

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale
in Ingegneria Matematica

Tesi di Laurea Magistrale

**Simulazione numerica tridimensionale
di un flusso granulare in presenza di ostacoli**



Relatori

prof. Marina Pirulli
prof. Alessandro Leonardi
prof. Andrea Pasqua

Candidato

Simone Calcagno

Anno Accademico 2021-2022

Sommario

I fenomeni franosi, nella fase di propagazione, impattano spesso contro ostacoli naturali o artificiali, come sistemi di mitigazione, che ne modificano le caratteristiche del flusso e che possono dissiparne l'energia riducendo i danni provocati. L'obiettivo dell'elaborato è quello di studiare a piccola scala l'interazione, nella discesa lungo un pendio, tra un flusso granulare e degli ostacoli cilindrici simulativi di alberi. L'analisi è stata effettuata mediante simulazioni numeriche 3D che adottano l'approccio basato sul continuo dato dalle tecniche LBM e che implementano la reologia $\mu(I)$. Inizialmente si è considerato il caso di un singolo ostacolo studiando, al variare delle proprietà del flusso incidente, le caratteristiche dell'onda d'urto che si forma a seguito dell'impatto. Successivamente sono state studiate varie configurazioni di due e tre ostacoli valutando la velocità del flusso e la forza idrodinamica cui è sottoposto ciascun cilindro con l'intento di dedurre una relazione con quelle agenti sugli ostacoli posti intorno.

Ringraziamenti

Desidero ringraziare la relatrice di questa tesi, prof. Marina Pirulli, e i correlatori, prof. Alessandro Leonardi e prof. Andrea Pasqua, per il tempo che mi hanno dedicato, per la pazienza e per i preziosi consigli.

Ringrazio la mia famiglia che mi è sempre stata accanto.

Ringrazio i miei compagni di corso, in particolare Alessandro e Carlo, per i bei momenti passati insieme in questi anni.

Indice

| | |
|--|----|
| Elenco delle tabelle | 4 |
| Elenco delle figure | 5 |
| 1 Introduzione | 7 |
| 1.1 Descrizione e classificazione dei fenomeni franosi | 7 |
| 1.2 Sistemi di difesa | 8 |
| 2 Sperimentazione | 11 |
| 2.1 Interazione di un flusso granulare con un singolo ostacolo cilindrico | 11 |
| 2.1.1 Posizione del punto di pinch-off | 13 |
| 2.2 Interazione di un flusso granulare con molteplici ostacoli cilindrici | 15 |
| 3 Richiamo alla teoria del salto granulare | 19 |
| 3.1 Salto granulare stazionario | 20 |
| 3.2 Soluzione semplificata per un salto stazionario incomprimibile | 21 |
| 4 Reologia $\mu(I)$ | 22 |
| 4.1 Esperimenti condotti da Pouliquen | 22 |
| 4.2 Reologia $\mu(I)$ locale | 28 |
| 5 Simulazioni numeriche | 30 |
| 5.1 LBM | 30 |
| 5.2 Simulazioni 3D di un flusso granulare in presenza di un singolo ostacolo | 34 |
| 5.2.1 Descrizione del set-up | 34 |
| 5.2.2 Simulazioni effettuate variando le condizioni in ingresso | 36 |
| 5.2.3 Simulazioni effettuate variando l'inclinazione | 37 |
| 5.3 Simulazioni 3D di un flusso granulare in presenza di più ostacoli | 40 |
| 5.3.1 Disposizione degli ostacoli allineata | 40 |
| 5.3.2 Disposizione degli ostacoli a forma di triangolo | 45 |
| 6 Conclusioni | 49 |

Elenco delle tabelle

| | | |
|-----|---|----|
| 1.1 | Classificazione delle frane di Varnes. | 7 |
| 4.1 | Sferette di vetro usate per la massa e per la scabrezza della superficie. | 23 |
| 5.1 | Spessore e velocità media del flusso in ingresso imposti nelle simulazioni e numero di Froude calcolato appena a monte dell'onda d'urto. | 36 |
| 5.2 | Valori di α e α/α_1 corrispondenti al cilindro più a valle al variare della distanza L dal cilindro più a monte. | 41 |
| 5.3 | Valori dello spessore h e della velocità media v del flusso poco prima del cilindro più a valle per ciascuna configurazione individuata dalla distanza L . h_1 e v_1 sono lo spessore e la velocità media del flusso appena prima del cilindro più a monte. | 42 |
| 5.4 | Valori della velocità media v del flusso calcolata al fondo del piano simulato al variare della distanza L tra gli ostacoli. | 42 |
| 5.5 | Valori di α e α/α_1 corrispondenti al cilindro più a valle di ordinata minore al variare della distanza S dagli altri cilindri. | 46 |
| 5.6 | Valori di α e α/α_1 corrispondenti al cilindro più a valle di ordinata maggiore al variare della distanza S dagli altri cilindri. | 46 |
| 5.7 | Valori della velocità media v del flusso calcolata a valle dei tre cilindri al variare della distanza S tra gli ostacoli. | 47 |

Elenco delle figure

| | | |
|-----|--|----|
| 1.1 | Esempi di barriere costruite in Austria. [Hübl et al., 2005] | 9 |
| 1.2 | Tipologie di barriere aperte. [Hübl et al., 2005] | 10 |
| 2.1 | Apparato sperimentale utilizzato da Cui e Gray. [Cui and Gray, 2013] | 11 |
| 2.2 | Visione prospettica dell'onda d'urto, del punto di stagnazione e del vuoto granulare. [Cui and Gray, 2013] | 12 |
| 2.3 | Vista dall'alto dell'onda d'urto, del punto di stagnazione e del vuoto granulare. [Cui and Gray, 2013] | 13 |
| 2.4 | Vista dall'alto del flusso di sabbia (in alto) e di non-pareille (in basso) al raggiungimento dello stato stazionario. [Cui and Gray, 2013] | 14 |
| 2.5 | Distanza x_v del punto di pinch-off adimensionalizzata rispetto al diametro del cilindro in funzione dell'angolo β ottenuta dagli esperimenti (rombi pieni) e computazionalmente (cerchi vuoti). [Cui and Gray, 2013] | 15 |
| 2.6 | Schema della collocazione degli ostacoli nel piano. [Benito et al., 2012] | 15 |
| 2.7 | Schema dell'apparato sperimentale usato da Luong et al.: (a) vista laterale; (b) vista in pianta. [Luong et al., 2020] | 16 |
| 2.8 | Viste dall'alto della progressione del flusso su un piano libero (a-c), nel caso con spaziatura $S = 80$ mm (d-f), $S = 60$ mm (g-i) e $S = 40$ mm (j-l). [Luong et al., 2020] | 17 |
| 2.9 | Grafici della lunghezza massima (a,b) e della larghezza massima (c,d) del flusso in funzione del tempo. (a) e (c) mostrano le misurazioni sperimentali non aggiustate, mentre (b) e (d) mostrano i dati aggiustati tenendo conto dell'area occupata dai cilindri. [Luong et al., 2020] | 18 |
| 3.1 | Schema di un risalto granulare stazionario lungo un piano inclinato. [Faug, 2015] | 20 |
| 4.1 | Apparato sperimentale. [Pouliquen, 1999] | 23 |
| 4.2 | Regione nello spazio dei parametri $(\theta, h/d)$ dove si osservano flussi stazionari uniformi. [Pouliquen, 1999] | 24 |
| 4.3 | Funzione $h_{stop}(\theta)$ per i quattro sistemi studiati. [Pouliquen, 1999] | 25 |
| 4.4 | (a) Velocità adimensionale u/\sqrt{gd} in funzione di h/d per differenti angoli di inclinazione θ . (b) Numero di Froude u/\sqrt{gh} in funzione di $h/h_{stop}(\theta)$ per differenti angoli di inclinazione. Dati relativi al sistema 1. [Pouliquen, 1999] | 26 |
| 4.5 | Numero di Froude u/\sqrt{gh} in funzione di $h/h_{stop}(\theta)$ per i quattro sistemi studiati e per differenti angoli di inclinazione. [Pouliquen, 1999] | 26 |

| | | |
|------|---|----|
| 4.6 | Coefficiente d'attrito μ in funzione del numero d'inerzia I | 29 |
| 5.1 | Esempio di discretizzazione usata in LBM: (a) griglia cubica; (b) velocità permesse in D3Q19. [Pasqua et al., 2022] | 31 |
| 5.2 | Viscosità ν analitica e numerica per la reologia $\mu(I)$ e limiti di viscosità ν_{min} e ν_{max} dati da LBM. [Pasqua et al., 2022] | 34 |
| 5.3 | Vista dall'alto della regione simulata e della posizione del cilindro (valori sugli assi indicati in metri). La direzione lungo la quale scende il fluido è quella dell'asse x. | 35 |
| 5.4 | Rapporto h_{stag}/h_1 in funzione del numero di Froude Fr_1 : espressione analitica (5.18) ricavata da Cui e Gray e risultati ottenuti nelle simulazioni. | 37 |
| 5.5 | Flusso in condizioni stazionarie per inclinazione del piano pari a 40° | 38 |
| 5.6 | Flusso in condizioni stazionarie per inclinazione del piano pari a 50° | 38 |
| 5.7 | Distanza x_v del punto di pinch-off, adimensionalizzata rispetto al diametro del cilindro, in funzione dell'angolo di inclinazione ottenuta nelle simulazioni. | 39 |
| 5.8 | Posizione dei cilindri e dimensioni del piano simulato (valori sugli assi indicati in metri). La direzione lungo la quale scende il fluido è quella dell'asse x. | 41 |
| 5.9 | Vista dall'alto del flusso in condizioni stazionarie. La direzione lungo la quale scende il fluido è quella dell'asse x. | 43 |
| 5.10 | Vista prospettica del flusso in condizioni stazionarie. La direzione lungo la quale scende il fluido è quella dell'asse x. | 44 |
| 5.11 | Posizione dei cilindri e dimensioni del piano simulato (valori sugli assi indicati in metri). La direzione lungo la quale scende il fluido è quella dell'asse x. | 45 |
| 5.12 | Vista dall'alto del flusso in condizioni stazionarie. La direzione lungo la quale scende il fluido è quella dell'asse x. | 47 |
| 5.13 | Vista prospettica del flusso in condizioni stazionarie. La direzione lungo la quale scende il fluido è quella dell'asse x. | 48 |

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Descrizione e classificazione dei fenomeni franosi

Il termine frana si riferisce ad un movimento di una massa di materiale governato dalla forza di gravità che si verifica tipicamente lungo un pendio. Si tratta di un termine molto generico che racchiude al suo interno fenomeni molto differenti tra loro, ad esempio, per tipologia di materiale interessato e per velocità di propagazione. Per questo motivo sono state proposte varie classificazioni delle frane: una delle più utilizzate è quella di Varnes del 1978. Come schematizzato in tabella 1.1, Varnes distingue i fenomeni franosi in base al tipo di movimento e al materiale coinvolto.

| Tipo di movimento | | Tipo di materiale |
|-------------------|-------------|-------------------|
| Crolli | | Rocce |
| Ribaltamenti | | Detriti |
| Scorrimenti | Planari | Terre |
| | Rotazionali | |
| Espandimenti | | |
| Flussi | | |
| Complesse | | |

Tabella 1.1: Classificazione delle frane di Varnes.

Per tipo di materiale si considerano tre categorie: frane di roccia, di detrito e di terra. In base al tipo di movimento si individuano sei classi: crolli, ribaltamenti, scorrimenti, espandimenti, flussi (o colate) e frane complesse.

I crolli sono dati dal distacco e dalla caduta di una massa di materiale (tipicamente uno o più blocchi di roccia) da un pendio molto ripido. Si ha un moto di caduta libera seguito da rimbalzi e rotolamenti quando il materiale impatta con il versante. Sono caratterizzati da un'elevata velocità di propagazione.

I ribaltamenti si manifestano con la rotazione in avanti di uno o più blocchi di materiale rispetto ad un versante e possono evolvere in un'altra tipologia di movimento come crolli o scorrimenti.

Gli scorrimenti sono caratterizzati da una massa che si muove come un unico blocco lungo una superficie di rottura detta superficie di scorrimento. A seconda delle caratteristiche di quest'ultima si distingue tra scorrimenti planari e rotazionali.

Si parla di espandimenti quando si verifica un'espansione laterale di un materiale posto sopra uno strato più debole. Questi fenomeni franosi avvengono tipicamente su pendii a bassa pendenza o su terreni pianeggianti.

I flussi sono contraddistinti da un moto in cui i grani costituenti il fluido si muovono indipendentemente gli uni dagli altri. Il movimento può essere rapido e caotico oppure lento a seconda della pendenza del versante e della quantità d'acqua contenuta.

Infine una frana si dice complessa se le caratteristiche del suo movimento sono riconducibili a due o più delle tipologie appena descritte.

Oltre al tipo di movimento e di materiale, i fenomeni franosi vengono classificati in base alla velocità del loro movimento. Nello specifico una frana può essere: estremamente lenta (<16 mm/anno), molto lenta (16 mm/anno - 1.6 m/anno), lenta (1.6 m/anno - 13 m/mese), moderata (13 m/mese - 1.8 m/ora), rapida (1.8 m/ora - 3 m/minuto), molto rapida (3 m/minuto - 5 m/s), estremamente rapida (>5 m/s).

All'aumentare della velocità con cui si muove la frana cresce l'entità dei danni che questa può provocare durante la sua propagazione.

1.2 Sistemi di difesa

Ogni anno fenomeni franosi, in particolare quelli rapidi, causano morti e danni a infrastrutture ed edifici. Per questo motivo è di fondamentale importanza lo studio di sistemi in grado di prevenire la formazione di frane o mitigarne gli effetti distruttivi.

Per ridurre le possibilità che si sviluppi un fenomeno franoso si interviene cercando di eliminare o minimizzare alcune cause dell'innescio. Ad esempio, si installano sistemi di drenaggio per evitare la saturazione di terreni a rischio, si realizzano sistemi per la regimazione dei corsi d'acqua o si adopera il rimboschimento dei versanti.

La seconda tipologia di opere di difesa mira invece a frenare, ostacolare o deviare il flusso del materiale che costituisce la frana. Un esempio è dato dalle barriere paramassi costruite per bloccare la caduta di blocchi di roccia. In particolare, si distingue tra barriere paramassi rigide e barriere paramassi elastiche. Le prime sono tipicamente realizzate in calcestruzzo armato e sono in grado di resistere a forti impatti; le seconde sono più leggere e si deformano all'impatto con i massi dissipandone l'energia e per la loro facilità di installazione possono essere collocate anche in zone difficilmente accessibili.

Un altro esempio sono le barriere (vedi fig. 1.1) poste trasversalmente al letto di un torrente dette briglie selettive. Queste strutture sono progettate per dissipare l'energia di colate detritiche e per agire da filtro trattenendo i detriti più grossi e lasciando fluire l'acqua e i sedimenti più fini. In fig. 1.2 sono schematizzate diverse tipologie di barriere.

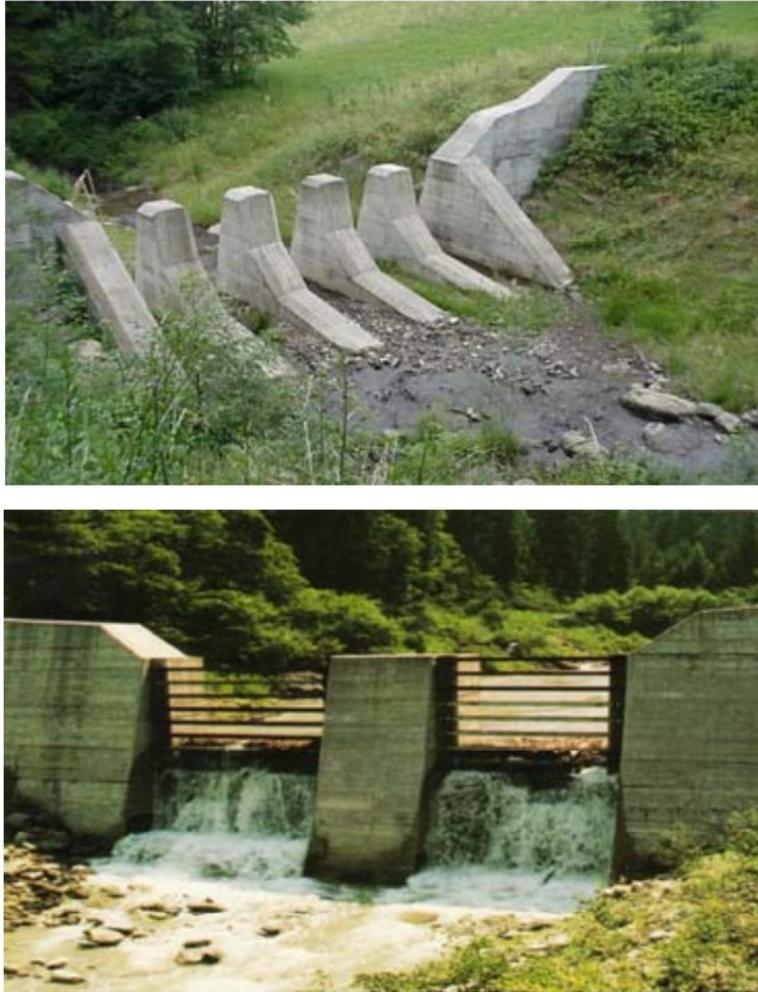


Figura 1.1: Esempi di barriere costruite in Austria. [Hübl et al., 2005]

Un'alternativa meno impattante dal punto di vista ambientale, è data dal rimboschimento dei versanti. Infatti è stato osservato che, per fenomeni franosi di media intensità, le foreste sono in grado di dissipare parte dell'energia del flusso frenandone la discesa [Luong et al., 2020].

