



**Politecnico  
di Torino**

**Politecnico di Torino**

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

A.a. 2021/2022

Sessione di Laurea Dicembre 2022

# **Modelli 2D avanzati per lo studio di strutture in materiale iperelastico**

**Relatore:**

Prof. ALFONSO PAGANI

**Candidata:**

ELISA TORTORELLI

**Correlatori:**

Prof. MATTEO FILIPPI

Ing. RICCARDO AUGELLO

# Sommario

L'analisi elastica e geometrica non lineare delle travi e delle piastre è un punto fondamentale nello studio delle strutture non solo in campo aerospaziale, ma anche meccanico, robotico, biomedico e così via. Per questo, è fondamentale avere dei modelli accurati in grado di descrivere il comportamento delle strutture sottoposte a grandi deformazioni. In particolare, in questo elaborato verranno considerate strutture costituite sia da materiali linearmente elastici sia da materiali iperelastici.

Le strutture fatte di materiali iperelastici anche detti *soft materials* sono in grado di raggiungere grandi deformazioni prima di giungere a rottura. La loro applicazione è spesso utilizzata in differenti settori e per la produzione di diversi dispositivi quali sensori di pressione, compositi ottici e così via. I modelli utilizzati per descrivere il loro comportamento sono anche fondamentali in ambito biomedico, perché descrivono il comportamento di molti materiali biologici.

L'analisi non lineare dei materiali iperelastici quasi incomprimibili, però, porta con sé una serie di sfide a causa dell'ordine di grandezza del modulo di compressibilità elevato rispetto al modulo di taglio. Questo infatti causa instabilità e matrici di rigidezza mal condizionate. In questo elaborato, per far fronte a questo tipo di analisi, si ricorrerà al metodo  $\bar{F}$ , basato sulla divisione del gradiente di deformazione in due parti: una parte legata alla deformazione e una parte isocora. Inoltre verrà introdotta la definizione di energia di deformazione e verranno utilizzati modelli dipendenti solo dal primo invariante del tensore di deformazione Cauchy-Green. Per studiare e analizzare il comportamento delle strutture e quindi affrontare l'analisi non lineare verrà implementato il metodo agli elementi finiti tramite l'utilizzo della *Carrera Unified Formulation* (CUF).

La CUF permette di poter scrivere le equazioni di qualsiasi teoria 1D, 2D o 3D in termini di pochi nuclei fondamentali (FNs), la cui forma non dipende dalle assunzioni usate sul tipo e ordine della funzione per descrivere il campo degli spostamenti. In base alle dimensioni della struttura in esame, infatti, se una o più dimensioni sono trascurabili rispetto alle altre, è possibile scrivere il campo degli spostamenti in modo diverso. In questa formulazione unificata, vengono utilizzate

delle funzioni di espansione basate su polinomi di Taylor o di Lagrange al variare della tipologia del problema. L'utilizzo di questa formulazione porta a scrivere le equazioni di governo non lineari tramite il principio degli spostamenti virtuali, con matrici di rigidezza secante e tangente in termini di nuclei fondamentali.

La soluzione numerica viene ottenuta tramite l'utilizzo dello schema numerico di Newton-Raphson basato sul metodo *path following* e sul metodo *arch-length*. Secondo questo metodo è possibile scrivere in forma linearizzata il vettore delle forze nodali residue. Tramite l'utilizzo di un opportuno schema incrementale si risolvono le equazioni.

La seguente tesi presenta una prima parte di descrizione teorica, dove vengono argomentate l'analisi di deformazione, l'analisi di tensione e definite le varie grandezze in gioco e una seconda parte, in cui vengono illustrati i risultati numerici ottenuti tramite il metodo FEM basati sulla CUF sia per strutture con non-linearità geometriche, sia per strutture con non-linearità sia geometriche che fisiche (iperelastiche). Vengono principalmente approfondite strutture di tipo piastra sottoposte a pressione uniforme. Tutte le simulazioni sono state effettuate tramite l'utilizzo del codice *MUL*<sup>2</sup>, realizzato dal gruppo di ricerca *MUL*<sup>2</sup> del Politecnico di Torino. Da questo lavoro in futuro si potrebbero affrontare altre analisi su altri modelli strutturali considerando, ad esempio, strutture disomogenee, anisotrope oppure analizzare problemi di interazione fluido-struttura e così via.

# Ringraziamenti

*Ringrazio, prima di tutto, il mio relatore il prof. Alfonso Pagani per l'opportunità di poter svolgere questo elaborato di tesi, per gli insegnamenti trasmessi e per la sua grande disponibilità.*

*Ringrazio sinceramente il prof. Matteo Filippi e il dott. Riccardo Augello per i preziosi consigli e l'aiuto costante dato in questi mesi per la stesura dell'elaborato. La mia gratitudine va al Politecnico e alla città di Torino, per la possibilità di raggiungere questo traguardo e per essere diventata in questi anni una seconda casa.*

*Non posso che ringraziare tutte le persone a me più care:*

*Ad Antonella, amica e sorella di una vita, grazie per avermi compresa e supportata in ogni momento della mia vita. Non smetterò mai di ringraziarti per la tua profonda e sincera amicizia.*

*A Grazia e Luca, alle nostre lunghe chiacchierate e vivaci discussioni. Grazie per aver condiviso con me follie e risate.*

*Agli amici di una vita che mi hanno sempre supportata e che, nonostante la distanza, ho sempre sentito vicino. Grazie per avermi accompagnato in questo viaggio.*

*A Catiana e Debora, la mia famiglia torinese. Alle nostre tisane, alle risate, ai pianti e ai consigli condivisi. Quello che abbiamo condiviso durante questo percorso non è semplice da spiegare. Ci siamo spesso definite un pacchetto unico ed è proprio così: siamo state l'una il bastone dell'altra e non smetterò mai di ringraziarvi per tutto quello che mi avete dato. Forse un giorno ad Alghero ci andremo davvero.*

*A tutte le persone incontrate durante questo percorso: amici, coinquilini e compagni di università. Ognuno di voi mi ha regalato e fatto scoprire cose meravigliose.*

*A tutta la mia numerosa e folle famiglia, parte fondamentale del mio percorso di formazione e approccio alla vita.*

*Ai miei genitori, a voi devo ogni traguardo raggiunto. Grazie per i valori trasmessi. Senza di voi tutto questo non sarebbe stato possibile.*

*Ai miei fratelli, anzi fratellini, come vi chiamavo da bambina. Grazie per i vostri saggi consigli e il vostro perenne supporto.*

*Al mio piccolo Daniele, so quanto sia difficile per un bambino come te affrontare la lontananza che questo percorso comporta ma spero di essere stata per te un discreto esempio di vita e averti trasmesso la passione e la determinazione per poter raggiungere degli obiettivi. Spero che tu un giorno possa comprendermi e possa essere fiero di me. Grazie per l'amore che ogni giorno mi dai.*

*Infine, a me stessa. Alla me del passato e alla sua determinazione, alla me del presente e alle sue paure, alla me del futuro e alla sua curiosità.*

*Si conclude un importante capitolo della mia vita.*

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>9</b>
1.1	Strutture in materiale iperelastico . . . . .	9
1.2	Modelli strutturali unidimensionali . . . . .	11
1.3	Modelli strutturali bidimensionali . . . . .	12
1.4	Modelli strutturali tridimensionali . . . . .	14
1.5	Scopo e contenuto dell'elaborato . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Elementi di meccanica dei continui</b>	<b>16</b>
2.1	Analisi della deformazione . . . . .	16
2.1.1	Spostamenti e deformazioni . . . . .	16
2.1.2	Deformazione di un elemento di area (formula di Nanson) . . . . .	18
2.1.3	Deformazioni finite e infinitesime . . . . .	19
2.2	Analisi della tensione . . . . .	22
2.2.1	Equazioni globali di equilibrio . . . . .	23
2.2.2	Primo e secondo tensore di Piola-Kirchhoff . . . . .	24
2.3	Principio dei lavori virtuali . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Materiali elastici</b>	<b>28</b>
3.1	Elasticità lineare: leggi costitutive . . . . .	29
3.2	Isotropia elastica . . . . .	30
<b>4</b>	<b>Materiali iperelastici</b>	<b>31</b>
4.1	Energia di deformazione . . . . .	31
4.1.1	Modello Neo-Hookean . . . . .	32
4.1.2	Modello Gent . . . . .	33
4.1.3	Modello di Fung-Demiray . . . . .	33
4.1.4	Modello esponenziale-logaritmico di Khajehsaeid . . . . .	33
4.2	Tensore Jacobiano . . . . .	34
<b>5</b>	<b>Formulazione unificata</b>	<b>36</b>
5.1	Equazioni di governo e relazioni geometriche . . . . .	36

5.2	Formulazione unificata di Carrera (CUF) e FEM . . . . .	38
5.2.1	1D CUF-FEM: Modello trave . . . . .	38
5.2.2	2D CUF-FEM: Modello piastra . . . . .	40
5.3	Espansione di Taylor TE . . . . .	42
5.4	Espansione di Lagrange LE . . . . .	43
<b>6</b>	<b>Analisi dei grandi spostamenti e delle grandi deformazioni</b>	<b>46</b>
6.1	Non-linearità puramente geometriche . . . . .	46
6.1.1	Matrice di rigidità secante . . . . .	47
6.1.2	Matrice di rigidità tangente . . . . .	48
6.2	Non-linearità fisiche e geometriche . . . . .	50
6.2.1	Matrice di rigidità tangente . . . . .	50
6.3	Vettore dei carichi e delle forze interne . . . . .	53
6.4	Assemblaggio della matrice di rigidità globale . . . . .	54
<b>7</b>	<b>Metodi di risoluzione per equazioni non lineari</b>	<b>56</b>
7.1	Equazioni di governo non lineare in forma matriciale . . . . .	56
7.2	Linearizzazione di Newton-Raphson . . . . .	56
7.2.1	Linearizzazione per materiali iperelastici . . . . .	57
7.2.2	Metodo <i>load control</i> . . . . .	58
7.2.3	Metodo <i>arc-length</i> . . . . .	60
7.3	Descrizione del codice MUL2 . . . . .	63
<b>8</b>	<b>Risultati numerici</b>	<b>65</b>
8.1	Modelli 1D con non linearità geometriche . . . . .	65
8.1.1	Trave incastrata soggetta a carico trasversale . . . . .	65
8.1.2	Trave incastrata soggetta a carico di compressione assiale . . . . .	67
8.2	Modelli 2D con non linearità geometriche . . . . .	69
8.2.1	Piastra soggetta a pressione trasversale uniforme . . . . .	69
8.3	Modelli iperelastici 1D . . . . .	73
8.3.1	Tensione uniassiale . . . . .	73
8.3.2	Trave soggetta a flessione . . . . .	74
8.3.3	Cilindro iperelastico . . . . .	80
8.3.4	Conclusioni . . . . .	82
8.4	Modelli iperelastici 2D . . . . .	83
8.4.1	Trave soggetta a flessione con modello CUF-2D . . . . .	83
8.4.2	Piastra quadrata con pressione uniforme . . . . .	84
8.4.3	Piastra iperelastica di materiale biologico . . . . .	86
8.4.4	Piastra rettangolare: confronto tra non linearità geometriche e non linearità geometriche e fisiche . . . . .	87
8.4.5	Piastra iperelastica: confronto con dati sperimentali . . . . .	91

<i>INDICE</i>	8
<b>9 Conclusioni</b>	<b>95</b>
9.1 Sviluppi futuri . . . . .	96
<b>A Funzioni di forma</b>	<b>97</b>
A Elemento B2 . . . . .	97
B Elemento B3 . . . . .	97
C Elemento B4 . . . . .	98
<b>B Nuclei fondamentali della matrice di rigidezza secante e tangente</b>	<b>99</b>
A Nuclei fondamentali degli elementi 1D CUF . . . . .	99
B Nuclei fondamentali degli elementi 2D CUF . . . . .	101

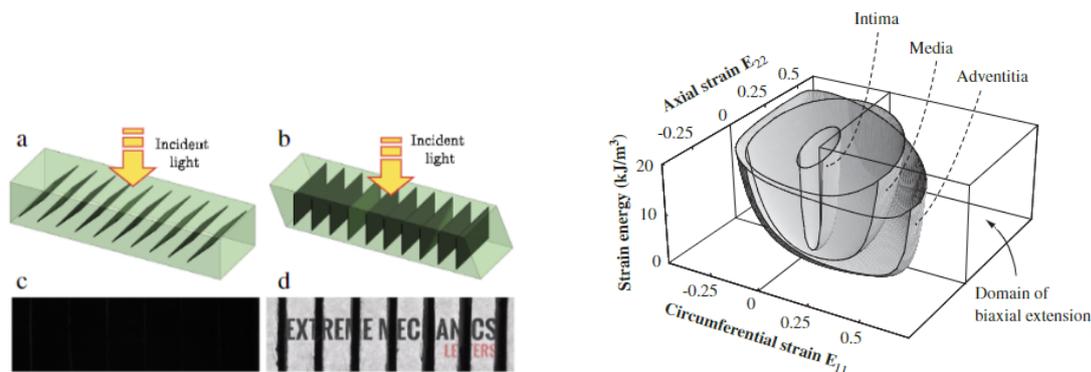
# Capitolo 1

## Introduzione

### 1.1 Strutture in materiale iperelastico

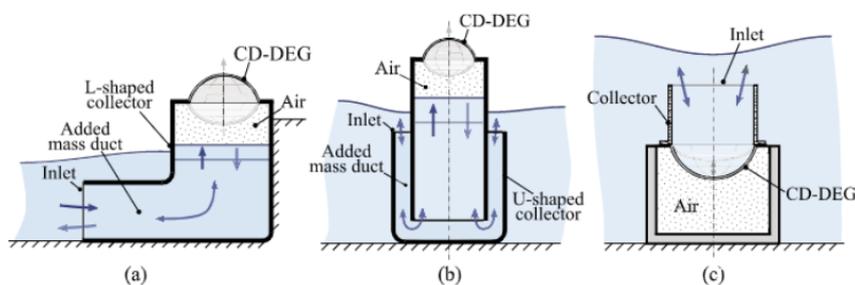
L'obiettivo principale di questo elaborato sarà l'analisi statica di modelli 2D di strutture in materiale iperelastico. Questa tipologia di materiali, infatti, trova largo impiego in diversi ambiti ingegneristici, da quello aerospaziale a quello biomedico utilizzati per protesi, robot, imballaggi, sensori di pressione e così via. É importante, quindi, l'applicazione di una funzione di energia di deformazione appropriata per modellare le strutture. Nel lavoro di Khaniki et al. [65] vengono investigate strutture relative a materiali biologici di alcune parti del corpo come cervello, arterie, muscoli scheletrici, pelle, tessuto adiposo e problemi relativi a strutture polimeriche in diverse condizioni meccaniche. Infatti, nella realtà le strutture possono subire grandi deformazioni dove le equazioni costitutive elastiche non hanno più validità. Inoltre, alcune strutture presentano una regione lineare del modello costitutivo molto piccola, mostrando così un comportamento non lineare. I ricercatori hanno così sviluppato diversi modelli di funzione di energia di deformazione per descrivere l'elasticità non lineare e le grandi deformazioni. Tra le più diffuse troviamo i modelli di Neo-Hookean, Mooney-Rivlin, Ogden, Gent e il modello esponenziale-logaritmico descritte da Khaniki et al. [37].

Sviluppare un modello appropriato può aiutare per esempio nell'ambito della neurochirurgia [27], nella diagnosi del cancro al seno differenziando i tessuti sani da quelli malati [12], nella descrizione del comportamento delle arterie [49] [64] per quanto riguarda l'ambito biomedico. Considerando, invece, i possibili sviluppi ottenuti in campo meccanico e aerospaziale, i materiali iperelastici possono essere sfruttati per produrre dispositivi caratterizzati da proprietà elastiche uniche, come ad esempio sensori di pressione [11], compositi ottici usati per la trasmittanza ottica [68], dispositivi che sfruttano i SEAM (*soft electroactive materials*) per la conversione dell'energia meccanica in energia elettrica come i dispositivi WEC



(a) Concetto di *switch* ottico in cui vengono utilizzati compositi *soft*[68]. Permesso concesso da Elsevier.

(b) Energia di deformazione dei tre strati aortici [64]. Permesso concesso da Elsevier.



(c) Differenti modelli di dispositivi WEC con membrana in materiale iperelastico [41]. Permesso concesso da Elsevier.

Figura 1.1: Diversi esempi di strutture in materiale iperelastico utilizzate in differenti ambiti ingegneristici.

(*wave energy converter*) in grado di convertire l'energia del moto ondoso in energia elettrica tramite una membrana di materiale dielettrico [26] [41]. In **Figura 1.1** vengono mostrati alcuni esempi di strutture in materiale iperelastico.

L'analisi non lineare di questi materiali iperelastici quasi incompressibili, porta con sé alcune difficoltà: il modulo di compressibilità presenta degli ordini di grandezza molto più grandi rispetto al modulo di taglio. Questo genera instabilità e fenomeni di *locking*. Molti ricercatori hanno quindi cercato di far fronte a queste difficoltà. Tra i vari lavori troviamo quello di Sussman e Bathe [31] dove viene presentata una formulazione agli elementi finiti per l'analisi con non linearità sia geometriche che fisiche di solidi comprimibili e incompressibili. Altri lavori, invece, considerano formulazione miste come quello di Caylak e Mahnken [28]. Tutti questi lavori si basano principalmente sul metodo  $\bar{\mathbf{F}}$ , in cui il gradiente di defor-

mazione viene diviso in due parti: una isocora e l'altra legata alla deformazione. Risulta quindi fondamentale sviluppare modelli semplici e accurati per l'analisi non lineare di strutture 1D e 2D in materiale iperelastico. Tra questi troviamo quello proposto da Chen e Wang [33] dove vengono mostrate le equazioni di governo di Yeoh di una trave iperelastica usando il principio del potenziale minimo di energia. Sia Chen [32] che Breslavsky [36] [35] hanno analizzato il comportamento statico di piastre sottili di materiale Neo-Hookean e Mooney-Rivlin. Inoltre, Amabili [59] ha studiato il comportamento di una piastra in silicone e, adottando il metodo agli elementi finiti, ha confrontato la soluzione con i dati sperimentali.

Lo studio proposto quindi avrà come principale obiettivo quello di dimostrare la validità del metodo agli elementi finiti basato sulla CUF sia unidimensionale che bidimensionale per l'analisi non lineare delle strutture in materiale iperelastico ponendo principalmente attenzione sulle piastre, dove le matrici saranno scritte in termini di nuclei fondamentali e quindi le equazioni potranno essere scritte in forma compatta.

## 1.2 Modelli strutturali unidimensionali

L'analisi strutturale geometrica non lineare delle travi e delle piastre è uno dei punti chiave della meccanica delle strutture. L'accuratezza dei modelli utilizzati per descrivere il loro comportamento è fondamentale in quanto queste strutture vengono utilizzate in molti ambiti ingegneristici: strutture alari, antenne spaziali, braccia robotiche e così via.

Nel caso delle teorie *beam*, un modello eccellente per l'analisi geometrica non lineare è rappresentato dall'*elastica* di Eulero-Bernoulli [60]. Definita con la sigla EBBM, questa teoria presenta la formulazione più semplice possibile attribuibile ad una trave e considera una condizione di flessione pura senza tener conto delle deformazioni a taglio trasversale, considerando la curvatura locale proporzionale al momento flettente.

Un'altra teoria molto conosciuta del modello *beam* è la teoria di Timoshenko [30] indicata dalla sigla TBM. Questo modello, a differenza della EBBM, considera una distribuzione uniforme del taglio sulla sezione della trave ottenendo così una teoria più accurata.

Queste teorie classiche però risultano accurate solo per l'analisi a flessione di strutture allungate e a sezione compatta e omogenea. In presenza di travi tozze, a parete sottile o a sezione aperta bisogna utilizzare metodi più sofisticati. Questo infatti richiede l'utilizzo di modelli tridimensionali. L'analisi delle grandi deformazioni di modelli 3D, però, è complicata. Per far fronte a queste difficoltà, molti ricercatori hanno introdotto metodi in grado di ovviare ad alcuni problemi incontrati. Per esempio, Argyris et al. [46]-[44], hanno introdotto le "rotazioni semi-tangenziali"

e la matrice di rigidezza geometrica di un elemento *beam* 3D usando una tecnica basata sui modi naturali. Bathe e Bolourchi [66], invece, hanno presentato un'analisi delle grandi deformazioni di un elemento *beam* 3D basato su una formulazione Lagrangiana aggiornata più efficiente. Un maggiore approfondimento dello stato dell'arte delle analisi non lineare di modelli *beam* 3D è possibile trovarlo nei lavori di Yang et al. [8].

Considerando, invece, lavori basati sulla TBM, Reissner ha considerato il problema dell'accoppiamento della deformazione flesso-torsionale delle travi [73]. In molti lavori, i problemi 3D di elasticità non lineare sono stati sistematicamente divisi in un'analisi lineare 2D lungo la sezione trasversale e un'analisi non lineare 1D lungo l'asse della trave (come mostrato nei lavori di Yu et al. [53]).

Per superare i limiti delle teorie classiche sono state sviluppate teorie *high-order*, cioè modelli di ordine superiore che migliorano l'accuratezza del campo degli spostamenti. Tra questi troviamo i modelli proposti da Vlasov [75], Bleich [2] e Murray [70]. Diversi lavori, inoltre, sono basati sulla valutazione del coefficiente correttivo del taglio, come ad esempio quelli presentati da Gruttmann e Wagner [54] in cui vengono discussi molti problemi strutturali tra cui tensioni di taglio tensionale e flessionale in travi prismatiche con sezioni trasversali arbitrarie a parete sottile.

Tra i lavori in cui viene discussa l'analisi della matrice di rigidezza di un elemento finito trave *high-order* troviamo quelli di Petrolito [71] e Eseinberger [58], in cui viene messa in evidenza l'importanza dei termini di ordine elevato per lo studio delle travi tozze. La teoria generalizzata delle travi (*GBT-generalized beam theory*) viene usata per implementare teorie della trave che tengano conto delle deformazioni planari della sezione trasversale, così da ottenere soluzioni simili al caso 2D (*shell*) utilizzando appropriate funzioni di forma sulla sezione. Questa teoria è stata estesa all'analisi post-buckling di telai in acciaio a parete sottile da Basaglia et al. [16].

### 1.3 Modelli strutturali bidimensionali

Nel caso invece delle teorie delle piastre e delle *shell*, esse vengono ampiamente impiegate in vari campi, ad esempio per lo studio di membrane spaziali, vele solari, strutture alari. Particolare importanza ricoprono anche in ambito biomedico, in quanto permettono lo studio di organi e tessuti biologici considerandole come strutture altamente flessibili e deformabili come descritto da Amabili [1]. Queste strutture sono suscettibili alle grandi deformazioni e quindi possono presentare instabilità (*buckling* e *post-buckling*). Nel caso di componenti strutturali in campo aerospaziale, essi devono essere progettati in modo tale da poter sostenere aumenti di carico senza giungere a rottura oltre il regime di *buckling* [14].

Le equazioni di governo differenziali che descrivono il comportamento elastico delle grandi deformazioni delle piastre rettangolari sono state presentate da von Kármán [67], la cui soluzione analitica non è molto semplice da trovare. Per questo, in letteratura, sono diversi i lavori riguardanti la risoluzione analitica e i metodi numerici usati per determinare le grandi deformazioni delle piastre. Questi metodi si basano sulla teoria delle piastre di Kirchhoff e tra i più diffusi troviamo il metodo della serie di Fourier [47], il metodo alle differenze finite [43] e il metodo agli elementi finiti [22]. Nell'elaborato di Chia [4] vengono investigate le grandi deformazioni di strutture 2D piastra nell'ambito della teoria classica della piastra (CLPT - *classical plate theory*). Questa teoria è troppo limitata poiché vengono trascurati gli effetti delle deformazioni di taglio trasversale e, quindi, non è in grado di descrivere l'analisi di grandi deformazioni perché le deformazioni a taglio diventano piuttosto significative in presenza di non linearità geometriche. Per ovviare a questo problema, molte sono state le teorie raffinate ricercate. Tra queste troviamo le FSDT (*first-order shear deformation theories*) sviluppate inizialmente da Reissner [72] e Mindlin [69] in grado di estendere l'analisi a problemi con non linearità geometriche e in presenza di flessione di piastre isotrope moderatamente spesse o laminati basati sulle relazioni tensione-deformazione di Von Kármán [17]. Secondo la teoria FSDT, il taglio è assunto come distribuzione costante lungo la direzione dello spessore e viene quindi introdotto un fattore di correzione di taglio per aggiustare la rigidità a taglio trasversale. Sono state successivamente proposte teorie di ordine elevato (HSDT) citate da Pagani et al. in [9].

La maggior parte delle teorie e dei lavori citati si basano sulla teoria non lineare delle piastre di Von Kármán, in cui si ipotizza che i termini non lineari nelle relazioni deformazioni-spostamenti che non possono essere trascurati sono quelli associati alle derivate parziali nel piano dello spostamento trasversale. Questa assunzione è accettabile per piastre (o *shell*) sottili, per piastre spesse questa approssimazione non è valida. Infatti, l'approssimazione delle deformazioni di Von Kármán senza modificare gli effetti del taglio sovrastima gli spostamenti trasversali, soprattutto nel regime non lineare [48]. Nelle teorie di ordine elevato, quindi, vengono considerati tutti i termini non lineari nel tensore di deformazione Green-Lagrange. Amabili e Alijani [34], per esempio, analizzano gli effetti della rotazione e dello spessore nell'analisi statica non lineare di una piastra isotropa rettangolare.

In questo elaborato, quindi, ci serviremo della *Carrera Unified Formulation* (CUF) per poter descrivere il comportamento in regime non lineare sia di problemi 1D (travi) sia per problemi 2D (piastre) con differenti condizioni al contorno e sottoposti a differenti carichi.

## 1.4 Modelli strutturali tridimensionali

Quando le strutture hanno una geometria complessa o nessuna dimensione prevale rispetto alle altre, parliamo di modelli 3D. Negli anni molti ricercatori hanno sviluppato nuovi modelli agli elementi finiti efficienti per l'analisi non lineare delle strutture sottili [55], [23], [56]. Questi tipi di elementi hanno dei vantaggi rispetto ai classici elementi *shell*: permettono l'utilizzo di misure della deformazione del continuo 3D impiegando solo gradi di libertà traslazionali. Questi elementi sono spesso basati sull'interpolazione dello spostamento lineare per raggiungere una determinata accuratezza computazionale. Come per le *shell*, anche in questo caso sono presenti fenomeni di *locking*, i quali possono superati tramite l'ANS (*Assumed Natural Strain*, l'EAS (*Enhanced Assumed Strain*) [23] e le formulazioni miste [74]. In alcuni dei lavori citati, questo tipo di elementi sono stati usati per descrivere travi composite o laminate e strutture *shell* sia in regime lineare che in regime non lineare. Per quanto concerne le interpolazioni di Lagrange di ordine elevato, esse sono state poco usate a causa dell'elevato numero di gradi di libertà e grande costo computazionale. Una valida alternativa è rappresentata dall'analisi isogeometrica (IGA) [52], perché permette di elevare l'ordine delle funzioni di forma mantenendo però lo stesso numero di gradi di libertà delle interpolazioni Lagrangiane lineari. Usare, però, funzioni di forma di ordine molto elevato elimina il fenomeno di *locking* ma aumenta il costo computazionale per l'integrazione a causa della matrice di rigidità meno sparsa. Per questo è preferibile utilizzare interpolazioni NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines), pur essendo soggette a fenomeni di *locking*. Un maggiore approfondimento sui modelli utilizzati nel campo non lineare e sulle formulazioni isogeometriche 3D e il metodo FEM applicato al caso tridimensionale sono fornite da Leonetti et al. [24], Crisfield [6] [7], Gruttmann et al. [63] e Coda [5].

## 1.5 Scopo e contenuto dell'elaborato

Il seguente elaborato si pone come principale obiettivo l'analisi non lineare di strutture bidimensionali, in particolare piastre sottoposte a pressione uniforme, in materiale iperelastico tramite l'utilizzo della Carrera Unified Formulation.

Dopo questo primo capitolo introduttivo, il Capitolo 2 descrive l'analisi della deformazione e della tensione, introducendo quindi tutte le grandezze in gioco. Successivamente, nei Capitoli 3 e 4, vengono mostrate le leggi costitutive nel caso di elasticità lineare e non lineare rispettivamente. In particolare, vengono approfondite e mostrate le formulazioni della funzione energia di deformazione per differenti modelli di materiale iperelastico. Come di seguito specificato, verranno descritte funzioni energia di deformazione dipendenti solo dal primo invariante del tensore

destro di deformazione di Cauchy-Green ai fini di questo elaborato.

Nel Capitolo 5 si pone attenzione sulla formulazione unificata di Carrera e sul metodo agli elementi finiti, descrivendo entrambi i modelli 1D e 2D e approfondendo le espansioni di Taylor e di Lagrange. Nei Capitoli 6 e 7, invece, si descrive l'analisi non lineare e si forniscono le matrici di rigidezza scritte in termini di nuclei fondamentali. Viene quindi implementato il metodo di Newton-Raphson per la risoluzione delle equazioni non lineari e viene fornita una descrizione approssimativa del codice MUL2 utilizzato per risolvere i problemi affrontati nel Capitolo 8. Questo capitolo, infatti, mostra dapprima i risultati ottenuti per problemi 1D e 2D con non linearità geometriche e successivamente vengono mostrati i risultati ottenuti dall'analisi non lineare di alcune strutture in materiale iperelastico. Particolare attenzione viene posta su piastre sottoposte a pressione uniforme.

# Capitolo 2

## Elementi di meccanica dei continui

### 2.1 Analisi della deformazione

#### 2.1.1 Spostamenti e deformazioni

Si considera un corpo continuo e si identificano con  $\mathbf{P}$  i suoi punti materiali coincidenti con i punti della regione  $C$  dello spazio euclideo tridimensionale detta *configurazione di riferimento*.

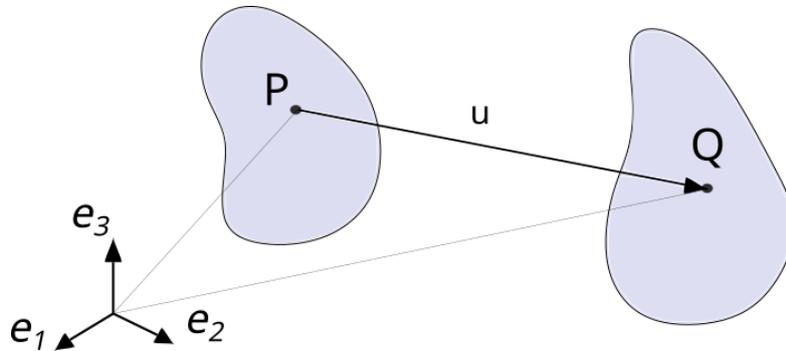


Figura 2.1: Configurazione di riferimento e configurazione deformata di un corpo continuo.

Definiamo ora la deformazione del corpo come la trasformazione che ad ogni punto  $\mathbf{P}$  della configurazione di riferimento associa un punto  $\mathbf{Q}$  dello spazio euclideo, il quale corrisponde alla posizione attuale del punto  $\mathbf{P}$ , quindi possiamo affermare che:

$$\mathbf{Q} = f(\mathbf{P}) \quad (2.1)$$

Introducendo il sistema di coordinate cartesiane ortonormali ( $e_1, e_2, e_3$ ), la posizione di un punto materiale può essere espressa in funzione delle componenti:

$$\mathbf{P} - \mathbf{O} = x_0 \mathbf{e}_1 + y_0 \mathbf{e}_2 + z_0 \mathbf{e}_3 \quad (2.2)$$

Il vettore posizione attuale invece sarà pari a:

$$\mathbf{Q} - \mathbf{O} = f(\mathbf{P}) - \mathbf{O} = f_1(x_0, y_0, z_0) \mathbf{e}_1 + f_2(x_0, y_0, z_0) \mathbf{e}_2 + f_3(x_0, y_0, z_0) \mathbf{e}_3 \quad (2.3)$$

La definizione di deformazione attraverso la (2.1) è troppo generale e porterebbe a stati deformazioni irregolari e privi di significato. Bisogna, quindi, restringere il campo di scelta della funzione  $f$ . Essa infatti deve essere biunivoca, continua e con inversa anche continua. Queste condizioni permettono che venga mantenuta la condizione di impenetrabilità, cioè che non creino creazioni o compenetrazioni di materia. La condizione di continuità, inoltre, garantisce che la deformazione non presenti salti bruschi.

Costruiamo ora la matrice delle derivate parziali delle funzioni  $f_1, f_2, f_3$  rispetto alle variabili  $x, y, z$ :

$$\mathbf{F} = \nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$\mathbf{F}$  è chiamato tensore di deformazione e poichè abbiamo dapprima stabilito la continuità della funzione  $f$ , allora:

$$\det \mathbf{F} \neq 0 \quad (2.5)$$

Inoltre, il  $\det \mathbf{F}$  non può assumere valori negativi.

Definiamo ora il campo degli spostamenti come:

$$\mathbf{u}(\mathbf{P}) = \mathbf{Q} - \mathbf{P} = f(\mathbf{p}) - \mathbf{P} = u \mathbf{e}_1 + v \mathbf{e}_2 + w \mathbf{e}_3 \quad (2.6)$$

Possiamo ora quindi definire il gradiente di spostamento  $\mathbf{H}$ :

$$\mathbf{H} = \nabla u = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

che definisce un campo di tensori del secondo ordine su  $C$ .

Facendo il gradiente di entrambi i membri della (2.6) e quindi otteniamo:

$$\nabla u = \nabla f - \mathbf{I} \quad (2.8)$$

che possiamo riscrivere come:

$$\mathbf{F} = \mathbf{H} + \mathbf{I} \quad (2.9)$$

L'eq. (2.9) è un'equazione fondamentale nell'analisi della deformazione. In generale, se  $\mathbf{F} = \mathbf{I}$  la deformazione si dice omogenea. Inoltre se  $\mathbf{F} = \mathbf{I}$  la deformazione corrisponde alla traslazione.

Il campo degli spostamenti  $u$  rappresenterà l'incognita del problema elastico.

### 2.1.2 Deformazione di un elemento di area (formula di Nanson)

Considero ora un elemento di area materiale nell'intorno di un punto  $X$ , la cui area infinitesima è  $dS$ . Durante la deformazione, l'elementino nella configurazione attuale sarà  $ds$  e subirà quindi un cambio in volume. Il volume infinitesimo possiamo scriverlo come:

$$dv = \det(\mathbf{F})dV = JdV \quad (2.10)$$

dove  $J = \det(\mathbf{F})$  è chiamato rapporto di volume o anche jacobiano della deformazione.

