

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale
in Ingegneria Aerospaziale

Tesi di Laurea

Modello matematico per caratterizzare il campo di pressione di una pompa ad ingranaggi per lubrificazione di propulsori aeronautici



Relatore

prof. Paolo Maggiore

Candidato

Davide Allaio

Anno Accademico 2022-2023

Alla mia famiglia

Sommario

Le pompe ad ingranaggi esterni sono ampiamente utilizzate nella lubrificazione di macchinari e motori, nei sistemi di potenza idraulica, mentre nel settore aeronautico sono integrate nei sistemi di lubrificazione dei turbomotori e delle scatole ingranaggi. La valutazione del campo di pressione all'interno della pompa al variare delle condizioni di funzionamento è fondamentale per valutarne l'interazione con il circuito idraulico ed il rendimento volumetrico. Ai fini della progettazione occorre definirne le caratteristiche principali: nella fase preliminare le variabili libere sono molteplici, ed è opportuno procedere ad analisi parametriche per studiare l'influenza di ognuna sulle prestazioni della macchina. A questo proposito gli strumenti di analisi fluidodinamica allo stato dell'arte sono l'alternativa più valida per la simulazione di dettaglio del fluido all'interno della pompa, ma richiedono tempi computazionali elevati, che mal si sposano all'esigenza di affrontare analisi parametriche.

Il presente lavoro si occupa della costruzione di un modello matematico della pompa in funzione delle principali geometrie e delle condizioni di funzionamento, per mezzo di una modellizzazione a parametri concentrati. In particolare, il campo di pressione è strettamente legato ai trafilamenti secondari di fluido che si instaurano nei meati fra i componenti rotanti e fissi. Essi sono legati ai giochi previsti a progetto ed allo spostamento delle ruote sotto carico: il modello presentato consente di valutare il campo di pressione e la conseguente posizione statica delle ruote, a regime, per mezzo di una procedura iterativa.

Nell'ottica di restituire uno strumento affidabile e di individuarne le limitazioni nel predire il comportamento reale della pompa, i risultati sono stati validati simulando casi provenienti dallo stato dell'arte, facendo uso di un software di simulazione oleodinamica per ricavare alcuni dati nel caso in cui non fossero reperibili in letteratura. Complessivamente è stato osservato un grado di accuratezza soddisfacente. I codici prodotti, essendo stati validati, costituiscono un supporto con cui operare analisi parametriche relativamente rapide, oggetto di futuri lavori sulla caratterizzazione di soluzioni specifiche.

Ringraziamenti

Prima di procedere con la trattazione del lavoro di tesi, tengo a dedicare alcune parole alle persone che ho avuto il piacere di avere al mio fianco nel corso di questo percorso.

Ringrazio il mio relatore, il Prof. Paolo Maggiore, che è sempre stato disponibile nel seguire e consigliare con un sorriso i progressi del lavoro. Sono lieto di essere giunto alla conclusione della mia esperienza universitaria sotto la sua guida.

Ringrazio l'Ing. Andrea Casetti, che ha seguito da vicino l'attività e mi ha consentito di migliorare la mia figura professionale. Lo voglio ringraziare anche per la cordialità con cui mi ha accolto all'interno della realtà aziendale.

Un sentito ringraziamento va al Prof. Massimo Rundo del Dipartimento ENERGIA del Politecnico di Torino, il quale si è reso disponibile in molteplici occasioni a fornire materiale prezioso per il completamento del lavoro. La sua grande competenza e pazienza mi hanno colpito profondamente.

In modo analogo, voglio ringraziare il Prof. Emiliano Mucchi dell'Università degli Studi di Ferrara, ai cui lavori attingono molti contenuti di questa tesi, e che si è dimostrato anch'egli disponibilissimo nel fugare alcune mie incertezze.

Passo infine a ringraziare dal profondo tutte le persone che mi accompagnano non solo dall'università, ma da una vita. Anzitutto la mia famiglia, i miei genitori ed i miei nonni, che purtroppo non ci sono più: senza di loro io non sarei potuto arrivare dove sono ora, in alcun modo. Poi gli amici che ci sono da anni e che per anni a venire resteranno: ringrazio tutti loro per avermi arricchito umanamente, ciascuno a proprio modo.

Nella speranza che per tutte le persone elencate e per me il futuro possa essere radioso, e che questo lavoro possa essere reputato degno del titolo di studio a cui sono giunto.

Indice

Elenco delle tabelle	8
Elenco delle figure	10
1 Introduzione	15
1.1 Tipologie di pompe idrostatiche	15
1.2 Vantaggi ed applicazioni	19
1.3 Componenti della pompa	20
1.4 Modelli di analisi	22
1.4.1 0D (Parametri concentrati)	23
1.4.2 1D (Parametri distribuiti)	29
1.4.3 2D-3D (CFD)	29
1.5 Definizione della geometria	30
1.5.1 Metodi analitici	31
1.5.2 Metodi CAD-based	32
1.5.3 Metodi numerici	34
1.6 Parametri delle ruote dentate	35
1.7 Cuscinetti idrodinamici	37
2 Descrizione del modello	39
2.1 Definizione dei volumi di controllo	40
2.2 Volumi sigillati	42
2.2.1 Valutazione delle <i>clearance</i> radiali	46
2.2.2 Sistema ODE e metodo di risoluzione	48
2.3 Volume intrappolato	50
2.4 Profilo di pressione completo	55
2.5 Equilibrio statico delle ruote	55
2.6 Forze e coppie di pressione	60
2.7 Trafilamenti e rendimento volumetrico	63

3	Validazione del modello e risultati	67
3.1	Trafilamenti alle <i>clearance</i> radiali	69
3.1.1	Piatto 'B'	70
3.1.2	Piatto 'A'	73
3.2	Trafilamenti alle <i>clearance</i> assiali	76
3.3	Spostamento radiale delle ruote dentate sotto carico	82
3.3.1	Altri risultati	89
3.4	Rendimento volumetrico della pompa	94
4	Conclusioni	103
4.1	Caratteristiche del modello	104
4.2	Considerazioni sui risultati ottenuti	105
4.3	Sviluppi futuri	107
A		109

Elenco delle tabelle

1.1	Materiali usati nella realizzazione dei principali componenti delle pompe ad ingranaggi.	19
1.2	Principali parametri delle ruote dentate.	36
2.1	Posizioni angolari e occorrenze sul numero di volumi contemporanei, considerando i volumi sigillati di entrambe le ruote (1 e 2)	41
2.2	Posizioni angolari e occorrenze sul numero di volumi contemporanei, considerando i soli volumi sigillati della ruota motrice (1)	41
3.1	Dati della Casappa Magnum HDP 30.51.	68
3.2	Parametri dell'olio a 40°.	69
3.3	Dati della pompa utilizzata per la validazione del calcolo della SEP	83
3.4	Parametri dell'olio utilizzato per la validazione del calcolo della SEP.	84
3.5	Parametri del cuscinetto idrodinamico utilizzato per la validazione del calcolo della SEP.	85
3.6	Condizioni di funzionamento utilizzate per la validazione della SEP e SEP di riferimento (coordinate cartesiane (X, Y) e polari (e, Γ)	86
3.7	Errori relativi fra output con SEP di riferimento e SEP calcolata.	87
3.8	Iterate del calcolo della SEP fino al raggiungimento della tolleranza 1E-06.	89
3.9	Iterate del calcolo della SEP fino al raggiungimento della tolleranza 1E-06, leggera perturbazione verso l'interno.	90
3.10	Iterate del calcolo della SEP fino al raggiungimento della tolleranza 1E-06, leggera perturbazione verso l'esterno.	90
3.11	Iterate del calcolo della SEP fino al raggiungimento della tolleranza 1E-06, <i>guess</i> iniziale opposta all'originale.	91
3.12	Parametri del cuscinetto idrodinamico utilizzato per la Casappa Magnum HDP 30.51.	91
3.13	Iterate del calcolo della SEP fino al raggiungimento della tolleranza 1E-05, piatto 'B' ($\Delta p = 47 \text{ bar}$, 1000 rpm).	92
3.14	Iterate del calcolo della SEP fino al raggiungimento della tolleranza 1E-04, piatto 'A' ($\Delta p = 40 \text{ bar}$, 750 rpm).	93

3.15	Iterate del calcolo della SEP fino al raggiungimento della tolleranza 1E-04, piatto 'A' ($\Delta p = 75 \text{ bar}$, 1250 rpm).	93
3.16	Iterate del calcolo della SEP fino al raggiungimento della tolleranza 1E-04, piatto 'A' ($\Delta p = 105 \text{ bar}$, 1500 rpm).	94
3.17	Iterate del calcolo della SEP fino al raggiungimento della tolleranza 1E-04, piatto 'A' ($\Delta p = 143 \text{ bar}$, 1750 rpm).	94
3.18	Rendimenti calcolati per la Casappa Magnum HDP 30.51, a 1000 rpm , rotori centrati ed eccentrici.	97
3.19	Dati di rendimento della pompa '2'.	99
3.20	Dati di rendimento della pompa '3'.	100

Elenco delle figure

1.1	(a) Esempio di pompa <i>gerotor</i> ; (b) Dettaglio del <i>port plate</i> . (Immagine tratta da [2]).	16
1.2	(a) Esempio di pompa a mezzaluna; (b) Dettaglio del <i>port plate</i> . (Immagine tratta da [2]).	17
1.3	(a) Esempio di pompa a ingranaggi esterni; (b) Dettaglio dei piatti di bilanciamento. (Immagine tratta da [2]).	17
1.4	Principio di funzionamento di una pompa ad ingranaggi esterni. (Da: Finite Element Modeling of a Viscous Fluid Flowing through an External Gear Pump - Scientific Figure on ResearchGate).	18
1.5	Ingranaggi cilindrici, elicoidali e a spina di pesce. (Immagine tratta da [3]).	18
1.6	Vista esplosa di una pompa ad ingranaggi esterni. (Da: Vibroacoustic Measurements and Simulations Applied to External Gear Pumps. An Integrated Simplified Approach - Scientific Figure on ResearchGate).	21
1.7	Approccio <i>Single Chamber</i> alla definizione dei volumi di controllo in una pompa ad ingranaggi esterni. (Immagine tratta da [2]).	26
1.8	Approccio <i>Multi Chamber</i> alla definizione dei volumi di controllo in una pompa ad ingranaggi esterni. (Immagine tratta da [2]).	26
1.9	Flusso laminare in un meato con pareti di geometria arbitraria.	28
1.10	Geometria di un meato elementare.	29
1.11	Metodo dei raggi vettore applicato a: a) <i>gerotor</i> (vano isolato V_i , SC); b) pompa a mezzaluna (volume di mandata V_{out} , MC); c) pompa ad ingranaggi esterni (volume di mandata V_{out} , MC). (Immagine tratta da [2]).	31
1.12	Esempio di calcolo del volume di controllo associato ad un vano di una pompa <i>gerotor</i> . (Immagine tratta da [2]).	33
1.13	Indicizzazione degli elementi puntuali compresi fra i punti di contatto P_1 e P_2	35

1.14	Raggi notevoli delle ruote dentate. (Da: https://khkgears.net/new/gear_knowledge/gear_technical_reference/calculation_gear_dimensions.html).	36
1.15	Schema di carico del cuscinetto idrodinamico e quote geometriche. (Immagine tratta da [12]).	37
2.1	Schema dei volumi di controllo del modello. (Immagine adattata da [13]).	43
2.2	Schema dei trafilamenti alle <i>clearance</i> radiali ed assiali per i volumi sigillati. (Immagine tratta da [13]).	45
2.3	Eccentricità nel sistema di riferimento <i>XY</i> .	46
2.4	Profilo originale del casing (tratteggiato) e con il profilo di usura (continuo).	47
2.5	Spostamento dei <i>bearing blocks</i> verso l'aspirazione. (Immagine tratta da [17]).	48
2.6	Esempio di output d'integrazione nei volumi sigillati ($p_m = 47 \text{ bar}$, $\omega = 1000 \text{ rpm}$).	51
2.7	Esempi di parametri geometrici del volume intrappolato.	54
2.8	Esempio di output d'integrazione nel volume intrappolato ($p_m = 47 \text{ bar}$, $\omega = 1000 \text{ rpm}$).	54
2.9	Esempio di profilo di pressione completo ($p_m = 47 \text{ bar}$, $\omega = 1000 \text{ rpm}$).	56
2.10	Sistema di riferimento delle ruote dentate, motrice (1) e condotta (2), con la linea diretta d'azione (DLA), inclinata di α_w rispetto alla verticale.	56
2.11	<i>Flowchart</i> per la determinazione della SEP applicato alla ruota motrice.	60
2.12	Pressioni non bilanciate ai punti di contatto. (Immagine tratta da [15]).	63
2.13	Esempio di output di forze di pressione e coppie di pressione ($p_m = 47 \text{ bar}$, $\omega = 1000 \text{ rpm}$).	63
2.14	Schema dei trafilamenti concorrenti al computo delle perdite nel rendimento volumetrico. (Immagine tratta da [5]).	65
3.1	Piatto di bilanciamento di tipo 'A' della Casappa Magnum HDP 30.51.	69
3.2	Confronto fra CFD (rossa continua) e modello attuale (nera tratteggiata) nel caso di rotori centrati ($\Delta p = 47 \text{ bar}$, 1000 rpm).	71
3.3	Eccentricità imposta a priori nelle simulazioni CFD, adottata anche per le simulazioni con il modello attuale in esame.	72
3.4	Confronto fra CFD (rossa continua) e modello attuale (nera tratteggiata) nel caso di rotori eccentrici ($\Delta p = 47 \text{ bar}$, 1000 rpm).	72
3.5	Schema per il calcolo dell'area di comunicazione fra il generico volume sigillato ed il <i>backend groove</i> .	74

3.6	Confronto fra CFD (rossa continua) e modello attuale con l'approccio 1 (nera tratteggiata) e con l'approccio 2 (blu tratteggiata) ($\Delta p = 40 \text{ bar}$, 750 rpm).	75
3.7	Confronto fra CFD (rossa continua) e modello attuale con l'approccio 1 (nera tratteggiata) e con l'approccio 2 (blu tratteggiata) ($\Delta p = 75 \text{ bar}$, 1250 rpm).	76
3.8	Confronto fra CFD (rossa continua) e modello attuale con l'approccio 1 (nera tratteggiata) e con l'approccio 2 (blu tratteggiata) ($\Delta p = 105 \text{ bar}$, 1500 rpm).	77
3.9	Confronto fra CFD (rossa continua) e modello attuale con l'approccio 1 (nera tratteggiata) e con l'approccio 2 (blu tratteggiata) ($\Delta p = 143 \text{ bar}$, 1750 rpm).	78
3.10	Modello a parametri concentrati del componente HCDEGP0 della libreria Amesim (figure tratte dall' <i>help</i> del componente).	80
3.11	Sketch Amesim utilizzato per la validazione.	81
3.12	Confronto fra modello Amesim (rossa continua) e modello attuale (nera tratteggiata), piatto 'B', rotorici centrati ($\Delta p = 47 \text{ bar}$, 1000 rpm).	81
3.13	Confronto fra modello Amesim (rossa continua) e modello attuale (nera tratteggiata), piatto 'B', rotorici centrati e <i>clearance</i> radiale nulla, <i>clearance</i> assiale 0.025 mm ($\Delta p = 47 \text{ bar}$, 1000 rpm).	82
3.14	Confronto fra modello Amesim (rossa continua) e modello attuale (nera tratteggiata), piatto 'B', rotorici centrati e <i>clearance</i> radiale nulla, <i>clearance</i> assiale 0.04 mm ($\Delta p = 47 \text{ bar}$, 1000 rpm).	83
3.15	Confronto fra modello Amesim (rossa continua) e modello attuale (nera tratteggiata), piatto 'B', rotorici centrati e <i>clearance</i> radiale nulla, <i>clearance</i> assiale 0.05 mm ($\Delta p = 47 \text{ bar}$, 1000 rpm).	84
3.16	Confronto fra modello Amesim (rossa continua) e modello attuale (nera tratteggiata), piatto 'B', rotorici centrati e <i>clearance</i> radiale nulla, <i>clearance</i> assiale 0.075 mm ($\Delta p = 47 \text{ bar}$, 1000 rpm).	85
3.17	Confronto fra modello Amesim (rossa continua) e modello attuale (nera tratteggiata), piatto 'B', rotorici centrati e <i>clearance</i> radiale nulla, <i>clearance</i> assiale 0.10 mm ($\Delta p = 47 \text{ bar}$, 1000 rpm).	86
3.18	Confronto fra il profilo ricavato con la SEP di riferimento (curva blu) e con la SEP calcolata (curva rossa) ($\Delta p = 20 \text{ bar}$, 3350 rpm).	87
3.19	Confronto fra le componenti di forza di pressione ricavate con la SEP di riferimento (curve continue) e con la SEP calcolata (curve tratteggiate) ($\Delta p = 20 \text{ bar}$, 3350 rpm).	88
3.20	Confronto fra il profilo ricavato con la SEP di riferimento (curva blu) e con la SEP calcolata (curva rossa) ($\Delta p = 47 \text{ bar}$, 1000 rpm).	92

3.21	Confronto fra il profilo ricavato con la SEP di riferimento (curva blu) e con la SEP calcolata (curva rossa) ($\Delta p = 40 \text{ bar}$, 750 rpm). .	95
3.22	Confronto fra il profilo ricavato con la SEP di riferimento (curva blu) e con la SEP calcolata (curva rossa) ($\Delta p = 75 \text{ bar}$, 1250 rpm). .	95
3.23	Confronto fra il profilo ricavato con la SEP di riferimento (curva blu) e con la SEP calcolata (curva rossa) ($\Delta p = 105 \text{ bar}$, 1500 rpm). .	96
3.24	Confronto fra il profilo ricavato con la SEP di riferimento (curva blu) e con la SEP calcolata (curva rossa) ($\Delta p = 143 \text{ bar}$, 1750 rpm). .	96
3.25	Rendimenti volumetrici calcolati per la pompa Casappa Magnum HDP 30.51 montante i piatti di tipo 'B', simulata nel caso di rotori centrati, e interpolazione lineare (1000 rpm).	98
3.26	Andamento del rendimento volumetrico in funzione del numero di <i>Stribeck</i> della pompa.	101
3.27	Curve interpolanti specializzate per ciascuna serie di dati.	102
A.1	Trend delle iterate nel calcolo della SEP.	111

Capitolo 1

Introduzione

Questo capitolo ha lo scopo di descrivere il principio di funzionamento delle pompe ad ingranaggi, con particolare interesse alle pompe ad ingranaggi esterni, ed i potenziali campi di applicazione, mettendone in evidenza vantaggi e limitazioni. Verrà poi proposta una panoramica sulle metodologie per l'analisi dell'evoluzione del fluido all'interno della macchina in funzione della geometria dei componenti e delle condizioni di funzionamento.

1.1 Tipologie di pompe idrostatiche

L'insieme delle pompe idrostatiche è identificato dal principio di funzionamento. A prescindere dal design specifico, esse si basano sullo spostamento del fluido da un ambiente di aspirazione ad uno di mandata (pertanto vengono definite '*positive displacement machines*') attraverso un certo numero di volumi variabili: così la pompa è in grado di soddisfare la richiesta di portata collegando due ambienti a pressione differente. In questo sta la fondamentale differenza con le pompe centrifughe, in cui l'energia fornita al rotore della macchina fa sì che il fluido veda un innalzamento di velocità e pressione per effetto centrifugo.

Esistono poi due gruppi principali sulla base del tipo di moto dei componenti mobili ([1]):

- il fluido viene spostato da pistoni che scorrono all'interno di camere cilindriche;
- il fluido viene spostato da organi rotanti (pompe a paletta, a vite, a lobi, a ingranaggi, ...);

In linea di principio, tali macchine possono essere impiegate sia come pompa (fornendo lavoro dall'esterno per pompare il fluido in pressione), sia come motore (sfruttando la portata di fluido in pressione per generare lavoro), ma nella pratica

il design della macchina si concentra solo su uno dei due utilizzi.

Nelle pompe ad ingranaggi, l'ingranamento di due ruote dentate, di cui una motrice ed una condotta, genera i volumi che trasportano il fluido: si suddividono ancora in pompe ad ingranaggi esterni e ad ingranaggi interni.

Le pompe ad ingranaggi interni sono costituite da una ruota dentata che ingrana con un anello di dimensioni maggiori e dentato internamente (in queste architetture a condurre è l'anello esterno): lo spostamento di fluido avviene quindi all'interno. Fra le pompe ad ingranaggi interni si distinguono poi:

- Pompe 'gerotor' (Figura 1.1), in cui il numero di denti della ruota dentata interna è pari a quello dell'anello esterno. Idealmente, il contatto ruota-anello si sviluppa su un numero di punti uguale al numero di denti e conseguentemente si identificano pari volumi isolati;
- Pompe a mezzaluna ('crescent pumps') (Figura 1.2), in cui il numero di denti della ruota dentata interna è diverso da quello dell'anello esterno, e pertanto è necessario inserire un ulteriore elemento a mezzaluna, statico, di modo da sigillare gli ambienti di aspirazione e di mandata.

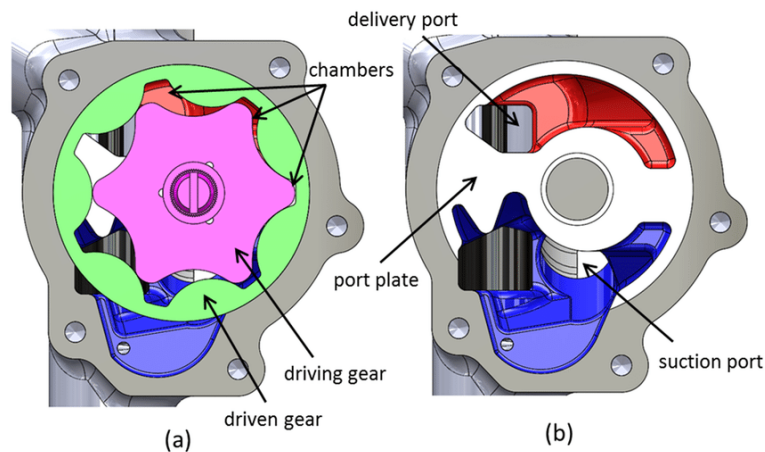


Figura 1.1: (a) Esempio di pompa *gerotor*; (b) Dettaglio del *port plate*. (Immagine tratta da [2]).

Le pompe ad ingranaggi esterni sono costituite da una coppia di ruote dentate confinate all'interno di un casing (Figura 1.3). L'ingranamento delle ruote, di cui una motrice ed una condotta, fa sì che il fluido venga trasportato dall'ambiente di aspirazione a quello di mandata attraverso i volumi di riporto sigillati che si creano nei vani fra i denti delle ruote e il profilo interno del casing: il dente dell'ingranaggio funge da tenuta e impedisce al fluido di ricircolare indietro. Contemporaneamente si genera anche un volume fra i denti ingrananti, delimitato dai punti di contatto

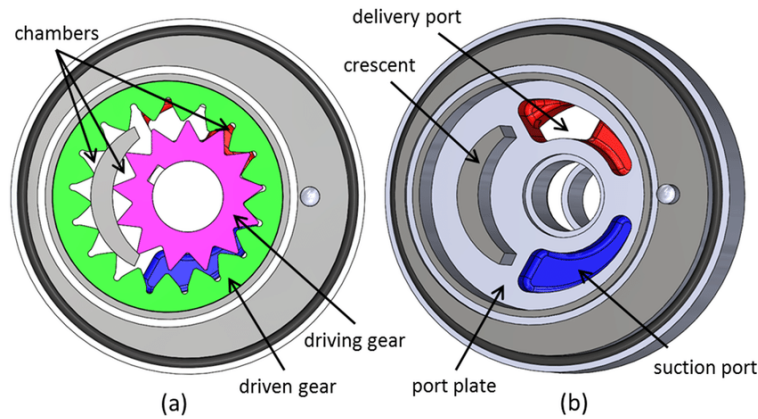


Figura 1.2: (a) Esempio di pompa a mezzaluna; (b) Dettaglio del *port plate*. (Immagine tratta da [2]).

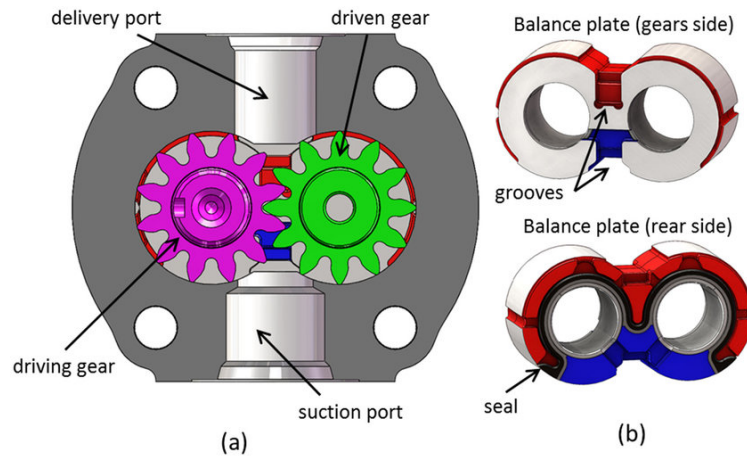


Figura 1.3: (a) Esempio di pompa a ingranaggi esterni; (b) Dettaglio dei piatti di bilanciamento. (Immagine tratta da [2]).

delle due ruote, che si genera dal lato di mandata e si scarica al lato di aspirazione. Il principio di funzionamento di una pompa ad ingranaggi esterni appena descritto è presentato in maniera schematica in Figura 1.4.

Per questo tipo di applicazione è possibile scegliere fra tre tipologie di ingranaggi (Figura 1.5), di cui si mettono in evidenza vantaggi e svantaggi ([3]):

- Cilindrici: denti dritti e paralleli all'asse di rotazione, possono essere ingranati a velocità elevate e sono facili da produrre;
- Elicoidali: i denti sono angolati, ossia hanno un angolo di elica rispetto all'asse di rotazione, di modo che le coppie di denti ingaggino ed abbandonino la presa

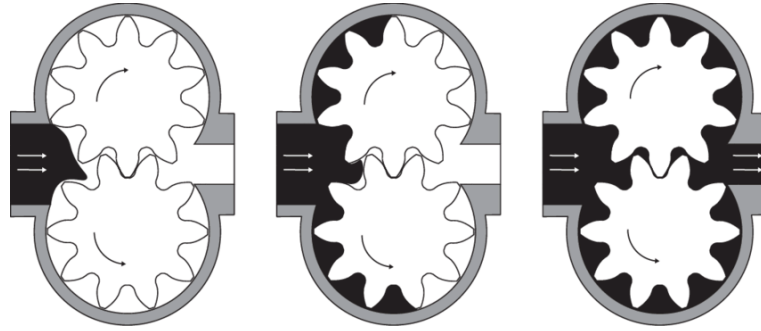


Figura 1.4: Principio di funzionamento di una pompa ad ingranaggi esterni.
(Da: Finite Element Modeling of a Viscous Fluid Flowing through an External Gear Pump - Scientific Figure on ResearchGate).

in maniera graduale (negli ingranaggi cilindrici invece il contatto viene iniziato ed abbandonato simultaneamente su tutta la lunghezza assiale delle ruote), comportando una trasmissione complessivamente più regolare e priva di urti, ma generano una componente assiale di forza di contatto. Gli ingranaggi da pompa hanno di solito angoli di elica fino a 5° ;

- A spina di pesce: due serie di denti elicoidali, a formare un V ad angolo acuto, compensano a vicenda la componente assiale della forza che le ruote dentate si scambiano al contatto.



Figura 1.5: Ingranaggi cilindrici, elicoidali e a spina di pesce. (Immagine tratta da [3]).

I materiali attualmente più utilizzati per la realizzazione dei principali componenti delle pompe ad ingranaggi sono elencati in Tabella 1.1.

Corpo e coperchio	Ghisa, acciai, acciai inossidabili, alto legati, leghe di Alluminio, tecnopolimeri
Ingranaggi	Acciai, acciai inossidabili, tecnopolimeri
Albero	Acciai, acciai inossidabili, alto legati, tecnopolimeri

Tabella 1.1: Materiali usati nella realizzazione dei principali componenti delle pompe ad ingranaggi.

1.2 Vantaggi ed applicazioni

Fra i principali vantaggi delle pompe ad ingranaggi si annoverano la relativa semplicità meccanica (i componenti sono in generale pochi ed ancor meno i componenti mobili), unita a pesi ed ingombri contenuti.

Le pompe ad ingranaggi esterni sono poi particolarmente competitive, in termini economici, rispetto alle alternative. Sono in grado di garantire un ampio range di portata (fino a 3500 rpm per pompe di cilindrata ridotta, fino a 700 rpm per modelli più grandi), con pressioni fino all'ordine di qualche centinaia di *bar* ([4]). Hanno infine eccellente capacità di adescamento (l'adescamento della pompa è il transitorio d'avviamento durante il quale il corpo del dispositivo ed il tubo di aspirazione si riempiono di fluido, eliminando ogni traccia d'aria dall'interno).

Fra i principali svantaggi delle pompe ad ingranaggi si annovera il comportamento pulsato nell'emissione di portata in pressione, dovuto all'ingranamento periodico delle ruote dentate (problematica in realtà comune a tutte le pompe a '*positive displacement*', sia di tipo rotativo che traslazionale). La pulsazione può conseguentemente provocare rumore e vibrazioni nel sistema idraulico, fenomeni indesiderati che possono provocare seri danneggiamenti. Il comportamento pulsato nella maggior parte dei casi può comunque essere attenuato inserendo degli smorzatori nel sistema. Nel caso di ostruzioni della linea idraulica è inoltre opportuno prevedere che la linea, o la pompa stessa, abbia un sistema di *pressure relief* per la protezione dalle sovrappressioni.

Le pompe ad ingranaggi esterni sono poco adatte a gestire fluidi abrasivi e fluidi con particolato solido sospeso, dato che sono sostenute da quattro cuscinetti immersi nel fluido e hanno tolleranze tipicamente molto strette. Il design necessita infatti di accortezze nella scelta dei materiali e delle tolleranze dei componenti al fine di ridurre le perdite di trafilamento e migliorare l'efficienza volumetrica.

Per quanto riguarda le applicazioni delle pompe ad ingranaggi esterni, sono delle più disparate: sono ampiamente utilizzate nella lubrificazione di macchinari e motori (ad esempio motori diesel dell'industria automobilistica), nei sistemi di potenza idraulica (macchine agricole, industriali, ...), mentre nel settore aeronautico

sono integrate nei sistemi di lubrificazione dei turbomotori e delle scatole ingranaggi in campo elicotteristico. Sono infine noti altri impieghi in cui ad essere pompate sono additivi chimici, alcool, solventi, resine, polimeri.

1.3 Componenti della pompa

Come già menzionato, una caratteristica vantaggiosa delle pompe ad ingranaggi esterni è che hanno pochi componenti. La Figura 1.6 mostra un esploso della macchina. La parte più esterna è il casing, al cui interno sono montati gli altri componenti. La ruota motrice è mossa assieme al proprio albero da una presa di moto esterna. Le ruote sono supportate ciascuna da una coppia di cuscinetti idrodinamici, montati da entrambe le parti e ospitati nei *bearing blocks*. I *bearing blocks* sono alloggiati all'interno del casing con un gioco, e sono quindi liberi di un certo movimento, sia assiale sia planare, all'interno del casing (*floating bearing blocks*). Su di essi sono eseguite alcune lavorazioni:

- sulla faccia a contatto con le ruote dentate sono ricavati meati di scarico sia dal lato mandata sia dal lato aspirazione (*relief grooves*) che servono a mettere in contatto il volume intrappolato durante l'ingranamento con i rispettivi ambienti: ciò è molto importante per evitare che il fluido intrappolato, per effetto della contrazione ed espansione del volume, vada incontro a sovrappressioni improvvise (potenzialmente assai più elevate della massima pressione nominale della pompa, ossia la pressione di mandata) per poi scendere al di sotto della pressione di aspirazione (con conseguente rischio di cavitazione, deleteria per la salute della pompa). La presenza dei meati di scarico fa sì che si instauri un flusso secondario fra mandata, volume intrappolato e aspirazione che mitiga quanto appena descritto, ed un dimensionamento adeguato della forma e dimensione degli scarichi fa sì che il picco di pressione sia di lieve entità;
- sempre sulla faccia a contatto con le ruote dentate è comune che vengano realizzati ulteriori fresature periferiche (*peripheral grooves*) lungo un arco di circonferenza a contatto con il casing, simmetricamente da entrambi i lati del casing, e in comunicazione con l'ambiente di mandata (si veda il Capitolo 3 per maggiori dettagli). Queste lavorazioni sono realizzate con l'obiettivo di innalzare la pressione nei volumi isolati fra i denti ed il casing più rapidamente: quanto più estesa è la fresatura periferica quanto prima si sentono gli effetti della pressione di mandata sui volumi isolati. Essi rappresentano ulteriori orifizi attraverso cui un trafilamento di fluido ad alta pressione proveniente dalla mandata si insinua nei volumi isolati, favorendone la compressione;

- sulla faccia opposta sono invece ricavati i meati di connessione all’ambiente di mandata e di aspirazione (separati da una guarnizione) che permettono il bilanciamento del blocco: la risultante forza del campo di pressione agente su questa faccia è tale da bilanciare assialmente il sistema *bearing blocks* + ruote dentate, offrendo una forza di serraggio sulle stesse; in questo modo si bilanciano i giochi assiali. La forma di questi meati deve essere tale da bilanciare non solo le spinte assiali risultanti dai campi di pressione sulle facce opposte, ma anche i relativi momenti, che tenderebbero invece a far ruotare i piatti di bilanciamento inclinandoli rispetto alle facce laterali delle ruote dentate. Il design di queste lavorazioni è dunque una parte molto importante nel prevedere e garantire il corretto funzionamento della pompa nelle sue condizioni di funzionamento. Un’ulteriore lavorazione connette infine l’ambiente di aspirazione a quello di drenaggio (che di conseguenza condivide lo stesso valore di pressione).