Al fine di progettare sistemi di difesa efficaci, un contributo importante oggi giorno è dato dalle simulazioni numeriche di fenomeni franosi. Questo ha dato un forte impulso allo studio di modelli matematici più accurati e algoritmi risolutivi migliori.

L'oggetto di questo elaborato è proprio lo studio, tramite simulazioni numeriche, dell'interazione di un flusso granulare con degli ostacoli cilindrici simulativi di alberi. Le simulazioni effettuate si ispirano a degli esperimenti al riguardo condotti a scala di laboratorio ([Cui and Gray, 2013]; [Luong et al., 2020]) i quali sono presentati nel seguito.

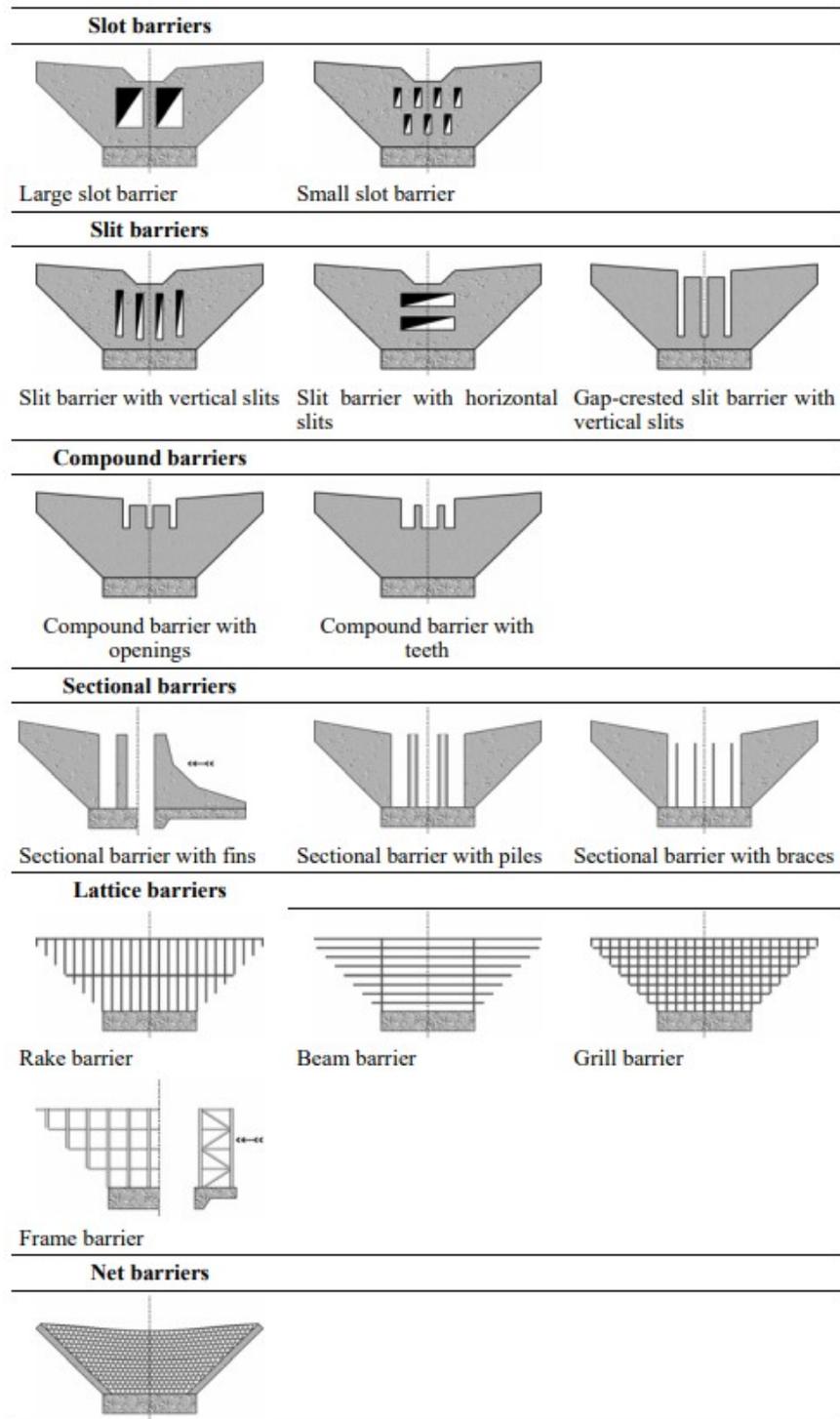


Figura 1.2: Tipologie di barriere aperte. [Hübl et al., 2005]

Capitolo 2

Sperimentazione

2.1 Interazione di un flusso granulare con un singolo ostacolo cilindrico

X. Cui e J.M.N.T. Gray hanno condotto degli esperimenti a piccola scala sull'interazione tra un flusso granulare e un ostacolo cilindrico su un piano inclinato.

L'apparato sperimentale utilizzato è mostrato in fig. 2.1. Esso è costituito da una canaletta in Plexiglas larga 300 mm e lunga 600 mm la cui inclinazione può essere regolata. Il materiale granulare è contenuto in un serbatoio posto in cima alla canaletta ed è fatto fuoriuscire tramite un cancelletto di apertura regolabile. Al centro della canaletta e a metà della sua lunghezza è collocato un cilindro di metallo con diametro 30 mm in modo che il suo asse sia perpendicolare al piano inclinato.



Figura 2.1: Apparato sperimentale utilizzato da Cui e Gray. [Cui and Gray, 2013]

I materiali utilizzati sono sabbia con grani di diametro compreso tra 100 e 400 μm e non-pareille (palline decorative per dolci) di diametro 1 mm.

Negli esperimenti condotti in Cui and Gray [2013] è stata osservata la formazione di un'onda d'urto a bolla in prossimità del cilindro (vedi fig. 2.1, 2.2 e 2.3). Quando il flusso di materiale attraversa l'onda d'urto, diventa rapidamente più spesso e raggiunge l'altezza massima in corrispondenza della parte più a monte del cilindro dove si ha il punto di stagnazione nel quale i grani hanno velocità quasi nulla. Come i grani passano attorno al cilindro, il flusso espande comportando la diminuzione dello spessore e l'accelerazione dei grani. Subito a valle del cilindro si forma una zona dove non vi sono grani detta "vuoto granulare"; il punto più a valle di tale regione viene detto punto di pinch-off.



Figura 2.2: Visione prospettica dell'onda d'urto, del punto di stagnazione e del vuoto granulare. Il materiale che fluisce è sabbia, l'inclinazione del piano è di $\theta = 36^\circ$ e il numero di Froude appena a monte dell'onda d'urto è circa 6. [Cui and Gray, 2013]

L'onda d'urto, ben visibile in fig. 2.3, separa il flusso supercritico (numero di Froude $Fr > 1$) a monte della stessa, dalla regione di flusso subcritico ($Fr < 1$) immediatamente a valle. A seguito dell'espansione il flusso torna ad essere supercritico.

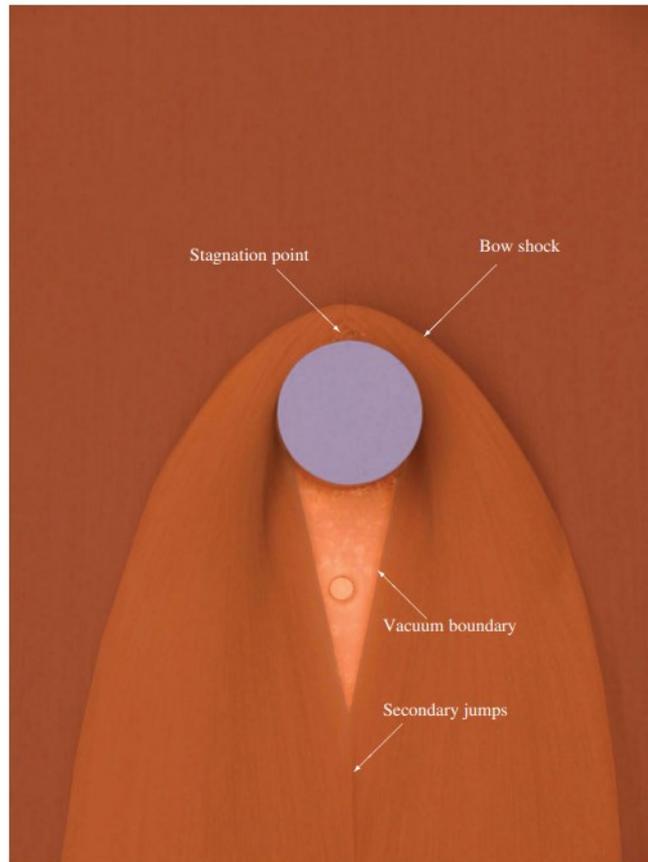


Figura 2.3: Vista dall'alto dell'onda d'urto, del punto di stagnazione e del vuoto granulare. Il materiale che fluisce è sabbia, l'inclinazione del piano è di $\theta = 36^\circ$ e il numero di Froude appena a monte dell'onda d'urto è circa 6. [Cui and Gray, 2013]

2.1.1 Posizione del punto di pinch-off

Confrontando gli esperimenti condotti con la sabbia e con il non-pareille, si osserva una sostanziale differenza nella forma assunta dal vuoto granulare al raggiungimento dello stato stazionario (vedi fig. 2.4). Nel caso con la sabbia la distanza del punto di pinch-off dal cilindro è molto minore rispetto al caso con il non-pareille.

In Cui and Gray [2013] si ipotizza che questo sia dovuto alla differente accelerazione cui sono sottoposti i grani nei due casi. Viene quindi introdotto il parametro $\beta = \theta - \delta$, dove θ è l'inclinazione del piano mentre δ è l'angolo di attrito dinamico alla base. L'angolo β determina l'accelerazione di un flusso granulare lungo un pendio [Cui and Gray, 2013]. Negli esperimenti riportati in fig. 2.4, $\beta = 10^\circ$ nel caso della sabbia e $\beta = 15^\circ$ nel caso del non-pareille.

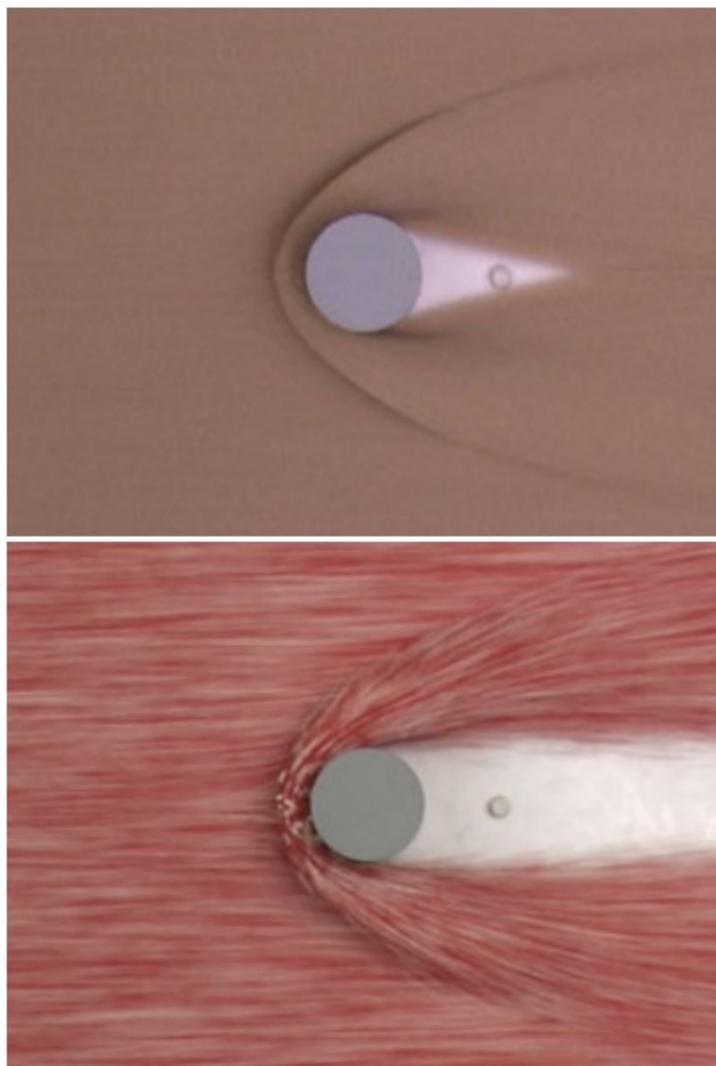


Figura 2.4: Vista dall'alto del flusso di sabbia (in alto) e di non-pareille (in basso) al raggiungimento dello stato stazionario. [Cui and Gray, 2013]

In fig. 2.5 è riportata la distanza x_v del punto di pinch-off in funzione di β , il quale viene fatto variare modificando l'angolo di inclinazione della canaletta. Quando β va a zero, anche la distanza x_v tende a zero indicando che il vuoto granulare si chiude subito dietro il cilindro. Per valori di β alti la distanza x_v cresce in modo non lineare. All'aumentare dell'inclinazione cresce il numero di Froude e il flusso è più sottile e veloce per cui i gradienti di pressione, responsabili della chiusura del vuoto granulare, hanno un peso minore e il punto di pinch-off si sposta più a valle.

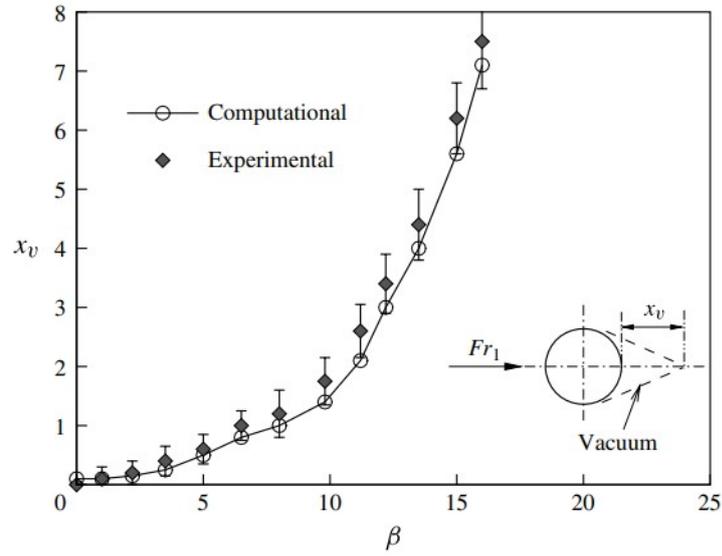


Figura 2.5: Distanza x_v del punto di pinch-off adimensionalizzata rispetto al diametro del cilindro in funzione dell'angolo β ottenuta dagli esperimenti (rombi pieni) e computazionalmente (cerchi vuoti). [Cui and Gray, 2013]

2.2 Interazione di un flusso granulare con molteplici ostacoli cilindrici

Il problema diventa molto più complesso quando il flusso granulare interagisce con più ostacoli.

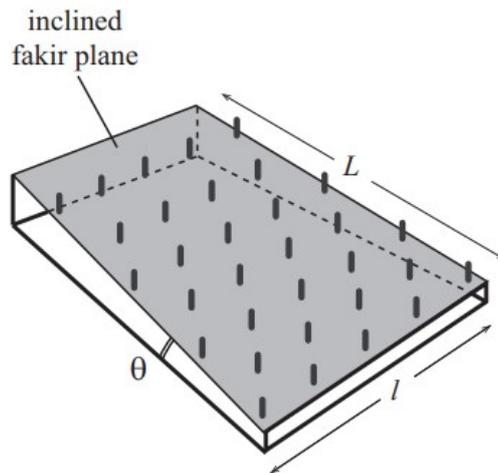


Figura 2.6: Schema della collocazione degli ostacoli nel piano. [Benito et al., 2012]

Recentemente sono stati condotti degli esperimenti a tal proposito considerando un letto di chiodi (vedi fig. 2.6) con l'intento di simulare in maniera semplificata l'effetto di una foresta di alberi sulle caratteristiche del moto di una colata detritica [Luong et al., 2020]. L'apparato sperimentale usato da Luong et al. è schematizzato in fig. 2.7. Il piano di inclinazione regolabile è lungo 900 mm e largo 600 mm ed è privo di barriere laterali. Lungo il piano sono attaccati dei cilindri in plastica rigida di diametro $D = 20$ mm e altezza 50 mm. I cilindri sono disposti secondo una griglia esagonale regolare con distanza S tra i centri uniforme. Sono state analizzate varie configurazioni che differiscono per il valore assunto da questa distanza: $S = 40$ mm, $S = 60$ mm, $S = 80$ mm e $S = \infty$, ossia il piano libero.