Consideriamo ora  $\mathbf{N}$  la normale dell'area infinitesima  $dS$  nella configurazione di riferimento e  $\mathbf{n}$  la normale dell'area infinitesima nella configurazione attuale  $ds$ . Ogni elemento di area è individuato da due elementi di linea  $dX_1$  e  $dX_2$  nella configurazione di riferimento e  $dx_1$  e  $dx_2$  nella configurazione attuale. Possiamo quindi scrivere il volume infinitesimo come:

$$dv = dx_1 dx_2 dx_3 = d\mathbf{s} \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{n} ds \cdot d\mathbf{x} \quad (2.11)$$

$$dV = dX_1 dX_2 dX_3 = d\mathbf{S} \cdot d\mathbf{X} = \mathbf{N} dS \cdot d\mathbf{X} \quad (2.12)$$

utilizzando la (2.10) è possibile scrivere:

$$d\mathbf{s} \cdot d\mathbf{x} = J d\mathbf{S} \cdot d\mathbf{X} \quad (2.13)$$

Considerando il gradiente di deformazione, posso riscrivere l'equazione come:

$$d\mathbf{s} \cdot \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} = J d\mathbf{S} \cdot d\mathbf{X} \quad (2.14)$$

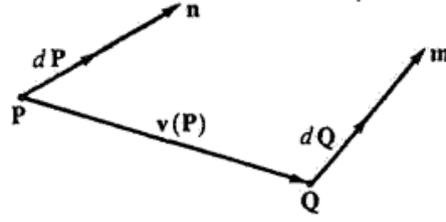


Figura 2.2: Vettori infinitesimi nella configurazione iniziale e a deformazione avvenuta.

$$(\mathbf{F}^T \cdot d\mathbf{s})d\mathbf{X} = Jd\mathbf{S} \cdot d\mathbf{X} \quad (2.15)$$

$$(\mathbf{F}^T \cdot d\mathbf{s} - Jd\mathbf{S})d\mathbf{X} = 0 \quad (2.16)$$

otteniamo così la formula di Nanson:

$$\mathbf{F}^T \cdot d\mathbf{s} - Jd\mathbf{S} \quad (2.17)$$

### 2.1.3 Deformazioni finite e infinitesime

Quello descritto fino ad ora ha validità generale, cioè si sono considerate *deformazioni finite* del continuo. Bisogna ora determinare una grandezza in grado di esprimere la misura della deformazione. Definiamo ora il *tensore di deformazione finita*:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (2.18)$$

che scritto in funzione del gradiente di spostamento  $\mathbf{H}$ :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{H}) \quad (2.19)$$

Per definire i parametri di misura della deformazione consideriamo  $d\mathbf{P}$  e  $d\mathbf{Q}$  i vettori infinitesimi con origine in  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{Q}$  rispettivamente e poniamo:

$$d\mathbf{P} = dp\mathbf{n}, \quad d\mathbf{Q} = dp\mathbf{m} \quad (2.20)$$

Allora il coefficiente di deformazione lineare in  $\mathbf{P}$  viene definito come:

$$\epsilon_n = \frac{dq - dp}{dp} = \frac{dq}{dp} - 1 \quad (2.21)$$

Una formula generale per il calcolo di  $\epsilon_n$  si ottiene tramite la definizione di trasposto di un tensore:

$$d\mathbf{Q} \cdot d\mathbf{Q} = (\mathbf{F}d\mathbf{P}) \cdot (\mathbf{F}d\mathbf{P}) = (\mathbf{F}^T \mathbf{F}d\mathbf{P}) \cdot d\mathbf{P} \quad (2.22)$$

e utilizzando la (2.20):

$$dq^2 = dp^2(\mathbf{F}^T \mathbf{F}\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} \quad (2.23)$$

Dividendo tutto per  $dp^2$  e considerando l'eq (2.21):

$$(\epsilon_n + 1)^2 = (\mathbf{F}^T \mathbf{F}\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} \quad (2.24)$$

quindi otteniamo l'espressione per il calcolo del coefficiente lineare:

$$\epsilon_n = [(\mathbf{F}^T \mathbf{F}\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}]^{1/2} - 1 \quad (2.25)$$

La misura della differenza tra l'angolo di due fibre ortogonali nella configurazione di riferimento rispetto alla configurazione deformata è chiamato *scorrimento mutuo* di cui daremo solo la definizione in questo elaborato, per maggiori chiarimenti si può consultare il libro di Sollaizzo [51]:

$$\text{sen}\gamma_{n\nu} = \frac{(\mathbf{F}^T \mathbf{F}\boldsymbol{\nu}) \cdot \mathbf{n}}{[(\mathbf{F}^T \mathbf{F}\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}]^{1/2}[(\mathbf{F}^T \mathbf{F}\boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\nu}]^{1/2}} \quad (2.26)$$

dove  $n$  e  $\nu$  sono le direzioni ortogonali dei due vettori iniziali.

Consideriamo ora la teoria infinitesimale, le cui condizioni fisiche associate sono che  $|\mathbf{u}|$  (modulo del vettore spostamento) sia piccolo e  $|\mathbf{H}|$  (modulo del gradiente di spostamento) sia anche piccolo.

Riscriviamo la (2.9) nella forma:

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \lambda\mathbf{H} \quad (2.27)$$

dove  $\lambda$  è un parametro reale, che assumeremo poi essere pari ad 1. Possiamo quindi riscrivere il tensore  $\mathbf{D}$  come:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} + \lambda\mathbf{H}^T)(\mathbf{I} + \lambda\mathbf{H}) - \mathbf{I} \quad (2.28)$$

Trascurando quindi  $\lambda^2$  otteniamo:

$$\mathbf{D} = \lambda\frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T) \quad (2.29)$$

quindi  $\mathbf{D}$  si riduce al tensore  $\mathbf{E}$  chiamato *tensore di deformazione infinitesima* di Green-Lagrange:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \lambda\mathbf{H}^T) \quad (2.30)$$

Possiamo inoltre definire un altro tensore chiamato tensore destro di Cauchy-Green pari a:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = (\mathbf{H} + \mathbf{I})^T (\mathbf{H} + \mathbf{I}) = \mathbf{H}^T \mathbf{H} + \mathbf{H}^T \mathbf{I} + \mathbf{I}^T \mathbf{H} + \mathbf{I}^T \mathbf{I} = \mathbf{H}^T \mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T + \mathbf{I} \quad (2.31)$$

Possiamo ora quindi definire sia il coefficiente di dilatazione lineare:

$$\epsilon_n = (\mathbf{E}\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} \quad (2.32)$$

sia lo scorrimento:

$$\gamma_{n\nu} = 2(\mathbf{E}\boldsymbol{\nu}) \cdot \mathbf{n} \quad (2.33)$$

Quindi il tensore di deformazione infinitesima sarà pari a:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} & \epsilon_{yy} & \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Le cui componenti sono di seguito definite:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (2.35)$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (2.36)$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (2.37)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (2.38)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \right] \quad (2.39)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right] \quad (2.40)$$

## 2.2 Analisi della tensione

Nella configurazione relativa alla deformazione ogni parte del corpo interagisce meccanicamente sia con la parte complementare sia con l'ambiente esterno. Queste interazioni non sono altro che forze la cui tipologia verrà descritta di seguito. Le forze possiamo principalmente distinguerle in:

- forze di volume, esercitate dall'ambiente sui punti interni del corpo;
- forze di contatto interne, agenti tra le varie parti del corpo;
- forze di contatto esterne, esercitate sulle porzioni della superficie del corpo dagli altri corpi che costituiscono l'ambiente.

Nella meccanica dei corpi deformabili, le prime hanno un ruolo marginale, dove invece prevalgono le forze di contatto. Queste forze vengono introdotte tramite il concetto di tensione, la cui formulazione la si deve a Eulero e Cauchy.

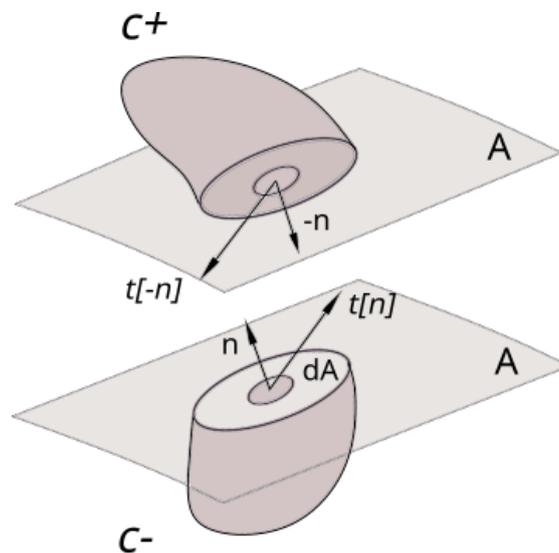


Figura 2.3: Vettore di tensione dell'elemento infinitesimo.

Come mostrato in **Figura 2.3** considero un corpo continuo diviso in due parti da un piano  $A$ . Il principio delle sezioni di Eulero afferma che l'azione che attraverso un intorno  $dA$  di  $\mathbf{P}$  su  $A$  la parte  $C^+$  esercita su  $C^-$  equivale ad un campo

di forze definito su  $dA$ . La risultante di questo campo di forze  $\Delta R$ , secondo il postulato di Cauchy, deve ammettere limite finito al tendere dell'intorno a  $\mathbf{P}$ :

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{R}}{\Delta A} = \mathbf{t}_n \quad (2.41)$$

dove  $\mathbf{t}_n$  corrisponde alla tensione per unità di area nel punto  $\mathbf{P}$  relativa al piano con normale  $\mathbf{n}$ . Quindi è l'azione locale che al termine della deformazione la parte  $C^+$  esercita su  $C^-$ .

Il principio di Cauchy richiede anche che:

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{t}_n(\mathbf{P}, \mathbf{n}) \quad (2.42)$$

cioè che fissato  $\mathbf{P}$ , la tensioni vari solo con  $\mathbf{n}$ .

### 2.2.1 Equazioni globali di equilibrio

Definiamo ora la forza  $\mathbf{R}_\Omega$  e il momento risultante  $\mathbf{M}_\Omega$ . Considero una generica parte  $\Omega$  di  $C$  di frontiera  $S_\Omega$ , allora la forza risultante sarà:

$$\mathbf{R}_\Omega = \int_\Omega \mathbf{Y}(\mathbf{P}) dV + \int_{S_\Omega} \mathbf{t}_n(\mathbf{P}) dS \quad (2.43)$$

e il momento risultante:

$$\mathbf{M}_\Omega = \int_\Omega (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge \mathbf{Y}(\mathbf{P}) dV + \int_{S_\Omega} (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge \mathbf{t}_n(\mathbf{P}) dS \quad (2.44)$$

Eulero stabilisce che il corpo è in equilibrio solo se la forza e il momento risultante sono nulli per ogni parte  $\Omega$ , ovvero:

$$\mathbf{R}_\Omega = 0, \quad \mathbf{M}_\Omega = 0 \quad (2.45)$$

Questi assiomi ammettono una forma locale equivalente stabilita dal *Teorema di Cauchy-Poisson*. Esso si divide in tre parti:

- a. l'esistenza del tensore di tensione  $\boldsymbol{\sigma}$ ,
- b. le equazioni indefinite di equilibrio alla traslazione che equivalgono alla relazione:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{Y} = 0 \quad (2.46)$$

- c. le equazioni indefinite di equilibrio alla rotazione, che portano alla simmetria del tensore di tensione  $\boldsymbol{\sigma}$ :

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki} \quad (2.47)$$

Considerato il sistema di riferimento cartesiano ortonormale  $e_1, e_2, e_3$ , possiamo definire il tensore delle tensioni come:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Le cui componenti sono così definite:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{e}_1 & \tau_{xy} &= \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{e}_2 & \tau_{xz} &= \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \tau_{yx} &= \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{e}_1 & \sigma_{yy} &= \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{e}_2 & \tau_{yz} &= \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \tau_{zx} &= \mathbf{t}_3 \cdot \mathbf{e}_1 & \tau_{zy} &= \mathbf{t}_3 \cdot \mathbf{e}_2 & \sigma_{zz} &= \mathbf{t}_3 \cdot \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (2.49)$$

### 2.2.2 Primo e secondo tensore di Piola-Kirchhoff

Il valore in un punto del tensore degli sforzi  $\boldsymbol{\sigma}$  rappresenta una trasformazione lineare che ad un elemento di area orientata  $dA$  nell'intorno del punto  $x$  associa la forza elementare  $d\mathbf{p}$  che si trasmette attraverso l'area:

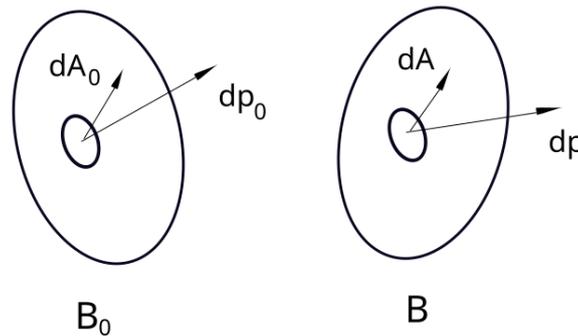


Figura 2.4: Configurazione di riferimento e configurazione deformata. Tensori elementari di area orientata e forza.

$$d\mathbf{p} = \boldsymbol{\sigma} d\mathbf{A} \quad (2.50)$$

Definiamo il vettore di area orientata nella configurazione attuale come:

$$d\mathbf{A} = \mathbf{J}\mathbf{F}^{-T}d\mathbf{A}_0 \quad (2.51)$$

Allora utilizzando la (2.50) si ottiene:

$$d\mathbf{p} = \mathbf{J}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T}d\mathbf{A}_0 \quad (2.52)$$

Abbiamo quindi definito il *primo tensore di Piola-Kirchhoff*  $\mathbf{P}$  degli sforzi:

$$\mathbf{P} = \mathbf{J}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} \quad (2.53)$$

Esso, infatti, associa ad ogni elemento di area elementare  $d\mathbf{A}_0$ , la forza elementare  $d\mathbf{p}$  agente sulla superficie spaziale  $d\mathbf{A}$  corrispondente a  $d\mathbf{A}_0$  nella deformazione. Considerando invece il vettore spaziale della forza elementare  $d\mathbf{p}_0$ :

$$d\mathbf{p}_0 = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{p} \quad (2.54)$$

sostituendo l'eq. (2.52) si ottiene:

$$d\mathbf{p}_0 = \mathbf{J}\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T}d\mathbf{A}_0 \quad (2.55)$$

dove definiamo il *secondo tensore di Piola-Kirchhoff* degli sforzi  $\mathbf{S}$ :

$$\mathbf{S} = \mathbf{J}\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} \quad (2.56)$$

Quindi i due tensori sono in relazione tra loro tramite:

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{P} \quad (2.57)$$

Queste tensori saranno fondamentali per la misura delle deformazioni e delle tensioni calcolate nei risultati descritti nei capitoli successivi.

## 2.3 Principio dei lavori virtuali

Il principio dei lavori virtuali collega le variabili dinamiche (di cui fanno parte le forze) con quelle cinematiche (di cui fanno parte gli spostamenti). La sua validità dipende principalmente dalla presenza nell'equazione di bilancio dal termine legato al flusso attraverso la superficie e l'altro legato ad una sorgente di volume.

Per la derivazione di tale principio, consideriamo  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{p}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$  un sistema di forze di volume, di forze superficiali e di tensioni interne equilibrate rispettivamente, relative alla configurazione B di un corpo continuo. Affinché il sistema sia equilibrato

devono essere soddisfatte l'equazione indefinita di equilibrio nel volume e la condizione di equilibrio al contorno sulla superficie del solido. Definita  $\partial B$  la superficie

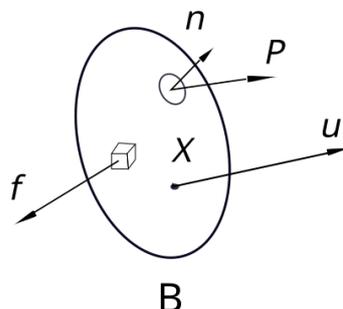


Figura 2.5: Forze di volume e forze di superficie agenti sul solido.

del solido e  $\mathbf{n}$  la normale al contorno:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} &= 0 \quad \text{in } B \\ \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} &= \mathbf{p} \quad \text{su } \partial B\end{aligned}\tag{2.58}$$

Definiamo ora  $\mathbf{u}$  come un campo di spostamenti virtuali dei punti di  $B$ , indipendente dal sistema delle forze precedentemente assegnato e sia  $\boldsymbol{\epsilon}$  il campo delle deformazioni linearizzato associato ad  $\mathbf{u}$ :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T]\tag{2.59}$$

Il principio dei lavori virtuali afferma che *il lavoro virtuale fatto dalle forze esterne per uno spostamento virtuale è uguale al lavoro virtuale fatto dalle tensioni interne per effetto della deformazione corrispondente* che in termini di equazione si formula nel seguente modo:

$$\int_{\partial B} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} \, dS + \int_B \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \, dV = \int_B \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \, dV\tag{2.60}$$

dove il primo membro dell'uguaglianza costituisce il lavoro virtuale delle forze esterne:

$$L_{ext} = \int_{\partial B} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} \, dS + \int_B \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \, dV\tag{2.61}$$

invece il secondo membro corrisponde al lavoro virtuale interno:

$$L_{int} = \int_B \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon} dV \quad (2.62)$$

Possiamo quindi scrivere il principio dei lavori virtuali come:

$$L_{ext} = L_{int} \quad (2.63)$$

Nell'espressione del lavoro interno, il termine  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon}$  rappresenta il prodotto scalare di due tensori, ciascuno dei quali presenta nove componenti e quindi risulta:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon} = \sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{zy} \gamma_{zy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yx} \gamma_{yx} \quad (2.64)$$

La dimostrazione del principio è lasciata al lettore e la si può trovare in [51] [76].

Da notare che, nel caso di piccoli spostamenti, tale principio è comunque dimostrato e la configurazione  $B$  va a coincidere con la configurazione  $B_0$  che diventa quindi la configurazione con la quale si eseguono gli integrali che definiscono i lavori virtuali.

# Capitolo 3

## Materiali elastici

L'analisi della deformazione e della tensione illustrata nel precedente capitolo è generale e traduce le proprietà comuni a tutti i corpi deformabili soggetti a forze. Come sappiamo, però, corpi aventi stessa geometria ma differente tipologia di materiale costitutivo possono presentare deformazioni differenti se sottoposti allo stesso sistema di forze. È necessario, quindi, introdurre leggi che siano in grado di descrivere il comportamento dei corpi di diversa natura e quindi fissarne le modalità di risposta alla deformazione. Tali relazioni vengono chiamate *leggi costitutive* e descrivono la diversa risposta di un corpo: da un comportamento di tipo *elastico*, le cui deformazioni si annullano al cessare delle tensioni, ad un comportamento *plastico* in cui, invece, anche al cessare delle tensioni le deformazioni permanenti restano. Inoltre, rimanendo in campo elastico, il legame tra tensioni e deformazioni può essere di tipo proporzionale lineare (parleremo di elasticità lineare) oppure può avere natura più complessa (iperelasticità). Inoltre, il comportamento del continuo può essere diverso nelle varie direzioni.

Le leggi costitutive possono essere suddivise in due grandi classi:

- relazioni che legano deformazione e tensione, come ad esempio le equazioni che descrivono il comportamento elastico, elasto-plastico e così via.
- relazioni che restringono la classe delle deformazioni possibili, per esempio corpi rigidi (capace di deformarsi solo rigidamente), corpi incomprimibili (capaci solo di deformazioni isocore), ecc.

### 3.1 Elasticità lineare: leggi costitutive

In generale, ad una data storia di deformazione  $\epsilon(t)$  precedente un dato istante  $t_0$  corrisponderà a quell'istante una data tensione. Se la tensione  $\sigma$  ad un dato istante è funzione solo della deformazione allo stesso istante e non dalla precedente storia di deformazione, allora il legame viene detto *elastico*:

$$\sigma = \sigma(\epsilon) \quad (3.1)$$

Il caso più semplice di legame elastico e quindi di legge costitutiva è quello dei *materiali linearmente elastici*, anche chiamata *Legge di Hooke*:

$$\sigma = \mathbb{C}[\epsilon] \quad (3.2)$$

dove  $\mathbb{C}$  è il tensore di elasticità lineare del quarto ordine che sotto forma di componenti si può scrivere come:

$$\sigma_{ij} = \sum_{hk} \mathbb{C}_{ijhk} \epsilon_{hk} \quad (3.3)$$

Le componenti  $\mathbb{C}_{ijhk}$  soddisfano le *simmetrie minori*:

$$\mathbb{C}_{ijhk} = \mathbb{C}_{jihk}, \quad \mathbb{C}_{ijhk} = \mathbb{C}_{ikhj} \quad (3.4)$$

La prima di (3.4) dipende dal fatto che  $\mathbb{C}[\epsilon]$  deve essere un tensore doppio simmetrico. La seconda, invece, dipende dal fatto che  $\mathbb{C}$  trasforma un tensore generico doppio  $\mathbf{A}$  allo stesso modo in cui trasforma il suo trasposto:

$$\mathbb{C}[\mathbf{A}] = \mathbb{C}[\mathbf{A}^T] \quad (3.5)$$

Le simmetrie minori permettono di passare da 81 a 36 componenti indipendenti  $\mathbb{C}_{ijhk}$  del tensore di elasticità lineare. Una proprietà più forte per  $\mathbb{C}$  è quella di *simmetria maggiore*, la quale consiste nella richiesta:

$$\mathbb{C}_{ijhk} = \mathbb{C}_{hki j} \quad (3.6)$$

Questa simmetria permette di far abbassare le componenti da 36 a 21 e caratterizza una speciale classe di materiali elastici.

## 3.2 Isotropia elastica

Un corpo isotropo è un corpo continuo per il quale in ogni suo punto il legame costitutivo non dipende da nessuna rotazione rigida, cioè le proprietà costitutive sono le stesse per tutte le direzioni.

Il legame elastico lineare sotto l'ipotesi di isotropia (quindi la legge di Hooke) è il seguente:

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda(\text{tr}\boldsymbol{\epsilon})\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\epsilon} \quad (3.7)$$

Da cui ne deriva che le componenti del tensore di elasticità sono date da:

$$\mathbb{C}_{ijkl} = \mu(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl}) + \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} \quad (3.8)$$

Le componenti del tensore di elasticità per materiali isotropi si riducono così a 9:

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

I coefficienti della matrice dipendono solo dal modulo di Young  $E$  e dal coefficiente di Poisson  $\nu$  :

$$\begin{aligned} C_{11} &= C_{22} = C_{33} = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ C_{12} &= C_{13} = C_{23} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ C_{44} &= C_{55} = C_{66} = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{aligned} \quad (3.10)$$

In questo elaborato verranno principalmente trattati casi di corpi isotropi.

# Capitolo 4

## Materiali iperelastici

### 4.1 Energia di deformazione

Un materiale iperelastico, chiamato spesso anche *Green – elastic material* in letteratura, presuppone l'esistenza di una funzione energia libera di Helmholtz. Quando questa  $\Psi = \Psi(\mathbf{F})$  è solo funzione del tensore gradiente di deformazione  $\mathbf{F}$ , allora essa viene definita come funzione di energia di deformazione. In questo elaborato si analizzeranno solo casi di materiali omogenei (quindi  $\Psi$  solo dipendente da  $\mathbf{F}$ ) perchè nel caso di materiali eterogenei  $\Psi$  dipende anche dalla posizione del punto.

Se considero un materiale iperelastico isotropo, la funzione energia di deformazione  $\Psi$  può essere espressa in termini di allungamenti principali ( $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ) i quali sono gli autovalori del tensore gradiente di deformazione  $\mathbf{F}$  o in modo equivalente in funzione degli invarianti ( $I_1, I_2, I_3$ ) del tensore di deformazione Cauchy-Green:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}. \quad (4.1)$$

Allora è possibile scrivere:

$$\Psi = \Psi(I_1, I_2, I_3) \quad (4.2)$$

Dove

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{tr}(\mathbf{C}) \\ I_2 &= \frac{1}{2}(I_1^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^2)) \\ I_3 &= \det(\mathbf{C}) \end{aligned} \quad (4.3)$$

dove  $\text{tr}(\bullet)$  e  $\det(\bullet)$  rappresentano rispettivamente la traccia e il determinante di un tensore.

Per materiali quasi incomprimibili, il determinante Jacobiano  $J = \det(\mathbf{F})$  rap-

presenta il *rapporto di volume*, quindi una misura di come cambia il volume, di conseguenza il valore di  $I_3$  è approssimativamente pari all'unità.

Considerando un approccio termodinamico, come descritto da Flory [61], il tensore  $\mathbf{F}$  può essere scritto suddividendolo in due parti:  $\mathbf{F}_{\text{vol}} = J^{\frac{1}{3}}\mathbf{1}$  e  $\bar{\mathbf{F}} = J^{-\frac{1}{3}}\mathbf{F}$  che rappresentano rispettivamente la parte volumetrica (legata alla deformazione) e la parte isocora. Allora tramite (4.1) è possibile scrivere  $\mathbf{C}_{\text{vol}} = J^{\frac{2}{3}}\mathbf{1}$  e  $\bar{\mathbf{C}} = J^{-\frac{2}{3}}\mathbf{C}$ , otteniamo così  $\mathbf{C} = \mathbf{C}_{\text{vol}}\bar{\mathbf{C}}$ . La funzione energia di deformazione può quindi ora essere scomposta nella sua parte volumetrica ( $U$ ) e isocora ( $\bar{\Psi}$ ):

$$\Psi = U(J) + \bar{\Psi}(\bar{I}_1, \bar{I}_2) \quad (4.4)$$

dove  $\bar{I}_1$  e  $\bar{I}_2$  rappresentano i primi due invarianti deviatori di deformazione., ovvero gli invarianti della parte isocora del tensore di Cauchy-Green  $\bar{\mathbf{C}}$ .

La funzione  $U(J)$  agisce come una penalizzazione dell'incompressibilità, inoltre essa deve essere strettamente convessa e due volte differenziabile e continua [25]. In letteratura sono presenti diverse formule, ma in questo elaborato facciamo riferimento a quella utilizzata da Sussman e Bathe [31], dove:

$$U(J) = \frac{1}{D_1}(J - 1)^2 \quad (4.5)$$

dove  $D_1 = 2/k$  è il parametro di incompressibilità del materiale e  $k$  è il modulo di compressibilità. Poichè  $k$  ha ordine di grandezza elevato e  $J \approx 1$ , questo pone molte sfide dal punto di vista numerico.

Per quanto concerne la definizione della parte isocora della funzione energia di deformazione  $\bar{\Psi}$ , in letteratura sono presenti molte definizioni di funzione di energia di deformazione. Quelle più comunemente usate, spesso per materiali biologici, sono classificate in base alla forma dell'equazione, al numero di invarianti utilizzati e all'abilità di avvicinarsi ai dati sperimentali [50]. Le forme polinomiali delle funzioni di energia di deformazione sono le più diffuse grazie alla loro semplicità e alla loro efficienza. Di seguito verranno descritti i modelli legati al solo primo invariante tale per cui  $\bar{\Psi} = \bar{\Psi}(\bar{I}_1)$ .

#### 4.1.1 Modello Neo-Hookean

Il modello Neo-Hookean è basato sul polinomio più semplice della funzione di energia di deformazione:

$$\bar{\Psi}(\bar{I}_1) = \frac{\mu}{2} (\bar{I}_1 - 3) \quad (4.6)$$

dove  $\mu$  corrisponde al modulo di taglio per deformazioni infinitesime. Questo modello deriva dalla teoria molecolare secondo cui il materiale misurato è modellato come una rete di una lunga catena di molecole che sono legate in pochi punti.

L'energia elastica della rete sarà quindi somma delle energie delle singole catene. Questo modello però non offre spesso una corrispondenza esatta con i dati sperimentali.

### 4.1.2 Modello Gent

Il modello Gent, invece, ha una forma logaritmica ed è funzione di due parametri:

$$\bar{\Psi}(\bar{I}_1) = -\frac{\mu J_m}{2} \ln \left( 1 - \frac{\bar{I}_1 - 3}{J_m} \right) \quad (4.7)$$

dove  $J_m$  rappresenta il valore limite di  $\bar{I}_1 - 3$ . Per  $J_m \rightarrow \infty$  il modello Gent coincide con il modello Neo-Hookeano.

### 4.1.3 Modello di Fung-Demiray

Questo modello in particolare è il più utilizzato per materiali biologici. Esso è una combinazione tra una forma polinomiale e una esponenziale:

$$\bar{\Psi}(\bar{I}_1) = \frac{\beta}{2\alpha} [\exp(\alpha(\bar{I}_1 - 3)) - 1] \quad (4.8)$$

dove  $\beta = \mu$  è il modulo di taglio infinitesimo e  $\alpha$  è il parametro di irrigidimento.

### 4.1.4 Modello esponenziale-logaritmico di Khajehsaeid

Questo modello è una combinazione tra parte esponenziale positiva e parte negativa logaritmica. Queste due parti possono rappresentare due diversi e opposti fenomeni fisici:

$$\bar{\Psi}(\bar{I}_1) = A \left[ \frac{1}{a} \exp(a(\bar{I}_1 - 3)) + b(\bar{I}_1 - 2) (1 - \ln(\bar{I}_1 - 2)) - \frac{1}{a} - b \right] \quad (4.9)$$

dove  $A = \mu/2$ . I parametri  $a$  e  $b$  sono invece legati alla condizioni di grandi deformazioni (parte esponenziale) e deformazioni moderate (parte logaritmica) rispettivamente [29].

## 4.2 Tensore Jacobiano

La relazione costitutiva nella sua forma generale è rappresentata dal secondo tensore degli stress Piola-Kirchhoff (PK-2) definito come:

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}} \quad (4.10)$$

Sostituendo (4.4) in (4.10), il tensore degli stress PK-2 può essere scritto come somma di una parte volumetrica e una isocora:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbf{S}^{\text{vol}} + \mathbf{S}^{\text{iso}} \\ \mathbf{S}^{\text{vol}} &= J p \mathbf{C}^{-1} \\ \mathbf{S}^{\text{iso}} &= 2 J^{-\frac{2}{3}} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{I}_1} \left( \mathbf{1} - \frac{1}{3} \bar{I}_1 \mathbf{C}^{-1} \right) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Dove  $\mathbf{1}$  rappresenta la matrice unitaria,  $\mathbf{C}^{-1}$  è l'inverso del tensore Cauchy-Green e  $p = \frac{U}{J}$  è la pressione idrostatica. Il contributo isocoro  $\mathbf{S}_{\text{iso}}$  si riferisce a modelli iperelastici legati al primo invariante.

Consideriamo il secondo tensore degli stress nonlineare di Piola-Kirchhoff  $\mathbf{S}$  di un punto ad un certo tempo  $t$ . Secondo Holzapfel [62],  $\mathbf{S}$  può essere valutato in funzione di una variabile. Assumiamo che questa variabile sia il tensore di Cauchy-Green  $\mathbf{C}$ .

Possiamo quindi scrivere una relazione lineare tra gli incrementi di  $\mathbf{S}$  e  $\mathbf{C}$ :

$$\Delta \mathbf{S} = \mathbf{c} \cdot \frac{1}{2} \Delta \mathbf{C} \quad (4.12)$$

dove introduciamo la definizione di  $\mathbf{c}$ , la quale caratterizza il gradiente della funzione  $\mathbf{S}$ . Questa quantità è il tensore di elasticità del quarto ordine (*tensore Jacobiano*) e misura il cambiamento delle tensioni partendo dal cambiamento della deformazione ed è definito come:

$$\mathbf{c} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}} = 4 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \quad (4.13)$$

dove  $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{1})$  è il tensore di deformazione di Green-Lagrange.  $\mathbf{c}$  è un tensore di quarto ordine con quattro indici ed è sempre simmetrico rispetto al primo e secondo slot. Parliamo quindi di simmetrie minori. La simmetria è indipendente dall'esistenza dell'energia di deformazione e si mantiene per tutti i materiali elastici. Assumendo l'esistenza di una funzione scalare di energia  $\Psi$  si arriva alla

conclusione che  $\mathbf{C}$  possiede simmetrie maggiori e quindi  $\mathbf{C} = \mathbf{C}^T$ . Esso possiede quindi solo 21 componenti indipendenti in ogni stato di deformazione. Questa è una condizione necessaria e sufficiente affinché il materiale sia definito iperelastico.

Ora, considero  $U = U(J)$  e  $\bar{\Psi} = \bar{\Psi}(\bar{I}_1)$  e sostituendo l'eq.(4.11) nell'eq.(4.13) otteniamo l'espressione del tensore jacobiano materiale:

$$\begin{aligned}
\mathbf{c} &= \mathbf{c}^{\text{vol}} + \mathbf{c}^{\text{iso}} \\
\mathbf{c}^{\text{vol}} &= J \frac{\partial U}{\partial J} (\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} - 2\mathbf{I}_{\mathbf{C}^{-1}}) + J^2 \frac{\partial^2 U}{\partial J^2} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} \\
\mathbf{c}^{\text{iso}} &= -\frac{4}{3} J^{-\frac{2}{3}} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{I}_1} \left[ \mathbf{1} \otimes \mathbf{C}^{-1} + \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{1} - I_1 \left( \mathbf{I}_{\mathbf{C}^{-1}} + \frac{1}{3} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} \right) \right] + J^{-\frac{4}{3}} \bar{\mathbf{c}}_{\bar{\Psi}} \\
\bar{\mathbf{c}}_{\bar{\Psi}} &= 4 \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{I}_1^2} \left[ \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - \frac{1}{3} I_1 (\mathbf{1} \otimes \mathbf{C}^{-1} + \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{1}) + \frac{1}{9} I_1^2 \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} \right]
\end{aligned} \tag{4.14}$$

dove  $\otimes$  è l'operatore del prodotto esterno e  $\mathbf{I}_{\mathbf{C}^{-1}} = -\partial \mathbf{C}^{-1} / \partial \mathbf{C}$  è il tensore identità del quarto ordine nella configurazione di riferimento [62].

# Capitolo 5

## Formulazione unificata

In questo capitolo, verrà descritta la formulazione unificata di Carrera e il Metodo agli Elementi Finiti (FEM) utilizzati per la risoluzione di problemi strutturali con non linearità geometriche.

