

POLITECNICO DI TORINO

**Corso di Laurea Magistrale
in Ingegneria Aerospaziale**

Tesi di Laurea Magistrale

**Ottimizzazione di trasferite orbitali LEO con propulsione elettrica
per missioni di Multi-Debris Removal**



Relatore

prof. Lorenzo Casalino

Candidato

Giammarco Alessandrino

Anno Accademico 2021-2022

Ai miei Nonni.

Sommario

Con l'apertura dello spazio a compagnie private si sta osservando in questi anni alla creazione di un nuovo modello di architettura di missione. Si tratta di “*mega costellazioni*” di satelliti prodotti in serie e progettati per una vita operativa breve, di modo da poter essere facilmente rimpiazzati e costantemente aggiornati allo stato dell'arte. Si tratta di un modello analogo a quello dell'elettronica di consumo. Ciò porterà inevitabilmente ad un aumento vertiginoso del numero di oggetti in orbita bassa terrestre, siano essi satelliti in fase operativa e no. La sovrappopolazione di orbite specifiche è già ora a livelli allarmanti, la probabilità di eventi di collisione è in rapido aumento e il rischio di effetti a cascata non è trascurabile. Ne è un esempio la distruzione di Iridium del 2009, la cui collisione con un defunto satellite militare russo ha causato la formazione di centinaia di frammenti sufficientemente grandi da essere a loro volta catalogati e dunque porre un rischio catastrofico per altri satelliti e decine di migliaia di frammenti più piccoli. Ciò può essere visto come un primo esempio chiaro di ciò che Kessler aveva predetto nel 1978.

L'aggravarsi delle problematiche legate all'inquinamento spaziale ha portato le agenzie spaziali nazionali a legiferare in merito, imponendo requisiti volti alla mitigazione del problema. Questi, detti metodi passivi, agiscono unicamente nel ridurre il numero dei nuovi detriti immessi in orbita. Ad oggi, non sembra più sufficiente questa filosofia mitigatrice. Sono quindi allo studio, in diverse fasi di progetto, numerose metodologie di rimozione attiva (*Active Debris Removal*, ADR). Molti ADR prevedono la presenza un chaser che effettui una manovra di *rendezvous* con il detrito target, che sia per spingerlo con un fascio di ioni o per agganciarlo con un rampino o ancora per attaccarvi un pacchetto propulsivo.

In questo elaborato si propone una metodologia di ottimizzazione delle trasferte tra le orbite di detriti della medesima famiglia, ovvero vicine tra loro e appartenenti ad una fascia ristretta di altitudine, inclinazione e RAAN. Maggiore è il numero di detriti che si possono deorbitare in un'unica missione e più questa sarà economicamente vantaggiosa. Ammesso di non avere limitazioni sul numero di sistemi di de-orbiting a bordo del chaser, l'unica limitazione al numero di target raggiungibili è dato dal ΔV a disposizione del *craft*. Il problema di ottimizzazione sarà dunque basato sulla minimizzazione della spesa in termini di ΔV e propellente per ogni trasferimento da un detrito al successivo, tenendo conto del requisito di durata massima della missione, dell'effetto perturbativo legato alla non sfericità della Terra (effetto J2) e considerando un sistema propulsivo elettrico.

La formulazione matematica del problema di ottimizzazione si basa sulla Teoria del Controllo Ottimo (D. F. Lawden, “Optimal Trajectories For Space Navigation”, 1963) e sul Principio di Massimo di Pontryagin. Per la modellizzazione del sistema propulsivo elettrico si farà riferimento all'approssimazione di Edelbaum estesa e riformulata da J. A. Kechichian per manovre multi-rivoluzione tra orbite non necessariamente complanari.

Abstract

With the opening of Space to private companies, in recent years we are observing the creation of a new model of mission architecture: mega-constellations of mass-produced satellites designed for a short operational life, to be easily replaced and constantly updated to the state of the art. This is a model similar to that of consumer electronics. This will inevitably lead to a dizzying increase in the number of objects in Low Earth Orbit, whether they are operational or non-operational satellites. Overpopulation of specific orbits is already at alarming levels, the probability of collision events is rapidly increasing, and the risk of cascading effects is not negligible. An example of this is the destruction of Iridium in 2009, whose collision with a defunct Russian military satellite caused the formation of hundreds of fragments large enough to be catalogued and thus to pose a catastrophic risk to other satellites and tens of thousands of smaller fragments. This can be seen as a clear first example of what Kessler predicted in 1978.

The worsening of the problems related to space pollution has led national space agencies to legislate on the matter, imposing requirements aimed at mitigating the issue. These, called Passive Methods, act only in reducing the number of new debris placed in orbit. To date, this mitigating philosophy no longer seems sufficient. Numerous Active Debris Removal methods (ADR) are therefore in development. Many ADRs require the presence of a chaser that performs a rendezvous maneuver with the target debris, whether it is to push it with a beam of ions or to hook it with a grappling hook or even to attach a propulsive package.

In this paper we propose a methodology for optimizing the transfers between orbits of the same family debris: close to each other and belonging to a narrow band of altitude, inclination and RAAN. The more debris you can deorbit in a single mission, the more cost-effective it will be. Assuming that there are no limitations on the number of de-orbiting systems on board the chaser, the only limitation to the number of reachable targets is given by the ΔV available to the craft. The optimization problem will therefore be based on minimizing the expenditure in terms of ΔV and propellant for each transfer from one debris to the next, taking into account the maximum mission duration requirement, the perturbative effect linked to the non-sphericity of the Earth (J2 effect) and considering an electric propulsion system.

The mathematical formulation of the optimization problem is based on the Theory of Optimal Control (D. F. Lawden, "Optimal Trajectories For Space Navigation", 1963) and on Pontryagin's Maximus Principle. For the modeling of the electric propulsion system refer will be made to the Edelbaum approximation extended and reformulated by J. A. Kechichian for multi-revolutions maneuvers between orbits not necessarily coplanar.

Ringraziamenti

Ringrazio innanzitutto il professor Lorenzo Casalino per avermi accompagnato in questo progetto di tesi e per aver dimostrato sempre grandissima disponibilità e professionalità nel consigliarmi e nel fugare qualsiasi dubbio possa essermi sorto.

Ringrazio poi tutto il corpo docenti e l'istituto Politecnico di Torino per avermi ospitato e fatto crescere professionalmente, culturalmente ed umanamente, nei sei anni più duri e belli della mia vita.

Ringrazio la mia famiglia: mia Madre, mio Padre, i miei Fratelli e i miei Nonni a cui dedico questo lavoro. Senza di loro non potrei mai essere qui: li ringrazio per avermi sempre sostenuto in qualsiasi mia scelta, mai mi sono sentito giudicato o abbattuto o pressato da nessuno di loro. Li ringrazio per il sostegno economico che mi ha permesso di vivere sei anni in una città così lontana. Li ringrazio anche per essere stati la prima fonte di ispirazione: senza le giornate passate in mezzo agli attrezzi di Nonno Lino e ai modellini di Papà, probabilmente questa sarebbe stata una tesi su Hegel.

Ringrazio Eleonora, per avermi sopportato nei momenti peggiori, quando mi sentivo mancare la terra sotto ai piedi e un vuoto mangiarmi da dentro. La ringrazio per esserci stata sempre, ed essermi stata accanto in quei momenti, aiutandomi a vedere la soluzione al problema che in quel momento sembrava insormontabile.

Ringrazio tutti i nuovi amici che ho incontrato a Torino, quelli che non vedo più tanto spesso e quelli che continuo a vedere ogni giorno. Ognuno di loro ha partecipato, anche solo strappandomi un sorriso in una giornata pesante, ad alleggerirmi il viaggio che mi ha condotto qui. Ringrazio in particolare Davide, che oltre caro amico fuori, è stato compagno di mille avventure dentro le aule del Poli. In ultimo, un ringraziamento particolare va reso anche a Simone, Piero, Francesco e Nanni, per essere stati una seconda famiglia con la quale convivere e condividere ogni pasto, ogni festa ed ogni bevuta degli ultimi 4 anni.

Indice

Capitolo 1 – Introduzione.....	1
<i>1.1 I Detriti Spaziali.....</i>	<i>2</i>
<i>1.2 La Sindrome di Kessler</i>	<i>6</i>
<i>1.3 Un Problema non solo Spaziale</i>	<i>8</i>
<i>1.4 Metodi di Rimozione Attiva</i>	<i>12</i>
<i>1.5 Obiettivi dell'elaborato</i>	<i>15</i>
Capitolo 2 – Richiami Di Meccanica Del Volo Spaziale.....	17
<i>2.1 Legge di Gravitazione Universale.....</i>	<i>17</i>
<i>2.2 Leggi di Keplero.....</i>	<i>17</i>
<i>2.3 Cenno al Problema degli N-Corpi</i>	<i>18</i>
<i>2.4 Problema dei 2 Corpi Ristretto.....</i>	<i>19</i>
<i>2.5 Orbite Kepleriane</i>	<i>21</i>
<i>2.5.1 Caratterizzazione Geometrica</i>	<i>22</i>
2.5.1.1 Flight Path Angle ϕ	23
2.5.1.2 Semiasse Maggiore A.....	24
<i>2.5.2 Contenuto Energetico Delle Coniche.....</i>	<i>25</i>
<i>2.5.3 Classificazione Delle Orbite Kepleriane.....</i>	<i>26</i>
<i>2.5.4 Parametri Orbitali Classici.....</i>	<i>27</i>
2.5.4.1 Casi Particolari	30
<i>2.6 Perturbazioni Orbitali</i>	<i>30</i>
2.6.1 Non Sfericità Della Terra.....	32
2.6.1.1 Accenni di Geodesia.....	32
2.6.1.2 Effetto J_2	35
<i>2.7 Manovre Orbitali</i>	<i>41</i>
2.7.1 Manovre Continue.....	43

2.7.1.1	Semiassse Maggiore	45
2.7.1.2	Eccentricità	45
2.7.1.3	Inclinazione.....	45
2.7.1.4	Inclinazione e Semiassse	46
2.7.1.5	Costo della Manovra.....	48
2.7.1.6	Media su più Giri	48

Capitolo 3 – Cenni di Propulsione Elettrica 51

3.1	<i>Equazione di Tsiolkowsky</i>	51
3.2	<i>Confronto Propulsione Chimica Vs. Elettrica</i>	53
3.3	<i>Classificazione Propulsori Elettrici</i>	56
3.3.1	<i>Propulsori Elettrotermici</i>	56
3.3.2	<i>Propulsori Elettrostatici</i>	57
3.3.3	<i>Propulsori Elettromagnetici</i>	58

Capitolo 4 – Modello Matematico e Metodi di Ottimizzazione 61

4.1	<i>Introduzione</i>	61
4.2	<i>Teoria Del Controllo Ottimo</i>	62
4.3	<i>Applicazione Controllo Ottimo</i>	66
4.3.1	<i>Introduzione Effetto J2</i>	69
4.3.2	<i>Metodo (a, i) Transfer</i>	71
4.3.3	<i>Metodo (a, i, Ω) Transfer</i>	73
4.3.4	<i>Metodo Attendista</i>	74
4.3.5	<i>Considerazioni Aggiuntive</i>	74
4.3.5.1	<i>Ripartizioni Differenze Parametri Orbitali</i>	74
4.3.5.2	<i>Guadagno Effetto J2</i>	75
4.3.6	<i>Esempio Numerico: Caso Impulsivo</i>	82
4.3.6.1	<i>Costi di Trasferta: x y z</i>	82
4.3.6.2	<i>Parametri di Ripartizione: ai-Transfer</i>	83
4.3.6.3	<i>Parametri di Ripartizione: aiΩ-Transfer</i>	86
4.3.6.4	<i>Parametri di Ripartizione: Metodo Attendista</i>	88
4.3.6.5	<i>Impulsi: Confronto tra i Metodi</i>	89
4.3.6.6	<i>Costo Totale della Trasferta: Confronto tra i Metodi</i>	91

4.3.7	<i>Considerazioni su t^*</i>	92
Capitolo 5 – Estensione a Manovre Continue		97
Capitolo 6 – Risultati		105
6.1	<i>Caso 1</i>	105
6.2	<i>Caso 2</i>	110
6.2.1	<i>Metodo $ai\omega$ – transfer</i>	111
6.2.2	<i>Metodo Attendista</i>	115
6.3	<i>Caso 3</i>	117
6.4	<i>Caso 4</i>	124
6.4.1	<i>Metodo $ai\omega$</i>	127
6.4.1.1	Effetto di $\Delta\Omega_0$	127
6.4.1.2	Effetto di Δa	128
6.4.1.3	Effetto di Δi	130
6.4.2	<i>Metodo Attendista</i>	133
6.4.2.1	Effetto di $\Delta\Omega_0$	133
6.4.2.2	Effetto di Δa	134
6.4.2.3	Effetto di Δi	136
6.5	<i>Caso 5</i>	139
Capitolo 7 – Conclusioni.....		153
8 – Bibliografia.....		157

Indice delle Figure

Capitolo 1

Figura 1.1. Numero di oggetti lanciati nello spazio per anno . Credit: United Nations Office for Outer Space Affairs.	3
Figura 1.2. . Oggetti >10 cm in LEO. Diagramma sviluppato con LEGEND. Credit: NASA ODPO.....	5
Figura 1.3: Oggetti >10 cm in LEO, andamento storico e risultati di tre possibili scenari futuri. Il numero effettivo è definito come il tempo frazionale, per periodo orbitale, che un oggetto passa nel range di altitudine 200-2000 km. Diagramma sviluppato con LEGEND. Credit: NASA ODPO.....	6
Figura 1.4: Rendering degli oggetti in orbita terrestre attualmente tracciati. Appena il 5% degli oggetti è rappresentativo di satelliti attualmente in attività. I puntini non sono in scala, mentre la loro posizione nello spazio è ricavata da efemeridi reali. A sinistra: punto di vista GEO. A destra: punto di vista GEO-Polar. Credit: NASA ODPO.	8
Figura 1.5: Sinistra: serbatoio di titanio ritrovato a Gujarat (India), Maggio 2022. Destra: serbatoio dello stadio superiore del lanciatore della missione GPS NAVSTAR 32 lanciato nel 1993 e caduto in Arabia Saudita nel 2001. Credit: Indianexpress, Wikipedia.....	9
Figura 1.6: serbatoio ritrovato in California nel 2018 e appartenuto ad un satellite Iridium dismesso nel 1990. Destra: serbatoio principale del secondo stadio di un razzo Delta 2 atterrato vicino a Georgetown, Texas, USA, il 22 gennaio 1997. Credit: FoxNews, ESA.	9
Figura 1.7. Rientro del modulo ATV Jules Verne ripreso da un DC-8 sull’oceano Pacifico. Credit: ESA.	11
Figura 1.8. Oggetti in rientro atmosferico all’anno, suddivisi per tipo. Credit: ESA.....	12

Capitolo 2

Figura 2.1. Schematizzazione problema degli N-corpi.	18
Figura 2.2. Schematizzazione R2BP.	19
Figura 2.3. Schematizzazione ellisse.....	23
Figura 2.4. Rappresentazione sezioni coniche.	27
Figura 2.5. Rappresentazione grafica dei parametri orbitali. Credit: Lasunncty at the English Wikipedia.	28
Figura 2.6. Confronto andamenti temporali puramente qualitativi di un parametro orbitale qualsiasi soggetto a diverse condizioni perturbative.	31
Figura 2.7. Sinistra: modello di geoide, i colori rappresentano deviazioni in altezza (-100m fino a +100m). Destra: campo gravitazionale terrestre (geoide). Credit: ESA, GOCE mission, 2011.	33

Figura 2.8. a) armonica tesserale; b) armonica settoriale; c) armonica zonale. Credit: [27]. ...	34
Figura 2.9. Confronto dell'andamento dell'intensità di regressione della linea dei nodi in funzione dell'inclinazione dell'orbita e parametrizzata a 4 diversi semilatus rectum.....	37
Figura 2.10. Confronto dell'andamento dell'intensità di regressione della linea dei nodi in funzione del semilatus rectum dell'orbita e parametrizzata a 6 diverse inclinazioni.	37
Figura 2.11. Confronto dell'andamento dell'intensità di regressione della linea dei nodi in funzione dell'inclinazione e dell'eccentricità dell'orbita e parametrizzata a 3 diversi semiassi maggiori: [6371, 10371, 22371]km.....	38
Figura 2.12. Andamento di $\Delta\omega$ /orbit in funzione dell'inclinazione del piano orbitale.....	40
Figura 2.14. Schematizzazione spinta + perdite.	42
Figura 2.21. Rappresentazione angoli di spinta.	43
Figura 2.16. Confronto soluzione ottimale/approssimata. Credit: [29].	46
Figura 2.17 Andamento Δi in funzione del rapporto V/V_0 a diversi β_0 . Credit: [29].	47

Capitolo 3

Figura 3.1. Schematizzazione sistema chiuso S/C + propellente.....	51
Figura 3.2. Andamento dell'Equazione di Tsiolkowsky in funzione del termine esponenziale.	53

Capitolo 4

Figura 4.1. Confronto metodi sull'andamenti di Δx in funzione della durata della missione. .	77
Figura 4.2. Andamenti Δx , x e $\Delta x+x$ in funzione di t_{mis}	78
Figura 4.3. Andamenti Δx , $ x $ e $ \Delta x+x $ in funzione di t_{mis}	79
Figura 4.4. Andamenti $\Delta\Omega_{tot}$, $\Delta\Omega_{J2}$ e $\Delta\Omega_{imp}$ in funzione di t_{mis} : ai-transfer.	80
Figura 4.5. Andamenti $\Delta\Omega_{tot}$, $\Delta\Omega_{J2}$ e $\Delta\Omega_{imp}$ in funzione di t_{mis} : ai Ω -transfer.	81
Figura 4.6. Andamenti $\Delta\Omega_{tot}$, $\Delta\Omega_{J2}$ e $\Delta\Omega_{imp}$ in funzione di t_{mis} : Metodo Attendista.....	81
Figura 4.7. Andamenti di x , y e z in funzione di t_{mis}	83
Figura 4.8. Andamenti x_{sx} e $x - x_{sx}$ in funzione di t_{mis} : ai-transfer.	84
Figura 4.9. Andamenti y_{sy} e $y - y_{sy}$ in funzione di t_{mis} : ai-transfer.	84
Figura 4.10. Andamenti z_{sz} e $z - z_{sz}$ in funzione di t_{mis} : ai-transfer.	85
Figura 4.11. Andamenti x_{sx} e $x - x_{sx}$ in funzione di t_{mis} : ai Ω -transfer.	86
Figura 4.12. Andamenti y_{sy} e $y - y_{sy}$ in funzione di t_{mis} : ai Ω -transfer.	87
Figura 4.13. Andamenti z_{sz} e $z - z_{sz}$ in funzione di t_{mis} : ai Ω -transfer.....	87
Figura 4.14. Andamento <i>parametri di ripartizione</i> in funzione di t_{mis} : metodo attendista.	88
Figura 4.15. Andamenti ΔVa e ΔVb in funzione di t_{mis} : ai-transfer.	89

Figura 4.16. Andamenti ΔVa e ΔVb in funzione di $tmis$: ai Ω -transfer.	89
Figura 4.17. Andamenti ΔVa e ΔVb in funzione di $tmis$: metodo attendista.	90
Figura 4.18. Confronto andamenti $\Delta Vtot$ in funzione di $tmis$	91
Figura 4.19. Rappresentazione dei Casi A, B, C e D per orbite retrograde ($\Omega/2 > 0$).	95

Capitolo 6

Figura 6.1. Andamenti ΔVa e ΔVb nel calcolo iterativo: ai Ω -transfer.	107
Figura 6.2. Confronto andamenti Δta e Δtb nel calcolo iterativo.	107
Figura 6.3. Confronto andamenti $\Delta Vtot$ nel calcolo iterativo.	108
Figura 6.4. Confronto andamenti $\Delta ttot$ nel calcolo iterativo: ai Ω -transfer.	111
Figura 6.5. Confronto istanti medi archi propulsi e durata missione: ai Ω -transfer.	113
Figura 6.6. Confronto istanti inizio e fine archi propulsi: ai Ω -transfer.	114
Figura 6.7. Determinazione della durata massima del primo arco propulso: ai Ω -transfer.	118
Figura 6.8. Determinazione della durata massima del primo arco propulso: Metodo Attendista.	119
Figura 6.9. Determinazione dell'accelerazione minima: ai Ω -transfer.	119
Figura 6.10. Determinazione dell'accelerazione minima: Metodo Attendista.	120
Figura 6.11. Andamento $\Delta ttot$ nel calcolo iterativo: ai Ω -transfer.	121
Figura 6.12. Confronto istanti inizio e fine archi propulsi: ai Ω -transfer.	122
Figura 6.13. Andamento dell'accelerazione minima in funzione della durata di trasferta, dato un certo set di condizioni iniziali: ai Ω -transfer.	124
Figura 6.14. Andamento dell'accelerazione minima in funzione della durata di trasferta, dato un certo set di condizioni iniziali: Metodo Attendista.	125
Figura 6.15. Andamento in scala logaritmica dell'accelerazione minima in funzione della durata di trasferta, dato un certo set di condizioni iniziali: Metodo Attendista e ai Ω	126
Figura 6.16. Andamento dell'accelerazione minima in funzione della durata di missione e della differenza di RAAN di tempo 0: ai Ω -transfer.	127
Figura 6.17. Andamento dell'accelerazione minima in funzione della durata di missione e della differenza di semi-asse maggiore: ai Ω -transfer.	129
Figura 6.18. Andamento della differenza di RAAN Rate tra Target e Chaser in funzione della differenza di semi-asse maggiore: ai Ω -transfer.	130
Figura 6.19. Andamento dell'accelerazione minima in funzione della durata di missione e della differenza di inclinazione: ai Ω -transfer.	131
Figura 6.20. Andamento della differenza di RAAN Rate tra Target e Chaser in funzione della differenza di inclinazione: ai Ω -transfer.	132

Figura 6.21. Andamento dell'accelerazione minima in funzione della durata di missione e della differenza di RAAN di tempo 0: Metodo Attendista.....	133
Figura 6.22. Andamento dell'accelerazione minima in funzione della durata di missione e della differenza di semi-asse maggiore: Metodo Attendista.....	134
Figura 6.23. Andamento della differenza di RAAN Rate tra Target e Chaser in funzione della differenza di semi-asse maggiore: Metodo Attendista.	135
Figura 6.24. Andamento dell'accelerazione minima in funzione della durata di missione e della differenza di inclinazione: Metodo Attendista.....	136
Figura 6.25. Andamento della differenza di RAAN Rate tra Target e Chaser in funzione della differenza di semi-asse maggiore: Metodo Attendista.	137
Figura 6.26. Confronto andamenti ΔV_{tot} in funzione della durata di missione: manovre impulsive.	140
Figura 6.27. Confronto andamenti ΔV_{tot} in funzione della durata di missione: con accelerazione minima per ogni durata di missione considerata.....	140
Figura 6.28. Andamento del costo totale di trasferta in funzione della durata di missione e dell'accelerazione disponibile: ai Ω -transfer.....	141
Figura 6.29. Andamento del costo totale di trasferta in funzione della durata di missione e dell'accelerazione disponibile: Metodo Attendista.	142
Figura 6.30. Sinistra: particolare di Figura 6.28 relativo ad accelerazione massima nel range considerato; Destra: particolare di Figura 6.28 relativo ad accelerazione minima.....	142
Figura 6.31. Sinistra: particolare di Figura 6.29 relativo ad accelerazione massima nel range considerato; Destra: particolare di Figura 6.29 relativo ad accelerazione minima.....	143
Figura 6.32. Andamento del minimo di costo totale di trasferta scelto tra i due metodi in funzione della durata di missione e dell'accelerazione disponibile.....	144
Figura 6.33. Mappa di scelta del metodo piÙ conveniente in funzione della durata di missione e dell'accelerazione disponibile. Legenda: Viola = conviene Metodo Attendista; Giallo = conviene ai Ω -transfer.....	144
Figura 6.34. Confronto costo di trasferta a diverse accelerazioni. Legenda: linea tratteggiata = ai Ω ; linea continua = Attendista	145
Figura 6.35. Confronto costo di trasferta a diverse accelerazioni. Legenda: linea tratteggiata = ai Ω ; linea continua = Attendista . Dettaglio a piccoli ΔV	146
Figura 6.36. Confronto costo di trasferta a diverse accelerazioni. Legenda: linea tratteggiata = ai Ω ; linea continua = Attendista. Dettaglio nell'intorno di t^*	147
Figura 6.37. Andamento del costo totale di trasferta in funzione della durata di missione e della differenza di RAAN di tempo zero: ai Ω -transfer.....	148
Figura 6.38. Andamento del costo totale di trasferta in funzione della durata di missione e della differenza di RAAN di tempo zero: Metodo Attendista.....	149

Figura 6.39. Andamento del minimo di costo totale di trasferta scelto tra i due metodi in funzione della durata di missione e della differenza di RAAN di tempo zero..... 150

Figura 6.40. Mappa di scelta del metodo più conveniente in funzione della durata di missione e della differenza di RAAN di tempo zero. Legenda: Viola = conviene Metodo Attendista; Giallo = conviene ai Ω -transfer; Linea tratto-punto Bianca = t^* 150

Indice delle Tabele

Capitolo 2

Tabella 2.1. Classificazione della forma nel piano di orbite kepleriane al variare del contenuto energetico.....	27
Tabella 2.2. Elenco e definizione dei 6 parametri orbitali classici.....	28
Tabella 2.3. Casi particolari di parametri orbitali nulli.....	30
Tabella 2.4. Armoniche principali.....	34
Tabella 2.5. Confronto EGM dal 1984 al 2008.....	35

Capitolo 3

Tabella 3.1. Performance Propulsione Elettrica.....	59
---	----

Capitolo 4

Tabella 4.1. Riepilogo parametri orbitali.....	76
Tabella 4.2. Confronto numerico costo totale della trasferta.....	91
Tabella 4.3. Riepilogo casistiche al variare di RAAN e RAAN Rate iniziali.....	94

Capitolo 6

Tabella 6.1. Riepilogo parametri orbitali Caso 1.....	106
Tabella 6.2. Costo della prima e della seconda fase propulsa: confronto impulsivo/continuo.	107
Tabella 6.3. Spesa totale in funzione del metodo utilizzato: confronto impulsivo/continuo..	108
Tabella 6.4. Riepilogo parametri orbitali Caso 2.....	110
Tabella 6.5. Spese totali e tempi di spinta totali al variare dell'accelerazione: $a_i\Omega$	112
Tabella 6.6. Spese totali e tempi di spinta totali al variare dell'accelerazione: Metodo Attendista.....	115
Tabella 6.7. Confronto delle spese totali tra metodi/accelerazioni e manovre impulsive/continue.....	116
Tabella 6.8. Confronto su spesa totale e tempo totale di spinta tra propulsione chimica ed elettrica: $a_i\Omega$ -transfer.....	121
Tabella 6.9. Confronto su spesa totale e tempo totale di spinta tra propulsione chimica ed elettrica: Metodo Attendista.....	123
Tabella 6.10. Riepilogo parametri orbitali Caso 6.....	139
Tabella 6.11. Durate di missione minime per ogni accelerazione considerata.....	146

Capitolo 1

Introduzione

Da più di 60 anni lo spazio ha rappresentato per l'uomo non più il confine irraggiungibile di un pianeta su cui sentirsi confinati e incastrati, bensì un nuovo mare da esplorare alla ricerca di risposte alle domande più intime riguardo alla natura umana e al suo posto nel mondo. All'iniziale spinta scientifica, filosofica e politica della corsa allo spazio, si è presto aggiunta la visione dello spazio come una risorsa economica e il luogo di infrastrutture indispensabili per il mantenimento della qualità di vita che contraddistingue e rende unica la nostra epoca rispetto a quelle passate. Ecco che quindi oggi lo spazio e i satelliti che lo abitano hanno assunto, e assumono sempre di più, il ruolo di puntelli che sorreggono le nostre vite quotidiane, assolvendo ai ruoli più disparati: dall'osservazione terrestre alla meteorologia, dalle telecomunicazioni ai sistemi di navigazione, dalla ricerca sul clima e i suoi cambiamenti, all'implementazione di innovativi metodi di distribuzione di internet a banda larga in ogni angolo del pianeta.

Scopi diversi necessitano quindi di sistemi spaziali differenti: in primo luogo il payload della missione potrà essere una camera per missioni di *remote sensing*, antenne per satelliti di telecomunicazioni, umani per missioni di esplorazione o di natura scientifica, e così via. Si possono poi distinguere missioni in funzione dell'architettura della stessa: una missione può essere composta da un unico satellite, da pochi satelliti di grandi dimensioni, come le costellazioni in orbite geostazionarie per telecomunicazione e navigazione (eg. WAAS e EGNOS, come sistemi di GNSS Augmentation rispettivamente in Nord America e in Europa), o, ancora, da una moltitudine di piccoli satelliti in orbita bassa, come ad esempio la missione StarLink di SpaceX. Esistono dunque delle orbite di interesse scientifico, economico e/o funzionale maggiore di altre. Convenzionalmente si usa "dividere" lo spazio attorno alla Terra in tre zone, all'interno delle quali è possibile identificare orbite di natura diversa:

Introduzione

- Low Earth Orbit (LEO): compresa tra i 100 e i 1000 km di altitudine, la sua vicinanza alla Terra è la ragione per cui rappresenta l'orbita più usata per esempio per missioni di *satellite imaging*. È anche l'orbita usata per tutte le stazioni spaziali finora lanciate, data la maggiore semplicità ed economicità del raggiungimento di un'orbita più vicina.
- Medium Earth Orbit (MEO): compresa tra i 1000 e i 35 786 km di altitudine, meno popolata della LEO
- Geostationary Orbit (GEO): orbita equatoriale e circolare posta ad un'altitudine di 35 786 km, presenta un periodo pari ad una rotazione terrestre (un giorno sidereo), sicché, visto dalla superficie terrestre, un satellite in qualsiasi punto di quest'orbita risulti fermo nella volta celeste. Per questa proprietà risulta di grande interesse per satelliti di telecomunicazione e navigazione.
- Orbite Molniaya: orbite altamente eccentriche, con un'inclinazione di 63.4° , tale da annullare l'effetto di regressione della linea degli apsidi (trattato più approfonditamente nei capitoli successivi), e con argomento del perigeo pari a 270° . Queste orbite permettono una copertura più efficace ed efficiente dell'emisfero Nord fino ad elevate latitudini, riuscendo a coprire zone in ombra da satelliti in GEO. Risultano dunque di grande interesse per satelliti di telecomunicazioni e *remote sensing* per nazioni che si estendano principalmente a queste latitudini, come la Federazione Russa.

1.1 I detriti spaziali

Se prima del 4 ottobre 1957 (lancio di Sputnik 1) nessun oggetto creato dall'uomo aveva mai orbitato la Terra, appena 18 anni dopo, al termine della corsa allo spazio, il numero di oggetti lanciati in orbita ammontava già a quasi 2000 unità. Al 2021 questo numero ha superato le 12 000 unità (dati da “*United Nations Office for Outer Space Affairs, Online Index of Objects Launched into Outer Space (2022)*”) e il trend è in forte crescita: si pensi che si è passati dai 221 oggetti (satelliti, sonde, landers, navicelle e elementi di stazioni spaziali) nel 2016 ai 1807 del 2021, un aumento di circa 8 volte nel giro di appena cinque anni.

Annual number of objects launched into space

This includes satellites, probes, landers, crewed spacecrafts, and space station flight elements launched into Earth orbit or beyond.

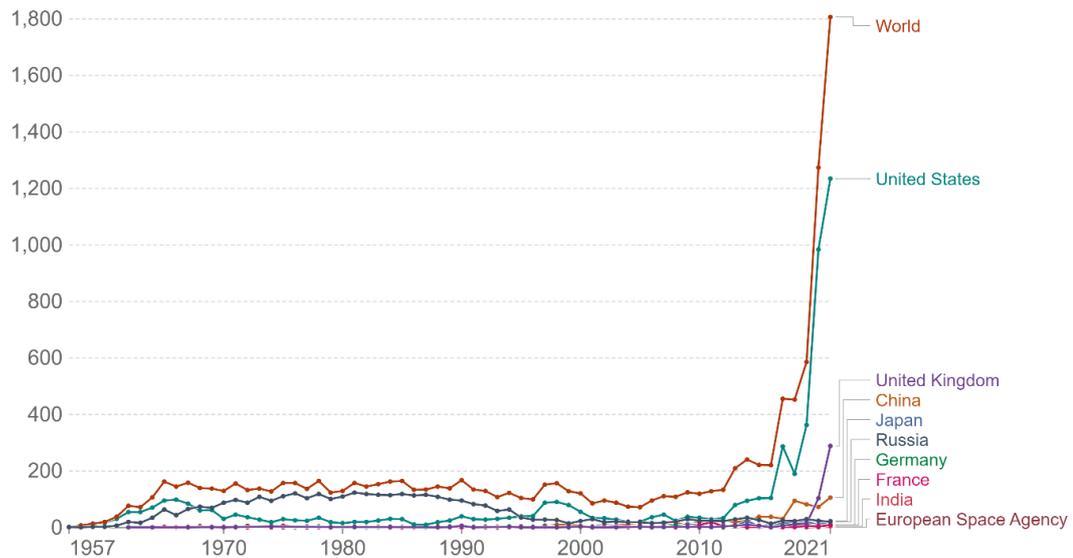


Figura 1.1. Numero di oggetti lanciati nello spazio per anno. Credit: United Nations Office for Outer Space Affairs.

La vita operativa di un satellite non è però illimitata, una volta assunto al suo compito il sistema diventa essenzialmente un detrito con limitate o nulle capacità di comunicare e/o manovrare. Con l'aumentare del numero di detriti in orbita, aumenta anche la probabilità di collisioni catastrofiche. La consapevolezza riguardo questo problema ha iniziato a prendere piede nei tardi anni '70, da cui è iniziata un'importante proliferazione di raccomandazioni, linee guida e regolamentazioni a riguardo ed emanate dalle principali agenzie spaziali. Lo scopo è quello di ridurre la proliferazione di detriti attraverso la determinazione di requisiti di progetto, operativi e di *end of life disposal* che prevengano la generazione di detriti, assicurando un'utilizzazione sostenibile dello spazio. Le normative europee, per esempio, prescrivono un periodo limite di 25 anni entro il quale lo *spacecraft* che abbia terminato la propria missione sia fatto deorbitare o, nel caso in cui ciò non sia di facile implementazione, come per satelliti GEO, sia trasferito in particolari orbite a basso utilizzo, dette "orbite cimitero". A ciò si deve aggiungere, prescrivono le normative ESA, la passivizzazione del sistema: tutte le riserve energetiche del satellite devono essere consumate per evitare esplosioni inaspettate. Queste misure possono prevedere l'accensione dei propulsori fino a svuotamento dei serbatoi, apertura di valvole di *venting* per l'eliminazione del propellente residuo, scarico delle batterie e l'inertizzazione di eventuali cariche pirotecniche.

I satelliti al fine della propria vita operativa non rappresentano però l'unica fonte di "inquinamento spaziale". L'agenzia spaziale americana definisce detrito orbitale: "ogni

Introduzione

oggetto di origine artificiale in orbita intorno alla Terra che non serve più alcuna funzione utile". Oltre a veicoli non più funzionanti, questa definizione include gli stadi superiori dei lanciatori, detriti direttamente derivanti dalle operazioni di missione e i così detti, detriti da frammentazione. Quest'ultimi, possono avere essenzialmente due genesi:

- Derivano da esplosioni di satelliti non funzionanti e non passivizzati la cui esposizione all'ambiente spaziale per un periodo maggiore di quello di progetto ne ha causato il cedimento strutturale e/o l'instabilizzazione del propellente residuo.
- Si formano a seguito di una collisione tra satelliti o tra un satellite e un detrito o, ancora, tra due detriti.

I detriti da frammentazione sono probabilmente i più pericolosi data la natura imprevedibile della causa generante e dal fatto che, nella maggior parte dei casi, porta alla formazione di una moltitudine di detriti di dimensione inferiore ma ugualmente pericolosi. Si può dunque andare a classificare questi detriti in funzione delle loro dimensioni. Secondo la NASA ad oggi ci sono più di 27 000 detriti costantemente tracciati dal Department of Defense's global Space Surveillance Network (SSN). A questi si devono aggiungere, secondo le ultime stime, circa mezzo milione di detriti di dimensione fino a 1 cm e circa 100 milioni di pezzi fino a 1 mm, troppo piccoli per essere individuati e tracciati, ma non meno pericolosi per missioni umane e robotiche in orbita terrestre. Si pensi, ad esempio, che numerose finestre dello Space Shuttle hanno dovuto essere sostituite per via di impatti non catastrofici con fiocchi di vernice derivanti dall'esfoliazione di *upper-stages* e satelliti morti in orbita da decenni. La pericolosità di oggetti anche così piccoli è diretta conseguenza delle alte velocità a cui questi viaggiano. Si passa dai circa 3 km/s in GEO fino a più di 7.5 km/s in LEO, con conseguente energia cinetica impossibile da dissipare o assorbire da quasi nessun materiale solido conosciuto ed utilizzato nella costruzione di satelliti.

Per gli oggetti tracciabili, fino a 5 cm in diametro in LEO, la NASA prevede linee guida per l'esecuzione di manovre di *collision avoidance*, di modo da identificare un'area sicura attorno al veicolo, in gergo "*pizza box*", all'interno della quale non deve poter entrare il detrito tracciato. Sono manovre, per esempio, molto comuni per la Stazione Spaziale Internazionale. Se invece, non si è in grado di tracciare l'oggetto con sufficiente precisione e dunque predirne la traiettoria con sufficiente accuratezza e/o tempestività, si attuano una serie di misure di emergenza che prevedono l'isolamento dell'equipaggio della stazione nelle navicelle Soyuz, di modo che, nel caso di uno sfortunato impatto, queste possano essere impiegate come "scialuppe

di salvataggio”. La ISS ha condotto 29 manovre di *collision avoidance* dal 1999, di cui 3 solo nel 2020.

Sebbene gli sforzi implementativi per ridurre la crescita del numero di detriti tramite contromisure passive, quali appunto le normative su *disposal* e passivizzazione, ogni nuovo lancio e ogni nuovo veicolo immesso in orbita comporta inevitabilmente la formazione di nuovi detriti. Sicché, oggi, con l’aumento vertiginoso dei lanci e l’inserimento nel mercato spaziale di Figure private, la crescita della quantità di oggetti inquinanti è oggi più ripida che mai (Figura 1.2).

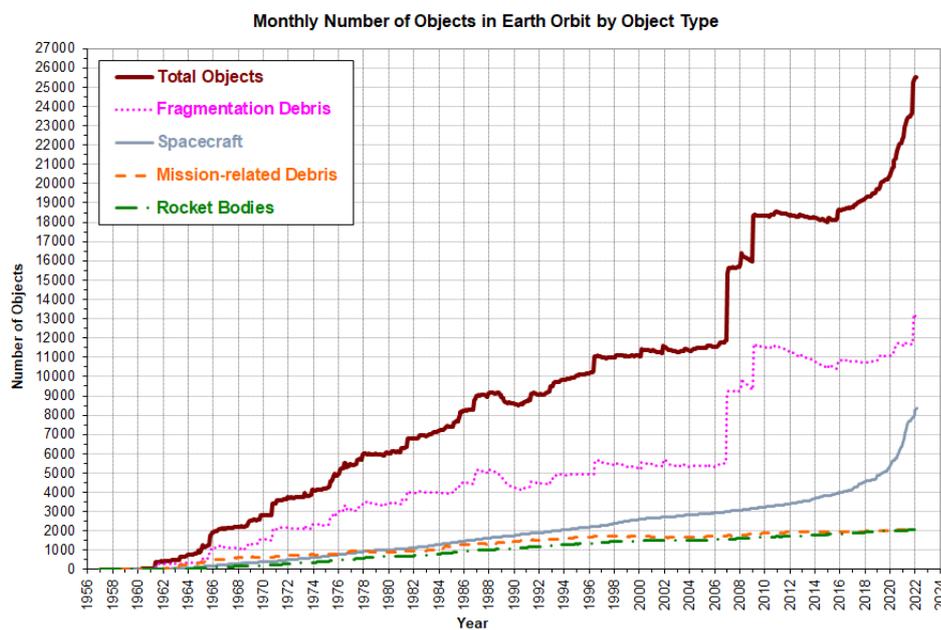


Figura 1.2. . Oggetti >10 cm in LEO. Diagramma sviluppato con LEGEND. Credit: NASA ODPO.

Al fine di fornire un quadro predittivo riguardo il futuro dell’ambiente in termini di affollamento delle regioni di spazio di maggior utilizzo, il NASA *Orbital Debris Program Office* dispone di un modello evolutivo, *full-scale* e tridimensionale in grado di studiare il trend passato e futuro della crescita del numero di oggetti in orbita nello spazio tra i 200 e i 50 000 km di altitudine (include quindi le regioni LEO, MEO e GEO). Il modello, denominato LEGEND, fornisce le caratteristiche dei detriti in termini di quantità, tipologia, dimensioni, parametri orbitali, ecc. in funzione del tempo, dell’altitudine, della longitudine e della latitudine. I detriti presi in considerazione da LEGEND comprendono veicoli attivi e no, stadi di lanciatori, frammentazioni e detriti *mission-related* (bulloni, coperture di strumentazione, ecc.) con dimensione fino ad 1 mm. Il periodo di proiezione tipico del modello è di 200 anni,

Introduzione

le tecniche di predizione implementate sono validate tramite la riproduzione e successiva analisi critica della storia dell'ambiente spaziale dal 1957 ad oggi (Figura 1.2).

A causa delle incertezze riguardo frequenza dei lanci futuri, attività solare, esplosioni e collisioni, l'andamento nei prossimi 200 anni fornito dal modello è una media di almeno 100 simulazioni Monte Carlo. Infine, LEGEND permette di simulare vari scenari, andando a modificare diversi parametri della simulazione, in modo da verificare l'efficacia dei diversi metodi di mitigazione ad oggi in fase di studio o già implementati. Per esempio, numerosi studi hanno dimostrato che sarebbe necessario raggiungere un livello di conformità alle regole di mitigazione passiva invocate dalle agenzie nazionali di almeno il 90% per riuscire a raggiungere gli obiettivi di riduzione della crescita della popolazione di detriti richiesti. Il seguente grafico (Figura 1.3) riporta proprio tre diversi scenari in funzione della PMD% (*Post Mission Disposal compliance*).

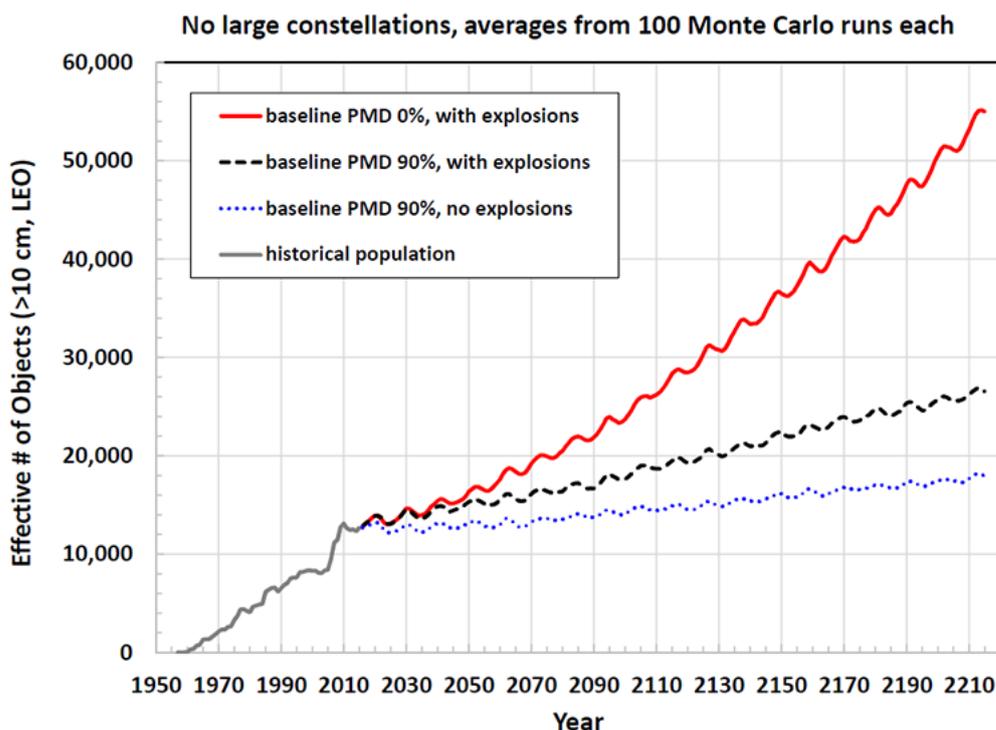


Figura 1.3: Oggetti >10 cm in LEO, andamento storico e risultati di tre possibili scenari futuri. Il numero effettivo è definito come il tempo frazionale, per periodo orbitale, che un oggetto passa nel range di altitudine 200-2000 km. Diagramma sviluppato con LEGEND. Credit: NASA ODPO.

1.2 La Sindrome di Kessler

Come è facile immaginare, un maggior numero di oggetti in orbita comporta una probabilità maggiore di collisioni catastrofiche, con conseguente generazione di nuovi detriti da frammentazione e dunque aumento ulteriore della probabilità di impatto e così via. Il rischio

è quello di entrare in un circolo vizioso che possa rendere molto complicato l'utilizzo di orbite particolarmente, quali le LEO. Questo effetto a cascata è spesso identificato con la locuzione "sindrome di Kessler", dal nome dell'astrofisico Donald J. Kessler che nel 1978 pubblica un paper, dal titolo "*Collision Frequency of Artificial Satellites: The Creation of a Debris Belt*" in cui predice che intorno all'anno 2000 la popolazione di detriti catalogati sarebbe diventata talmente densa che oggetti catalogati avrebbero iniziato a collidere l'uno contro l'altro divenendo la fonte principali di detriti. Conseguenza del paper fu che per la prima volta si accesero i riflettori sulle possibili reali conseguenze di questo problema e si alzò la consapevolezza degli enti preposti nel dover prendere provvedimenti per diminuire il numero di stadi di lanciatori e veicoli morti lasciati in orbita. Come preciserà poi lo stesso Kessler in una successiva pubblicazione (Marzo 2009), il paper del '78 non vuole suggerire in nessuna maniera che l'effetto cascata avvenga in periodi brevi, dell'ordine dei giorni o dei mesi, e nemmeno che l'attuale condizione dell'ambiente spaziale abbia raggiunta una soglia critica oltre cui la sindrome sia inevitabile.

Il 10 Febbraio 2009 il satellite attivo Iridium 33 e il defunto satellite militare russo Kosmos 2251 hanno impattato alla velocità di 11.7 km/s e ad un'altitudine di 798 km, divenendo la prima collisione accidentale catastrofica tra due oggetti catalogati. La collisione, che ha generato centinaia di frammenti sufficientemente grandi da essere a loro volta catalogati e dunque porre un rischio catastrofico per altri satelliti e decine di migliaia di frammenti più piccoli, è stato il primo esempio chiaro di ciò che Kessler aveva predetto nel 1978. Questo evento è ben visibile nel secondo salto della curva dei detriti di frammentazione riportata in Figura 1.2.

Sebbene le principali conclusioni del paper del '78 si siano verificate corrette, vi sono alcune differenze. La principale riguarda il differente rateo di crescita della popolazione di oggetti in orbita, stimata in 510 l'anno nel '78 (anno della prima pubblicazione) ma verificatasi inferiore al momento della seconda pubblicazione (2009) e pari a circa 300. La crescita inferiore è stata condizionata da diversi fattori: l'introduzione di efficaci programmi internazionali per la riduzione delle esplosioni accidentali in orbita, un'anormale alta attività solare che aumentando la densità dell'atmosfera ha causato un maggior numero di rientri di satelliti nell'atmosfera ed infine il collasso dell'Unione Sovietica, una delle prime nazioni per lanci in orbita annui. Il rateo di crescita sarebbe stato anche inferiore se non ci fosse stato il test antisatellite condotto dalla Cina nel 2007 (Fengyun-1C), evento che ha prodotto oltre 2000 oggetti catalogabili. Anche questo evento è ben identificabile in Figura 1.2. Si noti che a causa

Introduzione

delle missioni Starlink di SpaceX e del recente test missilistico antisatellite russo del 2021, ad oggi il rateo di crescita degli oggetti in orbita è aumentato a 415 unità all'anno e dunque più vicino alle stime iniziali.

Inoltre, è necessario sottolineare che il rateo di crescita dei detriti generati da collisioni non cresce linearmente con il numero di oggetti in orbita (come, per esempio, per detriti derivanti da esplosioni accidentali), bensì è proporzionale al quadrato del numero di oggetti in orbita. Nel paper del 1978 si prevedevano 0.013 collisioni tra oggetti catalogati per anno. Questa stima si basava su un catalogo di 3866 oggetti. Ad oggi gli oggetti tracciati dal DoD ammontano a 27 000, ovvero circa 7 volte quelli del '78. Ciò implica una frequenza di collisione quasi 50 volte superiore, in appena 44 anni, e pari a 0.65 collisioni all'anno, ovvero poco meno di 2 collisioni catastrofiche ogni 3 anni. La maggior parte delle collisioni è previsto (Kessler 1978) che avvengano tra gli 800 e i 1000 km di quota: la probabilità è maggiore a causa dell'elevata densità di satelliti, specialmente in fasce ristrette nell'intorno di certe altitudini precise, e a causa del fatto che le orbite in questa zona sono spesso quasi-polari, fattore che aumenta la probabilità di collisione.

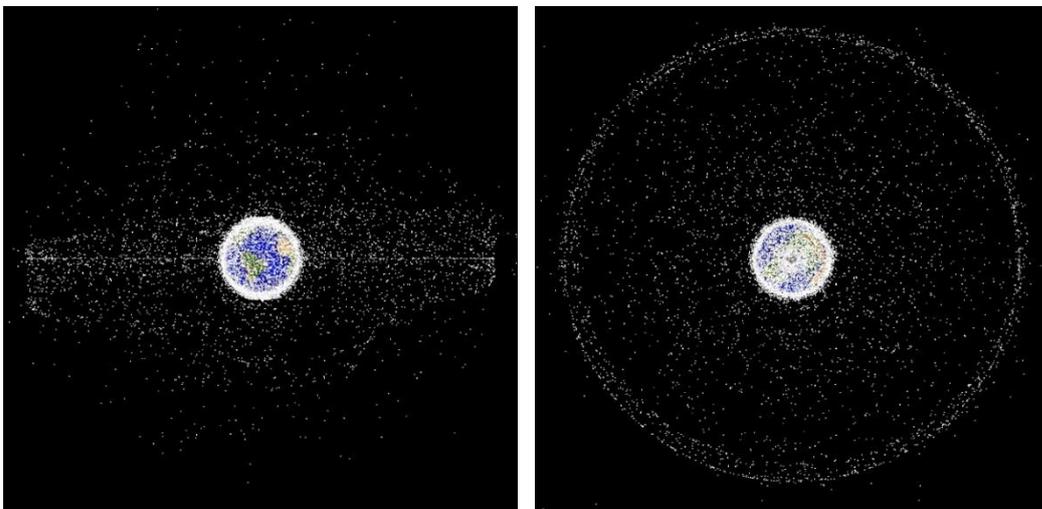


Figura 1.4: Rendering degli oggetti in orbita terrestre attualmente tracciati. Appena il 5% degli oggetti è rappresentativo di satelliti attualmente in attività. I puntini non sono in scala, mentre la loro posizione nello spazio è ricavata da efemeridi reali. A sinistra: punto di vista GEO. A destra: punto di vista GEO-Polar. Credit: NASA ODPO.

1.3 Un problema non solo spaziale

L'accumulo di oggetti non controllabili in orbita terrestre non rappresenta un rischio solo per le operazioni strettamente legate ai viaggi spaziali, bensì possono rappresentare una preoccupazione significativa anche al rientro in atmosfera. Secondo la NASA, al 2011, in media

un detrito (di dimensioni tali da essere catalogabile) al giorno ha rientrato l'atmosfera nei 50 anni precedenti. Sebbene la maggior parte di questi vengano completamente disintegrati dalle elevate temperature e pressioni che si raggiungono al rientro, una piccola parte di questi, soprattutto serbatoi pressurizzati in leghe di titanio, sopravvivono l'incontro con gli strati più densi dell'atmosfera e raggiungono la superficie del pianeta. La maggior parte cade nell'oceano o in altri bacini di acqua, oppure in zone a bassissima densità abitativa come le distese ghiacciate del Canada e della Siberia o nel deserto australiano. Ad oggi non sono stati confermati ferimenti gravi a persone o danneggiamenti importanti di proprietà private ad opera di detriti orbitali.



Figura 1.5: Sinistra: serbatoio di titanio ritrovato a Gujarat (India), Maggio 2022. Destra: serbatoio dello stadio superiore del lanciatore della missione GPS NAVSTAR 32 lanciato nel 1993 e caduto in Arabia Saudita nel 2001. Credit: Indianexpress, Wikipedia.



Figura 1.6: serbatoio ritrovato in California nel 2018 e appartenuto ad un satellite Iridium dismesso nel 1990. Destra: serbatoio principale del secondo stadio di un razzo Delta 2 atterrato vicino a Georgetown, Texas, USA, il 22 gennaio 1997. Credit: FoxNews, ESA.

