

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale
in Ingegneria Matematica

Tesi di Laurea

**Dinamica di opinioni multidimensionali su reti sociali
tempo-varianti**



Relatore
prof. Alberto Tarable

Candidato
Leonardo Barale

Anno Accademico 2022-2023

*A Filippo, che è sempre
con me*

Indice

Elenco delle figure	VI
Elenco delle tabelle	VIII
1 Dinamica delle opinioni	1
1.1 Opinioni nel mondo di tutti i giorni	1
1.2 Dai dati ai modelli matematici	2
1.3 Possibili risultati delle simulazioni	3
1.4 Introduzione e presentazione del lavoro	4
2 Modelli matematici nella letteratura	7
2.1 Cenni storici e caratteristiche dei modelli matematici	7
2.1.1 Modelli con opinioni discrete	8
2.1.2 Modelli con opinioni continue	12
2.2 Alcuni modelli a titolo di esempio	15
2.2.1 Esempio 1	15
2.2.2 Esempio 2	22
3 Modello matematico con struttura sociale fissa	27
3.1 Modellazione del sistema	27
3.2 Dal modello discreto al modello continuo	29
3.3 Soluzione dell'equazione di Fokker-Planck	31
3.3.1 Caso distribuzione della personalità discreto	32
3.4 Analisi della stabilità	35
3.4.1 Condizioni per evitare instabilità di tipo-I	35
3.4.2 Condizioni per evitare instabilità di tipo-II	36
3.4.3 Esempio con $N = 1$	37
3.5 Analisi dello stato stazionario	39
3.6 Risultati numerici	40
3.6.1 Sensitività della distribuzione stazionaria ai parametri del modello	40
3.6.2 L'influenza della matrice \mathbf{Z} e l'insorgenza di instabilità	43
3.6.3 Effetto rotazionale	45

4	Ulteriori esempi basati su un modello a tre comunità	47
4.1	Effetto della matrice \mathbf{Z} e del pregiudizio	48
4.2	Effetto della testardaggine	55
4.3	Effetto del cambiamento di pregiudizio	58
5	Dinamica delle opinioni con struttura sociale tempo-variante	61
5.1	\mathbf{Z} costante per intervalli di tempo	61
5.1.1	Analisi di stabilità	62
5.1.2	Condizioni di stabilità per la covarianza	68
5.1.3	Condizioni di stabilità per la media	71
5.2	\mathbf{Z} che varia continuamente nel tempo	72
5.2.1	Analisi di stabilità	73
5.2.2	Condizioni di stabilità per la covarianza	74
5.2.3	Condizioni di stabilità per la media	74
6	Risultati numerici	75
6.1	Matrice \mathbf{Z} che varia in intervalli di tempo	75
6.1.1	Esempio 1 - stabilità	75
6.1.2	Esempio 2 - instabilità della media	84
6.1.3	Esempio 3 - instabilità di media e covarianza	89
6.1.4	Esempio 4 - caso con intervalli ottimizzati	94
6.2	Matrice \mathbf{Z} che varia continuamente nel tempo	105
6.2.1	Esempio 5 - funzione periodica	105
6.2.2	Esempio 6 - funzione che porta alla convergenza	112
6.2.3	Esempio 7 - funzione che porta alla divergenza	119
7	Conclusioni	125
A	Codici Matlab per il caso \mathbf{Z} tempo-variante in intervalli di tempo	127
B	Codici Matlab per il caso \mathbf{Z} tempo-variante in modo continuo	141
C	Funzioni Matlab che definiscono alcune variabili del problema, utilizzate negli esempi	147

Elenco delle figure

2.1	Modello di dinamica delle opinioni, con opinioni discrete	9
2.2	Simulazioni e approssimazioni di dinamiche di opinione discrete	11
2.3	Esempio di regole dinamiche di un modello ad opinioni continue	12
2.4	Simulazioni di dinamiche di opinione continua	14
2.5	Evoluzione delle opinioni in uno spazio degli argomenti tridimensionale	21
2.6	Distribuzione stazionaria delle opinioni con bounded confidence	25
3.1	Distribuzioni stazionarie per valutare l'effetto del parametro σ_n^2	42
3.2	Distribuzioni stazionarie per valutare l'effetto del parametro ρ	42
3.3	Distribuzioni stazionarie per valutare l'impatto del parametro ζ_2 in casi stabili	43
3.4	Evoluzione temporale in un caso di instabilità di tipo-II	43
3.5	Evoluzione temporale in un caso di instabilità di tipo-I	44
3.6	Distribuzioni stazionarie ottenute tramite simulazioni a rete finita	44
3.7	Evoluzione temporale delle opinioni in un caso con effetto rotazionale	46
4.1	Nuova distribuzione iniziale della densità di opinione	51
4.2	Evoluzione temporale per il modello a 3 comunità, con $\zeta_{1,2} = -0.5$, $\zeta_{1,3} = 0.1$ e $\zeta_{2,3} = -0.5$	51
4.3	Evoluzione temporale per il modello a 3 comunità, con $\zeta_{1,2} = -0.5$, $\zeta_{1,3} = -0.5$ e $\zeta_{2,3} = 0.1$	52
4.4	Evoluzione temporale per il modello a 3 comunità, con $\zeta_{1,2} = 0.1$, $\zeta_{1,3} = -0.5$ e $\zeta_{2,3} = -0.5$	52
4.5	Evoluzione temporale per il modello a 3 comunità, con $\zeta_{1,2} = -0.5$, $\zeta_{1,3} = 0.1$ e $\zeta_{2,3} = 0.1$	53
4.6	Evoluzione temporale per il modello a 3 comunità, con $\zeta_{1,2} = 0.1$, $\zeta_{1,3} = 0.1$ e $\zeta_{2,3} = -0.5$	53
4.7	Evoluzione temporale per il modello a 3 comunità, con $\zeta_{1,2} = 0.1$, $\zeta_{1,3} = -0.5$ e $\zeta_{2,3} = 0.1$	54
4.8	Primo esempio sull'effetto della testardaggine $\alpha(p_i)$	57
4.9	Secondo esempio sull'effetto della testardaggine $\alpha(p_i)$	57
4.10	Prima parte dell'evoluzione temporale per un esempio in cui si modifica il pregiudizio	59

4.11	Seconda parte dell'evoluzione temporale per un esempio in cui si modifica il pregiudizio	60
6.1	Andamento temporale delle opinioni, esempio 1. Prima fase	80
6.1	Andamento temporale delle opinioni, esempio 1. Seconda fase	81
6.1	Andamento temporale delle opinioni, esempio 1. Terza fase	82
6.1	Andamento temporale delle opinioni, esempio 1. Quarta fase	83
6.2	Andamento temporale delle opinioni, esempio 2. Prima fase	86
6.2	Andamento temporale delle opinioni, esempio 2. Seconda fase	87
6.2	Andamento temporale delle opinioni, esempio 2. Terza fase	88
6.3	Andamento temporale delle opinioni, esempio 3. Prima fase	91
6.3	Andamento temporale delle opinioni, esempio 3. Seconda fase	92
6.3	Andamento temporale delle opinioni, esempio 3. Terza fase	93
6.4	Andamento temporale delle opinioni, esempio 4. Prima fase	102
6.4	Andamento temporale delle opinioni, esempio 4. Seconda fase	103
6.4	Andamento temporale delle opinioni, esempio 4. Terza fase	104
6.5	Andamento temporale delle opinioni, esempio 5. Prima fase	107
6.5	Andamento temporale delle opinioni, esempio 5. Seconda fase	108
6.5	Andamento temporale delle opinioni, esempio 5. Terza fase	109
6.5	Andamento temporale delle opinioni, esempio 5. Quarta fase	110
6.6	Andamento degli autovalori minimi delle matrici $\Xi(p_i, t)$ e $\Psi(t)$ per l'esempio 5	111
6.7	Andamento delle funzioni $f_i(t)$ e $g_i(t)$ per l'esempio 5	111
6.8	Andamento temporale delle opinioni, esempio 6. Prima fase	114
6.8	Andamento temporale delle opinioni, esempio 6. Seconda fase	115
6.8	Andamento temporale delle opinioni, esempio 6. Terza fase	116
6.8	Andamento temporale delle opinioni, esempio 6. Quarta fase	117
6.9	Andamento degli autovalori minimi delle matrici $\Xi(p_i, t)$ e $\Psi(t)$ per l'esempio 6	118
6.10	Andamento delle funzioni $f_i(t)$ e $g_i(t)$ per l'esempio 6	118
6.11	Andamento temporale delle opinioni, esempio 7. Prima fase	120
6.11	Andamento temporale delle opinioni, esempio 7. Seconda fase	121
6.11	Andamento temporale delle opinioni, esempio 7. Terza fase	122
6.12	Andamento degli autovalori minimi delle matrici $\Xi(p_i, t)$ e $\Psi(t)$ per l'esempio 7	123
6.13	Andamento delle funzioni $f_i(t)$ e $g_i(t)$ per l'esempio 7	123

Elenco delle tabelle

6.1	Tabella corrispondenze tra caso monodimensionale e caso bidimensionale .	77
6.2	Esempio 1, autovalori minimi	78
6.3	Esempio 2, autovalori minimi	84
6.4	Esempio 3, autovalori minimi	90
6.5	Esempio 4, autovalori minimi	99

Sommario

L'elaborato verte sullo studio della dinamica delle opinioni, focalizzandosi soprattutto sui modelli matematici che permettono di simulare l'evoluzione del pensiero di una popolazione riguardo determinati argomenti. In particolare, si abbina una parte di introduzione dettagliata al tema della dinamica delle opinioni, principalmente tramite nozioni e modelli preesistenti in letteratura, con la parte chiave del lavoro in cui si cerca di apportare delle modifiche e delle miglorie ad uno specifico modello matematico.

Nel dettaglio, l'elaborato è strutturato in sei capitoli. I primi due costituiscono a tutti gli effetti l'introduzione al tema, con l'aiuto di numerosi riferimenti bibliografici, i quali permettono di presentare alcuni esempi da cui è possibile trarre informazioni su svariati aspetti del problema generale.

Nei successivi due capitoli, invece, l'attenzione è rivolta verso il modello presentato nell'articolo [Nordio et al., 2019]. Tale modello viene qui descritto nel dettaglio, abbinando gli aspetti teorici ad alcune simulazioni ottenibili tramite Matlab. Inoltre, proprio partendo da queste simulazioni, sono mostrate alcune possibili modifiche riguardo variabili o parametri che permettono di ottenere una maggior generalità degli esempi.

Infine, negli ultimi due capitoli si presenta il lavoro innovativo sull'argomento. Nello specifico, utilizzando come struttura di base il modello matematico presentato nel capitolo [3], si lavora con l'obiettivo principale di introdurre la tempo-varianza di una variabile fondamentale del modello, che in origine si assumeva fosse fissata inizialmente e restasse costante per tutto lo sviluppo temporale. Questa variabile è la componente che rappresenta la forza e il tipo di interazione che avviene tra diversi utenti della popolazione di interesse, perciò è fortemente responsabile della successiva evoluzione delle opinioni. Comunque, questo discorso è nuovamente affrontato combinando un aspetto teorico, che culmina nella ricerca e presentazione delle condizioni tramite le quali il sistema risulta essere stabile, a diversi esempi simulativi pratici. Tutti questi esempi hanno l'obiettivo di illustrare in modo più chiaro che cosa accade alle opinioni dopo aver introdotto la tempo-varianza sulle forza di interazione. Inoltre, permettono di fornire un supporto alle condizioni di stabilità trovate, mostrando il comportamento della dinamica delle opinioni in casi in cui tali condizioni sono soddisfatte e in casi in cui, invece, non lo sono.

Ringraziamenti

È doveroso dedicare questo spazio della mia tesi a tutte le persone che mi hanno supportato nel mio percorso di crescita universitaria e professionale.

Innanzitutto, un sentito ringraziamento va al mio relatore Alberto Tarable che mi ha seguito, con grande disponibilità e gentilezza, in ogni step della realizzazione dell'elaborato, fin dalla scelta dell'argomento.

Vorrei ringraziare di cuore i miei genitori, che mi hanno sempre lasciato libero di prendere le mie decisioni, ma senza mai farmi mancare il loro supporto, il loro aiuto e i loro consigli.

Un grandissimo ringraziamento va poi a Giulia, a cui mi sono sempre affidato per parlare di qualsiasi cosa, ed è la persona con cui ho condiviso maggiormente il mio intero percorso universitario.

Poi vorrei ringraziare i miei compagni di corso storici, Anna, Duccio, Ste e Gio, con cui ho condiviso bellissimi momenti e che rimangono i miei colleghi preferiti, anche se ormai ognuno ha intrapreso la propria strada.

Infine, ma non per importanza, ringrazio tantissimo tutti i miei più cari amici di Caraglio e del gruppo "Petinmenin", con cui ho trascorso molti momenti importantissimi, che mi hanno aiutato a crescere e a diventare il ragazzo che sono adesso.

Capitolo 1

Dinamica delle opinioni

1.1 Opinioni nel mondo di tutti i giorni

Opinione: «concetto che una o più persone elaborano riguardo a particolari fatti, fenomeni, manifestazioni, argomenti quando, mancando un criterio di certezza assoluta per giudicare della loro natura (o delle loro cause, delle loro qualità ecc.), si propone un'interpretazione personale che si ritiene esatta e a cui si dà perciò il proprio assenso, ammettendo tuttavia la possibilità di ingannarsi nel giudicarla tale.» [Enciclopedia Treccani]

Al giorno d'oggi, ogni persona si trova molto frequentemente circondata dal concetto di **opinione**. Infatti, tutto ciò che riguarda la politica, l'arte, lo sport o altri temi ancora spinge costantemente la gente ad esprimere un parere su un'ampia varietà di questioni. Queste opinioni, inoltre, influenzano pesantemente le azioni e il comportamento sociale di ognuno.

Quando si parla di opinione è logico assumere che essa possa cambiare nel tempo e che quindi non rimanga sempre fissa e costante. Infatti, dato che le persone interagiscono tra loro e processano continuamente nuove informazioni, le opinioni possono modificarsi nel tempo contribuendo all'evoluzione del dibattito pubblico e della società stessa. In aggiunta, bisogna considerare che il ruolo dei social network e dei social media è in continua crescita, ed essi sono degli strumenti fondamentali proprio nella formazione e nella diffusione delle opinioni.

Per tutta questa serie di motivi, sta diventando sempre più importante studiare i meccanismi individuali e collettivi che guidano le dinamiche delle opinioni, per comprendere la crescita dei movimenti sociali e i cambiamenti della società su larga scala. A questo scopo sono stati pensati ed elaborati dei *modelli matematici*, che hanno l'obiettivo di spiegare e di prevedere l'evoluzione dell'opinione riguardante un certo argomento, in modo semplice anche se approssimato, partendo da alcune ipotesi iniziali.

Negli ultimi anni, in particolare, lo sviluppo e il lavoro sui modelli matematici si è fatto sempre più attivo, con l'obiettivo di ottenere simulazioni sempre più sofisticate, che riescano a cogliere un maggior numero di sfaccettature della rete sociale in analisi. La spinta verso questo studio è anche favorita dal ruolo centrale dei modelli di dinamica delle

opinioni in diversi campi di applicazione, tra cui politica, governance e marketing. Infatti, la disponibilità di una grande quantità di dati sociali generati dagli utenti ha attratto l'interesse di compagnie e agenzie governative, le quali intravedono l'opportunità di sfruttare questi dati per ottenere importanti aggiornamenti in tempo reale sull'evoluzione di tendenze, gusti e opinioni nella società.

1.2 Dai dati ai modelli matematici

Innanzitutto è necessario capire brevemente che cosa sono e perché possono essere molto utili i modelli matematici. Essi sono costituiti essenzialmente da un insieme di una o più equazioni matematiche, che, nei casi più semplici, possono essere risolte analiticamente oppure, nella maggior parte dei casi, ci permettono di effettuare delle simulazioni tramite software, per studiare l'evoluzione nel tempo di alcune variabili di interesse. Tali equazioni sono costruite ad hoc in modo tale da rappresentare nella maniera più precisa possibile il fenomeno reale in questione, ma cercando di non eccedere troppo nella complessità. Infatti, la potenza dei modelli matematici è soprattutto data dal fatto che, sfruttando determinate ipotesi fatte a priori, essi consentono di ottenere dei risultati approssimati, tramite dei calcolatori, di ciò che succede nella realtà. Inoltre, i tempi e i costi di simulazione tramite modello matematico sono decisamente inferiori rispetto ad un eventuale studio effettuato direttamente sul caso reale. Il conto da pagare, ovviamente, consiste nell'ottenere risultati che sono solamente delle approssimazioni, basate su ipotesi semplificate che molto spesso non sono del tutto verificate nella realtà.

Entrando nello studio specifico della dinamica delle opinioni, a partire soprattutto dall'ultimo decennio, viene utilizzato un nuovo approccio denominato *computational social science* ([Lazer et al., 2009], [Conte et al., 2012], [Wagner et al., 2021]). Tale approccio ha l'obiettivo di comprendere la struttura e la dinamica delle società umane, includendo anche lo studio delle dinamiche di opinione, sfruttando algoritmi computazionali che mescolano le teorie della sociologia, dell'economia e delle scienze politiche con il rigore quantitativo della fisica e della matematica applicata. La ricerca in questo campo emergente lavora su uno spettro che va dai dati ai modelli. Una parte si focalizza sull'acquisizione e sull'esplorazione dei dati sociali su larga scala, in particolare sulle piattaforme di comunicazione online ([González-Bailón, 2013]), l'altra si occupa della simulazione e dell'analisi di modelli multi-agente, con regole di interazione semplificate ([Holme and Liljeros, 2015]). Idealmente questi approcci dovrebbero completarsi tra loro e fornire delle informazioni sulla dinamica delle opinioni su diverse scale.

Uno dei maggiori problemi per ottenere dei buoni modelli matematici per la dinamica delle opinioni è dovuto alla difficoltà di collezionare dati empirici ([Kitchenham and Pfleeger, 2008], [Berinsky, 2017]). Infatti:

- C'è bisogno di trasformare qualcosa di ambiguo e con molte sfaccettature come un'opinione in una misura quantitativa, allo scopo di poterla inserire in un modello matematico.

- Bisogna convincere le persone ad esprimere a "voce alta" il loro parere.
- Anche quando l'opinione è ridotta a poche scelte, gli sforzi della raccolta dati sono limitati dalla grandezza del campione e dalla soggettività delle risposte.

1.3 Possibili risultati delle simulazioni

Come anticipato, i modelli matematici permettono di ottenere delle simulazioni temporali, dalle quali si può ottenere un'idea (approssimazione) del reale processo di diffusione delle opinioni. È quindi interessante capire quali possibili risultati si possono trovare.

Ad esempio, secondo i modelli classici della dinamica dell'opinione, in cui le interazioni sociali si aggiungono in modo costruttivo alla formazione dell'opinione, i crescenti tassi di interazione delle società moderne porterebbero alla fine a un *consenso globale*, anche su questioni controverse ([DeGroot, 1974], [Castellano et al., 2009a], [Baronchelli, 2018]).

Questa previsione classica è stata però contestata dall'osservazione empirica della *polarizzazione*, ovvero la presenza di due picchi ben separati nella distribuzione finale dell'opinione. Il fenomeno della polarizzazione può essere osservato sia offline ([Baldassarri and Gelman, 2008], [Glaeser and Ward, 2006]), sia nei social media online ([Garcia et al., 2015], [Bail et al., 2018]), dove si possono trovare dei dibattiti su diversi problemi o temi che sfociano infine nella polarizzazione. Un chiaro esempio è dato dai sondaggi sulle elezioni politiche degli Stati Uniti, per le quali gli utenti di social network quali Twitter si sono distribuiti in due gruppi ben diversi: i sostenitori di Trump e i sostenitori di Biden. Inoltre, è interessante notare che la polarizzazione sembra comparire soprattutto nelle discussioni pubbliche che si evolvono attorno a questioni politicamente ed eticamente controverse, come l'aborto ([Mouw and Sobel, 2001]) oppure i cambiamenti climatici ([McCright and Dunlap, 2011]). Guardando proprio a quest'ultimo caso (il cambiamento climatico), è stato recentemente dimostrato che la formazione di stati polarizzati e la conseguente assenza di un consenso generale ostacolano la risoluzione collettiva di importanti sfide sociali. Infatti, essendoci diverse visioni del problema, in contrasto tra loro su diversi aspetti, non si riesce a trovare una soluzione unica che possa soddisfare tutte le parti in causa ([Wang et al., 2020]).

In ogni caso i topic sono trattati da soli raramente, soltanto in casi particolari. Infatti, soprattutto con la crescita della connettività e l'aumento del flusso di informazioni, i processi di formazione delle opinioni spesso avvengono considerando simultaneamente diversi topic. Anche in questi problemi un possibile risultato è la formazione di un consenso globale (come nel caso in cui si considera un unico argomento di discussione), ma più spesso la distribuzione delle opinioni devia da tale situazione. Se avviene ciò, è probabile che si osservi un'altra evoluzione interessante: il cosiddetto *allineamento delle opinioni* ([Baldassarri and Gelman, 2008], [Converse, 2006]).

La presenza del fenomeno dell'allineamento, in crescita nel recente passato, implica che gli individui sono maggiormente portati ad avere una certa combinazione di opinioni rispetto ad altre, definendo così uno *stato di opinione ideologica*. Per alcune combinazioni di argomenti l'allineamento è abbastanza intuitivo: per esempio, le opinioni riguardanti i diritti delle persone transgender e delle coppie omosessuali potrebbero essere facilmente

correlate. In questo caso, la maggior parte degli individui si divide principalmente in due gruppi:

1. Coloro che negano determinati diritti sia alle persone transessuali, sia alle coppie dello stesso sesso.
2. Coloro che supportano i medesimi diritti.

Invece, gli individui che mantengono posizioni miste, supportando i diritti delle coppie omosessuali e non accettando i diritti alle persone transgender o viceversa, sono più rare. In questo semplice esempio, le due questioni prese in considerazione fanno riferimento a due temi che sono fortemente in relazione tra loro e che infatti sono spesso trattati insieme. L'aspetto più interessante, però, è dato dalla possibilità di mostrare che anche opinioni su questioni all'apparenza piuttosto differenti potrebbero risultare fortemente correlate e, di conseguenza, potrebbe manifestarsi l'allineamento.

1.4 Introduzione e presentazione del lavoro

Quest'ultima sezione del capitolo viene dedicata a presentare una breve introduzione del lavoro di questo elaborato. In particolare, esso può essere distinto in tre parti diverse.

- 1) Nella prima parte si introducono alcuni esempi di modelli matematici applicati alla dinamica delle opinioni presenti in letteratura, con lo scopo di mostrare diversi modi con i quali è possibile rappresentare il problema. Infatti, l'argomento delle opinioni possiede molte diverse sfaccettature e quindi, nel tempo, sono stati elaborati svariati modelli per studiarne l'evoluzione, ognuno dei quali si sofferma su alcuni aspetti particolari. Nello specifico, questa prima parte è costituita da:

- capitolo [2], nel quale si presenta una panoramica generale sui modelli che studiano le opinioni, abbinata ad alcuni cenni storici. In conclusione, sono anche mostrati un paio di esempi, tratti sempre dalla letteratura, in cui si entra più nel dettaglio. Essi aiutano, soprattutto, a prendere familiarità con notazione e equazioni, ovvero gli aspetti che giocano un ruolo fondamentale in qualsiasi modello. Inoltre, permettono di mostrare qualche risultato legato a simulazioni che si concentrano su parti del problema diverse da quelle su cui è incentrato il lavoro principale di questo elaborato.
- Capitolo [3], in cui ci si concentra in modo particolare sul modello di dinamica delle opinioni illustrato nell'articolo [Nordio et al., 2019]. Nello specifico, in questo capitolo si presenta in modo particolarmente dettagliato tale modello, abbinando gli aspetti teorici, in cui sono mostrate tutte le equazioni fondamentali, ad alcune simulazioni. Queste ultime sono importanti poiché mostrano l'evoluzione delle opinioni nel tempo, ma soprattutto l'impatto di alcuni parametri e variabili del modello sulla dinamica.

- 2) La seconda parte di questo lavoro è costituita da un breve capitolo: il capitolo [4]. Qui si approfondiscono alcune variabili del modello di riferimento, ovvero quello descritto nel capitolo [3]. Infatti, per ottenere le simulazioni, si utilizzano casi particolari e

semplici per alcune variabili e alcuni parametri. Lo scopo di questo capitolo è, quindi, quello di cercare di rendere *più generali* tali variabili, aiutandosi anche con riferimenti all'esperienza reale. Questi approfondimenti servono soprattutto a rendere il modello sempre più adattabile a diverse situazioni di interesse. Ad esempio, un'ipotesi fondamentale, che viene mantenuta valida in tutti i casi proposti nel capitolo, è che la popolazione di riferimento sia divisa in tre diverse comunità. Si tratta di una generalizzazione rispetto agli esempi del terzo capitolo, in cui le comunità considerate erano soltanto due.

- 3) Nella terza parte della tesi, invece, si cercano di apportare delle migliorie al modello, introducendo degli aspetti innovativi. Nello specifico, utilizzando come struttura di base sempre il modello matematico presentato nel capitolo [3], si lavora con l'obiettivo principale di introdurre la *tempo-varianza* di una variabile fondamentale del modello, che in origine si assumeva fosse fissata all'inizio e restasse costante per tutto lo sviluppo temporale. Questa variabile è la matrice che raffigura la forza e il tipo di interazione che avviene tra diversi utenti della popolazione di interesse, perciò è fortemente responsabile della successiva evoluzione delle opinioni.

È importante evidenziare che anche lo studio di questa nuova parte viene suddiviso in due capitoli.

- Capitolo [5], nel quale si propone un discorso più teorico, che culmina nella ricerca e presentazione delle condizioni tramite le quali il sistema risulta essere stabile. In particolare, questo capitolo è diviso in due sezioni chiave, ciascuna corrispondente ad una possibile ipotesi da imporre sulla matrice delle forze di interazione \underline{Z} . Si inizia con un'ipotesi più vicina al caso di partenza (matrice costante e fissa nel tempo): matrice \underline{Z} che si mantiene costante per un certo intervallo di tempo, dopodiché cambia assumendo dei nuovi valori che rimarranno costanti per tutta la durata di un altro intervallo temporale. Assumendo valida questa ipotesi, si rivedono le espressioni della media e della covarianza della densità di opinione, arrivando a trovare le due condizioni che garantiscono la loro stabilità. Si ripercorre, quindi, la stessa strada anche per la seconda sezione fondamentale di questo capitolo, in cui l'ipotesi sulla matrice \underline{Z} diventa la tempo-varianza nel continuo. Perciò, in modo analogo, si conclude trovando le condizioni per la stabilità della media e della covarianza.
- Capitolo [6], in cui sono mostrate diverse applicazioni pratiche dei due casi presentati nel capitolo precedente. Tutti questi esempi hanno l'obiettivo di illustrare in modo chiaro e abbastanza semplice che cosa accade alle opinioni dopo aver introdotto la tempo-varianza sulle forze di interazione. Inoltre, permettono di fornire un supporto alle condizioni di stabilità presentate, mostrando il comportamento della dinamica delle opinioni in casi in cui tali condizioni sono soddisfatte e in casi in cui non lo sono. Per essere più espliciti, sono presentati casi in cui il sistema rimane completamente stabile, casi in cui la media del sistema risulta instabile, mentre la varianza è stabile e, infine, anche un caso in cui sia media, sia varianza non soddisfano la stabilità.

Capitolo 2

Modelli matematici nella letteratura

In questo capitolo si presenta una panoramica generale riguardante i modelli matematici che studiano la dinamica delle opinioni. Si ripercorre, quindi, la letteratura relativa a tale argomento, cercando di mettere in risalto alcune delle caratteristiche principali di svariati modelli.

2.1 Cenni storici e caratteristiche dei modelli matematici

Per trovare i primi modelli di dinamica delle opinioni ispirati alla fisica statistica e alla matematica, bisogna tornare indietro nel tempo di circa 50 anni. Infatti, è del 1971 il modello sociodinamico di Weidlich, mentre il famoso *modello a elettori* (in inglese, *voter model*) fu introdotto da Holley e Liggett nel 1975, [Redner, 2019]. Questi primi tentativi di simulare l'emergere di un'opinione collettiva a partire da pareri individuali, sono stati seguiti da una moltitudine di modelli con molte variazioni, per ottenere e raffigurare situazioni diverse.

Nella maggior parte di questi modelli, gli individui sono rappresentati da agenti che condividono delle opinioni con i loro vicini in una rete sociale sottostante. Quindi, ogni individuo corrisponde ad un nodo e i suoi collegamenti con individui vicini sono costituiti dagli archi della rete. Il network può evolvere nel tempo, oppure rimanere fisso. Inoltre, per ogni agente è definita una variabile di stato che simboleggia l'opinione che l'utente esprime riguardo ad uno specifico argomento. Proprio il modo in cui si definisce questa variabile di stato permette di ottenere modelli diversi, dipendenti dallo scenario di interesse. In particolare, si distinguono due macro-categorie di modelli, a seconda se la variabile di stato è *discreta* oppure *continua*. Inoltre questa variabile può anche essere *uni-dimensionale* o *multi-dimensionale*, a seconda di quanti argomenti si vogliono considerare contemporaneamente.

Un altro aspetto fondamentale che differenzia tra loro i modelli riguarda il tipo di interazione ammissibile tra gli agenti: interazioni *tra coppie* o interazioni basate *su gruppi* di utenti. Proprio a causa delle interazioni, la variabile di stato dell'opinione si modifica nel tempo, portando ad uno stato collettivo di consenso, alla polarizzazione o alla frammentazione dei pareri, come visto nella sezione [1.3]. Da notare, quindi, che il comportamento dell'opinione nel tempo è strettamente correlato alla topologia della rete sottostante ([Castellano et al., 2009a], [Xia et al., 2011]).

Nonostante la limitata accessibilità dei dati empirici con cui effettuare un confronto, l'analisi dei modelli delle dinamiche di opinione fornisce intuizioni sui meccanismi sociali alla base dello scambio di informazioni, dell'opinione pubblica e della formazione di gruppi. Inoltre, la versatilità dei modelli permette di studiare una varietà di effetti, che vanno dall'influenza dei media, ovvero un'influenza esterna che ha effetto su tutti gli agenti ([Sîrbu et al., 2017]), all'interazione adattativa tra le dinamiche di opinione e la struttura dei social network ([Gross and Blasius, 2008], [Iniguez et al., 2009]). Per questa serie di scopi sono stati sviluppati numerosi metodi di analisi, dai trattamenti analitici esatti e approssimati, agli schemi di simulazione efficienti.

2.1.1 Modelli con opinioni discrete

In questi modelli, ad ogni individuo, caratterizzato dall'indice i e corrispondente ad uno degli N nodi sul grafo, è associata una variabile di stato *discreta* per le opinioni, indicata dal simbolo $x_i(t)$. L'assunzione più semplice è quella di considerare la variabile di stato binaria, cioè $x_i(t) \in \{0,1\}$, $\forall i = 1, \dots, N$ ad ogni istante di tempo t e per ognuno degli N agenti della rete. Ovviamente 0 e 1 sono semplici simboli utilizzati per rappresentare due diverse possibilità di opinione da parte degli utenti, ad esempio "1 = a favore" di un determinato tema, "0 = contro" lo stesso tema. Assumere che la variabile di stato sia binaria è utile perché permette di semplificare il trattamento matematico del modello, dando così la possibilità di eseguire uno studio approfondito di tutti i possibili esiti della sua evoluzione temporale.

Quando ci sono solamente due stati ammissibili, le regole dinamiche del modello sono incapsulate dai cosiddetti *tassi di transizione*. Questi ultimi sono delle funzioni deterministiche o stocastiche degli stati dei nodi vicini al nodo considerato e, di fatto, corrispondono alle probabilità, per unità di tempo, che un individuo cambi la propria opinione da uno stato all'altro ([Gleeson, 2011]). In questo modo, si può immaginare il modello in analogia ad una diffusione epidemica, nella quale gli agenti diventano 'infetti' (cioè $x = 0 \rightarrow 1$) con tasso F e tornano 'sani' (cioè $x = 1 \rightarrow 0$) con tasso R ([Pastor-Satorras et al., 2015]). Quindi è la forma funzionale sui tassi di transizione F e R a determinare il tipo di modello, così come i suoi stati stazionari dell'opinione collettiva.

Scrivere modelli in termini della forma funzionale dei tassi di transizione consente di esplorare in modo flessibile diverse ipotesi di interazione sociale.

L'ipotesi più semplice che si può fare è l'assunzione di una dipendenza lineare dei tassi di cambio di opinione sulla frazione relativa dei vicini che si trovano nello stato opposto. Tale ipotesi porta al cosiddetto *modello elettorale*, che può essere sia senza rumore ([Clifford and Sudbury, 1973]), sia con rumore ([Granovsky and Madras, 1995]). L'ipotesi lineare

corrisponde ad un meccanismo di cieca imitazione, nel quale gli agenti copiano semplicemente l'opinione dei vicini selezionati casualmente.

Invece, i meccanismi non-lineari sono stati proposti come una generalizzazione del voter model per applicazioni specifiche, come nel linguaggio ([Abrams and Strogatz, 2003], [Vazquez et al., 2010]) e nella competizione tra specie ([Schweitzer and Behera, 2009]). Come esempio di questa tipologia si può pensare al modello q -voter ([Castellano et al., 2009b], [Nyczka et al., 2012]), nel quale è necessaria l'unanimità dell'opinione in un gruppo di influenza (di grandezza q) affinché l'individuo imiti le opinioni dei suoi vicini. Questo implica una dipendenza non-lineare del tasso di infezione F rispetto alla frazione y di nodi vicini nello stato opposto, $F(t) \sim y^q$.

Nella letteratura sono state proposte anche altre forme funzionali, come il *modello a maggioranza* (majority-vote model), dove il tasso di transazione è costituito da una funzione gradino che implica che gli utenti copino solo l'opinione della maggioranza tra i propri vicini ([de Oliveira, 1992]). Esistono anche delle variazioni di questo modello, che rilassano l'ipotesi sulla funzione gradino e propongono un tasso di infezione F di tipo sigmoidale ([Vieira and Anteneodo, 2018], [Vieira et al., 2020]). Queste variazioni sono finalizzate a modellare il comportamento (non)-conformista con cui riprodurre le opinioni per mezzo di un parametro modificabile.

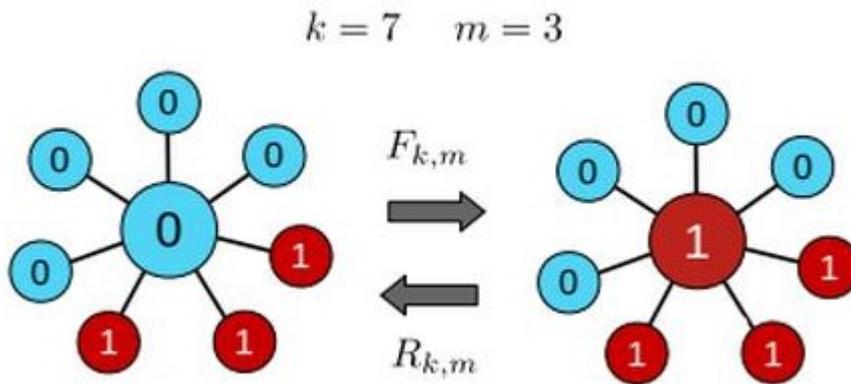


Figura 2.1: Modello di dinamica delle opinioni, con opinioni discrete. In particolare, è riportato il caso di due opinioni (rappresentate dalla variabile $x = 0,1$ e differenziate anche dal colore: $0 \rightarrow$ Azzurro, $1 \rightarrow$ Rosso). I tassi di transizione tra gli stati ($F_{k,m}$ per l'infezione, $x = 0 \rightarrow 1$, e $R_{k,m}$ per la guarigione, $x = 1 \rightarrow 0$) possono essere scritti come funzione del grado della rete k e dal numero di vicini m che si trovano nello stato 1.

Concentrandosi sui tassi di transizione F e R , essi sono chiamati *up-down symmetric* quando le equazioni della dinamica del modello sono invarianti rispetto al cambiamento di stato di $x = 0 \leftrightarrow 1$. Questa particolare proprietà semplifica ulteriormente la formulazione matematica e l'analisi di molti modelli di dinamica delle opinioni ([Gleeson, 2013]). Tale ipotesi può essere ragionevole nel rappresentare determinati casi. Ad esempio, questa simmetria può essere presente in uno scenario di contesto sociopolitico in cui gli individui con opinioni contrarie si comportano nella stessa maniera, cioè la loro risposta all'influenza

delle persone con le quali sono in disaccordo è la stessa per tutti.

Ovviamente, non tutti i contesti possono soddisfare questa supposizione. Infatti, se si pensa ai modelli binari standard di diffusione epidemica o semplice contagio ([Pastor-Satorras et al., 2015]), si ha assenza di simmetria up-down, poiché i processi biologici di infezione e di guarigione da una malattia sono tipicamente diversi tra loro.

Un altro fenomeno prototipo privo di simmetria up-down è il cosiddetto *contagio complesso* (complex contagion) ([Granovetter, 1978], [Morris, 2000]): in questo caso si considerano situazioni in cui gli agenti hanno due alternative e il costo o il beneficio della decisione di ogni utente dipende da quanti altri hanno scelto la stessa opzione, come avviene nella diffusione di news e rumors, o nell'adozione di innovazioni tecnologiche ([Karsai et al., 2014], [Zhang and Vorobeychik, 2019]). Similmente al modello a maggioranza di voto, i modelli di contagio complesso basati su una soglia hanno un tasso di infezione F graduale. Ciò significa che gli agenti hanno bisogno di un certo numero o una certa frazione di vicini che si trovano nello stato opposto per poter cambiare il proprio stato. Invece, il tasso di recupero R può avere una forma funzionale diversa.

Per di più, esiste un'ampia parte di letteratura dedicata alla descrizione matematica delle dinamiche e della diffusione dell'opinione su reti, ad un livello crescente di precisione, che parte dai modelli di campo medio eterogenei ([Sood and Redner, 2005], [Vespignani, 2012]) e arriva alle equazioni principali approssimative ([Gleeson, 2011], [Gleeson, 2013]). Riducendo le dinamiche basate sui singoli agenti a sistemi accoppiati di equazioni differenziali non-lineari, la teoria di campo medio e le approssimazioni di ordine superiore sono utili nel connettere intuitivamente le condizioni iniziali, la struttura di rete e i parametri del modello con stati globali di consenso, coesistenza e polarizzazione delle opinioni.

A seconda del modello, ovvero a seconda della forma funzionale dei tassi di transizione, l'evoluzione temporale e gli stati finali stazionari delle dinamiche previste, a vari livelli di approssimazione, possono coincidere oppure differire. Ad esempio, in una variazione del modello a elettori con rumore ([Peralta et al., 2021]), anche un'approssimazione a livello di campo medio è in grado di fornire delle simulazioni numeriche della dinamica su reti empiriche, con struttura comunitaria. Si può vedere un esempio di questo tipo nella figura 2.2.

Il passo successivo consiste nel tentare di generalizzare le variabili delle opinioni allo scopo di contenere più di due soli stati, con l'obiettivo di rendere i modelli a elettori più realistici ([Herrerías-Azcúe and Galla, 2019], [Vazquez et al., 2019]). Curiosamente, però, si osserva che le versioni a stati binari e quelle multi-stati si comportano in maniera simile, con proprietà statistiche equivalenti, dopo aver opportunamente ridimensionato i parametri. Questo significa che, nella maggior parte delle situazioni, utilizzare un approccio a stati binari, quindi più semplice, può essere sufficiente per catturare le dinamiche di opinione guidate da meccanismi di copiatura.

Un caso in cui, però, risulta utile sfruttare i modelli di opinione multi-stato è la descrizione idealizzata della diffusione culturale. In questo ambito si può prendere a titolo esemplificativo il *modello di Axelrod* ([Axelrod, 1997]). In esso ogni individuo è contraddistinto da un vettore finito di caratteristiche culturali, in cui ogni caratteristica assume uno di q possibili valori, chiamati tratti culturali. Similmente al modello a elettori, gli agenti copiano alcune delle caratteristiche culturali dei vicini dopo aver interagito con loro, ma con probabilità proporzionale alla frazione di caratteristiche comuni condivise.

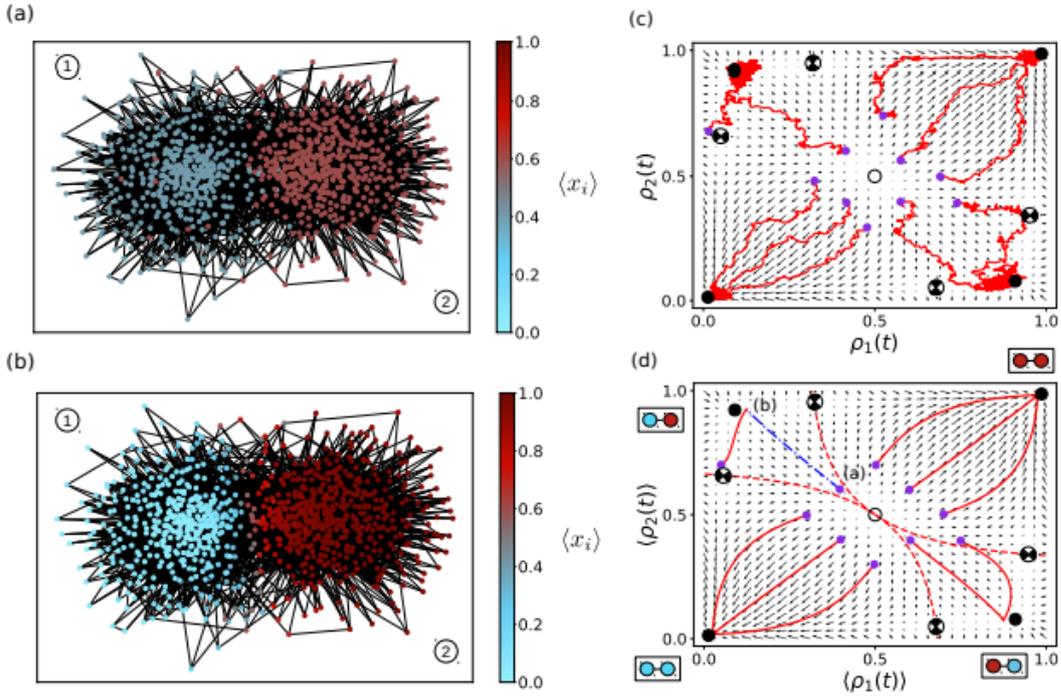


Figura 2.2: Simulazioni e approssimazioni di dinamiche di opinione discrete. In particolare (a) e (b) raffigurano simulazioni numeriche di un modello a elettori con rumore modificato con un tasso di infezione di tipo conformista, costruito su una rete empirica che collega blog liberali/conservatori durante le elezioni americane del 2004. I colori denotano l'opinione media $\langle x_i \rangle$ di ogni individuo negli stati iniziali (figura (a)) e negli stati finali (figura (b)) della dinamica. Con il passare del tempo, il sistema diventa più segregato, fino a quando emergono due gruppi di opinione opposta che coincidono con la struttura comunitaria sottostante.

Nelle immagini (c) e (d), invece, si trova il campo vettoriale della corrispondente approssimazione di campo medio, con $\rho_{1,2}(t)$ che corrisponde alla frazione di persone dei gruppi 1,2 che hanno opinione $x = 1$. Le linee continue denotano delle traiettorie dinamiche di singole simulazioni numeriche (per la figura (c)) e le traiettorie medie rispetto alle realizzazioni (per la figura (d)). Le linee tratteggiate in (d) mostrano la traiettoria dalla condizione iniziale in (a) fino allo stato finale in (b). I piccoli cerchi (in viola) denotano le condizioni iniziali, invece gli altri in nero sono punti fissi stabili o instabili. Infine, i diagrammi negli angoli rappresentano le opinioni maggioritarie all'interno dei gruppi 1 e 2 nelle aree corrispondenti del campo vettoriale.

L'imitazione non è quindi 'cieca', come nel modello a elettori, ma è più probabile per individui già simili, implementando così la nozione di *omofilia* ([McPherson et al., 2001]). Il modello di Axelrod mostra una transizione di fase dagli stati globali mono-culturali a quelli multi-culturali, al crescere del numero q di tratti culturali.

Ora, si introducono i modelli di dinamica delle opinioni caratterizzati da variabili di stato continue. È comunque bene notare che anche in questi casi è spesso possibile ridursi ad opinioni discrete. Se questa riduzione riesce a catturare la fenomenologia della dinamica con precisione sufficiente, è possibile utilizzarla per semplificare il trattamento matematico del modello continuo, tramite alcune delle tecniche introdotte sopra.

2.1.2 Modelli con opinioni continue

Un'altra classe di modelli ampiamente studiata considera la variabile dell'opinione $x_i(t)$ ($i = 1, \dots, N$) come un numero reale, oppure un vettore a componenti reali ([Stauffer, 2005]). L'idea è di rappresentare l'opinione degli individui su uno o più argomenti non tramite un insieme predefinito di possibilità, bensì come un valore (reale) in uno spettro, introducendo una nozione di distanza tra valori. I modelli con opinioni continue possono usare intervalli finiti o infiniti per definire le loro variabili di stato. Per vedere un esempio, ci si può riferire all'immagine 2.3, in cui la variabile di stato $x_i(t) \in [0,1]$. In alternativa si possono utilizzare condizioni al contorno periodiche, definite in modo tale che gli estremi dell'intervallo rappresentino effettivamente la stessa opinione.

Invece, nella dinamica *bounded confidence*, nota anche come modello di Deffuant ([Deffuant et al., 2001], [Lorenz, 2007]), le opinioni giacciono in un intervallo finito reale, ad esempio $x_i(t) \in [0,1]$, ma soprattutto gli individui interagiscono soltanto se le loro opinioni sono sufficientemente simili, quindi se $|x_i(t) - x_j(t)| < \epsilon$. Dopo che avviene l'interazione, le variabili di stato sono aggiornate nel modo seguente:

$$x_i(t+1) = x_i(t) + \mu[x_j(t) - x_i(t)] \quad (2.1)$$

$$x_j(t+1) = x_j(t) + \mu[x_i(t) - x_j(t)], \quad (2.2)$$

cioè, le opinioni diventano più simili tra loro, con un'ampiezza proporzionale alla distanza originale tra le opinioni, regolata dal parametro μ . Un modello di questo tipo è stato presentato, ad esempio, nell'articolo [Nordio et al., 2017], di cui si parlerà più nel dettaglio nella sezione successiva.

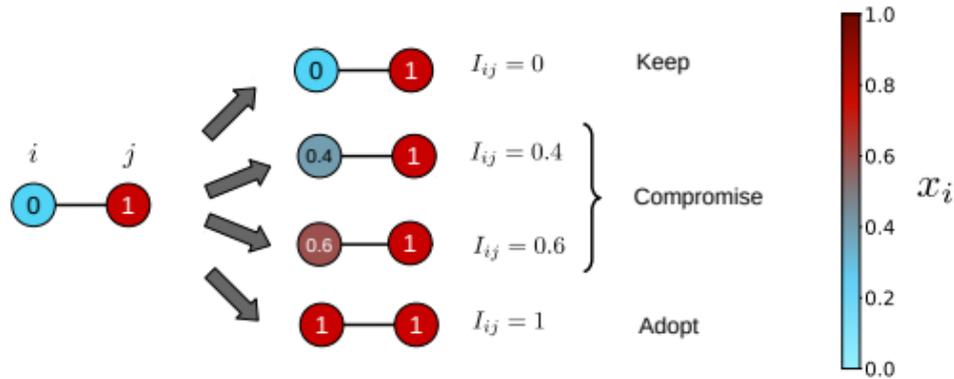


Figura 2.3: Esempio di regole dinamiche di un modello ad opinioni continue con interazioni di coppia tra un individuo i e un suo vicino j . Al tempo t , l'opinione $x_i(t) \in [0,1]$ cambia come $x_i \rightarrow x_i + I_{i,j}(x_j - x_i)$ dopo un'interazione con j . Il fattore di influenza $I_{i,j}$ copre una serie di comportamenti: conserva l'opinione ($I_{i,j} = 0$), sistema l'opinione tramite un compromesso ($I_{i,j} \in (0,1)$) oppure adotta l'opinione ($I_{i,j} = 1$).

In generale, per un ϵ abbastanza grande, le equazioni (2.1) guidano il sistema verso il *consenso*, ovvero uno stato globale nel quale tutti gli individui hanno lo stesso valore

dell'opinione $x_i(\infty) = \tilde{x}$. In particolare, si nota che \tilde{x} è localizzato intorno all'opinione iniziale media, cioè $\tilde{x} \approx \langle x(0) \rangle$. Invece, sotto un certo valore di ϵ si ottiene la *polarizzazione*, dove gli individui appartengono ad uno di due gruppi di opinione a lungo termine. Per vedere un'applicazione concreta di questo concetto, si può osservare l'immagine 2.4, nella quale sono presentate due simulazioni numeriche che conducono ad ottenere proprio questi due casi: consenso globale (nella simulazione in viola) e polarizzazione (nella simulazione in verde).

Non sono però questi due i soli risultati possibili della dinamica tramite un modello di Deffuant. Infatti, con un valore di ϵ sufficientemente piccolo, è possibile ottenere lo stato della *frammentazione*, con tre o più opinioni stazionarie.

Un altro aspetto importante da evidenziare è che le dinamiche con bounded confidence sono fortemente dipendenti dalle condizioni iniziali; inoltre, il rumore può decrescere questa dipendenza, al costo di aggiungere dispersione alla distribuzione finale delle opinioni ([Carro et al., 2013]).

Anche per il modello di Deffuant esistono alcune varianti che permettono di giungere a risultati diversi. Per esempio, in una di queste varianti, è possibile aggiungere uno o più *leader di opinione* ([Chacoma and Zanette, 2015]). Si tratta di agenti speciali, che possiedono opinione fissa nel tempo e che influenzano il resto della popolazione. Comunque, a seconda di quanti leader sono presenti nel modello, ci possono essere comportamenti differenti.

- Sotto l'influenza di un singolo leader di opinione, la popolazione è ancora attratta verso uno stato asintotico di consenso totale. Però, a differenza del caso in assenza di leader, ora l'opinione unanime finale coincide con quella del leader. Inoltre è interessante descrivere che cosa avviene se l'influenza del leader su ogni agente (misurata dalla frequenza con cui avvengono le interazioni reciproche e dal corrispondente fattore di influenza) è bassa o moderata rispetto all'effetto del resto della popolazione. In questo caso, l'evoluzione collettiva delle opinioni mostra due fasi ben separate. In primo luogo, le opinioni avviano una rapida discesa verso il loro valore medio, come se il leader di opinione fosse assente. Più tardi, tuttavia, le interazioni con il leader iniziano ad avere un effetto considerevole e, in questa seconda fase, l'opinione media si sposta proprio verso l'opinione del leader.
- Se sono presenti due o più leader con pareri diversi, l'opinione della popolazione non è più guidata verso uno stato di consenso totale e, di conseguenza, le opinioni dei singoli individui non coincidono. Infatti, in questa situazione l'opinione di ogni agente continua ad evolversi indefinitamente, a causa delle interazioni con i leader e con gli altri agenti che possiedono un'opinione diverse, anche se la distribuzione delle opinioni sulla popolazione è statisticamente invariante. Inoltre, per completezza è giusto far notare che, in un caso particolare, anche in presenza di più leader è possibile ottenere il consenso globale: se e soltanto se tutti i leader condividono lo stesso parere.

Nella letteratura sono comunque stati proposti altri modelli a variabili continue. Uno di questi casi è fornito dal *modello di DeGroot* ([DeGroot, 1974]), nel quale gli stati sono costituiti da una media ponderata rispetto alle opinioni del vicinato della rete. La regola

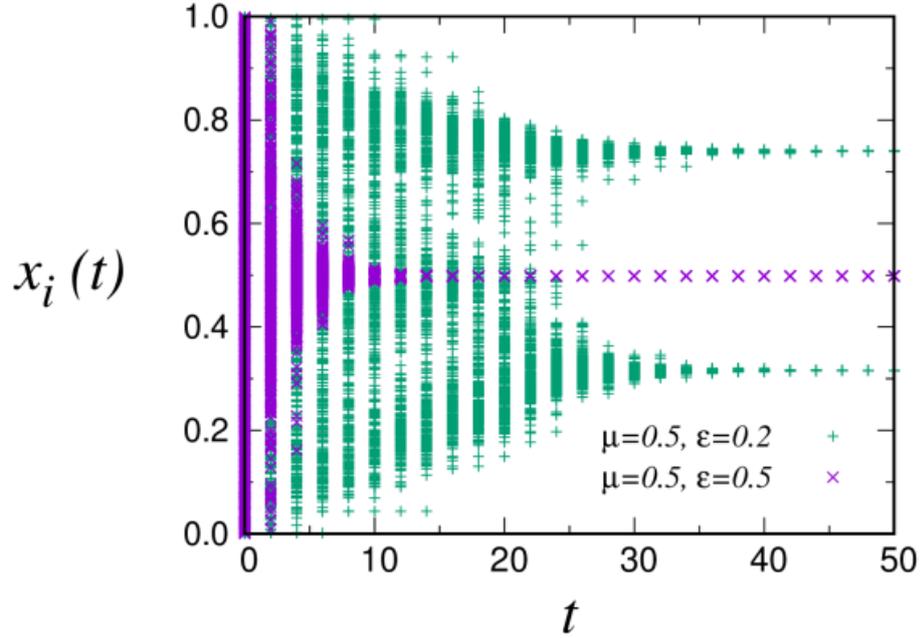


Figura 2.4: Simulazioni di dinamiche di opinione continua. L'immagine raffigura due simulazioni numeriche effettuate sul modello di opinione continua di Deffuant (equazioni (2.1)) con $N = 10^3$ individui. Per entrambe le simulazioni sono state utilizzate delle condizioni iniziali generate casualmente nell'intervallo $[0,1]$. Per ogni agente, viene mostrata l'evoluzione temporale $x_i(t)$, dove l'unità di tempo è $\Delta t = 1$. Ad ogni unità temporale corrispondono N interazioni tra coppie di utenti. Nella figura, il parametro che regola la forza delle interazioni è $\mu = 0.5$ e il parametro di bounded confidence ϵ assume due valori diversi nelle due simulazioni: $\epsilon = 0.2$ nel caso in cui si utilizza il simbolo '+' in verde, $\epsilon = 0.5$ nel caso in cui si utilizza il simbolo 'x' in viola.

di aggiornamento utilizzata solitamente è la seguente: i cambiamenti dipendono soltanto dalle variabili di stato nello step precedente. L'opinione $x_i(t) \in [0,1]$ evolve in accordo con:

$$x_i(t+1) = \sum_{j=1}^N p_{i,j} x_j(t), \quad (2.3)$$

dove $p_{i,j}$ sono dei pesi normalizzati in modo tale che $\sum_{j=1}^N p_{i,j} = 1$.

In particolare, il modello di DeGroot si riduce ad un problema algebrico, con delle dinamiche dipendenti dalla topologia delle rete delle interazioni sottostante. Iterando l'equazione (2.3), il sistema termina in uno stato di consenso senza dispersione dell'opinione (se sono soddisfatte alcune condizioni sulla matrice le cui entrate sono i pesi $p_{i,j}$), comportandosi in maniera simile al modello di Deffuant con parametro ϵ sufficientemente grande.

Un ulteriore aspetto interessante sui modelli continui è che parecchi di loro, originariamente costruiti per studiare altri tipi di comportamenti collettivi (ad esempio il comportamento degli animali), sono poi anche stati interpretati come modelli di dinamica delle opinioni. Essi solitamente si presentano nella forma di equazioni differenziali non-lineari accoppiate, ognuna delle quali raffigura il comportamento di variabili di stato appropriate. In questo ambito, recentemente è stato proposto un modello di opinione per la polarizzazione in spazi tematici multidimensionali ([Baumann et al., 2021]). Questo modello viene presentato, sottolineando alcuni dettagli, nella sezione successiva.

2.2 Alcuni modelli a titolo di esempio

In questa sezione sono presentati alcuni modelli che si possono trovare in letteratura. In particolare, si cerca di fornire un panoramica generale di come sono costruiti e di quali sono i loro obiettivi, sottolineando soprattutto i loro aspetti innovativi. Inoltre, gli esempi presentati sono modelli che possono essere estesi a casi multidimensionali, poiché il modello di riferimento di questo elaborato rientra in questa tipologia, con l'obiettivo di allargare la visione del problema considerato, mettendo in mostra ulteriori dettagli.

2.2.1 Esempio 1

Il primo modello di cui si parla è il soggetto dell'articolo [Baumann et al., 2021].

In questo articolo viene proposto un semplice esempio caratterizzato dall'emergere di stati ideologici polarizzati a partire da interazioni microscopiche tra gli individui, assumendo che non ci sia una struttura sociale preesistente e non ci sia nemmeno un vincolo di confidenza o alcuni attributi individuali degli agenti correlati tra loro. Si trova che la co-evoluzione delle interazioni sociali e delle opinioni non solo può portare ad opinioni estreme, ma può anche causare il problema dell'allineamento, di cui si è già parlato nella sezione [1.3]. Ciò che sorprende di più, però, è il fatto che il fenomeno dell'allineamento emerge anche considerando temi piuttosto scorrelati e sufficientemente controversi tra loro.

Per entrare un po' più nei dettagli, questo modello è basato su un insieme minimale di assunzioni:

1. Le opinioni evolvono in base alle interazioni sociali tra gli agenti, che sono guidate dall'*omofilia*, ovvero due individui che condividono pareri simili è più probabile che interagiscano. Questo tipo di evoluzione implica che il modello di connettività degli agenti non è statico, ma dinamico: l'evoluzione della rete è guidata dalle dinamiche delle opinioni, nell'ipotesi di interazioni omofile. Allo stesso modo, le opinioni evolvono in base a tali interazioni sociali, formando un ciclo di feedback che porta a una co-evoluzione della topologia della rete e della distribuzione delle opinioni.
2. Due utenti connessi tra loro che condividono opinioni simili possono rafforzare reciprocamente le proprie posizioni. Questo rafforzamento avviene quando gli individui, attraverso uno scambio di argomentazioni, si influenzano gli uni con gli altri in maniera additiva.

3. Le opinioni giacciono in uno spazio euclideo multidimensionale, generato da una base non-ortogonale formata dai diversi topics. Inoltre i topics possono essere controversi e si possono sovrapporre, cioè è ammissibile l'esistenza di un'intersezione di argomenti valida per diversi topics.

Stabilite queste assunzioni, il modello genera tre scenari differenti:

- a) convergenza verso un *consenso globale*;
- b) *polarizzazione* di opinioni *non correlate*;
- c) polarizzazione con allineamento, cioè formazione di uno *stato ideologico polarizzato*.

È interessante notare che l'ideologia emerge dalla polarizzazione non correlata semplicemente rilassando l'assunzione di avere una base ortogonale dello spazio degli argomenti. Inoltre, queste tre fasi distinte (consenso, polarizzazione non correlata, ideologia) non sono né assunte a priori nella struttura delle interazioni sociali, né sono guidate da forze globali, bensì emergono dalle interazioni microscopiche tra gli agenti. Infatti, è la descrizione del sistema sociale *a livello microscopico* ((i) interazioni sociali tempo-varianti e omofile; (ii) opinioni guidate da una dinamica rafforzativa; (iii) spazio degli argomenti non-ortogonale), che porta all'emergere di differenti configurazioni *a livello macroscopico*.

L'ossatura del lavoro svolto in questo articolo è basata sulla generalizzazione di un semplice modello uni-dimensionale che descrive dinamiche di polarizzazione, portandolo verso un caso multi-dimensionale, con l'ipotesi di avere una base dei topic non-ortogonale. Questa assunzione, come già accennato, implica che i temi, che formano la base dello spazio su cui giacciono le opinioni, potrebbero non essere completamente indipendenti, ma sono liberi di mostrare un certo grado di sovrapposizione. Una sovrapposizione non nulla tra due temi diversi potrebbe sorgere a causa di un insieme comune di argomenti che contemporaneamente supportano (o contrastano) determinate posizioni su entrambi i temi. L'aspetto più interessante, comunque, resta il fatto che anche piccole sovrapposizioni possono influenzare in modo importante la formazione delle opinioni e, quindi, possono portare alla formazione degli stati ideologici di opinione.

Modello matematico

Si considera un sistema di N agenti. Ogni utente i esprime un'opinione su ognuno dei T distinti argomenti considerati, e l'insieme dei pareri di ogni utente è rappresentato da un vettore $\mathbf{x}_i = (x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(T)})$. Ogni componente del vettore $x_i^{(k)} \in (-\infty, +\infty)$ e denota l'opinione dell'agente i riguardo l'argomento k . Inoltre, il segno dell'opinione $x_i^{(k)}$, $\text{sgn}(x_i^{(k)})$, descrive la posizione qualitativa dell'individuo i riguardo al topic k , ovvero se egli è a favore (generalmente se il segno è positivo) oppure contro (se il segno è negativo) rispetto all'argomento considerato. Invece, il valore assoluto di $x_i^{(k)}$, $|x_i^{(k)}|$, quantifica la forza del parere o, in altri termini, la convinzione rispetto ad una delle due parti. In sostanza, il vettore \mathbf{x}_i rappresenta la posizione dell' i -esimo agente nello *spazio degli*

argomenti T –dimensionale \mathcal{T} . Quindi, il vettore delle opinioni può essere riscritto come:

$$\mathbf{x}_i = \sum_{k=1}^T x_i^{(k)} \mathbf{e}^{(k)}, \quad (2.4)$$

dove $\{x_i^{(k)}\}$ è l'insieme delle coordinate dell'individuo i , mentre $\{\mathbf{e}^{(k)}\}$ forma una base dello spazio Euclideo \mathcal{T} , che rappresenta gli argomenti sotto indagine. Affinché $\{\mathbf{e}^{(k)}\}$ sia effettivamente una base per \mathcal{T} , bisogna assumere l'indipendenza lineare di ogni suo elemento, ma non è strettamente necessaria l'ortogonalità.

I vettori delle opinioni degli agenti evolvono nel tempo, cioè $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(t)$ (per semplificare la notazione verrà sottintesa la dipendenza dal tempo t). Si assume che l'evoluzione delle opinioni segua una *dinamica di radicalizzazione*, ovvero un meccanismo che riproduce la polarizzazione e le camere d'eco¹ che si trovano nei social network empirici. All'interno di questa struttura, le opinioni di un agente sono rafforzate dalle interazioni con altri agenti che condividono punti di vista simili. Questo meccanismo si ispira al fenomeno della polarizzazione di gruppo, nel quale le interazioni all'interno di un gruppo possono portare le opinioni a diventare più estreme.

Inoltre, un ulteriore aspetto innovativo di questo modello è dato dal fatto che anche le interazioni sociali responsabili delle dinamiche di opinione non sono considerate statiche, ma evolvono nel tempo, formando una *rete sociale tempo-variante*. Essa può essere rappresentata da una matrice di adiacenza temporale $A_{i,j}(t)$, con $A_{i,j}(t) = 1$ se gli agenti i e j sono connessi all'istante temporale t , invece $A_{i,j}(t) = 0$ nel caso opposto.

L'evoluzione nel tempo delle opinioni è unicamente guidata dalle interazioni tra gli individui ed è descritta da un insieme di $N \times T$ equazioni differenziali ordinarie:

$$\dot{x}_i^{(k)} = -x_i^{(k)} + K \sum_j A_{i,j}(t) \tanh(\alpha [\Phi \mathbf{x}_j]^{(k)}) \quad i = 1, \dots, N \times T, \quad (2.5)$$

dove $K > 0$ denota la forza dell'influenza sociale che agisce globalmente tra gli utenti. Più grande risulta essere la K , maggiore è l'influenza sociale esercitata dagli agenti sui propri colleghi.

In accordo con l'equazione (2.5), l'opinione dell'agente i riguardo l'argomento k , cioè la variabile $x_i^{(k)}$, evolve con dipendenza dagli input aggregati dei suoi vicini, che sono determinati dalla matrice di adiacenza temporale $A_{i,j}(t)$. L'input sociale di ciascun agente j che contribuisce al cambiamento di $x_i^{(k)}$, cioè il termine $[\Phi \mathbf{x}_j]^{(k)}$, è attenuato dalla funzione di influenza $\tanh(\alpha [\Phi \mathbf{x}_j]^{(k)})$, che regola le influenze reciproche che le opinioni dei diversi agenti esercitano l'una sull'altra. La scelta di utilizzare la funzione *tangente iperbolica* segue da alcuni risultati sperimentali. Infatti, in questi esperimenti si vede come l'influenza delle opinioni estreme risulta essere limitata e quindi deve essere descritta da una funzione sigmoideale, tra le quali si può scegliere la funzione $\tanh(\cdot)$.