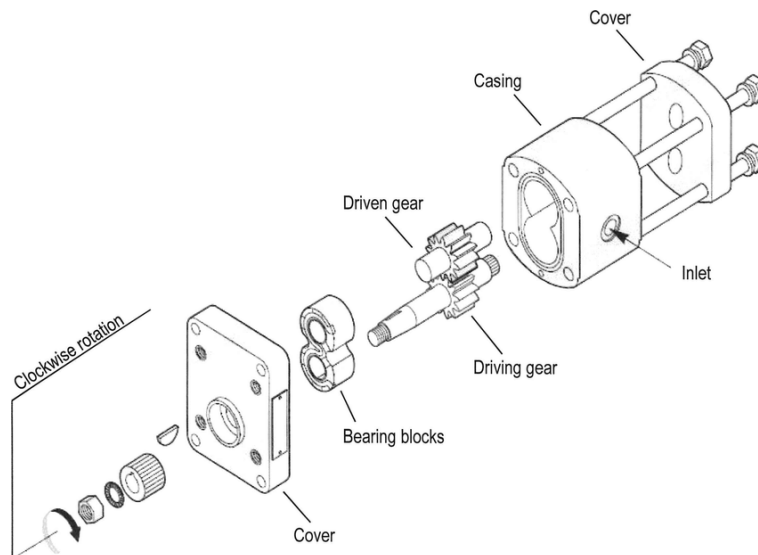


Figura 1.6: Vista esplosa di una pompa ad ingranaggi esterni. (Da: Vibroacoustic Measurements and Simulations Applied to External Gear Pumps. An Integrated Simplified Approach - Scientific Figure on ResearchGate).

Il montaggio delle ruote dentate all’interno del casing prevede un certo gioco radiale nominale per consentirne la rotazione. Il profilo interno del casing può presentare inoltre un proprio profilo di usura, realizzato al termine del *running-in process* dell’esemplare (si veda il Capitolo 2.2.1), che si aggiunge al gioco radiale nominale. L’assemblaggio della pompa è completato con l’aggiunta delle opportune tenute interne, che impediscono trafilamenti indesiderati, i coperchi e la flangia che ne consente il montaggio.

Durante il funzionamento, una porzione di fluido proveniente dall'aspirazione viene catturata dal volume che si forma fra un vano dei denti delle ruote ed il profilo interno del casing. La rotazione trasporta il volume sigillato verso la mandata: quando il vano non è più confinato dal casing si apre nell'ambiente di mandata, rilasciando finalmente il fluido. Il viaggio del volume dall'aspirazione alla mandata è accompagnato da un graduale aumento di pressione: il campo di pressione attorno alla ruota esercita una forza che, in linea di massima, fa spostare le ruote verso il lato di aspirazione. Questo decentramento influenza a sua volta l'evoluzione della pressione nei volumi di riporto, poiché modifica la distribuzione delle *clearance* radiali. Questo aspetto verrà estesamente discusso in seguito.

Le ruote si ritrovano nella stessa posizione relativa intercorso un passo angolare (il passo angolare è definito come $\frac{2\pi}{Z}$ [rad], con Z il numero di denti delle ruote). Ne consegue che, a meno di effetti secondari di ordine trascurabile, le fenomenologie della pompa si ripetono periodicamente ad ogni passo angolare, in particolare il campo di pressione.

1.4 Modelli di analisi

Per simulare ciò che accade all'interno della pompa è possibile ricorrere a più strategie a differenti livelli di dettaglio ([2]).

Come è naturale attendersi, tanto più il modello è complesso e completo, quanto più accuratamente riproduce il comportamento reale della pompa. D'altra parte, ci si attende un costo computazionale maggiore. È opportuno allora domandarsi, nella scelta del modello da adottare, quale sia il livello di dettaglio che si vuole raggiungere. In fase preliminare, quando la geometria non è definita se non da requisiti di carattere molto generale, si vuole esplorare un range di condizioni di funzionamento (pressione, numero di giri) e di geometrie (cilindrata della pompa, caratteristiche delle ruote dentate, forma e collocazione dei *groove*, ...) piuttosto ampio. In tal caso occorre un modello rapido, per quanto non estremamente accurato. Tra l'altro, un elevato grado di accuratezza sarebbe sprecato non lavorando su geometrie definitive. Nel caso invece si stia approfondendo il comportamento di una pompa caratterizzata nel dettaglio, ad esempio tramite CAD, e di cui si vogliano studiare effetti termici, cavitazione, effetti viscosi, ecc, è allora opportuno adottare modelli più accurati, concentrandosi su un numero limitato di casi di studio.

L'obiettivo di questa sezione è fornire una breve panoramica degli attuali modelli disponibili: 0D (a parametri concentrati, *lumped parameters*), 1D e 2D-3D (CFD, *Computational Fluid Dynamics*). Il problema è approccioabile anche in maniera 'ibrida', utilizzando ad esempio un modello 0D per simulare il flusso principale all'interno della pompa ed un modello 2D per i trafilamenti interni (questo nel caso

in cui la geometria di meati ed orifici sia particolarmente complessa ed impedisca di adottare formulazioni analitiche fedeli). In letteratura sono disponibili altri esempi di approcci ibridi, che in linea di massima puntano a coniugare i vantaggi dei modelli a poche dimensioni (rapidità di esecuzione) e di quelli a più dimensioni (maggiore accuratezza e completezza).

1.4.1 0D (Parametri concentrati)

L'implementazione del modello a parametri concentrati richiede di identificare un certo numero di volumi di controllo all'interno della pompa, in cui è suddiviso il dominio complessivo. Le principali caratteristiche del modello sono le seguenti:

- la suddivisione dei volumi di controllo è fatta in maniera arbitraria e dipende anzitutto dall'architettura che si vuole studiare (ingranaggi esterni, *gerotor*, mezzaluna, ...); una buona scelta della suddivisione dei volumi agevola la comprensione dell'evoluzione del campo di pressione;
- il fluido all'interno di ciascun volume di controllo è considerato omogeneo; ciascun volume di controllo è quindi identificato da un unico valore per ciascuna delle variabili di stato del problema (nel caso in esame la variabile identificativa dei volumi è la pressione, ma vale in generale, ad esempio per la variabile temperatura). Uno dei limiti più evidenti di quest'ipotesi è l'impossibilità di tenere conto degli effetti centrifughi agenti sul fluido all'interno del volume di controllo;
- il fluido all'interno di un volume di controllo evolve nel tempo secondo le equazioni di governo proprie del caso di studio; la forma geometrica stessa del volume evolve nel tempo nel corso dell'ingranamento delle ruote;
- i volumi sono idraulicamente rappresentabili con elementi capacitivi, messi in comunicazione fra di loro da resistenze idrauliche, ossia i trafileamenti fra volumi contigui; il moto del fluido ai trafileamenti è assunto laminare oppure turbolento a seconda dei casi.

Si tratta del modello più utilizzato, in quanto ha un livello di accuratezza già apprezzabile e tempi di calcolo ridotti.

Equazione di governo

Ogni volume di controllo, a prescindere da come viene definito, è soggetto alla seguente equazione differenziale di governo:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\beta}{V} \left(\sum Q_i - \frac{dV}{dt} + \alpha \cdot V \cdot \frac{dT}{dt} \right) \quad (1.1)$$

In cui β è il modulo di comprimibilità del fluido, V è il volume, $\sum Q_i$ è il flusso netto di portata entrante nel volume di controllo, α è il coefficiente di espansione termica, T è la Temperatura.

Si identificano i seguenti effetti sul volume di controllo:

- variazione di pressione a seguito dell'introduzione di portata ($\sum Q_i$): la convenzione di segno è tale che i flussi entranti nel volume sono positivi, in quanto provocano un aumento di pressione, quelli uscenti sono di conseguenza negativi;
- variazione di pressione causata dalla contrazione/espansione del volume $\frac{dV}{dt}$ ('squeeze'): se il volume si contrae la derivata è positiva e la pressione aumenta, ed il contrario quando invece si espande;
- variazione della pressione causata dall'espansione termica del fluido ($\alpha \cdot V \frac{dT}{dt}$).

L'effetto della variazione di Temperatura si definisce applicando la conservazione dell'energia:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{\rho c_p V} (\dot{Q} + \sum \dot{h}_i - h \sum m_i \frac{dV}{dt} + \alpha \cdot V \cdot T \frac{dT}{dt}) \quad (1.2)$$

In cui ρ è la densità del fluido, c_p il calore specifico a pressione costante, \dot{Q} il flusso di calore netto entrante nel volume, $\sum \dot{h}_i$ il flusso di entalpia netta, h l'entalpia specifica.

Il flusso di calore è di difficile definizione ed in generale si considera la pompa a temperatura costante, perciò il termine di espansione termica può essere trascurato.

L'equazione di governo del volume di controllo si semplifica come segue:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\beta}{V} (\sum Q_i - \frac{dV}{dt}) \quad (1.3)$$

È possibile fare un'ulteriore considerazione: la variabile tempo è legata alla variabile posizione angolare della ruota dentata attraverso la velocità angolare ω della ruota, da cui $dt = \frac{d\vartheta}{\omega}$. Da cui:

$$\frac{dp}{d\vartheta} = \frac{\beta}{V(\vartheta)} (\frac{\sum Q_i}{\omega} - \frac{dV}{d\vartheta}) \quad (1.4)$$

Volumi di controllo

La definizione dei volumi di controllo influenza da una parte la complessità del modello e la sua implementazione, dall'altra i risultati ottenibili dalla simulazione. Nello studio delle pompe ad ingranaggi (esterni od interni), ci sono due approcci alla definizione dei volumi di controllo:

- Approccio *Single Chamber* (SC) (Figura 1.7): vengono definiti volumi di controllo per gli ambienti di aspirazione, di mandata e per ciascuno dei vani fra i denti di entrambe le ruote. Ognuno di questi volumi non cessa mai di esistere durante l'ingranamento. Con questo approccio si segue nel dettaglio la storia della pressione nei vani di ciascun dente per una rotazione completa. I risultati sono di conseguenza più accurati.

Il principale svantaggio dell'approccio è la difficoltà di implementazione. Nell'equazione di governo dell'*i-esimo* volume di controllo rientra l'effetto di *squeeze*, che deve essere quantificato sulla base della geometria. L'applicazione dell'approccio SC risulta particolarmente ostico con pompe ad ingranaggi esterni, in cui nella zona di ingranamento non è affatto banale distinguere i volumi associati ai vani della ruota motrice da quelli della ruota condotta. Diversi software commerciali di simulazione oleodinamica offrono dei componenti di libreria che già implementano l'approccio SC, evitando ulteriore fatica nella valutazione dei volumi da parte dell'utente;

- Approccio *Multi Chamber* (MC) (Figura 1.8): contrariamente all'approccio SC, vengono raggruppati assieme tutti i volumi apertamente comunicanti. Vengono quindi definiti volumi per gli ambienti di mandata ed aspirazione (questa volta comprendenti anche i vani dei denti apertamente comunicanti con essi), i volumi isolati fra i vani delle ruote ed il volume intrappolato all'ingranamento. Nel caso delle pompe ad ingranaggi esterni i volumi isolati sono a volume costante, in quanto formati fra i vani ed il profilo interno del casing. Il numero totale dei volumi di controllo è variabile durante l'ingranamento: i volumi isolati nascono all'aspirazione e si aprono alla mandata, ed allo stesso modo il volume intrappolato è definito solo quando le ruote hanno due punti di contatto lungo la linea d'azione (condizione che si verifica solo su una frazione dell'ingranamento completo). Nonostante questo importante dettaglio, che complica l'integrazione delle equazioni di governo, l'approccio MC è di più semplice implementazione, almeno nello studio di pompe ad ingranaggi esterni. A causa della semplificazione di un volume intrappolato unificato il picco di pressione e la cavitazione sono predetti in maniera meno accurata rispetto al SC.

Per le pompe ad ingranaggi esterni l'approccio MC è più diffuso in letteratura e, nella maggior parte dei casi, restituisce risultati soddisfacenti. Per completezza si riporta che in alcuni lavori (tra cui [5], [6]) la zona d'ingranamento non è unificata in un volume intrappolato, ma è suddivisa in due volumi di controllo più piccoli. Essi sono collegati con strozzatori turbolenti di sezione variabile all'aspirazione e alla mandata, e direttamente comunicanti attraverso uno strozzatore a sezione costante, in corrispondenza del gioco fra i fianchi dei denti all'ingranamento (*bac-klash*). Questo approccio non è stato seguito nel modello attuale, che adotta un

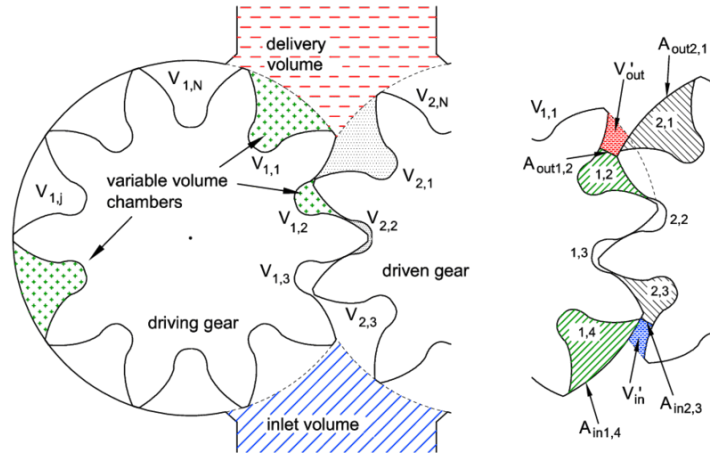


Figura 1.7: Approccio *Single Chamber* alla definizione dei volumi di controllo in una pompa ad ingranaggi esterni. (Immagine tratta da [2]).

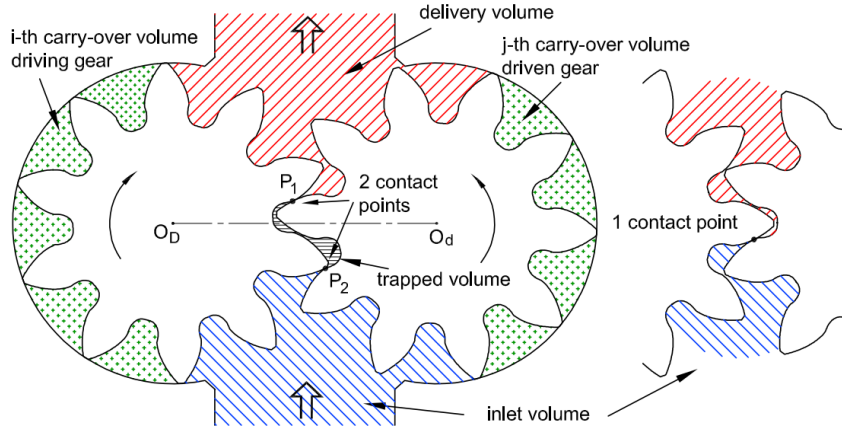


Figura 1.8: Approccio *Multi Chamber* alla definizione dei volumi di controllo in una pompa ad ingranaggi esterni. (Immagine tratta da [2]).

unico volume intrappolato.

La valutazione geometrica dei volumi e delle derivate nel corso dell'ingranamento sono trattati nel Capitolo 1.5.

Flusso nei trafiletti

Si descrivono brevemente le equazioni per i generici flussi che si instaurano fra i volumi di controllo, ossia i termini che rientrano nel flusso netto $\sum Q_i$ nell'equazione di governo (Eq.1.4). Occorre anzitutto distinguere fra campi di moto turbolenti

e laminari. In entrambi i casi esistono formulazioni ben note in letteratura per descrivere la portata in volume attraverso un orifizio/meato.

Per un campo di moto turbolento si considera la seguente formulazione:

$$Q = C_D A \sqrt{\frac{2|\Delta p|}{\rho}} \text{sign}(\Delta p) \quad (1.5)$$

In cui C_D è il coefficiente di scarico, A è l'area dell'orifizio, Δp è la differenza di pressione fra gli ambienti messi in comunicazione dall'orifizio. Si osserva che in generale il flusso è sempre diretto dall'ambiente a pressione maggiore a quello a pressione minore, da cui la necessità di differenziare il segno della portata a seconda del Δp : l'espressione è tale che la portata entri nell'ambiente a pressione inferiore.

Particolarmente ostica è la valutazione del coefficiente di scarico, C_D . Fra le varie formulazioni possibili si riporta la seguente, che fa dipendere il coefficiente di scarico da un numero (concettualmente non dissimile dal ben noto numero di *Reynolds*) detto '*flow number*':

$$\lambda = \frac{d_h}{\nu} \sqrt{\frac{2|\Delta p|}{\rho}} \quad (1.6)$$

In cui $d_h = \frac{4A}{p_h}$ è il diametro idraulico (p_h è il perimetro bagnato), ν è la viscosità cinematica. La relazione di dipendenza è la seguente:

$$C_D = C_{D,max} \tanh\left(\frac{2\lambda}{\lambda_{crit}}\right) \quad (1.7)$$

La relazione è scritta in modo tale da raggiungere il valore asintotico $C_{D,max}$ per λ elevati, mentre per valori inferiori il coefficiente di scarico è minore, in funzione dell'intensità della turbolenza. Non è scontato, soprattutto per modelli 0D, definire i valori di $C_{D,max}$ e soprattutto di λ_{crit} . Una formulazione simile ([5]) mette in relazione il coefficiente di scarico proprio al *Reynolds*, definito come segue:

$$Re = \frac{d_h U}{\nu} \quad (1.8)$$

In cui U è la velocità del flusso. Anche in questo caso va definito il valore asintotico $C_{D,max}$ e il *Reynolds* critico Re_{crit} . La relazione di dipendenza è del tutto analoga alla precedente:

$$C_D = C_{D,max} \tanh\left(\frac{2Re}{Re_{crit}}\right) \quad (1.9)$$

Un modo per aggirare il problema è considerare il flusso negli orifizi completamente turbolento ed il coefficiente di scarico costante, $C_D = 0.65 \div 0.75$.

Si può utilizzare l'Eq.1.5 per descrivere i flussi in ingresso all'aspirazione, in output alla mandata (per simulare il comportamento della pompa all'interno di un semplice circuito idraulico ad esempio) e per i *relief grooves* che mettono in comunicazione il volume intrappolato con gli ambienti di aspirazione e di mandata.

Per un campo di moto laminare si può utilizzare la seguente formulazione:

$$Q = \frac{h^3 b}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{bUh}{2} \quad (1.10)$$

In cui h è l'altezza del meato, b la sua profondità, U la velocità relativa di trascinamento fra le pareti inferiore e superiore del meato, μ la viscosità dinamica del fluido (Figura 1.9). Si hanno due contributi:

- differenza di pressione (termine di Poiseuille) fra gli ambienti messi in comunicazione dal meato; tanto maggiore è la differenza di pressione quanto più grande è la portata che trafila; il termine dipende inoltre dal cubo dell'altezza del meato, h , da cui si evince il ruolo determinante delle *clearance* nell'entità dei trafileamenti;
- trascinamento (termine di Couette) dovuto all'adesione a parete del fluido (condizione di aderenza all'intero dello strato limite viscoso) ed allo scorrimento reciproco delle pareti.

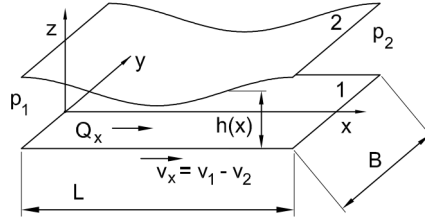


Figura 1.9: Flusso laminare in un meato con pareti di geometria arbitraria.

Per un meato elementare, costituito da due pareti parallele distanti h , lunghe L e profonde b , soggette a una differenza di pressione $\Delta p = p_1 - p_2$ (vedi Figura 1.10) si può riscrivere l'Eq.1.10 in forma finita:

$$Q = \frac{\Delta p h^3 b}{12\mu l} + \frac{bUh}{2} \quad (1.11)$$

Nel caso in cui non vi sia moto relativo fra le pareti del meato si semplifica come segue:

$$Q = \frac{\Delta p h^3 b}{12\mu l} \quad (1.12)$$

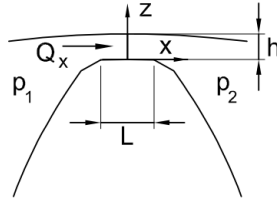


Figura 1.10: Geometria di un meato elementare.

Queste espressioni sono molto semplici da implementare. In alcuni casi le dimensioni geometriche da inserire all'interno dell'equazione sono immediate da ricavare, essendo dati della geometria dei componenti interni della pompa. In altri casi le geometrie del meato sono più complesse, ed occorre allora applicare l'equazione in forma differenziale (Eq.1.10) integrandola su tutto il meato, oppure applicare l'Eq.1.11 sostituendo al suo interno delle lunghezze equivalenti rappresentative. I meati di fluido nelle *clearance* della pompa hanno campi di moto tipicamente laminari, per cui le espressioni di cui sopra sono adatte a descrivere i trafilamenti alla testa dei denti (*clearance* radiali) e fra le facce laterali delle ruote dentate ed i *bearing blocks* (*clearance* assiali), dagli ambienti ad alta pressione a quelli a bassa pressione e verso l'ambiente di drenaggio.

1.4.2 1D (Parametri distribuiti)

I modelli 0D non consentono di analizzare nel dettaglio le oscillazioni di pressione che la pompa provoca all'interno del circuito idraulico. Essendo questo un fenomeno interessante per descrivere il comportamento dinamico del sistema, è possibile utilizzare modelli a parametri distribuiti 1D. In particolare, i volumi di controllo del sistema con una componente dimensionale preferenziale (in questo caso le tubature) sono modellizzati con una schematizzazione 1D e vengono suddivisi in sotto-volumi posti in serie. Essi permettono di tenere conto non solo degli effetti di compressibilità, ma anche degli effetti viscosi e dell'inerzia del fluido. In un modello del genere i volumi di controllo variabili della pompa continuano ad essere 0D. C'è inoltre la possibilità di discretizzare in 1D anche gli ambienti di aspirazione e di mandata.

1.4.3 2D-3D (CFD)

La CFD 2D rappresenta un approccio computazionalmente meno costoso rispetto a risolvere il dominio di calcolo tridimensionale della pompa. In questo caso si

considera un dominio di calcolo bidimensionale perpendicolare all'asse delle ruote dentate, in particolare per studiare il campo di pressione nel gap fra le facce delle ruote e i *bearing blocks*. Questo aspetto è rilevante per valutare non solo i trafiletti attraverso il gap, ma anche la forza di serraggio che i *bearing blocks* esercitano sulle ruote (si ricorda che sulla fiancata opposta di solito sono realizzate lavorazioni in comunicazione con l'ambiente di aspirazione e di mandata per il bilanciamento assiale). L'obiettivo è ricavare la distribuzione di pressione sul piano $p(x, y)$ e le componenti vettoriali di velocità u_x , u_y sul piano xy dalla risoluzione del set di equazioni di Navier-Stokes e Reynolds. Un modello CFD 2D permette di valutare il campo di pressione quando il *bearing block* è parallelo alla faccia delle ruote dentate ma anche quando viene imposta una certa inclinazione, che modifica localmente l'altezza del gap, o ancora considerando il *bearing block* assialmente mobile.

La CFD 3D è lo strumento più completo, nonché il più costoso a livello computazionale. I modelli 3D si basano sulla risoluzione del set di equazioni di Navier-Stokes su un dominio di calcolo discretizzato in una *mesh*. La problematica principale è proprio la generazione della *mesh*: il dominio ha una forma che evolve con l'ingranamento e la griglia generata su un certo numero di nodi si distorce fino a perdere validità. Si devono implementare algoritmi di aggiornamento periodico della *mesh* per tenere il passo con l'avanzamento angolare delle ruote.

La modellazione CFD è lo strumento più efficace per studiare geometrie complesse, difficilmente riproducibili in una serie di volumi di controllo. Permette poi di introdurre fenomeni aggiuntivi, quali l'effetto delle forze centrifughe, sbattimento, ventilazione, cavitazione dell'olio, andando a considerare l'interazione fra l'olio e l'aria e la variazione delle caratteristiche fisiche del fluido in compresenza di una fase gassosa disciolta al suo interno ([7]).

Nonostante le capacità di calcolo e la velocità dei calcolatori sia ad oggi progredita rispetto agli albori della simulazione di pompe ad ingranaggi, i modelli 3D vengono utilizzati per studiare porzioni limitate della pompa, oppure per ricavare dati utilizzabili a loro volta per affinare modelli di ordine dimensionale inferiore.

1.5 Definizione della geometria

La risoluzione del campo di pressione del fluido all'interno di una pompa ad ingranaggi richiede di valutare le proprietà geometriche di ciascun volume di controllo associato al modello nel corso dell'ingranamento delle ruote, in particolare il volume $V_i(\vartheta)$ e la sua derivata $\frac{dV}{d\vartheta}|_i$. In generale è possibile ricorrere a più strategie di calcolo: analitiche, CAD-based e numeriche.

1.5.1 Metodi analitici

Le proprietà geometriche dei volumi vengono calcolate sulla base di equazioni in forma chiusa che tengano in conto l'equazione dei profili dei denti, la linea dei contatti effettiva, la geometria dei piatti. In alcuni casi semplici è infatti possibile ricavare un'espressione analitica per $\frac{dV}{d\vartheta}|_i$, e ottenere di conseguenza $V_i(\vartheta)$ dall'integrazione della derivata. La letteratura fornisce a proposito delle formulazioni in forma chiusa, che sono utili per effettuare degli studi parametrici, impostando come parametri le principali quote geometriche dei componenti. Tuttavia, quando la geometria dei profili è più complessa, diventa opportuno procedere con metodi d'integrazione numerica.

La valutazione diretta delle derivate dei volumi si basa sul metodo dei raggi vettore, ossia i vettori che definiscono opportunamente i punti di contatto negli ingranaggi, in un sistema di riferimento stabilito a seconda dell'architettura della pompa. La definizione dei raggi vettori per pompe a mezzaluna, *gerotor* e ad ingranaggi esterni è riportata in Figura 1.11. Date le opportune definizioni dei raggi vettore per la ruota 1 e 2 la derivata dei volumi è calcolabile come:

$$\frac{dV}{d\vartheta}|_i = \frac{1}{2}w[(\rho_{D1,i}^2 - \rho_{D2,i}^2 + \tau(\rho_{d2,i}^2 - \rho_{d1,i}^2))] \quad (1.13)$$

In cui w è la larghezza di faccia delle ruote (ossia il loro spessore), τ è il rapporto

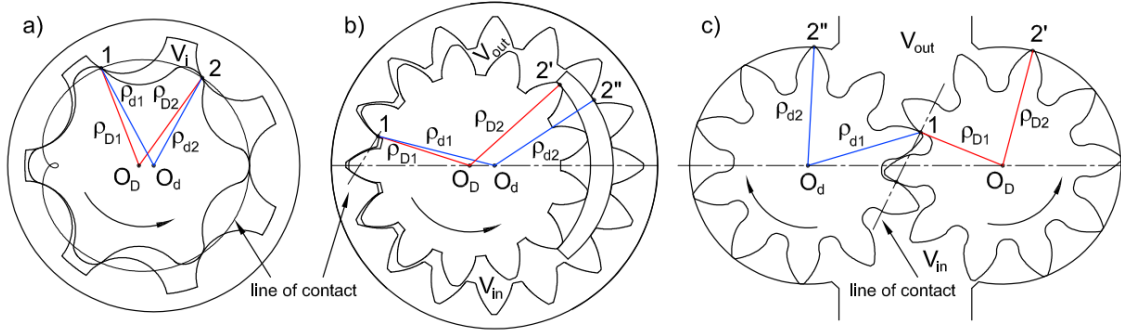


Figura 1.11: Metodo dei raggi vettore applicato a: a) *gerotor* (vano isolato V_i , SC); b) pompa a mezzaluna (volume di mandata V_{out} , MC); c) pompa ad ingranaggi esterni (volume di mandata V_{out} , MC). (Immagine tratta da [2]).

di trasmissione fra le ruote, calcolabile attraverso il rapporto fra il numero di denti $\tau = \pm \frac{Z_2}{Z_1}$ (il segno è negativo se l'ingranamento dei denti è interno, negativo se esterno). Per una pompa ad ingranaggi esterni le ruote hanno egual numero di denti, perciò $\tau = -1$. Nel caso in cui il profilo dei denti dell'ingranaggio sia elicoidale, si generalizza l'Eq. 1.5.1 come segue:

$$\frac{dV}{d\vartheta}|_i = \frac{1}{2} \int_0^w [(\rho_{D1,i}^2 - \rho_{D2,i}^2 + \tau(\rho_{d2,i}^2 - \rho_{d1,i}^2))] dz \quad (1.14)$$

Tali equazioni vanno specializzate a seconda della pompa in esame, andando a sostituire le opportune espressioni dei raggi vettore delle due ruote. Un esempio d'applicazione del metodo dei raggi vettore per una pompa a mezzaluna è riportato in [8], in [9] per una *gerotor*. Nel caso specifico di una pompa ad ingranaggi esterni, l'applicazione del metodo ai raggi vettore permette di valutare l'evoluzione dei volumi di aspirazione, di mandata e del volume intrappolato. Tenendo presente che i tre coesistono solo durante una frazione del passo d'ingranamento completo, è evidente che occorre prestare particolare attenzione alla definizione puntuale dei raggi vettore a cavallo dell'apertura del volume intrappolato nell'ambiente di aspirazione.

L'equazione della derivata viene integrata sull'arco dell'ingranamento per ricavare l'andamento del volume di controllo corrispondente. Non in tutti i casi è possibile ottenere una forma chiusa dall'integrazione della derivata: per pompe a mezzaluna e ad ingranaggi esterni si ottiene un polinomio di secondo grado, se i denti adottano il ben noto profilo evolvente, mentre per pompe *gerotor* non ci si riconduce ad una forma chiusa neppure adottando profili basilari. Nel caso il profilo dei denti si discosti dall'evolvente, l'integrazione in forma chiusa non è scontata nemmeno per le prime due tipologie di pompe.

Per ottenere l'andamento del volume è poi necessaria una condizione iniziale, ossia il valore del volume alla posizione angolare di partenza, che a sua volta può essere calcolato dall'area sottesa fra le curve dei profili che lo delimitano.

Un approccio alternativo all'integrazione della derivata è il calcolo diretto dei volumi, integrando i profili delle superfici che delimitano il volume fra i due punti di contatto all'ingranamento, a loro volta dipendenti dalla posizione angolare di riferimento:

$$V(\vartheta) = \frac{1}{2}w \left(\int_{\Psi_{e,1}}^{\Psi_{e,2}} \rho_e^2 d\Psi - \int_{\Psi_{i,1}}^{\Psi_{i,2}} \rho_i^2 d\Psi \right) \quad (1.15)$$

In cui sono noti puntualmente entrambi i profili, in coordinate polari e nel proprio sistema di riferimento, e le coordinate dei punti di contatto anteriore e posteriore (giacenti sulla linea dei contatti), che rappresentano gli estremi d'integrazione $\Psi_{i,1,2}$ (Figura 1.12). L'applicazione di questi approcci al calcolo dei volumi all'interno di una pompa ad ingranaggi esterni non verrà approfondito ulteriormente, in quanto non è il metodo che è stato scelto per procedere nell'implementazione del modello a parametri concentrati.

1.5.2 Metodi CAD-based

L'andamento dei volumi di controllo e delle aree che concorrono ai principali flussi all'interno della pompa (ad esempio i *relief grooves* di lato aspirazione e mandata che comunicano con il volume intrappolato) possono essere desunti direttamente dal CAD d'assieme della pompa. I dati acquisiti vengono poi passati, per mezzo di

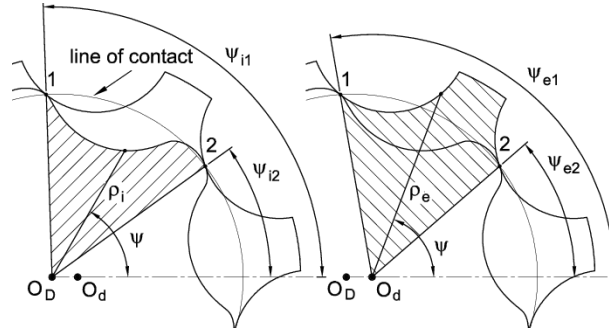


Figura 1.12: Esempio di calcolo del volume di controllo associato ad un vano di una pompa *gerotor*. (Immagine tratta da [2]).

un'opportuna interfaccia software, agli strumenti di analisi fluidodinamica dedicati. Un esempio di procedura CAD-based è ben descritta in [10], in cui il CAD della pompa viene sviluppato in un ambiente software commerciale di tipo parametrico:

- sul CAD della macchina vengono identificati i volumi e le aree a cui si è interessati per le successive analisi fluidodinamiche (*Virtual Measuring Elements*, VME). Nel caso di una pompa ad ingranaggi si definiscono quindi volume intrappolato, area di intersezione volume intrappolato - *relief groove* di mandata/aspirazione;
- vengono generate automaticamente tutte le configurazioni dell'ingranamento, per ogni step angolare della rotazione completa. Lo step è deciso dall'utente, eventualmente scegliendo di affinarlo in corrispondenza di posizioni angolari critiche o comunque di particolare interesse nella successiva analisi fluidodinamica;
- una macro software appositamente sviluppata 'legge' le configurazioni CAD estraendo le misure associate a tutte le VME precedentemente definite, esportandole in un formato adeguato per il post-processing: gli strumenti di simulazione fluidodinamica ricevono in input i dati della geometria;
- dai risultati di output del post-processing è infine possibile fare delle valutazioni sulla bontà del design della macchina, eventualmente agendo in maniera rapida sui parametri del CAD.

In questo modo le procedure CAD-based consentono all'utente di ottimizzare le prestazioni della pompa già ai primi stadi del design. Ovviamente sono praticabili solo quando è già disponibile un CAD della pompa da cui partire, mentre, ai fini del presente lavoro di tesi, non è ancora stata definita alcuna geometria preliminare a cui far riferimento. Nell'ottica di creare un modello che possa spaziare soluzioni

geometriche quanto più ampie possibili è sconsigliabile basarsi sulla creazione di un CAD, che è invece d'obbligo quando lo studio sia arrivato ad un livello di dettaglio successivo.