Con l'apertura dello spazio a compagnie private si sta osservando in questi anni alla creazione di un nuovo modello di architettura di missione. Si tratta di “*mega costellazioni*”

Introduzione

composti da satelliti prodotti in serie e progettati per una vita operativa breve di modo da poter essere facilmente rimpiazzati e costantemente aggiornati allo stato dell'arte. Si tratta di un modello analogo a quello dell'elettronica di consumo. SpaceX da sola prevede l'immissione di 12 000 satelliti per la costruzione della sua costellazione Starlink e ha già ottenuto l'autorizzazione per altri 30 000 satelliti dalla FCC (*Federal Communications Commission*). Piani simili sono condivisi da altre compagnie del settore, quali per esempio: OneWeb, Amazon, Telesat e GW. Sebbene il modello elettronica di consumo permetta cicli di aggiornamento brevi e un rapido incremento delle unità in una costellazione, ciò porta a un gran numero di veicoli tecnologicamente superati e dunque "inutili". SpaceX prevede di deorbitare attivamente i suoi satelliti al termine della loro vita operativa (5-6 anni) e, se così dovessero fare anche le future compagnie, si assisterebbe a un flusso di massa in ingresso all'atmosfera mai visto prima.

Ciò potrebbe avere due conseguenze pericolose: incremento della probabilità di incidenti a causa dell'impatto sulla superficie del pianeta e modificazioni della composizione chimica dell'atmosfera. Per esempio, i primi satelliti Starlink contenevano parti capaci di sopravvivere al rientro. La probabilità che ciò portasse ad un incidente fatale era calcolata in 1:17 400 (*Federal Communications Commission: IBFS File No. SAT-LOA-20170301-0002*), e dunque nei limiti del requisito NASA di 1:10 000. Non esisteva però alcun requisito per il rischio cumulativo, ovvero dato non da un singolo satellite, ma dall'intera costellazione. Si è calcolato che, ammettendo di avere la costellazione Starlink completa (12 000 unità identiche) e un ciclo di rimpiazzo di 5 anni si sarebbe arrivati ad una probabilità di incidente fatali del 45% a ciclo. Alla luce del report FCC che identificava il problema, SpaceX ha proceduto sostituendo alcuni materiali, al fine di rendere ogni componente del satellite completamente vaporizzabile dal rientro in atmosfera. Altre compagnie, operanti in altre nazioni, potrebbero non seguire le medesime direttive e/o non essere obbligate a farlo dalle rispettive agenzie nazionali.

Per quanto riguarda il secondo punto si prenda ancora ad esempio Starlink. Ogni satellite possiede una massa a vuoto di circa 260 kg, per una massa totale della costellazione pari a 3100 tonnellate. Ammettendo un ciclo di aggiornamento di 5 anni, si avrebbe una media di 2 tonnellate al giorno in media di massa in ingresso. Data la composizione dei satelliti, la stragrande percentuale di questa massa è rappresentata da alluminio. Sebbene in termini assoluti 2 tonnellate al giorno di massa è di gran lunga inferiore alle 54 tonnellate imputabili al flusso di meteoroidi, la composizione di questi è in media rappresentata solo dall'1% in massa di

alluminio. Pertanto, i satelliti in rientro diventeranno la principale fonte di deposito di particolato di alluminio negli strati alti dell'atmosfera. Paradossalmente, la dispersione di particolato di alluminio nell'atmosfera è un metodo di ingegneria climatica proposto per aumentare l'albedo terrestre e dunque ridurre l'energia solare catturata e trattenuta dall'atmosfera, a contrasto dunque dell'effetto serra e del cambiamento climatico. Non essendo però stato mai eseguito nessun esperimento in questo senso non si può prevedere con certezza le conseguenze di questo fenomeno e sarebbe forse troppo ottimistico aspettarsi solamente conseguenze positive, ammesso che ve ne sarebbero.



Figura 1.7. Rientro del modulo ATV Jules Verne ripreso da un DC-8 sull'oceano Pacifico. Credit: ESA.

In Figura 1.8 è riportato un grafico ESA riguardo l'andamento del numero di oggetti in rientro in atmosfera all'anno. La suddivisione cromatica identifica la tipologia di oggetto, se ne riporta di seguito la legenda mantenendo la nomenclatura ESA:

- Payloads (PL)
- Payload mission related objects (PM)
- Payload fragmentation debris (PF)
- Payload debris (PD)
- Rocket body (RB)
- Rocket mission related objects (RM)
- Rocket fragmentation debris (RF)
- Rocket debris (RD)

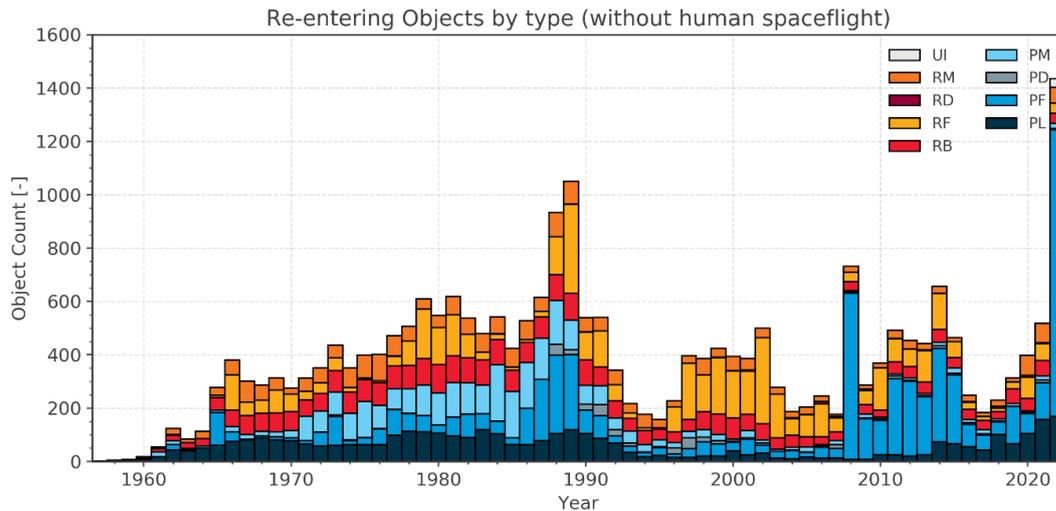


Figura 1.8. Oggetti in rientro atmosferico all'anno, suddivisi per tipo. Credit: ESA.

Il trend risulta generalmente in crescita: in modo particolare i rientri di PL, ovvero payloads non più operativi, vedono un aumento costante dagli inizi degli anni 2000, aumento che gli ha portati ad essere i più numerosi oggi che mai nella storia. Si noti inoltre il picco nel 2021 di rientri di detriti da frammentazione di payloads (PF), conseguenza diretta del test antisatellite russo di cui si è accennato in precedenza.

1.4 Metodi di Rimozione Attiva

Come accennato nei paragrafi precedenti, l'aggravarsi delle problematiche legate all'inquinamento spaziale ha portato le agenzie spaziali nazionali a legiferare in merito, imponendo requisiti volti alla mitigazione del problema. Questi, detti metodi passivi, agiscono unicamente sul ridurre il numero di nuovi detriti immessi in orbita. Ad oggi, non sembra più sufficiente questa filosofia mitigatrice. Sono quindi allo studio, in fasi anche molto diverse di progetto, numerose metodologie di rimozione attiva (*Active Debris Removal*, ADR).

In letteratura (rif. [27]), una possibile suddivisione dei metodi ADR proposta è la seguente:

- *Laser-based*: sistema laser ad alta potenza pulsata, con base a terra o direttamente nello spazio. L'ablazione di materiale dalla superficie del detrito colpito porterebbe a getti di massa e dunque impulsi tali da portare il detrito a deorbitare. Nella versione ground-base risulta in un sistema economico e versatile (sia per grandi che per piccoli detriti), ma di difficile puntamento e soggetto alle condizioni meteorologiche al suolo. Utile per la rimozione di detriti

di piccole dimensioni e di difficile costruzione in situ per la versione *space-based*. In entrambi i casi sarebbe in grado di gestire anche detriti *thumbing*.

- *Ion beam shepherd-based (IBS)*: il *Concepts of Operations (ConOps)* della missione consiste nell'emissione di un fascio di plasma quasi-neutro contro il detrito target al fine di generare una spinta su di esso. A causa di errori di puntamento e della divergenza del fascio, questo può essere emesso solo da una fonte a breve distanza dal target. È dunque necessaria la presenza di un chaser con la fonte del fascio che esegua un rendezvous con il target e lo “accompagni” fino all'orbita desiderata, da cui “*shepherd spacecraft*”. Il metodo risulta più rapido del precedente ma pone problemi il maggior consumo di potenza necessaria non solo alla generazione del fascio ma anche ad alimentare un sistema di controllo in grado stabilizzare il chaser e vincere la contropinta che riceve dal fascio di ioni. Necessitano di studi più approfonditi anche gli effetti di *back-splash* degli ioni sul chaser.
- *Tether-based*: rientrano in questa categoria diversi ConOps. Tra i principali: l'uso di un *electro dynamic tether (EDT)*, di lunghezza considerevole, nell'ordine dei chilometri, attaccato al detrito che permetta al campo magnetico terrestre di rallentare il detrito e lentamente deorbitarlo se il LEO o spingerlo in orbite cimitero se in GEO; l'uso di reti flessibili lanciabili per la cattura del detrito; l'uso di cavi per il traino; o arpioni per l'aggancio del target. In comune ai ConOps si presenta la necessità di un rendezvous con un chaser. L'implementazione con EDT risulta ad oggi la soluzione più matura tra le Tether-based. Ha il vantaggio di non richiedere alcuna potenza (a parte quella necessaria a portare l'EDT sul target) né manutenzione, a fronte, però, di tempi di *de-orbiting* considerevoli, nell'ordine degli anni e funzione della lunghezza del cavo.
- *Sail based*: prevede l'implementazione sui futuri satelliti di un sottosistema dedicato al *de-orbiting*. Al termine della missione o nel caso di *failure* catastrofica, si dovrebbe attivare questo sottosistema, costante di una membrana di materiale poliammidico e ricoperta da un sottile film di alluminio tenuta in tensione e strutturalmente coesa da *boom* estendibili in materiale composito. Questa soluzione sfrutta la pressione della radiazione solare (SRP) per generare una piccola spinta facendo così rallentare, lentamente, il satellite. Rispetto ai sistemi attualmente in uso, risulta più leggero (non è necessario

portare propellente in più per effettuare la manovra di *de-orbiting*), più economico e di più semplice implementazione, in quanto non necessita di un costoso e complicato sistema di guida e navigazione. Si è infatti calcolato che, alla lunga, anche un satellite completamente incontrollabile ma su cui il sistema si sia attivato (magari in maniera automatica avendo rilevato un malfunzionamento), presenta una riduzione del tempo di rientro. D'altra parte, l'essere estremamente versatile ed adattabile si traduce in un certo grado di incertezza e incontrollabilità del sistema e ciò può rappresentare uno dei problemi principali. Gli altri contro riguardano: l'ottimizzazione dei materiali e del sistema di dispiegamento del sistema, la lentezza del processo associata alle bassissime spinte generate dalla SRP.

- *Satellite-based*: in questa categoria rientrano molti ConOps differenti. In generale questi metodi si basano su uno o più chaser su cui è montato un certo sistema (come bracci robotici o rampini) il cui scopo è attaccarsi al detrito permettendo che questo possa essere spinto e spostato su orbite di rientro o cimitero. Questa categoria è molto generica, ma lascia spazio per numerosi possibili profili di missione. Per esempio, si possono eseguire molti rientri con un'unica missione, andando a studiare e ottimizzare il sistema di controllo e la sequenza più adatti per una missione di questo tipo, e così via. In generale si tratta di metodi piuttosto complicati.
- *Unconventional*: includono idee innovative, spesso non ancora implementabili con le tecniche esistenti. Per esempio: utilizzo di schiuma espandibile che spruzzata sul target in LEO da un chaser, ne incrementa la resistenza aerodinamica; utilizzo di micro-polveri in bande precise e ristrette di altitudini in modo da accumulare massa sui detriti di piccola dimensione e velocizzarne il decadimento; utilizzo di un modulo propulsivo adesivo ibrido da attaccare ad un detrito per mezzo di un braccio robotico per operare un rientro controllato del detrito; utilizzo dei metodi di reindirizzamento normalmente applicati agli asteroidi; ecc. . Si tratta per lo più di soluzioni interessanti ma ancora ad uno stadio troppo precoce per essere giudicate con chiarezza.
- *Dynamical Systems-based*: prevedono l'utilizzo di orbite operative in cui le perturbazioni naturali dell'ambiente vadano a destabilizzare rapidamente il detrito portandolo al decadimento. Sono metodi relativamente semplici ma che richiedono importanti costi computazionali.

La maggior parte dei metodi sopracitati mancano di verifiche sperimentali dal vero. Altri si basano su modelli semplificati, in cui dovrebbero essere considerati anche rumori, disturbi e dati non affidabili. Secondo C.P. Mark e S. Kamath (rif. [21]) i metodi *tether-based* e *dynamical system-based* sono i più tecnologicamente pronti e vicini ad una possibile implementazione commerciale.

1.5 Obiettivi dell'elaborato

Molti dei metodi ADR citati prevedono la presenza un chaser che effettui una manovra di rendezvous con il detrito target, che sia per spingerlo con un fascio di ioni o per agganciarlo con un rampino o ancora per attaccarvi un pacchetto propulsivo o un EDT. In questo elaborato si propone una metodologia per ottimizzare le trasferte tra le orbite di detriti della medesima famiglia, ovvero vicine tra loro e appartenenti ad una fascia ristretta di altitudine ed inclinazione. Maggiore è il numero di detriti deorbitabili in un'unica missione e più questa sarà economicamente vantaggiosa. Ammesso di non avere limitazioni sul numero di sistemi di de-orbiting a bordo del chaser, l'unica limitazione al numero di target raggiungibili è dato dalla massa di propellente a disposizione del craft. A parità di massa strutturale del sistema, la massa di propellente è direttamente legata al ΔV speso per le successive trasferte.

Per questa ragione, sarà proprio ΔV , ovvero il costo della trasferta il parametro da ottimizzare nel corso di questo elaborato, in funzione della durata di missione che si ha a disposizione.

In particolare, lo scopo di questo elaborato è fornire uno strumento rapido di stima dei costi di trasferta tra coppie di detriti in orbite vicine (piccoli $\Delta i, \Delta \Omega$). Tale strumento potrebbe risultare estremamente utile nelle prime fasi di progetto di una qualsiasi missione basata su propulsione elettrica, ma vedrebbe in modo particolare ampio utilizzo in combinazione con algoritmi di ottimizzazione combinatoria, al fine di definire, dato un set di detriti in orbite vicine, la sequenza ottimale per una missione ADR (Active Debris Removal). Per questa ragione l'interesse è la ricerca di una relazione per la stima del ΔV che sia analitica, approssimata e valida per piccole variazioni di inclinazione, ma che non necessiti integrazione del set di equazioni di Edelbaum che comporterebbe un aumento importante del costo computazionale.

Inoltre, si affronterà il processo di ottimizzazione considerando manovre *low-thrust*: missioni di *multi-debris removal* gioverebbero sicuramente di un sistema propulsivo elettrico, per sua natura molto più efficiente della controparte chimica: maggiori impulsi specifici

Introduzione

consentono un consumo minore di massa di propellente a parità di ΔV di trasferta. A parità di massa di propellente iniziale ciò implica un maggior numero di detriti che sarebbe possibile raccogliere in una unica missione. Principale svantaggio della propulsione elettrica è sicuramente legato ai tempi di spinta, non trascurabili e sicuramente non infinitesimi. Ciò potrebbe causare un aumento dei tempi di trasferta, ma ammesso che il requisito sul tempo massimo di missione non sia eccessivamente stringente ciò non dovrebbe portare a problematiche particolari. Non solo, ma considerando che nella trattazione del problema rientrerà anche lo sfruttamento del fenomeno della regressione della linea dei nodi per compensare naturalmente la differenza di RAAN tra l'orbita di partenza e l'orbita di arrivo, tempi di trasferta più lunghi possono consentire alla perturbazione J_2 di agire per più tempo e quindi far risparmiare al satellite chaser ulteriore propellente.

Capitolo 2

Richiami di meccanica del Volo Spaziale

2.1 Legge di Gravitazione Universale

Formulata nel 1687 da Isaac Newton nell'opera *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* ("*Principia*"), la legge di gravitazione universale afferma che nell'Universo due corpi si attraggono con una forza direttamente proporzionale al prodotto delle loro masse e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza (d):

$$\mathbf{F}_g = -\frac{Gm_i m_j}{d^2} \frac{\mathbf{d}}{d} \quad (\text{Eq. 2. 1})$$

Dove $G \approx 6.67 \cdot 10^{-11} m^3 s^{-2} kg^{-1}$ è detta costante di gravitazione universale.

2.2 Leggi di Keplero

Formulate tra il 1609 ed il 1619 da Johannes von Kepler, che le derivò dalle osservazioni di Tycho Brahe, sono tre leggi che descrivono puntualmente il movimento dei pianeti. A partire da queste formulazioni, Newton ipotizzò, come causa del moto, una forza, ovvero la forza di gravitazione universale e la rispettiva legge.

- I. Legge: l'orbita di un pianeta è ellittica e il Sole occupa uno dei due fuochi dell'ellisse
- II. Legge: il raggio vettore congiungente il pianeta al Sole spazza aree uguali in tempi uguali
- III. Legge: il quadrato del periodo di rivoluzione di un pianeta è proporzionale al cubo della distanza media dal Sole

Alla stessa maniera, è possibile dimostrare le leggi di Keplero a partire dalla legge di Gravitazione Universale.

2.3 Cenno al problema degli N-corpi

Si consideri un sistema di riferimento inerziale \mathcal{F}_I , fermo rispetto alle stelle fisse, ovvero corpi celesti posti ad una distanza talmente elevata dalla Terra da sembrare, ad un osservatore posto su di essa, immobili una rispetto all'altra. Si ipotizzi che:

- vi siano N corpi puntiformi
- suddetti corpi abbiano massa costante
- vi siano unicamente forze di natura gravitazionale

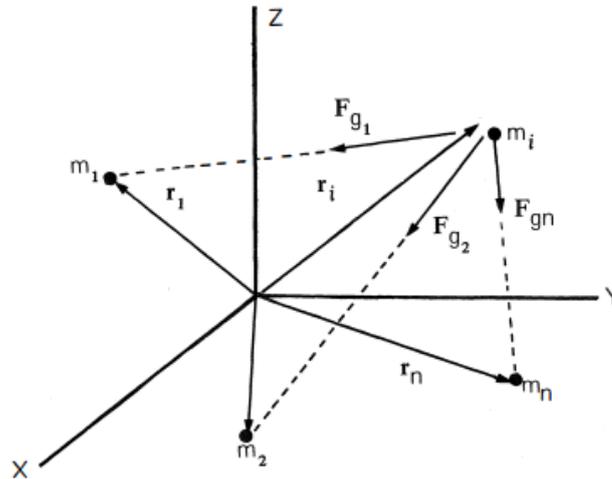


Figura 2.1. Schematizzazione problema degli N-corpi.

Sulla massa i -esima agir  dunque una forza totale data dalla somma delle forze di attrazione gravitazionale nate dall'interazione con le altre $N-1$ masse:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_j + \dots + \mathbf{F}_N$$

N.B: simboli in grassetto indicano grandezze vettoriali. Ogni punto sopra ad un simbolo indica una derivata una volta rispetto al tempo.

Dove:

$$\mathbf{F}_j = -G \frac{m_i m_j}{d_{ij}^3} \mathbf{d}_{ij} \quad \text{con } j = 1:N \text{ e } j \neq i \quad (\text{Eq. 2.2})$$

È possibile definire la distanza relativa d_{ij} tra due generiche masse in funzione della differenza dei relativi vettori posizione, \mathbf{r}_i ed \mathbf{r}_j :

$$\mathbf{d}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j \quad (\text{Eq. 2. 3})$$

Da cui:

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^N -G \frac{m_j}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|^3} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \quad \text{con } j \neq i \quad (\text{Eq. 2. 4})$$

Si è dunque giunti ad un'Equazione differenziale vettoriale del secondo ordine non lineare a coefficienti costanti. Ripetendo il ragionamento per le altre masse si arriva ad un sistema di N equazioni in questa forma. Ogni Equazione non è facilmente integrabile data la natura accoppiata del sistema. L'incognita vettore posizione compare sia come derivata che, a destra dell'uguale, ciò presuppone la risoluzione in contemporanea delle N-equazioni differenziali. Per cui, questo sistema non ha soluzione analitica, è risolvibile unicamente mediante metodi numerici.

2.4 Problema dei 2 corpi ristretto

È una semplificazione del problema generale degli N-corpi, nella quale si aggiungono due ipotesi: $N = 2$ e $m_1 = m \ll m_2 = M$. Dove m ed M prendono il nome rispettivamente di, massa secondaria e massa primaria.

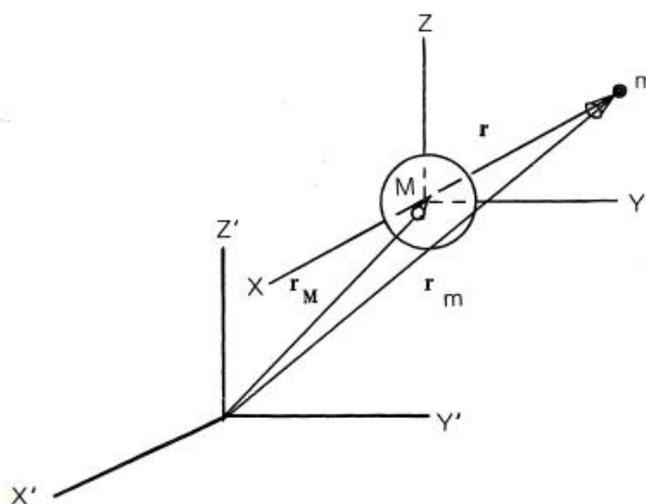


Figura 2.2. Schematizzazione R2BP.

Richiami di meccanica del Volo Spaziale

Detta \mathbf{r} la distanza relativa tra i due corpi e definita come: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_m - \mathbf{r}_M$

Su entrambe le masse agirà una forza che è uguale in modulo, parallela ad \mathbf{r} ma opposta in verso:

$$|\mathbf{F}_m| = |\mathbf{F}_M| = \frac{GmM}{r^2} \quad (\text{Eq. 2. 5})$$

Dove F_m è la forza attrattiva che agisce sulla massa primaria a causa della presenza della massa secondaria, viceversa F_M è la forza che agisce sulla massa secondaria a causa della massa primaria.

Ricordando l'Equazione 2.4, le leggi del moto delle per le due masse diventano:

$$m: \quad \ddot{\mathbf{r}}_m = \mathbf{F}_M = -\frac{GM}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (\text{Eq. 2. 6})$$

$$M: \quad \ddot{\mathbf{r}}_M = \mathbf{F}_m = +\frac{Gm}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (\text{Eq. 2. 7})$$

Data l'ipotesi fondante del problema ristretto, ovvero che una massa sia ordini di grandezza più grande dell'altra, appare evidente che l'influenza gravitazionale sul moto del corpo primario ad opera del secondario sia ordini di grandezza inferiori rispetto all'influenza opposta. Pertanto, è d'interesse esprimere al Eq. 2.6 rispetto al corpo M piuttosto che rispetto al sistema di riferimento inerziale. Sottraendo alla Eq. 2.6 la Eq 2.7:

$$\ddot{\mathbf{r}}_m - \ddot{\mathbf{r}}_M = -G \frac{M + m}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (\text{Eq. 2. 8})$$

Sostituendo la definizione di $\ddot{\mathbf{r}}$, sapendo che m è trascurabile rispetto ad M ed introducendo il parametro gravitazionale del corpo primario definito come:

$$\mu_M \stackrel{\text{def}}{=} GM \quad (\text{Eq. 2. 9})$$

Si arriva alla seguente Equazione del moto:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{\mu}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = 0 \quad (\text{Eq. 2. 10})$$

Si è arrivati ad un'Equazione differenziale vettoriale del secondo ordine omogenea e a coefficienti costanti, facilmente integrabile.

2.5 Orbite Kepleriane

Al fine di integrare la Eq. 2.10 è necessario definire la grandezza momento angolare specifico:

$$\mathbf{h} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}} \quad (\text{Eq. 2. 11})$$

Si può facilmente dimostrare che la derivata temporale di questa grandezza è nulla, ovvero, in orbite kepleriane il momento angolare specifico si conserva come vettore. In particolare, essendo definito come prodotto vettoriale tra il vettore posizione e il vettore velocità, il momento angolare risulterà perpendicolare al piano identificato da questi due vettori in ogni istante di tempo. Dato che questa grandezza si conserva è possibile dedurre che:

- La direzione perpendicolare al piano identificato da \mathbf{r} ed $\dot{\mathbf{r}}$ non cambia, pertanto i vettori velocità e posizione giacciono sempre nello stesso piano, per ogni istante.
- $\|\mathbf{h}\| = \text{cost}$, pertanto se $\|\mathbf{r}\|$ diminuisce allora dovrà necessariamente essere che $\|\dot{\mathbf{r}}\|$ cresce.

Tornando all'integrazione dell'Equazione del moto, moltiplicando vettorialmente \mathbf{h} per entrambi i termini della 2.1:

$$\mathbf{h} \wedge \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{h} \wedge \mathbf{r} \quad (\text{Eq. 2. 12})$$

Applicando le proprietà del prodotto vettoriale e sostituendo la definizione di momento angolare, si ottiene:

$$-\frac{\mu}{r^3} \mathbf{h} \wedge \mathbf{r}(t) = -\frac{\mu}{r} \dot{\mathbf{r}} + \frac{\mu}{r^2} \dot{r} \mathbf{r} \quad (\text{Eq. 2. 13})$$

I termini a sinistra e a destra dell'uguale nell'Equazione 2.13 possono essere visti come derivate temporali delle seguenti quantità:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{h} \wedge \dot{\mathbf{r}}) = \frac{d}{dt}\left(-\frac{\mu}{r}\mathbf{r}\right) \quad (\text{Eq. 2. 14})$$

Integrando:

$$\mathbf{h} \wedge \dot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r}\mathbf{r} - \mathbf{B} \quad (\text{Eq. 2. 14})$$

Dove \mathbf{B} è la costante di integrazione.

Moltiplicando scalarmente l'Eq. 2.14 per \mathbf{r} , ed omettendo per brevità ulteriori passaggi algebrici, si ottiene:

$$r = \frac{h^2/\mu}{1 + B/\mu \cos(\nu)} \quad (\text{Eq. 2. 15})$$

Dove ν rappresenta un angolo, funzione del tempo, compreso tra la direzione del vettore \mathbf{B} e la direzione del vettore posizione \mathbf{r} . In particolare: r è minimo quando il denominatore della 2.15 è massimo, ovvero quando $\nu = 0$. Pertanto, la direzione di \mathbf{B} coincide con la direzione del vettore posizione quando questo è minimo; in altre parole, punta al periastro dell'orbita e dunque, ν , detta anomalia vera, si misura a partire proprio dalla direzione del periastro.

Confrontando l'Equazione della traiettoria ottenuta dall'integrazione dell'Equazione del moto con l'Equazione di un'ellisse scritta in coordinate polari (Eq 2.16), appare evidente l'assoluto parallelismo:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\nu)} \quad (\text{Eq. 2. 16})$$

Dove:

- $p = h^2/\mu = \textit{semilatus rectum}$
- $e = B/\mu = \textit{eccentricità}$

2.5.1 Caratterizzazione Geometrica

Si riporta di seguito, in forma grafica, un diagramma riassuntivo delle principali caratteristiche determinanti la geometria di una generica ellisse.

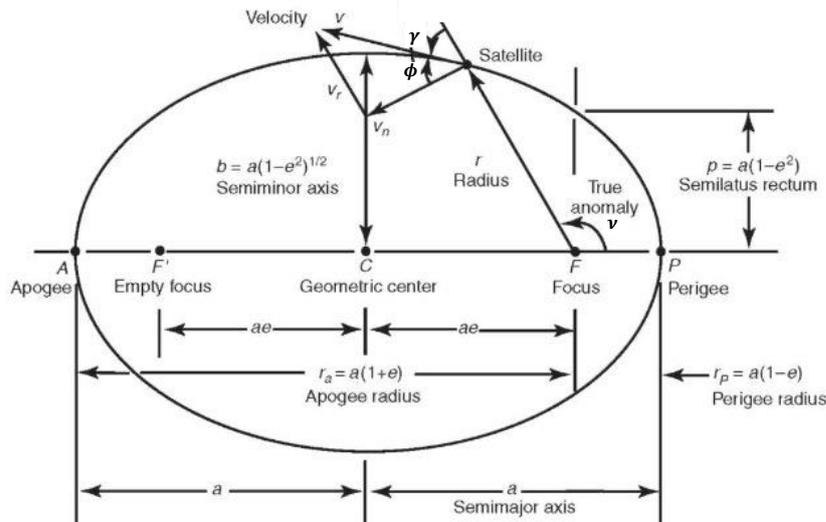


Figura 2.3. Schematizzazione ellisse.

Si faccia riferimento alla *Figura 2.3* per la visualizzazione dei parametri descritti nei seguenti paragrafi.

2.5.1.1 Flight Path Angle ϕ

Si definisce *flight path angle* l'angolo compreso tra il vettore velocità istantanea (\mathbf{V}) e l'orizzonte locale al satellite, ovvero la direzione nel piano dell'orbita perpendicolare istante per istante al vettore posizione (\mathbf{r}). Si definisce angolo di Zenith (γ) il complementare di ϕ ; in altre parole, rappresenta l'angolo compreso tra il vettore velocità e la verticale locale.

Si può dimostrare geometricamente, a partire dalla Eq. 2.16, che:

$$tg(\phi) = \frac{e \sin(\nu)}{1 + e \cos(\nu)} \quad (Eq. 2.17)$$

Per cui se $\phi = 0$:

- $\nu = 0 \rightarrow r = r_{min}$
- $\nu = \pi \rightarrow r = r_{max}$

Ovvero, il *flight path angle* è nullo unicamente al periastro e all'apostro dell'orbita.

È poi possibile esprimere il modulo della quantità di moto angolare in funzione di questo angolo:

$$\|\mathbf{h}\| = \|\mathbf{r} \wedge \mathbf{V}\| = r V \sin(\gamma) = r V \cos(\phi) \quad (\text{Eq. 2. 18})$$

Poiché $\|\mathbf{h}\| = \text{cost}$:

- Al periastro ($\nu = 0 \rightarrow r = r_{\min}$) $V_p = V_{\max}$
- All'apoastro ($\nu = \pi \rightarrow r = r_{\max}$) $V_a = V_{\min}$

2.5.1.2 Semiasse Maggiore a

Si definisce semiasse maggiore di un'ellisse il semidiametro più lungo che è possibile considerare o metà dell'asse maggiore, e quindi passa dal centro, attraverso i fuochi, fino al perimetro dell'ellisse. Può essere espresso in funzione del *semilatus rectum* e dell'eccentricità:

$$a = \frac{p}{1 - e^2} \quad (\text{Eq. 2. 19})$$

Da cui l'Equazione della traiettoria può essere scritta nella forma:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\nu)} \quad (\text{Eq. 2. 20})$$

Sapendo che al periastro $\nu = 0$ e all'apoastro $\nu = \pi$:

$$r_p = a(1 - e) \quad (\text{Eq. 2. 21})$$

$$r_a = a(1 + e) \quad (\text{Eq. 2. 22})$$

È dunque possibile esprimere il modulo della quantità di moto in funzione dei raggi e delle velocità agli absidi (periastro ed apoastro), sfruttando la semplificazione data dal $\cos(\phi) = 1$. Dall'Equazione 2.18:

$$\|\mathbf{h}\| = r V \cos(\phi) = r_p V_p = r_a V_a \quad (\text{Eq. 2. 23})$$

Sostituendo nell'Eq 2.19 la relazione $p = h^2/\mu$:

$$\|\mathbf{h}\|^2 = \mu a(1 - e^2) \quad (\text{Eq. 2. 24})$$

Uguagliando l'Equazione 2.23 e l'Equazione 2.24:

$$r_p^2 V_p^2 = r_a^2 V_a^2 = \mu a(1 - e^2) \quad (\text{Eq. 2. 25})$$

Sostituendo nella 2.25 la 2.21 è possibile ricavare la velocità al periastro in funzione delle caratteristiche geometriche dell'orbita e del parametro gravitazionale del corpo centrale.

$$V_p^2 = \frac{\mu a(1 - e^2)}{a^2(1 - e)^2} = \frac{\mu(1 + e)}{a(1 - e)} \quad (\text{Eq. 2. 26})$$

Alla stessa maniera si può ricavare la velocità all'apoastro sostituendo la 2.22.

2.5.2 *Contenuto Energetico delle Coniche*

Moltiplicando scalarmente l'Equazione del moto (Eq. 2.10) per \mathbf{r} :

$$\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \frac{\mu}{r^3}(\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}) = 0 \quad (\text{Eq. 2. 27})$$

Ovvero:

$$V\dot{V} + \frac{\mu}{r^2}V = 0 \quad (\text{Eq. 2. 28})$$

Andando ad individuare le funzioni integrande che derivate restituiscano i termini dell'Equazione 2.28:

$$V\dot{V} = \frac{d}{dt} \left(\frac{V^2}{2} + A \right) \quad \frac{\mu}{r^2}V = \frac{d}{dt} \left(-\frac{\mu}{r} + B \right) \quad (\text{Eq. 2. 29})$$

Sostituendo le relazioni 2.29 nell'Equazione 2.28:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} + C \right) = 0 \quad (\text{Eq. 2. 30})$$

Dove A, B e C sono costanti di integrazione.

La funzione derivata rispetto al tempo nella Eq 2.30 è l'energia meccanica dell'orbita. Si impone $C = 0$, in quanto si assume che all'infinito non si risenta più dell'azione

Richiami di meccanica del Volo Spaziale

gravitazionale del corpo centrale, ovvero risulta nulla la componente potenziale dell'energia. L'energia meccanica specifica, data dalla somma di una componente cinetica e una potenziale sarà dunque:

$$\mathcal{E} = \mathcal{K} + \mathcal{U} = \frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} \quad (\text{Eq. 2. 31})$$

Come per il vettore quantità di moto, anche per l'energia meccanica la derivata temporale risulta nulla (Eq. 2.30). In altre parole, si tratta di un'ulteriore costante del moto orbitale. Pertanto, volendo esprimerla in un punto in cui sia la velocità che il raggio siano noti in funzione unicamente dei parametri geometrici della conica, è possibile definirla al periastro. Sostituendo nell'Equazione 2.31 le equazioni 2.21 e 2.26:

$$\mathcal{E} = \frac{V_p^2}{2} - \frac{\mu}{r_p} = \frac{\mu(1+e)}{2a(1-e)} - \frac{\mu}{a(1-e)} = -\frac{\mu}{2a} \quad (\text{Eq. 2. 32})$$

L'energia meccanica specifica orbitale è funzione unicamente del parametro gravitazionale del corpo centrale e del semiasse maggiore della conica. Si noti la correlazione tra il segno dell'energia e il segno del semiasse maggiore.

2.5.3 Classificazione delle Orbite Kepleriane

Definito che le orbite kepleriane hanno forma di coniche si procede a classificare le casistiche in funzione dell'energia posseduta dal corpo secondario. Le orbite possono essere chiuse e periodiche oppure aperte e non periodiche, in quest'ultimo caso è preferibile utilizzare la denominazione "traiettoria".

Volendo esplicitare semiasse ed eccentricità in funzione dell'energia meccanica specifica, si procede invertendo la Eq. 2.32:

$$a = -\frac{\mu}{2\mathcal{E}} \quad (\text{Eq. 2. 33})$$

Sostituendo la 2.33 e la relazione $p = h^2/\mu$ nella Eq. 2.19:

$$e = \sqrt{1 + \frac{2\mathcal{E}h^2}{\mu^2}} \quad (\text{Eq. 2. 34})$$

Riassumendo gli andamenti di semiasse maggiore ed eccentricità della conica in funzione dell'energia meccanica:

Classificazione

$\mathcal{E} < 0$	$a > 0$	$e = 0$	Orbita Circolare
$\mathcal{E} < 0$	$a > 0$	$0 < e < 1$	Orbita Ellittica
$\mathcal{E} = 0$	$a \rightarrow \infty$	$e = 1$	Traiettoria Parabolica
$\mathcal{E} > 0$	$a < 0$	$e > 1$	Traiettoria Iperbolica

Tabella 2.1. Classificazione della forma nel piano di orbite kepleriane al variare del contenuto energetico.

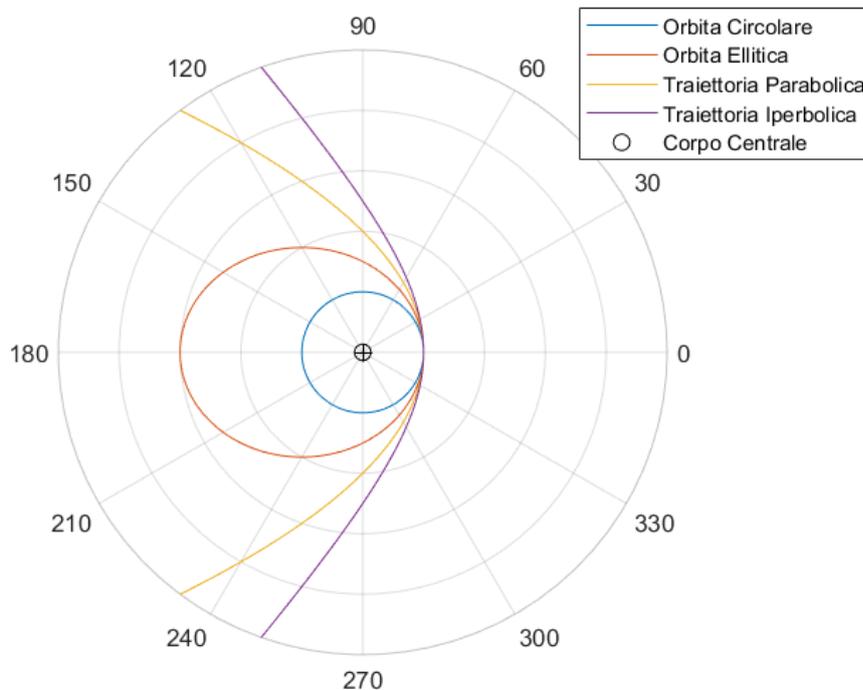


Figura 2.4. Rappresentazione sezioni coniche.

2.5.4 Parametri Orbitali Classici

Finora si è discussa ed analizzata la forma delle traiettorie orbitali nel piano. Al fine di identificarne univocamente la posizione e l'orientazione nello spazio è necessario introdurre un set di cinque parametri, a cui per convenzione se ne aggiunge un sesto (l'anomalia vera) per individuare la posizione del corpo secondario nell'orbita.

Parametri Orbitali Classici

Eccentricità	e	Forma dell'orbita
Semiassse Maggiore	a	Dimensione dell'orbita
Argomento del Periastro	ω	Angolo, misurato nel piano dell'orbita, compreso tra la direzione del periastro e la linea dei nodi
Longitudine del Nodo Ascendente (RAAN)	Ω	Angolo, misurato sul piano equatoriale del corpo centrale, compreso tra la linea dei nodi ed il punto d'Ariete
Inclinazione	i	Inclinazione del piano orbitale rispetto al piano equatoriale del corpo centrale
Anomalia Vera	v	Angolo, misurato nel piano dell'orbita, compreso tra la direzione del periastro e il vettore posizione del corpo secondario

Tabella 2.2. Elenco e definizione dei 6 parametri orbitali classici.

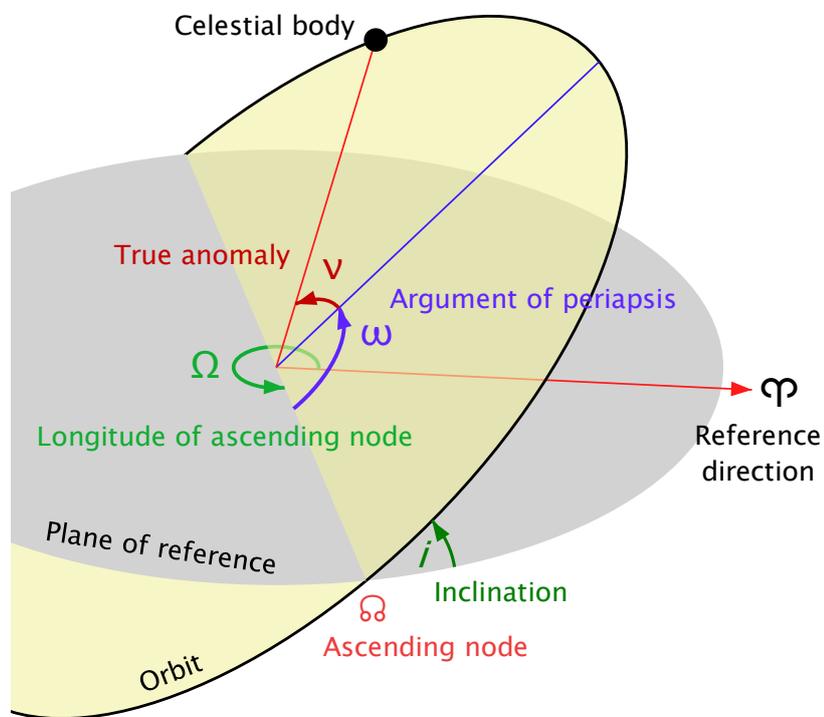


Figura 2.5. Rappresentazione grafica dei parametri orbitali. Credit: Lasunncty at the English Wikipedia.

In Figura 2.5:

- il piano di riferimento corrisponde al piano equatoriale del corpo centrale (sia esso un pianeta o una stella).
- la direzione di riferimento corrisponde alla direzione del punto di Ariete, ovvero la direzione data dall'intersezione, nel giorno vernale (equinozio di primavera), del piano dell'eclittica ed il piano equatoriale terrestre. Con verso positivo dalla Terra al Sole, che in quel giorno si troverà nella costellazione dell'ariete, da cui la denominazione.
- Si definiscono nodi di un'orbita i punti della traiettoria contenuti nel piano equatoriale. In altre parole, sono gli estremi della linea dei nodi, ovvero il segmento dato dall'intersezione del piano orbitale con il piano equatoriale.
- Si definisce ascendente, il nodo nel quale il corpo orbitante passa con vettore velocità istantanea contenuto nell'emisfero nord del corpo attraente e, viceversa, si definisce nodo discendente, il nodo nel quale il corpo orbitante, passando dall'emisfero nord all'emisfero sud, presenta il vettore velocità completamente contenuto dell'emisfero sud.
- Si definisce nord l'emisfero che contiene la stella Polaris.

Nei paragrafi precedenti si sono già riassunte le principali caratteristiche e proprietà dei parametri di eccentricità e di semiasse maggiore. Si vedranno ora considerazioni simili per i restanti parametri.

➤ Argomento del periastro:

se $0 < \omega < \pi \rightarrow$ il periastro si trova nell'emisfero nord

se $\pi < \omega < 2\pi \rightarrow$ il periastro si trova nell'emisfero sud

➤ Anomalia vera:

se $0 < v < \pi \rightarrow$ il corpo orbitante si trova nella semi-orbita compresa tra periastro ed apoastro

se $\pi < v < 2\pi \rightarrow$ il corpo orbitante si trova nella semi-orbita compresa tra apoastro e periastro

➤ Inclinazione, definita nell'intervallo $[0, \pi]$:

se $0 < i < \pi/2 \rightarrow$ orbita diretta

se $\pi/2 < i < \pi \rightarrow$ orbita retrograda

Richiami di meccanica del Volo Spaziale

2.5.4.1 Casi Particolari

Nel caso in cui uno o più parametri orbitali dovessero essere non definibili, conseguentemente a particolari configurazioni in termini di forma o orientazione dell'orbita, è possibile introdurre dei parametri alternativi che assolvano al compito dei parametri non disponibili.

Orbita Circolare	$e = 0$	$ r = cost \rightarrow r_p = NaN \rightarrow$ $\omega = NaN \quad \nu = NaN$
Orbita Equatoriale	$i = 0$	<i>Linea dei nodi degenera in un piano, infiniti nodi: $\Omega = NaN$</i>
Orbita Circolare ed Equatoriale	$e = 0$ $i = 0$	$\omega = NaN \quad \nu = NaN \quad \Omega = NaN$

Tabella 2.3. Casi particolari di parametri orbitali nulli.

In orbite circolari, l'anomalia vera, non definibile, è sostituita da un altro parametro, l'argomento della latitudine (u), definito come l'angolo compreso tra la direzione del nodo ascendente e il vettore posizione del corpo.

In orbite circolari ed equatoriali, ovvero nella quali non sono definibili né l'anomalia vera né un nodo ascendente, per individuare una posizione nell'orbita si usa un ulteriore parametro angolare: la longitudine vera (l), definita come angolo compreso tra la direzione di riferimento (direzione vernale) e il vettore posizione del corpo.

2.6 Perturbazioni orbitali

Si definiscono perturbazioni orbitali quei fenomeni di disturbo ad opera di forze non kepleriane, il cui effetto è modificare continuamente uno o più parametri orbitali. Si perde l'idealità del modello "orbita kepleriana" pura e ci si avvicina ad un modello più realistico: orbite kepleriane perturbate. L'orbita kepleriana di riferimento è detta orbita osculatrice.

In funzione dello sviluppo temporale assunto dai parametri disturbati, le perturbazioni si classificano in:

- Oscillatorie di lungo periodo: perturbazioni armoniche dell' i -esimo parametro non direttamente causate da una qualche forza esterna, ma legate alla variazione

degli altri $i-1$ parametri. Tempo caratteristico pari al tempo di rotazione del periastro.

- Oscillatorie di corto periodo: forze armoniche con periodo pari o dell'ordine del periodo orbitale.
- Secolari: comportano variazioni dei parametri orbitali su scale temporali talmente ampie da poter essere considerate in prima approssimazione funzioni lineari del tempo.

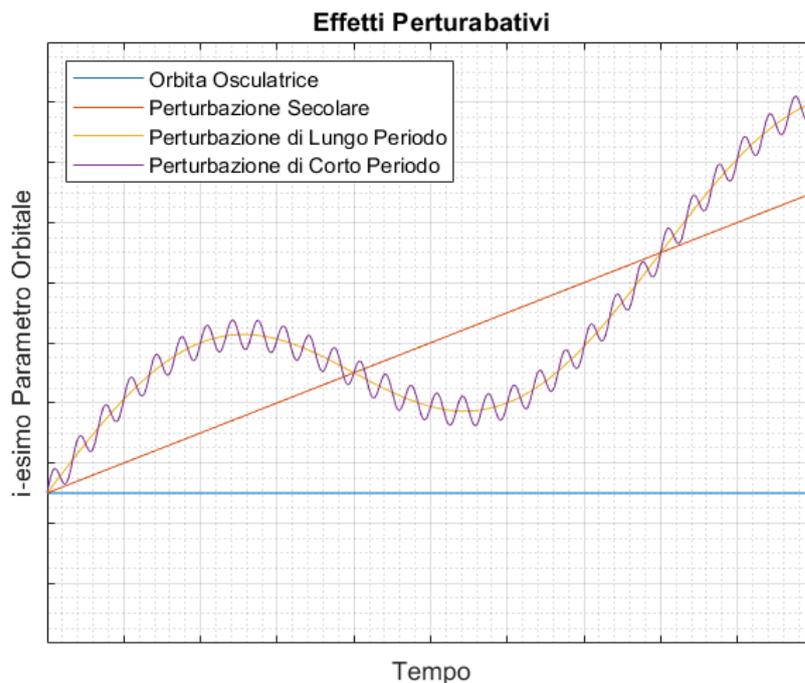


Figura 2.6. Confronto andamenti temporali puramente qualitativi di un parametro orbitale qualsiasi soggetto a diverse condizioni perturbative.

A prescindere dalla natura del fenomeno perturbativo, questo dovrà necessariamente essere inserito nel modello dinamico orbitale. In altre parole, si dovrà inserire un termine aggiuntivo all'Equazione del moto R2BP (*Restricted Two Body Problem*)(Eq. 2.10):

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} + \mathbf{a}_p \quad (\text{Eq. 2.35})$$

Dove il termine aggiuntivo \mathbf{a}_p rappresenta l'accelerazione impressa al corpo secondario a seguito dell'azione della generica forza perturbativa. Non è più possibile trovare una soluzione analitica in forma chiusa dell'Eq. 2.35. Deve essere risolta per via numerica. Vi sono numerosi metodi per farlo, generalmente suddivisi in due famiglie:

- GPM (General Perturbation Methods): definiscono \mathbf{a}_p in serie e quindi si procede con integrazione a tratti nell'intervallo temporale di interesse (Lagrange 1772)
- SPM (Special Perturbation Methods): integrazione numerica diretta della Eq. 2.35, non si cercano né ottengono gli andamenti dei parametri orbitali in funzione del tempo, si ottiene direttamente la traiettoria percorsa dal corpo. Note le condizioni iniziali (Cowell 1910, Encke 1854)

Le principali fonti di perturbazione e per ognuna delle quali occorrerebbe specializzare \mathbf{a}_p sono:

- Presenza di un Terzo Corpo con la sua forza di attrazione gravitazionale
- La resistenza aerodinamica
- La radiazione Solare
- La non sfericità terrestre

Nel modello analizzato in questo elaborato si introdurrà unicamente l'effetto perturbativo legato alla non sfericità della Terra tramite l'armonica J2.

2.6.1 Non sfericità della Terra

2.6.1.1 Accenni di Geodesia

Nelle trattazioni sostenute finora si è sempre considerata la Terra e qualsiasi altro corpo celeste o puntiforme oppure perfettamente sferico, sia in termini di forma che di distribuzione di massa. Non è difficile dimostrare che nella realtà i corpi celesti non siano effettivamente puntiformi, ma è interessante notare che in molte applicazioni, specialmente riguardanti orbite LEO, non è nemmeno accettabile la semplificazione di perfetta sfericità.

Venuta meno la semplificazione di sfericità di forma e di distribuzione di massa, risulta necessario rivalutare e rendere più accurato il modello potenziale terrestre. In altre parole, il modello matematico di distribuzione dell'energia potenziale specifica non può più limitarsi al solo contributo $-\mu/r$, ma deve tenere conto della posizione all'interno del campo, in termini di latitudine e longitudine. In particolare, il modello del campo dovrà tenere conto, per esempio, dello schiacciamento dei poli, della maggiore massività dell'emisfero australe, della presenza di rilievi e depressioni, e così via. Appare evidente che non tutti i contributi al modello possono avere lo stesso peso, per esempio, la maggior concentrazione di massa all'equatore rispetto alle

zone polari avrà necessariamente un peso maggiore rispetto alla presenza di una certa depressione oceanica in un dato punto preciso della superficie terrestre.

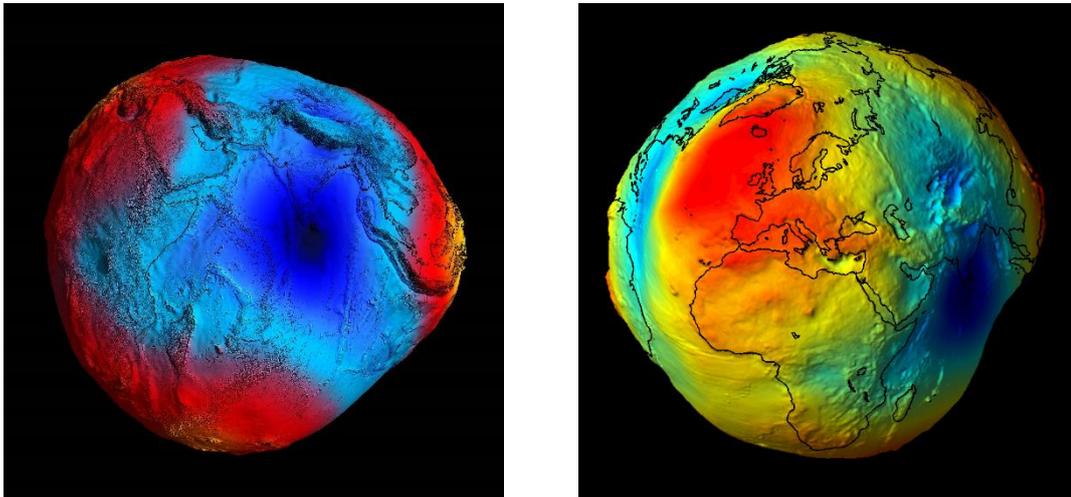


Figura 2.7. Sinistra: modello di geoidi, i colori rappresentano deviazioni in altezza (-100m fino a +100m). Destra: campo gravitazionale terrestre (geoidi). Credit: ESA, GOCE mission, 2011.

Ogni termine che contribuisce alla non sfericità deve dunque essere pesato in funzione del contributo che apporta: il modello del potenziale gravitazionale terrestre è dunque somma ponderata di termini via via meno significativi. Maggiore è il numero di termini che si inseriscono nel modello e più questo risulterà accurato. Il modello più utilizzato per rappresentare il campo potenziale terrestre è quello basato sull'utilizzo di armoniche sferiche per l'approssimazione della forma del geoidi.

Detto R_{\oplus} il raggio equatoriale medio ed r la distanza dal centro del pianeta:

$$u = -\frac{\mu_{\oplus}}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R_{\oplus}}{r} \right)^n J_n P_n \sin(\theta) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} \left(\frac{R_{\oplus}}{r} \right)^n J_{n,m} P_n^m \sin(\theta) \cdot \cos[m(\phi - \phi_m)] \right] \quad (\text{Eq. 2. 34})$$

Dove:

- $P_n(x) = \text{polinomio di Legendre di ordine } n = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)$
- $P_n^m(x) = \text{polinomio di Legendre di ordine } n \text{ e grado } m = (-1)^n (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} (P_n(x))$
- $\theta = \text{latitudine} \quad \phi = \text{longitudine}$

- $J_n =$ armoniche zonali
- $J_{n,m} =$ armoniche tesserali $\forall n \neq m$
- $J_{n,m} =$ armoniche settoriali $\forall n = m$
- n ed m , rispettivamente, grado ed ordine delle armoniche

Si noti che: all'aumentare di n il termine $\left(\frac{R_\oplus}{r}\right)^n$ tende a decrescere fortemente (essendo $\frac{R_\oplus}{r} < 1$), rendendo il relativo termine armonico di grado n via via meno significativo nel computo totale del potenziale.