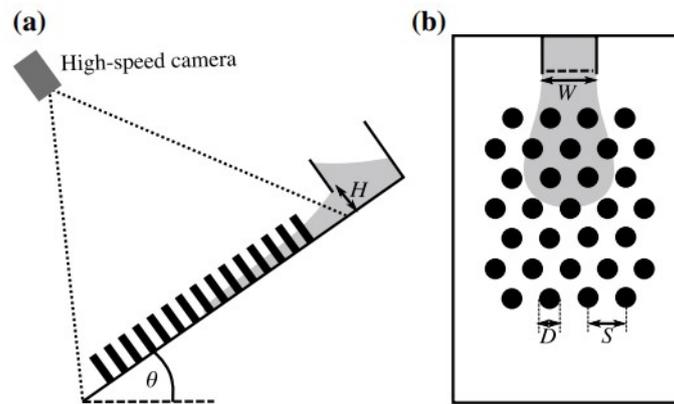


Figura 2.7: Schema dell'apparato sperimentale usato da Luong et al.: (a) vista laterale; (b) vista in pianta. [Luong et al., 2020]

Il materiale granulare utilizzato consiste in sferette di vetro di diametro $d = 0.3$ mm e densità $\rho = 2500$ kg m⁻³. Le sferette di vetro sono rilasciate da un serbatoio posto in cima al piano in posizione centrale (vedi fig. 2.7) e dotato di un cancelletto con altezza di apertura H regolabile. Negli esperimenti H varia tra 13 mm a 43 mm. L'ampiezza del cancelletto è $W = 97$ mm, molto inferiore all'ampiezza del piano così da permettere al materiale granulare di espandersi lateralmente.

Dagli esperimenti condotti, Luong et al. [2020] hanno osservato che la presenza degli ostacoli influenza in maniera significativa varie proprietà del flusso (vedi fig. 2.8). Innanzitutto la velocità con cui si muove il materiale granulare diminuisce all'aumentare della densità dei cilindri: ad esempio, il tempo impiegato ad arrivare in fondo al piano inclinato passa da 0.9 s, nel caso del piano libero, a 3.0 s, nel caso della configurazione più densa. Questo è reso ancora più evidente dalla fig. 2.9(a) che riporta la lunghezza massima del flusso in funzione del tempo per ciascuna delle quattro configurazioni studiate. Osservando i grafici si nota che in tutti i casi il flusso decelera nel tempo e questo può essere dovuto in parte all'attrito tra i grani e la superficie del piano ma soprattutto alla presenza degli ostacoli.

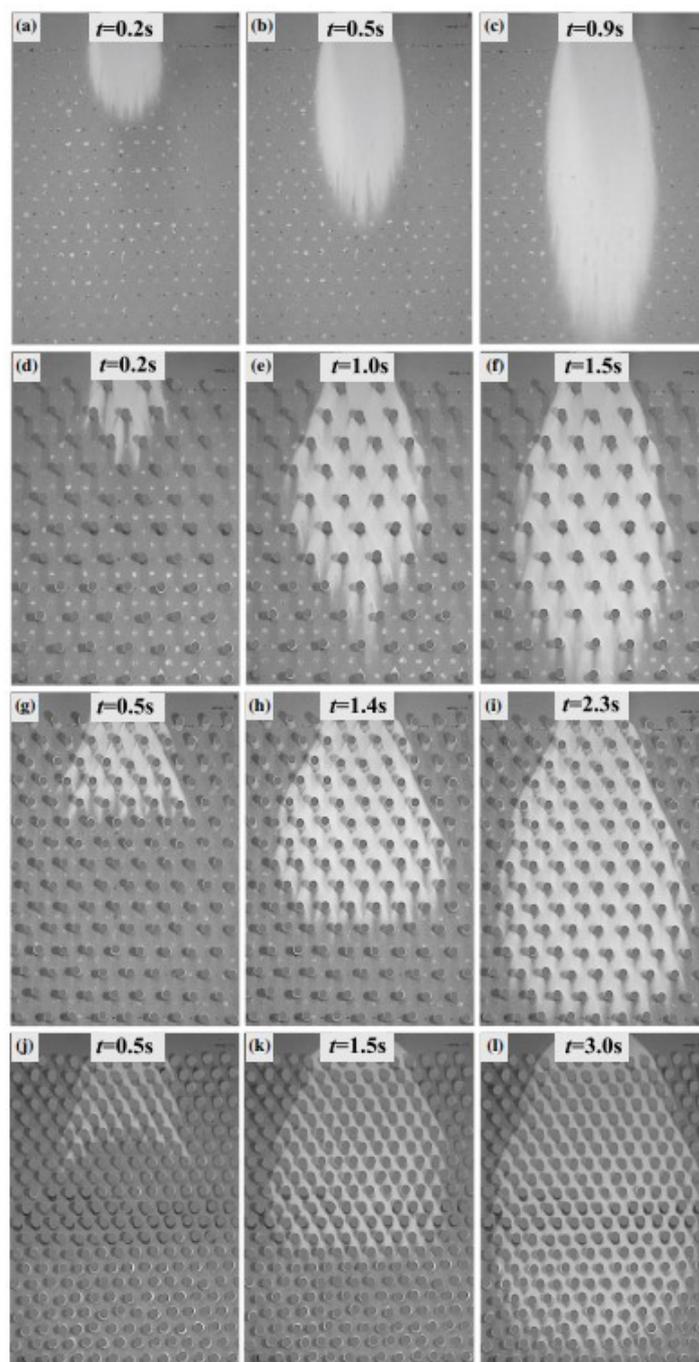


Figura 2.8: Viste dall'alto della progressione del flusso su un piano libero (a-c), nel caso con spaziatura $S = 80$ mm (d-f), $S = 60$ mm (g-i) e $S = 40$ mm (j-l). Gli esperimenti qui riportati sono stati condotti con inclinazione $\theta = 30^\circ$ e altezza di apertura del cancelletto $H = 23$ mm. [Luong et al., 2020]

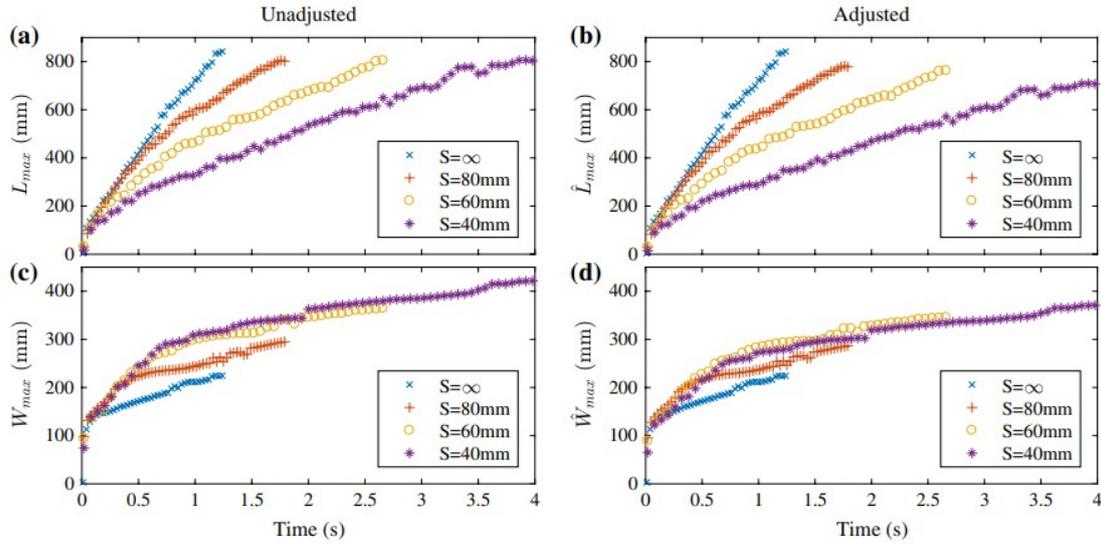


Figura 2.9: Grafici della lunghezza massima (a,b) e della larghezza massima (c,d) del flusso in funzione del tempo. (a) e (c) mostrano le misurazioni sperimentali non aggiustate, mentre (b) e (d) mostrano i dati aggiustati tenendo conto dell'area occupata dai cilindri. Tutti i dati si riferiscono ad esperimenti condotti con inclinazione $\theta = 30^\circ$ e altezza di apertura del cancelletto $H = 13$ mm. [Luong et al., 2020]

Infatti, fissata l'inclinazione del piano e l'apertura del cancelletto, la decelerazione del flusso è molto maggiore nella configurazione più densa rispetto a quelle più sparse. La presenza dei cilindri provoca d'altro canto una maggiore espansione laterale del flusso. Questa espansione, come mostrato in fig. 2.9(c), è maggiore al diminuire della spaziatura S tra gli ostacoli.

In Luong et al. [2020] è stato osservato che, a causa dell'area occupata dagli ostacoli, le misure della lunghezza e della larghezza del flusso sono maggiori di quelle effettive. Perciò sono stati calcolati i valori di lunghezza e larghezza al netto delle regioni occupate dai cilindri (vedi fig. 2.9(b) e (d)). Guardando i risultati così ottenuti, si è potuto concludere che l'incremento dell'espansione laterale non è un effetto puramente geometrico.

Capitolo 3

Richiamo alla teoria del salto granulare

Lo studio di modelli matematici che descrivano l'interazione tra un flusso granulare e un ostacolo è di fondamentale importanza per fornire un supporto alla progettazione di strutture di mitigazione contro fenomeni franosi ma anche per valutare l'effetto della vegetazione su questi ultimi.

Un caso molto studiato è quello in cui si ha un materiale granulare che scende lungo un piano inclinato e impatta su un muro rigido che si estende per tutta la larghezza del flusso. Questo problema può essere descritto utilizzando un approccio *depth-averaged* che permette, come mostrato in Faug [2015], di ottenere delle soluzioni analitiche rinunciando a modellizzare i dettagli della natura discreta del materiale granulare. L'ipotesi su cui si basa l'approccio *depth-averaged* è che lo spessore del flusso sia piccolo rispetto alla sua estensione lungo il piano inclinato. Quando questa condizione è verificata, è possibile mediare le equazioni di conservazione lungo lo spessore. Le equazioni mediate che si ottengono per un flusso bidimensionale su un piano che forma un angolo θ con l'orizzontale sono le seguenti (il sistema di riferimento è posizionato rispetto al piano come in fig. 3.1):

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}}{\partial x} = 0, \quad (3.1)$$

$$\rho_p \phi \left(\frac{\partial h\bar{u}}{\partial t} + \beta \frac{\partial h\bar{u}^2}{\partial x} \right) = \rho_p \phi g h \cos \theta \left(\tan \theta - \mu_b - k \frac{\partial h}{\partial x} \right), \quad (3.2)$$

dove h è lo spessore del flusso, \bar{u} è la velocità mediata sullo spessore, ρ_p è la densità delle particelle e ϕ è la frazione di volume del materiale granulare che fluisce. β è definito come il rapporto u^2/\bar{u}^2 e dipende dalla forma del profilo di velocità, μ_b è il coefficiente di attrito basale effettivo, k è il coefficiente di pressione di terra dato dal rapporto tra gli sforzi normali σ_{xx}/σ_{zz} .

Il valore del parametro β può essere ricavato se si assume che il profilo di velocità abbia una forma specifica: $\beta = 1$ per profili di velocità costanti (*plug flows*), $\beta = 4/3$ per profili di velocità lineari, $\beta = 5/4$ per profili di velocità alla Bagnold.

Il coefficiente μ_b può essere considerato anche non costante come, ad esempio, nella reologia $\mu(I)$ dove è funzione del numero di inerzia.

Il valore del coefficiente di pressione di terra k può essere derivato a partire dall'angolo di attrito alla base e dall'angolo di attrito interno. Per flussi granulari nel regime stazionario uniforme si può assumere $k = 1$ [Faug, 2015].

Nell'equazione (3.2), le forze inerziali sono bilanciate dalla forza peso ($\rho_p \phi g h \sin \theta$), dalla forza di attrito ($\mu_b \rho_p \phi g h \cos \theta$) e dalla forza legata al gradiente di spessore ($k \rho_p \phi g h \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x}$).

3.1 Salto granulare stazionario

Quando un flusso granulare rapido impatta su un muro rigido, si osserva una discontinuità nello spessore e nella velocità del flusso che viene chiamata risalto granulare. Nel seguito si considera l'ipotesi aggiuntiva che il flusso, prima di urtare contro l'ostacolo, sia in un regime di stato stazionario.

In analogia alla teoria del risalto idraulico è possibile ricavare un'espressione che lega le proprietà del flusso prima e dopo l'interazione con il muro rigido.

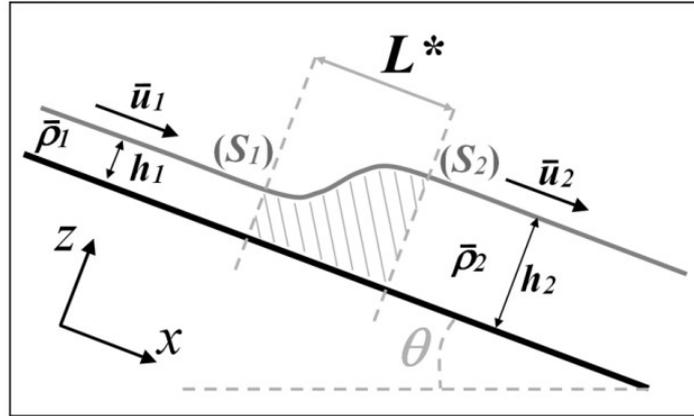


Figura 3.1: Schema di un risalto granulare stazionario lungo un piano inclinato. I pedici $i=1$ e 2 si riferiscono rispettivamente ai tratti a monte e a valle del salto. [Faug, 2015]

In fig. 3.1 è schematizzato il risalto granulare, dove i pedici $i=1$ e 2 si riferiscono rispettivamente ai tratti a monte e a valle del salto.

Applicando l'equazione della quantità di moto a un volume di controllo che contiene il salto e utilizzando l'equazione di continuità ($\bar{\rho}_1 \bar{u}_1 h_1 = \bar{\rho}_2 \bar{u}_2 h_2$), si ricava la seguente equazione:

$$\bar{\rho}_1 \bar{u}_1 h_1 (\beta_2 \bar{u}_2 - \beta_1 \bar{u}_1) = P_1 - P_2 + W \sin \theta - F_f . \quad (3.3)$$

P_1 e P_2 sono le forze di pressione laterale che agiscono sulle sezioni S_1 e S_2 (vedi fig. 3.1): $P_i = \frac{1}{2} k_i \bar{\rho}_i g h_i^2 \cos \theta$, dove k_i è il coefficiente di pressione di terra. W è il peso del materiale granulare nel risalto ed è dato da $W = \frac{1}{2} \bar{K} g L_* (\bar{\rho}_1 h_1 + \bar{\rho}_2 h_2)$, dove \bar{K} è un coefficiente che

tiene conto della forma del risalto e L_* è la lunghezza della zona di risalto granulare (vedi fig. 3.1). F_f è la forza d'attrito tra i tratti 1 e 2: $F_f = \mu_e W \cos \theta$, dove μ_e è il coefficiente d'attrito effettivo nel volume che contiene il risalto.

Dall'equazione (3.3) è possibile ricavare la seguente relazione tra il numero di Froude $Fr_1 = \bar{u}_1/\sqrt{g h_1 \cos \theta}$ del flusso incipiente e il rapporto tra gli spessori h_2/h_1 e tra le densità $\bar{\rho}_2/\bar{\rho}_1$ prima e dopo il risalto:

$$Fr_1^2 = \frac{1}{2} \left[k_2 \frac{\bar{\rho}_2}{\bar{\rho}_1} \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^2 - k_1 - \frac{\bar{K} L_*}{h_1} \left(1 + \frac{\bar{\rho}_2}{\bar{\rho}_1} \frac{h_2}{h_1} \right) (\tan \theta - \mu_e) \right] \frac{1}{\left(\beta_1 - \frac{\beta_2}{\frac{\bar{\rho}_2}{\bar{\rho}_1} \frac{h_2}{h_1}} \right)}. \quad (3.4)$$

Secondo questa espressione, l'altezza del salto granulare aumenta con il numero di Froude ma il tasso di crescita diminuisce all'aumentare del rapporto $\bar{\rho}_2/\bar{\rho}_1$: questo andamento è in accordo con i risultati sperimentali mostrati in Faug et al. [2015].

