LE9

Quindi, il campo di spostamenti per un modello LE9 è:

$$\begin{cases}
 u_x = F_1 u_{x1} + F_2 u_{x2} + \dots + F_8 u_{x8} + F_9 u_{x9} \\
 u_y = F_1 u_{y1} + F_2 u_{y2} + \dots + F_8 u_{y8} + F_9 u_{y9} \\
 u_z = F_1 u_{z1} + F_2 u_{z2} + \dots + F_8 u_{z8} + F_9 u_{z9}
 \end{cases} \tag{3.39}$$

L'utilizzo dell'espansione di Lagrange ha il vantaggio di avere come incognite delle grandezze fisiche cioè le componenti di spostamento dei punti appartenenti alla sezione trasversale, individuati in base al modello scelto.

3.4 Formulazione agli elementi finiti e CUF

Si considera la formulazione unificata del campo degli spostamenti introdotta nel paragrafo 3.3 e si introduce la formulazione agli elementi finiti, secondo la quale la funzione incognita spostamento è approssimata dalle funzioni di forma N_i , ciascuna moltiplicata per il valore della funzione incognita in un nodo. Il campo degli spostamenti può essere riscritto come:

$$\mathbf{u} = N_i F_\tau \mathbf{u}_{\tau i} \quad \tau = 1, 2, \dots, M \quad i = 1, 2, \dots, N_N \quad (3.40)$$

dove i è un nodo dell'elemento considerato e N_N è il numero di nodi lungo l'elemento trave. $\mathbf{u}_{\tau i}$ è il vettore degli spostamenti nodali, definito nel seguente modo:

$$\mathbf{u}_{\tau i} = \{u_{x_{\tau i}} \quad u_{y_{\tau i}} \quad u_{z_{\tau i}}\}^T \quad (3.41)$$

Le funzioni di forma N_i dipendono dall'elemento considerato. Nel caso di elemento trave a 2 (B2), a 3 (B3) e a 4 nodi (B4), assumono la seguente formulazione:

$$N_1 = \frac{1}{2}(1 - r), \quad N_2 = \frac{1}{2}(1 + r) \quad (r_1 = -1, r_2 = 1)$$

$$N_1 = \frac{1}{2}r(r - 1), \quad N_2 = \frac{1}{2}r(r + 1), \quad N_3 = -(1 + r)(1 - r) \\ (r_1 = -1, r_2 = 1, r_3 = 0) \quad (3.42)$$

$$N_1 = -\frac{9}{16}\left(r + \frac{1}{3}\right)\left(r - \frac{1}{3}\right)(r - 1), \quad N_2 = \frac{9}{16}\left(r + \frac{1}{3}\right)\left(r - \frac{1}{3}\right)(r + 1), \\ N_3 = \frac{27}{16}(r + 1)\left(r - \frac{1}{3}\right)(r - 1), \quad N_4 = -\frac{27}{16}(r + 1)\left(r + \frac{1}{3}\right)(r - 1) \\ (r_1 = -1, r_2 = 1, r_3 = -\frac{1}{3}, r_4 = \frac{1}{3})$$

dove r è la coordinata lungo l'elemento e r_i sono le posizioni dei nodi dell'elemento.

3.4.1 Matrici di rigidezza e massa e vettore dei carichi

La CUF permette di ottenere le matrici di massa e rigidezza e il vettore dei carichi esterni attraverso l'utilizzo di nuclei fondamentali che sono indipendenti dall'ordine del modello. Il lavoro virtuale delle forze interne è espresso tramite il PVD come:

$$\delta L_{int} = \int_V \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon} dV \quad (3.43)$$

Sostituendo le equazioni geometriche e costitutive introdotte nel primo paragrafo si ottiene:

$$\delta L_{int} = \delta \mathbf{u}_{sj}^T \int_V N_j F_s \mathbf{b}^T \mathbf{C} \mathbf{b} N_i F_\tau dV \mathbf{u}_{\tau i} \quad (3.44)$$

che in forma compatta diventa:

$$\delta L_{int} = \delta \mathbf{u}_{sj}^T \mathbf{k}^{\tau sij} \mathbf{u}_{\tau i} \quad (3.45)$$

in cui $\mathbf{k}^{\tau sij}$ è la matrice di rigidezza scritta come nucleo fondamentale.

Per ricavare la matrice di massa secondo la formulazione unificata, si scrive il lavoro virtuale delle forze inerziali:

$$\delta L_{ine} = \int_V \delta \mathbf{u} \rho \dot{\mathbf{u}} dV \quad (3.46)$$

Procedendo come fatto per il lavoro interno, l'equazione può essere riscritta come:

$$\delta L_{ine} = \delta \mathbf{u}_{sj}^T \int_V N_j F_s \rho N_i F_\tau dV \mathbf{u}_{\tau i} \quad (3.47)$$

Da cui:

$$\delta L_{ine} = \delta \mathbf{u}_{sj}^T \mathbf{m}^{\tau sij} \mathbf{u}_{\tau i} \quad (3.48)$$

dove $\mathbf{m}^{\tau sij}$ è la matrice di massa come nucleo fondamentale.

Infine, è possibile scrivere anche la variazione virtuale del lavoro esterno introducendo la formulazione agli elementi finiti. Nel caso in cui il carico è superficiale, assume la seguente forma:

$$\delta L_{ext}^{p_{\alpha\beta}} = \int_{A_\alpha} \delta u_\beta p_{\alpha\beta} dA = \int_{A_\alpha} F_s N_j \delta u_{\beta sj} p_{\alpha\beta} dA \quad (3.49)$$

Con $p_{\alpha\beta}$ è indicato il carico superficiale, A_α è l'area su cui agisce, α è l'asse perpendicolare alla superficie e β la direzione del carico. Se invece è presente un carico di linea $q_{\alpha\beta}$, la variazione del lavoro virtuale esterno è:

$$\delta L_{ext}^{q_{\alpha\beta}} = \int_l \delta u_\beta q_{\alpha\beta} dy = \int_{A_\alpha} F_s N_j \delta u_{\beta sj} q_{\alpha\beta} dy \quad (3.50)$$

Introducendo il generico vettore dei carichi concentrati \mathbf{P} , applicato in (x_P, y_P, z_P) , il lavoro virtuale è:

$$\delta L_{ext} = F_s(x_P, z_P) N_j(y_P) \mathbf{P} \delta \mathbf{u}_{sj}^T \quad (3.51)$$

Capitolo 4

Modello aerodinamico

Oltre al modello strutturale descritto nel capitolo precedente, è necessario introdurre un modello aerodinamico per poter svolgere le analisi aeroelastiche. Viene inizialmente presentato il modello *vortex lattice method* VLM, che permette di ottenere il contributo stazionario nelle analisi di flutter e successivamente, dopo aver introdotto la funzione kernel del potenziale di accelerazione complesso per il flusso subsonico oscillatorio ([Landahl \[1967\]](#)), viene descritto il *doublet lattice method* DLM, il quale invece determina il contributo instazionario. Le ipotesi di validità dei due modelli sono:

- la superficie portante è considerata una superficie infinitamente sottile di vortici e doppiette discreti
- viscosità e spessore vengono trascurati
- le condizioni di tangenza vengono imposte sul *control point* di ogni pannello
- per trovare le intensità delle singolarità si risolve un sistema di equazioni algebriche lineari

Il DLM è il modello aerodinamico utilizzato in questa tesi e viene presentato nel caso di flussi subsonici e superfici planari, come descritto in [Petrolo \[2011\]](#).

4.1 Vortex lattice method

Il VLM è un metodo descritto da [Hedman \[1966\]](#) adatto soltanto nell'ambito di flussi stazionari nelle analisi di flutter. Si opera una discretizzazione sulla superficie portante tramite N pannelli quadrilateri, in modo che siano disposti in strisce parallele al flusso indisturbato. Su ogni pannello viene applicato un vortice a staffa, costituito da un tratto AB di vorticità aderente posta al quarto anteriore della corda del pannello e due tratti di vorticità libera che si estendono all'infinito a valle. Ai tre quarti della corda invece è posizionato il *control point* al quale viene associato la condizione di tangenza. Per ricavare la velocità indotta da un tratto $d\mathbf{l}$ di uno dei filamenti vorticosi di intensità Γ_j nel punto di

controllo P_i del generico pannello i-esimo (figura 4.1), si utilizza la legge di Biot e Savart:

$$d\mathbf{v}^j(P_i) = \frac{\Gamma_j}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}_{P_{0j}}}{|\mathbf{r}_{P_{0j}}|^3} \quad (4.1)$$

Considerando l'intero vortice a staffa del pannello j-esimo, la velocità indotta nel pannello i-esimo è:

$$\mathbf{v}^j(P_i) = \frac{\Gamma_j}{4\pi} \int_{\Pi_j} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}_{P_{0j}}}{|\mathbf{r}_{P_{0j}}|^3} \quad (4.2)$$

Sommando i contributi di tutti i pannelli utilizzati nella discretizzazione, la velocità indotta nel punto di controllo P_i è:

$$\mathbf{v}(P_i) = \sum_{j=1}^N \Gamma_j \mathbf{v}_{ij} \quad \mathbf{v}_{ij} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Pi_j} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}_{P_{0j}}}{|\mathbf{r}_{P_{0j}}|^3} \quad (4.3)$$

Si indica con a_{ij}^Γ il coefficiente di influenza che si ottiene dal prodotto del vettore velocità

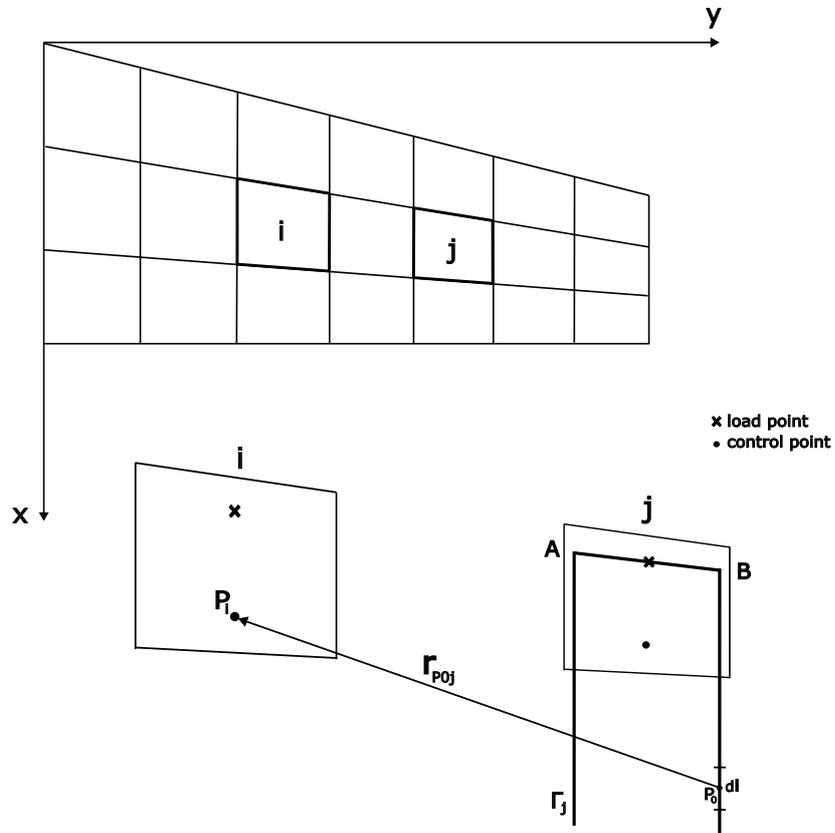


Figura 4.1. Vortex lattice method

\mathbf{v}_{ij} e il versore normale al pannello i-esimo \mathbf{n}_i :

$$a_{ij}^\Gamma = \mathbf{v}_{ij}^T \cdot \mathbf{n}_i \quad (4.4)$$

La condizioni di tangenza nel punto di controllo P_i relativo al pannello i -esimo è:

$$\sum_{j=1}^N a_{ij}^{\Gamma} \Gamma_j + V_{\infty} \mathbf{i}^T \cdot \mathbf{n}_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.5)$$

dove Γ_j sono le circuitazioni dei vari pannelli, V_{∞} è la velocità del flusso indisturbato assunta parallela all'asse x e \mathbf{i} è il versore relativo all'asse x . Nel caso di piccole perturbazioni, si può scrivere che:

$$\mathbf{i}^T \cdot \mathbf{n}_i = \sin \alpha^i \approx \tan \alpha^i = -\frac{dZ_i}{dx} = -w_i \quad (4.6)$$

Cioè $\mathbf{i}^T \cdot \mathbf{n}_i$ è uguale in modulo alla componente normalizzata della velocità normale al pannello i -esimo w_i , che si può esprimere come $w_i = \frac{W_i}{V_{\infty}}$. Riscrivendo l'equazione di tangenza, si ottiene la seguente relazione:

$$\sum_{j=1}^N a_{ij}^{\Gamma} \Gamma_j = V_{\infty} w_i = W_i \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.7)$$

In cui W_i è la *normalwash* relativa al pannello i -esimo.

Per ottenere i salti di pressione, si utilizza la relazione della portanza:

$$L_j = \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 \Delta y_j \Delta x_j \Delta p_j \quad (4.8)$$

La portanza può essere espressa anche tramite il teorema di Kutta-Joukowski:

$$L_j = \rho V_{\infty} \Delta y_j \Gamma_j \quad (4.9)$$

Uguagliando le due relazioni 4.8 e 4.9, si ottiene:

$$\Gamma_j = \frac{1}{2} V_{\infty} \Delta x_j \Delta p_j \quad (4.10)$$

Si sostituisce quest'ultima relazione nella condizione di tangenza:

$$\sum_{j=1}^N a_{ij}^{\Gamma} \frac{1}{2} V_{\infty} \Delta x_j \Delta p_j = V_{\infty} w_i \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.11)$$

4.2 Doublet lattice method

Prima di introdurre il *doublet lattice method*, è necessario descrivere il legame tra salto di pressione sui pannelli e componente normale di velocità in punti differenti della superficie oscillante considerata, la cui derivazione si può trovare in modo esaustivo in Blair [1994]. La velocità normale alla superficie W e il salto di pressione Δp possono essere normalizzati dividendo le due grandezze rispettivamente per la velocità del flusso indisturbato V_{∞} e la pressione dinamica:

$$w = \frac{W}{V_{\infty}}; \quad \Delta p = \frac{\Delta P}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2} \quad (4.12)$$

in cui ρ_∞ è la densità del flusso all'infinito a monte. Nel caso di moto armonico, le due grandezze normalizzate possono essere scritte in funzione della pulsazione ω :

$$w = \bar{w} e^{i\omega t}; \quad \Delta p = \overline{\Delta p} e^{i\omega t} \quad (4.13)$$

Il legame tra queste due grandezze è determinato, come descritto da Landahl [1967] e Albano and Rodden [1969], dal seguente integrale:

$$\bar{w}(x, y) = \frac{1}{8\pi} \int_A \overline{\Delta p}(\xi, \eta) K(x_0, y_0, \omega, M) dA \quad (4.14)$$

in cui x, y sono le coordinate del punto sulla superficie A in cui si valuta la componente di *normalwash* dovuta al salto di pressione nel punto ξ, η . K è invece il kernel del potenziale di accelerazione complesso che dipende dalla pulsazione ω , dal numero di Mach M e dalle coordinate x_0, y_0 definite come:

$$x_0 = x - \xi \quad y_0 = y - \eta \quad (4.15)$$

La funzione kernel, nel caso di superficie planare, si può scrivere nel seguente modo:

$$K = \frac{K_1 T_1}{r^2} e^{-\frac{i\omega x_0}{V_\infty}} \quad (4.16)$$

le cui grandezze all'interno si possono esprimere come:

$$\begin{aligned} K_1 &= I_1 + \frac{Mr}{R} \frac{e^{-ik_1 u}}{(1 + u_1^2)^{\frac{1}{2}}} \\ I_1 &= \int_{u_1}^{\infty} \frac{e^{-ik_1 u}}{(1 + u^2)^{\frac{3}{2}}} du \\ R &= (x_0^2 + \beta^2 r^2)^{\frac{1}{2}} \\ r &= (y_0^2)^{\frac{1}{2}}; \quad \beta = (1 - M^2)^{\frac{1}{2}} \\ u_1 &= \frac{MR - x_0}{\beta^2 r}; \quad k_1 = \frac{\omega r}{V_\infty} \\ T_1 &= 1 \end{aligned} \quad (4.17)$$

Di seguito viene presentato il DLM perfezionato da Rodden et al. [1998] in cui viene adottata un'approssimazione quartica della funzione kernel. Utilizzando la notazione di Rodden, l'equazione 4.14 può essere scritta come:

$$\bar{w}_i = \frac{1}{8\pi} \sum_{j=1}^N \overline{\Delta p}_j \Delta x_j \int_{-e_j}^{e_j} K_{ij} d\bar{\eta}_j \quad (4.18)$$

in cui e_j è la metà della lunghezza, lungo la direzione $\bar{\eta}_j$ del sistema di riferimento locale, del pannello j -esimo. Il salto di pressione è considerato concentrato lungo la linea di un quarto di corda del pannello considerato ed è rappresentato da un vortice a ferro di

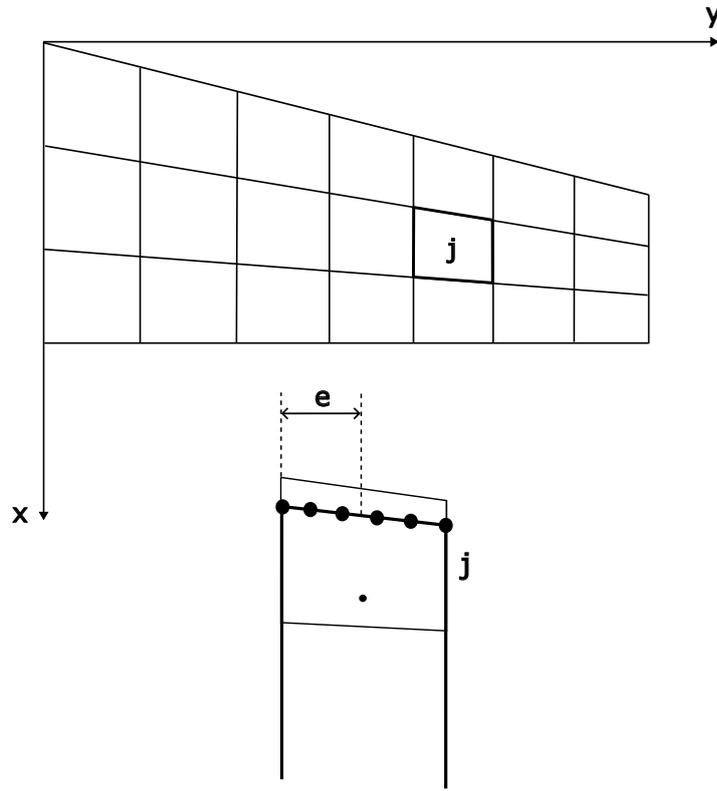


Figura 4.2. Doublet lattice method

cavallo per gli effetti stazionari e da una linea di doppiette per gli effetti instazionari, come mostrato in figura 4.2. Nella notazione matriciale, l'equazione 4.18 si scrive:

$$\{w\} = [D]\{\Delta p\} \quad (4.19)$$

avendo indicato con $[D]$ la matrice di influenza aerodinamica e i cui elementi sono:

$$D_{ij} = \frac{\Delta x_j}{8\pi} \int_{-e_j}^{e_j} K_{ij} d\bar{\eta}_j \quad (4.20)$$

Sostituendo l'espressione della funzione kernel di equazione 4.16, si ottiene:

$$D_{ij} = \frac{\Delta x_j}{8\pi} \int_{-e_j}^{e_j} \frac{K_1 T_1}{r^2} e^{-\frac{i\omega x_0}{V_\infty}} d\bar{\eta}_j \quad (4.21)$$

Tale relazione può essere vista come somma di due contributi, uno stazionario che deriva dal VLM e uno instazionario:

$$D_{ij} = D_{0,ij} + D_{1,ij} \quad (4.22)$$

con:

$$D_{0,ij} = \frac{1}{2} \Delta x_j a_{ij}^\Gamma \quad (4.23)$$

$$D_{1,ij} = \frac{\Delta x_j}{8\pi} \int_{-e_j}^{e_j} \frac{\left(e^{-\frac{i\omega x_0}{v_\infty}} K_1 - K_{10} \right) T_1}{r^2} d\bar{\eta}_j \quad (4.24)$$

dove K_{10} è la parte stazionaria di K_1 . Il primo termine deriva dall'equazione 4.11, mentre il secondo si può approssimare tramite una quartica in $\bar{\eta}_j$ al numeratore:

$$Q_1(\bar{\eta}_j) = A_1 \bar{\eta}_j^2 + B_1 \bar{\eta}_j + C_1 + D_1 \bar{\eta}_j^4 + E_1 \bar{\eta}_j^4 \approx \left(e^{-\frac{i\omega x_0}{v_\infty}} K_1 - K_{10} \right) T_1 \quad (4.25)$$

Per trovare i cinque coefficienti della quartica sono necessarie cinque equazioni, ottenute imponendo l'uguaglianza di Q_1 a funzioni approssimate in cinque punti sul pannello j -esimo. I punti scelti sono $-e_j$, $-e_j/2$, 0 , $e_j/2$, e_j . I coefficienti diventano:

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{Q_1(-e_j) - 16Q_1(-e_j/2) + 30Q_1(0) - 16Q_1(e_j/2) + Q_1(e_j)}{6e_j^2} \\ B_1 &= \frac{Q_1(-e_j) - 8Q_1(-e_j/2) + 8Q_1(e_j/2) - Q_1(e_j)}{6e_j} \\ C_1 &= Q_1(0) \\ D_1 &= -2\frac{Q_1(-e_j) - 2Q_1(-e_j/2) + 2Q_1(e_j/2) - Q_1(e_j)}{3e_j^3} \\ E_1 &= 2\frac{Q_1(-e_j) - 4Q_1(-e_j/2) + 6Q_1(0) - 4Q_1(e_j/2) + Q_1(e_j)}{3e_j^4} \end{aligned} \quad (4.26)$$

L'equazione 4.24 diventa:

$$\begin{aligned} D_{1,ij} &= \frac{\Delta x_j}{8\pi} \left\{ \left[\bar{y}_i^2 A_1 + \bar{y}_i B_1 + C_1 + \bar{y}_i^3 D_1 + \bar{y}_i^4 E_1 \right] F + \right. \\ &\quad + \left[\bar{y}_i A_1 + \frac{1}{2} B_1 + \frac{3}{2} \bar{y}_i^2 D_1 + 2\bar{y}_i^3 E_1 \right] \ln \frac{(\bar{y}_i - e_j)^2}{(\bar{y}_i + e_j)^2} + \\ &\quad \left. + 2e_j \left[A_1 + 2\bar{y}_i D_1 + \left(3\bar{y}_i^2 + \frac{1}{3} e_j^2 \right) E_1 \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.27)$$

dove \bar{y}_i è la coordinata del punto di controllo del pannello i -esimo misurato nel sistema di riferimento locale del pannello j -esimo posizionato nel punto medio della linea del quarto anteriore; mentre F è definito come:

$$F = \int_{-e_j}^{e_j} \frac{d\bar{\eta}_j}{(\bar{y}_j - \bar{\eta}_j)^2} = \frac{2e_j}{\bar{y}_j^2 - e_j^2} \quad (4.28)$$

Capitolo 5

Modello aeroelastico

La procedura implementata all'interno del codice che porta alle condizioni di flutter, usando gli elementi finiti, segue il seguente schema:

1. si definiscono degli input: geometria, proprietà, mesh strutturale e aerodinamica, range di velocità e frequenza ridotta all'interno dei quali si vuole trovare la condizione di flutter e il loro passo
2. si calcola la matrice di influenza aerodinamica $[D]$ per ogni coppia di velocità e frequenza ridotta
3. si svolge l'analisi dinamica per trovare frequenze e modi propri della struttura
4. tramite il metodo spline si legano le deformazione relative al modello strutturale e i carichi del modello aerodinamico
5. si calcolano le matrici generalizzate una volta definite le forme modali e le masse modali. Queste ultime sono dei coefficienti calcolati tramite la matrice delle masse e i modi della struttura
6. una volta note le matrici generalizzate si può applicare il *P-K method* e si può trovare la condizione di flutter

Lo scopo di questo capitolo è presentare il metodo *Infinite Plate Spline* utilizzato per l'accoppiamento tra modello strutturale e modello aerodinamico. Viene poi presentato il caso instazionario e definito le relative condizioni al contorno. Infine vengono descritti il P-K method e le matrici generalizzate.