### 5.1 Equazioni di governo e relazioni geometriche

Il generico vettore spostamento può essere scritto come:

$$u(x, y, z) = [ u_x \quad u_y \quad u_z ]^T \quad (5.1)$$

dove  $u_x, u_y, u_z$  sono le componenti del vettore spostamento lungo le tre direzioni. Il vettore degli sforzi  $\boldsymbol{\sigma}$  e delle deformazioni  $\boldsymbol{\epsilon}$  presentano la seguente forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = [ \sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{xz} \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_{xy} ]^T \quad (5.2)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = [ \epsilon_{xx} \quad \epsilon_{yy} \quad \epsilon_{zz} \quad \epsilon_{xz} \quad \epsilon_{yz} \quad \epsilon_{xy} ]^T \quad (5.3)$$

Tramite la legge di Hooke, è possibile scrivere la relazione costitutiva:

$$\boldsymbol{\sigma} = C\boldsymbol{\epsilon} \quad (5.4)$$

dove  $C$  rappresenta la matrice di rigidezza del materiale, che nel caso isotropo descritto nel capitolo 2, è formata da nove componenti dipendenti dal modulo di

Young  $E$  e dal coefficiente di Poisson  $\nu$  :

$$\begin{aligned} C_{11} = C_{22} = C_{33} &= \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-\nu)} \\ C_{12} = C_{13} = C_{23} &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-\nu)} \\ C_{44} = C_{55} = C_{66} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Considero ora il vettore delle deformazioni  $\epsilon$  di Green-Lagrange formato anche dalle componenti non lineari:

$$\epsilon = \epsilon_l + \epsilon_{nl} = (\mathbf{b}_l + \mathbf{b}_{nl})\mathbf{u} \quad (5.6)$$

dove  $\mathbf{b}_l$  e  $\mathbf{b}_{nl}$  sono rispettivamente gli operatori differenziali lineare e non lineare:

$$\mathbf{b}_l = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z \\ \partial_z & 0 & \partial_x \\ 0 & \partial_z & \partial_y \\ \partial_y & \partial_x & 0 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

$$\mathbf{b}_{nl} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\partial_x)^2 & \frac{1}{2}(\partial_x)^2 & \frac{1}{2}(\partial_x)^2 \\ \frac{1}{2}(\partial_y)^2 & \frac{1}{2}(\partial_y)^2 & \frac{1}{2}(\partial_y)^2 \\ \frac{1}{2}(\partial_z)^2 & \frac{1}{2}(\partial_z)^2 & \frac{1}{2}(\partial_z)^2 \\ \partial_x\partial_z & \partial_x\partial_z & \partial_x\partial_z \\ \partial_y\partial_z & \partial_y\partial_z & \partial_y\partial_z \\ \partial_x\partial_y & \partial_x\partial_y & \partial_x\partial_y \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

## 5.2 Formulazione unificata di Carrera (CUF) e FEM

La Formulazione Unificata di Carrera (CUF), proposta e descritta da Carrera *et al* in [38] [21], permette di poter scrivere le equazioni di qualsiasi teoria raffinata 1D, 2D o 3D in termini di pochi nuclei fondamentali FNs, la cui forma non dipende dalle assunzioni usate, quali tipo e ordine della funzione , per descrivere il campo degli spostamenti.

La CUF è quindi in grado di descrivere diversi campi di spostamento e dimensioni. Infatti, di seguito, verranno descritti i diversi casi: 1D, 2D e 3D.

Partendo dalla definizione del generico campo di spostamento tridimensionale :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z) \quad (5.9)$$

dove  $\mathbf{u}(x, y, z)$  è la funzione soluzione del problema.

In base alle dimensioni del problema, cioè se una o più dimensioni sono trascurabili rispetto alle altre, è possibile scrivere il campo degli spostamenti in modo diverso. In seguito, infatti, verranno descritte le formulazioni agli elementi finiti tramite la CUF sia per il modello trave(1D)che per la piastra (2D) . Verranno poi considerati due principali casi di funzione di espansione utilizzate per la CUF: espansione basata sui polinomi di Taylor, indicata con TE, ed una basata sui polinomi di Lagrange, indicata con LE.

### 5.2.1 1D CUF-FEM: Modello trave

Quando la struttura considerata presenta due dimensioni ,  $x$  e  $z$ , trascurabili rispetto alla dimensione lungo  $y$ , allora parleremo di modello trave e l'equazione (5.9) si riduce a:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_\tau(y)F_\tau^{2D}(x, z), \quad \tau = 1, \dots, M \quad (5.10)$$

dove  $F_\tau^{2D}$  è la funzione di espansione attraverso la sezione trasversale della trave e  $M$  è il numero di termini dell'espansione. Le funzioni  $F_\tau$  possono essere polinomi di Lagrange o di Taylor di diversi ordini, come descriveremo nei paragrafi successivi. Fondamentale è capire che la scelta della funzione  $F_\tau$  è fatta a priori. In particolare, essa dipende dalla modello strutturale usato nell'analisi. Nel caso 1D, quindi della trave, il metodo agli elementi finiti è utilizzato per discretizzare la struttura lungo l'asse  $y$ . E' possibile quindi approssimare lo spostamento generalizzato nel seguente modo:

$$\mathbf{u}_\tau(y) = N_j(y)q_{\tau j} \quad j = 1, 2, \dots, p + 1 \quad (5.11)$$

dove i termini  $N_j$  rappresentano le funzioni di forma 1D,  $j$  indica la sommatoria e  $p$  l'ordine delle funzioni di forma. Le funzioni di forma vengono meglio descritte

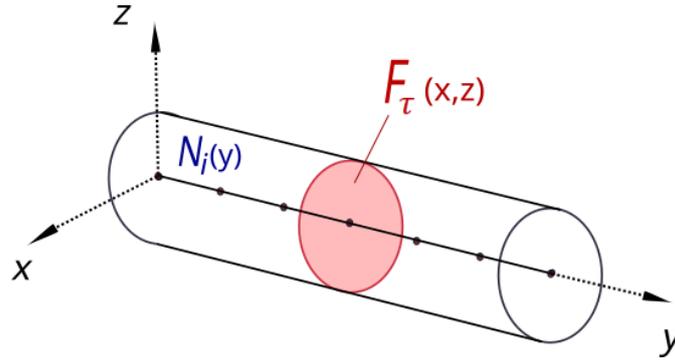


Figura 5.1: Configurazione per il modello trave.

nell'Appendice A. Il termine  $q_{\tau j}$ , invece, rappresenta il vettore dei parametri nodali così composto:

$$q_{\tau j} = [ q_{x\tau j} \quad q_{y\tau j} \quad q_{z\tau j} ]^T \quad (5.12)$$

Allora combinando la (5.10) e la (5.11) otteniamo:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = F_{\tau}(x, z)N_j(y)\mathbf{q}_{\tau j}, \quad \tau = 1, \dots, M \quad (5.13)$$

La scelta delle funzioni attraverso la sezione trasversale è totalmente indipendente dalla scelta dell'elemento finito usato lungo la trave.

Come mostrato in **Figura 5.1**, le funzioni di forma  $N_j$  caratterizzano la discretizzazione lungo l'asse  $y$ , invece attraverso la sezione trasversale troviamo le funzioni di espansione  $F_{\tau}$ . Queste possono essere polinomi di Lagrange o di Taylor di diversi ordini, come descriveremo nei paragrafi successivi. Ad esempio, le funzioni di Lagrange (LE) permettono di avere solo gli spostamenti come incognite del problema.

Ora, considerando elasticità con non linearità geometriche, possiamo scrivere le relazioni geometriche nel seguente modo:

$$\boldsymbol{\epsilon} = (\mathbf{b}_l + \mathbf{b}_{nl})\mathbf{u} = (\mathbf{b}_l + \mathbf{b}_{nl})F_{\tau}(x, z)N_j(y)\mathbf{q}_{\tau j} = (\mathbf{B}_l^{\tau j} + \mathbf{B}_{nl}^{\tau j})\mathbf{q}_{\tau j} \quad (5.14)$$

dove  $\mathbf{B}_l^{\tau j}$  e  $\mathbf{B}_{nl}^{\tau j}$  sono gli operatori di derivata applicati alle funzioni di forma e le funzioni di espansione lungo lo spessore e sono definite nel caso 1D come:

$$\mathbf{B}_l^{\tau j} = \begin{bmatrix} F_{\tau,x} N_{j,x} & 0 & 0 \\ 0 & F_{\tau} N_{j,y} & 0 \\ 0 & 0 & F_{\tau,z} N_j \\ F_{\tau,z} N_j & 0 & F_{\tau} N_{j,x} \\ 0 & F_{\tau,z} N_j & F_{\tau} N_{j,y} \\ F_{\tau} N_{j,y} & F_{\tau} N_{j,x} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

$$\mathbf{B}_l^{\tau j} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_{x,x} F_{\tau,x} N_j & u_{y,x} F_{\tau,x} N_j & u_{z,x} F_{\tau,x} N_j \\ u_{x,y} F_{\tau} N_{j,y} & u_{y,y} F_{\tau} N_{j,y} & u_{z,y} F_{\tau} N_{j,y} \\ u_{x,z} F_{\tau,z} N_j & u_{y,z} F_{\tau,z} N_j & u_{z,z} F_{\tau,z} N_j \\ u_{x,x} F_{\tau,z} N_j + u_{x,z} F_{\tau,x} N_j & u_{y,x} F_{\tau,z} N_j + u_{y,z} F_{\tau,x} N_j & u_{z,x} F_{\tau,z} N_j + u_{z,z} F_{\tau,x} N_j \\ u_{x,y} F_{\tau,z} N_j + u_{x,z} F_{\tau} N_{j,y} & u_{y,y} F_{\tau,z} N_j + u_{y,z} F_{\tau} N_{j,y} & u_{z,y} F_{\tau,z} N_j + u_{z,z} F_{\tau} N_{j,y} \\ u_{x,x} F_{\tau} N_{j,y} + u_{x,y} F_{\tau,x} N_j & u_{y,x} F_{\tau} N_{j,y} + u_{y,y} F_{\tau,x} N_j & u_{z,x} F_{\tau} N_{j,y} + u_{z,y} F_{\tau,x} N_j \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

### 5.2.2 2D CUF-FEM: Modello piastra

Quando la struttura considerata presenta una dimensione  $z$  trascurabile rispetto alle altre due dimensioni, allora parleremo di modello piastra o guscio (shell). L'equazione (5.9) assume quindi la seguente forma:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\tau}(x, y) F_{\tau}^{1D}(z), \quad \tau = 1, \dots, M \quad (5.17)$$

dove  $F_{\tau}^{1D}$  è la generica funzione di espansione che approssima il campo degli spostamenti lungo lo spessore e  $M$  è il numero di termini dell'espansione. Fondamentale è capire che la scelta della funzione  $F_{\tau}$  è fatta a priori ed è completamente arbitraria ma la sua scelta caratterizza il modello adottato. Servendoci, quindi, dell'approssimazione classica del metodo agli elementi finiti e della formulazione unificata di Carrera nel caso 2D, è possibile scrivere il campo degli spostamenti nel seguente modo:

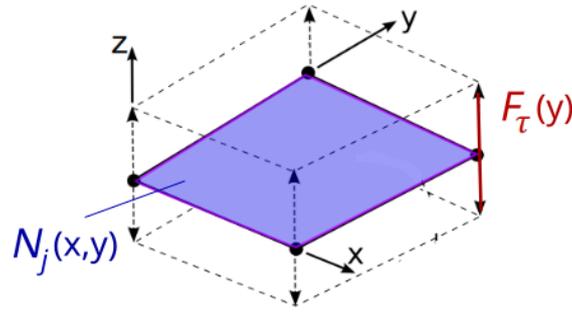


Figura 5.2: Configurazione per il modello piastra.

$$\mathbf{u}(x, y, z) = F_\tau(z)N_j(x, y)\mathbf{q}_{\tau j}, \quad \tau = 1, \dots, M \quad (5.18)$$

dove, in questo caso,  $F_\tau(z)$  è la funzione di espansione lungo lo spessore, con  $M$  pari al numero di termini dell'espansione,  $q_{\tau j}$  sono gli spostamenti nodali discreti e  $N_j(x, y)$  sono le funzioni di forma 2D utilizzate per il metodo agli elementi finiti nel piano  $xy$  della superficie media.

Come per il modello trave, possiamo riscrivere le deformazioni come:

$$\boldsymbol{\epsilon} = (\mathbf{b}_l + \mathbf{b}_{nl})\mathbf{u} = (\mathbf{b}_l + \mathbf{b}_{nl})F_\tau(z)N_j(x, y)\mathbf{q}_{\tau j} = (\mathbf{B}_l^{\tau j} + \mathbf{B}_{nl}^{\tau j})\mathbf{q}_{\tau j} \quad (5.19)$$

e quindi le matrici degli operatori di derivata applicati alle funzioni di forma nel caso lineare  $\mathbf{B}_l^{\tau j}$  e non lineare  $\mathbf{B}_{nl}^{\tau j}$  sono rispettivamente:

$$\mathbf{B}_l^{\tau j} = \begin{bmatrix} F_\tau N_{j,x} & 0 & 0 \\ 0 & F_\tau N_{j,y} & 0 \\ 0 & 0 & F_{\tau,z} N_j \\ F_{\tau,z} N_j & 0 & F_\tau N_{j,x} \\ 0 & F_{\tau,z} N_j & F_\tau N_{j,y} \\ F_\tau N_{j,y} & F_\tau N_{j,x} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

$$\mathbf{B}_l^{\tau j} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix}
u_{x,x} F_\tau N_{j,x} & u_{y,x} F_\tau N_{j,x} & u_{z,x} F_\tau N_{j,x} \\
u_{x,y} F_\tau N_{j,y} & u_{y,y} F_\tau N_{j,y} & u_{z,y} F_\tau N_{j,y} \\
u_{x,z} F_{\tau,z} N_j & u_{y,z} F_{\tau,z} N_j & u_{z,z} F_{\tau,z} N_j \\
u_{x,x} F_{\tau,z} N_j + u_{x,z} F_\tau N_{j,x} & u_{y,x} F_{\tau,z} N_j + u_{y,z} F_\tau N_{j,x} & u_{z,x} F_{\tau,z} N_j + u_{z,z} F_\tau N_{j,x} \\
u_{x,y} F_{\tau,z} N_j + u_{x,z} F_\tau N_{j,y} & u_{y,y} F_{\tau,z} N_j + u_{y,z} F_\tau N_{j,y} & u_{z,y} F_{\tau,z} N_j + u_{z,z} F_\tau N_{j,y} \\
u_{x,x} F_\tau N_{j,y} + u_{x,y} F_\tau N_{j,x} & u_{y,y} F_\tau N_{j,y} + u_{y,y} F_\tau N_{j,x} & u_{z,x} F_\tau N_{j,y} + u_{z,y} F_\tau N_{j,x}
\end{bmatrix} \quad (5.21)$$

### 5.3 Espansione di Taylor TE

Abbiamo precedentemente discusso la definizione della formulazione unificata di Carrera e quindi definito delle funzioni di espansione  $F_\tau$  sia nel caso 1D che nel caso 2D. La scelta di queste funzioni determina la classe del modello CUF adottato. Un tipo di espansione utilizzata è quella basata sui polinomi di Taylor, indicata con TE.

Nel caso di modelli mono-dimensionali, essi sono basati su espansioni polinomiali, del tipo  $x^i z^j$  con  $i$  e  $j$  numeri interi positivi, del campo degli spostamenti sulla sezione trasversale.

Il generico campo degli spostamenti di ordine  $N$  è possibile scriverlo come:

$$\begin{aligned}
u_x &= \sum_{N_i=0}^N \left( \sum_{M=0}^{N_i} x^{N-M} z^M u_{x \frac{N(N+1)+M+1}{2}} \right) \\
u_y &= \sum_{N_i=0}^N \left( \sum_{M=0}^{N_i} x^{N-M} z^M u_{y \frac{N(N+1)+M+1}{2}} \right) \\
u_z &= \sum_{N_i=0}^N \left( \sum_{M=0}^{N_i} x^{N-M} z^M u_{z \frac{N(N+1)+M+1}{2}} \right)
\end{aligned} \quad (5.22)$$

dove  $N$  è l'ordine dell'espansione ed è un parametro arbitrario imposto come input dell'analisi. La scelta di questo parametro dipende dall'analisi di convergenza. Per meglio descrivere questo tipo di espansione, considero per esempio un modello TE

di ordine  $N = 2$ . Questo modello presenterà il seguente campo degli spostamenti:

$$\begin{aligned}
 u_x &= u_{x_1} + xu_{x_2} + zu_{x_3} + x^2u_{x_4} + xzu_{x_5} + z^2u_{x_6} \\
 u_y &= u_{y_1} + xu_{y_2} + zu_{y_3} + x^2u_{y_4} + xzu_{y_5} + z^2u_{y_6} \\
 u_z &= u_{z_1} + xu_{z_2} + zu_{z_3} + x^2u_{z_4} + xzu_{z_5} + z^2u_{z_6}
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

Nell'eq.(5.23) sono presenti 18 variabili di spostamento generalizzate. Inoltre troviamo 3 termini costanti, 6 lineari e 9 termini parabolici. Queste variabili introdotte rappresentano le derivate spaziali rispetto agli assi della trave (nel caso monodimensionale). I termini di ordine superiore, invece, possono descrivere solo le proprietà della sezione. Quando si è in presenza di grandi rotazioni la scelta di espansioni TE può introdurre difficoltà. Per ovviare al problema vengono utilizzate espansioni basate su polinomi di Lagrange, descritti nella sezione successiva.

## 5.4 Espansione di Lagrange LE

Un' altro tipo di funzione di espansione utilizzata nella formulazione unificata è quella basata sui polinomi di Lagrange, definita come LE. Nel codice utilizzato per risolvere i problemi successivamente illustrati, sono stati utilizzati modelli LE nel caso 1D/2D, quindi sulla sezione trasversale e lo spessore rispettivamente, come elementi a 4 nodi (Q4), a 9 nodi (Q9) e a 16 nodi (Q16).

L'espansione viene definita in un sistema di riferimento naturale e non in quello fisico ed è in grado di descrivere qualsiasi geometria della sezione/spessore. I polinomi vengono definiti in un intervallo  $[-1;1]$ .

In questo elaborato useremo, a seconda delle necessità, elementi Q4, Q9 e Q16 lagrangiani.

Consideriamo un elemento a 4 nodi (**Figura5.3**), i polinomi di Lagrange assumono la seguente forma:

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i), \quad i = 1, 2, 3, 4 \tag{5.24}$$

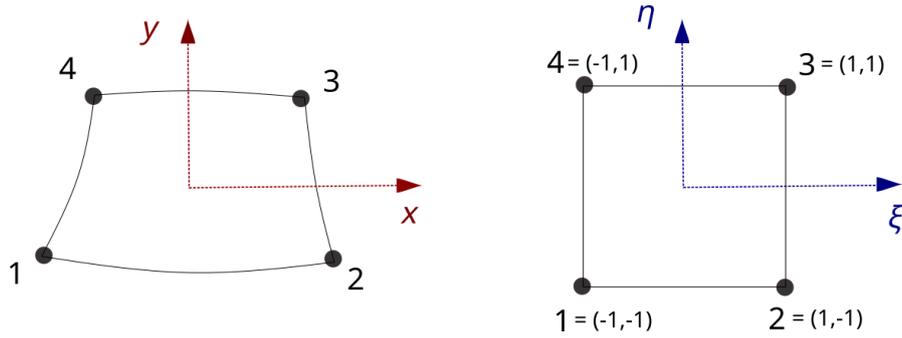


Figura 5.3: Elemento Q4 nel piano fisico e nel piano di riferimento naturale.

dove  $\xi$  e  $\eta$  sono le coordinate nel sistema di riferimento naturale e variano tra -1 e +1. Scritti quindi in modo esplicito:

$$\begin{aligned}
 N_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \\
 N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\
 N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \\
 N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

Quindi, il campo degli spostamenti per un elemento Q4 nel piano di riferimento fisico sarà pari a:

$$\begin{aligned}
 u_x &= N_1u_{x_1} + N_2u_{x_2} + N_3u_{x_3} + N_4u_{x_4} \\
 u_y &= N_1u_{y_1} + N_2u_{y_2} + N_3u_{y_3} + N_4u_{y_4} \\
 u_z &= N_1u_{z_1} + N_2u_{z_2} + N_3u_{z_3} + N_4u_{z_4}
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

Per un elemento a 9 nodi (Q9), i polinomi di Lagrange saranno (**Figura 5.4**):

$$\begin{aligned}
 N_i &= \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi\xi_i)(\eta^2 + \eta\eta_i), \quad i = 1, 3, 5, 7 \\
 N_i &= \frac{1}{2}\eta_i(\eta^2 + \eta\eta_i)(1 - \xi^2) + \frac{1}{2}\xi_i(\xi^2 + \xi\xi_i)(1 - \eta^2), \quad i = 2, 4, 6, 8 \\
 N_i &= (1 - \xi^2)(1 - \eta^2), \quad i = 9
 \end{aligned} \tag{5.27}$$

come già menzionato precedentemente, i polinomi di Lagrange sono stati introdotti per porre rimedio alle limitazioni presenti nei polinomi di Taylor. I polinomi di

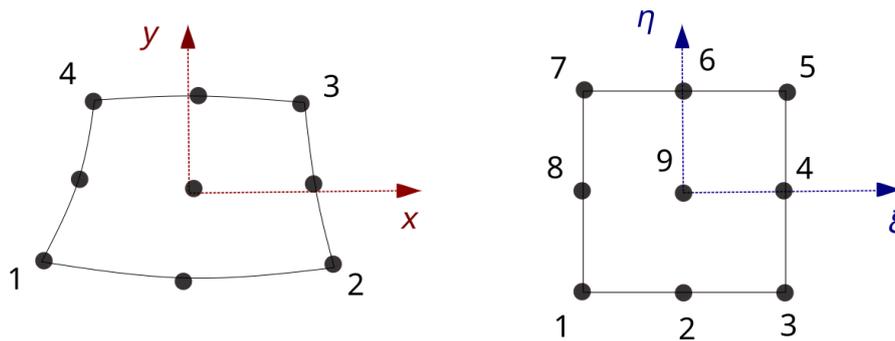


Figura 5.4: Elemento Q9 nel piano fisico e nel piano di riferimento naturale.

Lagrange, infatti, portano ad avere solo variabili di spostamento traslazionale. L'estensione di questo modello a problemi con non-linearità geometriche è in grado di fornire soluzioni migliori dei modelli TE di ordine elevato.

Per ottenere modelli più raffinati si possono utilizzare, ad esempio nel caso 1D della trave, più elementi sulla sezione trasversale oltre al numero di elementi lungo l'asse  $y$  della trave. Importante sottolineare come la scelta della discretizzazione della sezione trasversale è indipendente dalla scelta di discretizzazione lungo l'asse della trave nel caso 1D. Invece nel caso delle piastre (2D), la scelta di discretizzazione nel piano  $xy$  è indipendente dalla scelta della discretizzazione lungo lo spessore.

# Capitolo 6

## Analisi dei grandi spostamenti e delle grandi deformazioni

Un problema viene definito lineare quando la matrice di rigidezza che lega il vettore dei carichi a quello degli spostamenti è indipendente da quest'ultimi. Parliamo infatti di analisi non lineare quando la matrice di rigidezza  $\mathbf{K}$  dipende dall'incognita, cioè dal campo degli spostamenti.

Ci sono principalmente tre tipi di non-linearità:

- a. *Geometriche*, legate alla presenza di grandi rotazioni e spostamenti;
- b. *Fisiche*, legate alle proprietà del materiale e quindi cambia la legge costitutiva. In questo elaborato infatti avremo a che fare con materiali iperelastici.
- c. *Di contatto*, dovute alla non conoscenza delle condizioni al contorno tra due corpi che durante la deformazione finiscono in contatto tra loro.

Nel seguente capitolo, quindi, verranno definite le varie grandezze che compaiono nell'analisi sia di materiali linearmente elastici sia nel caso di materiali iperelastici.

### 6.1 Non-linearità puramente geometriche

Per un sistema in equilibrio sottoposto a carichi applicati e vincoli geometrici, il principio dei lavori virtuali afferma che la variazione virtuale del lavoro interno compiuto dalle deformazioni sulle tensioni è uguale alla variazione virtuale del lavoro fatto dalle forze esterne. Si presenta quindi nella seguente forma:

$$\delta L_{int} - \delta L_{ext} = 0, \quad (6.1)$$

dove  $L_{int}$  rappresenta l'energia di deformazione,  $L_{ext}$  il lavoro fatto dalle forze esterne e  $\delta$  denota la variazione virtuale.

Considerando  $\epsilon$  e  $\sigma$  nella loro forma vettoriale, la variazione virtuale dell'energia interna di deformazione può essere espressa come:

$$\delta L_{int} = \int_{\Omega} \delta \epsilon^T \sigma dV \quad (6.2)$$

### 6.1.1 Matrice di rigidezza secante

Nei problemi non lineari complessi, la soluzione analitica è limitata ad un piccolo gruppo di applicazioni. Per ampliare il range di applicazioni viene utilizzato il metodo FEM. In questo caso, infatti, la condizione di equilibrio della struttura può essere espressa come un sistema di equazioni algebriche non lineari. E' possibile inoltre scrivere la condizione di equilibrio e la relativa matrice legata all'elemento finito in modo unificato utilizzando la CUF e la formulazione agli elementi finiti (5.11), ottenendo così la seguente equazione:

$$\mathbf{K}_S^{\tau sij} \mathbf{q}_{sj} - \mathbf{p}_{sj} = 0 \quad (6.3)$$

dove  $\mathbf{p}_{sj}$  e  $\mathbf{K}_S^{\tau sij}$  rappresentano i nuclei fondamentali (FN) del vettore dei carichi nodali e della matrice di rigidezza secante. L'eq. (6.3) rappresenta un set di tre equazioni algebriche ed essa può essere generalizzata anche al caso 2D e 3D.

Assemblando gli elementi finiti, si ottiene l'equazione globale associata alla struttura finale:

$$\mathbf{K}_S \mathbf{q} - \mathbf{p} = 0 \quad (6.4)$$

Deriviamo ora l'espressione della matrice di rigidezza secante considerando l'espansione generale per elementi 1D e 2D. Derivando la variazione virtuale del vettore deformazione dall'eq. (5.6) otteniamo:

$$\delta \epsilon = \delta ((\mathbf{B}_l^{sj} + \mathbf{B}_{nl}^{sj}) \mathbf{q}_{sj}) = (\mathbf{B}_l^{sj} + 2\mathbf{B}_{nl}^{sj}) \delta \mathbf{q}_{sj} \quad (6.5)$$

il suo trasposto sarà quindi:

$$\delta \epsilon^T = \delta \mathbf{q}_{sj}^T (\mathbf{B}_l^{sj} + 2\mathbf{B}_{nl}^{sj})^T \quad (6.6)$$

Sostituendo l'eq. (6.6) nella (6.2) si ottiene:

$$\begin{aligned}
\delta L_{\text{int}} &= \int_{\Omega} \delta \mathbf{q}_{sj}^T (\mathbf{B}_l^{sj} + 2 \mathbf{B}_{nl}^{sj})^T \boldsymbol{\epsilon} dV = \delta \mathbf{q}_{sj}^T \mathbf{F}_{\text{int}}^{sj} = \\
&= \int_{\Omega} \delta \mathbf{q}_{sj}^T (\mathbf{B}_l^{sj} + 2 \mathbf{B}_{nl}^{sj})^T \mathbb{C} (\mathbf{B}_l^{\tau i} + \mathbf{B}_{nl}^{\tau i}) \mathbf{q}_{\tau i} dV \\
&= \delta \mathbf{q}_{sj}^T \left[ \int_{\Omega} \mathbf{B}_l^{sjT} \mathbb{C} \mathbf{B}_l^{\tau i} dV \right] \mathbf{q}_{\tau i} + \delta \mathbf{q}_{sj}^T \left[ \int_{\Omega} \mathbf{B}_l^{sjT} \mathbb{C} \mathbf{B}_{nl}^{\tau i} dV \right] \mathbf{q}_{\tau i} + \\
&+ \delta \mathbf{q}_{sj}^T \left[ \int_{\Omega} 2 \mathbf{B}_{nl}^{sjT} \mathbb{C} \mathbf{B}_l^{\tau i} dV \right] \mathbf{q}_{\tau i} + \delta \mathbf{q}_{sj}^T \left[ \int_{\Omega} 2 \mathbf{B}_{nl}^{sjT} \mathbb{C} \mathbf{B}_{nl}^{\tau i} dV \right] \mathbf{q}_{\tau i}
\end{aligned} \tag{6.7}$$

Otteniamo quindi quattro matrici 3x3 componenti della matrice secante così definiti:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{ll}^{\tau sij} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}_l^{sjT} \mathbb{C} \mathbf{B}_l^{\tau i} dV \quad \text{contributo lineare} \\
\mathbf{K}_{lnl}^{\tau sij} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}_l^{sjT} \mathbb{C} \mathbf{B}_{nl}^{\tau i} dV \quad \text{contributo non lineare del I ordine} \\
\mathbf{K}_{nll}^{\tau sij} &= \int_{\Omega} 2 \mathbf{B}_{nl}^{sjT} \mathbb{C} \mathbf{B}_l^{\tau i} dV \quad \text{contributo non lineare del I ordine} \\
\mathbf{K}_{nlnl}^{\tau sij} &= \int_{\Omega} 2 \mathbf{B}_{nl}^{sjT} \mathbb{C} \mathbf{B}_{nl}^{\tau i} dV \quad \text{contributo non lineare del II ordine}
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Quindi l'eq. (6.7) può essere riscritta come:

$$\delta L_{\text{int}} = \delta \mathbf{q}_{sj}^T \mathbf{K}_{\mathbf{S}}^{\tau sij} \mathbf{q}_{\tau i} \tag{6.9}$$

dove  $\mathbf{K}_{\mathbf{S}}^{\tau sij}$  è la matrice di rigidezza secante data dalla somma dei quattro contributi:

$$\mathbf{K}_{\mathbf{S}}^{\tau sij} = \mathbf{K}_{ll}^{\tau sij} + \mathbf{K}_{lnl}^{\tau sij} + \mathbf{K}_{nll}^{\tau sij} + \mathbf{K}_{nlnl}^{\tau sij} \tag{6.10}$$

I quattro contributi, lineari e non lineari, della matrice di rigidezza secante sono dati in termini di nuclei fondamentali (FN). Infatti, definite le funzioni di espansione, sulla sezione trasversale o lungo lo spessore a seconda del modello 1D o 2D, e le funzioni di forma e espandendo la sommatoria sugli indici  $\tau, s$ , e  $i, j$  si ottiene la matrice di rigidezza elementare. I nuclei fondamentali possono essere derivati per qualsiasi modello cinematico e qualsiasi funzione polinomiale, per maggiori dettagli consultare l'Appendice B.

### 6.1.2 Matrice di rigidezza tangente

Ci occupiamo ora di derivare l'espressione della matrice di rigidezza tangente. Allo stesso modo della matrice di rigidezza secante, considero la variazione virtuale

del vettore di deformazione scritto tramite le incognite degli spostamenti nodali generalizzati:

$$\delta\epsilon = \delta((\mathbf{B}_l^{sj} + \mathbf{B}_{nl}^{sj})\mathbf{q}_{sj}) = (\mathbf{B}_l^{sj} + 2\mathbf{B}_{nl}^{sj})\delta\mathbf{q}_{sj} \quad (6.11)$$

I nuclei fondamentali della matrice di rigidezza tangente  $\mathbf{K}_T^{ij\tau s}$  derivano dalla linearizzazione delle equazioni di equilibrio. Assumiamo che il carico sia conservativo così che  $\delta^2 L_{\text{ext}} = 0$ . Allora l'espressione della matrice tangente può essere ottenuta linearizzando la variazione virtuale dell'energia di deformazione:

$$\begin{aligned} \delta^2 L_{\text{int}} &= \int_{\Omega} \delta(\delta\epsilon^T \boldsymbol{\sigma}) dV \\ &= \int_{\Omega} \delta\epsilon^T \delta\boldsymbol{\sigma} dV + \int_{\Omega} \delta(\delta\epsilon^T) \boldsymbol{\sigma} dV \\ &= \delta\mathbf{q}_{\tau i}^T (\mathbf{K}_0^{ij\tau s} + \mathbf{K}_{T_1}^{ij\tau s} + \mathbf{K}_{\sigma}^{ij\tau s}) \delta\mathbf{q}_{sj} \\ &= \delta\mathbf{q}_{\tau i}^T \mathbf{K}_T^{ij\tau s} \delta\mathbf{q}_{sj} \end{aligned} \quad (6.12)$$

Consideriamo i termini non lineari separatamente.

Il primo termine  $\int_{\Omega} \delta(\delta\epsilon^T \boldsymbol{\sigma}) dV$  tramite la legge costitutiva (5.4)

$$\delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\delta\epsilon = \mathbf{C}(\mathbf{B}_l^{sj} + 2\mathbf{B}_{nl}^{sj})\delta\mathbf{q}_{sj} \quad (6.13)$$

Quindi, considerando le eq. (6.6) e (6.13) otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta\epsilon^T \delta\boldsymbol{\sigma} dV &= \delta\mathbf{q}_{sj}^T \int_{\Omega} (\mathbf{B}_l^{sj} + 2\mathbf{B}_{nl}^{sj})^T \mathbf{C} (\mathbf{B}_l^{\tau i} + 2\mathbf{B}_{nl}^{\tau i}) dV \delta\mathbf{q}_{\tau i} \\ &= \delta\mathbf{q}_{sj}^T \mathbf{K}_0^{ij\tau s} \delta\mathbf{q}_{\tau i} + \delta\mathbf{q}_{sj}^T (2\mathbf{K}_{lnl}^{ij\tau s}) \delta\mathbf{q}_{\tau i} + \delta\mathbf{q}_{sj}^T \mathbf{K}_{nll}^{ij\tau s} \delta\mathbf{q}_{\tau i} + \delta\mathbf{q}_{sj}^T (2\mathbf{K}_{nlnl}^{ij\tau s}) \delta\mathbf{q}_{\tau i} \\ &= \delta\mathbf{q}_{sj}^T (\mathbf{K}_0^{ij\tau s} + \mathbf{K}_{T_1}^{ij\tau s}) \delta\mathbf{q}_{\tau i} \end{aligned} \quad (6.14)$$

dove i termini che compongono l'equazione sono rispettivamente:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{0tan}^{ij\tau s} &= \int_{\Omega} (\mathbf{B}_l^{sj})^T \mathbf{C} \mathbf{B}_l^{\tau i} dV = \mathbf{K}_0^{ij\tau s} & \mathbf{K}_{lnltan}^{ij\tau s} &= \int_{\Omega} (\mathbf{B}_l^{sj})^T \mathbf{C} \mathbf{B}_{nl}^{\tau i} dV = 2\mathbf{K}_{lnl}^{ij\tau s} \\ \mathbf{K}_{nlltan}^{ij\tau s} &= 2 \int_{\Omega} (\mathbf{B}_{nl}^{sj})^T \mathbf{C} \mathbf{B}_l^{\tau i} dV = \mathbf{K}_{nll}^{ij\tau s} & \mathbf{K}_{nlnltan}^{ij\tau s} &= 2 \int_{\Omega} (\mathbf{B}_{nl}^{sj})^T \mathbf{C} \mathbf{B}_{nl}^{\tau i} dV = \mathbf{K}_{nlnl}^{ij\tau s} \end{aligned} \quad (6.15)$$

dove  $\mathbf{K}_{T_1}^{ij\tau s} = 2\mathbf{K}_{lnl}^{ij\tau s} + \mathbf{K}_{nll}^{ij\tau s} + 2\mathbf{K}_{nlnl}^{ij\tau s}$  è la somma dei termini non lineari di primo e secondo ordine. Le matrici  $\mathbf{K}_0^{ij\tau s}$ ,  $\mathbf{K}_{lnl}^{ij\tau s}$ ,  $\mathbf{K}_{nll}^{ij\tau s}$ , e  $\mathbf{K}_{nlnl}^{ij\tau s}$  sono anch'esse date in termini di nuclei fondamentali  $3 \times 3$ . Queste matrici, date le funzioni sulla sezione trasversale  $F_{\tau} = F_s$  e le funzioni di forma  $N_i = N_j$ , possono essere espanse per ottenere la matrice di rigidezza secante di qualsiasi modello trave.