3.2 Soluzione semplificata per un salto stazionario incomprimibile

Quando il flusso incipiente non è troppo diluito, il risalto che si osserva è incomprimibile o poco comprimibile, per cui si può assumere $\bar{\rho}_2 = \bar{\rho}_1$. Assumendo inoltre che attraverso il risalto non vi siano variazioni né nel coefficiente di pressione della terra ($k_i = k$), né nel profilo di velocità ($\beta_i = \beta$), l'equazione (3.4) può essere scritta nel seguente modo:

$$\left(\frac{h_2}{h_1} \right)^2 + \frac{h_2}{h_1} - \frac{2\beta Fr_1^2}{k - \bar{K} \frac{L_*}{h_2 - h_1} (\tan \theta - \mu_e)} = 0. \quad (3.5)$$

Esperimenti condotti sulla forma dei salti granulari [Faug et al., 2015], hanno portato ad assumere che il fattore $\bar{K} \frac{L_*}{h_2 - h_1}$ (legato alla geometria del risalto) possa essere espresso come una funzione del numero di Froude del flusso incipiente Fr_1 . Sotto questa ipotesi, l'equazione (3.5) si riduce ad un'equazione di secondo grado in $\frac{h_2}{h_1}$ che ha come soluzione:

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{8\beta Fr_1^2}{k - \bar{K} \frac{L_*}{h_2 - h_1} (\tan \theta - \mu_e)} \right)^{1/2} - 1 \right]. \quad (3.6)$$

Questa espressione fornisce un valore approssimato per lo spessore del flusso dopo il risalto se si conoscono le caratteristiche del flusso a monte.

Capitolo 4

Reologia $\mu(I)$

Il fenomeno del flusso di materiale granulare su un piano inclinato è stato oggetto di numerosi esperimenti, studi teorici e simulazioni numeriche. Le caratteristiche del flusso sono principalmente determinate dal bilancio tra la forza di gravità e la forza di attrito esercitata a livello della superficie del piano. Sono stati condotti molti esperimenti variando il tipo di materiale granulare, l'inclinazione e la scabrezza del piano i quali hanno portato ad alcune importanti conclusioni.

- Nel caso di una superficie del piano inclinato liscia, esiste solo un angolo di inclinazione per il quale si sviluppa un flusso uniforme. Per inclinazioni minori di questo angolo il materiale si ferma mentre per inclinazioni maggiori il materiale accelera in modo continuo. Il sistema può essere descritto utilizzando un coefficiente d'attrito costante.
- Quando il piano è scabro si possono distinguere i seguenti casi:
 - per angoli di inclinazione elevati si osserva un flusso che accelera e la reologia del materiale è ben descritta da un coefficiente di attrito alla coulomb indipendente dalla velocità;
 - per angoli di inclinazione compresi in un range di valori intermedi si sviluppa un flusso stazionario uniforme. In questo intervallo di valori la forza d'attrito è in grado di bilanciare la forza di gravità e questo indica una dipendenza della prima dalla velocità di taglio.

Adottando un approccio empirico [Pouliquen \[1999\]](#) ha studiato quest'ultimo scenario ed ha dedotto un'espressione per il coefficiente di attrito dinamico.

4.1 Esperimenti condotti da Pouliquen

L'apparato sperimentale utilizzato da Pouliquen (fig. 4.1) è costituito da un piano lungo 2 m e largo 70 cm il quale può essere inclinato fino a un massimo di 35° . La larghezza del piano è tale da garantire che le misurazioni non siano influenzate dai bordi laterali poiché

è noto che questi cambiano la struttura del flusso. A monte del piano inclinato c'è un serbatoio dal quale viene fatto fuoriuscire il materiale granulare tramite un cancelletto la cui apertura può essere regolata in modo preciso.

Il materiale granulare è costituito da sferette di vetro e la superficie del piano è resa scabra incollando uno strato di queste. I sistemi studiati in [Pouliquen \[1999\]](#) differiscono per i diametri delle particelle usate e sono riportati in tabella 4.1.

| | Massa | Superficie scabra |
|-----------|---------------------------|---------------------------|
| Sistema 1 | $0.5 \text{ mm} \pm 0.04$ | $0.5 \text{ mm} \pm 0.04$ |
| Sistema 2 | $1.3 \text{ mm} \pm 0.13$ | $1.3 \text{ mm} \pm 0.13$ |
| Sistema 3 | $1.15 \text{ mm} \pm 0.1$ | $1.3 \text{ mm} \pm 0.13$ |
| Sistema 4 | $0.5 \text{ mm} \pm 0.04$ | $1.3 \text{ mm} \pm 0.13$ |

Tabella 4.1: Sferette di vetro usate per la massa e per la scabrezza della superficie.

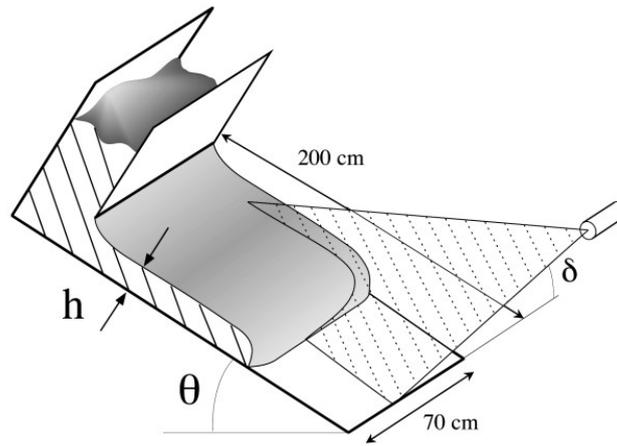


Figura 4.1: Apparato sperimentale. [\[Pouliquen, 1999\]](#)

Per ognuno dei quattro sistemi viene fatta variare l'inclinazione del piano inclinato e l'apertura del cancelletto del serbatoio. Per ogni configurazione sono state misurate la velocità media u del flusso e lo spessore h del materiale granulare che fluisce.

Nell'intervallo di inclinazioni (20° - 28°) e spessori (4-25 diametri della particella) studiato, il fronte della massa raggiunge rapidamente uno stato stazionario e si muove a velocità costante u . Quest'ultima corrisponde alla velocità mediata sullo spessore del flusso stazionario uniforme che si sviluppa dietro al fronte.

Lo spessore h del flusso granulare non coincide con l'apertura del cancelletto: esiste una regione di transizione in prossimità del serbatoio dove lo spessore diminuisce prima di raggiungere un regime stazionario uniforme. La misura dello spessore viene ricavata utilizzando un laser leggermente inclinato rispetto al piano.

Durante il flusso è stata misurata anche la frazione di volume ϕ occupata dalle sferette, intrappolando e pesando un volume noto del materiale. In tutte le configurazioni studiate in Pouliquen [1999] la frazione di volume è risultata pressoché costante pari a $\phi = 0.59 \pm 0.03$. Questo valore relativamente alto indica che si sta studiando un regime di flusso denso nel quale l'attrito tra le particelle è importante.

Il flusso stazionario uniforme è stato osservato solo per alcuni valori dei parametri di controllo θ e h . Pouliquen ha quindi individuato la regione nello spazio dei parametri $(\theta, h/d)$ dove si sono sviluppati flussi stazionari uniformi (fig. 4.2). Lo spessore h è reso adimensionale usando il diametro d delle sferette che costituiscono il materiale granulare. La regione di flusso stazionario uniforme è delimitata da due curve nello spazio dei parametri. Quella superiore che non è stata determinata in maniera precisa, corrisponde alla transizione a un flusso non stazionario o non uniforme che si ha quando il piano è molto inclinato o con uno spessore del flusso troppo grande (lo spessore continua a decrescere lungo il piano senza raggiungere un valore costante).

La curva inferiore separa la regione dove il flusso non è possibile dalla regione di flusso stazionario uniforme. Per determinare alcuni punti di questa curva sono stati utilizzati due metodi. Il primo consiste nel fissare l'angolo θ di inclinazione del piano e diminuire lentamente lo spessore h fino al valore critico h_{stop} per il quale il flusso si arresta (freccia continua in fig. 4.2).

Per angoli non troppo elevati questo metodo è meno preciso per cui si è adottato un secondo metodo che consiste nel tenere fisso lo spessore h e diminuire lentamente l'inclinazione θ fino al valore critico θ_{stop} per il quale si arresta il flusso (freccia tratteggiata in fig. 4.2). Per angoli di inclinazione intermedi la curva ottenuta con i due metodi è la stessa, ossia le funzioni $h_{stop}(\theta)$ e $\theta_{stop}(h)$ sono l'una l'inversa dell'altra.

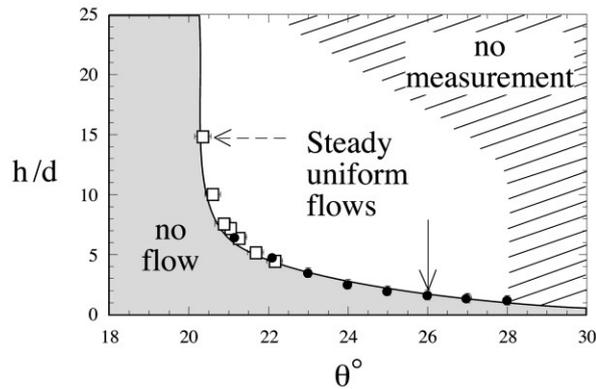


Figura 4.2: Regione nello spazio dei parametri $(\theta, h/d)$ dove si osservano flussi stazionari uniformi; \bullet - misurazioni di $h_{stop}(\theta)$; \square - misurazioni di $\theta_{stop}(h)$. I dati si riferiscono al sistema 1. La freccia continua (rispettivamente, la freccia tratteggiata) rappresenta una tipica evoluzione del sistema nello spazio dei parametri durante la misurazione di $h_{stop}(\theta)$ (rispettivamente, $\theta_{stop}(h)$). [Pouliquen, 1999]

In fig. 4.3 sono riportate le funzioni $h_{stop}(\theta)$ per i quattro sistemi studiati. Il comportamento qualitativo è simile mentre dal punto di vista quantitativo ci sono delle differenze che indicano una dipendenza delle caratteristiche del flusso di materiale granulare dalle condizioni di scabrezza.

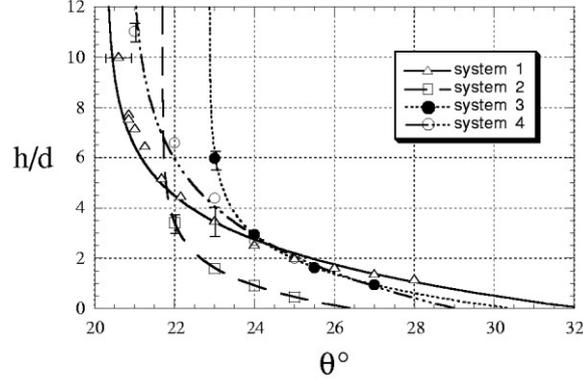


Figura 4.3: Funzione $h_{stop}(\theta)$ per i quattro sistemi studiati. [Pouliquen, 1999]

Le misurazioni effettuate sulla velocità del flusso nel regime stazionario uniforme, al variare dei parametri θ e h per il sistema 1, sono riportate in fig. 4.4(a). Si osserva che la velocità media del flusso cresce all'aumentare dello spessore del flusso e dell'inclinazione del piano. Confrontando i dati ottenuti per i quattro sistemi studiati, il comportamento qualitativo è simile tuttavia a parità di parametri adimensionali θ e h/d vi sono delle differenze quantitative nei valori delle velocità.

In Pouliquen [1999] è stato proposto uno scaling che riesce a far collapsare i dati su un'unica curva. Si è scelta come lunghezza caratteristica lo spessore critico $h_{stop}(\theta)$ che dipende dall'angolo θ , mentre la velocità è stata resa adimensionale dividendola per \sqrt{gh} , ottenendo così il numero di Froude (u/\sqrt{gh}). L'utilizzo di questo scaling fa sì che, riportando i dati relativi ai 4 sistemi studiati nel piano $(h/h_{stop}(\theta), u/\sqrt{gh})$ per differenti inclinazioni, questi collapsino su un'unica linea retta (fig. 4.5). Questo suggerisce che il numero di Froude sia una funzione lineare di h/h_{stop} :

$$\frac{u}{\sqrt{gh}} = \beta \frac{h}{h_{stop}(\theta)}, \quad (4.1)$$

con β indipendente dal diametro delle sferette, dalle condizioni di scabrezza e dall'inclinazione del piano. Ciò indica che l'influenza di questi parametri è presa in considerazione nella funzione $h_{stop}(\theta)$.

Poiché la funzione $h_{stop}(\theta)$ è controllata dalle condizioni al bordo, dallo scaling appena descritto si desume che anche la dinamica del flusso sia governata dalle condizioni al bordo. Pouliquen deduce quindi che il flusso lungo un piano inclinato scabro non risulti semplicemente dalla reologia intrinseca del materiale granulare ma anche dalle caratteristiche della superficie scabra.

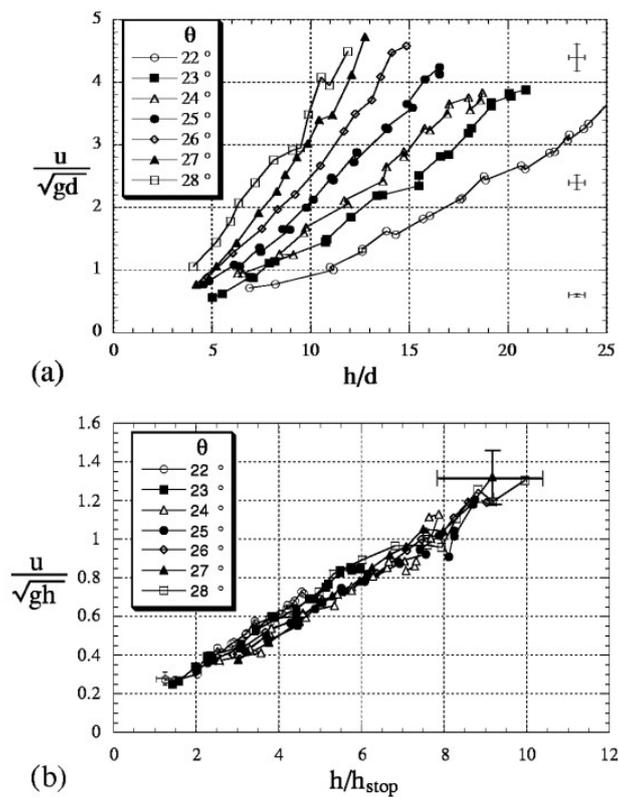


Figura 4.4: (a) Velocità adimensionale u/\sqrt{gd} in funzione di h/d per differenti angoli di inclinazione θ . (b) Numero di Froude u/\sqrt{gh} in funzione di $h/h_{stop}(\theta)$ per differenti angoli di inclinazione. Dati relativi al sistema 1. [Pouliquen, 1999]

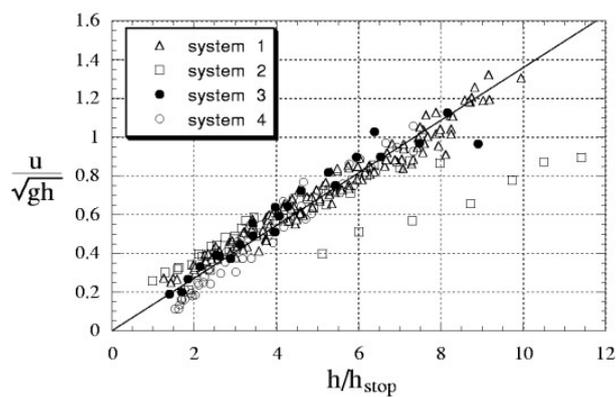


Figura 4.5: Numero di Froude u/\sqrt{gh} in funzione di $h/h_{stop}(\theta)$ per i quattro sistemi studiati e per differenti angoli di inclinazione. [Pouliquen, 1999]

A partire dalle informazioni ottenute con lo scaling, in Pouliquen [1999] viene ricavata un'espressione per il coefficiente di attrito dinamico μ che descrive l'interazione tra il materiale granulare e il piano scabro.

In un regime stazionario uniforme, nella direzione del flusso l'equazione di bilancio della quantità di moto mediata sulla profondità si riduce a

$$\tau = \rho g h \sin(\theta) , \quad (4.2)$$

dove τ è lo sforzo tangenziale sulla superficie del piano e ρ è la densità del mezzo granulare. Ossia il flusso è il risultato del bilancio tra la forza di gravità e la forza d'attrito alla base. Il coefficiente di attrito dinamico μ è definito come il rapporto tra lo sforzo tangenziale e lo sforzo normale. Poiché lo sforzo normale sul piano è pari a $\rho g h \cos(\theta)$, si ha

$$\mu(u, h) = \tan(\theta) , \quad (4.3)$$

dove si è assunto che il coefficiente di attrito dinamico sia una funzione della velocità media u e dello spessore h .