5.1 Il metodo spline

Il metodo di interpolazione utilizzato per accoppiare i modelli strutturale e aerodinamico è l'Infinite Plate Spline (IPS), trattato dettagliatamente in [Harder and Desmarais \[1972\]](#). Per la descrizione di tale metodo è necessario definire una griglia di punti fondamentali, detti *Pseudo-Structural Point*, in cui vengono calcolati gli spostamenti tramite un modello

strutturale (CUF). Questi punti appartengono ai *wing segments*, delle generiche superfici aerodinamiche trapezoidali con cui viene divisa la superficie alare. Si considera un caso in cui l'angolo di attacco e l'angolo diedro sono nulli.

Come descritto in Demasi and Livne [2007], viene definito un sistema di riferimento globale xyz che ha origine nella radice dell'ala nel punto del bordo di attacco. L'asse x è parallelo alla velocità del flusso indisturbato V_∞ e diretto verso il bordo di uscita dell'ala, l'asse y è invece diretto lungo la semiapertura verso il tip della semiala destra, l'asse z è perpendicolare al piano xy e ha verso secondo la regola della mano destra. Ad ogni wing segment è invece associato un sistema di riferimento locale $x^S y^S z^S$, secondo il quale l'asse x^S è parallelo a V_∞ , l'asse y^S è parallelo all'asse y globale essendo l'angolo diedro nullo. I quattro nodi del wing segment sono indicati con $1^S, 2^S, 3^S, 4^S$ e l'origine del sistema di riferimento coincide con il punto 2^S (figura 5.1).

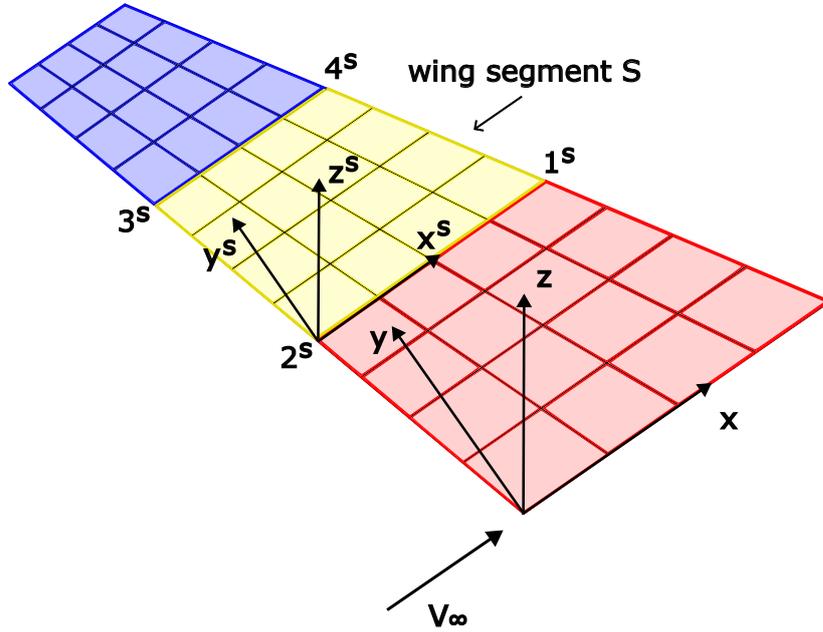


Figura 5.1. Sistemi di riferimento globale e locale e notazione per il wing segment

I versori i^S, j^S e k^S relativi al sistema di riferimento locale si possono esprimere attraverso i versori i, j e k del sistema di riferimento globale attraverso la matrice di trasformazione e^S :

$$\begin{aligned} i^S &= e_{11}^S i + e_{12}^S j + e_{13}^S k \\ j^S &= e_{21}^S i + e_{22}^S j + e_{23}^S k \\ k^S &= e_{31}^S i + e_{32}^S j + e_{33}^S k \end{aligned} \quad (5.1)$$

Dal vettore \mathbf{u} , contenente le tre componenti di spostamento nel sistema di riferimento globale di tutti gli Pseudo-Structural Point, è possibile estrapolare le componenti di

spostamento del solo wing segment S (\mathbf{u}^S), attraverso la matrice \mathbf{I}^S . Inoltre, tramite una matrice \mathbf{E}^S diagonale a blocchi contenente la matrice \mathbf{e}^S ripetuta tante volte quanto il numero degli Pseudo-Structural Point del wing segment S, si ottiene il vettore degli spostamenti in coordinate locali:

$$\mathbf{u}_{loc}^S = \mathbf{E}^S \cdot \mathbf{u}^S = \mathbf{E}^S \cdot \mathbf{I}^S \cdot \mathbf{u} \quad (5.2)$$

Si può procedere nello stesso modo nel definire il vettore delle coordinate degli Pseudo-Structural Point nel sistema di riferimento locale. Si definisce il vettore \mathbf{x} contenente tutte le coordinate dei punti nel sistema di riferimento globale e si estraggono da questo vettore quelle relative al wing segment S, attraverso la matrice \mathbf{J}^S :

$$\mathbf{x}^S = \mathbf{J}^S \cdot \mathbf{x} \quad (5.3)$$

Per determinare le coordinate locali dei punti appartenenti al wing segment S, si procede sottraendo a \mathbf{x}^S , il vettore delle coordinate globali del punto di origine del sistema di riferimento locale \mathbf{x}_{2^S} , definito come:

$$\mathbf{x}_{2^S} = [x_{2^S} \ y_{2^S} \ z_{2^S} \ \dots \ x_{2^S} \ y_{2^S} \ z_{2^S}]^T \quad (5.4)$$

e moltiplicando il tutto per la matrice \mathbf{E}^S :

$$\mathbf{x}_{loc}^S = \mathbf{E}^S \cdot [\mathbf{x}^S - \mathbf{x}_{2^S}] = \mathbf{E}^S \cdot [\mathbf{J}^S \cdot \mathbf{x} - \mathbf{x}_{2^S}] \quad (5.5)$$

Le uniche componenti di spostamento considerate sono quelle perpendicolari alla superficie alare e possono essere estratte dal vettore \mathbf{u}_{loc}^S , tramite la matrice \mathbf{I}_z^S :

$$\mathbf{Z}_{loc}^S = \mathbf{I}_z^S \cdot \mathbf{u}_{loc}^S = \mathbf{I}_z^S \cdot \mathbf{E}^S \cdot \mathbf{I}^S \cdot \mathbf{u} \quad (5.6)$$

Poichè l'angolo di attacco è nullo, il vettore \mathbf{Z}_{loc}^S contiene le coordinate z^S della configurazione deformata. Tale vettore è utilizzato come input per il calcolo delle pendenze e degli spostamenti nei punti di controllo e di carico aerodinamici, tramite l'Infinite Plate Spline. Considerando un generico punto i -esimo sulla wing section S, la coordinata locale z si indica come:

$$Z_{i,loc}^S = Z_{i,loc}^S(x_{i,loc}^S, y_{i,loc}^S) \quad (5.7)$$

La relazione di $Z_{i,loc}^S$ secondo il metodo di spline IPS è:

$$Z_{i,loc}^S(x_{i,loc}^S, y_{i,loc}^S) = a_0^S + a_1^S x_{i,loc}^S + a_2^S y_{i,loc}^S + \sum_{j=1}^{N_n^S} F_j^S K_{ij}^S \quad i = 1, \dots, N_n^S \quad (5.8)$$

dove:

$$K_{ij}^S = (r_{ij,loc}^S)^2 \ln(r_{ij,loc}^S)^2 \quad (5.9)$$

$$(r_{ij,loc}^S)^2 = (x_{i,loc}^S - x_{j,loc}^S)^2 + (y_{i,loc}^S - y_{j,loc}^S)^2 \quad (5.10)$$

N_n^S è il numero degli Pseudo-Structural Points, F_j^S è il carico applicato nel punto j -esimo e $r_{ij,loc}^S$ è la distanza tra i due punti i e j . Le incognite nella formulazione sono pari a

$N_n^S + 3$ e sono a_0, a_1, a_2, F_j . Si possono ottenere imponendo gli spostamenti negli N_n^S Pseudo-Structural Point tramite l'equazione 5.8 e utilizzando le seguenti tre condizioni di equilibrio:

$$\sum_{j=1}^{N_n^S} F_j^S = 0 \quad (5.11)$$

$$\sum_{j=1}^{N_n^S} F_j^S x_{j,loc}^S = 0 \quad (5.12)$$

$$\sum_{j=1}^{N_n^S} F_j^S y_{j,loc}^S = 0 \quad (5.13)$$

In forma matriciale, le equazioni 5.8 e di equilibrio si possono esprimere come:

$$\mathbf{Z}_{loc}^{S*} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{R}^S \\ [\mathbf{R}^S]^T & \mathbf{K}^S \end{bmatrix} \cdot \mathbf{F}^S = \mathbf{G}^S \cdot \mathbf{F}^S \quad (5.14)$$

dove:

$$\mathbf{Z}_{loc}^{S*} = \left[0 \ 0 \ 0 \ Z_{1,loc}^S \ Z_{2,loc}^S \ \dots \ Z_{N_n^S,loc}^S \right]^T \quad (5.15)$$

$$\mathbf{F}^S = \left[a_0^S \ a_1^S \ a_2^S \ F_1^S \ F_2^S \ \dots \ F_{N_n^S,loc}^S \right]^T \quad (5.16)$$

$$\mathbf{R}^S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_{1,loc}^S & x_{2,loc}^S & \dots & x_{N_n^S,loc}^S \\ y_{1,loc}^S & y_{2,loc}^S & \dots & y_{N_n^S,loc}^S \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

$$\mathbf{K}^S = \begin{bmatrix} 0 & K_{12}^S & \dots & K_{1N_n^S}^S \\ K_{21}^S & 0 & \dots & K_{2N_n^S}^S \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{N_n^S 1}^S & K_{N_n^S 2}^S & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

\mathbf{G}^S ha quindi dimensioni $(N_n^S + 3) \times (N_n^S + 3)$. Invertendo la formula si ottiene il vettore contenente le incognite:

$$\mathbf{F}^S = [\mathbf{G}^S]^{-1} \cdot \mathbf{Z}_{loc}^{S*} \quad (5.19)$$

5.2 Pendenze nei punti di controllo

Una volta trovati i coefficienti incogniti tramite IPS, si vogliono imporre le condizioni al contorno di tangenza nei punti di controllo aerodinamici. Si indica con $(\mathcal{X}_{k,loc}^S, \mathcal{Y}_{k,loc}^S)$ le

coordinate locali del k-esimo punto di controllo. Utilizzando l'equazione 5.8, la coordinata $Z_{k,loc}^S$ del punto di controllo k-esimo, si esprime come:

$$Z_{k,loc}^S(\mathcal{X}_{k,loc}^S, \mathcal{Y}_{k,loc}^S) = a_0^S + a_1^S \mathcal{X}_{k,loc}^S + a_2^S \mathcal{Y}_{k,loc}^S + \sum_{j=1}^{N_n^S} F_j^S \mathcal{K}_{kj}^S \quad (5.20)$$

dove:

$$\mathcal{K}_{kj}^S = (\mathcal{R}_{kj,loc}^S)^2 \ln(\mathcal{R}_{kj,loc}^S)^2 \quad (5.21)$$

$$(\mathcal{R}_{kj,loc}^S)^2 = (\mathcal{X}_{k,loc}^S - x_{j,loc}^S)^2 + (\mathcal{Y}_{k,loc}^S - y_{j,loc}^S)^2 \quad (5.22)$$

Per imporre le condizioni al contorno è necessario trovare le derivate rispetto a x^S :

$$\frac{dZ_{k,loc}^S}{dx^S}(\mathcal{X}_{k,loc}^S, \mathcal{Y}_{k,loc}^S) = a_1^S + \sum_{j=1}^{N_n^S} F_j^S \mathcal{DK}_{kj}^S \quad (5.23)$$

con:

$$\mathcal{DK}_{kj}^S = 2(\mathcal{X}_{k,loc}^S - x_{j,loc}^S) \left[1 + \ln(\mathcal{R}_{kj,loc}^S)^2 \right] \quad (5.24)$$

Il vettore delle pendenze relative ai punti di controllo della wing section S, $\frac{dZ_{k,loc}^S}{dx^S}$, si può ottenere dal vettore contenente i coefficienti della spline F^S moltiplicandolo per una matrice D^S :

$$\frac{dZ_{k,loc}^S}{dx^S} = D^S \cdot F^S \quad (5.25)$$

Sostituendo l'equazione 5.19, si può scrivere il vettore delle pendenze in funzione delle coordinate lungo z^S degli Pseudo-Structural Point nella configurazione deformata:

$$\frac{dZ_{k,loc}^S}{dx^S} = D^S \cdot [G^S]^{-1} \cdot Z_{loc}^{S*} \quad (5.26)$$

Essendo però le prime tre righe di Z_{loc}^{S*} nulle, si eliminano le prime tre colonne di $[G^S]^{-1}$ e la matrice che ne deriva viene indicata con S^S . Il vettore Z_{loc}^{S*} senza le prime tre righe diventa invece Z_{loc}^S . Apportando tali modifiche, l'equazione 5.26 può essere riscritta come:

$$\frac{dZ_{k,loc}^S}{dx^S} = D^S \cdot S^S \cdot Z_{loc}^S \quad (5.27)$$

In questo modo si esprimono gli output cioè le pendenze dei punti di controllo aerodinamici direttamente attraverso gli input che sono le coordinate z^S degli Pseudo-Structural Point nella configurazione deformata. Il vettore $\frac{dZ_{k,loc}^S}{dx^S}$ ha dimensioni $(N^S \times 1)$ dove N^S è il numero dei pannelli aerodinamici e quindi dei punti di controllo. La matrice D^S ha quindi dimensioni $N^S \times (N_n^S + 3)$. Infine S^S è una matrice $(N_n^S + 3) \times N_n^S$, avendo eliminato le tre colonne da $[G^S]^{-1}$.

Infine sostituendo l'equazione 5.6 in 5.27, si ottiene:

$$\frac{dZ_{k,loc}^S}{dx^S} = D^S \cdot S^S \cdot I_z^S \cdot E^S \cdot I^S \cdot u = D^S \cdot a_3^S \cdot u \quad (5.28)$$

5.3 Spostamenti nei punti di controllo e di carico

Per trovare la relazione degli spostamenti nei punti di carico, si procede analogamente a quanto fatto per i punti di controllo. La matrice, che permette di ottenere dagli spostamenti negli Pseudo-Structural Point le deflessioni nei punti di carico, è indicata con $\tilde{\mathbf{D}}^{S*}$. Il vettore degli spostamenti si può esprimere quindi come:

$$\tilde{\mathbf{Z}}_{loc}^S = \tilde{\mathbf{D}}^{S*} \cdot \mathbf{F}^S \quad (5.29)$$

Le coordinate locali dei punti di controllo nel sistema di riferimento del wing segment S vengono indicate con $(\mathcal{X}_{l,loc}^S, \mathcal{Y}_{l,loc}^S)$. In modo analogo all'equazione 5.28, si ottiene la seguente formulazione:

$$\tilde{\mathbf{Z}}_{loc}^S = \tilde{\mathbf{D}}^{S*} \cdot \mathbf{a}_3^S \cdot \mathbf{u} \quad (5.30)$$

Nel caso in cui invece si considerano i punti di controllo, formalmente la relazione è la stessa ma in questo caso cambiano le coordinate locali che si riferiscono non più ai punti di carico ma ai punti di controllo:

$$\mathbf{Z}_{loc}^S = \mathbf{D}^{S*} \cdot \mathbf{a}_3^S \cdot \mathbf{u} \quad (5.31)$$

5.4 Caso instazionario (DLM)

Come descritto in Demasi and Livne [2007], si considerano un insieme di forme di moto che rappresentano i moti generalizzati per la generazione di forze aerodinamiche generalizzate. Introducendo il generico insieme di forme modali Φ_m nelle equazione di pendenza e spostamento dei punti di controllo e di carico, le equazioni 5.28, 5.30 e 5.31 diventano:

$$\frac{d\mathbf{Z}_{m,loc}^S}{dx^S} = \mathbf{D}^S \cdot \mathbf{a}_3^S \cdot \Phi_m \quad (5.32)$$

$$\tilde{\mathbf{Z}}_{m,loc}^S = \tilde{\mathbf{D}}^{S*} \cdot \mathbf{a}_3^S \cdot \Phi_m \quad (5.33)$$

$$\mathbf{Z}_{m,loc}^S = \mathbf{D}^{S*} \cdot \mathbf{a}_3^S \cdot \Phi_m \quad (5.34)$$

Si ipotizza un caso di moto semplicemente armonico. Le condizioni al contorno, usando il DLM, si possono esprimere attraverso la seguente relazione relativa al vettore delle velocità normali normalizzate:

$$\mathbf{w}_m^S = i \frac{\omega}{V_\infty} \mathbf{Z}_{m,loc}^S + \frac{d\mathbf{Z}_{m,loc}^S}{dx^S} = ik \mathbf{Z}_{m,loc}^S + \frac{d\mathbf{Z}_{m,loc}^S}{dx^S} \quad (5.35)$$

Fino ad ora si sono considerate le equazioni relative al singolo wing segment. Procedendo con l'assemblaggio di tutti i wing segments, tenendo il conto del fatto che non ci sono pannelli aerodinamici in comune tra di essi, le equazioni possono essere riscritte come:

$$\frac{d\mathbf{Z}_{m,loc}}{dx} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{a}_3 \cdot \Phi_m = \mathbf{A}_3 \cdot \Phi_m \quad (5.36)$$

$$\tilde{\mathbf{Z}}_{m,loc} = \tilde{\mathbf{D}}^* \cdot \mathbf{a}_3 \cdot \Phi_m = \tilde{\mathbf{A}}_3^* \cdot \Phi_m \quad (5.37)$$

$$\mathbf{Z}_{m,loc} = \mathbf{D}^* \cdot \mathbf{a}_3 \cdot \Phi_m = \mathbf{A}_3^* \cdot \Phi_m \quad (5.38)$$

Il vettore della velocità normale normalizzata di tutti i pannelli diventa:

$$\mathbf{w}_m = ik\mathbf{Z}_{m,loc} + \frac{d\mathbf{Z}_{m,loc}}{dx} \quad (5.39)$$

5.5 Metodo P-K per analisi di flutter

Il P-K method, descritto da Hassig [1971], è un metodo ampiamente utilizzato nelle analisi di flutter per risolvere l'equazione del moto aeroelastica:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (5.40)$$

in cui \mathbf{M} è la matrice di massa, \mathbf{C} è la matrice di smorzamento, \mathbf{K} è la matrice di rigidità, \mathbf{F} è il vettore delle forze applicate e \mathbf{u} è il vettore degli spostamenti. Introducendo le matrici generalizzate e indicando con Φ la matrice che contiene un certo numero di modi strutturali, l'equazione diventa:

$$\tilde{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \tilde{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{q}}(t) + \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{q}(t) = \Phi^T \mathbf{F}(t) \quad (5.41)$$

Si ipotizza una soluzione del problema aeroelastico di tipo oscillatoria:

$$\mathbf{q}(t) = \bar{\mathbf{q}}e^{st} \quad (5.42)$$

dove s è il parametro di Laplace, la cui parte reale è indicata con σ e la parte immaginaria con ω :

$$s = \sigma + i\omega \quad (5.43)$$

Si riscrive l'equazione 5.41 applicando la trasformata di Laplace:

$$\left[\tilde{\mathbf{M}}s^2 + \tilde{\mathbf{C}}s + \tilde{\mathbf{K}} - \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 \tilde{\mathbf{Q}}(s) \right] \bar{\mathbf{q}}(s) = 0 \quad (5.44)$$

dove $\tilde{\mathbf{Q}}(s)$ è la matrice generalizzata delle forze aerodinamiche. Si introduce l'autovalore adimensionale p :

$$p = \frac{b}{V_\infty} s = \frac{b}{V_\infty} (\sigma + i\omega) = \gamma k + ik \quad (5.45)$$

in cui b è la lunghezza di riferimento che di solito è pari a metà corda, k è la frequenza ridotta mentre γ è il *decay rate*. Sostituendo il parametro p nell'equazione 5.44, si ottiene:

$$\left[\left(\frac{V_\infty}{b} \right)^2 \tilde{\mathbf{M}}p^2 + \frac{V_\infty}{b} \tilde{\mathbf{C}}p + \tilde{\mathbf{K}} - \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 \tilde{\mathbf{Q}}(p) \right] \bar{\mathbf{q}}(p) = 0 \quad (5.46)$$

Nel P-K method, per ipotesi, si utilizza una soluzione puramente armonica per i termini aerodinamici, mentre si mantiene la soluzione esponenziale per i termini strutturali. L'equazione 5.46 diventa:

$$\left[\left(\frac{V_\infty}{b} \right)^2 \tilde{\mathbf{M}}p^2 + \frac{V_\infty}{b} \tilde{\mathbf{C}}p + \tilde{\mathbf{K}} - \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 \tilde{\mathbf{Q}}(ik) \right] \bar{\mathbf{q}}(p) = 0 \quad (5.47)$$

L'equazione 5.47 non è di immediata risoluzione ma necessita di un procedimento iterativo. Si sceglie un valore della frequenza ridotta k di partenza a una fissata velocità e si calcolano gli autovalori p . Si confronta k con la parte immaginaria di p : se la differenza tra i due è al di sotto di una certa tolleranza, allora è stata raggiunta la convergenza; altrimenti si procede con step successivi in cui si impone l'uguaglianza di k alla parte immaginaria di p trovata e si ricalcolano gli autovalori. Trovato il valore finale di p , si conoscono smorzamento e frequenza. Questo procedimento può essere ripetuto per diversi valori di velocità in modo da poter trovare la condizione di flutter.

L'imposizione delle due soluzioni differenti ai termini strutturali e aerodinamici fa sì che la soluzione trovata non è esatta. Questo metodo però viene utilizzato perchè non porta a grandi errori e in particolare, quando la parte reale di p è nulla, le due soluzioni coincidono. La soluzione è quindi esatta solo nella condizione di flutter, che è ciò che interessa.

La matrice generalizzata della massa è:

$$\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{M} \mathbf{\Phi} \quad (5.48)$$

e ha dimensioni $(N_m \times N_m)$ dove N_m è il numero di modi naturali presi in considerazione. Infatti $\mathbf{\Phi}$ ha dimensioni $N_{DOF} \times N_m$ mentre \mathbf{M} ha dimensioni $N_{DOF} \times N_{DOF}$ (N_{DOF} è il numero di gradi di libertà del modello strutturale).

Le matrici generalizzate di rigidezza e di smorzamento sono anch'esse matrici $(N_m \times N_m)$ e i termini diagonali sono:

$$\tilde{K}_{ii} = \omega_i^2 \tilde{M}_{ii} \quad (5.49)$$

$$\tilde{C}_{ii} = 2\xi\omega_i \tilde{M}_{ii} \quad (5.50)$$

dove ω_i è la pulsazione del forma modale i -esima e ξ è lo smorzamento strutturale.

Infine si definisce la matrice generalizzata aerodinamica:

$$\tilde{Q}_{ij}(ik) = \sum_{N=1}^{N_{PA}} \Delta p_j^N(ik) \tilde{Z}_{i,loc}^N S_{PA}^N \quad (5.51)$$

dove $\Delta p_j^N(ik)$ è il salto di pressione dalla j -esima forma modale per una data frequenza ridotta e agisce sul pannello aerodinamico N -esimo. Si ottiene dal DLM.

$\tilde{Z}_{i,loc}^N$ è invece l' i -esimo insieme di moti trasversali relativi al pannello aerodinamico N -esimo, i quali vengono mappati sui pannelli aerodinamici tramite il metodo di spline. Infine S_{PA}^N è l'area del pannello aerodinamico N .

