

POLITECNICO DI TORINO

Laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica



Tesi di laurea Magistrale

Modello rotodinamico
di una pompa per vuoto rotativa

RELATORI

Prof. Stefano MARCHESIELLO

Dott. Dario ANASTASIO

Dott. Luca BONMASSAR

Candidato

Gabriele CAMPANA

Dicembre 2022

Ringraziamenti

Colgo l'occasione per esprimere il mio sincero ringraziamento a tutti coloro che hanno contribuito a depositare un tassello nel quadro di questa avventura. A partire da Luca Bonmassar che con affettuosa dedizione mi ha accompagnato dall'inizio alla chiusura del percorso aziendale. Non soltanto per il supporto costante ma per essere stato bussola che direziona sapiente l'intelletto laddove coscienza erra.

Un caloroso ringraziamento è rivolto a Joaquim Girardello-Detoni, Stefano Spagnolo e Carmelo Quartarone per il pregio dei loro consigli e la premurosità del loro sostegno. E ancora ad Andrea Lepore, Giuseppe De Palma e Giovanni Iannucci dedico la mia gratitudine per la loro sincera disponibilità nonché gioviale simpatia, capace di stemperare i momenti più grigi.

In Agilent Technologies ho avuto modo di fare esperienza di un modello di realtà aziendale attento all'individuo, prima di ogni obiettivo. Qui ho potuto godere di alcuni dei valori genuini della famiglia; famiglia di cui per questi sei fuggenti mesi, nonostante incertezze e timidezze personali, mi sono sentito di far parte. Un ringraziamento particolare a Chiara Paolini, per esserne stata vivida testimonianza anche nelle occasioni di confronto che mi sono state dedicate.

Cosa mi porterò nello zaino per il futuro? Sicuramente questo: l'impegno a fare propri i valori di unità, fratellanza e solidarietà per dividerli con chi nel cammino incontrerò, con la speranza di lasciare orme, non ombre nel percorso della vita.

Sentita riconoscenza per il Professor Stefano Marchesiello e il Dottor Dario Anastasio, i quali mai hanno lasciato che questa barca navigasse in mari desolati.

Agli amici che si sono avvicinati lungo la strada. Per i momenti di condivisione; per essere stati inconsapevole luce quando il buio costellava le mie giornate. A loro la responsabilità di essere ciascuno depositario di un consistente frammento della mia coscienza.

Alla mia famiglia che, nella gioia e nel dolore, ha delineato i contorni di ciò che sono. Per lo spirito di sacrificio di cui si è fatta portavoce instancabile: per il mistero di questo amore che giorno per giorno mi è stato donato. Per la capacità di infondere in me la sensibile curiosità che con strenua gioia mai smetterò di testimoniare. E per la consapevolezza che del bene e del male, nel male e nel bene, tutto si tiene.

Sommario

Con la presente attività di tesi ci si pone l'obiettivo di caratterizzare dinamicamente il rotore della pompa rotativa a palette MS40+ per la generazione del vuoto. Prodotto storico della azienda Agilent Technologies, la pompa MS40+ trova largo impiego in dispositivi per la chimica analitica e negli anni sempre maggiore attenzione è stata posta sulle possibilità di aggiornamento della componentistica meccanica, con l'obiettivo di puntare verso un alleggerimento strutturale, una maggiore affidabilità e durata dei costituenti, un migliore sfruttamento delle risorse nonché alla crescita prestazionale. Di conseguenza la modellizzazione agli elementi finiti della macchina e l'estrazione dei parametri modali caratteristici hanno assunto un ruolo di primo piano nell'ambito della ricerca aziendale. Non a caso particolare attenzione si concentrerà su cinque degli elementi cardine dell'analisi rotodinamica: i diagrammi di Campbell, le forme modali, i fattori di partecipazione modale, gli eventuali grafici di stabilità e la risposta ad uno squilibrio assunto.

Ai fini semplificativi si trascurerà la presenza delle palette, l'accoppiamento rotore-statore, così come il diagramma di pressioni del fluido nella camera di pompaggio, fermo restando che questi possono essere degli utili spunti di partenza per eventuali successive attività di sviluppo.

L'analisi viene condotta per complicazioni crescenti a partire da un modello semplificato dell'albero su supporti rigidi, comprensivo delle boccole e del corpo pompante rotorico ma privato di cave e fori. Man mano l'aggiunta di fori, cave, motore con relativi accessori e cuscinetti lubrificati concorre ad ottenere un modello sempre più realistico del sistema, permettendo allo stesso tempo di isolare passo-passo gli effetti derivanti dall'introduzione di ciascun termine, mettendo in luce la convenienza di una eventuale modifica in base all'entità del loro contributo.

La trattazione è suddivisa in cinque capitoli. Il primo è dedicato a delineare i fondamenti teorici del metodo agli elementi finiti monodimensionali e tridimensionali in campo rotodinamico, elementi che risultano essenziali nell'applicazione delle tecniche oggetto del secondo capitolo: in esso quattro differenti metodi procedurali vengono sondati e applicati ad un rotore a tre dischi. A tal scopo due dei modelli prevedranno il ricorso al software Matlab mentre Ansys Workenckh è prerogativa dei restanti. Mediante analisi comparata dei diagrammi di Campbell, complicazione tecnica, tempi computazionali uomo-macchina e limiti di validità vengono scelte le tecniche più consone alla modellizzazione della pompa in concordanza con le possibilità aziendali. Pompa, le cui caratteristiche essenziali verranno presentate nel terzo capitolo, in modo da preparare i fondamenti per l'analisi vera e propria del rotore, oggetto del quarto capitolo. Quest'ultimo, decisamente più corposo e significativo, affronta le complicazioni crescenti dividendole in quattro casi che prevedono, a partire dal primo, relativo al rotore semplificato, l'aggiunta di fori, cave e corpo motore (con elementi connessi) rispettivamente. Tra questi il primo caso è stato modellizzato sia mediante software Matlab con elementi trave sia mediante Ansys

Workbench con elementi solidi, mettendo in luce gli aspetti di base che caratterizzano il rotore anche nelle successive casistiche e delineando interessanti differenze tra modello 1D e 3D. Completa la risposta in frequenza dello stesso ad uno squilibrio assunto. La trattazione in merito ai cuscinetti lubrificati in sostituzione ai supporti rigidi dei precedenti modelli merita una dissertazione dedicata. Partendo dalla definizione dei parametri essenziali, delle ipotesi semplificative e delle equazioni di governo del fenomeno di sostentamento oleodinamico, ci si sofferma sul confronto tra diverse metodologie per l'ottenimento delle matrici di rigidezza e smorzamento da introdurre nel modello del rotore: fra le proposte la procedura attuata con il software Ansys APDL è quella che meglio risponde al compromesso tra accuratezza e rapidità di analisi integrandosi bene col modello Ansys Workbench a costo di alcune doverose ulteriori considerazioni. Conclude l'analisi modale del rotore completo.

Indice

Indice delle figure	VII
Indice delle tabelle	XII
Nomenclatura	XIII
1. Introduzione teorica	1
1.1 L'analisi agli elementi finiti in ambito rotodinamico	1
1.2 Il metodo FE monodimensionale	4
1.3 Il metodo della matrice di rigidezza dinamica	14
1.4 Il metodo FE tridimensionale	18
2. Validazione del modello semplificato di un rotore a 3 dischi	21
2.1 Inquadramento del problema	21
2.2 Metodo della matrice di rigidezza dinamica	22
2.3 Metodo agli elementi finiti monodimensionali (Matlab)	25
2.4 Metodo agli elementi finiti monodimensionali (Ansys)	26
2.5 Metodo agli elementi finiti tridimensionali (Ansys)	27
2.6 Risultati e confronto	30
2.7 Considerazioni e commenti	36
3. Descrizione della pompa MS40	39
3.1 Caratteristiche generali	39
4. Il modello FE della pompa MS40	49
4.2 Caso 1: rotore pieno	50
4.2.1 Il modello Matlab	50
4.2.2 Il modello Ansys 3D	52
4.2.3 Risultati	57
4.2.4 Considerazioni e commenti	60
4.2.5 Risposta allo squilibrio statico	64
4.3 Caso 2: rotore pieno - con fori	71
4.4 Caso 3: rotore con cave e fori	73

4.5	Caso 4: rotore con cave, fori e corpo motore	77
4.5.1	Risultati e commenti	83
5.	Il modello di vincolo: cuscinetti lubrificati	86
5.1	Introduzione teorica	86
5.1.1	In merito alla pressione del lubrificante: condizioni al contorno	94
5.1.2	Ansys APDL 2D: l'elemento COMBI214	97
5.1.3	Modello analitico per l'approssimazione di cuscinetto corto	101
5.1.4	Metodo alle differenze finite con perturbazione infinitesima	103
5.2	Confronto	103
5.2.1	Osservazioni e commenti	116
5.3	Applicazione al rotore della pompa MS40	120
5.3.1	Risultati	122
5.3.2	Commenti	126
	Conclusioni	127
	Appendice	129
	Bibliografia	146

Indice delle figure

Capitolo 1

Figura 1.1	Trave rettilinea. (a) rappresentazione sintetica; (b) forze e spostamenti generalizzati agenti su una generica sezione trasversale [2]	2
Figura 1.2	Influenza della deformazione a taglio sull'ortogonalità delle sezioni trasversali rispetto alla deformata. (a) Trave di Eulero-Bernoulli. (b) Trave di Timoshenko [2]	4
Figura 1.3	Elemento trave [rieditato da [2]]	6
Figura 1.4	Elemento BEAM188 [5]	13
Figura 1.5	Due esempi di albero rotante con relativa matrice di rigidezza. (a) Incastro – supporto elastico isotropo all'estremo libero; (b) incastro-disco all'estremo libero [6]	17
Figura 1.6	Elemento SOLID186 con le relative opzioni geometriche [editato da [5]]	19

Capitolo 2

Figura 2.1	Modello del rotore a 3 dischi: caratteristiche e proprietà	22
Figura 2.2	Schema semplificato del rotore a 3 dischi con la relativa numerazione sequenziale degli elementi e dei nodi	23
Figura 2.3	Mesh del rotore a 3 dischi con elementi monodimensionali	27
Figura 2.4	Modello CAD Solidworks del rotore a 3 dischi con la suddivisione del solido in parti	29
Figura 2.5	Visualizzazione wireframe del rotore a 3 dischi con le relative point masses stanziate come "remote points"	29
Figura 2.6	Mesh del rotore a 3 dischi con elementi Hex20 e Wed15 realizzata mediante sweep method	29
Figura 2.7	Diagramma di Campbell dei primi 3 modi BW e FW flessionali: confronto tra metodo della matrice di rigidezza dinamica e FEM Ansys con elementi monodimensionali	31
Figura 2.8	Diagramma di Campbell dei primi 3 modi BW e FW flessionali: confronto tra metodo FEM Matlab con elementi monodimensionali e FEM Ansys con elementi tridimensionali	31
Figura 2.9	Forma modale relativa al modo 1 flessionale	33
Figura 2.10	Forma modale relativa al modo 2 flessionale	33
Figura 2.11	Forma modale relativa al modo 3 flessionale	33
Figura 2.12	Modello torsionale analitico costituito da alberi non inerti e dischi rigidi	34

Figura 2.13	Diagramma di Campbell delle frequenze naturali relative ai primi 3 modi torsionali	35
Figura 2.14	Confronto delle velocità di precessione flessionali dei 4 modelli analizzati	35

Capitolo 3

Figura 3.1	Fasi di funzionamento di una pompa rotativa per vuoto [15]	40
Figura 3.2	Pompa MS40+ [14]	41
Figura 3.3	Curve pressione-velocità di pompaggio a 1200-1500 rpm [14]	41
Figura 3.4	Due dei prodotti Agilent che includono la pompa MS40+: "single quadrupole LC/MSD system" (a) e "7850 ICP-MS" (b)	42
Figura 3.5	Vista isometrica fronte e retro della pompa MS40+ [14]	43
Figura 3.6	Vista in sezione frontale della pompa MS40+ [14]	43
Figura 3.7	Vista in sezione laterale della pompa MS40+ [14]	44
Figura 3.8	Vista esplosa del sistema rotante della pompa MS40+	45
Figura 3.9	Lamelle (a & b) e supporto (c) per la laminazione allo scarico [14]	46
Figura 3.10	Valvola di antiritorno [14]	46
Figura 3.11	Sezione del serbatoio [14]	47
Figura 3.12	Galleggiante e valvola chiusa e aperta [14]	47

Capitolo 4

Figura 4.1	Sezione dell'albero (caso 1) con supporti rigidi	52
Figura 4.2	Albero (caso 1) con supporti rigidi. Modello CAD (a); Mesh (b)	53
Figura 4.3	Mesh (caso 1): element quality	54
Figura 4.4	Mesh (caso 1): aspect ratio	54
Figura 4.5	Mesh (caso 1): jacobian ratio	54
Figura 4.6	Mesh (caso 1): warping ratio	55
Figura 4.7	Mesh (caso 1): parallel deviation	55
Figura 4.8	Mesh (caso 1): maximum corner deviation	55
Figura 4.9	Mesh (caso 1): skewness	56
Figura 4.10	Mesh (caso 1): orthogonal quality	56
Figura 4.11	Mesh (caso 1): vista frontale e laterale rispettivamente	56
Figura 4.12	Campbell diagram: Matlab 1D - Ansys 3D delle prime 4 velocità FW e BW	58
Figura 4.13	Confronto delle prime 4 forme modali ricavate mediante software Ansys (per $\Omega = 0$) e Matlab ($\Omega = 0 \div 50$ Hz): vista laterale	59
Figura 4.14	Vista isometrica delle prime 4 forme modali forward ricavate mediante software Ansys (per $\Omega = 0$)	60

Figura 4.15	Schema dell'albero nel rispetto della regola dei 45°	62
Figura 4.16	Diagramma di Campbell: Matlab 1D - Ansys 3D delle prime 4 velocità FW e BW a seguito dell'applicazione della regola a dei 45°	63
Figura 4.17	Confronto Matlab 1D – Matlab 1D (regola dei 45°): diagramma delle prime 4 forme modali forward e backward ottenute per il campo di velocità 0-50 Hz	63
Figura 4.18	Massima eccentricità residua funzione della massima velocità operativa per gradi di qualità nel range [0,4 ÷ 630] m/s [2]	65
Figura 4.19	Diagramma di Campbell Matlab 1D (regola dei 45°) (a) e forme modali delle prime 3 velocità FW e BW in un range [0-6000 Hz] per mettere in risalto le prime 3 velocità critiche e l'influenza della velocità di rotazione sui modi di vibrare	67
Figura 4.20	Risposta allo squilibrio statico applicato in mezzeria del corpo pompa cilindrico: deformata per i limiti di operatività del dispositivo - modello Matlab 1D (regola dei 45°)	68
Figura 4.21	Risposta allo squilibrio statico applicato in mezzeria del corpo pompa cilindrico: deformata per i limiti di operatività del dispositivo - modello Ansys 3D: 20 Hz (a) – 30 Hz (b)	68
Figura 4.22	Recettanza dell'estremo destro dell'albero calcolata rispetto allo squilibrio statico applicato in mezzeria del corpo pompa cilindrico	69
Figura 4.23	Risposta in frequenza: spostamento in corrispondenza dell'estremo sinistro	69
Figura 4.24	Risposta in frequenza: spostamento in corrispondenza della mezzeria del corpo pompa cilindrico	70
Figura 4.25	Risposta in frequenza: spostamento in corrispondenza dell'estremo destro	70
Figura 4.26	Albero (caso 2) con fori equivalenti: sezione longitudinale	71
Figura 4.27	Diagramma di Campbell delle prime 4 velocità FW e BW: Caso 1 (Ansys 3D, senza fori) e Caso 2 (Ansys 3D, con fori) a confronto	72
Figura 4.28	Sezione frontale della pompa suddivisa in settori identici spazati di 120°	75
Figura 4.29	Diagramma di Campbell delle prime 4 velocità FW e BW e modi torsionali interposti: Caso 2 (Ansys 3D, con fori) e Caso 3 (Ansys 3D, con fori e cave) a confronto	75
Figura 4.30	Vista isometrica della prima forma modale torsionale (BW) non rigida ricavata mediante software Ansys (per $\Omega = 0$)	76
Figura 4.31	Vista isometrica del rotore relativo al motore elettrico	78
Figura 4.32	Vista isometrica del rotore semplificato relativo al motore elettrico	80
Figura 4.33	Sezione in vista isometrica del rotore semplificato relativo al motore elettrico con indicazione delle tre regioni di divisione rispetto al materiale	80
Figura 4.34	Vista isometrica del modello albero-corpo pompa-motore originale	81
Figura 4.35	Vista isometrica del modello albero-corpo pompa-motore semplificato completo di accessori	81
Figura 4.36	Mesh del modello albero-corpo pompa-motore semplificato	82
Figura 4.37	Mesh del modello albero-corpo pompa-motore semplificato: sezione laterale	82

Figura 4.38	Diagramma di Campbell delle prime 4 velocità FW e BW (modi torsionali, assiali e accoppiati interposti): Caso 3 (Ansys 3D, con fori e cave) e Caso 4 (Ansys 3D, con fori, cave e corpo motore) a confronto	83
Figura 4.39	Deformazioni totali ottenute dall'analisi "Static structural". Indicazione del punto di massima deformazione (cerchiato in rosso), della posizione dei cuscinetti 1 e 2 e del centro di massa G	85

Capitolo 5

Figura 5.1	Avviamento del cuscinetto idrodinamico [rieditato da [21]]	87
Figura 5.2	Rappresentazione schematica di un cuscinetto oleodinamico semplice: parametri geometrici	87
Figura 5.3	Regimi di lubrificazione: stato del lubrificante interposto tra le superfici di interfaccia. (a) Lubrificazione idrodinamica, (b) lubrificazione parziale, (c) lubrificazione "boundary" [25]	93
Figura 5.4	Diagramma a barre del coefficiente d'attrito per diverse condizioni di lubrificazione [25]	93
Figura 5.5	Tipologie di condizioni al contorno di pressione per il cuscinetto circolare completo (profilo di spessore del meato fluido incluso) [23]	96
Figura 5.6	Diagramma delle pressioni: condizione di Sommerfeld (a) e Reynolds (b) a confronto [rieditato da [21]]	96
Figura 5.7	Distribuzione delle pressioni attorno alla superficie circolare del cuscinetto [5]	97
Figura 5.8	Caratteristiche dell'elemento COMBI214 [5]	98
Figura 5.9	Parametri caratterizzanti l'elemento COMBI214. Regioni di pressione e cavitazione (a); Componenti di spostamento e velocità del centro-perno (b) [editato da [28]]	100
Figura 5.10	Eccentricità in funzione del numero di Sommerfeld per $L/D = 1/8$	105
Figura 5.11	Angolo di assetto in funzione del numero di Sommerfeld per $L/D = 1/8$	105
Figura 5.12	Fattori di rigidezza funzione del numero di Sommerfeld ($L/D = 1/8$)	106
Figura 5.13	Fattori di smorzamento funzione del numero di Sommerfeld ($L/D = 1/8$)	106
Figura 5.14	Eccentricità in funzione del numero di Sommerfeld per $L/D = 1/2$	107
Figura 5.15	Angolo di assetto in funzione del numero di Sommerfeld per $L/D = 1/2$	107
Figura 5.16	Fattori di rigidezza funzione del numero di Sommerfeld ($L/D = 1/2$)	108
Figura 5.17	Fattori di smorzamento funzione del numero di Sommerfeld ($L/D = 1/2$)	108
Figura 5.18	Eccentricità in funzione del numero di Sommerfeld per $L/D = 1$	109
Figura 5.19	Angolo di assetto in funzione del numero di Sommerfeld per $L/D = 1$	109
Figura 5.20	Fattori di rigidezza funzione del numero di Sommerfeld ($L/D = 1$)	110
Figura 5.21	Fattori di smorzamento funzione del numero di Sommerfeld ($L/D = 1$)	110

Figura 5.22	Diagrammi orbitali ottenuti da analisi transiente in Ansys APDL per il caso $L/D = 1$	111
Figura 5.23	Diagrammi di velocità ottenuti da analisi transiente in Ansys APDL per il caso $L/D = 1$	111
Figura 5.24	Diagrammi orbitali generati mediante analisi transiente in Ansys APDL per il caso $L/D = 1$. Diagrammi non scalati	112
Figura 5.25	Diagrammi di velocità generati mediante analisi transiente in Ansys APDL per il caso $L/D = 1$	112
Figura 5.26	Diagrammi di forza rispetto al tempo ottenuti tramite analisi transiente in Ansys APDL per il caso $L/D = 1$. Range di ascissa: $t = [0; 0.8] s$; range di ordinata: $F_x, F_y = [-35; 5] N$	113
Figura 5.27	Diagrammi della massima pressione del fluido rispetto al tempo ottenuti tramite analisi transiente in Ansys APDL per il caso $L/D = 1$. Range di ascissa: $t = [0; 0.8] s$; range di ordinata: $p_{max} = [0; 18e4] Pa$	113
Figura 5.28	Diagrammi orbitali generati mediante analisi transiente in Ansys APDL per il caso $L/D = 1$ (instabile). Diagrammi non scalati. Ascissa e ordinata sono adimensionalizzati	114
Figura 5.29	Diagrammi di velocità generati mediante analisi transiente in Ansys APDL per il caso $L/D = 1$ (instabile). Ascissa e ordinata sono in m/s	114
Figura 5.30	Diagrammi di forza rispetto al tempo da analisi transiente in Ansys APDL nel caso $L/D = 1$ (instabile). Range di ascissa: $t = [0; 0.4] s$; range di ordinata: $F_x, F_y = [-800; 600] N$	115
Figura 5.31	Diagrammi della massima pressione del fluido rispetto al tempo da analisi transiente in Ansys APDL nel caso $L/D = 1$ (instabile). Range di ascissa: $t = [0; 0.4] s$; range di ordinata: $p_{max} = [0; 5e6] Pa$	115
Figura 5.32	Diagrammi di stabilità per cuscinetto corto (a) [Rieditato da [30]] e cuscinetto lungo (b) [Rieditato da [31]]	116
Figura 5.33	Diagramma di Campbell dimostrativo dei fenomeni di "oil whip" e "oil whirl" [4]	119
Figura 5.34	Diagramma di Campbell delle prime 4 velocità FW e BW (modi torsionali, assiali e accoppiati interposti): Caso 4 (Ansys 3D) con supporti rigidi e Caso 4 (Ansys 3D) con cuscinetti lubrificati a confronto	124
Figura 5.35	Diagramma di Campbell del Caso 4 (Ansys 3D) con supporti rigidi e Caso 4 (Ansys 3D) con cuscinetti lubrificati: dettaglio della regione $\omega = [0; 50] Hz$	124
Figura 5.36	Diagramma di stabilità (Caso 4, con cuscinetti lubrificati)	125
Figura 5.37	Due forme modali caratteristiche della presenza dei cuscinetti lubrificati: Modo conico attorno al cuscinetto 2 (4° modo FW): $10 \div 15 Hz$ (a); Modo conico attorno al cuscinetto 1 (5° modo FW): $10 \div 15 Hz$ (b)	125

Indice delle tabelle

Capitolo 1

Tabella 1.1	Gradi di libertà e forze generalizzate funzione del comportamento della trave	2
Tabella 1.2	Fattori di forma funzione della sezione trasversale. Sono riportate le espressioni per la sezione circolare piena e cava [2]	4

Capitolo 2

Tabella 2.1	Confronto delle frequenze naturali ($\Omega = 0$) per i primi 3 modi flessionali	32
Tabella 2.2	Confronto delle Ω_{crit} per i primi 3 modi FW	33
Tabella 2.3	Confronto delle frequenze naturali relative ai primi 3 modi torsionali	34

Capitolo 3

Tabella 3.1	Specifiche del motore	48
Tabella 3.2	Specifiche dell'inverter	48

Capitolo 4

Tabella 4.1	Tabella delle prime 4 frequenze proprie per $\Omega = 0$	57
Tabella 4.2	Fattori di partecipazione modale riferiti alle traslazioni lungo x e y ($\Omega = 0$)	58
Tabella 4.3	Regola dei 45°: tabella delle prime 4 frequenze proprie per $\Omega = 0$	62
Tabella 4.4	Grado di qualità G selezionato tratto dalle tabelle ISO 1940 [2]	65
Tabella 4.5	Tabella delle prime 3 velocità critiche flessionali	65
Tabella 4.6	Materiali caratteristici del rotore del motore elettrico	78
Tabella 4.7	Proprietà del materiale Al-Fe-Si equivalente	79
Tabella 4.8	Tabella delle reazioni vincolari relative ai cuscinetti 1 e 2 per il Caso 4	84

Capitolo 5

Tabella 5.1	Tabella dei metodi presi in esame per ciascuna tipologia di cuscinetto	103
Tabella 5.2	Tabella del test points considerato	123
Tabella 5.3	Tabella di sintesi relativa al cuscinetto 1	123
Tabella 5.4	Tabella di sintesi relativa al cuscinetto 2	123

Nomenclatura

0	matrice di zeri
a_{ij}	coefficienti analitici della matrice di rigidità del cuscinetto lubrificato
A	area della sezione trasversale
\mathcal{A}	matrice dinamica (nello spazio degli stati)
b_{ij}	coefficienti analitici della matrice di smorzamento del cuscinetto lubrificato
B	parametro di sintesi
\mathbf{B}	matrice delle derivate opportune delle funzioni di forma
\mathbf{B}	matrice del guadagno in ingresso (nello spazio degli stati)
BW	“Backward Whirl”: precessione all’indietro
c	gioco radiale
C_{ij}	coefficienti della matrice di smorzamento del cuscinetto lubrificato
C_n, C_r	matrice di smorzamento viscoso non rotante, rotante
C_{jb}	matrice di smorzamento del cuscinetto oleodinamico
CAD	“Computer Aided Design”: progettazione assistita dal calcolatore
d_1, d_2	distanza del baricentro del rotore dal cuscinetto 1 e 2 rispettivamente
d_{tot}	distanza tra due cuscinetti ad asse coincidente
d_i, d_o	diametro interno, esterno della sezione trasversale dell’albero
D	diametro della boccia del cuscinetto lubrificato
e	eccentricità del cuscinetto lubrificato
E	modulo elastico del materiale
\mathbf{E}	matrice di rigidità del materiale
f_n, f_T	frequenza naturale flessionale per $\Omega = 0$, frequenza naturale torsionale
f_{set}	frequenza di settaggio
$\mathbf{f}, \mathbf{f}_{el}, \mathbf{f}_L, \mathbf{f}_G$	vettore delle forze generalizzate distribuite, nodali dell’elemento, locale, globale
F_x, F_y, F_z	sforzo di taglio in direzione x, y, sforzo assiale
FDM-IFP	“Finite Difference Method – Infinitesimal Perturbation”: metodo alle differenze finite – perturbazione infinitesima
FE	“Finite Elements”: elementi finiti
FEM	“Finite Elements Method”: metodo agli elementi finiti
FW	“Forward Whirl”: precessione in avanti
G	modulo di taglio tipico del materiale, grado di qualità relativo allo squilibrio
\mathbf{G}	matrice giroscopica totale
\mathbf{G}_{el}	matrice giroscopica dell’elemento
h	spessore del meato d’olio nel cuscinetto lubrificato
H	spessore del meato adimensionalizzato rispetto al gioco radiale
H_{ij}	recettanza i-j-esima
I_x, I_y, I_z	momento di inerzia (di massa) concentrato rispetto all’asse x, y, z
\mathbf{I}	matrice identità
J'_p, J_p, J_z	momento d’inerzia (di area) torsionale, polare, rispetto a z

J_t, J_x, J_y, J_d	momento di inerzia (di area) trasversale generico, trasversale rispetto a x, y, diametrale
k, k_x, k_y, k_z	rigidezza concentrata generica, lungo x, y, z
K_{ij}	coefficienti della matrice di rigidezza del cuscinetto lubrificato
\mathbf{K}	matrice di rigidezza totale
\mathbf{K}_{dyn}	matrice di rigidezza dinamica
$\mathbf{K}_{el}, \mathbf{K}_L, \mathbf{K}_G$	matrice di rigidezza dell'elemento, locale, globale
\mathbf{K}_{jb}	matrice di rigidezza del cuscinetto oleodinamico
\mathbf{K}_g	matrice di rigidezza geometrica
\mathbf{K}_Ω	matrice di rigidezza centrifuga
\mathbf{K}_r''	matrice di smorzamento isteretico
\mathbf{K}_{molla}	matrice di rigidezza della molla
l	lunghezza trave o tratto di albero
L	lunghezza totale dell'albero o del cuscinetto lubrificato
m	massa totale del rotore
m_i	massa relativa alla sola quota parte di peso che grava sul cuscinetto i-esimo
M	massa concentrata
M_x, M_y, M_z	momento flettente attorno all'asse x, y, momento torcente
M_{eff}, M_{tot}	massa effettiva coinvolta, massa totale della struttura
M^*	massa del corpo squilibrato
\mathbf{M}	matrice di massa totale
\mathbf{M}_{conc}	matrice di massa di un corpo rigido concentrato al nodo
$\mathbf{M}_{el}, \mathbf{M}_L, \mathbf{M}_G$	matrice di massa dell'elemento, locale, globale
n_{el}	numero di elementi della struttura
n_m	numero di modi calcolati
n_Ω	numero di velocità di rotazione considerate nel modello
$nbcyc$	numero di rotazioni del perno che si sceglie di calcolare
n°	numero del test point
N	frequenza di rotazione in rpm del rotore
\mathbf{N}	matrice delle funzioni di forma
p	pressione dell'olio nel cuscinetto lubrificato
p_0	pressione ambiente
p_{max}	pressione massima dell'olio lungo la circonferenza del cuscinetto
P	peso totale del rotore, potenza della pompa
$PertInc$	perturbazione adimensionale applicata per il calcolo dei parametri di rigidezza e smorzamento
\mathbf{q}	vettore delle coordinate generalizzate
\mathbf{q}_C	vettore delle coordinate x_C, y_C del centro-perno (o centro-albero)
\mathbf{q}_G	vettore delle coordinate generalizzate della struttura
$\bar{\mathbf{q}}$	vettore delle coordinate complesse flessionali generalizzate
Q	portata mandata dalla pompa
\mathbf{Q}	vettore delle coordinate generalizzate reali della struttura
\mathbf{Q}_F	vettore delle forze F_x, F_y applicate dal fluido al centro-perno (o centro-albero)
R	raggio della boccola del cuscinetto lubrificato
R_b, R_j	raggio di perno e boccola del cuscinetto lubrificato

\mathbf{R}, \mathbf{R}'	matrice di rotazione dell'elemento, espansa
RVP	"Rotary Vane Pump": pompa rotativa a palette
\bar{s}	coordinata complessa che raccoglie assieme gli spostamenti x e y
S	numero di Sommerfeld
S_s	numero di Ocvirik (numero di Sommerfeld modificato)
t	Tempo
dt	passo di discretizzazione temporale
Δt	tempo computazionale
T_{film}	temperatura del film d'olio
T_{olio}	temperatura dell'olio al serbatoio
Θ_{inc}	angolo di integrazione della pressione lungo la circonferenza del perno
u_x, u_y, u_z	spostamento lungo x, y, z
\mathbf{u}	vettore degli spostamenti generalizzati, vettore degli input nello spazio degli stati
V_G	velocità periferica del centro di massa
W, W_1, W_2	carico agente sul cuscinetto generico, 1, 2
x_C, x_C^*	spostamento del centro-perno o centro-albero lungo x, spostamento adimensionalizzato rispetto al gioco radiale
y_C, y_C^*	spostamento del centro-perno o centro-albero lungo y, spostamento adimensionalizzato rispetto al gioco radiale
\bar{z}	coordinata assiale del cuscinetto adimensionalizzata rispetto alla lunghezza
\mathbf{z}	vettore degli stati
γ_x	angolo di deformazione a taglio
Γ_x, Γ_y	fattore di partecipazione modale rispetto a x, y
ε	eccentricità del cuscinetto lubrificato adimensionalizzata rispetto al gioco radiale
ε_{rel}	errore relativo
ε^*	eccentricità del corpo squilibrato
ε_{max}	massima eccentricità ammessa alla massima velocità di rotazione del rotore
ϵ	vettore delle deformazioni
θ	coordinata angolare del cuscinetto
θ^*	angolo limite del meato fluido
λ	parametro caratteristico del cuscinetto
$\bar{\lambda}_k$	autovalore complesso k-esimo
μ	viscosità dinamica dell'olio
ν	coefficiente di Poisson del materiale, viscosità cinematica dell'olio
ρ	densità del materiale
σ_k	tasso di decadimento (parte reale di $\bar{\lambda}_k$)
ϕ	angolo di assetto del cuscinetto lubrificato
ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z	rotazione attorno all'asse x, y, z
$\bar{\phi}$	angolo complementare all'angolo di assetto ϕ
Φ	rapporto flessibilità a flessione / flessibilità a taglio della trave
Φ_k	autovettore k-esimo
χ	fattore di forma della sezione trasversale, squilibrio di coppia
χ_x, χ_y, χ_z	rigidezza rotazionale concentrata rispetto all'asse x, y, z

ω, ω_k	frequenza di precessione, frequenza di precessione k-esima (parte immaginaria di $\bar{\lambda}_k$)
ω_S	parametro di velocità (o parametro adimensionale) del cuscinetto
Ω	velocità di rotazione del rotore, velocità relativa perno-boccola
Ω_b	velocità dell'albero o perno
Ω_m	velocità media tra boccola e perno (o albero)
Ω_j	velocità di rotazione j-esima dell'albero, velocità della boccola
$\Omega_{crit}, \Omega_{max}$	velocità critica, massima velocità operativa
\Im	parte immaginaria
\Re	parte reale

Capitolo 1

Introduzione teorica

1.1 L'analisi agli elementi finiti in ambito rotodinamico

Il presente capitolo è volto a delineare le caratteristiche dei metodi attuati per la modellizzazione rotodinamica. Nel campo degli elementi finiti (definiti con l'acronimo "FE" a indicare "Finite Element"), in base al numero di coordinate geometriche che li caratterizzano, tre sono le tipologie capaci di fornire un'adeguata trattazione di componenti rotanti assialsimmetrici:

- Elementi monodimensionali: garantiscono rapidità di calcolo con buoni risultati in termini di accuratezza, al costo di una semplificazione del modello dal 3D al 1D. Essi affondano le radici nella teoria delle travi.
- Elementi bidimensionali: rappresentano un buon compromesso tra il caso 1D e 3D, combinando buona accuratezza e basso tempo computazionale con un tempo di preprocessing medio.
- Elementi tridimensionali: ottima accuratezza e un tempo di preprocessing basso rendono questi elementi particolarmente utilizzati. Tuttavia il tempo computazionale non indifferente frena il loro utilizzo sconsiderato. Essi permettono di trattare, sotto opportune condizioni, anche rotori non-assialsimmetrici.

Tra questi, primo fra tutti viene richiamato il metodo agli elementi finiti applicato alla teoria delle travi, seguito dal metodo della matrice di rigidezza dinamica sempre nel caso unidimensionale, per concludere con un accenno agli elementi finiti 3D in ambiente Ansys Workbench [1]. La discussione in merito agli elementi bidimensionali è invece esclusa dagli interessi della tesi. Entrambe le trattazioni per il caso monodimensionale non possono prescindere dalle

caratteristiche che contraddistinguono la trave, motivo per cui vale la pena farne un breve richiamo.

Nella teoria del continuo lineare elastico unidimensionale la trave viene definita come un solido in cui una dimensione prevale sulle altre. In virtù delle ipotesi alla base del modello essa ha 6 gradi di libertà rigidi (3 traslazioni e 3 rotazioni) a cui corrispondono altrettante forze generalizzate. Tutte le sue proprietà possono essere espresse rispetto alla coordinata assiale e ogni sezione trasversale è considerata come un corpo rigido con spessore assiale trascurabile. Spostamenti e rotazioni devono essere piccoli mentre le tensioni normali non assiali trascurabili al fine di rientrare nella linearità. Per gli scopi della trattazione si considera unicamente il caso di trave ad asse rettilineo (non svergolata), con due piani di simmetria con orientazione costante lungo l'asse, fra loro perpendicolari e normali agli assi x e y in modo da avere il disaccoppiamento tra dinamica assiale, torsionale e flessionale nei piani xz e yz (vedi Figura 1.1). Infine si considera la circolarità o anularità della sezione, prismaticità, isotropicità e omogeneità (costanza delle proprietà del materiale) della stessa.

I gradi di libertà possono essere riferiti alla coordinata assiale z della trave. Nella Figura 1.1 ne è rappresentato uno schema semplificato col sistema di riferimento mentre la Tabella 1.1 mostra la relazione tra lo spostamento, la forza generalizzata e il moto associato.

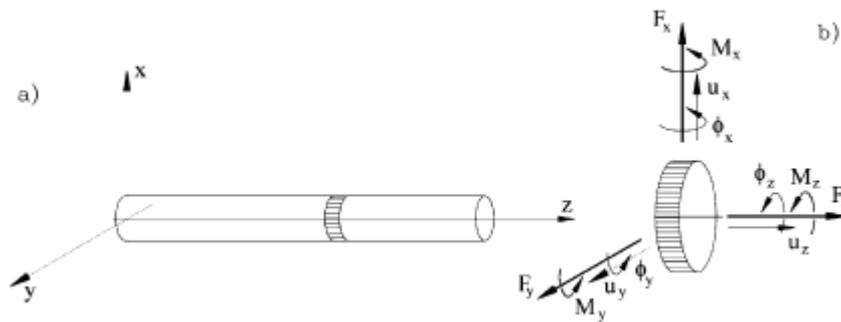


Figura 1.1 Trave rettilinea. (a) rappresentazione sintetica; (b) forze e spostamenti generalizzati agenti su una generica sezione trasversale [2]

Comportamento	Grado di libertà		Forze generalizzate	
Assiale	Spostamento	u_z	Sforzo assiale	F_z
Torsionale	Rotazione	ϕ_z	Momento torsionale	M_z
Flessionale (piano XZ)	Spostamento	u_x	Sforzo di taglio Momento flettente	F_x
	Rotazione	ϕ_y		M_y
Flessionale (piano YZ)	Spostamento	u_y	Forza di taglio Momento flettente	F_y
	Rotazione	ϕ_x		M_x

Tabella 1.1 Gradi di libertà e forze generalizzate funzione del comportamento della trave

Il lavoro di tesi si concentrerà sul comportamento flessionale, essendo questo maggiormente critico nella rotodinamica, ma non si esclude qualche incursione nell'ambito della tensione-compressione e torsione per verificare la corretta implementazione nei modelli della prima fase. Per quel che compete l'ambito della flessione si distinguono 3 diverse tipologie di approccio elencate di seguito in ordine di complicazione crescente:

1. Eulero-Bernoulli: in aggiunta alle precedenti ipotesi, si trascurano anche le deformazioni a taglio e l'inerzia rotazionale delle sezioni trasversali. Questo significa che le sezioni si mantengono piane e perpendicolari alla linea elastica. Se la trave è particolarmente snella, tali assunzioni sono adeguate.
2. Rayleigh: le deformazioni a taglio non vengono prese in considerazione mentre l'inerzia rotazionale è inclusa nella formulazione. Anche in questo caso la trave deve essere snella affinché il modello sia accettabile.
3. Timoshenko: sia deformazioni a taglio che inerzia rotazionale sono incluse nella trattazione. Ciò comporta sezioni che rimangono piane ma non più perpendicolari alla deformata dell'asse principale. Questo amplia il range di proporzioni ammesse per una trave di questo tipo, da quella snella fino alla moderatamente tozza.

La deformazione a taglio può essere intesa come uno scostamento dalla direzione della deformata non accompagnata dalla rotazione della sezione trasversale (si veda la Figura 1.2). La rotazione della sezione trasversale viene così definita:

$$\phi_y = \frac{\partial u_x}{\partial z} - \gamma_x \quad (1.1)$$

Dove γ_x è la deformazione a taglio. Questa è funzione dello sforzo di taglio F_x come mostrato dalla relazione seguente:

$$\gamma_x = \frac{\chi F_x}{GA} \quad (1.2)$$

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ [MPa] è il modulo di taglio tipico del materiale. Esso dipende dal modulo elastico E e dal coefficiente di Poisson ν del materiale;

A [m²] è la sezione trasversale;

χ [-] è il fattore di forma la cui formula è tabulata in Tabella 1.2 per le diverse sezioni trasversali.

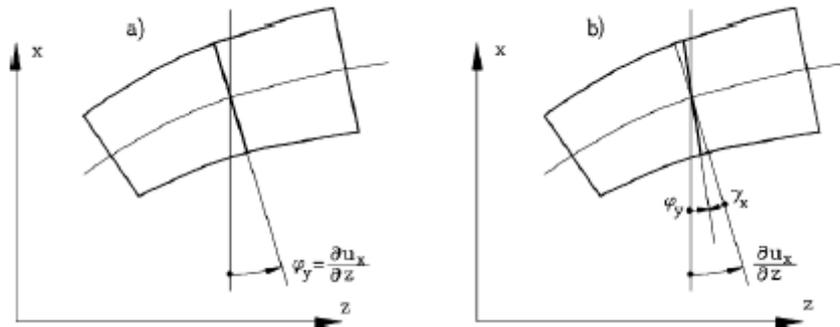


Figura 1.2 Influenza della deformazione a taglio sull'ortogonalità delle sezioni trasversali rispetto alla deformata. (a) Trave di Eulero-Bernoulli. (b) Trave di Timoshenko [2]

Fattore di forma	Sezione trasversale
$\chi = \frac{7 + 6\nu}{6(1 + \nu)}$	
$\chi = \frac{(7 + 6\nu)(1 + m)^2 + 4m(5 + 3\nu)}{6(1 + \nu)(1 + m)^2}$ dove $m = \left(\frac{d_i}{d_o}\right)^2$	

Tabella 1.2 Fattori di forma funzione della sezione trasversale. Sono riportate le espressioni per la sezione circolare piena e cava [2]

Uno degli aspetti maggiormente significativi apportati dalla rotodinamica è l'introduzione dell'effetto giroscopico il quale può essere incluso nella teoria delle travi.

La trattazione in merito agli elementi tridimensionali viene discussa a parte, alla luce della sola applicazione mediante software Ansys.

1.2 Il metodo FE monodimensionale

Il metodo agli elementi finiti è una tecnica di discretizzazione particolarmente versatile e questo ne fa uno degli approcci più utilizzati in ambito strutturale sia statico che dinamico. Ma la sua capacità di poter risolvere le equazioni differenziali a derivate parziali lo rende applicabile anche ad altri ambiti al di fuori di quello meccanico.

Esso prende a riferimento il calcolo matriciale di strutture e si basa sulla suddivisione di una struttura in parti che prendono il nome di elementi, i quali possono avere caratteristiche proprie che li contraddistinguono: tra questi si ricordano gli elementi trave e i solidi, i quali rivestono un ruolo importante nella presente tesi.

Ogni elemento è un piccolo solido deformabile caratterizzato da un numero variabile ma limitato di gradi di libertà in specifici punti definiti nodi.

Tale tecnica prevede di modellizzare il vettore spostamento generalizzato (inteso come costituito da 6 gradi di libertà: 3 spostamenti e 3 rotazioni) in un punto dell'elemento come prodotto di una matrice di funzioni di forma e un vettore di coordinate generalizzate (ovvero riferite ai nodi del sistema).

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \mathbf{N}(x, y, z)\mathbf{q}(t) \quad (1.3)$$

La formulazione delle funzioni di forma è arbitraria ma deve sottostare a determinati requisiti di conformità e quindi di compatibilità e completezza. Per approfondimenti a tal proposito si veda [3].

Da quest'ultima relazione derivano le velocità generalizzate, considerando che le funzioni di forma sono indipendenti dal tempo:

$$\dot{\mathbf{u}}(x, y, z, t) = \mathbf{N}(x, y, z)\dot{\mathbf{q}}(t) \quad (1.4)$$

Il vettore delle deformazioni è espresso come prodotto della matrice di deformazione \mathbf{B} ("costituita da derivate opportune delle funzioni di forma rispetto alle coordinate x , y e z " secondo quanto riportato in [4]) e il vettore delle coordinate generalizzate.

$$\boldsymbol{\epsilon}(x, y, z, t) = \mathbf{B}(x, y, z)\mathbf{q}(t) \quad (1.5)$$

Di qui, è immediato riferire le tensioni agli stress tramite la relazione costitutiva:

$$\boldsymbol{\sigma}(x, y, z, t) = \mathbf{E}\boldsymbol{\epsilon}(x, y, z, t) \quad (1.6)$$

Formulazione valida nel caso di materiale lineare e assenza di pre-stress o deformazioni iniziali sull'elemento. \mathbf{E} è la matrice di rigidezza del materiale.

Dalla formulazione dell'energia potenziale è possibile individuare la matrice di rigidezza dell'elemento:

$$\mathbf{K}_{el} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV \quad (1.7)$$

Mentre dall'energia cinetica si ricava la matrice di massa dell'elemento:

$$\mathbf{M}_{el} = \int_V \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \quad (1.8)$$

Quest'ultima può essere modificata per includere anche il contributo dei momenti di inerzia. Il pedice "el" indica l'elemento.

Una forza distribuita è esprimibile ricorrendo al principio dei lavori virtuali:

$$\mathbf{f}_{el}(t) = \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{f}(x, y, z, t) dV \quad (1.9)$$

In questo modo l'equazione del moto assume la stessa identica struttura dei sistemi discreti non smorzati:

$$\mathbf{M}_{el} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}_{el} \mathbf{q}(t) = \mathbf{f}_{el}(t) \quad (1.10)$$

E' tipico in rotodinamica semplificare il rotore con elementi monodimensionali quali le travi. L'approccio che garantisce una maggiore accuratezza è quello di Timoshenko. Motivo per cui esso verrà preso a riferimento ogniqualvolta si ricorrerà al modello monodimensionale dell'albero nell'ambito dell'attività.

Si voglia dunque applicare le relazioni appena definite ad un elemento trave di Timoshenko, il quale è costituito da due nodi e 6 gradi di libertà (3 traslazioni e altrettante rotazioni) per ciascuno di essi (Figura 1.3). Il vettore degli spostamenti nodali (o coordinate generalizzate) presenta dunque 12 termini:

$$\mathbf{q} = [u_{x_1}, u_{y_1}, u_{z_1}, \phi_{x_1}, \phi_{y_1}, \phi_{z_1}, u_{x_2}, u_{y_2}, u_{z_2}, \phi_{x_2}, \phi_{y_2}, \phi_{z_2}]^T \quad (1.11)$$

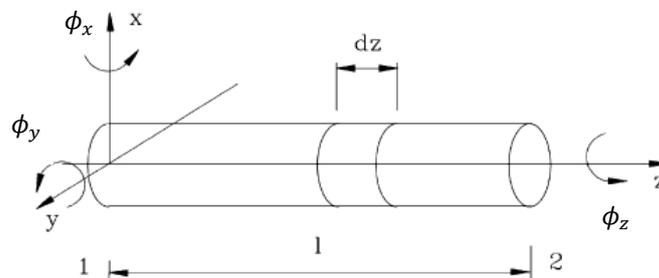


Figura 1.3 Elemento trave [rieditato da [2]]

Grazie al disaccoppiamento tra la dinamica assiale, torsionale e flessionale in ambo i piani della trave, conviene assegnare ciascun comportamento al relativo vettore ottenuto a partire da \mathbf{q} :

$$\mathbf{q}_A = \begin{Bmatrix} u_{z_1} \\ u_{z_2} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{q}_T = \begin{Bmatrix} \phi_{z_1} \\ \phi_{z_2} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{q}_{F1} = \begin{Bmatrix} u_{x_1} \\ \phi_{y_1} \\ u_{x_2} \\ \phi_{y_2} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{q}_{F2} = \begin{Bmatrix} u_{y_1} \\ \phi_{x_1} \\ u_{y_2} \\ \phi_{x_2} \end{Bmatrix} \quad (1.12)$$

In questo modo, suddividendo la matrice delle funzioni di forma in sottomatrici, la relazione (1. 3) è riscrivibile come:

$$\begin{pmatrix} u_z \\ \phi_z \\ u_x \\ \phi_y \\ u_y \\ \phi_x \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} N_A & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & N_T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & N_{F1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & N_{F2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_A \\ q_T \\ q_{F1} \\ q_{F2} \end{pmatrix} \quad (1. 13)$$

Non si entrerà nel merito della procedura di calcolo delle matrici delle funzioni di forma N_A, N_T, N_F, N_{F2} relative al comportamento assiale, torsionale e flessionale nei due piani rispettivamente, rimandando ai testi [2], [3], [4] per approfondimenti. Nota la loro formulazione è immediato applicare le relazioni (1. 7) e (1. 8) per ottenere matrici di massa e rigidezza per ciascuno dei 4 comportamenti di cui è riportato l'esito dell'integrazione. Si rimanda alla letteratura citata il calcolo dei contributi di forza in quanto non interessanti ai fini della presente analisi. Le matrici ottenute vengono raggruppate nella modalità seguente:

$$K_{el} = \begin{bmatrix} K_A & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & K_T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & K_{F1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & K_{F2} \end{bmatrix} \quad (1. 14)$$

$$M_{el} = \begin{bmatrix} M_A & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M_T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & M_{F1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & M_{F2} \end{bmatrix} \quad (1. 15)$$

Dove:

$$K_A = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1. 16)$$

$$K_T = \frac{GJ_p}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1. 17)$$

$$K_{F1} = \frac{EJ_y}{l^3(1 + \Phi)} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & (4 + \Phi)l^2 & -6l & (2 - \Phi)l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & (2 - \Phi)l^2 & -6l & (4 + \Phi)l^2 \end{bmatrix} \quad (1. 18)$$

$$\mathbf{K}_{F2} = \frac{EJ_x}{l^3(1+\Phi)} \begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & (4+\Phi)l^2 & 6l & (2-\Phi)l^2 \\ -12 & 6l & 12 & 6l \\ -6l & (2-\Phi)l^2 & 6l & (4+\Phi)l^2 \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

$$\mathbf{M}_A = \frac{\rho Al}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

$$\mathbf{M}_T = \frac{\rho J_p l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

$$\mathbf{M}_{F1} = \frac{\rho Al}{420(1+\Phi)^2} \begin{bmatrix} m_1 & lm_2 & m_3 & -lm_4 \\ lm_2 & l^2m_5 & lm_4 & -l^2m_6 \\ m_3 & lm_4 & m_1 & -lm_2 \\ -lm_4 & -l^2m_6 & -lm_2 & l^2m_5 \end{bmatrix} + \frac{\rho J_y}{30l(1+\Phi)^2} \begin{bmatrix} m_7 & lm_8 & -m_7 & lm_8 \\ lm_8 & l^2m_9 & -lm_8 & -l^2m_{10} \\ -m_7 & -lm_8 & m_7 & -lm_8 \\ lm_8 & -l^2m_{10} & -lm_8 & l^2m_9 \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

$$\mathbf{M}_{F2} = \frac{\rho Al}{420(1+\Phi)^2} \begin{bmatrix} m_1 & -lm_2 & m_3 & lm_4 \\ -lm_2 & l^2m_5 & -lm_4 & -l^2m_6 \\ m_3 & -lm_4 & m_1 & lm_2 \\ lm_4 & -l^2m_6 & lm_2 & l^2m_5 \end{bmatrix} + \frac{\rho J_x}{30l(1+\Phi)^2} \begin{bmatrix} m_7 & -lm_8 & -m_7 & -lm_8 \\ -lm_8 & l^2m_9 & lm_8 & -l^2m_{10} \\ -m_7 & lm_8 & m_7 & lm_8 \\ -lm_8 & -l^2m_{10} & lm_8 & l^2m_9 \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

$$m_1 = 156 + 294\Phi + 140\Phi^2$$

$$m_3 = 54 + 126\Phi + 70\Phi^2$$

$$m_5 = 4 + 7\Phi + 3,5\Phi^2$$

$$m_7 = 36$$

$$m_9 = 4 + 5\Phi + 10\Phi^2$$

$$m_2 = 22 + 38,5\Phi + 17,5\Phi^2$$

$$m_4 = 13 + 31,5\Phi + 17,5\Phi^2$$

$$m_6 = 3 + 7\Phi + 3,5\Phi^2$$

$$m_8 = 3 - 15\Phi$$

$$m_{10} = 1 + 5\Phi - 5\Phi^2$$

$$\Phi = \frac{12EJ_y\chi}{GA l^2} \text{ per il piano } xz$$

$$\Phi = \frac{12EJ_x\chi}{GA l^2} \text{ per il piano } yz$$

$$(1.24)$$

$\Phi [-]$ è il rapporto tra la flessibilità a flessione e quella a taglio della trave. Esso tende a 0 per snellezze crescenti, fino al limite della trave di Eulero-Bernoulli.

$J_p' [m^4]$ è il momento d'inerzia torsionale (di area). Esso coincide con il momento di inerzia polare se la sezione è circolare piena o anulare ($J_p' = J_z = J_p$);

$J_y, J_x [m^4]$ sono i momenti di inerzia trasversale (di area) rispetto ai rispettivi assi y e x. Se la sezione è circolare piena o anulare, per la sua assialsimmetria, i momenti di inerzia sono coincidenti con quello diametrale ($J_y = J_x = J_d$);

$l [m]$ è la lunghezza della trave.

Le matrici di massa per come sono state calcolate sono definite congruenti ("consistent") in quanto ottenute utilizzando le stesse funzioni di forma per gli spostamenti usate per derivare la matrice di rigidezza. Le matrici a masse concentrate ("lumped"), qui non riportate, sono invece ottenute concentrando i contributi di inerzia ai nodi, ottenendo solo i termini diagonali non-nulli. Quest'ultime sono molto più semplici da manipolare e invertire, con un costo computazionale ridotto. Tuttavia richiedono un maggior numero di elementi per ottenere la stessa accuratezza del caso congruente.

L'introduzione di un corpo rigido concentrato in un nodo specifico comporta l'aggiunta di una matrice di massa diagonale che nel caso generale si presenta come:

$$\mathbf{M}_{conc} = \text{diag}[M, M, M, I_x, I_y, I_z] \quad (1.25)$$

La matrice di rigidezza relativa ad una molla tra due nodi, che coinvolge un solo grado di libertà per ciascuno di essi assume la seguente espressione:

$$\mathbf{K}_{molla} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

I suoi termini saranno aggiunti agli opportuni gradi di libertà del sistema.

Se l'elemento elastico coinvolge tutti i sei gradi di libertà allora sarà dotato di tre rigidezze k_x, k_y, k_z relative alla traslazione e 3 rigidezze χ_x, χ_y, χ_z relative alla rotazione. Le matrici di rigidezza relative a ciascun grado di libertà presentano la stessa formulazione riportata in (1.26).

Le matrici dell'elemento sono definite rispetto ad un sistema di riferimento locale il cui orientamento è caratteristico dell'elemento stesso. Nel caso si preveda di considerare una struttura composta da più elementi non si può prescindere da un sistema di riferimento globale rispetto al quale tutti i sistemi locali devono riferirsi. Per far ciò è necessario ricorrere alla matrice di rotazione così definita:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} l_x & m_x & n_x \\ l_y & m_y & n_y \\ l_z & m_z & n_z \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

l_i, m_i, n_i sono i coseni direttori degli assi del sistema locale nel globale.

La matrice di rotazione espansa \mathbf{R}' è l'esito dell'assemblaggio delle singole matrici di rotazione \mathbf{R} di ciascun elemento. Per entrambe, \mathbf{R} e \mathbf{R}' , vale la proprietà:

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T \qquad \mathbf{R}'^{-1} = \mathbf{R}'^T \qquad (1.28)$$

Le matrici di massa, rigidezza e il vettore delle forze ai nodi di ciascun elemento riscritte nel sistema di riferimento globale si presentano come riportato di seguito:

$$\mathbf{M}_G = \mathbf{R}'^T \mathbf{M}_L \mathbf{R}' \qquad (1.29)$$

$$\mathbf{K}_G = \mathbf{R}'^T \mathbf{K}_L \mathbf{R}' \qquad (1.30)$$

$$\mathbf{f}_G = \mathbf{R}'^T \mathbf{f}_L \qquad (1.31)$$

I pedici "G" e "L" si riferiscono a "globale" e "locale" rispettivamente.

Una volta note le matrici globali di ciascun elemento basterà assemblarle opportunamente rispetto a un vettore \mathbf{q}_G che raccoglie tutte le coordinate generalizzate della struttura per ottenere le matrici \mathbf{M} e \mathbf{K} dell'intero sistema.

Per i sistemi in linea, quali il caso dell'albero di un rotore, se gli elementi del vettore \mathbf{q}_G sono disposti in un ordine opportuno, la rotazione può risultare superflua e l'assemblaggio semplice; si otterranno matrici \mathbf{M} e \mathbf{K} a banda.

Per vincolare rigidamente un singolo grado di libertà occorrerà cancellare la riga e la relativa colonna da tutte le matrici e vettori coinvolti nell'equazione matriciale del moto. Questo tuttavia porta a una redistribuzione delle celle, complicazione che appesantisce il costo computazionale. Per evitare ciò, anziché eliminare righe e colonne, basterà semplicemente aggiungere una rigidezza k_i elevata in corrispondenza della riga e colonna i -esima relativa al grado di libertà in esame nella matrice \mathbf{K}_G .

Nell'ambito della rotodinamica, si considererà prevalentemente il comportamento flessionale nei due piani, essendo quello maggiormente critico e degno di particolare attenzione.

Inoltre è tipico per i sistemi assialsimmetrici non smorzati, qualora sia possibile, ricorrere a coordinate complesse al fine di semplificare la trattazione nei due piani e valutare il moto in uno solo (fermo restando che nell'altro la soluzione sarà identica). Questo perché le matrici antisimmetriche che possono essere presenti nell'equazione del moto in coordinate reali diventano simmetriche in coordinate complesse, a patto di essere precedute dal termine immaginario. Questo fa sì che il vettore \mathbf{q} relativo al solo comportamento flessionale della trave venga modificato per includere le coordinate in entrambi i piani.

$$\bar{\mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{\phi}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{\phi}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{x_1} + iu_{y_1} \\ \phi_{y_1} - i\phi_{x_1} \\ u_{x_2} + iu_{y_2} \\ \phi_{y_2} - i\phi_{x_2} \end{Bmatrix} \quad (1.32)$$

Il sistema di coordinate complesse deve essere abbandonato qualora l'anisotropia caratterizzi rotore, statore o vincoli: questo è il caso dei cuscinetti idrodinamici che per loro natura generano rigidità e smorzamenti anisotropi.

