Politecnico di Torino

Ingegneria Meccanica
A.a. 2021/2022
Sessione di Laurea dicembre 2022

Sviluppo di indici predittivi per la prevenzione del ribaltamento di veicoli pesanti

Relatore:
Mauro Velardocchia

Corelatori:
Antonio Tota
Luca Dimauro

Candidato:
Edoardo Sclauzero

Sommario

Introduzione

Il ribaltamento dei veicoli rappresenta una delle condizioni di incidente più pericolose. Infatti, secondo il Fatality Analysis Reporting System (FARS) del 2000, il 31% dei passeggeri coinvolti in maniera fatale negli incidenti di quell'anno deriva proprio da un incidente con ribaltamento. Inoltre, sulla base di quanto riportato dal National Automotive Sampling System (NASS) General Estimates System (GES), si evince che la percentuale di mezzi coinvolti aumenta in modo significativo nel caso di veicoli pesanti.

Analizzando il fenomeno del ribaltamento è necessario fare distinzione tra:

- Tripped Rollover, ovvero ribaltamento con "impuntamento" causato da fattori esterni al veicolo come, ad esempio, la collisione con un ostacolo;
- Untripped Rollover, ossia il caso senza "impuntamento" derivante soltanto da una manovra estrema effettuata in condizioni critiche, come il cambio di corsia per evitare un ostacolo o la percorrenza di una curva ad elevata velocità.

L'obiettivo di questo lavoro è lo sviluppo di indici che consentano di identificare il fenomeno del ribaltamento in maniera anticipata nel caso Untripped, in modo da poter fornire un segnale di allarme preventivo. A tale riguardo, gli indici sviluppati sono:

- il Load Transfer Ratio (LTR), che fornisce un'indicazione istantanea di pericolo;
- il Contour Line Rollover Index (CLRI), sulla base della ricerca effettuata da Zhang X., Yang Y., Guo K., Lv J. & Peng T. [1];
- il Time To Rollover (TTR), che fornisce una previsione del tempo rimanente al raggiungimento della condizione critica.

Per la validazione dei suddetti indici, implementati su un modello semplificato in ambiente Matlab, è stato impiegato il software CarMaker, fornito da IPG Automotive. Tale software consente di svolgere accurate simulazioni in ambiente virtuale, costituendo così il punto di riferimento con cui confrontare i risultati ottenuti tramite il modello semplificato.

Il presente lavoro si concentra, nella parte iniziale, sulla presentazione generale di CarMaker, per poi passare alla trattazione degli indici e giungere infine a un loro confronto generale, sulla base di due indicatori di performance (tempo di predizione e accuratezza).

1 IPG CarMaker

Come anticipato nel capitolo introduttivo, CarMaker è un software sviluppato da IPG Automotive e dedicato alle simulazioni di veicoli commerciali leggeri e veicoli adibiti al trasporto di persone. Si tratta di un ambiente virtuale che consente di ricreare scenari reali in maniera molto dettagliata, all'interno del quale è possibile eseguire qualsiasi manovra per poter studiare accuratamente il comportamento del veicolo senza dover svolgere test reali.

Di seguito viene presentata una panoramica generale del programma per poterne osservare le funzionalità principali e le potenzialità. All'avvio del programma, la finestra che appare all'utente è la CarMaker main GUI (main Graphical User Interface) riportata nell'immagine seguente. Si tratta del centro di controllo del software, dal quale è possibile accedere a tutte le funzionalità e alle sotto-finestre di lavoro.

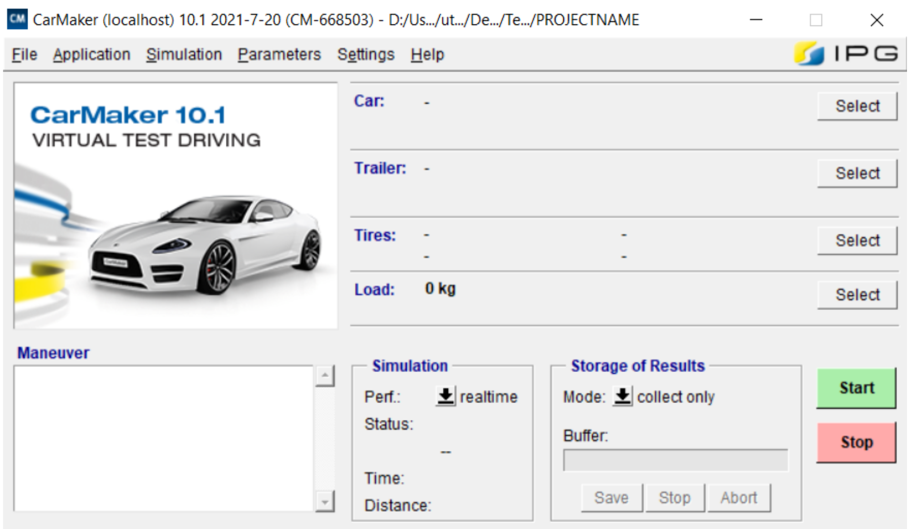


Figura 1.1 - CarMaker GUI

Per poter effettuare una simulazione, è necessario prima di tutto definire ciò che il programma identifica come "TestRun", ovvero la combinazione del tipo di veicolo, del guidatore, della manovra da effettuare e dello scenario all'interno del quale la si vuole svolgere. A tal proposito, IPG fornisce una libreria di modelli predefiniti molto vasta per ciascuna di queste classi, consentendo così di svolgere numerose simulazioni in maniera molto rapida.

Una volta definito il TestRun è possibile avviare la simulazione. A questo proposito, per seguire l'evolversi della prova e ottenere informazioni sul comportamento del veicolo in tempo reale, risulta utile aprire le seguenti finestre di lavoro:

- **IPG Movie**, che consente di osservare l'evolversi della manovra all'interno dello scenario virtuale. Terminata la simulazione è possibile anche osservare il replay a velocità di riproduzione differenti, in modo tale da poter studiare accuratamente il veicolo;

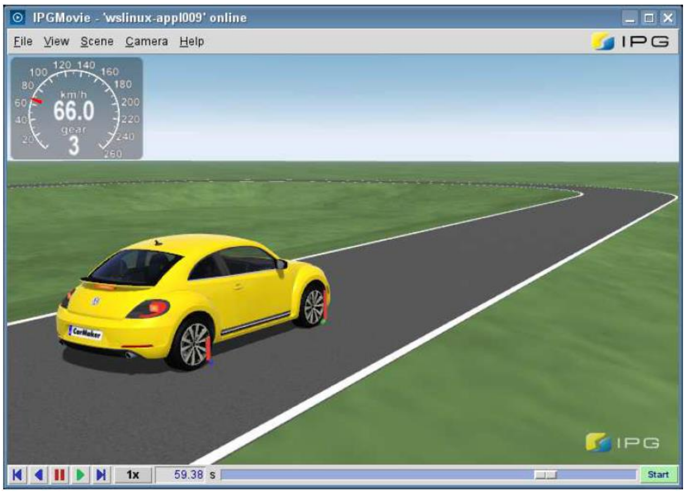


Figura 1.2 - IPG Movie

- **Instruments**, simile ad un tachimetro, che permette di visualizzare i comandi principali che il Driver sta imponendo al veicolo durante la manovra;

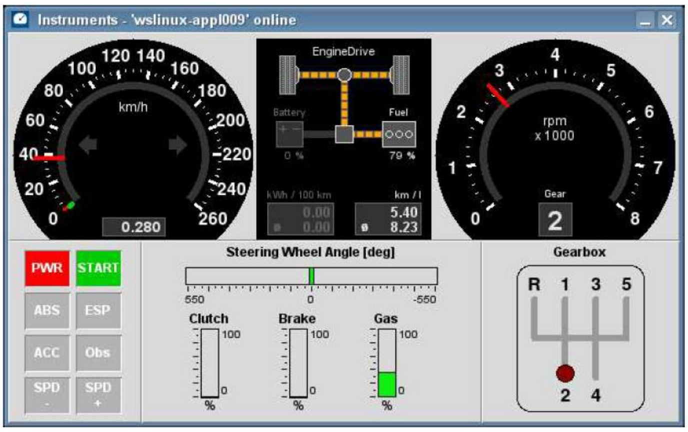


Figura 1.3 - IPG Instruments

- **IPG Control**, che riporta in tempo reale l’andamento delle variabili d’interesse come, ad esempio, l’accelerazione laterale del veicolo e la velocità, presentate nell’immagine seguente.

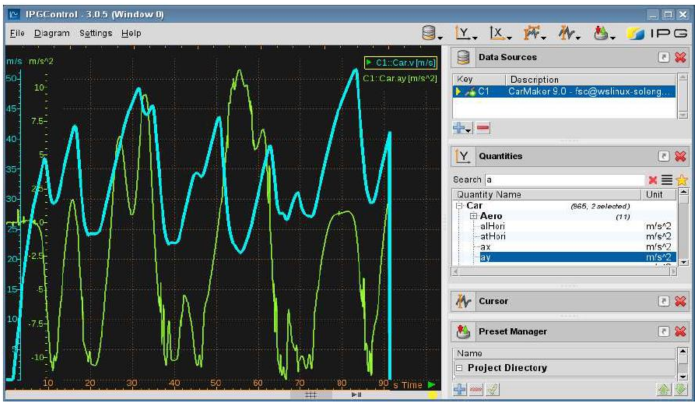


Figura 1.4 - IPG Control

Terminata la simulazione è possibile procedere con il salvataggio delle variabili d’interesse, dopo averle selezionate dall’elenco degli output (*Application > Outputquantities*). Inoltre, è fondamentale impostare il formato “.erg” perché questo consente di importarli in ambiente Matlab per la fase di postprocessing.

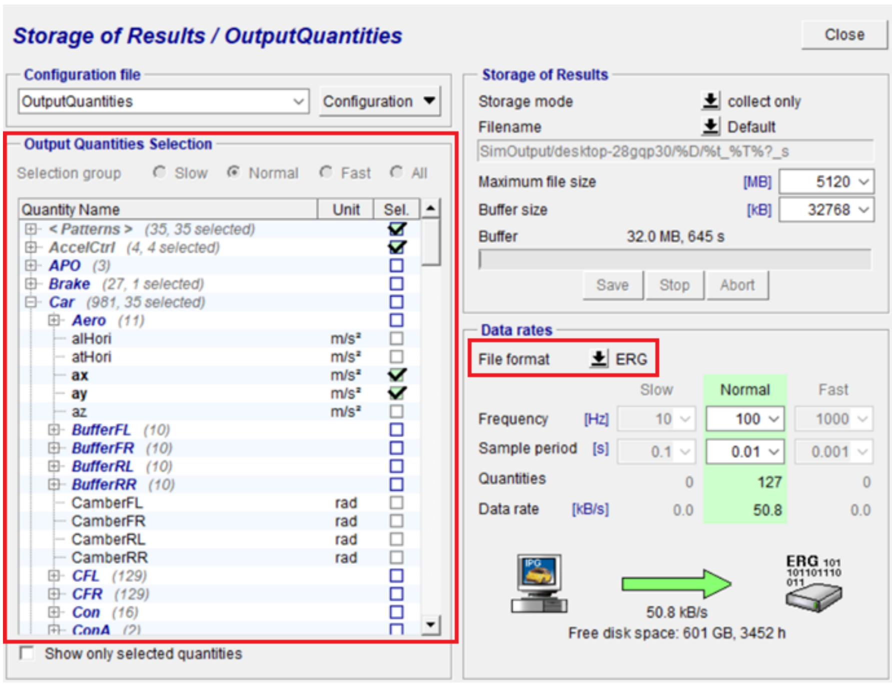


Figura 1.5 - IPG Output Quantities

A questo punto, grazie allo script “cmenv” fornito da IPG, utilizzando il comando “cmread” è possibile creare in Matlab una struttura che contiene al suo interno tutte le variabili d’interesse con i rispettivi valori:

```
%Lettura e salvataggio risultati nella stuttura "test"
test=cmread('D:\Users\utente pc\Desktop\Tesi\FileName.erg')
```

Figura 1.6 - Script Matlab salvataggio risultati

Per comprendere meglio come vengono organizzati i risultati su Matlab, di seguito viene riportata una porzione di una generica struttura ottenuta da una simulazione eseguita su IPG:

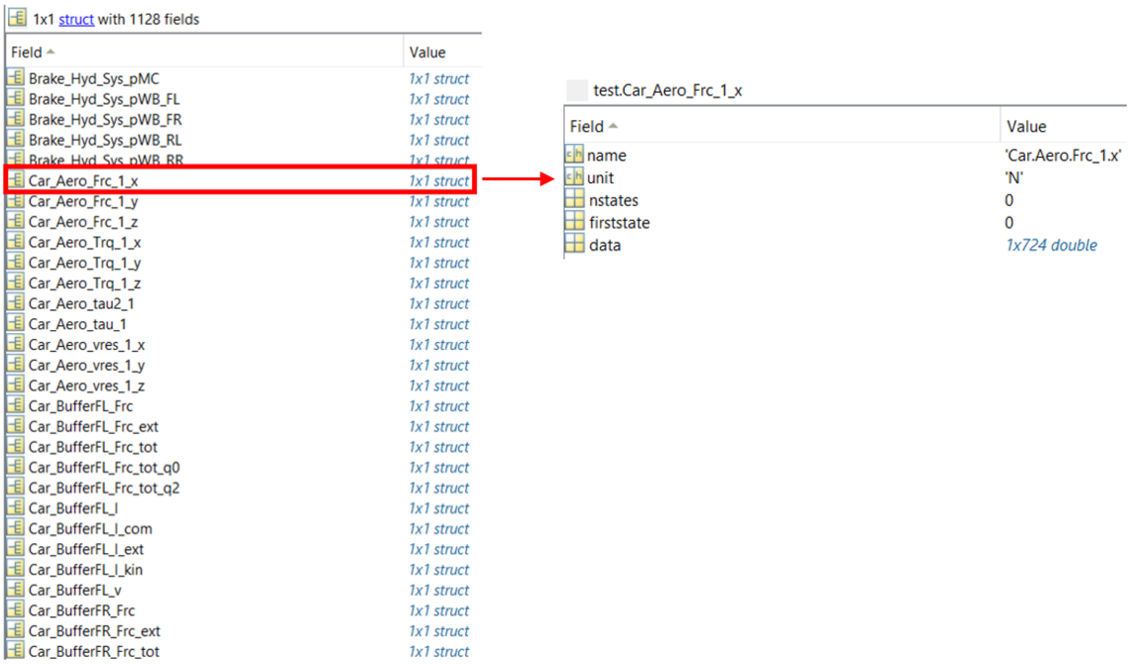


Figura 1.7 - Struttura dati esempio

In questo modo, dato che il modello semplificato è implementato direttamente su Matlab, è possibile effettuare facilmente un confronto diretto dei risultati ottenuti con i due modelli. A titolo esemplificativo, di seguito viene riportato lo script utilizzato per il plot della velocità del veicolo, andando a richiamare le variabili salvate precedentemente all’interno della struttura “test”:

```
% Velocità del veicolo
if exist('fig_1')==0
fig_1 = figure('Name','Velocità veicolo','NumberTitle','off');
else
    figure(fig_1)
end
plot(test.Time.data,test.Car_v.data,'Linewidth',2);
grid on;
xlabel('Time [s]');
ylabel('Speed [km/h]');
title('Velocità veicolo');

if save_figure == 1
    saveas(gcf,'Velocità veicolo','fig');
    saveas(gcf,'Velocità veicolo','jpg');
end
```

Figura 1.8 - Script Matlab plot velocità

1.1 Manovre test

A questo punto è possibile passare allo svolgimento di alcune manovre test per prendere familiarità con il programma e per fornire una panoramica generale sulle caratteristiche del veicolo. Prima di tutto, quindi, è necessario definire il veicolo che si vuole utilizzare. A tal proposito, è stato scelto il modello "Sprinter" della Mercedes – Benz, in quanto caratterizzato da un baricentro piuttosto elevato che consente di amplificare il moto di rollio, oggetto centrale di questo studio.

Figura 1.9 - Veicolo utilizzato (MB-Sprinter)

Parametri principali:

- $massa_{totale} = 2300\ kg$
- $passo = 4.34\ m$
- $carreggiata = 1.68\ m$
- $altezza_{baricentro} = 1.128\ m$

Invece, per quanto riguarda la tipologia di **Driver**, è stato utilizzato un preset di default del programma caratterizzato da uno stile di guida normale, come si può osservare nell'immagine seguente:

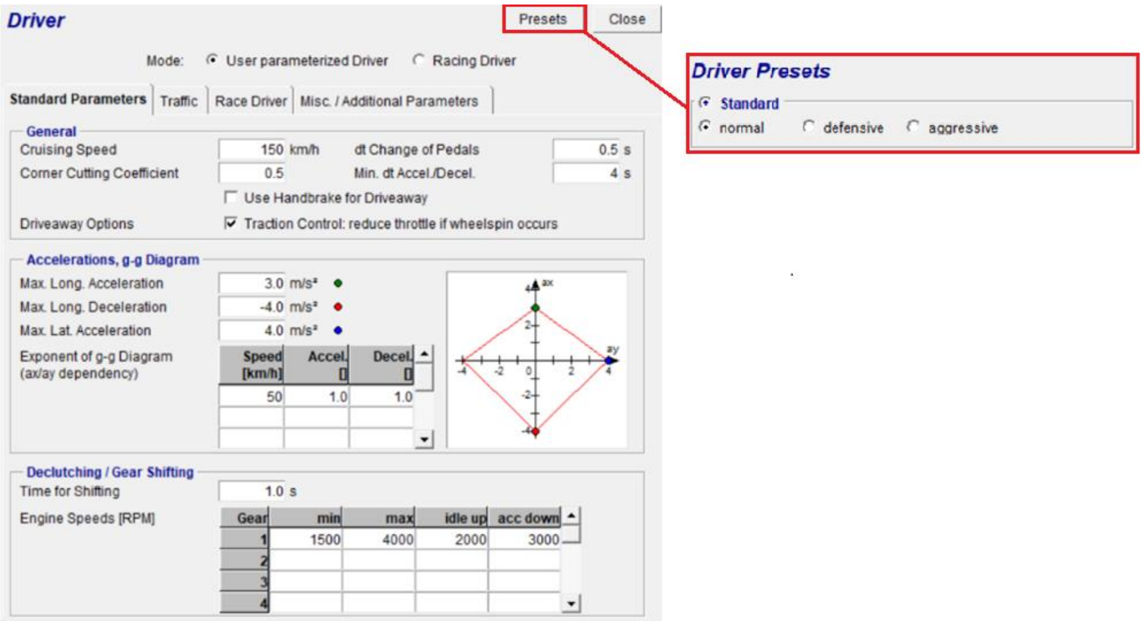


Figura 1.10 - IPG Driver

1.1.1 *Ramp Steer*

La prima simulazione presentata è la manovra a chiocciola, detta anche Ramp Steer, e viene definita come segue: raggiunta una velocità iniziale desiderata, si varia l'angolo volante con una pendenza costante (comando a rampa), cercando di mantenere quanto più costante la velocità al valore preimpostato.

Per implementarla su CarMaker, è necessario definire tre fasi:

- **Fase 1:** accelerazione fino al raggiungimento della velocità desiderata, in questo caso 50 km/h. Dato che non si conosce a priori il tempo necessario affinché il veicolo raggiunga tale velocità, è importante inserire una condizione finale sulla velocità stessa, invece di impostare manualmente la durata temporale di questa fase:

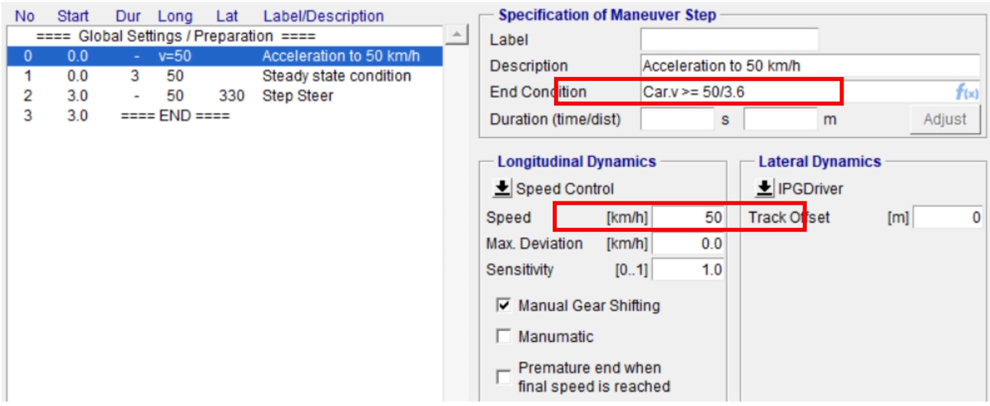


Figura 1.11 - Fase 1 Ramp Steer

- **Fase 2:** è una "steady state condition" della durata di 3 secondi, per consentire al veicolo di stabilizzare la propria velocità a seguito della fase di accelerazione:

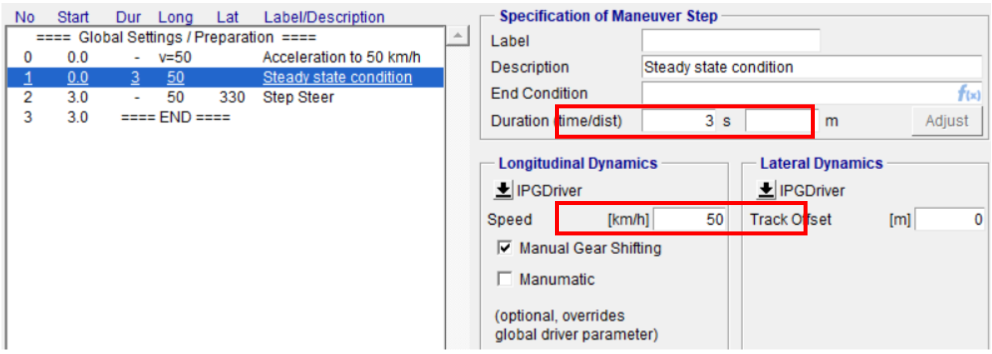


Figura 1.12 - Fase 2 Ramp Steer

- **Fase 3**: aumento dell'angolo volante in maniera costante, in modo tale da ottenere un andamento lineare a rampa con pendenza impostata a 11 deg/s. In questo caso viene utilizzato il comando "Steer Step" che richiede come input l'ampiezza, ovvero il valore massimo di angolo volante che si vuole impostare, e la durata dell'intervallo entro il quale deve essere raggiunto. Imponendo così un'ampiezza pari a 220° e un intervallo di 20 secondi, si ottiene una pendenza costante di 11 deg/s. Inoltre, dato che si vuole cercare di mantenere la velocità del veicolo il più costante possibile, viene imposta come condizione finale il raggiungimento di una velocità inferiore a 40 km/h:

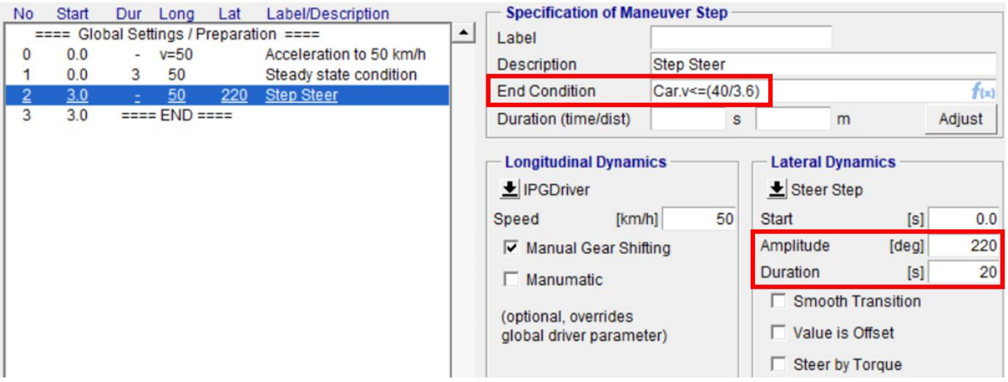
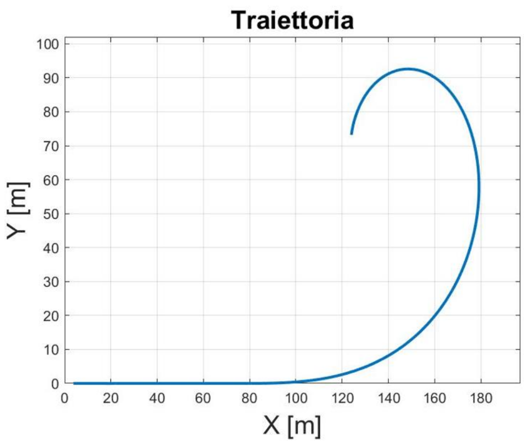
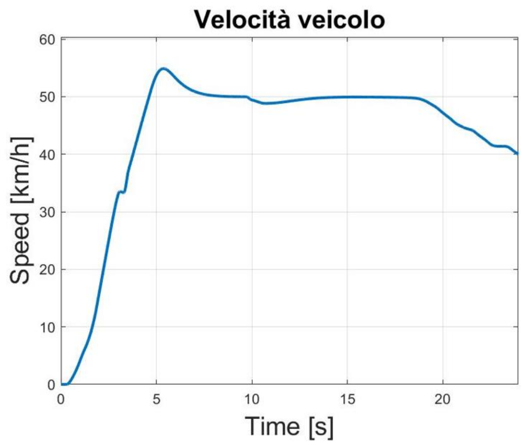
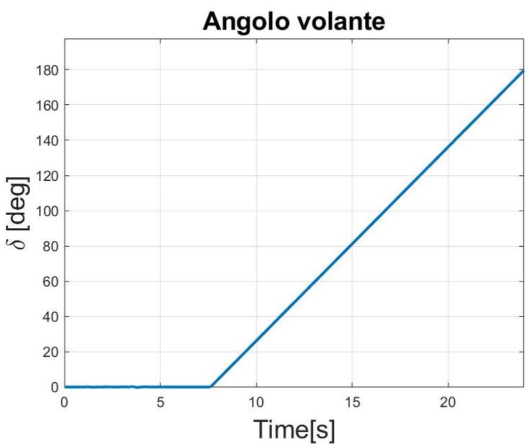


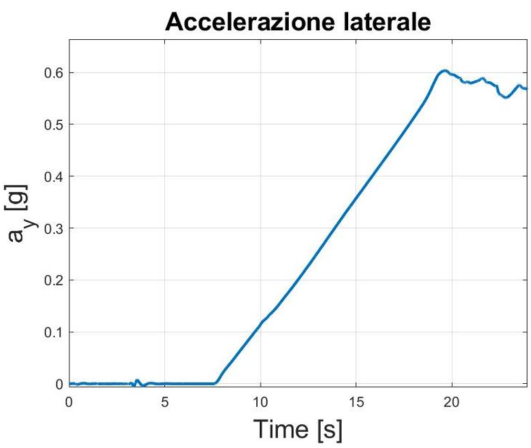
Figura 1.13 - Fase 3 Ramp Steer

Come anticipato nel paragrafo precedente, eseguita la simulazione è possibile importare i risultati in Matlab, per plottare gli andamenti delle variabili desiderate e analizzare il comportamento del veicolo durante l'intera manovra:









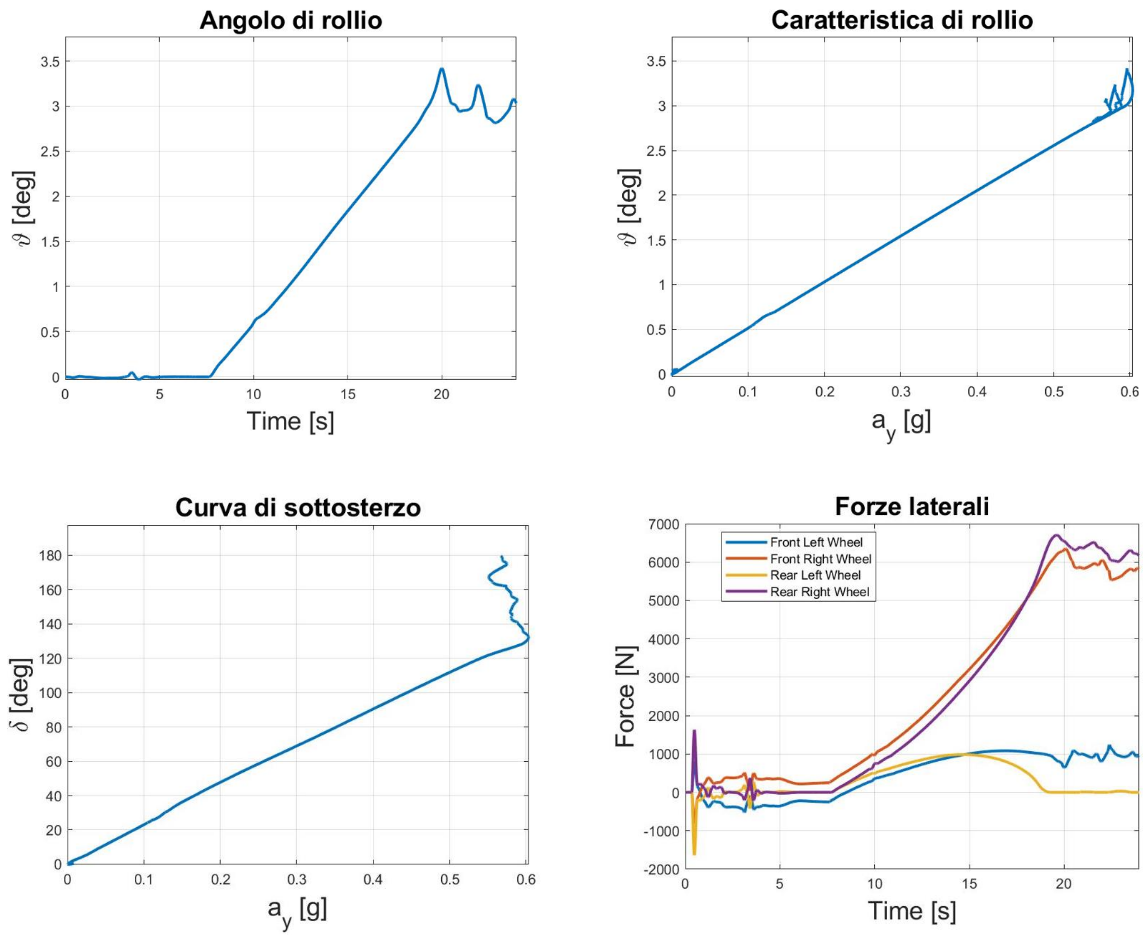


Figura 1.14 - Grafici caratteristici Ramp Steer

Con riferimento ai grafici riportati sopra, si può osservare che il veicolo è in grado di mantenere la velocità costante al valore prefissato di 50 km/h fino all'istante 19s circa, momento in cui viene raggiunta la massima accelerazione laterale di 0.6g. Di conseguenza, dato che l'accelerazione laterale rappresenta la forzante del moto di rollio, l'angolo di rollio assume un andamento analogo all'accelerazione, raggiungendo il valore massimo in corrispondenza dell'accelerazione laterale massima. Successivamente, l'angolo volante continua ad aumentare, ma il veicolo non è più in grado di seguire la traiettoria imposta in quelle condizioni, come si può vedere anche dalle forze laterali degli pneumatici che arrivano a saturazione. Quindi, il veicolo inizia a perdere velocità perché non è più in grado di generare le forze a terra necessarie per mantenere la velocità costante.