Capitolo 6

Software MUL2

6.1 Interfaccia

Il software MUL2 è stato sviluppato dal gruppo di ricerca MUL2 del Politecnico di Torino e si occupa di analizzare strutture più o meno complesse. Lo scopo di questo paragrafo non è quello di addentrarci nel funzionamento del software ma presentare l'interfaccia e l'utilizzo da parte dell'utente. È composto da diversi file di input, nei quali vengono inseriti i parametri utili per l'analisi. Questi file vengono letti dal software, e una volta lanciata l'analisi in output vengono dati dei file di post-processing, nei quali sono presenti i risultati richiesti. In particolare sono presenti i seguenti file:

- **ANALYSIS**

In questo file si inserisce il tipo di analisi da svolgere. Ad esempio si utilizza il numero 101 per indicare un'analisi statica, mentre 103 per un'analisi dinamica. In quest'ultimo caso è necessario scrivere il numero di modi di vibrare della struttura che si vogliono ottenere in output. Infine è presente la possibilità di inserire un fattore correttivo di Shear locking per beam, plate, solid a seconda che gli elementi utilizzati siano 1D, 2D o solidi . Nelle analisi svolte questo fattore non sarà necessario.

```
101
100      !! NOT USED
10      Number of Modes for the Modal Analysis (** ATTENTION to ALL Modes choise)
NONE      Shear locking correction beam (NONE/REDI/SELI/MITC)
NONE      Shear locking correction plate (NONE/REDI/SELI/MITC)
NONE      Shear locking correction solid (NONE/REDI/SELI/MITC)
```

Figura 6.1. Formato del file ANALYSIS

- **BC**

Il file **B**oundary **C**ondition contiene i carichi e i vincoli applicati alla struttura. D-POINT e D-PLAIN si utilizzano per indicare il vincolo rispettivamente in un

punto e in un piano. F-POINT impone la forza in un punto. Nella definizione del vincolo o della forza, il primo numero è l'ID, i successivi, nel caso F-POINT e D-POINT sono le tre coordinate del punto di applicazione considerato, mentre nel caso D-PLANE i successivi quattro numeri sono i coefficienti dell'equazione del piano $ax + by + cz + d = 0$. Gli ultimi tre input del vincolo sono 0 se è fisso, N se è libero nelle tre direzioni o diverso da 0 se la componente di spostamento è fissata a un valore diverso da 0. Infine nel caso della forza, gli ultimi tre valori numerici indicano l'entità della forza nelle tre direzioni.

```

2
D-PLANE 1 0.000 1.000 0.000 0.0000 0.0 0.0 0.0
F-POINT 2 0.000000 1.000000 0.005000 0.0 0.0 -100

D-POINT id xp yp zp Vx vy vz

```

Figura 6.2. Formato del file BC

- **EXP_CONN_NN**

Contiene la *connectivity* degli elementi utilizzati per definire la sezione trasversale o lo spessore degli elementi. Con NN viene indicato il numero di file di questo tipo pari al numero di sezioni differenti utilizzate nel modello. La prima colonna rappresenta il tipo di elemento utilizzato, che può essere:

- uno-dimensionale, usato per definire lo spessore. Si indica con B2, B3 o B4, a seconda che sia una beam a due, tre e quattro nodi
- due-dimensionale, usato per descrivere la sezione trasversale della beam. In base al numero di nodi presenti, si può indicare con Q3 o Q6 (elemento triangolare), Q4, Q9 o Q16 (elemento quadrilatero)
- solido: si indica con il simbolo S1

La seconda e terza colonna rappresentano rispettivamente il numero identificativo dell'elemento e il numero identificativo della laminazione usata nell'elemento stesso. Infine sono indicati i numeri identificativi dei nodi definiti nel file EXP_MESH_NN. Il numero di nodi dipende dall'elemento scelto.

```

1
Q9 1 1 1 2 3 4 5 6 7 8 9

```

Figura 6.3. Formato del file EXP_CONN_01

- **EXP_MESH_NN**

Ci possono essere più di un file di *expansion mesh*. Contiene le coordinate nel sistema di riferimento locale di ogni nodo usato per descrivere la sezione trasversale o lo spessore degli elementi. In particolare la prima colonna contiene l'identificativo del nodo. I successivi tre numeri rappresentano le coordinate x, y, z nel sistema di riferimento locale.

```

9
1  -0.100000  0.000000  -0.0050000
2   0.000000  0.000000  -0.0050000
3   0.100000  0.000000  -0.0050000
4   0.100000  0.000000   0.0000000
5   0.100000  0.000000   0.0050000
6   0.000000  0.000000   0.0050000
7  -0.100000  0.000000   0.0050000
8  -0.100000  0.000000   0.0000000
9   0.000000  0.000000   0.0000000

```

Figura 6.4. Formato del file EXP_MESH_01

- **CONNECTIVITY**

Il file definisce la *connectivity* degli elementi usati nel modello. Viene indicato il tipo di elemento utilizzato nella mesh strutturale, che può essere 1D (B2, B3, B4), 2D (Q3, Q6, Q4, Q9, Q16) o 3D (H8, H20, H27), e la connessione tra i nodi in ogni elemento. Quindi nelle prime due colonne sono definiti il tipo e l'identificativo dell'elemento. Nelle colonne successive sono riportati i numeri identificativi dei nodi di ogni elemento, definiti nel file NODES. Infine sono inseriti i numeri identificativi del versore, definito nel file VERSORS, e dell'espansione usata in ogni elemento.

```

4
B4 1  1  2  3  4  1  1
B4 2  4  5  6  7  1  1
B4 3  7  8  9 10  1  1
B4 4 10 11 12 13  1  1

```

Figura 6.5. Formato del file CONNECTIVITY

- **MATERIAL**

In questo file vengono definite le proprietà dei materiali utilizzati nel definire il modello. Nella prima riga del file vengono definiti il numero di materiali dichiarati e il numero di righe che il programma deve leggere. Il materiale viene indicato tramite parole chiave come ISO-M per i materiali isotropi o ORTO-M per i materiali ortotropi. Ad ogni materiale è indicato un numero identificativo e nelle successive colonne vengono indicate le proprietà del materiale:

- E, ν, ρ se il materiale è isotropo;
- $E_L, E_T, E_Z, \nu_{LT}, \nu_{LZ}, \nu_{ZT}, G_{LT}, G_{LZ}, G_{ZT}, \rho$ se il materiale è ortotropo.

```

1 1
ISO-M 1 73D9 0.3 2700
ORT-M 1 173.0D9 7.2D9 7.2D9 0.29D0 0.29D0 0.29D0 3.76D9 3.76D9 3.76D9 1.540D3

```

Figura 6.6. Formato del file MATERIAL

• LAMINATION

Vengono definiti i vari strati nel caso la struttura analizzata sia un laminato composito. Vengono indicati in ordine l'ID della laminazione, l'ID del materiale di strato considerato, l'angolo di rotazione intorno all'asse y e z del sistema di riferimento locale.

```

1
LAM2 1 1 0.00000E+00 0.000000E+00

```

Figura 6.7. Formato del file LAMINATION

• NODES

Il file contiene le coordinate nel sistema di riferimento globale dei nodi utilizzati nel modello strutturale. La prima colonna rappresenta il numero identificativo del nodo, le successive tre, la posizione dei vari nodi nelle coordinate x, y, z. Infine viene indicato il modello cinematico associato a ogni nodo e, se richiesto, l'ordine di espansione. I modelli cinematici vengono indicati nel seguente modo:

- TE Taylor expansion
- LE Lagrange expansion
- LG Legendre expansion
- MS Miscellaneous expansion

L'ordine di espansione è associato ai modelli sopra citati. Nel caso dell'espansione di Lagrange non è richiesto nessun ordine ma deve comunque essere inserito un numero qualsiasi che non viene considerato durante l'analisi. Nel caso in cui l'espansione di Taylor ha ordine -1 o 0 si ottengono rispettivamente il modello di Eulero-Bernoulli (1D) o Kirchhoff-Love (2D) e il modello di Timoshenko (1D) o Mindlin-Reissner (2D).

```

13
1 0.0000 0.0000 0.0000 TE 1
2 0.0000 0.083333333 0.0000 TE 1
3 0.0000 0.166666667 0.0000 TE 1
4 0.0000 0.25 0.0000 TE 1
5 0.0000 0.333333333 0.0000 TE 1
6 0.0000 0.416666667 0.0000 TE 1
7 0.0000 0.5 0.0000 TE 1
8 0.0000 0.583333333 0.0000 TE 1
9 0.0000 0.666666667 0.0000 TE 1
10 0.0000 0.75 0.0000 TE 1
11 0.0000 0.833333333 0.0000 TE 1
12 0.0000 0.916666667 0.0000 TE 1
13 0.0000 1 0.0000 TE 1

```

Figura 6.8. Formato del file NODES

- **VERSORS**

Definisce i versori per orientare il sistema di riferimento locale degli elementi. Nel file sono definiti in ordine l'identificativo del versore e le tre componenti x, y, z nel sistema di riferimento globale.

```

1
VERSOR 1 0 0 1

```

Figura 6.9. Formato del file VERSORS

- **POSTPROCESSING**

Il file POSTPROCESSING permette di indicare le richieste di output che si vogliono ottenere. In particolare con il comando PARA si richiede in output la creazione di un file *ParaView* per la visualizzazione grafica dei risultati. Con il comando PNT invece si indicano i punti di cui si vogliono avere le informazioni dell'analisi. Viene indicato l'ID del punto e le sue coordinate. Infine, se è presente la dicitura SNAS o FNAS, viene generato in output un file *.dat* da aprire in Nastran, per ottenere un file *.f06* contenente tutte le informazioni utili relative nel primo caso all'aeroelasticità statica, nel secondo al flutter.

```

3
PARA 20 GLB 1 1 1 1 1 1 1 1
PNT 1 0.0000 0.99999 0.00000
PNT 2 0.0000 0.0000 0.004999

```

Figura 6.10. Formato del file POSTPROCESSING

- **NASTRAN_FLUTTER**

Questo file è presente solo se si vogliono effettuare analisi di tipo aeroelastico. Si inseriscono la densità e la corda di riferimento, si specifica l'eventuale presenza di simmetria e le coordinate dei due punti estremi del bordo di attacco. Si definiscono poi il numero di pannelli utilizzati nella mesh aerodinamica lungo la corda e lungo l'apertura e si indicano come variano i parametri densità, numero di Mach e velocità. Infine si indica il valore dell'angolo di incidenza.

```

1.225
1
0.076
0
0
0
0
0.305
0
30
8
1
1
0
0
78
78
40
1

```

Figura 6.11. Formato del file NASTRAN_FLUTTER

I file di output che si ottengono dalle analisi sono:

- file *.vtk* da aprire in *Paraview* che ci permette, nel caso di analisi statica, di visualizzare la deformata, gli spostamenti e le tensioni della struttura analizzata, mentre nel caso di analisi dinamica è possibile vedere i modi di vibrare della struttura.
- file *.dat* POST_POINT è un file di testo che mostra i risultati relativi ai punti indicati nel file POSTPROCESSING, in termini di spostamento nelle tre direzioni x, y, z, deformazioni e tensioni sia nel sistema di riferimento globale che locale. Si ottiene dall'analisi statica.
- file *.dat* FREQUENCIES si ottiene dall'analisi dinamica e mostra le frequenze proprie della struttura analizzata.
- file *.dat* FLUTTER e AERO_STATIC che si ottengono rispettivamente dall'analisi di flutter e dall'analisi di risposta aeroelastica statica. Nastran da questi genera i file *.f06* in cui sono contenute tutte le informazioni relative alle analisi svolte.

6.2 Utilizzo in ambito aeroelastico

In questa sezione viene descritto l'utilizzo del software in ambito aeroelastico.

Il modello strutturale entra in gioco nel file CONNECTIVITY definendo la struttura attraverso elementi 1D beam. Le coordinate dei nodi delle beam vengono riportati nel file

NODES. Sempre in questo file viene indicato il tipo di espansione polinomiale utilizzata in ogni nodo. Nel caso di Taylor viene definito anche l'ordine di espansione, mentre nel caso Lagrange bisogna inserire in EXP_CONN_NN il numero di elementi con cui viene modellizzata la sezione. Tali elementi possono avere un numero variabile di nodi e le loro coordinate vengono definite in EXP_CONN_NN.

Il modello aerodinamico invece viene definito nel file NASTRAN_FLUTTER in cui vengono indicati i pannelli aerodinamici con cui modellizzare le superfici della struttura e i parametri aerodinamici necessari per le analisi aeroelastiche.

La spline tra modello strutturale e aerodinamico viene creata tramite il file POSTPROCESSING nel quale vengono definiti dei punti sulla superficie in cui valutare gli spostamenti strutturali.

Svolgendo l'analisi di flutter, tramite il software MUL2, viene generato in output un file *.dat*, dal quale si ottengono le informazioni utili per individuare la condizione di flutter, una volta lanciato con Nastran. Il contenuto di questo file si articola in diverse parti. Sono presenti i valori di rigidezza, massa e smorzamento generalizzati relativi all'analisi modale e a ogni valore viene associato l'ID del modo (figura 6.12).

```

$-1---2---3---4---5---6---7---8---9---
CDAMP4*      1  0.0000000E+00      451
CDAMP4*      2  0.0000000E+00      452
CDAMP4*      3  0.0000000E+00      453
CDAMP4*      4  0.0000000E+00      454
$-1---2---3---4---5---6---7---8---9---
CELAS4*      1  0.11614493E-01      451
CELAS4*      2 -0.23725738E-02      452
CELAS4*      3  0.41344791E-02      453
CELAS4*      4  0.72094880E-02      454
$-1---2---3---4---5---6---7---8---9---
CMASS4*      1  0.10000000E+01      451
CMASS4*      2  0.10000000E+01      452
CMASS4*      3  0.10000000E+01      453
CMASS4*      4  0.10000000E+01      454
$-1---2---3---4---5---6---7---8---9---

```

Figura 6.12. Masse, rigidezze e smorzamenti generalizzati

È mostrata poi la griglia di nodi definiti nel file POSTPROCESSING attraverso le sue coordinate e i gradi di libertà vincolati in ogni nodo. Vengono indicati anche i sistemi di riferimento nei quali vengono valutati la posizione e gli spostamenti in questi punti (figura 6.13).

```

$-1---2---3---4---5---6---7---8---9---
GRID      1  0 -0.5000-16.0000  0.0500  0  456
GRID      2  0 -0.2500-16.0000  0.0500  0  456
GRID      3  0 -0.0000-16.0000  0.0500  0  456
GRID      4  0  0.2500-16.0000  0.0500  0  456
GRID      5  0  0.5000-16.0000  0.0500  0  456
GRID      6  0 -0.5000-14.3158  0.0500  0  456
GRID      7  0 -0.2500-14.3158  0.0500  0  456
GRID      8  0 -0.0000-14.3158  0.0500  0  456
GRID      9  0  0.2500-14.3158  0.0500  0  456
GRID     10  0  0.5000-14.3158  0.0500  0  456

```

Figura 6.13. Griglia di punti sulla superficie

Il comando AERO definisce alcuni parametri per l'aerodinamica instazionaria. Viene indicato l'identificativo del sistema di riferimento aerodinamico, la lunghezza di riferimento per la frequenza ridotta, la densità di riferimento e le eventuali simmetrie nei piani xz e xy (figura 6.14).

```

$--1-----2-----3-----4-----5-----6-----7-----8-----9-----
AERO      3      1.00000 1.22500 0      0
$--1-----2-----3-----4-----5-----6-----7-----8-----9-----
    
```

Figura 6.14. Esempio di comando AERO

Con CAERO1 viene definita la superficie aerodinamica in termini di posizione di due punti sul bordo di attacco e le relative corde come mostrato in figura 6.15. Queste informazioni vengono utilizzate per il Doublet Lattice Method nel caso di flussi subsonici. Si forniscono anche il numero di pannelli con cui viene divisa la superficie e la proprietà associata.

```

$--1-----2-----3-----4-----5-----6-----7-----8-----9-----
PAERO1    1
$--1-----2-----3-----4-----5-----6-----7-----8-----9-----
CAERO1    1001    1      3      60     8
+
-0.50000 -16.000 0.05000 1.00000-0.5000016.00000 0.05000 1.00000
+
$--1-----2-----3-----4-----5-----6-----7-----8-----9-----
    
```

Figura 6.15. Esempio di comando CAERO1

Le informazioni relative alle variazioni di densità, numero di Mach e velocità vengono specificate tramite il comando FLFACT come mostrato in 6.16.

```

$--1-----2-----3-----4-----5-----6-----7-----8-----9-----
FLFACT    2      1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000+
+
1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000+
+
1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000+
+
1.0000 1.0000
+
$--1-----2-----3-----4-----5-----6-----7-----8-----9-----
FLFACT    3      0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000+
+
0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000+
+
0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000+
+
0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000+
+
0.000 0.000
+
$--1-----2-----3-----4-----5-----6-----7-----8-----9-----
FLFACT    4      1.0    3.5    6.0    8.4    10.9   13.4   15.9+
+
18.3   20.8   23.3   25.8   28.2   30.7   33.2   35.6+
+
38.1   40.6   43.1   45.6   48.0   50.5   53.0   55.5+
+
57.9   60.4   62.9   65.4   67.8   70.3   72.8   75.2+
+
77.7   80.2   82.7   85.2   87.6   90.1   92.6   95.0+
+
97.5   100.0
    
```

Figura 6.16. Esempio di comando FLFACT

Per il calcolo della matrice aerodinamica si fornisce una lista di numeri di Mach e frequenze ridotte come mostrato in figura 6.17.

```

$--1----_2_---3----_4_---5----_6_---7----_8_---9----
MKAERO2  0.00000 0.00010 0.00000 0.00100 0.00000 0.05000 0.00000 0.10000
MKAERO2  0.00000 0.20000 0.00000 0.50000 0.00000 1.00000 0.00000 2.00000
MKAERO2  0.00000 5.00000 0.00000 10.00000
$--1----_2_---3----_4_---5----_6_---7----_8_---9----

```

Figura 6.17. Numeri di Mach e frequenze ridotte

Nelle analisi di flutter si deve specificare inoltre il metodo che si vuole utilizzare per la risoluzione (figura 6.18). Di solito si utilizza il metodo PKNL, una versione più efficiente del metodo PK.

```

$--1----_2_---3----_4_---5----_6_---7----_8_---9----
FLUTTER      1  PKNL      2      3      4      L      0  0.001
$--1----_2_---3----_4_---5----_6_---7----_8_---9----

```

Figura 6.18. Metodo usato per le analisi di flutter

Tramite SPLINE1 si associano i pannelli aerodinamici con un set di punti della griglia strutturale. Si definiscono il primo e l'ultimo pannello aerodinamico, l'identificativo del set di punti strutturali e il metodo utilizzato per la spline (IPS di default) come mostrato in figura 6.19.

```

$--1----_2_---3----_4_---5----_6_---7----_8_---9----
SPLINE1      1  1001  1001  1480  1  0.  IPS  BOTH
SPLINE1      2  2001  2001  2120  2  0.  IPS  BOTH

```

Figura 6.19. Esempio di SPLINE1

Infine viene fornita l'informazione relativa ai *Multipoint Constraint*. Si indica il numero identificativo di un punto della griglia, il valore della componente di scostamento e il relativo modo (figura 6.20).

```

$--1----_2_---3----_4_---5----_6_---7----_8_---9----
MPC*          1          1          1          -0.1E+01
*             451          0  -0.679166E-07
*             452          0  -0.285322E-06
*             453          0  -0.170098E-05
*             454          0  -0.168396E-06
*             455          0  0.109988E+00

```

Figura 6.20. Esempio di MPC

Da tutte queste informazioni riportate nel file *.dat* generato da MUL2 si ottiene tramite nastran un file *.f06* che contiene i risultati in termini di smorzamento e frequenze al variare della velocità, del numero di Mach e della densità per i modi richiesti. In ordine si trovano le frequenze ridotte, l'inverso delle frequenze ridotte, la densità, il numero di Mach, la velocità, lo smorzamento, la frequenza e l'autovalore complesso.

KFREQ	1./KFREQ	DENSITY	MACH NO.	VELOCITY	DAMPING	FREQUENCY	COMPLEX	EIGENVALUE
71.6683	1.39532E-02	1.00000E+00	0.00000E+00	2.00000E+00	2.19037E-03	6.00335E+02	4.13106E+00	3.77202E+03
28.6670	3.48833E-02	1.00000E+00	0.00000E+00	5.00000E+00	1.87549E-03	6.00328E+02	3.53714E+00	3.77197E+03
18.1416	5.51221E-02	1.00000E+00	0.00000E+00	7.90000E+00	1.55630E-03	6.00258E+02	2.93482E+00	3.77153E+03
13.1455	7.60718E-02	1.00000E+00	0.00000E+00	1.09000E+01	1.22766E-03	6.00122E+02	2.31455E+00	3.77068E+03
10.3797	9.63422E-02	1.00000E+00	0.00000E+00	1.38000E+01	9.07962E-04	5.99928E+02	1.71126E+00	3.76946E+03
8.5225	1.17337E-01	1.00000E+00	0.00000E+00	1.68000E+01	5.75418E-04	5.99669E+02	1.08404E+00	3.76783E+03
7.2646	1.37654E-01	1.00000E+00	0.00000E+00	1.97000E+01	2.39436E-04	5.99397E+02	4.50873E-01	3.76612E+03

Figura 6.21. Smorzamenti e frequenze al variare della velocità

Capitolo 7

Analisi dei risultati

7.1 Analisi statica e dinamica di una trave isotropa

Nella seguente sezione si considera un primo caso semplice di trave isotropa. Si studia prima il comportamento statico della struttura sottoposta a una forza e successivamente il suo comportamento dinamico, cioè si valutano le frequenze e i modi propri della trave. Le suddette analisi vengono effettuate prima tramite il software MUL2 e poi, per confronto, con il software Femap.

7.1.1 Analisi statica

Si considera una trave di materiale isotropo, incastrata ad un estremo e caricata nell'estremo libero, già analizzata in [Orlandi \[2022\]](#). Il materiale utilizzato ha le caratteristiche riportate in tabella 7.1.

E [MPa]	ν	G [MPa]	ρ [kg/m ³]
73000	0.3	28076.92	2700

Tabella 7.1. Caratteristiche del materiale

La trave, schematizzata in figura 7.1, ha lunghezza $L = 1$ m, larghezza $b = 0.2$ m e spessore $h = 0.01$ m. Il sistema di riferimento utilizzato è quello mostrato in figura e ha origine al centro della sezione di incastro. Il carico è applicato verso il basso nel punto di coordinate $x = 0$ m, $y = 1$ m, $z = 0.005$ m, cioè al centro della sezione di estremità libera e ha intensità $P = -100$ N.

Per l'analisi statica (SOL 101) si utilizza il software MUL2. Esso consiste in una serie di file input di testo in cui vengono inseriti il tipo di analisi, le caratteristiche geometriche e del materiale della trave, vincoli e carichi.

Inoltre viene definito il modello FEM (figura 7.2): la trave è discretizzata in 10 elementi B4 cioè 10 elementi beam che hanno ciascuno due nodi interni (indicati con il simbolo \times) e due nodi esterni (indicati con il simbolo \bullet). Tenendo in conto dei nodi in comune tra

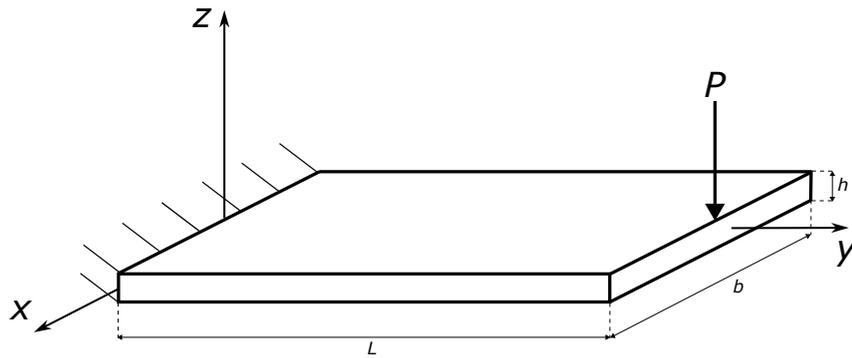


Figura 7.1. Schema della trave

due elementi adiacenti, il numero di nodi utilizzati è 31. In uno dei file di input vengono definite le coordinate dei 31 nodi nel sistema di riferimento xyz. In questo caso sono equispaziati lungo l'asse y, per $x=z=0$.