Nel caso di sistemi rotanti, le matrici di rigidità e massa rimangono le stesse del caso flessionale non rotante ma la presenza di una velocità di rotazione dell'albero fa emergere un nuovo contributo, l'effetto giroscopico. Questo è introdotto sul singolo elemento con una matrice \mathbf{G}_{el} . La matrice giroscopica congruente dell'elemento trave è ottenibile dalla matrice di massa rotazionale semplicemente sostituendo J_y con il momento di inerzia polare J_z . Nel caso di assialsimmetria della sezione vale $J_z = 2J_y$ da cui:

$$\mathbf{G}_{el} = \frac{\rho J_z}{30l(1 + \Phi)^2} \begin{bmatrix} m_7 & lm_8 & -m_7 & lm_8 \\ lm_8 & l^2m_9 & -lm_8 & -l^2m_{10} \\ -m_7 & -lm_8 & m_7 & -lm_8 \\ lm_8 & -l^2m_{10} & -lm_8 & l^2m_9 \end{bmatrix} \quad (1.33)$$

La matrice giroscopica deriva dalla formulazione per l'energia cinetica, non incide sulla stabilità del sistema e diventa antisimmetrica nel caso in cui le coordinate siano reali. La rotazione e l'assemblaggio seguono le regole considerate per \mathbf{M} e per \mathbf{K} , ottenendo la matrice \mathbf{G} .

Come si vedrà, il termine giroscopico fa sì che le frequenze proprie del sistema dipendano dalla velocità di rotazione, motivo per cui diventa essenziale tracciarne un andamento tramite diagramma di Campbell. Inoltre esso determina un accoppiamento delle rotazioni tra i due piani flessionali fra loro ruotati di 90° .

Considerando il sistema in linea, l'equazione del moto nel sistema di riferimento stazionario dell'intera struttura si modifica di conseguenza.

$$\mathbf{M}\ddot{\bar{\mathbf{q}}}_G(t) - i\Omega\mathbf{G}\dot{\bar{\mathbf{q}}}_G(t) + \mathbf{K}\bar{\mathbf{q}}_G(t) = \mathbf{f}_G(t) \quad (1.34)$$

Altri termini matriciali possono essere inclusi all'interno del problema. Fra questi si ricordano:

- L'effetto centrifugo, che prevede l'inclusione di una matrice del tipo $\Omega^2\mathbf{K}_\Omega$ da sommarsi alla matrice di rigidità. Tale fenomeno è rilevante qualora il rotore sia costituito da una serie di palette radiali disposte lungo tutta la sua circonferenza, le quali possono essere modellizzate come travi di cui si potrà calcolare \mathbf{K}_Ω a livello dell'elemento. Nel caso del rotore in esame questo effetto è ritenuto marginale e trascurabile.

- La presenza di carichi assiali importanti prevede l'inclusione della matrice geometrica \mathbf{K}_g (assente per il rotore studiato). In base alle caratteristiche della forza, questo contributo può portare a instabilità.
- Lo smorzamento viscoso rotante (dovuto ai componenti in rotazione, quali l'albero e accessori ad esso collegati) e non rotante (legato generalmente a vincoli e statore). Ad essi corrispondono le matrici \mathbf{C}_r e \mathbf{C}_n rispettivamente. In alternativa, si può considerare lo smorzamento strutturale (o isteretico), che in genere risulta più adatto rispetto al viscoso per quel che riguarda il contributo rotante. Spesso la matrice ad esso associata si indica con \mathbf{K}_r'' .

Mentre i termini \mathbf{C}_r e \mathbf{K}_r'' possono condurre a instabilità in regime supercritico, questo non vale per \mathbf{C}_n che introduce un effetto dissipativo che tende sempre a stabilizzare il sistema.

Nel modello qui discusso non verrà preso in considerazione lo smorzamento rotante, né viscoso né isteretico, in quanto richiederebbe una stima sperimentale. Lo smorzamento non rotante verrà incluso solamente a partire dal capitolo relativo ai cuscinetti lubrificati. L'equazione del moto dell'intera struttura assumerà in tal caso la formulazione seguente:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_G + (\mathbf{C}_n - i\Omega\mathbf{G})\dot{\mathbf{q}}_G + \mathbf{K}\bar{\mathbf{q}}_G = \mathbf{f}_G(t) \quad (1.35)$$

Se i vincoli o lo statore hanno caratteristiche non isotrope, nonostante il rotore sia considerato assialsimmetrico equivalente, sarà conveniente far ricorso alle coordinate reali. In tal caso l'equazione del moto (1.35) si riscriverà come:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{Q}} + \left(\begin{bmatrix} \mathbf{C}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_n \end{bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{G} \\ -\mathbf{G} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \dot{\mathbf{Q}} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} \end{bmatrix} \mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} \Re(\mathbf{f}(t)) \\ \Im(\mathbf{f}(t)) \end{Bmatrix} \quad (1.36)$$

$$\mathbf{Q} = [\Re(\bar{\mathbf{q}}_G)^T, \Im(\bar{\mathbf{q}}_G)^T]^T \quad (1.37)$$

Tale equazione si rivela particolarmente utile nell'affrontare l'inclusione dei cuscinetti idrodinamici i quali sono caratterizzati da matrici di rigidezza e smorzamento anisotrope.

E' doveroso rimarcare che, ove possibile, generalmente viene utilizzato il sistema di riferimento inerziale (o stazionario). Il sistema rotante è raccomandato qualora si debba trattare con rotori non isotropi.

Per quel che riguarda l'applicazione in Ansys, si farà ricorso all'elemento BEAM188 (Figura 1.4), caratterizzato dall'aver le proprietà di una trave monodimensionale di Timoshenko con 2 nodi (I, J) e tipicamente 6 gradi di libertà per nodo (3 traslazioni e 3 rotazioni rispetto agli assi x, y, z). L'elemento può essere lineare, quadratico o cubico e supporta il comando "Coriolis effect", per l'attivazione della matrice giroscopica nel sistema di riferimento inerziale.

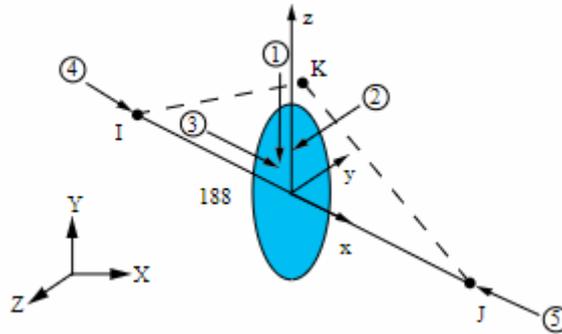


Figura 1.4 Elemento BEAM188 [5]

La soluzione dell'autoproblema modale e della risposta in frequenza sono ottenibili in modo relativamente semplice riportando l'equazione del moto (1. 34) nello spazio degli stati. Considerando un sistema di riferimento fisso e coordinate complesse, il vettore degli stati è esprimibile come:

$$z = \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ q \end{Bmatrix} \quad (1.38)$$

$$\dot{z} = \mathcal{A}z + \mathcal{B}u \quad (1.39)$$

u è il vettore degli input:

$$u = \Omega^2 e^{i\Omega t} \begin{Bmatrix} f \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.40)$$

Con le assunzioni del modello in esame la matrice dinamica \mathcal{A} e la matrice del guadagno in ingresso \mathcal{B} ("input gain matrix") sono espresse come:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} i\Omega M^{-1}G & -M^{-1}K \\ I & 0 \end{bmatrix} \quad (1.41)$$

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} M^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.42)$$

Gli autovalori risultanti saranno complessi non-coniugati in quanto \mathcal{A} è complessa (il ch  comporta un diagramma del luogo delle radici parametrizzato rispetto a Ω non simmetrico rispetto all'asse reale anche per il sistema non smorzato).

Al fine di ottenere frequenze e forme modali baster  calcolare autovalori e autovettori della matrice dinamica. Inoltre, essendo \mathcal{A} dipendente anche dalla velocit  di rotazione Ω . Si ottiene

un nuovo set di velocità di precessione e forme modali per ogni valore di Ω considerato. Gli autovalori risultanti avranno la seguente formulazione:

$$\bar{\lambda}_k = \sigma_k \pm i\omega_k \quad (1.43)$$

Dove:

$\bar{\lambda}_k$ è un autovalore complesso;

σ_k è la parte reale, definito tasso di decadimento, indice di stabilità del modo. Si ha stabilità se il valore è negativo, instabilità se positivo;

ω_k è la parte immaginaria, ovvero la velocità di precessione.

La risposta dinamica del sistema è definita da:

$$q = \Phi_k e^{\bar{\lambda}_k} \quad (1.44)$$

Φ_k è l'autovettore associato all'autovalore k-esimo ($\bar{\lambda}_k$). Esso è espressione della forma modale.

1.3 Il metodo della matrice di rigidezza dinamica

Quello della matrice di rigidezza dinamica è un metodo esatto che utilizza l'espressione della deformata ottenuta per la trave nella teoria del continuo per la formulazione delle funzioni di forma, che nell'analisi FE non possono che essere calcolate in modo approssimato. La soluzione "esatta" è intesa rispetto al modello della trave del continuo, il quale si trascina dietro tutte le approssimazioni ad esso legate.

La matrice di rigidezza dinamica \mathbf{K}_{dyn} può essere espressa come potenza in serie di ω :

$$\mathbf{K}_{dyn} = \mathbf{K}_{d0} + \omega^2 \mathbf{K}_{d2} + \omega^4 \mathbf{K}_{d4} + \dots$$

Nel caso dell'elemento trave:

$$\mathbf{K}_{d0} = \mathbf{K}$$

$$\mathbf{K}_{d2} = -\mathbf{M}$$

Le restanti matrici dipendono sia dalle proprietà inerziali che di rigidezza e in questo caso non si prendono in considerazione. Pertanto si ottiene:

$$\mathbf{K}_{dyn} = \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} \quad (1.45)$$

La formulazione di \mathbf{K}_{dyn} cambia in base all'approccio scelto per modellizzare la trave nel continuo (Eulero-Bernoulli, Rayleigh, Timoshenko). Qui viene riportata unicamente l'applicazione del metodo di Rayleigh al caso particolare di una trave rotante che ben modella

un tipico problema rotodinamico. L'effetto giroscopico dovuto alla rotazione dell'albero è anch'esso presente nella trattazione. Ulteriori approfondimenti sono rintracciabili in [6] da cui la procedura è stata presa a riferimento.

Si consideri una trave suddivisa in elementi e se ne prenda uno come riferimento. Si tenga conto, oltre alle ipotesi già delineate, l'isotropicità di eventuali supporti. Si voglia risolvere l'autoproblema ad esso associato e ricavarne il diagramma di Campbell.

Facendo riferimento alla Figura 1.3, si prenda in esame la variabile complessa $\bar{s}(z, t)$ che coinvolge lo spostamento in entrambi i piani xz e yz :

$$\bar{s} = x + iy \quad (1.46)$$

E dipendente dalla coordinata assiale z e dal tempo t .

L'equazione differenziale caratteristica della trave di Rayleigh rotante si dimostra essere:

$$EJ_d \frac{\partial^4 \bar{s}(z, t)}{\partial z^4} - \rho J_d \frac{\partial^4 \bar{s}(z, t)}{\partial z^2 \partial t^2} + \rho A \frac{\partial^2 \bar{s}(z, t)}{\partial t^2} + 2i\Omega \rho J_d \frac{\partial^3 \bar{s}(z, t)}{\partial z^2 \partial t} = 0 \quad (1.47)$$

La soluzione del moto armonico può essere espressa mediante separazione di variabili:

$$\bar{s}(z, t) = S(z) e^{i\omega t} \quad (1.48)$$

Sostituendo la (1.48) nella (1.47) si ottiene:

$$EJ_d \frac{\partial^4 S(z)}{\partial z^4} - (\rho J_d \omega^2 - 2\rho J_d \Omega \omega) \frac{\partial^2 S(z)}{\partial z^2} - \rho A \omega^2 S(z) = 0 \quad (1.49)$$

La soluzione può essere scritta come:

$$S(z) = e^{\sqrt{\tau}z/l} \quad (1.50)$$

L'equazione caratteristica si ottiene sostituendo l'espressione di $S(z)$ nella (1.49):

$$\tau^2 + \frac{l^2}{EJ_d} (\rho J_d \omega^2 - 2\rho J_d \Omega \omega) \tau - \frac{\rho A l^4 \omega^2}{EJ_d} = 0 \quad (1.51)$$

Le due soluzioni dell'equazione di 2° grado sono:

$$\tau_1 = \alpha^2 = -V + (V^2 + W)^{1/2} \quad (1.52)$$

$$\tau_2 = -\beta^2 = -V - (V^2 + W)^{1/2} \quad (1.53)$$

Dove:

$$V = \frac{l^2}{EJ_d} (\rho J_d \omega^2 - 2\rho J_d \Omega \omega) \quad (1.54)$$

$$W = \frac{ml^4 \omega^2}{EJ_d} \quad (1.55)$$

In questo modo la soluzione generale si presenta come:

$$S(z) = C_1 \cosh(\alpha z/l) + C_2 \sinh(\alpha z/l) + C_3 \cos(\beta z/l) + C_4 \sin(\beta z/l) \quad (1.56)$$

C_1, C_2, C_3, C_4 sono costanti di integrazione. I coefficienti della matrice \mathbf{K}_{dyn} vengono ottenuti derivando la (1.56).

Considerando 1 e 2 i due nodi estremi dell'elemento trave considerato, è possibile definire la relazione matriciale che lega spostamenti nodali generalizzati con le rispettive forze nodali generalizzate:

$$\begin{pmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{M}_1 \\ \bar{F}_2 \\ \bar{M}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} P & R & -S & T \\ R & Q & -T & U \\ -S & -T & P & -R \\ T & U & -R & Q \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{\phi}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{\phi}_2 \end{pmatrix} \quad (1.57)$$

Le grandezze che presentano il trattino superiore tengono conto di entrambi gli assi x e y su cui sono definite, secondo la notazione complessa, e costituiscono il vettore $\bar{\mathbf{q}}$ definito in modo identico al rispettivo caso a elementi finiti.

P, Q, R, S, T, U sono i sei coefficienti fra loro indipendenti che caratterizzano \mathbf{K}_{dyn} .

Questi sono intrinsecamente legati alla tipologia di teoria della trave considerata e in tal caso assumono la formulazione presentata:

$$P = EJ_d \frac{\alpha\beta}{l^3} \frac{(\alpha^2 + \beta^2)(\beta \sin \beta \cosh \alpha + \alpha \sinh \alpha \cos \beta)}{2\alpha\beta(1 - \cosh \alpha \cos \beta) + (\alpha^2 - \beta^2) \sinh \alpha \sin \beta}$$

$$Q = EJ_d \frac{1}{l} \frac{(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha \sin \beta \cosh \alpha + \beta \sinh \alpha \cos \beta)}{2\alpha\beta(1 - \cosh \alpha \cos \beta) + (\alpha^2 - \beta^2) \sinh \alpha \sin \beta}$$

$$R = EJ_d \frac{\alpha\beta}{l^2} \frac{2\alpha\beta \sinh \alpha \sin \beta - (\alpha^2 - \beta^2)(1 - \cosh \alpha \cos \beta)}{2\alpha\beta(1 - \cosh \alpha \cos \beta) + (\alpha^2 - \beta^2) \sinh \alpha \sin \beta}$$

$$S = EJ_d \frac{\alpha\beta}{l^3} \frac{(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha \sinh \alpha + \beta \sin \beta)}{2\alpha\beta(1 - \cosh \alpha \cos \beta) + (\alpha^2 - \beta^2) \sinh \alpha \sin \beta}$$

$$T = EJ_d \frac{\alpha\beta}{l^2} \frac{(\alpha^2 + \beta^2)(\cosh \alpha - \cos \beta)}{2\alpha\beta(1 - \cosh \alpha \cos \beta) + (\alpha^2 - \beta^2) \sinh \alpha \sin \beta}$$

$$U = EJ_d \frac{1}{l} \frac{(\alpha^2 + \beta^2)(\beta \sinh \alpha - \alpha \sin \beta)}{2\alpha\beta(1 - \cosh \alpha \cos \beta) + (\alpha^2 - \beta^2) \sinh \alpha \sin \beta}$$

(1. 58)

Senza alcuna difficoltà è possibile introdurre nel modello anche corpi rigidi concentrati (quali i dischi) caratterizzati da massa M e momenti di inerzia di massa I_p e I_d o supporti elastici isotropi di rigidezza k : basterà inserire i contributi aggiunti in corrispondenza della cella relativa al grado di libertà coinvolto.

Due esempi sono riportati nella Figura 1.5 sottostante:

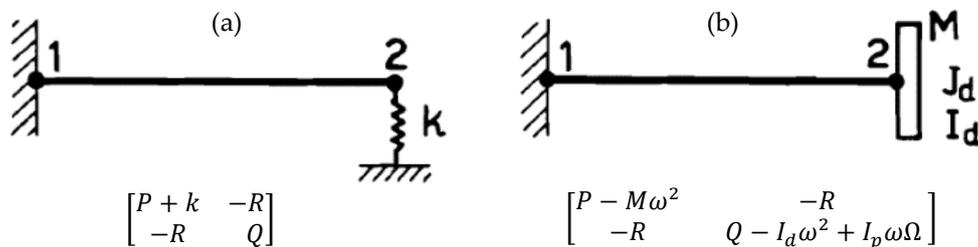


Figura 1.5 Due esempi di albero rotante con relativa matrice di rigidezza. (a) Incastro – supporto elastico isotropo all’estremo libero; (b) incastro-disco all’estremo libero. [6]

La procedura di assemblaggio che permette di ottenere la matrice dinamica globale, al pari del FEM, è tratta dall’analisi matriciale di strutture. L’aggiunta di termini relativi a vincoli o corpi rigidi concentrati nella matrice dinamica \mathbf{K}_{dyn} si rifà alle stesse modalità relative agli elementi finiti.

Nell’analisi modale, non è possibile esprimere l’autoproblema nel modo consueto. La formulazione del problema agli autovalori si complica, ma può essere a grandi linee sintetizzata nei seguenti passaggi:

1. Si assumono una serie di valori in frequenza ω e si calcola il determinante di \mathbf{K}_{dyn} per ciascuno di essi;
2. Si ricava il diagramma della funzione “determinante” dipendente da ω ;
3. Si rintracciano nel grafico i valori di ω per cui il determinante si annulla: questi sono le frequenze proprie ω_k del sistema.

Tale approccio ha lo svantaggio di essere a livello computazionale più oneroso rispetto ai metodi standard di risoluzione del problema modale: il calcolo iterativo del determinante appesantisce la simulazione, essendo la matrice dinamica tipicamente di dimensioni importanti. Invece, per la

risposta a forzante armonica, il calcolo è rapido in quanto è nota la frequenza eccitante. Tuttavia, non aggiungendo nulla che l'analisi FEM non faccia, tale metodo tende ad essere messo in secondo piano rispetto a quest'ultima.

1.4 Il metodo FE tridimensionale

Per ciò che riguarda il modello tridimensionale, viene riportato un accenno agli elementi e alle procedure utilizzate per la modellizzazione del rotore mediante Ansys Workbench nell'ambito della presente tesi, fermo restando che si rimanda alle relative guide ([7], [8], [9], [10]) per approfondimenti.

Nonostante gli elementi solidi siano differenti da quelli monodimensionali, la procedura generale in merito alla definizione delle funzioni di forma, al calcolo delle matrici, alla rotazione e assemblaggio delle stesse, allo stanziamento dei vincoli, dei termini e carichi concentrati e distribuiti, al fine di ottenere le equazioni del moto rimane la stessa.

Si richiamano i toolbox dell'ambiente "Structural Mechanics" di Ansys Workbench utilizzati nella presente attività:

- Modal (Damped): analisi modale in regime lineare elastico e assialsimmetrico con sistema di riferimento stazionario, inclusivo degli effetti giroscopici. Esso ha permesso di sondare frequenze proprie, velocità critiche, diagrammi di Campbell e stabilità, forme modali e fattori di partecipazione modale.
- Static Structural: per il calcolo di deformazioni e reazioni statiche del rotore al fine di impostare l'analisi del comportamento dei cuscinetti oleodinamici.
- Harmonic Response: per sondare il possibile effetto di uno squilibrio statico assunto applicato al sistema al variare della frequenza di rotazione dell'albero.

L'elemento cardine dell'analisi viene definito SOLID186. E' un elemento tridimensionale a 20 nodi, con 3 gradi di libertà per nodo (traslazione rispetto ai 3 assi, x, y, z) e un comportamento quadratico in termini di spostamenti. Esso viene proposto in due forme possibili, "Homogeneous Structural Solid" e "Layered Structural Solid", ma solo il primo viene preso in considerazione, essendo particolarmente adatto a modellizzare mesh irregolari. Tale formulazione può avere qualsiasi orientazione spaziale e presentare differenti opzioni in termini di geometria: esaedro ("Brick, Hex"), tetraedro ("Tet"), piramide ("Pyamid"), prisma ("Wedge, Wed"). La Figura 1.6 riporta l'elemento con le differenti tipologie geometriche. L'elemento supporta il comando "Coriolis effect", per l'attivazione della matrice giroscopica nel sistema di riferimento inerziale.

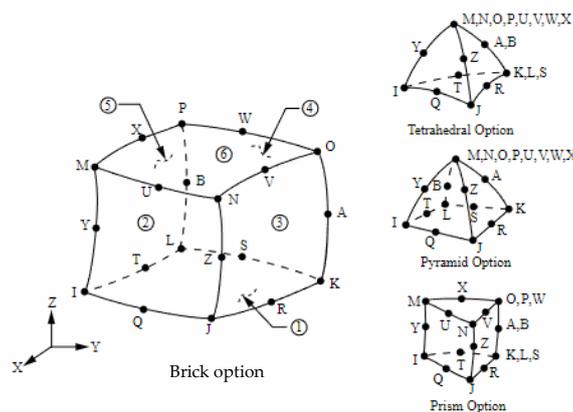


Figura 1.6 Elemento SOLID186 con le relative opzioni geometriche [editato da [5]]

Nel modello sono presenti anche gli elementi CONTA174, CONTA175 e TARGE170: i primi due definiscono il contatto o lo scorrimento tra superfici accoppiate di elementi solidi, guscio o trave in ambiente tridimensionale mentre il terzo rappresenta le superfici obiettivo degli elementi CONTA. Nell’analisi modale, essendo questa basata sull’ipotesi di linearità, i contatti tra gli elementi devono essere lineari. I contatti che non soddisfano questa condizione vengono considerati solo per la loro controparte lineare.

Per la realizzazione della mesh, un metodo particolarmente comodo risulta essere il “Mesh Sweeping”. Sotto opportune condizioni topologiche riportate nella guida citata, il solutore sceglie due facce agli estremi del corpo considerato, chiamate “sorgente” e “obiettivo”, discretizza la “sorgente” con elementi triangolari e quadrangolari, copia la mesh sulla faccia “obiettivo” e riempie la regione interposta con elementi esaedrici o prismi.

Per quel che riguarda l’impostazione dell’analisi modale in ambito rotodinamico si richiamano brevemente i seguenti comandi “Solver controls” in “Analysis Settings”:

- Le “Options” “Max Modes to Find” e “Limit Search to Range” permettono di specificare il numero di modi da calcolare e il range di frequenze in cui ottenerli rispettivamente.
- L’opzione “Damped” deve essere attivata affinché “Coriolis effect” e “Campbell diagram” diventino disponibili all’utente. La sua attivazione sblocca la possibilità di introdurre termini legati alla velocità di rotazione. Quindi non solo lo smorzamento viscoso, bensì anche il contributo giroscopico. L’effetto giroscopico, nonostante sia inserito nella modalità “Damped”, non comporta una dissipazione.
- Tramite “Solver Type”, possiamo decidere in quale dei due modi proposti affrontare la risoluzione dell’autoproblema modale: “Reduced” utilizza è adatto per estrarre indicativamente fino a un centinaio di modi da sistemi smorzati simmetrici e non, con un gran numero di gradi di libertà.

“Full” utilizza il metodo Damped deve il suo nome all’utilizzo di matrici di massa, rigidità, smorzamento, giroscopica complete. Ottimo per sistemi smorzati simmetrici e non, piccoli e medi.

- Selezionando “Coriolis effect: on” in “Rotordynamics Controls” viene inclusa la matrice giroscopica nel modello.
- L’opzione “Campbell Diagram: on” consente di definire una tabella delle velocità di rotazione del rotore. Il loro numero è dato dal “Number of Points” definito dall’utente. Il solutore calcolerà i modi per ciascuna di queste. Nella sezione “Solution” la funzione “Campbell Diagram”, se inserita, raccoglierà le frequenze di precessione, le interpolerà restituendo un grafico delle curve ottenute per ciascun modo in funzione della velocità di rotazione.

Capitolo 2

Validazione del modello semplificato di un rotore a 3 dischi

2.1 Inquadramento del problema

Nel presente capitolo vengono applicati i metodi descritti nell'introduzione teorica. Alcuni di questi verranno riproposti per le analisi sul rotore della pompa. I risultati derivanti dall'utilizzo di ciascuno di essi vengono confrontati con il modello della pubblicazione G. Curti, F. A. Raffa e F. Vatta, *The Dynamic Stiffness Matrix Method in the Analysis of Rotating Systems* [6] al fine di ottenerne una prima validazione.

Di seguito è presentato l'iter procedurale relativo a ciascun metodo, gli esiti ottenuti e le relative conclusioni. Per la simulazione si è ricorso ai software Matlab [11] e Ansys Workbench. Nello specifico vengono portati all'attenzione 4 modelli al fine di ottenere una efficace analisi comparativa:

- Metodo della matrice di rigidezza dinamica (Matlab);
- Metodo agli elementi finiti monodimensionali (Matlab);
- Metodo agli elementi finiti monodimensionali (Ansys);
- Metodo agli elementi finiti tridimensionali (Ansys).

Il sistema strutturale su cui ciascuna delle tecniche viene messa in pratica è quello proposto dalla sopracitata pubblicazione: esso è costituito da un albero a sezione circolare piena con 3 dischi

concentrati montati in posizione simmetrica rispetto al centro dell'albero, due supporti rigidi ed estremità libere.

I dati geometrici e di inerzia della struttura sono presentati nella Figura 2.1, mentre non si hanno informazioni in merito alle proprietà del materiale che si assume essere acciaio standard. A tal proposito si è considerata una densità di 7800 kg/m^3 (la quale comporta un errore in termini di massa totale che è del 2%, considerato accettabile), salvo poi considerare anche un valore di 8580 kg/m^3 per il solo metodo 1, che in questo caso prenderà il nome "1.B", al fine di avere la perfetta coincidenza con l'articolo almeno sul valore di massa totale del sistema.

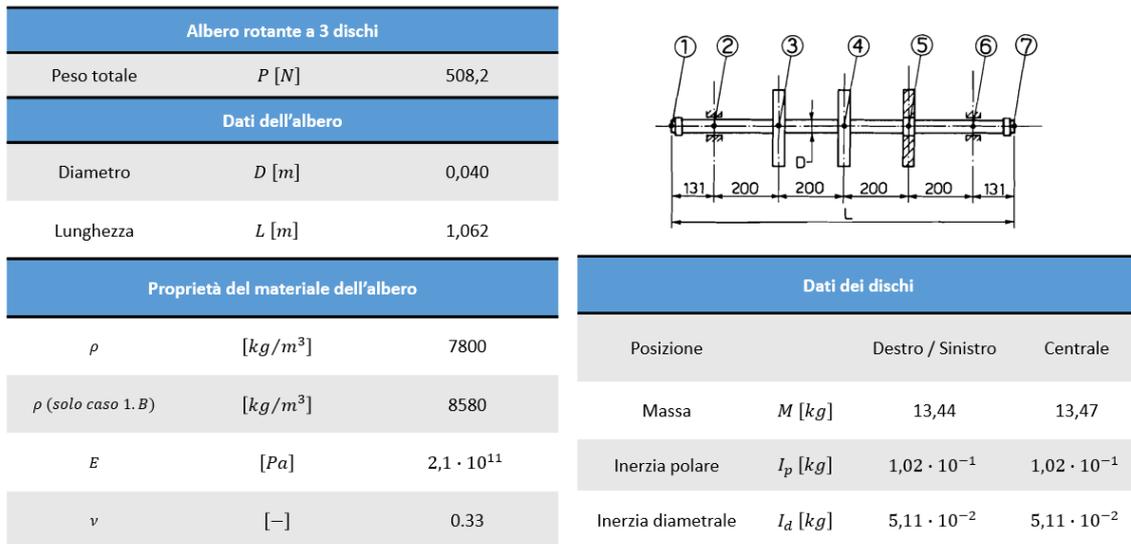


Figura 2.1 Modello del rotore a 3 dischi: caratteristiche e proprietà

A seguito dei risultati, il confronto verrà realizzato:

- sul valore della frequenza naturale flessionale per spin speed nulla;
- sul valore delle velocità critiche flessionali per i primi 3 modi forward;
- sugli andamenti generali del diagramma di Campbell.

Inoltre, per un migliore riscontro, vengono messe a paragone le frequenze naturali relative ai primi 3 modi torsionali del sistema, calcolate mediante FEM Ansys 1D e 3D, FEM Matlab e il modello analitico semplificato.

2.2 Metodo della matrice di rigidezza dinamica

Primo passo nella realizzazione del codice consiste nel definire le ipotesi semplificative che sottostanno al modello.

La prima di queste interessa la tipologia di elemento monodimensionale, che in tal caso è stato assunto avere le proprietà della trave di Rayleigh.

Il secondo aspetto riguarda la scelta dei vincoli, in questo caso considerati supporti rigidi (rotazioni libere e traslazioni bloccate), come proposto dal testo della pubblicazione.

I dischi sono invece considerati come masse puntiformi concentrate in corrispondenza del loro centro di massa, mantenendo le loro proprietà di inerzia equivalenti.

L'elemento trave monodimensionale, essendo tale, eredita tutte le assunzioni e le peculiarità definite nell'introduzione. Ricordando che i comportamenti assiale, torsionale, flessionale sono fra loro considerati disaccoppiati, si prende in analisi fra questi solo quello di pertinenza e interesse, ovvero la flessione nei piani xz e yz .

A causa della rotazione degli elementi del sistema e dei conseguenti effetti giroscopici che ne derivano, come si evince dalle equazioni del moto per il rotore, si ha un accoppiamento flessionale nei due piani; tuttavia la notazione complessa prevista per la definizione di strutture assialsimmetriche quali quella in esame, porta ad ottenere matrici di rigidezza dinamica flessionale reali e identiche nei due piani.

In Figura 2.2 è possibile osservare il modello monodimensionale dell'albero con relativi dischi e supporti.

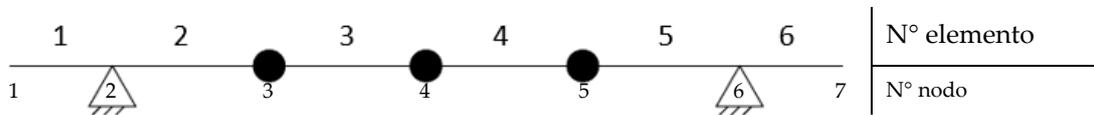


Figura 2.2 Schema semplificato del rotore a 3 dischi con la relativa numerazione sequenziale degli elementi e dei nodi

Il numero di elementi utilizzati in questo caso per modellizzare il rotore è 6; di conseguenza si hanno 7 nodi di cui i supporti occupano i nodi 2 e 6, mentre il 3, 4, 5 sono prerogativa delle masse concentrate relative ai dischi sinistro, centrale e destro rispettivamente.

Si avranno quindi 14 gradi di libertà (2 per ciascun nodo: spostamento verticale lungo y e rotazione nel piano yz), che verranno ridotti a 12 gradi di libertà liberi per l'introduzione dei vincoli. Ciascun vincolo blocca la traslazione del nodo a cui è applicato.

Ci si aspetta pertanto matrici di rigidezza dinamica quadrate dell'ordine di 12×12 .

Una modalità alternativa consiste nell'introdurre molle concentrate con rigidezze particolarmente elevate al posto dei vincoli (ad esempio $k = 10^{15} \text{ N/m}$). In questo modo le matrici rimangono di dimensione 14×14 senza la necessità di rimuovere righe e colonne.

L'iter procedurale si configura essere il seguente:

1. Definizione dei parametri geometrici, di massa e del materiale.
2. Assegnazione delle relative proprietà a ciascun elemento.
3. Stanziamento del vettore delle velocità angolari Ω forward e backward: valore iniziale, finale e passo; la soluzione verrà calcolata per ogni termine di velocità così definito.
4. Creazione della matrice di rigidezza dinamica di Rayleigh per ciascun elemento. In particolare sarà necessario definire due matrici differenti: una per gli elementi 2, 3, 4 (di lunghezza 0,200 m) e una per gli estremi liberi ($l = 0,131$ m).
5. Segue la rotazione delle matrici degli elementi in modo da riportarli nel sistema di riferimento globale. In questo caso nessuna rotazione è necessaria in quanto il sistema è in linea (SR globale coincidente con SR locale degli elementi).
6. Assemblaggio al fine di ottenere la matrice globale di rigidezza dinamica \mathbf{K}_{dyn} : a causa, ancora una volta, della configurazione in linea si ottiene una struttura a banda. Questo è deducibile dal fatto che gli elementi fra loro adiacenti condividono il nodo che li collega, portando alla sovrapposizione delle matrici in corrispondenza delle celle relative ai gradi di libertà di quel dato nodo.
7. Aggiunta dei termini di inerzia relativi ai dischi concentrati nelle corrispondenti celle della matrice globale:
 - i contributi relativi al disco sinistro vanno ad aggiungersi alle celle (5,5) e (6,6);
 - i contributi relativi al disco centrale si sommano alle celle (7,7) e (8,8);
 - i contributi relativi al disco destro vanno ad aggiungersi alle celle (9,9) e (10,10).
8. Rimozione delle righe e colonne (3 e 11) relative ai gradi di libertà vincolati, le quali non partecipano alla dinamica del sistema, ma possono essere utilizzate per il calcolo delle reazioni vincolari.
9. Routine di ricerca dei minimi relativi del valore assoluto del determinante della matrice \mathbf{K}_{dyn} . $|\det[\mathbf{K}_{dyn}]|$ è una funzione reale di variabile reale e i suoi minimi costituiscono gli zeri di $\det[\mathbf{K}_{dyn}]$ in quanto sono i punti in cui quest'ultima cambia di segno. Da notare che la matrice di rigidezza dinamica è dipendente dalla velocità di rotazione Ω , pertanto essa deve essere ricalcolata ogni qualvolta si aggiorna il valore di Ω . La procedura è elencata di seguito:
 1. Si definisce la velocità Ω_j per la quale si vuole calcolare \mathbf{K}_{dyn} ;
 2. Si assumono una serie di valori in frequenza ω : per ciascuno di essi si calcola \mathbf{K}_{dyn} e il determinante associato. Unendo i risultati si ottiene una funzione $\det[\mathbf{K}_{dyn_j}]$;
 3. Routine di ricerca dei minimi relativi di $|\det[\mathbf{K}_{dyn_j}]|$ e catalogazione dei risultati nella riga j-esima della matrice delle whirling speeds.
 4. Ripetizione dei passaggi 1-3 per ciascun valore di velocità Ω_j di interesse.
Si ottiene una matrice soluzione le cui righe j-esime costituiscono tutte le ω_k calcolate, per il dato valore di Ω_j mentre le colonne k-esime sono le whirling speeds ω_k relative al modo k-esimo al variare di Ω .
10. Post processing: una volta ottenuta la matrice delle FW e delle BW speeds, è immediato diagrammare il relativo diagramma di Campbell.

2.3 Metodo agli elementi finiti monodimensionali (Matlab)

Il metodo agli elementi finiti condivide buona parte dei punti descritti nella sezione 2.2, ma se ne distacca per quanto riguarda in particolare la costruzione delle matrici che in questo caso diventano tre: rigidezza, massa e giroscopica (mentre con la tecnica del K_{dyn} se ne calcolava una unica omnicomprendente), e l'approccio risolutivo, che qui chiama in causa lo spazio degli stati.

Lo schema rimane lo stesso di Figura 2.2 mentre le ipotesi semplificative diventano le seguenti:

- Elemento trave di Timoshenko;
- Matrici di massa e giroscopica consistenti;
- Supporti rigidi;
- Dischi concentrati ai nodi;
- Sistema non smorzato;
- Discretizzazione in 6 elementi: uno per ogni tratto di albero.

Si ricorda che anche in questo caso si prende in esame solo il comportamento flessionale ed essendo il sistema assialsimmetrico, non ci sono problemi nel considerare coordinate complesse. Le matrici ottenute sono ancora una volta reali e identiche nei due piani (motivo per cui se ne considera uno unico) ed essendo il sistema non smorzato sono altrettanto reali le quantità che ne derivano.

Si procede a delineare sinteticamente gli step che caratterizzano questa tecnica per gli elementi trave:

1. Definizione dei parametri geometrici, di massa e del materiale e assegnazione a ciascun elemento.
2. Creazione della matrice di rigidezza, di massa e giroscopica per ciascun elemento. In questo caso la procedura è più semplice in quanto queste non dipendono dalla spin speed, pertanto possono essere calcolate una volta sola con evidente risparmio in termini computazionali.
3. Sistema in linea: nessuna rotazione necessaria (SR globale coincidente con SR locale degli elementi).
4. Routine per l'assemblaggio della matrice globale di rigidezza, di massa e giroscopica (si ottengono matrici a banda). Si ottiene ancora una volta una struttura 14×14 (2 gradi di libertà per ogni nodo, 7 nodi in totale).
5. Aggiunta dei termini di inerzia relativi ai dischi concentrati nelle corrispondenti celle delle matrici globali.
 - Massa e momento di inerzia diametrale del disco sinistro vanno ad aggiungersi rispettivamente alle celle (5,5) e (6,6) della matrice di massa, mentre l'inerzia polare è inserita nella cella della (6,6) giroscopica;

- m e I_d del disco centrale si sommano alle celle (7,7) e (8,8) di $[M]$, I_p invece è aggiunta alla cella (8,8) di $[G]$;
 - Infine, con la stessa modalità, i contributi relativi al disco destro vanno ad aggiungersi alle celle (9,9) e (10,10) di $[M]$, I_p è aggiunta alla cella (10,10) di $[G]$.
6. Rimozione delle righe e colonne (3 e 11) relative ai gradi di libertà vincolati, ottenendo una matrice 12x12, Oppure introduzione di molle estremamente rigide nelle celle (3,3) e (11,11), mantenendo la dimensione globale a 14x14.
 7. Definizione del vettore spin speed.
 8. Calcolo delle frequenze proprie nel caso Ω nulla.
 9. Routine sui valori di Ω_j per la definizione della matrice dinamica \mathcal{A} dello spazio degli stati (dipendente dalla spin speed) secondo quanto riportato in sezione 1.2, calcolo dei relativi autovalori e sorting in ordine crescente degli stessi. La parte immaginaria di ciascun autovalore $\bar{\lambda}_k$ è la whirling speed ω_k .
 10. Post processing: realizzazione del Campbell diagram.

2.4 Metodo agli elementi finiti monodimensionali (Ansys)

Il modello unidimensionale può essere realizzato in modo sorprendentemente rapido tramite definizione di uno schizzo in Ansys SpaceClaim [12], tracciando le linee geometriche corrispondenti alla linea media delle travi e assegnando a ciascuna di esse la relativa sezione trasversale con le corrispondenti caratteristiche geometriche.

Una volta eseguito il comando "share topology", che consente di unire i vertici di travi adiacenti (evitando così che il programma li veda distinti, con conseguente segnalazione di "Solver Pivot error") sarà necessario aprire il file così creato in Ansys Mechanical e seguire gli stessi identici passi previsti per il caso 3D, che si richiamano qui in breve ma verranno delineati più approfonditamente nella sezione dedicata: definizione proprietà dei materiali, mesh (Figura 2.3), introduzione delle 3 point masses, imposizione dei vincoli, analysis settings, stanziamento del vettore velocità Ω , Solve, classiche operazioni di post processing (diagramma di Campbell, forme modali e fattori di partecipazione modale).

Tale tecnica è sicuramente il compromesso migliore sia in termini di tempo uomo che tempo macchina e per questo caso essa garantisce un'ottima accuratezza della soluzione coi soli 6 elementi definiti.

La tipologia di elemento scelta in automatico dal programma è chiamata Beam188. Esso è adatto a gestire travi dallo snello al moderatamente tozzo in ambiente 3D, basandosi sulla teoria di Timoshenko.

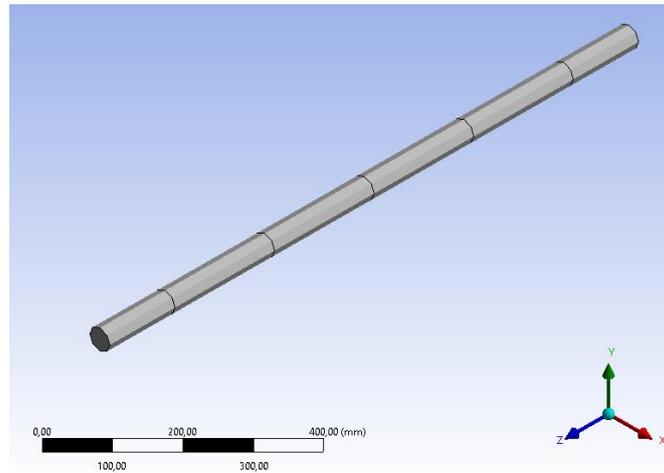


Figura 2.3 Mesh del rotore a 3 dischi con elementi monodimensionali

2.5 Metodo agli elementi finiti tridimensionali (Ansys)

L'introduzione di elementi 3D fa sì che sia maggiormente agevole ricorrere al software Solidworks [13] per la costruzione del modello CAD ("Computer Aided Design") mentre si fa utilizzo di Ansys per la risoluzione dell'autoproblema relativo. Il toolbox "*Modal*" di Ansys Workbench permette di ottemperare a questo scopo, integrando la sezione di preprocessing - solving - post-processing in un unico ambiente.

Le ipotesi rimangono le stesse dei casi precedenti, salvo l'utilizzo di elementi SOLID186 per la discretizzazione del dominio e l'applicazione dei metodi risolutivi per gestire tali elementi.

Essendo il modello tridimensionale, il comportamento dell'albero viene considerato in tutte le sue componenti (assiale, torsionale e flessionale nei due piani), motivo per cui non deve stupire l'insorgenza di modi derivanti da un accoppiamento tra questi.

Inoltre, l'ambiente "*Modal*" in cui si opera prevede che l'analisi venga realizzata in ambito lineare elastico assialsimmetrico: pertanto il materiale deve essere altrettanto lineare elastico e isotropo mentre il rotore deve manifestare la proprietà di assialsimmetria (proprietà che nel nostro caso sono ampiamente verificate); tutte le non-linearità non vengono tenute in conto o vengono degradate alla loro controparte lineare.

La procedura è di seguito esposta:

1. Realizzazione del modello CAD dell'albero tramite Solidworks e suddivisione longitudinale della parte in solidi (Figura 2.4); questa divisione permette di identificare le sezioni di interesse per l'introduzione di vincoli o masse puntuali, delimitando inoltre le regioni su cui mettere in atto la sweep mesh.

2. Definizione proprietà del materiale: densità mediante toolbox "Density", modulo elastico e coefficiente di Poisson tramite "Isotropic elasticity".
3. Importazione Cad e impostazione parametri di mesh e sweep method. E' il programma a decidere, in base al metodo scelto, quali elementi, quale forma e quanti nodi definire in modo da riempire il dominio. Nel nostro caso si ottiene una mesh con elementi esaedrici a 20 nodi (Hex20) e Wedges ("prismi") a 15 nodi (Wed15) come visualizzato in Figura 2.6. E' necessario in questa fase tenere sotto osservazione i quality criteria per comprendere se la struttura della mesh è accettabile per il problema in esame.
4. Definizione dei 3 dischi concentrati come «point masses» rigide (Figura 2.5), con i relativi dati di massa m momenti di inerzia polare I_z e trasversale I_x, I_y (e promozione a «remote points»)
5. Imposizione vincoli: vengono stanziati due "remote displacements" (rigidi) in corrispondenza delle sezioni trasversali dei supporti: per ciascuno di essi le traslazioni vengono bloccate sui tre assi mentre le rotazioni sono mantenute libere. Di conseguenza ci si aspetterà un moto rigido di rotazione attorno all'asse dell'albero.
6. Analysis settings:
 - Scelta del numero di whirling speeds da calcolare;
 - Damped: yes;
 - Coriolis effect: on;
 - Campbell diagram: on;
 - Impostazione del numero di velocità per le quali si vuole risolvere l'autoproblema.
7. Definizione del vettore Ω e i relativi valori di velocità disponibili in base agli analysis settings definiti.
8. Solve: calcolo delle FW e BW speeds per ogni spin speed precedentemente definita.
9. Post processing: realizzazione del diagramma di Campbell.
10. Post processing: visualizzazione delle forme modali.
11. Post processing: osservazione dei fattori di partecipazione modale.

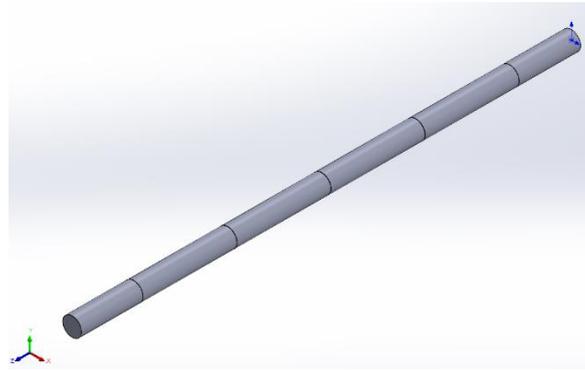


Figura 2.4 Modello CAD Solidworks del rotore a 3 dischi con la suddivisione del solido in parti

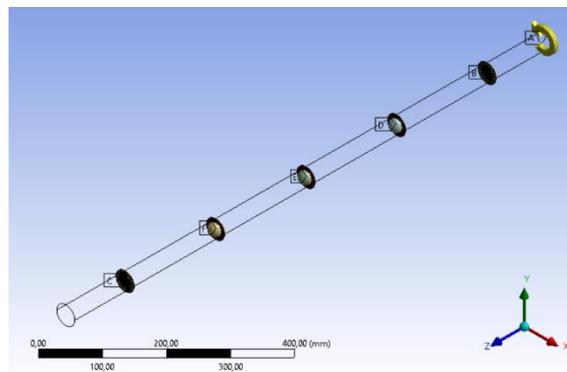


Figura 2.5 Visualizzazione wireframe del rotore a 3 dischi con le relative point masses stanziare come "remote points"

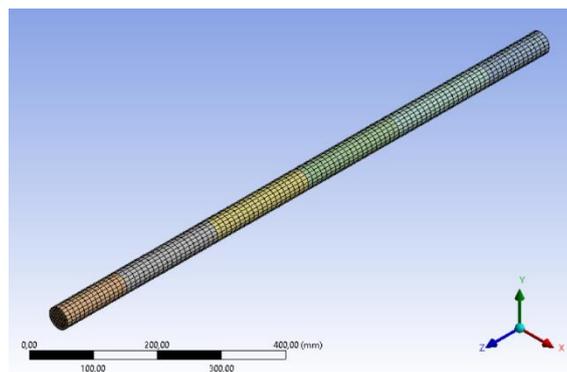


Figura 2.6 Mesh del rotore a 3 dischi con elementi Hex20 e Wed15 realizzata mediante sweep method

2.6 Risultati e confronto

Vengono riportati nelle pagine seguenti i risultati dell'applicazione dei quattro metodi e messi in relazione alla soluzione della pubblicazione. Nelle Figure 2.7 – 2.8 sono presentati i diagrammi di Campbell di ciascun modello, ognuno relazionato agli andamenti riportati nell'articolo [6].

Seguono le Tabelle 2.1 – 2.2 che specificano il valore delle frequenze naturali ($\Omega = 0$) e delle Ω_{crit} dei primi tre modi, congiuntamente al numero di elementi, la quantità di modi e di Ω considerati, tre termini che influiscono in modo consistente sul tempo di calcolo.

L'errore relativo è calcolato rispetto agli esiti del FEM DYNROT riportati nella pubblicazione, salvo dove diversamente specificato.

Le prime 3 forme modali sono tema delle Figure 2.9 – 2.11 le quali forniscono una testimonianza del significato fisico degli andamenti ottenuti.

Il comportamento torsionale viene scandagliato in una analisi dedicata.

In Figura 2.14 si può osservare il confronto consultivo della totalità dei modelli in termini di frequenze flessionali.

Le simulazioni relative al rotore a 3 dischi sono state realizzate con un pc HP Pavilion Gaming Notebook, processore Intel(R) Core(TM) i7-6700HQ CPU, 4 core, 8,00 GB di RAM, mentre le versioni dei software sono Ansys Student 2022R1 e Matlab R2020b.

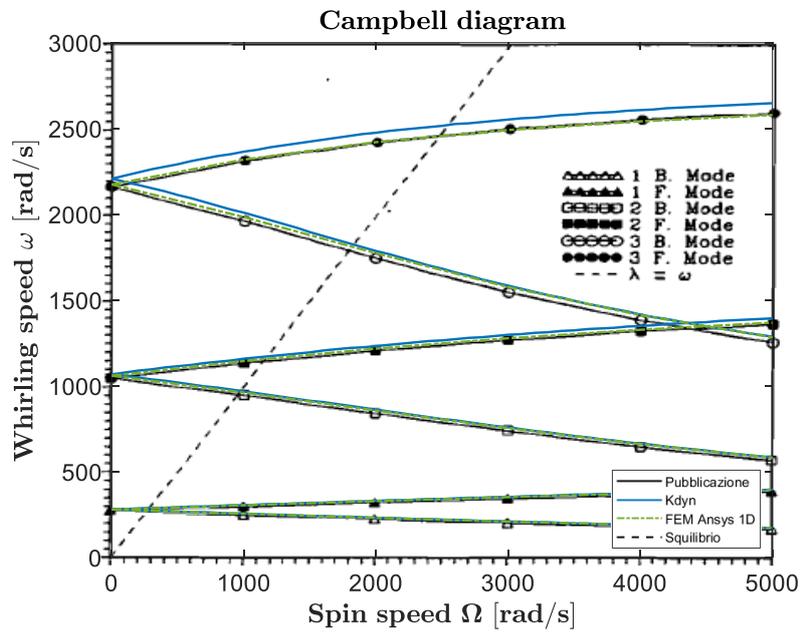


Figura 2.7 Diagramma di Campbell dei primi 3 modi BW e FW flessionali: confronto tra metodo della matrice di rigidità dinamica e FEM Ansys con elementi monodimensionali

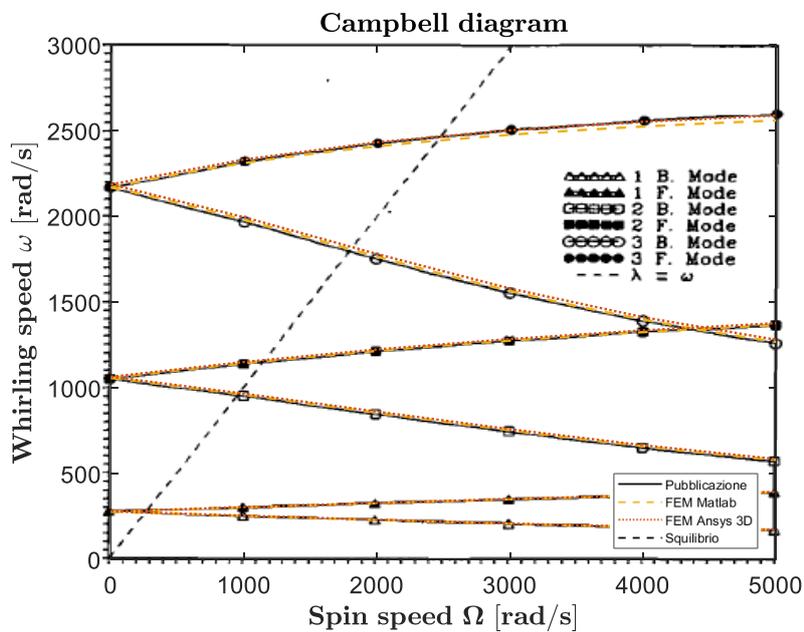


Figura 2.8 Diagramma di Campbell dei primi 3 modi BW e FW flessionali: confronto tra metodo FEM Matlab con elementi monodimensionali e FEM Ansys con elementi tridimensionali

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Numero di elementi	Numero di modi calcolati	Numero di Ω considerate	Costo computazionale
	f_n [rad/s]	f_n [rad/s]	f_n [rad/s]	n_{el} [-]	n_m [-]	n_Ω [-]	Δt [s]
Pubblicazione ([K] dinamica)	~280	~1070	~2170	6			
Matrice [K] dinamica ($\rho = 8580 \text{ kg/m}^3$)	279	1060	2193	6	10	50	~3,7
Matrice [K] dinamica	282	1067	2207	6	10	50	~3,7
FEM Matlab	280	1060	2170	6	24	50	~0,02
FEM Ansys 1D	280	1059	2174	6	20	6	~11
FEM Ansys 3D	282	1066	2189	5752	20	6	~822 (~14 min)

Tabella 2.1 Confronto delle frequenze naturali ($\Omega = 0$) per i primi 3 modi flessionali

	Modo 1 (FW)		Modo 2 (FW)		Modo 3 (FW)	
	Ω_{crit} [rad/s]	ε_{rel} [%]	Ω_{crit} [rad/s]	ε_{rel} [%]	Ω_{crit} [rad/s]	ε_{rel} [%]
Pubblicazione (FEM DYNROT)	282		1134		2425	
Pubblicazione ([K] dinamica)	283	0,3	1149	1,2	2469	1,8
Matrice [K] dinamica ($\rho = 8580 \text{ kg/m}^3$)	286	1*	1163	1,2*	2500	1,3*
Matrice [K] dinamica	289	2,5	1171	3,2	2517	3,8
FEM Matlab	287	1,7	1158	2,1	2442	0,7
FEM Ansys 1D	287	1,7	1156	1,9	2452	1,1
FEM Ansys 3D	289	2,5	1165	2,7	2466	1,7

* Calcolato rispetto alla «Pubblicazione ([K] dinamica)»

Tabella 2.2 Confronto delle Ω_{crit} per i primi 3 modi FW

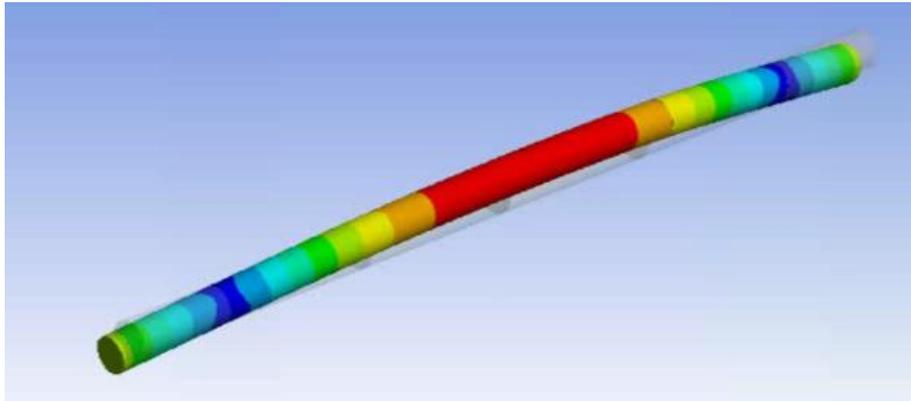


Figura 2.9 Forma modale relativa al modo 1 flessionale

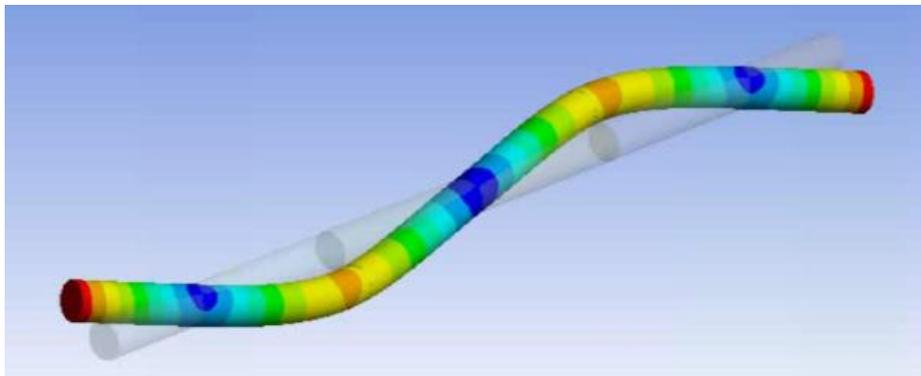


Figura 2.10 Forma modale relativa al modo 2 flessionale

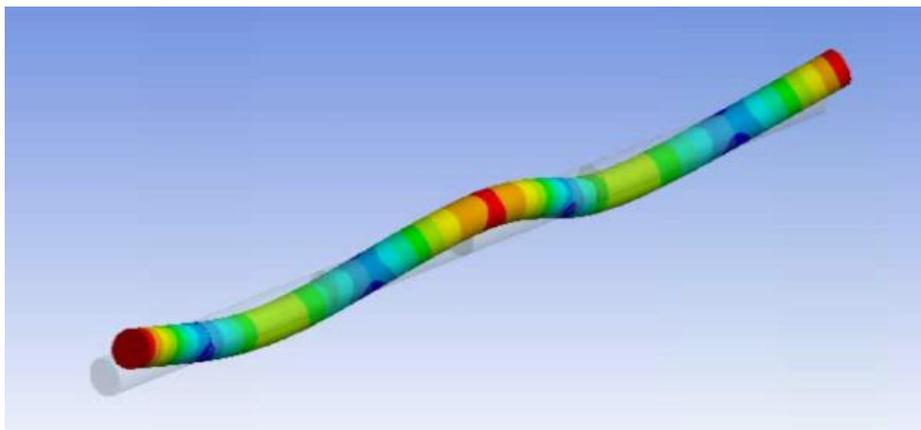


Figura 2.11 Forma modale relativa al modo 3 flessionale

Per quanto riguarda il modello torsionale la Figura 2.12 ne riporta lo schema analitico semplificato, mentre i diagrammi di Campbell e la tabella delle relative frequenze proprie sono oggetto della Figura 2.13 e Tabella 2.3.

