



**POLITECNICO
DI TORINO**

**Corso di laurea magistrale in Ingegneria Meccanica,
indirizzo Automazione**

Tesi di laurea magistrale:

“Modellazione dinamica di ruote dentate ingrananti”

Relatori

Prof. Fabio Bruzzone

Prof. Carlo Rosso

Candidato

Vincenzo Ziparo

Data

19-10-2022

Indice

.....	1
1	Sommario 5
2	Presentazione modello 6
3	Analisi statica 13
3.1	Risultati spostamenti 15
3.1.1	Risultati con coppia oraria 16
3.1.2	Risultati coppia antioraria 20
3.1.3	Risultati altre posizioni angolari 23
3.2	Studio rigid joint 26
3.2.1	Risultati con coppia antioraria 26
3.2.2	Risultati coppia oraria 30
3.2.3	Risultati vincolando un unico nodo 32
3.3	Conclusioni analisi spostamenti e gif 34
3.4	Risultati stress e deformazioni 35
4	Analisi modale 39
5	Analisi dinamica 41
5.1	Metodo di Newmark e metodi di riduzione 41
5.2	Presentazione modello trave 43
6	Metodo di Craig-Bampton 46
6.1	Formulazione matematica 46
6.2	Applicazione metodo di Guyan 48
6.2.1	Applicazione su travetta free-free 48
6.3	Applicazione metodo di Craig-Bampton 51
6.3.1	Applicazione su travetta free-free 51
6.3.2	Applicazione su travetta vincolata 62
7	Free-interface method 72
7.1	Formulazione matematica 72
7.2	Applicazione metodo di Rubin 75
7.2.1	Applicazione su travetta free-free 75
7.2.2	Applicazione su travetta vincolata 81
7.3	Tentativo di unione dei due metodi 84
8	Metodo di Craig-Bampton controlled 88
8.1	Formulazione matematica 88
8.2	Applicazione metodo di Craig-Bampton controlled 90
8.2.1	Applicazione sulla travetta free-free 90

8.2.2	Applicazione sulla travetta vincolata.....	93
9	Applicazione metodi di riduzione alle ruote.....	98
9.1	Prove su una singola ruota	99
9.2	Applicazione sull'intero ingranaggio	107
9.2.1	Nodi di contatto come master.....	107
9.2.2	Nodi addizionali come master	116
10	Conclusioni e lavori futuri.....	122
11	Riferimenti	123

1 Sommario

La presente tesi è stata svolta in azienda, cioè in GeDy TrAss SRL, una start-up che si è vista riconoscere il titolo di spin-off del Politecnico di Torino e che ha lo scopo di realizzare software per il dimensionamento statico e dinamico di ruote dentate.

La prima parte della tesi è finalizzata all'analisi statica di ruote dentate ingrananti, la seconda parte verterà invece sull'analisi e lo studio delle tecniche di riduzione che, nell'ultima parte della tesi, verranno applicate all'ingranaggio.

I risultati che verranno presentati derivano dalla discretizzazione ad elementi finiti dell'ingranamento in esame, per i dettagli analitici della modellazione si rimanda alla Tesi di Dottorato del prof. Fabio Bruzzone "2D/3D Nonlinear and Non-Hertzian Tooth Deflection Analysis for Compliant Gear Dynamics".

Per un ingegnere il calcolo delle sollecitazioni sviluppate e delle deformazioni prodotte durante l'ingranamento è di fondamentale interesse per la progettazione o per la verifica di uno specifico accoppiamento.

I moderni software di calcolo impiegano tempi immensi per il calcolo delle sollecitazioni dinamiche, obiettivo principale della tesi e dei lavori futuri è sviluppare un programma capace di calcolare le sollecitazioni sviluppate durante il moto in tempi più o meno brevi. A tale scopo verrà utilizzato il software di calcolo Matlab.

Le matrici derivanti dal FEM (Finite Element Method) verranno utilizzate così come sono nella prima parte del presente lavoro, quindi i risultati ottenuti sono il prodotto di matrici complete, contenenti maggior informazioni possibili. Se si utilizzassero le stesse matrici nell'analisi dinamica (equazioni di Newmark), si avrebbero tempi di calcolo eccessivamente lunghi, dunque è necessario ridurre queste matrici attraverso metodi di riduzione che saranno analizzati nel dettaglio in seguito.

2 Presentazione modello

Il modello oggetto di questo studio è rappresentato dalla classica equazione del moto per un sistema non smorzato:

$$M\ddot{u} + Ku = F \quad (1)$$

Le matrici presenti nell'equazione (1) sono calcolate separatamente per le due ruote e successivamente verranno assemblate, dunque l'equazione si riferisce all'intero ingranaggio in esame.

Il calcolo delle matrici viene svolto tramite l'Analisi agli Elementi Finiti (FEM). Secondo questo metodo una qualsiasi struttura viene rappresentata come un insieme di nodi aventi ciascuno sei gradi di libertà; però nel caso in cui si tratta di nodi dello stesso corpo, il movimento di ogni nodo dipende da quelli adiacenti e dunque si può considerare come se avesse tre gdl (tre traslazioni). Le dimensioni delle matrici presenti nella formula precedente dipendono dal numero di gdl del modello, perciò se un modello ha n nodi, le matrici che lo rappresentano hanno dimensione $3n \times 3n$. Queste matrici sono matrici quadrate poiché ogni elemento in posizione ij , rappresenta il contributo del gdl i -esimo e j -esimo. Per quanto riguarda invece il termine a secondo membro, esso è il vettore forza, nel caso in esame è un vettore avente quasi tutti i termini nulli, tranne nella riga riferita al nodo in cui è applicata la forza.

I termini \ddot{u} e u sono dei vettori colonna rappresentanti rispettivamente l'accelerazione e lo spostamento dei nodi, il primo di questi due termini sarà presente soltanto nell'analisi dinamica, questo perché l'analisi statica è un'analisi posizione per posizione del comportamento dell'ingranaggio perciò non ci può essere alcun termine dinamico. Per tale motivo l'equazione alla base del moto per l'analisi statica si semplifica in:

$$Ku = F \quad (2)$$

Ciononostante, la matrice di massa non sarà ignorata nella prima parte della tesi, essa sarà utile per l'analisi modale, che, come si vedrà in seguito, è fondamentale per una corretta riduzione delle matrici.

Le due ruote sono state rappresentate allo stesso modo, cioè essi presentano la stessa disposizione dei nodi che le rappresentano. La mesh del pignone è riportata nella figura di seguito.

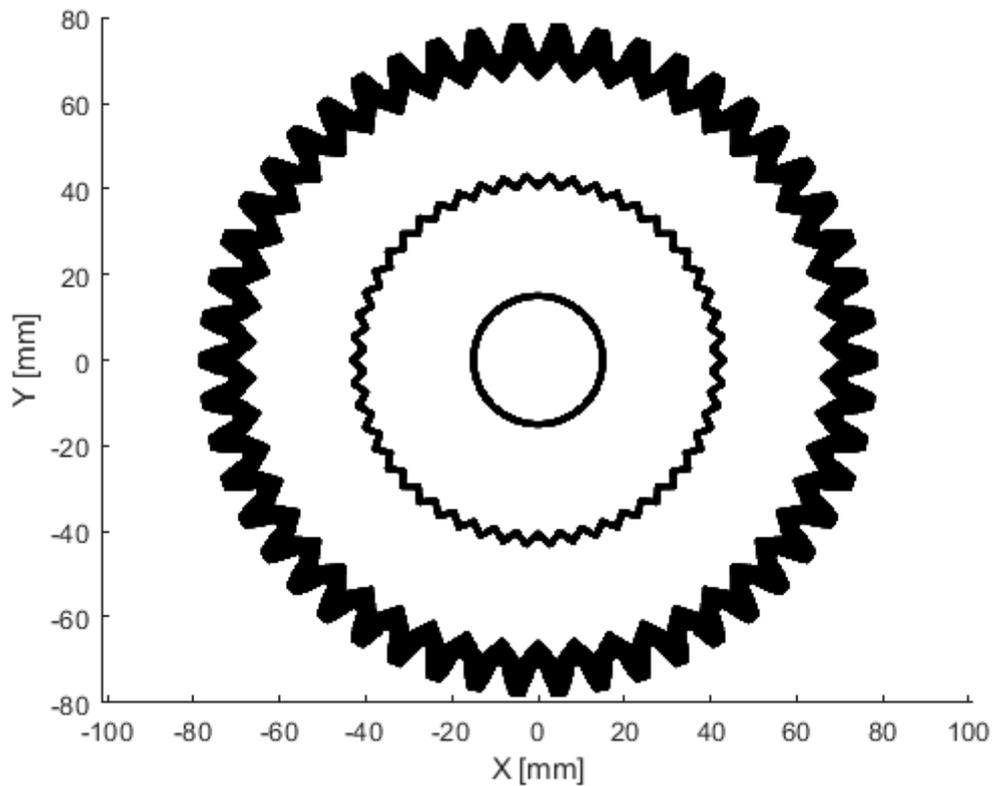


Figura 1_Discretizzazione ruota

Come si può notare la mesh in prossimità dei denti è molto fitta, questo perché essi permettono lo scambio delle forze durante l'ingranamento, di conseguenza sono la parte dell'ingranaggio che si deforma maggiormente; per questo motivo è importante studiare per bene il loro comportamento. La mesh della ruota non è uniforme, non è di interesse pratico avere dei nodi su tutta la superficie della ruota.

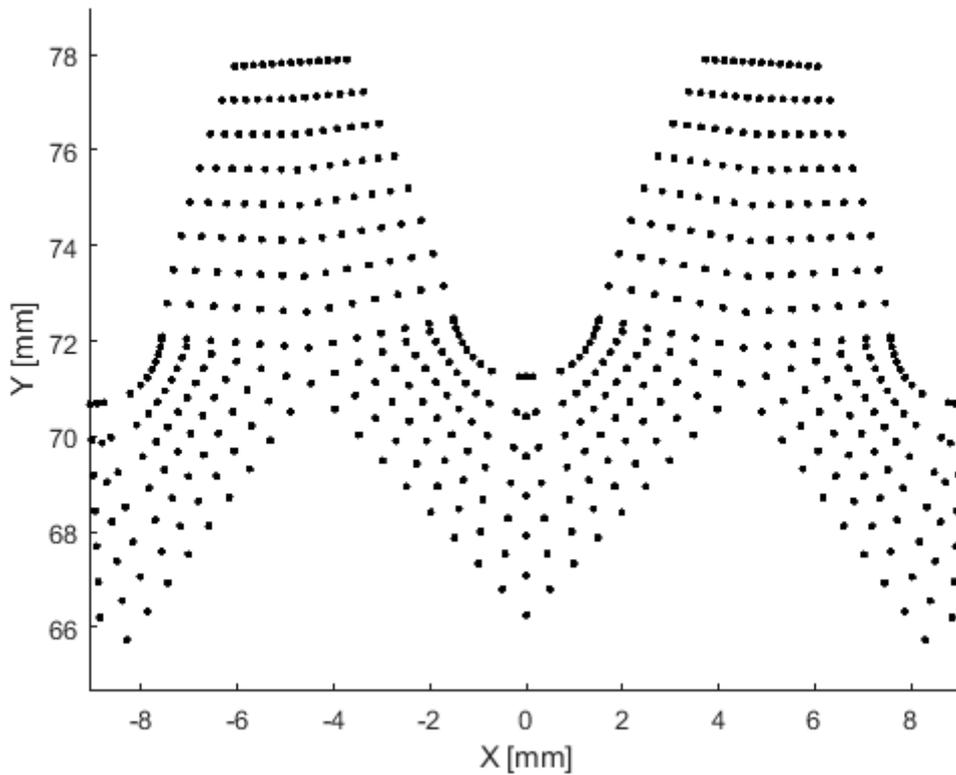


Figura 2_Discretizzazione denti

Per poter connettere la ruota con l'albero a cui è solidale è necessario utilizzare la tecnica del rigid joint. Il collegamento avviene fra i nodi più interni della ruota (rappresentati in rosso nella figura 3) e un nodo centrale, si tratta di un nodo aggiuntivo, esso non fa parte della ruota, ma è molto importante perché attraverso di esso si applica la coppia motrice. L'aggiunta di questo nodo centrale implica l'aggiunta di 6 righe e 6 colonne nulle nelle matrici di massa e di rigidezza (il nodo in questione ha 6 gdl), e l'aggiunta di 6 righe nel vettore forza. La riga aggiuntiva del vettore forza riferita al grado di libertà di rotazione intorno all'asse z sarà l'unica a cui verrà assegnato un valore non nullo (pari alla coppia imposta). Ogni nodo sul raggio interno della ruota è quindi accoppiato col nodo centrale, nel complesso si ha:

$$K_t = T_{rj}^T K T_{rj} \quad (3)$$

$$M_t = T_{rj}^T M T_{rj} \quad (4)$$

Nella matrice T_{rj} sono inclusi tutti gli accoppiamenti, dunque maggiori sono i nodi interni maggiore è la riduzione delle matrici, difatti dopo aver fatto questa moltiplicazione tutte le righe e le colonne riferite ai nodi su cui è applicato il rigid joint vengono condensate nel nodo centrale. Una volta calcolati gli spostamenti da queste matrici ridotte occorre poi ricalcolare gli spostamenti dei nodi iniziali:

$$u = T_{rj} u_t \quad (5)$$

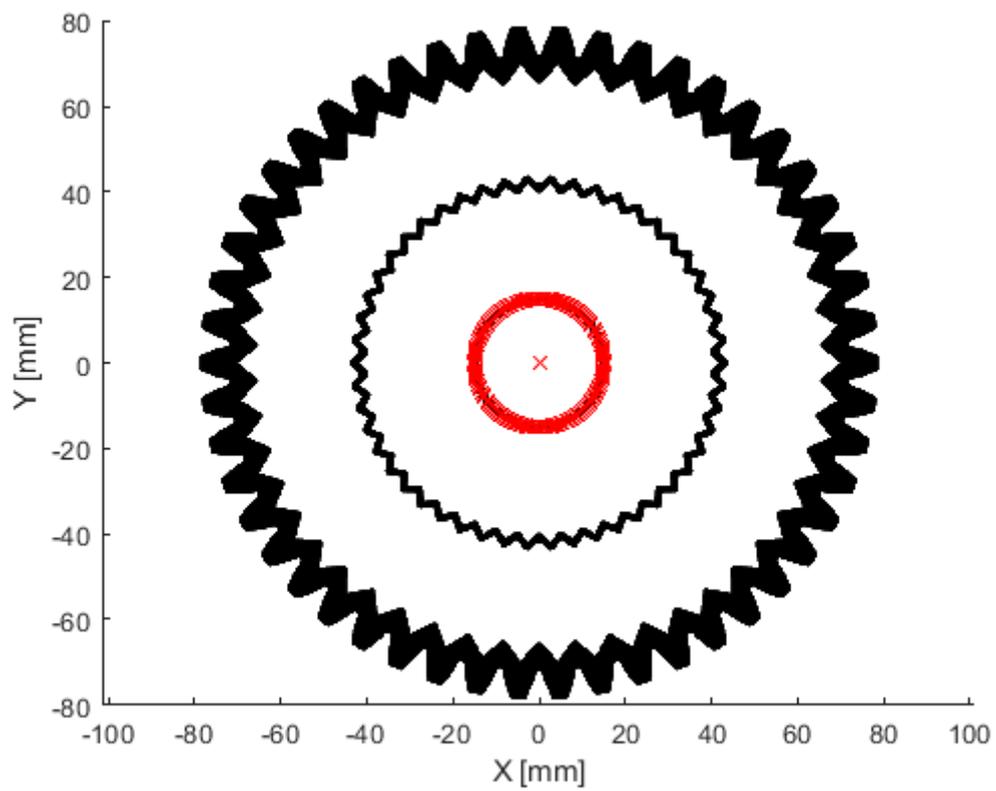


Figura 3_Rappresentazione nodi di applicazione rigid joint

Ad ogni modo dopo aver applicato il rigid joint alla struttura essa deve essere vincolata, il nodo centrale costituisce infatti un vincolo, dunque occorre cancellare le righe e le colonne riferite a quest'ultimo, tranne la riga e la colonna riferita alla forza che si desidera applicare alla struttura.

Per una corretta analisi è importante definire i nodi responsabili del contatto fra le due ruote, per diverse posizioni angolari entrano in contatto nodi diversi, nella figura seguente sono rappresentati i nodi di contatto per tutte le posizioni che verranno analizzate.

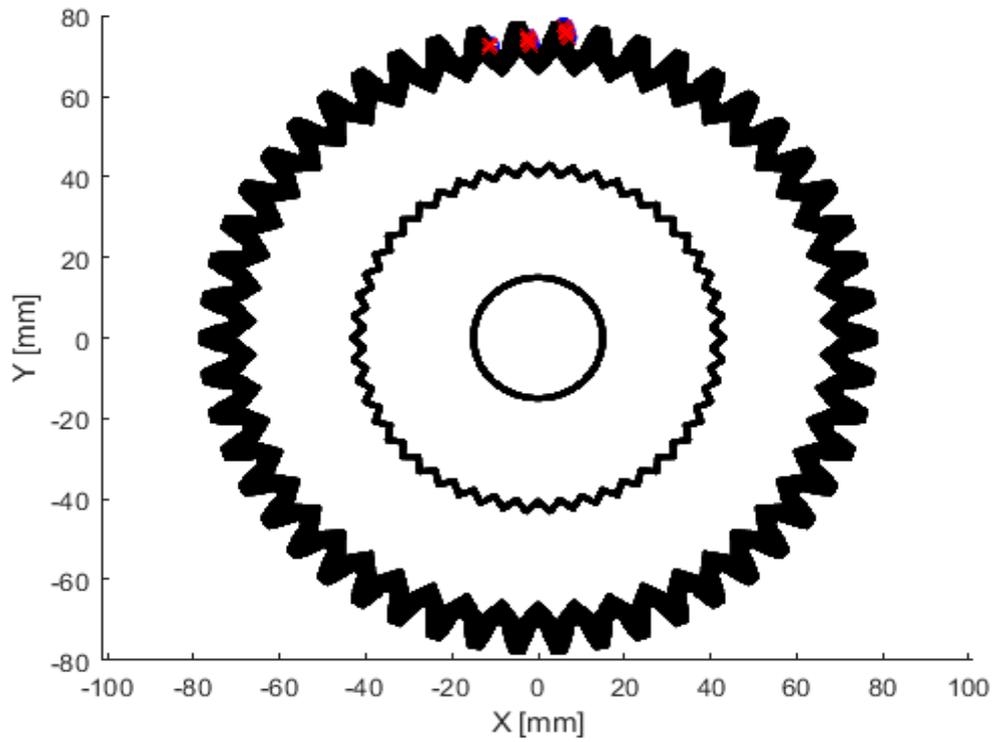


Figura 4_Rappresentazione nodi di contatto pignone

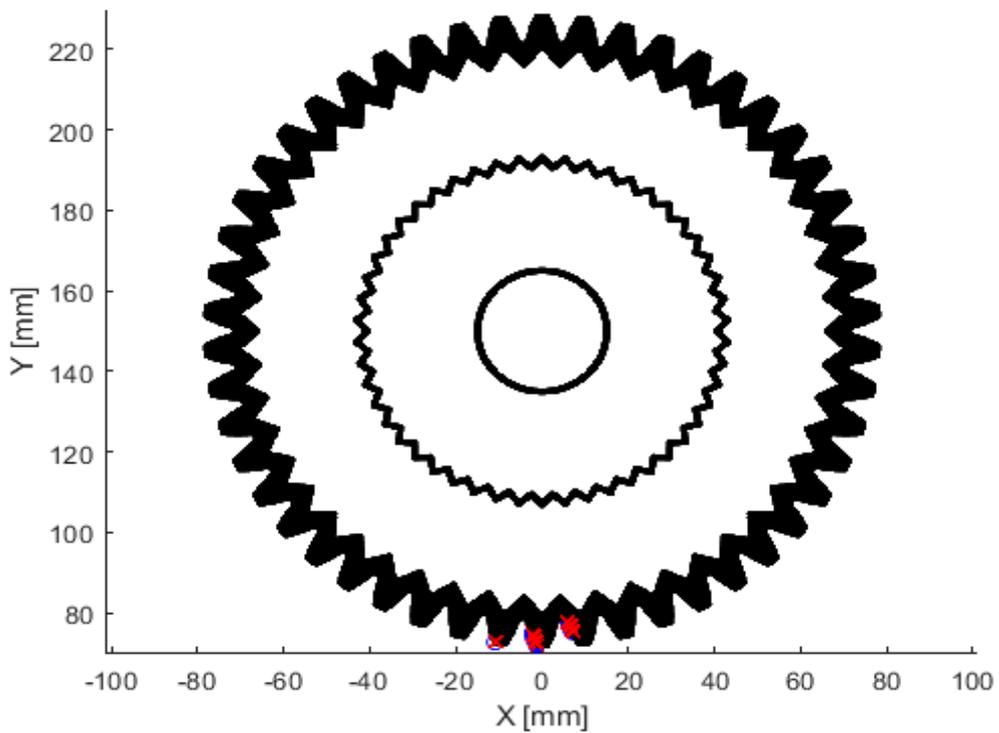


Figura 5_Rappresentazione nodi di contatto condotta

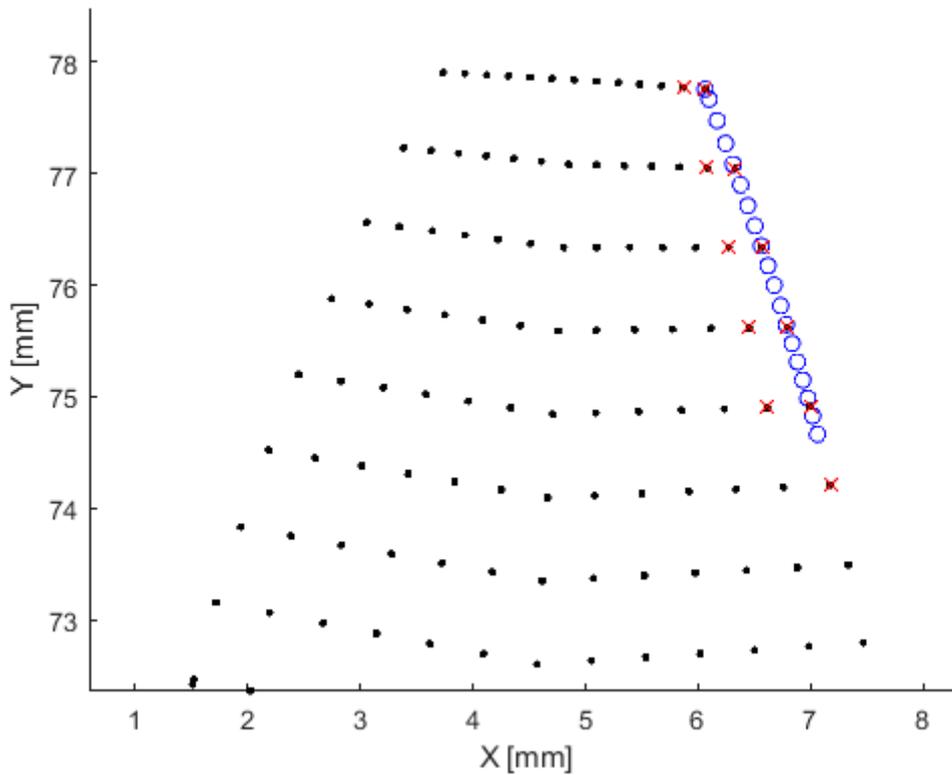


Figura 6_Rappresentazione nodi di contatto singolo dente

In questa figura è stato preso in considerazione nuovamente il pignone, è rappresentato uno dei denti in contatto. Si è ipotizzato, considerando le caratteristiche e le dimensioni delle ruote analizzate, che massimo tre denti alla volta entrano in contatto. I pallini blu nella figura costituiscono i punti di contatto (essi sono 20, in quanto le posizioni che verranno analizzate sono altrettante), le crocette rosse rappresentano invece i nodi più vicini ai punti di contatto. Gli stessi ragionamenti sono stati fatti per gli altri due denti a contatto. È importante definire i nodi di contatto perché essi verranno considerati come dei nodi a cui sono attaccate delle molle di una certa rigidità elastica. Queste molle hanno lo scopo di riprodurre il contatto che avviene fra i denti, dunque la matrice di rigidità complessiva è la somma di un contributo generale di ciascun nodo e di un contributo derivante dalle molle (contributo riferito solo ai nodi che entrano in contatto per una determinata posizione angolare). L'introduzione di una matrice di rigidità di contatto è molto importante perché permette di trattare il contatto fra due denti senza l'introduzione di forze. Questo singolo contributo della matrice di rigidità K_{cont} è responsabile dell'eccitazione dinamica del sistema, mentre la forza applicata al nodo centrale sarà considerata costante. Ogni nodo a contatto porta con sé un contributo nella matrice di rigidità legato alla relazione seguente:

$$k_{cont} = c_n k_p \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Queste sottomatrici andranno ad occupare le righe e le colonne della matrice K_{cont} riferite al nodo di contatto in questione. c_n è un valore compreso fra 0 e 1, esso è il peso percentuale che si dà al nodo di interesse (in base alla vicinanza fra il nodo stesso e il punto effettivo di contatto), ad esempio se il nodo coincide col punto di contatto questo termine ha valore unitario. k_p è invece il valore di rigidità che si desidera conferire al dente, esso potrebbe essere variabile con la posizione angolare. Infine α è l'angolo di pressione.

Alcuni nodi presentano un maggior contenuto in frequenza, essi vengono selezionati in seguito all'analisi modale, al momento della riduzione delle matrici è importante tenere conto di questi nodi per non perdere l'accuratezza nel calcolo. Questi nodi vengono definiti nodi addizionali e sono rappresentati in rosso nella figura seguente, se ne potrebbero selezionare quanti se ne vuole, in questo caso ne sono stati presi in considerazione otto. Dei nodi addizionali e su come essi vengono scelti se ne parlerà più nello specifico nel capitolo 7.

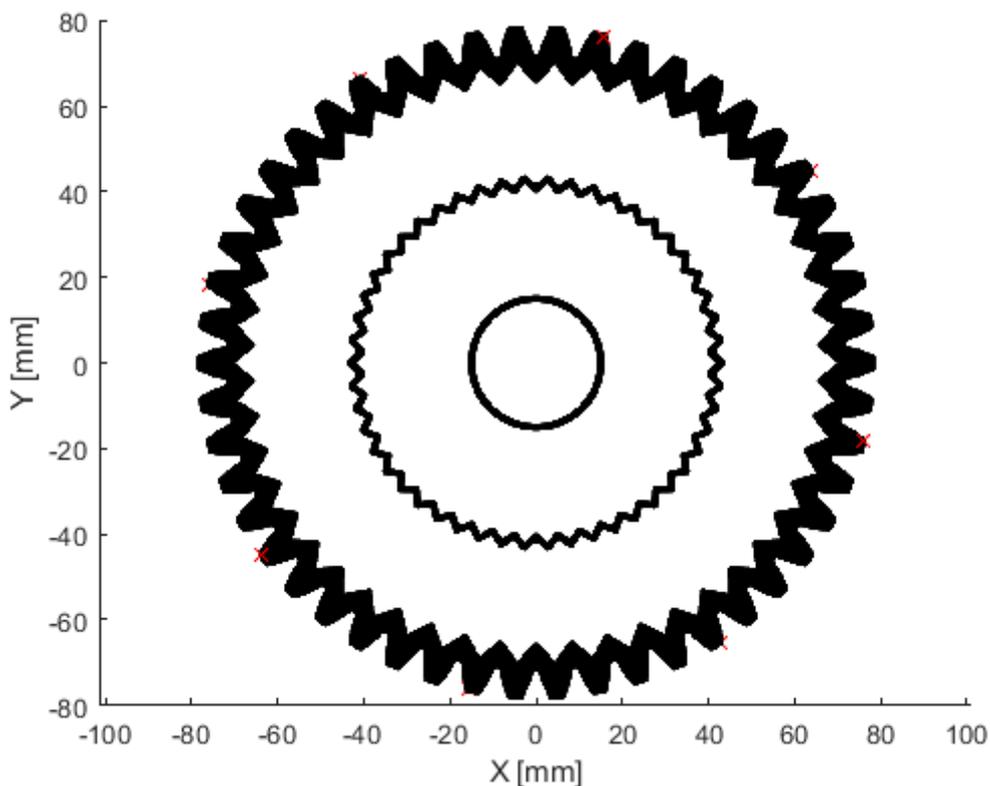


Figura 7_Rappresentazione nodi addizionali

Ovviamente maggiore è il numero di nodi utilizzati per rappresentare la struttura, migliore è l'approssimazione del comportamento reale, viene meno però la velocità di calcolo, che, come detto nell'Introduzione, è di fondamentale importanza per le applicazioni ingegneristiche. Ad ogni modo nella statica si utilizzeranno modelli completi, con tanti nodi e quindi ricchi di informazioni, al fine di verificare la correttezza del modello in esame. Ciò non sarà però possibile nella dinamica, per l'eccessiva lunghezza dei tempi di calcolo, perciò nella seconda parte del presente lavoro verranno presentati alcuni metodi di riduzione delle matrici. Nonostante l'obiettivo finale è avere matrici ridotte, è importante per prima cosa studiare il modello con le matrici intere per analizzarne al meglio le proprietà e per l'ottenimento di informazioni modali fondamentali per una riduzione corretta delle matrici

3 Analisi statica

L'ingranaggio studiato è composto da due ruote uguali, aventi stesso numero di denti, dunque le proprietà fisiche hanno una certa periodicità, precisamente ogni angolo $\vartheta = 360/Z$ l'ingranamento si ripete ciclicamente, per questa ragione il modello verrà studiato soltanto per un angolo ϑ . Sia in statica che in dinamica per studiare correttamente l'ingranamento occorre dividere l'angolo ϑ in N posizioni angolari, ciascuna distanziata dall'altra di un angolo $\Delta\vartheta$, questa apertura angolare si trova dalla relazione $\Delta\vartheta = \vartheta/N$; il termine N viene scelto arbitrariamente, in questa trattazione verrà considerato pari a 20, ciò vuol dire che verranno analizzate 20 posizioni angolari per ogni angolo ϑ . L'angolo ϑ , dunque l'insieme delle venti posizioni angolari verrà invece definito mesh cycle

Le due ruote scelte per il presente lavoro sono identiche e hanno le seguenti proprietà geometriche e fisiche:

Parametri ruote	Dimensioni
Numero di denti (Z)	50
Modulo (m)	3 mm
Angolo di pressione (α)	20°
Larghezza di fascia (b)	20 mm
Raggio primitivo (r_p)	75 mm
Proprietà materiale	Valori
Modulo di Young (E)	210 GPa
Coefficiente di Poisson (ν)	0.3
Densità (ρ)	7850 Kg/m ³
Tensione di snervamento (R_{p02})	500 MPa

Tabella 1

Prima di applicare il rigid joint alle matrici esse subiscono un'altra trasformazione in base alla posizione angolare che si vuole analizzare:

$$K_r = R_{\Delta\theta,z}^T K R_{\Delta\theta,z} \quad (7)$$

$$M_r = R_{\Delta\theta,z}^T M R_{\Delta\theta,z} \quad (8)$$

Le matrici di rotazione sono matrici tridiagonali, esse dipendono dalla specifica posizione angolare analizzata (z); la sottomatrice riferita ad un singolo nodo ha la seguente struttura:

$$R_{\Delta\theta,z} = \begin{bmatrix} \cos(\Delta\theta(z-1)) & \sin(\Delta\theta(z-1)) & 0 \\ -\sin(\Delta\theta(z-1)) & \cos(\Delta\theta(z-1)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

in cui ricordiamo $1 \leq z \leq N$.

Nella tabella seguente sono riportate alcune caratteristiche del modello studiato:

Elementi singole ruote	Numero
Nodi totali	85500 + nodo centrale
Gdl totali (dimensioni K e M)	256500 + 6 gdl nodo centrale
Gdl dopo applicazione rigid joint (dimensioni K_t e M_t)	240306 (compresi 6 gdl nodo centrale)
Nodi di contatto totali	552
Nodi interni (applicazione rigid joint)	5400

Tabella 2

Ricapitolando in seguito a due trasformazioni matriciali (rotazione e rigid joint) si ottengono le matrici K_t e M_t . Nell'esempio che si vedrà in questa trattazione la condotta è completamente vincolata al nodo centrale per cui le righe e le colonne ad esso riferite verranno eliminate, il pignone ha invece un grado di libertà del nodo centrale dunque si cancellano tutte le righe e le colonne che fanno riferimento ad esso tranne quelle riferite alla rotazione intorno all'asse z (direzione lungo la quale è applicata la coppia). Si ricorda invece che il vettore forza è costituito da tutti termini nulli eccetto uno, al quale viene attribuito un valore pari a 150 kNm questo valore può essere positivo o negativo a seconda se si vuole applicare una coppia rispettivamente antioraria o oraria. Le matrici di rigidezza riferite alle due ruote verranno assemblate, come se si trattasse di un'unica struttura, inoltre, com'era stato detto in precedenza, la matrice di rigidezza complessiva è la somma di un contributo riferito ad ogni singolo nodo, e un contributo riferito ai nodi di contatto K_{cont} (anche a questa matrice verrà applicato il rigid joint separatamente).

3.1 Risultati spostamenti

Una volta fatto quanto detto finora si può calcolare il vettore spostamento risolvendo il sistema:

$$u = (K_t + K_{cont}) \setminus F \quad (9)$$

Dopo aver calcolato il vettore spostamento, per avere una rappresentazione migliore dei risultati si effettua il passaggio da coordinate cartesiane a coordinate cilindriche.

Si prende in considerazione un generico nodo soggetto ad uno spostamento s (s_x, s_y), in seguito a questo spostamento il nodo passa dalla posizione P_1 (P_{1x}, P_{1y}) alla posizione P_2 ($P_{2x} = P_{1x} + s_x, P_{2y} = P_{1y} + s_y$). Le posizioni dei due punti possono essere espresse in coordinate cilindriche, facilmente ottenibili dalle seguenti relazioni:

$$r = \sqrt{P_x^2 + P_y^2} \quad (10)$$

$$\vartheta = \tan^{-1} \frac{P_y}{P_x} \quad (11)$$

Il raggio vettore che definisce lo spostamento in coordinate cilindriche si trova in modo simile a quanto visto per un punto generico

$$s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} \quad (12)$$

per quanto riguarda l'angolo $\Delta\vartheta$, caratterizzante lo spostamento angolare del nodo, esso si calcola come differenza fra gli angoli ϑ_1 e ϑ_2 . Da notare che gli spostamenti lungo l'asse z non verranno considerati nei grafici successivi perché essi, come è stato verificato dal calcolo, hanno valori trascurabili. L'origine del SDR per entrambe le ruote è considerato il nodo centrale, dunque vengono considerate origini diverse per le due strutture.

Di seguito verranno presentati dei grafici rappresentati gli spostamenti circolari e radiali del pignone e della ruota condotta, sia nel caso di coppia oraria che nel caso di coppia antioraria.

3.1.1 Risultati con coppia oraria

Dapprima verranno analizzati gli spostamenti con coppia oraria per la prima posizione angolare:

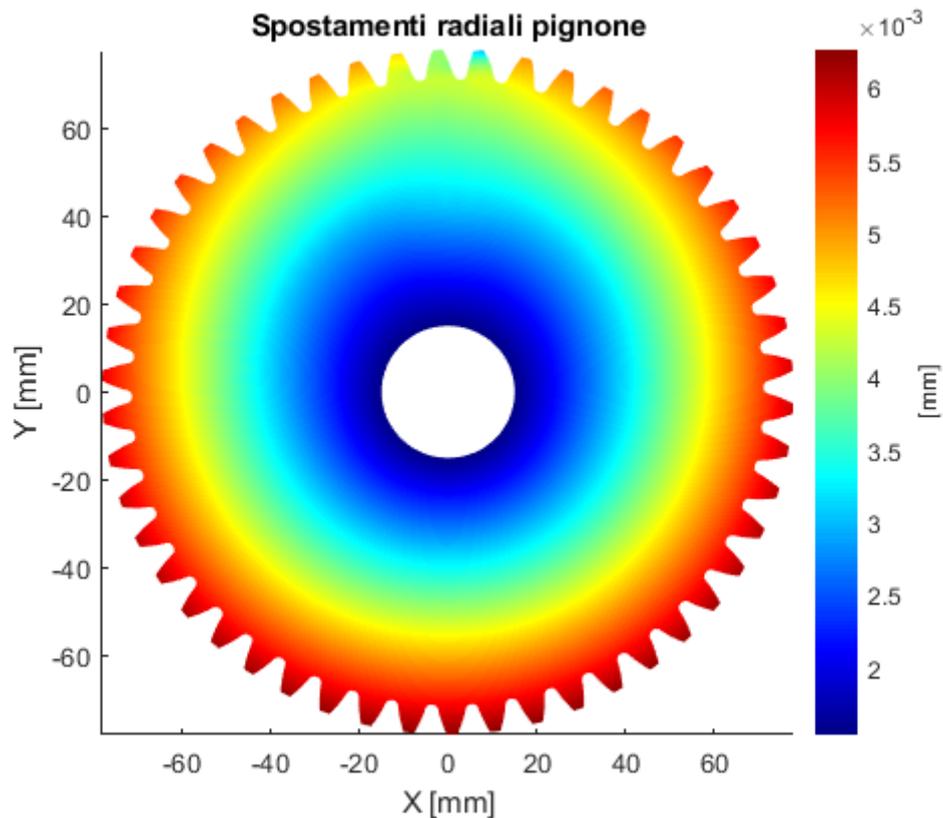


Figura 8

Gli spostamenti radiali principalmente danno un'idea dell'entità dello spostamento, come si può notare dalle formule riportate in precedenza è un numero sempre positivo (espresso in mm), dunque non porta con sé nessuna informazione sulla direzione. Si può notare la presenza di tre denti in presa per questa posizione angolare, essi, per il pignone, non subiscono spostamenti eccessivi, perché il loro movimento è ostacolato dal contatto con i denti della ruota condotta (dalle molle per il modello in esame). In generale lo spostamento radiale aumenta andando dal centro verso i denti in modo abbastanza graduale, questo perché la coppia motrice è applicata al centro della ruota e quindi lo spostamento è uguale su tutti i punti di una qualsiasi circonferenza centrata nel punto di applicazione della coppia.