1.5.3 Metodi numerici

L'approccio numerico alla valutazione di volumi e aree non richiede lo sviluppo di formule chiuse. Esso consiste nel tenere traccia delle geometrie di cui si vuole valutare l'estensione approssimandole a poligoni con un numero elevato di vertici. La procedura prevede di:

- tracciare per punti i profili dei componenti (ruote dentate, *relief grooves*, casing, ecc.), con una discretizzazione più o meno fitta a seconda del grado di accuratezza che si vorrà poi raggiungere nelle valutazioni numeriche. Tali profili possono essere il frutto della discretizzazione di relazioni analitiche (ad esempio il profilo evolvente dei denti delle ruote), dati in input sotto forma di nuvola di punti distribuiti, oppure essere importati dai file CAD dei componenti;
- caricare le coordinate dei punti dei profili in vettori dedicati, in un sistema di riferimento che sia coerente per tutti i componenti;
- generare le configurazioni dell'ingranamento, per ogni step angolare della rotazione completa (analogamente alle procedure CAD-based). Anche in questo caso lo step angolare è in input utente, a seconda del livello di accuratezza che si vuole raggiungere; [5] e [10] suggeriscono uno step angolare pari a 0.5° ;
- identificare i punti di contatto che isolano i volumi, per ogni posizione angolare. Contrariamente ai metodi analitici, la discretizzazione finita dei profili fa sì che la distanza calcolata fra una coppia di denti che ingranano (o fra un dente ed il profilo interno del casing) non sia mai esattamente nulla (punto di contatto ideale): si stabilisce una tolleranza entro cui la distanza minima fra gli elementi puntuali dei profili 1 e 2 $(x_{1,i}, y_{1,i}), (x_{2,j}, y_{2,j})$ è considerabile un contatto;
- creare un vettore che contiene l'unione ordinata delle coordinate dei punti del profilo 1 e 2 compresi fra i punti di contatto, escludendo i punti che cadono all'infuori dell'intervallo, di modo da definire un poligono (Figura 1.13);
- valutare infine l'estensione del poligono, per ogni posizione angolare, come sommatoria dell'area (con segno) dei trapezi elementari sottesi da ogni lato:

$$V = \frac{1}{2}w \left(\sum_{i=1}^{N-1} (y_i + y_{i+1})(x_i - x_{i+1}) + (y_N + y_1)(x_N - x_1) \right) \quad (1.16)$$

La procedura di calcolo dell'area del poligono può anche essere affidata a

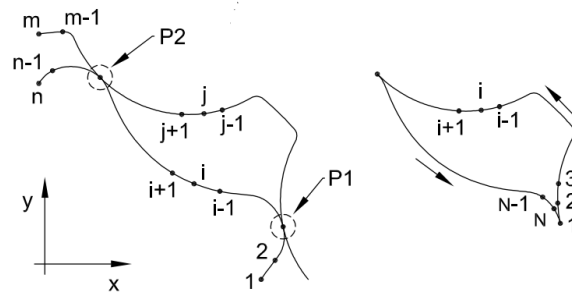


Figura 1.13: Indicizzazione degli elementi puntuali compresi fra i punti di contatto P_1 e P_2 .

funzioni di libreria dell'ambiente di calcolo che si sta utilizzando.

La valutazione numerica a partire dalla discretizzazione per punti dei profili consente di studiare geometrie più complicate rispetto ai metodi analitici, evitando al contempo di dover realizzare un CAD specifico dei componenti: si ritiene sia il metodo più adatto per le rapide indagini preliminari delle prestazioni della pompa, essendo in grado di gestire un livello di dettaglio geometrico intermedio.

1.6 Parametri delle ruote dentate

Le dimensioni delle ruote dentate sono date in funzione delle loro specifiche, quali modulo, m , numero di denti, Z , angolo di pressione, α . In Tabella 1.2 si riportano alcune formule utili alla determinazione delle dimensioni principali dell'ingranaggio, nel caso di denti dritti (*spur gears*), la tipologia più semplice e diffusa, e di frequente impiego nella realizzazione di pompe ad ingranaggi esterni (si veda la Figura 1.14).

Nel caso in esame le ruote sono identiche e il rapporto di trasmissione vale:

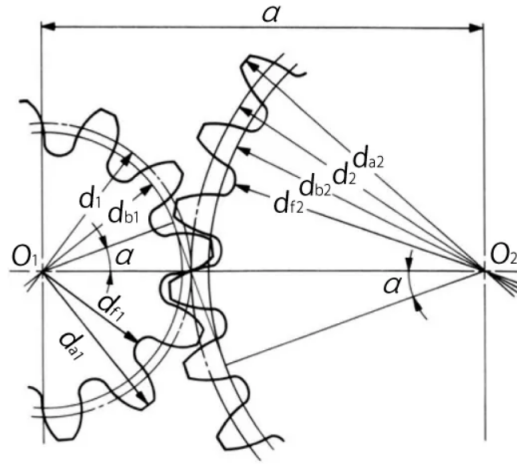
$$\tau = -\frac{Z_2}{Z_1} = -1 \quad (1.17)$$

Il rapporto di condotta, ε_α , indica, per una data coppia di ruote che ingranano, quanti denti sono mediamente in contatto. Nel caso in esame, in cui le ruote sono identiche, sia L l'estensione del segmento effettivo di contatto sulla linea d'azione diretta (DLA), da entrambe le parti rispetto all'interasse:

$$L = \sqrt{\left(\frac{d_a}{2}\right)^2 - \left(\frac{d_b}{2}\right)^2} - \frac{d_b}{2} \tan(\alpha_w) \quad (1.18)$$

	Simbolo	Unità di misura	Formula
Modulo	m	$[mm]$	Input
Angolo di pressione	α	$[deg]$	Input (standard $\alpha = 20^\circ$)
Numero di denti	Z	-	Input
Addendum Circle Diameter Factor	$ACDF$	-	Input (standard $ACDF = 2$)
Dedendum Circle Diameter Factor	$DCDF$	-	Input (standard $DCDF = 2$)
Interasse	a	$[mm]$	Input
Spessore di fascia	w	$[mm]$	Input
Diametro primitivo	d	$[mm]$	mZ
Diametro di testa	d_a	$[mm]$	$m \cdot (Z + ACDF)$
Diametro di fondo	d_f	$[mm]$	$m \cdot (Z - DCDF)$
Altezza del dente	h_{tooth}	$[mm]$	$0.5(d_a - d_f)$
Angolo di pressione di lavoro	α_w	$[deg]$	$\alpha_w = \cos^{-1} \left(\frac{d_{b1} + d_{b2}}{2a} \right)$
Diametro di base	d_b	$[mm]$	$d \cos \alpha_w$

Tabella 1.2: Principali parametri delle ruote dentate.

Figura 1.14: Raggi notevoli delle ruote dentate. (Da: https://khkgears.net/new/gear_knowledge/gear_technical_reference/calculation_gear_dimensions.html).

Il rapporto di condotta è definito come segue:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{2L}{m\pi \cos \alpha_w} \quad (1.19)$$

In applicazioni normali, per trasmettere correttamente il moto dalla ruota motrice alla condotta, $1 < \epsilon_\alpha < 2$, ossia c'è sempre almeno una coppia di denti in contatto e per una frazione dell'ingranamento esiste anche una seconda coppia in contatto.

1.7 Cuscinetti idrodinamici

In questa sezione viene descritto sinteticamente il principio di funzionamento dei cuscinetti idrodinamici. L'implementazione di un modello per la previsione del comportamento statico e dinamico del componente è stato oggetto di un studio svolto in parallelo e congiuntamente al presente lavoro di tesi ([11]). Di seguito verranno accennati solo gli aspetti salienti per comprendere il fenomeno di decentramento delle ruote dentate sotto carico. Per ulteriori approfondimenti in merito, si faccia riferimento anche a [12].

I cuscinetti idrodinamici sostengono le ruote dentate all'interno del casing e sopportano principalmente carichi radiali. Facendo riferimento allo schema di Figura 1.15, l'albero di diametro D ruota all'interno del cuscinetto. Su di esso è calettata la ruota dentata. La parte fissa invece è montata nel *journal bearing block*. Il cuscinetto è lungo L ed ha una certa *clearance* interna. Un parametro importante per determinare il comportamento del cuscinetto sotto carico è il rapporto fra la lunghezza ed il diametro (*Aspect Ratio*), L/D .

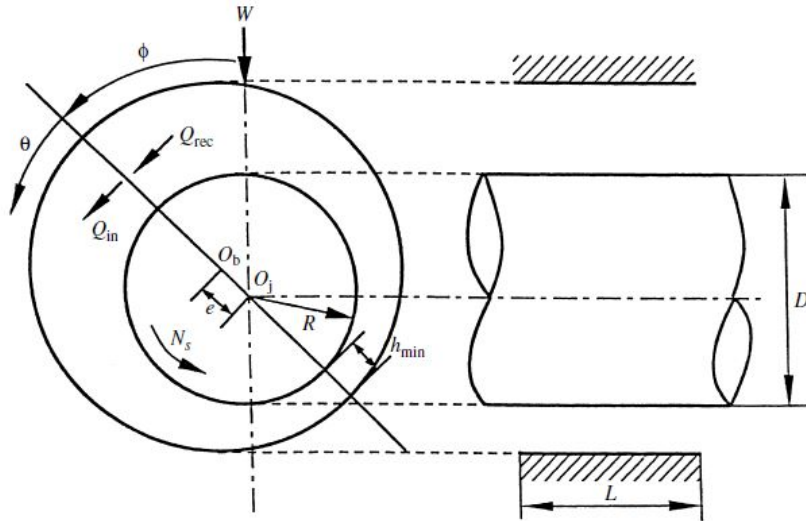


Figura 1.15: Schema di carico del cuscinetto idrodinamico e quote geometriche. (Immagine tratta da [12]).

Nel cuscinetto idrodinamico sussiste un gioco fra l'albero interno e il supporto

fisso, in cui fluisce il lubrificante. Nel caso di una pompa inserita in un circuito di lubrificazione, coincide con una frazione della portata trattata dalla macchina. Quando l'albero ruota, la velocità angolare e la viscosità dell'olio comportano una certa distribuzione di pressione nel fluido. Essa è in grado di sostenere l'albero all'interno del cuscinetto, evitando che vada in diretto contatto con la parete fissa. In condizioni statiche, l'integrazione della pressione equilibra il carico esterno applicato sull'albero (W in figura). In queste condizioni il meato fluido assume anche una certa distribuzione di spessore: l'albero si decentra da O_b (centro geometrico del cuscinetto) a O_j (centro di rotazione sotto carico), nella direzione in cui lo spessore è minimo, h_{min} , assumendo eccentricità e .

È importante osservare che la direzione dello spostamento statico non coincide con la direzione d'applicazione del carico: fra le due esiste uno sfasamento, detto *attitude angle*, ϕ . Quando la rotazione è in senso antiorario, come in figura, l'eccentricità è posticipata rispetto alla direzione del carico esterno. Quando invece è in senso orario, l'eccentricità anticipa la direzione del carico esterno.

Nelle pompe ad ingranaggi esterni, i cuscinetti sono caricati ciascuno da una quota della forza risultante sulle ruote, come approfondito nel Capitolo [2.6](#).

Capitolo 2

Descrizione del modello

L'obiettivo del lavoro è la previsione del campo di pressione all'interno di una pompa ad ingranaggi esterni, la caratterizzazione dei principali trafilamenti e conseguentemente la stima del rendimento volumetrico, al variare della geometria e delle condizioni di funzionamento.

Le perdite attraverso le *clearance* della macchina dipendono da:

- dimensioni geometriche dei meati;
- differenze in pressione a cavallo dei trafilamenti.

Il campo di pressione attorno alla ruota genera una forza risultante sulle ruote. L'albero su cui è calettata ciascuna ruota dentata è supportato da una coppia di cuscinetti idrodinamici: la forza risultante sulla ruota ne causa il decentramento rispetto alla posizione nominale. Tale spostamento micrometrico comporta a sua volta una variazione non trascurabile delle *clearance* fra la testa dei denti della ruota e l'interno del casing che la ospita. Il campo di pressione, infine, è fortemente influenzato dalla dimensione dei meati.

Si deduce allora che l'analisi del campo di pressione a regime, la determinazione dello spostamento del centro delle ruote dentate ed il calcolo dei trafilamenti sono problemi strettamente interconnessi, la cui risoluzione va intrapresa contemporaneamente. Noti il campo di pressione e il decentramento delle ruote dentate a regime, è immediato procedere alla caratterizzazione delle perdite in volume.

Come anticipato nel capitolo introduttivo, per affrontare il problema fluidodinamico si adotta un modello 0D a parametri concentrati. Lo scopo della seguente sezione è approfondire la definizione dei volumi di controllo ed i flussi all'interfaccia di volumi contigui. Si procederà poi a descrivere il calcolo delle forze e delle coppie agenti sulle ruote ed il metodo di valutazione dello spostamento statico delle ruote. La metodologia proposta è tratta principalmente da [13], [14] e [15]. Infine si tratterà la stima del rendimento volumetrico.

2.1 Definizione dei volumi di controllo

Dal momento che la valutazione dei volumi non è stata affidata a software di alto livello, ma alla scrittura di una routine software apposita, si è preferito adottare l'approccio *Multi Chamber*, che permette di raggruppare in un unico volume di controllo tutti i vani delle ruote in aperta comunicazione con l'ambiente di aspirazione da una parte, e tutti i vani in aperta comunicazione con l'ambiente di mandata dall'altra. Di conseguenza i volumi di controllo adottati all'interno del modello sono i seguenti:

- Ambiente di aspirazione
- Ambiente di mandata
- Volumi sigillati di riporto (*Scaled Volumes*)
- Volume intrappolato (*Trapped Volume*), quando esistente

Particolare attenzione va posta alla continuità di tali volumi. Mentre l'ambiente di aspirazione e di mandata sono sempre presenti nel corso dell'ingranamento, il volume intrappolato esiste solo quando esso si svolge su due punti di contatto, e non compare quando le ruote hanno un unico contatto. I volumi sigillati esistono fintanto che sono racchiusi nello spazio dei vani fra i denti delle ruote ed il profilo interno del casing: nel corso di un passo angolare d'ingranamento si verifica la nascita di un volume isolato presso il lato d'aspirazione e di seguito l'apertura di un volume isolato nel lato di mandata, oppure prima l'apertura alla mandata e dopo la nascita all'aspirazione, a seconda della posizione angolare di partenza nello studio dell'ingranamento. In ogni caso, è evidente che il numero di volumi sigillati è variabile, e nel corso dell'ingranamento è pari a $N \rightarrow N + 1 \rightarrow N$ oppure $N \rightarrow N - 1 \rightarrow N$. Le posizioni angolari a cui si verificano le due discontinuità dipendono in definitiva dalla geometria delle ruote (in particolare dal numero di denti, Z) e dall'estensione angolare del profilo del casing.

Le discontinuità nell'esistenza dei volumi di controllo rendono necessaria un'attenzione particolare nella risoluzione del sistema di equazioni differenziali che descrivono l'evoluzione della pressione: la dimensione del sistema ODE è variabile ed esso va risolto spezzando gli intervalli d'integrazione a seconda delle occorrenze di nascita e morte dei vari volumi di controllo.

In linea di massima lo studio del campo di pressione all'interno della pompa richiederebbe di considerare i volumi sigillati associati sia alla ruota motrice (1) sia a quella condotta (2): un modello a parametri concentrati completo vorrebbe la risoluzione contemporanea di tutti i volumi d'olio nella macchina. In questo caso di studio, però, si ipotizza che l'evoluzione dal lato 1 e 2 sia praticamente identico, e che quindi sia sufficiente descrivere l'evoluzione dei volumi sigillati dal lato 1

per dedurre simmetricamente quanto succede dal lato 2 (ipotesi peraltro verificata dalle rilevazioni sperimentali). Così facendo il numero totale di volumi sigillati da risolvere assieme praticamente si dimezza, snellendo sia la programmazione del codice sia i tempi computazionali associati.

In Tabella 2.1 è riportato uno schema qualitativo delle occorrenze che si verificano durante l'ingranamento. Ciascuna posizione angolare notevole rappresenta un istante in cui il numero totale dei volumi di controllo cresce o diminuisce di 1. La posizione angolare iniziale, a partire dalla quale vengono integrate le equazioni differenziali, è posta coincidente con la nascita del volume intrappolato, ossia quando l'ingranamento comincia a svilupparsi su due punti di contatto. La posizione angolare di partenza potrebbe essere posta, ad esempio, in coincidenza della nascita di un volume sigillato presso l'aspirazione, senza alcuna influenza sui risultati. In Tabella 2.2 è riportato lo schema considerando i volumi sigillati della sola ruota motrice. Si fa l'ipotesi che l'ambiente di aspirazione e quello di mandata

$\theta_0 = 0$	Nascita del volume intrappolato alla mandata
θ_1	Apertura di un volume sigillato alla mandata (Ruota 2)
θ_2	Nascita di un volume sigillato all'aspirazione (Ruota 1)
θ_3	Apertura del volume intrappolato all'aspirazione
θ_4	Apertura di un volume sigillato alla mandata (Ruota 1)
θ_5	Nascita di un volume sigillato all'aspirazione (Ruota 2)
$\theta_6 = \frac{2\pi}{Z}$	Termine del passo angolare d'ingranamento

Tabella 2.1: Posizioni angolari e occorrenze sul numero di volumi contemporanei, considerando i volumi sigillati di entrambe le ruote (1 e 2)

$\theta_0 = 0$	Nascita del volume intrappolato alla mandata
θ_1	Nascita di un volume sigillato all'aspirazione (oppure apertura alla mandata)
θ_2	Apertura del volume intrappolato all'aspirazione
θ_3	Apertura di un volume sigillato alla mandata (oppure nascita all'aspirazione)
$\theta_4 = \frac{2\pi}{Z}$	Termine del passo angolare d'ingranamento

Tabella 2.2: Posizioni angolari e occorrenze sul numero di volumi contemporanei, considerando i soli volumi sigillati della ruota motrice (1)

siano a pressione (relativa alla pressione ambiente) costante, pari rispettivamente a $p_a = 0 \text{ bar}$ e p_m . La pressione di mandata è un dato del problema associato alla condizione di funzionamento. Collegando la mandata al modello di un circuito idraulico sarebbe possibile analizzare il comportamento dinamico del sistema,

tuttavia ai fini del presente lavoro si ritiene sufficiente cominciare a studiare le prestazioni della pompa in queste condizioni semplificate.

Così si osserva l'evoluzione 'media' della pressione all'interno della pompa, mentre non si ha sensibilità sulle oscillazioni di pressione (*pressure ripple*) dovute all'interazione della pompa con il resto del circuito idraulico a valle (dove, in un caso semplice, potrebbe ad esempio esserci uno strozzatore). I fenomeni di *pressure ripple* sono rilevanti nelle pompe ad ingranaggi, ed in particolare in quelle ad ingranaggi esterni, perciò il modello sviluppato in questo studio, nonostante sia adatto allo studio 'statico' della pompa, è in definitiva inadatto a verificarne l'interazione dinamica nel circuito.

I volumi sono collegati dai meati in cui si instaurano i trafilamenti di fluido che li riempiono e svuotano, a seconda del segno algebrico. Vanno quindi definite le possibili vie di comunicazione fra volumi contigui:

- Volume sigillato *i-esimo*: collegato ai volumi sigillati $i + 1$ e $i - 1$ attraverso i meati di testa e laterali dei denti $i + 1$ e i che confinano il vano; collegato all'ambiente di drenaggio attraverso il meato laterale della faccia della ruota dentata; in particolare:
 - primo volume sigillato ($i = 1$) : collegato al volume sigillato $i + 1$ e all'ambiente di aspirazione (denti 2 e 1);
 - ultimo volume sigillato ($i = N$) : collegato al volume sigillato $i + 1$ e all'ambiente di aspirazione (denti $N + 1$ e N);
- Volume intrappolato: collegato agli ambienti di aspirazione e mandata attraverso gli scarichi di pressione appositi (*relief grooves*) e i meati laterali dei denti in contatto; collegato all'ambiente di drenaggio attraverso il meato laterale della faccia della ruota dentata.

Lo schema dei trafilamenti del modello completo è riportato in Figura 2.1. Per quanto detto in precedenza, si considera che l'evoluzione dei volumi del lato della ruota 2 sia sostanzialmente identica alla ruota 1. Entrambi gli ambienti di drenaggio sono collegati all'aspirazione e ne condividono il valore di pressione. Nella sezione seguente vengono approfondite le espressioni per i trafilamenti riportati nello schema e le equazioni differenziali dei volumi di controllo.

2.2 Volumi sigillati

Partendo dall'equazione di governo generale applicata all'*i-esimo* volume:

$$\frac{dp}{d\vartheta}|_i = \frac{\beta}{V_i(\vartheta)} \left(\frac{\sum Q_i}{\omega} - \frac{dV}{d\vartheta}|_i \right) \quad (2.1)$$

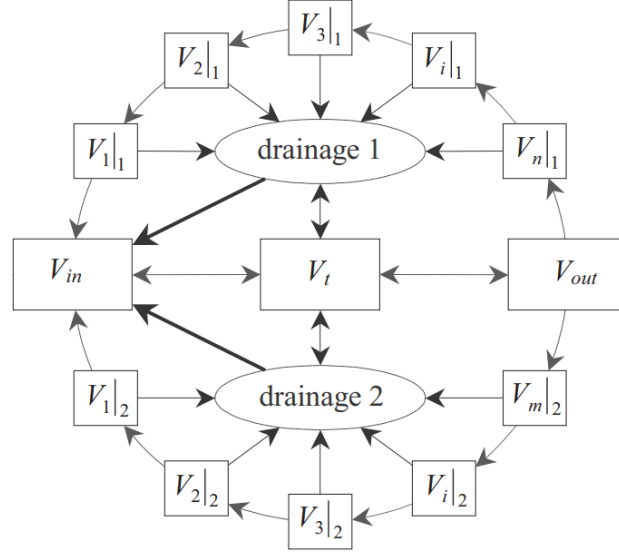


Figura 2.1: Schema dei volumi di controllo del modello. (Immagine adattata da [13]).

Il volume è sostanzialmente costante, e pari al volume dei vani fra i denti delle ruote, $V_i = V_{vane}$. I trafilamenti alle *clearance* radiali ed assiali che costituiscono $\sum Q_i$ sono riportati schematicamente in Figura 2.2. In particolare:

- Testa del dente ($Q_{h,i}$). Il generico meato di testa ha:
 - altezza pari alla *clearance* radiale h_i (somma degli effetti della *clearance* radiale nominale, dello spostamento del centro della ruota in funzionamento, del profilo di usura del casing),
 - lunghezza pari allo spessore del dente al troncamento (ossia al raggio esterno) l_t ,
 - spessore pari alla larghezza di fascia delle ruote w ;

la differenza di pressione è fra il volume i e $i - 1$; il termine di trascinamento considera il moto relativo fra il casing (fermo) e la testa del dente, che, data la velocità di rotazione ω della ruota, è pari a $U = r_{ext}\omega$, con r_{ext} il raggio esterno della ruota; da cui:

$$Q_{h,i} = \frac{(p_i - p_{i-1}) h_i^3 w}{12\mu l_t} + \frac{w r_{ext} \omega h_i}{2} \quad (2.2)$$

- Lato del dente ($Q_{f,i}$). Il generico meato laterale ha:

- altezza pari alla *clearance* laterale h_f fra il casing e la faccia della ruota,
- lunghezza pari allo spessore del profilo del dente, quindi variabile in direzione radiale, $l_f(r)$
- spessore pari all'altezza del dente, $b_f = r_{ext} - r_{root}$;

la differenza di pressione è ancora fra il volume i e $i - 1$; il termine di trascinamento considera il moto relativo fra il casing (fermo) e il lato del dente, che, data la velocità di rotazione ω della ruota, è variabile radialmente e pari a $U(r) = r\omega$; per evitare l'integrazione dell'espressione lungo l'altezza del dente è possibile approssimarla a tratti, suddividendo il profilo laterale del dente in M meati elementari rettangolari, con:

- spessore pari a $b_{f,j} = \frac{r_{ext} - r_{root}}{M}$,
- posizione radiale inferiore pari a $r_{1,j} = r_{root} + (j - 1)\dot{b}_{f,j}$, posizione radiale superiore pari a $r_{2,j} = r_{root} + j\dot{b}_{f,j}$
- raggio medio pari a $r_j = \frac{r_{2,j} + r_{1,j}}{2}$,
- lunghezza pari allo spessore del profilo del dente, intercettato ad r_j ,

su cui applicare l'equazione laminare, per poi procedere ad una sommatoria per ricavare il totale:

$$Q_{f,i} = \sum_{j=1}^M \left(\frac{(p_i - p_{i-1}) h_f^3 b_{f,j}}{12\mu l_{f,j}} + \frac{b_{f,j} r_j \omega h_f}{2} \right) \quad (2.3)$$

In alternativa, è possibile semplificare ulteriormente assumendo un meato caratteristico con:

- spessore pari a $b_f = r_{ext} - r_{root}$,
- raggio medio pari al raggio medio del dente, r_m ,
- lunghezza pari allo spessore medio del profilo del dente, l_f ;

da cui:

$$Q_{f,i} = \frac{(p_i - p_{i-1}) h_f^3 b_f}{12\mu l_f} + \frac{b_f r_m \omega h_f}{2} \quad (2.4)$$

Si osservi che questa espressione vale nel caso in cui l'altezza del meato laterale sia pari ad $h_f = cost$, ossia quando la faccia della ruota dentata è parallela ai piatti di bilanciamento. Ciò è vero quando i piatti sono bilanciati assialmente ed alla rotazione. Nel caso in cui i piatti non siano assialmente bilanciati, invece, si pongono ad una certa inclinazione rispetto alla faccia delle ruote, $h_f = h_f(x, y)$ funzione della posizione sul piano della faccia delle ruote. Ad ogni modo, ai fini di questo lavoro si considererà un meato laterale ad altezza costante;

- Drenaggio ($Q_{d,i}$). Il drenaggio ha geometrie caratteristiche non immediate da ricavare, ad ogni modo si suggerisce di adottare:
 - altezza pari alla *clearance* laterale h_f fra il casing e la faccia della ruota,
 - lunghezza pari alla fascia fra il raggio di fondo della ruota ed il raggio di drenaggio, $l_d = r_{root} - r_{drain}$,
 - spessore caratteristico pari a circa la metà del passo della ruota al raggio di fondo, $b_d = 0.4 \div 0.5 r_{root} \frac{2\pi}{Z}$,

la differenza di pressione è fra il volume i e l'ambiente di drenaggio; il termine di trascinamento è nullo, dato che la rotazione della ruota non dà contributo nella direzione del trafilamento; da cui:

$$Q_{d,i} = \frac{(p_i - p_D) h_f^3 b_d}{12\mu l_d} \quad (2.5)$$

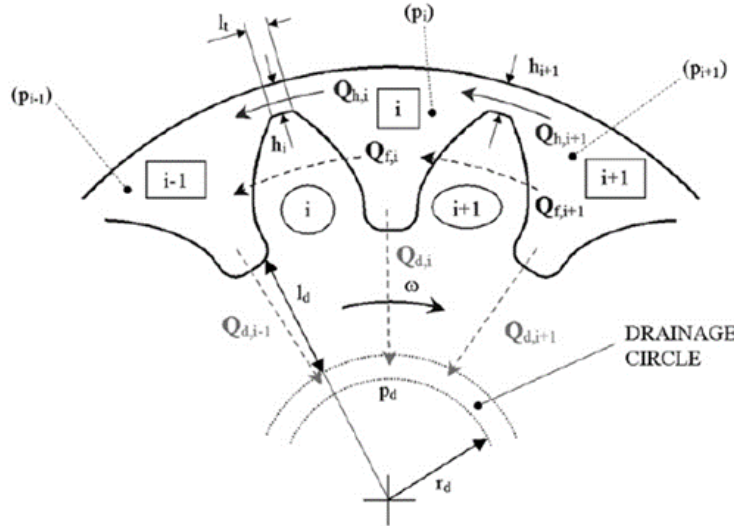


Figura 2.2: Schema dei trafilamenti alle *clearance* radiali ed assiali per i volumi sigillati. (Immagine tratta da [13]).

Oltre ai trafilamenti sopra citati, nel caso in cui la pompa presenti fresature periferiche (*peripheral* e *backend grooves*) che mettono in comunicazione l'ambiente di mandata con i volumi sigillati vicini all'aspirazione, occorre considerare un'ulteriore portata in volume che dalla mandata tende a riempire il volume sigillato attraverso l'area di comunicazione del *backend groove*. Questo aspetto sarà descritto meglio nel Capitolo 3.1.2.

Nel sistema di equazioni differenziali compaiono anche dei termini di *squeeze* legati alla derivata del volume di controllo: sebbene come si è detto i volumi sigillati siano complessivamente considerabili costanti e pari a V_{vane} , esiste tuttavia un piccolo effetto dovuto alla variazione delle *clearance* radiali fra denti successivi. Tale termine viene ricavato dalla variazione in volume dV_i su una rotazione $d\vartheta$, da cui:

$$\left. \frac{dV}{d\vartheta} \right|_i = r_{ext} w (h_{i+1} - h_i) \quad (2.6)$$

Nel caso in cui la ruota rimanga centrata all'interno del casing, le *clearance* radiali sono tutte uguali, $\left. \frac{dV}{d\vartheta} \right|_i = 0$. Nel caso più realistico in cui la ruota si sposta verso l'aspirazione, le *clearance* radiali tendono ad aumentare nel viaggio verso la mandata: $h_{i+1} - h_i > 0$, $\left. \frac{dV}{d\vartheta} \right|_i > 0$, ed il contributo all'aumento di pressione del termine è negativo.

2.2.1 Valutazione delle *clearance* radiali

Le *clearance* radiali dipendono dalla posizione eccentrica assunta dalla ruota durante il funzionamento. Ipotizzando che l'eccentricità della ruota sia molto piccola rispetto alla dimensione del raggio esterno, essendo la *clearance* radiale nominale $h_{r,n}$, è possibile scrivere la seguente relazione per ricavare la distribuzione in funzione della posizione angolare ϑ_i :

$$h_{re,i}(\vartheta_i) = h_{r,n} - e \cos(\vartheta_i - \Gamma) \quad (2.7)$$

In cui e , Γ sono rispettivamente il modulo e la direzione dell'eccentricità nel sistema di riferimento XY (si faccia riferimento alla Figura 2.3). Nota l'eccentricità, per ogni posizione angolare dell'ingranamento si risale alla coordinata angolare a cui si trovano le teste dei denti ($1 \div N + 1$) che delimitano i volumi sigillati ($1 \div N$) e si ricava immediatamente $h_i(\vartheta_i)$.

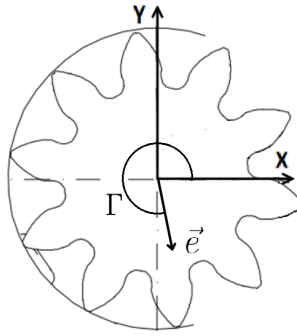


Figura 2.3: Eccentricità nel sistema di riferimento XY .

L'interno del casing può presentare un profilo di usura (Figura 2.4), dovuto al

cosiddetto *running in process* della pompa ([16], [17]). Si tratta di un processo abrasivo in fase di manifattura della macchina, utile a migliorarne l'efficienza volumetrica. La pompa viene sottoposta ad una serie di condizioni di funzionamento (di solito o a velocità costante e pressioni crescenti oppure a pressione costante e velocità crescente, a seconda della strategia sviluppata dall'azienda produttrice), durante le quali le ruote tendono a spostarsi verso l'aspirazione sotto l'azione del carico sui cuscinetti e a 'scavarsi' un profilo all'interno del casing, tale da minimizzare i trafiletti. Al termine del processo il casing riporta un profilo di usura aggiuntivo, oltre alla *clearance* radiale nominale di partenza. La presenza del profilo influenza il campo di pressione nei volumi sigillati e ha conseguentemente effetto sull'eccentricità dei centri delle ruote.

Sia noto il profilo di usura lungo l'apertura angolare del casing (nel sistema di riferimento XY), $h_{wear}(\vartheta_i)$, lo si somma alla *clearance* precedentemente calcolata:

$$h(\vartheta_i) = h_{re,i}(\vartheta_i) + h_{wear}(\vartheta_i) \quad (2.8)$$

Nel caso si voglia considerare l'effetto del profilo di usura è opportuno:

- conoscere per punti il profilo di usura, ad esempio tramite rilevamento diretto su un esemplare sottoposto al *running in process*,
- oppure simulare direttamente il *running in process*, una volta stabilita la sequenza del processo.

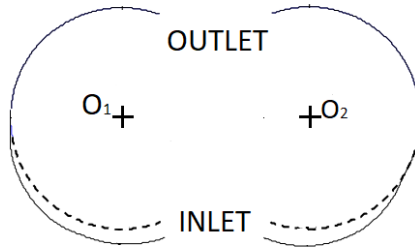


Figura 2.4: Profilo originale del casing (tratteggiato) e con il profilo di usura (continuo).

Un ulteriore effetto sulle *clearance* radiali può essere dovuto allo spostamento dei blocchi dei cuscinetti (*floating bearing blocks*) all'interno del casing, nel caso in cui esista il gioco h_b . I *floating bearing blocks* in tal caso vengono anch'essi spinti verso l'aspirazione sotto l'azione delle pressioni nella pompa. La posizione statica assunta dai *bearing blocks* all'interno del casing si dovrebbe ricavare scrivendo le equazioni di equilibrio del corpo alla traslazione sul piano XY . Un'alternativa

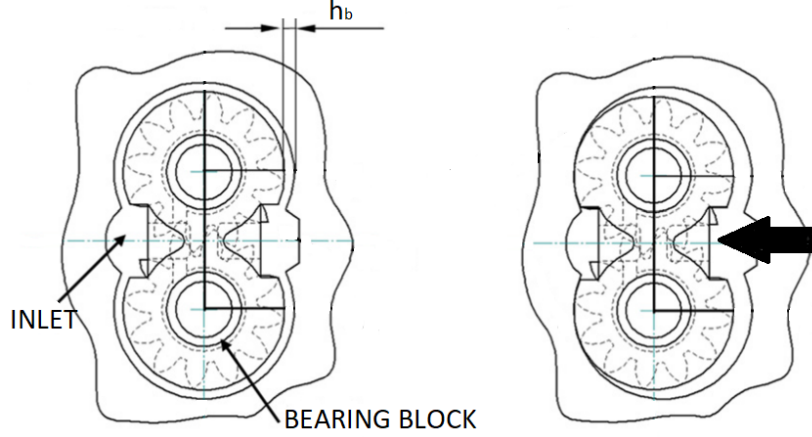


Figura 2.5: Spostamento dei *bearing blocks* verso l'aspirazione. (Immagine tratta da [17]).

più immediata è ipotizzare che, sotto l'azione della risultante di pressione, essi si spostino in verticale verso l'aspirazione, appoggiandosi al profilo interno del casing, come in Figura 2.5. Il vettore eccentricità del centro della ruota in XY è infine dato dalla risultante dello spostamento dei *bearing blocks* verso l'aspirazione, \vec{h}_{block} , e dello spostamento del centro della ruota a seguito del carico sul cuscinetto nel sistema di riferimento del cuscinetto, \vec{e}_{bear} :

$$\vec{e} = \vec{e}_{bear} + \vec{h}_{block} \quad (2.9)$$

2.2.2 Sistema ODE e metodo di risoluzione

Mettendo assieme i trafiletti all'interno dell'equazione di governo che descrive l'*i-esimo* volume sigillato si ottiene:

$$\frac{dp}{d\vartheta}|_i = \frac{\beta}{V_{vane}} \left(\frac{Q_{h,i+1} - Q_{h,i} + 2(Q_{f,i+1} - Q_{f,i+1}) - 2Q_{d,i}}{\omega} - \frac{dV}{d\vartheta}|_i \right) \quad (2.10)$$

In cui i trafiletti sono sommati e sottratti coerentemente alla convenzione dei segni adottata per i volumi di controllo. I trafiletti laterali ed al drenaggio sono moltiplicati per 2, dato che avvengono simmetricamente da entrambe le facce delle ruote.

