

POLITECNICO DI TORINO

Laurea Magistrale in INGEGNERIA CIVILE



Tesi di Laurea Magistrale

**STUDIO ANALITICO DI SEZIONI IN CEMENTO
ARMATO INFLESSE E PRESSOINFLESSE:
RESISTENZA E DUTTILITÀ**

Relatori:

Prof. Giuseppe Carlo MARANO

Prof. Fabio DI TRAPANI

Candidato:

Elena SANSÒ

Anno Accademico 2021/2022

A mamma e papà
A nonno Nino e nonna Rita

Ringraziamenti

Un ringraziamento va al mio relatore, il prof. Marano, per avermi supportata in questi mesi, fornendomi il materiale utile alla stesura dell'elaborato, e con il quale ho avuto l'opportunità di stringere un rapporto professionale.

Il grazie più grande è senza dubbio per mamma e papà. Un porto sicuro nei giorni di tempesta. Dire grazie non sarà mai abbastanza e niente potrà mai ripagarvi per tutto. Solo noi sappiamo quello che abbiamo passato insieme e quello che ci è voluto per arrivare qui, quel "qui" che sembrava non arrivare mai. Per me non è mai scontato dirvi che vi voglio bene.

Grazie a tutti i miei familiari e parenti che mi sono stati vicino, a Mario e Veronica, alla mia piccola grande Giulia e, ultimo ma non ultimo, Marino: grazie di cuore.

Abstract

Gli eventi degli ultimi anni hanno reso evidente l'esigenza di progettare strutture che siano non solo resistenti ma anche e soprattutto duttili, capaci quindi non solo di resistere alle azioni esterne ma anche di garantire un certo livello di sicurezza strutturale pur danneggiandosi, dissipare energia durante eventi sismici o urti, danneggiarsi oltre il limite elastico e manifestare un preavviso di collasso che permetta di salvaguardare la vita.

Lo scopo del presente elaborato è quello di studiare analiticamente le sezioni in c.a. soggette a sollecitazioni di flessione e pressoflessione, al fine di ricavare equazioni utili alla definizione di possibili automatismi nell'individuazione del campo di rottura e nella verifica allo Stato Limite Ultimo, che possano agevolare il lavoro del progettista e il processo progettuale.

Nello specifico, dopo aver introdotto nel Capitolo 1 i criteri di progettazione odierni, l'importanza di considerare nel processo progettuale la duttilità alla stregua della resistenza e le prescrizioni normative in materia, lo studio analitico di resistenza e duttilità delle sezioni in c.a. è stato condotto seguendo due approcci diversi, rispettivamente illustrati nei Capitoli 2 e 3.

Nel Capitolo 2 il problema della valutazione della duttilità è stato affrontato per estensione del concetto dei campi di rottura che la letteratura in genere associa alla valutazione di resistenza, conservando condizioni fisse per i livelli di deformazione del calcestruzzo associate alla legge costitutiva adottata. Tale approccio è funzionale alla definizione di un potenziale automatismo, implementabile nella forma tabellare, per valutazioni che riguardano tipicamente sezioni non confinate.

Il Capitolo 3, invece, tratta il problema della duttilità secondo un processo valutativo che si potrebbe qualificare come più tradizionale, poichè non fa ricorso al concetto di campo di rottura e, pertanto, si allontana dalle ipotesi proprie della valutazione di resistenza per considerare livelli di deformazione del calcestruzzo

variabili. A tal riguardo, particolare attenzione è stata posta a sezioni confinate tramite FRP, valorizzandone gli innumerevoli vantaggi e applicazioni. In questo caso, l'automatismo associabile si riferisce al calcolo sia della curvatura sia del fattore di duttilità in curvatura della sezione.

Sulla base dello studio analitico effettuato e delle equazioni ottenute, il Capitolo 4 offre algoritmi e codici facilmente implementabili e consultabili tramite software open source disponibili, capaci di individuare il campo di rottura ed eseguire le verifiche di resistenza e duttilità.

Le conclusioni, infine, evidenziano alcune relazioni causa-effetto di cui tener conto nel processo progettuale per la definizione delle caratteristiche delle sezioni in c.a. confinate e non, che peraltro possono rappresentare utili spunti per sviluppi futuri di automatismi di suggerimento di opzioni migliorative.

Indice

Elenco delle figure	ix
Elenco delle tabelle	xiv
Simboli	xv
1 Introduzione	1
1.1 Progettazione delle opere strutturali	1
1.2 Gerarchia delle resistenze	2
1.2.1 L'analogia della catena	3
1.2.2 Cosa accade per le strutture	4
1.2.3 Prescrizioni delle NTC2018	5
2 Stato Limite Ultimo per tensioni normali	7
2.1 Condizioni critiche deformative	8
2.2 Campi di rottura	9
2.2.1 Campo 1	9
2.2.2 Campo 2	10
2.2.3 Campo 3	11
2.2.4 Campo 4	11
2.2.5 Campo 5	12

2.3	Condizioni critiche tensionali	14
2.3.1	Coefficiente di riempimento e coefficiente di posizione della risultante di compressione	17
2.4	Problema di verifica per flessione semplice	25
2.4.1	Rette di frontiera	26
2.4.2	Duttilità	61
2.4.3	Tabelle di progetto e verifica	74
2.4.4	Considerazioni	77
2.5	Problema di verifica per flessione composta	77
2.5.1	Rette di frontiera	78
3	Fattore di duttilità in curvatura di sezioni in c.a.	88
3.1	Sollecitazione di flessione	89
3.1.1	Sezione semplicemente armata	89
3.1.2	Sezione doppiamente armata	94
3.1.3	Diagramma momento-curvatura	98
3.1.4	Considerazioni	100
3.2	Sollecitazione di pressoflessione	100
3.2.1	Diagramma momento-curvatura	111
3.2.2	Considerazioni	114
3.3	Confinamento	115
3.3.1	Confinamento con sistemi in FRP	115
3.3.2	Duttilità di elementi pressoinflessi confinati con FRP	121
3.3.3	Diagramma momento-curvatura	122
3.3.4	Considerazioni	126
4	Algoritmo e codice	127
4.1	Diagramma di flusso	128

4.2	Fase di lettura	129
4.3	Fase di analisi e computazione numerica	130
4.4	Fase di stampa	131
4.5	Codice del programma	132
4.6	Algoritmo di calcolo strutturale	138
4.6.1	Diagramma di flusso	139
4.6.2	Codice del programma	141
5	Conclusioni	142
	Bibliografia	145

Elenco delle figure

2.1	Campi di rottura di una sezione generica	9
2.2	Campo di rottura 1; sottocampi 1a e 1b	10
2.3	Campo di rottura 2; sottocampi 2a, 2b e 2c	10
2.4	Campo di rottura 3; sottocampi 3a, 3b e 3c	11
2.5	Campo di rottura 4; sottocampi 4a e 4b	12
2.6	Campo di rottura 5; sottocampi 5a e 5b	12
2.7	Legame costitutivo del calcestruzzo, modello parabola-rettangolo . .	14
2.8	Legame costitutivo dell'acciaio, modello bilineare finito con in- crudimento	15
2.9	Generica configurazione deformata di collasso	17
2.10	Posizione della risultante di compressione	19
2.11	Distribuzione tensionale nella prima parte di campo 2	20
2.12	Distribuzione tensionale nella seconda parte di campo 2	22
2.13	Distribuzione tensionale in campo 3 e in campo 4	24
2.14	Configurazione deformata e distribuzione tensionale corrispondente alla retta di frontiera tra campo 3 e campo 4	26
2.15	Configurazione deformata e distribuzione tensionale corrispondente alla retta di frontiera tra campo 2 e campo 3	32
2.16	Configurazione deformata e distribuzione tensionale corrispondente alla retta di frontiera tra campo 4a e campo 4b	37

2.17	Configurazione deformata e distribuzione tensionale corrispondente alla retta di frontiera tra campo 3c e campo 3b	43
2.18	Configurazione deformata e distribuzione tensionale corrispondente alla retta di frontiera tra campo 3b e campo 3a	48
2.19	Configurazione deformata e distribuzione tensionale corrispondente alla retta di frontiera tra campo 2c e campo 2b	54
2.20	Configurazione deformata e distribuzione tensionale corrispondente alla retta di frontiera tra campo 2a e campo 2b	57
2.21	Configurazione deformata e distribuzione tensionale corrispondente alla condizione di collasso	62
2.22	Configurazione deformata e distribuzione tensionale corrispondente alla condizione di collasso	65
2.23	Andamento della funzione $f(\xi)$ in funzione della profondità dell'asse neutro ξ_y	68
2.24	Andamento della funzione $f(\xi)$ in funzione della profondità dell'asse neutro ξ_y al variare di ψ_A	69
2.25	Influenza dell'armatura compressa sulla curvatura allo snervamento	70
2.26	Influenza dell'armatura compressa sulla curvatura ultima quando è in fase elastica	70
2.27	Influenza dell'armatura compressa sulla curvatura ultima quando è snervata	71
2.28	Influenza dell'armatura compressa sulla duttilità in curvatura quando è in fase elastica	72
2.29	Influenza dell'armatura compressa sulla duttilità in curvatura quando è snervata	72
2.30	Influenza dell'armatura tesa sulla duttilità in curvatura quando è in fase elastica	73
2.31	Influenza dell'armatura tesa sulla duttilità in curvatura quando è snervata	73

3.1	Curvatura ultima di una sezione in c.a. semplicemente armata soggetta a flessione	89
3.2	Legame costitutivo del calcestruzzo, modello parabola-rettangolo . .	91
3.3	Curvatura allo snervamento di una sezione in c.a. semplicemente armata soggetta a flessione	93
3.4	Fattore di duttilità in curvatura al variare della percentuale meccanica di armatura tesa, per diversi rapporti di confinamento, sezione inflessa	94
3.5	Curvatura ultima di una sezione in c.a. doppiamente armata soggetta a flessione	95
3.6	Sezione rettangolare in c.a. soggetta a flessione, caratteristiche geometriche e meccaniche	99
3.7	Risultati numerici per il caso di flessione	99
3.8	Diagramma momento-curvatura di una sezione soggetta a flessione .	100
3.9	Curvatura ultima di una sezione in c.a. doppiamente armata soggetta a pressoflessione	101
3.10	Profondità dell'asse neutro in condizione di armatura superiore snervata	104
3.11	Curvatura allo snervamento di una sezione in c.a. doppiamente armata soggetta a pressoflessione	107
3.12	Curvatura allo snervamento di una sezione in c.a. doppiamente armata soggetta a pressoflessione in cui le armature si snervano entrambe nello stesso momento	108
3.13	Fattore di duttilità in curvatura al variare dello sforzo normale adimensionale, per diversi rapporti di confinamento ($\psi_A = 0$), sezione pressoinflessa	109
3.14	Fattore di duttilità in curvatura al variare dello sforzo normale adimensionale, per diversi rapporti di confinamento ($\psi_A = 0.5$), sezione pressoinflessa	109
3.15	Fattore di duttilità in curvatura al variare dello sforzo normale adimensionale, per diversi rapporti di confinamento ($\psi_A = 1$), sezione pressoinflessa	110

3.16	Fattore di duttilità in curvatura al variare della percentuale meccanica di armatura tesa, per diversi rapporti di confinamento ($\psi_A = 0$), sezione pressoinflessa	110
3.17	Fattore di duttilità in curvatura al variare della percentuale meccanica di armatura tesa, per diversi rapporti di confinamento ($\psi_A = 0.5$), sezione pressoinflessa	111
3.18	Fattore di duttilità in curvatura al variare della percentuale meccanica di armatura tesa, per diversi rapporti di confinamento ($\psi_A = 1$), sezione pressoinflessa	111
3.19	Sezione rettangolare in c.a. soggetta a pressoflessione, caratteristiche geometriche e meccaniche	113
3.20	Risultati numerici per $\nu = 0.13$	113
3.21	Diagramma momento-curvatura di una sezione soggetta a pressoflessione (per $\nu = 0.13$)	113
3.22	Risultati numerici per $\nu = 0.55$	114
3.23	Diagramma momento-curvatura di una sezione soggetta a pressoflessione (per $\nu = 0.55$)	114
3.24	Legami costitutivi di fibre, matrice e corrispondente composito	116
3.25	Confinamento di sezioni rettangolari ed effetto arco	119
3.26	Confinamento lungo l'asse longitudinale dell'elemento	120
3.27	Modello tensione-deformazione del calcestruzzo confinato con FRP	121
3.28	Sezione rettangolare in c.a. confinata con FRP soggetta a pressoflessione, caratteristiche geometriche e meccaniche	123
3.29	Caratteristiche geometriche e fisiche del sistema MAPEWRAP C UNI-AX HM SYSTEM	124
3.30	Proprietà meccaniche del tessuto secco del sistema MAPEWRAP C UNI-AX HM SYSTEM	124
3.31	Proprietà meccaniche del sistema MAPEWRAP C UNI-AX HM SYSTEM	124
3.32	Risultati numerici per $\nu = 0.13$ e due strati di confinamento in FRP	125

3.33	Diagramma momento-curvatura di una sezione soggetta a pressoflessione ($\nu = 0.13$) con due strati di confinamento in FRP	125
3.34	Risultati numerici per $\nu = 0.55$ e due strati di confinamento in FRP	125
3.35	Diagramma momento-curvatura di una sezione soggetta a pressoflessione ($\nu = 0.55$) con due strati di confinamento in FRP	126
4.1	Diagramma di flusso	129

Elenco delle tabelle

2.1	- Tabella riassuntiva: coefficiente di riempimento, coefficiente di posizione della risultante di compressione, posizione dell'asse neutro	74
2.2	- Tabella riassuntiva: parametri adimensionali particolarizzati per le rette di frontiera "a", "b", "c"	75
2.3	- Tabella riassuntiva: parametri adimensionali particolarizzati per le rette di frontiera "d", "e", "f", "g"	76

Simboli

β_1 coefficiente di riempimento

β_2 coefficiente di posizione della risultante di compressione

$\Delta(\Delta')$ posizione del baricentro dell'armatura rispetto al lembo inferiore (superiore)

$\delta(\delta')$ posizione del baricentro dell'armatura rispetto al lembo inferiore (superiore)
adimensionalizzata rispetto all'altezza meccanica

ε deformazione

η tasso di lavoro

$\mu_\varphi = \frac{\varphi_u}{\varphi_y}$ fattore di duttilità in curvatura

$\omega' = \frac{A'_s f_{yd}}{b h f_{cd}} = \rho' \psi_f$ percentuale meccanica di armatura compressa

$\omega = \frac{A_s f_{yd}}{b h f_{cd}} = \rho \psi_f$ percentuale meccanica di armatura tesa

$\psi_A = \frac{A'_s}{A_s}$ rapporto di armatura

$\psi_f = \frac{f_{yd}}{f_{cd}}$ rapporto di tensione

$\rho' = \frac{A'_s}{b h}$ percentuale geometrica di armatura compressa

$\rho = \frac{A_s}{b h}$ percentuale geometrica di armatura tesa

σ tensione

$\varphi_u = \frac{\varepsilon_{cu}}{x_u}$ curvatura ultima

$\varphi_y = \frac{\varepsilon_{yd}}{h-x_y}$ curvatura al limite elastico

$\xi = \frac{x}{h}$ profondità dell'asse neutro adimensionalizzata rispetto all'altezza meccanica

A'_s armatura superiore

A_s armatura inferiore

b base

C risultante delle tensioni sul calcestruzzo reagente

d altezza

E_c modulo elastico del calcestruzzo

E_s modulo elastico dell'acciaio

f_t tensione di rottura dell'acciaio

f_{cd} resistenza a compressione di progetto del calcestruzzo

f_{yd} resistenza a snervamento di progetto dell'acciaio

f_{yk} resistenza a snervamento caratteristica dell'acciaio

h altezza meccanica

$k = \frac{f_t}{f_y}$ rapporto di incrudimento

M_{Rd} momento resistente

$m_{rd} = \frac{M_{Rd}}{bh^2 f_{cd}}$ momento resistente adimensionalizzato

$n = \frac{E_s}{E_c}$ rapporto dei moduli

S risultante delle tensioni sull'armatura inferiore

S' risultante delle tensioni sull'armatura superiore

x profondità dell'asse neutro

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Progettazione delle opere strutturali

Le opere e le componenti strutturali devono essere progettate, eseguite, collaudate e soggette a manutenzione in modo tale da consentirne la prevista utilizzazione, in forma economicamente sostenibile e con il livello di sicurezza previsto dalle NTC2018 [1]. La sicurezza e le prestazioni di un'opera o di una parte di essa devono essere valutate in relazione agli stati limite che si possono verificare durante la vita nominale di progetto. Si definisce stato limite una condizione superata la quale l'opera non soddisfa più le esigenze elencate nelle suddette norme.

In particolare, secondo le NTC2018, le opere e le varie tipologie strutturali devono possedere i seguenti requisiti [1]:

- *sicurezza nei confronti di stati limite ultimi (SLU)*: capacità di evitare crolli, perdite di equilibrio e dissesti gravi, totali o parziali, che possano compromettere l'incolumità delle persone oppure comportare la perdita di beni, oppure provocare gravi danni ambientali e sociali, oppure mettere fuori servizio l'opera; il superamento di uno stato limite ultimo ha carattere irreversibile;
- *sicurezza nei confronti di stati limite di esercizio (SLE)*: capacità di garantire le prestazioni previste per le condizioni di esercizio; il superamento di uno stato limite di esercizio può avere carattere reversibile o irreversibile;
- *sicurezza antincendio*: capacità di garantire le prestazioni strutturali previste in caso d'incendio, per un periodo richiesto;

- *durabilità*: capacità della costruzione di mantenere, nell'arco della vita nominale di progetto, i livelli prestazionali per i quali è stata progettata, tenuto conto delle caratteristiche ambientali in cui si trova e del livello previsto di manutenzione;
- *robustezza*: capacità di evitare danni sproporzionati rispetto all'entità di possibili cause innescanti eventi eccezionali quali esplosioni e urti.

Per quanto riguarda gli Stati Limite Ultimi, si deve verificare il rispetto dei seguenti stati limite [1]:

- resistenza (a flessione in presenza e in assenza di sforzo assiale, a taglio, a punzonamento, a torsione, ecc.);
- duttilità flessionale in presenza e in assenza di sforzo assiale.

La Normativa Tecnica NTC2018 introduce la *progettazione in capacità* [2], fondamentale per le strutture, soprattutto in zona sismica. Secondo tale approccio, la struttura deve essere progettata in modo da garantire che la resistenza (o capacità) degli elementi e dei meccanismi fragili sia maggiore della resistenza dei meccanismi duttili. In tal modo la struttura sarà dotata di una maggiore duttilità e di una notevole capacità di dissipare l'energia trasmessa da un evento sismico. Di conseguenza sarà in grado di resistere meglio alle azioni sismiche, evitando meccanismi di collasso indesiderati. Questo modo di progettare è auspicabile solo attraverso la *gerarchia delle resistenze*, suo principio cardine.

1.2 Gerarchia delle resistenze

La gerarchia delle resistenze, o la progettazione in capacità, si basa sulla modalità con cui l'opera raggiunge lo stato limite di interesse, ovvero il percorso che porta al collasso globale, inteso come individuazione di quelle sezioni sede della formazione di cerniere plastiche, e quindi di cinematismi, nelle quali sorgeranno deformazioni anelastiche e dove si avrà il passaggio da un comportamento lineare ad uno non lineare. Per questo motivo, tale approccio è anche detto *progetto a duttilità controllata* [3].

1.2.1 L'analogia della catena

Una semplice analogia [2] consente di riassumere e visualizzare ciò che succede basando la progettazione sul principio della gerarchia delle resistenze. In questa analogia si osserva il comportamento a rottura di una catena, che simula la risposta di una struttura costituita da $n+1$ elementi. Questa catena si immagina essere composta da anelli in acciaio e da un solo anello in vetro. Gli anelli in acciaio rappresentano gli elementi duttili del sistema, in quanto superata la deformazione elastica a trazione, hanno una riserva di capacità deformativa in campo plastico. L'anello in vetro rappresenta invece l'elemento fragile del sistema, in quanto, una volta raggiunta la massima deformazione elastica, si romperà senza alcuna deformazione in campo plastico.

Si immagina quindi di dover dimensionare gli anelli di questa catena per garantire la maggiore duttilità possibile del sistema sollecitato a trazione. Possono verificarsi a questo punto due casi [2]:

- la resistenza a trazione dell'anello in vetro è minore della resistenza a trazione dell'anello in acciaio;
- viceversa, la resistenza a trazione dell'anello in vetro è maggiore della resistenza a trazione dell'anello in acciaio.

Caso 1: anello in vetro con resistenza a trazione minore rispetto agli anelli in acciaio

La resistenza a trazione del sistema sarà governata dalla resistenza a trazione dell'anello in vetro. Applicando uno spostamento alle estremità della catena fino ad arrivare alla rottura del sistema e misurando la forza di trazione che la catena è in grado di sopportare (prova di carico a controllo di spostamento), risulterà che tutti gli anelli in acciaio saranno in campo elastico, mentre l'anello in vetro subirà una rottura fragile. Il legame forza-spostamento della catena sarà puramente elastico fino a rottura, senza alcuna deformazione in campo plastico. Il sistema non sfrutta per niente la potenziale capacità dissipativa di cui sono dotati gli anelli in acciaio.

Caso 2: anello in vetro con resistenza a trazione maggiore rispetto agli anelli in acciaio

Applicando uno spostamento alle estremità della catena fino ad arrivare a rottura, l'anello in vetro resterà integro, mentre gli anelli in acciaio si plasticizzeranno, uscendo dal campo elastico. L'allungamento della catena sarà molto più accentuato rispetto al caso precedente ed in tal modo la capacità dissipativa del sistema viene pienamente sfruttata grazie alla maggiore resistenza dell'anello in vetro rispetto alla resistenza degli anelli in acciaio.

Dai due esempi visti è possibile dedurre che per ottenere la maggiore duttilità possibile del sistema bisognerà assegnare una gerarchia alle resistenze dei due differenti elementi che compongono la catena: l'anello in vetro e gli anelli in acciaio. La massima duttilità si otterrà facendo in modo che la resistenza a trazione dell'anello in vetro sia maggiore della resistenza a trazione degli anelli in acciaio.

1.2.2 Cosa accade per le strutture

Lo stesso concetto visto per la catena vale in maniera identica per le strutture portanti degli edifici [2]. Gli anelli in acciaio della catena rappresentano i meccanismi duttili di una struttura: il meccanismo di rottura a flessione per le travi e a pressoflessione per i pilastri. L'anello in vetro rappresenta i meccanismi di rottura fragili ovvero il meccanismo di rottura a taglio che, essendo un meccanismo fragile, non dovrà manifestarsi prima del raggiungimento della massima capacità a flessione. Anche nell'ambito dei possibili meccanismi duttili di una struttura (flessione nelle travi e nei pilastri) bisognerà stabilire una gerarchia in fase di progettazione: dovranno formarsi prima le cerniere plastiche alle estremità di tutte le travi e, solo dopo che tutte le travi saranno plasticizzate, dovranno formarsi le cerniere plastiche alla base dei pilastri. Questa ulteriore gerarchia garantisce due risultati:

- si eviterà il meccanismo di collasso di piano soffice;
- si sfrutterà la maggiore duttilità delle cerniere plastiche delle travi rispetto alle cerniere plastiche dei pilastri.

Il rispetto della gerarchia delle resistenze in fase di progettazione eviterà che, in presenza di sisma, i pilastri di una struttura si plasticizzino prima delle travi dando

vita a meccanismi di collasso "a piano soffic". Tutte le cerniere plastiche dovranno formarsi prima nelle sezioni di estremità delle travi; soltanto quando tutte le travi saranno plasticizzate, potranno formarsi le cerniere plastiche al piede dei pilastri del primo livello, arrivando così al collasso della struttura. Il meccanismo di rottura per flessione che si verifica nelle travi ha una duttilità maggiore rispetto alla rottura a pressoflessione nei pilastri. La presenza dello sforzo normale nei pilastri riduce la duttilità della sezione.

In sintesi, la gerarchia delle resistenze serve ad evitare che nei pilastri e nelle travi si formino meccanismi di rottura fragili, ovvero meccanismi di rottura per taglio, prima dei meccanismi di rottura duttili, ovvero rottura per flessione. Lo scopo è garantire una maggiore duttilità globale del sistema strutturale e una maggiore capacità di dissipare l'energia sismica in ingresso, evitando la formazione di meccanismi di piano soffic.

1.2.3 Prescrizioni delle NTC2018

Con l'entrata in vigore delle nuove NTC2018, il principio di gerarchia delle resistenze viene inglobato nel concetto più generale di progettazione in capacità. Questa progettazione ha lo scopo di assicurare alla struttura dissipativa un comportamento duttile ed opera come segue [1]:

- distingue gli elementi e i meccanismi, sia locali sia globali, in duttili e fragili;
- mira ad evitare le rotture fragili locali e l'attivazione di meccanismi globali fragili o instabili;
- mira a localizzare le dissipazioni di energia per isteresi in zone degli elementi duttili a tal fine individuate e progettate, dette "dissipative" o "dutili", coerenti con lo schema strutturale adottato.

Tali fini possono ritenersi conseguiti progettando la capacità in resistenza allo Stato Limite di salvaguardia della Vita degli elementi/meccanismi fragili, locali e globali, in modo che sia maggiore di quella degli elementi/meccanismi duttili ad essi alternativi. Per assicurare il rispetto di tale disequaglianza, a livello sia locale sia globale, l'effettiva capacità in resistenza degli elementi/meccanismi duttili è incrementata mediante un opportuno coefficiente γ_{Rd} , detto "fattore di sovrarresistenza"; a partire

da tale capacità maggiorata si dimensiona la capacità degli elementi/meccanismi fragili indesiderati, alternativi ai duttili.

I fattori di sovrarresistenza da adottare per l'applicazione della gerarchia delle resistenze (progettazione in capacità) sono specificati nelle NTC2018 e dipendono da [1]:

- tipologia strutturale (cemento armato, acciaio, legno ecc.);
- elemento strutturale (pilastri, travi ecc.);
- tipologia di sollecitazione (pressoflessione, taglio ecc.);
- classe di duttilità (CD”A” o CD”B”).

Capitolo 2

Stato Limite Ultimo per tensioni normali

Nel presente Capitolo verrà analizzato il comportamento di elementi sollecitati da tensioni normali in regime non lineare, ossia sottoposti a sollecitazioni semplici o composte di flessione e pressione. Si illustrano, in particolare, metodologie per la verifica di sezioni in cemento armato e si propone, per le travi a sezione rettangolare doppiamente armate, un metodo automatico per il progetto con controllo di duttilità secondo le prescrizioni fornite dalle NTC2018 [4]. Nell'attuale bibliografia infatti si rileva un notevole sforzo indirizzato alla ricerca di formulazioni semplificate del calcolo allo stato limite ultimo attraverso la produzione e l'utilizzazione di abachi e tabelle che consentono di verificare e progettare le sezioni. Questi metodi offrono il vantaggio di una notevole semplificazione del problema. Nella fase progettuale, il problema della ricerca delle soluzioni resta indeterminato a causa del numero di incognite superiore rispetto al numero di equazioni disponibili, di qui nasce la necessità di fissare un ulteriore parametro che specifichi lo stato deformativo ultimo della sezione. Il parametro deformativo che si presta bene a questi scopi è la "duttilità" che diventa dunque una condizione prioritaria di progetto, in modo da coordinare la deformazione ultima con la resistenza limite della sezione. La sezione di una trave è soggetta a "flessione semplice" quando l'unica caratteristica della sollecitazione presente nella sezione è un momento flettente. Nel caso più generale di "flessione deviata" possono essere presenti due componenti di momento flettente ortogonali tra loro, M_x ed M_y , valutate rispetto agli assi principali d'inerzia

della sezione. Se alla sollecitazione di flessione si accompagna anche uno sforzo normale N si parla allora di "flessione composta". Lo studio della sezione si basa sull'equilibrio tra le sollecitazioni esterne agenti e le reazioni interne, e la verifica allo stato limite ultimo si esegue, come è noto, controllando che, per opportune combinazioni dei carichi dette "condizioni di progetto", la sollecitazione di calcolo S_d non superi in alcuna sezione il corrispondente valore della resistenza di calcolo R_d . Nel seguito si analizzeranno i casi di flessione e presso-flessione retta che sono di gran lunga i più frequenti nelle applicazioni relative alla verifica e al progetto di sezioni di strutture in cemento armato. Le principali ipotesi su cui si basa l'analisi dello stato di tensione delle sezioni di travi sollecitate da azioni normali sono le seguenti [4] [5]:

1. *Conservazione delle sezioni piane*: la deformazione in ogni punto della sezione è proporzionale alla distanza dall'asse neutro del punto considerato.
2. *Perfetta aderenza tra acciaio e calcestruzzo*: la deformazione di un'armatura sia tesa che compressa coincide con quella del conglomerato circostante. Tale assunzione è indispensabile per far sì che il conglomerato e l'acciaio lavorino insieme per sopportare il carico applicato.
3. *La distribuzione delle tensioni nel conglomerato e nell'armatura ordinaria si ricavano dai diagrammi costitutivi dei materiali*.
4. *La resistenza a trazione del calcestruzzo è trascurabile*: è ben noto che la resistenza a trazione del calcestruzzo è circa 1/10 della resistenza a compressione e che la risultante delle forze di trazione al di sotto dell'asse neutro è molto piccola in confronto alla forza di trazione nell'armatura. Naturalmente, tale assunzione costituisce un'ipotesi semplificativa necessaria per rendere più agevole il calcolo della resistenza a flessione semplice o composta.

2.1 Condizioni critiche deformative

Una sezione entra in crisi quando si produce una plasticizzazione diffusa nei materiali che la compongono tale da produrre danni evidenti e permanenti nella sezione. Convenzionalmente il collasso è determinato dal superamento, nel calcestruzzo e/o nell'acciaio, della rispettiva deformazione ultima prevista nei legami costitutivi

di calcolo dei materiali. È bene osservare, comunque, che non esiste una ragione concreta per definire una deformazione limite dei materiali, tuttavia questo comporta notevoli semplificazioni dal punto di vista del calcolo. In accordo con la normativa in vigore si assume che sia stato raggiunto il limite di resistenza della sezione inflessa se la deformazione del calcestruzzo compresso assume il valore ϵ_{cu} o quella dell'acciaio teso il valore dell'allungamento limite ϵ_{ud} [5]. Questo implica che tutti i diagrammi delle deformazioni relativi ad una situazione di collasso devono passare per uno di questi due punti. L'insieme di tutti i possibili diagrammi di collasso può suddividersi in cinque campi fondamentali di crisi, che a loro volta contengono dei sottocampi [4]:

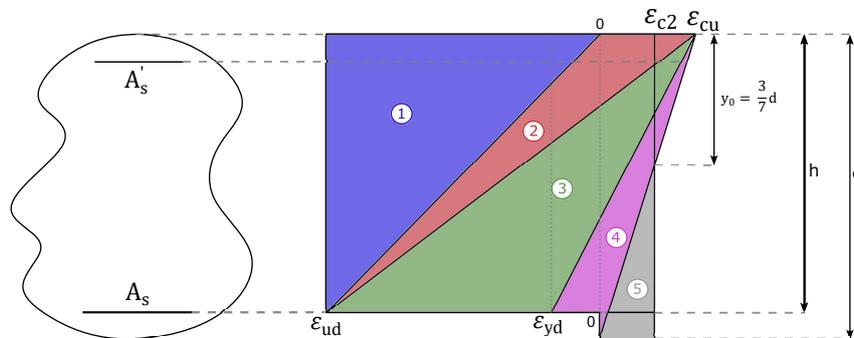


Figura 2.1 - Campi di rottura di una sezione generica

2.2 Campi di rottura

2.2.1 Campo 1

La crisi della sezione avviene per il raggiungimento della deformazione massima ϵ_{ud} nell'acciaio teso, con calcestruzzo interamente fessurato. L'armatura superiore è tesa e può risultare snervata o ancora in campo elastico; si distinguono dunque due casi (vedi Fig. 2.2):

- *caso a*: armatura superiore tesa snervata;
- *caso b*: armatura superiore tesa elastica.

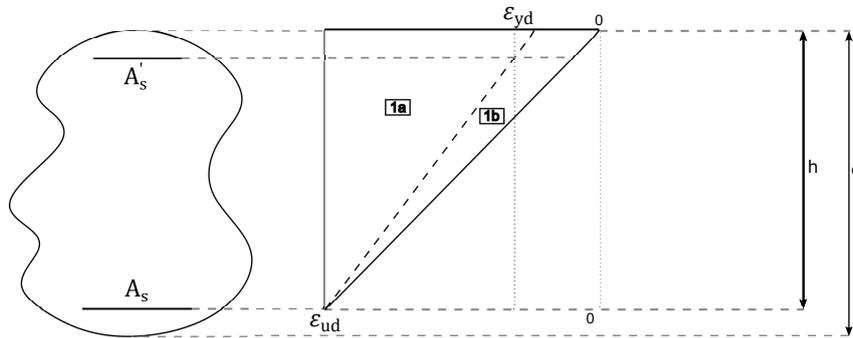


Figura 2.2 - Campo di rottura 1; sottocampi 1a e 1b

2.2.2 Campo 2

La crisi della sezione corrisponde al sopraggiungere della deformazione massima ϵ_{ud} dell'acciaio teso, con il calcestruzzo parzialmente reagente. L'armatura superiore può risultare tesa o compressa, in fase elastica o snervata, in particolare si farà riferimento ai casi (vedi Fig. 2.3):

- *caso a*: armatura superiore compressa snervata;
- *caso b*: armatura superiore in fase elastica;
- *caso c*: armatura superiore tesa snervata.

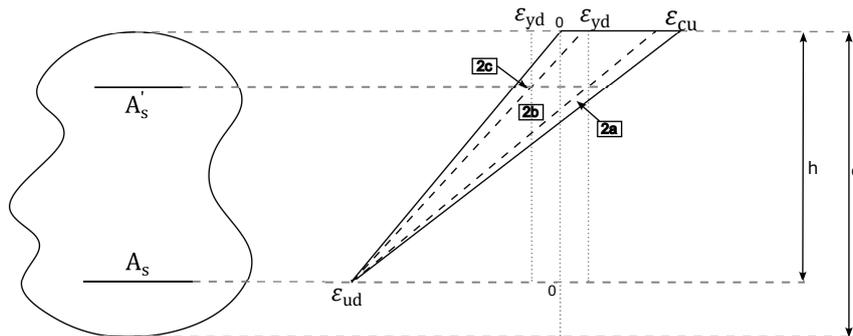


Figura 2.3 - Campo di rottura 2; sottocampi 2a, 2b e 2c

2.2.3 Campo 3

La rottura avviene per schiacciamento del calcestruzzo, cui corrisponde una deformazione ϵ_{cu} ed una tensione f_{cd} , dopo che l'acciaio ha raggiunto la sua massima deformazione ϵ_{ud} . Come per il campo 2 si distinguono i casi (vedi Fig. 2.4):

- *caso a*: armatura superiore compressa snervata;
- *caso b*: armatura superiore in fase elastica;
- *caso c*: armatura superiore tesa snervata.

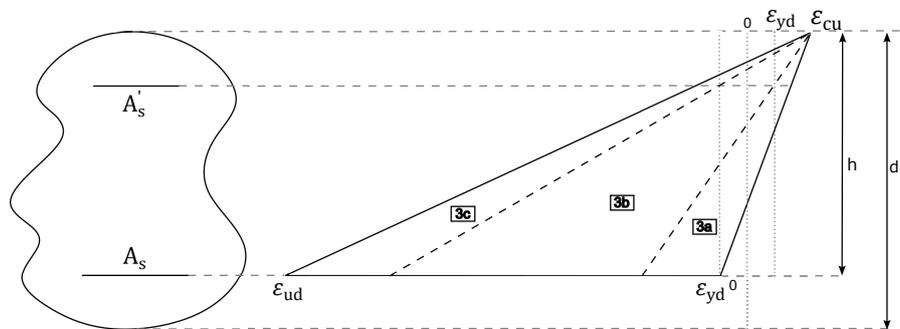


Figura 2.4 - Campo di rottura 3; sottocampi 3a, 3b e 3c

2.2.4 Campo 4

La rottura sopraggiunge per schiacciamento del calcestruzzo, cui corrisponde una deformazione ϵ_{cu} ed una tensione f_{cd} , mentre l'acciaio non ha ancora superato la soglia plastica. Nel campo 4 l'armatura superiore può risultare (vedi Fig. 2.5):

- *caso a*: armatura superiore compressa snervata;
- *caso b*: armatura superiore in fase elastica.

Il sottocampo 4a può a sua volta suddividersi in:

- 4a': armatura inferiore tesa;
- 4a'': armatura inferiore compressa.

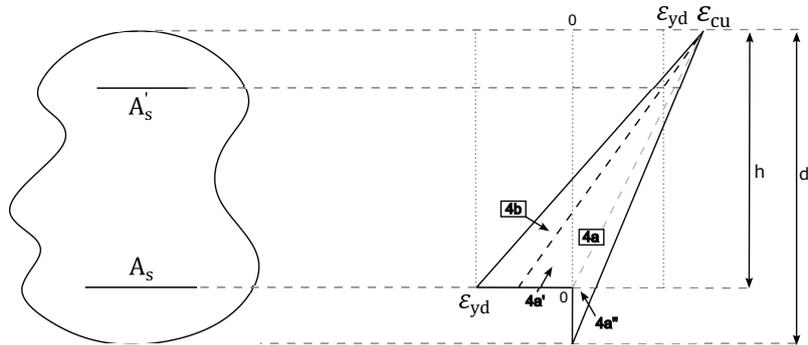


Figura 2.5 - Campo di rottura 4; sottocampi 4a e 4b

2.2.5 Campo 5

In questo campo la rottura avviene per schiacciamento del calcestruzzo, mentre le armature superiore ed inferiore sono entrambe compresse; in particolare le barre superiori risultano snervate mentre quelle inferiori possono essere in fase elastica o plasticizzate (vedi Fig. 2.6):

- *caso a*: armatura inferiore in fase elastica;
- *caso b*: armatura inferiore snervata.

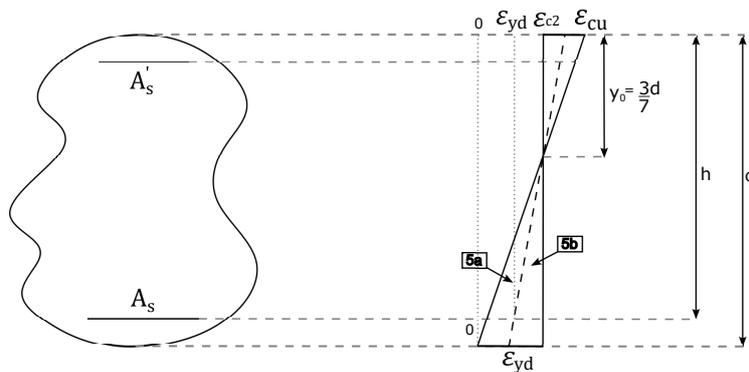


Figura 2.6 - Campo di rottura 5; sottocampi 5a e 5b

L'analisi delle sollecitazioni corrispondenti alle diverse condizioni critiche deformative consente di affermare che:

- Il campo 1 corrisponde alle resistenze di calcolo relative a sollecitazioni di *tensoflessione* (o di *trazione semplice* in corrispondenza della retta limite verticale);
- Nei campi 2, 3, 4a' ricadono le resistenze di calcolo per sollecitazioni di *flessione semplice o composta*;
- I campi 4a'' e 5 definiscono le resistenze di calcolo per sollecitazioni di *pressoflessione* (o di *compressione semplice* in corrispondenza della retta limite verticale).

La crisi della sezione nei diversi campi avviene dunque secondo diverse modalità, e ciò si verifica in relazione alle caratteristiche geometriche e di resistenza della sezione. In particolare è possibile distinguere tre diverse modalità di rottura per flessione semplice o composta:

1. **Rottura per compressione nel calcestruzzo:** in questa situazione il calcestruzzo si rompe prima che l'acciaio abbia raggiunto la soglia plastica. Questo tipo di rottura è definito fragile, si verifica nelle travi "fortemente armate" e produce collassi improvvisi in quanto è caratterizzato generalmente da piccole deformazioni e da fessurazioni nulle o molto limitate.
2. **Rottura per compressione nel calcestruzzo e snervamento dell'acciaio:** in questa situazione il collasso è ancora prodotto dallo schiacciamento del calcestruzzo ma dopo che l'acciaio ha superato la soglia plastica. Le sezioni che collassano in questo modo sono dette "normalmente armate" e il loro comportamento è tanto più duttile quanto maggiore è l'allungamento dell'acciaio nella condizione di rottura.
3. **Rottura per trazione nell'acciaio:** lo stato limite è raggiunto per eccessivo allungamento dell'armatura principale prima che il calcestruzzo arrivi alla sua deformazione ultima. La rottura viene denominata duttile in quanto è accompagnata da cospicue deformazioni plastiche dell'acciaio teso e da ampie fessurazioni nel conglomerato circostante. Le travi nelle quali la rottura avviene secondo queste modalità sono denominate "debolmente armate".

La maggior parte delle sezioni correttamente progettate collassano con un meccanismo che appartiene ad una fascia a cavallo tra i campi 2 e 3. Il diagramma di

separazione tra queste due regioni è detto di rottura bilanciata e corrisponde alla situazione in cui l'armatura tesa raggiunge lo snervamento simultaneamente alla crisi per compressione nel calcestruzzo. Questo tipo di rottura, definisce la condizione di passaggio fra le rotture di tipo duttile e quelle di tipo fragile e dipende dalla deformazione specifica ε_{yd} al limite elastico del tipo di acciaio utilizzato. Le sezioni che collassano in questo modo si dicono avere armatura bilanciata.

2.3 Condizioni critiche tensionali

Una volta definite le condizioni critiche deformative, la conoscenza delle leggi costitutive dei materiali consente di risalire alle corrispondenti condizioni critiche tensionali, le quali forniscono la distribuzione effettiva delle tensioni normali sulla generica fibra ortogonale all'asse neutro, cui applicare le condizioni di equilibrio alla traslazione e alla rotazione da estendere all'intera sezione. Ciò permette, infine, di valutare le sollecitazioni critiche, ossia le resistenze ultime associate ad ogni assegnata condizione critica deformativa.

Si prendano in considerazione i legami costitutivi dei materiali indicati in Fig. 2.7 e Fig. 2.8, ossia la legge parabola-rettangolo per il calcestruzzo e il caso generale di modello bilineare finito con incrudimento per l'acciaio.