Al fine di determinare una relazione che leghi μ a u e h , Pouliquen ha ricavato la seguente espressione analitica per la funzione $h_{stop}(\theta)$ facendo un fit dei dati riportati in fig. 4.3:

$$\tan \theta = \tan \theta_1 + (\tan \theta_2 - \tan \theta_1) \exp\left(-\frac{h_{stop}}{Ld}\right) , \quad (4.4)$$

dove θ_1 corrisponde all'angolo per cui $h_{stop}(\theta)$ diverge, θ_2 all'angolo per cui $h_{stop}(\theta)$ si annulla, d è il diametro della particella e L è lo spessore caratteristico adimensionale su cui varia $h_{stop}(\theta)$. Sostituendo nell'equazione (4.4) $\tan \theta$ con μ e h_{stop} con $\beta h \sqrt{gh}/u$ (vedi equazione (4.1)), si ottiene la seguente espressione per il coefficiente di attrito dinamico:

$$\mu(u, h) = \tan \theta_1 + (\tan \theta_2 - \tan \theta_1) \exp\left(-\frac{\beta h \sqrt{gh}}{Ld u}\right) . \quad (4.5)$$

Si osserva che il regime di bassa velocità non è ben descritto da questa relazione empirica. Infatti, secondo l'equazione (4.5), è possibile osservare un flusso stazionario uniforme per qualsiasi spessore purché l'inclinazione sia maggiore di θ_1 ; ma ciò contraddirebbe l'esistenza della funzione $h_{stop}(\theta)$. Questa apparente contraddizione si spiega ricordando che l'equazione (4.5) è valida solo quando lo è l'espressione per la velocità (4.1) da cui è stata ricavata, ossia per $h > h_{stop}$ o equivalentemente per $u > \beta \sqrt{gh}$.

Per quanto riguarda il regime di alta velocità, la relazione (4.5) indica che quando la velocità tende a infinito, il coefficiente d'attrito μ tende a $\tan \theta_2$. Considerando l'equazione (4.3), questo limite superiore implica che non si possa osservare un flusso stazionario uniforme per inclinazioni maggiori di θ_2 . Questa conclusione è in accordo con le osservazioni fatte in precedenza: per inclinazioni elevate il flusso accelera e il coefficiente d'attrito tra il materiale granulare e la superficie scabra è costante, indipendentemente dalla velocità.

I risultati ottenuti da Pouliquen hanno portato a definire una reologia valida nel contesto di modelli mediati sullo spessore che utilizza la seguente approssimazione al primo ordine dell'espressione (4.5) per il coefficiente d'attrito:

$$\mu(Fr, h) = \mu_1 + \frac{\mu_2 - \mu_1}{\frac{\beta h}{Ld} \frac{1}{Fr}}, \quad (4.6)$$

dove $\mu_1 = \tan \theta_1$, $\mu_2 = \tan \theta_2$ e $Fr = u/\sqrt{gh \cos \theta}$.

4.2 Reologia $\mu(I)$ locale

Ulteriori passi avanti nella conoscenza dei flussi granulari densi sono stati fatti confrontando le proprietà reologiche di differenti configurazioni di flusso tra cui il taglio semplice e il piano inclinato scabro [MiDi, 2004]. Dalla configurazione di taglio semplice si è dedotto che, per particelle rigide, lo sforzo tangenziale τ è proporzionale alla pressione di confinamento p , con un coefficiente di proporzionalità che non è costante ma dipende da un parametro adimensionale I detto numero d'inerzia:

$$\mu(I) = \frac{\tau}{p} \quad \text{con} \quad I = \frac{\dot{\gamma} d}{\sqrt{p/\rho}}, \quad (4.7)$$

dove $\dot{\gamma}$ è la velocità di taglio, d è il diametro della particella e ρ è la densità della particella. Il numero d'inerzia può essere interpretato come il rapporto tra due scale temporali: una scala temporale di deformazione macroscopica $\frac{1}{\dot{\gamma}}$ e una scala temporale inerziale $d\sqrt{\rho/p}$. La funzione $\mu(I)$ è stata derivata a partire dalla (4.6) ed è la seguente:

$$\mu(I) = \mu_1 + \frac{\mu_2 - \mu_1}{\frac{I_0}{I} + 1}, \quad (4.8)$$

dove I_0 è una costante. L'espressione (4.8), di cui è riportato il grafico in fig. 4.6, è costruita in modo tale che il coefficiente di attrito tenda a μ_1 quando I va a zero e converga a μ_2 per valori di I elevati come osservato negli esperimenti per flussi granulari su piani inclinati scabri [Pouliquen, 1999][Pouliquen and Forterre, 2002].

Per poter applicare questa reologia a flussi più complessi dove si ha un taglio in più direzioni, in Jop et al. [2006] ne è stata formulata una generalizzazione 3D. Si è assunto di poter trascurare le piccole variazioni della frazione di volume e quindi di considerare il materiale granulare come un fluido incomprimibile con tensore degli sforzi la cui componente σ_{ij} è descritta dalle seguenti relazioni:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad \text{e} \quad \tau_{ij} = \eta(|\dot{\gamma}|, p) \dot{\gamma}_{ij}, \quad (4.9)$$

$$\text{con} \quad \eta(|\dot{\gamma}|, p) = \frac{\mu(I)p}{|\dot{\gamma}|} \quad \text{e} \quad I = \frac{|\dot{\gamma}|d}{\sqrt{p/\rho}}, \quad (4.10)$$

dove δ_{ij} è la delta di Kronecker, $\dot{\gamma}_{ij} = \partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i$ è il tensore della velocità di deformazione, $|\dot{\gamma}| = \sqrt{\frac{1}{2} \dot{\gamma}_{ij} \dot{\gamma}_{ij}}$ è il secondo invariante di $\dot{\gamma}_{ij}$ e η è una viscosità effettiva.

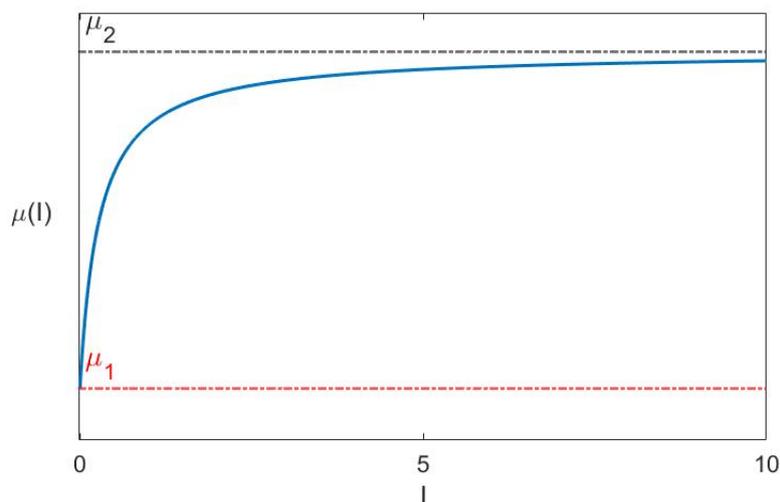


Figura 4.6: Coefficiente d'attrito μ in funzione del numero d'inerzia I .

E' importante osservare che, secondo questa legge costitutiva, esiste un criterio di snervamento poiché la viscosità effettiva diverge a infinito quando la velocità di taglio va a zero. La costante I_0 , che compare nell'espressione per $\mu(I)$, è legata ai parametri β e L individuati da Pouliquen attraverso la relazione [Gray and Edwards, 2014]:

$$I_0 = \frac{5\beta}{2L\sqrt{\phi}}, \quad (4.11)$$

con ϕ frazione di volume del solido che, per flussi densi, si può assumere sia compresa nell'intervallo 0.5-0.6 .

Capitolo 5

Simulazioni numeriche

Le simulazioni numeriche sono state effettuate¹ utilizzando un codice scritto nel linguaggio informatico C++. Il codice implementa al suo interno il metodo computazionale dato dalle tecniche LBM (lattice Boltzmann methods) descritte nel seguito.

La reologia a cui si fa riferimento per descrivere il comportamento del fluido è la reologia $\mu(I)$ presentata in precedenza.

I risultati delle simulazioni sono stati visualizzati attraverso il software ParaView.

5.1 LBM

I metodi LBM (lattice Boltzmann methods) sono un insieme di tecniche usate nell'ambito della fluidodinamica computazionale (CFD) per la simulazione dei fluidi. A differenza dei tradizionali metodi CFD, come il metodo ai volumi finiti e quello agli elementi finiti, in LBM le equazioni di conservazione della massa e della quantità di moto non vengono risolte direttamente. Nei metodi LBM, che si basano sulla teoria cinetica, il fluido è modellizzato come un insieme di particelle fittizie che si muovono e collidono tra di loro. Questo sistema è descritto tramite una funzione di densità di probabilità $f(\mathbf{x}, t, \mathbf{c})$ che rappresenta la probabilità di trovare una particella nella posizione \mathbf{x} al tempo t che si muove con velocità \mathbf{c} .

Al fine di rendere possibile una simulazione numerica viene ridotto il numero di gradi di libertà adoperando una discretizzazione dello spazio, del tempo e del campo delle velocità. Lo spazio è discretizzato utilizzando una griglia regolare di passo ΔS , ad esempio cubica come quella rappresentata in fig. 5.1(a). Ad ogni passo temporale Δt , le particelle che stanno in un generico nodo \mathbf{x}_0 possono spostarsi in un nodo vicino \mathbf{x}_i con velocità

$$\mathbf{c}_i = \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0}{\Delta t} . \quad (5.1)$$

¹Risorse computazionali fornite da HPC@POLITO, un servizio di Academic Computing fornito dal Dipartimento di Automatica e Informatica del Politecnico di Torino (<http://hpc.polito.it>).

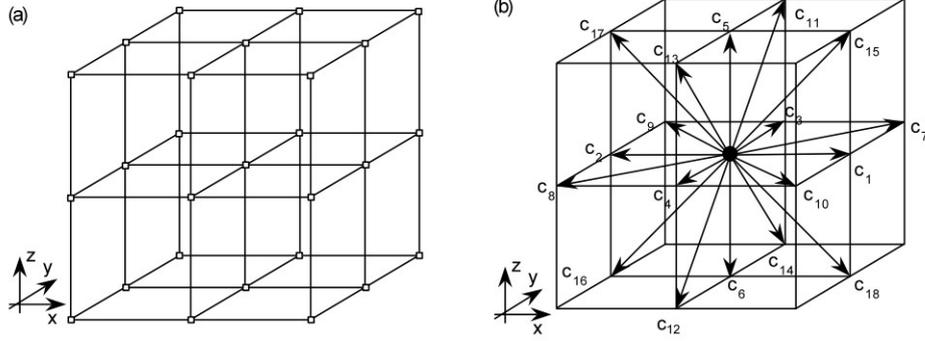


Figura 5.1: Esempio di discretizzazione usata in LBM: (a) griglia cubica; (b) velocità permesse in D3Q19. [Pasqua et al., 2022]

L'insieme dei nodi raggiungibili in un passo temporale individua l'insieme discreto di velocità a cui possono muoversi le particelle.

All'aumentare dei vicini raggiungibili a partire da un nodo, cresce l'accuratezza ma anche il costo computazionale del metodo LBM. Per simulazioni di fluidodinamica, una scelta che garantisce un buon compromesso è quella rappresentata in fig. 5.1(b), che corrisponde al seguente insieme di velocità:

$$\mathbf{c}_i = \frac{\Delta S}{\Delta t} \cdot \begin{cases} (0,0,0) & \text{per } i = 0 \\ (\pm 1,0,0) & \text{per } i = 1,2 \\ (0,\pm 1,0) & \text{per } i = 3,4 \\ (0,0,\pm 1) & \text{per } i = 5,6 \\ (\pm 1,\pm 1,0) & \text{per } i = 7,8,9,10 \\ (0,\pm 1,\pm 1) & \text{per } i = 11,12,13,14 \\ (\pm 1,0,\pm 1) & \text{per } i = 15,16,17,18 \end{cases}$$

Questo reticolo è chiamato D3Q19 (3 dimensioni, 19 vettori velocità). Si definiscono quindi, per ogni nodo \mathbf{x} e istante di tempo t , tante funzioni di distribuzione di probabilità $f_i(\mathbf{x}, t) := f(\mathbf{x}, t, \mathbf{c}_i)$ quante sono le velocità discrete \mathbf{c}_i .

Le quantità macroscopiche, come densità, velocità e pressione, sono ricostruite in ogni nodo eseguendo una somma:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=0}^{18} f_i(\mathbf{x}, t) , \quad (5.2)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\rho(\mathbf{x}, t)} \sum_{i=0}^{18} f_i(\mathbf{x}, t) \mathbf{c}_i , \quad (5.3)$$

$$p(\mathbf{x}, t) = c_s^2 \cdot \rho(\mathbf{x}, t) , \quad (5.4)$$

dove $c_s = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\Delta S}{\Delta t}$ è la norma della velocità reticolare del suono. La densità è trattata come una variabile, quindi LBM considera il fluido come un mezzo lievemente comprimibile.

Nella teoria cinetica, l'evoluzione della funzione di distribuzione f è determinata dall'equazione di Boltzmann che, in assenza di forze di volume, assume la seguente forma:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{c} \nabla f = \Omega_{coll} , \quad (5.5)$$

dove Ω_{coll} è un operatore che riproduce gli effetti delle collisioni tra le particelle. In LBM l'equazione (5.5) viene risolta in forma discretizzata, ossia

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i(\mathbf{x}, t) + \Delta t \Omega_{coll,i}(\mathbf{x}, t) . \quad (5.6)$$

Seguendo l'approccio proposto da Bhatnagar, Gross and Krook, il termine Ω_{coll} è approssimato con un operatore (detto BGK) che porta il sistema verso l'equilibrio termodinamico:

$$\Omega_{coll,i} = \frac{f_i^{eq} - f_i}{\tau} , \quad (5.7)$$

dove τ è il tempo di rilassamento e f_i^{eq} è la forma discretizzata della funzione di distribuzione di equilibrio di Maxwell-Boltzmann:

$$f_i^{eq}(\mathbf{u}, \rho) = \rho \omega_i \left(1 + \frac{\mathbf{c}_i \mathbf{u}}{c_s^2} + \frac{(\mathbf{c}_i \mathbf{u})^2}{2c_s^4} - \frac{\mathbf{u} \mathbf{u}}{2c_s^2} \right) , \quad (5.8)$$

dove i pesi ω_i sono scelti in modo che le distribuzioni di equilibrio soddisfino anch'esse le equazioni (5.2) e (5.3). Per il reticolo D3Q19 i valori dei pesi sono i seguenti:

$$\omega_i = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{per } i = 0 \\ \frac{1}{18} & \text{per } i = 1, \dots, 6 \\ \frac{1}{36} & \text{per } i = 7, \dots, 18 \end{cases} .$$

La viscosità del fluido ν è in relazione con il tempo di rilassamento τ secondo la seguente espressione:

$$\nu(\mathbf{x}, t) = \frac{\tau(\mathbf{x}, t) - 1/2}{3} \frac{\Delta S^2}{\Delta t} . \quad (5.9)$$

Invertendo l'equazione (5.9), si ottiene la legge costitutiva per il tempo di rilassamento:

$$\tau(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} + 3\nu(\mathbf{x}, t) \frac{\Delta t}{\Delta S^2} . \quad (5.10)$$

Nel caso della reologia $\mu(I)$, la viscosità varia in un intervallo di valori molto ampio e di conseguenza anche il tempo di rilassamento. Tuttavia, è noto dalla letteratura che i metodi LBM mantengono stabilità e accuratezza fintantoché τ è compreso tra i valori $\tau_{min} = 0.5005$ e $\tau_{max} = 1.0$ [Pasqua et al., 2022].

Questo implica che con LBM è possibile simulare solo un intervallo specifico di viscosità:

$$\nu_{min} = \frac{\tau_{min} - 1/2 \Delta S^2}{3 \Delta t} , \quad (5.11)$$

$$\nu_{max} = \frac{\tau_{max} - 1/2 \Delta S^2}{3 \Delta t} . \quad (5.12)$$

La dipendenza dei limiti di viscosità da ΔS e Δt rende possibile variare l'intervallo di viscosità simulato scegliendo opportunamente i parametri di discretizzazione. Per tarare correttamente questi parametri è necessario avere una stima della viscosità del flusso da simulare. A tal fine, un possibile approccio è quello di calcolare la soluzione analitica della reologia $\mu(I)$ sotto ipotesi semplificative [Pasqua et al., 2022].

Si considera un flusso bidimensionale stazionario incomprimibile di spessore costante h , su un piano inclinato di un angolo θ . L'unica componente non nulla del campo di velocità è quella nella direzione lungo il piano, ossia u che dipende dalla profondità z . Si assume inoltre una condizione di non slittamento sulla superficie del piano, $u(z=0)=0$ (si tratta di un'ipotesi molto forte), mentre sulla superficie libera, ossia per $z=h$, lo sforzo tangenziale τ e la pressione p sono nulli. Integrando le equazioni di conservazione della quantità di moto si ottiene:

$$\tau(z) = \rho gh \left(1 - \frac{z}{h}\right) \sin \theta , \quad (5.13)$$

$$p(z) = \rho gh \left(1 - \frac{z}{h}\right) \cos \theta . \quad (5.14)$$

Da cui, essendo per definizione $\mu(I) = \tau/p$, si ricava che $\mu(I) = \tan \theta$. Poiché μ è costante fissata l'inclinazione θ , anche il numero d'inerzia è costante, $I = I_\theta$ con $I_\theta = \mu^{-1}(\tan \theta)$, dove μ^{-1} è l'inversa della funzione μ .