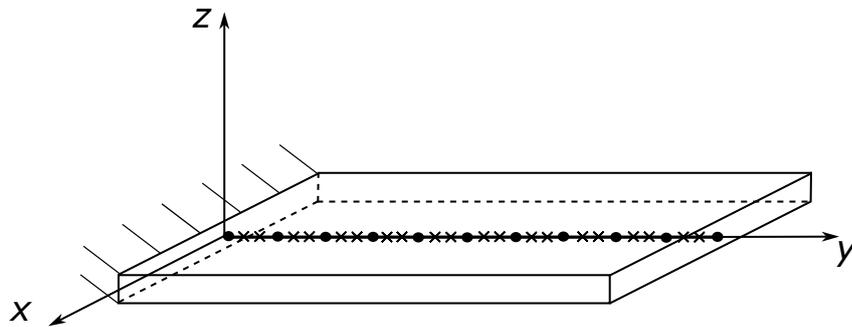


Figura 7.2. Nodi degli elementi beam

Su ogni nodo viene definita una sezione rettangolare di larghezza b e altezza h . Nei file di input vengono specificati il numero di nodi delle varie sezioni e le coordinate di tali nodi. In figura 7.3 sono rappresentati due esempi di sezione utilizzando un elemento *QUAD* rispettivamente con 4 e 9 nodi.

Nel file *POSTPROCESSING* viene richiesto di creare un file *ParaView*, per poter visualizzare tramite questo software i risultati dell'analisi. Inoltre è possibile inserire la posizione dei punti di cui si è interessati a conoscere spostamenti, deformazione e tensioni. Per questa analisi si sono scelti il punto 1 di coordinate $x = 0, y = 1, z = 0$ e il punto 2 di coordinate $x = 0, y = 0, z = 0.005$.

Del punto 1 è interessante vedere il valore dello spostamento in direzione z (u_z) perchè in tale punto è applicato il carico e ci si aspetta che lo spostamento sia massimo. Del punto 2 invece si vuole conoscere la tensione σ_{yy} in quanto, all'incastro, è massima.

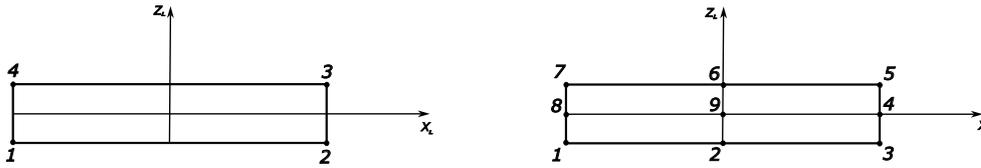


Figura 7.3. Nodi nella sezione della trave

Infine è necessario definire il tipo di modello strutturale adottato:

- *Taylor Expansion* (TE) si basa sui polinomi di Taylor utilizzati come funzioni generiche nel campo di spostamento della sezione. L'ordine di espansione viene introdotto come input.
- *Lagrange Expansion* (LE) si basa sui polinomi di Lagrange. È necessario indicare quanti elementi sono usati nella sezione e quanti nodi per ciascun elemento.

I valori di u_z e σ_{yy} per vari modelli strutturali più o meno raffinati sono riportati in tabella 7.2. Oltre ai modelli TE e LE, si è utilizzato il codice anche per fare le analisi secondo le teorie classiche di Eulero Bernoulli e di Timoshenko. Questi valori sono poi stati calcolati tramite una procedura analitica per effettuare un confronto con i risultati ottenuti dal codice. Sono inoltre indicati i gradi di libertà (DOF) per i diversi modelli, mostrando in questo modo anche il costo computazionale delle varie analisi.

Modello	DOF	u_z [m]	σ_{yy} [Mpa]
Analitico EBBT	155	2.739E-02	29.999
Analitico TBT	155	2.740E-02	29.999
EBBT	155	-2.740E-02	29.994
TBT	155	-2.740E-02	29.994
TE1	279	-2.739E-02	29.994
TE2	558	-2.582E-02	34.208
TE3	930	-2.668E-02	40.376
TE4	1395	-2.675E-02	40.021
1LE4	372	-2.038E-02	22.304
2LE4	558	-2.047E-02	31.283
1LE9	837	-2.669E-02	40.446
2LE9	1395	-2.670E-02	40.074

Tabella 7.2. Analisi statica

I valori di spostamento e tensione possono essere calcolati analiticamente secondo i due modelli classici, considerando la trave, isotropa e omogenea, incastrata ad un estremo e caricata nell'altro con forza concentrata pari a $-100 N$.

- **Eulero-bernoulli**

Poichè la sezione è simmetrica (momento d'inerzia $I_{xy} = 0$) e il carico è applicato

solo nel piano yz, il momento flettente M_x può essere scritto come:

$$M_x = -EI_x \frac{d^2 u_z}{dy^2} \quad (7.1)$$

cioè il momento flettente è legato alla curvatura della trave dalla rigidezza flessionale EI_x . Il momento di inerzia è pari a $I_x = \frac{bh^3}{12}$. Sapendo che la derivata del momento è pari al taglio:

$$\frac{dM_x}{dy} = T_z \quad (7.2)$$

si ottiene la seguente relazione di equilibrio:

$$-EI_x \frac{d^3 u_z}{dy^3} = T_z \quad (7.3)$$

in cui il taglio è proprio pari al carico P .

Imponendo le opportune condizioni al contorno (spostamento u_z e rotazione $u_{z,y}$ nulli all'incastro e momento nullo all'estremo libero), si ottiene l'espressione della linea elastica:

$$u_z(y) = \frac{Py^2}{6EI_x} (3L - y) \quad (7.4)$$

Quindi lo spostamento in direzione z in corrispondenza del punto 1 è pari a:

$$u_z(L) = 2.73918 \cdot 10^{-2} \text{ m} \quad (7.5)$$

É inoltre possibile calcolare la tensione σ_{yy} nel punto 2 per poterlo confrontare con quelle ottenute dal codice MUL2:

$$\sigma_{yy} = E\epsilon_{yy} = Ez \frac{d^2 u_z(0)}{dy^2} = 29.9994 \text{ MPa} \quad (7.6)$$

- **Timoshenko**

La differenza rispetto al caso precedente è che gli scorrimenti angolari γ_{xz} e γ_{yz} non sono nulli, cioè la sezione della trave, in seguito alla deformazione, non rimane più perpendicolare alla linea di riferimento. Per questo motivo le equazioni di equilibrio diventano:

$$\begin{cases} T_z = GA_{yz}^* \left(\frac{du_z}{dy} + \theta \right) \\ M_x = EI_x \frac{d\theta}{dy} \end{cases} \quad (7.7)$$

θ è la rotazione attorno all'asse x mentre GA_{yz}^* è la rigidezza a taglio della sezione della trave.

Essendo il taglio pari a P e il momento pari a $P(y - L)$ e imponendo le condizioni al contorno $u_z(0) = 0$ e $\theta(0) = 0$ (spostamento e rotazione nulli all'incastro), si ottiene la seguente espressione della linea elastica:

$$u_z = \frac{P}{GA^*} y - \frac{Py^2}{6EI_x} (y - 3L) \quad (7.8)$$

Il valore dello spostamento nel punto di interesse è:

$$u_z(L) = 2.73985 \cdot 10^{-2} \text{ m} \quad (7.9)$$

Infine la tensione all'incastro è pari a:

$$\sigma_{yy} = E\epsilon_{yy} = -Ez \frac{d\theta(0)}{dy} = 29.9994 \text{ MPa} \quad (7.10)$$

I valori ottenuti analiticamente confermano i risultati ottenuti con gli stessi modelli tramite il software.

Osservando ancora i risultati ottenuti in tabella 7.2, è possibile notare che via via i gradi di libertà aumentano, maggiore è l'accuratezza del modello. In particolare i modelli *2LE9* e *TE4* sono quelli che forniscono il risultato più vicino a quello reale ma a discapito dell'elevato costo computazionale. Inoltre è evidente che l'utilizzo o meno di un modello influisce maggiormente sulle tensioni piuttosto che sugli spostamenti. Gli errori maggiori si commettono, sia sulle tensioni che sugli spostamenti, utilizzando la *Lagrange Expansion* con 4 nodi in sezione (Q4).

In output, come già anticipato, il software fornisce un file ParaView che ci permette di visualizzare le distribuzioni di tensione e di spostamento per un modello scelto. Nelle figure 7.4 e 7.5 è stato utilizzato il modello *TE4*.

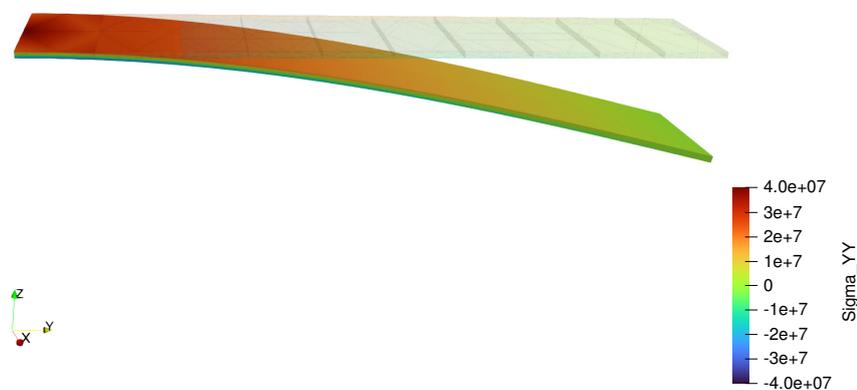


Figura 7.4. distribuzione di tensione σ_{yy} relativa al modello TE4

Per valutare la correttezza dei risultati ottenuti attraverso il codice MUL2, si effettua un'analisi statica anche attraverso il software Femap. Per prima cosa viene creata la geometria della trave. La struttura viene modellizzata come solido di dimensioni pari a quelle

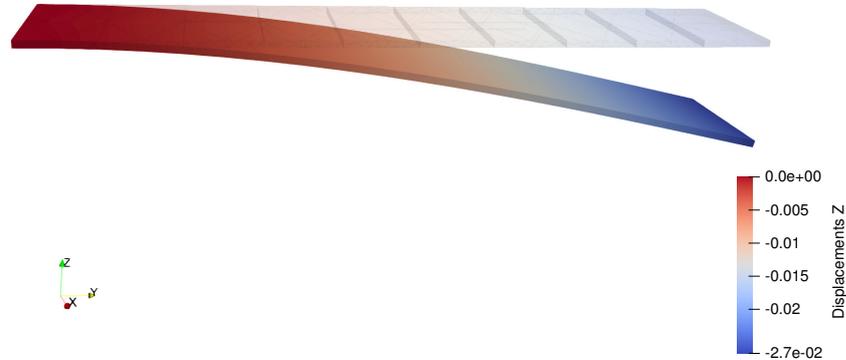


Figura 7.5. Campo di spostamento u_z della trave ottenuto dal modello TE4

utilizzate nel software MUL2. Viene definito il materiale introducendo le caratteristiche di tabella 7.1 e si associano le proprietà al modello. Viene poi introdotta una mesh strutturale con elementi di tipo *brick* a 8 nodi. Infine si definiscono il vincolo di incastro su una delle due superfici degli estremi della trave e il carico di -100 N applicato nel punto di coordinate $x = 0\text{ m}$, $y = 1\text{ m}$, $z = 0.005\text{ m}$. Viene poi effettuata una seconda analisi statica modellizzando la struttura non più come solido ma come superficie. Nel definire le proprietà, in questo caso, si inserisce anche lo spessore della superficie. Si applica una mesh 2D di tipo QUAD a 4 nodi e si mantengono gli stessi vincoli e carichi. In tabella 7.3 vengono confrontati i valori di u_z e σ_{yy} , negli stessi punti considerati nell'analisi statica con MUL2, dei due casi in Femap con quelli del modello TE4.

Modello	u_z [m]	σ_{yy} [Mpa]
TE4	-2.675E-02	40.021
Femap (solido)	-2.688E-02	35.722
Femap (superficie)	-2.689E-02	33.487

Tabella 7.3. Analisi statica in Femap

7.1.2 Analisi dinamica

Si considera la stessa trave isotropa considerata nell'analisi statica. Si vuole effettuare una *Free-vibration analysis* per determinare modi propri e frequenze proprie della struttura. Per far ciò si utilizza, come nel caso precedente, il software MUL2, modificando però il tipo di analisi, che in questo caso è la SOL 103. L'equazione del moto che si deve risolvere

per calcolare la dinamica della struttura è la seguente:

$$[M]\ddot{u} + [K]u = 0 \quad (7.11)$$

Gli smorzamenti e le forze esterne sono considerate nulle. Quando la struttura si deforma in un certo modo e a una certa frequenza per cui le forze inerziali eguagliano quelle elastiche, allora tale modo di vibrare e tale frequenza sono quelli propri della struttura. Le vibrazioni derivano dal fatto che il corpo è deformabile. Essendo la trave opportunamente vincolata, è eliminata la possibilità di muoversi come corpo rigido. L'unico modo per muoverlo è deformarlo.

In uno dei file di testo del programma MUL2 viene scelto il numero di frequenze e modi propri che si vogliono ottenere. Per questa analisi si sono scelti i primi 10 modi. In output si ottengono quindi le 10 frequenze proprie della struttura e un file ParaView che ci permette di visualizzare i modi di vibrare della trave considerata.

Come fatto per l'analisi statica, anche per l'analisi dinamica vengono considerati diversi modelli e i risultati ottenuti sono mostrati in tabella 7.4.

Modo	TBT	TE1	TE2	TE4	1LE4	1LE9	2LE9
1	8.399	8.399	8.697	8.531	9.737	8.543	8.541
2	52.615	52.615	54.266	53.377	60.992	53.448	53.435
3	147.250	147.250	85.245	84.574	85.245	84.830	84.660
4	163.532	163.532	153.068	149.674	170.662	149.905	149.865
5	288.425	288.425	164.373	163.784	171.548	164.371	163.850
6	476.759	476.759	261.973	258.799	261.973	259.649	259.040
7	712.676	712.676	301.098	294.118	334.187	294.742	294.641
8	894.913	806.181	456.544	447.656	456.544	449.339	448.010
9	997.108	894.913	498.712	487.729	552.184	489.135	488.916
10	1299.929	997.108	678.619	659.328	678.617	662.204	659.773
DOF	155	279	558	1395	372	837	1395

Tabella 7.4. Prime 10 frequenze proprie ottenuti da diversi modelli

Man mano che si utilizzano modelli con gradi di libertà più elevati, maggiore è l'accuratezza dei risultati che si ottengono. Inoltre il divario dei risultati che si ottengono tra modelli più accurati e meno, aumenta all'aumentare della frequenza considerata. In tabella 7.5 vengono confrontati gli errori percentuali delle frequenze dei modelli meno accurati rispetto al modello TE4.

Modo	TE4	TE1 %	1LE4 %
1	8.531	-1.551	14.134
2	53.377	-1.428	14.265
3	84.574	74.109	0.794
4	149.674	9.259	14.023
5	163.784	76.101	4.740
6	258.799	84.220	1.227
7	294.118	142.309	13.623
8	447.656	80.090	1.985
9	487.729	83.486	13.215
10	659.328	51.231	2.926

Tabella 7.5. Errore percentuale delle frequenze dei modelli TE1 e 1LE4 rispetto al modello TE4

Il file ParaView, che si ottiene in output, permette di visualizzare il tipo di modo corrispondente a ciascuna frequenza. Anche in questo caso è evidente che i modelli TE di ordine inferiore non sono accurati perchè non sono in grado di rilevare correttamente il tipo di modi, in particolare quelli torsionali. In tabella 7.6 sono riportate le frequenze del primo modo flessionale e del primo modo torsionale considerando diversi modelli.

Tipo di modo	TBT	TE1	TE2	TE4	1LE4	1LE9	2LE9
I modo flessionale	8.399	8.399	8.697	8.531	9.737	8.543	8.541
I modo torsionale	/	806.181	85.245	84.574	85.245	84.830	84.660

Tabella 7.6. Frequenze e modi propri ottenuti dal modello TE4

Il modello TE1 ha una frequenza del primo modo torsionale molto elevata rispetto agli altri modelli, mentre quello di Timoshenko non presenta addirittura nessuna frequenza tra le prime 10 corrispondente a un modo torsionale. È evidente che questi modelli non possono essere utilizzati in un'analisi di flutter in cui risulta fondamentale un'accurata conoscenza del comportamento torsionale della struttura.

In tabella 7.7 vengono confrontati i primi 10 modi della struttura per i modelli TE1 e TE4. È possibile notare che c'è una corrispondenza tra le frequenze dei due modelli per i modi flessionali. Per quanto riguarda invece i modi torsionali, nel primo caso c'è solo un modo torsionale a una frequenza di $f_1 = 806.181 \text{ Hz}$ mentre nel secondo caso ci sono quattro modi torsionali alle frequenze $f_1 = 84.574 \text{ Hz}$, $f_2 = 258.799 \text{ Hz}$, $f_3 = 447.656 \text{ Hz}$ e $f_4 = 659.328 \text{ Hz}$.

I modi di vibrare della trave isotropa considerata, secondo il modello TE4, sono mostrati in figura 7.6 tramite visualizzazione in ParaView.

Modo	TE1	Tipo di modo	TE4	Tipo di modo
1	8.399	I flessionale attorno a x	8.531	I flessionale attorno a x
2	52.615	II flessionale attorno a x	53.377	II flessionale attorno a x
3	147.250	III flessionale attorno a x	84.574	I torsionale
4	163.532	I flessionale attorno a z	149.674	III flessionale attorno a x
5	288.425	IV flessionale attorno a x	163.784	I flessionale attorno a z
6	476.759	V flessionale attorno a x	258.799	II torsionale
7	712.676	VI flessionale attorno a x	294.118	IV flessionale attorno a x
8	806.181	I torsionale	447.656	III torsionale
9	894.913	II flessionale attorno a z	487.729	V flessionale attorno a x
10	997.108	VII flessionale attorno a x	659.328	IV torsionale

Tabella 7.7. Frequenze [Hz] e modi propri ottenuti dai modelli TE1 e TE4

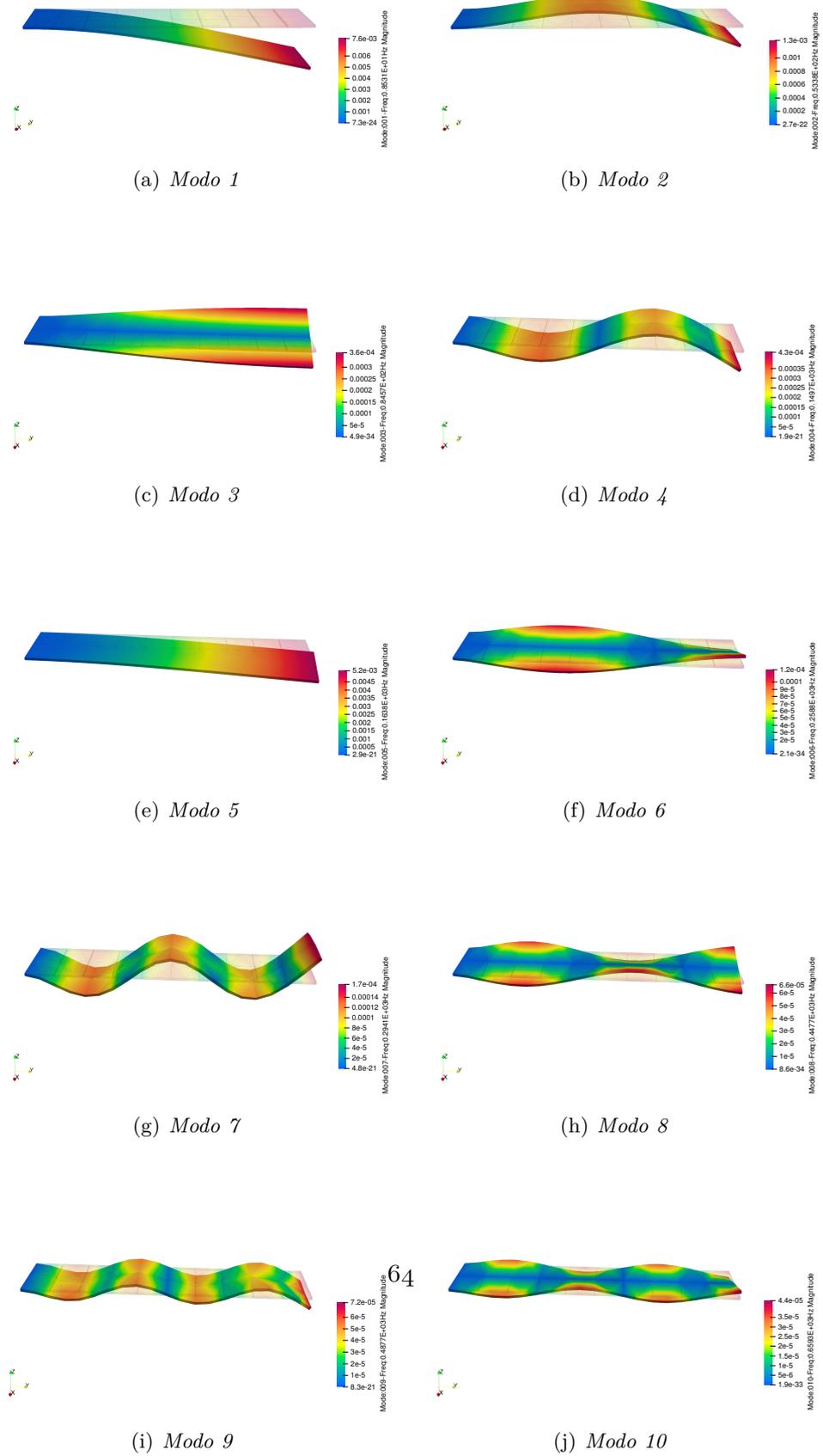


Figura 7.6. Modi di vibrare (modello TE4)

Come fatto per l'analisi statica, per ulteriore conferma dei risultati ottenuti dal software MUL2, si effettua un'analisi dinamica con Femap. Si utilizza lo stesso modello creato per l'analisi statica, con l'unica differenza che, per trovare frequenze e modi propri di vibrare della struttura, non si applica nessun carico. In tabella sono confrontati i risultati ottenuti dal modello TE4 e quelli che derivano dall'analisi con Femap.

Modo	TE4	Tipo di modo	Femap	Tipo di modo
1	8.531	I flessionale attorno a x	8.506	I flessionale attorno a x
2	53.377	II flessionale attorno a x	53.223	II flessionale attorno a x
3	84.574	I torsionale	83.575	I torsionale
4	149.674	III flessionale attorno a x	149.205	III flessionale attorno a x
5	163.784	I flessionale attorno a z	163.427	I flessionale attorno a z
6	258.799	II torsionale	255.629	II torsionale
7	294.118	IV flessionale attorno a x	293.010	IV flessionale attorno a x
8	447.656	III torsionale	441.815	III torsionale
9	487.729	V flessionale attorno a x	485.247	V flessionale attorno a x
10	659.328	IV torsionale	650.023	IV torsionale

Tabella 7.8. Analisi dinamica in Femap

I risultati ottenuti da Femap confermano che i modelli con più gradi di libertà sono più accurati sia nei valori delle frequenze proprie sia nei modi di vibrare della struttura.

7.2 Analisi aeroelastica di una piastra isotropa

In questa sezione, si introducono le analisi di tipo aeroelastico su una semplice piastra isotropa. La geometria considerata fa riferimento all'articolo di [Petrolo \[2011\]](#). Viene innanzitutto studiato il comportamento dinamico della struttura per individuare i primi modi torsionale e flessionale, che sono fondamentali nello studio del flutter e capire se i modelli utilizzati sono adatti per lo studio aeroelastico. Successivamente, utilizzando i modelli che individuano correttamente i modi propri della piastra, si effettuano delle analisi per individuare le condizioni di flutter. Dai risultati, si possono anche trovare le condizioni per cui si verifica il fenomeno aeroelastico statico di divergenza. Infine si valuta la risposta aeroelastica statica della piastra, cioè spostamenti e rotazione in corrispondenza del tip al variare della velocità. I risultati si ottengono sia tramite il software MUL2 sia con Femap.

7.2.1 Analisi dinamica

Una piastra isotropa ha le seguenti dimensioni: lunghezza $L = 0.305 \text{ m}$, larghezza $c = 0.076 \text{ m}$ e spessore $t = 0.001 \text{ m}$. Uno dei due lati corti è incastrato e il sistema di riferimento utilizzato è mostrato in figura [7.7](#).