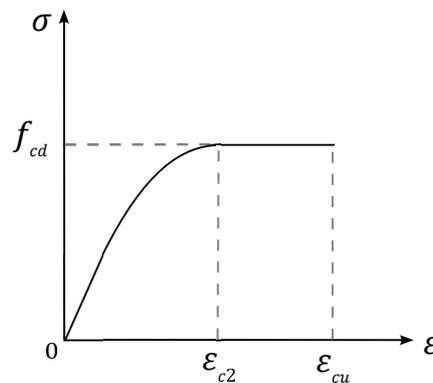


Figura 2.7 - Legame costitutivo del calcestruzzo, modello parabola-rettangolo

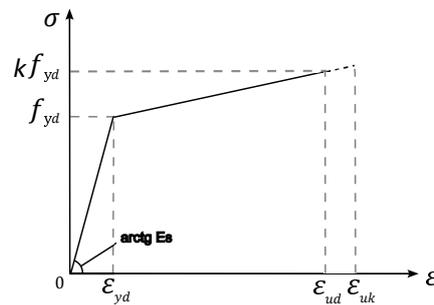


Figura 2.8 - Legame costitutivo dell'acciaio, modello bilineare finito con incrudimento

L'equazione di una generica parabola è del tipo $y = ax^2 + bx + c$, dove a, b, c sono costanti arbitrarie da determinare imponendo le condizioni a contorno. Considerando la legge costitutiva del calcestruzzo parabola-rettangolo di Fig. 2.7, e ponendo $y = \sigma(\varepsilon)$ e $x = \varepsilon$, l'equazione della parabola diventa

$$\sigma(\varepsilon) = a\varepsilon^2 + b\varepsilon + c \quad (2.1)$$

Essendo tre le incognite da determinare, sarà necessario individuare tre condizioni a contorno. Nel caso specifico, osservando la legge costitutiva si avrà:

1. In corrispondenza di una deformazione nulla anche la tensione è nulla:

$$\sigma(\varepsilon = 0) = 0; \quad (2.2)$$

2. In corrispondenza di una deformazione pari al 2‰ (ε_{c2}) la tensione è pari alla resistenza a compressione di progetto del calcestruzzo:

$$\sigma(\varepsilon = \varepsilon_{c2}) = f_{cd}; \quad (2.3)$$

3. In corrispondenza di una deformazione pari al 2‰ (ε_{c2}) la tangente è orizzontale, quindi la derivata prima della funzione (2.2) è uguale a zero:

$$\sigma'(\varepsilon = \varepsilon_{c2}) = 0; \quad (2.4)$$

Dalla (2.2) si ottiene

$$\sigma(\varepsilon = 0) = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = 0 \text{ da cui } c = 0;$$

Dalla (2.4) si ottiene

$$\sigma'(\varepsilon = \varepsilon_{c2}) = 2a \cdot \varepsilon_{c2} + b = 0 \text{ da cui } a = \frac{-b}{2\varepsilon_{c2}};$$

Dalla (2.3) si ottiene

$$\sigma(\varepsilon = \varepsilon_{c2}) = a \cdot \varepsilon_{c2}^2 + b \cdot \varepsilon_{c2} + c = f_{cd} \text{ da cui,}$$

sostituendo l'espressione di a precedentemente ottenuta, risulta $b = \frac{2f_{cd}}{\varepsilon_{c2}}$

$$\text{e, conseguentemente, } a = -\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c2}^2}.$$

Note le incognite a, b, c , la legge costitutiva parabola-rettangolo è completamente descritta dalle seguenti:

$$\begin{cases} \sigma(\varepsilon) = -f_{cd}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c2}}\right)^2 + 2f_{cd}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c2}} & \text{per } \varepsilon < \varepsilon_{c2} \\ \sigma(\varepsilon) = f_{cd} & \text{per } \varepsilon \geq \varepsilon_{c2} \end{cases}$$

Considerando la legge costitutiva dell'acciaio, bilineare finito con incrudimento, di Fig. 2.8, fissata la deformazione specifica, la tensione può essere ricavata come:

$$\begin{cases} \sigma_s(\varepsilon_s) = \beta f_{yd} \text{sign}(\varepsilon_s) & \text{per } |\varepsilon_s| \geq \varepsilon_{yd} \\ \sigma_s(\varepsilon_s) = E_s \varepsilon_s & \text{per } \varepsilon_s < \varepsilon_{yd} \end{cases}$$

In cui β è funzione del punto sul ramo di incrudimento a cui corrisponde la deformazione:

$$\beta = \left[(k-1) \frac{|\varepsilon_s| - \varepsilon_{yd}}{\varepsilon_{ud} - \varepsilon_{yd}} + 1 \right]$$

2.3.1 Coefficiente di riempimento e coefficiente di posizione della risultante di compressione

La conoscenza delle risultanti delle forze in gioco è indispensabile per impostare le condizioni di equilibrio e ricavare le corrispondenti resistenze di calcolo. Per questo scopo è utile definire grandezze adimensionali quali il coefficiente di riempimento e il coefficiente di posizione della risultante di compressione.

Il **coefficiente di riempimento** β_1 rappresenta il rapporto tra il volume di tensioni agenti sull'area compressa e il volume con tensione pari a f_{cd} sempre sull'area compressa. Per determinarne l'espressione, si considera una sezione rettangolare di base b e altezza d soggetta a flessione che, in corrispondenza di una configurazione deformata di collasso, è caratterizzata da asse neutro secante. L'ipotesi fondamentale del ragionamento è l'ipotesi di congruenza di conservazione delle sezioni piane: questo consente di assumere che le deformazioni abbiano una distribuzione lineare lungo la sezione e pertanto che la deformazione di una generica fibra sia proporzionale alla sua distanza y dall'asse neutro tramite un coefficiente di proporzionalità rappresentato dalla curvatura ultima della sezione, nonché il coefficiente angolare della retta della configurazione deformata.

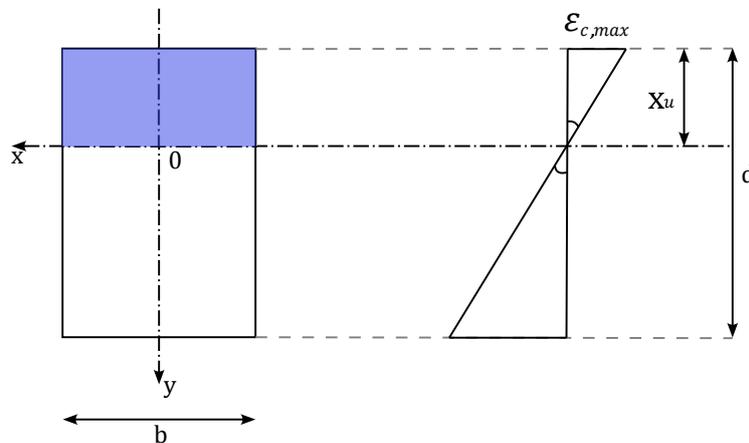


Figura 2.9 - Generica configurazione deformata di collasso

Per la congruenza:

$$\varepsilon_z = \mu \cdot y$$

Ponendo:

$$\mu = \frac{\varepsilon_{c,max}}{x_u}$$

Si ottiene:

$$\varepsilon_z = \frac{\varepsilon_{c,max}}{x_u} \cdot y$$

da cui:

$$y = \frac{x_u}{\varepsilon_{c,max}} \cdot \varepsilon_z$$

e derivando:

$$dy = \frac{x_u}{\varepsilon_{c,max}} \cdot d\varepsilon_z$$

L'andamento delle tensioni lungo la sezione non è noto a priori, ma è noto che la forza di compressione C agente sulla sezione è pari alla risultante delle tensioni di compressione agenti sulla porzione compressa di sezione, che ha estensione ben definita:

$$\begin{aligned} C &= \int_{A_c} \sigma_c dA_c = \\ &= \int_0^{x_u} \sigma_c \cdot b dy = \\ &= \int_0^{\varepsilon_{c,max}} \sigma_c \cdot b \cdot \frac{x_u}{\varepsilon_{c,max}} d\varepsilon_z \end{aligned} \quad (2.5)$$

I termini $b, x_u, \varepsilon_{c,max}$ sono quantità costanti, possono essere portati fuori dal simbolo di integrale. La forza di compressione C si può ottenere anche come prodotto tra la tensione media agente e l'area compressa. Se si assume che la tensione media sia proporzionale alla massima tensione nel calcestruzzo f_{cd} tramite il coefficiente di riempimento, è possibile scrivere:

$$\begin{aligned} C &= \bar{\sigma}_c \cdot A_c = \\ &= \beta_1 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot x_u \end{aligned} \quad (2.6)$$

Eguagliando la (2.5) e la (2.6) si ottiene:

$$\beta_1 = \frac{\int_0^{\varepsilon_{c,max}} \sigma_c d\varepsilon_z}{\varepsilon_{c,max} \cdot f_{cd}} \quad (2.7)$$

Come si osserva, il coefficiente di riempimento non dipende dalla geometria della sezione ma solo dalla configurazione deformata e, in particolare, dalla massima deformazione raggiunta.

Il coefficiente di posizione della risultante C rispetto al lembo più com-

presso β_2 si ottiene in conseguenza al ragionamento adottato per il coefficiente di riempimento, con considerazioni di equilibrio alla rotazione attorno all'asse neutro.

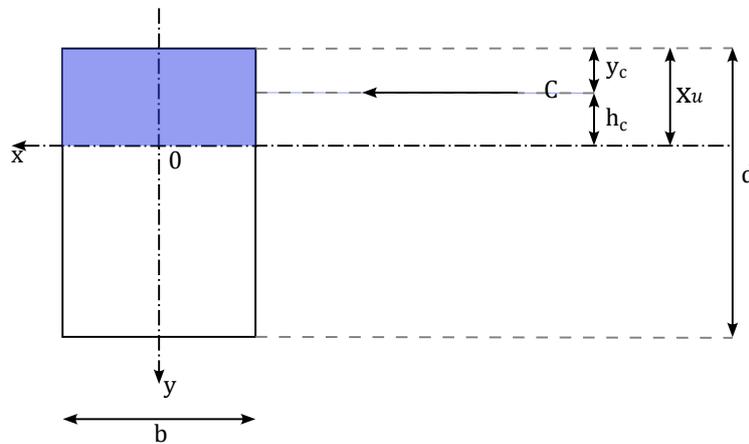


Figura 2.10 - Posizione della risultante di compressione

Definita y_c la distanza della forza di compressione dal lembo maggiormente compresso e h_c il suo braccio rispetto all'asse neutro, il momento generato dalla forza di compressione attorno all'asse neutro che caratterizza la generica configurazione deformata di collasso è ottenuto come risultante delle tensioni agenti nelle infinitesime fibre di sezione compressa moltiplicate per le rispettive distanze dall'asse neutro:

$$C \cdot h_c = \int_{A_c} \sigma_c \cdot y \, dA_c$$

Da cui deriva:

$$h_c = \frac{\int_{A_c} \sigma_c \cdot y \, dA_c}{C}$$

La posizione della risultante C è definita dal parametro y_c :

$$\begin{aligned} y_c &= x_u - h_c = \\ &= x_u - \frac{\int_{A_c} \sigma_c \cdot y \, dA_c}{C} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= x_u - \frac{\int_0^{\varepsilon_{c,max}} \sigma_c \cdot \frac{x_u}{\varepsilon_{c,max}} \cdot \varepsilon \cdot b \cdot \frac{x_u}{\varepsilon_{c,max}} d\varepsilon}{\int_0^{\varepsilon_{c,max}} \sigma_c \cdot b \cdot \frac{x_u}{\varepsilon_{c,max}} d\varepsilon} = \\
 &= x_u - \frac{x_u \cdot \int_0^{\varepsilon_{c,max}} \sigma_c \cdot \varepsilon d\varepsilon}{\varepsilon_{c,max} \cdot \int_0^{\varepsilon_{c,max}} \sigma_c d\varepsilon} \quad (2.8)
 \end{aligned}$$

Si assume che y_c sia una quantità proporzionale alla profondità dell'asse neutro tramite il coefficiente di posizione della risultante C :

$$y_c = \beta_2 \cdot x_u \quad (2.9)$$

Eguagliando la (2.8) e la (2.9) si ottiene:

$$\beta_2 = 1 - \frac{\int_0^{\varepsilon_{c,max}} \sigma_c \cdot \varepsilon d\varepsilon}{\varepsilon_{c,max} \cdot \int_0^{\varepsilon_{c,max}} \sigma_c d\varepsilon} \quad (2.10)$$

Come si osserva, anche il coefficiente di posizione della risultante C , così come il coefficiente di riempimento, non dipende dalla geometria della sezione ma solo dalla configurazione deformata e, in particolare, dalla massima deformazione raggiunta. Le espressioni dei coefficienti β_1 e β_2 possono essere particolarizzate per i diversi campi di rottura.

In campo 2, nella porzione dove si verifica che la deformazione massima raggiunta dal calcestruzzo compresso ε_{cm} è minore della deformazione ε_{c2} , la distribuzione delle tensioni è caratterizzata da un solo tratto parabolico, il tratto rettangolare non viene mai raggiunto per cui c'è una sola distribuzione.

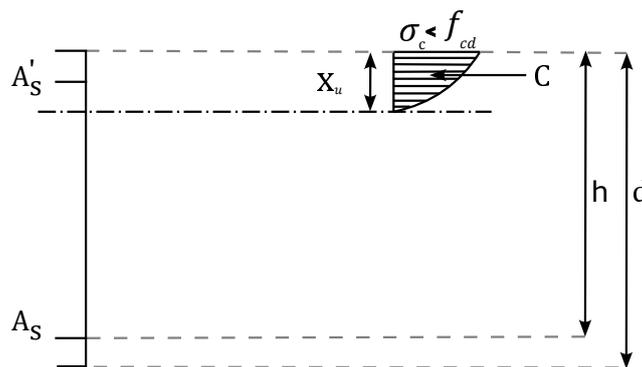


Figura 2.11 - Distribuzione tensionale nella prima parte di campo 2

Il coefficiente di riempimento risulta:

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \frac{\int_0^{\varepsilon_{cm}} \sigma_c d\varepsilon}{f_{cd} \cdot \varepsilon_{cm}} = \\
&= \frac{\int_0^{\varepsilon_{cm}} -f_{cd} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c2}}\right)^2 d\varepsilon}{f_{cd} \cdot \varepsilon_{cm}} + \frac{\int_0^{\varepsilon_{c2}} 2f_{cd} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c2}}\right) d\varepsilon}{f_{cd} \cdot \varepsilon_{cm}} = \\
&= \frac{-\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c2}^2} \int_0^{\varepsilon_{cm}} \varepsilon^2 d\varepsilon}{f_{cd} \cdot \varepsilon_{cm}} + \frac{\frac{2f_{cd}}{\varepsilon_{c2}} \int_0^{\varepsilon_{cm}} \varepsilon d\varepsilon}{f_{cd} \cdot \varepsilon_{cm}} = \\
&= \frac{-\frac{1}{7} \cdot \left[\frac{\varepsilon_{cm}^3}{3}\right]}{\varepsilon_{cm}} + \frac{\frac{2}{\varepsilon_{c2}} \cdot \left[\frac{\varepsilon_{cm}^2}{2}\right]}{\varepsilon_{cm}} = \\
&= -\frac{\varepsilon_{cm}^2}{3\varepsilon_{c2}^2} + \frac{\varepsilon_{cm}}{\varepsilon_{c2}} = \\
&= \frac{\varepsilon_{cm}}{\varepsilon_{c2}} \left(1 - \frac{\varepsilon_{cm}}{3\varepsilon_{c2}}\right) \tag{2.11}
\end{aligned}$$

Il coefficiente di posizione della risultante risulta:

$$\begin{aligned}
\beta_2 &= 1 - \frac{1}{\varepsilon_{cm}} \cdot \frac{\int_0^{\varepsilon_{cm}} -f_{cd} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c2}}\right)^2 \cdot \varepsilon d\varepsilon + \int_0^{\varepsilon_{c2}} 2f_{cd} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c2}}\right) \cdot \varepsilon d\varepsilon}{\int_0^{\varepsilon_{cm}} -f_{cd} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c2}}\right)^2 d\varepsilon + \int_0^{\varepsilon_{c2}} 2f_{cd} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c2}}\right) d\varepsilon} = \\
&= 1 - \frac{1}{\varepsilon_{cm}} \cdot \frac{-\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c2}^2} \int_0^{\varepsilon_{cm}} \varepsilon^3 d\varepsilon + \frac{2f_{cd}}{\varepsilon_{c2}} \int_0^{\varepsilon_{cm}} \varepsilon^2 d\varepsilon}{-\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c2}^2} \int_0^{\varepsilon_{cm}} \varepsilon^2 d\varepsilon + \frac{2f_{cd}}{\varepsilon_{c2}} \int_0^{\varepsilon_{cm}} \varepsilon d\varepsilon} = \\
&= 1 - \frac{1}{\varepsilon_{cm}} \cdot \frac{-\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c2}^2} \frac{\varepsilon_{cm}^4}{4} + \frac{2f_{cd}}{\varepsilon_{c2}} \frac{\varepsilon_{cm}^3}{3}}{-\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c2}^2} \frac{\varepsilon_{cm}^3}{3} + \frac{2f_{cd}}{\varepsilon_{c2}} \frac{\varepsilon_{cm}^2}{2}} = \\
&= 1 - \frac{-\frac{\varepsilon_{cm}^4}{4\varepsilon_{c2}^2} + \frac{2\varepsilon_{cm}^3}{3\varepsilon_{c2}}}{-\frac{\varepsilon_{cm}^3}{3\varepsilon_{c2}^2} + \frac{\varepsilon_{cm}^2}{\varepsilon_{c2}}} = \\
&= 1 - \frac{\frac{\varepsilon_{cm}^3}{\varepsilon_{c2}} \left(-\frac{\varepsilon_{cm}}{4\varepsilon_{c2}} + \frac{2}{3}\right)}{\frac{\varepsilon_{cm}^3}{\varepsilon_{c2}} \left(-\frac{\varepsilon_{cm}}{3\varepsilon_{c2}} + 1\right)} = \\
&= 1 - \frac{-\frac{3\varepsilon_{cm} + 8\varepsilon_{c2}}{12\varepsilon_{c2}}}{-\frac{\varepsilon_{cm} + 3\varepsilon_{c2}}{3\varepsilon_{c2}}} = \\
&= 1 - \left[\frac{-3\varepsilon_{cm} + 8\varepsilon_{c2}}{12\varepsilon_{c2}} \cdot \frac{3\varepsilon_{c2}}{-\varepsilon_{cm} + 3\varepsilon_{c2}} \right] =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \left[\frac{-3\varepsilon_{cm} + 8\varepsilon_{c2}}{-4\varepsilon_{cm} + 12\varepsilon_{c2}} \right] = \\
&= \frac{-4\varepsilon_{cm} + 12\varepsilon_{c2} + 3\varepsilon_{cm} - 8\varepsilon_{c2}}{-4\varepsilon_{cm} + 12\varepsilon_{c2}} = \\
&= \frac{-\varepsilon_{cm} + 4\varepsilon_{c2}}{-4\varepsilon_{cm} + 12\varepsilon_{c2}} = \\
&= \frac{-\frac{\varepsilon_{cm}}{4\varepsilon_{c2}} + \frac{4\varepsilon_{c2}}{4\varepsilon_{c2}}}{-\frac{4\varepsilon_{cm}}{4\varepsilon_{c2}} + \frac{12\varepsilon_{c2}}{4\varepsilon_{c2}}} = \\
&= \frac{1 - \frac{1}{4} \left(\frac{\varepsilon_{cm}}{\varepsilon_{c2}} \right)}{3 - \left(\frac{\varepsilon_{cm}}{\varepsilon_{c2}} \right)} \quad (2.12)
\end{aligned}$$

In campo 2, nella porzione dove si verifica che la deformazione massima raggiunta dal calcestruzzo compresso ε_{cm} è maggiore della deformazione ε_{c2} , la distribuzione delle tensioni è caratterizzata da un tratto rettangolare, che non culmina in ε_{cu} , e da una semiparabola completa, per cui si avranno due leggi diverse.

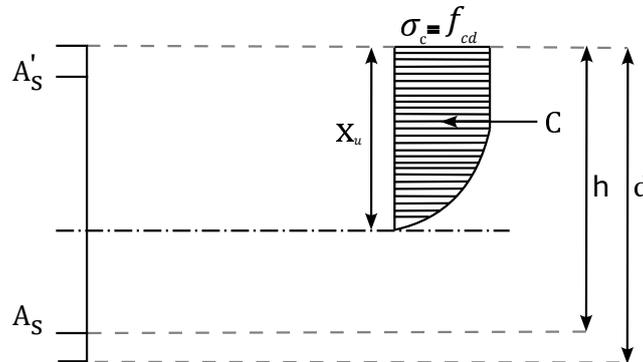


Figura 2.12 - Distribuzione tensionale nella seconda parte di campo 2

Il coefficiente di riempimento risulta:

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \frac{\int_0^{\varepsilon_{c2}} \sigma_c d\varepsilon + \int_{\varepsilon_{c2}}^{\varepsilon_{cm}} \sigma_c d\varepsilon}{f_{cd} \cdot \varepsilon_{cm}} = \\
&= \frac{\int_0^{\varepsilon_{c2}} -f_{cd} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c2}} \right)^2 d\varepsilon}{f_{cd} \cdot \varepsilon_{cm}} + \frac{\int_0^{\varepsilon_{c2}} 2f_{cd} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c2}} \right) d\varepsilon}{f_{cd} \cdot \varepsilon_{cm}} + \frac{\int_{\varepsilon_{c2}}^{\varepsilon_{cm}} f_{cd} d\varepsilon}{f_{cd} \cdot \varepsilon_{cm}} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c2}} \int_0^{\varepsilon_{c2}} \varepsilon_{c2}^2 d\varepsilon}{f_{cd} \cdot \varepsilon_{cm}} + \frac{\frac{2f_{cd}}{\varepsilon_{c2}} \int_0^{\varepsilon_{c2}} \varepsilon d\varepsilon}{f_{cd} \cdot \varepsilon_{cm}} + \frac{f_{cd} \int_{\varepsilon_{c2}}^{\varepsilon_{cm}} d\varepsilon}{f_{cd} \cdot \varepsilon_{cm}} = \\
&= \frac{-\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\varepsilon_{c2}^3}{3} \right]}{\varepsilon_{cm}} + \frac{\frac{2}{\varepsilon_{c2}} \cdot \left[\frac{\varepsilon_{c2}^2}{2} \right]}{\varepsilon_{cm}} + \frac{\varepsilon_{cm} - \varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{cm}} = \\
&= -\frac{\varepsilon_{c2}}{3\varepsilon_{cm}} + \frac{\varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{cm}} + \frac{\varepsilon_{cm}}{\varepsilon_{cm}} - \frac{\varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{cm}} = \\
&= 1 - \frac{\varepsilon_{c2}}{3\varepsilon_{cm}} \tag{2.13}
\end{aligned}$$

Il coefficiente di posizione della risultante risulta:

$$\begin{aligned}
\beta_2 &= 1 - \frac{1}{\varepsilon_{cm}} \cdot \frac{\int_0^{\varepsilon_{c2}} -f_{cd} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c2}} \right)^2 \cdot \varepsilon d\varepsilon + \int_0^{\varepsilon_{c2}} 2f_{cd} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c2}} \right) \cdot \varepsilon d\varepsilon + \int_{\varepsilon_{c2}}^{\varepsilon_{cm}} f_{cd} \cdot \varepsilon d\varepsilon}{\int_0^{\varepsilon_{c2}} -f_{cd} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c2}} \right)^2 d\varepsilon + \int_0^{\varepsilon_{c2}} 2f_{cd} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c2}} \right) d\varepsilon + \int_{\varepsilon_{c2}}^{\varepsilon_{cm}} f_{cd} d\varepsilon} = \\
&= 1 - \frac{1}{\varepsilon_{cm}} \cdot \frac{-\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c2}^2} \int_0^{\varepsilon_{c2}} \varepsilon^3 d\varepsilon + \frac{2f_{cd}}{\varepsilon_{c2}} \int_0^{\varepsilon_{c2}} \varepsilon^2 d\varepsilon + f_{cd} \int_{\varepsilon_{c2}}^{\varepsilon_{cm}} \varepsilon d\varepsilon}{-\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c2}^2} \int_0^{\varepsilon_{c2}} \varepsilon^2 d\varepsilon + \frac{2f_{cd}}{\varepsilon_{c2}} \int_0^{\varepsilon_{c2}} \varepsilon d\varepsilon + f_{cd} \int_{\varepsilon_{c2}}^{\varepsilon_{cm}} d\varepsilon} = \\
&= 1 - \frac{1}{\varepsilon_{cm}} \cdot \frac{-\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c2}^2} \left[\frac{\varepsilon_{c2}^4}{4} \right] + \frac{2f_{cd}}{\varepsilon_{c2}} \left[\frac{\varepsilon_{c2}^3}{3} \right] + \frac{f_{cd}}{2} [\varepsilon_{cm}^2 - \varepsilon_{c2}^2]}{-\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c2}^2} \left[\frac{\varepsilon_{c2}^3}{3} \right] + \frac{2f_{cd}}{\varepsilon_{c2}} \left[\frac{\varepsilon_{c2}^2}{2} \right] + f_{cd} [\varepsilon_{cm} - \varepsilon_{c2}]} = \\
&= 1 - \frac{1}{\varepsilon_{cm}} \cdot \frac{-\frac{\varepsilon_{c2}^2}{4} + \frac{2}{3}\varepsilon_{c2}^2 + \frac{\varepsilon_{cm}^2}{2} - \frac{\varepsilon_{c2}^2}{2}}{-\frac{\varepsilon_{c2}^2}{3} + \varepsilon_{c2} + \varepsilon_{cm} - \varepsilon_{c2}} = \\
&= 1 - \frac{1}{\varepsilon_{cm}} \cdot \frac{-\frac{\varepsilon_{c2}^2}{12} + \frac{\varepsilon_{cm}^2}{2}}{-\frac{\varepsilon_{c2}^2}{3} + \varepsilon_{cm}} = \\
&= 1 - \frac{1}{\varepsilon_{cm}} \cdot \frac{\frac{1}{12}(-\varepsilon_{c2}^2 + 6\varepsilon_{cm}^2)}{\frac{1}{3}(-\varepsilon_{c2} + 3\varepsilon_{cm})} = \\
&= 1 + \frac{1}{4\varepsilon_{cm}} \cdot \frac{\varepsilon_{c2}^2 - 6\varepsilon_{cm}^2}{3\varepsilon_{cm} - \varepsilon_{c2}} = \\
&= 1 + \frac{\varepsilon_{c2}^2 - 6\varepsilon_{cm}^2}{4[3\varepsilon_{cm}^2 - \varepsilon_{c2}\varepsilon_{cm}]} = \\
&= 1 + \frac{\frac{\varepsilon_{c2}^2}{\varepsilon_{c2}^2} - \frac{6\varepsilon_{cm}^2}{\varepsilon_{c2}^2}}{4\left[3\frac{\varepsilon_{cm}^2}{\varepsilon_{c2}^2} - \frac{\varepsilon_{c2}\varepsilon_{cm}}{\varepsilon_{c2}^2}\right]} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{12\left(\frac{\varepsilon_{cm}}{\varepsilon_{c2}}\right)^2 - 4\frac{\varepsilon_{cm}}{\varepsilon_{c2}} + 1 - 6\left(\frac{\varepsilon_{cm}}{\varepsilon_{c2}}\right)}{4\left[3\frac{\varepsilon_{cm}^2}{\varepsilon_{c2}^2} - \frac{\varepsilon_{cm}}{\varepsilon_{c2}}\right]} = \\
&= \frac{6\left(\frac{\varepsilon_{cm}}{\varepsilon_{c2}}\right)^2 - 4\frac{\varepsilon_{cm}}{\varepsilon_{c2}} + 1}{4\left[3\left(\frac{\varepsilon_{cm}}{\varepsilon_{c2}}\right)^2 - \frac{\varepsilon_{cm}}{\varepsilon_{c2}}\right]} \quad (2.14)
\end{aligned}$$

In campo 3 e in campo 4, la deformazione massima $\varepsilon_{c,max}$ sul calcestruzzo eguaglia la deformazione ultima ε_{cu} e la distribuzione delle tensioni è caratterizzata da un tratto rettangolare, che culmina in corrispondenza di ε_{cu} e da una semiparabola completa, per cui si avranno due leggi diverse.

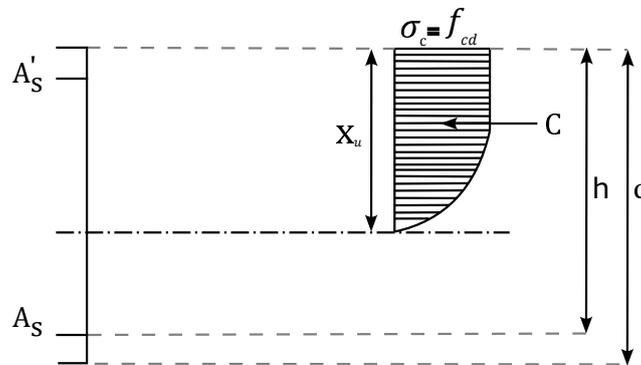


Figura 2.13 - Distribuzione tensionale in campo 3 e in campo 4

Il coefficiente di riempimento risulta:

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \frac{\int_0^{\varepsilon_{c2}} \sigma_c d\varepsilon + \int_{\varepsilon_{c2}}^{\varepsilon_{cu}} \sigma_c d\varepsilon}{f_{cd} \cdot \varepsilon_{cu}} = \\
&= \frac{\int_0^{\varepsilon_{c2}} -f_{cd} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c2}}\right)^2 d\varepsilon}{f_{cd} \cdot \varepsilon_{cu}} + \frac{\int_0^{\varepsilon_{c2}} 2f_{cd} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c2}}\right) d\varepsilon}{f_{cd} \cdot \varepsilon_{cu}} + \frac{\int_{\varepsilon_{c2}}^{\varepsilon_{cu}} f_{cd} d\varepsilon}{f_{cd} \cdot \varepsilon_{cu}} = \\
&= \frac{-\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c2}^2} \int_0^{\varepsilon_{c2}} \varepsilon^2 d\varepsilon}{f_{cd} \cdot \varepsilon_{cu}} + \frac{\frac{2f_{cd}}{\varepsilon_{c2}} \int_0^{\varepsilon_{c2}} \varepsilon d\varepsilon}{f_{cd} \cdot \varepsilon_{cu}} + \frac{f_{cd} \int_{\varepsilon_{c2}}^{\varepsilon_{cu}} d\varepsilon}{f_{cd} \cdot \varepsilon_{cu}} = \\
&= \frac{-\frac{1}{\varepsilon_{c2}^2} \cdot \left[\frac{\varepsilon^3}{3}\right]}{\varepsilon_{cu}} + \frac{\frac{2}{\varepsilon_{c2}} \cdot \left[\frac{\varepsilon^2}{2}\right]}{\varepsilon_{cu}} + \frac{\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{cu}} = \\
&= -\frac{\varepsilon_{c2}}{3\varepsilon_{cu}} + \frac{\varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{cu}} + \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu}} - \frac{\varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{cu}} =
\end{aligned}$$

$$= 1 - \frac{\varepsilon_{c2}}{3\varepsilon_{cu}} \quad (2.15)$$

Il coefficiente di posizione della risultante risulta:

$$\begin{aligned} \beta_2 &= 1 - \frac{1}{\varepsilon_{cu}} \cdot \frac{\int_0^{\varepsilon_{c2}} -f_{cd} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c2}}\right)^2 \cdot \varepsilon \, d\varepsilon + \int_0^{\varepsilon_{c2}} 2f_{cd} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c2}}\right) \cdot \varepsilon \, d\varepsilon + \int_{\varepsilon_{c2}}^{\varepsilon_{cu}} f_{cd} \cdot \varepsilon \, d\varepsilon}{\int_0^{\varepsilon_{c2}} -f_{cd} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c2}}\right)^2 \, d\varepsilon + \int_0^{\varepsilon_{c2}} 2f_{cd} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c2}}\right) \, d\varepsilon + \int_{\varepsilon_{c2}}^{\varepsilon_{cu}} f_{cd} \, d\varepsilon} = \\ &= 1 - \frac{1}{\varepsilon_{cu}} \cdot \frac{-\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c2}^2} \int_0^{\varepsilon_{c2}} \varepsilon^3 \, d\varepsilon + \frac{2f_{cd}}{\varepsilon_{c2}} \int_0^{\varepsilon_{c2}} \varepsilon^2 \, d\varepsilon + f_{cd} \int_{\varepsilon_{c2}}^{\varepsilon_{cu}} \varepsilon \, d\varepsilon}{-\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c2}^2} \int_0^{\varepsilon_{c2}} \varepsilon^2 \, d\varepsilon + \frac{2f_{cd}}{\varepsilon_{c2}} \int_0^{\varepsilon_{c2}} \varepsilon \, d\varepsilon + f_{cd} \int_{\varepsilon_{c2}}^{\varepsilon_{cu}} d\varepsilon} = \\ &= 1 - \frac{1}{\varepsilon_{cu}} \cdot \frac{-\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c2}^2} \left[\frac{\varepsilon^4}{4}\right] + \frac{2f_{cd}}{\varepsilon_{c2}} \left[\frac{\varepsilon^3}{3}\right] + \frac{f_{cd}}{2} [\varepsilon_{cu}^2 - \varepsilon_{c2}^2]}{-\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c2}^2} \left[\frac{\varepsilon^3}{3}\right] + \frac{2f_{cd}}{\varepsilon_{c2}} \left[\frac{\varepsilon^2}{2}\right] + f_{cd} [\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c2}]} = \\ &= 1 - \frac{1}{\varepsilon_{cu}} \cdot \frac{-\frac{\varepsilon_{c2}^2}{4} + \frac{2}{3}\varepsilon_{c2}^2 + \frac{\varepsilon_{cu}^2}{2} - \frac{\varepsilon_{c2}^2}{2}}{-\frac{\varepsilon_{c2}^2}{3} + \varepsilon_{c2} + \varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c2}} = \\ &= 1 - \frac{1}{\varepsilon_{cu}} \cdot \frac{-\frac{\varepsilon_{c2}^2}{12} + \frac{\varepsilon_{cu}^2}{2}}{-\frac{\varepsilon_{c2}^2}{3} + \varepsilon_{cu}} = \\ &= 1 - \frac{1}{\varepsilon_{cu}} \cdot \frac{\frac{1}{12}(-\varepsilon_{c2}^2 + 6\varepsilon_{cu}^2)}{\frac{1}{3}(-\varepsilon_{c2} + 3\varepsilon_{cu})} = \\ &= 1 + \frac{1}{4\varepsilon_{cu}} \cdot \frac{\varepsilon_{c2}^2 - 6\varepsilon_{cu}^2}{3\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c2}} = \\ &= 1 + \frac{\varepsilon_{c2}^2 - 6\varepsilon_{cu}^2}{12\varepsilon_{cu}^2 - 4\varepsilon_{c2}\varepsilon_{cu}} = \\ &= \frac{12\varepsilon_{cu}^2 - 4\varepsilon_{c2}\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{c2}^2 - 6\varepsilon_{cu}^2}{12\varepsilon_{cu}^2 - 4\varepsilon_{c2}\varepsilon_{cu}} = \\ &= \frac{6\varepsilon_{cu}^2 - 4\varepsilon_{c2}\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{c2}^2}{12\varepsilon_{cu}^2 - 4\varepsilon_{c2}\varepsilon_{cu}} \quad (2.16) \end{aligned}$$

2.4 Problema di verifica per flessione semplice

Nel caso di flessione semplice, l'asse neutro ha direzione ortogonale all'asse di sollecitazione e, nell'ipotesi di resistenza a trazione trascurabile per il calcestruzzo,

l'unica incognita è l'ampiezza della sezione parzializzata reagente, cioè della sezione costituita dal calcestruzzo compresso e dalle armature [5]. Nel caso di sezione semplicemente inflessa, la verifica di resistenza allo Stato Limite Ultimo si esegue controllando che il momento dovuto ai carichi di progetto M_{Ed} sia non maggiore del momento resistente offerto dalla sezione M_{Rd} e cioè:

$$M_{Ed} \leq M_{Rd} \quad (2.17)$$

Le resistenze di calcolo per sollecitazioni di flessione semplice ricadono nei campi di rottura 2, 3 e 4, escludendo il sottocampo $4a''$.

2.4.1 Rette di frontiera

Analizzando le rette che separano i campi di rottura, e particolarizzando queste rette di frontiera in termini di equazioni relative al coefficiente di riempimento, al coefficiente di posizione della risultante di compressione, al coefficiente di posizione dell'asse neutro, alla percentuale meccanica di armatura tesa e al momento resistente adimensionale, è possibile ricavare una tabella riassuntiva utile al progetto e alla verifica delle sezioni in c.a.

Retta "a"

La retta "a" rappresenta la frontiera tra campo 3 e campo 4.

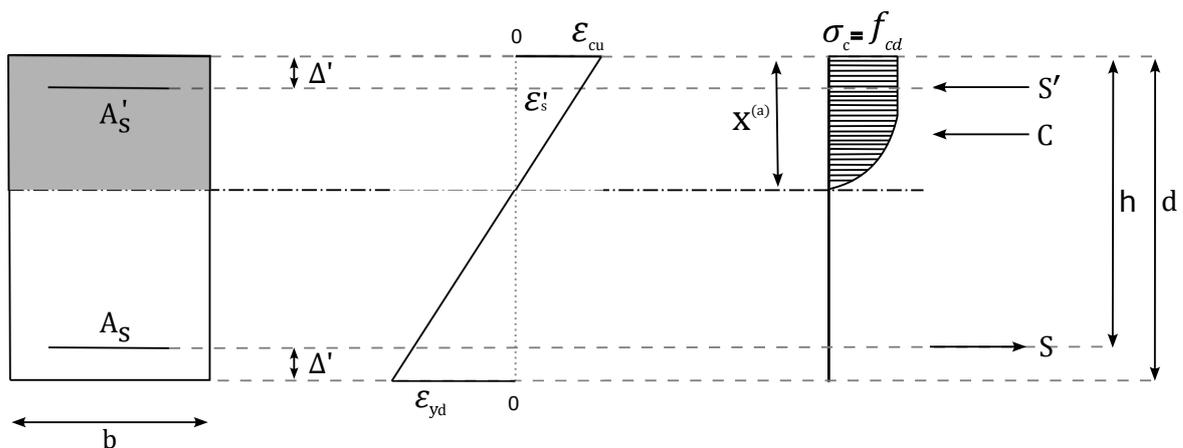


Figura 2.14 - Configurazione deformata e distribuzione tensionale corrispondente alla retta di frontiera tra campo 3 e campo 4

La configurazione deformata di collasso corrispondente alla retta di frontiera tra campo 3 e campo 4 vede il calcestruzzo in corrispondenza di una deformazione pari a $\varepsilon_{cu} = 3.5\%$ e l'armatura inferiore in corrispondenza di una deformazione pari a $\varepsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s}$. Osservando la configurazione deformata, è possibile ricavare la profondità dell'asse neutro che porta a collasso da considerazioni di proporzionalità tra triangoli simili:

$$\frac{x^{(a)}}{\varepsilon_{cu}} = \frac{h}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{yd}}$$

Dividendo entrambi i membri per l'altezza meccanica della sezione, h :

$$\frac{1}{h} \cdot \frac{x^{(a)}}{\varepsilon_{cu}} = \frac{h}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{yd}} \cdot \frac{1}{h}$$

Ponendo $\frac{x^{(a)}}{h} = \xi^{(a)}$, posizione adimensionalizzata dell'asse neutro, si ottiene:

$$\frac{\xi^{(a)}}{\varepsilon_{cu}} = \frac{1}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{yd}}$$

Da cui:

$$\xi^{(a)} = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{yd}} \quad (2.18)$$

Allo stesso modo si ricava la deformazione dell'armatura superiore, che risulta essere compressa, ε'_s :

$$\frac{x^{(a)}}{\varepsilon_{cu}} = \frac{(x^{(a)} - \Delta')}{\varepsilon'_s}$$

Da cui:

$$\varepsilon'_s = \varepsilon_{cu} \cdot \frac{(x^{(a)} - \Delta')}{x^{(a)}}$$

Seguendo il ragionamento applicato in precedenza:

$$\frac{\varepsilon'_s}{h} = \frac{\varepsilon_{cu} \cdot x^{(a)}}{h \cdot x^{(a)}} - \frac{\varepsilon_{cu} \cdot \Delta'}{x^{(a)} \cdot h}$$

Ponendo $\frac{\Delta'}{h} = \delta'$, coefficiente di posizione del baricentro dell'armatura, si ottiene:

$$\frac{\varepsilon'_s}{h} = \frac{\varepsilon_{cu} \cdot \xi^{(a)}}{x^{(a)}} - \frac{\varepsilon_{cu} \cdot \delta'}{x^{(a)}}$$

$$\varepsilon'_s = \left(\frac{\varepsilon_{cu} \cdot \xi^{(a)}}{x^{(a)}} - \frac{\varepsilon_{cu} \cdot \delta'}{x^{(a)}} \right) \cdot h$$

$$\varepsilon'_s = \frac{\varepsilon_{cu} \cdot \xi^{(a)}}{\xi^{(a)}} - \frac{\varepsilon_{cu} \cdot \delta'}{\xi^{(a)}}$$

$$\varepsilon'_s = \varepsilon_{cu} \cdot \frac{\xi^{(a)} - \delta'}{\xi^{(a)}} \quad (2.19)$$

Per ottenere la percentuale meccanica di armatura corrispondente alla retta di frontiera "a" si parte dall'equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale espressa in forma adimensionalizzata. Le forze in gioco sono:

- C , risultante della distribuzione delle tensioni di compressione agenti sulla porzione compressa di calcestruzzo;
- S' , risultante delle tensioni di compressione agenti sull'armatura superiore;
- S , risultante delle tensioni di trazione agenti sull'armatura inferiore;

Tenendo conto delle considerazioni fatte in precedenza riguardanti i livelli di deformazione raggiunti da calcestruzzo, armatura superiore e armatura inferiore, l'espressione della forza C risulta essere:

$$\begin{aligned} C &= \beta_1 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot x^{(a)} = \\ &= \left(1 - \frac{\varepsilon_{c2}}{3\varepsilon_{cu}}\right) \cdot f_{cd} \cdot b \cdot \xi^{(a)} \cdot h \end{aligned}$$

Dato che $\varepsilon_{cu} = 3.5\%$ e che $\varepsilon_{c2} = 2.0\%$, risulta $\beta_1 = 0.81$, perciò:

$$C = 0.81 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot \xi^{(a)} \cdot h \quad (2.20)$$

L'espressione della forza S' risulta essere:

$$S' = A'_s \cdot \sigma'_s(\varepsilon'_s)$$

Introducendo la percentuale meccanica di armatura compressa $\omega' = \frac{A'_s f_{yd}}{bh f_{cd}}$:

$$S' = \omega' \cdot \sigma'_s(\varepsilon'_s) \cdot \frac{bh f_{cd}}{f_{yd}} \quad (2.21)$$

L'espressione della forza S risulta essere:

$$S = A_s^{(a)} \cdot f_{yd}$$

Introducendo la percentuale meccanica di armatura tesa $\omega^{(a)} = \frac{A_s^{(a)} f_{yd}}{bh f_{cd}}$:

$$S = \omega^{(a)} \cdot bh f_{cd} \quad (2.22)$$

Per l'equilibrio:

$$C + S' - S = 0$$

$$0.81 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot \xi^{(a)} \cdot h + \omega' \cdot \sigma_s'(\epsilon_s') \cdot \frac{bh f_{cd}}{f_{yd}} - \omega^{(a)} \cdot bh f_{cd} = 0$$

$$0.81 \cdot \xi^{(a)} + \omega' \cdot \frac{\sigma_s'(\epsilon_s')}{f_{yd}} - \omega^{(a)} = 0$$

Ponendo $\psi_A = \frac{A_s'}{A_s^{(a)}}$, rapporto di armatura, è possibile scrivere:

$$\omega' = \psi_A \cdot \omega^{(a)}$$

L'equilibrio diventa quindi:

$$0.81 \cdot \xi^{(a)} + \psi_A \cdot \omega^{(a)} \cdot \frac{\sigma_s'(\epsilon_s')}{f_{yd}} - \omega^{(a)} = 0$$

Da cui:

$$\omega^{(a)} \left(1 - \psi_A \cdot \frac{\sigma_s'(\epsilon_s')}{f_{yd}} \right) = 0.81 \cdot \xi^{(a)}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \omega^{(a)} &= \frac{0.81 \cdot \xi^{(a)}}{\left(1 - \psi_A \cdot \frac{\sigma_s'(\epsilon_s')}{f_{yd}} \right)} = \\ &= \frac{0.81 \cdot \xi^{(a)}}{\frac{f_{yd} - \psi_A \sigma_s'(\epsilon_s')}{f_{yd}}} \end{aligned}$$

Sostituendo la (2.18) si ottiene:

$$\omega^{(a)} = 0.81 \cdot \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{yd}} \cdot \frac{f_{yd}}{f_{yd} - \psi_A \sigma'_s(\varepsilon'_s)} \quad (2.23)$$

Se la deformazione dell'armatura compressa è pari a ε_{yd} vuol dire che l'armatura compressa è snervata e lavora ad una tensione pari a f_{yd} , quindi la forza risultante S' risulta:

$$S' = A'_s \cdot f_{yd} = \psi_A \cdot A_s \cdot f_{yd}$$

L'equilibrio diventa perciò:

$$0.81 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot \xi^{(a)} \cdot h + \psi_A \cdot A_s \cdot f_{yd} - \omega^{(a)} \cdot bhf_{cd} = 0$$

Per introdurre la percentuale meccanica di armatura tesa $\omega^{(a)}$ è necessario dividere tutti i termini dell'equazione per il gruppo bhf_{cd} :

$$\frac{0.81 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot \xi^{(a)} \cdot h}{bhf_{cd}} + \frac{\psi_A \cdot A_s \cdot f_{yd}}{bhf_{cd}} - \frac{\omega^{(a)} \cdot bhf_{cd}}{bhf_{cd}} = 0$$

$$0.81 \cdot \xi^{(a)} + \psi_A \cdot \omega^{(a)} - \omega^{(a)} = 0$$

Da cui:

$$\omega^{(a)}(1 - \psi_A) = 0.81 \cdot \xi^{(a)}$$

Sostituendo ancora una volta la (2.18) si ottiene:

$$\omega^{(a)} = 0.81 \cdot \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{yd}} \cdot \frac{1}{1 - \psi_A} \quad (2.24)$$

Applicando l'equilibrio alla rotazione attorno all'armatura inferiore è possibile determinare il momento resistente, in forma adimensionale, corrispondente alla retta di frontiera "a" tra i campi di rottura 3 e 4.

$$M_{Rd} = C(h - \beta_2 \cdot x^{(a)}) + S'(h - \Delta')$$

Tenendo conto della (2.16) e che $\varepsilon_{cu} = 3.5\%$ e che $\varepsilon_{c2} = 2.0\%$, risulta $\beta_2 = 0.416$ e si ha:

$$M_{Rd} = 0.81 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot x^{(a)} (h - 0.416 \cdot x^{(a)}) + \psi_A \cdot A_s \cdot f_{yd} (h - \Delta')$$

Per adimensionalizzare l'espressione è necessario dividere tutti i termini per un gruppo tale che abbia dimensioni fisiche uguali a quelle di un momento, [F][L]. Convenientemente con il ragionamento adottato fino a questo momento, si adotta il gruppo $bh^2 f_{cd}$. Perciò:

$$\frac{M_{Rd}}{bh^2 f_{cd}} = \frac{0.81 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot x^{(a)}}{bh^2 f_{cd}} (h - 0.416 \cdot x^{(a)}) + \frac{\psi_A \cdot A_s \cdot f_{yd}}{bh^2 f_{cd}} (h - \Delta')$$

$$m_{rd} = 0.81 \cdot \xi^{(a)} (1 - 0.416 \cdot \xi^{(a)}) + \psi_A \cdot \omega^{(a)} (1 - \delta')$$

Sostituendo la (2.18) e la (2.24):

$$\begin{aligned} m_{rd} &= 0.81 \cdot \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{yd}} \left(1 - 0.416 \cdot \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{yd}} \right) + \psi_A \cdot 0.81 \cdot \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{yd}} \cdot \frac{1}{1 - \psi_A} (1 - \delta') = \\ &= 0.81 \cdot \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{yd}} \left(\frac{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{yd} - 0.416 \cdot \varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{yd}} \right) + \psi_A \cdot 0.81 \cdot \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{yd}} \cdot \frac{1}{1 - \psi_A} (1 - \delta') = \\ &= 0.81 \cdot \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{yd}} \left(\frac{0.584 \cdot \varepsilon_{cu} + \varepsilon_{yd}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{yd}} \right) + \psi_A \cdot 0.81 \cdot \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{yd}} \cdot \frac{1}{1 - \psi_A} (1 - \delta') \end{aligned}$$

In conclusione:

$$m_{rd}^{(a)} = 0.81 \cdot \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{yd}} \left[\frac{0.584 \cdot \varepsilon_{cu} + \varepsilon_{yd}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{yd}} + \psi_A \frac{(1 - \delta')}{(1 - \psi_A)} \right] \quad (2.25)$$

Retta "b"

La retta "b" rappresenta la frontiera tra campo 2 e campo 3.