Dalla definizione del numero d'inerzia (4.8), si ottiene che la velocità di taglio è data da:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{I_\theta}{d} \sqrt{gh \left(1 - \frac{z}{h}\right) \cos \theta} . \quad (5.15)$$

Infine la viscosità del flusso si calcola effettuando il rapporto $\frac{\tau}{\rho(\partial u/\partial z)}$, da cui si ottiene:

$$\nu(z) = \frac{d \sin \theta \sqrt{gh}}{I_\theta \sqrt{\cos \theta}} \sqrt{1 - \frac{z}{h}} . \quad (5.16)$$

In fig. 5.2 viene comparata la viscosità analitica per $z \in [0, h]$ con ν_{min} e ν_{max} per tre differenti scelte dei parametri di discretizzazione ΔS e Δt . La scelta corretta è quella rappresentata in fig. 5.2(a) per la quale LBM è in grado di simulare l'intero intervallo di viscosità su cui varia la soluzione analitica. Ciò non avviene nei casi presentati in fig. 5.2(b) e (c) nei quali i parametri di discretizzazione sono stati scelti non correttamente.

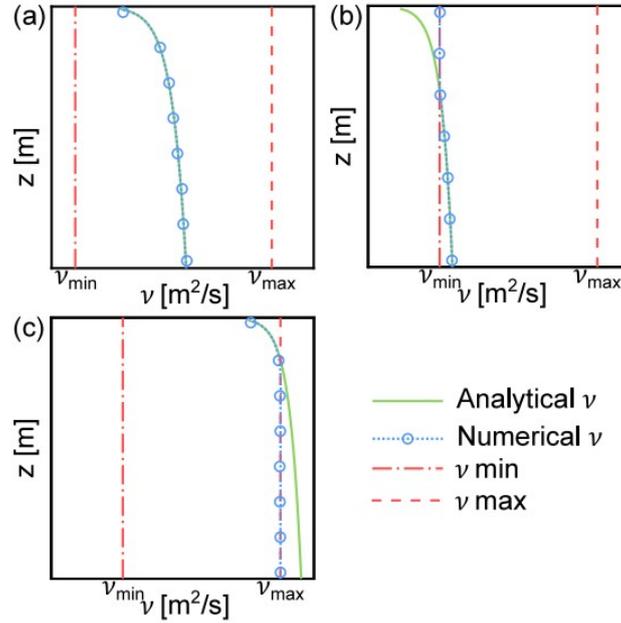


Figura 5.2: Viscosità ν analitica e numerica per la reologia $\mu(I)$ e limiti di viscosità ν_{min} e ν_{max} dati da LBM. (a) Discretizzazione spaziale e temporale corretta. (b,c) Discretizzazione spaziale e temporale non corretta. [Pasqua et al., 2022]

5.2 Simulazioni 3D di un flusso granulare in presenza di un singolo ostacolo

5.2.1 Descrizione del set-up

Rispetto agli esperimenti condotti in Cui and Gray [2013] è stata simulata una porzione ridotta della canaletta lungo la quale scorre il materiale in modo da diminuire il costo computazionale. La regione considerata è lunga 18 cm e larga 14 cm e al centro di questa è posizionato un singolo ostacolo cilindrico di diametro $D = 3$ cm (vedi fig. 5.3).

Sul lato a monte del cilindro vi è una condizione d'ingresso che regola lo spessore e la velocità media della massa che entra all'interno della geometria. In particolare, per la velocità d'ingresso si impone un profilo di tipo Bagnold il quale approssima bene la velocità di un flusso lungo un piano inclinato in condizioni stazionarie uniformi [MiDi, 2004].

Sul lato a valle del cilindro è posta una condizione di uscita mentre sui bordi laterali vi è una condizione periodica motivata dalla simmetria del flusso.

Sul piano $z=0$, che corrisponde alla superficie della canaletta, è imposta una condizione di non slittamento, ossia velocità nulla. Negli esperimenti condotti in Cui and Gray [2013] la superficie della canaletta è pressoché liscia e questo si tradurrebbe in una condizione di parziale slittamento alla base, tuttavia questa non è facilmente implementabile in LBM per cui è stata adottata una scelta diversa che permette di studiare il caso in cui l'attrito tra il fluido e il piano non è trascurabile.

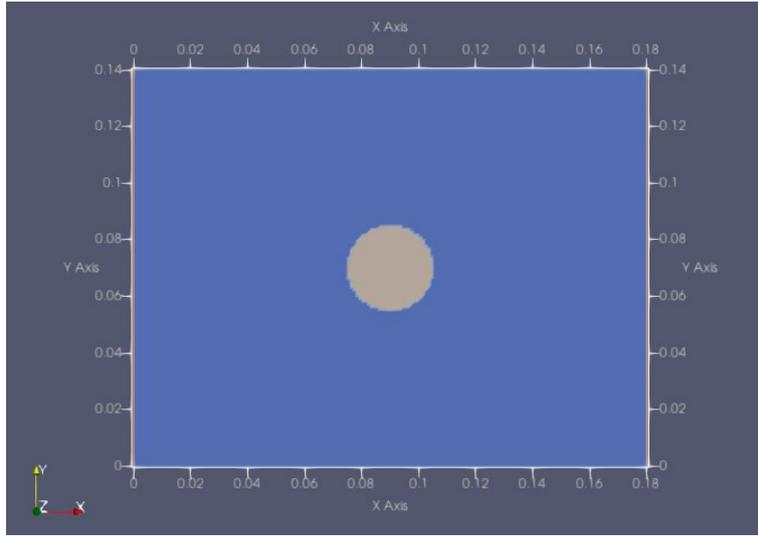


Figura 5.3: Vista dall'alto della regione simulata e della posizione del cilindro (valori sugli assi indicati in metri). La direzione lungo la quale scende il fluido è quella dell'asse x.

La densità delle particelle è stata presa pari a 1100 kg/m^3 da cui, considerando una frazione di volume di circa 0.55 (valore tipico per flussi densi [MiDi, 2004]), si è ricavata la densità del fluido equivalente $\rho_f = 600 \text{ kg/m}^3$. Il diametro delle particelle è scelto pari a 1 mm.

Per quanto riguarda i parametri che definiscono la reologia $\mu(I)$, si è considerato $\mu_1 = 0.38$, $\mu_2 = 1.02$ e $I_0 = 0.279$.

La scelta della discretizzazione spaziale $\Delta S = 1 * 10^{-3} \text{ m}$ e temporale $\Delta t = 7.5 * 10^{-6} \text{ s}$ è stata fatta cercando un buon compromesso tra accuratezza dei risultati e tempo di calcolo. Inoltre si è tenuto conto di due condizioni imposte dall'utilizzo del metodo LBM, ossia che l'intervallo di viscosità simulato sia quello corretto in base alla stima descritta nella sezione precedente e che il numero di Mach, $Ma = \frac{\sqrt{3}v_f\Delta t}{\Delta S}$ (dove v_f è la velocità del fluido), sia molto minore di 1 durante tutta la simulazione.

Sono stati condotti due set di simulazioni variando alcune caratteristiche del flusso per valutarne l'effetto sulle proprietà dell'onda urto che si forma a ridosso del cilindro, in analogia a quanto fatto in Cui and Gray [2013]. Nel primo set di simulazioni si è cambiato lo spessore e la velocità media del flusso in ingresso, nel secondo è stata variata l'inclinazione del piano a parità di condizioni in ingresso.

5.2.2 Simulazioni effettuate variando le condizioni in ingresso

Gli spessori e le velocità medie del flusso in ingresso adottate in questo set di simulazioni sono riportati nella tabella 5.1; l'inclinazione del piano è fissa pari a 44° .

| | Spessore (mm) | Velocità media (m/s) | Fr_1 |
|---|---------------|----------------------|--------|
| 1 | 12 | 0.4 | 1.15 |
| 2 | 15 | 0.68 | 2 |
| 3 | 14 | 1.3 | 2.9 |
| 4 | 12 | 1.8 | 3.8 |
| 5 | 9 | 2.0 | 4.56 |

Tabella 5.1: Spessore e velocità media del flusso in ingresso imposti nelle simulazioni e numero di Froude calcolato appena a monte dell'onda d'urto.

Per racchiudere in un unico parametro le caratteristiche del flusso si fa riferimento al numero di Froude definito nel seguente modo:

$$Fr = \frac{|\bar{\mathbf{u}}|}{\sqrt{hg \cos \theta}} \quad (5.17)$$

dove $\bar{\mathbf{u}}$ è la velocità media del flusso, h è lo spessore del flusso, g è l'accelerazione di gravità e θ è l'inclinazione del piano.

Come fatto in Cui and Gray [2013], il numero di Froude a cui si fa riferimento è quello calcolato in base alle proprietà del flusso appena a monte dell'onda d'urto che si forma in prossimità del cilindro. Nel seguito, indicheremo questo numero con Fr_1 . In tabella 5.1 sono riportati i valori di Fr_1 nelle simulazioni effettuate.

Per ciascuna configurazione è stata misurata l'altezza del punto di stagnazione h_{stag} dopo che il flusso ha raggiunto uno stato stazionario. Si osserva che all'aumentare del numero di Froude Fr_1 cresce il rapporto h_{stag}/h_1 , dove h_1 è lo spessore del flusso appena a monte dell'onda d'urto.

A partire dalle equazioni *depth-averaged* (3.1) e (3.2), Cui e Gray hanno ricavato la seguente espressione che lega il rapporto h_{stag}/h_1 al numero di Froude Fr_1 :

$$\frac{h_{stag}}{h_1} = 1 + \frac{1}{2}Fr_1^2 - \frac{1}{16} \frac{\left(\sqrt{1 + 8Fr_1^2} - 3\right)^3}{\sqrt{1 + 8Fr_1^2} - 1}. \quad (5.18)$$

Confrontando questa relazione con i risultati ottenuti nelle simulazioni, si osserva un andamento simile (vedi fig. 5.4). Tuttavia, si nota che per numeri di Froude bassi l'espressione (5.18) sottostima i valori delle simulazioni: questo può essere dovuto al fatto che i termini di sorgente, trascurati nel ricavare la (5.18), assumono un peso maggiore per $Fr_1 \rightarrow 1$.

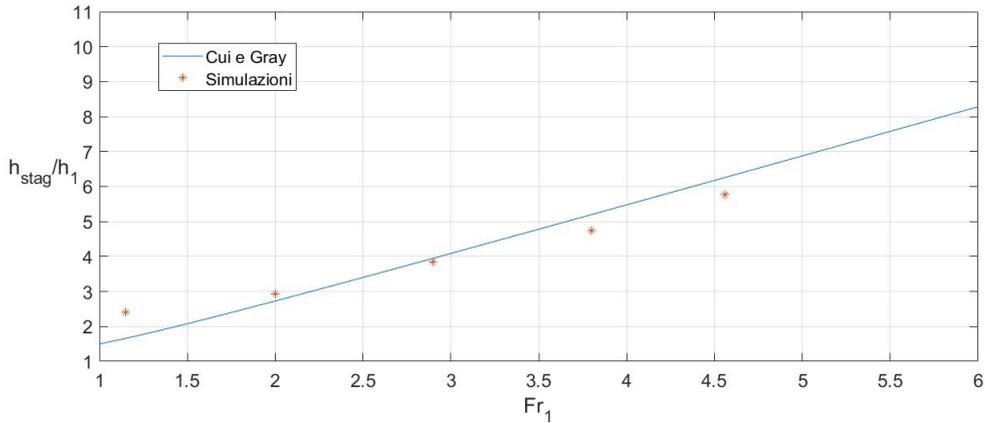


Figura 5.4: Rapporto h_{stag}/h_1 in funzione del numero di Froude Fr_1 : espressione analitica (5.18) ricavata da Cui e Gray e risultati ottenuti nelle simulazioni.

5.2.3 Simulazioni effettuate variando l'inclinazione

Nel secondo set di simulazioni è stata variata l'inclinazione del piano da 38° fino a 50° aumentando di 2° alla volta mentre le condizioni del flusso in ingresso rimangono invariate e sono date da uno spessore di 12 mm e una velocità media di 1.8 m/s.

Al crescere dell'angolo di inclinazione, si osserva un aumento dell'area del vuoto granulare che si forma a valle dell'ostacolo (vedi fig. 5.5, 5.6). In particolare è stata misurata la distanza del punto di pinch-off dal cilindro quando il flusso raggiunge lo stato stazionario. La fig. 5.7 mostra come varia questa distanza, adimensionalizzata rispetto al diametro del cilindro, in funzione dell'inclinazione. Si nota una crescita non lineare qualitativamente simile a quella osservata negli esperimenti condotti in Cui and Gray [2013] (vedi fig. 2.5). Dal punto di vista quantitativo, i valori ottenuti sono molto inferiori rispetto a quelli degli esperimenti. Questo è dovuto principalmente al fatto che nelle simulazioni è stata imposta una condizione di non slittamento alla base per cui l'attrito tra il fluido e la superficie del piano è maggiore rispetto a quello che si ha negli esperimenti dove la canaletta è pressoché liscia. Di conseguenza, a valle dell'onda d'urto, il flusso simulato subisce un'accelerazione minore e il vuoto granulare si chiude più vicino al cilindro.

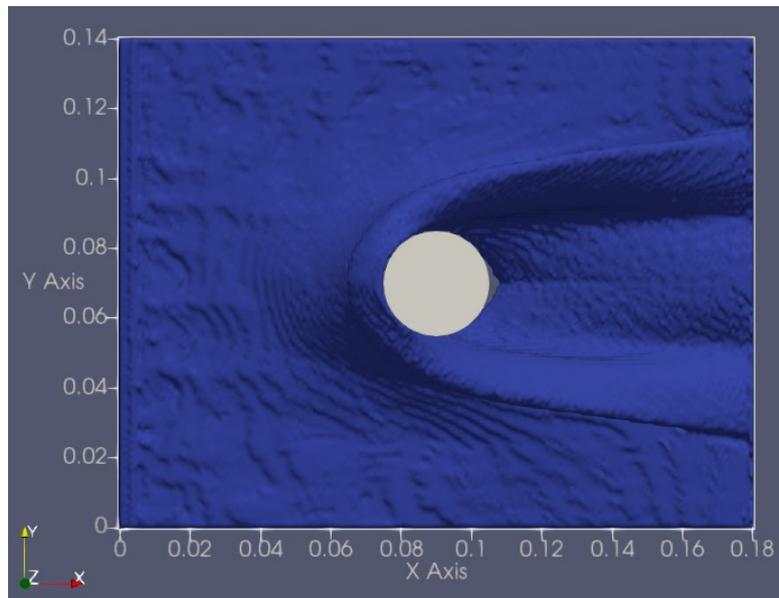


Figura 5.5: Flusso in condizioni stazionarie per inclinazione del piano pari a 40° .

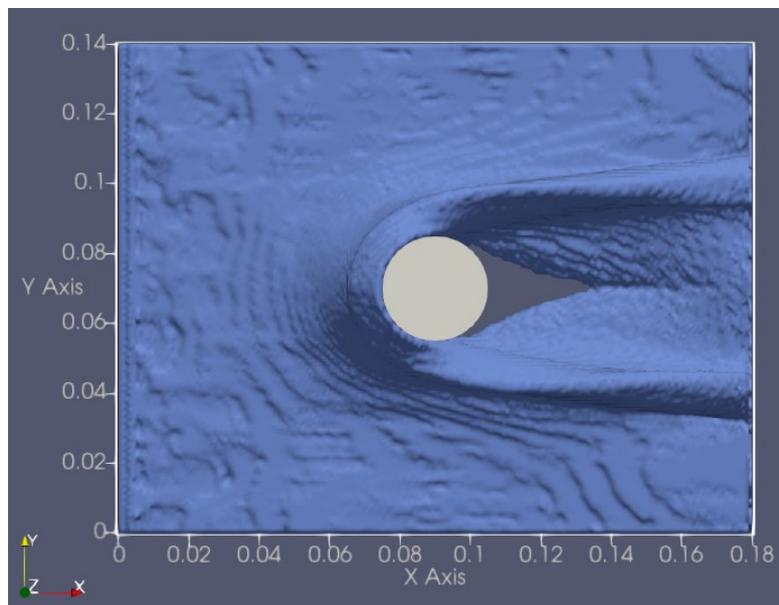


Figura 5.6: Flusso in condizioni stazionarie per inclinazione del piano pari a 50° .