Analizziamo ora il secondo termine  $\int_{\Omega} \delta(\delta\epsilon^T) \boldsymbol{\sigma} dV$  dell'eq. (6.12) richiede la

linearizzazione delle relazioni geometriche non lineari:

$$\delta(\delta\boldsymbol{\epsilon}^T) = \left\{ \begin{array}{c} \delta q_{X_{\tau i}} \delta q_{X_{s j}} \\ \delta q_{Y_{\tau i}} \delta q_{Y_{s j}} \\ \delta q_{Z_{\tau i}} \delta q_{Z_{s j}} \end{array} \right\}^T (\mathbf{B}_{nl}^*)^T \quad (6.16)$$

dove

$$\mathbf{B}_{nl}^* = \begin{bmatrix} F_{\tau,x} F_{s,x} N_i N_j & F_{\tau,x} F_{s,x} N_i N_j & F_{\tau,x} F_{s,x} N_i N_j \\ F_{\tau} F_s N_{i,y} N_{j,y} & F_{\tau} F_s N_{i,y} N_{j,y} & F_{\tau} F_s N_{i,y} N_{j,y} \\ F_{\tau,z} F_{s,z} N_i N_j & F_{\tau,z} F_{s,z} N_i N_j & F_{\tau,z} F_{s,z} N_i N_j \\ F_{\tau,x} F_{s,z} N_i N_j + F_{\tau,z} F_{s,x} N_i N_j & F_{\tau,x} F_{s,z} N_i N_j + F_{\tau,z} F_{s,x} N_i N_j & F_{\tau,x} F_{s,z} N_i N_j + F_{\tau,z} F_{s,x} N_i N_j \\ F_{\tau,z} F_s N_{i,y} N_{j,y} + F_{\tau} F_{s,z} N_{i,y} N_j & F_{\tau,z} F_s N_{i,y} N_{j,y} + F_{\tau} F_{s,z} N_{i,y} N_j & F_{\tau,z} F_s N_{i,y} N_{j,y} + F_{\tau} F_{s,z} N_{i,y} N_j \\ F_{\tau,x} F_s N_{i,y} N_{j,y} + F_{\tau} F_{s,x} N_{i,y} N_j & F_{\tau,x} F_s N_{i,y} N_{j,y} + F_{\tau} F_{s,x} N_{i,y} N_j & F_{\tau,x} F_s N_{i,y} N_{j,y} + F_{\tau} F_{s,x} N_{i,y} N_j \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

Manipolando quindi l'eq. (6.16) si ottiene la seguente relazione:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta(\delta\boldsymbol{\epsilon}^T) \boldsymbol{\sigma} dV &= \int_{\Omega} \left\{ \begin{array}{c} \delta q_{X_{\tau i}} \delta q_{X_{s j}} \\ \delta q_{Y_{\tau i}} \delta q_{Y_{s j}} \\ \delta q_{Z_{\tau i}} \delta q_{Z_{s j}} \end{array} \right\}^T (\mathbf{B}_{nl}^*)^T \boldsymbol{\sigma} dV \\ &= \delta \mathbf{q}_{s j}^T \int_{\Omega} \text{diag} \left( (\mathbf{B}_{nl}^*)^T \boldsymbol{\sigma} \right) dV \delta \mathbf{q}_{\tau i} \\ &= \delta \mathbf{q}_{s j}^T \mathbf{K}_{\sigma}^{ij\tau s} \delta \mathbf{q}_{\tau i} \end{aligned} \quad (6.18)$$

dove il termine  $\text{diag} \left( (\mathbf{B}_{nl}^*)^T \boldsymbol{\sigma} \right)$  è una matrice diagonale 3 x 3, i cui termini diagonali sono le componenti del vettore  $(\mathbf{B}_{nl}^*)^T \boldsymbol{\sigma}$ . Il termine presente nell'eq. (6.18) rappresenta la matrice di rigidezza geometrica, il cui nucleo fondamentale è  $\mathbf{K}_{\sigma}^{ij\tau s}$ .

## 6.2 Non-linearità fisiche e geometriche

Nei problemi di strutture in materiale iperelastico non è necessario definire la matrice di rigidezza secante. Infatti, si richiede la sola matrice tangente che definiamo nel seguente paragrafo.

### 6.2.1 Matrice di rigidezza tangente

Partendo sempre dalla formulazione CUF-FEM, in particolare, considerando una generica espansione per un elemento 1D o 2D, possiamo definire la matrice di

rigidezza tangente per materiali iperelastici.

Come già precedentemente descritto, il vettore di deformazione può essere scritto in termini delle incognite degli spostamenti nodali generalizzati. In questo caso assumo  $\mathbf{E}$  come vettore di deformazione che deriva dal tensore di deformazione di Green-Lagrange e  $\mathbf{U}_{sj}$  gli spostamenti virtuali nodali. Possiamo quindi scrivere:

$$\mathbf{E} = (\mathbf{b}_l + \mathbf{b}_{nl})\mathbf{u} = (\mathbf{b}_l + \mathbf{b}_{nl})F_\tau(x, z)N_i(y)\mathbf{U}_{\tau i} = (\mathbf{B}_l^{\tau i} + \mathbf{B}_{nl}^{\tau i})\mathbf{U}_{\tau i} \quad (6.19)$$

Allora la variazione virtuale sarà:

$$\delta\mathbf{E} = \delta((\mathbf{B}_l^{\tau i} + \mathbf{B}_{nl}^{\tau i})\mathbf{U}_{\tau i})\mathbf{U}_{sj} = (\mathbf{B}_l^{sj} + 2\mathbf{B}_{nl}^{sj})\delta\mathbf{U}_{sj} \quad (6.20)$$

Per ottenere l'espressione dei nuclei fondamentali della matrice di rigidezza tangente bisogna linearizzare l'equazione di equilibrio. Considerando i carichi conservativi, quindi la variazione virtuale del lavoro esterno nullo, può essere linearizzata solo la variazione virtuale del lavoro interno. Possiamo quindi scrivere quest'ultima distribuendo l'operatore di variazione virtuale sul prodotto:

$$\delta(\delta L_{int}) = \int_{\Omega} \delta(\delta\mathbf{E}^T \mathbf{S})dV = \int_{\Omega} \delta\mathbf{E}^T \delta\mathbf{S}dV + \int_{\Omega} \delta(\delta\mathbf{E}^T) \mathbf{S}dV \quad (6.21)$$

Analizziamo i due termini di destra: il primo corrisponde alla linearizzazione dell'equazione costitutiva dei materiali iperelastici. Per Hozapfel [62], la formulazione adottata considerando il primo invariante è:

$$\delta\mathbf{S} = \mathbf{C}\frac{1}{2}\delta\mathbf{C} = \mathbf{C}\delta\mathbf{E} = \mathbf{C}(\mathbf{B}_l^{sj} + 2\mathbf{B}_{nl}^{sj})\delta\mathbf{U}_{sj} \quad (6.22)$$

dove  $\mathbf{C}$  rappresenta il tensore di elasticità tangente del quarto ordine già descritto nei precedenti capitoli. Possiamo quindi scrivere la linearizzazione della legge costitutiva in forma debole:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta\mathbf{E}^T \delta\mathbf{S}dV &= \int_{\Omega} \delta\mathbf{U}_{sj}^T (\mathbf{B}_l^{sj} + 2\mathbf{B}_{nl}^{sj})^T \mathbf{C} ((\mathbf{B}_l^{\tau i} + \mathbf{B}_{nl}^{\tau i})\delta\mathbf{U}_{\tau i})dV \\ &= \delta\mathbf{U}_{sj}^T \left[ \int_{\Omega} \mathbf{B}_l^{sjT} \mathbf{C} \mathbf{B}_l^{\tau i} dV \right] \delta\mathbf{U}_{\tau i} + \delta\mathbf{U}_{sj}^T \left[ \int_{\Omega} \mathbf{B}_l^{sjT} \mathbf{C} 2\mathbf{B}_{nl}^{\tau i} dV \right] \delta\mathbf{U}_{\tau i} + \\ &+ \delta\mathbf{U}_{sj}^T \left[ \int_{\Omega} 2\mathbf{B}_{nl}^{sjT} \mathbf{C} \mathbf{B}_l^{\tau i} dV \right] \delta\mathbf{U}_{\tau i} + \delta\mathbf{U}_{sj}^T \left[ \int_{\Omega} 2\mathbf{B}_l^{sjT} \mathbf{C} 2\mathbf{B}_l^{\tau i} dV \right] \delta\mathbf{U}_{\tau i} \end{aligned} \quad (6.23)$$

Possiamo quindi definire quattro contributi di matrici 3x3 :

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{ll,tan}^{\tau sij} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}_l^{sjT} \mathbf{C} \mathbf{B}_l^{\tau i} dV = \mathbf{K}_{ll}^{\tau sij} \\
\mathbf{K}_{lnl,tan}^{\tau sij} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}_l^{sjT} \mathbf{C} 2\mathbf{B}_{nl}^{\tau i} dV = 2\mathbf{K}_{lnl}^{\tau sij} \\
\mathbf{K}_{nll,tan}^{\tau sij} &= \int_{\Omega} 2\mathbf{B}_{nl}^{sjT} \mathbf{C} \mathbf{B}_l^{\tau i} dV = \mathbf{K}_{nll}^{\tau sij} \\
\mathbf{K}_{nlnl,tan}^{\tau sij} &= \int_{\Omega} 2\mathbf{B}_l^{sjT} \mathbf{C} 2\mathbf{B}_l^{\tau i} dV = 2\mathbf{K}_{nlnl}^{\tau sij}
\end{aligned} \tag{6.24}$$

dove  $\mathbf{K}_{T_1,tan}^{\tau sij} = 2\mathbf{K}_{lnl,tan}^{\tau sij} + \mathbf{K}_{nll,tan}^{\tau sij} + 2\mathbf{K}_{nlnl,tan}^{\tau sij}$  è il contributo non lineare della matrice di rigidezza tangente. Invece,  $\mathbf{K}_{ll}^{\tau sij}$  è lo stesso contributo lineare della matrice di rigidezza secante. Possiamo quindi riscrivere l'equazione costitutiva linearizzata come:

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{E}^T \delta \mathbf{S} dV = \delta \mathbf{U}_{sj}^T \mathbf{K}_{ll}^{\tau sij} \delta \mathbf{U}_{\tau i} + \delta \mathbf{U}_{sj}^T \mathbf{K}_{T_1}^{\tau sij} \delta \mathbf{U}_{\tau i} \tag{6.25}$$

É importante sottolineare come i nuclei fondamentali  $\mathbf{K}_{ll,tan}^{\tau sij}$ ,  $\mathbf{K}_{lnl,tan}^{\tau sij}$ ,  $\mathbf{K}_{nll,tan}^{\tau sij}$  e  $\mathbf{K}_{nlnl,tan}^{\tau sij}$  sono gli stessi definiti nel caso di materiale linearmente elastico ma il tensore di elasticità in questo caso è il tensore di elasticità che deriva dalla formulazione iperelastica del primo invariante.

Il secondo termine di destra dell'equazione (6.21) corrisponde alla linearizzazione delle equazioni geometriche. Una volta definita la matrice degli operatori differenziali  $\mathbf{B}_{nl}^*$  e la variazione virtuale delle deformazioni:

$$\delta(\delta \mathbf{E}) = \mathbf{B}_{nl}^* \left\{ \begin{array}{l} \delta U_{x_{\tau i}} \delta U_{x_{sj}} \\ \delta U_{y_{\tau i}} \delta U_{y_{sj}} \\ \delta U_{z_{\tau i}} \delta U_{z_{sj}} \end{array} \right\} \tag{6.26}$$

Allora il secondo termine diventa:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \delta(\delta \mathbf{E}^T) \mathbf{S} dV &= \int_{\Omega} \left\{ \begin{array}{c} \delta U_{x_{\tau i}} \delta U_{x_{s j}} \\ \delta U_{y_{\tau i}} \delta U_{y_{s j}} \\ \delta U_{z_{\tau i}} \delta U_{z_{s j}} \end{array} \right\} \mathbf{B}_{nl} *^T \mathbf{S} dV \\
&= \int_{\Omega} \delta \mathbf{U}_{s j}^T \text{diag}(\mathbf{B}_{nl} *^T \mathbf{S}) \delta \mathbf{U}_{\tau i} dV \\
&= \delta \mathbf{U}_{s j}^T \mathbf{K}_{\sigma}^{\tau s i j} \delta \mathbf{U}_{\tau i}
\end{aligned} \tag{6.27}$$

dove il contributo  $\mathbf{K}_{\sigma}^{\tau s i j}$  è la matrice di rigidezza geometrica e deriva dalla linearizzazione della relazione non lineare tra spostamento-deformazione. Sostituendo allora le diverse grandezza nell'eq. (6.21) otteniamo i nuclei fondamentali della matrice di rigidezza tangente come somma del contributo lineare, non lineare e geometrico:

$$\delta(\delta L_{int}) = \delta \mathbf{U}_{s j}^T \mathbf{K}_{ll}^{\tau s i j} \delta \mathbf{U}_{\tau i} + \delta \mathbf{U}_{s j}^T \mathbf{K}_{T_1}^{\tau s i j} \delta \mathbf{U}_{\tau i} + \delta \mathbf{U}_{s j}^T \mathbf{K}_{\sigma}^{\tau s i j} \delta \mathbf{U}_{\tau i} = \delta \mathbf{U}_{s j}^T \mathbf{K}_T^{\tau s i j} \delta \mathbf{U}_{\tau i} \tag{6.28}$$

### 6.3 Vettore dei carichi e delle forze interne

Partendo dall'eq (6.20) e dal principio dei lavori virtuali tale per cui la somma dei lavori virtuali fatto dalle forze interne e dalle forze esterne nel sistema è zero:

$$\delta L_{int} - \delta L_{est} = 0 \tag{6.29}$$

Considerando i tensori di deformazione di Green-Lagrange e di tensione PK2  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{S}$  rispettivamente, la variazione virtuale del lavoro delle forze interne può essere espresso come:

$$\delta L_{int} = \int_{\Omega} \delta \mathbf{E}^T \mathbf{S} dV \tag{6.30}$$

Ora, come già mostrato precedentemente, adottiamo la stessa definizione delle deformazioni generalizzate e la sua variazione virtuale:

$$\delta \mathbf{E} = \delta((\mathbf{B}_l^{\tau i} + \mathbf{B}_{nl}^{\tau i}) \mathbf{U}_{\tau i}) \mathbf{U}_{s j} = (\mathbf{B}_l^{s j} + 2\mathbf{B}_{nl}^{s j}) \delta \mathbf{U}_{s j} \tag{6.31}$$

Sostituendola nella (6.30) ottengo:

$$\delta L_{int} = \int_{\Omega} \delta \mathbf{E}^T \mathbf{S} dV = \int_{\Omega} \delta \mathbf{U}_{s j}^T (\mathbf{B}_l^{s j} + 2\mathbf{B}_{nl}^{s j}) \mathbf{S} dV = \delta \mathbf{U}_{s j}^T \mathbf{F}_{int}^{s j} \tag{6.32}$$

Otteniamo così i nuclei fondamentali del vettore delle forze interne:

$$\mathbf{F}_{int}^{sj} = \int_{\Omega} (\mathbf{B}_l^{sj} + 2\mathbf{B}_{nl}^{sj}) \mathbf{S} dV \quad (6.33)$$

Il nucleo fondamentale è indipendente dall'ordine della teoria di approssimazione e la scelta della discretizzazione lungo l'asse (nel caso trave), lungo lo spessore (nel caso piastra).

Per determinare il vettore dei carichi nodali esterni si parte dalla definizione della CUF e FEM, tale per cui il campo degli spostamenti può essere scritto nel caso 1D come:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = F_{\tau}(x, z) \mathbf{u}_{\tau}(y) = F_{\tau}(x, z) N_i(y) \mathbf{q}_{\tau i} \quad (6.34)$$

Considero la variazione virtuale degli spostamenti introducendo gli spostamenti nodali virtuali (indici  $s, j$ ):

$$\delta \mathbf{u}(x, y, z) = F_s(x, z) \delta \mathbf{u}_s(y) = F_s(x, z) N_j(y) \mathbf{q}_{sj} \quad (6.35)$$

Considero  $\mathbf{p}$  il vettore dei carichi conservativi, allora posso scrivere la variazione virtuale del lavoro delle forze esterne come:

$$\delta L_{est} = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p} dV = \int_{\Omega} \mathbf{q}_{sj}^T F_s(x, z) N_j(y) \mathbf{p} dV = \mathbf{q}_{sj}^T \mathbf{p}_{sj} \quad (6.36)$$

## 6.4 Assemblaggio della matrice di rigidezza globale

Partendo dalla definizione dei nuclei fondamentali per il singolo elemento, la matrice di rigidezza globale viene assemblata considerando la connessione tra i nodi FEM e i nodi con espansione CUF. Nell'assemblaggio di tale matrice è importante ricordare che gli indici  $\tau$  e  $s$  rappresentano l'ordine di espansione del modello CUF ( $\tau, s = 1, 2, \dots, M$ ) e quindi definiscono l'accuratezza del modello. Invece, gli indici  $i$  e  $j$  sono definiti dal numero di nodi del singolo elemento finito ( $i, j = 1, 2, \dots, N_{ne}$ ). È importante notare che la forma generale di ogni nucleo fondamentale è indipendente dal modello di espansione adottato. Essa infatti non cambia considerando un numero di nodi diverso per elemento o diverse funzioni di forma.

Partendo da questo, possiamo affermare che il nucleo fondamentale di una matrice di rigidezza è una matrice 3x3, la quale si ottiene dal prodotto riga per colonna

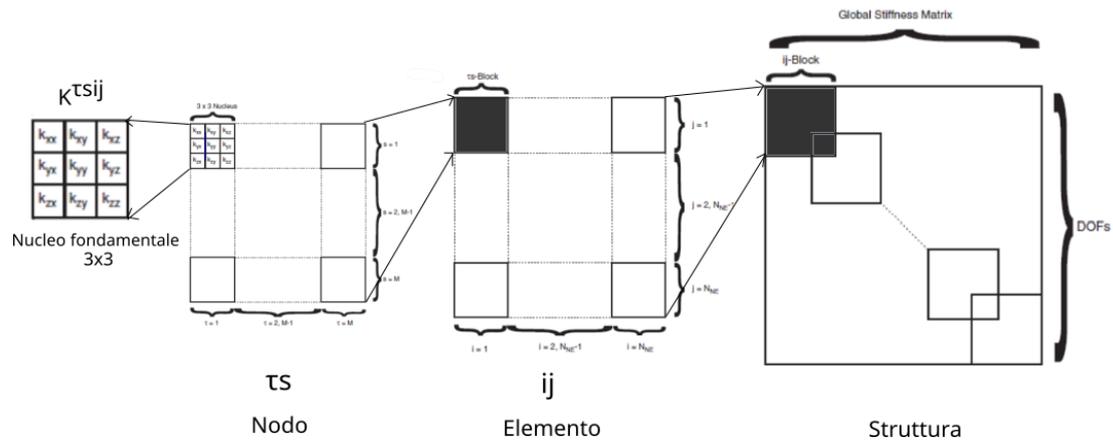


Figura 6.1: Assemblaggio della matrice di rigidezza partendo dai nuclei fondamentali fino alla struttura globale tramite FEM-CUF.

tra la matrice dell'operatore differenziale e il tensore di elasticità:

$$K^{\tau s i j} = \int_{\Omega} B^{s j T} \mathbf{C} B^{\tau i} = \begin{bmatrix} k_{xx}^{ij} & k_{xy}^{ij} & k_{xz}^{ij} \\ k_{xy}^{ij} & k_{yy}^{ij} & k_{yz}^{ij} \\ k_{xz}^{ij} & k_{yz}^{ij} & k_{zz}^{ij} \end{bmatrix} \quad (6.37)$$

dove  $B^{s j T}$  è una matrice  $3 \times 6$ ,  $\mathbf{C}$  è una matrice  $6 \times 6$  e  $B^{\tau i}$  è una matrice  $6 \times 3$ , dal prodotto riga per colonna si ottiene quindi una matrice  $3 \times 3$ .

La somma degli indici  $\tau$  e  $s$  è richiesta sull'espansione CUF per ogni singolo nodo, invece sfruttando la somma degli indici  $i$  e  $j$  si ottiene la matrice del singolo elemento. Da quest'ultima, considerando i nodi in comune, si ottiene la matrice di rigidezza globale tramite le procedure di assemblaggio FEM. Questa procedura di assemblaggio è possibile visualizzarla in **Figura 6.1**.

# Capitolo 7

## Metodi di risoluzione per equazioni non lineari

### 7.1 Equazioni di governo non lineare in forma matriciale

Come già descritto nei precedenti capitoli, per un sistema in equilibrio sottoposto a carichi applicati e vincoli geometrici, per il principio dei lavori virtuali:

$$\delta L_{int} - \delta L_{ext} = 0, \quad (7.1)$$

dove  $L_{int}$  rappresenta l'energia di deformazione,  $L_{ext}$  il lavoro fatto dalle forze esterne e  $\delta$  denota la variazione virtuale.

Riprendendo quindi l'equazione (6.3) e assemblando gli elementi finiti giungo all'equazione:

$$\mathbf{K}_S \mathbf{q} - \mathbf{p} = 0 \quad (7.2)$$

Poichè  $\mathbf{K}_S$  è funzione degli spostamenti nodali  $\mathbf{q}_{\tau i}$ , la matrice di rigidità globale dipende dal vettore delle soluzioni incognite, quindi non può essere calcolato direttamente. Bisogna quindi utilizzare uno schema iterativo di risoluzione per risolvere questo tipo di equazioni.

### 7.2 Linearizzazione di Newton-Raphson

Per risolvere l'eq. (7.2) viene spesso utilizzato uno schema incrementale linearizzato, tipicamente il metodo di Newton-Raphson (anche detto *metodo delle tangenti*). Secondo questo metodo è possibile scrivere il vettore  $\varphi_{res}$  delle forze nodali residue

come:

$$\boldsymbol{\varphi}_{res} \equiv \mathbf{K}_S \mathbf{q} - \mathbf{p} = 0 \quad (7.3)$$

L'eq. (7.3) può essere linearizzata utilizzando l'espansione di Taylor:

$$\boldsymbol{\varphi}_{res}(\mathbf{q} + \delta\mathbf{q}, \mathbf{p} + \delta\mathbf{p}) = \boldsymbol{\varphi}_{res}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_{res}}{\partial \mathbf{q}} \delta\mathbf{q} + \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_{res}}{\partial \mathbf{p}} \delta\lambda \mathbf{p}_{ref} = 0 \quad (7.4)$$

dove il termine  $\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_{res}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{K}_T$  è la *matrice di rigidità tangente* e  $-\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_{res}}{\partial \mathbf{p}}$  è uguale alla matrice identità  $I$ . Nell'eq. (7.4) è stato assunto che il vettore dei carichi varia in maniera diretta con il carico di riferimento con un coefficiente angolare pari a  $\lambda$  tale che  $\mathbf{p} = \lambda \mathbf{p}_{ref}$ . L'eq. (7.4) può essere scritta in forma più compatta come:

$$\mathbf{K}_T \delta\mathbf{q} = \delta\lambda \mathbf{p}_{ref} - \boldsymbol{\varphi}_{res}. \quad (7.5)$$

Poiché è stata aggiunta la variabile  $\lambda$ , deve essere aggiunta un'altra equazione di governo, in particolare viene aggiunta un'equazione di vincolo ottenendo così il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \mathbf{K}_T \delta\mathbf{q} = \delta\lambda \mathbf{p}_{ref} - \boldsymbol{\varphi}_{res} \\ c(\delta\mathbf{q}, \delta\lambda) = 0 \end{cases} \quad (7.6)$$

In base all'equazione di vincolo, possono essere implementati diversi schemi incrementali. Per esempio, se l'equazione di vincolo è  $\delta\lambda = 0$ , il sistema (7.6) corrisponde al metodo di controllo di carico. Se invece l'equazione di vincolo è del tipo  $\delta q = 0$  si ha il metodo di controllo dello spostamento. Se invece l'equazione di vincolo è sia funzione della variazione dello spostamento che del carico allora il metodo è di tipo path-following. Questo metodo sarà quello utilizzato principalmente in questo elaborato. La differenza tra i metodi sopra elencati sono rappresentati nella Figura 7.1.

### 7.2.1 Linearizzazione per materiali iperelastici

Nel caso di materiali iperelastici, il vettore delle forze nodali residue può essere scritto come:

$$\boldsymbol{\varphi}_{res} = \mathbf{F}_{int} - \mathbf{F}_{ext} = 0 \quad (7.7)$$

L'eq. (7.7) può quindi essere linearizzata espandendo  $\boldsymbol{\varphi}_{res}$  in serie di Taylor rispetto ad una soluzione nota  $(\mathbf{U}, \mathbf{F}_{ext})$ , fermandoci ai termini del primo ordine otteniamo:

$$\boldsymbol{\varphi}_{res}(\mathbf{U} + \delta\mathbf{U}, \mathbf{F}_{ext} + \delta\mathbf{F}_{ext}) = \boldsymbol{\varphi}_{res}(\mathbf{U}, \mathbf{F}_{ext}) + \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_{res}}{\partial \mathbf{U}} \delta\mathbf{U} + \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_{res}}{\partial \mathbf{F}_{ext}} \delta\lambda \hat{\mathbf{F}}_{ext} = 0 \quad (7.8)$$

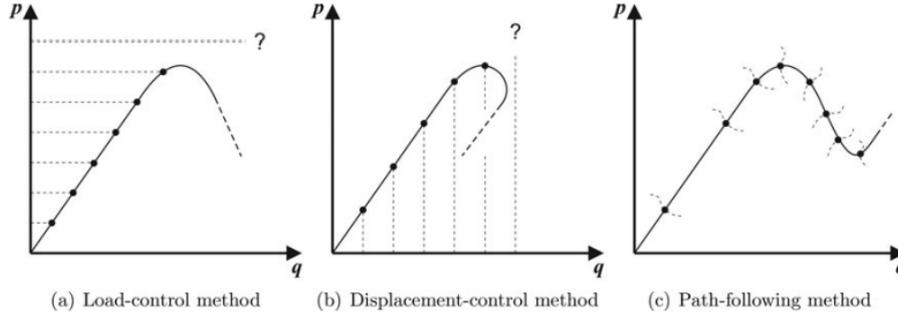


Figura 7.1: Rappresentazione e significato delle equazioni di vincolo [18].

dove  $\frac{\partial \varphi_{res}}{\partial \mathbf{U}} = \mathbf{K}_T$  è la matrice di rigidità tangente e  $\frac{\partial \varphi_{res}}{\partial \mathbf{F}_{ext}} = -\mathbf{1}$ . Assumendo che il carico varia direttamente con i carichi di riferimento tale per cui  $\mathbf{F}_{ext} = \lambda \hat{\mathbf{F}}_{ext}$ , l'eq. (7.8) può essere riscritta come :

$$\mathbf{K}_T \delta \mathbf{U} = \delta \lambda \hat{\mathbf{F}}_{ext} - \varphi_{res} \quad (7.9)$$

come già menzionato precedentemente,  $\lambda$  è una nuova variabile, dobbiamo quindi introdurre un'altra equazione di governo, cioè viene introdotta una relazione di vincolo  $c(\delta \mathbf{U}, \delta \lambda)$  ottenendo così:

$$\begin{cases} \mathbf{K}_T \delta \mathbf{U} = \delta \lambda \hat{\mathbf{F}}_{ext} - \varphi_{res} \\ c(\delta \mathbf{U}, \delta \lambda) = 0 \end{cases} \quad (7.10)$$

Anche in questo caso a seconda dell'equazione di vincolo, possono essere implementati diversi schemi incrementali. Nei prossimi paragrafi, infatti, descriveremo principalmente due schemi: il metodo *load-control* e il metodo *path-following* (*arch-length*).

### 7.2.2 Metodo *load control*

Il metodo di Newton di tipo *load control* è un metodo iterativo in cui la variazione di carico è fissa ad ogni iterazione: ad ogni incremento, la variazione di  $\lambda$  è considerata fissa fino ad un certo incremento  $\Delta \lambda$  e dalle forze residue, si calcola la configurazione attuale che soddisfa l'equilibrio in questa nuova condizione di carico. Quindi, questa procedura è iterativa solo rispetto alle variazioni di spostamento.

Considerando  $(\mathbf{q}^{(0)}, \lambda_0)$  l'ultima soluzione convergente, allora incrementando avrò:

$$\lambda' = \lambda_0 + \Delta\lambda \quad (7.11)$$

la nuova configurazione di carico però, va contro le condizioni di equilibrio ed è quindi necessario che anche il vettore dei carichi nodali sia incrementato di un fattore  $\Delta\mathbf{q}$ :

$$\mathbf{q}' = \mathbf{q}^{(0)} + \Delta\mathbf{q} \quad (7.12)$$

così che la condizione  $\mathbf{q}'$  soddisfi le condizioni di equilibrio. Considerando l'espansione in serie di Taylor eq.(7.4) e imponendo la condizione di vincolo sulla variazione del parametro di carico, otteniamo:

$$\varphi_{res|_{\mathbf{q}^{(0)}}} \mathbf{K}_{T|_{\mathbf{q}^{(0)}}} \delta\mathbf{q} - \delta\lambda \mathbf{p}_{ref} = 0 \quad (7.13)$$

Poiché  $(\mathbf{q}^{(0)}, \lambda_0)$  è una condizione di equilibrio, allora il vettore delle forze residue calcolate è nullo e quindi il vettore di incremento dello spostamento può essere calcolato come:

$$\delta\mathbf{q} = [\mathbf{K}_{T|_{\mathbf{q}^{(0)}}}]^{-1}(\delta\lambda \mathbf{p}_{ref}) \quad (7.14)$$

Questa definizione di  $\Delta\mathbf{q}$  soddisfa comunque l'eq.(7.13). Poiché l'espansione di Taylor è troncata al primo ordine, la nuova condizione di equilibrio alla configurazione  $(\mathbf{q}^{(0)} + \Delta\mathbf{q}, \lambda_0 + \Delta\lambda)$  non viene raggiunta immediatamente, allora dal vettore delle forze residue viene calcolato un'altra correzione dello spostamento  $\delta\mathbf{q}$ , sovrapponendo solo le variabili relative allo spostamento nell'espansione di Taylor:

$$\varphi_{res}(\mathbf{q}^{(0)} + \Delta\mathbf{q} + \delta\mathbf{q}) = \varphi_{res}(\mathbf{q}^{(0)} + \Delta\mathbf{q}) + \mathbf{K}_{T|_{\mathbf{q}^{(0)} + \Delta\mathbf{q}}} \delta\mathbf{q} = 0 \quad (7.15)$$

da cui si ottiene:

$$\delta\mathbf{q} = -[\mathbf{K}_{T|_{\mathbf{q}^{(0)} + \Delta\mathbf{q}}}]^{-1} \varphi_{res}(\mathbf{q}^{(0)} + \Delta\mathbf{q}) \quad (7.16)$$

La nuova configurazione sarà quindi  $(\mathbf{q}^{(0)} + \Delta\mathbf{q} + \delta\mathbf{q}, \lambda_0 + \Delta\lambda)$  che porta ad avere forze residue sempre più piccole. Procedendo iterativamente si ottiene la condizione di equilibrio al valore incrementato delle forze esterne e nuovamente, deve essere soddisfatto il criterio di convergenza delle forze residue.

Da questa configurazione convergente finale viene considerato un nuovo incremento di carico, dando inizio di nuovo alla stessa procedura così da ottenere la nuova condizione corrispondente alla nuova condizione di carico.

In **Figura 7.2** viene fornita una rappresentazione geometrica del metodo di Newton con controllo di carico. La soluzione *i-esima* ad ogni iterazione è definita da  $\mathbf{q}^{(i)}$  e tende iterativamente a  $\bar{\mathbf{q}}$ . Ad ogni iterazione, il vettore nodale degli spostamenti è usato per calcolare la matrice di rigidezza per ottenere il vettore

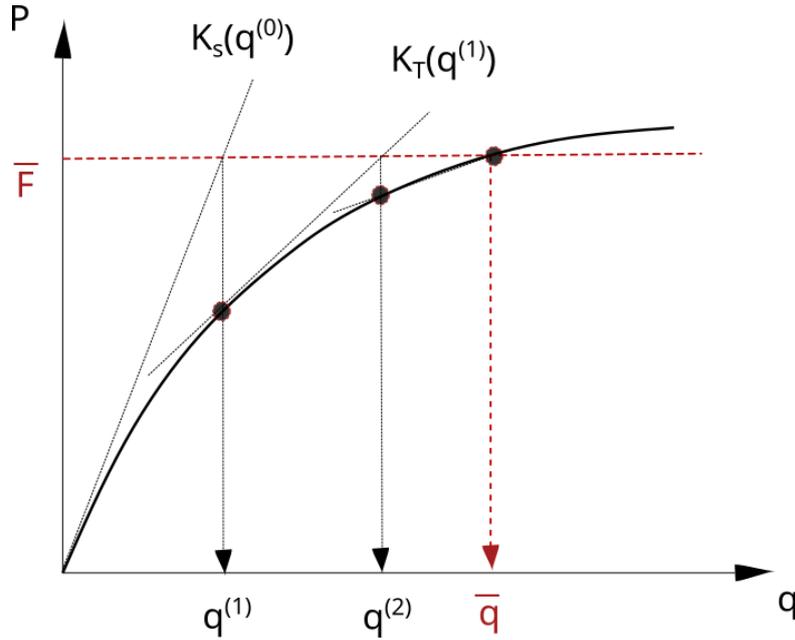


Figura 7.2: Rappresentazione geometrica del metodo di Newton-Raphson con controllo di carico.

degli spostamenti nodali successivo associato al vettore delle forze esterne  $\bar{\mathbf{F}}$ . In alcune situazioni, però, le strutture mostrano una risposta meno rigida con il carico applicato. In questi casi, è molto utile forzare la procedura di risoluzione da controllo di carico (*load control*) ad una procedura di tipo *arc-length* a casua del raggiungimento del punto limite.