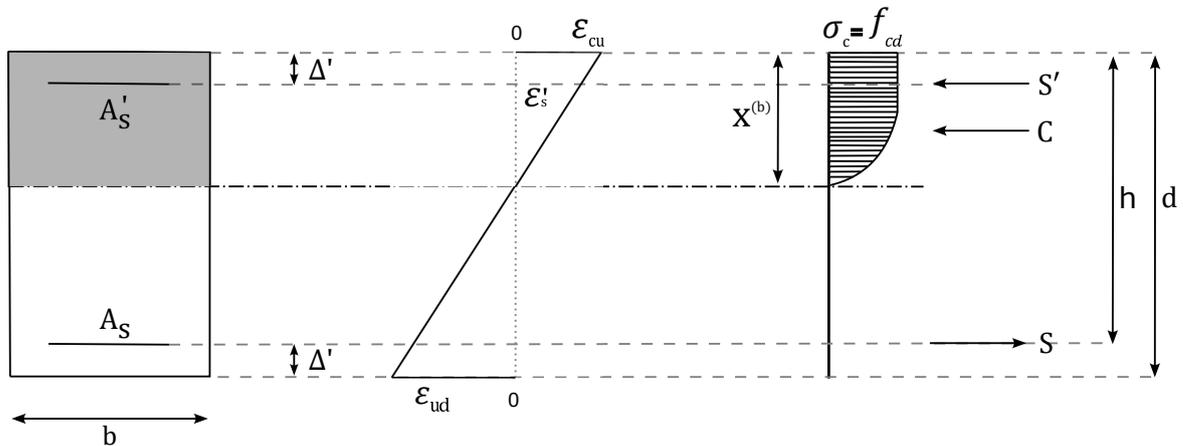


Figura 2.15 - Configurazione deformata e distribuzione tensionale corrispondente alla retta di frontiera tra campo 2 e campo 3

La configurazione deformata di collasso corrispondente alla retta di frontiera tra campo 2 e campo 3 vede il calcestruzzo in corrispondenza di una deformazione pari a $\epsilon_{cu} = 3.5\%$ e l'armatura inferiore in corrispondenza di una deformazione pari a $\epsilon_{ud} = k \cdot \frac{f_{yd}}{E_s}$, essendo $k = \frac{f_t}{f_{yd}}$ il rapporto di incrudimento. Osservando la configurazione deformata, è possibile ricavare la profondità dell'asse neutro che porta a collasso da considerazioni di proporzionalità tra triangoli simili:

$$\frac{x^{(b)}}{\epsilon_{cu}} = \frac{h}{\epsilon_{cu} + \epsilon_{ud}}$$

Dividendo entrambi i membri per l'altezza meccanica della sezione, h :

$$\frac{1}{h} \cdot \frac{x^{(b)}}{\epsilon_{cu}} = \frac{h}{\epsilon_{cu} + \epsilon_{ud}} \cdot \frac{1}{h}$$

Ponendo $\frac{x^{(b)}}{h} = \xi^{(b)}$, posizione adimensionalizzata dell'asse neutro, si ottiene:

$$\frac{\xi^{(b)}}{\epsilon_{cu}} = \frac{1}{\epsilon_{cu} + \epsilon_{ud}}$$

Da cui:

$$\xi^{(b)} = \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + \epsilon_{ud}} \quad (2.26)$$

Allo stesso modo si ricava la deformazione dell'armatura superiore, che risulta essere

compressa, ε'_s :

$$\frac{x^{(b)}}{\varepsilon_{cu}} = \frac{(x^{(b)} - \Delta')}{\varepsilon'_s}$$

Da cui:

$$\varepsilon'_s = \varepsilon_{cu} \cdot \frac{(x^{(b)} - \Delta')}{x^{(b)}}$$

Seguendo il ragionamento applicato in precedenza:

$$\frac{\varepsilon'_s}{h} = \frac{\varepsilon_{cu} \cdot x^{(b)}}{h \cdot x^{(b)}} - \frac{\varepsilon_{cu} \cdot \Delta'}{x^{(b)} \cdot h}$$

Ponendo $\frac{\Delta'}{h} = \delta'$, coefficiente di posizione del baricentro dell'armatura, si ottiene:

$$\frac{\varepsilon'_s}{h} = \frac{\varepsilon_{cu} \cdot \xi^{(b)}}{x^{(b)}} - \frac{\varepsilon_{cu} \cdot \delta'}{x^{(b)}}$$

$$\varepsilon'_s = \left(\frac{\varepsilon_{cu} \cdot \xi^{(b)}}{x^{(b)}} - \frac{\varepsilon_{cu} \cdot \delta'}{x^{(b)}} \right) \cdot h$$

$$\varepsilon'_s = \frac{\varepsilon_{cu} \cdot \xi^{(b)}}{\xi^{(b)}} - \frac{\varepsilon_{cu} \cdot \delta'}{\xi^{(b)}}$$

$$\varepsilon'_s = \varepsilon_{cu} \cdot \frac{\xi^{(b)} - \delta'}{\xi^{(b)}} \quad (2.27)$$

Per ottenere la percentuale meccanica di armatura corrispondente alla retta di frontiera "b" si parte dall'equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale espressa in forma adimensionalizzata. Le forze in gioco sono:

- C , risultante della distribuzione delle tensioni di compressione agenti sulla porzione compressa di calcestruzzo;
- S' , risultante delle tensioni di compressione agenti sull'armatura superiore;
- S , risultante delle tensioni di trazione agenti sull'armatura inferiore;

Tenendo conto delle considerazioni fatte in precedenza riguardanti i livelli di deformazione raggiunti da calcestruzzo, armatura superiore e armatura inferiore, l'espressione della forza C risulta essere:

$$C = \beta_1 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot x^{(b)} =$$

$$= \left(1 - \frac{\varepsilon_{c2}}{3\varepsilon_{cu}}\right) \cdot f_{cd} \cdot b \cdot \xi^{(b)} \cdot h$$

Dato che $\varepsilon_{cu} = 3.5\%$ e che $\varepsilon_{c2} = 2.0\%$, risulta $\beta_1 = 0.81$, perciò:

$$C = 0.81 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot \xi^{(b)} \cdot h \quad (2.28)$$

L'espressione della forza S' risulta essere:

$$S' = A'_s \cdot \sigma'_s(\varepsilon'_s)$$

Introducendo la percentuale meccanica di armatura compressa $\omega' = \frac{A'_s f_{yd}}{bh f_{cd}}$:

$$S' = \omega' \cdot \sigma'_s(\varepsilon'_s) \cdot \frac{bh f_{cd}}{f_{yd}} \quad (2.29)$$

L'espressione della forza S risulta essere:

$$S = A_s^{(b)} \cdot k \cdot f_{yd}$$

Introducendo la percentuale meccanica di armatura tesa $\omega^{(b)} = \frac{A_s^{(b)} f_{yd}}{bh f_{cd}}$:

$$S = \omega^{(b)} \cdot k \cdot bh f_{cd} \quad (2.30)$$

Per l'equilibrio:

$$C + S' - S = 0$$

$$0.81 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot \xi^{(b)} \cdot h + \omega' \cdot \sigma'_s(\varepsilon'_s) \cdot \frac{bh f_{cd}}{f_{yd}} - \omega^{(b)} \cdot k \cdot bh f_{cd} = 0$$

$$0.81 \cdot \xi^{(b)} + \omega' \cdot \frac{\sigma'_s(\varepsilon'_s)}{f_{yd}} - \omega^{(b)} \cdot k = 0$$

Ponendo $\psi_A = \frac{A'_s}{A_s^{(b)}}$, rapporto di armatura, è possibile scrivere:

$$\omega' = \psi_A \cdot \omega^{(b)}$$

L'equilibrio diventa quindi:

$$0.81 \cdot \xi^{(b)} + \psi_A \cdot \omega^{(b)} \cdot \frac{\sigma'_s(\epsilon'_s)}{f_{yd}} - \omega^{(b)} \cdot k = 0$$

Da cui:

$$\omega^{(b)} \left(k - \psi_A \cdot \frac{\sigma'_s(\epsilon'_s)}{f_{yd}} \right) = 0.81 \cdot \xi^{(b)}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \omega^{(b)} &= \frac{0.81 \cdot \xi^{(b)}}{\left(k - \psi_A \cdot \frac{\sigma'_s(\epsilon'_s)}{f_{yd}} \right)} = \\ &= \frac{0.81 \cdot \xi^{(b)}}{\frac{k f_{yd} - \psi_A \sigma'_s(\epsilon'_s)}{f_{yd}}} = \end{aligned}$$

Sostituendo la (2.26) si ottiene:

$$\omega^{(b)} = 0.81 \cdot \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + \epsilon_{ud}} \cdot \frac{f_{yd}}{k f_{yd} - \psi_A \sigma'_s(\epsilon'_s)} \quad (2.31)$$

Se la deformazione dell'armatura compressa è pari a ϵ_{yd} vuol dire che l'armatura compressa è snervata e lavora ad una tensione pari a f_{yd} , quindi la forza risultante S' risulta:

$$S' = A'_s \cdot f_{yd} = \psi_A \cdot A_s^{(b)} \cdot f_{yd}$$

L'equilibrio diventa perciò:

$$0.81 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot \xi^{(b)} \cdot h + \psi_A \cdot A_s^{(b)} \cdot f_{yd} - \omega^{(b)} \cdot k \cdot b h f_{cd} = 0$$

Per introdurre la percentuale meccanica di armatura tesa $\omega^{(b)}$ è necessario dividere tutti i termini dell'equazione per il gruppo $b h f_{cd}$:

$$\frac{0.81 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot \xi^{(b)} \cdot h}{bh f_{cd}} + \frac{\psi_A \cdot A_s^{(b)} \cdot f_{yd}}{bh f_{cd}} - \frac{\omega^{(b)} \cdot k \cdot bh f_{cd}}{bh f_{cd}} = 0$$

$$0.81 \cdot \xi^{(b)} + \psi_A \cdot \omega^{(b)} - \omega^{(b)} \cdot k = 0$$

Da cui:

$$\omega^{(b)}(k - \psi_A) = 0.81 \cdot \xi^{(b)}$$

Sostituendo ancora una volta la (2.26) si ottiene:

$$\omega^{(b)} = 0.81 \cdot \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{ud}} \cdot \frac{1}{k - \psi_A} \quad (2.32)$$

Applicando l'equilibrio alla rotazione attorno all'armatura inferiore è possibile determinare il momento resistente, in forma adimensionale, corrispondente alla retta di frontiera "b" tra i campi di rottura 2 e 3.

$$M_{Rd} = C(h - \beta_2 \cdot x^{(b)}) + S'(h - \Delta')$$

Tenendo conto della (2.14) e che $\varepsilon_{cu} = 3.5\%$ e che $\varepsilon_{c2} = 2.0\%$, risulta $\beta_2 = 0.416$ e si ha:

$$M_{Rd} = 0.81 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot x^{(b)}(h - 0.416 \cdot x^{(b)}) + \psi_A \cdot A_s^{(b)} \cdot f_{yd}(h - \Delta')$$

Per adimensionalizzare l'espressione è necessario dividere tutti i termini per un gruppo tale che abbia dimensioni fisiche uguali a quelle di un momento, [F][L]. Convenientemente con il ragionamento adottato fino a questo momento, si adotta il gruppo $bh^2 f_{cd}$. Perciò:

$$\frac{M_{Rd}}{bh^2 f_{cd}} = \frac{0.81 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot x^{(b)}}{bh^2 f_{cd}}(h - 0.416 \cdot x^{(b)}) + \frac{\psi_A \cdot A_s^{(b)} \cdot f_{yd}}{bh^2 f_{cd}}(h - \Delta')$$

$$m_{rd} = 0.81 \cdot \xi^{(b)}(1 - 0.416 \cdot \xi^{(b)}) + \psi_A \cdot \omega^{(b)}(1 - \delta')$$

Sostituendo la (2.26) e la (2.32):

$$\begin{aligned}
 m_{rd} &= 0.81 \cdot \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{ud}} \left(1 - 0.416 \cdot \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{ud}} \right) + \psi_A \cdot 0.81 \cdot \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{ud}} \cdot \frac{1}{k - \psi_A} (1 - \delta') = \\
 &= 0.81 \cdot \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{ud}} \left(\frac{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{ud} - 0.416 \cdot \varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{ud}} \right) + \psi_A \cdot 0.81 \cdot \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{ud}} \cdot \frac{1}{k - \psi_A} (1 - \delta') = \\
 &= 0.81 \cdot \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{ud}} \left(\frac{0.584 \cdot \varepsilon_{cu} + \varepsilon_{ud}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{ud}} \right) + \psi_A \cdot 0.81 \cdot \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{ud}} \cdot \frac{1}{k - \psi_A} (1 - \delta') =
 \end{aligned}$$

In conclusione:

$$m_{rd}^{(b)} = 0.81 \cdot \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{ud}} \left[\frac{0.584 \cdot \varepsilon_{cu} + \varepsilon_{ud}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{ud}} + \psi_A \frac{(1 - \delta')}{(k - \psi_A)} \right] \quad (2.33)$$

Retta "c"

La retta "c" rappresenta la frontiera tra campo 4a e campo 4b.

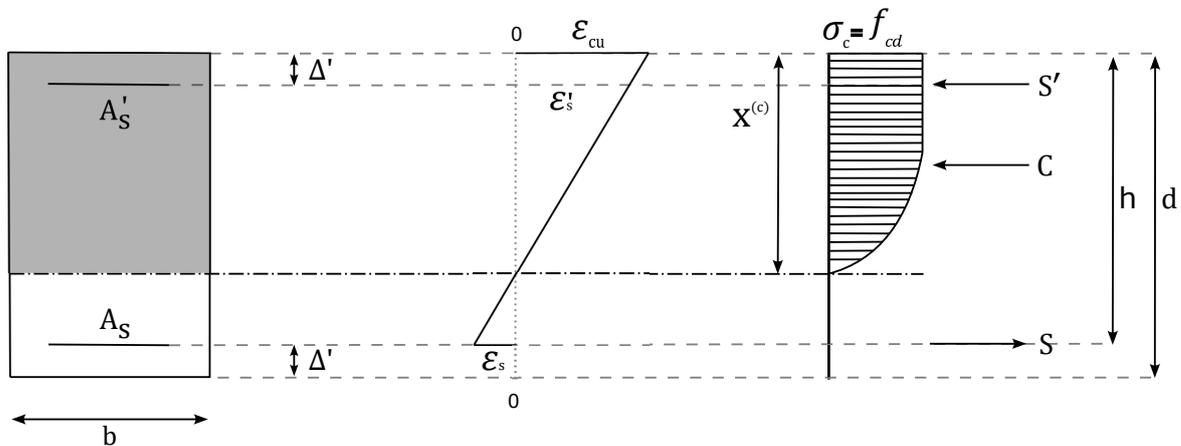


Figura 2.16 - Configurazione deformata e distribuzione tensionale corrispondente alla retta di frontiera tra campo 4a e campo 4b

La configurazione deformata di collasso corrispondente alla retta di frontiera tra campo 4a e campo 4b vede il calcestruzzo in corrispondenza di una deformazione pari a $\varepsilon_{cu} = 3.5\%$ e l'armatura superiore in corrispondenza di una deformazione pari a ε_{yd} , mentre l'armatura inferiore in corrispondenza di una deformazione $\varepsilon_s < \varepsilon_{yd}$.

Osservando la configurazione deformata, è possibile ricavare la profondità dell'asse neutro che porta a collasso da considerazioni di proporzionalità tra triangoli simili:

$$\frac{x^{(c)}}{\varepsilon_{cu}} = \frac{h}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_s}$$

Dividendo entrambi i membri per l'altezza meccanica della sezione, h :

$$\frac{1}{h} \cdot \frac{x^{(c)}}{\varepsilon_{cu}} = \frac{h}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_s} \cdot \frac{1}{h}$$

Ponendo $\frac{x^{(c)}}{h} = \xi^{(c)}$, posizione adimensionalizzata dell'asse neutro, si ottiene:

$$\frac{\xi^{(c)}}{\varepsilon_{cu}} = \frac{1}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_s}$$

Da cui:

$$\xi^{(c)} = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_s} \quad (2.34)$$

Allo stesso modo si ricava la deformazione dell'armatura superiore, che risulta essere compressa, ε'_s :

$$\frac{x^{(c)}}{\varepsilon_{cu}} = \frac{(x^{(c)} - \Delta')}{\varepsilon'_s}$$

Da cui:

$$\varepsilon'_s = \varepsilon_{cu} \cdot \frac{(x^{(c)} - \Delta')}{x^{(c)}}$$

Seguendo il ragionamento applicato in precedenza:

$$\frac{\varepsilon'_s}{h} = \frac{\varepsilon_{cu} \cdot x^{(c)}}{h \cdot x^{(c)}} - \frac{\varepsilon_{cu} \cdot \Delta'}{x^{(c)} \cdot h}$$

Ponendo $\frac{\Delta'}{h} = \delta'$, coefficiente di posizione del baricentro dell'armatura, si ottiene:

$$\frac{\varepsilon'_s}{h} = \frac{\varepsilon_{cu} \cdot \xi^{(c)}}{x^{(c)}} - \frac{\varepsilon_{cu} \cdot \delta'}{x^{(c)}}$$

$$\varepsilon'_s = \left(\frac{\varepsilon_{cu} \cdot \xi^{(c)}}{x^{(c)}} - \frac{\varepsilon_{cu} \cdot \delta'}{x^{(c)}} \right) \cdot h$$

$$\varepsilon'_s = \frac{\varepsilon_{cu} \cdot \xi^{(c)}}{\xi^{(c)}} - \frac{\varepsilon_{cu} \cdot \delta'}{\xi^{(c)}}$$

$$\varepsilon'_s = \varepsilon_{cu} \cdot \frac{\xi^{(c)} - \delta'}{\xi^{(c)}} \quad (2.35)$$

Per ottenere la percentuale meccanica di armatura corrispondente alla retta di frontiera "c" si parte dall'equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale espressa in forma adimensionalizzata. Le forze in gioco sono:

- C , risultante della distribuzione delle tensioni di compressione agenti sulla porzione compressa di calcestruzzo;
- S' , risultante delle tensioni di compressione agenti sull'armatura superiore;
- S , risultante delle tensioni di trazione agenti sull'armatura inferiore;

Tenendo conto delle considerazioni fatte in precedenza riguardanti i livelli di deformazione raggiunti da calcestruzzo, armatura superiore e armatura inferiore, l'espressione della forza C risulta essere:

$$\begin{aligned} C &= \beta_1 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot x^{(c)} = \\ &= \left(1 - \frac{\varepsilon_{c2}}{3\varepsilon_{cu}}\right) \cdot f_{cd} \cdot b \cdot \xi^{(c)} \cdot h \end{aligned}$$

Dato che $\varepsilon_{cu} = 3.5\%$ e che $\varepsilon_{c2} = 2.0\%$, risulta $\beta_1 = 0.81$, perciò:

$$C = 0.81 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot \xi^{(c)} \cdot h \quad (2.36)$$

L'espressione della forza S' risulta essere:

$$S' = A'_s \cdot \sigma'_s(\varepsilon'_s)$$

Introducendo la percentuale meccanica di armatura compressa $\omega' = \frac{A'_s f_{yd}}{bh f_{cd}}$:

$$S' = \omega' \cdot \sigma'_s(\varepsilon'_s) \cdot \frac{bh f_{cd}}{f_{yd}} \quad (2.37)$$

L'espressione della forza S risulta essere:

$$S = A_s^{(c)} \cdot \sigma_s(\varepsilon_s)$$

Introducendo la percentuale meccanica di armatura tesa $\omega^{(c)} = \frac{A_s^{(c)} f_{yd}}{bh f_{cd}}$:

$$S = \omega^{(c)} \cdot \sigma_s(\epsilon_s) \cdot \frac{bh f_{cd}}{f_{yd}} \quad (2.38)$$

Per l'equilibrio:

$$C + S' - S = 0$$

$$0.81 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot \xi^{(c)} \cdot h + \omega' \cdot \sigma'_s(\epsilon'_s) \cdot \frac{bh f_{cd}}{f_{yd}} - \omega^{(c)} \cdot \sigma_s(\epsilon_s) \cdot \frac{bh f_{cd}}{f_{yd}} = 0$$

$$0.81 \cdot \xi^{(c)} + \omega' \cdot \frac{\sigma'_s(\epsilon'_s)}{f_{yd}} - \omega^{(c)} \cdot \frac{\sigma_s(\epsilon_s)}{f_{yd}} = 0$$

Ponendo $\psi_A = \frac{A'_s}{A_s^{(c)}}$, rapporto di armatura, è possibile scrivere:

$$\omega' = \psi_A \cdot \omega^{(c)}$$

L'equilibrio diventa quindi:

$$0.81 \cdot \xi^{(c)} + \psi_A \cdot \omega^{(c)} \cdot \frac{\sigma'_s(\epsilon'_s)}{f_{yd}} - \omega^{(c)} \cdot \frac{\sigma_s(\epsilon_s)}{f_{yd}} = 0$$

Da cui:

$$\omega^{(c)} \left(\frac{\sigma_s(\epsilon_s)}{f_{yd}} - \psi_A \cdot \frac{\sigma'_s(\epsilon'_s)}{f_{yd}} \right) = 0.81 \cdot \xi^{(c)}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \omega^{(c)} &= \frac{0.81 \cdot \xi^{(c)}}{\left(\frac{\sigma_s(\epsilon_s)}{f_{yd}} - \psi_A \cdot \frac{\sigma'_s(\epsilon'_s)}{f_{yd}} \right)} = \\ &= \frac{0.81 \cdot \xi^{(c)}}{\frac{\sigma_s(\epsilon_s) - \psi_A \sigma'_s(\epsilon'_s)}{f_{yd}}} \end{aligned}$$

Sostituendo la (2.34) si ottiene:

$$\omega^{(c)} = 0.81 \cdot \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_s} \cdot \frac{f_{yd}}{\sigma_s(\varepsilon_s) - \psi_A \sigma'_s(\varepsilon'_s)} \quad (2.39)$$

La retta corrispondente alla configurazione deformata passa esattamente per un valore di deformazione pari a ε_{yd} in corrispondenza dell'armatura superiore. Vuol dire che l'armatura compressa è snervata e che lavora ad una tensione pari a $k \cdot f_{yd}$ e che la forza risultante S' risulta:

$$S' = A'_s \cdot k \cdot f_{yd} = \psi_A \cdot A_s^{(c)} \cdot k \cdot f_{yd}$$

L'equilibrio diventa perciò:

$$0.81 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot \xi^{(c)} \cdot h + \psi_A \cdot A_s^{(c)} \cdot k \cdot f_{yd} - \omega^{(c)} \cdot \frac{\sigma_s(\varepsilon_s)}{f_{yd}} \cdot bhf_{cd} = 0$$

Per introdurre la percentuale meccanica di armatura tesa $\omega^{(c)}$ è necessario dividere tutti i termini dell'equazione per il gruppo bhf_{cd} :

$$\frac{0.81 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot \xi^{(c)} \cdot h}{bhf_{cd}} + \frac{\psi_A \cdot A_s^{(c)} \cdot k \cdot f_{yd}}{bhf_{cd}} - \frac{\omega^{(c)} \cdot \sigma_s(\varepsilon_s) \cdot bhf_{cd}}{f_{yd} \cdot bhf_{cd}} = 0$$

$$0.81 \cdot \xi^{(c)} + \psi_A \cdot k \cdot \omega^{(c)} - \omega^{(c)} \cdot \frac{\sigma_s(\varepsilon_s)}{f_{yd}} = 0$$

Da cui:

$$\omega^{(c)} \left(\frac{\sigma_s(\varepsilon_s)}{f_{yd}} - \psi_A \cdot k \right) = 0.81 \cdot \xi^{(c)}$$

Sostituendo ancora una volta la (2.34) si ottiene:

$$\omega^{(c)} = 0.81 \cdot \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_s} \cdot \frac{f_{yd}}{\sigma_s(\varepsilon_s) - \psi_A \cdot k \cdot f_{yd}} \quad (2.40)$$

Applicando l'equilibrio alla rotazione attorno all'armatura inferiore è possibile determinare il momento resistente, in forma adimensionale, corrispondente alla retta di

frontiera "c" tra i campi di rottura 4a e 4b.

$$M_{Rd} = C(h - \beta_2 \cdot x^{(c)}) + S'(h - \Delta')$$

Tenendo conto della (2.16) e che $\varepsilon_{cu} = 3.5\%$ e che $\varepsilon_{c2} = 2.0\%$, risulta $\beta_2 = 0.416$ e si ha:

$$M_{Rd} = 0.81 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot x^{(c)} (h - 0.416 \cdot x^{(c)}) + \psi_A \cdot A_s^{(c)} \cdot k \cdot f_{yd} (h - \Delta')$$

Per adimensionalizzare l'espressione è necessario dividere tutti i termini per un gruppo tale che abbia dimensioni fisiche uguali a quelle di un momento, [F][L]. Convenientemente con il ragionamento adottato fino a questo momento, si adotta il gruppo $bh^2 f_{cd}$. Perciò:

$$\frac{M_{Rd}}{bh^2 f_{cd}} = \frac{0.81 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot x^{(c)}}{bh^2 f_{cd}} (h - 0.416 \cdot x^{(c)}) + \frac{\psi_A \cdot A_s^{(c)} \cdot k \cdot f_{yd}}{bh^2 f_{cd}} (h - \Delta')$$

$$m_{rd} = 0.81 \cdot \xi^{(c)} (1 - 0.416 \cdot \xi^{(c)}) + \psi_A \cdot k \cdot \omega^{(c)} (1 - \delta')$$

Sostituendo la (2.34) e la (2.40):

$$\begin{aligned} m_{rd} &= 0.81 \cdot \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_s} \left(1 - 0.416 \cdot \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_s} \right) + \psi_A \cdot k \cdot 0.81 \cdot \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_s} \cdot \frac{f_{yd}}{\sigma_s(\varepsilon_s) - \psi_A \cdot k \cdot f_{yd}} (1 - \delta') = \\ &= 0.81 \cdot \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_s} \left(\frac{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_s - 0.416 \cdot \varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_s} \right) + \psi_A \cdot k \cdot 0.81 \cdot \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_s} \cdot \frac{f_{yd}}{\sigma_s(\varepsilon_s) - \psi_A \cdot k \cdot f_{yd}} (1 - \delta') = \\ &= 0.81 \cdot \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_s} \left(\frac{0.584 \cdot \varepsilon_{cu} + \varepsilon_s}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_s} \right) + \psi_A \cdot k \cdot 0.81 \cdot \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_s} \cdot \frac{f_{yd}}{\sigma_s(\varepsilon_s) - \psi_A \cdot k \cdot f_{yd}} (1 - \delta') = \end{aligned}$$

In conclusione:

$$m_{rd}^{(c)} = 0.81 \cdot \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_s} \left[\frac{0.584 \cdot \varepsilon_{cu} + \varepsilon_s}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_s} + \psi_A \cdot k (1 - \delta') \frac{f_{yd}}{\sigma_s(\varepsilon_s) - \psi_A k \cdot f_{yd}} \right] \quad (2.41)$$

Retta "d"

La retta "d" rappresenta la frontiera tra campo 3c e campo 3b.

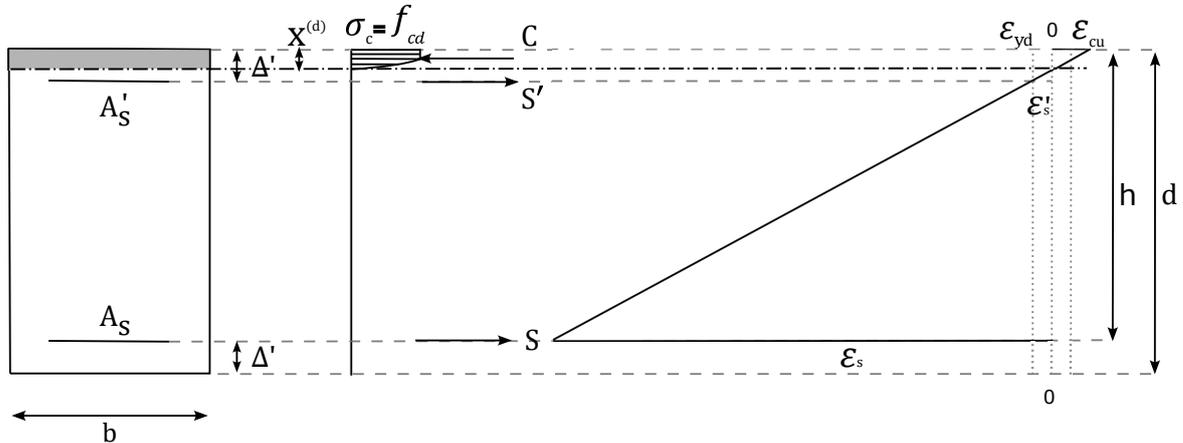


Figura 2.17 - Configurazione deformata e distribuzione tensionale corrispondente alla retta di frontiera tra campo 3c e campo 3b

La configurazione deformata di collasso corrispondente alla retta di frontiera tra campo 3c e campo 3b vede il calcestruzzo in corrispondenza di una deformazione pari a $\epsilon_{cu} = 3.5\%$ e l'armatura superiore in corrispondenza di una deformazione pari a ϵ_{yd} , mentre l'armatura inferiore in corrispondenza di una deformazione $\epsilon_s > \epsilon_{yd}$. Osservando la configurazione deformata, è possibile ricavare la profondità dell'asse neutro che porta a collasso da considerazioni di proporzionalità tra triangoli simili:

$$\frac{x^{(d)}}{\epsilon_{cu}} = \frac{h}{\epsilon_{cu} + \epsilon_s}$$

Dividendo entrambi i membri per l'altezza meccanica della sezione, h :

$$\frac{1}{h} \cdot \frac{x^{(d)}}{\epsilon_{cu}} = \frac{h}{\epsilon_{cu} + \epsilon_s} \cdot \frac{1}{h}$$

Ponendo $\frac{x^{(d)}}{h} = \xi^{(d)}$, posizione adimensionalizzata dell'asse neutro, si ottiene:

$$\frac{\xi^{(d)}}{\epsilon_{cu}} = \frac{1}{\epsilon_{cu} + \epsilon_s}$$

Da cui:

$$\xi^{(d)} = \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + \epsilon_s} \quad (2.42)$$

Allo stesso modo si ricava la deformazione dell'armatura superiore, che risulta essere

compressa ε'_s :

$$\frac{x^{(d)}}{\varepsilon_{cu}} = \frac{\Delta'}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon'_s}$$

Da cui:

$$\varepsilon'_s = \varepsilon_{cu} \cdot \frac{\Delta'}{x^{(d)}} - \varepsilon_{cu}$$

Seguendo il ragionamento applicato in precedenza:

$$\frac{\varepsilon'_s}{h} = \frac{\varepsilon_{cu} \cdot \Delta'}{x^{(d)} \cdot h} - \frac{\varepsilon_{cu} \cdot x^{(d)}}{h \cdot x^{(d)}}$$

Ponendo $\frac{\Delta'}{h} = \delta'$, coefficiente di posizione del baricentro dell'armatura, si ottiene:

$$\frac{\varepsilon'_s}{h} = \frac{\varepsilon_{cu} \cdot \delta'}{x^{(d)}} - \frac{\varepsilon_{cu} \cdot \xi^{(d)}}{x^{(d)}}$$

$$\varepsilon'_s = \left(\frac{\varepsilon_{cu} \cdot \delta'}{x^{(d)}} - \frac{\varepsilon_{cu} \cdot \xi^{(d)}}{x^{(d)}} \right) \cdot h$$

$$\varepsilon'_s = \frac{\varepsilon_{cu} \cdot \delta'}{\xi^{(d)}} - \frac{\varepsilon_{cu} \cdot \xi^{(d)}}{\xi^{(d)}}$$

$$\varepsilon'_s = \varepsilon_{cu} \cdot \frac{\delta' - \xi^{(d)}}{\xi^{(d)}} \quad (2.43)$$

Per ottenere la percentuale meccanica di armatura corrispondente alla retta di frontiera "d" si parte dall'equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale espressa in forma adimensionalizzata. Le forze in gioco sono:

- C , risultante della distribuzione delle tensioni di compressione agenti sulla porzione compressa di calcestruzzo;
- S' , risultante delle tensioni di trazione agenti sull'armatura superiore;
- S , risultante delle tensioni di trazione agenti sull'armatura inferiore;

Tenendo conto delle considerazioni fatte in precedenza riguardanti i livelli di deformazione raggiunti da calcestruzzo, armatura superiore e armatura inferiore, l'espressione della forza C risulta essere:

$$C = \beta_1 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot x^{(d)} =$$

$$= \left(1 - \frac{\varepsilon_{c2}}{3\varepsilon_{cu}}\right) \cdot f_{cd} \cdot b \cdot \xi^{(d)} \cdot h$$

Dato che $\varepsilon_{cu} = 3.5\%$ e che $\varepsilon_{c2} = 2.0\%$, risulta $\beta_1 = 0.81$, perciò:

$$C = 0.81 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot \xi^{(d)} \cdot h \quad (2.44)$$

L'espressione della forza S' risulta essere:

$$S' = A'_s \cdot \sigma'_s(\varepsilon'_s)$$

Introducendo la percentuale meccanica di armatura compressa $\omega' = \frac{A'_s f_{yd}}{bh f_{cd}}$:

$$S' = \omega' \cdot \sigma'_s(\varepsilon'_s) \cdot \frac{bh f_{cd}}{f_{yd}} \quad (2.45)$$

L'espressione della forza S risulta essere:

$$S = A_s^{(d)} \cdot \sigma_s(\varepsilon_s)$$

Introducendo la percentuale meccanica di armatura tesa $\omega^{(d)} = \frac{A_s^{(d)} f_{yd}}{bh f_{cd}}$:

$$S = \omega^{(d)} \cdot \sigma_s(\varepsilon_s) \cdot \frac{bh f_{cd}}{f_{yd}} \quad (2.46)$$

Per l'equilibrio:

$$C - S' - S = 0$$

$$0.81 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot \xi^{(d)} \cdot h - \omega' \cdot \sigma'_s(\varepsilon'_s) \cdot \frac{bh f_{cd}}{f_{yd}} - \omega^{(d)} \cdot \sigma_s(\varepsilon_s) \cdot \frac{bh f_{cd}}{f_{yd}} = 0$$

$$0.81 \cdot \xi^{(d)} - \omega' \cdot \frac{\sigma'_s(\varepsilon'_s)}{f_{yd}} - \omega^{(d)} \cdot \frac{\sigma_s(\varepsilon_s)}{f_{yd}} = 0$$

Ponendo $\psi_A = \frac{A'_s}{A_s^{(d)}}$, rapporto di armatura, è possibile scrivere:

$$\omega' = \psi_A \cdot \omega^{(d)}$$

L'equilibrio diventa quindi:

$$0.81 \cdot \xi^{(d)} - \psi_A \cdot \omega^{(d)} \cdot \frac{\sigma_s'(\epsilon_s')}{f_{yd}} - \omega^{(d)} \cdot \frac{\sigma_s(\epsilon_s)}{f_{yd}} = 0$$

Da cui:

$$\omega^{(d)} \left(\frac{\sigma_s(\epsilon_s)}{f_{yd}} + \psi_A \cdot \frac{\sigma_s'(\epsilon_s')}{f_{yd}} \right) = 0.81 \cdot \xi^{(d)}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \omega^{(d)} &= \frac{0.81 \cdot \xi^{(d)}}{\left(\frac{\sigma_s(\epsilon_s)}{f_{yd}} + \psi_A \cdot \frac{\sigma_s'(\epsilon_s')}{f_{yd}} \right)} = \\ &= \frac{0.81 \cdot \xi^{(d)}}{\frac{\sigma_s(\epsilon_s) + \psi_A \sigma_s'(\epsilon_s')}{f_{yd}}} \end{aligned}$$

Sostituendo la (2.42) si ottiene:

$$\omega^{(d)} = 0.81 \cdot \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + \epsilon_s} \cdot \frac{f_{yd}}{\sigma_s(\epsilon_s) + \psi_A \sigma_s'(\epsilon_s')} \quad (2.47)$$

La retta corrispondente alla configurazione deformata passa esattamente per un valore di deformazione pari a ϵ_{yd} in corrispondenza dell'armatura superiore. Vuol dire che l'armatura compressa è snervata e lavora ad una tensione pari a $k \cdot f_{yd}$, quindi la forza risultante S' risulta:

$$S' = A_s' \cdot k \cdot f_{yd} = \psi_A \cdot A_s^{(d)} \cdot k \cdot f_{yd}$$

L'equilibrio diventa perciò:

$$0.81 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot \xi^{(d)} \cdot h - \psi_A \cdot A_s^{(d)} \cdot k \cdot f_{yd} - \omega^{(d)} \cdot \frac{\sigma_s(\epsilon_s)}{f_{yd}} \cdot bh f_{cd} = 0$$

Per introdurre la percentuale meccanica di armatura tesa $\omega^{(d)}$ è necessario divi-

dere tutti i termini dell'equazione per il gruppo bhf_{cd} :

$$\frac{0.81 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot \xi^{(d)} \cdot h}{bhf_{cd}} - \frac{\psi_A \cdot A_s^{(d)} \cdot k \cdot f_{yd}}{bhf_{cd}} - \frac{\omega^{(d)} \cdot \sigma_s(\varepsilon_s) \cdot bhf_{cd}}{f_{yd} \cdot bhf_{cd}} = 0$$

$$0.81 \cdot \xi^{(d)} - \psi_A \cdot k \cdot \omega^{(d)} - \omega^{(d)} \cdot \frac{\sigma_s(\varepsilon_s)}{f_{yd}} = 0$$

Da cui:

$$\omega^{(d)} \left(\frac{\sigma_s(\varepsilon_s)}{f_{yd}} + \psi_A \cdot k \right) = 0.81 \cdot \xi^{(d)}$$

Sostituendo ancora una volta la (2.42) si ottiene:

$$\omega^{(d)} = 0.81 \cdot \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_s} \cdot \frac{f_{yd}}{\sigma_s(\varepsilon_s) + \psi_A \cdot k \cdot f_{yd}} \quad (2.48)$$

Applicando l'equilibrio alla rotazione attorno all'armatura inferiore è possibile determinare il momento resistente, in forma adimensionale, corrispondente alla retta di frontiera "d" tra i campi di rottura 3c e 3b.

$$M_{Rd} = C(h - \beta_2 \cdot x^{(d)}) - S'(h - \Delta')$$

Tenendo conto della (2.16) e che $\varepsilon_{cu} = 3.5\%$ e che $\varepsilon_{c2} = 2.0\%$, risulta $\beta_2 = 0.416$ e si ha:

$$M_{Rd} = 0.81 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot x^{(d)} (h - 0.416 \cdot x^{(d)}) - \psi_A \cdot A_s^{(d)} \cdot k \cdot f_{yd} (h - \Delta')$$

Per adimensionalizzare l'espressione è necessario dividere tutti i termini per un gruppo tale che abbia dimensioni fisiche uguali a quelle di un momento, [F][L]. Convenientemente con il ragionamento adottato fino a questo momento, si adotta il gruppo $bh^2 f_{cd}$. Perciò:

$$\frac{M_{Rd}}{bh^2 f_{cd}} = \frac{0.81 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot x^{(d)}}{bh^2 f_{cd}} (h - 0.416 \cdot x^{(d)}) - \frac{\psi_A \cdot A_s^{(d)} \cdot k \cdot f_{yd}}{bh^2 f_{cd}} (h - \Delta')$$

$$m_{rd} = 0.81 \cdot \xi^{(d)} (1 - 0.416 \cdot \xi^{(d)}) - \psi_A \cdot k \cdot \omega^{(d)} (1 - \delta')$$

Sostituendo la (2.42) e la (2.48):

$$\begin{aligned} m_{rd} &= 0.81 \cdot \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_s} \left(1 - 0.416 \cdot \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_s} \right) - \psi_A \cdot k \cdot 0.81 \cdot \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_s} \cdot \frac{f_{yd}}{\sigma_s(\varepsilon_s) + \psi_A \cdot k \cdot f_{yd}} (1 - \delta') = \\ &= 0.81 \cdot \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_s} \left(\frac{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_s - 0.416 \cdot \varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_s} \right) - \psi_A \cdot k \cdot 0.81 \cdot \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_s} \cdot \frac{f_{yd}}{\sigma_s(\varepsilon_s) + \psi_A \cdot k \cdot f_{yd}} (1 - \delta') = \\ &= 0.81 \cdot \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_s} \left(\frac{0.584 \cdot \varepsilon_{cu} + \varepsilon_s}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_s} \right) - \psi_A \cdot k \cdot 0.81 \cdot \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_s} \cdot \frac{f_{yd}}{\sigma_s(\varepsilon_s) + \psi_A \cdot k \cdot f_{yd}} (1 - \delta') = \end{aligned}$$

In conclusione:

$$m_{rd}^{(d)} = 0.81 \cdot \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_s} \left[\frac{0.584 \cdot \varepsilon_{cu} + \varepsilon_s}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_s} - \psi_A \cdot k (1 - \delta') \frac{f_{yd}}{\sigma_s(\varepsilon_s) + \psi_A \cdot k \cdot f_{yd}} \right] \quad (2.49)$$

Retta "e"

La retta "e" rappresenta la frontiera tra campo 3b e campo 3a.