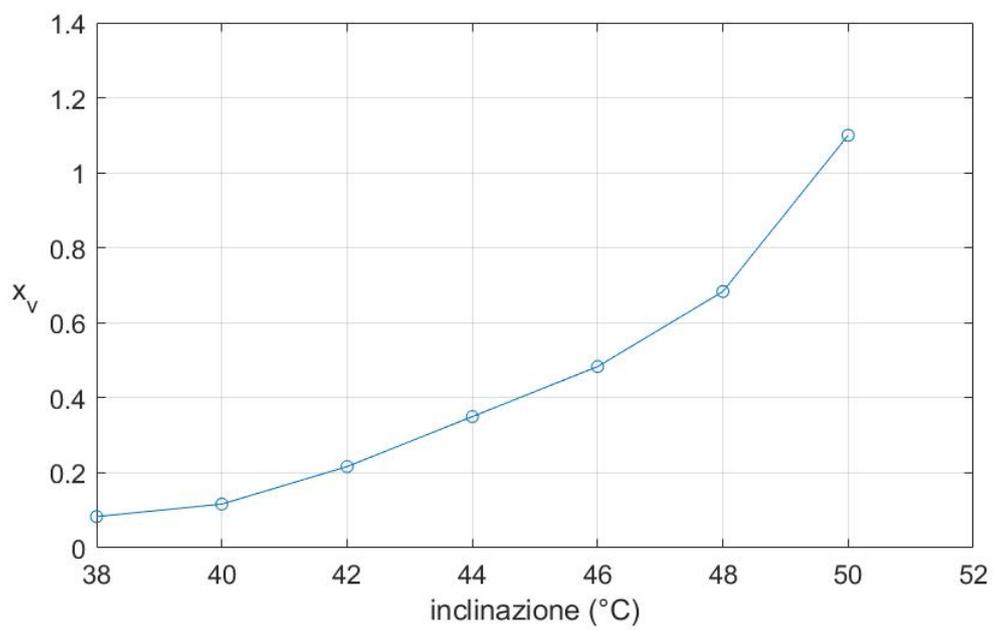


Figura 5.7: Distanza x_v del punto di pinch-off, adimensionalizzata rispetto al diametro del cilindro, in funzione dell'angolo di inclinazione ottenuta nelle simulazioni.

5.3 Simulazioni 3D di un flusso granulare in presenza di più ostacoli

Il set-up delle simulazioni effettuate inserendo più ostacoli cilindrici (sempre di diametro $D = 3$ cm) rimane invariato rispetto a quelle con un singolo ostacolo. L'inclinazione del piano è scelta pari a 44° e le condizioni del flusso in ingresso sono spessore di 12 mm e velocità media di 1.8 m/s. L'unica modifica riguarda le dimensioni della porzione di canaletta simulata e la disposizione dei cilindri.

Nello specifico sono state considerate due tipologie di configurazione:

- ostacoli allineati lungo la direzione di discesa del piano inclinato;
- ostacoli disposti a forma di triangolo equilatero similmente a quanto fatto in [Luong et al. \[2020\]](#).

Per ciascuna configurazione sono stati analizzati più casi che differiscono tra loro per la distanza reciproca tra i cilindri.

5.3.1 Disposizione degli ostacoli allineata

In questo set di simulazioni sono presenti due ostacoli disposti in fila lungo la direzione di discesa del piano. La collocazione del cilindro più a monte rimane fissa mentre quella del secondo cilindro viene variata. Chiamando L la distanza tra i centri dei cilindri, sono stati considerati i seguenti casi: $L = 50$ mm, $L = 70$ mm, $L = 90$ mm e $L = 110$ mm (vedi fig. 5.8).

La larghezza del piano rimane invariata mentre la lunghezza è scelta in modo tale che il bordo di uscita del flusso sia distante 90 mm dal centro del cilindro più a valle.

Su ciascun cilindro, a causa dell'interazione con il flusso, agisce una forza idrodinamica la quale può essere legata alle caratteristiche del problema dalla seguente espressione:

$$F = \alpha \rho v^2 h D \quad (5.19)$$

dove α è un parametro adimensionale, ρ è la densità del fluido, v e h sono rispettivamente la velocità media e l'altezza del flusso incipiente e D è il diametro del cilindro.

Le simulazioni restituiscono il valore di F su ogni ostacolo, ottenuto effettuando una media delle forze microscopiche esercitate da ciascuna particella fluida del metodo LBM. A partire da questi valori della forza idrodinamica, conoscendo ρ , v , h e D , è stato ricavato il valore del parametro α . Per il cilindro più a monte (che sarà indicato dal pedice '1'), la cui posizione rimane invariata, α_1 è pari a circa 0.16 considerando $\rho = 600$ kg/m³, $v_1 = 1.15$ m/s, $h_1 = 12$ mm e $D = 30$ mm.

Il parametro α può essere visto come la forza idrodinamica adimensionalizzata rispetto al prodotto $\rho v^2 h D$ calcolato con i valori sopra riportati. In tabella 5.2 sono riportati i valori di α relativi al cilindro più a valle. In generale, si nota una diminuzione di α rispetto ad α_1 perché il cilindro più a monte funge da "schermo" all'altro cilindro. Inoltre, come si poteva intuire a priori, la schermatura diminuisce all'aumentare della distanza tra gli ostacoli.

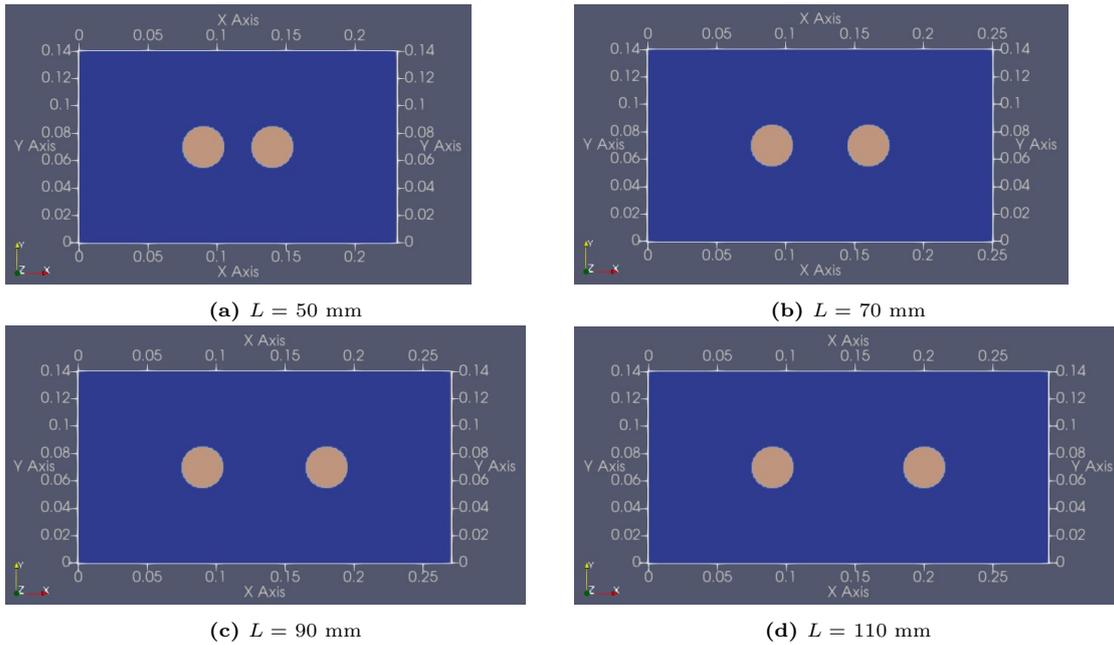


Figura 5.8: Posizione dei cilindri e dimensioni del piano simulato (valori sugli assi indicati in metri). La direzione lungo la quale scende il fluido è quella dell'asse x .

| L (mm) | α | α/α_1 (%) |
|----------|----------|-----------------------|
| 50 | 0.052 | 32.75 |
| 70 | 0.061 | 38.80 |
| 90 | 0.076 | 48.25 |
| 110 | 0.098 | 62.05 |

Tabella 5.2: Valori di α e α/α_1 corrispondenti al cilindro più a valle al variare della distanza L dal cilindro più a monte.

Dal punto di vista fisico, la variazione della forza idrodinamica si spiega, facendo riferimento alla relazione (5.19), con la diminuzione del prodotto v^2h considerando α , ρ e D costanti. Questo è stato verificato valutando lo spessore e la velocità media del flusso appena prima del cilindro più a valle. I valori di h e v (vedi tabella 5.3) sono stati ricavati, in condizioni stazionarie, a partire da una simulazione configurata allo stesso modo ma con il solo cilindro più a monte. Si nota che il prodotto v^2h diminuisce effettivamente tra il primo e il secondo cilindro a causa di una riduzione della velocità media del flusso che sta per impattare contro l'ostacolo. Sebbene l'andamento sia simile, confrontando l'ultima colonna delle tabelle 5.2 e 5.3, si osserva una discrepanza nei rapporti percentuali tra le quantità del cilindro più a valle rispetto a quelle del cilindro più a monte.

| L (mm) | h (mm) | v (m/s) | $v^2 h / v_1^2 h_1$ (%) |
|--------|----------|-----------|-------------------------|
| 50 | 13 | 0.51 | 21.31 |
| 70 | 16 | 0.54 | 29.40 |
| 90 | 18 | 0.6 | 40.83 |
| 110 | 19 | 0.65 | 50.58 |

Tabella 5.3: Valori dello spessore h e della velocità media v del flusso poco prima del cilindro più a valle per ciascuna configurazione individuata dalla distanza L . h_1 e v_1 sono lo spessore e la velocità media del flusso appena prima del cilindro più a monte.

| L (mm) | v (m/s) |
|--------|-----------|
| 50 | 0.87 |
| 70 | 0.88 |
| 90 | 0.88 |
| 110 | 0.86 |

Tabella 5.4: Valori della velocità media v del flusso calcolata al fondo del piano simulato al variare della distanza L tra gli ostacoli.

Questo può essere dovuto al fatto che i valori di h e v non sono quelli effettivi ma sono stati approssimati con i valori ottenuti da una simulazione senza l'ostacolo più a valle.

Dalle simulazioni effettuate si osserva che il fluido, a valle del secondo ostacolo, ha uno spessore maggiore e una velocità media minore rispetto alle condizioni a monte del primo cilindro ($v_1 = 1.15$ m/s, $h_1 = 12$ mm). In tabella 5.4 sono riportati i valori della velocità media calcolata su una sezione del fluido ortogonale alla direzione di discesa e collocata al fondo del piano simulato. Si nota che la diminuzione della velocità media del flusso è molto simile nei quattro casi simulati ed è pari al 24% circa.

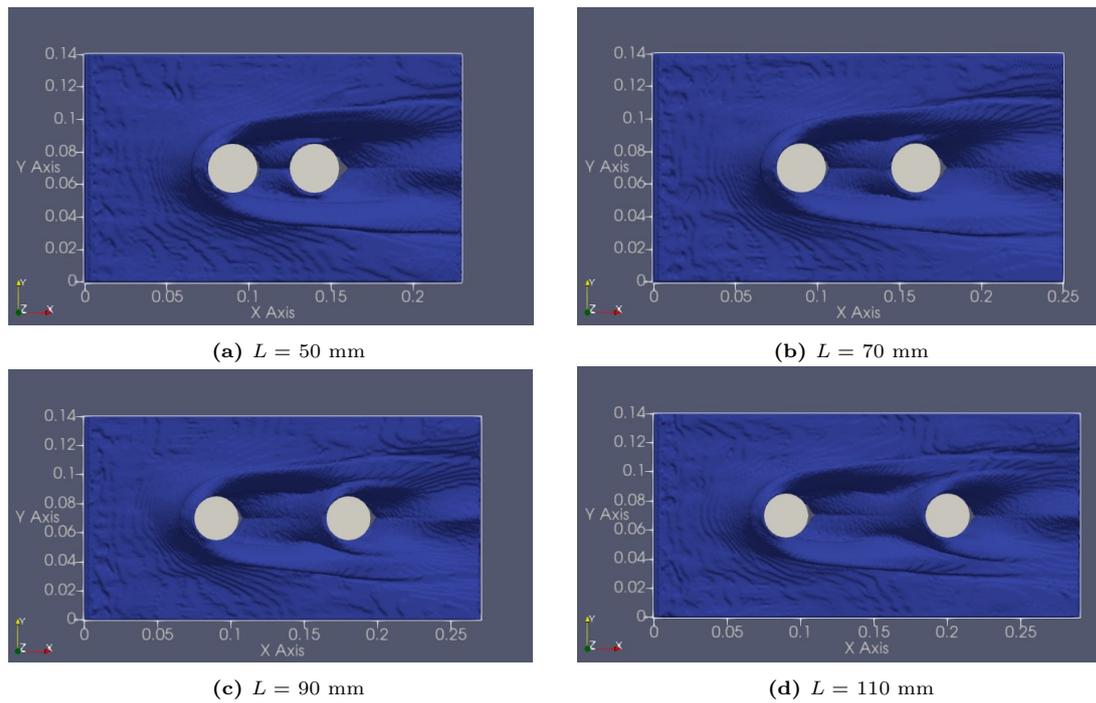


Figura 5.9: Vista dall'alto del flusso in condizioni stazionarie. La direzione lungo la quale scende il fluido è quella dell'asse x.

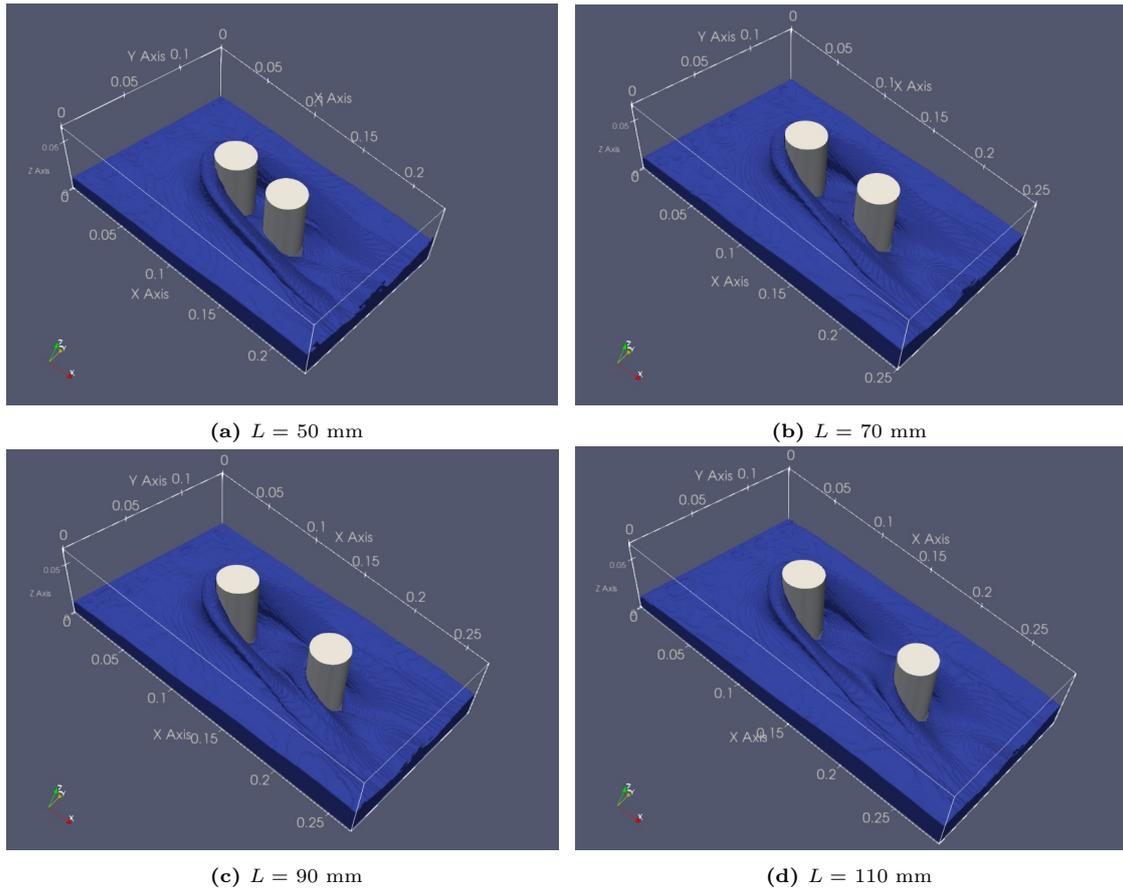


Figura 5.10: Vista prospettica del flusso in condizioni stazionarie. La direzione lungo la quale scende il fluido è quella dell'asse x.

5.3.2 Disposizione degli ostacoli a forma di triangolo

In questo set di simulazioni si considerano tre cilindri disposti a formare un triangolo equilatero come rappresentato in fig. 5.11. La posizione dell'ostacolo più a monte è mantenuta fissa mentre vengono variate quelle degli altri due ostacoli. Chiamando S la distanza tra i centri dei cilindri, sono stati considerati i seguenti casi: $S = 60$ mm, $S = 90$ mm e $S = 120$ mm.