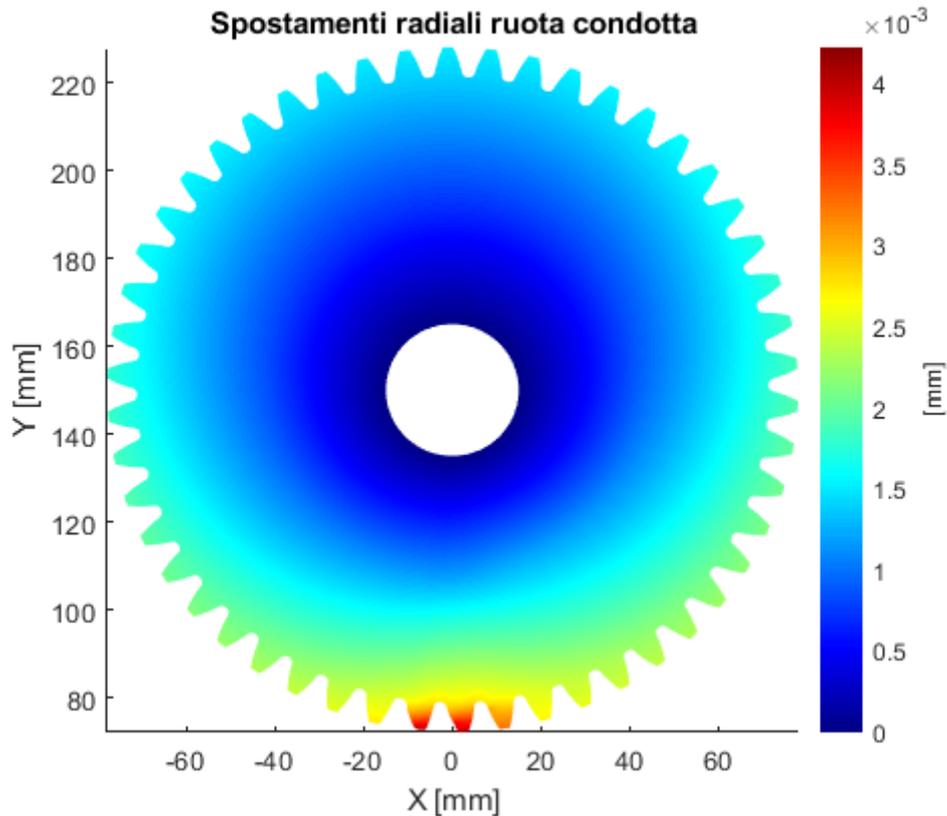


Figura 9

Diversa è la situazione per la ruota condotta. In questo caso il moto avviene per il contatto fra i denti del pignone e quelli della condotta, dunque i denti sono la parte della ruota maggiormente sollecitata. La deformazione si propaga dai denti al resto della ruota, perciò più ci si allontana dai denti più si hanno spostamenti minori, anche perché la condotta è completamente vincolata al nodo centrale quindi le zone vicine all'albero hanno spostamento pressoché nullo.

Gli spostamenti circonferenziali invece danno un'idea della direzione dello spostamento, essi sono espressi in radianti. Maggiore è lo spostamento (in valore assoluto) maggiore è la deviazione del nodo rispetto alla sua posizione originale e, a seconda del segno dello spostamento, si può capire se si sia applicata una coppia oraria o antioraria. L'andamento degli spostamenti circonferenziali è simile a quelli radiali per il pignone, la condotta invece in questo caso mantiene una simmetria circonferenziale. I valori degli spostamenti del pignone sono negativi poiché è stata applicata una coppia negativa, mentre quelli della condotta sono positivi poiché ovviamente essa ruota sempre in verso opposto al pignone.

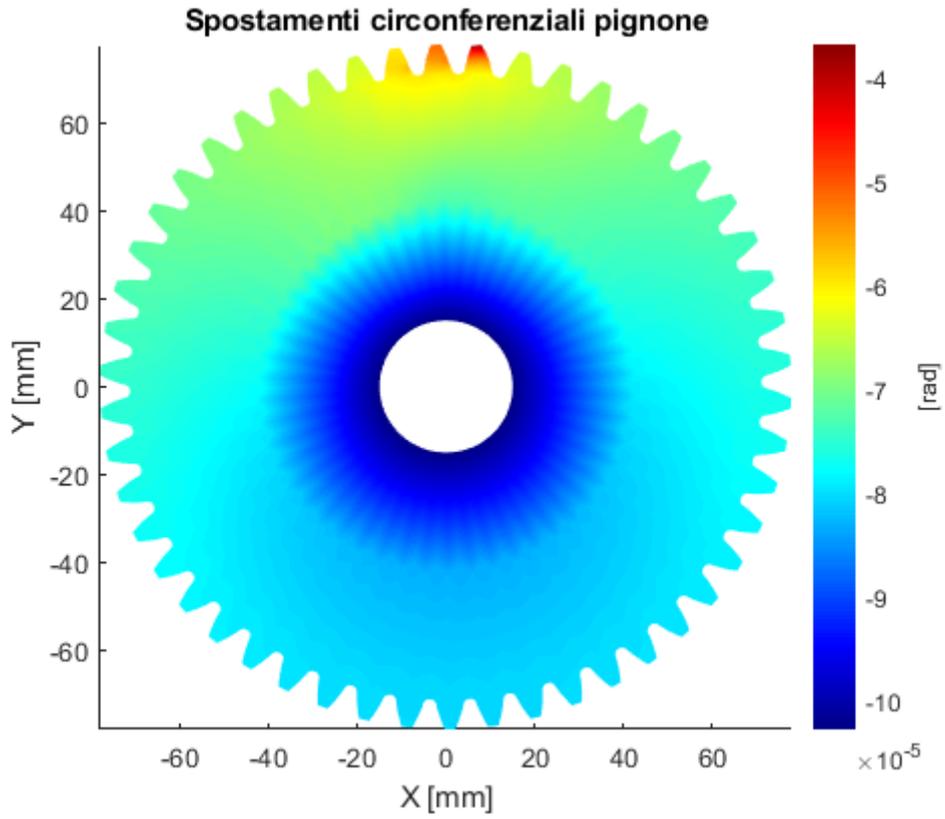


Figura 10

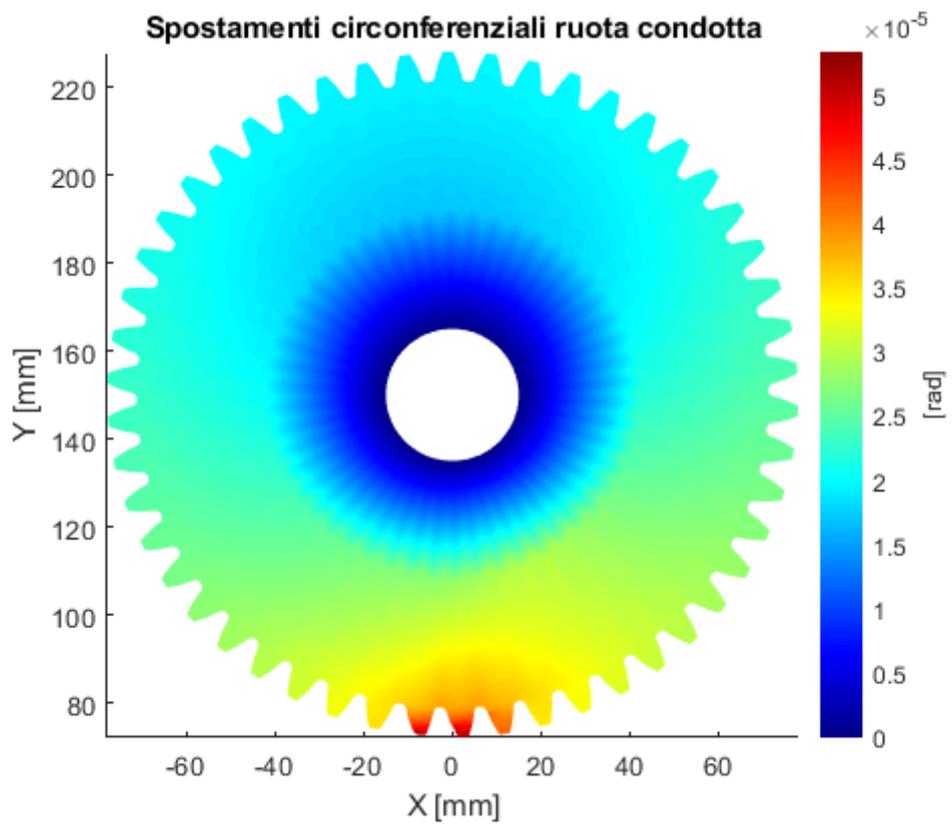


Figura 11

Di seguito è riportato un ingrandimento dei denti delle due ruote durante l'ingranamento:

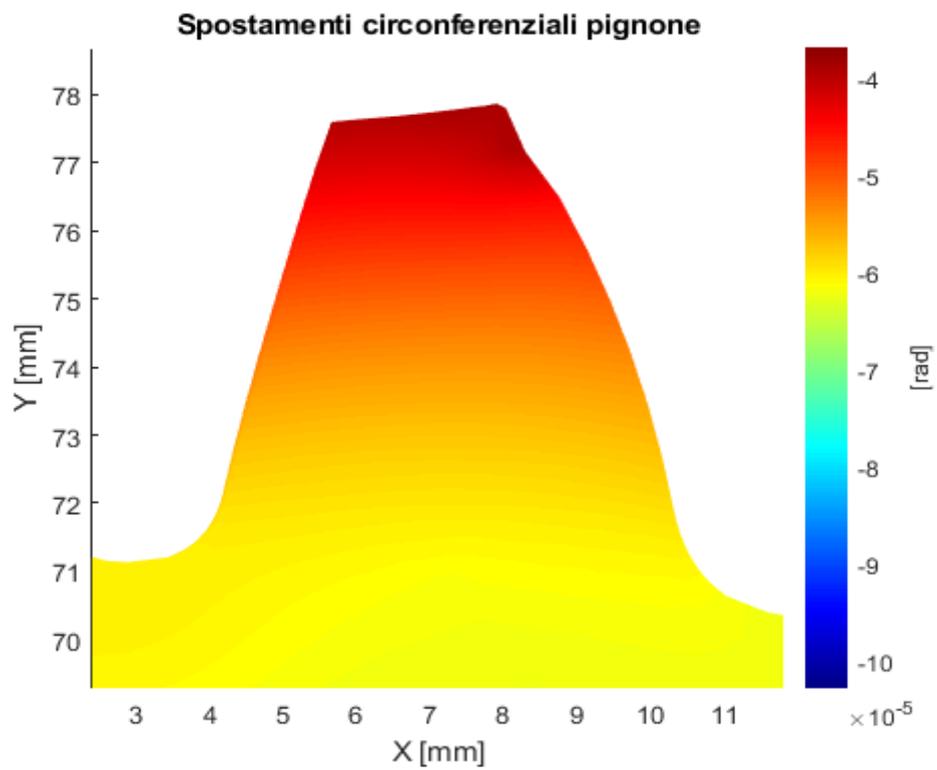


Figura 12

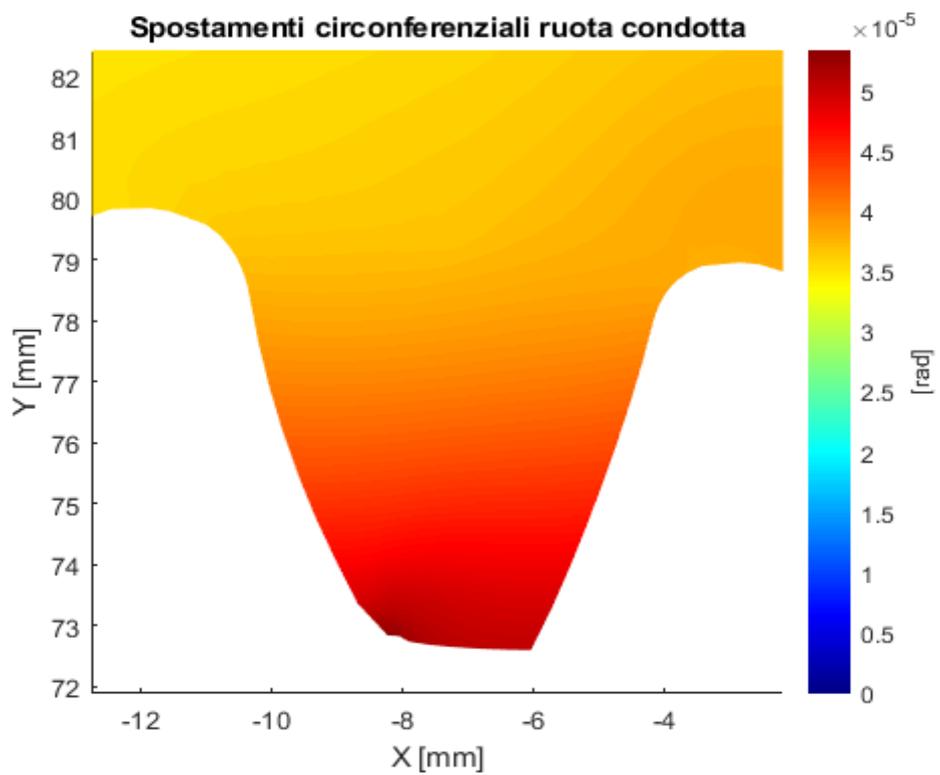


Figura 13

Questi due denti sono a contatto fra di loro, si può notare come essi si comprimono, questo accade perché le molle vengono compresse in seguito ad una coppia oraria. Ciò avviene perché per entrambe le ruote le molle si trovano sul lato verso cui le ruote ruotano e dunque i nodi di contatto tendono a restare nella loro posizione originale (per questo motivo la parte a contatto risulta compressa).

3.1.2 Risultati coppia antioraria

Di seguito verranno riportati gli stessi grafici riportati in precedenza, ma in questo caso per coppia antioraria. Per quanto riguarda gli spostamenti radiali non ci sono differenze rilevanti cambiando il verso della coppia, si possono ripetere le considerazioni fatte in precedenza. A titolo di esempio si riportano soltanto gli spostamenti radiali del pignone da una vista differente rispetto a quelle presentate finora soprattutto per dare un'idea migliore sul modello oggetto dello studio tramite una vista tridimensionale.

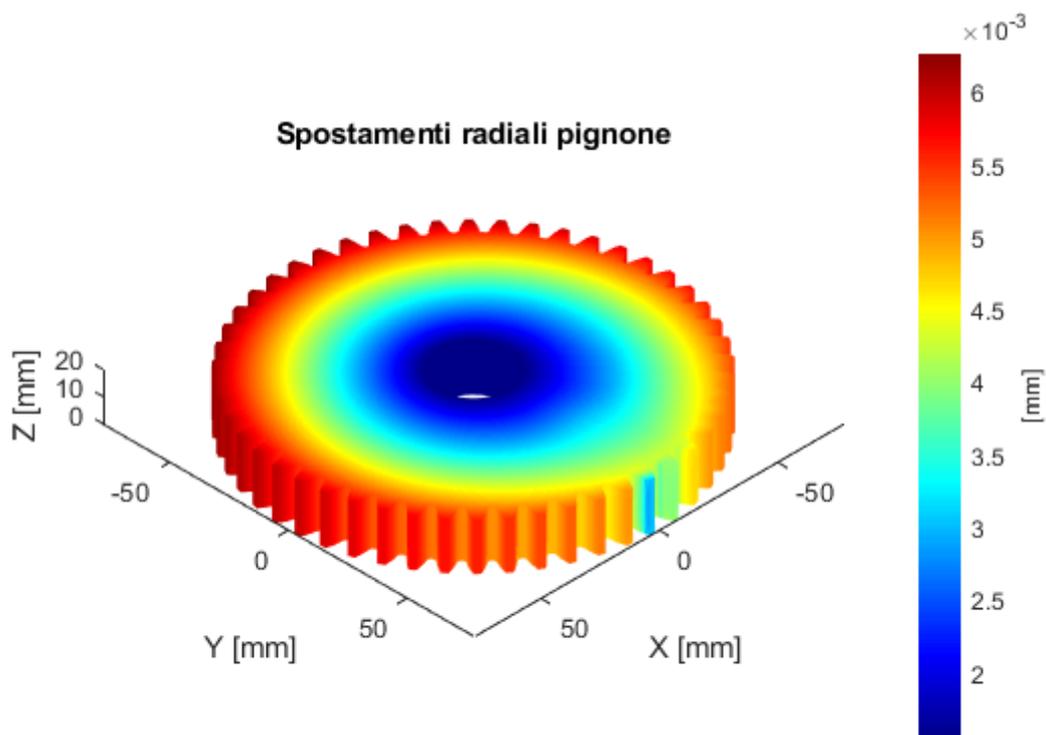


Figura 14

Anche gli spostamenti circonferenziali non presentano differenze rilevanti al cambiare del verso di rotazione. Per i motivi che erano stati detti in precedenza al variare del verso della coppia applicata cambia il segno degli spostamenti, perciò in questo caso gli spostamenti circonferenziali sono positivi per il pignone e negativi per la ruota condotta, ma in modulo rimangono uguali al caso con coppia oraria.

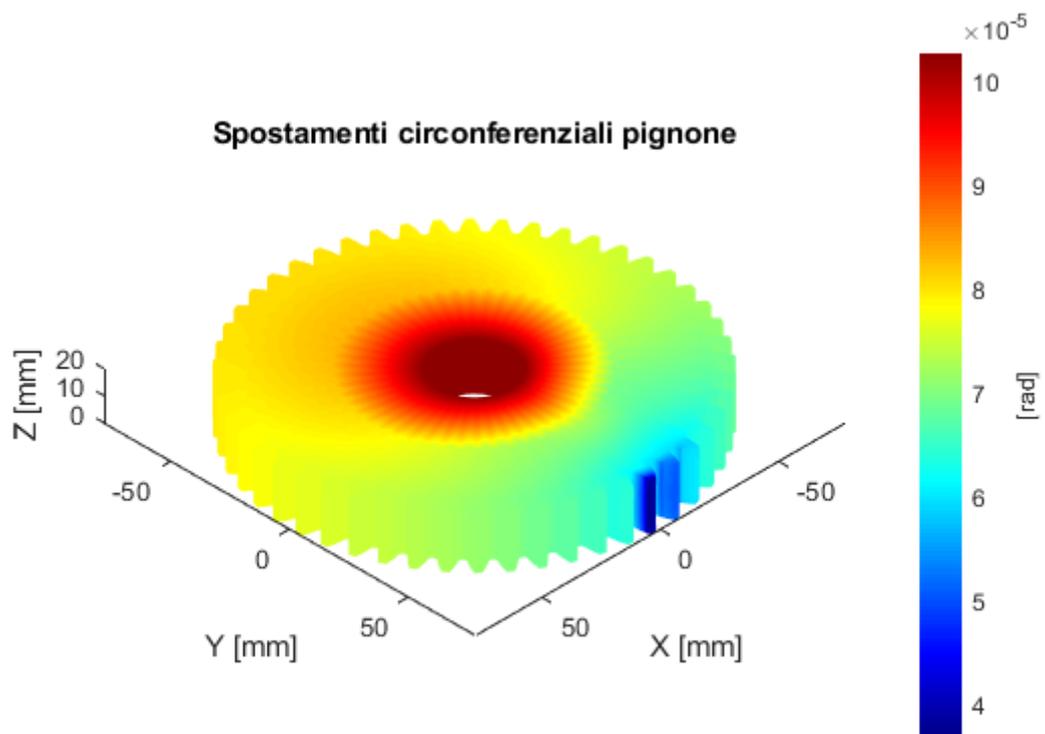


Figura 15

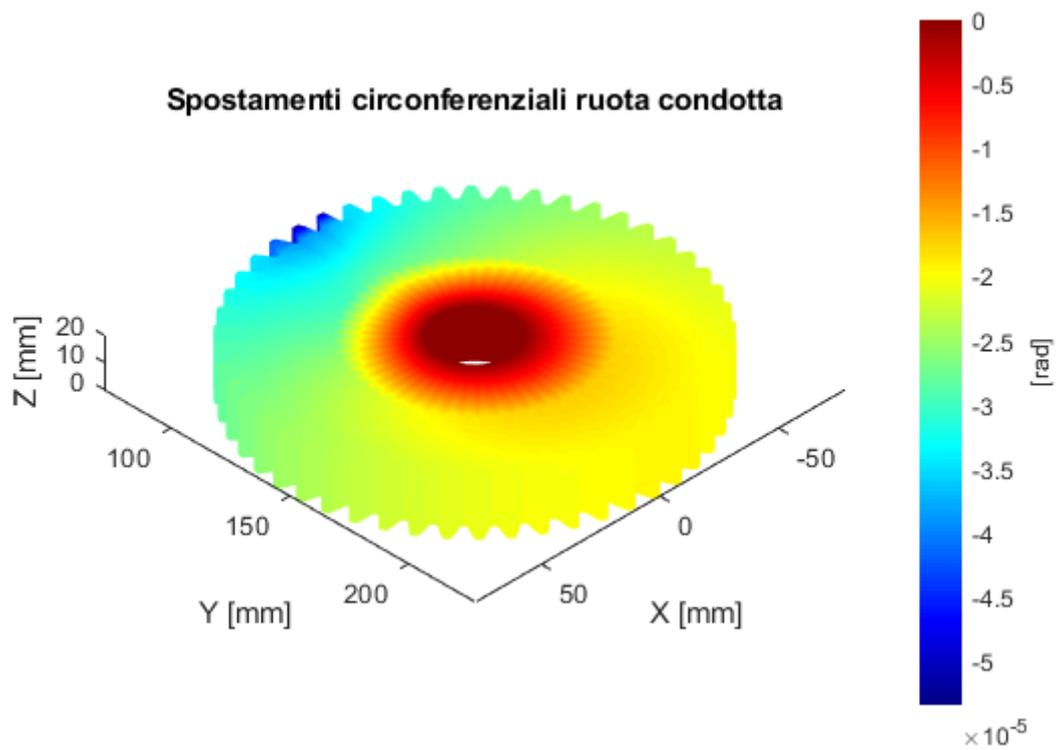


Figura 16

Anche nel caso di coppia antioraria verrà fatto vedere un ingrandimento dei denti delle due ruote.

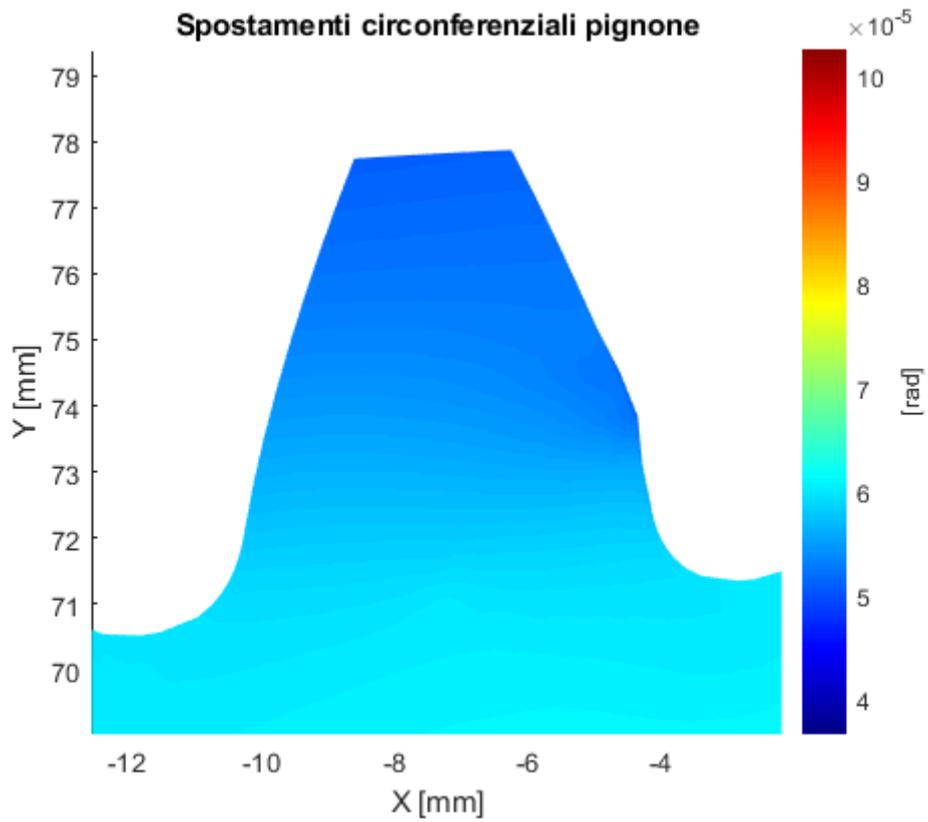


Figura 17

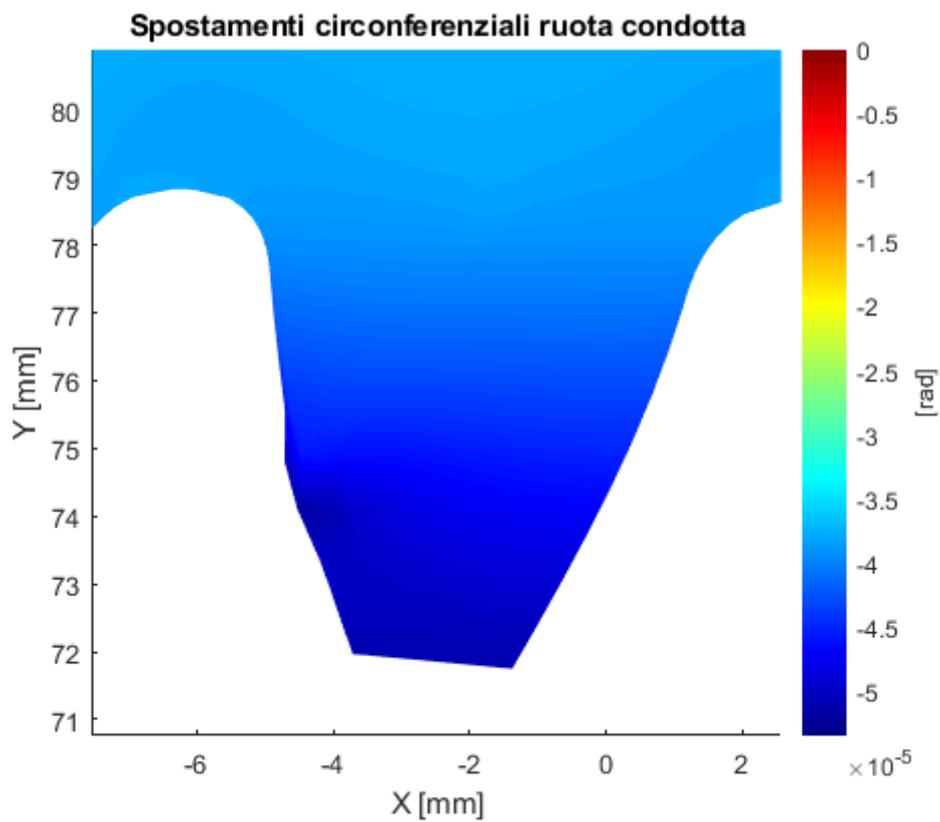


Figura 18

Da questo confronto si possono notare alcune differenze rispetto al caso con coppia oraria. Entrambi i denti sono soggetti a trazione, si ricorda che le molle agiscono sempre sullo stesso fianco (destro per il pignone, sinistro per la condotta), quindi in questo caso la coppia applicata fa ruotare l'ingranaggio nel verso opposto al lato del dente dove sono posizionate le molle, perciò i due denti sono in trazione.

3.1.3 Risultati altre posizioni angolari

Tutti i grafici riportati fino a questo momento si riferiscono alla prima posizione angolare, l'andamento complessivo è uguale per tutte le altre posizioni, cambiano soltanto i valori numerici degli spostamenti ottenuti. Per completezza vengono riportati alcuni grafici rappresentanti la decima posizione angolare per coppia antioraria:

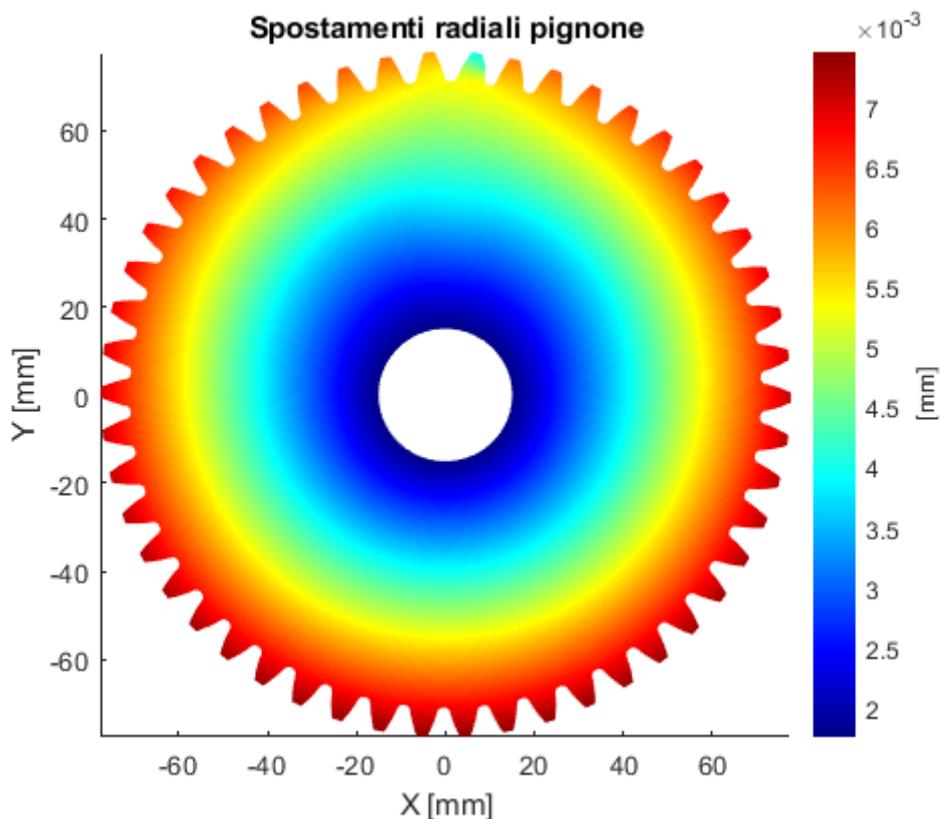


Figura 19

Come si può notare la differenza principale fra questa posizione e la prima è il fatto che in quella analizzata precedentemente c'erano tre denti in presa, in questa soltanto due, per il resto si tratta di grafici abbastanza simili.

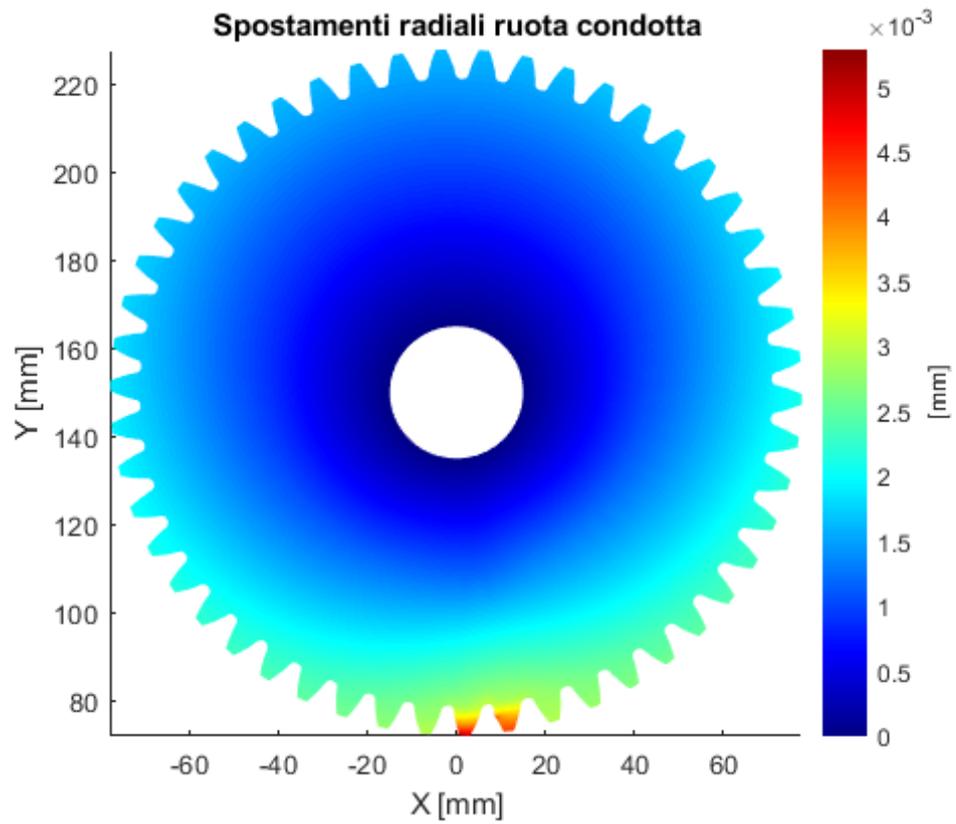


Figura 20

Nelle figure seguenti sono rappresentati gli spostamenti circolari delle due ruote per l'ultima (ventesima) posizione angolare.

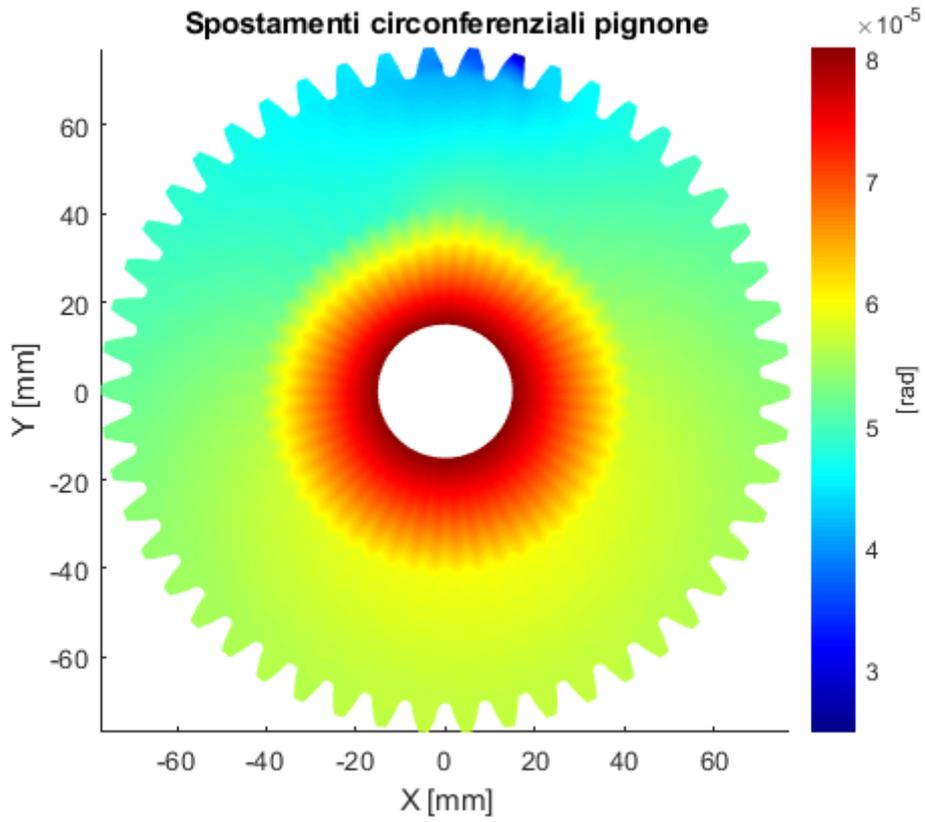


Figura 21

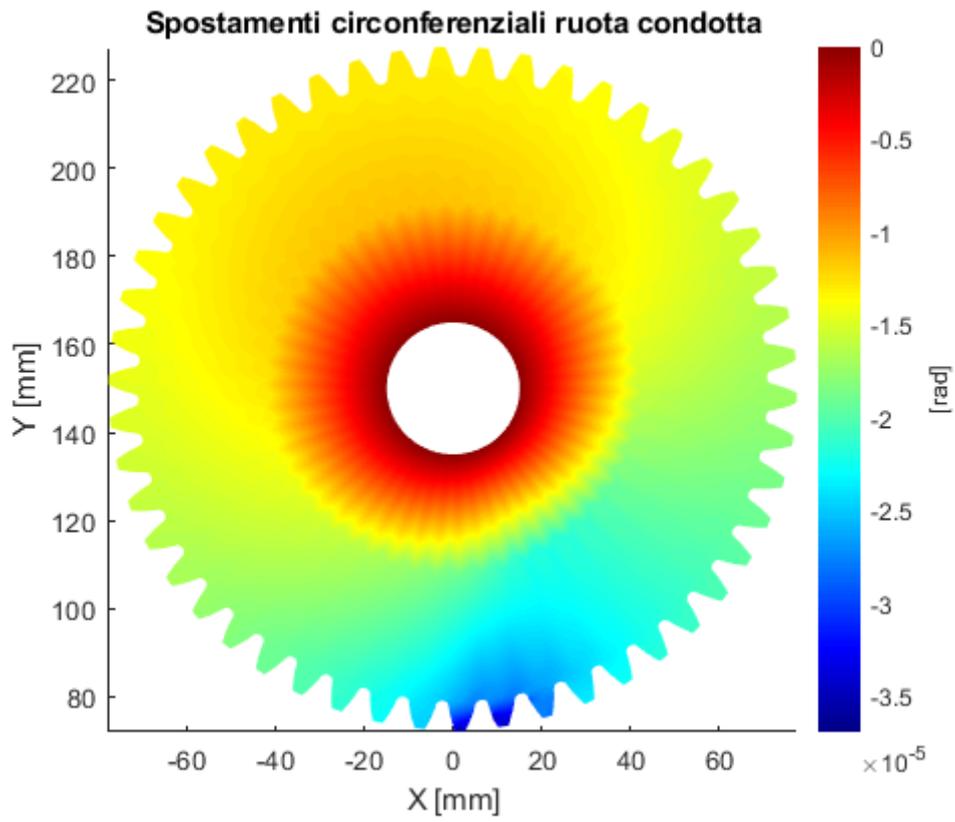


Figura 22

3.2 Studio rigid joint

A questo punto sono state effettuate delle verifiche sul funzionamento del rigid joint. A tale scopo si analizzano le due ruote singolarmente, ad entrambe viene applicata una coppia intorno all'asse Z al nodo centrale (com'era stata applicata al pignone per tutte le analisi fatte finora) e vengono vincolati gli altri gdl del nodo centrale e in più si vincolano anche i nodi di contatto riferiti alla singola posizione angolare analizzata, per fare ciò è opportuno re-selezionare i nodi di contatto dopo aver applicato il rigid joint alle matrici. Vincolare i nodi di contatto vuol dire eliminare completamente la presenza delle molle dal modello, dunque la matrice di rigidezza avrà un unico contributo. Una volta fatto quanto detto si può risolvere il sistema com'era stato fatto precedentemente e si calcolano gli spostamenti allo stesso modo, vengono fuori dunque grafici dello stesso tipo di quelli analizzati finora, ma con alcune differenze nel contenuto.