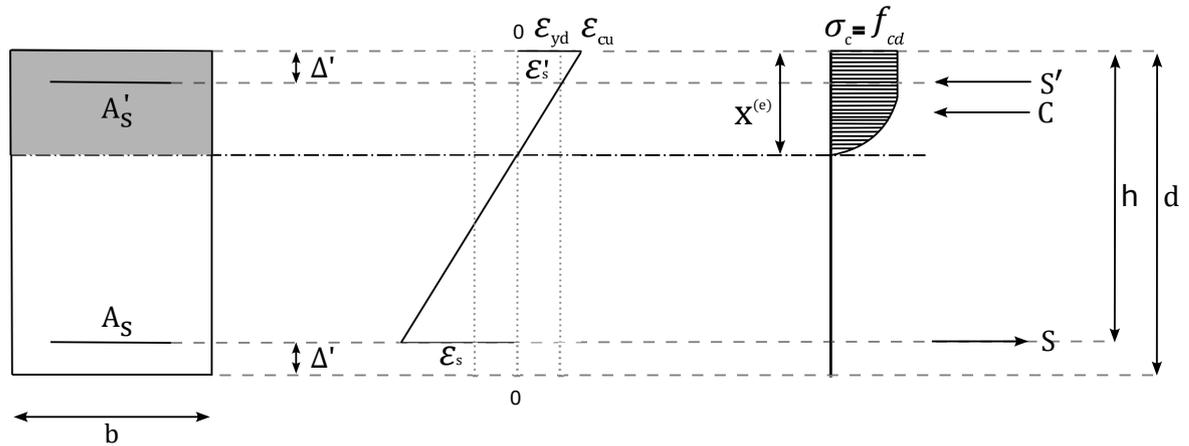


Figura 2.18 - Configurazione deformata e distribuzione tensionale corrispondente alla retta di frontiera tra campo 3b e campo 3a

La configurazione deformata di collasso corrispondente alla retta di frontiera tra campo 3b e campo 3a vede il calcestruzzo in corrispondenza di una deformazione

pari a $\varepsilon_{cu} = 3.5\%$ e l'armatura superiore in corrispondenza di una deformazione pari a ε_{yd} , mentre l'armatura inferiore in corrispondenza di una deformazione $\varepsilon_s > \varepsilon_{yd}$. Osservando la configurazione deformata, è possibile ricavare la profondità dell'asse neutro che porta a collasso da considerazioni di proporzionalità tra triangoli simili:

$$\frac{x^{(e)}}{\varepsilon_{cu}} = \frac{h}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_s}$$

Dividendo entrambi i membri per l'altezza meccanica della sezione, h :

$$\frac{1}{h} \cdot \frac{x^{(e)}}{\varepsilon_{cu}} = \frac{h}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_s} \cdot \frac{1}{h}$$

Ponendo $\frac{x^{(e)}}{h} = \xi^{(e)}$, posizione adimensionalizzata dell'asse neutro, si ottiene:

$$\frac{\xi^{(e)}}{\varepsilon_{cu}} = \frac{1}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_s}$$

Da cui:

$$\xi^{(e)} = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_s} \quad (2.50)$$

Allo stesso modo si ricava la deformazione dell'armatura superiore, che risulta essere compressa ε'_s :

$$\frac{x^{(e)}}{\varepsilon_{cu}} = \frac{x^{(e)} - \Delta'}{\varepsilon'_s}$$

Da cui:

$$\varepsilon'_s = \varepsilon_{cu} \cdot \frac{(x^{(e)} - \Delta')}{x^{(e)}}$$

Seguendo il ragionamento applicato in precedenza:

$$\frac{\varepsilon'_s}{h} = \frac{\varepsilon_{cu} \cdot x^{(e)}}{h \cdot x^{(e)}} - \frac{\varepsilon_{cu} \cdot \Delta'}{x^{(e)} \cdot h}$$

Ponendo $\frac{\Delta'}{h} = \delta'$, coefficiente di posizione del baricentro dell'armatura, si ottiene:

$$\frac{\varepsilon'_s}{h} = \frac{\varepsilon_{cu} \cdot \xi^{(e)}}{x^{(e)}} - \frac{\varepsilon_{cu} \cdot \delta'}{x^{(e)}}$$

$$\varepsilon'_s = \left(\frac{\varepsilon_{cu} \cdot \xi^{(e)}}{x^{(e)}} - \frac{\varepsilon_{cu} \cdot \delta'}{x^{(e)}} \right) \cdot h$$

$$\varepsilon'_s = \frac{\varepsilon_{cu} \cdot \xi^{(e)}}{\xi^{(e)}} - \frac{\varepsilon_{cu} \cdot \delta'}{\xi^{(e)}}$$

$$\varepsilon'_s = \varepsilon_{cu} \cdot \frac{\xi^{(e)} - \delta'}{\xi^{(e)}} \quad (2.51)$$

Per ottenere la percentuale meccanica di armatura corrispondente alla retta di frontiera "e" si parte dall'equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale espressa in forma adimensionalizzata. Le forze in gioco sono:

- C , risultante della distribuzione delle tensioni di compressione agenti sulla porzione compressa di calcestruzzo;
- S' , risultante delle tensioni di compressione agenti sull'armatura superiore;
- S , risultante delle tensioni di trazione agenti sull'armatura inferiore;

Tenendo conto delle considerazioni fatte in precedenza riguardanti i livelli di deformazione raggiunti da calcestruzzo, armatura superiore e armatura inferiore, l'espressione della forza C risulta essere:

$$\begin{aligned} C &= \beta_1 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot x^{(e)} = \\ &= \left(1 - \frac{\varepsilon_{c2}}{3\varepsilon_{cu}}\right) \cdot f_{cd} \cdot b \cdot \xi^{(e)} \cdot h \end{aligned}$$

Dato che $\varepsilon_{cu} = 3.5\%$ e che $\varepsilon_{c2} = 2.0\%$, risulta $\beta_1 = 0.81$, perciò:

$$C = 0.81 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot \xi^{(e)} \cdot h \quad (2.52)$$

L'espressione della forza S' risulta essere:

$$S' = A'_s \cdot \sigma'_s(\varepsilon'_s)$$

Introducendo la percentuale meccanica di armatura compressa $\omega' = \frac{A'_s f_{yd}}{bh f_{cd}}$:

$$S' = \omega' \cdot \sigma'_s(\varepsilon'_s) \cdot \frac{bh f_{cd}}{f_{yd}} \quad (2.53)$$

L'espressione della forza S risulta essere:

$$S = A_s^{(e)} \cdot \sigma_s(\varepsilon_s)$$

Introducendo la percentuale meccanica di armatura tesa $\omega^{(e)} = \frac{A_s^{(e)} f_{yd}}{bh f_{cd}}$:

$$S = \omega^{(e)} \cdot \sigma_s(\varepsilon_s) \cdot \frac{bh f_{cd}}{f_{yd}} \quad (2.54)$$

Per l'equilibrio:

$$C + S' - S = 0$$

$$0.81 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot \xi^{(e)} \cdot h + \omega' \cdot \sigma'_s(\varepsilon'_s) \cdot \frac{bh f_{cd}}{f_{yd}} - \omega^{(e)} \cdot \sigma_s(\varepsilon_s) \cdot \frac{bh f_{cd}}{f_{yd}} = 0$$

$$0.81 \cdot \xi^{(e)} + \omega' \cdot \frac{\sigma'_s(\varepsilon'_s)}{f_{yd}} - \omega^{(e)} \cdot \frac{\sigma_s(\varepsilon_s)}{f_{yd}} = 0$$

Ponendo $\psi_A = \frac{A'_s}{A_s^{(e)}}$, rapporto di armatura, è possibile scrivere:

$$\omega' = \psi_A \cdot \omega^{(e)}$$

L'equilibrio diventa quindi:

$$0.81 \cdot \xi^{(e)} + \psi_A \cdot \omega^{(e)} \cdot \frac{\sigma'_s(\varepsilon'_s)}{f_{yd}} - \omega^{(e)} \cdot \frac{\sigma_s(\varepsilon_s)}{f_{yd}} = 0$$

Da cui:

$$\omega^{(e)} \left(\frac{\sigma_s(\varepsilon_s)}{f_{yd}} - \psi_A \cdot \frac{\sigma'_s(\varepsilon'_s)}{f_{yd}} \right) = 0.81 \cdot \xi^{(e)}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \omega^{(e)} &= \frac{0.81 \cdot \xi^{(e)}}{\left(\frac{\sigma_s(\varepsilon_s)}{f_{yd}} - \psi_A \cdot \frac{\sigma'_s(\varepsilon'_s)}{f_{yd}} \right)} = \\ &= \frac{0.81 \cdot \xi^{(e)}}{\frac{\sigma_s(\varepsilon_s) - \psi_A \sigma'_s(\varepsilon'_s)}{f_{yd}}} \end{aligned}$$

Sostituendo la (2.50) si ottiene:

$$\omega^{(e)} = 0.81 \cdot \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_s} \cdot \frac{f_{yd}}{\sigma_s(\varepsilon_s) - \psi_A \sigma'_s(\varepsilon'_s)} \quad (2.55)$$

La retta corrispondente alla configurazione deformata passa esattamente per un valore di deformazione pari a ε_{yd} in corrispondenza dell'armatura superiore. Vuol dire che l'armatura compressa è snervata e lavora ad una tensione pari a $k \cdot f_{yd}$, quindi la forza risultante S' risulta:

$$S' = A'_s \cdot k \cdot f_{yd} = \psi_A \cdot A_s^{(e)} \cdot k \cdot f_{yd}$$

L'equilibrio diventa perciò:

$$0.81 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot \xi^{(e)} \cdot h + \psi_A \cdot A_s^{(e)} \cdot k \cdot f_{yd} - \omega^{(e)} \cdot \frac{\sigma_s(\varepsilon_s)}{f_{yd}} \cdot bhf_{cd} = 0$$

Per introdurre la percentuale meccanica di armatura tesa $\omega^{(e)}$ è necessario dividere tutti i termini dell'equazione per il gruppo bhf_{cd} :

$$\frac{0.81 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot \xi^{(e)} \cdot h}{bhf_{cd}} + \frac{\psi_A \cdot A_s^{(e)} \cdot k \cdot f_{yd}}{bhf_{cd}} - \frac{\omega^{(e)} \cdot \sigma_s(\varepsilon_s) \cdot bhf_{cd}}{f_{yd} \cdot bhf_{cd}} = 0$$

$$0.81 \cdot \xi^{(e)} + \psi_A \cdot k \cdot \omega^{(e)} - \omega^{(e)} \cdot \frac{\sigma_s(\varepsilon_s)}{f_{yd}} = 0$$

Da cui:

$$\omega^{(e)} \left(\frac{\sigma_s(\varepsilon_s)}{f_{yd}} - \psi_A \cdot k \right) = 0.81 \cdot \xi^{(e)}$$

Sostituendo ancora una volta la (2.50) si ottiene:

$$\omega^{(e)} = 0.81 \cdot \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_s} \cdot \frac{f_{yd}}{\sigma_s(\varepsilon_s) - \psi_A \cdot k \cdot f_{yd}} \quad (2.56)$$

Applicando l'equilibrio alla rotazione attorno all'armatura inferiore è possibile determinare il momento resistente, in forma adimensionale, corrispondente alla retta di

frontiera "e" tra i campi di rottura 3b e 3a.

$$M_{Rd} = C(h - \beta_2 \cdot x^{(e)}) + S'(h - \Delta')$$

Tenendo conto della (2.16) e che $\varepsilon_{cu} = 3.5\%$ e che $\varepsilon_{c2} = 2.0\%$, risulta $\beta_2 = 0.416$ e si ha:

$$M_{Rd} = 0.81 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot x^{(e)}(h - 0.416 \cdot x^{(e)}) + \psi_A \cdot A_s^{(e)} \cdot k \cdot f_{yd}(h - \Delta')$$

Per adimensionalizzare l'espressione è necessario dividere tutti i termini per un gruppo tale che abbia dimensioni fisiche uguali a quelle di un momento, [F][L]. Convenientemente con il ragionamento adottato fino a questo momento, si adotta il gruppo $bh^2 f_{cd}$. Perciò:

$$\frac{M_{Rd}}{bh^2 f_{cd}} = \frac{0.81 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot x^{(e)}}{bh^2 f_{cd}}(h - 0.416 \cdot x^{(e)}) + \frac{\psi_A \cdot A_s^{(e)} \cdot k \cdot f_{yd}}{bh^2 f_{cd}}(h - \Delta')$$

$$m_{rd} = 0.81 \cdot \xi^{(e)}(1 - 0.416 \cdot \xi^{(e)}) + \psi_A \cdot k \cdot \omega^{(e)}(1 - \delta')$$

Sostituendo la (2.50) e la (2.56):

$$\begin{aligned} m_{rd} &= 0.81 \cdot \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_s} \left(1 - 0.416 \cdot \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_s}\right) + \psi_A \cdot k \cdot 0.81 \cdot \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_s} \cdot \frac{f_{yd}}{\sigma_s(\varepsilon_s) - \psi_A \cdot k \cdot f_{yd}}(1 - \delta') = \\ &= 0.81 \cdot \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_s} \left(\frac{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_s - 0.416 \cdot \varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_s}\right) + \psi_A \cdot k \cdot 0.81 \cdot \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_s} \cdot \frac{f_{yd}}{\sigma_s(\varepsilon_s) - \psi_A \cdot k \cdot f_{yd}}(1 - \delta') = \\ &= 0.81 \cdot \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_s} \left(\frac{0.584 \cdot \varepsilon_{cu} + \varepsilon_s}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_s}\right) + \psi_A \cdot k \cdot 0.81 \cdot \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_s} \cdot \frac{f_{yd}}{\sigma_s(\varepsilon_s) - \psi_A \cdot k \cdot f_{yd}}(1 - \delta') = \end{aligned}$$

In conclusione:

$$m_{rd}^{(e)} = 0.81 \cdot \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_s} \left[\frac{0.584 \cdot \varepsilon_{cu} + \varepsilon_s}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_s} + \psi_A \cdot k(1 - \delta') \frac{f_{yd}}{\sigma_s(\varepsilon_s) - \psi_A k \cdot f_{yd}} \right] \quad (2.57)$$

Retta "f"

La retta "f" rappresenta la frontiera tra campo 2c e campo 2b.

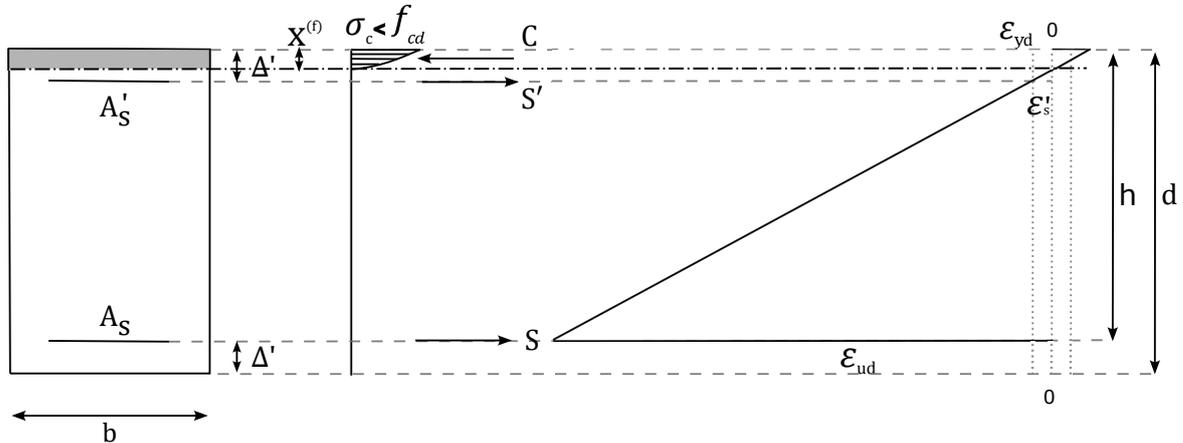


Figura 2.19 - Configurazione deformata e distribuzione tensionale corrispondente alla retta di frontiera tra campo 2c e campo 2b

La configurazione deformata di collasso corrispondente alla retta di frontiera tra campo 2c e campo 2b vede il calcestruzzo in corrispondenza di una deformazione ϵ_c inferiore a $\epsilon_{cu} = 3.5\%$ e l'armatura superiore in corrispondenza di una deformazione pari a ϵ_{yd} , mentre l'armatura inferiore in corrispondenza di una deformazione ϵ_{ud} . Osservando la configurazione deformata, è possibile ricavare la profondità dell'asse neutro che porta a collasso da considerazioni di proporzionalità tra triangoli simili:

$$\frac{x^{(f)}}{\epsilon_c} = \frac{h}{\epsilon_c + \epsilon_{ud}}$$

Dividendo entrambi i membri per l'altezza meccanica della sezione, h :

$$\frac{1}{h} \cdot \frac{x^{(f)}}{\epsilon_c} = \frac{h}{\epsilon_c + \epsilon_{ud}} \cdot \frac{1}{h}$$

Ponendo $\frac{x^{(f)}}{h} = \xi^{(f)}$, posizione adimensionalizzata dell'asse neutro, si ottiene:

$$\frac{\xi^{(f)}}{\epsilon_{cu}} = \frac{1}{\epsilon_c + \epsilon_{ud}}$$

Da cui:

$$\xi^{(f)} = \frac{\epsilon_c}{\epsilon_c + \epsilon_{ud}} \quad (2.58)$$

Per ottenere la percentuale meccanica di armatura corrispondente alla retta di

frontiera "f" si parte dall'equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale espressa in forma adimensionalizzata. Le forze in gioco sono:

- C , risultante della distribuzione delle tensioni di compressione agenti sulla porzione compressa di calcestruzzo;
- S' , risultante delle tensioni di trazione agenti sull'armatura superiore;
- S , risultante delle tensioni di trazione agenti sull'armatura inferiore;

Tenendo conto delle considerazioni fatte in precedenza riguardanti i livelli di deformazione raggiunti da calcestruzzo, armatura superiore e armatura inferiore, l'espressione della forza C risulta essere:

$$C = \beta_1 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot x^{(f)}$$

$$C = \frac{\varepsilon_{cm}}{\varepsilon_{c2}} \left(1 - \frac{\varepsilon_{cm}}{3\varepsilon_{c2}}\right) \cdot f_{cd} \cdot b \cdot \xi^{(f)} \cdot h \quad (2.59)$$

L'armatura superiore è tesa ed è snervata e lavora ad una tensione pari a f_{yd} . L'espressione della forza S' risulta essere:

$$S' = A'_s \cdot f_{yd}$$

Introducendo la percentuale meccanica di armatura compressa $\omega' = \frac{A'_s f_{yd}}{bh f_{cd}}$:

$$S' = \omega' \cdot bh f_{cd} \quad (2.60)$$

L'espressione della forza S risulta essere:

$$S = A_s^{(f)} \cdot \sigma_s(\varepsilon_s)$$

Introducendo la percentuale meccanica di armatura tesa $\omega^{(f)} = \frac{A_s^{(f)} f_{yd}}{bh f_{cd}}$:

$$S = \omega^{(f)} \cdot k \cdot bh f_{cd} \quad (2.61)$$

Per l'equilibrio:

$$C - S' - S = 0$$

$$\frac{\varepsilon_{cm}}{\varepsilon_{c2}} \left(1 - \frac{\varepsilon_{cm}}{3\varepsilon_{c2}}\right) \cdot f_{cd} \cdot b \cdot \xi^{(f)} \cdot h - \omega' \cdot bhf_{cd} - \omega^{(f)} \cdot k \cdot bhf_{cd} = 0$$

$$\omega^{(f)} \cdot k = \frac{\varepsilon_{cm}}{\varepsilon_{c2}} \left(1 - \frac{\varepsilon_{cm}}{3\varepsilon_{c2}}\right) \cdot \xi^{(f)} - \omega'$$

Ponendo $\psi_A = \frac{A'_s}{A_s^{(f)}}$, rapporto di armatura, è possibile scrivere:

$$\omega' = \psi_A \cdot \omega^{(f)}$$

L'equilibrio diventa quindi:

$$\omega^{(f)} \cdot k = \frac{\varepsilon_{cm}}{\varepsilon_{c2}} \left(1 - \frac{\varepsilon_{cm}}{3\varepsilon_{c2}}\right) \cdot \xi^{(f)} - \psi_A \cdot \omega^{(f)}$$

Da cui:

$$\omega^{(f)} (k + \psi_A) = \frac{\varepsilon_{cm}}{\varepsilon_{c2}} \left(1 - \frac{\varepsilon_{cm}}{3\varepsilon_{c2}}\right) \cdot \xi^{(f)}$$

Sostituendo la (2.58) si ottiene:

$$\omega^{(f)} = \frac{\varepsilon_{cm}}{\varepsilon_{c2}} \left(1 - \frac{\varepsilon_{cm}}{3\varepsilon_{c2}}\right) \cdot \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c + \varepsilon_{ud}} \cdot \frac{1}{k + \psi_A} \quad (2.62)$$

Applicando l'equilibrio alla rotazione attorno all'armatura inferiore è possibile determinare il momento resistente, in forma adimensionale, corrispondente alla retta di frontiera "f" tra i campi di rottura 2c e 2b.

$$M_{Rd} = C(h - \beta_2 \cdot x^{(f)}) - S'(h - \Delta')$$

$$M_{Rd} = \frac{\varepsilon_{cm}}{\varepsilon_{c2}} \left(1 - \frac{\varepsilon_{cm}}{3\varepsilon_{c2}}\right) \cdot f_{cd} \cdot b \cdot x^{(f)} (h - \beta_2 \cdot x^{(f)}) - \psi_A \cdot A_s^{(f)} \cdot f_{yd} (h - \Delta')$$

Per adimensionalizzare l'espressione è necessario dividere tutti i termini per un

gruppo tale che abbia dimensioni fisiche uguali a quelle di un momento, [F][L]. Convenientemente con il ragionamento adottato fino a questo momento si adotta il gruppo $bh^2 f_{cd}$. Perciò:

$$\frac{M_{Rd}}{bh^2 f_{cd}} = \frac{\frac{\varepsilon_{cm}}{\varepsilon_{c2}} \left(1 - \frac{\varepsilon_{cm}}{3\varepsilon_{c2}}\right) \cdot f_{cd} \cdot b \cdot x^{(f)}}{bh^2 f_{cd}} (h - \beta_2 \cdot x^{(f)}) - \frac{\psi_A \cdot A_s^{(f)} \cdot f_{yd}}{bh^2 f_{cd}} (h - \Delta')$$

$$m_{rd} = \frac{\varepsilon_{cm}}{\varepsilon_{c2}} \left(1 - \frac{\varepsilon_{cm}}{3\varepsilon_{c2}}\right) \cdot \xi^{(f)} (1 - \beta_2 \cdot \xi^{(f)}) - \psi_A \cdot \omega^{(f)} (1 - \delta')$$

Sostituendo la (2.58) e la (2.62):

$$m_{rd} = \frac{\varepsilon_{cm}}{\varepsilon_{c2}} \left(1 - \frac{\varepsilon_{cm}}{3\varepsilon_{c2}}\right) \cdot \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c + \varepsilon_{ud}} \left(1 - \beta_2 \cdot \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c + \varepsilon_{ud}}\right) - \psi_A \cdot \frac{\varepsilon_{cm}}{\varepsilon_{c2}} \left(1 - \frac{\varepsilon_{cm}}{3\varepsilon_{c2}}\right) \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c + \varepsilon_{ud}} \cdot \frac{1}{k + \psi_A} (1 - \delta')$$

In conclusione:

$$m_{rd}^{(f)} = \frac{\varepsilon_{cm}}{\varepsilon_{c2}} \left(1 - \frac{\varepsilon_{cm}}{3\varepsilon_{c2}}\right) \cdot \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c + \varepsilon_{ud}} \left[1 - \beta_2 \cdot \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c + \varepsilon_{ud}} - \psi_A \frac{(1 - \delta')}{k + \psi_A}\right] \quad (2.63)$$

Retta "g"

La retta "g" rappresenta la frontiera tra campo 2a e campo 2b.

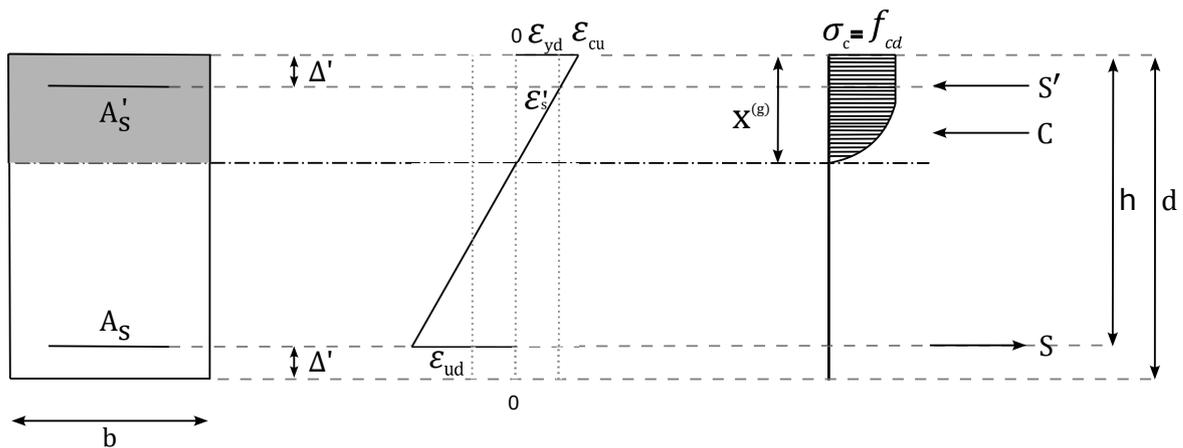


Figura 2.20 - Configurazione deformata e distribuzione tensionale corrispondente alla retta di frontiera tra campo 2a e campo 2b

La configurazione deformata di collasso corrispondente alla retta di frontiera tra

campo 2a e campo 2b vede il calcestruzzo in corrispondenza di una deformazione ε_c inferiore a $\varepsilon_{cu} = 3.5\%$ e l'armatura superiore in corrispondenza di una deformazione pari a ε_{yd} , mentre l'armatura inferiore in corrispondenza di una deformazione ε_{ud} . Osservando la configurazione deformata, è possibile ricavare la profondità dell'asse neutro che porta a collasso da considerazioni di proporzionalità tra triangoli simili:

$$\frac{x^{(g)}}{\varepsilon_c} = \frac{h}{\varepsilon_c + \varepsilon_{ud}}$$

Dividendo entrambi i membri per l'altezza meccanica della sezione, h :

$$\frac{1}{h} \cdot \frac{x^{(g)}}{\varepsilon_c} = \frac{h}{\varepsilon_c + \varepsilon_{ud}} \cdot \frac{1}{h}$$

Ponendo $\frac{x^{(g)}}{h} = \xi^{(g)}$, posizione adimensionalizzata dell'asse neutro, si ottiene:

$$\frac{\xi^{(g)}}{\varepsilon_{cu}} = \frac{1}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_s}$$

Da cui:

$$\xi^{(g)} = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c + \varepsilon_{ud}} \quad (2.64)$$

Per ottenere la percentuale meccanica di armatura corrispondente alla retta di frontiera "g" si parte dall'equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale espressa in forma adimensionalizzata. Le forze in gioco sono:

- C , risultante della distribuzione delle tensioni di compressione agenti sulla porzione compressa di calcestruzzo;
- S' , risultante delle tensioni di compressione agenti sull'armatura superiore;
- S , risultante delle tensioni di trazione agenti sull'armatura inferiore;

Tenendo conto delle considerazioni fatte in precedenza riguardanti i livelli di deformazione raggiunti da calcestruzzo, armatura superiore e armatura inferiore, l'espressione della forza C risulta essere:

$$\begin{aligned} C &= \beta_1 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot x^{(f)} = \\ &= \left(1 - \frac{\varepsilon_{c2}}{3\varepsilon_{cu}}\right) \cdot f_{cd} \cdot b \cdot x^{(f)} \end{aligned}$$

Dato che $\varepsilon_{cu} = 3.5\text{‰}$ e che $\varepsilon_{c2} = 2.0\text{‰}$, risulta $\beta_1 = 0.81$, perciò:

$$C = 0.81 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot \xi^{(g)} \cdot h \quad (2.65)$$

L'armatura superiore è tesa ed è snervata e lavora ad una tensione pari a f_{yd} . L'espressione della forza S' risulta essere:

$$S' = A'_s \cdot f_{yd}$$

Introducendo la percentuale meccanica di armatura compressa $\omega' = \frac{A'_s f_{yd}}{b h f_{cd}}$:

$$S' = \omega' \cdot b h f_{cd} \quad (2.66)$$

L'espressione della forza S risulta essere:

$$S = A_s^{(f)} \cdot \sigma_s(\varepsilon_s)$$

Introducendo la percentuale meccanica di armatura tesa $\omega^{(f)} = \frac{A_s^{(f)} f_{yd}}{b h f_{cd}}$:

$$S = \omega^{(g)} \cdot k \cdot b h f_{cd} \quad (2.67)$$

Per l'equilibrio:

$$C + S' - S = 0$$

$$0.81 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot \xi^{(g)} \cdot h + \omega' \cdot b h f_{cd} - \omega^{(g)} \cdot k \cdot b h f_{cd} = 0$$

$$\omega^{(g)} \cdot k = 0.81 \cdot \xi^{(g)} + \omega'$$

Ponendo $\psi_A = \frac{A'_s}{A_s^{(g)}}$, rapporto di armatura, è possibile scrivere:

$$\omega' = \psi_A \cdot \omega^{(g)}$$

L'equilibrio diventa quindi:

$$\omega^{(g)} \cdot k = 0.81 \cdot \xi^{(g)} + \psi_A \cdot \omega^{(g)}$$

Da cui:

$$\omega^{(g)}(k - \psi_A) = 0.81 \cdot \xi^{(g)}$$

Sostituendo la (2.64) si ottiene:

$$\omega^{(g)} = 0.81 \cdot \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c + \varepsilon_{ud}} \cdot \frac{1}{k - \psi_A} \quad (2.68)$$

Applicando l'equilibrio alla rotazione attorno all'armatura inferiore è possibile determinare il momento resistente, in forma adimensionale, corrispondente alla retta di frontiera "g" tra i campi di rottura 2a e 2b.

$$M_{Rd} = C(h - \beta_2 \cdot x^{(g)}) + S'(h - \Delta')$$

$$M_{Rd} = 0.81 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot x^{(g)}(h - \beta_2 \cdot x^{(g)}) + \psi_A \cdot A_s^{(g)} \cdot f_{yd}(h - \Delta')$$

Per adimensionalizzare l'espressione è necessario dividere tutti i termini per un gruppo tale che abbia dimensioni fisiche uguali a quelle di un momento, [F][L]. Convenientemente con il ragionamento adottato fino a questo momento, si adotta il gruppo $bh^2 f_{cd}$. Perciò:

$$\frac{M_{Rd}}{bh^2 f_{cd}} = \frac{0.81 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot x^{(g)}}{bh^2 f_{cd}}(h - \beta_2 \cdot x^{(g)}) + \frac{\psi_A \cdot A_s^{(g)} \cdot f_{yd}}{bh^2 f_{cd}}(h - \Delta')$$

$$m_{rd} = 0.81 \cdot \xi^{(g)}(1 - \beta_2 \cdot \xi^{(g)}) + \psi_A \cdot \omega^{(g)}(1 - \delta')$$

Sostituendo la (2.64) e la (2.68):

$$m_{rd} = 0.81 \cdot \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c + \varepsilon_{ud}} \left(1 - \beta_2 \cdot \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c + \varepsilon_{ud}}\right) + \psi_A \cdot 0.81 \cdot \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c + \varepsilon_{ud}} \cdot \frac{1}{k - \psi_A} (1 - \delta')$$

In conclusione:

$$m_{rd}^{(g)} = 0.81 \cdot \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c + \varepsilon_{ud}} \left[1 - \beta_2 \cdot \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c + \varepsilon_{ud}} + \psi_A \frac{(1 - \delta')}{k - \psi_A} \right] \quad (2.69)$$

2.4.2 Duttività

La letteratura [5], in genere, non estende il concetto di campi di rottura alla valutazione della duttilità sezionale, data la variabilità con cui essa si può manifestare. Tuttavia, in presenza di condizioni fisse dei livelli di deformazione del calcestruzzo, riscontrabili in sezioni tipicamente non confinate, l'approccio finora seguito, che si presta ad essere automatizzato, rende percorribile l'opportunità di valutare la duttilità delle sezioni in c.a. associata alle rette di frontiera dei campi di rottura.

Come noto, il fattore di duttilità in curvatura μ_φ rappresenta una misura della duttilità a livello sezionale. Questo parametro è una misura indiretta della duttilità offerta dalla sezione, ottenuta come rapporto tra la curvatura ultima della sezione, corrispondente alla condizione di collasso, φ_u , e la curvatura della sezione corrispondente al limite elastico, anche nota come curvatura di prima plasticizzazione, φ_y . La curvatura ultima è definita come:

$$\varphi_u = \frac{\varepsilon_{cu}}{x_u} = \frac{\varepsilon_{cu}}{h \cdot \xi_u} \quad (2.70)$$

La curvatura al limite elastico è definita come:

$$\varphi_y = \frac{\varepsilon_{yd}}{h - x_y} = \frac{\varepsilon_{yd}}{h} \cdot \frac{1}{1 - \xi_y} \quad (2.71)$$

Per determinare la profondità dell'asse neutro in un caso e nell'altro, si parte dall'equilibrio alla traslazione orizzontale nella condizione di collasso nel primo caso e nella condizione di limite elastico nel secondo caso.

Nella condizione di collasso la configurazione deformata e la distribuzione tensionale si presenta come segue:

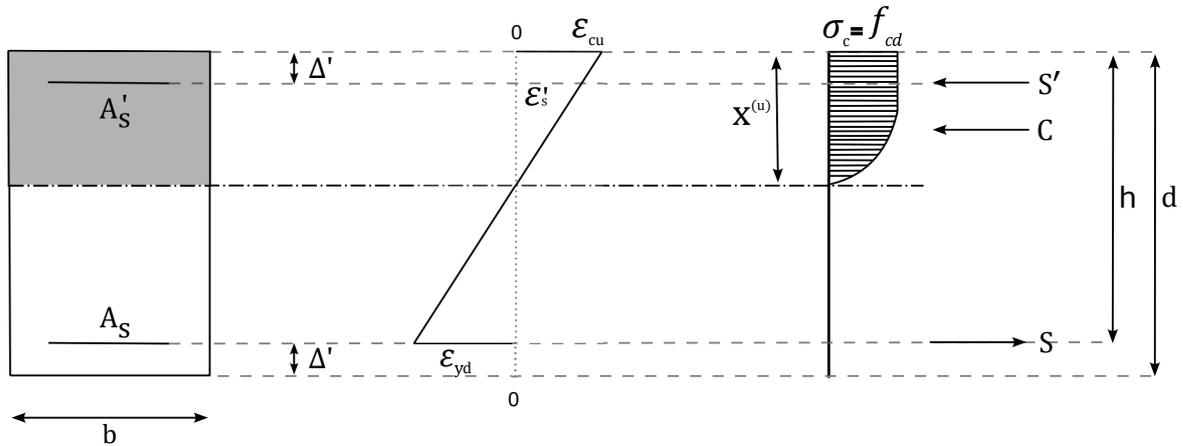


Figura 2.21 - Configurazione deformata e distribuzione tensionale corrispondente alla condizione di collasso

Come si osserva, la tensione al lembo più compresso è pari a f_{cd} , cui corrisponde una deformazione pari a ε_{cu} mentre la tensione in corrispondenza dell'armatura inferiore è pari a f_{yd} , cui corrisponde una deformazione pari a ε_{yd} , assumendo quindi che l'armatura inferiore sia snervata; per quanto riguarda l'armatura superiore, invece, è possibile fare distinzione tra il caso in cui sia snervata e il caso in cui invece sia ancora in fase elastica.

Nel caso di armatura superiore snervata:

$$\varepsilon'_s = \varepsilon_{yd}$$

$$\sigma'_s = f_{yd}$$

Quindi le risultanti agenti sulla sezione risultano essere:

$$C = \beta_1 f_{cd} b h \xi_u$$

$$S = A_s \cdot f_{yd} \cdot \frac{b h f_{cd}}{b h f_{cd}} = \omega b h f_{cd}$$

$$S' = A'_s \cdot f_{yd} \cdot \frac{b h f_{cd}}{b h f_{cd}} = \omega' b h f_{cd}$$

Per l'equilibrio alla traslazione orizzontale:

$$C + S' - S = 0$$

$$\beta_1 f_{cd} b h \xi_u + \omega' b h f_{cd} - \omega b h f_{cd} = 0$$

$$\beta_1 \xi_u + \omega' - \omega = 0$$

Introducendo $\psi_A = \frac{A'_s}{A_s}$ è possibile scrivere $\omega' = \psi_A \cdot \omega$, quindi:

$$\beta_1 \xi_u + \psi_A \omega - \omega = 0$$

Da cui:

$$\xi_u = \frac{\omega(1 - \psi_A)}{\beta_1} \quad (2.72)$$

Nel caso di armatura superiore in fase elastica:

$$\varepsilon'_s < \varepsilon_{yd}$$

Questo significa che l'armatura non lavora a f_{yd} , ma ad un livello tensionale inferiore, pari a:

$$\sigma'_s = \eta \cdot f_{yd}$$

dove η definisce il livello di sforzo in relazione allo snervamento e, in condizioni di rottura duttile, risulta:

$$\eta = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} \cdot \frac{\xi_u - \delta'}{x_{iu}}$$

Quindi le risultanti agenti sulla sezione risultano essere:

$$C = \beta_1 f_{cd} b h \xi_u$$

$$S = A_s f_{yd} \frac{b h f_{cd}}{b h f_{cd}} = \omega b h f_{cd}$$

$$S' = A'_s \gamma f_{yd} \frac{b h f_{cd}}{b h f_{cd}} = \omega' \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} \frac{\xi_u - \delta'}{x_{iu}} b h f_{cd}$$

Per l'equilibrio alla traslazione orizzontale:

$$C + S' - S = 0$$

$$\beta_1 f_{cd} b h \xi_u + \omega' \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} \frac{\xi_u - \delta'}{x_{iu}} b h f_{cd} - \omega b h f_{cd} = 0$$

$$\beta_1 \xi_u + \omega' \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} \frac{\xi_u - \delta'}{x_{iu}} - \omega = 0$$

Introducendo $\psi_A = \frac{A'_s}{A_s}$ è possibile scrivere $\omega' = \psi_A \cdot \omega$, quindi:

$$\beta_1 \xi_u + \psi_A \omega \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} \frac{\xi_u - \delta'}{x_{iu}} - \omega = 0$$

$$\beta_1 \xi_u^2 + \psi_A \omega \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} (\xi_u - \delta') - \omega \xi_u = 0$$

$$\beta_1 \xi_u^2 + \psi_A \omega \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} \xi_u - \omega \psi_A \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} \delta' - \omega \xi_u = 0$$

$$\frac{\beta_1}{\omega} \cdot \xi_u^2 + \xi_u \left[\psi_A \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} - 1 \right] - \psi_A \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} - \psi_A \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} \delta' = 0$$

Da cui la profondità dell'asse neutro risulta essere la soluzione positiva a questa equazione di secondo grado:

$$\xi_u = \frac{(1 - \psi_A \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}}) \pm \sqrt{(\psi_A \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} - 1)^2 + 4 \frac{\beta_1}{\omega} \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} \delta'}}{2 \frac{\beta_1}{\omega}} \quad (2.73)$$

Considerando la (2.73) e la (2.72), si osserva che i parametri che ne influenzano i valori sono la percentuale meccanica di armatura ω e il rapporto di armatura ψ_A .