Inoltre, essendo una manovra quasi stazionaria perché l'angolo volante aumenta lentamente, è importante osservare che si ottiene una caratteristica di rollio lineare che tornerà utile nei capitoli successivi per il calcolo della rigidezza a rollio.

1.1.2 Steering Pad

La seconda manovra è lo Steering Pad e consiste nel far percorrere al veicolo una rotonda a raggio costante incrementando lentamente la velocità. Per l'implementazione su CarMaker è sufficiente quindi imporre al guidatore di accelerare fintanto che è in grado di seguire la traiettoria circolare prestabilita. A questo proposito viene aggiunta una "End Condition", che pone fine alla simulazione nel caso in cui la deviazione del veicolo rispetto alla traiettoria prestabilita sia superiore a 0.5m:

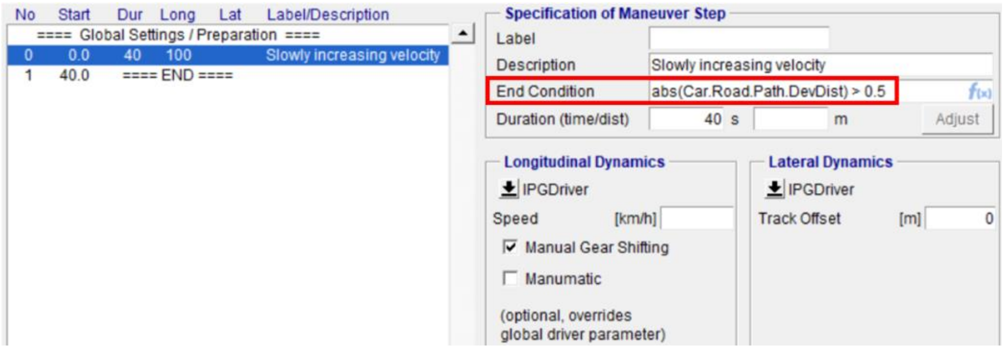


Figura 1.15 - Fase 1 Steering Pad

Inoltre, dato che il test prevede un incremento della velocità molto lento, è importante limitare la massima accelerazione longitudinale del veicolo. In particolare, come si può osservare nella figura riportata sotto, è stato scelto un valore massimo di accelerazione pari a 0.5 m/s^2.

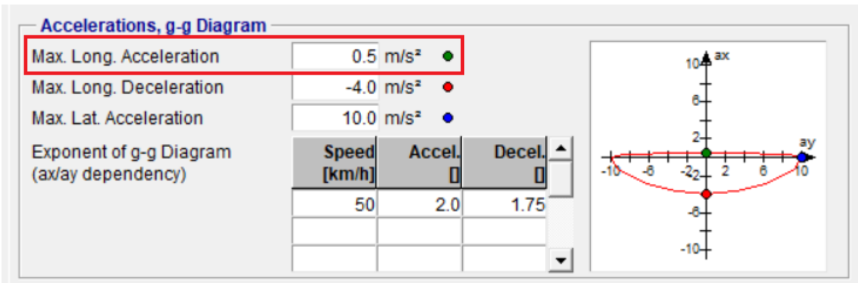
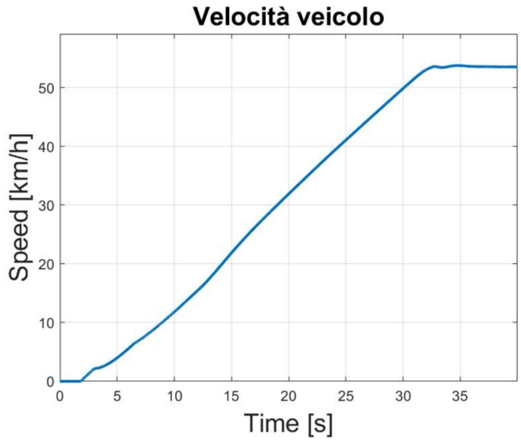
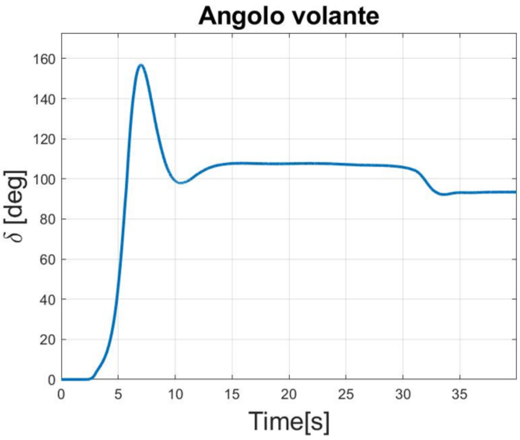
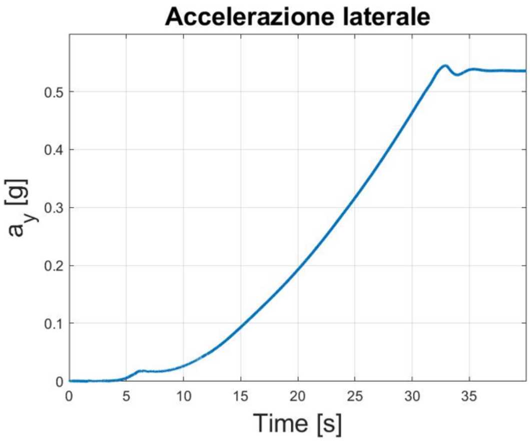


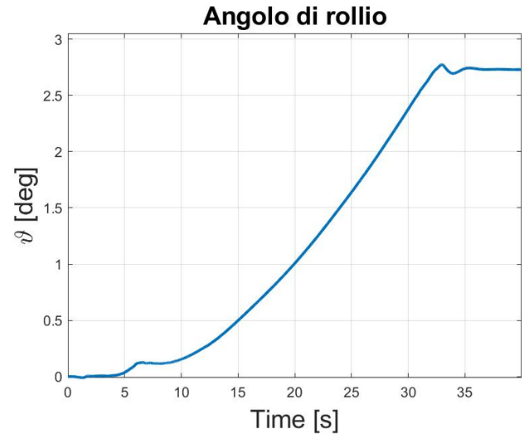
Figura 1.16 - Fase 2 Steering Pad

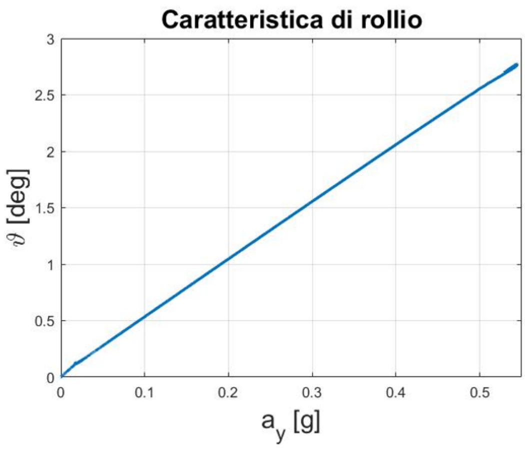
Di seguito vengono riportate alcune delle caratteristiche principali ottenute:

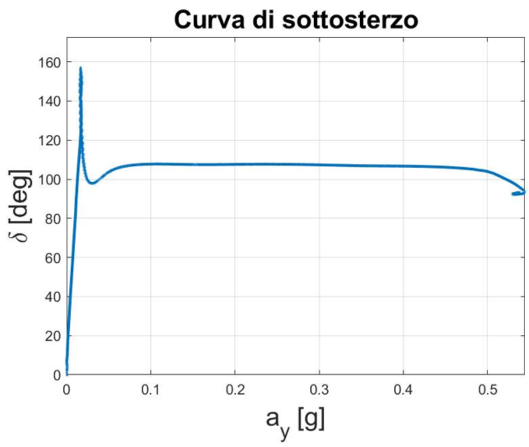












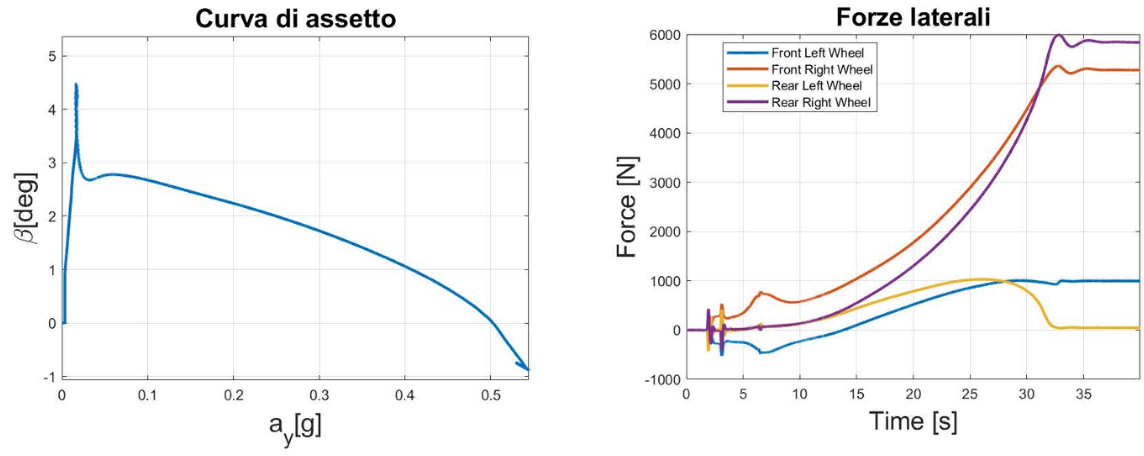


Figura 1.17 - Grafici caratteristici Steering Pad

Inoltre, considerando che anche lo Steering Pad è una manovra in regime quasi stazionario come la manovra di Ramp Steer, ci si aspetta di ottenere gli stessi risultati nelle due prove per quanto riguarda, ad esempio, l'angolo di assetto dinamico e la caratteristica di rollio. Comparando quindi graficamente le grandezze relative alle due manovre è stato possibile confermare che le due simulazioni sono state eseguite in maniera corretta:

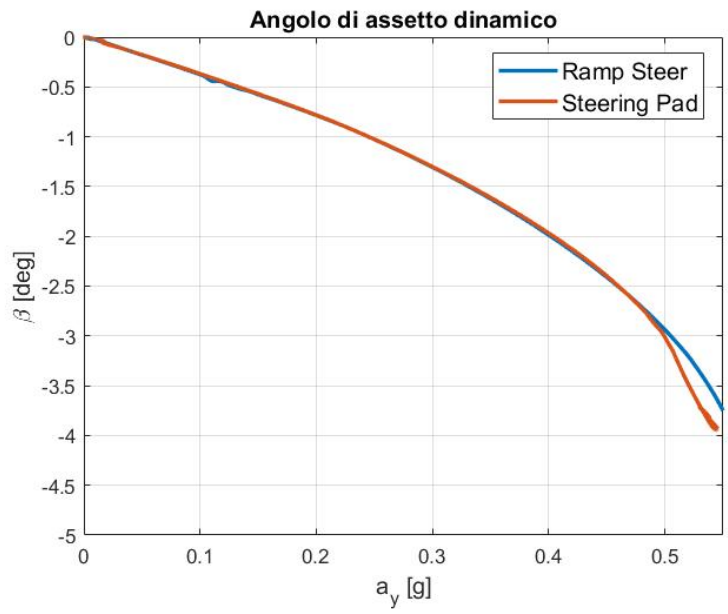


Figura 1.18 - Confronto angolo di assetto dinamico

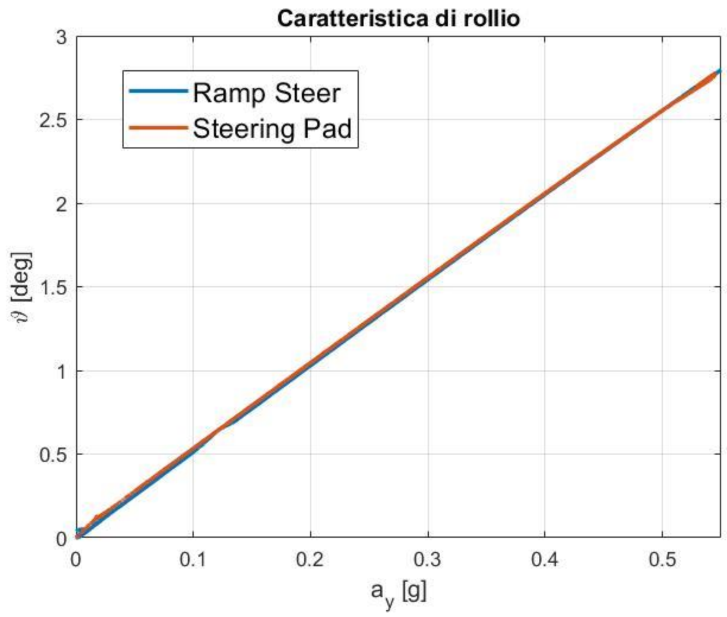


Figura 1.19 - Confronto caratteristica di rollio

1.1.3 Step Steer

L'ultima manovra proposta è il colpo di sterzo, detta anche Step Steer, così definita: raggiunta una velocità iniziale desiderata, si varia l'angolo volante in un intervallo di tempo molto ristretto (comando a gradino), cercando di mantenere la velocità costante. Le fasi imposte per l'implementazione della manovra sono:

- **Fase 1**: accelerazione fino alla velocità desiderata, in questo caso 50 km/h;

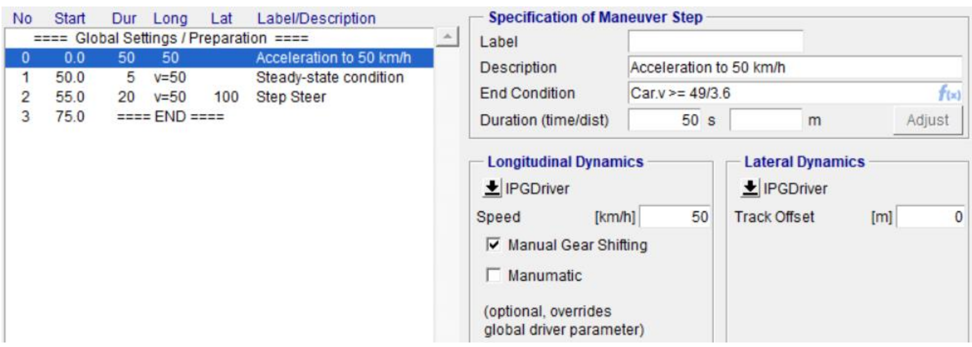


Figura 1.20 - Fase 1 Step Steer

- **Fase 2**: è una “steady state condition” della durata di 3 secondi, per consentire al veicolo di stabilizzare la propria velocità a seguito della fase di accelerazione:

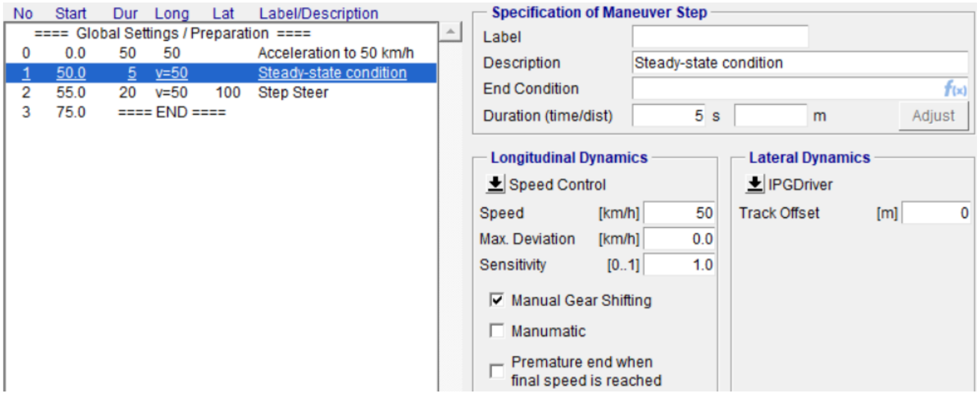


Figura 1.21 - Fase 2 Step Steer

- **Fase 3**: colpo di sterzo da 0 a 100 deg, con pendenza pari a 500 deg/s.

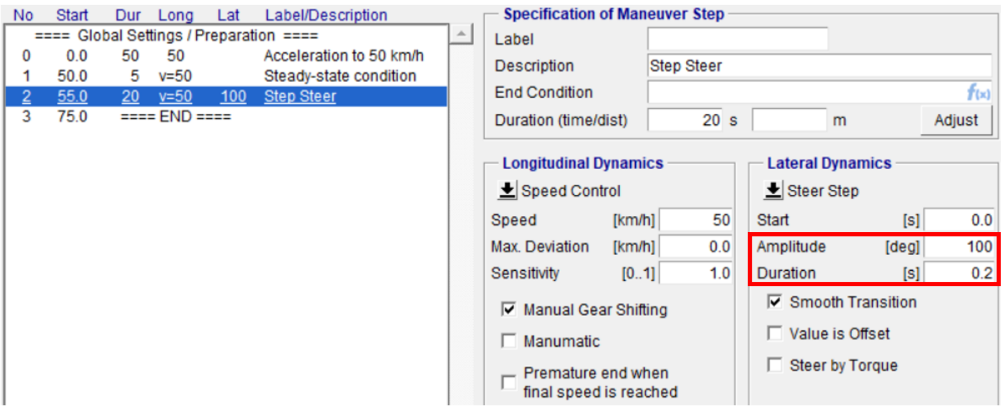
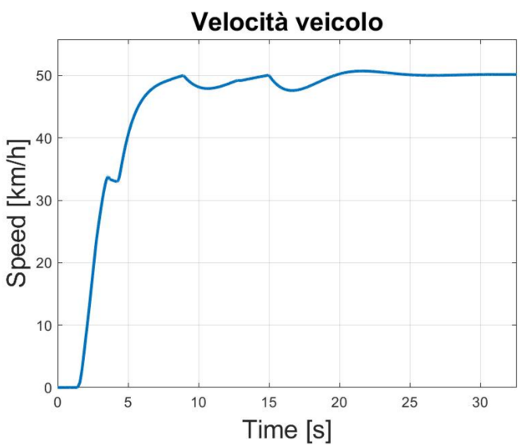
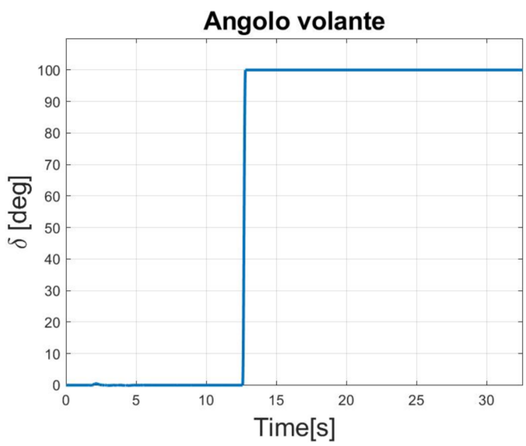


Figura 1.22 - Fase 3 Step Steer

Di seguito vengono riportati gli andamenti di alcune caratteristiche principali ricavate dalla manovra:





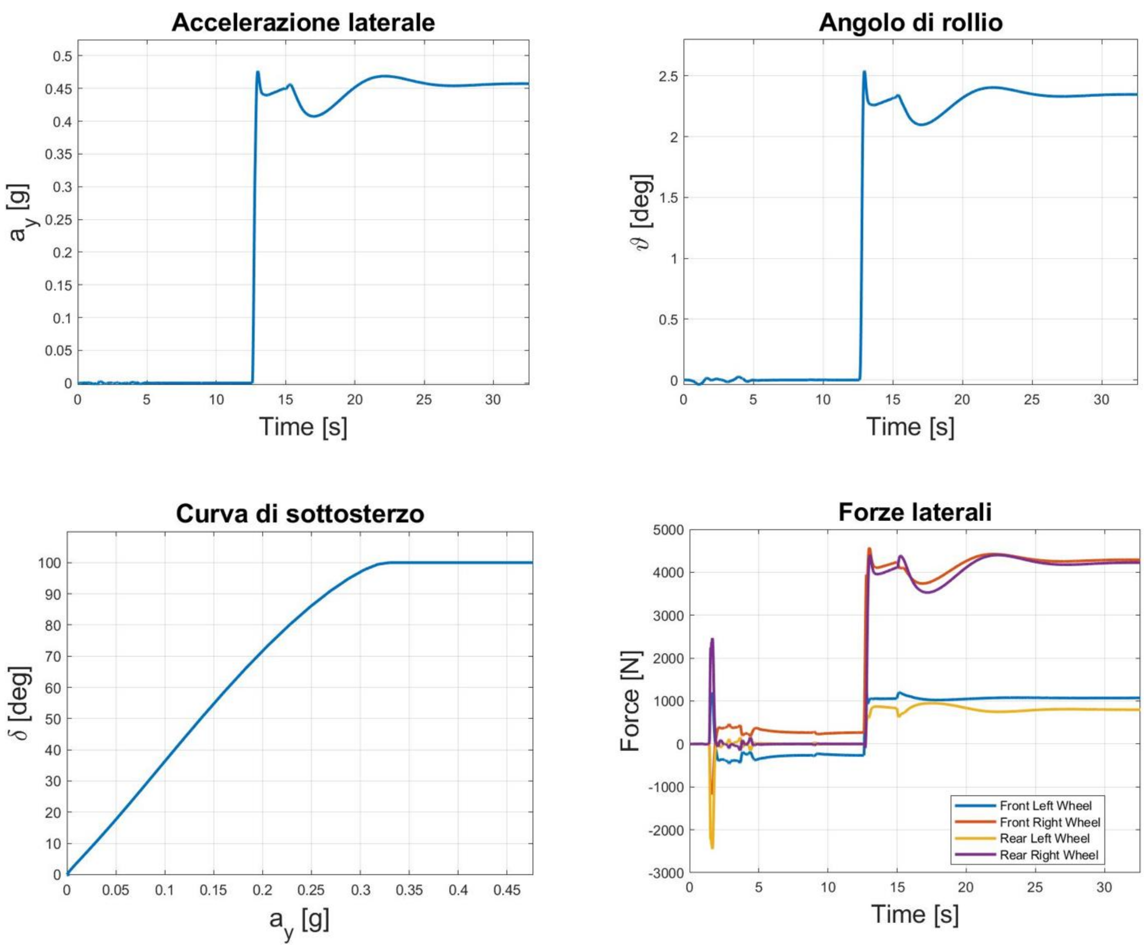


Figura 1.23 - Grafici caratteristici Step Steer

1.2 Model Check

Per avere una visione più completa dei parametri del veicolo, è possibile servirsi del "Model Check", ovvero uno strumento di CarMaker che consente di generare automaticamente i diagrammi di tutti i sottomodelli (sospensioni, pneumatici, freni, powertrain, ecc.). In questo modo, è possibile controllare visivamente le varie caratteristiche, per verificare che non vi siano andamenti anomali o errori di immissione dei dati. Il Model Check è accessibile tramite il percorso "Simulation>Model Check" e si presenta come segue:

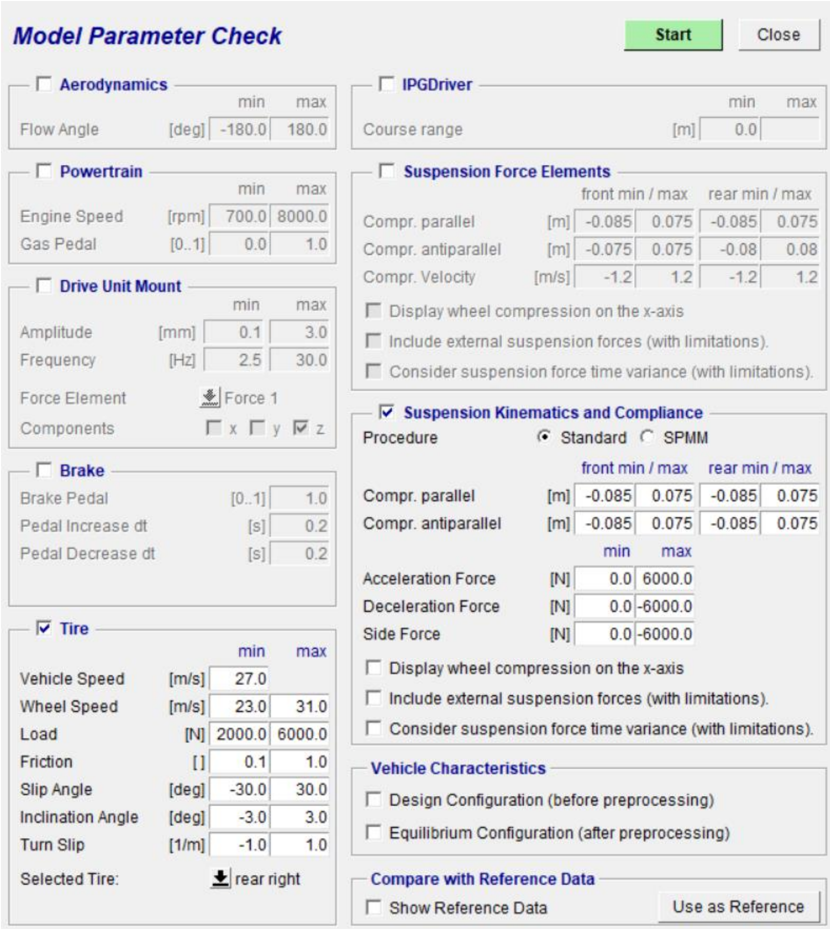


Figura 1.24 - Model Check

1.2.1 Suspension Model Check

Per chiarire meglio le funzionalità di questo strumento vengono riportate le caratteristiche relative alle sospensioni ottenute tramite Model Check. In particolare, considerando il sottomodello "Suspension Kinematics and Compliance" è possibile ottenere, ad esempio:

- l'andamento dell'altezza del centro di rollio anteriore e posteriore in funzione dello scuotimento verticale del centro ruota "q0", per compressione parallela e antiparallela:

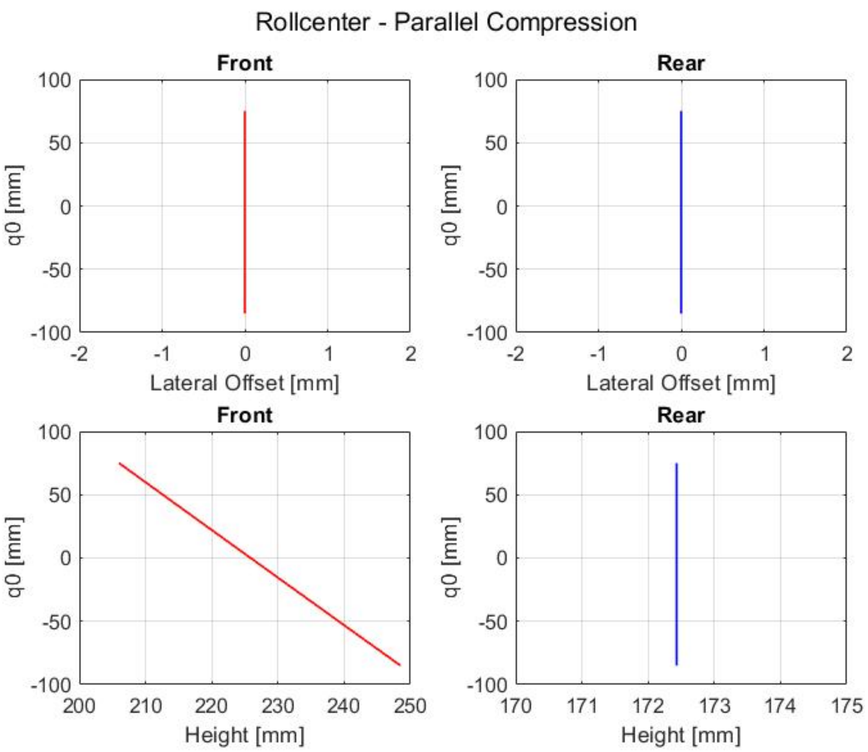


Figura 1.25 - Altezza centro di rollio (Compressione Parallela)

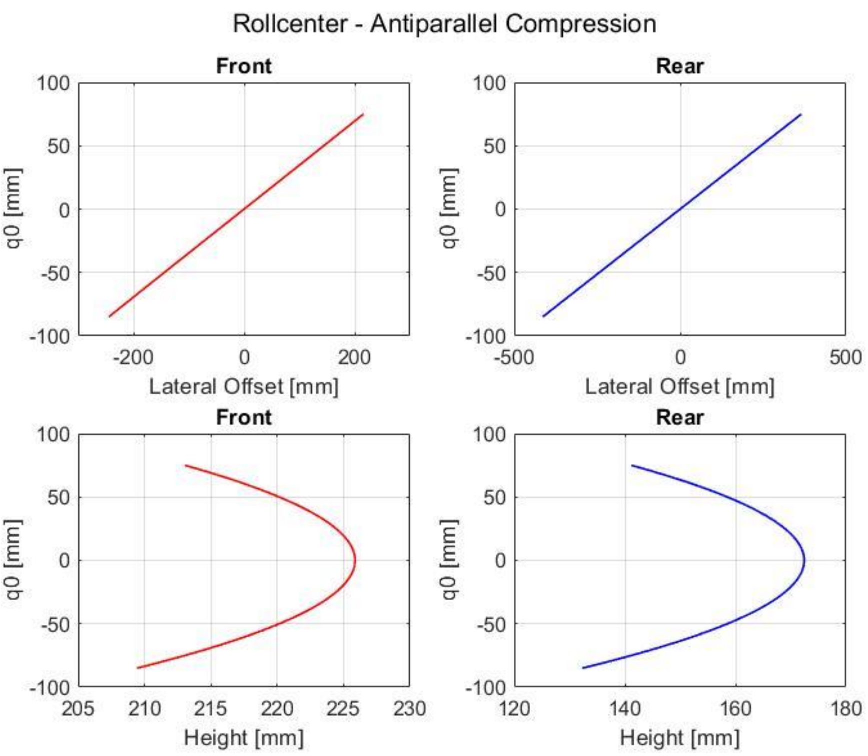


Figura 1.26 - Altezza centro di rollio (Compressione Antiparallela)

- l'andamento degli angoli caratteristici dell'assale anteriore in funzione dello scuotimento verticale del centro ruota "q0" per una compressione antiparallela:

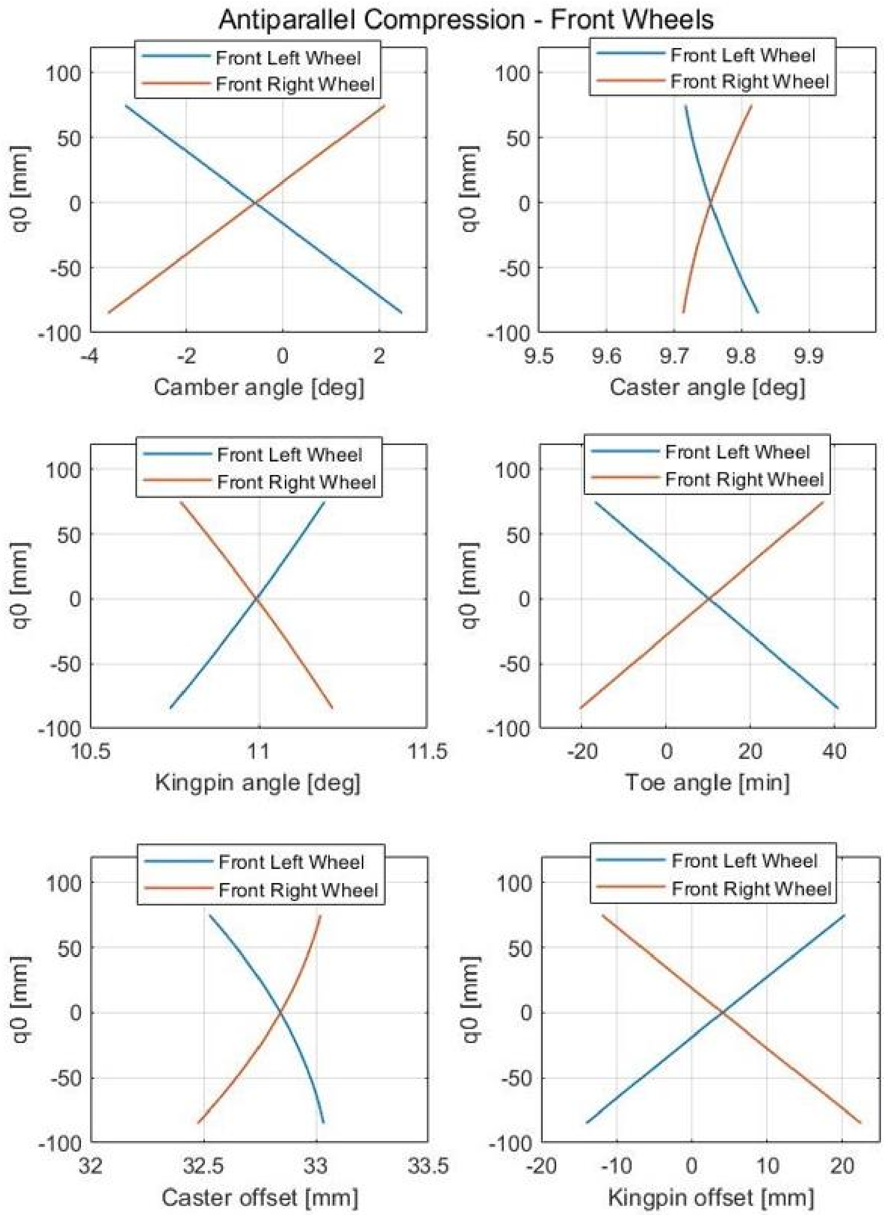


Figura 1.27 - Angoli caratteristici assale anteriore

2 Modello a 3 gradi di libertà

Come anticipato nel capitolo introduttivo, il modello CarMaker rappresenta soltanto il punto di riferimento per le analisi sugli indici che, in realtà, verranno implementati su un modello semplificato. Infatti, l'obiettivo è quello di ottenere un modello molto semplice, ma accurato, in modo tale da ridurre al minimo i costi e la complessità del sistema che deve essere implementato sui veicoli reali.
Il modello semplificato proposto in questo paragrafo, e su cui verranno effettuate le successive simulazioni, è quello a tre gradi di libertà riportato nell'immagine seguente:

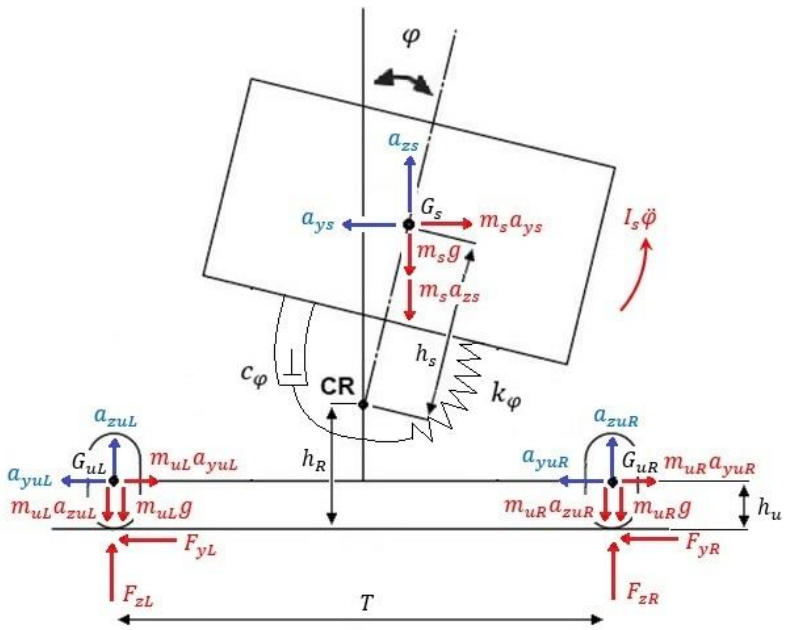


Figura 2.1 - Modello a 3 gradi di libertà

Dove:

- m_s è la massa sospesa;
- m_{ui} è la massa non sospesa i-esima ($m_{ui} = m_{uFL} + m_{uFR} + m_{uRL} + m_{uRR}$)
- $m_{tot} = m_u + m_s$;
- $F_{zR} = F_{zFR} + F_{zRR}$ e $F_{zL} = F_{zFL} + F_{zRL}$ sono le forze verticali agenti rispettivamente sugli pneumatici di destra e sinistra;
- $F_{yR} = F_{yFR} + F_{yRR}$ e $F_{yL} = F_{yFL} + F_{yRL}$ sono le forze laterali;

- k_φ e c_φ sono la rigidezza e lo smorzamento a rollio;
- a_{zs}, a_{zui}, a_{ys}, a_{yui} sono le accelerazioni verticali e laterali della massa sospesa e delle masse non sospese;
- T è la carreggiata;
- h_R è l'altezza del centro di rollio da terra;
- h_s è la distanza tra il baricentro della massa sospesa e il centro di rollio;
- I_s è il momento d'inerzia della massa sospesa;

In particolare, i gradi di libertà di questo modello sono il moto laterale, il moto verticale e il moto di rollio relativo tra la massa sospesa e non sospesa. Inoltre, è importante considerare le seguenti ipotesi:

- le sospensioni anteriori e posteriori sono state modellate come un unico sistema molla-smorzatore torsionale;
- le masse non sospese del veicolo sono state condensate in due uniche masse indicate rispettivamente con m_{uR} (massa non sospesa Right) e m_{uL} (massa non sospesa Left), posizionate in corrispondenza del centro ruota di destra e di sinistra;
- l'angolo di inclinazione della strada è considerato nullo, pertanto questo modello è applicabile soltanto su strada piana.

A questo punto, considerando il modello completo riportato in figura 2.1, le equazioni di equilibrio che si possono scrivere sono:

$$\begin{cases} F_{yR} + F_{yL} - m_s a_{ys} - \sum_i m_{ui} a_{yui} = 0 \\ F_{zR} + F_{zL} - m_s a_{zs} - \sum_i m_{ui} a_{zui} - (m_s + m_{uR} + m_{uL}) g = 0 \\ (F_{zR} - F_{zL}) \frac{T}{2} + I_s \ddot{\varphi} - m_s a_{ys} (h_R + h_s \cos\varphi) - (m_s g + m_s a_{zs}) h_s \sin\varphi - \sum_i m_{ui} a_{yui} h_u + \\ + \frac{T}{2} (m_{uL} a_{zuL} - m_{uR} a_{zuR}) = 0 \end{cases}$$

Considerando piccoli angoli di rollio ($\cos\varphi = 1$ e $\sin\varphi = \varphi$) si ottiene:

$$\begin{cases} F_{yR} + F_{yL} = m_s a_{ys} + \sum_i m_{ui} a_{yui} \\ F_{zR} + F_{zL} = m_s a_{zs} + \sum_i m_{ui} a_{zui} + m_{tot} g \\ (F_{zR} - F_{zL})\frac{T}{2} + I_s \ddot{\varphi} - m_s a_{ys}(h_R + h_s) - (m_s g + m_s a_{zs}) h_s \varphi - \sum_i m_{ui} a_{yui} h_u + \\ +\frac{T}{2}(m_{uL} a_{zuL} - m_{uR} a_{zuR}) = 0 \end{cases}$$

Scomponendo il modello, i diagrammi di corpo libero della massa sospesa e non sospesa sono:

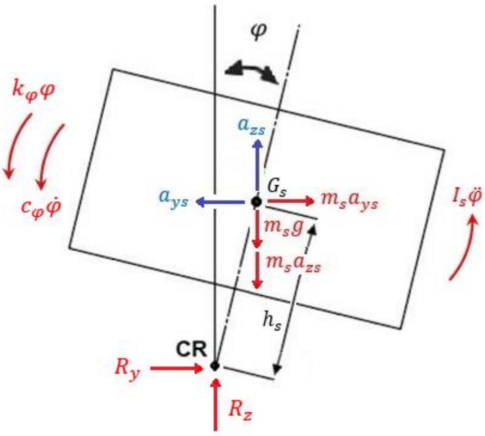


Figura 2.2 – Diagramma di corpo libero massa sospesa

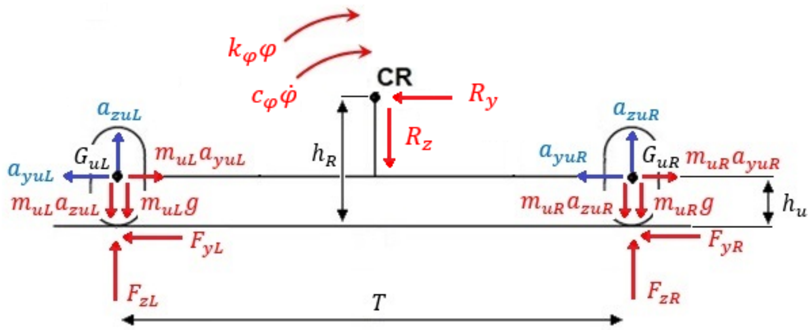


Figura 2.3 – Diagramma di corpo libero massa non sospesa

Dal diagramma di corpo libero della massa sospesa si ricavano:

$$\begin{cases} R_y + m_s a_{ys} = 0 \\ R_z - m_s a_{zs} - m_s g = 0 \\ I_s \ddot{\varphi} + c_\varphi \dot{\varphi} + k_\varphi \varphi = m_s a_{ys} h_s \cos\varphi + m_s (a_{zs} + g) h_s \sin\varphi \end{cases}$$

Particolare attenzione deve essere rivolta all'equilibrio alla rotazione perché definisce la dinamica di rollio della massa sospesa e tornerà molto utile nei capitoli successivi nel calcolo dei trasferimenti di carico.

Infine, considerando il diagramma di corpo libero della massa non sospesa, le equazioni ad esso associato sono:

$$
\begin{cases}
F_{zR} + F_{zL} - R_z - (m_{uL} + m_{uR})g - m_{uL}a_{zuL} - m_{uR}a_{zuR} = 0 \\
F_{yL} + F_{yR} + R_y - m_{uR}a_{yuR} - m_{uL}a_{yuL} = 0 \\
(F_{zR} - F_{zL})\frac{T}{2} = \left(F_{yR} + F_{yL}\right)h_R + k_\varphi \varphi + c_\varphi \dot{\varphi} - \sum_i m_{ui}a_{yui}(h_R - h_u) + \\
\qquad + \frac{T}{2}\left(m_{uR}a_{zuR} - m_{uL}a_{zuL}\right)
\end{cases}
$$

Definite le equazioni di equilibrio del modello semplificato, per poterlo implementare su Matlab è necessario identificare tutti i parametri caratteristici del modello. A questo proposito, si è fatto riferimento ai valori forniti da CarMaker per il MB Sprinter presentato precedentemente, in modo tale da ottenere un modello semplificato con le stesse caratteristiche che possa così essere confrontato con il modello di riferimento.

Di seguito viene riportata una tabella contenente tutti i parametri forniti direttamente da CarMaker:

Parametro	***Descrizione***	***Valore***
m_s	Massa sospesa	1923.9 kg
m_{FR}	Massa non sospesa FR	78.715 kg
m_{FL}	Massa non sospesa FL	78.715 kg
m_{RR}	Massa non sospesa RR	109.314 kg
m_{RL}	Massa non sospesa RL	109.314 kg
m_{tot}	Massa totale	2300 kg
I_s	Momento d'inerzia	801.34 kgm^2
L	Passo del veicolo	4.34 m
a	Semipasso anteriore	2.185 m
b	Semipasso posteriore	2.155 m

T_{front}	Carreggiata anteriore	1.681 m
T_{rear}	Carreggiata posteriore	1.680 m
h_{CG}	Altezza baricentro m_s	1.302 m
h_u	Altezza baricentro m_{ui}	0.324 m
h_R	Altezza centro di rollio	0.1902 m
h_s	Distanza tra baricentro massa sospesa e	1.1118 m
k_φ	Rigidezza a rollio	245649 Nm/rad
c_φ	Smorzamento a rollio	6974 Nms/rad

Tabella 2.1 - Parametri veicolo

Tra i valori riportati in tabella sono presenti anche la rigidezza e lo smorzamento a rollio, ma in realtà si tratta di parametri che devono essere calcolati perché non vengono forniti direttamente da CarMaker. Infatti, il software mette a disposizione soltanto i valori di rigidezza e smorzamento lineari delle sospensioni e non torsionali come nel modello semplificato. Pertanto, nei paragrafi successivi viene riportata la metodologia di calcolo utilizzata per ottenere i parametri a rollio.

2.1 Rigidezza a rollio

Per quanto riguarda il calcolo della rigidezza a rollio, è importante evidenziare che il valore complessivo deriva dai contributi delle molle, degli pneumatici e delle barre antirollio.

Partendo dal contributo delle molle, bisogna introdurre un parametro chiamato "Installation Ratio", che tiene conto del fatto che uno spostamento "Δz" dello pneumatico non si traduce in una compressione delle molle di uguale entità. Infatti, per la geometria del sistema di sospensione, il braccio con cui lavorano le molle "d" è inferiore rispetto a quello degli pneumatici "c":

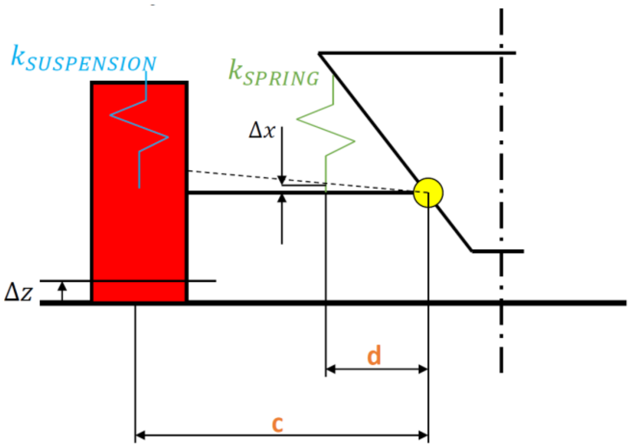


Figura 2.4 - Installation Ratio [10]

Il rapporto tra i due spostamenti prende il nome di “Installation Ratio” e viene identificato come:

$$IR = \frac{\Delta x}{\Delta z}$$

La rigidezza della sospensione può essere calcolata come:

$$k_{suspension} = \frac{\Delta F_z}{\Delta z}$$

Tramite equivalenza del lavoro si ottiene:

$$\Delta F_z = \Delta F_{spring} \cdot IR$$

Quindi, riprendendo la rigidezza della sospensione:

$$k_{suspension} = \frac{\Delta F_{spring} \cdot IR}{\Delta z} = \frac{\Delta F_{spring}}{\Delta x} \cdot IR^2 = k_{spring} \cdot IR^2$$

Facendo riferimento alla figura 2.5 riportata sotto, la rigidezza a rollio può essere calcolata come:

$$k_{spring-roll} = \frac{\Delta M_{anti-roll}}{\Delta \varphi}$$

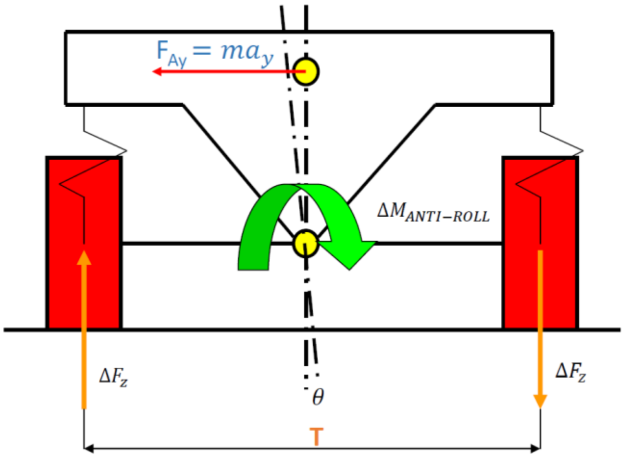


Figura 2.5 - Momento antirollante [10]

Dove il momento antirollante vale:

$$\Delta M_{anti-roll} = \Delta F_z \cdot T$$

Inoltre, lo spostamento verticale "Δz" può essere legato all'angolo di rollio come:

$$\Delta z = \Delta \varphi \cdot \frac{T}{2}$$

Quindi, la rigidezza a rollio della sospensione vale:

$$k_{spring-roll} = \frac{\Delta M_{anti-roll}}{\Delta \varphi} = \frac{\Delta F_z \cdot T}{\Delta z \cdot \frac{2}{T}} = \frac{\Delta F_z}{\Delta z} \cdot \frac{T^2}{2} = k_{suspension} \cdot \frac{T^2}{2} = k_{spring} \cdot IR^2 \cdot \frac{T^2}{2}$$

Analogamente, dato che CarMaker fornisce un valore di rigidezza lineare anche per le barre antirollio:

$$k_{ARB-roll} = k_{ARB-F} \cdot IR^2 \cdot \frac{T^2}{2}$$

Avendo chiarito la metodologia di calcolo è possibile ora passare al calcolo effettivo della rigidezza a rollio del nostro modello, i cui parametri presi da CarMaker sono:

- $k_{spring-F} = 55000\ N/m$
- $k_{spring-R} = 80000\ N/m$
- $k_{ARB-F} = k_{ARB-R} = 30000\ N/m$
- $IR_{spring} = IR_{stabi} = -1\ m/m$

- $k_{tire} = 376693\ N/m$

Inoltre, è importante osservare che nelle formule precedenti non è stata considerata la rigidezza degli pneumatici, il cui contributo deve essere considerato come una molla in serie alle sospensioni:

$$k_{spring-tire-F} = \frac{k_{spring-F} \cdot k_{tire}}{k_{spring-F} + k_{tire}} = 47993\ \frac{N}{m}$$

$$k_{spring-tire-R} = \frac{k_{spring-R} \cdot k_{tire}}{k_{spring-R} + k_{tire}} = 65986\ \frac{N}{m}$$

Quindi, utilizzando le formule ricavate precedentemente:

$$k_{roll-F} = k_{spring-tire-F} \frac{T_{front}^2}{2}\ IR_{spring}^2 + k_{ARB-F} \frac{T_{front}^2}{2}\ IR_{stabi}^2 = 110194\ \frac{Nm}{rad}$$

$$k_{roll-R} = k_{spring-tire-R} \frac{T_{rear}^2}{2}\ IR_{spring}^2 + k_{ARB-R} \frac{T_{rear}^2}{2}\ IR_{stabi}^2 = 135455\ \frac{Nm}{rad}$$

$$k_{roll-TOT} = k_{roll-F} + k_{roll-R} = 245649\ \frac{Nm}{rad}$$

Il valore così ottenuto può essere verificato calcolando la rigidezza a rollio in maniera semplificata, eseguendo su CarMaker una manovra di Ramp Steer in regime quasi-stazionario. Dall'equilibrio alla rotazione della massa sospesa intorno al centro di rollio, considerando piccoli angoli di rollio e trascurando l'accelerazione verticale si era ottenuta l'equazione che descrive la dinamica a rollio della massa sospesa:

$$I_s\ddot{\varphi} + c_\varphi\dot{\varphi} + k_\varphi\varphi - m_s a_{ys} h_s - m_s g h_s \varphi = 0$$

In condizioni stazionarie si possono considerare $\dot{\varphi} = 0\ e\ \ddot{\varphi} = 0$, quindi:

$$k_\varphi\varphi - m_s a_{ys} h_s - m_s g h_s \varphi = 0$$

$$\left(k_\varphi - m_s g h_s\right) \cdot \varphi = m_s\ a_{ys} h_s$$

$$k_\varphi - m_s g h_s = m_s \frac{a_{ys}}{\varphi} h_s$$

$$k_\varphi = \frac{a_{ys}}{\varphi} m_s h_s + m_s g h_s = \left(\frac{a_{ys}}{\varphi} + g\right) \cdot m_s \cdot h_s$$

A questo punto, l'unico dato mancante è il rapporto $\frac{a_{yG}}{\varphi}$ che può essere però ricavato facilmente dalla caratteristica di rollio, ottenuta tramite una manovra di Ramp Steer non aggressiva (11 deg/s):

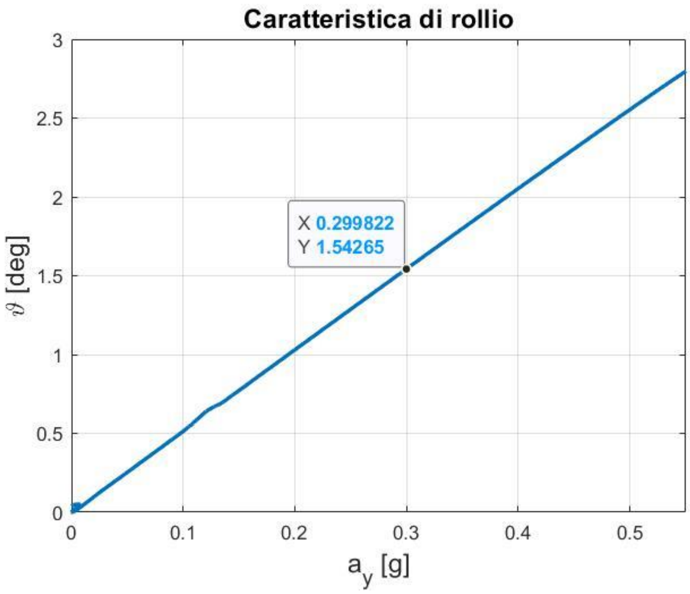


Figura 2.6 - Caratteristica di rollio Ramp Steer

Infatti, in questo modo si ottiene una caratteristica di rollio lineare e, quindi, considerando un punto qualsiasi della retta si può ricavare il rapporto $\frac{a_{ys}}{\varphi}$ mancante per calcolare la rigidezza a rollio:

$$k_{\varphi} = \left(\frac{a_{ys}}{\varphi} + g\right) \cdot m_s \cdot h_s = 254650 \ \frac{Nm}{rad}$$

Il valore ottenuto con questo metodo è molto simile a quello precedente e ne conferma quindi la correttezza.