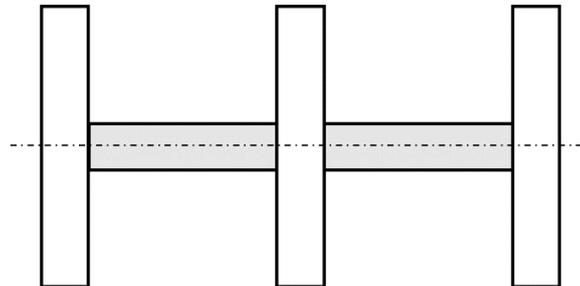


Figura 2.12 Modello torsionale analitico costituito da alberi non inerti e dischi rigidi

	Modo 1	Modo 2	Modo 3
	f_T [rad/s]	f_T [rad/s]	f_T [rad/s]
Modello analitico	0	986	1708
FEM Matlab	0	982	1705
FEM Ansys 1D	0	981	1703
FEM Ansys 3D	0	982	1705

Tabella 2.3 Confronto delle frequenze naturali relative ai primi 3 modi torsionali

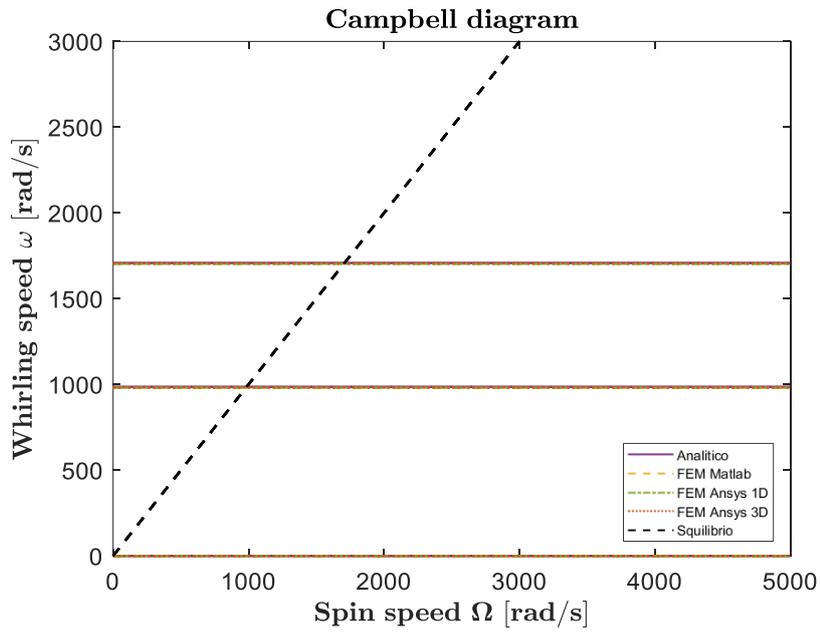


Figura 2.13 Diagramma di Campbell delle frequenze naturali relative ai primi 3 modi torsionali

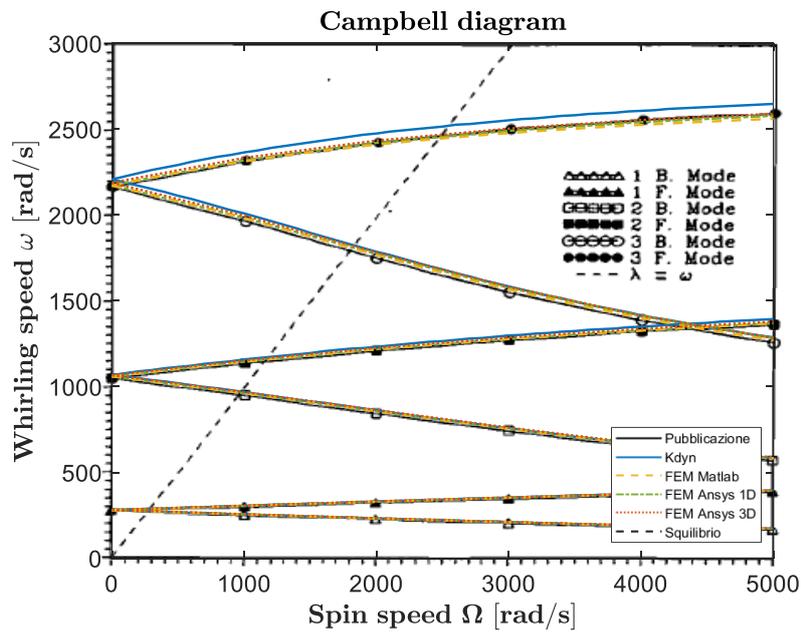


Figura 2.14 Confronto delle velocità di precessione flessionali dei 4 modelli analizzati

2.7 Considerazioni e commenti

E' immediatamente percepibile da ciascun diagramma di Campbell come l'andamento dei primi tre modi flessionali sia verificato sia nella componente forward che backward. I valori tabulati costituiscono un'ulteriore conferma di ciò mostrando un'ottima corrispondenza in termini di velocità critiche come di frequenze naturali per velocità nulla, con errori che si possono ritenere del tutto ammissibili rispetto al modello DYNROT (considerando che parte dello scostamento risiede nella leggera differenza in termini di densità dell'albero rispetto alla pubblicazione).

Dall'analisi comparata dei 4 modelli nel range di velocità angolare stabilito, emerge la perfetta coincidenza per quello che riguarda i primi 2 modi, mentre per il 3° si nota un leggero scostamento nel solo caso della matrice di rigidità dinamica a favore di valori di velocità di precessione maggiori. Questo mette in luce quanto nonostante la diversità dei metodi considerati essi risultino del tutto attendibili se utilizzati entro i limiti per cui sono stati definiti.

La tecnica K_{dyn} si mostra lievemente più rigida delle altre a fronte di tempi computazionali maggiori e un numero di modi calcolati minore rispetto al corrispettivo FEM Matlab. Questo è ascrivibile essenzialmente al metodo piuttosto rudimentale di ricerca degli zeri implementato. Ne è prova ulteriore il divario del caso con densità 8580 kg/m^3 rispetto ai risultati della pubblicazione. Un possibile miglioramento vedrebbe il ricorso a tecniche più sofisticate, quali il "metodo simbolico", capaci di garantire velocità e accuratezza con una trattazione decisamente più elegante. In ogni caso risultano chiari i motivi per cui a questo si preferisca il corrispettivo FEM, a maggior ragione considerando la maggiore complessità teorica e realizzativa delle matrici strutturali.

In termini di tempo computazionale il modello che garantisce i risultati migliori una volta costruito è senza dubbio il FEM Matlab 1D il quale, con soli 6 elementi e un buon numero di velocità calcolate permette di ottenere tutti i modi previsti in ben meno di un secondo con una attendibilità comparabile ad Ansys. L'unica pecca di tale tecnica è che, nelle forme in cui è stata realizzata, necessita di essere realizzata ad hoc per ogni tipologia di rotore e quindi richiede un tempo di preprocessing non indifferente, e perderebbe di senso qualora si dovesse ricostruirla ogni volta per ogni sistema rotante strutturalmente diverso. D'altra parte risulta un'ottima soluzione se utilizzata per una struttura unica del quale si vuole fare uno studio sulla variazione di uno o più parametri dimensionali. Un eventuale aggiornamento al modello riguarda la possibilità di fornire i dati geometrici, la disposizione degli elementi e le caratteristiche strutturali del rotore direttamente da interfaccia utente; in questo modo si abbatterebbe la limitazione sopracitata portando il metodo ad essere la soluzione che garantisce il miglior compromesso.

Tuttavia, come già anticipato, è il modello Ansys monodimensionale che coniuga l'affidabilità all'ottimo bilanciamento di tempo uomo e macchina, capace di fornire risultati in una manciata di secondi a seguito di qualche decina di minuti di realizzazione e setup del modello strutturale.

Mentre il corrispettivo caso 3D è certamente più laborioso, decisamente poco adatto per un'analisi di questo livello di semplicità, sia per tempi costruttivi che di calcolo non aggiungendo nulla di

più ai corrispondenti con elementi trave, ma si rivela il migliore quando i modelli si fanno più complicati e l'unico tra questi (insieme ai 2D assialsimmetrici) quando si superano i confini di attuabilità delle teorie monodimensionali.

Bisogna inoltre aggiungere che nonostante sia sufficiente una discretizzazione meno fine per avere buoni risultati riducendo il costo computazionale, quest'ultimo non arriverà ad essere comparabile ai restanti casi, sia per numero che per tipologia di elementi solidi, i quali sono costituiti da un numero di gradi di libertà di gran lunga superiore ai precedenti.

Ci saranno situazioni, e il proseguo di tale trattazione ne è un esempio, dove non si può far a meno di abbandonare la teoria delle travi per abbracciare quella bi o tridimensionale, o in alternativa, ricorrere a tecniche che si appoggiano al modello 1D ma a costo, nella maggioranza dei casi, di un inevitabile incremento di complessità teorica e sofisticatezza implementativa.

Tutti e tre i parametri, n_{el} , n_m , n_Ω riportati in Tabella 2.1 concorrono in modo rilevante al costo computazionale. In base alle necessità uno potrebbe risultare più rilevante degli altri.

In questo specifico caso, dove la quantità di modi calcolati è relativamente piccola, un contributo rilevante è indubbiamente dato dal numero di elementi, dalla tipologia ma in modo particolare dal numero di velocità per cui si vuole avere la soluzione. Infatti ad ogni nuovo valore di Ω viene reimpostata una nuova singola analisi che poi si sommerà alle precedenti.

Osservando il diagramma di Campbell con più attenzione si possono ottenere informazioni mirate su eventuali errori o inesattezze di ciascun modello: i termini per velocità nulla, ad esempio ci forniscono un riscontro sull'implementazione corretta delle matrici di massa e rigidità, isolandole dal termine giroscopico, la cui attendibilità può essere verificata solo per valori di spin speed Ω non nulle.

Il numero e il valore delle frequenze corrispondenti ai moti rigidi, qui deliberatamente non visualizzati, sono un altro possibile elemento di controllo.

Lo stesso si può dire delle forme modali (ottenuti dal modello Ansys 3D), che mostrano i classici primi modi di vibrare flessionali di un albero su due appoggi. Da notare il rispetto delle condizioni di vincolo dove lo spostamento è visibilmente nullo, e il numero crescente di nodi interni coi modi ($n_{nodi} = n_{modo} - 1$) per semplici sistemi in linea.

Un ulteriore aspetto messo in luce dal 3D sono i modi doppi, relativi uno alla precessione all'indietro ("backward whirl", "BW") e l'altro alla precessione in avanti ("forward whirl", "FW") (che nel caso $\Omega = 0$ diventano modi ruotati di 90° uno rispetto all'altro: uno nel piano xz, l'altro nel piano yz).

Ancora da ricordare sono i fattori di partecipazione modale del quale ci si disinteressa per tale analisi ma di cui non se ne potrà fare a meno nei modelli successivi.

Le curve del diagramma di Campbell mostrano un divario che tende ad acuirsi al crescere del numero di modo flessionale considerato, dimostrando un ruolo sempre più invasivo della matrice giroscopica sulle restanti. Sebbene questo è ciò che si verifica per le prime 3 forme modali

del modello, tale considerazione non ha validità generale e dipende dall'entità delle componenti in gioco soprattutto in termini di massa e momenti di inerzia. Tuttavia è indubbio che la notevole massa e i momenti di inerzia dei dischi concentrati rispetto alle proprietà inerziali dell'albero giochino un ruolo rilevante. Senza di essi il divario tra BW e FW speeds sarebbe di gran lunga più mitigato tanto da far pensare ad una indipendenza delle velocità di precessione ω da quelle di rotazione Ω e una sostanziale coincidenza dei valori del moto backward piuttosto che forward.

E' curioso osservare altresì che per il range di velocità in esame, i primi due modi mostrano una certa linearità delle curve, tanto che si potrebbe risparmiare sul numero di Ω usate per il calcolo. Diverso è il caso della 3° FW speed che mostra un andamento chiaramente non lineare, il quale necessita di diversi punti per essere adeguatamente studiato.

In ultima analisi si riportano a parte i valori delle frequenze torsionali sia in forma grafica che tabellare. Un'ulteriore modello analitico con alberi non inerti e dischi rigidi, data la semplicità del sistema, è stato messo a confronto con i rispettivi FEM Matlab e Ansys (1D e 3D), mostrando innanzitutto l'ottima attendibilità del primo, nonostante la sua elementarità e snellezza e in secondo luogo confermando la scarsa influenza delle proprietà inerziali dell'albero anche nel comportamento a torsione. Ad ogni modo esso mostra sistematicamente valori di f_T leggermente superiori, a prova del fatto che le caratteristiche di inerzia dell'albero sono trascurate. Lo schema analitico semplificato di Figura 2.12 chiarifica la trascurabilità dei vincoli (essendo garantita la libertà allo spinning lungo Z) così come quella degli estremi liberi e degli elementi non compresi tra i 3 dischi. Ancora degno di nota è l'effettiva indipendenza di tali frequenze dalla velocità, il disaccoppiamento dalle assiali e flessionali (almeno per quel che concerne i primi modi), e il prevedibile moto rigido (a frequenza 0 Hz), dovuto alla libertà di rotazione attorno all'asse.

In sintesi, il richiamo a questi metodi ha permesso di entrare in confidenza con il loro utilizzo, acquisire una certa preparazione sulle loro criticità e punti di forza, nonché a confermare l'applicabilità delle teorie in ambito rotodinamico, preparando solide fondamenta per le analisi dei capitoli seguenti.

Capitolo 3

Descrizione della pompa MS40

3.1 Caratteristiche generali

Scopo del presente capitolo è quello di fornire una sintesi delle principali caratteristiche delle pompe rotative a palette e in particolare della pompa MS40+ in modo da costituire una panoramica dell'oggetto di analisi. La descrizione qui proposta è tratta dal capitolo "Prove sperimentali sulla pompa MS40+" del lavoro di tesi di laurea magistrale *Modellazione fluidodinamica di una pompa per vuoto rotativa a palette* di Lepore Andrea [14].

Pompa rotativa a palette

Le pompe rotative a palette, definite anche RVP ("Rotary Vane Pump"), sono una tipologia di dispositivi meccanici facenti parte della categoria delle pompe volumetriche a spostamento positivo ("positive displacement pumps").

Esse hanno la caratteristica di avere il rotore eccentrico rispetto allo statore, presentano un numero di palette libere di slittare all'interno di cave profilate ad hoc, scavate lungo la direzione diametrale o meno, del rotore. Durante la rotazione la forza centrifuga fa sì che le palette tendano ad aderire alla superficie dello statore. Questo porta alla formazione di settori, pari al numero delle palette, aventi volume variabile lungo il ciclo. Grazie alla rotazione, il gas riempie il primo settore che si fa via via più capiente man mano che entra dalla flangia di aspirazione. Questo fino a quando, sempre per la rotazione, il settore (che in questo modo raggiunge il volume massimo) viene separato dall'aspirazione per mezzo della palette successiva, che interrompe la connessione. Di qui in avanti, nelle condizioni di progetto, con il procedere della rotazione il gas continua a comprimersi per effetto della riduzione di volume. Quando la forza di compressione del fluido riesce a vincere quella opposta della valvola si apre la valvola di scarico. Bisogna tener

presente, tuttavia, che non è il meccanismo di pompaggio a determinare la pressione finale di tali macchinari, bensì la solubilità del gas nel lubrificante. Durante la compressione infatti, i vapori di gas si disciolgono nell'olio, al punto che al momento dell'estromissione per mezzo dello scarico, il lubrificante ne risulta saturo. In sintesi si può riassumere il funzionamento in quattro fasi (Figura 3.1):

- a) aspirazione del gas dalla camera da vuotare e conseguente espansione;
- b) sconnessione dalla camera e conclusione espansione;
- c) compressione;
- d) raggiungimento della pressione limite di apertura la valvola.

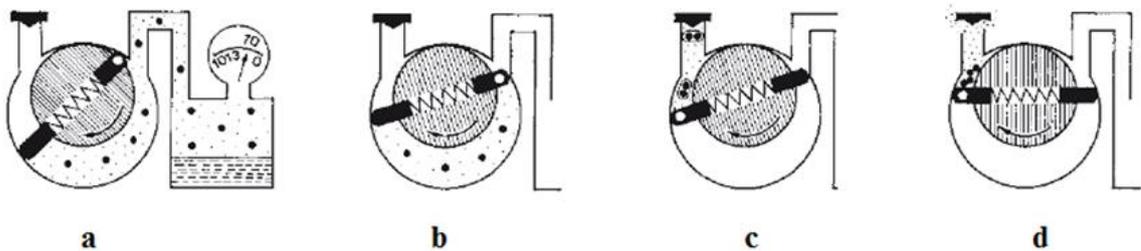


Figura 3.1 Fasi di funzionamento di una pompa rotativa per vuoto [15]

Al fine di garantire una pressione limite inferiore, nel corpo pompa è introdotto un lubrificante. Esso svolge molteplici ruoli che vengono riassunti di seguito:

- Guarnizione: occupando le luci tra rotore, statore e palette determina l'annullarsi di tutti i volumi morti evitando quindi un ricircolo di gas tra mandata e aspirazione;
- Lubrificante: bagna le boccole, le tenute così come la superficie di contatto tra palette e statore;
- Sostegno: il meato di olio interposto tra boccola e bronzina in rotazione è elemento essenziale affinché sia garantita la rotazione dell'albero senza che questo strisci sulle pareti metalliche della boccola. In questi termini esso svolge a tutti gli effetti il ruolo di cuscinetto (oleodinamico);
- Raffreddamento: trasferisce il calore dal rotore e statore al serbatoio;
- Protezione: previene grippaggio, ruggine e corrosione.

La pompa MS40+

Tra i prodotti realizzati dalla Agilent Technologies figura la pompa MS40+, la quale si presenta come una macchina a fluido rotativa a palette monostadio a bagno d'olio (Figura 3.2), destinata alla produzione del vuoto primario (tra basso e medio vuoto, che tipicamente corrisponde a un range tra i 10^{-2} e 10^5 Pa), con una pressione limite che in condizioni nominali raggiunge valori inferiori ai 5 Pa.



Figura 3.2 Pompa MS40+ [14]

Il grafico di Figura 3.3 mostra i livelli di pressione raggiungibili in funzione della portata imposta e parametrizzate rispetto alla velocità di rotazione.

Tre sono le velocità operative: 1200, 1500 e 1800 rpm.

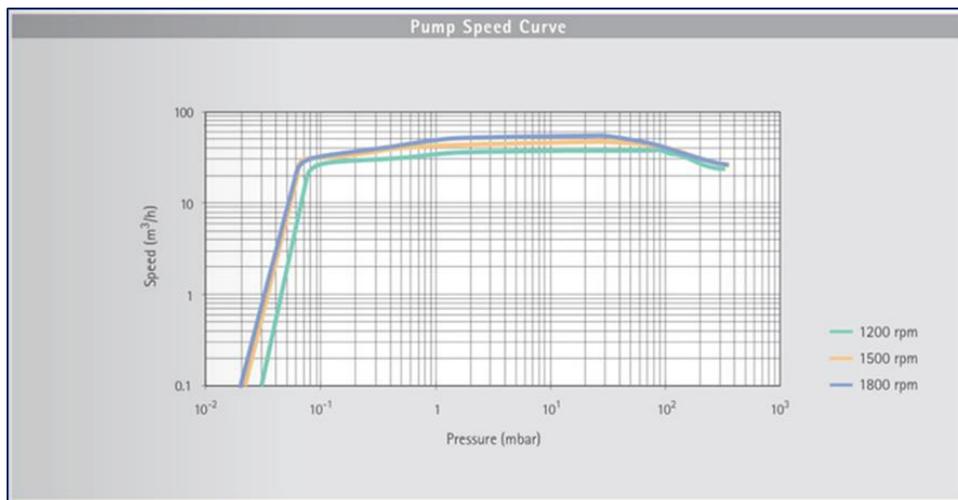


Figura 3.3 Curve pressione-velocità di pompaggio a 1200-1500 rpm [14]

Le applicazioni della pompa MS40+ riguardano in particolar modo la strumentazione lc/ms (“liquid chromatography-mass spectrometry”) e icp-ms (“inductively coupled plasma mass spectrometry”) (Figura 3.4). I prodotti Agilent “single quadrupole LC/MSD system” (a) e “7850 ICP-MS” (b) sono dispositivi lc/ms e icp-ms rispettivamente che prevedono l’introduzione della pompa MS40+ all’interno del loro apparato.

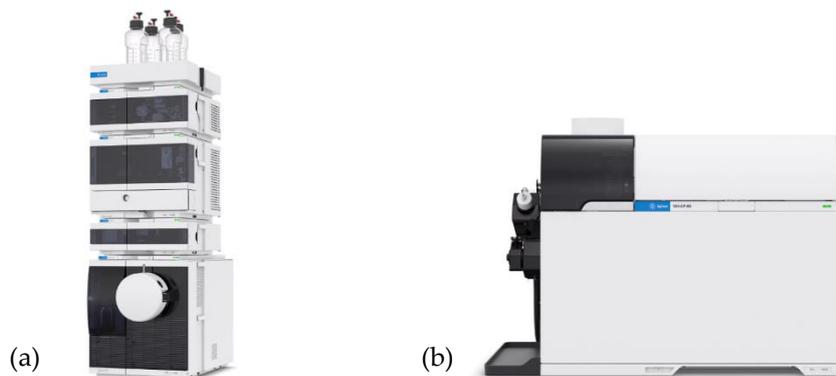


Figura 3.4 Due dei prodotti Agilent che includono la pompa MS40+: “single quadrupole LC/MSD system” (a) e “7850 ICP-MS” (b)

I dispositivi lc/ms devono il loro nome alla tecnica tipica della chimica analitica che combina la cromatografia liquida con la spettrometria di massa per la separazione, identificazione e quantificazione di composti così come la caratterizzazione di struttura e proprietà chimiche delle molecole. La cromatografia liquida ha il ruolo di separare i diversi composti presenti in una miscela per effetto della differente velocità di migrazione di questi verso una fase stazionaria sotto l’influenza di una fase mobile. La spettrometria di massa sfrutta il principio per il quale, una volta ionizzate le molecole della miscela campione, è possibile dividere gli ioni in funzione del rapporto massa/carica che li contraddistingue, per mezzo di campi magnetici statici o oscillanti.

La strumentazione icp-ms è basata ancora una volta sulla spettrometria di massa per distinguere gli elementi dei composti, ma in questo caso il campione è precedentemente ionizzato tramite un plasma accoppiato induttivamente, ovvero ottenuto da un riscaldamento induttivo sul gas attraverso una bobina elettromagnetica.

I principali componenti della pompa MS40+ possono essere riassunti nei seguenti:

- Corpo pompa (corpo pompa statorico)
- Rotore (corpo pompa rotorico)
- Palette
- Valvola di scarico
- Valvola di antiritorno
- Serbatoio
- Motore
- Inverter

Le Figure 3.5 – 3.6 – 3.7 ne forniscono una rappresentazione maggiormente dettagliata.

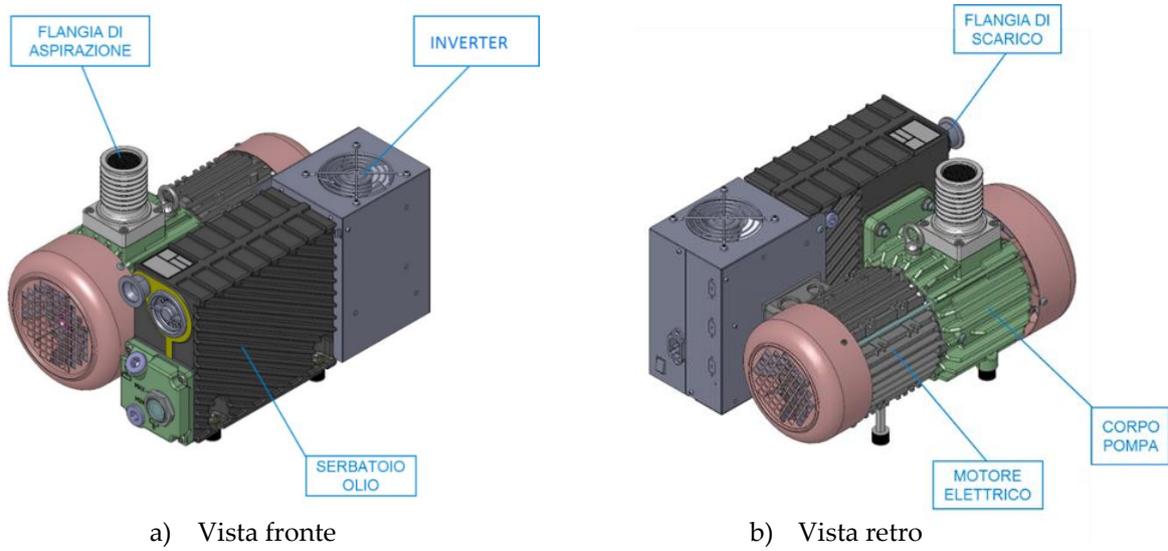


Figura 3.5 Vista isometrica fronte e retro della pompa MS40+ [14]

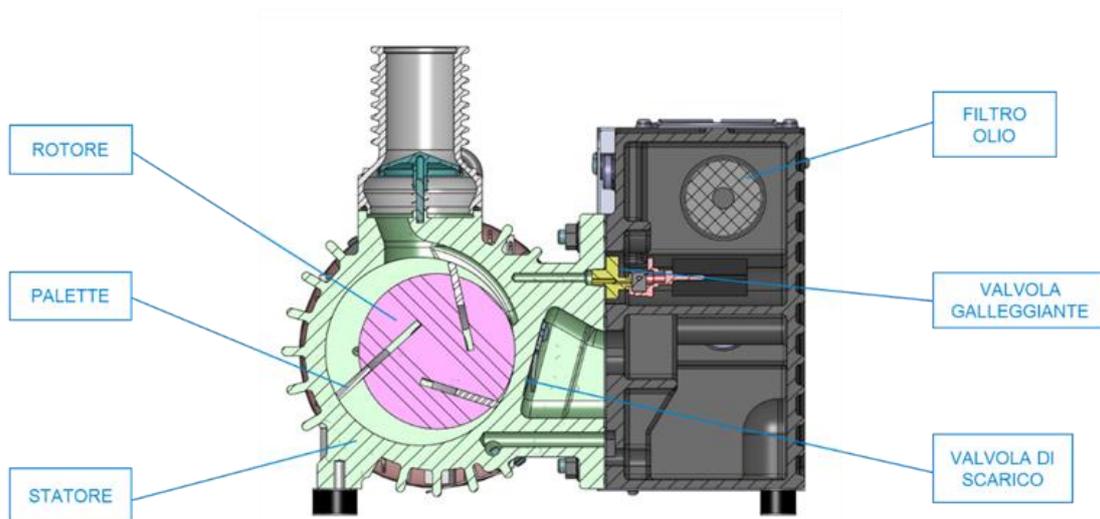


Figura 3.6 Vista in sezione frontale della pompa MS40+ [14]

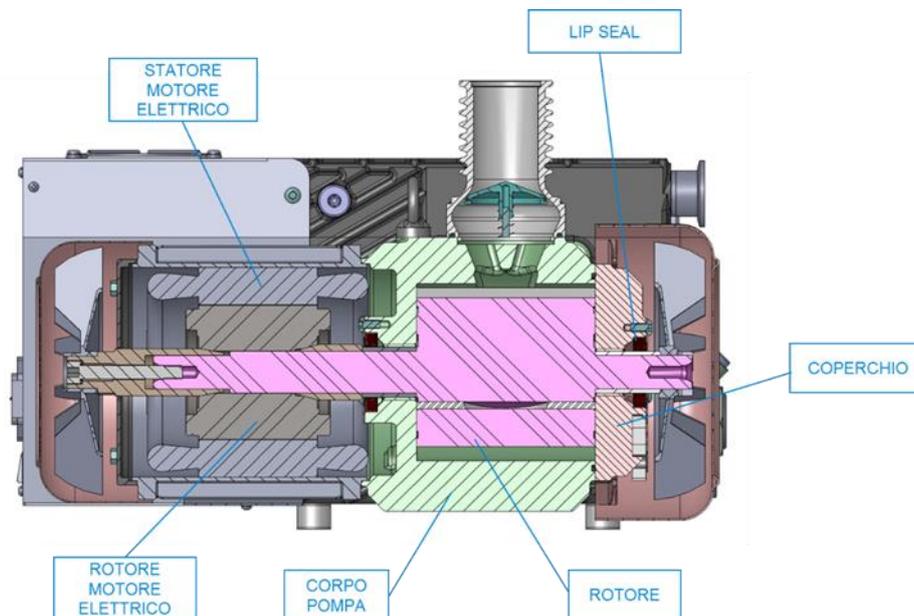


Figura 3.7 Vista in sezione laterale della pompa MS40+ [14]

Corpo pompa

Il corpo pompa (in Figura 3.7) è ricavato da fusione di ghisa e funge da elemento statorico. Esso contiene rotore e palette, oltre a una serie di condotti per il ricircolo dell'olio lubrificante che collegano la camera pompante con il serbatoio. Un altro elemento caratteristico è rappresentato dalle lunette presenti in prossimità dello scarico: queste servono principalmente per far fronte all'incomprimibilità dell'olio, dando inoltre una direzione preferenziale al fluido allo scarico e influenzando, a causa della loro geometria e posizione, la fase finale della compressione del gas e di conseguenza le prestazioni della pompa in termini di pressione e potenza. La forma interna dello statore inoltre presenta un'ulteriore lunetta che permette di ottenere due punti di contatto con il rotore, in modo che non ci sia solamente una sezione ma un volume che separa lo scarico dall'aspirazione, volume che durante la rotazione è completamente occupato dal lubrificante. Ne consegue una riduzione al minimo delle perdite causate dal ritorno del gas nella zona di aspirazione.

Rotore

Il suo nome ben chiarifica il ruolo di componente rotante della pompa. Esso si presenta costituito da un corpo cilindrico in lega di Manganese e Piombo, realizzato di pezzo sull'albero del motore (osservabile nelle Figura 3.7 e Figura 3.8). Esso presenta tre cave profonde disposte periodicamente a 120° l'una rispetto all'altra: esse costituiscono la sede per le palette scorrevoli. Le cavità circolari sulle facce frontali, invece durante la rotazione sono occupate dall'olio e permettono allo stesso di fare tenuta.

In senso esteso il rotore arriva a comprendere, oltre all'albero, anche il motore elettrico, le palette, le bronzine, le ventole refrigeranti, con gli accessori ad essi collegati (quali vite terminale e rosetta). Di questi non tutti verranno modellizzati nei termini di questa attività, come verrà discusso nel Caso 4 del capitolo 4. Altri componenti invece dovranno essere trattati con caratteristiche geometriche e di materiale equivalenti. L'albero è quindi sostenuto ai lati del cilindro pompante da due cuscinetti oleodinamici, come testimoniano le boccole, che accoppiandosi con le corrispettive fisse tramite il meato d'olio garantiscono il vincolo durante la rotazione. Una vista dell'esploso privato delle palette è presentato in Figura 3.8.

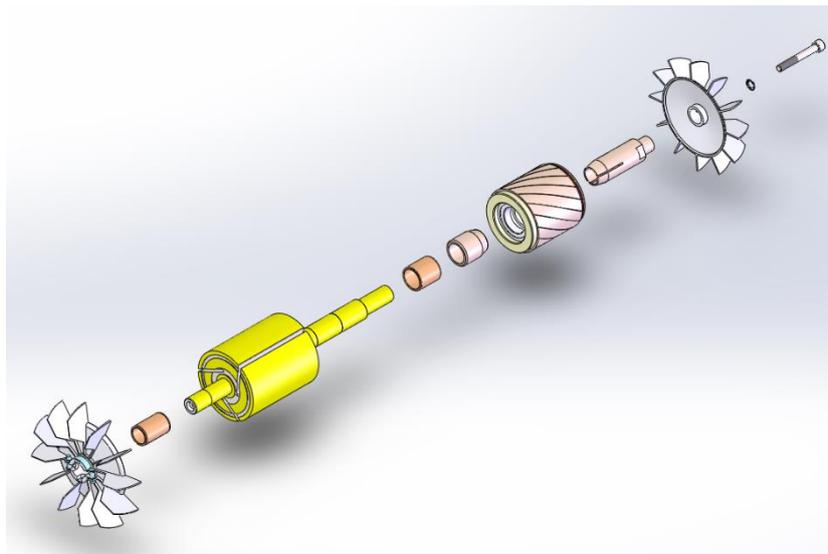


Figura 3.8 Vista esplosa del sistema rotante della pompa MS40+

Palette

Alle tre cave corrispondono le tre palette in esse inserite, le quali sono ricavate da materiali compositi a base di resine fenoliche che prendono il nome di Ferrozol. Esse hanno come unico grado di libertà quello di scorrimento in direzione pseudo-radiale, moto agevolato dall'interposizione di un film d'olio tra le pareti di interfaccia. Durante la rotazione del rotore il contatto con la superficie interna dello statore è garantito dalla forza centrifuga.

Valvola di scarico

Quattro sono i fori atti allo scarico. Un sistema di laminazione, costituito da un supporto (Figura 3.9c) e due lamelle (Figura 3.9a e Figura 3.9b), provvede, mediante il primo, una certa angolazione di apertura. Per effetto della depressione nel vano in cui avviene la contemporanea compressione del gas, le lamelle otturano gli scarichi. Al contrario queste si aprono quando la spinta generata dalla compressione cresce al punto di eguagliare quella dell'olio sommata con la pressione atmosferica, favorendo così l'efflusso di gas al serbatoio. Un ulteriore sistema di fori realizzati

sulla lamelle consente altresì l'accesso di aria nella pompa per la chiusura della valvola di antiritorno.

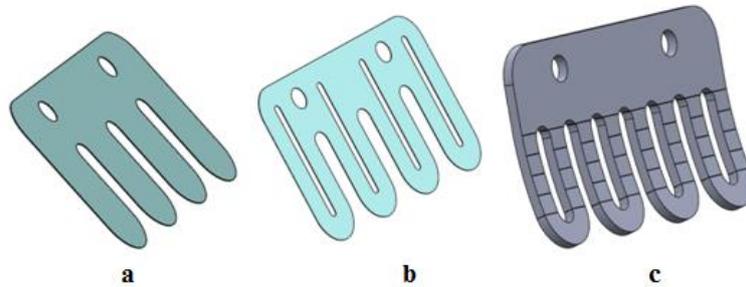


Figura 3.9 Lamelle (a & b) e supporto (c) per la laminazione allo scarico [14]

Valvola di antiritorno

La valvola di antiritorno (Figura 3.10) durante il funzionamento della pompa ha unicamente la funzione di deviare la traiettoria del flusso. Essa agisce solo all'arresto, volontario o meno, della pompa. Il suo ruolo è quello di creare un divisorio tra l'ambiente esterno e la camera in cui si sta creando il vuoto, questo per impedire la risalita sia del gas che del fluido di lavoro, spinti verso la camera dalla differenza di pressione con l'interno della pompa. Essendo anche la valvola stessa spinta verso l'alto dalla differenza di pressione tra corpo e camera, la sua progettazione deve essere tale da anticipare la risalita dei fluidi.

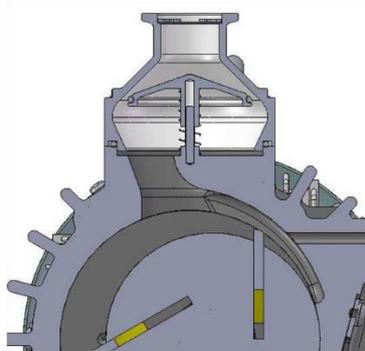


Figura 3.10 Valvola di antiritorno [14]

Serbatoio

Il serbatoio (Figura 3.11) è un recipiente adibito al raccoglimento dell'olio lubrificante, motivo per cui non può non essere provvisto di un tappo di carico e scarico olio così come di una spia per la segnalazione del livello massimo e minimo. Esso, come lo statore è realizzato in ghisa e collegato allo scarico del corpo pompa. Presenta un galleggiante per il recupero dell'olio e un sistema di separazione dello stesso dal gas di scarico. Infatti, al termine della fase di scarico, le gocce più grossolane di olio si separano dal flusso di gas precipitando nella zona inferiore del serbatoio

raggiungendo così il restante liquido. Le gocce più fini e le nebbie, invece, risentono del trascinamento verso l'alto da parte del flusso di gas. Un filtro posto superiormente separa per coalescenza l'olio dal gas, raggruppando le gocce piccole d'olio in gocce più grandi. In questo modo il gas viene purificato e attraversa la flangia di scarico mentre l'olio si raccoglie in un recipiente intermedio fino a quando, per accumulazione, viene raggiunta una quota di liquido tale da provocare il sollevamento del galleggiante per effetto della spinta di Archimede, aprendo la valvola che scola l'olio così recuperato nel corpo pompa, pronto per essere reimpresso in circolo (Figura 3.12).

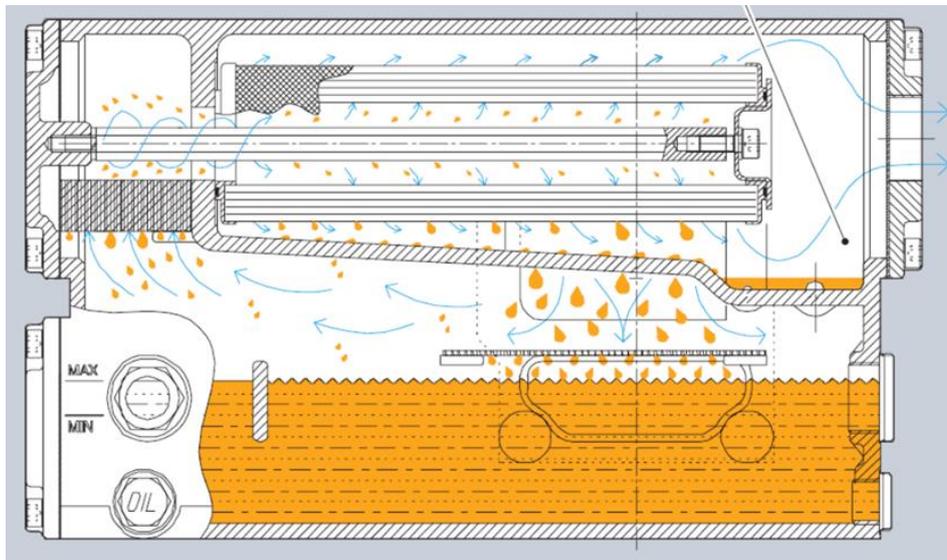


Figura 3.11 Sezione del serbatoio [14]

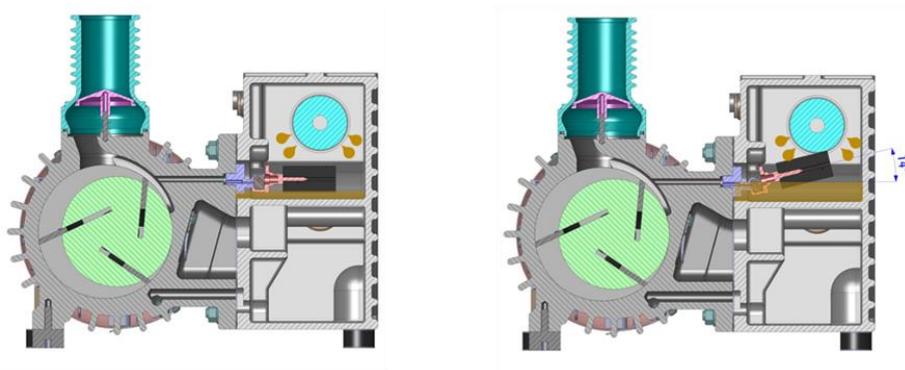


Figura 3.12 Galleggiante e valvola chiusa e aperta [14]

Motore ed inverter

Il motore asincrono trifase presenta due coppie polari ed è calettato mediante boccole accessorie sull'albero rotante. Specifiche ulteriori verranno fornite nella sezione dedicata alla sua introduzione nel modello (Caso 4). Il motore, a sua volta, è pilotato da un inverter con controllo vettoriale sinusoidale sensorless e loop di regolazione velocità meccanica. Nelle tabelle sottostanti sono riportate le principali caratteristiche sia del motore (Tabella 3.1) che dell'inverter (Tabella 3.2).

Caratteristica motore	Valore
Tipologia	230V/3 50 Hz
Avvolgimento	M80/4
Potenza resa	750 W
Traferro	0,55 mm
Lunghezza cavi	120 ± 10 mm

Tabella 3.1 Specifiche del motore

Caratteristica inverter	Valore
Tensione di alimentazione	Monofase, 200-240 Vac
Potenza massima di ingresso	1200 VA
Tensione di uscita	Trifase, 60-240 Vac
Frequenza elettrica di uscita	10-70 Hz
Potenza massima di uscita	850 W (950 W i primi 30 min)
Dimensioni	200 x 120 x 100 mm
Peso	3 kg
Range T di funzionamento	5°C < T < 50°C
Range T olio di funzionamento	T > 12°C
Raffreddamento	Ventilazione forzata

Tabella 3.2 Specifiche dell'inverter

Capitolo 4

Il modello FE della pompa MS40

4.1 Panoramica delle casistiche

La prima fondamentale questione, nell'approccio al modello è risultata fin da subito la comprensione di quali fossero le casistiche da prendere in esame. Da esse non dipende solo l'ampiezza del panorama interpretativo dei risultati (e quindi anche la vastità della comprensione del fenomeno), ma anche e soprattutto la possibilità di definire uno schema secondo un rigore logico. Questo consente di limitare il contributo di parametri multipli, permettendo di isolare le radici del problema, con un conseguente rilevante risparmio di tempo, in particolare qualora sia necessario capire le ragioni alla base di risultati discordanti o di esiti imprevisti dell'analisi.

Per questo motivo si è deciso di impostare lo studio muovendosi verso complessità crescenti, al fine di evidenziare passo-passo le eventuali criticità.

L'analisi riportata nel capitolo 2 relativa al modello del rotore a 3 dischi ha messo in luce quali possano essere, tra quelle presentate, le metodologie più adatte ad affrontare l'analisi della pompa. Da ciò è emersa la decisione di accantonare il modello K_{dyn} in favore del metodo FE Matlab 1D (almeno per la prima fase), e soprattutto dell'analisi con elementi solidi di Ansys. Questi permettono infatti di sondare aspetti per cui la trattazione unidimensionale non può dare una adeguata spiegazione.

Per tutte le simulazioni in merito alla pompa MS40 si è utilizzato un pc HP Zbook 15 G3, processore Intel(R) Core(TM) i7-6820HQ CPU, 4 core, 16,0 GB di RAM, mentre le versioni dei software sono Ansys Workbench 2021R2 [1] e Matlab R2020b [11].

Di seguito sono elencati i modelli considerati. In tutti viene omissa lo smorzamento interno dell'albero in quanto le informazioni su di esso sono ottenibili solo a valle di una campagna

sperimentale. I supporti vengono considerati rigidi in tutti i 4 casi delineati. Oggetto di un capitolo a parte (capitolo 5) è la trattazione in merito all'introduzione dei cuscinetti lubrificati, la quale richiede una procedura dedicata.

- **Caso 1:** rotore pieno
Questo è considerato essere il livello zero della trattazione e per le sue caratteristiche si presta ad essere esaminato sia mediante modello assialsimmetrico Matlab 1D che Ansys 3D. Esso, nonostante sia alquanto irrealistico, fornisce un range di massima sull'ordine di grandezza dei parametri dinamici risultanti, mettendo in risalto gli aspetti caratteristici che ci si aspetta di osservare in un'indagine rotodinamica. Questo caso permette inoltre di tenere ancora sotto controllo un numero modesto di variabili e mostra fin da subito le limitatezze della teoria 1D rispetto al 3D, motivo che rende inevitabile il confronto tra i due metodi.
- **Caso 2:** rotore pieno – con fori
Esso è una variazione del sistema 1 che chiarifica sinteticamente gli effetti di uno svuotamento di materiale localizzato sulle velocità di precessione e sui modi di vibrare.
Soltanto il modello Ansys 3D viene realizzato per questo scopo.
- **Caso 3:** rotore con cave - con fori
Con questa ulteriore complicazione ci si spinge a considerare i confini di validità della trattazione affrontata dal software Ansys nel sistema di riferimento stazionario: infatti, essendo l'assialsimmetria qui non più verificata, ci si interroga sull'effettiva attendibilità o accettabilità della soluzione, o se è inevitabile il ricorso ad un sistema di riferimento rotante. Il modello Ansys 3D è ottenuto dal riadattamento del caso 2.
- **Caso 4:** rotore con cave - con fori – con corpo motore
Questo è il modello più completo di rotore, se si eccettua le considerazioni sui vincoli e sullo statore, i quali possono modificare in modo rilevante gli approcci risolutivi dell'analisi. Le ventole, le palette e altri particolari sono stati omessi in quanto poco o nulla influenti sull'esito della simulazione, a fronte di un incremento di risorse computazionali del tutto evitabile. Anche in questo caso si è prevista la realizzazione del solo modello Ansys 3D.

4.2 Caso 1: rotore pieno

4.2.1 Il modello Matlab

Tra i diversi interrogativi posti nella fase iniziale in merito all'analisi modale, uno dei più interessanti se non il più rilevante è stato quello di domandarsi se si potessero ottenere risultati attendibili ai fini aziendali già con un modello monodimensionale che avrebbe così coniugato

accuratezza e rapidità di risposta. Per questo motivo si è introdotto un codice Matlab che replica le caratteristiche basilari del rotore oggetto di studio e conferma gli esiti ottenuti con il modello 3D.

L'applicazione di tale tecnica non è molto dissimile al caso del capitolo 2, salvo qui considerare il parallelo di più elementi (bronzina + albero), due materiali, lunghezze e sezioni (cave o piene) differenti di tratto in tratto. In particolare, interessante notare che la formulazione delle matrici di massa, rigidità e giroscopica rimane la stessa.

Tre aggiornamenti degni di nota rispetto al codice del modello del rotore a 3 dischi sono stati:

- L'introduzione, per ciascun tratto di trave del numero variabile degli elementi impostabile dall'utente: questo ha permesso di affinare l'accuratezza in termini di autovalori e autovettori calcolati.
- Il calcolo delle forme modali, sia nel caso $\Omega = 0$ che per Ω variabile, mostrando l'influenza della velocità sulla variazione della deformata.

La sostituzione dei vincoli rigidi con molle la cui rigidità può essere anch'essa definita dall'utente, rendendo il codice più snello e il calcolo più rapido. Al fine di simulare la condizione di supporto infinitamente rigido si è considerato:

$$k_1 = k_2 = k = 10^{15} \text{ N/m}$$

Il modello si appoggia su matrici di massa e giroscopica congruenti, considerando le proprietà inerziali distribuite su tutta la trave. La procedura, di seguito non riportata, ricalca nelle sue linee essenziali quella già descritta nella sezione 2.3. Nonostante ciò è doveroso porre alcune considerazioni relative a questo caso peculiare.

Per quanto riguarda albero e boccole, laddove condividono lo stesso tratto di trave sono considerati vincolati rigidamente l'uno all'altro (contact "bonded" in Ansys). Pertanto avranno gli stessi nodi e gli stessi gradi di libertà, motivo per cui il parallelo è condotto nel seguente modo: una volta calcolate separatamente le tre matrici del tratto di boccola e di rispettivo albero, basterà sommarle cella-cella (massa con massa, rigidità con rigidità e giroscopica con giroscopica) in modo analogo a un caso di parallelo di molle o rigidità in genere, dando così origine ad un unico elemento "sandwich", che tiene conto della somma dei due.

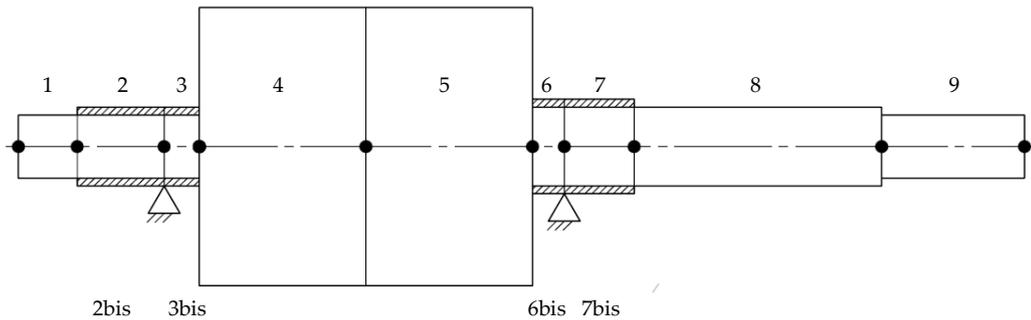


Figura 4.1 Sezione dell'albero (caso 1) con supporti rigidi

Nella Figura 4.1 è possibile osservare i 9 tratti con cui è stato discretizzato l'albero, a cui si aggiungono i tratti "bis" delle boccole in parallelo. Ciascuno di questi potrà essere poi suddiviso in ulteriori sottoelementi ai fini di una migliore accuratezza computazionale. Per i motivi già citati, il calcolo si riduce ai soli elementi dell'albero in quanto quelli delle boccole collassano sui corrispettivi tratti condivisi con il primo. In tale attività si è preso a riferimento un numero di 10 elementi per ogni tratto, il che porta a miglioramenti nella soluzione senza inficiare in modo determinante sul tempo della simulazione, per un totale di 90 elementi, 91 nodi e 182 gradi di libertà.

Noto il campo di operatività della pompa, pari a [20-30] Hz (corrispondente a [1200 - 1800 rpm]), si è preso a riferimento un range di velocità da 0 a 50 Hz, con un passo di 5 Hz.

4.2.2 Il modello Ansys 3D

La procedura per la realizzazione del modello 3D realizzato con Ansys non è dissimile a quella già attuata per il caso del rotore a 3 dischi (si veda Figura 4.2(a)). Si è scelta una discretizzazione che coinvolgesse 7643 elementi Solid186 con 45289 nodi complessivi (Figura 4.2(b) e Figura 4.11). È possibile notare che qui la suddivisione del corpo è stata realizzata sia in senso assiale che radiale. Dividendo la sezione in 4 parti rispetto a due assi di simmetria fra loro ortogonali, si è potuto ottenere in automatico una mesh con elementi prevalentemente tetra, con una configurazione e distribuzione con tendenza evidentemente assialsimmetrica. Inoltre si è cercato di rifinire la discretizzazione laddove si presentavano corpi più sottili, quindi in corrispondenza delle boccole e delle due estremità.

È tuttavia importante notare che, per quanto riguarda l'analisi modale, i requisiti in termini di mesh non sono stringenti in quanto, non essendo interessante calcolare tensioni e deformazioni, non è necessario derivare i relativi spostamenti per ottenerli. La derivata infatti si appoggia sulla qualità della discretizzazione; ne consegue che una scarsa accuratezza della stessa si ripercuote sugli esiti della derivazione. Nella risoluzione dell'autoproblema, invece, l'esigenza è quella di risolvere equazioni algebriche di ordine elevato, il che è affetto dal numero di gradi di libertà e

dal numero di modi che si intende estrarre. Avere un eccessivo numero di gradi di libertà penalizza il tempo di calcolo senza particolari benefici sulla precisione della soluzione. Per tale motivo il programma ricorre in automatico a metodi di riduzione al fine di estrarre i gradi di libertà più significativi su cui impostare il problema agli autovalori. Questo ha portato alla conclusione che, non dovendo risolvere equazioni differenziali, si è potuto strutturare una mesh non eccessivamente rifinita, esito di un compromesso tra convergenza dei valori di velocità di precessione ottenute, criteri di qualità (“quality criteria”) e tempo computazionale.

Dalla Figura 4.3 alla Figura 4.10 delle pagine seguenti è possibile notare come i requisiti in termini di “quality criteria” siano rispettati per tutti gli undici parametri valutati.

Un altro aspetto degno di considerazione è la corretta definizione dei contatti (“contacts”) tra le parti che costituiscono il solido, pena l’insorgere di moti rigidi con frequenza non nulla, con ripercussioni anche sulle altre frequenze del sistema. Un tema che diventa particolarmente rilevante nel caso 4, in cui motore e relativi accessori sono aggiunti al sistema.

Per l’analisi si sono considerati 20 modi, oltremodo sufficienti a descrivere adeguatamente la dinamica almeno per $\Omega = 0$, come testimoniano i fattori di partecipazione modale, che dichiarano considerato almeno il 95% della massa. L’intervallo di velocità è sempre 0-50 Hz, con un passo di 10 Hz, sebbene anche solo un passo di 25 Hz sarebbe risultato sufficiente a seguito dei risultati ottenuti.

Le condizioni di vincolo, supporto rigido (3 traslazioni bloccate) in tutta la sezione, è la condizione che meglio replica la stessa che è ottenibile con il modello Matlab unidimensionale.

Infine si è considerato il metodo di risoluzione “reduced damped”, il quale, ad un costo computazionale ridotto, non ha mostrato particolari differenze rispetto al “Full damped” in termini di soluzione.