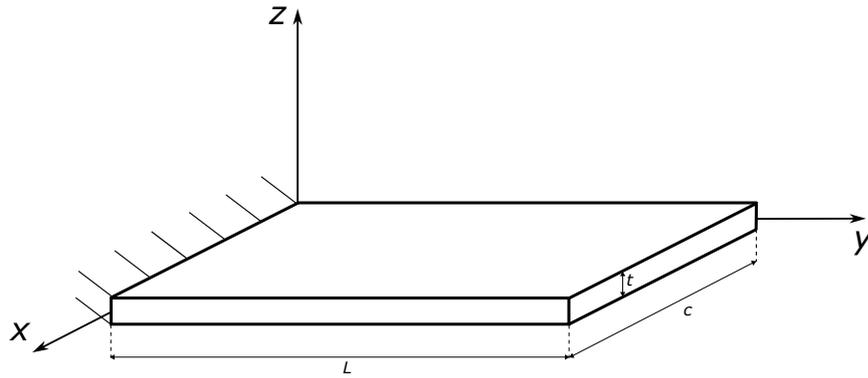


Figura 7.7. Geometria della piastra isotropa

Il materiale è isotropo e ha le caratteristiche riportate in tabella 7.9.

$E [MPa]$	$G [MPa]$	$\rho [kg/m^3]$
73800	27600	2768

Tabella 7.9. Caratteristiche del materiale

Prima di procedere con le analisi di tipo aeroelastico, è necessario determinare le frequenze proprie e i modi propri di vibrare della struttura considerata. Quindi si effettua un'analisi dinamica con il software MUL2 e poi si confrontano i risultati con quelli che si ottengono con Femap.

Come fatto per il caso studio precedente, bisogna definire una serie di file di input di testo. Vengono inseriti il tipo di analisi (in questo caso SOL 103), le caratteristiche geometriche, il tipo di materiale e il vincolo di incastro. Viene poi definito il modello strutturale: si considera una discretizzazione con 20 elementi B4 (beam con 4 nodi). Il numero di nodi totale risulta essere 61, non considerando i nodi in comune tra una elemento e l'altro. Le coordinate di questi nodi vengono inseriti in un altro file di testo insieme al tipo di modello che si utilizza. Nel caso di *Taylor Expansion* (TE) viene introdotto anche l'ordine di espansione; nel caso *Lagrange Expansion* (LE) il tipo e il numero di elementi utilizzati nella sezione della piastra e il numero di nodi per ciascun elemento. Tutte le coordinate si riferiscono al sistema di riferimento xyz che ha origine in uno degli spigoli corti all'incastro e il piano xy passa per la superficie media della piastra.

In output, dall'analisi dinamica con MUL2, si ottengono un file di testo in cui sono riportate le frequenze proprie e un file *.vtk* da aprire in ParaView per visualizzare i modi. In tabella 7.10 sono mostrate le prime 10 frequenze proprie della piastra ottenute utilizzando vari modelli con gradi di libertà differenti, i quali sono mostrati nell'ultima riga.

Frequenze	TE1	TE2	TE3	TE4	1LE9	2LE9	4LE9
1	8.97	9.517	9.185	9.175	9.181	9.180	9.165
2	56.189	59.535	57.401	57.362	57.390	57.388	57.305
3	157.320	73.815	72.998	72.980	73.005	72.989	72.955
4	308.252	167.112	161.280	161.161	161.249	161.242	160.995
5	509.492	230.625	225.993	225.821	226.054	225.850	225.673
6	653.557	327.693	317.840	317.508	317.731	317.714	317.0621
7	760.965	413.118	398.846	398.144	399.016	398.214	397.689
8	1062.628	541.806	528.107	527.376	527.813	527.777	526.322
9	1414.436	657.253	601.848	600.131	602.188	600.304	599.160
10	2268.340	634.007	654.050	653.612	657.248	654.101	653.555
DOF	549	1098	1830	2745	1647	2745	4941

Tabella 7.10. Prime 10 frequenze proprie ottenuti da diversi modelli

Dai risultati ottenuti, è evidente che, nel caso di *Taylor Expansion*, è necessario almeno un modello del terzo ordine (TE3) per prevedere in modo corretto le frequenze e i modi propri. In particolare, nel modello TE del primo ordine (TE1), a nessuna delle prime 10 frequenze corrisponde un modo torsionale, risultando quindi non accettabile per lo studio del flutter. Il TE2, invece, individua correttamente come I modo torsionale il terzo ma ha un accuratezza non elevata. I primi 10 modi di vibrare della piastra sono mostrati in tabella 7.11.

Modo	TE4	Tipo di modo
1	9.175	I flessionale attorno a x
2	57.362	II flessionale attorno a x
3	72.980	I torsionale
4	161.161	III flessionale attorno a x
5	225.821	II torsionale
6	317.508	IV flessionale attorno a x
7	398.144	III torsionale
8	527.376	V flessionale attorno a x
9	600.131	IV torsionale
10	653.612	I flessionale attorno a z

Tabella 7.11. Frequenze [Hz] e modi propri ottenuti dal modello TE4

Per ulteriore conferma dei risultati, si effettua un'analisi dinamica con Femap. Si crea per prima cosa il modello: la piastra viene modellizzata attraverso una superficie con dimensioni $L = 0.305 \text{ m}$ e $c = 0.076 \text{ m}$. Viene poi definito il materiale di tipo isotropo attraverso le caratteristiche riportate in tabella 7.9 e la proprietà, all'interno della quale viene associato il materiale stesso e inserito lo spessore della superficie. infine viene applicata una mesh strutturale 40x10 con elementi di tipo QUAD a 4 nodi. Le

frequenze e i modi propri che si ottengono corrispondono con quelli trovati nelle analisi precedenti e sono riportati in tabella 7.12. Ovviamente più si utilizza una mesh raffinata, più i risultati convergono a quelli dei modelli più accurati.

Modo	Femap	Tipo di modo
1	9.138	I flessionale attorno a x
2	57.104	II flessionale attorno a x
3	71.896	I torsionale
4	160.311	III flessionale attorno a x
5	222.048	II torsionale
6	315.421	IV flessionale attorno a x
7	390.265	III torsionale
8	523.029	V flessionale attorno a x
9	586.1345	IV torsionale
10	652.5498	I flessionale attorno a z

Tabella 7.12. Frequenze [Hz] e modi propri ottenuti con Femap

7.2.2 Analisi di flutter

Una volta effettuata l'analisi dinamica, si possono utilizzare i modelli più accurati per proseguire con un'analisi di flutter. Per far ciò, è necessario compilare, oltre i file di input di testo visti fino ad ora, anche il file relativo agli input aeroelastici denominato NASTRAN_FLUTTER. In particolare, in questo caso, si sceglie una densità di riferimento pari a quella al livello del mare $\rho_{ref} = 1.225 \text{ kg/m}^3$ e si inseriscono i parametri geometrici cioè la corda $c = 0.076 \text{ m}$ e le coordinate geometriche dei punti P_1 e P_2 posizionati agli estremi del bordo di attacco (figura 7.8).

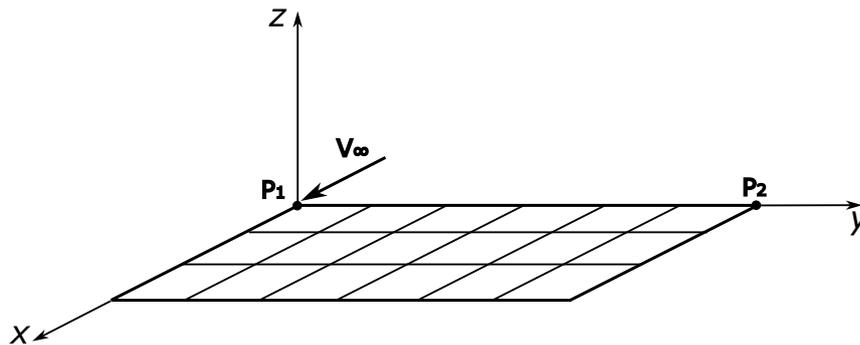


Figura 7.8. Pannellatura aerodinamica

Si considera inoltre una simmetria della piastra nel piano xz . Vengono poi definiti i pannelli aerodinamici con cui discretizzare la superficie lungo la corda e lungo l'apertura:

in figura 7.8 viene mostrato un esempio di mesh aerodinamica 6x3. Infine vengono definiti come variano densità, numero di Mach e velocità e gli step da utilizzare in tali variazioni. Per questo caso specifico non si considerano effetti dovuti alla compressibilità quindi il Mach non viene fatto variare e mantenuto pari a 0; la densità viene anch'essa mantenuta costante e pari al valore di riferimento; mentre viene fatta variare la velocità da un valore minimo di 2 m/s a uno massimo di 120 m/s e si valutano frequenze e smorzamenti dei primi 10 modi relativi a 40 step di velocità nel range scelto.

Altra differenza relativa all'impostazione dei file di input riguarda il file POSTPROCESSING. Vengono inserite le coordinate di 50 punti scelti sulla superficie in cui vengono valutati gli spostamenti del modello strutturale. Questo permette la creazione di una spline tra modello strutturale e modello aerodinamico. Oltre a richiedere come output un file ParaView, viene chiesta la creazione di un file .dat da aprire in Nastran. Il file .f06 che genera Nastran contiene tutte le informazioni utili per valutare frequenze e velocità di flutter: vengono riportati frequenze e smorzamenti ad ogni step di velocità per tutti i modi che erano stati richiesti in input. È possibile quindi, una volta lanciata l'analisi ottenere i grafici dell'andamento di smorzamento e frequenze al variare della velocità. In figura 7.9 ciò è mostrato per un modello TE4.

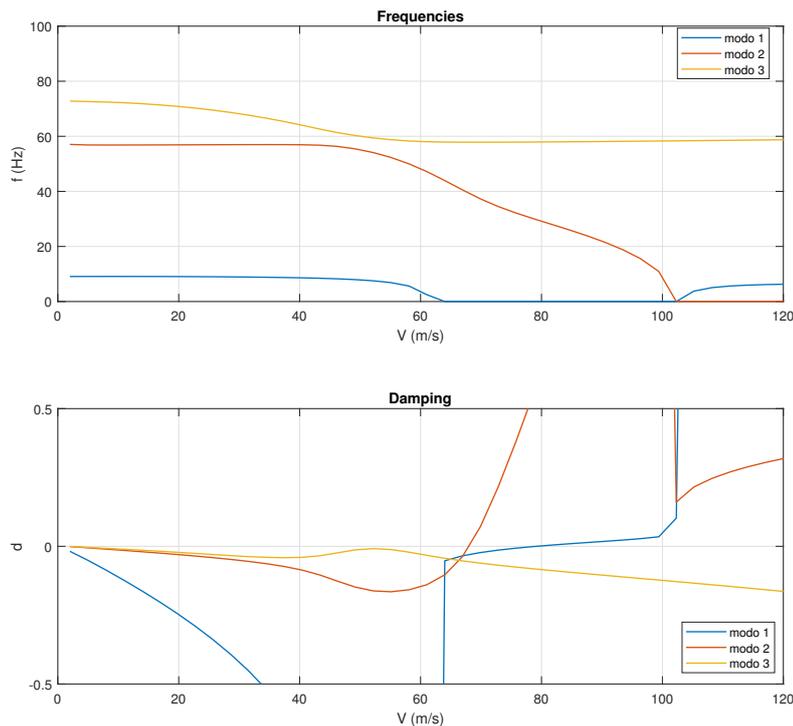


Figura 7.9. Frequenze e smorzamenti al variare della velocità relativi ai primi tre modi ottenuti con un modello TE4 con mesh aerodinamica 30x8

Le frequenze e gli smorzamenti riportati nei grafici corrispondono ai primi 3 modi propri. I modi successivi, infatti, hanno un'importanza relativa in questa analisi di flutter, in quanto tutti gli smorzamenti al variare della velocità risultano negativi. La condizione di flutter infatti si ottiene quando lo smorzamento da negativo diventa positivo e la frequenza corrispondente è positiva. Dal grafico risulta subito evidente che il secondo modo è il primo ad andare in instabilità: lo smorzamento diventa positivo a una velocità inferiore rispetto al primo modo.

Una volta individuate il range di velocità all'interno del quale si ha smorzamento nullo, è possibile ottenere per interpolazione la velocità di flutter. Una volta individuata tale velocità, sempre per interpolazione, si può ottenere la frequenza di flutter. In tabella 7.13 vengono riportate le condizioni di flutter per diversi modelli considerando una pannellatura aerodinamica 30x8. Ovviamente non vengono considerati i modelli di ordine inferiore che non permettono l'individuazione di questo fenomeno di instabilità.

Modello	Velocità [m/s]	Frequenza [Hz]	DOF
TE3	67.952	39.443	1830
TE4	67.943	39.431	2745
2LE9	67.948	39.440	2745
4LE9	67.922	39.412	4941

Tabella 7.13. Condizioni di flutter per diversi modelli con mesh aerodinamica 30x8

È possibile valutare anche l'influenza che ha il considerare mesh aerodinamiche differenti. In tabella 7.14 sono mostrate velocità e frequenza di flutter al variare della pannellatura aerodinamica per un modello 4LE9. Man mano che si infittisce la mesh, si raggiungono risultati sempre più accurati arrivando a una convergenza dei risultati.

Mesh aerodinamica	Velocità [m/s]	Frequenza [Hz]
6x3	63.027	43.978
10x4	65.457	41.682
15x4	66.479	40.925
30x8	67.922	39.412

Tabella 7.14. Condizioni di flutter per diverse mesh aerodinamiche relative al modello 4LE9

Si vuole lanciare un'analisi di flutter anche con Femap. Sullo stesso modello strutturale utilizzato nell'analisi dinamica del paragrafo precedente, si crea un modello aerodinamico. Per prima cosa, si definisce la proprietà aerodinamica e si crea la pannellatura aerodinamica, inserendo i numeri di pannelli utilizzati lungo la corda e lungo l'apertura, le coordinate dei due punti estremi del bordo di attacco e le corde relative a questi due punti. Infine si definisce la spline che ci permette di associare gli spostamenti del modello strutturale e i carichi aerodinamici del modello aerodinamico: si selezionano tutti i pannelli della mesh aerodinamica e i nodi appartenenti al modello strutturale. Prima di lanciare l'analisi di flutter devono definire alcuni parametri. Come fatto nel programma MUL2, si inseriscono la

densità di riferimento $\rho_{ref} = 1.225 \text{ kg/m}^3$ e la lunghezza di riferimento $c = 0.076 \text{ m}$ e si ipotizza una simmetria nel piano xz . Viene poi richiesto di definire la relazione tra frequenze ridotte e numero di Mach. In questo caso non viene considerato l'effetto della compressibilità e quindi il numero di Mach è nullo per ogni valore di frequenza ridotta scelta. In un'ulteriore scheda si sceglie il metodo che si utilizza per risolvere il flutter: viene selezionato il PKNL-method che è una variante del PK-method un po' più efficiente. Infine vengono scelti i parametri da far variare nell'analisi: la densità se si vuole considerare l'effetto della quota, il numero di Mach per valutare l'effetto della comprimibilità e la velocità. Nel caso in esame la densità viene considerata costante e pari a quella a livello del mare mentre il Mach, come già detto, è nullo. La velocità invece viene fatta variare in un range tra 2 m/s e 120 m/s . Lanciata l'analisi, il solutore MSC Nastran genera un file *.f06* in cui sono contenuti i valori di frequenze e smorzamenti dei vari modi di vibrare per ogni valore di velocità, densità e numero di Mach. I grafici in figura 7.10 rappresentano proprio le frequenze e gli smorzamenti dei primi tre modi al variare della velocità nel range considerato. La mesh aerodinamica utilizzata in questo caso è 30×8 .

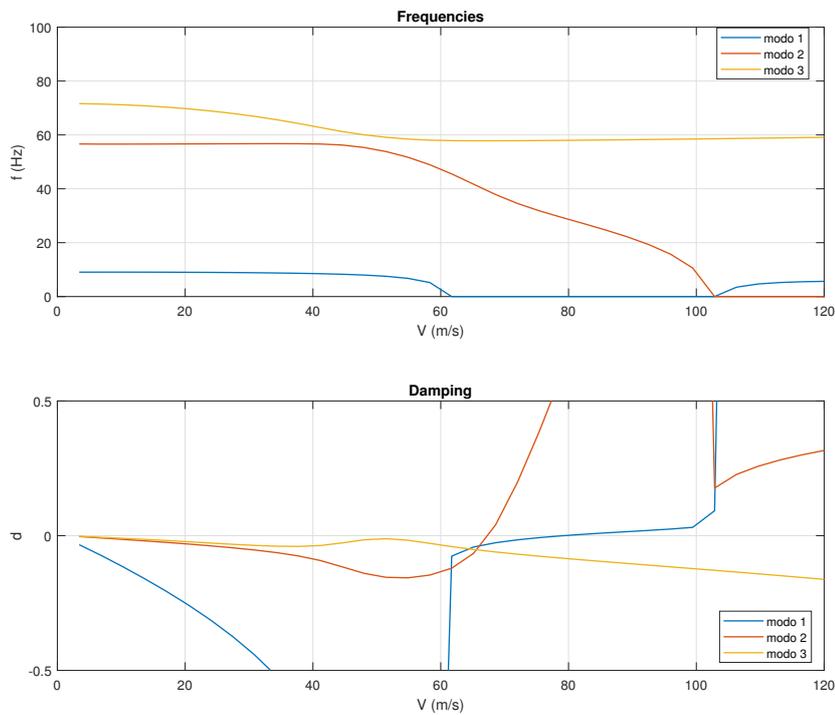


Figura 7.10. Frequenze e smorzamenti al variare della velocità relativi ai primi tre modi ottenuti con Femap utilizzando una mesh aerodinamica 30×8

È subito evidente che il secondo modo è il primo che va in instabilità, come già visto

per il modello TE4. Lo smorzamento, infatti, diventa positivo a velocità più basse rispetto a tutti gli altri modi. Considerando, quindi, i due valori di velocità in corrispondenza dei quali avviene il passaggio di smorzamento da valore negativo a positivo, e i rispettivi smorzamenti, è possibile per interpolazione trovare la velocità di flutter per cui lo smorzamento è nullo. Di conseguenza si può trovare anche la frequenza di flutter. Tali risultati sono mostrati in tabella 7.15 e confrontati con quelli del modello TE4 ottenuti da software MUL2.

Modello	Velocità [m/s]	Frequenza [Hz]
TE4	67.943	39.431
Femap	67.278	39.325

Tabella 7.15. Confronto tra le condizioni di flutter ottenute con Femap e con modello TE4 considerando una mesh aerodinamica 30x8

Si può modificare il modello costruito su Femap andando a variare il numero di pannelli aerodinamici utilizzati mantenendo fissa la mesh strutturale (40x10). L'effetto sulle condizioni di flutter che ne deriva è mostrato in tabella 7.16. Si confrontano con i risultati ottenuti in tabella 7.14 da un modello 4LE9, notando una buona corrispondenza dei valori.

Mesh aerodinamica	Velocità [m/s]	Frequenza [Hz]
6x3	62.723	43.703
10x4	65.161	41.232
15x4	65.894	40.785
30x8	67.277	39.325

Tabella 7.16. Condizioni di flutter per diverse mesh aerodinamiche relative al modello in Femap considerando una mesh strutturale 40x10

Infine è possibile valutare l'effetto che ha la mesh strutturale sulle condizioni di flutter (tabella 7.17), mantenendo fissa la pannellatura aerodinamica a 30x8. Più la mesh è raffinata più i risultati convergono a quelli trovati tramite modelli di Taylor e Lagrange mostrati in tabella 7.13.

Mesh strutturale	Velocità [m/s]	Frequenza [Hz]
20x5	66.475	38.942
40x10	67.277	39.325
60x15	67.445	39.393
80x20	67.554	39.375

Tabella 7.17. Condizioni di flutter per diverse mesh strutturali relative al modello in Femap considerando una pannellatura aerodinamica 30x8

Dalle analisi di flutter è possibile anche ricavare informazioni riguardo alla divergenza. È un fenomeno di instabilità statica che si verifica quando lo smorzamento diventa positivo e la frequenza corrispondente è nulla. In tabella 7.18 è mostrata la condizione di divergenza, che si verifica per il primo modo, ottenuta da diversi modelli e dal modello costruito in Femap. La velocità di divergenza risulta maggiore di quella per cui si verifica il fenomeno di flutter. In questo caso quindi è la velocità di flutter a dettare il limite: il velivolo, con un'ala di questo tipo, potrà raggiungere una velocità massima, durante la sua vita operativa, che è al di sotto di quella di flutter.

Modello	Velocità [m/s]
TE3	79.188
TE4	79.161
2LE9	79.180
4LE9	79.154
Femap	79.220

Tabella 7.18. Divergenza per diversi modelli e con Femap con mesh aerodinamica 30x8

Infine in tabella 7.19 è mostrato l'effetto delle diverse mesh aerodinamiche sui valori delle velocità di divergenza per due casi, modello 4LE9 e modello in Femap.

Mesh Aerodinamica	Velocità [m/s] 4LE9	Velocità [m/s] Femap
6x3	78.224	77.688
10x4	78.921	78.537
30x8	79.154	79.220

Tabella 7.19. Velocità di divergenza per diverse mesh aerodinamiche ottenute dal modello 4LE9 e dal modello in Femap

Un'ulteriore analisi di flutter sulla stessa piastra isotropa tramite il software MUL2 è stata svolta per valutare se cambiano le condizioni di instabilità aeroelastiche nel caso in cui, invece di considerare una singola superficie aerodinamica, se ne considerano due. Nel file POSTPROCESSING vengono inseriti 100 punti in cui vengono valutati gli spostamenti del modello strutturale: i primi 50 appartenenti alla prima superficie e i secondi 50 alla seconda. La condizione di flutter che si ottiene è mostrata in tabella 7.20.

Modello	Velocità [m/s]	Frequenza [Hz]
TE4	67.957	39.493
4LE9	67.936	39.473

Tabella 7.20. Condizioni di flutter per diversi modelli strutturali con mesh aerodinamica 30x8 e divisione in due superfici aerodinamiche

La velocità di divergenza si ricava in modo analogo al caso precedente ed è riportata in tabella 7.21 per i due modelli TE4 e 4LE9.

Modello	Velocità [m/s]
TE4	79.424
4LE9	79.411

Tabella 7.21. Divergenza per diversi modelli strutturali con mesh aerodinamica 30x8 e divisione in due superfici aerodinamiche

Anche in questo caso, i risultati ottenuti sono coerenti ai precedenti.

7.2.3 Analisi aeroelastica statica

L'ultima analisi effettuata con il software MUL2 per questo caso di piastra isotropa è la risposta aeroelastica statica. Rispetto all'analisi di flutter, è necessario introdurre un angolo di attacco: nel caso in esame si considera un'incidenza di 1° . Nel file *.f06* generato da MSC Nastran dal file *.dat* ottenuto da MUL2, sono contenuti gli spostamenti nelle tre direzioni x , y , z per i punti scelti nel file di input di POSTPROCESSING. Si vogliono valutare, fissando la velocità, gli spostamenti verticali di due punti sul bordo di attacco e sul bordo di fuga e le conseguenti rotazioni al tip. Tali punti, mostrati in figura 7.11, hanno le seguenti coordinate:

- punto A $\Rightarrow x = 0, y = 0.305, z = 0$
- punto B $\Rightarrow x = 0.076, y = 0.305, z = 0$

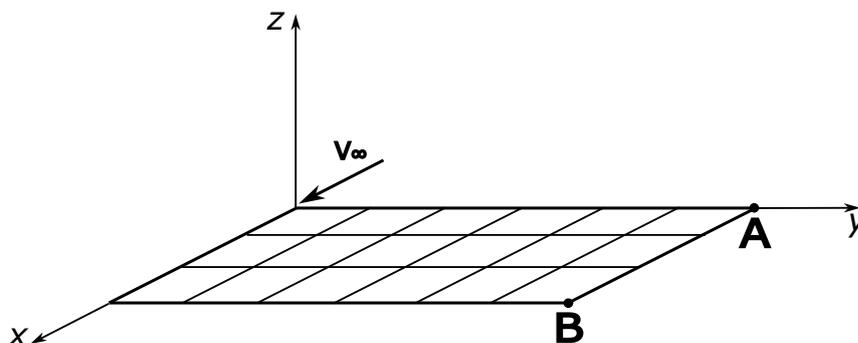


Figura 7.11. Punti A e B in cui si valutano gli spostamenti in direzione z

Nelle tabelle 7.22 e 7.23 sono mostrati gli spostamenti e le rotazioni in questi due punti per diverse velocità per i modelli TE4 e 1LE9. La rotazione in particolare si ottiene come arcotangente del rapporto tra la differenza dei due spostamenti e la distanza dei due punti considerati, che in questo caso coincide con la corda. Man mano che la velocità aumenta,

anche gli spostamenti e la rotazione aumentano. Si raggiunge un valore di velocità, in corrispondenza della quale si hanno valori molto elevati di spostamenti e rotazioni, che coincide con la velocità di divergenza. Oltre tale velocità i risultati diventano negativi e non hanno un senso fisico. Dai risultati ottenuti dai due modelli, si presuppone che la velocità di divergenza sia tra $V = 78 \text{ m/s}$ e $V = 80 \text{ m/s}$. Guardando la condizione di divergenza ottenuta nel paragrafo precedente (tabella 7.18), il risultato è confermato.