Il sistema ODE viene scritto per gli N volumi sigillati esistenti:

$$\begin{cases} \left. \frac{dp}{d\vartheta} \right|_1 &= f(p_a, p_1(\vartheta), p_2(\vartheta), h_1(\vartheta), h_2(\vartheta)) \\ \dots\dots\dots \\ \left. \frac{dp}{d\vartheta} \right|_i &= f(p_{i-1}(\vartheta), p_i(\vartheta), p_{i+1}(\vartheta), h_i(\vartheta), h_{i+1}(\vartheta)) \\ \dots\dots\dots \\ \left. \frac{dp}{d\vartheta} \right|_N &= f(p_{N-1}(\vartheta), p_N(\vartheta), p_m, h_N(\vartheta), h_{N+1}(\vartheta)) \end{cases} \quad (2.11)$$

Il sistema va integrato a tratti, aggiornandolo in corrispondenza delle posizioni angolari in cui nasce/muore un volume sigillato. A regime, al termine di un passo angolare completo la storia della pressione si ripete identica.

Alla posizione iniziale d'integrazione non è noto a priori il set di condizioni iniziali sulla pressione: è necessario partire con un set di prima iterazione, integrando e coprendo alcuni passi angolari successivi fino a convergere sull'evoluzione della pressione a regime. Schematicamente il procedimento è il seguente (si fa riferimento ad un caso di studio del tipo $N \rightarrow N+1 \rightarrow N$, ma le considerazioni sono immediatamente adattabili al caso $N \rightarrow N-1 \rightarrow N$):

1. $\theta_0 = 0$: vettore di condizioni iniziali ($N \times 1$) inizializzato alla pressione di aspirazione p_a ;
2. $\theta_0 \rightarrow \theta_1$: integrazione fino al termine dell'intervallo;

$$\bar{p}_{\theta_1} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \dots \\ p_N \end{pmatrix}_{\theta_1} \quad (2.12)$$

3. θ_1 : stop all'integrazione; nasce un nuovo volume sigillato, vettore di condizioni iniziali ($N+1 \times 1$):

$$\bar{p}_{\theta_1,0} = \begin{pmatrix} p_a \\ \bar{p}_{\theta_1,end} \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

4. $\theta_1 \rightarrow \theta_2$: integrazione fino al termine dell'intervallo;

$$\bar{p}_{\theta_2} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \dots \\ p_{N+1} \end{pmatrix}_{\theta_2} \quad (2.14)$$

5. θ_2 : stop all'integrazione; l'ultimo volume sigillato si apre alla mandata, vettore di condizioni iniziali ($N \times 1$):

$$\bar{p}_{\theta_2,0} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \dots \\ p_N \end{pmatrix}_{\theta_2} \quad (2.15)$$

6. $\theta_2 \rightarrow \theta_3 = \frac{2\pi}{Z}$: integrazione fino al termine dell'intervallo;

$$\bar{p}_{\theta_3} = \left(\begin{array}{c} p_1 \\ \dots \\ p_N \end{array} \right)_{\theta_3} \quad (2.16)$$

7. $\theta_0 = 0 + \frac{2\pi}{Z}$: i punti precedenti vengono ripetuti per un nuovo passo angolare, utilizzando come nuovo vettore di condizioni iniziali i risultati finali del passo appena terminato; vettore di condizioni iniziali $(N \times 1)$:

$$\bar{p}_{\theta_0} = \bar{p}_{\theta_3} \quad (2.17)$$

Nel giro di poche ripetizioni le curve della pressione nei volumi sigillati convergono alla condizione di regime.

Un esempio è riportato nel grafico di Figura 2.6, per una ruota a 10 denti e passo angolare 36° , le cui specifiche sono riportate in [18], e che sarà ripresa nel Capitolo 3. Ai fini della comprensione dell'esempio, esistono 6 volumi sigillati alla posizione iniziale, per poi passare a 5 ed infine di nuovo 6. Le posizioni angolari a cui avvengono le discontinuità sono circa 7° e 35° rispettivamente. La procedura è ripetuta per 7 volte ($0^\circ \div 252^\circ$). Si possono interpretare le curve in due modi equivalenti:

- intercettando le diverse curve ad una data posizione angolare dal basso verso l'alto si hanno i valori di pressione di tutti i volumi sigillati, dal primo in tenuta fino all'ultimo, rispettivamente;
- seguendo una stessa curva lungo la posizione angolare si ha la storia della pressione di un singolo volume isolato nel suo viaggio dall'aspirazione alla mandata.

Si osserva che, per come è stato formulato il modello, quando un volume si apre nell'ambiente di mandata il fluido in esso contenuto si porta subito a p_m . Un livello di dettaglio maggiore si avrebbe con un approccio *Single Chamber* che continui a tenere traccia dell'identità del vano anche dopo l'apertura in mandata.

2.3 Volume intrappolato

Il volume intrappolato e la sua derivata, V_{trap} , $\frac{dV}{d\theta}|_{trap}$, vengono valutati numericamente, a intervalli di campionamento regolari, in accordo al Capitolo 1.5.

I trafiletti laminari sono come di seguito:

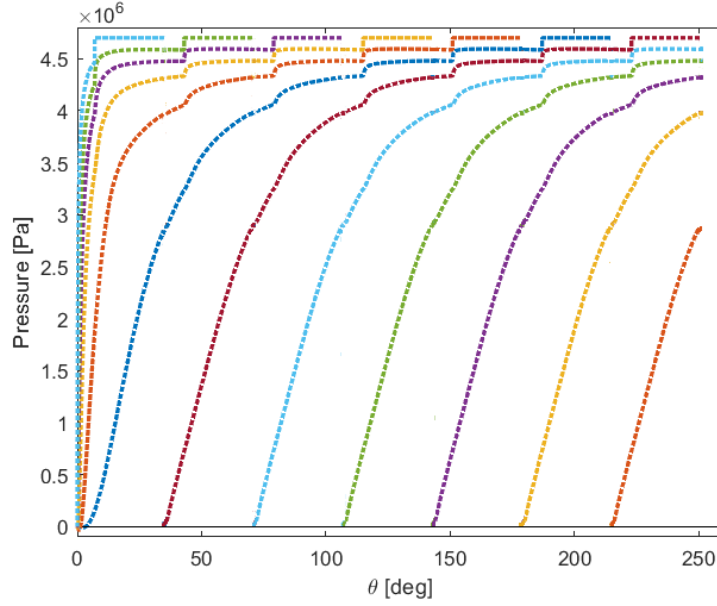


Figura 2.6: Esempio di output d'integrazione nei volumi sigillati ($p_m = 47 \text{ bar}$, $\omega = 1000 \text{ rpm}$).

- Lato del dente (Q_f). Il meato laterale ha le stesse caratteristiche dei volumi sigillati; all'interfaccia fra il volume intrappolato e l'aspirazione il trafilamento vale:

$$Q_{f,out} = \frac{(p_{trap} - p_a) h_f^3 b_f}{12\mu l_f} + \frac{b_f r_m \omega h_f}{2} \quad (2.18)$$

All'interfaccia fra il volume intrappolato e la mandata:

$$Q_{f,in} = \frac{(p_m - p_{trap}) h_f^3 b_f}{12\mu l_f} + \frac{b_f r_m \omega h_f}{2} \quad (2.19)$$

- Drenaggio ($Q_{d,i}$). Il drenaggio viene modellato analogamente ai volumi sigillati; da cui:

$$Q_d = \frac{(p_{trap} - p_D) h_f^3 b_d}{12\mu l_d} \quad (2.20)$$

La comunicazione fra il volume intrappolato ed i *relief grooves* di lato aspirazione e mandata è considerata turbolenta. Si adotta quindi la relazione valida per moti turbolenti specializzandola per ciascuno dei due.

Per lo scarico di aspirazione:

$$Q_{suc} = 0.65 A_{suc}(\vartheta) \sqrt{\frac{2|p_{trap} - p_a|}{\rho}} \text{sign}(p_{trap} - p_a) \quad (2.21)$$

Per lo scarico di mandata:

$$Q_{del} = 0.65 A_{del}(\vartheta) \sqrt{\frac{2|p_m - p_{trap}|}{\rho}} \text{sign}(p_m - p_{trap}) \quad (2.22)$$

Questi flussi chiaramente esistono quando le aree di comunicazione non sono nulle. Una parte importante del processo di design della pompa risiede proprio nella definizione della aree dei *grooves*, tali da garantire la migliore evoluzione di pressione possibile; ad ogni modo non è nello scopo del presente lavoro discutere nè la loro forma nè la collocazione sui piatti di bilanciamento.

La densità del fluido può essere supposta costante senza influenzare in modo significativo i risultati, dato che il modulo di comprimibilità è generalmente molto elevato. Volendo introdurre un ulteriore grado di dettaglio si ricorre alla seguente formulazione ([6]). Dalla definizione del modulo di comprimibilità β :

$$\beta = \rho \frac{\partial p}{\partial \rho} \quad (2.23)$$

Integrando la relazione, nell'ipotesi di $\beta = \text{cost}$, si ottiene l'andamento della pressione in funzione della densità, note le proprietà del fluido (p_{cav} , ρ_{cav}) in condizioni di incipiente cavitazione, e per condizioni al di sopra del limite di cavitazione. Le condizioni al di sotto del limite di cavitazione non sono di semplice modellizzazione, perciò si può porre quanto segue:

$$p(\rho) = \begin{cases} p_{cav}, & \rho < \rho_{cav} \\ p_{cav} + \beta \ln\left(\frac{\rho}{\rho_{cav}}\right), & \rho \geq \rho_{cav} \end{cases} \quad (2.24)$$

La funzione è continua a cavallo di (p_{cav} , ρ_{cav}). Esplicitando poi la densità in funzione della pressione, ossia la variabile di stato del volume di controllo, si ottiene:

$$\rho(p) = \rho_{cav} \exp\left(\frac{p - p_{cav}}{\beta}\right) \quad (2.25)$$

Si può infine specializzare il valore della densità da inserire nelle equazioni 2.21 e 2.22, ponendo che sia calcolata con la pressione dell'ambiente dal quale il flusso esce:

$$\rho = \begin{cases} \rho(p_{a,m}), & p_{trap} < p_{a,m} \\ \rho(p_{trap}), & p_{trap} > p_{a,m} \end{cases} \quad (2.26)$$

In questo modo i flussi turbolenti che riempiono il volume intrappolato sono calcolati alla densità degli ambienti di aspirazione/mandata e viceversa.

Tale modellizzazione, per quanto possa essere più fedele della semplificazione a densità costante, rimane a modulo di comprimibilità costante: nella realtà esso

è fortemente influenzato dall'esistenza di una miscela multifase in cui coesistono fluido, aria e vapore rilasciato a causa della cavitazione. In questo caso ci si aspetta una forte riduzione di β (la componente gassosa rende più facile la compressione della miscela), e allora la descrizione attuale non è fedele, specialmente a cavitazione incipiente (ciò tende a verificarsi quando il volume intrappolato si dilata negli istanti precedenti alla sua apertura nell'ambiente di aspirazione).

Alternativamente, piuttosto che considerare che la pressione non scenda al di sotto del valore limite della cavitazione, in accordo con l'Eq. 2.24, si può ammettere un ulteriore decremento: in tal caso, essendo tutte le pressioni relative ed in riferimento alla pressione ambiente, e ponendo la pressione di cavitazione pari proprio alla pressione ambiente (da cui $p_{cav} = 0 \text{ bar}$), p_{trap} può assumere anche valori negativi. Si deve prestare attenzione al fatto che tali valori potrebbero corrispondere a pressioni assolute negative, che non hanno senso fisico. Da qui la necessità, in futuro, di migliorare il modello descrivendo meglio il fenomeno di cavitazione del fluido.

Mettendo assieme i trafilamenti all'interno dell'equazione di governo che descrive il volume intrappolato si ottiene:

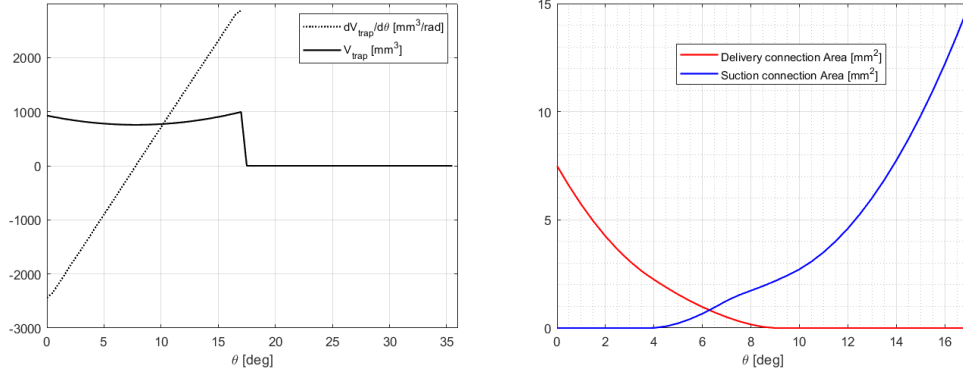
$$\frac{dp}{d\vartheta}|_{trap} = \frac{\beta}{V_{trap}(\vartheta)} \left(\frac{2Q_{del} - 2Q_{suc} + 2(Q_{f,in} - Q_{f,out}) - 4Q_d}{\omega} - \frac{dV}{d\vartheta}|_{trap} \right) \quad (2.27)$$

In cui i trafilamenti sono sommati e sottratti coerentemente alla convenzione dei segni adottata per i volumi di controllo. I trafilamenti laterali sono moltiplicati per 2, siccome avvengono simmetricamente da entrambe le facce delle ruote. I trafilamenti al drenaggio sono moltiplicati per 4, dato che avvengono da entrambe le facce delle ruote e dal lato di entrambe le ruote. I flussi ai *relief grooves* avvengono anch'essi su entrambe le facce della ruote (i piatti di bilanciamento sono identici, montati sulle fiancate opposte delle ruote).

L'ODE va integrata sulla frazione del passo angolare su cui esiste il volume intrappolato e sono definiti V_{trap} e $\frac{dV}{d\vartheta}|_{trap}$. La condizione iniziale da fornire sulla pressione è immediata: poichè il volume si chiude dal lato della mandata, la pressione alla posizione iniziale d'integrazione è p_m .

Un esempio di risultato di calcolo è riportato in Figura 2.8, in cui si osservano bene il primo picco di pressione, particolarmente improvviso alle prime posizioni angolari, ed il successivo crollo: qui si ammette che la pressione possa scendere al di sotto del valore di cavitazione, perciò una porzione di curva va a valori negativi. Si preferisce al momento ammettere i valori negativi, per evidenziare la possibilità che il volume stia cavitando in una porzione della sua esistenza. Se si adotta il modello di fluido con la pressione (relativa) che non scende a valori negativi, la curva ha tutti i valori negativi posti a zero, mentre per le posizioni angolari precedenti risulta identico. Ad ogni modo, l'integrazione termina a circa 17° (in accordo alla Figura 2.7), nel momento in cui il volume intrappolato si apre

all'aspirazione e cessa di esistere: da questo punto in poi si pone che la pressione raggiunga istantaneamente e poi mantenga il valore di aspirazione p_a .



(a) Volume intrappolato e sua derivata (b) Area dei due *relief grooves* per il caso di studio d'esempio.

Figura 2.7: Esempi di parametri geometrici del volume intrappolato.

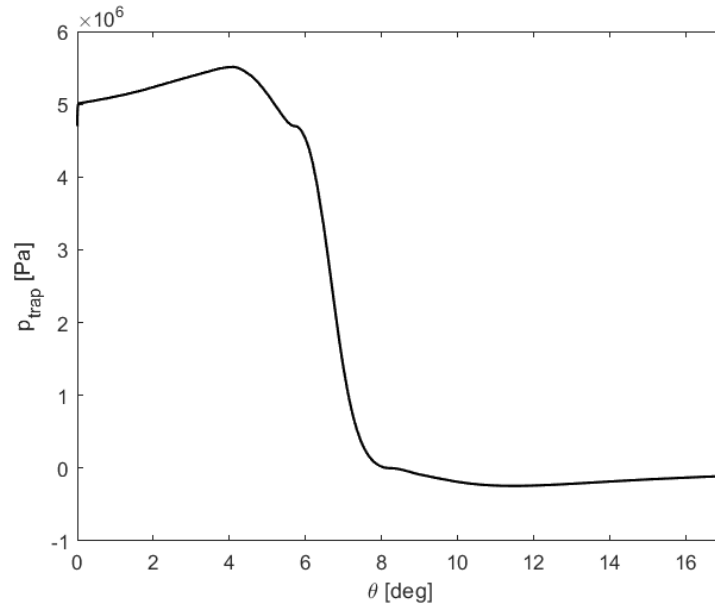


Figura 2.8: Esempio di output d'integrazione nel volume intrappolato ($p_m = 47 \text{ bar}$, $\omega = 1000 \text{ rpm}$).

2.4 Profilo di pressione completo

Una volta note le curve di pressione nei volumi sigillati e nel volume intrappolato, si può stilare il profilo di pressione completo. Esso segue l'evoluzione della pressione all'interno di uno stesso vano della ruota lungo una rotazione di 360° .

In Figura 2.9 è riportato un esempio di profilo completo: esso viene campionato ad intervalli angolari costanti, pari all'intervallo di campionamento delle proprietà geometriche della pompa (qui a step di 0.5°), per facilitare le valutazioni descritte nelle sezioni successive. La posizione angolare iniziale ($\vartheta = 0^\circ$) (1) è posta in corrispondenza dell'inizio del profilo interno del casing, dal lato aspirazione, dove è appena nato il volume sigillato, che effettua il suo viaggio (2) fino all'apertura in mandata, ossia in corrispondenza della fine del profilo interno del casing (3). Il tratto di curva corrispondente è l'evoluzione della pressione nei volumi sigillati di Figura 2.6. Da (3) in poi il fluido si trova alla pressione p_m , fino a che non rimane intrappolato nella zona d'ingranamento, alla posizione angolare a cui le ruote cominciano ad avere un secondo contatto dal lato della mandata (4). Per il breve intervallo angolare (5) in cui esistono due punti di contatto il tratto di curva corrispondente è l'evoluzione della pressione nel volume intrappolato di Figura 2.8. Dall'apertura in aspirazione (6) in poi il fluido si trova alla pressione p_a . Infine, a 360° il vano è nuovamente alla posizione iniziale, appena sigillato e in procinto di ripetere il viaggio verso la mandata.

2.5 Equilibrio statico delle ruote

Sulla ruota condotta (2) agiscono forza, f_{p2} , e coppia di pressione, M_{p2} , forza al contatto all'ingranamento, f_{mesh} lungo la linea d'azione dell'ingranaggio, reazione vincolare dei cuscinetti, f_{b2} . Sulla ruota motrice (1) agiscono forza, f_{p1} , e coppia di pressione, M_{p1} , forza al contatto all'ingranamento pari alla ruota 2 ma in verso opposto, reazione vincolare dei cuscinetti, f_{b1} , e coppia esterna (da una presa di moto), M_m . La linea d'azione (DLA) è inclinata rispetto alla verticale dell'angolo di pressione di lavoro, α_w .

Si scrive l'equilibrio dinamico della ruota 1 e 2 nel sistema di riferimento di Figura 2.10, X_1Y_1 e X_2Y_2 :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 &= f_{bear,x1} + f_{p,x1} - f_{mesh} \sin \alpha_w \\ m_1 \ddot{y}_1 &= f_{bear,y1} + f_{p,y1} + f_{mesh} \cos \alpha_w \\ J_1 \ddot{\vartheta}_1 &= M_m - M_{p1} - f_{mesh} r_1 \cos \alpha_w \\ m_2 \ddot{x}_2 &= f_{bear,x2} + f_{p,x2} + f_{mesh} \sin \alpha_w \\ m_2 \ddot{y}_2 &= f_{bear,y2} + f_{p,y2} - f_{mesh} \cos \alpha_w \\ J_2 \ddot{\vartheta}_2 &= -M_{p2} + f_{mesh} r_2 \cos \alpha_w \end{cases} \quad (2.28)$$

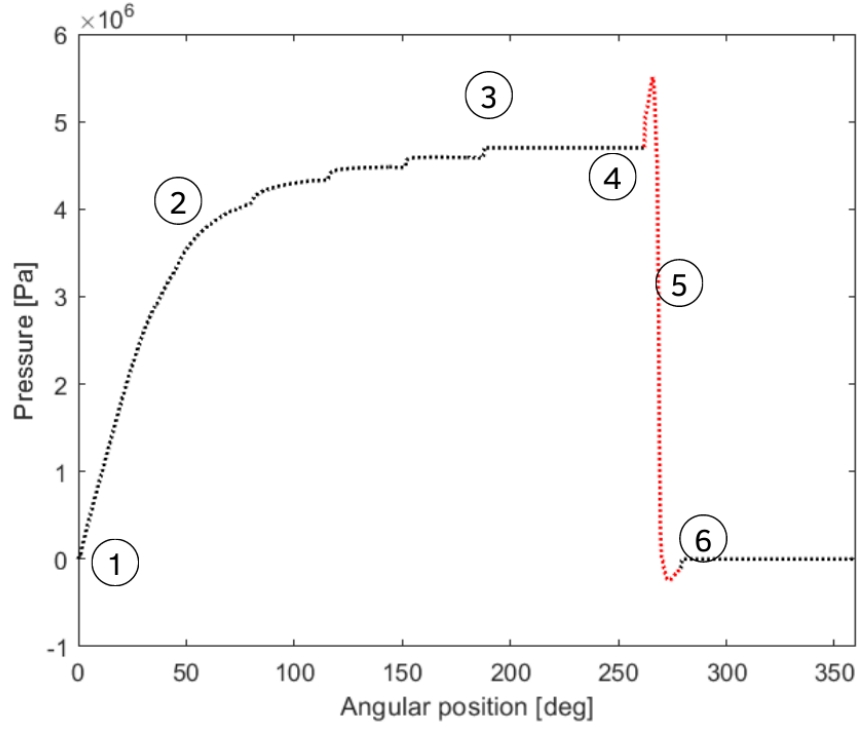


Figura 2.9: Esempio di profilo di pressione completo ($p_m = 47 \text{ bar}$, $\omega = 1000 \text{ rpm}$).

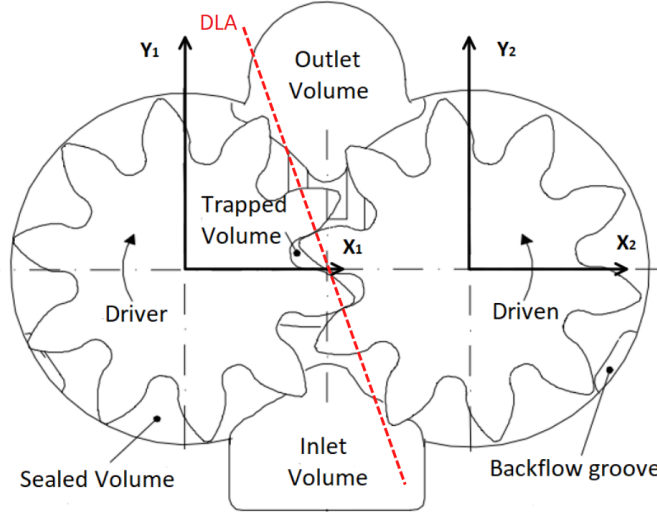


Figura 2.10: Sistema di riferimento delle ruote dentate, motrice (1) e condotta (2), con la linea diretta d'azione (DLA), inclinata di α_w rispetto alla verticale.

In linea di massima, l'integrazione delle equazioni sui gradi di libertà traslazionali consente di studiare la traiettoria dei centri delle ruote nel corso dell'ingranamento ed è tuttavia molto onerosa: le componenti della forza e le coppie sono figlie del campo di pressione, che a sua volta è strettamente legato alla traiettoria dei centri delle ruote. Tutti i termini che compaiono nelle equazioni della dinamica vanno calcolati istantaneamente, per ogni posizione angolare:

$$\begin{aligned}
 f_{px1,2} &= f_{px1,2}(x_{1,2}, y_{1,2}, \vartheta_{1,2}, \dot{\vartheta}_{1,2}) \\
 f_{py1,2} &= f_{py1,2}(x_{1,2}, y_{1,2}, \vartheta_{1,2}, \dot{\vartheta}_{1,2}) \\
 f_{bx1,2} &= f_{bx1,2}(x_{1,2}, y_{1,2}, \dot{x}_{1,2}, \dot{y}_{1,2}, \dot{\vartheta}_{1,2}) \\
 f_{by1,2} &= f_{by1,2}(x_{1,2}, y_{1,2}, \dot{x}_{1,2}, \dot{y}_{1,2}, \dot{\vartheta}_{1,2})
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

All'atto pratico, però, la distribuzione di pressione, l'ingranamento, e di conseguenza l'andamento delle forze e delle coppie agenti sulle ruote è periodico ad ogni passo angolare, al netto di effetti di ordine trascurabile; di conseguenza il moto delle ruote è considerabile in ottima approssimazione periodico, e la traiettoria dei centri risulta essere un'orbita attorno ad una certa posizione eccentrica.

Il campo di pressione all'interno della pompa è dettato dallo spostamento dei centri delle ruote, e a rigore è funzione della loro posizione istantanea. Tuttavia, il raggio delle orbite è piccolo rispetto alla posizione eccentrica, perlomeno in condizioni di funzionamento normali. Ne consegue che non si commette un errore significativo a confondere la posizione istantanea lungo la traiettoria con il centro dell'orbita.

Un modo per ridurre il tempo computazionale impiegato nel problema allora è ricondursi alla scrittura dell'equilibrio 'statico' delle ruote, evitando di risolvere il set completo di equazioni della dinamica. In condizioni statiche $\ddot{x}_{1,2} = 0$, $\ddot{y}_{1,2} = 0$, $\dot{x}_{1,2} = 0$, $\dot{y}_{1,2} = 0$, $\ddot{\vartheta}_{1,2} = 0$, $\dot{\vartheta}_{1,2} = \omega$, da cui:

$$\begin{aligned}
 f_{px1,2} &= f_{px1,2}(x_{1,2}, y_{1,2}, \vartheta_{1,2}, \omega) \\
 f_{py1,2} &= f_{py1,2}(x_{1,2}, y_{1,2}, \vartheta_{1,2}, \omega) \\
 f_{bx1,2} &= f_{bx1,2}(x_{1,2}, y_{1,2}, \omega) \\
 f_{by1,2} &= f_{by1,2}(x_{1,2}, y_{1,2}, \omega)
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

Il sistema delle equazioni di equilibrio statico viene scritto utilizzando i valori delle forze e coppie di pressione mediati sull'ingranamento:

$$\begin{cases}
 0 &= f_{bear,x1} + f_{p,x1} - f_{mesh} \sin \alpha_w \\
 0 &= f_{bear,y1} + f_{p,y1} + f_{mesh} \cos \alpha_w \\
 0 &= M_m - M_{p1} - f_{mesh} r_1 \cos \alpha_w \\
 0 &= f_{bear,x2} + f_{p,x2} + f_{mesh} \sin \alpha_w \\
 0 &= f_{bear,x2} + f_{p,x2} - f_{mesh} \cos \alpha_w \\
 0 &= -M_{p2} + f_{mesh} r_2 \cos \alpha_w
 \end{cases} \tag{2.31}$$

Il metodo proposto consiste nella valutazione della posizione statica di equilibrio del centro delle ruote (*'Static Equilibrium Position'*, SEP). L'obiettivo è identificare la posizione eccentrica media tale che la reazione vincolare offerta dalla coppia di cuscinetti equilibra la forza di pressione e la forza al contatto sulla ruota.

Dato che la forza risultante dipende a sua volta dal campo di pressione e dalla posizione eccentrica delle ruote, si deve instaurare un calcolo iterativo. Essendo le due ruote supportate distintamente da due coppie di cuscinetti, la procedura di calcolo SEP andrebbe applicata contemporaneamente su entrambe le ruote, ottenendo la posizione statica della ruota 1 e 2 quando entrambe siano giunte a concomitante convergenza. Si fanno però le seguenti considerazioni semplificative:

- l'evoluzione della pressione nei vani della ruota 2 è del tutto simile alla ruota 1 ed in buona approssimazione simmetrica, considerando al più lo sfasamento angolare che si crea fra le due ruote ingrananti;
- la forza risultante media sulle due ruote è considerabile simmetrica;
- lo spostamento dei centri delle due ruote è, in buona approssimazione, anch'esso simmetrico, essendo simmetrica la forza risultante;
- si può allora studiare il campo di pressione e lo spostamento statico della sola ruota 1 e ipotizzare che la situazione alla ruota 2 sia speculare.

I punti di cui sopra portano a ritenere sufficiente occuparsi della sola ruota motrice, e studiare il seguente sistema ridotto:

$$\begin{cases} f_{bear,x1} &= -(f_{p,x1} - f_{mesh} \sin \alpha_w) \\ f_{bear,y1} &= -(f_{p,y1} + f_{mesh} \cos \alpha_w) \\ M_M &= M_{p1} + f_{mesh} r_1 \cos \alpha_w \\ M_{p2} &= f_{mesh} r_2 \cos \alpha_w \end{cases} \quad (2.32)$$

Su di esso si basa la procedura per il raggiungimento della SEP della ruota motrice. Il calcolo iterativo è impostato come segue:

1. Si parte da una ipotesi iniziale (più o meno ragionevole) sulla posizione di equilibrio statico delle ruote, (X_0, Y_0) ;
2. In funzione di tale posizione si ricava l'evoluzione di pressione nei volumi sigillati e nel volume intrappolato, col modello a parametri concentrati discusso in precedenza;
3. Nota l'evoluzione del campo di pressione nel corso dell'ingranamento, si ricavano:

- risultante di forza di pressione sulla ruota 1, $f_{p,x1}(\vartheta)$, $f_{p,y1}(\vartheta)$,
 - coppia di pressione sulla ruota 2, $M_{p2}(\vartheta)$;
4. Si calcola il valore medio di $f_{p,x1}(\vartheta)$, $f_{p,y1}(\vartheta)$, $M_{p2}(\vartheta)$ sul passo angolare d'ingranamento;
 5. Dall'equilibrio alla rotazione della ruota 2 si ricava la forza al contatto media, f_{mesh} ;
 6. Note la forza di pressione media e la forza al contatto media si ricava immediatamente la risultante media sulla ruota, che si scarica sulla coppia di cuscinetti; su ciascuno si ripartisce la metà del carico;
 7. Il modello di cuscinetto idrodinamico restituisce la posizione eccentrica dell'albero su cui è calettato la ruota tale da equilibrare staticamente il carico esterno, (X_1, Y_1) ;
 8. La nuova posizione eccentrica (X_1, Y_1) è utilizzata per ripetere il procedimento punti 1-7;
 9. Il calcolo iterativo è interrotto se si verifica la condizione di avvenuta convergenza (imposta dall'utente).

Uno schema del flusso di calcolo è riportato in Figura 2.11.

La verifica di convergenza viene fatta sulla distanza relativa fra le posizioni eccentriche di iterate successive: quando risulta inferiore ad un valore soglia reputato soddisfacente, si considera raggiunta la SEP della ruota. Esprimendo le posizioni eccentriche in coordinate polari, rispetto al sistema di riferimento X_1Y_1 , con e il modulo e Γ la direzione, la condizione di convergenza è:

$$\begin{aligned} \frac{abs(e_i - e_{i-1})}{abs(e_{i-1})} &< toll_e \\ \frac{abs(\Gamma_i - \Gamma_{i-1})}{abs(\Gamma_{i-1})} &< toll_\Gamma \end{aligned} \tag{2.33}$$

Le tolleranze relative vanno inserite di modo da soddisfare i requisiti sull'accuratezza della posizione eccentrica. La convergenza del metodo al variare della bontà della posizione eccentrica di tentativo iniziale verrà studiata meglio nel Capitolo 3.3 assieme alle tolleranze per coniugare accuratezza e relativi tempi di calcolo. Nota la SEP, l'evoluzione della pressione ricavata con tale posizione eccentrica ben approssima ciò che accade quando la macchina è a regime.