Nella condizione di limite elastico la configurazione deformata e la distribuzione tensionale si presenta come segue:

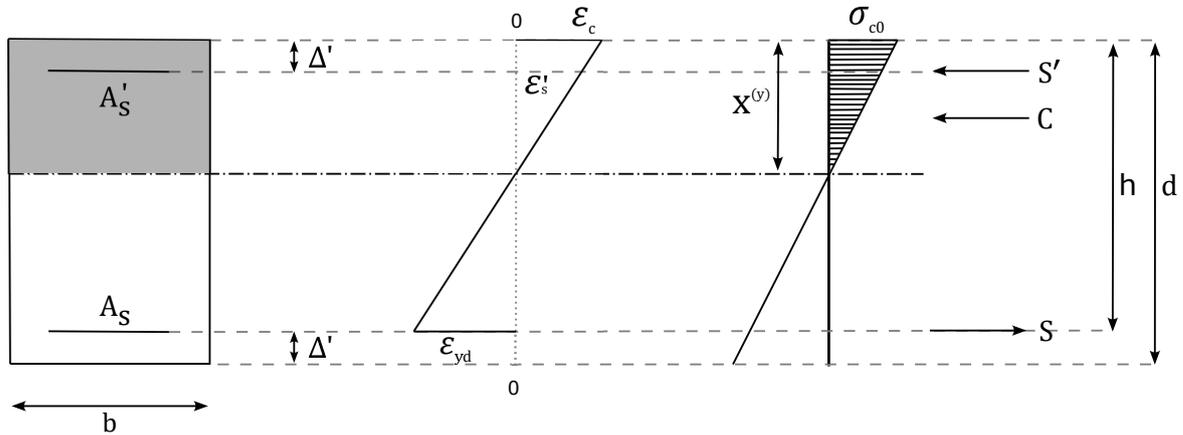


Figura 2.22 - Configurazione deformata e distribuzione tensionale corrispondente alla condizione di limite elastico

Come si osserva, la tensione al lembo più compresso è pari a σ_{c0} , supposta inferiore a f_{cd} , cui corrisponde una deformazione pari a ϵ_c , mentre la tensione in corrispondenza dell'armatura inferiore è pari a f_{yd} , cui corrisponde una deformazione pari a ϵ_{yd} . La distribuzione tensionale sul calcestruzzo si ipotizza di tipo lineare. Le risultanti agenti sulla sezione risultano essere:

$$C = b \int_0^{x_y} \sigma_c(x) dx$$

Considerando la distribuzione tensionale e la proporzione tra triangoli simili:

$$\frac{\sigma_{c0}}{x_y} = \frac{\sigma_c(x)}{x} \longrightarrow \sigma_c(x) = \sigma_{c0} \cdot \frac{x}{x_y}$$

La tensione del calcestruzzo all'altezza della generica fibra è funzione della massima tensione al lembo più compresso:

$$C = b \int_0^{x_y} \sigma_{c0} \cdot \frac{x}{x_y} dx =$$

$$\begin{aligned}
 &= b \frac{\sigma_{c0}}{x_y} \int_0^{x_y} x \, dx = \\
 &= b \frac{\sigma_{c0}}{x_y} \frac{x_y^2}{2}
 \end{aligned}$$

Considerazioni sulle proporzioni tra triangoli simili sono utili anche per determinare la tensione sull'armatura, che è proporzionale alla tensione sul calcestruzzo allo stesso livello, amplificata del rapporto tra i moduli n .

$$S = A_s \cdot \sigma_s = A_s \cdot n \frac{\sigma_{c0}}{x_y} (h - x_y)$$

$$S' = A'_s \cdot \sigma'_s = A'_s \cdot n \frac{\sigma_{c0}}{x_y} (x_y - \Delta')$$

Per l'equilibrio alla traslazione orizzontale:

$$C + S' - S = 0$$

$$b \frac{\sigma_{c0}}{x_y} \frac{x_y^2}{2} + A'_s n \frac{\sigma_{c0}}{x_y} (x_y - \Delta') - A_s n \frac{\sigma_{c0}}{x_y} (h - x_y) = 0$$

Introducendo $\psi_A = \frac{A'_s}{A_s}$ è possibile scrivere $\omega' = \psi_A \cdot \omega$, quindi:

$$b \frac{x_y^2}{2} + A_s \psi_A n (x_y - \Delta') - A_s n (h - x_y) = 0$$

Per ottenere un'espressione adimensionale è necessario dividere ogni termine dell'equazione per un gruppo che abbia dimensioni fisiche $[L]^3$, come il gruppo bh^2 .

$$\frac{b}{bh^2} \frac{x_y^2}{2} + \frac{A_s}{bh^2} \psi_A n (x_y - \Delta') - \frac{A_s}{bh^2} n (h - x_y) = 0$$

Introducendo $\rho = \frac{A_s}{bh}$, percentuale geometrica di armatura è possibile scrivere:

$$\frac{1}{2} \xi_y^2 + \rho \psi_A n (\xi_y - \delta') - \rho n (1 - \xi_y) = 0$$

$$\frac{1}{2}\xi_y^2 + \rho\psi_A n \xi_y - \rho\psi_A n \delta' - \rho n + \rho\xi_y = 0$$

$$\frac{1}{2}\xi_y^2 + \xi_y \rho n - \rho\psi_A n \delta' - \rho n + \rho\xi_y = 0$$

Da cui:

$$\xi_y = \rho n (1 + \psi_A) \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2}{\rho n} \frac{(1 + \psi_A \delta')^2}{1 + \psi_A}} \right] \quad (2.74)$$

Affinchè il calcestruzzo sia in fase elastica, come ipotizzato all'inizio della trattazione, la massima deformazione raggiunta al lembo più compresso ε_{c0} deve risultare inferiore alla deformazione corrispondente all'inizio del tratto plastico ε_{c2} , nella legge costitutiva parabola-rettangolo adottata per il calcestruzzo. Inoltre, analizzando la configurazione deformata al limite elastico di Fig. 2.22 è possibile scrivere:

$$\frac{\varepsilon_{c0}}{x_y} = \frac{\varepsilon_{c0} + \varepsilon_{yd}}{h}$$

$$\varepsilon_{c0} = x_y \frac{(\varepsilon_{c0} + \varepsilon_{yd})}{h}$$

$$\varepsilon_{c0} \left(1 - \frac{x_y}{h}\right) = \varepsilon_{yd} \frac{x_y}{h}$$

$$\varepsilon_{c0} (1 - \xi_y) = \varepsilon_{yd} \cdot \xi_y$$

$$\varepsilon_{c0} = \varepsilon_{yd} \cdot \frac{\xi_y}{1 - \xi_y} < \varepsilon_{c2}$$

$$\frac{\varepsilon_{yd}}{\varepsilon_{c2}} \cdot \frac{\xi_y}{1 - \xi_y} < 1 \quad (2.75)$$

La (2.75) risulta la condizione da soddisfare affinché, quando l'armatura è snervata al limite elastico, il calcestruzzo sia ancora in fase elastica.

In generale, per valori di ξ_y che oscillano tra 0 e 1, la funzione $\frac{\varepsilon_{yd}}{\varepsilon_{c2}} \cdot \frac{\xi_y}{1 - \xi_y} = f(\xi)$ ha andamento come riportato in figura:

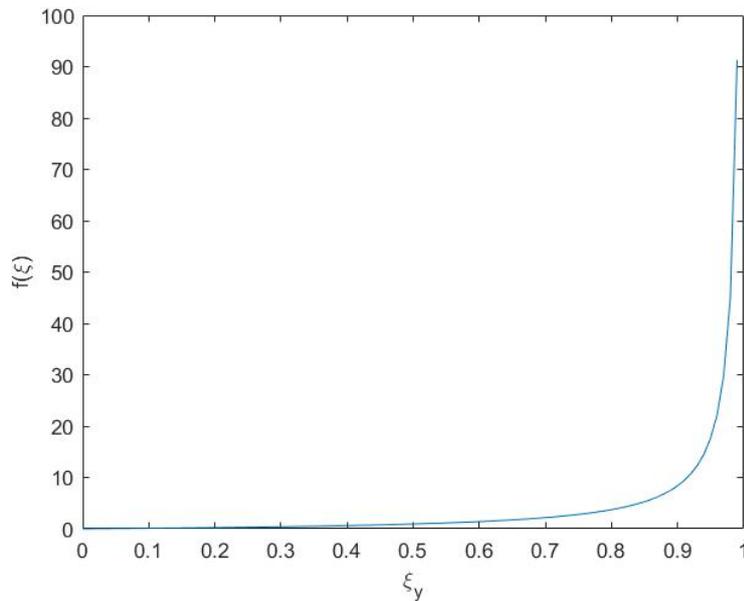


Figura 2.23 - Andamento della funzione $f(\xi)$ in funzione della profondità dell'asse neutro ξ_y

Si osserva che $f(\xi)$ supera di molto il valore di 1, che è il valore di interesse affinché il calcestruzzo resti in fase elastica. Perché non si superi l'unità, la profondità dell'asse neutro deve aggirarsi attorno al valore 0.51, o comunque non superarlo.

Considerando la (2.74), si osserva che i parametri che ne influenzano i valori sono la percentuale geometrica di armatura ρ e il rapporto di armatura ψ_A . In particolare, se si tiene conto delle limitazioni imposte da normativa [1] sui quantitativi minimi di armatura in zona sismica:

$$\frac{1.4}{f_{yk}} < \rho < \rho' + \frac{3.5}{f_{yk}}$$

Considerando una generica sezione rettangolare di base 300 mm e altezza 450 mm, con un'altezza meccanica di 400 mm: in corrispondenza del limite inferiore, $\xi_y = 0.204$; in corrispondenza del limite superiore, tenendo conto che nelle zone dissipative deve essere $\rho' > 0.5\rho$, $\xi_y = 0.474$.

In entrambi i casi, fissata la percentuale geometrica di armatura, note le dimensioni della sezione e ricavando i quantitativi di armatura, la funzione $f(\xi)$, in corrispondenza di suddetti valori di ξ_y , è rispettosa della (2.75), per cui si può affermare che in condizioni di limite elastico, quando l'armatura inferiore è snervata, il calcestruzzo è

ancora in fase elastica.

Osserviamo ora come varia la funzione $f(\xi)$ per diversi valori di ψ_A , nel range di interesse della percentuale geometrica di armatura.

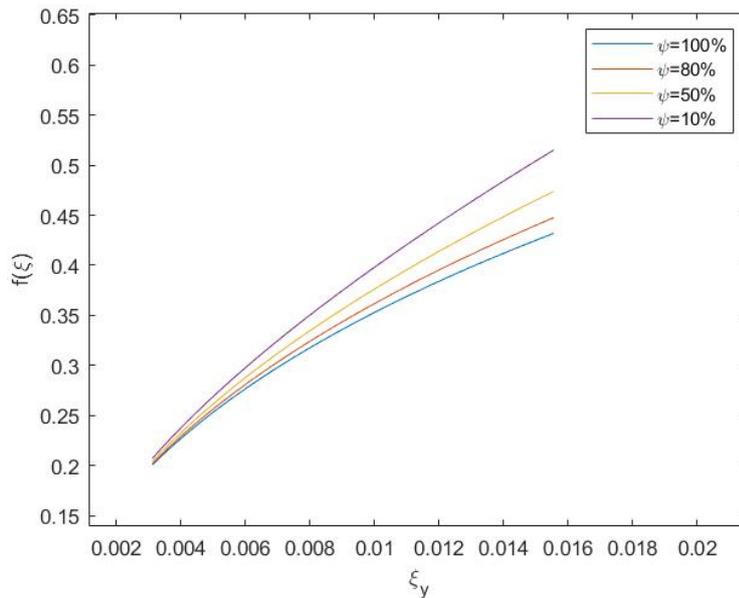


Figura 2.24 - Andamento della funzione $f(\xi)$ in funzione della profondità dell'asse neutro ξ_y al variare di ψ_A

Al diminuire della percentuale geometrica di armatura la funzione $f(\xi)$ si avvicina sempre più all'unità ma si resta comunque entro la condizione di elasticità. Osserviamo ora in che modo l'armatura compressa influenza la curvatura al limite elastico e la curvatura ultima, espresse in termini adimensionali.

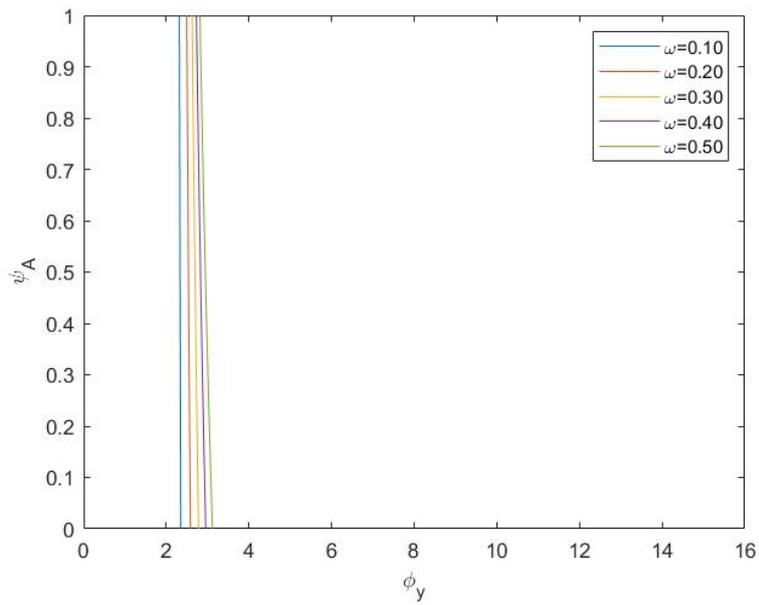


Figura 2.25 - *Influenza dell'armatura compressa sulla curvatura allo snervamento*

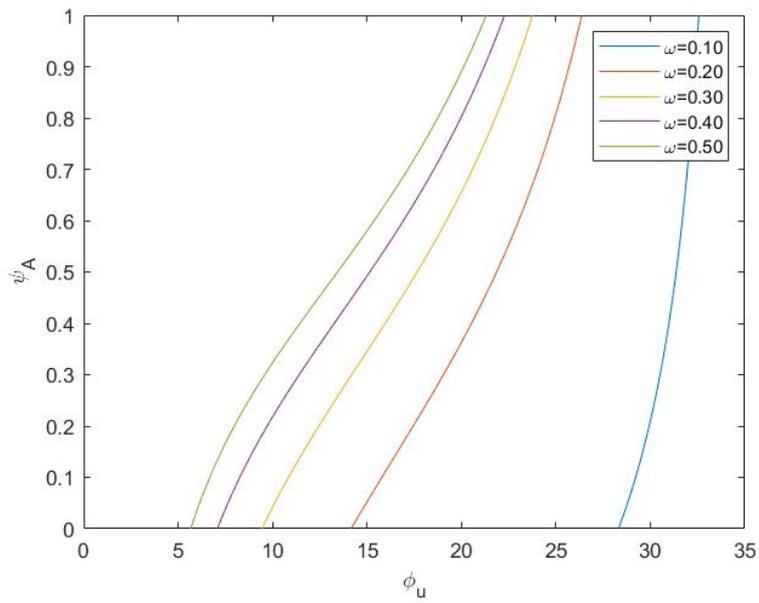


Figura 2.26 - *Influenza dell'armatura compressa sulla curvatura ultima quando è in fase elastica*

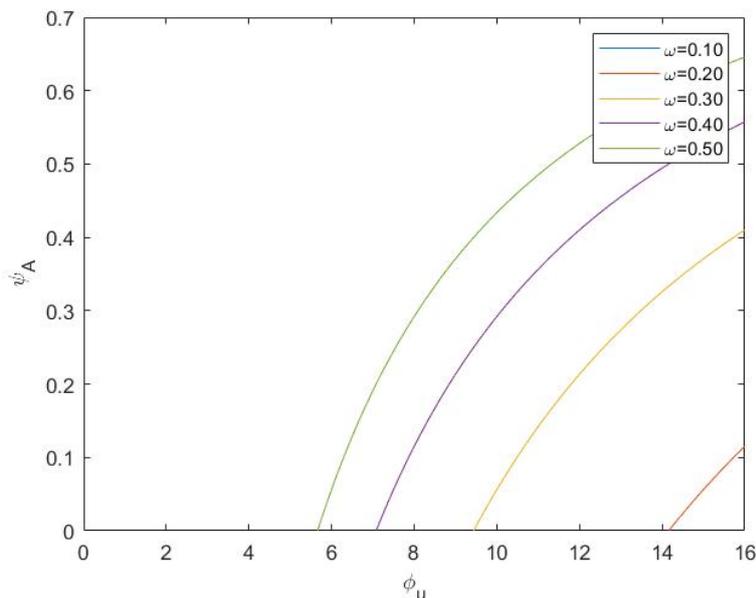


Figura 2.27 - Influenza dell'armatura compressa sulla curvatura ultima quando è snervata

Come è semplice constatare dalla Fig. 2.25, la curvatura allo snervamento è pressoché indipendente dall'armatura compressa ed è solo marginalmente influenzata dall'armatura tesa, infatti le curve sono pressoché verticali.

Dalla Fig. 2.26 e dalla Fig. 2.27, a parità di armatura tesa, la quantità di armatura compressa può modificare anche radicalmente la curvatura ultima della sezione, e tale proprietà è tanto più marcata quanto maggiore è la percentuale meccanica ω di armatura tesa.

Nota la (2.72) (o (2.73)) e la (2.74) è possibile determinare il fattore di duttilità in curvatura come segue:

$$\mu_{\varphi} = \frac{\varphi_u}{\varphi_y} = \frac{\varepsilon_{cu}}{x_u} \cdot \frac{(h - x_y)}{\varepsilon_y d} = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} \cdot \frac{(1 - \xi_y)}{\xi_u} \quad (2.76)$$

Osserviamo ora in che modo l'armatura tesa e l'armatura compressa influenzano il fattore di duttilità in curvatura di una sezione inflessa.

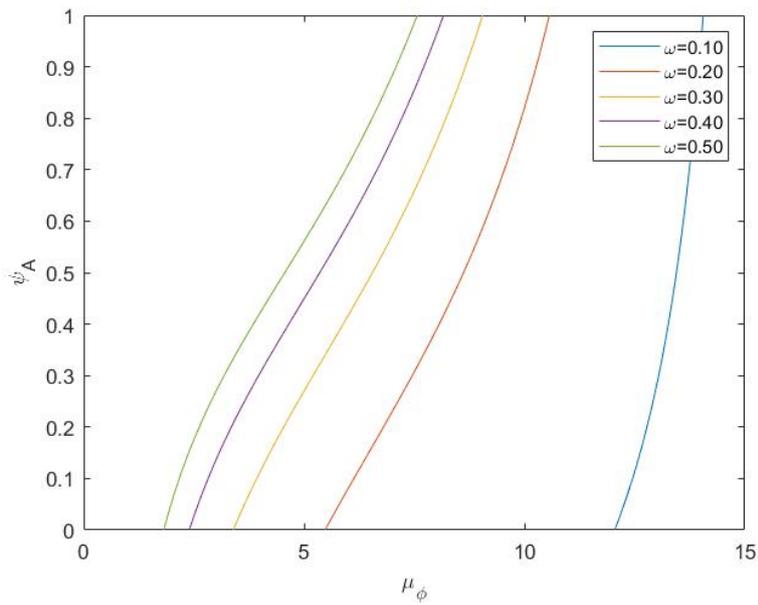


Figura 2.28 - *Influenza dell'armatura compressa sulla duttilità in curvatura quando è in fase elastica*

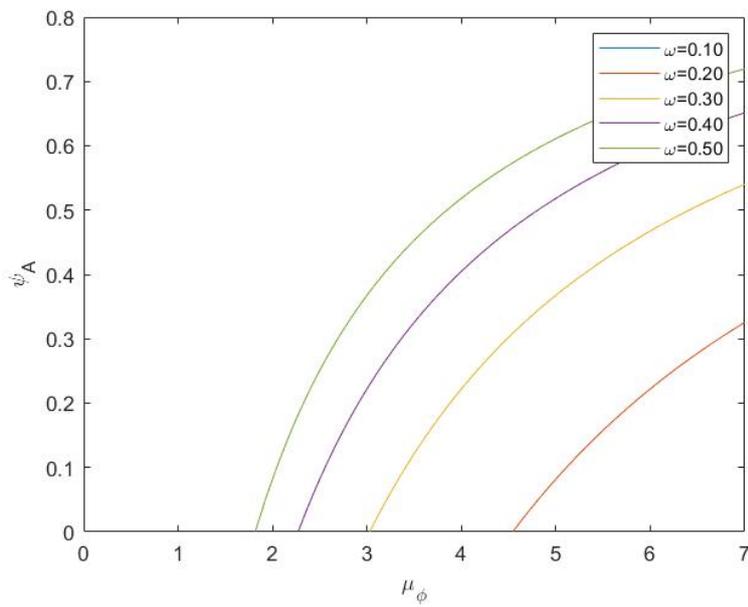


Figura 2.29 - *Influenza dell'armatura compressa sulla duttilità in curvatura quando è snervata*

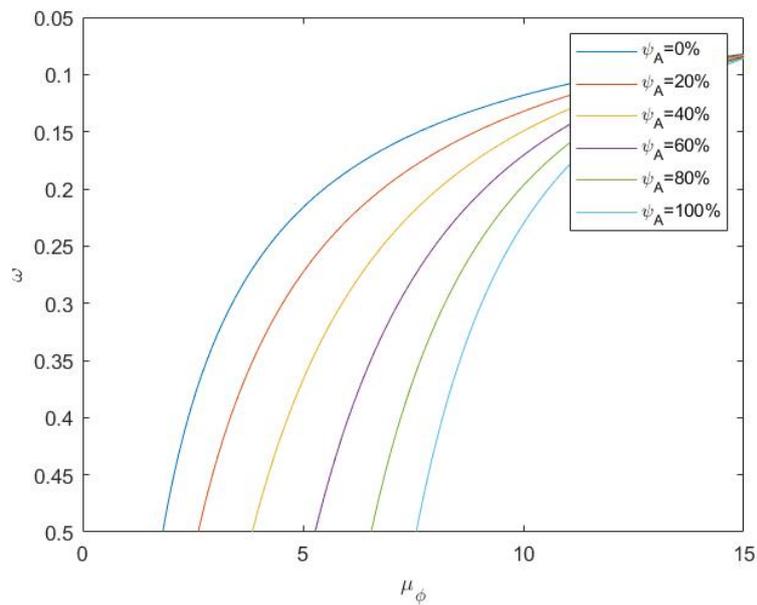


Figura 2.30 - *Influenza dell'armatura tesa sulla duttilità in curvatura quando è in fase elastica*

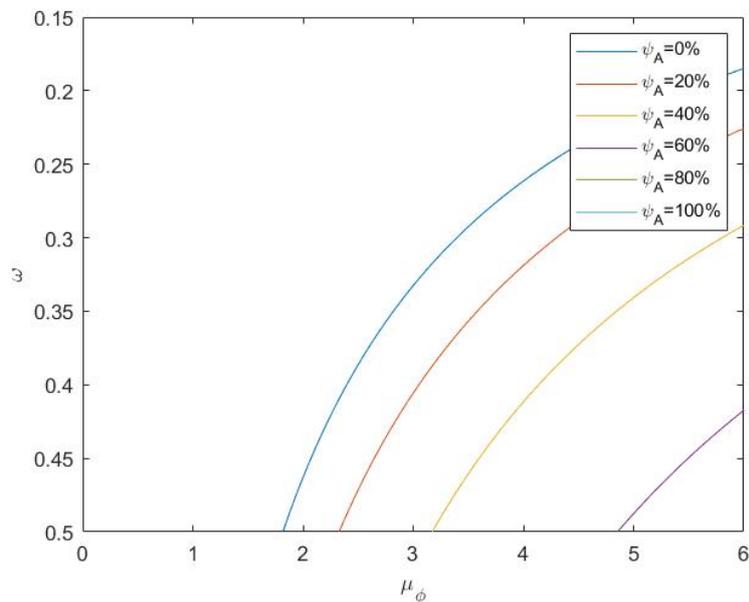


Figura 2.31 - *Influenza dell'armatura tesa sulla duttilità in curvatura quando è snervata*

Da Fig. 2.28, Fig. 2.29, Fig. 2.30, Fig. 2.31, si evince che a parità di armatura tesa, il fattore di duttilità in curvatura di una sezione inflessa può essere governa-

to, entro certi limiti, da un adeguato impiego di armatura compressa. Inoltre, le sezioni debolmente armate sono dotate di elevata duttilità intrinseca, che può essere limitatamente incrementata dall'impiego di armatura compressa, mentre le sezioni fortemente armate presentano bassa duttilità in armatura semplice, che può essere sensibilmente migliorata con l'impiego di armature equivalenti in zona compressa.

2.4.3 Tabelle di progetto e verifica

Di seguito le tabelle riassuntive che raccolgono i risultati ottenuti, il calcolo di percentuale meccanica di armatura, momento resistente e fattore di duttilità in curvatura (in condizioni di armatura compressa elastica e snervata) per diversi valori di percentuale di armatura.

Tabella 2.1 - *Tabella riassuntiva: coefficiente di riempimento, coefficiente di posizione della risultante di compressione, posizione dell'asse neutro*

Retta	β_1	β_2	ξ
"a"	0.80952	0.41597	0.65299
"b"	0.80952	0.41597	0.60976
"c"	0.80952	0.41597	0.50295
"d"	0.80952	0.41597	0.04353
"e"	0.80952	0.41597	0.14288
"f"	0.72917	0.45	0.45002
"g"	0.80952	0.41597	0.93082

1

¹Le tabelle sono costruite facendo riferimento ad una sezione caratterizzata da una posizione del baricentro delle armature $\lambda = 0.07$, valore che ricorre nella maggior parte dei casi reali.

²Armatura compressa elastica

³Armatura compressa snervata

Tabella 2.2 - *Tabella riassuntiva: parametri adimensionali particolarizzati per le rette di frontiera "a", "b", "c"*

Retta	ψ_A				
	0.25	0.5	0.75	1	
"a"	ω	0.70522	1.05784	2.11567	/
	m_{rd}	0.54979	0.87890	1.86621	/
	ξ_y	0.57396	0.56158	0.54804	/
	ξ_u^2	1.11538	0.41823	0.18648	/
	ξ_u^3	0.65337	0.65337	0.65337	/
	μ_φ^2	0.71875	1.97255	4.56056	/
	μ_φ^3	1.22699	1.26265	1.30166	/
"b"	ω	0.5199	0.70557	1.09756	2.46951
	m_{rd}	0.48993	0.69789	1.13691	2.67350
	ξ_y	0.53316	0.52321	0.51243	0.50081
	ξ_u^2	1.11538	0.41823	0.18648	0.13234
	ξ_u^3	0.48167	0.43580	0.33895	0
	μ_φ^2	0.78759	2.14518	4.91986	7.09772
	μ_φ^3	1.82378	2.05871	2.70676	/
"c"	ω	0.00022	0.00022	0.00022	0.00022
	m_{rd}	0.32221	0.32227	0.32234	0.32240
	ξ_y	0.01845	0.01856	0.01867	0.01878
	ξ_u^2	1.11538	0.41823	0.18648	0.13234
	ξ_u^3	0.00020	0.00014	0.00007	0
	μ_φ^2	1.65594	4.41573	9.90219	13.95132
	μ_φ^3	/	/	/	/

Tabella 2.3 - *Tabella riassuntiva: parametri adimensionali particolarizzati per le rette di frontiera "d", "e", "f", "g"*

	ω	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	m_{rd}	0.03462	0.03462	0.03462	0.03462
	ξ_y	0.00116	0.00117	0.00118	0.00119
"d"	ξ_u^2	1.11538	0.41823	0.18648	0.13234
	ξ_u^3	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	μ_φ^2	1.68511	4.49397	10.07870	14.20145
	μ_φ^3	/	/	/	/
	ω	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001
	m_{rd}	0.10843	0.10843	0.10843	0.10843
	ξ_y	0.00401	0.00404	0.00407	0.00410
"e"	ξ_u^2	1.11538	0.41823	0.18648	0.13234
	ξ_u^3	0.00001	0.00001	0.00000	0.00000
	μ_φ^2	1.68031	4.48107	10.04955	14.16008
	μ_φ^3	/	/	/	/
	ω	0.22630	0.19302	0.16828	0.14915
	m_{rd}	0.20888	0.17161	0.14389	0.12248
	ξ_y	0.41790	0.37605	0.34344	0.31724
"f"	ξ_u^2	1.11538	0.41823	0.18648	0.13234
	ξ_u^3	0.23277	0.13236	0.05769	0.00000
	μ_φ^2	0.98205	2.80731	6.62507	9.70776
	μ_φ^3	4.70578	8.87065	21.41374	/
	ω	0.79365	1.07709	1.67548	3.76983
	m_{rd}	0.64722	0.96468	1.63487	3.98054
	ξ_y	0.58920	0.56316	0.53700	0.51114
"g"	ξ_u^2	1.11538	0.41823	0.18648	0.13234
	ξ_u^3	0.73529	0.66526	0.51743	0.00000
	μ_φ^2	0.69306	1.96547	4.67192	6.95083
	μ_φ^3	1.05131	1.23563	1.68377	/

2.4.4 Considerazioni

Il metodo di verifica proposto non è applicabile nel caso di sezione con armature simmetriche entrambe snervate, nella condizione in cui un'armatura è compressa e l'altra è tesa, in quanto nell'equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale il contributo delle risultanti di trazione e compressione nell'acciaio si elide, facendo comparire come unico contributo quello del calcestruzzo compresso. Infatti, le equazioni ottenute dimostrano che, in questi casi, il risultato diverge quando il rapporto di armatura ψ_A assume valore pari a 1. Ciò porta alla considerazione che l'automatismo ricercato possa trovare applicazione in un numero limitato di casi.

In ultimo, la precedente trattazione si basa sull'assumere i valori di deformazione per il calcestruzzo fissi e pari a 3.5‰ e 2.0‰ per ϵ_{cu} e ϵ_{c2} rispettivamente. Tale assunzione, se risulta congruente con la normativa per quanto riguarda le valutazioni di resistenza, non pare generalizzabile per le valutazioni di duttilità, per le quali sarebbe più opportuno svincolare la trattazione da suddetti valori in quanto, soprattutto in presenza di tecniche di confinamento, la deformazione ultima e la deformazione al limite elastico possono essere soggette a forti variazioni.

Per questo motivo, nel successivo capitolo si tratterà la duttilità indipendentemente dalle precedenti ipotesi.

2.5 Problema di verifica per flessione composta

Nel caso di flessione composta, si ha l'azione combinata della flessione e dello sforzo assiale, il quale condiziona il tipo di meccanismo di collasso (schiacciamento del calcestruzzo o cedimento delle armature) [5]. Lo stato limite della sezione può essere raggiunto per infinite coppie di valori (N,M) che corrispondono alla "curva di frontiera" della sezione. La regione interna alla curva è detta "dominio di resistenza" e corrisponde a coppie di valori sopportate dalla sezione, mentre i punti esterni rappresentano coppie di sollecitazioni che non riescono ad essere equilibrate dalla sezione e, pertanto, sollecitazioni di collasso. Nel caso di sezione soggetta a pressoflessione, la verifica di resistenza allo Stato Limite Ultimo si esegue controllando che il momento resistente offerto dalla sezione, corrispondente allo sforzo assiale agente $M_{Rd}(N_{Ed})$, sia maggiore del momento agente dovuto ai carichi

di progetto M_{Ed} e cioè:

$$M_{Ed}(N_{Ed}) \leq M_{Rd} \quad (2.77)$$

ammesso che N_{Ed} non superi i valori del massimo sforzo normale per trazione e compressione. Le resistenze di calcolo per sollecitazioni di pressoflessione abbracciano l'intero dominio delle deformazioni, dal campo 1 al campo 5.

L'azione combinata di flessione e sforzo assiale è caratteristica degli elementi verticali, quali i pilastri, in quanto soggetti a carichi non perfettamente centrati o momenti di estremità delle travi non bilanciati. Per questo motivo, la seguente trattazione riguarderà sezioni rettangolari riconducibili a pilastri con armatura simmetrica [4].

Il calcolo non differisce di molto dal precedente, riguardante la sollecitazione di flessione semplice. In realtà, la differenza sostanziale è che, nel caso della flessione semplice, il fattore discriminante per i meccanismi di collasso era la percentuale meccanica di armatura tesa, mentre nel caso di sollecitazione di pressoflessione, lo stesso fattore discriminante è lo sforzo assiale adimensionalizzato n .

2.5.1 Rette di frontiera

Così come per la flessione semplice, si analizzano le rette che separano i campi di rottura, e si particolarizzano queste rette di frontiera in termini di equazioni relative al coefficiente di riempimento, al coefficiente di posizione della risultante di compressione, al coefficiente di posizione dell'asse neutro e allo sforzo normale adimensionale, al fine di ricavare una tabella riassuntiva utile al progetto e alla verifica delle sezioni in c.a.

Per ragioni di spazio, e considerato che il procedimento è uguale a quello seguito nei casi di flessione semplice, la trattazione si ferma alla caratterizzazione delle rette di frontiera nei riguardi dello sforzo assiale.

Retta "a"

La retta "a" è una retta verticale e rappresenta la frontiera del campo 1. La configurazione deformata di collasso corrispondente alla retta di frontiera del campo 1 vede la sezione interamente tesa e le armature in corrispondenza di una deformazione pari a ε_{ud} .

Osservando la configurazione deformata, è possibile ricavare la profondità dell'asse neutro che porta a collasso:

$$x^{(a)} = 0$$

E di conseguenza, la posizione adimensionalizzata dell'asse neutro è:

$$\xi^{(a)} = 0 \quad (2.78)$$

Per ottenere lo sforzo assiale adimensionale corrispondente alla retta di frontiera "a" si parte dall'equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale espressa in forma adimensionalizzata. La sezione è interamente tesa, quindi l'espressione della forza C risulta essere:

$$C = 0 \quad (2.79)$$

L'espressione della forza S' risulta essere:

$$S' = A'_s \cdot k f_{yd} \quad (2.80)$$

L'espressione della forza S risulta essere:

$$S = A_s \cdot k f_{yd} \quad (2.81)$$

Per l'equilibrio:

$$C - S' - S = N^{(a)}$$

Introducendo la percentuale meccanica di armatura $\omega = \frac{A_s f_{yd}}{b h f_{cd}}$ e il rapporto di armatura ψ_A , e dividendo tutti i membri dell'equazione per il gruppo $b h f_{cd}$ è possibile scrivere:

$$\frac{N^{(a)}}{b h f_{cd}} = -\frac{A'_s \cdot k f_{yd}}{b h f_{cd}} - \frac{A_s \cdot k f_{yd}}{b h f_{cd}}$$

$$n^{(a)} = -\omega' k - \omega k$$

$$n^{(a)} = -k \omega (\psi_A + 1) \quad (2.82)$$

Retta "b"

La retta "b" è la retta di frontiera tra campo 1 e campo 2. La configurazione deformata di collasso corrispondente alla retta di frontiera tra campo 1 e campo 2 vede la sezione interamente tesa, l'armatura inferiore in corrispondenza di una deformazione pari a ε_{ud} , mentre l'armatura superiore è in corrispondenza di una deformazione ε'_s che si può determinare tramite proporzione tra triangoli simili. Osservando la configurazione deformata, è possibile ricavare la profondità dell'asse neutro che porta a collasso:

$$x^{(b)} = 0$$

E di conseguenza, la posizione adimensionalizzata dell'asse neutro è:

$$\xi^{(b)} = 0 \quad (2.83)$$

Per ottenere lo sforzo assiale adimensionale corrispondente alla retta di frontiera "b" si parte dall'equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale espressa in forma adimensionalizzata. La sezione è interamente tesa, quindi l'espressione della forza C risulta essere:

$$C = 0 \quad (2.84)$$

La deformazione dell'armatura superiore è pari a:

$$\begin{aligned} \varepsilon'_s &= \varepsilon_{ud} \frac{\Delta'}{h} = \\ &= \varepsilon_{ud} \delta' \end{aligned}$$

L'espressione della forza S' risulta essere:

$$S' = A'_s \cdot \sigma'_s(\varepsilon'_s) \quad (2.85)$$

L'espressione della forza S risulta essere:

$$S = A_s \cdot k f_{yd} \quad (2.86)$$

Per l'equilibrio:

$$C - S' - S = N^{(b)}$$

Introducendo la percentuale meccanica di armatura $\omega = \frac{A_s f_{yd}}{bh f_{cd}}$ e il rapporto di armatura ψ_A , e dividendo tutti i membri dell'equazione per il gruppo $bh f_{cd}$ è possibile scrivere:

$$\begin{aligned} \frac{N^{(b)}}{bh f_{cd}} &= -\frac{A'_s \cdot \sigma'_s(\epsilon'_s)}{bh f_{cd}} - \frac{A_s \cdot k f_{yd}}{bh f_{cd}} \\ n^{(b)} &= -\omega' \frac{\sigma'_s(\epsilon'_s)}{f_{yd}} - \omega k \\ n^{(b)} &= -\omega \left(\psi_A \frac{\sigma'_s(\epsilon'_s)}{f_{yd}} + k \right) \end{aligned} \quad (2.87)$$

Retta "c"

La retta "c" è la retta di frontiera tra campo 2 e campo 3. La configurazione deformata di collasso corrispondente alla retta di frontiera tra campo 2 e campo 3 vede la sezione parzialmente compressa, con il calcestruzzo in corrispondenza della massima deformazione ϵ_{cu} , l'armatura inferiore in corrispondenza di una deformazione pari a ϵ_{ud} , mentre l'armatura superiore è in corrispondenza di una deformazione ϵ'_s che si può determinare tramite proporzione tra triangoli simili. Osservando la configurazione deformata, è possibile ricavare la profondità dell'asse neutro che porta a collasso:

$$x^{(c)} = h \cdot \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{ud} + \epsilon_{cu}}$$

E di conseguenza, la posizione adimensionalizzata dell'asse neutro è:

$$\xi^{(c)} = \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{ud} + \epsilon_{cu}} \quad (2.88)$$

Per ottenere lo sforzo assiale adimensionale corrispondente alla retta di frontiera "c" si parte dall'equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale espressa in forma adimensionalizzata. La sezione è parzialmente compressa, quindi l'espressione della

forza C risulta essere:

$$C = \beta_1 f_{cd} b h \xi^{(c)} \quad (2.89)$$

La deformazione dell'armatura superiore è pari a:

$$\begin{aligned} \epsilon'_s &= \epsilon_{cu} - \epsilon_{cu} \frac{\Delta'}{\xi^{(c)} h} = \\ &= \epsilon_{cu} \left(1 - \frac{\delta'}{\xi^{(c)}} \right) \end{aligned}$$

L'espressione della forza S' risulta essere:

$$S' = A'_s \cdot \sigma'_s(\epsilon'_s) \quad (2.90)$$

L'espressione della forza S risulta essere:

$$S = A_s \cdot k f_{yd} \quad (2.91)$$

Per l'equilibrio:

$$C + S' - S = N^{(c)}$$

Introducendo la percentuale meccanica di armatura $\omega = \frac{A_s f_{yd}}{b h f_{cd}}$ e il rapporto di armatura ψ_A , e dividendo tutti i membri dell'equazione per il gruppo $b h f_{cd}$ è possibile scrivere:

$$\begin{aligned} \frac{N^{(c)}}{b h f_{cd}} &= \frac{\beta_1 f_{cd} b h \xi^{(c)}}{b h f_{cd}} + \frac{A'_s \cdot \sigma'_s(\epsilon'_s)}{b h f_{cd}} - \frac{A_s \cdot k f_{yd}}{b h f_{cd}} \\ n^{(c)} &= \beta_1 \xi^{(c)} + \omega' \frac{\sigma'_s(\epsilon'_s)}{f_{yd}} - \omega k \\ n^{(c)} &= \beta_1 \xi^{(c)} + \omega \left(\psi_A \frac{\sigma'_s(\epsilon'_s)}{f_{yd}} - k \right) \end{aligned} \quad (2.92)$$

Retta "d"

La retta "d" è la retta di frontiera tra campo 3 e campo 4. La configurazione deformata di collasso corrispondente alla retta di frontiera tra campo 3 e campo 4 vede la sezione parzialmente compressa, con il calcestruzzo in corrispondenza della massima deformazione ϵ_{cu} , l'armatura inferiore in corrispondenza di una deformazione pari a ϵ_{yd} , mentre l'armatura superiore è in corrispondenza di una deformazione ϵ'_s che si può determinare tramite proporzione tra triangoli simili.

Osservando la configurazione deformata, è possibile ricavare la profondità dell'asse neutro che porta a collasso:

$$x^{(d)} = h \cdot \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{yd} + \epsilon_{cu}}$$

E di conseguenza, la posizione adimensionalizzata dell'asse neutro è:

$$\xi^{(d)} = \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{yd} + \epsilon_{cu}} \quad (2.93)$$

Per ottenere lo sforzo assiale adimensionale corrispondente alla retta di frontiera "d" si parte dall'equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale espressa in forma adimensionalizzata. La sezione è parzialmente compressa, quindi l'espressione della forza C risulta essere:

$$C = \beta_1 f_{cd} b h \xi^{(d)} \quad (2.94)$$

La deformazione dell'armatura superiore è pari a:

$$\begin{aligned} \epsilon'_s &= \epsilon_{cu} - \epsilon_{cu} \frac{\Delta'}{\xi^{(d)} h} = \\ &= \epsilon_{cu} \left(1 - \frac{\delta'}{\xi^{(d)}} \right) \end{aligned}$$

L'espressione della forza S' risulta essere:

$$S' = A'_s \cdot \sigma'_s(\epsilon'_s) \quad (2.95)$$

L'espressione della forza S risulta essere:

$$S = A_s \cdot f_{yd} \quad (2.96)$$

Per l'equilibrio:

$$C + S' - S = N^{(d)}$$

Introducendo la percentuale meccanica di armatura $\omega = \frac{A_s f_{yd}}{bh f_{cd}}$ e il rapporto di armatura ψ_A , e dividendo tutti i membri dell'equazione per il gruppo $bh f_{cd}$ è possibile scrivere:

$$\begin{aligned} \frac{N^{(d)}}{bh f_{cd}} &= \frac{\beta_1 f_{cd} bh \xi^{(d)}}{bh f_{cd}} + \frac{A'_s \sigma'_s(\epsilon'_s)}{bh f_{cd}} - \frac{A_s f_{yd}}{bh f_{cd}} \\ n^{(d)} &= \beta_1 \xi^{(d)} + \omega' \frac{\sigma'_s(\epsilon'_s)}{f_{yd}} - \omega \\ n^{(d)} &= \beta_1 \xi^{(d)} + \omega \left(\psi_A \frac{\sigma'_s(\epsilon'_s)}{f_{yd}} - 1 \right) \end{aligned} \quad (2.97)$$

Retta "e"

La retta "e" è la retta di frontiera tra campo 4 e campo 5. La configurazione deformata di collasso corrispondente alla retta di frontiera tra campo 4 e campo 5 vede la sezione interamente compressa, l'armatura inferiore in corrispondenza di una deformazione pari a ϵ_s , mentre l'armatura superiore è in corrispondenza di una deformazione ϵ'_s , che si possono determinare tramite proporzione tra triangoli simili. Osservando la configurazione deformata, è possibile ricavare la profondità dell'asse neutro che porta a collasso, che risulta passare per il lembo inferiore della trave:

$$x^{(e)} = d > h$$

E di conseguenza, la posizione adimensionalizzata dell'asse neutro è:

$$\xi^{(d)} = \frac{d}{h} \quad (2.98)$$

Per ottenere lo sforzo assiale adimensionale corrispondente alla retta di frontiera "e" si parte dall'equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale espressa in forma adimensionalizzata. La sezione è parzialmente compressa, quindi l'espressione della

forza C risulta essere:

$$C = \beta_1 f_{cd} b h \xi^{(e)} \quad (2.99)$$

La deformazione dell'armatura superiore è pari a:

$$\varepsilon'_s = \varepsilon_{cu} \left(1 - \frac{\Delta'}{d}\right)$$

La deformazione dell'armatura inferiore è pari a:

$$\varepsilon_s = \varepsilon_{cu} \cdot \frac{\Delta}{d}$$

L'espressione della forza S' risulta essere:

$$S' = A'_s \cdot \sigma'_s(\varepsilon'_s) \quad (2.100)$$

L'espressione della forza S risulta essere:

$$S = A_s \cdot \sigma_s(\varepsilon_s) \quad (2.101)$$

Per l'equilibrio:

$$C + S' + S = N^{(e)}$$

Introducendo la percentuale meccanica di armatura $\omega = \frac{A_s f_{yd}}{b h f_{cd}}$ e il rapporto di armatura ψ_A , e dividendo tutti i membri dell'equazione per il gruppo $b h f_{cd}$ è possibile scrivere:

$$\begin{aligned} \frac{N^{(e)}}{b h f_{cd}} &= \frac{\beta_1 f_{cd} b h \xi^{(e)}}{b h f_{cd}} + \frac{A'_s \cdot \sigma'_s(\varepsilon'_s)}{b h f_{cd}} + \frac{A_s \cdot \sigma_s(\varepsilon_s)}{b h f_{cd}} \\ n^{(e)} &= \beta_1 \frac{d}{h} + \omega' \frac{\sigma'_s(\varepsilon'_s)}{f_{yd}} + \omega \frac{\sigma_s(\varepsilon_s)}{f_{yd}} \\ n^{(e)} &= \beta_1 \frac{d}{h} + \omega \left(\psi_A \frac{\sigma'_s(\varepsilon'_s)}{f_{yd}} + \frac{\sigma_s(\varepsilon_s)}{f_{yd}} \right) \end{aligned} \quad (2.102)$$

Retta "f"

La retta "f" è la retta di frontiera del campo 5. La configurazione deformata di collasso corrispondente alla retta di frontiera del campo 5 vede il calcestruzzo interamente reagente in corrispondenza di una deformazione ϵ_{cu} e una tensione uniforme pari a f_{cd} , mentre l'armatura inferiore e l'armatura superiore sono entrambe in corrispondenza di una deformazione pari a ϵ_{c2} .