In questo modello la forma della funzione di influenza è controllata dal parametro α :

¹Un ambiente in cui una persona incontra soltanto convinzioni che coincidono con le proprie, in modo che le sue opinioni esistenti vengono rafforzate, mentre le idee alternative non vengono prese in considerazione

- per α *piccolo*, l’influenza sociale degli individui con opinioni moderate sugli altri agenti è debole;
- per α *grande*, anche utenti con opinioni moderate possono esercitare una forte influenza sugli altri.

Allora, il parametro α può anche essere interpretato come la *controversia* degli argomenti (controversialness), che si è dimostrato essere un fattore importante che guida l’emergere della polarizzazione nei dibattiti sui social media online.

Per semplicità, nell’articolo si fa l’assunzione che α denoti la controversia generale della discussione su tutti gli argomenti considerati: cioè viene settato lo stesso valore del parametro α per ogni argomento considerato.

Sempre facendo riferimento all’equazione (2.5), si osserva che un agente j esercita un’influenza sociale su un agente i a lui connesso rispetto a tutti gli argomenti sotto considerazione, e che l’opinione di un utente su un topic specifico è influenzata dall’opinione degli altri utenti non solamente sullo stesso topic, ma anche, in generale, su altri temi. Questa influenza è riflessa nella matrice simmetrica di sovrapposizione degli argomenti Φ , che codifica le relazioni tra i vari temi considerati. Se il generico elemento della matrice $\Phi_{u,v}$ è diverso da zero, le opinioni degli agenti sul topic u possono influenzare le opinioni degli altri agenti riguardo al topic v , e viceversa, dato che la matrice è simmetrica. Inoltre, la matrice Φ possiede anche una rappresentazione geometrica nello spazio degli argomenti. Infatti, l’elemento $\Phi_{u,v}$ può essere interpretato come il prodotto scalare tra i temi u e v : $\Phi_{u,v} = \mathbf{e}^{(u)} \cdot \mathbf{e}^{(v)} = \cos(\delta_{u,v})$, dove $\delta_{u,v}$ rappresenta l’angolo presente tra i due argomenti sotto osservazione. Sostanzialmente, $\cos(\delta_{u,v})$ quantifica la sovrapposizione tra i temi u e v . Quindi, il prodotto scalare tra due vettori delle opinioni \mathbf{x}_i e \mathbf{x}_j calcolato nello spazio degli argomenti \mathcal{T} (generato da questi argomenti non-ortogonali) è dato da:

$$\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j = \mathbf{x}_i^T \Phi \mathbf{x}_j = \sum_{u,v} x_i^{(u)} x_j^{(v)} \cos(\delta_{u,v}), \quad (2.6)$$

in cui si include la matrice di sovrapposizione Φ . È ancora utile notare che vale sempre $\Phi_{u,u} = 1$, così che, se tutti i topic sono anche ortogonali (e quindi $\Phi_{u,v} = 0$), allora la matrice Φ si riduce alla matrice identità e l’equazione (2.5) si disaccoppia rispetto agli argomenti.

Invece, il modello di contatto tra gli agenti, che sostiene la formazione dell’opinione, evolve in accordo con il modello *Activity Driven* (AD). Questa evoluzione dà origine ad una rete temporale che cambia ad intervalli discreti di tempo. Seguendo il modello AD originale, ogni agente i è caratterizzato da un’attività $a_i \in [\epsilon, 1]$, che rappresenta la probabilità di diventare attivo in un dato passo temporale. Al momento dell’attivazione, l’agente i contatta altri m utenti distinti scelti casualmente. Le attività a_i vengono estratte in maniera indipendente dalla distribuzione della legge di potenza $F(a) \sim a^{-\gamma}$, come suggerito da risultati empirici, in modo tale che l’insieme di parametri (ϵ, γ, m) definisce completamente il modello AD di base.

In cima alla dinamica AD di base, si assume che le interazioni sociali siano guidate dall’omofilia. A questo scopo, la probabilità che un agente attivo i entri in contatto con un altro individuo j è modellata come una funzione decrescente della distanza tra le opinioni:

$$p_{i,j} = \frac{d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)^{-\beta}}{\sum_j d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)^{-\beta}}, \quad (2.7)$$

dove $d(x_i, x_j)$ è l'usuale distanza Euclidea tra i vettori delle opinioni, generata dal prodotto scalare definito nell'equazione (2.6). Invece, l'esponente β controlla il decadimento della legge di potenza della probabilità di connessione con la distanza di opinione. Come risultato dell'equazione (2.7) si vede che due individui i e j sono più portati ad interagire se sono vicini nello spazio degli argomenti \mathcal{T} , cioè se la distanza $d(x_i, x_j)$ è piccola.

Per riassumere, ad ogni passo temporale t , una differente matrice di adiacenza $A_{i,j}(t)$ viene generata dalla dinamica AD. Le opinioni sono allora aggiornate di conseguenza, sulla base di $A_{i,j}(t)$, come viene esplicitato dall'espressione (2.5). Nel passo temporale successivo, viene creata una nuova matrice di adiacenza e le opinioni sono nuovamente aggiornate in accordo con quest'ultima. Dunque, poiché la generazione di $A_{i,j}(t)$ dipende dalle opinioni degli utenti per mezzo dell'omofilia, la rete temporale co-evolve all'interno della dinamica delle opinioni.

Nel momento in cui avviene un'interazione tra gli agenti i e j (cioè se $A_{i,j}(t) = 1$), le opinioni dell'individuo j influenzano tutte le opinioni dell'individuo i , seguendo la funzione di influenza sigmoidale data dall'equazione (2.5).

Se le posizioni di due agenti interagenti i e j su un argomento u sono uguali, ovvero $\text{sgn}(x_i^{(u)}) = \text{sgn}(x_j^{(u)})$, allora essi rafforzano la loro convinzione corrente riguardo questo tema, che è fornita dal valore assoluto delle coordinate delle opinioni $|x_i^{(u)}|$ e $|x_j^{(u)}|$. Al contrario, se $\text{sgn}(x_i^{(u)}) \neq \text{sgn}(x_j^{(u)})$, i due individui tendono a far decrescere le proprie convinzioni su questo specifico argomento u e si muovono verso la convergenza ad un consenso.

Approssimazione tramite la teoria di campo medio

La dinamica del modello dato dall'equazione (2.5), nel limite termodinamico ($N \rightarrow +\infty$, con N numero di individui totali) e con forte omofilia ($\beta \gg 1$), può essere qualitativamente catturata all'interno di una approssimazione di campo medio. Applicando questo metodo, si ottiene una dinamica che risulta essere notevolmente simile al comportamento del modello stocastico discreto.

- Per valori di α piccoli c'è un unico punto fisso stabile, corrispondente al consenso globale $\mathbf{x}_i(t \rightarrow +\infty) = 0, \forall i$.
- Al crescere di α , il consenso perde la stabilità.
 - Se gli argomenti sono ortogonali, questa destabilizzazione porta alla formazione di quattro punti fissi stabili, corrispondenti a uno stato polarizzato non correlato.
 - Se invece gli argomenti si sovrappongono (non sono più ortogonali), allora si rompe la simmetria ed emergono solo due punti fissi stabili, corrispondenti a degli stati ideologici.

All'interno del contesto della teoria del campo medio, la transizione dal consenso globale alla polarizzazione può essere descritta analiticamente. Per $T = 2$, il limite di stabilità della fase di consenso è determinato dal valore critico di controversia α_c :

$$\alpha_c = \frac{1}{2Km\langle a \rangle [1 + \cos(\delta)]}. \quad (2.8)$$

Questo valore è inversamente proporzionale alla forza di influenza sociale K , al numero di agenti m che sono a contatto con un agente attivo, all'attività media $\langle a \rangle$ ed al fattore $[1 + \cos(\delta)]$ che tiene conto della sovrapposizione dei due topics.

In definitiva, l'equazione (2.8) fornisce spunti per la previsione dell'emergere della fase ideologica riguardo la discussione di due temi. Per esempio, se si osservano due coppie di argomenti con piccole, simili sovrapposizioni tematiche (valori di $\cos(\delta)$ piccoli), allora ci si aspetta che il fenomeno dell'ideologia emerga con maggiore probabilità nella coppia più controversa (ovvero con α maggiore). Inoltre, emerge che la controversia critica α_c è inversamente correlata al tasso di interazione sociale $m\langle a \rangle$. Questa relazione implica che, all'interno dei contesti in cui le interazioni sociali accadono più frequentemente, come ad esempio i social media online, anche i topics con controversia minore possono portare alla nascita del fenomeno dell'ideologia.

Caso in dimensioni più alte

Fino a questo punto è stato analizzato solamente il caso più semplice, cioè quello in due dimensioni. Ora, invece, si studia brevemente il comportamento del modello in un caso a dimensioni più alte.

Mentre per due argomenti u e v ($T = 2$) tutte le potenziali relazioni tra coppie di topics sono codificate in un unico parametro (la loro reciproca sovrapposizione data da $\cos(\delta_{u,v})$), il numero di angoli tra diverse coppie di argomenti aumenta in modo quadratico al crescere della dimensione T dello spazio degli argomenti (cresce come $T(T - 1)/2$). Per questo motivo, in questa analisi ci si concentra solamente sul caso con tre argomenti u , v e z . Questo scenario può essere effettivamente descritto da tre fattori di sovrapposizione tra i temi: $\cos(\delta_{u,v})$, $\cos(\delta_{u,z})$ e $\cos(\delta_{v,z})$.

È interessante vedere illustrati alcuni risultati di questo caso particolare, ottenuti con delle simulazioni numeriche e riportati nella figura 2.5. Nel caso specifico, ci si focalizza su un regime di forte influenza sociale ($K = 3$) e di alta omofilia ($\beta = 3$). Inoltre, poiché il maggiore interesse si ha nell'ottenere esempi di polarizzazione o di formazione di ideologie, si assume anche che gli argomenti siano molto controversi ($\alpha = 3$).

Se il tema z non si sovrappone con gli altri due temi (cioè $\cos(\delta_{u,z}) = \cos(\delta_{v,z}) = 0$), allora emerge uno stato di polarizzazione non-correlato. Ciò è quello che accade nel sotto-caso (a) della figura, nella quale le opinioni finali sono disegnate con dei pallini neri. Invece, i pallini colorati corrispondono alla proiezione degli stati dell'opinione tridimensionali sul piano bidimensionale (u, v) . Osservando questa proiezione ci si può accorgere che il suo comportamento è analogo a quello che emerge dal caso bidimensionale analizzato nella sezione [2.2.1].

Si considera ora un esempio in cui il terzo argomento z presenta una sovrapposizione finita con gli altri due argomenti (per semplicità si ipotizza che tale sovrapposizione

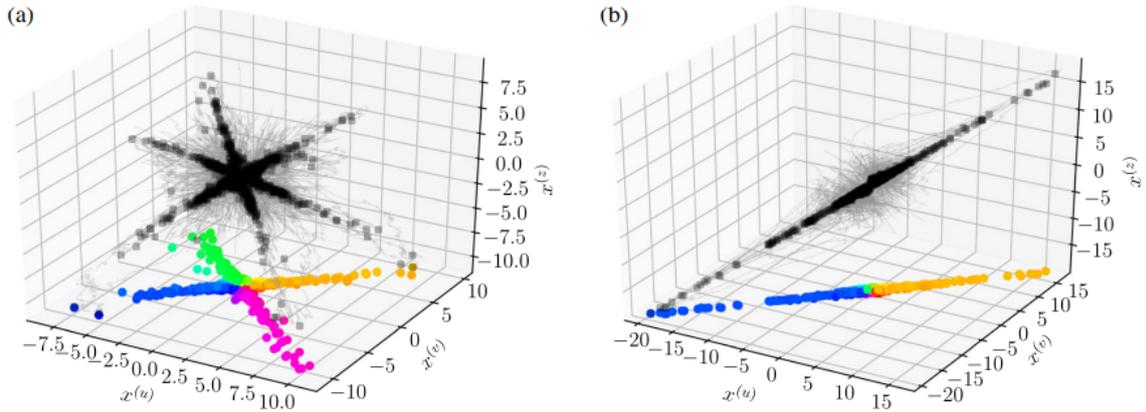


Figura 2.5: Evoluzione temporale delle opinioni degli agenti, in uno spazio degli argomenti di dimensione $T = 3$. L'evoluzione delle opinioni emerge dalle simulazioni numeriche, con forte influenza sociale ($K = 3$), forte controversia ($\alpha = 3$) e alta omofilia ($\beta = 3$). Le linee grigie e i pallini neri raffigurano rispettivamente la dinamica temporale delle opinioni degli utenti e gli stati stazionari. In entrambi i casi (a) e (b) gli argomenti u e v sono ortogonali. Inoltre, nel pannello (a) anche il tema z è ortogonale a u e v . In questo caso emerge uno stato di polarizzazione non-correlato, con una debole correlazione tra le tre opinioni: $\rho(x^{(u)}, x^{(v)}) = 0.15$, $\rho(x^{(u)}, x^{(z)}) = 0.17$ e $\rho(x^{(v)}, x^{(z)}) = 0.11$. Viceversa, nel pannello (b) il topic z presenta una sovrapposizione finita con entrambi i temi u e v , cioè $\delta_{u,z} = \delta_{v,z} = \pi/4$. In questo caso emerge uno stato ideologico: le opinioni rispetto ai tre argomenti sono correlate, $\rho(x^{(u)}, x^{(v)}) \simeq \rho(x^{(u)}, x^{(z)}) \simeq \rho(x^{(v)}, x^{(z)}) \simeq 1$.
 NOTA: per semplicità dell'illustrazione il pannello (b) è stato comunque rappresentato utilizzando gli assi ortogonali tra loro.

sia uguale: $\cos(\delta_{u,z}) = \cos(\delta_{v,z}) > 0$). Questo caso porta alla formazione di uno stato ideologico polarizzato, come viene mostrato nel pannello (b) della figura 2.5, nel quale emerge un'alta correlazione delle opinioni rispetto ai temi u e v ($\rho_{u,v} \simeq 1$), anche se u e v si mantengono ortogonali. Anche in questo campione è presente una forte analogia con il caso bidimensionale, ben visibile osservando nuovamente la proiezione sul piano (u, v) . Questo risultato indica quindi che uno stato ideologico si può formare anche su argomenti del tutto estranei tra loro (ortogonali), come u e v , se lo spazio dei topic viene espanso in una dimensione più alta e altri temi correlati sono presi in considerazione (come z nell'esempio).

Questo caso in dimensioni più alte presenta alcune implicazioni. Innanzitutto è bene notare che la definizione stessa di *argomenti rilevanti* nella discussione pubblica è difficile. All'interno della struttura di lavoro proposta, questa difficoltà si traduce nel fatto che il numero di dimensioni non è noto a priori. Infatti, i risultati ottenuti forniscono una possibile spiegazione per l'emergere di correlazioni delle opinioni su due argomenti completamente estranei tra loro. Tale spiegazione si sofferma sul fatto che le correlazioni tra due argomenti potrebbero essere dovute alla presenza di un terzo tema rilevante, correlato agli altri due, che deve essere incluso nell'analisi. Temi di quest'ultimo tipo potrebbero essere presenti, sebbene non siano coperti dall'insieme dei dati empirici. Quindi, in conclusione, questo lavoro può suggerire la ricerca di tali dimensioni nascoste.

2.2.2 Esempio 2

Un secondo esempio di cui è interessante parlare si trova nell'articolo [Nordio et al., 2017]. Questo modello, in particolare, è il predecessore del modello che fa da riferimento principale per il lavoro di questo trattato, del quale si trova una descrizione dettagliata nel capitolo [3].

Il tratto distintivo fondamentale di questo paper è sicuramente il fatto che il modello faccia parte della classe di *modelli bounded-confidence*. Come già anticipato, tale classe è caratterizzata dalle interazioni tra agenti che diventano effettive solamente quando le opinioni sono sufficientemente simili tra loro, ovvero solamente quando la differenza tra i diversi pareri rimane al di sotto di una data soglia fissata.

Da una parte, i modelli bounded confidence sono particolarmente interessanti, perché permettono di rappresentare dei comportamenti sociali che dipendono direttamente dalle opinioni, come l'omofilia, la quale si può spesso osservare in fenomeni reali. Dall'altro lato, per la loro analisi si pongono davanti parecchie sfide, dato che le equazioni che guidano le interazioni sociali diventano *non-lineari*.

Nell'articolo considerato, gli autori si concentrano sullo sviluppo di un modello adatto e completo di dinamica delle opinioni sociali, che può tenere conto della bounded confidence, cercando comunque di fare un significativo passo avanti rispetto agli esempi che si potevano trovare in letteratura in quel momento.

1. Viene generalizzato un modello preesistente: si combinano caratteristiche come le interazioni sociali vincolate, la bounded confidence, la dinamica dell'opinione endogena dell'agente e si introduce il *pregiudizio* degli agenti. L'introduzione di quest'ultima caratteristica è importante perché assicura la *stabilità* del sistema (quindi le opinioni non possono esplodere all'infinito).
2. Nel caso più generale in cui è presente anche la bounded confidence vengono elaborati alcuni spunti sulla distribuzione stazionaria delle opinioni e, inoltre, sotto ipotesi non particolarmente restrittive, viene anche fornito un metodo computazionale efficiente per derivare tale distribuzione.

Modello matematico

La scaletta seguita in questo articolo è molto simile a quella del paper successivo [Nordio et al., 2019]. Quindi l'analisi approfondita della maggior parte delle caratteristiche del modello verrà eseguita nel capitolo successivo. In questa sezione, perciò, si sottolineano solamente quei tratti distintivi che differenziano questo lavoro dal suo successore.

Inizialmente si studia l'evoluzione temporale delle credenze su un sistema formato da un insieme discreto di agenti, ognuno dei quali può avere diverse opinioni e personalità. Poi, si lascia crescere il numero di individui e si definisce uno spazio continuo bidimensionale formato dalla coppia *opinioni-personalità*. Attraverso tale rappresentazione asintotica del sistema e usando la teoria di campo medio si deriva un'equazione che rappresenta come varia la densità di probabilità degli agenti nel tempo nello spazio opinioni-personalità.

Considerando un insieme di agenti \mathcal{U} , di cardinalità U , con ogni agente i che esibisce una personalità $P_i \in \mathcal{P}$, e rinominando la loro opinione con $\mathbf{x}_i(t) \in \mathcal{X}$, si giunge a scrivere

l'equazione che descrive l'evoluzione nel tempo dell'opinione dell'utente i :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i(t + dt) = \mathbf{x}_i(t) + \frac{1 - \alpha(P_i)}{U} \sum_{\substack{j \in \mathcal{U} \\ j \neq i}} \zeta(|x_j(t) - x_i(t)|, P_i, P_j) [\mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_i(t)] dt + \\ + \alpha(P_i) [\mathbf{u}(P_i) - \mathbf{x}_i(t)] dt + \sigma d\mathbf{w}_i(t), \end{aligned} \quad (2.9)$$

dove sono presenti le seguenti variabili:

- $\alpha(P_i)$ è il livello di testardaggine dell'utente i ;
- $\zeta(|x_j(t) - x_i(t)|, P_i, P_j)$ è la funzione che descrive la presenza e la forza delle interazioni tra gli agenti i e j ;
- $\mathbf{u}(P_i)$ è il vettore che raccoglie tutti i pregiudizi di i rispetto agli argomenti in considerazione;
- $\sigma d\mathbf{w}_i(t)$ è il termine che rappresenta il rumore, modellato come un moto Browniano standard i.i.d., di valor medio nullo e parametro di scala σ^2 .

Questa espressione, si vedrà, risulta essere praticamente la stessa dell'equazione (3.3) del capitolo successivo, con l'unica sostanziale differenza data dal termine ζ .

In questo caso specifico $\zeta(|x_j(t) - x_i(t)|, P_i, P_j) \geq 0$ corrisponde al termine che raffigura la presenza e la forza delle interazioni tra gli agenti i e j . Nel caso più generale, quindi, essa è funzione sia di entrambe le personalità degli utenti in gioco (cioè P_i e P_j), sia della distanza tra le credenze di i e j . È proprio questo termine, ζ , che definisce la struttura della rete sociale.

La differenza sostanziale con il modello del capitolo [3] è quindi data proprio dalla dipendenza di ζ dalla distanza tra le opinioni $|x_j(t) - x_i(t)|$. Infatti questo aspetto permette di includere l'esempio nella classe di modelli con bounded confidence.

In generale, lo studio della dinamica delle opinioni in presenza di bounded confidence è impegnativo, a causa della non-linearità che emerge nelle interazioni tra gli agenti. In questo caso, è stata allora proposta una procedura iterativa, che ha l'obiettivo di ricavare l'unica distribuzione stazionaria dell'equazione di Fokker-Planck.

Per ottenere l'equazione di Fokker-Planck sulla quale effettuare poi l'analisi, come anticipato, si sfrutta la teoria di campo medio, che consente di passare da un modello discreto ad uno continuo. In questo modo si riesce a ricavare l'espressione:

$$\frac{\partial \rho(p, \mathbf{x}, t)}{\partial t} = \frac{\partial [\mu_x(p, \mathbf{x}, t, \rho) \rho(p, \mathbf{x}, t)]}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 \rho(p, \mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}^2}, \quad (2.10)$$

che descrive come varia nel tempo la *distribuzione degli agenti* rappresentata dalla variabile $\rho(p, \mathbf{x}, t)$. Inoltre in (2.10) compare $\mu_x(p, \mathbf{x}, t, \rho)$, che è definita come la velocità istantanea media lungo l'asse \mathbf{x} di un generico agente che al tempo t si trova nella posizione (p, \mathbf{x}) .

Giunti a tale punto si vuole analizzare la dinamica del sistema provando a risolvere l'equazione FP (2.10) in termini di $\rho(p, \mathbf{x}, t)$, in modo da ottenere la distribuzione degli agenti su

\mathcal{Z} (con $\mathcal{Z} = \mathcal{P} \times \mathcal{X}$ spazio continuo bidimensionale). In particolare, si cerca la distribuzione stazionaria di $\rho(p, \mathbf{x}, t)$, ovvero la distribuzione che si ottiene quando $t \rightarrow +\infty$, che si dimostra essere unica e indipendente dalle condizioni iniziali. Chiamata tale distribuzione stazionaria $\rho(p, \mathbf{x})$, si arriva a scrivere:

$$\begin{aligned} \rho(p, \mathbf{x}) = & K(p) \exp\left(\frac{2\bar{\alpha}(p)}{\sigma^2} \int_0^{\mathbf{x}} \int_{\mathcal{Z}} \zeta(|\mathbf{y}' - \mathbf{y}|, p, p')(\mathbf{y}' - \mathbf{y}) \rho(p', \mathbf{y}') dp' d\mathbf{y}' d\mathbf{y}\right) \cdot \\ & \cdot \exp\left(-\frac{\alpha(p)[\mathbf{x} - u(p)]^2}{\sigma^2}\right) \rho_0(p), \end{aligned} \quad (2.11)$$

dove $K(p)$ è una funzione di normalizzazione e $\bar{\alpha}(p) = 1 - \alpha(p)$. Si può anche notare che la soluzione di (2.11) corrisponde al punto fisso dell'operatore $\mathcal{A}\{p\} : \mathbb{L}_1(\mathcal{P}, \mathbb{R}, x^2) \rightarrow \mathbb{C}_x^2(\mathcal{P}, \mathbb{R}, x^2)$, definito come:

$$\mathcal{A}\{p\} = K(p) \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} \int_0^x \mu_x(p, y, \rho) dy\right) \rho_0(p). \quad (2.12)$$

Strategia di approssimazione consecutiva

La soluzione dell'equazione FP, cioè il punto fisso dell'operatore $\mathcal{A}\{p\}$ definito in (2.12), può essere ottenuto, in linea di principio, tramite un metodo di approssimazioni consecutive o successive, a condizione che la sequenza di funzioni che si utilizza converga. Chiamato k l'indice di iterazione, si definiscono le seguenti sequenze di funzioni:

$$\mu_x^{(k)}(p, x, \rho^{(k)}) \triangleq \bar{\alpha}(p) \int_{\mathcal{Z}} \zeta(|x' - x|, p, p')(x' - x) \rho^{(k)}(p', x') dp' dx', \quad (2.13)$$

$$\rho^{(k+1)}(p, x) \triangleq K^{(k)}(p) \exp\left(-\frac{\alpha(p)}{\sigma^2} [x - u(p)]^2\right) \exp\left(\int_0^x \frac{2\mu_x^{(k)}(p, y, \rho^{(k)})}{\sigma^2} dy\right) \rho_0(p), \quad (2.14)$$

dove $K^{(k)}$ è la costante di normalizzazione alla k -esima iterazione. La procedura iterativa inizia con $\mu_x^{(0)} = 0$.

È importante notare che, se valgono le seguenti condizioni:

- (i) $\rho^{(k)}(p, x)$ converge ad un valore $\rho^*(p, x)$ sotto un qualche criterio di convergenza;
- (ii) l'operatore $\mathcal{A}\{p\}$ è continuo in $\rho^*(p, x)$ sotto lo stesso criterio di convergenza,

allora $\rho^{(k)}(p, x)$ converge al punto al punto fisso dell'operatore $\mathcal{A}\{p\}$. Si può dimostrare che esso esiste ed è unico. In particolare, la convergenza all'unico punto fisso ha velocità esponenziale ogni volta che l'operatore $\mathcal{A}\{p\}$ è una *contrazione*.

Quindi, si può coerentemente applicare la procedura iterativa introdotta sopra anche in casi non particolarmente semplici, nei quali, però, si riesce a provare la continuità dell'operatore $\mathcal{A}\{p\}$ (condizione (ii)) e si ha un'evidenza (numerica) sul fatto che $\rho^{(k)}(p, x)$ converga (condizione (i)).

Qualche simulazione numerica del caso con Bounded Confidence

Per concludere questo esempio, si presentano alcune simulazioni numeriche effettuate nel caso più complesso in cui è compreso l'aspetto della bounded confidence. Questi risultati sono stati ottenuti applicando proprio il processo iterativo introdotto nella sottosezione [2.2.2].

In particolare, si assume che:

- le personalità degli agenti siano uniformemente distribuite su $\mathcal{P} = [-1,1]$;
- la testardaggine degli utenti sia costante, $\alpha(p) = \alpha$;
- $u(p) = p$;
- la funzione dell'influenza reciproca sia una approssimazione regolare di una funzione rettangolare centrata, il cui supporto è dato da $|x - x'| \leq 1/3$.

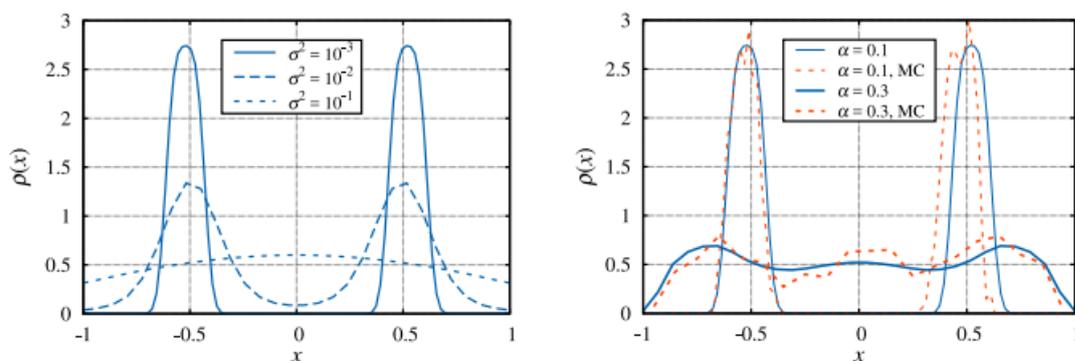


Figura 2.6: Distribuzione stazionaria delle opinioni, nel caso con fiducia limitata (bounded confidence), quando tutti gli agenti hanno lo stesso livello di testardaggine e l'influenza reciproca svanisce con l'aumentare della distanza tra le credenze dei vari individui. In particolare:

- nell'immagine a sinistra si mostra l'impatto del rumore endogeno;
- nell'immagine a destra si mostra l'impatto del parametro di testardaggine α . In questa immagine sono anche raffigurati i risultati di alcune simulazioni Monte Carlo effettuate (in rosso).

L'immagine 2.6 mostra l'effetto di due parametri importanti di questo modello.

- Nella figura a sinistra è mostrata la distribuzione delle opinioni con $\alpha = 0.1$ fissato e con diverse varianze del rumore endogeno. Dalla teoria, ci si aspetta che uno degli effetti della bounded confidence possa essere l'emergere di una *clusterizzazione* (ovvero la formazione di gruppi) delle opinioni. Nel caso particolare mostrato in figura si vede che per piccoli valori di σ^2 (cioè $\sigma^2 = 10^{-3}$) le credenze degli utenti sono ben partizionate in due gruppi distinti, centrati intorno ai valori -0.5 e 0.5 rispettivamente. Inoltre, la distanza tra i cluster è sufficientemente grande, tanto che gli agenti che si trovano nei due gruppi non interagiscono tra loro, mentre quelli all'interno di uno stesso gruppo sono reciprocamente attratti. Al crescere di σ^2 , la diffusione delle credenze all'interno di ogni cluster aumenta a sua

volta e così i gruppi iniziano a mischiarsi (per $\sigma^2 = 10^{-2}$), come conseguenza della ridotta distanza tra le code dei cluster. Infine, i gruppi spariscono totalmente man mano che la varianza del rumore aumenta ulteriormente (ad esempio per $\sigma^2 = 0.1$).

- Nella figura a destra, invece, si guarda all’impatto della testardaggine degli utenti (parametro α). Anche questo parametro gioca un ruolo significativo: aumentare α fino al valore 0.3 fa svanire la clusterizzazione, anche per piccoli valori di σ^2 . La ragione che spiega questo effetto è che, più alto è il valore di α , più debole è l’attrazione reciproca tra le opinioni degli agenti e, di conseguenza, più piccola è la deviazione dal pregiudizio originale.

Inoltre, per validare la tecnica iterativa utilizzata, questa immagine riporta anche la distribuzione di lungo periodo delle opinioni degli agenti ottenuta tramite un simulatore Monte Carlo, nel caso in cui il sistema include 1000 agenti e l’evoluzione delle opinioni segue l’equazione (2.9).

Capitolo 3

Modello matematico con struttura sociale fissa

In questo capitolo si analizza nel dettaglio il modello presentato nell'articolo [Nordio et al., 2019], dato che esso fungerà da struttura di base per gli studi presentati nei capitoli successivi.

Questo paper si pone l'obiettivo di lavorare sulla dinamica delle opinioni che gli agenti possiedono su diversi argomenti, correlati tra loro. Le opinioni vengono quindi rappresentate da variabili vettoriali, che evolvono nel tempo in uno spazio multidimensionale, in cui ogni asse equivale ad un tema differente. Lo scopo di questo lavoro è quello di provare a fare un passo in avanti rispetto ai modelli matematici che erano stati elaborati fino a quel momento. Questo obiettivo viene portato avanti tramite due idee principali:

1. Si generalizzano i modelli lineari multidimensionali ([Parsegov et al., 2016]) introducendo una componente di *rumore*, che rappresenta il processo individuale endogeno di evoluzione dell'opinione.
2. Si migliora ulteriormente il modello aggiungendo la possibilità di avere *interazioni repulsive* (oltre alle *interazioni attrattive*), dovute all'avversione tra gli individui.

Utilizzando questo modello e adottando un approccio di tipo *mean-field* per una popolazione formata da molti utenti, l'evoluzione delle opinioni viene caratterizzata da un'equazione **Fokker-Planck multidimensionale**. Inoltre vengono derivate le condizioni di *ergodicità* (cioè le condizioni sotto le quali esiste un'unica soluzione stazionaria) e, aggiungendo qualche ipotesi lieve, si ottiene anche un'espressione esplicita per la distribuzione stazionaria delle opinioni degli individui.

3.1 Modellazione del sistema

Come primo passo viene definito il modello su un insieme discreto di utenti e si ricava l'equazione che gestisce l'evoluzione temporale delle opinioni per ogni singolo individuo. A questo scopo, si considera un insieme di agenti denominato \mathcal{U} , di cardinalità U . Ogni

agente $i \in \mathcal{U}$ è caratterizzato da una *personalità* $P_i \in \mathcal{P}$, che viene utilizzata per spiegare gli interessi e le abitudini dell'utente in questione, come, ad esempio, i social networks a cui è iscritto o i forum a cui partecipa.

Si assume che tutti gli individui esprimano un'opinione su N diversi argomenti e che questi ultimi siano interdipendenti tra loro, ovvero l'opinione formata su un tema può essere influenzata dai pareri su alcuni altri temi. Per modellare queste dipendenze tra gli argomenti, si introduce la *matrice di accoppiamento* \mathbf{C} , i cui elementi $c_{m,n}$ descrivono il tipo di intreccio esistente da parte dell'argomento m verso l'argomento n .

Le opinioni che ogni individuo $i \in \mathcal{U}$ possiede a riguardo dei differenti temi sono rappresentate da un vettore di dimensione N , denotato con $\mathbf{x}_i(t) \in \mathcal{X}^N$, che evolve nel tempo continuo, $t \in \mathbb{R}_+$.

Un'altra variabile fondamentale che viene inserita in questo modello è il vettore del *pregiudizio* $\mathbf{u}(P_i)$. Esso descrive le credenze che ogni utente ha, a priori, su ogni differente argomento. Inoltre, per come viene definito, il pregiudizio dipende direttamente dalla personalità dell'agente.

A questo punto si utilizza un *grafo*, che permette di rappresentare l'esistenza e l'intensità delle relazioni sociali tra gli utenti della rete, le quali dipendono sia dalla personalità, sia dalle similitudini tra le credenze degli agenti. Inoltre, la reale influenza che gli individui esercitano sugli altri dipende dalle loro opportunità di interagire, così come dalla sensitività alle credenze degli altri (ovvero quanto un utente è influenzabile dalle idee degli altri). Proprio per esprimere nel modello quest'ultimo aspetto, viene ancora aggiunta la variabile $\alpha(P_i) \in (0,1]$. Tale parametro viene chiamato *livello di testardaggine* dell'utente i e gioca un ruolo prezioso nella dinamica delle opinioni. Quando $\alpha(P_i) \rightarrow 1$, l'utente diventa completamente insensibile alle opinioni degli altri, ovvero è un utente testardo. Invece, al decrescere di $\alpha(P_i)$, l'agente è maggiormente disposto ad accettare le credenze degli altri e quindi a farsi influenzare, essendo meno condizionato dal proprio pregiudizio.

Di conseguenza, l'evoluzione dell'opinione dell'agente i lungo il tempo può essere rappresentata come:

$$\mathbf{x}_i(t + dt) = \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{C}\mathbf{d}_{x,i}(t), \quad (3.1)$$

dove $\mathbf{d}_{x,i}(t)$ è il termine responsabile della variazione dei pareri dell'agente i durante l'intervallo di tempo $[t, t + dt]$, mentre $\mathbf{x}_i(t)$ e \mathbf{C} sono le variabili introdotte sopra. In particolare, la quantità $\mathbf{d}_{x,i}(t)$ si può esplicitare come:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{x,i}(t) = & \frac{1 - \alpha(P_i)}{U - 1} \sum_{\substack{j \in \mathcal{U} \\ j \neq i}} \zeta(P_i, P_j) [\mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_i(t)] dt + \\ & + \alpha(P_i) [\mathbf{u}(P_i) - \mathbf{x}_i(t)] dt + \sigma d\mathbf{w}_i(t). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Per analizzare nel dettaglio l'equazione (3.2), si può scomporre l'intera sommatoria in tre pezzi:

- (a) $\zeta(P_i, P_j) [\mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_i(t)] dt$;
- (b) $\alpha(P_i) [\mathbf{u}(P_i) - \mathbf{x}_i(t)] dt$;
- (c) $\sigma d\mathbf{w}_i(t)$.

Il primo termine (a) rappresenta le interazioni dell'agente i con tutti gli altri agenti appartenenti all'insieme \mathcal{U} . Infatti, la variabile $\zeta(P_i, P_j)$ descrive proprio la presenza e la forza delle interazioni tra gli agenti i e j . Essa è una funzione di entrambe le personalità degli agenti in analisi e, in sostanza, definisce la struttura del grafo sociale. È anche bene notare che le interazioni tra individui non dipendono dalla vicinanza delle loro opinioni, cioè sono *indipendenti* dalla differenza $\mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_i(t)$. Inoltre, ogni qual volta che $\zeta(P_i, P_j) = 0$ per qualche individuo i e j della rete, ciò significa che i due agenti non possono in alcun modo influenzarsi, dato che non interagiranno mai. Infine, si assume ancora che ogni elemento di $\zeta(P_i, P_j)$ sia limitato superiormente da una costante, per evitare che ci siano interazioni che esplodono all'infinito.

Il secondo termine (b) rappresenta invece la tendenza di un agente a mantenere o meno il proprio pregiudizio.

Infine, il terzo termine (c) spiega il processo endogeno dell'evoluzione delle credenze all'interno di ciascun agente, ovvero è il termine di *rumore*. Questo processo viene modellato come un moto Browniano standard i.i.d., con valor medio nullo e parametro di scala σ^2 .

Bisogna anche rimarcare il fatto che $\mathbf{x}_i(t + dt)$ dipende dalla personalità dell'agente P_i e, soprattutto, dall'opinione corrente $\mathbf{x}_i(t)$. Perciò, l'evoluzione temporale delle opinioni $\{\mathbf{x}_i(t), i \in \mathcal{U}\}$, è Markoviana sullo spazio \mathcal{Y}^U , dove $\mathcal{Y} = \mathcal{P} \times \mathcal{X}^N$ è uno spazio continuo $(N + 1)$ -dimensionale. In aggiunta, si assume anche che $\alpha(P_i)$, $\zeta(P_i, P_j)$ e ogni elemento di $\mathbf{u}(P_i)$ siano continui rispetto ai propri argomenti. Infine, per semplificare la notazione, il prodotto $\zeta(P_i, P_j)\mathbf{C}$ viene denotato con $\mathbf{Z}(P_i, P_j)$.

Allora, andando a sostituire l'equazione (3.2) nell'espressione (3.1) e usando la notazione appena introdotta, si può scrivere:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i(t + dt) = \mathbf{x}_i(t) + \frac{1 - \alpha(P_i)}{U - 1} \sum_{\substack{j \in \mathcal{U} \\ j \neq i}} \mathbf{Z}(P_i, P_j) [\mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_i(t)] dt + \\ + \alpha(P_i)\mathbf{C} [\mathbf{u}(P_i) - \mathbf{x}_i(t)] dt + \sigma \mathbf{C} d\mathbf{w}_i(t). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Quest'ultima equazione (3.3) fornisce così l'espressione completa, basata su alcune ipotesi introdotte nell'articolo di riferimento, per descrivere l'evoluzione temporale dell'opinione nel caso di un modello discreto.

3.2 Dal modello discreto al modello continuo

A questo punto, si cerca di estendere il modello presentato nella sezione precedente al caso continuo, utilizzando la *teoria di campo medio* (Mean-Field Theory, MFT).

Per entrare un po' più nel dettaglio di ciò che avviene tramite questa procedura, si definisce la *misura di probabilità empirica*, $\rho^{(U)}(dp, d\mathbf{x}, t)$ sullo spazio \mathcal{Y} all'istante di tempo t , come:

$$\rho^{(U)}(dp, d\mathbf{x}, t) = \frac{1}{U} \sum_{i \in \mathcal{U}} \delta_{P_i, \mathbf{x}_i(t)}(dp, d\mathbf{x}). \quad (3.4)$$

Nell'espressione sopra il termine $\delta_{P_i, \mathbf{x}_i(t)}(dp, d\mathbf{x})$ corrisponde alla misura di Dirac centrata in $(P_i, \mathbf{x}_i(t))$, ovvero $\delta_{P_i, \mathbf{x}_i(t)}(dp, d\mathbf{x})$ rappresenta la massa di probabilità associata all'opinione $\mathbf{x}_i(t)$ dell'utente i , che ha la personalità P_i . Si nota anche che in (3.4) gli agenti sono

visti come particelle nello spazio continuo \mathcal{Y} , che si muovono lungo l'asse delle opinioni x . Perciò la funzione $\rho^{(U)}(dp, d\mathbf{x}, t)$ è una *funzione di densità*.

Allora, applicando la teoria di campo medio, si può dimostrare che, quando $U \rightarrow +\infty$, $\rho^{(U)}(dp, d\mathbf{x}, t)$ converge in legge alla distribuzione asintotica $\rho(p, \mathbf{x}, t)$, a condizione che $\rho^{(U)}(dp, d\mathbf{x}, 0)$ converga in legge a $\rho(p, \mathbf{x}, 0)$. Peraltro, $\rho(p, \mathbf{x}, t)$ può essere ottenuta dalla seguente *equazione di Fokker-Planck (FP) non lineare* (equazione che descrive l'evoluzione temporale della funzione di densità di probabilità della posizione di una particella):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho(p, \mathbf{x}, t) = & - \sum_{n=1}^N \frac{\partial}{\partial x_n} \left[\mu_n(p, \mathbf{x}, t) \rho(p, \mathbf{x}, t) \right] + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{m,n=1}^N D_{m,n} \frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_n} \rho(p, \mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (3.5)$$

dove $D_{m,n}$ è la (m, n) -esima componente del tensore di diffusione $\mathbf{D} = \sigma^2 \mathbf{C} \mathbf{C}^T$. Invece $\mu_n(p, \mathbf{x}, t)$ è definita come la componente della *velocità istantanea* di un generico utente, le cui personalità e opinioni all'istante di tempo t sono rispettivamente uguali a p e \mathbf{x} , lungo l'asse x_n . La velocità istantanea è data da:

$$\begin{aligned} \mu(p, \mathbf{x}, t) = & \bar{\alpha}(p) \int_{\mathbf{y} \in \mathcal{X}^N} \int_{\mathcal{P}} \mathbf{Z}(p, q) (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \rho(q, \mathbf{y}, t) d^N \mathbf{y} dq + \alpha(p) \mathbf{C} [\mathbf{u}(p) - \mathbf{x}] \\ = & \bar{\alpha}(p) [\boldsymbol{\gamma}(p, t) - \boldsymbol{\Gamma}(p) \mathbf{x}] + \alpha(p) \mathbf{C} [\mathbf{u}(p) - \mathbf{x}] \\ = & -\boldsymbol{\Xi}(p) \mathbf{x} + \boldsymbol{\phi}(p, t). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Si può notare che in quest'ultima equazione (3.6) compare il termine $\bar{\alpha}(p)$: esso corrisponde ad una semplice notazione, con la quale si intende $\bar{\alpha}(p) = 1 - \alpha(p)$. Invece le altre nuove variabili che compaiono sono definite nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Gamma}(p) \triangleq & \int \int_{\mathbf{y}, q} \mathbf{Z}(p, q) \rho(q, \mathbf{y}, t) d^N \mathbf{y} dq \\ \stackrel{(\star)}{\triangleq} & \int_q \mathbf{Z}(p, q) \rho_0(q) dq; \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\boldsymbol{\gamma}(p, t) \triangleq \int \int_{\mathbf{y}, q} \mathbf{Z}(p, q) \mathbf{y} \rho(q, \mathbf{y}, t) d^N \mathbf{y} dq; \quad (3.8)$$

$$\boldsymbol{\Xi}(p) \triangleq \bar{\alpha}(p) \boldsymbol{\Gamma}(p) + \alpha(p) \mathbf{C}; \quad (3.9)$$

$$\boldsymbol{\phi}(p, t) \triangleq \bar{\alpha}(p) \boldsymbol{\gamma}(p, t) + \alpha(p) \mathbf{C} \mathbf{u}(p). \quad (3.10)$$

In particolare, è bene osservare il passaggio (\star) dell'equazione (3.7): qui viene riscritto $\rho(q, \mathbf{y}, t)$ come $\rho(q, \mathbf{y}, t) = \rho(\mathbf{y}, t|q) \rho_t(q)$. A questo punto si sfrutta il fatto che, per definizione, $\int_{\mathbf{y}} \rho(\mathbf{y}, t|q) d^N \mathbf{y} = 1$ per semplificarne l'espressione e togliere un integrale. Inoltre, considerando che la distribuzione della personalità degli agenti non dipende direttamente da t , allora si può osservare che $\rho_t(q) = \rho_0(q)$ e ciò permette di ottenere il risultato atteso in (3.7). Infine, come già nel caso discreto, si considera un processo di tipo moto Browniano $\mathbf{w}(t)$ con drift nullo.

3.3 Soluzione dell'equazione di Fokker-Planck

In questa sezione l'obiettivo è di analizzare la dinamica del sistema andando a risolvere l'equazione di Fokker-Planck N - dimensionale (3.5) per $\rho(p, \mathbf{x}, t)$, in modo da ottenere la distribuzione degli individui sullo spazio \mathcal{Y} . Considerando una densità iniziale generica $\rho(p, \mathbf{x}, 0) = \rho_0(\mathbf{x}|p)\rho_0(p)$, si ottiene la soluzione dell'equazione di FP:

$$\rho(p, \mathbf{x}, t) = \rho_0(p) \int_{\mathbf{y}} \mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{m}(p, \mathbf{y}, t), \Sigma(p, t)) \rho_0(\mathbf{y}|p) d^N \mathbf{y}, \quad (3.11)$$

dove $\mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{m}(p, \mathbf{y}, t), \Sigma(p, t))$ è la funzione di densità di probabilità (pdf) di una distribuzione *Gaussiana multivariata*. Tale distribuzione ha covarianza:

$$\Sigma(p, t) \triangleq \int_0^t e^{-\Xi(p)\tau} \mathbf{D} e^{-\Xi(p)^T \tau} d\tau, \quad (3.12)$$

e media:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(p, \mathbf{y}, t) &\triangleq e^{-\Xi(p)t} \left[\mathbf{y} + \int_0^t e^{\Xi(p)\tau} \boldsymbol{\phi}(p, \tau) d\tau \right] \\ &\stackrel{(\diamond)}{=} e^{-\Xi(p)t} \mathbf{y} + \alpha(p) \Xi^{-1}(p) (\mathbf{I}_N - e^{-\Xi(p)t}) \mathbf{C} \mathbf{u}(p) + \bar{\alpha}(p) \int_0^t e^{-\Xi(p)(t-\tau)} \boldsymbol{\gamma}(p, \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Nel passaggio (\diamond) dell'equazione sopra, viene sfruttata la definizione di $\boldsymbol{\phi}(p, \tau)$ fornita in precedenza, dall'espressione (3.10).

Comunque, esplicitare in questa maniera l'equazione (3.13) è importante perché permette di osservare che $\mathbf{m}(p, \mathbf{y}, t)$ è funzione di $\boldsymbol{\gamma}(p, t)$, la quale a sua volta è funzione di $\rho(p, \mathbf{x}, t)$ (lo si può vedere tornando all'equazione (3.8)). In quanto tale, bisogna quindi imporre una condizione di auto-consistenza, sostituendo l'espressione di $\rho(p, \mathbf{x}, t)$, presa da (3.11), nell'equazione (3.8). Si ottiene così:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma}(p, t) &= \int_{\mathbf{y}} \int_q \mathbf{Z}(p, q) \mathbf{y} \rho(q, \mathbf{y}, t) d^N \mathbf{y} dq \\ &= \int_{\mathbf{y}} \int_q \mathbf{Z}(p, q) \mathbf{y} \rho_0(q) \int_{\mathbf{z}} \mathcal{G}(\mathbf{y}, \mathbf{m}(p, \mathbf{z}, t), \Sigma(q, t)) \rho_0(\mathbf{z}|q) d^N \mathbf{z} d^N \mathbf{y} dq \\ &= \int_q \mathbf{Z}(p, q) \rho_0(q) \int_{\mathbf{z}} \mathbf{m}(q, \mathbf{z}, t) \rho_0(\mathbf{z}|q) d^N \mathbf{z} dq \\ &\stackrel{(\nabla)}{=} \boldsymbol{\gamma}_0(p, t) + \boldsymbol{\gamma}_1(p, t) + \int_q \mathbf{Z}(p, q) \rho_0(q) \bar{\alpha}(q) \int_0^t e^{-\Xi(q)(t-\tau)} \boldsymbol{\gamma}(q, \tau) d\tau dq. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Si nota che nel passaggio (∇) si è sfruttata la definizione di $\mathbf{m}(p, \mathbf{y}, t)$ fornita dall'equazione (3.13). Inoltre, per semplificare la notazione e rendere meno pesante l'intera espressione si sono introdotte due nuove variabili $\boldsymbol{\gamma}_0(p, t)$ e $\boldsymbol{\gamma}_1(p, t)$. Esse sono definite nel modo seguente:

$$\boldsymbol{\gamma}_0(p, t) \triangleq \int_q \mathbf{Z}(p, q) \rho_0(q) e^{-\Xi(q)t} \int_{\mathbf{y}} \mathbf{y} \rho_0(\mathbf{y}|q) d^N \mathbf{y} dq, \quad (3.15)$$

$$\gamma_1(p, t) \triangleq \int_q \mathbf{Z}(p, q) \rho_0(q) \alpha(q) \Xi^{-1}(q) (\mathbf{I}_N - e^{-\Xi(q)t}) \mathbf{C} \mathbf{u}(q) dq. \quad (3.16)$$

Un fatto interessante è che l'espressione finale di $\gamma(p, t)$ ricavata nella (3.14) è un'equazione integrale di Volterra lineare, del secondo tipo. Allora, si può prendere la trasformata di Laplace nel tempo della (3.14) e scrivere:

$$\hat{\gamma}(p, s) = \hat{\gamma}_0(p, s) + \hat{\gamma}_1(p, s) + \int_q \mathbf{Z}(p, q) \rho_0(q) \bar{\alpha}(q) \mathbf{X}^{-1}(s, q) \hat{\gamma}(q, s) dq, \quad (3.17)$$

dove si introducono $\mathbf{X}(s, q) = s\mathbf{I}_N + \Xi(q)$ e

$$\hat{\gamma}_0(p, s) = \int_q \mathbf{Z}(p, q) \rho_0(q) \mathbf{X}^{-1}(s, q) \int_{\mathbf{y}} \mathbf{y} \rho_0(\mathbf{y}|q) d^N \mathbf{y} dq, \quad (3.18)$$

$$\hat{\gamma}_1(p, s) = \int_q \mathbf{Z}(p, q) \rho_0(q) \alpha(q) s^{-1} \mathbf{X}^{-1}(s, q) \mathbf{C} \mathbf{u}(q) dq. \quad (3.19)$$

A questo punto si vuole risolvere l'equazione (3.17), che è un'equazione integrale non-omogenea, perciò la sua soluzione è unica se e soltanto se l'equazione omogenea associata non ha tra le soluzioni possibili anche solo un'espressione non-nulla. In altre parole, la soluzione nulla deve essere l'unica ammissibile per l'equazione omogenea associata.

Se la soluzione della (3.17) è unica, allora essa permette di ottenere direttamente la soluzione dell'equazione di Fokked-Planck (3.11), cioè l'obiettivo prefissato.

In ogni caso, anche se si dimostra che l'equazione integrale (3.17) ammette una soluzione unica, in generale risulta ancora piuttosto complicato trovarla in maniera esplicita. Per questo motivo nell'articolo vengono analizzati due casi particolari, nei quali, grazie ad alcune ipotesi aggiuntive semplificatrici, è possibile ricavare un'espressione analitica esplicita per tale soluzione. Comunque, in questo elaborato ci si concentra soprattutto sul secondo caso trattato nel paper.

3.3.1 Caso distribuzione della personalità discreto

L'ipotesi fondamentale di questo caso particolare è che la distribuzione della personalità sia discreta, con M masse di probabilità possibili. Quindi, la distribuzione iniziale della densità di opinione (a $t = 0$) viene scritta come:

$$\rho_0(p) = \sum_{i=1}^M r_i \delta(p - p_i). \quad (3.20)$$

Di conseguenza, si può riscrivere l'equazione al punto fisso (3.17) inserendo questa ipotesi:

$$\hat{\gamma}(p_i, s) = \sum_{k=1}^M \mathbf{Z}(p_i, p_k) r_k \bar{\alpha}(p_k) \mathbf{X}^{-1}(s, p_k) \hat{\gamma}(p_k, s) + \hat{\gamma}_0(p_i, s) + \hat{\gamma}_1(p_i, s). \quad (3.21)$$

Nella (3.21) sono stati ridefiniti due termini in funzione dell'ipotesi aggiuntiva:

$$\hat{\gamma}_0(p_i, s) = \sum_{k=1}^M \mathbf{Z}(p_i, p_k) r_k \mathbf{X}^{-1}(s, p_k) \mathbf{x}_0(p_k), \quad (3.22)$$

dove $\mathbf{x}_0(p_k)$ è l'opinione media al tempo $t = 0$ corrispondente alla personalità p_k , e

$$\hat{\gamma}_1(p_i, s) = \sum_{k=1}^M \frac{\mathbf{Z}(p_i, p_k) r_k \alpha(p_k)}{s} \mathbf{X}^{-1}(s, p_k) \mathbf{C} \mathbf{u}(p_k). \quad (3.23)$$

Ora si definiscono le variabili che entrano nel modello. Per fare ciò serve, però, chiarire la notazione che verrà utilizzata.

- Quando si scrive un vettore colonna nel seguente modo $\mathbf{a} = \text{cat}(\mathbf{a}_i)$, si intende che il vettore \mathbf{a} è ottenuto *concatenando* tra loro tutti i vettori colonna \mathbf{a}_i .
- Il simbolo \otimes denota il *prodotto di Kronecker* tra due matrici arbitrarie.
- Una matrice A definita come $A = \text{diag}(a_i)$ consiste in una *matrice diagonale*, ovvero in una matrice quadrata in cui tutti gli elementi fuori dalla diagonale principale sono nulli e tutti gli elementi sulla diagonale principale sono dati da a_i .

Sfruttando tale notazione si definiscono:

- $\hat{\gamma}(s) = \text{cat}\{\hat{\gamma}(p_i, s)\}$,
- $\hat{\gamma}_0(s) = \text{cat}\{\hat{\gamma}_0(p_i, s)\}$,
- $\hat{\gamma}_1(s) = \text{cat}\{\hat{\gamma}_1(p_i, s)\}$,
- $\underline{\mathbf{x}}_0 = \text{cat}\{\mathbf{x}_0(p_i)\}$,
- $\underline{\mathbf{u}} = \text{cat}\{\mathbf{u}(p_i)\}$,
- $\underline{\Xi} = \text{diag}(\Xi(p_1), \dots, \Xi(p_M))$,
- $\mathbf{P}_0 = \text{diag}(r_1, \dots, r_M) \otimes \mathbf{I}_N$,
- $\mathbf{P}_1 = \text{diag}(r_1 \alpha(p_1), \dots, r_M \alpha(p_M)) \otimes \mathbf{I}_N$,
- $\mathbf{P}_2 = \text{diag}(r_1 \bar{\alpha}(p_1), \dots, r_M \bar{\alpha}(p_M)) \otimes \mathbf{I}_N$

e infine

$$\underline{\mathbf{Z}} = \{\mathbf{Z}(p_i, p_j)\} = \{\zeta(p_i, p_j)\} \otimes \mathbf{C}. \quad (3.24)$$

Nello specifico, con quest'ultima espressione (3.24) si intende che la matrice $\underline{\mathbf{Z}}$ è una matrice a blocchi, nella quale ogni blocco (i, j) è costituito da $\mathbf{Z}(p_i, p_j)$. In questo modo, sostituendo le espressioni appena introdotte, si può riscrivere l'equazione (3.21) nel seguente modo:

$$\hat{\gamma}(s) = \hat{\gamma}_0(s) + \hat{\gamma}_1(s) + \underline{\mathbf{Z}}(s \mathbf{I}_{MN} + \underline{\Xi})^{-1} \mathbf{P}_2 \hat{\gamma}(s), \quad (3.25)$$

mentre la (3.22) e la (3.23) diventano, rispettivamente:

$$\hat{\gamma}_0(s) = \underline{\mathbf{Z}}(s \mathbf{I}_{MN} + \underline{\Xi})^{-1} \mathbf{P}_0 \underline{\mathbf{x}}_0 \quad (3.26)$$

e

$$\hat{\gamma}_1(s) = \underline{\mathbf{Z}}(s\underline{\mathbf{I}}_{MN} + \underline{\Xi})^{-1}s^{-1}\underline{\mathbf{P}}_1(\underline{\mathbf{I}}_M \otimes \underline{\mathbf{C}})\underline{\mathbf{u}}. \quad (3.27)$$

Sia, inoltre, $\underline{\mathbf{X}}(s) = s\underline{\mathbf{I}}_{MN} + \underline{\Xi}$. Introdurre questa nuova variabile aiuta a semplificare l'espressione (3.25), che ora può essere risolta esplicitamente (ricordando che ci si trova nel dominio della trasformata di Laplace):

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}(s) &= \hat{\gamma}_0(s) + \hat{\gamma}_1(s) + \underline{\mathbf{Z}}\underline{\mathbf{X}}(s)^{-1}\underline{\mathbf{P}}_2\hat{\gamma}(s) \\ &= \left(\underline{\mathbf{I}}_{MN} - \underline{\mathbf{Z}}\underline{\mathbf{X}}(s)^{-1}\underline{\mathbf{P}}_2\right)^{-1} \left(\hat{\gamma}_0(s) + \hat{\gamma}_1(s)\right) \\ &\stackrel{(*)}{=} \left(\underline{\mathbf{I}}_{MN} - \underline{\mathbf{Z}}\underline{\mathbf{X}}(s)^{-1}\underline{\mathbf{P}}_2\right)^{-1} \underline{\mathbf{Z}}\underline{\mathbf{X}}(s)^{-1} \left(\underline{\mathbf{P}}_0\underline{\mathbf{x}}_0 + s^{-1}\underline{\mathbf{P}}_1(\underline{\mathbf{I}}_M \otimes \underline{\mathbf{C}})\underline{\mathbf{u}}\right) \\ &= \left(\underline{\mathbf{X}}(s)\underline{\mathbf{Z}}^{-1} - \underline{\mathbf{P}}_2\right)^{-1} \left(\underline{\mathbf{P}}_0\underline{\mathbf{x}}_0 + s^{-1}\underline{\mathbf{P}}_1(\underline{\mathbf{I}}_M \otimes \underline{\mathbf{C}})\underline{\mathbf{u}}\right) \\ &= \underline{\mathbf{Z}}\left(\underline{\mathbf{X}}(s) - \underline{\mathbf{P}}_2\underline{\mathbf{Z}}\right)^{-1} \left(\underline{\mathbf{P}}_0\underline{\mathbf{x}}_0 + s^{-1}\underline{\mathbf{P}}_1(\underline{\mathbf{I}}_M \otimes \underline{\mathbf{C}})\underline{\mathbf{u}}\right). \end{aligned}$$

Si può osservare che nel passaggio (*) si sono sfruttate le definizioni di $\hat{\gamma}_0(s)$ e di $\hat{\gamma}_1(s)$ fornite dalle espressioni (3.26) e (3.27). Riassumendo, tramite i calcoli precedenti, si trova la soluzione per $\hat{\gamma}(s)$ nel dominio della trasformata:

$$\hat{\gamma}(s) = \underline{\mathbf{Z}}\left(\underline{\mathbf{X}}(s) - \underline{\mathbf{P}}_2\underline{\mathbf{Z}}\right)^{-1} \left(\underline{\mathbf{P}}_0\underline{\mathbf{x}}_0 + s^{-1}\underline{\mathbf{P}}_1(\underline{\mathbf{I}}_M \otimes \underline{\mathbf{C}})\underline{\mathbf{u}}\right). \quad (3.28)$$

Si definisce ancora:

$$\underline{\Psi} = \underline{\Xi} - \underline{\mathbf{P}}_2\underline{\mathbf{Z}}. \quad (3.29)$$

Allora, a condizione che $\underline{\Psi}$ sia invertibile, l'espressione finale trovata nell'equazione (3.28) può essere anti-trasformata per giungere così alla soluzione nel dominio del tempo, che è proprio la soluzione cercata:

$$\gamma(t) = \underline{\mathbf{Z}}\left(e^{-\underline{\Psi}t}\underline{\mathbf{P}}_0\underline{\mathbf{x}}_0 + \underline{\Psi}^{-1}\left(\underline{\mathbf{I}}_{MN} - e^{-\underline{\Psi}t}\right)\underline{\mathbf{P}}_1(\underline{\mathbf{I}}_M \otimes \underline{\mathbf{C}})\underline{\mathbf{u}}\right). \quad (3.30)$$

Guardando quest'ultimo risultato si può constatare come sia costituito da due parti:

1. $e^{-\underline{\Psi}t}\underline{\mathbf{P}}_0\underline{\mathbf{x}}_0$, ovvero il termine relativo alla soluzione iniziale;
2. $\underline{\Psi}^{-1}\left(\underline{\mathbf{I}}_{MN} - e^{-\underline{\Psi}t}\right)\underline{\mathbf{P}}_1(\underline{\mathbf{I}}_M \otimes \underline{\mathbf{C}})\underline{\mathbf{u}}$, ovvero il termine relativo alla condizione a regime.

Perciò, il peso di questi due termini sulla soluzione dipende fortemente dal tempo. Infatti la prima parte tende a spegnersi ed andare a zero per tempi grandi ($t \rightarrow +\infty$), viceversa la seconda parte ha un'importanza sempre maggiore al crescere del tempo.

Comunque, una volta ottenuta la soluzione $\gamma(t)$ si può procedere come spiegato nella sezione [3.3], allo scopo di trovare la densità di opinione $\rho(p, \mathbf{x}, t)$. Inoltre, è giusto osservare che il discorso relativo all'equazione (3.30) è valido solo se la matrice $\underline{\Psi}$ è stabile, ed è proprio la stabilità ad essere il soggetto della prossima sezione.

3.4 Analisi della stabilità

Innanzitutto si ricorda che questo sistema viene definito *stabile* se, per ogni possibile condizione iniziale, la distribuzione delle opinioni converge alla *soluzione stazionaria* per $t \rightarrow +\infty$.

In questa sezione vengono analizzate le condizioni per la stabilità del sistema, sempre rimanendo nel caso di distribuzione delle personalità discreta. In questo caso le *condizioni di stabilità* possono essere enunciate nel modo seguente:

- (i) $-\Xi$ è una matrice stabile secondo Hurwitz, ovvero tutti i suoi autovalori hanno parte reale negativa.
- (ii) Anche $-\Psi$ è una matrice stabile secondo Hurwitz.

In pratica, le due condizioni si possono riscrivere anche affermando che le matrici Ξ e Ψ devono avere autovalori con parte reale positiva.

Infatti, richiamando l'espressione della covarianza della funzione di Green \mathcal{G} (3.12), si può constatare che il suo valore rimane limitato se è soddisfatta la condizione (i).

Invece, per valutare le condizioni sulla media di \mathcal{G} conviene fare riferimento all'equazione (3.13) e di conseguenza anche all'equazione di $\gamma(t)$ (3.30). Guardando quest'ultima, si nota come sia necessaria la condizione (ii) affinché il suo valore rimanga limitato, mentre ponendo l'attenzione sull'espressione della media ci si accorge che bisogna ancora aggiungere la condizione (i). Pertanto è necessario che siano soddisfatte entrambe le condizioni contemporaneamente allo scopo di mantenere limitata la media della distribuzione.

Possibili casi di instabilità In alcuni casi, però, può succedere che le condizioni di stabilità non siano soddisfatte. In queste situazioni possono emergere delle *instabilità*, che vengono suddivise in due tipologie diverse.

- Quando non viene rispettata la prima condizione (i), ci saranno alcune personalità per le quali la distribuzione delle opinioni si disperde lungo qualche direzione. Questo fenomeno viene rinominato come *instabilità di tipo-I*.
- Se la condizione (i) è soddisfatta, ma non lo è la condizione (ii), allora per tutte le personalità la covarianza delle opinioni rimane limitata, mentre ci saranno alcune personalità per le quali il valore medio dell'opinione esplode verso infinito. Questo caso viene rinominato *instabilità di tipo-II*.

Quindi, si cerca ora di approfondire come devono essere le condizioni per assicurare la stabilità del sistema.

3.4.1 Condizioni per evitare instabilità di tipo-I

Innanzitutto è necessario introdurre la notazione per gli autovalori di una generica matrice \mathbf{A} . Sia $\lambda_k(\mathbf{A}) = \lambda_k^R(\mathbf{A}) + j\lambda_k^J(\mathbf{A})$ il k -esimo autovalore di \mathbf{A} , dove $\lambda_k^R(\mathbf{A})$ e $\lambda_k^J(\mathbf{A})$ sono rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria.