Armoniche zonali, tesserali e settoriali portano contributi di forma diversa:

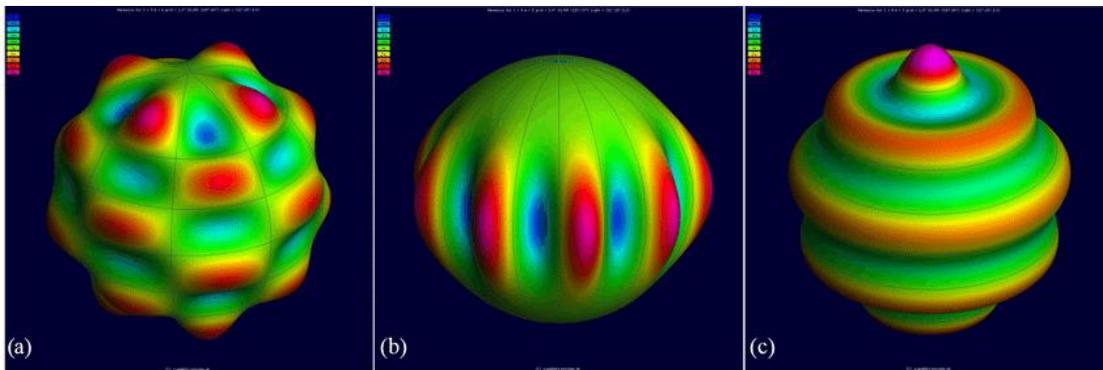


Figura 2.8. a) armonica tesserale; b) armonica settoriale; c) armonica zonale. Credit: [27].

In particolare: armoniche zonali con grado pari rappresentano contributi simmetrici rispetto al piano equatoriale, armoniche zonali con pedice dispari, viceversa, portano contributi asimmetrici. Per esempio, l'armonica J_2 descrive lo schiacciamento della Terra ai poli, mentre J_3 l'asimmetria di massività tra gli emisferi. Si riportano nella seguente Tabella i valori associati ad alcune delle armoniche principali:

	$J \cdot 10^6$		$J \cdot 10^6$
J_2	1082.6	J_{12}	-0.04
J_3	-2.54	J_{13}	-
J_4	-1.59	J_{14}	-
J_5	-0.21	J_{15}	-

Tabella 2.4. Armoniche principali.

Si definisce geoide quella superficie equipotenziale del campo gravitazionale terrestre che meglio si adatta al livello medio globale del mare, nel senso dei minimi quadrati. In altre parole, se non ci fossero onde e maree la superficie del mare si disporrebbe interamente su questa superficie. Nella rappresentazione WGS84 (World Geodetic System del 1984) sistema di coordinate geografiche geodetico mondiale, ancora oggi utilizzato, il geoide è basato su un ellissoide di riferimento elaborato a partire dal primo EGM (Earth Gravitational Model): EGM84. Elaborazioni successive e più accurate, ovvero basate su un numero maggiore di armoniche, forniscono, in funzione di latitudine e longitudine, il *vertical datum*, ovvero l'altezza della superficie terrestre dall'ellissoide di riferimento, in quel punto.

	Risoluzione Spaziale	Risoluzione all'equatore	Numero di armoniche
EGM84	30'	55 km	$n = m = 180$
EGM96	15'	27.5 km	$n = m = 360$
EGM2008	2.5'	4.6 km	$n = 2190 \quad m = 2159$

Tabella 2.5. Confronto EGM dal 1984 al 2008

A prescindere dal modello di riferimento, la Tabella 2.4 mostra l'enorme differenza in termini di peso dell'armonica zonale J_2 rispetto a tutte le altre. Per questa ragione, in prima approssimazione, per introdurre gli effetti di non sfericità, può essere sufficiente considerare la sola armonica J_2 e valutarne gli effettivi perturbativi sulle orbite terrestri.

2.6.1.2 Effetto J_2

Considerando il contributo unicamente della prima armonica zonale J_2 , la relazione generale (Eq. 2.45) si semplifica come segue:

$$u = -\frac{\mu_{\oplus}}{r} \left[1 - \left(\frac{R_{\oplus}}{r} \right)^n J_n P_n \sin(\theta) \right] \quad (\text{Eq. 2. 33})$$

Con $n = 2$.

Da cui, sostituendo la definizione del polinomio di Legendre di secondo ordine $P_2 \sin(\theta)$:

$$u = -\frac{\mu}{r} + \frac{\mu J_2 R^2}{2r^3} (3\sin^2 \theta - 1) \quad (\text{Eq. 2. 32})$$

Lo schiacciamento del geoide, modellizzato nella relazione 2.47, porta due effetti principali:

- Su Ω , regressione della linea dei nodi;
- Su ω , precessione della linea degli absidi.

2.6.1.2.1 Regressione della linea dei nodi

Primo effetto di J_2 è la rotazione della linea dei nodi, ovvero una variazione continuativa nel tempo dell'ascensione retta del nodo ascendente. Tale variazione è opposta al verso di percorrenza dell'orbita: è negativa per orbite dirette ($0 < i < \pi/2$) ed è positiva per orbite retrograde ($\pi/2 < i < \pi$). La variazione in questione può essere stimata tramite le seguenti relazioni:

$$\frac{\Delta\Omega}{\text{orbita}} = -3\pi J_2 \left(\frac{R}{p}\right)^2 \cos(i) \quad [\text{rad/orbita}] \quad (\text{Eq. 2. 31})$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = -3\pi J_2 \left(\frac{R}{p}\right)^2 \cos(i) \cdot n_0 \quad [\text{rad/day}] \quad (\text{Eq. 2. 32})$$

$$\dot{\Omega} = -3\pi J_2 \left(\frac{R}{p}\right)^2 \cos(i) \cdot \frac{1}{T} \quad [\text{rad/s}] \quad (\text{Eq. 2. 33})$$

Dove:

- $p = \text{semilatus rectum} = a(1 - e^2)$
- $i = \text{inclinazione}$
- $n_0 = \text{numero di rivoluzioni al giorno} = T/86\,400$
- $T = \text{periodo orbitale} = 2\pi\sqrt{a^3/\mu}$

Appare evidente dalle relazioni precedenti come l'effetto perturbativo cresca, in valore assoluto, al diminuire del semilatus rectum e all'aumentare del coseno dell'inclinazione. Graficamente:

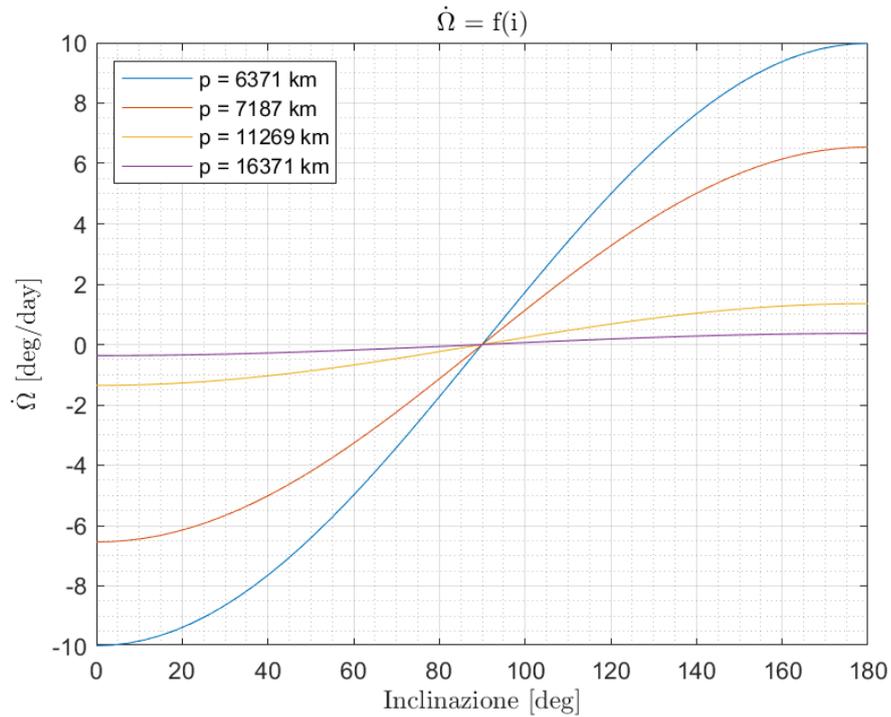


Figura 2.9. Confronto dell'andamento dell'intensità di regressione della linea dei nodi in funzione dell'inclinazione dell'orbita e parametrizzata a 4 diversi semilatus rectum.

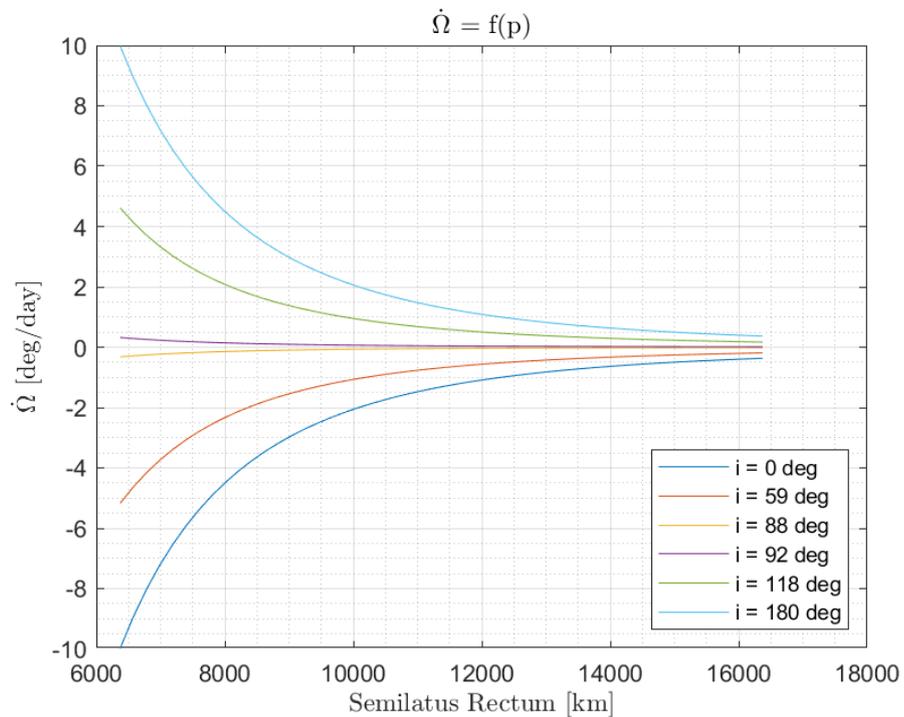


Figura 2.10. Confronto dell'andamento dell'intensità di regressione della linea dei nodi in funzione del semilatus rectum dell'orbita e parametrizzata a 6 diverse inclinazioni.

Alla stessa maniera può risultare utile vedere l'andamento della variazione di RAAN in funzione dell'eccentricità dell'orbita, assegnati certi valori di semiasse maggiore:

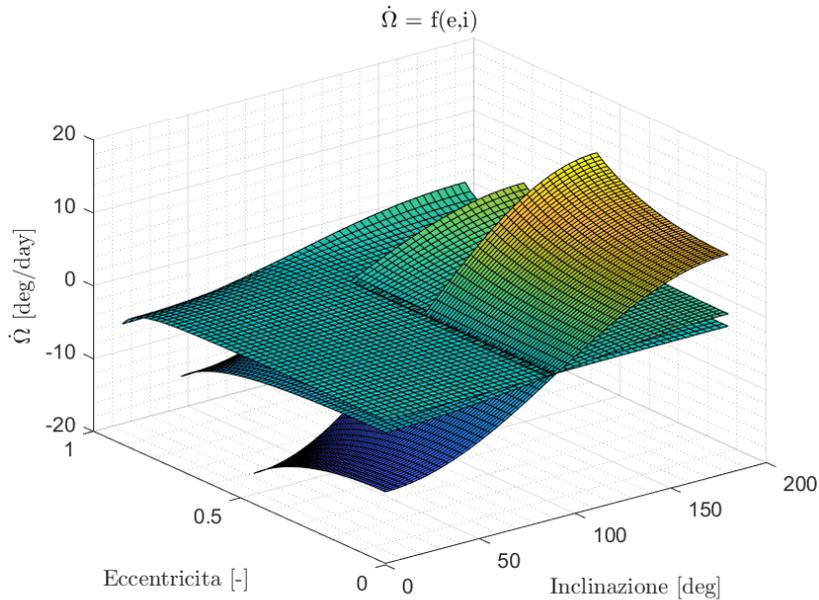


Figura 2.11. Confronto dell'andamento dell'intensità di regressione della linea dei nodi in funzione dell'inclinazione e dell'eccentricità dell'orbita e parametrizzata a 3 diversi semiassi maggiori: [6371, 10371, 22371]km.

In conclusione, osservando le Figure 2.9, 2.10, 2.11, è possibile affermare che:

- Per orbite polari, il RAAN Rate ($\dot{\Omega}$) è nullo, ed è massimo per orbite con inclinazione tendente a zero o a π .
- Per $i = \frac{\pi}{2}$ (orbite polari), la curva presenta la pendenza massima: piccole variazioni di inclinazione comportano grandi variazioni di $\dot{\Omega}$. Fattore che può essere interessante per l'impiego del fenomeno a fine di risparmio di propellente in trasferte tra orbite con diverse RAAN.
- $\dot{\Omega}$ tende asintoticamente al valore nullo al crescere del semilatus rectum. Non si annulla mai completamente, ma risulta notevolmente più impattante per orbite LEO piuttosto che per orbite GEO e MEO. Ciò non esclude la necessità di manovre di *station-keeping* anche ad alte altitudini, dato l'effetto cumulativo del fenomeno.
- $\dot{\Omega}$ risulta più sensibile a variazioni piccole di semilatus rectum in orbite per le quali questo parametro è piccolo.
- A parità di semiasse maggiore ed inclinazione, eccentricità maggiori portano a $\dot{\Omega}$ maggiori, fino al valore asintotico di $e = 1$. Raggiunta suddetta condizione, ovvero passati da un'ellisse ad una parabola, il semilatus rectum arriva al valor

nullo e fa scoppiare all'infinito il valore di $\dot{\Omega}$. Per $e > 1$ (traiettoria iperbolica), $\dot{\Omega}$ tenderà nuovamente al valore nullo all'aumentare ancora dell'eccentricità.

La regressione della linea dei nodi non è solo un effetto negativo, ma viene anche sfruttato per l'ottenimento di orbite particolari o per la riduzione del consumo di propellente per trasferte tra orbite a diversa RAAN. Esempio della prima applicazione citata sono le orbite elio-sincrone: si sfrutta la regressione della linea dei nodi per ottenere osservazioni successive di una specifica area del pianeta sempre alla stessa ora locale. La specificità di tale orbita nasce dal requisito di ottenere osservazioni a terra nelle medesime condizioni di luminosità per poter effettuare un confronto efficace tra rilevazioni successive. Per ottenere un'orbita eliosincrona è necessario che l'angolo tra la normale al piano dell'orbita e il vettore Sole si conservi. In altre parole, è necessario scegliere i parametri p ed i in modo tale che la linea dei nodi ruoti per effetto J_2 di 360° in un anno solare:

$$\dot{\Omega}_{eliosincrono} = \frac{360^\circ}{1 \text{ anno}} = \frac{360^\circ}{365.2424 \text{ d}} = 0.9856 \frac{\text{deg}}{\text{day}} \quad (\text{Eq. 2. 34})$$

Per quanto riguarda la seconda possibile applicazione, relativa al risparmio di carburante per trasferte orbitali: il diverso rateo di regressione dei due piani orbitali, quello di partenza (del satellite *Chaser*) e quello di arrivo (del satellite *Target*), caratterizzati in generale da quote e/o inclinazioni differenti, porta questi ad allinearsi dopo un certo intervallo di tempo t^* :

$$t^* = \frac{\Delta\Omega_0 + 2\pi K}{\Delta\dot{\Omega}} \quad (\text{Eq. 2. 35})$$

Dove:

- $\Delta\Omega_0 = \text{differenza al tempo iniziale di RAAN} = \Omega_C(t_0) - \Omega_T(t_0)$
- $\Delta\dot{\Omega} = \text{differenza di RAAN Rate} = \dot{\Omega}_T - \dot{\Omega}_C$

Affinché la trasferta abbia senso è necessario che l'orbita di arrivo e l'orbita di partenza abbiano il medesimo senso di percorrenza, sarebbe necessario altrimenti una manovra di annullamento di velocità e inserimento nell'orbita target, ovvero una manovra fuori scala in termini di spesa di propellente. In altre parole, è necessario che le orbite siano o entrambe dirette o entrambe retrograde ed è pertanto necessario che $\dot{\Omega}_C$ e $\dot{\Omega}_T$ abbiano lo stesso segno.

Richiami di meccanica del Volo Spaziale

Si terrà in conto di questo effetto per l'ottimizzazione delle trasferte esaminate in questo elaborato. Dettagli maggiori riguardo t^* al Capitolo 4.

2.6.1.2.2 Precessione della linea degli absidi

Secondo effetto dell'armonica J_2 è sentito dall'argomento del periastro:

$$\frac{\Delta\omega}{orbita} = \frac{3}{2}\pi J_2 \left(\frac{R}{p}\right)^2 (5\cos^2(i) - 1) \quad [rad/orbita] \quad (Eq. 2. 36)$$

La linea degli absidi, ovvero la linea congiungente periastro ed apoastro, ruoterà con velocità il cui segno dipende dal segno del termine $(5\cos^2(i) - 1)$.

Si riporta si seguito l'andamento della velocità di precessione degli absidi in funzione dell'inclinazione secondo l'Eq 2.53.

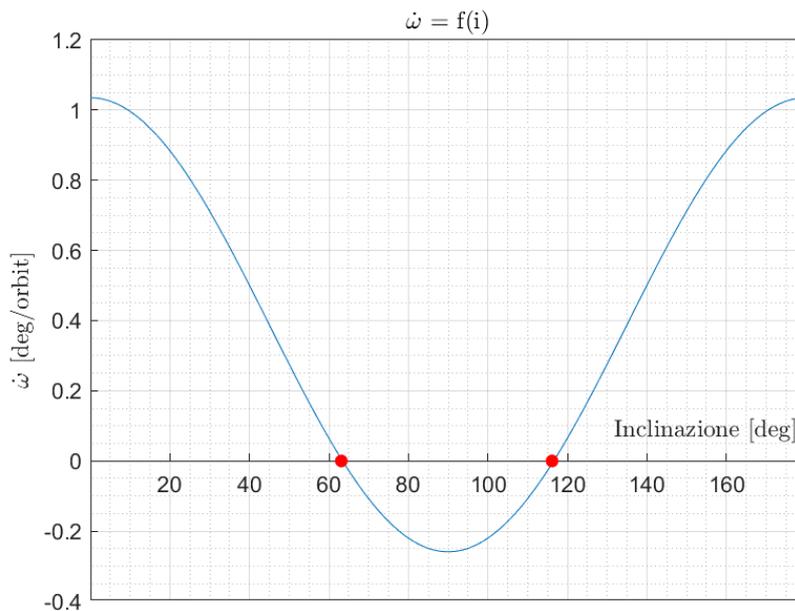


Figura 2.12. Andamento di $\Delta\omega/orbita$ in funzione dell'inclinazione del piano orbitale.

In Figura 2.12 vengono riportati in rosso i punti di attraversamento dell'asse delle ascisse, ovvero i valori di inclinazione per i quali la velocità di precessione degli absidi è nulla. Questi due punti dividono il grafico in tre zone:

- Se $i < 63.16^\circ$ o $i > 116.16^\circ \rightarrow \frac{\Delta\omega}{orbita} > 0$
- Se $63.16^\circ < i < 116.16^\circ \rightarrow \frac{\Delta\omega}{orbita} < 0$
- Se $i = 63.16^\circ$ o $i = 116.16^\circ \rightarrow \frac{\Delta\omega}{orbita} = 0$

Suddetti valori caratteristici di inclinazione sono utilizzati nelle orbite Molniya. Si tratta di orbite molto eccentriche, con periodo di circa dodici ore, il cui scopo è l'osservazione di zone della superficie terrestre molto lontane dall'equatore e vicino alle regioni polari, zone per la cui osservazione non risultano particolarmente efficaci satelliti in GEO. Per ottenere il desiderato e mantenere il satellite per il maggior tempo possibile sulla zona di interesse è necessario che la Molniya mantenga l'apogeo su quell'area. A causa della precessione della linea degli absidi ciò necessiterebbe di manovre di *station-keeping* troppo costose, che minerebbero la fattibilità della missione. Per questa ragione le Molniya presentano sempre inclinazione di 63.16 o 116.16 gradi.

2.7 Manovre Orbitali

Si distinguono due tipologie di manovre orbitali, in funzione del fine per le quali vengono attuate:

- Manovre di Station Keeping. Manovre di piccola intensità, effettuate in una determinata orbita obiettivo, il cui scopo è il mantenimento di tale orbita contro gli effetti perturbativi visti nel Capitolo 2.6.
- Manovre di Trasferimento. Manovre di entità maggiore, finalizzate al trasferimento da un'orbita di partenza A verso un'orbita target B.

La manovra può essere modellizzata in due modi:

- Manovra impulsiva: si ipotizza spinta infinita, l'impulso avviene in un tempo infinitesimo. Tipicamente associata a propulsione chimica.
- Manovra continua: spinta finita, accelerazioni di medio/piccola entità, l'impulso non si esaurisce in un intervallo temporale infinitesimo, ma consisterà di un certo intervallo più o meno lungo. Tipicamente associata a propulsione elettrica.

Il salto di velocità, che rappresenta il costo della manovra (ΔV ideale), non è, in generale, uguale al salto di velocità realmente ottenuto dalla manovra ($V_f - V_i$), a causa di perdite che possono essere principalmente di tre nature:

- Disallineamento della spinta
- Perdite per gravità
- Forze aerodinamiche

$$V_f - V_i = \Delta V - \text{perdite} \quad (\text{Eq. 2. 37})$$

Esplicitando i termini di perdite della relazione precedente:

$$V_f - V_i = \Delta V - \int_{t_i}^{t_f} \frac{T}{m} (1 - \cos \alpha) dt - \int_{t_i}^{t_f} \frac{D}{m} dt - \int_{t_i}^{t_f} g \sin \phi dt \quad (\text{Eq. 2. 38})$$

Dove: $D = \text{resistenza aerodinamica}$; $\phi = \text{fly path angle}$ e α rappresenta l'angolo di disallineamento del vettore spinta rispetto al vettore velocità istantanea del S/C (Figura 2.14).

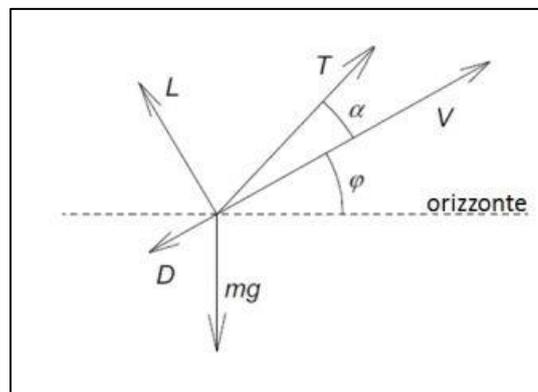


Figura 2.13. Schematizzazione spinta + perdite.

Le perdite dovute a resistenza aerodinamica dipendono da D e dunque dalla densità dell'aria, dall'area della superficie perpendicolare alla direzione del moto e dal quadrato della velocità dello S/C. Sono naturalmente assenti fuori dall'atmosfera ($\rho \rightarrow 0$ per $h \rightarrow 1000 \text{ km}$).

Le perdite per disallineamento della spinta si annullano per $\alpha = 0$, ovvero se la spinta è allineata perfettamente al vettore velocità; ciò è possibile solo nella misura in cui la manovra desiderata non preveda un cambio di piano dell'orbita o una rotazione degli absidi, è in altre parole accettabile solo per manovre di variazione del modulo della velocità.

Le perdite per gravità sono legate al fatto che la manovra avviene in un campo di forze gravitazionali, le quali "consumano" parte del ΔV erogato. Per esempio, ipotizzando di avere un razzo fermo sulla rampa di lancio che eroga spinta inferiore al proprio peso, questo rimarrà fermo nella stessa posizione, ovvero: $V_f - V_i = 0 \rightarrow \Delta V = \text{perdite per gravità}$. Per ridurre le perdite per gravità è conveniente spingere a $\phi = 0$ (condizione sempre verificata in orbite circolari) ed avere spinte elevate. T elevate comportano accelerazioni maggiori, dunque maggiore velocità media e tempo di volo inferiore.

2.7.1 Manovre continue

Tipiche di missioni che implementino sistemi di propulsione elettrica e quindi caratterizzati da bassi livelli di spinta ed accelerazioni. Cade l'ipotesi di manovra impulsiva. Manovre in precedenza considerate istantanee ora assumono una dipendenza dal tempo. La trattazione di queste manovre si basa sull' Approssimazione di Edelbaum: approssimazione delle Equazioni Planetarie di Gauss, le quali descrivono la variazione nel tempo dei parametri orbitali:

$$\frac{da}{dt'}, \frac{de}{dt'}, \frac{di}{dt'}, \frac{d\Omega}{dt'}, \frac{d\omega}{dt'}, \frac{dv}{dt'}$$

Il modello si basa su 5 ipotesi:

- Orbite quasi-circolari, $r \cong a \cong p$, $e \cong 0$, $V \cong \sqrt{\frac{\mu}{r}}$
- $E \cong v \cong M$
- Orbite con piccola inclinazione, $i \cong 0 \rightarrow \cos i \cong 1$, $\sin i \cong 0$
- Accelerazioni piccole, $a = \frac{T}{m} \ll \frac{\mu}{r^2}$
- β , angolo che descrive la direzione di spinta fuori dal piano, costante lungo una rivoluzione

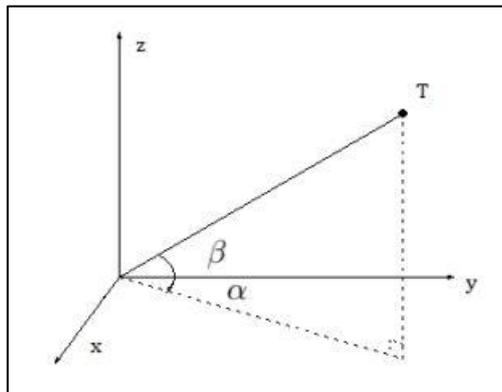


Figura 2.14. Rappresentazione angoli di spinta.

Definita y la direzione parallela alla velocità istantanea dello S/C e z la direzione perpendicolare al piano dell'orbita, è possibile scomporre la spinta in tre componenti:

$$T_V = T \cos \beta \cos \alpha \tag{Eq. 2. 39}$$

$$-T_N = -T \cos \beta \sin \alpha = T_R \quad (\text{Eq. 2. 40})$$

$$T_W = T \sin \beta \quad (\text{Eq. 2. 41})$$

Rispettivamente: componente parallela a V ; componente normale a V nel piano (o radiale); componente fuori dal piano.

Attraverso le ipotesi del modello di Edelbaum, le equazioni di Gauss su una rivoluzione si semplificano come segue:

$$\dot{a} = 2 \frac{T_V a}{m V} \quad (\text{Eq. 2. 42})$$

$$\dot{e} = \left[2 \cos \nu \frac{T_V}{m} - \sin \nu \frac{T_N}{m} \right] \frac{1}{V} \quad (\text{Eq. 2. 43})$$

$$i = \cos(\omega + \nu) \frac{T_W}{m} \frac{1}{V} \quad (\text{Eq. 2. 44})$$

$$\dot{\omega} = -\dot{\Omega} + \left(2 \sin \nu \frac{T_V}{m} + \cos \nu \frac{T_N}{m} \right) \frac{1}{V} \frac{1}{e} \quad (\text{Eq. 2. 45})$$

$$\dot{M} = \dot{\nu} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \quad (\text{Eq. 2. 46})$$

$$\dot{\Omega} = \sin(\omega + \nu) \frac{T_W}{m} \frac{1}{V} \frac{1}{\sin i} \quad (\text{Eq. 2. 47})$$

Avendo considerato orbita ad inclinazione nulla e circolare, non sono definibili i concetti di periastro e linea dei nodi. Ciò porta a singolarità le equazioni di Gauss per cui: $(\dot{\omega}, \dot{\Omega}) \rightarrow \infty$. È possibile superare tali singolarità effettuando un cambiamento di variabili, ma Edelbaum “risolse” il problema semplicemente trascurando le equazioni che le contenevano:

$$\dot{a} = 2 \frac{T_V a}{m V} \quad (\text{Eq. 2. 48})$$

$$\dot{e} = \left[2 \cos \nu \frac{T_V}{m} - \sin \nu \frac{T_N}{m} \right] \frac{1}{V} \quad (\text{Eq. 2. 49})$$

$$i = \cos(\omega + \nu) \frac{T_W}{m} \frac{1}{V} \quad (\text{Eq. 2. 50})$$

Riassumendo: T_V permette la variazione di a ed e ; T_N permette la variazione di e ; T_W permette la variazione di i .

In funzione della manovra che si vuole effettuare, e dunque del parametro che si intende variare, esiste un ottimo in termini di α e β .

2.7.1.1 Semiasse maggiore

Per ottenere la massima variazione di a è necessario applicare la spinta in direzione tangenziale, ovvero parallelamente al vettore velocità:

$$\alpha = \beta = 0 \quad \rightarrow \quad T \parallel V \quad \rightarrow \quad T_V = T, \quad T_R = T_W = 0$$

Nel momento in cui si inizia ad applicare la spinta l'eccentricità varierà, ma se questa è data in maniera continuativa per un giro completo, e tornerà ad annullarsi:

$$\Delta e = \Delta i = 0$$

2.7.1.2 Eccentricità

Per ottenere il massimo incremento di e è necessario spingere a:

$$\alpha = \text{atan}\left(\frac{1}{2} \tan \nu\right) \quad \beta = 0$$

Tale risultato è dimostrabile andando a ricercare il massimo della funzione e , ovvero annullando la sua derivata temporale (Eq. 2.85). La direzione di spinta risulta essere sempre in direzione perpendicolare alla linea degli absidi.

$$\Delta a = \Delta i = 0$$

2.7.1.3 Inclinazione

Per variare unicamente i è necessario spingere a:

$$\alpha = \text{non determinato} \quad \beta = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\beta > 0 \rightarrow \text{incremento di latitudine}$$

$\beta < 0 \rightarrow$ decremento di latitudine

$$\Delta a = \Delta e = 0$$

2.7.1.4 Inclinazione e semiasse

Per ottimizzare la variazione combinata di a ed i , mantenendo invariata l'eccentricità ($\Delta e = 0$) occorre porre $\alpha = 0$ e ricercare il massimo di $\dot{a} + ki$. Sostituendo le relazioni 2.48 e 2.50:

$$\tan \beta = k \cos(\omega + \nu) \quad (\text{Eq. 2. 51})$$

Dove k è una costante che dipende dal Δa e Δi . L'integrazione della relazione precedente su un giro ($0 < \nu < 2\pi$) non è di facile risoluzione e richiede la risoluzione di integrali elettici. Si può dunque ottenere una buona approssimazione considerando $\beta = \text{costante} = \bar{\beta}$ sul singolo giro. In Figura 2.16 è riportato l'andamento della soluzione ottimale e della soluzione approssimata.

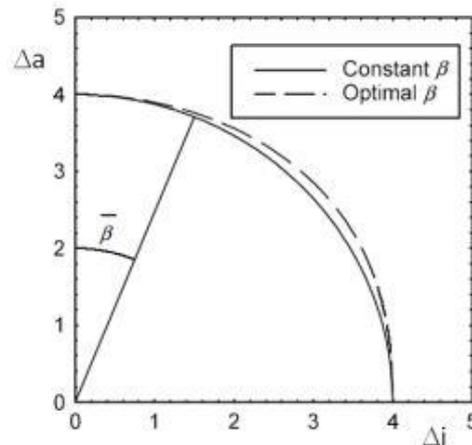


Figura 2.15. Confronto soluzione ottimale/approssimata. Credit: [29].

L'errore commesso con la soluzione approssimata è molto piccolo, ma si tenga a mente che questa è valida per una unica rivoluzione. Se i Δa e Δi sono consistenti, tanto da richiedere più rivoluzioni propulse, sarà necessario ottimizzare β ad ogni rivoluzione, ovvero trovare dei β costanti sul giro, ma, in generale, differenti da rivoluzione a rivoluzione. Questo problema di ottimizzazione si traduce in:

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{di}{dV} + k \frac{dt}{dV} \right) = 0 \quad (\text{Eq. 2. 52})$$

Da cui:

$$V \sin \beta = cost = V_0 \sin \beta_0 \rightarrow \sin \beta = \frac{V_0}{V} \sin \beta_0 \quad (\text{Eq. 2. 53})$$

Dalla 2.53 si evince come tanto più elevata è la velocità e tanto più costosa è l manovra. In particolare: è conveniente spingere a β più piccoli a raggi minori (dove la velocità è maggiore) e a β più grandi, ovvero sempre più fuori dal piano, a raggi grandi. Soluzione in linea con le considerazioni riguardo manovre impulsive per cambio di piano semplice e variazione altezza degli absidi. Graficamente (Figura 2.17):

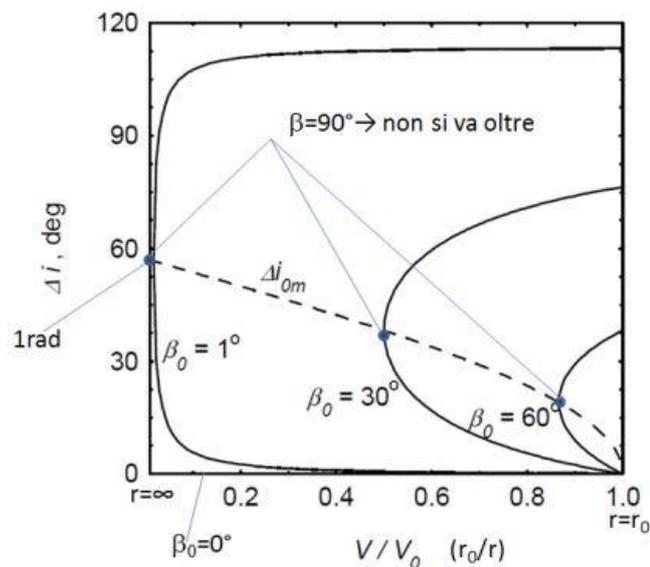


Figura 2.16 Andamento Δi in funzione del rapporto V/V_0 a diversi β_0 . Credit: [29].

Si noti che:

- Se $\beta_0 = 0 \rightarrow \beta = 0 \rightarrow \Delta i = 0$, non vi è alcun cambiamento di piano e si torna nella condizione di variazione di semiasse pura
- Dato un certo β_0 , esiste un Δi massimo oltre il quale non è possibile ruotare il piano dell'orbita. Tale massimo si raggiunge idealmente a $\beta = 90^\circ$ ma dipende dal rapporto di velocità V/V_0 . Per esempio, dato $\beta_0 = 30^\circ$ la massima variazione

Richiami di meccanica del Volo Spaziale

di inclinazione che si può ottenere è di circa 45° , ma solo se il rapporto di velocità è pari a $\frac{V}{V_0} = 0.5$.

- All'aumentare del β_0 diminuisce il Δi_{max}
- All'aumentare del V/V_0 diminuisce il Δi_{max}
- Il massimo Δi in assoluto (pari a 57.3°) si ottiene per $\beta_0 \rightarrow 0$ e $\frac{V}{V_0} \rightarrow 0$, ovvero per $V \rightarrow \infty$

2.7.1.5 Costo della manovra

Considerando la soluzione approssimata, a $\bar{\beta} = cost$, la relazione per quantificare il costo nell'approssimazione di Edelbaum è la seguente:

$$\Delta V = \sqrt{V_0^2 + V_F^2 - 2V_0V_F \cos\left(\frac{\pi}{2} \Delta i\right)} \quad (Eq. 2. 54)$$

Nota l'accelerazione a del S/C è possibile ricavare, a partire dal ΔV , la durata della manovra:

$$\Delta t = \frac{\Delta V}{a} = \frac{\Delta V m}{T} \quad (Eq. 2. 55)$$

Dove m rappresenta la massa dello S/C. Nella realtà questa non sarà costante, ma diminuirà via via che il propellente si esaurisce. Per avere una buona approssimazione della durata di manovra è possibile inserire una stima della massa media.

2.7.1.6 Media su più giri

Le equazioni ricavate nel paragrafo precedente (Eq. 2.42-2.47) sono ricavate da Edelbaum e valide su una rivoluzione. Dunque, il prossimo passo è la valutazione dei ratei di variazione dei parametri su più rivoluzioni orbitali. Si ricorda la definizione di argomento della latitudine:

$$u' = v + \omega \quad (Eq. 2. 56)$$

Si consideri accelerazione costante durante la manovra e pari a:

$$\gamma = \frac{T}{m} \quad (\text{Eq. 2. 57})$$

Suddetta ipotesi prevederebbe un profilo di spinta modulabile al fine di compensare la progressiva diminuzione di massa, dovuta al consumo di propellente. Sotto queste ipotesi, andando a sostituire le Eq. 2.46, 2.47, 2.39, 2.40 e 2.41 nelle relazioni che descrivono la derivata temporale di inclinazione e RAAN:

$$i = \gamma \frac{1}{V} \cos u' \sin \beta \quad (\text{Eq 2. 58})$$

$$\dot{\Omega} = \gamma \frac{1 \sin u' \sin \beta}{V \sin i} \quad (\text{Eq.2. 59})$$

Si noti che si riportano le variazioni di soli questi parametri orbitali in quanto sono gli unici di interesse per l'implementazione del modello matematico di ottimizzazione descritto nel Capitolo 4. Integrando su una rivoluzione le relazioni 2.60 e 2.61, considerando il β sub-ottimale costante, si ottengono le variazioni finite ottenute su un giro:

$$\Delta i = 4 \gamma \frac{a^2}{\mu} \cos u'_0 \sin \beta \quad (\text{Eq 2. 60})$$

$$\Delta \dot{\Omega} = 4 \gamma \frac{a^2 \sin u'_0 \sin \beta}{\mu \sin i} \quad (\text{Eq.2. 61})$$

Dove u'_0 rappresenta l'argomento della latitudine al tempo 0, ovvero all'istante di inizio della manovra. A queste si aggiungono le variazioni finite di tempo (pari al periodo orbitale) e di modulo della velocità:

$$\Delta t = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \quad (\text{Eq 2. 62})$$

$$\Delta V = -\gamma 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \cos \beta \quad (\text{Eq.2. 63})$$

Richiami di meccanica del Volo Spaziale

Una volta determinate le variazioni dei parametri di interesse su una singola rivoluzione, per ottenere il rateo di variazione su più rivoluzioni si procede valutando il rapporto delle variazioni finite sul giro (ΔV , Δi e $\Delta \Omega$) rispetto al periodo orbitale:

$$\frac{di}{dt} = \frac{2}{\pi} \gamma \sqrt{\frac{a}{\mu}} \cos u' \sin \beta \quad (\text{Eq 2. 64})$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{2}{\pi} \gamma \sqrt{\frac{a}{\mu}} \frac{\sin u' \sin \beta}{\sin i} \quad (\text{Eq.2. 65})$$

$$\frac{dV}{dt} = -\gamma \cos \beta \quad (\text{Eq 2. 66})$$

Saranno queste le equazioni utilizzate per implementare il modello di ottimizzazione di cui al Capitolo 4.

Capitolo 3

Cenni di Propulsione Elettrica

3.1 Equazione di Tsiolkowsky

Si ipotizzi di avere un sistema isolato, composto da S/C e propellente. Definiti:

- m = massa dello S/C
- dm_p = massa di propellente espulsa
- V = velocità dello S/C
- c = velocità di scarico del propellente relativa allo S/C

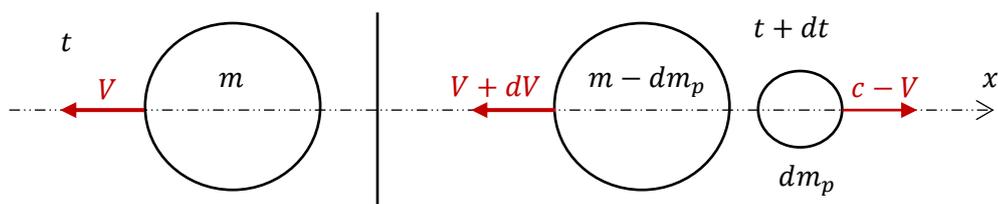


Figura 3.1. Schematizzazione sistema chiuso S/C + propellente.

Essendo il sistema isolato, applicando il secondo principio della dinamica: la variazione di quantità di moto deve essere nulla. Uguagliando la quantità di moto ai due istanti:

$$mV = (m - dm_p)(V + dV) - dm_p(c - V) \quad (\text{Eq. 3. 1})$$

Svolgendo i prodotti e trascurando gli infinitesimi di ordine superiore, l'Equazione precedente diventa:

$$m dV = dm_p c \quad (\text{Eq. 3. 2})$$

Per il principio di azione e reazione, l'Equazione 3.2 lega la variazione di velocità dello S/C ottenuta mediante l'espulsione ad una certa velocità c di una data quantità di massa di propellente. Si introduca il concetto di portata come:

$$\dot{m}_p = \frac{dm_p}{dt} \quad (\text{Eq. 3. 3})$$

Sostituendo la 3.3 nella 3.2, precedentemente divisa per dt , si ottiene la seguente formulazione continua:

$$m \frac{dV}{dt} = \dot{m}_p c = T \quad (\text{Eq. 3. 4})$$

Dove: $T = \text{spinta}$ e $c = \text{velocità efficace di scarico}$

La massa dello S/C non è costante ma diminuisce a causa della portata di propellente in uscita. Pertanto, si può esprimere la variazione di massa dello S/C come:

$$\frac{dm}{dt} = -\dot{m}_p \quad (\text{Eq. 3. 5})$$

Sostituendo questa relazione nell'Equazione 3.4:

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{T}{c} \quad (\text{Eq. 3. 6})$$

Andando a dividere la relazione 3.4 per la massa dello S/C m ed integrando in un generico intervallo di tempo:

$$V(t_f) - V(t_0) = \Delta V = \int_{t_0}^{t_f} \frac{T}{m} dt \quad (\text{Eq. 3. 7})$$

Sostituendo la definizione di T espressa nella 3.6 e cambiando adeguatamente gli estremi di integrazione, si ottiene:

$$\Delta V = - \int_{m_0}^{m_f} \frac{c}{m} dm \quad (\text{Eq. 3. 8})$$

Dove m_0 ed m_f rappresentano rispettivamente la massa iniziale (al tempo t_0) e finale (al tempo t_f) dello S/C. Integrando:

$$\Delta V = c \ln \left(\frac{m_0}{m_f} \right) \quad (\text{Eq. 3. 9})$$

Portando in evidenza il rapporto di massa iniziale su massa finale si arriva alla nota Equazione di Tsiolkowsky (detta anche *Rocket Equation*):

$$\frac{m_f}{m_0} = e^{-\frac{\Delta V}{c}} \quad (\text{Eq. 3. 10})$$

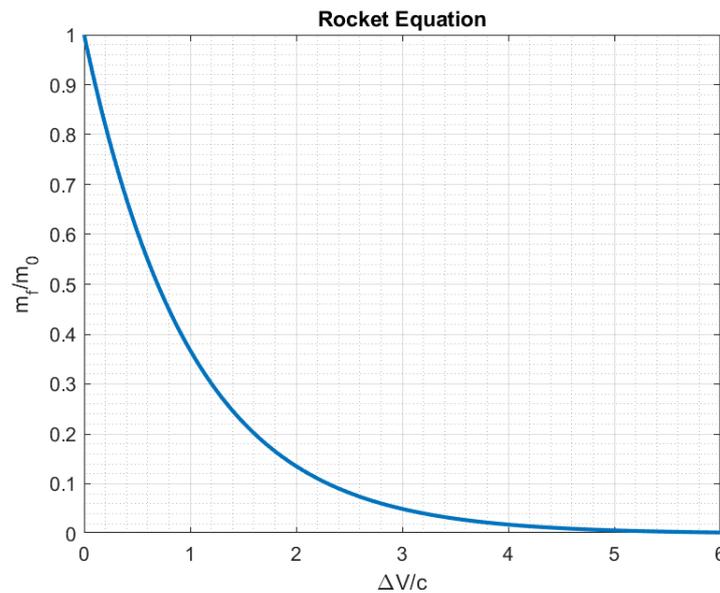


Figura 3.2. Andamento dell'Equazione di Tsiolkowsky in funzione del termine esponenziale.

All'aumentare del termine $\frac{\Delta V}{c}$ il rapporto di massa cala rapidamente. Ciò implica due conseguenze principali:

- All'aumentare dell'entità della manovra, ovvero all'aumentare del ΔV richiesto, la massa finale del S/C è minore, causa di una maggiore spesa di propellente.
- Al diminuire della velocità efficace di scarico c il termine esponenziale cresce, pertanto aumenta il consumo di propellente. Un propulsore è tanto più efficiente quanto maggiore è la velocità di scarico del propellente.

3.2 Confronto Propulsione Chimica vs. Elettrica

Si definisce impulso specifico I_{sp} la seguente grandezza:

$$I_{SP} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{I_t}{m_p g_0} \quad (\text{Eq. 3. 11})$$

Dove:

$$I_t \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_0}^{t_f} T dt = \text{impulso totale} \quad (\text{Eq. 3. 12})$$

L'impulso totale è una misura dell'effetto cumulativo della spinta. L'impulso specifico è invece una misura dell'efficienza di un dato sistema propulsivo: rappresenta il rapporto tra l'effetto prodotto (l'impulso totale) e la spesa necessitata, quest'ultima misurata nel termine $m_p g_0$, ovvero il peso a terra della massa di propellente usata. Sostituendo nella definizione di impulso specifico (Eq. 3.11) le Eq. 3.12 e Eq. 3.4:

$$I_{SP} = \frac{\int_{t_0}^{t_f} T dt}{m_p g_0} = \frac{c \int_{t_0}^{t_f} \dot{m}_p dt}{m_p g_0} = \frac{m_p c}{m_p g_0} = \frac{c}{g_0} \quad (\text{Eq. 3. 13})$$

Come si era anticipato commentando l'Equazione di Tsiolkowsky, la velocità di scarico è una misura dell'efficienza ed è pertanto legata alla definizione di impulso specifico per mezzo di una costante: l'accelerazione gravitazionale terrestre al livello medio del mare.

Impulsi specifici e velocità di scarico molto diversi tra loro caratterizzano le due tipologie di sistemi propulsivi: chimici ed elettrici.

- *Propulsione chimica*: monopropellente (*cold gas*) o bicomponente (ossidante e combustibile). La spinta è generata dai gas di scarico accelerati in ugello e generati dalla reazione di combustione se bicomponente, oppure rilasciati direttamente da un serbatoio pressurizzato se *cold gas*. La spinta è proporzionale all'energia cinetica dei gas in uscita, a sua volta legata all'energia chimica intrinseca del propellente (E_{ch}). Applicando il primo principio della dinamica alla camera di combustione:

$$\dot{m}_p (h_c - h_0) = \dot{m}_p E_{ch} \quad (\text{Eq. 3. 14})$$

Applicando il primo principio all'ugello:

$$h^\circ = cost \rightarrow \dot{m}_p \left(h_e + \frac{c^2}{2} - h_c \right) = 0 \quad (Eq. 3. 15)$$

Sapendo che:

- Fluido in ingresso alla camera è relativamente freddo: $h_0 \cong 0$
- Temperatura di uscita è molto bassa: $h_e \cong 0$

$$h_c \cong E_{ch} \quad (Eq. 3. 16)$$

$$h_c \cong \frac{c^2}{2} \quad (Eq. 3. 17)$$

Uguagliamo le espressione 3.16 e 3.17:

$$c \cong \sqrt{2E_{ch}} \quad (Eq. 3. 18)$$

La velocità di scarico non dipende dalla portata di propellente, ma è funzione unicamente dell'energia chimica della miscela, ovvero dipende unicamente dai reagenti in camera in combustione. L'efficienza del propulsore chimico è dunque necessariamente limitata dalla scelta di combustibile ed ossidante. Viceversa, la spinta che genera non è limitata da nulla, cresce proporzionalmente alla portata di propellente.

- *Propulsione elettrica*: la fonte di energia è indipendente dal propellente. È dunque necessaria la presenza di un generatore di potenza, quale: pannelli solari, energia da radioisotopi, reattori a fissione nucleare. Fissato il generatore e la potenza elettrica da esso erogato (P_E), applicando il primo principio:

$$\dot{m}_p \left(h_e + \frac{c^2}{2} - h_0 \right) = \eta P_E \quad (Eq. 3. 18)$$

Dove $\eta P_E = P_E - \text{perdite}$: η è un rendimento che tiene conto della quantità di potenza elettrica fornita dal generatore ma persa in perdite. Sostituendo la 3.4 nella Eq. 3.18 e fatte valide le medesime ipotesi su h_e ed h_0 di cui al punto precedente, si ottiene:

$$c \cong \sqrt{\frac{2\eta P_E}{\dot{m}_p}} \cong \frac{2\eta P_E}{T} \quad (\text{Eq. 3.19})$$

Emerge dalla relazione 3.19 come per la propulsione elettrica la velocità di scarico, e quindi l'impulso specifico, dipende sia dalla potenza elettrica fornita dal generatore sia dalla portata di propellente immesso. In particolare, è evidente come non vi sia un limite fisico al valore massimo che si può ottenere, ma c cresce tanto più aumenta la potenza elettrica fornita e tanto più si diminuisce la portata e dunque la spinta. Per questa ragione i propulsori elettrici sono caratterizzati da impulsi specifici molto maggiori dai corrispettivi chimici, ma a costo di spinte in genere molto inferiori.

3.3 Classificazione Propulsori Elettrici

Il principio alla base della propulsione elettrica è fornire energia alla massa di propellente al fine di accelerarlo. L'energia fornita non è contenuta intrinsecamente nel propellente, ma è generata da una fonte terza. In funzione della natura della fonte di energia e del modo in cui il propellente energizzato viene accelerato, i propulsori elettrici si possono suddividere in tre categorie:

- Propulsori Elettrotermici. L'energia è fornita al propellente per via di una resistenza elettrica che lo scalda attraverso effetto Joule, oppure tramite la formazione di un arco elettrico nel propellente stesso. La spinta è generata in ugello di scarico, dove il propellente scambia energia termica per energia cinetica.
- Propulsori Elettrostatici. Il propellente è prima ionizzato e dunque accelerato tramite l'applicazione di un campo elettrostatico.
- Propulsori Elettromagnetici. Il propellente è prima ionizzato e dunque accelerato tramite l'applicazione di un campo elettromagnetico.

3.3.1 Propulsori Elettrotermici

Rientrano in questa categoria due tipologie di propulsori:

- Resistojet. Il propellente è scaldato per mezzo di una resistenza elettrica, la quale può essere a diretto contatto con il flusso di propellente (scambio di calore per

conduzione), oppure può trovarsi in una camera sigillata e separata dal flusso. In questo secondo caso si parla di configurazione *sealed cavity* e la trasmissione di calore avviene per irraggiamento verso le pareti della camera e poi per conduzione dalle pareti al propellente. Sono caratterizzati da impulsi specifici bassi a causa delle limitazioni sulla temperatura massima raggiungibile dalla resistenza prima di incorrere in cedimenti strutturali. Hanno però il vantaggio di essere semplici, economici, affidabili e generano spinte più elevate degli altri propulsori elettrici.

- Arcojet. Il propellente è prima ionizzato, in parte o totalmente, dopodiché, transitando tra anodo e catodo, diventa lui stesso conduttore, chiude il circuito attraverso la generazione di un arco elettrico. Suddetto arco scalda il propellente fino a temperature dell'ordine dei 10.000 K, superando di buona misura le limitazioni sulla temperatura e quindi sull'impulso specifico imposti dai resistojet.

3.3.2 Propulsori Elettrostatici

Rientrano in questa categoria due tipologie di propulsori:

- Propulsore a ioni. Il propellente viene nebulizzato in camera di ionizzazione, dove grazie ad un cannone ad elettroni, viene ionizzato tramite la rimozione di elettroni poi assorbiti dalle pareti della camera. Il propellente ionizzato e carico positivamente viene quindi accelerato in direzione assiale dal campo elettrico generato da una coppia di griglie elettrodi poste all'uscita della camera. Il flusso di ioni positivi in uscita è dunque neutralizzato tramite l'espulsione degli elettroni in eccesso assorbiti dal propulsore durante la ionizzazione. Questo processo è fondamentale per evitare che nel craft si accumulino sempre più cariche negative.
- Propulsore ad effetto Hall. È un ibrido tra la propulsione elettrostatica e la propulsione elettromagnetica, in quanto l'accelerazione del propellente è ottenuta tramite campo elettrostatico e la ionizzazione è "coadiuvata" dalla presenza di un campo magnetico. Hanno geometria cilindrica cava, all'interno della quale si trova un'ulteriore struttura cilindrica (di raggio inferiore) contenente un polo dell'elettromagnete. Si viene così a creare una meato toroidale cavo chiuso dalla parte del craft dalla griglia di iniezione del

propellente e aperto dall'altra parte verso lo spazio. In questa cavità si generano i campi elettrico e magnetico, il primo in direzione assiale ed il secondo in direzione radiale. Gli elettroni emessi dal catodo in direzione assiale rimangono "incastrati" in una zona vicino alla base del propulsore, dove il campo magnetico è più forte e la risultante delle forze agenti sull'elettrone è nulla: la forza magnetica e la forza elettrostatica si equivalgono. Si genera una corrente di Hall in direzione tangenziale alla base della camera. Il propellente neutro in ingresso viene in contatto con questa corrente e si ionizza per collisione con gli elettroni che la compongono. Man mano che si generano ioni positivi questi vengono accelerati dal campo elettrico verso l'esterno della camera. Gli ioni positivi non rimangono incastrati nella stessa distribuzione anulare degli elettroni grazie al loro raggio di ciclotrone maggiore, conseguenza della maggior massa. Come per i propulsori a ioni il flusso in uscita è neutralizzato per via di un fascio di elettroni.