2.2 Smorzamento a rollio

Lo smorzamento a rollio può essere calcolato in maniera analoga a quanto fatto per la rigidezza a rollio, tenendo però presente che in questo caso i contributi derivano soltanto dall'ammortizzatore e dagli pneumatici:

- $c_{damper-F} = 4322.3 \ Ns/m$
- $c_{damper-R} = 4721.9 \ Ns/m$

- $c_{tire} = 5446.5\,\frac{Ns}{m}$
- $IR_{damper} = -1\ m/m$

Anche in questo caso, considerando lo smorzamento degli pneumatici in serie alle sospensioni:

$$c_{roll-F} = \frac{c_{damper-F} \cdot c_{tire-F}}{c_{damper-F} + c_{tire-F}} = 2410\ \frac{Ns}{m}$$

$$c_{roll-R} = \frac{c_{damper-R} \cdot c_{tire-R}}{c_{damper-R} + c_{tire-R}} = 2529\ \frac{Ns}{m}$$

Quindi, lo smorzamento a rollio vale:

$$c_{roll-F} = c_{damper-F} \cdot \frac{T^2}{2}\ IR_{damper}^2 = 3405\ \frac{Nms}{rad}$$

$$c_{roll-R} = c_{damper-R} \cdot \frac{T^2}{2}\ IR_{damper}^2 = 3569\ \frac{Nms}{rad}$$

$$c_{roll-TOT} = c_{roll-F} + c_{roll-R} = 6974\ \frac{Nms}{rad}$$

3 Modello a 11 gradi di libertà

In alternativa al modello presentato nel paragrafo precedente, viene proposto anche un modello più complesso a undici gradi di libertà, i quali sono:

- moto laterale, verticale e rollio della massa sospesa (3 gdl);
- moto laterale e verticale delle quattro masse non sospese (8 gdl);

In realtà, questo modello verrà implementato soltanto nel calcolo del primo indice perché si osserverà che i risultati ottenuti con il modello a tre gradi di libertà sono già molto validi e non è necessario quindi complicarlo ulteriormente.

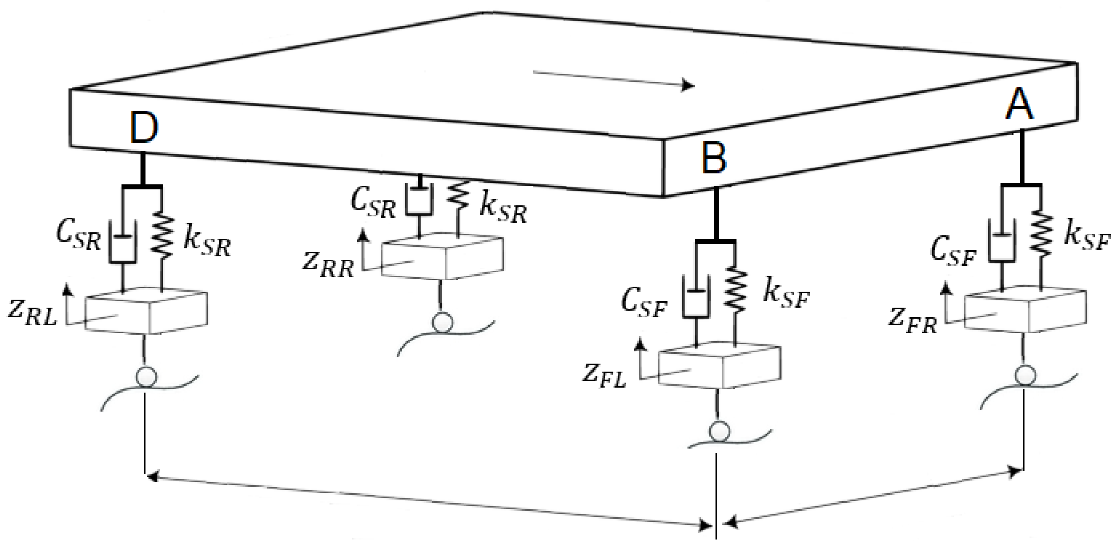


Figura 3.1 - Modello a 11 gradi di libertà

In particolare, con riferimento alla figura sopra riportata, i punti “A”, “B”, “C” e “D” rappresentano i punti di collegamento delle sospensioni con la massa sospesa, rispettivamente in corrispondenza della ruota FR, FL, RR e RL.

La differenza principale rispetto al modello a tre gradi di libertà è che in questo caso si tiene conto degli spostamenti degli pneumatici e, pertanto, non si possono più utilizzare i valori di rigidezza e smorzamento a rollio, perché le compressioni delle quattro sospensioni sono differenti tra loro. Quindi, scomponendo il diagramma di corpo libero bisogna tenere in considerazione che la compressione della singola sospensione è data dallo spostamento relativo tra la massa sospesa e non sospesa:

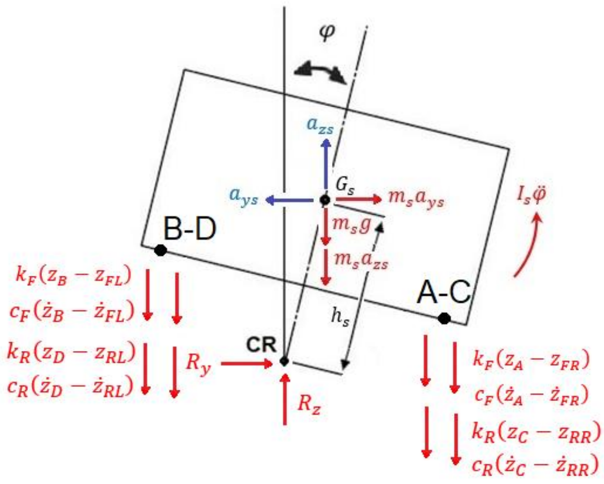


Figura 3.2 – Diagramma di corpo libero massa sospesa

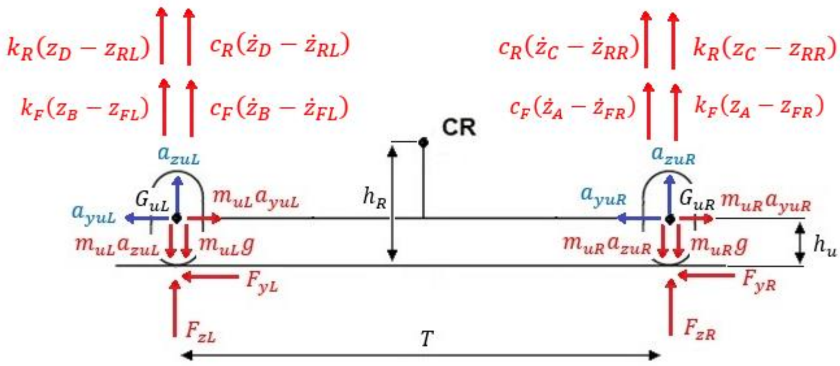


Figura 3.3 - Diagramma di corpo libero massa non sospesa

È importante evidenziare che, al fine di ottenere un diagramma di corpo libero più chiaro, nel diagramma di corpo libero della massa non sospesa sono state riportate soltanto le forze laterali, verticali e inerziali dell'assale anteriore, ma per la scrittura delle equazioni si dovrà tenere conto anche delle masse non sospese posteriori. A questo proposito, si evidenzia che le equazioni di corpo libero sono analoghe a quelle scritte per il modello a tre gradi di libertà, semplicemente con dei termini aggiuntivi a causa delle quattro masse non sospese e dei termini di rigidezza e smorzamento. Ad esempio, dal diagramma di corpo libero della massa non sospesa, scrivendo l'equilibrio alla rotazione intorno al centro di rollio si ottiene:

$(F_{zFR}+F_{zRR}-F_{zFL}-F_{zRL})\cdot\frac{T}{2}=\sum_i F_{yui}\cdot h_r-\sum_i m_{ui}a_{yui}(h_R-h_u)+G-\frac{T}{2}k_F(z_A-z_{FR})+-\frac{T}{2}k_R(z_C-z_{RR})-\frac{T}{2}c_F(\dot{z}_A-\dot{z}_{FR})-\frac{T}{2}c_R(\dot{z}_C-\dot{z}_{RR})+\frac{T}{2}k_F(z_B-z_{FL})+\frac{T}{2}k_R(z_D-z_{RL})++\frac{T}{2}c_F(\dot{z}_B-\dot{z}_{FL})+\frac{T}{2}c_R(\dot{z}_D-\dot{z}_{RL})$

Dove il termine G vale:

$G=\frac{T}{2}\ (m_{uFR}a_{zuFR}+m_{uRR}a_{zuRR}-m_{uFL}a_{zuFL}-m_{uRL}a_{zuRL})$

Considerando piccoli angoli di rollio si può scrivere:

$$z_A=z_G-\frac{T}{2}\varphi \quad\rightarrow\quad \dot{z}_A=\dot{z}_G-\frac{T}{2}\dot{\varphi}$$

$$z_B=z_G+\frac{T}{2}\varphi \quad\rightarrow\quad \dot{z}_B=\dot{z}_G+\frac{T}{2}\dot{\varphi}$$

$$z_C=z_G-\frac{T}{2}\varphi \quad\rightarrow\quad \dot{z}_C=\dot{z}_G-\frac{T}{2}\dot{\varphi}$$

$$z_D=z_G+\frac{T}{2}\varphi \quad\rightarrow\quad \dot{z}_D=\dot{z}_G+\frac{T}{2}\dot{\varphi}$$

Ottenendo così:

$$(F_{zFR}+F_{zRR}-F_{zFL}-F_{zRL})\cdot\frac{T}{2}=\sum_i F_{yui}\cdot h_R-\sum_i m_{ui}a_{yui}(h_R-h_u)+G+K+C$$

Dove i termini “K” e “C” includono i vari contributi di rigidezza e smorzamento:

$$K=\frac{T^2}{2}(k_F+k_R)\ \varphi+\frac{T}{2}k_F(z_{FR}-z_{FL})+\frac{T}{2}k_R(z_{RR}-z_{RL})$$

$$C=\frac{T^2}{2}(c_F+c_R)\dot{\varphi}+\frac{T}{2}c_F(\dot{z}_{FR}-\dot{z}_{FL})+\frac{T}{2}c_R(\dot{z}_{RR}-\dot{z}_{RL})$$

Si può osservare, quindi, che l’equazione ha esattamente la stessa forma di quella ottenuta per il modello a tre gradi di libertà e cambiano soltanto i termini di rigidezza e smorzamento che prima venivano calcolati come “$k_\varphi\varphi$" e "$c_\varphi\dot{\varphi}$".

4 Indici di rollover

Come anticipato nel paragrafo introduttivo, l'obiettivo di questo lavoro è lo sviluppo di indici predittivi al fine di riuscire a identificare in maniera anticipata il pericolo di ribaltamento. In particolare, gli indici proposti nei capitoli successivi sono:

- il Load Transfer Ratio (**LTR**);
- il Contour Line Rollover Index (**CLRI**);
- il Time To Rollover (**TTR**)

Inoltre, tali indici verranno valutati sulla base di due indici di performance:

- **tempo di predizione**, ovvero il tempo che intercorre tra l'istante in cui viene rilevato il pericolo e il momento in cui si verificherà;
- **accuratezza**, misurata rispetto al Reference Time che rappresenta esattamente il tempo rimanente prima del raggiungimento della condizione critica.

Prima di passare all'analisi dettagliata dei tre indici vengono descritte di seguito le due manovre utilizzate in fase di test, oltre alla classica manovra di Ramp Steer già vista nel capitolo introduttivo di IPG CarMaker.

4.1 Manovra di Fishhook

La prima manovra presentata è la manovra di Fishhook, definita dalla National Highway Traffic Safety Administration (NHTSA) come la migliore per studiare la resistenza al ribaltamento di un veicolo. Si tratta di una manovra piuttosto aggressiva e difficile da eseguire in maniera ripetibile, per questo motivo viene utilizzato un sistema di sterzo robotico al posto del guidatore. Le fasi della manovra sono ben definite da normativa NHTSA e l'angolo di sterzo imposto segue l'andamento riportato nella figura sottostante:

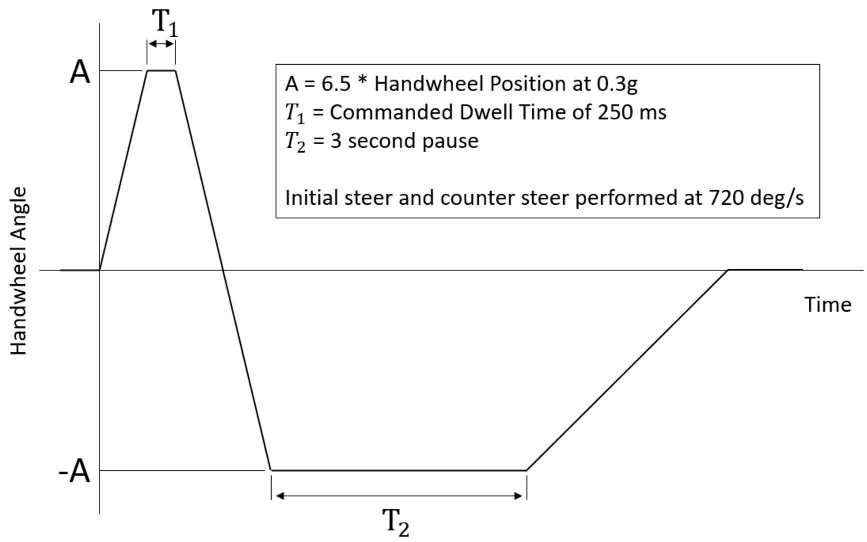
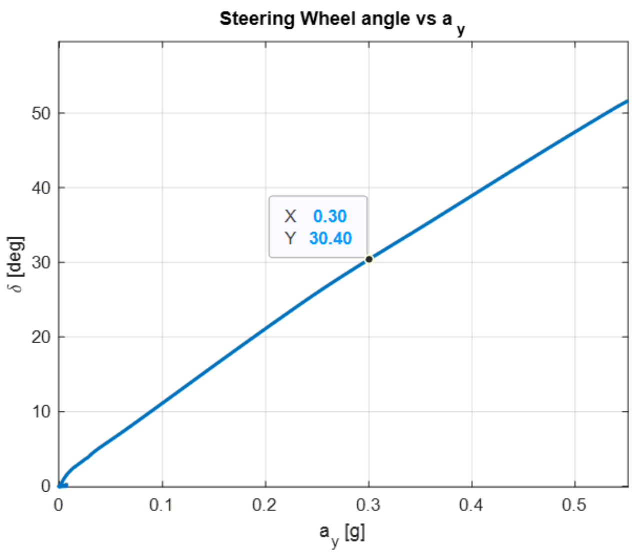


Figura 4.1 – Andamento angolo volante per manovra di Fishhok

I tempi T_1 e T_2 sono fissi, mentre l'ampiezza dell'angolo di sterzo "A" da applicare deve essere ricavata come 6.5 volte l'angolo di sterzo che produce un'accelerazione laterale pari a 0.3g ad una velocità di 80 km/h (50mph). Analizzando il comportamento del veicolo durante una classica manovra di Ramp Steer effettuata alla velocità di 80 km/h, si può ricavare graficamente l'angolo di sterzo necessario a produrre un'accelerazione pari a 0.3g:



$$\delta\left(a_y = 0.3g\right) = 30.4\ deg$$

$$A = 6.5 * 30.4 = 198\ deg$$

$$T_1 = 0.25\ s$$

$$T_2 = 3\ s$$

Figura 4.2 - Angolo di rollio vs Accelerazione laterale

Avendo ricavato tutti i parametri necessari, è possibile riportare ora il corretto andamento dell'angolo volante che deve essere imposto per lo svolgimento della manovra del veicolo in esame:

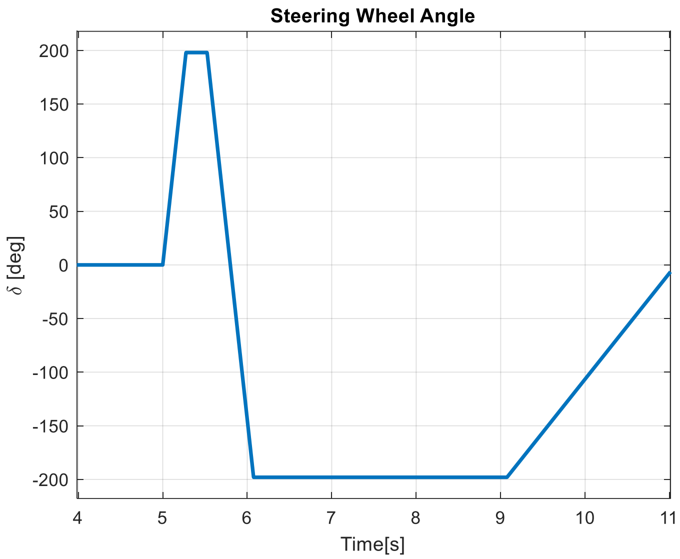


Figura 4.3 - Angolo volante

Per avere una visione più dettagliata vengono riportati anche la traiettoria e l'accelerazione laterale del veicolo durante la manovra:

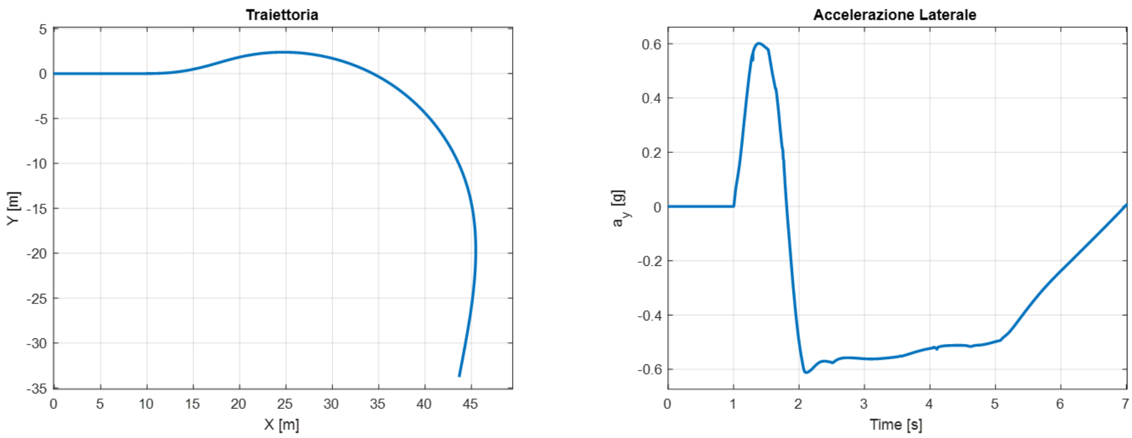


Figura 4.4 - Traiettoria e Accelerazione laterale

4.2 Double Lane Change

La seconda manovra è un doppio cambio di corsia (Double Lane Change), generalmente utilizzata per testare le prestazioni di evitamento di un ostacolo. Anche in questo caso si tratta di una manovra ben definita che si trova all'interno della ISO 3888, la quale stabilisce le varie fasi per uno svolgimento ripetibile:

- Fase 1: accelerazione fino al valore ad un valore prestabilito (in questo caso 90 km/h);
- Fase 2: rilascio dell'acceleratore (fino alla fine della manovra);
- Fase 3: manovra di sterzo per spostarsi nella corsia di sinistra;
- Fase 4: manovra di sterzo per tornare nella corsia di destra, ossia quella di partenza.

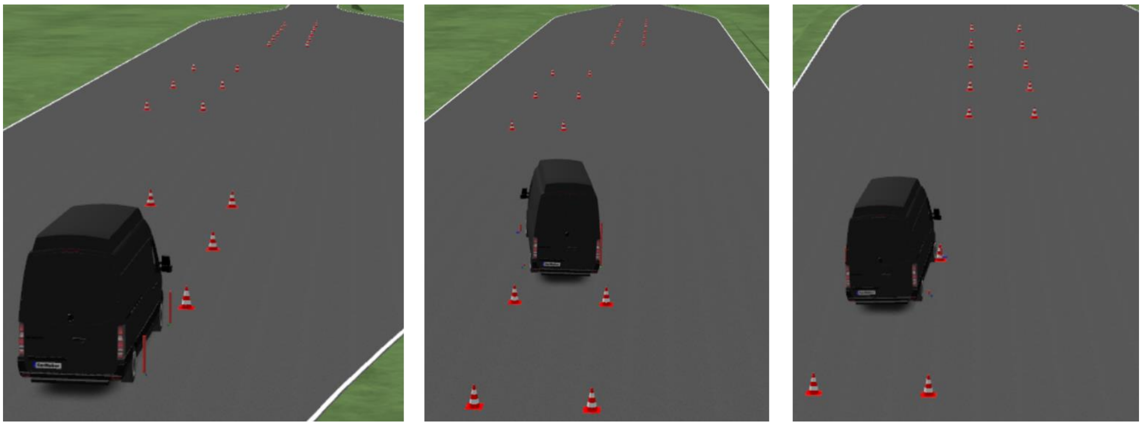


Figura 4.5 - Double Lane Change

Generalmente le corsie vengono delimitate con dei coni e, se il veicolo riesce a portare a termine la prova senza toccarne nessuno, allora questa viene considerata superata. Come per la manovra precedente, di seguito vengono riportate alcune grandezze utili per un'analisi più dettagliata della prova:

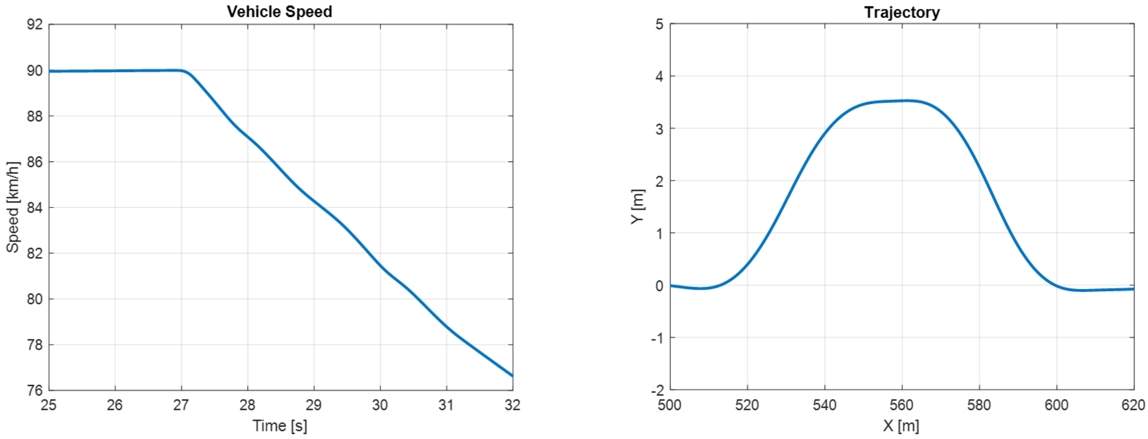


Figura 4.6 - Velocità e Traiettoria veicolo

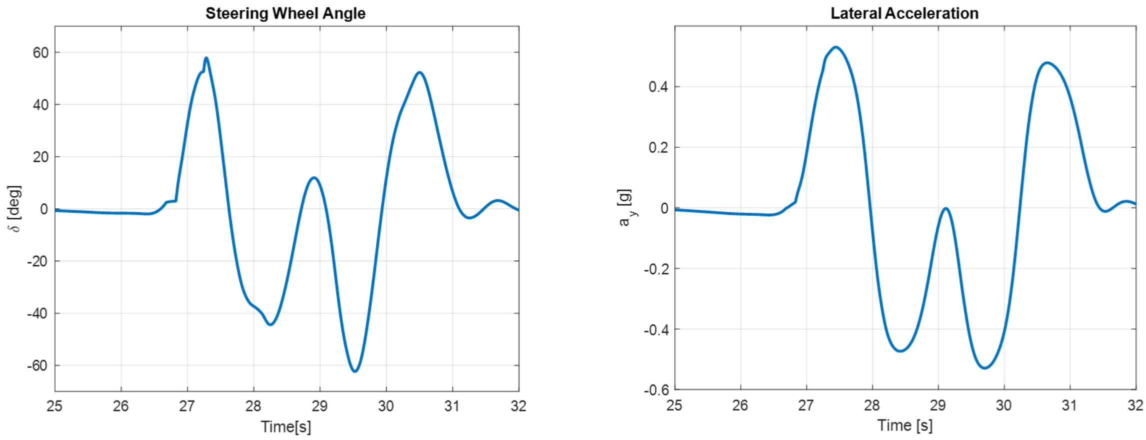


Figura 4.7 - Angolo volante e Accelerazione laterale

5 Load Transfer Ratio (LTR)

Il Load Transfer Ratio (LTR) è il primo indice analizzato, viene calcolato a partire dai carichi verticali agenti sulle ruote di destra e di sinistra e fornisce un'indicazione su quanto il veicolo è prossimo alla condizione di ribaltamento in un determinato istante:

$$LTR_{reale} = \frac{F_{zR} - F_{zL}}{F_{zR} + F_{zL}} \qquad -1 < LTR < 1 \tag{5.1}$$

I termini F_{zR} e F_{zL} indicano le forze di contatto verticali ruota – terreno rispettivamente sul lato destro e sinistro del veicolo, pertanto, in condizioni di carico simmetrico, il valore dell'LTR è pari a zero. I valori di $LTR = \pm 1$ rappresentano invece le condizioni limite, ossia il momento in cui i carichi F_{zR} o F_{zL} si annullano determinando il sollevamento delle ruote da terra.

Inoltre, è importante evidenziare che si tratta di un indice non predittivo perché fornisce un'informazione istantanea, senza prendere in considerazione l'effetto della guida, l'intervento dei controlli o di altre condizioni esterne da cui dipende il ribaltamento. Per questo motivo, un valore elevato di LTR non indica con certezza che il veicolo sia prossimo al ribaltamento e, la maggior parte delle volte, il tempo che intercorre tra il segnale di allarme e il rollover è troppo piccolo e non consente di evitare il ribaltamento.