### 7.2.3 Metodo *arc-length*

Come menzionato precedentemente, il metodo *arc-length* permette di ottenere una soluzione per problemi lineari quando si è in presenza di punti critici. Questo metodo è accuratamente descritto da Crisfield [39]. In particolare, si parte come prima da un problema di ottimizzazione delle forza residue:

$$\varphi_{res} = \mathbf{K}_S(\mathbf{q})\mathbf{q} - \mathbf{p} = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{K}_S(\mathbf{q})\mathbf{q} = \mathbf{p} \quad (7.17)$$

A differenza del controllo di carico, in questo caso vengono considerate simultaneamente le variazioni di spostamento e del parametro di carico. Considero sempre  $(\mathbf{q}^{(0)}, \lambda_0)$  la condizione di equilibrio iniziale e  $\Delta\mathbf{q}$  e  $\Delta\lambda$  sono gli incrementi. Posso quindi riscrivere la 7.17 come:

$$\varphi_{res}(\mathbf{q}^{(0)} + \Delta\mathbf{q}, \lambda_0 + \Delta\lambda) = \mathbf{K}_T(\mathbf{q}^{(0)})(\mathbf{q}^{(0)} + \Delta\mathbf{q}) - (\lambda_0 + \Delta\lambda)\mathbf{p} \quad (7.18)$$

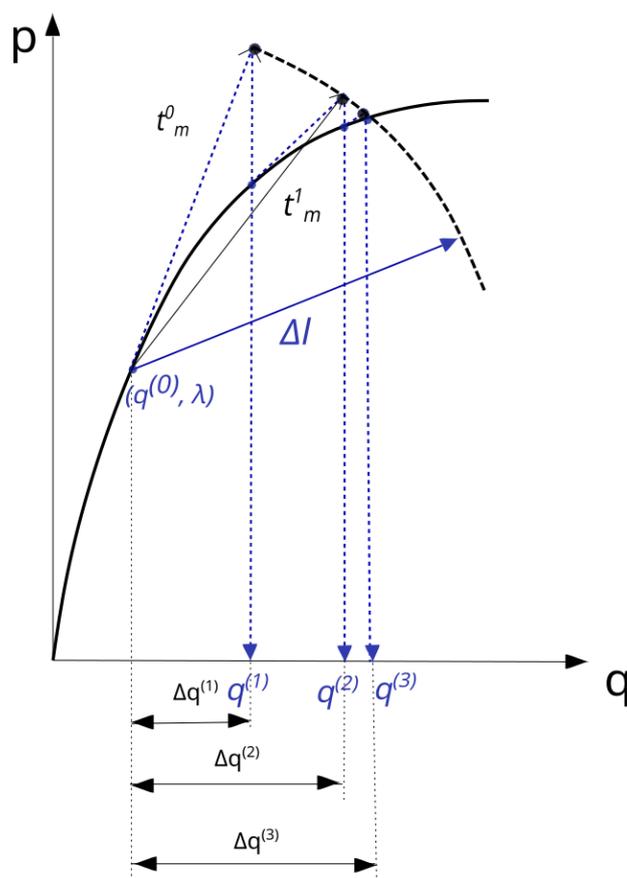


Figura 7.3: Notazione e rappresentazione geometrica del metodo sferico arc-length

Se nella configurazione attuale il vettore delle forze residue  $\varphi_{res}(\mathbf{q}^{(0)} + \Delta\mathbf{q}, \lambda_0 + \Delta\lambda) = 0$ , significa che questa configurazione è una configurazione di equilibrio e la soluzione può essere aggiornata. Questo però non è del tutto vero perché l'espansione in serie di Taylor è stata troncata al primo ordine. Come descritto precedentemente, allora, bisogna introdurre un'altra correzione per incrementare lo spostamento e il parametro di carico  $(\delta\mathbf{q}, \delta\lambda)$ . Possiamo quindi riscrivere l'eq. (7.17) come:

$$\varphi_{res}(\mathbf{q}^{(0)} + \Delta\mathbf{q} + \delta\mathbf{q}, \lambda_0 + \Delta\lambda + \delta\lambda) = \mathbf{K}_T(\mathbf{q}^{(0)} + \Delta\mathbf{q})(\mathbf{q}^{(0)} + \Delta\mathbf{q} + \delta\mathbf{q}) - (\lambda_0 + \Delta\lambda + \delta\lambda)\mathbf{p} \quad (7.19)$$

Il nuovo sistema di equazioni da risolvere avrà la seguente forma:

$$\begin{cases} [\mathbf{K}_{T_{|q^{(0)}+\Delta q}}] \delta \mathbf{q} - \delta \lambda \mathbf{p} = \boldsymbol{\varphi}_{res}(q^{(0)} + \Delta \mathbf{q}) \\ (\Delta \mathbf{q} + \delta \mathbf{q})^T (\Delta \mathbf{q} + \delta \mathbf{q}) + \psi^2 ((\lambda_0 + \delta \lambda)^T (\mathbf{p}^T \cdot \mathbf{p})) = \Delta l^2 \end{cases} \quad (7.20)$$

dove la seconda equazione rappresenta l'equazione di vincolo aggiuntiva con  $\psi$  e  $\Delta l$  parametri definiti, in particolare  $\Delta l$  è una misura di quanto lontano dal punto di equilibrio successivo si è. Combinando le due equazioni del sistema (7.20) e scrivendo in forma compatta possiamo scrivere:

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{T_{|q^{(0)}+\Delta q}}] & -\mathbf{p} \\ 2\Delta \mathbf{q}^T & 2\psi^2 \Delta (\mathbf{p}^T \cdot \mathbf{p}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta \mathbf{q} \\ \delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\varphi}_{res}(q^{(0)} + \Delta \mathbf{q}) \\ -(\Delta \mathbf{q}^T \cdot \Delta \mathbf{q}) + \psi^2 \delta \lambda^2 (\mathbf{p}^T \cdot \mathbf{p}) - \Delta l^2 \end{bmatrix} \quad (7.21)$$

Partendo dalla prima equazione del sistema (7.20) è possibile dividere lo spostamento iterativo  $\delta \mathbf{q}$  in due parti. Allora la variazione di Newton al nuovo livello di carico sarà:

$$\delta \mathbf{q} = -[\mathbf{K}_{T_{|q^{(0)}+\Delta q}}]^{-1} \boldsymbol{\varphi}_{res}(q^{(0)} + \Delta \mathbf{q}) + [\mathbf{K}_{T_{|q^{(0)}+\Delta q}}]^{-1} \mathbf{p} = \delta \bar{\mathbf{q}} + \delta \lambda \delta \mathbf{q}_t \quad (7.22)$$

dove  $\delta \mathbf{q}_t = [\mathbf{K}_{T_{|q^{(0)}+\Delta q}}]^{-1} \mathbf{p}$  è il vettore degli spostamenti corrispondente al vettore dei carichi fisso  $\mathbf{p}$ . Invece,  $\bar{\mathbf{q}}$  è la variazione iterativa da cui deriverebbe il metodo di Newton-Raphson con controllo di carico standard (a livello di carico fissato  $\lambda_0$ ). Se invece adottiamo il metodo di Newton-Raphson modificato,  $\delta \mathbf{q}_t$  deve essere calcolato per lo step iniziale ma, poiché  $K_T$  è fissata, esso non cambia durante le iterazioni.

Ottenuto  $\delta \mathbf{q}$  (eq. (7.22)) (con  $\delta \lambda$  ancora sconosciuto), il nuovo vettore incrementale degli spostamenti sarà:

$$\Delta \mathbf{q}_n = \Delta \mathbf{q}_0 + \bar{\mathbf{q}} + \delta \lambda \delta \mathbf{q}_t \quad (7.23)$$

sostituendo quest'ultima equazione nell'equazione di vincolo, otteniamo un'equazione scalare quadratica del tipo:

$$\alpha_1 \delta \lambda^2 + \alpha_2 \delta \lambda + \alpha_3 = 0 \quad (7.24)$$

dove

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \delta \mathbf{q}^T \mathbf{q} + \psi^2 (\mathbf{p}^t \mathbf{p}) \\ \alpha_2 &= 2(\Delta \mathbf{q} + \delta \bar{\mathbf{q}})^T \delta \mathbf{q}_t + 2\psi^2 \Delta \lambda (\mathbf{p}^t \mathbf{p}) \\ \alpha_3 &= (\Delta \mathbf{q} + \delta \bar{\mathbf{q}})^T (\Delta \mathbf{q} + \delta \bar{\mathbf{q}}) + \psi^2 \Delta \lambda (\mathbf{p}^t \mathbf{p}) - \Delta l^2 \end{aligned} \quad (7.25)$$

L'eq. (7.25) può essere risolta per  $\delta\lambda$ , in modo tale che  $\Delta\mathbf{q}_n$  sia definito a partire dalla (7.23). Questa tecnica richiede solo l'inversione (cioè la fattorizzazione) della matrice di rigidità tangente simmetrica  $K_T$ . In realtà, questo metodo è affetto da alcune limitazioni: la matrice  $K_T$  è singolare al punto limite e quindi le equazioni non possono essere risolte. Questo problema però non è significativo in quanto non si arriva quasi mai al punto critico.

Nell'equazione di vincolo è presente il *parametro di scala*  $\psi$ . Quando quest'ultimo è pari a  $\psi = 1$  allora la procedura *arc-length* di Crisfield appena descritta è chiamata *sferica* perché l'equazione di vincolo (seconda equazione del sistema (7.20)) assume la forma di un'ipersfera.

Bisogna sottolineare che l'eq. (7.24) fornisce due soluzioni diverse per ogni variazione di carico  $\delta\lambda$ . Per evitare questo, e scegliere quindi una sola delle due soluzioni, i vari autori hanno proposto diverse soluzioni. Crisfield [39] ha proposto la scelta di una radice appropriata valutando i due angoli tra il vettore  $\mathbf{t}_m^{n-1}$ , tangente nella condizione prima dell'iterazione corrente, e il vettore  $\mathbf{t}_m^n$ , tangente nella condizione di iterazione corrente. Questi angoli sono calcolati usando le due radici dell'equazione (7.24). La soluzione appropriata sarà quella che avrà un angolo positivo, essa infatti sarà la radice più vicina alla soluzione lineare. Una descrizione più dettagliata è fornita in [18] e [39]. In **Figura 7.3** la rappresentazione geometrica del metodo appena descritto.

## 7.3 Descrizione del codice MUL2

Le teorie relative a strutture unidimensionali e bidimensionali sono strumenti matematici in grado di poter descrivere e ridurre i problemi strutturali tridimensionali usando modelli computazionali più semplici ed efficienti. Come già ampiamente descritto, questi modelli sono costruiti utilizzando espansioni sulle variabili incognite sulla sezione trasversale o lungo lo spessore della struttura, a seconda del modello 1D e 2D. La Carrera Unified Formulation è, quindi, in grado di descrivere le equazioni di governo in una forma compatta. La CUF è in grado di descrivere tutti i principali modelli strutturali, sia a singolo strato che multistrato e ha introdotto il metodo della cinematica del nodo indipendente (*node-dependent-kinematics* NDK). Il codice MUL2, sviluppato dai professori e ricercatori del Politecnico di Torino, è interamente basato sulla CUF. In questi anni sono stati implementati diversi modelli del codice in grado di descrivere elementi finiti di tipo trave, piastra e guscio. In questo elaborato sono stati utilizzati principalmente codici per il modello trave e per il modello piastra. Inoltre è stato implementato il codice sia per materiali linearmente-elastici sia per materiali isotropi iperelastici.

Una delle capacità del codice MUL2 che lo contraddistingue è proprio la NDK che consente la scelta della teoria strutturale a livello nodale, ovvero la possibilità

di utilizzare simultaneamente diverse teorie strutturali nello stesso modello FE. Questo può migliorare i risultati ottenuti nelle differenti analisi strutturali.

Il codice MUL2 è scritto interamente in linguaggio Fortran ed è principalmente formato da una serie di librerie e moduli contenenti tutte le procedure e routine specifiche. Il codice richiede una serie di dati in input relativi alla geometria, alle condizioni al contorno e le proprietà del materiale. Forniti gli input, le procedure FE implementate vengono eseguite, quindi vengono calcolati e assemblati i rispettivi nuclei fondamentali delle matrici di rigidezza. Gli integrali vengono calcolati tramite l'utilizzo della quadratura di Gauss-Legendre e le derivate degli spostamenti e le funzioni di forma sono calcolati in punti di Gauss specificati e usati per il calcolo dei FN.

È possibile scegliere lo schema numerico utilizzato per la risoluzione delle equazioni non lineari (metodo *load control*, *arc-length* e così via). Calcolata la soluzione, avviene la fase di post-processing, in cui i risultati degli spostamenti, delle deformazioni e delle tensioni vengono stampati nei punti richiesti come file Paraview ed è quindi possibile visualizzare le configurazioni deformate nei differenti step di carico.

Per l'analisi di strutture in materiali iperelastici, il codice implementato è in grado di descrivere strutture con modelli di materiali descritti del capitolo 3. Per questi materiali, oltre alle routine utilizzate anche nel caso di materiali linearmente elastici, sono state utilizzate routine per il calcolo delle componenti PK1 e PK2 e del tensore di elasticità tangente nel caso iperelastico.

# Capitolo 8

## Risultati numerici

### 8.1 Modelli 1D con non linearità geometriche

In questa sezione, vengono mostrati diversi risultati numerici ottenuti dall'analisi non lineare di strutture unidimensionali utilizzando formulazione unificata 1D e considerando solo non linearità geometriche. Verranno analizzati principalmente due problemi: una trave incastrata soggetta ad un carico verticale all'estremo libero e nel secondo caso, la trave incastrata soggetta a compressione. In entrambi i casi verranno confrontati i risultati ottenuti dall'analisi lineare, non lineare e la soluzione elastica. In particolare, verrà analizzata una trave snella con rapporto  $L/h = 100$ .

#### 8.1.1 Trave incastrata soggetta a carico trasversale

In questo primo caso, viene considerata una trave snella incastrata a sezione quadrata (lato  $h = 5 \text{ cm}$ ) lunga  $L = 0.5 \text{ m}$  soggetta ad un carico verticale  $P$  applicato

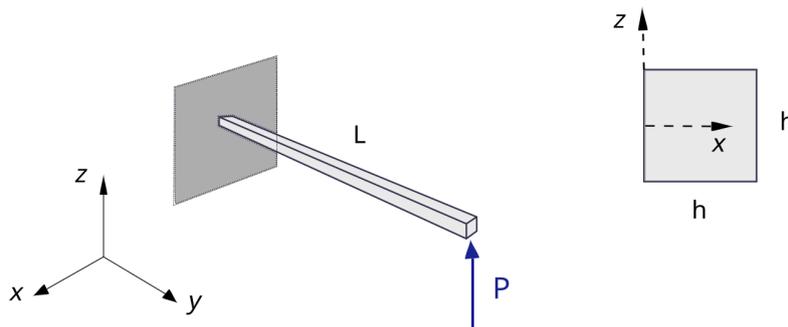


Figura 8.1: Trave snella a sezione quadrata soggetta a taglio, con  $P=10 \text{ N}$ .

all'estremo libero della trave come mostrato in **Figura 8.1**.

La trave è costituita da alluminio, il quale possiede un modulo di Young  $E$  pari a  $75 \text{ GPa}$  e un coefficiente di Poisson  $\nu = 0.33$ . Per l'analisi, viene considerata una discretizzazione lungo l'asse  $y$  pari a 10 elementi formati da 4 nodi ciascuno. Sulla sezione trasversale, invece, viene considerato un modello LE (polinomi di Lagrange) di tipo L9, quindi un polinomio quadratico per approssimare il campo degli spostamenti. La soluzione non lineare viene quindi confrontata con la soluzione lineare analitica basata sul modello della trave di Eulero-Bernoulli e la soluzione non lineare di riferimento mostrata in [15]. Lo stesso problema è stato investigato da Pagani et al. [18].

In **Figura 8.2**, vengono rappresentate le curve di equilibrio della trave a sezione quadrata, dove sull'asse delle ascisse è rappresentato lo spostamento verticale dell'estremo libero della trave adimensionalizzato  $u_z/L$ , e sull'asse delle ordinate è rappresentato il carico applicato  $P$  adimensionalizzato  $\frac{PL^2}{EI}$  in un intervallo compreso tra 0 e 8, dove  $I = \frac{h^4}{12}$  rappresenta il momento di inerzia.

Come si può notare dal grafico, nel caso di trave snella, discretizzando lungo l'asse

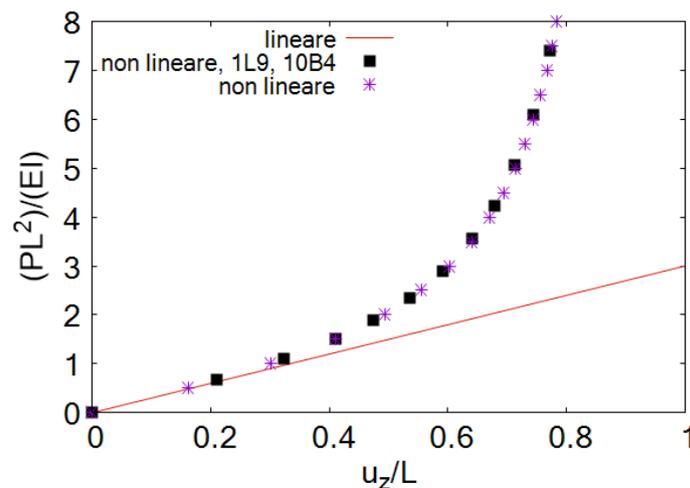


Figura 8.2: Confronto curve di equilibrio per una trave snella ( $L/h=100$ ) incastrata a sezione trasversale quadrata soggetta ad un carico trasversale. Confronto con la soluzione lineare Eulero-Bernoulli e la soluzione non lineare di Bisshopp [15].

y con 10 B4 elementi finiti con polinomi quadratici di Lagrange (L9) e utilizzando un metodo arc-length per la soluzione delle iterate, la soluzione non lineare effettuata coincide con la soluzione di riferimento di Bisshopp [15]. Il modello della trave proposta può quindi descrivere le grandi deformazioni di travi snelle. Inoltre, per

questa tipologia di travi nel caso di piccole deformazioni l'analisi lineare approssima ragionevolmente la soluzione analitica. In **figura 8.3**, invece, viene mostrata

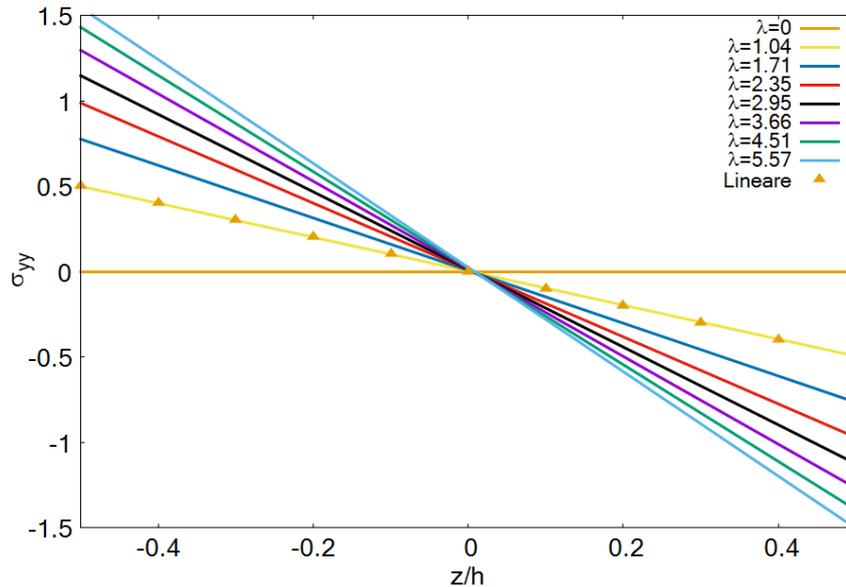


Figura 8.3: Distribuzione dello stress assiale adimensionale  $\frac{\sigma_{yy}2I}{PLh}$  lungo lo spessore. Trave snella  $z/h=100$ .

la distribuzione lungo lo spessore della componente dello stress assiale adimensionalizzato  $\frac{\sigma_{yy}2I}{PLh}$  nella sezione incastrata della trave. Sono visibili sia le soluzioni non lineari per differenti valori di carico caratterizzati da  $\lambda$ , il quale rappresenta il coefficiente che lega il carico al carico di riferimento ( $P = \lambda P_{ref}$ ), sia la soluzione lineare. Possiamo concludere che il modello trave con polinomi di Lagrange è in grado di descrivere in modo accurato lo stato di tensione-deformazione delle travi snelle. Inoltre, è possibile notare che le teorie classiche lineari sono in grado di approssimare in maniera piuttosto accurata la distribuzione delle sollecitazioni assiali delle travi snelle.

### 8.1.2 Trave incastrata soggetta a carico di compressione assiale

In questo secondo caso, viene considerata una trave snella incastrata delle stesse dimensioni e sezione trasversale del caso precedente. Il carico applicato è di compressione assiale come mostrato in **Figura 8.4**.

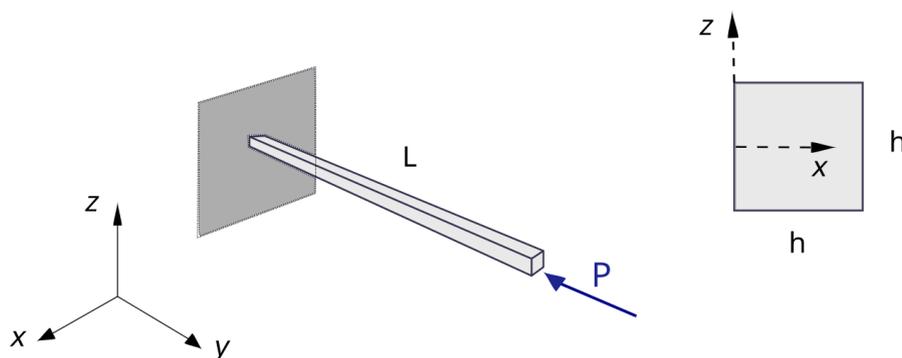


Figura 8.4: Trave snella a sezione quadrata soggetta a carico di compressione.

### Carico critico

Secondo la soluzione analitica linearizzata per una trave caricata di punta partendo dall'equazione di equilibrio in cui il momento esterno deve uguagliare quello interno:

$$M_e + M_i = 0$$

Sostituendo ottengo:

$$-EJ\frac{1}{R} - Py = 0$$

Dove  $R$  è il raggio di curvatura. Sostituendo  $1/R$  nelle ipotesi di piccole deformazioni e imponendo le condizioni al contorno tali per cui:

$$\begin{aligned} y(x=0) &= 0 \\ \frac{dy}{dx}(x=L) &= 0 \end{aligned} \quad (8.1)$$

Per un numero di semionde  $n=1$  ottengo il seguente carico critico:

$$P_c = \frac{EJ\pi^2}{4L^2} = 38.55N$$

### Post-buckling

In questo paragrafo, viene analizzato il comportamento post buckling della trave. La discretizzazione utilizzata è sempre quella descritta in precedenza: 10 elementi B4 lungo l'asse  $y$ , sulla sezione trasversale un modello basato sui polinomi di Lagrange di tipo L9.

In **Figura 8.5**, vengono rappresentate le curve di equilibrio in post-buckling della trave snella a sezione quadrata, la quale presenta un difetto  $d$  tale che  $\frac{4L^2}{\pi^2 EI}d = 0.002$ .

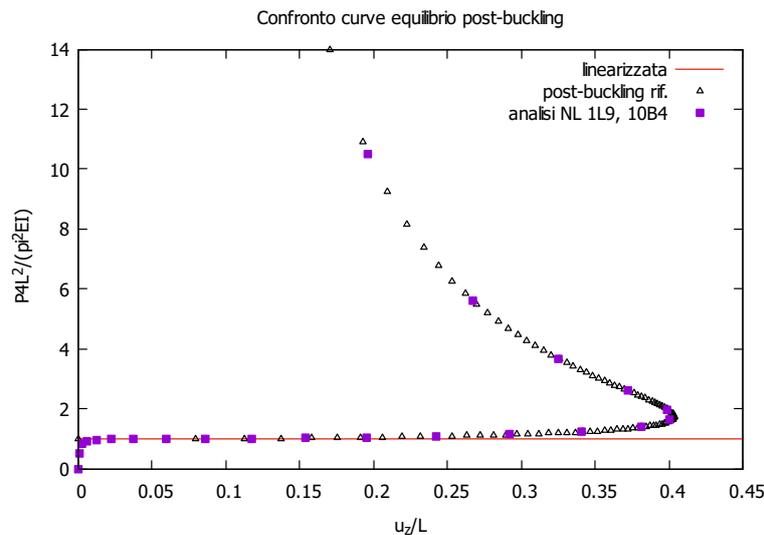


Figura 8.5: Confronto curve di equilibrio per una trave incastrata a sezione trasversale quadrata soggetta ad un carico di compressione assiale. Confronto con soluzione analitica EBBM di riferimento [18] [30].

La soluzione post-buckling non lineare ottenuta viene confrontata con quella analitica EBBM di riferimento mostrata in [18] [30] e con la soluzione linearizzata. Sull'asse delle ascisse è rappresentato lo spostamento adimensionalizzato  $u_z/L$  e sull'asse delle ordinate è rappresentato il carico adimensionalizzato  $\frac{P4L^2}{\pi^2EI}$ . Dal grafico è possibile notare come per piccole deformazioni la soluzione del buckling linearizzato può fornire una buona approssimazione. Per grandi deformazioni invece, la soluzione dell'analisi non lineare è l'unica in grado di fornirci l'analisi post-buckling corretta.

## 8.2 Modelli 2D con non linearità geometriche

In questa sezione viene condotta un'analisi non lineare nel caso di un modello strutturale 2D con non linearità solo geometriche. In particolare, un modello piastra.

### 8.2.1 Piastra soggetta a pressione trasversale uniforme

Nel caso considerato è stato valutato lo spostamento in direzione  $z$  di una piastra quadrata di dimensioni  $a = b = 1.2 \text{ m}$  soggetta ad una pressione uniforme trasversale  $p_z$  come mostrato in **Figura 8.6**. Il modulo di Young e il coefficiente

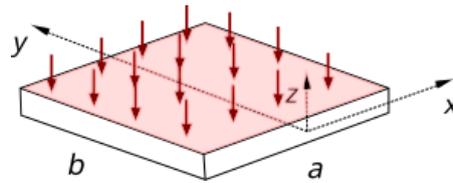


Figura 8.6: Piastra isotropa soggetta a carico di pressione trasversale uniforme e sistema di coordinate cartesiane

te di Poisson valgono rispettivamente  $E = 75 \text{ GPa}$  e  $\nu = 0.3$ . Considerate come condizioni di vincolo tutti i quattro lati incastrati (CCCC), è stato valutato lo spostamento adimensionalizzato  $u_z/h$  in funzione del carico adimensionalizzato  $\frac{p_z a^4}{Eh^4}$ . Il caso sotto esame è stato analizzato da Pagani *et al* in [10].

In **Figura 8.8** vengono confrontate le curve di equilibrio di una piastra conside-

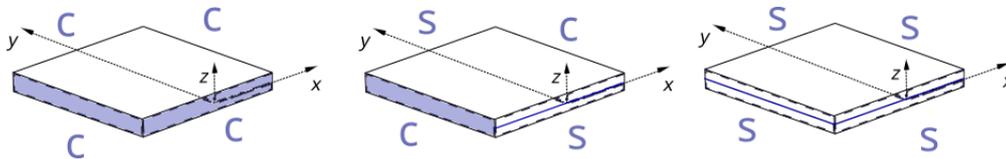


Figura 8.7: Differenti condizioni al contorno della piastra: CCCC, CSCS, SSSS.

rata sottile cioè tale per cui  $h/a = 0.02$  e una piastra moderatamente sottile cioè avente  $h/a = 0.1$ . Sono state considerate mesh regolari nel piano  $xy$  di tipo 6x6, 8x8 e 12x12, con elementini di tipo Q9. Lungo la direzione dello spessore, invece, sono state considerate come funzioni di espansione polinomi di Lagrange a tre nodi (quadratiche, LD2). Le analisi non lineari vengono poi confrontate con la curva di riferimento [42]. Come è possibile notare dalla figura, aumentando il numero di elementi nella mesh aumenta la velocità di convergenza della soluzione.

Utilizzando un'analisi geometrica non lineare, valuto sempre le curve di equilibrio al variare delle condizioni al contorno. In particolare, in **Figura 8.9** sono rappresentate le curve di equilibrio nel caso di piastra moderatamente sottile ( $h/a = 0.1$ ) per tre differenti casi di condizioni al contorno: CCCC, CSCS, SSSS. Come si nota dalla figura, la teoria di von Kàrmàn fornisce una buona approssimazione solo per piccole deformazioni e diverge in maniera significativa all'aumentare del carico. Per piastre sottili, invece, le curve basate sul modello CUF coincidono abbastanza con la teoria di Von Kàrmàn modificata citata in [42]. Questo vuol dire che quest'ultima teoria descrive le strutture più rigide, cioè per ottenere lo stesso spostamento trasversale occorre un carico di pressione maggiore rispetto al modello piastra non lineare. In figura **Figura 8.10**, viene mostrata la distribuzione lungo lo spessore della componente adimensionale di stress normale  $\sigma_{xx} a^2 / (Eh^2)$  nel punto avente  $x = y = a/2$  (cioè il punto di mezzeria) sia per il caso di pia-

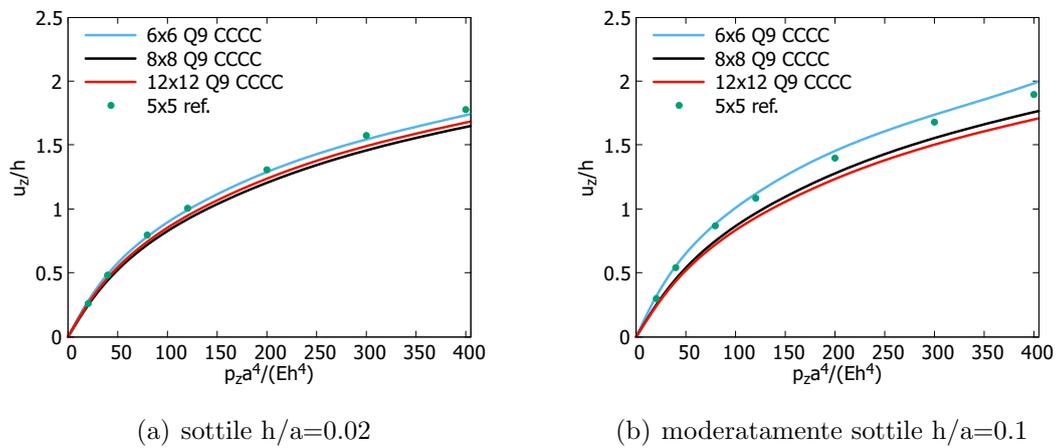


Figura 8.8: Curve di equilibrio della piastra soggetta a pressione trasversale uniforme con condizioni al contorno CCCC. Confronto con curva di equilibrio di riferimento [42]. (a) piastra sottile  $h/a = 0.02$  (b) piastra moderatamente sottile  $h/a = 0.1$ .

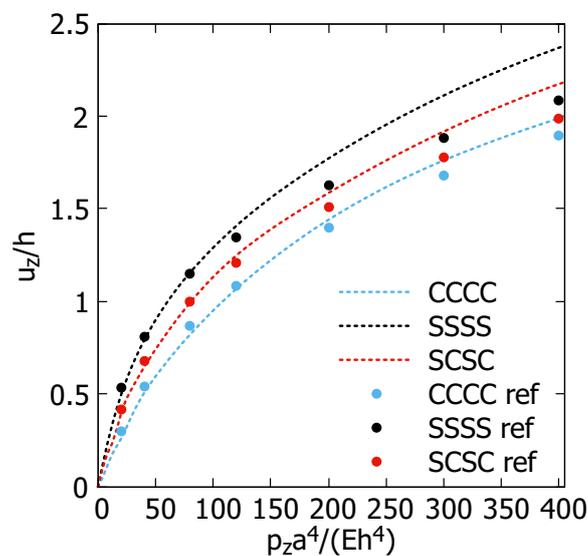


Figura 8.9: Curve di equilibrio per piastra moderatamente sottile  $h/a = 0.1$  soggetta a pressione trasversale e differenti casi di condizioni al contorno: CCCC, SCSC, SSSS. Confronto con le curve di riferimento [42]

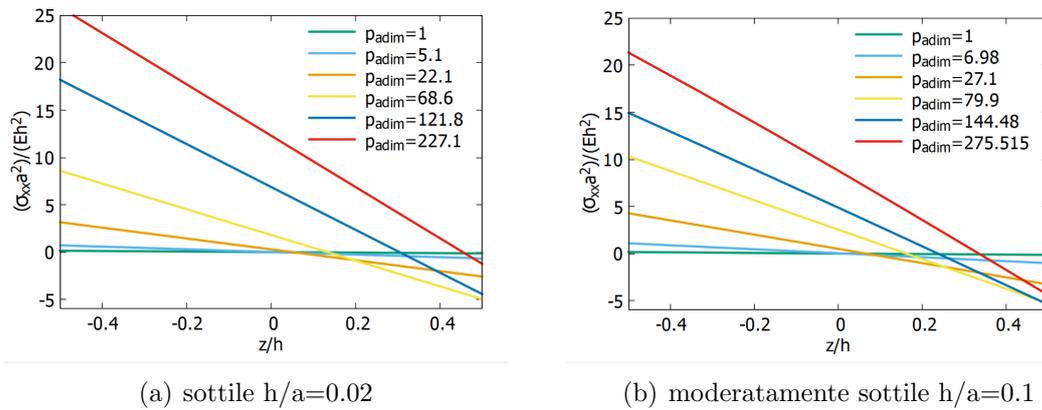


Figura 8.10: Distribuzione lungo lo spessore dello stress normale adimensionale  $\sigma_{xx} a^2 / (E h^2)$  nel punto di mezzeria con condizioni al contorno CCCC e sotto differenti carichi di pressione  $p_{adim} = \frac{p_z a^4}{E h^4}$  : (a) piastra sottile  $h/a = 0.02$  (b) piastra moderatamente sottile  $h/a = 0.1$ .

stra sottile che per piastra moderatamente sottile. La soluzione corrisponde a vari livelli di carico basati sempre su analisi non lineare, utilizzando polinomi di Lagrange di tipo LD2 e mesh regolare 12x12. E' possibile notare che per differenti rapporti  $h/a$  la distribuzione della tensione normale è qualitativamente la stessa e gli effetti geometrici non lineari non possono essere trascurati nel caso di analisi di piastre soggette a carichi di pressione trasversale in stati di equilibrio con grandi deformazioni.

## 8.3 Modelli iperelastici 1D

In questa sezione, vengono mostrati i risultati ottenuti utilizzando la CUF per il metodo agli elementi finiti su diversi casi di strutture in materiale iperelastico 1D.