3.2.1 Risultati con coppia antioraria

Per prima cosa vengono riportati i grafici degli spostamenti radiali (sempre della prima posizione angolare) con coppia antioraria:

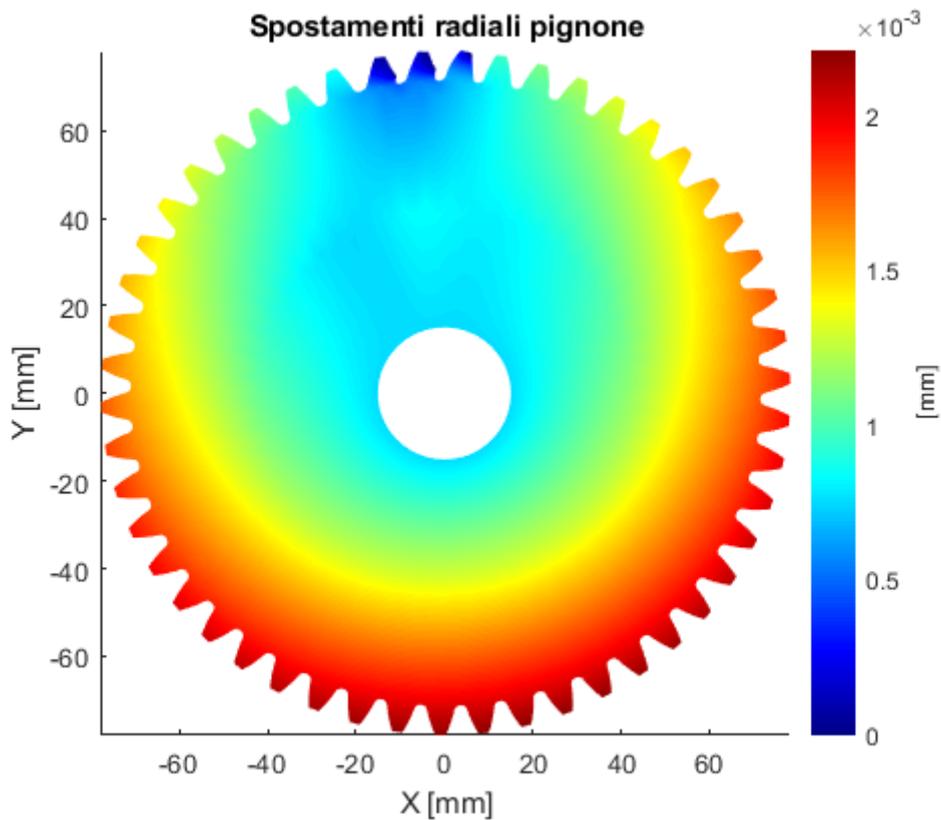


Figura 23

Si può notare la presenza del vincolo in corrispondenza dei nodi di contatto dal fatto che essi hanno spostamenti nulli, inoltre, sempre a causa di questi nuovi vincoli, non è più presente una simmetria circonferenziale nella struttura. A differenza dei casi precedenti si può sottolineare la similarità fra i grafici di pignone e condotta, ciò si può ragionevolmente spiegare col fatto che in questo tipo di verifiche le due strutture sono modellizzate quasi completamente allo stesso modo (stessi vincoli e stesse forze applicate); l'unica differenza è il fatto che i nodi vincolati non sono gli stessi, questo perché il contatto fra due denti non avviene fra due nodi posizionati alla stessa altezza del dente.

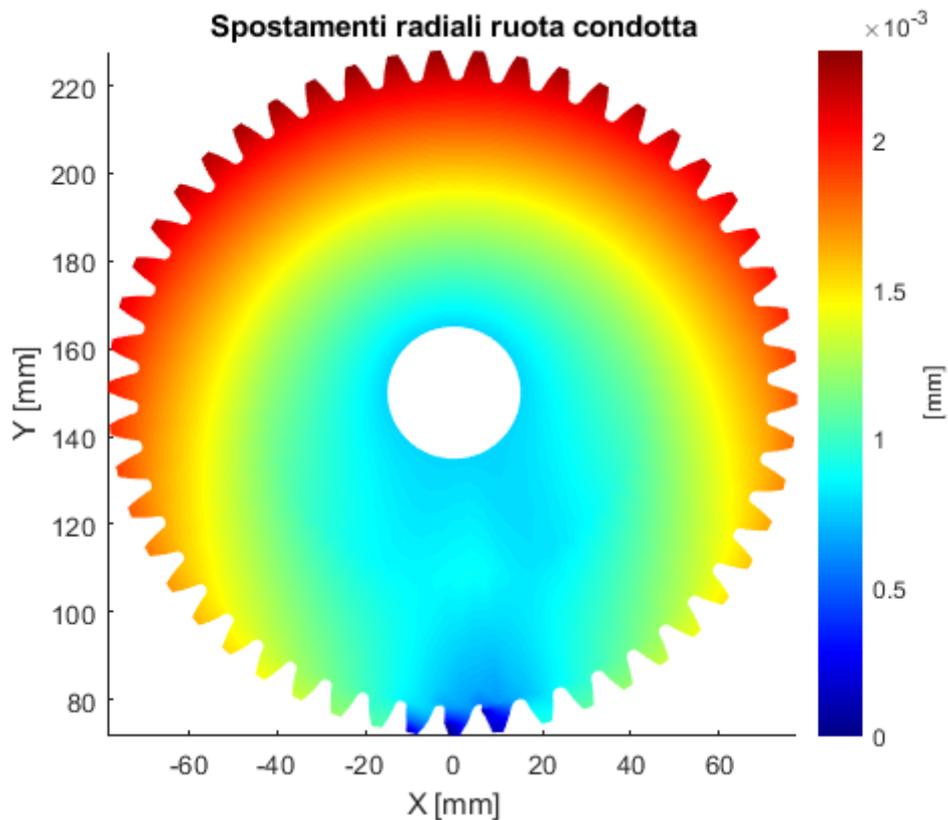


Figura 24

Di seguito vengono riportati anche i grafici rappresentanti gli spostamenti circonferenziali; anche in questo caso si osservano spostamenti nulli in prossimità dei nodi di contatto e inoltre si può sottolineare come, a differenza dei risultati presentati nella sezione precedente, i nodi in prossimità dell'albero della ruota condotta subiscono spostamenti di una certa entità. Questo comportamento si spiega col fatto che nei casi precedenti la condotta era completamente vincolata, adesso è libera di ruotare intorno all'asse Z.

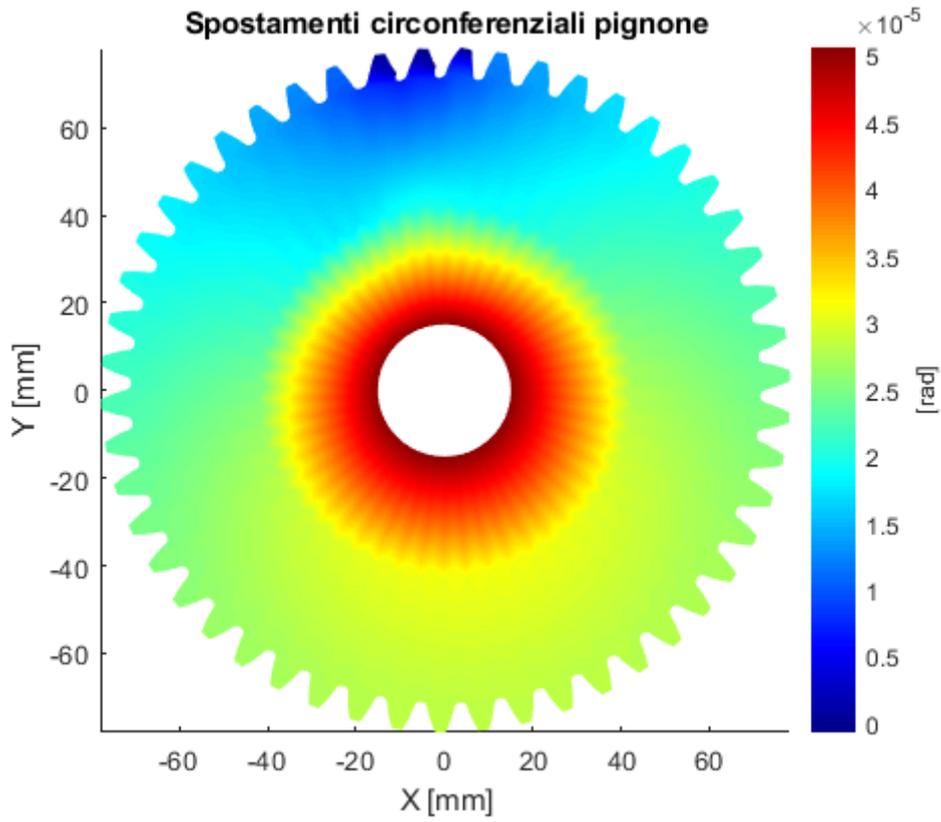


Figura 25

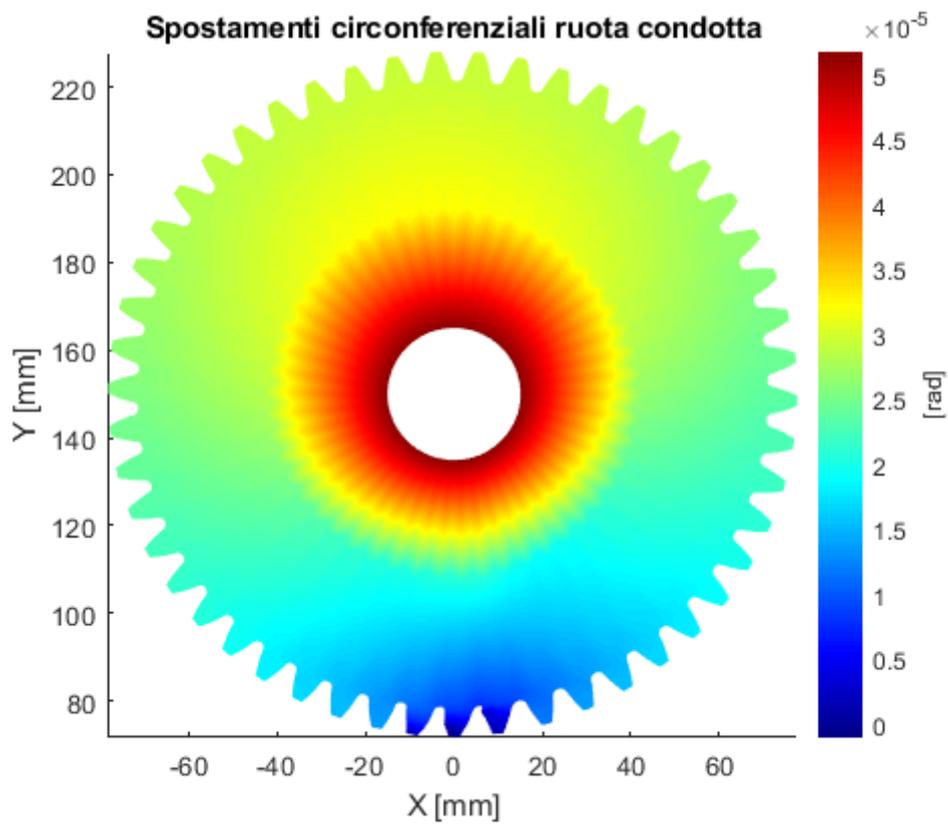


Figura 26

Adesso si analizzerà il comportamento dei denti delle due ruote nello specifico attraverso uno zoom.

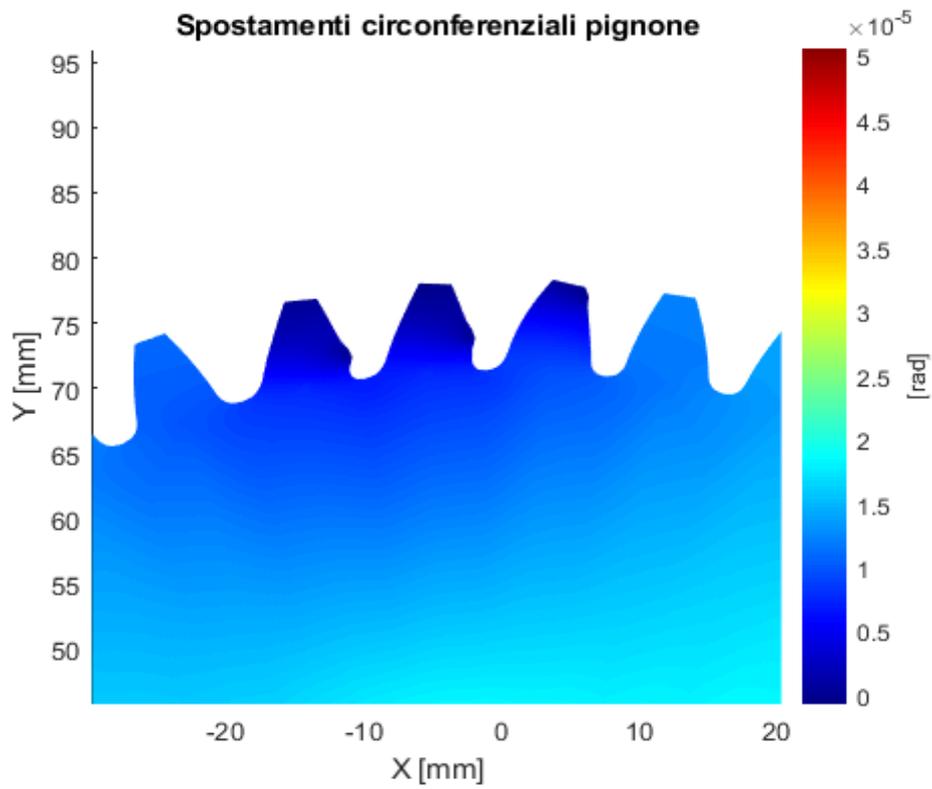


Figura 27

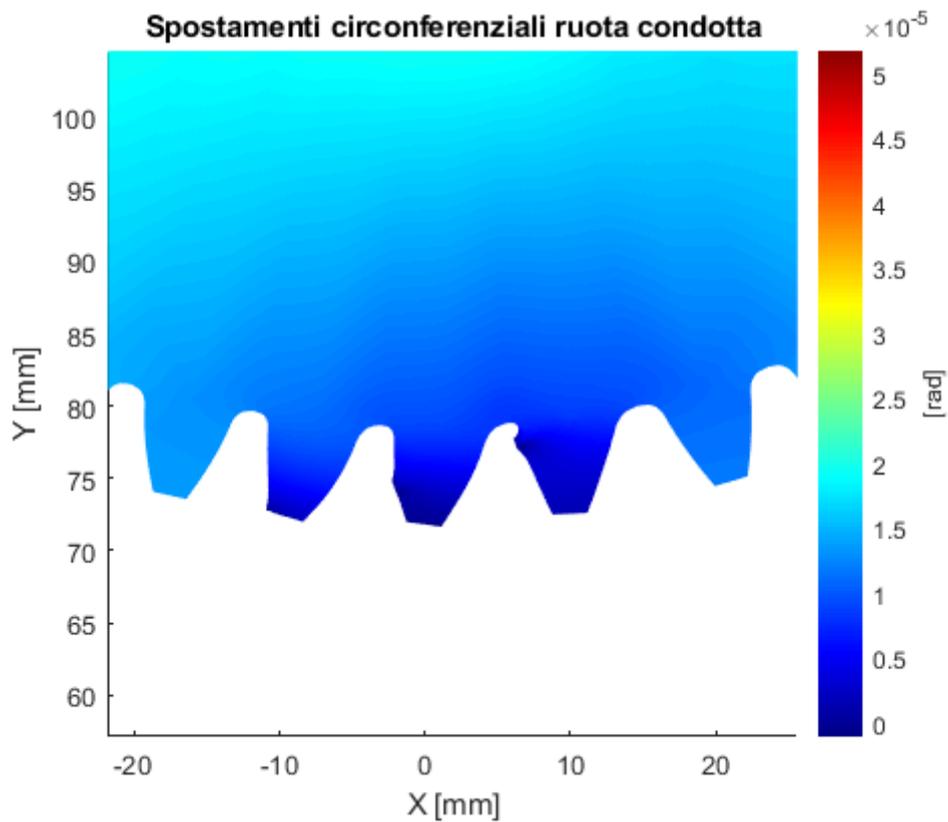


Figura 28

Da queste figure si riconoscono facilmente i tre denti in presa, essi sono appunto i denti più scuri (spostamenti prossimi allo zero). Gli spostamenti di questi denti sono così ridotti perché i nodi di contatto per quest'analisi sono stati vincolati e dunque anche i nodi della struttura vicini ad essi risentono della presenza del vincolo. Si può notare la presenza del vincolo per via di una parte della struttura del dente così sporgente, inoltre è evidente come i denti in presa siano in ritardo rispetto a tutti gli altri. Prendendo per esempio il pignone (si potrebbero fare le stesse analisi con la condotta) la coppia applicata fa muovere i denti verso sinistra, ciò accade liberamente per tutti i denti che non sono vincolati, ma non accade per i denti in presa. I vincoli, infatti, si oppongono alla rotazione imposta per questo motivo la distanza fra il primo dente in presa a partire da destra e il dente non in presa adiacente è ridotta, ma la distanza fra l'ultimo dente in presa e il dente alla sua sinistra è amplificata. Per concludere si può dire che i denti si flettono nella direzione opposta alla coppia applicata.

3.2.2 Risultati coppia oraria

Adesso si effettueranno le stesse prove di prima, ma cambiando il verso della coppia applicata. I grafici rappresentanti le ruote intere sono molto simili ai precedenti, dunque verrà riportato soltanto quello rappresentante gli spostamenti radiali del pignone. Confrontando questo grafico con il corrispettivo della prova precedente come unica differenza salta all'occhio il verso di inclinazione opposto dei denti in presa.

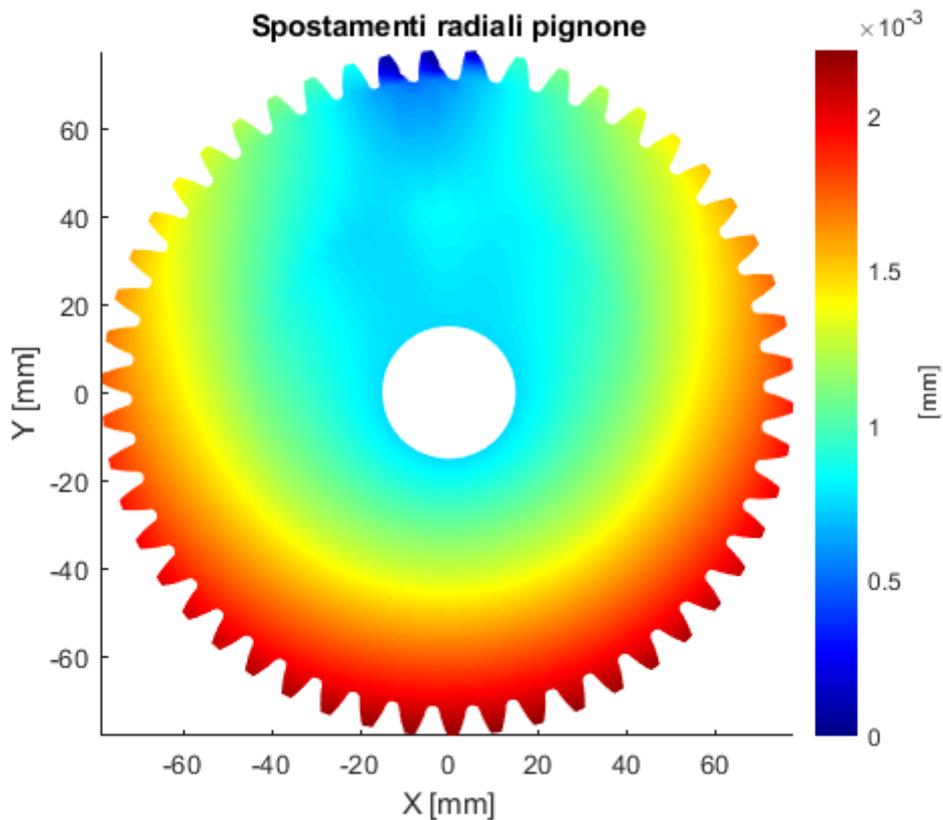


Figura 29

Per analizzare meglio il comportamento dei denti in presa anche in questo caso verrà riportato un ingrandimento.

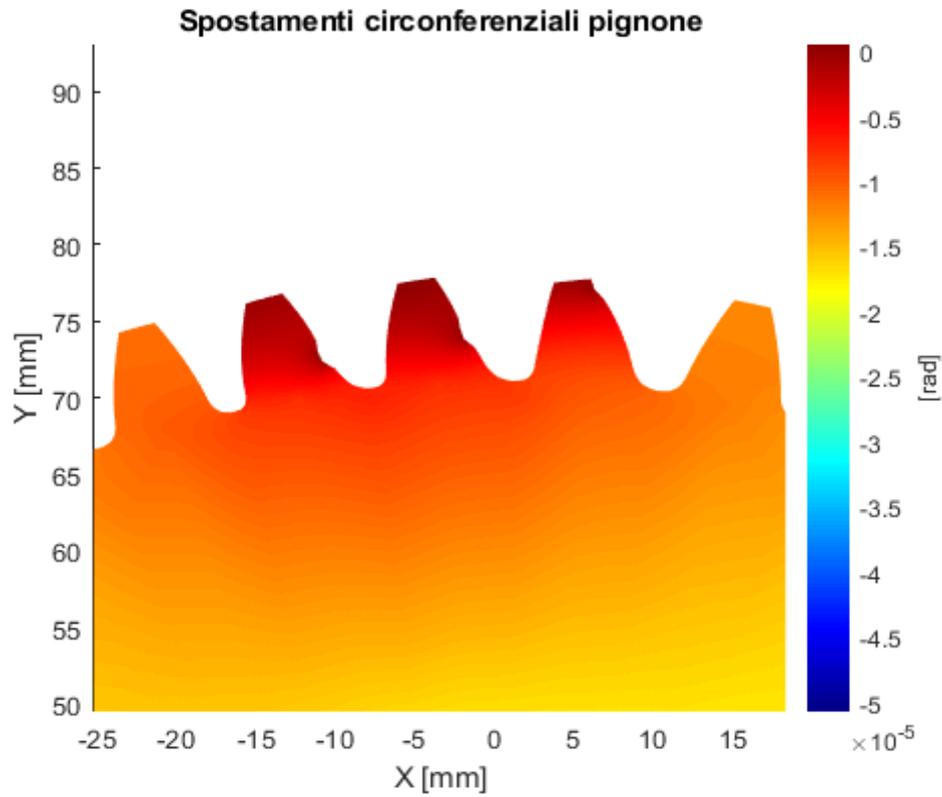


Figura 30

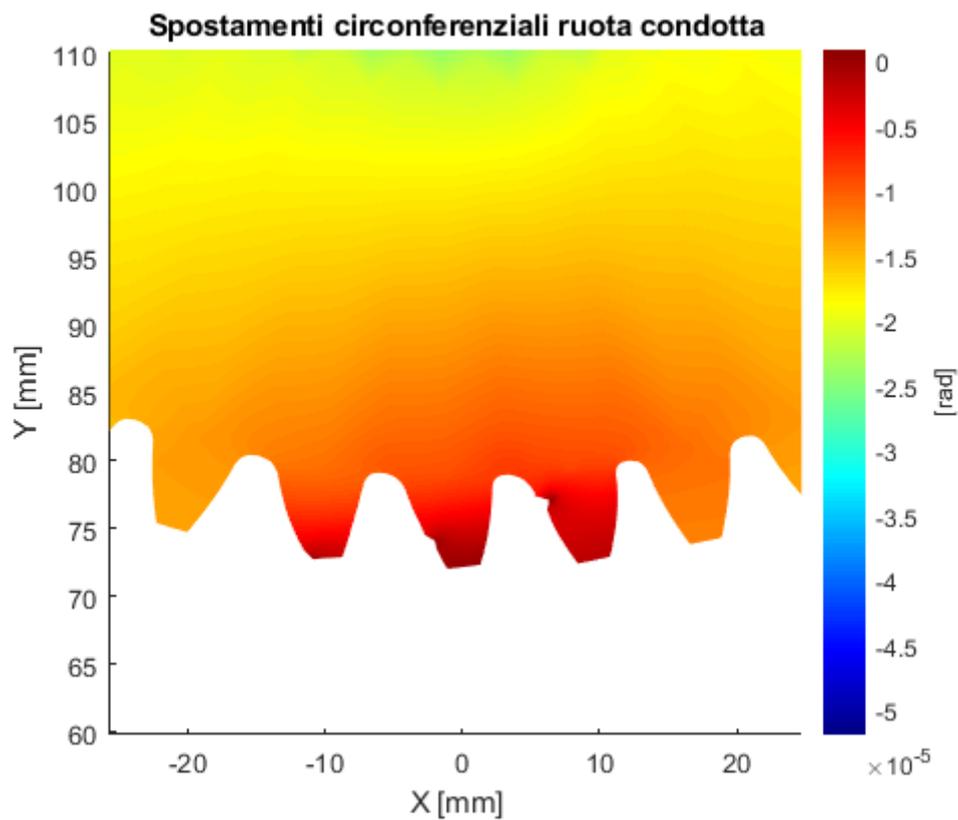


Figura 31

Tutte le considerazioni fatte per il caso con coppia antioraria sono valide anche ora, ma, poiché il verso della coppia è opposto, i risultati per certi aspetti sono il contrario dei precedenti. I denti si flettono sempre in direzione opposta alla coppia, ma in questo caso essi non sono più in trazione, bensì in compressione.

3.2.3 Risultati vincolando un unico nodo

In tutte le prove fatte finora per il rigid-joint sono stati vincolati tutti i nodi di contatto per una determinata posizione angolare. Per comprendere meglio il comportamento locale dei denti in seguito all'applicazione di un vincolo, è stato vincolato solo un nodo fra tutti i nodi di contatto. Nelle figure seguenti sono rappresentati i denti del pignone per coppia antioraria prima ed oraria poi, si evita di fare la stessa rappresentazione per la condotta poiché vengono fuori risultati simili.

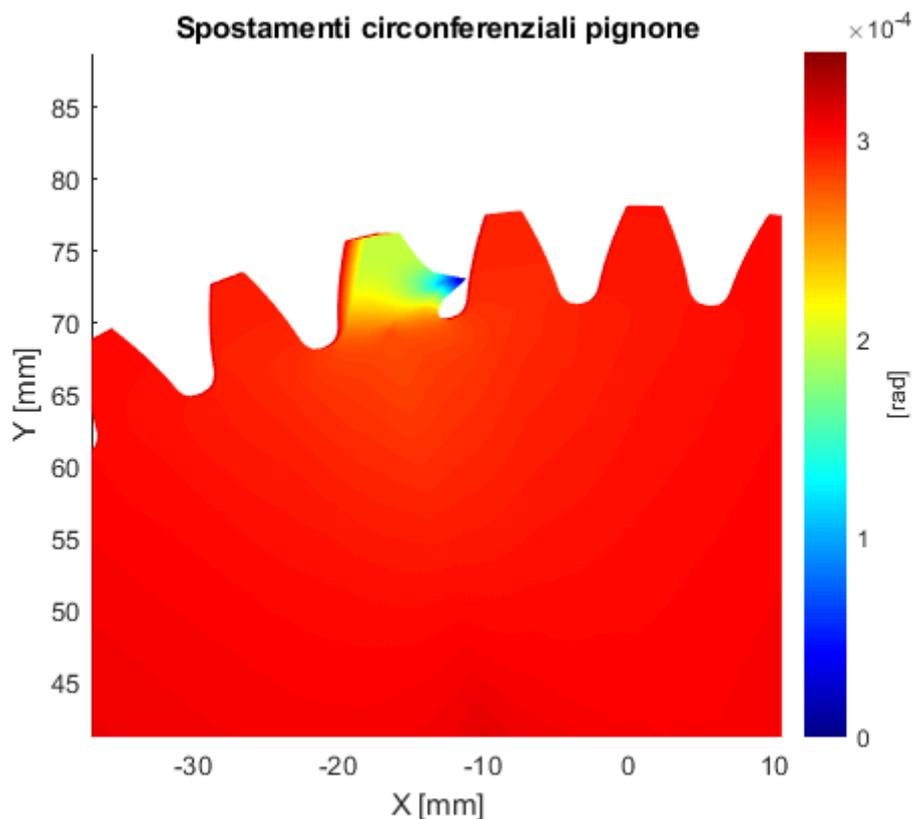


Figura 32_Coppia antioraria

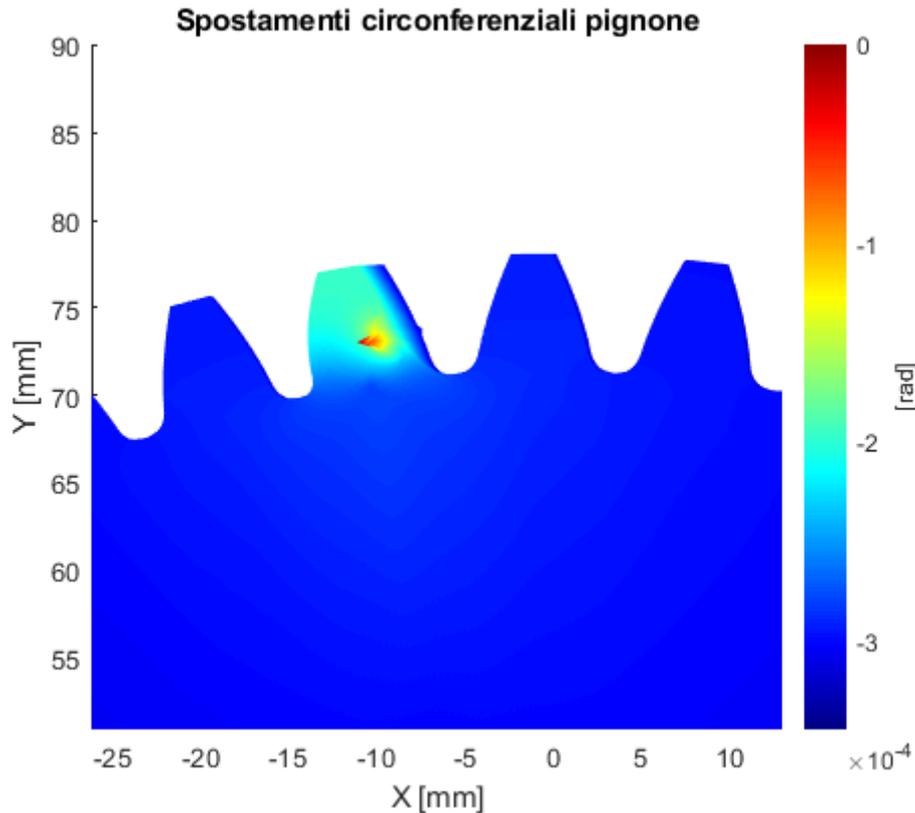


Figura 33_Coppia oraria

Si può notare più facilmente quanto detto precedentemente: il nodo vincolato tende ad ostacolare il movimento del dente su cui si trova; il dente viene fesso nella direzione opposta alla coppia. Poiché in questo caso è solo un nodo ad essere vincolato la ruota nel complesso ne risente poco della presenza del vincolo, soltanto il dente su cui si trova il nodo vincolato è fortemente influenzato da quest'ultimo. Si ricorda che per il pignone i nodi di contatto si trovano sempre sul fianco destro, nel primo caso (coppia antioraria) si capisce bene il comportamento del vincolo, è invece un po' meno ovvio nel caso di coppia oraria. In questo caso al contrario del precedente il vincolo si trova sul fianco verso cui avviene il movimento dei denti, per questo motivo il vincolo sembra che non si trovi più sul lato del dente in seguito all'applicazione della coppia, in realtà la parte posteriore del dente si sposta più a destra rispetto al nodo vincolato, che ovviamente rimane sul fianco della ruota. Questo fenomeno non si vedeva così chiaramente vincolando tutti i nodi di contatto in quanto non c'era una parte del dente in grado di spostarsi (per la presenza di vincoli su tutta la larghezza di fascia).

3.3 Conclusioni analisi spostamenti e gif

Nel complesso si può dire che a prescindere dalla presenza o meno delle molle i denti si comprimono in seguito ad una coppia oraria ed entrano in trazione in caso di coppia antioraria. Ciò avviene perché i nodi di contatto sono sempre scelti sul fianco destro e quindi a prescindere che ad essi vengano attaccate delle molle o essi siano dei vincoli, si oppongono sempre al moto (come nella realtà farebbero i denti dell'altra ruota). La differenza fra i vincoli e le molle è che i vincoli non permettono proprio il movimento di quel nodo, ne risulta quindi un maggior stato di compressione o trazione.

Per avere una panoramica completa di queste prime venti posizioni angolari è stata realizzata una gif rappresentante l'ingranamento dell'accoppiamento in seguito all'applicazione di una coppia oraria. Nella gif si possono visualizzare gli spostamenti radiali delle due ruote, è quindi possibile individuare le posizioni angolari per cui avviene uno spostamento maggiore dei nodi.

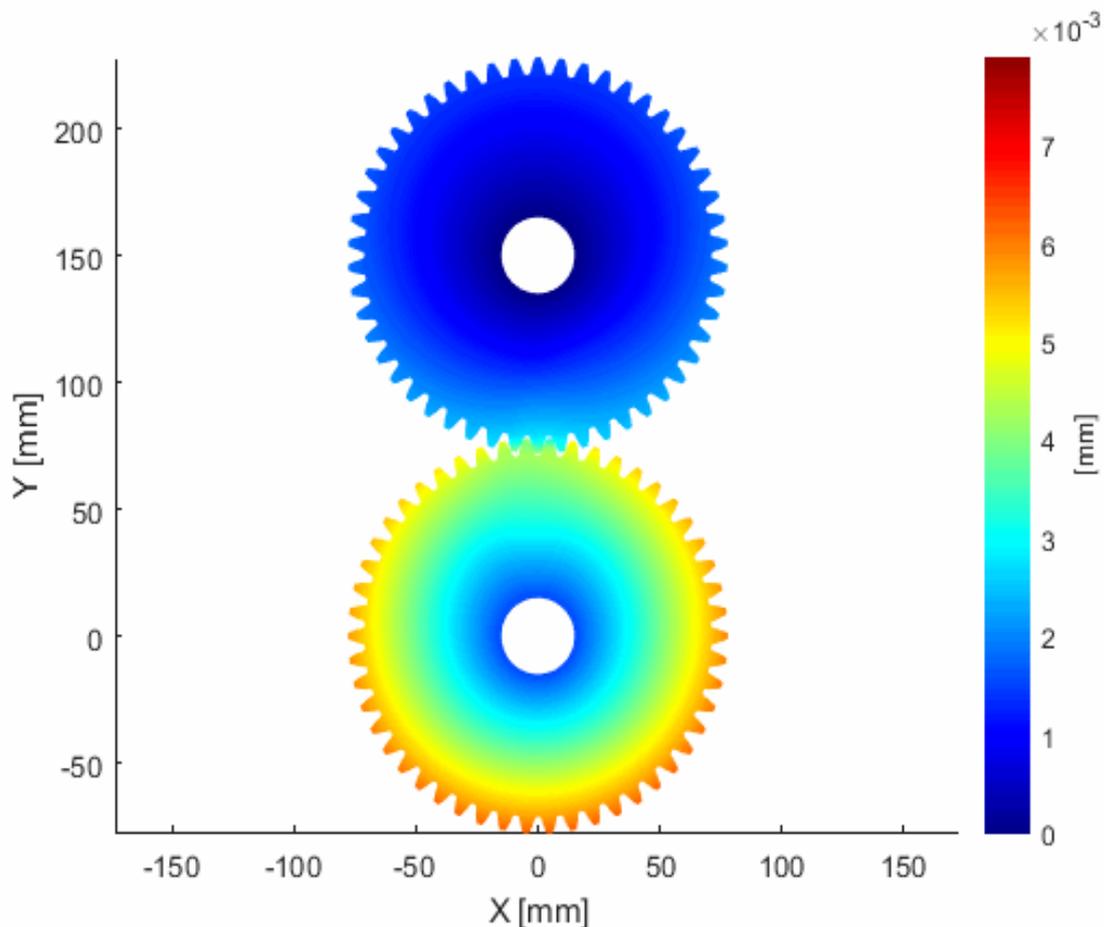


Figura 34_Gif ingranamento con rappresentazione spostamenti

Come si era visto nelle figure rappresentanti le singole ruote gli spostamenti radiali della condotta sono abbastanza contenuti, tranne in corrispondenza dei denti a contatto. Gli spostamenti del pignone sono massimi in corrispondenza delle posizioni aventi due denti in presa, poiché i denti della condotta oppongono minor resistenza, e hanno dei valori di $7 \cdot 10^{-3}$ in corrispondenza dei denti (eccetto quelli in presa). In particolare l'ottava posizione è quella con gli spostamenti maggiori.

3.4 Risultati stress e deformazioni

Una volta terminata l'analisi degli spostamenti si può passare all'analisi delle deformazioni e degli stress a cui sono soggette le due ruote. Di seguito verranno rappresentati, per la prima posizione angolare, gli stress a cui sono sottoposti sia il pignone che la condotta:

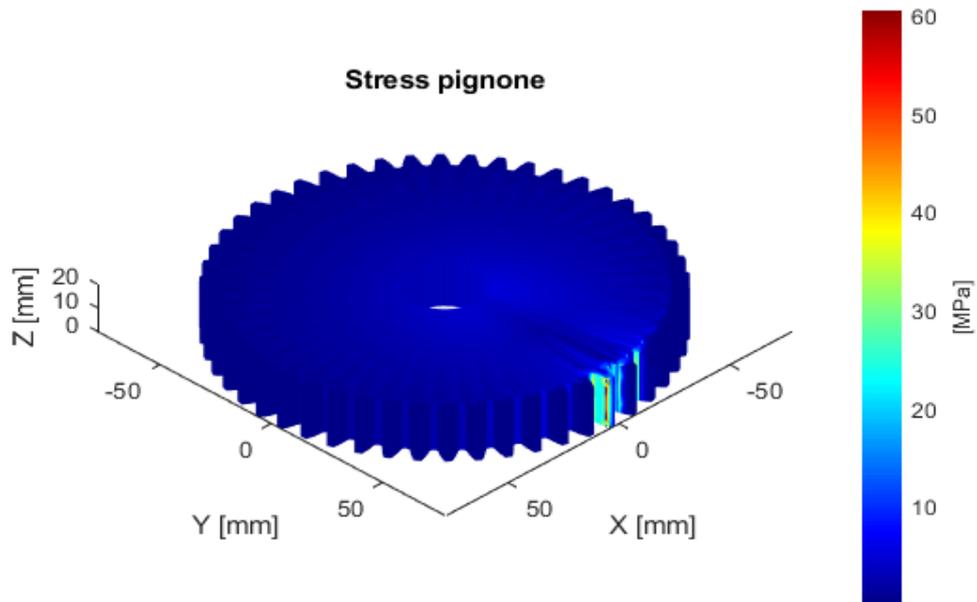


Figura 35

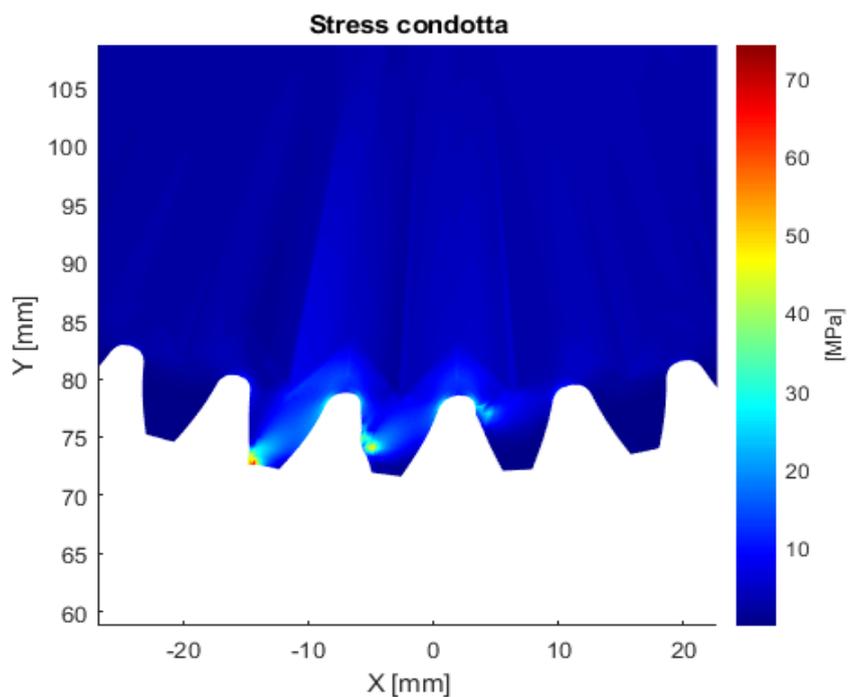


Figura 36

Sono state presentate due viste diverse per i due casi semplicemente per avere una visione completa ma senza appesantire troppo la trattazione. Come ci si poteva aspettare le zone della struttura maggiormente sotto stress sono i denti in presa, più precisamente le zone rosse, cioè quelle soggette a stress maggiore, sono i nodi di contatto. Lungo tutta la larghezza di fascia lo stress è costante, ciò si giustifica col fatto che il contatto è uniforme lungo la dimensione definita dall'asse Z. Dunque per la prima posizione angolare la condotta è la ruota maggiormente sollecitata, probabilmente perché il contatto avviene alla punta del dente, perciò la superficie di applicazione della forza è minore.