Per quanto riguarda le applicazioni reali, bisogna tenere in considerazione che l'LTR non può essere calcolato utilizzando la formula riportata sopra, perché le forze verticali agenti sulle ruote sono molto difficili da ricavare e non esistono sensori che ne consentano una misurazione diretta. Per questo motivo, generalmente si prediligono formule alternative derivanti da modelli semplificati del veicolo. A tal proposito, di seguito viene ricavata una stima dell'LTR che si basa sul modello a tre gradi di libertà presentato nel capitolo 2. In particolare, dal diagramma di corpo libero dell'intero veicolo si era ottenuto:

$$F_{zR} + F_{zL} = m_{tot}g + m_s a_{zs} + \sum_i m_{ui} a_{zui} \tag{5.2}$$

$$F_{yR} + F_{yL} = m_s a_{ys} + \sum_i m_{ui} a_{yui} \tag{5.3}$$

Considerando, invece, il diagramma di corpo libero delle masse non sospese, si può ottenere la differenza dei carichi verticali scrivendo l'equilibrio alla rotazione intorno al centro di rollio "CR":

$$(F_{zR} - F_{zL})\frac{T}{2} = (F_{yR} + F_{yL})h_R + k_\varphi \varphi + c_\varphi \dot{\varphi} - \sum_i m_{ui} a_{yui}(h_R - h_u)$$
$$+ \frac{T}{2}\,(m_{uR} a_{zuR} - m_{uL} a_{zuL})$$

Sostituendo le forze laterali con i termini ricavati dall'equazione (5.3) e inserendo tutto all'interno della formula dell'LTR (5.1) si ottiene:

$$LTR = \frac{2}{T} \cdot \left[\frac{k_\varphi \varphi + c_\varphi \dot{\varphi} + m_s a_{ys} h_R + \sum_i m_{ui} a_{yui} h_u + \frac{T}{2}\,(m_{uR} a_{zuR} - m_{uL} a_{zuL})}{m_s a_{zs} + \sum_i m_{ui} a_{zui} + m_{tot} g}\right]$$

Infine, con l'obiettivo di ottenere un modello semplificato dell'LTR che non necessiti di ulteriori accelerometri e sensori, viene trascurata la dinamica delle masse non sospese e l'accelerazione verticale:

$$LTR_{stimato} = \frac{2}{T} \cdot \left[\frac{k_\varphi \varphi + c_\varphi \dot{\varphi} + m_s a_{ys} h_R}{m_{tot} g}\right] \tag{5.4}$$

5.1 Validazione del modello semplificato

Per la validazione del modello semplificato, viene riportato qui sotto il confronto tra l'andamento dell'$LTR_{stimato}$ e dell'LTR_{reale} durante le manovre di Fishhook e di Double Lane Change. A questo proposito, è importante evidenziare che le variabili necessarie per il calcolo dell'$LTR_{stimato}$ sono state ricavate a posteriori dalle manovre eseguite su CarMaker, in maniera tale da poter attribuire l'errore di approssimazione soltanto al modello in sé, senza contare eventuali errori derivanti da strumenti di misura utilizzati realmente per determinare parametri come l'angolo di rollio o l'accelerazione laterale.

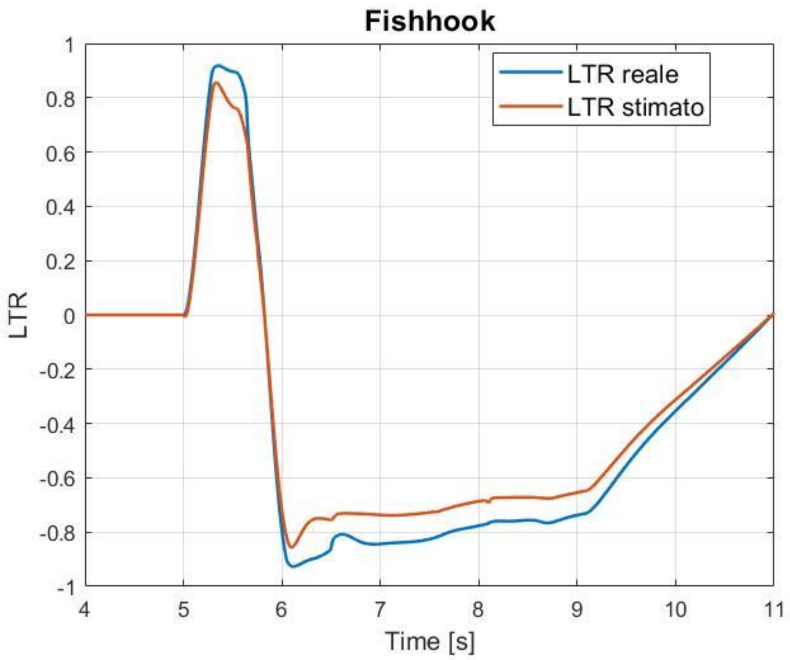


Figura 5.1 - LTR Fishhook

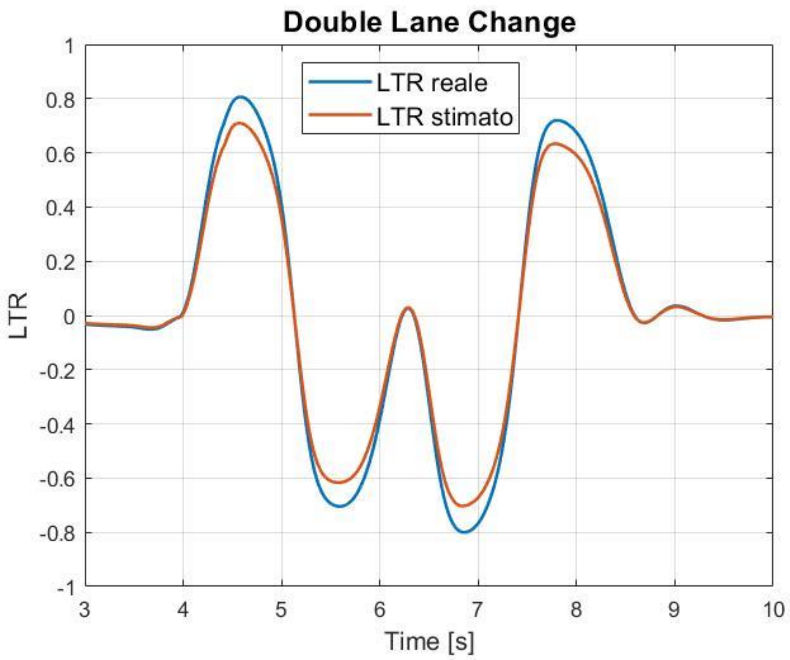


Figura 5.2 - LTR Double Lane Change

Considerando che si tratta di un modello semplificato molto semplice, i risultati ottenuti per le due manovre evidenziano un'approssimazione piuttosto valida dell'LTR_{reale}, nonostante sia evidente una leggera sottostima soprattutto in prossimità dei valori massimi.

Come anticipato però ad inizio capitolo, l'LTR non fornisce nessuna informazione predittiva perché calcola soltanto un valore istantaneo. Per questo motivo, nei capitoli successivi vengono proposti due indici che consentono di identificare il rischio in maniera anticipata.

5.2 LTR con modello a 11 gradi di libertà

Come anticipato nel capitolo 3, si è voluto sviluppare anche un modello più complesso a undici gradi di libertà per valutare se questo consente di ottenere risultati migliori. In questo paragrafo viene quindi proposto un confronto dei risultati sull'LTR, ottenuti a partire dai due modelli semplificati a tre e undici gradi di libertà.
Prima di tutto è necessario ricavare la formula dell'LTR stimato per il nuovo modello, il cui punto di partenza è, come nel caso precedente:

$$LTR = \frac{(F_{zFR} + F_{zRR}) - (F_{zFL} + F_{zRL})}{F_{zFR} + F_{zRR} + F_{zL} + F_{zRL}}$$

Si può osservare che in questo caso le forze verticali sono mantenute distinte, perché si sta considerando uno spostamento indipendente dei quattro pneumatici.
Facendo riferimento a quanto ricavato nel paragrafo 3, si osserva che il termine "$(F_{zFR} + F_{zRR} - F_{zFL} - F_{zRL})$", derivante dall'equilibrio alla rotazione della massa non sospesa, è pressoché lo stesso di quanto ottenuto per il modello a tre gradi di libertà, con l'unica differenza riscontrabile nei contributi di rigidezza e smorzamento indicati con "K" e "C":

$$(F_{zFR} + F_{zRR} - F_{zFL} - F_{zRL}) = \frac{2}{T} \cdot \left[\sum_i F_{yui} \cdot h_r - \sum_i m_{ui} a_{yui} (h_R - h_u) + G + K + C \right]$$

$$K = \frac{T^2}{2} (k_F + k_R)\, \varphi + \frac{T}{2} k_F (z_{FR} - z_{FL}) + \frac{T}{2} k_R (z_{RR} - z_{RL})$$

$$C = \frac{T^2}{2} (c_F + c_R) \dot{\varphi} + \frac{T}{2} c_F (\dot{z}_{FR} - \dot{z}_{FL}) + \frac{T}{2} c_R (\dot{z}_{RR} - \dot{z}_{RL})$$

$$G = \frac{T}{2} \left(m_{uFR} a_{zuFR} + m_{uRR} a_{zuRR} - m_{uFL} a_{zuFL} - m_{uRL} a_{zuRL} \right)$$

Chiarito questo aspetto, la formula dell'LTR che si ottiene per il modello a undici gradi di libertà ha la stessa forma di quella riportata nell'equazione 5.4:

$$LTR_{stimato} = \frac{2}{T}\left[\frac{m_s a_{ys} h_r + \sum_i m_{ui} a_{yui} h_u + G + K}{m_s a_{zs} + \sum_i m_{ui} a_{zui} + m_{tot} g}\right]$$

A questo punto, è possibile effettuare un confronto diretto sul calcolo dell'LTR prendendo in considerazione le due manovre utilizzate nel paragrafo precedente:

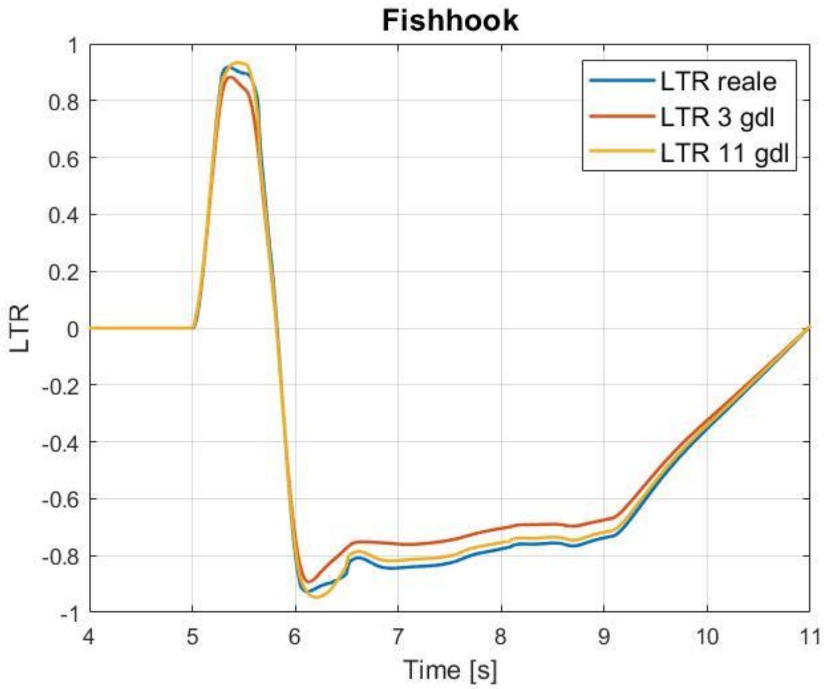


Figura 5.3 - Confronto LTR manovra Fishhok

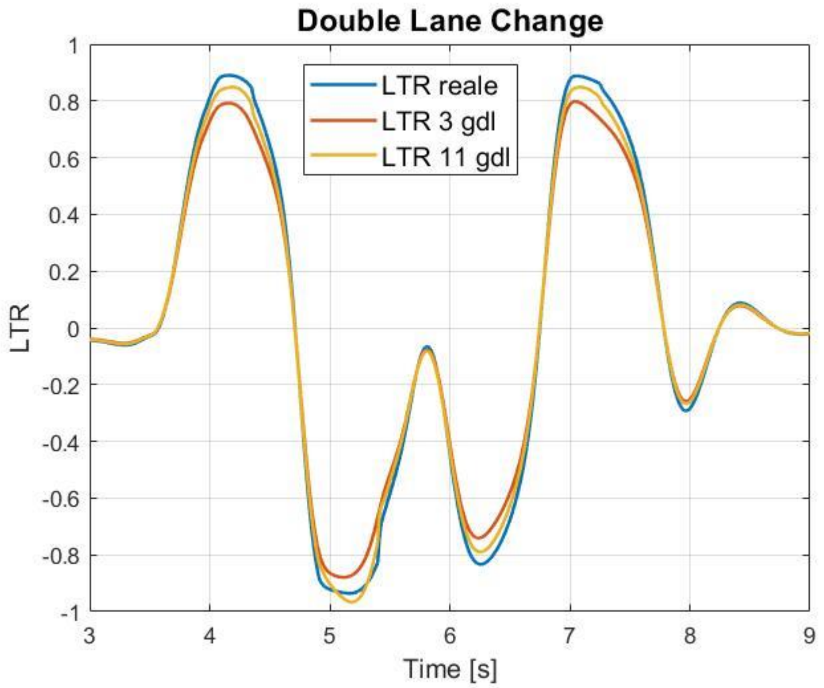


Figura 5.4 - Confronto LTR manovra Double Lane Change

Come ci si poteva aspettare, il modello a undici gradi di libertà fornisce una stima dell'LTR più accurata rispetto al modello a tre gradi di libertà. Tuttavia, il vantaggio è minimo a fronte di un incremento notevole della complessità del sistema. Infatti, mentre nel modello a tre gradi di libertà l'unico ingresso da misurare è l'accelerazione laterale della massa sospesa, nel modello a 11 gradi di libertà gli ingressi sono molti di più, perché vengono prese in considerazione tutte le accelerazioni e gli spostamenti delle masse non sospese.

Pertanto, per lo sviluppo degli indici successivi verrà utilizzato soltanto il modello a tre gradi di libertà, dato che ci consente di ottenere comunque risultati molto validi.

6 Contour Line Rollover Index (CLRI)

Il Contour Line Rollover Index è il primo indice di natura predittiva che viene proposto e si basa proprio sull'LTR analizzato nel capitolo precedente. In particolare, come riportato all'interno del paper [1], è stato osservato che gli stati di rollio di un veicolo caratterizzati dallo stesso valore di LTR si dispongono approssimativamente lungo una retta sul piano delle fasi $\varphi - \dot{\varphi}$. Eseguendo su CarMaker alcune manovre di Ramp Steer a diverse velocità (40-45-50-55-60-65 km/h), è stato possibile verificare questo aspetto, come riportato nell'immagine seguente:

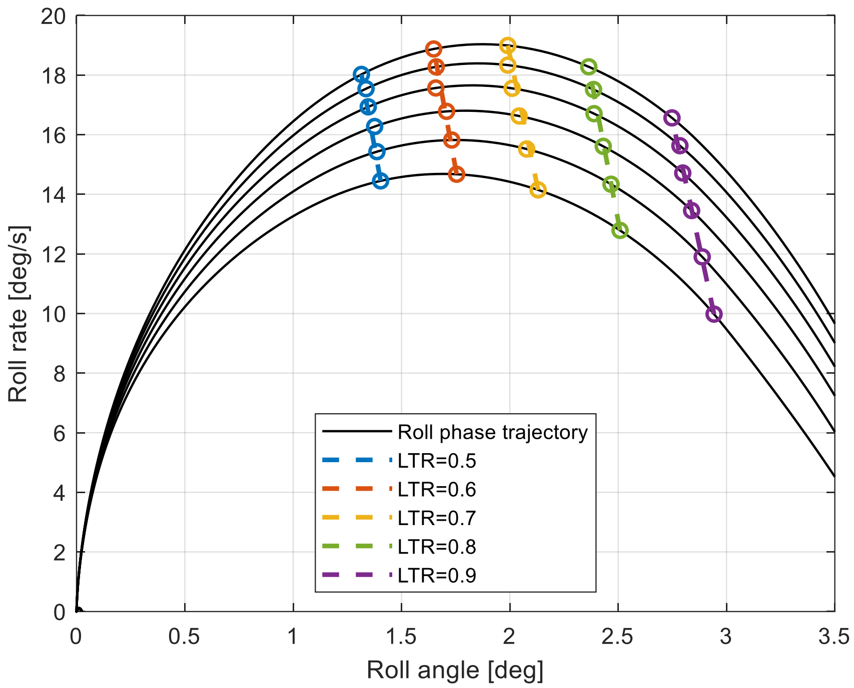


Figura 6.1 – Identificazione punti iso-LTR sul piano delle fasi

Le rette così identificate prendono il nome di linee di contorno (Contour Line) e rappresentano la condizione limite sul piano delle fasi $\varphi - \dot{\varphi}$ per un determinato valore di LTR. L'aspetto più importante di questo risultato è che le rette ISO – LTR dipendono soltanto dal veicolo e, quindi, una volta individuate possono essere utilizzate per identificare le condizioni critiche per qualsiasi manovra, a patto che non vengano alterate le condizioni di carico o ulteriori parametri del veicolo.

6.1 Calcolo analitico delle rette iso-LTR

Facendo riferimento alla trattazione riportate nel paper [1], le rette iso-LTR possono essere ricavate anche in maniera analitica partendo da un modello semplificato del veicolo. Infatti, viene proposto un modello pressoché uguale a quello a 3 gradi di libertà presentato precedentemente, con la differenza che vengono trascurate le masse non sospese e viene ipotizzato che l'asse di rollio si trovi in prossimità del terreno ($h_R = 0$), consentendo così di semplificare ulteriormente il calcolo dell'LTR:

$$LTR_{stimato} = \frac{2}{T} \cdot \left[\frac{k_\varphi \varphi + c_\varphi \dot{\varphi}}{m_s g} \right] \tag{6.1.1}$$

Anche l'equazione di equilibrio alla rotazione della massa non sospesa si semplifica e diventa:

$$I_s \ddot{\varphi} + c_\varphi \dot{\varphi} + \left(k_\varphi - m_s g h_s\right) \varphi = m_s a_{ys} h_s \tag{6.1.2}$$

Trattandosi di un sistema del secondo ordine, la (6.1.2) può essere riscritta come equazione differenziale del secondo ordine:

$$\ddot{\varphi} + 2\xi \omega_n \dot{\varphi} + \omega_n^2 \varphi = J a_y \tag{6.1.3}$$

Dove:

- $\omega_n = \sqrt{\frac{k_\varphi - m_s g h_s}{I_s}}$
- $\xi = \frac{c_\varphi}{2\omega_n I_s}$
- $J = \frac{m_s h_s}{I_s}$
- $a_y = forzante\ del\ sistema$

A questo punto, per poter ricavare l'equazione della Contour Line è necessario identificare una coppia di punti sul piano delle fasi attraverso i quali far passare tale retta.

6.1.1 *Primo punto – Static rollover*

Il primo punto viene identificato simulando un ribaltamento in condizioni statiche, ovvero cercando l'intersezione delle rette iso-LTR con l'asse delle ascisse.
Considerando una manovra di Ramp Steer con un ingresso a "rampa" sull'accelerazione laterale (e non una rampa sull'angolo volante) si può scrivere:

$$a_{yr} = k_{ar} t$$

Dove il termine k_{ar} è un coefficiente proporzionale.
Sostituendo il termine a_{yr} nella (6.1.3), la soluzione che si ottiene per l'equazione differenziale è:

$$\varphi_r(t) = p_1 t + p_2 + 2\, e^{-\xi \omega_n t}[p_3 \cos(\omega_d t) + q_3 \sin(\omega_d t)]$$

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_r(t) = p_1 + 2\,(-\xi w_n)\, e^{-\xi w_n t}\, [p_3\, cos(\omega_d t) + q_3\, sin(\omega_d t)] + \\ + 2\omega_d\, e^{-\xi w_n t}[-p_3 \sin(\omega_d t) + q_3 \cos(\omega_d t)] = \\ = 2\, \omega_n^2\, e^{-\xi w_n t}[p_3\, cos(\omega_d t) + q_3\, sin(w_d t)] \cdot (2\xi^2 - 1) + \\ + 4\,(-\xi \omega_n)\omega_d\, e^{-\xi \omega_n t}[-p_3 \sin(\omega_d t) + q_3 \cos(\omega_d t) + t]\end{aligned}$$

Dove:

- $p_1 = \frac{J k_{ar}}{\omega_n^2}$
- $p_2 = \frac{-2\xi J k_{ar}}{\omega_n^3}$
- $p_3 = \frac{2\xi J k_{ar}}{2\, \omega_n^3}$
- $q_3 = \frac{(2\xi^2 - 1) J k_{ar}}{2\, \omega_n^2\, \omega_d}$
- $\omega_d = \sqrt{1 - \xi^2}\, \omega_n$

È importante evidenziare che i termini $p_1, p_2, p_3\ e\ q_3$, oltre ad essere ovviamente in funzione delle proprietà inerziali di rigidezza e smorzamento del sistema ($J, \xi\ e\ \omega_n$), sono anche in funzione di k_{ar} che rappresenta la pendenza della rampa della manovra di Ramp Steer.

Dato che l'ipotesi fondamentale per identificare il primo punto è che il veicolo sia in condizioni stazionarie, il termine esponenziale si annulla e si ottiene quindi la seguente risposta indicata con il pedice *"rs"* (roll steady–state):

$$\varphi_{rs}(t) = p_1 t + p_2$$

$$\dot{\varphi}_{rs}(t) = p_1$$

$$\ddot{\varphi}_{rs}(t) = 0$$

Riprendendo l'equazione dell'LTR (6.1.1) e sostituendo il termine $\left(k_\varphi \varphi + c_\varphi \dot{\varphi}\right)$ ricavato dall'equazione (6.1.2) si ottiene:

$$LTR_{stimato} = \frac{2}{T} \cdot \left[\frac{m_s a_{ys} h_s + m_s g h_s \varphi - I_s \ddot{\varphi}}{m_s g}\right]$$

Sostituendo $a_{yr}, \varphi_{rs}\ e\ \ddot{\varphi}_{rs}$ nell'equazione appena ricavata:

$$\frac{gT}{2h_s} LTR = a_y + g\varphi - \frac{I_{CR}}{h_s m} \ddot{\varphi}$$

$$\frac{gT}{2h_s} LTR_x = k_{ar} t_{rx} + g(p_1 t_{rx} + p_2)$$

$$\frac{gT}{2h_s} LTR_x = (gp_1 + k_{ar})\, t_{rx} + gp_2 = \left(g \frac{Jk_{ar}}{\omega_n^2} + k_{ar}\right) t_{rx} + gp_2 =$$

$$= \left(g \frac{m_s h_s}{I_x} \frac{I_x}{k_\varphi - m_s g h_s} + 1\right) k_{ar} t_{rx} + gp_2$$

$$\frac{gT}{2h_s} LTR_x = \left(\frac{m_s g h_s + k_\varphi - m_s g h_s}{k_\varphi - m_s g h_s}\right) k_a t_{rx} + gp_2 = \frac{k_\varphi}{k_\varphi - m_s g h_s} k_{ar} t_{rx} + gp_2$$

$$\frac{gT}{2\ h_s} LTR_x = (gp_1 + k_{ar})\, t_{rx} + gp_2 = \frac{k_\varphi}{k_\varphi - m_s g h_s} k_{ar} t_{rx} + gp_2$$

Dove LTR_X costituisce il valore soglia compreso tra [-1,1] che deve essere impostato per identificare la rispettiva Contour Line, mentre il termine t_{rx} rappresenta l'istante in cui l'LTR raggiunge l'LTR_X. In quell'istante l'accelerazione laterale raggiunta dal veicolo vale:

$$a_{yr}(t_{rx}) = k_{ar} t_{rx} = \left(\frac{gT}{2h_s} LTR_x - gp_2\right) \cdot \frac{k_\varphi - m_s g h_s}{k_\varphi}$$

Riprendendo l'equazione dell'angolo di rollio ricavata dall'equazione differenziale si ottiene:

$$\varphi_{rs}(t_{rx}) = p_1 t_{rx} + p_2 = \frac{m_s g T}{2k_\varphi} LTR_x - \frac{2\,\xi m_s h_s}{\omega_n k_\varphi} k_{ar}$$

Quando l'accelerazione laterale a_{yr} varia molto lentamente significa che la pendenza della rampa tende a zero così come la velocità di rollio e quindi l'angolo di rollio $\varphi_{rs}(t_{rx})$ può essere considerato costante:

$$\lim_{\dot{\varphi}_{rs}(t)\to 0} \varphi_{rs}(t_{rx}) = \varphi_{rs}(\infty) = \frac{m_s g T}{2\,k_\varphi} LTR_x \qquad (6.1.1.1)$$

Si ottiene così la relazione che lega la risposta in stazionario del sistema all'LTR e, quindi, fissando l'LTR ad un determinato valore soglia "x", si può trovare l'angolo di rollio stazionario corrispondente. In questo modo, avendo ipotizzato una velocità di rollio nulla ($\dot{\varphi} = 0$), è possibile identificare sul piano delle fasi il primo punto necessario per definire l'equazione della Contour Line.
Inoltre, è importante osservare che finora non è stata fatta alcuna manovra per arrivare a questo risultato, ma è stata semplicemente risolta analiticamente la soluzione del modello semplificato (equazione differenziale del secondo ordine). Infatti, come si può notare nell'equazione (6.1.1.1), sparisce il k_{ar} che definiva la manovra di ramp steer.
In definitiva, con il modello considerato, il punto stazionario dipende solamente dall'LTR_x, della massa sospesa, dall'accelerazione di gravità, dalla carreggiata e dalla rigidezza a rollio delle sospensioni. Per questo motivo, scelto il veicolo, quel punto rimane fisso.

6.1.2 Secondo punto – Dynamic rollover

Il secondo punto viene ricercato tramite una manovra dinamica, ovvero simulando un colpo di sterzo. A tal proposito, è importante ricordare che la forzante rimane l'accelerazione laterale come nel caso precedente e non l'angolo di sterzo, quindi:

$$a_{ys} = \begin{cases} k_{as}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Analogamente al caso precedente, sostituendo l'accelerazione laterale a_{ys} all'interno dell'equazione differenziale si ottiene la risposta:

$$\varphi_s(t) = \frac{Jk_{as}}{\omega_n^2} - \frac{Jk_{as}}{\omega_n^2\omega_d} e^{-\xi\omega_n t}\left[\omega_d \cos(\omega_d t) + \xi\omega_n \sin(\omega_d t)\right]$$

$$\dot{\varphi}_s(t) = \frac{Jk_{as}}{\omega_d} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t)$$

$$\ddot{\varphi}_s(t) = Jk_{as}e^{-\xi\omega_n t} \cos(\omega_d t) - \frac{Jk_{as}\xi\omega_n}{\omega_d} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t)$$

Il momento in cui l'LTR raggiunge il valore massimo LTR_X viene identificato con il termine t_{sx} e può essere ricavato imponendo la derivata prima dell'LTR (6.1.1) pari a zero:

$$\frac{dLTR}{dt} = \frac{2h_s}{gT}\left(g\dot{\varphi} + \dot{a}_{ys} - \frac{1}{J}\ddot{\varphi}\right) = 0 \qquad (6.1.2.1)$$

Dove il termine $\ddot{\varphi}$ può essere derivato a partire da $\ddot{\varphi}_s(t)$, a sua volta ricavato sopra come soluzione dell'equazione differenziale. La soluzione della (6.1.2.1) risulta quindi essere:

$$\tan(\omega_d t_{sx}) = \frac{2\xi\omega_d}{(2\xi^2 - 1)\omega_n} = \frac{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}{2\xi^2 - 1}$$

Ottenendo così:

$$t_{sx} = \frac{\pi + \arctan\left(\frac{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}{2\xi^2-1}\right)}{\omega_d}, \qquad 0 < \xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$t_{sx} = \frac{arctan\left(\frac{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}{2\xi^2-1}\right)}{\omega_d}, \qquad \frac{\sqrt{2}}{2} < \xi < 1$$

Sostituendo "t_{sx}" all'interno dell'equazione (6.2.1.1) è possibile ricavare l'accelerazione laterale critica, ossia l'accelerazione laterale del veicolo quando l'LTR raggiunge il valore soglia LTR_X:

$$a_{yscx} = \frac{g\,T\,LTR_x}{2h_s\left\{1 + e^{-\xi\omega_n t_{sx}} + \frac{Jg}{\omega_n^2}\left[1 - (4\xi^2 - 1)e^{-\xi\omega_n t_{sx}}\right]\right\}}$$

In questo modo, si possono ottenere le coordinate del secondo punto nel piano delle fasi:

$$\varphi_s(t_{sx}) = \frac{Ja_{yscx}}{\omega_n^2}\left[1 - (4\xi^2 - 1)e^{-\xi\omega_n t_{sx}}\right]$$

$$\dot{\varphi}_s(t_{sx}) = \frac{Ja_{yscx}}{\omega_d} 2\xi \sqrt{1 - \xi^2}\, e^{-\xi\omega_n t_{sx}}$$

Anche in questo caso si può osservare che il secondo punto non dipende dalla manovra perché il k_{as} non compare nell'equazione, ma dipende soltanto dal valore soglia LTR_x scelto.