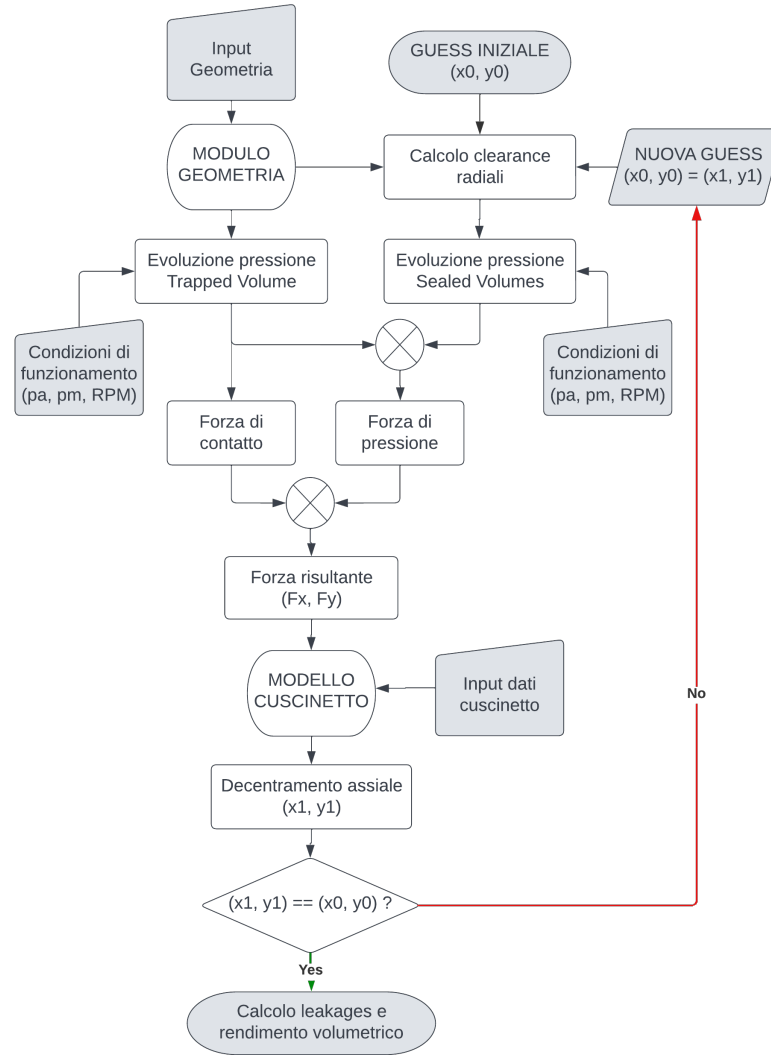


Figura 2.11: *Flowchart* per la determinazione della SEP applicato alla ruota motrice.

2.6 Forze e coppie di pressione

Attorno alla superficie esterna della ruota insiste la pressione dei volumi di controllo: ambiente di aspirazione (p_a), di mandata (p_m), volume intrappolato (p_{trap}) e volumi sigillati, ciascuno insistente sul proprio intervallo angolare nel corso dell'ingranamento.

Dato un generico intervallo angolare compreso fra ϑ_R e ϑ_P , su cui è esercitata una certa pressione, p , integrandola sulla superficie cilindrica al raggio di testa della

ruota, r_{ext} , con spessore di fascia w , si ottiene:

$$f_{PR} = 2p \cdot \sin\left(\frac{\vartheta_P - \vartheta_R}{2}\right) w r_{ext} \quad (2.34)$$

La forza così calcolata è radiale, con verso entrante nella ruota. Le componenti in XY sono immediatamente ricavabili come:

$$\begin{aligned} f_{PR,X} &= -f_{PR} \cos(\phi) \\ f_{PR,Y} &= -f_{PR} \sin(\phi) \end{aligned} \quad (2.35)$$

In cui ϕ è la coordinata angolare media dell'arco, $\phi = \frac{\vartheta_P + \vartheta_R}{2}$.

La forza di pressione totale agente sulla ruota è la sommatoria delle forze di pressione k -esime associate a tutti i volumi di controllo, f_{pk} , all'apertura angolare ϕ_k , attorno alla ruota:

$$\begin{cases} f_{p,x1} &= -\sum_{k=1}^M f_{pk} \cos(\phi_{1k}) \\ f_{p,y1} &= -\sum_{k=1}^M f_{pk} \sin(\phi_{1k}) \end{cases} \quad (2.36)$$

Il computo viene eseguito per ogni posizione angolare di campionamento, ad intervalli regolari, pari all'intervallo scelto per il campionamento delle proprietà geometriche della ruota. La media delle componenti in X e Y sul passo angolare completo viene poi utilizzata nel calcolo della forza risultante media.

Tutti i vani fra i denti che non partecipano all'ingranamento sono 'bilanciati', nel senso che la pressione insistente sui due lati è la medesima, e non produce alcuna forza in direzione tangenziale. In prossimità dei punti di contatto, invece, siano essi uno o due, agiscono ambienti a pressione differente: si genera quindi una componente tangenziale che si traduce in un contributo di momento sulla ruota. Si distinguono due casi:

- esiste un solo punto di contatto P , che separa l'ambiente di aspirazione da quello di mandata. Siano r_{P1} e r_{P2} i raggi al contatto riferiti rispettivamente alla ruota 1 e 2, la coppia di pressione si calcola come:

$$M_{p1}(\vartheta) = (p_m - p_a) w \left(\frac{r_{ext}^2 - r_{P1}^2(\vartheta)}{2} \right) \quad (2.37)$$

$$M_{p2}(\vartheta) = (p_m - p_a) w \left(\frac{r_{ext}^2 - r_{P2}^2(\vartheta)}{2} \right) \quad (2.38)$$

- esistono due punti di contatto: P separa il volume intrappolato dal volume di mandata, Q separa l'ambiente di aspirazione del volume intrappolato. Siano r_{P1} , r_{P2} , r_{Q1} , r_{Q2} , i raggi al contatto riferiti rispettivamente alla ruota 1 e 2,

la coppia di pressione si calcola come somma dei due contributi:

$$M_{p2}(\vartheta) = (p_m - p_{trap}(\vartheta))w \left(\frac{r_{ext}^2 - r_{P1}^2(\vartheta)}{2} \right) + (p_{trap}(\vartheta) - p_a)w \left(\frac{r_{ext}^2 - r_{Q1}^2(\vartheta)}{2} \right) \quad (2.39)$$

$$M_{p2}(\vartheta) = (p_m - p_{trap}(\vartheta))w \left(\frac{r_{ext}^2 - r_{P2}^2(\vartheta)}{2} \right) + (p_{trap}(\vartheta) - p_a)w \left(\frac{r_{ext}^2 - r_{Q2}^2(\vartheta)}{2} \right) \quad (2.40)$$

I versi di M_{p1} , M_{p2} sono concordi alle equazioni di equilibrio esposte in precedenza (si veda la Figura 2.12). Calcolato il valore di M_{p2} mediato sul passo angolare completo, attraverso la quarta equazione di equilibrio del sistema di Eq. 2.32 si ottiene la forza media scambiata al contatto, agente lungo la retta d'azione e con braccio pari al raggio di base della ruota, $r_b = r_2 \cos \alpha_w$:

$$f_{mesh} = \frac{M_{p2}}{r_2 \cos \alpha_w} \quad (2.41)$$

Ricavata poi la forza risultante sulla ruota $\vec{f}_p + \vec{f}_{mesh}$, il carico su ciascuno dei due cuscinetti è pari alla metà.

Un esempio di risultato di calcolo è riportato in Figura 2.13, dove sono riportati gli andamenti della forza di pressione per la ruota motrice, espressa in componenti XY , e gli andamenti della coppia di pressione sulla condotta. Al termine del passo angolare, in questo caso 36° , le curve si raccordano al valore assunto all'inizio dell'ingranamento, coerentemente al loro carattere periodico.

Un dettaglio sul calcolo di f_{mesh} : in letteratura ([5]) è proposta una formulazione del valore medio della forza che le ruote si scambiano al contatto durante l'ingranamento basata sul bilancio di potenza del sistema pompa. In particolare, si pone che la potenza idraulica media fornita dalla pompa alla portata di fluido, $P_{hyd} = Q_{out} \Delta p = C_{il} \cdot \omega \cdot \Delta p$, sia pari alla potenza meccanica assorbita media, $M\omega = f_{mesh} r_p \cos \alpha_w \omega$. Da cui si stima:

$$f_{mesh} = \Delta p w \frac{r_{ext}^2 - r_p^2}{2r_p \cos \alpha_w} \quad (2.42)$$

Con w lo spessore di fascia delle ruote, r_{ext} il raggio di testa, r_p il raggio primitivo. Ad ogni modo, ai fini del presente lavoro, f_{mesh} viene ricavata col modello attuale.

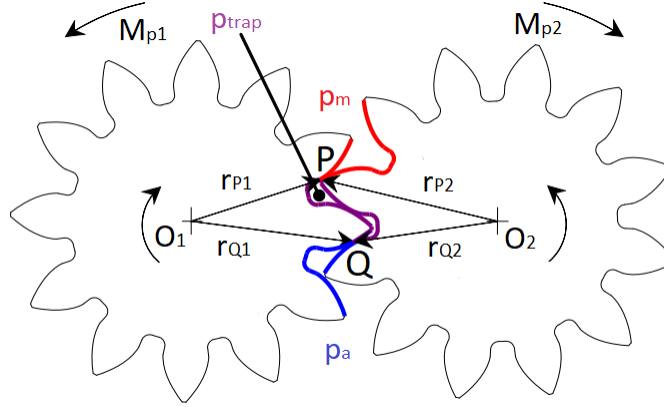
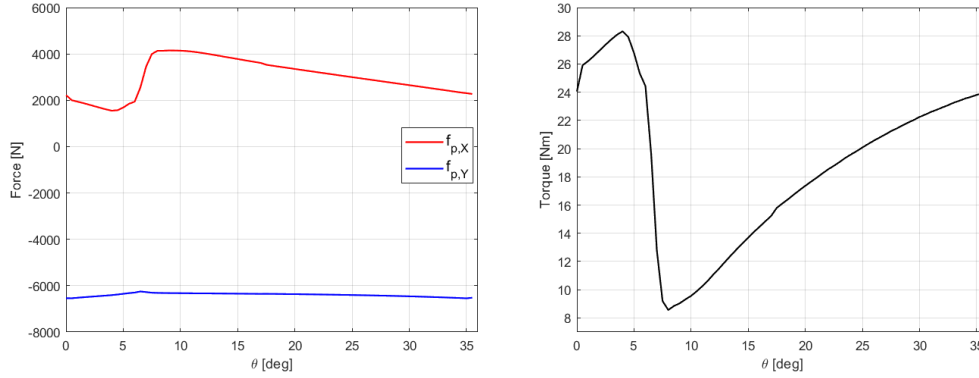


Figura 2.12: Pressioni non bilanciate ai punti di contatto. (Immagine tratta da [15]).



(a) Componenti della forza di pressione (b) Coppia di pressione (motrice, condotta).

Figura 2.13: Esempio di output di forze di pressione e coppie di pressione ($p_m = 47 \text{ bar}$, $\omega = 1000 \text{ rpm}$).

2.7 Trafilamenti e rendimento volumetrico

Per il calcolo del rendimento volumetrico della pompa si fa riferimento al metodo illustrato in [5] e [19].

Sia data l'equazione di governo per il volume di controllo della mandata:

$$\frac{dp}{d\vartheta}|_m = \frac{\beta}{V_m(\vartheta)} \left(\frac{-Q_{out} - Q_{losses}}{\omega} - \frac{dV}{d\vartheta}|_m \right) \quad (2.43)$$

Nel caso in cui si ipotizzi pressione di mandata costante l'Eq. 2.43 si riduce a:

$$Q_{out}(\vartheta) = -\frac{dV}{d\vartheta}|_m \cdot \omega - Q_{losses}(\vartheta) \quad (2.44)$$

Il rendimento volumetrico della pompa è definito come il rapporto fra la portata in mandata effettiva e quella teorica:

$$\eta_{vol} = \frac{Q_{out}}{Q_{th}} = \frac{Q_{out}}{Cil \cdot \omega} \quad (2.45)$$

In cui Cil è la cilindrata della macchina, solitamente espressa in $[\frac{cm^3}{rev}]$, e Q_{out} la portata in mandata media.

Utilizzando la relazione 2.44 all'interno del rendimento volumetrico si ottiene infine:

$$\eta_{vol} = 1 - \frac{Q_{losses}}{Cil \cdot \omega} \quad (2.46)$$

Per ricavare il rendimento volumetrico allora occorre tenere traccia di tutti i trafileamenti che si hanno al volume di mandata verso gli ambienti a pressione inferiore (volumi sigillati, drenaggio, volume intrappolato, volume d'aspirazione), secondo lo schema di Figura 2.14. In particolare:

- Testa dell'ultimo dente in tenuta.

$$Q_h = \frac{(p_m - p_N) h_{N+1}^3 w}{12\mu l_t} + \frac{w r_{ext} \omega h_{N+1}}{2} \quad (2.47)$$

Con N l'ultimo volume sigillato e $N + 1$ l'ultimo dente in presa col casing;

- Lato dell'ultimo dente in tenuta. Dato che il trafileamento avviene su entrambe le facce della ruota la portata trafileata è doppia:

$$Q_f = 2 \cdot \left(\frac{(p_m - p_N) h_f^3 b_f}{12\mu l_f} + \frac{b_f r_m \omega h_f}{2} \right) \quad (2.48)$$

- Drenaggio. Le perdite dovute al drenaggio avvengono per i k vani alla mandata, e per entrambe le facce della ruota:

$$Q_d = 2 \cdot k \cdot \left(\frac{(p_m - p_N) h_f^3 b_d}{12\mu l_d} \right) \quad (2.49)$$

- *Relief groove* di lato mandata. Al *relief groove* di mandata si instaura una portata che, a seconda della differenza di pressione, esce od entra nel volume di mandata. Per il calcolo del rendimento volumetrico si considera:

$$Q_{rlf} = \begin{cases} 2 \cdot 0.65 A_{del} \sqrt{\frac{2(p_m - p_{trap})}{\rho}}, & p_{trap} < p_m \\ 0, & p_{trap} > p_m \end{cases} \quad (2.50)$$

Il fattore moltiplicativo 2 è dovuto al fatto che la lavorazione è presente da entrambe le facce della ruota;

- Zona d'ingranamento. Una certa portata di fluido può trafilare direttamente dalla mandata all'aspirazione. Il meato rappresentativo di tale fenomeno ha le seguenti dimensioni:

- altezza pari alla *clearance* laterale, $h_{mesh} = h_f$,
- lunghezza pari allo spessore medio del profilo del dente, $l_{mesh} = l_f$,
- spessore pari alla distanza fra il raggio medio e il raggio di fondo, $r_{mesh} = r_m - r_{root}$;

$$Q_{mesh} = 2 \cdot \left(\frac{(p_m - p_a) h_{mesh}^3 b_{mesh}}{12\mu l_{mesh}} \right) \quad (2.51)$$

Il fattore moltiplicativo 2 è dovuto al fatto che il trafilamento si instaura da entrambe le facce della ruota.

In teoria, i trafilamenti verso la ruota dentata e la ruota condotta sono istantaneamente diversi; tuttavia, è ragionevole affermare che complessivamente i trafilamenti siano simmetrici: si considerano allora quelli dalla parte della ruota motrice e li si moltiplica per due per ricavare i complessivi:

$$Q_{losses}(\vartheta) = 2 \cdot (Q_h(\vartheta) + Q_f(\vartheta) + Q_d(\vartheta) + Q_{rlf}(\vartheta) + Q_{mesh}) \quad (2.52)$$

Da qui è immediato calcolare il trafilamento medio sull'ingranamento completo. Nel caso in cui sia presente una fresatura periferica che mette in comunicazione la mandata direttamente con uno dei volumi sigillati più prossimi all'aspirazione, si propone di aggiungere il trafilamento al *backend groove*, $Q_{backend}(\vartheta)$, al computo di $Q_{losses}(\vartheta)$. Esso è descritto nel Capitolo 3.1.2.

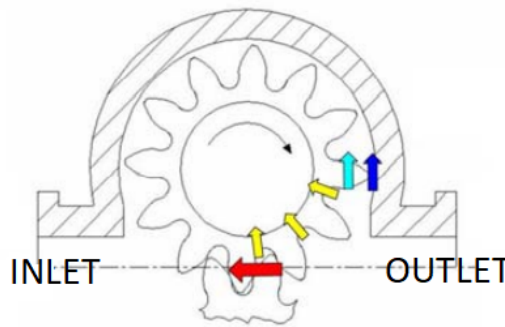


Figura 2.14: Schema dei trafilamenti concorrenti al computo delle perdite nel rendimento volumetrico. (Immagine tratta da [5]).

Capitolo 3

Validazione del modello e risultati

Il presente lavoro di tesi non è finalizzato all'analisi di una particolare geometria di pompa ad ingranaggi esterni. Piuttosto, si è voluto implementare un modello che, in futuro, funga da supporto per tali studi. Di conseguenza la priorità è stata verificare la correttezza dei passi svolti, di modo che in una successiva fase d'analisi possano essere reputati attendibili.

Per questo motivo gli output del codice sono stati messi a confronto con i risultati di studi precedenti, appartenenti allo stato dell'arte e di natura sperimentale oppure frutto di simulazioni a parametri concentrati o CFD. Partendo dagli stessi dati di input, il modello attuale può essere considerato validato a fronte dell'ottenimento di valori di output coerenti, al netto di alcune inevitabili discrepanze, dovute ad esempio alle ipotesi semplificative.

La letteratura offre un numero elevato di studi riguardo le strategie di modellizzazione delle pompe ad ingranaggi esterni e la stima delle prestazioni. Sovente però alcuni dati sensibili della geometria interna della macchina, appannaggio della casa costruttrice, non vengono apertamente divulgati nelle pubblicazioni, pur rappresentando informazioni chiave per la simulazione. In particolare, i giochi fra parti rotanti e casing, ossia le *clearance* radiali ed assiali nominali, sono di ardua reperibilità, così come l'eventuale profilo d'usura del casing, le specifiche sui cuscinetti idrodinamici che supportano le ruote dentate, o l'eccentricità assunta dalle ruote nelle varie condizioni di funzionamento.

Ciò impone di fare riferimento a casi di studio i cui dati siano riportati nel modo più completo possibile, eventualmente conducendo la validazione del modello su pompe di vecchia produzione e non più soggette a segretezza.

In quest'ottica, la validazione è stata svolta principalmente con la geometria della Casappa Magnum HDP 30.51, attualmente presente nei laboratori del Politecnico

di Torino, studiata con prove sperimentali e simulazioni CFD in [18] e [20]. Nelle sezioni 3.1 e 3.2 verrà utilizzata per verificare:

- l'ottenimento dei profili di pressione che si instaurano per via delle *clearance* radiali ed assiali, in particolare quando i rotori assumono una posizione eccentrica (fissata a priori);
- la valutazione effettiva della posizione statica di equilibrio eccentrica (SEP), introducendo un modello validato di cuscinetto idrodinamico per condurre la simulazione.

La geometria delle ruote dentate e del casing interno sono riportate nel dettaglio in [18]. Le figure che riportano gli esempi delle curve di pressione dei volumi sigillati e del volume intrappolato, dell'andamento delle proprietà geometriche del volume intrappolato e dell'andamento delle forze e delle coppie di pressione riportati nella descrizione della metodologia del Capitolo 2 fanno inoltre riferimento a questo stesso caso di studio. In Tabella 3.1 si riportano le quote principali, utilizzate all'interno del modello attuale. La pompa è a piatti bilanciati, perciò la *clearance* assiale è praticamente nulla. Sono disponibili due diversi piatti di bilanciamento:

- Piatto 'A': presenta una lavorazione aggiuntiva (*peripheral groove*) sulla faccia non a contatto con le ruote dentate che mette in comunicazione il volume di mandata con i volumi sigillati più prossimi all'aspirazione attraverso il *backend groove* (si veda la Figura 3.1);
- Piatto 'B': identico al piatto 'A', ma privo di *peripheral* e *backend groove*.

Cilindrata	51.5 $\frac{cm^3}{rev}$		
Numero di denti	10	ACDF	2.15
Passo angolare	36°	DCDF	2.2
Angolo di pressione	20°	Raggio di fondo	17.78 mm
Angolo di pressione di lavoro	25.63°	Raggio di testa	28.5 mm
Modulo	4.69 mm	Raggio di drenaggio	14.22 mm
Spessore di fascia	33 mm	Interasse	46.9 mm
Volume dei vani	2875 mm ³		
<i>Clearance</i> radiale	0.05 mm	<i>Clearance</i> assiale	-
Estensione angolare del casing	222° (115° lato mandata, 107° lato aspirazione)		
Estensione del <i>backend groove</i>	da 12° a 25° dal lato aspirazione		

Tabella 3.1: Dati della Casappa Magnum HDP 30.51.

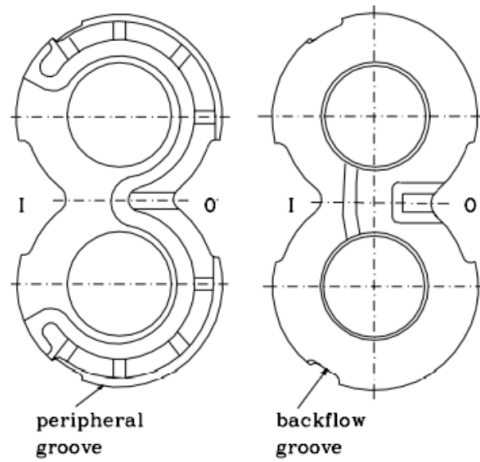


Figura 3.1: Piatto di bilanciamento di tipo 'A' della Casappa Magnum HDP 30.51.

Nel modello corrente sono stati utilizzati i parametri dello stesso olio adottato nelle analisi di [20], riportati in Tabella 3.2.

Si fa ancora un'importante osservazione sui valori negativi di pressione che com-

Modulo di comprimibilità	1.635 <i>GPa</i>
Densità	860 <i>kg/m³</i>
Viscosità dinamica	36.5 <i>cP</i>

Tabella 3.2: Parametri dell'olio a 40°.

pariranno nei grafici: come detto nel Capitolo 2.3, si ammette in questa sede che la pressione possa scendere a valori di pressione relativa negativi. Alcuni valori negativi saranno associati a pressioni assolute anch'esse negative. Ciò non ha un effettivo senso fisico, e si giustifica col fatto che si considerano le proprietà del fluido costanti anche in condizioni in cui la trattazione sarebbe critica. Si invita allora a considerare queste porzioni dei grafici come indicative del fatto che la trattazione del fluido a proprietà costanti potrebbe essere insoddisfacente.

3.1 Trafilamenti alle *clearance* radiali

La validazione dei trafilamenti alle *clearance* radiali è stata condotta considerando sia il piallo 'A' sia il piallo 'B'. In particolare:

- della pompa montante il piatto 'B' sono disponibili i profili di pressione simulati nel caso (chiaramente fittizio) di eccentricità dei rotori nulla, e nel caso eccentricità prefissata;
- della pompa montante il piatto 'A' sono disponibili i profili di pressione con un valore prefissato di eccentricità, per diverse condizioni di funzionamento.

I risultati delle simulazioni CFD e delle prove sperimentali di riferimento sono stati ottenuti considerando l'interazione della pompa in un circuito idraulico più ampio (a valle della pompa erano presenti un tratto di tubazione ed un orifizio di scarico, modellati dinamicamente ed inclusi nel modello di riferimento): in tutti i casi la pressione in mandata della pompa presenta *pressure ripple*. Tale fenomeno non è prevedibile dal modello a parametri concentrati in esame. Ad ogni modo, l'obiettivo della validazione è mettere a paragone i risultati derivanti dalle due formulazioni per appurare i limiti del modello attuale nel predire il comportamento della pompa.

3.1.1 Piatto 'B'

A tale scopo si considera anzitutto il piatto 'B', senza *peripheral groove*, nella condizione di funzionamento di riferimento $\Delta p = 47 \text{ bar}$ e 1000 rpm . Nel corso dell'ingranamento, il numero di volumi sigillati della ruota segue lo schema $6 \rightarrow 5 \rightarrow 6$.

In Figura 3.2 è riportato il confronto fra la curva di pressione prevista dalla simulazione CFD e quella prevista dal modello a parametri concentrati nel caso di rotori perfettamente centrati: la *clearance* radiale è uniforme per tutti i denti in presa con il casing, da cui deriva l'andamento 'a scalini' delle curve. Al netto di quanto già evidenziato, ossia che il modello attuale non è in grado di prevedere le oscillazioni di pressione, segue comunque bene l'andamento medio dell'innalzamento di pressione. Dalla posizione angolare iniziale, in cui nasce un nuovo volume sigillato, la pressione sale attraverso più scalini; quando il volume si apre alla mandata la pressione è posta istantaneamente al valore $p_m = 48 \text{ bar}$: da qui il salto discontinuo poco prima di 190° , innaturale nella realtà (ed infatti assente nella simulazione CFD). La modellizzazione del volume intrappolato prevede piuttosto bene il picco di pressione ed il successivo crollo, nonostante le semplificazioni introdotte del modello. Si ricorda che il tempo computazionale richiesto dal modello a parametri concentrati è considerevolmente inferiore rispetto all'esecuzione di una simulazione CFD.

Nel caso di rotori in posizione eccentrica, non essendo possibile implementare nelle simulazioni CFD il calcolo iterativo per la determinazione della posizione eccentrica statica, è stata proposta la configurazione in Figura 3.3: i rotori sono

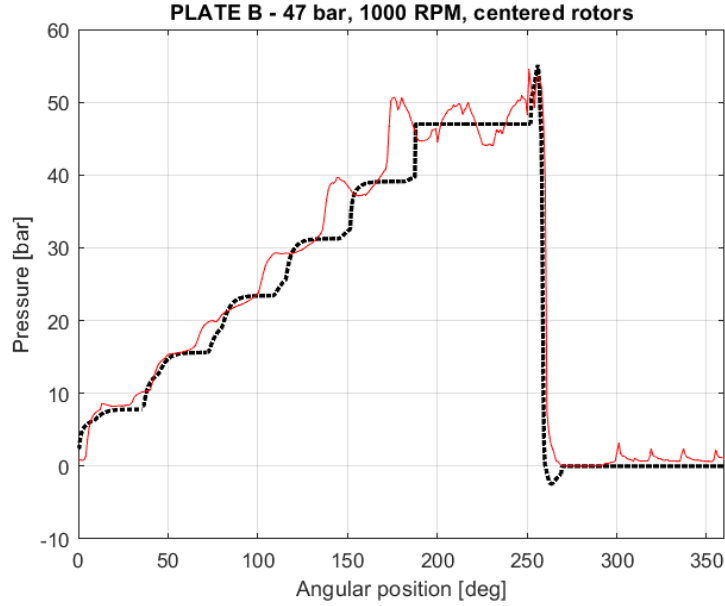


Figura 3.2: Confronto fra CFD (rossa continua) e modello attuale (nera tratteggiata) nel caso di rotori centrati ($\Delta p = 47 \text{ bar}$, 1000 rpm).

spostati verso l’aspirazione, in verticale, di 0.035 mm , ossia il 70% della *clearance* radiale nominale (0.05 mm). Nello studio di riferimento è stato ritenuto un compromesso tale da rendere le simulazioni CFD coerenti ai risultati delle prove sperimentali ed è stato adottato per tutti i casi in cui i rotori siano studiati in posizione eccentrica, indipendentemente dalla condizione di funzionamento (tale aspetto sarà di seguito approfondito in Sezione 3.3).

Il profilo di pressione, nell’intervallo in cui il vano è isolato, sale in maniera più accentuata ed è assente il marcato comportamento a scalini del caso centrato. Potendo i rotori spostarsi verso l’aspirazione, la *clearance* radiale non è costante lungo l’ingranamento: nello specifico, è minima al primo dente in presa col casing (ossia dal lato aspirazione), mentre per i denti successivi, procedendo verso la mandata, cresce fino al suo massimo in corrispondenza dell’ultimo dente in presa. Si motiva allora il comportamento del profilo di pressione: il primo dente in presa ha *clearance* minima e, ricordando che la portata trafilata alla testa del generico dente dipende dal cubo dell’altezza del meato (Eq. 2.2), esso funge da ‘tappo’ per i volumi sigillati successivi, favorendone una più rapida pressurizzazione. In maniera analoga, le *clearance* degli ultimi volumi sigillati sono più grandi e favoriscono i trafiletti fra volumi adiacenti, portando ad una più omogenea distribuzione di pressione nelle fasi terminali del viaggio verso la mandata. In virtù di ciò si osserva il *plateau* a cui il profilo tende nelle posizioni angolari immediatamente precedenti

all'ingresso nell'ambiente di mandata.

Nel modello attuale il tratto corrispondente al volume intrappolato non subisce modifiche rispetto al caso centrato, dato che l'eccentricità delle ruote non incide direttamente sui trafilamenti di fluido nell'ODE associata.

Anche in questo caso il comportamento del modello attuale ricalca molto da vicino i risultati delle simulazioni CFD, al netto dei fenomeni dinamici di oscillazione.

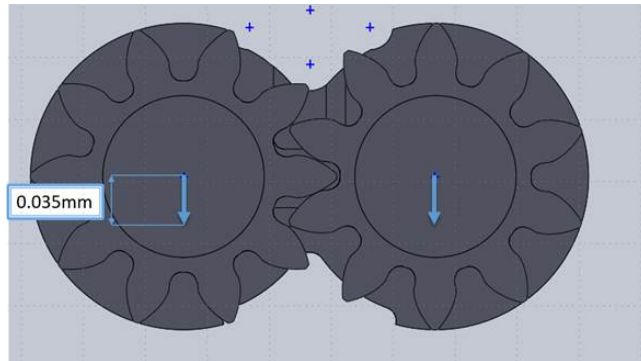


Figura 3.3: Eccentricità imposta a priori nelle simulazioni CFD, adottata anche per le simulazioni con il modello attuale in esame.

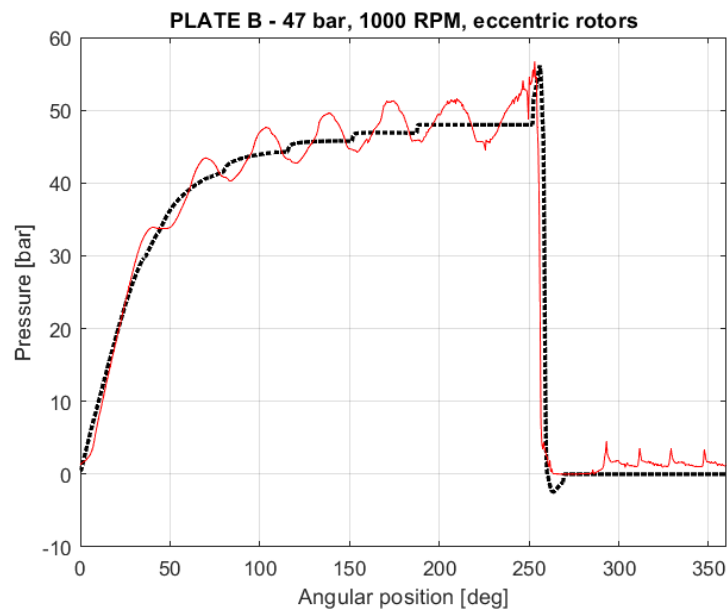


Figura 3.4: Confronto fra CFD (rossa continua) e modello attuale (nera tratteggiata) nel caso di rotori eccentrici ($\Delta p = 47 \text{ bar}$, 1000 rpm).

3.1.2 Piatto 'A'

Si considera ora il piatto 'A', con *peripheral* e *backend groove*, in varie condizioni di funzionamento. Si discute la modalità più adeguata per tenere conto della lavorazione aggiuntiva. Il presente lavoro di tesi propone due approcci alternativi per introdurre l'effetto nel modello attuale:

- **Approccio 1:** la lavorazione consente ad una portata aggiuntiva di fluire dalla mandata al volume sigillato che si trovi, nel corso dell'ingranamento, in corrispondenza del *backend groove*. Qui esso è soggetto ad una pressurizzazione molto rapida che lo porta praticamente al valore di pressione di mandata, p_m . Si impone allora che una volta giunto in contatto con il *groove*, il volume si porti immediatamente a p_m . In questo caso è sufficiente imporre la pressione a p_m non quando sia raggiunta la posizione angolare di fine casing, ma piuttosto la posizione angolare d'inizio *backend groove* (anch'essa parametro geometrico della pompa). Adottando questo approccio per il caso in esame il numero di volumi sigillati effettivi scende a $2 \rightarrow 1 \rightarrow 2$;
- **Approccio 2:** invece che considerare più semplicemente che la pressione salga immediatamente a p_m , si aggiunge al computo dei trafilamenti ai volumi sigillati anche un trafilamento aggiuntivo dovuto al *backend groove*. In particolare, si adotta la consueta formulazione valida per orifizio turbolento già usata per i *relief grooves* del volume intrappolato (positiva se entrante nel volume sigillato *i-esimo*):

$$Q_{back} = 0.65 A_{gr}(\vartheta) \sqrt{\frac{2|p_m - p_i|}{\rho}} \text{sign}(p_m - p_i) \quad (3.1)$$

In cui $A_{gr}(\vartheta)$ è l'area di comunicazione fra il volume *i-esimo* ed il *backend groove*. Essa è variabile durante l'ingranamento ed andrebbe valutata puntualmente. Ai fini del lavoro, per semplificare la valutazione, si propone di valutare A_{gr} 'proporzionalmente', come segue (si faccia riferimento alla Figura 3.5); essendo A_{back} l'area totale del *backend groove*:

$$A_{gr}(\vartheta) = \begin{cases} A_{back} \cdot \frac{\vartheta_{i,2} - \vartheta_{back,1}}{\vartheta_{back,2} - \vartheta_{back,1}}, & \text{se } \vartheta_{i,1} < \vartheta_{back,1}, \vartheta_{back,1} < \vartheta_{i,2} < \vartheta_{back,2} \\ A_{back}, & \text{se } \vartheta_{i,1} \leq \vartheta_{back,1}, \vartheta_{i,2} \geq \vartheta_{back,2} \\ A_{back} \cdot \frac{\vartheta_{back,2} - \vartheta_{i,1}}{\vartheta_{back,2} - \vartheta_{back,1}}, & \text{se } \vartheta_{back,1} < \vartheta_{i,1} < \vartheta_{back,2} \\ 0, & \text{negli altri casi} \end{cases} \quad (3.2)$$

Con questo approccio il numero di equazioni differenziali da risolvere contemporaneamente è ancora pari al numero di volumi sigillati totali (qui secondo lo schema $6 \rightarrow 5 \rightarrow 6$). Mettendo assieme i trafilamenti all'interno

dell'equazione di governo che descrive l'*i-esimo* volume sigillato si ottiene:

$$\frac{dp}{d\vartheta}|_i = \frac{\beta}{V_{vane}} \left(\frac{Q_{h,i+1} - Q_{h,i} + 2(Q_{f,i+1} - Q_{f,i+1}) - 2Q_{d,i} + 2Q_{back,i}}{\omega} - \frac{dV}{d\vartheta}|_i \right) \quad (3.3)$$

In cui il trafilamento al *backend groove* è doppio in quanto avviene da entrambi i piatti della pompa.