In questo caso l'asse neutro non è secante o tangente alla sezione.

Per ottenere lo sforzo assiale adimensionale corrispondente alla retta di frontiera "f" si parte dall'equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale espressa in forma adimensionalizzata. L'espressione della forza C risulta essere:

$$C = f_{cd}bd \quad (2.103)$$

L'espressione della forza S' risulta essere:

$$S' = A'_s \cdot \sigma'_s(\epsilon'_s) \quad (2.104)$$

L'espressione della forza S risulta essere:

$$S = A_s \cdot \sigma_s(\epsilon_s) \quad (2.105)$$

Per l'equilibrio:

$$C + S' + S = N^{(f)}$$

Introducendo la percentuale meccanica di armatura $\omega = \frac{A_s f_{yd}}{bh f_{cd}}$ e il rapporto di armatura ψ_A , e dividendo tutti i membri dell'equazione per il gruppo $bh f_{cd}$ è possibile scrivere:

$$\begin{aligned} \frac{N^{(f)}}{bh f_{cd}} &= \frac{f_{cd}bd}{bh f_{cd}} + \frac{A'_s \cdot \sigma'_s(\epsilon'_s)}{bh f_{cd}} + \frac{A_s \cdot \sigma_s(\epsilon_s)}{bh f_{cd}} \\ n^{(f)} &= \frac{d}{h} + \omega' \frac{\sigma'_s(\epsilon'_s)}{f_{yd}} + \omega \frac{\sigma_s(\epsilon_s)}{f_{yd}} \\ n^{(f)} &= \frac{d}{h} + \omega \left(\psi_A \frac{\sigma'_s(\epsilon'_s)}{f_{yd}} + \frac{\sigma_s(\epsilon_s)}{f_{yd}} \right) \end{aligned} \quad (2.106)$$

Confrontando lo sforzo assiale adimensionalizzato effettivo della sezione n_{Ed} con gli sforzi assiali che caratterizzano le rette di frontiera tra i vari campi di rottura, è possibile determinare in quale campo avverrà il collasso della sezione e individuare le opportune equazioni di equilibrio per eseguire le verifiche.

Capitolo 3

Fattore di duttilità in curvatura di sezioni in c.a.

Come anticipato nel Capitolo precedente, le valutazioni sulla duttilità dovrebbero essere condotte svincolandosi dai valori fissi delle deformazioni ultima e al limite elastico del calcestruzzo in quanto, essendo la duttilità facilmente influenzata da fattori esterni quali il confinamento, sarebbe più opportuno separarne la trattazione dalla resistenza, per la quale la normativa stessa fissa dei valori costanti di deformazione.

In questo Capitolo si esegue la valutazione della curvatura ultima, della curvatura allo snervamento e del fattore di duttilità in curvatura per sezioni rettangolari in cemento armato soggette a sollecitazioni di flessione semplice e di pressoflessione, considerando prima il caso di calcestruzzo non confinato e in seguito il caso di calcestruzzo confinato, al fine di dimostrare in che modo la massima deformazione del calcestruzzo influenza effettivamente la resistenza e la duttilità. Per la valutazione analitica di tali parametri si assume che l'effetto del confinamento sia esteso a tutta la sezione trasversale. Il confinamento agisce sostanzialmente sulla deformazione al limite elastico e sulla deformazione ultima del calcestruzzo. Il modello di confinamento, espresso in termini di legame σ - ε , dipende dalla tecnologia e dalla modalità scelta per applicare la pressione laterale di confinamento alla sezione, scelta che è a sua volta funzione della tipologia di sezione, della geometria e in generale discende dall'esperienza e dalle opzioni a disposizione [6].

3.1 Sollecitazione di flessione

Il fattore di duttilità in curvatura μ_φ rappresenta il rapporto tra la curvatura ultima φ_u e la curvatura allo snervamento φ_y della sezione. Si distinguono i casi di sezione semplicemente armata, provvista solo di armatura inferiore tesa, e sezione doppiamente armata, provvista di armatura inferiore tesa e armatura superiore compressa [7].

3.1.1 Sezione semplicemente armata

Curvatura ultima

Si consideri la generica sezione rettangolare riportata in Fig. 3.1, soggetta ad una sollecitazione di flessione semplice rappresentata dal momento M_u . Sotto l'azione di tale momento, parte della sezione è tesa e parte è compressa; assumendo trascurabile la resistenza a trazione del calcestruzzo, la risultante di trazione è fornita solo dall'armatura presente, mentre la risultante di compressione è fornita da tutte le fibre compresse di calcestruzzo, entro l'altezza della zona compressa definita dall'asse neutro di profondità x_u . Nella condizione ultima, il calcestruzzo è soggetto ad una distribuzione di tensioni funzione della distanza dall'asse neutro, mentre l'acciaio dell'armatura lavora ad una tensione pari alla tensione di snervamento f_{yd} , e ad una configurazione deformata che prevede la deformazione della fibra di calcestruzzo più compressa pari alla deformazione ultima ε_{cu} .

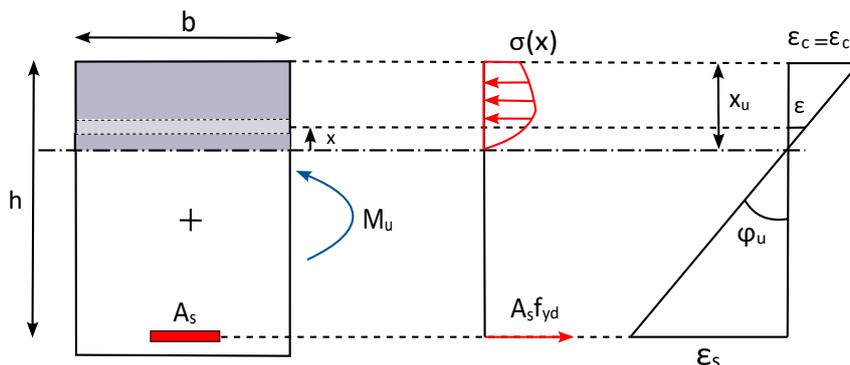


Figura 3.1 - Curvatura ultima di una sezione in c.a. semplicemente armata soggetta a flessione

La curvatura ultima rappresenta il coefficiente angolare della retta della configurazione deformata ultima ed è definita come:

$$\varphi_u = \frac{\varepsilon_{cu}}{x_u} \quad (3.1)$$

Assumendo che la deformazione della generica fibra di calcestruzzo sia proporzionale alla sua distanza dall'asse neutro, si ha:

$$\varepsilon = \varphi_u \cdot x$$

$$d\varepsilon = \varphi_u \cdot dx$$

$$dx = \frac{d\varepsilon}{\varphi_u}$$

Imponendo l'equilibrio alla traslazione orizzontale:

$$C - S = 0$$

dove:

- C , risultante della distribuzione delle tensioni di compressione agenti sulla porzione compressa di calcestruzzo;

$$C = b \int_0^{x_{cu}} \sigma(x) dx$$

operando un cambio di variabile per passare dalla coordinata x alla deformazione ε

$$C = \frac{b}{\varphi_u} \int_0^{\varepsilon_{cu}} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon$$

- S , risultante delle tensioni di trazione agenti sull'armatura inferiore;

$$S = A_s \cdot f_{yd}$$

L'equilibrio diventa dunque:

$$\frac{b}{\varphi_u} \int_0^{\varepsilon_{cu}} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon - A_s \cdot f_{yd} = 0$$

Dividendo tutti i termini dell'equazione per il gruppo $f_{cd}bh$, e ricordando che la percentuale meccanica di armatura tesa è definita come $\omega = \frac{A_s \cdot f_{yd}}{bh f_{cd}}$, si ha:

$$\frac{1}{\varphi_u} \cdot \frac{\int_0^{\varepsilon_{cu}} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon}{f_{cd}h} - \omega = 0$$

$$\frac{S_1(\varepsilon)}{\varphi_u h} - \omega = 0$$

Da cui:

$$\varphi_u = \frac{S_1(\varepsilon)}{\omega h}$$

E adimensionalizzando rispetto all'altezza meccanica della sezione:

$$\varphi_u = \frac{S_1(\varepsilon)}{\omega} \quad (3.2)$$

Dove $S_1(\varepsilon)$ è una funzione che dipende dalla legge costitutiva del calcestruzzo, in particolare dalla massima deformazione raggiunta e quindi risente dell'influenza del modello di confinamento. Considerando la legge costitutiva parabola-rettangolo:

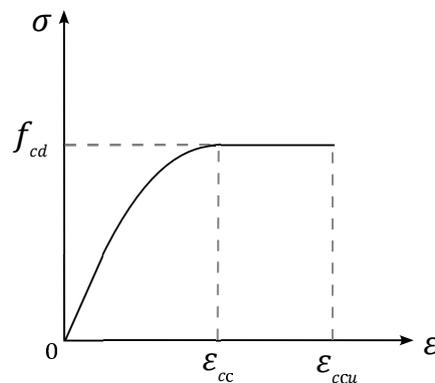


Figura 3.2 - Legge costitutiva del calcestruzzo, modello parabola-rettangolo

$$\begin{cases} \sigma(\varepsilon) = f_{cd} \left[2 \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cc}} \right) - \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cc}} \right)^2 \right] & \text{se } 0 < \varepsilon_c < \varepsilon_{cc} \\ \sigma(\varepsilon) = f_{cd} & \text{se } \varepsilon_{cc} \leq \varepsilon_c < \varepsilon_{ccu} \end{cases}$$

La funzione $S_1(\varepsilon)$ risulta:

$$\begin{aligned} S_1(\varepsilon) &= \frac{\int_0^{\varepsilon_{cc}} f_{cd} \left[2 \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cc}} \right) - \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cc}} \right)^2 \right] d\varepsilon + \int_{\varepsilon_{cc}}^{\varepsilon_{ccu}} f_{cd} d\varepsilon}{f_{cd}} = & (3.3) \\ &= 2 \int_0^{\varepsilon_{cc}} \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cc}} \right) d\varepsilon - \int_0^{\varepsilon_{cc}} \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cc}} \right)^2 d\varepsilon + \int_{\varepsilon_{cc}}^{\varepsilon_{ccu}} d\varepsilon = \\ &= \frac{\varepsilon_{cc}^2}{\varepsilon_{cc}} - \frac{1}{3} \frac{\varepsilon_{cc}^3}{\varepsilon_{cc}} + \varepsilon_{ccu} - \varepsilon_{cc} = \\ &= \varepsilon_{ccu} - \frac{1}{3} \varepsilon_{cc} \end{aligned}$$

Se si tiene conto della possibilità di modificare la deformazione ultima e la deformazione al limite elastico tramite tecniche di confinamento, è possibile studiare tale funzione al variare del rapporto $\frac{\varepsilon_{ccu}}{\varepsilon_{cc}}$. Perciò la funzione di nostro interesse, da introdurre nella definizione di curvatura ultima, diventa:

$$S_1(\varepsilon) = \frac{\varepsilon_{ccu}}{\varepsilon_{cc}} - \frac{1}{3}$$

Curvatura allo snervamento

Si consideri la generica sezione rettangolare riportata in Fig. 3.3, soggetta ad una sollecitazione di flessione semplice rappresentata dal momento M_y . Sotto l'azione di tale momento, parte della sezione è tesa e parte è compressa; assumendo trascurabile la resistenza a trazione del calcestruzzo, la risultante di trazione è fornita solo dall'armatura presente, mentre la risultante di compressione è fornita da tutte le fibre compresse di calcestruzzo, entro l'altezza della zona compressa definita dall'asse neutro di profondità x_y . Nella condizione di limite elastico, ovvero di snervamento della sezione, il calcestruzzo è soggetto ad una distribuzione di tensioni funzione della distanza dall'asse neutro, mentre l'acciaio dell'armatura lavora ad una tensione pari alla tensione di snervamento f_{yd} , e ad una configurazione deformata che prevede la deformazione della fibra di calcestruzzo più compressa ε_c inferiore

alla deformazione ultima ϵ_{cu} , mentre la deformazione dell'armatura ϵ_s è pari alla deformazione di snervamento ϵ_{yd} .

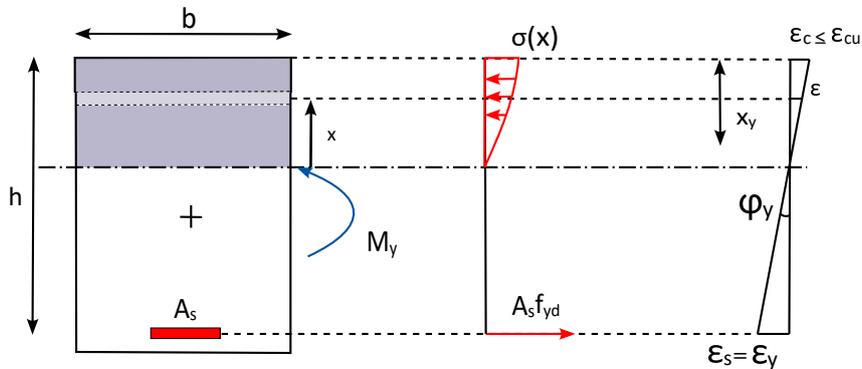


Figura 3.3 - Curvatura allo snervamento di una sezione in c.a. semplicemente armata soggetta a flessione

La curvatura allo snervamento rappresenta il coefficiente angolare della retta della configurazione deformata al limite elastico ed è definita come:

$$\varphi_y = \frac{\epsilon_{yd}}{h - x_y} \quad (3.4)$$

Per l'esatta valutazione della curvatura allo snervamento è necessario determinare prima la deformazione della fibra di calcestruzzo più compressa. In via semplificata, se si assume che la profondità dell'asse neutro nella condizione di snervamento dell'armatura è pari all'incirca al 25% dell'altezza meccanica della sezione, è possibile valutare la curvatura allo snervamento come:

$$\begin{aligned} \varphi_y &= \frac{\epsilon_{yd}}{h - x_y} \simeq \\ &\simeq \frac{\epsilon_{yd}}{h - 0.25h} = \\ &= \frac{4}{3} \frac{\epsilon_{yd}}{h} \simeq \\ &\simeq 1.4 \cdot \frac{\epsilon_{yd}}{h} \end{aligned}$$

E adimensionalizzando rispetto all'altezza meccanica della sezione:

$$\varphi_y = 1.4 \cdot \varepsilon_{yd} \quad (3.5)$$

Dalla (3.2) e dalla (3.5) è possibile valutare il fattore di duttilità in curvatura:

$$\mu_\varphi = \frac{\varphi_u}{\varphi_y}$$

Esaminando l'influenza del confinamento sul rapporto tra deformazione ultima e deformazione al limite elastico, e di conseguenza sul fattore di duttilità in curvatura di una sezione semplicemente armata soggetta a flessione semplice, si valuta di seguito come evolve la duttilità in funzione della percentuale meccanica di armatura tesa.

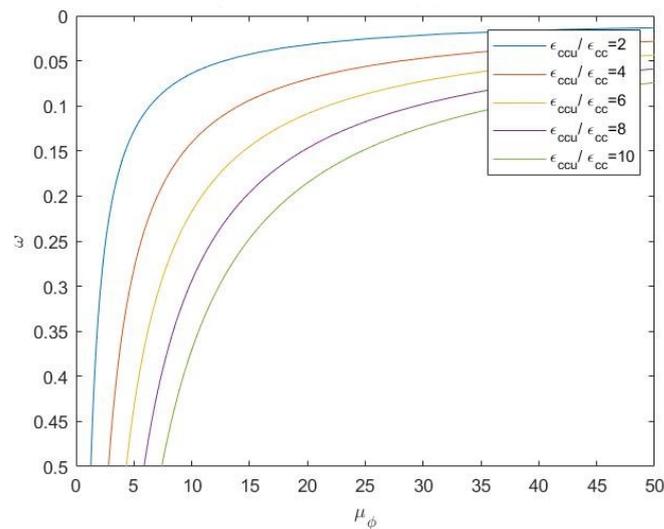


Figura 3.4 - Fattore di duttilità in curvatura al variare della percentuale meccanica di armatura tesa, per diversi rapporti di confinamento, sezione inflessa

3.1.2 Sezione doppiamente armata

Curvatura ultima

Si consideri la generica sezione rettangolare riportata in Fig. 3.5, soggetta ad una sollecitazione di flessione semplice rappresentata dal momento M_u . Sotto l'azione di

tale momento, parte della sezione è tesa e parte è compressa; assumendo trascurabile la resistenza a trazione del calcestruzzo, la risultante di trazione è fornita solo dall'armatura presente, mentre la risultante di compressione è fornita da tutte le fibre compresse di calcestruzzo, entro l'altezza della zona compressa definita dall'asse neutro di profondità x_u . Nella condizione ultima, il calcestruzzo è soggetto ad una distribuzione di tensioni funzione della distanza dall'asse neutro, mentre l'acciaio dell'armatura lavora ad una tensione pari alla tensione di snervamento f_{yd} , e ad una configurazione deformata che prevede la deformazione della fibra di calcestruzzo più compressa pari alla deformazione ultima ϵ_{cu} .

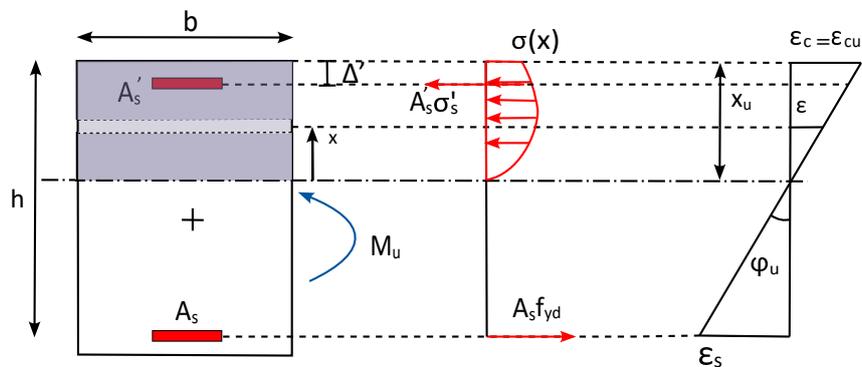


Figura 3.5 - Curvatura ultima di una sezione in c.a. doppiamente armata soggetta a flessione

La curvatura ultima rappresenta il coefficiente angolare della retta della configurazione deformata ultima ed è definita come:

$$\varphi_u = \frac{\epsilon_{cu}}{x_u} \quad (3.6)$$

Assumendo che la deformazione della generica fibra di calcestruzzo sia proporzionale alla sua distanza dall'asse neutro, si ha:

$$\epsilon = \varphi_u \cdot x$$

$$d\epsilon = \varphi_u \cdot dx$$

$$dx = \frac{d\epsilon}{\varphi_u}$$

Imponendo l'equilibrio alla traslazione orizzontale:

$$C + S' - S = 0$$

dove:

- C , risultante della distribuzione delle tensioni di compressione agenti sulla porzione compressa di calcestruzzo;

$$C = b \int_0^{x_{cu}} \sigma(x) dx$$

operando un cambio di variabile per passare dalla coordinata x alla deformazione ε

$$C = \frac{b}{\varphi_u} \int_0^{\varepsilon_{cu}} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon$$

- S' , risultante delle tensioni di compressione agenti sull'armatura superiore;

$$S' = A'_s \cdot \sigma'_s$$

- S , risultante delle tensioni di trazione agenti sull'armatura inferiore;

$$S = A_s \cdot f_{yd}$$

L'equilibrio diventa dunque:

$$\frac{b}{\varphi_u} \int_0^{\varepsilon_{cu}} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon + A'_s \cdot \sigma'_s - A_s \cdot f_{yd} = 0$$

Dividendo tutti i termini dell'equazione per il gruppo $f_{cd}bh$, e ricordando che la percentuale meccanica di armatura tesa è definita come $\omega = \frac{A_s \cdot f_{yd}}{bh f_{cd}}$, si ha:

$$\frac{1}{\varphi_u} \cdot \frac{\int_0^{\varepsilon_{cu}} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon}{f_{cd}h} + \frac{A'_s \sigma'_s}{f_{cd}bh} - \omega = 0$$

$$\frac{S_1(\varepsilon)}{\varphi_u h} + \frac{A'_s \sigma'_s}{f_{cd}bh} - \omega = 0$$

Ponendo $\gamma' = \frac{\sigma'_s}{f_{yd}}$, e ricordando che la percentuale meccanica di armatura compressa è definita come $\omega' = \frac{A'_s \cdot f_{yd}}{bh f_{cd}}$, si ha:

$$\frac{S_1(\varepsilon)}{\varphi_u h} + \omega' \gamma' - \omega = 0$$

Da cui:

$$\varphi_u = \frac{S_1(\varepsilon)}{h(\omega - \omega' \gamma')}$$

E adimensionalizzando rispetto all'altezza meccanica della sezione:

$$\varphi_u = \frac{S_1(\varepsilon)}{\omega - \omega' \gamma'} \quad (3.7)$$

Come nel caso di sezione semplicemente armata, $S_1(\varepsilon)$ è una funzione che dipende dalla legge costitutiva del calcestruzzo, in particolare dalla massima deformazione raggiunta e quindi risente dell'influenza del modello di confinamento.

Ponendo:

$$\sigma'_s = \frac{\varepsilon'_s}{E_s}$$

$$\varepsilon'_s = \varphi_u(x_u - \Delta') = \varepsilon_{cu} - \varphi_u \Delta'$$

$$\gamma' = \frac{\sigma'_s}{f_{yd}} = (\varepsilon_{cu} - \varphi_u \Delta') \frac{E_s}{f_{yd}}$$

Si ottiene un'equazione del secondo ordine in cui l'incognita è la curvatura ultima, funzione di parametri noti.

Curvatura allo snervamento

La curvatura allo snervamento rappresenta il coefficiente angolare della retta della configurazione deformata al limite elastico ed è definita come:

$$\varphi_y = \frac{\varepsilon_{yd}}{h - x_y} \quad (3.8)$$

Valgono le stesse considerazioni fatte per il caso di sezione semplicemente armata, e di conseguenza:

$$\varphi_y = 1.4 \cdot \varepsilon_{yd} \quad (3.9)$$

3.1.3 Diagramma momento-curvatura

Per la valutazione semplificata del diagramma momento-curvatura di una sezione in cemento armato soggetta a flessione, la procedura consiste nei seguenti step:

- Valutazione della funzione $S_1(\varepsilon)$;

$$S_1(\varepsilon) = \frac{1}{f_{cd}} \int_0^{\varepsilon_{cu}} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon$$

- Valutazione della curvatura ultima φ_u come soluzione dell'equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale;
- Valutazione semplificata della curvatura allo snervamento φ_y ;

$$\varphi_y \simeq 1.4 \cdot \frac{\varepsilon_{yd}}{h}$$

- Valutazione del momento al limite elastico M_y e del momento ultimo M_u ;

$$M_u \simeq M_y \simeq 0.9 \cdot h A_s f_{yd}$$

Di seguito, la valutazione del diagramma momento-curvatura per una sezione rettangolare le cui caratteristiche geometriche e meccaniche sono riportate in Fig. 3.6,

soggetta a flessione semplice, considerando un legame costitutivo del calcestruzzo di parabola-rettangolo senza confinamento, nei seguenti casi:

- Caso 1: $A'_s/A_s = 0$, sezione semplicemente armata;
- Caso 2: $A'_s/A_s = 0.5$, sezione doppiamente armata, con armatura compressa pari a metà di quella tesa;
- Caso 3: $A'_s/A_s = 1$, sezione doppiamente armata, con armatura compressa pari a quella tesa.

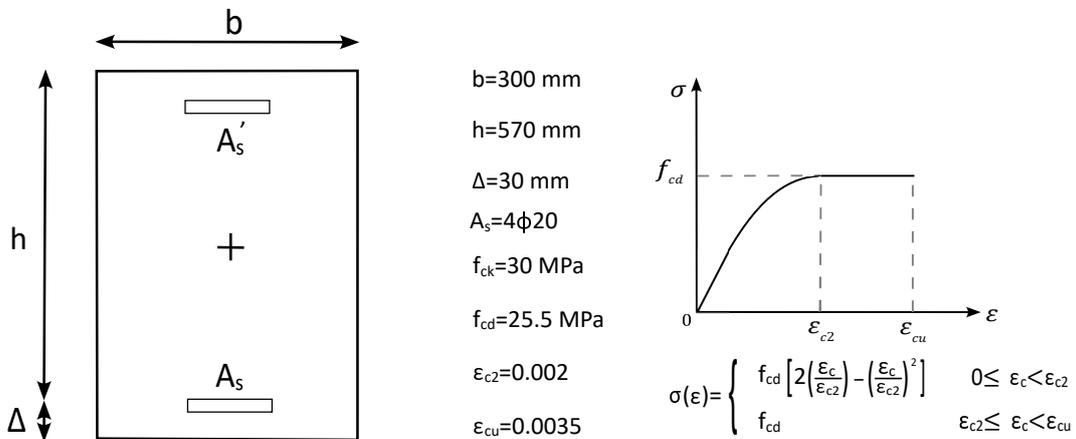


Figura 3.6 - Sezione rettangolare in c.a. soggetta a flessione, caratteristiche geometriche e meccaniche

I risultati numerici ottenuti e il corrispondente diagramma momento-curvatura sono di seguito riportati.

	$S_1(\varepsilon)$ [-]	ω [-]	ω' [-]	φ_y [1/mm]	φ_u [1/mm]	$\mu\varphi$ [-]	M_y [kNm]	M_u [kNm]
Caso 1	0.002833	0.113	0	4.5767E-06	4.4079E-05	9.63	252	252
Caso 2	0.002833	0.113	0.056	4.5767E-06	7.0316E-05	15.36	432	432
Caso 3	0.002833	0.113	0.113	4.5767E-06	8.6285E-05	18.85	402	402

Figura 3.7 - Risultati numerici per il caso di flessione

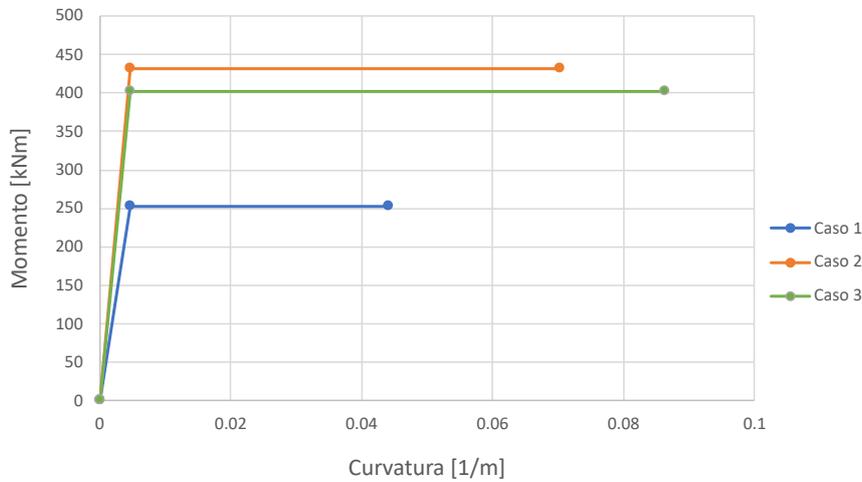


Figura 3.8 - Diagramma momento-curvatura di una sezione soggetta a flessione

3.1.4 Considerazioni

Dalla Fig. 3.4 si osserva che il fattore di duttilità in curvatura, che descrive la duttilità della sezione soggetta a sollecitazione di flessione semplice, risulta aumentare per percentuali di armatura tesa inferiori, poichè la curvatura ultima decresce all'aumentare di ω . La percentuale meccanica di armatura tesa aumenta all'aumentare dell'area di armatura mentre decresce all'aumentare della resistenza alla compressione del calcestruzzo, e quindi all'aumentare della classe di calcestruzzo. Inoltre, la variazione del fattore di duttilità in funzione della deformazione ultima raggiunta dal calcestruzzo, ovvero il fatto che la curvatura ultima cresca all'aumentare della deformazione ultima, mette in evidenza la dipendenza della duttilità sezionale dalla duttilità intrinseca del materiale calcestruzzo e quindi dall'effetto del confinamento. Dalle Figg. 3.7 e 3.8 si osserva che, a parità di armatura tesa, la curvatura ultima della sezione, così come il fattore di duttilità in curvatura, aumenti significativamente all'aumentare della percentuale meccanica di armatura compressa.

3.2 Sollecitazione di pressoflessione

Si consideri la generica sezione rettangolare riportata in Fig. 3.9, soggetta ad una sollecitazione di pressoflessione rappresentata dal momento M_u e dallo sforzo normale N agente nel baricentro della sezione. Sotto l'azione di tali sollecitazioni,

parte della sezione è tesa e parte è compressa; assumendo trascurabile la resistenza a trazione del calcestruzzo, la risultante di trazione è fornita solo dall'armatura inferiore, mentre la risultante di compressione è fornita dall'armatura superiore e da tutte le fibre compresse di calcestruzzo, entro l'altezza della zona compressa definita dall'asse neutro di profondità x_u . Nella condizione ultima, il calcestruzzo è soggetto ad una distribuzione di tensioni funzione della distanza dall'asse neutro, mentre l'acciaio dell'armatura lavora ad una tensione pari alla tensione di snervamento f_{yd} , e ad una configurazione deformata che prevede la deformazione della fibra di calcestruzzo più compressa pari alla deformazione ultima ϵ_{cu} .

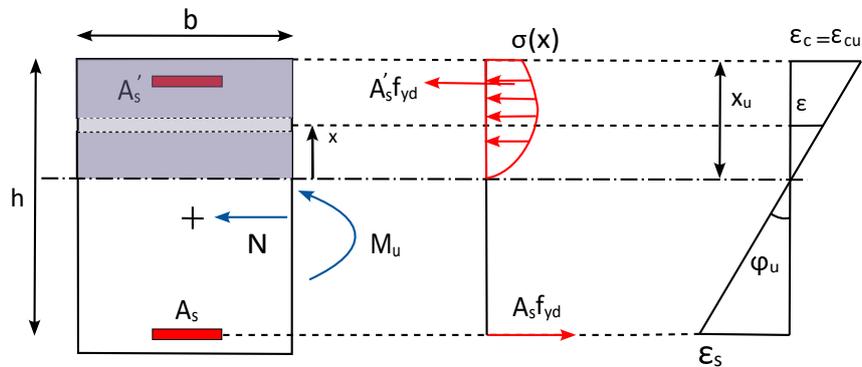


Figura 3.9 - Curvatura ultima di una sezione in c.a. doppiamente armata soggetta a pressoflessione

La curvatura ultima rappresenta il coefficiente angolare della retta della configurazione deformata ultima ed è definita come:

$$\varphi_u = \frac{\epsilon_{cu}}{x_u} \quad (3.10)$$

Assumendo che la deformazione della generica fibra di calcestruzzo sia proporzionale alla sua distanza dall'asse neutro, si ha:

$$\epsilon = \varphi_u \cdot x$$

$$d\epsilon = \varphi_u \cdot dx$$

$$dx = \frac{d\epsilon}{\varphi_u}$$

Imponendo l'equilibrio alla traslazione orizzontale:

$$C + S' - S = N$$

dove:

- C , risultante della distribuzione delle tensioni di compressione agenti sulla porzione compressa di calcestruzzo;

$$C = b \int_0^{x_{cu}} \sigma(x) dx$$

operando un cambio di variabile per passare dalla coordinata x alla deformazione ε

$$C = \frac{b}{\varphi_u} \int_0^{\varepsilon_{cu}} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon$$

- S' , risultante delle tensioni di compressione agenti sull'armatura superiore;

$$S' = A'_s \cdot f_{yd}$$

- S , risultante delle tensioni di trazione agenti sull'armatura inferiore;

$$S = A_s \cdot f_{yd}$$

Si assume dunque che entrambe le armature, inferiore e superiore, siano snervate. L'equilibrio diventa:

$$\frac{b}{\varphi_u} \int_0^{\varepsilon_{cu}} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon + A_s \cdot f_{yd} - A_s \cdot f_{yd} = N$$

Dividendo tutti i termini dell'equazione per il gruppo $f_{cd}bh$, si ha:

$$\frac{1}{\varphi_u} \cdot \frac{\int_0^{\varepsilon_{cu}} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon}{f_{cd}h} = \nu$$

$$\frac{S_1(\varepsilon)}{\varphi_u h} = \nu$$

Da cui:

$$\varphi_u = \frac{S_1(\varepsilon)}{\nu h}$$

E adimensionalizzando rispetto all'altezza meccanica della sezione:

$$\varphi_u = \frac{S_1(\varepsilon)}{\nu} \quad (3.11)$$

Come nel caso della flessione, anche qui la funzione $S_1(\varepsilon)$ dipende dalla legge costitutiva del calcestruzzo e dalla massima deformazione raggiunta. Considerando ancora una volta la legge costitutiva parabola-rettangolo e seguendo lo stesso ragionamento fatto in precedenza, si ottiene nuovamente:

$$S_1(\varepsilon) = \frac{\varepsilon_{ccu}}{\varepsilon_{cc}} - \frac{1}{3}$$

La curvatura ultima è così ottenuta assumendo che entrambe le armature siano snervate. Ma tale ipotesi è sempre accettabile? In realtà si osserva che è accettabile assumere entrambe le armature snervate solo per un certo range di sforzo normale adimensionale, che è possibile individuare a partire dall'equilibrio alla traslazione orizzontale, nota la profondità dell'asse neutro che determina una configurazione deformata in cui le armature sono in corrispondenza di una deformazione pari alla deformazione di snervamento ε_{yd} .

La configurazione deformata che prevede una deformazione pari a ε_{cu} in corrispondenza della fibra più compressa di calcestruzzo e una deformazione pari a ε_{yd} in corrispondenza dell'armatura superiore, raffigurata in Fig. 3.10, corrisponde ad una profondità dell'asse neutro che può essere determinata per proporzione tra triangoli simili.

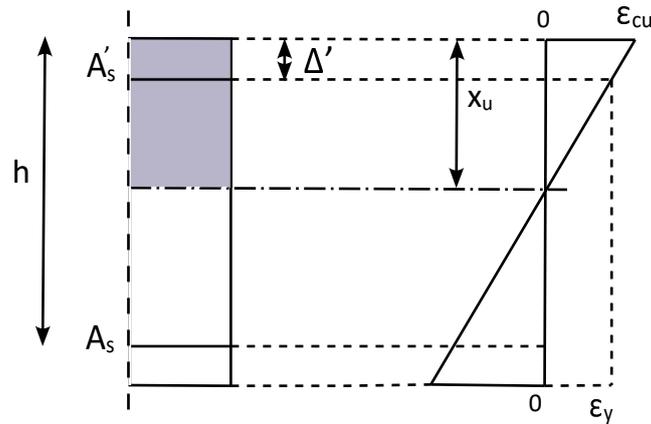


Figura 3.10 - Profondità dell'asse neutro in condizione di armatura superiore snervata

$$\frac{\varepsilon_{cu}}{x_u} = \frac{\varepsilon_{yd}}{x_u - \Delta'}$$

$$\frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} = \frac{x_u}{x_u - \Delta'}$$

Ponendo $\varepsilon_{cu} = 3.5\%$ e $\varepsilon_{yd} = 1.86\%$, si ha:

$$0.88 \cdot x_u = 1.88 \cdot \Delta'$$

$$x_u = 2.13 \cdot \Delta' \quad (3.12)$$

Considerando la (3.12), e inserendola nell'equilibrio all'assunzione orizzontale, si ottiene il limite inferiore del range di sforzo normale adimensionale per cui è accettabile l'ipotesi di armatura inferiore e armatura superiore entrambe snervate.

$$C + S' - S = N$$

$$\beta_1 x_u b f_{cd} + A'_s f_{yd} - A_s f_{yd} = N$$

$$\frac{\beta_1 2.13 \Delta' b f_{cd}}{b h f_{cd}} = \frac{N}{b h f_{cd}}$$

$$2.13 \cdot \beta_1 \frac{\Delta'}{h} = \nu$$

Ponendo $\frac{\Delta'}{h} = \delta'$, posizione del baricentro dell'armatura rispetto al lembo inferiore (superiore) adimensionalizzata rispetto all'altezza meccanica, e considerando un valore medio pari a 0.07, è possibile rendere la relazione indipendente dalla geometria della sezione. Per quando riguarda il coefficiente di riempimento β_1 invece, questo dipende dalla massima deformazione raggiunta corrispondente al livello tensionale; se si considera un legame costitutivo parabola-rettangolo per il calcestruzzo, la deformazione sarà al massimo pari a ε_{cu} , che a sua volta dipende dal confinamento, e che corrisponde ad un campo di rottura che oscilla tra parte del campo 2 e i campi 3 e 4; se per questo coefficiente si considera quindi un valore di 0.85 si ottiene:

$$v = 0.85 \cdot 2.13 \cdot 0.07$$

$$v = 0.13$$

La seconda configurazione deformata che prevede una deformazione pari a ε_{yd} in corrispondenza dell'armatura, corrisponde ad una profondità dell'asse neutro pari all'altezza meccanica della sezione h .

$$C + S' - S = N$$

$$\beta_1 x_u b f_{cd} + A'_s f_{yd} - A_s f_{yd} = N$$

$$\frac{\beta_1 h b f_{cd}}{b h f_{cd}} = \frac{N}{b h f_{cd}}$$

$$\beta_1 = v$$

Per $\beta_1=0.85$:

$$v = 0.85$$

Quindi, nel range di valori $v = 0.13 - 0.85$, la curvatura ultima può essere va-

lutata assumendo che entrambe le armature siano simmetriche e snervate, mentre fuori da questo range di valori bisogna considerare la possibilità che l'armatura sia ancora in campo elastico e modificare di conseguenza l'equazione di equilibrio alla traslazione.

Più in generale, nel caso di armature non simmetriche, dopo aver diviso tutti i termini dell'equazione per il gruppo $f_{cd}bh$, l'equilibrio alla traslazione diventa:

$$C + S' - S = N$$

$$\frac{\frac{b}{\varphi_u} \int_0^{\varepsilon_{cu}} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon}{f_{cd}bh} + \frac{A_s \cdot f_{yd}}{f_{cd}bh} - \frac{A'_s \cdot f_{yd}}{f_{cd}bh} = \frac{N}{f_{cd}bh}$$

Introducendo la percentuale meccanica di armatura tesa e la percentuale meccanica di armatura compressa, ω e ω' rispettivamente, si ha:

$$\frac{1}{\varphi_u} \frac{\int_0^{\varepsilon_{cu}} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon}{f_{cd}h} + \omega' - \omega = \nu$$

Sapendo che $\psi_A = \frac{A'_s}{A_s}$ è il rapporto di armatura, è possibile esprimere la percentuale meccanica di armatura compressa in funzione di quella tesa:

$$\frac{S_1(\varepsilon)}{\varphi_u h} + \omega \psi_A - \omega = \nu$$

Da cui:

$$\varphi_u = \frac{1}{h} \frac{S_1(\varepsilon)}{\nu - \omega(\psi_A - 1)}$$

E adimensionalizzando rispetto all'altezza meccanica della sezione:

$$\varphi_u = \frac{S_1(\varepsilon)}{\nu - \omega(\psi_A - 1)} \quad (3.13)$$

Se nella (3.13) si considera $\psi_A = 1$, ovvero il caso di armature simmetriche, il termine legato alla percentuale meccanica di armatura va a zero e la curvatura ultima ritorna alla forma della (3.11).

Curvatura allo snervamento

Si consideri la generica sezione rettangolare riportata in Fig. 3.11, soggetta ad una sollecitazione di pressoflessione rappresentata dal momento M_y e dallo sforzo normale N agente nel baricentro della sezione. Sotto l'azione di tali sollecitazioni, parte della sezione è tesa e parte è compressa; assumendo trascurabile la resistenza a trazione del calcestruzzo, la risultante di trazione è fornita solo dall'armatura inferiore, mentre la risultante di compressione è fornita dall'armatura superiore e da tutte le fibre compresse di calcestruzzo, entro l'altezza della zona compressa definita dall'asse neutro di profondità x_y . Nella condizione di limite elastico, ovvero di snervamento della sezione, il calcestruzzo è soggetto ad una distribuzione di tensioni funzione della distanza dall'asse neutro, l'acciaio dell'armatura inferiore lavora ad una tensione pari alla tensione di snervamento f_{yd} , mentre l'acciaio dell'armatura superiore lavora ad una tensione σ'_s ; la configurazione deformata prevede la deformazione della fibra di calcestruzzo più compressa ϵ_c inferiore alla deformazione ultima ϵ_{cu} , mentre l'armatura inferiore è in corrispondenza di una deformazione ϵ_s pari alla deformazione di snervamento ϵ_{yd} .

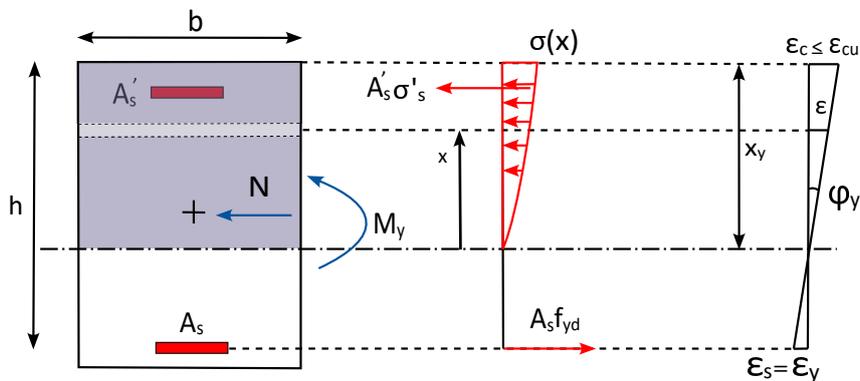


Figura 3.11 - Curvatura allo snervamento di una sezione in c.a. doppiamente armata soggetta a pressoflessione

La curvatura allo snervamento rappresenta il coefficiente angolare della retta della configurazione deformata al limite elastico ed è definita come:

$$\varphi_y = \frac{\epsilon_{yd}}{h - x_y} \quad (3.14)$$

Per la valutazione esatta della curvatura allo snervamento bisognerebbe conoscere la deformazione della fibra di calcestruzzo più compressa e il livello tensionale in corri-

spondenza dell'armatura superiore. In via semplificata, se si assume che entrambe le armature giungano a snervamento nello stesso momento, come raffigurato in Fig. 3.12, è possibile valutare la curvatura allo snervamento come:

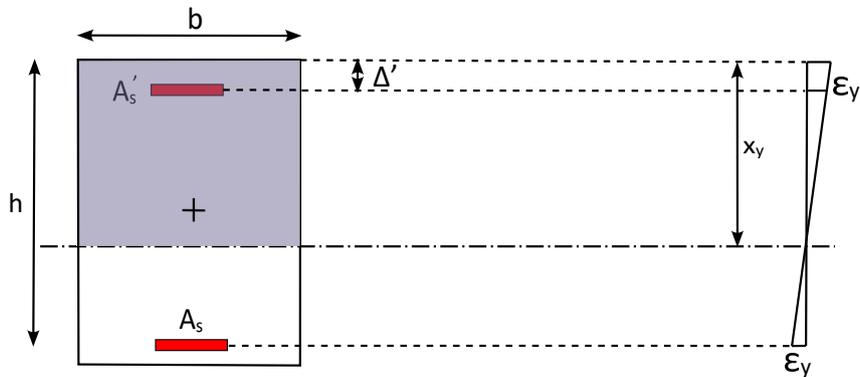


Figura 3.12 - Curvatura allo snervamento di una sezione in c.a. doppiamente armata soggetta a pressoflessione in cui le armature si snervano entrambe nello stesso momento

$$\begin{aligned}\varphi_y &= \frac{\varepsilon_{yd} + \varepsilon_{yd}}{h - \Delta'} = \\ &= \frac{2\varepsilon_{yd}}{h(1 - \delta')}\end{aligned}$$

Adimensionalizzando rispetto all'altezza meccanica della sezione:

$$\varphi_y = \frac{2\varepsilon_{yd}}{1 - \delta'} \quad (3.15)$$

Dalla (3.11) (o dalla (3.13)) e dalla (3.15) è possibile valutare il fattore di duttilità in curvatura:

$$\mu_\varphi = \frac{\varphi_u}{\varphi_y}$$

Esaminando l'influenza del confinamento sul rapporto tra deformazione ultima e deformazione al limite elastico, e di conseguenza sul fattore di duttilità in curvatura di una sezione soggetta a pressoflessione, si valuta di seguito come evolve la duttilità in funzione dello sforzo normale adimensionale e della percentuale meccanica di armatura tesa nel caso di armature non simmetriche, considerando tre casistiche relative a un rapporto di armatura pari a 0, 0.5 e 1.0.