6.1.3 *Contour Line*

A questo punto, per ottenere l'equazione della linea di contorno, è sufficiente ricavare la retta passante per i punti di rollover statico e dinamico:

$$\dot{\varphi} = m\varphi + q$$

Dove:

$$m = \frac{\dot{\varphi}_s(t_{sx}) - \dot{\varphi}_{rs}(t_{rx})}{\varphi_s(t_{sx}) - \varphi_{rs}(t_{rx})} = \frac{\dot{\varphi}_s(t_{sx})}{\varphi_s(t_{sx}) - \varphi_{rs}(\infty)}$$

$$q = \frac{\varphi_s(t_{sx}) \cdot \dot{\varphi}_{rs}(t_{rx}) - \varphi_{rs}(t_{rx}) \cdot \dot{\varphi}_s(t_{sx})}{\varphi_s(t_{sx}) - \varphi_{rs}(t_{rx})} = -\frac{\varphi_{rs}(\infty) \cdot \dot{\varphi}_s(t_{sx})}{\varphi_s(t_{sx}) - \varphi_{rs}(\infty)}$$

Ottenuta l'equazione della Contour Line per un determinato valore di LTR_x è possibile riportarla sul digramma delle fasi $(\varphi - \dot{\varphi})$ per effettuare un confronto con le rette iso-LTR ricavate sperimentalmente. Ad esempio, considerando $LTR_x = 0.8$ si ottiene:

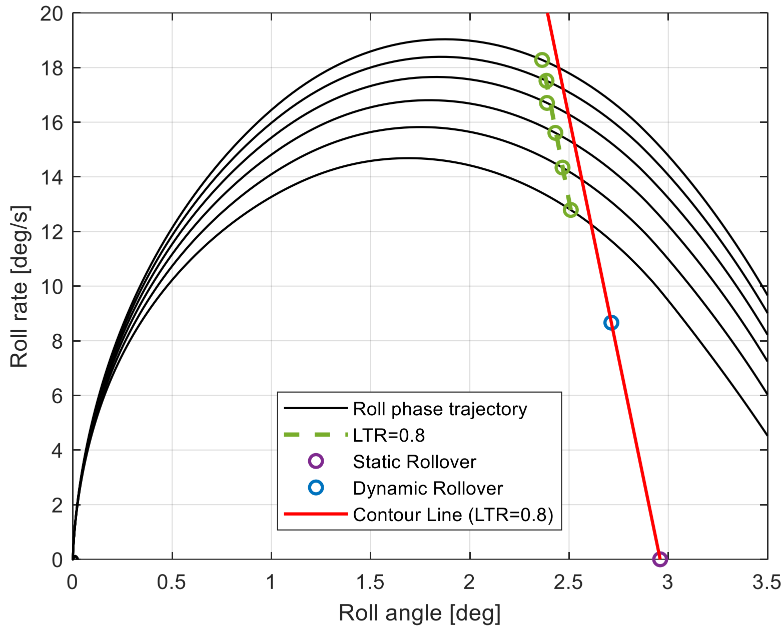


Figura 6.2 - Verifica Contour Line analitica

In questo modo è stato possibile validare la metodologia di calcolo della Contour Line proposta nel paper [1]. Infatti, la retta ricavata analiticamente approssima molto bene i punti iso-LTR ottenuti tramite manovre di Ramp Steer eseguite su IPG CarMaker. A questo proposito, è importante evidenziare che il grafico riportato sopra spazia su valori di angolo di rollio piuttosto piccoli e di conseguenza l'errore di approssimazione della retta appare più accentuato, ma in realtà è del tutto trascurabile.

6.2 Calcolo del CLRI

Una volta ricavate le rette ISO – LTR, tramite simulazioni IPG o analiticamente, è possibile passare al calcolo del CLRI. Considerando un punto generico "A" di una manovra qualsiasi sul piano delle fasi, il CLRI viene identificato come il tempo necessario affinché il veicolo passi dalla condizione "A" alla condizione limite "B_i" posta sulla linea di contorno, ipotizzando uno spostamento lungo la retta tangente alla traiettoria nel punto "A" di partenza.

In altre parole, facendo riferimento all'immagine sottostante, si tratta di calcolare il tempo necessario affinché il veicolo passi dal punto "A", caratterizzato da una determinata velocità ($\dot{\varphi}$) e angolo di rollio (φ), al punto B_i (o B_j) considerando uno spostamento lungo il segmento A – B_i.

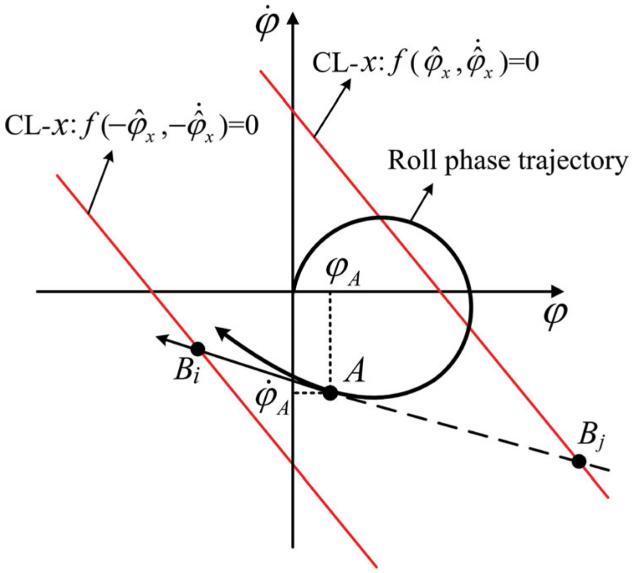


Figura 6.3 - Principio del CLRI [1]

La pendenza della tangente alla traiettoria nel punto A può essere calcolata come:

$$k_A = \frac{d\dot{\varphi}_A}{d\varphi_A} = \frac{\ddot{\varphi}_A}{\dot{\varphi}_A}$$

Imponendo il passaggio per il punto "A" si ottiene così l'equazione della retta:

$$\dot{\varphi} = k_A(\varphi - \varphi_A) + \dot{\varphi}_A$$

Trovando l'intersezione con le rette ISO – LTR_x ricavate precedentemente si ottengono le coordinate dei punti B_i e B_j:

$$\varphi_{B_i} = \frac{k_A\varphi_A - \dot{\varphi}_A + q}{k_A - m}$$

$$\dot{\varphi}_{B_i} = \frac{mk_A\varphi_A - m\dot{\varphi}_A + qk_A}{k_A - m}$$

$$\varphi_{B_j} = \frac{k_A\varphi_A - \dot{\varphi}_A - q}{k_A - m}$$

$$\dot{\varphi}_{B_j} = \frac{mk_A\varphi_A - m\dot{\varphi}_A - qk_A}{k_A - m}$$

A questo punto si può calcolare il CLRI, che misura il tempo necessario per il passaggio dal punto A alla condizione critica B_i o B_j:

$$CLRI = \frac{[1 - sign(w)]}{2} \sqrt{\frac{(\varphi_B - \varphi_A)^2 + (\dot{\varphi}_B - \dot{\varphi}_A)^2}{\dot{\varphi}_A^2 + \ddot{\varphi}_A^2}} \qquad [s]$$

Dove:

- $\varphi_B = \begin{cases} \varphi_{B_i}, & (\varphi_B - \varphi_A)\dot{\varphi}_A > 0 \\ \varphi_{B_j}, & (\varphi_B - \varphi_A)\dot{\varphi}_A < 0 \end{cases}$
- $w = f(\varphi_A, \dot{\varphi}_A) \cdot f(-\varphi_A, -\dot{\varphi}_A)$

È importante osservare che il termine $\frac{[1-sign(w)]}{2}$ viene utilizzato semplicemente per verificare se il punto "A" in esame si trova all'interno della zona di sicurezza (zona compresa tra le due Contour Line) o no. In questo modo, se il valore soglia è già stato superato, il modello evita di calcolare il CLRI e restituisce un valore pari a 0. In sostanza, definendo una variabile aggiuntiva "w", è possibile distinguere due casi:

$$CLRI = \begin{cases} \sqrt{\frac{(\varphi_B - \varphi_A)^2 + (\dot{\varphi}_B - \dot{\varphi}_A)^2}{\dot{\varphi}_A^2 + \ddot{\varphi}_A^2}}, & sign(w) < 0 \\ 0 \qquad , & sign(w) > 0 \end{cases}$$

Ricavata la formula necessaria per il calcolo del CLRI è possibile passare alla validazione del modello effettuando alcune manovre riportate in seguito.

6.2.1 Ramp Steer

Come anticipato nei paragrafi precedenti, riportando sul piano delle fasi $\varphi - \dot{\varphi}$ la manovra eseguita su CarMaker, è possibile osservare se il veicolo oltrepassa o meno la linea di contorno ricavata per un determinato valore soglia di LTR. Facendo riferimento alla manovra di Ramp Steer riportata nella figura sottostante, si può osservare che il veicolo esce dalla zona di sicurezza nel punto marcato e, pertanto, ci si aspetta di ricavare un CLRI che diminuisce fino ad annullarsi, una volta raggiunta tale condizione limite.

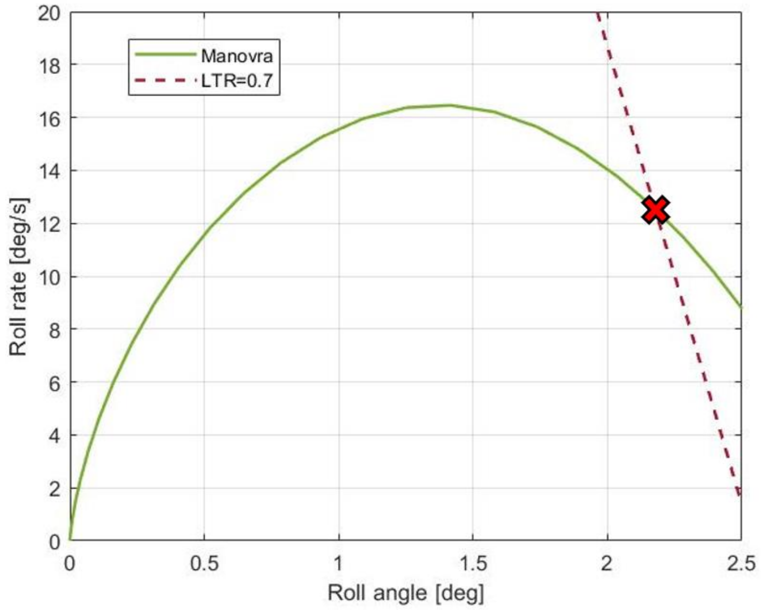


Figura 6.4 – Ramp Steer sul piano delle fasi

Infatti, l'andamento del CLRI ottenuto per questa manovra è il seguente:

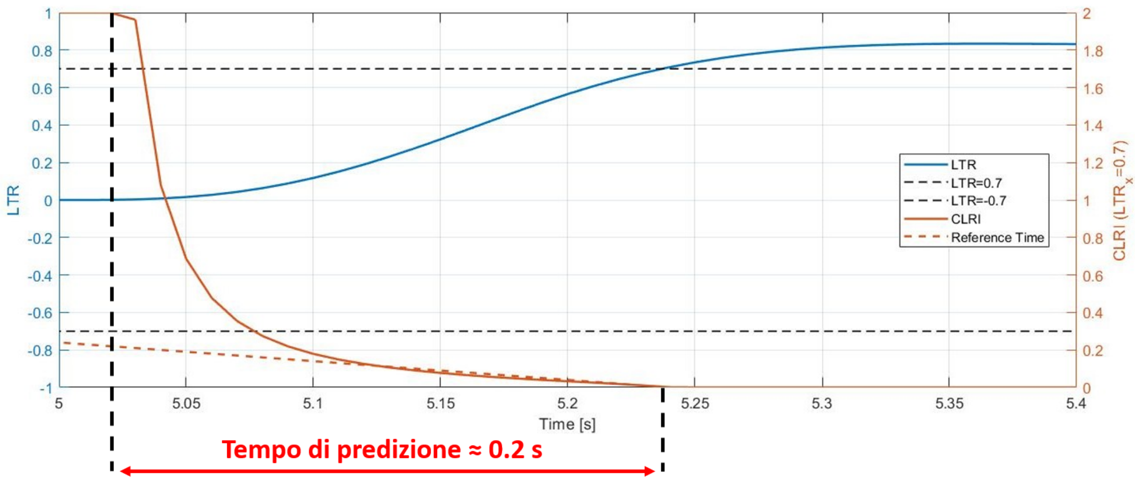


Figura 6.5 - LTR, CLRI e Reference Time per Ramp Steer

Dall'andamento dell'LTR, si può osservare che il veicolo inizia a sterzare soltanto dopo i primi 5 secondi perché, come analizzato nel capitolo introduttivo su IPG, per eseguire correttamente questa manovra è necessario che il veicolo abbia prima stabilizzato la sua velocità al valore desiderato. Nel momento in cui l'LTR inizia a crescere, il CLRI diminuisce perché sta identificando le possibili condizioni di pericolo negli istanti successivi, fornendo così un tempo di predizione di circa 0.2 secondi. Infatti, ipotizzando di muoversi lungo la tangente alla traiettoria, si può osservare che all'aumentare dell'LTR (vedi colorbar) la condizione limite è sempre più vicina e di conseguenza il CLRI diminuisce.

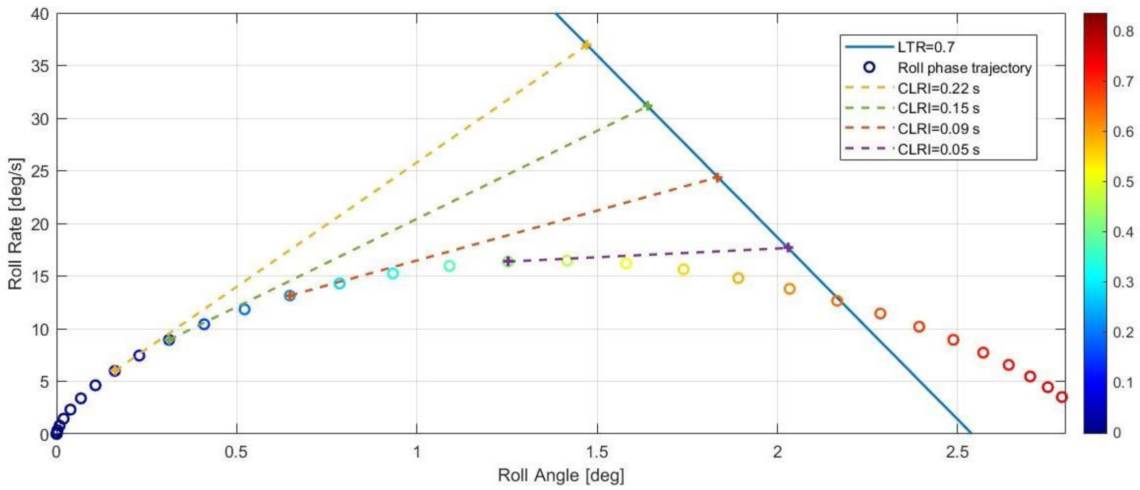


Figura 6.6 - Principio di funzionamento del CLRI

Inoltre, il grafico riportato sopra è molto importante perché consente di evidenziare l'aspetto critico del CLRI, ovvero il fatto che seguendo l'ipotesi di muoversi la tangente questo modello non è molto accurato se ci si trova lontani dalla Contour Line. Infatti, nei punti iniziali della manovra, lo spostamento lungo la retta tangente è molto discostato dall'andamento reale, per poi migliorare man mano che ci si avvicina alla linea di contorno.

Questo aspetto è visibile anche dal paragone con il Reference Time perché si può osservare che nei primi istanti il CLRI non riesce ad approssimarlo bene, ma avvicinandosi alla condizione di pericolo il CLRI finisce praticamente per sovrapporsi al Reference Time e questo significa che il risultato è molto accurato.

6.2.2 Fishhook

A differenza della manovra precedente, in questo caso si può osservare che il veicolo supera la condizione critica due volte e quindi ci si aspetta di ottenere dal CLRI due segnali di allarme.

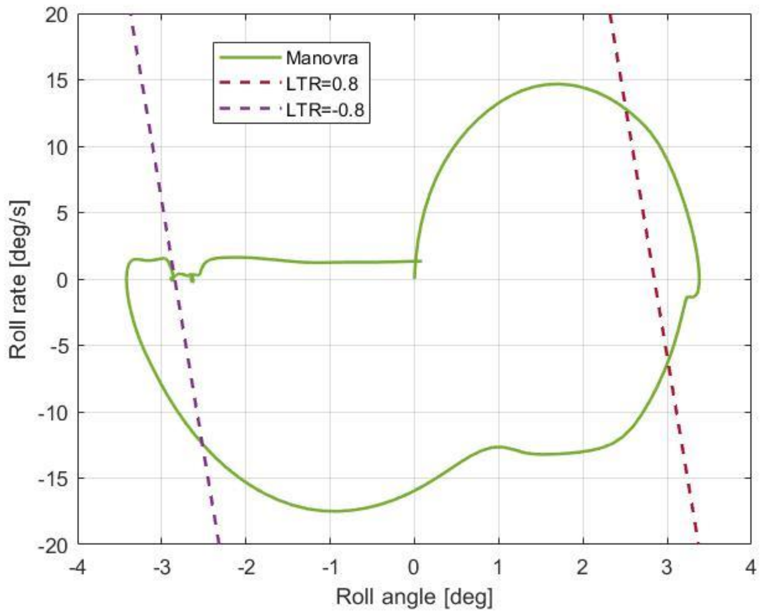


Figura 6.7 - Fishhook sul piano delle fasi

Di seguito viene riportato l'andamento del CLRI ottenuto:

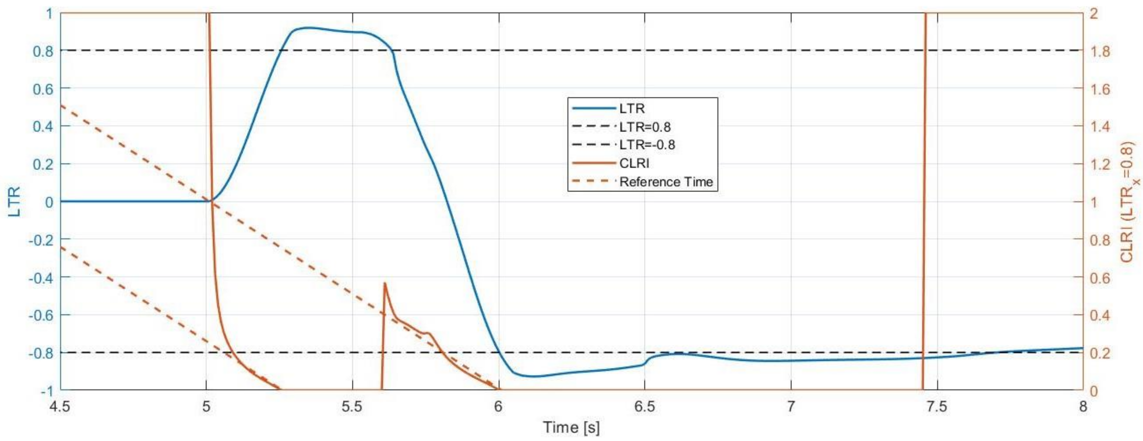


Figura 6.8 - LTR, CLRI e Reference Time per Fishhok

Come per la manovra precedente, anche in questo caso si può osservare che il CLRI riesce a predire in maniera piuttosto accurata entrambe le condizioni critiche.

6.2.3 *Double Lane Change*

Infine, l'ultima manovra analizzata è la Double Lane Change che comporta il superamento della soglia quattro volte:

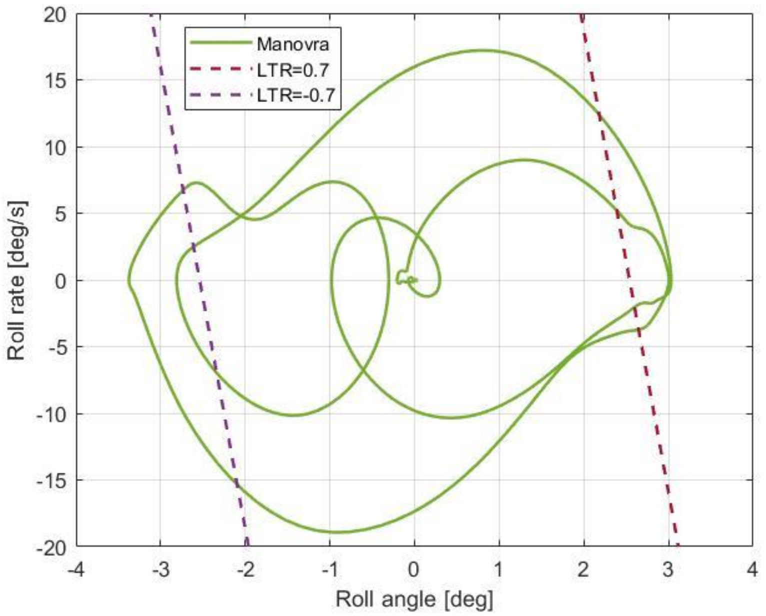


Figura 6.9 - Double Lane Change sul piano delle fasi

L'andamento del CLRI in funzione dell'LTR vale:

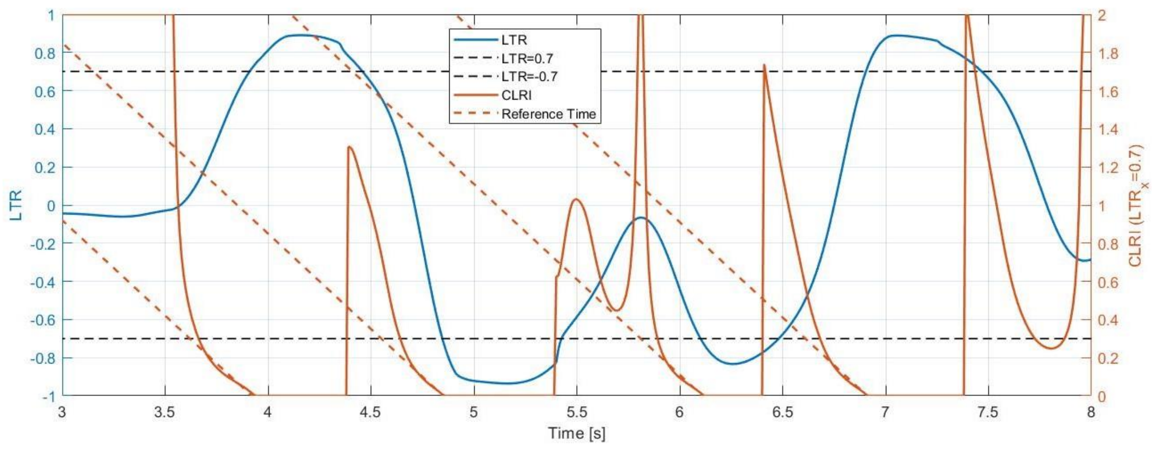


Figura 6.10 - LTR, CLRI e Reference Time per Double Lane Change

6.3 Verifica del CLRI

All'interno di questo paragrafo viene proposta una formula alternativa per il calcolo del CLRI, in maniera tale da poter validare la formulazione proposta all'interno del paper [1] di difficile risoluzione.

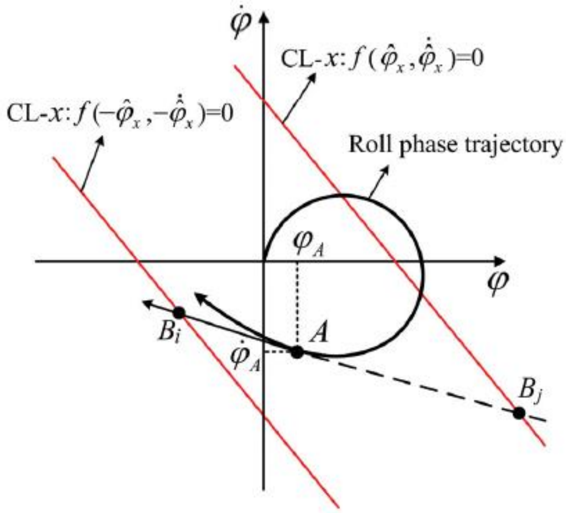


Figura 6.11 - Principio del CLRI [1]

Facendo riferimento alla immagine 6.11 analizzata già nel capitolo precedente, si ricorda che l'equazione della retta tangente alla curva nel punto A è:

$$\dot{\varphi} = k_A(\varphi - \varphi_A) + \dot{\varphi}_A \quad con \quad k_A = \frac{d\dot{\varphi}_A}{d\varphi_A} = \frac{\ddot{\varphi}_A}{\dot{\varphi}_A}$$

A questo punto, trattandosi di un'equazione differenziale del primo ordine, può essere riscritta nella forma generica:

$$\dot{\varphi} + a_0\varphi = g(t)$$

La cui soluzione risulta essere:

$$\varphi(t) = e^{-A(t)}\left[c + \int \left(g(t) \cdot e^{A(t)}\right) dt\right]$$

Dove:

$$A(t) = \int a_0(t)\, dt = \int -k_A\, dt = -k_A t$$

$$\int \left(g(t) \cdot e^{A(t)}\right) dt = \int (\dot{\varphi}_A - k_A\varphi_A) \cdot e^{-k_A t}\, dt = -\frac{\dot{\varphi}_A - k_A\varphi_A}{k_A} \cdot e^{-k_A t}$$

Sostituendo:

$$\varphi(t) = e^{k_A t}\left[c - \frac{\dot{\varphi}_A - k_A\varphi_A}{k_A} \cdot e^{-k_A t}\right] = ce^{-k_A t} - \frac{\dot{\varphi}_A - k_A\varphi_A}{k_A}$$

Impostando la condizione iniziale è possibile ricavare la costante “c”:

$$\varphi(t=0) = \varphi_A$$

$$\varphi_A = c\ e^{k_A \cdot 0} - \frac{\dot{\varphi}_A - k_A\varphi_A}{k_A} = c - \frac{\dot{\varphi}_A - k_A\varphi_A}{k_A}$$

$$c = \varphi_A + \frac{\dot{\varphi}_A - k_A\varphi_A}{k_A} = \frac{\dot{\varphi}_A}{k_A}$$

Si ottiene così la soluzione:

$$\varphi(t) = \frac{k_A\varphi_A - \dot{\varphi}_A + \dot{\varphi}_A e^{k_A t}}{k_A} \tag{6.3.1}$$

In alternativa, o come verifica, è anche possibile risolvere l’equazione differenziale tramite Matlab in maniera simbolica con il seguente script:

```
syms Phi(t) kA PhiA PhiDotA
ode=diff(Phi,t,1)==kA*Phi-kA*PhiA+PhiDotA;
cond=(Phi(0)==PhiA);
Phisol(t)=dsolve(ode,cond);


val(t) =

(PhiA*kA - PhiDotA + PhiDotA*exp(kA*t))/kA
```

Figura 6.12 - Script risolutivo equazione differenziale

Invertendo la soluzione (equazione 6.3.1) è possibile ricavare il tempo necessario affinché il veicolo passi dalla condizione iniziale φ_A ad una determinata condizione $\varphi(t)$:

$$\varphi(t)k_A = k_A\varphi_A - \dot{\varphi}_A + \dot{\varphi}_A e^{k_A t}$$

$$t = \frac{1}{k_A} \cdot ln\left(\frac{\varphi(t)k_A - \varphi_A k_A + \dot{\varphi}_A}{\dot{\varphi}_A}\right)$$

Nel caso in esame, dato che le condizioni limiti sono gli angoli di rollio φ_{B_i} e φ_{B_j} si ottiene:

$$CLRI_{new} = \frac{1}{k_A} \cdot \ln\left(\frac{\varphi_B k_A - \varphi_A k_A + \dot{\varphi}_A}{\dot{\varphi}_A}\right) \qquad (6.3.2)$$

Con:

$$\varphi_B = \begin{cases} \varphi_{B_i}, & (\varphi_B - \varphi_A)\dot{\varphi}_A > 0 \\ \varphi_{B_j}, & (\varphi_B - \varphi_A)\dot{\varphi}_A < 0 \end{cases}$$

A questo punto, il tempo calcolato tramite la formula (6.3.2) può essere confrontato con la formula del CLRI utilizzata nei paragrafi precedenti:

$$CLRI = \frac{1 - sign(w)}{2} \sqrt{\frac{(\varphi_{Bi} - \varphi_A)^2 + (\dot{\varphi}_{Bi} - \dot{\varphi}_A)^2}{\dot{\varphi}_A^2 + \ddot{\varphi}_A^2}}$$

Eseguendo il confronto su una manovra di Ramp Steer è possibile osservare che le due formule restituiscono soluzioni abbastanza simili tra loro:

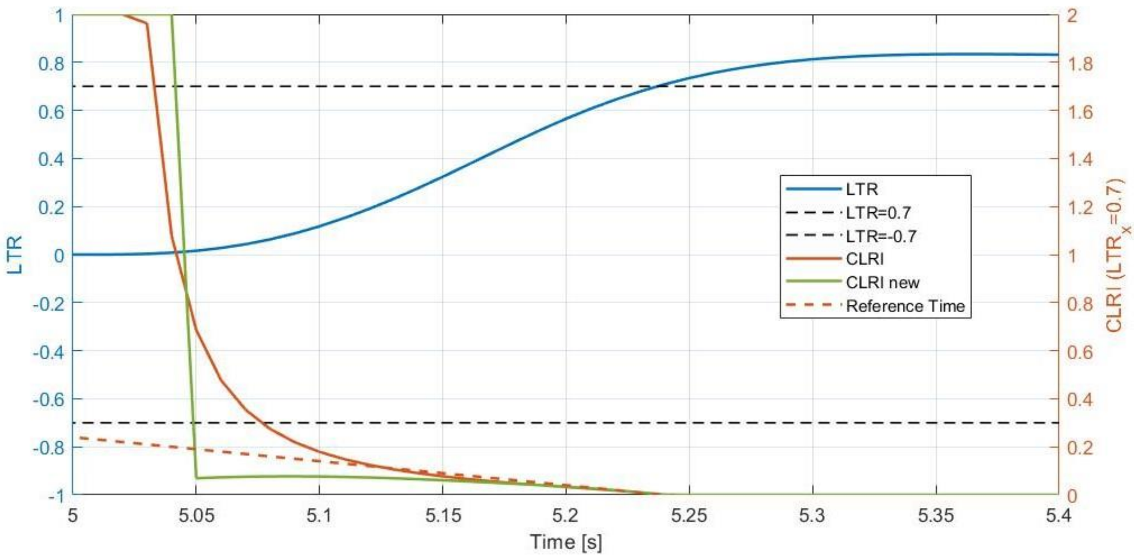


Figura 6.13 - Confronto CLRI e $CLRI_{new}$

In questo modo, è stato possibile stabilire che il $CLRI_{new}$ ha un tempo di predizione poco inferiore a quello del CLRI perché inizia a scendere soltanto qualche istante dopo. Invece, a livello di accuratezza, si può osservare che il $CLRI_{new}$ è leggermente superiore perché, nel momento in cui si accorge del pericolo, si avvicina in maniera molto più rapida al Reference Time rispetto al CLRI.