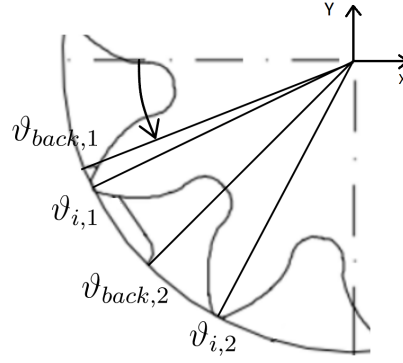


Figura 3.5: Schema per il calcolo dell'area di comunicazione fra il generico volume sigillato ed il *backend groove*.

Entrambi gli approcci sono stati applicati per ricavare i profili di pressione, che in Figura 3.6, 3.7, 3.8, 3.9 sono comparate con i corrispondenti risultati tratti dallo studio di riferimento.

Si osserva che l'approccio 1 è meno accurato del 2 nel predire l'aumento di pressione nei volumi sigillati: potendo includere il trafilamento aggiuntivo al *backend groove*, il profilo si avvicina maggiormente ai risultati CFD e sperimentali. La maggiore accuratezza dell'approccio 2 si riconferma in tutti i quattro casi di studio che implementano il piatto 'A'. Il salto a p_m a circa 60° dell'approccio 1 è imposto dal codice, che rileva che il volume si è 'aperto' al *backend groove*. L'approccio 2 invece non ha discontinuità di salto: pur essendo assai brusco, l'innalzamento di pressione a poco meno di 50° è il naturale risultato dell'integrazione dell'equazione differenziale del volume sigillato soggetto al riempimento. Al crescere di Δp e del numero di giri della pompa, i risultati sperimentali evidenziano un primo ritardo nell'innalzamento della pressione che non è invece registrato dal modello a parametri concentrati. Si presume che ciò sia dovuto ad effetti non inclusi nel modello in esame; in particolare, dal momento che la discrepanza è più pronunciata a numeri di giri elevati, si ipotizza che ciò sia dovuto al riempimento incompleto dei volumi (*incomplete filling*). Il fenomeno ritarda la compressione del volume fluido,

ma non è incluso nel modello attuale. I tratti relativi al volume intrappolato sono invece accurati nel predire il picco principale di pressione.

A fronte dei risultati ottenuti in questa sezione si ritiene il modello validato, per quanto concerne:

- corretto rilevamento delle proprietà geometriche interne della pompa nel corso dell'ingranamento; in particolare, la valutazione del volume intrappolato e della sua derivata (quando esistente) e la valutazione della distribuzione delle *clearance* radiali a rotori eccentrici (aspetto chiave nell'evoluzione dei volumi sigillati);
- corretta impostazione del sistema ODE;
- corretta valutazione dei trafiletti dipendenti dalla distribuzione delle *clearance* radiali;
- necessità di approfondire il modello nel volume intrappolato; mentre il picco di pressione viene previsto in modo soddisfacente, la caduta a valori negativi è da discutere più estesamente.

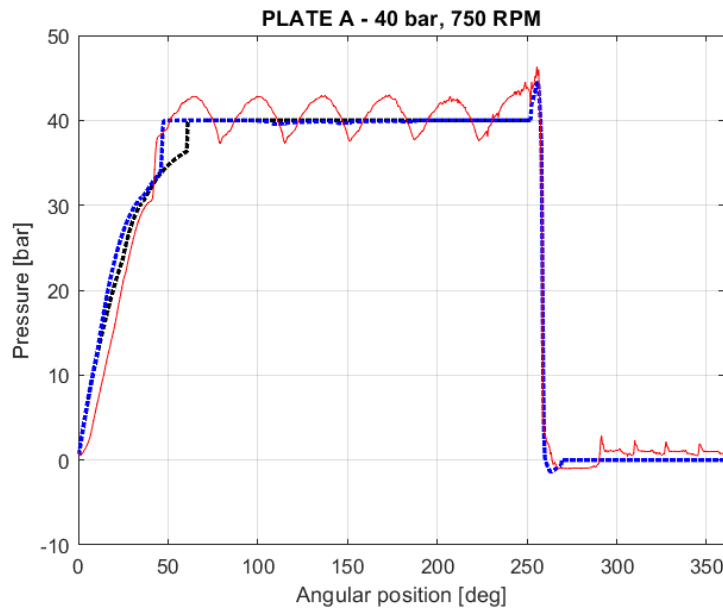


Figura 3.6: Confronto fra CFD (rossa continua) e modello attuale con l'approccio 1 (nera tratteggiata) e con l'approccio 2 (blu tratteggiata) ($\Delta p = 40 \text{ bar}$, 750 rpm).

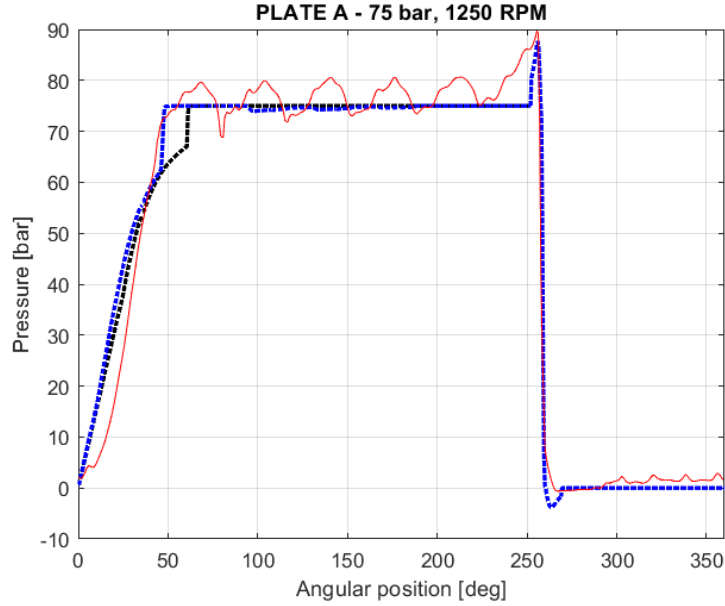


Figura 3.7: Confronto fra CFD (rossa continua) e modello attuale con l'approccio 1 (nera tratteggiata) e con l'approccio 2 (blu tratteggiata) ($\Delta p = 75 \text{ bar}$, 1250 rpm).

3.2 Trafilamenti alle *clearance* assiali

La validazione dei trafilamenti alle *clearance* assiali è stata condotta considerando il piatto 'B'. Tuttavia, i profili di pressione rilevati nella sezione precedente non sono utili a verificare le portate che si instaurano nei meati assiali, in quanto la pompa a piatti bilanciati ha *clearance* assiale praticamente nulla.

Nel caso in cui la pompa sia a piatti bilanciati, tali trafilamenti risultano in definitiva trascurabili rispetto a quelli alle *clearance* radiali; quando i piatti non siano bilanciati, invece, la componente di trafilamento assiale assume la propria importanza. Il profilo di pressione complessivo è sempre influenzato per la maggior parte dai trafilamenti ai meati di testa, ma grandi *clearance* assiali incidono in negativo sull'efficienza volumetrica della pompa. Da qui l'esigenza di validarne il computo, nell'ottica di valutare le prestazioni di pompe sprovviste di bilanciamento assiale. In questa sede va fatta un'ulteriore precisazione per piatti non bilanciati assialmente:

- essi tendono ad assumere una certa inclinazione in funzione delle condizioni di funzionamento; di conseguenza nella realtà l'altezza del meato assiale non è costante sul piano della faccia delle ruote dentate; ciò deve essere valutato con un lavoro dedicato ([5], [21]) e non incluso nel presente studio;

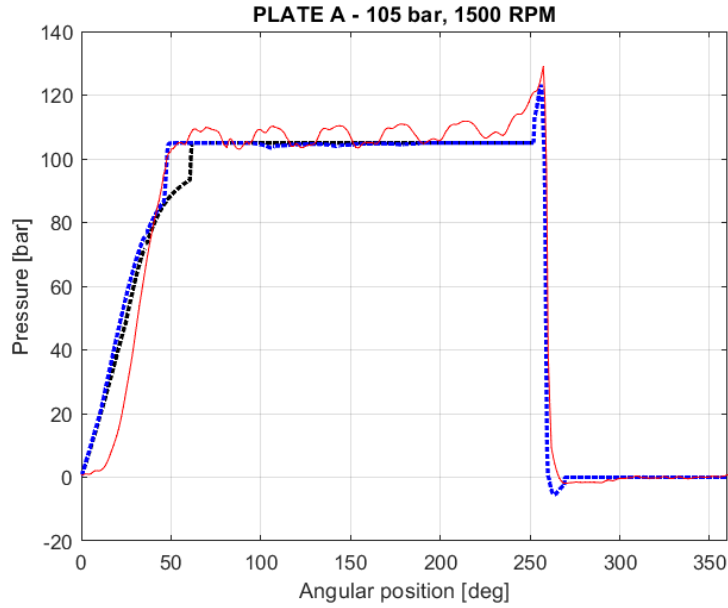


Figura 3.8: Confronto fra CFD (rossa continua) e modello attuale con l’approccio 1 (nera tratteggiata) e con l’approccio 2 (blu tratteggiata) ($\Delta p = 105 \text{ bar}$, 1500 rpm).

- oltre a ciò, non è garantito che le facce opposte delle ruote mantengano lo stesso *offset* rispetto al casing; in generale i meati assiali non sono simmetrici, da cui decadrebbe il fattore moltiplicativo 2 per descrivere il trafilamento complessivo alle facce delle ruote; anche questo fenomeno non è tenuto in conto, in quanto introduce un ulteriore grado di complessità.

Al netto di queste considerazioni, la validazione è stata condotta a partire dalla Casappa Magnum HDP 30.51, ponendo nulle le *clearance* radiali, con rotori centrati, e facendo uno studio parametrico dei profili di pressione facendo variare la *clearance* assiale (considerata uniforme e simmetrica su entrambe le facce delle ruote). Tali risultati sono stati messi a confronto con risultati ottenuti con il software di simulazione oleodinamica Simcenter Amesim, nelle cui librerie sono presenti componenti di pompe ad ingranaggi esterni.

Verrà ora brevemente descritto il modello allestito allo scopo in Simcenter Amesim. Il componente che più si avvicina al modello attuale è HCDEGP0 (di cui esiste anche una versione avanzata, THCDEGP0, che include gli effetti termici) ([22]). In particolare:

- la geometria delle ruote dentate è importabile attraverso i profili per punti della ruota motrice e condotta, input utente in accordo al protocollo del componente;

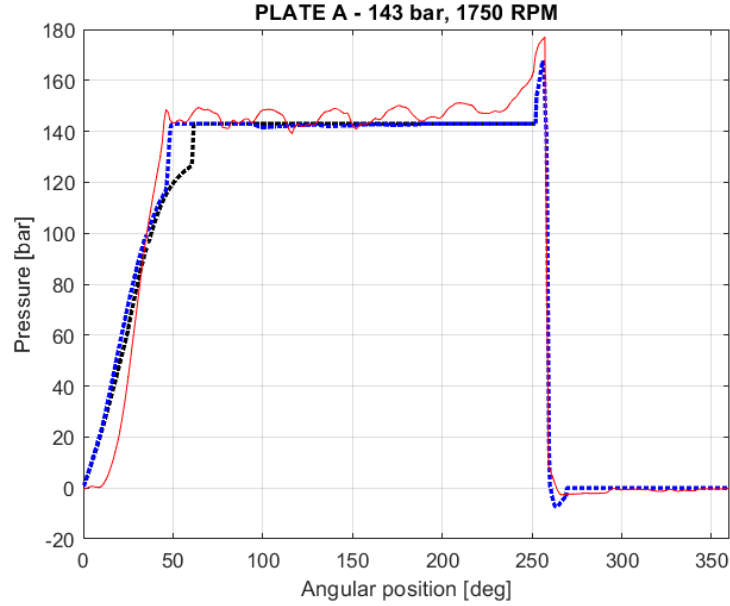


Figura 3.9: Confronto fra CFD (rossa continua) e modello attuale con l'approccio 1 (nera tratteggiata) e con l'approccio 2 (blu tratteggiata) ($\Delta p = 143 \text{ bar}$, 1750 rpm).

- i volumi di controllo sono attribuiti secondo l'approccio SC descritto nel Capitolo 1.4.1; a ciascun vano di entrambe le ruote è attribuito un volume di controllo, a cui si aggiungono il volume di aspirazione e di mandata; non è necessario definire un volume intrappolato;
- i trafilamenti ai volumi sigillati coincidono con quelli del modello attuale; gli stessi trafilamenti sono implementati anche per i volumi di controllo che si trovano dove nel modello attuale risiede invece il volume intrappolato; si prevedono delle discrepanze nei risultati presso l'area d'ingranamento, dovute alla differente modellizzazione;
- il componente non è esteso a rotori in posizione eccentrica; nonostante questo sia un limite spiacevole, ai fini della validazione delle *clearance* assiali è influente, dato che le *clearance* radiali sono poste pari a zero.

In Figura 3.10 sono presentati gli schemi dei flussi principali e secondari che si instaurano all'interno del componente.

Per simulare una condizione quanto più prossima al modello in esame, in cui le pressioni dell'ambiente di aspirazione e mandata sono supposte costanti, p_a e p_m , il componente è stato collegato direttamente a due componenti serbatoio (*tank*), a pressione costante, rispettivamente p_a e p_m . Sempre a tale scopo, le aree di

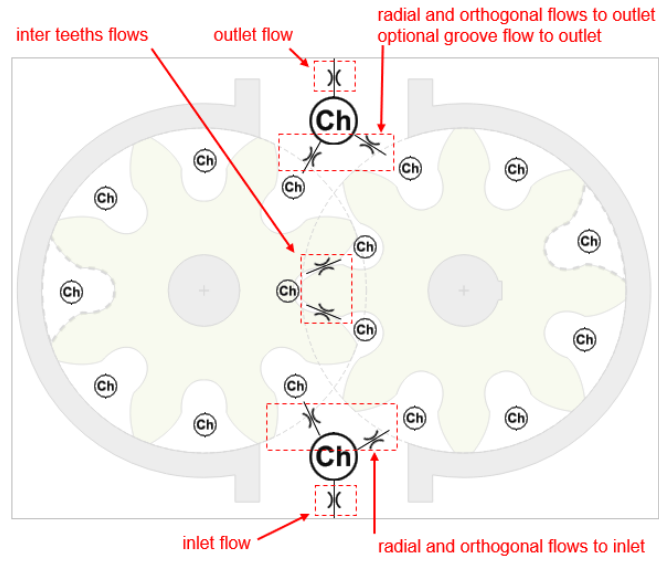
outlet ed *inlet port* della pompa sono state poste sufficientemente grandi da poter considerare i volumi di controllo di aspirazione e mandata alla stessa pressione dei serbatoi a cui sono collegati. I profili delle ruote, così come tutti i parametri geometrici associati (spessore dei denti al variare del raggio, altezza dei denti, spessore di fascia, estensione angolare del casing, ...) sono stati importati dagli stessi dati di input del modello attuale. Il componente motore imprime al componente pompa la velocità di rotazione.

I parametri del fluido sono stati posti pari a quelli del modello in esame. Simcenter Amesim dà inoltre la possibilità di considerare fenomeni di aerazione del fluido, che però il modello attuale non è in grado di valutare: per evitare discrepanze nei risultati dovute a questo aspetto, che nulla ha a che fare con la validazione dei trafilamenti della *clearance* assiale, è sufficiente imporre il parametro '*saturation pressure (for dissolved air/gas)*' del fluido (nella sezione '*Aeration*' della scheda proprietà del fluido), che di default è 1000 bar, ad un valore negativo, -0.5 bar.

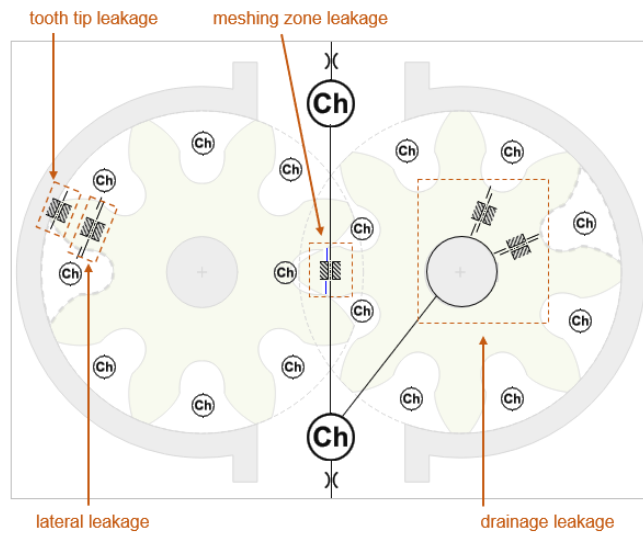
Per verificare anzitutto che i risultati del modello attuale e del modello Amesim siano coerenti in un caso di studio già noto e verificato, si vogliono comparare gli output per il caso già trattato della pompa montante piatti 'B' e rotor centrati, in condizioni di funzionamento $\Delta p = 47$ bar e 1000 rpm. Il confronto è riportato in Figura 3.12: si osserva che laddove l'approccio *Single Chamber* del modello Amesim e il *Multi Chamber* del modello attuale coincidono, ossia presso i volumi sigillati, i risultati sono quasi coincidenti. Dove invece la modellizzazione è differente, ossia al volume intrappolato, i risultati si discostano. Al netto di questa considerazione, si ha un'ulteriore conferma della validità dei trafilamenti per le *clearance* radiali.

Per indagare invece la *clearance* assiale, la si pone ad alcuni valori non nulli, mettendo a zero la *clearance* radiale: in Figura 3.13, 3.14, 3.15, 3.16 e 3.17 sono presentati i risultati per [0.025, 0.04, 0.05, 0.075, 0.10] mm. L'aderenza dei profili nelle posizioni angolari in cui esistono i volumi sigillati è evidente. Dal momento che in assenza di *clearance* radiale i trafilamenti che concorrono alle equazioni di governo dei volumi sigillati, e di conseguenza all'andamento della pressione in essi, è dettata unicamente dai trafilamenti sulle facce laterali dei denti e al drenaggio (entrambi descritti allo stesso modo nel modello Amesim e nel modello attuale), che sono a loro volta funzione della *clearance* assiale, si deduce che il computo del modello attuale è attendibile.

Analizzando nello specifico il comportamento delle curve, si nota che il consueto salto improvviso alla pressione di mandata attorno a 190° , quando il volume sigillato si apre finalmente nell'ambiente di mandata, è molto pronunciato: ciò è dovuto al fatto che, nella modellizzazione a parametri concentrati, i soli trafilamenti assiali non sono sufficienti a garantire una graduale pressurizzazione dei volumi. All'aumentare dell'altezza del meato assiale il profilo di pressione si sviluppa, riuscendo a raggiungere pressioni terminali che da circa 10 bar a 0.025 mm passano a poco



(a) Flussi principali



(b) Trafilamenti secondari

Figura 3.10: Modello a parametri concentrati del componente HCDEGP0 della libreria Amesim (figure tratte dall'*help* del componente).

meno di 20 *bar* a 0.10 *mm*. Si nota il comportamento a scalini già osservato nel caso di rotori centrati, qui dovuto all'ipotesi di *clearance* assiale costante sul piano delle facce delle ruote (così com'era la *clearance* radiale nell'altro caso). Nella realtà questo comportamento non sussiste. D'altra parte, l'assenza di *clearance*

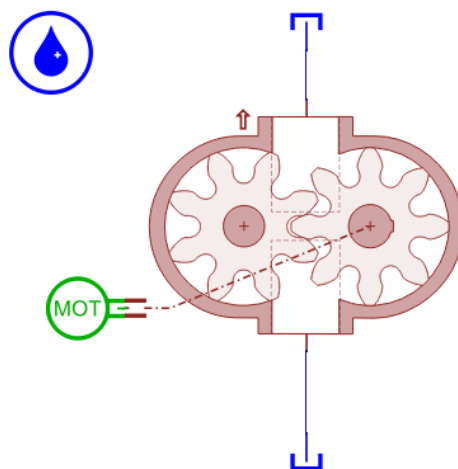


Figura 3.11: Sketch Amesim utilizzato per la validazione.

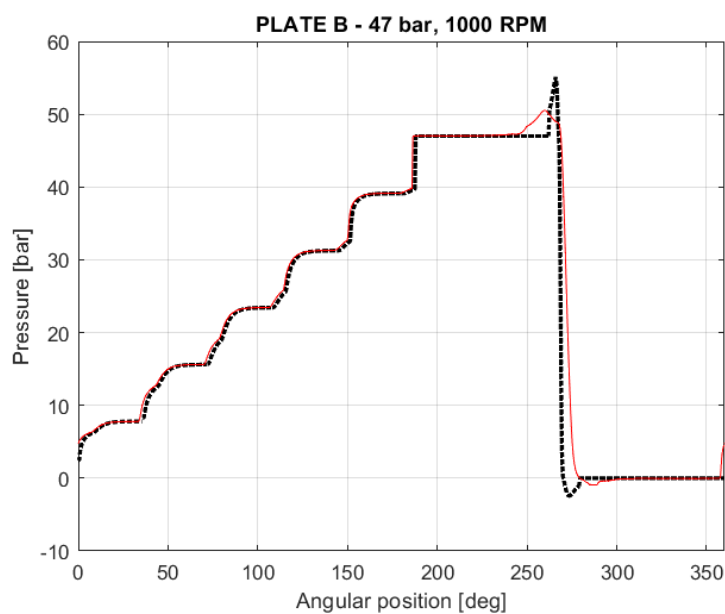


Figura 3.12: Confronto fra modello Amesim (rossa continua) e modello attuale (nera tratteggiata), piatto 'B', rotori centrati ($\Delta p = 47 \text{ bar}$, 1000 rpm).

radiale è puramente fittizia: tali profili di pressione sono un caso di studio semplice e non sono rappresentativi di alcuna situazione reale. Come già osservato nella sezione precedente, si riconferma la necessità di approfondire il modello nel volume intrappolato: la caduta a valori negativi è da discutere più estesamente.

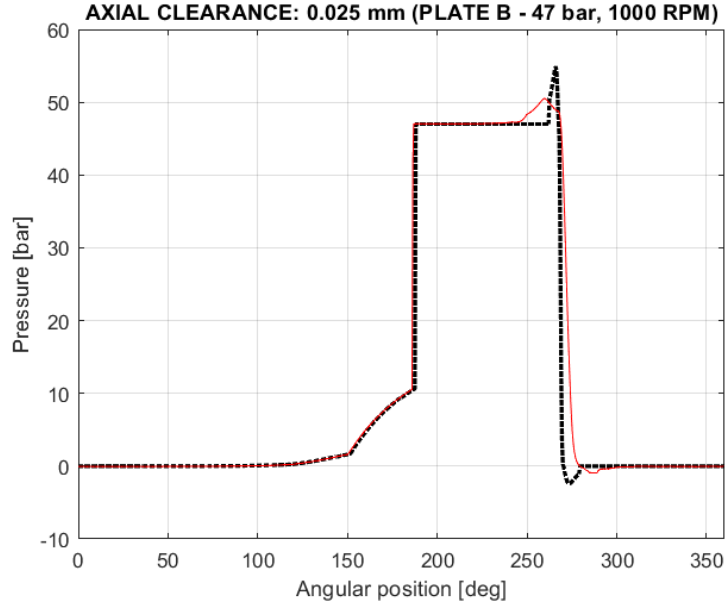


Figura 3.13: Confronto fra modello Amesim (rossa continua) e modello attuale (nera tratteggiata), piatto 'B', rotori centrati e *clearance* radiale nulla, *clearance* assiale 0.025 mm ($\Delta p = 47$ bar, 1000 rpm).

3.3 Spostamento radiale delle ruote dentate sotto carico

Nelle sezioni precedenti l'eccentricità delle ruote era imposta a priori nella simulazione. Lo scopo di questa sezione è verificare il calcolo iterativo che porta alla posizione di equilibrio statico della ruota (SEP). A tal fine si propongono due casi di studio:

- valutazione della SEP per la pompa presentata in [13] (da cui è stato tratto il metodo stesso), confrontando i risultati con i corrispondenti esposti in [14];
- valutazione della SEP per la pompa Casappa Magnum HDP 30.51, con piatti 'A' e 'B', nelle condizioni di funzionamento dei casi precedenti.

I principali parametri della pompa del primo punto sono elencati in Tabella 3.3. Nelle analisi è stato adottato anche lo stesso olio, i cui parametri sono elencati in Tabella 3.4. Un'importante precisazione sul comportamento del fluido a fronte della caduta di pressione nel volume intrappolato: dato che è necessario calcolare la risultante della forza di pressione sulla ruota, in seguito si adotterà il modello di fluido tale che la pressione al suo interno non possa scendere al di sotto dello zero, a

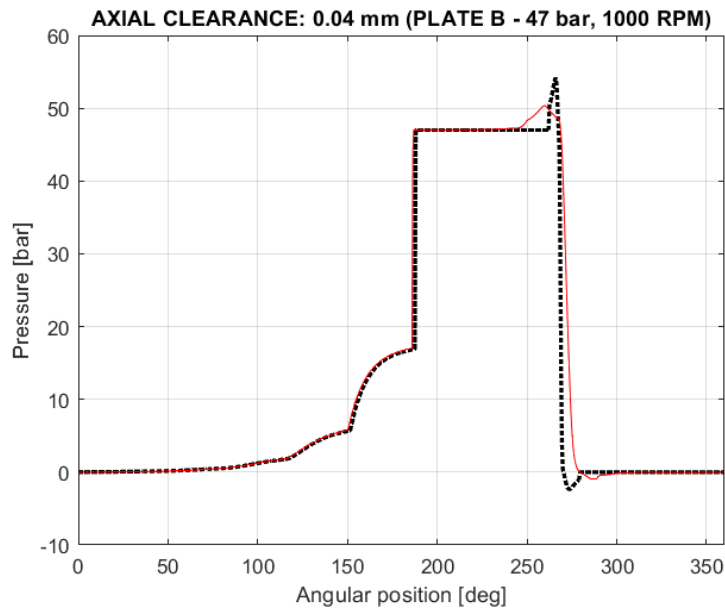


Figura 3.14: Confronto fra modello Amesim (rossa continua) e modello attuale (nera tratteggiata), piatto 'B', rotori centrati e *clearance* radiale nulla, *clearance* assiale 0.04 mm ($\Delta p = 47$ bar, 1000 rpm).

valori negativi (Capitolo 2.3). Questa è una differenza rispetto ai risultati riportati nelle sezioni precedenti: a onor del vero, non influisce in maniera significativa sul calcolo della SEP (la porzione angolare in cui si presenta questa criticità è infatti assai limitata rispetto a tutto il resto dell'ingranamento), ma è opportuno precisarla.

Numero di denti	12	Raggio di fondo	5.74 mm
Passo angolare	30°	Raggio di testa	8.37 mm
Angolo di pressione	20°	Raggio di drenaggio	4.50 mm
Angolo di pressione di lavoro	27.73°	Spessore testa dente	0.183 mm
Modulo	1.15 mm	Volume dei vani	60.7 mm ³
Estensione angolare del casing	220° (110° da lato aspirazione e mandata)		
<i>Clearance</i> radiale	0.0245 mm	<i>Clearance</i> assiale	0.01 mm

Tabella 3.3: Dati della pompa utilizzata per la validazione del calcolo della SEP

Per procedere al calcolo della SEP occorre definire i parametri del cuscinetto idrodinamico. Il modello adottato in questo lavoro richiede in input il diametro

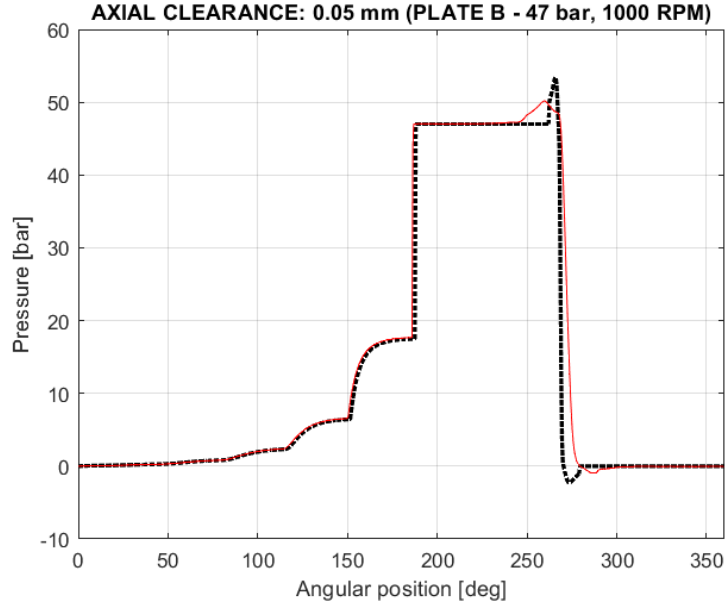


Figura 3.15: Confronto fra modello Amesim (rossa continua) e modello attuale (nera tratteggiata), piatto 'B', rotori centrati e *clearance* radiale nulla, *clearance* assiale 0.05 mm ($\Delta p = 47$ bar, 1000 rpm).

Modulo di comprimibilità	1.400 GPa
Densità	818 $\frac{kg}{m^3}$
Viscosità dinamica	14.0 cP

Tabella 3.4: Parametri dell'olio utilizzato per la validazione del calcolo della SEP.

interno del cuscinetto, l'*Aspect Ratio* L/D e il gioco interno (*clearance* del cuscinetto). Dal momento che nella pubblicazione di riferimento il modello di cuscinetto è differente e non vengono presentate le quote geometriche, ai fini dell'analisi sono stati adottati valori ritenuti ragionevoli per questo tipo di applicazione, riportati in Tabella 3.5. Nella pubblicazione di riferimento la pompa viene studiata nelle condizioni di funzionamento e raggiunge la SEP in Tabella 3.6. La SEP è espressa in coordinate cartesiane e polari nel sistema di riferimento del modello attuale (diverso da quello della pubblicazione). Il caso in esame è quello che in [14] viene definito '*no wear, no displ*', in cui sono assenti gli effetti di profilo d'usura del casing e spostamento dei *bearing blocks* all'interno del casing. Il processo iterativo del Capitolo 2.5 prevede il raggiungimento di una tolleranza relativa sulla distanza

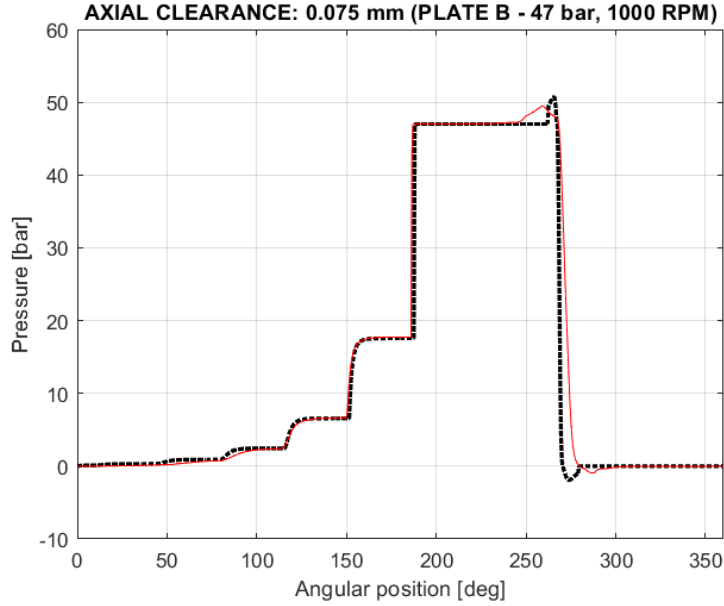


Figura 3.16: Confronto fra modello Amesim (rossa continua) e modello attuale (nera tratteggiata), piatto 'B', rotori centrati e *clearance* radiale nulla, *clearance* assiale 0.075 mm ($\Delta p = 47$ bar, 1000 rpm).

Diametro	9 mm
<i>Aspect Ratio</i>	0.95
<i>Clearance</i> interna	0.0245 mm

Tabella 3.5: Parametri del cuscinetto idrodinamico utilizzato per la validazione del calcolo della SEP.

fra la posizione eccentrica di iterate successive, in termini di modulo e direzione:

$$\begin{aligned}
 err_{rel,e,i} &= \frac{abs(e_i - e_{i-1})}{abs(e_{i-1})} < toll_e \\
 err_{rel,\Gamma,i} &= \frac{abs(\Gamma_i - \Gamma_{i-1})}{abs(\Gamma_{i-1})} < toll_\Gamma
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

In questo caso di studio, oltre che valutare l'effettiva convergenza del processo ad un valore prossimo alla SEP di riferimento, si vogliono anche discutere gli opportuni valori di tolleranza per realizzare un compromesso fra accuratezza e tempo di calcolo. Il codice parte da una prima stima, più o meno ragionevole, sull'eccentricità delle ruote: la bontà della *guess* iniziale è evidentemente un aspetto che ne influenza la rapidità. Non è noto a priori se una scelta iniziale di scarso senso

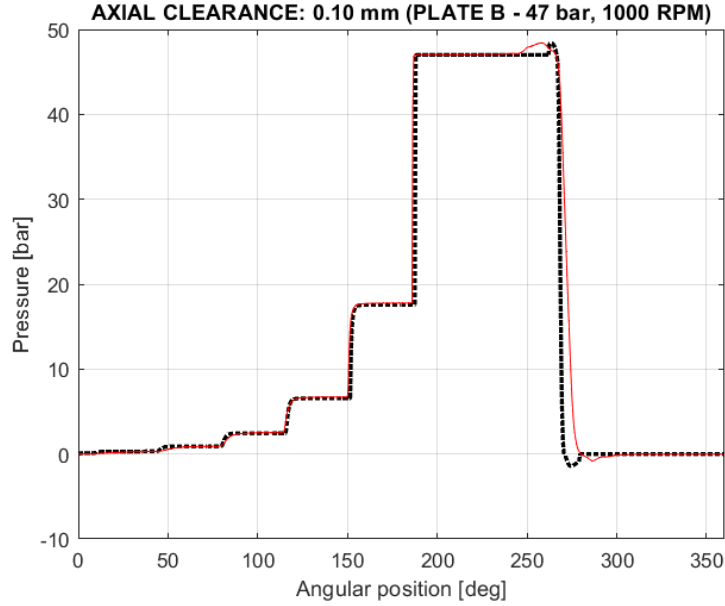


Figura 3.17: Confronto fra modello Amesim (rossa continua) e modello attuale (nera tratteggiata), piatto 'B', rotori centrati e *clearance* radiale nulla, *clearance* assiale 0.10 mm ($\Delta p = 47$ bar, 1000 rpm).