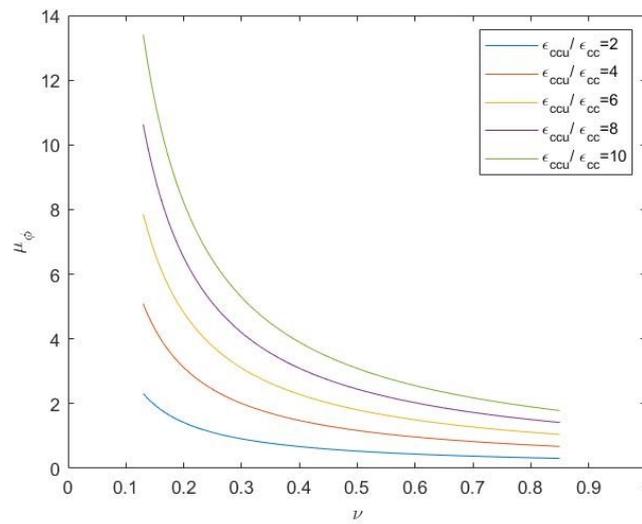


Figura 3.13 - Fattore di duttilità in curvatura al variare dello sforzo normale adimensionale, per diversi rapporti di confinamento ($\psi_A = 0$), sezione pressoinflessa

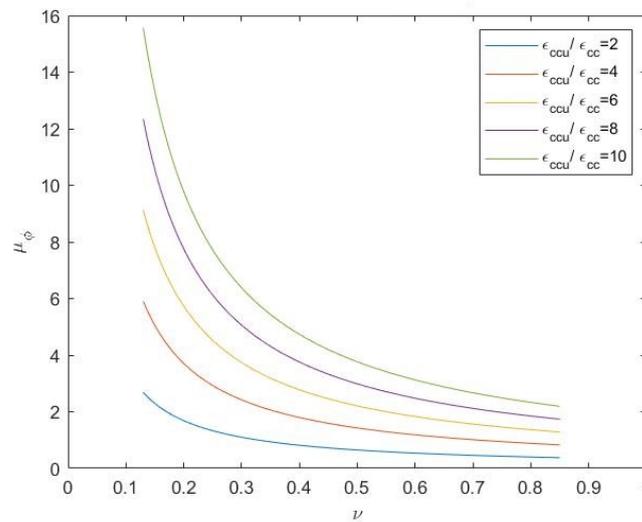


Figura 3.14 - Fattore di duttilità in curvatura al variare dello sforzo normale adimensionale, per diversi rapporti di confinamento ($\psi_A = 0.5$), sezione pressoinflessa

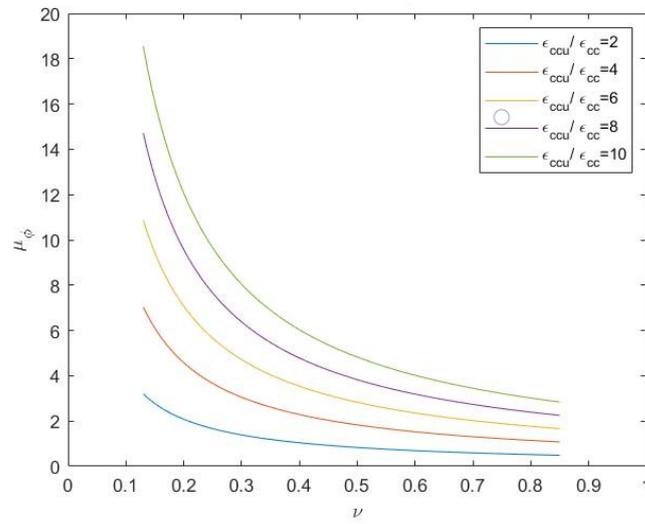


Figura 3.15 - Fattore di duttilità in curvatura al variare dello sforzo normale adimensionale, per diversi rapporti di confinamento ($\psi_A = 1$), sezione pressoinflessa

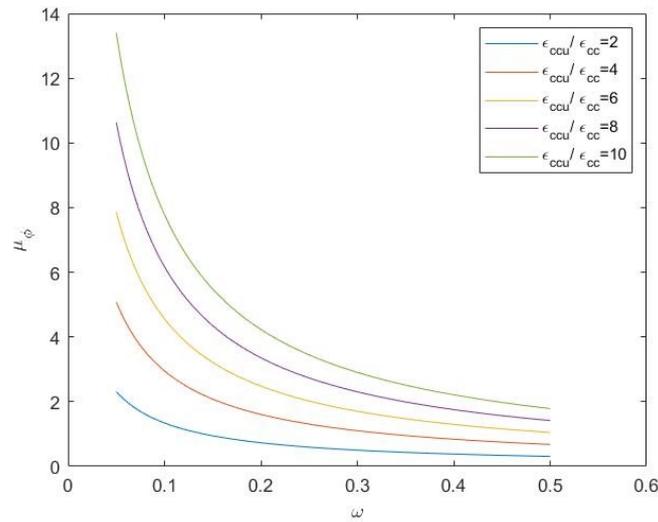


Figura 3.16 - Fattore di duttilità in curvatura al variare della percentuale meccanica di armatura tesa, per diversi rapporti di confinamento ($\psi_A = 0$), sezione pressoinflessa

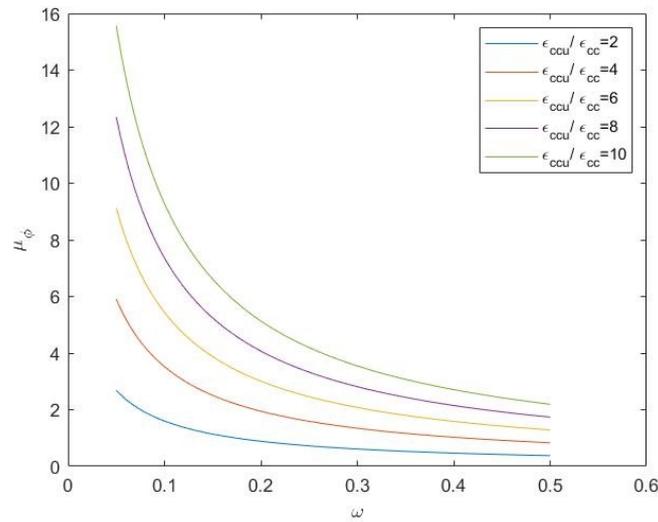


Figura 3.17 - Fattore di duttilità in curvatura al variare della percentuale meccanica di armatura tesa, per diversi rapporti di confinamento ($\psi_A = 0.5$), sezione pressoinflessa

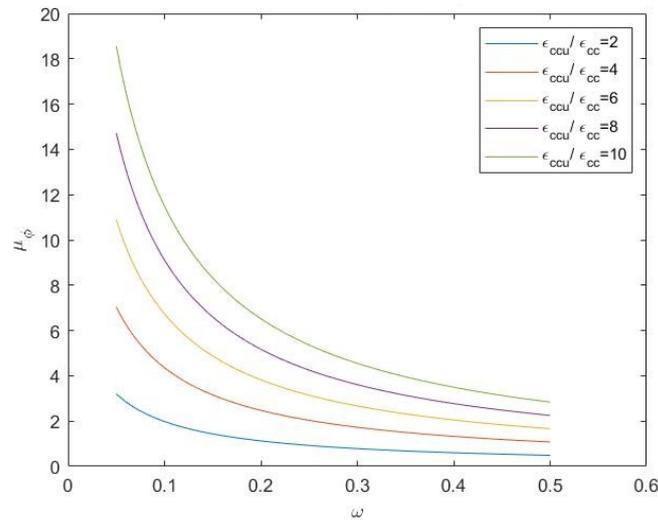


Figura 3.18 - Fattore di duttilità in curvatura al variare della percentuale meccanica di armatura tesa, per diversi rapporti di confinamento ($\psi_A = 1$), sezione pressoinflessa

3.2.1 Diagramma momento-curvatura

Per la valutazione semplificata del diagramma momento-curvatura di una sezione in cemento armato soggetta a pressoflessione, la procedura consiste nei seguenti

step:

- Valutazione della funzione $S_1(\varepsilon)$;

$$S_1(\varepsilon) = \frac{1}{f_{cd}} \int_0^{\varepsilon_{cu}} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon$$

- Valutazione della curvatura ultima φ_u ;

$$\varphi_u = \frac{S_1(\varepsilon)}{vh}$$

- Valutazione semplificata della curvatura allo snervamento φ_y ;

$$\varphi_y \simeq \frac{2\varepsilon_{yd}}{h(1-\lambda)}$$

- Valutazione del momento ultimo M_u tramite equilibrio alla rotazione attorno al baricentro della sezione;

$$M_u = 0.8x_u b f_{cd} \left(\frac{d}{2} - 0.4x_u \right) + A'_s f_{yd} \left(\frac{d}{2} - \Delta \right) + A_s f_{yd} \left(h - \frac{d}{2} \right)$$

Di seguito, la valutazione del diagramma momento-curvatura per una sezione rettangolare le cui caratteristiche geometriche e meccaniche sono riportate in Fig.3.28, soggetta a pressoflessione, entro un range di valori di sforzo normale adimensionale per il quale è corretto assumere entrambe le armature snervate, considerando un legame costitutivo del calcestruzzo di parabola-rettangolo senza confinamento, nei seguenti casi:

- Caso 1: $A'_s/A_s = 0$, sezione semplicemente armata;
- Caso 2: $A'_s/A_s = 0.5$, sezione doppiamente armata, con armatura compressa pari a metà di quella tesa;
- Caso 3: $A'_s/A_s = 1$, sezione doppiamente armata, con armatura compressa pari a quella tesa.

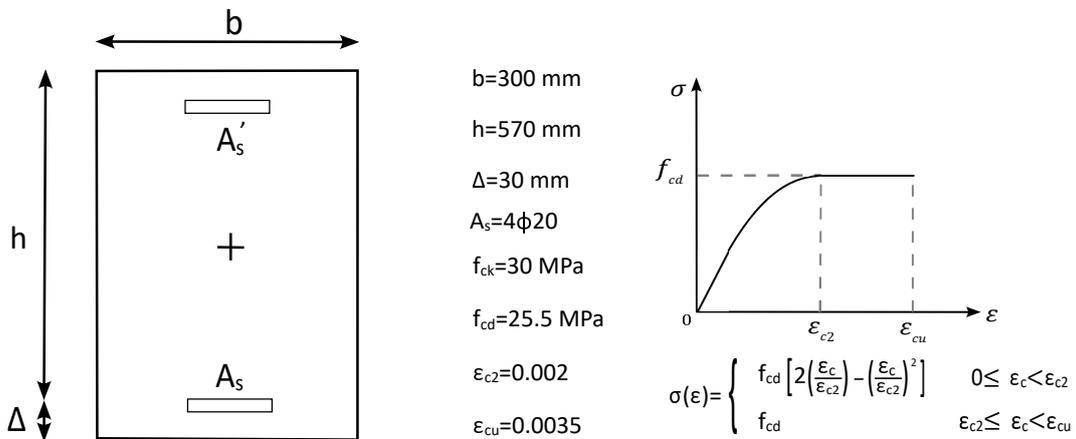


Figura 3.19 - Sezione rettangolare in c.a. soggetta a pressoflessione, caratteristiche geometriche e meccaniche

I risultati numerici ottenuti e il corrispondente diagramma momento-curvatura per uno sforzo normale adimensionale $\nu = 0.13$ sono di seguito riportati.

	$S_i(\epsilon)$ [-]	ω [-]	ν [-]	ϕ_y [1/mm]	ϕ_u [1/mm]	μ_ϕ [-]	M_u [kNm]
Caso 1	0.002833	0.113	0.13	7.0302E-06	2.0475E-05	2.91	375
Caso 2	0.002833	0.113	0.13	7.0302E-06	2.6669E-05	3.79	398
Caso 3	0.002833	0.113	0.13	7.0302E-06	3.8237E-05	5.44	413

Figura 3.20 - Risultati numerici per $\nu = 0.13$

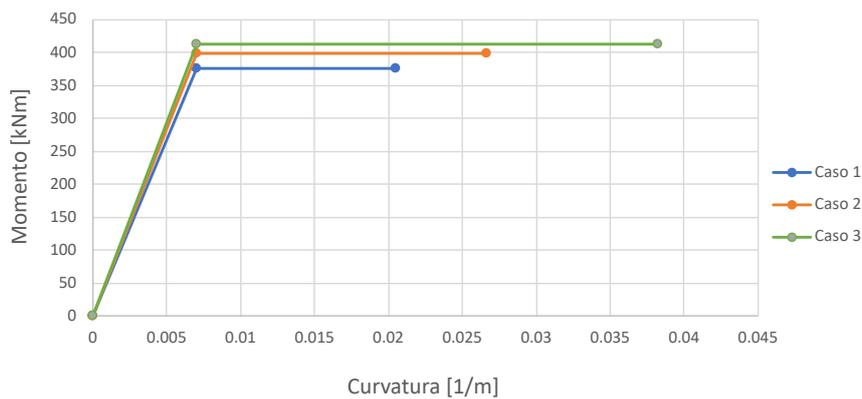
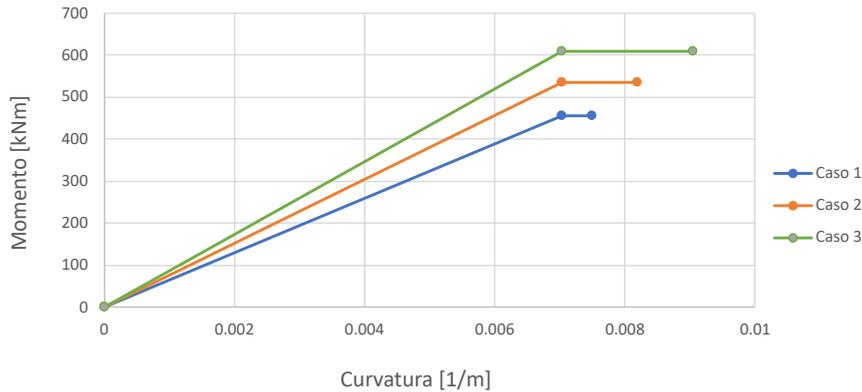


Figura 3.21 - Diagramma momento-curvatura di una sezione soggetta a pressoflessione (per $\nu = 0.13$)

I risultati numerici ottenuti e il corrispondente diagramma momento-curvatura per uno sforzo normale adimensionale $\nu = 0.55$ sono di seguito riportati.

	$S_1(\epsilon)$ [-]	ω [-]	ν [-]	φ_y [1/mm]	φ_u [1/mm]	μ_φ [-]	M_u [kNm]
Caso 1	0.002833	0.113	0.55	7.0302E-06	7.5E-06	1.07	456
Caso 2	0.002833	0.113	0.55	7.0302E-06	8.1974E-06	1.17	537
Caso 3	0.002833	0.113	0.55	7.0302E-06	9.0377E-06	1.29	609

Figura 3.22 - Risultati numerici per $\nu = 0.55$ Figura 3.23 - Diagramma momento-curvatura di una sezione soggetta a pressoflessione (per $\nu = 0.55$)

3.2.2 Considerazioni

Come si osserva dalle Figg. 3.13, 3.14, 3.15, 3.16, 3.17, 3.18, il fattore di duttilità in curvatura, che descrive la duttilità della sezione soggetta a sollecitazione di pressoflessione, nel caso di armature non simmetriche risulta aumentare per percentuali di armatura tesa inferiori, poichè la curvatura ultima decresce all'aumentare di ω . Nel caso di armature simmetriche invece, il fattore di duttilità risulta indipendente dalla percentuale di armatura, ma dipende solo dallo sforzo normale adimensionale e dalla massima deformazione raggiunta, nonché dall'effetto del confinamento. Come si osserva dalle Figg. 3.21 e 3.23, la curvatura ultima e quindi il fattore di duttilità in curvatura, aumenta per valori di sforzo normale più bassi. Lo sforzo normale adimensionale aumenta all'aumentare della forza assiale esterna e decresce all'aumentare della resistenza a compressione del calcestruzzo e quindi decresce all'aumentare della classe di calcestruzzo. Inoltre, la variazione del fattore di duttilità in funzione della deformazione ultima raggiunta dal calcestruzzo, ovvero il fatto che la curvatura ultima cresca all'aumentare della deformazione ultima, mette in evidenza la dipendenza della duttilità sezionale dalla duttilità intrinseca del materiale

calcestruzzo e quindi dall'effetto del confinamento. Quindi, affinché la sezione sviluppi una duttilità più elevata, è necessario ridurre lo sforzo normale agente, adottare una classe di calcestruzzo più elevata o adottare tecniche di confinamento per aumentare la deformazione ultima massima.

3.3 Confinamento

Un appropriato confinamento degli elementi in calcestruzzo armato può risultare nel globale miglioramento delle prestazioni, consentendo di incrementare la resistenza ultima e la corrispondente deformazione ultima di elementi sollecitati da sforzo normale centrato o con piccola eccentricità, e la duttilità degli elementi pressoinflessi [8]. Nella pratica, esistono numerosi interventi di confinamento, eseguiti con altrettante tecniche e impiego di svariati materiali. Inoltre, gli interventi di confinamento rientrano tra le tecniche di consolidamento e riparazione di strutture esistenti, nonché di adeguamento alle norme vigenti in materia di duttilità strutturale, di particolare rilevanza soprattutto in zona sismica. Per incrementare la duttilità, il confinamento si avvale di un principio elementare chiamato “effetto Poisson”, ovvero della comparsa di deformazioni laterali a seguito dell'applicazione di un carico assiale, con il risultato che la massima tensione relativa alla rottura risulterà essere superiore a quella che si otterrebbe nel caso di assenza di confinamento [9]. Come osservato in precedenza, il legame costitutivo, cioè la curva tensione deformazione del calcestruzzo, gioca un ruolo fondamentale nella definizione del parametro di duttilità in curvatura, il quale esprime la duttilità a livello sezionale. In letteratura è possibile trovare diversi modelli di calcestruzzo confinato basati su campagne sperimentali (per citarne alcuni: Ratzvi and Saatcioglu, 1989 [10]; Mander, 1988 [11]; Priestly and Park, 1982 [12]; NTC2018 [1]).

Negli ultimi anni sono state sviluppate tecniche di confinamento che si basano sull'utilizzo di materiali compositi polimerici fibro-rinforzati (FRP).

3.3.1 Confinamento con sistemi in FRP

I materiali comunemente denominati FRP (*Fyber Reinforced Polymers*) sono materiali compositi eterogenei e anisotropi costituiti da matrici polimeriche e da fibre

lunghe continue di carbonio, vetro o arammide, disponibili in diverse geometrie [13]. Trovano largo impiego nella riabilitazione e nel consolidamento delle strutture civili e presentano molteplici vantaggi quali leggerezza, elevate proprietà meccaniche, facilità nell'applicazione e reversibilità dell'intervento.

Nei compositi fibrorinforzati le fibre svolgono il ruolo di elementi portanti sia in termini di resistenza che di rigidità. La matrice, costituita da resine, oltre a proteggere le fibre da danneggiamento e invecchiamento, funge da mezzo di trasferimento degli sforzi tra fibra e fibra ed eventualmente tra queste e l'elemento strutturale da rinforzare. Nella maggioranza dei casi i compositi sono costituiti da fibre caratterizzate da resistenza e rigidità elevate, nonché da valori della deformazione a rottura inferiori a quelli della matrice. In Fig. 3.24 sono rappresentati qualitativamente i legami costitutivi di un materiale fibrorinforzato unidirezionale e delle sue fasi costituenti: matrice e fibre. Il composito esibisce rispetto alle fibre una rigidità inferiore ma la medesima deformazione a rottura, $\varepsilon_{,fib,max}$. Infatti, una volta superata tale deformazione, diviene impossibile il trasferimento degli sforzi dalla matrice alle fibre.

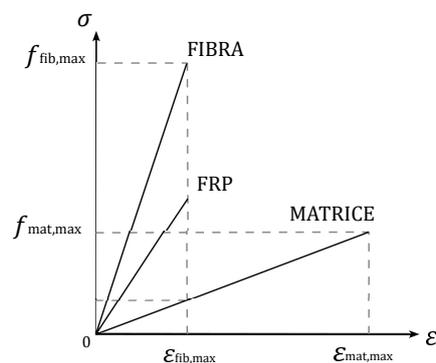


Figura 3.24 - Legami costitutivi di fibre, matrice e corrispondente composito

Il confinamento di elementi in c.a. può essere realizzato con fogli in FRP che avvolgono esternamente in maniera continua o discontinua il perimetro dell'elemento. L'incremento di capacità assiale e deformazione ultima del calcestruzzo confinato con FRP dipende dalla pressione di confinamento applicata, la quale è funzione della sezione trasversale dell'elemento e della rigidità dell'FRP. Le proprietà meccaniche dell'FRP differiscono in funzione del tipo di sistema [13]:

- *sistemi preformati*, costituiti da componenti di varia forma preparati in stabilimento mediante pultrusione, o altri processi produttivi di comprovata validità

tecnologica, ed incollati all'elemento strutturale da rinforzare;

- *sistemi impregnati in situ*, costituiti da fogli o tessuti di fibre uni o multi-direzionali impregnati con una resina che può fungere anche da adesivo con il substrato interessato;
- *sistemi preimpregnati*, costituiti da fogli o tessuti di fibre uni o multi-direzionali preimpregnati con resina parzialmente polimerizzata ed incollati al substrato da rinforzare con (o senza) l'uso di resine aggiuntive.

I sistemi confinanti in FRP, i quali hanno un comportamento elastico-lineare fino a rottura delle fibre, a differenza di quelli in acciaio, che hanno comportamento elastoplastico, esercitano una pressione laterale strettamente crescente all'aumentare della dilatazione trasversale dell'elemento confinato, fornendo significativo incremento della capacità di deformazione e della resistenza. Tale incremento potrebbe teoricamente essere infinito ma nella realtà, a partire da un certo valore di deformazione assiale, il calcestruzzo confinato con FRP si degrada per effetto di una fessurazione diffusa e perde la sua funzionalità, con capacità di assorbire solo moderate tensioni trasversali.

La deformazione ultima di progetto del calcestruzzo confinato con FRP è determinabile come:

$$\varepsilon_{ccu} = 0.0035 + 0.015 \cdot \sqrt{\frac{f_{l,eff}}{f_{cd}}} \quad (3.16)$$

La resistenza di progetto del calcestruzzo confinato con FRP è determinabile come:

$$f_{ccd} = f_{cd} \left[1 + 2.6 \cdot \left(\frac{f_{l,eff}}{f_{cd}} \right)^{2/3} \right] \quad (3.17)$$

Nella (3.16) e nella (3.17), f_{cd} è la tensione di progetto del calcestruzzo non confinato, mentre il termine $f_{l,eff}$ rappresenta la pressione efficace di confinamento, un'aliquota della pressione di confinamento esercitata dal sistema di rinforzo che contribuisce alla resistenza dell'elemento confinato e che dipende dalla forma della sezione trasversale e dalla disposizione del rinforzo in FRP. Il confinamento risulta efficace se $\frac{f_{l,eff}}{f_{cd}} > 0.05$.

La pressione efficace di confinamento risulta essere massima nelle sezioni circolari, mentre nelle sezioni rettangolari o quadrate si verifica un fenomeno soprannominato "effetto arco": gli angoli rappresentano punti di elevata concentrazione degli sforzi e perciò si creano delle zone in cui il confinamento è trascurabile, riducendo l'area di

sezione trasversale effettivamente confinata. Per lo stesso motivo, gli angoli della sezione vengono solitamente arrotondati con adeguato raggio di curvatura (almeno 2 cm) per evitare che il rinforzo in FRP si danneggi; lo stesso effetto arco dipende dal raggio di arrotondamento degli spigoli.

La pressione efficace di confinamento è fornita dalla relazione:

$$f_{l,eff} = k_{eff} \cdot f_l \quad (3.18)$$

dove k_{eff} è un coefficiente di efficienza (≤ 1), definito come rapporto fra il volume $V_{c,eff}$ di calcestruzzo efficacemente confinato ed il volume V_c dell'elemento di calcestruzzo, depurato da quello delle armature longitudinali (generalmente trascurabile). La pressione di confinamento pu essere valutata mediante la relazione:

$$f_l = \frac{1}{2} \cdot \rho_f \cdot E_f \cdot \varepsilon_{fd,rid} \quad (3.19)$$

dove:

ρ_f è la percentuale geometrica di rinforzo dipendente dalla forma della sezione e dal tipo di applicazione (confinamento continuo o discontinuo);

E_f è il modulo di elasticità normale del materiale in direzione delle fibre;

$\varepsilon_{fd,rid}$ è un'opportuna defromazione ridotta di calcolo del composito fibrorinforzato, definita dalla relazione:

$$\varepsilon_{fd,rid} = \min\{\eta_a \cdot \varepsilon_{fk} / \gamma_f; 0.004\} \quad (3.20)$$

dove η_a e γ_f sono, rispettivamente il fattore di conversione ambientale, che dipende dall'esposizione e dal tipo di fibra/resina (che si può assumere pari a 0.75 come valore medio) e il coefficiente parziale del materiale composito fibrorinforzato, che si può assumere pari a 1.10 per i calcoli di confinamento; 0.004 è la deformazione limite convenzionale del composito; in realtà, per la valutazione della duttilità di elementi pressoinflessi, la pressione efficace di confinamento può essere stimata attribuendo alla deformazione ridotta di calcolo del composito fibrorinforzato il valore:

$$\varepsilon_{fd,rid} = \eta_a \cdot \varepsilon_{fk} / \gamma_f \leq 0.6 \cdot \varepsilon_{fk} \quad (3.21)$$

Il coefficiente di efficienza, k_{eff} , può essere espresso come prodotto di tre fattori: un coefficiente di efficienza orizzontale, k_H , uno di efficienza verticale, k_V , ed un altro

legato all'inclinazione delle fibre, k_α :

$$k_{eff} = k_H \cdot k_V \cdot k_\alpha \quad (3.22)$$

Il coefficiente di efficienza orizzontale, k_H , dipende dalla forma della sezione e per sezioni quadrate e rettangolari è fornito dalla relazione:

$$k_H = 1 - \frac{b'^2 + h'^2}{3A_g} \quad (3.23)$$

in cui b' e h' sono le dimensioni indicate in Fig.3.25 e A_g è l'area della sezione trasversale dell'elemento confinato.

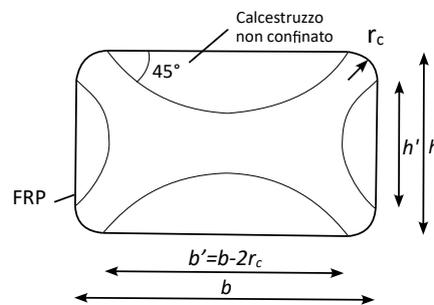


Figura 3.25 - Confinamento di sezioni rettangolari ed effetto arco

Il coefficiente di efficienza verticale, k_V , dipende dallo sviluppo del confinamento lungo l'asse longitudinale dell'elemento rinforzato. In caso di fasciatura continua si assume $k_V = 1$. In caso di fasciatura discontinua, realizzata cioè con strisce di FRP disposte ad interasse p_f e distanza netta p'_f , si deve tenere conto della riduzione di efficacia dovuta al fenomeno di diffusione delle tensioni tra due fasciature consecutive. Per effetto di tale diffusione si creano delle zone che non risentono del confinamento, aventi approssimativamente in sezione verticale un contorno parabolico con tangente iniziale inclinata di 45° .

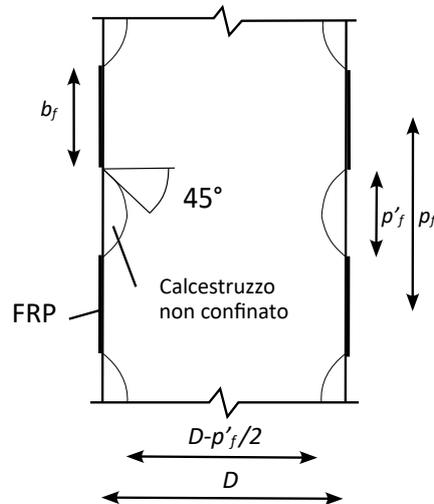


Figura 3.26 - Confinamento lungo l'asse longitudinale dell'elemento

Indipendentemente dalla forma della sezione, il coefficiente di efficienza verticale, k_V , può essere assunto pari a:

$$k_V = \left(1 - \frac{p'_f}{2d_{min}}\right)^2 \quad (3.24)$$

avendo indicato con d_{min} la minima dimensione trasversale dell'elemento.

Indipendentemente dalla forma della sezione, il coefficiente di efficienza k_α può esprimersi in funzione dell'angolo di inclinazione delle fibre, α_f , come:

$$k_\alpha = \frac{1}{1 + (\tan \alpha_f)^2} \quad (3.25)$$

Per sezioni quadrate e rettangolari, il valore della percentuale geometrica di rinforzo, ρ_f , da utilizzare nella (3.19) è fornito dalla relazione:

$$\rho_f = \frac{2 \cdot t_f \cdot (b + h) \cdot b_f}{b \cdot h \cdot p_f} \quad (3.26)$$

dove t_f e b_f sono, rispettivamente, lo spessore e l'altezza della generica striscia di FRP, p_f è il passo delle strisce, mentre b e h sono le dimensioni trasversali della sezione rettangolare.

3.3.2 Duttività di elementi pressoinflessi confinati con FRP

In mancanza di determinazioni più accurate, la curvatura ultima di una sezione pressoinflessa può essere valutata ipotizzando, per il calcestruzzo confinato, un classico legame costitutivo del tipo parabola-rettangolo i cui parametri determinanti risultano essere ε_{ccu} e f_{ccd} . In alternativa, determinazioni più accurate della curvatura ultima possono essere conseguite con l'ausilio di appropriati legami costitutivi del calcestruzzo confinato con FRP. In particolare, è possibile adottare un legame costitutivo non lineare del tipo rappresentato in Fig. 3.27, costituito da un primo tratto parabolico e da un secondo tratto lineare crescente. Nel punto di passaggio dal tratto parabolico a quello lineare si ipotizza la continuità della derivata prima della funzione $\sigma(\varepsilon)$ [13].

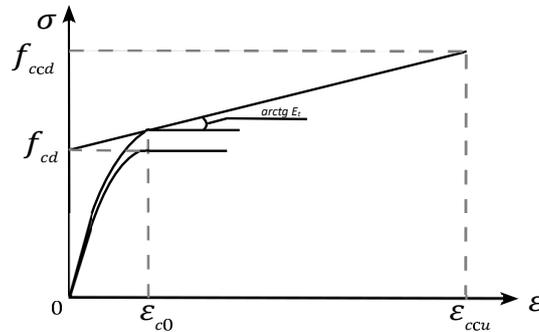


Figura 3.27 - Modello tensione-deformazione del calcestruzzo confinato con FRP

In termini analitici il legame proposto può essere espresso come segue:

$$\begin{cases} \sigma(\varepsilon) = f_{cd} \left[a \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c0}} \right) - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c0}} \right)^2 \right] & \text{per } 0 \leq \varepsilon < \varepsilon_{c0} \\ \sigma(\varepsilon) = f_{cd} \left[1 + b \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c0}} \right) \right] & \text{per } \varepsilon_{c0} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{ccu} \end{cases}$$

f_{cd} ed ε_{c0} sono, rispettivamente, la resistenza di progetto del calcestruzzo non confinato e la competente deformazione (generalmente assunta pari a 0.002); ε_{ccu} è la deformazione ultima di progetto del calcestruzzo confinato, competente alla resistenza di progetto f_{ccd} ; i coefficienti a e b sono:

$$\begin{aligned} a &= 1 + \gamma \\ b &= \gamma - 1 \end{aligned}$$

ed inoltre:

$$\gamma = \frac{f_{cd} + E_t \cdot \varepsilon_{c0}}{f_{cd}} \quad (3.27)$$

$$E_t = \frac{f_{ccd} - f_{cd}}{\varepsilon_{ccu}} \quad (3.28)$$

Assumendo quindi tale legame costitutivo per il calcestruzzo confinato, e tenendo conto delle relazioni ricavate in precedenza tra la curvatura ultima e la massima deformazione raggiunta dal calcestruzzo (3.9) e (3.5), nella trattazione è opportuno modificare l'integrando che definisce la funzione $S_1(\varepsilon)$ da cui dipende la curvatura ultima di una sezione soggetta a pressoflessione. In particolare:

$$\begin{aligned} S_1(\varepsilon) &= \frac{\int_0^{\varepsilon_{ccu}} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon}{f_{cd}} = \\ &= a \int_0^{\varepsilon_{c0}} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c0}} \right) d\varepsilon - \int_0^{\varepsilon_{c0}} \left(\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon_{c0}^2} \right) d\varepsilon + \int_0^{\varepsilon_{c0}} d\varepsilon + b \int_{\varepsilon_{c0}}^{\varepsilon_{ccu}} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c0}} \right) d\varepsilon = \\ &= \frac{a}{\varepsilon_{c0}} \cdot \frac{\varepsilon_{c0}^2}{2} - \frac{1}{\varepsilon_{c0}^2 \cdot \frac{\varepsilon_{c0}^3}{3}} + \varepsilon_{ccu} - \varepsilon_{c0} + \frac{b}{\varepsilon_{c0}} \cdot \frac{1}{2} (\varepsilon_{ccu}^2 - \varepsilon_{c0}^2) = \\ &= \varepsilon_{c0} \left(\frac{a}{2} - \frac{4}{3} - \frac{b}{2} \right) + \varepsilon_{ccu} + \frac{b}{2} \cdot \frac{\varepsilon_{ccu}^2}{\varepsilon_{c0}} \end{aligned}$$

Nota la forma della funzione $S_1(\varepsilon)$ è possibile determinare la curvatura ultima di una sezione soggetta a pressoflessione costituita da calcestruzzo confinato e valutare il corrispondente diagramma momento-curvatura.

3.3.3 Diagramma momento-curvatura

Di seguito, la valutazione del diagramma momento-curvatura per una sezione rettangolare le cui caratteristiche geometriche e meccaniche sono riportate in Fig. 3.28, soggetta a pressoflessione, entro un range di valori di sforzo normale adimensionale per il quale è corretto assumere entrambe le armature snervate, considerando un legame costitutivo del calcestruzzo confinato con FRP, nei seguenti casi:

- Caso 1: $A'_s/A_s = 0$, sezione semplicemente armata;

- Caso 1: $A'_s/A_s = 0.5$, sezione doppiamente armata, con armatura compressa pari a metà di quella tesa;
- Caso 1: $A'_s/A_s = 1$, sezione doppiamente armata, con armatura compressa pari a quella tesa;

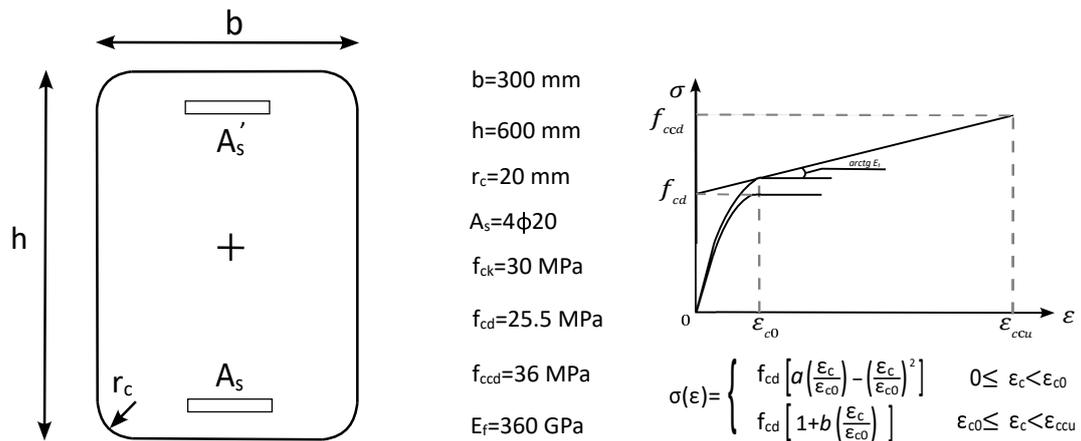


Figura 3.28 - Sezione rettangolare in c.a. confinata con FRP soggetta a pressoflessione, caratteristiche geometriche e meccaniche

Al fine della computazione numerica, è necessario conoscere specifiche tecniche del sistema di rinforzo in FRP utilizzato. Nello specifico, si sceglie un sistema del tipo MAPEWRAP C UNI-AX HM SYSTEM [14], ovvero un sistema di confinamento costituito da tessuto composito fibrorinforzato con fibre uni-direzionali di carbonio ad alta resistenza e modulo elastico molto alto; le corrispondenti specifiche tecniche sono di seguito riportate.

CARATTERISTICHE GEOMETRICHE E FISICHE			
Proprietà	Metodo di prova normativa di riferimento	MAPEWRAP C UNI-AX HM 300	MAPEWRAP C UNI-AX HM 600
Tipo di fibra	-	carbonio ad alta resistenza ed elevatissimo modulo elastico	
Aspetto	-	tessuto unidirezionale	
Densità delle fibre ρ_{fb} (g/cm ³)	ASTM D 4018	1,80-1,84	1,80-1,84
Massa del tessuto per unità di area p_x (g/m ²)	-	300	600
Densità della resina ρ_m (g/cm ³)	ISO 1675	1,06	1,06
Area equivalente tessuto secco A_{rt} (mm ² /m)	-	164,8	329,6
Spessore equivalente tessuto secco t_{eq} (mm)	-	0,164	0,329
Frazione in peso delle fibre nel composito (%)	ASTM D 3171	35-50	45-60
Frazione in volume delle fibre nel composito (%)	ASTM D 3171	25-35	30-45
Temperatura di transizione vetrosa della resina di impregnazione $T_{g,lm}$ (°C)	ISO 11357-2:2013(E) DSC ⁽¹⁾	65	
Temperatura di transizione vetrosa dello stucco opzionale di regolarizzazione $T_{g,rs}$ (°C)	ISO 11357-2:2013(E) DSC ⁽¹⁾	71	
Temperature limiti, minima e massima, di utilizzo (°C) ⁽²⁾	ACI 440.2R-08	Da -20 a +50 ⁽²⁾	
Reazione al fuoco	-	NPD	
Resistenza al fuoco	-	NPD	

Figura 3.29 - Caratteristiche geometriche e fisiche del sistema MAPEWRAP C UNI-AX HM SYSTEM

PROPRIETÀ MECCANICHE TESSUTO SECCO		
Proprietà	MAPEWRAP C UNI-AX HM 300	MAPEWRAP C UNI-AX HM 600
Resistenza meccanica a trazione tessuto secco (N/mm ²)	4.410	4.410
Carico massimo per unità di larghezza tessuto secco (kN/m)	> 700	> 1.400
Modulo elastico a trazione tessuto secco (N/mm ²)	390.000	390.000
Deformazione a rottura tessuto secco (%)	1,1	1,1

Figura 3.30 - Proprietà meccaniche del tessuto secco del sistema MAPEWRAP C UNI-AX HM SYSTEM

PROPRIETÀ MECCANICHE MAPEWRAP C UNI-AX HM SYSTEM IN ACCORDO A CVT N° 206/2019					
Classe di appartenenza secondo LG di cui al DPCS LL.PP. n. 220 del 9.7.2015				350/2800C	
Modulo elastico del laminato riferito all'area netta fibre (GPa)			Valore tabellare	350	
Resistenza del laminato riferita all'area netta fibre (MPa)			Valore tabellare	2.800	
Proprietà	Metodo di prova normativa di riferimento	MAPEWRAP C UNI-AX HM 300		MAPEWRAP C UNI-AX HM 600	
		per n. 1 strato di tessuto	per n. 3 strati di tessuto	per n. 1 strato di tessuto	per n. 3 strati di tessuto
Modulo elastico del laminato riferito all'area netta fibre valore medio E_l (GPa)	UNI EN 2561	≥ 360	≥ 360	≥ 360	≥ 370
Resistenza del laminato riferita all'area netta fibre valore caratteristico $f_{fb,k}$ (MPa)		≥ 2.800	≥ 3.000	≥ 2.800	≥ 2.800
Deformazione a rottura ϵ_{fb} (%)		≥ 0,75	≥ 0,84	≥ 0,75	≥ 0,77
Adesione al calcestruzzo (N/mm ²)	> 3 (rottura del supporto)				

Figura 3.31 - Proprietà meccaniche del sistema MAPEWRAP C UNI-AX HM SYSTEM

I risultati numerici ottenuti e il corrispondente diagramma momento-curvatura per uno sforzo normale adimensionale $\nu = 0.13$ sono di seguito riportati nel caso di sistema di rinforzo realizzato con due strati di tessuto.

	$S_1(\epsilon)$ [-]	ω [-]	ν [-]	φ_y [1/mm]	φ_u [1/mm]	$\mu\varphi$ [-]	M_u [kNm]
Caso 1	0.008132	0.113	0.13	7.0302E-06	5.8767E-05	8.36	323
Caso 2	0.008132	0.113	0.13	7.0302E-06	7.6545E-05	10.89	352
Caso 3	0.008132	0.113	0.13	7.0302E-06	0.00010974	15.61	377

Figura 3.32 - Risultati numerici per $\nu = 0.13$ e due strati di confinamento in FRP

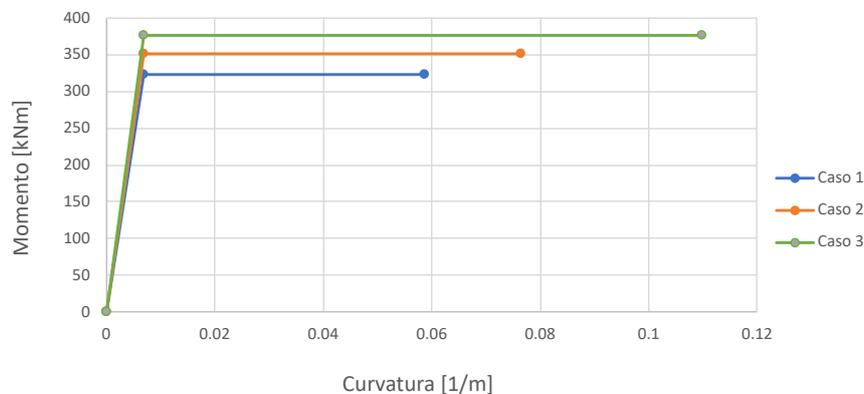


Figura 3.33 - Diagramma momento-curvatura di una sezione soggetta a pressoflessione ($\nu = 0.13$) con due strati di confinamento in FRP

I risultati numerici ottenuti e il corrispondente diagramma momento-curvatura per uno sforzo normale adimensionale $\nu = 0.55$ sono di seguito riportati nel caso di sistema di rinforzo realizzato con due strati di tessuto.