Anche se si tratta di differenze minime, è importante evidenziare che la formula prediletta è quella del CLRI perché risulta essere sempre utilizzabile, a differenza del $CLRI_{new}$ che è definita soltanto per argomenti del logaritmo positivi. Questo aspetto rende il $CLRI_{new}$ meno affidabile perché, nel momento in cui il logaritmo non è calcolabile, si deve utilizzare il valore ottenuto per l'istante precedente e questo causa una minore accuratezza puntuale del risultato.

7 Time To Rollover (TTR)

Il terzo indice analizzato è il Time To Rollover (TTR), un altro indice di natura predittiva che si basa sull'integrazione del modello semplificato del veicolo, in modo tale da poter individuare il rischio con un certo anticipo. Considerando nuovamente il modello semplificato a 3 gradi di libertà già utilizzato per il calcolo dell'LTR, l'equazione che descrive l'equilibrio alla rotazione della massa sospesa intorno all'asse di rollio è:

$$I_s\ddot{\varphi} + c_\varphi\dot{\varphi} + k_\varphi\varphi = m_s a_{ys} h_s \cos\varphi + m_s(a_{zs} + g)h_s \sin\varphi$$

Come fatto in precedenza, l'equazione può essere semplificata trascurando l'accelerazione verticale e considerando angoli di rollio piccoli:

$$I_s\ddot{\varphi} + c_\varphi\dot{\varphi} + \left(k_\varphi - m_s g h_s\right)\varphi = m_s a_{ys} h_s$$

Si ottiene così un'equazione differenziale del secondo ordine che può essere integrata per ricavare l'andamento dell'angolo di rollio "φ" e della velocità di rollio "$\dot{\varphi}$" nel tempo, in maniera predittiva. Infatti, il codice implementato è in grado di integrare il modello in pochissimo tempo, consentendo di prevedere il comportamento futuro del veicolo a partire dal valore di accelerazione laterale che viene fornito in ingresso (unico input del modello).

Per risolvere l'equazione differenziale è stata utilizzata la funzione ODE45 già presente in Matlab:

$$[t, y] = ode45\left(FUN, t_{span}, y_0\right)$$

Dove:

- $[t, y]$ rappresenta l'output ovvero la soluzione del sistema. In particolare, l'array "t" costituisce l'insieme degli istanti temporali utilizzati dall'algoritmo mentre in "y" vengono restituiti i valori corrispondenti della soluzione, calcolati per quei determinati istanti.
- FUN è l'equazione differenziale e deve essere riportata in forma esplicita;
- t_{span} rappresenta l'intervallo temporale lungo la quale si vuole integrare;

- y_0 rappresenta la condizione iniziale dell'equazione differenziale.

È importante però evidenziare che la funzione ODE45 consente di risolvere equazioni differenziali del primo ordine, ma nel caso in esame l'equazione è del secondo ordine. Quindi, per ovviare a questo problema, è necessario effettuare un cambio di variabili per poter ottenere un sistema di due equazioni differenziali del primo ordine:

$$\begin{cases} \beta = \dot{\varphi} \\ \dot{\beta} = -\frac{c_\varphi}{I_s}\beta + \frac{(m_s g h_s - k_\varphi)}{I_s}\varphi + \frac{m_s h_s}{I_s} a_{ys} \end{cases}$$

Inoltre, è fondamentale tenere in considerazione che la forzante del sistema, ovvero l'accelerazione laterale a_{ys}, è variabile e cambia ad ogni ciclo di integrazione a causa dell'evolversi della manovra del veicolo. A tal proposito, è stato necessario definire una nuova funzione denominata "second_order" che possa tenere conto di questo aspetto durante la risoluzione dell'equazione differenziale.

Di seguito viene riportato lo script implementato su Matlab per comprendere meglio questi aspetti:

```
%condizioni iniziali
y_0=[test.Car_Roll.data(i) test.Car_RollVel.data(i)];

%risoluzione equazione con ode45
[t,y] = ode45(@(t, y) second_order(t,y,gt,g,c,I_x,m_s,e,k), tspan, y_0);
```

Figura 7.1 - Script implementazione ODE45

Dove la funzione "second_order" vale:

```
function dydt=second_order(t,y,gt,g,c,I_x,m_s,e,k) %definire le variabili

%ricavare il vettore accelerazione "g" (ingresso del modello)
g=interp1(gt,g,t);

%spazio degli stati per ottenere due equazioni di 1° ordine
Phi=y(1); %Phi
Beta=y(2); %PhiDot
```

```
%sistema di due equazioni differenziali del 1° ordine
dPhidt=Beta;
dBetadt=-(c/I_x)*Beta+((m_s*9.81*e-k)/I_x)*Phi+(m_s*e/I_x)*g;

%vettore soluzione
dydt=[dPhidt;dBetadt];

end
```

Figura 7.2 - Script funzione "second_order"

In questo modo, la soluzione che si ottiene è composta dal vettore tempo "t" e dalla matrice "y". Quest'ultima è costituita da due vettori colonna: il primo costituisce la soluzione dell'angolo di rollio "φ", mentre la seconda il vettore soluzione della velocità di rollio "$\dot{\varphi}$".

Ricavati l'angolo di rollio e la velocità di rollio, è possibile ottenere una previsione dell'LTR per quel determinato intervallo temporale in cui il modello è stato integrato. Infatti, riprendendo la formula dell'$LTR_{stimato}$ già analizzata in precedenza, si può osservare che a seguito dell'integrazione tutte le variabili sono note (a_{ys} è l'input del sistema mentre φ e $\dot{\varphi}$ sono appena state ricavate):

$$LTR_{stimato} = \frac{2}{T} \cdot \left[\frac{k_\varphi \varphi + c_\varphi \dot{\varphi} + m_s a_{ys} h_R}{m_{tot} g} \right]$$

Infine, avendo a disposizione la storia temporale dell'LTR per i successivi tot. secondi (a seconda di quanto è lungo l'intervallo di integrazione), è sufficiente verificare se l'LTR supera o meno il valore soglia LTR_X preimpostato. In caso affermativo, il tempo che intercorre tra l'istante di inizio integrazione e l'istante in cui l'LTR supera la soglia viene definito Time To Rollover (TTR). Invece, nel caso in cui l'LTR non superi il valore soglia, il TTR viene saturato ad un valore pari alla durata dell'intervallo di integrazione, questo perché il modello non riesce a vedere cosa succederà oltre a quell'intervallo temporale. A questo punto, prima di passare all'analisi dei risultati ottenuti per diverse manovre, è necessario fare una distinzione tra il TTR_{ideale} e il TTR_{reale}, analizzati nei paragrafi successivi.

7.1 TTR Ideale

Il caso ideale si ha quando si conosce a priori l'andamento dell'accelerazione laterale a cui è soggetto il veicolo e, quindi, il modello viene integrato ricevendo in ingresso la storia temporale esatta dell'accelerazione. Questo, ovviamente, consente di ottenere valori più accurati di angolo di rollio e velocità di rollio, che a sua volta si traduce in una previsione migliore dell'LTR. È doveroso però sottolineare che si tratta di un modello non applicabile nella realtà perché non è possibile prevedere l'andamento reale dell'accelerazione laterale, ma è molto importante analizzarlo lo stesso perché rappresenta il modello di riferimento con cui confrontare il TTR_{reale}.

Ad esempio, considerando un istante generico "i" della manovra di Fishhook riportata sotto ed ipotizzando di integrare per 2 secondi, l'accelerazione laterale fornita in ingresso al modello non è altro che una porzione $a_y(t_i : t_i + t_{integrazione})$ della storia temporale di quella ottenuta tramite CarMaker:

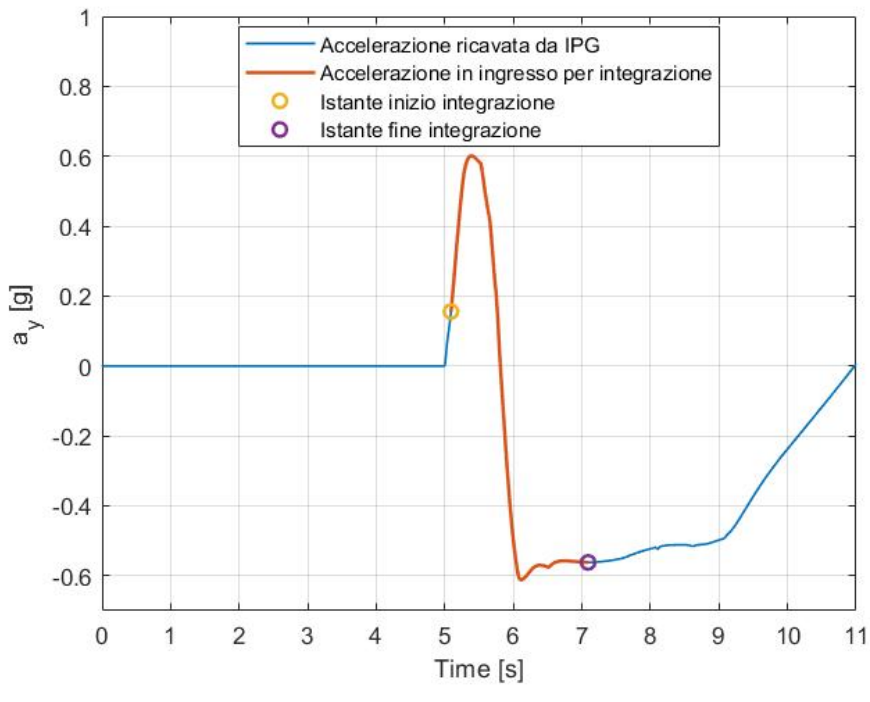


Figura 7.3 - Accelerazione per TTR ideale

In questo modo, integrando il modello, gli andamenti dell'angolo di rollio e della velocità di rollio ottenuti nel medesimo intervallo sono:

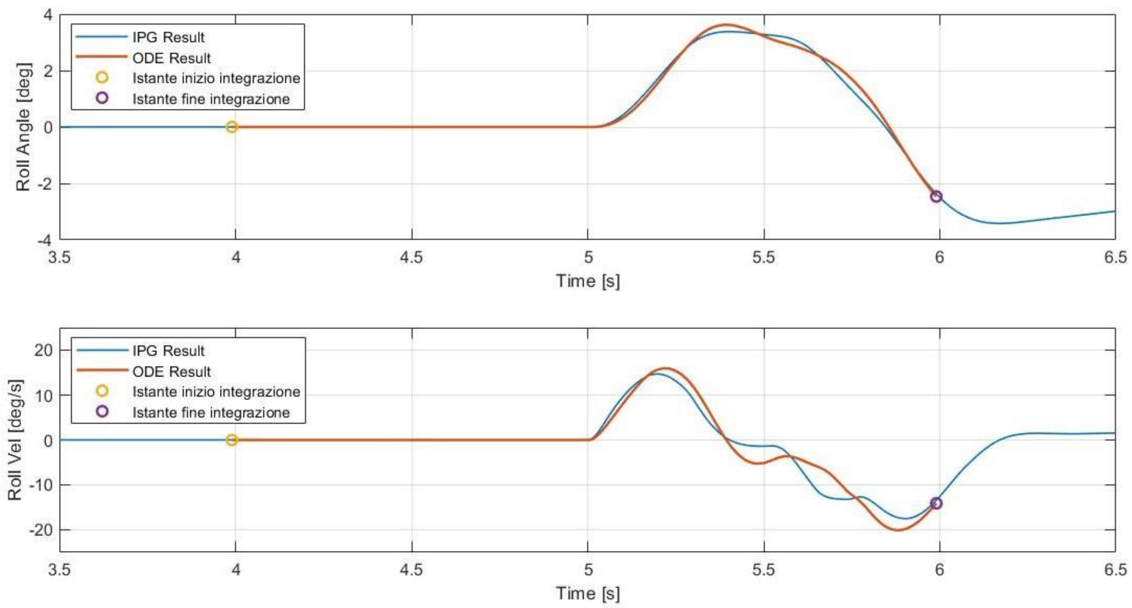


Figura 7.4 - Angolo e velocità di rollio ottenuti tramite integrazione

Come si poteva ipotizzare, il modello restituisce ottimi risultati di previsione sull'angolo e sulla velocità d rollio e, quindi, risultati altrettanto validi possono essere attesi nel calcolo dell'LTR. Infatti, ricordando che le uniche variabili nel calcolo dell'LTR sono a_{ys}, φ *e* $\dot{\varphi}$, si ottiene:

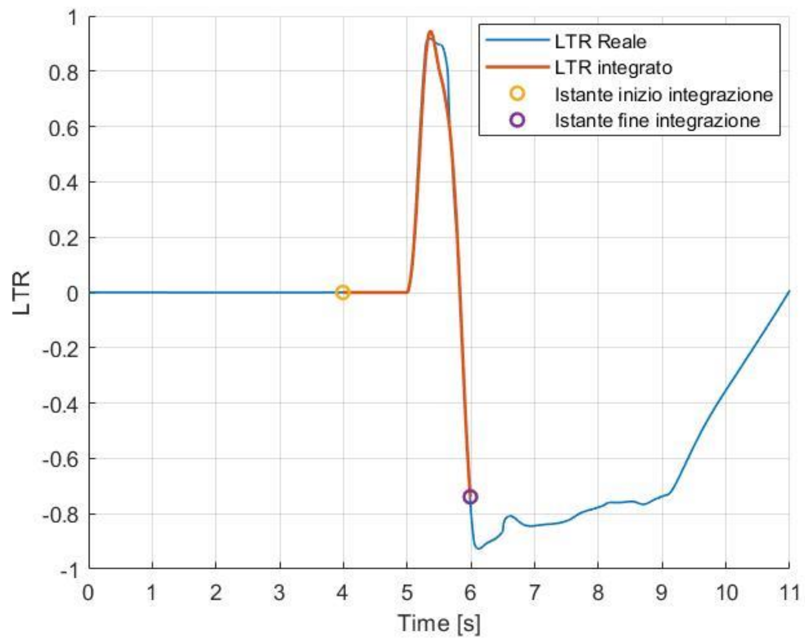


Figura 7.5 - LTR ottenuto con accelerazione nota

Come preannunciato, si può osservare un'ottima previsione dell'LTR e questo consentirà quindi di ottenere risultati molto accurati anche nel calcolo del TTR, come verrà analizzato nei paragrafi successivi.

7.2 TTR Reale

In questo caso non è noto a priori l'andamento dell'accelerazione laterale e, quindi, il modello viene integrato ricevendo in ingresso un andamento dell'accelerazione laterale a rampa, con pendenza ricavata dalla precedente storia temporale come rapporto incrementale dell'a_y:

$$a_{y-input}(t) = a_y(t_0) + \dot{a}_y(t_0) \cdot (t - t_0)$$

$$\dot{a}_y(t_0) = \frac{a_y(t_0) - a_y(t_0 - \Delta t)}{\Delta t}$$

Dove:

- t_0 è l'istante attuale;
- $(t_0 - \Delta t)$ è l'istante precedente della storia temporale;
- t è l'istante futuro generico per il quale si vuole ricavare l'accelerazione laterale;

Considerando il medesimo istante iniziale "i" del paragrafo precedente, l'andamento dell'accelerazione laterale nell'intervallo di integrazione è il seguente:

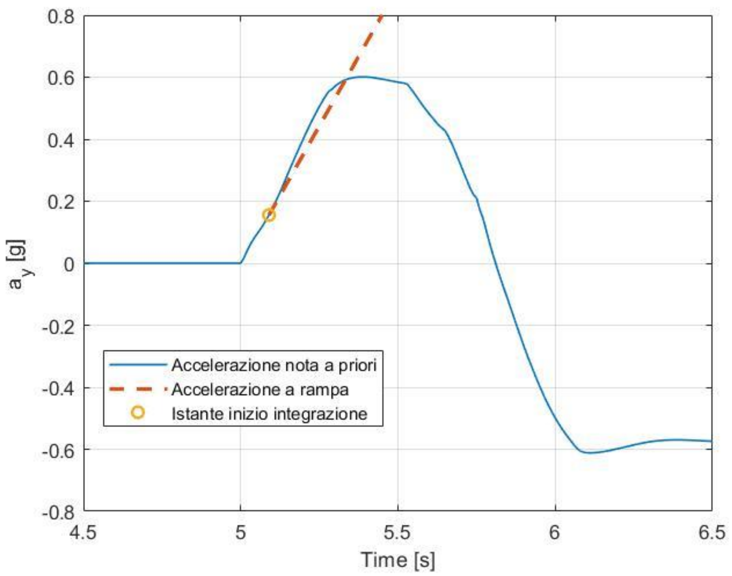


Figura 7.6 - Accelerazione per TTR reale

Il risultato ottenuto sembra approssimare in maniera molto valida l'andamento dell'accelerazione reale, perlomeno per i primi istanti. A tal proposito, è importante evidenziare che l'inclinazione della rampa dell'accelerazione viene aggiornata costantemente e, quindi, considerando un aggiornamento ogni 0.01 secondi, l'accelerazione che si ottiene complessivamente si avvicina molto all'andamento reale. Di seguito viene riportato un esempio per comprendere al meglio questo aspetto, prendendo in considerazione 6 istanti generici di inizio integrazione:

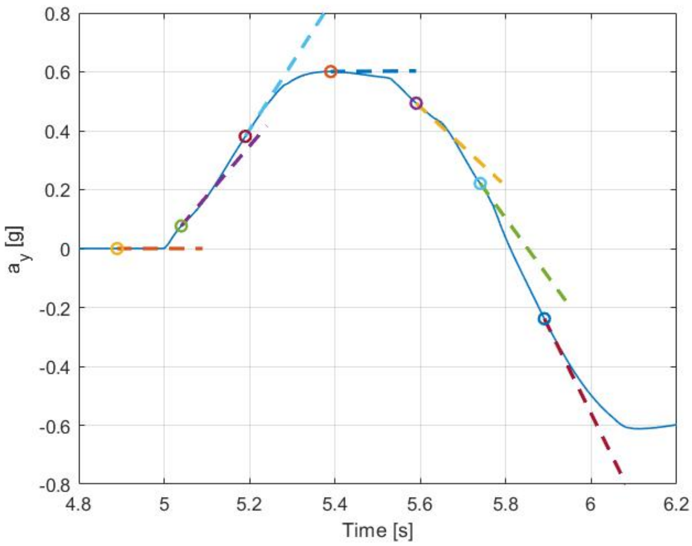


Figura 7.7 - Accelerazione per istanti iniziali differenti

A questo punto, considerando il medesimo istante "i" di inizio integrazione, l'andamento dell'LTR ottenuto tramite integrazione è il seguente:

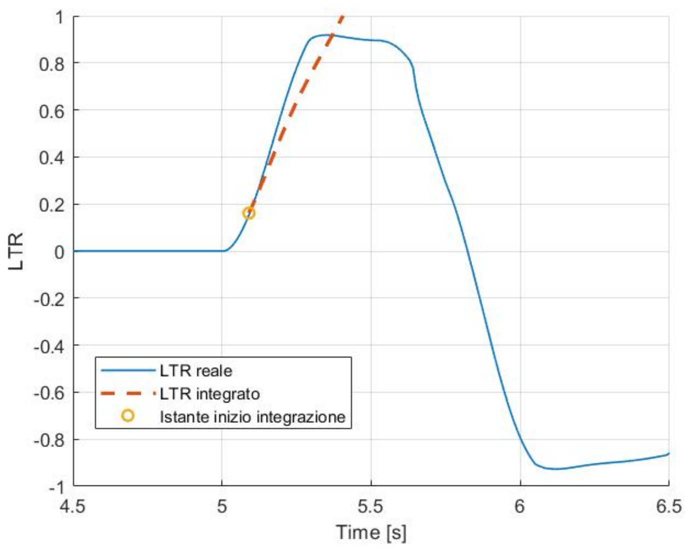


Figura 7.8 - LTR ottenuto con accelerazione a rampa

Anche in questo caso il modello sembra fornire una previsione molto buona dell'LTR reale e l'accuratezza di questa metodologia verrà confermata dal calcolo dell'TTR nei prossimi paragrafi.

7.3 Calcolo del TTR

Definita la differenza tra il TTR_{reale} e il TTR_{ideale} è ora possibile passare al calcolo effettivo del Time To Rollover. Come anticipato nei paragrafi precedenti, il TTR non è altro che la differenza tra l'istante iniziale di integrazione "i" e l'istante in cui LTR integrato supera il valore soglia preimpostato, ovvero:

$$TTR = t\left(LTR_{integrato} = LTR_{soglia}\right) - t(i)$$

Per comprendere meglio questo aspetto, di seguito viene riportato graficamente il calcolo del TTR per un determinato istante "i" di una manovra generica di Ramp Steer:

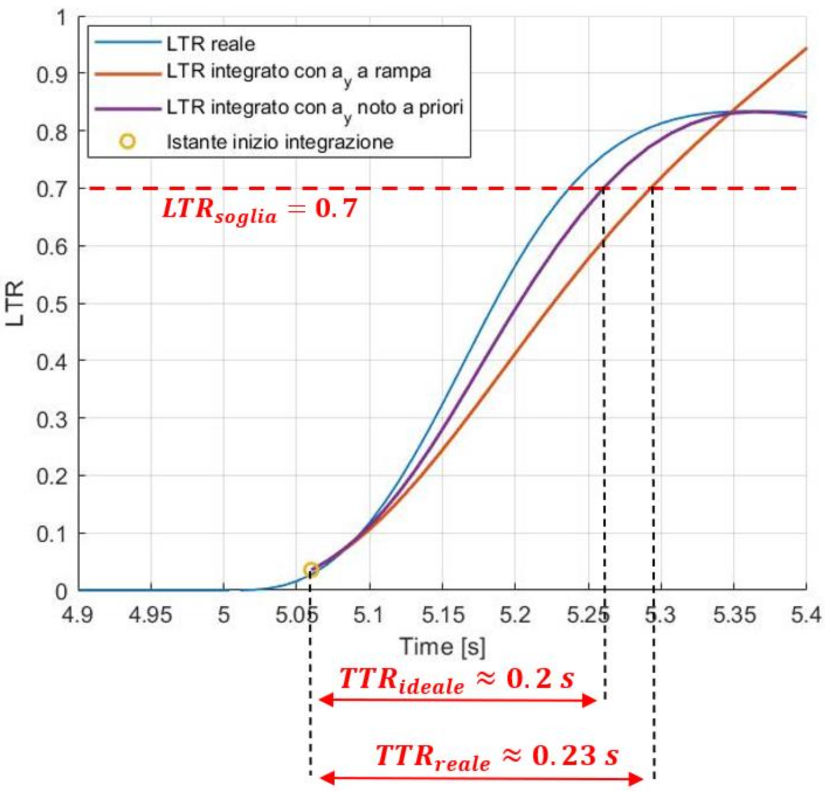


Figura 7.9 - Calcolo TTR

7.4 Confronto tra TTR ideale e TTR reale

Chiarita la metodologia di calcolo del TTR, vengono ora proposti i risultati ottenuti estendendo il calcolo alle intere manovre di Ramp Steer, Fishhook e Double Lane Change:

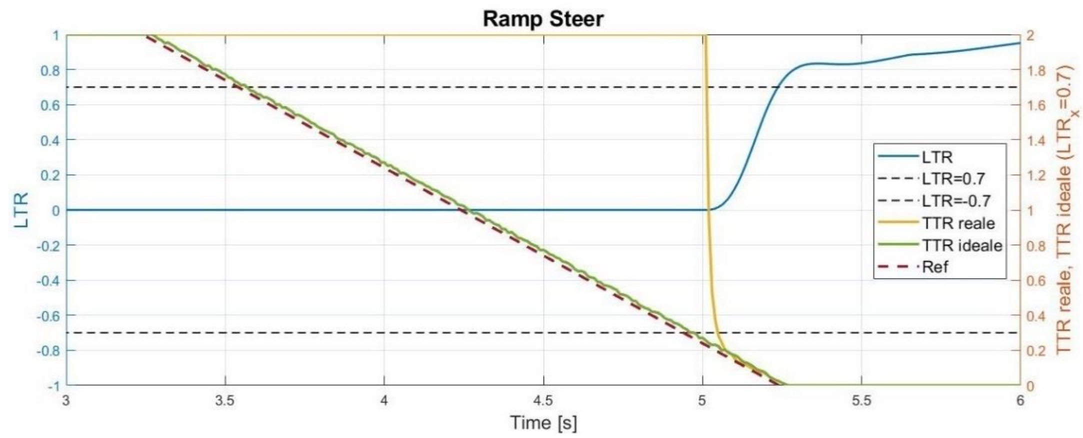


Figura 7.10 - Confronto TTR su manovra di Ramp Steer

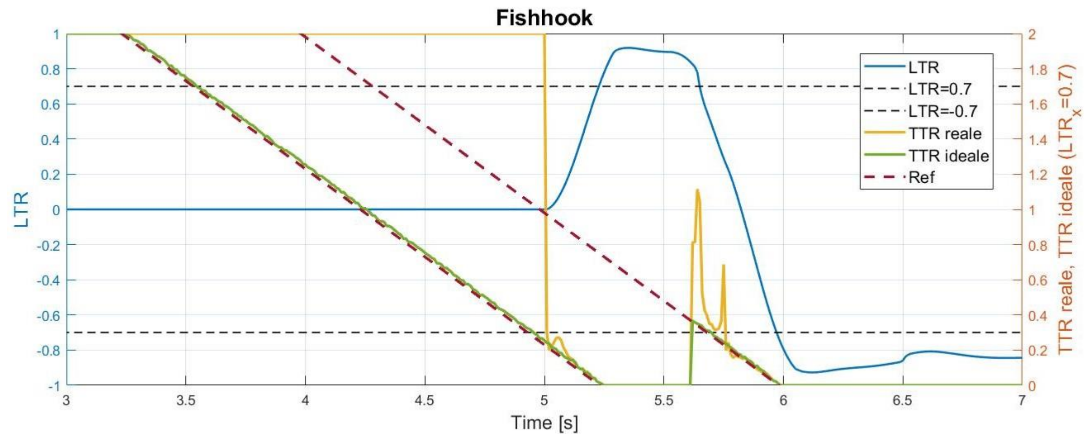


Figura 7.11 - Confronto TTR su manovra di Fishhook

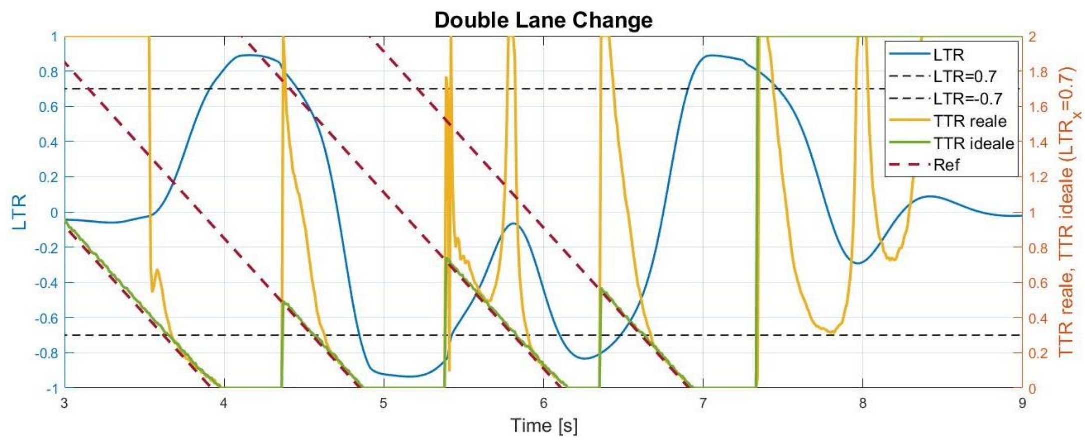


Figura 7.12 - Confronto TTR su manovra Double Lane Change

Come ovviamente ci si poteva aspettare, il TTR_{ideale} fornisce un valore molto più accurato rispetto al TTR_{reale}, in quanto la stima dell'LTR è migliore. Infatti, prendendo come riferimento il Reference Time, ovvero il tempo necessario al raggiungimento della condizione limite, il TTR_{ideale} è quello che si avvicina di più.