Condizioni di funzionamento	20 bar, 3350 rpm
$X_{SEP,ref}$	0.001 mm
$Y_{SEP,ref}$	-0.023 mm
$e_{SEP,ref}$	0.023 mm
$\Gamma_{SEP,ref}$	272.49°

Tabella 3.6: Condizioni di funzionamento utilizzate per la validazione della SEP e SEP di riferimento (coordinate cartesiane (X, Y) e polari (e, Γ))

fisico, ad esempio ipotizzando che i rotori si trovino dal lato della mandata invece che dal lato dell'aspirazione, possa intaccare la robustezza della convergenza (eventualmente portando le iterazioni a divergere).

Per rispondere a questi interrogativi il codice è stato dapprima lanciato con un limite massimo di iterazioni pari a 50, a partire dalla seguente *guess* iniziale: rotore spostato in verticale verso l'aspirazione dell'80% della *clearance* radiale nominale, ossia $e_0 = 0.8 \cdot 0.0245$ mm = 0.0196 mm, $\Gamma_0 = 270^\circ$.

In Appendice A è riportato il listato completo delle 50 iterazioni, che contiene le

coordinate dell'eccentricità e la distanza relativa fra iterate successive. Le distanze relative, sia in termini di modulo che di direzione dell'eccentricità, si portano verso valori dell'ordine di $1\text{E-}06 \div 1\text{E-}8$ già dopo la prima decina di iterazioni. Le coordinate a cui l'eccentricità si attesta sono prossime alla SEP di riferimento, sintomo della generale bontà del processo implementato. In particolare, si riporta in Figura 3.18 lo scostamento fra il profilo di pressione ricavato con la SEP di riferimento in input e quello ricavato al termine delle iterazioni con la SEP calcolata in output dal modello attuale. In Figura 3.19 invece si riporta lo scostamento fra l'andamento della forza di pressione in entrambi i casi. In Tabella 3.7 sono poi riassunti i risultati in termini di SEP e componenti medie della forza di pressione.

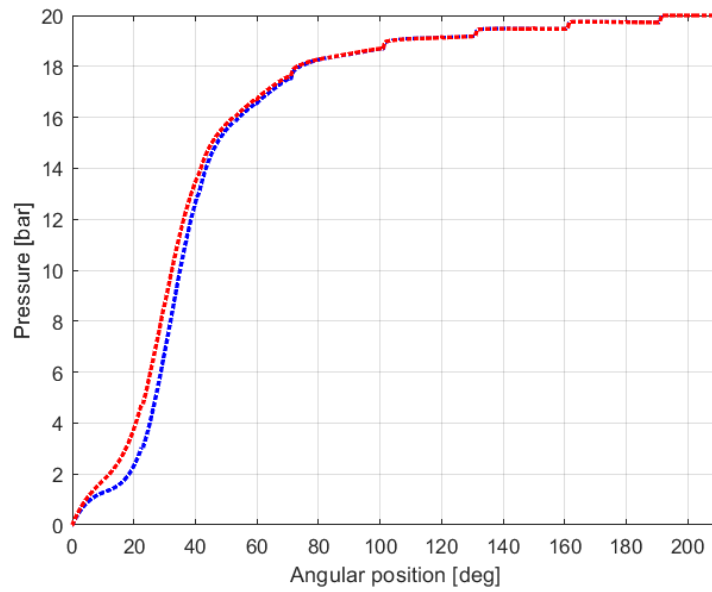


Figura 3.18: Confronto fra il profilo ricavato con la SEP di riferimento (curva blu) e con la SEP calcolata (curva rossa) ($\Delta p = 20 \text{ bar}$, 3350 rpm).

	$e \text{ [mm]}$	$\Gamma \text{ [deg]}$	$f_{x,mean} \text{ [N]}$	$f_{y,mean} \text{ [N]}$
SEP di riferimento	0.023	272.49	140.87	-290.96
SEP calcolata	0.022539	273.72	144.38	-284.21
$err_{rel,\%} =$	2.01%	0.45%	2.67%	2.49%

Tabella 3.7: Errori relativi fra output con SEP di riferimento e SEP calcolata.

Tolleranze dell'ordine di $1\text{E-}06 \div 1\text{E-}08$ paiono eccessive, considerando che un tale grado di precisione viene vanificato dalle semplificazioni introdotte nel modello dai

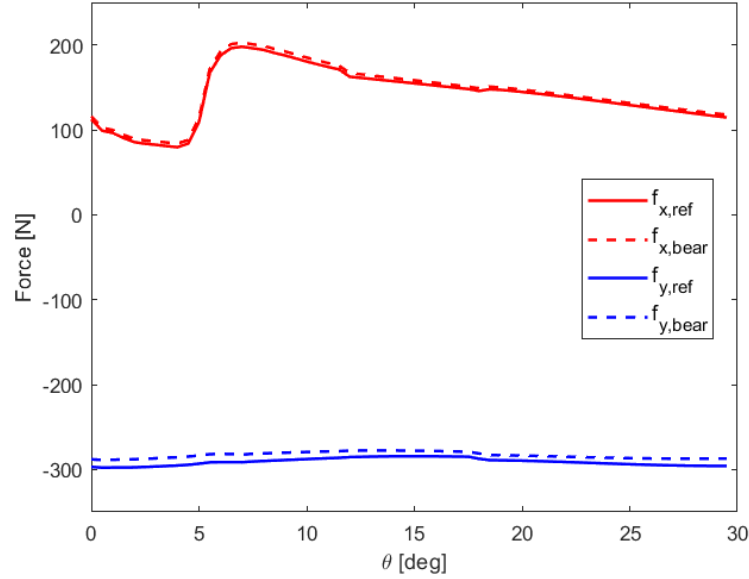


Figura 3.19: Confronto fra le componenti di forza di pressione ricavate con la SEP di riferimento (curve continue) e con la SEP calcolata (curve tratteggiate) ($\Delta p = 20 \text{ bar}$, 3350 rpm).

parametri concentrati. Si ritiene che tolleranze meno stringenti, dell'ordine di $1\text{E-}04 \div 1\text{E-}06$, siano sufficienti. Quanto più stretta la tolleranza, quanto più grande il tempo di calcolo, semplicemente perchè sono richieste più iterazioni. In Tabella 3.8 sono elencate le sole iterazioni necessarie al raggiungimento di distanze relative al di sotto della soglia $1\text{E-}06$: servono 7 iterazioni per stare al di sotto di $1\text{E-}04$ su entrambe le coordinate, 8 per $1\text{E-}05$, 9 per $1\text{E-}06$. Avendo lanciato il codice su un processore *11th Gen Intel(R) Core(TM) i7-1165G7 @ 2.80GHz*, sono stati impiegati rispettivamente 8min 12sec, 9min 12sec, 10min 29sec.

La robustezza della convergenza è stata indagata modificando la *guess* iniziale, nei tre modi seguenti:

- leggera perturbazione della SEP di riferimento verso l'interno della pompa, ($X_0 = 0.001 \text{ mm}$, $Y_0 = -0.023 \text{ mm}$), ($e_0 = 0.0230 \text{ mm}$, $\Gamma_0 = 272.49^\circ$);
- leggera perturbazione della SEP di riferimento verso l'esterno della pompa, ($X_0 = -0.001 \text{ mm}$, $Y_0 = -0.023 \text{ mm}$), ($e_0 = 0.0230 \text{ mm}$, $\Gamma_0 = 267.51^\circ$);
- *guess* iniziale all'80% della *clearance* radiale nominale, lato mandata (opposta alla *guess* originale) ($X_0 = 0.00 \text{ mm}$, $Y_0 = 0.0196 \text{ mm}$), ($e_0 = 0.0196 \text{ mm}$, $\Gamma_0 = 90^\circ$).

i	X_i [mm]	Y_i [mm]	e [mm]	Γ [deg]	$err_{rel,e}$	$err_{rel,\Gamma}$
1	0	-0.0196	0.0196	270.0000		
2	0.002070	-0.022344	0.022440	275.2940	1.45E-01	1.96E-02
3	0.001752	-0.022454	0.022522	274.4616	3.66E-03	3.02E-03
4	0.001586	-0.022476	0.022532	274.0362	4.61E-04	1.55E-03
5	0.001514	-0.022485	0.022536	273.8513	1.68E-04	6.75E-04
6	0.001481	-0.022489	0.022538	273.7673	7.31E-05	3.07E-04
7	0.001470	-0.022490	0.022538	273.7384	2.83E-05	1.06E-04
8	0.001462	-0.022491	0.022539	273.7198	1.42E-05	6.80E-05
9	0.001462	-0.022491	0.022539	273.7191	3.26E-06	2.38E-06
10	0.001462	-0.022491	0.022539	273.7189	2.99E-07	6.88E-07

Tabella 3.8: Iterate del calcolo della SEP fino al raggiungimento della tolleranza 1E-06.

Nelle Tabelle 3.9, 3.10 e 3.11 sono riportati i tre casi, a parità di tolleranza imposta (1E-06). Quando la perturbazione (da entrambe le parti) è piccola il metodo converge entro poche iterazioni: 10 per la perturbazione verso l'interno (11min 20sec), 11 verso l'esterno (12min 38sec). Anche quando la perturbazione è massima, ossia quando la *guess* è dalla parte opposta, il metodo converge ai valori attesi, con le iterazioni che però salgono a 16 (21min 02sec). Questo risultato è importante in quanto conferma che il processo a convergenza è robusto e non dipende strettamente dalla bontà della scelta iniziale; ad ogni modo, è auspicabile che essa sia prossima alla SEP effettiva per ridurre il tempo della simulazione.

In virtù di quanto detto, si può affermare che una buona partenza sia attorno al $75 \div 80\%$ della *clearance* radiale nominale, in verticale, coi rotori volti verso l'aspirazione: nella maggior parte dei casi si rivela molto vicina alla SEP effettiva.

3.3.1 Altri risultati

Il calcolo della SEP viene applicato anche ai casi di studio della pompa Casappa Magnum HDP 30.51, per verificarne ulteriormente l'affidabilità. Si ricorda che nelle simulazioni delle sezioni precedenti l'eccentricità è stata fissata a priori a 0.035 mm in verticale verso l'aspirazione, per il piatto 'A' e 'B' e per tutte le condizioni di funzionamento.

È di nuovo necessario stabilire i parametri del cuscinetto idrodinamico. Non essendo note le dimensioni geometriche, sono state ipotizzate ragionevolmente, come riportato in Tabella 3.12. Prima di commentare i risultati è opportuno fare delle considerazioni qualitative sul comportamento atteso:

i	X_i [mm]	Y_i [mm]	e [mm]	Γ [deg]	$err_{rel,e}$	$err_{rel,\Gamma}$
1	0.001	-0.023	0.023022	272.4896		
2	0.001002	-0.022549	0.022572	272.5441	1.96E-02	2.00E-04
3	0.001263	-0.022513	0.022549	273.2108	1.02E-03	2.45E-03
4	0.001373	-0.022501	0.022543	273.4909	2.47E-04	1.03E-03
5	0.001423	-0.022496	0.022541	273.6184	1.07E-04	4.66E-04
6	0.001442	-0.022494	0.022540	273.6677	4.47E-05	1.80E-04
7	0.001452	-0.022492	0.022539	273.6936	2.12E-05	9.48E-05
8	0.001457	-0.022492	0.022539	273.7059	1.00E-05	4.49E-05
9	0.001459	-0.022492	0.022539	273.7121	5.11E-06	2.28E-05
10	0.001461	-0.022491	0.022539	273.7153	2.61E-06	1.17E-05
11	0.001461	-0.022491	0.022539	273.7170	1.34E-06	5.97E-06

Tabella 3.9: Iterate del calcolo della SEP fino al raggiungimento della tolleranza 1E-06, leggera perturbazione verso l'interno.

i	X_i [mm]	Y_i [mm]	e [mm]	Γ [deg]	$err_{rel,e}$	$err_{rel,\Gamma}$
1	-0.001	-0.023	0.023022	267.5104		
2	0.000238	-0.022598	0.022599	270.6034	1.84E-02	1.16E-02
3	0.000954	-0.022542	0.022562	272.4244	1.62E-03	6.73E-03
4	0.001248	-0.022514	0.022549	273.1732	5.91E-04	2.75E-03
5	0.001372	-0.022501	0.022543	273.4891	2.63E-04	1.16E-03
6	0.001422	-0.022496	0.022541	273.6175	1.07E-04	4.69E-04
7	0.001440	-0.022494	0.022540	273.6636	4.34E-05	1.69E-04
8	0.001451	-0.022492	0.022539	273.6907	2.10E-05	9.92E-05
9	0.001456	-0.022492	0.022539	273.7044	1.11E-05	4.99E-05
10	0.001459	-0.022492	0.022539	273.7114	5.71E-06	2.56E-05
11	0.001460	-0.022491	0.022539	273.7146	2.75E-06	1.17E-05
12	0.001461	-0.022491	0.022539	273.7166	1.52E-06	7.39E-06

Tabella 3.10: Iterate del calcolo della SEP fino al raggiungimento della tolleranza 1E-06, leggera perturbazione verso l'esterno.

- Piatto 'B': in assenza di fresatura periferica la pressione nei primi volumi sigillati è relativamente bassa; al netto dell'angolo di sfasamento (*attitude angle*) fra forza risultante sulla ruota e decentramento dell'albero interno, ci si aspetta che le ruote si spostino quasi verticalmente verso l'aspirazione;
- Piatto 'A': la fresatura periferica ha l'effetto di anticipare la pressurizzazione dei volumi sigillati; di conseguenza si attende che la risultante di forza di

i	X_i [mm]	Y_i [mm]	e [mm]	Γ [deg]	$err_{rel,e}$	$err_{rel,\Gamma}$
1	0	0.0196	0.019600	90		
2	-0.020521	-0.009187	0.022483	204.1183	1.47E-01	1.27E+00
3	-0.008738	-0.020917	0.022668	247.3271	8.23E-03	2.12E-01
4	-0.002270	-0.022487	0.022601	264.2357	2.98E-03	6.84E-02
5	0.000020	-0.022591	0.022591	270.0514	4.27E-04	2.20E-02
6	0.000873	-0.022548	0.022565	272.2175	1.15E-03	8.02E-03
7	0.001216	-0.022518	0.022551	273.0917	6.53E-04	3.21E-03
8	0.001358	-0.022503	0.022544	273.4545	3.00E-04	1.33E-03
....
15	0.001459	-0.022492	0.022539	273.7110	9.33E-07	1.32E-05
16	0.001460	-0.022491	0.022539	273.7148	1.19E-06	1.42E-05
17	0.001461	-0.022491	0.022539	273.7166	1.42E-06	6.24E-06

Tabella 3.11: Iterate del calcolo della SEP fino al raggiungimento della tolleranza 1E-06, *guess* iniziale opposta all'originale.

Diametro	28.45 mm
<i>Aspect Ratio</i>	0.90
<i>Clearance</i> interna	0.04 mm

Tabella 3.12: Parametri del cuscinetto idrodinamico utilizzato per la Casappa Magnum HDP 30.51.

pressione sulla ruota abbia una certa componente orizzontale che la sposta, oltre che verticalmente verso l'aspirazione, anche verso l'interno della pompa.

In via preliminare la SEP calcolata con il piatto 'B' dovrebbe essere prossima all'eccentricità imposta (verticale), mentre è prevedibile che con il piatto 'A' si discosti in maniera più o meno evidente.

In Tabella 3.13 sono presentate le iterazioni per la pompa montante il piatto 'B', nella condizione di funzionamento 47 bar, 1000 rpm. La *guess* iniziale è all'80% della *clearance* radiale nominale (0.05 mm), in verticale; la tolleranza relativa è posta a 1E-05. La SEP ricavata è molto vicina all'eccentricità imposta, con uno scarto di circa il 4% sul modulo e di appena 0.27% sulla direzione. In Figura 3.20 i profili di pressione risultanti sono messi a confronto (viene riportato solo il dettaglio delle posizioni angolari precedenti alla nascita del volume intrappolato, non influenzato dall'eccentricità): le curve si sovrappongono al netto di un piccolo scarto.

In Tabella 3.14, 3.15, 3.16 e 3.17 sono presentate le iterazioni per la pompa montante il piatto 'A', rispettivamente nelle condizioni di funzionamento (40 bar,

i	e [mm]	Γ [deg]	$err_{rel,e}$	$err_{rel,\Gamma}$
1	0.04	270		
2	0.036470	269.6234	8.82E-02	1.39E-03
3	0.036385	270.3962	2.32E-03	2.87E-03
4	0.036375	270.6275	2.71E-04	8.55E-04
5	0.036373	270.6942	7.17E-05	2.46E-04
6	0.036372	270.7132	2.05E-05	7.04E-05
7	0.036372	270.7189	5.99E-06	2.08E-05
8	0.036372	270.7205	1.74E-06	5.97E-06

Tabella 3.13: Iterate del calcolo della SEP fino al raggiungimento della tolleranza $1E-05$, piatto 'B' ($\Delta p = 47$ bar, 1000 rpm).

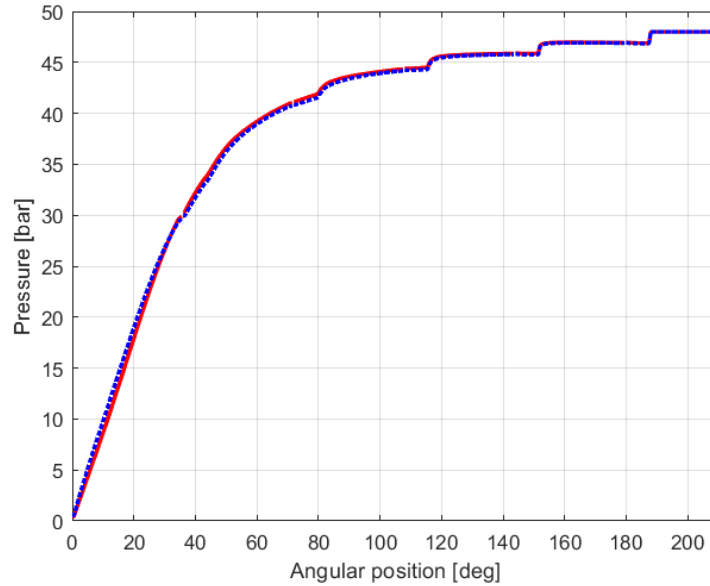


Figura 3.20: Confronto fra il profilo ricavato con la SEP di riferimento (curva blu) e con la SEP calcolata (curva rossa) ($\Delta p = 47$ bar, 1000 rpm).

750 rpm), (75 bar, 1250 rpm), (105 bar, 1500 rpm), (143 bar, 1750 rpm). La *guess* iniziale è all'80% della *clearance* radiale nominale, in verticale; la tolleranza relativa è posta a $1E-04$. Le SEP ricavate sono circa $13^\circ \div 15^\circ$ oltre la verticale, quindi rivolte verso l'aspirazione e l'interno della macchina, come precedentemente previsto. Esse risulterebbero quindi più accurate nel descrivere il comportamento della pompa: volendo eventualmente ripetere le simulazioni CFD con il piatto 'A' con l'intenzione di affinarle, una soluzione potrebbe essere utilizzare questi valori

aggiornati. In Figura 3.21, 3.22, 3.23 e 3.24 i profili di pressione risultanti sono messi a confronto (viene riportato solo il dettaglio delle posizioni angolari precedenti alla nascita del volume intrappolato, non influenzato dall'eccentricità). Le SEP calcolate hanno modulo maggiore (dal 4.6% al 7.7%), oltre che essere orientate verso l'interno: la pressurizzazione dei volumi sigillati ne è favorita, e le curve corrispondenti si attestano a valori superiori prima dell'ingresso in mandata.

i	e [mm]	Γ [deg]	$err_{rel,e}$	$err_{rel,\Gamma}$
1	0.04	270		
2	0.036783	279.7593	8.04E-02	3.61E-02
3	0.036656	283.3394	3.45E-03	1.28E-02
4	0.036626	283.9983	8.19E-04	2.33E-03
5	0.036623	284.1387	8.49E-05	4.94E-04
6	0.036621	284.1427	6.48E-05	1.42E-05

Tabella 3.14: Iterate del calcolo della SEP fino al raggiungimento della tolleranza 1E-04, piatto 'A' ($\Delta p = 40$ bar, 750 rpm).

i	e [mm]	Γ [deg]	$err_{rel,e}$	$err_{rel,\Gamma}$
1	0.04	270		
2	0.037139	278.7581	7.15E-02	3.24E-02
3	0.037029	282.5453	2.97E-03	1.36E-02
4	0.037000	283.4409	7.86E-04	3.17E-03
5	0.036993	283.6449	1.73E-04	7.20E-04
6	0.036993	283.7020	2.55E-05	2.01E-04
7	0.036992	283.6956	3.07E-05	2.26E-05

Tabella 3.15: Iterate del calcolo della SEP fino al raggiungimento della tolleranza 1E-04, piatto 'A' ($\Delta p = 75$ bar, 1250 rpm).

A fronte dei risultati ottenuti in questa sezione, si ritiene il modello validato per quanto concerne:

- corretta impostazione del calcolo delle componenti di forza risultante sulla ruota dentata, fornite in input al modello di cuscinetto idrodinamico;
- corretta interfaccia con il modello di cuscinetto idrodinamico;
- verifica della robustezza della convergenza del processo iterativo alla tolleranza relativa in input utente, per ogni *guess* iniziale testata.

i	e [mm]	Γ [deg]	$err_{rel,e}$	$err_{rel,\Gamma}$
1	0.04	270		
2	0.037496	279.2693	6.26E-02	3.43E-02
3	0.037402	283.2483	2.54E-03	1.42E-02
4	0.037376	284.2849	6.82E-04	3.66E-03
5	0.037370	284.5421	1.68E-04	9.05E-04
6	0.037367	284.5773	6.46E-05	1.24E-04
7	0.037367	284.5860	6.04E-06	3.06E-05

Tabella 3.16: Iterate del calcolo della SEP fino al raggiungimento della tolleranza 1E-04, piatto 'A' ($\Delta p = 105$ bar, 1500 rpm).

i	e [mm]	Γ [deg]	$err_{rel,e}$	$err_{rel,\Gamma}$
1	0.04	270		
2	0.037801	279.6618	5.50E-02	3.58E-02
3	0.037719	283.7845	2.15E-03	1.47E-02
4	0.037696	284.9348	6.38E-04	4.05E-03
5	0.037690	285.2273	1.62E-04	1.03E-03
6	0.037688	285.3087	4.79E-05	2.85E-04
7	0.037687	285.3234	2.42E-05	5.14E-05

Tabella 3.17: Iterate del calcolo della SEP fino al raggiungimento della tolleranza 1E-04, piatto 'A' ($\Delta p = 143$ bar, 1750 rpm).

3.4 Rendimento volumetrico della pompa

Ai fini della validazione del calcolo del rendimento volumetrico (Capitolo 2.7) non sono disponibili valori di riferimento per le pompe adottate nelle sezioni precedenti. Allo stesso modo, sovente i dati trovati in letteratura, per altre pompe, non sono accompagnati da una descrizione sufficientemente accurata della geometria della macchina. Come più volte sottolineato nel corso di questo documento, le *clearance* radiali ed assiali e l'eccentricità della ruota sotto carico sono parametri essenziali per stabilire l'intensità dei trafiletti e di conseguenza le prestazioni, fra cui il rendimento volumetrico: se i valori non sono esplicitati è impossibile intraprendere un'analisi critica dei risultati.

In quest'ottica, viene proposto di confrontare i valori calcolati nel modello attuale, al variare della condizione di funzionamento, con andamenti dedotti dallo studio di popolazioni statistiche. Si ricerca allora in letteratura una curva interpolante che esprima l'andamento del rendimento volumetrico in funzione dei principali parametri legati al funzionamento della pompa. Sono disponibili alcune formulazioni,

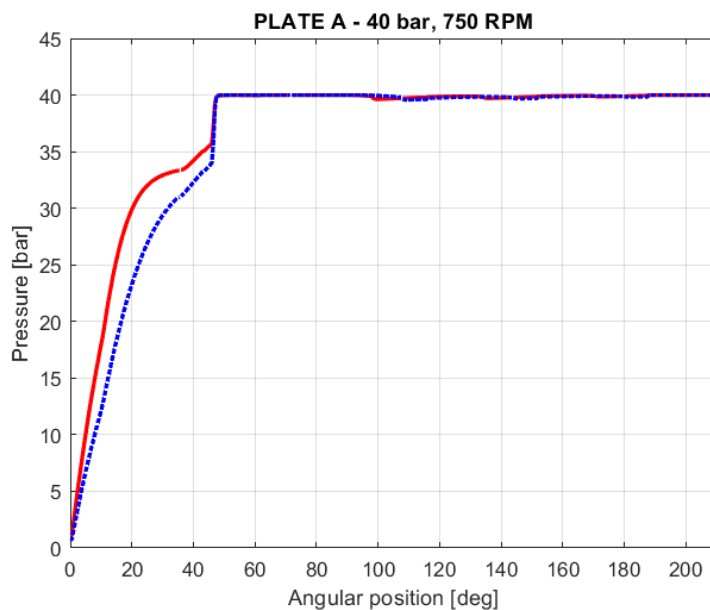


Figura 3.21: Confronto fra il profilo ricavato con la SEP di riferimento (curva blu) e con la SEP calcolata (curva rossa) ($\Delta p = 40 \text{ bar}$, 750 rpm).

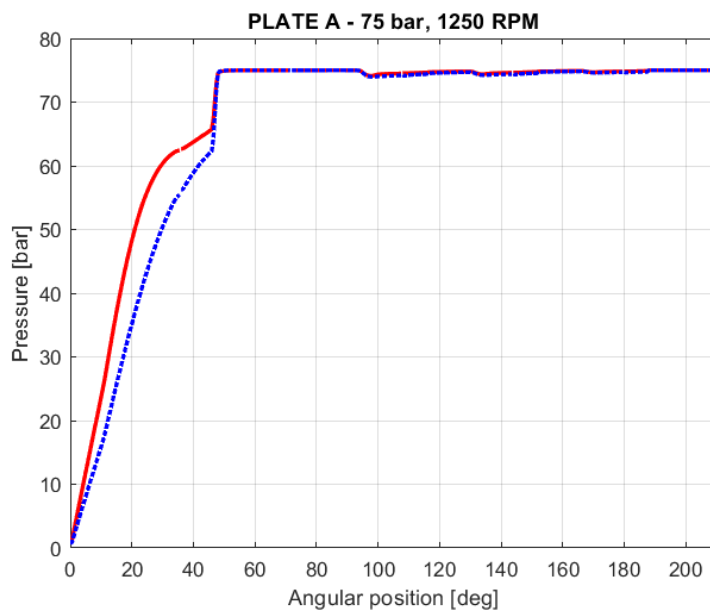


Figura 3.22: Confronto fra il profilo ricavato con la SEP di riferimento (curva blu) e con la SEP calcolata (curva rossa) ($\Delta p = 75 \text{ bar}$, 1250 rpm).

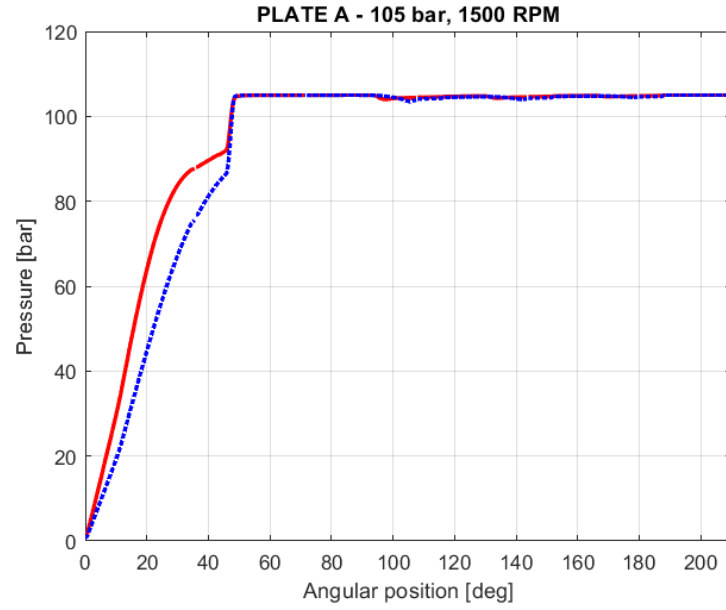


Figura 3.23: Confronto fra il profilo ricavato con la SEP di riferimento (curva blu) e con la SEP calcolata (curva rossa) ($\Delta p = 105 \text{ bar}$, 1500 rpm).

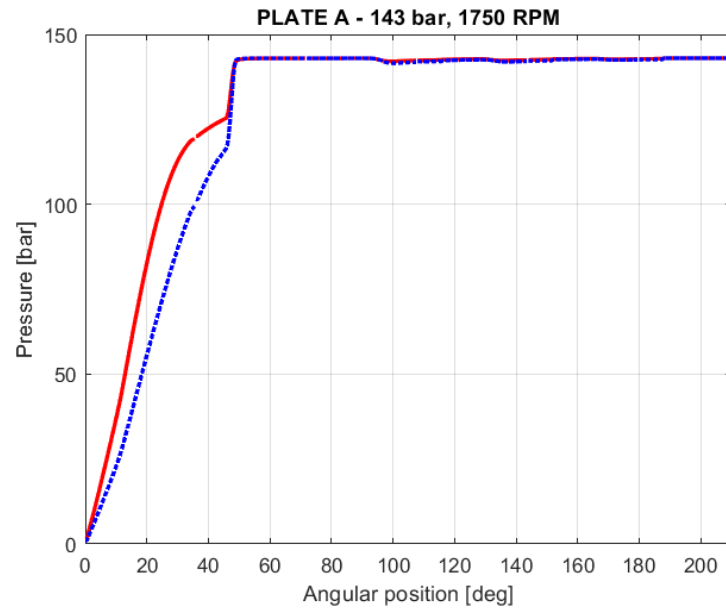


Figura 3.24: Confronto fra il profilo ricavato con la SEP di riferimento (curva blu) e con la SEP calcolata (curva rossa) ($\Delta p = 143 \text{ bar}$, 1750 rpm).

a grado di complessità variabile, che cercano di isolare in una variabile i parametri chiave della macchina.

In Tabella 3.18 sono riportati i rendimenti della pompa Casappa Magnum HDP 30.51 (piatti di tipo 'B') ricavati con il modello attuale, nella configurazione a rotori centrati ed eccentrici, a 1000 *rpm* e $\Delta p = [0, 50, 100, 150, 200, 250, 300]$ *bar*. Si osserva che il rendimento calcolato dal modello attuale per $\Delta p = 0$ *bar* non è unitario. A colpo d'occhio i risultati potrebbero apparire errati, se non altro per la configurazione a rotori centrati, in quanto a pressione di mandata nulla i trafilamenti parrebbero anch'essi nulli. In realtà, nonostante il contributo della pressione sia di solito maggioritario, in questo caso non è nullo il termine di trascinamento associato alla velocità di rotazione. Esso contribuisce ad una, seppur piccola, perdita di efficienza. Non è nullo nemmeno il trafilamento al *relief groove* di mandata: l'espansione geometrica del volume intrappolato provoca al solito l'abbattimento della pressione al suo interno, che viene in parte compensato dal flusso che entra attraverso l'area di connessione con la mandata. Nel caso reale è da aggiungere la portata che va ai cuscinetti, non nulla anche a $\Delta p = 0$ *bar*.

Viscosità (μ)	36.5 <i>cP</i>	
Δp [<i>bar</i>]	η_{vol} (centrati)	η_{vol} (eccentrici)
0	0.994	0.990
50	0.969	0.973
100	0.945	0.965
150	0.922	0.957
200	0.899	0.949
250	0.877	0.941
300	0.853	0.936

Tabella 3.18: Rendimenti calcolati per la Casappa Magnum HDP 30.51, a 1000 *rpm*, rotori centrati ed eccentrici.

Il modello più semplice descrive η_{vol} linearmente, in funzione della differenza di pressione Δp realizzata dalla pompa:

$$\eta_{vol} = 1 - C_1 \Delta p \quad (3.5)$$

La curva ha valore unitario quando $\Delta p = 0$, il rendimento peggiora all'aumentare della pressione differenziale, come facilmente intuibile. Questa descrizione si fonda sulle seguenti considerazioni:

- i trafilamenti più significativi per una pompa ad ingranaggi esterni avvengono alla testa del dente attraverso le *clearance* radiali;

- di questi, la quota principale è dovuta al termine di pressione (Poiseuille), piuttosto che al termine di trascinamento (Couette), quindi la dipendenza principale è da Δp e non ω ;
- in C_1 è racchiuso tutto ciò che riguarda la geometria dell'esemplare e i parametri dell'olio, e può essere valutato sperimentalmente.