	$S_1(\epsilon)$ [-]	ω [-]	ν [-]	φ_y [1/mm]	φ_u [1/mm]	$\mu\varphi$ [-]	M_u [kNm]
Caso 1	0.008132	0.113	0.55	7.0302E-06	2.1526E-05	3.06	474
Caso 2	0.008132	0.113	0.55	7.0302E-06	2.3527E-05	3.35	533
Caso 3	0.008132	0.113	0.55	7.0302E-06	2.5939E-05	3.69	588

Figura 3.34 - Risultati numerici per $\nu = 0.55$ e due strati di confinamento in FRP

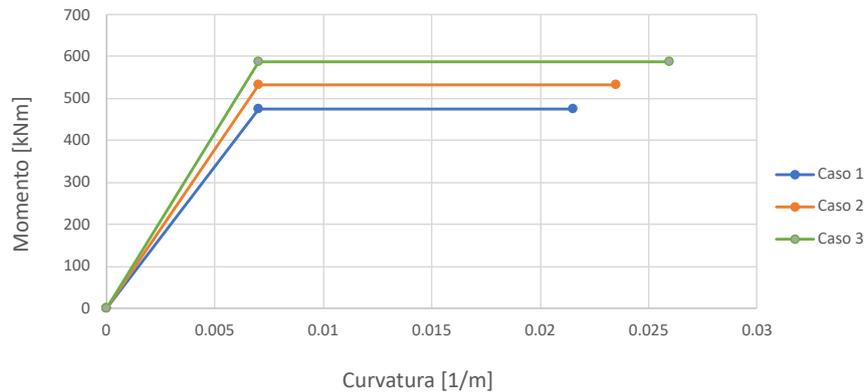


Figura 3.35 - Diagramma momento-curvatura di una sezione soggetta a pressoflessione ($\nu = 0.55$) con due strati di confinamento in FRP

3.3.4 Considerazioni

Come si osserva da Figg. 3.33 e 3.35, l'utilizzo di sistemi di confinamento in FRP risulta benefico nei confronti della duttilità sezionale. Infatti, il fattore di duttilità in curvatura risulta essere circa triplicato rispetto al caso di legame-costitutivo del calcestruzzo non confinato, dimostrando il grado di ottimizzazione ottenibile con semplici sistemi che agiscono sulla massima deformazione raggiungibile dal calcestruzzo e, marginalmente, sulla sua resistenza, senza modificare le caratteristiche geometriche della sezione. In particolare, il legame costitutivo del calcestruzzo confinato con FRP dimostra di intervenire sulla funzione integrale $S_1(\varepsilon)$ e, conseguentemente, sulla curvatura ultima e perciò sulla duttilità sezionale. Così come per il caso senza confinamento, il fattore di duttilità in curvatura decresce all'aumentare dello sforzo normale adimensionale.

Capitolo 4

Algoritmo e codice

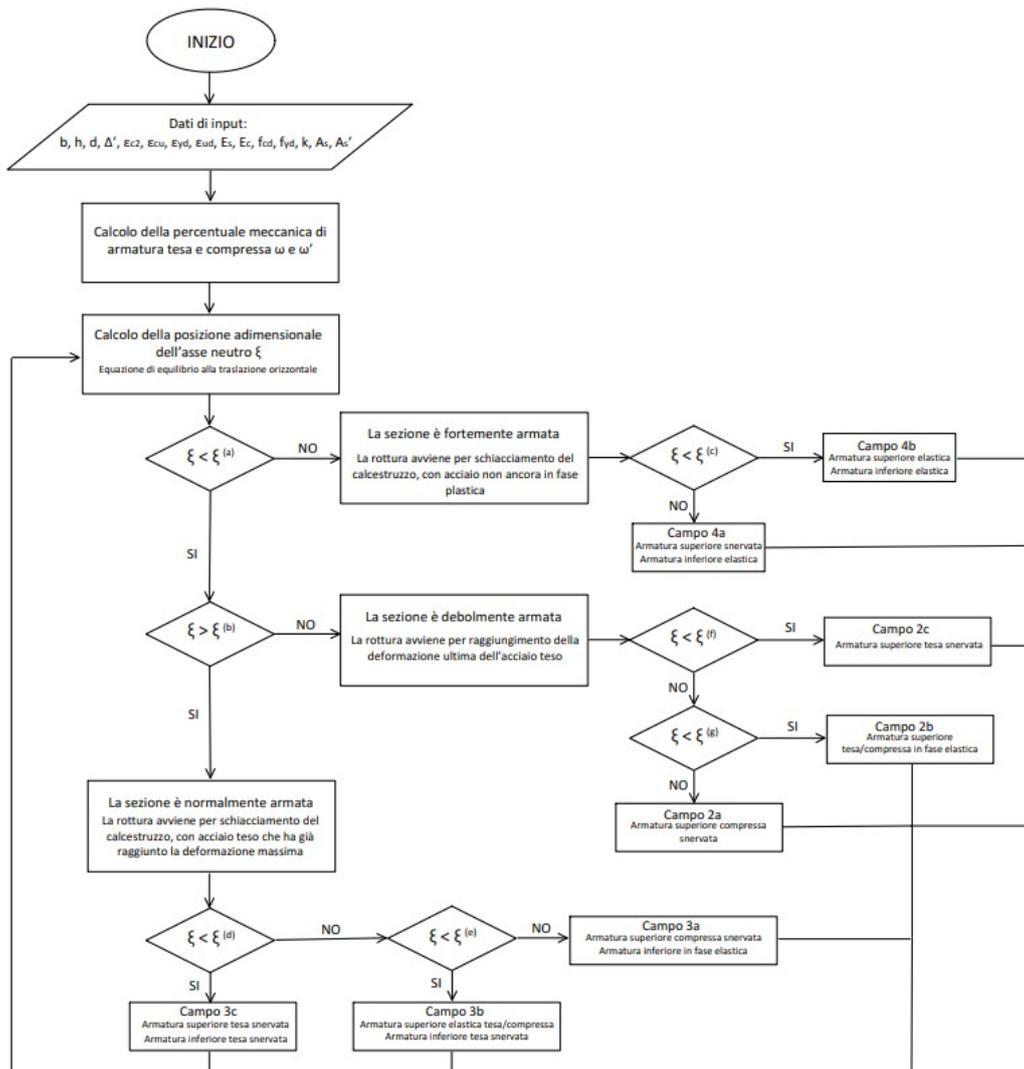
Sulla base dello studio analitico effettuato e delle equazioni ottenute, il presente Capitolo offre algoritmi e codici facilmente implementabili e consultabili tramite software open source disponibili, capaci di individuare il campo di rottura ed eseguire le verifiche di resistenza e duttilità.

Oggi, data la vastità e la diversificazione delle configurazioni strutturali, è indispensabile utilizzare software per l'analisi e la progettazione delle strutture [15]. Sul mercato sono disponibili molti programmi commerciali per la progettazione delle strutture in cemento armato; tuttavia, sono costosi e forniscono limitate licenze d'uso. Inoltre, ogni software ha presupposti intrinseci che devono essere compresi chiaramente prima della sua implementazione nella progettazione. La necessità di sviluppare algoritmi e codici di programmazione semplici e accessibili è sempre più impellente.

Tra gli altri linguaggi, Python è stato identificato come linguaggio preferito per la programmazione grazie alla sua semplicità di apprendimento e implementazione; un utente senza alcun background di programmazione può sviluppare programmi in Python fin da subito ed efficacemente [16]. Python [17] è un linguaggio di programmazione open source di alto livello che è ampiamente utilizzato dai programmatori di tutto il mondo per varie applicazioni. È disponibile gratuitamente e può funzionare facilmente su personal computer con configurazione minima. Il vantaggio dell'uso di Python è che un progettista può creare un programma personalizzato per la progettazione interattiva. I programmi Python possono anche essere convertiti in software eseguibili.

4.1 Diagramma di flusso

La scrittura del codice è scaturita dall'algoritmo illustrato in Fig. 4.1, che descrive in modo semplice gli step logici che concorrono a realizzare lo scopo del programma, sottoforma di operazioni semplici. Inoltre, sono state definite apposite funzioni che, richiamate all'occorrenza, rendono il programma il più chiaro e ordinato possibile.



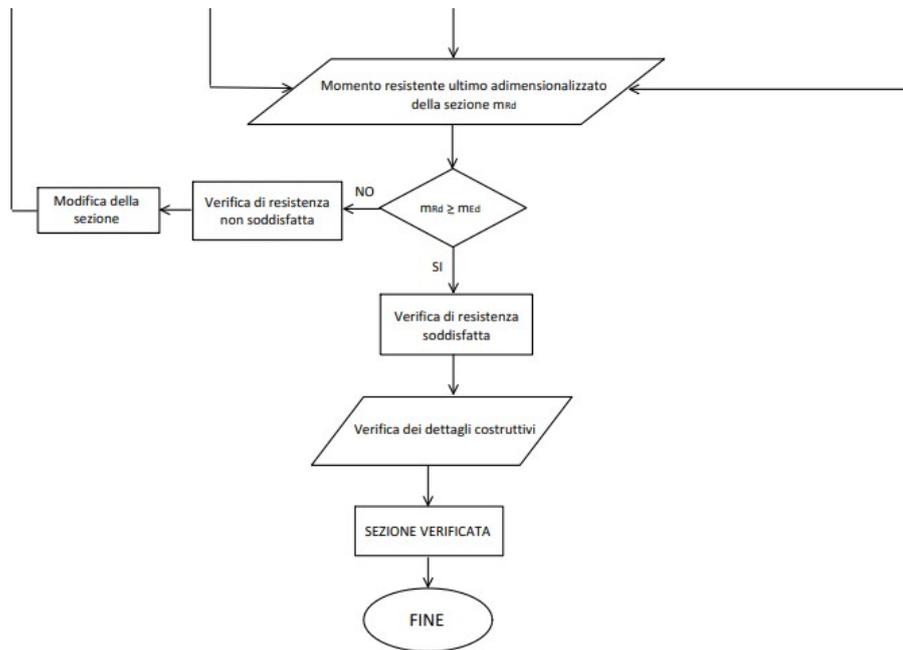


Figura 4.1 - Diagramma di flusso

4.2 Fase di lettura

La prima fase è quella di lettura, in cui il programma riceve in input da tastiera le caratteristiche geometriche e meccaniche della sezione in calcestruzzo armato esaminata. In particolare, i parametri da inserire sono i seguenti:

- b , base della sezione;
- d , altezza meccanica della sezione;
- D , copriferro;
- A_{stp} , area di armatura tesa fornita;
- A_{scp} , area di armatura compressa fornita;
- f_{ck} , resistenza caratteristica del calcestruzzo a 28 giorni;
- f_{yk} , tensione caratteristica di snervamento dell'acciaio;
- f_t , tensione di rottura dell'acciaio;

- M_{Ed} , momento agente sulla sezione;

Per quanto riguarda i materiali, il legame costitutivo associato all'acciaio è quello "elasto-plastico con ramo incrudente", mentre il legame costitutivo associato al calcestruzzo è il "parabola-rettangolo".

4.3 Fase di analisi e computazione numerica

In questa fase il programma risale alle corrette equazioni di equilibrio alla traslazione e alla rotazione da utilizzare per valutare correttamente la profondità dell'asse neutro e il momento resistente offerto dalla sezione. Prima di procedere alla valutazione dei sopracitati parametri, il programma determina una serie di parametri utili all'analisi computazionale. Le grandezze definite sono:

- δ , rapporto tra copriferro e altezza meccanica della sezione;
- f_{cm} , valore medio della resistenza cilindrica a compressione del calcestruzzo;
- f_{ctm} , valore medio della resistenza a trazione semplice del calcestruzzo;
- f_{cd} , valore di calcolo della resistenza a compressione del calcestruzzo;
- f_{yd} , valore di calcolo della tensione di snervamento dell'acciaio;
- E_{cm} , modulo elastico del calcestruzzo;
- ω_t , percentuale meccanica di armatura tesa;
- ω_c , percentuale meccanica di armatura compressa;
- ρ_t , percentuale geometrica di armatura tesa;
- ρ_c , percentuale geometrica di armatura compressa;
- ψ_A , rapporto di armatura;
- k , rapporto di incrudimento;
- ε_{yd} e ε_{ud} , deformazione allo snervamento e deformazione ultima di progetto dell'acciaio;

- ε_{c2} e ε_{cu} , deformazione al limite elastico e deformazione ultima di progetto del calcestruzzo.

Per quanto riguarda le deformazioni del calcestruzzo, queste sono state definite in base alla resistenza caratteristica cilindrica f_{ck} del calcestruzzo, distinguendo i casi in cui essa sia minore o maggiore di 50 MPa.

Inoltre, il programma definisce le percentuali di armatura tesa corrispondenti alle rette di frontiera tra campo 3 e 4 ($\omega^{(a)}$) e tra campo 2 e 3 ($\omega^{(b)}$). In questo modo è possibile definire in che scenario si trova la sezione esaminata, ovvero se siamo nel caso di sezione debolmente, normalmente o fortemente armata.

Determinati i parametri sopracitati, si procede con la distinzione tra le situazioni progettuali e quindi tra i campi di rottura. Nell'ipotesi di avere sollecitazione di flessione semplice, la sezione si troverà in campo 3 o in campo 4. L'appartenenza a uno o all'altro campo di rottura è dettata dalla posizione dell'asse neutro adimensionalizzato ξ . Un altro fattore discriminante alla corretta scrittura delle equazioni di equilibrio, è la deformazione dell'acciaio che costituisce l'armatura superiore e l'armatura inferiore; questo infatti determina la distinzione tra i vari sottocampi e di conseguenza le risultanti delle forze in gioco che concorrono all'equilibrio della sezione. Note anche queste deformazioni, che possono essere lette dal diagramma delle deformazioni di collasso, è possibile ottenere la corretta equazione che identifica la posizione dell'asse neutro, da inserire nell'equazione per la determinazione del momento resistente M_{Rd} offerto dalla sezione.

Al fine di ottenere una scrittura di codice più compatta e ordinata, è stata definita una apposita funzione che calcola alcuni parametri utili nella scrittura dell'equazione della posizione dell'asse neutro.

Dopo la verifica di resistenza, il programma valuta se eseguire o meno anche la verifica di duttilità sui dettagli costruttivi. In particolare, se la resistenza risulta soddisfatta, il programma procede con il calcolo dei limiti sui quantitativi di armatura tesa e compressa e sul confronto diretto di queste quantità con le percentuali geometriche di armatura.

4.4 Fase di stampa

In quest'ultima fase, il momento agente sulla sezione, il cui valore è acquisito da input tramite tastiera (vedi sezione 4.6), viene confrontato con il momento resisten-

te calcolato automaticamente dal programma. Il passo finale, pertanto, consisterà nella stampa a video del valore del momento resistente e della frase "La verifica di resistenza è soddisfatta" oppure "La verifica di resistenza non è soddisfatta" in esito al confronto tra momento agente e momento resistente. Dopodichè, la stampa a video della frase "Le prescrizioni normative sono rispettate" oppure "Le prescrizioni normative non sono rispettate" in esito alla verifica dei dettagli costruttivi.

Tale codice è stato prodotto per far fronte a situazioni di progetto che prevedono sollecitazioni di flessione semplice, pertanto le equazioni di equilibrio si adattano a tale scenario e scaturiscono dallo studio analitico e dalle equazioni ricavate analiticamente nei capitoli precedenti. Nel caso di sollecitazione di pressoflessione le equazioni dovranno essere modificate di conseguenza.

4.5 Codice del programma

4.1 - Importazione librerie

```
1 import math as m
2 import numpy as np
3 from scipy.interpolate import interp1d
```

4.2 - Definizione funzione

```
1 def coeff (eps_c2 ,eps_cu ,eps_yd ,eps_ud ,k):
2     A=eps_cu / eps_yd
3     B=(k-1)*eps_cu / (eps_ud-eps_yd)
4     C=(k-1)*eps_yd / (eps_ud-eps_yd)
5     F=eps_c2 / (3 * eps_ud)
6     G=(k-1)*eps_ud / (eps_ud-eps_yd)
7     L=eps_ud / eps_yd
8     return A, B, C, F, G, L
```

4.3 - Definizione variabili tramite input da interfaccia grafica

```
1 print('Inserisci base della sezione in mm')
2 b=float(input())
3 print('Inserisci altezza meccanica della sezione in mm')
4 d=float(input())
5 print('Inserisci copriferro in mm')
6 D=float(input())
7 print('Inserisci momento agente sulla sezione in Nmm')
```

```

8 Med=float(input())
9 print('Inserisci area di armatura tesa fornita in mm^2')
10 Astp=float(input())
11 print('Inserisci area di armatura compressa fornita in mm^2')
12 Ascpc=float(input())
13 print('Inserisci resistenza caratteristica del calcestruzzo a 28
      giorni in MPa')
14 fck=int(input())
15 print('Inserisci tensione caratteristica di snervamento acciaio in
      MPa')
16 fyk=int(input())
17 print('Inserisci tensione di rottura acciaio in MPa')
18 ft=int(input())
19 print('Inserisci modulo elastico acciaio in MPa')
20 Es=int(input())

```

4.4 - Calcolo dati

```

1 #rapporto tra copriferro e altezza meccanica della sezione
2 delta=D/d
3
4 #valore medio della resistenza cilindrica a compressione del
      calcestruzzo
5 fcm=fck+8
6
7 if fck <=50:
8     #valore medio della resistenza a trazione semplice del
      calcestruzzo
9     fctm=0.3*fck**(2/3)
10    #deformazione ultima del calcestruzzo
11    eps_cu=3.5/1000
12    #deformazione al limite elastico del calcestruzzo
13    eps_c2=2/1000
14 else:
15    fctm=2.12*ln(1+fcm/10)
16    eps_cu=(0.26/100)+(3.5/100)*((90-fck)/100)**4
17    eps_c2=(0.20/100)+(0.0085/100)*(fck-50)**0.53
18
19 #modulo elastico del calcestruzzo
20 Ecm=22000*(fcm/10)**0.3
21
22 #valore di progetto della resistenza a compressione del
      calcestruzzo

```

```

23 fcd=0.85*fck/1.5
24
25 #valore di progetto della tensione di snervamento dell'acciaio
26 fyd=fyk/1.15
27
28 #percentuale meccanica di armatura tesa
29 omega_t=(Astp*fyd)/(b*d*fcd)
30
31 #percentuale meccanica di armatura compressa
32 omega_c=(Ascp*fyd)/(b*d*fcd)
33
34 #rapporto di armatura
35 psi=Ascp/Astp
36
37 #rapporto di incrudimento
38 k=ft/fyk
39
40 #deformazione di snervamento dell'acciaio
41 eps_yd=fyd/Es
42
43 #deformazione ultima dell'acciaio
44 eps_ud=k*fyd/Es
45
46 #percentuale meccanica di armatura tesa corrispondente alla retta
    di frontiera tra campo 3 e 4
47 omega_a=0.81*(eps_cu/(eps_cu+eps_yd))*1/(1-psi)
48
49 #percentuale meccanica di armatura tesa corrispondente alla retta
    di frontiera tra campo 2 e 3
50 omega_b=(1/k)*(0.81*(eps_cu/(eps_cu+eps_ud))*1/(k-psi))

```

4.5 - Situazione di sezione fortemente armata, collasso in campo 4

```

1 if omega_t>omega_a:
2     print('La sezione è fortemente armata, il collasso avviene in
    campo 4')
3     #l'armatura inferiore è in fase elastica
4     print('Leggere le deformazioni delle armature dal diagramma
    delle deformazioni di collasso.')
5     eps_s=input('Deformazione armatura inferiore: ')
6     sigma_t=eps_s*Es
7     #l'armatura superiore è elastica o snervata?
8     eps_sc=input('Deformazione armatura superiore: ')

```

```

9     if eps_sc>eps_yd: #l'armatura superiore è snervata
10         sigma_c=(1+(k-1)*(eps_sc-eps_yd)/(eps_ud-eps_yd))*fyd
11         #chiamata della funzione
12         A,B,C,F,G,L=coeff (eps_cu , eps_yd , eps_ud , k)
13         #calcolo della posizione dell'asse neutro
14         csi_a=0.617*(-omega_c*(B-C+1)-omega_t*A+math.sqrt((
omega_c*(B-C+1)+omega_t*A)**2+3.24*(omega_c*B*delta+omega_t*A)
)
15         csi=csi_a
16     else: #l'armatura superiore è elastica
17         sigma_c=eps_sc*Es
18         #chiamata della funzione
19         A,B,C,F,G,L=coeff (eps_cu , eps_yd , eps_ud , k)
20         #calcolo della posizione dell'asse neutro
21         csi_b=0.617*(-A*(omega_c+omega_t)+math.sqrt((A*(
omega_c+omega_t)**2+3.24*A*(omega_c*delta+omega_t))))
22         csi=csi_b
23     #calcolo del momento resistente
24     Mrd=Ascp*sigma_c*(1-delta)*d+0.81*csi*d**2*b*fyd*(1-0.416*csi)

```

4.6 - Situazione di sezione debolmente armata, collasso in campo 2

```

1 elif omegat<=omega_b:
2     print('La sezione è debolmente armata, il collasso avviene in
campo 2')
3     eps_s=eps_ud
4     sigma_t=k*fyd
5     #l'armatura superiore è elastica o snervata?
6     eps_sc=input('Deformazione armatura superiore: ')
7     if eps_sc>=eps_yd: #l'armatura superiore è compressa e
snervata
8         sigma_c=(1+(k-1)*(eps_sc-eps_yd)/(eps_ud-eps_yd))*fyd
9         #chiamata della funzione
10        A,B,C,F,G,L=coeff (eps_cu , eps_yd , eps_ud , k)
11        #calcolo della posizione dell'asse neutro
12        csi_a=(1/(2*(1+F)))*(1+2*F+omega_c*(G+C-1)+k*omega_t-
math.sqrt((1+2*F+omega_c*(G+C-1)+k*omega_t)**2-4*(1+F)*(F+
omega_c*(G*delta+C-1)+k*omega_t)))
13        csi=csi_a
14    elif eps_sc>-eps_yd and eps_sc<eps_yd: #l'armatura superiore è
in fase elastica
15        sigma_c=eps_sc*Es
16        #chiamata della funzione

```

```

17         A,B,C,F,G,L=coeff (eps_cu , eps_yd , eps_ud , k)
18         #calcolo della posizione dell'asse neutro
19         csi_b=(1/(2*(1+F)))*(1+2*F+omega_c*L+k*omega_t-math.
sqrt((1+2*F+omega_c*L+k*omega_t)**2-4*(1+F)*(F+omega_c*delta*L+
k*omega_t)))
20         csi=csi_b
21         elif eps_sc<=eps_yd: #l'armatura superiore è tesa e snervata
22             sigma_c=(1+(k-1)*(-eps_sc-eps_yd)/(eps_ud-eps_yd))*fyd
23             #chiamata della funzione
24             A,B,C,F,G,L=coeff (eps_cu , eps_yd , eps_ud , k)
25             #calcolo della posizione dell'asse neutro
26             csi_c=(1/(2*(1+F)))*(1+2*F+omega_c*(G-C+1)+k*omega_t-
math.sqrt((1+2*F+omega_c*(G-C+1)+k*omega_t)**2-4*(1+F)*(F+
omega_c*(G*delta-C+1)+k*omega_t)))
27             csi=csi_c
28             eta=1.694*csi+0.333
29             #calcolo del momento resistente
30             Mrd=Ascp*sigma_c*d*(eta*csi-delta)+Astp*k*fyd*d*(1-eta*csi)

```

4.7 - Situazione di sezione normalmente armata, collasso in campo 3

```

1 else :
2     print('La sezione è normalmente armata, il collasso avviene in
campo 3')
3     #l'armatura inferiore è snervata
4     print('Leggere le deformazioni delle armature dal diagramma
delle deformazioni di collasso.')
5     eps_s=input('Deformazione armatura inferiore: ')
6     sigma_t=(1+(k-1)*(eps_s-eps_yd)/(eps_ud-eps_yd))*fyd
7     #l'armatura superiore è elastica o snervata?
8     eps_sc=input('Deformazione armatura superiore: ')
9     if eps_sc>eps_yd: #l'armatura superiore è snervata
10         sigma_c=(1+(k-1)*(eps_sc-eps_yd)/(eps_ud-eps_yd))*fyd
11         #chiamata della funzione
12         A,B,C,F,G,L=coeff (eps_cu , eps_yd , eps_ud , k)
13         #calcolo della posizione dell'asse neutro
14         csi_a=0.617*(-omega_c*(B-C+1)-omega_t*(B+C-1)+math.
sqrt((omega_c*(B-C+1)+omega_t*(B+C-1))**2+3.24*omega_t*(psi*B*
delta+B)))
15         csi=csi_a
16         elif eps_sc>=eps_yd and eps_sc<eps_ud: #l'armatura superiore è
in fase elastica
17             sigma_c=eps_sc*Es

```

```

18         #chiamata della funzione
19         A,B,C,F,G,L=coeff (eps_cu ,eps_yd ,eps_ud ,k)
20         #calcolo della posizione dell'asse neutro
21         csi_b=0.617*(-omega_c*A-omega_t*(B+C-1)+math.sqrt((
omega_c*A+omega_t*(B+C-1))**2+3.24*(omega_c*A*delta+omega_t*B))
)
22         csi=csi_b
23         elif eps_sc < -eps_yd: #l'armatura superiore è tesa e snervata
24             sigma_c=(1+(k-1)*(-eps_sc-eps_yd)/(eps_ud-eps_yd))*fyd
25             #chiamata della funzione
26             A,B,C,F,G,L=coeff (eps_cu ,eps_yd ,eps_ud ,k)
27             #calcolo della posizione dell'asse neutro
28             csi_c=0.617*(-omega_c*(B+C-1)-omega_t*(B+C-1)+math.
sqrt((omega_c*(B+C-1)+omega_t*(B+C-1))**2+3.24*(omega_c*B*delta
+omega_t*B)))
29             csi=csi_c
30             #calcolo del momento resistente
31             Mrd=Ascp*sigma_c*d*(0.416*csi-delta)+Astp*sigma_t*d*(1-0.416*
csi)

```

4.8 - Verifica dei dettagli costruttivi per la duttilità e stampa a video dei risultati

```

1 print('Il momento resistente della sezione è pari a ', Mrd, 'Nmm')
2 if Mrd<Med:
3     print('La verifica di resistenza non è soddisfatta')
4     print('La sezione non è verificata')
5 else:
6     print('La verifica di resistenza è soddisfatta')
7     #controllo del rispetto dei dettagli costruttivi per la
verifica di duttilità
8     As_a=0.26*(fctm/fyk)*b*d
9     As_b=0.003*b*d
10    As_c=0.04*b*(d+D)
11    As_d=1.4*b*(d+D)/fyk
12    As_e=2*3.14*(14**2)/4 #almeno 2 barre di diametro 14 mm
13    #calcolo limite minimo di armatura tesa
14    As_min=max(As_a,As_b,As_d,As_e)
15    #calcolo limite massimo di armatura tesa
16    As_max=As_c
17    #calcolo limite minimo di armatura compressa
18    Asc_min=As_e
19    #calcolo percentuale geometrica di armatura tesa
20    rho=Astp/(b*(d+D))

```

```
21 #calcolo percentuale geometrica di armatura compressa
22 rhoc=Ascp/(b*(d+D))
23 if Astp>As_e and Ascp>As_e:
24     if rho>1.4*fyk and rho<rhoc+3.5/fyk:
25         if rhoc>0.25*rho:
26             if Astp>=As_min and Astp<=As_max:
27                 if Ascp>=Asc_min:
28                     print('Le prescrizioni normative sono
rispettate ')
29                 else:
30                     print('Le prescrizioni normative non sono
rispettate ')
31                     print('La sezione non è verificata ')
32             else:
33                 print('Le prescrizioni normative non sono
rispettate ')
34                 print('La sezione non è verificata ')
35         else:
36             print('Le prescrizioni normative non sono
rispettate ')
37             print('La sezione non è verificata ')
38     else:
39         print('Le prescrizioni normative non sono rispettate ')
40         print('La sezione non è verificata ')
41 else:
42     print('Le prescrizioni normative non sono rispettate ')
43     print('La sezione non è verificata ')
```

4.6 Algoritmo di calcolo strutturale

Nella sezione 4.2 si fa riferimento al momento agente sulla sezione come dato di input che deve essere noto all'utente. Tale parametro in genere non è noto a priori ma deriva da un'analisi strutturale dei carichi. Per completezza si sviluppa un ulteriore algoritmo, con relativo codice, utilizzando il software Matlab [18], la cui funzione è determinare il valore di momento agente sulla sezione dovuto ai carichi di progetto.

4.6.1 Diagramma di flusso

Al fine di rendere il più chiaro possibile il ragionamento utilizzato per la scrittura del codice, di seguito vengono riportati e descritti gli step logici che costituiscono l'algoritmo del problema. Per la consultazione del flow-chart si rimanda al link <https://drive.google.com/drive/folders/1PKsGPspQ8I3PDvjUZWUcXpHQnjS70QDi?usp=sharing>.

L'algoritmo mira alla risoluzione di un sistema rappresentabile tramite una trave continua quale, ad esempio, un sistema solaio in latero cemento. La versatilità del codice risiede nella possibilità di trattare un numero qualsiasi di campate, purché se ne conoscano le luci, le dimensioni della sezione trasversale e il modulo elastico del calcestruzzo. Infatti, questi sono gli unici dati che l'utente è tenuto a fornire tramite input. Una volta note le luci delle campate, inserite come vettore di interi, è noto anche quale sia il numero effettivo delle campate della trave continua. L'obiettivo principale è ricavare il valore di progetto della sollecitazione, da utilizzare per la verifica di resistenza della sezione in c.a., possibile solo avendo a disposizione i diagrammi di involuppo dei momenti flettenti. L'involuppo è ottenuto considerando fondamentalmente due schemi limite:

- schema limite in cui tutti i vincoli della trave continua sono appoggi semplici;
- schema limite in cui tutti i vincoli della trave continua sono appoggi semplici, fatta eccezione per i due vincoli di estremità, che sono costituiti da incastri.

Questa considerazione è basata sull'impossibilità di realizzare fisicamente un vincolo che rappresenti a rigore un incastro; perciò, si tiene conto dell'incertezza legata alle tecniche costruttive, andando a favore di sicurezza.

Per ogni schema limite, l'involuppo raggruppa tutti i diagrammi di momento ottenuti per diverse combinazioni e disposizioni di carico. A tal proposito, le disposizioni considerate prevedono:

- massimizzazione delle sollecitazioni sulle campate pari;
- massimizzazione delle sollecitazioni sulle campate dispari;
- massimizzazione delle sollecitazioni nelle sezioni di appoggio.

Al fine di massimizzare le sollecitazioni, si dispone un carico per unità di lunghezza ottenuto come combinazione dei carichi permanenti strutturali, permanenti non strutturali e variabili, moltiplicati per gli opportuni coefficienti, che in questo caso producono un effetto “sfavorevole”; questo vuol dire che nel caso di disposizione che massimizzi le sollecitazioni sulle campate pari, su queste si dispongono i carichi “sfavorevoli”, mentre sulle campate dispari i carichi “favorevoli”; nel caso di disposizione che massimizzi le sollecitazioni sulle campate dispari accade esattamente il contrario; nel caso di disposizione che massimizzi le sollecitazioni nelle sezioni di appoggio, per ogni appoggio considerato, i carichi “sfavorevoli” vengono disposti sulle campate immediatamente adiacenti e sulle altre campate “a scacchiera”. Sia n il numero delle campate della trave continua, le disposizioni di carico da considerare per avere la certezza di ottenere le massime sollecitazioni per ogni sezione saranno $n + 1$.

Per ogni disposizione di carico, il diagramma di momento è costruito per campate. Per far ciò è necessario conoscere le sollecitazioni di estremità di ognuna delle campate costituenti la trave continua.

Come noto, le travi continue sono sistemi iperstatici costituiti da travi ad asse rettilineo su più appoggi interni, che possono essere risolti mediante il Metodo delle forze o il Metodo degli spostamenti [19], quest’ultimo che si presta ad essere implementato tramite calcolo automatico. Operando con il Metodo degli spostamenti, il numero delle incognite cinematiche, da cui dipende la risposta cinematica del sistema, corrisponde a quello delle rotazioni possibili ai nodi della trave, facilmente individuabili ipotizzando una deformata del sistema che sia congruente con i vincoli esterni:

- rotazioni nulle in corrispondenza degli incastri;
- rotazioni diverse da zero in corrispondenza degli appoggi interni, tali da garantire la continuità strutturale;

Per determinare le incognite cinematiche si hanno a disposizione equazioni di equilibrio che impongono uguaglianza dei momenti a destra e a sinistra di un appoggio interno oppure di momento pari a zero per un appoggio di estremità; le relazioni tra le rotazioni e i momenti di estremità di una trave, includendo tutti i contributi che concorrono a determinare le rotazioni (effetto dei momenti di estremità, effetto dei cedimenti vincolari, effetto dei momenti di incastro perfetto), consentono di

esprimere le equazioni in funzione delle sole incognite. In tal modo è possibile costruire un sistema di equazioni la cui soluzione fornisce le incognite cinematiche cercate.

L'algoritmo costruisce per ogni campata un sistema matriciale del tipo $A \cdot x = B$, dove:

x =vettore delle incognite, contiene sia i momenti di estremità (in numero pari a due volte il numero delle campate della trave continua) sia le incognite cinematiche (in numero pari al numero di vincoli, nulle in corrispondenza di vincoli incastri, diverse da zero in corrispondenza di vincoli appoggi);

B =vettore dei termini noti, contiene cedimenti vincolari e momenti di incastro perfetto;

A = matrice dei coefficienti, contiene i coefficienti dei termini sopra elencati.

Risolvendo tale sistema saranno note le sollecitazioni di estremità di ogni campata.

Note le sollecitazioni di estremità, è possibile ricostruire le leggi con cui queste variano lungo lo sviluppo delle campate e perciò lungo la trave continua: in questo modo si ricavano i diagrammi delle sollecitazioni interne per ogni disposizione di carico.

Per ottenere l'involuppo dei diagrammi, per ogni sezione si considera solo la distribuzione di sollecitazione maggiore (con segno). L'involuppo fornisce il massimo valore di sollecitazione a cui ogni sezione della trave continua sarà sottoposta in esercizio, considerando la combinazione dei carichi di interesse e tutte le possibili disposizioni di carico.

4.6.2 Codice del programma

Per la consultazione del codice del programma si rimanda al link <https://drive.google.com/drive/folders/1PKsGPspQ8I3PDvjUZWUcXpHQnjS70QDi?usp=sharing>.

Capitolo 5

Conclusioni

L'obiettivo primario dell'elaborato è stato quello di studiare analiticamente le sezioni in c.a. soggette a sollecitazioni di flessione e pressoflessione con riferimento a resistenza e duttilità, distinguendo due diversi approcci alla trattazione e valutando in che modo la duttilità di una sezione può essere modificata manipolando i parametri che concorrono a definirla; lo scopo ultimo è stato quello di ricavare equazioni che permettano di implementare un codice per l'individuazione automatica del campo di rottura in cui ricade un generico caso di sezione ed eseguire le verifiche.

Secondo i criteri odierni, la progettazione delle strutture si concentra principalmente sul progetto in resistenza, mentre il controllo della duttilità si limita al rispetto di alcuni dettagli costruttivi. Con il presente elaborato si è voluto evidenziare quanto sia importante inglobare la duttilità nel processo progettuale, attribuendogli lo stesso peso della resistenza.

Nel Capitolo 2 sono state ricavate formulazioni analitiche adimensionali da considerazioni di equilibrio alla traslazione orizzontale ed equilibrio alla rotazione di sezioni in c.a., tramite le quali è stato possibile costruire un metodo tabellare che consente di identificare in quale campo di rottura si colloca la sezione, confrontando i parametri della sezione stessa con i parametri che caratterizzano le rette di separazione dei campi e dei sottocampi. La tabella riporta, per ogni retta di frontiera, la posizione dell'asse neutro, il coefficiente di riempimento e il coefficiente di posizione della risultante di compressione, la percentuale meccanica di armatura, il momento resistente e il fattore di duttilità in curvatura. La tabella, inoltre, è costruita in modo da consentire valutazioni immediate circa i quantitativi di armatura che producono

una variazione della modalità di rottura. L'analisi ha evidenziato che:

- nel caso di sezione inflessa, la modalità di rottura è determinata dalla percentuale meccanica di armatura;
- nel caso di sezione pressoinflessa, la modalità di rottura è determinata dallo sforzo normale adimensionale;
- la posizione dell'asse neutro quando la sezione è in condizioni ultime dipende dalla percentuale meccanica di armatura e dal rapporto di armatura;
- la posizione dell'asse neutro quando la sezione è in condizioni di limite elastico dipende dalla percentuale geometrica di armatura e dal rapporto di armatura;
- la curvatura allo snervamento è pressochè indipendente dall'armatura compressa;
- la curvatura ultima è fortemente influenzata dall'armatura compressa.

Nel Capitolo 3 è stata seguita una trattazione che si basa su ipotesi diverse per la valutazione della duttilità sezionale, svincolandosi dai valori fissi della massima deformazione raggiunta dal calcestruzzo, analizzando quali sono i parametri che effettivamente influenzano la capacità della sezione di deformarsi fuori dal campo elastico e che consentono di definire come duttile la suddetta sezione. L'analisi ha permesso di appurare che il fattore di duttilità in curvatura, che descrive la duttilità sezionale, è influenzato da parametri diversi nel caso di flessione e di pressoflessione, cioè:

- la duttilità di una sezione inflessa dipende dalla legge costitutiva del calcestruzzo, e in particolare dalla massima deformazione raggiunta, e dalla percentuale meccanica di armatura;
- la duttilità di una sezione pressoinflessa, invece, è influenzata non solo dalla massima deformazione raggiunta e dalla percentuale meccanica di armatura, ma anche dallo sforzo normale adimensionale.

Da queste considerazioni scaturisce la possibilità di modificare la duttilità di una sezione andando ad intervenire su molteplici parametri: dalla massima deformazione

raggiunta, modificabile tramite tecniche di confinamento, alle dimensioni della sezione, alla classe di resistenza del calcestruzzo. Ai fini pratici, spesso risulta conveniente intervenire con tecniche di confinamento, quali ad esempio i sistemi di rinforzo in FRP, che presentano numerosi vantaggi. Si è osservato che il confinamento tramite FRP è capace di aumentare la duttilità sezionale di circa tre volte rispetto al caso senza confinamento, indipendentemente dal livello di sforzo normale adimensionale.

Si riporta nel Capitolo 4 il codice open source di un programma in grado di individuare automaticamente il campo di rottura e di eseguire la verifica di resistenza e duttilità di sezioni in c.a., con il numero minimo di dati in input forniti dall'utente.

Infine, le relazioni causa-effetto sopra menzionate, scaturite dallo studio analitico condotto, e di cui tener conto nel processo progettuale per la definizione delle caratteristiche delle sezioni in c.a. confinate e non, possono ritenersi senza alcun dubbio rappresentative di alcuni spunti utili per sviluppi futuri, in direzione di introdurre automatismi per il suggerimento di opzioni migliorative di progettazione.

Bibliografia

- [1] Ministero delle Infrastrutture e dei Trasporti. *Decreto 17 Gennaio 2018 - "Norme Tecniche per le Costruzioni"*. Gazzetta Ufficiale della Repubblica Italiana, n.42, 20 Febbraio 2018.
- [2] Marco De Pisapia. *"Gerarchia delle resistenze: qual è il suo scopo"*. 2016. - <https://www.marcodepisapia.com/gerarchia-delle-resistenze/>.
- [3] Marano Giuseppe Carlo; Mastromarino Erika; Monti Giorgio; Smaldini Pasquale. *"Approccio iterativo per il progetto a duttilità controllata di sezioni presso-inflesse in c.a."*. 2015. - <https://www.ingenio-web.it/articoli/approccio-iterativo-per-il-progetto-a-duttilita-controllata-di-sezioni-presso-inflesse-in-c-a/>.
- [4] Giuseppe Carlo Marano. *"Stati Limite Ultimi per tensioni normali"*. Politecnico di Torino, Tecnica delle Costruzioni, 2020.
- [5] Mauro Mezzina. *"Fondamenti di Tecnica delle Costruzioni"*. De Agostini Scuola SpA, 2017.
- [6] Fabio Di Trapani. *"Confinement of concrete"*. Politecnico di Torino, Safety Assessment and Retrofitting of Existing Structures and Infrastructures, 2020.
- [7] Fabio Di Trapani. *"Ductility of structures"*. Politecnico di Torino, Safety Assessment and Retrofitting of Existing Structures and Infrastructures, 2020.
- [8] Fabio Di Trapani. *"Retrofitting systems for RC structures"*. Politecnico di Torino, Safety Assessment and Retrofitting of Existing Structures and Infrastructures, 2020.
- [9] Marco De Pisapia. *"Confinamento in FRP: come aumentarne l'efficacia"*. 2015. - <https://www.marcodepisapia.com/confinamento-in-frp-come-aumentarne-lefficacia/>.
- [10] Razvi S. R.; Saatcioglu M. *"Confinement of reinforced concrete columns with welded wire fabric"*. ACI Struct. J., 85°5, 615-623, 1989.
- [11] Mander J.B.; Priestley M.J.N.; Park R. *"Theoretical Stress-Strain Model for Confined Concrete"*. Journal of Structural Engineering, Vol. 114, n°8, pp.1804-1825, 1988.

-
- [12] Park R.; Priestley M. J. N.; Gill W. D. “*Ductility of square confined concrete columns*”. J. Struct. Div., ASCE, 108, n°4, pp. 929-950, 1982.
- [13] Commissione di Studio per la Predisposizione e l’Analisi di Norme Tecniche relative alle costruzioni. “*Istruzioni per la Progettazione, l’Esecuzione ed il Controllo di Interventi di Consolidamento Statico mediante l’utilizzo di Compositi Fibrorinforzati*”. Consiglio Nazionale delle Ricerche, 2013.
- [14] Sistema di rinforzo strutturale composto da tessuto unidirezionale in fibra di carbonio ad alta resistenza con elevatissimo modulo elastico e resine epossidiche di impregnazione e incollaggio (frp) coperto da certificato di valutazione tecnica (cvt) n° 206/2019 classe 350/2800c. - <https://www.mapei.com/it/it/prodotti-e-soluzioni/prodotti/dettaglio/mapewrap-c-uni-ax-hm-system>.
- [15] Shivaji M. Sarvade; Sachin M. Pore. “*Use of Python Programming for interactive design of Reinforced Concrete Structures*”. KKWIEER, Nashik, 2019.
- [16] Mahima Sharma Utkarsh Jain and Charanjeet Singh Tumrate. “*A Computational Model to Automate the Design of Reinforced Concrete Tee Beam Girder Bridge Using Python Ecosystem*”. IOP Publishing, 2021.
- [17] *Python*. - <https://www.python.it/>.
- [18] *Matlab*. - <https://it.mathworks.com/products/matlab.html>.
- [19] Fabio Di Trapani. “*Analisi di sistemi intelaiati elastici piani*”. Politecnico di Torino, 2019.