Adesso si rappresenteranno le deformazioni di pignone e condotta, a seguire la gif dell'imgranamento:

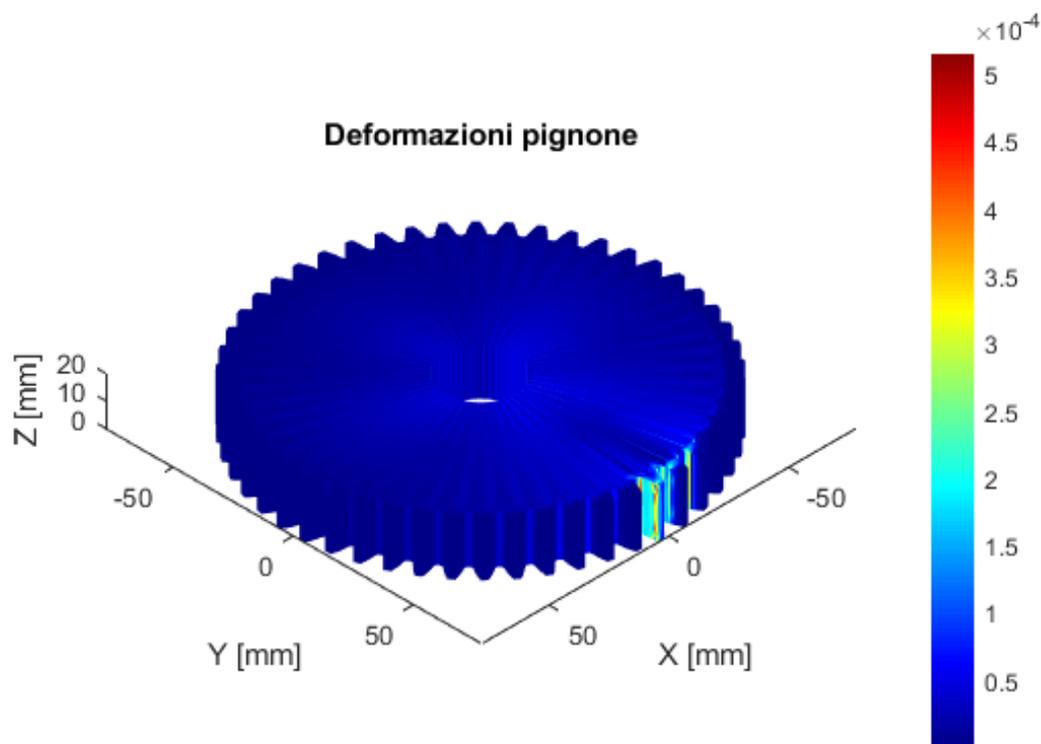


Figura 37

Anche in questo caso pignone e condotta presentano andamenti molto simili. Com'è risaputo inoltre tensione e deformazione sono proporzionali infatti confrontando questa coppia di grafici e i due precedenti si può notare come le zone di massimo stress e di massima deformazione coincidono, la condotta ha infatti deformazioni maggiori.

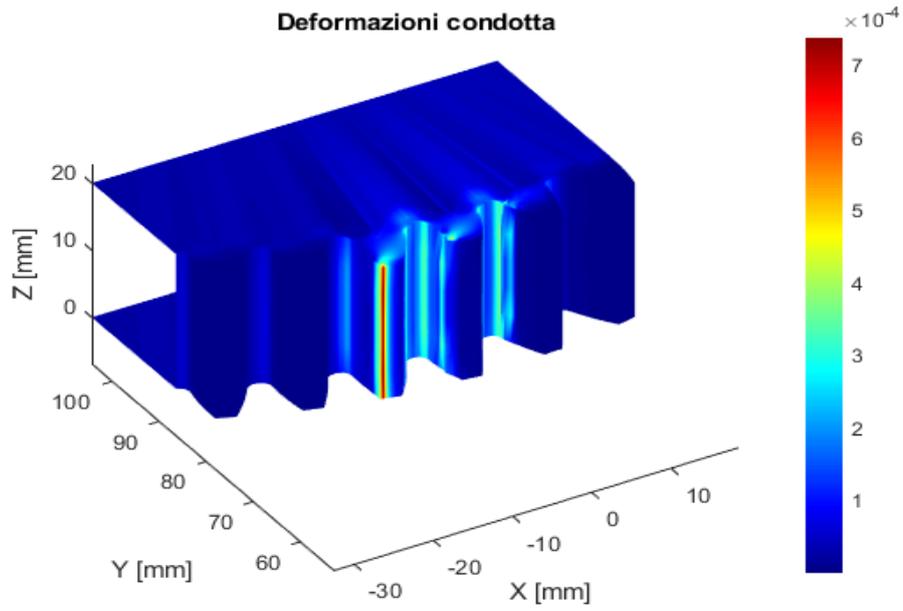


Figura 38

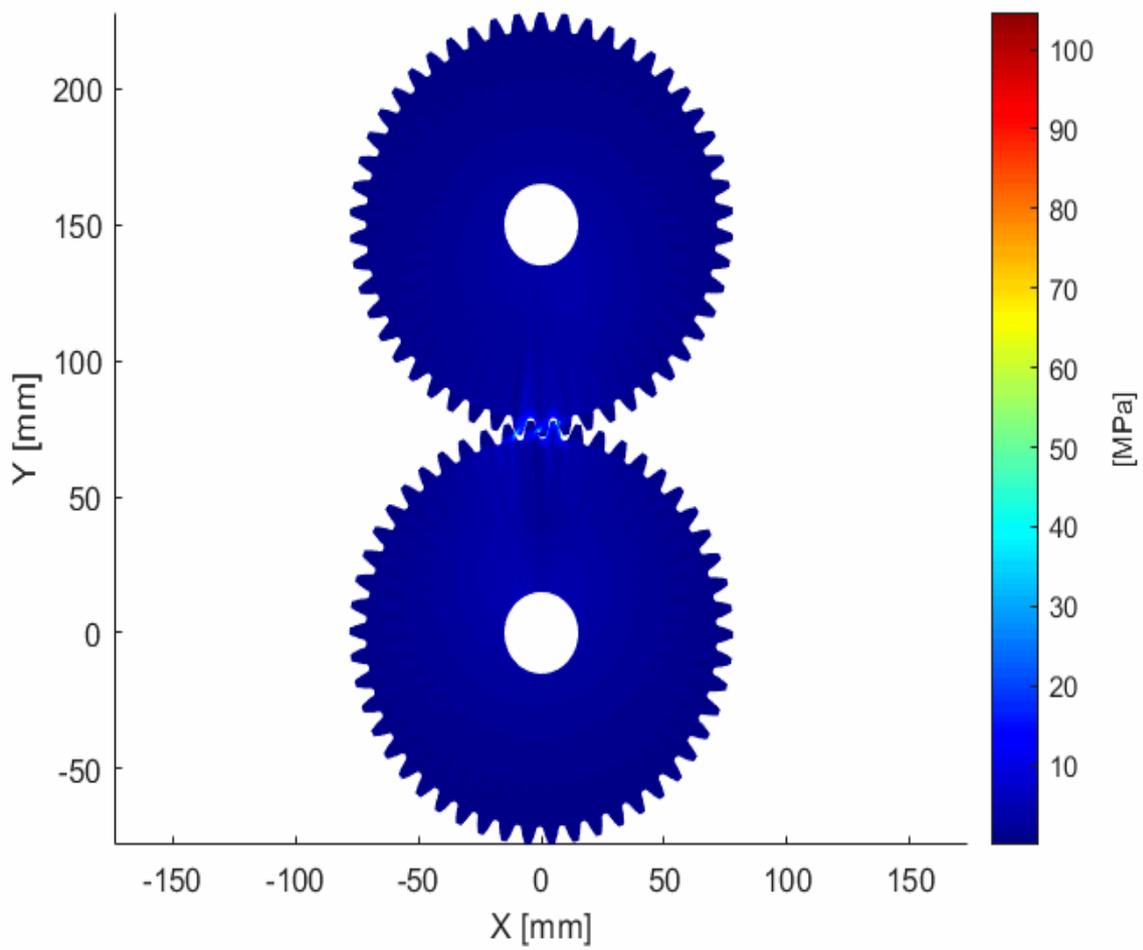


Figura 39_Gif ingranamento con rappresentazione stress

Dalla gif si ha la conferma che per tutte le posizioni angolari i denti in presa sono la zona della struttura maggiormente sollecitata. La posizione angolare in cui si sviluppano tensioni maggiori è la settima, come nel caso della posizione con spostamenti massimi, si tratta di una posizione avente due soli denti in presa; in particolare le sollecitazioni massime si sviluppano nella condotta. Non per tutte le posizioni angolari la condotta ha stress maggiori del pignone, ciò dipende dai diversi punti di contatto delle due ruote. Dalla color bar si evince che lo stress massimo a cui sono sottoposti i denti per questo ingranamento è di poco superiore a 100 Mpa, questo valore andrebbe confrontato con le caratteristiche del materiale in esame al fine di verificare il funzionamento dell'ingranaggio.

4 Analisi modale

Le due ruote sono due strutture praticamente identiche, l'unica differenza è che la condotta ha il nodo centrale vincolato, mentre il pignone è lasciato libero di ruotare intorno all'asse Z. Le matrici di rigidezza e di massa sono calcolate allo stesso modo, dunque ci si aspetta che essi abbiano stessi autovalori, a patto che essi vengano calcolati sulle matrici non vincolate (poiché le matrici della condotta hanno un vincolo in più). Sono stati calcolati i primi dieci autovalori della matrice di rigidezza per tutte le posizioni angolari e sono state calcolate le differenze fra quelli della condotta e quelli corrispondenti del pignone, l'errore relativo massimo ottenuta è dell'ordine di $10e-6$, a conferma di un modello ben funzionante. Le matrici di massa e rigidezza di una determinata posizione angolare differiscono da quella precedente solo per l'applicazione di una rotazione, perciò anche gli autovalori calcolati per ogni posizione angolare devono essere gli stessi.

Queste considerazioni sono state fatte considerando singolarmente la matrice di massa e di rigidezza, ora verrà svolta l'analisi modale del sistema completo.

Si ricorda l'equazione del moto per un sistema non smorzato:

$$M\ddot{u} + Ku = F \quad (13)$$

È possibile calcolare gli autovalori e gli autovettori dell'autoproblema associato:

$$K Z^n = \lambda_n M Z^n \quad (14)$$

in cui λ_n sono gli n autovalori e Z^n sono gli n autovettori, nella forma di vettori colonna. Gli autovalori si calcolano risolvendo l'equazione:

$$\det (K - \lambda_n M) = 0 \quad (15)$$

e successivamente si possono calcolare i corrispondenti autovettori associati ad ogni autovalore

$$(K - \lambda_n M) Z^n = 0 \quad (16)$$

Gli autovalori, come si può notare dalle equazioni riportate precedentemente, hanno l'unità di misura di una pulsazione naturale al quadrato (rad^2/s^2) dunque da questi valori si possono calcolare facilmente le frequenze naturali riportate nella tabella di sotto. Sono stati calcolati i primi venti modi, ma poiché si tratta di una struttura non vincolata i primi sei sono modi rigidi, perciò non sono state riportate le relative frequenze naturali, le quali sono pari a zero. Si può infine notare come alcune frequenze sono uguali a due a due per via della simmetria della struttura che si sta analizzando.

Nella tabella seguente sono riportate le frequenze naturali, associate al corrispondente modo, del pignone non vincolato, prima dell'applicazione del rigid joint, riferite alla prima posizione angolare:

N° modo	Frequenza (kHz)
1	4,0500
2	4,0500
3	6,5851
4	8,9427
5	8,9427
6	12,105
7	12,105
8	13,808
9	13,809
10	14,207
11	14,207
12	17,808
13	17,808
14	19,788

Tabella 3

In quest'altra tabella invece sono riportate le prime quindici frequenze naturali del pignone completamente vincolato al nodo centrale.

N° modo	Frequenza (kHz)
1	4,0027
2	4,0027
3	4,3286
4	4,4779
5	4,9848
6	4,9848
7	9,1010
8	9,1010
9	10,778
10	10,778
11	14,443
12	14,443
13	18,604
14	18,604
15	20,104

Tabella 4

Tutti i risultati presentati in queste due tabelle saranno ripresi e confrontati con quelli ricavati dalle matrici ridotte nel capitolo 9.

5 Analisi dinamica

Terminata l'analisi statica si può passare all'analisi dinamica del modello. Finora per ogni posizione angolare analizzata (20 in tutto) è stata risolta un'unica equazione avente come unica incognita lo spostamento, nell'analisi dinamica ci sarà anche l'accelerazione dunque si dovranno risolvere equazioni differenziali del secondo ordine. A tale scopo si utilizzerà il metodo di Newmark, esso permette di risolvere le equazioni del moto per ogni step-temporale Δt a cui corrisponde uno step-angolare $\Delta\theta$. Questo metodo non verrà implementato in questa trattazione, ma la sua comprensione è fondamentale per capire come ridurre le matrici del modello.

5.1 Metodo di Newmark e metodi di riduzione

In questo paragrafo verranno presentati i dettagli analitici del metodo. Per ogni posizione angolare vale l'equazione:

$$\ddot{u}_i^* = S_i^{-1} \delta r_i \quad (14)$$

in cui S_i e δr_i (vettore dei residui) sono definiti come segue:

$$S_i = M_{z,i} + \Delta t_i C_{z,i} + \Delta t_i^2 \alpha_{NM} (K_{z,i} + K_{c,i}) \quad (15)$$

$$\delta r_i = f + D_i u_{i-1} + V_i \dot{u}_{i-1} + A_i \ddot{u}_{i-1} \quad (16)$$

Il pedice z sta ad indicare le matrici opportunamente ruotate in base alla posizione angolare che si sta analizzando, mentre il pedice i sta ad indicare l' i -esimo time step. K_c è invece la matrice di rigidità di contatto. L'intervallo di tempo Δt_i potrebbe essere variabile, per questo viene riportato il pedice i . Tutte le matrici presenti nella formula precedente si ottengono dalle formule seguenti:

$$D_i = - (K_{z,i} + K_{c,i}) \quad (17)$$

$$V_i = - C_{z,i} - \Delta t_i (K_{z,i} + K_{c,i}) \quad (18)$$

$$A_i = - C_{z,i} (1 - \delta_{NM}) \Delta t_i - (K_{z,i} + K_{c,i}) \left(\frac{1}{2} - \alpha_{NM} \right) \Delta t_i^2 \quad (19)$$

La formula per calcolare il vettore accelerazione è stata la prima ad essere riportata, di seguito vengono riportate le formule per il vettore velocità e il vettore spostamento.

$$\dot{u}_i^* = u_{i-1} + (1 - \delta_{NM} \Delta t_i) \dot{u}_{i-1} + \delta_{NM} \Delta t_i \ddot{u}_i^* \quad (20)$$

$$u_i^* = u_{i-1} + \Delta t_i \dot{u}_{i-1} + \left(\frac{1}{2} - \alpha_{NM} \right) \Delta t_i^2 \ddot{u}_{i-1} + \Delta t_i^2 \alpha_{NM} \ddot{u}_i^* \quad (21)$$

I vettori accelerazione, velocità e spostamento, a volte hanno l'asterisco come apice, altre volte no, ciò viene fatto perché i vettori con l'asterisco sono quelli che rappresentano realmente spostamenti, velocità e accelerazione dei nodi per quello specifico istante di tempo. Come si può vedere nell'equazione precedente però questi vettori una volta calcolati entrano nell'equazione

dell'istante di tempo successivo, a tale scopo devono essere calcolati gli stessi vettori riferiti alle matrici ruotate di un angolo $\Delta\theta$. Vale dunque la relazione:

$$u_i = R_{\Delta\theta} u_i^* \quad (22)$$

stessa cosa per il vettore velocità e accelerazione. α_{NM} e δ_{NM} sono due costanti del metodo, alle quali vengono assegnati i seguenti valori:

$$\alpha_{NM} = \frac{1}{4}, \quad \delta_{NM} = \frac{1}{2}$$

Tutte le formule di cui si ha bisogno per implementare il metodo di Newmark sono riportate di sopra, è stata riportata anche la matrice di smorzamento, ma nel nostro caso verrà considerato uno smorzamento nullo. Si tratta dunque di un metodo iterativo, i risultati di un particolare time-step vengono inseriti nell'equazione riferita al time-step successivo e così via, ciò va bene fin quando non si ottiene $i = N$, in questo caso occorre ricalcolare i nodi di contatto. Poiché le matrici subiscono una rotazione per ogni posizione angolare non si può utilizzare la stessa riduzione per l'intero mesh-cycle, dunque per ogni posizione del mesh cycle viene effettuata una riduzione a partire dalle matrici intere. Da sottolineare che la forzante rimane costante per tutti i time-step, a cambiare è la matrice di rigidità di contatto, che è dunque la vera responsabile dell'eccitazione del sistema.

Come si può notare dalle equazioni presentate in precedenza l'analisi dinamica ha tempi di risoluzione molto più lunghi dell'analisi statica, in quanto si tratta di equazioni molto più complesse, ma soprattutto per analizzare un giro completo dell'ingranamento si impiegheranno tempi molto lunghi, poiché ciò comporta la risoluzione di $z \cdot 20$ equazioni diverse (z è il numero di denti, 20 è il numero delle diverse posizioni angolari analizzate in un mesh-cycle); nel nostro caso il numero di denti è pari a 50, perciò si dovranno risolvere 1000 equazioni. In virtù di quanto detto l'unico modo per ridurre i tempi di calcolo è ridurre le matrici utilizzate per l'analisi statica.

A tale scopo vengono in soccorso i metodi di riduzione. Verranno analizzati nel dettaglio due diversi metodi di riduzione: "il metodo di Craig-Bampton" e "free-interface method". Alla base di queste tecniche di riduzione c'è la scelta dei nodi master, con cui si indicano alcuni nodi che rappresentano l'intera struttura, questi nodi verranno trattati diversamente a seconda della tecnica di riduzione utilizzata. Col metodo di Craig-Bampton i nodi master si considerano come nodi fissi, con free interface method i nodi master, come si potrebbe intuire dal nome del metodo, si considerano come nodi free. Inizialmente si pensa di considerare come nodi master tutti nodi di interfaccia, cioè i nodi della ruota a contatto con l'albero, e i nodi di contatto. Poiché il metodo di Craig-Bampton è il metodo di riduzione più utilizzato, l'idea iniziale è ridurre le matrici con questo metodo. L'obiettivo principale è applicare all'ingranaggio determinate tecniche di riduzione che permettono per prima cosa di simulare correttamente il comportamento della struttura, ma anche di ottenere gli spostamenti o gli stress a cui sono sottoposti determinati nodi, che verranno definiti nodi osservabili. Questi ultimi non possono essere considerati nodi master di Craig-Bampton poiché considerare troppi nodi master potrebbe essere un problema, in quanto si rischierebbe di irrigidire troppo la struttura. Per tale motivo verrà analizzata la seconda tecnica di riduzione: "free-interface method". Ciò che si è pensato inizialmente è unire le due tecniche di riduzione e considerare i nodi master come nodi master di Craig-Bampton e i nodi osservabili come nodi master del "free interface method".

5.2 Presentazione modello trave

Per analizzare i risultati ottenuti in un primo momento applicheremo le suddette tecniche ad una travetta, poiché essa è una struttura molto più semplice delle ruote è più semplice analizzare i risultati ottenuti. Ad ogni modo se le riduzioni danno i risultati che ci si aspetta sulla trave, anche sulle ruote dovrebbero dare gli stessi risultati. Una volta convalidati i due metodi di riduzione occorre capire come metterli insieme e anche in questo caso verranno analizzati i risultati ottenuti dall'unione delle due tecniche sulla trave. Soltanto dopo aver fatto tutto ciò si tornerà a lavorare sulle ruote.

La trave che verrà utilizzata per convalidare i metodi di riduzione è rappresentata nella figura seguente e le sue proprietà sono riassunte in tabella.

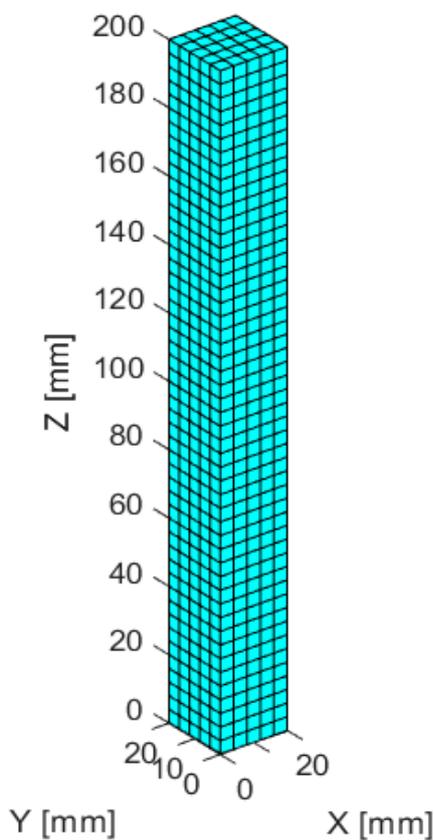


Figura 40_Discretizzazione trave

Elementi trave	Numero
Nodi totali	1836
Gdl totali (dimensioni K e M)	5508
Nodi sui lati paralleli a X e Y	6
Nodi sui lati paralleli a Z	51
Nodi su ogni faccia parallela al piano XY	36
Nodi esterni totali	1052

Tabella 5

Proprietà materiale	Valori
Modulo di Young (E)	200 GPa
Coefficiente di Poisson (ν)	0.3
Densità (ρ)	7850 Kg/m^3

Tabella 6

Verranno fatte principalmente due tipologie di prove: la prima con la travetta completamente libera (modello free-free) e la seconda con la travetta vincolata tramite un incastro; in quest'ultimo caso l'incastro vincola tutti e tre i gdl di tutti i nodi appartenenti alla prima faccia della travetta ($z=0$). Per entrambe le prove verrà svolta l'analisi modale, per la prova con la travetta vincolata verrà svolta anche un'analisi in termini di spostamenti, a tale scopo verrà applicata una forza complessiva pari a 1200 N distribuita equamente su tutti i nodi dell'ultima faccia della struttura ($z=200$) e agente in direzione dell'asse X.

Nella figura seguente è rappresentata la travetta vincolata in seguito all'applicazione del carico.

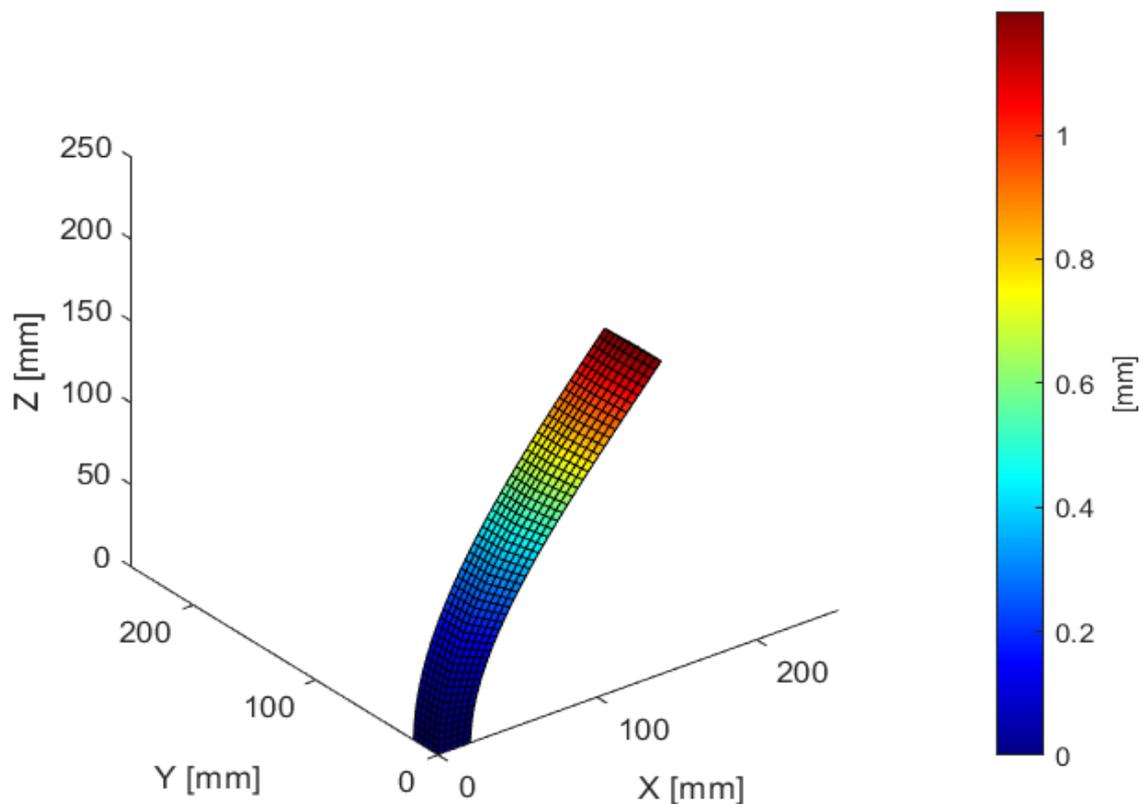


Figura 41_Rappresentazione spostamenti

Le matrici di massa e di rigidità si calcolano allo stesso modo di come vengono calcolate per le ruote, viene cioè utilizzata la function Matlab implementata nella Tesi di Dottorato di cui si è parlato. La correttezza di questa function è stata verificata tramite il software di calcolo Nastran. Questo software riceve come input i nodi della struttura e ne calcola le matrici di massa e

rigidezza, per cui è possibile confrontare queste ultime con quelle calcolate dalla function da noi utilizzata.

Nella tabella seguente sono riportati i valori delle frequenze naturali della struttura free-free calcolati dalle matrici intere, sono stati calcolati i primi venti modi, ma sono stati esclusi i modi rigidi.

N° modo	Frequenza (kHz)
1	2,5019
2	2,5019
3	6,5130
4	6,5130
5	7,0311
6	11,897
7	11,897
8	12,607
9	14,054
10	18,182
11	18,194
12	21,062
13	25,040
14	25,079

Tabella 7

Sono state calcolate anche le prime quindici frequenze naturali della struttura vincolata:

N° modo	Frequenza (kHz)
1	0,4067
2	0,4067
3	2,4393
4	2,4393
5	3,5221
6	6,3302
7	6,4239
8	6,4239
9	10,562
10	11,671
11	11,671
12	17,591
13	17,791
14	17,791
15	18,956

Tabella 8

A seguire si presenteranno varie tecniche di riduzione e successivamente si applicheranno alla trave. Verranno quindi confrontati i risultati dell'analisi modale e i risultati ottenuti in termini di spostamenti fra le matrici ridotte e le matrici intere.

6 Metodo di Craig-Bampton

Il metodo di Craig-Bampton è una delle tecniche di riduzioni più utilizzata al giorno d'oggi. L'applicazione principale del metodo è la riduzione di strutture complesse formate da varie sottostrutture, in questo caso generalmente si scelgono come nodi master i nodi all'interfaccia delle varie sottostrutture. Dopo aver applicato il metodo di riduzione alle varie strutture singolarmente, le matrici ridotte che si ottengono devono essere unite per poter avere una rappresentazione univoca di tutta la struttura ridotta. Nel caso in esame si ha un'unica sottostruttura e i nodi master saranno scelti fra alcuni nodi più significativi, in modo da ottenere una riduzione che simuli nel modo migliore possibile il comportamento della struttura intera.

6.1 Formulazione matematica

L'equazione del moto per un sistema non smorzato è la seguente:

$$M\ddot{u} + Ku = F \quad (23)$$

Prima di essere moltiplicate per la matrice di trasformazione le matrici di massa e rigidità devono essere ordinate come segue:

$$M = \begin{bmatrix} M_{mm} & M_{ms} \\ M_{sm} & M_{ss} \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$K = \begin{bmatrix} K_{mm} & K_{ms} \\ K_{sm} & K_{ss} \end{bmatrix} \quad (25)$$

Anche il vettore forza deve rispettare quest'ordinamento, per cui:

$$F = \begin{bmatrix} F_m \\ F_s \end{bmatrix} \quad (26)$$

Dunque i gradi di libertà del sistema si dividono in gdl master e gdl slaves, per cui in termini di spostamenti si avrà $u_m [m \cdot 1]$ riferito agli spostamenti dei nodi master e $u_s [s \cdot 1]$ riferito agli spostamenti dei nodi slaves.

A questo punto verrà presentata prima la riduzione di Guyan che, come si potrà capire in seguito è una semplificazione della riduzione di Craig-Bampton. Secondo il modello di Guyan la relazione fra spostamenti è la seguente:

$$u = \begin{bmatrix} u_m \\ u_s \end{bmatrix} = T_G \cdot u_m \quad (27)$$

$$T_G = \begin{bmatrix} I \\ \Phi_{fix} \end{bmatrix} \quad (28)$$

La matrice Φ_{fix} si trova imponendo uno spostamento unitario a tutti i gdl master uno per volta e vincolando tutti gli altri gdl master, in formule

$$\Phi_{fix} = K_{ss} \cdot K_{sm} \quad [s \cdot m] \quad (29)$$

La matrice identità ha invece dimensioni $[m \cdot m]$, perciò la matrice di trasformazione complessiva T_G ha dimensioni $[n \cdot m]$.

Una volta calcolate le matrici di trasformazione si possono facilmente calcolare le matrici ridotte:

$$M_G = T_G^T M T_G \quad (30)$$

$$K_G = T_G^T K T_G \quad (31)$$

$$F_G = T_G^T F \quad (32)$$

Ora verrà presentata la riduzione di Craig-Bampton, la relazione fra spostamenti è più complessa, per la presenza di un termine aggiuntivo nella matrice di trasformazione.

$$u = \begin{bmatrix} u_m \\ u_s \end{bmatrix} = T_{CB} \cdot \begin{bmatrix} u_m \\ \eta \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$T_{CB} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \Phi_{fix} & \Phi_{flex} \end{bmatrix} \quad (34)$$

In questa matrice compaiono i due termini visti per la riduzione di Guyan e altri due termini aggiuntivi. La matrice Φ_{flex} si trova considerando vincolati tutti i gdl master e calcolando i primi r autovettori delle matrici degli slaves.

$$(K_{ss} - \omega_n^2 M_{ss}) \varphi_n = 0 \quad \text{con } 1 \leq n \leq r \quad (35)$$

$$\Phi_{flex} = [\varphi_1, \dots, \varphi_r] \quad [s \cdot r] \quad (36)$$

Ora si comprende che il vettore η rappresenta le coordinate modali associate agli autovettori calcolati dalle matrici costituite dai soli slaves. La matrice nulla ha dimensioni $[m \cdot r]$, dunque la matrice di trasformazione complessiva T_{CB} ha dimensioni $[n \cdot (m+r)]$.

Si possono ora calcolare le matrici ridotte come:

$$M_{CB} = T_{CB}^T M T_{CB} \quad (37)$$

$$K_{CB} = T_{CB}^T K T_{CB} \quad (38)$$

$$F_{CB} = T_{CB}^T F \quad (39)$$

Terminata la formulazione matematica del modello di Guyan e del modello di Craig-Bampton, il passo successivo è l'applicazione dei suddetti metodi sulla trave presentata precedentemente.

6.2 Applicazione metodo di Guyan

Il metodo di Guyan è una semplificazione del metodo di Craig-Bampton, dunque sarà il primo ad essere applicato alla trave. Sono state fatte una serie di prove al variare dei nodi master scelti e sono stati confrontati i risultati ottenuti dalle matrici ridotte in termini di spostamenti e in termini di frequenze naturali con i corrispettivi risultati ottenuti dalle matrici intere. Per l'analisi modale è stato svolto anche un confronto con gli autovalori ottenuti con Nastran.

6.2.1 Applicazione su travetta free-free

La prima prova è stata fatta con la travetta free-free, come nodi master sono stati scelti tutti i nodi appartenenti alla prima e ultima faccia, dunque i restanti nodi sono considerati come slaves. In virtù di quanto detto si avra:

Grandezza	Numero
Nodi master	72
Nodi slaves	1764
Gdl matrici ridotte	216

Tabella 9_Carratteristiche prima prova

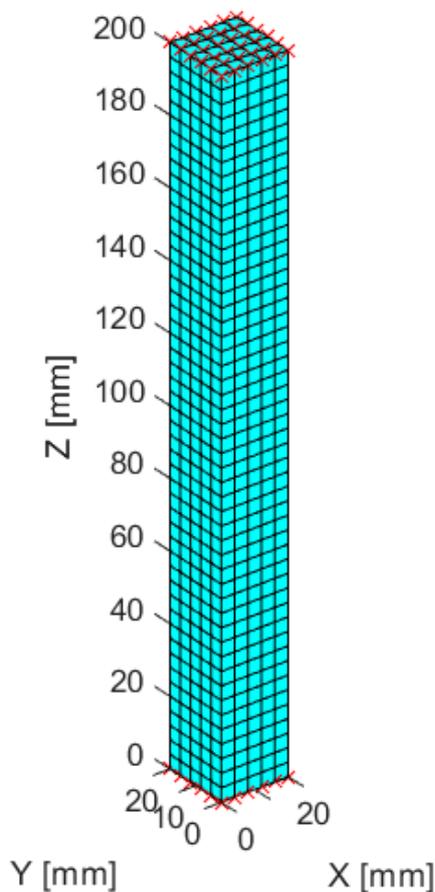


Figura 42_Rappresentazione nodi master selezionati

Sono stati calcolati i primi venti modi e le rispettive frequenze naturali del sistema ridotto, anche in questo caso non verranno riportati i modi rigidi:

N°modo	Frequenza (kHz) Guyan	Frequenza (kHz) modello intero
1	3,0163	2,5019
2	3,0163	2,5019
3	7,7390	6,5130
4	9,8876	6,5130
5	9,9057	7,0311
6	13,852	11,897
7	87,138	11,897
8	87,411	12,607
9	98,509	14,054
10	110,48	18,182
11	117,64	18,194
12	117,64	21,062
13	117,68	25,040
14	118,69	25,079

Tabella 10_Confronto frequenze con modello intero

Per i primi trenta modi (compresi i modi rigidi) sono stati calcolati gli errori percentuali rispetto alle frequenze naturali calcolati dalle matrici intere (i cui valori erano stati riportati in precedenza) tramite la seguente formula

$$\text{errore \%} = \frac{f_G - f_I}{f_I} \cdot 100$$

In cui il pedice I sta per matrici intere e il pedice G sta per matrici ridotte con Guyan.

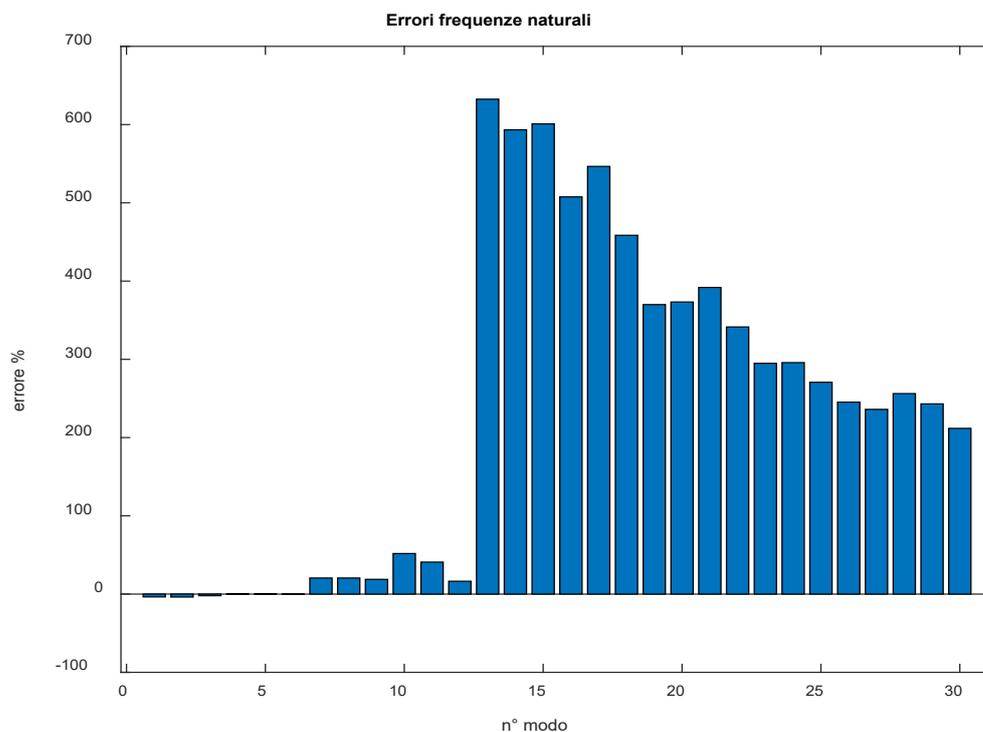


Figura 43_Errori percentuali rispetto al modello intero

Si può notare che la struttura ridotta è decisamente più rigida della struttura intera; eccettuando le frequenze relative ai modi rigidi ci sono errori percentuali molto alti, infatti dal settimo al tredicesimo modo gli errori sono compresi fra il 15% e il 50%, dal tredicesimo modo in poi l'errore cresce a dismisura. E' evidente che questo metodo di riduzione è poco preciso, dunque è necessario utilizzare il metodo di Craig-Bampton per la trattazione in esame.

Poiché la riduzione di Guyan è propedeutica alla riduzione di Craig-Bampton è stato verificato che è stato implementato correttamente tramite un confronto con i risultati ottenuti con Nastran. Tramite questo software è infatti possibile ridurre le matrici intere, dunque sono stati selezionati gli stessi nodi master scelti per la riduzione implementata su Matlab e sono stati calcolati gli errori percentuali sempre in termini di frequenze naturali.

$$\text{errore \%} = \frac{f_M - f_N}{f_N} \cdot 100$$

In cui il pedice M sta per Matlab e il pedice N sta per Nastran; l'errore percentuale è dell'ordine di 10^{-7} , perciò possiamo concludere che il metodo implementato per la riduzione delle matrici è corretto.