Ora, ricordando come è definita la matrice $\Xi(p_i) = \bar{\alpha}(p_i)\Gamma(p_i) + \alpha(p_i)\mathbf{C}$ (riferimento espressione (3.9)), la condizione necessaria e sufficiente per evitare l'instabilità di tipo-I è data da:

$$\min_k \lambda_k^R(\Xi(p_i)) > 0, \quad \forall i. \quad (3.31)$$

Inoltre, dalla (3.7) combinata con l'ipotesi che la distribuzione delle personalità sia discreta, si ricava il termine $\Gamma(p_i) = \mathbf{C} \sum_h \zeta(p_i, p_h) \rho_0(p_h)$. Quindi si può scrivere:

$$\Xi(p_i) = \left[\bar{\alpha}(p_i) \sum_h \zeta(p_i, p_h) \rho_0(p_h) + \alpha(p_i) \right] \mathbf{C}. \quad (3.32)$$

In definitiva, andando ad inserire il risultato (3.32) in (3.31), segue che la condizione di stabilità diventa:

$$\left[\bar{\alpha}(p_i) \sum_h \zeta(p_i, p_h) \rho_0(p_h) + \alpha(p_i) \right] \min_k \lambda_k^R(\mathbf{C}) > 0. \quad (3.33)$$

Assumendo che $\bar{\alpha}(p_i) \sum_h \zeta(p_i, p_h) \rho_0(p_h) + \alpha(p_i) > 0$ per ogni i , allora la stabilità è assicurata quando:

$$\min_k \lambda_k^R(\mathbf{C}) > 0. \quad (3.34)$$

Quest'ultima condizione trovata in (3.34) mette in evidenza il fatto che, se la dinamica delle opinioni per ogni argomento è stabile, introducendo una matrice \mathbf{C} tale che $-\mathbf{C}$ sia matrice di Hurwitz, la stabilità viene preservata.

3.4.2 Condizioni per evitare instabilità di tipo-II

Utilizzando la stessa notazione sugli autovalori introdotta nel caso precedente, si afferma che la condizione necessaria e sufficiente per evitare l'instabilità di tipo-II è data da:

$$\min_k \lambda_k^R(\Psi) > 0, \quad \forall i. \quad (3.35)$$

Inoltre, è interessante concentrarsi sul caso particolare in cui $\alpha(p) \equiv \alpha$, ovvero $\alpha(p)$ è costante per ogni valore delle personalità p .

Richiamando l'equazione (3.29), si può scrivere:

$$\begin{aligned} \Psi &= \Xi - \mathbf{P}_2 \mathbf{Z} \\ &= \bar{\alpha} \underline{\Gamma} + \alpha \mathbf{I}_M \otimes \mathbf{C} - \bar{\alpha} \mathbf{P}_0 \mathbf{Z} \\ &= \alpha \mathbf{I}_M \otimes \mathbf{C} + \bar{\alpha} (\underline{\Gamma} - \mathbf{P}_0 \mathbf{Z}), \end{aligned} \quad (3.36)$$

dove $\underline{\Gamma} = \text{diag}(\Gamma(p_1), \dots, \Gamma(p_M))$, con i termini sulla diagonale $\Gamma(p_i)$ ottenuti discretizzando l'equazione (3.7), come già visto nella sezione [3.4.1].

Ora, si definisce:

$$\underline{\Gamma} - \mathbf{P}_0 \mathbf{Z} \triangleq \Theta \otimes \mathbf{C}$$

dove la nuova variabile Θ corrisponde ad una matrice $M \times M$, la cui entrata (i, j) -esima è data dalla seguente espressione:

$$\theta_{i,j} = \begin{cases} \sum_{k \neq i} \zeta(p_i, p_k) r_k, & i = j \\ -\zeta(p_i, p_j) r_j, & i \neq j. \end{cases}$$

Come conseguenza, considerando che $\lambda_{(j-1)N+i}(\Theta \otimes \mathbf{C}) = \lambda_i(\Theta) \lambda_j(\mathbf{C})$ e usando la (3.36), la condizione per la stabilità si scrive come segue:

$$\Re[\lambda_i(\Theta) \lambda_j(\mathbf{C})] > -\frac{\alpha}{1-\alpha} \Re[\lambda_j(\mathbf{C})], \quad \forall i, j, \quad (3.37)$$

dove $\Re[\cdot]$ è un simbolo che indica la parte reale di un numero complesso.

Osservazione: nel caso scalare (ovvero $N = 1$), valgono le due seguenti *proposizioni*.

1. Se $\zeta(p_i, p_j) \geq 0$ per ogni i, j , allora $-\Psi$ è matrice stabile secondo Hurwitz.
2. $-\Psi$ è matrice stabile secondo Hurwitz se $\min_{i,j} \zeta(p_i, p_j) < 0$ e, per ogni i vale:

$$\sum_{j \neq i} (\zeta(p_i, p_j) r_j - |\zeta(p_i, p_j)| r_i) > -\frac{\alpha}{1-\alpha}. \quad (3.38)$$

3.4.3 Esempio con $N = 1$

Si consideri un solo argomento su cui esprimere l'opinione ($N = 1$). Inoltre si assuma che siano presenti M personalità (M pari) $p_i = \frac{(2i-1)}{M} - 1$, $i = 1, \dots, M$, con $r_i = \frac{1}{M}$ e

$$\zeta(p_i, p_j) = \begin{cases} \zeta_1, & \text{se } p_i p_j > 0 \\ -\zeta_2, & \text{se } p_i p_j < 0, \end{cases}$$

dove ζ_1 e ζ_2 sono valori positivi arbitrari.

Allora, Ξ_i è uno scalare uguale a $\alpha + \bar{\alpha} \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{2}$ per ogni valore di i . Inoltre:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \zeta_1 & -\zeta_2 \\ -\zeta_2 & \zeta_1 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{1}_{M/2},$$

in cui compare $\mathbf{1}_{M/2}$, ovvero una matrice quadrata di grandezza $\frac{M}{2}$ con tutte le entrate uguali a 1. Così si può scrivere:

$$\lambda_i(\mathbf{Z}) = \begin{cases} 0, & 1 \leq i \leq M-2 \\ M \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{2}, & i = M-1 \\ M \frac{\zeta_1 + \zeta_2}{2}, & i = M. \end{cases}$$

Poiché $\Psi = \left(\alpha + \bar{\alpha} \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{2}\right) \mathbf{I}_M - \frac{\bar{\alpha}}{M} \mathbf{Z}$, allora segue che:

$$\lambda_i(\Psi) = \begin{cases} \alpha + \bar{\alpha} \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{2}, & 1 \leq i \leq M - 2 \\ \alpha, & i = M - 1 \\ \alpha - \bar{\alpha} \zeta_2, & i = M. \end{cases} \quad (3.39)$$

A questo punto, si vogliono cercare le condizioni per le quali nel sistema emergono le instabilità di tipo-I e di tipo-II, e di conseguenza anche le condizioni per la stabilità.

- Per studiare l'instabilità di tipo-I si riparte dall'equazione (3.31). Ora, dato che $\Xi(p_i) \equiv \Xi_i$ in questo esempio è uno scalare, la condizione per evitare questa instabilità diventa semplicemente:

$$\alpha + \bar{\alpha} \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{2} > 0.$$

Esplicitando la disuguaglianza ottenuta in termini del parametro ζ_2 , si ricava immediatamente:

$$\zeta_2 < \zeta_1 + 2 \frac{\alpha}{1 - \alpha}.$$

Di conseguenza, si può concludere che si avrà instabilità di tipo-I per questo sistema, se e soltanto se $\zeta_2 \geq \zeta_1 + 2 \frac{\alpha}{1 - \alpha}$.

- Analizzando il caso di instabilità di tipo-II, conviene ripartire dall'equazione (3.35). Rispetto al caso precedente, la situazione è leggermente più elaborata. Infatti, la condizione che permette di evitare questa instabilità è da cercare osservando il comportamento degli autovalori della matrice Ψ , che in questo esempio particolare sono forniti da (3.39). Considerando che il parametro α , per come è definito, è sicuramente > 0 , l'autovalore relativo all'indice $i = M - 1$ non dà problemi. Bisogna quindi studiare la condizione sugli altri due autovalori:

$$\begin{cases} \alpha + \bar{\alpha} \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{2} > 0 \\ \alpha - \bar{\alpha} \zeta_2 > 0, \end{cases}$$

dalle quali, esplicitandole in termini di ζ_2 , si giunge alla coppia di disequazioni di cui si vuole studiare il segno:

$$\begin{cases} \zeta_2 < \frac{\alpha}{1 - \alpha} \\ \zeta_2 < 2 \frac{\alpha}{1 - \alpha} + \zeta_1. \end{cases} \quad (3.40)$$

Ricordando che, per cercare le condizioni che portano il sistema ad avere un'instabilità di tipo-II, bisogna lavorare sulla condizione (3.35) con il \leq anziché il $>$, si effettua lo studio sui segni di (3.40). In questo modo si ottiene facilmente che per valori di ζ_2 che soddisfano $\frac{\alpha}{1 - \alpha} \leq \zeta_2 < \zeta_1 + 2 \frac{\alpha}{1 - \alpha}$, il sistema possiede un'instabilità di tipo-II.

- Infine, il sistema è stabile se e soltanto se $\zeta_2 < \frac{\alpha}{1-\alpha}$. Quest'ultima disequazione si ottiene immediatamente osservando le due condizioni di instabilità trovate nei casi precedenti.

In particolare è anche facile verificare che questa condizione è equivalente all'espressione (3.38), la quale in questo caso specifico è una condizione necessaria e sufficiente.

3.5 Analisi dello stato stazionario

Sotto le condizioni di stabilità (dette anche condizioni di *ergodicità*) presentate nella sezione [3.4], è interessante analizzare la soluzione al limite per $t \rightarrow +\infty$, che può essere ottenuta come soluzione di stato stazionario dell'equazione di Fokker-Planck associata.

Nel caso più generale si può riscrivere l'equazione di FP (3.5) imponendo che la derivata temporale sia nulla, ottenendo così la seguente equazione multi-dimensionale:

$$\sum_{n=1}^N \frac{\partial}{\partial x_n} (\mu_n(p, \mathbf{x}) \rho(p, \mathbf{x})) = \sum_{m,n=1}^N \frac{D_{m,n}}{2} \frac{\partial^2 \rho(p, \mathbf{x})}{\partial x_m \partial x_n}, \quad (3.41)$$

dove $\rho(p, \mathbf{x}) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(p, \mathbf{x}, t)$. Inoltre, recuperando l'espressione della (3.6) e guardando, in particolare, alla sua seconda riga, si può vedere che $\boldsymbol{\mu}$ è dato da:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}(p, \mathbf{x}) &= \bar{\alpha}(p) [\boldsymbol{\gamma}(p) - \boldsymbol{\Gamma}(p) \mathbf{x}] + \alpha(p) \mathbf{C} [\mathbf{u}(p) - \mathbf{x}] \\ &= \bar{\alpha}(p) \mathbf{C} (\boldsymbol{\beta}(p) - \eta(p) \mathbf{x}) + \alpha(p) \mathbf{C} [\mathbf{u}(p) - \mathbf{x}] \\ &= -w(p) \mathbf{C} (\mathbf{x} - \mathbf{f}(p)). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Nell'equazione sopra (3.42) è stata utilizzata l'espressione di $\boldsymbol{\Gamma}(p)$ presa da (3.7). Invece, per quanto riguarda $\boldsymbol{\gamma}(p)$, esso non è altro che il limite per $t \rightarrow +\infty$ della variabile $\boldsymbol{\gamma}(p, t)$, definita nell'equazione (3.8). Nel passaggio successivo sono state definite $\boldsymbol{\gamma}(p) = \mathbf{C} \boldsymbol{\beta}(p)$ e $\boldsymbol{\Gamma}(p) = \eta(p) \mathbf{C}$, dove:

- $\boldsymbol{\beta}(p) = \int_{\mathbf{y}} \int_q \zeta(p, q) \mathbf{y} \rho(q, \mathbf{y}) d^N \mathbf{y} dq$;
- $\eta(p) = \int_q \zeta(p, q) \rho_0(q) dq$.

Infine, sono ancora state introdotte due nuove variabili:

- $w(p) = \bar{\alpha}(p) \eta(p) + \alpha(p)$;
- $\mathbf{f}(p) = \frac{\bar{\alpha}(p) \boldsymbol{\beta}(p) + \alpha(p) \mathbf{u}(p)}{w(p)}$.

È interessante il fatto che, se il vettore $\boldsymbol{\beta}(p)$ è dato, allora $\boldsymbol{\mu}(p, \mathbf{x})$ non è più funzione di $\rho(p, \mathbf{x})$, bensì dipende soltanto dalla personalità p , dal vettore delle opinioni \mathbf{x} e dalla

distribuzione iniziale $\rho_0(p)$. Inoltre, si può anche notare che $\phi(p) = \frac{\beta(p)}{\eta(p)}$ può essere espressa come un'equazione multi-dimensionale di Fredholm del punto fisso:

$$\begin{aligned} \phi(p) &= \underbrace{\int_q \frac{\zeta(p, q)\alpha(q)\mathbf{u}(q)\rho_0(q)}{\eta(p)w(q)} dq}_{\mathbf{h}(q)} + \underbrace{\int_q \frac{\zeta(p, q)\bar{\alpha}(q)\eta(q)}{\eta(p)w(q)} \phi(q)\rho_0(q) dq}_{\Phi(p, q)} \\ &= \mathbf{h}(q) + \int_q \Phi(p, q)\phi(q)\rho_0(q) dq. \end{aligned} \quad (3.43)$$

3.6 Risultati numerici

In questa sezione vengono presentati degli esempi numerici, allo scopo di mostrare alcuni dei risultati presentati nelle sezioni precedenti. Prima di iniziare con gli esempi, però, può essere utile riassumere brevemente i passaggi trattati nell'articolo.

- Inizialmente è stato adottato un approccio di tipo *mean-field* per modellare l'evoluzione della dinamica attraverso la funzione di distribuzione continua delle opinioni, la cui espressione può essere ottenuta risolvendo un'equazione di Fokker-Planck.
- Tale equazione è stata risolta con l'obiettivo di ottenere la distribuzione degli individui sullo spazio \mathcal{Y} . Nello specifico, la soluzione finale è stata trovata tramite la trasformata inversa di Fourier.
- Poi, sono state esplicitate le condizioni per assicurare la stabilità del sistema. Si è mostrato che tali condizioni sono da cercare nelle matrici che caratterizzano il sistema, in particolare introducendo la definizione di stabilità secondo Hurwitz.
- Infine, è stata effettuata l'analisi sullo stato stazionario, partendo dall'equazione di FP e mandando $t \rightarrow +\infty$. In questo modo è stata esplicitata l'espressione di $\mu(p, \mathbf{x})$, che è una funzione di quantità che può essere calcolata risolvendo un'equazione di Fredholm multidimensionale.

Uno degli obiettivi principali di questi esempi numerici è quello di mostrare l'impatto dei parametri del modello sia sugli stati stazionari dell'opinione, sia sulla loro dinamica. In tutti i casi trattati si considereranno sempre una distribuzione uniforme delle personalità nell'intervallo $[-1, 1]$ e uno spazio delle opinioni bidimensionale (cioè $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$).

3.6.1 Sensitività della distribuzione stazionaria ai parametri del modello

In questa prima sottosezione viene valutato l'effetto della varianza del rumore, del pregiudizio e della matrice di accoppiamento \mathbf{C} sulla distribuzione stazionaria.

Per prima cosa si mostra l'effetto della *varianza del rumore* σ_n^2 e del *pregiudizio* \mathbf{u} . A questo scopo, si considera una matrice di accoppiamento asimmetrica:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \epsilon & 1 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

dove $\rho = 0.3$ e ϵ è un numero reale positivo molto piccolo (in particolare negli esempi numerici è stato utilizzato il valore 10^{-10}). Quest'ultimo valore ϵ viene inserito nella matrice \mathbf{C} come approssimazione dello 0, poiché se si scegliesse $\epsilon = 0$, si otterrebbe una matrice non-diagonalizzabile.

Questo modello è adatto a descrivere il caso in cui l'influenza reciproca sulle opinioni di due argomenti è unidirezionale (ad esempio dall'argomento 2 all'argomento 1). Un possibile esempio può essere dato da:

- apprezzamento di un'azione di governo (tema 1);
- opinione sul giusto livello di tassazione (tema 2).

Chiaramente è più probabile che il secondo tema influisca sul tema 1 rispetto al viceversa. Inoltre, si assume un livello costante di testardaggine per ogni personalità, $\alpha(p) = 0.01$, mentre la forza dell'interazione tra le opinioni è data da:

$$\zeta(p, q) = \frac{1}{1 + |p - q|^2}, \quad (3.45)$$

cioè le interazioni sono più forti tra agenti che hanno personalità simili. Ci si riferisce a tale modello con il nome di *modello di prossimità*.

Per quanto riguarda il pregiudizio $\mathbf{u}(p)$, nell'articolo sono stati utilizzati due scenari diversi, allo scopo di mostrare le differenze sulla distribuzione delle opinioni. In particolare, sono stati definiti:

$$\mathbf{u}(p) = \begin{cases} [-1, 0]^T, & p < 0 \\ [1, 0]^T, & p \geq 0 \end{cases} \quad (3.46)$$

e

$$\mathbf{u}(p) = \begin{cases} [0, -1]^T, & p < 0 \\ [0, 1]^T, & p \geq 0. \end{cases} \quad (3.47)$$

Per vedere alcuni risultati di tale modello si può iniziare dalla prima figura 3.1. Come specificato nella didascalia, il parametro σ_n^2 è stato settato nel modo seguente:

- $\sigma_n^2 = 10^{-3}$ per le due figure della colonna a sinistra, (a),(d).
- $\sigma_n^2 = 5 \times 10^{-3}$ per le due figure della colonna centrale, (b),(e).
- $\sigma_n^2 = 10^{-2}$ per le due figure della colonna a destra, (c),(f).

Si può osservare, guardando le righe della figura una alla volta, che la distribuzione stazionaria è caratterizzata da due picchi, che corrispondono a due diversi punti di pregiudizio, con la stessa altezza e la stessa ampiezza. Inoltre l'ampiezza cresce all'aumentare della varianza del rumore. Infatti, muovendoci da sinistra a destra dell'immagine si osserva proprio questa crescita dell'ampiezza, fino a giungere ai due grafici di destra nei quali i due gruppi iniziano a fondersi l'un l'altro.

Invece nella figura 3.2 si investiga sull'effetto della *correlazione tra i topic*, espressa dalla matrice di accoppiamento \mathbf{C} . In questo caso vengono utilizzati la forza di interazione (3.45) e il pregiudizio (3.47). Inoltre, si settano ancora i parametri $\alpha(p) = 0.01$ e $\sigma_n^2 = 10^{-3}$.

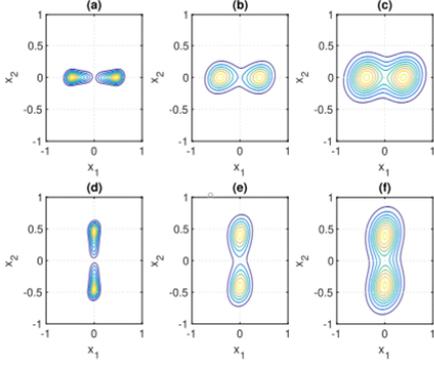


Figura 3.1: Curve di livello per la distribuzione stazionaria dell’opinione, con i parametri $\alpha = 0.01$ e $\zeta(p, q)$ come in (3.45). Inoltre nelle immagini (a),(b),(c) il pregiudizio usato è (3.46), invece nelle immagini (d),(e),(f) la funzione del pregiudizio è la (3.47). Infine, per le figure (a),(d) si utilizza $\sigma_n^2 = 10^{-3}$, per le figure (b),(e) si utilizza $\sigma_n^2 = 5 \times 10^{-3}$, per le figure (c),(f) si utilizza $\sigma_n^2 = 10^{-2}$.

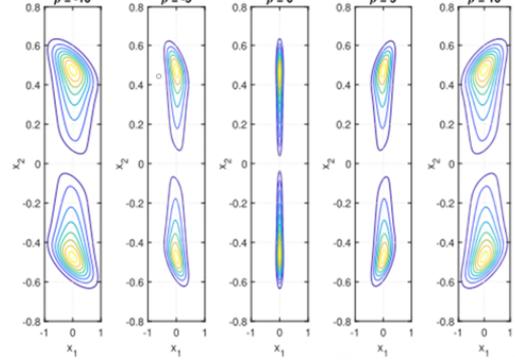


Figura 3.2: Curve di livello per la distribuzione stazionaria dell’opinione, con i parametri $\alpha = 0.01$, $\sigma_n^2 = 5 \times 10^{-3}$ e $\zeta(p, q)$ come in (3.45). Inoltre la matrice di accoppiamento è data da (3.44). Ciò che differenzia queste immagini è il parametro ρ : esso assume i valori $\rho = -10, -5, 0, 5, 10$, leggendo il grafico da sinistra verso destra.

Infine, viene utilizzata la matrice di accoppiamento fornita dall’espressione (3.44) e nei diversi grafici dell’immagine il parametro che varia è ρ , ovvero uno degli elementi della matrice \mathbf{C} . Nello specifico, ρ assume i valori $\{-10, -5, 0, 5, 10\}$ rispettivamente da sinistra a destra nei grafici della figura. Per $\rho = 0$ non ci sono interazioni tra le due componenti dell’opinione.

Si nota dalle immagini che cambiare il valore di ρ non ha nessun effetto sulla media della distribuzione stazionaria per ogni personalità, infatti si ottengono dei picchi che hanno una localizzazione sostanzialmente invariante rispetto a tale parametro. Emerge anche il fatto che la distribuzione dell’opinione x_2 è indipendente da ρ . Inoltre, a causa dello scenario simmetrico, in tutti i casi la distribuzione stazionaria mostra una simmetria riflessiva attorno all’origine. Infine, è possibile vedere che, cambiando ρ in $-\rho$, si ha l’effetto di riflettere la distribuzione stazionaria attorno all’asse x_2 , ovvero si ottiene l’effetto di cambiare x_1 in $-x_1$.

Dal punto di vista del sistema, l’effetto di diversi valori di correlazione tra i temi considerati implica una maggiore quota di agenti che hanno forti opinioni positive su entrambi gli argomenti (*valore di correlazione positivo*) oppure un’opinione fortemente positiva e un’opinione fortemente negativa (*valore di correlazione negativo*).

Per fare un esempio concreto di quest’ultimo concetto si può tornare al caso introdotto all’inizio della sottosezione. Infatti, gli utenti favorevoli ad un basso livello di tassazione giudicheranno l’azione di governo in maniera più positiva o più negativa, a seconda del segno del coefficiente di correlazione.

3.6.2 L'influenza della matrice \mathbf{Z} e l'insorgenza di instabilità

In questa seconda sottosezione si vuole valutare l'impatto della matrice della forza di interazione \mathbf{Z} sulla stabilità delle opinioni.

A questo scopo, si considera uno scenario differente rispetto alla sottosezione [3.6.1]: infatti si ipotizza che ci siano M personalità (M pari), tutte con lo stesso livello di testardaggine $\alpha = 0.01$, organizzate in due comunità, con un'interazione descritta dalla matrice:

$$\mathbf{Z} = \left(\begin{bmatrix} \zeta_1 & -\zeta_2 \\ -\zeta_2 & \zeta_1 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{1}_{M/2} \right) \otimes \mathbf{C}. \quad (3.48)$$

In questo caso $N = 2$, $\zeta_1 = 1$, mentre ζ_2 viene utilizzato come parametro.

Si considerano poi la matrice \mathbf{C} come in (3.44), fissando $\rho = 1$, il pregiudizio come in (3.47) e $\sigma_n^2 = 10^{-3}$. Inoltre, $\rho_0(p)$ è dato dall'espressione (3.20), con $r_i = 1/M$ per tutti gli i .

Se si vuole immaginare una possibile applicazione pratica di questo scenario, si può pensare a due sette religiose, ad esempio i Bogomili e i Catari, che generalmente hanno differenti punti di vista su due argomenti, rappresentati dalle opinioni x_1 e x_2 .

Non è difficile mostrare che i limiti della regione di stabilità sono gli stessi dell'esempio visto in [3.4.3], poiché $-\mathbf{C}$ è stabile secondo Hurwitz. Inoltre, si può derivare l'espressione asintotica della media, ottenendo:

$$\mathbf{m}(p, \cdot, \infty) = \frac{\alpha}{\alpha - \bar{\alpha}\zeta_2} \mathbf{u}(p). \quad (3.49)$$

Quindi, se $\zeta_2 < \alpha/\bar{\alpha} \simeq 0.0101$, allora il sistema è stabile. Questa condizione su ζ_2 è una *condizione di stabilità*.

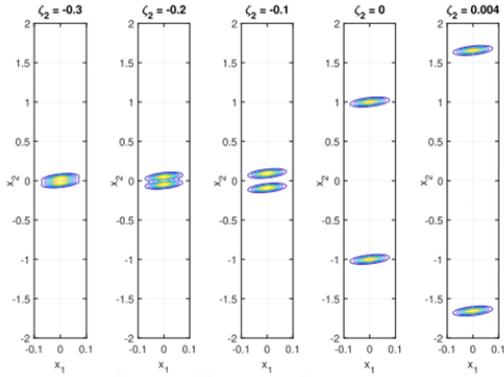


Figura 3.3: Distribuzione stazionaria delle opinioni per $\alpha = 0.01$, $\sigma_n^2 = 10^{-3}$, \mathbf{Z} come in (3.48), con $\zeta_1 = 1$, per diversi valori di ζ_2 nella regione di stabilità. La matrice di accoppiamento \mathbf{C} è data da (3.44) con $\rho = 1$. I valori di ζ_2 , da sinistra a destra, sono: $-0.3, -0.2, -0.1, 0, 0.004$.

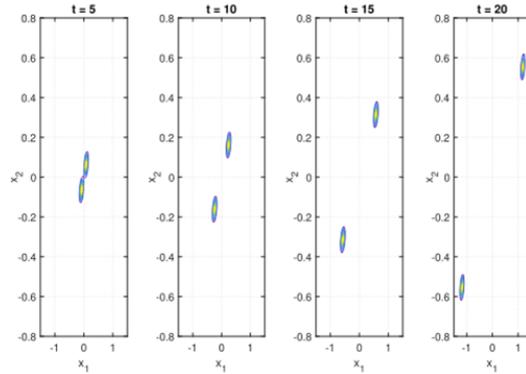


Figura 3.4: Curve di livello della distribuzione delle opinioni per $\alpha = 0.01$, $\sigma_n^2 = 10^{-3}$, \mathbf{Z} come in (3.48), con $\zeta_1 = 1$ e $\zeta_2 = 0.1$. La matrice di accoppiamento \mathbf{C} è data da (3.44) con $\rho = 1$. In questo caso si vedono diversi momenti nel tempo, in particolare da sinistra a destra si ha $t = 5, 10, 15, 20$.

Si passa ora ad osservare alcuni risultati tramite le immagini. La figura 3.3 mostra la distribuzione stazionaria per valori crescenti, da sinistra a destra, di ζ_2 . Restando sull'esempio delle due sette religiose, si nota come i Bogomili e i Catari si uniscano tra loro a causa delle forze attrattive per $\zeta_2 = -0.3$ e $\zeta_2 = -0.2$. Invece, per $-0.1 < \zeta_2 < 0$, nonostante la loro attrazione reciproca, i due gruppi rimangono separati a causa dell'effetto del pregiudizio che risulta predominante. Inoltre, per $0 < \zeta_2 < \alpha/\bar{\alpha}$, le due comunità si respingono, ma questa repulsione non è abbastanza forte per vincere l'effetto del pregiudizio e quindi la stabilità è preservata. Nel caso limite, per $\zeta_2 \nearrow \alpha/\bar{\alpha}$, i valori medi continuano a crescere.

Invece, per $\zeta_2 > \alpha/\bar{\alpha}$ il sistema non è più stabile e l'espressione della media (3.49) non è più valida. In particolare, quando $\zeta_2 < \zeta_1 + 2\alpha/\bar{\alpha} \simeq 1.0202$ l'attrazione intra-comunità e la repulsione inter-comunità hanno una forza relativa tale che il sistema sperimenta una instabilità di tipo-II. Quindi le due comunità sono preservate, ma le loro rispettive medie tendono a divergere. Nell'esempio trattato, questo caso implica che le due sette religiose sono così tanto nemiche tra loro, da radicalizzare le loro visioni, mantenendo, però, allo stesso tempo una forte identità interna, dando luogo al fenomeno di *fanatismo religioso*.

Come esempio computazionale, si guarda ora all'evoluzione temporale nel caso in cui, per tutte le personalità, le opinioni partono deterministicamente dall'origine. La figura 3.4 mostra le opinioni agli istanti di tempo $t = 5, 10, 15, 20$, con $\zeta_2 = 0.1$ fissato. Si può facilmente notare che, a causa della correlazione, le due comunità divergono lungo la bisettrice del primo e terzo quadrante.

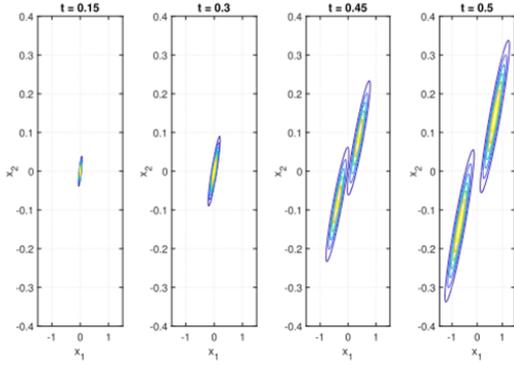


Figura 3.5: Curve di livello della distribuzione delle opinioni per $\alpha = 0.01$, $\sigma_n^2 = 10^{-3}$, \mathbf{Z} come in (3.48), con $\zeta_1 = 1$ e $\zeta_2 = 10$. La matrice di accoppiamento \mathbf{C} è data da (3.44) con $\rho = 1$. Anche in questo caso si vedono diversi momenti nel tempo, in particolare da sinistra a destra si ha $t = 0.15, 0.3, 0.45, 0.5$.

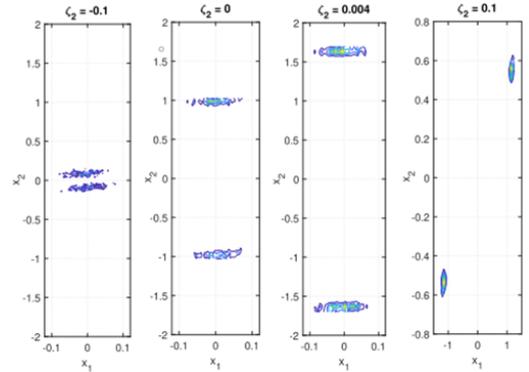


Figura 3.6: Curve di livello per la distribuzione delle opinioni simulata, con $U = 500$, $\alpha = 0.01$, $\sigma_n^2 = 10^{-3}$, \mathbf{Z} come in (3.48), con $\zeta_1 = 1$, in cui la prima metà degli utenti appartiene alla comunità 1, invece la seconda metà appartiene alla comunità 2. La matrice di accoppiamento \mathbf{C} è data da (3.44) con $\rho = 1$. Da sinistra verso destra, si ha $\zeta_2 = -0.1, 0, 0.004, 0.1$. Inoltre, per l'ultimo grafico a destra, dato che corrisponde ad un valore di ζ_2 che porta all'instabilità, si mette $t = 20$.

Infine, per $\zeta_2 > \zeta_1 + 2\alpha/\bar{\alpha}$, la repulsione tra le comunità prevale sull'attrazione intra-comunità, perciò il sistema manifesta un'instabilità di tipo-I e anche la varianza all'interno dei due gruppi cresce all'infinito. In altre parole, i Bogomili e i Catari si dissolvono in una folla eterogenea che non ha una visione ben definita sui due argomenti di interesse.

Per questo caso si può guardare la figura 3.5. Essa mette in mostra le opinioni agli istanti di tempo $t = 0.15, 0.3, 0.45, 0.5$, con $\zeta_2 = 10$ fissato, con le opinioni iniziali che nuovamente partono, in modo deterministico, dall'origine. La dinamica è simile a quella vista nel caso precedente (figura 3.4), ma è più veloce e le comunità si espandono tanto che, per t sufficientemente grande, i loro limiti scompaiono.

Comportamento con rete finita

Allo scopo di valutare la validità della teoria di campo medio, in figura 3.6 si mostra il comportamento della distribuzione delle opinioni per un insieme finito di utenti, con $U = 500$. A tale scopo viene risolta numericamente l'equazione (3.3). In particolare si considera lo stesso modello delle figure 3.3 e 3.4, con $\zeta_2 \in \{-0.1, 0, 0.004, 0.1\}$. Inoltre, si ipotizza che la prima metà degli utenti corrisponda ai Bogomili, mentre la seconda metà corrisponda ai Catari.

Per i primi tre valori di ζ_2 , che portano il sistema ad essere stabile, viene mostrata la distribuzione stazionaria. Invece, per $\zeta_2 = 0.1$, valore che porta il sistema ad essere instabile, si traccia il grafico della distribuzione al tempo $t = 20$.

Confrontando i grafici ottenuti attraverso rete finita, con quelli ottenuti mediante il metodo del campo medio, si vede immediatamente che i comportamenti combaciano. Ciò indica che l'analisi asintotica rappresenta bene anche la dinamica delle opinioni di popolazioni relativamente piccole.

3.6.3 Effetto rotazionale

Infine, si analizza ancora un caso particolare, ovvero quello in cui la dinamica è stabile in entrambe le dimensioni, ma l'effetto della matrice di accoppiamento \mathbf{C} produce un'instabilità di tipo-I.

Si considera nuovamente lo scenario con due comunità rappresentato dalla matrice (3.48), ma con $\zeta_1 = 1$ e $\zeta_2 = -0.1$. Si può notare che, in un caso scalare, questo sarebbe uno scenario stabile. Però, in questo momento si prende in esame una matrice di accoppiamento data da:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.50)$$

Calcolando gli autovalori di tale matrice si vede immediatamente che essi sono $\lambda_{1,2} = \pm j$. È comunque giusto tenere a mente che questo è uno scenario piuttosto artificiale, dato che questa matrice di accoppiamento ha una forma costruita ad-hoc per mostrare un comportamento particolare e non è facile associare ad essa una qualsiasi situazione reale. In ogni caso, tutti gli altri parametri sono gli stessi presenti nel caso precedente, ad

eccezione della variabile pregiudizio che è data da:

$$\mathbf{u}(p) = \begin{cases} [0, -10], & p < 0 \\ [0, 10], & p \geq 0. \end{cases} \quad (3.51)$$

Grazie a queste ipotesi, è facile ottenere che, per l' i -esima personalità discreta, la matrice di covarianza (3.12) è data da:

$$\Sigma(p_i, t) = \sigma_n^2 t \mathbf{I}_2, \quad (3.52)$$

che è indipendente da i . Si può osservare che tale matrice di covarianza non raggiunge nessun limite per $t \rightarrow +\infty$, perciò il sistema è instabile.

Per vedere che cosa succede in questa situazione si può guardare l'immagine 3.7, che mostra l'andamento temporale della distribuzione delle opinioni agli istanti di tempo $t = 1, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80$. Le distribuzioni corrispondenti alle due comunità si allargano nel tempo, come ci si aspetta, mentre le loro medie compiono una rotazione attorno all'origine. In particolare, in alcuni istanti di tempo (ad esempio per $t = 60$) le due popolazioni si trovano, temporaneamente unite.

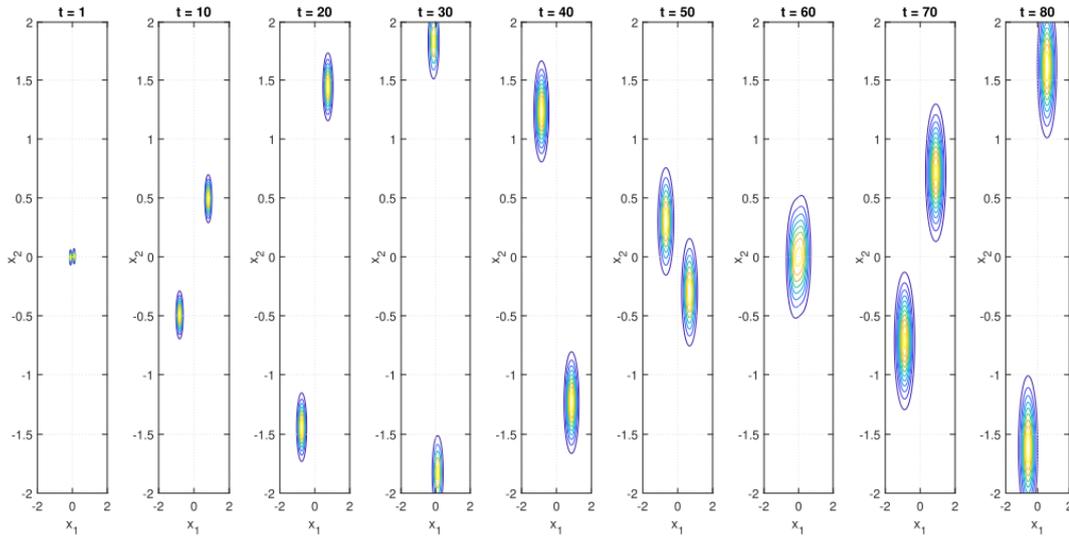


Figura 3.7: Curve di livello per la distribuzione della dinamica delle opinioni con $\alpha = 0.01$, $\sigma_n^2 = 10^{-3}$, \mathbf{Z} come in (3.48) ($\zeta_1 = 1, \zeta_2 = -0.1$), matrice di accoppiamento \mathbf{C} data da (3.50). Da sinistra a destra si ha: $t = 1, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80$.

Capitolo 4

Ulteriori esempi basati su un modello a tre comunità

In questo breve capitolo, si vogliono fornire degli approfondimenti riguardanti alcuni aspetti del modello di dinamica delle opinioni presentato nel capitolo [3]. In particolare, si sceglie di continuare ad utilizzare come struttura di base il modello della sottosezione [3.6.2], ma si prova a renderlo più generico.

Innanzitutto, si ipotizza che le M personalità presenti siano divise in *tre diverse comunità*, a differenza dell'esempio precedente in cui le comunità erano due. Allora, per semplicità, si aggiunge anche l'ipotesi che il numero di personalità M sia divisibile per tre, in modo tale che ogni comunità comprenda lo stesso numero di personalità diverse. Chiaramente, si può immaginare di aumentare ulteriormente il numero di comunità in cui organizzare gli individui, in modo tale da rendere il modello ancora più generale e maggiormente adattabile al caso specifico che si vuole studiare.

Comunque, in tutto questo capitolo si considera sempre il caso con tre comunità. Questa scelta si riflette immediatamente sulla matrice $\underline{\mathbf{Z}}$, che viene definita nel modo seguente:

$$\underline{\mathbf{Z}} = \left(\begin{bmatrix} 1 & -\zeta_{1,2} & -\zeta_{1,3} \\ -\zeta_{1,2} & 1 & -\zeta_{2,3} \\ -\zeta_{1,3} & -\zeta_{2,3} & 1 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{1}_{M/3} \right) \otimes \mathbf{C}. \quad (4.1)$$

In particolare, nell'espressione (4.1) compaiono i parametri $\zeta_{1,2}$, $\zeta_{1,3}$ e $\zeta_{2,3}$, che determinano la forza delle interazioni tra coppie di comunità. Sono i pedici di tali parametri ad indicare qual è la coppia di comunità coinvolta. Per esempio, $\zeta_{1,2}$ rappresenta la forza di interazione, che può essere attrattiva o repulsiva, tra gli individui appartenenti ai gruppi 1 e 2. In modo analogo si possono interpretare gli altri due parametri. Inoltre, si assume che le interazioni tra coppie di comunità siano simmetriche: infatti la matrice $\underline{\mathbf{Z}}$ è simmetrica per costruzione.

In aggiunta, si è mantenuto il numero di argomenti $N = 2$, su cui gli agenti esprimono la propria opinione. Quest'ultima scelta, confermata rispetto agli esempi del capitolo precedente, è fatta soltanto per rendere più semplice la visualizzazione dei risultati, che possono così essere raffigurati su grafici bidimensionali. Inoltre, tale ipotesi si riflette sulla

sceita della matrice \mathbf{C} da utilizzare. In questo caso, essa è una matrice di dimensioni 2×2 , che mantiene la struttura data dall'espressione (3.44).

Comunque, questi modelli di evoluzione delle opinioni si potrebbero generalizzare, senza nuove complessità particolari, a casi in cui gli utenti sono chiamati ad esprimere un'opinione su tre o più argomenti diversi.

Dopo aver esplicitato le prime ipotesi, che vengono fissate per tutti gli esempi del capitolo, si eseguono alcune simulazioni, con le quali si vogliono mostrare:

1. il comportamento della densità di opinione nel caso con tre comunità a seconda della scelta dei parametri $\zeta_{1,2}$, $\zeta_{1,3}$ e $\zeta_{2,3}$.
2. La reazione e i conseguenti cambiamenti delle posizioni delle opinioni nel momento in cui si modificano alcuni parametri, allo scopo di generalizzarli.

4.1 Effetto della matrice \mathbf{Z} e del pregiudizio

Le prime simulazioni che vengono effettuate su questo modello a tre comunità si pongono come obiettivo primario di mostrare l'evoluzione della densità di opinione al variare dei parametri $\zeta_{1,2}$, $\zeta_{1,3}$ e $\zeta_{2,3}$. Dato che ognuno di questi tre parametri ha la funzione di rappresentare la forza di interazione tra due comunità, se vengono considerati singolarmente, su di essi è possibile effettuare un'analisi analoga a quella studiata in [3.6.2] per il parametro ζ_2 . Perciò, si possono ottenere numerose simulazioni scegliendo di volta in volta diverse combinazioni dei parametri, che possono assumere valori con i quali i due gruppi coinvolti si *attraggono* o valori con i quali si *respingono*, con più o meno forza.

Oltre alla scelta della combinazione dei parametri $\zeta_{1,2}$, $\zeta_{1,3}$ e $\zeta_{2,3}$, un altro aspetto fondamentale che può avere una forte influenza sulla posizione delle opinioni è dato dal pregiudizio. Nello specifico, in questo capitolo si è deciso di fissare il pregiudizio nel modo seguente (indicando con C_1, C_2, C_3 le tre comunità):

$$\mathbf{u}(p_i) = \begin{cases} [1.5, 1]^T, & p_i \in C_1 \\ [0.5, 0.5]^T, & p_i \in C_2 \\ [-1.5, -1]^T, & p_i \in C_3. \end{cases} \quad (4.2)$$

A questo punto, può essere interessante introdurre un esempio reale, che potenzialmente ha lo scopo di giustificare e rendere più realistiche le scelte fatte su parametri e variabili. Si può così immaginare che i due argomenti su cui gli individui devono esprimere un'opinione siano:

- 1) dieta vegana;
- 2) amore verso gli animali.

Ipotizzando che siano questi due i temi scelti, risulta sensata e giustificata anche la scelta della matrice \mathbf{C} . Infatti, essa non è una matrice simmetrica, e ciò significa che anche la correlazione tra i due argomenti non è simmetrica. In questo caso tale ipotesi sembra essere ragionevole: dato l'argomento 1), il tema 2) sembra essere fortemente correlato ad

esso. Infatti, se un individuo possiede un'opinione positiva verso la dieta vegana (indipendentemente dal fatto che possa seguirla o meno), è probabile che sia spinto in maniera decisa verso tale direzione dall'amore verso gli animali. Invece, al contrario, guardando nella direzione da 2) verso 1), non sembra esserci una correlazione molto forte. Per esempio, è possibile che ci siano persone che amano fortemente gli animali, ma nonostante ciò non sono affatto favorevoli alla dieta vegana, poiché sostengono che sia necessaria una dieta completa.

In conclusione, confermando questa ipotesi, per questi primi esempi si fissano i parametri $\rho = 1$ e $\epsilon = 10^{-10}$, che compaiono nella matrice \mathbf{C} .

A questo punto si può testare se è possibile trovare un'associazione anche tra le tre comunità del modello e il caso reale scelto come esempio. Per fare ciò, si può guardare al pregiudizio definito in (4.2). In questo modo si vede come ci siano due comunità che hanno pregiudizi opposti riguardo i due argomenti in considerazione. Inoltre, la prima comunità C_1 possiede un pregiudizio piuttosto significativo in direzione positiva rispetto ad entrambi i temi. Si può quindi associare a questo gruppo di individui la *comunità vegana*. Viceversa, la terza comunità C_3 può essere paragonata alla *popolazione carnivora*. Infine, resta ancora da osservare la seconda comunità C_2 : essa possiede un pregiudizio che si posiziona nel primo quadrante (come nel caso della comunità C_1), ma con una visione sui due temi meno estrema. Per questo motivo si può pensare di paragonare quest'ultimo gruppo con la *comunità vegetariana*.

Conclusa questa serie di premesse, nelle pagine successive si mostrano alcune simulazioni che aiutano a capire l'effetto della matrice \mathbf{Z} e del pregiudizio. Tutti gli altri parametri del modello rimangono fissati come negli esempi del capitolo precedente, mentre si considera come numero discreto di personalità $M = 6$. Inoltre, bisogna sottolineare che in questa serie di esperimenti si cambia condizione iniziale. Infatti, ogni simulazione viene fatta partire da una situazione in cui gli individui si sono già suddivisi in tre comunità, posizionandosi intorno ai rispettivi pregiudizi, come si può osservare nella figura 4.1. La scelta di questa nuova condizione iniziale è stata fatta per mostrare meglio l'effetto dei parametri sulla dinamica delle tre comunità.

Adesso, guardando le immagini 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6 e 4.7, si possono osservare alcuni istanti dell'evoluzione delle opinioni al variare di diverse combinazioni dei parametri di interesse. In particolare, in questa sezione sono stati simulati sei modelli, ad ognuno dei quali corrisponde una combinazione dei parametri $\zeta_{1,2}$, $\zeta_{1,3}$ e $\zeta_{2,3}$. Tali combinazioni alternano valori che attraggono coppie di comunità, a valori che le fanno respingere. In aggiunta, in questi esempi particolari sono stati fissati i valori dei parametri in modo tale che la forza con cui due comunità si attraggono sia maggiore rispetto alla forza con cui si respingono. Questa scelta è stata fatta semplicemente per evitare che alcune comunità sulle quali agisce qualche forza repulsiva si allontanino molto velocemente rispetto all'origine del grafico, rendendo così meno chiara la rappresentazione.

Inoltre, è necessario sottolineare che gli esempi successivi si possono suddividere in due gruppi.

- Il primo gruppo è costituito dalle figure 4.2, 4.3 e 4.4. Sono tre esempi in cui i parametri della matrice \mathbf{Z} sono fissati in modo tale che ci siano due forze attrattive

e soltanto una forza repulsiva. In ognuno di questi casi, il sistema corrispondente è stabile. Per questo motivo, ogni immagine presenta (da sinistra a destra) tre sotto-figure in cui sono illustrati diversi istanti all'inizio dell'evoluzione, per mostrare come si muovono le comunità, e infine una quarta sotto-figura in cui è stampata la situazione stabile raggiunta all'equilibrio.

- Il secondo gruppo, invece, è costituito dalle figure 4.5, 4.6 e 4.7. Questa volta si tratta di tre casi in cui i parametri della matrice \underline{Z} sono scelti in modo tale che siano presenti due forze repulsive e soltanto una forza attrattiva tra comunità. In questo modo i sistemi presentano anche un'instabilità sul valor medio. Perciò, in ognuna delle immagini compaiono soltanto quattro sotto-figure in cui sono mostrati diversi istanti all'inizio della dinamica, con lo scopo di dare un'idea di come si sviluppa l'evoluzione delle opinioni.

A titolo esemplificativo può essere utile esibire alcuni commenti relativi alla figura 4.3. In questo caso, che è stabile, sono stati fissati i parametri in modo tale che le comunità C_1 - C_2 e C_1 - C_3 si attraggano, mentre la coppia C_2 - C_3 si respinge. Di conseguenza, nei primi istanti dell'evoluzione temporale si vede come la comunità C_1 , attratta da entrambi gli altri gruppi, risulta essere quella che si muove in maniera più significativa. Addirittura si scambia di posizione con C_2 , la quale subisce anche l'influenza della forza repulsiva con C_3 . Infine, osservando quest'ultima comunità, si vede che si muove verso l'alto, avvicinandosi a C_1 , proprio a causa del fatto che la forza di attrazione ha un impatto maggiore rispetto alla repulsione.

Se poi si continuasse ad osservare l'evoluzione delle opinioni, la situazione si stabilizzerebbe, continuando ad avvicinare le tre comunità, finché si raggiunge la situazione di stabilità mostrata dalla quarta sotto-figura ($t \rightarrow +\infty$). Si vede che, proprio a causa del dominio della forza di attrazione, le tre comunità sono molto vicine tra loro, formando quasi un unico consenso globale (C_1 e C_2 sono praticamente unite in un unico gruppo, mentre C_3 rimane leggermente spostata, anche se non è comunque possibile distinguerla completamente).

In tutti gli altri esempi della sezione si testano altre potenziali combinazioni dei parametri. Comunque, i ragionamenti e le osservazioni presentate per la figura 4.3 si possono tranquillamente estendere anche a questi casi.

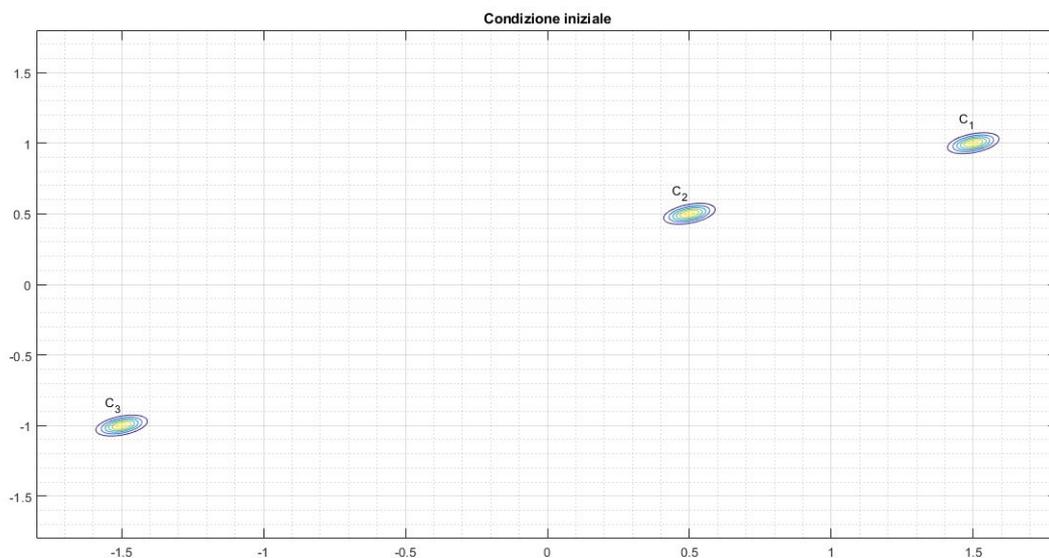


Figura 4.1: Distribuzione iniziale della densità di opinione. Tale condizione iniziale viene utilizzata per gli esempi di questo capitolo, allo scopo di rendere immediatamente visibile sulle 3 comunità l'effetto dei parametri analizzati di volta in volta.

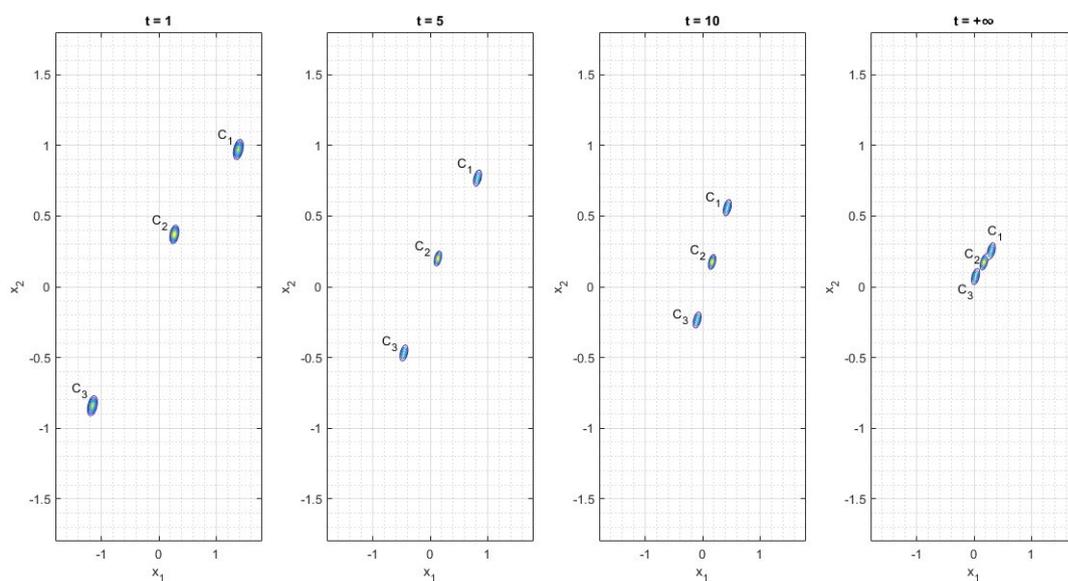


Figura 4.2: Alcuni istanti nella fase iniziale dell'evoluzione temporale delle opinioni e posizione stazionaria raggiunta all'equilibrio per il modello a 3 comunità, con parametri $\zeta_{1,2} = -0.5$, $\zeta_{1,3} = 0.1$ e $\zeta_{2,3} = -0.5$. Con questi valori, le comunità C_1 e C_2 si attraggono, stessa cosa succede alle comunità C_2 e C_3 . Invece i gruppi C_1 e C_3 si respingono.

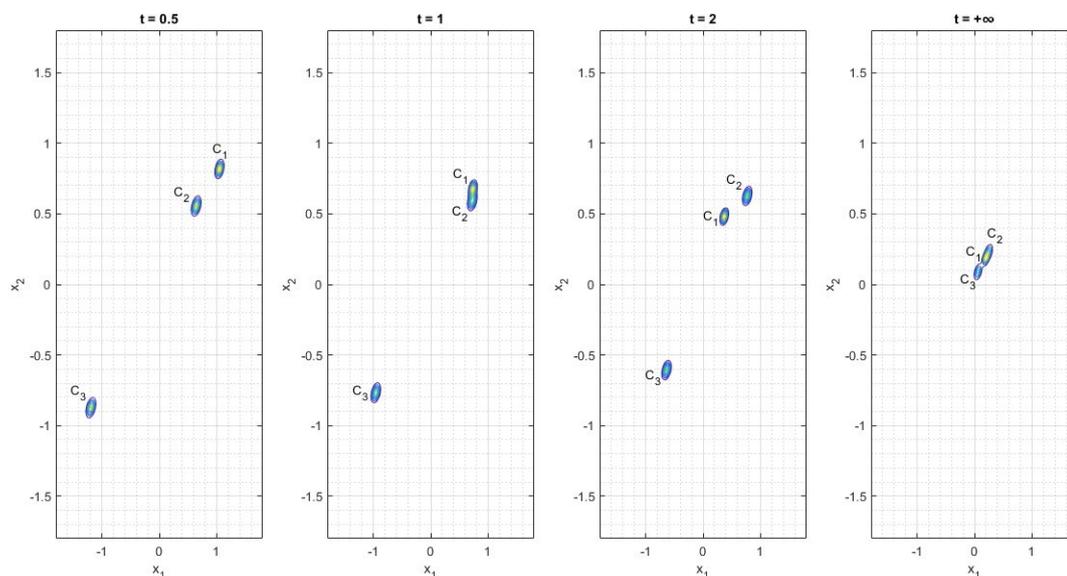


Figura 4.3: Alcuni istanti nella fase iniziale dell'evoluzione temporale delle opinioni e posizione stazionaria raggiunta all'equilibrio per il modello a 3 comunità, con parametri $\zeta_{1,2} = -0.5$, $\zeta_{1,3} = -0.5$ e $\zeta_{2,3} = 0.1$. Con questi valori, le comunità C_1 e C_2 si attraggono, stessa cosa succede alle comunità C_1 e C_3 . Invece i gruppi C_2 e C_3 si respingono.

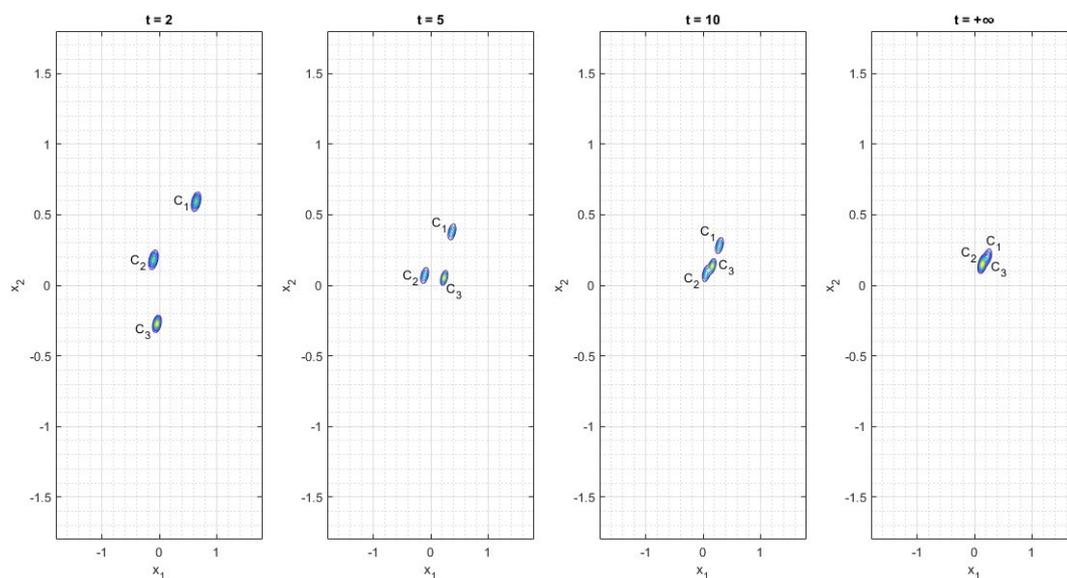


Figura 4.4: Alcuni istanti nella fase iniziale dell'evoluzione temporale delle opinioni e posizione stazionaria raggiunta all'equilibrio per il modello a 3 comunità, con parametri $\zeta_{1,2} = 0.1$, $\zeta_{1,3} = -0.5$ e $\zeta_{2,3} = -0.5$. Con questi valori, le comunità C_2 e C_3 si attraggono, stessa cosa succede alle comunità C_1 e C_3 . Invece i gruppi C_1 e C_2 si respingono.

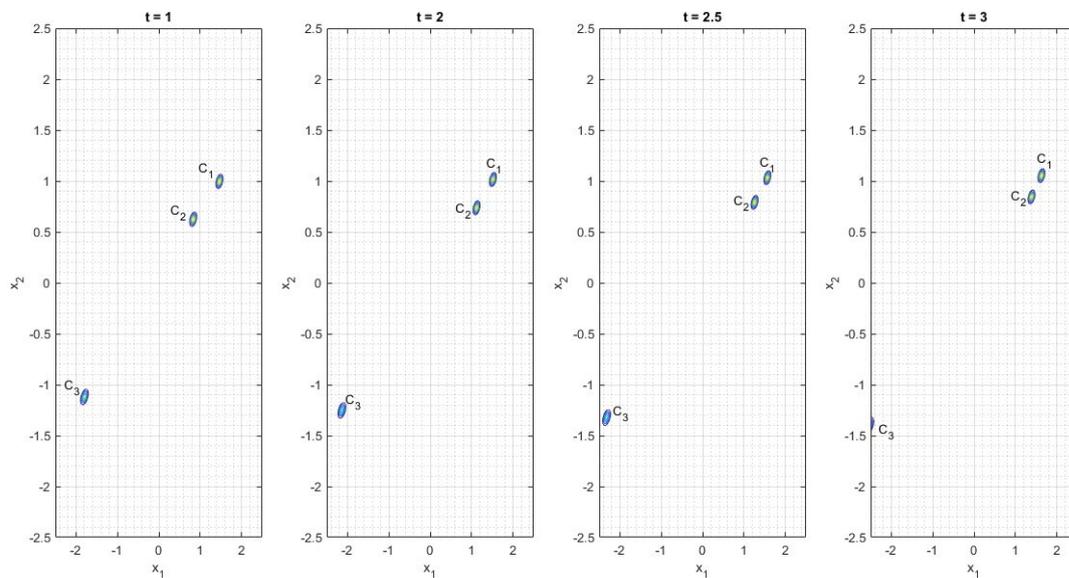


Figura 4.5: Prima fase dell'evoluzione temporale delle opinioni per il modello a 3 comunità, con parametri $\zeta_{1,2} = -0.5$, $\zeta_{1,3} = 0.1$ e $\zeta_{2,3} = 0.1$. Con questi valori, le comunità C_1 e C_2 si attraggono. Invece i gruppi C_2 e C_3 si respingono e la stessa cosa avviene tra le comunità C_1 e C_3 .

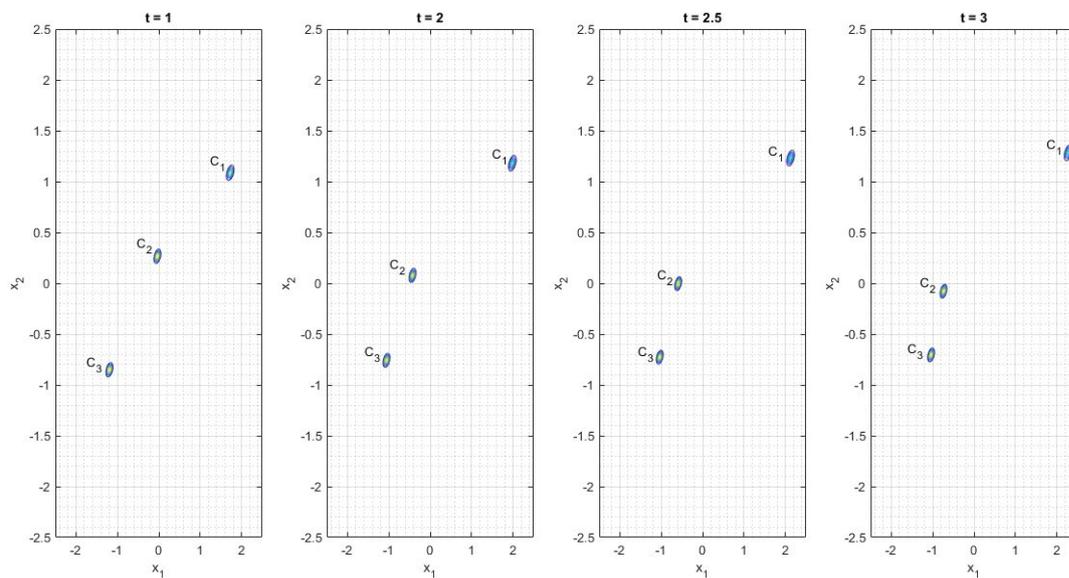


Figura 4.6: Prima fase dell'evoluzione temporale delle opinioni per il modello a 3 comunità, con parametri $\zeta_{1,2} = 0.1$, $\zeta_{1,3} = 0.1$ e $\zeta_{2,3} = -0.5$. Con questi valori, le comunità C_2 e C_3 si attraggono. Invece i gruppi C_1 e C_2 si respingono e la stessa cosa avviene tra le comunità C_1 e C_3 .