3.3.3 Propulsori Elettromagnetici

Rientrano in questa categoria tre tipologie di propulsori:

- *Magnetoplasmadynamic thruster* (MPDT). Sfruttano la forza di Lorentz per accelerare gli ioni. Il campo magnetico che la causa può essere applicato esternamente da una fonte diversa da quella che genera il campo elettrico, oppure può essere di tipo *self-field*, ovvero autoindotta dalla corrente stessa. Geometricamente sono molto simili agli arcogetti: geometria cilindrica, presentano un anodo esterno cavo all'interno del quale vi è il catodo, sicché le linee di campo elettrico siano in direzione circa assiale, quelle del campo magnetico in direzione tangenziale e dall'interazione delle due nasca una forza di Lorentz in grado di accelerare il plasma fuori dal propulsore. Come per gli arcogetti, il plasma è generato dalla ionizzazione del propellente tramite un arco elettrico che si instaura tra il catodo e l'anodo.
- *Variable Specific Impulse Magnetoplasma Rocket* (VASIMR). Sistema propulsivo di nuova concezione. Sfrutta onde radio per la ionizzazione e la cessione di calore al propellente, che diventando plasma viene confinato ed accelerato da un campo magnetico. Vi sono due antenne di emissione di onde radio, la prima serve a ionizzare il propellente e generare il così detto "*cold plasma*"; la seconda scalda il plasma fino a temperature dell'ordine del milione

di Kelvin. A questo punto il plasma sfugge al confinamento del campo magnetico, ed esce nello spazio attraverso un ugello nel quale scambia la grande quantità di energia termica in energia cinetica.

- *Pulsed Inductive Thruster (PIT)*. Non necessita di elettrodi, componenti soggetti ad erosione nei propulsori a ioni. L'accelerazione del propellente avviene attraverso l'utilizzo combinato di campo magnetico e campo elettrico: il propellente diffonde attraverso una spira piana in cui passa corrente elettrica pulsata con periodi dell'ordine della decina di microsecondi; la corrente instazionaria genera quindi un campo magnetico in direzione radiale; a sua volta questo induce un campo elettrico nel propellente, che dunque si ionizza; questo causa le particelle cariche del plasma a ruotare in direzione opposta rispetto alla corrente pulsata originaria. Poiché la direzione di questa corrente indotta è perpendicolare al campo magnetico, il plasma subisce una forza di Lorentz che lo accelera in direzione assiale verso l'uscita del propulsore.

Segue una tabella riassuntiva delle caratteristiche principali di performance dei propulsori elettrici introdotti.

	Propulsione Chimica	Resistojet	Arcojet	Propulsori A Ioni	Propulsori Hall
$T [N]$	0.1 ÷ 35e3	0.005 ÷ 0.5	[100 ÷ 300]e-3	[15 ÷ 250]e-3	[50 ÷ 500]e-3
$I_{sp} [s]$	100 ÷ 400	300 ÷ 350	1500 ÷ 2500	1500 ÷ 2500	1500 ÷ 2500

	MPDT	VASIMR	PIT
$T [N]$	2.5 ÷ 100	Variable	[1 ÷ 10]e-3
$I_{sp} [s]$	2000 ÷ 5000	1000 ÷ 10000	4000 ÷ 9000

Tabella 3.1. Performance Propulsione Elettrica.

Capitolo 4

Teoria del Controllo Ottimo e metodi di ottimizzazione

4.1 Introduzione

Ottimizzare una trasferta può avere principalmente due significati: effettuare un'ottimizzazione rispetto al tempo e dunque fare in modo che la manovra duri il meno possibile (utile per esempio per missioni umane); oppure ottimizzare rispetto al ΔV , ovvero fare in modo di effettuare una certa manovra spendendo la massa di propellente minore possibile, essendo questa una voce importate nel *mass budget* di qualsiasi missione, e dunque fortemente impattante sulla fattibilità e sui costi della missione stessa. Che sia l'uno o l'altro, il problema si traduce nella ricerca di una legge di controllo che, agendo sulle variabili del sistema dinamico, minimizzi o massimizzi un certo indice di performance. È su questo principio che si costruisce la *Teoria del Controllo Ottimo*, approfondito ed applicato al caso in esame nei paragrafi successivi. Dalla definizione matematica del quesito di ottimizzazione elaborato tramite questa teoria, si genera tipicamente un *Boundary Value Problem* (BVP), cioè un problema differenziale ai limiti, la cui soluzione prevede l'individuazione del valore iniziale delle variabili del sistema dinamico, tale per cui sia possibile integrare numericamente il sistema di equazioni differenziali soddisfacendo sia le condizioni al contorno che le condizioni di ottimo. Raramente è possibile trovare una soluzione analitica, spesso solo per casi estremamente semplificati e dunque di scarso impatto pratico. La soluzione è dunque ricercata tramite metodi numerici, i quali possono essere raggruppati in tre famiglie: Metodi Diretti, Metodi Indiretti e Algoritmi Evolutivi.

Lo scopo di questo elaborato è, però, non quello di fornire una legge di controllo ottimale per la minimizzazione della durata della manovra o della massa di propellente speso, ma fornire uno strumento rapido di stima dei costi di trasferta tra coppie di detriti in orbite vicine (piccoli $\Delta i, \Delta \Omega$). Tale strumento potrebbe risultare estremamente utile nelle prime fasi di

progetto di una qualsiasi missione basata su propulsione elettrica, ma vedrebbe in modo particolare ampio utilizzo in combinazione con algoritmi di ottimizzazione combinatoria, al fine di definire, dato un set di detriti in orbite vicine, la sequenza ottimale per una missione ADR (Active Debris Removal). Per questa ragione, nel contesto di questo elaborato, l'interesse nell'applicazione della Teoria del Controllo Ottimo si riduce alla ricerca di una relazione per la stima del ΔV che sia analitica, approssimata e valida per piccole variazioni di inclinazione e RAAN e quindi meno accurata della risoluzione del BVP, ma che non necessiti integrazione. La risoluzione del BVP associato al problema di ottimizzazione richiederebbe di norma l'integrazione del set di equazioni di Edelbaum e porterebbe al profilo ottimale di β , comportando di conseguenza un aumento importante del costo computazionale.

4.2 Teoria del Controllo Ottimo

Teoria formulata per la prima volta da D. F. Lawden nel libro intitolato “*Optimal Trajectories for Space Navigation*”, 1963. Un qualsiasi sistema dinamico è descrivibile tramite un certo sistema di equazioni differenziali alle derivate ordinarie del primo ordine, del tipo:

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad (\text{Eq. 4. 1})$$

Dove:

- $t =$ *variabile indipendente*
- $x(t) =$ *vettore contenente N variabili di stato*
- $u(t) =$ *vettore contenente M variabili di controllo*
- $f(\dots) =$ *vettore contenente le N leggi di evoluzione del sistema*

Ogni legge di evoluzione descrive la variazione di una o più variabili di stato. N, numero delle variabili di stato e delle relative leggi di variazione, definisce l'ordine del sistema. In generale M è diverso da N e contiene controlli tipici del sistema fisico analizzato. Nell'applicazione in esame t assume un significato fisico e identifica la variabile indipendente tempo, rispetto alla quale evolvono le variabili di stato del sistema dinamico.

Risulta conveniente discretizzare la traiettoria in n sotto-intervalli temporali, detti archi, all'interno dei quali le variabili devono essere continue:

$$t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots < t_n \quad \text{con } k = 0:n \quad (\text{Eq. 4. 2})$$

Dove: t_0 e t_n rappresentano rispettivamente l'istante iniziale e finale della traiettoria e definiscono quindi i contorni esterni del problema; t_k è il generico istante nell'intervallo definito dagli estremi. Il generico intervallo di tempo sarà dunque definito come:

$$t_{(j-1)+} \leq t \leq t_{j-} \quad \text{con } j = 1:n \quad (\text{Eq. 4. 3})$$

Gli istanti $t_{(j-1)+}$ e t_{j-} sono detti contorni interni della traiettoria. Si noti che con la convenzione +/- si identificano rispettivamente limite destro e limite sinistro. Risulta importante questa distinzione in quanto le variabili di stato sono continue nell'intervallo, ma possono essere in generale discontinue agli estremi e quindi assumere valori differenti al limite destro e sinistri del generico contorno t_j . Tale scrittura permette di concentrare eventuali discontinuità nei contorni, lasciando continue le variabili all'interno degli archi.

Sui contorni, sia esterni che interni, sono in generale definite delle condizioni al contorno miste, ovvero date sia sulle variabili di stato che sulla variabile indipendente. Queste possono essere espresse come:

$$\chi(x_{(j-1)+}, x_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-}) = 0 \quad \text{con } j = 1:n \quad (\text{Eq. 4. 4})$$

Come accennato nel paragrafo di introduzione il problema di ottimizzazione si traduce nella massimizzazione di un indice di performance o nella minimizzazione di una certa funzione costo. In entrambi i casi il problema è ricercare i valori estremali di un certo funzionale J :

$$J = \varphi(x_{(j-1)+}, x_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-}) + \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} \Phi(x(t), u(t), t) \cdot dt \quad \text{con } j = 1:n \quad (\text{Eq. 4. 5})$$

Tale quantità è composta di due contributi:

- il primo, $\varphi(\dots) = \text{Costo di Mayer}$, dipende strettamente sia dal valore dalle variabili di stato sia dal valore assunto dalla variabile tempo, valutati nei contorni interni ed esterni

- il secondo, $\int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} \Phi(x(t), u(t), t) \cdot dt = \text{Costo di Lagrange}$, dipende dall'intera evoluzione di x e u nel tempo che trascorre all'interno del j -esimo sotto-intervallo; la sommatoria su j permette di estenderlo su tutta la traiettoria.

Si modifica la formulazione del funzionale (Eq. 4.5) tramite l'introduzione dei Moltiplicatori di Lagrange:

$$J^* = \varphi + \mu^T \chi + \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} (\Phi + \lambda^T (f - \dot{x})) \cdot dt \quad (\text{Eq. 4. 6})$$

Con questa scrittura si sono inserite nella definizione del funzionale le condizioni al contorno, mediante le costanti μ , e le leggi di evoluzione, mediante le λ , dette *adjoint variables*. Integrando per parti, di modo da eliminare i termini che contengono la derivata del vettore delle variabili di stato, si arriva a:

$$J^* = \varphi + \mu^T \chi + \sum_j (\lambda_{(j-1)+}^T x_{(j-1)+} - \lambda_{j-}^T x_{j-}) + \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} (\Phi + \lambda^T f - \dot{\lambda}^T x) \cdot dt \quad (\text{Eq. 4. 7})$$

Al fine di trovare il punto stazionario, di massimo o di minimo, del funzionale così espresso si procede alla valutazione della sua variazione prima δJ^* . Si introduce la definizione di Hamiltoniano del sistema H :

$$H = \Phi + \lambda^T f \quad (\text{Eq. 4. 8})$$

Da cui:

$$\delta J^* = \left(-H_{(j-1)+} + \frac{\delta \varphi}{\delta t_{(j-1)+}} + \mu^T \frac{\delta \chi}{\delta t_{(j-1)+}} \right) \cdot \delta t_{(j-1)+} + \left(H_{j-} + \frac{\delta \varphi}{\delta t_{j-}} + \mu^T \frac{\delta \chi}{\delta t_{j-}} \right) \cdot \delta t_{j-} \quad (\text{Eq. 4. 9})$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\lambda_{(j-1)+}^T + \frac{\delta\varphi}{\delta x_{(j-1)+}} + \mu^T \left[\frac{\delta\chi}{\delta x_{(j-1)+}} \right] \right) \delta x_{(j-1)+} \\
 & + \left(\lambda_{j-}^T + \frac{\delta\varphi}{\delta x_{j-}} + \mu^T \left[\frac{\delta\chi}{\delta x_{j-}} \right] \right) \delta x_{j-} + \\
 & + \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} \left(\left(\frac{\delta H}{\delta x} + \lambda^T \right) \delta x + \frac{\delta H}{\delta u} \delta u \right) \cdot dt
 \end{aligned}$$

I termini in parentesi quadra indicano delle matrici. Si impone dunque $\delta J^* = 0$ per ottenere la stazionarietà del funzionale. Suddetta condizione deve essere verificata per ogni set di $[\delta x, \delta x_{(j-1)+}, \delta x_{j-}, \delta t_{(j-1)+}, \delta t_{j-}, \delta u]$ che rispetti le condizioni al contorno e le equazioni di governo del sistema. Per cui:

$$\delta J^* = 0 \rightarrow \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} \left(\left(\frac{\delta H}{\delta x} + \lambda^T \right) \delta x + \frac{\delta H}{\delta u} \delta u \right) dt = 0 \quad (\text{Eq. 4. 10})$$

La relazione 4.10 è soddisfatta se e solo i coefficienti che moltiplicano i termini δx e δu sono nulli in ogni istante dell'intervallo. Ovvero:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\lambda}{dt} = - \left(\frac{\delta H}{\delta x} \right)^T \\ \left(\frac{\delta H}{\delta u} \right)^T = 0 \end{array} \right. \quad (\text{Eq. 4. 11})$$

$$\left(\frac{\delta H}{\delta u} \right)^T = 0 \quad (\text{Eq. 4. 12})$$

Dalla prima condizione (Eq. 4.11) si ricava un set di equazioni dette *Equazioni di Eulero-Lagrange*. Dalla seconda condizione (Eq. 4.12) si ricavano le *Equazioni Algebriche per i controlli*. Si definisce dunque un dominio di fattibilità per i controlli: matematicamente il valore di ottimo del controllo potrebbe assumere qualsiasi valore, ma non è sempre detto che questo abbia senso da un punto di vista fisico. Per esempio: la spinta di un propulsore può variare da 0 sino alla condizione di T_{max} , oppure in un cluster di RW per il controllo di assetto il valore di coppia fornito è limitato da M_{min} e M_{max} , o ancora, la presenza di un limite superiore per un coefficiente di portanza C_{Lmax} . Dunque, l'ottimo, se rientra nel dominio, è fornito dall' Eq. 4.12, altrimenti assume il valore massimo o minimo del dominio a seconda che sia minore dell'estremo inferiore del dominio o maggiore dell'estremo superiore.

Definite le equazioni 4.11 e 4.12 ed il concetto di dominio di ammissibilità, è possibile determinare l'ottimo tramite il *Principio di Massimo di Pontryagin*, il quale afferma che: “*il valore del controllo ottimale, appartenente al dominio di ammissibilità, in ogni punto della traiettoria rende massimo (o minimo) l'Hamiltoniano H, in modo da massimizzare (o minimizzare) il funzionale J*”.

4.3 Applicazione Controllo Ottimo

Richiamati i cenni principali della teoria del controllo ottimo nel paragrafo precedente, si procede ora a specializzare il problema al caso in esame. Si richiamo le equazioni differenziali di inclinazione, RAAN e velocità mediate su più rivoluzioni per trasferte a bassa spinta, ricavate al paragrafo 2.7.3.6.:

$$\frac{di}{dt} = \frac{2\gamma}{\pi V} \cos u' \sin \beta \quad (\text{Eq 4. 13})$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{2\gamma}{\pi V} \frac{\sin u' \sin \beta}{\sin i} \quad (\text{Eq. 4. 14})$$

$$\frac{dV}{dt} = -\gamma \cos \beta \quad (\text{Eq 4. 15})$$

L'Hamiltoniano può quindi essere scritto come:

$$H = \lambda_i \left(\frac{2\gamma}{\pi V} \sin \beta \cos u' \right) + \lambda_\Omega \left(\frac{2\gamma \sin u' \sin \beta}{\pi V \sin i_0} \right) + \lambda_V (-\gamma \cos \beta) \quad (\text{Eq. 4. 16})$$

Dove i_0 rappresenta l'inclinazione medie delle orbite di partenza e di arrivo. Dalla Eq. 4.16 si ricavano le *adjoint equations*:

$$\dot{\lambda}_V = -\frac{\partial H}{\partial V} = \frac{2\gamma}{\pi V^2} \sin \beta \cos u' \lambda_i + \frac{2\gamma \sin u' \sin \beta}{\pi V^2 \sin i_0} \lambda_\Omega \quad (\text{Eq 4. 17})$$

$$\dot{\lambda}_i = -\frac{\partial H}{\partial i} = 0 \quad (\text{Eq. 4. 18})$$

$$\dot{\lambda}_\Omega = -\frac{\partial H}{\partial \Omega} = 0 \quad (\text{Eq 4. 19})$$

Per cui, λ_i e λ_Ω sono costanti e la legge di controllo ottimale è ottenuta secondo il principio di Pontryagin dalle seguenti condizioni di ottimo seguente:

$$\frac{\partial H}{\partial \beta} = \lambda_i \left(\frac{2\gamma}{\pi V} \cos \beta \cos u' \right) + \lambda_\Omega \left(\frac{2\gamma \sin u' \cos \beta}{\pi V \sin i_0} \right) + \lambda_V (\gamma \sin \beta) = 0 \quad (\text{Eq. 4. 20})$$

$$\frac{\partial H}{\partial u'} = \frac{\lambda_\Omega}{\lambda_i \sin i_0} = 0$$

Ottenute dalla Eq. 4.12, ricordando che β e u' sono i parametri di controllo del problema. Dalla 4.20 si ricava la seguente espressione di β :

$$\tan \beta = -\frac{2}{\pi V \sin i_0} \frac{\lambda_\Omega}{\lambda_V} \sin u' - \frac{2}{\pi V} \frac{\lambda_i}{\lambda_V} \cos u' \quad (\text{Eq. 4. 21})$$

Risulta preferibile lavorare con un problema di massimizzazione, per cui si definisce la funzione costo di Meyer $\phi = -t_f$ e la condizione di trasversalità (ovvero il valore dell'Hamiltoniano all'istante finale) come: $H_f = 1$. Data la condizione di stazionarietà dell'Hamiltoniano: $H = H_f = 1$. Questa relazione insieme all'Equazione 4.20 portano a:

$$\lambda_V = -\frac{\cos \beta}{\gamma} \quad (\text{Eq. 4. 22})$$

$$\lambda_i \left(\frac{2\gamma}{\pi V} \cos u' \right) + \lambda_\Omega \left(\frac{2\gamma \sin u'}{\pi V \sin i_0} \right) = \sin \beta \quad (\text{Eq. 4. 23})$$

Poiché λ_i e λ_Ω sono costanti (Eq. 4.18/4.19) e γ è anche costante, ne consegue che:

$$V \sin \beta = V_0 \sin \beta_0 \quad (\text{Eq. 4. 24})$$

Si può ora avvantaggiarsi della considerazione per cui $V \sin \beta = \text{cost}$ per integrare la velocità dall'Equazione 4.15:

$$\gamma dt = -\frac{dV}{\cos \beta} = \frac{-dV}{\pm(1 - \sin^2 \beta)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\gamma \int_0^t dt = \int_{V_0}^V \frac{V dV}{\pm(V^2 - V_0^2 \sin^2 \beta_0)^{\frac{1}{2}}} = \gamma t = \Delta V$$

Questo porta a:

$$V^2 = V_0^2 + \Delta V^2 - 2\Delta V V_0 \cos \beta_0 \rightarrow$$

$$V = \sqrt{V_0^2 + \gamma^2 t^2 - 2\gamma t V_0 \cos \beta_0} \quad (\text{Eq. 4. 25})$$

Con questa relazione è ora possibile ricavare l'evoluzione dell'inclinazione direttamente tramite integrazione dell'Equazione differenziale 4.13:

$$\frac{di}{dt} = \frac{2}{\pi} \frac{\gamma}{V^2} V \cos u' \sin \beta = \frac{2}{\pi} \frac{\gamma}{V^2} \cos u' V_0 \sin \beta_0$$

$$\int_0^t di = \frac{2 \cos u'}{\pi} V_0 \sin \beta_0 \gamma \int_0^t \frac{dt}{V_0^2 + \gamma^2 t^2 - 2\gamma t V_0 \cos \beta_0}$$

Che porta alla seguente relazione:

$$\Delta i = \frac{2 \cos u'}{\pi} \left[\tan^{-1} \left(\frac{\gamma t - V_0 \cos \beta_0}{V_0 \sin \beta_0} \right) + \frac{\pi}{2} - \beta_0 \right] \quad (\text{Eq. 4. 26})$$

Alla stessa maniera si può valutare la variazione di RAAN:

$$\Delta \Omega = \frac{2 \sin u'}{\pi \sin i_0} \left[\tan^{-1} \left(\frac{\gamma t - V_0 \cos \beta_0}{V_0 \sin \beta_0} \right) + \frac{\pi}{2} - \beta_0 \right] \quad (\text{Eq. 4. 27})$$

Andando a scrivere la radice quadrata della somma delle variazioni espresse dalle Eq 4.26 e 4.27, si ottiene la seguente relazione:

$$\sqrt{\Delta i^2 + (\sin i_0 \Delta \Omega)^2} = \frac{2}{\pi} \left[\tan^{-1} \left(\frac{\gamma t - V_0 \cos \beta_0}{V_0 \sin \beta_0} \right) + \frac{\pi}{2} - \beta_0 \right] \quad (\text{Eq. 4. 28})$$

Se nell'approssimazione di Edelbaum pura, ovvero in cui sono trascurati anche gli effetti sulla RAAN, il costo della manovra era valutata tramite la relazione 2.96 che si riporta di seguito per comodità:

$$\Delta V = \sqrt{V_0^2 + V_F^2 - 2V_0V_F \cos\left(\frac{\pi}{2}\Delta i\right)} \quad (\text{Eq. 2. 96})$$

per analogia, essendo l'effetto utile rappresentato dal termine $\sqrt{\Delta i^2 + (\sin i_0 \Delta \Omega)^2}$ e non più valutabile nel solo Δi , si può ricavare la relazione del costo della manovra generale (V, i, Ω) come:

$$\Delta V = \sqrt{V_0^2 + V_F^2 - 2V_0V_F \cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\Delta i^2 + (\sin i_0 \Delta \Omega)^2}\right)} \quad (\text{Eq. 4. 29})$$

Si battezzi $\theta = \frac{\pi}{2}\sqrt{\Delta i^2 + (\sin i_0 \Delta \Omega)^2}$ e si sostituisca $V_0^2 = V_0^2 \sin^2 \theta + V_0^2 \cos^2 \theta$:

$$\Delta V = \sqrt{V_0^2 \sin^2 \theta + V_0^2 \cos^2 \theta + V_F^2 - 2V_0V_F \cos \theta} \quad (\text{Eq. 4. 30})$$

Considerando piccoli valori di θ , $\sin \theta \approx \theta$ e $\cos \theta \approx 1$, la Eq. 4.30 si semplifica nella seguente forma:

$$\Delta V = V_0 \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\Delta i\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2}\sin i_0 \Delta \Omega\right)^2 + \left(\frac{\Delta a}{2a_0}\right)^2} \quad (\text{Eq. 4. 31})$$

Questa relazione mostra come la spesa totale della manovra combinata è data dalla radice quadrata della somma dei costi affrontati per le variazioni di inclinazione, RAAN e semiasse, al quadrato.

La relazione per la stima del ΔV a cui si è giunti (Eq. 4.31) è l'unico risultato elaborato dall'applicazione della Teoria del Controllo Ottimo di nostro interesse per il raggiungimento degli obiettivi dell'elaborato: si tratta di una relazione analitica, approssimata e valida per piccole variazioni di inclinazione e RAAN.

4.3.1 Introduzione Effetto J_2

Quando il RAAN del Chaser non è particolarmente vicino a quello del bersaglio, il cambio di piano richiesto può essere molto grande e costoso. In questi casi, la missione può sfruttare la perturbazione J_2 consentendo l'allineamento dei RAAN o, al più, una riduzione del

Modello matematico e metodi di ottimizzazione

gap nel caso in cui la durata della missione (t_{mis}), vincolo imposto a priori, sia minore del tempo che l'effetto perturbativo impiegherebbe per annullarlo completamente (t^*).

Nel caso particolare in cui il tempo di missione permettesse lo sfruttamento dell'effetto J2 per annullare completamente $\Delta\Omega$, il ΔV (Equazione 4.31) si riduce in:

$$\Delta V_{ottimo} = \sqrt{y^2 + z^2} \quad (\text{Eq. 4. 32})$$

dove

$$y = \frac{a_T - a_C}{2a_0} V_0 \quad (\text{Eq. 4. 33})$$

$$z = \frac{\pi}{2} (i_T - i_C) V_0 \quad (\text{Eq. 4. 34})$$

I termini con pedice: "T" indicano grandezze iniziali dell'orbita del target, "C" indicano grandezze iniziali dell'orbita del chaser, "0" indicano grandezze medie tra orbita di partenza e di arrivo:

$$a_0 = \frac{a_T + a_C}{2} \quad (\text{Eq. 4. 35})$$

$$i_0 = \frac{i_T + i_C}{2} \quad (\text{Eq. 4. 36})$$

$$V_0 = \sqrt{\frac{\mu}{a_0}} \quad (\text{Eq. 4. 37})$$

In questo caso, la spesa per effettuare la trasferta è la minore possibile, si parlerà dunque di ΔV_{ottimo} e di soluzione ottima. Nell'ipotesi di manovra impulsiva converrebbe effettuare un'unica accensione del propulsore al tempo t^* al fine di fornire l'interezza del ΔV_{ottimo} . Per manovre continue, allo stesso modo conviene fornire tutto il ΔV_{ottimo} in un'unica accensione, la cui durata dovrebbe essere centrata in $t^* - \Delta t_{\Delta V_{ottimo}}/2$.

Nel caso più generale in cui $t_{mis} < t^*$, ovvero $\Omega_{Chaser}(t_f = t_{mis}) \neq \Omega_{Target}(t_f = t_{mis})$, l'Equazione 4.31 diventa:

$$\Delta V = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (\text{Eq. 4. 38})$$

Con:

$$x = \frac{\pi}{2} \left(\Omega_T(t_f) - \Omega_C(t_f) \right) \sin i_0 V_0 \quad (\text{Eq. 4. 39})$$

Si noti che i costi relativi alle differenze di semiasse ed inclinazione (y e z) dipendono unicamente dai parametri di tempo zero, mentre x dipende dai valori di RAAN al tempo finale, dipende dunque da quanto dura la missione. Intuitivamente sensato se si ragiona che maggiore è la durata della missione e per più tempo può agire J2 andando a ridurre naturalmente il $\Delta\Omega$ e dunque il $\Delta\Omega_f$ la cui compensazione spetta al sistema propulsivo.

Si analizzeranno tre strategie di manovra:

- Metodo (a, i) transfer
- Metodo (a, i, Ω) transfer
- Metodo Attendista

4.3.2 Metodo (a, i) transfer

Si considera una trasferta del tipo *thrust-coast-thrust*, ovvero una prima fase propulsa a t_0 , seguita da una di *coasting* non propulsa ed infine un'altra fase propulsa a t_{mis} , ovvero al termine della missione. In questo metodo si analizza il caso in cui venga eseguito un controllo diretto solo sul semiasse maggiore e sull'eccentricità: la variazione di tali parametri comporta una variazione del rateo della precessione della linea nodi ad opera dell'effetto J2, tale per cui al termine della fase di coasting (a t_{mis}) si annulli anche la differenza di RAAN. Si battezzi Δx la variazione di $\dot{\Omega}$ (RAAN Rate) ad opera di questo effetto (Eq. 4.45). Il costo della trasferta sarà quindi separato tra un primo ed un secondo impulso:

$$\Delta V = \sqrt{y^2 + z^2} = \Delta V_a + \Delta V_b$$

Dove:

$$\Delta V_a = \sqrt{(s_y y)^2 + (s_z z)^2} \quad (\text{Eq. 4. 40})$$

$$\Delta V_b = \sqrt{(y - s_y y)^2 + (z - s_z z)^2} \quad (\text{Eq. 4. 41})$$

dove s_y e s_z sono i *parametri di ripartizione*: permettono di quantificare la ripartizione del ΔV tra prima e seconda burn. L'ottimizzazione della trasferta, nella misura di ricercare il minimo ΔV , prevede l'ottimizzazione di s_y e s_z al fine di trovare la ripartizione di ottimo. Non è facile trovare in forma chiusa il minimo di $\Delta V = \Delta V_a + \Delta V_b$. Tale compito risulta più agevole se si compie un'approssimazione: si ricerca il minimo di ΔV^2 , di modo da eliminare la radice quadrata, andando però a trascurare il termine di doppio prodotto $2\Delta V_a \Delta V_b$:

$$(\Delta V_a + \Delta V_b)^2 \cong \Delta V_a^2 + \Delta V_b^2 = (s_y y)^2 + (s_z z)^2 (y - s_y y)^2 + (z - s_z z)^2 \quad (\text{Eq. 4. 42})$$

Autori precedenti (rif. [34]) hanno dimostrato l'accuratezza di tale approssimazione. Per l'ottimizzazione si sfrutta il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, da cui la funzione lagrangiana:

$$L = (s_y y)^2 + (s_z z)^2 (y - s_y y)^2 + (z - s_z z)^2 + \rho(x + m s_y y + n s_z z) \quad (\text{Eq. 4. 43})$$

Si noti che x non è nullo, ma assume un significato diverso da y e z , mentre y e z , come si è visto, rappresentano i costi reali delle manovre per annullare Δi e Δa , x rappresenta un costo fittizio per annullare $\Delta \Omega$. Nella realtà, per il metodo *ai-transfer*, questo costo è "pagato" interamente dall'effetto J2, da cui:

$$x + \Delta x = 0 \quad (\text{Eq. 4. 44})$$

Dove:

$$\Delta x = m s_y y + n s_z z \quad (\text{Eq. 4. 45})$$

$$m = \frac{\pi}{2} (7 \dot{\Omega}_0) \sin i_0 t_{mis} \quad (\text{Eq. 4. 46})$$

$$n = (\dot{\Omega}_0 \tan i_0) \sin i_0 t_{mis} \quad (\text{Eq. 4. 47})$$

Tornando all'Equazione lagrangiana 4.43 il moltiplicatore lagrangiano ρ moltiplica il vincolo descritto dall'Eq. 4.44. Si procede dunque differenziando l'Eq. 4.43 per i parametri s_y , s_z e ρ , annullandone le derivate per trovare il punto di minimo di L:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial s_y} = (4ys_y - 2y + \rho m)y = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial s_z} = (4zs_z - 2z + \rho n)z = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \rho} = x + mys_y + nzs_z = 0 \end{cases} \quad (\text{Eq. 4. 48})$$

Da cui:

$$s_y = -\frac{2mx - n^2y + mnz}{2(m^2 + n^2)y} \quad (\text{Eq. 4. 49})$$

$$s_z = -\frac{2nx + mny - m^2z}{2(m^2 + n^2)z} \quad (\text{Eq. 4. 50})$$

Si noti che non ci sono vincoli sui parametri di ripartizione: dopo la prima burn, semiasse ed inclinazione possono assumere qualsiasi valore, anche allontanandosi dal valore finale dell'orbita target, al fine di ottenere un Δx tale da ottenere il $\dot{\Omega}$ ideale, ovvero quello per cui $\Delta\Omega = 0$ al termine della trasferta.

4.3.3 Metodo (a, i, Ω) transfer

Alle ipotesi introdotte nel paragrafo precedente riguardo la *ai-transfer* si aggiunge anche un controllo attivo sulla RAAN, per cui l'Equazione 4.31 diventa:

$$\Delta V = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \Delta V_a + \Delta V_b$$

Dove:

$$\Delta V_a = \sqrt{(s_x x)^2 + (s_y y)^2 + (s_z z)^2} \quad (\text{Eq. 4. 51})$$

$$\Delta V_b = \sqrt{(x - s_x x + \Delta x)^2 + (y - s_y y)^2 + (z - s_z z)^2} \quad (\text{Eq. 4. 52})$$

dove s_x è il *parametro di ripartizione* per le variazioni di RAAN. Si noti che nella 4.52 compare come il Δx , ovvero la misura di quanto la modifica di a ed i ad opera di ΔV_a abbia modificato il RAAN Rate e dunque ridotto o aumentato il $\Delta\Omega$ totale.

Come fatto per l'*ai-transfer*, i parametri di ripartizione si possono ottimizzare andando ad annullare le derivate parziali del ΔV^2 approssimato. Da cui:

$$s_x = -\frac{2x + my + nz}{(4 + m^2 + n^2)x} \quad (\text{Eq. 4.53})$$

$$s_y = -\frac{2mx - (4 + n^2)y + mnz}{(8 + 2m^2 + 2n^2)y} \quad (\text{Eq. 4.54})$$

$$s_z = -\frac{2nx + mny - (4 + m^2)z}{(8 + 2m^2 + 2n^2)z} \quad (\text{Eq. 4.55})$$

4.3.4 Metodo Attendista

Caso particolare del metodo *ai Ω -transfer* per il quale si impongono nulli i parametri di ripartizione, da cui le Eq. 4.51 e 4.52 diventano:

$$\Delta V_a = 0 \quad (\text{Eq. 4.56})$$

$$\Delta V_b = \Delta V = \sqrt{(x)^2 + (y)^2 + (z)^2} \quad (\text{Eq. 4.57})$$

In altre parole, si rende la trasferta da bi-impulsiva a mono-impulsiva. Questo metodo potrebbe risultare interessante, per esempio, nell'intorno di $t_{mis} = t^*$, in quanto la soluzione con parametri ottimizzati si basa su un'approssimazione del ΔV e pertanto potrebbe succedere che la soluzione forzata risulti preferibile a quella ottimizzata. Perde di utilità tanto più $t_{mis} > t^*$, in quanto aspettare ulteriormente porterebbe le RAAN delle due orbite ad allontanarsi sempre più, peggiorando dunque il costo della manovra associata.

4.3.5 Considerazioni aggiuntive

4.3.5.1 Ripartizioni differenze parametri orbitali

Sostituendo nelle Eq. 4.33 4.34 e 4.39 i parametri di ripartizione, è possibile valutare le partizioni di Δa , Δi , $\Delta\Omega$ tra il primo e il secondo impulso:

$$\Delta\Omega_a = \frac{2}{\pi} \frac{x s_x}{V_0 \sin i_0} \quad (\text{Eq. 4.58})$$

$$\Delta a_a = \frac{2a_0}{V_0} y s_y \quad (\text{Eq. 4.59})$$

$$\Delta i_a = \frac{2}{\pi} \frac{z s_z}{V_0} \quad (\text{Eq. 4.60})$$

$$\Delta\Omega_b = \frac{2}{\pi} \frac{(x - x s_x + \Delta x)}{V_0 \sin i_0} \quad (\text{Eq. 4.61})$$

$$\Delta a_b = \frac{2a_0}{V_0} (y - y s_y) \quad (\text{Eq. 4.62})$$

$$\Delta i_b = \frac{2}{\pi} \frac{(z - z s_z)}{V_0} \quad (\text{Eq. 4.63})$$

Per il metodo *ai-transfer* le variazioni $\Delta\Omega_a$ e $\Delta\Omega_b$ sono nulle.

4.3.5.2 Guadagno Effetto J_2

Come descritto nel paragrafo 4.3.2 Δx rappresenta la variazione di $\dot{\Omega}$ (RAAN Rate) ad opera della variazione dei parametri orbitali dell'orbita del chaser compiuta con il primo impulso. Rappresenta in altre parole un guadagno in termini di ΔV_b per portare la linea dei nodi dei due piani orbitali a coincidere. Tale guadagno è parte di una spesa più ampia per il metodo *ai Ω -transfer*, mentre è l'unico effetto sulla RAAN per il metodo *ai-transfer*. È invece nullo per il metodo attendista, nel quale, non essendoci la prima burn, manca totalmente della variazione di RAAN rate che comporterebbero Δa_a e Δi_a . Volendo tradurre in termini di gradi o radianti il guadagno apportato dall'Effetto J_2 , si può introdurre un $\Delta\Omega_{J_2}$ legato al Δx dalla seguente relazione:

$$\Delta\Omega_{J_2} = \frac{2}{\pi} \frac{\Delta x}{V_0 \sin i_0} \quad (\text{Eq. 4.64})$$

$\Delta\Omega_{J_2}$ rappresenta appunto la porzione di differenza di RAAN che si guadagna sfruttando la perturbazione J_2 . Definendo $\Delta\Omega_{tot}$ la differenza complessiva di RAAN tra le due orbite introdotta nella Eq. 4.39 come $(\Omega_T(t_{mis}) - \Omega_C(t_{mis}))$:

$$\Delta\Omega_{tot} = \Delta\Omega_{imp} - \Delta\Omega_{J2} \quad (Eq. 4. 65)$$

Dove, per differenza, il $\Delta\Omega_{imp}$ è la porzione di $\Delta\Omega_{tot}$ che necessita di essere azzerata tramite controllo attivo della RAAN e dunque pagata in termini di ΔV e propellente.

Per quanto detto finora:

- Metodo *ai-transfer*: $\Delta\Omega_{imp} = 0$; $\Delta\Omega_{J2} \neq 0 \rightarrow \Delta\Omega_{tot} = -\Delta\Omega_{J2}$
- Metodo *ai Ω -transfer*: $\Delta\Omega_{imp} \neq 0$; $\Delta\Omega_{J2} \neq 0 \rightarrow \Delta\Omega_{tot} = \Delta\Omega_{imp} - \Delta\Omega_{J2}$
- Metodo *Attendista*: $\Delta\Omega_{imp} \neq 0$; $\Delta\Omega_{J2} = 0 \rightarrow \Delta\Omega_{tot} = \Delta\Omega_{imp}$

Si noti che quanto sopra riportato non vuol dire che nell'applicazione del metodo attendista l'Effetto J2 non abbia alcun effetto utile: tale effetto è nascosto nella definizione di $\Delta\Omega_{tot}$, il quale dipende dai valori finali di Ω_C e Ω_T , a loro volta influenzati da J2. Semplicemente vuol dire che il metodo attendista non gode dell'ulteriore sconto di ΔV derivante da Δa_a e Δi_a .

Di seguito alcuni grafici che riportano gli andamenti di queste grandezze in funzione del tempo di missione, di modo da comprendere meglio l'impatto dell'Effetto J2 sulla fattibilità della missione. Nella seguente Tabella sono riportati i dati delle orbite di partenza e di arrivo relative all'esempio considerato.

	Orbita Di Partenza	Orbita Di Arrivo
a	7150.3 km	7104.8 km
e	0	0
i	98.64 deg	97.45 deg
Ω	137.59 deg	138.05 deg
$\dot{\Omega}_{J2}$	1.0011 deg/day 2.0223e-07 rad/s	0.8836 deg/day 1.7849e-07 rad/s

Tabella 4.1. Riepilogo parametri orbitali.

Date le condizioni iniziali di RAAN e di velocità del fenomeno di precessione della linea dei nodi associato a J2, le linee dei nodi andranno a coincidere nell'istante t^* :

$$t^* = \frac{\Omega_C - \Omega_T}{\dot{\Omega}_T - \dot{\Omega}_C} = 3.91 \text{ day} \quad (\text{Eq. 4. 66})$$

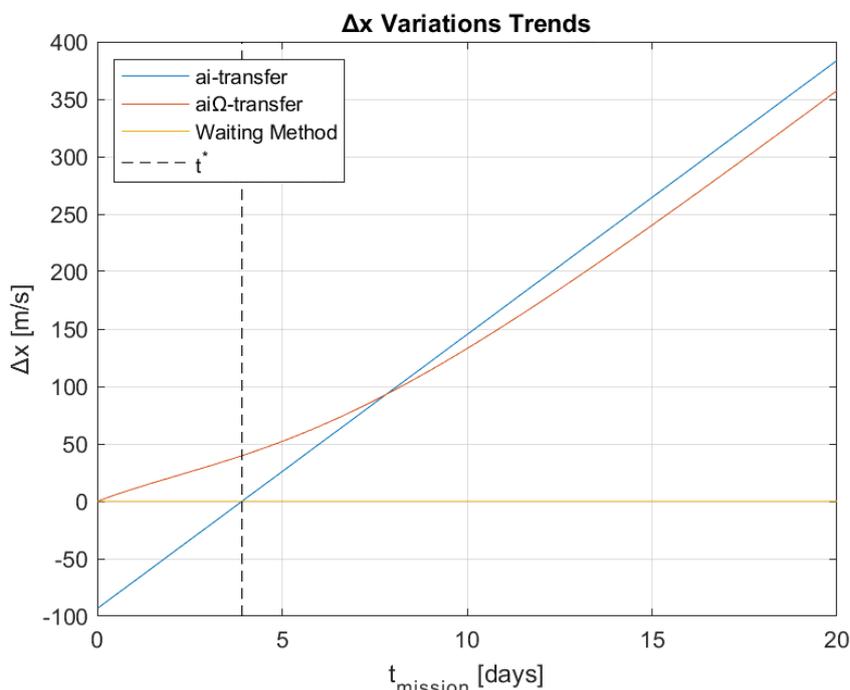


Figura 4.1. Confronto metodi sull'andamenti di Δx in funzione della durata della missione.

Da Figura 4.1 si evince come il Δx rimanga costantemente al valor nullo per la soluzione attendista e risulti invece crescere in maniera monotona con la durata della missione per le soluzioni *aiΩ-transfer* e *ai-transfer*. Vi sono però due differenze significative che distinguono questi ultimi due casi:

- *ai-transfer*, l'andamento è lineare e la retta parte da valori negativi per poi arrivare a valori positivi passando lo zero in corrispondenza di t^*
- *aiΩ-transfer*, l'andamento non è lineare e la curva assume sempre valori positivi

Risulta molto interessante ragionare sul segno di Δx :

$$\begin{aligned}
 - \Delta x > 0 &\rightarrow \begin{cases} ai - transfer \rightarrow x < 0 \\ ai\Omega - transfer \rightarrow (x + \Delta x) \leq 0 \end{cases} \\
 - \Delta x < 0 &\rightarrow \begin{cases} ai - transfer \rightarrow x > 0 \\ ai\Omega - transfer \rightarrow (x + \Delta x) \leq 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Nel caso *ai-transfer* il Δx è esattamente l'opposto del costo della manovra per il $\Delta\Omega$ (Eq. 4.44), dunque il suo segno detta semplicemente la direzione di spinta fuori dal piano. Non

Modello matematico e metodi di ottimizzazione

svolge il ruolo di “sconto” del costo della manovra, ma rappresenta l’unico legame tra il $\Delta\Omega$ e ΔV (compare nelle relazioni dei coefficienti di ripartizione, Eq 4.49-4.50), se non ci fosse il Δx la *ai-transfer* non potrebbe neanche esistere. È un costo aggiuntivo nella misura in cui il metodo prevede e necessita senza altra possibile soluzione un certo RAAN Rate, a costo di spendere di più per il controllo di semiasse ed inclinazione, e quel “di più” è esattamente Δx . La sua curva di variazione passa dallo zero esattamente a t^* perché per $t_{mis} = t^*$ il RAAN Rate iniziale del chaser è già quello ideale, non è necessario modificarlo per raggiungere $\Delta\Omega = 0$ al termine della missione. Per $t < t^*$ è necessario accelerare la precessione della linea dei nodi, viceversa per $t > t^*$ bisogna rallentarla.

Nella *ai Ω -transfer* invece compare anche in maniera diretta nella relazione del ΔV_b (Eq.4.57) nella somma $(x + \Delta x)$ che non è necessariamente nulla, a differenza del caso precedente. Pertanto, è necessario studiare il segno di $(x + \Delta x)$ per comprendere la direzione di spinta del secondo impulso. Graficamente:

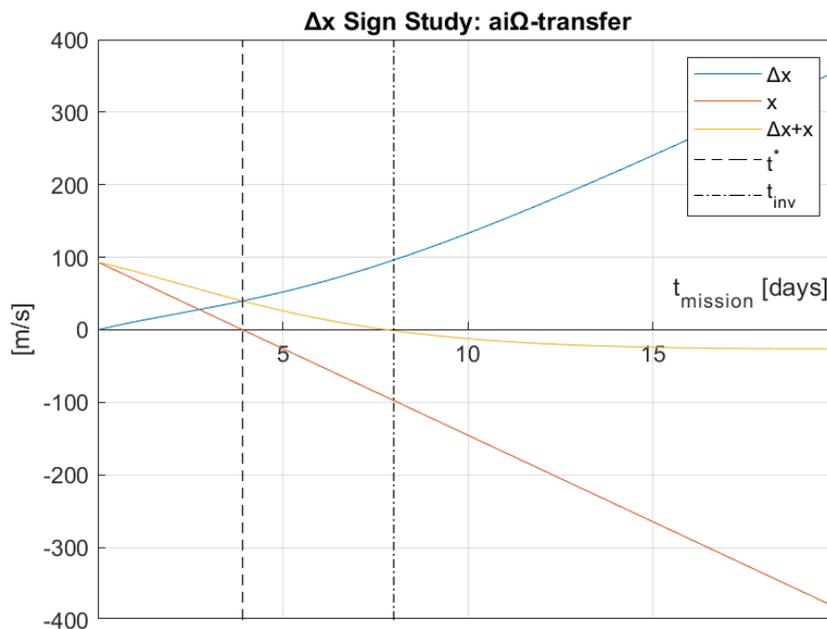


Figura 4.2. Andamenti Δx , x e $\Delta x+x$ in funzione di t_{mis} .

Gli andamenti in Figura 4.2 mostrano come x tenda a decrescere in maniera monotona all’aumentare della durata della missione. Definendo t_{inv} la t_{mis} per la quale $\Delta x + x = 0$, è possibile suddividere il grafico in tre zone.

- 1) Per $0 < t < t^*$: $\Omega_T(t_f) > \Omega_C(t_f) \rightarrow Eq. 4.39 \rightarrow x > 0$ e $\Delta x + x > 0 \rightarrow \Delta V_{a_x} + \Delta V_{b_x} > 0$

- 2) Per $t^* < t < t_{inv}$: $\Omega_T(t_f) < \Omega_C(t_f) \rightarrow Eq. 4.39 \rightarrow x < 0$ e $\Delta x + x > 0 \rightarrow \Delta V_{a_x} + \Delta V_{b_x} > 0$
- 3) Per $t > t_{inv}$: $\Omega_T(t_f) < \Omega_C(t_f) \rightarrow Eq. 4.39 \rightarrow x < 0$ e $\Delta x + x < 0 \rightarrow \Delta V_{a_x} + \Delta V_{b_x} < 0$

Nell'esempio in esame $t_{inv} = 7.81$ days.

È interessante notare come nel secondo caso, sebbene $x < 0$ la burn è effettuata in direzione positiva, pur sembrando controintuitivo ciò è giustificato dal fatto che il ΔV_a ha modificato il RAAN Rate del chaser tanto da provocare un'inversione del segno di $(\Omega_T(t_f) - \Omega_C(t_f))$. In altre parole, è come se a valle del primo impulso cambiassero le condizioni iniziali della fase di coasting e con esse il rateo $\dot{\Omega}_C$, e dunque non è necessariamente vero che $sign(\Omega_T(t_f) - \Omega_{C_{new}}(t_f)) \equiv sign(\Omega_T(t_f) - \Omega_{C_0}(t_f))$. Ed è proprio ciò che succede nel secondo caso.

È altrettanto interessante studiare i moduli delle grandezze riportate in Figura 4.2, al fine di comprendere l'impatto di Δx sul costo della manovra. Si riportano dunque nella Figura 4.3 i valori assoluti delle grandezze in esame.

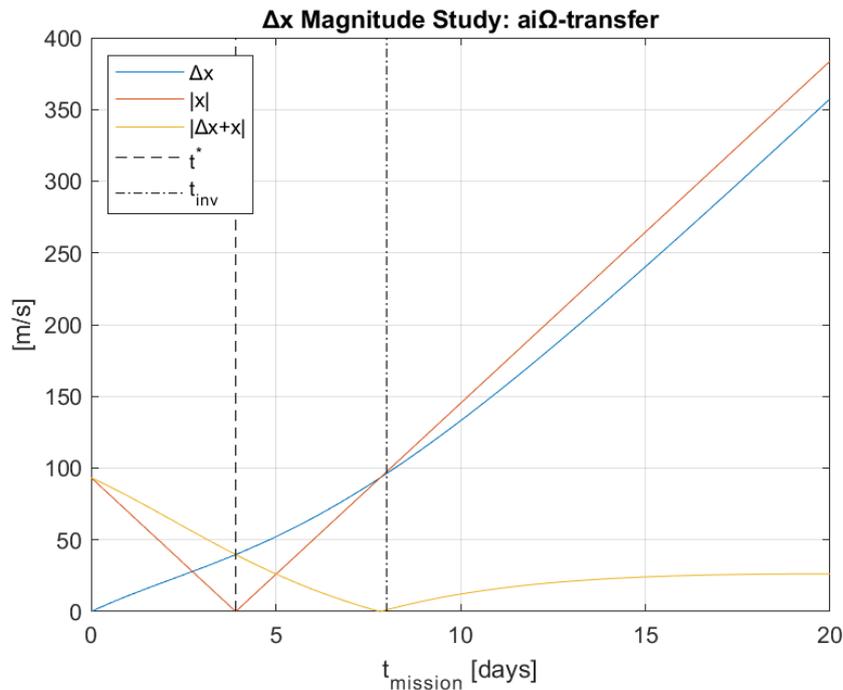


Figura 4.3. Andamenti $\Delta x, |x|$ e $|\Delta x + x|$ in funzione di t_{mis} .

Modello matematico e metodi di ottimizzazione

Si ricordi che $(x + \Delta x)$ rappresenta il costo reale della manovra su $\Delta\Omega$. Dove la curva che ne descrive l'evoluzione (curva gialla) è "sotto" la curva rossa: il contributo di Δx è utile, riduce il costo effettivo a fronte della spesa iniziale che si era stimata (x) senza tenere in conto degli effetti sul RAAN Rate delle variazioni Δa_a e Δi_a .

- Per $t < \sim 5 \text{ day}$. Il contributo di Δx è negativo: se si fosse mantenuto il $\dot{\Omega}_C$ iniziale il $\Delta\Omega(f)$ sarebbe stato inferiore e sarebbe costato meno colmarlo
- Per $t > \sim 5 \text{ day}$. Il contributo di Δx è positivo: con il nuovo $\dot{\Omega}_C$ il $\Delta\Omega(f)$ è inferiore e pertanto richiede un ΔV inferiore per essere compensato

Si noti che più aumenta il tempo di missione e più l'effetto di Δx diventa fondamentale, già dagli 8 giorni in poi si vede un risparmio di più di un ordine di grandezza, assolutamente non trascurabile, e anzi, potrebbe essere la discriminante tra una missione fattibile e una non.

Altro aspetto molto interessante è che se per $t < \sim 5 \text{ day}$ il Δx è peggiorativo deriva dall'approssimazione sull'ottimizzazione del ΔV (paragrafo 4.3.3) e dall'aver trascurato il termine di doppio prodotto. Si vedrà nel prossimo paragrafo che è proprio in questa zona che potrebbe essere più conveniente il Metodo Attendista che, per l'appunto, non introduce variazioni di $\dot{\Omega}_C$ e dunque pone $\Delta x = 0$.

Essendo intrinsecamente legati al concetto di Δx , si riportano ora gli andamenti di $\Delta\Omega_{tot}$, $\Delta\Omega_{J2}$ e $\Delta\Omega_{imp}$ per l'esempio considerato (Tabella 4.1) confrontando i tre metodi introdotti.

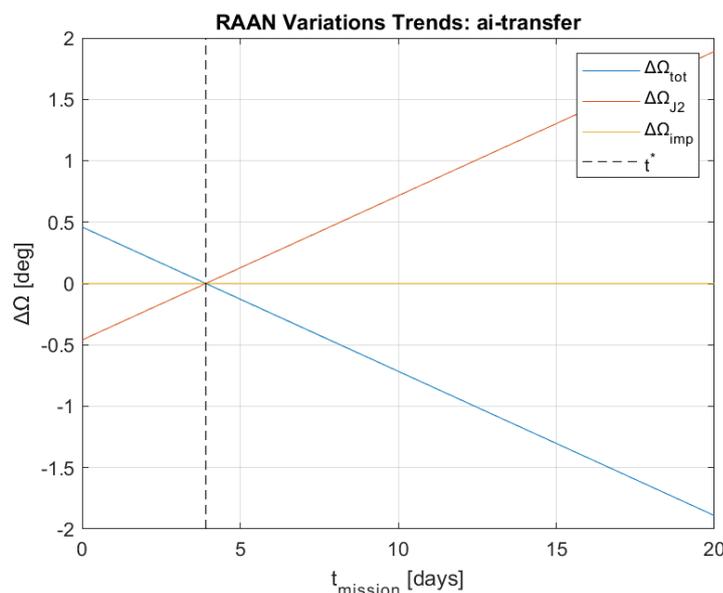


Figura 4.4. Andamenti $\Delta\Omega_{tot}$, $\Delta\Omega_{J2}$ e $\Delta\Omega_{imp}$ in funzione di t_{mis} : ai-transfer.