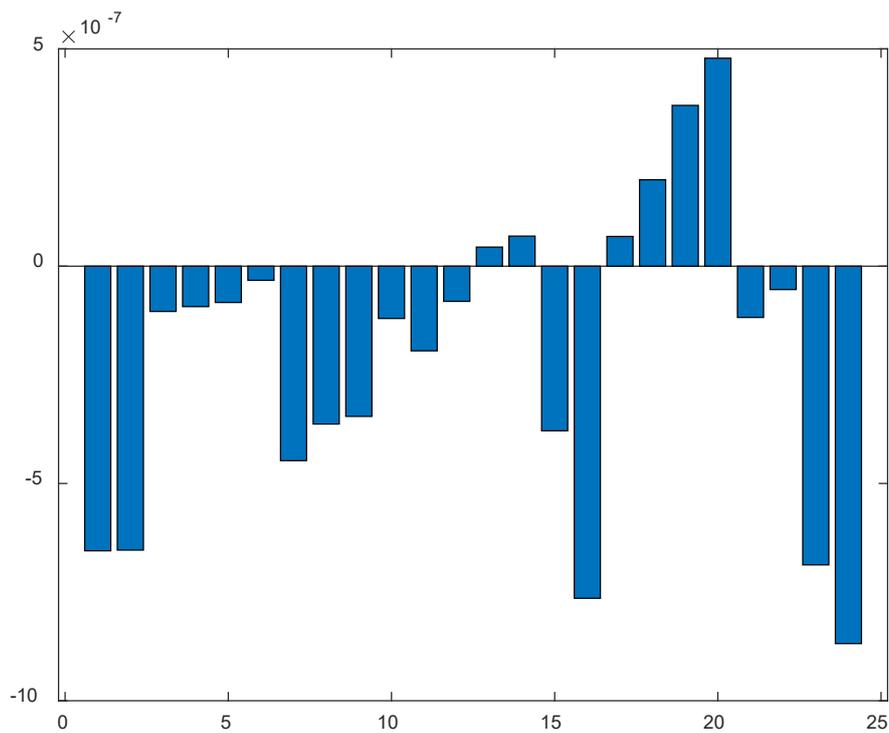


Figura 44_ Errori percentuali rispetto a Nastran

I modi rigidi sono stati esclusi dal confronto poiché le frequenze associate calcolate con Matlab portano con sé un errore relativo agli zero macchina.

6.3 Applicazione metodo di Craig-Bampton

Il metodo di Guyan non riproduce fedelmente il comportamento della struttura, ma è stata verificata la sua validità con Nastran, ragion per cui si può passare ad analizzare il metodo di Craig-Bampton.

6.3.1 Applicazione su travetta free-free

La prima prova è stata fatta sulla travetta free-free con gli stessi nodi master visti col metodo di Guyan, ma come si era visto in precedenza i due metodi differiscono per gli r modi addizionali selezionati. Per questa prova sono stati selezionati 20 modi addizionali, ma le analisi modali verranno fatte sempre calcolando i primi 30 modi.

Grandezza	Numero
Nodi master	72
Nodi slaves	1764
Modi addizionali selezionati	20
Gdl matrici ridotte	236 (216+20)

Tabella 11_Caratteristiche prova 0

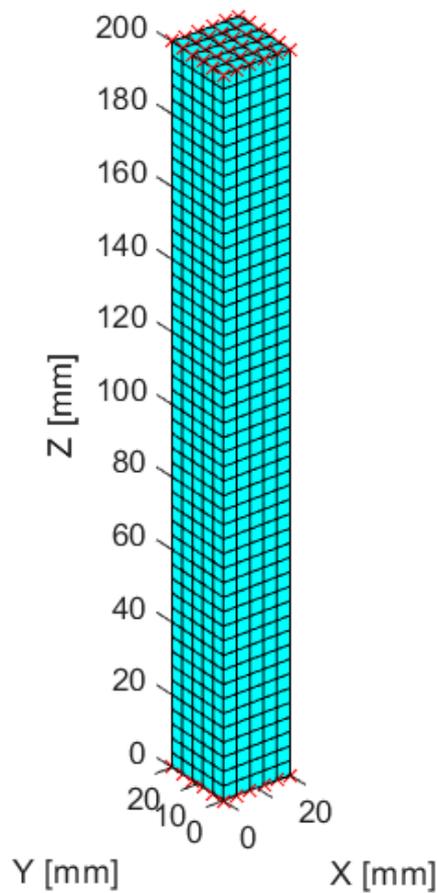


Figura 45_Rappresentazione nodi master selezionati

Le prime venti frequenze naturali (esclusi i modi rigidi) assumono i seguenti valori:

N°modo	Frequenza (kHz) Craig-Bampton	Frequenza (kHz) modello intero
1	2,5027	2,5019
2	2,5027	2,5019
3	6,5196	6,5130
4	6,5196	6,5130
5	7,0382	7,0311
6	11,950	11,897
7	11,952	11,897
8	12,662	12,607
9	14,089	14,054
10	18,291	18,182
11	18,293	18,194
12	21,304	21,062
13	25,426	25,040
14	25,454	25,079

Tabella 12_Confronto frequenze con modello intero

Per i primi trenta modi (compresi i modi rigidi) sono stati calcolati gli errori percentuali rispetto alle frequenze naturali calcolati dalle matrici intere tramite la seguente formula

$$errore \% = \frac{f_{CB} - f_I}{f_I} \cdot 100$$

In cui il pedice I sta per matrici intere e il pedice CB sta per matrici ridotte con Craig-Bampton.

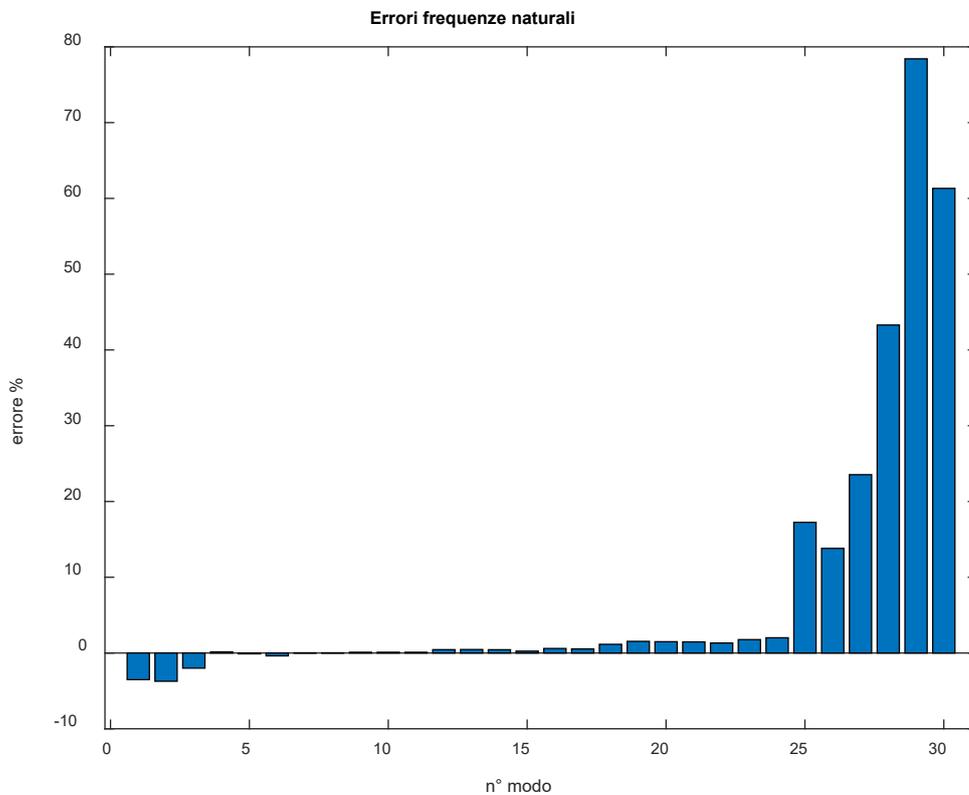


Figura 46_ Errori percentuali rispetto a modello intero

In generale a prima vista si può vedere che gli errori percentuali di questo metodo sono decisamente inferiori rispetto a quelli ottenuti col metodo di Guyan. Anche in questo caso la struttura ridotta è più rigida della struttura intera, fino al venticinquesimo modo gli errori percentuali sono al massimo del 2% e addirittura i primi 17 (modi rigidi a parte) hanno errori inferiori allo 0,5%. L'errore cresce di molto dal venticinquesimo modo in poi, ma generalmente in analisi del genere è importante contenere gli errori delle prime r frequenze (si ricorda che r è il numero di modi aggiuntivi), come si vedrà più avanti infatti aumentando r l'errore resterà contenuto per un numero di modi maggiore.

Anche il metodo di Craig-Bampton è stato convalidato confrontando i risultati ottenuti con quelli di Nastran.

$$errore \% = \frac{f_M - f_N}{f_N} \cdot 100$$

In cui il pedice M sta per Matlab e il pedice N sta per Nastran; escludendo i modi rigidi dal confronto l'errore percentuale è dell'ordine di 10^{-7} .

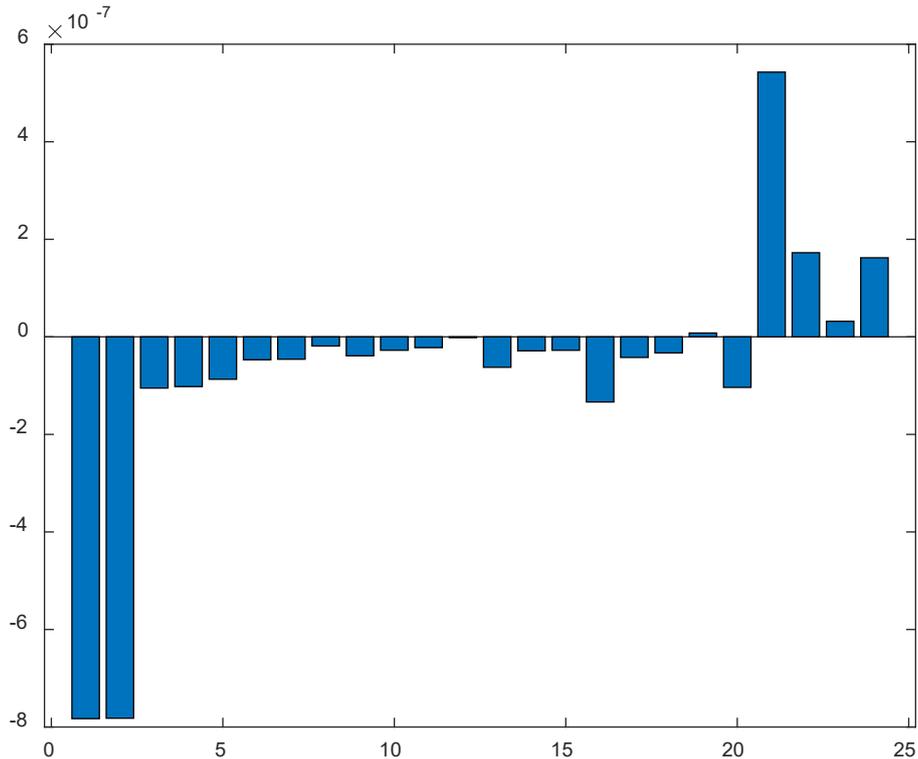


Figura 47_ Errori percentuali rispetto a Nastran

Adesso è interessante cambiare i nodi master della struttura e vedere come cambiano i risultati. Verranno fatte una serie di prove sulla travetta free-free con gli stessi nodi master della prova precedente più alcuni nodi master che chiameremo nodi master addizionali. Questi ultimi saranno scelti esclusivamente sui bordi della travetta, poiché i nodi interni non portano con sé un contributo modale e inoltre irrigidiscono la struttura, dunque se si scegliessero come master i nodi interni si otterrebbero risultati peggiori. Per ogni prova sono stati scelti nodi master addizionali equidistanti nella discretizzazione utilizzata.

	Nodi master addizionali	Nodi slaves	Gdl matrici ridotte	r
Prova 1	980	784	3176	20
Prova 2	123	1641	605	20
Prova 3	49	1715	383	20
Prova 4	7	1757	257	20

Tabella 13_ Caratteristiche prove

Si appunta che i nodi master sulle due facce della struttura sono aggiuntivi ai nodi master addizionali, dunque non sono considerati nella tabella sopra.

Per queste quattro prove sono stati calcolati gli errori percentuali come fatto in precedenza

$$errore \% = \frac{f_{CB} - f_I}{f_I} \cdot 100$$

Nelle seguenti figure per ogni prova è rappresentato l'errore percentuale dei primi 30 modi di vibrare (sono stati esclusi i modi rigidi). Per avere una visione migliore dei risultati gli errori

ottenuti sono stati divisi in due grafici: il primo comprende gli errori delle frequenze che vanno dalla settima alla ventesima, il secondo comprende i restanti modi.

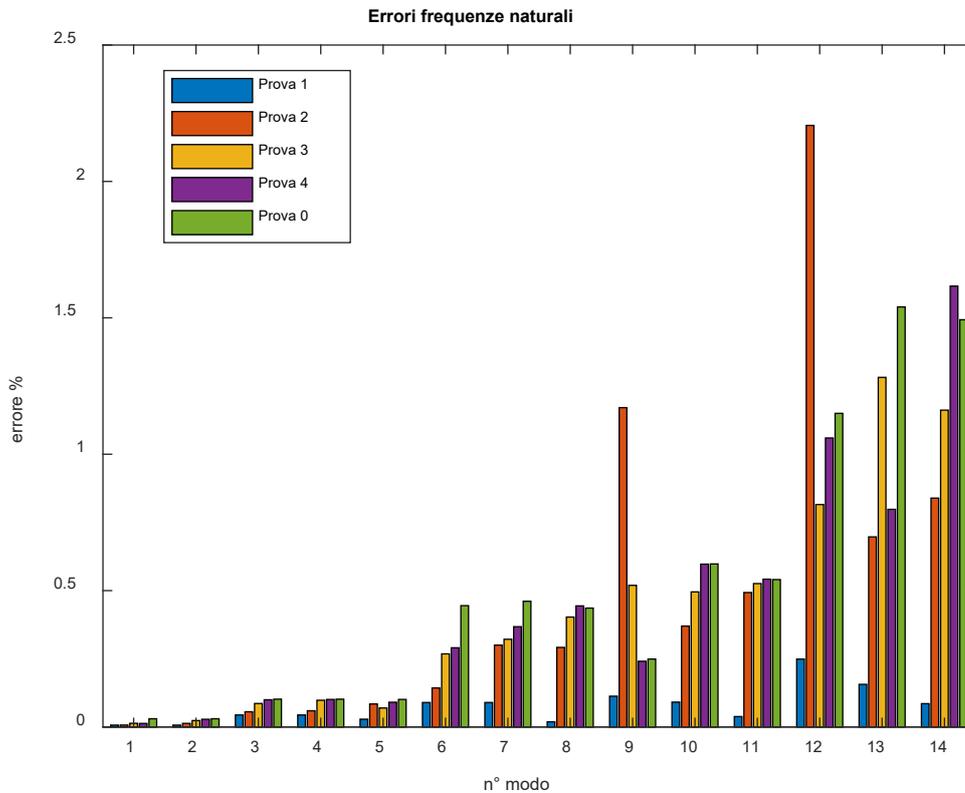


Figura 48_Rappresentazione errori percentuali dal primo al 14° modo libero

La prova 0 è la prova che non comprende nodi master addizionali, cioè la prova che era stata analizzata nel dettaglio in precedenza; la prova 1 al contrario è la prova con numero di nodi master addizionali massimo, cioè sono stati selezionati tutti i nodi presenti sul bordo della struttura. Ciò che si evince da questo grafico è che la qualità della riduzione aumenta all'aumentare del numero di nodi master, ciò si può spiegare col fatto che le matrici ridotte hanno dimensioni maggiori, perciò approssimano meglio il comportamento della struttura. Ci sono rari casi in cui il comportamento della struttura è migliore per un numero di nodi master minore, questo accade perché casualmente si sono scelti particolari nodi che irrigidiscono la struttura per quello specifico modo di vibrare.

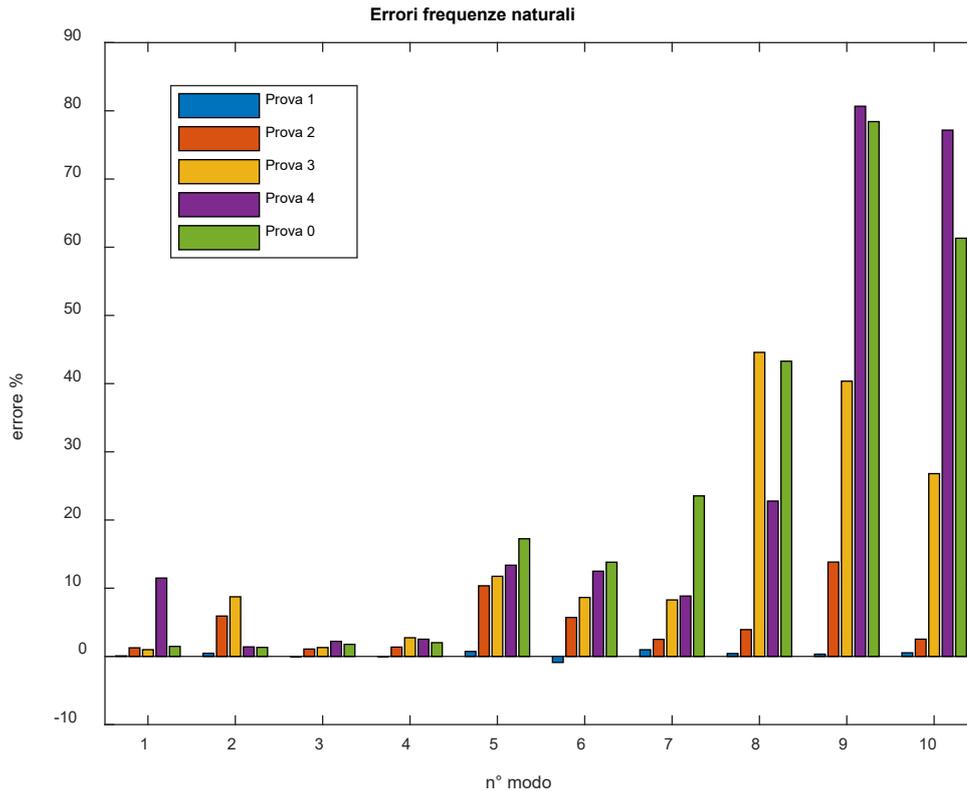


Figura 49_Rappresentazione errori percentuali dal 21° al 30° modo

Quest'altra figura è meno significativa della precedente, in quanto non siamo molto interessati alla frequenza successiva alla r-esima. Si conferma un notevole aumento dell'errore per questi modi, ma grosso modo si conserva la dipendenza dal numero di nodi master vista nel grafico precedente. E' interessante notare come le prime due prove, prova 1 soprattutto, mantengono un errore molto basso anche per i modi successivi al ventesimo, ciò vuol dire che un numero di nodi master molto elevato comporta una grande precisione dei risultati e che quindi è un fattore più importante rispetto al numero di modi addizionali.

Per confermare quanto si è detto sul fatto che i nodi master interni potrebbero irrigidire la struttura è stata fatta una prova identica alla prova 0, ma con un nodo master in più (scelto internamente alla struttura). In tabella si riportano i valori delle prime 5 frequenze naturali libere per la prova 0 e per questa prova.

N° modo	Frequenze Prova 0 (kHz)	Frequenze Prova attuale (kHz)
1	2,5027	2,5028
2	2,5027	2,5028
3	6,5196	6,5196
4	6,5196	6,5197
5	7,0382	7,0382

Tabella 14_Confronto frequenze con prova 0

Come si può notare seppur si è aggiunto un nodo master il sistema, anche se di poco, si è irrigidito. Questo è il motivo per cui per ridurre le matrici delle ruote non è possibile considerare tutti i nodi di interesse come nodi master di Craig-Bampton, poiché per determinati modi di vibrare il sistema non si comporta come vorremmo. Per ulteriore verifica è stata svolta un'altra prova in cui sono

stati aggiunti 48 nodi master interni e gli errori ottenuti sono nuovamente maggiori rispetto alla prova 0.

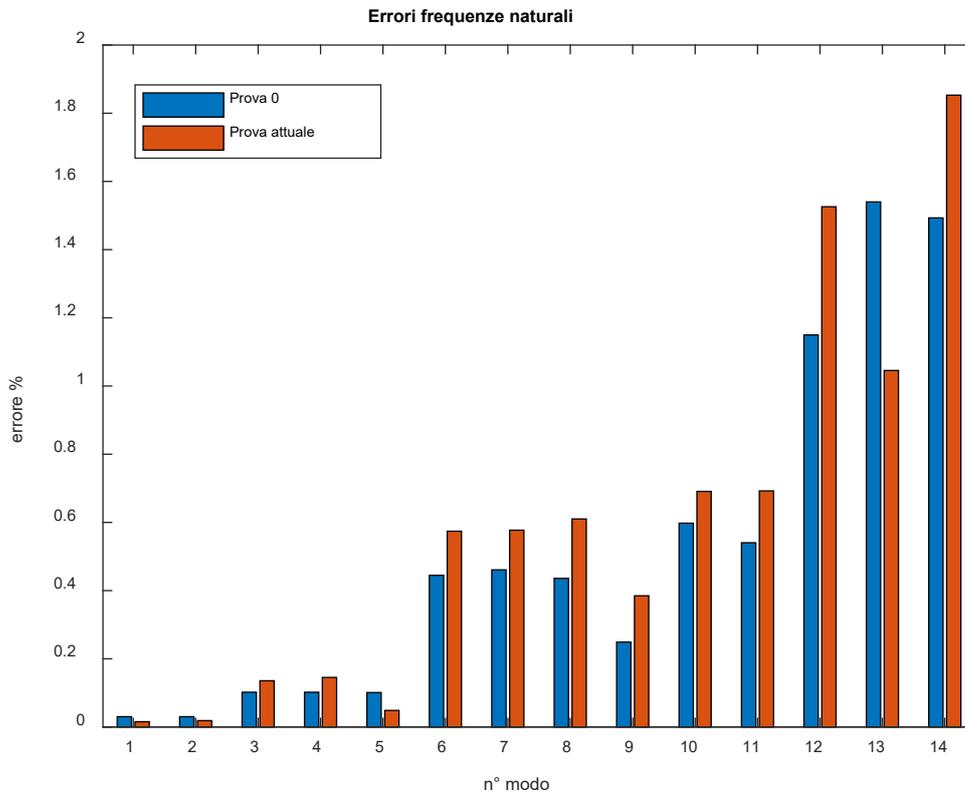


Figura 50

Nel complesso non si tratta di errori molto più alti, ma nel caso delle ruote si tratta di una struttura più complessa dunque si potrebbero raggiungere errori troppo elevati.

Un ulteriore studio di questo metodo è stato fatto facendo variare il numero di modi addizionali come in tabella. I nodi master selezionati non variano da prova a prova e sono quelli della prova 0, cioè tutti i nodi sulla prima e ultima faccia.

	Numero modi addizionali
Prova 1	15
Prova 2	20
Prova 3	25
Prova 4	30

Tabella 15_Modi addizionali diverse prove

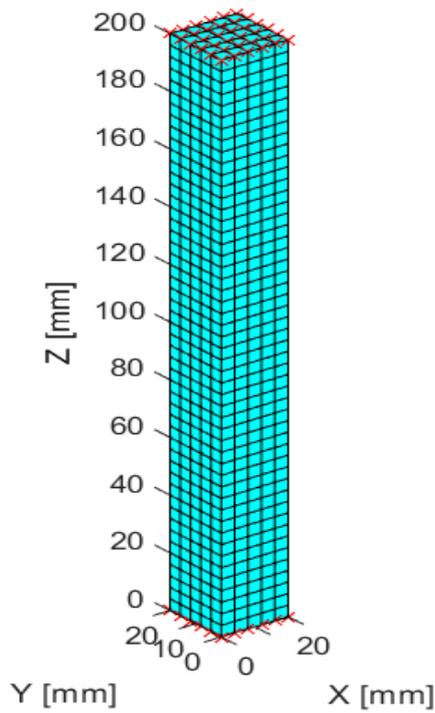


Figura 51_Rappresentazione nodi master (uguali per tutte le prove)

Si ricorda che nella prova 0 si erano utilizzati 20 modi aggiuntivi, dunque coincide con la prova 2. I grafici che verranno presentati di seguito rappresentano nuovamente l'errore percentuale dei primi trenta modi esclusi i modi rigidi. Nel primo grafico è rappresentato l'errore dal settimo al quindicesimo modo, nel secondo sono rappresentati i restanti errori percentuali.

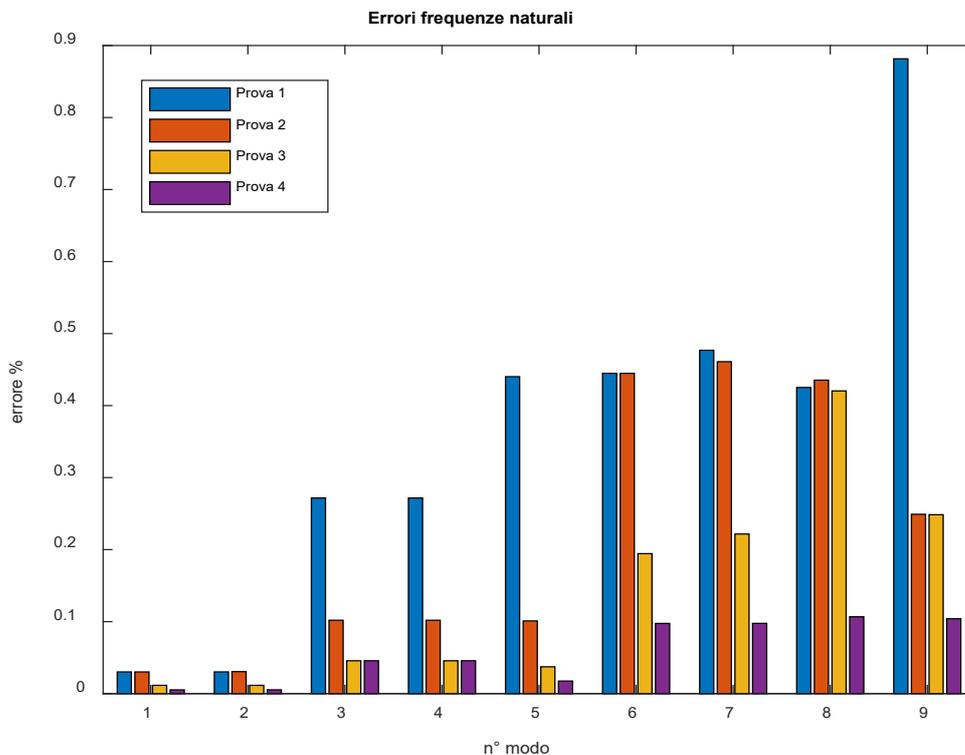


Figura 52_Rappresentazione errori percentuali dal primo al 9° modo libero

Risulta evidente che per un numero di modi addizionali maggiore l'errore è quasi sempre più basso per un determinato modo, perciò se si vuole maggior precisione occorre lavorare con un r che sia il più alto possibile, ma ovviamente viene meno la velocità di calcolo, che potrebbe essere un problema per strutture complesse. In questo grafico comunque tutte le prove hanno errori bassi.

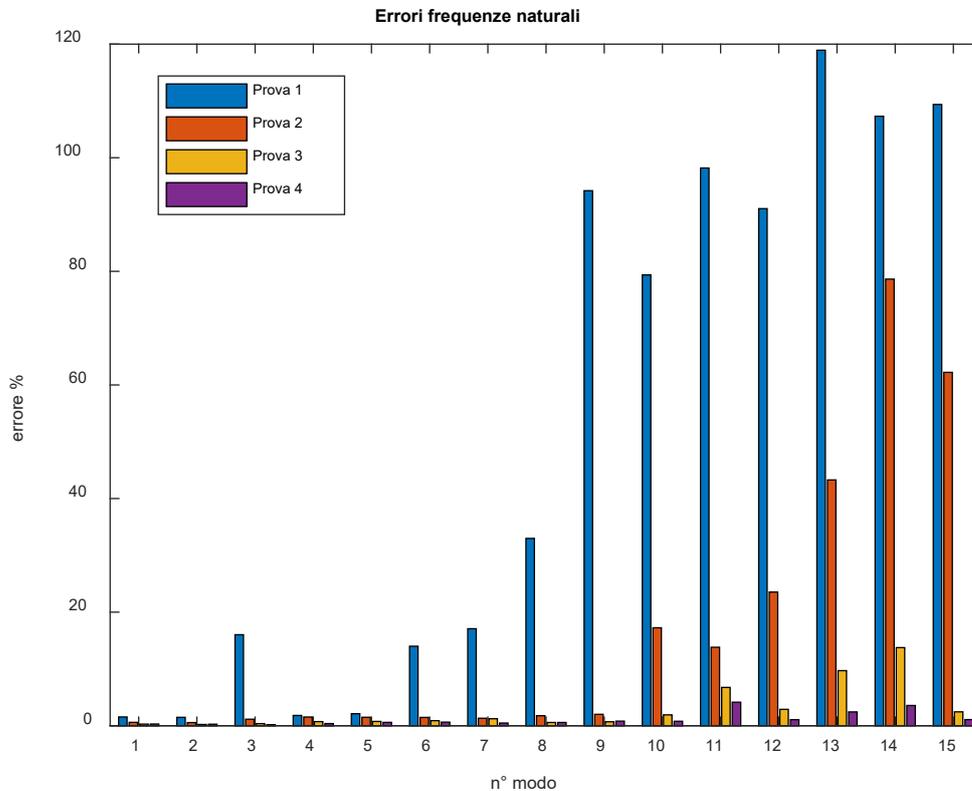


Figura 53_Rappresentazione errore percentuale dal 16° al 30° modo

Questi modi sono stati divisi dai precedenti poichè hanno errori estremamente più alti, il motivo per cui questo accade si era già anticipata nelle analisi precedenti e cioè il numero di modi addizionali scelto permette di ottenere con una certa precisione le frequenze naturali fino alla r -esima. Poiché le varie prove sono ad r crescente il modo per cui ogni prova raggiunge errori maggiori è diverso; ad esempio la prova 4 è con $r = 30$, per questo motivo anche l'errore del trentesimo modo è abbastanza basso.

Sono state fatte varie prove confrontando le frequenze naturali della struttura ridotta con quelle della struttura intera e finora il modello ridotto sembra abbastanza soddisfacente. Per avere un'ulteriore conferma della qualità della riduzione occorre analizzare le forme modali; a tale scopo si è utilizzato il criterio di MAC. Quest'ultimo viene utilizzato per confrontare autovettori distinti, ovviamente nella trattazione verranno confrontati gli autovettori derivanti dal modello ridotto e quelli ottenuti dal modello intero. Questo criterio si basa sul calcolo dell'angolo formato da due modi, il valore che viene rappresentato nei grafici seguenti si riferisce al \cos^2 dell'angolo (in percentuale nelle figure seguenti), generalmente si considera un'ottima correlazione fra i due vettori quando questo valore è superiore a 0,9 mentre la correlazione è negativa per valori inferiori allo 0,6.

Due autovettori identici presentano il seguente grafico di MAC.

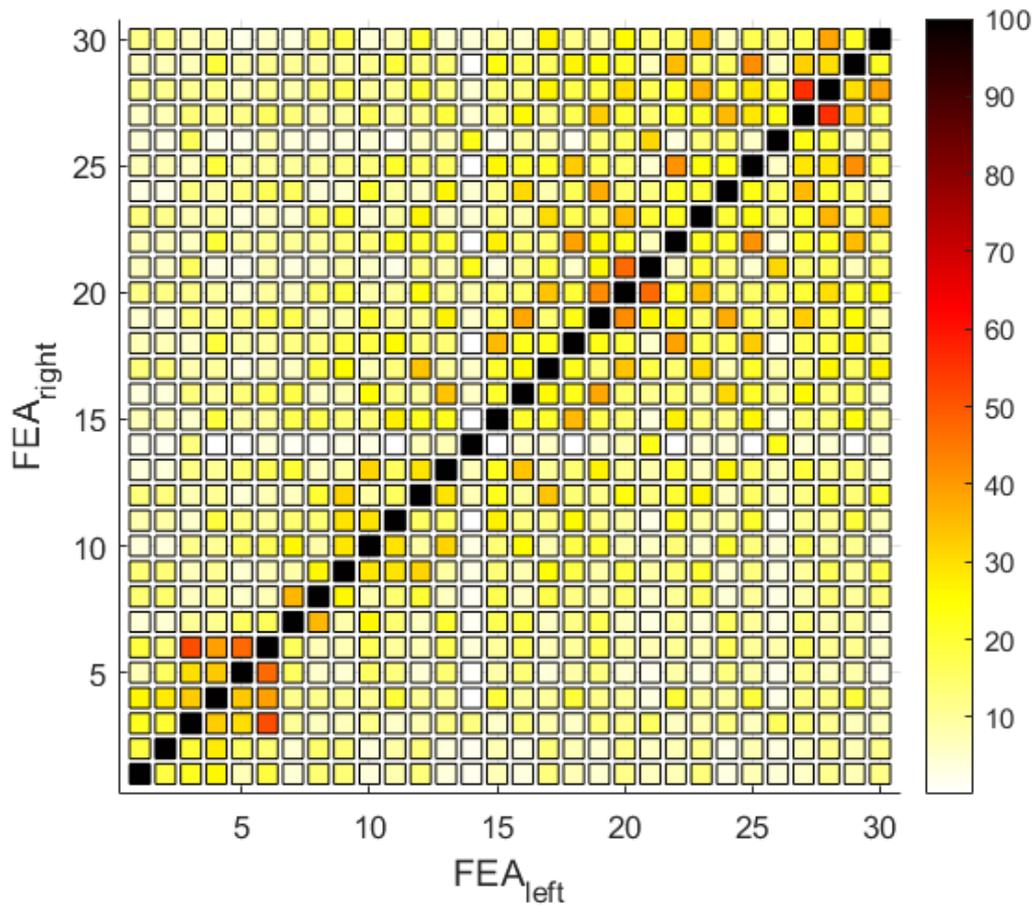


Figura 54_MAC per due modi identici

I numeri sugli assi vanno da 0 a 30 poiché sono state analizzate le prime 30 forme modali, il calcolo dell'angolo viene fatto fra tutte le combinazioni possibili dei modi, dunque ad esempio nella cella 5,7 viene fatto il confronto fra la quinta forma modale del primo set di autovettore e la settima forma modale del secondo set. Ciò che interessa è il confronto fra le stesse forme modali, dunque sono di interesse soltanto le caselle diagonali. Come si può notare esse hanno tutte valore massimo, in quanto sono confrontati due modi identici.

Il grafico di MAC seguente rappresenta il confronto fra gli autovettori della riduzione della prova 0 (nodi master sulle due facce estreme, $r = 20$) e gli autovettori del modello intero.

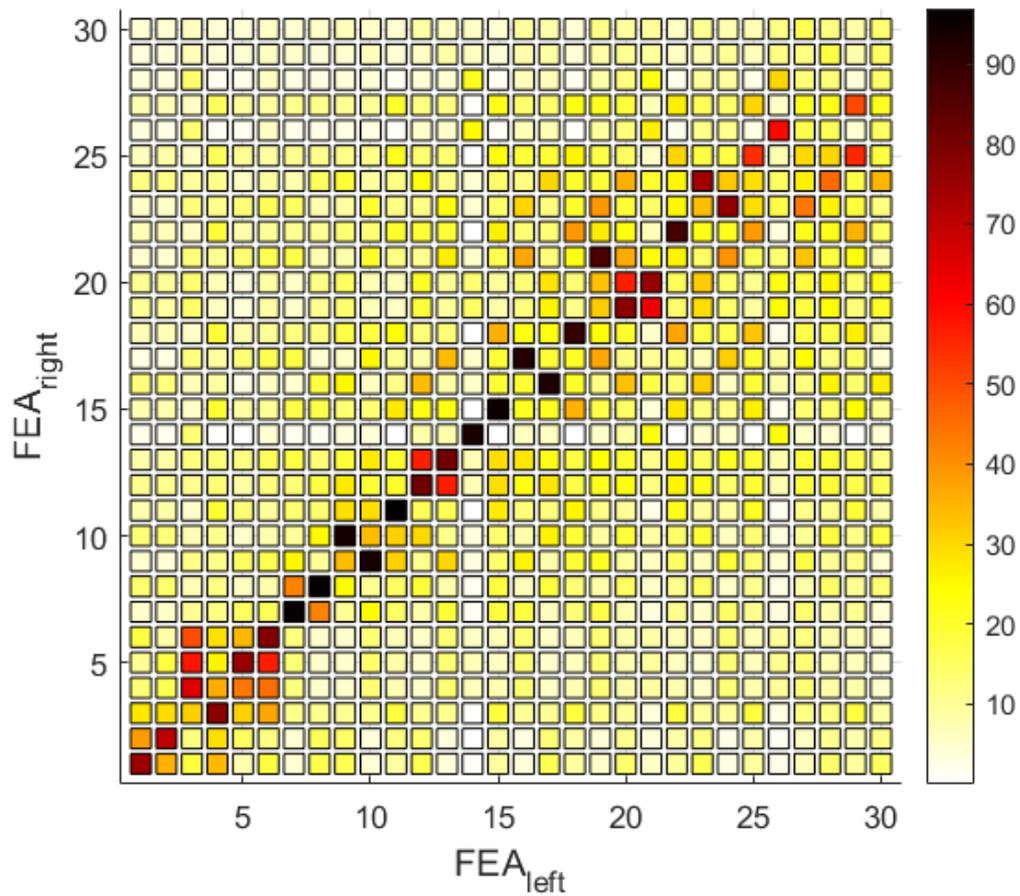


Figura 55_MAC prova 0

Anche per quest'analisi si può dare meno importanza ai modi rigidi e ai modi superiori ad r , degli altri modi come detto in precedenza occorre valutare soltanto le celle sulla diagonale e, come si può notare, queste celle hanno quasi sempre un valore superiore al 90%. In alcuni casi sono le celle sulle codiagonali principali ad assumere valore massimo, si tratta di errori nella disposizione della cella poiché sono due modi aventi stesse frequenze. In virtù di queste considerazioni si può concludere che questo modello approssima in modo corretto il comportamento della travetta non vincolata.

6.3.2 Applicazione su travetta vincolata

La riduzione della travetta free-free col metodo di Craig-Bampton è stata analizzata in modo abbastanza approfondito, adesso si può passare all'analisi della travetta completamente vincolata su tutti i nodi della prima faccia. In quanto non si tratta più di una trave libera nello spazio è possibile svolgere oltre all'analisi modale l'analisi degli spostamenti. Per calcolare correttamente gli spostamenti della struttura ridotta e poterli confrontare con quelli della struttura intera occorre eseguire i seguenti calcoli.

Dopo aver ridotto le matrici attraverso i calcoli presentati precedentemente si ottiene la seguente equazione del moto:

$$M_{CB}\ddot{u}_{CB} + K_{CB}u_{CB} = F_{CB} \quad (40)$$

In cui M_{CB} , K_{CB} e F_{CB} sono le matrici ridotte mentre il vettore $u_{CB} = \begin{bmatrix} u_m \\ \eta \end{bmatrix}$.

Come nel caso delle ruote si escluderà il primo termine dell'equazione nel calcolo degli spostamenti, quindi si avrà

$$u_{CB} = K_{CB} \setminus F_{CB} \quad (41)$$

svolgendo quest'operazione si ottiene il vettore spostamento dei gdl della matrice ridotta; i primi m termini sono gli spostamenti dei nodi master, mentre gli ultimi r termini non sono direttamente associabili a nodi della matrice intera a meno che questi spostamenti non vengano riespansi. Dunque se si è interessati esclusivamente agli spostamenti dei nodi master basta leggere i primi m termini del vettore spostamento ottenuto, se invece si vuole conoscere anche lo spostamento di tutti i nodi slaves occorre espandere il vettore ottenuto. Ciò vuol dire fare la seguente operazione:

$$u = T_{CB}u_{CB} \quad (42)$$

Adesso si sono ottenuti gli spostamenti di tutti i nodi originali, unica differenza è che sono in ordine diverso rispetto al loro ordine iniziale, per via dell'ordinamento che era stato applicato alle matrici intere prima della riduzione, dunque per avere un confronto completo occorre riordinare gli spostamenti ottenuti.