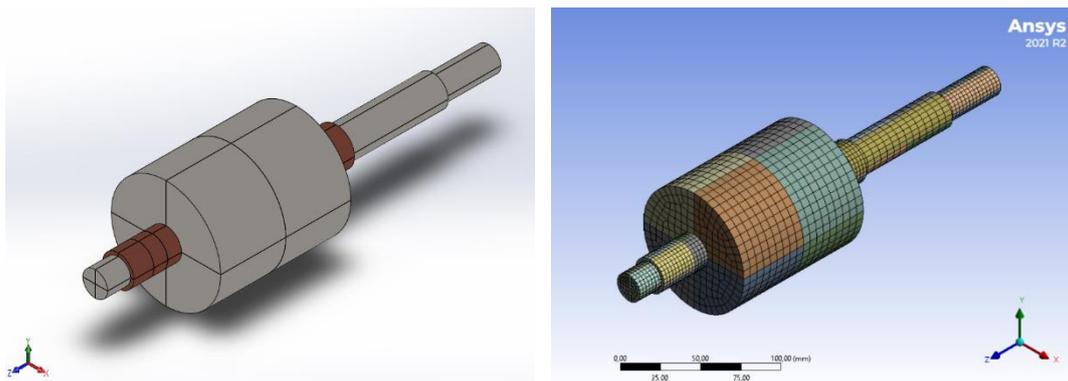


Figura 4.2 Albero (caso 1) con supporti rigidi. Modello CAD (a); Mesh (b)

Element Quality

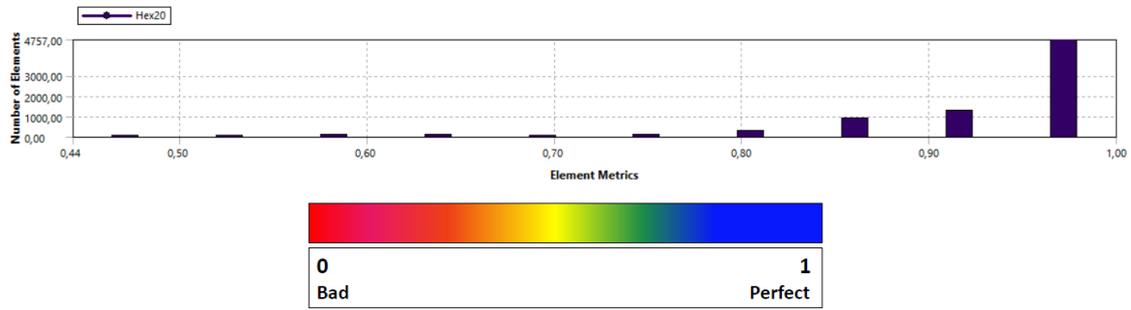


Figura 4.3 Mesh (caso 1): element quality

Aspect ratio

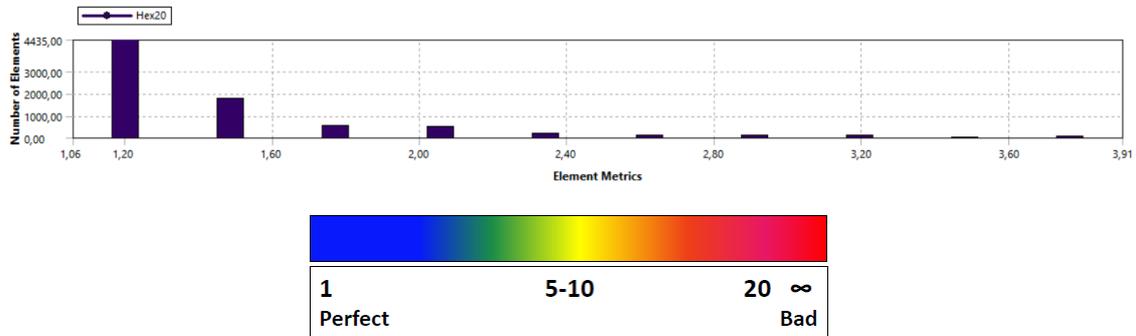


Figura 4.4 Mesh (caso 1): aspect ratio

Jacobian ratio (MAPDL)

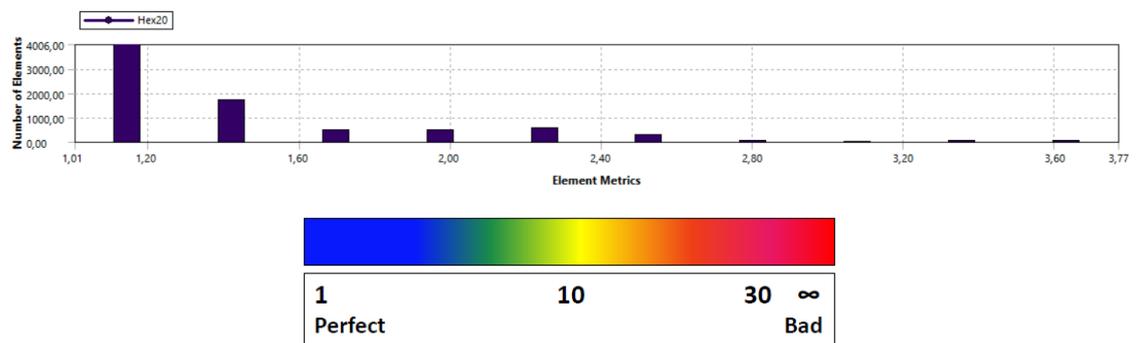


Figura 4.5 Mesh (caso 1): jacobian ratio

Warping ratio

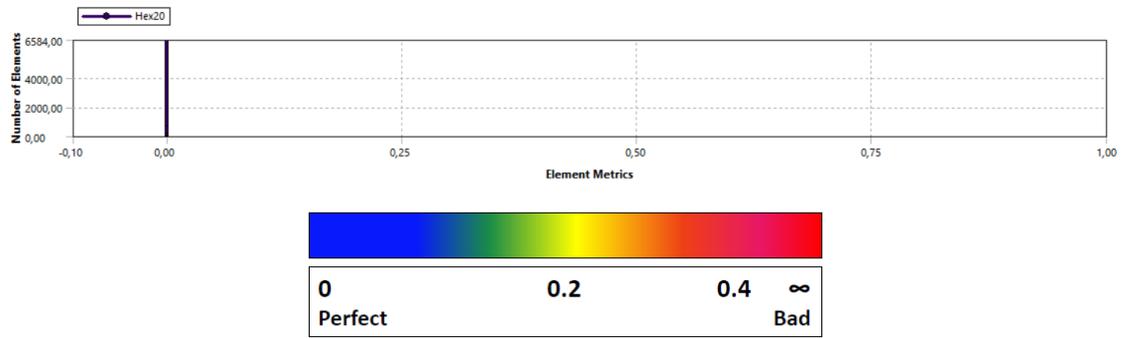


Figura 4.6 Mesh (caso 1): warping ratio

Parallel deviation

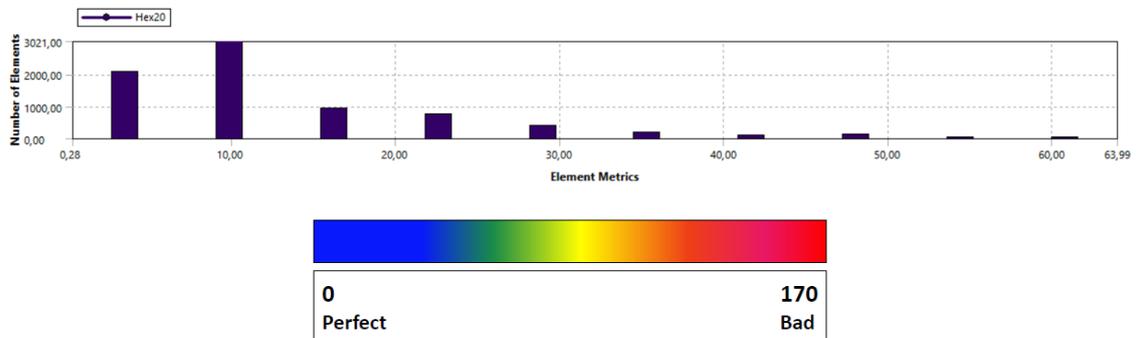


Figura 4.7 Mesh (caso 1): parallel deviation

Maximum corner deviation

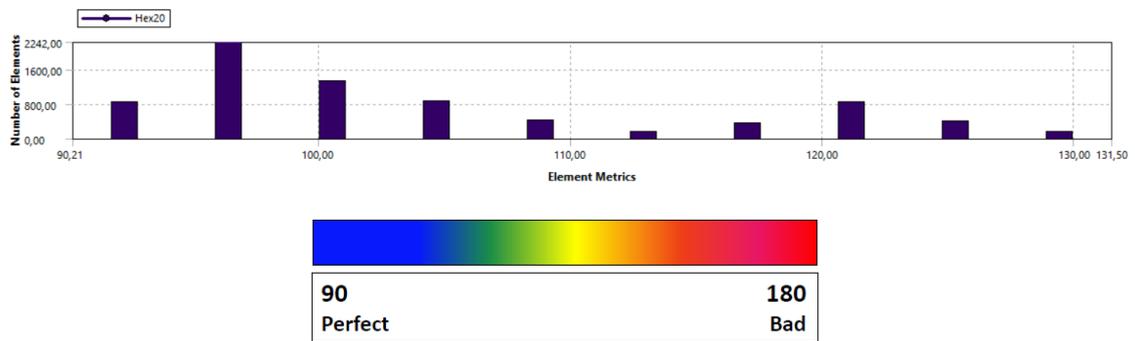


Figura 4.8 Mesh (caso 1): maximum corner deviation

Skewness

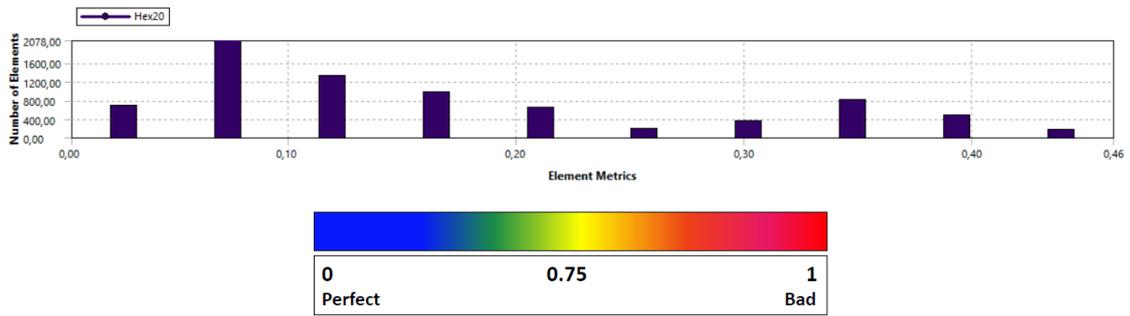


Figura 4.9 Mesh (caso 1): skewness

Orthogonal quality

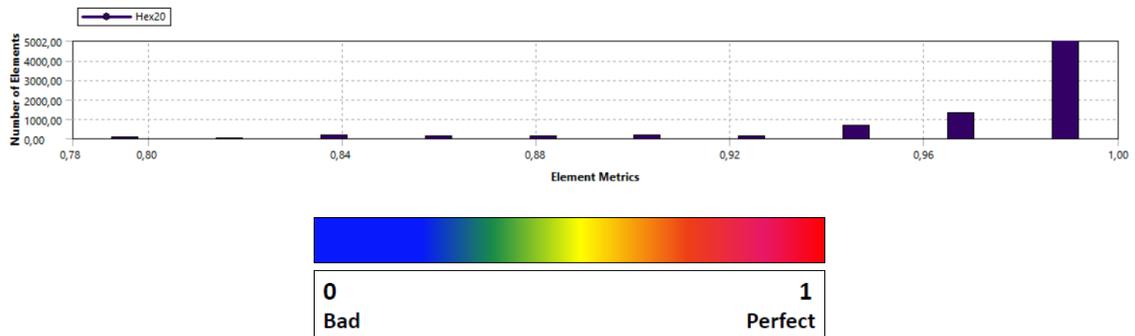


Figura 4.10 Mesh (caso 1): orthogonal quality

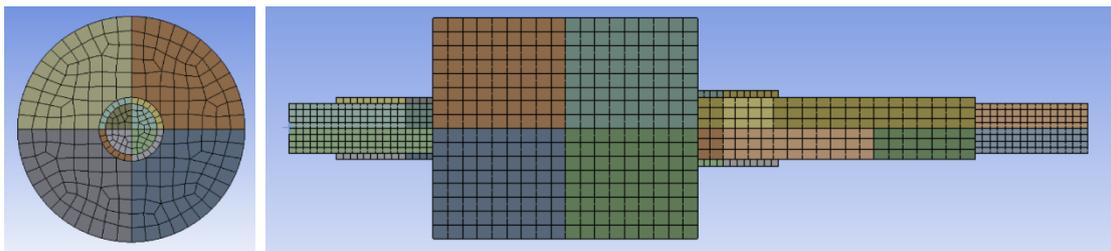


Figura 4.11 Mesh (caso 1): vista frontale e laterale rispettivamente

4.2.3 Risultati

Nelle figure seguenti sono riportati gli esiti delle due simulazioni in termini di diagramma di Campbell, frequenze proprie per velocità nulla, forme modali e fattori di partecipazione modale (quest'ultimo solo per Ansys).

In Figura 4.12 è riportato l'andamento delle velocità di precessione rispetto alla rotazione dell'albero. Il riquadro in giallo delimita la zona operativa della pompa. Mentre tratteggiato in azzurro è la bisettrice del 1°-3° quadrante che rappresenta lo sbilanciamento del rotore, la cui intersezione determina le velocità critiche. Sono stati presi a riferimento i primi 4 modi, in quanto sono quelli più identificativi della dinamica, come è possibile osservare dalla tabella dei fattori di partecipazione modale per $\Omega = 0$.

Le frequenze proprie sono oggetto della Tabella 4.1 mentre i fattori di partecipazione modale sono riportati in Tabella 4.2. Figura 4.13 e Figura 4.14 illustrano le forme modali ottenute da Ansys, come da Matlab.

Il comportamento flessionale ottenuto dal modello 3D coinvolge 2 piani (xz e yz) in egual misura, mentre l'esito ottenuto da Matlab è ottenuto in un solo piano (yz): ma questo non deve destare preoccupazione, in quanto, per la conformazione del sistema si ha disaccoppiamento della dinamica nei due piani. Nel modello Ansys è stato lasciato libero il moto rigido torsionale, il quale tuttavia è stato rimosso dalla visualizzazione nei diagrammi di Campbell.

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Numero di elementi	Numero di modi calcolati	Numero di Ω considerate	Costo computazionale
	f_n [Hz]	f_n [Hz]	f_n [Hz]	f_n [Hz]	n_{el} [-]	n_m [-]	n_Ω [-]	Δt [s]
FEM Matlab 1D	1057	4365	5065	6825	90	364	11	~2
FEM Ansys 3D	1008	3644	4887	6445	7643	20	6	~273 (~4,55 min)
ε_{rel} [%]	4,86	19,79	3,64	5,90				

Tabella 4.1 Tabella delle prime 4 frequenze proprie per $\Omega = 0$

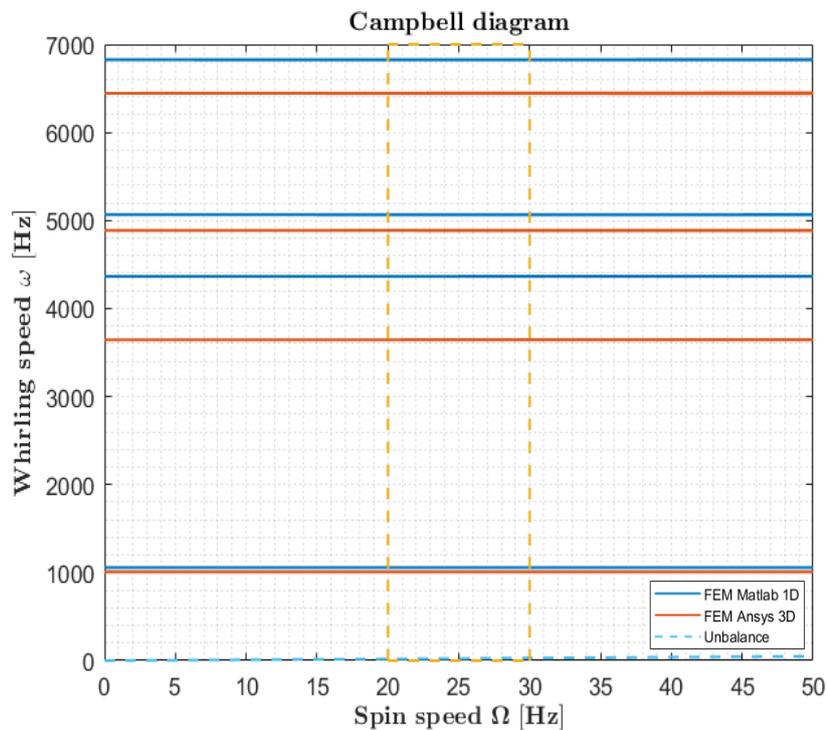


Figura 4.12 Campbell diagram: Matlab 1D - Ansys 3D delle prime 4 velocità FW e BW

Modo	Frequenza propria	Fattore di partecipazione modale (direzione x)	Massa effettiva sulla massa totale (direzione x)	Fattore di partecipazione modale (direzione y)	Massa effettiva sulla massa totale (direzione y)
$n^\circ [-]$	$f_n [Hz]$	$\Gamma_x [\sqrt{kg}]$	$M_{eff_x}/M_{tot} [-]$	$\Gamma_y [\sqrt{kg}]$	$M_{eff_y}/M_{tot} [-]$
Torsionale rigido	0,7864	0,116e-4	0,232e-10	-0,116e-4	0,137e-8
1° flessionale BW	1008	0,280	0,136e-1	0,322	0,179e-1
1° flessionale FW	1008	-0,322	0,179e-1	0,280	0,135e-1
2° flessionale BW	3644	-1,50	0,390	-1,22	0,259
2° flessionale FW	3644	-1,22	0,259	1,50	0,390
3° flessionale BW	4887	-0,438	0,332e-1	-0,416	0,300e-1
3° flessionale FW	4887	-0,416	0,299e-1	0,438	0,331e-1
4° flessionale BW	6445	0,753	0,979e-1	0,748	0,967e-1
4° flessionale FW	6445	0,748	0,968e-1	-0,753	0,980e-1

Tabella 4.2 Fattori di partecipazione modale riferiti alle traslazioni lungo x e y ($\Omega = 0$)

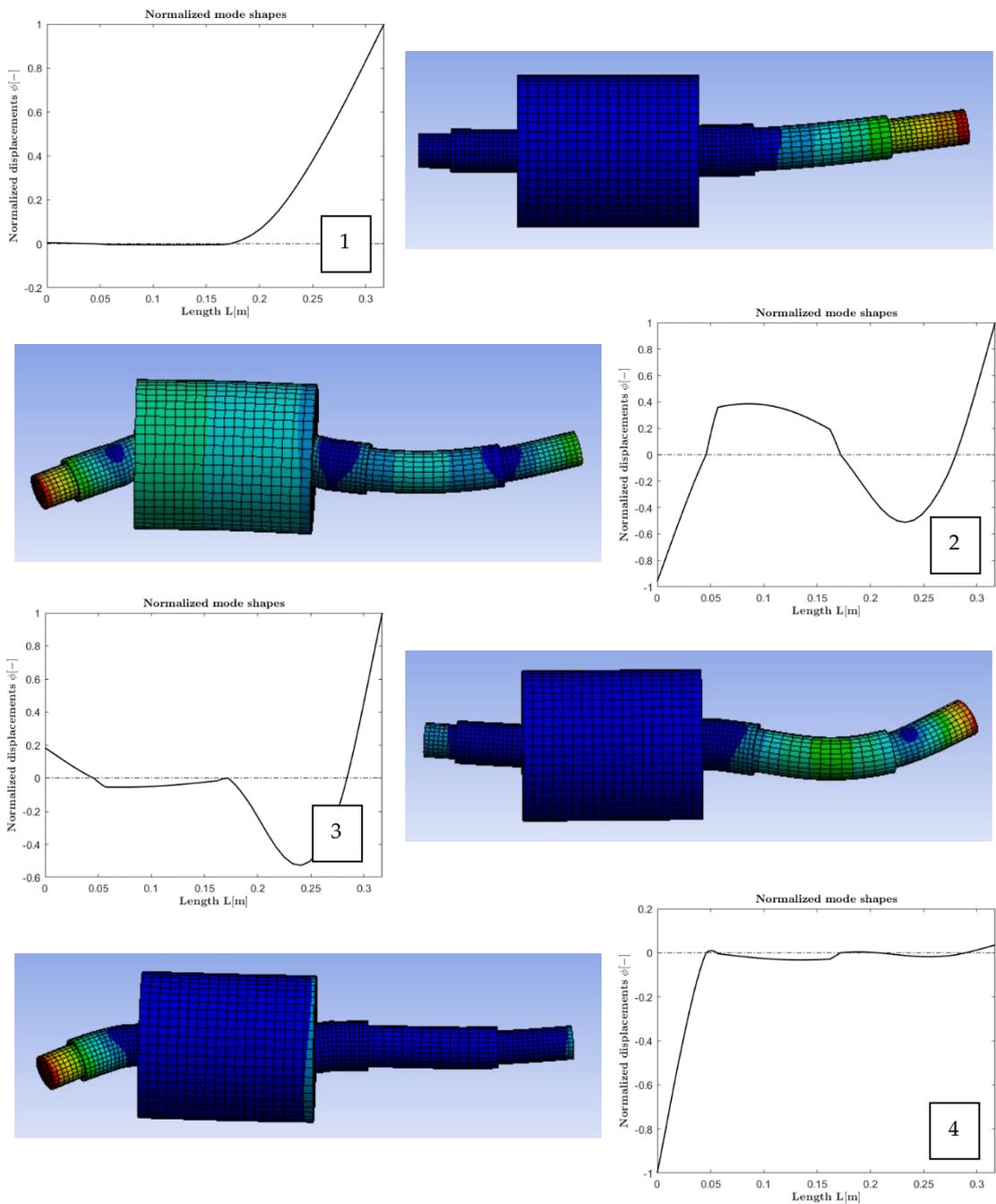


Figura 4.13 Confronto delle prime 4 forme modali ricavate mediante software Ansys (per $\Omega = 0$) e Matlab ($\Omega = 0 \div 50$ Hz): vista laterale

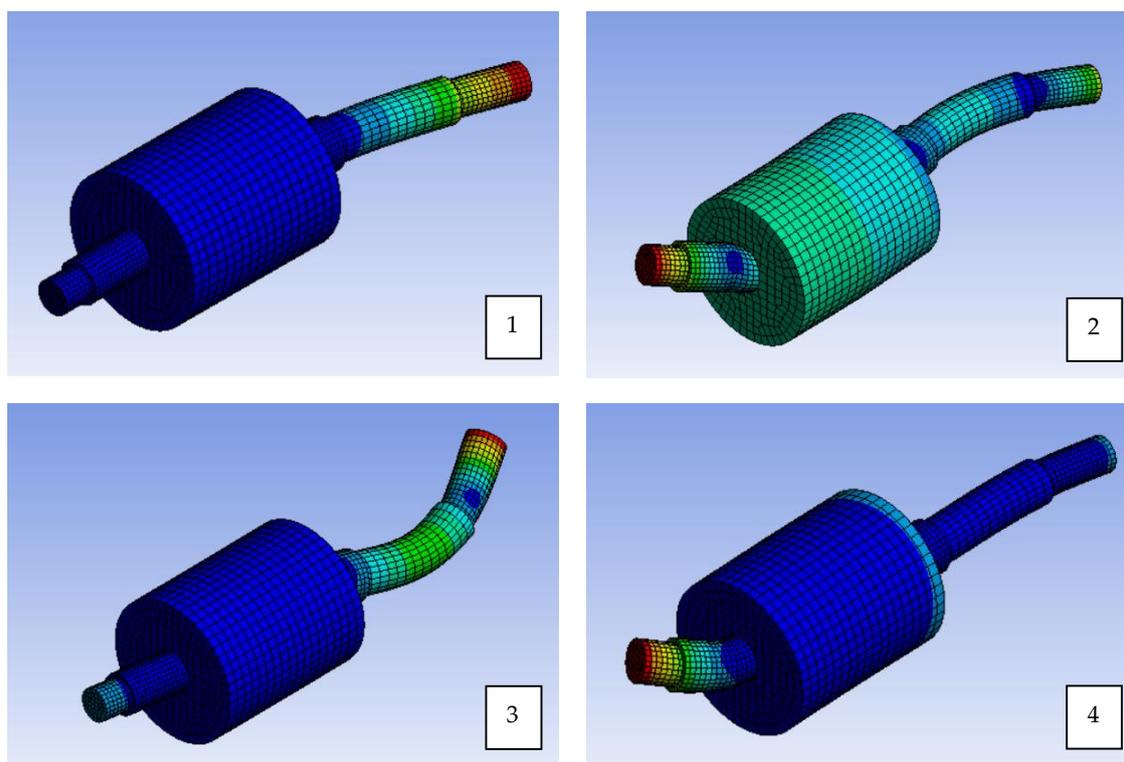


Figura 4.14 Vista isometrica delle prime 4 forme modali forward ricavate mediante software Ansys (per $\Omega = 0$)

4.2.4 Considerazioni e commenti

Osservando gli esiti del diagramma di Campbell ciò che è immediato notare è la sostanziale indipendenza dei primi quattro modi (forward e backward) dalla velocità di rotazione Ω , considerazione che si traduce nella scarsa rilevanza che il contributo giroscopico riveste per lo meno in questa regione di analisi. L'effetto giroscopico, col caratteristico divergere delle curve FW e BW, rimane prerogativa delle velocità più alte. Questo è legato al fatto che il sistema presenta una massa non particolarmente elevata (5,7843 kg) distribuita lungo tutto l'albero. Complice un'elevata rigidità dello stesso, la matrice giroscopica non spicca.

Una prima conclusione, almeno per questo caso, è la constatazione che il caso dinamico, per il range di interesse, non è dissimile da quello per Ω nulla.

Un'altra considerazione riguarda l'elevato valore delle velocità di precessione rispetto alla retta del termine forzante (portavoce dello sbilanciamento statico del rotore) da cui emerge immediatamente la mancata intersezione nella zona in esame. Ne è prova la prima velocità BW a 1008 Hz (calcolata con Ansys), la quale è ben lungi da incontrare la bisettrice suddetta. Infatti l'elevato contributo di rigidità, combinato ad una massa modesta determina un innalzamento delle frequenze proprie portando a scongiurare il manifestarsi di una velocità critica nella fascia operativa. Ciò porta a considerare di essere in regime pienamente subcritico.

Dal confronto tra le curve Ansys-Matlab si nota fin da subito una discrepanza che tende ad acuirsi per il secondo modo, con una differenza relativa di quasi il 20%. Non è un caso che l'entità maggiore dell'errore sia associato a tale modo: si osserva infatti dalle forme modali che esso, a differenza dei restanti tre, coinvolge gran parte della massa cilindrica nella sua dinamica. Inoltre, dalla tabella dei fattori di partecipazione (Tabella 4.2) modale emerge la sua indubbia rilevanza nella caratterizzazione del moto, motivo per cui questa discrepanza non può essere trascurata. Questo fenomeno ha portato a interrogarsi sulle motivazioni di tale comportamento. Il motivo si è compreso risiedere nella forte variazione di sezione caratteristica dell'elemento cilindrico del corpo pompa. A differenza di un disco, il quale presenta sì un importante intaglio, ma è così rigido da far sì che le sezioni all'interfaccia si mantengano piane, il cilindro è tale da non consentire di opporsi alle distorsioni delle superfici all'interfaccia con il conseguente svergolamento della sezione. Ne consegue il mancato soddisfacimento di una delle ipotesi fondanti il modello monodimensionale di Timoshenko. Non potendo distorcersi le sezioni trasversali, il comportamento risulterà inevitabilmente più rigido, fenomeno che si evidenzia con frequenze sistematicamente maggiori rispetto al corrispondente caso Ansys. Questo è un problema che caratterizza non tanto la matrice di massa e tanto meno quella giroscopica (essendo presente anche per $\Omega = 0$), bensì la formulazione di rigidità. Si constata deducibilmente che alla maggiore entità dell'intaglio corrisponde un crescente divario tra i due modelli. Ne sono testimonianza diversi articoli che trattano l'argomento e tentano in diverse modalità di risolverlo senza perdere i benefici di un'analisi unidimensionale.

Tra questi si ricorda L. Yue, Y. Guojun e Y. Suyuan, *A comparison of the finite element modeling methods for the natural frequencies computation of stepped shaft* [16] il quale ne spiega le ragioni mostrando le differenze tra modello trave, 2D assialsimmetrico e solido, in termini di frequenza naturale e deformazione.

La pubblicazione F. Sanchez-Marin, V. Roda-Casanova, A. Porras-Vazquez, *A new analytical model to predict the transversal deflection under load of stepped shafts* [17] approfondisce questo concetto dal punto di vista matematico, delineando il panorama delle limitatezze di un metodo 1D.

L'articolo Z C Liu, W Song e Q Lu, *A Modeling Method for Abrupt Change Shafts in Gearboxes and Experiment Verification* [18], conferma le affermazioni degli articoli citati ed elabora una procedura di soluzione nel solo ambito statico.

Tra i metodi di risoluzione, quello che si mostra come il più snello ed efficace è senza dubbio la "regola dei 45°", proposta dal testo J. Vance, F. Zeidan, B. Murphy *Machinery Vibration and Rotordynamics*, [19] la quale si appoggia su una brillante considerazione empirica. Essendo la rigidità flessionale dell'albero incapace di variare così repentinamente col diametro, si è osservato che il materiale al di fuori della linea a 45° (a collegamento delle due superfici all'interfaccia dell'intaglio) non contribuisce in modo significativo alla rigidità flessionale della sezione. Pertanto viene proposto di modellizzare tale zona come segue:

- Un elemento trave conico o una serie di elementi cilindrici a sezione crescente caratterizzati da densità nulla e rigidità non nulla;

- Un elemento cilindrico (corrispondente all'originario) in parallelo e dotato di rigidità zero ma densità non nulla.

In questo modo la questione viene risolta senza ricorrere a complicazioni matematiche né tantomeno a un tuning del modello basato sul corrispettivo tridimensionale.

Il parallelo tra i due elementi sovrapposti è condotto in modo analogo al caso delle boccole, ottenendo un unico elemento con proprietà equivalenti.

Lo schema di Figura 4.15 riporta l'implementazione della modifica con elementi trave cilindrici in serie. Considerando che un brusco cambiamento di sezione è ritenuto tale già per incrementi di un terzo di diametro, si è preso questo valore come soglia per la suddivisione del tratto in gradini.

Nelle Figure 4.16 – 4.17 e nella Tabella 4.3 sono riportati gli andamenti esito di tale modifica al modello monodimensionale.

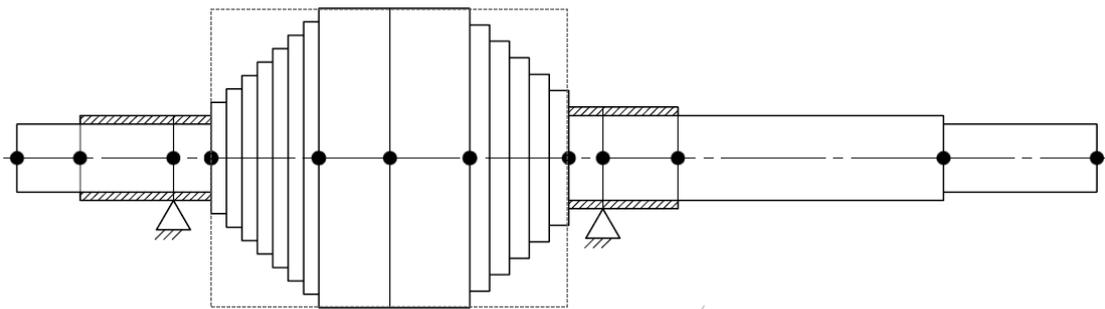


Figura 4.15 Schema dell'albero nel rispetto della regola dei 45°

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Numero di elementi	Numero di modi calcolati	Numero di Ω considerate	Costo computazionale
	f_n [Hz]	f_n [Hz]	f_n [Hz]	f_n [Hz]	n_{el} [-]	n_m [-]	n_Ω [-]	Δt [s]
FEM Matlab 1D (regola dei 45°)	1037	3602	4974	6555	92	372	11	~2
FEM Ansys 3D	1008	3644	4887	6445	7643	20	6	~273 (~4,55 min)
ϵ_{rel} [%]	2,88	-1,17	1,78	1,71				

Tabella 4.3 Regola dei 45°: tabella delle prime 4 frequenze proprie per $\Omega = 0$

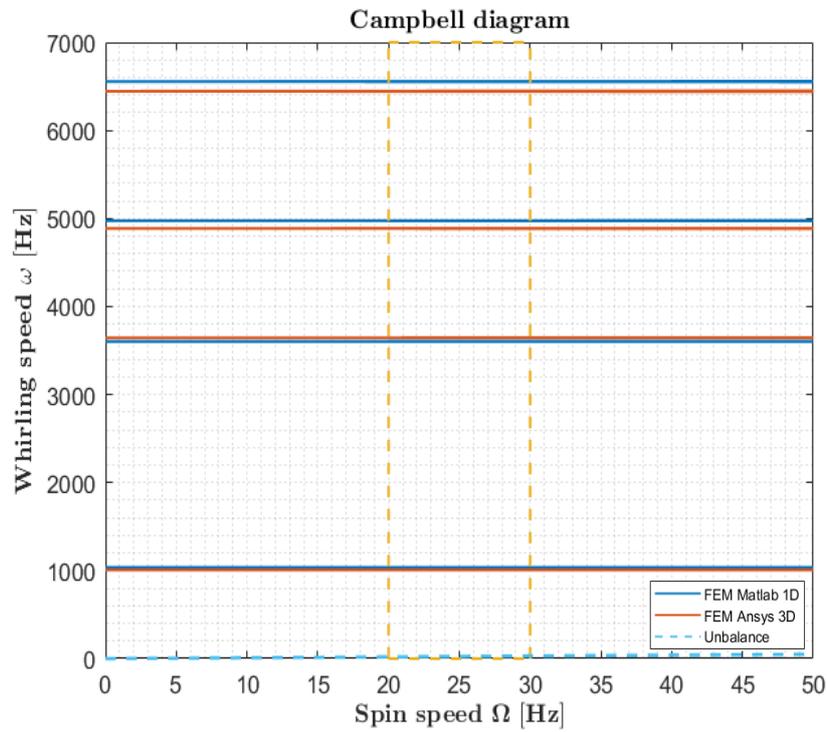


Figura 4.16 Diagramma di Campbell: Matlab 1D - Ansys 3D delle prime 4 velocità FW e BW a seguito dell'applicazione della regola a dei 45°

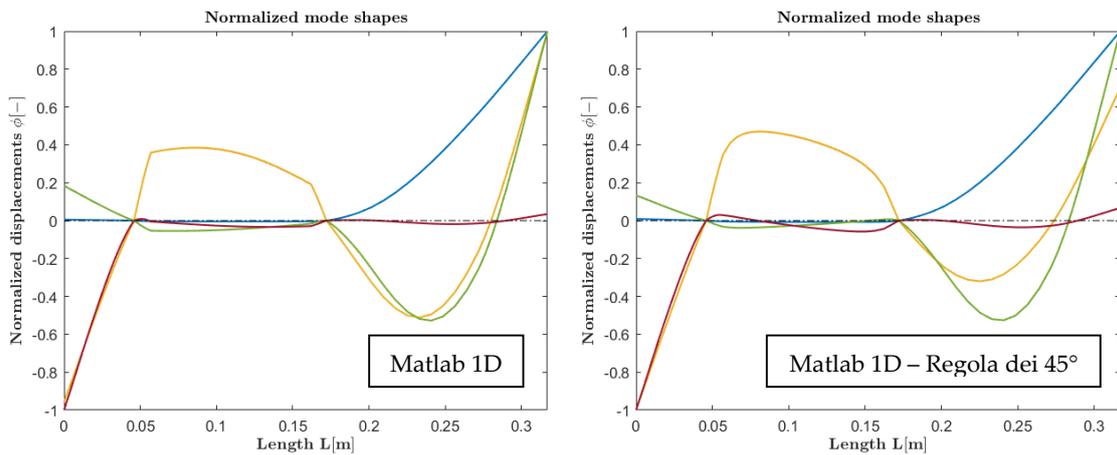


Figura 4.17 Confronto Matlab 1D – Matlab 1D (regola dei 45°): diagramma delle prime 4 forme modali forward e backward ottenute per il campo di velocità 0-50 Hz

Dall'analisi del diagramma di Campbell (Figura 4.16) salta subito all'occhio il miglioramento in accuratezza apportato dal metodo: per i primi 4 modi l'errore non supera la soglia del 3% e risulta

essere maggiore per il 1° modo (Tabella 4.3); tale risultato è ragionevole in quanto quest'ultimo è il meno influenzato dalla modifica, essendo il suo comportamento analogo a quello di una trave a sbalzo per quanto riguarda la coda, mentre il corpo cilindrico non ne è minimamente interessato. E' altrettanto sensato l'effetto maggiore sul 2° modo, il quale coinvolge maggiormente il corpo pompa e di conseguenza è quello più influenzato dalle deformazioni delle sezioni trasversali (prova ne è la distorsione degli elementi solidi in corrispondenza dell'intaglio).

Per quanto riguarda le forme modali (Figura 4.17) rispetto al caso Matlab 1D classico, la regola dei 45° determina un comportamento più dolce in corrispondenza dei cambi di geometria, più realistico e meglio corrispondente al modello solido, ragion per cui lo si può ritenere altrettanto affidabile.

4.2.5 Risposta allo squilibrio statico

Un ulteriore aspetto, caratterizzante lo studio dinamico dei rotori è la risposta in frequenza sotto l'effetto di una forzante derivante dallo sbilanciamento legato all'eccentricità statica e di coppia del sistema. Infatti, per quanto la progettazione e la realizzazione di un rotore cerchi di soddisfare elevati livelli di centraggio, è inevitabile incorrere in un minimo dislocamento del centro di massa o di un disassamento angolare dell'asse principale di inerzia del rotore rispetto all'asse di rotazione: questi due termini sono definiti squilibrio statico (ε) e di coppia (χ) rispettivamente. La loro presenza determina contributi di sollecitazione sul rotore che in base ai casi possono risultare rilevanti.

Bisogna inoltre comprendere il range operativo del rotore rispetto alle velocità critiche per comprendere come operare su di esso. Infatti, dal punto di vista dello sbilanciamento si definiscono due categorie di rotori accettati dalla normativa ISO in base alla velocità con cui operano: rigidi e deformabili. Come riporta il testo di G. Genta, *Vibration Dynamics and Control* [2]:

“Secondo lo standard ISO 1925, un rotore può considerarsi rigido se può essere bilanciato aggiungendo rimuovendo massa in due piani scelti arbitrariamente perpendicolari all'asse di rotazione e se le sue condizioni di bilanciamento sono praticamente indipendenti dalla velocità fino alla massima velocità consentita. Se questa condizione è soddisfatta, il rotore può essere assimilato a un corpo rigido”.

La soglia tra le due classi è generalmente stabilita dalla prima velocità critica. Infatti la flessibilità del rotore è direttamente connessa al rapporto tra la massima velocità operativa e la prima velocità critica flessionale; se questo risulta prossimo all'unità allora la considerazione di sistema deformabile è quella di riferimento. Mentre, se la struttura ruota a velocità ben al di sotto di Ω_{crit_1} (almeno inferiori a $\Omega_{crit_1}/2$) non si commette errore nel far ricadere l'analisi nella categoria del modello rigido, come risulta essere il caso in esame.

Non essendo noto il valore di ε residua da analisi sperimentali si può ricorrere ai limiti stabiliti dalla normativa in termini di “velocità periferica del centro di massa” (V_G [mm/s]), definita come:

$$V_G = \Omega_{max} \varepsilon_{max} \quad (4.1)$$

ε_{max} [mm] corrisponde alla massima eccentricità ammessa alla massima velocità Ω_{max} [rad/s] operativa del rotore.

G [mm/s] è il grado di qualità relativo allo squilibrio.

Nella Figura 4.18 sono proposte le curve di ε_{max} in funzione di Ω per diversi valori di G .

Si è pertanto fatto riferimento alle tabelle della normativa ISO 1940 (Tabella 4.4) al fine di comprendere quale fosse il grado di qualità più adatto al caso in esame.

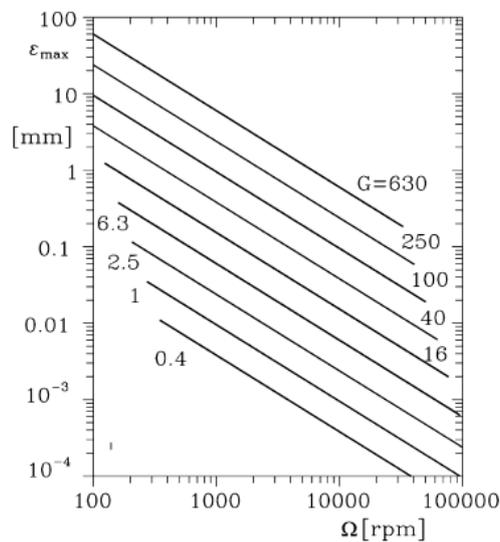


Figura 4.18 Massima eccentricità residua funzione della massima velocità operativa per gradi di qualità nel range [0,4 ÷ 630] mm/s [2]

Per l’analisi oggetto di studio si è deciso di prendere a riferimento un grado di qualità G 6,3 da tabella, in base alla tipologia di rotore più rappresentativa di una RVP.

Grado di qualità	Esempi
G 6,3	Componenti di macchinari per gli impianti di processo, ruote dentate per turbine marine (per servizio mercantile), tamburi centrifughi, ventilatori, rotori di turbine a gas per aerei, volani, giranti di pompe, macchine utensili e componenti di macchina, armature elettriche normali, componenti individuali di motori con requisiti speciali

Tabella 4.4 Grado di qualità G selezionato tratto dalle tabelle ISO 1940 [2]

In ambo i casi ε viene applicato al nodo di mezzeria del corpo pompa cilindrico mentre non viene tenuto conto di un eventuale squilibrio di coppia il quale potrebbe essere valutato per una struttura con due cuscinetti come proposto dal testo [2] sopracitato; “si introduce uno squilibrio di coppia limite di entità pari a quella di due bilanciamenti statici (ognuno pari a $\varepsilon_{max}/2$) disposti in corrispondenza dei cuscinetti distanti fra loro una distanza d e sfasati di 180° ”. Ne segue che:

$$|\chi(J_p - J_t)|_{max} = M\varepsilon_{max} \frac{d}{2} \quad (4.2)$$

J_p e J_t non sono altro che il momento di inerzia polare e trasversale rispettivamente.

Si consideri l'equazione del moto del sistema sottoposto a una generica distribuzione di squilibri:

$$(-\Omega^2(\mathbf{M} - \mathbf{G}) + \mathbf{K}) \mathbf{q}_0 = \Omega^2 \mathbf{f} \quad (4.3)$$

La risposta non è altro che l'integrale particolare della (4.3) e ha la seguente forma:

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 e^{i\Omega t} \quad (4.4)$$

Pertanto:

$$\mathbf{q}_0 = (-\Omega^2(\mathbf{M} - \mathbf{G}) + \mathbf{K})^{-1} \Omega^2 \mathbf{f} \quad (4.5)$$

\mathbf{f} è il vettore degli squilibri, che in tale trattazione viene considerato come composto da contributi concentrati ai nodi e assume la struttura riportata di seguito:

$$\mathbf{f} = [0 \dots 0 \quad M^* \varepsilon^* \quad 0 \dots 0]^T \quad (4.6)$$

Dove l'apice * corrisponde al nodo relativo alla mezzeria del corpo pompa cilindrico.

- $M^* = 5,0039 \text{ kg}$, massa del solo corpo pieno cilindrico
- ε^* , squilibrio, che per un G 6,3 e una velocità massima di 60 Hz , si ottiene:

$$\varepsilon^* = \frac{V_G}{\Omega_{max}} = 16,7 \mu m$$

$$\text{squilibrio statico} = M^* \varepsilon^* = 8,36 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot m$$

Essendo il sistema non smorzato, ci si aspetta una matrice singolare in corrispondenza delle Ω_{crit} ; ne consegue la mancanza di soluzione al problema in corrispondenza di tali punti. Da notare inoltre che, rispetto a un sistema vibrante sottoposto ad una forzante armonica, qui il termine matrice di massa è costituito da $[\mathbf{M} - \mathbf{G}]$. Questa può essere non definita positiva dando origine a velocità critiche immaginarie, scartate dalla rappresentazione nel diagramma di Campbell.

Tramite la relazione (4.3) anche la recettanza H_{ij} (dove i è il grado di libertà di output, mentre j è quello di input), indipendente dal valore di squilibrio, è immediatamente calcolabile.

Per la risoluzione mediante Matlab è possibile in alternativa ricorrere agevolmente allo spazio degli stati, il quale, considerando coordinate complesse, presenta la medesima formulazione delle equazioni (1. 38), (1. 39), (1. 40), (1. 41), (1. 42) riportate nell'introduzione.

L'analisi con Ansys è condotta in ambiente "Harmonic response" con metodo di risoluzione "Full Harmonic", in quanto la tecnica MSUP (Modal superposition) non consente di stanziare la "rotating force", forzante caratteristica di tale modello. Non basandosi sui modi calcolati, non è necessario connettere tale ambiente ai risultati di quello modale e pertanto si può configurare come analisi separata.

Gli esiti dell'analisi vengono presentati nelle figure sottostanti per il caso Ansys e Matlab con la regola a 45° ormai consolidato. A tale scopo si è deciso solo per questa trattazione di estendere il calcolo del diagramma di Campbell e delle forme modali fino a incontrare la terza velocità critica flessionale (Figura 4.19). La Tabella 4.5 riporta il confronto tra le prime 3 Ω_{crit} mentre le Figure 4.20, 4.21, 4.22, 4.23, 4.24, 4.25 mostrano rispettivamente la deformata, la recettanza e la risposta in frequenza esito della presenza dello squilibrio.

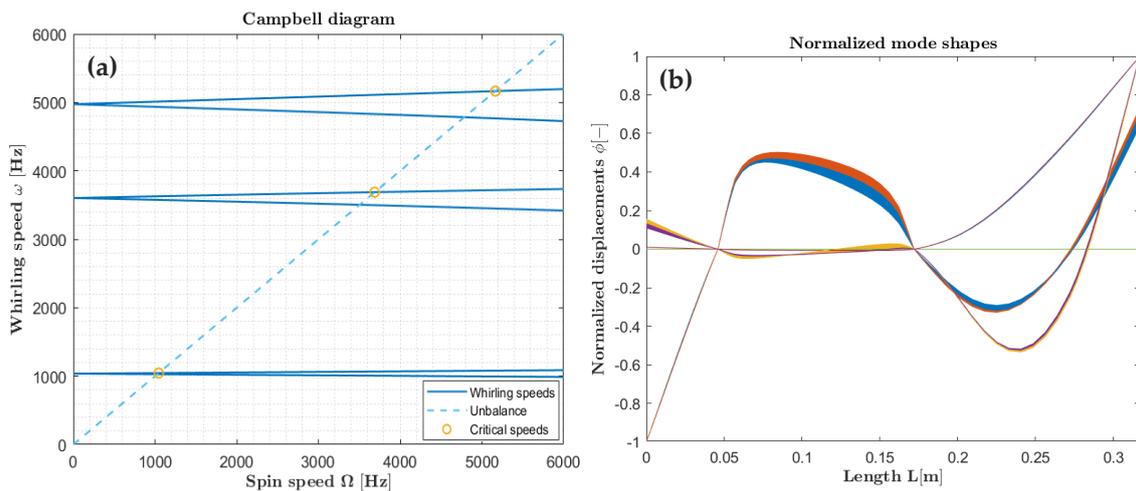


Figura 4.19 Diagramma di Campbell Matlab 1D (regola dei 45°) (a) e forme modali delle prime 3 velocità FW e BW in un range [0-6000 Hz] per mettere in risalto le prime 3 velocità critiche e l'influenza della velocità di rotazione sui modi di vibrare

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Numero di elementi	Numero di modi calcolati	Numero di Ω considerate
	Ω_{crit_1} [Hz]	Ω_{crit_2} [Hz]	Ω_{crit_3} [Hz]	n_{el} [-]	n_m [-]	n_{Ω} [-]
FEM Matlab 1D (regola dei 45°)	1045	3688	5164	102	412	601
FEM Matlab 1D (regola dei 45°) Risposta in frequenza	1040	3690	5160	102	412	601

Tabella 4.5 Tabella delle prime 3 velocità critiche flessionali

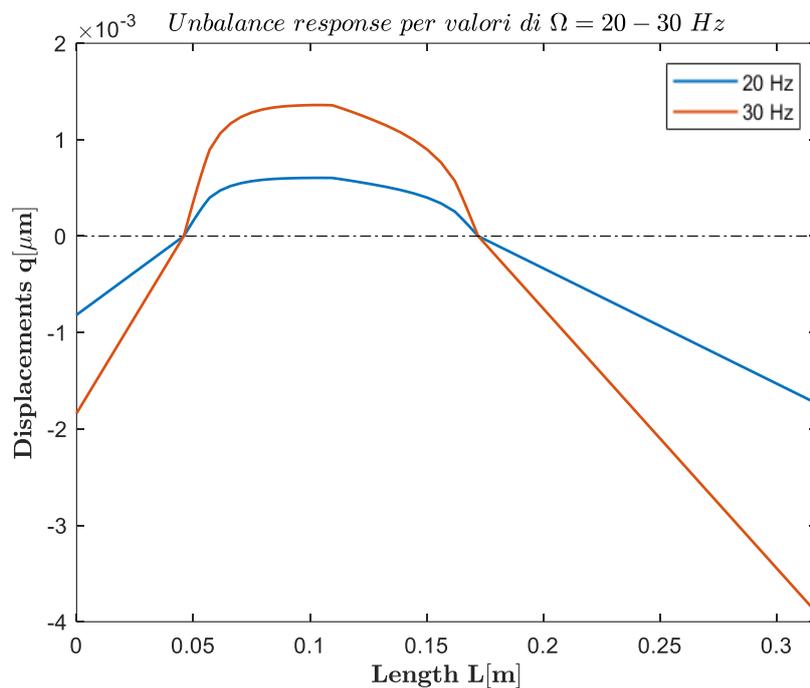


Figura 4.20 Risposta allo squilibrio statico applicato in mezzeria del corpo pompa cilindrico: deformata per i limiti di operatività del dispositivo - modello Matlab 1D (regola dei 45°)

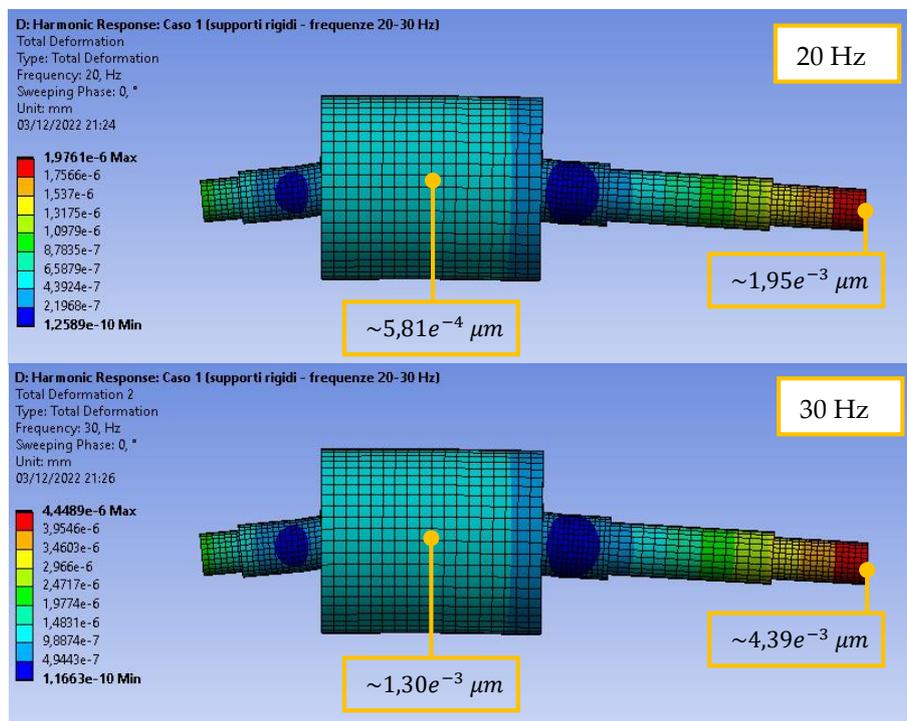


Figura 4.21 Risposta allo squilibrio statico applicato in mezzeria del corpo pompa cilindrico: deformata per i limiti di operatività del dispositivo - modello Ansys 3D: 20 Hz (a) – 30 Hz (b)

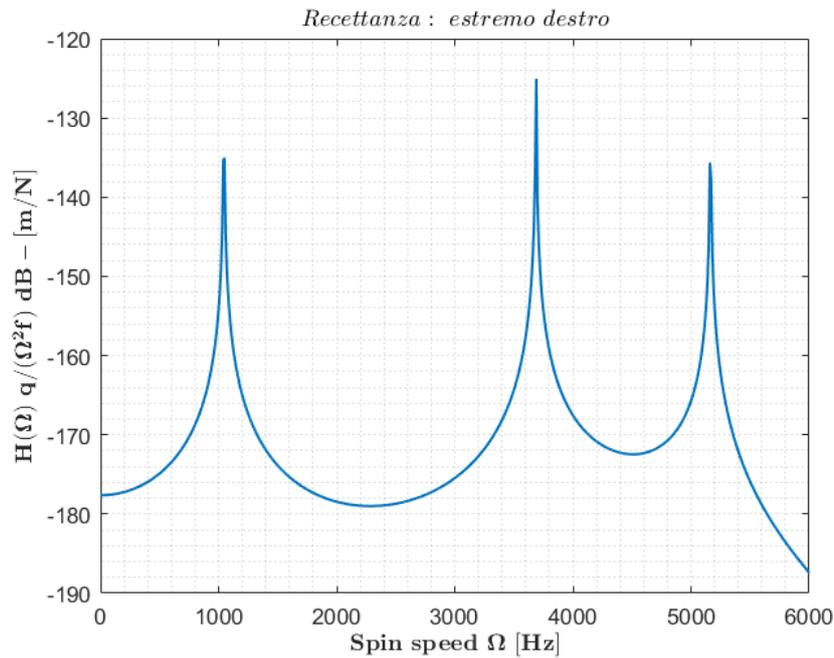


Figura 4.22 Recettanza dell'estremo destro dell'albero calcolata rispetto allo squilibrio statico applicato in mezzeria del corpo pompa cilindrico

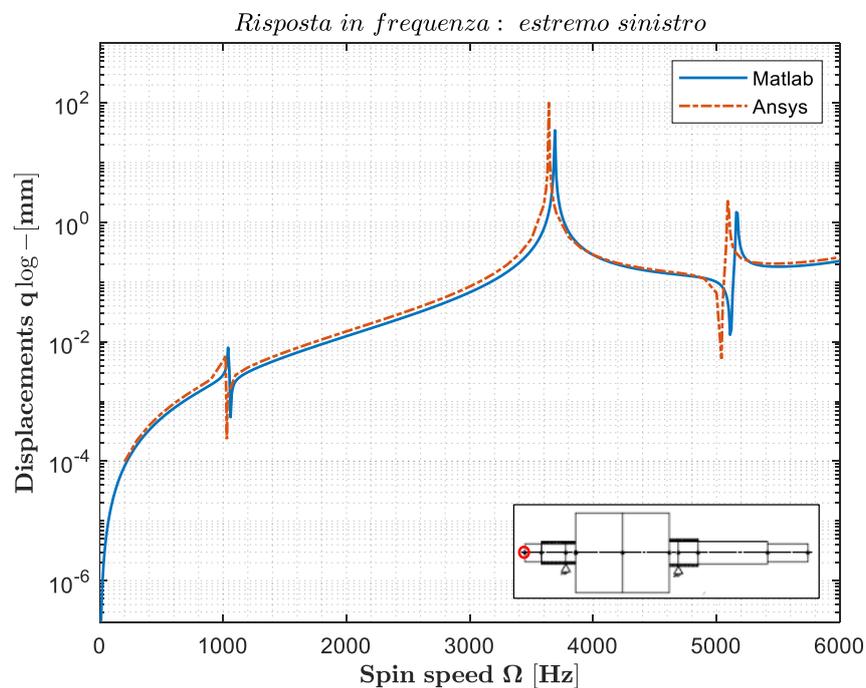


Figura 4.23 Risposta in frequenza: spostamento in corrispondenza dell'estremo sinistro

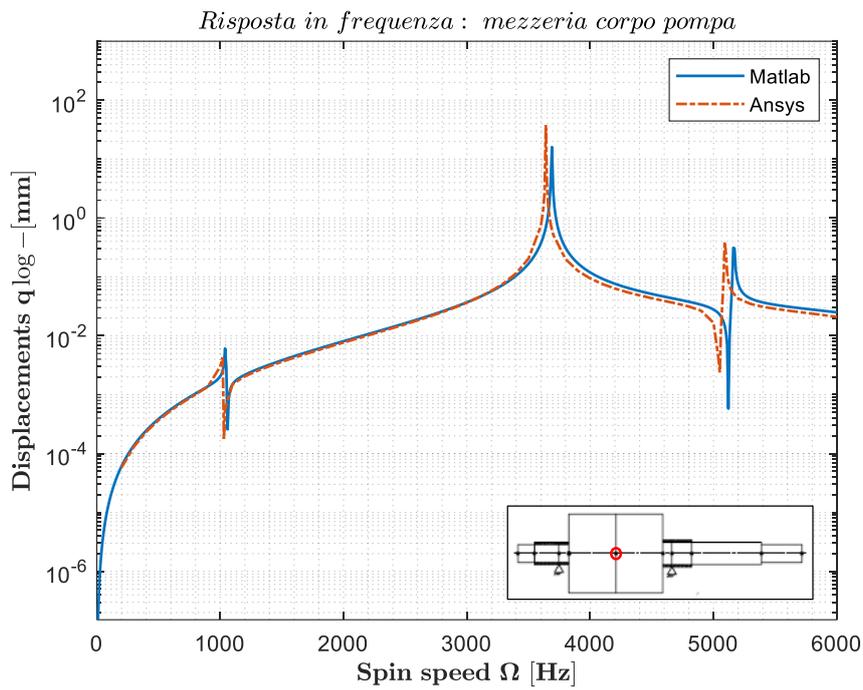


Figura 4.24 Risposta in frequenza: spostamento in corrispondenza della mezzeria del corpo pompa cilindrico

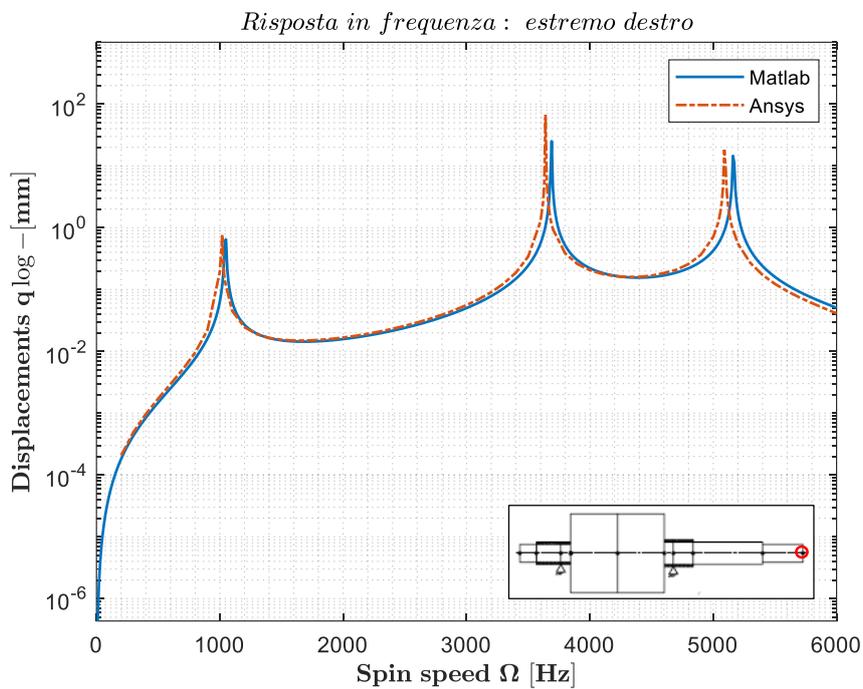


Figura 4.25 Risposta in frequenza: spostamento in corrispondenza dell'estremo destro

Ulteriore riscontro dell'attendibilità del modello Matlab rispetto ad Ansys è mostrato nei diagrammi di risposta in frequenza (Figure 4.23, 4.24, 4.25) dalla quale emerge una corrispondenza particolarmente fedele. La differenza in corrispondenza delle risonanze o antirisonanze è dovuta all'impossibilità di calcolare, con il solutore "Full harmonic" di Ansys, risultati raggruppati nell'intorno delle stesse in quanto nel calcolo tale tecnica non conosce a priori i valori delle velocità critiche.

Da notare che, non essendo le frequenze di risonanza intercettate perfettamente (a causa della risoluzione con un passo $\Delta\Omega = 10$ Hz sui valori di velocità), in tali punti si ottengono risultati amplificati, ma il sistema trova ancora una soluzione finita. Essendo il modello non smorzato, se le frequenze di risonanza fossero intercettate perfettamente la soluzione andrebbe a infinito.

Dal diagramma di Campbell ottenuto per $\Omega = 0 \div 6000$ Hz emerge la natura divergente delle velocità di precessione con un andamento tuttavia che si può definire lineare in tale regione. Le forme modali dimostrano come la deformata dei modi si modifica in modo evidente al variare della velocità Ω .