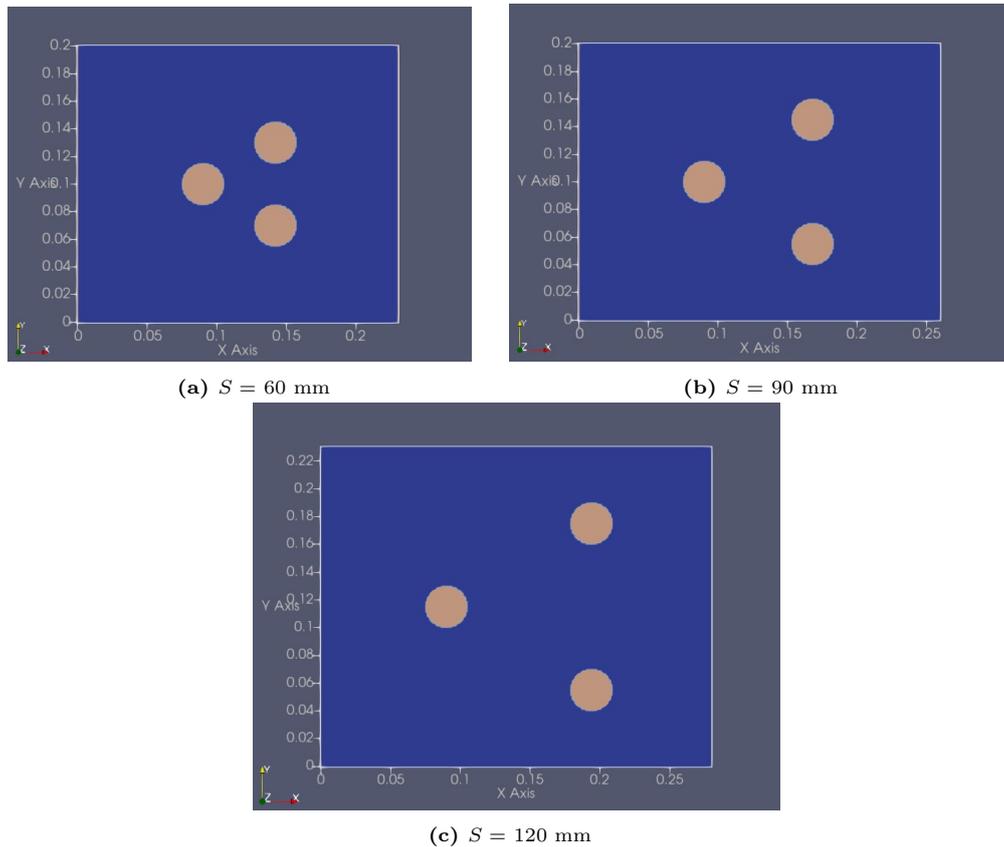


Figura 5.11: Posizione dei cilindri e dimensioni del piano simulato (valori sugli assi indicati in metri). La direzione lungo la quale scende il fluido è quella dell'asse x.

Le dimensioni del piano simulato vengono modificate in base alla configurazione in modo da contenere le onde d'urto dei due ostacoli più a valle.

Anche in queste simulazioni è stata valutata la forza idrodinamica agente su ciascun cilindro. Indicando sempre con il pedice '1' il cilindro più a monte, α_1 rimane uguale a 0.16 circa poiché non variano le condizioni del flusso a monte del primo ostacolo. I valori di α per i cilindri più a valle sono riportati nelle tabelle 5.5 e 5.6. A differenza di quanto avveniva per la configurazione allineata, α aumenta tra il 5% e il 13% circa rispetto al cilindro più a monte. Si osserva che la crescita maggiore della forza idrodinamica avviene per $S = 90$ mm, mentre la crescita minore per $S = 60$ mm.

| S (mm) | α | α/α_1 (%) |
|--------|----------|-----------------------|
| 60 | 0.168 | 106.63 |
| 90 | 0.178 | 113.23 |
| 120 | 0.173 | 109.82 |

Tabella 5.5: Valori di α e α/α_1 corrispondenti al cilindro più a valle di ordinata minore al variare della distanza S dagli altri cilindri.

| S (mm) | α | α/α_1 (%) |
|--------|----------|-----------------------|
| 60 | 0.165 | 104.77 |
| 90 | 0.176 | 111.94 |
| 120 | 0.175 | 111.13 |

Tabella 5.6: Valori di α e α/α_1 corrispondenti al cilindro più a valle di ordinata maggiore al variare della distanza S dagli altri cilindri.

Questo si spiega considerando il fatto che a valle dell'onda d'urto generata dall'impatto con il primo cilindro, il flusso accelera; quindi la velocità che raggiunge prima dell'interazione con gli altri due ostacoli è maggiore nel caso $S = 90$ mm rispetto al caso $S = 60$ mm.

In tutte e tre le configurazioni il flusso, a seguito dell'interazione con gli ostacoli, aumenta il suo spessore e diminuisce la sua velocità media. In particolare, è stata calcolata la velocità media su una sezione del fluido ortogonale alla direzione di discesa e posta a valle dei tre cilindri, confrontandola con la velocità media a monte del primo ostacolo pari a 1.15 m/s. I valori, riportati in tabella 5.7, mostrano che la riduzione della velocità media del flusso è maggiore al diminuire della distanza S tra i cilindri. Questo risultato è in accordo con quanto osservato negli esperimenti condotti in [Luong et al. \[2020\]](#) sulla relazione tra velocità di discesa del fluido e spaziatura tra gli ostacoli. Si può concludere che l'effetto di mitigazione maggiore della velocità del flusso si ottiene nella configurazione corrispondente alla distanza $S = 60$ mm, ossia la minore tra quelle considerate.

| S (mm) | v (m/s) |
|----------|-----------|
| 60 | 0.76 |
| 90 | 0.79 |
| 120 | 0.82 |

Tabella 5.7: Valori della velocità media v del flusso calcolata a valle dei tre cilindri al variare della distanza S tra gli ostacoli.

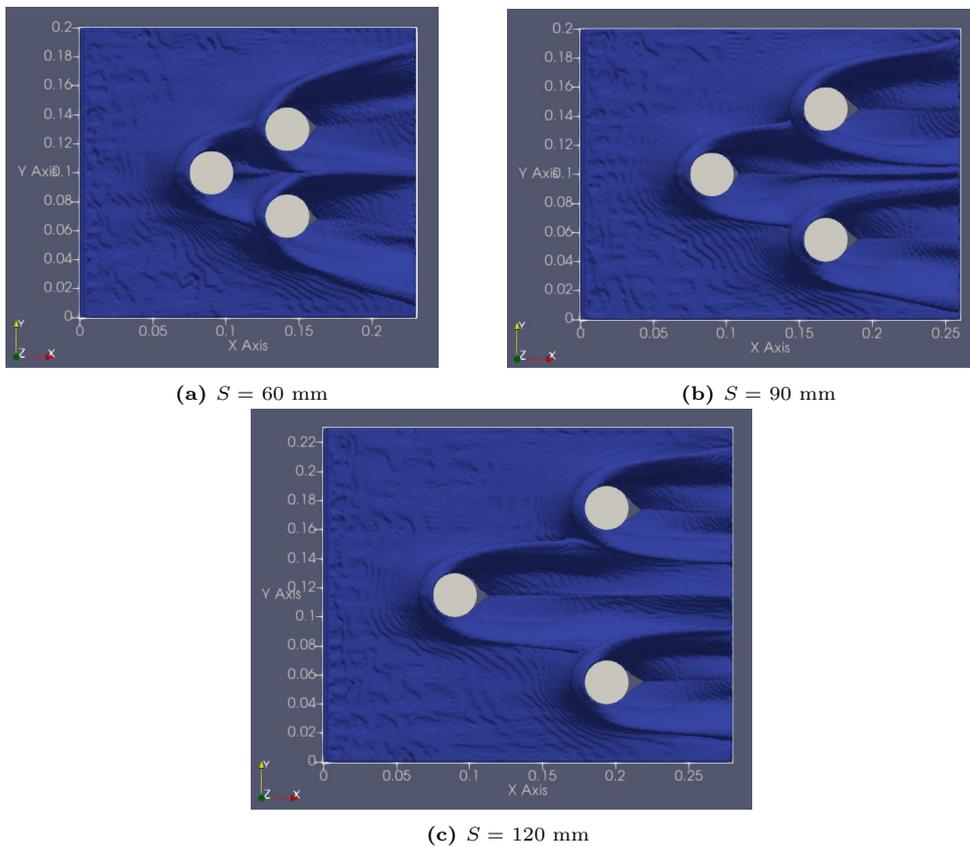


Figura 5.12: Vista dall'alto del flusso in condizioni stazionarie. La direzione lungo la quale scende il fluido è quella dell'asse x.

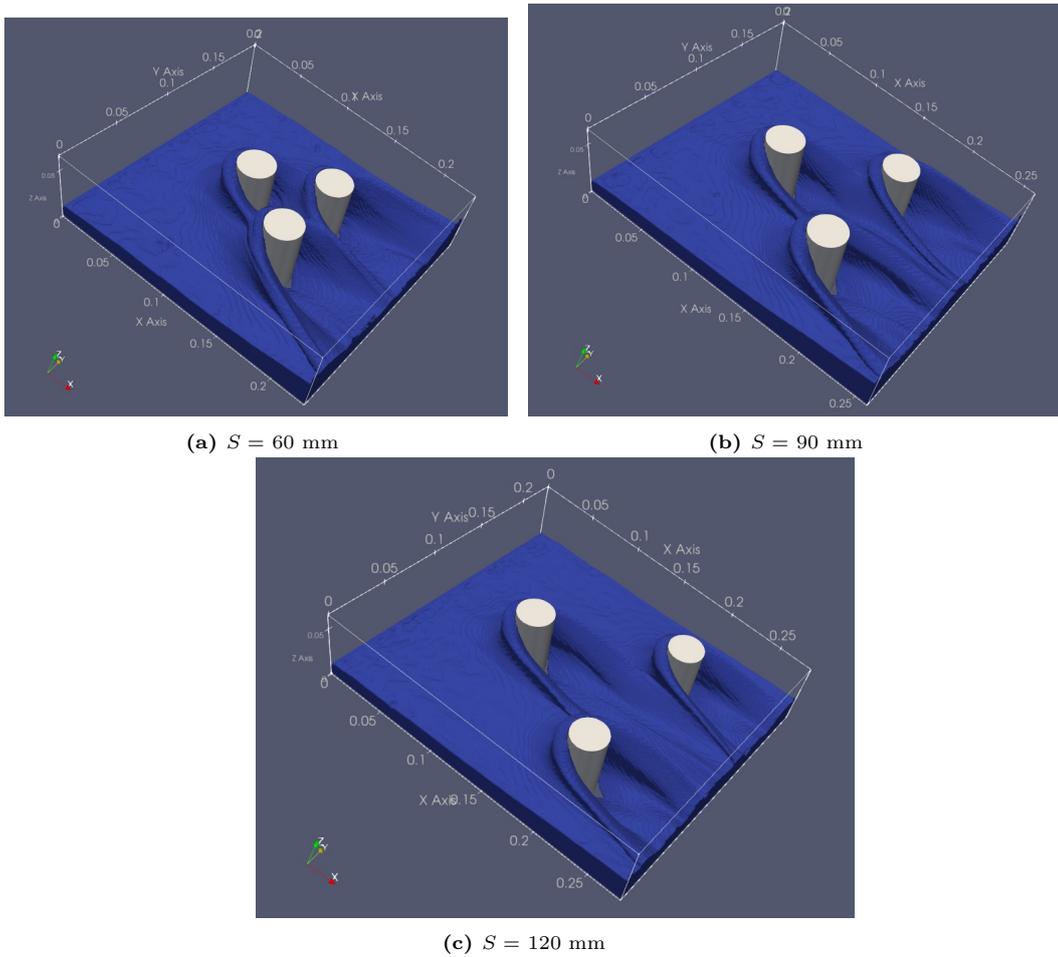


Figura 5.13: Vista prospettica del flusso in condizioni stazionarie. La direzione lungo la quale scende il fluido è quella dell'asse x .

Capitolo 6

Conclusioni

Sono stati presentati i risultati di simulazioni numeriche riguardanti l'interazione di un flusso granulare con degli ostacoli cilindrici in diverse configurazioni.

Nelle simulazioni effettuate con un singolo ostacolo è stato esaminato il legame tra le caratteristiche del flusso incipiente e le proprietà dell'onda d'urto che si forma a seguito dell'impatto con il cilindro. All'aumentare del numero di Froude del flusso incipiente è stato osservato un aumento dell'altezza del punto di stagnazione dell'onda d'urto. Questo risultato è in discreto accordo con l'espressione analitica (5.18) ricavata in [Cui and Gray \[2013\]](#); insieme possono essere utilizzati per ottenere un valore approssimato dell'altezza minima che deve avere un ostacolo per evitare che venga scavalcato da un flusso granulare. Per quanto riguarda la distanza del punto di pinch-off del vuoto granulare, è stato notato che questa decresce al diminuire dell'angolo di inclinazione del piano. Le differenze con i risultati sperimentali presentati in [Cui and Gray \[2013\]](#) dovute alla condizione al bordo posta sulla superficie, hanno evidenziato l'influenza dell'attrito tra il materiale granulare e il piano inclinato sulla forma assunta dal vuoto granulare.

Nelle simulazioni riguardanti più ostacoli è stata valutata la forza idrodinamica agente su ciascun cilindro a causa dell'interazione con il flusso. Nella configurazione con gli ostacoli allineati si è osservata una forte diminuzione della forza idrodinamica sul secondo cilindro rispetto a quella sul cilindro più a monte. Tale riduzione è via via minore all'aumentare della distanza tra i due ostacoli, passando dal 67% per $L = 50$ mm al 38% per $L = 110$ mm.

Nella configurazione con gli ostacoli posti a formare un triangolo si ha un aumento, tra il 5% e il 13%, della forza sui cilindri posti più a valle rispetto a quella sul primo cilindro. Inoltre è stato valutato il rallentamento del flusso a seguito dell'interazione con gli ostacoli calcolandone la velocità media. I valori ottenuti hanno mostrato che la riduzione della velocità media del flusso aumenta al diminuire della spaziatura S tra i cilindri, in accordo con quanto osservato negli esperimenti presentati in [Luong et al. \[2020\]](#).

I risultati mostrati nell'elaborato devono essere valutati tenendo in considerazione alcune limitazioni. Innanzitutto, le simulazioni sono state effettuate ad una scala ridotta

per cui deve essere verificata l'applicabilità dei risultati ottenuti a fenomeni alla scala reale. Per quanto riguarda gli ostacoli cilindrici, è bene osservare che sono stati disposti con l'asse di simmetria perpendicolare al piano inclinato e non in verticale, posizione più simile a quella di un albero. Inoltre è stato considerato un numero ridotto di cilindri la cui influenza sulle caratteristiche del flusso è ovviamente ridotta rispetto a quella di una "foresta" di ostacoli come quella usata negli esperimenti in [Luong et al. \[2020\]](#). Infine è bene notare che i risultati ottenuti si riferiscono ad un fluido con determinate proprietà le quali sono rimaste invariate in tutte le simulazioni; quindi non è stata valutata, ad esempio, l'influenza della densità o dei parametri reologici del fluido sul problema studiato. Queste considerazioni pongono nuove domande che possono essere oggetto di futuri studi sull'interazione di flussi granulari con degli ostacoli.

Bibliografia

Dispense del corso di laurea magistrale in ingegneria matematica "meccanica dei mezzi porosi".

J.L. Baker, T. Barker, and J.M.N.T. Gray. A two-dimensional depth-averaged $\mu(i)$ -rheology for dense granular avalanches. *J. Fluid Mech.*, 787:367–395, 2016.

J. Benito, Y. Bertho, I. Ippolito, and P. Gondret. Stability of a granular layer on an inclined “fakir plane”. *Europhysics Letters*, 100(3), 2012.

X. Cui and J.M.N.T. Gray. Gravity-driven granular free-surface flow around a circular cylinder. *J. Fluid Mech.*, 720:314–337, 2013.

T. Faug. Depth-averaged analytic solutions for free-surface granular flows impacting rigid walls down inclines. *Physical Review*, 92, 2015.

T. Faug, P. Childs, E. Wyburn, and I. Einav. Standing jumps in shallow granular flows down smooth inclines. *Physics of Fluids*, 27, 2015.

J.M.N.T. Gray and A.N. Edwards. A depth-averaged $\mu(i)$ -rheology for shallow granular free-surface flows. *J. Fluid Mech.*, 755:503–534, 2014.

J. Hübl, A. Strauss, M. Holub, J. Suda, and P.J. Strasse. Structural mitigation measures. 2005.

P. Jop, Y. Forterre, and O. Pouliquen. A constitutive relation for dense granular flows. *Nature*, 44:727–730, 2006.

P.Y. Lagrée, L. Staron, and S. Popinet. The granular column collapse as a continuum: validity of a two-dimensional navier–stokes model with a $\mu(i)$ -rheology. *J. Fluid Mech.*, 686:378–408, 2011.

T.H. Luong, J.L. Baker, and I. Einav. Spread-out and slow-down of granular flows through model forests. *Granular Matter*, 22(15), 2020.

GDR MiDi. On dense granular flows. *European Physical Journal*, 14:341–365, 2004.

A. Pasqua, A. Leonardi, and M. Pirulli. Coupling depth-averaged and 3d numerical models for the simulation of granular flows. *Computers and Geotechnics*, 149, 2022.

- O. Pouliquen. Scaling laws in granular flows down rough inclined planes. *Physics of Fluids*, 11(3):542–548, 1999.
- O. Pouliquen and Y. Forterre. Friction law for dense granular flows: application to the motion of a mass down a rough inclined plane. *J. Fluid Mech.*, 453:133–151, 2002.