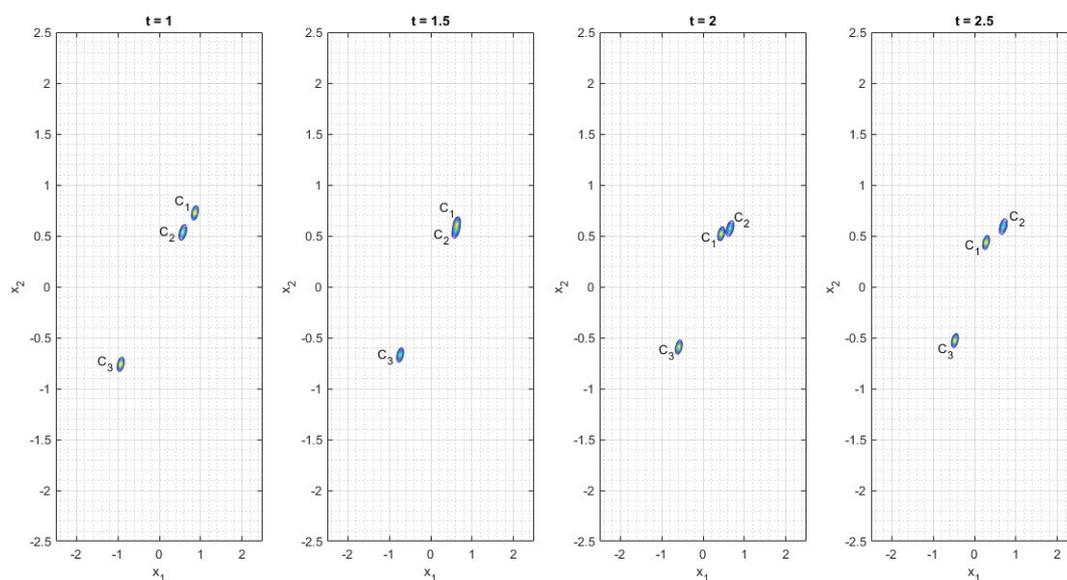


Figura 4.7: Prima fase dell'evoluzione temporale delle opinioni per il modello a 3 comunità, con parametri $\zeta_{1,2} = 0.1$, $\zeta_{1,3} = -0.5$ e $\zeta_{2,3} = 0.1$. Con questi valori, le comunità C_1 e C_3 si attraggono. Invece i gruppi C_1 e C_2 si respingono e la stessa cosa avviene tra le comunità C_2 e C_3 .

4.2 Effetto della testardaggine

Dopo aver visto gli effetti della matrice che descrive le forze di interazione e del pregiudizio, è interessante anche valutare l'impatto del parametro relativo alla testardaggine, che nel modello viene indicato con $\alpha(p_i)$. Fino a questo momento, si sono presentati soltanto esempi in cui è valida l'assunzione che tutti gli utenti abbiano lo stesso livello di testardaggine, indipendentemente dalla loro personalità. Chiaramente, se si pensa a ciò che succede nella realtà, è molto probabile che questa assunzione vada rilassata e resa maggiormente flessibile. In particolare, un primo modo per aumentare l'adattabilità del modello può essere quello di differenziare il livello di testardaggine a seconda della comunità a cui appartiene la personalità.

Per testare questo nuovo effetto, si sceglie l'utilizzo delle stesse variabili inserite nella simulazione relativa alla figura 4.4. Chiaramente si modifica la variabile α , che viene definita nel modo seguente:

$$\alpha(p_i) = \begin{cases} \alpha_1, & p_i \in C_1 \\ \alpha_2, & p_i \in C_2 \\ \alpha_3, & p_i \in C_3, \end{cases} \quad (4.3)$$

dove α_1 , α_2 e α_3 sono tre valori generici che di volta in volta possono essere modificati per mostrare un caso particolare. Quindi, l'obiettivo è illustrare come cambia l'evoluzione di questo esempio rispetto al caso mostrato nella sezione precedente, in cui ad ogni personalità era associato un valore fisso di testardaggine, $\alpha = 0.01$.

In particolare, in questa sezione vengono proposti due casi, nei quali sono scelti diversi valori dei parametri α_1 , α_2 e α_3 che compaiono nell'espressione (4.3). Per comprendere al meglio l'impatto di queste variazioni, è importante confrontare le figure sottostanti 4.8 e 4.9, con l'immagine 4.4 della sezione precedente.

Si può partire dalla prima figura 4.8: essa rappresenta l'evoluzione temporale di un modello in cui ogni personalità appartenente alla comunità C_1 mantiene $\alpha = 0.01$, mentre gli utenti del gruppo C_2 assumono una testardaggine 5 volte maggiore e gli agenti di C_3 addirittura possiedono $\alpha = 0.1$, cioè 10 volte più grande. Queste nuove assunzioni si riflettono in maniera importante sulla dinamica delle opinioni. Confrontandolo con il modello originale (figura 4.4), si nota immediatamente come cambia l'evoluzione soprattutto delle curve di livello relative alla comunità C_3 . Infatti, questi agenti ora possiedono una testardaggine molto più alta rispetto a tutti gli altri e quindi la loro tendenza a modificare la propria opinione è decisamente rallentata. Viceversa, la prima comunità, che mantiene la testardaggine originale, cambia posizione in modo ancora più accentuato. Questo fenomeno si può spiegare con il fatto che le forze di interazioni tra le comunità rimangono le stesse del modello originale, ma dato che i gruppi C_2 e C_3 sono diventati meno inclini a modificare la propria opinione, tali forze hanno un effetto maggiore sulla comunità C_1 . Inoltre, è anche interessante vedere come cambia la distribuzione stazionaria delle opinioni. Osservando le sotto-immagini relative a $t \rightarrow +\infty$, emergono differenze notevoli: innanzitutto, rispetto al caso originale, non si forma più un unico consenso globale, bensì la popolazione si divide in due gruppi, uno formato sostanzialmente dall'unione delle comunità C_1 e C_3 e l'altro dalla comunità C_2 . In aggiunta, cambia anche la posizione

finale dei gruppi. Infatti, in questo nuovo esempio tutte le opinioni sono collocate nella parte negativa sia rispetto all'argomento x_1 , sia rispetto all'argomento x_2 . Questo effetto è dovuto al fatto che la comunità con la testardaggine più alta, e quindi è meno incline a modificare la propria opinione, è la comunità C_3 , ovvero proprio quella che parte con un pregiudizio negativo verso entrambi i temi.

Nella seconda figura, si può osservare un altro esempio simile. In questo caso, però, tutte le comunità modificano la propria variabile α :

- per gli utenti della comunità C_1 , $\alpha_1 = 0.1$, cioè 10 volte maggiore rispetto al valore standard;
- per gli utenti della comunità C_2 , $\alpha_2 = 0.05$, cioè 5 volte maggiore rispetto al valore standard;
- per gli utenti della comunità C_3 , $\alpha_3 = 0.005$, cioè 2 volte minore rispetto al valore standard.

Le osservazioni che si possono fare in questo caso non si discostano molto rispetto a quelle presentate sopra. Comunque, si può soprattutto evidenziare il fatto che in questo caso la posizione stazionaria raggiunta dal sistema non comporta l'unione di nessun gruppo, ma un loro semplice avvicinamento. Questo accade perché le comunità C_1 e C_2 , entrambe attratte da C_3 , non hanno un livello di testardaggine sufficientemente basso da unirsi in un unico gruppo. Invece la comunità C_3 , avendo un livello di testardaggine molto basso, si sposta volentieri, andando a posizionarsi, all'equilibrio, in mezzo agli altri due gruppi, in una zona del grafico abbastanza distante rispetto al proprio pregiudizio iniziale.

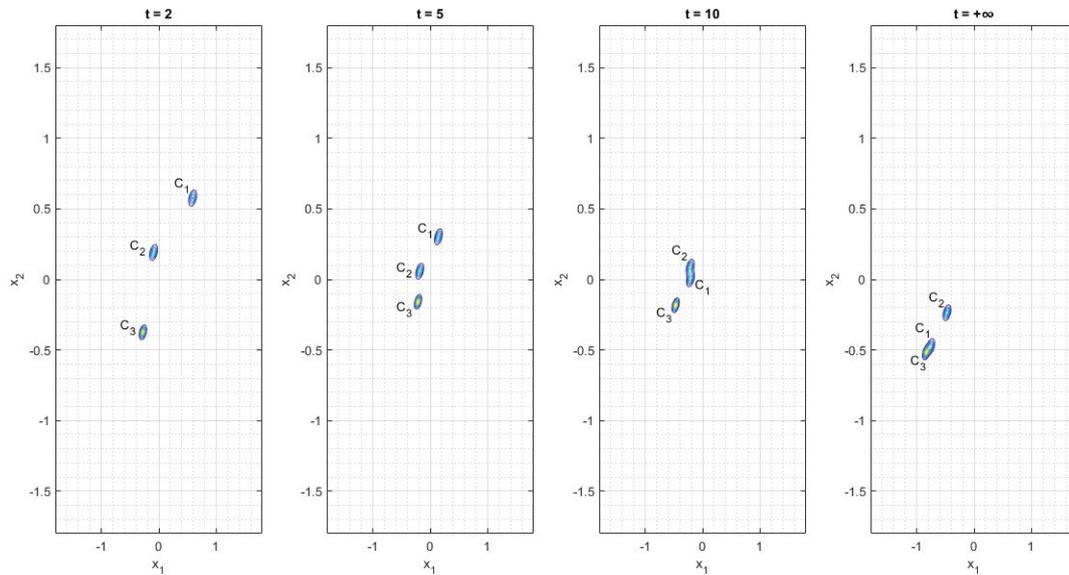


Figura 4.8: Primo esempio sull'effetto della testardaggine $\alpha(p_i)$. In questo primo caso, si settano le costanti $\alpha_1 = 0.01$, $\alpha_2 = 0.05$ e $\alpha_3 = 0.1$. In pratica, si lascia invariata (rispetto a tutti gli altri esempi) la testardaggine di ogni personalità che appartiene al gruppo C_1 , mentre si aumenta sensibilmente α per le personalità appartenenti alle altre due comunità.

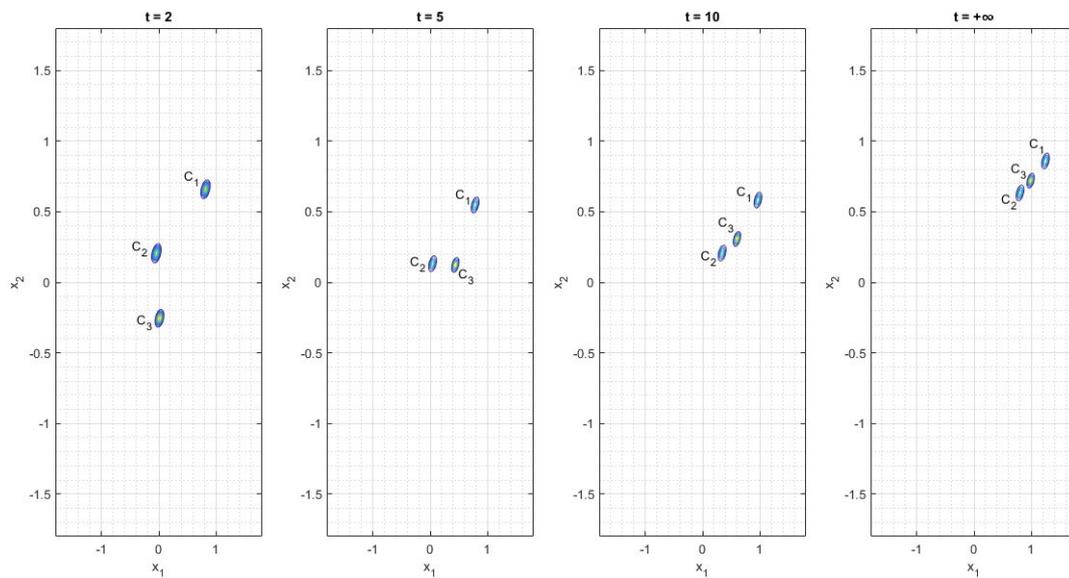


Figura 4.9: Secondo esempio sull'effetto della testardaggine $\alpha(p_i)$. In questo secondo caso, si settano le costanti $\alpha_1 = 0.1$, $\alpha_2 = 0.05$ e $\alpha_3 = 0.005$. In pratica, si dimezza ulteriormente la testardaggine degli utenti appartenenti al gruppo C_3 , mentre si aumenta sensibilmente α per le personalità appartenenti alle altre due comunità.

4.3 Effetto del cambiamento di pregiudizio

Rifacendosi all'esperienza quotidiana, è possibile immaginare che il pregiudizio riguardo alcuni temi possa subire una modifica a lungo andare nel tempo. In realtà, pensando alla definizione di pregiudizio, sembra strano credere che un evento del genere possa accadere. Infatti, esso dovrebbe essere sostanzialmente immutabile, mentre ciò che cambia dovrebbe essere soltanto l'opinione. Però, riflettendo su ciò che accade nella vita reale, è possibile intuire che la stessa opinione in qualche modo possa avere un'influenza sul pregiudizio. Per chiarire meglio questa idea, è utile pensare ad un esempio: si può immaginare di avere un certo pregiudizio, rinominato \mathbf{u}^* , riguardo un generico tema. Inizialmente, allora, l'opinione di questo agente riguardo il tema considerato si posizionerà (in un ipotetico grafico) vicino a dove è localizzato il pregiudizio. Però, con il passare del tempo, a causa di influenze esterne o semplicemente di interazioni con altri utenti, è possibile che l'opinione dell'agente cambi posizione e si *stabilizzi* a lungo in un qualche altro punto del grafico, magari anche distante rispetto al pregiudizio. Se accade ciò, \mathbf{u}^* potrebbe subire una modifica, in modo da essere più vicino all'opinione che possiede in quel momento l'utente.

In questa sezione si prova, quindi, a presentare un esempio di effetto di questo tipo tramite il modello di dinamica delle opinioni. Si prende come base il modello degli esempi precedenti. In particolare, si torna ad impostare $\alpha = 0.01$ per qualsiasi personalità, si sceglie un valore identico per i parametri $\zeta_{1,2} = \zeta_{1,3} = \zeta_{2,3} = -0.025$ e si conferma il pregiudizio iniziale come in tutti gli esempi di questo capitolo. Settando in questo modo i parametri, si ottiene una simulazione che converge ad una posizione stabile. L'idea è proprio di sfruttare questa posizione di stabilità per introdurre il cambio di pregiudizio. In sostanza, si lascia evolvere il sistema finché raggiunge la posizione di stabilità. Tale posizione viene raggiunta idealmente soltanto per $t \rightarrow +\infty$, ma introducendo una *tolleranza*, si afferma che il sistema si trova nella posizione stabile nel momento in cui la variazione delle opinioni ad ogni passo temporale Δt risulta essere inferiore a tale soglia. Una volta raggiunta questa posizione, essendo passata una quantità di tempo significativa, si ipotizza che sia ammissibile il cambio di pregiudizio. In questo esempio pratico, in particolare, si sceglie come nuovo pregiudizio la *posizione media che possiede ciascuna comunità nella posizione stabile*.

Ora, modificato il pregiudizio, si lascia nuovamente evolvere liberamente il sistema, per valutarne il comportamento. Ci si può aiutare osservando le figure 4.10 e 4.11, che mostrano l'evoluzione della densità di opinione. Si nota immediatamente che la modifica del pregiudizio porta il sistema ad evolvere verso una situazione di convergenza verso un unico consenso. In realtà, con un solo cambio di pregiudizio non si raggiunge ancora un consenso globale, ma la nuova posizione stabile avvicina notevolmente le tre comunità tra loro. Però, il ragionamento seguito fino a questo punto si può ripetere. Così facendo le opinioni tenderebbero ad avvicinarsi ulteriormente, finché si raggiungerebbe effettivamente un consenso globale in cui non si distinguerebbero più le tre comunità.

In definitiva, utilizzando questo specifico criterio, (in cui il pregiudizio cambia soltanto quando la posizione dell'opinione si fissa a lungo in una certa posizione, assumendo come nuovo valore il valore medio dell'opinione nell'istante in cui si modifica) il sistema è portato a muoversi verso una situazione di *maggior consenso* o, nel caso opposto, di *maggior estremizzazione*.

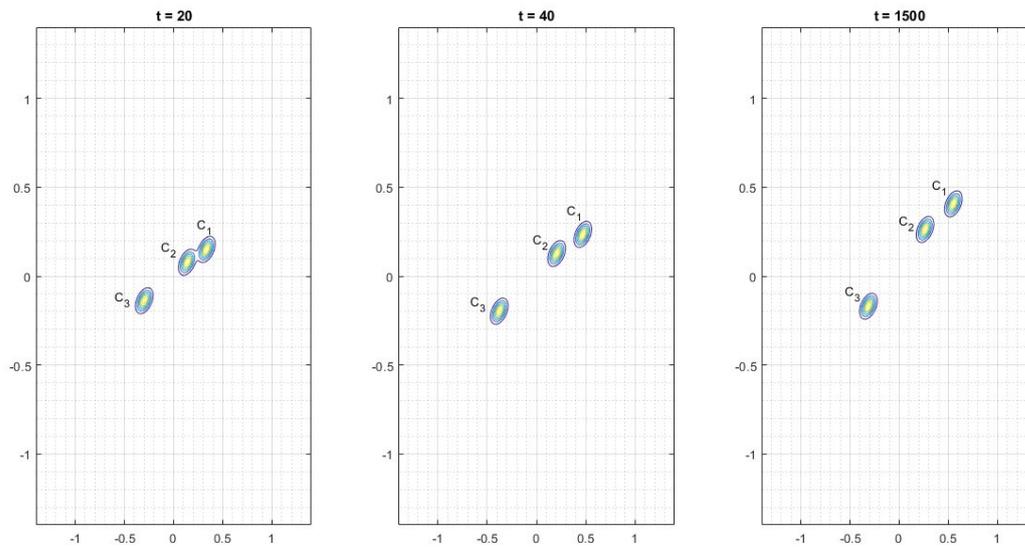


Figura 4.10: Esempio sull'effetto della modifica del pregiudizio. In questa prima figura sono raffigurati tre istanti dell'evoluzione delle opinioni: nei primi due, $t = 20$ e $t = 40$, le opinioni non hanno ancora raggiunto una situazione stabile, perciò si stanno ancora modificando. Nel terzo, $t = 1500$, è stato invece superato l'istante in cui la differenza di opinione tra i due tempi t e $t + \Delta t$ è inferiore alla tolleranza (calcolato tramite una funzione su Matlab). Quindi si assume che il grafico in questo istante rappresenti la posizione delle opinioni di equilibrio.

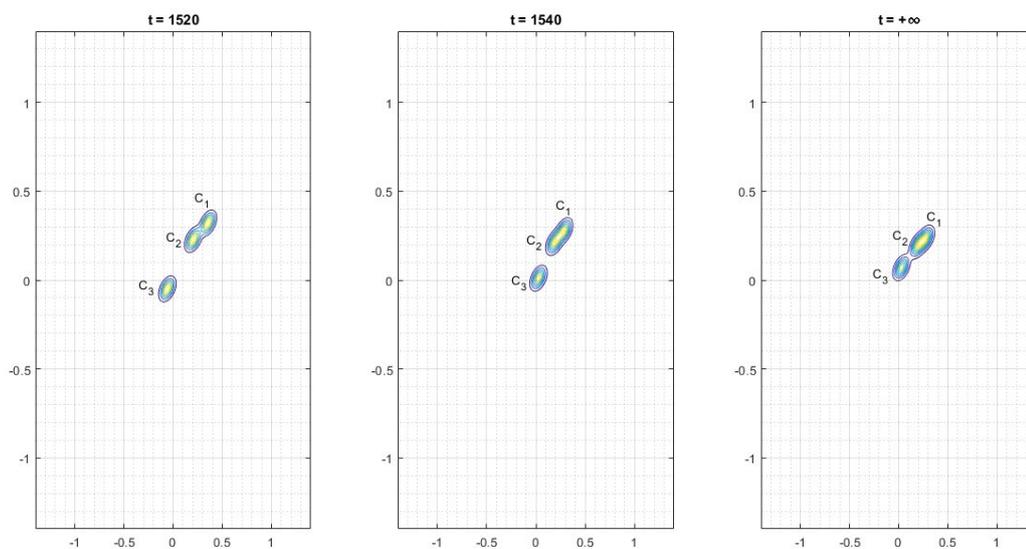


Figura 4.11: Nella seconda figura, invece, si mostra l'evoluzione del sistema dopo aver modificato il pregiudizio. Il nuovo pregiudizio corrisponde alla posizione media, per ogni comunità, delle opinioni all'istante $t = 1500$, ovvero l'ultimo tempo prima del cambio. Sono mostrati prima due istanti, $t = 1520$ e $t = 1540$, per dare un'idea di come procede l'evoluzione delle opinioni. Poi, nella terza sotto-figura si mostra la nuova posizione di stabilità raggiunta dal sistema.

Capitolo 5

Dinamica delle opinioni con struttura sociale tempo-variante

In questo capitolo si vogliono mostrare i nuovi contributi apportati al modello di dinamica delle opinioni trattato nel capitolo [3]. In particolare, tale modello include già parecchi termini e parametri che permettono di descrivere in maniera abbastanza approfondita il problema, ma alcune assunzioni limitano la possibilità di trattare casi ancora più generali. Per esempio, si ipotizza che la matrice \underline{Z} , che definisce la forza e il tipo delle interazioni presenti tra gli agenti, sia *fissa* nel tempo. In sostanza, quindi, la rete sociale sottostante al modello non varierà mai con il passare del tempo.

Pensando però ad una rete sociale che si può trovare nel mondo reale, è facile constatare che le interazioni tra gli utenti possono modificarsi nel tempo. Infatti, possono nascere nuove interazioni, se ne possono eliminare altre e può anche cambiare la forza di alcune delle interazioni già esistenti.

Con l'obiettivo di provare ad inserire questo aspetto nel modello matematico, si prova quindi a rilassare l'ipotesi sulla matrice \underline{Z} : essa non sarà più fissa nel tempo, ma potrà *subire delle variazioni*.

5.1 \underline{Z} costante per intervalli di tempo

La prima ipotesi, elaborata per introdurre la variabilità di \underline{Z} nel tempo, consiste nel cambiare tale matrice dopo un certo intervallo di tempo, durante il quale essa si mantiene fissa e costante. Per chiarire questa assunzione, si può considerare un generico intervallo temporale $(t_{k-1}, t_k]$. Durante tale intervallo, la matrice che regola la forza delle interazioni viene fissata e la si può denotare con \underline{Z}_k . Perciò, se si considera un generico istante $t \in (t_{k-1}, t_k]$, la matrice associata sarà esattamente \underline{Z}_k e, in particolare, ciò vale per ogni $t \in (t_{k-1}, t_k]$.

Una volta raggiunto l'istante t_k , si passerà all'intervallo di tempo successivo $(t_k, t_{k+1}]$,

durante il quale la matrice delle interazioni si modificherà diventando \mathbf{Z}_{k+1} . In sostanza, si avrà una sequenza di matrici $\{\mathbf{Z}_k\}_{k=1}^T$, ciascuna associata ad un diverso intervallo temporale. Inoltre, è bene notare che T in generale può essere uguale a $+\infty$, ma può anche corrispondere ad un valore reale, nel caso in cui ci sia l'interesse di effettuare un'analisi relativa solamente ad un determinato periodo.

5.1.1 Analisi di stabilità

Innanzitutto, si ipotizza di restare all'interno della struttura di lavoro introdotta nella sottosezione [3.3.1], in cui le *personalità appartengono ad un insieme discreto di valori*. A tale assunzione si aggiunge l'ipotesi presentata sopra sulla matrice che regola la forza delle interazioni. Inoltre, bisogna sottolineare un'altra assunzione che viene fatta e che servirà più avanti nell'analisi della stabilità: si ipotizza che la *covarianza iniziale sia nulla*.

A questo punto è interessante andare a studiare quali possono essere le condizioni di stabilità del nuovo sistema.

Media

Si consideri un generico intervallo di tempo $(t_{k-1}, t_k]$: in tale intervallo si avrà la matrice \mathbf{Z}_k , alla quale corrispondono anche le matrici $\mathbf{\Xi}_k(p_i)$, per ogni possibile valore di personalità p_i . Perciò, considerando $t \in (t_{k-1}, t_k]$, si può scrivere l'equazione della media, a partire da (3.13):

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(p_i, \mathbf{y}, t) = & e^{-\mathbf{\Xi}_k(p_i)(t-t_{k-1})} \mathbf{y} + \alpha(p_i) \mathbf{\Xi}_k^{-1}(p_i) \left(\mathbf{I}_N - e^{-\mathbf{\Xi}_k(p_i)(t-t_{k-1})} \right) \mathbf{C} \mathbf{u}(p_i) + \\ & + (1 - \alpha(p_i)) \int_{t_{k-1}}^t e^{-\mathbf{\Xi}_k(p_i)(t-\tau)} \boldsymbol{\gamma}(p_i, \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Di questa equazione (5.1) si vuole andare a risolvere la parte relativa all'integrale. Per fare ciò è quindi necessario sostituire l'espressione di $\boldsymbol{\gamma}(p_i, t)$. Tale espressione può essere ricavata da (3.30), facendo attenzione però al fatto che si sta cercando di definire $\boldsymbol{\gamma}$ per ogni personalità p_i . Allora, ricordando che in generale la matrice \mathbf{Z}_k è definita nel modo seguente:

$$\mathbf{Z}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{11}^{(k)} & \dots & \mathbf{Z}_{1M}^{(k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Z}_{M1}^{(k)} & \dots & \mathbf{Z}_{MM}^{(k)} \end{bmatrix},$$

per selezionare la porzione di matrice relativa alla personalità p_i , bisogna prendere tutti i blocchi presenti nell' i -esima riga della matrice. Utilizzando la notazione di Matlab, tale parte di matrice verrà indicata con $\mathbf{Z}_k(i, :)$. In questo modo si ricava:

$$\boldsymbol{\gamma}(p_i, t) = \mathbf{Z}_k(i, :) \left[e^{-\boldsymbol{\Psi}_k(t-t_{k-1})} \mathbf{P}_0 \mathbf{x}_{0,k} + \boldsymbol{\Psi}_k^{-1} \left(\mathbf{I}_{MN} - e^{-\boldsymbol{\Psi}_k(t-t_{k-1})} \right) \mathbf{P}_1 \left(\mathbf{I}_M \otimes \mathbf{C} \right) \mathbf{u} \right]. \quad (5.2)$$

Inoltre, in questa espressione si possono isolare i termini che sono moltiplicati per l'esponenziale, in cui compare la variabile t . Si riscrive quindi la (5.2), distinguendo i due

termini di interesse:

$$\begin{aligned} \gamma(p_i, t) = & \underbrace{\underline{\mathbf{Z}}_k(i, \cdot) e^{-\underline{\Psi}_k(t-t_{k-1})} [\mathbf{P}_0 \underline{\mathbf{x}}_{0,k} - \underline{\Psi}_k^{-1} \mathbf{P}_1 (\mathbf{I}_M \otimes \mathbf{C}) \underline{\mathbf{u}}]}_{\underline{\mathbf{a}}} + \\ & + \underbrace{\underline{\mathbf{Z}}_k(i, \cdot) \underline{\Psi}_k^{-1} \mathbf{P}_1 (\mathbf{I}_M \otimes \mathbf{C}) \underline{\mathbf{u}}}_{\underline{\mathbf{b}}}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Ora si può sostituire questa espressione nell'integrale dell'equazione (5.1). Concentrandosi esclusivamente sull'integrale (che si può rinominare con \mathbf{L}_i per comodità) e tralasciando gli altri termini, si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_i &= \int_{t_{k-1}}^t e^{-\underline{\Xi}_k(p_i)(t-\tau)} (\underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{b}}) d\tau \\ &= \underbrace{\int_{t_{k-1}}^t e^{-\underline{\Xi}_k(p_i)(t-\tau)} \underline{\mathbf{a}} d\tau}_{\mathbf{L}_i^{(1)}} + \underbrace{\int_{t_{k-1}}^t e^{-\underline{\Xi}_k(p_i)(t-\tau)} \underline{\mathbf{b}} d\tau}_{\mathbf{L}_i^{(2)}}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

dove $\underline{\mathbf{a}}$ e $\underline{\mathbf{b}}$ sono i due vettori che formano l'equazione (5.3). In particolare, è interessante mostrare come risolvere l'integrale $\mathbf{L}_i^{(2)}$: poiché nell'espressione di $\underline{\mathbf{b}}$ non compare direttamente la variabile τ , può essere portato fuori dall'integrale, ottenendo così:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_i^{(2)} &= \left(\int_{t_{k-1}}^t e^{-\underline{\Xi}_k(p_i)(t-\tau)} d\tau \right) \underline{\mathbf{b}} \\ &= e^{-\underline{\Xi}_k(p_i)t} \left(\int_{t_{k-1}}^t e^{\underline{\Xi}_k(p_i)\tau} d\tau \right) \underline{\mathbf{b}} \\ &= \underline{\Xi}_k^{-1}(p_i) e^{-\underline{\Xi}_k(p_i)t} \left(e^{\underline{\Xi}_k(p_i)t} - e^{\underline{\Xi}_k(p_i)t_{k-1}} \right) \underline{\mathbf{b}} \\ &= \underline{\Xi}_k^{-1}(p_i) \left(\mathbf{I}_N - e^{-\underline{\Xi}_k(p_i)(t-t_{k-1})} \right) \underline{\mathbf{b}} \\ &= \underline{\Xi}_k^{-1}(p_i) \left(\mathbf{I}_N - e^{-\underline{\Xi}_k(p_i)(t-t_{k-1})} \right) \underline{\mathbf{Z}}_k(i, \cdot) \underline{\Psi}_k^{-1} \mathbf{P}_1 (\mathbf{I}_M \otimes \mathbf{C}) \underline{\mathbf{u}}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Si riparte ora da (5.4) e, guardando questa volta il termine $\mathbf{L}_i^{(1)}$, si vede che non è possibile agire allo stesso modo di prima portando fuori dall'integrale la variabile $\underline{\mathbf{a}}$, a causa della presenza dell'esponenziale, che dipende da τ . Allora si può riscrivere nel modo

seguinte:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L}_i^{(1)} &= \int_{t_{k-1}}^t e^{-\Xi_k(p_i)(t-\tau)} \underline{\mathbf{a}} d\tau \\
 &= \int_{t_{k-1}}^t e^{-\Xi_k(p_i)(t-\tau)} \underline{\mathbf{Z}}_k(i, :) e^{-\Psi_k(\tau-t_{k-1})} \left[\mathbf{P}_{0\underline{\mathbf{x}}_{0,k}} - \Psi_k^{-1} \mathbf{P}_1 (\mathbf{I}_M \otimes \mathbf{C}) \underline{\mathbf{u}} \right] d\tau \\
 &= \underbrace{\left(\int_{t_{k-1}}^t e^{-\Xi_k(p_i)(t-\tau)} \underline{\mathbf{Z}}_k(i, :) e^{-\Psi_k(\tau-t_{k-1})} d\tau \right)}_{\mathbf{J}_i(t)} \left[\mathbf{P}_{0\underline{\mathbf{x}}_{0,k}} - \Psi_k^{-1} \mathbf{P}_1 (\mathbf{I}_M \otimes \mathbf{C}) \underline{\mathbf{u}} \right] \\
 &= \mathbf{J}_i(t) \left[\mathbf{P}_{0\underline{\mathbf{x}}_{0,k}} - \Psi_k^{-1} \mathbf{P}_1 (\mathbf{I}_M \otimes \mathbf{C}) \underline{\mathbf{u}} \right],
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

dove il pedice i relativo al termine $\mathbf{J}_i(t)$ serve per esplicitare il fatto che si sta considerando la personalità p_i .

In definitiva, unendo tutti questi risultati parziali, si ottiene la seguente espressione per la media:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{m}(p_i, \mathbf{y}, t) &= e^{-\Xi_k(p_i)(t-t_{k-1})} \mathbf{y} + \alpha(p_i) \Xi_k^{-1}(p_i) \left(\mathbf{I}_N - e^{-\Xi_k(p_i)(t-t_{k-1})} \right) \underline{\mathbf{u}} + \\
 &\quad + \left(1 - \alpha(p_i) \right) \left(\mathbf{J}_i(t) \left[\mathbf{P}_{0\underline{\mathbf{x}}_{0,k}} - \Psi_k^{-1} \mathbf{P}_1 (\mathbf{I}_M \otimes \mathbf{C}) \underline{\mathbf{u}} \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \Xi_k^{-1}(p_i) \left(\mathbf{I}_N - e^{-\Xi_k(p_i)(t-t_{k-1})} \right) \underline{\mathbf{Z}}_k(i, :) \Psi_k^{-1} \mathbf{P}_1 (\mathbf{I}_M \otimes \mathbf{C}) \underline{\mathbf{u}} \right),
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

in cui compare soltanto un integrale, ovvero la variabile $\mathbf{J}_i(t)$:

$$\mathbf{J}_i(t) = \int_{t_{k-1}}^t e^{-\Xi_k(p_i)(t-\tau)} \underline{\mathbf{Z}}_k(i, :) e^{-\Psi_k(\tau-t_{k-1})} d\tau. \tag{5.8}$$

A questo punto, resta solamente da capire come risolvere un integrale di questo tipo. Innanzitutto, si può vedere il caso generale, da applicare poi al caso specifico di interesse.

Risoluzione integrale nel caso generale: sia

$$\mathbf{I} = \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} e^{\mathbf{C}(\tau-t_0)} d\tau, \tag{5.9}$$

un generico integrale che possiede la struttura del tipo che si vuole analizzare. Inoltre, si aggiunge l'ipotesi, non particolarmente restrittiva, che le matrici \mathbf{A} e \mathbf{C} siano *diagonalizzabili*. Grazie a quest'ultima supposizione, è possibile effettuare la decomposizione delle due matrici tramite il teorema spettrale, ottenendo così:

$$\mathbf{A} = \Theta_{\mathbf{A}} \Lambda_{\mathbf{A}} \Theta_{\mathbf{A}}^{-1}, \quad \mathbf{C} = \Theta_{\mathbf{C}} \Lambda_{\mathbf{C}} \Theta_{\mathbf{C}}^{-1}, \tag{5.10}$$

dove $\Lambda_{\mathbf{A}}$ e $\Lambda_{\mathbf{C}}$ sono due matrici diagonali, i cui elementi sono tutti gli autovalori rispettivamente delle matrici \mathbf{A} e \mathbf{C} , mentre le matrici $\Theta_{\mathbf{A}}$ e $\Theta_{\mathbf{C}}$ hanno come colonne i

corrispondenti autovettori.

Sostituendo le due espressioni appena trovate nell'integrale \mathbf{I} (5.9), si può riscrivere:

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \int_{t_0}^t \Theta_{\mathbf{A}} e^{\Lambda_{\mathbf{A}}(t-\tau)} \underbrace{\Theta_{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{B} \Theta_{\mathbf{C}}}_{\mathbf{M}} e^{\Lambda_{\mathbf{C}}(\tau-t_0)} \Theta_{\mathbf{C}}^{-1} d\tau \\ &= \Theta_{\mathbf{A}} \left(\underbrace{\int_{t_0}^t e^{\Lambda_{\mathbf{A}}(t-\tau)} \mathbf{M} e^{\Lambda_{\mathbf{C}}(\tau-t_0)} d\tau}_{\tilde{\mathbf{I}}} \right) \Theta_{\mathbf{C}}^{-1}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Per completare la ricerca della soluzione, si può momentaneamente considerare solo il termine con l'integrale denominato con $\tilde{\mathbf{I}}$, tralasciando le due matrici che lo moltiplicano a sinistra e a destra. Ora, si può risolvere l'integrale considerando elemento per elemento:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{m,n} &= \int_{t_0}^t e^{\lambda_{\mathbf{A},m}(t-\tau)} M_{m,n} e^{\lambda_{\mathbf{C},n}(\tau-t_0)} d\tau \\ &= M_{m,n} \int_{t_0}^t e^{\lambda_{\mathbf{A},m}(t-\tau) + \lambda_{\mathbf{C},n}(\tau-t_0)} d\tau \\ &= M_{m,n} e^{\lambda_{\mathbf{A},m}t - \lambda_{\mathbf{C},n}t_0} \int_{t_0}^t e^{(\lambda_{\mathbf{C},n} - \lambda_{\mathbf{A},m})\tau} d\tau \\ &\stackrel{(\star)}{=} M_{m,n} e^{\lambda_{\mathbf{A},m}t - \lambda_{\mathbf{C},n}t_0} \cdot \frac{1}{\lambda_{\mathbf{C},n} - \lambda_{\mathbf{A},m}} \left[e^{(\lambda_{\mathbf{C},n} - \lambda_{\mathbf{A},m})t} - e^{(\lambda_{\mathbf{C},n} - \lambda_{\mathbf{A},m})t_0} \right] \\ &= \frac{M_{m,n}}{\lambda_{\mathbf{C},n} - \lambda_{\mathbf{A},m}} \left[e^{\lambda_{\mathbf{C},n}(t-t_0)} - e^{\lambda_{\mathbf{A},m}(t-t_0)} \right], \end{aligned} \quad (5.12)$$

dove $M_{m,n}$ è l'elemento di coordinate (m, n) della matrice $\mathbf{M} = \Theta_{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{B} \Theta_{\mathbf{C}}$, $\lambda_{\mathbf{A},m}$ è l' m -esimo autovalore della matrice \mathbf{A} (cioè l'autovalore che si trova in posizione (m, m) della corrispondente matrice diagonale $\Lambda_{\mathbf{A}}$) e, analogamente, $\lambda_{\mathbf{C},n}$ è il n -esimo autovalore della matrice \mathbf{C} . Bisogna anche prestare attenzione al passaggio (\star) : esso è ammissibile se e soltanto se i due autovalori considerati sono diversi tra loro, ovvero $\lambda_{\mathbf{A},m} \neq \lambda_{\mathbf{C},n}$.

Invece, se ci si trova nel caso particolare in cui $\lambda_{\mathbf{A},m} = \lambda_{\mathbf{C},n}$, non si può trovare la soluzione dell'integrale come mostrato nelle ultime righe di (5.12). In realtà, però, la risoluzione è più semplice: chiamato $\lambda = \lambda_{\mathbf{A},m} = \lambda_{\mathbf{C},n}$ l'autovalore, si vede immediatamente che la funzione integranda che compare alla terza riga diventa $e^0 = 1$. Quindi il risultato dell'integrale è semplicemente $(t - t_0)$ e, in definitiva, si trova: $\tilde{I}_{i,j} = M_{m,n} e^{\lambda(t-t_0)}(t - t_0)$.

Infine, variando gli indici m, n si ricavano tutti gli elementi che costituiscono la matrice $\tilde{\mathbf{I}}$. A questo punto si può facilmente risalire alla matrice \mathbf{I} che risolve l'integrale di partenza, moltiplicando $\tilde{\mathbf{I}}$ a sinistra per $\Theta_{\mathbf{A}}$ e a destra per $\Theta_{\mathbf{C}}^{-1}$, come emerge da (5.11).

Terminata questa analisi, si può tornare al caso di interesse applicando i risultati appena trovati. Si vuole risolvere l'integrale $\mathbf{J}_i(t)$ dato dall'espressione (5.8), quindi in questo caso si avranno le seguenti variabili:

- $\mathbf{A} = -\Xi_k(p_i)$;

- $\mathbf{B} = \mathbf{Z}_k(i, \cdot);$
- $\mathbf{C} = -\Psi_k;$
- $t_0 = t_{k-1}.$

Di conseguenza, procedendo come mostrato sopra, si ricavano anche le variabili utili alla risoluzione dell'integrale (5.12).

- $\lambda_{\mathbf{A},m} = -\lambda(\Xi_k(p_i))_m.$ Per alleggerire la notazione, però, nei passaggi successivi verrà semplicemente utilizzato il simbolo $\lambda_{\Xi,m}$ per indicare l' m -esimo l'autovalore relativo alla matrice $\Xi_k(p_i).$
- $\lambda_{\mathbf{C},n} = -\lambda_{\Psi,n},$ utilizzando una notazione simile a quella utilizzata nel punto precedente.
- $\mathbf{M} = \tilde{\mathbf{Z}} = \Theta_{\Xi_k(p_i)}^{-1} \mathbf{Z}_k(i, \cdot) \Theta_{\Psi_k}.$

Avendo ora tutti gli elementi necessari, si possono andare ad inserire nella risoluzione dell'integrale calcolata in (5.12), trovando così:

$$\tilde{I}_{m,n} = \frac{\tilde{Z}_{m,n}}{\lambda_{\Xi,m} - \lambda_{\Psi,n}} \left[e^{-\lambda_{\Psi,n}(t-t_{k-1})} - e^{-\lambda_{\Xi,m}(t-t_{k-1})} \right] \quad (5.13)$$

Sapendo ora come risolvere i singoli elementi $\tilde{I}_{m,n},$ si può ricostruire facilmente la matrice $\tilde{\mathbf{I}}$ e da essa si risale alla matrice $\mathbf{I} = \Theta_{\Xi_k(p_i)} \tilde{\mathbf{I}} \Theta_{\Psi_k}^{-1},$ che risolve completamente l'integrale di interesse.

Covarianza

Invece, per quanto riguarda la covarianza, grazie alla sola assunzione che la distribuzione $\rho_0(\mathbf{y}|p)$ sia Gaussiana, si ha che:

$$\begin{aligned} \Sigma_k(p_i, t) = & \int_{t_{k-1}}^t e^{-\Xi_k(p_i)(\tau-t_{k-1})} \mathbf{D} e^{-\Xi_k^T(p_i)(\tau-t_{k-1})} d\tau + \\ & + e^{-\Xi_k(p_i)(t-t_{k-1})} \Sigma_{k-1}(p_i, t_{k-1}) e^{-\Xi_k^T(p_i)(t-t_{k-1})}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Anche in questo caso compare un integrale che è strutturalmente simile a quello risolto per l'equazione della media. Quindi, per trovare la soluzione si può procedere in maniera simile a prima. Innanzitutto, si può isolare la parte dell'equazione (5.14) in cui compare l'integrale:

$$\mathbf{I} = \int_{t_{k-1}}^t e^{-\Xi_k(p_i)(\tau-t_{k-1})} \mathbf{D} e^{-\Xi_k^T(p_i)(\tau-t_{k-1})} d\tau. \quad (5.15)$$

Mantenendo viva l'ipotesi che la matrice $\Xi_k(p_i)$ sia diagonalizzabile (valida già per il caso della media), allo scopo di applicare nuovamente il teorema spettrale e decomporre la matrice, è necessario segnalare alcune osservazioni.

- (i) Innanzitutto, in questo caso le matrici da decomporre sono $\Xi_k(p_i)$ e $\Xi_k^T(p_i),$ che sono chiaramente una la trasposta dell'altra.

(ii) Di conseguenza gli autovalori delle due matrici sono *uguali*. Quindi anche le due matrici diagonali derivanti dalla decomposizione (che hanno come unici elementi non-nulli proprio gli autovalori delle matrici di partenza) avranno gli stessi elementi. L'unica differenza può essere data dall'ordine in cui sono posizionati gli autovalori sulla diagonale, per cui tali matrici possono essere considerate uguali a meno di un riordinamento: $\Lambda_{\Xi} = \Lambda_{\Xi^T}$.

(iii) Chiamando Θ_{Ξ} e Θ_{Ξ^T} le matrici contenenti sulle colonne gli autovettori, si può osservare che:

- $\Theta_{\Xi^T} = (\Theta_{\Xi}^{-1})^T$;
- $\Theta_{\Xi}^{-1} = \Theta_{\Xi^T}^T$.

Anche in questo caso le uguaglianze sono valide a meno di un riordinamento delle colonne e a meno di una costante moltiplicativa.

Fatte tali premesse e ipotizzando di riordinare e normalizzare le matrici in modo tale che siano valide le osservazioni presentate nei punti (ii) e (iii), si può scrivere:

$$\Xi_k(p_i) = \Theta_{\Xi} \Lambda_{\Xi} \Theta_{\Xi}^{-1}, \quad \Xi_k^T(p_i) = (\Theta_{\Xi}^{-1})^T \Lambda_{\Xi} \Theta_{\Xi}^T. \quad (5.16)$$

Ora, si riscrive l'espressione di I sostituendo (5.16):

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \int_{t_{k-1}}^t \Theta_{\Xi} e^{-\Lambda_{\Xi}(\tau-t_{k-1})} \underbrace{\Theta_{\Xi}^{-1} \mathbf{D} (\Theta_{\Xi}^{-1})^T}_{\tilde{\mathbf{D}}} e^{-\Lambda_{\Xi}(\tau-t_{k-1})} \Theta_{\Xi}^T d\tau \\ &= \Theta_{\Xi} \underbrace{\left(\int_{t_{k-1}}^t e^{-\Lambda_{\Xi}(\tau-t_{k-1})} \tilde{\mathbf{D}} e^{-\Lambda_{\Xi}(\tau-t_{k-1})} d\tau \right)}_{\tilde{\mathbf{I}}} \Theta_{\Xi}^T \end{aligned} \quad (5.17)$$

Si può quindi procedere come mostrato per il caso generale, ovvero considerando solo il termine $\tilde{\mathbf{I}}$ e andando a risolverlo elemento per elemento. In questo modo si trova:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{m,n} &= \tilde{D}_{m,n} e^{(\lambda_{\Xi,m} + \lambda_{\Xi,n})t_{k-1}} \int_{t_{k-1}}^t e^{-(\lambda_{\Xi,m} + \lambda_{\Xi,n})\tau} d\tau \\ &\stackrel{(\bullet)}{=} \tilde{D}_{m,n} e^{(\lambda_{\Xi,m} + \lambda_{\Xi,n})t_{k-1}} \cdot \frac{1}{\lambda_{\Xi,m} + \lambda_{\Xi,n}} \left(e^{-(\lambda_{\Xi,m} + \lambda_{\Xi,n})t_{k-1}} - e^{-(\lambda_{\Xi,m} + \lambda_{\Xi,n})t} \right) \\ &= \frac{\tilde{D}_{m,n}}{\lambda_{\Xi,m} + \lambda_{\Xi,n}} \left(1 - e^{-(\lambda_{\Xi,m} + \lambda_{\Xi,n})(t-t_{k-1})} \right), \end{aligned} \quad (5.18)$$

il cui passaggio (\bullet) è ammissibile se e solo se $\lambda_{\Xi,m} \neq -\lambda_{\Xi,n}$.

Nuovamente, si può vedere che cosa succede nel caso particolare in cui la condizione per il passaggio (\bullet) non è soddisfatta, ovvero $\lambda_{\Xi,m} + \lambda_{\Xi,n} = 0$. In questo caso, guardando la prima riga di (5.18), si vede chiaramente che sia la funzione integranda, sia l'esponenziale che si trova fuori dall'integrale diventano $e^0 = 1$. Perciò si può concludere nel modo seguente: $\tilde{I}_{m,n} = \tilde{D}_{m,n}(t - t_{k-1})$.

Ancora una volta, variando gli indici m, n si può costruire la matrice $\tilde{\mathbf{I}}$ completa e da essa risalire alla matrice \mathbf{I} che risolve l'integrale.

Per concludere, il risultato fondamentale fornito dall'espressione (5.18) è che la soluzione dell'integrale dipende esplicitamente dagli autovalori di $\Xi_k(p_i)$.

Una volta ottenuti tutti questi risultati preliminari fondamentali, si può passare alla ricerca effettiva delle condizioni di stabilità. Per semplicità, si decide di partire dalla condizione sulla matrice di covarianza.

5.1.2 Condizioni di stabilità per la covarianza

Per ricavare la condizione è necessario ricominciare dall'equazione (5.14), che fornisce l'espressione della matrice di covarianza per la personalità p_i , calcolata in un istante di tempo t appartenente all'intervallo $(t_{k-1}, t_k]$. Poiché all'interno di questa equazione compare il termine $\Sigma_{k-1}(p_i, t_{k-1})$, ci si può aspettare un comportamento ricorsivo, che vada quindi ad includere dei termini influenzati dalla *storia*¹ del sistema.

Inoltre, per effettuare l'analisi di stabilità ciò che interessa davvero sono i termini in cui compare t : si vuole infatti studiare che cosa succede al sistema allo scorrere del tempo.

Per vedere la dipendenza ricorsiva, si può partire osservando la matrice di covarianza relativa al primo intervallo di tempo $[t_0, t_1]$. Essendo questo il primo intervallo da cui parte l'analisi del sistema e sfruttando l'ipotesi che la covarianza iniziale sia nulla, si può trovare:

$$\Sigma_1(p_i, t) = \int_{t_0}^t e^{-\Xi_1(p_i)(\tau-t_0)} \mathbf{D} e^{-\Xi_1^T(p_i)(\tau-t_0)} d\tau = \mathbf{I}_1, \quad (5.19)$$

dove si vede che resiste solamente il termine con l'integrale. Nella sottosezione precedente è stato mostrato il metodo per risolvere l'integrale \mathbf{I}_1 . In particolare, si può partire calcolando la matrice $\tilde{\mathbf{I}}_1$, elemento per elemento, e andando successivamente a ricostruirla. Ora, conoscendo tutti gli elementi $(\tilde{\mathbf{I}}_1)_{m,n}$, che sono forniti dall'espressione (5.18), è anche possibile trovare l'elemento m, n della matrice \mathbf{I}_1 :

$$\begin{aligned} (\mathbf{I}_1)_{m,n} &= \sum_{p(1),q(1)} (\Theta_{\Xi})_{m,p(1)} (\tilde{\mathbf{I}}_1)_{p(1),q(1)} (\Theta_{\Xi}^T)_{q(1),n} \\ &= \sum_{p(1),q(1)} (\Theta_{\Xi})_{m,p(1)} (\tilde{\mathbf{I}}_1)_{p(1),q(1)} (\Theta_{\Xi})_{n,q(1)} \\ &= \sum_{p(1),q(1)} (\Theta_{\Xi})_{m,p(1)} \frac{\tilde{D}_{p(1),q(1)}}{\lambda_{\Xi,p(1)} + \lambda_{\Xi,q(1)}} \left(1 - e^{-(\lambda_{\Xi,p(1)} + \lambda_{\Xi,q(1)})(t-t_0)} \right) (\Theta_{\Xi})_{n,q(1)} \\ &= \sum_{p(1),q(1)} \tilde{K}_{m,n,p(1),q(1)} \left(1 - e^{-(\lambda_{\Xi,p(1)} + \lambda_{\Xi,q(1)})(t-t_0)} \right), \end{aligned} \quad (5.20)$$

¹Con il termine *storia* si intendono tutti gli intervalli temporali passati che hanno permesso al sistema di raggiungere lo stato in cui si trova.

dove i termini $\tilde{K}_{m,n,p(1),q(1)}$ sono dei coefficienti costanti, quindi indipendenti dal tempo, che dipendono da tutti gli indici $m, n, p(1), q(1)$. L'utilizzo degli indici $p(1)$ e $q(1)$ è dovuto al voler rendere esplicito il fatto che sono indici riferiti al primo intervallo di tempo. Questa espressione mostra che la covarianza al primo intervallo è una combinazione lineare di termini di tipo esponenziale e, quindi, già da questo primo risultato si può vedere che il suo andamento è proprio di tipo *esponenziale*. Inoltre, può essere esponenziale crescente, decrescente o addirittura lineare a seconda di come sono gli autovalori della matrice $\Xi_k(p_i)$.

Ora, si passa a vedere come si comporta la covarianza nell'intervallo di tempo successivo $(t_1, t_2]$:

$$\begin{aligned}\Sigma_2(p_i, t) &= \int_{t_1}^t e^{-\Xi_k(p_i)(\tau-t_1)} \mathbf{D} e^{-\Xi_k^T(p_i)(\tau-t_1)} d\tau + e^{-\Xi_2(p_i)(t-t_1)} \Sigma_1(p_i, t_1) e^{-\Xi_2^T(p_i)(t-t_1)} \\ &= \mathbf{I}_2 + \underbrace{e^{-\Xi_2(p_i)(t-t_1)} \Sigma_1(p_i, t_1) e^{-\Xi_2^T(p_i)(t-t_1)}}_{\mathbf{J}_2}.\end{aligned}\tag{5.21}$$

Ci si concentra soprattutto sull'analizzare il termine rinominato \mathbf{J}_2 di (5.21). Si può applicare nuovamente la tecnica della decomposizione attraverso il teorema spettrale:

$$\mathbf{J}_2 = \Theta_{\Xi} \left[e^{-\Lambda_{\Xi}^{(2)}(t-t_1)} \Theta_{\Xi}^{-1} \Sigma_1(p_i, t_1) (\Theta_{\Xi}^{-1})^T e^{-\Lambda_{\Xi}^{(2)}(t-t_1)} \right] \Theta_{\Xi}^T.\tag{5.22}$$

Innanzitutto, conviene analizzare per primo il termine contenuto nella parentesi quadra (che si rinomina con $\tilde{\mathbf{J}}_2$) dell'espressione (5.22), valutandolo elemento per elemento, con l'obiettivo di mettere in mostra la dipendenza dagli autovalori delle diverse matrici $\Xi_k(p_i)$. Ora, bisogna eseguire nuovamente dei calcoli per effettuare delle moltiplicazioni tra matrici, ovvero si devono mettere in pratica passaggi molto simili a quelli fatti per ottenere l'espressione di \mathbf{I}_1 nella (5.20). Così facendo si trovano elementi con la seguente struttura:

$$(\tilde{\mathbf{J}}_2)_{m,n} = \sum_{\substack{p'(2), q'(2) \\ p(2), q(2) \\ p(1), q(1)}} \tilde{K}_{m,n,p'(2),q'(2),p(2),q(2),p(1),q(1)} \left[e^{-(\lambda_{\Xi,m}^{(2)} + \lambda_{\Xi,n}^{(2)})(t-t_1)} - e^{-[(\lambda_{\Xi,p(1)}^{(1)} + \lambda_{\Xi,q(1)}^{(1)})(t_1-t_0) + (\lambda_{\Xi,m}^{(2)} + \lambda_{\Xi,n}^{(2)})(t-t_1)]} \right],\tag{5.23}$$

dove, analogamente al caso precedente, le variabili $\tilde{K}_{p'(2),q'(2),p(2),q(2),p(1),q(1)}$ sono i coefficienti della combinazione lineare di esponenziali, indipendenti dal tempo. Inoltre, è interessante osservare che il secondo termine esponenziale comprende non solo gli autovalori relativi all'intervallo di tempo in cui ci si trova all'istante t (in questo caso il secondo intervallo $(t_1, t_2]$), ma anche la parte di memoria che comprende tutta la storia passata (in questo caso è solo un intervallo, in generale possono essere molteplici). Ora, per completare questa analisi bisogna soltanto ricostruire la matrice \mathbf{J}_2 . Conoscendo tutti gli elementi $(\tilde{\mathbf{J}}_2)_{m,n}$, quest'ultimo passaggio è facile. Oltretutto è importante osservare che la struttura generale dei singoli elementi $(\mathbf{J}_2)_{m,n}$ non cambia, poiché rimane una combinazione lineare di termini esponenziali dello stesso tipo di quelli presenti in (5.23).

Se si estende l'analisi agli intervalli successivi, si può facilmente notare che il comportamento è simile. Nello specifico, quando ci si trova in un istante t appartenente all'intervallo $k, (t_k, t_{k-1}]$, si ottiene un termine (rinominato, ad esempio, \mathbf{J}_k), che risulta essere ancora una combinazione lineare di esponenziali, con coefficienti non nulli:

$$\mathbf{J}_k = \sum_{\substack{p'(k), q'(k) \\ p(s), q(s), s=1, \dots, k}} \tilde{K}_{p'(k), q'(k), \{p(s)\}_{s=1}^k, \{q(s)\}_{s=1}^k} e^{-\left[\sum_{k'=1}^{k-1} (\lambda_{\Xi, p(k')}^{(k')} + \lambda_{\Xi, q(k')}^{(k')})(t_{k'} - t_{k'-1}) + (\lambda_{\Xi, m}^{(k)} + \lambda_{\Xi, n}^{(k)})(t - t_{k-1}) \right]}. \quad (5.24)$$

Dall'espressione appena ottenuta, si vede la dipendenza dagli autovalori delle matrici $\Xi_{k'}(p_i)$, $k' = 1, \dots, k$ corrispondenti ad ogni intervallo presente nella storia del sistema.

Ora, per studiare la stabilità si può valutare come si comporta questo termine esponenziale. Sostanzialmente, ci potranno essere due possibili risultati:

- a) l'esponenziale esplose verso infinito e, di conseguenza, le opinioni divergeranno;
- b) l'esponenziale tende a zero e, di conseguenza, le opinioni convergeranno verso un consenso o comunque rimarranno ben delimitate a formare dei gruppi, dato che la covarianza non diverge.

Affinché il sistema sia stabile si vuole trovare una condizione che permetta di rimanere nel caso b). Con questo obiettivo, si passa a studiare le condizioni sull'esponente, sempre tenendo a mente che davanti ad esso è presente un segno meno. Isolando l'esponente z rimane:

$$z = (\lambda_{\Xi, m}^{(k)} + \lambda_{\Xi, n}^{(k)})(t - t_{k-1}) + \sum_{k'=1}^{k-1} (\lambda_{\Xi, p(k')}^{(k')} + \lambda_{\Xi, q(k')}^{(k')})(t_{k'} - t_{k'-1}). \quad (5.25)$$

I problemi legati a tale esponente possono nascere se questo termine tende verso $-\infty$. Bisogna quindi studiare come si comporta tale espressione al variare degli autovalori: in particolare, il caso con maggior criticità si ha quando il valore di (5.25) è minimo. Infatti, se il caso minimo permette di mantenere la stabilità del sistema, allora anche tutti gli altri casi non daranno problemi. Per questo motivo, come primo passo si cerca di minimizzare questa funzione, per poi studiare la condizione di stabilità solo sul caso minimo.

Innanzitutto si può facilmente notare che, essendo la funzione composta da una somma di tanti termini, si può scomporre il problema andando a cercare gli autovalori che minimizzano ogni singolo termine. Inoltre, osservando l'espressione (5.25) nel dettaglio, si può osservare che ogni termine presente possiede la stessa struttura: è presente la somma tra due autovalori della matrice $\Xi_k(p_i)$, al variare di k . I due autovalori possono quindi essere uguali o diversi tra loro. Allora, immaginando di considerare un generico termine $(\lambda_{\Xi, m}^{(k)} + \lambda_{\Xi, n}^{(k)})(t_k - t_{k-1})$, esso assume valore minimo nel caso in cui gli autovalori sono uguali e il loro valore è il più piccolo tra gli autovalori della matrice $\Xi_k(p_i)$. Di conseguenza, il minimo dell'espressione sopra è dato da:

$$z_{min} = 2\lambda_{\Xi, min}^{(k)}(t - t_{k-1}) + \sum_{k'=1}^{k-1} 2\lambda_{\Xi, min}^{(k')}(t_{k'} - t_{k'-1}).$$

Ora, tralasciando la costante 2 che moltiplica tutti i termini e chiamando $\delta_{k'} = t_k - t_{k-1}$, si introduce una nuova funzione:

$$f_i(t) = \lambda_{\Xi, \min}^{(k)}(t - t_{k-1}) + \sum_{k'=1}^{k-1} \lambda_{\Xi, \min}^{(k')} \delta_{k'}, \quad (5.26)$$

dove il pedice i sta ad indicare la personalità a cui si riferisce.

Nota importante: è doveroso fare una precisazione essenziale. Gli autovalori $\lambda_{\Xi, \min}^{(k)}$ non sono necessariamente i valori minimi tra tutti i possibili autovalori delle matrici $\Xi_k(p_i)$. Infatti, l'obiettivo è quello di minimizzare il termine z dato dall'espressione (5.25), il quale però è l'esponente di una combinazione lineare di esponenziali. In linea di principio, i coefficienti di tale combinazione lineare possono essere anche *nulli*. Quando ciò accade, è come se alcuni autovalori non fossero attivi, poiché sono moltiplicati per un peso uguale a zero. Perciò, con $\lambda_{\Xi, \min}^{(k)}$ si intende proprio il valore minimo tra tutti gli autovalori attivi delle matrici $\Xi_k(p_i)$ e, in generale, da questo insieme possono anche essere esclusi i veri autovalori minimi.

Si può studiare la condizione di stabilità direttamente su questa funzione. Come prima cosa ci si chiede come si comporta la funzione esponenziale $e^{-f_i(t)}$, studiando il suo andamento nel tempo. Da questa analisi si intuisce che il risultato è una funzione continua, che modifica il suo andamento in ogni intervallo di tempo $[t_k, t_{k+1}]$, alternando intervalli in cui è esponenziale crescente, intervalli in cui ha andamento esponenziale decrescente ed, eventualmente, anche alcuni intervalli in cui la funzione è lineare. Volendo evitare di finire nel caso a) in cui l'esponenziale diverge all'infinito, bisogna trovare una condizione che permetta alla funzione $f_i(t)$ di non tendere verso $-\infty$. Ciò è possibile se essa è limitata inferiormente.

In definitiva, *la matrice di covarianza è stabile se la funzione $f_i(t)$ è limitata inferiormente $\forall p_i$, ovvero se esiste un valore reale Q tale che $f_i(t) \geq Q, \forall t$.*

5.1.3 Condizioni di stabilità per la media

Per studiare la stabilità della media, bisogna prendere in considerazione una nuova variabile:

$$\mathbf{x}_{0, k+1}(p_i) = \mathbf{m}(p_i, \mathbf{x}_{0, k}(p_i), t_k). \quad (5.27)$$

Essa rappresenta la media calcolata nel valore atteso della distribuzione iniziale delle opinioni, dove con l'aggettivo *iniziale* si intende all'inizio di un nuovo intervallo temporale (ovvero all'istante t_k se si sta considerando l'intervallo di tempo $[t_k, t_{k+1}]$). Tale variabile è molto utile per semplificare il calcolo di $\gamma(t)$, come si vede nell'equazione (3.30), se si mantiene viva l'ipotesi che la distribuzione $\rho_0(\mathbf{y}|p)$ sia Gaussiana.

Osservando l'espressione (5.19), si può notare anche in questo caso una dipendenza iterativa rispetto agli intervalli di tempo precedenti. Infatti, $\mathbf{x}_{0, k+1}(p_i)$ si trova utilizzando l'espressione della media \mathbf{m} calcolata in $\mathbf{x}_{0, k}(p_i)$. Quest'ultimo vettore, allo stesso modo, sarà stato calcolato come media in $\mathbf{x}_{0, k-1}(p_i)$ e così via, fino a raggiungere il primo

intervallo di tempo $[t_0, t_1]$. Perciò, ragionando in maniera analoga a come è stato fatto nella sottosezione precedente, si può trovare una funzione su cui cercare la condizione di stabilità. In questo caso si ottiene:

$$g_i(t) = \min\{\lambda_{\Xi, \min}^{(k)}, \lambda_{\Psi, \min}^{(k)}\}(t - t_k) + \sum_{k'=1}^{k-1} \min\{\lambda_{\Xi, \min}^{(k')}, \lambda_{\Psi, \min}^{(k')}\}\delta_{k'}, \quad (5.28)$$

dove $\delta_{k'} = t_{k'} - t_{k'-1}$ (stessa notazione utilizzata nella funzione $f_i(t)$). A differenza del caso della funzione $f_i(t)$, in questa nuova funzione compaiono gli autovalori non solo della matrice $\Xi_k(p_i)$, ma anche della matrice Ψ_k , al variare di k .

Ora, nuovamente, si studia il comportamento nel tempo di $e^{-g_i(t)}$, da cui, in modo analogo a prima, si conclude che *la condizione di stabilità è la limitatezza dal basso della funzione $g_i(t)$, $\forall p_i$.*

Inoltre, si possono fare alcune interessanti osservazioni sulle due funzioni:

- la funzione $g_i(t)$ è sicuramente minore o uguale alla funzione $f_i(t)$, per costruzione. Infatti, per come è definita $g_i(t)$, essa risulterà essere uguale a $f_i(t)$ solamente nel caso in cui il minimo tra gli autovalori minimi delle matrici $\Xi_k(p_i)$ e Ψ_k sia sempre quello relativo alla matrice $\Xi_k(p_i)$, per ogni valore di k . Invece, se anche per un solo valore di k tale condizione non è verificata, allora sicuramente vale $g_i(t) < f_i(t)$.
- Il punto precedente permette di osservare una conseguenza: se vale la condizione di stabilità per la media, ovvero $g_i(t)$ è limitata inferiormente, allora sicuramente varrà anche la condizione di stabilità per la covarianza. Questa implicazione è immediata, dato che vale $g_i(t) \leq f_i(t)$ e quindi, se esiste una costante $Q \in \mathcal{R}$ tale che $g_i(t) \geq Q$, sicuramente anche $f_i(t) \geq Q$.

Infine, grazie alle osservazioni appena descritte, si può pensare ad un parallelismo con le instabilità del modello originale.

- ▶ Se la condizione per la stabilità della covarianza non è soddisfatta, sicuramente non lo sarà nemmeno la condizione di stabilità per la media e quindi si manifesta il corrispondente dell'*instabilità di tipo-I*.
- ▶ Se invece la condizione di stabilità sulla media non è soddisfatta, è comunque possibile che sia soddisfatta la condizione di stabilità sulla covarianza. In questo caso si manifesta il corrispondente dell'*instabilità di tipo-II*.