4.3 Caso 2: rotore pieno - con fori

L'intento di questa sezione è quello di valutare l'effetto legato all'inclusione dei fori di centraggio assiali agli estremi dell'albero. Tale analisi è stata eseguita mediante Ansys Workbench con elementi solidi 3D anche se nulla vieta la realizzazione di un modello 1D con la regola a 45° come fatto in precedenza. Per la realizzazione delle parti forate, si sono considerate dimensioni equivalenti in modo da rispettare la diminuzione di volume ed evitare l'insorgere di problemi localizzati di mesh a causa di "features" quali smussi che pertanto sono stati omessi (Figura 4.26).

Ci si sofferma su questo caso solo per un rapido confronto del diagramma di Campbell (Figura 4.27) con quello relativo al rotore senza fori. Mentre poco interessante risulta la variazione nelle forme modali così come nei fattori di partecipazione modale che quindi vengono omessi.

Il moto rigido torsionale è conseguenza del mancato vincolo alla rotazione in senso assiale: tuttavia ancora una volta non viene mostrato in quanto non ha particolare interesse pratico, se non come elemento di verifica del suo valore (che deve essere nell'intorno di 0), ulteriore elemento che ci indicazione della corretta risoluzione dal punto di vista fisico.

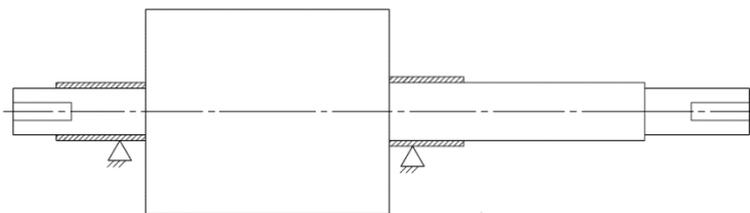


Figura 4.26 Albero (caso 2) con fori equivalenti: sezione longitudinale

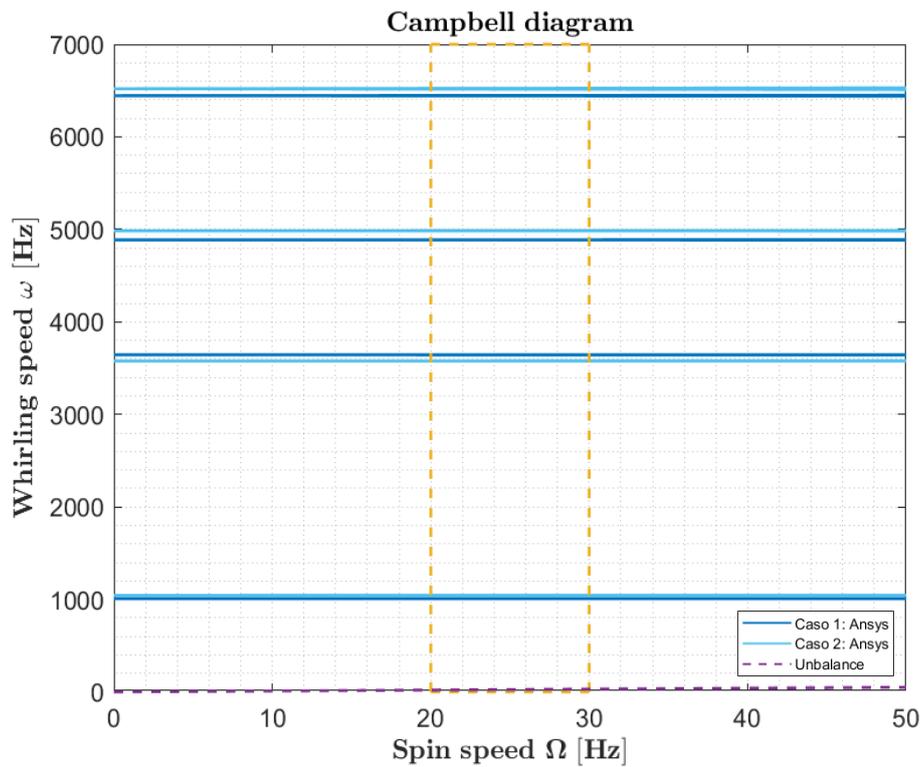


Figura 4.27 Diagramma di Campbell delle prime 4 velocità FW e BW: Caso 1 (Ansys 3D, senza fori), e Caso 2 (Ansys 3D, con fori) a confronto

E' possibile notare come la variazione rispetto al rotore non forato risulti minimale sia in termini di frequenze proprie che di velocità di precessione. L'aspetto che è possibile mettere in luce è l'effetto della variazione dei termini di matrice di massa, rigidezza e giroscopica nella competizione per determinare i valori delle whirling speeds.

Si osserva in generale un aumento dei valori delle curve, a parte per il secondo modo a cui corrisponde una piccola diminuzione. Questa diminuzione è giustificata in quanto, essendo il secondo modo quello che coinvolge in maniera consistente la massa del corpo pompa cilindrico rispetto agli estremi, è prevalente su questo modo l'effetto della diminuzione di rigidezza che non quello della diminuzione di massa dovuto a uno svuotamento di materiale. Mentre per i tre restanti andamenti, essendo lo spostamento molto più rilevante in corrispondenza dei due tratti esterni dell'albero, l'effetto della diminuzione di massa domina sulla perdita di rigidezza portando a un incremento delle velocità di precessione. Ancora una volta l'effetto giroscopico non è per nulla percepito nella regione di analisi.

4.4 Caso 3: rotore con cave e fori

L'introduzione delle cave è un ulteriore passo verso un modello quanto più fedele alla realtà, ma si porta con sé una complicazione la cui discussione è doverosa.

Infatti, la presenza dei 3 svuotamenti in corrispondenza del corpo pompa fa sì che il modello debba tenere in considerazione la non assialsimmetria derivante da questi.

Questo ha portato ad abbandonare il modello Matlab unidimensionale in quanto incapace di soddisfare tale esigenza, e a ponderare con particolare senso critico i risultati ottenuti dall'analisi modale attuata mediante Ansys Workbench.

Il solutore Ansys, come accennato in precedenza, prevede nel sistema di riferimento stazionario ("Stationary reference frame") l'attivazione della modalità "Damped", la quale, tramite l'ulteriore opzione "Coriolis Effect: on", permette di attivare i contributi dipendenti velocità di rotazione anche non dissipativi, come in questo caso. In questo modo il software includerà nel calcolo anche la matrice giroscopica (antisimmetrica) degli elementi, termine non presente in una analisi modale tradizionale. Per ottenere invece la soluzione per un numero di spin speeds superiore all'unità si ricorre all'opzione "Campbell Diagram: on", selezionando il numero di punti che si vuole calcolare.

Tuttavia, il ricorso a questi strumenti di risoluzione, deve tenere conto delle assunzioni di modello lineare elastico e di assialsimmetria del rotore. Se per il primo requisito non vi è problematica alcuna, il secondo potrebbe andare in crisi in questa analisi. Infatti il solutore terrà conto sì della non-assialsimmetria nella formulazione di massa e rigidità tradizionali in un'analisi modale in assenza di rotazione dell'albero, ma per quanto riguarda casi in cui Ω è non nulla, esso ricorre a proprietà assialsimmetriche equivalenti, riportando i contributi di rigidità massa e inerzia sull'asse di rotazione del rotore: questo fa sì che non si riesca a ottenere un comportamento dinamico locale equivalente della parte non assialsimmetrica. Uno degli aspetti più rilevanti a tal proposito è la variazione periodica della rigidità con la rotazione e questo può causare instabilità. Di conseguenza le equazioni del moto necessitano una riscrittura che dipende anche dalla contemporanea non-isotropicità di rotore e statore o solo di uno di questi. In questa analisi non ci si addentra all'interno della teoria inerente a questo fenomeno limitandosi a considerare i confini in cui la non-assialsimmetria è contemplata se verificate alcune ipotesi.

Infatti ci sono situazioni in cui questo limite è superabile. Ad esempio lo scostamento dalla assialsimmetria è accettabile qualora la massa assialsimmetrica è particolarmente maggiore rispetto a quella non assialsimmetrica (ad esempio nel caso di un compressore costituito da tante piccole pale e un corpo rotorico massivo).

Se la non-isotropicità nel rotore è rilevante, allora si può considerare il sistema di riferimento rotante a patto che il modello sia costituito da una singola struttura in rotazione (lo statore quindi deve essere escluso). In tal caso infatti le equazioni differenziali del moto della struttura presentano coefficienti costanti il che semplifica non di poco la trattazione. Tuttavia, per quanto

riguarda Ansys (APDL [20] in questo caso) esso considera il solo contributo di Coriolis mentre l'effetto giroscopico non è preso in esame in quanto l'osservatore è posizionato direttamente sul rotore. Si possono realizzare diagrammi di Campbell ma questi includono la velocità di rotazione all'interno delle velocità di precessione essendo il sistema di riferimento relativo.

Se la non-isotropia riguarda il solo statore allora non si ha problemi a considerare ancora una volta il sistema di riferimento stazionario, il quale è il più conveniente ed il preferito nelle analisi di rotori industriali in quanto permette di considerare parti rotanti a differenti velocità contemporaneamente rispetto a differenti assi di rotazione ma soprattutto rotore e statore possono essere inclusi in un'unica simulazione. Date tali caratteristiche si hanno equazioni differenziali a coefficienti costanti.

Quando invece sia rotore che statore non presentano alcuna assialsimmetria allora non si può far a meno di ricorrere ad un sistema di equazioni differenziali del moto con coefficienti periodici, con le complicazioni che ne derivano, in quanto la costanza dei termini non è ottenibile in nessuno dei due sistemi di riferimento presentati.

Come riporta il testo *Giancarlo Genta, Dynamics of Rotating Systems* [4], "esiste una classe di simmetria intermedia tra quella assiale e la totale non-simmetria" ovvero la simmetria ciclica. Questa si verifica in rotori che hanno la caratteristica di essere suddivisibili in settori identici. Questo comporta che "nel caso di un corpo rigido ogni simmetria ciclica di ordine uguale o maggiore di 3 è equivalente a una simmetria di ordine infinito". Lo stesso vale per un corpo flessibile ed è dimostrabile "considerando che ogni possibile autovettore dell'intera struttura può essere descritto in termini di vettori che descrivono le deformazioni di n sottostrutture identiche". Pertanto essi possono essere considerati come assialsimmetrici e quindi studiabili in un sistema di riferimento non rotante. Ciò non è valido per simmetrie cicliche di ordine inferiore a 3 (ad esempio strutture con 2 piani di simmetria ortogonali) attorno all'asse di rotazione.

Il rotore oggetto di analisi presenta alcune caratteristiche che in parte possono avvicinarsi a quelle sopracitate.

- Innanzitutto esso presenta una periodicità di ordine 3, in quanto le cave dividono la struttura in 3 settori identici di 120° (Figura 4.28).
- La massa non assialsimmetrica corrispondente allo svuotamento di materiale è modesta rispetto a quella del rotore pieno assialsimmetrico.
- Le velocità, nel campo operativo, sono in valore piuttosto basse, elemento per cui non ci si aspetta che emergano enormi differenze rispetto al caso per $\Omega = 0$.

Motivo per cui, almeno in un primo step, è possibile ricorrere al sistema di riferimento stazionario, fermo restando che in un secondo stadio di analisi dedicato all'approfondimento di tale aspetto in particolare, si possa ricorrere al sistema di riferimento rotante, all'integrazione delle equazioni a coefficienti periodici o a teorie più evolute per verificare l'adeguatezza di tali considerazioni.

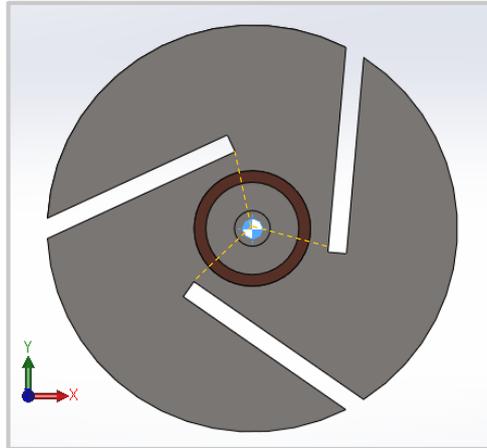


Figura 4.28 Sezione frontale della pompa suddivisa in settori identici spaziati di 120°

Di seguito viene ancora una volta presentato il diagramma di Campbell aggiornato (Figura 4.29), in cui il caso del modello cavo assialsimmetrico equivalente viene confrontato con il precedente, coi fori ma senza cave.

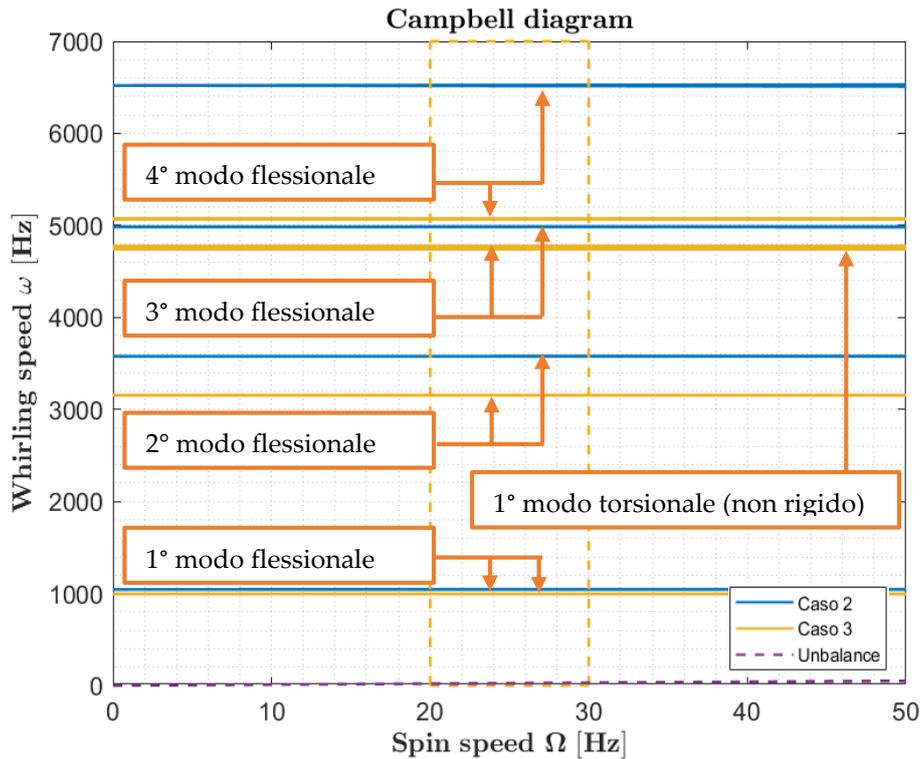


Figura 4.29 Diagramma di Campbell delle prime 4 velocità FW e BW e modi torsionali interposti: Caso 2 (Ansys 3D, con fori) e Caso 3 (Ansys 3D, con fori e cave) a confronto

Tale introduzione comporta una generale diminuzione dei valori in termini di frequenze proprie, dovuta alla sostanziale rimozione di materiale resistente nella zona centrale del rotore con un inevitabile perdita di rigidità e massa, di entità chiaramente a favore della prima.

Ciò che è di immediata osservazione è la sostanziale indifferenza del primo modo rispetto all'introduzione degli svuotamenti sul corpo pompante, intuibile in quanto queste variazioni non partecipano alla flessione della massa di coda dell'albero, coinvolta da tale forma modale. Discorso simile vale anche per il 3°.

Sono invece seconda e quarta frequenza naturale quelle in cui si percepisce il maggior scostamento, proprio in quanto il cilindro con le 3 cave ne è significativamente coinvolto.

Infine, per la prima volta, si fa spazio anche un contributo torsionale nel range di analisi (Figura 4.30), il quale impatta in modo evidente sul comportamento particolarmente flessibile del materiale in corrispondenza delle cave.

Anche in questo caso il contributo giroscopico è nascosto dai restanti due, massa e rigidità. Si nota altresì dalla tabella dei fattori di partecipazione modale nelle direzioni x e y che una massa superiore al 90% di quella totale partecipa alla dinamica flessionale.

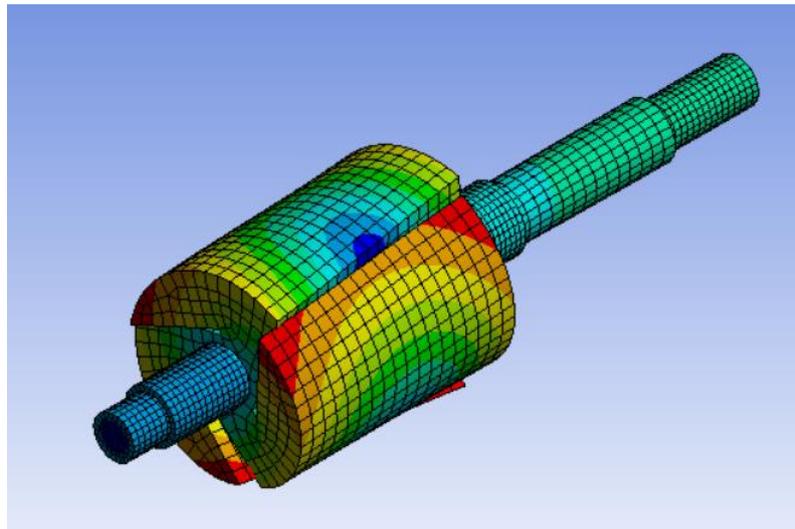


Figura 4.30 Vista isometrica della prima forma modale torsionale (BW) non rigida ricavata mediante software Ansys (per $\Omega = 0$)

4.5 Caso 4: rotore con cave, fori e corpo motore

Il sistema albero-corpo pompa-motore è un ulteriore passo verso un rotore maggiormente realistico, nonostante esso si trascini i limiti definiti dall'ipotesi di assialsimmetria equivalente del precedente caso.

L'inclusione della parte rotorica del motore a induzione (con gli accessori ad esso connessi) non induce una diversa complessità del problema, salvo il comprendere come sintetizzare le proprietà meccaniche con un modello equivalente. Tuttavia, l'introduzione di un numero maggiore di elementi accoppiati comporta maggiori attenzioni in termini di definizione automatica dei contatti (inevitabilmente "Bonded" per tutte le superfici accoppiate essendo impossibile ricorrere a definizioni più realistiche nell'analisi lineare).

Una modalità per comprendere se i contatti sono stati definiti correttamente dal software in termini di regioni di interfaccia e di tipologia di accoppiamento è il ricorso al "contact tool", una funzionalità inserita in Ansys Workbench per poter rilevare zona ed entità di interferenze, gap ed eventuali ulteriori problematiche tra le parti connesse. Esso si è rivelato particolarmente utile per controllare l'operato della definizione automatica dei contacts realizzata dal programma. Un ulteriore elemento di controllo, determinante per comprendere la sensatezza della soluzione è il valore delle frequenze proprie dei moti rigidi nel caso di modello libero-libero. Ad esso devono corrispondere 6 moti rigidi a frequenza nulla. Lasciando al software la definizione dei contatti disinteressandosi di controllarli può comportare, come risultato in questo caso, che alcuni contacts non propriamente definiti, impattino sul valore delle frequenze naturali dei moti rigidi (che si mostrano erroneamente non lontani dallo 0) e di conseguenza anche sui restanti modi. Pertanto una mancata attenzione in tale ambito si riflette sull'intera soluzione della simulazione. Questo fenomeno, che prende il nome di "Messa a terra" ("Grounding effect"), è un effetto collaterale causato da un vincolamento interno artificiale che influenza inevitabilmente la matrice di rigidezza della struttura; tipicamente un grande gap non uniforme può dare origine a ciò, così come alcune formulazioni relative al contatto, come la MPC (Multi-Point-Constraint) se non stanziata con criterio, in concordanza delle ipotesi relative al caso in esame.

In questo caso, particolare attenzione va rivolta nella regione conica di interfaccia boccole-motore, così come nel foro di ingresso della vite in estremità. In queste regioni in particolare le superfici prese a riferimento per la definizione dei "bonded contacts" erano errate oppure ne venivano coinvolte più del dovuto, elementi che congiuntamente generavano una frequenza torsionale rigida pari a 100 Hz, il che è totalmente privo di senso. Inoltre, distribuiti lungo tutto il rotore, contatti tra superfici adiacenti venivano definiti laddove bastavano solo quelli tra piani affacciati: questo ha comportato alla sospensione di 88 delle 316 connessioni stanziata dal programma.

A seguito delle correzioni si è potuto osservare valori accettabili di velocità di precessione dei moti rigidi nel sistema libero-libero: una frequenza torsionale rigida risultante pari a 0,518 Hz nel modello con supporti rigidi non esclude ancora la presenza di "grounding", ma la sua influenza è ritenuta poco impattante sui restanti modi.

Un ulteriore aspetto ha coinvolto la modalità di modellizzazione delle regioni multimateriale del motore elettrico (rappresentato in Figura 4.31), considerando che dal produttore non sono fornite le sezioni interne del componente. A tal proposito si è cercato di realizzare un modello Solidworks semplificato che cogliesse gli elementi geometrici più rilevanti: tra questi sicuramente figurano il profilo del pacco di lamierini e della gabbia di scoiattolo.

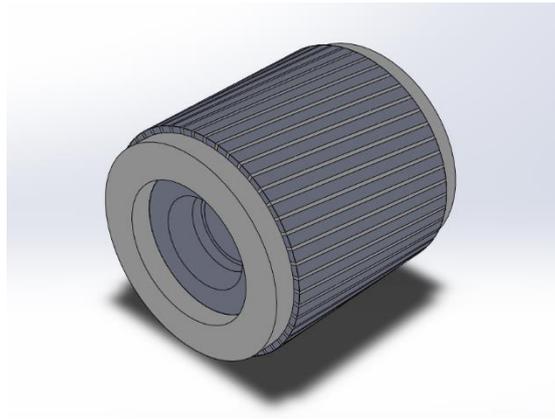


Figura 4.31 Vista isometrica del rotore relativo al motore elettrico

Non essendo note con certezza le informazioni sui materiali, ci si è basati sulle caratteristiche tipiche per applicazioni nell'ambito dei motori a induzione, definendo un acciaio Fe-Si per il pacco di lamierini mentre è stata considerata la lega di alluminio serie 1060 per la gabbia di scoiattolo. Le specifiche sono riportate in Tabella 4.6.

Acciaio Fe-Si				Lega di alluminio serie 1060			
Densità	ρ	$[kg/m^3]$	7650	Densità	ρ	$[kg/m^3]$	2700
Modulo elastico	E	$[Pa]$	$2 \cdot 10^{11}$	Modulo elastico	E	$[Pa]$	$6,9 \cdot 10^{10}$
Coefficiente di Poisson	ν	$[-]$	0,3	Coefficiente di Poisson	ν	$[-]$	0,33

Tabella 4.6 Materiali caratteristici del rotore del motore elettrico

Tuttavia, in una prima analisi, al fine di limitare il costo computazionale e la possibile perdita di accuratezza dovuta alla riduzione di qualità di mesh, si è deciso di ricorrere a un modello equivalente semplificato del rotore riportato in Figura 4.32 e Figura 4.33. Esso prevede la sostituzione della regione caratterizzata dall'alternarsi di lamierini e barre in alluminio con un corpo unico, caratterizzato da proprietà esito di una media ponderata sul volume. Per brevità tale materiale prenderà il nome di "Al-Fe-Si equivalente" (Tabella 4.7). Inoltre è stato eseguito il "defeaturing" di tutti quegli elementi, quali filettature, smussi e raccordi che avrebbero penalizzato l'analisi senza evidenti effetti sulla soluzione.

AL-Fe-Si equivalente			
Densità	ρ	[kg/m ³]	5891
Modulo elastico	E	[Pa]	$1,73 \cdot 10^{11}$
Coefficiente di Poisson	ν	[-]	0,306

Tabella 4.7 Proprietà del materiale Al-Fe-Si equivalente

Il modello semplificato dell'albero completo di accessori è presentato in Figura 4.35. Tra essi figurano le due boccole, entrambe con un tratto esterno conico per l'accoppiamento col motore elettrico (il quale non è direttamente a contatto con l'albero) e una vite terminale che si impegna nella filettatura della boccola più esterna. Mentre si omettono i ventilatori in plastica e gli anelli di fissaggio (osservabili nel modello completo originario di Figura 4.34) sempre per il loro scarso contributo alla dinamica a fronte di una complessità geometrica non indifferente. In questo modo si è potuto ricorrere a una discretizzazione costituita quasi completamente da elementi esaedrici ("Hexa") e una minoranza di elementi prismatici ("Wedge"), il che è a favore della qualità di mesh col minimo del tempo di calcolo (a tal proposito vedasi Figura 4.36 e Figura 4.37).

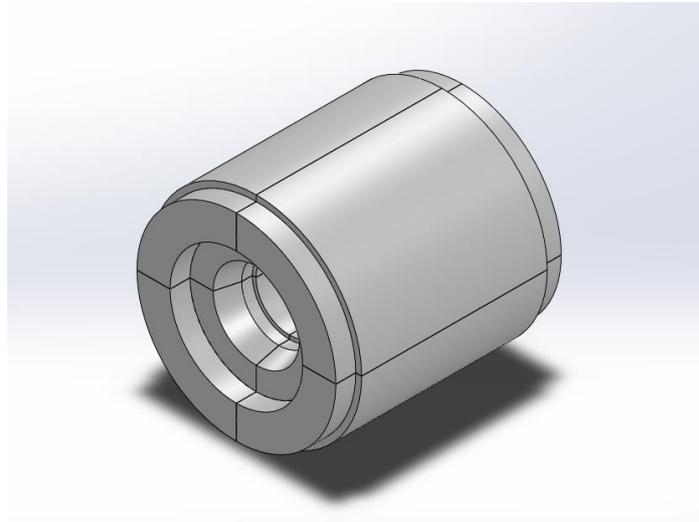


Figura 4.32 Vista isometrica del rotore semplificato relativo al motore elettrico

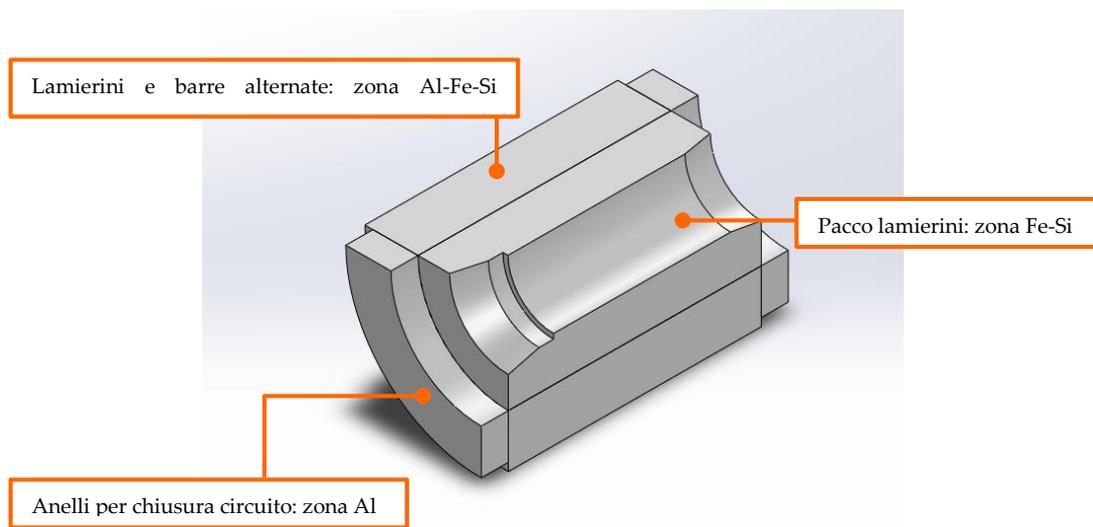


Figura 4.33 Sezione in vista isometrica del rotore semplificato relativo al motore elettrico con indicazione delle tre regioni di divisione rispetto al materiale

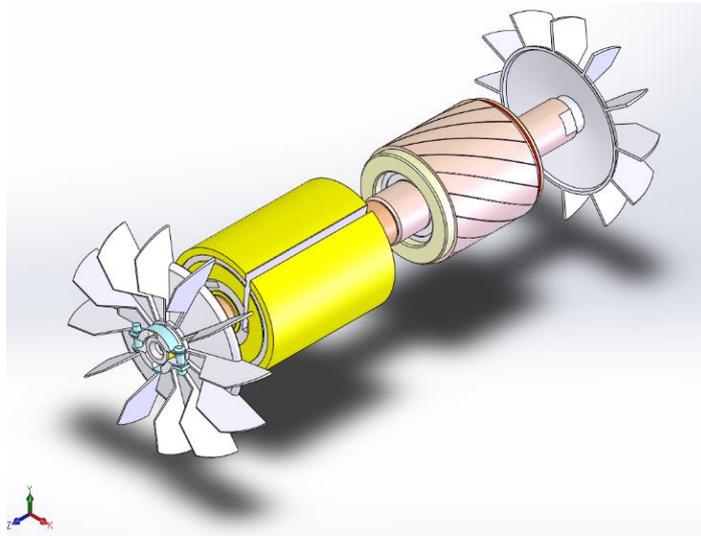


Figura 4.34 Vista isometrica del modello albero-corpo pompa-motore originale

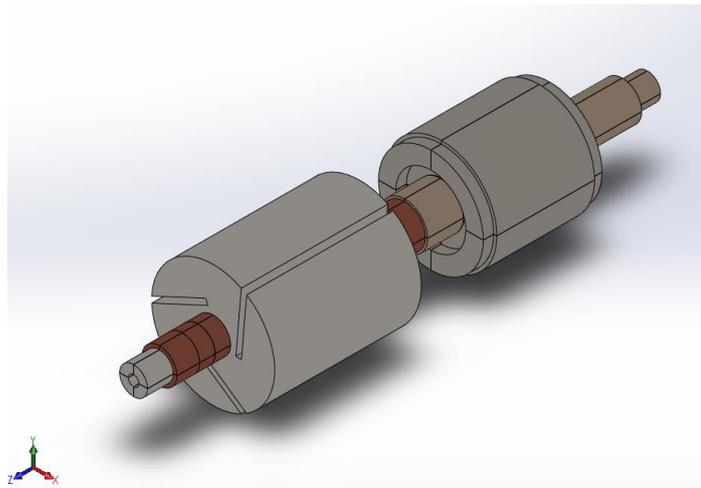


Figura 4.35 Vista isometrica del modello albero-corpo pompa-motore semplificato completo di accessori

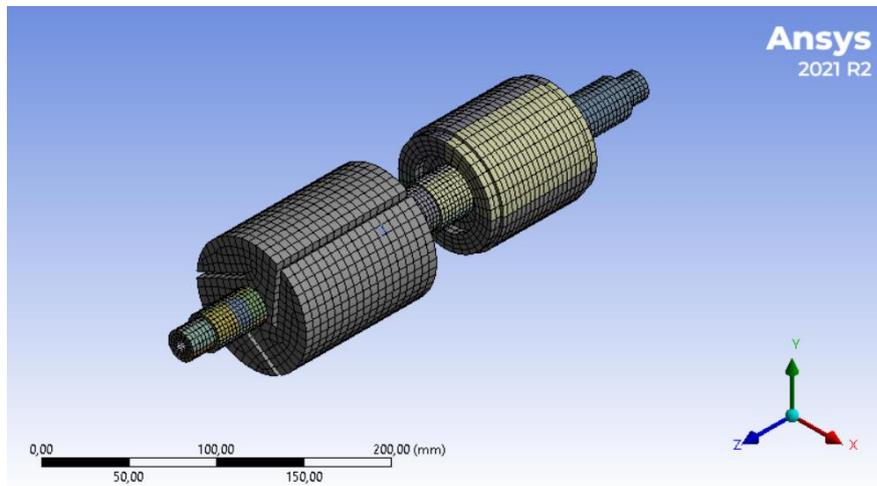


Figura 4.36 Mesh del modello albero-corpo pompa-motore semplificato

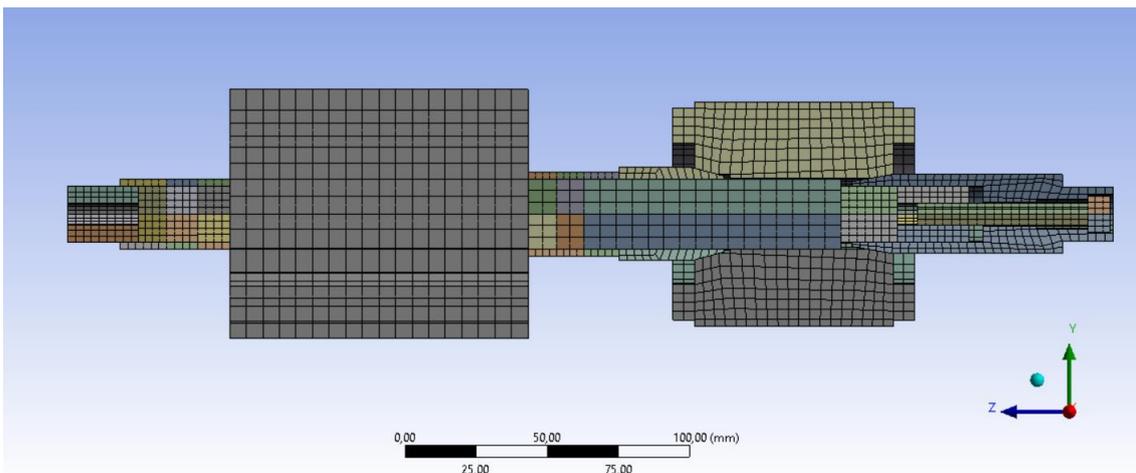


Figura 4.37 Mesh del modello albero-corpo pompa-motore semplificato: sezione laterale

4.5.1 Risultati e commenti

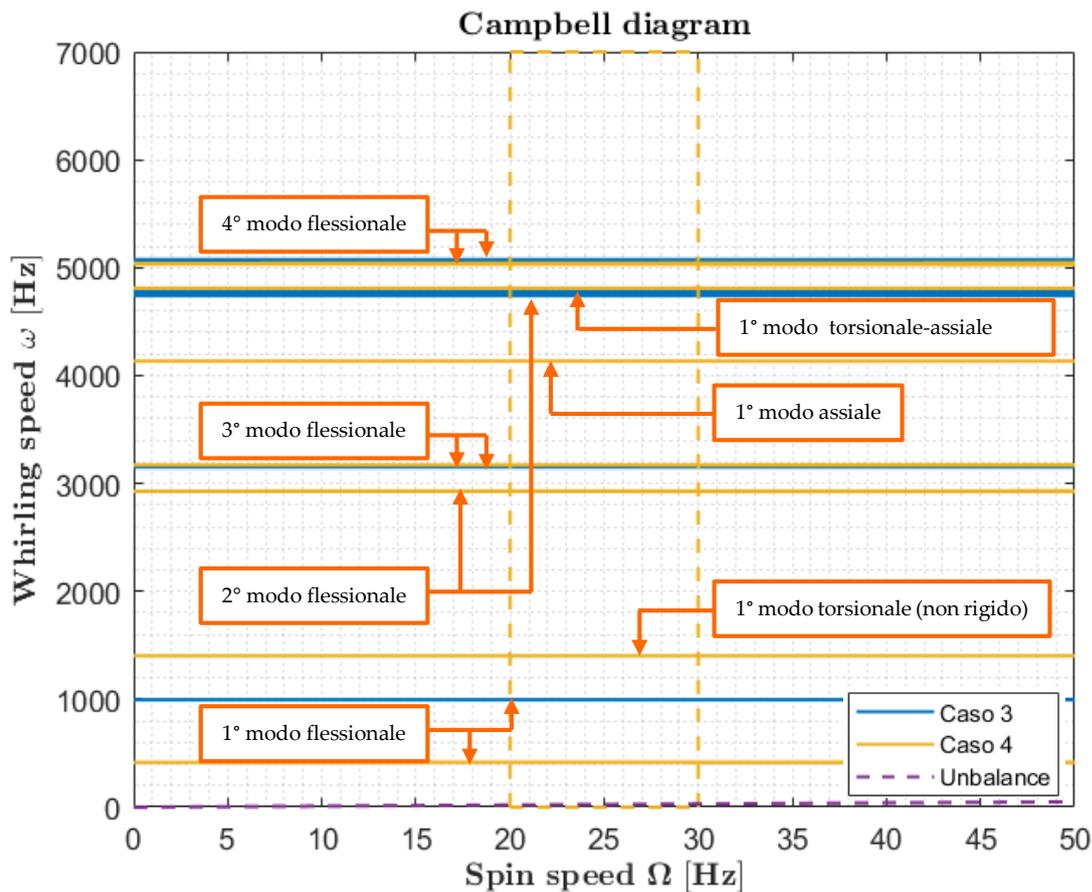


Figura 4.38 Diagramma di Campbell delle prime 4 velocità FW e BW (modi torsionali, assiali e accoppiati interposti): Caso 3 (Ansys 3D, con fori e cave) e Caso 4 (Ansys 3D, con fori, cave e corpo motore) a confronto

Il diagramma di Campbell risultante di Figura 4.38 viene messo a paragone con quello derivante dal rotore con le cave per sondarne le eventuali differenze. L'aggiunta del motore, con tutti i componenti ad esso collegati, nel tratto a sbalzo dell'albero fa sì, in questo caso, che tutte le frequenze che coinvolgono una consistente percentuale di massa in tale regione ne siano influenzate. Inoltre, il motore si comporta come fosse un corpo rigido, il cui contributo massivo determina un decremento generale delle frequenze naturali.

Ne consegue anche una redistribuzione dei modi, quale ad esempio il 3° modo flessionale del modello con le cave diventa ora il 2°. Inoltre insorgono modi torsionali-assiali e accoppiati prima non presenti in tale range.

Ad ogni modo anche qui si osserva una sostanziale indipendenza degli andamenti dalla matrice giroscopica.

La struttura, per come è stata definita, porta a intuire che ci sia un bilanciamento tra corpo pompa e motore portando il centro di massa nell'intorno del cuscinetto interposto.

Questo ed altri motivi di cui si accennerà in seguito hanno condotto all'analisi statica per verificare il valore delle reazioni vincolari in condizioni statiche (rotore soggetto unicamente alla propria forza peso), disinteressandosi sia dello sbilanciamento che delle pressioni in camera pompante.

Da queste e da calcoli analitici emergono i risultati di seguito esposti:

Dal calcolo analitico (equilibrio di forze e momenti):

$$m = 7.7962 \text{ kg}$$

$$d_1 = 118.32 \text{ mm}$$

$$d_2 = 7.78$$

$$d_{tot} = d_1 + d_2 = 126.1 \text{ mm}$$

$$F_{y1} = mg \frac{d_2}{d_{tot}} = 4.72 \text{ N}$$

$$F_{y2} = mg \frac{d_1}{d_{tot}} = 71.74 \text{ N}$$

$$P = mg = F_{y1} + F_{y2} = 76.45 \text{ N}$$

Dove

- m è la massa totale del rotore;
- d_1, d_2 sono le distanze dei cuscinetti 1, 2 (Figura 4.39) rispettivamente dal baricentro;
- d_{tot} è la distanza tra mezzeria del cuscinetto 1 e quella del cuscinetto 2;
- $F_{x1}, F_{x2}, F_{y1}, F_{y2}, F_{z1}, F_{z2}$ sono le componenti laterali, verticali e assiali delle reazioni vincolari in mezzeria opposte dai cuscinetti 1 e 2;
- P è il peso del rotore.

Mentre dall'ambiente "Static structural" di Ansys Workbench si ottengono i risultati riportati nella Tabella 4.8 e nell'immagine di Figura 4.39:

Reazioni vincolari in condizioni statiche			
	F_x [N]	F_y [N]	F_z [N]
Cuscinetto 1	~0	4,67	-1,21
Cuscinetto 2	~0	71,79	1,21

Tabella 4.8 Tabella delle reazioni vincolari relative ai cuscinetti 1 e 2 per il Caso 4

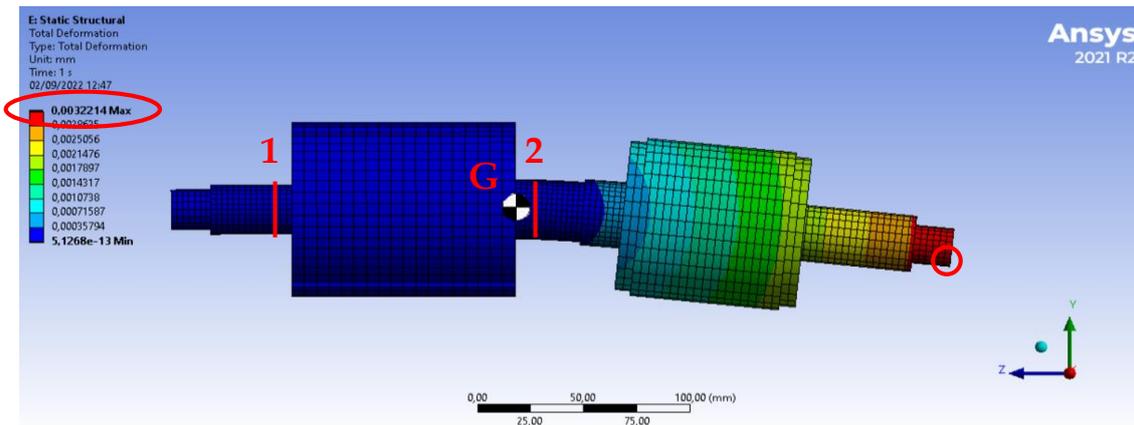


Figura 4.39 Deformazioni totali ottenute dall’analisi “Static structural”. Indicazione del punto di massima deformazione (cerchiato in rosso), della posizione dei cuscinetti 1 e 2 e del centro di massa G

Come è possibile osservare dalle reazioni vincolari tabulate (Tabella 4.8), data la vicinanza del centro di massa del sistema al cuscinetto 2, quest’ultimo si farà portavoce della gran maggioranza del carico statico mentre poco graverà sul primo. Questo può portare a riconsiderazioni in merito alla funzionalità del cuscinetto meno caricato, anche in virtù della compresenza dei termini di carico dinamico.

Inoltre si nota una piccola percentuale di reazione assiale, giustamente compensata tra i due vincoli, dovuta al tensionamento interno del rotore a causa della deformazione generata.

Capitolo 5

Il modello di vincolo: cuscinetti lubrificati

5.1 Introduzione teorica

Dalle analisi precedentemente effettuate risulta chiaro che i supporti rigidi non rispecchiano appieno il comportamento reale del sistema. Ragion per cui al fine di ottenere un modello maggiormente fedele alla realtà risulta inevitabile ricorrere alla sostituzione dei vincoli coi cuscinetti idrodinamici.

Essi tuttavia rappresentano una complicazione non indifferente a causa della fisica alla base del modello dinamico che li descrive. Essa infatti non può non prendere in considerazione la teoria della lubrificazione per il moto del meato d'olio che si interpone tra boccola e perno del cuscinetto.

A tal proposito il capitolo non ripercorre la teoria necessaria a ottenere le relazioni utilizzate bensì si concentra sulla modalità in cui utilizzarle ai fini della presente analisi, seppur con tutti i limiti che ne derivano.

Il meccanismo di sviluppo della sustentazione oleodinamica all'avviamento (Figura 5.1), secondo il libro di testo C. Ferraresi, T. Raparelli, *Meccanica applicata* [21] prevede che il perno, cominciando a ruotare in senso antiorario inizi ad "arrampicarsi" strisciando sulle pareti della boccola generando così uno spessore convergente nel lato sinistro del perno stesso tanto da attirare lubrificante il quale, spinto al suo interno, inizia a creare una sovrappressione tale da spostare il perno nel verso opposto. Raggiunto un valore di velocità di rotazione e pressione tali

da compensare il carico agente sull'albero, quest'ultimo tende ad assestarsi in una posizione di equilibrio.

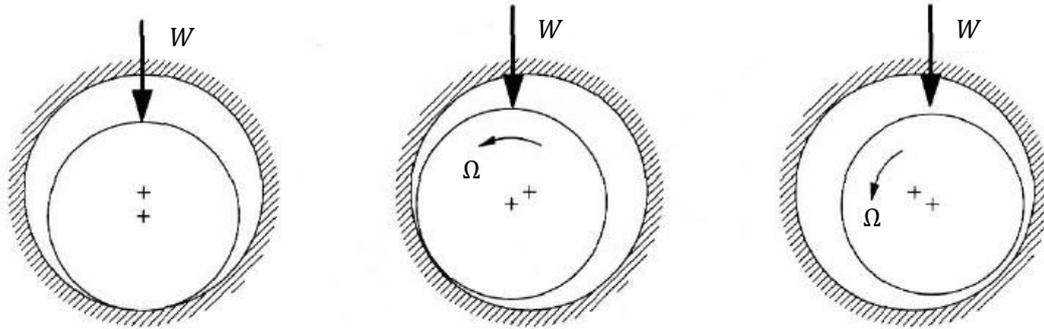


Figura 5.1 Avviamento del cuscinetto idrodinamico [rieditato da [21]]

Innanzitutto risulta fondamentale chiarire quali siano i termini coinvolti nella trattazione e il loro significato.

A tal scopo si prenda a riferimento un cuscinetto idrodinamico completo (che si estende per tutti i 360°), piano, cilindrico, non scanalato, non lobato, senza fori di adduzione olio, ad asse orizzontale (ovvero ortogonale sul piano xy), perfettamente allineato (assi paralleli di perno e boccia) come quello rappresentato nella Figura 5.2 sottostante. Esso si presenta come una boccia fissa al cui interno ruota eccentricamente un perno per mezzo dell'azione del film d'olio interposto tra i due. Il perno ruota con velocità Ω attorno il sistema di riferimento $Oxyz$ fisso, posizionato al centro della boccia.

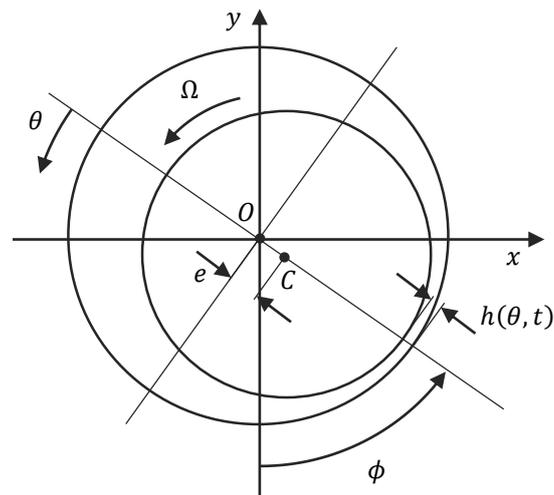


Figura 5.2 Rappresentazione schematica di un cuscinetto oleodinamico semplice: parametri geometrici

Un punto sulla superficie della boccia può essere caratterizzato geometricamente tramite le coordinate cilindriche; in particolare considerando che il raggio calcolato dal punto al centro del cuscinetto non varia basteranno 2 coordinate per definirlo in modo univoco: quella assiale z congiuntamente a quella angolare θ tra i centri delle due bocce.

Si definiscano alcuni termini necessari ai fini dell'analisi.

Il cuscinetto cilindrico ("journal bearing") è geometricamente definito dalla sua lunghezza L e i raggi R_j , R_b rispettivamente di perno e boccia. Dalla differenza tra questi ultimi è immediatamente ottenibile il gioco radiale c fra boccia e perno. Esso (generalmente di dimensione pari a $0,1 \div 0,2\%$ del diametro del perno) è espresso dalla seguente formula:

$$c = R_b - R_j \quad (5.1)$$

Una volta definito c , non risulta un problema rinominare R_j con R e quindi definire il diametro $D = 2R$. Infatti, un parametro essenziale ai fini dell'individuazione del metodo di calcolo più appropriato è il rapporto L/D che permette di discriminare il cuscinetto corto da quello a lunghezza finita o infinitamente lungo.

Due parametri geometrici fondamentali per definire univocamente la posizione del centro $C(x_c, y_c)$ del perno sono l'eccentricità ("eccentricity") e , ovvero la distanza \overline{OC} tra i due centri, e l'angolo di assetto (o di attitudine) ϕ ("attitude angle") formato dal segmento \overline{OC} rispetto alla direzione del carico applicato, secondo il verso concorde a quello di rotazione.

$$e = \overline{OC} = \sqrt{x_c^2 + y_c^2} \quad (5.2)$$

$$\tan \phi = \frac{x_c}{y_c} \quad (5.3)$$

Ciò permette altresì di definire i seguenti parametri adimensionali:

$$\varepsilon = \frac{e}{c} \quad x_c^* = \frac{x_c}{c} \quad y_c^* = \frac{y_c}{c} \quad (5.4)$$

È interessante osservare che nella condizione limite $\varepsilon = 1$ esiste un punto in cui il meato di lubrificante ha spessore nullo, pertanto le superfici saranno a contatto. Ad essa corrisponderà un angolo $\phi = 0^\circ$ e pertanto il centro del perno si dispone sulla verticale, allineato col carico. Per contro il verificarsi del caso $\varepsilon = 0$ implica un angolo di assetto pari a 90° con il conseguente posizionamento del centro del cuscinetto allineato con l'orizzontale. La prima situazione si manifesta per carichi estremamente elevati mentre la seconda è prerogativa di casi in cui il peso è al limite nullo.

La distribuzione h di spessore del film fluido è di conseguenza definita come:

$$h = c[1 + \varepsilon \cos(\theta)] \quad (5.5)$$

Si considerino infine le seguenti ulteriori ipotesi:

- Fluido newtoniano;
- Flusso continuo e regime laminare;
- Flusso incompressibile;
- Flusso isoviscoso;
- Trascurabilità degli effetti inerziali del fluido;
- Spessore del meato fluido è molto piccolo rispetto alle altre dimensioni del dominio di fluido;
- Nessuno strisciamento tra il meato di fluido, l'albero e le pareti delle boccole.

Dalla manipolazione delle equazioni di Navier-Stokes sotto le sopracitate ipotesi si ottiene la formula di Reynolds che esprime la pressione distribuita lungo il perimetro del cuscinetto in funzione dello spessore del meato di fluido. Essa si presenta come un'equazione differenziale non lineare, dipendente dalla coordinata assiale z , da quella angolare θ e dal tempo t . In coordinate cilindriche la sua forma è la seguente:

$$\frac{1}{6} \left[\frac{1}{R_j^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) \right] = \Omega \frac{\partial h}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial h}{\partial t} \quad (5.6)$$

Dove:

μ è la viscosità dinamica dell'olio;

$\Omega = \Omega_j - \Omega_b$ è la velocità relativa tra perno e boccola.

Tipicamente, $\Omega_b = 0$ in quanto la boccola non ruota. Dunque $\Omega = \Omega_j$.

Inoltre, il membro destro dell'equazione è costituito da un primo termine, rappresentativo dell'effetto di scorrimento ("shear/slide") e da un secondo che esprime l'effetto di schiacciamento ("squeeze").

Ulteriori assunzioni degne di considerazione per il caso in esame sono le seguenti:

- Flusso isoterma;
- Densità del fluido costante;
- Perno e boccola rimangono sempre rigidi e indeformabili;
- Le vibrazioni del perno rimangono in prossimità dell'equilibrio statico e la loro ampiezza è sufficientemente piccola rispetto al gioco radiale affinché la forza trasmessa dal meato rimanga lineare.

Un'ulteriore considerazione, di particolare rilevanza, riguarda il tipo di carico che grava sul vincolo. A tal proposito, nella procedura si prenderà in esame il solo peso del rotore, un carico costante statico che viene così distribuito tra i due cuscinetti, trascurando le componenti di reazione vincolare che non siano nella direzione di tale forza (la quale è prevista essere disposta

lungo l'asse Y negativo). Considerando m la massa del rotore e g l'accelerazione di gravità, si definisce il peso come:

$$P = mg \quad (5.7)$$

Mentre la controparte che viene distribuita sui cuscinetti 1 e 2 sarà rappresentata dal termine W , tale per cui:

$$P = W_1 + W_2 \quad (5.8)$$

Dove i pedici 1 e 2 si riferiscono ai due cuscinetti.

Un parametro sintetico tipico del cuscinetto capace di riassumere in esso le sue caratteristiche e condizioni operative è il numero di Sommerfeld, il quale è definito una volta note la famiglia e la geometria di cuscinetto, la viscosità dell'olio, la velocità di rotazione e il carico statico agente su di esso.

Generalmente (e lo stesso vale per tale caso di studio) il numero di Sommerfeld S è espresso nel modo seguente:

$$S = \frac{\mu \Omega L R}{\pi W} \left(\frac{R}{c} \right)^2 \quad (5.9)$$

Per quanto riguarda il calcolo della pressione mediante equazione di Reynolds, non essendo possibile ottenere una soluzione generale in forma chiusa, allora è necessario ricorrere ad alcuni sottocasi e considerazioni sulle condizioni al contorno. In merito alle condizioni al bordo si faccia riferimento al capitolo 5.1.1 ad esso dedicato.

I sottocasi più tipici fanno riferimento all'ipotesi di "cuscinetto corto" oppure "infinitamente lungo" rispetto al rapporto geometrico L/D .

Il primo caso si verifica per valori di $L/D \ll 1$ (ottima fino a $L/D = 1/2$, per $\varepsilon < 0,7$ secondo [22]), per i quali è possibile trascurare il flusso in direzione circonferenziale: ne consegue l'eliminazione del relativo termine legato al gradiente di pressione circonferenziale nell'equazione di Reynolds.

Mentre l'approssimazione di cuscinetto lungo, valida per casi in cui $L/D \gg 1$ (fornisce risultati accurati per $L/D > 2$, sempre secondo [22]) prevede di trascurare il flusso assiale di olio e il contributo legato alla derivata parziale della pressione rispetto alla coordinata z .

Il caso in esame si rivelerà un caso intermedio tra questi, più prossimo al modello di cuscinetto corto piuttosto che lungo, in quanto, per entrambi i cuscinetti L/D è compreso tra 0,5 e 1. Il cuscinetto di "lunghezza finita" può essere risolto ricorrendo a soluzioni approssimate, una fra queste è quella relativa al modello Ansys APDL che verrà utilizzato.

In quest'analisi verrà affrontato unicamente lo studio del regime stazionario, disinteressandosi di altre condizioni di moto (e così anche del transitorio di avviamento): questo comporta

l'indipendenza di ε dal tempo, la conseguente costanza di ϕ e la rimozione del termine relativo alla derivata parziale nel tempo dello spessore.

Una volta noto il digramma di pressione del fluido rispetto alla coordinata angolare ϑ , integrandolo lungo la superficie circonferenziale del perno si ottiene l'espressione delle due componenti di forza F_x e F_y , dal film di olio per contrastare il carico gravante sul perno.

Di conseguenza risultano calcolabili anche i parametri di rigidità e smorzamento del cuscinetto, ovvero i termini che caratterizzano dinamicamente il vincolo. Questo mette chiaramente in luce i motivi per i quali è indispensabile ricorrere a tale modello, in quanto solamente in questo modo risultano accessibili i termini che verranno poi inseriti all'interno dell'analisi modale, per ottenere il comportamento dinamico dell'albero.

Tipicamente la maggior parte dei cuscinetti manifesta un comportamento forza - spostamento non lineare, il quale complica la trattazione in modo non indifferente. Ragion per cui in prima analisi è doveroso ricorrere alla linearità. Questa semplificazione è realistica nelle condizioni in cui gli spostamenti dinamici sono relativamente piccoli rispetto al punto di equilibrio C del perno. In questo modo è possibile linearizzare le espressioni delle forze F_x e F_y rispetto alla posizione centrale. Le serie di Taylor al 1° ordine permettono di stimare il livello di errore relativo a tale approccio. La relazione tra carico agente sull'albero per mezzo del cuscinetto e lo spostamento e velocità dell'albero nella zona di accoppiamento assume pertanto la seguente forma approssimata:

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_C \\ y_C \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_C \\ \dot{y}_C \end{Bmatrix} \quad (5.10)$$

Dove:

$$K_{jb} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial x} & \frac{\partial F_x}{\partial y} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} & \frac{\partial F_y}{\partial y} \end{bmatrix}_C \quad (5.11)$$

$$C_{jb} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial F_x}{\partial \dot{y}} \\ \frac{\partial F_y}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial F_y}{\partial \dot{y}} \end{bmatrix}_C \quad (5.12)$$

Se rilevanti, è possibile aggiungere a tale equazione anche i termini di inerzia.

Definendo:

$$\mathbf{Q}_F = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} \quad \mathbf{q}_C = \begin{Bmatrix} x_C \\ y_C \end{Bmatrix} \quad (5.13)$$

E' possibile riscrivere:

$$\mathbf{Q}_F = -\mathbf{K}_{jb}(\Omega)\mathbf{q}_C - \mathbf{C}_{jb}(\Omega)\dot{\mathbf{q}}_C \quad (5.14)$$

Nel nostro caso \mathbf{q}_C è lo spostamento dinamico assoluto del perno in quanto la sede del cuscinetto è fissata e rigida.

E' possibile ottenere gli otto parametri dinamici ricorrendo a due metodi teorici:

- Metodo della perturbazione infinitesima (IFP): esso fa uso delle derivate parziali delle forze del cuscinetto rispetto agli spostamenti e le velocità per il calcolo dei relativi coefficienti;
- Metodo della perturbazione finita (FP): esso si basa sull'applicazione al perno di piccoli spostamenti ($\Delta x, \Delta y$) e velocità ($\Delta \dot{x}, \Delta \dot{y}$) rispetto alla posizione di equilibrio stazionario, utilizzando le differenze finite calcolate sulla forza rispetto ad essi per l'approssimazione dei coefficienti. Esiste un'entità massima di perturbazione al di sotto della quale i parametri sono calcolati con una accuratezza adeguata. Se il suo valore è sufficientemente piccolo i coefficienti del caso FP dovrebbero convergere a quelli calcolati con il metodo IFP.