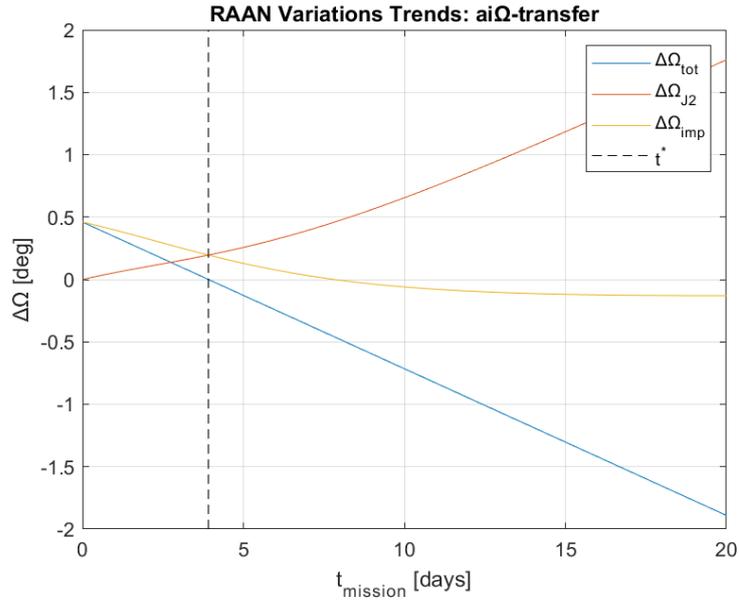


Figura 4.5. Andamenti $\Delta\Omega_{tot}$, $\Delta\Omega_{J2}$ e $\Delta\Omega_{imp}$ in funzione di t_{mis} : ai Ω -transfer.

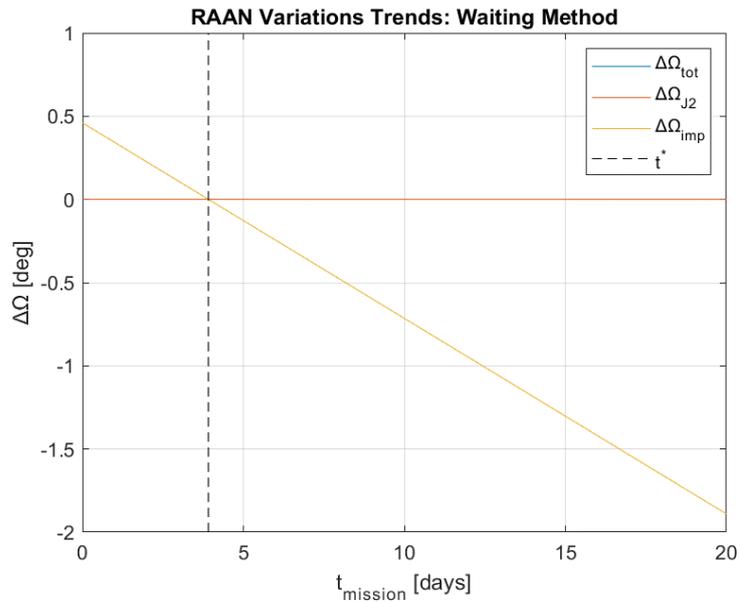


Figura 4.6. Andamenti $\Delta\Omega_{tot}$, $\Delta\Omega_{J2}$ e $\Delta\Omega_{imp}$ in funzione di t_{mis} : Metodo Attendista.

Come prescritto dalle considerazioni formulate in relazione all'Equazione 4.65, dalle Figure 4.4 e 4.6 si evince immediatamente come: $\Delta\Omega_{imp} = 0$ per il metodo *ai-transfer* e $\Delta\Omega_{J2} = 0$ per il metodo attendista. Per cui nel primo caso $\Delta\Omega_{tot} = -\Delta\Omega_{J2}$ e nel secondo $\Delta\Omega_{tot} = -\Delta\Omega_{imp}$. In tutti e tre i casi il $\Delta\Omega_{tot}$ parte da 0.46° ovvero il valore di $\Omega_C(t_0) - \Omega_T(t_0)$ e tende a decrescere via via che si lascia più tempo al $J2$ di perturbare la linea dei nodi naturalmente, fino al valore ottimo di t^* . Andando ancora avanti l'orbita del chaser ha ormai "superato" l'orbita target e dunque $\Delta\Omega_{tot}$ ricomincia a crescere in modulo, ma con segno negativo, sintomo del fatto che appunto il $\Delta\Omega$ è in direzione opposta rispetto a $t < t^*$. È infine interessante notare

Modello matematico e metodi di ottimizzazione

come gli andamenti del metodo *ai* Ω -*transfer* (Figura 4.5) siano pressoché sovrapponibili a quelli di Figura 4.2, dimostrazione del legame forte che unisce Δx a queste grandezze. In particolare:

$$\Delta\Omega_{tot} \propto x \quad \Delta\Omega_{J2} \propto \Delta x \quad \Delta\Omega_{imp} \propto x + \Delta x$$

Si noti che il punto di ottimo della *ai* Ω -*transfer*, ovvero quella a cui $\Delta\Omega_{imp} = 0$ ($t_{mis} = t_{inv}$), corrisponde esattamente a $\Delta\Omega_{tot} = -0.46^\circ$, pari all'opposto del valore iniziale e la durata t^* divide esattamente a metà l'intervallo $[0, t_{inv}]$.

4.3.6 Esempio numerico: caso impulsivo

Dopo aver approfonditamente analizzato gli andamenti di Δx e $\Delta\Omega$ nel precedente paragrafo, con riferimento ai dati di Tabella 4.1 si analizza ora l'andamento anche delle altre grandezze ricavate in questo Capitolo.

4.3.6.1 Costi di trasferta: $x y z$

Con riferimento alle condizioni iniziali di Tabella 4.1:

$$\Delta a = a_T - a_C = 45.5 \text{ km}$$

$$\Delta i = i_T - i_C = 1.19 \text{ deg}$$

$$\Delta\Omega_0 = \Omega_T(t_0) - \Omega_C(t_0) = 0.46 \text{ deg}$$

Si riportano dunque di andamenti di $y = f(\Delta a)$; $z = f(\Delta i)$; $x = f(\Delta\Omega_f)$ secondo le Eq. 4.33, 4.34, 4.39.

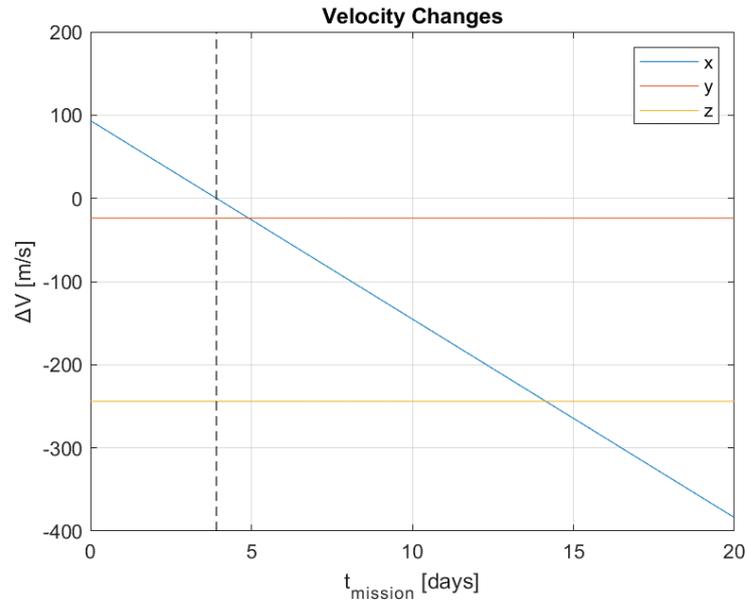


Figura 4.7. Andamenti di x , y e z in funzione di t_{mis} .

Considerazioni:

- y e z dipendono unicamente dalle condizioni iniziali dell'orbita di partenza e dell'orbita di arrivo, sono pertanto costanti al variare di t_{mis}
- x dipende da t_{mis} tramite $\Delta\Omega_f$, dipende dalle RAAN finali delle orbite, pertanto non è costante, ma ha andamento monotono decrescente sovrapponibile all'andamento di $\Delta\Omega_{tot}$ di cui al paragrafo precedente. Si annulla a t^* e assume valori negativi una volta che l'orbita del chaser ha superato quella del target ($\Omega_{cf} > \Omega_{Tf}$).
- Le variazioni di velocità richieste non dipendono dal metodo sfruttato per effettuare la trasferta

4.3.6.2 Parametri di Ripartizione: ai-transfer

Di seguito si riportano gli andamenti dei parametri di ripartizione in x , y e z e relativi complementari, in funzione di t_{mis} per il metodo *ai-transfer*.

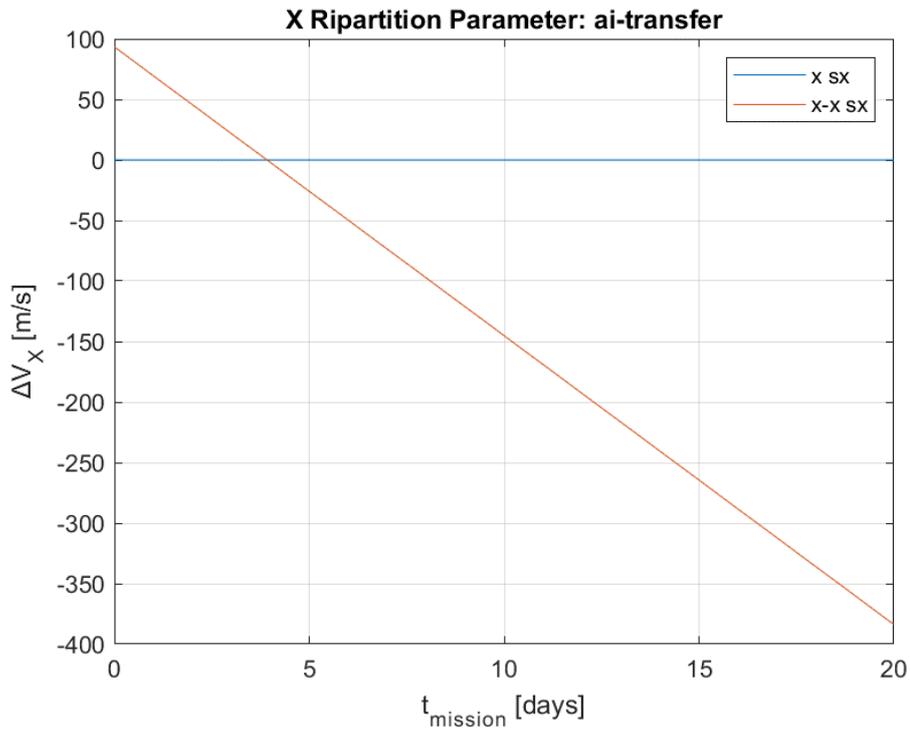


Figura 4.8. Andamenti $x s_x$ e $x - x s_x$ in funzione di t_{mis} : ai-transfer.

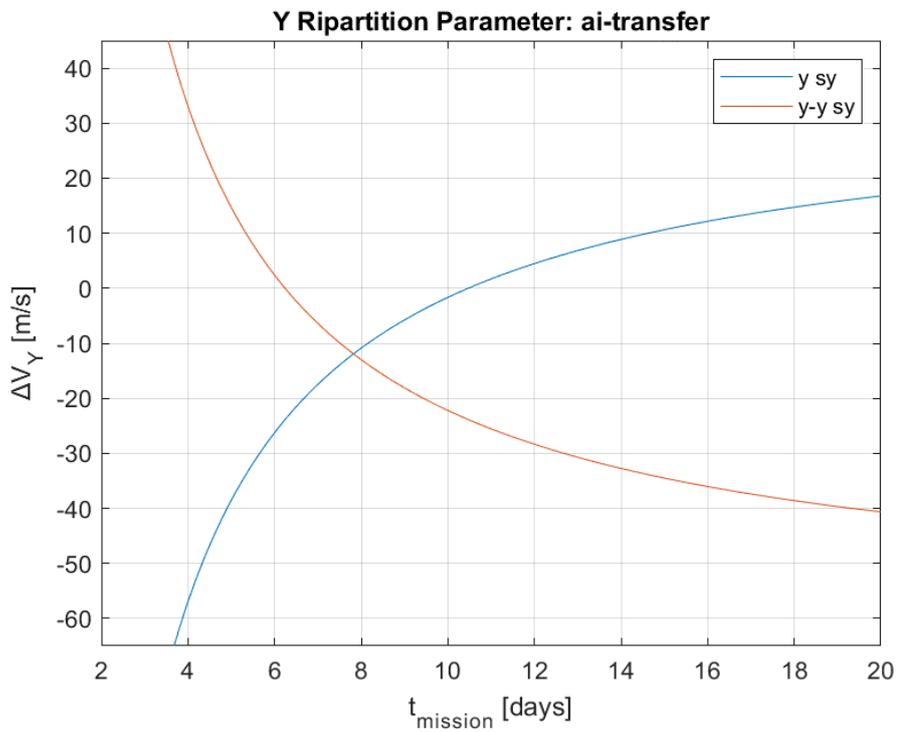


Figura 4.9. Andamenti $y s_y$ e $y - y s_y$ in funzione di t_{mis} : ai-transfer.

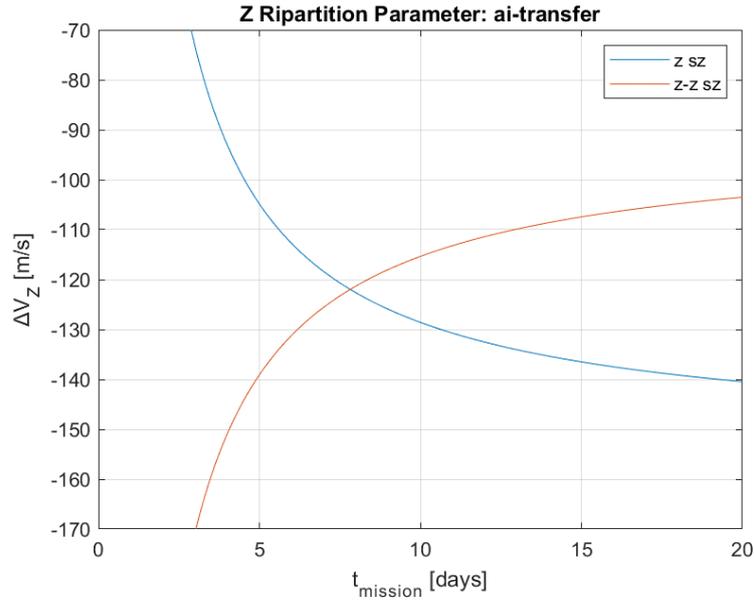


Figura 4.10. Andamenti $z s_z$ e $z - z s_z$ in funzione di t_{mis} : ai-transfer.

Gli andamenti dei parametri di ripartizione per le manovre di variazione del semiasse (y) ed inclinazione (z), e dei rispettivi complementari, risultano simmetrici rispetto a $\frac{y}{2}$ e $\frac{z}{2}$ rispettivamente. Nel punto di intersezione delle curve:

$$y s_y = y - y s_y \rightarrow y s_y = \frac{y}{2}; y - y s_y = \frac{y}{2}$$

$$z s_z = z - z s_z \rightarrow z s_z = \frac{z}{2}; z - z s_z = \frac{z}{2}$$

È ovvio che sia così: la somma delle due curve deve sempre dare lo stesso valore, corrispondente ai costi complessivi y e z . La durata della missione per cui le due curve si interseca è di 7.81 giorni, corrispondente al t_{inv} , parametro già accennato in precedenza e che verrà meglio approfondito nei prossimi paragrafi. Fisicamente ciò significa che per questo specifico t_{mis} il costo in termini di velocità per compensare le differenze di semiasse ed inclinazione è perfettamente diviso tra primo e secondo impulso. Inoltre, per y e z si osserva un andamento asintotico per $t_{mis} \rightarrow \infty$ e per $t_{mis} \rightarrow 0$. In questo secondo caso in particolare:

$$\blacktriangleright (y - y s_y, z s_z) \rightarrow +\infty$$

$$\blacktriangleright (y s_y, z - z s_z) \rightarrow -\infty$$

Matematicamente risulta ovvio, per la *ai-transfer* si è dimostrato che:

$$(y_{s_y}, z_{s_z}) \propto \frac{1}{m^2 + n^2}$$

Per tempi che tendono a zero, i parametri m ed n tendono a 0. Pertanto, è giustificato l'andamento dei parametri di ripartizione. È più interessante l'aspetto fisico di questa considerazione: non agendo direttamente sulla RAAN ma andando a modificare il RAAN Rate indotto dall'effetto J2 è necessario che questo abbia modo e tempo di agire. Minore è il tempo a disposizione e più grande deve essere $\dot{\Omega}$. Per tempi tendenti a zero, $\dot{\Omega}$ deve tendere ad infinito e con esso i parametri orbitali da cui dipende (secondo la relazione 2.50). In altre parole, il metodo *ai-transfer* risulta irrealizzabile per missioni di durata troppo breve. Nell'esempio in esame un tempo limite sotto il quale non converrebbe scendere è nell'intorno dei 5 giorni.

Per quanto riguarda la ripartizione del costo di variazione della RAAN:

- non si osservano singolarità per tempi piccoli
- s_x è costantemente nullo per definizione di *ai-transfer*
- $x - s_x = x = -\Delta x$, difatti ha esattamente lo stesso andamento (ribaltato) riportato per Δx in Figura 4.1.

4.3.6.3 Parametri di Ripartizione: *aiΩ-transfer*

Di seguito si riportano gli andamenti dei parametri di ripartizione in x , y e z e relativi complementari, in funzione di t_{mis} per il metodo *aiΩ-transfer*.

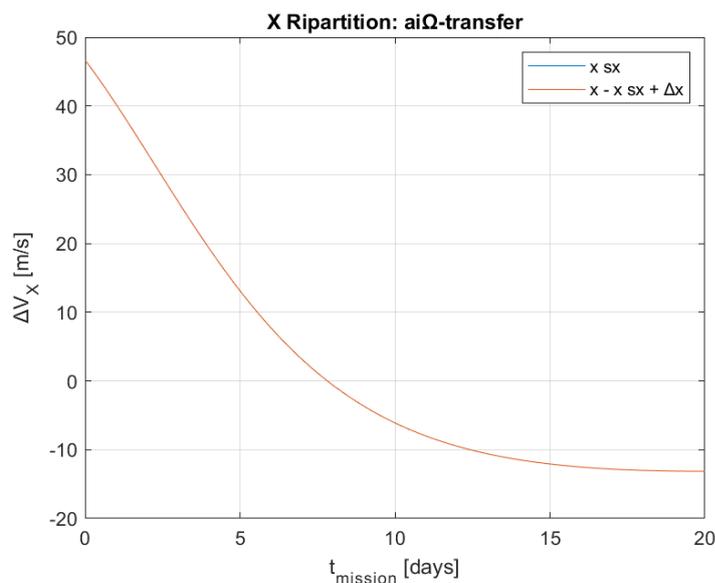


Figura 4.11. Andamenti x s_x e $x - x s_x$ in funzione di t_{mis} : *aiΩ-transfer*.

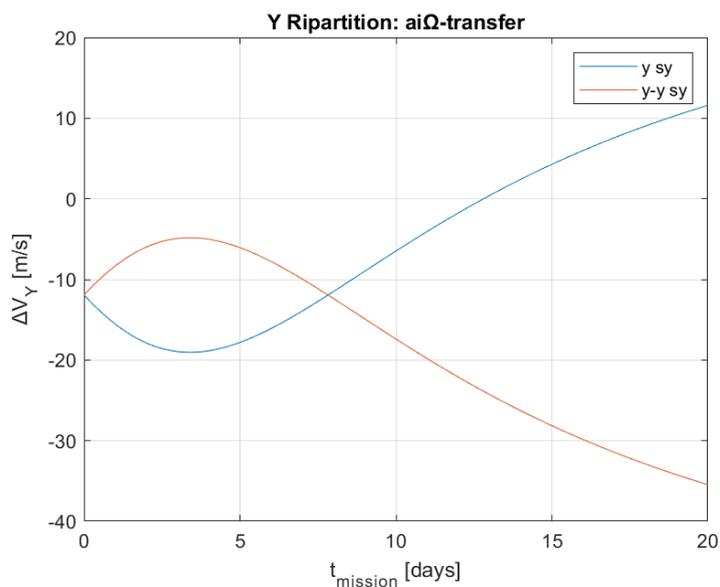


Figura 4.12. Andamenti $y s_y$ e $y - y s_y$ in funzione di t_{mis} : aiΩ-transfer.

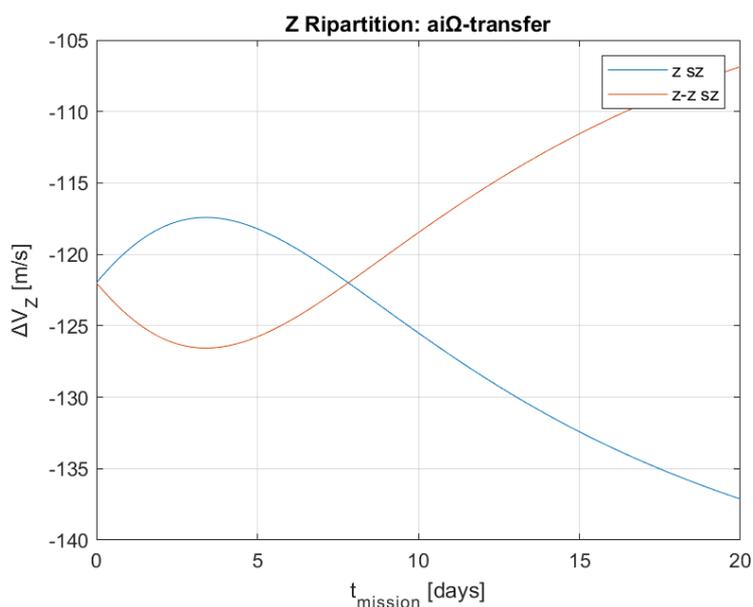


Figura 4.13. Andamenti $z s_z$ e $z - z s_z$ in funzione di t_{mis} : aiΩ-transfer.

Non dovendosi fare carico della variazione di $\dot{\Omega}$ i parametri di ripartizione e relativi complementari non presentano alcuna singolarità per $t_{mis} \rightarrow 0$. Ciò rende questo metodo incredibilmente più stabile e utile dell'*ai-transfer* quando il vincolo sulla durata della missione è particolarmente stringente. Anche in questo caso però le curve relative a y e z risultano simmetriche rispetto a $\frac{y}{2}$ e $\frac{z}{2}$. La condizione di intersezione delle curve si raggiunge per due t_{mis} :

$$t_{mis} = 0 \quad t_{mis} = t_{inv} = 7.81 \text{ days}$$

Modello matematico e metodi di ottimizzazione

Il primo è un caso estremo, è come se si effettuassero entrambi gli impulsi nello stesso istante. Il secondo caso invece è analogo al metodo *ai - transfer*.

Per quanto riguarda la ripartizione di x , nel grafico 4.11 è visibile una sola curva perché xS_x e $x - xS_x + \Delta x$ hanno lo stesso andamento:

$$xS_x = x - xS_x + \Delta x \rightarrow xS_x = \frac{x + \Delta x}{2}$$

Ovvero, per ogni t_{mis} , la suddivisione ottimale del costo di trasferta per l'azzeramento di $\Delta\Omega$ è 50% al primo impulso e 50% al secondo. Anche in questo caso esiste un legame con t_{inv} :

$$se\ t_{mis} = t_{inv} \rightarrow xS_x = x - xS_x + \Delta x = 0$$

Da Figura 4.4 si evince come per t_{inv} il $\Delta\Omega_{imp}$ si annulli e pertanto non si necessita di alcuna burn per il controllo attivo della RAAN. Il $\Delta\Omega_{tot}$ è completamente compensato dall'effetto "gratuito" di Δx .

4.3.6.4 Parametri di Ripartizione: Metodo Attendista

Di seguito si riportano gli andamenti dei parametri di ripartizione e relativi complementari, in funzione di t_{mis} per il metodo attendista.

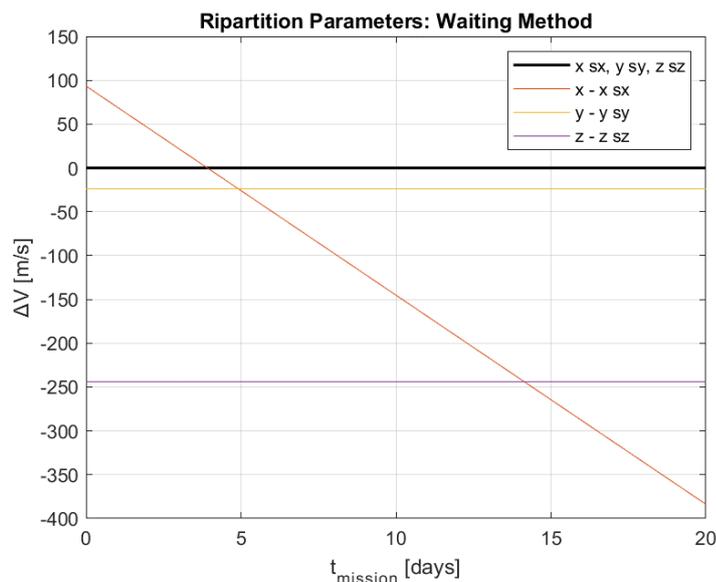


Figura 4.14. Andamento parametri di ripartizione in funzione di t_{mis} : metodo attendista.

Si è deciso di riportarli insieme nel medesimo grafico in quanto:

- Per definizione di metodo attendista $x s_x = y s_y = z s_z = 0$
- I complementari ricalcano inevitabilmente gli andamenti di x , y , z come riportati in Figura 4.1

4.3.6.5 Impulsi: confronto tra i metodi

Di seguito si riportano gli andamenti di ΔV_a e ΔV_b in funzione di t_{mis} per i metodi *ai-transfer*, *ai Ω -transfer* e attendista.

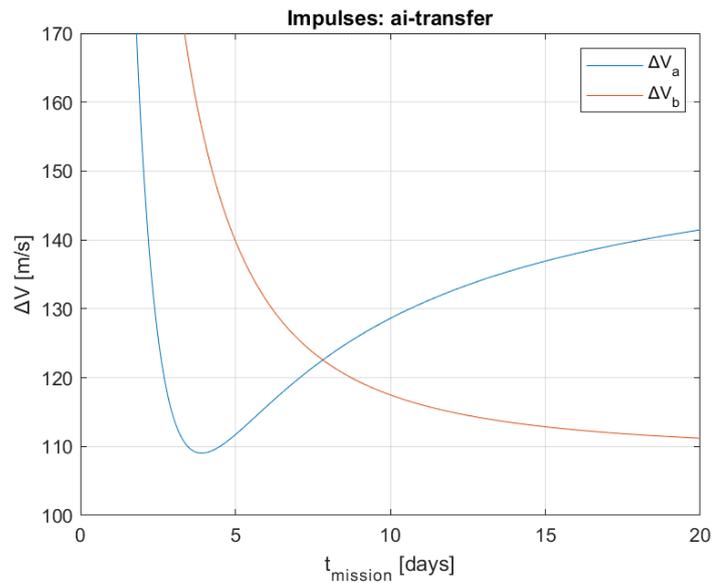


Figura 4.15. Andamenti ΔV_a e ΔV_b in funzione di t_{mis} : ai-transfer.

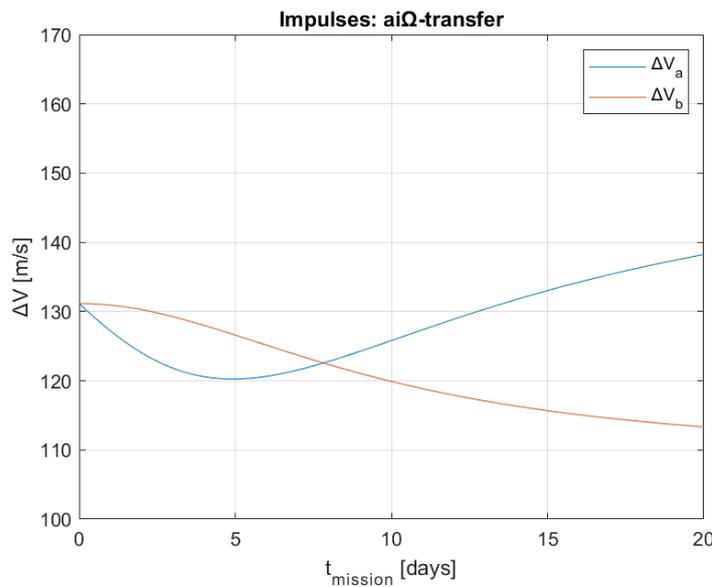


Figura 4.16. Andamenti ΔV_a e ΔV_b in funzione di t_{mis} : ai Ω -transfer.

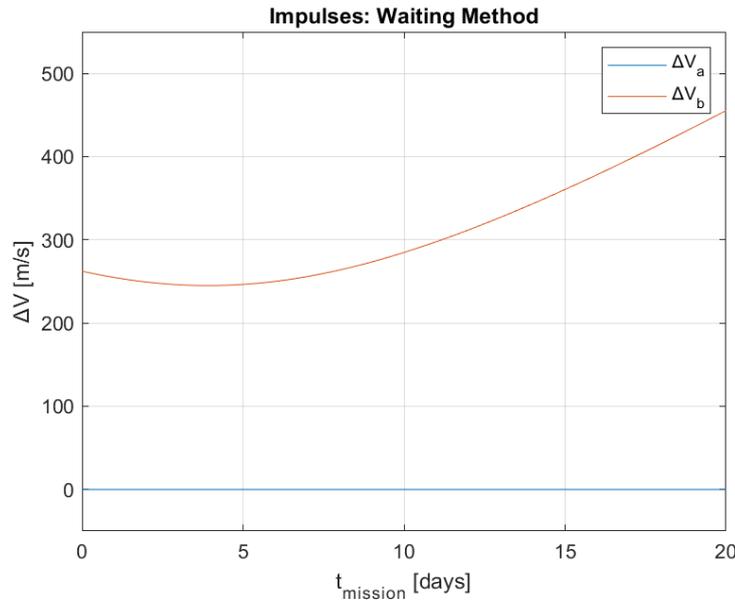


Figura 4.17. Andamenti ΔV_a e ΔV_b in funzione di t_{mis} : metodo attendista.

Confrontando i metodi *ai-transfer* e *ai Ω -transfer*:

- Per entrambi, ΔV_b risulta monotona decrescente, mentre ΔV_a presenta un iniziale diminuzione, arriva ad un minimo per un certo t_{mis}° e infine continua a crescere
- Raggiungono $\Delta V_{a_{min}}$ a t_{mis}° diversi: $(t_{mis}^\circ)_{ai} = 3.92 \text{ days}$, $(t_{mis}^\circ)_{ai\Omega} = 4.92 \text{ days}$
- $(t_{mis}^\circ)_{ai} \equiv t^*$
- In entrambi i metodi esiste un t_{mis} per cui $\Delta V_b = \Delta V_a$; suddetto t_{mis} coincide con t_{inv}
- Per $t_{mis} < t_{inv} \rightarrow \Delta V_b > \Delta V_a$
- Per $t_{mis} > t_{inv} \rightarrow \Delta V_b < \Delta V_a$
- I ΔV_a e ΔV_b esplodono a infinito per t_{mis} che tende a zero nella soluzione *ai-transfer*
- Quanto detto al punto precedente non succede per *ai Ω -transfer*

Le considerazioni ai punti 4 e 7 sono strettamente legate agli andamenti dei parametri di ripartizione, analizzati nei sottoparagrafi precedenti.

Per quanto riguarda il metodo attendista: per sua definizione il ΔV_a risulta costantemente nullo, mentre il $\Delta V_b \equiv \Delta V_{tot}$. Anche in questo caso, come per *ai-transfer*, il minimo è raggiunto a t^* .

4.3.6.6 Costo totale della trasferta: confronto tra i metodi

Di seguito si riportano gli andamenti di ΔV_{tot} in funzione di t_{mis} per i metodi *ai-transfer*, *ai Ω -transfer* e attendista.

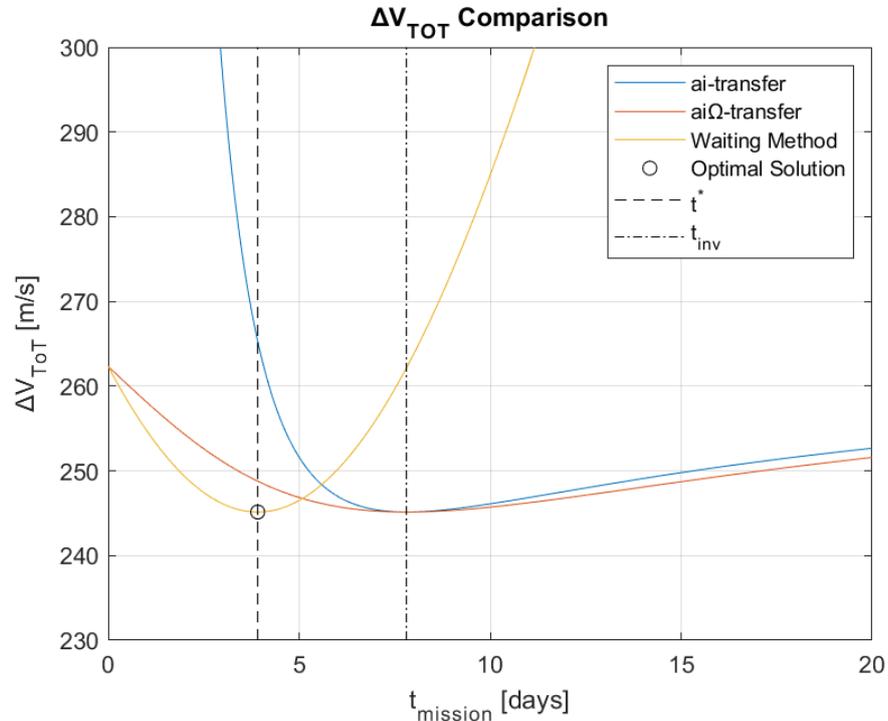


Figura 4.18. Confronto andamenti ΔV_{tot} in funzione di t_{mis} .

Considerazioni:

- Per tutti i metodi il ΔV_{tot} si presenta come una funzione del t_{mis} decrescente/crescente; esiste quindi una condizione di minimo

	ai-transfer	ai Ω -transfer	Metodo Attendista
$\Delta V_{tot_{min}}$ [m/s]	245.13839998	245.13839297	245.13838666
$t_{mis}(\Delta V_{tot_{min}})$ [days]	7.81	7.81	3.91

Tabella 4.2. Confronto numerico costo totale della trasferta.

- I valori minimi di ΔV_{tot} sono pressoché identici, sono congruenti fino alla sesta cifra decimale
- Per il metodo Attendista il minimo si raggiunge a t^*

- Nei metodi *ai-transfer* e *aiΩ-transfer* la condizione di minimo si raggiunge a 7.81 giorni, ovvero a t_{inv}
- Dalla considerazione precedente, in unione alla definizione di t_{inv} , data commentando Figura 4.2, si può affermare che: il costo minimo per *aiΩ-transfer* è raggiunto per quella durata di missione per cui $\Delta x + x = 0$, ovvero $\Delta\Omega_{imp} = 0$, tutto il $\Delta\Omega$ è coperto da Δx , non è necessario un controllo attivo di RAAN (Figura 4.11)
- Nella condizione di ottimo per *aiΩ-transfer* e *ai-transfer* gli impulsi hanno medesima magnitudine: $\Delta V_a = \Delta V_b = \Delta V_{tot}/2$ (Figura 4.15/4.16), ovvero $s_y = s_z = 1/2$
- Quando per *aiΩ-transfer* è verificato che $\Delta x + x = 0$ la soluzione coincide con la soluzione *ai-transfer* (Eq. 4.44)
- A meno del caso limite di cui al punto precedente:

$$(\Delta V_{tot})_{ai} > (\Delta V_{tot})_{ai\Omega} \quad \forall t_{mis}$$

- Ciò dimostra che il costo Δx impiegato dalla *ai-transfer* per portare il RAAN Rate del chaser al valore ideale è maggiore del costo impiegato dalla *aiΩ-transfer* per controllare attivamente la RAAN
- La soluzione attendista risulta quella migliore fino a $t_{mis} \cong 5 \text{ days}$, con riferimento a Figura 4.2, corrisponde alla durata della missione per cui $|x| = |\Delta x + x|$, ovvero quando il contributo di Δx passa dall'essere controproducente ad essere utile.

In conclusione, si è dimostrato che la soluzione attendista è la migliore per durate della missione ridotte e che la soluzione *aiΩ-transfer* è sempre preferibile alla *ai-transfer*. Per questa ragione nelle analisi dei capitoli successivi si trascurerà la soluzione *ai-transfer*.

4.3.7 Considerazioni su t^*

Nell'esempio del paragrafo precedente entrambe le orbite erano retrograde ($i > 90^\circ$), per l'Eq. 2.50 quindi e per definizione di regressione della linea dei nodi, $\dot{\Omega}$ scaturito dall'effetto J2 era positivo per entrambe le orbite. Se così non fosse stato e per esempio il chaser fosse partito da un'orbita diretta, lo S/C avrebbe potuto anche raggiungere l'orbita obiettivo, ma si sarebbe trovato a percorrerla in direzione opposta al target. Poiché l'obiettivo di questo lavoro è applicare la metodologia derivata a missioni ADR che quindi prevedono il rendezvous tra i

due S/C, questa soluzione non sarebbe accettabile, in quanto il chaser dovrebbe annullare tutta la sua velocità orbitale e reinserirsi nell'orbita bersaglio con il giusto verso di percorrenza. Si tratta ovviamente di una manovra irrealizzabile, che prevederebbe un costo di almeno una quindicina di km/s.

Inoltre, sempre nell'ambito dell'esempio precedente, il $\Delta\Omega$ al tempo iniziale era di 0.46 gradi con il chaser che partiva "dietro" al target ($\Omega_{C0} < \Omega_{T0}$) e quindi in posizione favorevole sapendo che $\dot{\Omega}_C > \dot{\Omega}_T > 0$. Nonostante questo, la differenza in $\dot{\Omega}$ era tale per cui le linee dei nodi andavano a coincidere solo dopo quasi 4 giorni: $t^* \cong 93.94 h$. Noto il semiasse maggiore dell'orbita di partenza, il periodo dell'orbita era di circa 1.67 ore. In altre parole, l'effetto J2 portava $\Delta\Omega$ ad azzerarsi in ben 56.20 rivoluzioni del chaser.

Per le ragioni su esposte è necessario operare delle distinzioni ed individuare delle casistiche d'interesse.

In prima battuta è stato necessario inserire nel codice sviluppato un primo controllo che, inserite le inclinazioni delle orbite di partenza e di arrivo, escludesse immediatamente le coppie con verso di percorrenza opposto.

Un secondo controllo verifica il segno e la magnitudine di $\dot{\Omega}_C$ e $\dot{\Omega}_T$ di modo da fornire un'indicazione su quale sia il verso di rotazione delle orbite e quale stia ruotando più rapidamente.

Definito il verso di rotazione, il terzo controllo verifica se l'orbita di partenza parta dietro o avanti l'orbita di arrivo. Ovvero se le orbite si stiano avvicinando e $\Delta\Omega$ si riduce, oppure si stiano allontanando e $\Delta\Omega$ sta aumentando. In questo secondo caso è chiaro che t^* aumenti vertiginosamente, in quanto è necessario un giro completo della linea dei nodi affinché i piani orbitali vadano a coincidere. A titolo d'esempio, si considerino orbite con parametri orbitali uguali a quelli riportati in Tabella 4.1 a meno delle RAAN che si considerino invertite, ovvero:

$$\Omega_{C0} = 138.05^\circ \quad \Omega_{T0} = 137.57^\circ$$

In questo caso:

- Entrambe le orbite sono retrograde, la missione è sensata
- $\dot{\Omega}_C$ e $\dot{\Omega}_T$ sono positive
- $|\dot{\Omega}_C| > |\dot{\Omega}_T|$

Modello matematico e metodi di ottimizzazione

- $\Omega_{C0} > \Omega_{T0}$, chaser parte in anticipo rispetto al target
- Pertanto, l'effetto J2 necessiterà di almeno un giro completo della linea dei nodi per portare i piani orbitali a coincidere

$$t^* = \frac{\Omega_{C0} - \Omega_{T0} + 2\pi}{\dot{\Omega}_T - \dot{\Omega}_C} = 3\,059 \text{ days} = 8.38 \text{ years}$$

Da un punto di vista fisico non è quindi una soluzione impossibile, ma è molto poco probabile che una missione abbia una durata tale. Per questa ragione, se i piani dell'orbita si allontanano perde di significato la soluzione attendista.

Generalizzando l'esempio poc'anzi discusso è possibile identificare quattro casistiche:

	$(\dot{\Omega}_C; \dot{\Omega}_T) > 0$		$(\dot{\Omega}_C; \dot{\Omega}_T) < 0$	
Caso A	$\Omega_{C0} < \Omega_{T0}$	$ \dot{\Omega}_C > \dot{\Omega}_T $	$\Omega_{C0} > \Omega_{T0}$	$ \dot{\Omega}_C > \dot{\Omega}_T $
Caso B		$ \dot{\Omega}_C < \dot{\Omega}_T $		$ \dot{\Omega}_C < \dot{\Omega}_T $
Caso C	$\Omega_{C0} > \Omega_{T0}$	$ \dot{\Omega}_C < \dot{\Omega}_T $	$\Omega_{C0} < \Omega_{T0}$	$ \dot{\Omega}_C < \dot{\Omega}_T $
Caso D		$ \dot{\Omega}_C > \dot{\Omega}_T $		$ \dot{\Omega}_C > \dot{\Omega}_T $

Tabella 4.3. Riepilogo casistiche al variare di RAAN e RAAN Rate iniziali.

Il t^* sarà dunque definito in generale come:

$$t^* = \frac{\Omega_{C0} - \Omega_{T0} + 2k\pi}{\dot{\Omega}_T - \dot{\Omega}_C} \quad (\text{Eq. 4. 67})$$

Dove il parametro k è funzione del caso in considerazione e tiene conto della necessità o meno di compiere un giro completo di RAAN.

- Caso A: l'orbita di partenza parte in anticipo e possiede una velocità di regressione maggiore rispetto l'orbita di arrivo. Pertanto, i piani coincidono entro un giro. $k = 0$.
- Caso B: l'orbita di partenza parte in anticipo e possiede una velocità di regressione minore rispetto l'orbita di arrivo. Pertanto, i piani non coincidono entro un giro. $k = 1$, l'orbita del chaser deve compiere almeno un giro completo.

- Caso C: l'orbita di partenza parte in ritardo e possiede una velocità di regressione minore rispetto l'orbita di arrivo. Pertanto, i piani coincidono entro un giro. $k = 0$. In questo caso è come se fosse il target a raggiungere il chaser, ma nei fatti non vi è alcuna differenza con il caso A.
- Caso D: l'orbita di partenza parte in ritardo e possiede una velocità di regressione maggiore rispetto l'orbita di arrivo. Pertanto, i piani non coincidono entro un giro. $k = -1$, l'orbita del target deve compiere almeno un giro completo.

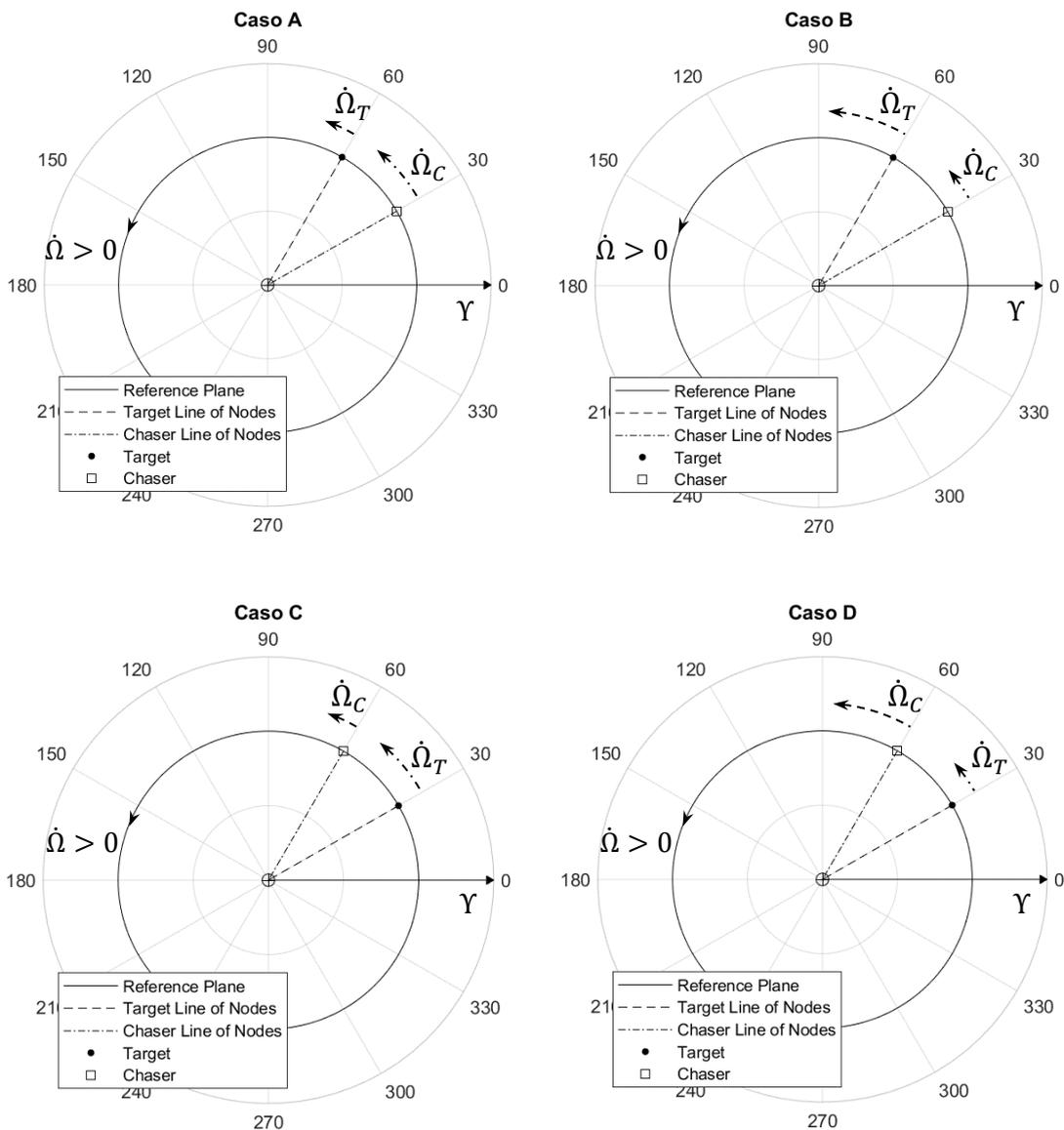


Figura 4.19. Rappresentazione dei Casi A, B, C e D per orbite retrograde ($\dot{\Omega}_{j2} > 0$).

In conclusione: in tutti i casi in cui le orbite siano percorse nello stesso verso è possibile la trasferta da l'una all'altra, ma se i piani orbitali si allontanano ($\Delta\Omega \uparrow$), tipicità dei casi B e D, non esiste la soluzione attendista.

Capitolo 5

Estensione a Manovre Continue

Poiché le metodologie di ottimizzazione descritte nel Capitolo precedente si basano sul modello di Kechichian della riformulazione dell'approssimazione di Edelbaum, le relazioni ottenute si applicano già perfettamente anche a manovre *low-thrust*. L'unica differenza di cui tener conto è che se nella trattazione precedente i ΔV_a e ΔV_b erano forniti impulsivamente e quindi concentrati in un istante infinitesimo di tempo, mentre quando si considera propulsione elettrica non sarà più possibile trascurare la durata delle burn.

Per questa ragione i parametri orbitali del chaser non cambiano in maniera istantanea durante la trasferta, ma in maniera continua per tutta la durata delle accensioni. Cambiando i parametri orbitali cambia anche l'intensità dell'effetto J_2 e, con esso, la relativa velocità di regressione della linea dei nodi. Ricordando la relazione che lega la derivata temporale della RAAN indotta da J_2 ai parametri orbitali (Eq. 2.33):

$$\dot{\Omega} = -3\pi J_2 \left(\frac{R}{p}\right)^2 \cos(i) \cdot \frac{1}{T} \quad [rad/s] \quad (Eq. 5. 1)$$

Dove i , p e T variano continuamente durante le accensioni, e i loro ratei di variazione sono esprimibili secondo la riformulazione di Kechichian delle equazioni di Edelbaum. Riformulazione riportata nel Capitolo 2 (Eq. 64-66).

Come si è visto nel Capitolo 4, anche per il caso impulsivo dopo il primo sparo i parametri orbitali cambiano, e con essi $\dot{\Omega}$. È questo un fattore decisivo e non trascurabile per la valutazione del costo di trasferta, anzi era esattamente il modo in cui il metodo *ai-transfer* era in grado di controllare indirettamente la RAAN dell'orbita. Il guadagno ricavato su $\dot{\Omega}$ con il primo impulso è valutato con Δx , che si ricorda essere definito, nel caso impulsivo, come:

$$\Delta x = m s_y y + n s_z z \quad (\text{Eq. 5. 2})$$

$$m = \frac{\pi}{2} (7\dot{\Omega}_0) \sin i_0 t_{mis} \quad (\text{Eq. 5. 3})$$

$$n = (\dot{\Omega}_0 \tan i_0) \sin i_0 t_{mis} \quad (\text{Eq. 5. 4})$$

Con parametri di ripartizione per il metodo *aiΩ-transfer*, definiti come:

$$s_x = -\frac{2x + my + nz}{(4 + m^2 + n^2)x} \quad (\text{Eq. 5. 5})$$

$$s_y = -\frac{2mx - (4 + n^2)y + mnz}{(8 + 2m^2 + 2n^2)y} \quad (\text{Eq. 5.6})$$

$$s_z = -\frac{2nx + mny - (4 + m^2)z}{(8 + 2m^2 + 2n^2)z} \quad (\text{Eq. 5. 7})$$

Dove i termini x, y e z associati rispettivamente alle differenze di RAAN, semiasse ed inclinazione sono valutati dalle seguenti relazioni:

$$x = \frac{\pi}{2} (\Omega_T(t_f) - \Omega_C(t_f)) \sin i_0 V_0 \quad (\text{Eq. 5. 8})$$

$$y = \frac{a_T - a_C}{2a_0} V_0 \quad (\text{Eq. 5. 9})$$

$$z = \frac{\pi}{2} (i_T - i_C) V_0 \quad (\text{Eq. 5. 10})$$

In generale, allontanandosi dalla idealizzazione impulsiva, i parametri m ed n, che introducono il contributo di J2 nelle relazioni di Kechichian, dipendono dalla lunghezza temporale dell'arco che si considera:

$$m_i = \frac{\pi}{2} (7\dot{\Omega}_{0_i}) \sin i_{0_i} \Delta t_i \quad (\text{Eq. 5. 11})$$

$$n_i = \frac{\pi}{2} (7\dot{\Omega}_{0_i}) \sin i_{0_i} \Delta t_i \quad (\text{Eq. 5. 12})$$

Con “i” indice dell’arco i-esimo. Dunque, anche il Δx è in generale somma dei diversi contributi ottenuti su archi diversi. Nei metodi analizzati finora si sono considerate trasferte a tre archi per il metodo $ai\Omega$ e a due archi per il Metodo Attendista. Da cui:

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 \quad (\text{Eq. 5. 13})$$

Con $\Delta x_1 = 0$ per il metodo attendista.

I singoli termini saranno dunque funzione della durata dell’arco a cui si riferiscono e rappresentano il Δx accumulato in ciascuna fase rispetto all’orbita iniziale:

$$\Delta x_1 = m_1 s_y y + n_1 s_z z \quad (\text{Eq. 5. 14})$$

$$\Delta x_2 = m_2 s_y y + n_2 s_z z \quad (\text{Eq. 5. 15})$$

$$\Delta x_3 = m_3 s_y y + n_3 s_z z \quad (\text{Eq. 5. 16})$$

Le durate dei singoli archi sono:

$$\Delta t_1 = \Delta t_a \rightarrow \text{durata primo arco, propulso}$$

$$\Delta t_2 = t_{mis} - \Delta t_a - \Delta t_b \rightarrow \text{durata secondo arco, non propulso}$$

$$\Delta t_3 = \Delta t_b \rightarrow \text{durata terzo arco, propulso}$$

Si noti che nell’ipotesi di manovra impulsiva si aveva $\Delta t_a = \Delta t_b = 0$, da cui:

$$\Delta x_1 = \Delta x_3 = 0$$

$$\Delta t_2 = t_{mis}$$

Da cui:

$$\Delta x = \Delta x_2 = m_2 s_y y + n_2 s_z z$$

Come riportato nel Capitolo precedente a proposito del caso impulsivo e richiamato nelle Eq 5.2/5.4.

Estensione a Manovre Continue

Per manovre continue invece, i parametri m ed n dovrebbero essere valutati istante per istante in funzione del tempo trascorso dall'inizio della fase propulsa. Poiché si vuole ridurre al minimo il costo computazionale del metodo, evitando pesanti integrazioni numeriche, è possibile approssimare i Δx_i con due strategie:

- a) Valutando i Δx come media del valore assunto agli estremi di ogni arco.