5.2 \mathbf{Z} che varia continuamente nel tempo

In questa seconda sezione, si vuole proseguire la ricerca di nuovi contributi per il modello di dinamica delle opinioni, con lo scopo di renderlo maggiormente adattabile ad ulteriori aspetti particolari del problema. Qui, in particolare, si prova a rilassare ulteriormente l'assunzione della sezione [6.1], in modo tale da rendere la matrice \mathbf{Z} variabile in modo continuo nel tempo e non più limitata a cambiare soltanto dopo un certo intervallo.

In sostanza si passa a studiare il caso limite della sezione precedente. Infatti, gli intervalli

durante i quali la matrice che gestisce le interazioni tra utenti è fissa vengono ristretti sempre di più fino a tendere a zero. Una volta raggiunto il limite $\delta_k \rightarrow 0$, la matrice $\underline{\mathbf{Z}}$ sta effettivamente variando in modo continuo.

5.2.1 Analisi di stabilità

Anche in questo caso è interessante andare a vedere quali sono le condizioni che permettono al sistema di essere stabile.

In questa sottosezione si cerca di ripercorrere la strada tracciata dalla sezione [6.1], senza entrare troppo nei dettagli, ma mostrando quali sono i principali cambiamenti dovuti al fatto che si sta considerando $\underline{\mathbf{Z}}$ variabile in modo continuo.

Media

Innanzitutto, è interessante vedere come si può riscrivere l'equazione che descrive la media delle opinioni. Essa infatti dipende dalla matrice Ξ : nel passaggio al caso continuo tale matrice diventa a sua volta dipendente dal tempo e si può riscrivere come $\Xi(p_i, t)$. Inoltre, l'equazione che si può prendere come base è la (3.13), ovvero l'espressione che descrive la media per il caso di $\underline{\mathbf{Z}}$ fissa. L'idea è di riscriverla aggiungendo la dipendenza da t per le variabili che assumono la tempo-varianza, e di conseguenza esplicitare i cambiamenti dovuti a questa dipendenza.

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(p_i, \mathbf{y}, t) &= e^{-\int_0^t \Xi(p_i, \tau) d\tau} \left[\mathbf{y} + \int_0^t e^{\int_0^\tau \Xi(p_i, s) ds} \phi(p_i, \tau) d\tau \right] \\ &= e^{-\int_0^t \Xi(p_i, \tau) d\tau} \left[\mathbf{y} + \int_0^t e^{\int_0^\tau \Xi(p_i, s) ds} \left(\bar{\alpha}(p_i) \gamma(p_i, \tau) + \alpha(p_i) \mathbf{C}\mathbf{u}(p_i) \right) d\tau \right]. \end{aligned} \tag{5.29}$$

Innanzitutto, bisogna ricordare che il termine $\phi(p_i, \tau)$, che compare nella prima riga dell'espressione sopra, corrisponde all'equazione (3.10). Inoltre, nella seconda riga è presente anche la variabile $\gamma(p_i, \tau)$, la cui definizione va modificata a sua volta nel momento in cui si considera il caso continuo. In particolare, in questo caso conviene partire direttamente dall'espressione fornita da (5.2), utilizzata nello studio del caso $\underline{\mathbf{Z}}$ variante in intervalli di tempo. Qui si può osservare la presenza di diverse variabili dipendenti dall'indice k ; esse nel passaggio al caso continuo assumono la dipendenza dal tempo:

- $\underline{\mathbf{Z}}_k(i, \cdot) \implies \underline{\mathbf{Z}}_i(t)$, in cui l'indice i continua ad indicare che bisogna selezionare la i -esima riga, relativa alla personalità p_i , della matrice a blocchi $\underline{\mathbf{Z}}(t)$, in cui ogni blocco assume la dipendenza continua dal tempo. Si modifica la notazione soltanto per renderla più leggibile e mettere in risalto la dipendenza da t .
- $\Psi_k \implies \Psi(t)$.
- $\underline{\mathbf{x}}_{0,k} \implies \underline{\mathbf{x}}_0(t)$.

Note tutte le nuove informazioni necessarie, si può scrivere:

$$\gamma(p_i, t) = \underline{\mathbf{Z}}_i(t) \left[e^{-\int_0^t \Psi(\tau) d\tau} \mathbf{P}_0 \underline{\mathbf{x}}_0(t) + \left(\int_0^t e^{-\int_0^\tau \Psi(s) ds} d\tau \right) \mathbf{P}_1 (\mathbf{I}_M \otimes \mathbf{C}) \underline{\mathbf{u}} \right]. \quad (5.30)$$

Covarianza

In modo simile, si modifica anche l'equazione della matrice di covarianza. In questo caso, partendo dall'espressione (3.12) e sempre aggiungendo la dipendenza dal tempo delle variabili che diventano tempo-variabili nel continuo, tale equazione si può riscrivere così:

$$\Sigma(p_i, t) = \int_0^t e^{-\int_0^\tau \Xi(p_i, s) ds} \mathbf{D} e^{-\int_0^\tau \Xi^T(p_i, s) ds} d\tau. \quad (5.31)$$

5.2.2 Condizioni di stabilità per la covarianza

Ora, è soprattutto interessante vedere come si possono riscrivere le condizioni di stabilità su covarianza e media nel caso continuo. Partendo dalla prima (covarianza), si può iniziare l'analisi ricordando la funzione trovata nel caso $\underline{\mathbf{Z}}$ costante per intervalli di tempo (5.26). In essa compaiono soltanto gli autovalori minimi relativi alla matrice $\Xi_k(p_i)$, per ogni intervallo k , e il corrispondente δ_k . Quando si passa al caso continuo, però, $\delta_k \rightarrow 0$ e, di conseguenza, la matrice $\Xi_k(p_i)$ assume la dipendenza dal tempo, diventando $\Xi(p_i, t)$. Allora, anche gli autovalori di quest'ultima matrice diventeranno variabili in modo continuo rispetto a t . In definitiva, si può introdurre una nuova funzione:

$$f_i(t) = \int_{t_0}^T \lambda_{\Xi, \min}(t) dt. \quad (5.32)$$

La condizione di stabilità su questa nuova $f_i(t)$ rimane la medesima vista nella sottosezione [5.1.2]: *la matrice di covarianza è stabile se la funzione $f_i(t)$ è limitata inferiormente, $\forall p_i$.*

5.2.3 Condizioni di stabilità per la media

In modo molto simile si può riscrivere anche la condizione di stabilità sulla media. A differenza del caso precedente, però, nella funzione di interesse compaiono anche gli autovalori minimi della funzione Ψ . Dato che in questo caso tale matrice dipende dal tempo, anch'essi assumono la dipendenza da t . In questo modo si può scrivere l'analoga della funzione (5.28):

$$g_i(t) = \int_{t_0}^T \min\{\lambda_{\Xi, \min}(t), \lambda_{\Psi, \min}(t)\} dt. \quad (5.33)$$

Anche in questo caso la condizione di stabilità sulla nuova funzione continua ad essere la medesima presentata nella sottosezione [5.1.3]: *la media è stabile se la funzione $g_i(t)$ è limitata inferiormente, $\forall p_i$.*

Capitolo 6

Risultati numerici

In questo capitolo vengono presentati alcuni esempi ottenuti grazie a delle simulazioni effettuate sul software Matlab. L'obiettivo di questi esperimenti è soprattutto quello di mostrare le tendenze delle opinioni in alcuni casi specifici, presentandone, tramite dei grafici, l'evoluzione nel tempo. Inoltre, permettono di fornire un supporto alla parte teorica presentata nel capitolo precedente [5].

6.1 Matrice \mathbf{Z} che varia in intervalli di tempo

I primi esempi mostrati riguardano il caso in cui la matrice \mathbf{Z} , che descrive la forza e la struttura della rete sociale, varia ogni volta che termina un certo intervallo di tempo, ma durante tale intervallo rimane fissa e costante.

6.1.1 Esempio 1 - stabilità

Il primo esempio di questa sezione è stato elaborato prendendo come base i modelli numerici presentati nel capitolo [3], in particolare nella sezione [3.6.2]. Infatti, si considera lo scenario in cui sono presenti M diverse personalità, tutte con lo stesso livello di testardaggine, organizzate in due comunità. In particolare si fissano:

- $M = 50$;
- $\alpha(p_i) = \alpha = 0.01$;
- $N = 2$, ovvero il numero di argomenti sui quali si esprime un'opinione.

Inoltre, si considerano ancora:

- $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \epsilon & 1 \end{bmatrix}$, dove si fissano $\rho = 1$ e $\epsilon = 10^{-10}$;
- $\mathbf{u}(p) = \begin{cases} [0, -1]^T, & p < 0 \\ [0, 1]^T, & p \geq 0; \end{cases}$

- $\rho_0(p) = \sum_{i=1}^M r_i \delta(p - p_i)$, con $r_i = 1/M$, $\forall i$.

Infine, si utilizza la matrice di interazione definita nel modo seguente:

$$\underline{\mathbf{Z}} = \left(\begin{bmatrix} 1 & -\zeta_2 \\ -\zeta_2 & 1 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{1}_{M/2} \right) \otimes \mathbf{C}, \quad (6.1)$$

con ζ_2 utilizzato come parametro.

La differenza in questo esempio rispetto al caso trattato nel capitolo [3] è data dal fatto che la matrice $\underline{\mathbf{Z}}$ non rimane fissata in modo indefinito nel tempo, ma passato un certo intervallo si modifica. In particolare, il parametro che varia è proprio ζ_2 .

Nella sezione [3.6.2], sono state trovate le condizioni di stabilità proprio in funzione del parametro ζ_2 , esplicitando alcuni valori per i quali il sistema arriva a convergenza o, viceversa, tende a divergere. L'idea principale del nuovo esempio è quella di alternare fasi in cui tale parametro permette al sistema di evolvere verso una situazione di divergenza, a fasi in cui, cambiando il valore di ζ_2 , le opinioni degli agenti tornano a muoversi verso una situazione stabile. In particolare, in questa nuova sottosezione si vuole presentare un esempio di sistema di dinamica delle opinioni con matrice $\underline{\mathbf{Z}}$ tempo-variante, costruito nella maniera appena introdotta, che verifica le condizioni di stabilità su media e covarianza.

Per questo caso, gli intervalli di tempo sono scelti arbitrariamente. In particolare, si utilizzano i seguenti:

- $(t_{k-1}, t_k = t_{k-1} + 15]$, per i k dispari, perciò $\delta_k = 15$;
- $(t_{k-1}, t_k = t_{k-1} + 45]$, per i k pari, perciò $\delta_k = 45$;

ai quali sono associati, rispettivamente, i parametri $\zeta_2 = 0.1$ (intervalli dispari) e $\zeta_2 = -0.1$ (intervalli pari).

Inoltre, viene presentato uno sviluppo temporale relativo a otto diversi intervalli. Tale sviluppo si potrebbe chiaramente ampliare, proseguendo con l'aggiunta di nuovi intervalli, anche se già queste prime simulazioni permettono di intuire l'andamento della densità delle opinioni. In particolare, emerge un'*evoluzione ciclica* che, dopo una prima fase di adattamento, si stabilizza.

Osservando le immagini di figura 6.1, si riesce già ad intravedere tale comportamento: a partire dal quarto intervallo, i grafici iniziano a ripetersi e, guardando due istanti corrispondenti in due cicli diversi, la posizione delle opinioni risulta essere la stessa. A titolo esemplificativo, si possono prendere i tempi $t = 130$ (appartenente al quinto intervallo) e $t = 190$ (appartenente al settimo intervallo). Inoltre, bisogna specificare che si utilizza il termine *ciclo* riferendosi all'insieme di due intervalli distinti consecutivi (in generale il loro ordine è indifferente, basta che siano consecutivi, ma per convenzione conviene prendere come primo intervallo uno in cui viene utilizzato il parametro $\zeta_2 = 0.1$, dato che nell'intervallo iniziale $[t_0, t_1]$ compare proprio tale valore).

Concluse queste osservazioni, ci si aspetta, intuitivamente, che il sistema sia stabile. Perciò, per concludere l'esempio rimane soltanto da verificare se le condizioni di stabilità sono effettivamente soddisfatte. Per fare ciò, è necessario trovare gli autovalori delle

matrici $\Xi_k(p_i)$ e Ψ_k , per ogni valore di k e di p_i .

Per ottenere tutti gli autovalori necessari, si può sfruttare la struttura particolare di questo esempio: infatti, è possibile effettuare un parallelismo con l'esempio corrispondente in dimensioni $N = 1$, che è stato presentato nella sezione [3.4.3]. Qui, sono stati mostrati in maniera esplicita gli autovalori delle matrici Ψ e Ξ_i (in realtà quest'ultima nel caso monodimensionale non è una matrice, bensì è uno scalare, perciò l'autovalore coincide con Ξ_i stesso).

Queste informazioni sono utili anche per trattare il caso $N = 2$, dato che esistono le seguenti corrispondenze:

$N = 1$	$N = 2$
$\underline{\mathbf{Z}} = \left(\begin{bmatrix} 1 & -\zeta_2 \\ -\zeta_2 & 1 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{1}_{M/2} \right)$	$\underline{\mathbf{Z}} = \left(\begin{bmatrix} 1 & -\zeta_2 \\ -\zeta_2 & 1 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{1}_{M/2} \right) \otimes \mathbf{C},$
$\Xi(p_i) = \Xi_i$	$\Xi(p_i) = \Xi_i \mathbf{I}_M \otimes \mathbf{C}$
Ψ	$\Psi \otimes \mathbf{C}$

Tabella 6.1: Tabella corrispondenze tra caso monodimensionale e caso bidimensionale.

Queste corrispondenze tra i due casi $N = 1$ e $N = 2$ sono valide per ogni intervallo di tempo dell'esempio: esiste sempre il caso equivalente in cui si considera un solo argomento, anche se cambia la matrice $\underline{\mathbf{Z}}$. Allora, si può osservare che le matrici di cui si vogliono calcolare gli autovalori sono le medesime del caso monodimensionale, semplicemente moltiplicate secondo Kronecker rispetto alla matrice \mathbf{C} . Però, esiste una proprietà degli autovalori nel caso in cui interviene il prodotto di Kronecker.

Proprietà: siano \mathbf{A} e \mathbf{B} due generiche matrici quadrate di ordine rispettivamente n e m . Siano inoltre $\lambda_i^{(\mathbf{A})}$, $i = 1, \dots, n$ e $\lambda_j^{(\mathbf{B})}$, $j = 1, \dots, m$ i corrispondenti autovalori. Allora, gli autovalori di $\mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ sono dati da:

$$\lambda_k^{(\mathbf{C})} = \lambda_i^{(\mathbf{A})} \cdot \lambda_j^{(\mathbf{B})}, \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m. \quad (6.2)$$

A questo punto, sfruttando le corrispondenze della tabella 6.1 e la proprietà (6.2), si possono ricavare anche gli autovalori delle matrici di interesse nel caso bidimensionale. Quindi, come primo passo, bisogna trovare gli autovalori della matrice \mathbf{C} , che saranno utili per entrambi i casi:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2}^{(\mathbf{C})} &= 1 \pm \sqrt{1 - (1 - \rho\epsilon)^2} \\ &= 1 \pm \sqrt{2\rho\epsilon + o(\rho\epsilon)} \\ &\simeq 1 \pm \sqrt{2\rho\epsilon}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

In questo modo, si può concludere che i due autovalori sono circa uguali tra loro, a meno di un coefficiente piccolo che dipende dai valori di ρ ed ϵ . In particolare, sostituendo i valori $\rho = 1$ ed $\epsilon = 10^{-10}$, come indicato all'inizio dell'esempio, si ottengono: $\lambda_{1,2}^{(\mathbf{C})} = 1 \pm \eta(\rho\epsilon)$,

dove il termine $\eta(\rho\epsilon)$ è dell'ordine di 10^{-5} .
Perciò, si scrive:

$$\begin{aligned}\lambda_k^{(\Xi(p_i))} &= \Xi_i \underbrace{\lambda_s^{(\mathbf{I}_M)} \lambda_r^{(\mathbf{C})}}_{\simeq 1, \forall s, r}, \quad s = 1, \dots, M, \quad r = 1, 2 \\ &\simeq \Xi_i = \alpha + \bar{\alpha} \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{2}, \quad \forall k = 1, \dots, 2M\end{aligned}\tag{6.4}$$

e

$$\begin{aligned}\lambda_k^{(\Psi)} &= \lambda_s(\Psi) \underbrace{\lambda_r^{(\mathbf{C})}}_{\simeq 1, \forall r}, \quad s = 1, \dots, M, \quad r = 1, 2 \\ &\simeq \lambda_s(\Psi), \quad \forall k = 1, \dots, 2M.\end{aligned}\tag{6.5}$$

In sostanza, la presenza della moltiplicazione per gli autovalori di \mathbf{C} fa sì che si produca uno sdoppiamento degli autovalori, in cui le coppie di autovalori sdoppiate non sono esattamente uguali a causa del termine $\eta(\rho\epsilon)$. Comunque, approssimando, nella (6.4) ogni autovalore corrisponde al valore Ξ_i , che è esattamente lo scalare presente nel caso $N = 1$. Invece, nella (6.5) compaiono i termini $\lambda_k(\Psi)$, al variare di k , che coincidono con gli autovalori della matrice Ψ del caso monodimensionale, i cui valori sono dati dall'espressione (3.39). Si possono così trovare gli autovalori minimi per ogni intervallo distinto. In particolare, dato che il parametro ζ_2 assume due soli valori alternati, è sufficiente trovare i valori minimi per k dispari e per k pari per poter valutare tutti i casi.

	k dispari	k pari
$\lambda_{\Xi, \min}^{(k)}$	0.4555	0.5545
$\lambda_{\Psi, \min}^{(k)}$	-0.089	0.109

Tabella 6.2: Esempio 1, autovalori minimi per ogni intervallo corrispondente a valori di k pari e valori di k dispari.

È importante notare che nella tabella sopra sono stati riportati soltanto gli autovalori minimi *attivi*. Per completezza, maggiori dettagli su questo aspetto saranno forniti in un esempio successivo.

Inoltre, questo esempio possiede una struttura particolare, in cui le matrici $\Xi(p_i)$ sono tutte uguali, indipendentemente dal valore di p_i . Perciò l'autovalore minimo avrà sempre lo stesso valore numerico; di conseguenza si considereranno soltanto due funzioni $f_i(t)$ e $g_i(t)$, senza preoccuparsi del valore di p_i ¹.

Ora, note tutte le informazioni necessarie, si può passare a valutare le funzioni $f_i(t)$ e $g_i(t)$ per l'esempio specifico che si sta analizzando. Volendo sfruttare una delle osservazioni su queste due funzioni (che si può trovare nel capitolo precedente), conviene partire valutando la condizione di stabilità sulla media. Infatti, se essa è soddisfatta, è

¹Questa considerazione si ripete anche per tutti gli altri esempi del capitolo, poiché la struttura di base del modello resta invariata.

sicuramente soddisfatta anche la condizione di stabilità sulla covarianza. Ricordando che l'espressione di $g_i(t)$ è data da (5.28) e ipotizzando di voler valutare come si comporta il sistema considerando K intervalli (nel caso limite si ha $K \rightarrow +\infty$), si trova:

$$g_i(t) = \lambda_{\Psi, \min}^{(K)}(t - t_K) + \sum_{k'=1}^{K-1} \left(-0.089 \cdot \delta_{2k'-1} + 0.109 \cdot \delta_{2k'} \right), \quad (6.6)$$

dove $\delta_{2k'-1} = 15$ è la lunghezza degli intervalli dispari e $\delta_{2k'} = 45$ è la lunghezza degli intervalli pari. Ora, è fondamentale sottolineare una caratteristica di questo esempio: accoppiando i termini di *autovalore minimo* \times *lunghezza dell'intervallo* relativi a due intervalli consecutivi o, analogamente, relativi ad un ciclo, si ottiene:

$$\lambda_{\min}^{(2k'-1)} \cdot \delta_{2k'-1} + \lambda_{\min}^{(2k')} \cdot \delta_{2k'} = -0.089 \cdot 15 + 0.109 \cdot 45 = 3.57.$$

Quindi, ogni volta che si aggiunge un ciclo completo il valore della funzione $g_i(t)$ aumenta di 3.57. Proprio questo fatto assicura che la funzione sia limitata dal basso. Infatti, ipotizzando di valutare la funzione per un k pari, ovvero immaginando che ogni volta che si vuole aumentare il tempo di analisi si vada ad aggiungere un ciclo formato da due intervalli e non ci si limiti ad aggiungere un periodo singolo, si ricava:

$$g_i(t) = 0.109 \cdot (t - t_K) - 0.089 \cdot 15 + W_K. \quad (6.7)$$

In particolare, la variabile W_K è un termine costante > 0 , formato dal valore 3.57 moltiplicato per il numero di cicli presenti nella storia del sistema, precedenti agli intervalli corrispondenti a $K - 1$ e K .

Tale funzione è chiaramente limitata dal basso. Per esempio, si può selezionare come costante $Q = -2$ per verificare la condizione di limitatezza inferiore. Di conseguenza, grazie all'osservazione precedente, anche $f_i(t)$ è limitata inferiormente. Perciò sia la media, sia la covarianza della densità di opinione sono stabili.

In conclusione, il caso mostrato rappresenta un esempio di dinamica delle opinioni con \mathbf{Z} tempo-variante *stabile*.

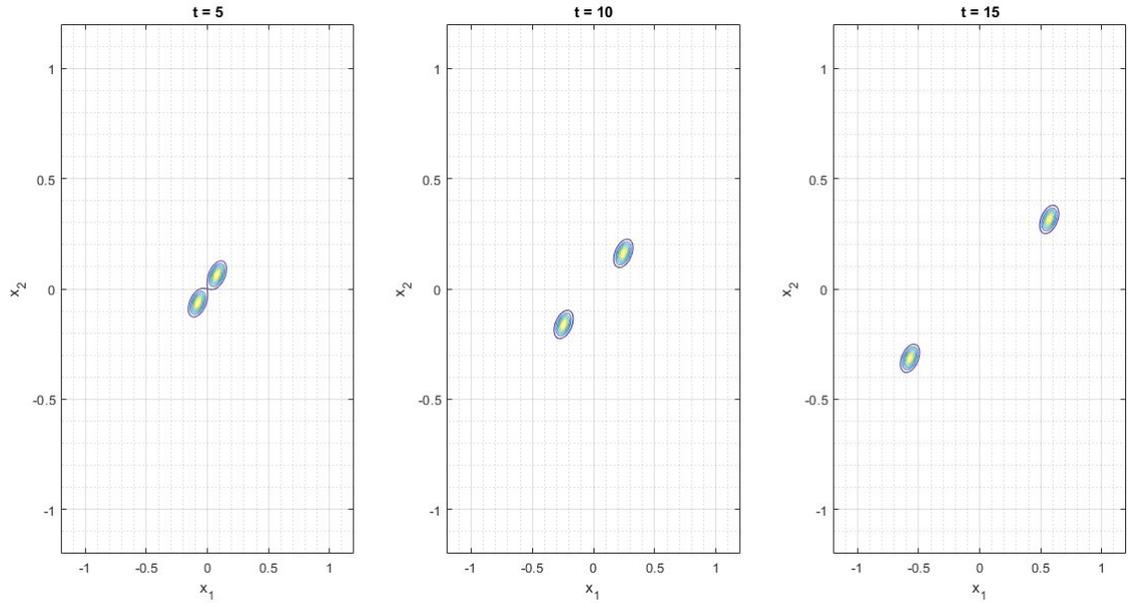
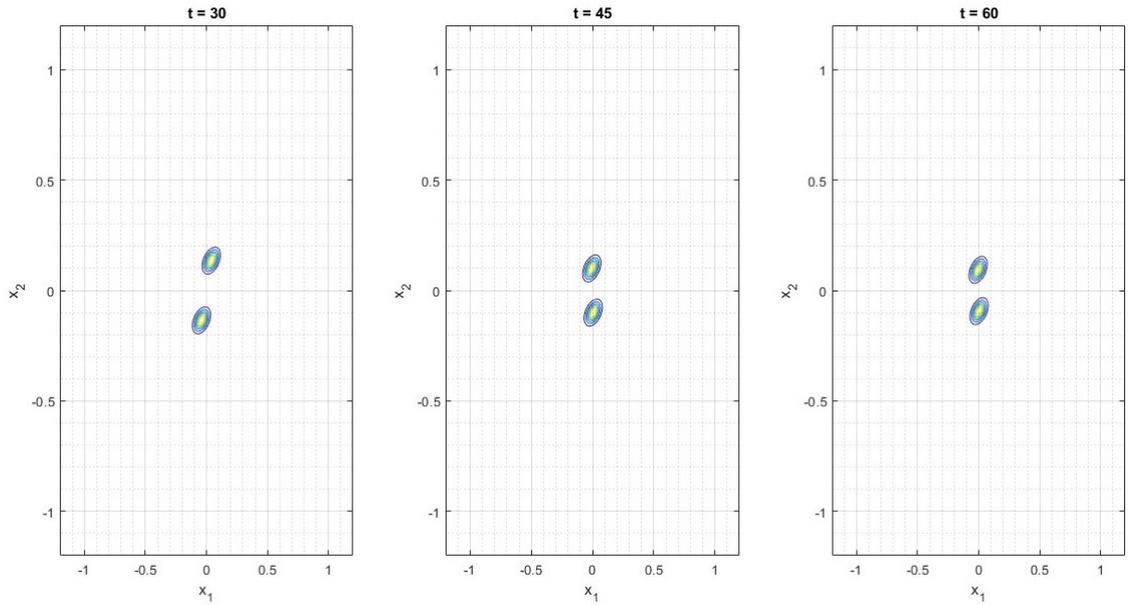
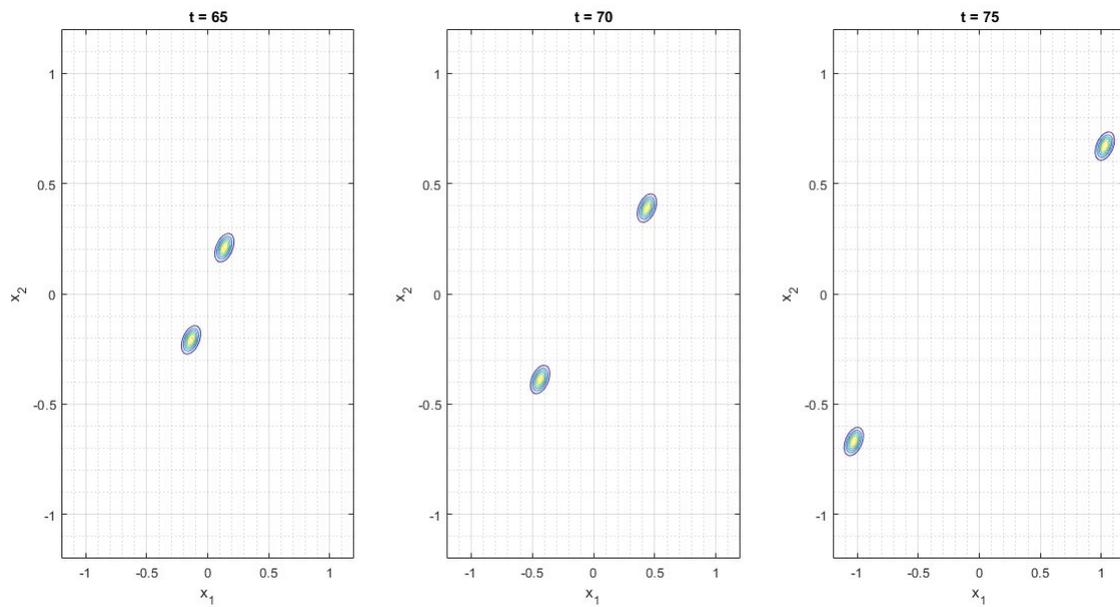
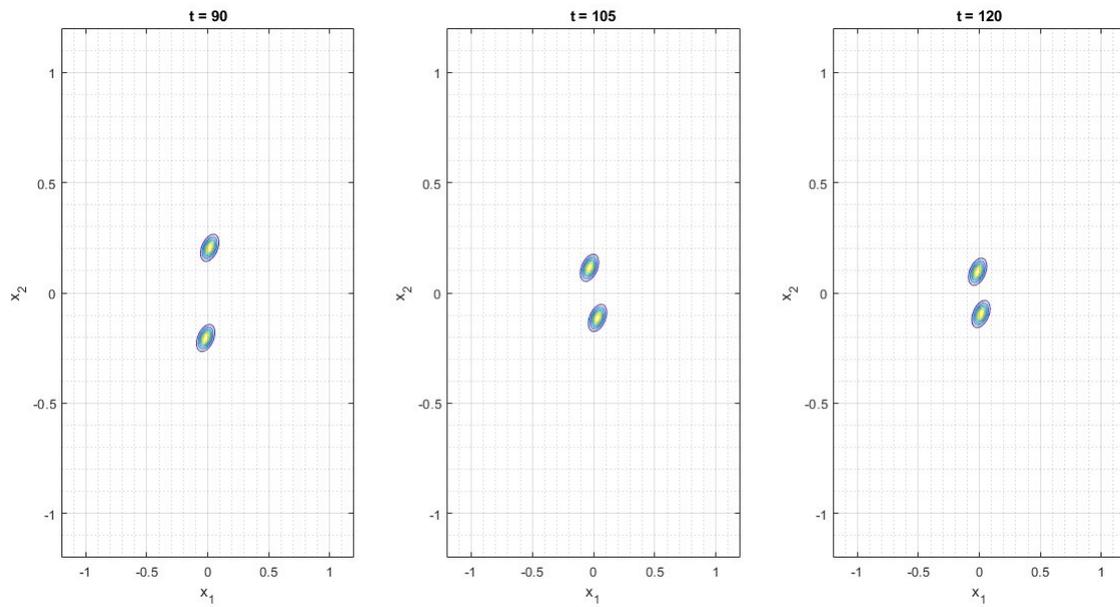
(a) Primo intervallo $[t_0 = 0, t_1 = 15]$, $\zeta_2 = 0.1$ (b) Secondo intervallo $(t_1 = 15, t_2 = 60]$, $\zeta_2 = -0.1$

Figura 6.1: *Andamento temporale delle opinioni, esempio 1.* In questo caso il tempo totale è diviso in otto intervalli distinti, durante i quali la matrice \underline{Z} è fissa e dipende dal valore assunto dal parametro ζ_2 . Nella prima pagina sono presenti le simulazioni relative ai primi due intervalli.

Per ciascun intervallo sono mostrati i seguenti istanti (da sinistra a destra): (i) $t = t_{k-1} + 5; t_{k-1} + 10; t_{k-1} + 15$ per gli intervalli corrispondenti a k dispari; (ii) $t = t_{k-1} + 15; t_{k-1} + 30; t_{k-1} + 45$ per gli intervalli corrispondenti a k pari.

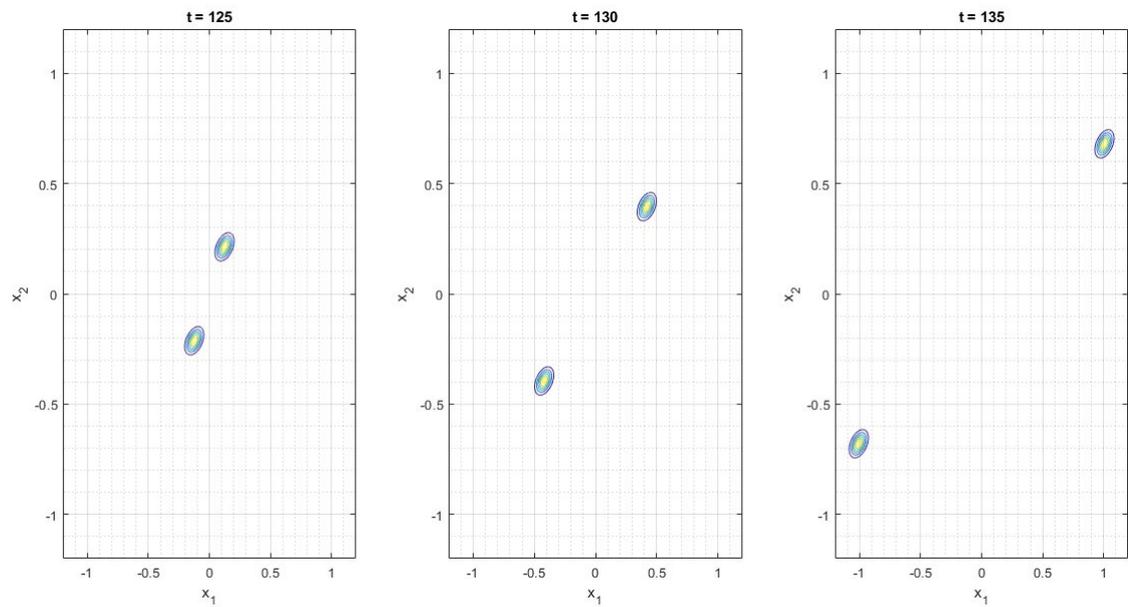


(c) Terzo intervallo ($t_2 = 60, t_3 = 75$], $\zeta_2 = 0.1$

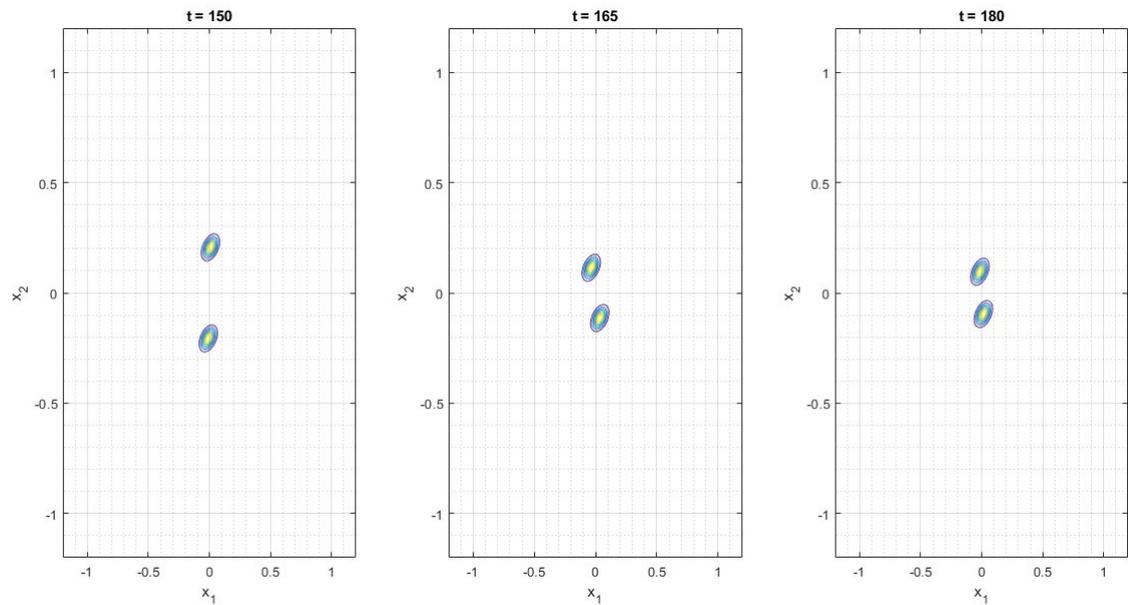


(d) Quarto intervallo ($t_3 = 75, t_4 = 120$], $\zeta_2 = -0.1$

Figura 6.1: In questa seconda pagina sono mostrati gli andamenti delle opinioni relativi al terzo e al quarto intervallo.

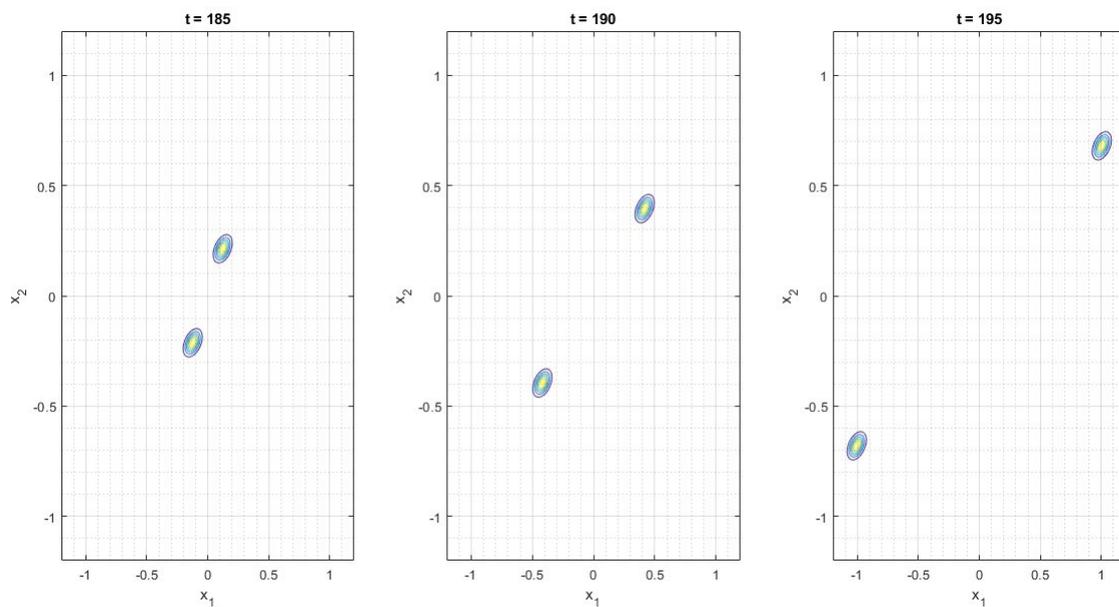


(e) Quinto intervallo ($t_4 = 120, t_5 = 135$], $\zeta_2 = 0.1$

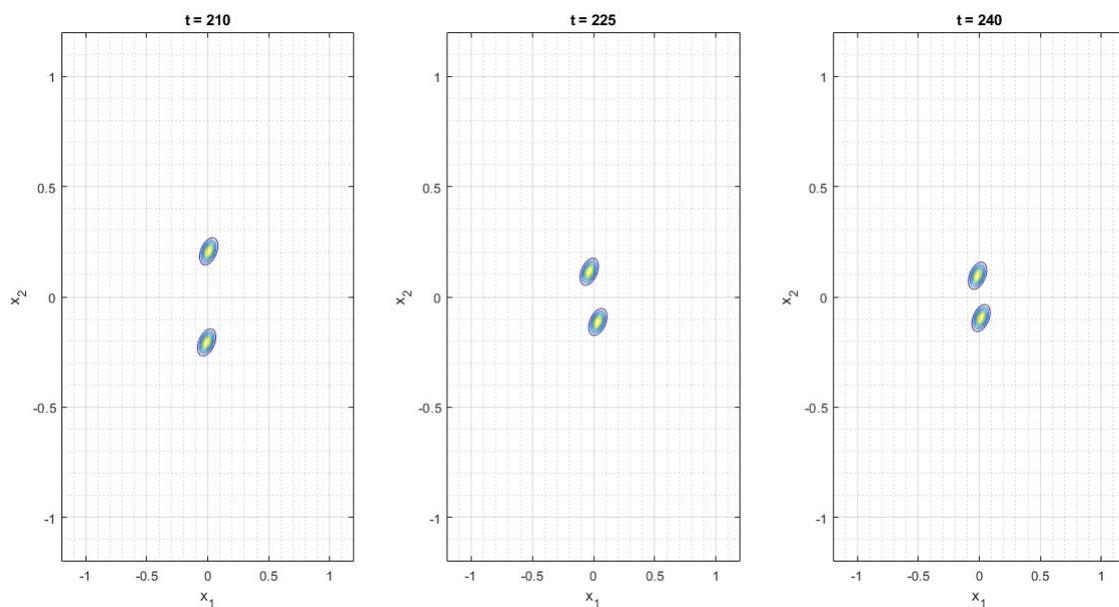


(f) Sesto intervallo ($t_5 = 135, t_6 = 180$], $\zeta_2 = -0.1$

Figura 6.1: In questa terza pagina sono mostrati gli andamenti delle opinioni relativi al quinto e al sesto intervallo.



(g) Settimo intervallo ($t_2 = 180, t_3 = 195$], $\zeta_2 = 0.1$



(h) Ottavo intervallo ($t_3 = 195, t_4 = 240$], $\zeta_2 = -0.1$

Figura 6.1: Infine, in quest'ultima pagina sono mostrati gli andamenti delle opinioni relativi al settimo e all'ottavo intervallo.

6.1.2 Esempio 2 - instabilità della media

In questa seconda sottosezione viene presentato un esempio in cui la media della densità di opinione non risulta essere stabile. Infatti, si potrà vedere nuovamente la formazione di due gruppi di utenti con pareri discordanti, ma in questa situazione il loro valor medio tenderà ad allontanarsi sempre di più con il passare del tempo, fino a divergere.

Per entrare nel dettaglio, la struttura dell'esempio è molto simile al caso [6.1.1]. Infatti, tutti i parametri e le variabili principali del problema sono gli stessi. Ciò che cambia, però, è la scelta dei diversi intervalli temporali e dei corrispondenti valori del parametro ζ_2 , i quali vengono fissati nel seguente modo:

- $(t_{k-1}, t_k = t_{k-1} + 10]$, per k dispari, a cui si associa il parametro $\zeta_2 = 0.13$;
- $(t_{k-1}, t_k = t_{k-1} + 10]$, per k pari, a cui si associa il parametro $\zeta_2 = -0.1$.

Si nota immediatamente che la lunghezza dei periodi temporali è sempre la stessa, indipendentemente dal valore di ζ_2 , ed è uguale a $\delta_k = 10$.

Prima di osservare le figure della simulazione temporale, si può mostrare che cosa succede alle funzioni $f_i(t)$ e $g_i(t)$ in questo caso. Innanzitutto, si cercano gli autovalori minimi relativi alle matrici $\Xi(p_i)$ e Ψ . Dato che la struttura del problema è la stessa dell'esempio precedente, gli autovalori minimi attivi si modificano leggermente, soltanto a causa dell'utilizzo di un valore diverso di ζ_2 negli intervalli dispari:

	k dispari	k pari
$\lambda_{\Xi, \min}^{(k)}$	0.44065	0.5545
$\lambda_{\Psi, \min}^{(k)}$	-0.1187	0.109

Tabella 6.3: Esempio 2, autovalori minimi per ogni intervallo corrispondente a valori di k pari e valori di k dispari.

A questo punto, analizzando per prima ancora la funzione $g_i(t)$, si trova:

$$\begin{aligned}
 g_i(t) &= \lambda_{\Psi, \min}^{(K)}(t - t_K) + \sum_{k'=1}^{K-1} \left(-0.1187 \cdot \delta_{2k'-1} + 0.109 \cdot \delta_{2k'} \right) \\
 &= \lambda_{\Psi, \min}^{(K)}(t - t_K) + \sum_{k'=1}^{K-1} \left((-0.1187 + 0.109) \delta_{k'} \right) \\
 &= \lambda_{\Psi, \min}^{(K)}(t - t_K) + \underbrace{\sum_{k'=1}^{K-1} \left(-0.0097 \cdot \delta_{k'} \right)}_{W_K},
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

dove W_K è il termine che comprende tutta la storia precedente all'intervallo K . Però, se $K \rightarrow +\infty$, allora $W_K \rightarrow -\infty$ e di conseguenza la funzione $g_i(t)$ non può essere limitata dal basso. Si conclude che la *media delle opinioni di questo esempio diverge* nel tempo.

Si può anche verificare che, al contrario, la matrice di covarianza rimane stabile. Per fare ciò bisogna analizzare la funzione $f_i(t)$. Infatti, a differenza dell'esempio [6.1.1], non

si può sfruttare l'osservazione che $g_i(t) \leq f_i(t)$ per ottenere immediatamente un risultato. È necessario quindi ripartire direttamente dalla definizione di $f_i(t)$, fornita dall'espressione (5.26). In questo caso, si vede che sono coinvolti solamente gli autovalori corrispondenti alle matrici $\Xi^{(k)}(p_i)$, i cui valori minimi sono strettamente positivi, per qualsiasi intervallo k (rivedere la tabella). Allora, il valore della funzione $f_i(t)$ aumenterà sempre, anche in maniera indipendente dalla lunghezza degli intervalli, man mano che si aumenta il periodo totale su cui studiare la dinamica del sistema.

In particolare, si può scrivere:

$$f_i(t) = \lambda_{\Xi, \min}^{(K)}(t - t_K) + \sum_{k'=1}^{K-1} \left(0.44065 \cdot \delta_{2k'-1} + 0.5455 \cdot \delta_{2k'} \right), \quad (6.9)$$

che è una funzione limitata inferiormente. Infatti, basta prendere $Q = 0$ per avere la condizione soddisfatta per qualsiasi valore di K , anche per il caso limite $K \rightarrow +\infty$. Di conseguenza, si conclude che per questo sistema la *matrice di covarianza* risulta *stabile*.

Ora, per terminare l'esempio, vengono mostrati nuovamente alcuni grafici, figura 6.2, che rappresentano l'evoluzione temporale delle opinioni, in un primo periodo che termina all'istante $T = 60$. In questo caso, avendo assunto che tutti gli intervalli siano di medesima lunghezza $\delta_k = 10$, sono presenti sei intervalli distinti.

Ciò che si osserva è proprio un andamento che spinge le medie delle opinioni verso la divergenza. Infatti, se ci si concentra principalmente sugli intervalli dispari, si vede chiaramente che con il passare del tempo i due gruppi di opinione si allontanano sempre di più. Questo fenomeno si spiega con il fatto che la lunghezza degli intervalli durante i quali il sistema tende a convergere non è sufficiente per permettere alle opinioni di raggiungere ogni volta la posizione di equilibrio. Al contrario, la posizione raggiunta al termine di ognuno di questi intervalli è sempre più lontana dall'equilibrio.

Come nel caso precedente, questo pattern della dinamica delle opinioni permette di intuire come continuerà nel tempo l'evoluzione del sistema, mostrando, in definitiva, un caso in cui la media è *instabile*.

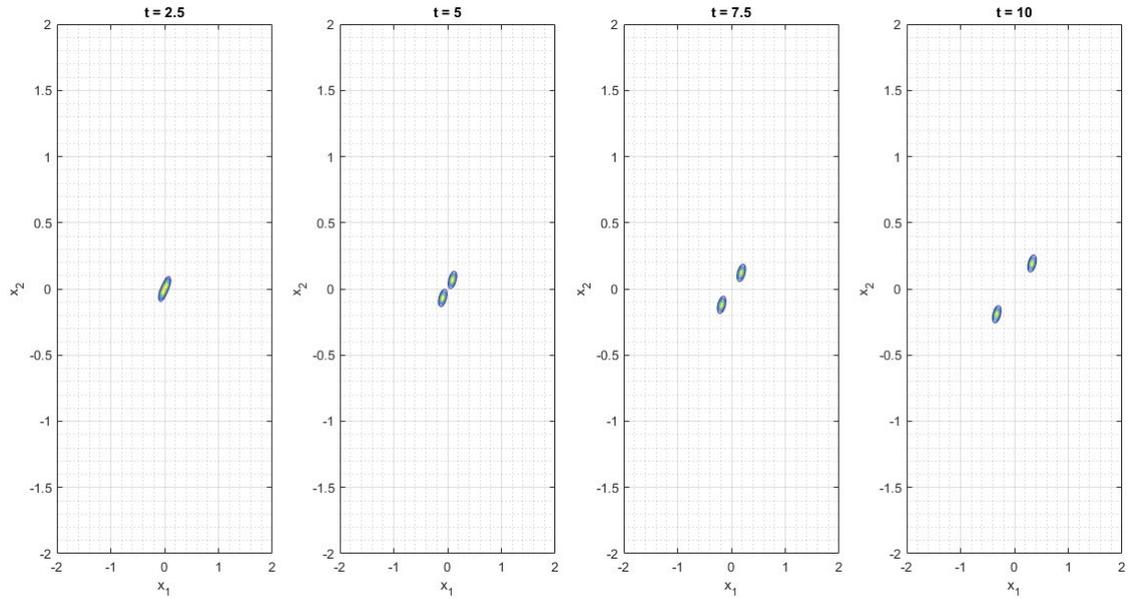
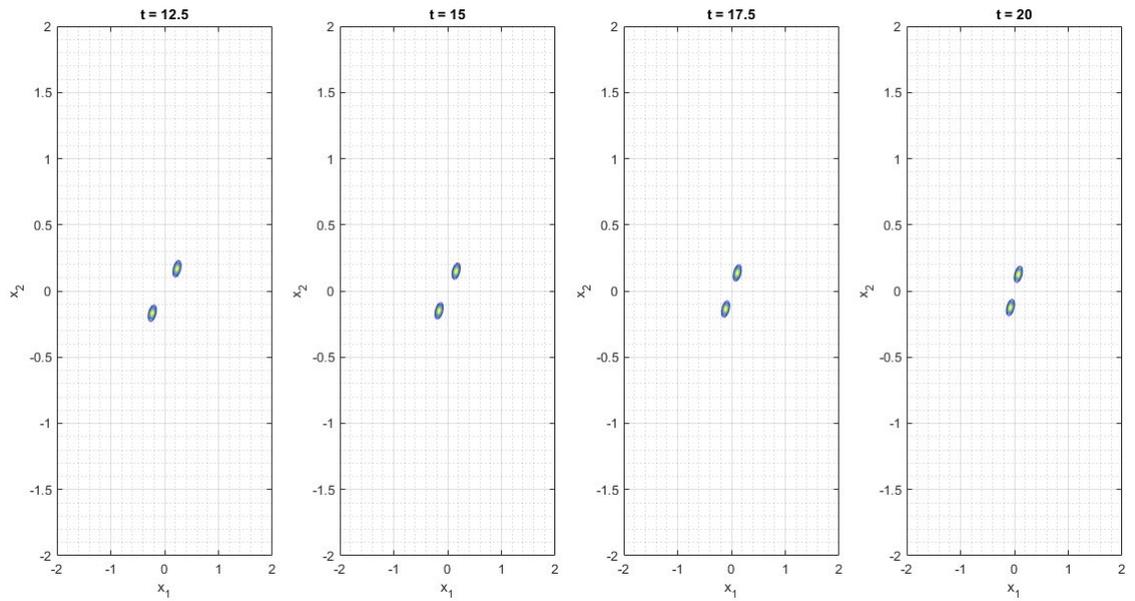
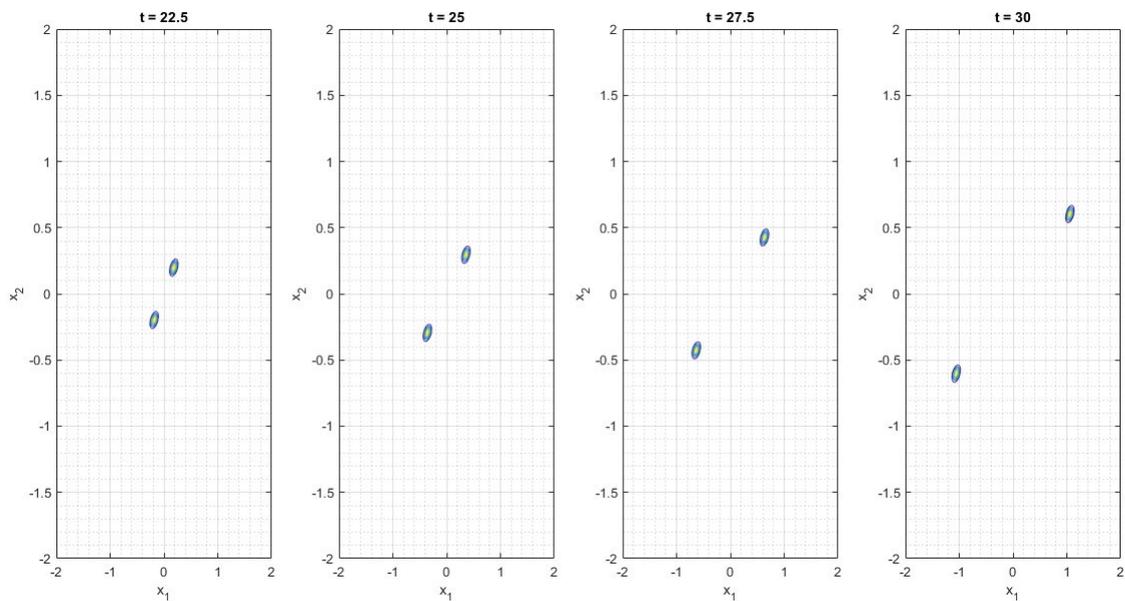
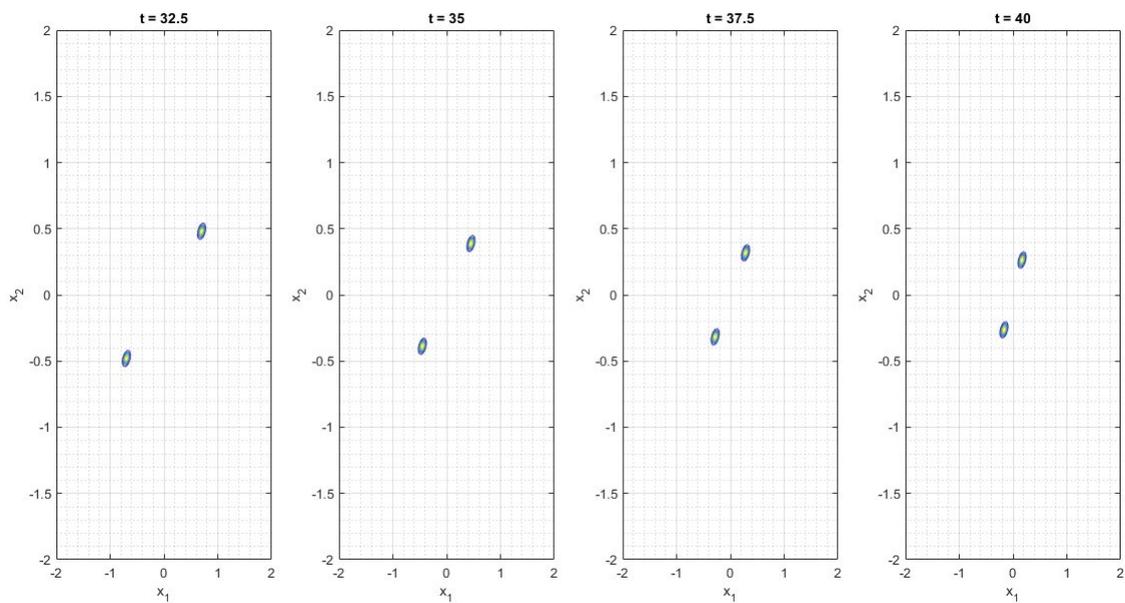
(a) Primo intervallo $[t_0 = 0, t_1 = 10]$, $\zeta_2 = 0.13$ (b) Secondo intervallo $(t_1 = 10, t_2 = 20]$, $\zeta_2 = -0.1$

Figura 6.2: *Andamento temporale delle opinioni, esempio 2.* In questo esempio il periodo totale $[t_0 = 0, T = 60]$ è stato suddiviso in sei intervalli di lunghezza $\delta_k = 10$. Per ogni intervallo vengono mostrati 4 diversi istanti, che permettono di seguire più nel dettaglio il comportamento delle opinioni. In questa prima pagina sono presenti i grafici relativi ai primi due intervalli temporali.

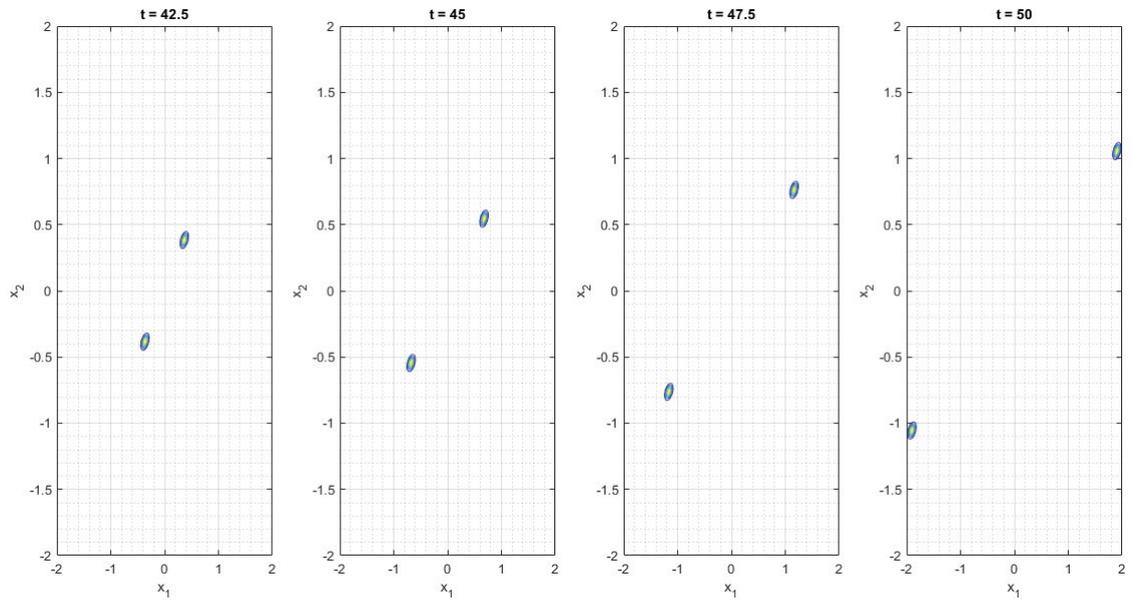


(c) Terzo intervallo ($t_2 = 20, t_3 = 30$], $\zeta_2 = 0.13$

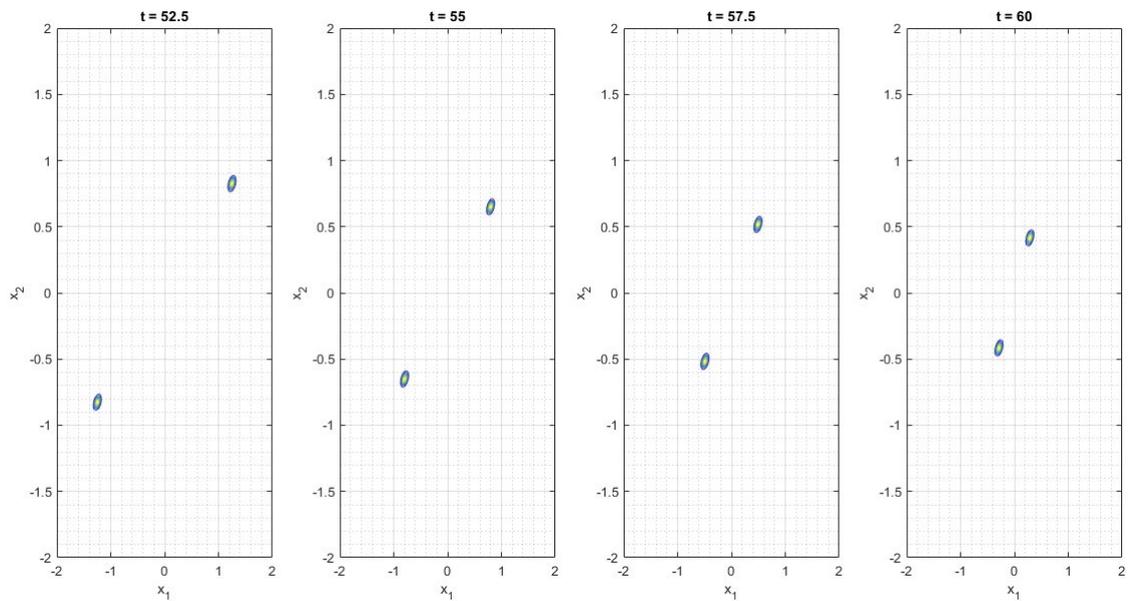


(d) Quarto intervallo ($t_3 = 30, t_4 = 40$], $\zeta_2 = -0.1$

Figura 6.2: Seconda pagina, sono mostrati gli andamenti delle opinioni relativi al terzo e al quarto intervallo.



(e) Quinto intervallo ($t_4 = 40, t_5 = 50$], $\zeta_2 = 0.13$



(f) Sesto intervallo ($t_5 = 50, t_6 = 60$], $\zeta_2 = -0.1$

Figura 6.2: Terza pagina, sono mostrati gli andamenti delle opinioni relativi al quinto e al sesto intervallo.

6.1.3 Esempio 3 - instabilità di media e covarianza

Il terzo esempio di questa sezione riguarda un caso in cui l'instabilità non si limita soltanto alla media della densità di opinione, ma coinvolge anche la matrice di covarianza.

Ancora una volta, la struttura di base dell'esempio rimane la medesima. In questo caso, però, si scelgono come valori del parametro ζ_2 e come corrispondenti intervalli temporali i seguenti:

- $\zeta_2 = 10$, per k dispari, con intervalli $(t_{k-1}, t_{k-1} + 0.2]$;
- $\zeta_2 = -0.3$, per k pari, con intervalli $(t_{k-1}, t_{k-1} + 1.2]$.

La grande differenza rispetto ai due casi precedenti è data dall'utilizzo del parametro $\zeta_2 = 10$ negli intervalli dispari. Infatti, si è visto nella sezione [3.6.2] che l'utilizzo di tale valore porta il sistema (in quel caso caratterizzato da una matrice \mathbf{Z} fissa nel tempo) a manifestare un'instabilità di tipo-I, in cui sia la media sia la covarianza divergono.

Invece, in questo esempio si presenta un comportamento descritto dall'alternanza delle seguenti fasi:

- (i) durante gli intervalli k dispari, in cui la matrice \mathbf{Z} è effettivamente costante, le opinioni evolvono spingendo il sistema verso una situazione di instabilità analoga a quella trattata nel capitolo [3], ricordata sopra.
- (ii) Durante gli intervalli pari, invece, la nuova matrice \mathbf{Z} aiuta le opinioni a tornare verso una situazione di convergenza, rallentando il processo che porta all'instabilità.

Complessivamente, è quindi la durata dei diversi intervalli a determinare se a prevalere sarà la forza che spinge per la divergenza o viceversa. In questo caso specifico è proprio la spinta verso l'instabilità ad avere la meglio.

Per capire nel dettaglio ciò che accade, è possibile osservare le immagini della figura 6.3. Soprattutto guardando i grafici relativi all'evoluzione delle opinioni negli intervalli 3 e 5, si può vedere come non solamente le medie dei due gruppi si allontanano sempre di più, ma anche la distanza tra utenti appartenenti allo stesso gruppo tende a crescere. Quest'ultimo effetto è dovuto proprio alla divergenza della matrice di covarianza.

Comunque, osservando l'insieme dei grafici della simulazione si intuisce che le fasi in cui il sistema si muove verso una situazione stabile non sono sufficienti per contenere l'effetto della divergenza e quindi, nel complesso, le opinioni manifesteranno l'analogo dell'instabilità di tipo-I vista nel caso \mathbf{Z} costante.

Un'ultima osservazione interessante che si può ricavare dalle figure, riguarda il primo intervallo temporale. Infatti, poiché si utilizza, ancora una volta, come condizione iniziale l'ipotesi che l'opinione di ogni utente sia posizionata nell'origine e, inoltre, dato che la lunghezza del primo intervallo è solamente $\delta_1 = 0.2$, in questa prima fase non si riescono a formare ancora due gruppi distinti di opinione. Infatti, questa distinzione compare soltanto a partire dal terzo intervallo.

Ancora una volta, per concludere l'esempio si passa a studiare le condizioni di stabilità. In questo caso conviene partire dalla condizione sulla covarianza e, di conseguenza, dalla funzione $f_i(t)$. In questa funzione compaiono soltanto gli autovalori minimi delle matrici $\Xi^{(k)}(p_i)$, i quali valgono:

	k dispari	k pari
$\lambda_{\Xi, \min}^{(k)}$	-4.445	0.6535

Tabella 6.4: Esempio 3, autovalori minimi relativi alla matrice $\Xi^{(k)}(p_i)$ per ogni intervallo di tempo.