Per quel che concerne il calcolo dei coefficienti linearizzati si rimanda alla letteratura citata:

T. Someya, *Journal-Bearing Databook* [23], pagg. 237-240

Zhi Ling Qiu, *A theoretical and experimental study on dynamic characteristic of journal bearings* [24], pagg. 43-47

Un ultimo aspetto riguarda il tipo di regime di lubrificazione oggetto di analisi. In tribologia applicata all'interazione bronzina-lubrificante si distinguono essenzialmente 4 regimi: idrodinamico, elastoidrodinamico, parziale e limite ("boundary"). Il testo di B. J. Hamrock *Fundamental of fluid film lubrication* [25] ne dà una sintetica presentazione:

- Lubrificazione idrodinamica: caratterizzato da superfici conformi (perfetto accoppiamento tra loro e indeformabili), spessore del meato ($> 1 \mu m$) sufficiente a prevenire il contatto tra superfici solide, attrito generato solo dallo scorrimento viscoso per effetto del lubrificante, pressioni generalmente basse (tipicamente $< 5 MPa$).
- Lubrificazione elastoidrodinamica: superfici non conformi, deformabili ma non c'è ancora contatto tra le superfici solide accoppiate; l'attrito è anche qui prodotto dello scorrimento del fluido viscoso ma i fenomeni pressione-viscosità possono essere in questo caso rilevanti.
- Lubrificazione limite: c'è contatto tra le asperità superficiali dei solidi coinvolti, meccanismo dominato dalle proprietà fisiche e chimiche del meato sottile tale da raggiungere dimensioni molecolari ($1 \div 10 nm$), le caratteristiche di questa tipologia di attrito sono determinate sia dalle proprietà del lubrificante che dei solidi.
- Lubrificazione parziale ("mista"): caratterizzato da un comportamento misto tra il limite e il meato fluido. E' il regime più complesso e il meno compreso.

Figura 5.3 e Figura 5.4 mostrano rispettivamente lo stato del lubrificante all'interfaccia tra le superfici di accoppiamento e l'ordine di grandezza del coefficiente d'attrito relativo ai fenomeni appena delineati.

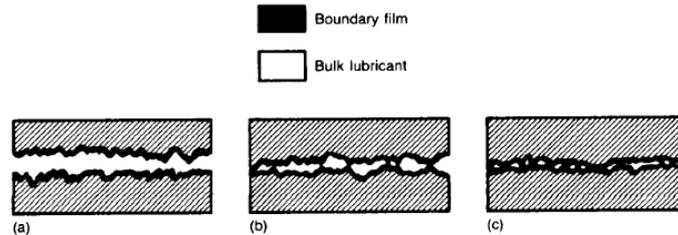


Figura 5.3 Regimi di lubrificazione: stato del lubrificante interposto tra le superfici di interfaccia. (a) Lubrificazione idrodinamica, (b) lubrificazione parziale, (c) lubrificazione "boundary" [25]

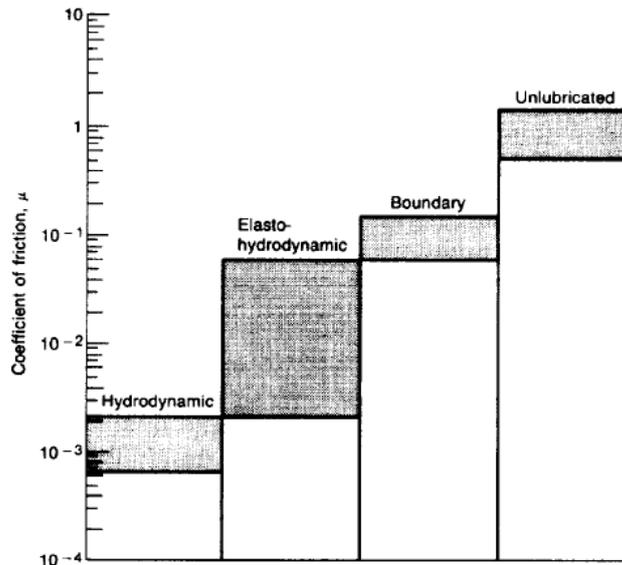


Figura 5.4 Diagramma a barre del coefficiente d'attrito per diverse condizioni di lubrificazione [25]

Nell'ambito dell'analisi proposta dalla presente tesi si opererà unicamente in condizioni di lubrificazione idrodinamica e nei limiti posti da questa disinteressandosi di qui in avanti degli altri regimi.

Tra i diversi metodi risolutivi, uno che combina efficacemente una buona attendibilità dei risultati con una accettabile semplicità di applicazione è la tecnica proposta dalla guida Ansys Mechanical che fa utilizzo del programma Ansys APDL per introdurre l'elemento bidimensionale COMBI214, un cuscinetto molla-smorzatore a lunghezza finita che prevede una formulazione per la pressione basata sulla combinazione delle espressioni per il caso corto e lungo modificato.

Si sonderà pertanto il livello di adeguatezza di tale modello confrontandolo con quelli proposti da altri due testi che si riportano di seguito:

- Zhi Ling Qiu, *A theoretical and experimental study on dynamic characteristic of journal bearings* [24]: tesi di dottorato che riporta tabulati i parametri statici e dinamici del cuscinetto calcolati tramite FDM-IFP con metodo di sovrarilassamento («Finite Difference Method - Infinitesimal Perturbation - over-relaxation method»).
- M. I. Friswell, J. E.T. Penny, S. D. Garvey, A. W. Lees, *Dynamics of rotating machines* [26]: libro di testo in cui viene riportata la trattazione analitica del cuscinetto modellizzato con la «short bearing approximation»

Il primo di questi è stato assunto come modello di riferimento per quello che riguarda i risultati della formulazione a lunghezza finita, mentre dal confronto col secondo si può osservare quali siano i confini di affidabilità dell'approssimazione di cuscinetto corto rispetto alla tecnica proposta da Ansys piuttosto che il metodo alle differenze finite.

Di seguito verranno trattati più estensivamente i 3 metodi qui proposti in modo così da presentare i risultati dell'analisi comparativa.

5.1.1 In merito alla pressione del lubrificante: condizioni al contorno

Per essere risolta l'equazione di Reynolds non può prescindere dalle condizioni al bordo. Per quanto riguarda i cuscinetti completi a 360° e quelli ad ampio arco parziale in regime stazionario la presenza del fenomeno di cavitazione porta ad una rottura della continuità del fluido. Pertanto la definizione della pressione al contorno richiede una trattazione più approfondita rispetto al cuscinetto con piccolo arco parziale o con pattini oscillanti (dove la pressione si genera lungo tutta la superficie di accoppiamento), tipologie per le quali basta una semplice condizione di pressione atmosferica. In ogni caso, per affrontare il calcolo, la pressione del meato alle sue estremità non può non essere nota.

Si cominci riportando una condizione condivisa da tutti e tre i metodi (Ansys APDL 2D, modello analitico e metodo FDM-IFP) precedentemente accennati. La pressione (relativa) si considera nulla per entrambe le estremità del cuscinetto:

$$p = 0 \quad \text{per } z = 0 \text{ e } z = L$$

Tuttavia, questa ipotesi necessita di considerazioni ulteriori per essere applicata.

Come riporta il libro di testo [23] tre sono le condizioni al bordo comunemente utilizzate nei cuscinetti circolari completi.

1. Condizione al contorno di Sommerfeld (o "full-Sommerfeld")

Basta definire $p = 0$ per $\theta = 0$ e $\theta = 2\pi$ (laddove $\theta = 0$ si verifica in corrispondenza dello spessore massimo h_{max} del meato). Si ottiene un diagramma di pressione antisimmetrico rispetto a $\theta = \pi$. Tuttavia è necessario che in qualsiasi condizione di carico, per garantire l'equilibrio statico al perno, l'angolo di assetto sia sempre pari a $\pi/2$,

ipotesi poco realistica in particolare per cuscinetti molto caricati (vedi Figura 5.6). Questa condizione è applicabile nei casi in cui si ha una pressione relativa $p(\theta = 0) = p_0$ particolarmente maggiore della pressione atmosferica, tale per cui l'andamento delle pressioni lungo la circonferenza si mantiene positivo. Se ciò non avviene (come nel realistico caso $p(\theta = 0) = 0$) allora è inevitabile incorrere in depressione nel tratto $\pi < \theta < 2\pi$. Laddove si abbia pressione negativa capace di raggiungere la tensione di vapore del fluido, questa esprime la cavitazione dell'olio con conseguente rottura del meato.

2. Condizione al contorno di Gumbel (o "half-Sommerfeld")

Essa definisce ancora una volta $p = 0$ per $\theta = 0$ e $\theta = 2\pi$ ma, in quanto valori del di pressione risultante al di sotto della tensione di vapore del lubrificante risultano privi di significato fisico essendo violata l'ipotesi di continuità del fluido, questi vengono annullati per il calcolo dei termini che ne derivano. Questa condizione è spesso utilizzata per le predizioni in buona parte realistiche e per la sua semplicità sebbene sia in realtà non appropriata a livello fisico: infatti è inevitabile la violazione della continuità della portata in massa per $\theta = \pi$, dove si ha un brusco cambiamento di pendenza della curva di pressione che si porta al valor nullo.

3. Condizione al contorno di Reynolds

Essa definisce:

$$\begin{cases} p = 0 \text{ per } \theta = 0 \\ p = 0 \text{ per } \theta^* = 0 \end{cases}$$

Laddove θ^* corrisponde all'angolo $\theta > \pi$ per cui $dp/d\theta = 0$.

In questo modo si mitiga il problema relativo alla condizione "half-Sommerfeld" imponendo un gradiente di pressione nullo (e quindi tangente orizzontale del diagramma relativo) nel punto in cui questa arriva a coincidere con quella atmosferica. Ciò garantisce la continuità della portata di fluido e comporta $p > 0$ per $0 < \theta < \theta^*$ mentre $p = 0$ per $\theta^* < \theta < 2\pi$.

Essa è la condizione tipicamente utilizzata in quanto consente di ottenere una distribuzione di pressioni maggiormente fedele agli esiti sperimentali ma è anche la più complicata rispetto alle precedenti. Un aspetto interessante è che θ^* non è un valore stabilito a priori ma viene determinato dal calcolo. Esso è inoltre funzione della coordinata assiale z . Se gli assi di perno e boccia sono paralleli (come nel nostro caso), allora θ^* ha un andamento convesso e simmetrico rispetto alla direzione assiale.

E' bene notare, come riporta il testo di G. Jacazio, B. Piombo, *Meccanica applicata alle macchine Vol. 2 La trasmissione del moto* [27] che la prima condizione definita da Reynolds presuppone l'adduzione di fluido (a pressione atmosferica in tal caso) in corrispondenza del punto di massimo spessore del meato. Tuttavia nella pratica non sempre tale vincolo è soddisfatto, tanto più se si considera che l'angolo di assetto varia al variare delle condizioni operative: potrà quindi essere realistico per un certo punto di funzionamento ma non per gli altri. E' altresì doveroso rimarcare che per intervalli angolari di $\pm 20^\circ$

attorno a $\theta = 0$ la sensibilità del cuscinetto a tale ipotesi è scarsa, ma se ciò non fosse verificato il cuscinetto sarebbe da considerare come parziale e pertanto analizzato come tale. Nel caso in esame in prima approssimazione si trascurano gli aspetti relativi al soddisfacimento di questa condizione, fermo restando che può essere un motivo di approfondimento per una futura attività.

In Figura 5.5 sono mostrate le tre condizioni appena delineate. Esse, così come la condizione alle estremità $z = 0$ e $z = L$ del cuscinetto, rimangono valide anche sostituendo $z = 0$ con $p = p_0$ (dove p_0 è la pressione ambiente).

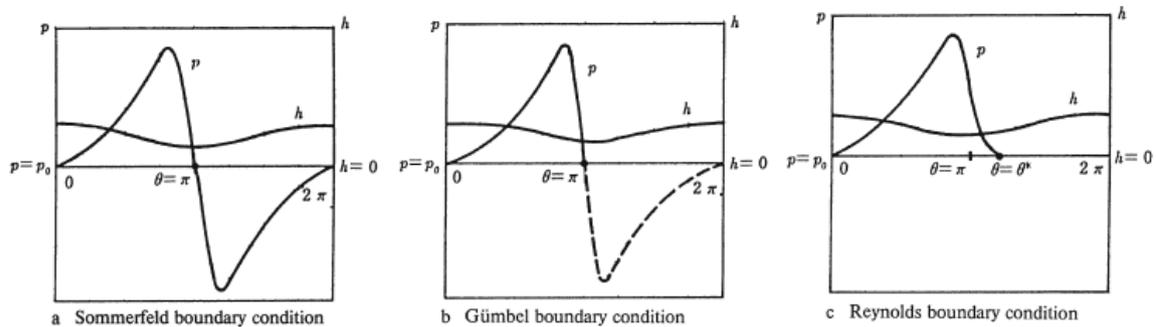


Figura 5.5 Tipologie di condizioni al contorno di pressione per il cuscinetto circolare completo (profilo di spessore del meato fluido incluso) [23]

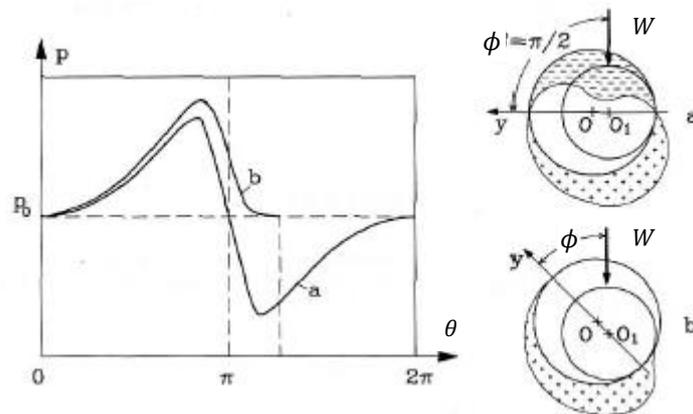


Figura 5.6 Diagramma delle pressioni: condizione di Sommerfeld (a) e Reynolds (b) a confronto [rieditato da [21]]

E' interessante a questo punto fare luce sulle condizioni al bordo che caratterizzano i 3 modelli a cui si farà ricorso nei capitoli seguenti.

Per quanto riguarda Ansys APDL e il modello analitico nell'approssimazione di "cuscinetto corto", le condizioni al contorno vengono a coincidere in quanto entrambe corrispondenti al caso "half-Sommerfeld".

- La pressione (relativa) si considera nulla per entrambe le estremità del cuscinetto;
- $p = 0$ per $\theta = 0$ e $\theta = 2\pi$;
- Laddove si ottengano valori negativi di pressione questi vengono annullati.

La Figura 5.7 ben rappresenta la distribuzione di pressioni auspicabile da un caso del genere.

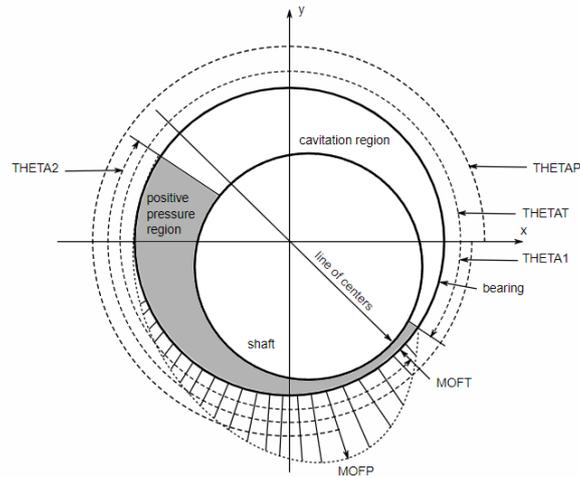


Figura 5.7 Distribuzione delle pressioni attorno alla superficie circolare del cuscinetto [5]

THETA1 e THETA2 definiscono gli estremi della regione a pressione positiva;
 MOFP e THETAP esprimono il valore di pressione massima nel meato e la relativa posizione angolare rispettivamente;
 MOFT e THETAT sono il valore di spessore minimo del meato e il corrispettivo angolo.

Per ciò che concerne il metodo FDM-IFP, la condizione al bordo considerata risulta dichiaratamente essere quella di Reynolds (l'olio è immesso dall'alto del cuscinetto). Questo, in sede di confronto, è un aspetto che porta a differenze osservabili nei risultati, come si vedrà in seguito.

5.1.2 Ansys APDL 2D: l'elemento COMBI214

L'elemento COMBI214 si presenta come un componente molla-smorzatore che prevede la definizione di coefficienti sia in direzione longitudinale che accoppiati. Esso presenta 2 nodi e un eventuale nodo di orientazione opzionale in aggiunta: I è posto sulla boccia del cuscinetto, mentre J è posizionato al centro del rotore. I e J possono essere coincidenti in un punto. Il piano su cui giacciono i nodi e su cui sono definiti i gradi di libertà, può essere stanziato tramite KEYOPT(2).

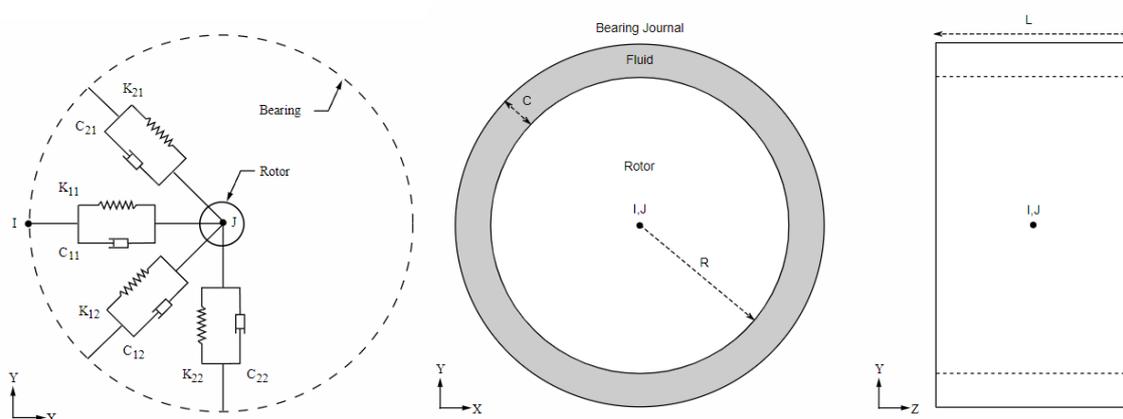


Figura 5.8 Caratteristiche dell'elemento COMBI214 [5]

Ciascun nodo è caratterizzato da 2 gradi di libertà: sono entrambe traslazioni in due direzioni nodali (X, Y, o Z) (vedi Figura 5.8), mentre non è prevista né la possibilità di torsione né di flessione. Da notare, che secondo la notazione della guida Ansys i pedici 1 e 2 corrispondono rispettivamente alle direzioni X e Y. Pertanto per uniformità alla guida si perseguirà questa notazione nel proseguo della trattazione.

In tutti i casi analizzati si considererà sempre il cuscinetto giacente sul piano XY, con l'asse coincidente con la direzione Z del sistema di riferimento e il carico diretto in direzione Y negativo.

Due sono le analisi che possono essere messe in atto tramite questo elemento:

- Analisi transiente non lineare

Essa prevede in input i seguenti parametri: m_i , μ , Ω , L , R , c , dt , $nb cyc$

Dove dt è il parametro di discretizzazione temporale mentre $nb cyc$ rappresenta il numero di rotazioni che si sceglie di calcolare. m_i è la massa relativa alla sola quota parte di peso che grava sul cuscinetto i-esimo.

In output possono essere restituiti diversi termini. Quelli oggetto di interesse per la presente trattazione sono le componenti di posizione x_C e y_C del centro della boccia mobile (tramite le quali sono ottenibili i diagrammi orbitali così come l'eccentricità ϵ e l'angolo di spostamento ϕ), le componenti di velocità \dot{x}_C e \dot{y}_C , le forze di reazione generate dal meato di olio F_x e F_y così come il valore massimo della pressione nel fluido (il quale prende il nome di MOFP, "Maximum of fluid pressure").

- Analisi statica

In ingresso è necessario fornire: μ , Ω , L , R , c , x_C , y_C , \dot{x}_C , \dot{y}_C , $PertInc$, $ThetaInc$

Dove $PertInc$ è la perturbazione adimensionale applicata per il calcolo dei parametri di rigidità e smorzamento (in questo caso posto sempre pari a $1e-5$).

θ_{inc} è l'angolo di integrazione della pressione lungo la circonferenza del perno (di default è lasciato fisso a 2°).

Nota una determinata condizione operativa, il solutore computa le forze di pressione, e gli otto parametri dinamici: quattro coefficienti di rigidità ($K_{11}, K_{22}, K_{12}, K_{21}$) e quattro di smorzamento ($C_{11}, C_{22}, C_{12}, C_{21}$).

Alcuni dei parametri significativi sono riportati in Figura 5.9. Come anticipato la non assialsimmetria del comportamento del cuscinetto si riflette sui parametri di K_{ij} e C_{ij} per cui si manifesta una evidente anisotropia per cui i termini diagonali risultano differenti fra loro così come i contributi accoppiati (ad eccezione della matrice di smorzamento che si mostra simmetrica). Inoltre, in modo più o meno importante, il loro valore è dipendente dalla velocità di rotazione del rotore.

Il calcolo della distribuzione di pressione si rifà alla seguente espressione adimensionalizzata in coordinate cilindriche, risultato della combinazione delle relazioni per il cuscinetto corto e lungo modificato:

$$p = \frac{-6\mu \left(\frac{L}{c}\right)^2 \left(\frac{1}{4} - \bar{z}^2\right) \left(\dot{\epsilon} \cos \theta + \epsilon \left(\dot{\bar{\phi}} - \Omega_m\right) \sin \theta\right)}{H^3 \left(1 + \frac{\left(\frac{1}{4} - \bar{z}^2\right)}{B}\right)} \quad (5.15)$$

Dove:

$\bar{z} = z/L$ è la coordinata assiale adimensionalizzata;

$\dot{\epsilon}$ è la derivata temporale dell'eccentricità adimensionale;

$\bar{\phi} = \frac{\pi}{2} - \phi$ è l'angolo complementare all'angolo di assetto ϕ ;

$\dot{\bar{\phi}}$ è la derivata temporale dell'angolo $\bar{\phi}$ in radianti;

Ω_m è la velocità di rotazione media: in questo caso $\Omega_m = \Omega/2$ in quanto $\Omega_b = 0$;

$H = h/c = 1 + \epsilon \cos \theta$ è lo spessore del meato adimensionalizzato;

θ è la coordinata angolare (in radianti);

$B = \frac{H(1+H)}{\left(\frac{L}{R}\right)^2}$ è un parametro di sintesi.

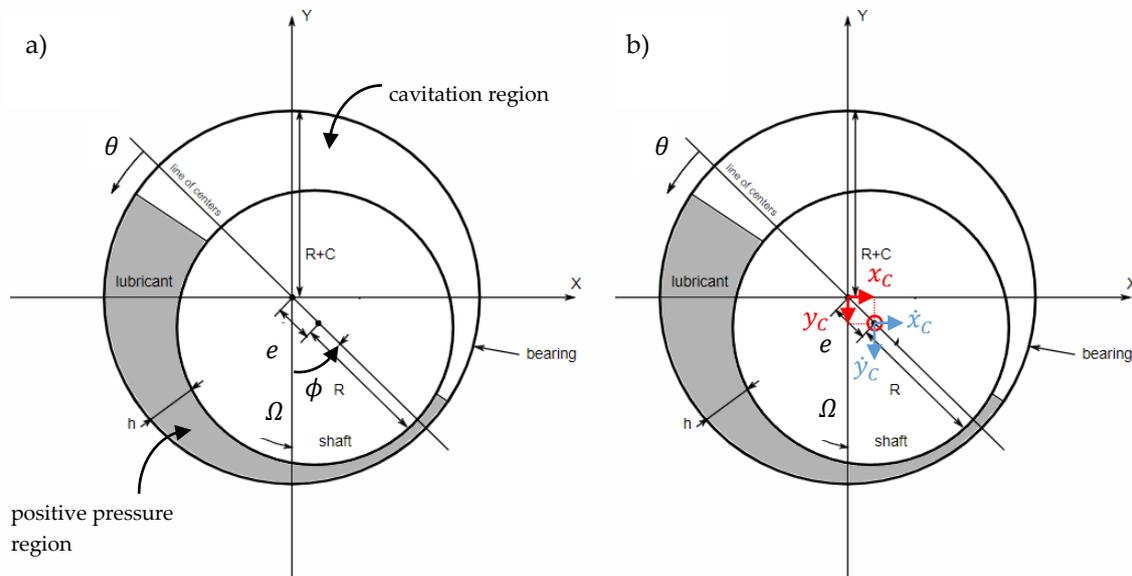


Figura 5.9 Parametri caratterizzanti l'elemento COMBI214. Regioni di pressione e cavitazione (a); Componenti di spostamento e velocità del centro-perno (b) [editato da [28]]

Per il calcolo delle forze di pressione sarà necessario integrare tale espressione lungo la superficie laterale del perno, discretizzata rispetto all'angolo θ , mentre se si applica una piccola perturbazione (in questo caso di valore corrispondente al prodotto $PertInc \cdot c$) tale da permanere in regime lineare e derivando le forze di pressione rispetto allo spostamento e alla velocità di spostamento generati è immediato ottenere i coefficienti di rigidezza [$Forza/Lunghezza$] e smorzamento cercati [$Forza \cdot Tempo/Lunghezza$]. Da notare che la necessaria presenza del parametro $PertInc$ per il calcolo dei parametri dinamici lascia intuire che il metodo di calcolo usato sia quello per perturbazioni finite.

Non si entrerà maggiormente nei dettagli riguardo a questa operazione.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \dot{x}_1} & \frac{\partial F_1}{\partial \dot{x}_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \dot{x}_1} & \frac{\partial F_2}{\partial \dot{x}_2} \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

Le matrici di rigidezza e smorzamento dell'elemento sono così definite [28]:

$$\mathbf{K}_{COMBI} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & -K_{11} & -K_{12} \\ K_{21} & K_{22} & -K_{21} & -K_{22} \\ -K_{11} & -K_{12} & K_{11} & K_{12} \\ -K_{21} & -K_{22} & K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

$$\mathbf{C}_{COMBI} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & -C_{11} & -C_{12} \\ C_{21} & C_{22} & -C_{21} & -C_{22} \\ -C_{11} & -C_{12} & C_{11} & C_{12} \\ -C_{21} & -C_{22} & C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

Se si considera il nodo I fisso, allora si avranno due gradi di libertà in meno, e le matrici dell'elemento si riducono alle seguenti:

$$\mathbf{K}_{COMBI} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

$$\mathbf{C}_{COMBI} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

5.1.3 Modello analitico per l'approssimazione di cuscinetto corto

Come si ha già avuto modo di dichiarare, è possibile risolvere l'equazione di Reynolds in forma chiusa con l'approssimazione, irrealistica ma con un buon range di attendibilità, di cuscinetto infinitamente corto. Nonostante le limitazioni del modello, esso presenta molte delle caratteristiche peculiari riscontrabili nei cuscinetti oleodinamici. Si faccia riferimento alle assunzioni definite all'inizio del capitolo, in particolare alla condizione di stazionarietà del flusso.

Definendo il numero di Sommerfeld modificato (anche detto numero di Ocvirk) come:

$$S_s = \pi S \left(\frac{L}{D} \right)^2 = \frac{\mu \Omega D L^3}{8 W c^2} \quad (5.22)$$

E' possibile derivare l'equazione che esprime la relazione tra l'eccentricità e il numero di Ocvirk:

$$\varepsilon^8 - 4\varepsilon^6 + (6 - S_s^2(16 - \pi^2))\varepsilon^4 - (4 + \pi^2 S_s^2)\varepsilon^2 + 1 = 0 \quad (5.23)$$

Essa si configura come un'equazione quartica rispetto a ε^2 la cui radice minore in valore è sempre compresa tra 0 e 1 e pertanto unica soluzione accettabile. Una volta noto il peso e la velocità di

rotazione, il numero di Sommerfeld e l'eccentricità sono definiti univocamente. In tal caso si otterrà un luogo dei centri del perno molto prossimo ad una forma semicircolare.

La forza di reazione del cuscinetto dovrà di conseguenza essere allineata al carico W .

L'angolo di spostamento può essere espresso in funzione dell'eccentricità nella forma seguente:

$$\tan\phi = \frac{\pi\sqrt{1-\varepsilon^2}}{4\varepsilon} \quad (5.24)$$

Importante rimarcare che con tale modello alcuni aspetti non vengono tenuti in conto, primi fra tutti le proprietà termiche e il flusso di lubrificante.

Linearizzando la relazione forza-spostamento non lineare (piccoli spostamenti e velocità attorno alla posizione di equilibrio stazionario), è possibile calcolare le matrici di rigidezza e smorzamento in forma chiusa e in funzione sia dell'eccentricità sia del carico.

Essendo le rotazioni del perno lasciate libere attorno a x e y le matrici \mathbf{K} e \mathbf{C} avranno dimensione 2×2 e si presenteranno nella seguente forma:

$$\mathbf{K}_{jb} = \frac{W}{c} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

$$\mathbf{C}_{jb} = \frac{W}{c\Omega} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

Definito:

$$h_0 = \frac{1}{(\pi^2(1-\varepsilon^2) + 16\varepsilon^2)^{3/2}}$$

Gli 8 coefficienti assumono la formulazione riportata di seguito:

$$a_{11} = 4h_0(\pi^2(2-\varepsilon^2) + 16\varepsilon^2)$$

$$a_{12} = h_0 \frac{\pi(\pi^2(1-\varepsilon^2)^2 - 16\varepsilon^4)}{\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

$$a_{21} = -h_0 \frac{\pi(\pi^2(1-\varepsilon^2)(1+2\varepsilon^2) + 32\varepsilon^2(1+\varepsilon^2))}{\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

$$a_{22} = 4h_0 \left(\pi^2(1+2\varepsilon^2) + \frac{32\varepsilon^2(1+\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2)} \right)$$

$$b_{11} = h_0 \frac{2\pi\sqrt{1-\varepsilon^2}(\pi^2(1+2\varepsilon^2) - 16\varepsilon^2)}{\varepsilon}$$

$$b_{12} = b_{21} = -8h_0(\pi^2(1+2\varepsilon^2) - 16\varepsilon^2)$$

$$b_{22} = h_0 \frac{2\pi(\pi^2(1 - \varepsilon^2)^2 + 48\varepsilon^2)}{\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$$

Da notare il segno dei coefficienti:

- $a_{11}, a_{22}, b_{11}, b_{22}$ sono sempre positivi;
- a_{21}, b_{12}, b_{21} sono sempre negativi;
- a_{12} è positivo per ε minori, mentre è negativo per ε maggiori.

5.1.4 Metodo alle differenze finite con perturbazione infinitesima

Per la trattazione teorica relativa al metodo si rimanda al documento qui riportato: Zhi Ling Qiu, *A theoretical and experimental study on dynamic characteristic of journal bearings* [24], pagg. 31-91.

Essendo la pressione calcolata per iterazione nodo per nodo, nel testo sopraccitato viene proposto l'utilizzo della tecnica del "sovrarilassamento" la quale permette di accelerare il raggiungimento della convergenza nel calcolo iterativo: quest'ultimo si interrompe non appena l'errore numerico si porta al di sotto di un prescritto valore di soglia (tipicamente molto piccolo).

Ci si disinteressa in tal sede del dettaglio in merito alla procedura, piuttosto complessa e laboriosa, limitandosi a sondarne i confini e reperire le tabelle dei relativi risultati.

5.2 Confronto

In questa sezione si riportano gli esiti dell'analisi comparativa eseguita sui tre modelli (Ansys APDL 2D, Modello analitico del "cuscinetto corto", Metodo FDM-IFP) considerando 4 tipologie differenti di cuscinetto. Per ciascuno di essi sono esplicitati in Tabella 5.1 i metodi considerati:

1. $L/D = 1/8$ («short bearing»)
2. $L/D = 1/2$ («finite-length bearing»)
3. $L/D = 1$ («finite-length bearing»)
4. $L/D = 1$ («finite-length bearing» con ciclo limite)

Caso	Tipologia cuscinetto	Metodo		
n°	L/D	Ansys APDL	Modello analitico	Metodo FDM-IFP
1	1/8	✓	✓	✗
2	1/2	✓	✗	✓
3	1	✓	✓	✓
4	1 (con ciclo limite)	✓	✗	✗

Tabella 5.1 Tabella dei metodi presi in esame per ciascuna tipologia di cuscinetto

I casi 2. e 3. sono stati scelti in quanto costituiscono gli estremi del campo in cui si inseriscono i cuscinetti della pompa RVP.

I dati sono tratti e manipolati sul modello di due esempi proposti nella guida [29]:

« 7.9. Example: Calculation of a Plain Cylindrical Journal Bearing Characteristics »

« 7.11. Example: Transient Analysis of a Plain Cylindrical Journal Bearing »

I codici in essi riportati illustrano e chiarificano la procedura di calcolo mediante Ansys APDL dei parametri caratteristici del cuscinetto in esame nel caso bidimensionale.

Sono stati presi a riferimento i risultati in termini di $x_C, y_C, \dot{x}_C, \dot{y}_C, F_x, F_y, p_{max}, \varepsilon, \phi, K_{ij}, C_{ij}$. Verranno esposti gli esiti delle simulazioni secondo l'ordine seguente:

1. confronto in termini di eccentricità (S, ε);
2. confronto in termini di angolo di assetto (S, ϕ);
3. confronto in termini di coefficienti di rigidezza (S, K_{ij});
4. confronto in termini di coefficienti di smorzamento (S, C_{ij});
5. diagrammi orbitali (x_C, y_C);
6. diagrammi di velocità (\dot{x}_C, \dot{y}_C);
7. diagrammi di forza rispetto al tempo (t, F_x, F_y);
8. diagrammi della massima pressione del fluido rispetto al tempo (t, p_{max}).

I diagrammi dal 5. al 8. sono ottenuti unicamente mediante Ansys APDL e sono riportati solo per il caso $L/D = 1$ per numeri di Sommerfeld che corrispondono a valori tabulati di eccentricità ottenuti con il metodo FDM-IFP. I diversi metodi, all'interno della relativa tipologia, condividono gli stessi numeri di Sommerfeld. Pertanto, i valori di eccentricità rappresentati nei grafici sono leggermente differenti da quelli calcolati in Ansys APDL ma essendo lo scostamento trascurabile (come si vedrà è inferiore al 5% nel peggiore dei casi), si è riportato per semplicità e chiarezza espositiva il valore riferito al metodo FDM-IFP.

Il raggiungimento della condizione di equilibrio stazionario è caratterizzata da:

- velocità \dot{x}_C, \dot{y}_C del centro albero entrambi tendenti a 0;
- Forze F_x, F_y esercitate dal fluido rispettivamente pari a 0 e W .

Il soddisfacimento di tali risultati induce a considerare la fisica del problema presumibilmente rispettata.

$L/D = 1/8$ («short bearing»)

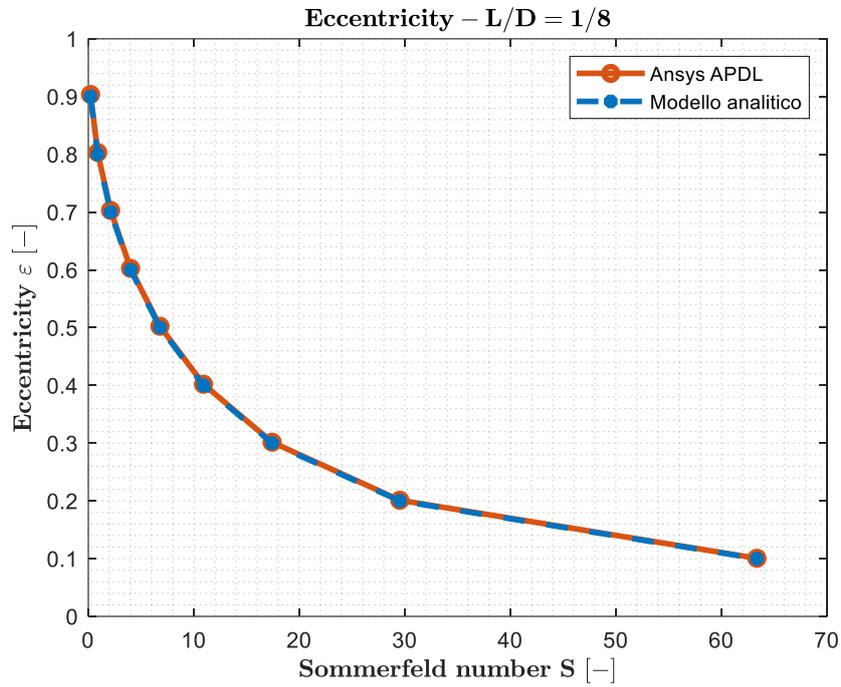


Figura 5.10 Eccentricità in funzione del numero di Sommerfeld per $L/D = 1/8$

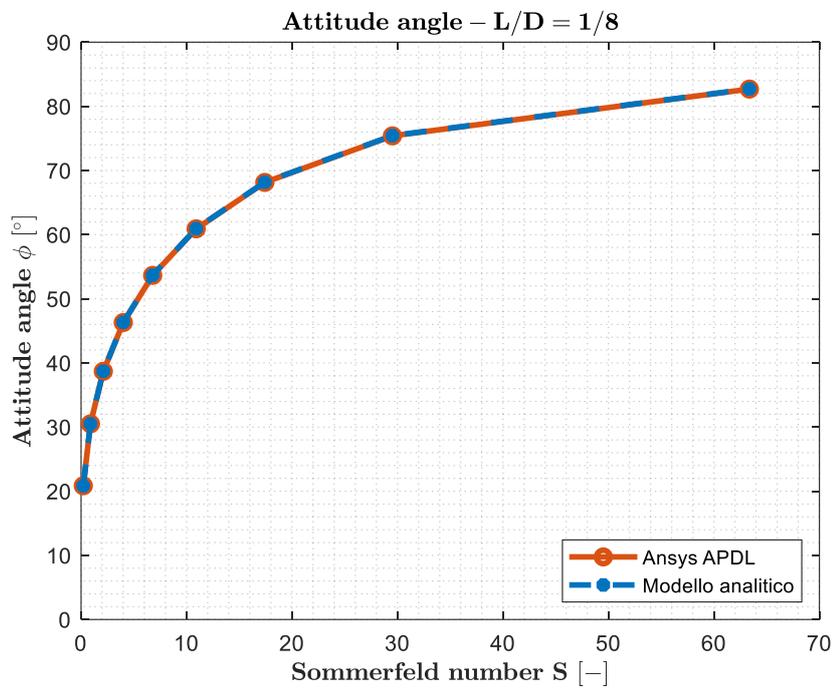


Figura 5.11 Angolo di assetto in funzione del numero di Sommerfeld per $L/D = 1/8$

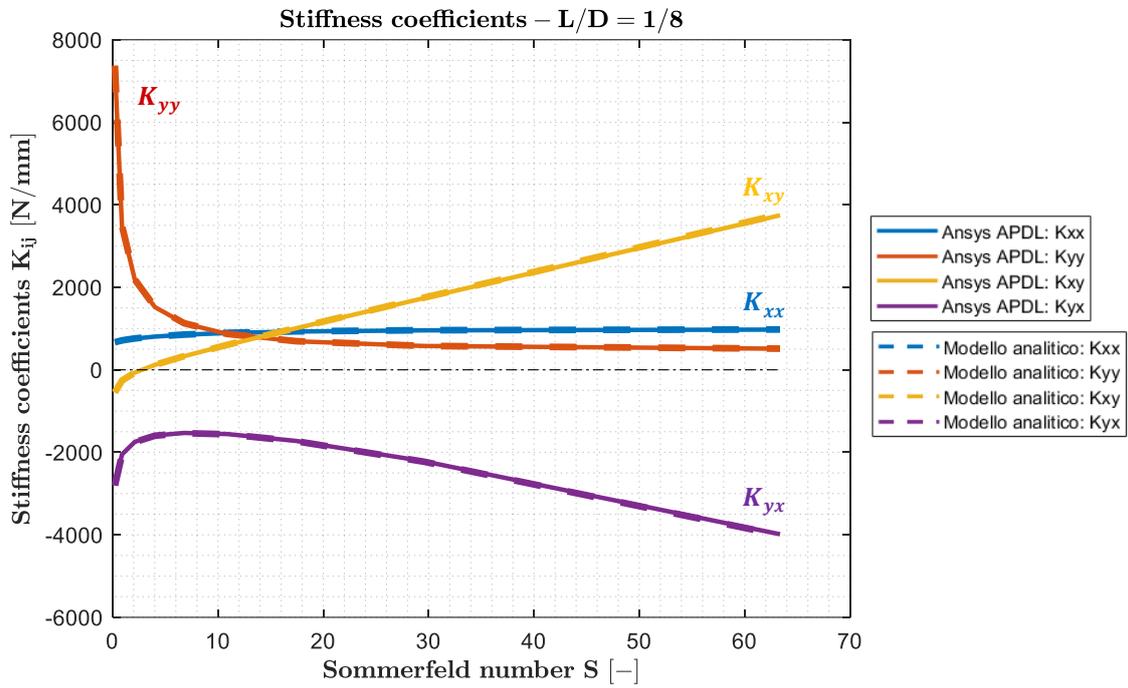


Figura 5.12 Fattori di rigidezza funzione del numero di Sommerfeld ($L/D = 1/8$)

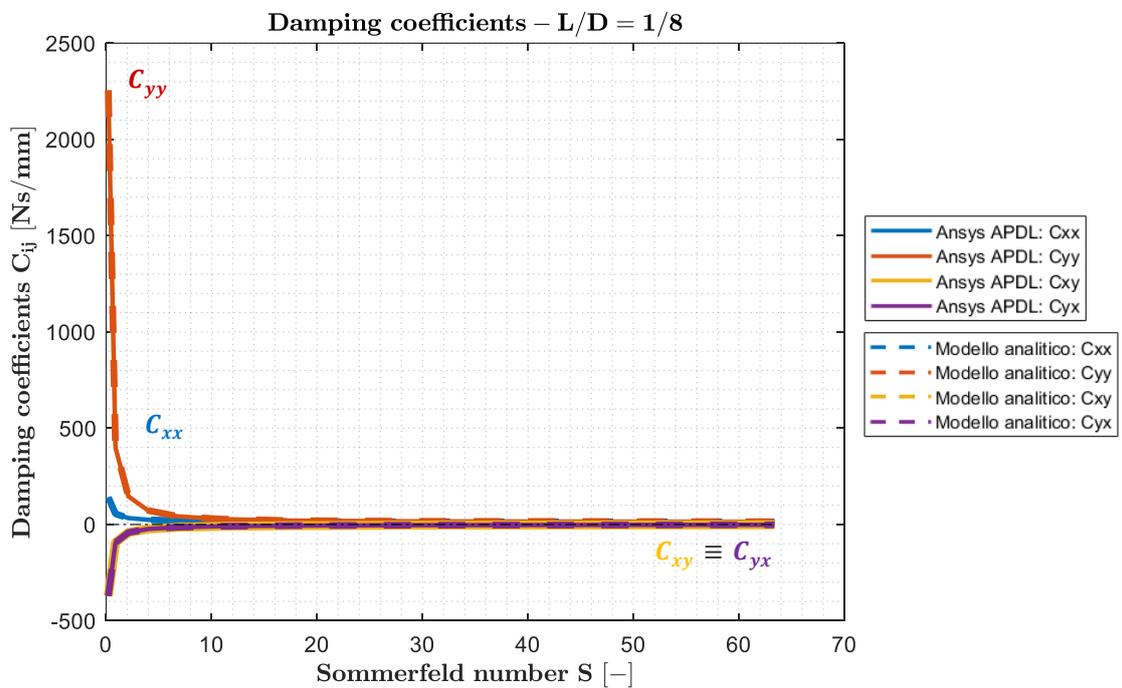


Figura 5.13 Fattori di smorzamento funzione del numero di Sommerfeld ($L/D = 1/8$)

$L/D = 1/2$ («finite-length bearing»)

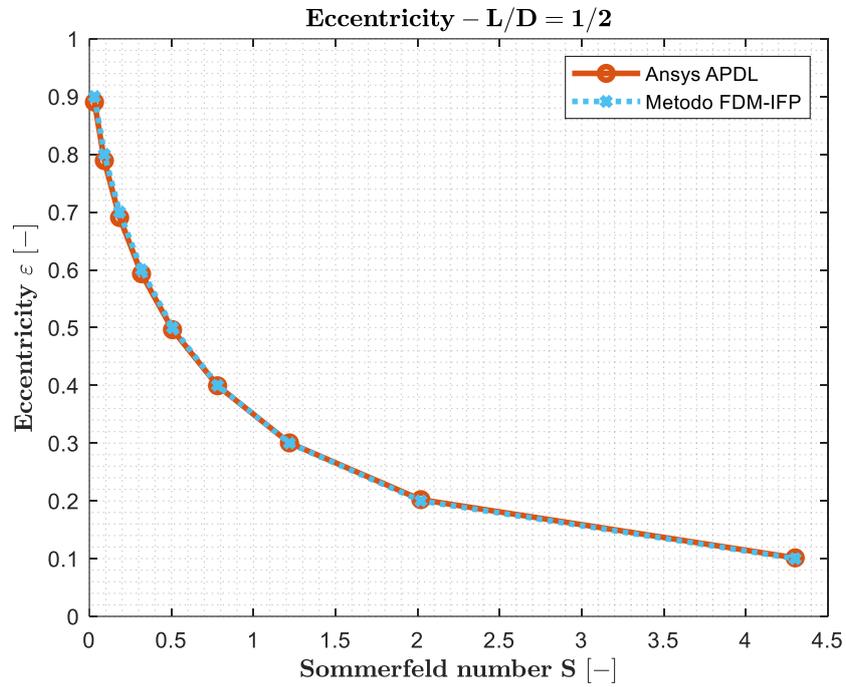


Figura 5.14 Eccentricità in funzione del numero di Sommerfeld per $L/D = 1/2$

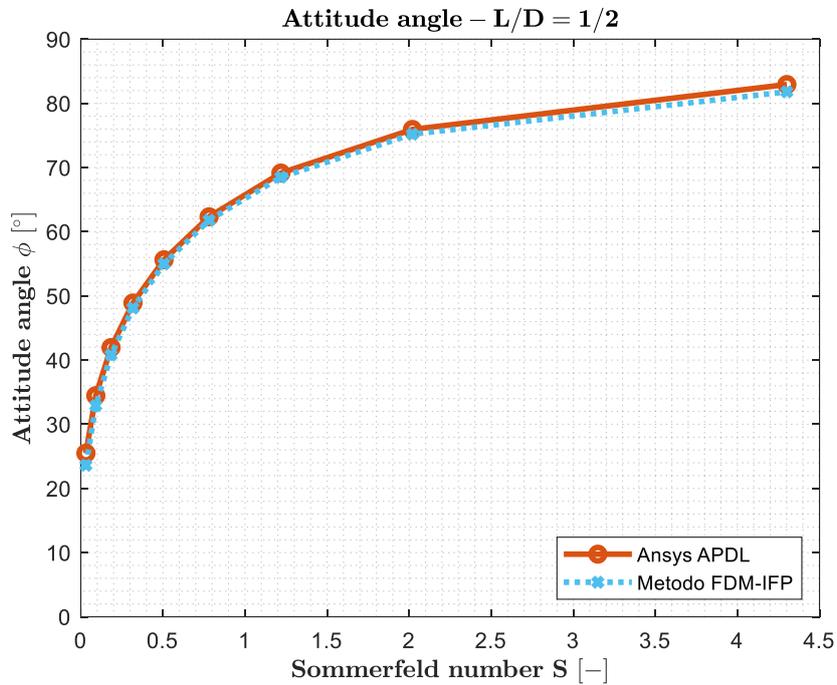


Figura 5.15 Angolo di assetto in funzione del numero di Sommerfeld per $L/D = 1/2$

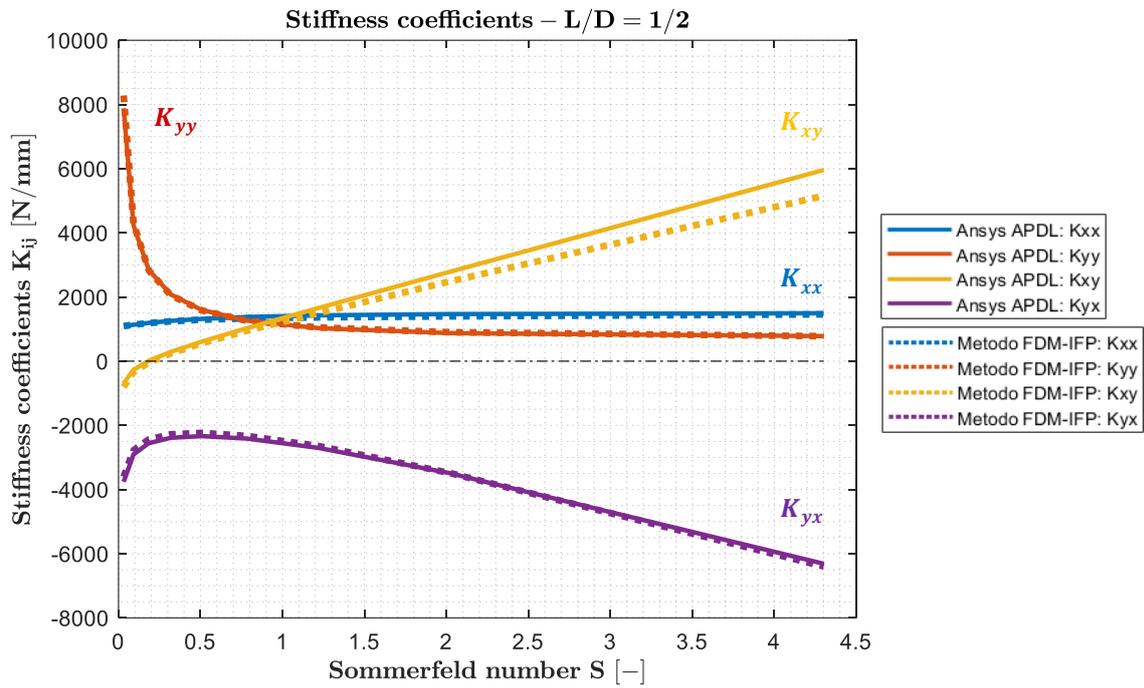


Figura 5.16 Fattori di rigidezza funzione del numero di Sommerfeld ($L/D = 1/2$)

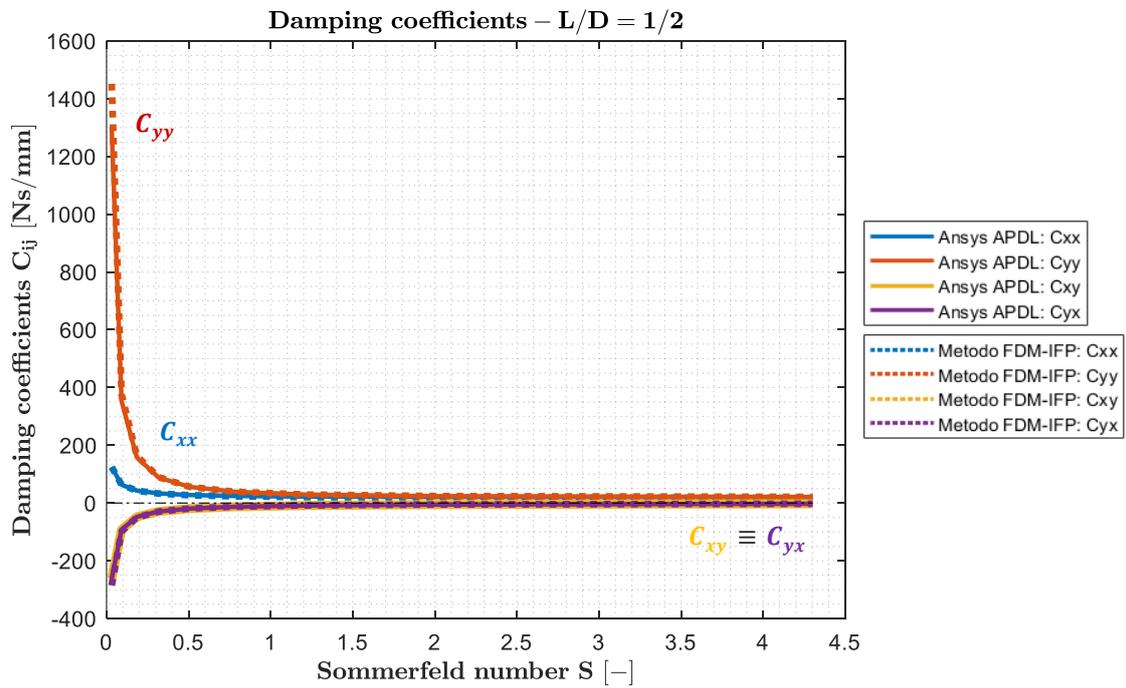


Figura 5.17 Fattori di smorzamento funzione del numero di Sommerfeld ($L/D = 1/2$)

$L/D = 1$ («finite-length bearing»)

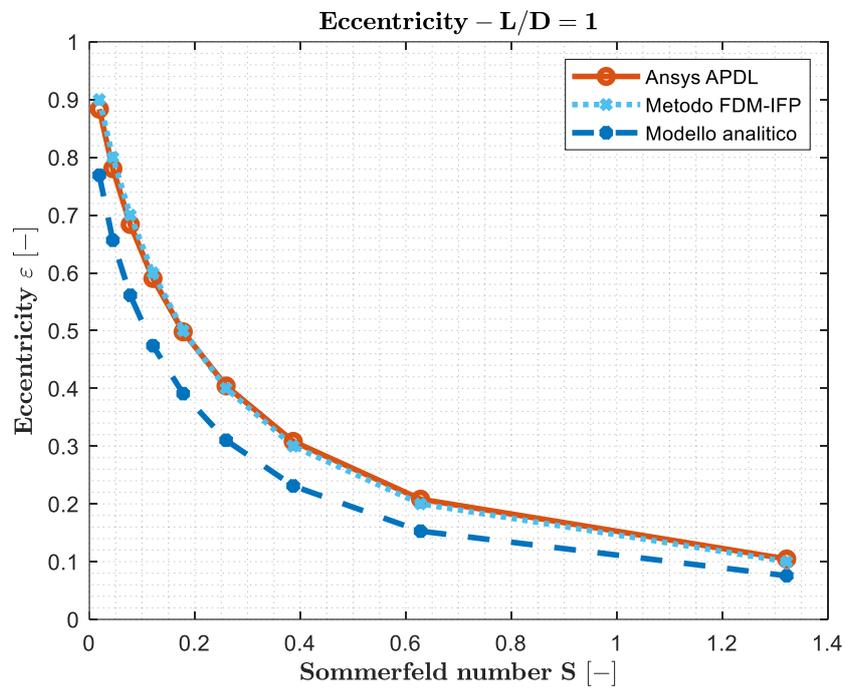


Figura 5.18 Eccentricità in funzione del numero di Sommerfeld per $L/D = 1$

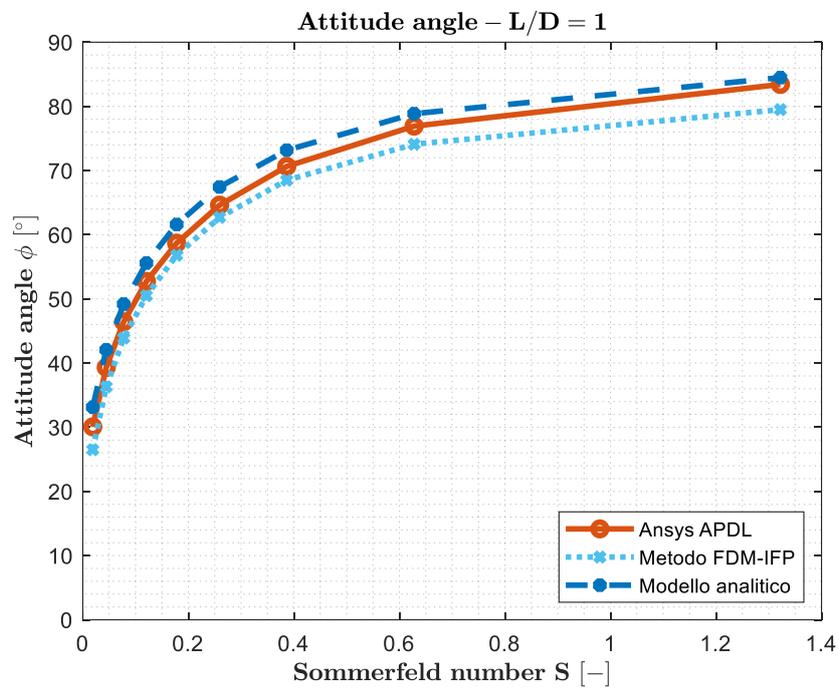


Figura 5.19 Angolo di assetto in funzione del numero di Sommerfeld per $L/D = 1$

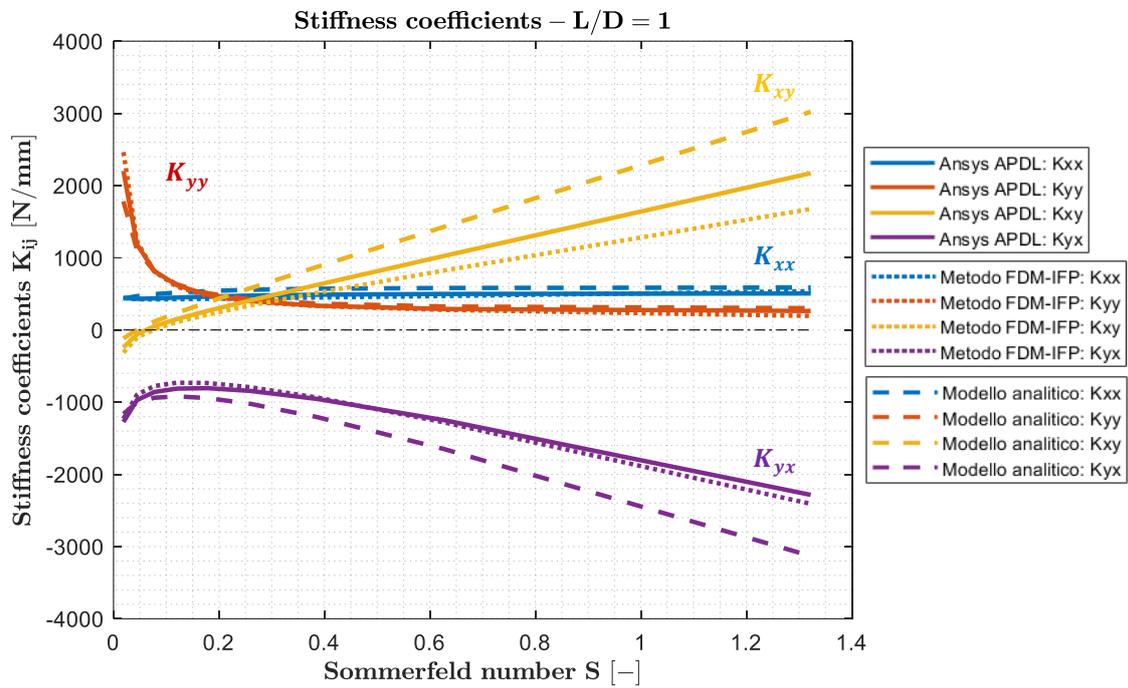


Figura 5.20 Fattori di rigidità funzione del numero di Sommerfeld ($L/D = 1$)