Questo vantaggio diventa molto più importante quando il TTR viene calcolato a partire da un istante iniziale di integrazione "i" che si trova prima dell'inizio della manovra, ovvero in condizioni di accelerazione laterale nulla o comunque trascurabile. Infatti, in questi casi, il TTR_{reale} è svantaggiato notevolmente perché con accelerazione nulla la pendenza della rampa è nulla e di conseguenza anche l'LTR rimane a zero. Pertanto, anche se il futuro "pericolo" si trova all'interno dell'intervallo di integrazione, il modello reale non riesce a predire l'informazione corretta, a differenza del TTR_{ideale}.

Per chiarire meglio questo aspetto, di seguito viene riportata la stessa manovra di Ramp Steer riportata sopra, ma questa volta il calcolo viene fatto soltanto per un determinato istante di inizio integrazione antecedente la manovra:

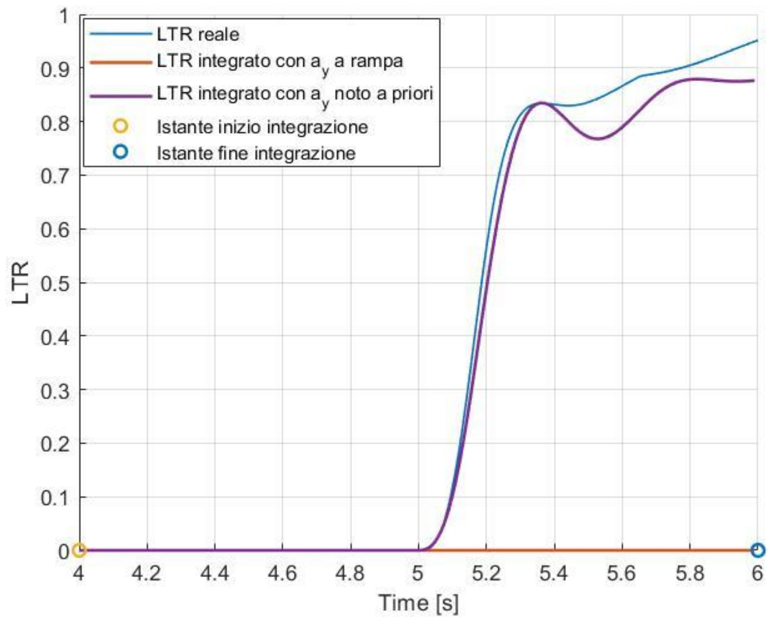


Figura 7.13 - Limite TTR reale

Il limite del TTR_{reale} è proprio questo, ovvero non riuscire a ricavare l'informazione di "pericolo" fintanto che la manovra non ha avuto inizio. Infatti, soltanto a quel punto è in grado di predire l'andamento dell'LTR e calcolare così il TTR.

7.5 Influenza della durata dell'intervallo di integrazione

Un altro aspetto che si vuole osservare è l'influenza della durata dell'intervallo di integrazione sul calcolo del TTR. A tal proposito, è importante ricordare che la durata dell'intervallo di integrazione rappresenta l'orizzonte temporale futuro a disposizione del modello per il calcolo del TTR. L'ideale sarebbe quindi avere un intervallo di integrazione molto grande, ma questo comporterebbe un aumento del tempo impiegato dal codice per integrare il modello ed è per questo che è si è scelto di utilizzare un intervallo di integrazione massimo pari a 2 secondi.

Per analizzare meglio questo aspetto viene riportato di seguito l'andamento del TTR, ottenuto per una manovra di Ramp Steer, considerando prima un intervallo di 2 secondi e poi riducendolo ad 1 secondo:

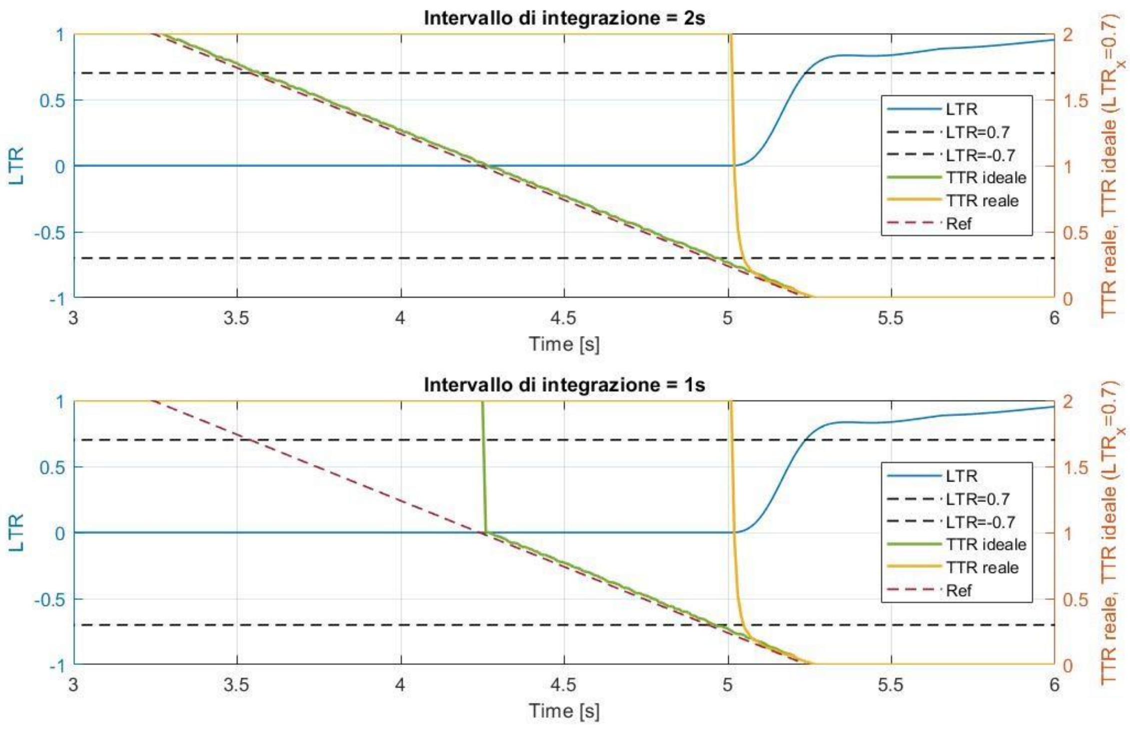


Figura 7.14 - Influenza intervallo di integrazione

Come si può osservare nelle immagini riportate sopra, una diminuzione della durata dell'intervallo di integrazione comporta soltanto un certo ritardo nel calcolo del TTR_{ideale}, mentre il TTR_{reale} non risente minimamente di questo aspetto.

Per poter osservare il ritardo anche nel TTR_{reale}, bisognerebbe considerare un intervallo di integrazione molto piccolo, ossia inferiore al tempo impiegato dal veicolo per passare dalla condizione di LTR nullo alla condizione di LTR soglia preimpostato. In altre parole, ipotizzando che il veicolo impieghi 0.5 secondi per raggiungere la condizione limite, il modello non è in grado di prevederlo soltanto se l'intervallo di integrazione è inferiore a 0.5 secondi. Questo però non succede mai perché il modello a 3 gradi di libertà utilizzato per queste analisi è molto semplice e consente di eseguire il calcolo del TTR in maniera molto rapida e, quindi, non avrebbe alcun senso penalizzare il calcolo del TTR prendendo un intervallo di integrazione inferiore a 2 secondi soltanto per velocizzare il modello, di per sé già velocissimo.

7.6 Limite del TTR

Ricordando che il TTR si basa sull'andamento dell'LTR ricavato tramite integrazione del modello semplificato a 3 gradi di libertà, l'affidabilità di questo indice deriva proprio dall'accuratezza con cui il modello riesce a stimare l'LTR ad ogni integrazione. Infatti, mentre una sovrastima dell'LTR non è pericolosa perché può generare soltanto un TTR inferiore o rilevare eventualmente un falso errore, una sottostima può portare nei casi peggiori al mancato rilevamento del pericolo.

A tal proposito, viene riportata di seguito una manovra di Double Lane Change in cui è possibile osservare proprio questo aspetto:

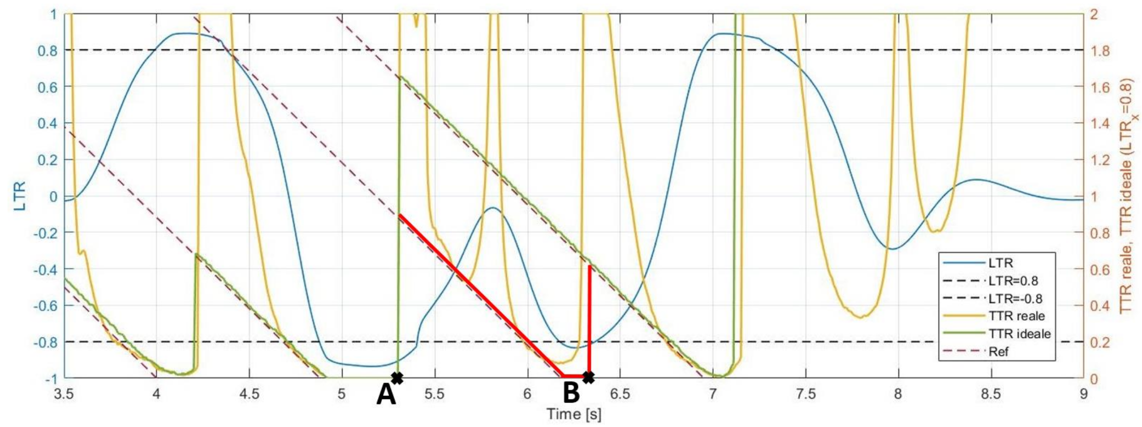


Figura 7.15 - Errore del TTR

Infatti, nell'intervallo A-B evidenziato sopra, l'andamento del TTR_{ideale} che ci si aspetta di ottenere è quello riportato in rosso perché a circa 6.2 secondi l'LTR supera il valore soglia e quindi il TTR dovrebbe andare a zero. In realtà però il TTR non riesce a individuare questo pericolo proprio a causa di un LTR sottostimato, che non raggiunge il valore soglia in quell'intervallo, come riportato nella figura sottostante:

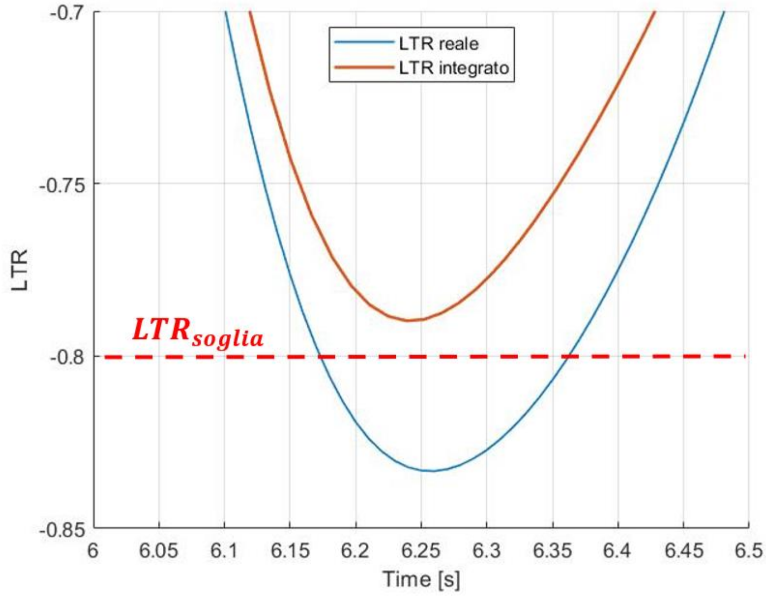


Figura 7.16 - Confronto LTR reale e integrato

8 Confronto degli indici

Analizzati in maniera dettagliata tutti gli indici di interesse, viene ora proposto un loro confronto diretto sulle stesse manovre, in modo da poter stabilire quale sia il migliore in base ai due indici di performance già utilizzati in precedenza, ovvero il tempo di predizione e l’accuratezza.

Seguendo l’ordine delle simulazioni riportate nei capitoli precedenti, nelle figure sottostanti vengono riportate la manovra di Ramp Steer, la manovra di Fishhook e la Double lane change:

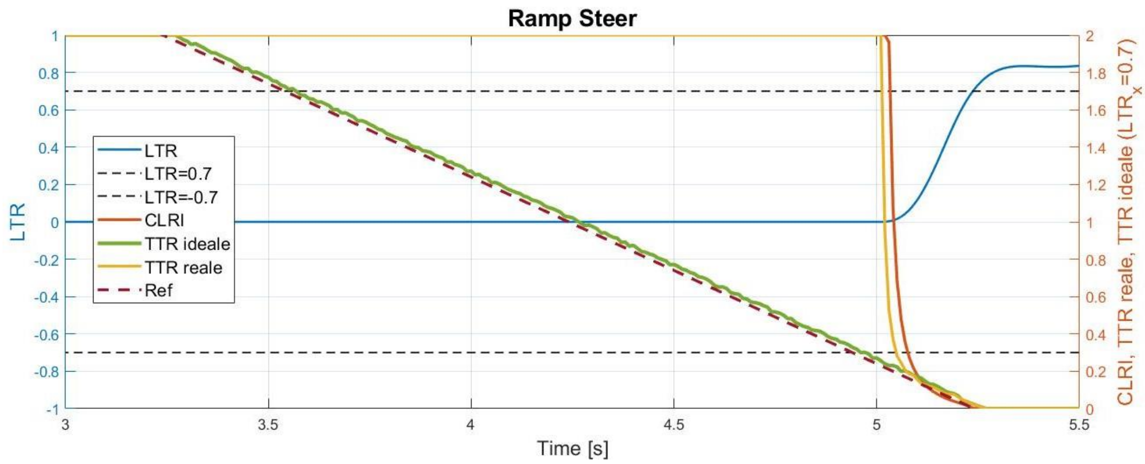


Figura 8.1 - Confronto degli indici su Ramp Steer

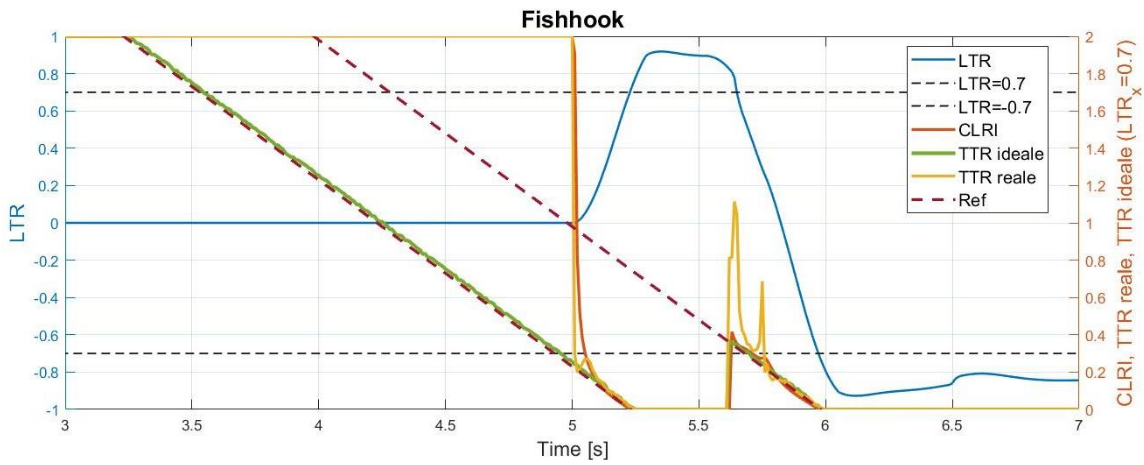


Figura 8.2 - Confronto degli indici su Fishhook

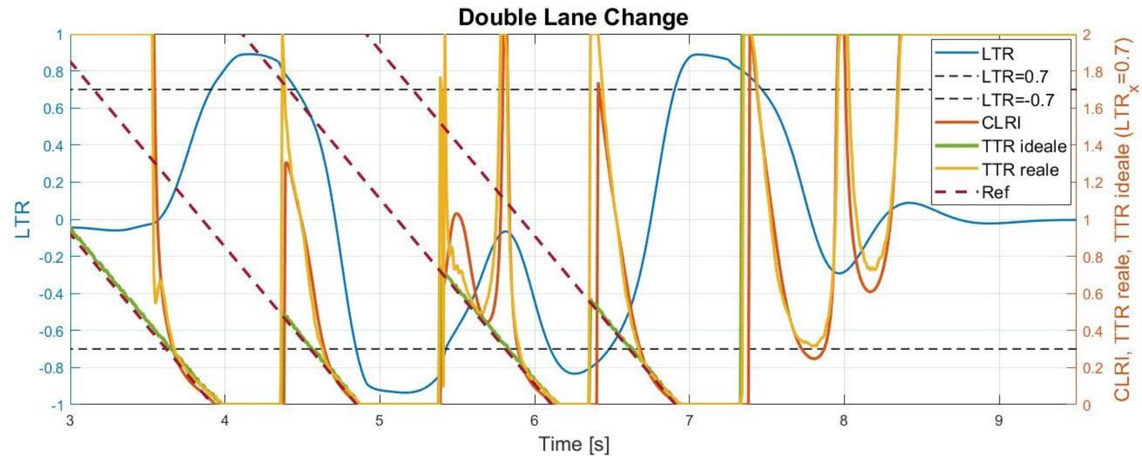


Figura 8.3 - Confronto degli indici su Double Lane Change

Come atteso, il TTR_{ideale} è l'indice migliore sia dal punto di vista del tempo di predizione che dell'accuratezza, infatti, segue fedelmente l'andamento del Reference Time durante tutte le manovre. È importante però ribadire che il TTR_{ideale} non è un indice implementabile nella realtà e quindi il confronto diretto deve essere fatto soltanto tra il CLRI e il TTR_{reale}.

A tal proposito, si può osservare che:

- il **tempo di predizione** del TTR_{reale} è leggermente superiore, ma si tratta comunque di intervalli temporali molto ridotti. Infatti, sono entrambe tecniche predittive basate soltanto sull'informazione attuale fornita in ingresso (accelerazione laterale) e non conoscono quindi quello che succederà realmente in seguito. Con riferimento alla manovra di Ramp Steer riportata sotto, si può osservare infatti che il vantaggio è minimo:

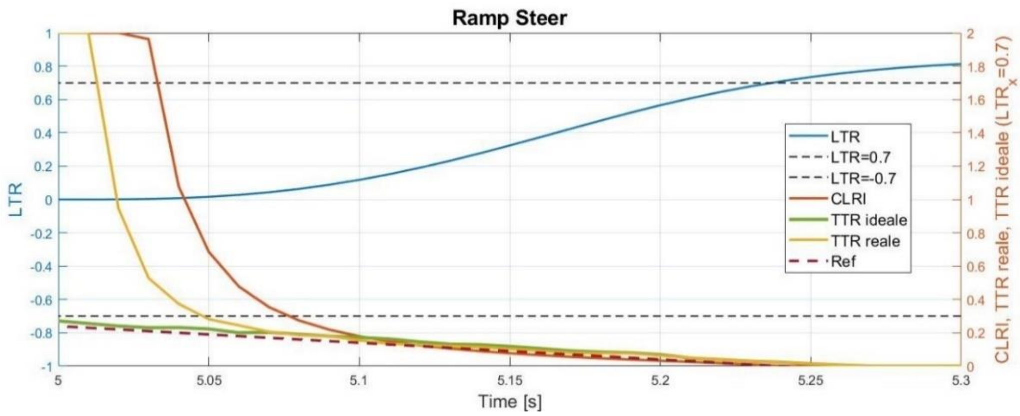


Figura 8.4 - Confronto tempo di predizione

- l'**accuratezza** del TTR_{reale} è sensibilmente superiore, ma soltanto nei primi istanti in cui viene rilevato il pericolo, perché in seguito i due indici si allineano in maniera abbastanza simile al Reference Time. Si nota questo aspetto soprattutto nelle manovre più aggressive come, ad esempio, la manovra di Fishhok, in cui si può osservare come il TTR_{reale} scenda molto più rapidamente avvicinandosi subito al Reference Time.

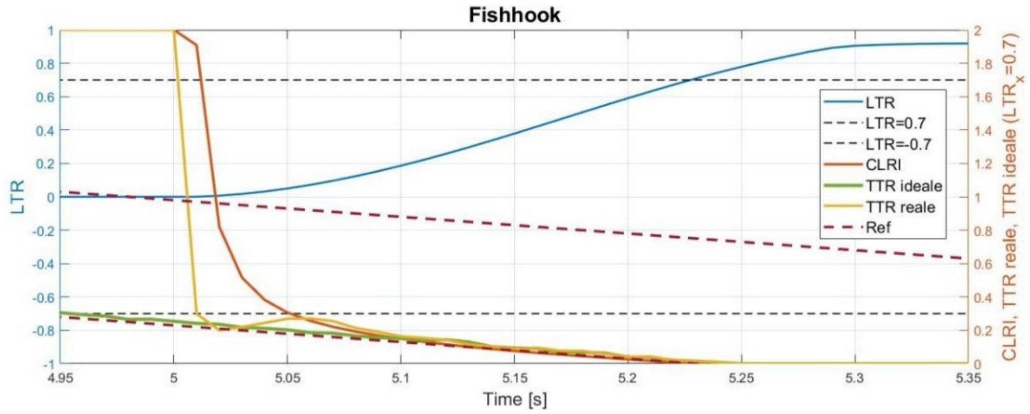


Figura 8.5 - Confronto accuratezza

Inoltre, il fatto che il TTR_{reale} tenda generalmente a risalire leggermente dopo la discesa iniziale non è da considerarsi critico, perché quello che interessa maggiormente è ricevere l'informazione di pericolo il prima possibile e con la massima accuratezza. Pertanto, le eventuali oscillazioni del TTR_{reale} non sono significative.

Si può dunque stabilire che il TTR_{reale}, poiché migliore sia dal punto di vista del tempo di predizione che per l'accuratezza, è preferibile al CLRI.

9 Conclusioni e sviluppi futuri

Tramite le analisi riportate in questo lavoro si è potuto validare la bontà dell'indice CLRI, proposto da Zhang X., Yang Y., Guo K., Lv J. & Peng T. [1], i cui risultati consentono di prevedere il pericolo in maniera piuttosto accurata. Tuttavia, il Time To Rollover è risultato essere sensibilmente migliore, sia dal punto di vista del tempo di predizione che per l'accuratezza, ed è pertanto preferibile al CLRI.

Inoltre, si è osservato che, per il caso "Untripped" (oggetto della tesi), il modello a tre gradi di libertà è sufficiente per ottenere validi risultati e non è pertanto necessario ricorrere a modelli più complessi come quello a undici gradi di libertà. Quest'ultimo potrebbe però risultare significativo per futuri sviluppi, perché consentirebbe di applicare la metodologia del Time To Rollover al caso di ribaltamento "Tripped", dove una delle cause può essere attribuita alle irregolarità del fondo stradale. In tal caso, infatti, ipotizzando di poter "leggere" l'andamento del profilo stradale tramite sensori, sarebbe possibile conoscere in anticipo lo spostamento verticale dei quattro pneumatici e, di conseguenza, ottenere grandi vantaggi rispetto al modello a tre gradi di libertà, in cui tali spostamenti non vengono presi in considerazione.

Bibliografia

[1] Zhang X., Yang Y., Guo K., Lv J., Peng T. “Contour line of load transfer ratio for vehicle rollover prediction”. *Vehicle System Dynamics 2017*, 55, (11), 1748-1763.

[2] Chen B., Peng H. “Differential-braking-based rollover prevention for sport utility vehicles with human-in-the-loop evaluations”. *Vehicle System Dynamics* 2001, 36, (4–5), 359–389.

[3] Jin Z., Zhang L., Zhang J., Khajepour A. “Stability and optimised H∞ control of tripped and untripped vehicle rollover”. *Vehicle System Dynamics* 2016, 54, (10), 1405–1427.

[4] Huang Z., Nie W., Kou s., Son, X. “Rollover detection and control on the non-driven axles of trucks based on pulsed braking excitation”. *Vehicle System Dynamics* 2018, 56, (12), 1864–1882.

[5] Larish C., Piyabongkarn D., Tsourapas V., Rajamani R. “A new predictive lateral load transfer ratio for rollover prevention systems”. *IEEE Transactions on Vehicular Technology* 2013, 62, (7), 2928–2936.

[6] Chen B., Peng H. (October 19, 2004). “Rollover Warning for Articulated Heavy Vehicles Based on a Time-to-Rollover Metric”. ASME. *J. Dyn. Sys., Meas., Control*. September 2005; 127(3): 406–414.

[7] Phanomchoeng G., Rajamani R. “New rollover index for the detection of tripped and untripped rollovers”. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2013, 60, (10), 4726–4736.

[8] Shin, D.;Woo, S.; Park, M. “Rollover Index for Rollover Mitigation Function of Intelligent Commercial Vehicle’s Electronic Stability Control”. *Electronics* 2021, 10, 2605.

[9] National Highway Traffic Safety Administration (NHTSA). Federal Motor Vehicle Safety Standards, Rollover Resistance, 2001.

[10] Velardocchia M., Corso di Meccanica del veicolo, Politecnico di Torino, Torino, a.a. 2020-2021.

[11] Yu H., Güvenç L. & Özgüner Ü. “Heavy duty vehicle rollover detection and active roll control”. *Vehicle System Dynamics* 2008, 46:6, 451-470.

[12] Doumiati M., Victorino A., Charara A. & Lechner D. “Lateral load transfer and normal forces estimation for vehicle safety: experimental test”. *Vehicle System Dynamics: International Journal of Vehicle Mechanics and Mobility* 2009, 47:12, 1511-1533.