Velocità [m/s]	u_{z_A} [m]	u_{z_B} [m]	Rotazione [°]
10	7.250E-04	6.953E-04	0.023
30	7.698E-03	7.388E-03	0.238
50	3.196E-02	3.071E-02	0.956
70	1.866E-01	1.797E-01	5.266
78	1.831E+00	1.765E+00	41.301
80	-2.547E+00	-2.457E+00	-50.493
90	-2.560E-01	-2.473E-01	-6.651

Tabella 7.22. Spostamenti nel punto A e B e rotazioni a diverse velocità per $AoA = 1^\circ$ e modello TE4

Velocità [m/s]	u_{z_A} [m]	u_{z_B} [m]	Rotazione [°]
10	7.241E-04	6.945E-04	0.023
30	7.689E-03	7.379E-03	0.238
50	3.191E-02	3.067E-02	0.955
70	1.859E-01	1.791E-01	5.249
78	1.778E+00	1.715E+00	40.477
80	-2.655E+00	-2.561E+00	-51.645
90	-2.586E-01	-2.498E-01	-6.702

Tabella 7.23. Spostamenti nel punto A e B e rotazioni a diverse velocità per $AoA = 1^\circ$ e modello 1LE9

Per l'analisi aeroelastica statica in Femap, si utilizza lo stesso modello usato per lo studio del flutter. Si utilizza una mesh strutturale 40x10 e la pannellatura aerodinamica utilizzata è 30x8. Una volta scelto il solutore MSC Nastran e il tipo di analisi *Static Aeroelasticity*, si definiscono all'interno delle schede di analisi alcuni parametri. Per prima cosa vengono definiti la corda di riferimento $c = 0.076 \text{ m}$, l'apertura alare che è il doppio della lunghezza della piastra $b = 2L = 0.61 \text{ m}$ e l'area della superficie della piastra $A = b \cdot L = 0.02318 \text{ m}^2$. Si specifica poi la presenza della simmetria nel piano xz . Si considera il numero di Mach nullo e si definisce la pressione dinamica in base alla velocità per cui si vogliono valutare gli spostamenti in direzione z della piastra. La densità viene considerata fissa e pari a quella a livello del mare. Infine è necessario introdurre il valore dell'angolo di incidenza: si sceglie un valore fisso e pari a 1° . Si effettuano quindi diverse analisi variando la velocità e quindi il valore della pressione dinamica. Nel file *.f06* che si

ottiene, è possibile visualizzare gli spostamenti di tutti i nodi della mesh strutturale e in particolare dei due nodi che corrispondono ai punti considerati nei modelli TE4 e 1LE9. In tabella 7.24 sono mostrati i valori ottenuti e le conseguenti rotazioni, che confermano i risultati ottenuti con MUL2.

Velocità [m/s]	u_{z_A} [m]	u_{z_B} [m]	Rotazione [°]
10	7.441E-04	7.134E-04	0.023
30	7.910E-03	7.590E-03	0.242
50	3.318E-02	3.189E-02	0.971
70	1.978E-01	1.907E-01	5.385
78	2.067E+00	1.994E+00	43.512
80	-2.529E+00	-2.442E+00	-48.996
90	-2.749E-01	-2.659E-01	-6.744

Tabella 7.24. Spostamenti nel punto A e B e rotazioni a diverse velocità per $AoA = 1^\circ$ e modello in Femap

La tabella 7.12 mostra graficamente l'andamento della rotazione θ per le velocità inferiori alla velocità di divergenza. Man mano che la velocità cresce, la torsione dell'ala aumenta fino a raggiungere un valore non più sopportabile che corrisponde alla condizione di divergenza.

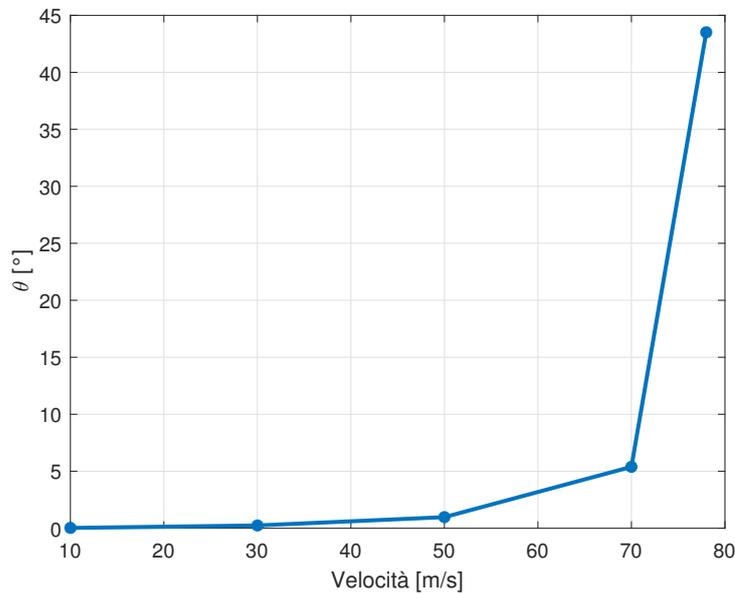


Figura 7.12. Rotazioni del tip al variare della velocità (modello in Femap)

7.3 Analisi aeroelastica di un velivolo

In questa sezione si svolgono analisi aeroelastiche su configurazioni più complesse. Si considera un modello semplice di velivolo intero che ha dimensioni geometriche pari al velivolo considerato in [Patil et al. \[2001\]](#) e mostrate in tabella 7.25.

Parametro	Valore
Semiapertura dell'ala	16 m
Corda dell'ala	1 m
Lunghezza tailboom	10 m
Semiapertura della coda	2.5 m
Corda della coda	0.5 m

Tabella 7.25. Dimensioni geometriche

La figura 7.13 mostra lo schema del velivolo considerato.

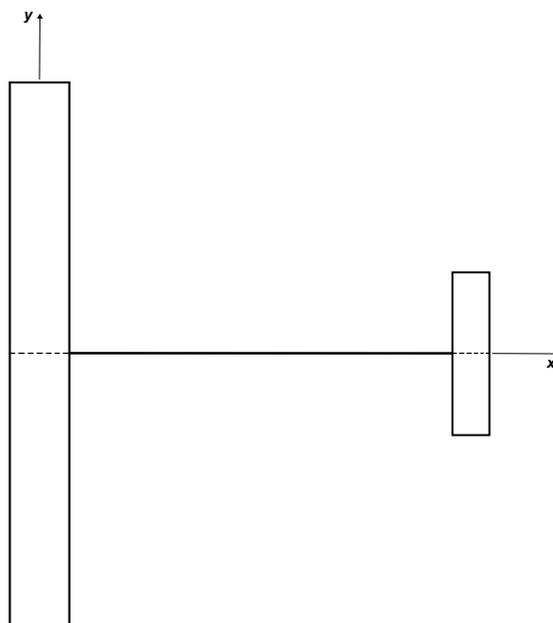


Figura 7.13. Schema del velivolo

Il materiale ipotizzato per questo velivolo ha le caratteristiche riportate in tabella 7.26.

E [GPa]	ν	ρ [kg/m ³]
180	0.3	1800

Tabella 7.26. Caratteristiche del materiale

Viene prima considerata la sola ala per studiare il comportamento dinamico e la condizione di flutter. Vengono poi ripetute le analisi considerando la configurazione di velivolo intero, con e senza vincoli.

7.3.1 Analisi dinamica dell'ala

Una prima analisi dinamica viene svolta considerando soltanto l'ala del velivolo. L'ala presenta una sezione in parete sottile come mostrato in figura 7.14.

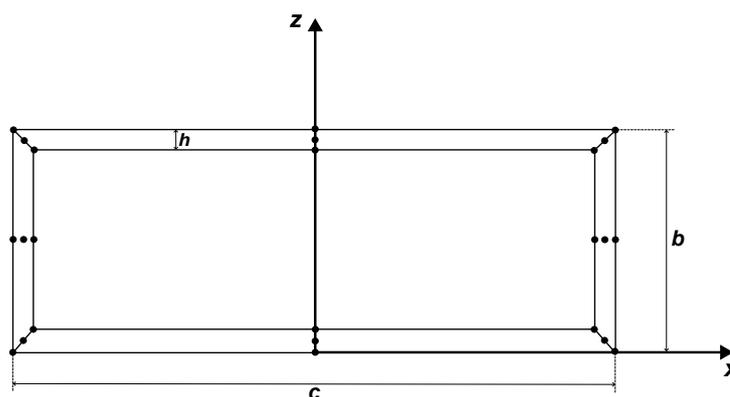


Figura 7.14. Sezione dell'ala

Le dimensioni della sezione sono riportate in tabella 7.27.

Parametro	Valore
Altezza b	$0.1 m$
Corda c	$1 m$
Spessore h	$0.001 m$

Tabella 7.27. Dimensioni geometriche della sezione

In una prima analisi dinamica viene considerata la semiala incastrata ad un estremo. Il modello strutturale è costituito da 7 elementi B3 cioè beam a 3 nodi. Si utilizza l'espansione polinomiale di Lagrange sulla sezione della trave. In particolare, come mostrato in figura 7.14, si utilizzano 4 elementi Q9 a 9 nodi per definire la sezione dell'ala, ad esclusione del primo e quarto elemento beam (partendo dalla radice) che presentano una centina modellizzata con un ulteriore elemento centrale. Ciò permette di irrigidire la struttura. Svolgendo l'analisi dinamica si ottengono le prime 6 frequenze proprie riportate in tabella 7.28.

Modo	Frequenze [Hz]	Tipo di modo
1	0.719	I flessionale attorno a x
2	3.375	II flessionale attorno a x
3	4.678	I flessionale attorno a z
4	11.298	III flessionale attorno a x
5	13.559	I torsionale
6	22.658	IV flessionale attorno a x

Tabella 7.28. Frequenze relative ai primi 6 modi propri dell'ala incastrata

I primi 6 modi di vibrare, mostrati in figura 7.15, sono visualizzati tramite ParaView.

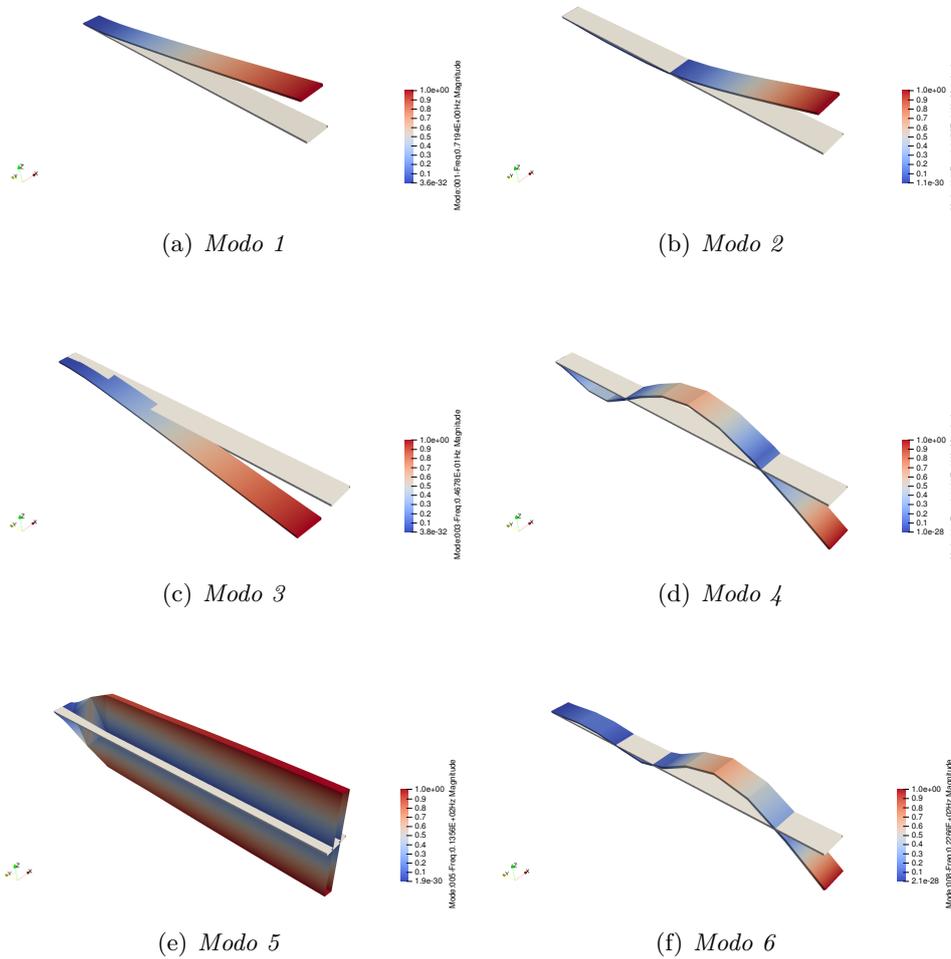


Figura 7.15. Primi 6 modi di vibrare dell'ala incastrata

Un'altra analisi dinamica può essere fatta considerando l'ala intera non vincolata. Le due semiali sono simmetriche e vengono modellizzate come nel caso precedente. Le frequenze che si ottengono per questo caso sono riportate in tabella 7.29. Essendo l'ala non vincolata, le prime 6 frequenze proprie sono molto piccole e corrispondono ai modi di corpo rigido.

Modo	Frequenze [Hz]	Tipo di modo
1	0.499E-02	/
2	0.848E-02	/
3	0.108E-01	/
4	0.157E-01	/
5	0.166E-01	/
6	0.170E-01	/
7	1.537	I flessionale attorno a x
8	2.938	II flessionale attorno a x
9	6.198	III flessionale attorno a x
10	9.375	IV flessionale attorno a x
11	10.013	I flessionale attorno a z
12	13.322	I torsionale
13	19.390	II flessionale attorno a z
14	19.842	V flessionale attorno a x

Tabella 7.29. Frequenze relative ai primi 14 modi propri dell'ala intera non vincolata

Nelle figure 7.16 e 7.17 sono mostrati i primi modi dell'ala ad esclusione dei modi di corpo rigido.

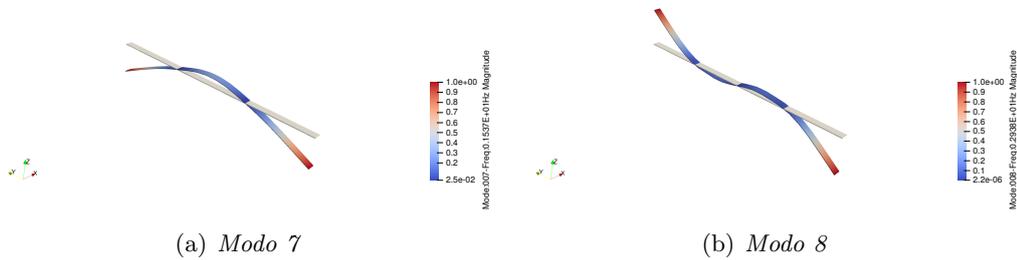


Figura 7.16. Modi di vibrare dell'ala intera non vincolata

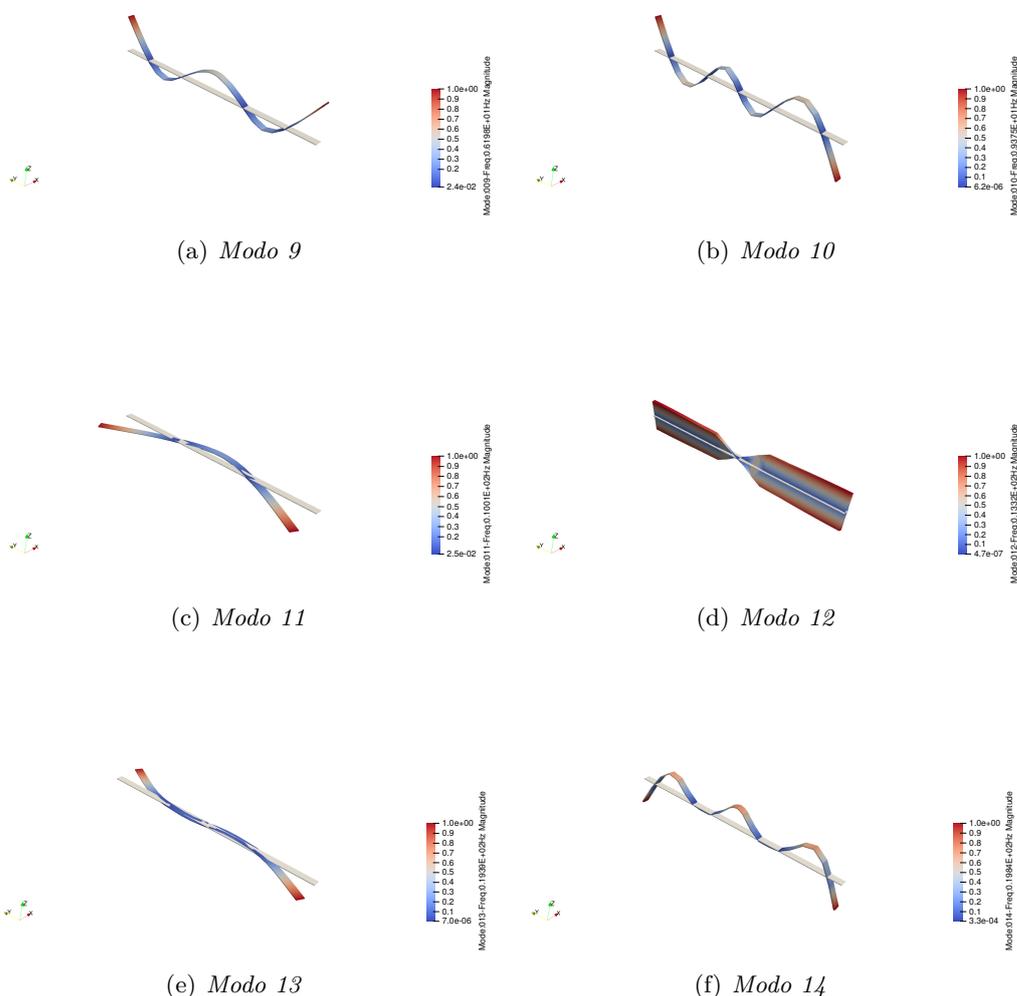


Figura 7.17. Modi di vibrare dell'ala intera non vincolata

7.3.2 Analisi di flutter dell'ala

Per l'analisi di flutter sull'ala incastrata, si prende lo stesso modello strutturale dell'analisi dinamica e si associa un modello aerodinamico. Nei file di input aerodinamici si indicano come lunghezza di riferimento la corda $c = 1 \text{ m}$ e come densità di riferimento $\rho = 1.225 \text{ kg/m}^3$. Vengono inseriti la simmetria nel piano xz e il range di velocità in cui valutare la condizione di flutter. Inoltre devono essere specificate le coordinate dei due punti estremi sul bordo di attacco. La mesh aerodinamica adottata è costituita da 30x8 pannelli.

Per permettere l'accoppiamento tra modello strutturale e aerodinamico si indicano le coordinate di 50 punti sulla superficie nei quali viene valutato lo spostamento.

Dall'analisi di flutter si ottengono per ogni modo le frequenze e gli smorzamenti al variare della velocità. In figura 7.18 viene mostrato l'andamento delle frequenze e degli smorzamenti per i primi 5 modi in un range di velocità tra 1 m/s e 300 m/s.

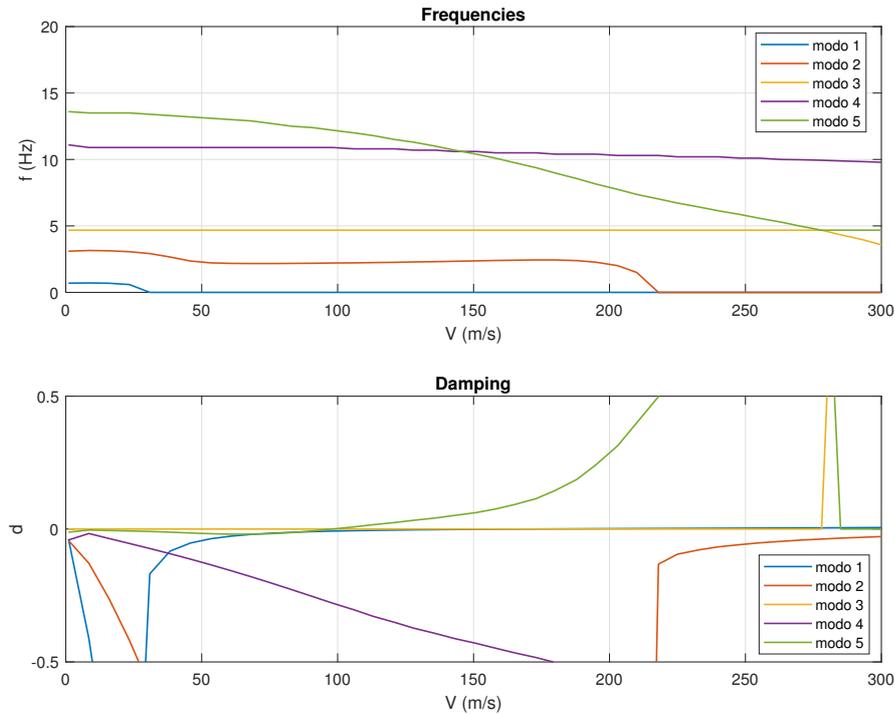


Figura 7.18. Frequenze e smorzamenti relativi ai primi 5 modi dell'ala incastrata al variare della velocità

Il quinto modo è il primo ad andare in instabilità e la condizione di flutter si verifica alla velocità e alla frequenza mostrate in tabella 7.30.

Velocità [m/s]	Frequenza [Hz]
98.018	12.173

Tabella 7.30. Condizione di flutter nel caso di ala incastrata

7.3.3 Analisi dinamica del velivolo intero

In questa sezione non viene più considerata la sola ala, ma una configurazione semplice di velivolo intero. Il piano di coda è una struttura in parete sottile simile a quella dell'ala

mostrata in figura 7.14 ma a differenza di essa non presenta nessuna centina lungo l'apertura. La sezione della coda ha un'altezza $b_t = 0.04 \text{ m}$, uno spessore $h_t = 0.001 \text{ m}$ e una corda $c_t = 0.5 \text{ m}$.

La fusoliera è invece costituita da una trave di 10 m che collega ala e piano di coda e la sezione ha una larghezza di 0.05 m e uno spessore di 0.1 m . Il modello strutturale della coda è costituito da 7 elementi B3 mentre la fusoliera da 11 elementi B3. Il modello dell'ala viene mantenuto lo stesso dell'analisi dinamica svolta precedentemente. Per tutte e tre le componenti del velivolo si utilizza un'espansione polinomiale di Lagrange e gli elementi sulla sezione sono tutti Q9. Per permettere un collegamento efficace tra le varie parti è necessario far coincidere i nodi in comune sulle sezioni tra ala e fusoliera e tra coda e fusoliera.

La prima analisi dinamica sul velivolo viene svolta non imponendo vincoli alla struttura. Le prime 18 frequenze che ne derivano sono riportate in tabella 7.31.

Modo	Frequenze [Hz]
1	0.194E-02
2	0.807E-02
3	0.106E-01
4	0.119E-01
5	0.166E-01
6	0.166E-01
7	0.859
8	1.480
9	2.934
10	4.967
11	5.144
12	5.295
13	6.111
14	8.984
15	9.410
16	11.821
17	12.441
18	13.383

Tabella 7.31. Frequenze relative ai primi 18 modi propri

Le prime 6 frequenze molto piccole sono relative ai modi di corpo rigido mentre i modi successivi sono mostrati nelle seguenti immagini.