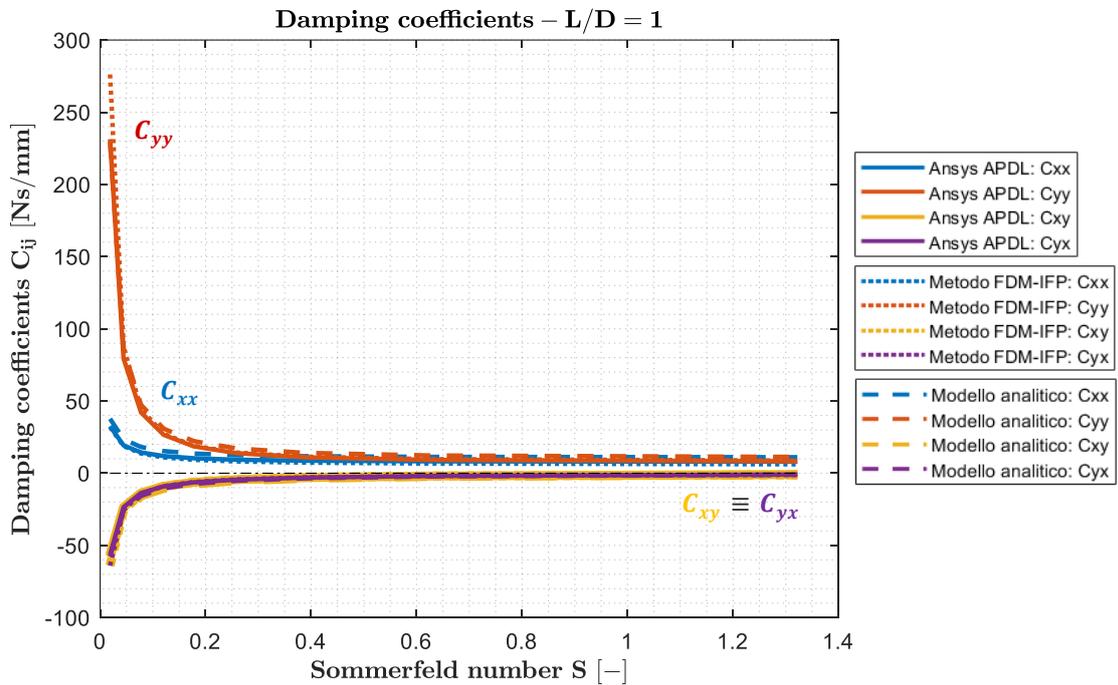


Figura 5.21 Fattori di smorzamento funzione del numero di Sommerfeld ($L/D = 1$)

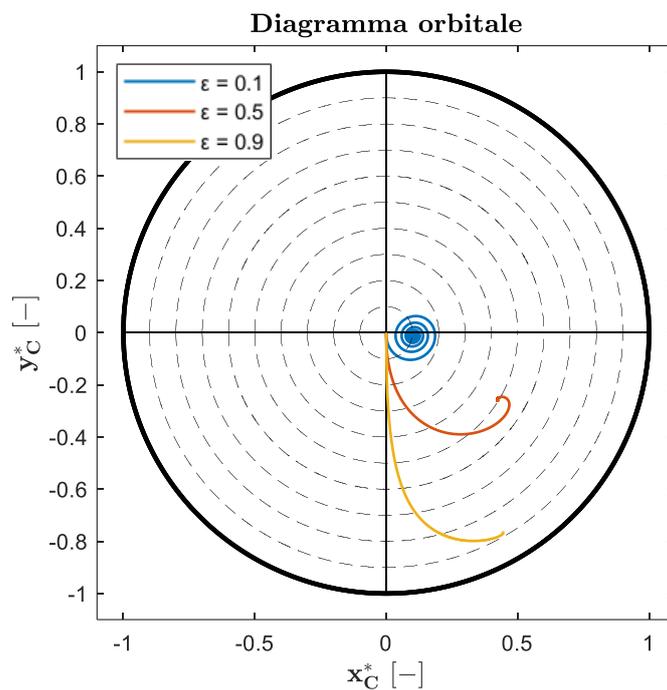


Figura 5.22 Diagrammi orbitali ottenuti da analisi transiente in Ansys APDL per il caso $L/D = 1$

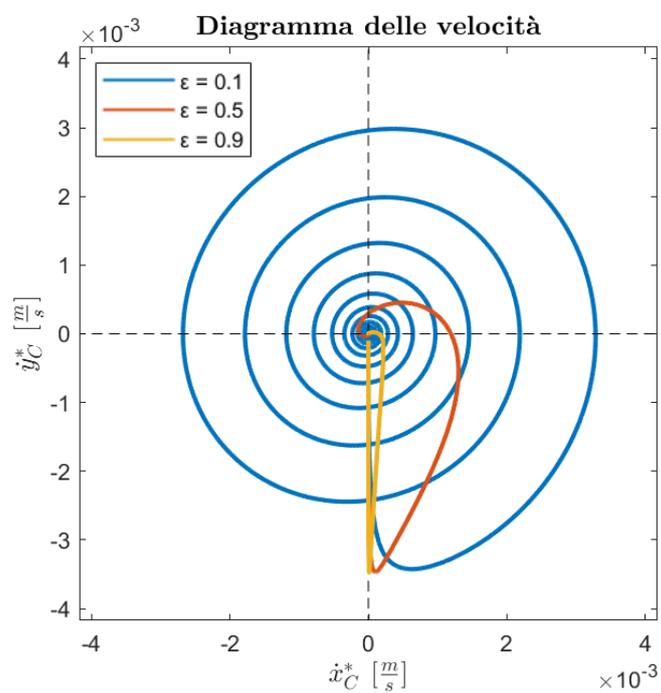


Figura 5.23 Diagrammi di velocità ottenuti da analisi transiente in Ansys APDL per il caso $L/D = 1$

Diagrammi orbitali (x_C, y_C) [m]

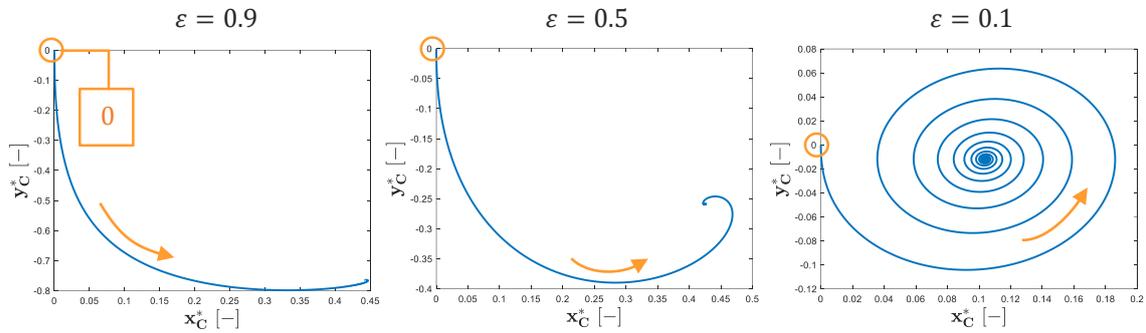


Figura 5.24 Diagrammi orbitali generati mediante analisi transiente in Ansys APDL per il caso $L/D = 1$. Diagrammi non scalati

Diagrammi di velocità (\dot{x}_C, \dot{y}_C) [m/s]

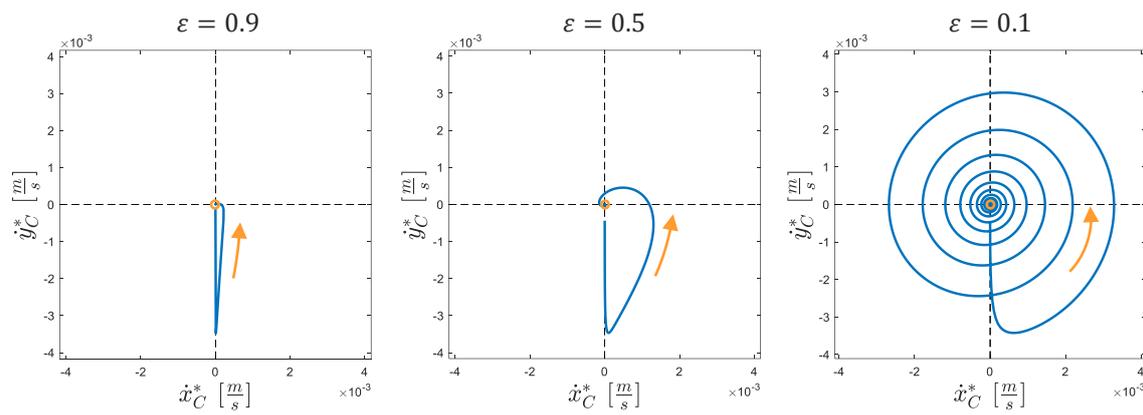


Figura 5.25 Diagrammi di velocità generati mediante analisi transiente in Ansys APDL per il caso $L/D = 1$

Forze generate dal film fluido (t, F_x, F_y) [N]

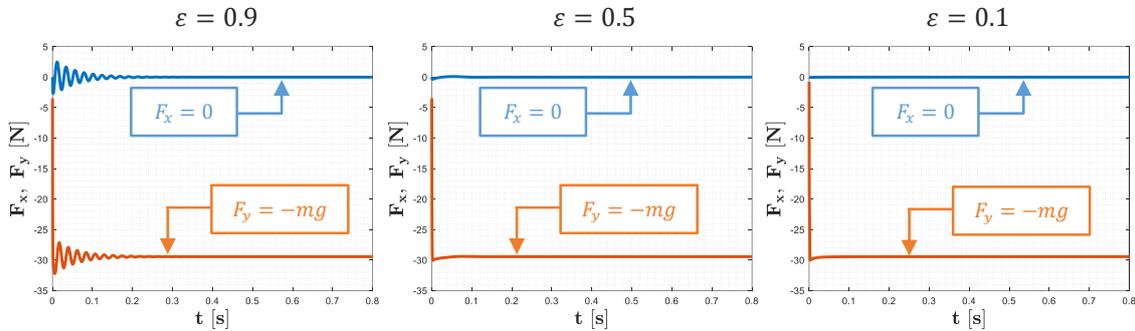


Figura 5.26 Diagrammi di forza rispetto al tempo ottenuti tramite analisi transiente in Ansys APDL per il caso $L/D = 1$. Range di ascissa: $t = [0; 0.8]$ s; range di ordinata: $F_x, F_y = [-35; 5]$ N

Massima pressione del fluido (MFOP: "Maximum of fluid pressure") (t, p_{max}) [Pa]

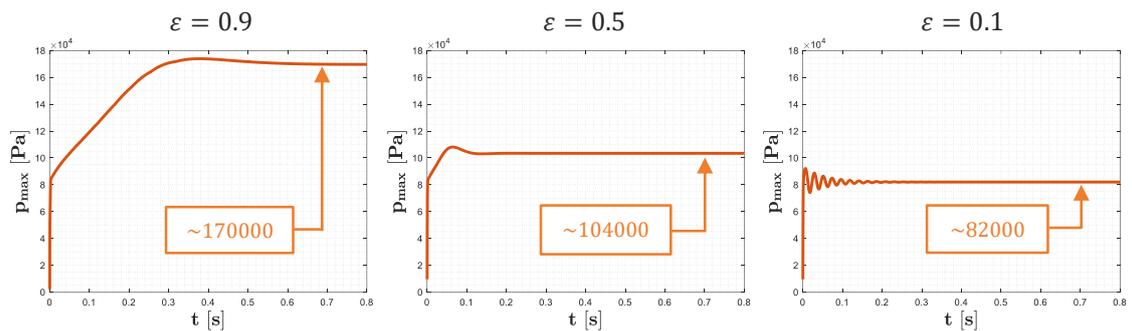


Figura 5.27 Diagrammi della massima pressione del fluido rispetto al tempo ottenuti tramite analisi transiente in Ansys APDL per il caso $L/D = 1$. Range di ascissa: $t = [0; 0.8]$ s; range di ordinata: $p_{max} = [0; 18e4]$ Pa

$L/D = 1$ («finite-length bearing» con ciclo limite)

Diagrammi orbitali (x_C, y_C) [m]

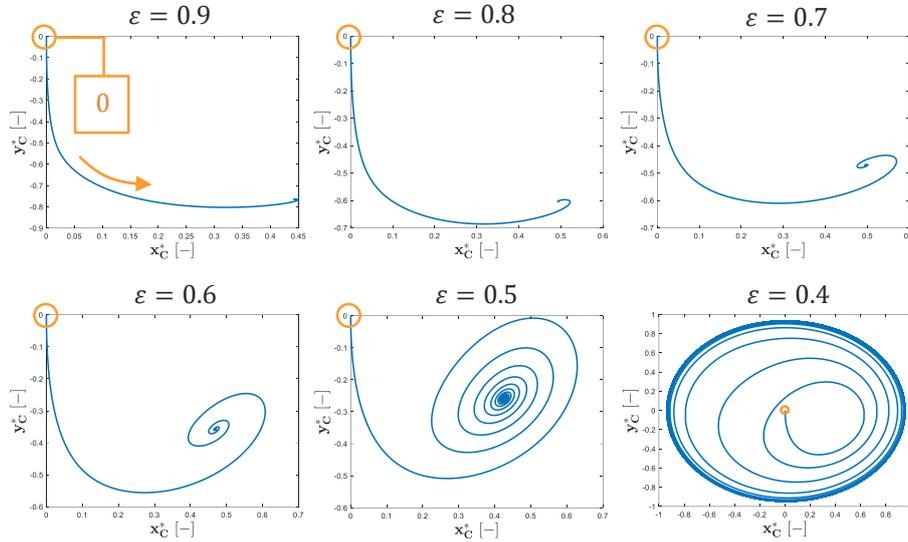


Figura 5.28 Diagrammi orbitali generati mediante analisi transiente in Ansys APDL per il caso $L/D = 1$ (instabile). Diagrammi non scalati. Ascissa e ordinata sono adimensionalizzati

Diagrammi di velocità (\dot{x}_C, \dot{y}_C) [m/s]

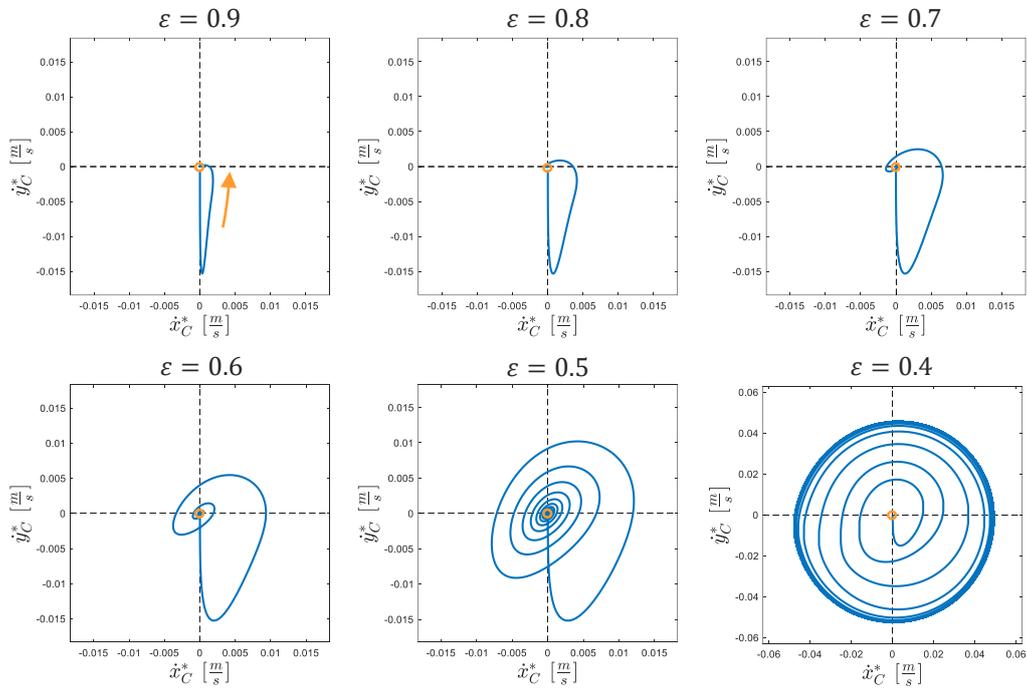


Figura 5.29 Diagrammi di velocità generati mediante analisi transiente in Ansys APDL per il caso $L/D = 1$ (instabile). Ascissa e ordinata sono in [m/s]

Forze generate dal film fluido (t, F_x, F_y) [N]

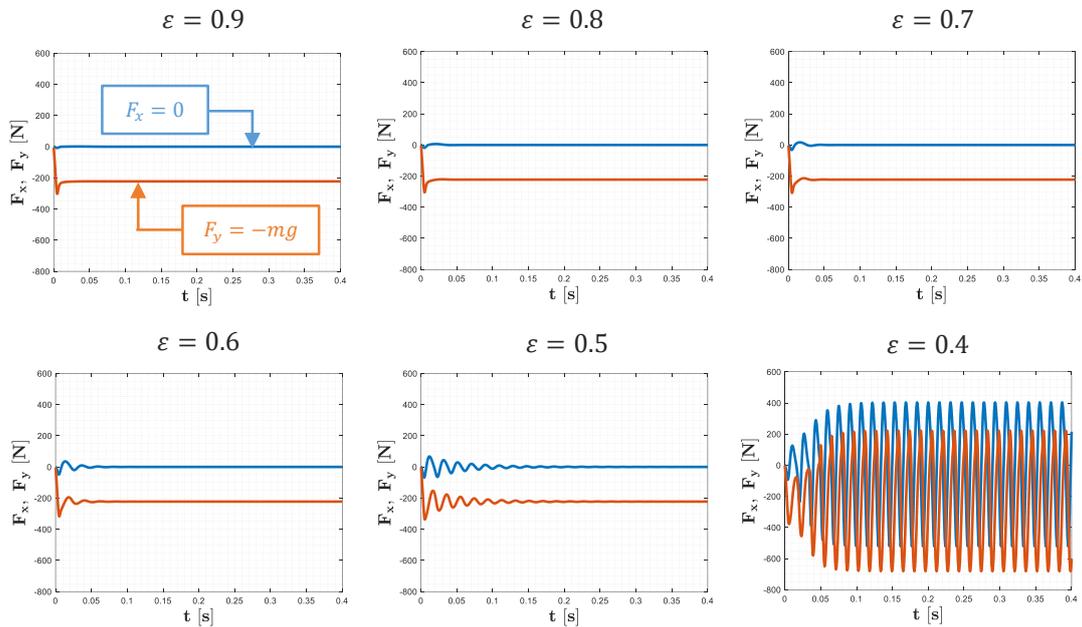


Figura 5.30 Diagrammi di forza rispetto al tempo da analisi transiente in Ansys APDL nel caso $L/D = 1$ (instabile). Range di ascissa: $t = [0; 0.4]$ s; range di ordinata: $F_x, F_y = [-800; 600]$ N

Massima pressione del fluido (MFOP: "Maximum of fluid pressure") (t, p_{max}) [Pa]

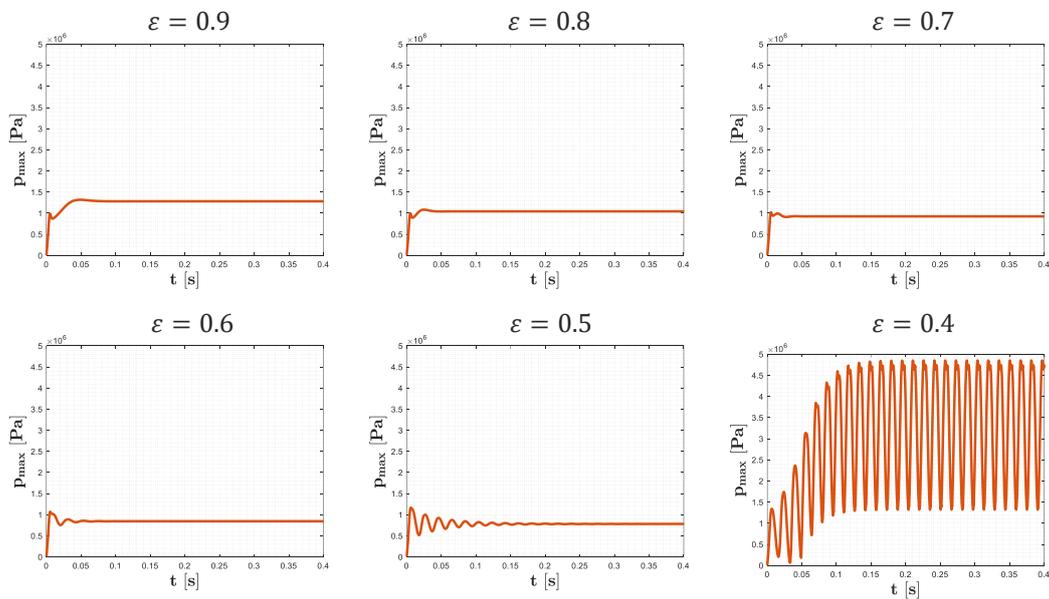


Figura 5.31 Diagrammi della massima pressione del fluido rispetto al tempo da analisi transiente in Ansys APDL nel caso $L/D = 1$ (instabile). Range di ascissa: $t = [0; 0.4]$ s; range di ordinata: $p_{max} = [0; 5e6]$ Pa

Diagrammi di stabilità per cuscinetto corto e infinitamente lungo

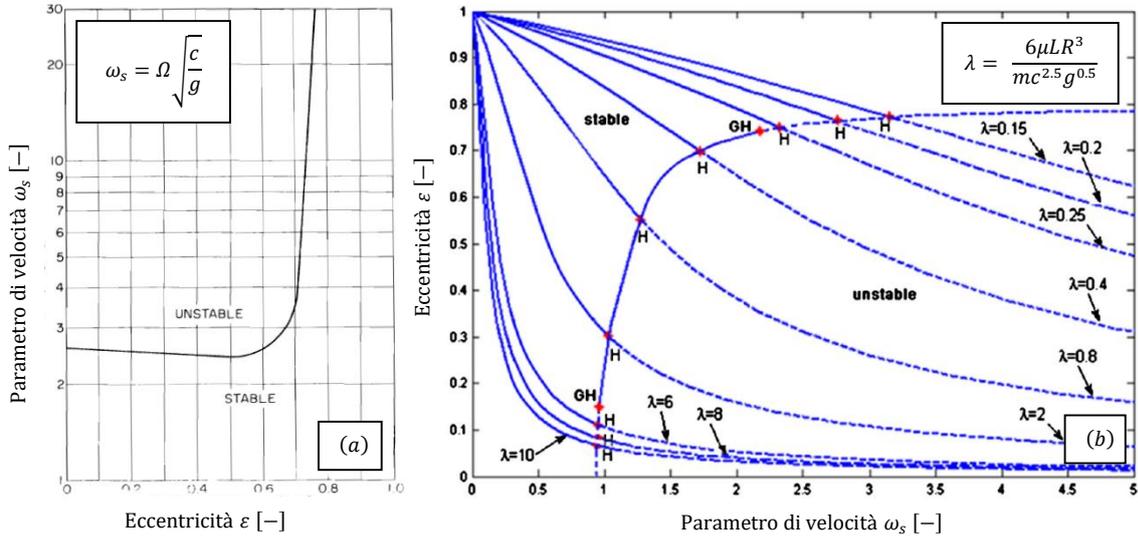


Figura 5.32 Diagrammi di stabilità per cuscinetto corto (a) [Rieditato da [30]] e cuscinetto lungo (b) [Rieditato da [31]]

Dove:

$\omega_s = \Omega \sqrt{\frac{m\dot{c}}{W}} = \Omega \sqrt{\frac{c}{g}}$ è il parametro di velocità o velocità adimensionale del cuscinetto [-];

$\lambda = \frac{6\mu LR^3}{mc^{2.5}g^{0.5}}$ è un parametro caratteristico del cuscinetto [-].

In entrambi i grafici di Figura 5.32 si considerano cuscinetti orizzontali (ad asse orizzontale e carico ortogonale all'asse) e bilanciati (assenza di squilibrio, si considera il solo effetto del peso).

5.2.1 Osservazioni e commenti

Dai diagrammi riportati da Figura 5.10 a Figura 5.32 è possibile trarre alcune conclusioni generali e osservazioni specifiche per ciascun caso.

Si nota innanzitutto che per la totalità dei modelli la fisica risulta generalmente rispettata. In tutti i casi nel range di studio $\varepsilon \in [0,1; 0,9]$, l'eccentricità tende asintoticamente a zero con l'aumentare del numero di Sommerfeld, al contrario dell'angolo di assetto che cresce avvicinandosi ai 90° anch'esso in modo asintotico. Per quanto riguarda le rigidzze i termini diagonali sono all'incirca costanti (K_{xx}) o tendono a portarsi verso valori costanti al crescere di S (K_{yy}), mentre quelli diagonali sembra manifestino un asintoto obliquo: positivo crescente (K_{xy}) e negativo decrescente

(K_{yx}), quest'ultimo speculare al primo rispetto all'ascissa. Degno di nota è il comportamento per $S \rightarrow \infty$: in tali condizioni $K_{xx} = 2K_{yy}$ mentre $K_{xy} = |K_{yx}|$. Tra gli smorzamenti si ricorda che i termini misti sono identici e sempre negativi (C_{xy}, C_{yx}) e insieme con i diagonali (C_{xx}, C_{yy}) (sempre positivi) tendono ciascuno ad asintoto orizzontale per valori di S crescenti. I termini diagonali in particolare tendono allo stesso valore costante.

Seguono le considerazioni relative ai singoli casi oggetto di analisi.

$L/D = 1/8$ («short bearing»)

Le figure dalla 5.10 alla 5.13 ben testimoniano la perfetta coincidenza dei risultati ricavati tramite solutore Ansys APDL e modello analitico in tutto l'intervallo di studio. Un risultato auspicabile essendo le ipotesi e le condizioni al contorno (half-Sommerfeld) totalmente condivise tra i due metodi. Questo mette in luce l'ottima capacità del programma nel modellizzare il comportamento del cuscinetto corto. Fermo restando, tuttavia, che in tali condizioni convenga far ricorso alla trattazione analitica per l'impareggiabile compressione dei tempi che garantisce. Interessante sarebbe stato osservare il contributo della condizione al bordo di Reynolds sui risultati; tuttavia ciò non è risultato al momento possibile in quanto non si è riuscito a reperire dalla fonte [24] le tabelle inerenti al caso di cuscinetto corto ($L/D = 1/8$).

$L/D = 1/2$ («finite-length bearing»)

In questo caso (da Figura 5.14 a Figura 5.17) le differenze dei modelli Ansys e analitico si fanno più marcate rispetto al caso differenze finite (considerato come benchmark). Ansys mostra andamenti di eccentricità e smorzamenti che ben si sposano con i risultati del FDM-IFP, mentre si osserva un andamento leggermente scostato per l'angolo di assetto e un'unica discrepanza sulle rigidità. Per quanto riguarda quest'ultime, mentre i termini diagonali e K_{yx} sono colti con un'ottima accuratezza, una visibile discrepanza è riscontrabile in particolare per il fattore K_{xy} ; divario, questo, che si evidenzia non nell'andamento che rimane del tutto fedele alla fisica del problema, quanto più nei valori che tengono a divergere rispetto al modello differenze finite man mano che le eccentricità si fanno più piccole. Le ragioni di questo offset sono rintracciabili non tanto nella minor accuratezza di modellizzazione del cuscinetto a lunghezza finita operata da Ansys APDL, quanto più nelle diverse condizioni al contorno considerate: la condizione di Reynolds garantisce una maggiore fedeltà alla pratica sperimentale. In ogni caso, in tutti i confronti coi risultati del modello FDM-IFP, laddove vi siano discrepanze, queste sono auspicabilmente dovute alla concorrenza di due effetti qui non districabili a causa della formulazione insita nei metodi presi in esame:

- Il primo, ritenuto di portata inferiore per il solutore Ansys ma preponderante per il caso analitico, è l'effetto del rapporto L/D , che in quest'ultimo contraddice le ipotesi di cuscinetto corto e pertanto il suo utilizzo genera inevitabili discordanze la cui entità è chiaramente osservabile dai grafici presentati;

- Il secondo, maggiormente evidente per il caso Ansys, è la differente condizione al contorno: Half-Sommerfeld per Ansys e metodo analitico e Reynolds per le differenze finite.

Un presumibile appianamento delle differenze e risultati potenzialmente più accurati li si può raggiungere ad esempio ricorrendo a un modello 3D con elementi FLUID218 (proposto dalla [29]), anche se al prezzo di una complicatezza e un costo computazionale decisamente maggiori.

L/D = 1 («finite-length bearing»)

In questo caso (da Figura 5.18 a Figura 5.21) vengono rimarcate e acuite le differenze riscontrate per il caso $L/D = 1/2$ senza ulteriori considerazioni particolari per il modello Ansys. Questo mette in luce come la differenza nella formulazione insieme con le condizioni al contorno concorrono nell'inasprire gli scostamenti presenti. Nonostante ciò, gli esiti forniti da Ansys risultano in generale particolarmente buoni e quindi ben accettabili; lo stesso non si può dire del metodo analitico che al di fuori dal suo campo di validità porta a risultati alquanto erronei. Un aspetto interessante è rappresentato dai diagrammi orbitali (Figura 5.22 e Figura 5.24) i quali mostrano la condizione irrealistica di partenza della simulazione transiente (albero centrato in quiete) e l'evoluzione di quest'ultima fino all'assestamento in una condizione di equilibrio dalla quale si ricavano le informazioni in merito all'eccentricità, all'angolo di assetto e così anche gli 8 parametri dinamici con la successiva analisi statica. I diagrammi di velocità (Figura 5.23 e Figura 5.25) testimoniano che al raggiungimento del punto di equilibrio stazionario il centro dell'albero è fermo e l'albero ruota attorno ad esso. E così i grafici di forza (Figura 5.26) mostrano una forza orizzontale che si annulla mentre quella verticale bilancia in egual misura il carico gravante sul cuscinetto, come previsto dalla fisica del problema. Man mano che la velocità cresce, il numero di Sommerfeld aumenta portando a un punto di equilibrio tendente verso la posizione orizzontale (angoli di assetto maggiori) e una traiettoria sempre più spiraliforme. Questo induce anche un comportamento più sottosmorzato, con un incremento nel numero di oscillazioni in termini di forza e pressione (Figura 5.27).

L/D = 1 («finite-length bearing» con ciclo limite)

Un particolare aspetto rimarcabile all'interno di questa analisi riguarda l'insorgere di un ciclo limite in particolari condizioni di velocità dell'albero e di carico applicato. Un ciclo limite è l'esito di un particolare fenomeno di instabilità dovuto alla non linearità del problema. Il centro dell'albero non rimane fisso in un punto di equilibrio, come dovrebbe verificarsi secondo l'equazione di Reynolds nel moto stazionario, ma orbita attorno ad esso con una velocità ω all'incirca metà di quella di rotazione Ω dell'albero secondo un fenomeno che prende il nome di "oil whirl" oppure "oil whip". La discussione sul significato di tali termini è riportata in fondo alla presente sezione. Dalla Figura 5.28 alla Figura 5.31 è possibile osservare la graduale progressione verso le condizioni instabili fino all'effettivo raggiungimento per $\varepsilon = 0,4$: alla convergenza verso un'orbita limite riscontrabile nei diagrammi orbitali (Figura 5.28) corrisponde un andamento ciclico della velocità (Figura 5.29), mentre i valori di forza oscillano limitatamente attorno ai valori di equilibrio (Figura 5.30), e lo stesso vale per la pressione (Figura 5.31). Vi è una

soglia di stabilità che caratterizza ciascun valore di eccentricità e varia in base alla tipologia e rapporto L/D di cuscinetto. Essa è funzione del parametro adimensionale di velocità ω_s già citato nei grafici di Figura 5.32 in cui è riportato il relativo andamento. Si osserva una curva simile nella forma per quanto riguarda il confronto cuscinetto corto-infinitamente lungo. Il cuscinetto lungo presenta una soglia generalmente più bassa in termini di ω_s . Entrambi i casi mostrano una regione di stabilità di gran lunga più ampia per $\varepsilon > 0,8$ mentre per eccentricità da 0 a 0,7 la soglia si riduce drasticamente fino a valori all'incirca pari a 2,7 per il cuscinetto corto e 0,9 per quello infinitamente lungo. La condizione risulta chiaramente più stringente per le basse eccentricità.

I fenomeni di "oil whirl" e "oil whip" nominati a inizio sezione sono manifestazioni caratteristiche della dinamica del cuscinetto lubrificato di cui il testo [4] fornisce un'efficace sintesi. Il primo si configura come un moto di precessione a velocità $\omega \approx \Omega/2$ che si sovrappone agli altri moti di precessione. Esso non rappresenta un particolare problema in quanto è di ampiezza tipicamente del tutto limitata. La situazione tende a diventare critica qualora si raggiungano velocità di rotazione $\Omega \approx 2\Omega_{crit}$. Queste condizioni determinano l'insorgenza dell'"oil whip" la cui precessione si fa particolarmente violenta fino a divenire anche distruttiva. Essa si presenta ad una frequenza all'incirca indipendente dalla velocità ed è caratterizzata da un valore corrispondente alla prima frequenza naturale del rotore alla data velocità. Il diagramma di Campbell esemplificativo di Figura 5.33 mostra in dettaglio la retta con pendenza pari a $\approx \Omega/2$ relativa all'"oil whirl" (al di sotto della quale si ha instabilità) e il punto di insorgenza dell'"oil whip" corrispondente all'intersezione tra la curva dell'"oil whirl" e il ramo più in basso nel diagramma. Queste considerazioni valgono fintanto che i cuscinetti sono più rigidi del rotore a tal punto da non impattare in modo consistente sulle frequenze naturali dello stesso. Se ciò non accade il diagramma di Campbell si modifica in modo sostanziale e la loro anisotropia rende poco rilevante distinguere tra modi forward e backward.

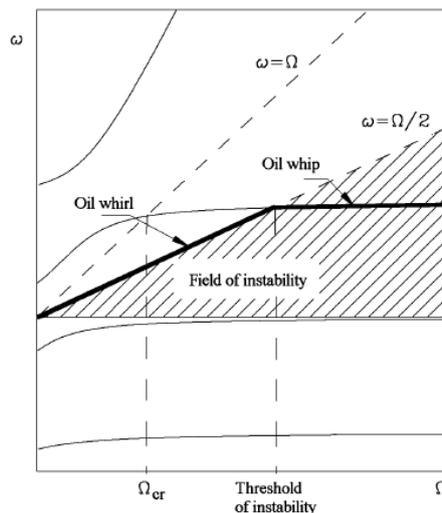


Figura 5.33 Diagramma di Campbell dimostrativo dei fenomeni di "oil whip" e "oil whirl" [4]

5.3 Applicazione al rotore della pompa MS40

Una volta compreso il margine di affidabilità del solutore Ansys APDL rispetto agli altri metodi sotto confronto, si è proceduto alla sua applicazione al modello della pompa rotativa a palette. Tale solutore è stato selezionato in quanto risulta relativamente semplice, si integra bene con l'analisi "Modal" condotta con Ansys Workbench e soprattutto presenta rispetto all'approccio FDM-IFP (di cui si hanno noti solo i risultati tabulati per le proporzioni $L/D \in \{0,5, 0,75, 1, 1,25, 1,5\}$ in un range $\varepsilon \in [0,1; 0,9]$) il superamento di due problematiche:

1. La prima consiste nei dubbi relativi alla modalità di interpolazione tra i rapporti $L/D = 0,5, 0,75$ e 1 per ottenere i risultati relativi casi $L/D = 0,888$ e $L/D = 0,65$ corrispondenti rispettivamente al cuscinetto 1 e 2 in esame;
2. La seconda, ancor più seria, riguarda l'inaffidabilità dei risultati derivanti dall'estrapolazione degli andamenti per valori di eccentricità al di fuori del range tabulato. Questo problema investe in particolare il cuscinetto meno caricato, in quanto, essendo il carico particolarmente piccolo, il punto di lavoro si porta in zone del diagramma in cui il numero di Sommerfeld S tende a infinito, mentre $\varepsilon \rightarrow 0$ e $\phi \rightarrow 90^\circ$, non previste dalle tabelle fornite.

Previa discussione sulla procedura è doveroso delineare le ipotesi semplificative rispetto alle quali l'analisi è stata condotta. Questo mette in luce gli aspetti per i quali alcune assunzioni risultano fondate mentre altre costituiscono solo un "livello zero" della trattazione, pertanto non risultano realistiche o precise ma richiedono un'ulteriore approfondimento che può diventare oggetto specifico di una successiva attività di tesi.

Tra le assunzioni le più rilevanti sono elencate di seguito:

- Si considera il modello del Caso 4 (senza supporti rigidi);
- Rotore con proprietà assialsimmetriche equivalenti;
- 2 cuscinetti cilindrici, piani, completi, lunghezza finita, non scanalati, non lobati, senza fori di adduzione olio;
- Carico concentrato in mezzeria delle boccole solidali all'albero;
- Carico applicato sui cuscinetti: si considera solo il peso del corpo rotante (forza verticale statica e costante) e si trascurano le componenti di reazione vincolare non verticali;
- Il gioco radiale è calcolato come valor medio tra la condizione di minimo e massimo gioco tra i raggi di boccola fissa e mobile del cuscinetto.
- Vengono considerate 3 velocità nel range operativo: $\Omega = 20 - 27 - 30 \text{ Hz}$;
- Condizioni stazionarie;
- Linearità (campo dei piccoli spostamenti);
- Olio: fluido considerato incomprimibile, isoviscoso, newtoniano, flusso isoterma e regime laminare;

- Incremento di temperatura dell'olio nel cuscinetto assunto (in prima approssimazione) pari a 5°C rispetto al valore a serbatoio noto sperimentalmente in specifiche condizioni di funzionamento.

Oltre a queste si aggiungono tutte le ipotesi alla base dell'equazione di Reynolds citata così come quelle relative al solutore Ansys APDL non riportate in elenco.

Per quanto riguarda la simmetria, le proprietà dello statore non possono non essere considerate asimmetriche a causa dell'anisotropia di rigidità e smorzamenti. Il rotore della pompa rotativa a palette dovrebbe essere ritenuto non assialsimmetrico a causa della conformazione delle cave. Tuttavia una tale condizione, per un rotore soggetto a un carico statico, "produrrebbe una precessione ellittica incompatibile con l'assunzione dell'esistenza di un punto di equilibrio stazionario. Se il rotore non è isotropo, deve essere sostituito da un rotore simmetrico con proprietà medie per il calcolo del punto di equilibrio statico" [2]. Questo spiega il motivo dell'inevitabile ricorso ad un modello assialsimmetrico equivalente, il che non è dissimile dalle caratteristiche prese in esame nei casi 3 e 4 del capitolo "Il modello FE della pompa MS40", le quali sono le uniche contemplabili dall'ambiente "Modal" di Ansys Workbench.

Si considerano unicamente 3 velocità per la realizzazione dei diagrammi di Campbell a causa della limitatezza di informazioni disponibili in termini di temperatura, le quali sono fondamentali per la corretta identificazione della viscosità media da inserire nel codice del solutore e per il calcolo del numero di Sommerfeld. La viscosità infatti è particolarmente influenzata dalla temperatura al punto che una stima erronea di quest'ultima può compromettere l'affidabilità dei risultati. Questo spiega la necessità di ricorrere a modelli termici o di lubrificazione termoidrodinamica accurati per la determinazione della temperatura del meato d'olio durante il funzionamento della macchina. Bisogna ammettere, tuttavia, che laddove il carico è piccolo e le velocità basse, le temperature sono stimabili in modo relativamente semplice in quanto il calore dissipato per mezzo dell'attrito è trascurabile. Di qui la scelta temporanea di operare secondo l'assunzione riportata in elenco, fermo restando che la questione necessita un approfondimento dedicato che questa attività non prevede. A titolo di esempio, per un'idea di base, si possono citare i due metodi proposti dal testo [23]: il primo è fondato essenzialmente su un bilancio di calore nel meato d'olio in condizioni di equilibrio termico (pagg. 6-9), mentre il secondo è una tecnica semplificata per la stima della temperatura non tenendo conto del calore trasferito dalla sede del cuscinetto alle zone limitrofe (pagg. 248-249). Data la non disponibilità di alcuni dei termini necessari per eseguire una stima affidabile della temperatura tali procedure sono state momentaneamente accantonate nell'attesa di disporre in un futuro dei dati mancanti.

La procedura che porta all'ottenimento dei diagrammi di Campbell e le relative forme modali prevede l'esecuzione in serie dei seguenti passaggi:

1. Identificazione della massa (o peso) del rotore e della quota parte di essa gravante su ciascuno dei due cuscinetti: ciò può essere realizzato mediante analisi "Static Structural" in Ansys Workbench e verificata con semplici calcoli analitici.
2. Per ciascun cuscinetto: scelta della velocità di analisi e quindi della condizione operativa; identificazione della viscosità nota la temperatura per il punto di funzionamento scelto.
3. Introduzione dei parametri geometrici del cuscinetto, velocità, viscosità e quota parte di massa insieme con il numero di rotazioni e il passo di discretizzazione temporale nel codice Ansys APDL dell'analisi transiente ed esecuzione della stessa al fine di ottenere la posizione di equilibrio stazionario.
4. Una volta accertati del valore accettabilmente trascurabile delle componenti di velocità (\dot{x}_c, \dot{y}_c) e ottenute le coordinate (x_c, y_c) del punto di equilibrio, si inseriscono questi quattro termini nel codice dell'analisi statica (insieme alla geometria del cuscinetto, la velocità, viscosità dell'olio). Definito il passo angolare di integrazione e la perturbazione adimensionale per calcolare gli 8 coefficienti linearizzati, si esegue la simulazione.
5. Una volta ottenuti i 4 coefficienti di rigidezza e i 4 di smorzamento e verificato che il sistema di riferimento utilizzato per il loro calcolo sia concorde a quello dell'analisi modale, è possibile inserire gli 8 termini come valori tabulati nella definizione del relativo cuscinetto dell'ambiente "Modal" di Ansys Workbench. Essi costituiranno la riga della tabella corrispondente al valore di velocità di rotazione considerato. Il modello di riferimento è quello del rotore completo relativo al caso 4 del quale sono stati rimossi i supporti rigidi. Tutto il resto rimane inalterato.
6. Per ciascuno dei due cuscinetti: si ripetono i punti 2-5 per i valori di velocità di interesse, fino a ottenere una tabella completa in cui a ogni riga è specificato il valore delle rigidezze e smorzamenti relativi alla velocità angolare riportata nella prima colonna.
7. Si modificano le velocità di rotazione "Rotational Velocity" in modo che coincidano con quelle messe nella tabella di ciascun cuscinetto.
8. Si imposta il solutore in "Full Damped" e si esegue la simulazione modale.

5.3.1 Risultati

Vengono di seguito mostrati gli esiti dell'applicazione della procedura esposta nel precedente paragrafo. Si prende a riferimento una particolare condizione di test ("test point"), in cui si distinguono 3 velocità (20-27-30 Hz), per le quali sono noti i valori di temperatura dell'olio nel serbatoio. Il test point considerato è una condizione limite caratterizzata dalle pressioni e portate massime nonché dalle maggiori temperature dell'olio nel serbatoio. I parametri di maggior rilievo del test point in esame sono oggetto della Tabella 5.2. In Tabella 5.3 e Tabella 5.4 per ciascuno dei due cuscinetti sono riportati alcuni parametri di ingresso significativi, l'eccentricità e l'angolo di assetto così come i coefficienti di rigidezza e smorzamento. Il cuscinetto 1 quello più esterno (più scarico) mentre il 2 (il più caricato) è interposto tra corpo pompa e motore. Viene presentato il diagramma di Campbell esito dell'analisi modale (a confronto con il rotore del caso 4, con supporti rigidi), il diagramma di stabilità e le forme modali più significative.

Frequenza di settaggio	Frequenza di rotazione	Potenza	Temperatura olio (al serbatoio)	Pressione	Portata
$f_{set} [Hz]$	$\Omega [Hz]$	$P [W]$	$T_{olio} [^{\circ}C]$	$p [Pa]$	$Q [SCCM]^*$
40	20	622	74,0	1860	10000
54	27	771	79,4	1450	10000
60	30	873	81,3	1350	10000

* $SCCM = cm^3/min$

Tabella 5.2 Tabella del test points considerato

Cuscinetto 1

Dati olio		Parametri geometrici						Carico		
$\rho [kg/m^3]$		$L/D [mm]$						$c [mm]$		$F_y [N]$
892,2		0,888						2,87e-2		4,67
$\Omega [Hz]$	$T_{olio} [^{\circ}C]$	$T_{film} [^{\circ}C]$	$v [cSt]$	$v [m^2/s]$	$\mu [kg/(m \cdot s)]$	$\omega_s [-]$	$S [-]$	$\varepsilon [-]$	$\phi [^{\circ}]$	
20	74	79	25	2,5e-5	0,0207	0,22	9,31	0,018	88,8	
27	79,4	84,4	22	2,2e-5	0,0182	0,29	11,07	0,015	89,0	
30	81,3	86,3	21	2,1e-5	0,0174	0,32	11,74	0,014	89,1	
$\Omega [Hz]$	$N [rpm]$	$K_{xx} [N/mm]$	$K_{yy} [N/mm]$	$K_{xy} [N/mm]$	$K_{yx} [N/mm]$	$C_{xx} [N \cdot s/mm]$	$C_{yy} [N \cdot s/mm]$	$C_{xy} [N \cdot s/mm]$	$C_{yx} [N \cdot s/mm]$	
20	1200	365	183	8978	-8993	142,9	143,1	-2,9	-2,9	
27	1620	362	181	10657	-10669	125,7	125,8	-2,1	-2,1	
30	1800	367	183	11321	-11332	120,1	120,2	-1,9	-1,9	

Tabella 5.3 Tabella di sintesi relativa al cuscinetto 1

Cuscinetto 2

Dati olio		Parametri geometrici						Carico		
$\rho [kg/m^3]$		$L/D [mm]$						$c [mm]$		$F_y [N]$
892,2		0,65						2,87e-2		71,79
$\Omega [Hz]$	$T_{olio} [^{\circ}C]$	$T_{film} [^{\circ}C]$	$v [cSt]$	$v [m^2/s]$	$\mu [kg/(m \cdot s)]$	$\omega_s [-]$	$S [-]$	$\varepsilon [-]$	$\phi [^{\circ}]$	
20	74	79	25	2,5e-5	0,0207	0,22	0,92	0,264	72,1	
27	79,4	84,4	22	2,2e-5	0,0182	0,29	1,09	0,231	74,4	
30	81,3	86,3	21	2,1e-5	0,0174	0,32	1,16	0,219	75,2	
$\Omega [Hz]$	$N [rpm]$	$K_{xx} [N/mm]$	$K_{yy} [N/mm]$	$K_{xy} [N/mm]$	$K_{yx} [N/mm]$	$C_{xx} [N \cdot s/mm]$	$C_{yy} [N \cdot s/mm]$	$C_{xy} [N \cdot s/mm]$	$C_{yx} [N \cdot s/mm]$	
20	1200	5690	3745	8091	-11616	141,0	172,6	-45,5	-45,5	
27	1620	5740	3550	9642	-12721	121,6	142,0	-33,9	-34,0	
30	1800	5755	3492	10254	-13184	115,6	133,1	-30,6	-30,6	

Tabella 5.4 Tabella di sintesi relativa al cuscinetto 2

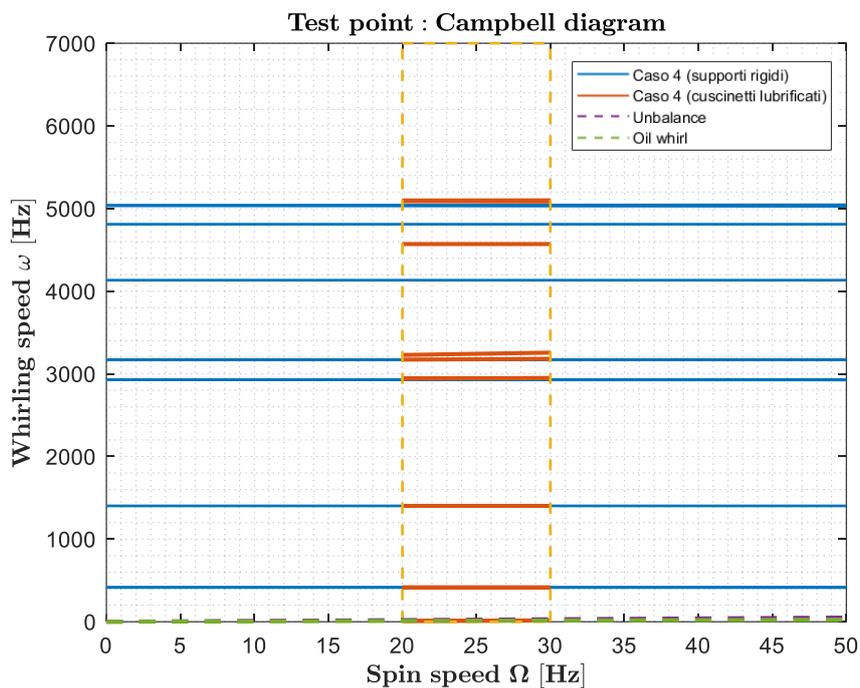


Figura 5.34 Diagramma di Campbell delle prime 4 velocità FW e BW (modi torsionali, assiali e accoppiati interposti): Caso 4 (Ansys 3D) con supporti rigidi e Caso 4 (Ansys 3D) con cuscinetti lubrificati a confronto

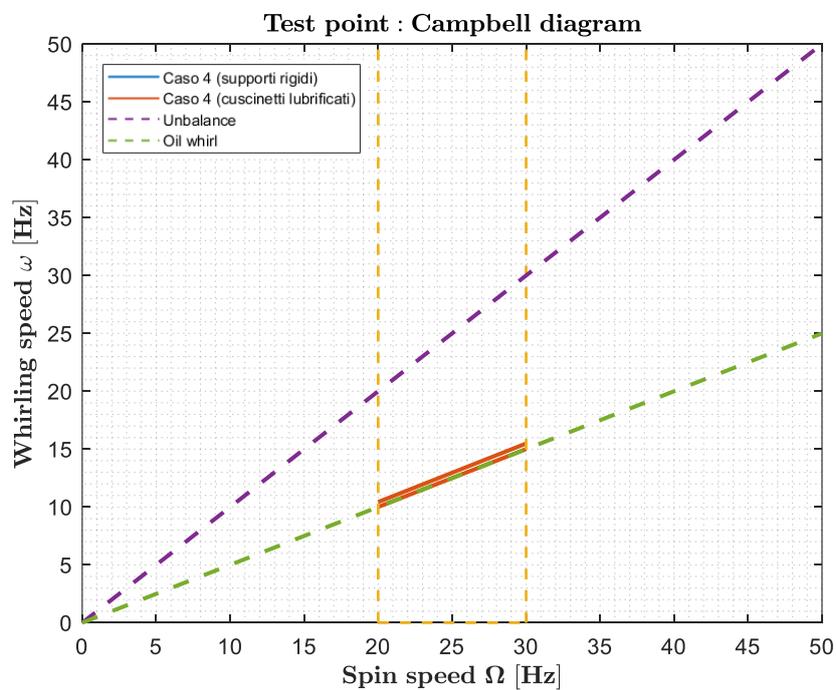


Figura 5.35 Diagramma di Campbell del Caso 4 (Ansys 3D) con supporti rigidi e Caso 4 (Ansys 3D) con cuscinetti lubrificati: dettaglio della regione $\omega = [0; 50]$ Hz

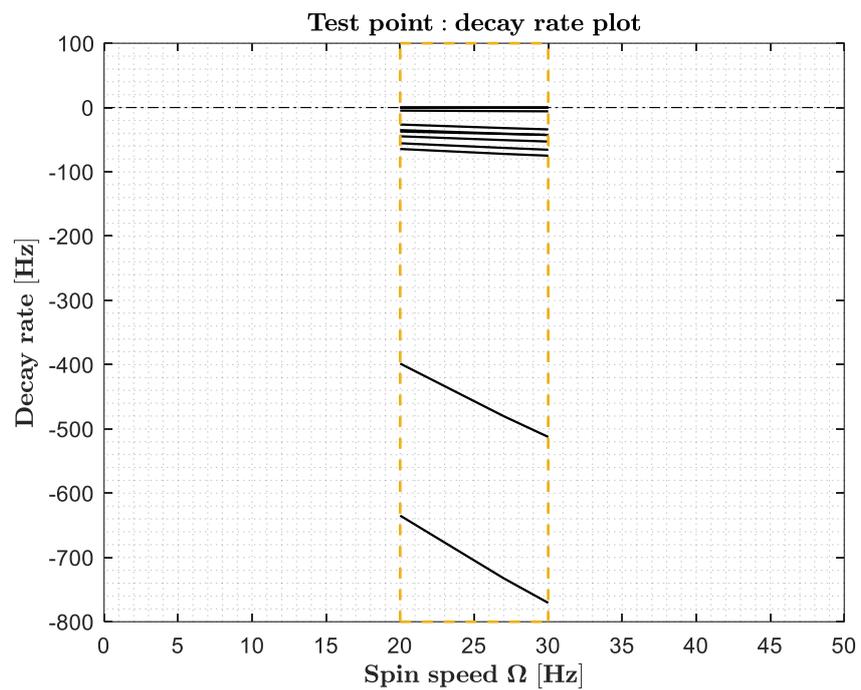


Figura 5.36 Diagramma di stabilità (Caso 4, con cuscinetti lubrificati)

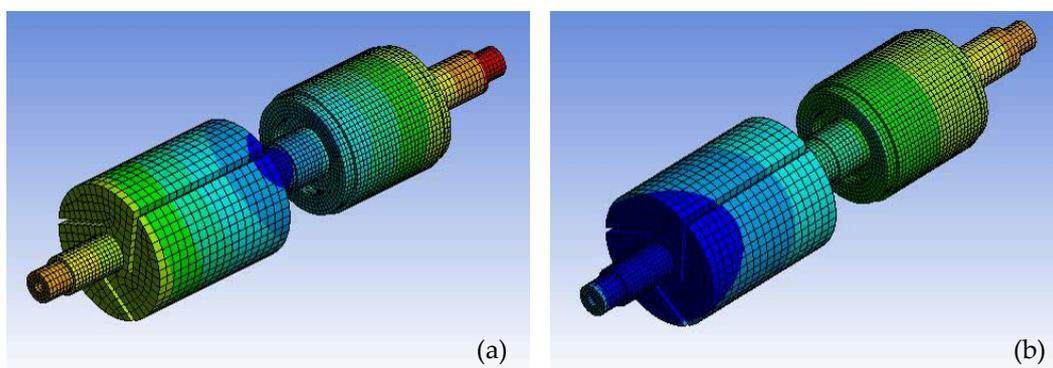


Figura 5.37 Due forme modali caratteristiche della presenza dei cuscinetti lubrificati: Modo conico attorno al cuscinetto 2 (4° modo FW): 10 ÷ 15 Hz (a); Modo conico attorno al cuscinetto 1 (5° modo FW): 10 ÷ 15 Hz (b)

5.3.2 Commenti

Ciò che è osservabile dai diagrammi di Campbell di Figura 5.34 è la sostanziale scarsa influenza dei cuscinetti idrodinamici sulle frequenze proprie relative al caso con supporti rigidi. Vi sono in ogni caso alcune differenze che coinvolgono le frequenze più alte. E' ben presumibile che questo sia indicazione del fatto che le rigidità introdotte dal cuscinetto siano maggiori rispetto a quelle dell'albero. L'aspetto più caratteristico in merito alla presenza di questi vincoli lo si nota dal dettaglio del diagramma di Campbell (Figura 5.35) che mostra gli andamenti nella fascia $\omega = [0; 50] \text{ Hz}$. In tale regione si evidenziano due nuovi modi di precessione prima assenti, la cui forma modale è presentata in Figura 5.37. Essi non sono altro che i modi conici attorno a ciascun cuscinetto, la cui curva della frequenza segue l'andamento $\omega \approx \Omega/2$. Questi risultano allineati alla retta dell'"oil whirl" e sono dunque una manifestazione di questo fenomeno. L'esempio 27.1 tratto dal testo [4] (pagg. 705-706) costituisce un buon riferimento per un'analisi comparativa e mostra un risultato simile a quello ottenuto. Questo porta, almeno in prima battuta, alla conferma che la fisica del problema sia rispettata.

Un altro risultato rilevante derivante dall'introduzione degli smorzamenti è sicuramente il diagramma di stabilità ("Decay rate plot") di Figura 5.36. Per la convenzione di notazione assunta da Ansys Workbench le velocità di precessione costituiscono la parte immaginaria degli autovalori dell'autoproblema, mentre la parte reale è rappresentativa dei tassi di stabilità ("decay rate"). Per valori negativi di quest'ultimi si ha una stabilità del sistema nel punto di funzionamento considerato; laddove invece si abbiano parti reali positive la struttura risulta instabile in quella regione operativa.