Nel caso in cui si effettua la riduzione di matrici vincolate è possibile vincolarle sia prima di ridurle che dopo, quindi è possibile cancellare da subito le righe e le colonne di interesse o in un secondo momento. Nel caso trattato le matrici si ridurranno già vincolate, dunque elimineremo le prime 108 righe e le prime 108 colonne, poiché i primi 108 gdl sono quelli vincolati. Per tale motivo si passa dall'aver matrici di dimensione 5508 a matrici aventi dimensioni pari a 5400.

Nella prima prova sono stati scelti come nodi master soltanto i nodi sulla faccia opposta al vincolo, cioè i nodi su cui viene applicata la forza.

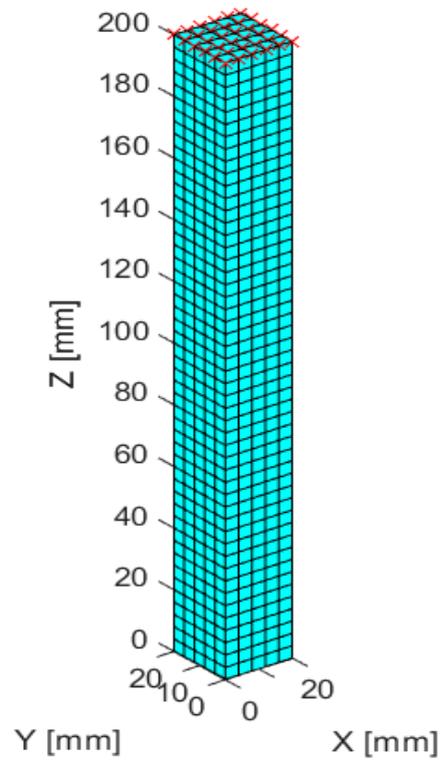


Figura 56_Rappresentazione nodi master selezionati

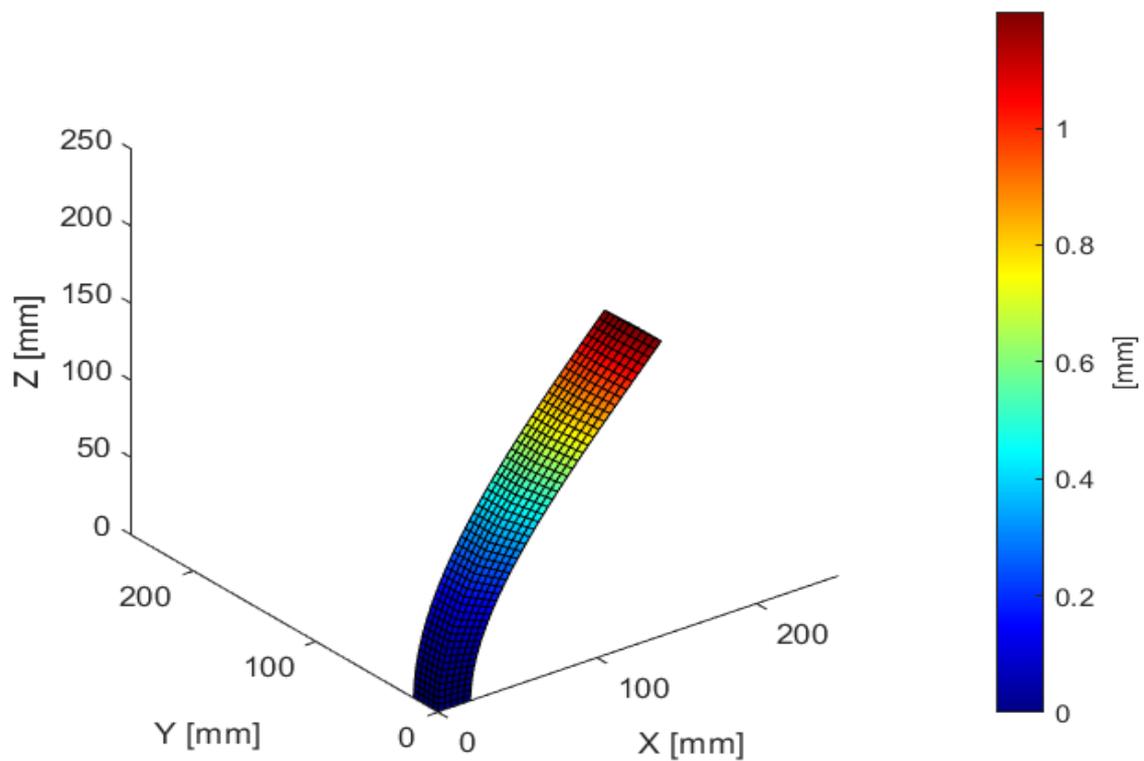


Figura 57_Rappresentazione spostamenti ottenuti dalle matrici ridotte

Nella figura precedente sono rappresentati gli spostamenti dei nodi che compongono la struttura, la rappresentazione è praticamente identica a quella ottenuta partendo dal modello intero. Confrontando gli spostamenti dei due casi si ottengono errori assoluti dell'ordine di 10^{-12} mm. Da questo risultato si può capire come l'analisi modale sia molto più delicata rispetto all'analisi degli spostamenti ed è quindi anche più utile a capire se la riduzione viene svolta correttamente o meno.

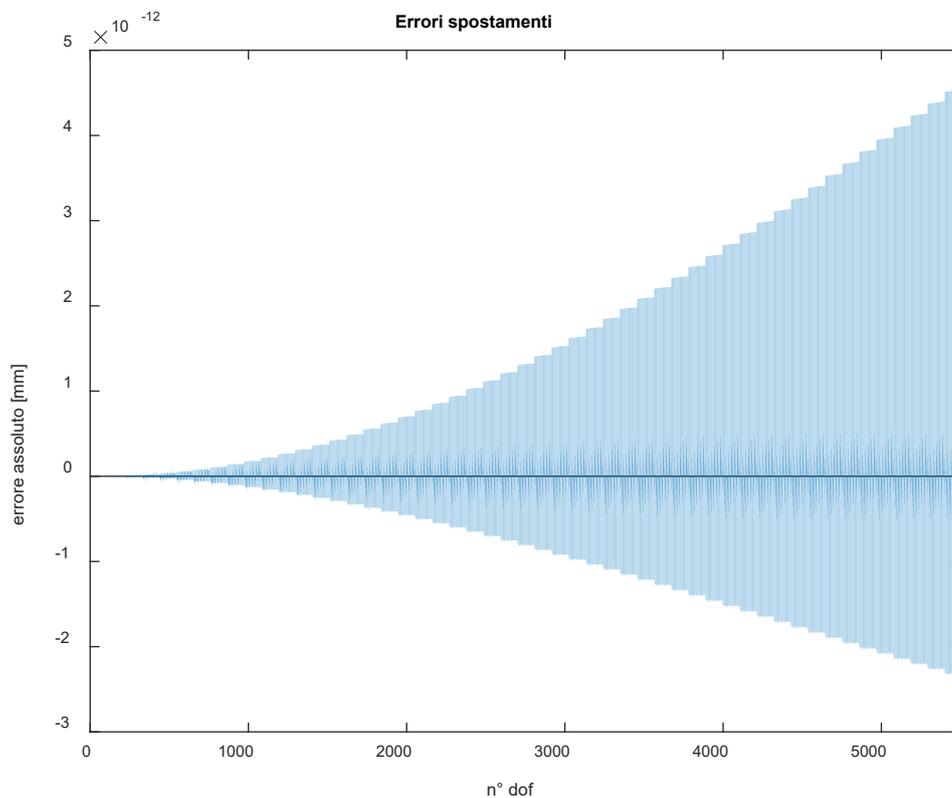


Figura 58_Errori assoluti degli spostamenti

E' stata fatta un'altra prova cambiando i nodi master della struttura al fine di verificare l'esattezza degli spostamenti. Sono stati selezionati tutti i nodi in corrispondenza di $z=100$ mm e cioè a metà della travetta, dunque il numero di nodi master non è variato, ma adesso la forza è applicata su nodi slaves. In questo caso seppure rimangono errori molto bassi, sono errori molto più alti rispetto a quelli ottenuti nella prova precedente (differenza di otto ordini di grandezza). Ciò si verifica perché i nodi della struttura che scambiano forze con l'esterno devono essere necessariamente considerati come nodi master.

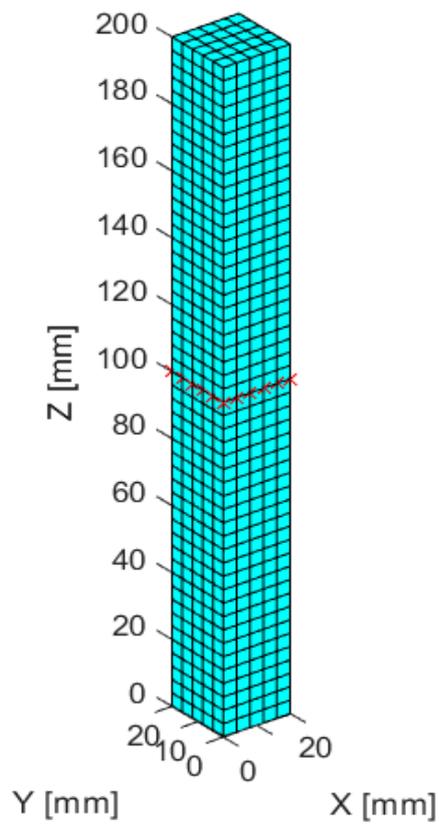


Figura 59_Rappresentazione nodi master selezionati

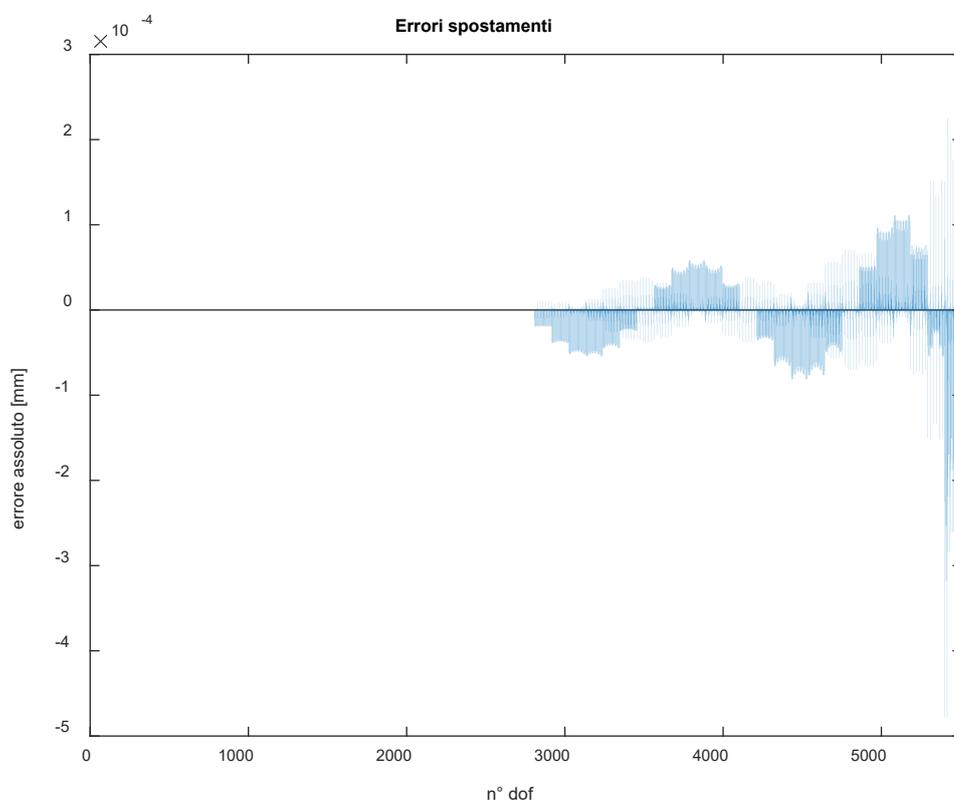


Figura 60_Errori assoluti spostamenti

Ci si chiede come si comporta la struttura in termini di spostamenti al variare del numero di nodi master, a tale scopo sono state fatte alcune prove aventi i nodi master in corrispondenza della faccia su cui è applicata la forza più un tot di nodi master addizionali scelti esclusivamente sul bordo della struttura. Per queste prove sono stati calcolati errore minimo (2) e massimo (1) in valore assoluto, il minimo è sempre nullo, il massimo varia da prova a prova. I numeri in legenda rappresentano il numero di non master addizionali:

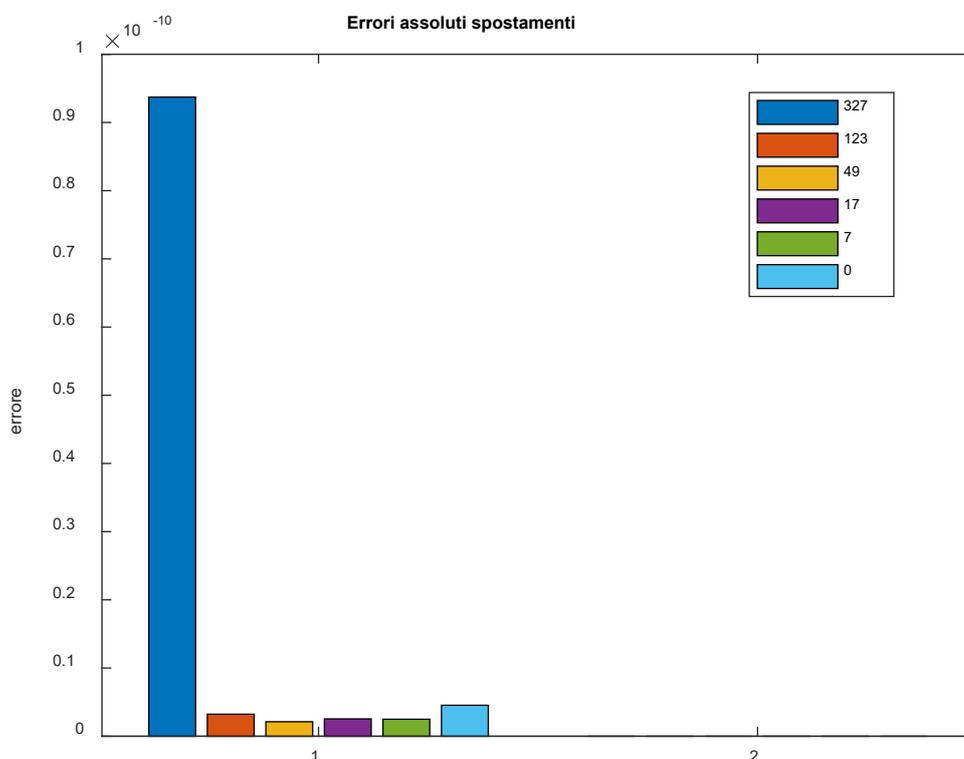


Figura 61_ Errori massimi spostamenti per varie prove

A differenza di quanto visto per l'analisi modale non c'è una diretta corrispondenza fra numero di nodi master e qualità dei risultati. L'errore massimo si presenta addirittura per la prova con maggior numero di nodi master, poi le altre prove hanno più o meno lo stesso errore, compresa quella vista in precedenza, cioè quella con zero nodi aggiuntivi. Da questi risultati si può dire che ci sono nodi che se selezionati come master migliorano il risultato, altri invece lo peggiorano, ma selezionarne tanti porta sempre ad un evidente peggioramento dei risultati, probabilmente perché si irrigidisce troppo la struttura.

Per l'analisi modale nella prima prova che si effettuerà si considereranno come nodi master soltanto i nodi sulla faccia su cui è applicata la forza:

Grandezza	Numero
Nodi master	36
Nodi slaves	1764
Modi addizionali selezionati	20
Gdl matrici ridotte	128(108+20)

Tabella 16_ Caratteristiche prova 0

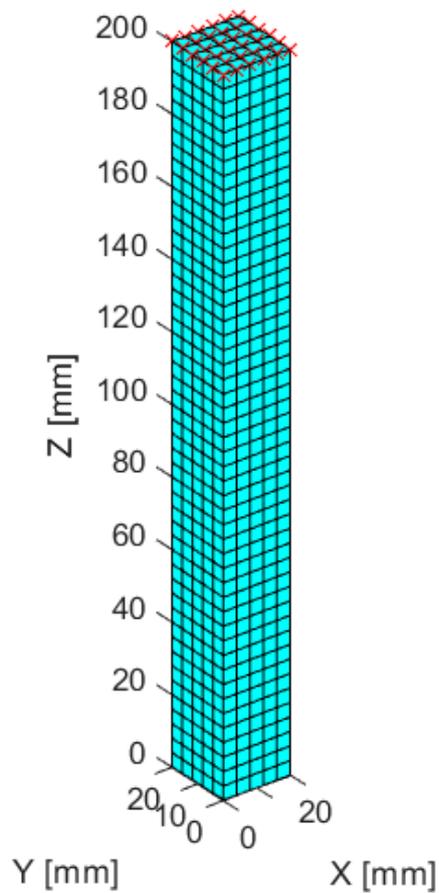


Figura 62_Rappresentazione nodi master selezionati

Le prime quindici frequenze naturali (esclusi i modi rigidi) assumono i seguenti valori:

N° modo	Frequenza (kHz) Craig-Bampton	Frequenza (kHz) modello intero
1	0,4067	0,4067
2	0,4067	0,4067
3	2,4395	2,4393
4	2,4395	2,4393
5	3,5225	3,5221
6	6,3327	6,3302
7	6,4280	6,4239
8	6,4280	6,4239
9	10,572	10,562
10	11,691	11,671
11	11,691	11,671
12	17,641	17,591
13	17,854	17,791
14	17,854	17,791
15	19,030	18,956

Tabella 17_Confronto frequenze con modello intero

Per i primi venti modi sono stati calcolati gli errori percentuali rispetto alle frequenze naturali calcolati dalle matrici intere tramite la seguente formula

$$errore \% = \frac{f_{CB} - f_I}{f_I} \cdot 100$$

In cui il pedice I sta per matrici intere e il pedice CB sta per matrici ridotte con Craig-Bampton.

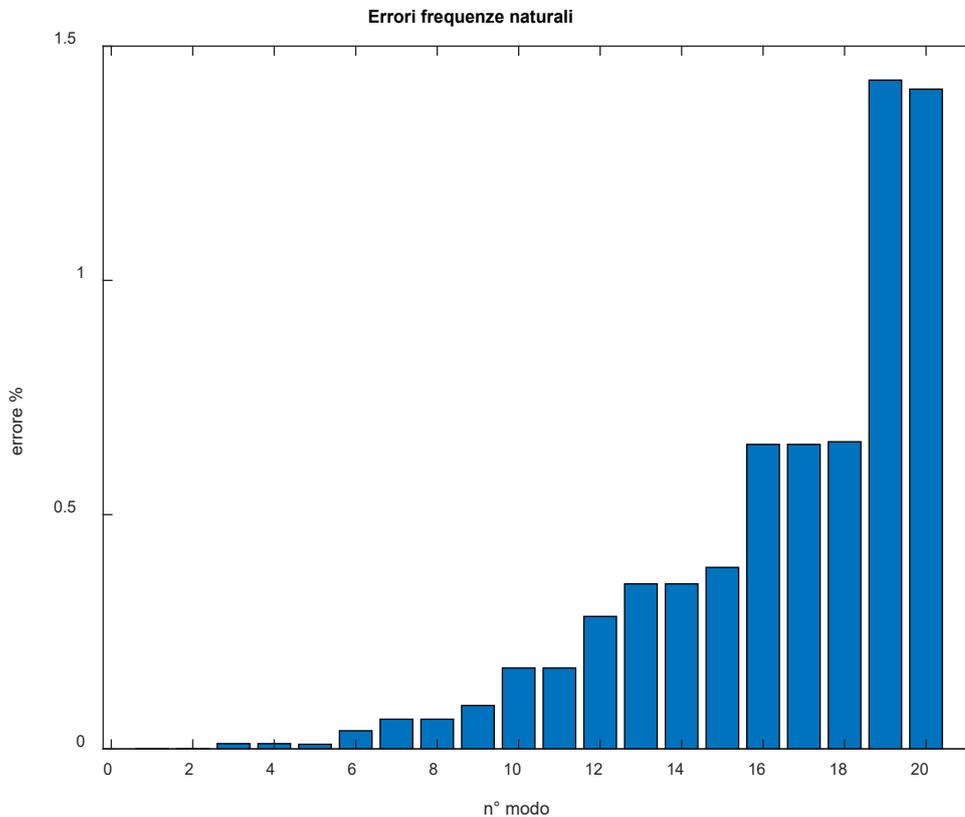


Figura 63_Errori percentuali frequenze

Anche nel caso vincolato si sono ottenuti errori abbastanza bassi, anche migliori del caso non vincolato, altra similarità col caso svincolato è che la struttura ridotta è sempre più rigida di quella intera. Da notare che sono stati riportati i modi fino all'*r*-esimo, se si andasse oltre con la rappresentazione anche in questo caso l'errore aumenterebbe a dismisura, ma ad ogni modo si ricorda che non è importante valutare le frequenze di questi modi.

Occorre studiare la dipendenza dal numero di nodi master, a tale scopo sono state fatte le stesse prove del caso non vincolato aggiungendo nodi master addizionali presenti sulla pelle della struttura.

	Nodi master addizionali	Nodi slaves	Gdl matrici ridotte	<i>r</i>
Prova 1	980	784	3176	20
Prova 2	123	1641	605	20
Prova 3	49	1715	383	20
Prova 4	7	1757	257	20

Tabella 18_Caratteristiche varie prove

Nella figura seguente è rappresentato l'errore percentuale per i primi 15 modi

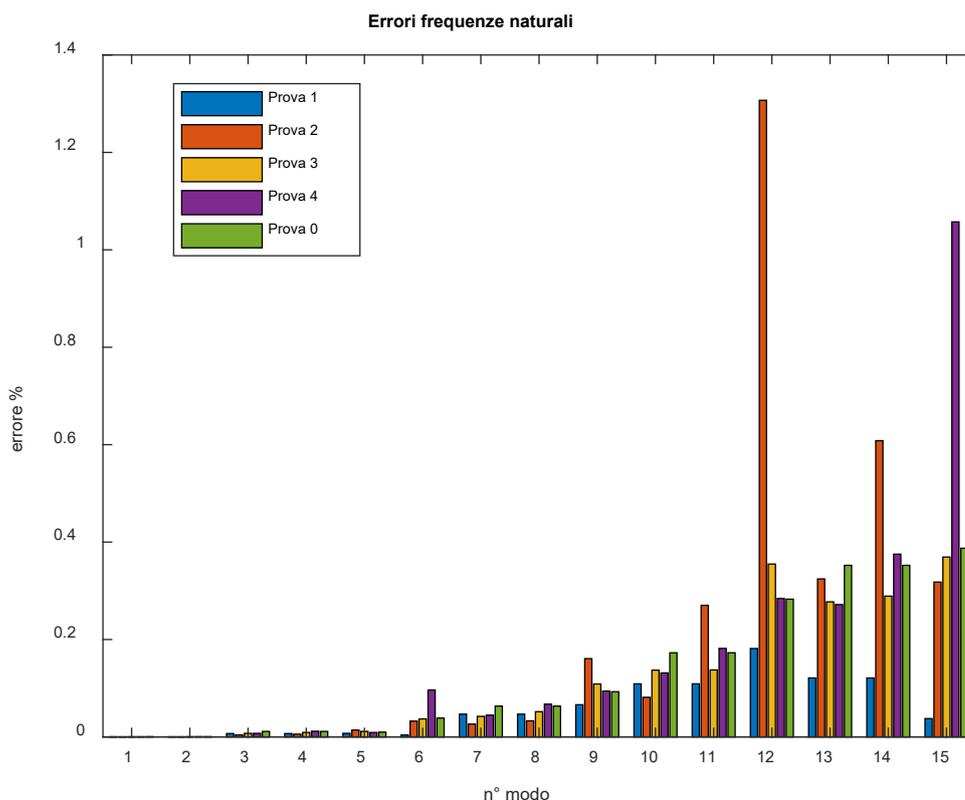


Figura 64_Rappresentazione errori percentuali varie prove

La dipendenza dal numero di nodi master continua ad esserci, ma è molto meno forte del caso non vincolato, ciò probabilmente accade perché ci sono molti più nodi che irrigidiscono la struttura. Per verificare quanto detto è stata svolta un'altra prova selezionando molti più nodi master interni, essi infatti dovrebbero essere i maggiori responsabili dell'irrigidimento poiché non portano con sé informazioni modali.

Grandezza	Numero
Nodi master	72
Nodi slaves	1728
Modi aggiuntivi selezionati	20
Gdl matrici ridotte	236(216+20)

Tabella 19_Caratteristiche prova attuale

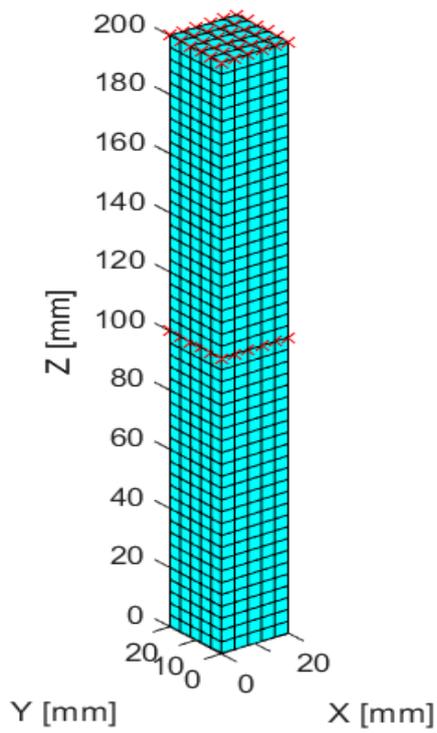


Figura 65_Rappresentazione nodi master selezionati

Definendo con prova 0 la prima prova condotta per il caso non vincolato, per i primi venti modi si ottiene:

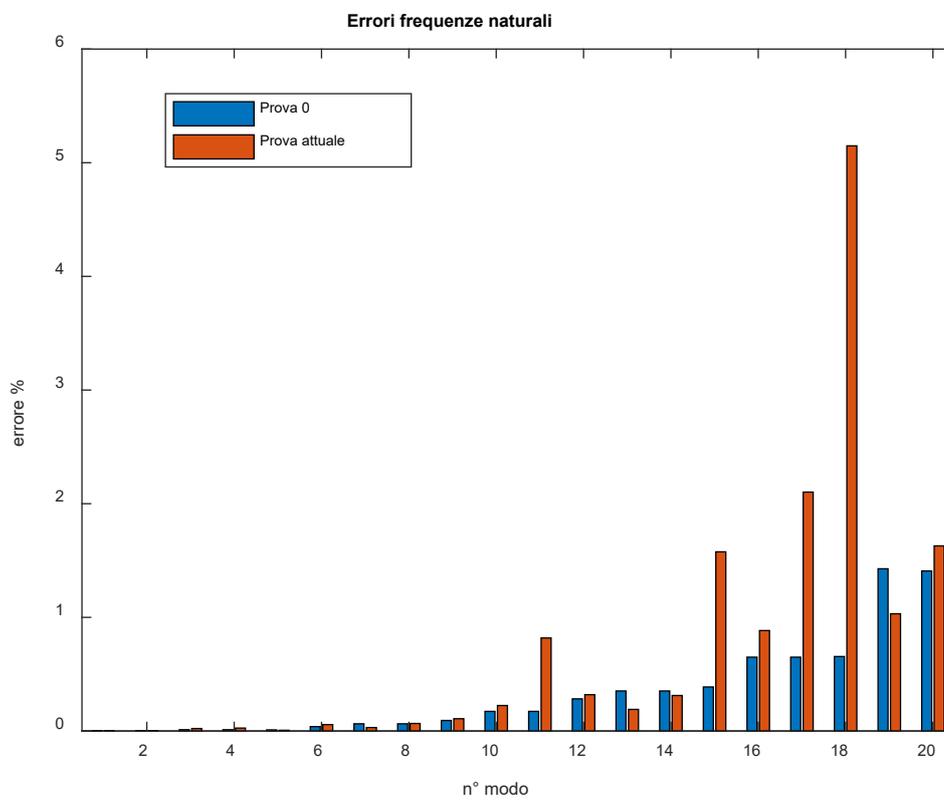


Figura 66_Errori percentuali per le due prove

Si conferma quindi che vincolando alcuni nodi particolari il sistema si irrigidisce pesantemente. Se si dovesse avere il bisogno di selezionare come nodi master alcuni nodi che irrigidirebbero la struttura si deve arginare tale problema, dunque verranno adottate alcune precauzioni, come già si era accennato.

Di seguito la rappresentazione del MAC nel caso di struttura vincolata, per la prova avente come nodi master solo i nodi su cui è applicato il carico.

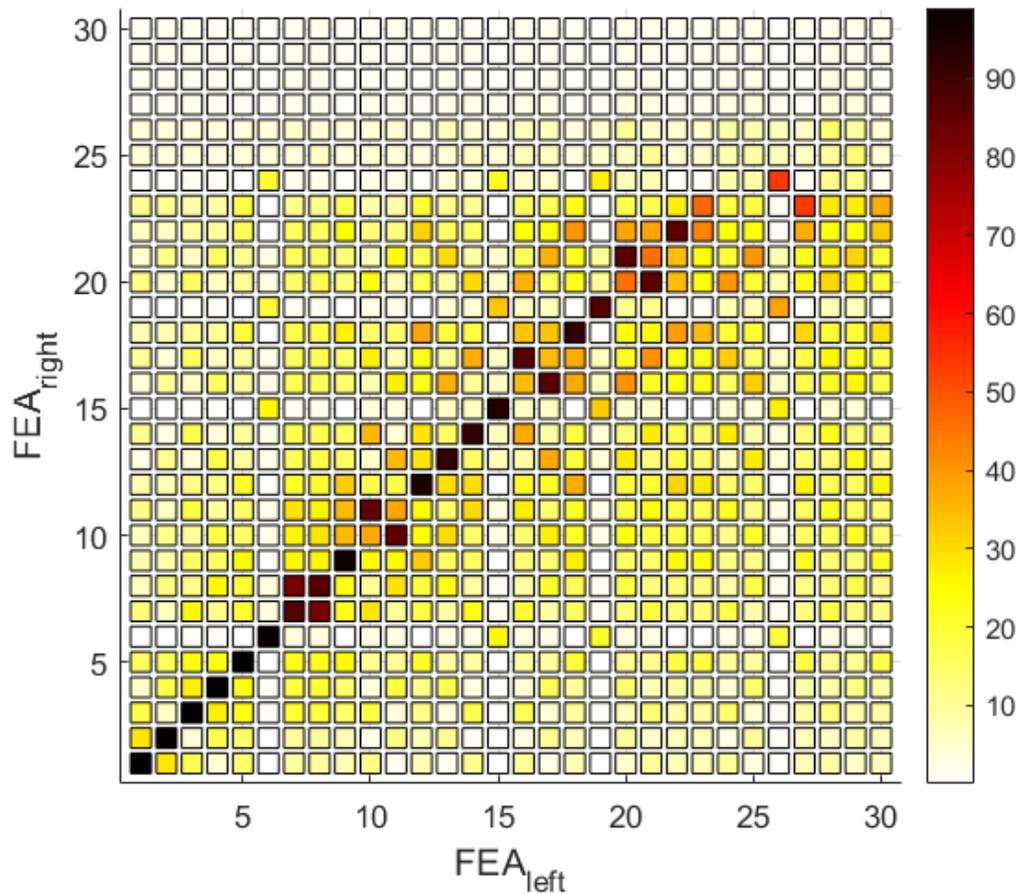


Figura 67_MAC prova 0

In virtù delle considerazioni fatte per il caso free-free anche in questo caso si può affermare che la riduzione è stata svolta correttamente anche in termini di forme modali.

Anche nel caso di struttura vincolata sono stati fatti grafici al variare del numero dei modi addizionali, ma non sono stati riportati per la loro evidente similarità con la struttura free-free.

7 Free-interface method

Il free-interface method in alcune applicazioni si può utilizzare in sostituzione al metodo di Craig-Bampton per ridurre le matrici. La differenza principale fra questi due metodi è, come si può capire dal nome stesso, che in questo metodo i nodi master si considerano free, mentre col metodo di Craig-Bampton si ricorda che per il calcolo di Φ_{fix} e Φ_{flex} i nodi master vengono vincolati. Vincolare troppi nodi potrebbe portare ad un eccessivo irrigidimento della struttura, come si è visto da alcune prove nel capitolo precedente, dunque se si ha la necessità di avere un elevato numero di nodi master vengono in soccorso i free-interface methods. Anche questo metodo, com'era stato detto per quello di Craig-Bampton, principalmente viene utilizzato per diverse sottostrutture da assemblare in un secondo momento, dunque generalmente come nodi master si utilizzano i nodi che si trovano all'interfaccia delle sottostrutture. In questo metodo viene data più importanza alle sottostrutture, poiché per calcolare la matrice di trasformazione finale ricoprono un ruolo importante le forze scambiate fra le varie strutture (forze interne). Nel caso in esame si parlerà sempre di forze interne, ma poiché si ha un'unica struttura, esse coincidono con le forze esterne.

7.1 Formulazione matematica

L'equazione del moto, per una determinata sottostruttura diventa:

$$M\ddot{u} + Ku = F + g \quad (43)$$

g sono proprio le forze interne e si potrebbe scrivere

$$g = -B^T \lambda \quad (44)$$

λ è il vettore che contiene le reazioni vincolari di tutte le sottostrutture, mentre B è una matrice Booleana che serve a selezionare la reazione vincolare della struttura che si sta studiando.

Per calcolare le forze agenti sui nodi master si utilizza una matrice Booleana riferita ai soli nodi master, dunque si ha:

$$g_m = -B_m^T \lambda \quad (45)$$

In generale il vettore spostamento u si può scrivere come la somma di due contributi:

$$u = u_{stat} + \sum_{j=r+1}^{j=n} \theta_j \eta_j \quad (46)$$

in cui u_{stat} comprende il contributo delle forze interne e il contributo dei modi rigidi, per cui

$$u_{stat} = -K^+ B^T \lambda + \sum_{j=1}^{j=r} R_j \alpha_j \quad (47)$$

In queste formule compaiono vari termini di cui ancora non si è parlato

θ_j	Autovettori dell'autoproblema $K \theta_j = \omega_j^2 M \theta_j$
η_j	Coordinate modali associate agli autovettori
R_j	Modi rigidi del sistema
α_j	Coordinate modali associate ai modi rigidi
r	Numero modi rigidi
n	Numero totale di autovettori dell'autoproblema
K^+	Pseudo inversa della matrice di rigidezza

Generalmente la riduzione viene fatta selezionando i primi n_θ modi per evitare tempi di calcolo troppo lunghi, dunque viene fatta una leggera approssimazione della formula (46). Per essere più precisi, poiché gli autovettori liberi selezionati sono inclusi nella matrice K^+ , per non ripetere due volte alcuni contributi al posto di questa matrice si può utilizzare la matrice G_r , definita come segue:

$$G_r = \sum_{j=n_\theta+1}^{j=n} \frac{\theta_j \theta_j^T}{\omega_j^2} = K^+ - \sum_{j=r+1}^{j=n_\theta} \frac{\theta_j \theta_j^T}{\omega_j^2} \quad (48)$$

A questo punto, dopo aver sostituito la (48) alla matrice K^+ presente in u_{stat} si può scrivere la matrice di trasformazione completa come:

$$u \cong T_1 \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \eta \\ g_m \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$T_1 = [R \quad \theta \quad G_r \quad A^T] \quad [s \times (n_\theta + m)] \quad (50)$$

Il simbolo di quasi identità sta ad indicare il fatto che sono stati selezionati soltanto i primi n_θ modi. La matrice A è invece una matrice Booleana e ha lo scopo di considerare soltanto la parte di G_r riferita ai nodi master. Le matrici ridotte si possono calcolare tramite le formule seguenti:

$$M_F = T_1^T M T_1 \quad (51)$$

$$K_F = T_1^T K T_1 \quad (52)$$

$$F_F = T_1^T F \quad (53)$$

L'equazione del moto ridotta, nel caso di un'unica sottostruttura, è:

$$M_F \begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\eta} \\ \ddot{g}_m \end{bmatrix} + K_F \begin{bmatrix} \alpha \\ \eta \\ g_m \end{bmatrix} = F_F \quad (54)$$

Nel caso di più sottostrutture si aggiungerebbe il termine g_F alla destra dell'uguale. Dunque nel caso trattato di un'unica struttura, poiché non ci sono reazioni vincolari fra strutture diverse, si sottolinea che il termine g_m rappresenta il contributo delle sole forze esterne sui nodi master.

Per ottenere esplicitamente gli spostamenti dei nodi master si ha bisogno di una seconda trasformazione, a tale scopo si potrebbero utilizzare due metodi: il metodo di Rubin o il metodo di MacNeal; è stato scelto il primo.

Con questo metodo a seguito di un'ulteriore trasformazione si lasciano invariati i primi due termini del vettore spostamento ridotto e si converte il terzo termine (cioè quello riferito alle forze interne) negli spostamenti dei nodi master.

Partendo dall'equazione:

$$u_m = A u = R_m \alpha + \theta \eta + G_{r,mm} g_m \quad (55)$$

in cui $G_{r,mm} = A^T G_r A$, chiamando inoltre $K_{r,mm}$ l'inversa di questa matrice si ottiene:

$$g_m = K_{r,mm} (u_m - R_m \alpha - \theta \eta) \quad (56)$$

dunque a questo punto si può scrivere la relazione fra spostamenti come

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \eta \\ g_m \end{bmatrix} = T_2 \begin{bmatrix} \alpha \\ \eta \\ u_m \end{bmatrix} \quad (57)$$

in cui

$$T_2 = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ -K_{r,mm} R_m & -K_{r,mm} \theta & K_{r,mm} \end{bmatrix} \quad [(n_\vartheta + m) \times (n_\vartheta + m)] \quad (58)$$

Quindi è possibile ottenere le matrici ridotte con il metodo di Rubin:

$$M_R = T_2^T M_F T_2 \quad (59)$$

$$K_R = T_2^T K_F T_2 \quad (60)$$

$$F_R = T_2^T F_F \quad (61)$$

E' possibile effettuare un'unica trasformazione, moltiplicando le matrici intere per $T_R = T_1 T_2$ di dimensioni $[s \times (n_\vartheta + m)]$.

$$M_R = T_R^T M T_R \quad (62)$$

$$K_R = T_R^T K T_R \quad (63)$$

$$F_R = T_R^T F \quad (64)$$

7.2 Applicazione metodo di Rubin

Si procederà allo stesso modo di come è stato fatto col metodo di Craig-Bampton, dunque le prime prove verranno fatte sulla travetta free-free, successivamente sulla trave vincolata.

7.2.1 Applicazione su travetta free-free

La prima prova è sempre quella avente come nodi master tutti i nodi sulle due facce estreme della travetta e come modi addizionali sono stati selezionati i primi venti.