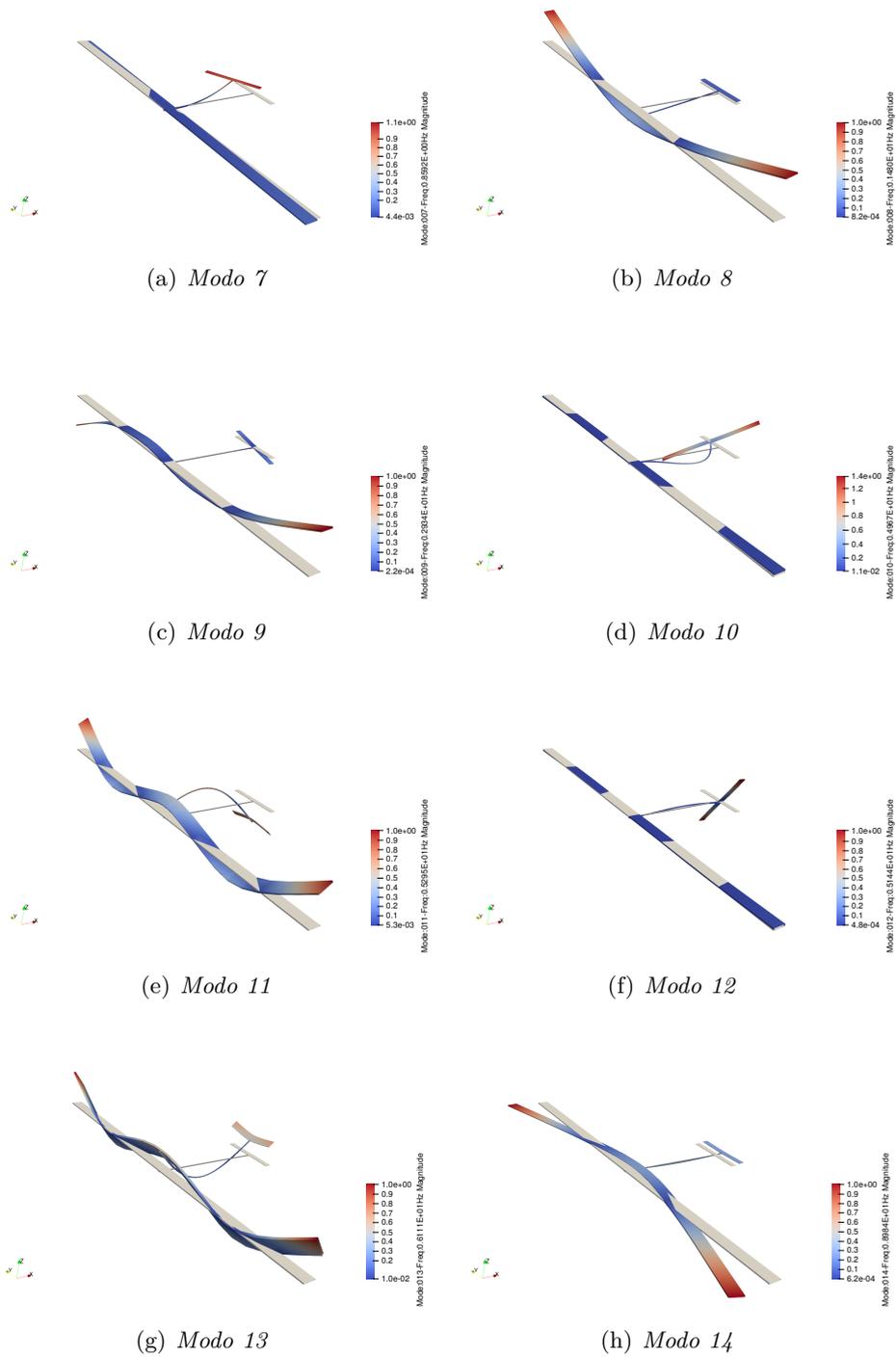


Figura 7.19. Modi di vibrare del velivolo non vincolato

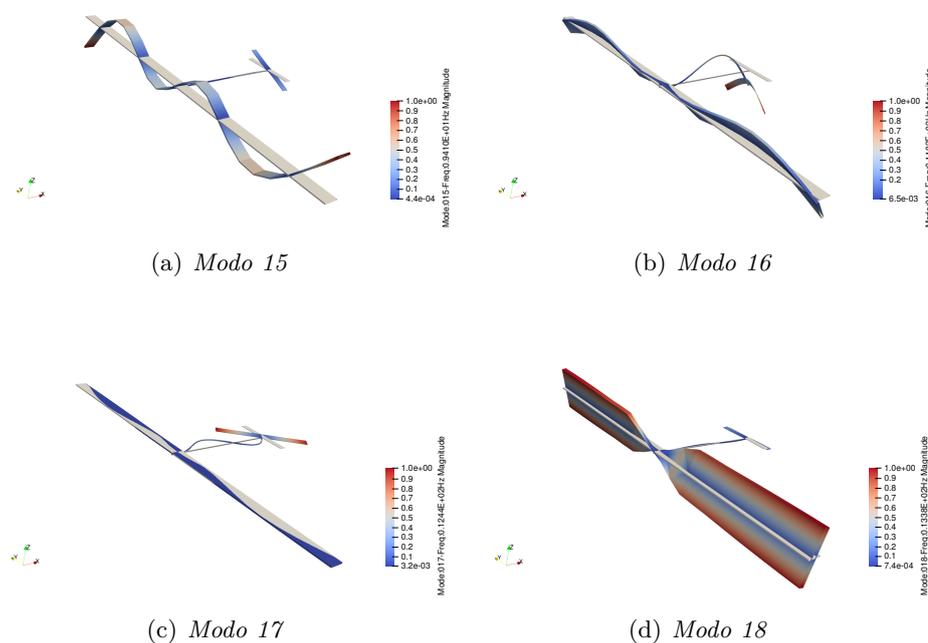


Figura 7.20. Modi di vibrare del velivolo non vincolato

In tabella 7.32 sono confrontate le frequenze ottenute dall'analisi dinamica della sola ala non vincolata e quelle relative al velivolo intero non vincolato.

Modo	Frequenze ala [Hz]	Frequenze velivolo [Hz]
I flessionale attorno a x	1.537	1.502
II flessionale attorno a x	2.938	2.934
III flessionale attorno a x	6.198	5.297
IV flessionale attorno a x	9.375	9.410
I flessionale attorno a z	10.013	8.984
I torsionale	13.322	13.383

Tabella 7.32. Confronto delle frequenze relative agli stessi modi dell'ala e del velivolo

Una seconda analisi dinamica sul velivolo viene svolta, introducendo le condizioni di vincolo. Viene bloccato in tutte le direzioni il piano $y = 0$ che passa lungo la fusoliera e al centro dell'ala e del piano di coda. Il resto del modello viene mantenuto uguale al precedente. I risultati in termini di frequenze sono riportati in tabella 7.33.

Modo	Frequenze [Hz]
1	0.719
2	0.719
3	3.375
4	3.375
5	4.680
6	4.680
7	11.300
8	11.300
9	13.561
10	13.561
11	17.046
12	17.020
13	22.174
14	22.174

Tabella 7.33. Frequenze dei primi modi del velivolo con piano $y=0$ vincolato

Nelle immagini di seguito sono mostrati i primi 14 modi di vibrare della struttura.

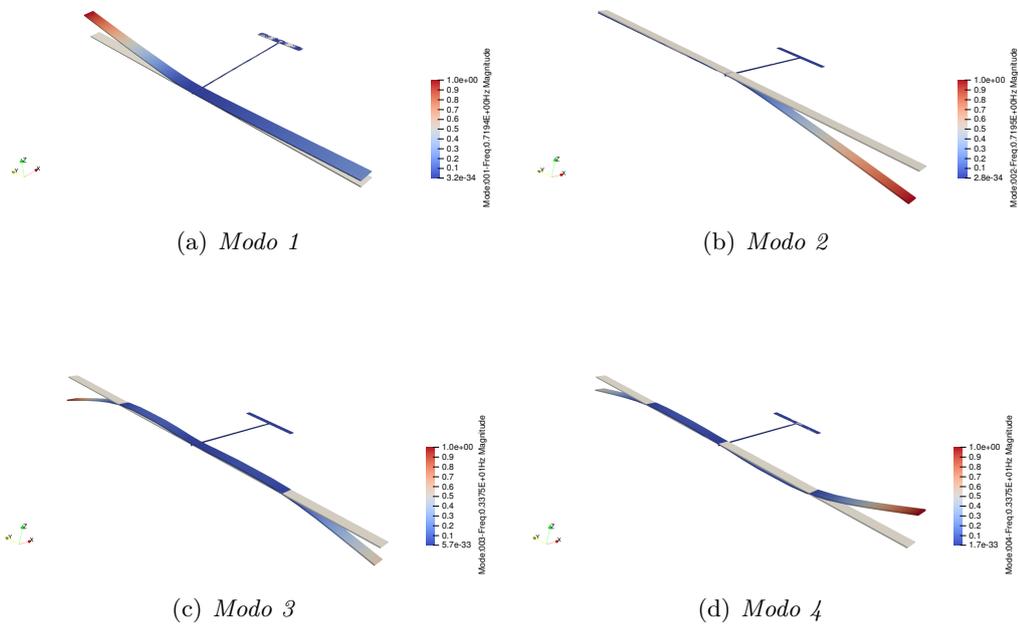


Figura 7.21. Modi di vibrare del velivolo con piano $y=0$ vincolato

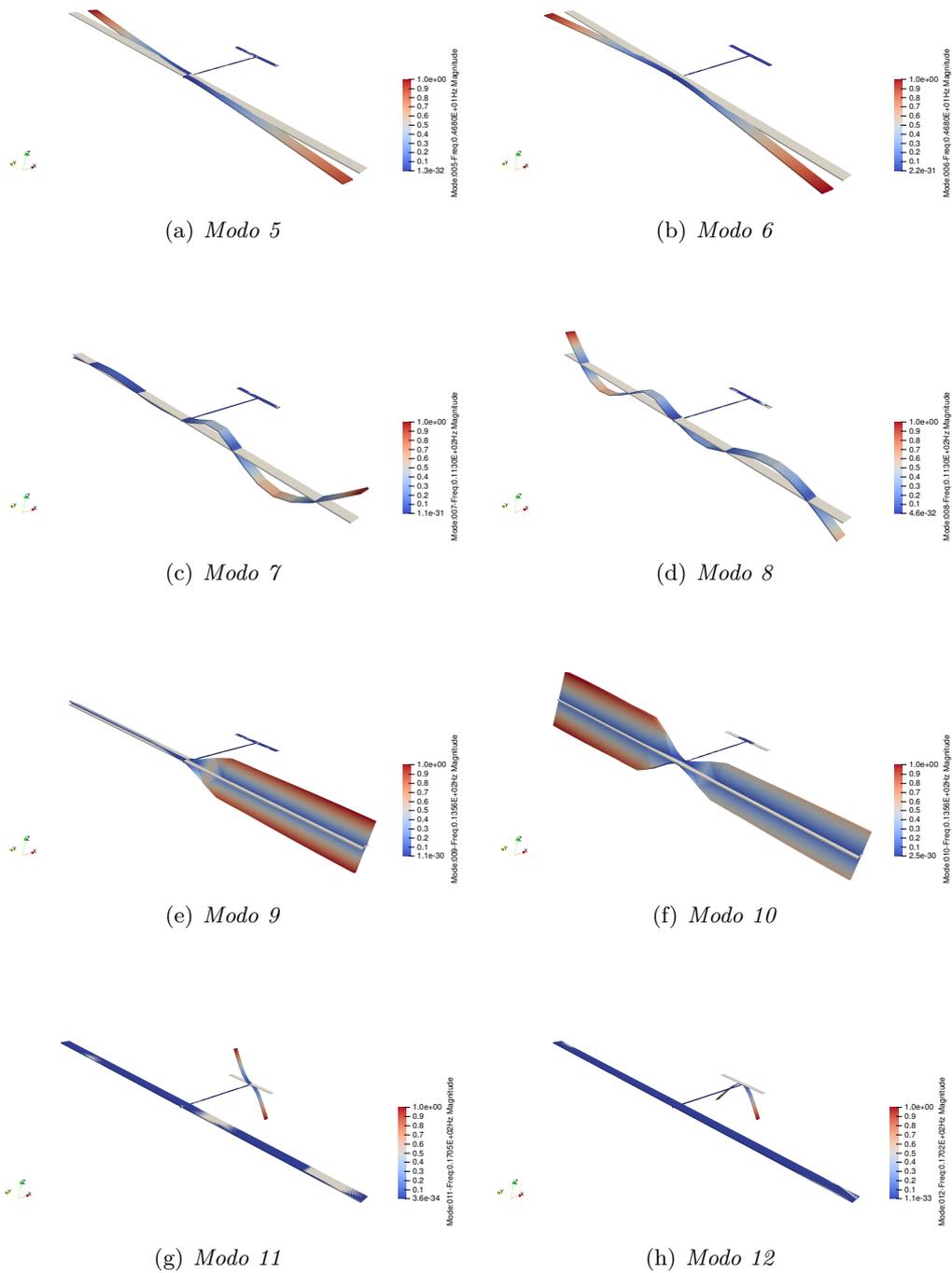


Figura 7.22. Modi di vibrare del velivolo con piano $y=0$ vincolato

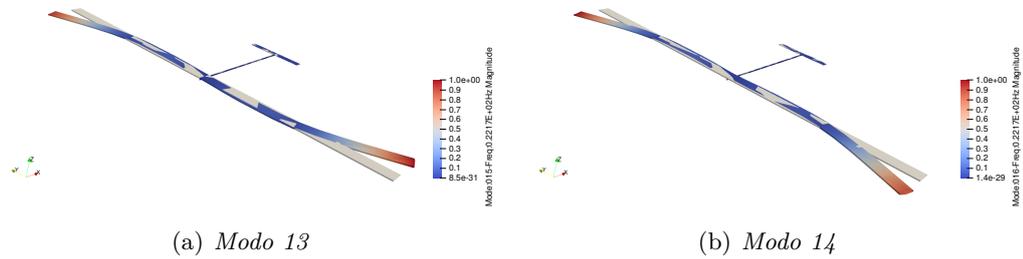


Figura 7.23. Modi di vibrare del velivolo con piano $y=0$ vincolato

Le frequenze che si ottengono dal velivolo vincolato e quelle della sola ala incastrata vengono confrontate in tabella 7.34.

Modo	Frequenze ala [Hz]	Frequenze velivolo [Hz]
I flessionale attorno a x	0.719	0.719
II flessionale attorno a x	3.375	3.375
I flessionale attorno a z	4.678	4.680
III flessionale attorno a x	11.298	11.300
I torsionale	13.559	13.561

Tabella 7.34. Confronto delle frequenze relative agli stessi modi dell'ala e del velivolo vincolati

Infine si svolge un'analisi dinamica sullo stesso velivolo considerato precedentemente ma cambiando le condizioni al contorno: la direzione z viene lasciata libera. I primi modi di vibrare visualizzati tramite ParaView sono mostrati nelle seguenti figure (7.24 e 7.25).

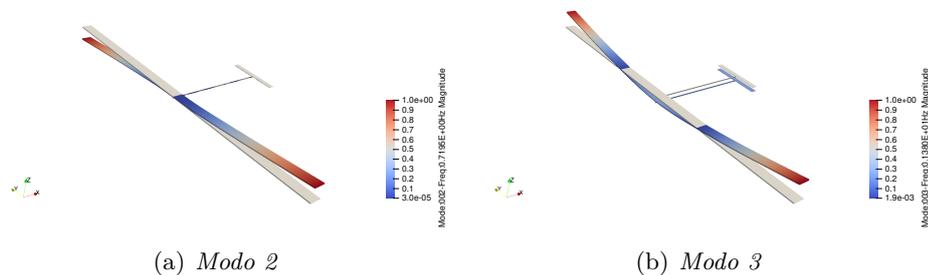


Figura 7.24. Modi di vibrare del velivolo con piano $y=0$ vincolato e z libera

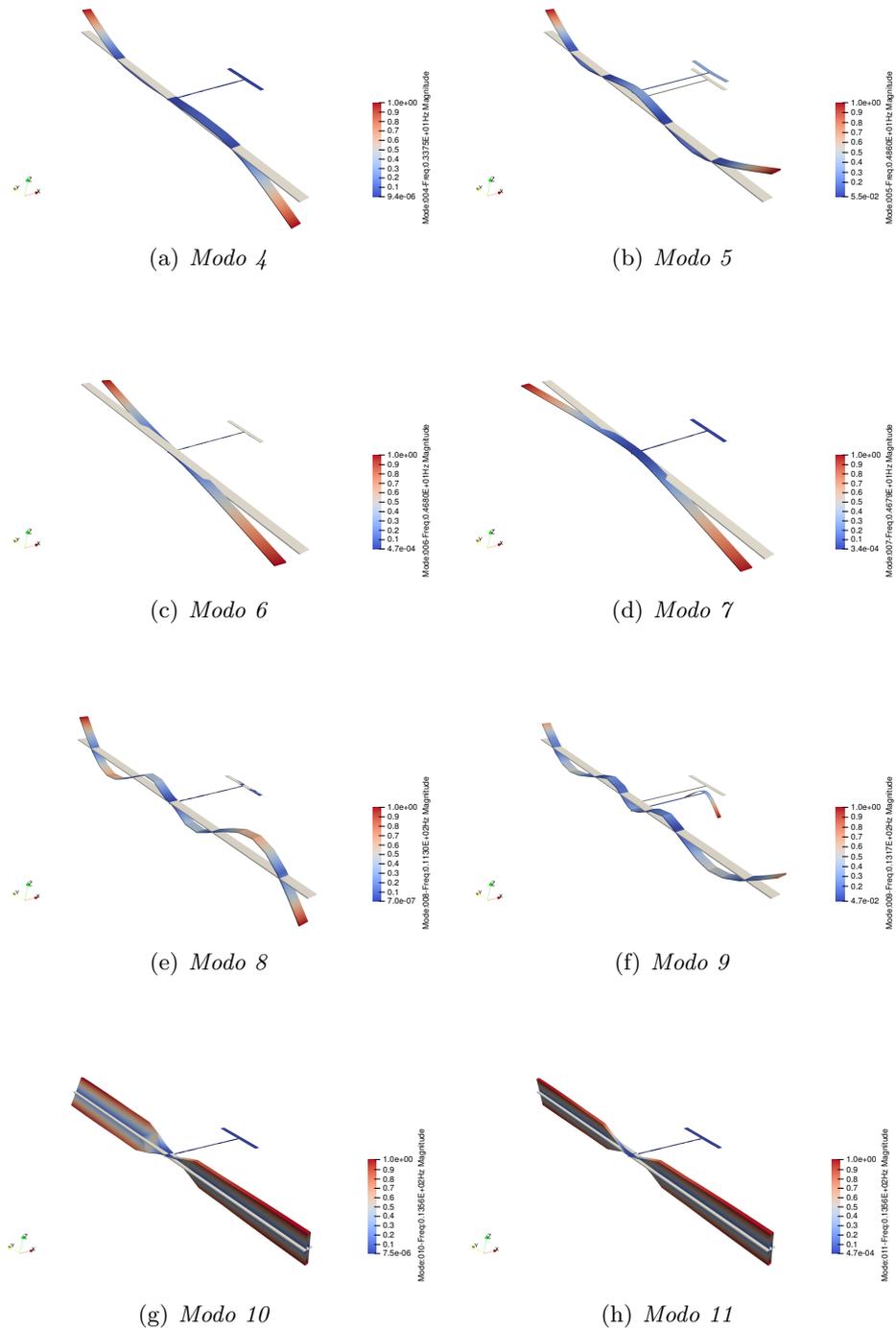


Figura 7.25. Modi di vibrare del velivolo con piano $y=0$ vincolato e z libera

Le frequenze proprie ottenute per questo caso sono riportate in tabella 7.35.

Modo	Frequenze [Hz]
1	0.112E-01
2	0.7195
3	1.3800
4	3.375
5	4.860
6	4.680
7	4.679
8	11.300
9	13.167
10	13.561
11	13.556
12	17.046

Tabella 7.35. Frequenze dei primi modi del velivolo con piano $y=0$ vincolato e z libera

7.3.4 Analisi di flutter del velivolo intero

La prima analisi di flutter viene svolta per il velivolo intero con il piano $y = 0$ vincolato, il cui modello strutturale è stato introdotto nell'analisi dinamica.

Nei file di input di MUL2 è possibile inserire i parametri aerodinamici riferiti a una sola superficie aerodinamica. Avendo oltre all'ala anche la coda, nell'analisi di flutter del velivolo, è necessario modificare direttamente il file *.dat* di input di Nastran. Vengono create quindi le due superfici aerodinamiche inserendo le coordinate dei due punti estremi del bordo di attacco dell'ala e della coda e la loro corda. Vengono poi indicati i pannelli con cui discretizzare le due superfici: l'ala ha una mesh 60x8 mentre la coda 30x4. Inoltre si creano due set di punti utilizzati per la spline: il primo costituito da 100 punti dell'ala, il secondo da 50 della coda.

Una volta effettuato le modifiche, Nastran genera da esso un file che contiene le frequenze e gli smorzamenti per i modi richiesti al variare della velocità. In questo modo è possibile valutare la condizione di flutter. In figura 7.26 è mostrato il risultato dell'analisi di flutter per questo caso.

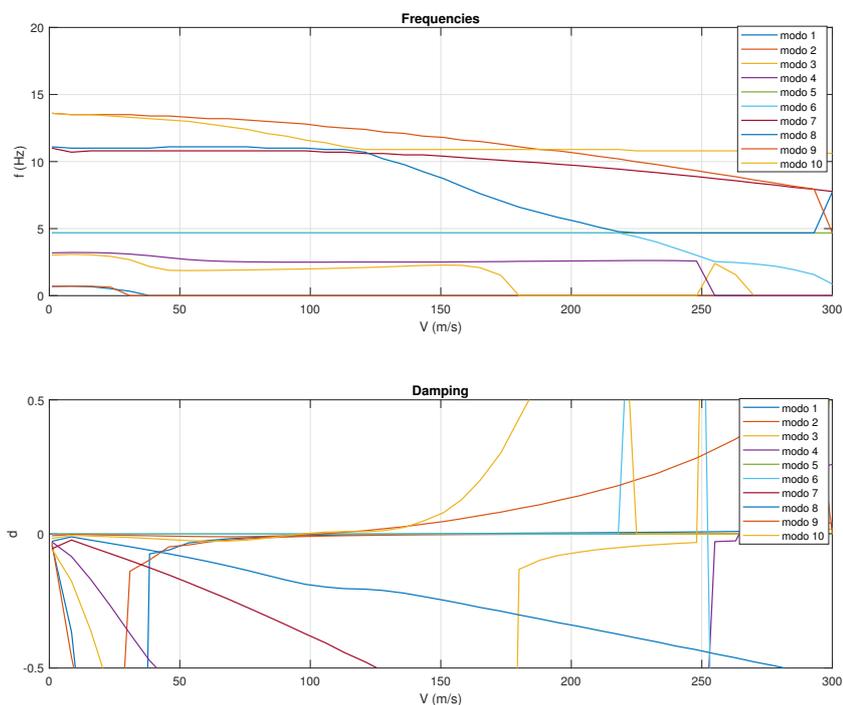


Figura 7.26. Frequenze e smorzamenti relativi ai primi 10 modi del velivolo vincolato al variare della velocità

Il flutter si verifica per il decimo modo alla velocità e alla frequenza riportate in tabella 7.36. Confrontando i risultati ottenuti dall'analisi di flutter del velivolo intero e quelli dell'ala incastrata è possibile notare una corrispondenza. Infatti, il modo che va prima in instabilità per entrambi i casi è il primo torsionale e la velocità e la frequenza per cui si verifica il flutter sono comparabili.

Velocità [m/s]	Frequenza [Hz]
96.946	11.6762

Tabella 7.36. Condizione di flutter per il velivolo vincolato nel piano $y = 0$

Un'ulteriore analisi di flutter viene svolta sullo stesso velivolo variando solamente le condizioni al contorno: viene imposto il vincolo sul piano $y = 0$ lasciando però libera la direzione z . Gli andamenti di frequenze e smorzamenti per i primi 12 modi (escluso il primo di corpo rigido) sono mostrati in figura 7.27.