### 8.3.1 Tensione uniassiale

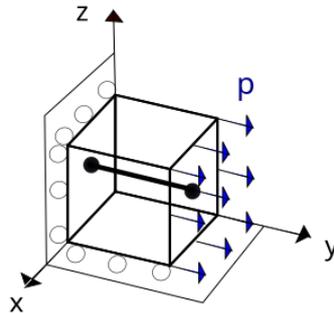


Figura 8.11: Geometria e condizione al contorno del cubo soggetto a tensione uniassiale

Modelli	Parametri	UM
Neo-Hookean	$\mu = 0.27$	MPa
Gent	$\mu = 0.27$	MPa
	$J_m = 85.91$	-
Exp-Ln	$A = 0.195$	MPa
	$a = 0.018$	-
	$b = 0.22$	-
$D_1 = 33 \times 10^{-9} MPa^{-1}$ per tutti i modelli		

Tabella 8.1: Parametri del materiale per il test di tensione uniassiale.

Il primo caso considerato riguarda la tensione uniassiale su un campione cubico di materiale [18]. Come già descritto precedentemente, utilizziamo una funzione di energia di deformazione  $\bar{\Psi}$  dipendente solo dal primo invariante e con quest'ultimo pari a:

$$\bar{I}_1 = I_1 = \lambda_1^2 + \frac{2}{\lambda_1} \quad \bar{\Psi} = \Psi(\lambda_1) \quad (8.2)$$

dove  $\lambda_1$  rappresenta il rapporto di deformazione lungo la direzione di trazione, ovvero l'autovalore del tensore di deformazione  $\mathbf{F}$ . Come già spiegato in precedenza, il rapporto di volume  $J$  è approssimato all'unità.

Definiamo ora lo stress Lagrangiano (cioè la prima componente dello stress Piola-Kirchhoff PK-1)  $P_{11}$  da cui successivamente ricavo la seconda componente PK-2,  $S_{11}$  ed infine la componente di Cauchy  $\sigma_{11}$  come descritto da Holzapfel [62]:

$$P_{11} = \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_1} = \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \lambda_1} = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} \left( \lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1^2} \right) \quad (8.3)$$

$$S_{11} = \frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_1} = \frac{1}{\lambda_1} P_{11} \quad (8.4)$$

$$\sigma_{11} = J^{-1} \lambda_1 \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_1} = \lambda_1 P_{11} \quad (8.5)$$

Il cubo considerato ha dimensioni 15 mm larghezza  $\times$  15 mm altezza  $\times$  15 mm spessore e presenta le condizioni al contorno mostrate in **Figura 8.11**. Il campione utilizzato è stato modellato come una trave e discretizzato con un singolo elemento di tipo lineare lagrangiano (B2, a due nodi) lungo l'asse  $y$ . Invece, per l'approssimazione della sezione trasversale nel piano  $xz$ ,  $F_\tau$ , è stata utilizzata un'approssimazione polinomiale bilineare L4.

Sono state valutate differenti soluzioni in base al modello di materiale iperelastico scelto e quindi le diverse funzioni di energia di deformazione  $\bar{\Psi}$  descritte precedentemente tramite le equazioni (4.6) (4.7) (4.9). In particolare, i parametri utilizzati sono mostrati nella tabella 8.1. Le soluzioni in **Figura 8.12** combaciano esattamente con la soluzione analitica mostrata in [19] sia per grandi che per piccole deformazioni.

Per il modello di materiale Gent, sono state anche comparate le soluzioni ottenute aumentando il numero di elementi finiti lungo l'asse  $y$  come mostrato in **Figura 8.13**. In **Figura 8.14** sono mostrati diversi stati di deformazione del cubo nel caso di materiale di tipo Gent e utilizzando un solo elemento B2 lungo l'asse  $y$  e una approssimazione L4 come  $F_\tau$ .

### 8.3.2 Trave soggetta a flessione

Il secondo modello strutturale analizzato è una trave incastrata ad un estremo e soggetta ad una forza trasversale all'altro estremo come mostrato in **Figura 8.15**. La trave è a sezione rettangolare (100 mm spessore  $\times$  150 mm altezza) e lunga 10

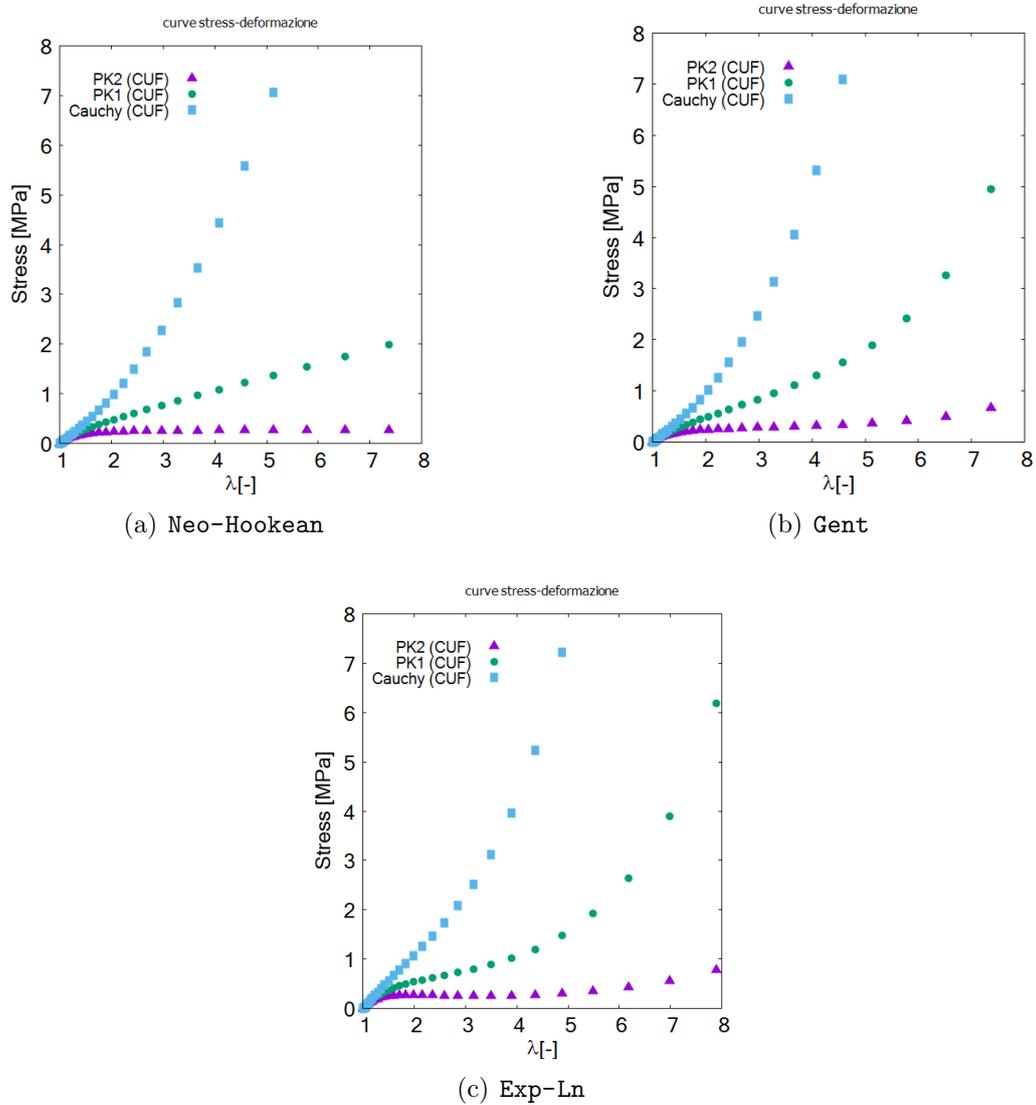


Figura 8.12: Tensione uniaxiale per differenti modelli di materiale utilizzando analisi FEM basata sulla CUF.

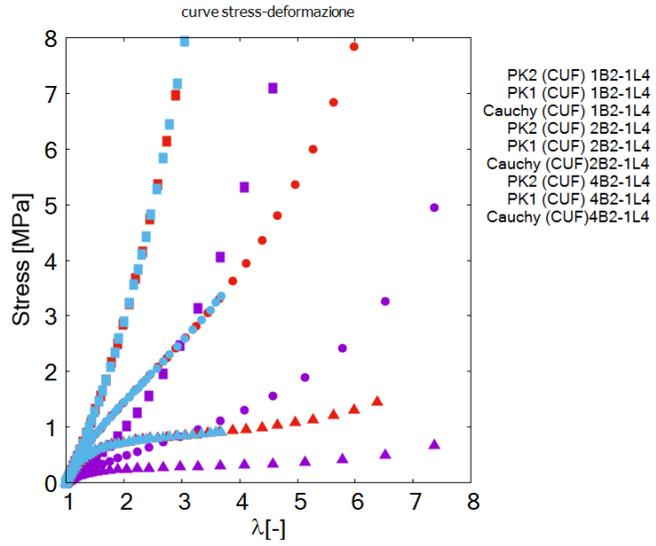


Figura 8.13: Tensione unissiale al variare del numero di elementi finiti lungo  $y$ . Materiale di tipo Gent.

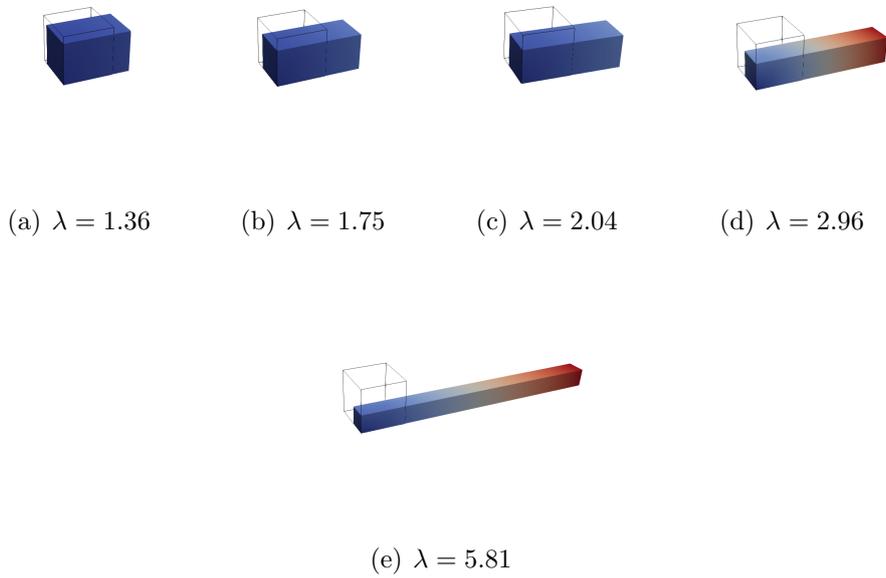


Figura 8.14: Deformate del test di tensione uniasiale di un cubo di materiale di tipo Gent utilizzando una discretizzazione 1B2-1L4.

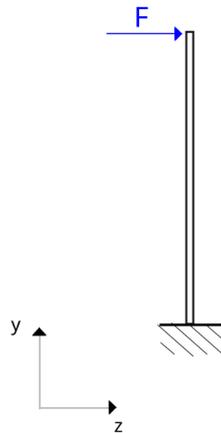


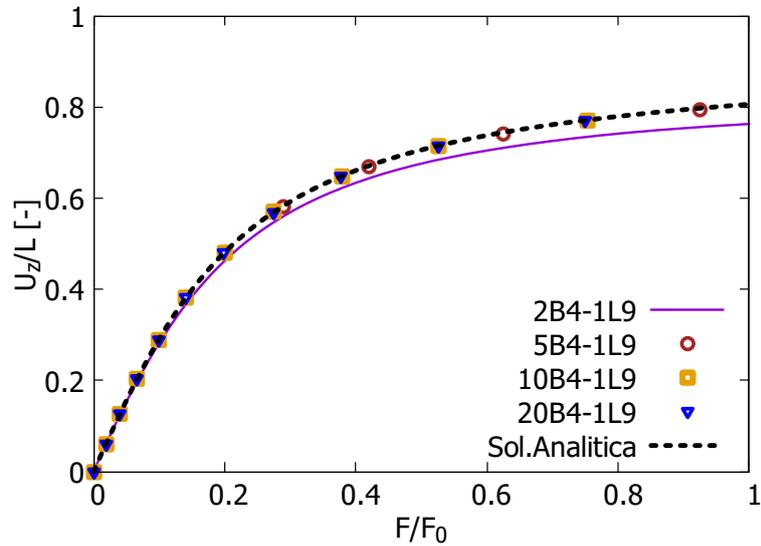
Figura 8.15: Trave incastrata ad un estremo soggetta ad un carico trasversale  $F_0 = 269.5 N$  all'altro estremo.

m. Il carico trasversale applicato all'estremo libero è  $F_0 = 269.5 N$ .

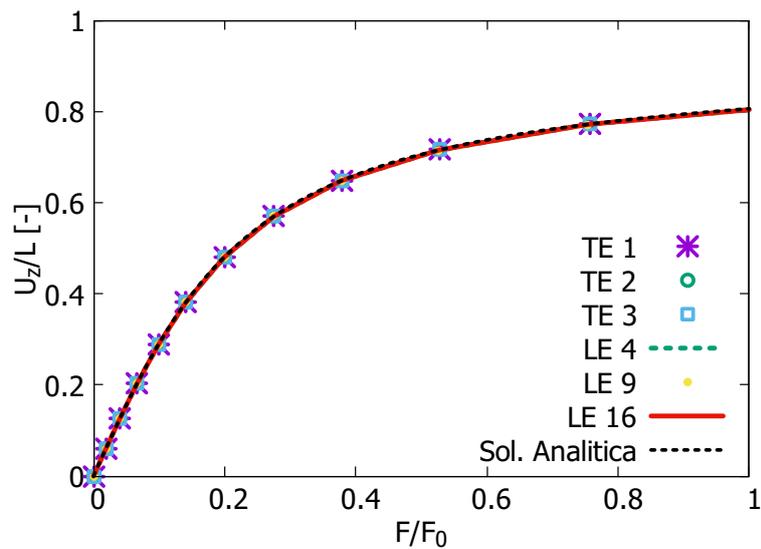
L'analisi strutturale è stata effettuata considerando la struttura di materiale iperelastico di tipo neo-Hookeano e quindi la definizione di  $\bar{\Psi}$  associata (4.6). I parametri del materiali considerati sono: un modulo di taglio  $\mu = 50 MPa$  e un modulo di compressibilità  $k = 2\mu/3$ .

Sono state eseguite due tipi di analisi: la prima aumentando il numero di elementi lungo l'asse  $y$  considerando una funzione cubica a quattro nodi B4 e la seconda valutando gli effetti che hanno le diverse espansioni  $F_\tau$  sulla sezione trasversale (TE e LE). Dalla **Figura 8.16(a)** è possibile notare che utilizzare dai 5 elementi B4 in poi è una buona approssimazione poichè combacia con la soluzione analitica [19].

Per quanto riguarda le differenti teorie utilizzate per  $F_\tau$ , dalla **Figura 8.16(b)** emerge che qualsiasi ordine e qualsiasi tipo di teoria di espansione per la sezione trasversale approssimano in maniera accurata la soluzione analitica mostrata in [13]. Questo perchè è stata considerata una trave snella. In **Figura 8.18**, invece, sono messe a confronto le componenti dello stress PK2 sia assiale che trasversale lungo lo spessore al variare dell'ordine di espansione e del tipo di teoria considerata (TE e LE). Nel caso della componente assiale  $S_{yy}$ , essa è indipendente dall'ordine e dalla teoria utilizzata. Invece, per la componente di taglio trasversale  $S_{yz}$ , per avere un risultato accurato bisogna utilizzare teorie di ordine superiore, cioè del terzo ordine (TE-3 e LE-16).



(a)



(b)

Figura 8.16: Curve di equilibrio della trave di materiale NeoHookeano: 8.16(a) al variare del numero di elementi B4, 8.16(b) al variare della teoria e ordine di espansione di  $F_\tau$ .

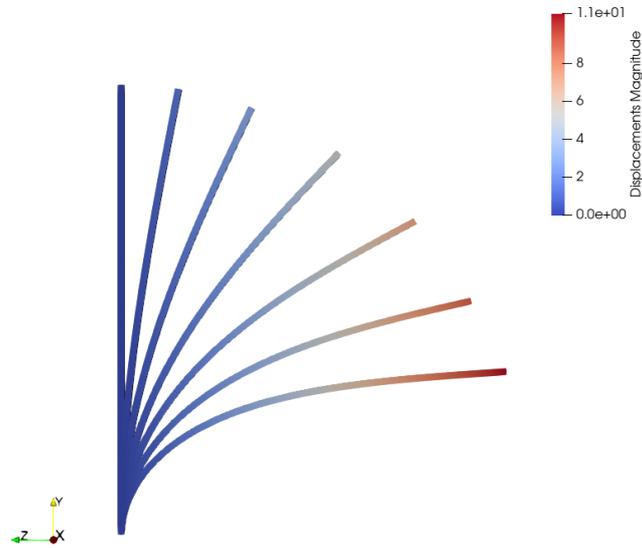
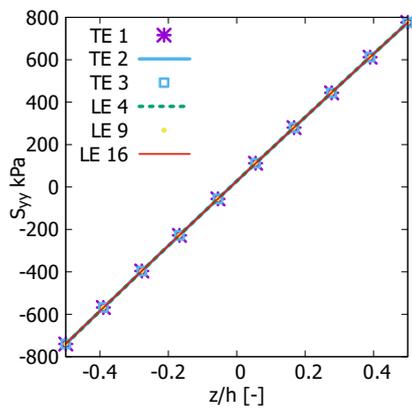
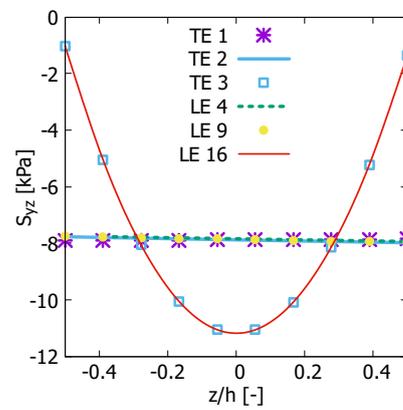


Figura 8.17: Deformate della trave soggetta a flessione a differenti rapporti  $F/F_0=0.08, 0.15, 0.19, 0.31, 0.9$ .



(a) Componente assiale



(b) Componente di taglio trasversale lungo lo spessore

Figura 8.18: Componenti dello stress PK2 assiale(a) e trasversale (b) lungo lo spessore per la trave soggetta ad un rapporto di carico pari a  $F/F_0 = 1.08$

### 8.3.3 Cilindro iperelastico

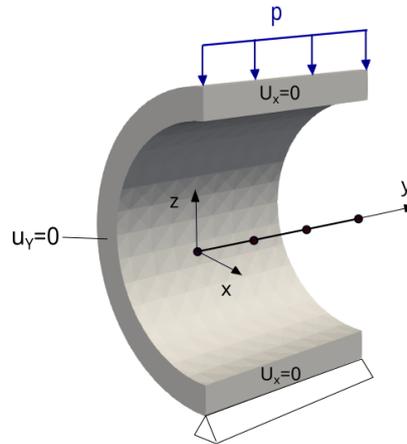


Figura 8.19: Condizioni al contorno e geometria del cilindro iperelastico.

In questo paragrafo si vuole dimostrare come il modello trave precedentemente mostrato può descrivere l'andamento di grandi deformazioni nel caso di strutture a parete sottile. In particolare, poichè simmetrico, è stato considerato un quarto di cilindro la cui lunghezza è pari a 15 cm, raggio interno 8 cm e spessore 2 cm. Le condizioni al contorno sono illustrate in **Figura 8.19**. Per la definizione del materiale è stato implementato un modello di materiale iperelastico neo-Hookean con i seguenti parametri: modulo di taglio  $\mu = 6000 \text{ kN/cm}^2$ , modulo di compressibilità  $k = 280000 \text{ kN/cm}^2$  e coefficiente di Poisson  $\nu = 0.4$ . Sono stati implementati 3 diversi modelli di discretizzazione: lungo la sezione trasversale sono stati considerati 4 elementi LE-16, 8 elementi LE-16 e 16 elementi LE-16. Lungo l'asse del cilindro, ovvero lungo l'asse  $y$ , è stata utilizzata una discretizzazione di un singolo elemento a 4 nodi (B4). In letteratura, sono già presenti diverse soluzioni, come mostrato da Büchter [20], Reese [45] e Elguedj [57]. In **Figura 8.20** è possibile confrontare le soluzioni dello spostamento lungo  $z$  ( $u_z$ ) del punto A in corrispondenza del carico  $p = 999.47 \text{ kN/cm}^2$ . Possiamo notare che la soluzione a 8 e 16 LE-16 coincidono e sono più vicine alla soluzione di Elguedj, il quale utilizza il metodo  $\bar{F}$  e soluzioni basate su NURBS. Invece, il modello a 4 LE-16 è più vicino alla soluzione di Büchter, il quale utilizza una formulazione basata su shell con 7 parametri. Infine, Reese si trova esattamente nel mezzo tra le altre soluzioni utilizzando una tecnica *locking-free brick*. Quindi utilizzare un solo elemento B4 in direzione assiale è sufficiente per ottenere l'accuratezza dei risultati. Possiamo

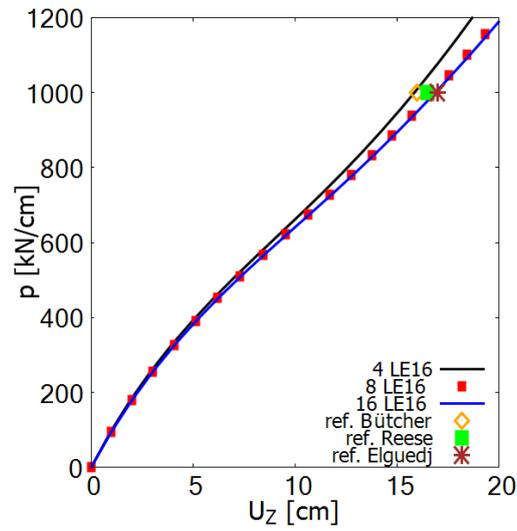


Figura 8.20: Spostamento  $u_z$  del punto A. Confronto tra soluzioni: con modello a 4, 8, 16 LE-16 e le soluzioni di riferimento [20], [45], [57] per un carico  $p = 999.47 \text{ kN/cm}$ .

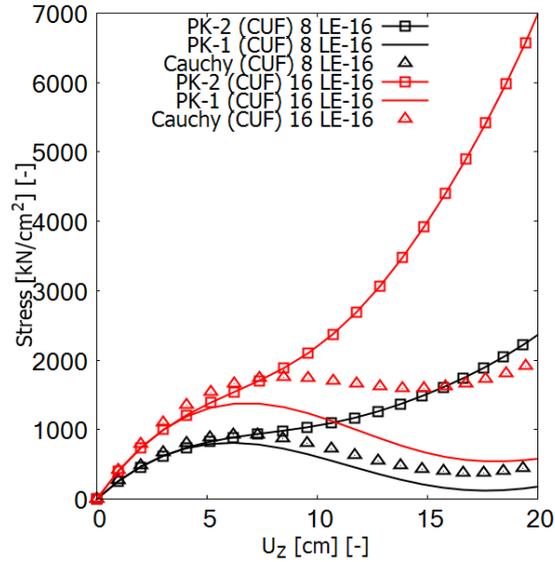


Figura 8.21: Andamento delle curve dello stress PK-1, PK-2 e Cauchy nel caso a 8 elementi e 16 elementi LE-16.

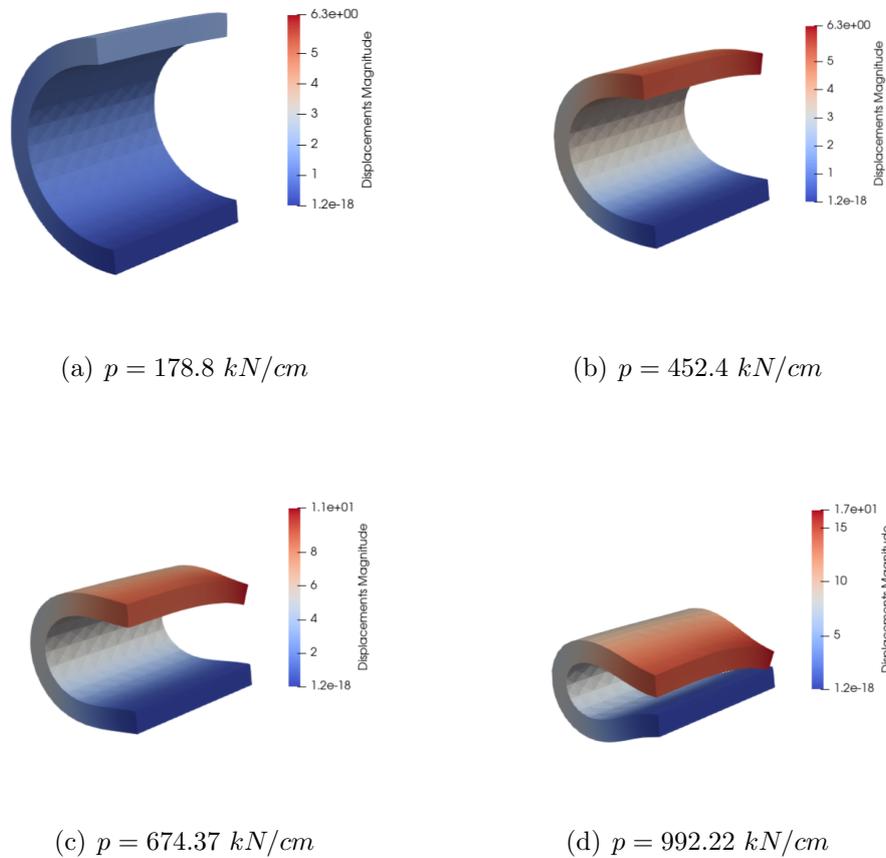


Figura 8.22: Stati di deformazione del cilindro con differenti condizioni di carico.

quindi notare come l'utizzo della CUF 1D sia accurato per problemi come quello appena descritto.

In **Figura 8.21** vengono raffigurati gli andamenti delle curve della componente dello stress PK-1, PK-2 e Cauchy per il modello a 8 elementi e 16 elementi LE-16. È possibile notare che all'aumentare della deformazione la differenza tra i due modelli è sempre più evidente.

Infine, in **Figura 8.22** sono raffigurati gli stati di deformazione del cilindro con condizioni di carico  $p = 178.8, 452.4, 674.37, 992.22 \text{ kN/cm}$ .

### 8.3.4 Conclusioni

Come conclusione degli esempi precedentemente descritti possiamo affermare che l'analisi agli elementi finiti unidimensionale tramite l'utilizzo della CUF è in grado

di descrivere in maniera piuttosto accurata la soluzione del problema di grandi deformazioni in campo iperelastico. Infatti, l'analisi numerica ha fornito soluzioni accurate in presenza di non linearità geometriche e fisiche. Nel capitolo successivo si estenderà il seguente studio a casi bidimensionali ovvero le piastre.

## 8.4 Modelli iperelastici 2D

Per lo studio dei modelli successivamente descritti faremo riferimento al modello di materiale iperelastico Neo-Hookean. In particolare, l'energia di deformazione per materiali comprimibili neo-Hookean citata in [36] assume la seguente forma:

$$\bar{\psi} = \frac{E}{4(1+\nu)}(\bar{I}_1 - 3) + \frac{E}{6(1-2\nu)}(J - 1)^2 \quad (8.6)$$

dove  $\bar{I}_1 = I_1 J^{-2/3}$ , con  $I_1$  e  $J$  che corrispondono rispettivamente al primo invariante e alla radice quadrata del terzo invariante del tensore di deformazione Cauchy-Green  $\mathbf{C}$ .  $E$  e  $\nu$  sono rispettivamente il modulo di Young e il coefficiente di Poisson del materiale. Nel caso di materiali incomprimibili,  $J \rightarrow 1$  e  $\nu \rightarrow 0.5$ , allora il secondo termine della (8.6) tende a zero. Nel caso di materiali quasi incomprimibili, il parametro di penalizzazione dell'incomprimibilità vale  $D1 = \frac{6(1-2\nu)}{E}$ . Infatti  $D_1 = 2/k$ , con  $k$  modulo di compressibilità. Come descritto in [3], quest'ultimo è pari:

$$k = \lambda + \frac{2}{3}\mu = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (8.7)$$

con  $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$  modulo di Lamé e  $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$  modulo di taglio. Infatti, quando il materiale è comprimibile,  $\nu \rightarrow 0$  e  $\lambda \rightarrow 0$ , allora  $k = 2/3\mu$ . Nei paragrafi che seguono verrà effettuata un'analisi agli elementi finiti utilizzando la formulazione unificata di Carrera nel caso 2D.

### 8.4.1 Trave soggetta a flessione con modello CUF-2D

Come primo esempio, per valutare la validità e fare un'analisi di convergenza, riprendiamo il caso della trave soggetta a flessione analizzato nella sezione precedente tramite il modello 1D. La trave era a sezione rettangolare (100 mm spessore  $\times$  150 mm altezza) e lunga 10 m. Viene ora studiato utilizzando un modello CUF-2D, quindi come una piastra con dimensioni  $a = 0,1$  m,  $b = 10$  m e  $h = 0.15$  m. La trave è incastrata ad un estremo ed è sottoposta ad un carico trasversale nell'estremo libero.

Per l'analisi agli elementi finiti, la trave viene discretizzata nel piano  $xy$  utilizzando

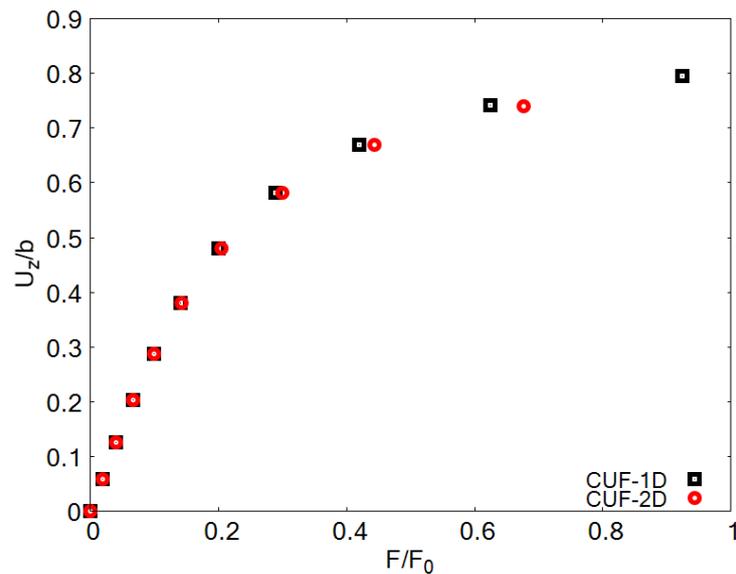


Figura 8.23: Curve di equilibrio dell'estremo libero della trave. Confronto tra modello CUF-1D e CUF-2D.

10 elementi a nove nodi (Q9). Come funzione di espansione lungo lo spessore  $z$  è sufficiente una discretizzazione a 3 nodi B3, quindi una funzione quadratica, per descrivere in modo accurato la soluzione.

In **Figura 8.23** la soluzione con CUF 2D è confrontata con quella ottenuta tramite modello trave 1D utilizzando una discretizzazione lungo l'asse  $y$  con 5 elementi a 4 nodi B4 e una funzione di espansione attraverso la sezione trasversale a nove nodi (Q9). Le due soluzioni sono praticamente coincidenti per piccole deformazioni e molto simili all'aumentare della deformazione. La formulazione unificata di Carrera nel caso 2D può essere utilizzata, quindi, anche per ottenere soluzioni abbastanza accurate di strutture di tipo trave.

### 8.4.2 Piastra quadrata con pressione uniforme

Il secondo esempio considerato è quello analizzato da Ansari [40] considerando il caso quasi incomprimibile e Breslavsky [35] il quale analizza il caso incomprimibile. La piastra è soggetta a pressione uniforme  $p$  ed è considerata semplicemente appoggiata su tutti e quattro i lati, presentando quindi le seguenti condizioni al contorno:

$$w|_{\delta S} = M|_{\delta S} = u|_{\delta S} = v|_{\delta S} = 0 \quad (8.8)$$

con  $\delta S$  bordo della piastra. La piastra ha dimensioni  $a = b = 0.1 \text{ m}$ ,  $h = 5 \times 10^{-4} \text{ m}$  come mostrato in **Figura 8.24**. Considerando le seguenti proprietà del materiale,

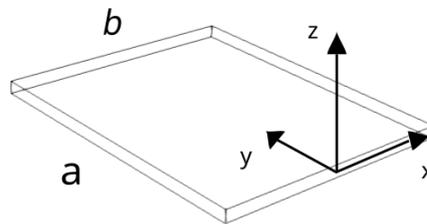


Figura 8.24: Geometria della piastra iperelastica.

$p[kPa]$	$w/h$			Ref. 27 DOF
	8x8Q4	10x10Q4	10x10Q9	
0.029	6.848	9.03	9.043	10.109
0.285	17.741	19.318	19.226	20.132
1.917	37.642	38.912	39.192	39.980
4.292	54.337	55.052	56.075	57.020
8.019	76.571	76.935	78.601	80.032
10.476	91.047	91.854	93.243	94.984

Tabella 8.2: Valori di deformazione del punto centrale della piastra  $w/h$  per differenti modelli di discretizzazione all'aumentare del carico. Confronto con la soluzione di riferimento [35].

quindi considerando il caso quasi incomprimibile:

$$E = 1247060.2 \text{ Pa}, \nu = 0.4999 \quad (8.9)$$

allora otteniamo:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = 415714.45 \text{ Pa}, D_1 = 2/k = \frac{6(1-2\nu)}{E} = 9.6226 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1} \quad (8.10)$$

L'analisi numerica effettuata si basa sulla CUF 2D. In particolare, nel piano  $xy$  sono state considerate discretizzazioni pari a 8x8, 10x10 a quattro nodi (Q4) e 10x10, 16x16 a nove nodi (Q9). Lungo lo spessore, invece, è stato sufficiente utilizzare una funzione di espansione lagrangiana quadratica a tre nodi (B3) per ottenere l'accuratezza della soluzione.