Nel caso in esame, per i modi osservati (si escludono i moti rigidi), non si riscontrano instabilità e le curve tendono a diventare sempre più negative nel range di studio, verso condizioni maggiormente stabili. Questo tuttavia non nega la possibile insorgenza di instabilità per velocità maggiori, ma tale analisi esula dalle finalità dell'attività e sarebbe di scarso interesse rispetto alle condizioni di utilizzo della pompa.

C'è tuttavia un aspetto da rimarcare. Se le forze statiche agenti sul cuscinetto sono particolarmente piccole, come nel caso del cuscinetto 1, l'approccio lineare potrebbe risultare troppo approssimativo. In tali condizioni l'albero tende a portarsi su un ciclo limite ottenibile solo con un'analisi non lineare. Ciò comporta l'integrazione numerica delle equazioni del moto.

Altri fattori che potrebbero influenzare le condizioni operative del cuscinetto sono:

- il contributo apportato dallo sbilanciamento;
- il diagramma di pressioni derivante dalla compressione del gas che si delinea sulle palette e corpo pompa.

Conclusioni

Il lavoro di tesi svolto verte nella caratterizzazione dinamica del rotore della pompa rotativa a palette MS40+, prodotto storico della azienda Agilent Technologies, la pompa MS40+, atto alla produzione del vuoto. Caratterizzazione che non può prescindere dal ricorso all'analisi FE per la discretizzazione dell'assieme e la conseguente analisi modale per l'identificazione di forme modali, andamenti delle frequenze proprie e dei tassi di stabilità ("decay rates") con la velocità di rotazione, fattori di partecipazione modale. A tal fine si è rivelato essenziale acquisire confidenza con la teoria agli elementi finiti e le tecniche presenti in letteratura per la loro implementazione, con particolare attenzione agli elementi 1D e 3D. Quattro delle tecniche studiate sono state applicate ad un rotore a 3 dischi su supporti rigidi, mostrando un'ottima corrispondenza negli andamenti dei diagrammi di Campbell sia per quanto riguarda i modi torsionali che flessionali. Tra questi il modello monodimensionale realizzato con software Matlab e il tridimensionale ottenuto con Ansys Workbench sono quelli che meglio ottemperano alle esigenze di rapidità in termini di costo computazionale congiuntamente con una adeguata affidabilità dei risultati. Pertanto si è proceduto ad applicare entrambi al caso del rotore pieno semplificato della pompa, analisi da cui è emersa la sostanziale indipendenza delle frequenze dall'effetto giroscopico (così come dalla velocità) e l'assenza di velocità critiche anche ben oltre il range operativo della pompa, il che porta a concludere che in prima battuta un'analisi statica è sufficiente per cogliere gli aspetti essenziali della dinamica del rotore. Inoltre il non soddisfacimento dell'ipotesi di Timoshenko per cui le sezioni si mantengono piane a causa del brusco intaglio in corrispondenza del cilindro pompante ha portato al ricorso alla "regola a 45°", un efficace metodo empirico che ha appianato le differenze prima presenti tra modello 3D e 1D, elevando quest'ultimo ai livelli del primo in termini di accuratezza ma con un dispendio di risorse in termini di tempo macchina particolarmente ridotte. Il modello monodimensionale si rivela pertanto estremamente utile per una progettazione preliminare di massima, ma deve essere abbandonato qualora insorgano particolarità geometriche che da questo non possono essere contemplate. Ne è un caso la considerazione delle cave sul rotore, il quale ha necessitato del ricorso a un modello 3D assialsimmetrico equivalente. Se l'introduzione dei fori assiali sull'albero non ha modificato gli andamenti in modo considerabilmente sostanziale, lo stesso non si può dire della presenza delle cave e del motore i quali portano a una riduzione variabile delle frequenze: particolarmente importante sui modi che coinvolgono il cilindro pompante per quanto riguarda l'aggiunta delle cave, mentre la presenza del motore in coda all'albero ha influenzato pesantemente i modi che coinvolgono il moto di tale tratto. Entrambi comportano l'ingresso di modi torsionali, assiali e misti nel campo di frequenze sondato; il motore in particolare determina anche una redistribuzione dei modi. In ogni caso rimangono valide le considerazioni fatte in merito alle velocità critiche e al contributo giroscopico. A livello statico il bilanciamento in peso tra motore e cilindro pompante fa sì che il baricentro del rotore sia così prossimo ad uno dei due cuscinetti al punto che il restante risulta scarico: questo comporta una diversa condizione

operativa tra i due cuscinetti e apre le questioni riguardanti l'accuratezza del modello oleodinamico nel campo di carichi al limite nulli. L'analisi dei cuscinetti oleodinamici in sostituzione dei supporti rigidi delle casistiche precedenti mostra la buona versatilità dell'elemento bidimensionale COMBI214 di Ansys nel modellizzare cuscinetti a lunghezza finita, permettendo il calcolo di eccentricità e angolo di assetto dell'albero nel punto di equilibrio stazionario nonché i coefficienti di rigidità e smorzamento. La procedura di calcolo proposta da Ansys APDL garantisce un minimo dispendio in termini di complicatezza del codice, a patto di accettare una condizione al bordo meno realistica rispetto a quella di Reynolds con conseguenti effetti sui risultati le cui differenze in termini di rigidità e smorzamenti tuttavia non costituiscono oggetto di preoccupazione per i cuscinetti delle proporzioni studiate. L'analisi modale per il test point considerato con le matrici di rigidità e smorzamento ottenute tramite Ansys APDL non mostra una sostanziale differenza in termini di frequenze flessionali rispetto ai cuscinetti rigidi, prova del fatto che le rigidità dei cuscinetti sono confrontabili se non maggiori di quelle dell'albero. Si mostrano sì variazioni in termini di modi assiali-torsionali ma questi non destano particolare interesse ai fini dell'attività. Molto più interessanti sono i due nuovi modi legati alla precessione dell'olio ("oil whirl") attorno a ciascuna delle due boccole e allineati secondo la retta $\omega = \Omega/2$, in piena concordanza con ciò che ci si aspetta di ottenere dal comportamento di un cuscinetto lubrificato.

Nonostante questa attività si presenti come il primo passo dello studio della dinamica del rotore in questione essa ha permesso di sondare diversi aspetti della rotodinamica: dalle differenze tra modelli 1D e 3D, ai limiti derivanti dall'assialsimmetria equivalente fino al modello linearizzato a 8 coefficienti per il cuscinetto lubrificato, aprendo le porte ad una multiforme varietà di sviluppi potenziali. Tra questi i più rilevanti riguardano:

- L'implementazione della non-assialsimmetria del rotore, a partire da un'analisi nel sistema di riferimento rotante, fino all'accoppiamento coi cuscinetti lubrificati la cui anisotropia (di rotore e vincoli) comporta il ricorso alla risoluzione di equazioni differenziali del moto a coefficienti periodici nel sistema di riferimento inerziale.
- Modelli di trasmissione del calore per il calcolo della temperatura del meato d'olio, in modo da garantire una stima affidabile della viscosità dell'olio all'interno del cuscinetto, dalla quale le caratteristiche dinamiche sono particolarmente influenzate.
- Modelli non-lineari per il calcolo di un ciclo limite maggiormente realistico per il cuscinetto meno caricato.
- La trattazione in merito della dinamica delle palette fino agli effetti derivanti dall'interazione col rotore.
- L'azione sul rotore del diagramma delle pressioni del fluido in camera di pompaggio.
- L'inclusione del corpo statorico al fine di sondare l'accoppiamento rotore-statore.

Infine l'attività ha permesso di prendere confidenza con le caratteristiche peculiari dei rotori, di mettere in atto i metodi agli elementi finiti per la loro modellizzazione, di comprendere una varietà consistente di problemi relativi alla simulazione numerica nonché acquisire gli strumenti base per interfacciarsi con la dinamica dei cuscinetti lubrificati e la loro implementazione.

Appendice

Di seguito viene riportato il codice Matlab relativo all'analisi agli elementi finiti applicata al rotore del caso 1. Il codice include anche la regola dei 45° e permette, mediante analisi modale, il calcolo di diagrammi di Campbell, velocità critiche e forme modali dipendenti dalla velocità di rotazione. I parametri che mostrano un simbolo asteriscato (*) al posto del valore sono stati segretati in ottemperanza alle volontà aziendali. Al fondo viene presentata la funzione utilizzata dal codice principale per ottenere le matrici locali di rigidezza, massa e giroscopica dell'elemento trave.

```
% CASO 1 - Rotore pieno - Regola dei 45°

clear
close all
clc

% Colore dei diagrammi: alternative cromatiche
c1 = [0 0.4470 0.7410]; % blu
c3 = [0.9290, 0.6940, 0.1250]; % ocra
c6 = [0.3010, 0.7450, 0.9330]; % azzurro

format short g

% Molle concentrate nei vincoli
k1 = 1e15; % [N/m] % supporto rigido nel vincolo 1-sx
k2 = 1e15; % [N/m] % supporto rigido nel vincolo 2-dx

% Materiale Albero
E=*; % Modulo di Young [N/m^2]
ro=*; % Densità [kg/m^3]
Poiss=*; % Coefficiente di Poisson [-]
G_a=E/(2*(1+Poiss)); % Modulo di taglio [N/m^2]

% Materiale Boccole
Er=*; % Modulo di Young [N/m^2]
ror=*; % Densità [kg/m^3]
Poiss_r=*; % Coefficiente di Poisson [-]
G_r=Er/(2*(1+Poiss_r)); % Modulo di taglio [N/m^2]

n_global = 10; % n° elementi per tratto

% Da sinistra a destra del rotore

% Dati del tratto 1 dell'albero
d1=*; % diametro [m]
l1=*; % lunghezza [m]

A1=pi/4*d1^2; % area della sezione [m^2]
M1=ro*A1*l1; % massa del rotore [kg]
I_y1=pi*(d1^4)/64; % momento di inerzia diametrale di area [m^4]

Jm1=l*ro*I_y1; % momento di inerzia diametrale di massa per unità di lunghezza
m1=ro*A1; % massa per unità di lunghezza [kg/m]

n_el_1 = n_global; % numero di elementi in cui è suddiviso il tratto [-]
lx1 = l1/n_el_1; % lunghezza di ciascun elemento [m]
M1_elem=ro*A1*lx1; % massa di ciascun elemento [kg]

% Dati del tratto 2 dell'albero
```

```

d2=*;
l2=*;

A2=pi/4*d2^2;
M2=ro*A2*l2;
I_y2=pi*(d2^4)/64;

Jm2=1*ro*I_y2;
m2=ro*A2;

n_el_2 = n_global;
lx2 = l2/n_el_2;
M2_elem=ro*A2*lx2;

% Dati del tratto 2bis della boccola
d2bis_in =*;
d2bis_out =*;
l2bis =*;

A2bis=pi/4*(d2bis_out^2-d2bis_in^2);
M2bis=rór*A2bis*l2bis;
I_y2bis=pi*(d2bis_out^4-d2bis_in^4)/64;

Jm2bis=1*rór*I_y2bis;
m2bis=rór*A2bis;

n_el_2bis = n_el_2;
lx2bis = l2bis/n_el_2bis;
M2bis_elem = rór*A2bis*lx2bis;

% Dati del tratto 3 dell'albero
d3=*;
l3=*;

A3=pi/4*d3^2;
M3=ro*A3*l3;
I_y3=pi*(d3^4)/64;

Jm3=1*ro*I_y3;
m3=ro*A3;

n_el_3 = n_global;
lx3 = l3/n_el_3;
M3_elem=ro*A3*lx3;

% Dati del tratto 3bis della boccola
d3bis_in =*;
d3bis_out =*;
l3bis =*;

A3bis=pi/4*(d3bis_out^2-d3bis_in^2);
M3bis=rór*A3bis*l3bis;
I_y3bis=pi*(d3bis_out^4-d3bis_in^4)/64;

Jm3bis=1*rór*I_y3bis;
m3bis=rór*A3bis;

n_el_3bis = n_el_3;
lx3bis = l3bis/n_el_3bis;
M3bis_elem = rór*A3bis*lx3bis;

% Introduzione regola dei 45°

% Dati degli elementi aggiunti a sinistra del tratto 4 (sezione circolare)
% Elementi aggiunti a sinistra in sostituzione di parte del cilindro pompante

```

```

d4_0 = *; % Diametro tratto 4
D_meno_d_sx = d4_0 - d3bis_out; % Differenza di diametro in corrispondenza
dell'intaglio
D_meno_d_mezzi_sx = D_meno_d_sx/2; % Differenza di raggio all'intaglio
L_sx = D_meno_d_mezzi_sx; % Lunghezza del tratto con gli elementi aggiunti

% Vincolo: L < l4; altrimenti gli elementi intersecano quelli rimpiazzati a destra
Abrupt_change_sx = d3bis_out/3; % Brusca variazione del diametro
Abrupt_change_mezzi_sx = Abrupt_change_sx/2; % Brusca variazione del raggio
div_sx = D_meno_d_mezzi_sx / Abrupt_change_mezzi_sx; % Numero di suddivisioni
round_div_sx = round(div_sx)-1; % Arrotondamento all'intero

l_sx = L_sx/round_div_sx; % Lunghezza di ciascuna trave
r_inc_sx = D_meno_d_mezzi_sx/(round_div_sx+1); % Incremento di raggio
d_temp_sx = d3bis_out; % Diametro di partenza
d_sx = zeros(1,round_div_sx); % Vettore di diametri

% Ciclo per generare i diametri degli elementi
for i = 1:round_div_sx
    d_sx(i) = d_temp_sx + 2*r_inc_sx;
    d_temp_sx = d_sx(i);
end

A_sx = pi./4.*d_sx.^2; % area della sezione [m^2]
M_sx=ro.*A_sx.*l_sx; % massa del rotore [kg]
I_y_sx=pi.*(d_sx.^4)./64; % momento di inerzia diametrale di area [m^4]

Jm_sx=1.*ro.*I_y_sx; % momento di inerzia diametrale di massa [kg*m]
m_sx=ro.*A_sx; % massa per unità di lunghezza [kg/m]

M_sx_vera = ro*pi/4*d4_0^2*L_sx; % massa nel caso senza la regola a 45° [kg]
m_sx_vera = ro*pi/4*d4_0^2; % massa nel caso senza la regola a 45° [kg/m]

% Dati degli elementi aggiunti a destra del tratto 4 (sezione circolare)
% Elementi aggiunti a destra in sostituzione di parte del cilindro pompante
d4_0 = *; % Diametro albero 4
d5bis_out_0 = .030; % Diametro albero 5
D_meno_d_dx = d4_0 - d5bis_out_0; % Differenza di diametro all'intaglio
D_meno_d_mezzi_dx = D_meno_d_dx/2; % Differenza di raggio all'intaglio
L_dx = D_meno_d_mezzi_dx; % Lunghezza del tratto con gli elementi aggiunti
% Vincolo: L < l4; altrimenti gli elementi intersecano quelli rimpiazzati a sinistra

Abrupt_change_dx = d5bis_out_0/3; % Brusca variazione del diametro
Abrupt_change_mezzi_dx = Abrupt_change_dx/2; % Brusca variazione del raggio
div_dx = D_meno_d_mezzi_dx / Abrupt_change_mezzi_dx; % Numero di suddivisioni
round_div_dx = round(div_dx)-1; % Arrotondamento all'intero

l_dx = L_dx/round_div_dx; % Lunghezza di ciascuna trave
r_inc_dx = D_meno_d_mezzi_dx/(round_div_dx+1); % Incremento di raggio

d_temp_dx = d4_0; % Diametro di partenza
d_dx = zeros(1,round_div_dx); % Vettore di diametri

% Ciclo per generare i diametri degli elementi
for i = 1:round_div_dx
    d_dx(i) = d_temp_dx - 2*r_inc_dx;
    d_temp_dx = d_dx(i);
end

A_dx = pi./4.*d_dx.^2; % area della sezione [m^2]
M_dx=ro.*A_dx.*l_dx; % massa del rotore [kg]
I_y_dx=pi.*(d_dx.^4)./64; % momento di inerzia diametrale di area [m^4]

Jm_dx=1.*ro.*I_y_dx; % momento di inerzia diametrale di massa [kg*m]
m_dx=ro.*A_dx; % massa per unità di lunghezza [kg/m]

M_dx_vera = ro*pi/4*d4_0^2*L_dx; % massa nel caso senza il metodo a 45° [kg]

```

```

m_dx_vera = ro*pi/4*d4_0^2;           % massa nel caso senza il metodo a 45° [kg/m]

% Dati del tratto 4_A dell'albero
d4= d4_0;
l4=*;           % lunghezza reale del cilindro pompante [m] (senza regola dei 45°)
l4=.0525 - round_div_sx*l_sx;
% lunghezza di metà cilindro pompante scorporato
% a sinistra degli elementi della regola a 45°

A4=pi/4*d4^2;
M4=ro*A4*l4;
I_y4=pi*(d4^4)/64;

Jm4=1*ro*I_y4;
m4=ro*A4;
n_el_4 = n_global;
lx4 = l4/n_el_4;
M4_elem=ro*A4*lx4;

% Dati del tratto 4_B dell'albero
d4bis= d4_0;
l4bis=*;           % lunghezza reale del cilindro pompante [m] (senza regola dei 45°)
l4bis=.0525 - round_div_dx*l_dx;
% lunghezza di metà cilindro pompante scorporato
% a destra degli elementi della regola a 45°

A4bis=pi/4*d4bis^2;
M4bis=ro*A4bis*l4bis;
I_y4bis=pi*(d4bis^4)/64;

Jm4bis=1*ro*I_y4bis;
m4bis=ro*A4bis;

n_el_4bis = n_global;
lx4bis = l4bis/n_el_4bis;
M4_elembis=ro*A4bis*lx4bis;

% Dati del tratto 5 dell'albero
d5=*;
l5=*;

A5=pi/4*d5^2;
M5=ro*A5*l5;
I_y5=pi*(d5^4)/64;

Jm5=1*ro*I_y5;
m5=ro*A5;

n_el_5 = n_global;
lx5 = l5/n_el_5;
M5_elem=ro*A5*lx5;

% Dati del tratto 5bis della boccola
d5bis_in =*;
d5bis_out = d5bis_out_0;
l5bis =*;

A5bis=pi/4*(d5bis_out^2-d5bis_in^2);
M5bis=rór*A5bis*l5bis;
I_y5bis=pi*(d5bis_out^4-d5bis_in^4)/64;
Jm5bis=1*rór*I_y5bis;
m5bis=rór*A5bis;

n_el_5bis = n_el_5;
lx5bis = l5bis/n_el_5bis;

```

```

M5bis_elem = ror*A5bis*lx5bis;

% Dati del tratto 6 dell'albero
d6=*;
l6=*;

A6=pi/4*d6^2;
M6=ro*A6*l6;
I_y6=pi*(d6^4)/64;

Jm6=1*ro*I_y6;
m6=ro*A6;

n_el_6 = n_global;
lx6 = l6/n_el_6;
M6_elem=ro*A6*lx6;

% Dati del tratto 6bis della boccola
d6bis_in =*;
d6bis_out =*;
l6bis =*;

A6bis=pi/4*(d6bis_out^2-d6bis_in^2);
M6bis=ror*A6bis*l6bis;
I_y6bis=pi*(d6bis_out^4-d6bis_in^4)/64;

Jm6bis=1*ror*I_y6bis;
m6bis=ror*A6bis;

n_el_6bis = n_el_6;
lx6bis = l6bis/n_el_6bis;
M6bis_elem = ror*A6bis*lx6bis;

% Dati del tratto 7 dell'albero
d7=*;
l7=*;

A7=pi/4*d7^2;
M7=ro*A7*l7;
I_y7=pi*(d7^4)/64;

Jm7=1*ro*I_y7;
m7=ro*A7;

n_el_7 = n_global;
lx7 = l7/n_el_7;
M7_elem=ro*A7*lx7;

% Dati del tratto 8 dell'albero
d8=*;
l8=*;

A8=pi/4*d8^2;
M8=ro*A8*l8;
I_y8=pi*(d8^4)/64;
Jm8=1*ro*I_y8;
m8=ro*A8;

n_el_8 = n_global;
lx8 = l8/n_el_8;
M8_elem=ro*A8*lx8;

% Non si contano gli elementi delle boccole per il calcolo
% della lunghezza totale, in quanto sono in parallelo

```

```

% Lunghezza totale (come somma di tratti)
L_tot = l1 + l2 + l3 + l4 + l4bis + l5 + l6 + l7 + l8 + L_sx + L_dx;
% Lunghezza totale (come somma di elementi)
L_tot_elem = n_el_1*lx1 + n_el_2*lx2 + n_el_3*lx3 + ...
            n_el_4*lx4 + n_el_4bis*lx4bis + n_el_5*lx5 + n_el_6*lx6 + ...
            n_el_7*lx7 + n_el_8*lx8 + ...
            round_div_sx*lx_sx + round_div_dx*lx_dx;

% Massa totale vera (come somma della massa di tutti i tratti)
M_tot = M1 + M2 + M2bis + M3 + M3bis + M4 + M4bis + M5 + M5bis + ...
        M6 + M6bis + M7 + M8 + M_sx_vera + M_dx_vera;

% Massa totale vera (come somma della massa di tutti gli elementi)
M_tot_elem = n_el_1*M1_elem + n_el_2*M2_elem + n_el_2bis*M2bis_elem + ...
            n_el_3*M3_elem + n_el_3bis*M3bis_elem + ...
            n_el_4*M4_elem + n_el_4bis*M4_bis_elem + ...
            n_el_5*M5_elem + n_el_5bis*M5bis_elem + ...
            n_el_6*M6_elem + n_el_6bis*M6bis_elem + ...
            n_el_7*M7_elem + n_el_8*M8_elem + ...
            m_sx_vera*round_div_sx*lx_sx + m_dx_vera*round_div_dx*lx_dx;

% numero di elementi trave (non si contano quelli della boccola
% poichè si accoppiano in parallelo con gli elementi del relativo tratto in acciaio)
n_el_tot = n_el_1 + n_el_2 + n_el_3 + n_el_4 + n_el_4bis + ...
            n_el_5 + n_el_6 + n_el_7 + n_el_8 + ...
            round_div_sx + round_div_dx;
n_n = n_el_tot + 1;
n_dof = 2*n_n;

% Fattore di forma della sezione piena dell'albero (in acciaio)
chi = (7 + 6*Poiss)/(6*(1 + Poiss));

% Fattore di forma della sezione cava della boccola 2bis - 3bis
mm1 = (d2bis_in/d2bis_out)^2;
chi_cavo1 = ((7 + 6*Poiss_r)*((1 + mm1)^2) + 4*mm1*(5 + 3*Poiss_r))/ ...
            (6*(1 + Poiss_r)*(1 + mm1)^2);

% Fattore di forma della sezione cava della boccola 5bis - 6bis
mm2 = (d5bis_in/d5bis_out)^2;
chi_cavo2 = ((7 + 6*Poiss_r)*((1 + mm2)^2) + 4*mm2*(5 + 3*Poiss_r))/ ...
            (6*(1 + Poiss_r)*(1 + mm2)^2);

% Calcolo matrici di massa, rigidità e giroscopica degli elementi di ciascun tratto
[m_F1, k_F1, g_F1] = elem_matrices(E, ro, chi, G_a, lx1, A1, I_y1);
[m_F2, k_F2, g_F2] = elem_matrices(E, ro, chi, G_a, lx2, A2, I_y2);
[m_F3, k_F3, g_F3] = elem_matrices(E, ro, chi, G_a, lx3, A3, I_y3);
[m_F4, k_F4, g_F4] = elem_matrices(E, ro, chi, G_a, lx4, A4, I_y4);
[m_F4bis, k_F4bis, g_F4bis] = elem_matrices(E, ro, chi, G_a, lx4bis, A4bis, I_y4bis);
[m_F5, k_F5, g_F5] = elem_matrices(E, ro, chi, G_a, lx5, A5, I_y5);
[m_F6, k_F6, g_F6] = elem_matrices(E, ro, chi, G_a, lx6, A6, I_y6);
[m_F7, k_F7, g_F7] = elem_matrices(E, ro, chi, G_a, lx7, A7, I_y7);
[m_F8, k_F8, g_F8] = elem_matrices(E, ro, chi, G_a, lx8, A8, I_y8);

[m_F2bis, k_F2bis, g_F2bis] = ...
elem_matrices(Er, ror, chi_cavo1, G_r, lx2bis, A2bis, I_y2bis);
[m_F3bis, k_F3bis, g_F3bis] = ...
elem_matrices(Er, ror, chi_cavo1, G_r, lx3bis, A3bis, I_y3bis);
[m_F5bis, k_F5bis, g_F5bis] = ...
elem_matrices(Er, ror, chi_cavo2, G_r, lx5bis, A5bis, I_y5bis);
[m_F6bis, k_F6bis, g_F6bis] = ...
elem_matrices(Er, ror, chi_cavo2, G_r, lx6bis, A6bis, I_y6bis);

% Sovrapposizione degli elementi in parallelo
% Essi condividono gli stessi nodi e quindi gli stessi gradi di libertà
% Il parallelo prevede la somma delle rigidità, così come le masse e le giroscopiche

```

```

m_F2 = m_F2 + m_F2bis;
k_F2 = k_F2 + k_F2bis;
g_F2 = g_F2 + g_F2bis;

m_F3 = m_F3 + m_F3bis;
k_F3 = k_F3 + k_F3bis;
g_F3 = g_F3 + g_F3bis;

m_F5 = m_F5 + m_F5bis;
k_F5 = k_F5 + k_F5bis;
g_F5 = g_F5 + g_F5bis;

m_F6 = m_F6 + m_F6bis;
k_F6 = k_F6 + k_F6bis;
g_F6 = g_F6 + g_F6bis;

% Definizione delle matrici globali

M=zeros(n_dof);
K=zeros(n_dof);
G=zeros(n_dof);

% Assemblaggio delle matrici locali per ottenere le matrici globali
% di massa, rigidezza e giroscopica
% Sistema in linea: matrice a banda

for t=1:n_el_tot

    MM=zeros(n_dof);
    KK=zeros(n_dof);
    GG=zeros(n_dof);

    jj = 2*(t-1)+1; % incrementa di 2 in 2
    kk = jj + 3;    % le matrici dinamiche locali sono maticci 4x4

    if t <= n_el_1

        KK(jj:kk,jj:kk)=k_F1;
        MM(jj:kk,jj:kk)=m_F1;
        GG(jj:kk,jj:kk)=g_F1;

    elseif t > n_el_1 && t <= n_el_1 + n_el_2

        KK(jj:kk,jj:kk)=k_F2;
        MM(jj:kk,jj:kk)=m_F2;
        GG(jj:kk,jj:kk)=g_F2;

    elseif t > n_el_1 + n_el_2 && t <= n_el_1 + n_el_2 + n_el_3

        KK(jj:kk,jj:kk)=k_F3;
        MM(jj:kk,jj:kk)=m_F3;
        GG(jj:kk,jj:kk)=g_F3;

    elseif t > n_el_1 + n_el_2 + n_el_3 && ...
           t <= n_el_1 + n_el_2 + n_el_3 + round_div_sx

        % Tratto relativo alla regola a 45° a sinistra

        % Introduzione dei 2 elementi in parallelo per ogni trattino ottenuto dal
        % tratto a 45° per modellizzare la variazione di sezione.

        i = t - (n_el_1 + n_el_2 + n_el_3);

        % Elemento con densità reale e modulo elastico zero
        [m_Fsx, k_Fsx, g_Fsx] = elem_matrices(E, ro, chi, G_a, l_sx, A4, I_y4);
        k_Fsx = zeros(size(k_Fsx));

```

```

% Elemento con modulo elastico reale e densità zero
[m_Fsx_temp, k_Fsx_temp, g_Fsx_temp] = ...
elem_matrices(E, 0.0001, chi, G_a, l_sx, A_sx(i), I_y_sx(i));

% Parallelo tra i due elementi
m_Fsx = m_Fsx + m_Fsx_temp;
k_Fsx = k_Fsx + k_Fsx_temp;
g_Fsx = g_Fsx + g_Fsx_temp;

% Assemblaggio alla matrice globale
KK(jj:kk, jj:kk)=k_Fsx;
MM(jj:kk, jj:kk)=m_Fsx;
GG(jj:kk, jj:kk)=g_Fsx;

elseif t > n_el_1 + n_el_2 + n_el_3 + round_div_sx && ...
    t <= n_el_1 + n_el_2 + n_el_3 + round_div_sx + n_el_4

    KK(jj:kk, jj:kk)=k_F4;
    MM(jj:kk, jj:kk)=m_F4;
    GG(jj:kk, jj:kk)=g_F4;

elseif t > n_el_1 + n_el_2 + n_el_3 + round_div_sx + n_el_4 && ...
    t <= n_el_1 + n_el_2 + n_el_3 + round_div_sx + n_el_4 + n_el_4bis

    KK(jj:kk, jj:kk)=k_F4bis;
    MM(jj:kk, jj:kk)=m_F4bis;
    GG(jj:kk, jj:kk)=g_F4bis;

elseif t > n_el_1 + n_el_2 + n_el_3 + round_div_sx + n_el_4 + n_el_4bis && ...
    t <= n_el_1 + n_el_2 + n_el_3 + ...
        round_div_sx + n_el_4 + n_el_4bis + round_div_dx

    % Tratto relativo alla regola a 45° a destra

    i = t - (n_el_1 + n_el_2 + n_el_3 + round_div_sx + n_el_4 + n_el_4bis);

    % Elemento con densità reale e modulo elastico zero
    [m_Fdx, k_Fdx, g_Fdx] = elem_matrices(E, ro, chi, G_a, l_dx, A4, I_y4);
    k_Fdx = zeros(size(k_Fdx));

    % Elemento con modulo elastico reale e densità zero
    [m_Fdx_temp, k_Fdx_temp, g_Fdx_temp] = ...
    elem_matrices(E, 0.0001, chi, G_a, l_dx, A_dx(i), I_y_dx(i));

    % Parallelo tra i due elementi
    m_Fdx = m_Fdx + m_Fdx_temp;
    k_Fdx = k_Fdx + k_Fdx_temp;
    g_Fdx = g_Fdx + g_Fdx_temp;

    % Assemblaggio alla matrice globale
    KK(jj:kk, jj:kk)=k_Fdx;
    MM(jj:kk, jj:kk)=m_Fdx;
    GG(jj:kk, jj:kk)=g_Fdx;

elseif t > n_el_1 + n_el_2 + n_el_3 + round_div_sx + n_el_4 + ...
    n_el_4bis + round_div_dx && t <= n_el_1 + n_el_2 + ...
    n_el_3 + round_div_sx + n_el_4 + n_el_4bis + round_div_dx + n_el_5

    KK(jj:kk, jj:kk)=k_F5;
    MM(jj:kk, jj:kk)=m_F5;
    GG(jj:kk, jj:kk)=g_F5;

elseif t > n_el_1 + n_el_2 + n_el_3 + round_div_sx + n_el_4 + ...
    n_el_4bis + round_div_dx + n_el_5 && t <= n_el_1 + n_el_2 + ...
    n_el_3 + round_div_sx + n_el_4 + n_el_4bis + round_div_dx + n_el_5 + n_el_6

```

```

KK(jj:kk, jj:kk)=k_F6;
MM(jj:kk, jj:kk)=m_F6;
GG(jj:kk, jj:kk)=g_F6;

elseif t > n_el_1 + n_el_2 + n_el_3 + round_div_sx + n_el_4 + ...
n_el_4bis + round_div_dx + n_el_5 + n_el_6 && t <= n_el_1 + ...
n_el_2 + n_el_3 + round_div_sx + n_el_4 + n_el_4bis + round_div_dx + ...
n_el_5 + n_el_6 + n_el_7

KK(jj:kk, jj:kk)=k_F7;
MM(jj:kk, jj:kk)=m_F7;
GG(jj:kk, jj:kk)=g_F7;

elseif t > n_el_1 + n_el_2 + n_el_3 + round_div_sx + n_el_4 + n_el_4bis + ...
round_div_dx + n_el_5 + n_el_6 + n_el_7 && t <= n_el_1 + n_el_2 + ...
n_el_3 + round_div_sx + n_el_4 + n_el_4bis + round_div_dx + n_el_5 + ...
n_el_6 + n_el_7 + n_el_8

KK(jj:kk, jj:kk)=k_F8;
MM(jj:kk, jj:kk)=m_F8;
GG(jj:kk, jj:kk)=g_F8;
end

M=M+MM;
K=K+KK;
G=G+GG;
end

% Definizione delle matrici totali globali
Mc=M;
Kc=K;
Gc=G;

% Introduzione di molle concentrate nelle celle relative ai gradi di libertà vincolati
dof_vinc_1 = 2*(n_el_1 + n_el_2)+1;
dof_vinc_2 = 2*(n_el_1 + n_el_2 + n_el_3 + round_div_sx + n_el_4 + n_el_4bis +
round_div_dx + n_el_5)+1;

Kc(dof_vinc_1 , dof_vinc_1) = Kc(dof_vinc_1 , dof_vinc_1) + k1;
Kc(dof_vinc_2 , dof_vinc_2) = Kc(dof_vinc_2 , dof_vinc_2) + k2;

% Definizione dell'intervallo di velocità di rotazione del rotore
% Range di velocità operative: 1200 - 1800 rpm --> 126 - 188.5 rad/s --> 20 - 30 Hz
passo_f = 100;
f_max = 6000;
f = 0:passo_f:f_max;

Passo_OM = passo_f*2*pi;
OM_max = f_max*2*pi;
OM = 0:Passo_OM:OM_max;

% Definizione della struct delle soluzioni in termini di autovalori e autovettori
Structure_Size = length(OM);
autoproblema(Structure_Size) = struct();

II=eye(size(Mc)); % Matrice identità
OO=zeros(size(Mc)); % Matrice nulla

% Calcolo degli autovalori e autovettori dell'autoproblema modale
for j=1:length(OM)

if OM(j) == 0

[V,D]=eig(Kc,Mc);

autoproblema(j).eigvalues = D;
autoproblema(j).eigvectors = V;

```

```

        ww = sqrt(diag(D));
        www = [-ww;ww];
        n = length(ww);
        for i = 1:n
            wss(2*i-1,:) = www(i);
            wss(2*i,:) = www(n+i);
        end

    else
        Asp = [ -inv(Mc)*(-1i*OM(j)*Gc)  -inv(Mc)*Kc
                II                      OO ];

        [VV, DD] = eig(Asp);

        autoproblema(j).eigvalues = DD;
        autoproblema(j).eigvectors = VV;

        [autoproblema(j).sorted_eigvalues, Indici] = sort(diag(DD));
        autoproblema(j).sorted_eigvectors = VV(:,Indici);

        wss(:,j) = diag(DD); % [rad/s]

    end
end

% Sorting delle colonne della matrice delle frequenze:
for j=2:length(wss(1,:))
    wss(:,j) = sort(wss(:,j));
end

% Vettore delle velocità di precessione
w = [wss(:,1), imag(wss(:,2:end))];

% Calcolo delle velocità critiche
OM_crit = sqrt(eig(Kc, (Mc-Gc)));
count = 1;

% Se la matrice Mc-Gc è non definita positiva allora alcuni autovalori sono
% negativi e quindi si ottengono valori di OM_crit immaginari
% Pertanto con il ciclo seguente viene costruito un vettore di solo
% OM_crit reali
for ii = 1:length(OM_crit)
    if imag(OM_crit(ii)) == 0 && real(OM_crit(ii)) ~ 0
        OM_crit_real(count) = real(OM_crit(ii));
        count = count + 1;
    end
end

% Riordinamento del vettore di OM_crit_real in ordine crescente
OM_crit_real = sort(OM_crit_real);
% I valori di OM_crit_real ottenuti sono le intersezioni con i soli modi
% di precessione in avanti (FW)

% Diagramma di Campbell
figure(10)
hold on

for ii=1:6
    plot(f, abs(w(ii,:))/(2*pi), 'Color', c1, 'linewidth', 1.2, 'DisplayName', 'Matlab')
end
plot(f, f, '--', 'Color', c6, 'linewidth', 1.2, 'DisplayName', 'Unbalance')

% Diagramma delle OM_crit_real
plot(OM_crit_real(OM_crit_real < OM_max)/(2*pi), OM_crit_real(OM_crit_real <
OM_max)/(2*pi), 'o', 'linewidth', 1.2, 'Color', c3, 'DisplayName', 'Omega critica')

grid minor

```

```

box on

xlabel('$ \bf Spin\ speed\ \Omega\ [Hz]$', 'interpreter', 'latex')
ylabel('$ \bf Whirling\ speed\ \omega\ [Hz]$', 'interpreter', 'latex')
title('$ \bf Campbell\ diagram $', 'interpreter', 'latex')

% Diagramma delle forme modali

% Definizione del vettore delle coordinate dei nodi
Lunghezza = zeros(1, n_n);
for i = 1 : n_el_tot
    if i >= 1 && i <= n_el_1
        Lunghezza(i+1) = Lunghezza(i) + lx1;
    elseif i > n_el_1 && i <= n_el_1 + n_el_2
        Lunghezza(i+1) = Lunghezza(i) + lx2;
    elseif i > n_el_1 + n_el_2 && i <= n_el_1 + n_el_2 + n_el_3
        Lunghezza(i+1) = Lunghezza(i) + lx3;
    elseif i > n_el_1 + n_el_2 + n_el_3 && i <= n_el_1 + n_el_2 + n_el_3 + round_div_sx
        Lunghezza(i+1) = Lunghezza(i) + l_sx;
    elseif i > n_el_1 + n_el_2 + n_el_3 + round_div_sx && ...
        i <= n_el_1 + n_el_2 + n_el_3 + round_div_sx + n_el_4
        Lunghezza(i+1) = Lunghezza(i) + lx4;
    elseif i > n_el_1 + n_el_2 + n_el_3 + round_div_sx + n_el_4 && ...
        i <= n_el_1 + n_el_2 + n_el_3 + round_div_sx + n_el_4 + n_el_4bis
        Lunghezza(i+1) = Lunghezza(i) + lx4bis;
    elseif i > n_el_1 + n_el_2 + n_el_3 + round_div_sx + n_el_4 + n_el_4bis && ...
        i <= n_el_1 + n_el_2 + n_el_3 + round_div_sx + n_el_4 + n_el_4bis + round_div_dx
        Lunghezza(i+1) = Lunghezza(i) + l_dx;
    elseif i > n_el_1 + n_el_2 + n_el_3 + round_div_sx + n_el_4 + n_el_4bis + round_div_dx && ...
        i <= n_el_1 + n_el_2 + n_el_3 + round_div_sx + n_el_4 + n_el_4bis + round_div_dx + n_el_5
        Lunghezza(i+1) = Lunghezza(i) + lx5;
    elseif i > n_el_1 + n_el_2 + n_el_3 + round_div_sx + n_el_4 + n_el_4bis + round_div_dx + ...
        n_el_5 && i <= n_el_1 + n_el_2 + n_el_3 + round_div_sx + n_el_4 + n_el_4bis + ...
        round_div_dx + n_el_5 + n_el_6
        Lunghezza(i+1) = Lunghezza(i) + lx6;
    elseif i > n_el_1 + n_el_2 + n_el_3 + round_div_sx + n_el_4 + n_el_4bis + round_div_dx + ...
        n_el_5 + n_el_6 && i <= n_el_1 + n_el_2 + n_el_3 + round_div_sx + n_el_4 + n_el_4bis + ...
        round_div_dx + n_el_5 + n_el_6 + n_el_7
        Lunghezza(i+1) = Lunghezza(i) + lx7;
    elseif i > n_el_1 + n_el_2 + n_el_3 + round_div_sx + n_el_4 + n_el_4bis + round_div_dx + ...
        n_el_5 + n_el_6 + n_el_7 && i <= n_el_1 + n_el_2 + n_el_3 + round_div_sx + n_el_4 + ...
        n_el_4bis + round_div_dx + n_el_5 + n_el_6 + n_el_7 + n_el_8
        Lunghezza(i+1) = Lunghezza(i) + lx8;
    end
end

% Calcolo delle forme modali (solo per velocità di rotazione = 0)
Modi = zeros(length(V(1, :)), length(Lunghezza));
Modi_norm = Modi;
for i = 1 : length(V(1, :))
    Modi(i, :) = (V( 1 : 2 : end-1 , i ))';
    Modi_norm(i, :) = Modi(i, :) / max(abs(Modi(i, :)));
end

% Calcolo le tutte le forme modali FW e BW per ogni velocità OM del rotore
for k = 2 : length(OM)

    autoproblema(k).Modi_complessi = ...
        zeros(length((autoproblema(k).sorted_eigvectors(1, :))), length(Lunghezza));
    autoproblema(k).Modi_complessi_norm = autoproblema(k).Modi_complessi;

    for i = 1 : length((autoproblema(k).sorted_eigvectors(1, :)))

        autoproblema(k).Modi_complessi(i, :) = ...
            (imag(autoproblema(k).sorted_eigvectors( n+1 : 2 : end-1 , i )))' ;
        autoproblema(k).Modi_complessi_norm(i, :) = ...
            autoproblema(k).Modi_complessi(i, :) / ...

```

```

        max(abs(autoproblema(k).Modi_complessi(i,:)));
    end
end

figure(20)
hold on
asse = zeros(1,length(Lunghezza));

% Diagramma delle forme modali normalizzate (velocità di rotazione = 0):

% Scelta dei modi
modo_min = 1;
modo_max = 3;
for row = modo_min : 1 : modo_max
    sign_1 = sign(Modi_norm(row,1));
    sign_2 = sign(autoproblema(2).Modi_complessi_norm((2*row-1),1));

    % Confronto di segno per invertire le forme modali
    % che sono opposte a quelle del caso OM diverso da 0
    if sign_1~=sign_2
        Modi_norm(row,:)= -Modi_norm(row,:);
    end
end
plot(Lunghezza, asse, Lunghezza, Modi_norm(modo_min:modo_max,:));

% Diagramma delle forme modali normalizzate (velocità di rotazione variabile):
for k = 2:length(OM)
    for row = modo_min:1:modo_max
        sign_1 = sign(Modi_norm((row),1));
        sign_2 = sign(autoproblema(k).Modi_complessi_norm((2*row-1),1));
        sign_3 = sign(autoproblema(k).Modi_complessi_norm((2*row),1));

        % Confronto di segno per invertire le forme modali
        % che sono opposte a quelle del caso OM diverso da 0
        if sign_1~=sign_2
            autoproblema(k).Modi_complessi_norm(2*row-1,:) = ...
                -autoproblema(k).Modi_complessi_norm(2*row-1,:);
        end

        if sign_1~=sign_3
            autoproblema(k).Modi_complessi_norm(2*row,:) = ...
                -autoproblema(k).Modi_complessi_norm(2*row,:);
        end
    end
end

modo_min_spin_var = 2*modo_min-1;
modo_max_spin_var = 2*modo_max;

% Diagramma dei modi normalizzati
for k = 2:length(OM)
    plot(Lunghezza, asse, Lunghezza, ...
        autoproblema(k).Modi_complessi_norm(modo_min_spin_var : modo_max_spin_var,:));
end

box on

title('$ \bf Normalized\ mode\ shapes $','interpreter','latex')
xlabel('$ \bf Length\ L [m]$', 'interpreter','latex')
ylabel('$ \bf Normalized\ displacements\ \phi [-]$', 'interpreter','latex')
xlim([-Inf,Lunghezza(end)])

```

```

% Funzione per il calcolo delle matrici locali dell'elemento trave

function [m_F, k_F, g_F] = elem_matrices(E, ro, chi, G, l, A, I_y)

% Rapporto tra la flessibilità a flessione e flessibilità a taglio della trave
if E==0 || A==0
    PHI1=0;
else
    PHI1=(12*E*I_y*chi)/(G*A*l^2);
end

% Coefficienti della matrice di massa e giroscopica

m1=156 + 294*PHI1 + 140*PHI1^2;
m2=22 + 38.5*PHI1 + 17.5*PHI1^2;
m3=54 + 126*PHI1 + 70*PHI1^2;
m4=13 + 31.5*PHI1 + 17.5*PHI1^2;
m5=4 + 7*PHI1 + 3.5*PHI1^2;
m6=3 + 7*PHI1 + 3.5*PHI1^2;
m7=36;
m8=3 - 15*PHI1;
m9=4 + 5*PHI1 + 10*PHI1^2;
m10=1 + 5*PHI1 - 5*PHI1^2;

% Matrice di massa

m_F1_1=ro*A*l/(420*(1+PHI1)^2)*[m1      1*m2      m3      -1*m4
                               1*m2      1^2*m5     1*m4     -1^2*m6
                               m3      1*m4      m1      -1*m2
                               -1*m4     -1^2*m6     -1*m2     1^2*m5];

m_F1_2=ro*I_y/(30*l*(1+PHI1)^2)*[m7      1*m8      -m7      1*m8
                                  1*m8      1^2*m9     -1*m8     -1^2*m10
                                  -m7      -1*m8     m7      -1*m8
                                  1*m8      -1^2*m10    -1*m8     1^2*m9];

m_F=m_F1_1+m_F1_2;

% Matrice di rigidezza

k_F=E*I_y/(l^3*(1+PHI1))*[12      6*1      -12      6*1
                          6*1      (4+PHI1)*1^2  -6*1      (2-PHI1)*1^2
                          -12      -6*1      12      -6*1
                          6*1      (2-PHI1)*1^2  -6*1      (4+PHI1)*1^2];

% Matrice giroscopica

g_F =ro*2*I_y/(30*l*(1+PHI1)^2)*[m7      1*m8      -m7      1*m8
                                  1*m8      1^2*m9     -1*m8     -1^2*m10
                                  -m7      -1*m8     m7      -1*m8
                                  1*m8      -1^2*m10    -1*m8     1^2*m9];

```

Seguono i codici Ansys APDL relativi all'analisi transiente e statica rispettivamente applicate all'elemento COMBI214 per la modellizzazione del cuscinetto lubrificato. Il codice esempio è relativo ad un cuscinetto campione con rapporto $L/D = 1$ usato per il confronto dei parametri statici e dinamici, corrispondente alle condizioni per cui si ottiene $\varepsilon = 0,5$.

```

/clear

/title, Analisi transiente di un cuscinetto lubrificato piano cilindrico

! ** Parametri del rotore
mass = 3           ! Quota parte di massa del rotore presa in carico dal cuscinetto [kg]
omegaj = 73.9631  ! Velocità di rotazione dell'albero [rad/s]

! ** Parametri del cuscinetto
xclear = 1.27e-4   ! Gioco radiale del cuscinetto [m]
length = 0.0254   ! Lunghezza assiale del cuscinetto [m]
radius = 0.5*0.0254 ! Raggio boccola [m]
mu = 6.89e-2      ! Viscosità dinamica dell'olio [kg/(m*s)]

! ** Parametri dell'analisi transiente
nbcyc = 10        ! Numero di cicli [-]
tend = nbcyc*2*pi/omegaj ! Tempo finale della dinamica [s]
dt = 1e-4        ! Passo di discretizzazione temporale [s]

! ** Pre-processing
/prep7

! ** Nodi
n, 1, 0
n, 2, 0

! ** Elementi
et, 1, 21
r, 1, mass, mass, mass

et, 2, 214
keyopt,2,1, 2      ! Integrazione dell'equazione di Reynolds
r, 2, xclear, length, radius

! ** Materiali
mp,visc,2, mu

! ** Mesh
type,1
real,1
e, 2

type,2
real,2
mat,2
e, 1, 2

! ** Condizioni al contorno
d, all, all, 0.0
ddel, 2, UX
ddel, 2, UY
fini

! ** Analisi transiente
/solu
antype, transient
nlgeom,on
acel,, 9.81
d, 2, OMGZ, omegaj
deltim, dt
time, tend

```

```

outres,all,all
solve
fini

! ** Post-processing
/post26

numvar,30
nsol,2,2,u,x,ux2           ! componente x dello spostamento del centro-albero [m]
nsol,3,2,u,y,uy2           ! componente y dello spostamento del centro-albero [m]
nsol,21,2,vel,x,velx       ! componente x della velocità del centro-albero [m/s]
nsol,22,2,vel,y,vely       ! componente y della velocità del centro-albero [m/s]
esol,6,2,2,SMISC,1,fx      ! componente x della forza generata dal meato d'olio [N]
esol,7,2,2,SMISC,2,fy      ! componente y della forza generata dal meato d'olio [N]
esol,8,2,2,NMISC,3,mofp    ! pressione massima generata dal meato d'olio [Pa]

prod,10,6,6,,fx_2
prod,11,7,7,,fy_2
add,12,10,11,,fx_2+fy_2
sqrt,13,12,,,famp1        ! forza generata dal meato d'olio [N]

prod,15,2,2,,ux2_2
prod,16,3,3,,uy2_2
add,17,15,16,,ux2_2+uy2_2
sqrt,18,17,,,ecc         ! eccentricità [m]

prod,23,21,21,,velx_2
prod,24,22,22,,vely_2
add,25,23,24,,velx_2+vely_2
sqrt,26,25,,,vel_mag     ! velocità del centro-albero [m/s]

extrem

*get,pmax,vari,8,extrem,vmax ! pressione massima generata dal meato d'olio [Pa]
*get,fmax,vari,13,extrem,vmax ! forza massima generata dal meato d'olio [N]
*get,tfmax,vari,13,extrem,tmax ! tempo finale [s]
*get,eccend,vari,18,extrem,vlast ! eccentricità al tempo finale [m]
*get,ux3,vari,2,extrem,vlast ! spostamento x del centro-albero al tempo finale [m]
*get,uy3,vari,3,extrem,vlast ! spostamento y del centro-albero al tempo finale [m]
*get,velx3,vari,21,extrem,vlast ! velocità x del centro-albero al tempo finale [m/s]
*get,vely3,vari,22,extrem,vlast ! velocità y del centro-albero al tempo finale [m/s]
*get,velocity,vari,26,extrem,vlast ! velocità del centro-albero al tempo finale [m/s]

! Diagrammi
/show,png,rev

! Diagramma orbitale del centro-albero
xvar,2
/axlab,x,ux@node2
/axlab,y,uy@node2
plvar,3

! Diagramma di velocità del centro-albero
xvar,21
/axlab,x,velx@node2
/axlab,y,vely@node2
plvar,22

xvar,0
! Diagramma delle forze Fx e Fy generate dal meato d'olio
plvar,6,7
! Diagramma della pressione massima generata dal meato d'olio
plvar,8

! Risultati tabulati
prvar,2,3,18,21,22,26
prvar,6,7,8
finish

```

```

! Calcolo dei parametri caratteristici di un cuscinetto lubrificato piano cilindrico

/clear

! ** Parametri del cuscinetto
xclear = 1.27e-4      ! Gioco radiale del cuscinetto [m]
length = 0.0254      ! Lunghezza assiale del cuscinetto [m]
radius = 0.5*0.0254  ! Raggio della boccola [m]
mu      = 6.89e-2     ! Viscosità dinamica dell'olio [kg/(m*s)]
omegaj = 73.9631     ! Velocità di rotazione del rotore [rad/s]
pertInc = 1e-5       ! Perturbazione adimensionale applicata [-]

! ** Posizione di equilibrio
u1 = 0.540217007E-04 ! spostamento x del centro-albero [m]
u2 = -0.328569482E-04 ! spostamento y del centro-albero [m]
veloc1 = 0            ! velocità x del centro-albero [m/s]
veloc2 = 0            ! velocità y del centro-albero [m/s]

! ** Pre-processing
/prep7

! ** Nodi
n, 1, 0
n, 2, 0

! ** Elementi

! et, 1, 21,,, 2
! r, 1, mass

et, 2, 214
keyopt,2,1, 2      ! Integrazione dell'equazione di Reynolds
r, 2, xclear, length, radius, veloc1, veloc2, pertInc

! ** Materiali
mp,visc,2, mu

! ** Mesh
! type,1
! real,1
! e, 2

type,2
real,2
mat,2
e, 1, 2

! ** Condizioni al contorno
d, all, all, 0.0
ddel, 2, UX
ddel, 2, UY
finish

! ** Analisi statica per spostamenti assegnati
/solu
antype, static
omega,,, omegaj
d,2,ux, u1
d,2,uy, u2
outres,all,all
solve
finish

! ** Post-processing
/post1
set,last

esel,,elem,,1

```

```

! Risultati tabulati

etable, fx, smisc,1      ! Componente x della forza generata dal meato d'olio [N]
etable, fy, smisc,2      ! Componente y della forza generata dal meato d'olio [N]

etable, theta1, nmisc,1  ! Angolo iniziale della regione a pressione positiva [°]
etable, theta2, nmisc,2  ! Angolo finale della regione a pressione positiva [°]
etable, mofp, nmisc,3    ! Pressione massima del meato [Pa]
etable, thetap, nmisc,4  ! Angolo corrispondente alla pressione massima del meato [°]
etable, hmin, nmisc,5    ! Spessore minimo del meato [m]
etable, thetah, nmisc,6  ! Angolo corrispondente allo spessore minimo del meato [°]

pretab

! Tabella dei coefficienti di rigidezza Kij [N/m]

etable, kxx, nmisc,7
etable, kyy, nmisc,8
etable, kxy, nmisc,9
etable, kyx, nmisc,10

pretab, kxx, kyy, kxy, kyx

! Tabella dei coefficienti di smorzamento Cij [N*s/m]

etable, cxx, nmisc,11
etable, cyy, nmisc,12
etable, cxy, nmisc,13
etable, cyx, nmisc,14

pretab, cxx, cyy, cxy, cyx

finish

```

Bibliografia

- [1] Ansys, *Ansys Workbench*, 2021R2. [Online]. Available: <https://www.ansys.com/products/ansys-workbench>.
- [2] G. Genta, *Vibration Dynamics and Control*, New York: Springer Science & Business Media, 2009.
- [3] A. Gugliotta, *Elementi finiti*, Torino: Otto, 2002.
- [4] G. Genta, *Dynamics of Rotating Systems*, New York: Springer Science & Business Media, 2005.
- [5] Ansys, *Element Reference 2022 R2*, ANSYS, Canonsburg, 2022.
- [6] G. Curti, F. A. Raffa e F. Vatta, *The Dynamic Stiffness Matrix Method in the Analysis of Rotating Systems*, Taylor & Francis, 1991.
- [7] Ansys, *Workbench User's Guide*, Canonsburg: ANSYS, 2022 R2.
- [8] Ansys, *Structural Analysis Guide*, Canonsburg: ANSYS, 2021 R2.
- [9] Ansys, *ANSYS Meshing User's Guide*, Canonsburg: ANSYS, 2022 R2.
- [10] Ansys, *Command Reference*, Canonsburg: ANSYS, 2022 R2.
- [11] MathWorks, *Matlab*, R2020b. [Online]. Available: <https://it.mathworks.com/products/matlab.html>.
- [12] Ansys, *Ansys SpaceClaim*, 2021 R2. [Online]. Available: <https://www.ansys.com/it-it/products/3d-design/ansys-spaceclaim>.
- [13] Dassault Systèmes, *Solidworks*, 2017. [Online]. Available: <https://www.solidworks.com/it>.
- [14] Lepore Andrea, *Modellazione fluidodinamica di una pompa per vuoto rotativa a palette* [tesi di laurea magistrale], Torino: Politecnico di Torino, 2017.
- [15] F. Ricci, *Dispense di fisica e tecnologia del vuoto*, Roma.
- [16] L. Yue, Y. Guojun e Y. Suyuan, *A comparison of the finite element modeling methods for the natural frequencies computation of stepped shaft*, in *22nd Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology*, San Francisco, 2013.

- [17] F. Sanchez-Marin, V. Roda-Casanova e A. Porras-Vazquez, *A new analytical model to predict the transversal deflection under load of stepped shafts*, *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. Volumes 146–147, pp. Pages 91-104, 2018.
- [18] Z. C. Liu, W. Song e Q. Lu, *A Modeling Method for Abrupt Change Shafts in Gearboxes and Experiment Verification*, in *IOP Conference Series. Materials Science and Engineering*, Bristol, 2019.
- [19] J. Vance, F. Zeidan e B. Murphy, *Machinery Vibration and Rotordynamics*, Hoboken: John Wiley & Sons, 2010.
- [20] Ansys, *Ansys APDL*, 2021 R2. [Online]. Available: <https://www.ansys.com/blog/what-is-apdl>.
- [21] C. Ferraresi e T. Raparelli, *Meccanica Applicata*, Torino: CLUT, 2007.
- [22] V. Meruane e R. Pascual, *Identification of nonlinear dynamic coefficients in plain journal bearings*, *Tribology International*, vol. Volume 41, n. Issue 8, pp. Pages 743-754, 2008.
- [23] T. Someya, *Journal-Bearing Databook*, New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1989.
- [24] Zhi Ling Qiu, *A theoretical and experimental study on dynamic characteristics of journal bearings* [tesi di dottorato], Wollogong: Dipartimento di Ingegneria Meccanica, Università di Wollogong, 1995.
- [25] B. J. Hamrock, *Fundamentals of Fluid Film Lubrication*, NASA, 1991.
- [26] M. I. Friswell, J. E. T. Penny, S. D. Garvey e A. W. Lees, *Dynamics of Rotating Machines*, New York: Cambridge University Press, 2010.
- [27] G. Jacazio e B. Piombo, *Meccanica Applicata alle Macchine Vol. 2 La Trasmissione del Moto*, Torino: Levrotto & Bella, 1992.
- [28] Ansys, *Theory Reference*, Canonsburg: ANSYS, 2021 R2.
- [29] Ansys, *Rotordynamic Analysis Guide*, Canonsburg: ANSYS, 2021 R2.
- [30] R. G. Kirk e E. J. Gunter, *Short Bearing Analysis Applied to Rotor Dynamics — Part I: Theory*, *Journal of Lubrication Technology*, vol. 98, p. 47, 1976.
- [31] A. Amamou e M. Chouchane, *Nonlinear stability analysis of long hydrodynamic journal bearings using numerical continuation*, *Mechanism and Machine Theory*, vol. 72, pp. 17-24, 2014.