Per cui per il primo arco sarebbe:

$$\begin{aligned}\Delta x_1 &= \frac{\Delta x_{\Delta t_a} + \Delta x_{t_0}}{2} \\ &= \frac{(m_{\Delta t_a} s_y y + n_{\Delta t_a} s_z z) + (m_{t_0} s_y y + n_{t_0} s_z z)}{2}\end{aligned}\quad (\text{Eq. 5. 17})$$

Dove: $m_{t_0} = n_{t_0} = 0$

Da cui:

$$\Delta x_1 = \frac{m_{\Delta t_a} s_y y + n_{\Delta t_a} s_z z + 0}{2}\quad (\text{Eq. 5. 18})$$

Per il secondo contributo, essendo la seconda fase non propulsa, l'orbita non varia e dunque non ne variano nemmeno i parametri orbitali che influirebbero sul Δx_2 . In altre parole, il contributo sul Δx sarà lo stesso che al termine della prima fase. Pertanto:

$$\Delta x_2 = m_{\Delta t_2} s_y y + n_{\Delta t_2} s_z z\quad (\text{Eq. 5. 19})$$

Dove $\Delta t_2 = t_{mis} - t_{\Delta t_b} - t_{\Delta t_{ba}}$

Infine, il contributo dell'ultima fase si valuta mediando l'effetto accumulato a inizio fase, legato al Δx_2 , e quello alla fine dell'arco. Essendo il contributo del secondo impulso tale da colmare l'interezza del costo iniziale, corrisponde all'aver $s_y = s_z = 1$, sicché:

$$\Delta x_3 = \frac{m_{\Delta t_b} s_y y + n_{\Delta t_b} s_z z + m_{\Delta t_b} y + n_{\Delta t_b} z}{2} \quad (\text{Eq. 5. 20})$$

Il definitiva il Δx rimane una funzione dei parametri di ripartizione in y e z, sebbene più articolata del caso impulsivo.

Si procede dunque per via iterativa: dati Δx e ΔV impulsivi si valutano i Δt_i relativi ad una certa accelerazione; con questi si aggiorna il valore di Δx e quindi di ΔV ; e così via.

- b) Il secondo metodo di approssimazione consiste nel considerare le due accensioni continue come fossero due impulsi applicati a metà della durata di ogni accensione. La prima fase propulsa inizia a t_0 e la seconda termina a t_{mis} , sicché:
- Δt_a centrata in $t_a = \frac{\Delta t_a}{2}$
 - Δt_b centrata in $t_b = t_{mis} - \frac{\Delta t_b}{2}$

Così facendo si può valutare il Δx come nel caso impulsivo, ovvero a partire dalle condizioni iniziali delle orbite, ma è necessario ridefinire la durata della missione. Essendo t_{mis} definito come il Δt che intercorre tra il primo ed il secondo impulso, è come se nell'adattamento a manovra continua il t_{mis} fosse diminuito:

$$t_{mis_{new}} = t_b - t_a = t_{mis_{old}} - \frac{\Delta t_b}{2} - \frac{\Delta t_a}{2} \quad (\text{Eq. 5. 21})$$

Sicché i parametri x, m ed n, i quali sono funzione della durata della missione, varieranno rispetto al caso impulsivo e con essi anche il Δx .

Usando l'uno o l'altro metodo di approssimazione, i risultati ottenuti e l'errore commesso rispetto alla soluzione "corretta" sono praticamente sovrapponibili. La scelta del metodo è totalmente indifferente ai fini del risultato, nel contesto di questo elaborato si sceglie di proseguire con l'approssimazione b).

Dunque, definita a l'accelerazione dello S/C:

$$\Delta t_a = \frac{\Delta V_a}{a} \quad (\text{Eq. 5.22})$$

$$\Delta t_b = \frac{\Delta V_b}{a} \quad (\text{Eq. 5.23})$$

Nelle seguenti trattazioni si considererà accelerazione costante, ovvero si ipotizzerà un sistema propulsivo in grado di modulare la spinta in modo da mantenere T/m costante.

ΔV_a e ΔV_b sono funzione dei parametri di ripartizione e di Δx . Come si è visto, a loro volta questi sono funzione dei coefficienti m ed n definiti nelle Eq 5.5/5.7 in funzione del t_{mis} . In altre parole:

$$(\Delta V_a, \Delta V_b) = f(t_{mis}) \quad (\text{Eq. 5.24})$$

Poiché applicando l'approssimazione b) la durata della missione cambia e si deve adattare alle lunghezze degli impulsi, le quali sono a loro volta funzione dei ΔV_a e ΔV_b , risulta necessario effettuare un calcolo iterativo sviluppato come segue:

- 1) dato un certo set di condizioni iniziali sui parametri orbitali ed assegnata una certa accelerazione e un t_{mis} “reale”, vada a valutare i ΔV_a e ΔV_b corrispondenti al caso impulsivo
- 2) con Equazioni 5.22 e 5.23 valuta i relativi Δt_a e Δt_b
- 3) valuta la nuova durata di missione tramite Eq. 5.21
- 4) ricomincia dal punto 1) con la durata di missione ricavata al punto 3)

Il ciclo si interrompe dopo un certo numero di iterazioni assegnato a priori dall'utente. Dai risultati su alcuni esempi numerici raccolti nel Capitolo 6 si è visto che le soluzioni tendono a convergere dopo un numero di iterazioni in genere molto limitato, ma che è inversamente proporzionale al valore di accelerazione imposto. Più questa è alta, e dunque si è “vicini” all'ipotesi impulsiva, e più piccolo sarà il numero di iterazioni richiesto. Viceversa, più sarà ridotta e più la soluzione tenderà a convergenza a un numero maggiore di iterazioni e a soluzioni più distanti dalla semplificazione impulsiva. In genere, per accelerazioni sufficientemente grandi già 2/3 iterazioni sono sufficienti a raggiungere la convergenza.

Si noti che per il metodo Attendista l'unico parametro che dipende direttamente dalla durata della missione, è x , essendo i parametri di ripartizioni sempre imposti “manualmente” a

zero, e con questi, indirettamente, anche Δx . I parametri y e z non dipendono invece dal tempo di missione e pertanto sono valutati un'unica volta prima del ciclo di estensione alla manovra continua.

Capitolo 6

Risultati

In questo Capitolo si riporteranno e commenteranno i principali risultati emersi dall'applicazione del metodo introdotto nel Capitolo 4-5 a trasferte caratterizzate da coppie di orbite con differenti parametri orbitali e considerando chaser con diverse accelerazioni caratteristiche. Si analizzeranno cinque casi:

- Caso 1. Accelerazione elevata. Parametri orbitali di Tabella 4.1. Durata di missione fissata a 10 giorni.
- Caso 2. Aumento RAAN iniziale del target e accelerazione progressivamente inferiore. Durata di missione fissata.
- Caso 3. Valutazione accelerazione minima per effettuare la trasferta nel tempo fissato, con condizioni iniziali del Caso 2.
- Caso 4. Generalizzazione accelerazione minima/durata minima. Andamenti accelerazione minima in funzione dei *Delta* parametri orbitali.
- Caso 5. Valutazione e confronto della spesa per metodo Attendista e $a_i\Omega$ in funzione della durata di missione e di $\Delta\Omega_0$.

6.1 Caso 1

Scopo di questa analisi è la visualizzazione degli andamenti delle iterate ricavate dall'estensione del metodo a manovre continue, al fine di effettuare uno studio di convergenza e definire un numero di iterazioni sufficienti al raggiungimento della convergenza.

Si riportano di seguito i parametri orbitali delle orbite di partenza e di arrivo considerate, coincidono con quelli dell'esempio numerico impulsivo del paragrafo 4.3.6 (Tabella 4.1).

Risultati

	Orbita Di Partenza	Orbita Di Arrivo
a	7150.3 km	7104.8 km
e	0	0
i	98.64 deg	97.45 deg
Ω	137.59 deg	138.05 deg
$\dot{\Omega}_{J2}$	1.0011 deg/day 2.0223e-07 rad/s	0.8836 deg/day 1.7849e-07 rad/s

Tabella 6.1. Riepilogo parametri orbitali Caso 1.

Le orbite sono entrambe retrograde, dunque $\dot{\Omega}_{J2} > 0$. Il chaser parte in anticipo rispetto al target e quest'ultimo vede una velocità di regressione della linea dei nodi più elevata. Pertanto, con riferimento alla nomenclatura introdotta nel paragrafo 4.3.7, si è nel Caso A. Il metodo Attendista potrebbe risultare efficace. I piani orbitali si portano a medesima RAAN in:

$$t^* = \frac{\Omega_{C0} - \Omega_{T0} + 2k\pi}{\dot{\Omega}_T - \dot{\Omega}_C} = 3.91 \text{ days}$$

Per i motivi introdotti nel Capitolo precedente, si trascura la soluzione *ai-transfer* per non appesantire inutilmente l'elaborato.

L'accelerazione dello S/C è costante durante la manovra, ed è fissata ai medesimi valori per il metodo attendista e *ai Ω - transfer*. La si impone al valore tale per cui il primo impulso *ai Ω* avvenga in un'ora.

La durata della missione è fissata a $t_{mis} = 10 \text{ days}$.

Accelerazione:

$$acc = \frac{(\Delta V_a)_{ai\Omega}}{1h} = 0.0349 \frac{m}{s^2}$$

Il valore di accelerazione è mantenuto costante tra un'iterazione; in particolare $(\Delta V_a)_{ai\Omega}$ impiegato per la valutazione dell'accelerazione è quello relativo alla prima iterazione di calcolo e dunque congruente al caso impulsivo con $t_{mis} = 10 \text{ days}$ (Figura 4.16).

Si riportano di seguito gli andamenti di ΔV_a , ΔV_b , ΔV_{tot} , Δt_a e Δt_b in funzione dello step di iterazione.

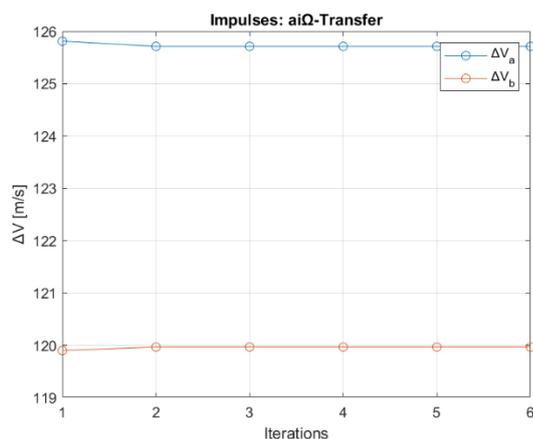


Figura 6.1. Andamenti ΔV_a e ΔV_b nel calcolo iterativo: $ai\Omega$ -transfer.

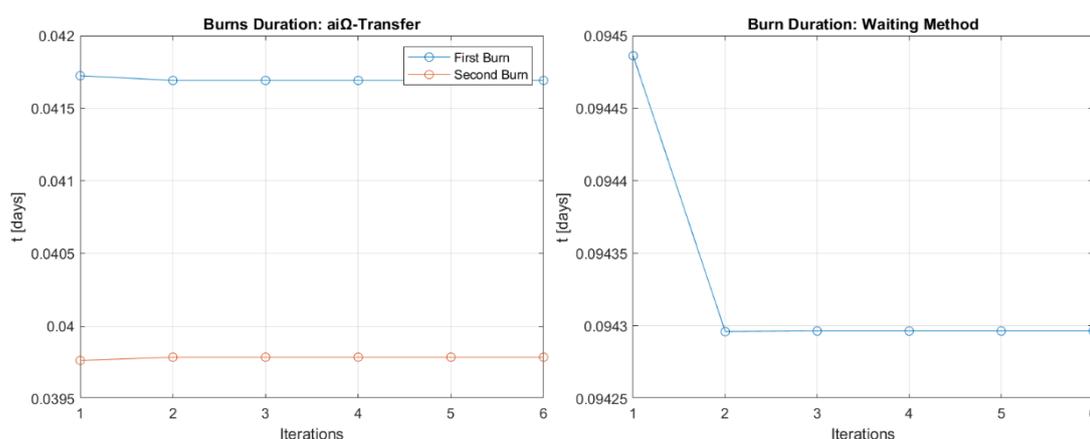


Figura 6.2. Confronto andamenti Δt_a e Δt_b nel calcolo iterativo.

Non si riporta l'andamento degli impulsi del caso Attendista in quanto il primo è costantemente nullo ed il secondo coincide con l'andamento del ΔV totale che si riporterà nel prossimo grafico. Come si nota, i dati di performance vanno molto rapidamente a convergenza e a valori pochissimo distanti da quelli della prima iterazione (caso impulsivo).

<i>aiΩ – transfer</i>		
	Prima iterazione - Impulsivo	Ultima iterazione - Continuo
ΔV_a [m/s]	125.813106880022	125.714926964942
ΔV_b [m/s]	119.900011760269	119.967466938900

Tabella 6.2. Costo della prima e della seconda fase propulsa: confronto impulsivo/continuo.

In particolare, è interessante notare (Tabella 6.2) come il ΔV_a risulti poco diminuito e il ΔV_b poco aumentato, andamenti compatibili con quanto riportato in Figura 4.16: partendo dai

Risultati

valori a $t_{mis} = 10 \text{ days}$, spostandosi verso sinistra (a t_{mis} inferiori) si vede proprio come ΔV_a diminuisce e ΔV_b aumenti. L'estensione a trasferta continua può essere interpretata come trasferta impulsiva a t_{mis} minore. Se per esempio avessimo eseguito il calcolo a t_{mis} di 5 giorni si sarebbe osservato un aumento di entrambi i ΔV .

Le durate seguono inevitabilmente lo stesso andamento dei costi dei relativi impulsi (Figura 6.2). Si noti come per la prima iterazione, la durata del primo impulso del metodo $ai\Omega$ sia pari ad 1 ora.

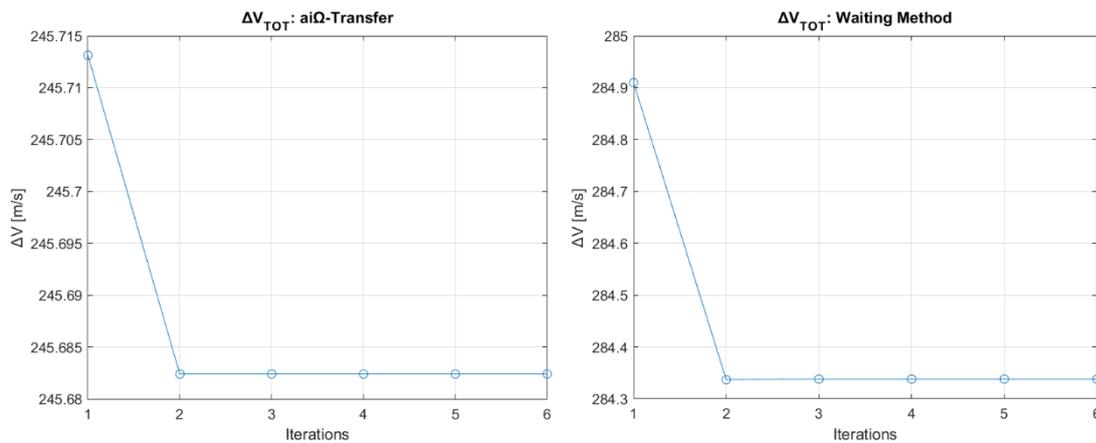


Figura 6.3. Confronto andamenti ΔV_{tot} nel calcolo iterativo.

	Prima iterazione: Impulsivo	Ultima iterazione: Continuo
$\Delta V_{tot} - ai\Omega$	245.713118640291 m/s	245.682393903841 m/s
$\Delta V_{tot} - Attendista$	284.909730323200 m/s	284.338155573977 m/s

Tabella 6.3. Spesa totale in funzione del metodo utilizzato: confronto impulsivo/continuo.

Per entrambi i metodi, nell'estensione continua, la trasferta ha un costo complessivo inferiore, congruente con il fatto che, come si è già accennato in precedenza, è come se la missione durasse meno e l'Effetto J2 avesse quindi meno tempo per agire. Ciò è un fattore positivo, in quanto $t_{mis} > t^*$ e dunque J2 tende ad allontanare i piani orbitali che si sono raggiunti e superati in precedenza. Si noti che aver considerato un caso in cui $t_{mis} > t^*$, non è sicuramente un caso di ottimo: avendo un'accelerazione particolarmente elevata, tanto da coprire l'intera prima accensione in appena un'ora, la soluzione ottima sarebbe sicuramente stata una trasferta Attendista con $t_{mis} = t^*$. Detto ciò, si tratta unicamente di un caso analizzato per lo studio di convergenza della soluzione e ha permesso di mettere in mostra come l'effetto J2 non sia sempre positivo, e quando non dovesse esserlo, per esempio come in questo caso in

cui porta i piani ad allontanarsi e dunque aumenta il costo in x , l'esecuzione della trasferta con propulsione elettrica risulta meno costosa della controparte chimica. Inoltre, la manovra con metodo Attendista risulta meno vantaggiosa del metodo $ai\Omega$, essendo $t_{mis} > 5 \text{ days}$ (Figura 4.18).

In generale, il dato più interessante estrapolato da questo caso è la notevole velocità di convergenza e la minima differenza tra il caso impulsivo ed il caso continuo. Tali considerazioni sono conseguenza dell'aver scelto accelerazioni ancora molto grandi e quindi durate di accensione ridotte.

6.2 Caso 2

Scopo di questa analisi è il confronto dei costi di trasferta impulsivo/continuo, considerando accelerazioni via via decrescenti.

Si riportano di seguito i parametri orbitali delle orbite di partenza e di arrivo considerate, coincidono con quelli dell'esempio numerico impulsivo del paragrafo 4.3.6 (Tabella 4.1), a meno della RAAN del target.

	Orbita Di Partenza	Orbita Di Arrivo
a	7150.3 km	7104.8 km
e	0	0
i	98.64 deg	97.45 deg
Ω	137.59 deg	140.05 deg
$\dot{\Omega}_{J2}$	1.0011 deg/day 2.0223e-07 rad/s	0.8836 deg/day 1.7849e-07 rad/s

Tabella 6.4. Riepilogo parametri orbitali Caso 2.

Le orbite sono entrambe retrograde, dunque $\dot{\Omega}_{J2} > 0$. Il chaser parte in anticipo rispetto al target e quest'ultimo vede una regressione della linea dei nodi più rapida. Pertanto, si è nel Caso A. Il metodo Attendista potrebbe risultare efficace. I piani orbitali si portano a medesima RAAN in:

$$t^* = \frac{\Omega_{C0} - \Omega_{T0} + 2k\pi}{\dot{\Omega}_T - \dot{\Omega}_C} = 20.93 \text{ days}$$

Per i motivi introdotti nel Capitolo precedente, si trascura la soluzione *ai-transfer* per non appesantire inutilmente l'elaborato.

L'accelerazione dello S/C è costante durante la manovra, si analizzano 5 sotto-casi:

$$acc = [1.3784 \quad 0.3446 \quad 0.1969 \quad 0.1378 \quad 0.0919] \times 10^{-3} \frac{m}{s^2}$$

Suddetti valori di accelerazione non sono scelti casualmente, ma sono i valori corrispondenti all'aver fissato la durata della prima accensione del metodo *ai Ω* ai seguenti valori:

$$\Delta t_a = [1 \ 4 \ 7 \ 10 \ 15] \text{ days}$$

La durata della missione è imposta a $t_{mis} = 15 \text{ days}$. Si noti che in questo caso, a differenza del precedente, $t_{mis} < t^*$ e pertanto la soluzione ottima non è possibile nemmeno in teoria e ha dunque senso confrontare i due metodi al fine di selezionare il migliore.

Il valore di accelerazione è mantenuto costante tra un'iterazione e l'altra; in particolare $(\Delta V_a)_{ai\Omega}$ impiegati per la valutazione delle accelerazioni sono quelli relativi alla prima iterazione di calcolo e dunque congruenti al caso impulsivo con $t_{mis} = 15 \text{ days}$.

Si noti che nell'ultimo sotto-caso la durata del primo sparo coincide con la durata totale della missione. È quindi plausibile pensare che la durata totale delle fasi propulse, per il metodo $ai\Omega$, sia maggiore del tempo a disposizione, si è inserita questa casistica per verificare il comportamento del programma in queste condizioni.

6.2.1 Metodo $ai\Omega$ – transfer

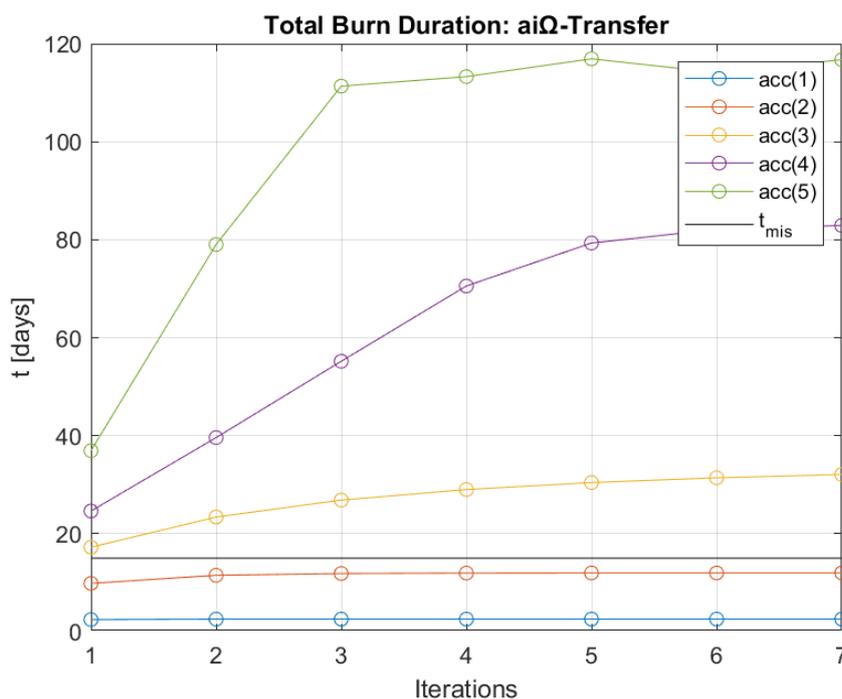


Figura 6.4. Confronto andamenti Δt_{tot} nel calcolo iterativo: $ai\Omega$ -transfer.

Metodo aiΩ

Accelerazione m/s^2	$[m/s]$ $[days]$	Impulsivo	Continuo	Differenza
1.3784e – 3	ΔV_{tot}	293.194	303.517	+ 3.52%
	Δt_{tot}	0	2.5485	
0.3446e – 3	ΔV_{tot}	293.194	356.475	+ 21.58%
	Δt_{tot}	0	11.973	
0.1969e – 3	ΔV_{tot}	293.194	NOT	/
	Δt_{tot}	0	CONVERGED	
0.1378e – 3	ΔV_{tot}	293.194	NOT	
	Δt_{tot}	0	CONVERGED	
0.0919e – 3	ΔV_{tot}	293.194	NOT	
	Δt_{tot}	0	CONVERGED	

Tabella 6.5. Spese totali e tempi di spinta totali al variare dell'accelerazione: aiΩ.

Per i casi in cui si è fissata la durata del primo impulso pari a 7, 10 e 15 giorni il calcolo iterativo non va a convergenza, restituisce valori non sensati: con durate complessive delle fasi propulse che raggiungono anche i 100 giorni, quasi sette volte la durata di missione imposta, e valori di ΔV_{tot} che raggiungono anche il chilometro al secondo. In Figura 6.4 ne è riportata una rappresentazione grafica, a dimostrazione del diverso comportamento delle soluzioni convergenti rispetto a quelle non convergenti.

Ciò è causato dal fatto che per i livelli di accelerazione corrispondenti a questi casi, la durata complessiva della fase propulsa (somma della durata del primo e del secondo impulso) risulta maggiore del tempo di missione (15 giorni). Per capire cosa ciò implichi da un punto di vista fisico, si faccia riferimento per esempio alla prima iterazione del caso $\Delta t_a = 7 days$ e metodo aiΩ:

- La prima accensione inizia a $t = 0$ e termina a $t = \Delta t_a = 7 days$
- La seconda accensione inizia a $t = t_{mis} - \Delta t_b = 4.7668 days$ e termina a $t = t_{mis} = 15 days$

In altre parole, la seconda fase propulsa dovrebbe iniziare prima del termine della precedente accensione. È una soluzione non fisica. Da un punto di vista meramente matematico, invece, questo problema non viene sentito pesantemente dal programma, in quanto gli istanti di

tempo corrispondenti ai punti centrali delle accensioni (t_b e t_a) continuano ad avere segno positivo e la condizione ($t_b > t_a$) è rispettata, per cui non vi è nemmeno il rischio che $t_{mis_{new}} = t_b - t_a$ diventi una quantità negativa. Questa condizione è verificata unicamente per la prima iterazione e del caso a 7 giorni. A questo proposito si riportano in Figura 6.5 gli andamenti di t_a , t_b e t_{mis} in funzione dello step iterativo, per i sotto-casi 7 e 10 giorni.

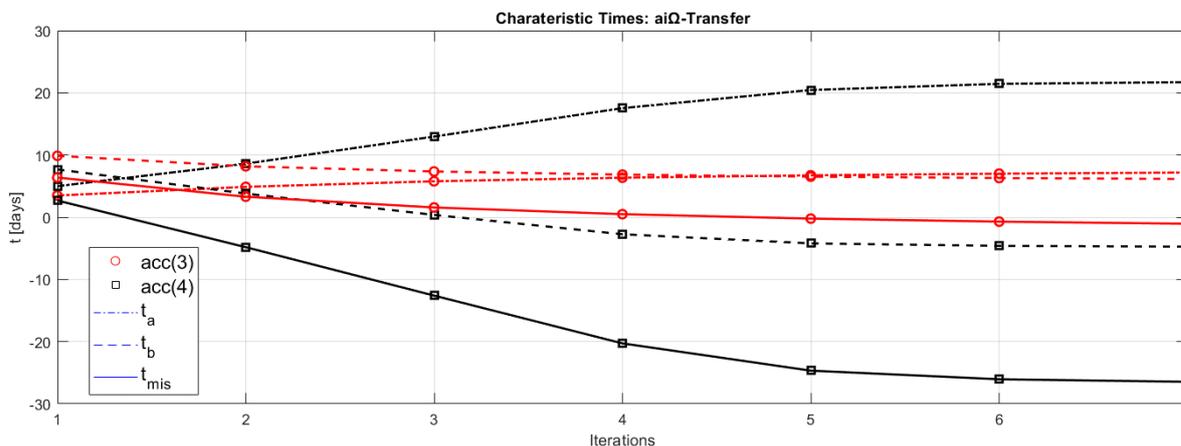


Figura 6.5. Confronto istanti medi archi propulsi e durata missione: $ai\Omega$ -transfer.

Si noti che si è evitato di riportare i tempi caratteristici della soluzione a 15 giorni per non appesantire ulteriormente la rappresentazione. Si evince come per il caso a 7 giorni il t_{mis} inizi effettivamente positivo, ma tende poi a diminuire sempre più fino a raggiungere valori negativi alla quinta iterazione. Questo, oltre ad essere ovviamente non fisico, rappresenta anche un problema nella modellizzazione matematica e porta i risultati a non convergere mai. Per il caso 10 giorni la situazione è pressoché la medesima, con l'unica differenza che essendo ancora “meno sufficiente” l'accelerazione a disposizione, già dalla seconda iterazione t_{mis} assume valori negativi e dalla quarta addirittura anche t_b si negativizza. In altre parole, la seconda fase propulsa dovrebbe iniziare ancora prima della missione stessa. Gli andamenti del caso 15 giorni sono qualitativamente identici a quelli 10 giorni, con la differenza che t_{mis} parte negativo dalla prima iterazione e t_b si negativizza già alla seconda, ciò si traduce in una maggiore velocità di divergenza delle soluzioni.

Si noti che come accennato precedentemente, il comportamento della soluzione 7 giorni era “destinato” a divergere già dalla prima iterazione, date le considerazioni su inizio/fine delle fasi propulse. Per comprendere meglio questo aspetto si riportano in Figura 6.6 l'andamento anche di questi istanti. Si definiscano:

- $t_{af} =$ istante di fine prima burn

Risultati

- t_{b_0} = istante di inizio seconda burn

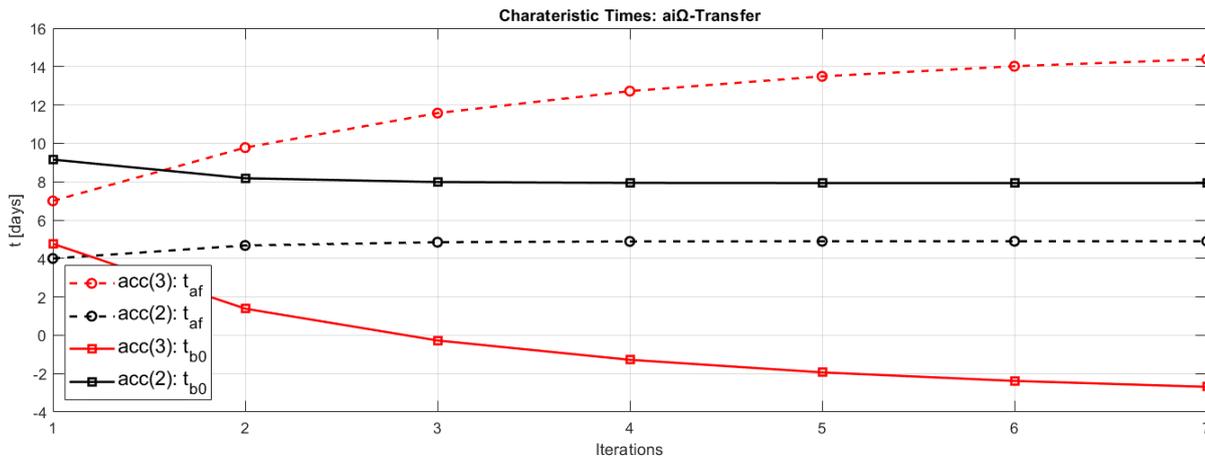


Figura 6.6. Confronto istanti inizio e fine archi propulsi: $ai\Omega$ -transfer.

Dal confronto con un caso convergente (4 giorni= $acc(2)$), per cui quindi $\Delta t_{tot} < t_{mis}$, si nota come gli andamenti siano esattamente opposti:

- 4 giorni: $t_{af} < t_{b_0}$ per ogni iterazione e ad ogni passo i due tendono ad avvicinarsi fino a convergere ad un valore asintotico
- 7 giorni: $t_{af} > t_{b_0}$ per ogni iterazione e ad ogni passo i due tendono a divergere l'uno dall'altro senza mai raggiungere un valore asintotico

Si noti che dalla Figura 6.6 è anche possibile ricavare una rappresentazione dell'evoluzione del profilo di missione ad ogni iterazione:

- $0 < t < t_{af}$ → prima burn, propulsore acceso
- $t_{af} < t < t_{b_0}$ → coasting, propulsore spento
- $t_{b_0} < t < t_{mis}$ → seconda burn, propulsore acceso

In generale, si osservi come, rispetto al Caso 1, sia necessario un numero maggiore di iterazioni per arrivare a convergenza e come il valore asintotico sia più lontano dal valore iniziale, corrispondente alla manovra continua.

In definitiva, si può affermare che, fissato una certa durata della missione e certe condizioni iniziali delle orbite di arrivo e partenza, esiste un limite di accelerazione minima sotto la quale non è possibile effettuare la trasferta nel tempo richiesto.

Nel paragrafo relativo ai risultati del Caso 3 si andrà ad esaminare più nel dettaglio questa condizione.

Con riferimento alla Tabella 6.5, si noti come il costo della manovra sia maggiore per la trasferta con propulsore elettrico piuttosto che con propulsore chimico, opposto del Caso 1. Di nuovo, ciò è il linea con quanto detto a proposito del primo caso, ma ribaltato: poiché ora si ha $t_{mis} < t^*$, il fatto che la durata della missione sia inferiore rispetto al caso impulsivo, o comunque che venga vista tale in funzione dell'approssimazione del Δx (b), è in questo caso uno svantaggio, in quanto una missione più lunga avrebbe giovato nell'ottenere un effetto più sostanzioso da J2. In particolare, minore è l'accelerazione e maggiore è l'aumento della spesa associata a quella stessa trasferta: si passa da un aumento di meno del 4% per il primo valore di accelerazione (1.3784 mm/s^2) ad un aumento di quasi sei volte maggiore, pari a circa il 21.58% con un'accelerazione che si è ridotta di “solo” quattro volte (0.3446 mm/s^2).

6.2.2 Metodo Attendista

Si riportano a confronto, nella seguente Tabella, i valori di durata complessiva e spesa complessiva per le cinque accelerazioni considerate, nell'ipotesi impulsiva e continua.

Metodo Attendista

Accelerazione [m/s^2]	[m/s] [$days$]	Impulsivo	Continuo	Differenza
$1.3784e - 3$	ΔV_{tot}	283.059	299.169	+ 5.69%
	Δt_{tot}	0	2.5120	
$0.3446e - 3$	ΔV_{tot}	283.059	383.696	+ 35.55%
	Δt_{tot}	0	12.887	
$0.1969e - 3$	ΔV_{tot}	283.059	NOT	/
	Δt_{tot}	0	CONVERGED	
$0.1378e - 3$	ΔV_{tot}	283.059	NOT	
	Δt_{tot}	0	CONVERGED	
$0.0919e - 3$	ΔV_{tot}	283.059	NOT	
	Δt_{tot}	0	CONVERGED	

Tabella 6.6. Spese totali e tempi di spinta totali al variare dell'accelerazione: Metodo Attendista.

Risultati

Esattamente come accadeva con la soluzione $ai\Omega$ – *transfer*, gli ultimi tre valori di accelerazione portano il metodo a divergere, negli altri due casi il tempo di accensione totale si assesta sempre a valori inferiori rispetto al limite di durata della missione.

Considerazioni riguardo ai tempi medi, iniziali e finali della burn sono assolutamente analoghe a quelle del caso $ai\Omega$ e pertanto si omettono.

Anche per il metodo attendista, effettuare la manovra con propulsione chimica rappresenta un costo maggiore rispetto alla soluzione chimica, il motivo è lo stesso della soluzione $ai\Omega$ riportato nel paragrafo precedente. E come per il metodo $ai\Omega$, minore è l'accelerazione e maggiore è l'aumento della spesa: si passa da un aumento di meno del 6% per il primo valore di accelerazione (1.3784 mm/s^2) ad un aumento di quasi cinque volte maggiore, pari a circa il 35.55% con un'accelerazione che si è ridotta di “solo” quattro volte (0.3446 mm/s^2).

Si riporta di seguito una Tabella riassuntiva di confronto tra i valori di spesa nei casi in cui effettivamente la trasferta con propulsione elettrica sia possibile.

$[m/s^2]$	Metodo	$[m/s]$	Impulsivo	Continuo	Differenza
$1.3784e - 3$	Attendista	ΔV_{tot}	283.059	299.1688	+5.69%
	$ai\Omega$	ΔV_{tot}	293.194	303.517	+3.52%
$0.3446e - 3$	Attendista	ΔV_{tot}	283.059	383.696	+35.55%
	$ai\Omega$	ΔV_{tot}	293.194	356.475	+21.58%

Tabella 6.7. Confronto delle spese totali tra metodi/accelerazioni e manovre impulsive/continue.

Emerge chiaramente come per il problema impulsivo la soluzione attendista sia favorevole rispetto alla $ai\Omega$, ma per il continuo la situazione è diversa e dipende dal valore di accelerazione considerata. Per il primo valore di accelerazione il metodo attendista continua a convenire, ma per accelerazioni più basse il trend si ribalta e il metodo più conveniente risulta l' $ai\Omega$. Ciò è dovuto al fatto che l'incremento di ΔV a seguito dell'estensione è maggiore per il metodo attendista e tanto maggiore quanto minore è l'accelerazione. Ciò dipende dal fatto che l'attendista è più sensibile alle variazioni di durata di missione rispetto all' $ai\Omega$: la diminuzione di durata di missione prevista dall'estensione continua ha privato la soluzione attendista di troppo effetto J2, cosa che di norma è il suo punto di forza rispetto alla $ai\Omega$.

6.3 Caso 3

Scopo di questa analisi è ricavare il valore di accelerazione minima per i metodi $ai\Omega$ ed attendista date le condizioni iniziali sui parametri orbitali delle orbite di arrivo e partenza e fissata la durata della missione.

I parametri orbitali delle orbite di partenza e di arrivo coincidono con quelli del Caso 2.

I piani orbitali si portano a medesima RAAN in:

$$t^* = \frac{\Omega_{C0} - \Omega_{T0} + 2k\pi}{\dot{\Omega}_T - \dot{\Omega}_C} = 20.93 \text{ days}$$

Per i motivi introdotti nel Capitolo precedente, si trascura la soluzione *ai-transfer* per non appesantire inutilmente l'elaborato.

La durata della missione è fissata a $t_{mis} = 15 \text{ days}$.

Partendo dal codice sviluppato per il caso 2, la ricerca dell'accelerazione minima è effettuata andando a modificare opportunamente Δt_a tramite calcolo iterativo, basato su un ciclo *while()* la cui condizione di uscita è:

$$\text{abs}((\text{Delta_tb} + \text{Delta_ta}) - t_{mis}) > \text{toll}$$

Ovvero, si è trovata l'accelerazione minima, e si può dunque uscire dal ciclo, quando la somma delle durate del primo e secondo arco propulso coincide con la durata della missione imposta, a meno di una tolleranza. Suddetta tolleranza è fissata a 10 minuti.

Il Δt_a di primo *guess* è imposto ad un'ora e la variazione ad ogni ciclo non è costante:

$$(\Delta t_a)_{k+1} = (\Delta t_a)_k \pm \Delta_{k+1}$$

Con:

- "+" se $(\Delta t_{tot})_k < t_{mis}$
- "-" se $(\Delta t_{tot})_k > t_{mis}$
- $\Delta_{k+1} = \Delta_k$ se il segno dell'equazione non è cambiato tra il passo $k - 1$ e k
- $\Delta_{k+1} = \frac{\Delta_k}{2}$ se si è invertito il segno rispetto al passo $k - 1$

Risultati

$$- \Delta_1 = (\Delta t_a)_1 = 1h$$

Si riportano dunque gli andamenti dei Δt_a per i due metodi. Si noti che trovare l'accelerazione minima coincide con l'identificazione di un Δt_a massimo.

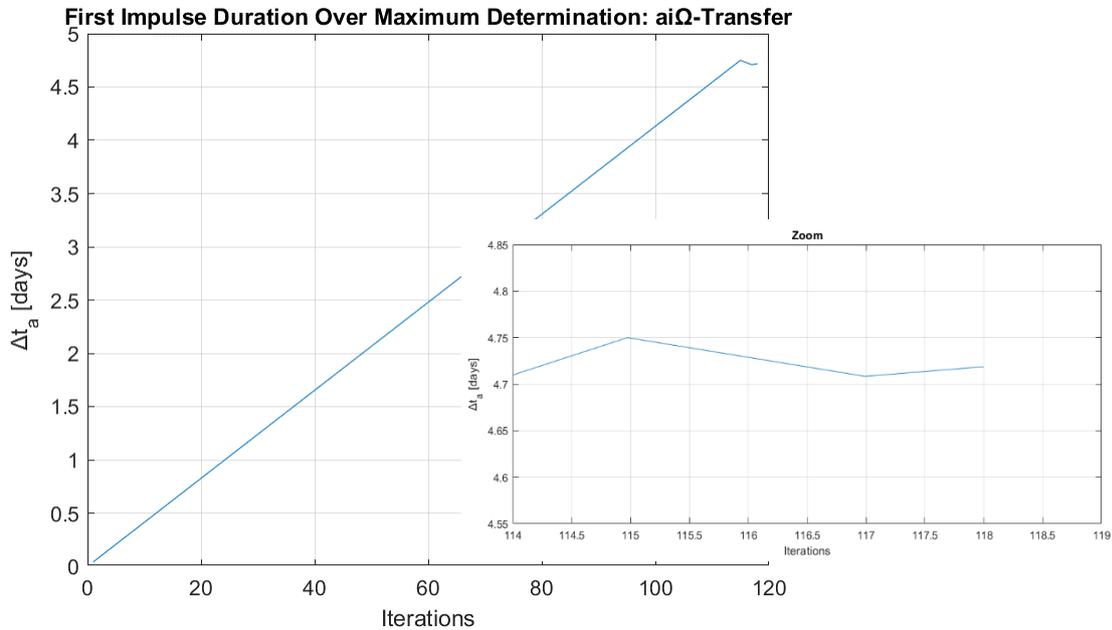


Figura 6.7. Determinazione della durata massima del primo arco propulso: $ai\Omega$ -transfer.

La valutazione dell'accelerazione minima per il metodo $ai\Omega$ impiega 117 iterazioni. Nello Zoom di Figura 6.7 è ben riconoscibile il momento in cui il Δt_a inizia ad oscillare intorno al valore di massimo e dunque il Δ si dimezza per tendere alla soluzione ricercata. Si noti che si sarebbe potuto optare per una soluzione più semplice, con Δ costante e non adattivo, ma si sarebbe persa accuratezza o aumentato notevolmente il numero di iterazioni necessarie, e con esso il costo computazionale. Si noti che il numero di iterazioni necessarie al raggiungimento della condizione di uscita dal ciclo dipende sia dal valore di guess iniziale, che dal valore di passo Δ iniziale. Nel caso specifico (per entrambi i metodi) si è scelto $(\Delta t_a)_1 = (\Delta)_1 = 1h$. Per velocizzare il calcolo potrebbe convenire aumentare il passo iniziale.

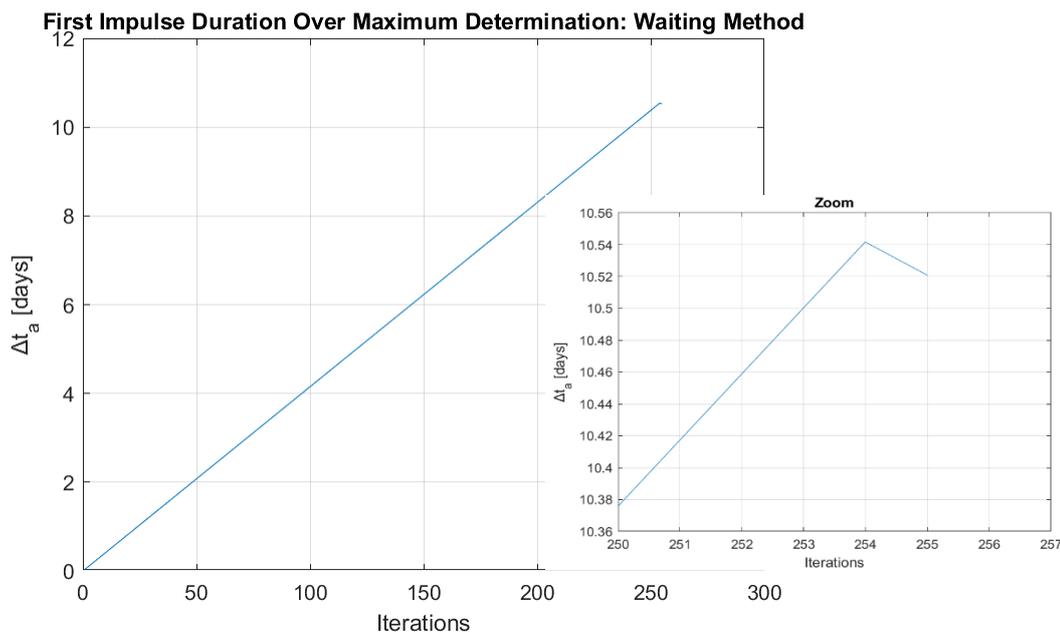


Figura 6.8. Determinazione della durata massima del primo arco propulso: Metodo Attendista.

La soluzione attendista necessita di un maggior numero di iterazioni: 255. Il dimezzamento del passo Δ è necessario una volta sola. Si noti bene che i valori riportati in Figura 6.7 e 6.8 non sono i Δt_a relativi alla soluzione estesa alla manovra continua, bensì si tratta dei Δt_a di primo *guess* da cui si ricava un certo valore di accelerazione, passando dai ΔV impulsivi. Con questa accelerazione si entra nell'altro ciclo, quello per l'estensione a manovre continue analizzato nei casi precedenti, nel quale si rivalutano i ΔV e i Δt . Per questa ragione il Δt_a del Metodo Attendista non converge a 15 giorni come ci si potrebbe aspettare.

Alla stessa maniera si riportano gli andamenti di $a_{ai\Omega}$ e $a_{attendista}$.

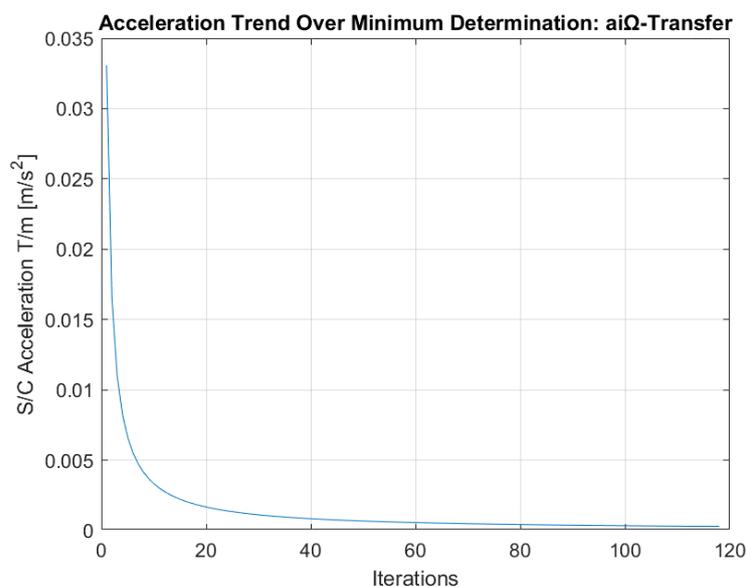


Figura 6.9. Determinazione dell'accelerazione minima: aiΩ-transfer.

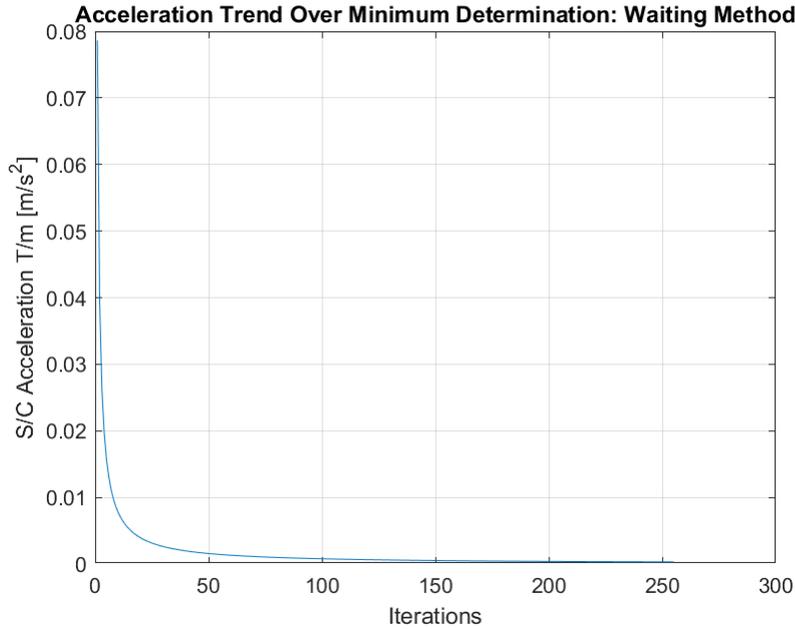


Figura 6.10. Determinazione dell'accelerazione minima: Metodo Attendista.

L'accelerazione presenta un andamento simil-iperbolico: decresce molto rapidamente nelle prime iterazioni e tende rapidamente al valore asintotico. Ciò dipende dal fatto che le accelerazioni sono valutate come:

$$(a_{ai\Omega})_k = \frac{(\Delta V_a)_{imp_{ai\Omega}}}{(\Delta t_{a_{ai\Omega}})_k} \quad (a_{attendista})_k = \frac{(\Delta V_a)_{imp_{attendista}}}{(\Delta t_{a_{attendista}})_k}$$

Dove il numeratore è una costante (non dipende da k) mentre il denominatore cresce linearmente con k, almeno fino alla 145esima iterazione per il caso $ai\Omega - transfer$ (Figura 6.7) e fino alla 254esima per il caso attendista (Figura 6.8).

Le accelerazioni minime, che rispettino la condizione di uscita del ciclo risultano in:

$$(a_{ai\Omega})_{min} = 2.9211e - 04 \text{ m/s}^2$$

$$(a_{attendista})_{min} = 3.1140e - 04 \text{ m/s}^2$$

L'accelerazione minima del metodo attendista risulta maggiore rispetto a quella del metodo $ai\Omega$ di circa il 7%. Da un punto di vista fisico, tra le due soluzioni non vi dovrebbe essere alcuna differenza, in entrambi i casi, in condizione di accelerazione minima, la trasferta assume il profilo riportato in Figura 6.12. Si perde la differenziazione tipica dei due metodi che vedrebbe nella $ai\Omega$ una trasferta *thrust-coast-thrust* e nella attendista una trasferta del tipo

coast-thrust: per entrambi dovrebbe essere una trasferta costantemente propulsa. Dunque, è plausibile che il valore di accelerazione minima dovrebbe tendere allo stesso valore per entrambi i metodi, i quali loro stessi dovrebbero “convergere” in uno stesso risultato. Da un punto di vista matematico invece, la differenza del 7% rappresenta un errore del tutto accettabile alla luce delle approssimazioni alla base del metodo.

Si procede dunque a studiare la trasferta con questi valori limite di accelerazione al fine di cogliere eventuali peculiarità del caso. Si noti che non sarà possibile effettuare un confronto corretto tra i metodi in quanto ognuno viene analizzato con il suo valore di accelerazione minima che, come visto, differisce tra i metodi.

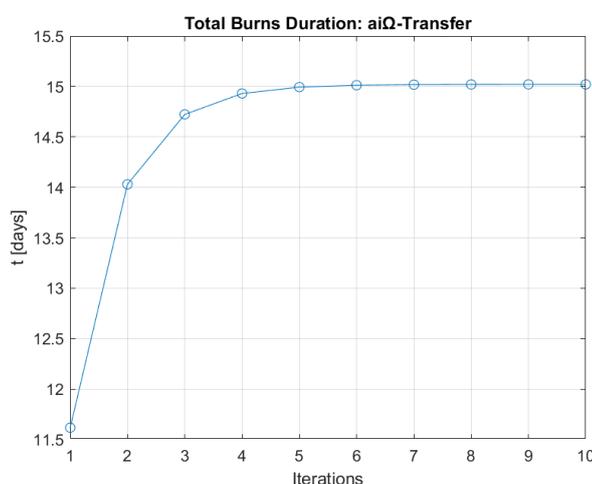


Figura 6.11. Andamento Δt_{tot} nel calcolo iterativo: $ai\Omega$ -transfer.

È interessante notare come, rispetto al Caso 1, i dati di performance vadano a convergenza in un numero di iterazioni molto maggiore e tendano a valori molto più distanti da quelli della prima iterazione (caso impulsivo). Ciò è sintomo del fatto che la soluzione inizia a “instabilizzarsi” man mano che ci si avvicina all’accelerazione minima ammissibile e che ormai si è ben distanti dall’ipotesi di manovra impulsiva.

Metodo $ai\Omega$

	Impulsivo	Continuo	Differenza
ΔV_{tot} [m/s]	293.194	379.095	+29.30%
Δt_{tot} [days]	0	15.021	-

Tabella 6.8. Confronto su spesa totale e tempo totale di spinta tra propulsione chimica ed elettrica: $ai\Omega$ -transfer.

Risultati

Con propulsione elettrica la trasferta risulta avere un costo complessivo superiore rispetto al caso impulsivo di circa il 29.30%, congruente con il fatto che, come si è già accennato in precedenza, è come se la missione durasse meno e l'Effetto J2 avesse meno tempo per agire. Essendo $t_{mis} < t^*$, l'effetto J2 continuerebbe ad avere un apporto positivo, tendendo ad avvicinare ulteriormente e gratuitamente i piani orbitali. Si noti inoltre che questa è la condizione di *worst case* per questo metodo, per quanto riguarda la spesa di questa specifica trasferta (con le sue condizioni iniziali e durata di missione): l'aumento di spesa del 29.30% rappresenta l'aumento massimo che si possa avere, per qualsiasi altro valore accettabile di accelerazione, a cui corrisponde necessariamente una durata di burn maggiore, l'aumento di spesa sarà inferiore.

Volendo visualizzare l'evoluzione del profilo di missione in questo caso limite, si riporta l'andamento dei tempi caratteristici della missione (Figura 6.12). Si definiscano:

- t_{a0} = istante di inizio prima burn
- t_{af} = istante di fine prima burn
- t_{b0} = istante di inizio seconda burn
- t_{bf} = istante di fine seconda burn

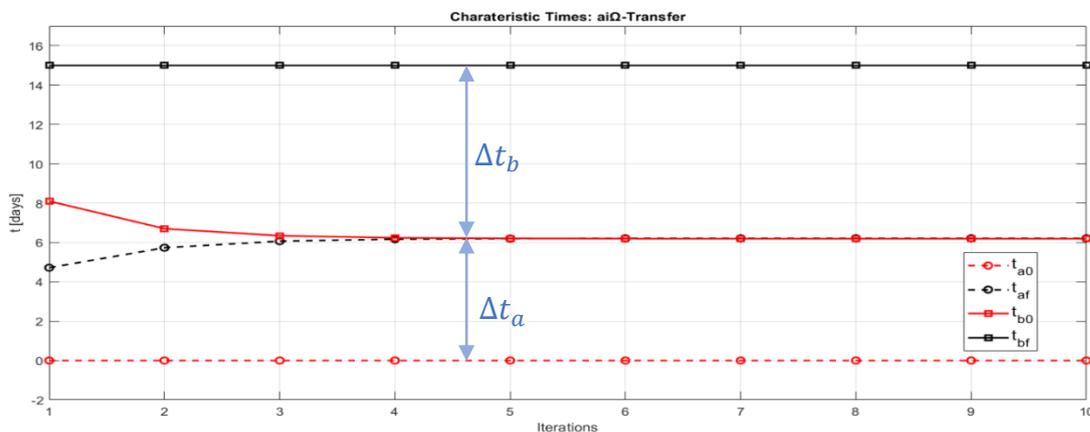


Figura 6.12. Confronto istanti inizio e fine archi propulsi: aiΩ-transfer.