Come si può notare in **Figura 8.25**, per un numero di elementi troppo basso (in questo caso 8x8 Q4) la soluzione non è molto accurata. All'aumentare del

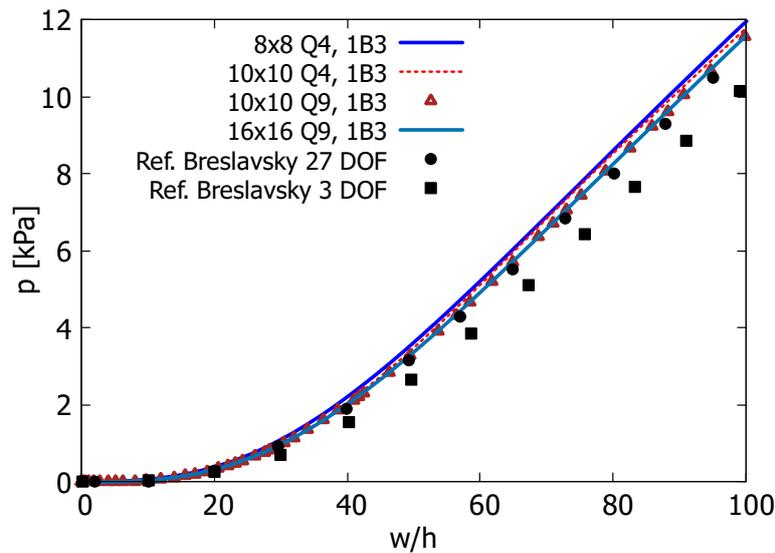


Figura 8.25: Curve di equilibrio del punto centrale  $x = 0$ ,  $y = a/2$  con differenti modelli di discretizzazione e confronto con le soluzioni di riferimento nel caso incomprimibile [35].

numero di elementi, invece, la soluzione tende a coincidere con la soluzione di 27 DOF di Breslavsky [35]. Aumentando invece il numero di nodi, quindi considerando elementi a 9 nodi (Q9) la curva di equilibrio è praticamente prossima alla soluzione con 27 DOF di Breslavsky. Nella Tabella 8.2 vengono riportati i valori di deformazione del punto centrale per i diversi modelli di discretizzazione utilizzati e per differenti step di carico. Come visibile dal grafico, si raggiunge convergenza per una mesh 10x10 Q9. Avendo utilizzato  $\nu = 0.4999$ , quindi il caso quasi incomprimibile, è possibile notare che esso sia quasi coincidente con il caso incomprimibile, anzi sono praticamente coincidenti per piccole deformazioni.

### 8.4.3 Piastra iperelastica di materiale biologico

Questo secondo caso è discusso sempre da Breslavsky in [35]. La piastra ha sempre le stesse dimensioni e condizioni al contorno dell'esempio precedente. Per le proprietà del materiale si fa riferimento a quelle considerate in [64] rese disponibili dallo studio della tensione uniassiale per il materiale biologico della tunica adventitia dell'aorta umana. Utilizziamo quindi un modello di materiale Neo-Hookean con modulo di Young  $E = 59383.2 Pa$  e consideriamo la condizione di materiale quasi incomprimibile con  $\nu = 0.4999$ . Per l'analisi di convergenza sono stati utilizzati elementi a 4 nodi Q9 sul piano  $xy$  e un elemento a 3 nodi (B3) lungo lo

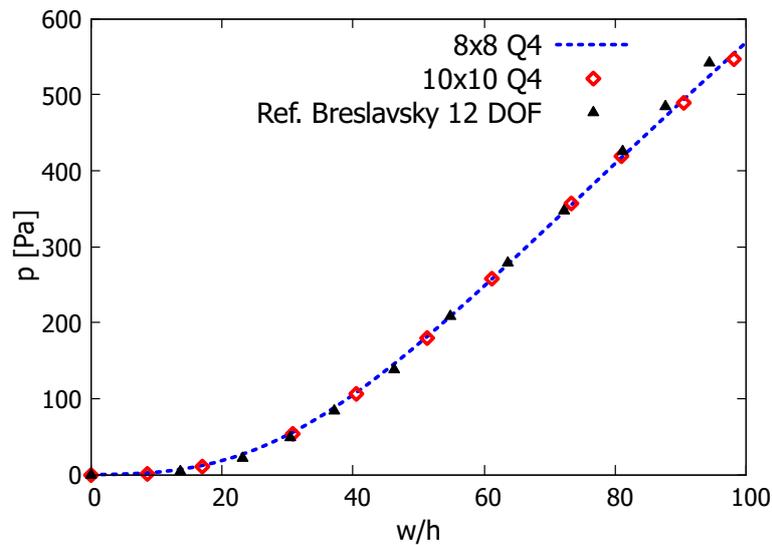


Figura 8.26: Curve di equilibrio del punto centrale  $x = 0$ ,  $y = a/2$  della piastra di materiale biologico con differenti modelli di discretizzazione e confronto con la soluzione di Breslavsky nel caso incomprimibile [35].

spessore. Sono stati considerati un numero di elementi pari a 8x8 e 10x10. Dalla **Figura 8.26** è possibile notare come un numero di elementi ridotto sia già sufficiente per ottenere una soluzione accurata. Inoltre, pur utilizzando la condizione di quasi incomprimibilità, la soluzione ottenuta è prossima alla soluzione di materiale incomprimibile (per piccole deformazioni è praticamente coincidente) come possiamo visualizzare dalla Tabella 8.3.

#### 8.4.4 Piastra rettangolare: confronto tra non linearità geometriche e non linearità geometriche e fisiche

Il quarto esempio analizzato è quello di una piastra rettangolare semplicemente appoggiata, con riferimento sempre alla **Figura 8.24**. In questo caso però la piastra presenta le seguenti dimensioni:  $a = 0.1 \text{ m}$ ,  $b = 0.12 \text{ m}$  e  $h = 5 \times 10^{-4} \text{ mm}$ . Le proprietà del materiale considerate sono  $E = 10^7 \text{ Pa}$  e  $\nu = 0.4999$ . Stiamo quindi analizzando il caso di materiale quasi incomprimibile. Il caso analizzato viene confrontato con quello mostrato da Breslavsky [36], dove però viene analizzato il modello incomprimibile ( $\nu = 0.5$ ).

Per l'analisi di convergenza viene confrontata dapprima la soluzione di un modello discretizzato nel piano  $xy$  con 12x10 elementi sia Q4 che Q9.

$p[Pa]$	$w/h$		
	8x8Q4	10x10Q4	Ref. 12 DOF
3.83	11.21	12.09	13.67
84.64	36.41	36.93	37.21
208.51	54.83	54.83	54.83
426.39	81.66	82.03	81.20
542.14	96.46	97.11	94.27
568.45	99.69	100.5	98.33

Tabella 8.3: Valori di deformazione del punto centrale della piastra di materiale biologico  $w/h$  per differenti modelli di discretizzazione all'aumentare del carico. Confronto con la soluzione di riferimento [35].

Dalla **Figura 8.27**, il modello discretizzato con elementi a nove nodi presenta una soluzione più accurata.

Per meglio valutare l'analisi di convergenza, in **Figura 8.28**, vengono confrontate le soluzioni con modello 6x5 Q9 e 12x10 Q9 considerando  $\nu = 0.4999$ . Come è possibile vedere dalla figura, una mesh di tipo 6x5 Q9 è già abbastanza accurata per descrivere il comportamento della piastra fatto da materiale con modello Neo-Hookean quasi incomprimibile.

Infine, utilizzando il modello 12x10 Q9 metto a confronto la soluzione ottenuta considerando solo non linearità geometriche e quella ottenuta considerando sia quelle geometriche che fisiche. In **Figura 8.29** le soluzioni sono pressochè simili a quelle di Breslavsky .

In **Figura 8.30** viene raffigurata la configurazione non ancora deformata e la configurazione deformata a  $p = 30.407 \text{ kPa}$ .

Inoltre, possiamo notare che un modello di discretizzazione a 3 nodi (quadratico) lungo lo spessore è sufficiente per ottenere l'accuratezza dei risultati. Possiamo quindi affermare che le soluzioni del quasi incomprimibile sono pressochè simili al caso incomprimibile e per piccole deformazioni coincidono.

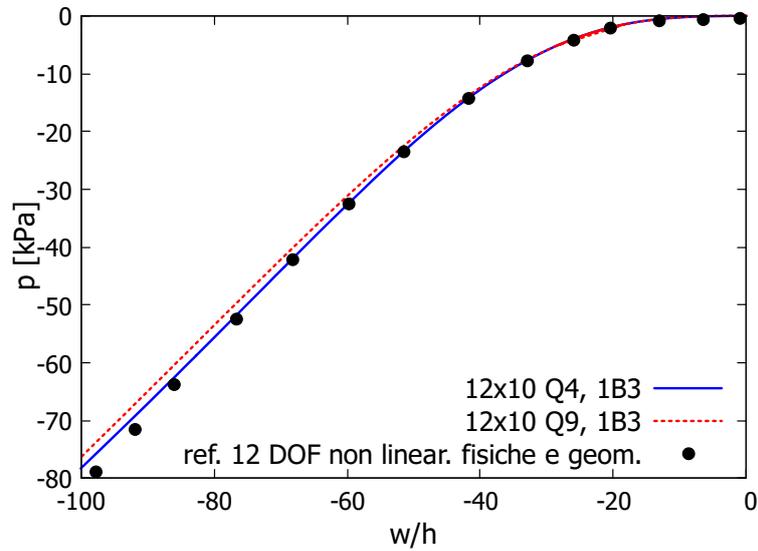


Figura 8.27: Curve di equilibrio per  $\nu = 0.4999$ . Confronto tra modello 12x10 Q4 e 12x10 Q9. Confronto con la soluzione di Breslavsky con non linearità sia fisiche che geometriche con 12 DOF[36].

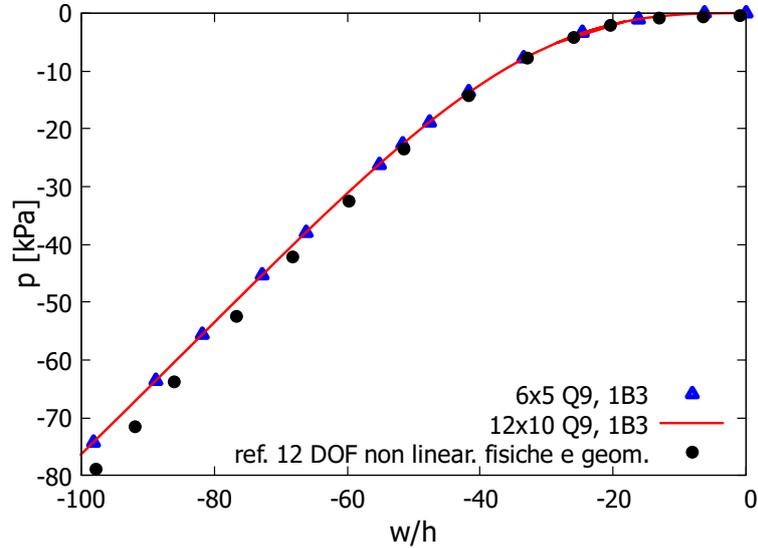


Figura 8.28: Curve di equilibrio per  $\nu = 0.4999$ . Confronto tra modello 6x5 Q9 e 12x10 Q9. Confronto con la soluzione di Breslavsky con non linearità sia fisiche che geometriche con 12 DOF[36].

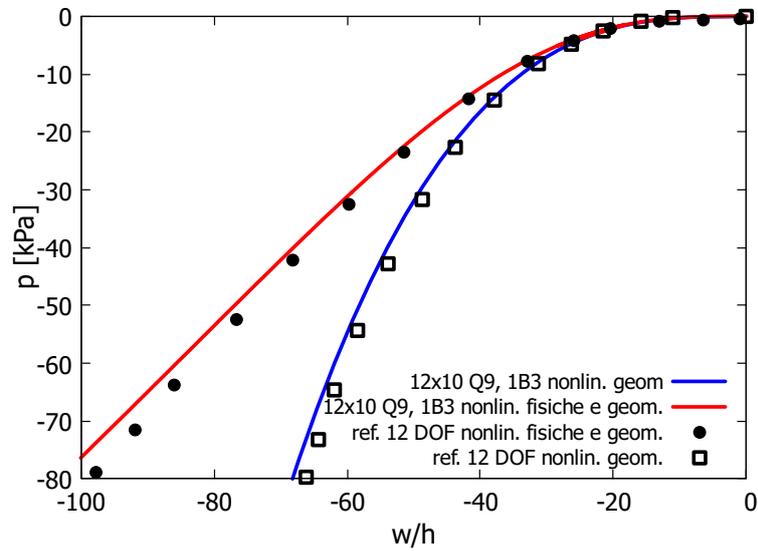


Figura 8.29: Curve di equilibrio per  $\nu = 0.4999$  con 12x10 Q9. Confronto tra modello con non linearità geometriche e modello con non linearità geometriche e fisiche. Confronto con le soluzioni di Breslavsky con 12 DOF[36].

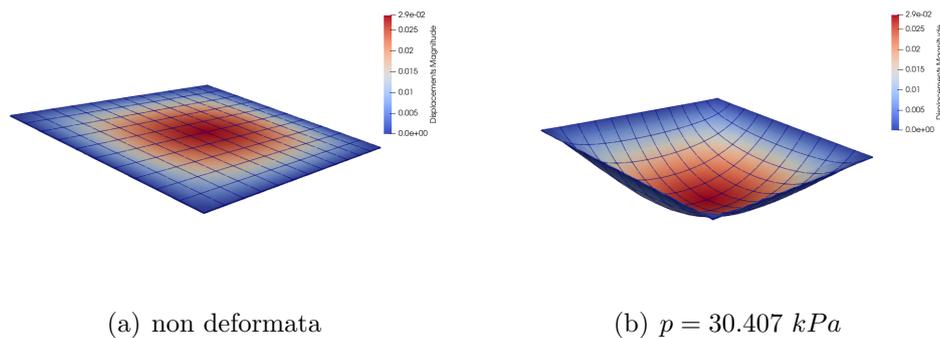


Figura 8.30: Configurazione della piastra non deformata e configurazione della piastra deformata sottoposta a  $p = 30.407 \text{ kPa}$ . Modello 12x10 Q9.

### 8.4.5 Piastra iperelastica: confronto con dati sperimentali

Il quinto caso è quello analizzato da Amabili *et al* [59], dove viene considerata una piastra rettangolare in gomma di dimensioni  $a = 0.1 = b = 0.12 \text{ m}$  e spessore  $h = 1.5 \times 10^{-3} \text{ m}$  incastrata su tutti e 4 i lati, quindi con le seguenti condizioni al contorno (**Figura 8.31**):

$$w|_{\partial\Omega} = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = u|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega} = 0 \quad (8.11)$$

dove  $\partial\Omega$  è il contorno della superficie media e  $\mathbf{n}$  è la normale a  $\partial\Omega$  che giace sulla superficie. La piastra è soggetta a pressione uniforme. Per poter confrontare i dati

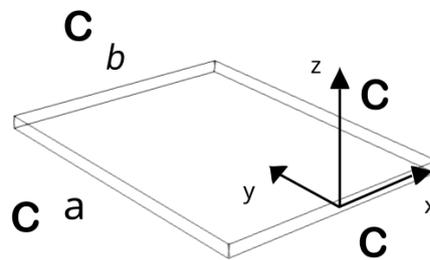


Figura 8.31: Geometria e condizioni al contorno.

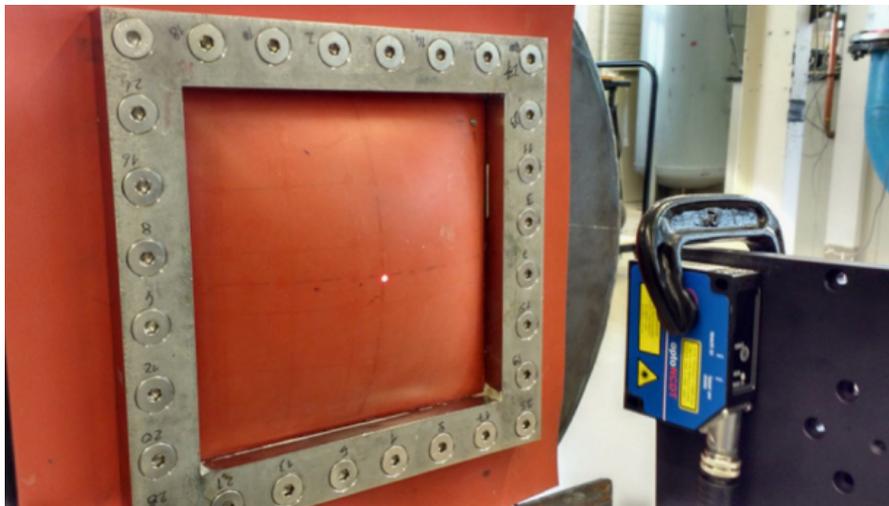


Figura 8.32: Piastra in silicone sotto una pressione di 1 Psi. La misura della deflessione è misurata tramite un sensore laser a triangolazione Micro-Epsilon [59]. Permesso concesso da Elsevier.

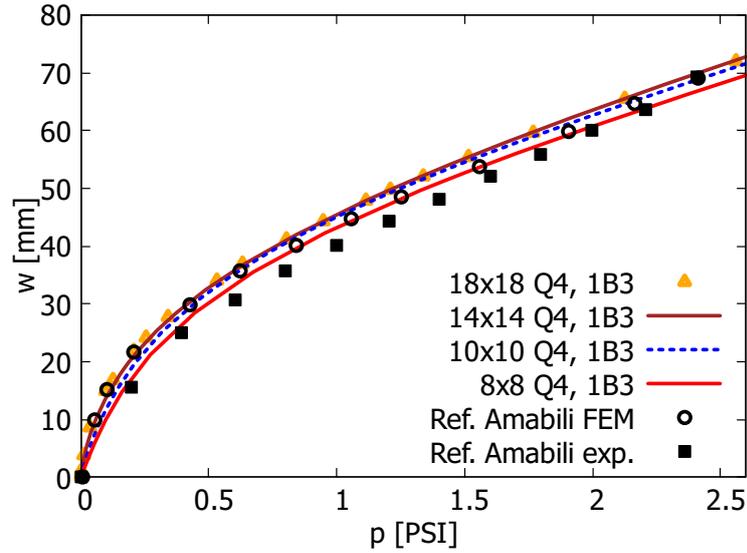


Figura 8.33: Deflessione del punto centrale della piastra in funzione della pressione. Confronto tra vari modelli di discretizzazione e soluzione sperimentale e FEM di Amabili *et al* [59] .

sperimentali con la soluzione data tramite il metodo agli elementi finiti, i parametri del materiale sono stati ottenuti tramite una procedura di *fitting* sui risultati del test di trazione uniassiale. In particolare, in [59] per descrivere il materiale viene considerato un modello di materiale Mooney-Rivlin con i due parametri  $C_{10} = 253216 Pa$  e  $C_{01} = 470900 Pa$  . In questo elaborato, invece, utilizziamo un modello di materiale Neo-Hookean dipendente solo dal primo invariante, il quale è un caso particolare di materiale Mooney-Rivlin [31]. Consideriamo allora quest'ultimo caso e i seguenti parametri del materiale :

$$\nu = 0.4999$$

$$\mu = 2(C_{10} + C_{01}) = 1.448 \times 10^6 Pa \quad (8.12)$$

$$D_1 = 2/k = \frac{6(1-2\nu)}{E} = 2.762 \times 10^{-10} Pa^{-1}$$

dove  $\mu$  modulo di taglio,  $D_1$  è il parametro di penalizzazione dell'incomprimibilità e  $\nu$  è il coefficiente di Poisson. Stiamo quindi considerando un modello quasi incomprimibile e lo confronteremo con le soluzioni ottenute da Amabili nel caso incomprimibile ( $\nu = 0.5$ ).

Per l'analisi di convergenza sono stati utilizzati nel piano  $xy$  elementi a 4 nodi

$p[Psi]$	$w/h$			Ref. FEM	Ref. exp.
	8x8Q4	10x10Q4	14x14Q4		
0.2035	17.06	19.41	20.74	21.43	15.74
0.604	33.30	35.22	35.89	35.22	30.77
0.8004	38.66	40.63	40.97	39.43	35.77
1.204	47.176	49.06	49.71	47.176	44.44
1.994	60.604	62.38	63.4	61.168	60.038

Tabella 8.4: Valori di deformazione del punto centrale della piastra  $w/h$  per differenti modelli di discretizzazione all'aumentare del carico. Confronto con la soluzione di riferimento in[59] sia dell'analisi FEM sia dei dati sperimentali misurati.

(Q4) e differente numero di elementi: 8x8, 10x10, 14x14, 18x18. Lungo lo spessore, invece, tre nodi (B3) sono sufficienti per l'accuratezza della soluzione.

Come visibile dalla **Figura 8.33** e dalla Tabella 8.4, la configurazione con meno gradi di libertà si interpone tra la soluzione FEM di Amabili, in cui veniva utilizzata una mesh 20x20, e la soluzione sperimentale. Per il modello Neo-Hookean quasi incomprimibile considerato in questo elaborato la convergenza viene raggiunta già con un modello 14x14 Q4 e una funzione di espansione quadratica (B3) lungo lo spessore. Si può notare che la soluzione è praticamente coincidente nel caso di piccole deformazioni, mentre per spostamenti  $w > 35 \text{ mm}$  la soluzione si allontana, anche se di poco, dall'analisi FEM effettuata in [59]. In **Figura 8.34** vengono mostrate tre diverse configurazioni deformate nei tre rispettivi livelli di carico.

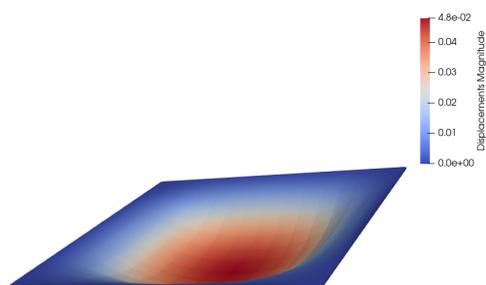
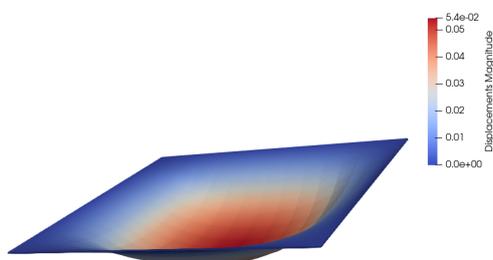
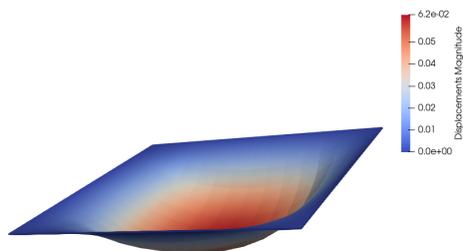
(a)  $p = 1.09 \text{ psi}$ (b)  $p = 1.443 \text{ psi}$ (c)  $p = 2.28 \text{ psi}$ 

Figura 8.34: Configurazione della piastra deformata in differenti condizioni di carico.

# Capitolo 9

## Conclusioni

In questo elaborato sono state condotte analisi non lineari sia per materiali linearmente elastici che per materiali isotropi iperelastici. Sono stati analizzati differenti modelli strutturali sia 1D che 2D.

La Carrera Unified Formulation (CUF) ha permesso di poter scrivere le equazioni di governo in termini di pochi nuclei fondamentali, la cui forma non dipende dal tipo e ordine di funzione utilizzata per descrivere il campo degli spostamenti. Nel caso 1D, la funzione di espansione è stata considerata sulla sezione trasversale, per il caso 2D, invece, lungo lo spessore. La scelta di tali funzioni è indipendente dalla scelta dell'elemento finito usato lungo l'asse della trave o lungo lo spessore della piastra, rispettivamente. Le funzioni di espansione considerate in questo elaborato sono basate sui polinomi di Taylor e Lagrange. Quest'ultimi, infatti, hanno posto rimedio alle limitazioni presenti nei polinomi di Taylor, in quanto i polinomi LE portano ad avere solo variabili di spostamento traslazionale e quindi forniscono soluzioni più accurate.

Successivamente, le equazioni di governo non lineari e le relative approssimazioni agli elementi finiti sono state formulate usando il principio dei lavori virtuali. Sono state, quindi, derivate le matrici di rigidezza sia tangente che secante in termini di nuclei fondamentali prestando attenzione sia al caso di materiali linearmente elastici, sia al caso iperelastico.

Le equazioni di governo non lineari hanno richiesto l'introduzione di uno schema risolutivo incrementale, in questo caso il metodo di Newton-Raphson, dove tramite la linearizzazione del vettore delle forze nodali residue e l'introduzione di opportune equazioni di vincolo è possibile risolvere le equazioni.

Tramite l'utilizzo del codice MUL2, sono state condotte analisi non lineari di strutture sia unidimensionali che bidimensionali. Nella prima parte, considerando solo non linearità geometriche, i risultati ottenuti sia nel caso di modelli trave che nel caso di modelli piastra (soprattutto per piastre sottili e con differenti condizioni al contorno) hanno ampiamente dimostrato la versatilità e validità della metodologia

CUF descritta, la quale è in grado di fornire soluzioni accurate anche in caso di grandi deformazioni.

Successivamente, sono stati considerati alcuni problemi relativi a strutture in materiale iperelastico. Utilizzando opportuni modelli di materiale, in particolare considerando la funzione energia di deformazione dipendente solo dal primo invariante del tensore di deformazione di Green-Lagrange, l'analisi condotta ha dimostrato che la soluzione ottenuta tramite la metodologia descritta è accurata anche per grandi deformazioni. Inoltre, la considerazione di materiale quasi incomprimibile, ha portato ad ottenere risultati molto simili al caso incomprimibile. In particolare, l'obiettivo di questo elaborato è stato dimostrare la validità di tale metodologia per modelli 2D in materiale iperelastico. Tale studio ha portato ad affermare l'accuratezza delle soluzioni anche in presenza di non linearità fisiche.

## 9.1 Sviluppi futuri

I risultati ottenuti e descritti in questo elaborato aprono la strada a differenti lavori che possono essere meglio investigati in futuro. In particolare, si potrebbe estendere tale lavoro a strutture a guscio (shell) sotto diverse condizioni al contorno. Allo stesso tempo, si potrebbe estendere l'analisi non lineare considerando strutture in materiale iperelastico tali da avere una funzione di energia di deformazione non solo dipendente dal primo invariante, ma anche dipendente dal secondo invariante del tensore destro di deformazione di Cauchy-Green. Questo porterebbe quindi ad affrontare e superare le limitazioni presentate in questo elaborato. Inoltre, si potrebbe estendere la metodologia descritta a piastre e gusci in materiale disomogeneo ed anisotropo. Un altro importante lavoro potrebbe riguardare l'estensione di tale metodologia nei problemi di interazione fluido-struttura, la quale potrebbe portare ad una serie di importanti sviluppi non solo in campo aerospaziale ma anche in ambito biomedico, in quanto molti materiali biologici hanno un comportamento elastico non lineare.

# Appendice A

## Funzioni di forma

Considero  $r$  variabile tra -1 e +1 e pari a:

$$r = \frac{2(y - y_1) - L}{L} \quad (\text{A.1})$$

e  $N_i = 1$  se  $r = r_i$  cioè mi trovo nel nodo  $i$ -esimo,  $N_i = 0$  altrove. Consideriamo quindi il modello trave, quindi consideriamo le funzioni di forma lungo l'asse della trave. Stessa cosa succede nel modello piastra considerando però le funzioni di forma lungo lo spessore.

### A Elemento B2



Figura A.1: Elemento a 2 nodi B2.

$$N_1 = c_{21}(r - 1) = -\frac{1}{2}(r - 1) \quad (\text{A.2})$$

$$N_2 = c_{22}(r + 1) = \frac{1}{2}(r + 1)$$

### B Elemento B3



Figura A.2: Elemento a 3 nodi B3.

$$\begin{aligned}
N_1 &= c_{31}(r-1) = \frac{1}{2}(r-1) \\
N_2 &= c_{32}(r+1) = \frac{1}{2}(r+1) \\
N_3 &= c_{33}(r+1)(r-1) = -(r+1)(r-1)
\end{aligned}
\tag{A.3}$$

## C Elemento B4

$$\begin{aligned}
N_1 &= c_{41}(r + \frac{1}{3})(r - \frac{1}{3})(r - 1) = -\frac{9}{16}(r + \frac{1}{3})(r - \frac{1}{3})(r - 1) \\
N_2 &= c_{42}(r + 1)(r + \frac{1}{3})(r - \frac{1}{3}) = +\frac{9}{16}(r + 1)(r + \frac{1}{3})(r - \frac{1}{3}) \\
N_3 &= c_{43}(r + 1)(r - \frac{1}{3})(r + \frac{1}{3}) = +\frac{27}{16}(r + 1)(r - \frac{1}{3})(r + \frac{1}{3}) \\
N_4 &= c_{44}(r + 1)(r + \frac{1}{3})(r - \frac{1}{3}) = -\frac{27}{16}(r + 1)(r + \frac{1}{3})(r - \frac{1}{3})
\end{aligned}
\tag{A.4}$$



Figura A.3: Elemento a 4 nodi B4.

# Appendice B

## Nuclei fondamentali della matrice di rigidità secante e tangente

I nuclei fondamentali della matrice di rigidità possono essere definiti usando solo due componenti indipendenti. Secondo Carrera *et al.* [18], utilizzando la somma sugli indici  $\tau, s, i$  e  $j$ , è possibile derivare le nove componenti di ogni nucleo. La notazione utilizzata sarà così definita:  $\langle (\cdot) \rangle = \int_{\Omega} (\cdot) dV$  rappresenta l'integrale di volume sull'intero dominio,  $u_{,x}[r]$  rappresenta la componente r-esima del vettore  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}$  cioè  $u_{,x}[2] = u_{y,x}$

### A Nuclei fondamentali degli elementi 1D CUF

Le nove componenti del nucleo fondamentale  $3 \times 3$  della matrice di rigidità lineare sono dati in termini di  $\mathbf{K}_0^{ij\tau s}[r, c]$ , dove  $r$  è il numero della riga ( $r = 1, 2, 3$ ) e  $c$  è il numero della colonna ( $c = 1, 2, 3$ ).

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_0^{ij\tau s}[1, 1] &= \langle C_{11} F_{\tau,x} F_{s,x} N_i N_j \rangle + \langle C_{44} F_{\tau,z} F_{s,z} N_i N_j \rangle \\ &+ \langle C_{66} F_{\tau} F_s N_{i,y} N_{j,y} \rangle \end{aligned}$$

$$\mathbf{K}_0^{ij\tau s}[1, 2] = \langle C_{66} F_{\tau} F_{s,x} N_{i,y} N_j \rangle + \langle C_{12} F_{\tau,x} F_s N_i N_{j,y} \rangle$$

$$\mathbf{K}_0^{ij\tau s}[1, 3] = \langle C_{13} F_{\tau,x} F_{s,z} N_i N_j \rangle + \langle C_{44} F_{\tau,z} F_{s,x} N_i N_j \rangle$$

$$\mathbf{K}_0^{ij\tau s}[2, 1] = \langle C_{12} F_{\tau} F_{s,x} N_{i,y} N_j \rangle + \langle C_{66} F_{\tau,x} F_s N_i N_{j,y} \rangle$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_0^{ij\tau s}[2, 2] &= \langle C_{66} F_{\tau,x} F_{s,x} N_i N_j \rangle + \langle C_{55} F_{\tau,z} F_{s,z} N_i N_j \rangle \\ &+ \langle C_{22} F_{\tau} F_s N_{i,y} N_{j,y} \rangle \end{aligned}$$

$$\mathbf{K}_0^{ij\tau s}[2, 3] = \langle C_{23} F_{\tau} F_{s,z} N_{i,y} N_j \rangle + \langle C_{55} F_{\tau,z} F_s N_i N_{j,y} \rangle$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_0^{ij\tau s}[3, 1] &= \langle C_{44} F_{\tau,x} F_{s,z} N_i N_j \rangle + \langle C_{13} F_{\tau,z} F_{s,x} N_i N_j \rangle \\
\mathbf{K}_0^{ij\tau s}[3, 2] &= \langle C_{55} F_{\tau} F_{s,z} N_{i,y} N_{j,y} \rangle + \langle C_{23} F_{\tau,z} F_s N_i N_{j,y} \rangle \\
\mathbf{K}_0^{ij\tau s}[3, 3] &= \langle C_{44} F_{\tau,x} F_{s,x} N_i N_j \rangle + \langle C_{33} F_{\tau,z} F_{s,z} N_i N_j \rangle \\
&+ \langle C_{55} F_{\tau} F_s N_{i,y} N_{j,y} \rangle
\end{aligned}$$

Allo stesso modo, le componenti del nucleo fondamentale della matrice di rigidità non lineare del primo ordine  $\mathbf{K}_{nll}^{ij\tau s}$  sono:

For  $c = 1$ :

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{nll}^{ij\tau s}[r, c] &= \langle \mathbf{u}_x[r] C_{11} F_{\tau,x} F_{s,x} N_i N_j \rangle + \langle \mathbf{u}_x[r] C_{44} F_{\tau,z} F_{s,z} N_i N_j \rangle \\
&+ \langle \mathbf{u}_x[r] C_{66} F_{\tau} F_s N_{i,y} N_{j,y} \rangle + \langle \mathbf{u}_y[r] C_{66} F_{\tau,x} F_s N_i N_{j,y} \rangle \\
&+ \langle \mathbf{u}_x[r] C_{12} F_{\tau} F_{s,x} N_{i,y} N_j \rangle + \langle \mathbf{u}_z[r] C_{44} F_{\tau,x} F_{s,z} N_i N_j \rangle \\
&+ \langle \mathbf{u}_z[r] C_{13} F_{\tau,z} F_{s,x} N_i N_j \rangle
\end{aligned}$$

For  $c = 2$ :

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{nll}^{ij\tau s}[r, c] &= \langle \mathbf{u}_x[r] C_{12} F_{\tau,x} F_s N_i N_{j,y} \rangle + \langle \mathbf{u}_x[r] C_{66} F_{\tau} F_{s,x} N_{i,y} N_j \rangle \\
&+ \langle \mathbf{u}_y[r] C_{66} F_{\tau,x} F_{s,x} N_i N_j \rangle + \langle \mathbf{u}_y[r] C_{55} F_{\tau,z} F_{s,z} N_i N_j \rangle \\
&+ \langle \mathbf{u}_y[r] C_{22} F_{\tau} F_s N_{i,y} N_{j,y} \rangle + \langle \mathbf{u}_z[r] C_{23} F_{\tau,z} F_s N_i N_{j,y} \rangle \\
&+ \langle \mathbf{u}_z[r] C_{55} F_{\tau} F_{s,z} N_{i,y} N_j \rangle
\end{aligned}$$

For  $c = 3$ :

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{nll}^{ij\tau s}[r, c] &= \langle \mathbf{u}_x[r] C_{13} F_{\tau,x} F_{s,z} N_i N_j \rangle + \langle \mathbf{u}_x[r] C_{44} F_{\tau,z} F_{s,x} N_i N_j \rangle \\
&+ \langle \mathbf{u}_y[r] C_{55} F_{\tau,z} F_s N_i N_{j,y} \rangle + \langle \mathbf{u}_y[r] C_{23} F_{\tau} F_{s,z} N_{i,y} N_j \rangle \\
&+ \langle \mathbf{u}_z[r] C_{44} F_{\tau,x} F_{s,x} N_i N_j \rangle + \langle \mathbf{u}_z[r] C_{33} F_{\tau,z} F_{s,z} N_i N_j \rangle \\
&+ \langle \mathbf{u}_z[r] C_{55} F_{\tau} F_s N_{i,y} N_{j,y} \rangle
\end{aligned}$$

Le componenti di  $\mathbf{K}_{lnl}^{ij\tau s}$  non sono date, ma possono essere facilmente ottenute da  $\mathbf{K}_{nll}^{ij\tau s}$ . Infatti, come già spiegato nell'elaborato  $(\mathbf{K}_{lnl}^{ij\tau s})^T = \frac{1}{2} \mathbf{K}_{nll}^{ij\tau s}$ .