Allora, si può riscrivere la funzione, per un $t \in (t_{K-1}, t_K]$:

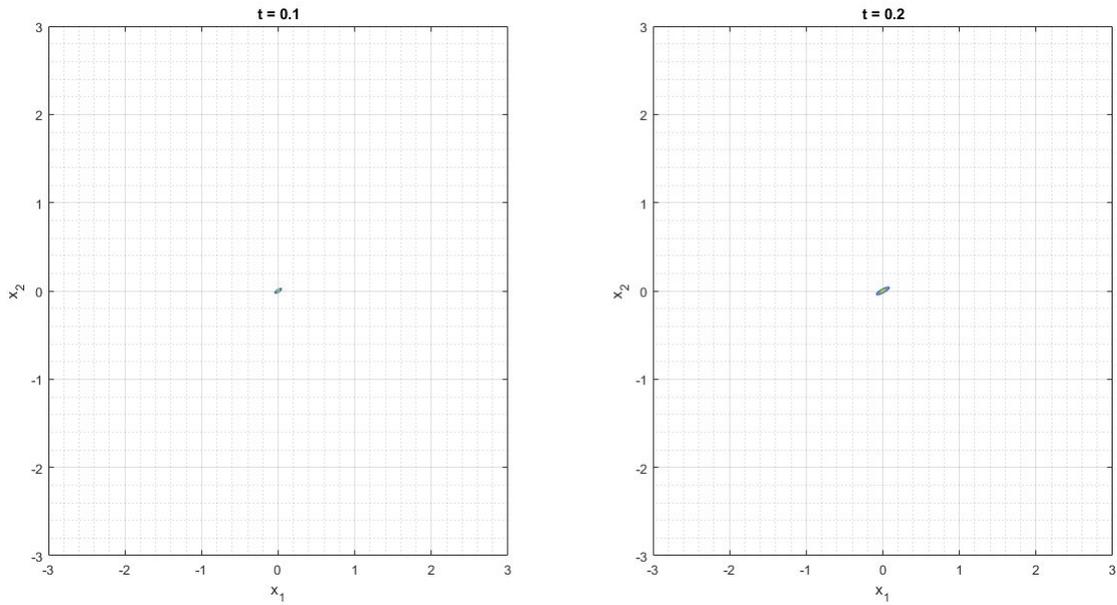
$$f_i(t) = \lambda_{\Xi, \min}^{(K)}(t - t_K) + \sum_{k'=1}^{K-1} \left(-4.445 \cdot \underbrace{\delta_{2k'-1}}_{=0.2} + 0.6535 \cdot \underbrace{\delta_{2k'}}_{=1.2} \right). \quad (6.10)$$

Nell'equazione (6.10) si può osservare che il termine nella sommatoria, indipendente dal tempo, decresce all'aumentare del valore K . Infatti, in questo esempio particolare, accoppiando un intervallo dispari ad uno pari, la somma dei due *autovalori minimi* \times *lunghezza intervallo* è un numero strettamente negativo:

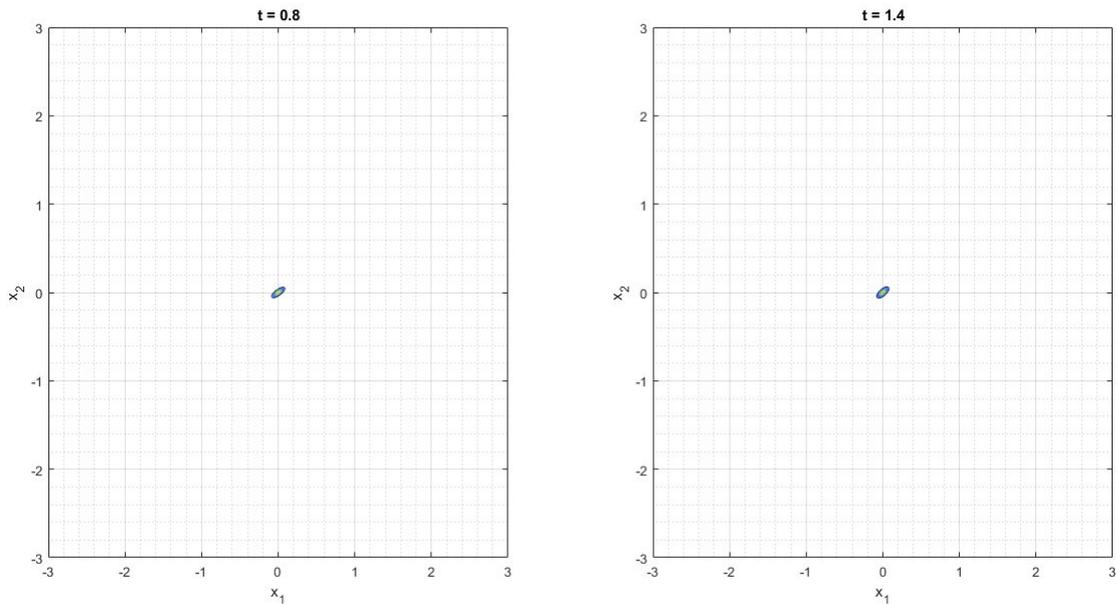
$$-4.445 \cdot 0.2 + 0.6535 \cdot 1.2 = -0.1048.$$

Perciò, studiando il caso limite in cui $K \rightarrow +\infty$, è chiaro come la funzione $f_i(t)$ non sia limitata inferiormente, dal momento che il termine costante dato dalla sommatoria tenderà verso $-\infty$. Da questo risultato si può concludere che la matrice di *covarianza non è stabile*.

Ora, per completare l'analisi si cerca un risultato anche per la media. In questo caso, però, si può nuovamente sfruttare l'osservazione sulle due funzioni, anche se nella maniera opposta rispetto a come fatto nell'esempio [6.1.1]. Infatti, sapendo che $f_i(t) \geq g_i(t)$ e avendo mostrato che la funzione $f_i(t)$ non è limitata dal basso, allora necessariamente anche $g_i(t)$ non potrà essere limitata inferiormente. In questo modo si può rapidamente concludere che *anche la media non è stabile*.



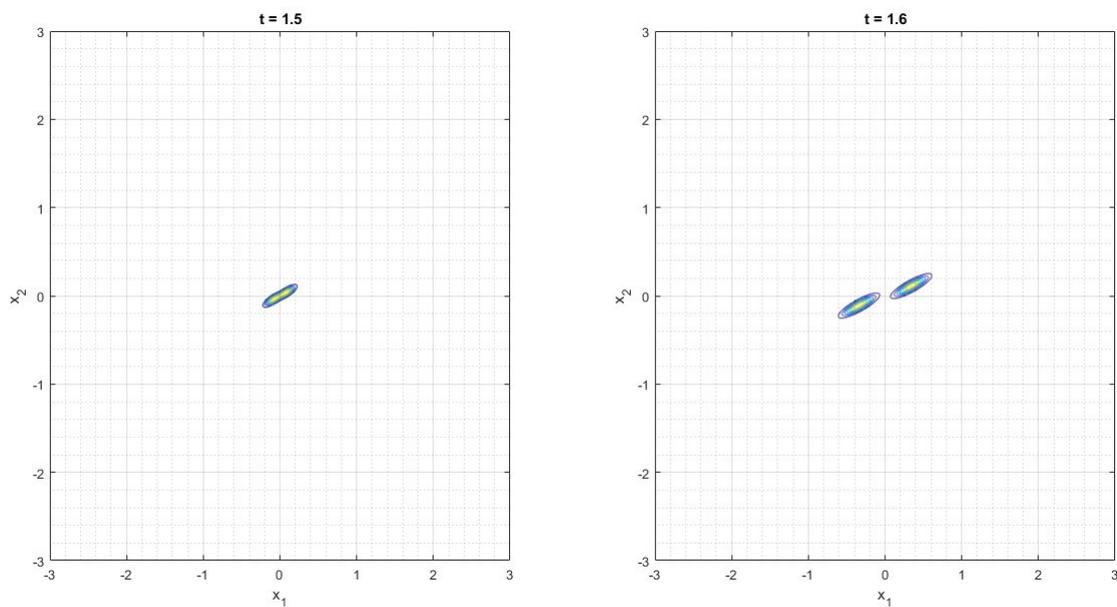
(a) Primo intervallo $[t_0 = 0, t_1 = 0.2]$, $\zeta_2 = 10$



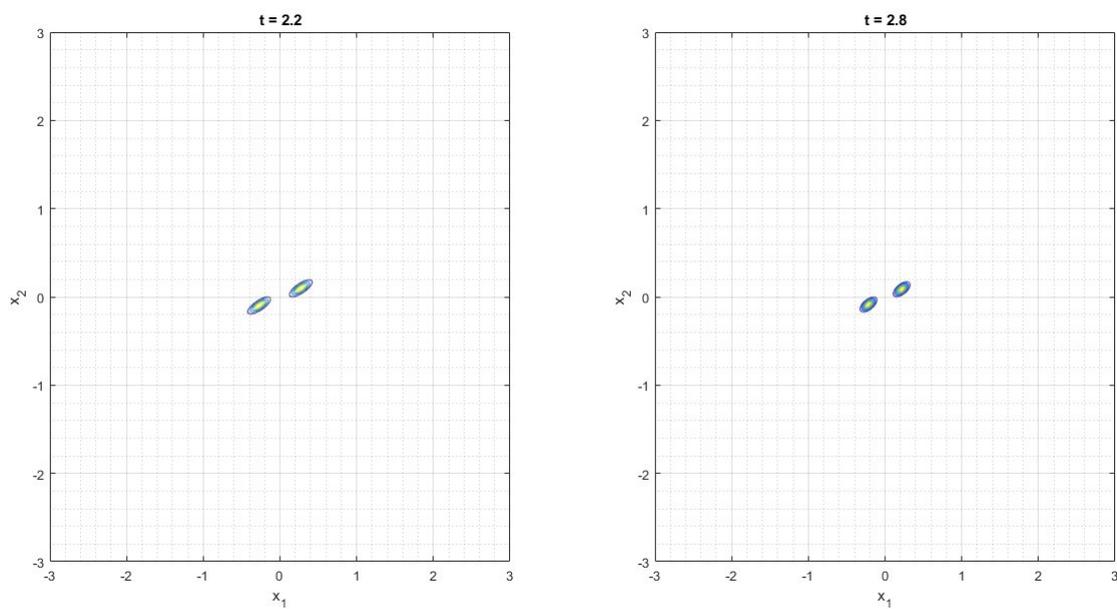
(b) Secondo intervallo $(t_1 = 0.2, t_2 = 1.4]$, $\zeta_2 = -0.3$

Figura 6.3: *Andamento temporale delle opinioni, esempio 3.* In questo esempio il periodo totale $[t_0 = 0, T = 4.2]$, molto più breve rispetto ai casi precedenti, è stato suddiviso in 6 intervalli. La scelta di inserire intervalli molto più piccoli è soprattutto legata alla presenza negli intervalli dispari del parametro $\zeta_2 = 10$. Con questo valore, infatti, il sistema evolve rapidamente verso una situazione di instabilità, per cui nasce la necessità di scegliere intervalli brevi, con l'obiettivo di rendere visibile graficamente l'evoluzione.

Per ogni intervallo vengono mostrati due diversi istanti, che forniscono un'istantanea della posizione dei pareri degli utenti alla metà e alla fine di ogni intervallo.

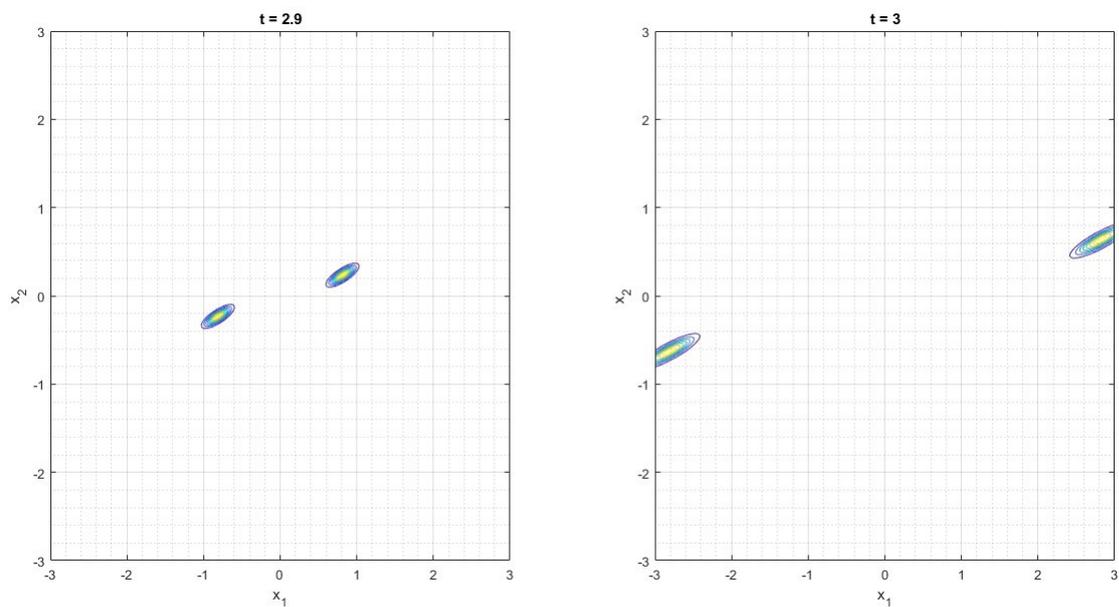


(c) Terzo intervallo ($t_2 = 1.4, t_3 = 1.6$], $\zeta_2 = 10$

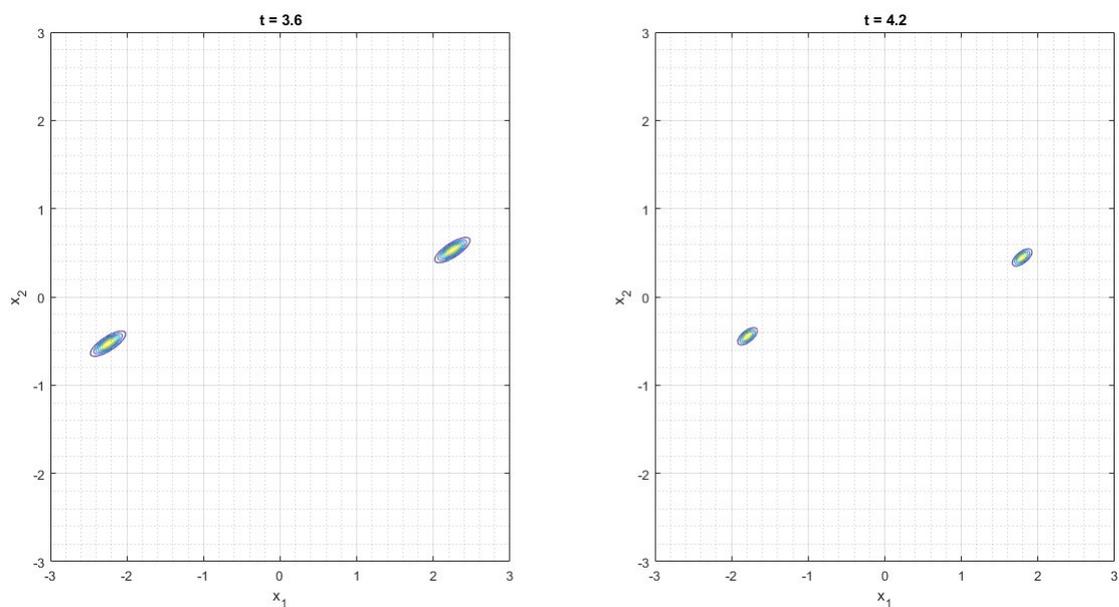


(d) Quarto intervallo ($t_3 = 1.6, t_4 = 2.8$], $\zeta_2 = -0.3$

Figura 6.3: Seconda pagina, sono mostrati gli andamenti delle opinioni relativi al terzo e al quarto intervallo.



(e) Quinto intervallo ($t_4 = 2.8, t_5 = 3$], $\zeta_2 = 10$



(f) Sesto intervallo ($t_5 = 3, t_6 = 4.2$], $\zeta_2 = -0.3$

Figura 6.3: Terza e ultima pagina, sono mostrati gli andamenti delle opinioni relativi al quinto e al sesto intervallo.

6.1.4 Esempio 4 - caso con intervalli ottimizzati

Dopo aver mostrato alcuni esempi che illustrano i diversi tipi di comportamento che possono presentarsi nel caso in cui la matrice \mathbf{Z} varia in intervalli di tempo distinti, è interessante immaginare quale possa essere un'applicazione pratica da associare ad una situazione di questo genere. Chiaramente non si ha la pretesa di risolvere davvero un caso reale tramite un semplice esempio, bensì l'obiettivo è quello di mostrare un parallelismo tra un esempio computazionale ed una situazione che può presentarsi nella vita di tutti i giorni.

Riprendendo in parte l'esempio visto per il modello a tre comunità del capitolo [4], si può pensare ad una discussione su un social network riguardante due temi alimentari, attuali e controversi:

- (i) i prodotti animali e i prodotti vegetali,
- (ii) i prodotti biologici.

Se si lascia evolvere l'opinione in maniera naturale, è facile intuire che non si riuscirà a raggiungere un consenso globale, ma si andranno a formare due diversi gruppi di pensiero, tra chi sostiene una dieta carnivora e chi preferisce una dieta vegetariana con soli prodotti biologici. Inoltre, c'è il rischio che il sistema diverga in maniera tale da creare fenomeni di estremismo, che possono portare alla formazione di due vere e proprie fazioni (*vegani* e *carnivori*), tra le quali si può addirittura manifestare vero e proprio odio.

Inoltre, si può immaginare che a questa diatriba sia interessata un'azienda di prodotti alimentari, che ha grande convenienza a far sì che non si creino due gruppi di individui totalmente in opposizione. Infatti, se accadesse ciò, il rischio per l'azienda sarebbe quello di perdere molti clienti, dato che l'estremizzazione può spingere chi è contro il veganesimo a boicottarla nel caso in cui essa decida di vendere alcuni prodotti vegani, oppure può accadere la stessa cosa con gli individui vegani se vengono venduti prodotti quali carne o latticini. In ogni caso, il risultato sarebbe negativo e l'azienda si troverebbe costretta a decidere su quale mercato concentrarsi, perdendo così totalmente una buona fetta dei consumatori e, di conseguenza, dei guadagni.

Al fine di evitare che si realizzi lo scenario appena descritto, la ditta alimentare può decidere di intervenire influenzando le opinioni degli utenti, cercando di mantenere il sistema, nel complesso, sotto controllo. Concretamente, il possibile intervento consiste nel coinvolgere alcune personalità importanti (esterne al sistema), che abbiano una grande capacità di suggestionare tutti gli altri individui, allo scopo di riportare le opinioni verso una situazione di convergenza ad un consenso. In definitiva, un possibile sviluppo di questo esempio risulta essere il seguente:

- 1) si fissa a t_0 l'istante temporale in cui viene avviata una discussione pubblica su un social network (per esempio Twitter) riguardo i temi (i) e (ii), sui quali gli utenti esprimono un proprio parere. Da questo momento in avanti la dinamica dell'opinione viene tenuta sott'occhio dall'azienda alimentare. Comunque, in questa prima fase il sistema viene lasciato evolvere liberamente, finché si raggiunge il tempo t_1 .
- 2) Raggiunto l'istante t_1 l'azienda valuta che la divergenza delle opinioni sta spingendo verso la formazione di due gruppi un po' troppo estremi e, per evitare di raggiungere

la situazione di fanatismo, decide di intervenire. Allora, contatta alcuni personaggi famosi e molto influenti (per esempio grandi personaggi dello sport quali LeBron James o grandi imprenditori come Elon Musk), che si ipotizza siano *super partes* rispetto agli argomenti in considerazione. Questi intervengono così nel sistema, andando a pubblicare alcuni post suggeriti dall'azienda stessa, che ovviamente deve pagare una certa quota a questi personaggi per sfruttare la loro influenza. Grazie all'intervento esterno, si modifica la rete sociale sottostante e si immagina che il sistema si trovi ora in una situazione di stabilità. Quindi, l'evoluzione prosegue riavvicinando i due gruppi di utenti. Essendoci, però, questo costo da saldare per tutta la durata del tempo in cui i personaggi pubblici agiscono sul sistema, l'azienda non può permettersi di sostenere tale spesa dal tempo t_1 all'infinito. Perciò, raggiunto un certo istante t_2 si trova costretta a bloccare l'intervento esterno e lasciare che le opinioni si modifichino nuovamente in maniera naturale, come avveniva nel primo intervallo.

- 3) Ora, si entra nel terzo intervallo di tempo, durante il quale i parametri del sistema tornano ad essere quelli del punto 1), tali per cui i pareri degli utenti tendono a divergere. L'unica grande differenza riguarda le opinioni di partenza, che sono date dalle posizioni raggiunte nell'intervallo precedente. In questo periodo la ditta alimentare non esegue nessun intervento (perciò non ha nessun costo a carico), ma si limita a controllare attentamente la dinamica.
- 4) Quando la divisione tra gli individui torna a rischio estremizzazione, ovvero al tempo t_4 , nuovamente l'azienda investe il proprio denaro nell'intervento esterno di qualche personaggio famoso per riportare le opinioni verso la convergenza.

Ovviamente questo possibile sviluppo temporale può proseguire a lungo, sempre alternando fasi in cui la dinamica del sistema porta le opinioni verso una situazione di divergenza a fasi in cui, pagando, l'azienda interviene e spinge i pareri degli utenti verso la convergenza. In sostanza, si viene a formare un andamento ciclico.

Le simulazioni effettuate su Matlab vanno a riprodurre proprio uno scenario del tipo di quello appena descritto, mantenendo sempre la medesima struttura di base già utilizzata nei casi precedenti. In particolare, sono stati scelti come valori del parametro ζ_2 :

- $\zeta_2 = 0.1$,
- $\zeta_2 = -0.2$.

Fissati tutti gli altri parametri e variabili del sistema, il valore $\zeta_2 = 0.1$ spinge le opinioni verso una situazione di divergenza e quindi è il valore associato ai punti 1) e 3) della possibile applicazione reale spiegata sopra. In sostanza, è il valore che corrisponde all'evoluzione naturale delle opinioni.

Invece, quando si assegna $\zeta_2 = -0.2$, si immagina di essere negli intervalli temporali corrispondenti ai punti 2) e 4), ovvero il parametro assume un valore che si associa all'intervento esterno dell'azienda tramite i post dei personaggi influenti.

Inoltre, essendo il caso reale un problema di gestione ottimale delle spese, alla simulazione è stato abbinato anche un lavoro di ricerca degli estremi degli intervalli temporali. Si

cercano, quindi, gli istanti t_i , che determinano il momento in cui si cambia il valore di ζ_2 , che devono soddisfare un certo criterio di ottimizzazione. Comunque, è importante notare che anche l'implementazione di tale ricerca è stata effettuata tramite funzioni Matlab, per cui il tempo continuo è stato discretizzato, utilizzando come passo $\Delta t = 1$. In particolare, sono stati implementati i seguenti criteri:

- ◆ per trovare t_i che fa passare da una situazione di divergenza ($\zeta_2 = 0.1$) ad una di convergenza ($\zeta_2 = -0.2$), si è imposto di selezionare l'ultimo istante testato in cui il massimo valor medio delle opinioni rimane, in modulo, minore di un opportuno valore q .
- ◆ Viceversa, per selezionare il valore di t_i che fa cambiare ζ_2 da -0.2 a 0.1 , si è scelto di cercare il primo istante temporale t in cui la massima distanza tra il valor medio delle opinioni in quello specifico t e nell'istante precedente $t-1$ risulta essere inferiore ad una tolleranza *toll* fissata a priori, sufficientemente piccola.

La scelta di questo criterio si giustifica così: durante l'intervallo in cui le opinioni si muovono verso uno stato di convergenza, è presente una prima fase durante la quale i due gruppi si avvicinano abbastanza rapidamente e, quindi, anche i valori medi delle opinioni variano in maniera significativa ad ogni passo. Una volta che i due gruppi di utenti si trovano abbastanza vicini, inizia la seconda fase in cui la situazione inizia a stabilizzarsi e, di conseguenza, il cambiamento del valor medio delle opinioni tra due istanti successivi diventa sempre più piccolo. Dato che più tempo passa, maggiore è la spesa per l'azienda, si è deciso di far tornare il sistema alla situazione originaria nel momento in cui la variazione dei valori medi non è più così significativa. Perciò, anche se si facesse continuare ulteriormente il processo di convergenza, la posizione degli individui non subirebbe una modifica così importante, al costo di una spesa decisamente più alta.

Analisi della stabilità

Per completare l'esempio, si vogliono ora studiare i due criteri sulla stabilità della media e della covarianza. Intuitivamente, ci si aspetta che questo caso ripercorra in maniera simile la strada affrontata nello studio dell'esempio [6.1.1]. Allora, come prima cosa, si parte dalla funzione $g_i(t)$. Ancora una volta è necessario calcolare gli autovalori minimi relativi alle matrici $\Xi_k(p_i)$ e Ψ_k , per ogni valore k . Essendo la struttura del problema sempre la medesima utilizzata nei casi precedenti, è possibile trovare analiticamente tutti gli autovalori in modo esplicito.

Inoltre, è fondamentale tenere a mente la nota di pagina [71], la quale evidenzia che, in generale, non è detto che l'autovalore con il valore minimo sia effettivamente attivo e quindi da considerare. Infatti, se si riscrivono i valori numerici degli autovalori della matrice Ψ_k per gli intervalli associati a dei k pari, ovvero quando il parametro $\zeta_2 = -0.2$ e il sistema si muove verso una situazione stabile, si trovano:

$$\lambda_{\Psi_k} = \begin{cases} \alpha + \bar{\alpha} \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{2} = 0.6040 \\ \alpha = 0.01 \\ \alpha - \bar{\alpha} \zeta_2 = 0.2080. \end{cases} \quad (6.11)$$

Quindi, per gli intervalli k pari, l'autovalore minimo della matrice Ψ_k sembrerebbe essere $\lambda_{\Psi, \min}^{(k)} = \alpha = 0.01$. In realtà, il vero autovalore minimo che ha impatto sulla stabilità non è questo. Si prova ora a dimostrare quest'ultima affermazione.

L'idea alla base della dimostrazione è quella di far vedere che l'impatto dell'autovalore $\lambda_{\Psi_k} = \alpha$ sulla stabilità è nullo, poiché l'esponenziale in cui compare questo valore è moltiplicato da un coefficiente uguale a zero. Ciò vale per ogni intervallo k , anche se l'effetto che ne deriva ha importanza sulle condizioni di stabilità soltanto negli intervalli k pari, in cui α è l'autovalore minimo.

Come primo passo, si rinomina $\beta = \alpha + \frac{\bar{\alpha}(\zeta_1 - \zeta_2)}{2}$. Riprendendo i ragionamenti visti nella sottosezione [6.1.1], si ricorda che la matrice Ψ della quale si vogliono calcolare gli autovalori ha la forma seguente (per semplificare la notazione si utilizza il simbolo Ψ per indicare la matrice Ψ_k , ovvero si tralascia il pedice k):

$$\Psi = \tilde{\Psi} \otimes \mathbf{C}, \quad (6.12)$$

dove la matrice $\tilde{\Psi}$ è la matrice corrispondente nel caso $N = 1$ ed è data da:

$$\tilde{\Psi} = \beta \mathbf{I}_M - \frac{\bar{\alpha}}{M} \left(\begin{bmatrix} \zeta_1 & -\zeta_2 \\ -\zeta_2 & \zeta_1 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{1}_{M/2} \right). \quad (6.13)$$

Ora, utilizzando ancora una volta il teorema spettrale si decompone la matrice Ψ :

$$\begin{aligned} \Psi &= \Theta_{\Psi} \Lambda_{\Psi} \Theta_{\Psi}^{-1} \\ &= (\Theta_{\tilde{\Psi}} \otimes \Theta_{\mathbf{C}}) (\Lambda_{\tilde{\Psi}} \otimes \Lambda_{\mathbf{C}}) (\Theta_{\tilde{\Psi}}^T \otimes \Theta_{\mathbf{C}}^{-1}), \end{aligned} \quad (6.14)$$

notando che la matrice $\Theta_{\tilde{\Psi}}^T \equiv \Theta_{\tilde{\Psi}}^{-1}$.

Ripartendo dall'espressione (3.39), si ricorda che gli autovalori di $\tilde{\Psi}$ in generale sono i seguenti:

$$\lambda_{\tilde{\Psi}} = \begin{cases} \beta, & \text{molteplicità } M - 2 \\ \alpha, & \text{molteplicità } 1 \\ \alpha - \bar{\alpha}\zeta_2, & \text{molteplicità } 1. \end{cases} \quad (6.15)$$

A questo punto, si può ricavare l'autovettore corrispondente a $\lambda_{\tilde{\Psi}} = \alpha$. In particolare, si ricava:

$$\mathbf{w}_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^M, \quad (6.16)$$

ovvero esso è semplicemente un vettore con ogni entrata uguale a 1 (o, più in generale, uguale ad un generico valore a che viene scelto a seconda della normalizzazione).

Per semplicità, si ipotizza di iniziare questa analisi nel primo intervallo temporale. Si impone, allora, che i seguenti vettori siano definiti così:

$$\bar{\mathbf{x}}_0 = \underbrace{[1, \dots, 1]}_{M/2}, \underbrace{[-1, \dots, -1]}_{M/2}^T \otimes \mathbf{x}_{0,1}, \quad (6.17)$$

$$\bar{\mathbf{u}} = \underbrace{[1, \dots, 1]_{M/2}}_{M/2}, \underbrace{[-1, \dots, -1]_{M/2}}_{M/2}]^T \otimes \mathbf{u}_1. \quad (6.18)$$

In particolare, nell'espressione (6.17) compare $\mathbf{x}_{0,1}$. Esso è il vettore che racchiude il valor medio delle opinioni iniziali degli utenti con personalità p_1 , che si è ipotizzato che appartenessero alla prima delle due comunità. Nel definire la variabile $\bar{\mathbf{x}}_0$, tale vettore viene moltiplicato secondo Kronecker per un vettore di dimensione M , formato da una prima parte di $M/2$ elementi tutti uguali a 1 e da una seconda parte di $M/2$ elementi tutti uguali a -1 . Una scelta di questo tipo viene fatta per rispecchiare la struttura del problema specifico che si sta considerando, nel quale la posizione di tutte le personalità che appartengono alla prima comunità è esattamente simmetrica all'opinione di tutte le personalità appartenenti alla seconda comunità.

In modo analogo si scrive anche l'equazione (6.18). L'unica differenza è data dalla presenza di \mathbf{u}_1 , cioè di un vettore di dimensione N che contiene il pregiudizio sugli N argomenti da parte degli utenti di personalità p_1 .

Per concludere la dimostrazione, si cerca di vedere l'effetto di tutte le variabili appena definite su $\gamma(t)$. Ripartendo dall'espressione (3.30), si ottiene:

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \frac{1}{M} \mathbf{Z} \left(e^{-\Psi t} \bar{\mathbf{x}}_0 + \alpha \Psi^{-1} (\mathbf{I}_{MN} - e^{-\Psi t}) (\mathbf{I}_M \otimes \mathbf{C}) \bar{\mathbf{u}} \right) \\ &= \frac{1}{M} \mathbf{Z} \left(\Theta_{\Psi} e^{-\Lambda \Psi t} \Theta_{\Psi}^{-1} \bar{\mathbf{x}}_0 + \alpha \Theta_{\Psi} \Lambda_{\Psi}^{-1} (\mathbf{I}_{MN} - e^{-\Lambda \Psi t}) \Theta_{\Psi}^{-1} (\mathbf{I}_M \otimes \mathbf{C}) \bar{\mathbf{u}} \right) \\ &= \frac{1}{M} \mathbf{Z} \Theta_{\Psi} \left(e^{-\Lambda \Psi t} (\Theta_{\Psi}^T \otimes \Theta_{\mathbf{C}}^{-1}) ([1, \dots, 1, -1, \dots, -1]^T \otimes \mathbf{x}_{0,1}) + \right. \\ &\quad \left. + \alpha \Lambda_{\Psi}^{-1} (\mathbf{I}_{MN} - e^{-\Lambda \Psi t}) (\Theta_{\Psi}^T \otimes \Theta_{\mathbf{C}}^{-1}) (\mathbf{I}_M \otimes \mathbf{C}) ([1, \dots, 1, -1, \dots, -1]^T \otimes \mathbf{u}_1) \right) \\ &\stackrel{(\star)}{=} \frac{1}{M} \mathbf{Z} \Theta_{\Psi} \left(e^{-\Lambda \Psi t} (\Theta_{\Psi}^T [1, \dots, 1, -1, \dots, -1]^T) \otimes (\Theta_{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{x}_{0,1}) + \right. \\ &\quad \left. + \alpha \Lambda_{\Psi}^{-1} (\mathbf{I}_{MN} - e^{-\Lambda \Psi t}) \underbrace{(\Theta_{\Psi}^T [1, \dots, 1, -1, \dots, -1]^T)}_{\mathbf{v}} \otimes (\Theta_{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{u}_1) \right). \end{aligned} \quad (6.19)$$

Per spiegare al meglio come si arriva all'ultima riga della (6.19), è necessario sottolineare che cosa succede nel passaggio (★). Qui è stata applicata la seguente proprietà del prodotto di Kronecker:

Proprietà: siano $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ e \mathbf{D} quattro matrici generiche, le cui dimensioni sono tali da permettere il prodotto di matrici tra \mathbf{A} e \mathbf{C} e analogamente tra \mathbf{B} e \mathbf{D} . Allora esiste anche $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \otimes \mathbf{D})$ e vale:

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \otimes (\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}).$$

Ora, si osserva il vettore \mathbf{v} . In particolare bisogna controllare la componente del vettore che corrisponde all'autovalore α , che si può immaginare essere la componente j . Tale

componente è data dalla moltiplicazione della j -esima riga di Θ_{Ψ}^T (ovvero la j -esima colonna della matrice Θ_{Ψ}) per il vettore colonna formato da metà elementi uguali a 1 e metà elementi uguali a -1 . Però, si nota anche che la matrice Θ_{Ψ}^T , per definizione, contiene sulle righe gli autovettori corrispondenti ad ogni autovalore di Ψ . Quindi, sulla j -esima riga si troverà l'autovettore corrispondente all'autovalore j che, per ipotesi, è α . Tale autovettore, come visto precedentemente in (6.16), è formato da tutti elementi uguali. Perciò il prodotto tra i due vettori, cioè la componente del vettore $\underline{\mathbf{v}}$ in analisi, sarà sicuramente uguale a 0.

Per concludere, la componente di $\underline{\mathbf{v}}$ sull'autospazio dell'autovalore α è zero. Per questo motivo l'autovalore α non va tenuto in considerazione nella condizione di stabilità.

Tutti questi ragionamenti continuano ad essere validi anche se si prosegue nel tempo e si passa ad intervalli temporali successivi al primo. Infatti, è sempre possibile definire i vettori $\bar{\mathbf{x}}_{k-1}$ e $\bar{\mathbf{u}}$ come fatto in (6.17) e (6.18) rispettivamente, per qualsiasi valore di k . In particolare, la (6.18) risulta essere sempre uguale indipendentemente dall'intervallo in cui si trova, dato che il pregiudizio degli utenti viene fissato all'inizio e poi non si modifica più. Invece nella (6.17) ciò che cambia è soltanto il vettore $\mathbf{x}_{0,1}$. Esso, comunque, continua a rappresentare il vettore che contiene il valor medio delle opinioni degli utenti con personalità p_1 , all'inizio dell'intervallo k . Quindi, si modificano soltanto i valori degli elementi di questo vettore, che vengono aggiornati ogni volta che si cambia periodo temporale. Tutto il resto rimane invariato, perciò l'analisi mostrata sopra si può estendere ad ogni intervallo k .

Conclusa questa osservazione, l'analisi delle condizioni di stabilità prosegue in maniera molto simile a come già presentato nel primo esempio di sezione [6.1.1]. La differenza tra i due casi è dovuta principalmente al fatto che nell'esempio di questa sezione la lunghezza degli intervalli di tempo non è stata fissata a priori e, in generale, potrebbe variare ogni volta. Infatti, essa dipende da quanto tempo impiega il sistema a soddisfare le due condizioni di ottimalità, le quali, a loro volta, dipendono dai parametri q e $toll$.

Nel caso particolare trattato in questa sezione, i parametri q e $toll$ sono fissati e rimangono sempre costanti indipendentemente dall'intervallo k in cui vengono usati. A causa di ciò, quando il sistema, superata una prima fase, inizia ad effettuare dei cicli molto simili tra loro, si stabilizza anche la lunghezza degli intervalli, che diventa:

- $\delta_k \simeq 20$, quando k è dispari;
- $\delta_k \simeq 31$, quando k è pari.

A questo punto, si studia per prima la condizione di stabilità sulla media, partendo quindi dalla funzione $g_i(t)$. Ancora una volta sono necessari gli autovalori minimi attivi sia della matrice $\Xi(p_i)$, sia della matrice Ψ , che vengono riportati nella tabella seguente:

	k dispari	k pari
$\lambda_{\Xi, min}^{(k)}$	0.44065	0.6040
$\lambda_{\Psi, min}^{(k)}$	-0.0890	0.2080

Tabella 6.5: Esempio 4, autovalori minimi per ogni intervallo corrispondente a valori di k pari e valori di k dispari.

Note tutte le informazioni necessarie, si può passare allo studio di $g_i(t)$:

$$g_i(t) = \lambda_{\Psi, \min}^{(K)}(t - t_K) + \sum_{k'=1}^{K-1} \left(-0.089 \cdot \delta_{2k'-1} + 0.208 \cdot \delta_{2k'} \right). \quad (6.20)$$

Sostituendo i valori relativi alla lunghezza degli intervalli mostrati sopra e immaginando ancora una volta di accoppiare ogni volta due intervalli consecutivi (andando a formare un ciclo), si ottiene:

$$\lambda_{\min}^{(2k'-1)} \cdot \delta_{2k'-1} + \lambda_{\min}^{(2k')} \cdot \delta_{2k'} = -0.089 \cdot 20 + 0.208 \cdot 31 = 4.668.$$

Si vede chiaramente che questo contributo è strettamente positivo e, inoltre, non è nemmeno troppo piccolo. Perciò, se anche dovessero esserci alcuni intervalli in cui la propria lunghezza varia, diventando più grande per gli intervalli dispari o più piccola per gli intervalli pari, il contributo, pur riducendosi, rimarrebbe comunque positivo. Di conseguenza la funzione $g_i(t)$ risulta essere limitata inferiormente e, sfruttando nuovamente l'osservazione, anche $f_i(t)$ è limitata dal basso. Si può concludere allora che l'intervento dell'azienda alimentare sul sistema è utile per permettere alla densità opinioni di mantenere *media e covarianza stabili*.

Osservazione: l'analisi dettagliata effettuata su questo esempio permette di notare una dipendenza, che si può definire del *second'ordine*, dell'evoluzione delle opinioni rispetto alla *condizione iniziale* e, soprattutto, al *pregiudizio*. Infatti, sono queste variabili che possono rendere alcuni autovalori minimi non attivi. Però, tale dipendenza emerge soltanto in alcuni casi particolari, come questo appena presentato in cui le opinioni dei due gruppi si trovano sempre in posizioni simmetriche rispetto all'origine.

Grafici della simulazione

Anche in questo caso, le figure 6.4 mostrano l'evoluzione nel tempo delle opinioni, su un periodo totale che va da $t_0 = 0$ a $T = 154$. Si può ipotizzare che l'unità di misura di t in questo esempio sia il *giorno*, per adattarsi al meglio al caso reale, spiegato nella sezione precedente, a cui l'esempio si associa.

Il tempo totale è poi stato suddiviso in sei intervalli distinti:

1. $[t_0 = 0, t_1 = 23]$,
2. $(t_1 = 23, t_2 = 52]$,
3. $(t_2 = 52, t_3 = 72]$,
4. $(t_3 = 72, t_4 = 103]$,
5. $(t_4 = 103, t_5 = 123]$,
6. $(t_5 = 123, t_6 = 154]$.

La scelta degli estremi di ogni intervallo è stata effettuata per mezzo di due funzioni Matlab, costruite ad hoc per questo esempio, che permettono di trovare i valori t_i rispettando i due criteri di ottimizzazione introdotti in precedenza. In particolare, sono stati scelti come parametri per i criteri di ottimizzazione $q = 1.9$ e $toll = 10^{-3}$. Tali funzioni si possono trovare nelle Appendici di questo lavoro, insieme agli script utilizzati per ottenere tutti gli esempi precedenti, (A, B, C).

Inoltre, è importante ricordare che tutte le variabili del sistema vengono fissate e rimangono costanti fino alla fine dell'intervallo stesso. In particolare, tra due periodi consecutivi l'unica variabile che si modifica e cambia valore è ζ_2 :

- $\zeta_2 = 0.1$ per tutti gli intervalli k , con k *dispari*;
- $\zeta_2 = -0.2$ per tutti gli intervalli k , con k *pari*.

Ciò che si può facilmente notare guardando tutte le immagini della figura 6.4 è la formazione di un andamento ciclico oscillante, in maniera simile a ciò che avviene nel caso [6.1.1]. Infatti, la posizione dei due gruppi al termine di ogni ciclo, composto da due intervalli consecutivi, è grosso modo la stessa. È quindi ragionevole aspettarsi che, se si prosegue l'analisi aggiungendo ulteriori periodi temporali, il comportamento sarà sempre simile.

L'unica eccezione è fornita dalla posizione delle opinioni al tempo $t = 1$. Infatti, in questo caso si vede che tutti gli individui hanno essenzialmente lo stesso parere sui due argomenti e non si distinguono in due gruppi. Questo comportamento, però, è sempre dovuto alle ipotesi iniziali della simulazione, che *posizionano tutti le opinioni degli individui nell'origine*, indipendentemente dal loro pregiudizio e dalla loro personalità. Allora, una situazione di questo tipo non è più raggiunta andando avanti nel tempo, poiché anche se si allungassero notevolmente gli intervalli in cui le opinioni si muovono verso convergenza, il pregiudizio di ogni agente non permetterebbe di raggiungere nuovamente l'origine. Bisogna comunque osservare che la scelta del parametro $\zeta_2 = -0.2$ per gli intervalli pari porta il sistema, superato un tempo transitorio, verso una situazione di stabilità in cui i due gruppi iniziano a fondersi tra di loro e non sono più totalmente separati, nonostante siano ben visibili due picchi.

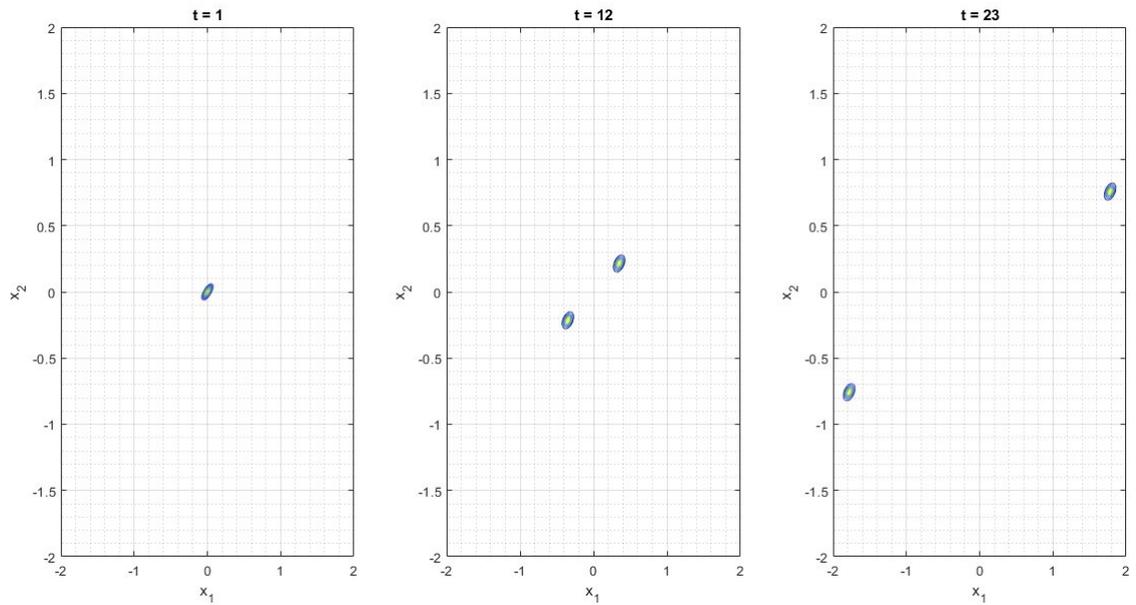
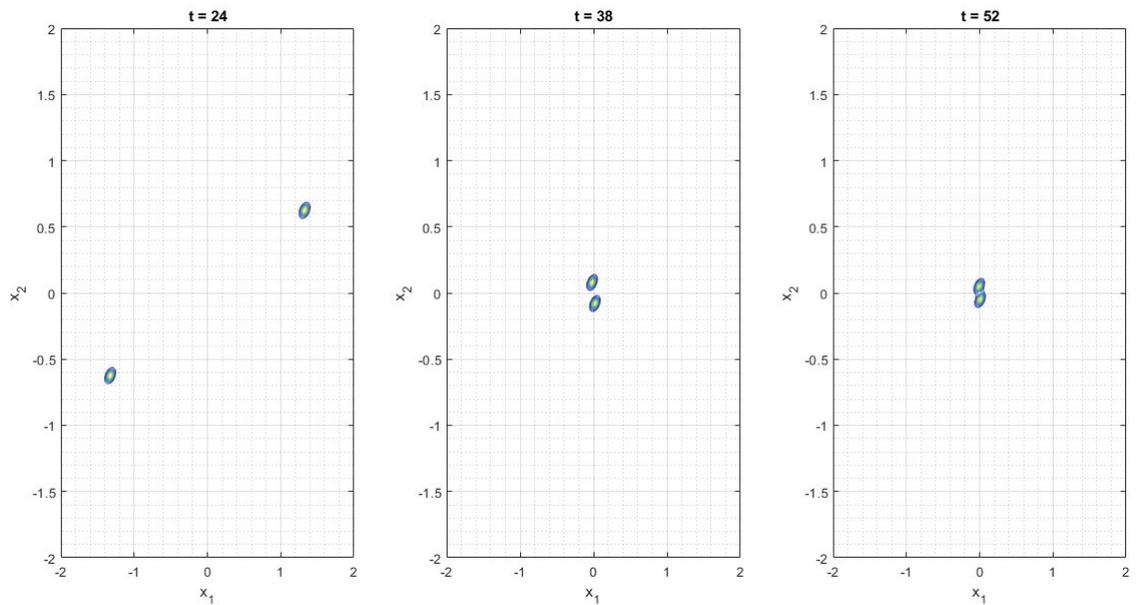
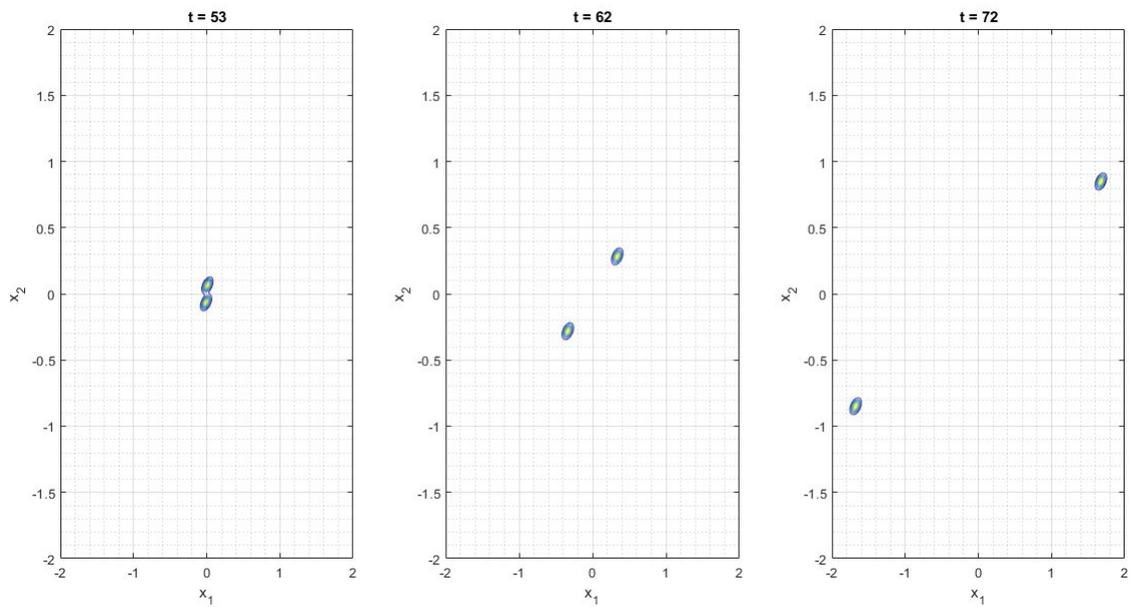
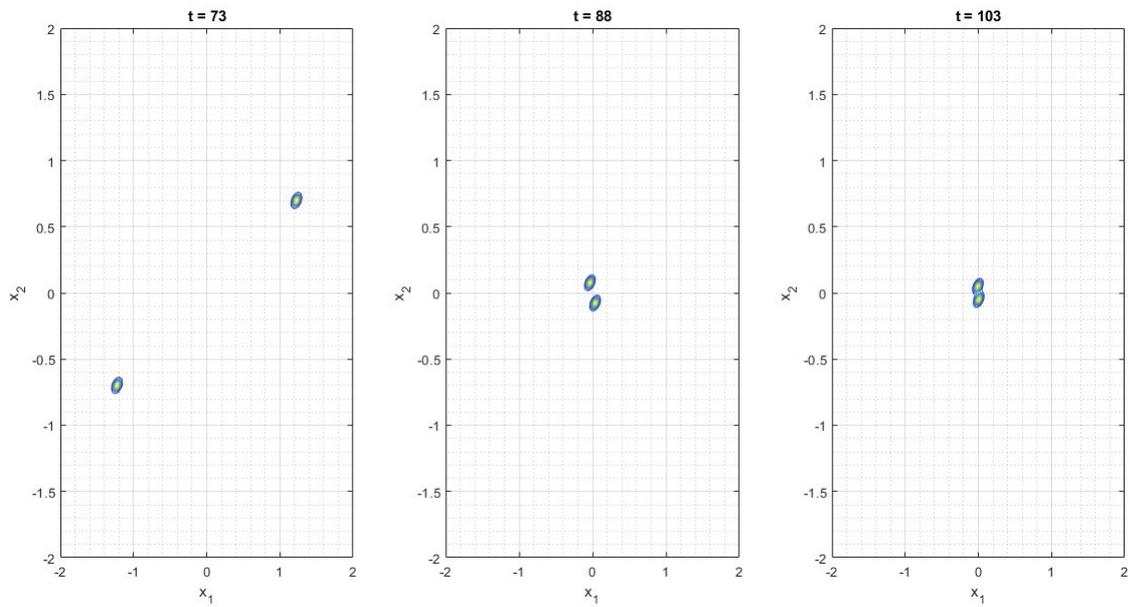
(a) Primo intervallo $[t_0 = 0, t_1 = 23]$, $\zeta_2 = 0.1$ (b) Secondo intervallo $(t_1 = 23, t_2 = 52]$, $\zeta_2 = -0.2$

Figura 6.4: *Andamento temporale delle opinioni, esempio 4.* Il tempo totale è diviso in sei intervalli distinti, durante i quali la matrice \underline{Z} è fissa e dipende dal valore assunto dal parametro ζ_2 . In questa prima pagina sono presenti le simulazioni relative ai primi due intervalli. Per ciascun intervallo sono mostrate le situazioni iniziali, intermedie e finali.

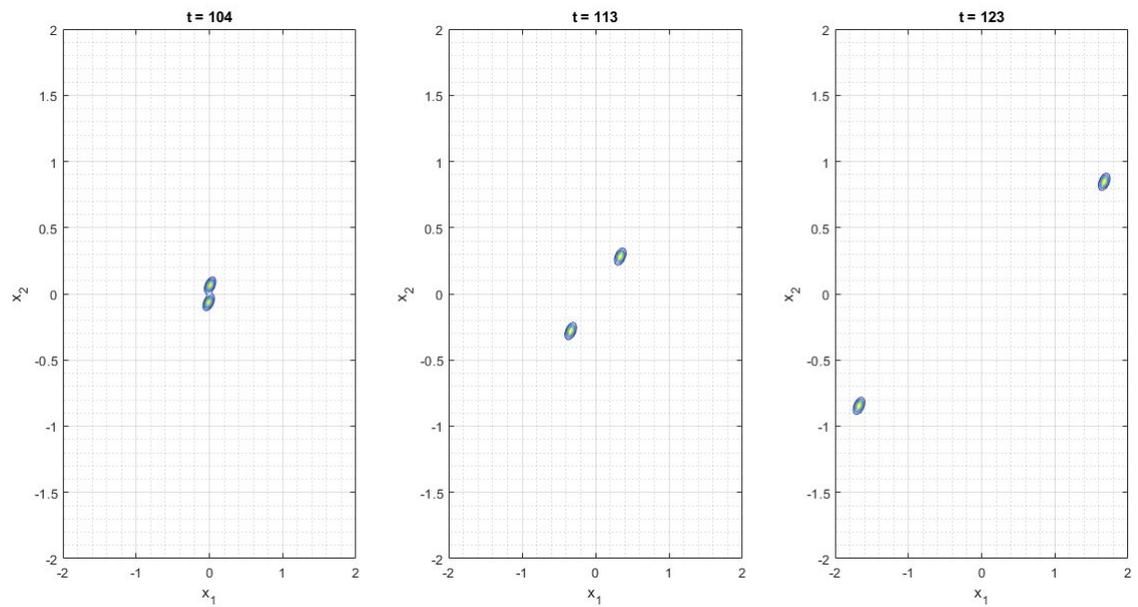


(c) Terzo intervallo ($t_2 = 52, t_3 = 72$], $\zeta_2 = 0.1$

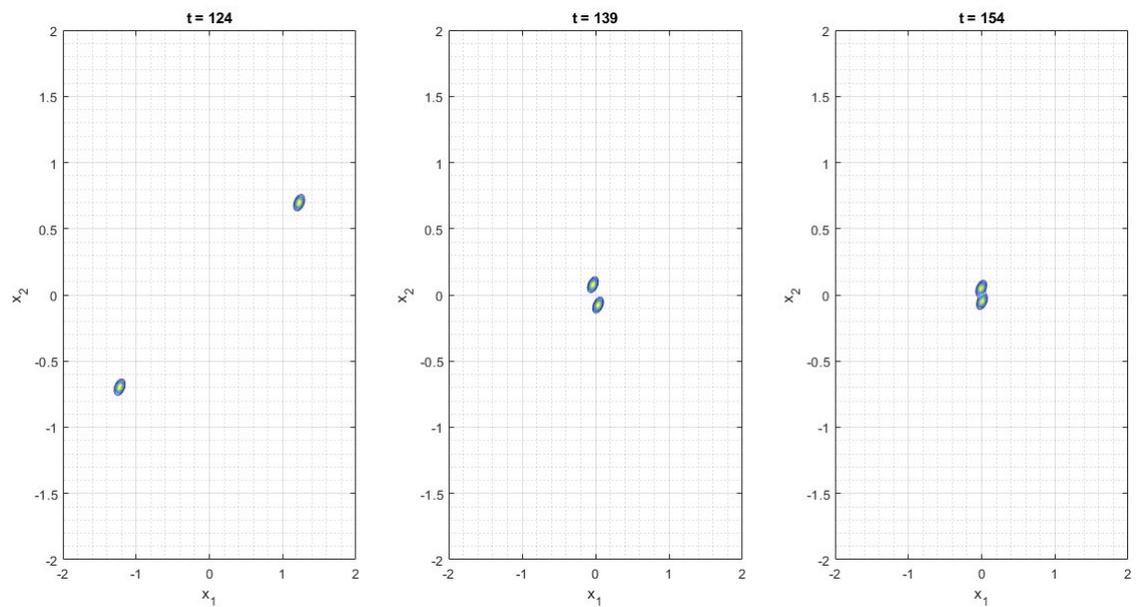


(d) Quarto intervallo ($t_3 = 72, t_4 = 103$], $\zeta_2 = -0.2$

Figura 6.4: In questa seconda pagina sono mostrati gli andamenti delle opinioni relativi al terzo e al quarto intervallo.



(e) Quinto intervallo ($t_4 = 103, t_5 = 123$], $\zeta_2 = 0.1$



(f) Sesto intervallo ($t_5 = 123, t_6 = 154$], $\zeta_2 = -0.2$

Figura 6.4: Infine, in quest'ultima pagina sono mostrati gli andamenti delle opinioni relativi al quinto e al sesto intervallo.

6.2 Matrice \mathbf{Z} che varia continuamente nel tempo

In questa nuova sezione, invece, vengono presentati alcuni esempi in cui la matrice \mathbf{Z} varia in maniera continua nel tempo. In ogni caso, anche qui si lavora sul parametro ζ_2 : è proprio tale termine a diventare funzione di t , permettendo così alla matrice della forza delle interazioni di assumere a sua volta la dipendenza temporale.

Anche per questo nuovo scenario sono mostrate delle simulazioni effettuate tramite Matlab. Per tale motivo, il tempo teoricamente continuo è stato necessariamente discretizzato, al fine di ottenere dei risultati per mezzo di questo software. In sostanza, la caratteristica della dipendenza diretta dal tempo della matrice \mathbf{Z} , viene ricavata come *caso limite* degli esempi della sezione [6.1], nei quali la matrice \mathbf{Z} varia in intervalli di tempo. Infatti l'idea è quella di restringere sempre di più gli intervalli di tempo in cui la matrice delle interazioni è costante. Sommando tanti intervalli piccoli distinti, che si possono rinominare con dt , si ottiene un'approssimazione del comportamento a tempo continuo. Tale approssimazione è tanto più precisa quanto più piccolo è il dt scelto, con la miglior approssimazione ottenibile su Matlab fornita dal caso in cui dt corrisponde alla precisione di macchina, ovvero $dt = 2.220446049250313 \cdot 10^{-16}$.

Negli esempi seguenti si scelgono diverse funzioni continue che vengono utilizzate per campionare il valore del parametro ζ_2 . In particolare, i campioni del parametro vengono calcolati in una serie discreta di istanti temporali, scelti partendo da $t_0 = 0$ e muovendosi ogni volta con un passo dt piccolo arbitrario. Il campione discreto di istanti temporali termina ad un nuovo valore arbitrario t_{end} . In definitiva, tramite questo processo si mostra l'approssimazione del comportamento continuo nel periodo $[t_0, t_{end}]$.

Inoltre, è bene specificare che si mantiene sempre la stessa struttura di base per il problema, utilizzata anche negli esempi della sezione [6.1]. L'unica differenza è che si utilizza $M = 4$ anziché $M = 50$, che permette di velocizzare notevolmente la simulazione. Comunque, la scelta di questo nuovo valore di M non comporta modifiche nei risultati nel lungo periodo, a causa della forma del problema. Infatti, per come è stata definita la struttura di base, gli utenti sono divisi in due comunità, dove tutti coloro che possiedono un valore di personalità $p_i < 0$ appartengono ad un gruppo, mentre tutti gli altri costituiscono il secondo gruppo, indipendentemente da quanti sono i valori discreti di personalità.

6.2.1 Esempio 5 - funzione periodica

In questo primo esempio relativo al caso continuo, si utilizza una funzione del tempo periodica oscillante per ottenere i valori del parametro ζ_2 . In particolare, essa è così definita:

$$\zeta_2(t) = 0.5 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{5}t\right). \quad (6.21)$$

Si tratta di una funzione periodica, con periodo $T = 5$ e ampiezza $A = 0.5$. Quindi i valori di ζ_2 variano all'interno dell'intervallo $[-0.5, 0.5]$. Perciò, si alternano valori che spingono l'evoluzione verso la convergenza, a valori che invece portano la dinamica a divergere. Quindi, intuitivamente, ci si può aspettare un comportamento oscillante anche da parte delle densità di opinione, in cui si alterneranno fasi in cui i due gruppi di utenti

si avvicinano muovendosi verso una posizione di equilibrio, a fasi in cui le due comunità sono in disaccordo e di conseguenza le loro posizioni si allontanano.

Quest'ultima intuizione si può verificare tramite le simulazioni. Per effettuarle si è scelto un valore di $dt = 0.05$: si discretizza il periodo $[t_0 = 0, t_{end} = 15]$ utilizzando proprio dt come passo. Per ogni istante del campione temporale così ottenuto, si calcola il valore di ζ_2 corrispondente e si valuta l'evoluzione delle opinioni durante l'intervallo successivo (che ha sempre lunghezza $dt = 0.05$), mantenendo fisso il valore del parametro appena calcolato. Oltre a voler visualizzare una simulazione della dinamica delle opinioni, è anche interessante ricavare i grafici relativi all'evoluzione degli autovalori minimi delle matrici $\Xi(p_i, t)$ e $\Psi(t)$ e, soprattutto, quelli che permettono di visualizzare il comportamento delle funzioni $f_i(t)$ e $g_i(t)$, sulle quali si verifica se le condizioni per la stabilità sono rispettate oppure no.

Ora, si può iniziare ad esaminare le figure, partendo da 6.5. Come si era intuito, il comportamento delle opinioni, dopo una fase transitoria iniziale, assume un andamento ciclico. Osservando tale evoluzione, si deduce che, in generale, questo sistema è stabile. Però, per definire con maggiore formalità la stabilità dell'esempio, si possono guardare le immagini 6.6 e 6.7. Nella prima, sono raffigurati i grafici degli autovalori minimi delle matrici $\Xi(p_i, t)$ e $\Psi(t)$. Da questa, si possono osservare due aspetti particolarmente interessanti:

- 1) il grafico della funzione $\lambda_{min, \Psi}$ è sempre strettamente minore rispetto al grafico della funzione $\lambda_{min, \Xi}$.
- 2) Entrambe le funzioni seguono un andamento sinusoidale, che è lo stesso della funzione $\zeta_2(t)$ scelta per questo caso (6.21).

Dal punto 1) segue che, nella definizione della funzione $g_i(t)$, a vincere il confronto come autovalore minimo è sempre $\lambda_{min, \Psi}$, $\forall t$. Perciò, tale autovalore determina la forma della funzione $g_i(t)$.

Guardando adesso alla figura 6.7, si può intuire come sarà l'andamento delle funzioni $f_i(t)$ e $g_i(t)$, per $\forall t$, a partire dal grafico che riporta il tempo fino a $T = 15$. Infatti, mantenendo tutti i parametri e le variabili fissate come descritto in precedenza, si può tranquillamente immaginare di allungare ulteriormente lo sviluppo temporale senza che questi due grafici subiscano variazioni significative nella loro forma. Perciò, è facile intuire che sia $f_i(t)$, sia $g_i(t)$ sono funzioni limitate inferiormente. Di conseguenza, media e covarianza sono stabili e si può concludere che questo caso fornisce un esempio di sistema nel caso continuo *stabile*, con un comportamento che oscilla.