Dalla quarta iterazione in poi, circa:

- $0 < t < t_{af}$ → prima burn, propulsore acceso
- $t_{b0} < t < t_{mis}$ → seconda burn, propulsore acceso

Con:

$$t_{af} \equiv t_{b0} \rightarrow \Delta t_a + \Delta t_b \equiv t_{mis}$$

In altre parole, nella condizione di accelerazione minima si perde completamente la fase di coasting non propulso, per l'intera durata della missione il propulsore elettrico è mantenuto attivo e fornisce spinta. Ed è questa la condizione necessaria affinché si possa definire un'accelerazione minima.

Per quanto riguarda il metodo attendista, anche in questo caso il ciclo di estensione a trasferte continue necessita di un numero maggiore di iterazione per convergere, nell'ordine delle 6/7. Di seguito i valori di spesa e durata totali della fase propulsa per il metodo attendista.

Metodo Attendista

	Impulsivo	Continuo	Differenza
ΔV_{tot} [m/s]	283.059	403.397	+42.51%
Δt_{tot} [days]	0	14.993	-

Tabella 6.9. Confronto su spesa totale e tempo totale di spinta tra propulsione chimica ed elettrica: Metodo Attendista.

Come per il metodo $ai\Omega$, anche con il metodo attendista si registra un aumento importante del costo di trasferta per missione continua piuttosto che impulsiva, anzi l'aumento è molto maggiore in questo caso, in quanto, come si è detto anche per il Caso 2, la soluzione attendista fa maggiore affidamento sull'effetto J2 rispetto ad $ai\Omega$ ed è per questo più suscettibile a diminuzioni di durata della missione (sempre che questa sia minore di t^*). Come per il caso $ai\Omega$, anche per l'attendista questa rappresenta l'accelerazione di *worst case*, ovvero quella che massimizza la spesa. Dal confronto con la Tabella del caso 2, infatti, non c'è nessun altro valore di accelerazione che porta ad aumenti di questo calibro.

Considerazioni riguardo ai tempi medi, iniziali e finali della burn sono assolutamente analoghe a quelle del caso $ai\Omega$ e pertanto si omettono.

6.4 Caso 4

Nel paragrafo 3, si è valutata, dato un set di condizioni iniziali di parametri orbitali e durata di missione, l'accelerazione minima con cui sia possibile effettuare suddetta trasferta avvalendosi del metodo Attendista o $ai\Omega$. Il caso che si analizzerà in questo paragrafo ha lo scopo di trovare la soluzione complementare, ovvero: dati come condizioni iniziali i parametri delle orbite in gioco e una certa accelerazione, qual è la minor durata di missione ammissibile? In fase di design, tendenzialmente, sarebbe di maggior interesse conoscere l'accelerazione minima che il propulsore deve garantire al craft dato un certo requisito sulla durata, ma in altri casi, per esempio considerando un craft già in fase operativa e quindi con un certo propulsore e una certa massa assegnati, conoscere qual è il tempo minimo che ci impiegherebbe per effettuare una certa trasferta potrebbe essere sicuramente più utile.

Nel caso esaminato si sono scelte le medesime condizioni iniziali sui parametri orbitali del Caso 2 e 3 e si è fatto variare il t_{mis} da 1 a 100 giorni.

Caso A:

$$t^* = \frac{\Omega_{C0} - \Omega_{T0} + 2k\pi}{\dot{\Omega}_T - \dot{\Omega}_C} = 20.93 \text{ days}$$

Di seguito gli andamenti ricavati per Metodo $ai\Omega$.

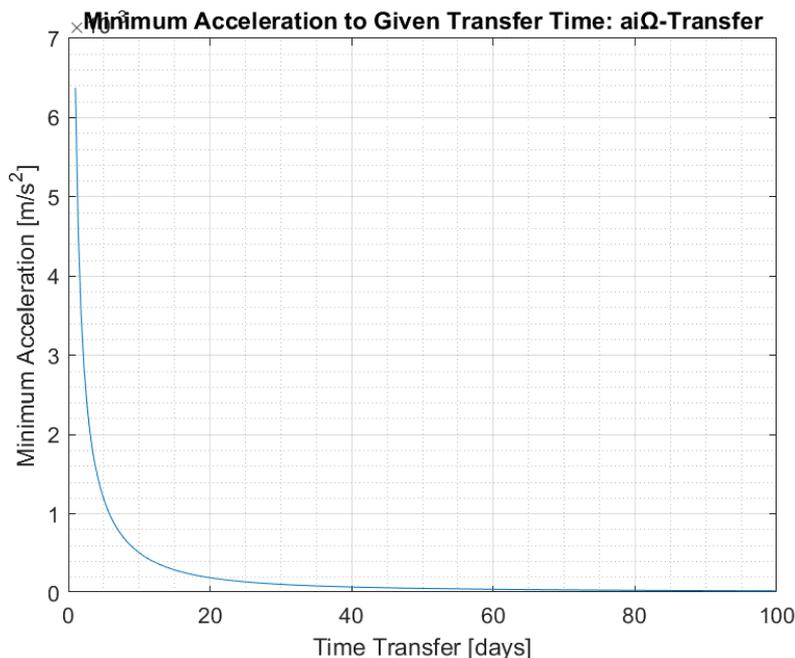


Figura 6.13. Andamento dell'accelerazione minima in funzione della durata di trasferta, dato un certo set di condizioni iniziali: $ai\Omega$ -transfer.

E per il Metodo Attendista.

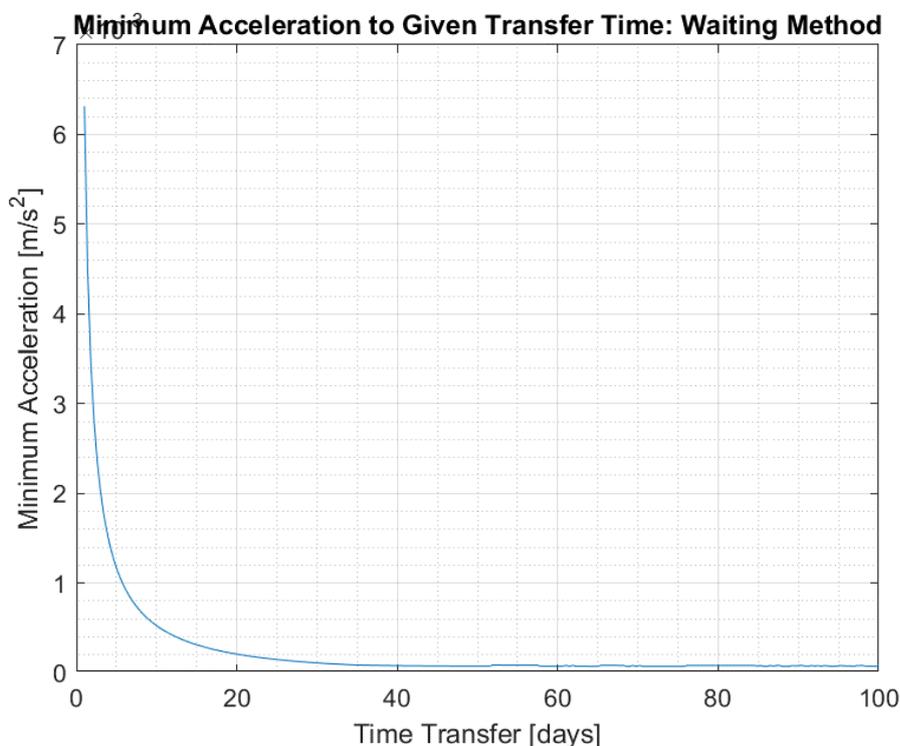


Figura 6.14. Andamento dell'accelerazione minima in funzione della durata di trasferta, dato un certo set di condizioni iniziali: Metodo Attendista.

Le curve riportate nei grafici precedenti identificano delle zone di fattibilità: al di sopra di esse la missione è fattibile, al di sotto no. Per esempio, fissata una certa durata della missione, a questa corrisponde un'accelerazione minima, con la quale è possibile completare la trasferta nel rispetto dei requisiti di missione solamente mantenendo il propulsore attivo per l'intera manovra; per accelerazioni superiori della minima, porzione di piano al di sopra della curva, la missione è ancora fattibile, non sarà più necessario avere il propulsore sempre acceso e ci sarà anche una fase di coasting non propulso. Invece, per accelerazioni minori della minima, e dunque nella porzione di spazio al sotto della curva, la durata della missione semplicemente non basta ad effettuare la trasferta. Medesime considerazioni si possono effettuare fissando l'accelerazione e valutando il minimo tempo di trasferta con quella accelerazione, valore corrispondente sull'asse delle ascisse.

Data la forma iperbolica delle curve riportate in Figura 6.13 e 6.14, si riportano di seguito i medesimi andamenti, ma in scala logaritmica e nello stesso grafico, di modo da comprenderne meglio il rapporto.

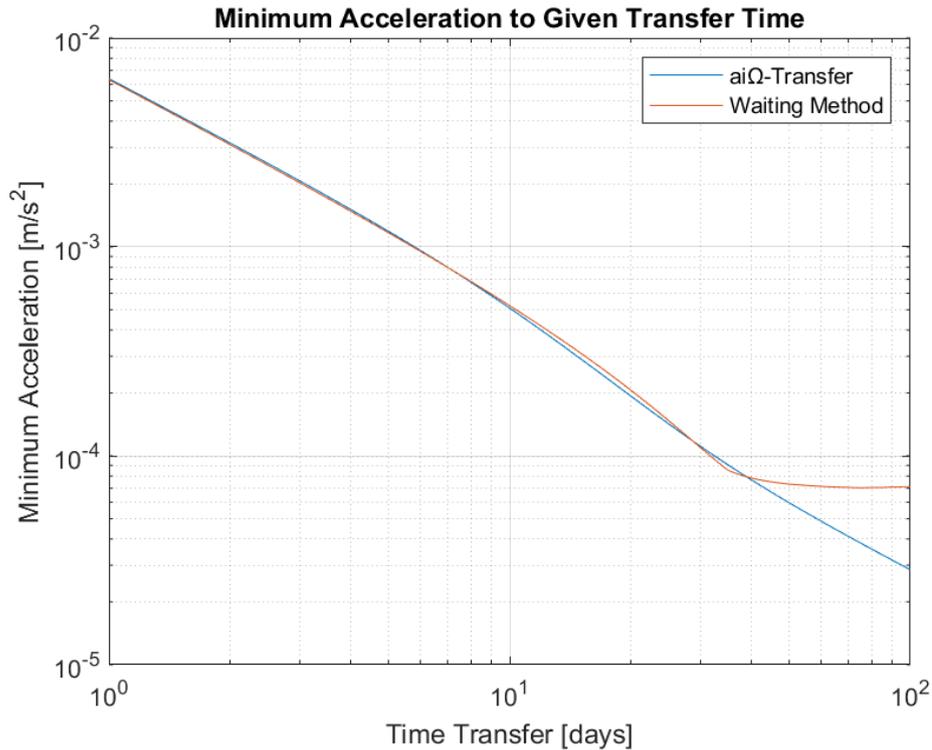


Figura 6.15. Andamento in scala logaritmica dell'accelerazione minima in funzione della durata di trasferta, dato un certo set di condizioni iniziali: Metodo Attendista e $ai\Omega$.

All'aumentare della durata della missione l'accelerazione minima decresce, alla stessa maniera, data una certa accelerazione ed il metodo che si intende sfruttare per effettuare la trasferta, il tempo minimo per completarla è inversamente proporzionale all'accelerazione disponibile. Per tempi che tendono a zero l'accelerazione scoppia all'infinito, si torna dunque all'ipotesi impulsiva. Le due curve presentano un andamento quasi rettilineo in scala logaritmica e risulta palese come l'errore tra un metodo e l'altro sia piccolo e non è possibile affermare in generale che l'accelerazione per un metodo sia maggiore o minore che per l'altro: le curve tendono ad "oscillare" l'una intorno l'altra. Ciò è vero fino a tempi di missione dell'ordine dei 40 giorni, in corrispondenza dei quali l'accelerazione minima per il metodo attendista raggiunge un plateau, sintomo del fatto che l'aumentare della durata di missione è controbilanciata da un aumento notevole del ΔV associato a questo metodo. Come si vedrà nel prossimo paragrafo, infatti, se per $ai\Omega$ si raggiunge un plateau di ΔV per tempi di missione che crescono molto, lo stesso non si può dire per il metodo attendista che, anzi, superato il t^* tende a scoppiare rapidamente a valori di ΔV sempre maggiori.

Volendo generalizzare i risultati, rendendoli indipendenti dalle condizioni iniziali del caso specifico, si procede valutando gli effetti delle variazioni di $\Delta\Omega_0$, Δi e Δa

sull'accelerazione minima in funzione della durata di missione. Si farà variare un parametro per volta mantenendo gli altri costanti.

6.4.1 Metodo $ai\Omega$

In questo paragrafo si valutano gli effetti delle differenze iniziali dei parametri orbitali per il Metodo $ai\Omega$ -transfer.

6.4.1.1 Effetto di $\Delta\Omega_0$

Si fissano Δi e Δa ai valori dell'esempio analizzato nei casi precedenti:

- $\Delta i = i_T - i_C = -1.19 \text{ deg}$
- $\Delta a = a_T - a_C = -45.5 \text{ km}$

Si fa variare la differenza iniziale di RAAN e la durata della missione negli intervalli:

- $\Delta\Omega_0 = [-27.59, 20.41] \text{ deg}$
- $t_{mis} = [10, 100] \text{ days}$

Di seguito la superficie di variazione risultante.

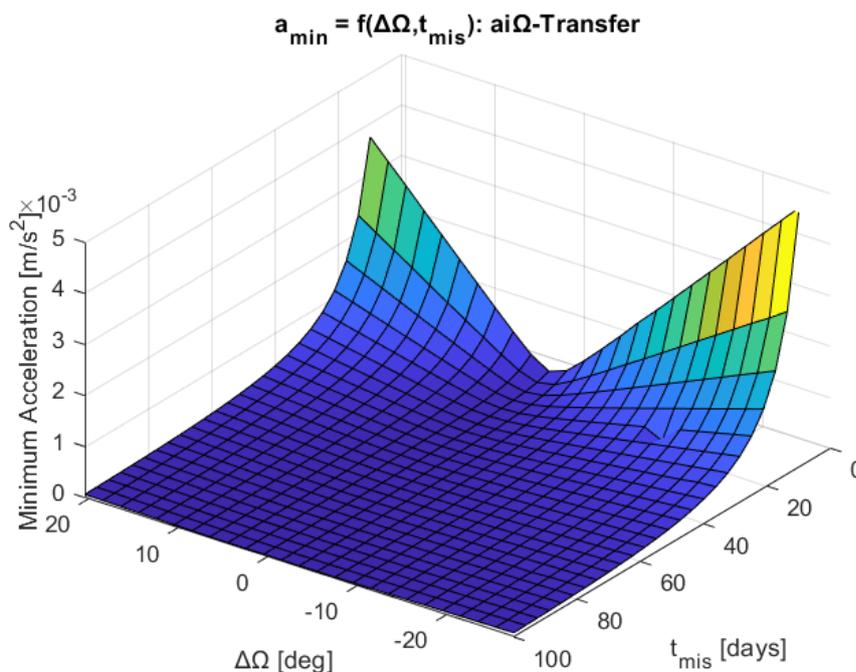


Figura 6.16. Andamento dell'accelerazione minima in funzione della durata di missione e della differenza di RAAN di tempo 0: $ai\Omega$ -transfer.

Seguono considerazioni al riguardo dell'andamento riportato in Figura 6.16.

Risultati

- L'accelerazione minima necessaria cresce al diminuire del t_{mis} e all'aumentare del $|\Delta\Omega_0|$, congruente con il fatto che se $|\Delta\Omega_0|$ cresce, inevitabilmente aumenta anche il costo ΔV_{tot} della trasferta e dunque, a parità di t_{mis} sarà necessaria un'accelerazione maggiore.
- Il minimo di a_{min} è raggiunto per $\Delta\Omega_0 \cong 0 \text{ deg}$
- Essendo $\dot{\Omega}_{C0} > \dot{\Omega}_{T0}$:
 - Per $\Delta\Omega_0 > 0$ si ricade nel Caso A, ovvero chaser parte in anticipo, i piani si raggiungono entro un giro, J_2 ha effetto positivo
 - Per $\Delta\Omega_0 < 0$ si ricade nel Caso D, ovvero chaser parte in ritardo, i piani non si raggiungono entro un giro, J_2 ha effetto negativo
- Il metodo $ai\Omega - transfer$ non sente molto la differenza tra Caso A e Caso D, l'accelerazione minima è praticamente simmetrica rispetto al piano $\Delta\Omega_0 = 0 \text{ deg}$, a meno di un piccolo aumento per $\Delta\Omega_0 < 0$, dovuto all'avere un ΔV un po' maggiore a causa della presenza controproducente di J_2 .

6.4.1.2 Effetto di Δa

Si fissano Δi e $\Delta\Omega_0$ ai valori dell'esempio analizzato nei casi precedenti:

- $\Delta i = i_T - i_C = -1.19 \text{ deg}$
- $\Delta\Omega_0 = \Omega_{0T} - \Omega_{0C} = 2.46 \text{ deg}$

Si fa variare la differenza di semi-asse e la durata della missione negli intervalli:

- $\Delta a = [-279, 420] \text{ km}$
- $t_{mis} = [10, 100] \text{ days}$

Si noti che la variazione di semi-asse è ottenuta tenendo costante il semiasse dell'orbita del chaser e variando quello dell'orbita di arrivo.

Di seguito la superficie di variazione risultante.

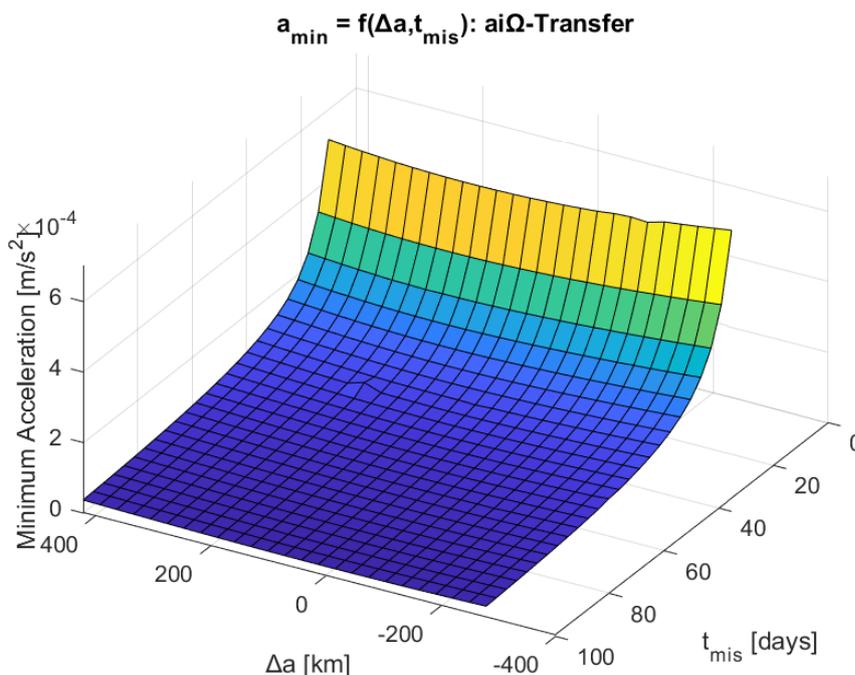


Figura 6.17. Andamento dell'accelerazione minima in funzione della durata di missione e della differenza di semi-asse maggiore: ai Ω -transfer.

Seguono considerazioni al riguardo dell'andamento riportato in Figura 6.17.

- L'accelerazione minima necessaria cresce al diminuire del t_{mis} e all'aumentare del $|\Delta a|$, congruente con il fatto che se $|\Delta a|$ cresce, inevitabilmente aumenta anche il costo ΔV_{tot} della trasferta e dunque, a parità di t_{mis} sarà necessaria un'accelerazione maggiore.
- Il minimo di a_{\min} è raggiunto per $\Delta a \cong 0 \text{ km}$
- A differenza di Figura 6.16, si nota come l'effetto $|\Delta a|$ sia molto meno significativo, variazioni importanti di semi-asse non inducono gli stessi aumenti di a_{\min} indotti da variazioni anche piccole di $\Delta \Omega_0$. Sintomo del fatto che piccoli aggiustamenti fuori dal piano sono molto più costosi di variazioni di semiasse.
- Il semiasse è uno dei parametri che rientra nella valutazione di $\dot{\Omega}_{J_2}$, pertanto al variare del semiasse del target, $\dot{\Omega}_{J_2_T}$ cambierà di conseguenza.
- Si riporta di seguito l'andamento del $\Delta \dot{\Omega} = \dot{\Omega}_{J_2_T} - \dot{\Omega}_{J_2_C}$ in funzione di Δa .

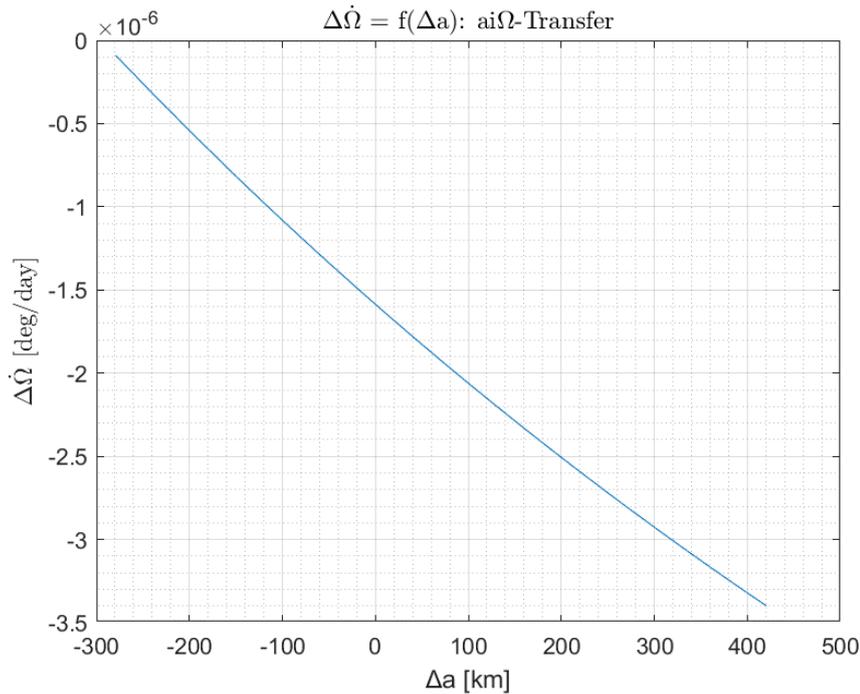


Figura 6.18. Andamento della differenza di RAAN Rate tra Target e Chaser in funzione della differenza di semi-asse maggiore: aiΩ-transfer.

All'aumentare del Δa la differenza di RAAN Rate diminuisce. Considerando che $\Delta \dot{\Omega} < 0$ implica che il chaser (che parte in anticipo) ruota più rapidamente del target, l'aumento in valore assoluto di $\Delta \dot{\Omega}$ implica che l'avvicinamento delle due orbite avviene più rapidamente e dunque t^* diminuisce. Con ciò, all'aumentare del valore assoluto di $\Delta \dot{\Omega}$, aumenta l'effetto utile J_2 e dunque diminuisce la spesa per il controllo della RAAN, guadagno che va a "mitigare" l'aumento del costo derivante dall'incremento di $|\Delta a|$. Questo "guadagno" è riscontrabile nel fatto che a parità di $|\Delta a|$, per $\Delta a > 0$, per i quali $|\Delta \dot{\Omega}|$ più grandi, l'accelerazione minima è inferiore della controparte $\Delta a < 0$.

6.4.1.3 Effetto di Δi

Si fissano Δa e $\Delta \Omega_0$ ai valori dell'esempio analizzato nei casi precedenti:

- $\Delta a = a_T - a_C = -45.5 \text{ km}$
- $\Delta \Omega_0 = \Omega_{0T} - \Omega_{0C} = 2.46 \text{ deg}$

Si fa variare la differenza di inclinazione e la durata della missione negli intervalli:

- $\Delta i = [-7.64, 11.36] \text{ deg}$
- $t_{mis} = [10, 100] \text{ days}$

Si noti che la variazione di inclinazione è ottenuta tenendo costante l'inclinazione dell'orbita del chaser e variando quello dell'orbita di arrivo.

Di seguito la superficie di variazione risultante.

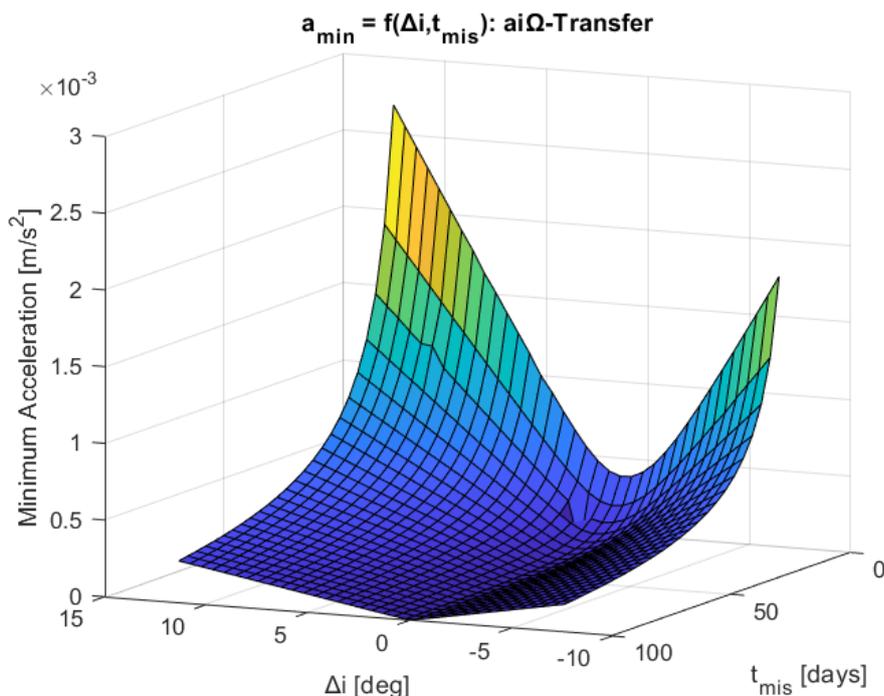


Figura 6.19. Andamento dell'accelerazione minima in funzione della durata di missione e della differenza di inclinazione: aiΩ-transfer.

Seguono considerazioni al riguardo dell'andamento riportato in Figura 6.19.

- L'accelerazione minima necessaria cresce al diminuire del t_{mis} e all'aumentare del $|\Delta i|$, congruente con il fatto che se $|\Delta i|$ cresce, inevitabilmente aumenta anche il costo ΔV_{tot} della trasferta e dunque, a parità di t_{mis} sarà necessaria un'accelerazione maggiore.
- Il minimo di a_{min} è raggiunto nell'intorno di $\Delta i \cong 0 \text{ deg}$
- A differenza di Figura 6.17, si nota come l'effetto $|\Delta i|$ sia molto più significativo, il costo di variazione dell'inclinazione è paragonabile ad una variazione di RAAN, ed entrambi sono molto più costosi di variazioni di semi-asse.
- L'inclinazione è uno dei parametri che rientra nella valutazione di $\dot{\Omega}_{J_2}$, pertanto al variare dell'inclinazione del target, $\dot{\Omega}_{J_2_T}$ cambierà di conseguenza.
- Si riporta di seguito l'andamento del $\Delta \dot{\Omega} = \dot{\Omega}_{J_2_T} - \dot{\Omega}_{J_2_C}$ in funzione di Δi .

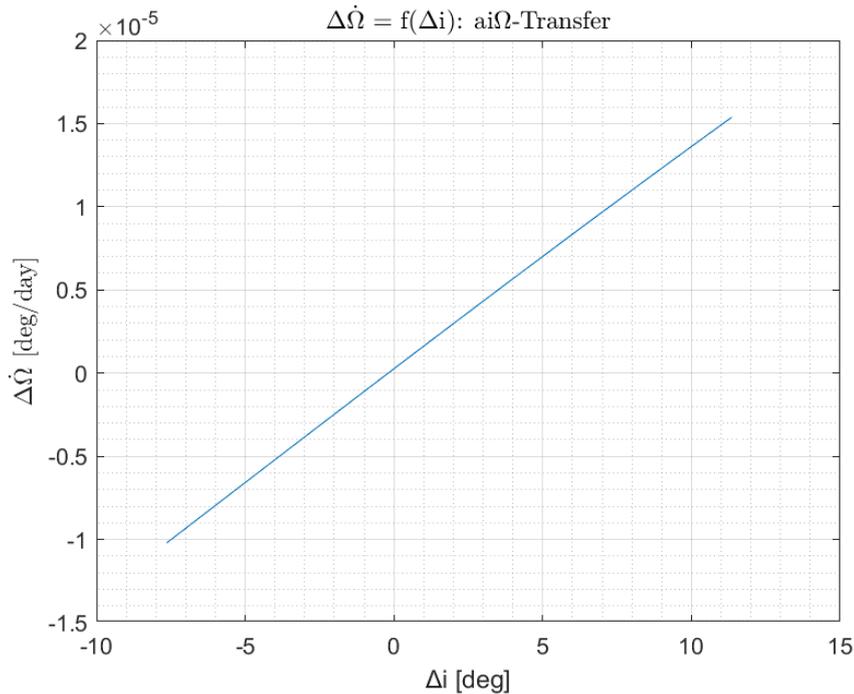


Figura 6.20. Andamento della differenza di RAAN Rate tra Target e Chaser in funzione della differenza di inclinazione: aiΩ-transfer.

- Essendo $\Delta\Omega_0 > 0$, e quindi il chaser parte in anticipo:
 - Per $\Delta\dot{\Omega} > 0 \rightarrow \dot{\Omega}_T > \dot{\Omega}_C$: si ricade nel Caso B, i piani non si raggiungono entro un giro, J_2 ha effetto negativo
 - Per $\Delta\dot{\Omega} < 0 \rightarrow \dot{\Omega}_C > \dot{\Omega}_T$: si ricade nel Caso A, i piani si raggiungono entro un giro, J_2 ha effetto positivo
- Per $\Delta i > 0 \rightarrow \Delta\dot{\Omega} > 0$
- Per $\Delta i < 0 \rightarrow \Delta\dot{\Omega} < 0$

L'effetto positivo di J_2 nel Caso A è riscontrabile nel fatto che a parità di $|\Delta i|$, per $\Delta i < 0$, per i quali $\Delta\dot{\Omega} < 0$, l'accelerazione minima è inferiore della controparte $\Delta i > 0$. Il risparmio sulla RAAN ha un impatto maggiore rispetto alla variazione di semi-asse commentata nel sottoparagrafo precedente.

Si noti inoltre che sebbene si ricada nel caso B per $\Delta i > 0$, ciò non preclude la possibilità di eseguire la trasferta aiΩ. Non è possibile analizzare Δi inferiori a -7.64 , in quanto avendo tenuto costante l'inclinazione del chaser a 98.64deg , ciò avrebbe portato ad avere un'orbita del target diretta e quindi ad una trasferta impossibile.

6.4.2 Metodo Attendista

In questo paragrafo si valutano gli effetti delle differenze iniziali dei parametri orbitali per il Metodo Attendista.

6.4.2.1 Effetto di $\Delta\Omega_0$

Si fissano Δi e Δa ai valori dell'esempio analizzato nei casi precedenti:

- $\Delta i = i_T - i_C = -1.19 \text{ deg}$
- $\Delta a = a_T - a_C = -45.5 \text{ km}$

Si fa variare la differenza iniziale di RAAN e la durata della missione negli intervalli:

- $\Delta\Omega_0 = [0.41, 20.41] \text{ deg}$
- $t_{mis} = [10, 100] \text{ days}$

Di seguito la superficie di variazione risultante.

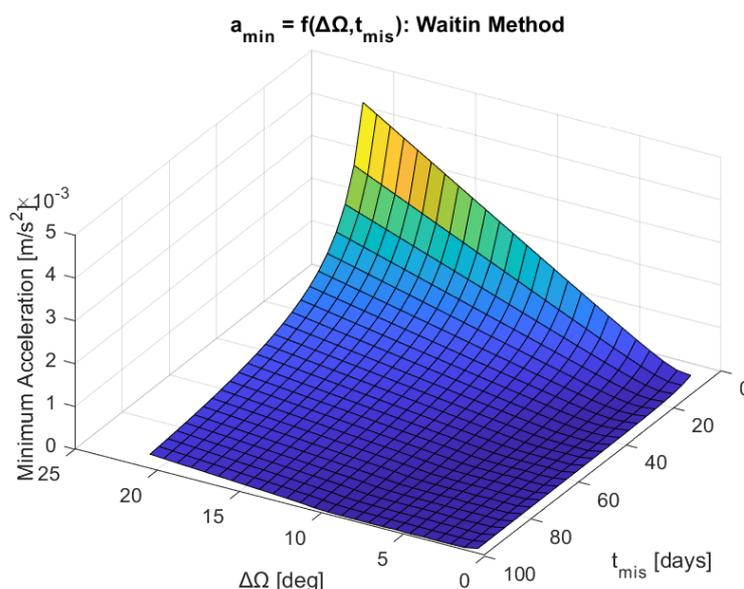


Figura 6.21. Andamento dell'accelerazione minima in funzione della durata di missione e della differenza di RAAN di tempo 0: Metodo Attendista.

Seguono considerazioni al riguardo dell'andamento riportato in Figura 6.21.

- L'accelerazione minima necessaria cresce al diminuire del t_{mis} e all'aumentare del $|\Delta\Omega_0|$, congruente con il fatto che se $|\Delta\Omega_0|$ cresce, inevitabilmente aumenta anche il costo ΔV_{tot} della trasferta e dunque, a parità di t_{mis} sarà necessaria un'accelerazione maggiore.

Risultati

- Il minimo di a_{min} è raggiunto per $\Delta\Omega_0 = 0 \text{ deg}$
- A differenza del caso ai Ω si è scelto di non riportare casi con $\Delta\Omega_0 < 0$, in quanto, essendo $\dot{\Omega}_{C0} > \dot{\Omega}_{T0}$, per $\Delta\Omega_0 < 0$ si ricadrebbe nel Caso D, ovvero i piani non si raggiungono entro un giro e la soluzione attendista, pur rimanendo matematicamente possibile, perde senso logico.

6.4.2.2 Effetto di Δa

Si fissano Δi e $\Delta\Omega_0$ ai valori dell'esempio analizzato nei casi precedenti:

- $\Delta i = i_T - i_C = -1.19 \text{ deg}$
- $\Delta\Omega_0 = \Omega_{0T} - \Omega_{0C} = 2.46 \text{ deg}$

Si fa variare la differenza di semi-asse e la durata della missione negli intervalli:

- $\Delta a = [-279, 420] \text{ km}$
- $t_{mis} = [10, 100] \text{ days}$

Si noti che la variazione di semi-asse è ottenuta tenendo costante il semi-asse dell'orbita del chaser e variando quello dell'orbita di arrivo.

Di seguito la superficie di variazione risultante.

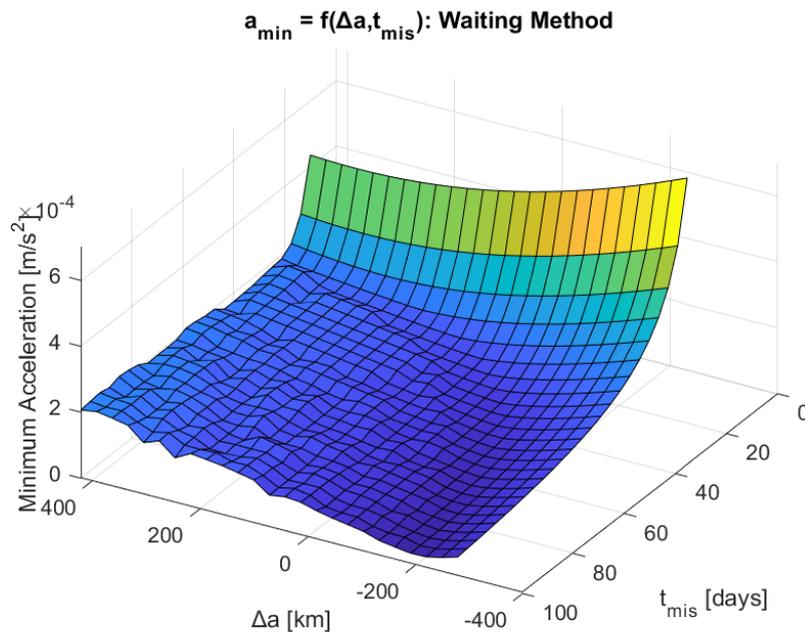


Figura 6.22. Andamento dell'accelerazione minima in funzione della durata di missione e della differenza di semi-asse maggiore: Metodo Attendista.

Seguono considerazioni al riguardo dell'andamento riportato in Figura 6.22.

- L'accelerazione minima necessaria cresce al diminuire del t_{mis} e all'aumentare del $|\Delta a|$, congruente con il fatto che se $|\Delta a|$ cresce, inevitabilmente aumenta anche il costo ΔV_{tot} della trasferta e dunque, a parità di t_{mis} sarà necessaria un'accelerazione maggiore.
- L'effetto $|\Delta a|$ è molto meno impattante sul ΔV e quindi sull'accelerazione minima.
- Il semiasse è uno dei parametri che rientra nella valutazione di $\dot{\Omega}_{J_2}$, pertanto al variare del semiasse del target, $\dot{\Omega}_{J_2_T}$ cambierà di conseguenza.
- Si riporta di seguito l'andamento del $\dot{\Delta\Omega} = \dot{\Omega}_{J_2_T} - \dot{\Omega}_{J_2_C}$ in funzione di Δa .

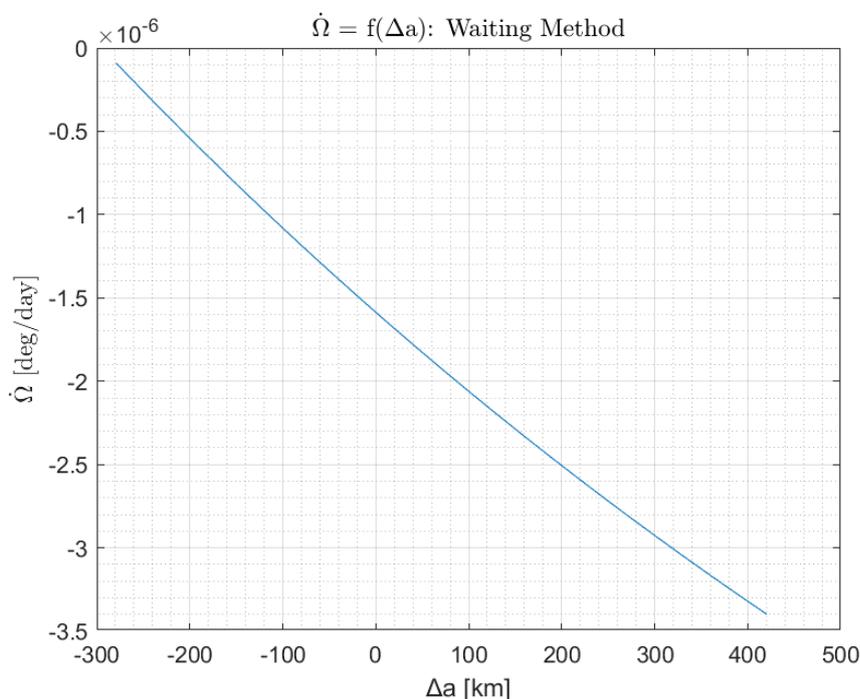


Figura 6.23. Andamento della differenza di RAAN Rate tra Target e Chaser in funzione della differenza di semi-asse maggiore: Metodo Attendista.

All'aumentare del Δa la differenza di RAAN Rate diminuisce. Considerando che $\dot{\Delta\Omega} < 0$ implica che il chaser (che parte in anticipo) ruota più rapidamente del target, l'aumento in valore assoluto di $\dot{\Delta\Omega}$ implica che l'avvicinamento delle due orbite avviene più rapidamente e dunque t^* diminuisce. Con ciò, all'aumentare del valor assoluto di $\dot{\Delta\Omega}$, aumenta l'effetto utile J_2 e dunque diminuisce la spesa per il controllo della RAAN, guadagno che va a “mitigare” l'aumento del costo derivante dall'incremento di $|\Delta a|$. Questo “guadagno” è riscontrabile nel fatto che a parità di $|\Delta a|$, per $\Delta a > 0$, per i quali $|\dot{\Delta\Omega}|$ più grandi, l'accelerazione minima è

Risultati

inferiore della controparte $\Delta a < 0$. Rispetto al metodo ai Ω , la differenza di accelerazione minima che si guadagna con differenze di RAAN Rate maggiori è molto più significativa.

Si è scelto di non considerare Δa inferiori, in quanto ciò avrebbe comportato $\Delta\Omega > 0$, ovvero RAAN Rate del target maggiore di quello del chaser in anticipo, si ricadrebbe dunque nel Caso B, anch'esso non compatibile con la soluzione attendista.

6.4.2.3 Effetto di Δi

Si fissano Δa e $\Delta\Omega_0$ ai valori dell'esempio analizzato nei casi precedenti:

- $\Delta a = a_T - a_C = -45.5 \text{ km}$
- $\Delta\Omega_0 = \Omega_{0T} - \Omega_{0C} = 2.46 \text{ deg}$

Si fa variare la differenza di inclinazione e la durata della missione negli intervalli:

- $\Delta i = [-7.64, -0.64] \text{ deg}$
- $t_{\text{mis}} = [10, 100] \text{ days}$

Si noti che la variazione di inclinazione è ottenuta tenendo costante l'inclinazione dell'orbita del chaser e variando quello dell'orbita di arrivo.

Di seguito la superficie di variazione risultante.

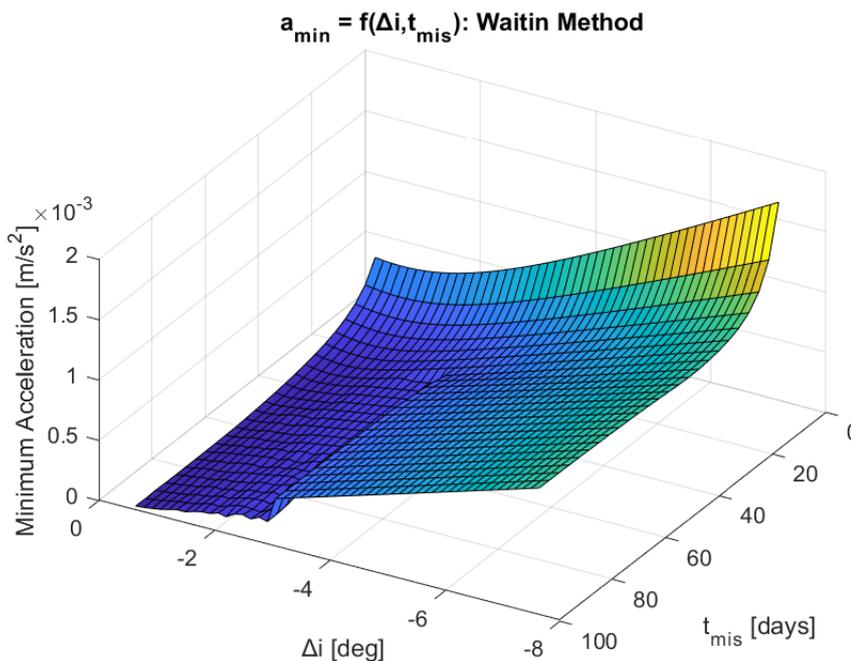


Figura 6.24. Andamento dell'accelerazione minima in funzione della durata di missione e della differenza di inclinazione: Metodo Attendista.

Seguono considerazioni al riguardo dell'andamento riportato in Figura 6.24.

- L'accelerazione minima necessaria cresce al diminuire del t_{mis} e all'aumentare del $|\Delta i|$, congruente con il fatto che se $|\Delta i|$ cresce, inevitabilmente aumenta anche il costo ΔV_{tot} della trasferta e dunque, a parità di t_{mis} sarà necessaria un'accelerazione maggiore.
- Il minimo di a_{min} è raggiunto nell'intorno di $\Delta i = 0 \text{ deg}$
- L'effetto $|\Delta i|$ è molto più significativo di quello del semi-asse, il costo di variazione dell'inclinazione è paragonabile ad una variazione di RAAN, ed entrambi sono molto più costosi di variazioni di semi-asse.
- L'inclinazione è uno dei parametri che rientra nella valutazione di $\dot{\Omega}_{J_2}$, pertanto al variare dell'inclinazione del target, $\dot{\Omega}_{J_2_T}$ cambierà di conseguenza.
- Si riporta di seguito l'andamento del $\Delta\dot{\Omega} = \dot{\Omega}_{J_2_T} - \dot{\Omega}_{J_2_C}$ in funzione di Δi .

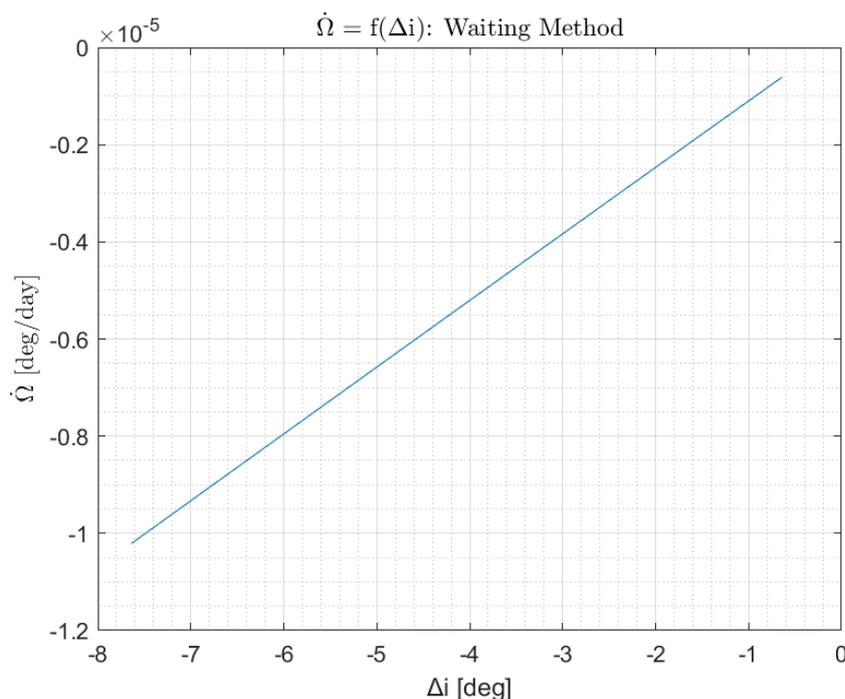


Figura 6.25. Andamento della differenza di RAAN Rate tra Target e Chaser in funzione della differenza di semi-asse maggiore: Metodo Attendista.

- Essendo $\Delta\Omega_0 > 0$, e quindi il chaser parte in anticipo, per $\Delta\dot{\Omega} < 0 \rightarrow \dot{\Omega}_C > \dot{\Omega}_T$: si ricade nel Caso A, i piani si raggiungono entro un giro, la soluzione attendista ha motivo di essere presa in considerazione.
- Per $\Delta i < 0 \rightarrow \Delta\dot{\Omega} < 0$

Risultati

- Per questa ragione non si sono proposti $\Delta i > 0$, i quali avrebbero comportato $\Delta \dot{\Omega} > 0$ e dunque si sarebbe ricaduti nel Caso B, non compatibile con la soluzione attendista.

Come per la soluzione $ai\Omega$, $\Delta i = -7.64 \text{ deg}$ rappresenta un limite inferiore sotto il quale, avendo tenuto costante l'inclinazione del chaser a 98.64deg, l'orbita del target sarebbe divenuta diretta e quindi la trasferta impossibile.

6.5 Caso 5

Nei paragrafi precedenti si sono valutate le differenze tra l'applicazione del metodo $ai\Omega - transfer$ e metodo attendista. In quest'ultimo paragrafo, lo scopo è fondere i risultati ottenuti ed elaborare un codice unico con il quale, date certe condizioni iniziali e una determinata durata di missione, identifichi il metodo più conveniente in termini di spesa ΔV_{tot} e valuti quale sia l'accelerazione minima ammissibile per effettuare la trasferta in questione e/o il tempo minimo, assegnata una certa accelerazione. Nel caso in cui la durata imposta a priori dovesse essere minore della durata minima, il programma sarà in grado di valutare suddetto minimo ed effettuare nuovamente il controllo relativo al metodo migliore. Non è detto, infatti, che date le medesime condizioni iniziali e facendo variare il tempo di trasferta il metodo migliore sia lo stesso, anzi, in generale non è così, si veda per esempio Figura 4.18 che riporta i ΔV nell'ipotesi di manovra impulsiva, per i tre metodi introdotti nel Capitolo 4.

Suddetto grafico si rifaceva però all'ipotesi impulsiva e, come si è visto nei casi precedenti, estendendo la soluzione a manovre continue il ΔV_{tot} tende a convergere a valori diversi da quelli impulsivi. Pertanto, il confronto tra metodo attendista e metodo $ai\Omega$ per la valutazione del più conveniente sarà eseguito sui ΔV_{tot} dell'ultimo passo del calcolo iterativo.

Per avere un'idea delle variazioni di ΔV_{tot} nel passaggio tra impulsivo a continuo si riportano i seguenti due grafici (Figure 6.26/6.27), il primo riporta gli andamenti dei ΔV_{tot} impulsivi, il secondo i ΔV_{tot} nell'estensione continua e considerando per ogni t_{mis} la relativa accelerazione minima.

I grafici si riferiscono alla stessa coppia di orbite analizzata nell'esempio impulsivo:

	Orbita Di Partenza	Orbita Di Arrivo
a	7150.3 km	7104.8 km
e	0	0
i	98.64 deg	97.45 deg
Ω	137.59 deg	138.05 deg
$\dot{\Omega}_{J2}$	1.0011 deg/day 2.0223e-07 rad/s	0.8836 deg/day 1.7849e-07 rad/s

Tabella 6.10. Riepilogo parametri orbitali Caso 6.

Risultati

Caso A:

$$t^* = \frac{\Omega_{C0} - \Omega_{T0} + 2k\pi}{\dot{\Omega}_T - \dot{\Omega}_C} = 3.931 \text{ days}$$

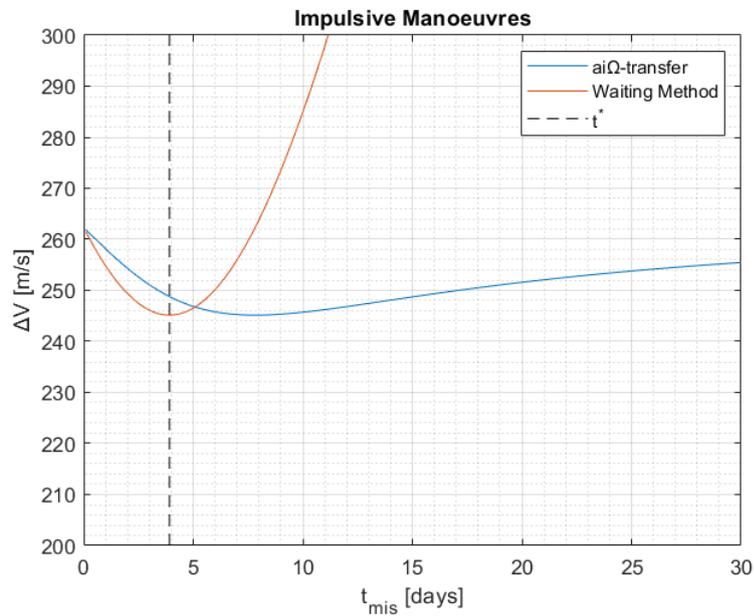


Figura 6.26. Confronto andamenti ΔV_{tot} in funzione della durata di missione: manovre impulsive.

Figura 6.26 riporta l'andamento dei ΔV in funzione della durata della missione nell'ipotesi impulsiva, corrisponde ai medesimi andamenti riportati in Figura 4.18. Il minimo dei due metodi coincide, e quello della soluzione attendista lo si riscontra esattamente a $t = t^*$.