Infine, le generiche componenti  $[r, c]$  della matrice non lineare del secondo

ordine  $\mathbf{K}_{nlnl}^{ij\tau s}$  sono così definite:

$$\begin{aligned}
2 \times \mathbf{K}_{nlnl}^{ij\tau s}[r, c] = & \langle \mathbf{u}_{,x}[r] \mathbf{u}_{,x}[c] C_{11} F_{\tau,x} F_{s,x} N_i N_j \rangle + \langle \mathbf{u}_{,x}[r] \mathbf{u}_{,x}[c] C_{44} F_{\tau,z} F_{s,z} N_i N_j \rangle \\
& + \langle \mathbf{u}_{,x}[r] \mathbf{u}_{,x}[c] C_{66} F_{\tau} F_s N_{i,y} N_{j,y} \rangle + \langle \mathbf{u}_{,y}[r] \mathbf{u}_{,y}[c] C_{66} F_{\tau,x} F_{s,x} N_i N_j \rangle \\
& + \langle \mathbf{u}_{,y}[r] \mathbf{u}_{,y}[c] C_{55} F_{\tau,z} F_{s,z} N_i N_j \rangle + \langle \mathbf{u}_{,y}[r] \mathbf{u}_{,y}[c] C_{22} F_{\tau} F_s N_{i,y} N_{j,y} \rangle \\
& + \langle \mathbf{u}_{,z}[r] \mathbf{u}_{,z}[c] C_{44} F_{\tau,x} F_{s,x} N_i N_j \rangle + \langle \mathbf{u}_{,z}[r] \mathbf{u}_{,z}[c] C_{33} F_{\tau,z} F_{s,z} N_i N_j \rangle \\
& + \langle \mathbf{u}_{,z}[r] \mathbf{u}_{,z}[c] C_{55} F_{\tau} F_s N_{i,y} N_{j,y} \rangle + \langle \mathbf{u}_{,x}[r] \mathbf{u}_{,y}[c] C_{12} F_{\tau,x} F_s N_i N_{j,y} \rangle \\
& + \langle \mathbf{u}_{,x}[r] \mathbf{u}_{,y}[c] C_{66} F_{\tau} F_{s,x} N_{i,y} N_j \rangle + \langle \mathbf{u}_{,y}[r] \mathbf{u}_{,x}[c] C_{12} F_{\tau} F_{s,x} N_{i,y} N_j \rangle \\
& + \langle \mathbf{u}_{,y}[r] \mathbf{u}_{,x}[c] C_{66} F_{\tau,x} F_s N_i N_{j,y} \rangle + \langle \mathbf{u}_{,x}[r] \mathbf{u}_{,z}[c] C_{13} F_{\tau,x} F_{s,z} N_i N_j \rangle \\
& + \langle \mathbf{u}_{,x}[r] \mathbf{u}_{,z}[c] C_{44} F_{\tau,z} F_{s,x} N_i N_j \rangle + \langle \mathbf{u}_{,z}[r] \mathbf{u}_{,x}[c] C_{13} F_{\tau,z} F_{s,x} N_i N_j \rangle \\
& + \langle \mathbf{u}_{,z}[r] \mathbf{u}_{,x}[c] C_{44} F_{\tau,x} F_{s,z} N_i N_j \rangle + \langle \mathbf{u}_{,y}[r] \mathbf{u}_{,z}[c] C_{23} F_{\tau} F_{s,z} N_{i,y} N_j \rangle \\
& + \langle \mathbf{u}_{,y}[r] \mathbf{u}_{,z}[c] C_{55} F_{\tau,z} F_s N_i N_{j,y} \rangle + \langle \mathbf{u}_{,z}[r] \mathbf{u}_{,y}[c] C_{55} F_{\tau} F_{s,z} N_{i,y} N_j \rangle \\
& + \langle \mathbf{u}_{,z}[r] \mathbf{u}_{,y}[c] C_{23} F_{\tau,z} F_s N_i N_{j,y} \rangle
\end{aligned}$$

Conoscendo le relazioni che legano le componenti della matrice di rigidezza secante con quelle della matrice di rigidezza tangente (6.15) è possibile ricavare le componenti della matrice tangente.

## B Nuclei fondamentali degli elementi 2D CUF

Considero ora il caso degli elementi 2D CUF i cui nuclei fondamentali per un materiale isotropo vengono definiti in [10]. Le nove componenti del nucleo fondamentale  $3 \times 3$  della matrice di rigidezza lineare sono dati in termini di  $\mathbf{K}_0^{ij\tau s}[r, c]$ , dove  $r$  è il numero della riga ( $r = 1, 2, 3$ ) e  $c$  è il numero della colonna ( $c = 1, 2, 3$ ).

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_0^{ij\tau s}[1, 1] = & \langle C_{11} F_{\tau} F_s N_{i,x} N_{j,x} \rangle + \langle C_{44} F_{\tau,z} F_{s,z} N_i N_j \rangle \\
& + \langle C_{66} F_{\tau} F_s N_{i,y} N_{j,y} \rangle + \langle C_{16} F_{\tau} F_s N_{i,y} N_{j,x} \rangle \\
& + \langle C_{16} F_{\tau} F_s N_{i,x} N_{j,y} \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_0^{ij\tau s}[1, 2] = & \langle C_{66} F_{\tau} F_s N_{i,y} N_{j,x} \rangle + \langle C_{12} F_{\tau} F_s N_{i,x} N_{j,y} \rangle \\
& + \langle C_{45} F_{\tau,z} F_{s,z} N_i N_j \rangle + \langle C_{16} F_{\tau} F_s N_{i,x} N_{j,x} \rangle \\
& + \langle C_{26} F_{\tau} F_s N_{i,y} N_{j,y} \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_0^{ij\tau s}[1, 3] = & \langle C_{13} F_{\tau} F_{s,z} N_{i,x} N_j \rangle + \langle C_{44} F_{\tau,z} F_s N_i N_{j,x} \rangle \\
& + \langle C_{45} F_{\tau,z} F_s N_i N_{j,y} \rangle + \langle C_{36} F_{\tau} F_{s,z} N_{i,y} N_j \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_0^{ij\tau s}[2, 1] = & \langle C_{12} F_{\tau} F_s N_{i,y} N_{j,x} \rangle + \langle C_{66} F_{\tau} F_s N_{i,x} N_{j,y} \rangle \\
& + \langle C_{45} F_{\tau,z} F_{s,z} N_i N_j \rangle + \langle C_{16} F_{\tau} F_s N_{i,x} N_{j,x} \rangle \\
& + \langle C_{26} F_{\tau} F_s N_{i,y} N_{j,y} \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_0^{ij\tau s}[2, 2] &= \langle C_{66} F_\tau F_s N_{i,x} N_{j,x} \rangle + \langle C_{55} F_{\tau,z} F_{s,z} N_i N_j \rangle \\
&+ \langle C_{22} F_\tau F_s N_{i,y} N_{j,y} \rangle + \langle C_{26} F_\tau F_s N_{i,x} N_{j,y} \rangle \\
&+ \langle C_{26} F_\tau F_s N_{i,y} N_{j,x} \rangle \\
\mathbf{K}_0^{ij\tau s}[2, 3] &= \langle C_{23} F_\tau F_{s,z} N_{i,y} N_j \rangle + \langle C_{55} F_{\tau,z} F_s N_i N_{j,y} \rangle \\
&+ \langle C_{45} F_{\tau,z} F_s N_i N_{j,x} \rangle + \langle C_{36} F_\tau F_{s,z} N_{i,x} N_j \rangle \\
\mathbf{K}_0^{ij\tau s}[3, 1] &= \langle C_{44} F_\tau F_{s,z} N_{i,x} N_j \rangle + \langle C_{13} F_{\tau,z} F_s N_i N_{j,x} \rangle \\
&+ \langle C_{45} F_\tau F_{s,z} N_{i,y} N_j \rangle + \langle C_{36} F_{\tau,z} F_s N_i N_{j,y} \rangle \\
\mathbf{K}_0^{ij\tau s}[3, 2] &= \langle C_{55} F_\tau F_{s,z} N_{i,y} N_j \rangle + \langle C_{23} F_{\tau,z} F_s N_i N_{j,y} \rangle \\
&+ \langle C_{45} F_\tau F_{s,z} N_{i,x} N_j \rangle + \langle C_{36} F_{\tau,z} F_s N_i N_{j,x} \rangle \\
\mathbf{K}_0^{ij\tau s}[3, 3] &= \langle C_{44} F_\tau F_s N_{i,x} N_{j,x} \rangle + \langle C_{33} F_{\tau,z} F_{s,z} N_i N_j \rangle \\
&+ \langle C_{55} F_\tau F_s N_{i,y} N_{j,y} \rangle + \langle C_{45} F_\tau F_s N_{i,y} N_{j,x} \rangle \\
&+ \langle C_{45} F_\tau F_s N_{i,x} N_{j,y} \rangle
\end{aligned}$$

Allo stesso modo, le componenti del nucleo fondamentale della matrice di rigidità non lineare del primo ordine  $\mathbf{K}_{nll}^{ij\tau s}$  sono:

For  $c = 1$ :

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{nll}^{ij\tau s}[r, 1] &= \langle \mathbf{u}_x[r] C_{11} F_\tau F_s N_{i,x} N_{j,x} \rangle + \langle \mathbf{u}_x[r] C_{44} F_{\tau,z} F_{s,z} N_i N_j \rangle \\
&+ \langle \mathbf{u}_x[r] C_{66} F_\tau F_s N_{i,y} N_{j,y} \rangle + \langle \mathbf{u}_x[r] C_{16} F_\tau F_s N_{i,y} N_{j,x} \rangle \\
&+ \langle \mathbf{u}_x[r] C_{16} F_\tau F_s N_{i,x} N_{j,y} \rangle + \langle \mathbf{u}_y[r] C_{66} F_\tau F_s N_{i,x} N_{j,y} \rangle \\
&+ \langle \mathbf{u}_y[r] C_{12} F_\tau F_s N_{i,y} N_{j,x} \rangle + \langle \mathbf{u}_y[r] C_{45} F_{\tau,z} F_{s,z} N_i N_j \rangle \\
&+ \langle \mathbf{u}_y[r] C_{16} F_\tau F_s N_{i,x} N_{j,x} \rangle + \langle \mathbf{u}_y[r] C_{26} F_\tau F_s N_{i,y} N_{j,y} \rangle \\
&+ \langle \mathbf{u}_z[r] C_{44} F_\tau F_{s,z} N_{i,x} N_j \rangle + \langle \mathbf{u}_z[r] C_{13} F_{\tau,z} F_s N_i N_{j,x} \rangle \\
&+ \langle \mathbf{u}_z[r] C_{45} F_\tau F_{s,z} N_{i,y} N_j \rangle + \langle \mathbf{u}_z[r] C_{36} F_{\tau,z} F_s N_i N_{j,y} \rangle
\end{aligned}$$

For  $c = 2$ :

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{nll}^{ij\tau s}[r, c] &= \langle \mathbf{u}_x[r] C_{12} F_\tau F_s N_{i,x} N_{j,y} \rangle + \langle \mathbf{u}_x[r] C_{66} F_\tau F_s N_{i,y} N_{j,x} \rangle \\
&+ \langle \mathbf{u}_x[r] C_{45} F_{\tau,z} F_{s,z} N_i N_j \rangle + \langle \mathbf{u}_x[r] C_{16} F_\tau F_s N_{i,x} N_{j,x} \rangle \\
&+ \langle \mathbf{u}_x[r] C_{26} F_\tau F_s N_{i,y} N_{j,y} \rangle + \langle \mathbf{u}_y[r] C_{66} F_\tau F_s N_{i,x} N_{j,x} \rangle \\
&+ \langle \mathbf{u}_y[r] C_{55} F_{\tau,z} F_{s,z} N_i N_j \rangle + \langle \mathbf{u}_y[r] C_{22} F_\tau F_s N_{i,y} N_{j,y} \rangle \\
&+ \langle \mathbf{u}_y[r] C_{26} F_\tau F_s N_{i,y} N_{j,x} \rangle + \langle \mathbf{u}_y[r] C_{26} F_\tau F_s N_{i,x} N_{j,y} \rangle \\
&+ \langle \mathbf{u}_z[r] C_{23} F_{\tau,z} F_s N_i N_{j,y} \rangle + \langle \mathbf{u}_z[r] C_{55} F_\tau F_{s,z} N_{i,y} N_j \rangle \\
&+ \langle \mathbf{u}_z[r] C_{45} F_\tau F_{s,z} N_{i,x} N_j \rangle + \langle \mathbf{u}_z[r] C_{36} F_{\tau,z} F_s N_i N_{j,x} \rangle
\end{aligned}$$

For  $c = 3$ :

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{nll}^{ij\tau s}[r, c] &= \langle \mathbf{u}_{,x}[r] C_{13} F_\tau F_{s,z} N_{i,x} N_j \rangle + \langle \mathbf{u}_{,x}[r] C_{44} F_{\tau,z} F_s N_i N_{j,x} \rangle \\
&+ \langle \mathbf{u}_{,x}[r] C_{45} F_{\tau,z} F_s N_i N_{j,y} \rangle + \langle \mathbf{u}_{,x}[r] C_{36} F_\tau F_{s,z} N_{i,y} N_j \rangle \\
&+ \langle \mathbf{u}_{,y}[r] C_{55} F_{\tau,z} F_s N_i N_{j,y} \rangle + \langle \mathbf{u}_{,y}[r] C_{23} F_\tau F_{s,z} N_{i,y} N_j \rangle \\
&+ \langle \mathbf{u}_{,y}[r] C_{45} F_{\tau,z} F_s N_i N_{j,x} \rangle + \langle \mathbf{u}_{,y}[r] C_{36} F_\tau F_{s,z} N_{i,x} N_j \rangle \\
&+ \langle \mathbf{u}_{,z}[r] C_{44} F_\tau F_s N_{i,x} N_{j,y} \rangle + \langle \mathbf{u}_{,z}[r] C_{33} F_{\tau,z} F_{s,z} N_i N_j \rangle \\
&+ \langle \mathbf{u}_{,z}[r] C_{55} F_\tau F_s N_{i,y} N_{j,y} \rangle + \langle \mathbf{u}_{,z}[r] C_{45} F_\tau F_s N_{i,x} N_{j,y} \rangle \\
&+ \langle \mathbf{u}_{,z}[r] C_{45} F_\tau F_s N_{i,y} N_{j,x} \rangle
\end{aligned}$$

Le componenti di  $\mathbf{K}_{lnl}^{ij\tau s}$  non sono date, ma possono essere facilmente ottenute da

$$\mathbf{K}_{nll}^{ij\tau s}. \text{ Infatti, come già spiegato nell'elaborato } (\mathbf{K}_{lnl}^{ij\tau s})^T = \frac{1}{2} \mathbf{K}_{nll}^{ij\tau s}.$$

Infine, le nove componenti  $[r, c]$  della matrice non lineare del secondo ordine  $\mathbf{K}_{nlnl}^{ij\tau s}$  sono così definite:

$$\begin{aligned}
2 \times \mathbf{K}_{nlnl}^{ij\tau s}[r, c] &= \langle \mathbf{u}_{,x}[r] \mathbf{u}_{,x}[c] C_{11} F_\tau F_s N_{i,x} N_{j,x} \rangle + \langle \mathbf{u}_{,x}[r] \mathbf{u}_{,x}[c] C_{44} F_{\tau,z} F_{s,z} N_i N_j \rangle \\
&+ \langle \mathbf{u}_{,x}[r] \mathbf{u}_{,x}[c] C_{66} F_\tau F_s N_{i,y} N_{j,y} \rangle + \langle \mathbf{u}_{,x}[r] \mathbf{u}_{,x}[c] C_{16} F_\tau F_s N_{i,x} N_{j,y} \rangle \\
&+ \langle \mathbf{u}_{,x}[r] \mathbf{u}_{,x}[c] C_{16} F_\tau F_s N_{i,y} N_{j,x} \rangle + \langle \mathbf{u}_{,y}[r] \mathbf{u}_{,y}[c] C_{66} F_\tau F_s N_{i,x} N_{j,x} \rangle \\
&+ \langle \mathbf{u}_{,y}[r] \mathbf{u}_{,y}[c] C_{55} F_{\tau,z} F_{s,z} N_i N_j \rangle + \langle \mathbf{u}_{,y}[r] \mathbf{u}_{,y}[c] C_{22} F_\tau F_s N_{i,y} N_{j,y} \rangle \\
&+ \langle \mathbf{u}_{,y}[r] \mathbf{u}_{,y}[c] C_{26} F_\tau F_s N_{i,x} N_{j,y} \rangle + \langle \mathbf{u}_{,y}[r] \mathbf{u}_{,y}[c] C_{26} F_\tau F_s N_{i,y} N_{j,x} \rangle \\
&+ \langle \mathbf{u}_{,z}[r] \mathbf{u}_{,z}[c] C_{44} F_\tau F_s N_{i,x} N_{j,x} \rangle + \langle \mathbf{u}_{,z}[r] \mathbf{u}_{,z}[c] C_{33} F_{\tau,z} F_{s,z} N_i N_j \rangle \\
&+ \langle \mathbf{u}_{,z}[r] \mathbf{u}_{,z}[c] C_{55} F_\tau F_s N_{i,y} N_{j,y} \rangle + \langle \mathbf{u}_{,z}[r] \mathbf{u}_{,z}[c] C_{45} F_\tau F_s N_{i,x} N_{j,y} \rangle \\
&+ \langle \mathbf{u}_{,z}[r] \mathbf{u}_{,z}[c] C_{45} F_\tau F_s N_{i,y} N_{j,x} \rangle + \langle \mathbf{u}_{,x}[r] \mathbf{u}_{,y}[c] C_{12} F_\tau F_s N_{i,x} N_{j,y} \rangle \\
&+ \langle \mathbf{u}_{,x}[r] \mathbf{u}_{,y}[c] C_{66} F_\tau F_s N_{i,y} N_{j,x} \rangle + \langle \mathbf{u}_{,x}[r] \mathbf{u}_{,y}[c] C_{45} F_{\tau,z} F_{s,z} N_i N_j \rangle \\
&+ \langle \mathbf{u}_{,x}[r] \mathbf{u}_{,y}[c] C_{16} F_\tau F_s N_{i,x} N_{j,x} \rangle + \langle \mathbf{u}_{,x}[r] \mathbf{u}_{,y}[c] C_{26} F_\tau F_s N_{i,y} N_{j,y} \rangle \\
&+ \langle \mathbf{u}_{,y}[r] \mathbf{u}_{,x}[c] C_{12} F_\tau F_s N_{i,y} N_{j,x} \rangle + \langle \mathbf{u}_{,y}[r] \mathbf{u}_{,x}[c] C_{66} F_\tau F_s N_{i,x} N_{j,y} \rangle \\
&+ \langle \mathbf{u}_{,y}[r] \mathbf{u}_{,x}[c] C_{45} F_{\tau,z} F_{s,z} N_i N_j \rangle + \langle \mathbf{u}_{,y}[r] \mathbf{u}_{,x}[c] C_{16} F_\tau F_s N_{i,x} N_{j,x} \rangle \\
&+ \langle \mathbf{u}_{,y}[r] \mathbf{u}_{,x}[c] C_{26} F_\tau F_s N_{i,y} N_{j,y} \rangle + \langle \mathbf{u}_{,x}[r] \mathbf{u}_{,z}[c] C_{66} F_\tau F_{s,z} N_{i,x} N_j \rangle \\
&+ \langle \mathbf{u}_{,x}[r] \mathbf{u}_{,z}[c] C_{44} F_{\tau,z} F_s N_i N_{j,x} \rangle + \langle \mathbf{u}_{,x}[r] \mathbf{u}_{,z}[c] C_{45} F_{\tau,z} F_s N_i N_{j,y} \rangle \\
&+ \langle \mathbf{u}_{,x}[r] \mathbf{u}_{,z}[c] C_{36} F_\tau F_{s,z} N_{i,y} N_j \rangle + \langle \mathbf{u}_{,z}[r] \mathbf{u}_{,x}[c] C_{13} F_{\tau,z} F_s N_i N_{j,x} \rangle \\
&+ \langle \mathbf{u}_{,z}[r] \mathbf{u}_{,x}[c] C_{44} F_\tau F_{s,z} N_{i,x} N_j \rangle + \langle \mathbf{u}_{,z}[r] \mathbf{u}_{,x}[c] C_{45} F_\tau F_{s,z} N_{i,y} N_j \rangle \\
&+ \langle \mathbf{u}_{,z}[r] \mathbf{u}_{,x}[c] C_{36} F_{\tau,z} F_s N_i N_{j,y} \rangle + \langle \mathbf{u}_{,y}[r] \mathbf{u}_{,z}[c] C_{23} F_\tau F_{s,z} N_{i,y} N_j \rangle \\
&+ \langle \mathbf{u}_{,y}[r] \mathbf{u}_{,z}[c] C_{55} F_{\tau,z} F_s N_i N_{j,y} \rangle + \langle \mathbf{u}_{,y}[r] \mathbf{u}_{,z}[c] C_{45} F_{\tau,z} F_s N_i N_{j,x} \rangle \\
&+ \langle \mathbf{u}_{,y}[r] \mathbf{u}_{,z}[c] C_{36} F_\tau F_{s,z} N_{i,x} N_j \rangle + \langle \mathbf{u}_{,z}[r] \mathbf{u}_{,y}[c] C_{55} F_\tau F_{s,z} N_{i,y} N_j \rangle \\
&+ \langle \mathbf{u}_{,z}[r] \mathbf{u}_{,y}[c] C_{23} F_{\tau,z} F_s N_i N_{j,y} \rangle + \langle \mathbf{u}_{,z}[r] \mathbf{u}_{,y}[c] C_{45} F_\tau F_{s,z} N_{i,x} N_j \rangle \\
&+ \langle \mathbf{u}_{,z}[r] \mathbf{u}_{,y}[c] C_{36} F_{\tau,z} F_s N_i N_{j,x} \rangle
\end{aligned}$$

Conoscendo le relazioni che legano le componenti della matrice di rigidezza secante con quelle della matrice di rigidezza tangente (6.15) è possibile ricavare le componenti della matrice tangente.

# Bibliografia

- [1] M. Amabili. *Nonlinear Mechanics of Shells and Plates in Composite, Soft and Biological Materials*. Cambridge University Press, 2018.
- [2] F. Bleich. *Buckling Strength of Metal Structures*. McGraw-Hill, 1952.
- [3] Bower. *Applied Mechanics of Solids*. CRC Press, 2009.
- [4] Chuen-Yuan Chia. *Nonlinear analysis of plates*. McGraw-Hill International Book Company, 1980.
- [5] Humberto Breves Coda. A solid-like fem for geometrically non-linear 3d frames. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(47):3712–3722, 2009.
- [6] Michael A. Crisfield and Gordan Jelenic. Objectivity of strain measures in the geometrically exact three-dimensional beam theory and its finite-element implementation. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 455(1983):1125 – 1147, 1999.
- [7] R. de Borst e M.A. Crisfield e J.J. C. Remmers e C. V. Verrhoosel. *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. John Wiley & Sons, Ltd, 2012.
- [8] T. B. Yang e A. Chen et al. Using only elastic stiffness in nonlinear and post-buckling analysis of structures. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 19(10):1950112, 2019.
- [9] B. Wu e A. Pagani e M. Filippi et al. Large-deflection and post-buckling analyses of isotropic rectangular plates by carrera unified formulation. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 116:18–31, 2019.
- [10] B. Wu e A. Pagani e M. Filippi et al. Large-deflection and post-buckling analyses of isotropic rectangular plates by carrera unified formulation. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 116:18–31, 2019.

- [11] A. Leber e A. Page et al. Compressible and electrically conducting fibers for large-area sensing of pressures. *Advanced Functional Materials*, 30:1904274, 01 2020.
- [12] H. Mehrabian e A. Samani. An iterative hyperelastic parameters reconstruction for breast cancer assessment. 6916:426–434, 2008.
- [13] S. A. Maas e B. J. Ellis et al. FEBio: Finite Elements for Biomechanics. *Journal of Biomechanical Engineering*, 134(1), 02 2012. 011005.
- [14] E. Carrera e B. Kröplin. Zigzag and interlaminar equilibria effects in large-deflection and postbuckling analysis of multilayered plates. *Mechanics of Composite Materials and Structures*, 4(1):69–94, 1997.
- [15] K. E. Bisshopp e D. C. Drucker. Large deflection of cantilever beams. *Quart. Appl. Math.*, 3:272–275, 1945.
- [16] C. Basaglia e D. Camotim e N. Silvestre. Post-buckling analysis of thin-walled steel frames using generalised beam theory (gbt). *Thin-Walled Structures*, 62:229–242, 01 2013.
- [17] Z.G. Azizian e D.J. Dawe. Geometrically nonlinear analysis of rectangular mindlin plates using the finite strip method. *Computers & Structures*, 21(3):423–436, 1985.
- [18] A. Pagani e E. Carrera. Unified formulation of geometrically nonlinear refined beam theories. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 25(1):15–31, 2018.
- [19] A. Pagani e E. Carrera. Unified one-dimensional finite element for the analysis of hyperelastic soft materials and structures. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 0(0):1–14, 2021.
- [20] N. Büchter e E. Ramm e D. Roehl. Three-dimensional extension of non-linear shell formulation based on the enhanced assumed strain concept. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37:2551–2568, 1994.
- [21] E. Carrera e E. Zappino. Carrera unified formulation for free-vibration analysis of aircraft structures. *AIAA Journal*, 54(1):280–292, 2016.
- [22] David W. Murray e Edward L. Wilson. Finite-element large deflection analysis of plates. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 95(1):143–165, 1969.

- [23] S. Klinkel e F. Gruttmann e W. Wagner. A continuum based three-dimensional shell element for laminated structures. *Computers & Structures*, 71(1):43–62, 1999.
- [24] L. Leonetti e F. Liguori e D. Magisano e G. Garcea. An efficient isogeometric solid-shell formulation for geometrically nonlinear analysis of elastic shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 331:159–183, 2018.
- [25] E. Karabelas e G. Haase e G. Plank et al. Versatile stabilized finite element formulations for nearly and fully incompressible solid mechanics. *Computational Mechanics*, 65:1–23, 01 2020.
- [26] G. Moretti e G. Rosati e M. Righi et al. Resonant wave energy harvester based on dielectric elastomer generator. *Smart Materials and Structures*, 27, 01 2018.
- [27] T. Kaster e I. Sack e A. Samani. Measurement of the hyperelastic properties of ex vivo brain tissue slices. *Journal of Biomechanics*, 44(6):1158–1163, 2011.
- [28] I. Caylak e IR. Mahnken. Stabilization of mixed tetrahedral elements at large deformations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 90(2):218–242.
- [29] H. Khajehsaeid e J. Arghavani e R. Naghdabadi. A hyperelastic constitutive model for rubber-like materials. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 38:144–151, 2013.
- [30] S.P.Timoshenko e J.N.Goodier. *Theory of Elasticity*. Lausanne and Geneva, 1970.
- [31] T. Sussman e K. J. Bathe. A finite element formulation for nonlinear incompressible elastic and inelastic analysis. *Computers & Structures*, 26(1):357–409, 1987.
- [32] Y. Chen e L. Jin. Snapping-back buckling of wide hyperelastic columns. *Extreme Mechanics Letters*, 34:100600, 2020.
- [33] W. Chen e L. Wang. Large bending deformation of a cantilevered soft beam under external load: The applicability of inextensibility assumption of the centerline. *Current Mechanics and Advanced Materials*, 01, 09 2020.
- [34] F. Alijani e M. Amabili. Non-linear static bending and forced vibrations of rectangular plates retaining non-linearities in rotations and thickness deformation. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 67:394–404, 2014.

- [35] I. Breslavsky e M. Amabili e M. Legrand. Nonlinear vibrations of thin hyperelastic plates. *Journal of Sound and Vibration*, 333:4668–4681, 09 2014.
- [36] I. D. Breslavsky e M. Amabili e M. Legrand. Physically and geometrically non-linear vibrations of thin rectangular plates. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 58:30–40, 2014.
- [37] H. B. Khaniki e M. Amabili et al. A review on the nonlinear dynamics of hyperelastic structures. *Nonlinear Dynamics*, 110, 08 2022.
- [38] E. Carrera e M. Cinefra et al. *Finite Element Analysis of Structures through Unified Formulation*. John Wiley and Sons, Chichester, 2014.
- [39] R. Borst e M. Crisfield et al. Non-linear finite element analysis of solids and structures: Second edition. *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures: Second Edition*, 07 2012.
- [40] R. Ansari e M. Faraji Oskouie e H. Rouhi. Nonlinear bending analysis of hyperelastic mindlin plates: a numerical approach. *Acta Mechanica*, 232:1–20, 02 2021.
- [41] G. Moretti e M. Santos Herran e D. Forehand e M. Alves e H. Jeffrey e R. Vertechy e M. Fontana. Advances in the development of dielectric elastomer generators for wave energy conversion. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 117:109430, 2020.
- [42] G.J. Turvey e M.Y. Osman. Elastic large deflection analysis of isotropic rectangular mindlin plates. *International Journal of Mechanical Sciences*, 32(4):315–328, 1990.
- [43] R.S. Alwar e N. Yogendra. Application of chebyshev polynomials to the nonlinear analysis of circular plates. *International Journal of Mechanical Sciences*, 18(11):589–595, 1976.
- [44] J.H. Argyris e O. Hilpert et al. On the geometrical stiffness of a beam in space—a consistent v.w. approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 20(1):105–131, 1979.
- [45] S. Reese e P. Wriggers e B.D. Reddy. A new locking-free brick element technique for large deformation problems in elasticity. *Computers & Structures*, 75(3):291–304, 2000.
- [46] J.H. Argyris e P.C. Dunne et al. On large displacement-small strain analysis of structures with rotational degrees of freedom. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 15(1):99–135, 1978.

- [47] S. Levy e P.T. Chiarito. Square plate with clamped edges under normal pressure producing large deflections. 1942.
- [48] D. Kim e R. A. Chaudhuri. Full and von karman geometrically nonlinear analyses of laminated cylindrical panels. *AIAA Journal*, 33(11):2173–2181, 1995.
- [49] M. Ahmadi e R. Ansari. Computational simulation of an artery narrowed by plaque using 3d fsi method: influence of the plaque angle, non-newtonian properties of the blood flow and the hyperelastic artery models. *Biomedical Physics and Engineering Express*, 5(4):045037, jul 2019.
- [50] C. Wex e S. Arndt e A. Stoll et al. Isotropic incompressible hyperelastic models for modelling the mechanical behaviour of biological tissues: A review. *Biomedizinische Technik. Biomedical engineering*, 60, 06 2015.
- [51] A. Sollazzo e S. Marzano. *Elementi di meccanica dei continui e resistenza dei materiali*. Mc Graw-Hill Libri Italia S.r.l., 1992.
- [52] J. A. Cottrell e T. J. R. Hughes Y. Bazilevs. *Isogeometric analysis: toward integration of CAD and FEA*. John Wiley & Sons, 2009.
- [53] W. Yu e V. V. Volovoi et al. Validation of the variational asymptotic beam sectional analysis. *AIAA Journal*, 40(10):2105–2112, 2002.
- [54] F.Gruttmann e W. Wagner. Shear correction factors in timoshenko’s beam theory for arbitrary shaped cross-sections. *Computational Mechanics*, 27:199–207, 03 2001.
- [55] K.Y. Sze e W.K. Chan e T. H. H. Pian. An eight-node hybrid-stress solid-shell element for geometric non-linear analysis of elastic shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 55(7):853–878, 2002.
- [56] L. Vu-Quoc e X.G. Tan. Optimal solid shells for non-linear analyses of multilayer composites. i. statics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(9):975–1016, 2003.
- [57] T. Elguedj e Y. Bazilevs e V.M. Calo et al.  $B^-$  and  $f^-$  projection methods for nearly incompressible linear and non-linear elasticity and plasticity using higher-order nurbs elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(33):2732–2762, 2008.
- [58] Moshe Eisenberger. An exact high order beam element. *Computers & Structures*, 81(3):147–152, 2003.

- [59] M. Amabili et al. Experimental and numerical study on vibrations and static deflection of a thin hyperelastic plate. *Journal of Sound and Vibration*, 385:81–92, 2016.
- [60] L. Euler. *De Curvis Elasticis*. McGraw-Hill Book Company, 1744.
- [61] Paul J. Flory. Thermodynamic relations for high elastic materials. *Transactions of The Faraday Society*, 57:829–838, 1961.
- [62] G.A.Holzapfel. *Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum approach for Engineering*. John Wiley and Sons, Chichester, West Sussex, England, second print edition, 2001.
- [63] F. Gruttmann, R. Sauer, and W. Wagner. Theory and numerics of three-dimensional beams with elastoplastic material behaviour. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48(12):1675 – 1702, 2000.
- [64] Gerhard A. Holzapfel. Determination of material models for arterial walls from uniaxial extension tests and histological structure. *Journal of Theoretical Biology*, 238(2):290–302, 2006.
- [65] H. B. Khaniki. Hyperelastic structures: A review on the mechanics and biomechanics. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 148:104275, 2023.
- [66] S. Bolourchi K.J. Bathe. Large displacement analysis of three-dimensional beam structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 14(7):961–986, 1979.
- [67] T. Von Kàrmàn. *Festigkeitsprobleme im maschinenbau*. Teubner, 1910.
- [68] Lopez. Soft optical composites for tunable transmittance. *Extreme Mechanics Letters*, 9:297–303, 2016.
- [69] R. D. Mindlin. Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates. *Journal of Applied Mechanics*, 18(1):31–38, 04 2021.
- [70] N.W. Murray. *Introduction to the Theory of Thin-Walled Structures*. Oxford University Press, 1984.
- [71] J. Petrolito. Stiffness analysis of beams using a higher-order theory. *Computers & Structures*, 55(1):33–39, 1995.

- [72] E. Reissner. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. 1945.
- [73] E. Reissner. Further considerations on the problem of torsion and flexure of prismatical beams. *International Journal of Solids and Structures*, 19(5):385–392, 1983.
- [74] A. Sze, K. Y. e Ghali. Hybrid hexahedral element for solids, plates, shells and beams by selective scaling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36(9):1519–1540, 1993.
- [75] V.Z. Vlasov. *Thin-Walled Elastic Beams*. National Science Foundation, 1961.
- [76] D. Zaccaria. *Cinematica e dinamica del continuo*. 2005.