Grandezza	Numero
Nodi master	72
Nodi slaves	1764
Modi addizionali selezionati	20
Gdl matrici ridotte	236 (216+20)

Figura 68_Caratteristiche prova 0

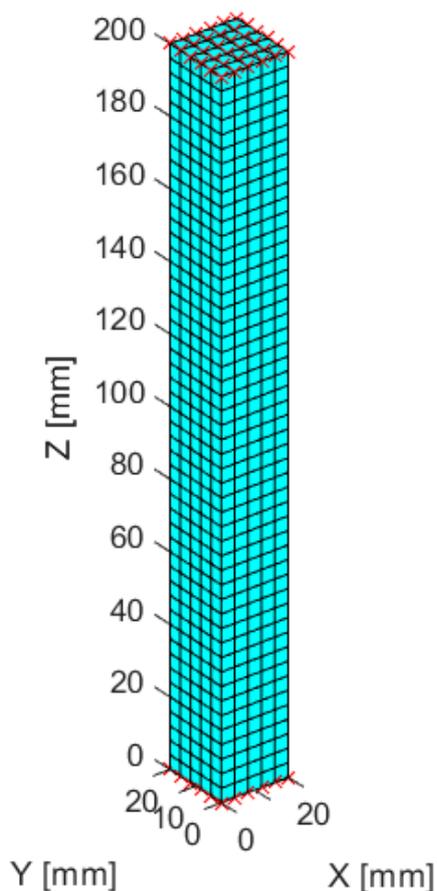


Figura 69_Rappresentazione nodi master selezionati

Sono state calcolate le prime venti frequenze naturali (esclusi i modi rigidi):

N°modo	Frequenza (kHz) Rubin	Frequenza (kHz) modello intero
1	2,5019	2,5019
2	2,5019	2,5019
3	6,5130	6,5130
4	6,5311	6,5130
5	7,0311	7,0311
6	11,897	11,897
7	11,897	11,897
8	12,608	12,607
9	14,054	14,054
10	18,183	18,182
11	18,188	18,194
12	21,080	21,062
13	25,044	25,040
14	25,153	25,079

Tabella 20_Confronto frequenze

Per i primi trenta modi (compresi i modi rigidi) sono stati calcolati gli errori percentuali rispetto alle frequenze naturali calcolati dalle matrici intere tramite la seguente formula

$$errore \% = \frac{f_R - f_I}{f_I} \cdot 100$$

In cui il pedice I sta per matrici intere e il pedice R sta per matrici ridotte con Rubin.

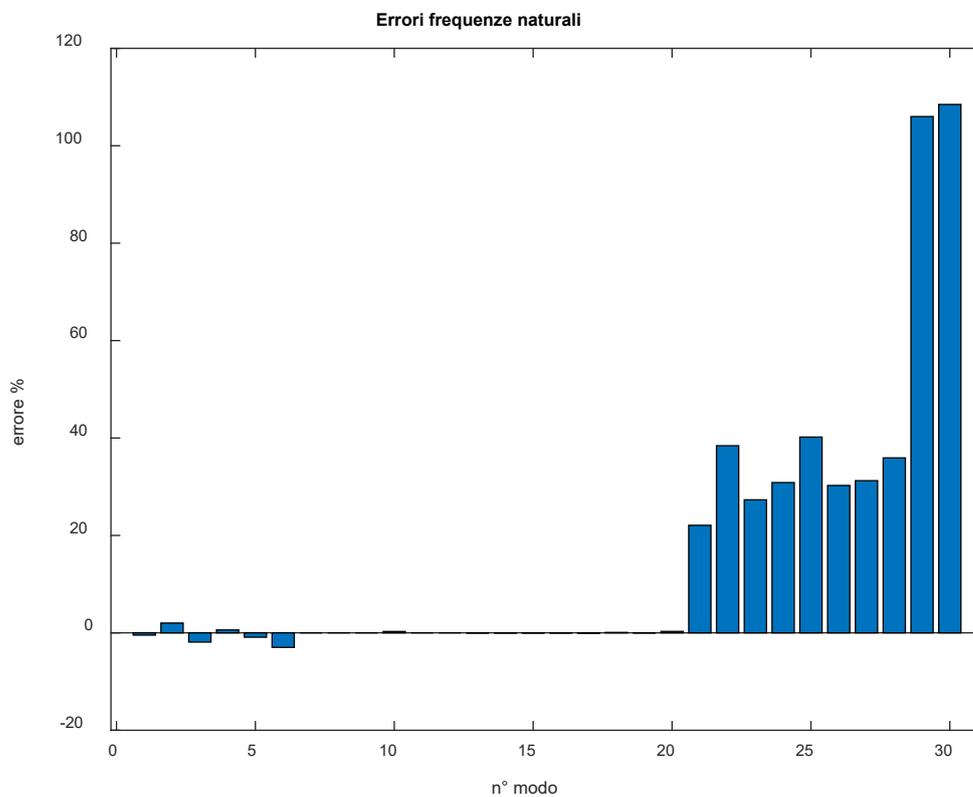


Figura 70_Errori relativi rispetto al modello intero

I risultati ottenuti sono molto soddisfacenti, il modello ridotto è sempre più rigido di quello originale, fino al ventesimo modo escludendo i modi rigidi si ha un errore massimo dello 0,3 %, quindi l'errore è anche inferiore a quello che si ottiene col metodo di Craig-Bampton. Dopo il ventesimo modo però l'errore cresce a dismisura, mentre nel caso di Craig-Bampton si trattava comunque di una crescita più contenuta, ma ciò è comunque un dettaglio meno rilevante nel considerare la qualità della riduzione. Queste differenze fra i due metodi si possono spiegare col fatto che il limite di Craig-Bampton è che per il calcolo di ϕ_{fix} e ϕ_{flex} vengono vincolati i nodi master e ciò porta sempre ad un errore nella riduzione; al contrario però si tratta di un metodo dal basso costo computazionale rispetto al metodo di Rubin, per il quale è particolarmente dispendioso il calcolo della pseudo inversa della matrice di rigidezza.

Un altro aspetto negativo di questo metodo è che i risultati non sono stati convalidati dai risultati ottenuti con Nastran. Il metodo free-interface è stato implementato su Nastran secondo quanto letto su vari manuali del programma, ma con scarsi risultati. Nella figura seguente sono rappresentati gli errori percentuali di Nastran rispetto al modello intero, ricavati con la seguente formula

$$errore \% = \frac{f_N - f_I}{f_I} \cdot 100$$

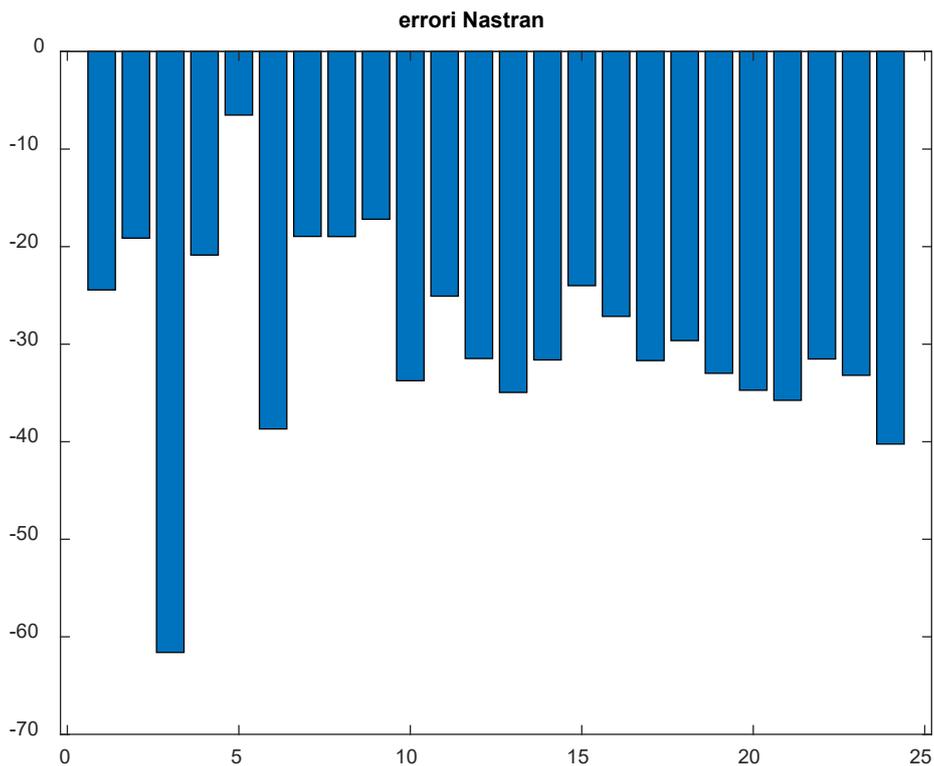


Figura 71_Rappresentazione errori relativi di Nastran

Non si è riusciti a spiegare come sia possibile che Nastran presenti errori così alti per questo metodo di riduzione, probabilmente in Nastran è implementato il metodo di MacNeal (a cui si era accennato in precedenza) che non dovrebbe presentare grosse differenze col metodo di Rubin.

Ora verranno fatte alcune prove al variare del numero di nodi master, con precisione sono state fatte le stesse prove che erano state svolte col metodo di Craig-Bampton, dunque si ricorda che i nodi master addizionali sono selezionati esclusivamente fra quelli presenti sulla pelle della travetta e oltre a questi per ogni prova sono considerati nodi master quelli presenti sulle facce estreme.

	Nodi master addizionali	Nodi slaves	Gdl matrici ridotte	r
Prova 1	980	784	3176	20
Prova 2	123	1641	605	20
Prova 3	49	1715	383	20
Prova 4	7	1757	257	20

Tabella 21_Caratteristiche varie prove

Per queste prove tramite la solita formula sono stati calcolati gli errori percentuali rispetto al modello intero delle frequenze naturali dei primi 30 modi (esclusi quelli rigidi). Anche in questo caso i risultati sono stati divisi in due grafici per analizzarli meglio

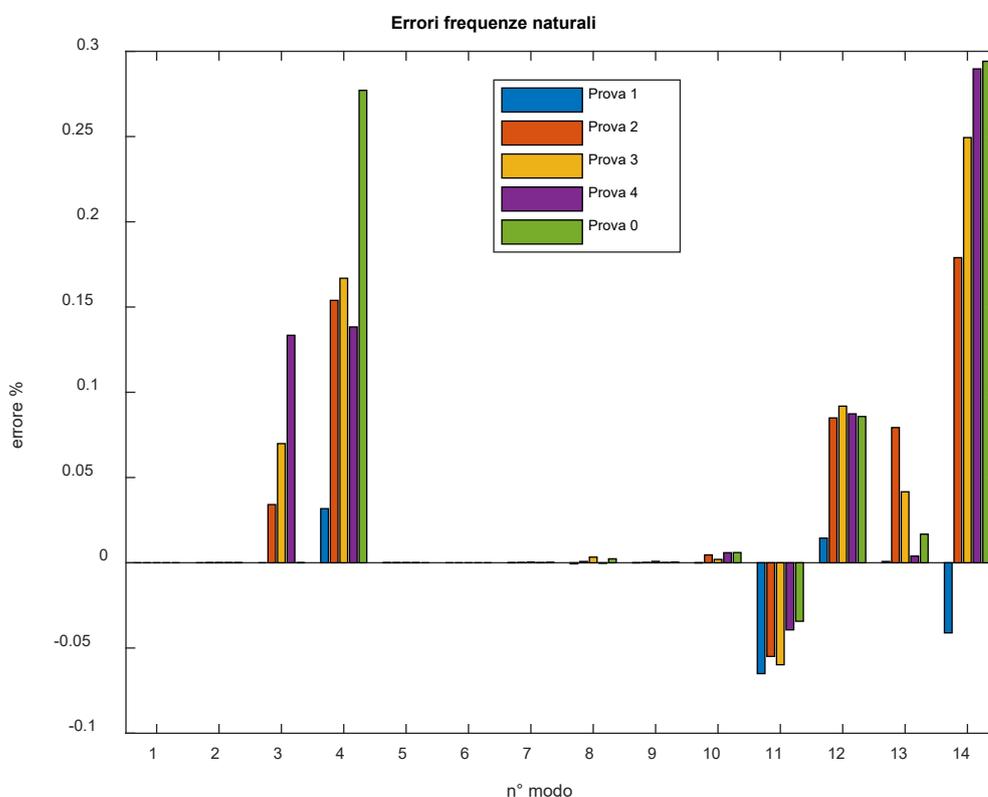


Figura 72_Errori relativi dal primo al 14° modo libero

Dal primo al quattordicesimo modo libero l'errore è molto basso come si era visto anche per la prova 0. In questi modi la dipendenza dal numero di nodi master si può intravedere ma è meno evidente rispetto alla riduzione con Craig-Bampton, questo accade anche perché si tratta di errori molto più bassi.

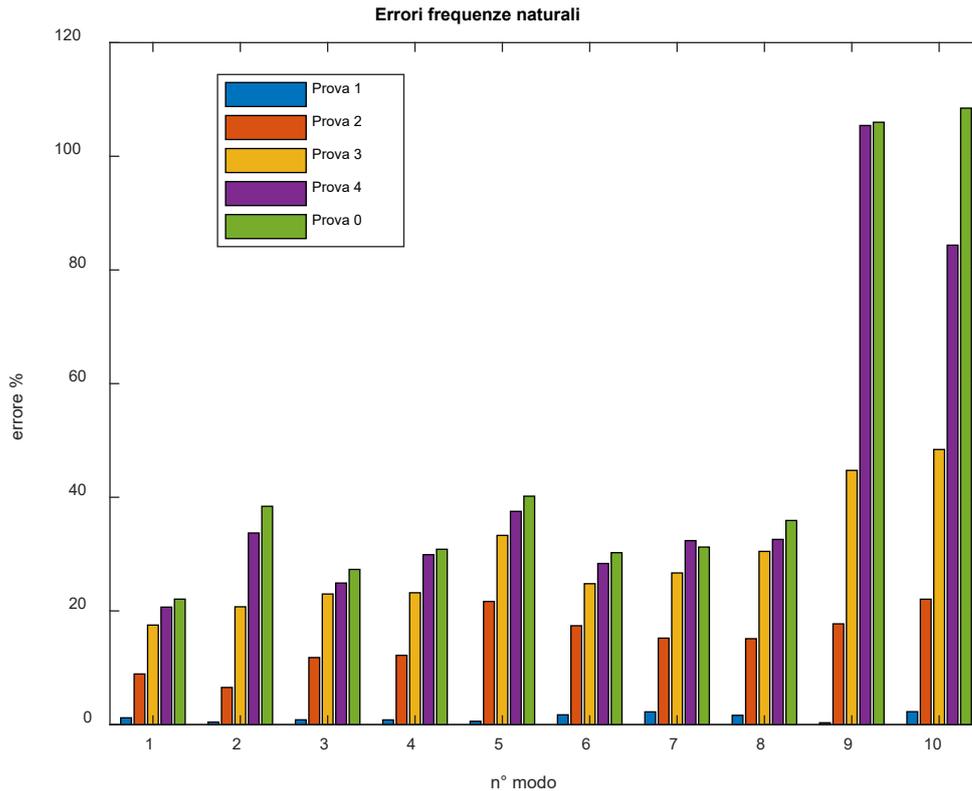


Figura 73_ Errori relativi dal 21° all 30° modo

I modi successivi come ci si aspettava presentano errori nettamente maggiori, ma è interessante notare la forte dipendenza dal numero di nodi master per ogni modo analizzato. Altro aspetto degno di nota è che la prova 1, cioè la prova avente come nodi master tutti i nodi presenti sulla pelle della struttura, riesce a mantenere errori particolarmente bassi, stessa cosa non si può dire per le altre prove. Da questi grafici si può notare un altro aspetto positivo di questo metodo rispetto a Craig-Bampton, in quest'ultimo non c'era una dipendenza dai nodi master così forte, questo perché alcuni nodi possono irrigidire la struttura in corrispondenza di determinati modi. Nel metodo di Rubin non viene vincolato nessun nodo, motivo per cui ciò non avviene.

Occorre studiare anche la dipendenza dal numero di modi aggiuntivi selezionati, a tale scopo sono state fatte le seguenti prove

	Numero modi aggiuntivi
Prova 1	15
Prova 2	20
Prova 3	25
Prova 4	30

Tabella 22_Caratteristiche varie prove

Come si può vedere dalla figura seguente si possono trarre considerazioni simili a quanto detto per il modello di Craig-Bampton.

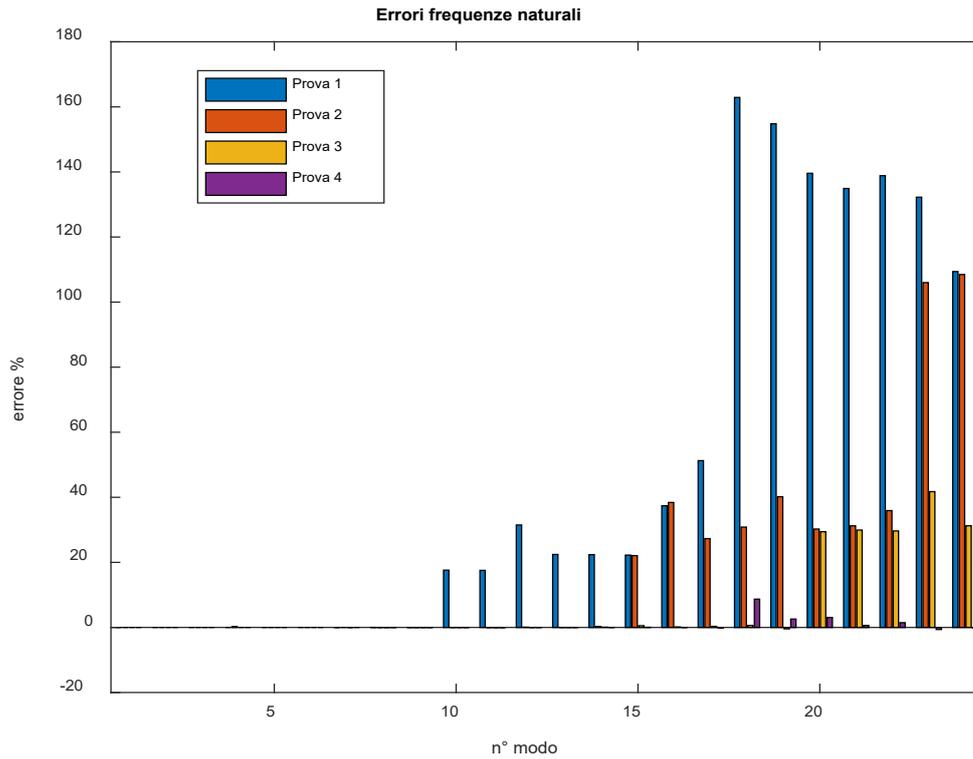


Figura 74_Errori relativi prove con diversi modi addizionali

Anche l'analisi di MAC dà risultati soddisfacenti per questa riduzione:

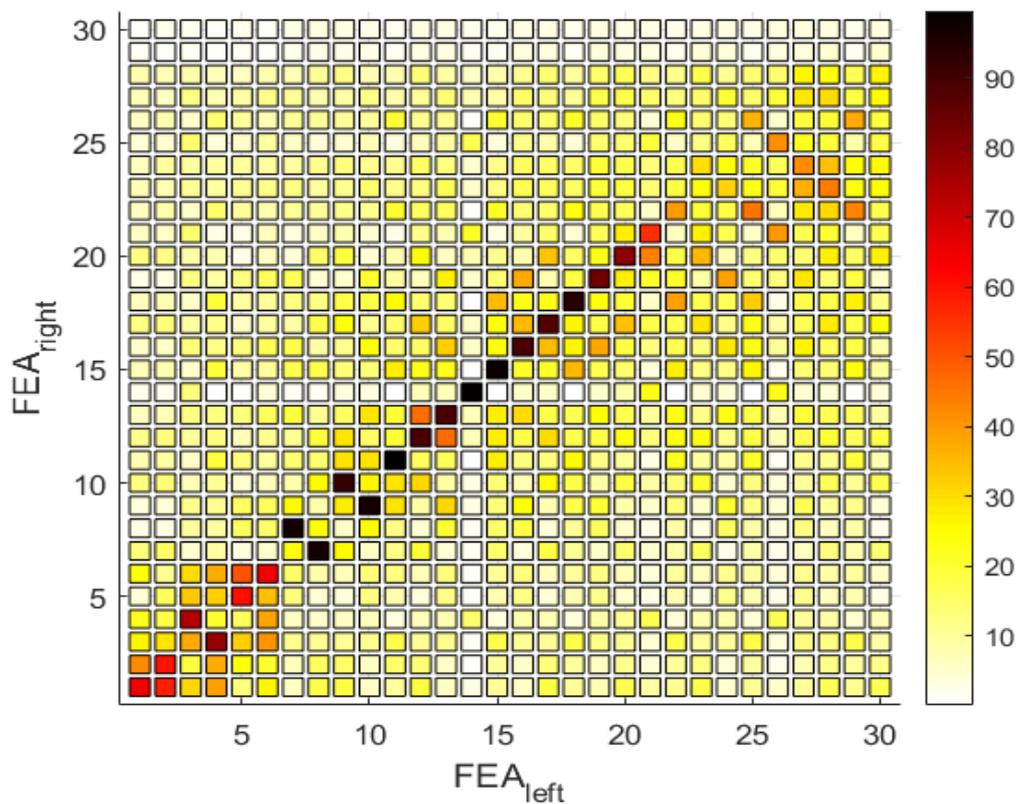


Figura 75_MAC metodo di Rubin per struttura free-free

7.2.2 Applicazione su travetta vincolata

Terminata l'analisi della struttura free-free si può passare ad analizzare la struttura vincolata. Dapprima verrà condotta l'analisi dagli spostamenti, iniziando da una prova in cui i nodi master sono soltanto i nodi su cui è applicata la forza; per questa prova sono stati calcolati gli errori assoluti rispetto al modello intero in termini di spostamenti.

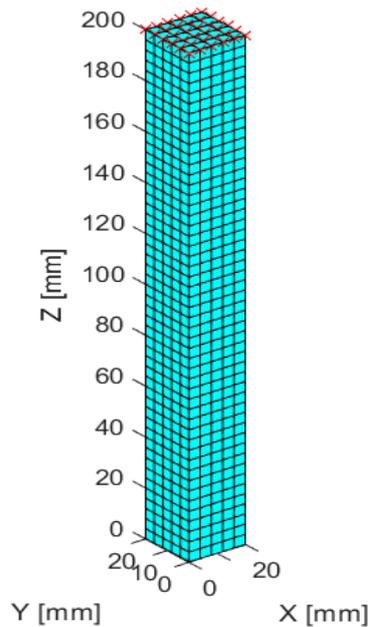


Figura 76_Rappresentazione nodi master selezionati

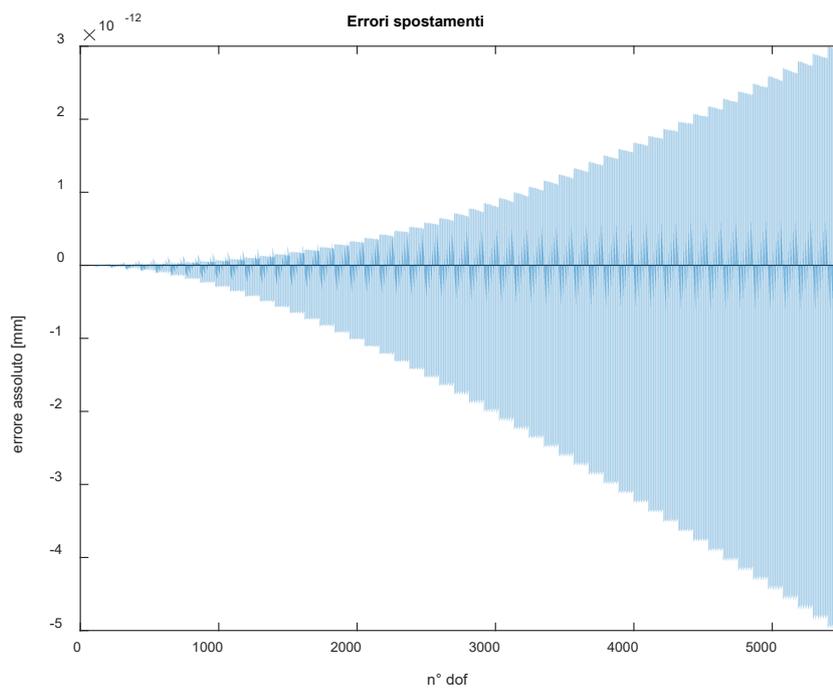


Figura 77_Errori spostamenti rispetto al modello intero

Si ottengono errori assoluti estremamente bassi, dello stesso ordine di grandezza rispetto agli errori ottenuti con Craig-Bampton, anche in questo caso inoltre è stato dimostrato con una prova che non verrà riportata che i nodi su cui è applicata la forza devono essere necessariamente nodi master. Se ci si fermasse all'equazione (54), quindi prima di applicare la trasformazione del metodo di Rubin, se volessimo condurre l'analisi degli spostamenti nelle righe riferite al termine g_m otterremmo i valori delle forze applicate sui singoli nodi master. Dunque nel nostro caso otterremmo semplicemente i valori della forza esterna, nel caso di più sottostrutture ci sarebbe il contributo delle reazioni vincolari.

Per la stessa prova per cui è stata svolta l'analisi degli spostamenti verrà effettuata l'analisi modale

Grandezza	Numero
Nodi master	36
Nodi slaves	1764
Modi aggiuntivi selezionati	20
Gdl matrici ridotte	128(108+20)

Tabella 23_Caratteristiche prova

Le prime quindici frequenze naturali assumono i seguenti valori:

N° modo	Frequenza (kHz) Rubin	Frequenza (kHz) modello intero
1	0,4067	0,4067
2	0,4067	0,4067
3	2,4393	2,4393
4	2,4393	2,4393
5	3,5221	3,5221
6	6,3302	6,3302
7	6,4239	6,4239
8	6,4239	6,4239
9	10,562	10,562
10	11,671	11,671
11	11,671	11,671
12	17,591	17,591
13	17,991	17,791
14	17,991	17,791
15	18,956	18,956

Tabella 24_Confronto frequenze con modello intero

Per i primi venti modi sono stati calcolati gli errori percentuali rispetto alle frequenze naturali calcolati dalle matrici intere tramite la seguente formula

$$\text{errore \%} = \frac{f_R - f_I}{f_I} \cdot 100$$

In cui il pedice I sta per matrici intere e il pedice R sta per matrici ridotte con Rubin.

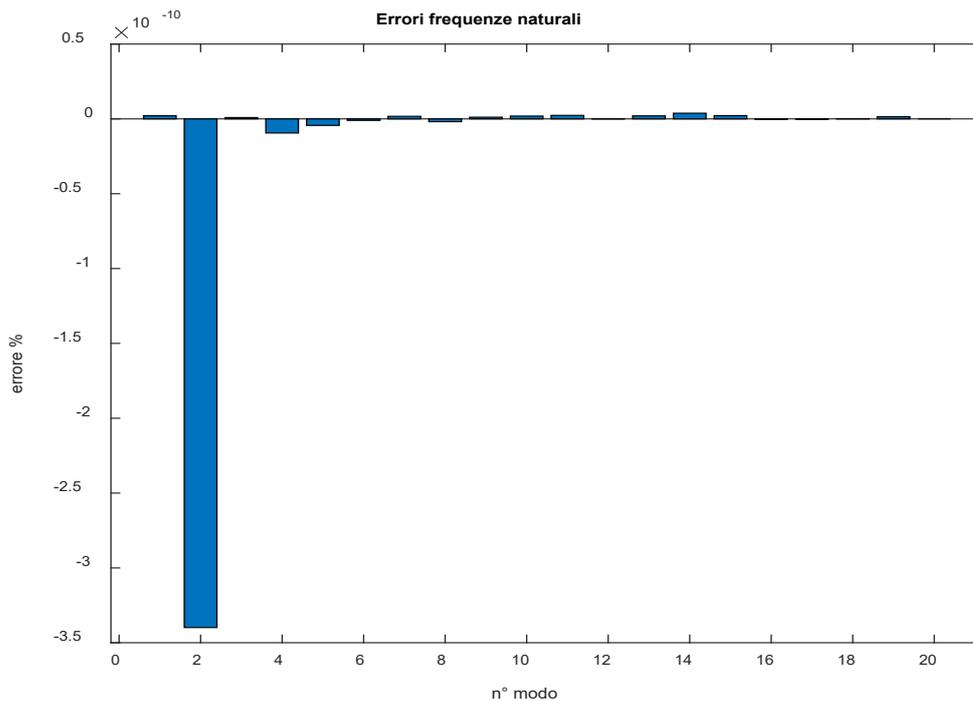


Figura 78_Errori relativi rispetto al modello intero

I risultati che sono venuti fuori sono risultati aventi un errore bassissimo, risultati quindi nettamente migliori del modello di Craig-Bampton e anche rispetto al caso non vincolato del modello di Rubin stesso.

Di seguito la rappresentazione del MAC nel caso di struttura vincolata, anche in questi termini si può osservare una maggior precisione nella riduzione.

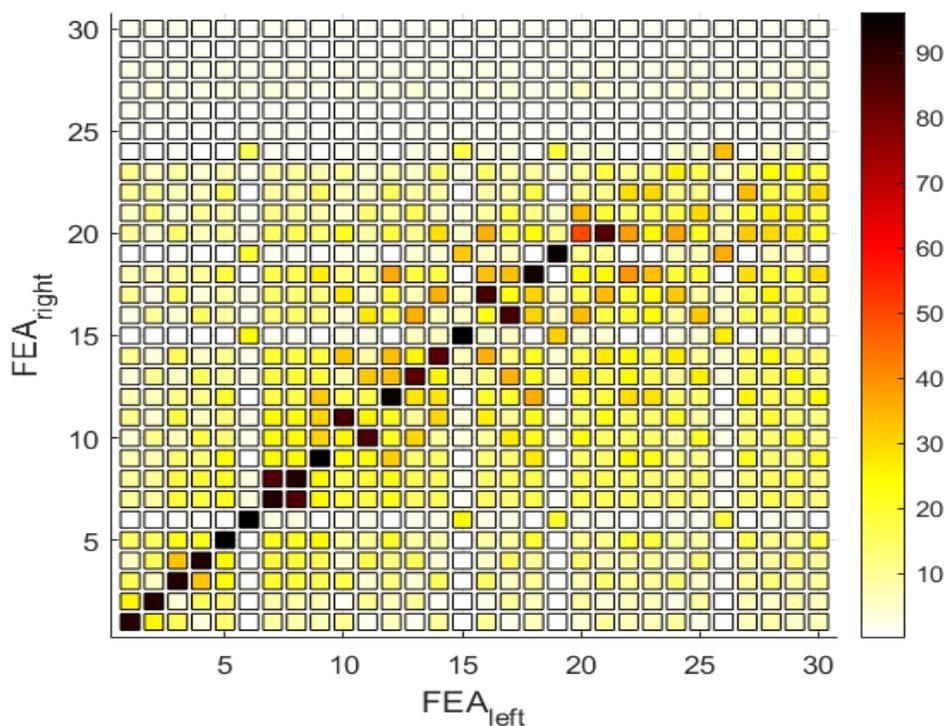


Figura 79_MAC metodo di Rubin con struttura vincolata

7.3 Tentativo di unione dei due metodi

L'analisi dei risultati ottenuti dai due metodi presi singolarmente è terminata. Come detto nella parte introduttiva l'obiettivo iniziale per ridurre le ruote era quello di considerare alcuni nodi come master di Craig-Bampton e altri come master di Rubin e successivamente unire i due metodi. Per fare ciò occorre unire le due matrici di trasformazione per poi ottenere le matrici ridotte dai due metodi differenti. Quanto detto è stato provato a fare e verrà presentato insieme a qualche prova nelle pagine seguenti, ma sono emersi alcuni problemi dunque è stata abbandonata questa pista.

Le matrici di trasformazione dei due metodi vengono calcolate come è stato detto a suo tempo e dunque per il metodo di Craig-Bampton si ha:

$$T_{CB} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \Phi_{fix} & \Phi_{flex} \end{bmatrix} \quad (65)$$

e per il metodo di Rubin:

$$T_1 = [R \quad \theta \quad G_r \quad A^T] \quad (66)$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ -K_{r,mm} R_m & -K_{r,mm} \theta_m & K_{r,mm} \end{bmatrix} \quad (67)$$

$$T_R = T_1 T_2 \quad (68)$$

Per semplificare la notazione si può scrivere

$$T_R = [T_a \quad T_m] \quad (69)$$

in cui T_a rappresenta il contributo dei modi della struttura, mentre T_m rappresenta il contributo dei nodi master, per avere una diretta corrispondenza con la T_{CB} questi due termini si possono invertire.

Per entrambe le riduzioni si considerano come nodi master sia quelli che saranno nodi master di Craig-Bampton che quelli che saranno nodi master di Rubin salvo poi effettuare determinate cancellazioni.

Ora si studiano tutti i termini delle due matrici di trasformazione e si dirà come esse verranno modificate:

- per quanto riguarda la matrice identità I della T_{CB} si eliminano le colonne e si azzerano le righe riferite ai nodi master di Rubin. La matrice Φ_{fix} è riferita soltanto ai nodi slaves, dunque le righe vengono lasciate intatte, ma vengono nuovamente eliminate le colonne riferite ai nodi master di Rubin. Le altre due sottomatrici della T_{CB} restano intatte.
- per quanto riguarda la matrice T_m vengono eliminate le colonne e vengono azzerate le righe riferite ai nodi master di CB. La matrice T_a rappresenta il contributo modale perciò le colonne rimangono così come sono, ma vengono azzerate le righe riferite ai nodi master di CB.

Adesso è possibile sommare la prima colonna della T_{CB} con T_m e affiancare alla matrice ottenuta la seconda colonna della T_{CB} e T_a .

$$T = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_m & 0 & T_a \\ \Phi_{fix} & \vdots & \Phi_{flex} & \vdots \end{bmatrix} \quad (70)$$

Per comprendere meglio il procedimento adottato in termini di dimensioni delle varie sottomatrici si fa riferimento alla seguente nomenclatura

Grandezza	Sigla
Nodi master Craig-Bampton	CB
Nodi master Rubin	R
Nodi slaves	s
Modi aggiuntivi selezionati Craig-Bampton	r
Modi aggiuntivi selezionati Rubin	m

dunque si ottiene:

$$T = \begin{bmatrix} [CB \times CB] & [CB \times R] & [CB \times r] & [CB \times m] \\ [R \times CB] & [R \times R] & [R \times r] & [R \times m] \\ [s \times CB] & [s \times R] & [s \times r] & [s \times m] \end{bmatrix}$$

e in termini di spostamenti si può scrivere come

$$\begin{bmatrix} u_{CB} \\ u_R \\ u_s \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} u_{CB} \\ u_R \\ r \\ m \end{bmatrix} \quad (71)$$

in cui r ed m rappresentano rispettivamente le coordinate modali dei modi aggiuntivi di CB e di Rubin. Il problema di questo metodo sta proprio nella costruzione della matrice di moltiplicazione, la prima e la seconda riga di per sé non costituiscono un problema, in quanto esse sono costituite interamente da termini o dell'una o dell'altra riduzione. Ciò non è vero per l'ultima riga, cioè la riga da cui si dovrebbero ottenere gli spostamenti dei nodi slaves, essa presenta termini scollegati fra di loro, per cui non possono far parte della stessa moltiplicazione. Per tale motivazione si è scelto di abbandonare questo metodo.

Nonostante il problema di cui si è parlato i risultati ottenuti sono molto soddisfacenti, per tale motivo verrà presentata un'unica prova sulla trave svincolata. Come nodi master di CB sono stati selezionati tutti quelli sulla prima faccia e come nodi master di Rubin tutti quelli sull'ultima:

Grandezza	Numero
Nodi master Craig-Bampton	36
Nodi master Rubin	36
Nodi slaves	1764
Modi aggiuntivi selezionati Craig-Bampton	20
Modi aggiuntivi selezionati Rubin	20

Tabella 25_ Caratteristiche prova

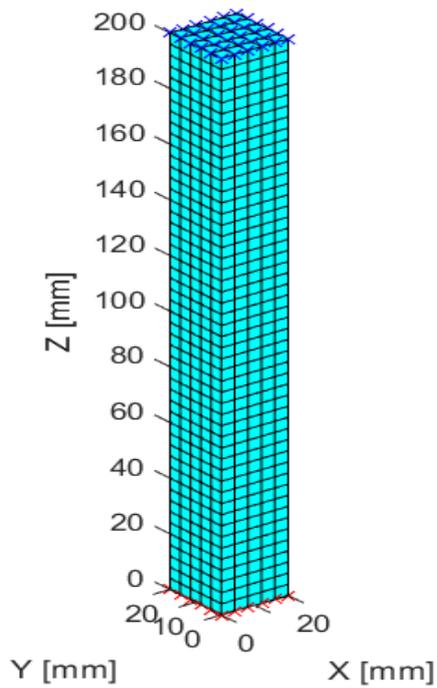


Figura 80_Rappresentazione nodi master CB (rosso) e Rubin (blu)

Per i primi trenta modi (esclusi i modi rigidi) sono stati calcolati gli errori percentuali rispetto alle frequenze naturali calcolati dalle matrici intere tramite la seguente formula

$$errore \% = \frac{f_M - f_I}{f_I} \cdot 100$$

In cui il pedice I sta per matrici intere e il pedice M sta per matrici ridotte col metodo appena visto.