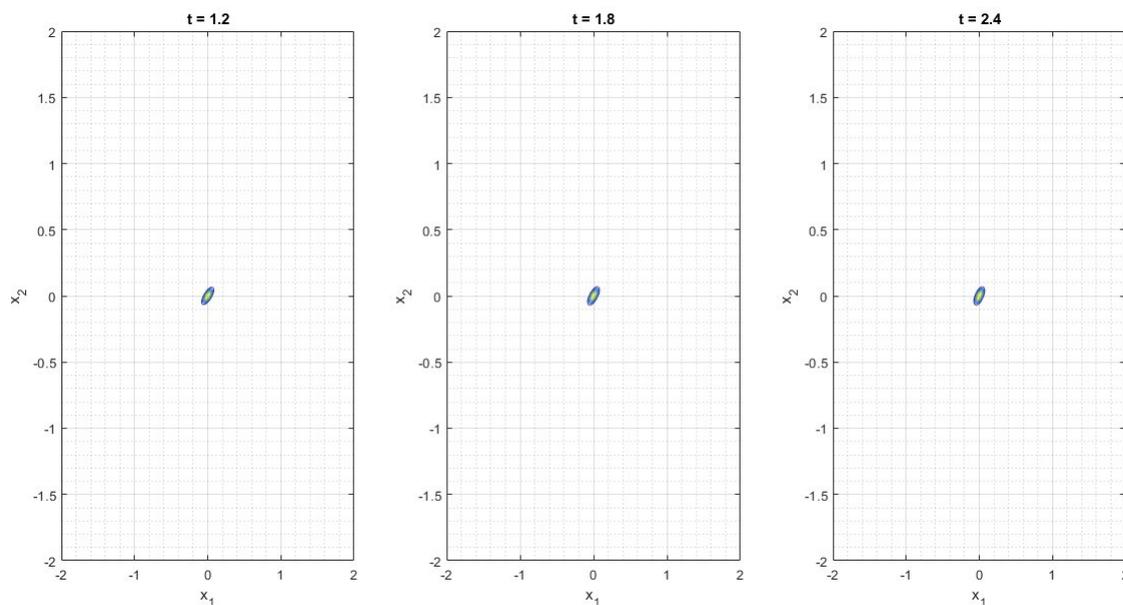
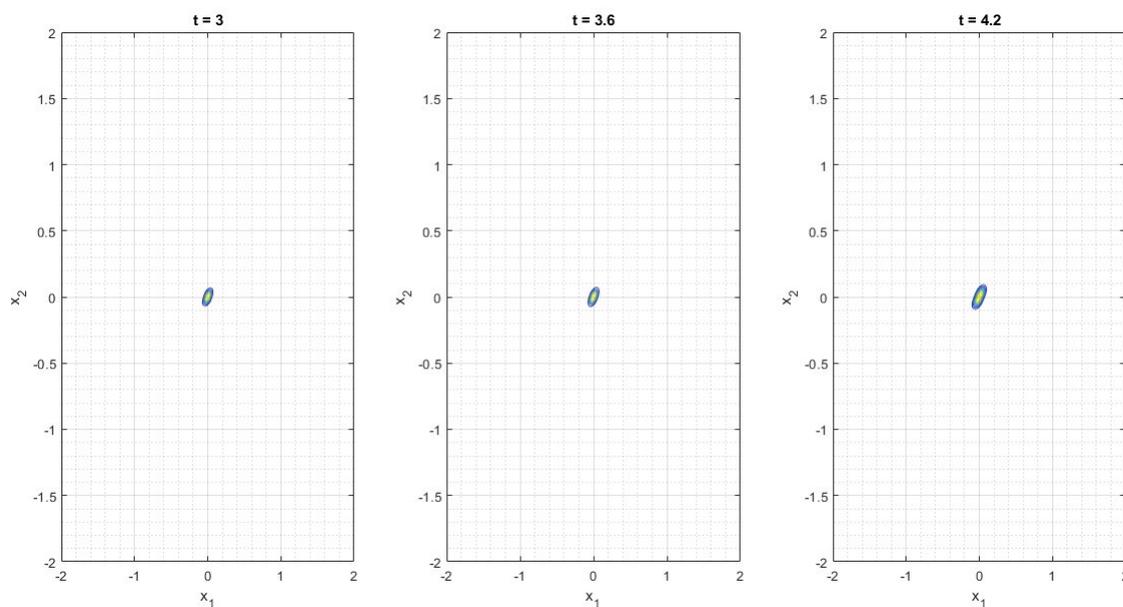
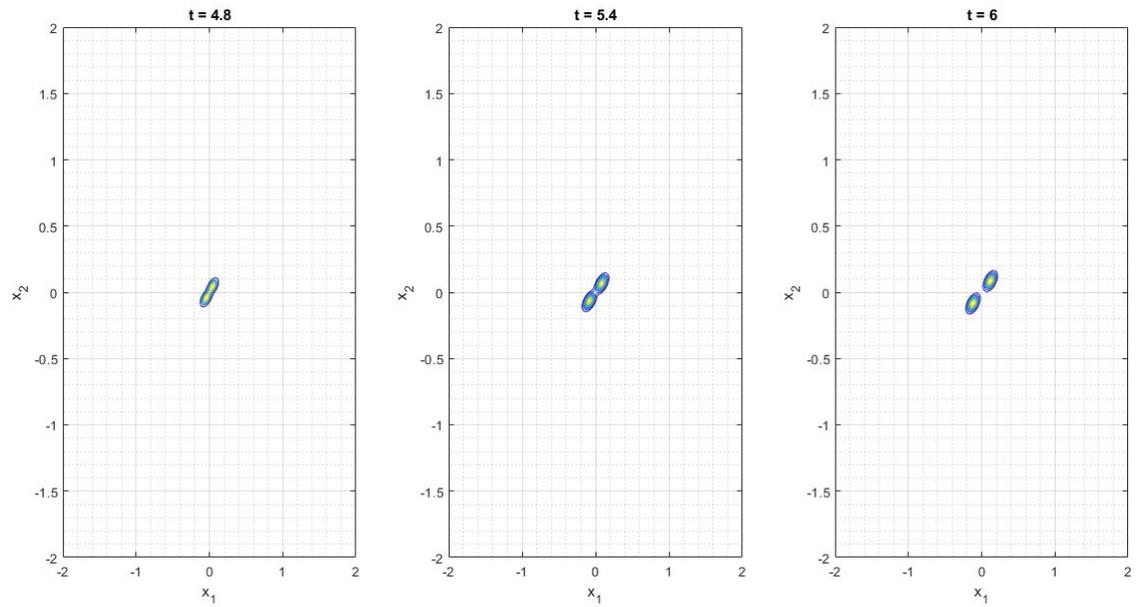
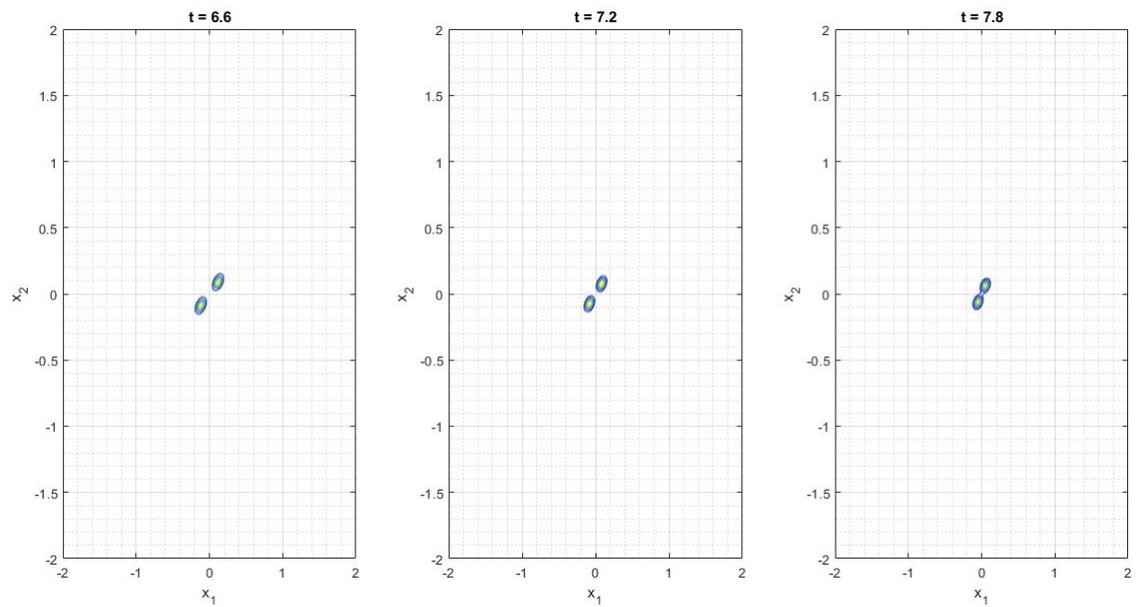
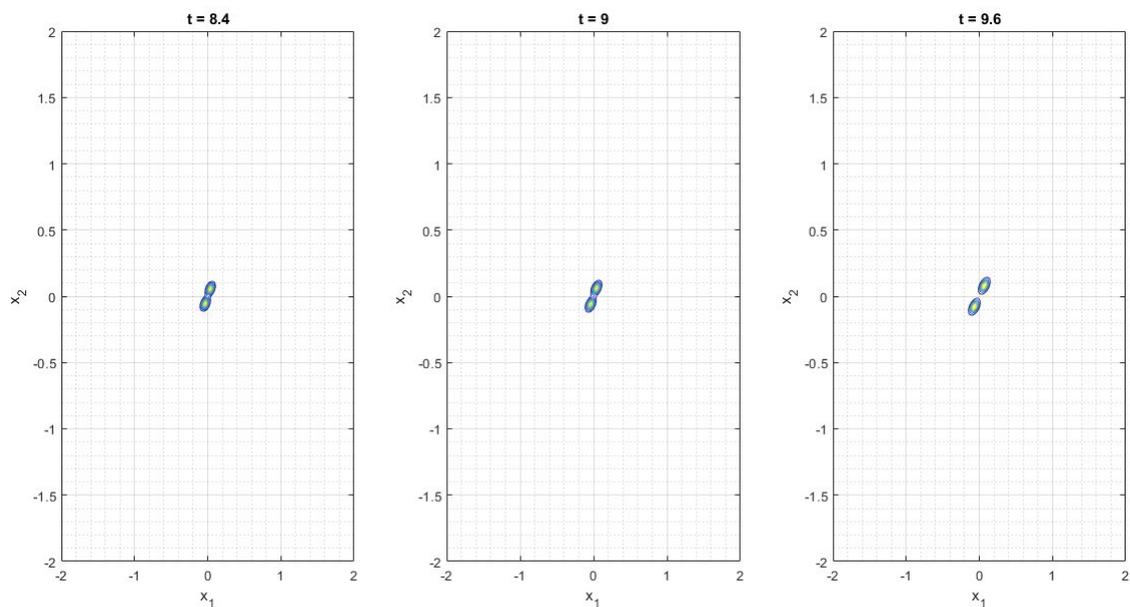
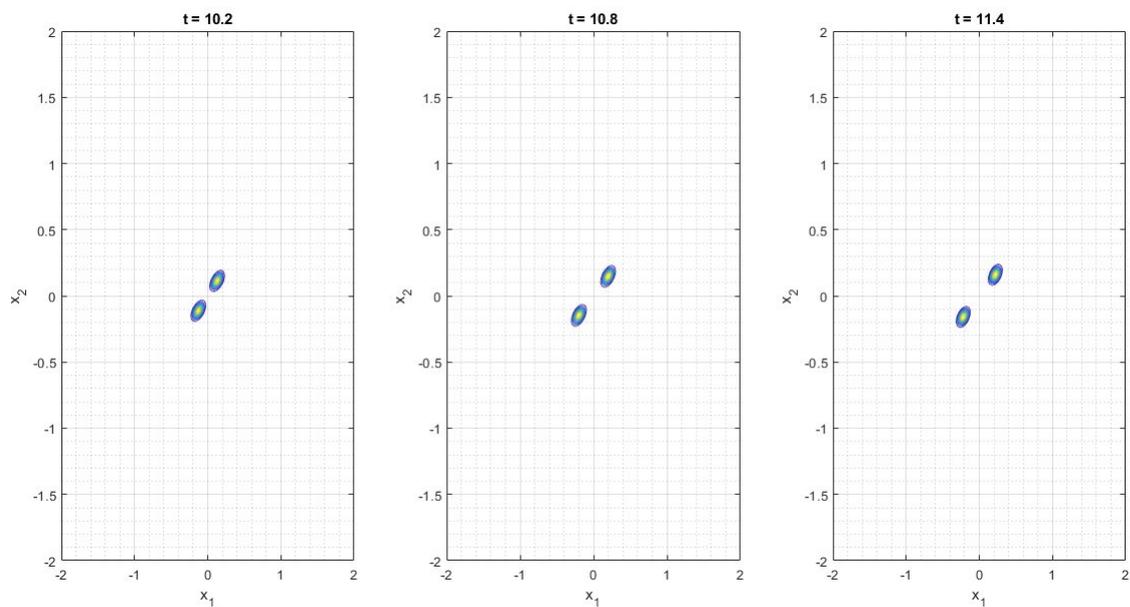
(a) Da sinistra a destra, istanti temporali $t = 1.2, 1.8, 2.4$.(b) Da sinistra a destra, istanti temporali $t = 3, 3.6, 4.2$.

Figura 6.5: *Andamento temporale delle opinioni, esempio 5.* In questo primo esempio del caso continuo, viene mostrata la posizione delle opinioni in alcuni istanti particolari, con l'obiettivo di illustrare l'andamento della dinamica delle opinioni. In particolare, si parte dall'immagine associata a $t = 1.2$ e si presenta un nuovo grafico ogni $\Delta t = 0.6$ fino a raggiungere $t_{end} = 15$.

(c) Da sinistra a destra, istanti temporali $t = 4.8, 5.4, 6$.(d) Da sinistra a destra, istanti temporali $t = 6.6, 7.2, 7.8$.**Figura 6.5:** Continuo grafici andamento temporale dell'esempio 5, seconda pagina.

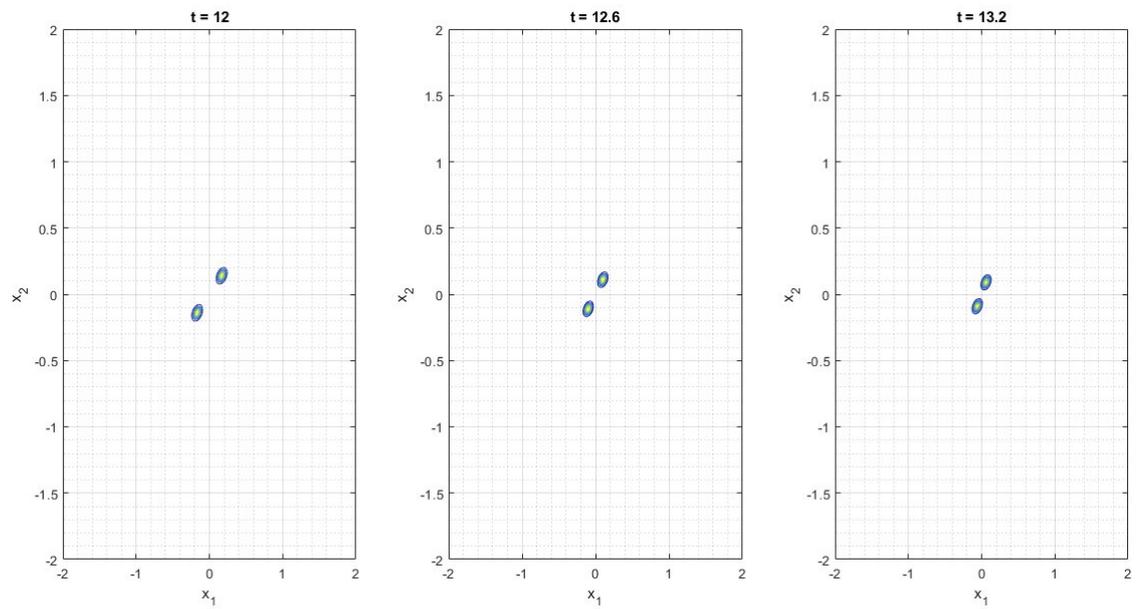
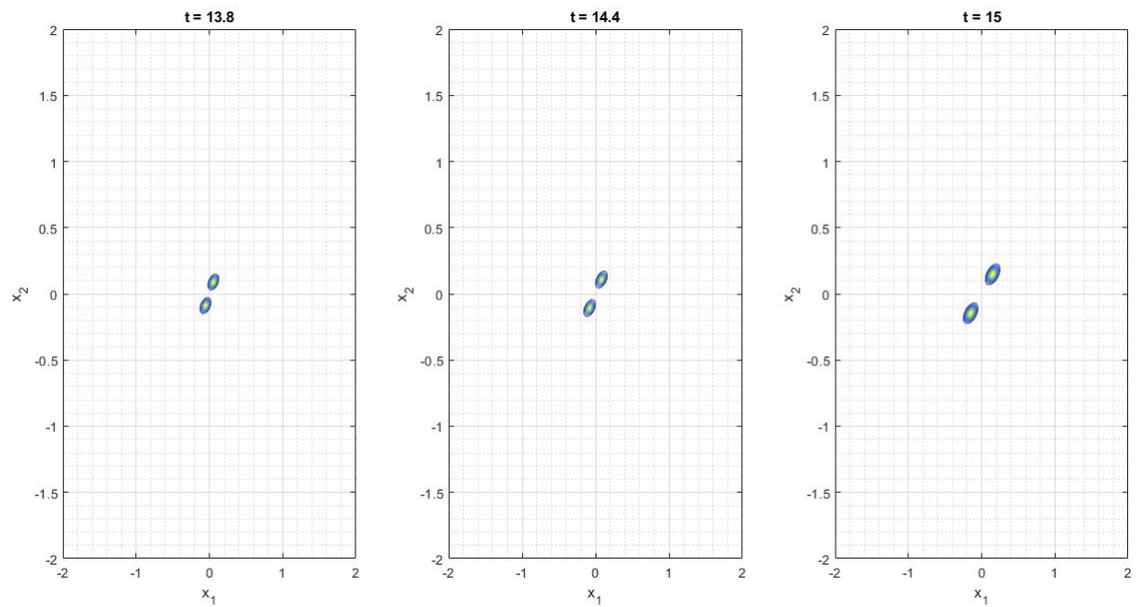


(e) Da sinistra a destra, istanti temporali $t = 8.4, 9, 9.6$.



(f) Da sinistra a destra, istanti temporali $t = 10.2, 10.8, 11.4$.

Figura 6.5: Continuo grafico andamento temporale dell'esempio 5, terza pagina.

(g) Da sinistra a destra, istanti temporali $t = 12, 12.6, 13.2$.(h) Da sinistra a destra, istanti temporali $t = 13.8, 14.4, 15$.**Figura 6.5:** Continuo grafici andamento temporale dell'esempio 5, quarta pagina.

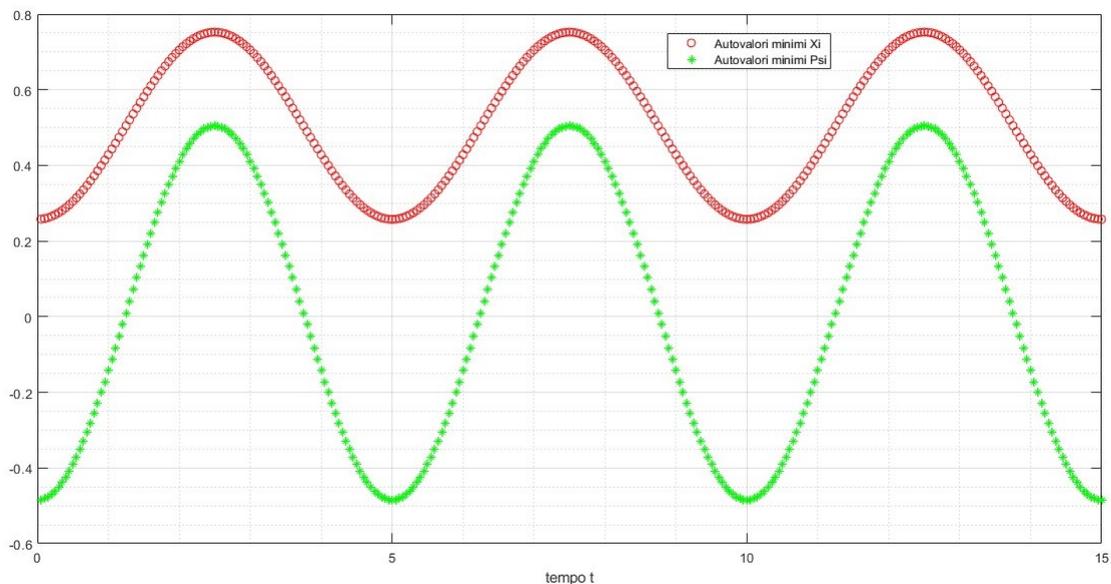


Figura 6.6: Grafico che illustra il comportamento nel tempo degli autovalori minimi delle matrici $\Xi(p_i, t)$ e $\Psi(t)$.

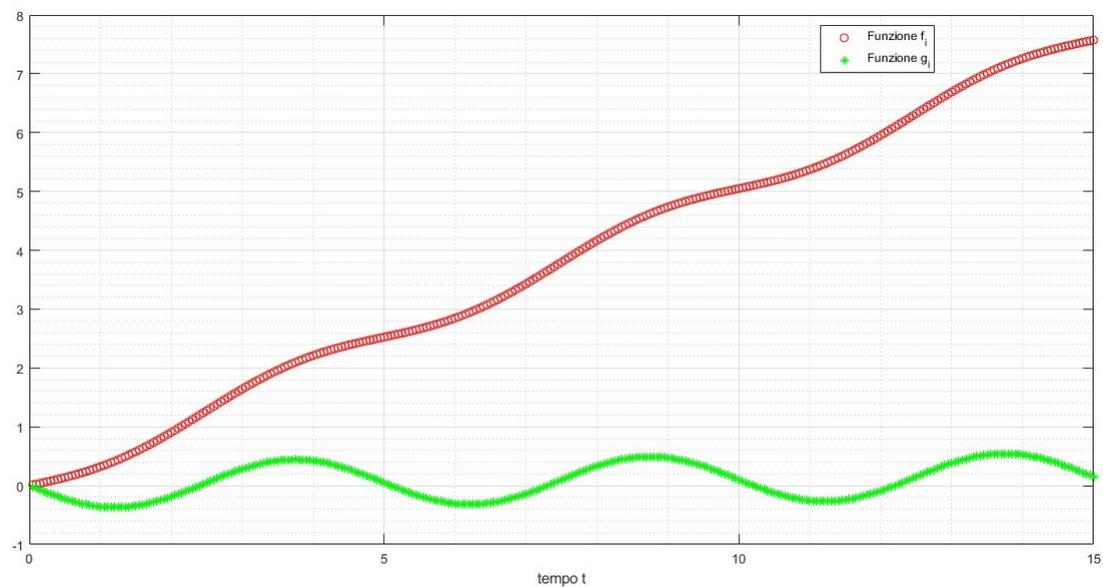


Figura 6.7: Grafico che illustra il comportamento nel tempo delle funzioni $f_i(t)$ e $g_i(t)$, sulle quali si possono verificare le condizioni di stabilità.

6.2.2 Esempio 6 - funzione che porta alla convergenza

In questo secondo esempio per il caso continuo, si mantiene la struttura del problema esattamente identica all'esempio precedente, utilizzando però una nuova funzione per $\zeta_2(t)$:

$$\zeta_2(t) = -0.4 \cdot \arctan(t - 5). \quad (6.22)$$

Questa funzione non è periodica, ma è comunque una funzione limitata sia inferiormente, sia superiormente da due asintoti. In particolare, i due asintoti corrispondono a:

1. $-\left(0.4 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \simeq -0.6283$;
2. $\left(0.4 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \simeq 0.6283$.

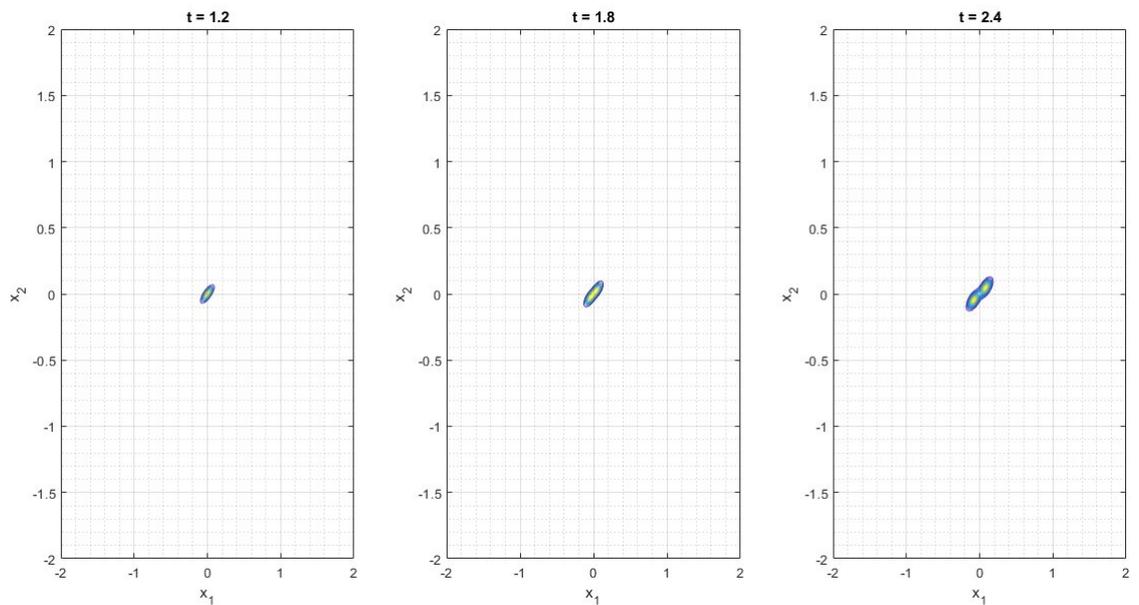
Perciò, ζ_2 assume valori strettamente compresi proprio tra questi due numeri. Inoltre, la funzione arcotangente è traslata verso destra e attraversa l'asse, cambiando segno, all'istante $t = 5$. Essendo questa funzione decrescente su tutto il suo dominio e guardando il grafico soltanto per i tempi positivi, che sono quelli rilevanti per lo studio, si nota che nell'intervallo $[0, 5)$ il parametro ζ_2 assume soltanto valori positivi; viceversa, superato l'istante $t = 5$ i valori di ζ_2 saranno sempre negativi.

A causa della forma della funzione $\zeta_2(t)$, ci si aspetta che le opinioni, in una prima fase, si dividano in due gruppi e per un po' di tempo continuino ad allontanarsi, finché avviene un'inversione di tendenza e il sistema inizia a muoversi verso una situazione di convergenza.

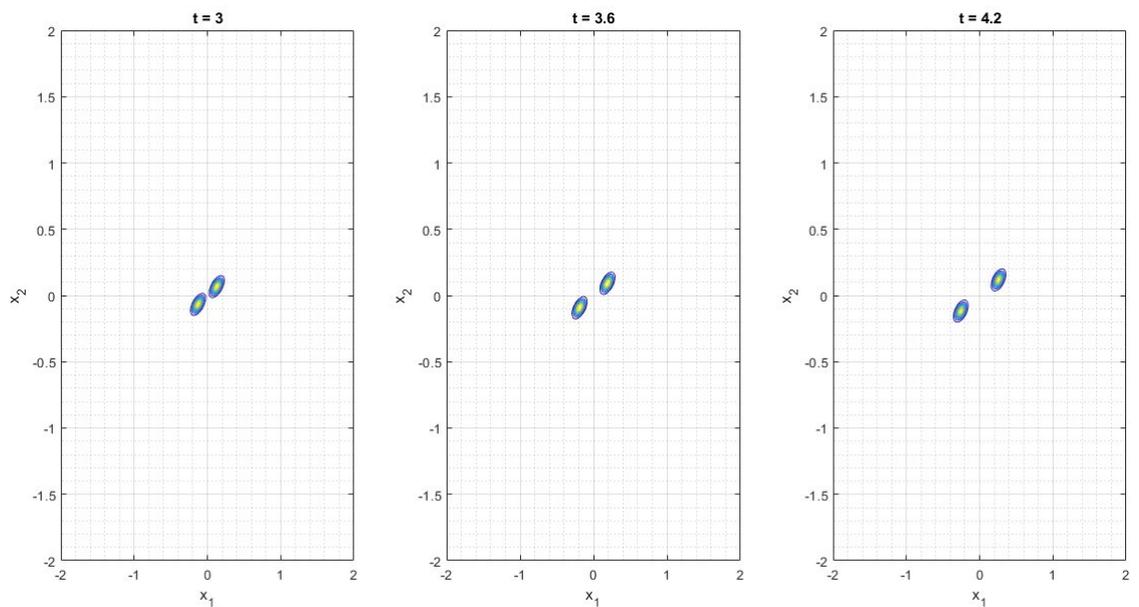
Per ottenere le simulazioni si sono fissati nuovamente $dt = 0.05$ e il periodo totale di analisi $[t_0 = 0, t_{end} = 15]$. Guardando le immagini di figura 6.8, si osserva proprio il comportamento atteso: nella prima fase, visibile fino al grafico corrispondente a $t = 4.8$, si formano due gruppi di opinione distinti che tendono ad allontanarsi sempre di più. Superata questa prima parte, i valori assunti dal parametro ζ_2 fanno sì che le densità di opinione delle due fazioni inizino ad avvicinarsi sempre di più, finché non si fondono diventando un unico consenso, ovvero raggiungendo una situazione di convergenza. Questa situazione sarà mantenuta anche in tempi futuri, dato che ζ_2 tende a stabilizzarsi avvicinandosi al valore dell'asintoto negativo.

Può essere anche interessante sottolineare un'osservazione sulla posizione di convergenza raggiunta. Come si può vedere, ad esempio, dall'immagine relativa a $t = 15$, la densità di opinione degli utenti si concentra fortemente attorno all'origine. In alcuni esempi presentati nel caso **Z** fissata per intervalli di tempo, si era posta l'attenzione sul fatto che le opinioni degli agenti non sarebbero tornate a concentrarsi nell'origine (condizione iniziale) a causa dell'effetto del pregiudizio. In questo caso, però, tale affermazione sembra smentita, almeno parzialmente. Infatti, la matrice di covarianza non è comunque nulla, perciò gli utenti non saranno mai puntualmente concentrati nel valor medio, ma tale valore sembra essere sostanzialmente coincidente con l'origine. Questo effetto non era osservabile nei casi precedenti, ma è facilmente spiegabile: per come è fatta la funzione, ζ_2 , superato un certo \bar{t} , si attesta a valori minori di -0.6 . Essi sono oltre due volte più piccoli rispetto al minimo dei valori utilizzato nella sezione [6.1]. Allora, a causa di questo fatto l'effetto del pregiudizio risulta sempre più smorzato, permettendo alle opinioni di riavvicinarsi maggiormente all'origine.

Invece, per quanto riguarda le immagini 6.9 e 6.10 si possono sostanzialmente ripetere le osservazioni viste nell'esempio [6.2.1]. In particolare, concentrandosi sui grafici delle funzioni $f_i(t)$ e $g_i(t)$, si può velocemente concludere che sono entrambe funzioni limitate dal basso e di conseguenza anche questo sistema è *stabile*.

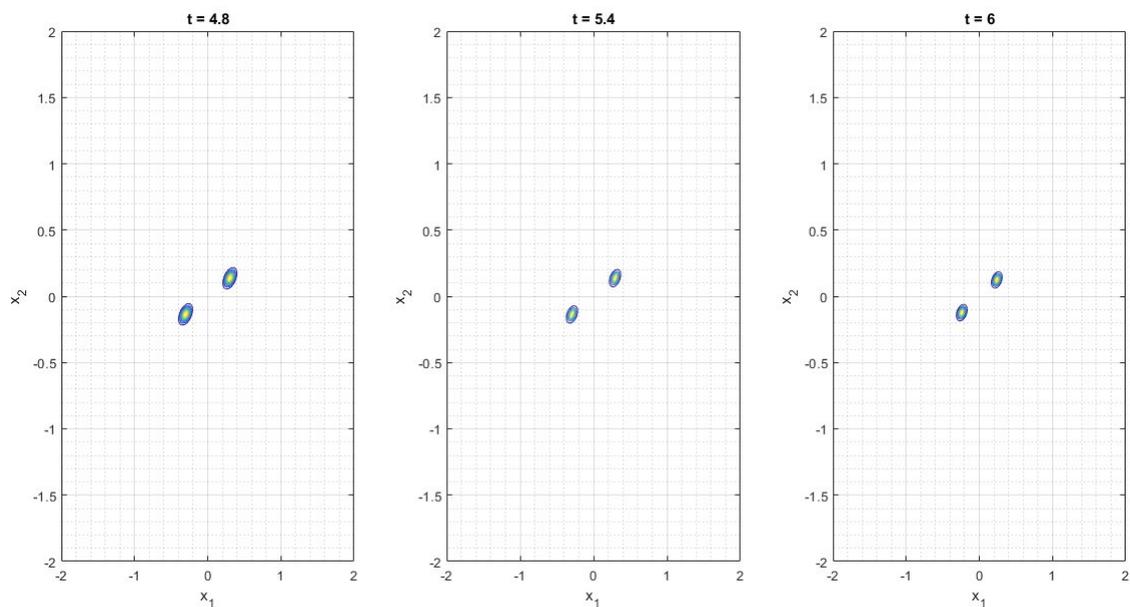


(a) Da sinistra a destra, istanti temporali $t = 1.2, 1.8, 2.4$.

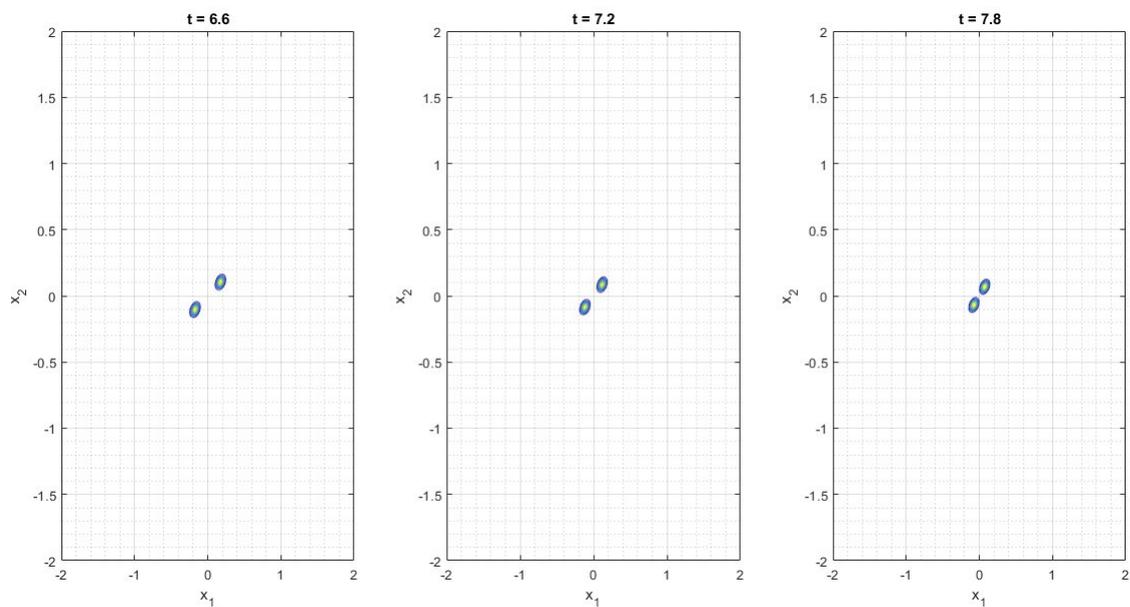


(b) Da sinistra a destra, istanti temporali $t = 3, 3.6, 4.2$.

Figura 6.8: *Andamento temporale delle opinioni, esempio 6.* In questo secondo esempio del caso continuo, viene nuovamente mostrata la posizione delle opinioni in alcuni istanti particolari, con l'obiettivo di illustrare l'andamento della dinamica delle opinioni. In particolare, si parte dall'immagine associata a $t = 1.2$ e si presenta un nuovo grafico ogni $\Delta t = 0.6$ fino a raggiungere $t_{end} = 15$. Si mantengono, quindi, gli stessi istanti temporali visti nell'esempio precedente

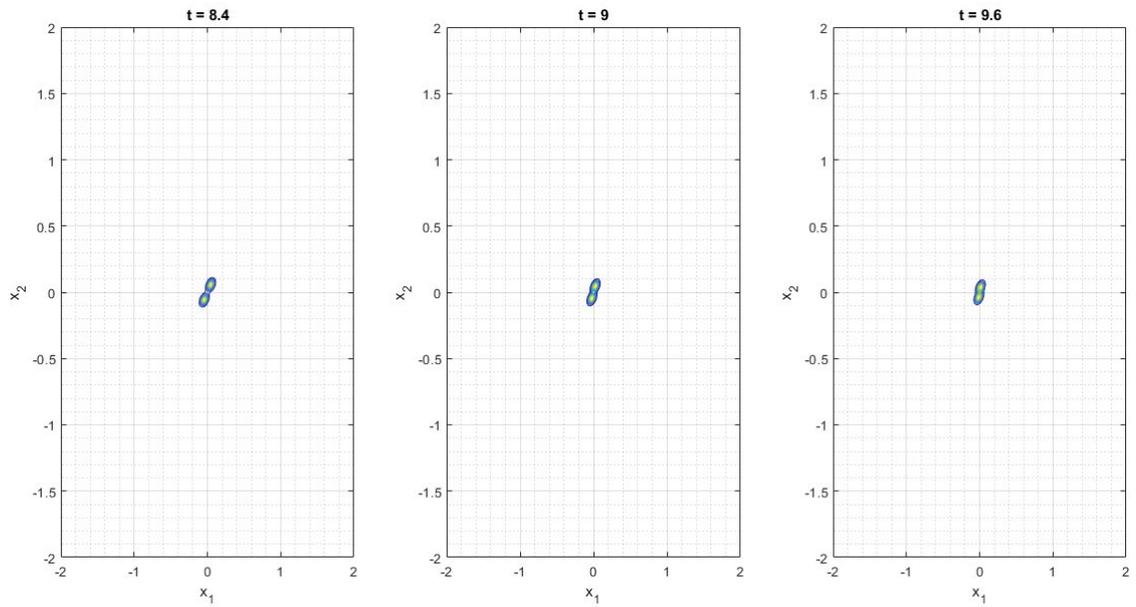


(c) Da sinistra a destra, istanti temporali $t = 4.8, 5.4, 6$.

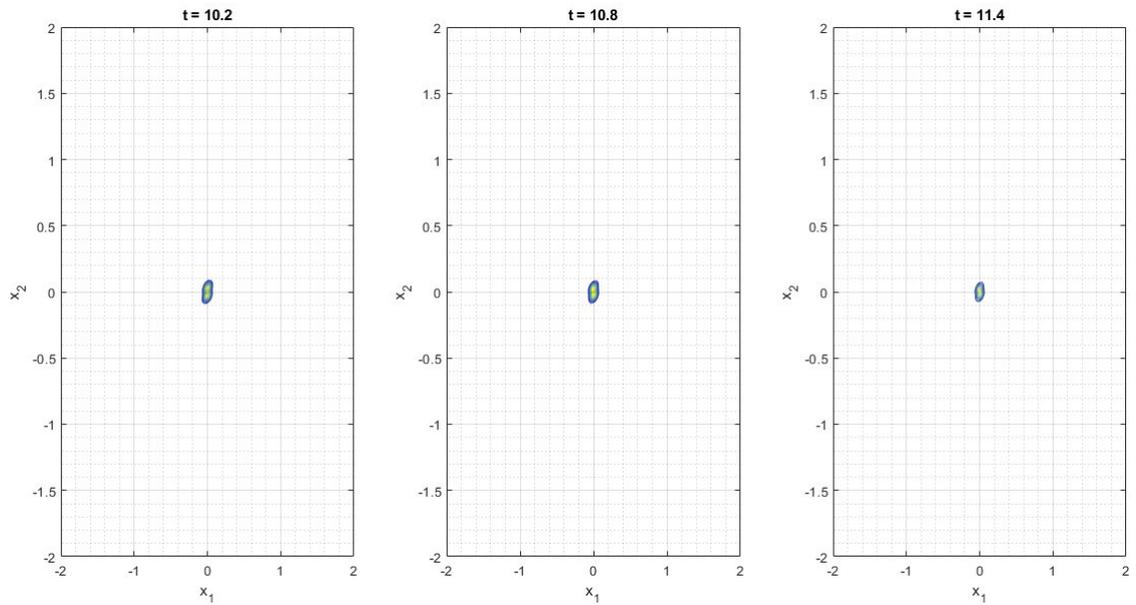


(d) Da sinistra a destra, istanti temporali $t = 6.6, 7.2, 7.8$.

Figura 6.8: Continuo grafici andamento temporale dell'esempio 6, seconda pagina.

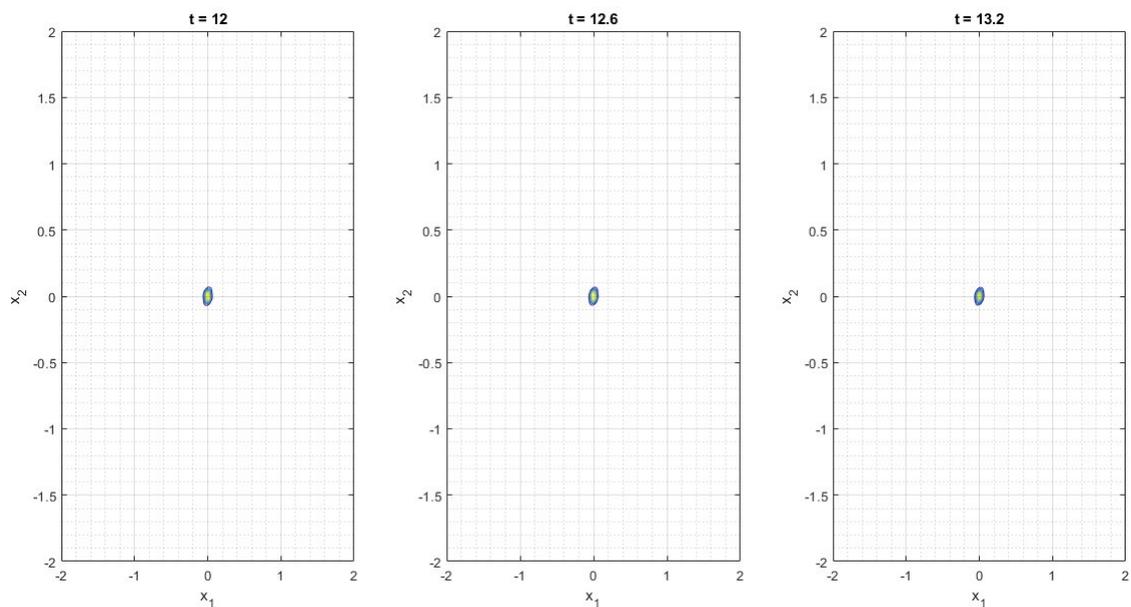


(e) Da sinistra a destra, istanti temporali $t = 8.4, 9, 9.6$.

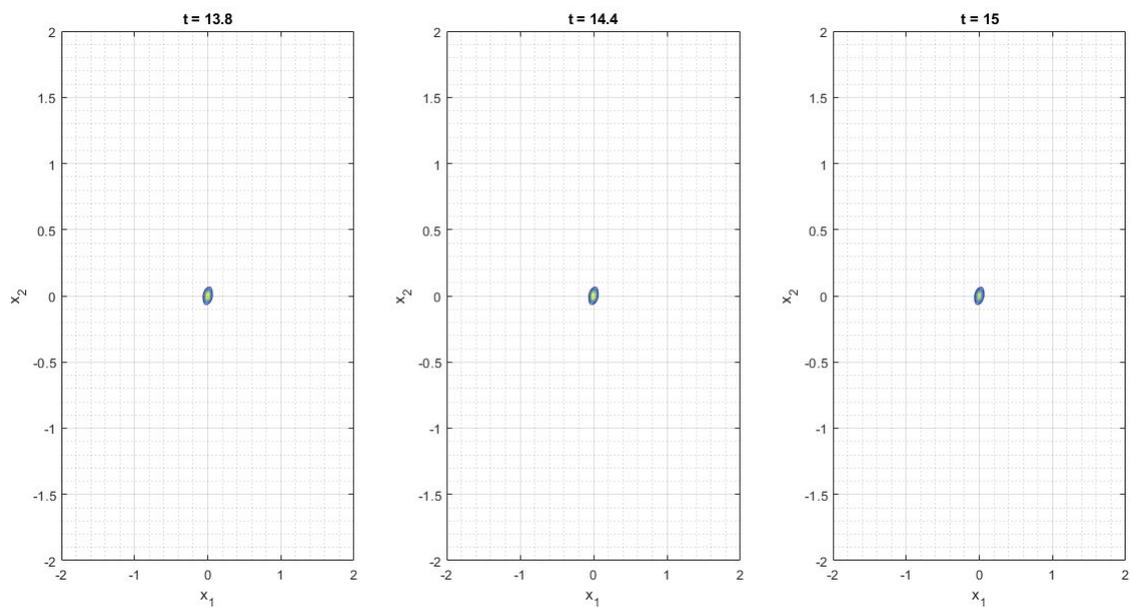


(f) Da sinistra a destra, istanti temporali $t = 10.2, 10.8, 11.4$.

Figura 6.8: Continuo grafici andamento temporale dell'esempio 6, terza pagina.



(g) Da sinistra a destra, istanti temporali $t = 12, 12.6, 13.2$.



(h) Da sinistra a destra, istanti temporali $t = 13.8, 14.4, 15$.

Figura 6.8: Continuo grafici andamento temporale dell'esempio 6, quarta pagina.

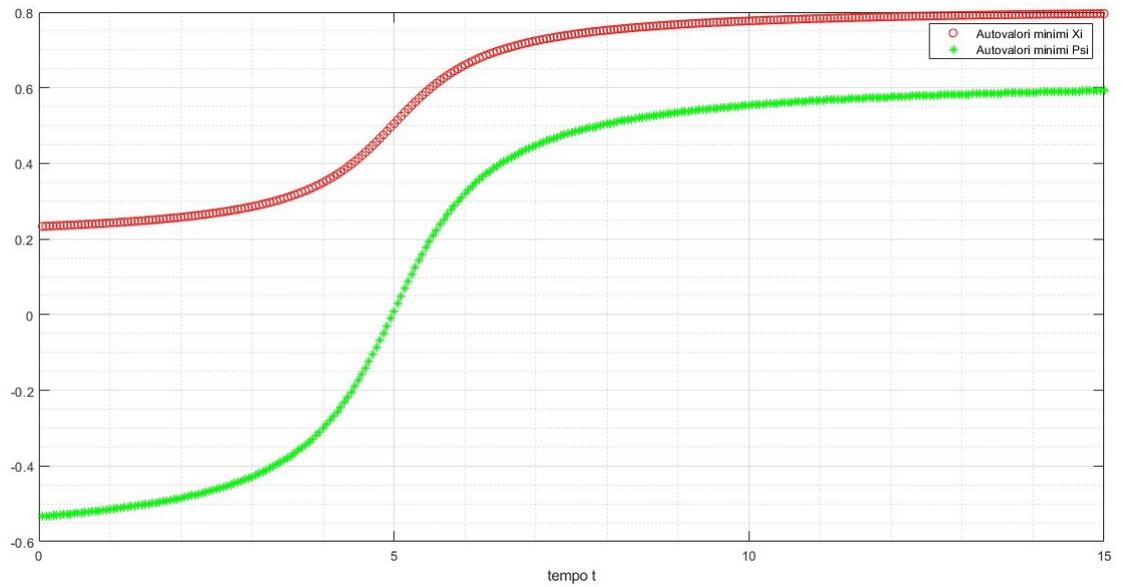


Figura 6.9: Grafico che illustra il comportamento nel tempo degli autovalori minimi delle matrici $\Xi(p_i, t)$ e $\Psi(t)$.

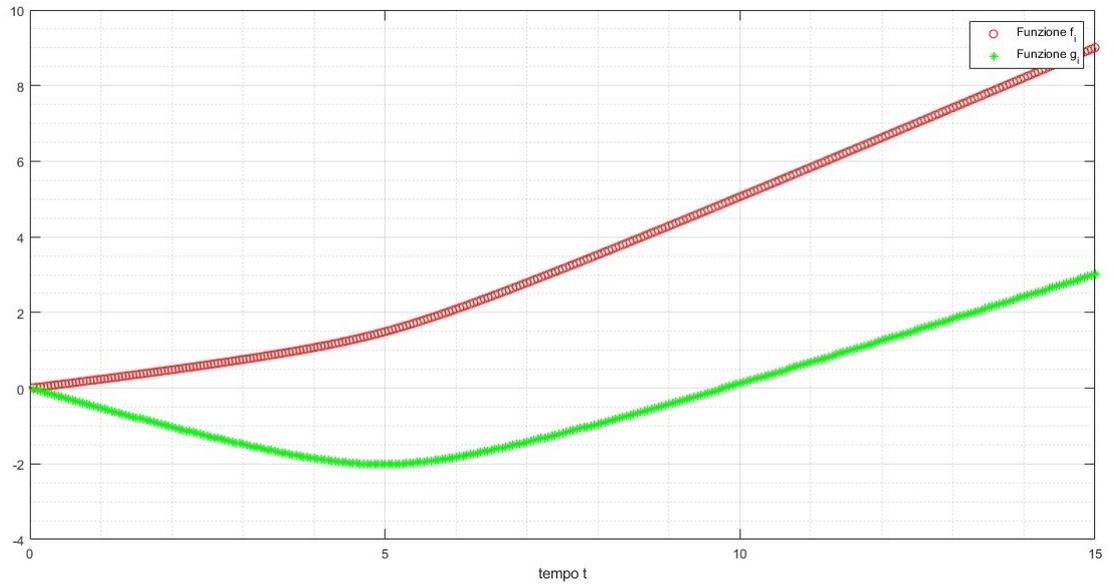


Figura 6.10: Grafico che illustra il comportamento nel tempo delle funzioni $f_i(t)$ e $g_i(t)$, sulle quali si possono verificare le condizioni di stabilità.

6.2.3 Esempio 7 - funzione che porta alla divergenza

Infine, per vedere un ultimo esempio nel caso continuo, si sceglie un problema strutturato in maniera totalmente identica a come fatto nel caso precedente, invertendo soltanto il segno della funzione $\zeta_2(t)$:

$$\zeta_2(t) = 0.4 \cdot \arctan(t - 5). \quad (6.23)$$

In questo modo essa è sempre una funzione sufficientemente regolare, che quindi non esplosive verso infinito, e permette di mantenere i valori del parametro di interesse all'interno di un intervallo ben definito. Il cambio di segno rispetto all'equazione (6.22), fa sì che questa funzione sia crescente su tutto il suo dominio. Perciò, si nota che nell'intervallo $[0,5)$ il parametro ζ_2 assume soltanto valori negativi; viceversa, superato l'istante $t = 5$ i valori di ζ_2 saranno sempre positivi. Questa differenza comporta un'inversione delle due fasi della dinamica delle opinioni:

1. Ora, la prima fase corrisponde ad un movimento delle opinioni verso una posizione di convergenza, a causa del valore del parametro ζ_2 , che risulta essere minore di $\alpha/\bar{\alpha}$. Questa è la soglia trovata nella sottosezione [3.6.2].
2. Immaginando che ζ_2 assuma il valore della soglia $\alpha/\bar{\alpha}$ all'istante t^* e sapendo che la funzione (6.23) è crescente, per $\forall t > t^*$ il parametro non tornerà più ad acquisire valori che permettono al sistema di convergere. Di conseguenza si entra nella seconda fase, in cui il sistema evolve verso una situazione di divergenza.

In definitiva, tenendo presenti queste osservazioni, ci si aspetta che il sistema diverga, ovvero che almeno la media della densità di opinione sia instabile.

Ancora una volta, per le simulazioni sono stati fissati i parametri $dt = 0.05$ e $[t_0 = 0, t_{end} = 15]$. Osservando i grafici di figura 6.11, l'aspetto sicuramente più interessante da notare è che in questo caso non sono stati riportati i grafici fino a $t_{end} = 15$, bensì la loro presenza si interrompe con il grafico associato a $t = 11.4$. Questa scelta è facilmente spiegabile: dato che si è già entrati nella seconda fase, in cui il sistema evolve verso una situazione di divergenza, le medie dei due gruppi di opinione tendono a crescere nel tempo e, di conseguenza, spingono le due comunità ad allontanarsi. Osservando la figura relativa al tempo $t = 11.4$ si può già vedere che i due gruppi di opinione non sono più visibili all'interno dello spazio utilizzato per rappresentare i grafici. Proseguendo nel tempo la situazione tende soltanto a diventare più accentuata, perciò si è scelto di tralasciare i successivi grafici che sarebbero tutti vuoti.

Ora, si passa a guardare le figure 6.12 e 6.13. Dalla prima si nota che anche questa volta la forma dei grafici ricalca la forma della funzione (6.23). Invece, dalla seconda si può facilmente intuire se sono soddisfatte o no le condizioni di stabilità. Innanzitutto, la condizione di stabilità sulla covarianza è soddisfatta, infatti la funzione $f_i(t)$ è chiaramente limitata dal basso. Invece la condizione di stabilità sulla media non è soddisfatta, come ci si aspettava. Infatti, guardando la forma della funzione $g_i(t)$ si intuisce che al limite $t \rightarrow +\infty$ essa tende verso $-\infty$. Quindi non può essere limitata inferiormente.

Si conclude che questo caso fornisce un esempio di sistema tempo-variante nel continuo *instabile*.

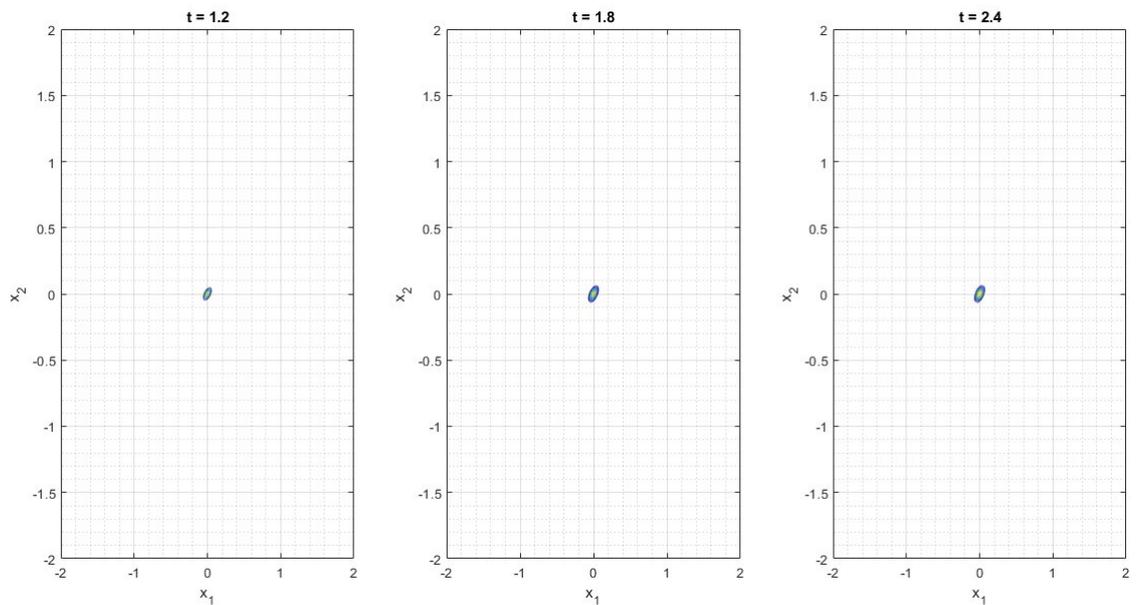
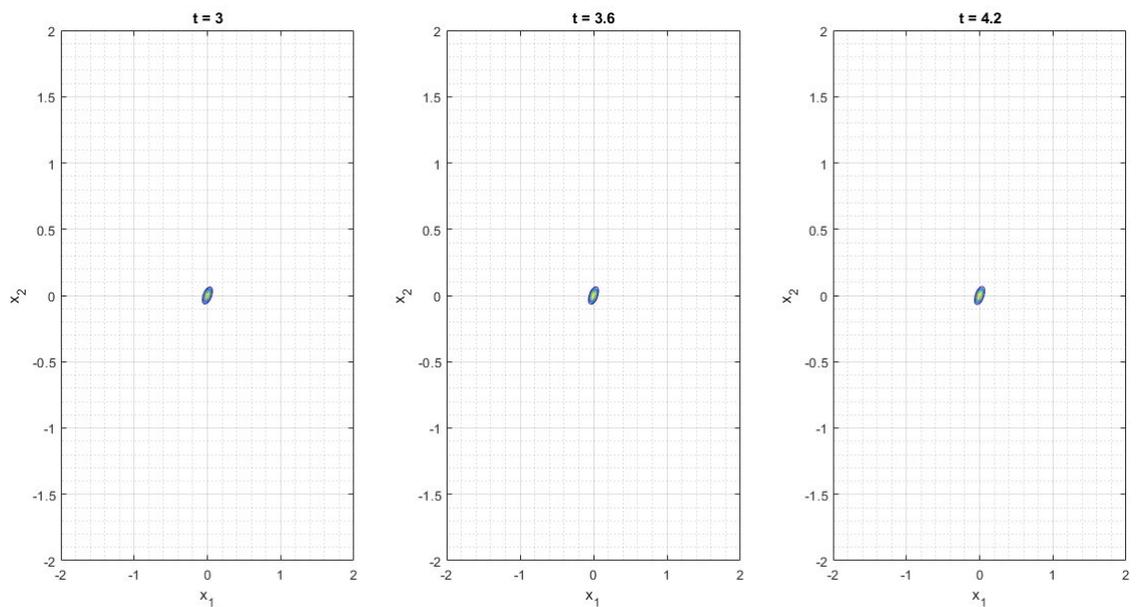
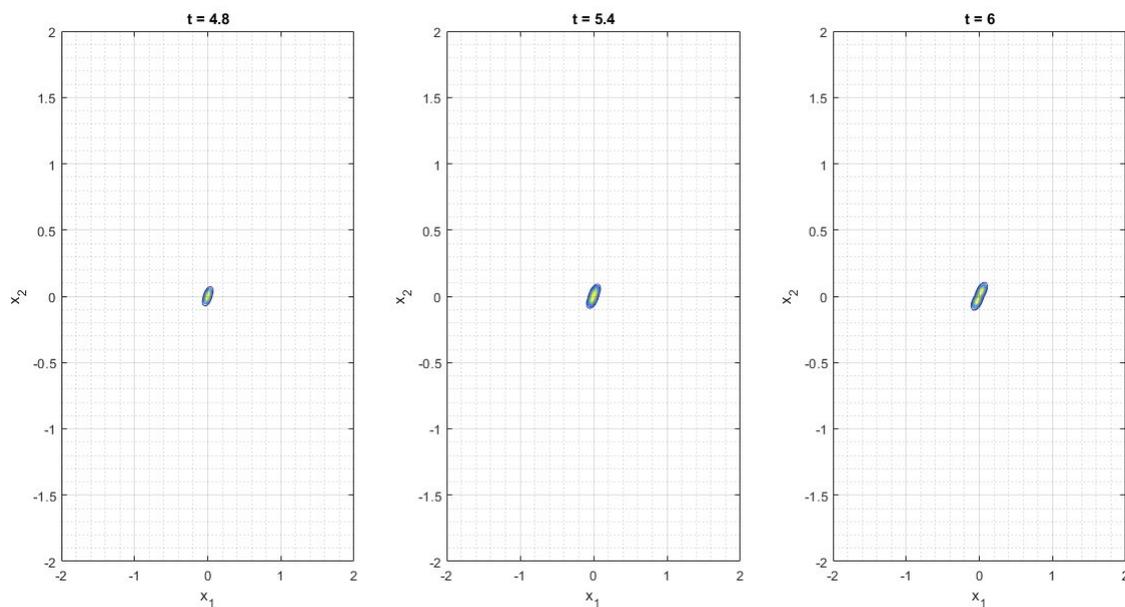
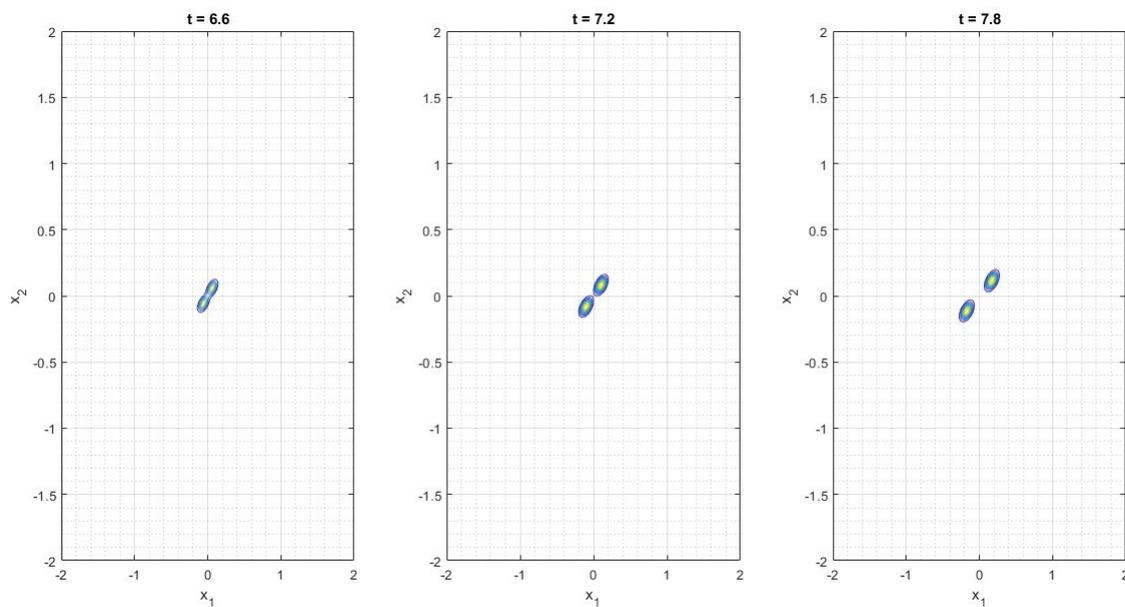
(a) Da sinistra a destra, istanti temporali $t = 1.2, 1.8, 2.4$.(b) Da sinistra a destra, istanti temporali $t = 3, 3.6, 4.2$.

Figura 6.11: *Andamento temporale delle opinioni, esempio 7.* In questo terzo esempio del caso continuo, viene ancora una volta mostrata la posizione delle opinioni in alcuni istanti particolari, con l'obiettivo di illustrare l'andamento della dinamica delle opinioni. In particolare, si parte dall'immagine associata a $t = 1.2$ e si presenta un nuovo grafico ogni $\Delta t = 0.6$. In questo caso però ci si ferma all'istante $t = 11.4$, dato che i gruppi di opinione si stanno allontanando sempre di più e sarebbe inutile inserire ulteriori immagini in cui le opinioni non sarebbero comunque visibili nello box di visualizzazione utilizzato.

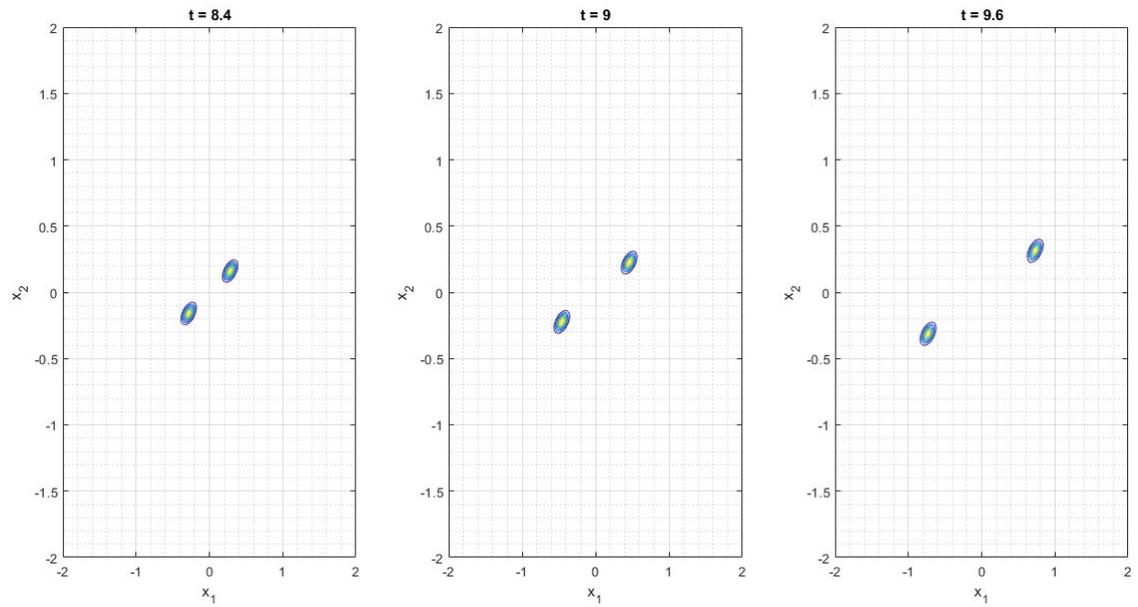


(c) Da sinistra a destra, istanti temporali $t = 4.8, 5.4, 6$.

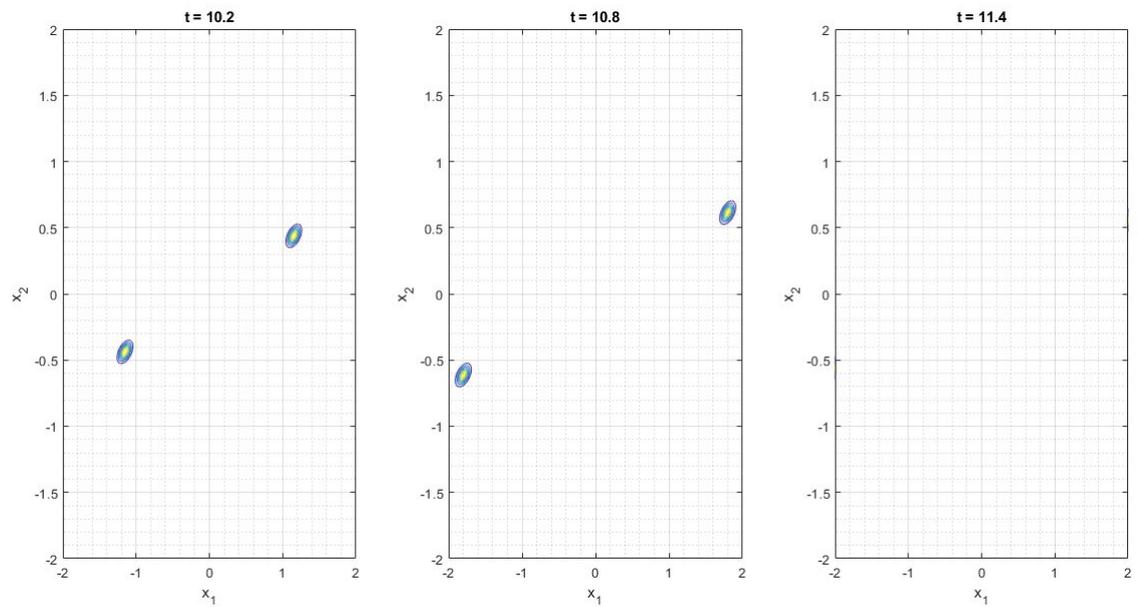


(d) Da sinistra a destra, istanti temporali $t = 6.6, 7.2, 7.8$.