Si tratta di una formulazione estremamente semplificata. In Figura 3.25 è riportata la retta del tipo $1 - C_1 \Delta p$ associata ai rendimenti volumetrici calcolati a numero di giri costante, pari a 1000 rpm , per pressione di mandata crescente, $\Delta p = [0, 50, 100, 150, 200, 250, 300] \text{ bar}$, e con i rotori centrati. In questo caso di studio semplificato il comportamento simulato è ben approssimato dall'interpolazione lineare, dato che sono fissati i parametri dell'olio, la velocità e le *clearance* radiali sono sempre uniformi. Si propone invece una formulazione più completa

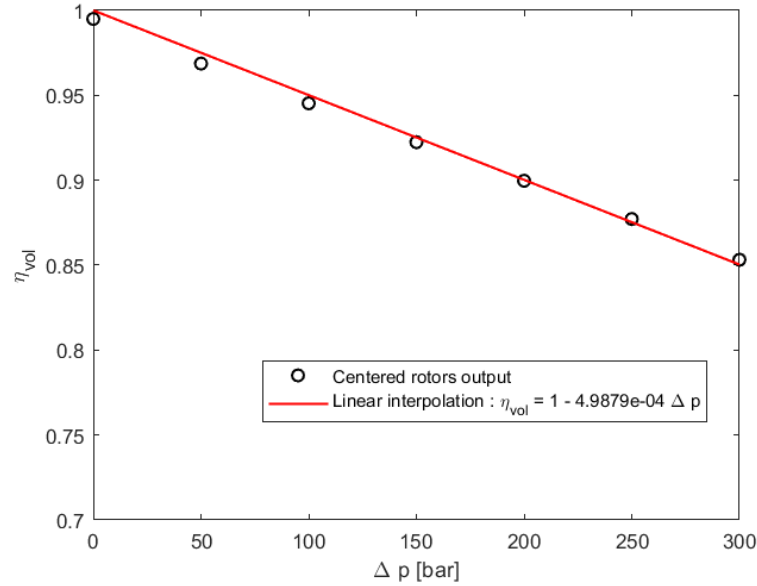


Figura 3.25: Rendimenti volumetrici calcolati per la pompa Casappa Magnum HDP 30.51 montante i piatti di tipo 'B', simulata nel caso di rotori centrati, e interpolazione lineare (1000 rpm).

basata sul numero di *Stribeck*. Si tratta di un numero adimensionale definito come segue:

$$Str = \frac{\mu \omega}{\Delta p} \quad (3.6)$$

In cui compaiono la condizione di funzionamento (ω , Δp) e la viscosità dinamica (μ). La viscosità è effettivamente il parametro del fluido più importante nella valutazione del rendimento volumetrico, perchè compare esplicitamente nel termine

di Poiseuille di tutti i trafiletti laminari. Rispetto alla formulazione precedente l'andamento del rendimento volumetrico è previsto dalla curva di equazione:

$$\eta_{vol} = 1 - C_1 \left(\frac{\Delta p}{\mu \omega} \right) - C_2 \left(\frac{\Delta p}{\mu \omega} \right)^{1/2} \quad (3.7)$$

In cui $\left(\frac{\Delta p}{\mu \omega} \right) = \frac{1}{Str}$, C_1 è un coefficiente che tiene conto della compressibilità del fluido, C_2 tiene conto dei trafiletti a *Stribeck* bassi (*Reynolds* alti). Entrambi i coefficienti sono da determinare. Nel lavoro proposto in [23] vengono sperimentalmente valutati i rendimenti volumetrici di una popolazione statistica di pompe ad ingranaggi esterni di diverse case costruttrici, che hanno quindi cilindrate, geometrie e in generale soluzioni tecnologiche differenti, facendole lavorare in condizioni di funzionamento variabili. Per ciascun punto di lavoro di ogni pompa viene calcolato anche il numero di *Stribeck*. Dalla nuvola di dati così ottenuta gli autori propongono la seguente curva interpolante:

$$\eta_{vol} = 1 - 6.8E - 09 \left(\frac{\Delta p}{\mu \omega} \right) - 2.0E - 05 \left(\frac{\Delta p}{\mu \omega} \right)^{1/2} \quad (3.8)$$

Essa vuole descrivere il comportamento 'medio' statistico del rendimento di una pompa ad ingranaggi esterni. Per verificare l'attendibilità della formulazione si utilizzano i dati reperiti da due fonti:

- rendimento al variare della pressione di una pompa testata al banco prova, di cui non si conoscono tutte le specifiche geometriche, e forniti dal Prof. Rundo del Politecnico di Torino (qui nominata '2', Tabella 3.19);
- rendimento al variare della pressione e del numero di giri di una pompa oggetto di un'analisi CFD e prove sperimentali, di cui non si conoscono tutte le specifiche geometriche, estratti da [24] (qui nominata '3', Tabella 3.20).

Cilindrata	21.14 cm ³ /rev		
Δp [bar]	ω [rpm]	μ [cP]	η_{vol}
10.12	1002.03	27.6	0.983
50.29	999.04	27.7	0.949
100.19	1003.96	26.0	0.905
150.67	1002.89	23.4	0.871
200.91	1000.11	22.1	0.857
252.04	998.62	22.5	0.860

Tabella 3.19: Dati di rendimento della pompa '2'.

Cilindrata	$\sim 33 \text{ cm}^3/\text{rev}$			Viscosità	$34 \text{ mPa} \cdot \text{s}$		
$(\Delta p, \omega)$	η_{vol}	$(\Delta p, \omega)$	η_{vol}	$(\Delta p, \omega)$	η_{vol}	$(\Delta p, \omega)$	η_{vol}
50 bar 920 rpm	0.953	100 bar 920 rpm	0.930	150 bar 920 rpm	0.906	200 bar 920 rpm	0.875
50 bar 1500 rpm	0.964	100 bar 1500 rpm	0.939	150 bar 1500 rpm	0.909	200 bar 1500 rpm	0.891
50 bar 2000 rpm	0.974	100 bar 2000 rpm	0.950	150 bar 2000 rpm	0.941	200 bar 2000 rpm	0.929

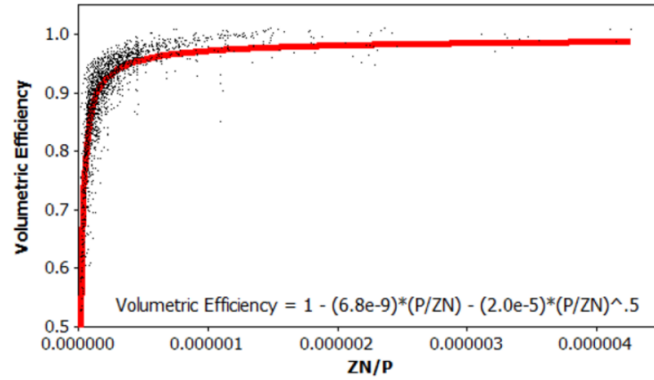
Tabella 3.20: Dati di rendimento della pompa '3'.

Per ciascun punto di funzionamento delle pompe si ricava il corrispondente numero di *Stribeck*. Le coppie *Stribeck* - η_{vol} sono poi graficate a confronto della curva proposta in Eq. 3.8. Non ci si aspetta che coincidano perfettamente, dato che l'interpolazione è fatta su una vasta popolazione statistica, ma che si attestino in un suo intorno. In Figura 3.26a è riportato il grafico originale con la nuvola di dati utilizzata dagli autori per ricavare i coefficienti della curva interpolante, in Figura 3.26b il confronto con i punti ricavati col modello attuale per la Casappa Magnum HDP 30.51, e dedotti dai dati delle pompe '2' e '3'. Si osserva che la formulazione proposta descrive bene l'andamento del rendimento.

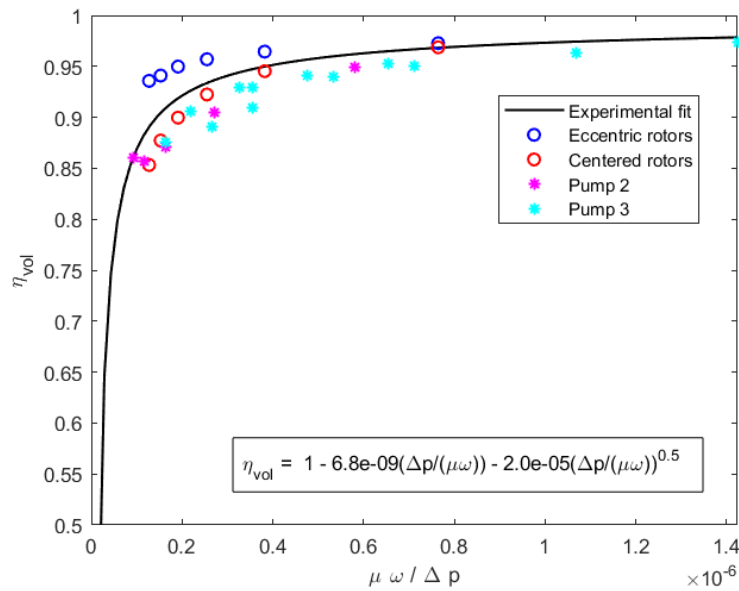
A tal proposito, si propone di specializzare i coefficienti C_1 e C_2 per ciascuna serie di dati, vale a dire ricavare una curva interpolante per ciascun esemplare. Per ricavarli, data la forma generale di Eq. 3.7, è sufficiente usare solutori specializzati nell'interpolazione di equazioni non lineari (ad esempio la funzione '*lsqcurvefit*' in ambiente MATLAB). In Figura 3.27 sono riportati i risultati con le equazioni a coefficienti specializzati.

Si conclude che la formulazione è una valida alternativa per la previsione del rendimento volumetrico al variare delle condizioni di funzionamento e dei parametri del fluido. In particolare:

- dato un certo esemplare, è possibile produrre un set limitato di dati con cui eseguire l'interpolazione attraverso una serie di prove sperimentali;
- se non è possibile eseguire prove sperimentali, si può ricorrere ad una serie di simulazioni, siano esse a parametri concentrati (eventualmente utilizzando il modello attuale), oppure CFD 2D o 3D, per produrre un set limitato di dati da interpolare; in questo caso occorre tenere presente tutti i limiti associati alla modellizzazione scelta nel predire con accuratezza il caso reale;
- il rendimento volumetrico dell'esemplare in tutte le altre condizioni di funzionamento, e al variare dei parametri del fluido, viene previsto immediatamente dalla curva interpolante intercettandola al numero di *Stribeck* corrispondente.



(a) Nuvola di punti e interpolazione dei dati proposta in [23].



(b) Confronto coi dati estratti dal modello attuale (punti blu e rossi) per la Casappa Magnum HDP 30.51, e dati per le pompe 2 e 3.

Figura 3.26: Andamento del rendimento volumetrico in funzione del numero di *Stribeck* della pompa.

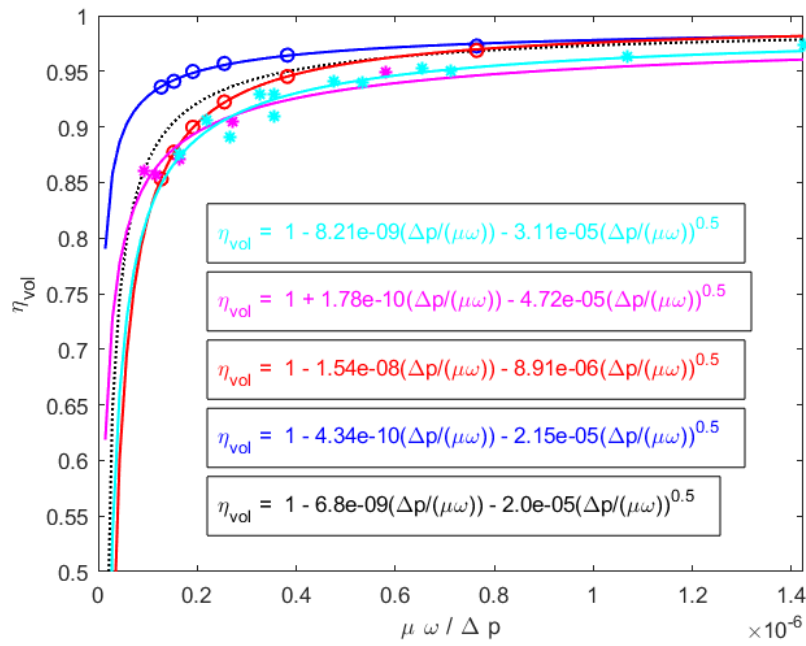


Figura 3.27: Curve interpolanti specializzate per ciascuna serie di dati.

Capitolo 4

Conclusioni

Si traggono le conclusioni sui risultati ottenuti col modello a parametri concentrati sviluppato nel corso del lavoro di tesi.

Le pompe ad ingranaggi esterni sono macchine di ampio utilizzo nella lubrificazione di motori e componenti meccanici rotanti, oltre che nell'alimentazione di sistemi di potenza idraulica, e quindi rivestono la propria importanza in campo aeronautico, in particolare nella lubrificazione di turbomotori e di scatole ingranaggi. Nell'ottica di integrare il componente all'interno di un sistema ad olio più ampio è fondamentale averne un'approfondita conoscenza. In letteratura sono disponibili numerosi studi che propongono metodi d'analisi a diversi gradi di complessità. Vari software di simulazione oleodinamica propongono elementi di libreria fino ad intere estensioni per la simulazione di pompe ad ingranaggi esterni.

Il presente lavoro di tesi è stato incentrato sulla creazione di un codice che adottasse un modello a parametri concentrati per la determinazione del campo di pressione all'interno della pompa, dei principali trafilamenti secondari di portata e per il calcolo del rendimento volumetrico della macchina, al variare delle geometrie principali, delle condizioni di funzionamento (pressione e velocità di rotazione) e dei parametri del fluido. Osservata la forte dipendenza dei risultati dalla distribuzione di gioco radiale, si è presentata l'esigenza di calcolare il decentramento delle ruote sotto carico durante il funzionamento: a questo proposito si è seguito un metodo di natura iterativa che, in aggiunta a quanto appena elencato, valuti la posizione 'statica' eccentrica della ruota, integrando nel codice un modello di cuscinetto idrodinamico sviluppato in un lavoro di tesi parallelo e congiunto.

Al fine di restituire uno strumento affidabile, con cui operare in futuro analisi preliminari su casi di studio specifici, è stata data particolare attenzione alla validazione del modello. Essa ha richiesto a più riprese lo sforzo di ricercare in letteratura casi di studio di riferimento da cui trarre dati di input e di output con cui simulare e confrontare i calcoli del codice.

Nelle seguenti sezioni verranno allora riassunti gli aspetti salienti del modello implementato nel codice ed i suoi punti di forza e limitazioni nel predire il comportamento reale della pompa.

4.1 Caratteristiche del modello

Il modello a parametri concentrati adottato nel codice adotta l'approccio *Multi Chamber* per la definizione dei volumi di controllo, tale per cui i vani fra i denti delle ruote in aperta comunicazione con gli ambienti di aspirazione e di mandata sono ad essi unificati. In modo analogo, l'area d'ingranamento compresa fra le due ruote è unificata in un unico volume intrappolato. I volumi di riporto esterni, compresi fra il profilo interno del casing ed i vani fra i denti da esso sigillati, costituiscono i rimanenti volumi di controllo. Il numero totale di volumi di controllo è variabile nel corso dell'ingranamento. In sintesi, il modulo geometrico del codice:

- determina per punti il profilo evolvente dei denti della ruota, le sue quote radiali fondamentali, l'estensione del casing interno e delle eventuali lavorazioni secondarie (*relief grooves*, *grooves* periferici) a partire dai parametri in input utente;
- tiene traccia, per ogni posizione angolare di campionamento, delle coordinate dei punti di contatto fra le ruote all'ingranamento e riconosce automaticamente il contorno del volume intrappolato, calcolandone numericamente il volume e l'area di comunicazione con i *relief grooves*;
- tiene traccia, per ogni posizione angolare di campionamento, del numero di volumi contemporaneamente sigillati e delle coordinate del primo ed ultimo dente in contatto con il casing (per la sola ruota motrice);
- restituisce in output nella forma di file Excel tutti i dati necessari al modulo successivo.

La risoluzione del campo di pressione dipende da come vengono collegati, attraverso meati ed orifici, tutti i volumi di controllo. Nel modello attuale aspirazione e mandata sono posti a pressione costante. Il volume intrappolato è collegato ad essi attraverso i *relief grooves* e le *clearance* assiali, oltre che all'ambiente di drenaggio. I volumi sigillati sono collegati a quelli adiacenti attraverso le *clearance* radiali ed assiali, oltre che all'ambiente di drenaggio.

Il campo di pressione ai volumi sigillati è fortemente dipendente dalla distribuzione delle *clearance* radiali, che a sua volta dipende dall'eccentricità delle ruote. Si implementa un metodo di natura iterativa basato sul concetto di posizione eccentrica 'statica' delle ruote per evitare la risoluzione di un sistema di equazioni

dinamiche completo; il calcolo è poi ridotto alla sola ruota motrice nell'ipotesi che si comportino in modo pressochè simmetrico. In sintesi, il modulo di simulazione del codice:

- risolve l'equazione differenziale di governo del volume intrappolato in funzione delle condizioni di funzionamento in input utente e gli output del modulo geometrico;
- imposta e risolve il set ODE dei volumi sigillati, suddividendo l'intervallo d'integrazione complessivo in intervalli fra le posizioni angolari in cui aumenta/diminuisce il numero di volumi sigillati contemporanei (per la sola ruota motrice);
- campiona il profilo di pressione per una rotazione completa della ruota motrice;
- integra, per ogni posizione angolare di campionamento, la pressione insistente sulla ruota motrice per ottenere la forza di pressione media; valuta la coppia di pressione in corrispondenza dell'ingranamento per ottenere la forza di contatto media; la forza risultante va in input al modello di cuscinetto;
- valuta iterativamente la posizione eccentrica 'statica' della ruota, restituendola in un file Excel;
- stima l'efficienza volumetrica della pompa.

4.2 Considerazioni sui risultati ottenuti

Nel Capitolo 3 sono stati presentati i risultati della validazione del modello attuale. Esso è stato messo a confronto con dati di natura sperimentale, CFD, e con un modello di libreria del software Simcenter Amesim, anch'esso a parametri concentrati. Gli output di rendimento volumetrico sono stati invece confrontati con modelli di previsione provenienti dalla letteratura.

In tutti i casi il confronto ha evidenziato una buona capacità del modello attuale di stimare in maniera rapida ed attendibile il comportamento della pompa. In particolare:

- è stata verificata la corretta impostazione ed implementazione dei passaggi che conducono all'evoluzione della pressione all'interno della macchina, includendo gli effetti dei trafilamenti secondari alle *clearance* radiali ed assiali; l'andamento 'medio' della pressione, al netto dei fenomeni di *pressure ripple* dovuti all'interazione dinamica della pompa all'interno di un circuito idraulico completo, segue da vicino gli output di modelli di ordine dimensionale

superiore, evidentemente più complessi; nel caso del modello a parametri concentrati del componente di libreria, i risultati sono di fatto identici laddove la modellizzazione dei volumi di controllo coincide;

- è stato verificato il calcolo della posizione statica eccentrica delle ruote dentate, accoppiato al modello di cuscinetto; il modello attuale restituisce, nei casi di controllo sfruttati per la validazione, eccentricità molto prossime a quelle di riferimento, sia in termini di modulo che di direzione; questo risultato è molto importante per attestare l'affidabilità del modello, dato che incide direttamente sulla distribuzione delle *clearance* radiali della pompa, a cui l'evoluzione della pressione è sensibile;
- è stata verificata la robustezza della convergenza del processo iterativo, anche con *guess* iniziali molto lontane dalla soluzione attesa; è stato proposto un valore di tentativo iniziale pari all'80% della *clearance* radiale nominale della pompa, in verticale e verso l'aspirazione; siano i piatti dotati o meno di fresature periferiche, risulta una scelta di partenza ragionevole;
- i tempi computazionali sono inferiori rispetto alle più complesse simulazioni CFD; l'abilità di stimare la posizione eccentrica delle ruote è un vantaggio rilevante del modello attuale, assente nei componenti di libreria attualmente disponibili su Simcenter Amesim; inoltre, può essere sfruttata per impostare simulazioni CFD di maggiore dettaglio;
- i rendimenti volumetrici calcolati dal modello attuale paiono essere in buon accordo con gli andamenti delle curve di rendimento proposte in letteratura.

D'altra parte, il modello ha diverse limitazioni significative. In particolare:

- la pompa non è posta all'interno di un circuito, non è stata implementata l'equazione di governo per il volume di mandata e la sua pressione è di conseguenza supposta costante; i fenomeni di *pressure ripple* non sono osservabili, nonostante siano di intensità rilevante nelle pompe ad ingranaggi esterni;
- la pressione è per ipotesi omogenea all'interno di uno stesso volume di controllo, perciò il modello a parametri concentrati non può tenere conto del gradiente radiale di pressione dovuto agli effetti centrifughi ad alti numeri di giri;
- il modello di fluido ignora i fenomeni di aerazione, passaggio di stato liquido/vapore dell'olio, miscele olio/aria, riempimento incompleto dei volumi sigillati ad elevati numeri di giri, che incidono sulle proprietà medie della miscela, tra cui densità e modulo di comprimibilità;

- la cavitazione del fluido è rappresentata da un modello estremamente semplificato, che in definitiva non descrive esaustivamente il fenomeno, di particolare rilevanza nel volume intrappolato; la capacità di identificare con precisione l'occorrenza della cavitazione è tuttavia importante nel prevedere le prestazioni e lo stato di salute della pompa;
- la distribuzione delle *clearance* assiali è provvisoriamente supposta omogenea sul piano delle facce delle ruote, e pari da entrambi i lati; nel caso di piatti non bilanciati l'*offset* è in generale differente per i due lati, e i piatti assumono una certa inclinazione che rende il meato ad altezza non costante; ciò incide su tutti i trafilamenti assiali della pompa.

4.3 Sviluppi futuri

A fronte delle lacune appena elencate, si delineano i futuri obiettivi per sviluppare il lavoro e rendere il modello più accurato.

Occorre approfondire il comportamento del modello in corrispondenza dell'area d'ingranamento, in particolare quando la pressione nel volume intrappolato crolla, al fine di predire valori coerenti.

L'incapacità di prevedere il *pressure ripple* va superata introducendo l'equazione di governo del volume di mandata. Esso si deforma nel corso dell'ingranamento, e per valutarlo puntualmente occorre sviluppare una routine analoga a quella già implementata per il volume intrappolato. Il volume di controllo è soggetto, oltre che allo *squeeze* geometrico, ai trafilamenti ai volumi sigillati, al drenaggio, al volume intrappolato e alla portata in uscita al circuito di valle. Ne consegue che occorre modificare l'impostazione del sistema ODE, in cui devono comparire assieme tutti i volumi sigillati, il volume di controllo e il volume di mandata. Dovendo risolvere contemporaneamente un numero maggiore di equazioni differenziali, si prevede che richieda un tempo computazionale più elevato. Introducendo la portata in uscita alla mandata, inoltre, il rendimento volumetrico della pompa può essere calcolato per via diretta, con risultati probabilmente più accurati.

Il *running in process* della pompa realizza un profilo di usura interna del casing. Se non è noto per punti può essere simulato direttamente sfruttando il modello attuale. Tale applicazione non è stata approfondita nel presente lavoro di tesi, ma rappresenta un interessante spunto d'applicazione del codice e potrebbe produrre informazioni sull'ottimizzazione della resa del processo.

La distribuzione della *clearance* assiale va determinata attraverso un processo a convergenza che valuti l'inclinazione dei piatti tale per cui le pressioni insistenti sulle due facce abbiano risultanti di forza e momento nulle. Concettualmente è simile alla determinazione dell'eccentricità statica delle ruote svolta per le *clearance* radiali. Il problema va approcciato risolvendo le equazioni di strato limite su una

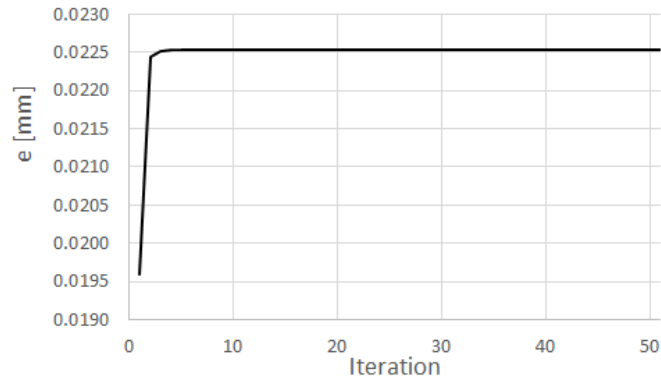
discretizzazione della superficie del piatto, il tutto per iterazioni successive. Parallelamente a queste attività, sarà opportuno introdurre ulteriori casi di studio su pompe di configurazione nota per arricchire il processo di validazione del modello attuale. L'insieme di codici così allestito sarà auspicabilmente utilizzato come strumento d'analisi preliminare di design specifici, affiancandolo a strumenti d'analisi fluidodinamica più avanzati.

Appendice A

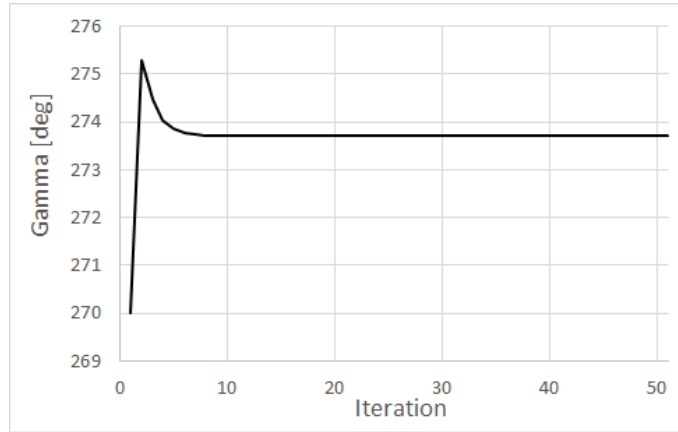
Di seguito il listato completo delle 50 iterazioni per la determinazione della SEP del caso di studio del Capitolo 3.3.

i	e [mm]	Γ [deg]	$err_{rel,e}$	$err_{rel,\Gamma}$
1	0.019600	270.0000		
2	0.022440	275.2940	1.45E-01	1.96E-02
3	0.022522	274.4616	3.66E-03	3.02E-03
4	0.022532	274.0362	4.61E-04	1.55E-03
5	0.022536	273.8513	1.68E-04	6.75E-04
6	0.022538	273.7673	7.31E-05	3.07E-04
7	0.022538	273.7384	2.83E-05	1.06E-04
8	0.022539	273.7198	1.42E-05	6.80E-05
9	0.022539	273.7191	3.26E-06	2.38E-06
10	0.022539	273.7189	2.99E-07	6.88E-07
11	0.022539	273.7188	8.96E-08	3.94E-07
12	0.022539	273.7188	4.31E-08	1.84E-07
13	0.022539	273.7187	2.34E-08	1.12E-07
14	0.022539	273.7185	9.25E-08	6.48E-07
15	0.022539	273.7093	4.52E-06	3.37E-05
16	0.022539	273.7140	8.47E-07	1.73E-05
17	0.022539	273.7107	7.60E-07	1.21E-05
18	0.022539	273.7147	1.29E-06	1.46E-05
19	0.022539	273.7166	1.54E-06	7.00E-06
20	0.022539	273.7176	8.16E-07	3.70E-06
21	0.022539	273.7083	4.37E-06	3.41E-05
22	0.022539	273.7135	1.08E-06	1.91E-05
23	0.022539	273.7066	2.62E-06	2.54E-05
24	0.022539	273.7126	1.89E-06	2.22E-05
25	0.022539	273.7156	2.36E-06	1.08E-05

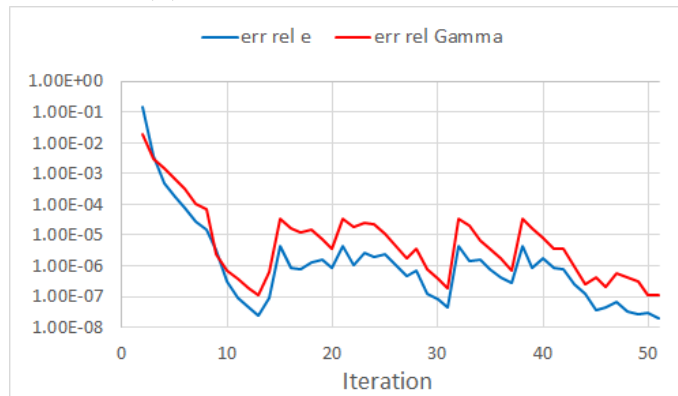
i	e [mm]	Γ [deg]	$err_{rel,e}$	$err_{rel,\Gamma}$
26	0.022539	273.7168	1.08E-06	4.37E-06
27	0.022539	273.7173	4.57E-07	1.71E-06
28	0.022539	273.7183	6.97E-07	3.68E-06
29	0.022539	273.7185	1.25E-07	7.64E-07
30	0.022539	273.7186	8.30E-08	3.68E-07
31	0.022539	273.7186	4.23E-08	1.89E-07
32	0.022539	273.7094	4.51E-06	3.39E-05
33	0.022539	273.7149	1.40E-06	2.01E-05
34	0.022539	273.7167	1.55E-06	6.78E-06
35	0.022539	273.7177	7.83E-07	3.50E-06
36	0.022539	273.7182	4.01E-07	1.79E-06
37	0.022539	273.7184	2.83E-07	7.34E-07
38	0.022539	273.7094	4.43E-06	3.28E-05
39	0.022539	273.7141	8.62E-07	1.71E-05
40	0.022539	273.7163	1.79E-06	8.23E-06
41	0.022539	273.7173	8.60E-07	3.66E-06
42	0.022539	273.7183	7.87E-07	3.44E-06
43	0.022539	273.7185	2.63E-07	9.08E-07
44	0.022539	273.7185	1.21E-07	2.55E-07
45	0.022539	273.7186	3.56E-08	4.24E-07
46	0.022539	273.7186	4.55E-08	2.10E-07
47	0.022539	273.7185	6.60E-08	5.60E-07
48	0.022539	273.7186	3.18E-08	4.11E-07
49	0.022539	273.7185	2.67E-08	3.23E-07
50	0.022539	273.7185	2.81E-08	1.12E-07
51	0.022539	273.7184	1.96E-08	1.07E-07



(a) Modulo dell'eccentricità e .



(b) Direzione dell'eccentricità Γ .



(c) Distanze relative fra iterate successive (scala logaritmica).

Figura A.1: Trend delle iterate nel calcolo della SEP.

Bibliografia

- [1] *Useful information on positive displacement pumps*. URL: <https://www.michael-smith-engineers.co.uk/resources/useful-info/positive-displacement-pumps> (visitato il 21/09/2022).
- [2] Massimo Rundo. “Models for flow rate simulation in gear pumps: A review”. In: *Energies* 10.9 (2017), p. 1261.
- [3] *Useful information on positive displacement pumps*. URL: <https://www.dienerprecisionpumps.com/external-gear-pumps> (visitato il 21/09/2022).
- [4] *Useful information on External Gear Pumps*. URL: <https://www.michael-smith-engineers.co.uk/resources/useful-info/external-gear-pumps> (visitato il 21/09/2022).
- [5] Barbara Zardin. “Modellizzazione numerica e caratterizzazione sperimentale di macchine e componenti oleodinamici”. In: (2008).
- [6] MKPEK Eaton, PS Keogh e KA Edge. “The modelling, prediction, and experimental evaluation of gear pump meshing pressures with particular reference to aero-engine fuel pumps”. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering* 220.5 (2006), pp. 365–379.
- [7] Franco Concli e Carlo Gorla. “Modellazione numerica della lubrificazione di un riduttore ad ingranaggi”. In: *Atti del 45. Convegno Nazionale AIAS 2016, Trieste 7-10 settembre 2016* (2016), pp. 1–17.
- [8] Massimo Rundo e Alessandro Corvaglia. “Lumped parameters model of a crescent pump”. In: *Energies* 9.11 (2016), p. 876.
- [9] M Fabiani et al. “Modeling and simulation of gerotor gearing in lubricating oil pumps”. In: *SAE transactions* 108.3 (1999), pp. 989–1003.
- [10] Francesco Gherardini, Barbara Zardin e Francesco Leali. “A parametric CAD-based method for modelling and simulation of positive displacement machines”. In: *Journal of Mechanical Science and Technology* 30.7 (2016), pp. 3253–3263.

- [11] Leonardo De Benedictis. “Sviluppo di un codice di calcolo per la stima dei trafilementi d’olio attraverso i journal bearing in una pompa a ingranaggi per applicazioni aeronautiche.” Tesi di laurea. Politecnico di Bari, 2021/2022.
- [12] E Richard Booser. *Applied tribology: bearing design and lubrication*. John Wiley & Sons, 2008.
- [13] Emiliano Mucchi, Giorgio Dalpiaz e A Fernandez Del Rincon. “Elastodynamic analysis of a gear pump. Part I: Pressure distribution and gear eccentricity”. In: *Mechanical Systems and Signal Processing* 24.7 (2010), pp. 2160–2179.
- [14] Emiliano Mucchi, Giorgio Dalpiaz e A Rivola. “Elastodynamic analysis of a gear pump. Part II: Meshing phenomena and simulation results”. In: *Mechanical Systems and Signal Processing* 24.7 (2010), pp. 2180–2197.
- [15] Emiliano Mucchi, Giorgio Dalpiaz e A Fernàndez Del Rincòn. “Elasto-dynamic analysis of a gear pump–Part IV: Improvement in the pressure distribution modelling”. In: *Mechanical Systems and Signal Processing* 50 (2015), pp. 193–213.
- [16] G Dalpiaz et al. “Modeling run in process in external gear pumps”. In: *Engineering Systems Design and Analysis*. Vol. 42509. 2006, pp. 927–936.
- [17] Emiliano Mucchi, Gianluca D’Elia e Giorgio Dalpiaz. “Simulation of the running in process in external gear pumps and experimental verification”. In: *Meccanica* 47.3 (2012), pp. 621–637.
- [18] S Mancò e N Nervegna. “Simulation of an external gear pump and experimental verification”. In: *Proceedings of the JFPS International Symposium on Fluid Power*. Vol. 1989. 1. The Japan Fluid Power System Society. 1989, pp. 147–160.
- [19] Massimo Borghi, Barbara Zardin e Emiliano Specchia. “External gear pump volumetric efficiency: Numerical and experimental analysis”. In: *SAE Technical paper* (2009), pp. 1285–1302.
- [20] Alessandro Corvaglia et al. “Evaluation of tooth space pressure and incomplete filling in external gear pumps by means of three-dimensional CFD simulations”. In: *Energies* 14.2 (2021), p. 342.
- [21] Massimo Borghi et al. *Studying the axial balance of external gear pumps*. Rapp. tecn. SAE Technical Paper, 2005.
- [22] Siemens Industry Software S.A.S. Simcenter Amesim. *Contents of the Hydraulic Component Design library*. Siemens Industry Software S.A.S. Lyon, France, 2021.

- [23] Paul W Michael, Hassan Khalid e Thomas Wanke. “An investigation of external gear pump efficiency and stribek values”. In: *SAE Technical Papers* 8 (2012), p. 256.
- [24] Paulina Szwemin e Wieslaw Fiebig. “The influence of radial and axial gaps on volumetric efficiency of external gear pumps”. In: *Energies* 14.15 (2021), p. 4468.