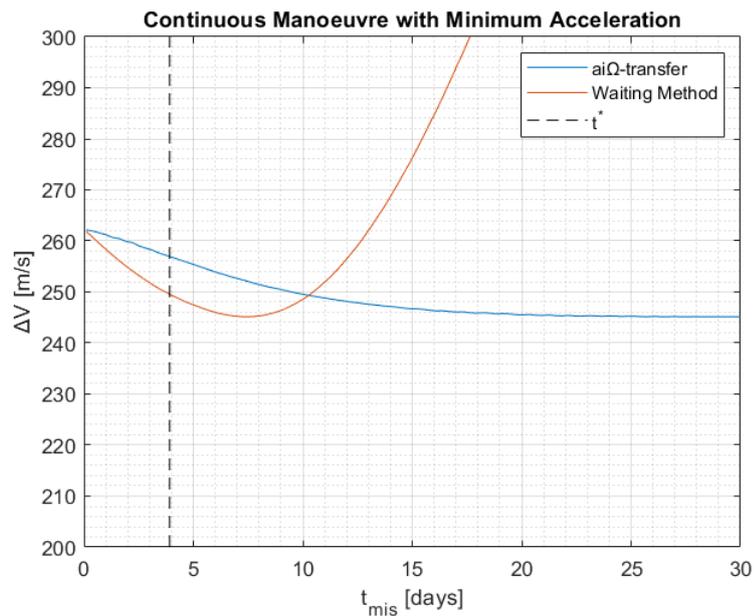


Figura 6.27. Confronto andamenti ΔV_{tot} in funzione della durata di missione: con accelerazione minima per ogni durata di missione considerata.

Con l'introduzione della manovra continua si nota bene come gli andamenti tendano a "rilassarsi" e a spostarsi verso tempi maggiori, sicché anche il loro minimo risulterà traslato verso destra, così facendo il minimo del metodo attendista non risulterà più in t^* . È poi interessante notare come, sebbene vi sia stata la traslazione, i minimi non siano variati rispetto al caso impulsivo e si attestano entrambi intorno ai 245 m/s. Inoltre, una volta raggiunto questo valore, la soluzione ai Ω tende a mantenersi al minimo, mentre la soluzione attendista scoppia all'infinito via via che i piani dell'orbita si iniziano ad allontanare. A $t_{mis} = 0$ impulsivo e continuo coincidono, in quanto tende ad infinito il valore di accelerazione minima.

Un fattore importante è osservare come non si possa affermare a priori che le manovre impulsive sia più o meno costose della controporta continua. Dipende dal t_{mis} considerato. Per durate brevi, fino a poco oltre t^* , il ΔV continuo è maggiore di quello impulsivo, a parità di durata, viceversa per tempi medio-lunghi la spesa continua è inferiore.

Il caso riportato in Figura 6.27 è però un caso limite, in quanto per ogni durata di missione si valuta la spesa relativa all'accelerazione minima relativa a quella durata. Ma in generale non è detto che si desideri effettuare la trasferta con l'accelerazione minima consentita, ed è possibile che per accelerazioni maggiori l'andamento dei ΔV sia qualcosa di intermedio tra Figura 6.26 e Figura 6.27. Per questa ragione si sono valutati gli andamenti di ΔV in funzione di accelerazione e durata di missione.

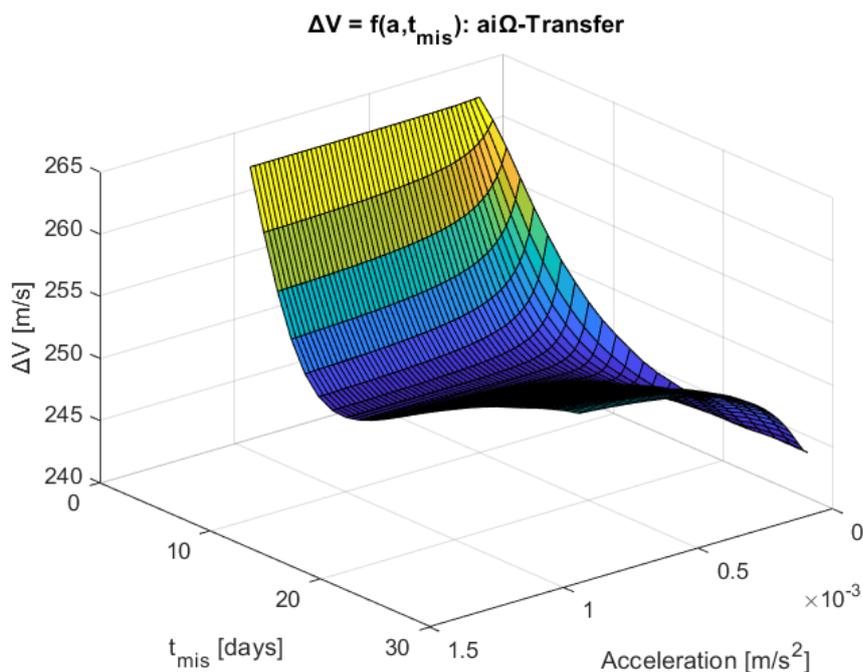


Figura 6.28. Andamento del costo totale di trasferta in funzione della durata di missione e dell'accelerazione disponibile: ai Ω -transfer.

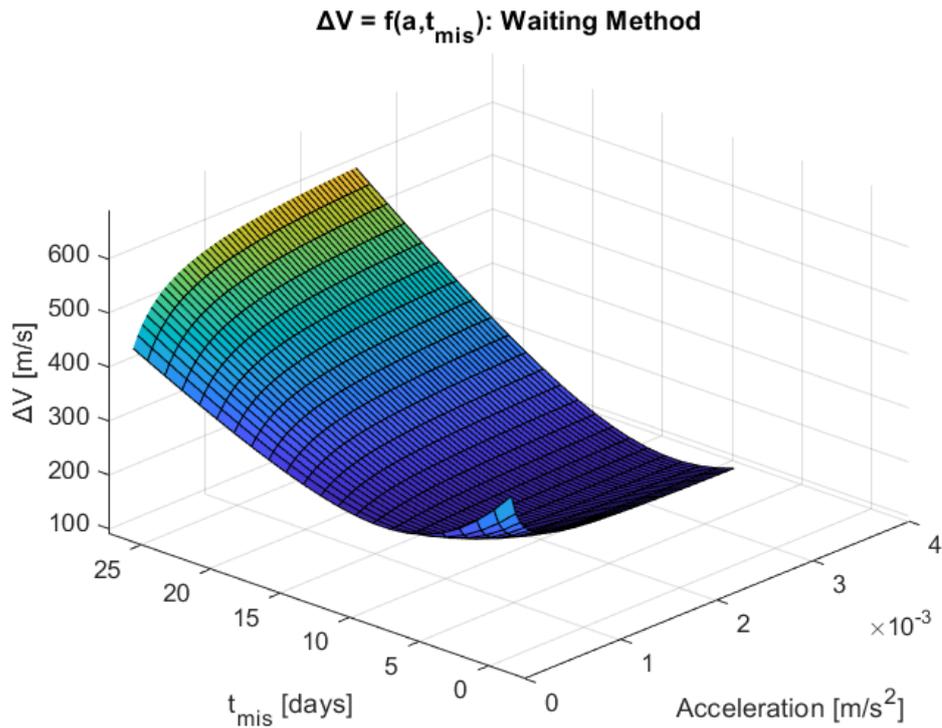


Figura 6.29. Andamento del costo totale di trasferta in funzione della durata di missione e dell'accelerazione disponibile: Metodo Attendista.

La dipendenza dall'accelerazione è tanto maggiore quanto più questa è bassa. Per entrambi i metodi, specialmente per il metodo attendista, si nota chiaramente come esclusa una zona nell'intorno del minimo valore di accelerazione considerato, la spesa tende a rimanere costante con l'accelerazione e a variare solo in funzione della durata della missione. Per il metodo $ai\Omega$ la zona “di dipendenza” dall'accelerazione è più ampia. A parità di durata, all'aumentare dell'accelerazione il ΔV tende all'andamento impulsivo.

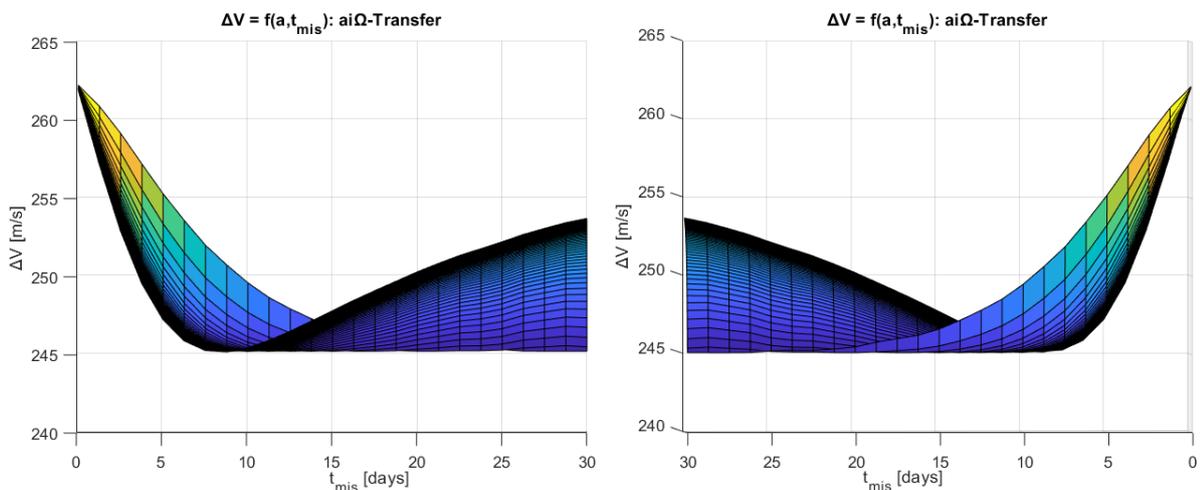


Figura 6.30. Sinistra: particolare di Figura 6.28 relativo ad accelerazione massima nel range considerato; Destra: particolare di Figura 6.28 relativo ad accelerazione minima.

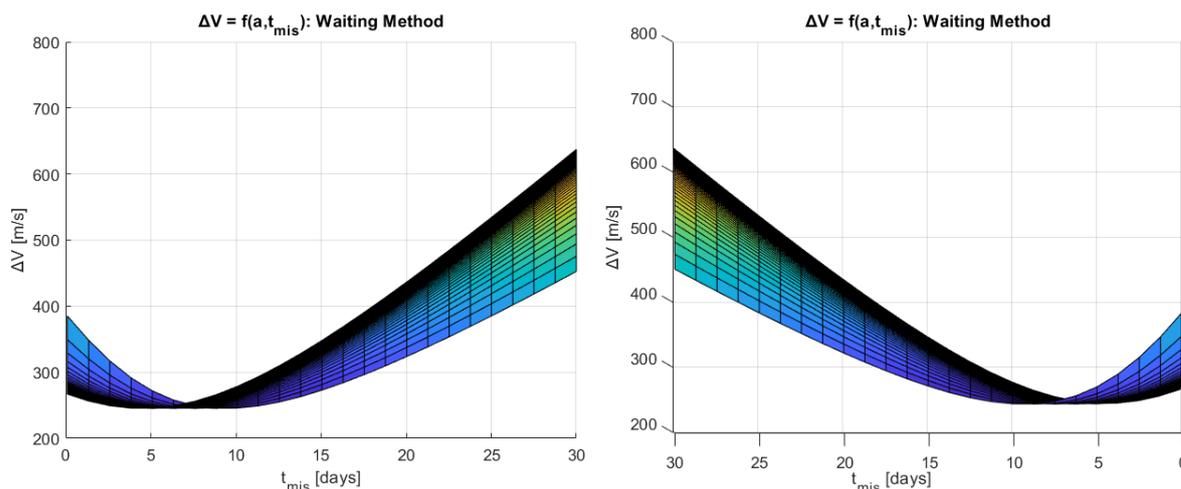


Figura 6.31. Sinistra: particolare di Figura 6.29 relativo ad accelerazione massima nel range considerato; Destra: particolare di Figura 6.29 relativo ad accelerazione minima.

Gli andamenti di ΔV in funzione della durata ad accelerazione massima e minima tendono rispettivamente agli andamenti limiti riportati nelle Figure 6.26-6.27. Nella maggior parte dei casi quindi, per una prima stima riguardo la scelta del metodo più conveniente si può fare riferimento direttamente alle stime impulsive, senza passare dall'estensione iterativa alle manovre continue, che seppur renda la scelta più accurata, aumenta il costo computazionale. Ciò è vero se si considerano accelerazioni sufficientemente elevate rispetto alla durata imposta e/o se la durata della missione è molto maggiore del t^* . Se invece si volesse scegliere il metodo più conveniente proprio considerando una certa coppia di t_{mis} e accelerazione minima si dovrebbe far riferimento al grafico in Figura 6.27.

Si riporta di seguito l'andamento del ΔV minimo dell'unione dei due casi e una "mappa" che indichi per quali coppie di accelerazione e durata convenga un metodo piuttosto che l'altro. Si noti che in questi grafici non è riportato il dominio di fattibilità della missione per una questione meramente di chiarezza grafica. Entrambe le seguenti Figure dovrebbero essere sovrapposte al dominio di fattibilità di accelerazione in funzione di durata minima, si vedrebbe così che parte delle superfici nell'intorno delle piccole accelerazioni e delle piccole durate (dove in Figura 6.32 si raggiungono i picchi di ΔV) sono effettivamente al di fuori della fattibilità. Si analizza meglio questo problema nel commento di Figura 6.34.

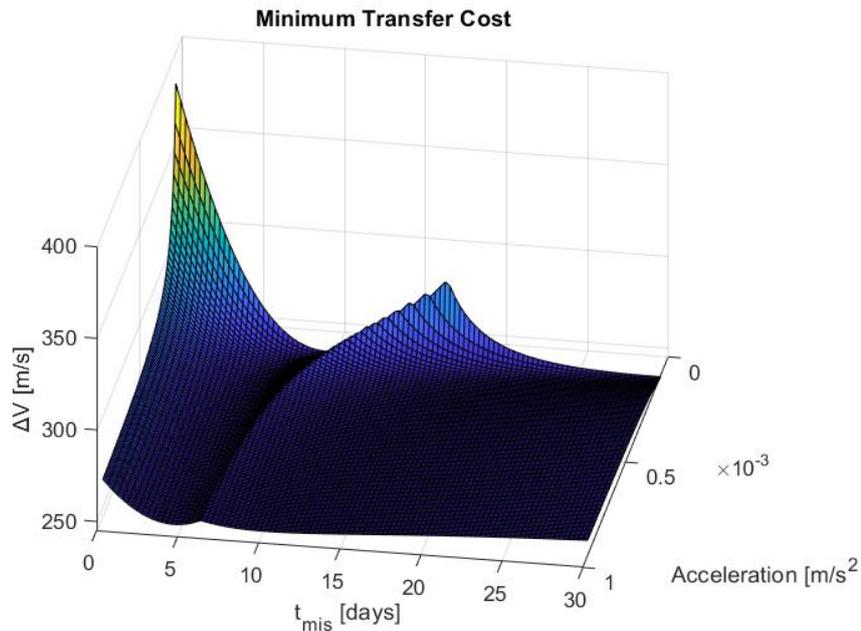


Figura 6.32. Andamento del minimo di costo totale di trasferta scelto tra i due metodi in funzione della durata di missione e dell'accelerazione disponibile.

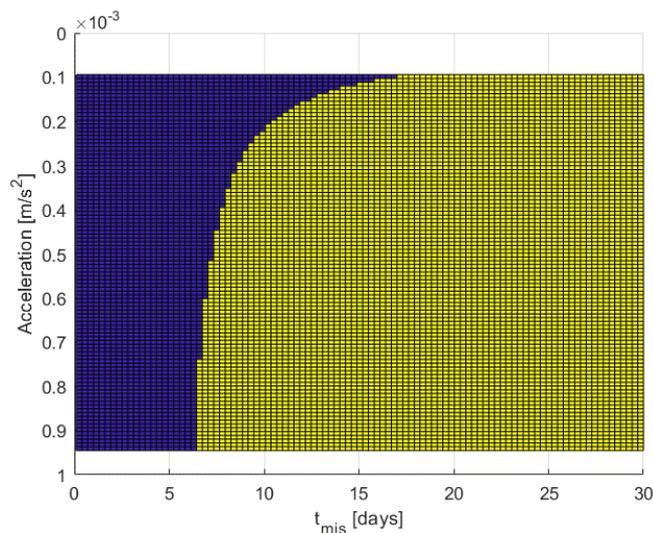


Figura 6.33. Mappa di scelta del metodo più conveniente in funzione della durata di missione e dell'accelerazione disponibile. Legenda: Viola = conviene Metodo Attendista; Giallo = conviene ai Ω -transfer.

Per tempi di missione ridotti conviene sempre il metodo attendista, ed in più, per accelerazioni piccole, prossime al minimo, la convenienza del metodo attendista si estende anche a durate maggiori. Maggiore è l'accelerazione e più il range di convenienza attendista va a "centrarsi" in t^* , come nella soluzione impulsiva. Per dare un'idea della durata delle fasi propulse corrispondenti ad alcuni dei punti nel grafico:

- $t_{mis} = 5 \text{ days}$ e $acc = 0.7e - 3 \text{ m/s}^2$: regione attendista $\Delta t_{tot} = 4.07 \text{ days}$

- $t_{mis} = 10 \text{ days}$ e $acc = 0.7e - 3 \text{ m/s}^2$: regione $ai\Omega$ $\Delta t_a = 2.01 \text{ days}$, $\Delta t_b = 2.05 \text{ days}$, $\Delta t_{tot} = 4.06 \text{ days}$

Volendo rappresentare in due dimensioni gli andamenti riportati in Figura 6.28 e Figura 6.29, si riproduce nel seguente grafico l'andamento dei ΔV_{tot} per entrambi i metodi considerando quattro accelerazioni differenti:

$$acc1 = 0.0213 \text{ m/s}^2$$

$$acc1 = 0.0213 \text{ m/s}^2$$

$$acc2 = 0.00397 \text{ m/s}^2$$

$$acc3 = 0.00136 \text{ m/s}^2$$

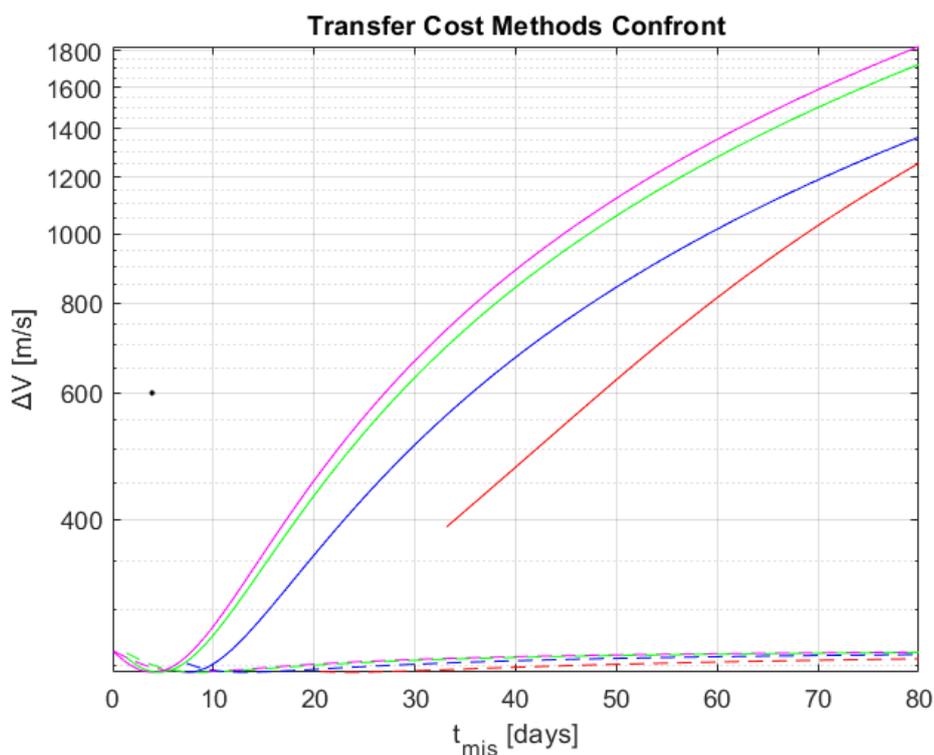


Figura 6.34. Confronto costo di trasferta a diverse accelerazioni. Legenda: linea tratteggiata = $ai\Omega$; linea continua = Attendista.

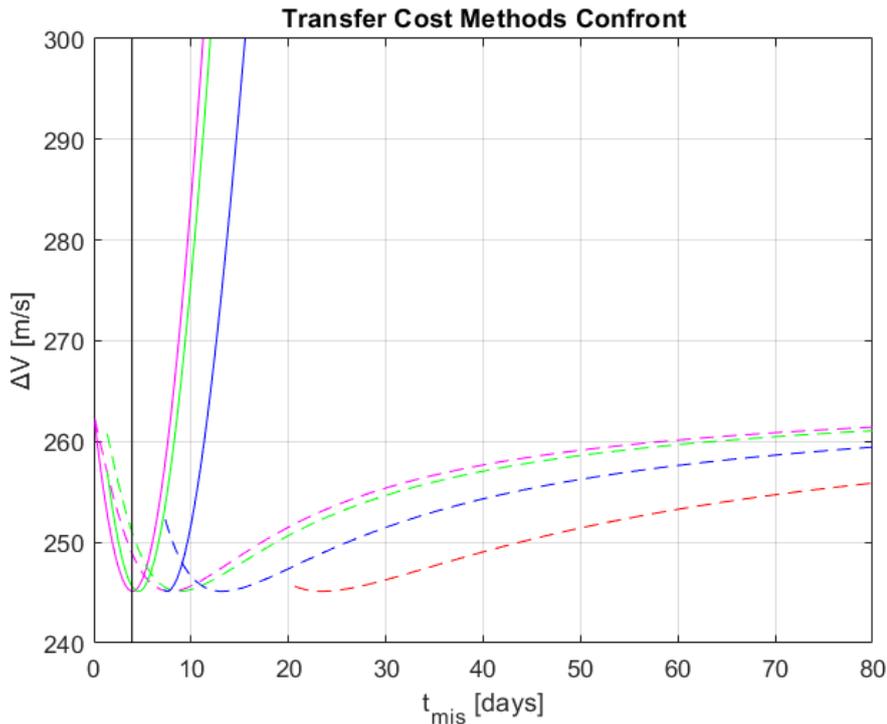


Figura 6.35. Confronto costo di trasferta a diverse accelerazioni. Legenda: linea tratteggiata = $ai\Omega$; linea continua = Attendista. Dettaglio a piccoli ΔV .

Le curve si interrompono alla durata minima della missione ottenibile con la relativa accelerazione assegnata. Per l'errore nell'approssimazione di cui si è discusso a proposito dei casi precedenti, tale tempo minimo non sarà esattamente uguale per i due casi:

	$ai\Omega$	Attendista
$t_{min,1}$ [days]	0.1000	0.1135
$t_{min,2}$ [days]	1.4150	1.3968
$t_{min,3}$ [days]	7.3487	7.1503
$t_{min,4}$ [days]	20.6413	33.1403

Tabella 6.11. Durate di missione minime per ogni accelerazione considerata.

Ad elevate accelerazioni la differenza di tempo di trasferta è minimo, pressoché trascurabile. Facendo riferimento al grafico 6.15 (seppur riferito ad un esempio numerico in cui $\Delta\Omega_0$ era leggermente diverso, mantiene un andamento qualitativo comune, a prescindere dai dati specifici dell'esempio in questione) si capisce come nell'ultimo caso ci si trovi nella zona del grafico in cui l'accelerazione minima del caso Attendista tende al plateau a causa

dell'aumento notevolissimo di spesa conseguente a durate molto maggiori di t^* . È per questa ragione che nell'ultimo caso i tempi minimi dei due casi si distanziano così tanto.

In generale si può ben notare come al diminuire delle accelerazioni le curve tendano a traslare e a rilassarsi verso tempi maggiori, sicché anche il relativo valor minimo segue questa deriva verso durate maggiori. Per i primi due valori di accelerazione considerati esiste una zona a durate basse, nell'intorno del t^* , in cui la soluzione attendista è migliore della soluzione $ai\Omega$. Per l'ultimo caso, invece, la durata minima attendista è già talmente più elevata di t^* che non ha alcun modo di essere favorevole rispetto alla controparte.

Essendo t^* molto piccolo nell'esempio esaminato, le soluzioni relative alle tre diverse accelerazioni vivono tutte quasi completamente a durate di missione maggiore, ciò non permette di esaminare il loro andamento per $t_{mis} < t^*$. D'altro canto, si vede bene quanto più volte accennato anche nei paragrafi precedenti: se $t_{mis} > t^*$, tanto più l'accelerazione è bassa e tanto meno la trasferta sarà costosa. Viceversa, effettuando uno zoom a durate nell'intorno del t^* :

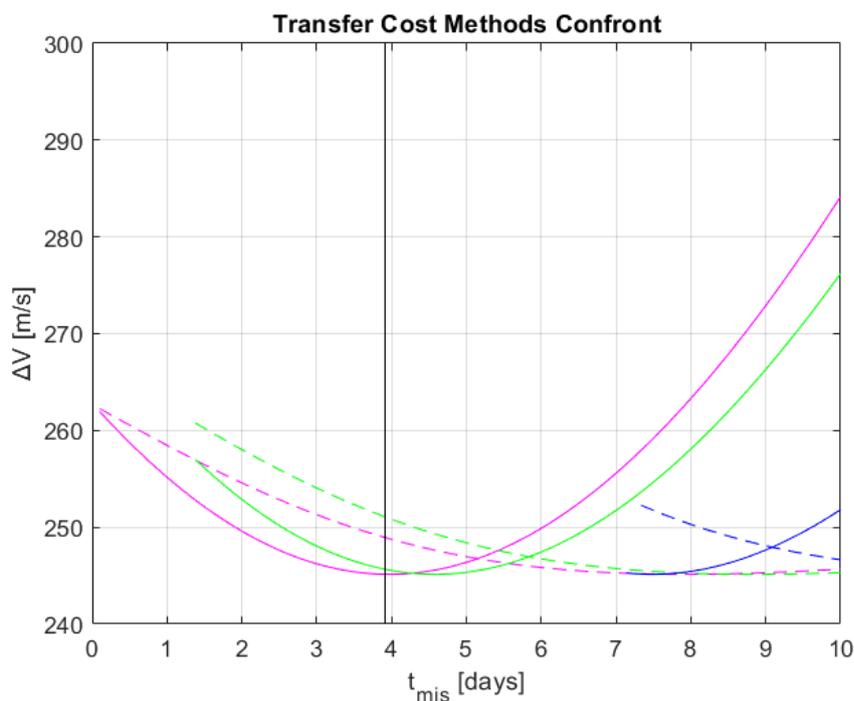


Figura 6.36. Confronto costo di trasferta a diverse accelerazioni. Legenda: linea tratteggiata = $ai\Omega$; linea continua = Attendista. Dettaglio nell'intorno di t^* .

Si vede chiaramente l'andamento opposto: se $t_{mis} < t^*$ minore è l'accelerazione e maggiore risulta la spesa. Si nota inoltre che l'inversione di convenienza accelerazione

Risultati

magenta/accelerazione verde avviene quasi esattamente a t^* se si considera il metodo attendista, mentre avviene dopo, circa a durate di 9 giorni per il metodo $ai\Omega$.

Considerando invece di avere l'accelerazione fissata a priori, per esempio dovuto ad un requisito sulla scelta propulsiva del craft oppure, se il craft in questione è già in fase avanzata di progetto o addirittura operativa, la scelta del metodo ottimo potrebbe dipendere anche da altri fattori. Si analizza per esempio l'andamento dei ΔV in funzione della durata di missione e per diversi $\Delta\Omega_0$.

Si fa riferimento ai dati di Tabella 6.1, ed in più

- $acc = 1e - 3 \text{ m/s}^2$
- $t_{mis} = [0.1 \ 30] \text{ days}$
- $\Omega_T = [127.59 \ 147.59] \text{ deg} \rightarrow \Delta\Omega_0 = [-10 \ 10] \text{ deg}$

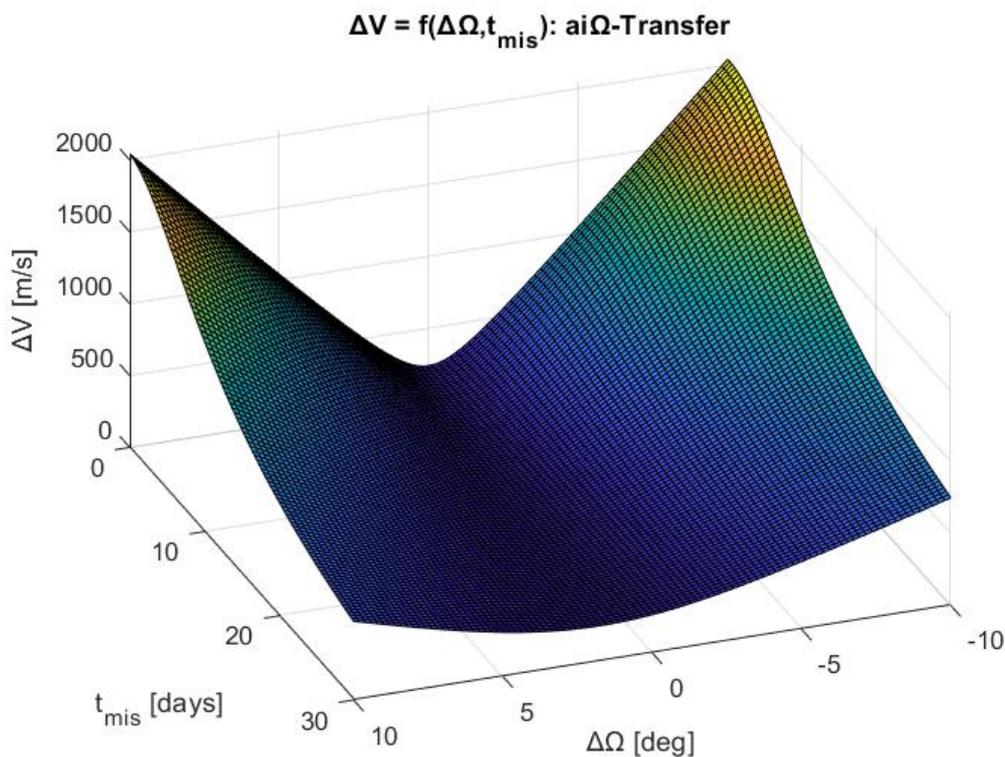


Figura 6.37. Andamento del costo totale di trasferta in funzione della durata di missione e della differenza di RAAN di tempo zero: ai Ω -transfer.

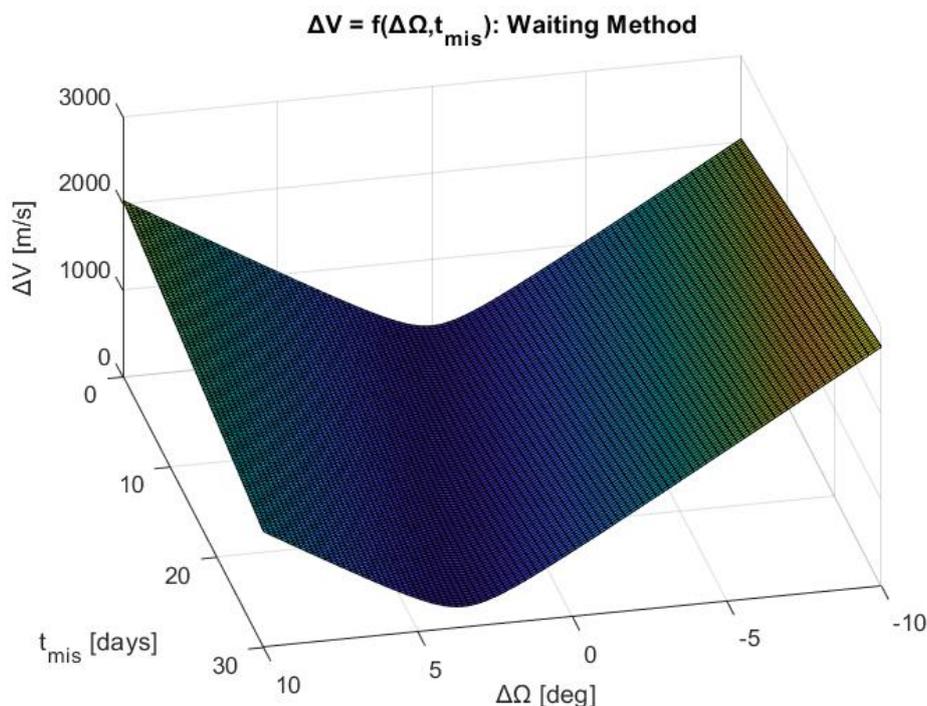


Figura 6.38. Andamento del costo totale di trasferta in funzione della durata di missione e della differenza di RAAN di tempo zero: Metodo Attendista.

Per entrambi i metodi il ΔV , plausibilmente, cresce all'aumentare del $|\Delta\Omega|$. Si ragioni sul segno di $\Delta\Omega$:

- $\Delta\Omega > 0 \rightarrow$ Chaser in anticipo, essendo $\dot{\Omega}_C > \dot{\Omega}_T > 0$, Caso A
- $\Delta\Omega < 0 \rightarrow$ Chaser in ritardo, essendo $\dot{\Omega}_C > \dot{\Omega}_T > 0$, Caso D

Per $\Delta\Omega > 0 \rightarrow t^* < t_{mis}$, dunque a parità di $\Delta\Omega$ il ΔV presenta un minimo in corrispondenza del t^* per la soluzione attendista, e un po' dopo per la ai Ω (come in Figura 6.26). Poiché $t^* = f(\Delta\Omega)$, ed in particolare aumenta per $\Delta\Omega$ crescenti, la valle di minimo della superficie si sposta, traslando a t_{mis} maggiori per $\Delta\Omega$ crescenti. In altre parole, il minimo segue l'andamento del t^* .

Dipendono invece in maniera molto diversa dalla durata della missione. La soluzione Attendista presenta due comportamenti non simmetrici in funzione del segno di $\Delta\Omega$. Per valori negativi la spesa aumenta all'aumentare della durata della missione, conseguenza del fatto che i piani orbitali si allontanano sotto l'effetto J2 e dunque più tempo passa e più sarà grande la differenza di RAAN da coprire con la fase propulsa. Per valori positivi invece, per $t_{mis} < t^*$ la spesa tende a diminuire con l'aumento della durata della missione. Raggiunto e superato il t^* la spesa ricomincia a crescere in maniera indefinita. Per il metodo ai Ω , la differenza che nasce

Risultati

dal considerare differenze di RAAN iniziali positive piuttosto che negative, non è così marcata. Differenza importante con il metodo attendista è che per durate significative il ΔV tende ad un plateau.

Si riporta di seguito l'andamento del ΔV minimo dell'unione dei due casi e una "mappa" che indichi per quali coppie di accelerazione e durata convenga un metodo piuttosto che l'altro.

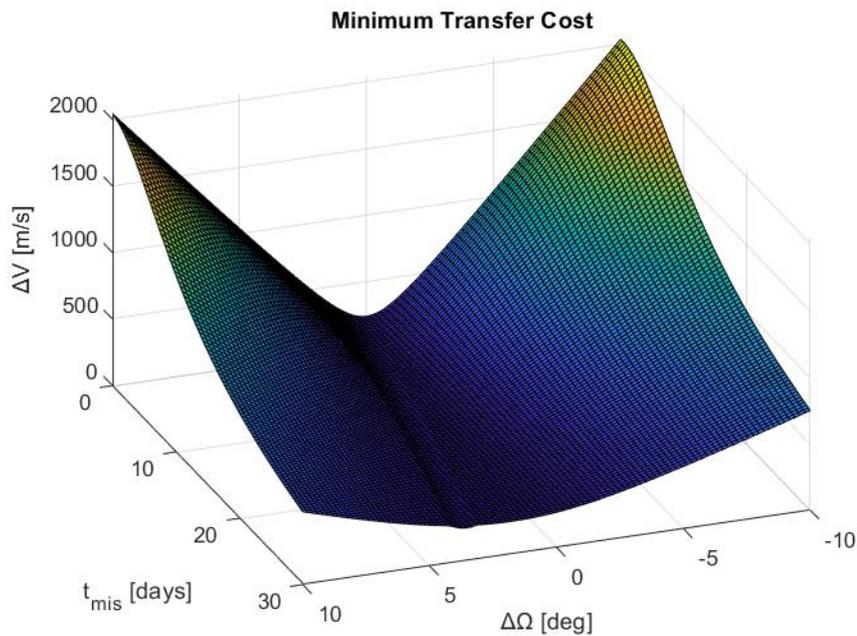


Figura 6.39. Andamento del minimo di costo totale di trasferta scelto tra i due metodi in funzione della durata di missione e della differenza di RAAN di tempo zero.

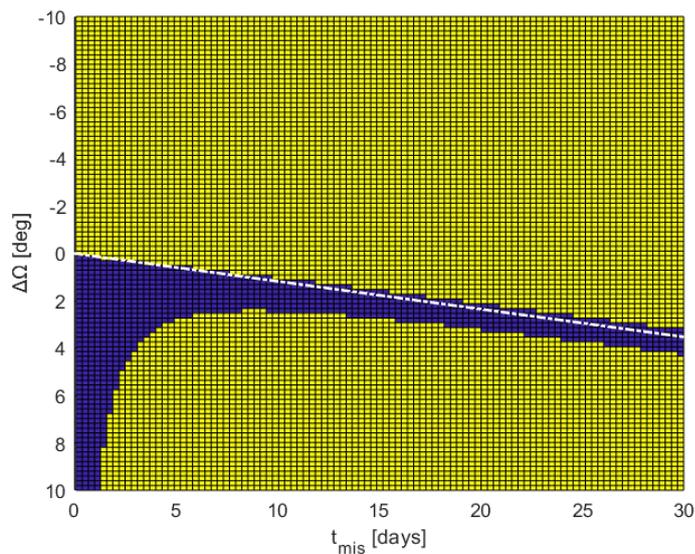


Figura 6.40. Mappa di scelta del metodo più conveniente in funzione della durata di missione e della differenza di RAAN di tempo zero. Legenda: Viola = conviene Metodo Attendista; Giallo = conviene ai Ω -transfer; Linea tratto-punto Bianca = t^* .

Come ci si poteva aspettare, la soluzione attendista non conviene mai per $\Delta\Omega < 0$, viceversa risulta conveniente con $\Delta\Omega > 0$ per missioni di breve durata o comunque nell'intorno del t^* .

Alla stessa maniera si potrebbe valutare l'andamento dei costi e della scelta del metodo ottimale in funzione di altri parametri, quali per esempio le differenze in termini di semiasse o inclinazione, ma porterebbero alle stesse conclusioni. In questi casi la differenza di RAAN sarebbe la medesima, ma cambierebbe il RAAN rate di una o entrambe le orbite e con esso il t^* . Il metodo attendista risulterebbe sempre il più conveniente in quell'intorno, mentre il metodo ai Ω per ogni altra durata di missione considerata.

Capitolo 7

Conclusioni

Il progetto di tesi presentato in questo elaborato si prefiggeva lo scopo di fornire e validare uno strumento rapido di stima dei costi di trasferta tra coppie di detriti in orbite vicine, in modo da fornire un utile ausilio nelle prime fasi di design di una missione ADR. La rapidità di tale strumento ne avrebbe reso possibile l'utilizzo in combinazione con algoritmi di ottimizzazione combinatoria, al fine di definire, dato un set di detriti in orbite vicine (piccole variazioni di semi-asse, inclinazione e RAAN iniziale), la sequenza ottimale per una missione Multi-Debris Removal. Non solo, ma la versatilità del metodo ricercato ne rende possibile l'applicazione in qualsiasi campo che preveda l'ottimizzazione di trasferte tra orbite sufficientemente vicine.

Attraverso la riformulazione delle Equazione di Edelbaum proposta da Kechichian e basata sulla Teoria del Controllo Ottimo, si è introdotto nella valutazione del ΔV l'effetto dovuto alla perturbazione legata alla non sfericità terrestre. Il contributo di J_2 nell'avvicinamento dei piani orbitali e dunque nella riduzione della differenza di RAAN e dei costi imputati al suo azzeramento, dipendono fortemente dalla durata della missione. Sicché anche il ΔV associato ad una trasferta diventa funzione della durata della stessa. Si è dunque introdotto un profilo di missione caratterizzato da un primo impulso fornito all'istante iniziale della manovra, ed un secondo impulso all'istante finale. Per ottimizzare la suddivisione del ΔV tra i due impulsi, si sono definiti allora dei parametri di ripartizione in funzione dei quali si è trovato il minimo di ΔV^2 approssimato, tramite il *metodo dei moltiplicatori di Lagrange*. Si è dunque arrivati ad identificare tre possibili profili di missione in funzione della scelta dei coefficienti di ripartizione e della possibilità o meno di effettuare o meno un controllo attivo della RAAN:

- *ai – transfer*. Non si esegue controllo attivo di RAAN e i parametri di ripartizione sono gli ottimi per la minimizzazione di ΔV^2 approssimato.

Conclusioni

- *aiΩ – transfer*. Si esegue controllo attivo di RAAN e i parametri di ripartizione sono gli ottimi per la minimizzazione di ΔV^2 approssimato.
- *Metodo Attendista*. Si esegue controllo attivo di RAAN e i parametri di ripartizione sono imposti manualmente al valor nullo, in modo che il profilo di missione perda il primo impulso e tutto il ΔV debba essere fornito in un'unica soluzione all'istante di finale della trasferta.

L'introduzione del Metodo Attendista, sembrerebbe a primo impatto inutile, dato che per definizione di ottimo dovrebbe essere sempre meno conveniente del *aiΩ – transfer*. In realtà, poiché il *metodo dei moltiplicatori di Lagrange* è applicato ad un'espressione approssimata del ΔV^2 , in cui si è trascurato il doppio prodotto, si è poi visto che esistono dei casi in cui la ripartizione del Metodo Attendista è effettivamente più conveniente. Dal confronto dei metodi così come presentati, si è riscontrato che annullare la differenza di RAAN agendo unicamente su semi-asse ed inclinazione al fine di ottenere il valore ideale di RAAN rate tramite l'effetto J2 non conviene per alcuna durata di missione considerata. Il metodo *ai – transfer* è sempre più costoso del metodo *aiΩ – transfer*. Per questa ragione lo si è trascurato nelle successive analisi.

L'ampliamento del metodo, a casistiche in cui non sia valida l'ipotesi di manovre impulsive, passa attraverso la definizione di una certa accelerazione caratteristica, impressa dal sistema propulsivo al craft Chaser. Definiti i coefficienti di ripartizione, e dunque i ΔV del primo e del secondo impulso, secondo i metodi *aiΩ* ed Attendista, e definita suddetta accelerazione è possibile tradurli in durate di accensione di archi propulsi $\Delta t_{a,b}$. Il primo arco propulso inizia all'istante zero ed il secondo termina in concomitanza con la durata di missione imposta. È dunque come se si fosse traslato in avanti il primo impulso di un certo $\Delta t_a/2$ ed indietro il secondo di un certo $\Delta t_b/2$. Cambia, perciò, la durata teorica della missione, la quale essendo definita come l'intervallo di tempo che intercorre tra il primo ed il secondo impulso, sarà ridotta di un certa quantità funzione della durata degli archi propulsi. Ne consegue che l'estensione a manovre continue può essere eseguita unicamente mediante calcolo iterativo e che la spesa della trasferta sarà funzione anche dell'accelerazione del Chaser. Così facendo si è giunti alla scrittura di un codice MatLab in grado, dati in ingresso parametri orbitali delle orbite di partenza ed arrivo, durata della missione ed accelerazione del Chaser, di fornire i costi della trasferta, la durata degli archi propulsi e la loro suddivisione con parametri di ripartizione ottimi e per il metodo attendista. Il programma, nonostante il calcolo iterativo, è estremamente rapido e ha un

costo computazionale relativamente ridotto (sulla macchina in uso impiega mediamente 0.04 secondi per arrivare a convergenza).

Definito lo strumento che si cercava, si è dunque passati a validarlo, andando ad applicare il codice a diverse casistiche, da ognuna delle quali è possibile trarre delle conclusioni interessanti:

- La presenza dell'effetto J2 non è sempre un fattore utile. Dipende dalla durata della missione, dalla posizione iniziale dei piani orbitali e dalla velocità di regressione della linea dei nodi, funzione di semiasse ed inclinazione. Escludendo il caso in cui il RAAN Rate abbia segno opposto, sintomo di un differente verso di percorrenza dell'orbita di arrivo e di partenza, l'effetto J2 è utile ad avvicinare la linea dei nodi delle orbite in esame solamente quando il chaser parte in anticipo e possiede velocità maggiore, oppure quando parte in ritardo e possiede velocità di regressione inferiore, e comunque entro un certo limite oltre t^* . In tutte le altre condizioni J2 tende ad allontanare i piani orbitali comportando un costo aggiuntivo.
- Esiste una condizione di accelerazione minima, funzione della durata di missione e del ΔV della trasferta e dunque delle differenze dei parametri orbitali da coprire. Tale condizione corrisponde ad un profilo di missione caratterizzato ad un unico arco propulso che dura per tutta la durata della missione.
- Allo stesso modo, data una certa accelerazione, esiste un tempo minimo in cui è possibile percorrere la trasferta, funzione del ΔV e dell'accelerazione imposta e corrispondente al medesimo profilo di missione.
- Coppie di accelerazione minima e tempi minimi identificano una zona di fattibilità caratteristica di una certa trasferta con determinate condizioni iniziali.
- Dallo studio di ΔV in funzione dell'accelerazione del craft è emerso come non sia possibile individuare una regola univoca per la quale ΔV cresce o diminuisce all'aumentare o al diminuire dell'accelerazione. Dipende dal tempo di missione. Ciò che si può affermare è che i costi minimi della trasferta che si attestavano a t^* per il metodo attendista e a durate poco maggiori per ai Ω non cambiano in funzione dell'accelerazione e rimangono uguali al caso impulsivo, ma traslano verso durate sempre maggiori al diminuire dell'accelerazione.
- La scelta del metodo di ripartizione da applicare per eseguire la trasferta dipende principalmente dalla durata della missione e dalla sua relazione con t^* . Nel caso

Conclusioni

in cui la durata delle missione sia contenuta, la ripartizione attendista risulta più conveniente del modello a due archi. Nel caso in cui la durata della missione sia nell'intorno del t^* e l'accelerazione sufficientemente alta da non incorrere nei fenomeni di traslazione di cui al punto precedente, la soluzione Attendista è ancora la migliore (altrimenti la zona di convenienza trasla a durate maggiori).

- Nel caso in cui i piani si stiano allontanando sotto l'effetto J2, quindi nei casi in cui il chaser parta in ritardo e abbia velocità inferiore o nel caso in cui parta in anticipo e possieda velocità maggiore, il metodo Attendista non conviene mai e, maggiore è la durata della missione, più conveniente risulterà la trasferta aiΩ.

In definitiva, la scelta della sequenza ottimale per il raggiungimento di tutti i detriti appartenenti ad un determinato set dovrà tenere conto non solo delle differenze in termini di parametri orbitali, ma anche dell'accelerazione di cui dispone il craft e della durata delle trasferte tra un detrito e l'altro. La scelta ovvia ricadrebbe su quella, sequenza che nel passaggio da un'orbita all'altra, porti la durata della trasferta il più vicino possibile a t^* . Ma, considerando la traslazione del minimo di costo verso durate maggiori, ciò potrebbe non essere la scelta migliore per craft con accelerazioni piccole o prossime al minimo per quella i -esima trasferta. In casi come questi potrebbe per esempio convenire effettuare prima un altro "salto" verso un altro detrito, di modo da consumare massa, avere accelerazione maggiore e dunque effettuare la trasferta verso il detrito i -esimo che si voleva raggiungere all'inizio. Si potrebbe anche pensare di avere un craft a spinta modulabile, di modo da adattare l'accelerazione in funzione del tempo di trasferta, al fine di portare il minimo di ΔV in corrispondenza della durata che si desidera. Le possibilità sono molteplici.

In eventuali sviluppi futuri del modello si potrebbe considerare l'accelerazione non costante ma funzione del consumo di propellente, inserire ulteriori effetti perturbativi, effettuare considerazioni riguardo il *phasing* tra chaser e target ed operare un confronto con modelli più accurati, basati sulla risoluzione del BVP per l'ottimizzazione della legge di controllo o su programmi di simulazione e propagazione orbitali, al fine di valutare la bontà delle approssimazioni intrinseche al modello elaborato.

8 Bibliografia

- [1] Space Debris and Human Spacecraft – [NASA website](#).
- [2] Li, R., Zheng, S., Wang, E. et al. Advances in BeiDou Navigation Satellite System (BDS) and satellite navigation augmentation technologies. *Satell Navig* 1, 12 (2020). <https://doi.org/10.1186/s43020-020-00010-2>
- [3] About space debris – [ESA website](#)
- [4] Hall, Loretta, "The History of Space Debris" (2014). Space Traffic Management Conference. 19. <https://commons.erau.edu/stm/2014/thursday/19>
- [5] David S.F. Portree, Joseph P. Loftus, Jr, "Orbital Debris: A Chronology", January 1999. [NASA/TP-1999-208856](#)
- [6] Online Index of Objects Launched into Outer Space (2022) – United Nations – [Office for Outer Space Affairs website](#)
- [7] [Our World in Dara website](#)
- [8] End-of-life disposal of satellites – [ESA website](#)
- [9] Debris Modeling – [NASA website](#)
- [10] LEGEND: 3D/OD Evolutionary Model – [NASA website](#)
- [11] Research on space debris, safety of space objects with nuclear power sources on board and problems relating to their collision with space debris, UNOOSA Committee on the Peaceful Uses of Outer Space, Scientific and Technical Subcommittee, February 2019. [A/AC.105/C.1/2019/CRP.7](#)
- [12] The Kessler Syndrome, As Discussed by Donald J. Kessler, March 8, 2009.
- [13] D.J. Kessler, B.G. Cour-Palais, "Collision Frequency of Artificial Satellites: The Creation of a Debris Belt", *Journal Of Geophysical Research*, June 1978.
- [14] Kessler, Donald & Johnson, Nicholas & Liou, J.-C & Matney, Mark. (2010). The Kessler Syndrome: Implications to Future Space operations. *Advances in the Astronautical Sciences*. 137.
- [15] Boley, A.C., Byers, M. Satellite mega-constellations create risks in Low Earth Orbit, the atmosphere and on Earth. *Sci Rep* **11**, 10642 (2021). <https://doi.org/10.1038/s41598-021-89909-7>
- [16] Drolshagen, G. & Koschny, Detlef & Drolshagen, Sandra & Kretschmer, Jana & Poppe, Bjoern. (2017). Mass Accumulation of Earth from Interplanetary Dust, Meteoroids, Asteroids and Comets. *Planetary and Space Science*. <https://doi.org/10.1016/j.pss.2016.12.010>

8 Bibliografia

- [17] David Keith. 2000. “Geoengineering the Climate: History and Prospect.” Annual Review of Energy and the Environment, 25, Pp. 245-284. <https://doi.org/10.1146/annurev.energy.25.1.245>
- [18] A Controlled Re-entry of Satellites at The End Of Life – [ESA website](#).
- [19] Jonathan C. McDowell, [GCAT: General Catalog of Artificial Space Objects](#).
- [20] Space Environment Statistics – [ESOC website](#).
- [21] C. Priyant Mark, Surekha Kamath, Review of Active Space Debris Removal Methods, Space Policy, Volume 47, 2019, Pages 194-206, ISSN 0265-9646. <https://doi.org/10.1016/j.spacepol.2018.12.005>
- [22] Sail solutions for space junk – [ESA website](#).
- [23] Federal Communications Commission. [SAT-LOA-20170301-00027](#). 2020
- [24] Federal Communications Commission. [SAT-MOD-20200417-00037](#). 2021
- [25] Fabio Covello, Application of electrical propulsion for an active debris removal system: a system engineering approach, Advances in Space Research, Volume 50, Issue 7, 2012, Pages 918-931, ISSN 0273-1177. <https://doi.org/10.1016/j.asr.2012.05.026>
- [26] Marco M. Castronuovo, Active space debris removal—A preliminary mission analysis and design, Acta Astronautica, Volume 69, Issues 9–10, 2011, Pages 848-859, ISSN 0094-5765. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2011.04.017>
- [27] Ince, Elmas Sinem & Barthelmes, Franz & Reißland, Sven & Elger, Kirsten & Foerste, Christoph & Flechtner, F. & Schuh, H. (2019). ICGEM -15 years of successful collection and distribution of global gravitational models, associated services, and future plans. Earth System Science Data. 11. 647-674. <https://doi.org/10.5194/essd-11-647-2019>
- [28] Battipede Manuela – Lezioni del Corso di Meccanica del Volo Spaziale, Politecnico di Torino, 2022.
- [29] Lorenzo Casalino – Space Propulsion – Slide del Corso di Propulsione Spaziale, Politecnico di Torino, 2021.
- [30] Lorenzo Casalino, Andrea Forestieri, Approximate optimal LEO transfers with J2 perturbation and dragsail, Acta Astronautica, Volume 192, 2022, Pages 379-389, ISSN 0094-5765, <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2021.12.006>
- [31] Hong-Xin Shen, Lorenzo Casalino, Explicit Approximation for J2-Perturbed Low-Thrust Transfers between Circular Orbits.

- [32] Kechichian, J. A., “Reformulation of Edelbaum’s Low-Thrust Transfer Problem Using Optimal Control Theory”, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 20, No. 5, 1997, pp. 988-994. <https://doi.org/10.2514/2.4145>
- [33] Casalino, L., and Colasurdo, G., “Improved Edelbaum’s Approach to Optimize Low Earth/Geostationary Orbits Low-Thrust Transfers,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 30, No. 5, 2007, pp. 1504-1510. <https://doi.org/10.2514/1.28694>
- [34] Vallado, D. A., *Fundamentals of astrodynamics and application*. Springer Science & Business Media, 2001, pp. 351-353.
- [35] Edelbaum, T. N., “Propulsion Requirements for Controllable Satellites,” *ARS Journal*, Vol. 31, No. 8, 1961, pp. 1079–1089. <https://doi.org/10.2514/8.5723>