Figura 6.11: Continuo grafici andamento temporale dell'esempio 7, seconda pagina.



(e) Da sinistra a destra, istanti temporali $t = 8.4, 9, 9.6$.



(f) Da sinistra a destra, istanti temporali $t = 10.2, 10.8, 11.4$.

Figura 6.11: Continuo grafici andamento temporale dell'esempio 7, terza pagina.

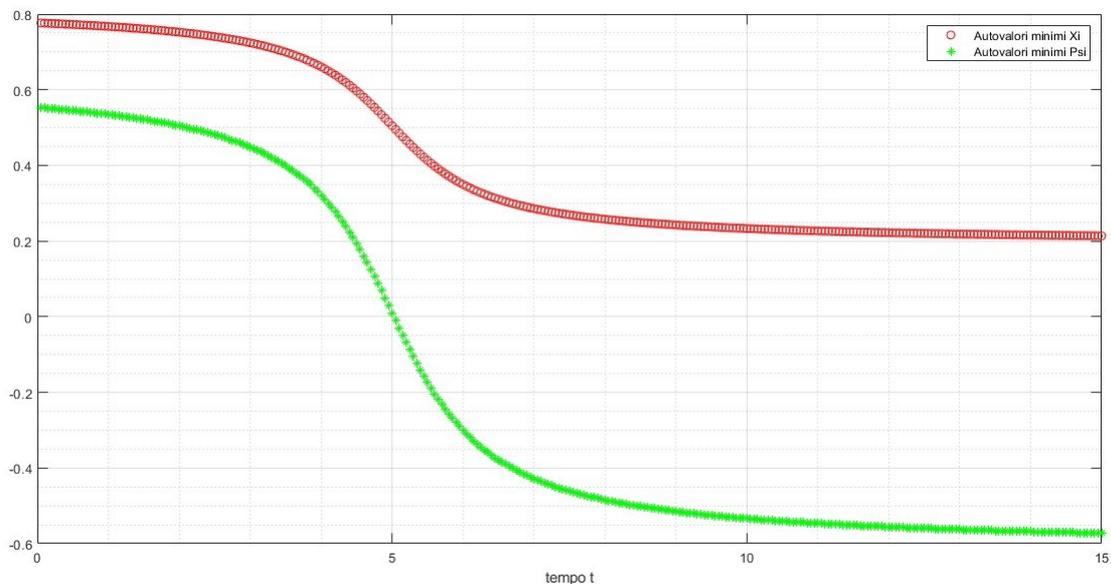


Figura 6.12: Grafico che illustra il comportamento nel tempo degli autovalori minimi delle matrici $\Xi(p_i, t)$ e $\Psi(t)$.

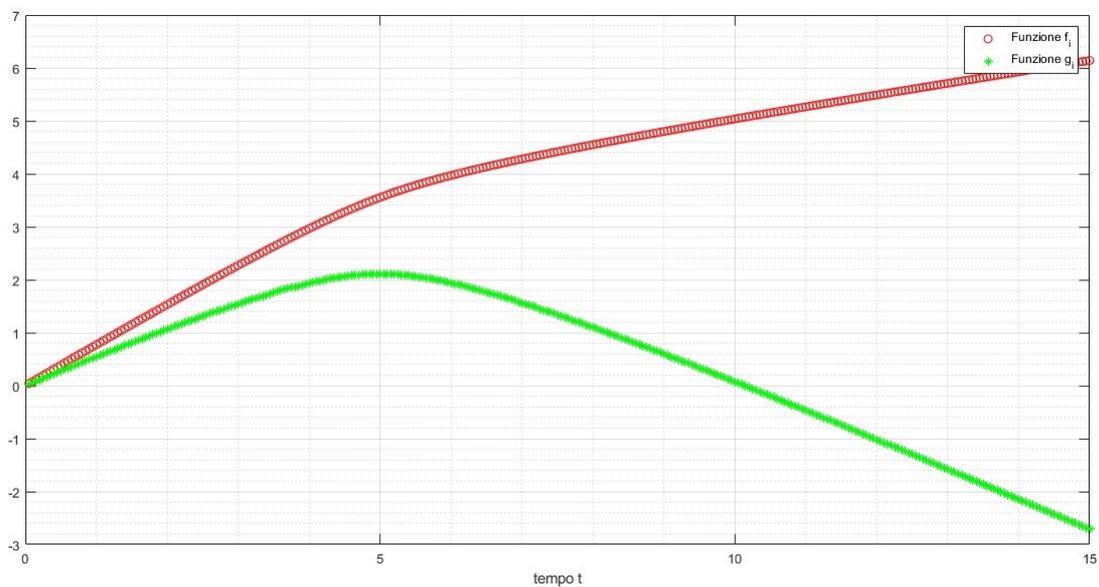


Figura 6.13: Grafico che illustra il comportamento nel tempo delle funzioni $f_i(t)$ e $g_i(t)$, sulle quali si possono verificare le condizioni di stabilità.

Capitolo 7

Conclusioni

In definitiva, il lavoro di questo elaborato permette di ottenere un modello matematico per lo studio della dinamica delle opinioni, che corrisponde ad un aggiornamento e ad una generalizzazione di un modello scelto come partenza, già presente in letteratura. In particolare, l'introduzione della tempo-varianza della matrice \mathbf{Z} , la quale permette di rappresentare la possibilità molto realistica che la rete sociale vari nel tempo, consente di effettuare un importante passo avanti nell'accuratezza del modello. Inoltre, grazie alle condizioni di stabilità trovate, è possibile mantenere sostanzialmente lo stesso livello di profondità dei risultati rispetto al caso originale. Quest'ultima affermazione è confermata dalla serie di esempi presentati nel capitolo [6], in cui si riescono a mostrare sia casi di stabilità, sia casi di instabilità del sistema.

Comunque, un aspetto fondamentale da sottolineare riguarda il fatto che tutti i nuovi risultati ottenuti sono basati su due ipotesi, che permettono di semplificare la trattazione del modello:

- 1) le personalità appartengono ad un insieme discreto di valori;
- 2) la distribuzione iniziale $\rho_0(\mathbf{x}|p)$ è Gaussiana.

Perciò, se si volessero rilassare anche queste due ipotesi, i risultati ottenuti da questo lavoro non sarebbero più validi, in generale. È anche giusto sottolineare che tra le due ipotesi riportate sopra, è soprattutto la 1) a limitare maggiormente la generalità del modello, dato che è complesso riuscire ad impacchettare le svariate sfaccettature delle personalità di tanti individui diversi utilizzando soltanto un insieme discreto di valori.

Così, un nuovo potenziale sviluppo di questa ricerca riguarda, ad esempio, la possibilità di studiare che cosa accade alla dinamica se si evita l'ipotesi sulla distribuzione discreta delle personalità. In questa maniera si aggiungerebbe un ulteriore elemento volto a rendere il modello matematico sempre più generale e adattabile a situazioni reali.

Inoltre, l'elaborato traccia una strada che si può decidere di seguire per ottenere un ulteriore sviluppo verso un modello sempre più completo. Infatti, al modello finale con matrice delle forze di interazioni tempo-variante, si possono aggiungere anche le generalizzazioni su alcune variabili, mostrate nel capitolo [4] degli approfondimenti di questo lavoro.

Per concludere, il lavoro di ricerca svolto in questa tesi consente di migliorare un modello matematico che studia il fenomeno della dinamica delle opinioni. Al tempo stesso, però, non vuole essere un punto di arrivo con cui concludere definitivamente lo studio su tale modello. Infatti, fornendo degli spunti su come migliorarlo ulteriormente, si pone come nuovo punto di partenza per future ricerche.

Appendice A

Codici Matlab per il caso Z tempo-variante in intervalli di tempo

Codice A.1: Funzione per calcolare l'evoluzione delle opinioni nel tempo

```
1 function [J1, mu_vec, sigma2_vec, rho_t, xi_mat, Psi_mat,...
2     rho_zero_mean_vec2, sigma_y2] = J1_discrete_compute_6(alpha_vec,...
3     zeta_fun, rhozero_vec, prejudice_fun, rho_zero_mean_vec, Corr,...
4     personalities_vec, M, Diff_mat, nn, opinion_vec_tot, time_vec, sigma_y)
5
6 % INPUTS:
7 % alpha_vec --> vettore che contiene tutti i valori di testardaggine per
8 %             ogni personalita
9 % zeta_fun --> funzione handle per le matrici Z(p,q)
10 % rho_zero_vec --> vettore che contiene la distribuzione sulle personalita
11 % prejudice_fun --> funzione handle per il pregiudizio u(p)
12 % rho_zero_mean_vec --> vettore che contiene la distribuzione media
13 %                    iniziale condizionata alle personalita p_i
14 % Corr --> matrice di correlazione C, dimensioni (NxN),
15 %         con N = dimensione spazio delle opinioni
16 % personalities_vec --> vettore che contiene le personalita p_i
17 % M --> numero di personalita distinte presenti nel modello
18 % Diff_mat --> tensore di diffusione D
19 % nn --> variabile utilizzata per scegliere il valore del parametro z_2
20 % opinion_vec_tot --> campione dello spazio di opinioni discreto
21 % time_vec --> vettore contenente gli istanti temporali in cui si vuole
22 %             ottenere l'aggiornamento sull'evoluzione delle opinioni
23 % sigma_y --> matrice di covarianza della distribuzione rho_0(y|p)
24
25 % OUTPUTS:
26 % J1 --> soluzione dell'equazione al punto fisso (3.21)
```

```

27 % mu_vec --> vettore che contiene i valori medi della funzione di Green,
28 %          ovvero il risultato dell'equazione (3.13)
29 % sigma2_vec --> vettore che contiene i valori dell matrice di covarianza
30 %          della funzione di Green, ovvero il risultato
31 %          dell'equazione (3.12)
32 % rho_t --> densita delle opinioni, soluzione dell'equazione di FP (3.11)
33 % xi_mat --> matrice Xi
34 % Psi_mat --> matrice Psi
35 % rho_zero_mean_vec2 --> vettore che contiene la distribuzione media
36 %          condizionata alle personalita p_i, calcolata
37 %          nell'ultimo istante presente in time_vec.
38 %          Se l'analisi prosegue nel tempo, si utilizza come
39 %          input del passaggio successivo
40 % sigma_y2 --> matrice di covarianza della distribuzione rho_T(y|p), quindi
41 %          anch'essa relativa all'ultimo istante presente in time_vec
42
43 N = size(Corr,1);
44
45 prejudice_vec = feval(prejudice_fun, personalities_vec);
46
47 [personalities_xx, personalities_yy] = meshgrid(personalities_vec,...
48     personalities_vec);
49 zeta_mat = feval(zeta_fun, personalities_xx, personalities_yy, nn);
50
51 J0_vec = zeta_mat * rhozero_vec;
52 alpha_mat = kron(diag(alpha_vec),eye(N));
53 xi_mat = kron(diag(J0_vec),eye(N)) * (eye(N*M)-alpha_mat)...
54     * kron(eye(M),Corr) + kron(diag(alpha_vec),Corr);
55 zeta_mat = kron(zeta_mat, Corr);
56
57 rho1_mat = kron(diag(rhozero_vec),eye(N)) * alpha_mat;
58 rho2_mat = kron(diag(rhozero_vec),eye(N)) * (eye(N*M)-alpha_mat);
59 Psi_mat = xi_mat - rho2_mat * zeta_mat;
60 v1tilde_vec = rho1_mat * kron(eye(M),Corr) * prejudice_vec;
61 stat_vec = xi_mat \ (alpha_mat * kron(eye(M),Corr) * prejudice_vec ...
62     + (eye(M*N) - alpha_mat) * zeta_mat * (Psi_mat \ v1tilde_vec));
63
64 [Theta_Xi, Lambda_Xi] = eig(xi_mat);
65 Theta_XiInv = inv(Theta_Xi);
66 App_mat2 = Theta_Xi \ kron(eye(M), Diff_mat) * Theta_XiInv.';
67
68 rho0_mat = kron(diag(rhozero_vec),eye(N));
69 v0tilde_vec = rho0_mat * rho_zero_mean_vec;
70 nostat_vec = v0tilde_vec - Psi_mat \ v1tilde_vec;
71
72 J1 = zeros(M*N, length(time_vec));
73 for ind1 = 1:length(time_vec)
74     time_value = time_vec(ind1);
75     J1(:,ind1) = zeta_mat * (expm(-Psi_mat * time_value) * v0tilde_vec...

```

```

76         + Psi_mat \ (eye(M*N) - expm(-Psi_mat * time_value)) * vtilde_vec);
77     end
78     disp('Computed solution of integral equation!')
79
80     [Theta_Psi, Lambda_Psi] = eig(Psi_mat);
81     Theta_PsiInv = inv(Theta_Psi);
82     App_mat1 = Theta_Xi \ zeta_mat * Theta_Psi;
83
84     mu_vec = zeros(M*N, length(time_vec));
85     sigma2_vec = zeros(M*N, M*N, length(time_vec));
86     for ind1 = 1:length(time_vec)
87         time_value = time_vec(ind1);
88         Int_mat1 = zeros(M*N);
89         Int_mat2 = zeros(M*N);
90         for ind2 = 1:M*N
91             for ind3 = 1:M*N
92                 if(Lambda_Xi(ind2,ind2) ~= Lambda_Psi(ind3,ind3))
93                     Int_mat1 = Int_mat1 + Theta_Xi(:,ind2)...
94                         * (exp(-Lambda_Psi(ind3,ind3) * time_value)...
95                           - exp(-Lambda_Xi(ind2,ind2) * time_value))...
96                         / (Lambda_Xi(ind2,ind2) - Lambda_Psi(ind3,ind3))...
97                         * App_mat1(ind2,ind3) * Theta_PsiInv(ind3,:);
98                 else
99                     Int_mat1 = Int_mat1 + Theta_Xi(:,ind2) * time_value...
100                        * exp(-Lambda_Xi(ind2,ind2) * time_value)...
101                        * App_mat1(ind2,ind3) * Theta_PsiInv(ind3,:);
102                 end
103                 Int_mat2 = Int_mat2 + Theta_Xi(:,ind2)...
104                    * (1-exp(-(Lambda_Xi(ind2,ind2) + Lambda_Xi(ind3,ind3))...
105                      * time_value)) / (Lambda_Xi(ind2,ind2)...
106                      + Lambda_Xi(ind3,ind3)) * App_mat2(ind2,ind3)...
107                    * (Theta_Xi(:,ind3)).';
108             end
109         end
110         mu_vec(:,ind1) = expm(- xi_mat * time_value) * rho_zero_mean_vec...
111             + (eye(M*N) - expm(- xi_mat * time_value)) * stat_vec...
112             + (eye(M*N) - alpha_mat) * Int_mat1 * nostat_vec;
113         sigma2_vec(:,:,ind1) = Int_mat2 + expm(- xi_mat * time_value)...
114             * sigma_y * expm(- xi_mat' * time_value);
115     end
116     disp('Computed mean and variance of Green function!')
117
118     rho_t = zeros(size(opinion_vec_tot,2), M, length(time_vec));
119     for ind = 1:length(time_vec)
120         for ind2 = 1:M
121             mu = mu_vec((ind2-1)*N+(1:N), ind);
122             sigma2_mat = sigma2_vec((ind2-1)*N+(1:N), (ind2-1)*N+(1:N), ind);
123             sigma2_mat = (sigma2_mat+sigma2_mat')/2;
124             rho_t(:,ind2,ind) = rhozero_vec(ind2)...

```

```

125         * mvnpdf(opinion_vec_tot',mu',sigma2_mat);
126     end
127 end
128 disp('Computed opinion density!')
129
130 rho_zero_mean_vec2 = mu_vec(:,end);
131 sigma_y2 = sigma2_vec(:,:,end);

```

Codice A.2: Script tramite cui si ottengono i grafici dell'esempio 1

```

1 clear
2 close all
3 clc
4
5 Factor = 10;
6 P = 10/Factor;
7
8 alpha_fun = @f_alpha;
9 rhozero_fun = @f_rho;
10 prejudice_fun = @f_prejudice;
11 rhozero_mean_op_fun = @f_rhozero_mean_op;
12 zeta_fun = @f_zeta;
13
14 opinion_vec = (-20:0.05:20)/Factor;
15 M = 20;
16
17 rho = 1.;
18 Corr = [1,rho;1e-10,1];
19
20 sigma2n = 10^-3;
21 Diff_mat = sigma2n * (Corr * Corr');
22 N_dim = size(Corr,1);
23
24 opinion_vec_tot = opinion_vec;
25 for ind=1:N_dim-1
26     opinion_vec_tot=[kron(opinion_vec_tot, ones(1,size(opinion_vec,2))));...
27         kron(ones(1,size(opinion_vec_tot,2)), opinion_vec)];
28 end
29
30 personalities_vec = reshape(linspace(-P,P,M),M,1);
31 alpha_vec = alpha_fun(personalities_vec);
32 rhozero_vec = rhozero_fun(personalities_vec);
33 rhozero_vec = rhozero_vec/sum(rhozero_vec);
34 rho_zero_mean_vec = rhozero_mean_op_fun(personalities_vec,N_dim);
35
36 sigma_y = 0;
37
38 time = 0;
39 K = 8;

```

```

40 for k = 1:K
41     if mod(k,2) == 1
42         nn = 6;
43         time_vec = [5,10,15];
44         time = time(end) + time_vec;
45     else
46         nn = 3;
47         time_vec = [15,30,45];
48         time = time(end) + time_vec;
49     end
50     [~, ~, ~, rho_t, ~, ~, rho_zero_mean_vec, sigma_y] = ...
51     J1_discrete_compute_6(alpha_vec, zeta_fun, rhozero_vec, ...
52     prejudice_fun, rho_zero_mean_vec, Corr, personalities_vec, M, ...
53     Diff_mat, nn, opinion_vec_tot, time_vec, sigma_y);
54     rho_t_x = squeeze(sum(rho_t,2));
55
56     [opinion_2d_o, opinion_2d_v] = meshgrid(opinion_vec, opinion_vec);
57     figure
58     for ind=1:length(time_vec)
59         rho_t_x_sq = reshape(rho_t_x(:,ind), length(opinion_vec), ...
60             length(opinion_vec));
61         subplot(1,length(time_vec),ind)
62         contour(opinion_2d_o, opinion_2d_v, real(rho_t_x_sq))
63         grid
64         grid minor
65         axis([-1.2 1.2 -1.2 1.2])
66         title(['t = ', num2str(time(ind))])
67         xlabel('x_1')
68         ylabel('x_2')
69     end
70 end

```

Codice A.3: Script tramite cui si ottengono i grafici dell'esempio 2

```

1 clear
2 close all
3 clc
4
5 Factor = 10;
6 P = 10/Factor;
7
8 alpha_fun = @f_alpha;
9 rhozero_fun = @f_rho;
10 prejudice_fun = @f_prejudice;
11 rhozero_mean_op_fun = @f_rhozero_mean_op;
12 zeta_fun = @f_zeta;
13
14 opinion_vec = (-20:0.05:20)/Factor;
15 M = 50;

```

```

16
17 rho = 1.;
18 Corr = [1, rho; 1e-10, 1];
19
20 sigma2n = 10^-3;
21 Diff_mat = sigma2n * (Corr * Corr');
22 N_dim = size(Corr, 1);
23
24 opinion_vec_tot = opinion_vec;
25 for ind=1:N_dim-1
26     opinion_vec_tot=[kron(opinion_vec_tot, ones(1, size(opinion_vec, 2)));...
27                    kron(ones(1, size(opinion_vec_tot, 2)), opinion_vec)];
28 end
29
30 personalities_vec = reshape(linspace(-P, P, M), M, 1);
31 alpha_vec = alpha_fun(personalities_vec);
32 rhozero_vec = rhozero_fun(personalities_vec);
33 rhozero_vec = rhozero_vec/sum(rhozero_vec);
34 rho_zero_mean_vec = rhozero_mean_op_fun(personalities_vec, N_dim);
35
36 sigma_y = 0;
37
38 T = 60;
39 delta_t = 10;
40
41 time = 0;
42 time_vec = [2.5, 5, 7.5, 10];
43
44 for k = 1:(T/delta_t)
45     if mod(k, 2) == 1
46         nn = 10;
47     else
48         nn = 3;
49     end
50     time = time(end) + time_vec;
51     [~, ~, ~, rho_t, ~, ~, rho_zero_mean_vec, sigma_y] = ...
52         J1_discrete_compute_6(alpha_vec, zeta_fun, rhozero_vec, ...
53         prejudice_fun, rho_zero_mean_vec, Corr, personalities_vec, M, ...
54         Diff_mat, nn, opinion_vec_tot, time_vec, sigma_y);
55     rho_t_x = squeeze(sum(rho_t, 2));
56
57     [opinion_2d_o, opinion_2d_v] = meshgrid(opinion_vec, opinion_vec);
58     figure
59     for ind=1:length(time_vec)
60         rho_t_x_sq = reshape(rho_t_x(:, ind), length(opinion_vec), ...
61                             length(opinion_vec));
62         subplot(1, length(time_vec), ind)
63         contour(opinion_2d_o, opinion_2d_v, real(rho_t_x_sq))
64         grid

```

```

65     grid minor
66     title(['t = ', num2str(time(ind))])
67     xlabel('x_1')
68     ylabel('x_2')
69     end
70 end

```

Codice A.4: Script tramite cui si ottengono i grafici dell'esempio 3

```

1  clear
2  close all
3  clc
4
5  Factor = 10;
6  P = 10/Factor;
7
8  alpha_fun = @f_alpha;
9  rhozero_fun = @f_rho;
10 prejudice_fun = @f_prejudice;
11 rhozero_mean_op_fun = @f_rhozero_mean_op;
12 zeta_fun = @f_zeta;
13
14 opinion_vec = (-30:0.05:30)/Factor;
15 M = 50;
16
17 rho = 1.;
18 Corr = [1,rho;1e-10,1];
19
20 sigma2n = 10^-3;
21 Diff_mat = sigma2n * (Corr * Corr');
22 N_dim = size(Corr,1);
23
24 opinion_vec_tot = opinion_vec;
25 for ind=1:N_dim-1
26     opinion_vec_tot=[kron(opinion_vec_tot, ones(1,size(opinion_vec,2))));...
27         kron(ones(1,size(opinion_vec_tot,2)), opinion_vec)];
28 end
29
30 personalities_vec = reshape(linspace(-P,P,M),M,1);
31 alpha_vec = alpha_fun(personalities_vec);
32 rhozero_vec = rhozero_fun(personalities_vec);
33 rhozero_vec = rhozero_vec/sum(rhozero_vec);
34 rho_zero_mean_vec = rhozero_mean_op_fun(personalities_vec,N_dim);
35
36 sigma_y = 0;
37
38 time = 0;
39 K = 6; % Numero totale intervalli
40

```

```

41 for k = 1:K
42     if mod(k,2) == 1
43         nn = 7;
44         time_vec = [0.1,0.2];
45         time = time(end) + time_vec;
46     else
47         nn = 1;
48         time_vec = [0.6,1.2];
49         time = time(end) + time_vec;
50     end
51     [~, ~, ~, rho_t, ~, ~, rho_zero_mean_vec, sigma_y] = ...
52     J1_discrete_compute_6(alpha_vec, zeta_fun, rhozero_vec,...
53     prejudice_fun, rho_zero_mean_vec, Corr, personalities_vec, M,...
54     Diff_mat, nn, opinion_vec_tot, time_vec, sigma_y);
55     rho_t_x = squeeze(sum(rho_t,2));
56
57     [opinion_2d_o,opinion_2d_v] = meshgrid(opinion_vec,opinion_vec);
58     figure
59     for ind=1:length(time_vec)
60         rho_t_x_sq = reshape(rho_t_x(:,ind), length(opinion_vec),...
61         length(opinion_vec));
62         subplot(1,length(time_vec),ind)
63         contour(opinion_2d_o, opinion_2d_v, real(rho_t_x_sq))
64         grid
65         grid minor
66         title(['t = ', num2str(time(ind))])
67         xlabel('x_1')
68         ylabel('x_2')
69     end
70 end

```

Codice A.5: Script tramite cui si ottengono i grafici dell'esempio 4

```

1 clear
2 close all
3 clc
4
5 Factor = 10;
6 P = 10/Factor;
7
8 alpha_fun = @f_alpha;
9 rhozero_fun = @f_rho;
10 prejudice_fun = @f_prejudice;
11 rhozero_mean_op_fun = @f_rhozero_mean_op;
12 zeta_fun = @f_zeta;
13
14 opinion_vec = (-20:0.05:20)/Factor;
15 M = 50;
16

```

```

17 rho = 1.;
18 Corr = [1,rho;1e-10,1];
19
20 sigma2n = 10^-3;
21 Diff_mat = sigma2n * (Corr * Corr');
22 N_dim = size(Corr,1);
23
24 opinion_vec_tot = opinion_vec;
25 for ind=1:N_dim-1
26     opinion_vec_tot=[kron(opinion_vec_tot, ones(1,size(opinion_vec,2)));...
27         kron(ones(1,size(opinion_vec_tot,2)), opinion_vec)];
28 end
29
30 personalities_vec = reshape(linspace(-P,P,M),M,1);
31 alpha_vec = alpha_fun(personalities_vec);
32 rhozero_vec = rhozero_fun(personalities_vec);
33 rhozero_vec = rhozero_vec/sum(rhozero_vec);
34 rho_zero_mean_vec = rhozero_mean_op_fun(personalities_vec,N_dim);
35
36 sigma_y = 0;
37 times = zeros(7,1); % Vettore che salva gli estremi degli intervalli
38
39 % Primo intervallo temporale --> [0,23]
40 time_vec = [1,12,23];
41 times(2) = time_vec(end);
42 nn = 6;
43
44 [~, ~, ~, rho_t, ~, ~, rho_zero_mean_vec, sigma_y] = ...
45     J1_discrete_compute_6(alpha_vec, zeta_fun, rhozero_vec,...
46     prejudice_fun, rho_zero_mean_vec, Corr, personalities_vec, M,...
47     Diff_mat, nn, opinion_vec_tot, time_vec, sigma_y);
48 rho_t_x = squeeze(sum(rho_t,2));
49
50 [opinion_2d_o,opinion_2d_v] = meshgrid(opinion_vec,opinion_vec);
51 figure
52 for ind=1:length(time_vec)
53     rho_t_x_sq = reshape(rho_t_x(:,ind), length(opinion_vec),...
54         length(opinion_vec));
55     subplot(1,length(time_vec),ind)
56     contour(opinion_2d_o, opinion_2d_v, real(rho_t_x_sq))
57     grid
58     grid minor
59     title(['t = ',num2str(time_vec(ind))])
60     xlabel('x_1')
61     ylabel('x_2')
62 end
63
64 % Secondo intervallo temporale --> (23,52]
65 nn = 2;

```

```

66 time_vec = [24,38,52] - times(2);
67 times(3) = time_vec(end) + times(2);
68
69 [~, ~, ~, rho_t, ~, ~, rho_zero_mean_vec, sigma_y] = ...
70   J1_discrete_compute_6(alpha_vec, zeta_fun, rhozero_vec, ...
71   prejudice_fun, rho_zero_mean_vec, Corr, personalities_vec, M, ...
72   Diff_mat, nn, opinion_vec_tot, time_vec, sigma_y);
73 rho_t_x = squeeze(sum(rho_t,2));
74
75 [opinion_2d_o,opinion_2d_v] = meshgrid(opinion_vec,opinion_vec);
76 figure
77 for ind=1:length(time_vec)
78   rho_t_x_sq = reshape(rho_t_x(:,ind), length(opinion_vec), ...
79   length(opinion_vec));
80   subplot(1,length(time_vec),ind)
81   contour(opinion_2d_o, opinion_2d_v, real(rho_t_x_sq))
82   grid
83   grid minor
84   title(['t = ',num2str(time_vec(ind)+times(2))])
85   xlabel('x_1')
86   ylabel('x_2')
87 end
88
89 % Terzo intervallo temporale --> (52,72]
90 nn = 6;
91 time_vec = [53,62,72] - times(3);
92 times(4) = time_vec(end) + times(3);
93
94 [~, ~, ~, rho_t, ~, ~, rho_zero_mean_vec, sigma_y] = ...
95   J1_discrete_compute_6(alpha_vec, zeta_fun, rhozero_vec, ...
96   prejudice_fun, rho_zero_mean_vec, Corr, personalities_vec, M, ...
97   Diff_mat, nn, opinion_vec_tot, time_vec, sigma_y);
98 rho_t_x = squeeze(sum(rho_t,2));
99
100 [opinion_2d_o,opinion_2d_v] = meshgrid(opinion_vec,opinion_vec);
101 figure
102 for ind=1:length(time_vec)
103   rho_t_x_sq = reshape(rho_t_x(:,ind), length(opinion_vec), ...
104   length(opinion_vec));
105   subplot(1,length(time_vec),ind)
106   contour(opinion_2d_o, opinion_2d_v, real(rho_t_x_sq))
107   grid
108   grid minor
109   title(['t = ',num2str(time_vec(ind)+times(3))])
110   xlabel('x_1')
111   ylabel('x_2')
112 end
113
114 % Quarto intervallo temporale --> (72,103]

```

```

115 nn = 2;
116 time_vec = [73,88,103] - times(4);
117 times(5) = time_vec(end) + times(4);
118
119 [~, ~, ~, rho_t, ~, ~, rho_zero_mean_vec, sigma_y] = ...
120   J1_discrete_compute_6(alpha_vec, zeta_fun, rhozero_vec,...
121   prejudice_fun, rho_zero_mean_vec, Corr, personalities_vec, M,...
122   Diff_mat, nn, opinion_vec_tot, time_vec, sigma_y);
123 rho_t_x = squeeze(sum(rho_t,2));
124
125 [opinion_2d_o,opinion_2d_v] = meshgrid(opinion_vec,opinion_vec);
126 figure
127 for ind=1:length(time_vec)
128   rho_t_x_sq = reshape(rho_t_x(:,ind), length(opinion_vec),...
129   length(opinion_vec));
130   subplot(1,length(time_vec),ind)
131   contour(opinion_2d_o, opinion_2d_v, real(rho_t_x_sq))
132   grid
133   grid minor
134   title(['t = ',num2str(time_vec(ind)+times(4))])
135   xlabel('x_1')
136   ylabel('x_2')
137 end
138
139 % Quinto intervallo temporale --> (103,123]
140 nn = 6;
141 time_vec = [104,113,123] - times(5);
142 times(6) = time_vec(end) + times(5);
143
144 [~, ~, ~, rho_t, ~, ~, rho_zero_mean_vec, sigma_y] = ...
145   J1_discrete_compute_6(alpha_vec, zeta_fun, rhozero_vec,...
146   prejudice_fun, rho_zero_mean_vec, Corr, personalities_vec, M,...
147   Diff_mat, nn, opinion_vec_tot, time_vec, sigma_y);
148 rho_t_x = squeeze(sum(rho_t,2));
149
150 [opinion_2d_o,opinion_2d_v] = meshgrid(opinion_vec,opinion_vec);
151 figure
152 for ind=1:length(time_vec)
153   rho_t_x_sq = reshape(rho_t_x(:,ind), length(opinion_vec),...
154   length(opinion_vec));
155   subplot(1,length(time_vec),ind)
156   contour(opinion_2d_o, opinion_2d_v, real(rho_t_x_sq))
157   grid
158   grid minor
159   title(['t = ',num2str(time_vec(ind)+times(5))])
160   xlabel('x_1')
161   ylabel('x_2')
162 end
163

```

```

164 % Sesto intervallo temporale --> (123,154]
165 nn = 2;
166 time_vec = [124,139,154] - times(6);
167 times(7) = time_vec(end) + times(6);
168
169 [~, ~, ~, rho_t, ~, ~, rho_zero_mean_vec, sigma_y] = ...
170     J1_discrete_compute_6(alpha_vec, zeta_fun, rhozero_vec,...
171     prejudice_fun, rho_zero_mean_vec, Corr, personalities_vec, M,...
172     Diff_mat, nn, opinion_vec_tot, time_vec, sigma_y);
173 rho_t_x = squeeze(sum(rho_t,2));
174
175 [opinion_2d_o,opinion_2d_v] = meshgrid(opinion_vec,opinion_vec);
176 figure
177 for ind=1:length(time_vec)
178     rho_t_x_sq = reshape(rho_t_x(:,ind), length(opinion_vec),...
179         length(opinion_vec));
180     subplot(1,length(time_vec),ind)
181     contour(opinion_2d_o, opinion_2d_v, real(rho_t_x_sq))
182     grid
183     grid minor
184     title(['t = ',num2str(time_vec(ind)+times(6))])
185     xlabel('x_1')
186     ylabel('x_2')
187 end

```

Codice A.6: Funzione annessa all'esempio 4. Permette di ottenere gli estremi degli intervalli in cui l'opinione converge rispettando il criterio di ottimalità

```

1 function [T,mu1, rho_zero_mean_vec1,sigma_y1] = f_t_max_conv(mu_prec,...
2     toll, t_in, alpha_vec, zeta_fun, rhozero_vec, prejudice_fun,...
3     rho_zero_mean_vec, Corr, personalities_vec, M, Diff_mat, nn,...
4     opinion_vec_tot, sigma_y)
5
6 dist = 1; % Inizializzazione della variabile che effettua il controllo
7 t = 1;
8 T = t_in;
9 mu = zeros(length(rho_zero_mean_vec),2);
10 mu(:,1) = mu_prec;
11 mu(:,2) = mu_prec;
12
13 while dist >= toll
14     mu(:,1) = mu(:,2);
15     rho_zero_mean_vec1 = rho_zero_mean_vec;
16     sigma_y1 = sigma_y;
17     [~, mu(:,2), ~, ~, ~, rho_zero_mean_vec, sigma_y] = ...
18         J1_discrete_compute_6(alpha_vec, zeta_fun, rhozero_vec,...
19         prejudice_fun, rho_zero_mean_vec, Corr, personalities_vec, M,...
20         Diff_mat, nn, opinion_vec_tot, t_in,sigma_y);
21     dist = max(abs(mu(:,2)-mu(:,1)));

```

```

22     t = t + 1;
23     t_in = 1; % Diventa la variabile che determina l'ampiezza del passo.
24 end
25
26 T = T + (t-2)*t_in;
27 mu1 = mu(:,1);

```

Codice A.7: Funzione annessa all'esempio 4. Permette di ottenere gli estremi degli intervalli in cui l'opinione diverge rispettando il criterio di ottimalità

```

1 function [T,mu1,rho_zero_mean_vec1,sigma_y1] = f_t_max_div(mu_prec,...
2     t_in, estr, alpha_vec, zeta_fun, rhozero_vec, prejudice_fun,...
3     rho_zero_mean_vec, Corr, personalities_vec, M, Diff_mat, nn,...
4     opinion_vec_tot, sigma_y)
5
6 t = t_in;
7 mu = zeros(length(rho_zero_mean_vec),2);
8 mu(:,1) = mu_prec;
9 mu(:,2) = mu_prec;
10
11 while max(abs(mu(:,2))) < estr
12     mu(:,1) = mu(:,2); % Salvo il vettore mu dell'istante precedente
13     rho_zero_mean_vec1 = rho_zero_mean_vec;
14     sigma_y1 = sigma_y;
15     [~, mu(:,2), ~, ~, ~, rho_zero_mean_vec, sigma_y] = ...
16         J1_discrete_compute_6(alpha_vec, zeta_fun, rhozero_vec,...
17             prejudice_fun, rho_zero_mean_vec, Corr, personalities_vec, M,...
18             Diff_mat, nn, opinion_vec_tot, t_in,sigma_y);
19     t = t + 1;
20     t_in = 1; % Dopo la prima iterazione, procedo con passo delta_t = 1
21 end
22
23 T = t - 2;
24 mu1 = mu(:,1);

```

Appendice B

Codici Matlab per il caso Z tempo-variante in modo continuo

Codice B.1: Funzione per calcolare l'evoluzione delle opinioni nel tempo

```
1 function [J1, mu_vec, sigma2_vec, rho_t, xi_mat, Psi_mat,...
2     rho_zero_mean_vec2, sigma_y2, z2] = J1_discrete_compute_7(alpha_vec, ...
3     zeta_fun, rhozero_vec, prejudice_fun, rho_zero_mean_vec, Corr,...
4     personalities_vec, M, Diff_mat, opinion_vec_tot, delta_t, t, sigma_y, nn)
5
6 % INPUTS:
7 % alpha_vec --> vettore che contiene tutti i valori di testardaggine per
8 %             ogni personalita
9 % zeta_fun --> funzione handle per le matrici Z(p,q)
10 % rho_zero_vec --> vettore che contiene la distribuzione sulle personalita
11 % prejudice_fun --> funzione handle per il pregiudizio u(p)
12 % rho_zero_mean_vec --> vettore che contiene la distribuzione media
13 %                    iniziale condizionata alle personalita p_i
14 % Corr --> matrice di correlazione C, dimensioni (NxN),
15 %         con N = dimensione spazio delle opinioni
16 % personalities_vec --> vettore che contiene le personalita p_i
17 % M --> numero di personalita distinte presenti nel modello
18 % Diff_mat --> tensore di diffusione D
19 % opinion_vec_tot --> campione dello spazio di opinioni discreto
20 % delta_t --> passo temporale, ovvero il tempo dt durante il quale procede
21 %             la dinamica del sistema
22 % t --> istante temporale di partenza, utilizzato per trovare il valore di
23 %       z_2, che viene fissato per un intervallo di lunghezza delta_t
24 % sigma_y --> matrice di covarianza della distribuzione rho_0(y|p)
25 % nn --> variabile utilizzata per scegliere la funzione, dipendente dal
26 %       tempo, con cui calcolare il valore di z_2 per l'intervallo corrente
```

```

27
28 % OUTPUTS:
29 % J1 --> soluzione dell'equazione al punto fisso (3.21)
30 % mu_vec --> vettore che contiene i valori medi della funzione di Green,
31 %          ovvero il risultato dell'equazione (3.13)
32 % sigma2_vec --> vettore che contiene i valori dell matrice di covarianza
33 %          della funzione di Green, ovvero il risultato
34 %          dell'equazione (3.12)
35 % rho_t --> densita delle opinioni, soluzione dell'equazione di FP (3.11)
36 % xi_mat --> matrice Xi
37 % Psi_mat --> matrice Psi
38 % rho_zero_mean_vec2 --> vettore che contiene la distribuzione media
39 %          condizionata alle personalita p_i, calcolata
40 %          nell'ultimo istante presente in time_vec.
41 %          Se l'analisi prosegue nel tempo, si utilizza come
42 %          input del passaggio successivo
43 % sigma_y2 --> matrice di covarianza della distribuzione rho_T(y|p), quindi
44 %          anch'essa relativa all'ultimo istante presente in time_vec
45 % z2 --> variabile che contiene il valore di z2 utilizzato nella matrice Z
46 %          nel dt corrente
47
48 N = size(Corr,1);
49 prejudice_vec = feval(prejudice_fun, personalities_vec);
50 [personalities_xx, personalities_yy] = meshgrid(personalities_vec,...
51         personalities_vec);
52 zeta_mat = feval(zeta_fun, personalities_xx, personalities_yy, t, nn);
53 z2 = -zeta_mat(end,1);
54
55 J0_vec = zeta_mat * rhozero_vec;
56 alpha_mat = kron(diag(alpha_vec),eye(N));
57 xi_mat = kron(diag(J0_vec),eye(N)) * (eye(N*M)-alpha_mat) *...
58         kron(eye(M),Corr) + kron(diag(alpha_vec),Corr);
59 zeta_mat = kron(zeta_mat, Corr);
60
61 rho1_mat = kron(diag(rhozero_vec),eye(N)) * alpha_mat;
62 rho2_mat = kron(diag(rhozero_vec),eye(N)) * (eye(N*M)-alpha_mat);
63 Psi_mat = xi_mat - rho2_mat * zeta_mat;
64 v1tilde_vec = rho1_mat * kron(eye(M),Corr) * prejudice_vec;
65 stat_vec = xi_mat \ (alpha_mat * kron(eye(M),Corr) * prejudice_vec + ...
66         (eye(M*N) - alpha_mat) * zeta_mat * (Psi_mat \ v1tilde_vec));
67
68 [Theta_Xi, Lambda_Xi] = eig(xi_mat);
69 Theta_XiInv = inv(Theta_Xi);
70 App_mat2 = Theta_Xi \ kron(eye(M), Diff_mat) * Theta_XiInv.';
71
72 rho0_mat = kron(diag(rhozero_vec),eye(N));
73 v0tilde_vec = rho0_mat * rho_zero_mean_vec;
74 nostat_vec = v0tilde_vec - Psi_mat \ v1tilde_vec;
75

```

```

76 J1 = zeta_mat * (expm(- Psi_mat * delta_t) * v0tilde_vec + ...
77     Psi_mat \ (eye(M*N) - expm(- Psi_mat * delta_t)) * v1tilde_vec);
78 disp('Computed solution of integral equation!')
79
80 [Theta_Psi, Lambda_Psi] = eig(Psi_mat);
81 Theta_PsiInv = inv(Theta_Psi);
82 App_mat1 = (Theta_Xi \ zeta_mat) * Theta_Psi;
83 sigma2_vec = zeros(M*N, M*N);
84
85 Int_mat1 = zeros(M*N);
86 Int_mat2 = zeros(M*N);
87 for ind2 = 1:M*N
88     for ind3 = 1:M*N
89         if(Lambda_Xi(ind2,ind2) ~= Lambda_Psi(ind3,ind3))
90             Int_mat1 = Int_mat1 + Theta_Xi(:,ind2) * ...
91                 (exp(-Lambda_Psi(ind3,ind3) * delta_t) - ...
92                  exp(-Lambda_Xi(ind2,ind2) * delta_t)) / ...
93                 (Lambda_Xi(ind2,ind2) - Lambda_Psi(ind3,ind3)) * ...
94                 App_mat1(ind2,ind3) * Theta_PsiInv(ind3,:);
95         else
96             Int_mat1 = Int_mat1 + Theta_Xi(:,ind2) * delta_t * ...
97                 exp(-Lambda_Xi(ind2,ind2) * delta_t) * ...
98                 App_mat1(ind2,ind3) * Theta_PsiInv(ind3,:);
99         end
100        Int_mat2 = Int_mat2 + Theta_Xi(:,ind2) * (1 - ...
101            exp(-(Lambda_Xi(ind2,ind2) + Lambda_Xi(ind3,ind3)) * ...
102              delta_t)) / (Lambda_Xi(ind2,ind2) + Lambda_Xi(ind3,ind3)) * ...
103            App_mat2(ind2,ind3) * (Theta_Xi(:,ind3)).';
104    end
105 end
106 mu_vec = expm(- xi_mat * delta_t) * rho_zero_mean_vec + (eye(M*N) - ...
107     expm(- xi_mat * delta_t)) * stat_vec + (eye(M*N) - alpha_mat) * ...
108     Int_mat1 * nostat_vec;
109 sigma2_vec(:, :) = Int_mat2 + expm(- xi_mat * delta_t) * ...
110     sigma_y * expm(- xi_mat' * delta_t);
111 disp('Computed mean and variance of Green function!')
112
113 rho_t = zeros(size(opinion_vec_tot,2), M);
114 for ind2 = 1:M
115     mu = mu_vec((ind2-1)*N+(1:N));
116     sigma2_mat = sigma2_vec((ind2-1)*N+(1:N), (ind2-1)*N+(1:N));
117     sigma2_mat = (sigma2_mat+sigma2_mat')/2;
118     rho_t(:,ind2) = rhozero_vec(ind2) * ...
119         mvnpdf(opinion_vec_tot', mu', sigma2_mat);
120 end
121 disp('Computed opinion density!')
122
123 rho_zero_mean_vec2 = mu_vec;
124 sigma_y2 = sigma2_vec;

```

Codice B.2: Script tramite cui si ottengono tutti i grafici degli esempi 5-6-7

```
1 clear
2 close all
3 clc
4
5 Factor = 10;
6 P = 10/Factor;
7
8 alpha_fun = @f_alpha;
9 rhozero_fun = @f_rho;
10 prejudice_fun = @f_prejudice;
11 rhozero_mean_op_fun = @f_rhozero_mean_op;
12 zeta_fun = @f_zetaC;
13
14 opinion_vec = (-20:0.05:20)/Factor;
15 M = 4;
16
17 rho = 1.;
18 Corr = [1,rho;1e-10,1];
19
20 sigma2n = 10^-3;
21 Diff_mat = sigma2n * (Corr * Corr');
22 N_dim = size(Corr,1);
23
24 opinion_vec_tot = opinion_vec;
25 for ind=1:N_dim-1
26     opinion_vec_tot = [kron(opinion_vec_tot, ones(1,size(opinion_vec,2)));\dots
27         kron(ones(1,size(opinion_vec_tot,2)), opinion_vec)];
28 end
29
30 personalities_vec = reshape(linspace(-P,P,M),M,1);
31 alpha_vec = alpha_fun(personalities_vec);
32 rhozero_vec = rhozero_fun(personalities_vec);
33 rhozero_vec = rhozero_vec/sum(rhozero_vec);
34 rho_zero_mean_vec = rhozero_mean_op_fun(personalities_vec,N_dim);
35
36 sigma_y = 0;
37
38 % Il valore di nn permette di scegliere la funzione che determina quanto
39 % vale z2, riferendosi alla function f_zetaC
40 nn = 1;
41 %nn = 2;
42 %nn = 3;
43 T = 15;
44 delta_t = 0.05; % passo temporale
45 time_vec = (0:delta_t:T);
```

```

46 time_vec(1) = [];
47 aut_Xi = zeros(1,1);
48 aut_Psi = zeros(1,1);
49 z1 = 1;
50 alpha = 0.01;
51 z2 = zeros(1,1);
52
53 i = 1;
54 for k = 1:length(time_vec)
55     t = time_vec(k);
56     [J1, mu_vec, sigma2_vec, rho_t, Xi_mat, Psi_mat, rho_zero_mean_vec,...
57      sigma_y, z2(k)] = J1_discrete_compute_7(alpha_vec, zeta_fun,...
58      rhozero_vec, prejudice_fun, rho_zero_mean_vec, Corr,...
59      personalities_vec, M, Diff_mat, opinion_vec_tot, delta_t, t,...
60      sigma_y, nn);
61
62     % Effettuo controllo sull'attivita dell'autovalore minimo di Psi
63     flag = 0;
64     beta = alpha + (1-alpha)*(z1-z2(k))/2;
65     Z = kron([z1, -z2(k); -z2(k), z1], ones(M/2));
66     Psi_tilde = beta*eye(M) - ((1-alpha)/M)*Z;
67     [V1, V2] = eig(Psi_tilde);
68     a = ones(M,1);
69     a(M/2+1:end,1) = -1;
70     while flag == 0
71         [m, index] = min(diag(V2));
72         if abs(V1(:,index)'*a) <= 10^-10
73             V2(index,index) = inf;
74         else
75             flag = 1;
76         end
77     end
78     aut_Xi(k) = min(real(eig(Xi_mat)));
79     aut_Psi(k) = m;
80
81     % Salvo rho_t_x per plottare i grafici dell'evoluzione
82     if mod(k,12) == 0 && k ~= 12
83         time(i) = t;
84         rho_t_x(:,i) = squeeze(sum(rho_t,2));
85         i = i+1;
86     end
87 end
88
89 % Plot dei grafici dell'evoluzione delle opinioni
90 [opinion_2d_o, opinion_2d_v] = meshgrid(opinion_vec, opinion_vec);
91 m = -1;
92 for k = 1:size(rho_t_x,2)
93     if mod(k,3) == 1
94         m = m + 1;

```

```
95     figure
96     end
97     rho_t_x_sq = reshape(rho_t_x(:,k), length(opinion_vec),...
98         length(opinion_vec));
99     subplot(1,3,k-3*m)
100     contour(opinion_2d_o, opinion_2d_v, real(rho_t_x_sq))
101     grid
102     grid minor
103     title(['t = ', num2str(time(k))])
104     xlabel('x_1')
105     ylabel('x_2')
106 end
107
108 figure
109 plot(time_vec, aut_Xi, 'or', time_vec, aut_Psi, '*g');
110 grid
111 grid minor
112 xlabel('tempo t')
113 legend('Autovalori minimi Xi', 'Autovalori minimi Psi')
114
115 % Plot della funzione f_i per la condizione di stabilita della covarianza
116 val_f = zeros(length(aut_Xi),1);
117 for k = 1:length(aut_Xi)
118     val_f(k) = sum(aut_Xi(1:k))*delta_t;
119 end
120
121 % Plot della funzione g_i per la condizione di stabilita della media
122 val_h = zeros(length(aut_Psi),1);
123 for k = 1:length(aut_Psi)
124     val_h(k) = sum(aut_Psi(1:k))*delta_t;
125 end
126 val_g = min(val_f, val_h);
127
128 figure
129 plot(time_vec, val_f, 'or', time_vec, val_g, '*g')
130 grid
131 grid minor
132 xlabel('tempo t')
133 legend('Funzione f_i', 'Funzione g_i')
```

Appendice C

Funzioni Matlab che definiscono alcune variabili del problema, utilizzate negli esempi

Codice C.1: Funzione che calcola il valore di α per ogni personalità

```
1 function y = f_alpha(x)
2 y = 0.01*ones(size(x));
```

Codice C.2: Funzione che calcola il valore di α per il caso con 3 comunità

```
1 function y = f_alpha_3com(x, M)
2 k1 = 0.01;
3 k2 = 0.01;
4 k3 = 0.01;
5 y = ones(size(x));
6 for k = 1:M/3
7     y(k) = k1*y(k);
8 end
9 for k = (M/3+1):(2*M/3)
10    y(k) = k2*y(k);
11 end
12 for k = (2*M/3+1):M
13    y(k) = k3*y(k);
14 end
```

Codice C.3: Funzione che inizializza ρ per ogni personalità

```
1 function y = f_rho(x)
2 y = ones(size(x));
```

Codice C.4: Funzione che setta il valore del pregiudizio \mathbf{u} per ogni personalità

```
1 function y = f_prejudice(x)
2 vec_app = [0.;-1];
3 vec_app2 = [0.;1];
4 len1 = length(x);
5 y = [repmat(vec_app,len1/2,1); repmat(vec_app2,len1/2,1)];
```

Codice C.5: Funzione che permette di cambiare il valore del pregiudizio \mathbf{u} per ogni personalità

```
1 function y = f_change_prejudice_3com(M,x)
2 % Al posto di x si passa rho_zero_mean_vec
3 k = M/3+1;
4 vec_app1 = [x(1);x(2)];
5 vec_app2 = [x(1+k);x(2+k)];
6 vec_app3 = [x(1+2*k);x(2+2*k)];
7
8 l = length(x)/2;
9 y = [repmat(vec_app1,l/3,1); repmat(vec_app2,l/3,1); ...
10      repmat(vec_app3,l/3,1)];
```

Codice C.6: Funzione che inizializza il valore medio della densità di opinione per ogni personalità

```
1 function y = f_rhozero_mean_op(x,N)
2 len1 = length(x);
3 y = zeros(N*len1,1);
```

Codice C.7: Funzione che permette di definire il valore del parametro ζ_2 . Questa funzione è utilizzata soltanto per gli esempi del caso **Z** tempo-variante in intervalli di tempo

```
1 function y = f_zeta(x1, x2, n)
2 if n == 1
3     y = 0.65 + 0.35*sign(x1.*x2);           % n = 1 --> z2 = -0.3
4 elseif n == 2
5     y = 0.6 + 0.4*sign(x1.*x2);           % n = 2 --> z2 = -0.2
6 elseif n == 3
7     y = 0.55 + 0.45*sign(x1.*x2);        % n = 3 --> z2 = -0.1
8 elseif n == 4
9     y = 0.5 + 0.5*sign(x1.*x2);           % n = 4 --> z2 = 0
10 elseif n == 5
11     y = 0.498+0.502*sign(x1.*x2);        % n = 5 --> z2 = 0.004
```

```

12 elseif n == 6
13     y = 0.45 + 0.55*sign(x1.*x2);           % n = 6 --> z2 = 0.1
14 elseif n == 7
15     y = -4.5 + 5.5*sign(x1.*x2);           % n = 7 --> z2 = 10
16 elseif n == 8
17     y = 0.475 + 0.525*sign(x1.*x2);       % n = 8 --> z2 = 0.05
18 elseif n == 9
19     y = -2 + 3*sign(x1.*x2);               % n = 9 --> z2 = 5
20 elseif n == 10
21     y = 0.435 + 0.565*sign(x1.*x2);       % n = 10 --> z2 = 0.13
22 end

```

Codice C.8: Funzione che restituisce la matrice \underline{Z} nel caso con 3 comunità. In questo caso si passano direttamente nell'input i valori delle variabili della matrice

```

1 function Z = f_zeta_3_com(M, z12, z23, z31)
2 Z = kron([1, -z12, -z31; -z12, 1, -z23; -z31, -z23, 1], ones(M/3));

```

Codice C.9: Funzione che permette di calcolare il valore del parametro ζ_2 per ogni istante di interesse. Questa funzione è utilizzata soltanto per gli esempi del caso continuo

```

1 function y = f_zetaC(x1, x2, t, n)
2 z1 = 1;
3 if n == 1
4     z2 = 0.5*cos((2*pi/5)*t);
5 elseif n == 2
6     z2 = -0.4*atan(t-5);
7 elseif n == 3
8     z2 = 0.4*atan(t-5);
9 end
10 y = (z1-z2)/2 + sign(x1.*x2)*(z1+z2)/2;

```

NOTA: per effettuare le simulazioni nei casi con 3 comunità si utilizza una funzione molto simile alla funzione utilizzata per calcolare l'evoluzione delle opinioni nel tempo, a cui però si aggiungono tre input: i valori dei parametri $\zeta_{i,j}$. Essi vengono poi passati alla funzione che costruisce la matrice \underline{Z} .

Bibliografia

- Daniel M Abrams and Steven H Strogatz. Modelling the dynamics of language death. *Nature*, 424(6951):900–900, 2003.
- Robert Axelrod. The dissemination of culture: A model with local convergence and global polarization. *Journal of conflict resolution*, 41(2):203–226, 1997.
- Christopher A Bail, Lisa P Argyle, Taylor W Brown, John P Bumpus, Haohan Chen, MB Fallin Hunzaker, Jaemin Lee, Marcus Mann, Friedolin Merhout, and Alexander Volfovsky. Exposure to opposing views on social media can increase political polarization. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 115(37):9216–9221, 2018.
- Delia Baldassarri and Andrew Gelman. Partisans without constraint: Political polarization and trends in american public opinion. *American Journal of Sociology*, 114(2):408–446, 2008.
- Andrea Baronchelli. The emergence of consensus: a primer. *Royal Society open science*, 5(2):172189, 2018.
- Fabian Baumann, Philipp Lorenz-Spreen, Igor M Sokolov, and Michele Starnini. Emergence of polarized ideological opinions in multidimensional topic spaces. *Physical Review X*, 11(1):011012, 2021.
- Adam J Berinsky. Measuring public opinion with surveys. *Annual review of political science*, 20:309–329, 2017.
- Adrián Carro, Raúl Toral, and Maxi San Miguel. The role of noise and initial conditions in the asymptotic solution of a bounded confidence, continuous-opinion model. *Journal of Statistical Physics*, 151(1):131–149, 2013.
- Claudio Castellano, Santo Fortunato, and Vittorio Loreto. Statistical physics of social dynamics. *Reviews of modern physics*, 81(2):591, 2009a.
- Claudio Castellano, Miguel A Muñoz, and Romualdo Pastor-Satorras. Nonlinear q-voter model. *Physical Review E*, 80(4):041129, 2009b.
- Andres Chacoma and Damian H Zanette. Opinion formation by social influence: From experiments to modeling. *PloS one*, 10(10):e0140406, 2015.

- Peter Clifford and Aidan Sudbury. A model for spatial conflict. *Biometrika*, 60(3):581–588, 1973.
- Rosaria Conte, Nigel Gilbert, Giulia Bonelli, Claudio Cioffi-Revilla, Guillaume Deffuant, Janos Kertesz, Vittorio Loreto, Suzy Moat, J-P Nadal, Anxo Sanchez, et al. Manifesto of computational social science. *The European Physical Journal Special Topics*, 214(1):325–346, 2012.
- Philip E Converse. The nature of belief systems in mass publics (1964). *Critical review*, 18(1-3):1–74, 2006.
- Mario J de Oliveira. Isotropic majority-vote model on a square lattice. *Journal of Statistical Physics*, 66(1):273–281, 1992.
- Guillaume Deffuant, David Neau, Frederic Amblard, and Gerard Weisbuch. Mixing beliefs among interacting agents. *Advances in Complex Systems*, (3):11, 2001.
- Morris H DeGroot. Reaching a consensus. *Journal of the American Statistical association*, 69(345):118–121, 1974.
- David Garcia, Adiya Abisheva, Simon Schweighofer, Uwe Serdült, and Frank Schweitzer. Ideological and temporal components of network polarization in online political participatory media. *Policy & internet*, 7(1):46–79, 2015.
- Edward L Glaeser and Bryce A Ward. Myths and realities of american political geography. *Journal of Economic Perspectives*, 20(2):119–144, 2006.
- James P Gleeson. High-accuracy approximation of binary-state dynamics on networks. *Physical Review Letters*, 107(6):068701, 2011.
- James P Gleeson. Binary-state dynamics on complex networks: Pair approximation and beyond. *Physical Review X*, 3(2):021004, 2013.
- Sandra González-Bailón. Social science in the era of big data. *Policy & internet*, 5(2):147–160, 2013.
- Mark Granovetter. Threshold models of collective behavior. *American journal of sociology*, 83(6):1420–1443, 1978.
- Boris L Granovsky and Neal Madras. The noisy voter model. *Stochastic Processes and their applications*, 55(1):23–43, 1995.
- Thilo Gross and Bernd Blasius. Adaptive coevolutionary networks: a review. *Journal of the Royal Society Interface*, 5(20):259–271, 2008.
- Francisco Herrerías-Azcué and Tobias Galla. Consensus and diversity in multistate noisy voter models. *Physical Review E*, 100(2):022304, 2019.
- Petter Holme and Fredrik Liljeros. Mechanistic models in computational social science. *Frontiers in Physics*, 3:78, 2015.

- Gerardo Iniguez, János Kertész, Kimmo K Kaski, and Raphael Angl Barrio. Opinion and community formation in coevolving networks. *Physical Review E*, 80(6):066119, 2009.
- Márton Karsai, Gerardo Iniguez, Kimmo Kaski, and János Kertész. Complex contagion process in spreading of online innovation. *Journal of The Royal Society Interface*, 11(101):20140694, 2014.
- Barbara A Kitchenham and Shari L Pfleeger. Personal opinion surveys. In *Guide to advanced empirical software engineering*, pages 63–92. Springer, 2008.
- David Lazer, Alex Pentland, Lada Adamic, Sinan Aral, Albert-László Barabási, Devon Brewer, Nicholas Christakis, Noshir Contractor, James Fowler, Myron Gutmann, et al. Computational social science. *Science*, 323(5915):721–723, 2009.
- Jan Lorenz. Continuous opinion dynamics under bounded confidence: A survey. *International Journal of Modern Physics C*, 18(12):1819–1838, 2007.
- Aaron M McCright and Riley E Dunlap. The politicization of climate change and polarization in the american public’s views of global warming, 2001–2010. *The Sociological Quarterly*, 52(2):155–194, 2011.
- Miller McPherson, Lynn Smith-Lovin, and James M Cook. Birds of a feather: Homophily in social networks. *Annual review of sociology*, pages 415–444, 2001.
- Stephen Morris. Contagion. *The Review of Economic Studies*, 67(1):57–78, 2000.
- Ted Mouw and Michael E Sobel. Culture wars and opinion polarization: the case of abortion. *American Journal of Sociology*, 106(4):913–943, 2001.
- Alessandro Nordio, Alberto Tarable, Carla-Fabiana Chiasserini, and Emilio Leonardi. Belief dynamics in social networks: A fluid-based analysis. *IEEE Transactions on Network Science and Engineering*, 5(4):276–287, 2017.
- Alessandro Nordio, Alberto Tarable, Carla-Fabiana Chiasserini, and Emilio Leonardi. Opinion dynamics on correlated subjects in social networks. *IEEE Transactions on Network Science and Engineering*, 7(3):1901–1912, 2019.
- Piotr Nyczka, Katarzyna Sznajd-Weron, and Jerzy Cisko. Phase transitions in the q-voter model with two types of stochastic driving. *Physical Review E*, 86(1):011105, 2012.
- Sergey E Parsegov, Anton V Proskurnikov, Roberto Tempo, and Noah E Friedkin. Novel multidimensional models of opinion dynamics in social networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62(5):2270–2285, 2016.
- Romualdo Pastor-Satorras, Claudio Castellano, Piet Van Mieghem, and Alessandro Vespignani. Epidemic processes in complex networks. *Reviews of modern physics*, 87(3):925, 2015.
- Antonio F Peralta, Matteo Neri, János Kertész, and Gerardo Iniguez. Effect of algorithmic bias and network structure on coexistence, consensus, and polarization of opinions. *Physical Review E*, 104(4):044312, 2021.

- Sidney Redner. Reality-inspired voter models: A mini-review. *Comptes Rendus Physique*, 20(4):275–292, 2019.
- Frank Schweitzer and Laxmidhar Behera. Nonlinear voter models: the transition from invasion to coexistence. *The European Physical Journal B*, 67(3):301–318, 2009.
- Alina Sîrbu, Vittorio Loreto, Vito DP Servedio, and Francesca Tria. Opinion dynamics: models, extensions and external effects. In *Participatory sensing, opinions and collective awareness*, pages 363–401. Springer, 2017.
- Vishal Sood and Sidney Redner. Voter model on heterogeneous graphs. *Physical review letters*, 94(17):178701, 2005.
- Dietrich Stauffer. Sociophysics simulations ii: opinion dynamics. In *AIP Conference Proceedings*, volume 779, pages 56–68. American Institute of Physics, 2005.
- Federico Vazquez, Xavier Castelló, and Maxi San Miguel. Agent based models of language competition: macroscopic descriptions and order–disorder transitions. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2010(04):P04007, 2010.
- Federico Vazquez, Ernesto S Loscar, and Gabriel Baglietto. Multistate voter model with imperfect copying. *Physical Review E*, 100(4):042301, 2019.
- Alessandro Vespignani. Modelling dynamical processes in complex socio-technical systems. *Nature physics*, 8(1):32–39, 2012.
- Allan R Vieira and Celia Anteneodo. Threshold q-voter model. *Physical Review E*, 97(5):052106, 2018.
- Allan R Vieira, Antonio F Peralta, Raul Toral, Maxi San Miguel, and Celia Anteneodo. Pair approximation for the noisy threshold q-voter model. *Physical Review E*, 101(5):052131, 2020.
- Claudia Wagner, Markus Strohmaier, Alexandra Olteanu, Emre Kıcıman, Noshir Contractor, and Tina Eliassi-Rad. Measuring algorithmically infused societies. *Nature*, 595(7866):197–204, 2021.
- Zhen Wang, Marko Jusup, Hao Guo, Lei Shi, Sunčana Geček, Madhur Anand, Matjaž Perc, Chris T Bauch, Jürgen Kurths, Stefano Boccaletti, et al. Communicating sentiment and outlook reverses inaction against collective risks. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 117(30):17650–17655, 2020.
- Haixiang Xia, Huili Wang, and Zhaoguo Xuan. Opinion dynamics: A multidisciplinary review and perspective on future research. *International Journal of Knowledge and Systems Science (IJKSS)*, 2(4):72–91, 2011.
- Haifeng Zhang and Yevgeniy Vorobeychik. Empirically grounded agent-based models of innovation diffusion: a critical review. *Artificial Intelligence Review*, 52(1):707–741, 2019.