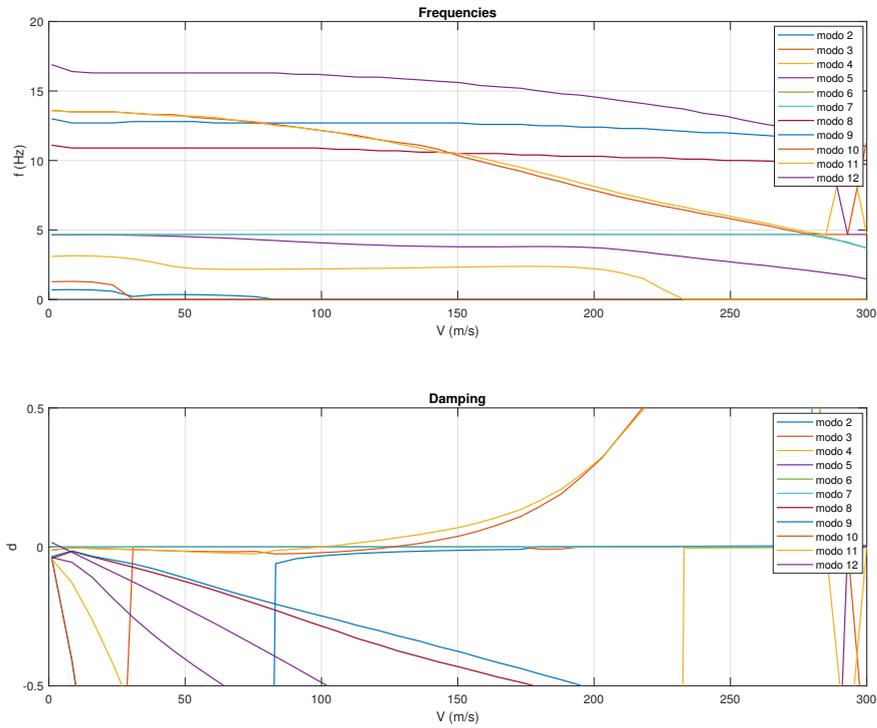


Figura 7.27. Frequenze e smorzamenti relativi ai primi modi del velivolo vincolato con z libera al variare della velocità

Il primo modo ad andare in instabilità è il primo torsionale (modo 11) e la condizione per cui si verifica è mostrata in tabella 7.37. Esiste, anche per questo caso, una buona corrispondenza con i risultati ottenuti dalla sola ala incastrata.

Velocità [m/s]	Frequenza [Hz]
99.830	12.129

Tabella 7.37. Condizione di flutter per il velivolo vincolato nel piano $y = 0$ lasciando la z libera

Si considera infine il velivolo non vincolato. La prima analisi di flutter viene svolta sul modello di velivolo introdotto nelle analisi dinamiche basato solamente sull'utilizzo di espansioni di Lagrange. In figura 7.28 sono mostrati, per i primi 16 modi, esclusi quelli di corpo rigido, gli andamenti di frequenze e smorzamenti al variare della velocità nel range considerato.

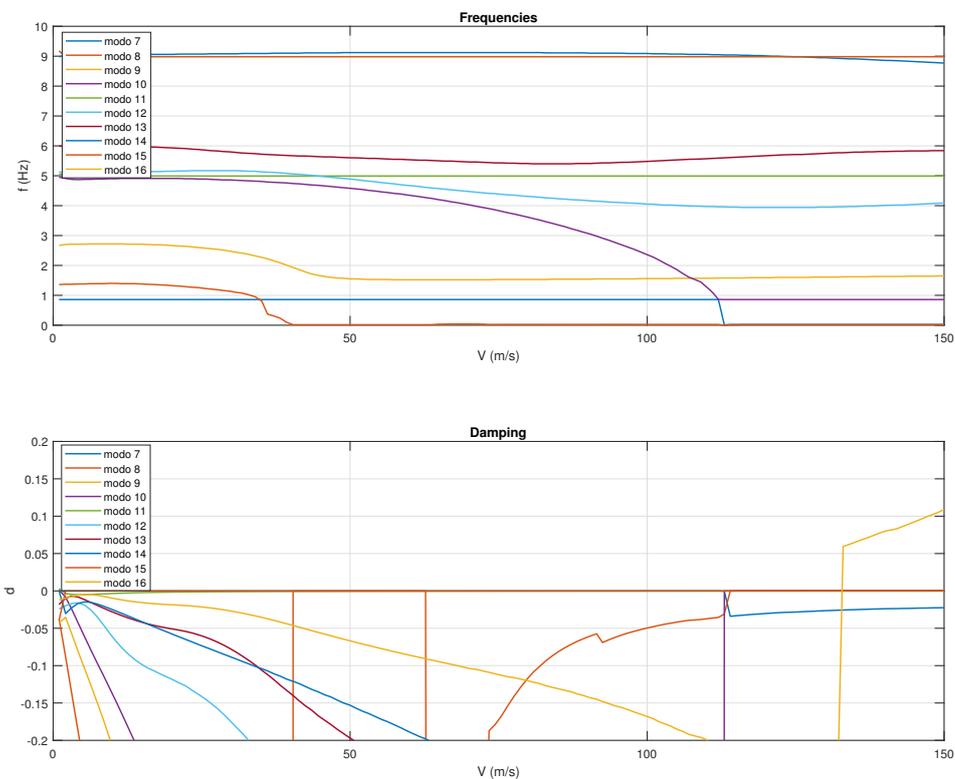


Figura 7.28. Frequenze e smorzamenti relativi ai primi modi del velivolo non vincolato al variare della velocità

La condizione di flutter che ne deriva è riportata in tabella 7.38.

Velocità [m/s]	Frequenza [Hz]
125.629	11.037

Tabella 7.38. Condizione di flutter per il velivolo non vincolato

In figura 7.29 è mostrato il modo di flutter che può essere ricostruito sommando i contributi di ogni modo. Il modo che interviene maggiormente è il nono.

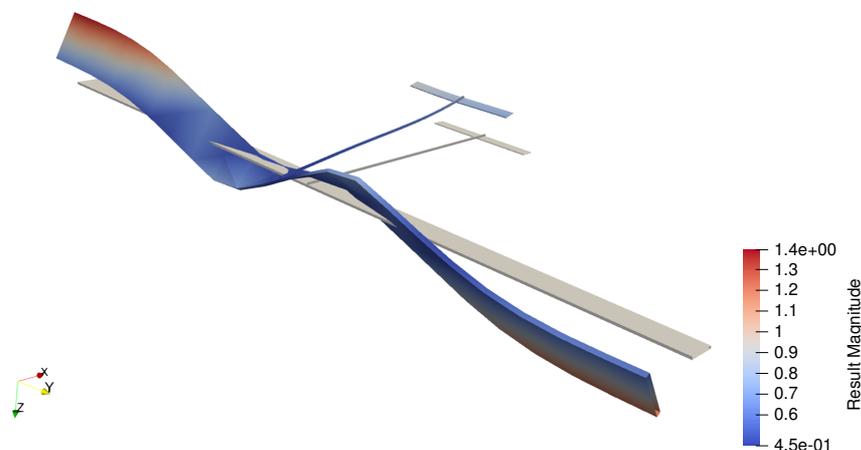


Figura 7.29. Modo di flutter del velivolo non vincolato

7.3.5 Modifica del modello strutturale

L'espansione di Lagrange è stata utilizzata fino ad ora nella definizione del modello strutturale del velivolo perchè permette la connessione tra ala e fusoliera e tra fusoliera e coda attraverso i nodi coincidenti delle varie sezioni. È possibile però variare il modello utilizzando Lagrange solo nelle parti da connettere mentre per tutto il resto si può introdurre l'espansione di Taylor di diverso ordine. Questo approccio può essere utile per modelli molto complessi per diminuire il costo computazionale necessario che per Lagrange è di solito più elevato.

Vengono quindi proposti tre modelli con cinematica variabile (*node-dependent kinematics*). Lagrange viene utilizzato solo per i nodi di connessione mentre per i restanti nodi vengono usati i polinomi di Taylor. Vengono quindi svolte le analisi di flutter variando l'ordine dei polinomi di Taylor da 2 a 4.

In tabella 7.39 vengono confrontate le prime 16 frequenze proprie, ad esclusione di quelle relative ai modi rigidi, dei vari modelli utilizzati. Viene mostrato anche il costo computazionale per ogni modello utilizzato. È evidente che l'utilizzo dei modelli TE comporta un risparmio notevole in termini di gradi di libertà soprattutto per ordini inferiori, mantenendo comunque una buona accuratezza dei modi e delle frequenze che ne derivano.

Frequenze	LE/TE2	LE/TE3	LE/TE4	LE
7	0.861	0.859	0.858	0.859
8	1.491	1.490	1.488	1.480
9	2.972	2.964	2.959	2.934
10	4.975	4.969	4.870	4.967
11	5.154	5.152	5.012	5.144
12	5.326	5.315	5.311	5.295
13	6.136	6.125	6.118	6.111
14	9.017	9.013	9.008	8.984
15	9.490	9.431	9.401	9.410
16	11.844	11.827	11.794	11.821
DOF	2337	2781	3336	3768

Tabella 7.39. Frequenze proprie ottenuti da diversi modelli del velivolo

È possibile svolgere le analisi di flutter per i tre nuovi modelli introdotti. In tabella 7.40 vengono mostrate le condizioni di flutter per i tre diversi modelli e confrontate con quella del modello basato solo sull'espansione di Lagrange. Per tutti i modelli il flutter si verifica per il sedicesimo modo e le velocità e frequenze trovate sono comparabili tra loro.

Modello	Velocità [m/s]	Frequenza [Hz]
LE/TE2	129.615	10.944
LE/TE3	125.387	10.948
LE/TE4	121.206	10.961
LE	125.629	11.037

Tabella 7.40. Condizione di flutter per il velivolo non vincolato per diversi modelli

I grafici di smorzamento e frequenza al variare della velocità per i diversi modi considerati relativi ai modelli TE2, TE3 e TE4 sono mostrati rispettivamente nelle figure 7.30, 7.31 e 7.32.

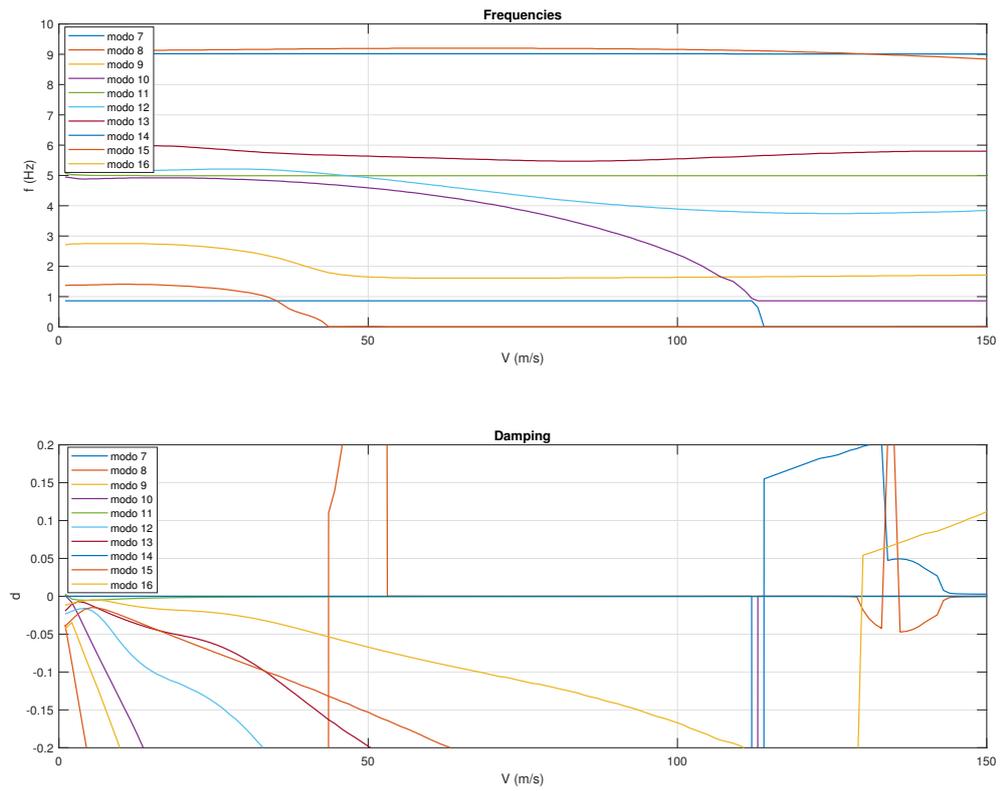


Figura 7.30. Frequenze e smorzamenti relativi ai primi modi del velivolo non vincolato al variare della velocità con TE2

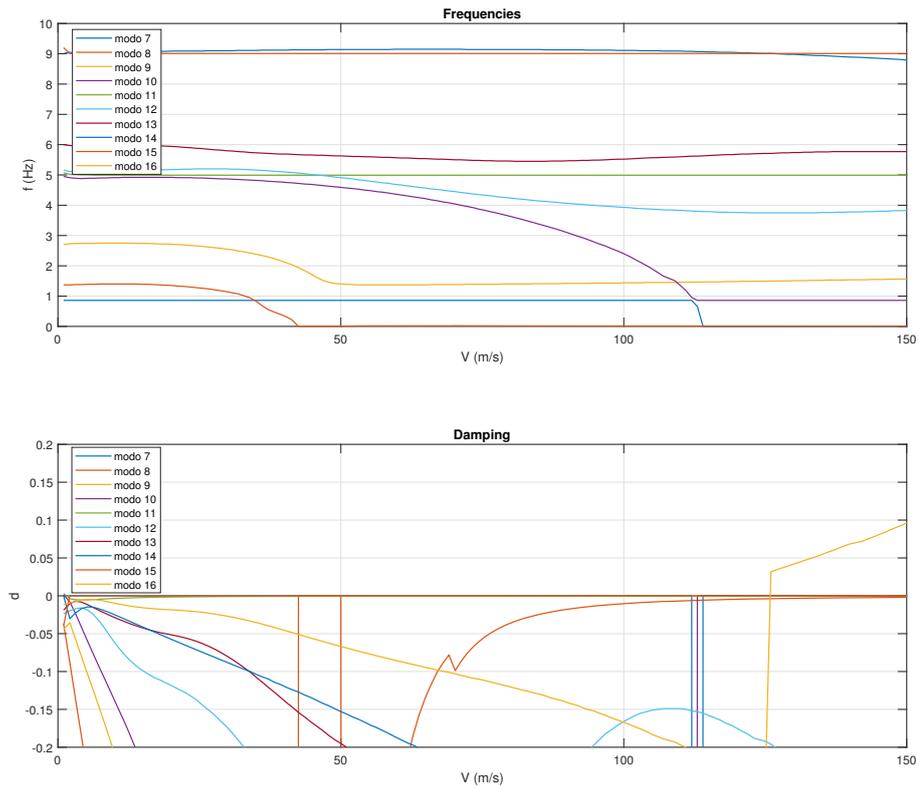


Figura 7.31. Frequenze e smorzamenti relativi ai primi modi del velivolo non vincolato al variare della velocità con TE3

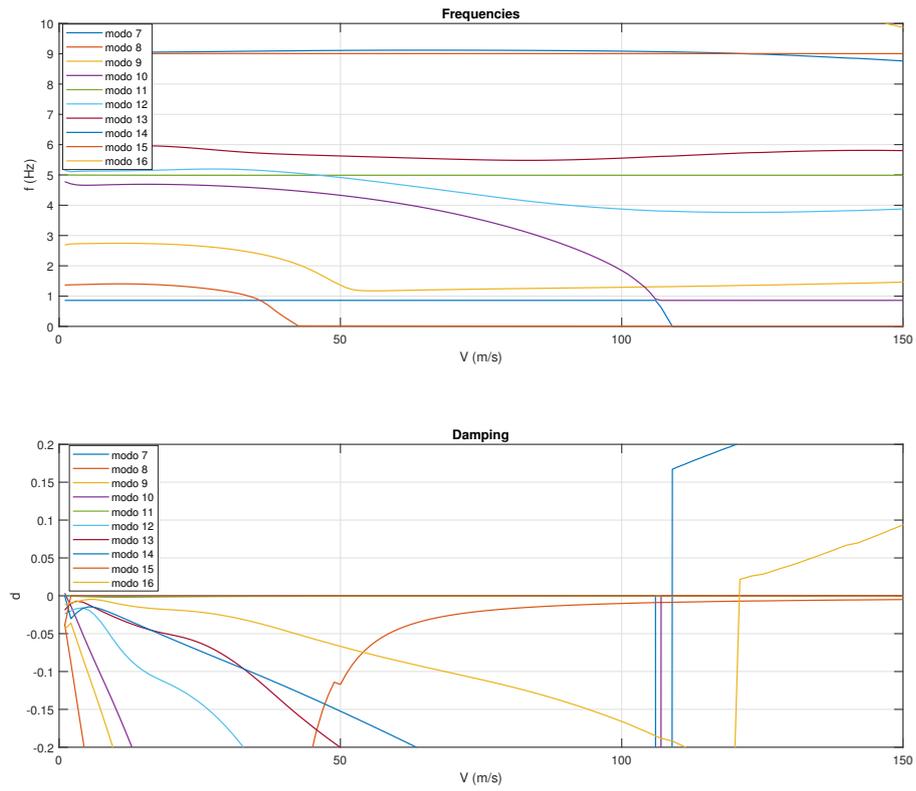


Figura 7.32. Frequenze e smorzamenti relativi ai primi modi del velivolo non vincolato al variare della velocità con TE4

Capitolo 8

Conclusioni

Lo scopo di questa tesi è quello di dimostrare come l'utilizzo di modelli strutturali raffinati accoppiati al Doublet Lattice Method permetta di svolgere analisi aeroelastiche accurate su strutture più o meno complesse.

La Carrera Unified Formulation (CUF) ha permesso di utilizzare modelli strutturali 1D agli elementi finiti di qualsiasi ordine senza apportare modifiche alla formulazione delle equazioni del problema. Nell'ambito di modelli 1D sono stati utilizzate due tipologie di espansioni polinomiali relative al campo di spostamento della sezione trasversale della trave, le espansioni di Taylor (TE) e le espansioni di Lagrange (LE).

Si è valutato che i modelli TE, che sfruttano i polinomi di Taylor, per essere accurati devono avere un ordine elevato (almeno $N = 2$). I modelli LE, che si basano sui polinomi di Lagrange, vengono spesso preferiti ai TE perchè le variabili nell'espansione assumono un significato fisico di spostamento dei nodi degli elementi con cui si è discretizzata la sezione della struttura. Inoltre per strutture di velivoli interi risulta quasi una scelta obbligata l'utilizzo di modelli LE per permettere il collegamento delle diverse parti, costruendo il modello in modo da far coincidere i nodi in comune delle varie sezioni. È possibile però, per modelli molto complessi, utilizzare Lagrange solo dove è necessario per le connessioni delle parti mentre per il restante si può utilizzare Taylor in modo da ridurre il costo computazionale.

Per quanto riguarda il modello aerodinamico, in ambito aeroelastico sono stati utilizzati il Vortex Lattice Method (VLM) e il Doublet Lattice Method (DLM). Il VLM fornisce soltanto il contributo stazionario nelle analisi di flutter, mentre il DLM permette di ottenere il contributo instazionario. Il vantaggio nell'utilizzo del DLM è che permette di ottenere una buona accuratezza in regime subsonico con costi computazionali non eccessivi e il suo utilizzo è adatto a strutture anche complesse.

Dalle analisi svolte di tipo statico e dinamico si è giunti alla conclusione che sono necessari modelli strutturali 1D di ordine elevato per avere risultati accurati. Infatti, il loro utilizzo permette di superare i limiti dei modelli classici di Eulero-Bernoulli e Timoshenko, riuscendo a prevedere non solo i modi flessionali ma anche i torsionali in modo corretto di strutture complesse anche in parete sottile. L'ulteriore grande vantaggio nell'utilizzo di modelli CUF 1D è il basso costo computazionale rispetto a modelli 2D (piastra) e 3D (solido).

Per la corretta valutazione delle condizioni di flutter è stato necessario utilizzare, anche per le analisi aeroelastiche, modelli avanzati 1D. È infatti fondamentale che i modi e le frequenze della struttura siano accurati per trovare la giusta velocità e frequenza di flutter. Questo lavoro ha permesso di gettare la base sullo studio aeroelastico di configurazioni di velivoli interi. In futuro si potranno estendere queste analisi a strutture sempre più complesse di velivoli e con materiali non isotropi.

Lo sviluppo di modelli accurati ed efficienti per le analisi aeroelastiche è di estremo interesse in ambito ingegneristico. La possibilità di poter utilizzare modelli avanzati numerici permette infatti un minor utilizzo di test sperimentali e una riduzione del tempo impiegato in fase di progettazione per valutare i fenomeni aeroelastici.

Bibliografia

- Edward Albano and William P. Rodden. A doublet-lattice method for calculating lift distributions on oscillating surfaces in subsonic flows. *AIAA Journal*, 7:279–285, 1969. ISSN 00011452. doi: 10.2514/3.5086.
- Max Blair. A compilation of the mathematics leading to the doublet lattice method. *Chemical Communications*, 48, 1994. ISSN 1359-7345.
- Erasmus Carrera and Gaetano Giunta. Refined beam theories based on a unified formulation. *International Journal of Applied Mechanics*, 2, 2010. ISSN 17588251. doi: 10.1142/S1758825110000500.
- Erasmus Carrera, Maria Cinefra, Enrico Zappino, and Marco Petrolo. Finite element analysis of structures through unified formulation. *Finite Element Analysis of Structures through Unified Formulation*, 9781119941217:1–385, 9 2014. doi: 10.1002/9781118536643.
- A. R. Collar. The first fifty years of aeroelasticity. *Aerospace*, 2, 5:12–20, 1978.
- A R Collar, D Sc, and F R S Ae. The expanding domain of aeroelasticity. *The royal aeronautical society*, pages 613–636, 1946.
- Luciano Demasi and Eli Livne. Dynamic aeroelasticity of structurally nonlinear configurations using linear modally reduced aerodynamic generalized forces. *Collection of Technical Papers - AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, 5:4754–4795, 2007. ISSN 02734508. doi: 10.2514/6.2007-2105.
- Robert L. Harder and Robert N. Desmarais. Interpolation using surface splines. *Journal of Aircraft*, 9, 1972. ISSN 00218669. doi: 10.2514/3.44330.
- Hermann J. Hassig. An approximate true damping solution of the flutter equation by determinant iteration. *Journal of Aircraft*, 8:885–889, 1971. ISSN 00218669. doi: 10.2514/3.44311.
- Sven G Hedman. Vortex lattice method for calculation of quasi steady state loadings on thin elastic wings in subsonic flow. 1966.
- Dewey H. Hodges and G. Alvin Pierce. Introduction to structural dynamics and aeroelasticity, second edition. *Introduction to Structural Dynamics and Aeroelasticity, Second Edition*, 9780521195904:1–247, 1 2011. doi: 10.1017/CBO9780511997112.

- M. T. Landahl. Kernel function for nonplanar oscillating surfaces in a subsonic flow. *AIAA Journal*, 5:1045–1046, 1967. ISSN 00011452. doi: 10.2514/3.55319.
- Massimiliano Orlandi. Tailoring aeroelastico di strutture composite con angolo di laminazione variabile = aeroelastic tailoring of variable angle tow composite structures. 4 2022.
- Mayuresh J. Patil, Dewey H. Hodges, and Carlos E.S. Cesnik. Nonlinear aeroelasticity and flight dynamics of high-altitude long-endurance aircraft. *Journal of Aircraft*, 38: 88–94, 2001. ISSN 00218669. doi: 10.2514/2.2738.
- Marco Petrolo. Advanced aeroelastic models for the analysis of lifting surfaces made of composite materials / marco petrolo ; rel. erasmo carrera, 2011.
- William P. Rodden, Paul F. Taylor, and Samuel C. McIntosh. Further refinement of the subsonic doublet-lattice method. *Journal of Aircraft*, 35:720–727, 1998. ISSN 15333868. doi: 10.2514/2.2382.