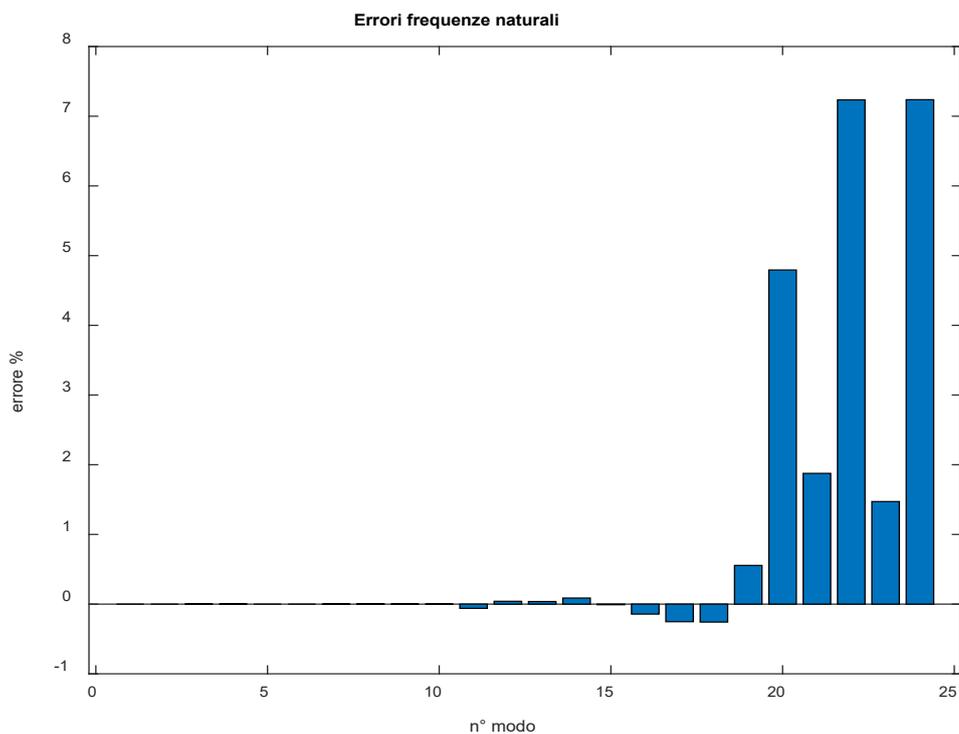


Figura 81_Errori relativi rispetto al modello intero

Per quanto riguarda l'analisi del MAC:

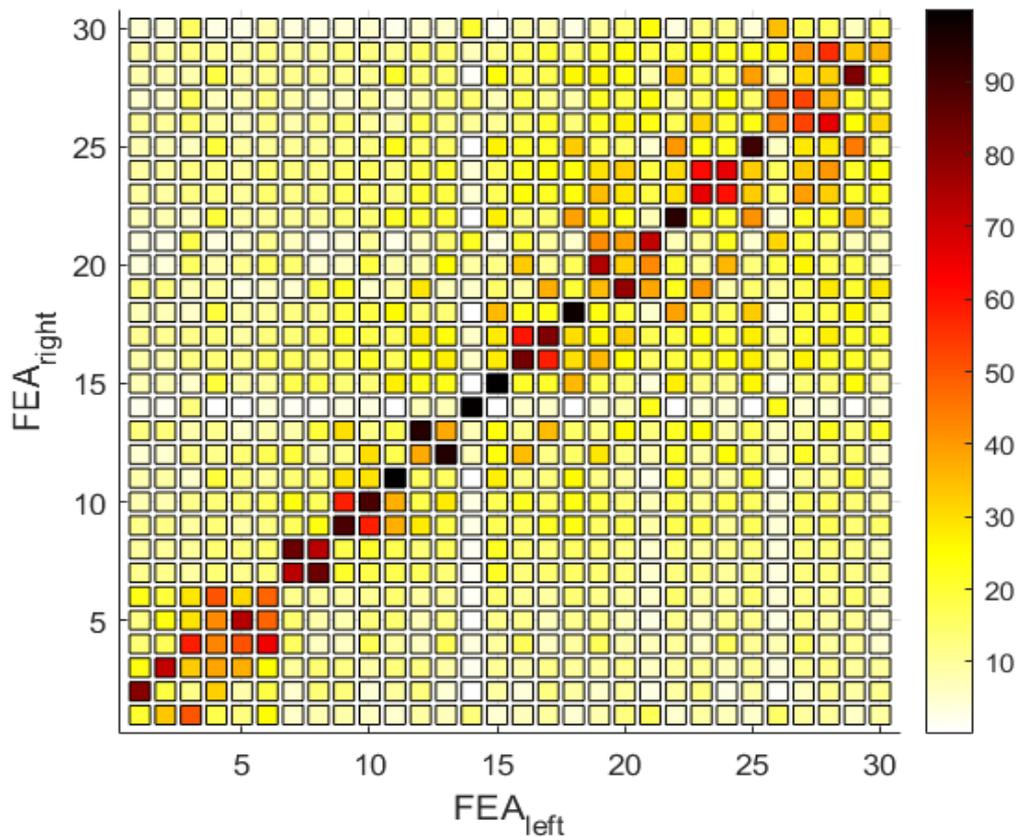


Figura 82_MAC metodo ibrido

I risultati sono abbastanza soddisfacenti, ma si tratta di un metodo che non si basa su un fondamento scientifico in quanto c'è un'incongruenza per i motivi che sono stati detti in precedenza quindi si deve cercare una strada alternativa. Il problema che è emerso è un problema di fondo, che potrebbe uscire ogni qualvolta si provano ad unire due metodi di riduzione diversi, ragion per cui si è pensato di utilizzare un unico metodo fra i due e modificarlo opportunamente.

8 Metodo di Craig-Bampton controlled

Dai risultati che si sono visti in precedenza il metodo di Rubin porta con sé un errore di riduzione minore rispetto al metodo di Craig-Bampton, probabilmente perché i nodi master vengono considerati free. Però il metodo di Rubin ha anche due aspetti negativi: si tratta di un metodo che non è stato convalidato dai risultati di Nastran e soprattutto presenta tempi di calcolo estremamente maggiori per il calcolo della pseudo inversa della matrice di rigidità. Quanto detto non è un problema per strutture piccole come la trave, infatti il tempo che impiegano i due metodi per effettuare la riduzione è molto simile, è stato però verificato che i tempi crescono enormemente nel caso di strutture costituite da un numero di nodi maggiore. Le ruote presentano molti più nodi della trave, dunque il calcolo della pseudo inversa potrebbe essere un serio problema per lo scopo della tesi. Per questo motivo, nonostante la qualità della riduzione migliore del metodo di Rubin, si è scelto di utilizzare il metodo di Craig-Bampton per ridurre le ruote modificandolo come si vedrà nel paragrafo successivo. Il metodo di Rubin resta comunque un metodo molto valido soprattutto per la riduzione di matrici non molto grandi.

8.1 Formulazione matematica

Si ricorda la relazione fra gli spostamenti del metodo di Craig-Bampton

$$u = \begin{bmatrix} u_m \\ u_s \end{bmatrix} = T_{CB} \cdot \begin{bmatrix} u_m \\ \eta \end{bmatrix} \quad (72)$$

$$T_{CB} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \Phi_{fix} & \Phi_{flex} \end{bmatrix} \quad (73)$$

perciò per il calcolo degli spostamenti dei nodi slaves occorre moltiplicare le matrici Φ_{fix} e Φ_{flex} per il vettore spostamento ottenuto in seguito alla riduzione. Però calcolare gli spostamenti di tutti i nodi slaves è molto dispendioso per matrici particolarmente grandi, soprattutto nel caso della dinamica in cui ciò andrebbe fatto per ogni posizione angolare. Nell'applicazione in esame ci sono alcuni nodi, che in precedenza erano stati definiti osservabili, di cui è più importante conoscere gli spostamenti, nonostante non vengano considerati nodi master. Per tale ragione anziché utilizzare le matrici Φ_{fix} e Φ_{flex} così come sono si è pensato di prendere soltanto le righe di queste matrici riferite ai nodi osservabili e moltiplicare per il vettore spostamento $\begin{bmatrix} u_m \\ \eta \end{bmatrix}$. In formule, chiamando T_c $[c \times s]$ la matrice Booleana finalizzata a selezionare soltanto i nodi osservabili fra tutti i nodi slaves, si ottiene:

$$u_c = T_c u_s = T_c [\Phi_{fix} \Phi_{flex}] \begin{bmatrix} u_m \\ \eta \end{bmatrix} \quad (74)$$

grazie a questa formula se il nostro interesse è soltanto quello di conoscere gli spostamenti di questi nodi definiti osservabili (nelle formule il pedice c sta per controlled) basta ridurre le matrici col metodo di Craig-Bampton così com'è e successivamente, dopo aver calcolato il vettore spostamento delle matrici ridotte, applicando questa formula si possono ottenere gli spostamenti

desiderati. Come è stato visto facendo il confronto fra il metodo di Rubin e quello di Craig-Bampton una struttura irrigidita porta con sé errori maggiori, dunque si cercherà di evitare di vincolare molti nodi, ma si preferirà mantenere osservabili alcuni di essi. A tale scopo le matrici ridotte si modificheranno di conseguenza, in modo che già in esse si tenga traccia dei nodi osservabili. In virtù di queste considerazioni le matrici intere sono state ridotte in modo leggermente diverso da come è stato visto in precedenza.

L'obbiettivo è ottenere una relazione del tipo

$$u = \begin{bmatrix} u_m \\ u_c \\ u_s \end{bmatrix} = T_{CB,c} \cdot \begin{bmatrix} u_m \\ u_c \\ \eta \end{bmatrix} \quad (75)$$

per fare ciò gli spostamenti dei nodi osservabili devono essere moltiplicati per la matrice identità, inoltre poiché questi nodi fanno parte degli slaves il calcolo delle matrici Φ_{fix} e Φ_{flex} viene fatto allo stesso modo, cioè selezionando i nodi master di interesse, salvo poi eliminare le righe riferite ai nodi osservabili. Indicando con s il numero di nodi slaves che non sono osservabili e con r come al solito il numero di modi addizionali selezionati, si ha:

$$\Phi_{fix,s} \ [s \times m] \quad \Phi_{flex,s} \ [s \times r]$$

Dunque la matrice di trasformazione $T_{CB,c}$ nel complesso è costituita così:

$$T_{CB,c} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ \Phi_{fix,s} & 0 & \Phi_{flex,s} \end{bmatrix} \quad (76)$$

nella matrice seguente sono riportate le dimensioni di ogni sottomatrice

$$T_{CB,c} = \begin{bmatrix} [m \times m] & [m \times c] & [m \times r] \\ [c \times m] & [c \times c] & [c \times r] \\ [s \times m] & [s \times c] & [s \times r] \end{bmatrix}$$

Ora è possibile ottenere le matrici ridotte di dimensione $[m + c + r]$ moltiplicando le matrici intere per la matrice di trasformazione appena calcolata.

$$M_{CB,c} = T_{CB,c}^T M T_{CB,c} \quad (77)$$

$$K_{CB,c} = T_{CB,c}^T K T_{CB,c} \quad (78)$$

$$F_{CB,c} = T_{CB,c}^T F \quad (79)$$

In conclusione si tratta di un metodo da cui si ottengono matrici di dimensioni maggiori rispetto a quelle ottenute con Craig-Bampton base, in quanto la parte della matrice intera riferita ai nodi osservabili, come già veniva fatto per quella riferita ai nodi master, si mantiene tale e quale nella matrice ridotta. Al contrario però le matrici per certi versi dovrebbero essere meno precise in quanto vengono tolte alcune righe dalle matrici Φ_{fix} e Φ_{flex} , poiché parte degli slaves utilizzati per il calcolo di queste matrici sono poi considerati nodi osservabili. Dunque ci si aspetta aspetti negativi e positivi da questo nuovo metodo di riduzione.

8.2 Applicazione metodo di Craig-Bampton controlled

Si seguirà il solito iter, dapprima verranno fatte prove sulla travetta libera, su cui verrà svolta l'analisi modale, successivamente sulla travetta vincolata su cui verrà svolta anche l'analisi degli spostamenti. Si effettueranno prove simile a quelle fatte con CB base al fine di confrontare meglio i risultati.

8.2.1 Applicazione sulla travetta free-free

La prima prova è stata fatta sulla travetta free-free con gli stessi nodi master visti col metodo di CB base, ma come si era visto in precedenza i due metodi differiscono per gli c nodi osservabili selezionati. In questo caso sono stati considerati nodi osservabili tutti i nodi sulla faccia centrale della travetta ($z=100$).

Grandezza	Numero
Nodi master	72
Nodi osservabili	36
Nodi slaves (meno nodi osservabili)	1728
Modi aggiuntivi selezionati	20
Gdl matrici ridotte	344 (216+108+20)

Figura 83_Caratteristiche prima prova

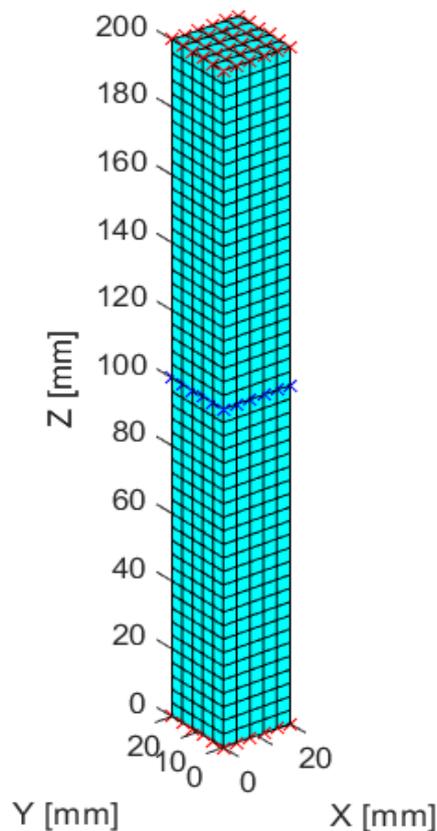


Figura 84_Rappresentazione nodi master (rosso) e nodi osservabili (blu)

Le prime venti frequenze naturali (esclusi i modi rigidi) assumono i seguenti valori:

N°modo	Frequenza (kHz) CB controlled	Frequenza (kHz) modello CB base
1	2,5027	2,5027
2	2,5027	2,5027
3	6,5196	6,5196
4	6,5197	6,5196
5	7,0384	7,0382
6	11,950	11,950
7	11,955	11,952
8	12,660	12,662
9	14,089	14,089
10	18,291	18,291
11	18,292	18,293
12	21,304	21,304
13	25,384	25,426
14	25,493	25,454

Tabella 26_Confronto con metodo di Craig-Bampton

Da questi risultati non si riesce a dire con certezza quale dei due metodi funzioni meglio, si ricorda che le frequenze del modello di CB base sono sempre più rigide di quelle del modello intero, dunque per valutare dalla tabella il metodo migliore fra i due si deve vedere il metodo che ha il valore minore di una determinata frequenza naturale. Per la maggior parte dei modi comunque sembra essere più preciso CB base.

La seconda prova è stata fatta con gli stessi nodi master, ma aumentando il numero di nodi osservabili.

Grandezza	Numero
Nodi master	72
Nodi osservabili	108
Nodi slaves (meno nodi osservabili)	1656
Modi aggiuntivi selezionati	20
Gdl matrici ridotte	560 (216+324+20)

Tabella 27_Caratteristiche seconda prova

Per questa prova si riporta il confronto solo per i primi 10 modi liberi

N°modo	Frequenza (kHz) CB controlled	Frequenza (kHz) modello CB base
1	2,5027	2,5027
2	2,5027	2,5027
3	6,5196	6,5196
4	6,5196	6,5196
5	7,0382	7,0382
6	11,950	11,950
7	11,950	11,952
8	12,664	12,662
9	14,090	14,089
10	18,291	18,291

Tabella 28_Confronto con metodo di Craig-Bampton

Sembra che aumentando il numero di nodi osservabili la situazione è migliorata, dunque si può dire che aggiungendone in una certa quantità si sopperisce alle righe eliminate dalle matrici Φ_{fix} e Φ_{flex} , ma aggiungendone pochi (come visto nella prova precedente) la situazione peggiora leggermente.

Si era visto che per il metodo di Craig-Bampton anche aggiungendo un solo nodo master interno la struttura si irrigidisce, è stata fatta una prova ma considerando quel nodo interno come un nodo osservabile. Si riporta il confronto per i primi 5 modi liberi:

N° modo	Frequenze (kHz) CB controlled	Frequenze (kHz) CB base
1	2,5027	2,5028
2	2,5027	2,5028
3	6,5196	6,5196
4	6,5196	6,5197
5	7,0382	7,0382

Tabella 29

Questa prova è abbastanza importante, perché ci permette di seguire il comportamento di un nodo che considerandolo come master irrigidirebbe la struttura, infatti è proprio per questo motivo che si è scelto di sviluppare il metodo CB controlled. In questo caso sono i nodi interni ad irrigidire la struttura, nel caso delle ruote potrebbero essere altri nodi, ad esempio i nodi di contatto, ma l'importante è sapere come arginare il problema e questo metodo, almeno in termini di frequenze naturali, sembra andare bene.

Non verranno fatte ulteriori prove sulla travetta free-free perché sarebbero prove molto simili a quelle viste per CB base, ma si può confermare la stessa dipendenza dal numero di nodi master e dal numero di modi addizionali selezionati. Anche con questo metodo inoltre si perde l'affidabilità dei risultati se si analizzano le frequenze riferite ai modi maggiori di r .

8.2.2 Applicazione sulla travetta vincolata

Adesso si può passare all'analisi della travetta vincolata, si comincia con l'analisi degli spostamenti. La prova 1 è la seguente:

Grandezza	Numero
Nodi master	36
Nodi osservabili	36
Nodi slaves (meno nodi osservabili)	1728
Modi aggiuntivi selezionati	20
Gdl matrici ridotte	236 (108+108+20)

Tabella 30_Caratteristiche prima prova

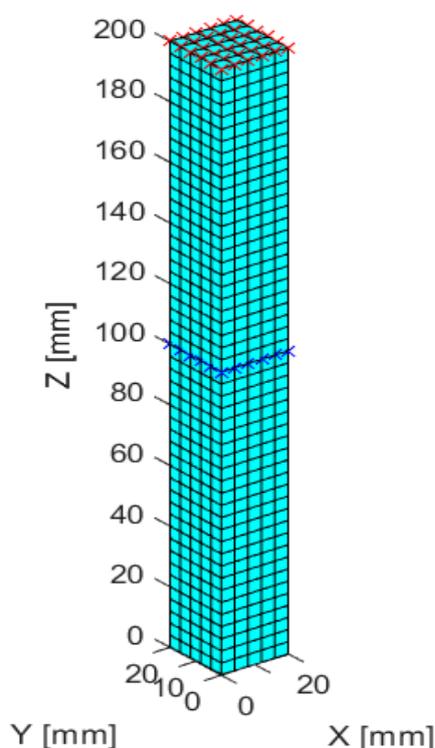


Figura 85_Rappresentazione nodi master (rosso) e nodi osservabili (blu)

Era stata fatta una prova con stesso numero di nodi master per il caso con CB base e si sono ottenuti errori assoluti in termini di spostamenti di 10^{-12} , come si può notare dalla figura seguente si ottengono risultati dello stesso ordine di grandezza, ma sembra che in questo caso ci siano errori leggermente più bassi. Sono state fatte altre prove con stessi nodi master, sempre rispetto alla riduzione con CB base, variando il numero di nodi osservabili, ma in alcuni casi si assiste ad un miglioramento, in altri c'è un peggioramento.

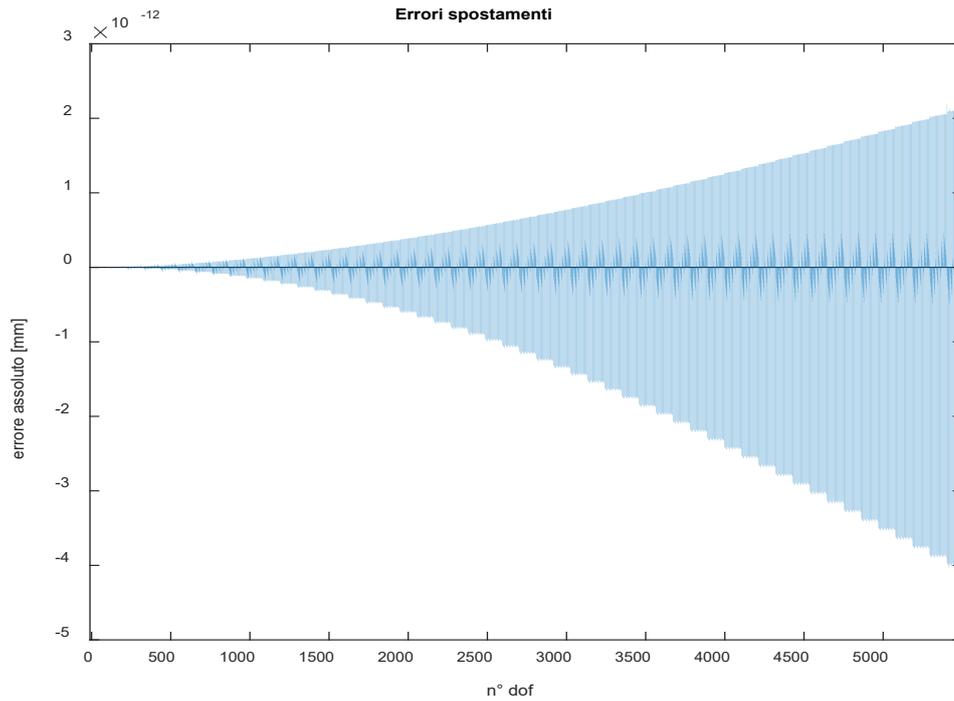


Figura 86_ Errori assoluti rispetto al modello intero

Anche per questo modello è stato confermato che i nodi su cui è applicata la forza devono essere necessariamente nodi master, è stata fatta una prova invertendo nodi master e nodi osservabili della prova precedente e si sono ottenuti errori decisamente maggiori rispetto all'ultima prova.

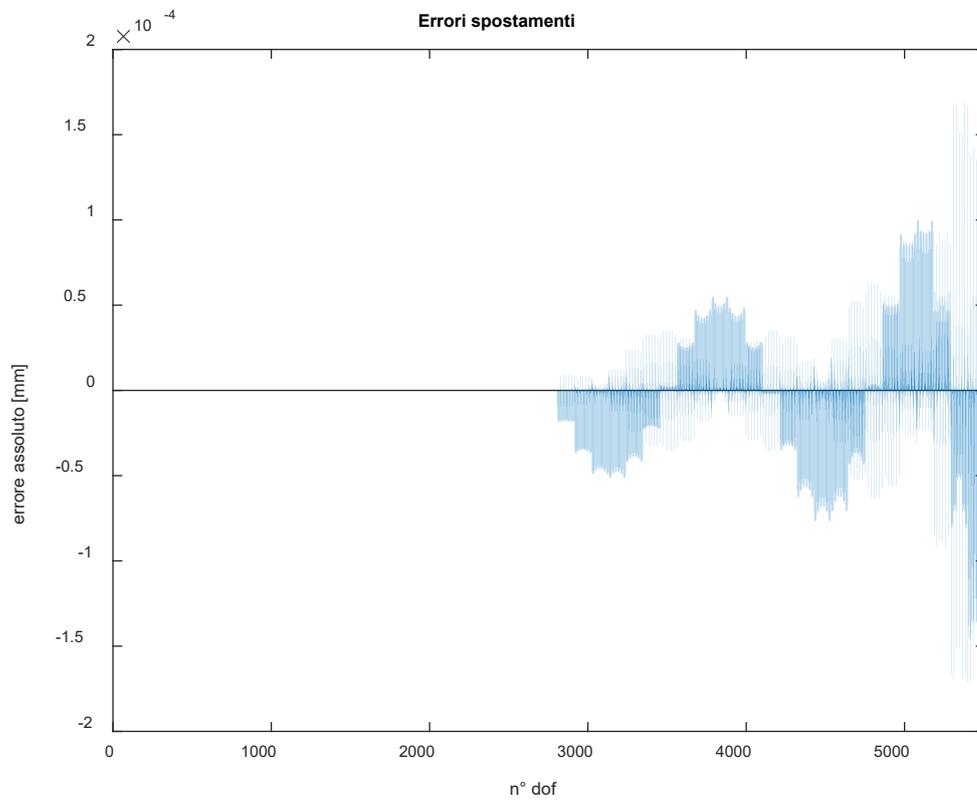


Figura 87_ Errori assoluti rispetto al modello intero

Sono state fatte altre prove con i due metodi per cercare di capire se ci sono particolari nodi che portano con sé un errore se considerati come nodi master, ma se considerati come nodi osservabili si risolve la situazione. Non sono stati trovati nodi che hanno questo comportamento, mentre ciò succedeva per l'analisi modale. Ad ogni modo l'obiettivo è studiare le ruote, che sono una struttura molto differente dalla trave, non si sa quindi se nelle ruote possa emergere un problema del genere, ciò verrà verificato nel prossimo capitolo.

Si passa all'analisi modale, per cui principalmente verrà fatto il confronto con CB base, per la prima prova per cui è stata fatta l'analisi degli spostamenti è stata condotta l'analisi modale, per poter fare il confronto con i risultati della prova con CB base avente stessi nodi master.

Le prime quindici frequenze naturali (esclusi i modi rigidi) assumono i seguenti valori:

N° modo	Frequenza (kHz) CB controlled	Frequenza (kHz) CB base
1	0,4067	0,4067
2	0,4067	0,4067
3	2,4395	2,4395
4	2,4395	2,4395
5	3,5225	3,5225
6	6,3327	6,3327
7	6,4280	6,4280
8	6,4280	6,4280
9	10,572	10,572
10	11,691	11,691
11	11,691	11,691
12	17,641	17,641
13	17,854	17,854
14	17,854	17,854
15	19,030	19,030

Tabella 31_Confronto frequenze naturali con CB base

Quindi nel caso vincolato a differenza di quanto si era visto per quello non vincolato, aggiungere nodi osservabili non porta con sé nessun peggioramento nei risultati delle frequenze naturali. Si ricorda che per il caso con CB base era stata fatta una prova avente come nodi master gli stessi nodi di questa prova più i nodi osservabili della stessa e si era notato un evidente peggioramento dei risultati. Ci si chiede ora se sostituendo i nodi master di quella prova con nodi osservabili porti o meno ad un miglioramento dei risultati. Anche in questo caso vengono riportate le prime quindici frequenze naturali (i valori di CB controlled sono gli stessi della prova precedente ovviamente).

N° modo	Frequenza (kHz) CB controlled	Frequenza (kHz) CB base
1	0,4067	0,4067
2	0,4067	0,4067
3	2,4395	2,4398
4	2,4395	2,4399
5	3,5225	3,5224
6	6,3327	6,3338
7	6,4280	6,4259
8	6,4280	6,4282
9	10,572	10,574
10	11,691	11,697
11	11,691	11,766
12	17,641	17,647
13	17,854	17,825
14	17,854	17,847
15	19,030	19,255

Tabella 32_Confronto con CB base

La risposta alla domanda posta in precedenza è positiva: nella maggior parte dei casi il modello ridotto con CB controlled è meno rigido, ma soprattutto questo modello riesce a mantenere la simmetria dei risultati (cioè alcune frequenze sono uguali a due a due), ciò è molto importante perché è una caratteristica del modello intero, dunque è bene mantenerla nel modello ridotto.

Per la prova 1 (nodi master in corrispondenza del carico, nodi osservabili in $z=100$) è stata condotta l'analisi del MAC, ottenendo anche in questo caso un risultato abbastanza soddisfacente.

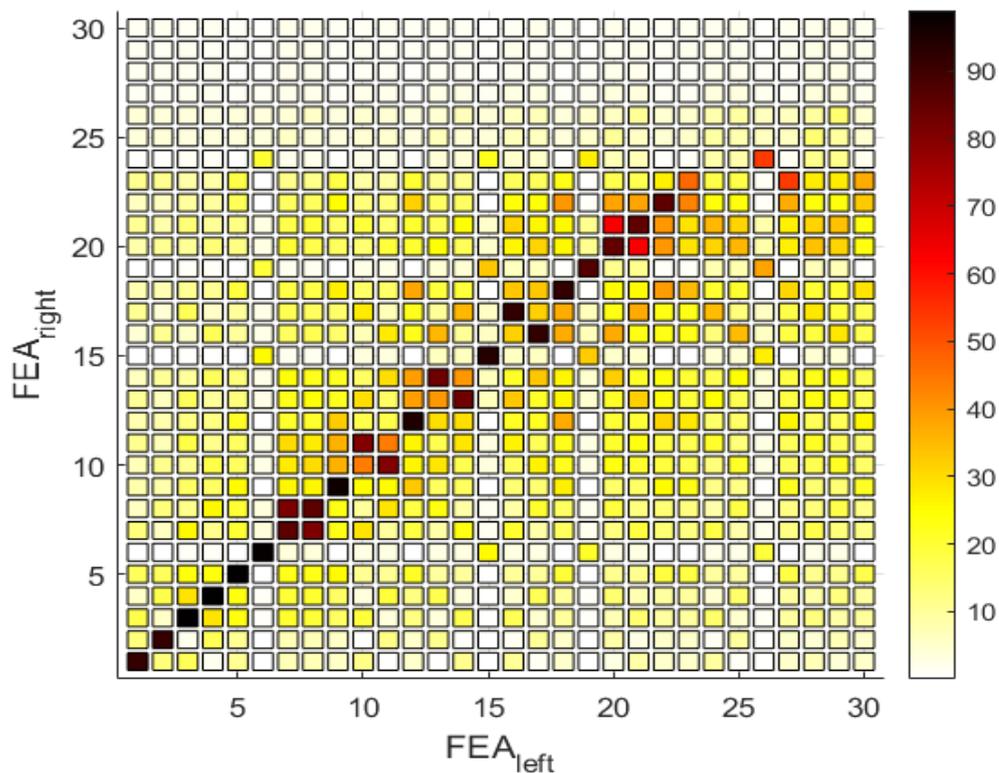


Figura 88_MAC prova 1

Anche in questo caso è stato fatto il confronto con la prova col metodo di CB base avente stessi nodi master, da questa prova, che costituisce una verifica più rigorosa, si conferma che il metodo base funziona meglio, e che quindi i nodi osservabili vanno aggiunti solo in caso di necessità. In base alla seguente formula è stata calcolata la differenza fra i valori sulle diagonali dell'uno e dell'altro metodo:

$$dif = d_{CB} - d_{CB,c}$$

Poiché i termini sulla diagonale indicano una precisione percentuale, anche *dif* sarà espresso in percentuale. Se esso assume valore positivo il CB base ha maggior precisione, se è negativo viceversa.

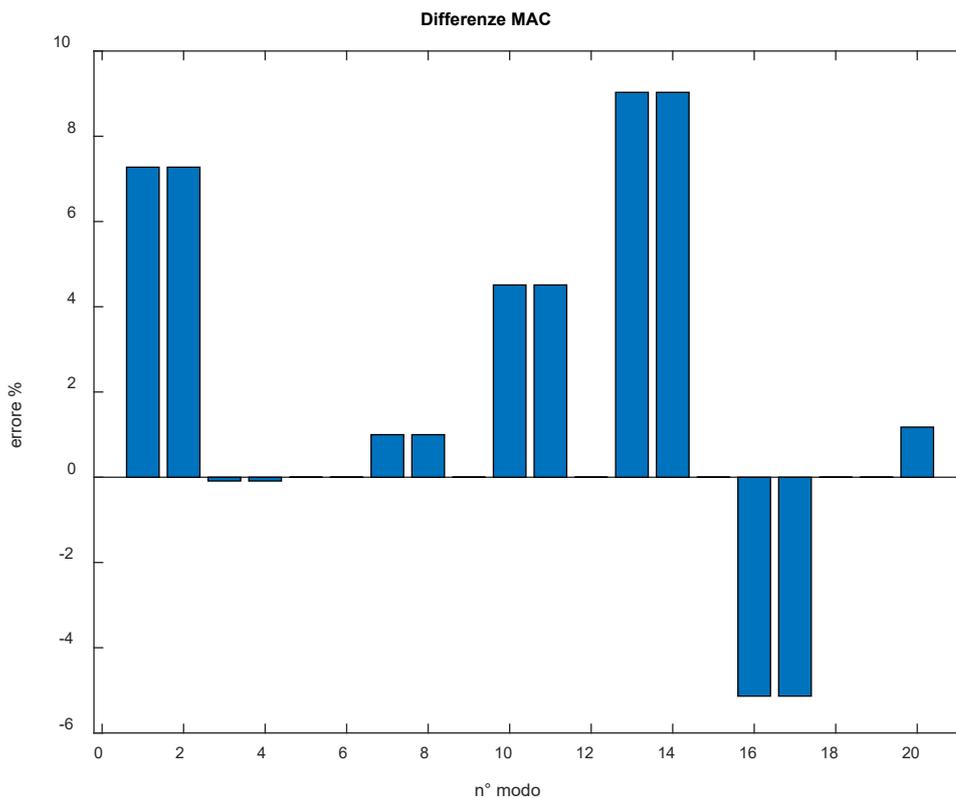


Figura 89_Confronto MAC fra i due metodi

La carrellata sui vari metodi di riduzione è giunta al termine. In conclusione si può dire che il metodo CB controlled è un buon "rimpiazzo" per il CB base. Ciò sta a significare che il CB base funziona meglio nella maggior parte dei casi, ma qualora si trovassero nodi che se considerati master irrigidiscono particolarmente la struttura, essi possono essere tranquillamente considerati nodi osservabili e portano ad un miglioramento dei risultati come si è visto in alcune prove precedenti. Nella trave i nodi che portano queste conseguenze sono principalmente quelli interni nelle ruote potrebbero essere altri, l'obiettivo è quindi capire quali nodi considerare master e quali osservabili, in modo da riuscire ad ottenere la riduzione ottimale. Ad ogni modo se non si dovessero avere problemi relativi al fatto che si stanno considerando troppi nodi come master, converrebbe utilizzare sempre CB base. Qualora si fosse interessati agli spostamenti di alcuni nodi di particolare interesse, ma non si ha necessità di considerarli master, conviene applicare semplicemente la (74) dopo aver fatto la riduzione con CB base.

9 Applicazione metodi di riduzione alle ruote

Com'era stato ampiamente anticipato nella trattazione occorre applicare i metodi di riduzione alle ruote per poter risolvere le equazioni di Newmark. Verranno fatte delle prove col metodo di Craig-Bampton base e altre col metodo di Craig-Bampton controlled. La riduzione delle matrici può essere fatta sulle due ruote singolarmente o sulla struttura composta dall'ingranaggio complessivo, inoltre si potrà pensare di sommare la K_{cont} alla matrice di rigidezza complessiva prima di effettuare la riduzione, o in alternativa sommare alla matrice già ridotta i valori di rigidezza puntuali dei nodi di contatto. Per fare ciò è necessario che i nodi di contatto siano considerati come master, dunque quest'operazione non si potrebbe fare neanche nel caso in cui i nodi di contatto venissero considerati nodi osservabili con la riduzione di CB controlled.

Quanto detto si può spiegare partendo dal presupposto che sommare le molle ai nodi di contatto dopo la riduzione e ridurre la matrice di rigidezza comprensiva della K_{cont} deve ovviamente portare allo stesso risultato. La K_{cont} presenta termini non nulli soltanto nelle righe o colonne riferite ai nodi di contatto, ragion per cui, immaginando di ridurre la matrice di rigidezza totale ($K_t + K_{cont}$) la Φ_{fix} e la Φ_{flex} non saranno modificate dai valori della K_{cont} , a patto che i nodi di contatto siano nodi master, poiché essa andrà a modificare soltanto la sottomatrice K_{mm} , che a sua volta non influenza sulla Φ_{fix} e sulla Φ_{flex} . La sottomatrice K_{mm} infatti verrà moltiplicata solo per la matrice identità, dunque che la K_{cont} si sommi prima o dopo è completamente ininfluente. Se i nodi di contatto sono nodi osservabili però la K_{cont} non si può sommare dopo la riduzione perché se immaginassimo di sommarla prima della riduzione essa modificherebbe la Φ_{fix} e la Φ_{flex} (in quanto i nodi osservabili vengono trattati come slaves inizialmente) dunque si avrebbe una matrice ridotta completamente diversa. Se i nodi di contatto fossero slaves ovviamente è pure necessario sommare la K_{cont} prima della riduzione anche perché pur volendo non ci sono termini della matrice ridotta riferiti ai nodi di contatto stessi.

In generale i nodi di interfaccia di una struttura devono essere considerati nodi master, prima di applicare il rigid joint tutti i nodi a contatto con l'albero sono nodi di interfaccia, successivamente all'applicazione essi vengono condensati in un unico nodo centrale, dunque ci sarà un unico nodo di interfaccia (avente sei gradi di libertà). I nodi di contatto in alcune prove verranno considerati nodi master, in altre no: il vantaggio principale di averli come master è che si possono sommare dopo la riduzione i valori della K_{cont} , com'è stato ampiamente discusso in precedenza, ciò potrebbe essere importante perché permette di applicare valori di rigidezza delle molle diversi senza re-effettuare la riduzione della matrici; di contro però utilizzare come nodi master i nodi di contatto porta con sé una certa imprecisione come si vedrà in seguito. Ulteriori nodi master verranno selezionati tramite il "MoGeSec" (Modal-Geometrical Selection Criterion for Master Nodes), questi nodi verranno definiti nodi master addizionali e sono molto utili per migliorare la precisione della riduzione. Nel caso in cui oltre a questi nodi si ha il bisogno di selezionarne altri come nodi master questi ultimi si possono selezionare fin da subito e verranno scelti nodi addizionali in funzione dei nodi master selezionati, in modo da mantenere per quanto possibile lo stesso criterio di selezione.

Nella seguente tabella si riassumono le caratteristiche della struttura analizzata.

Elementi singole ruote	Numero
Nodi totali	85500 + nodo centrale
Gdl totali (dimensioni K e M)	256500 + 6 gdl nodo centrale
Gdl dopo applicazione rigid joint (dimensioni Kt e Mt)	240306 (compresi 6 gdl nodo centrale)
Nodi di contatto totali	552
Nodi interni (applicazione rigid joint)	5400

Tabella 33_Caratteristiche singole ruote

Tutte le prove che si faranno d'ora in avanti sono riferite alla prima posizione angolare, ma per le altre posizioni si avrebbero risultati molto simil. Unica differenza fra una posizione e l'altra è l'applicazione di una certa rotazione, ciò comporta matrici diverse da una posizione all'altra soprattutto per via dell'effetto del rigid joint. Poiché le matrici intere sono diverse occorre effettuare la riduzione delle matrici per ogni diversa posizione del mesh-cycle.

9.1 Prove su una singola ruota

La prima prova è stata fatta sul pignone prima dell'applicazione del rigid joint, applicando il metodo di CB base. Come nodi master sono stati selezionati alcuni nodi (uno ogni dieci) a contatto con l'albero di trasmissione, cioè quelli su cui successivamente verrà applicato il rigid joint. Non sono stati selezionati tutti i nodi di interfaccia per non avere dimensioni della matrice ridotta eccessivamente grandi.

Grandezza	Numero
Nodi master	540
Nodi slaves	84960
Modi addizionali selezionati	20
Gdl matrici ridotte	1640

Tabella 34_Caratteristiche prima prova

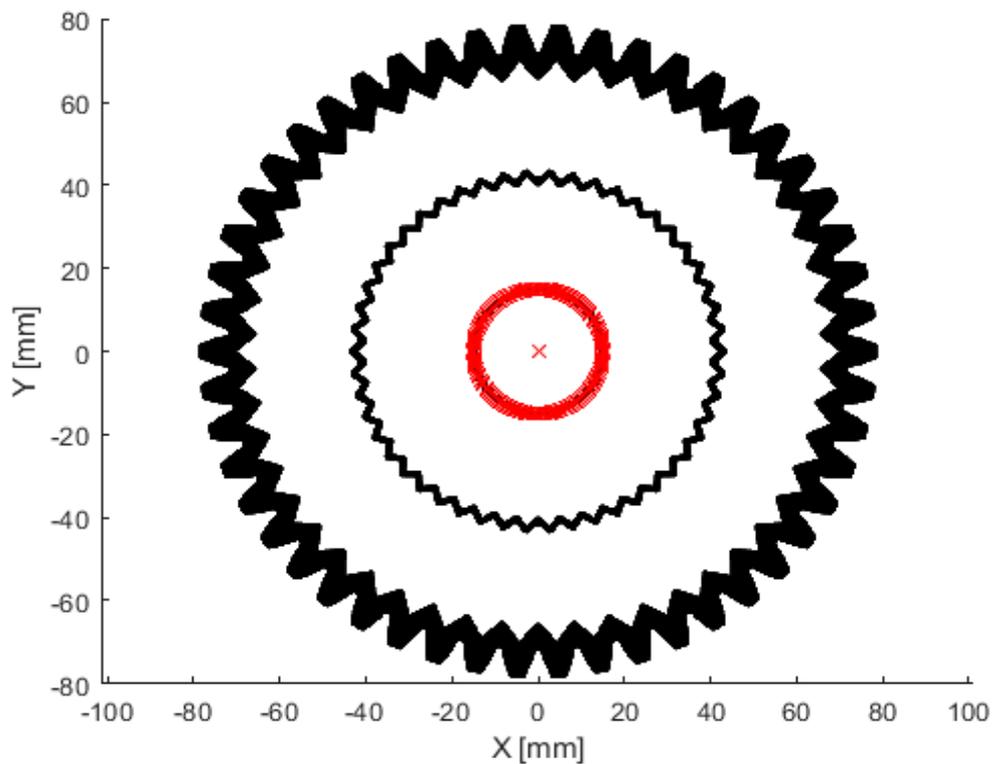


Figura 90_Nodi master selezionati

Le prime venti frequenze naturali (esclusi i modi rigidi) assumono i seguenti valori:

N°modo	Frequenza (kHz) Craig-Bampton	Frequenza (kHz) modello intero
1	4,0501	4,0500
2	4,0504	4,0500
3	6,5860	6,5851
4	8,9427	8,9427
5	8,9427	8,9427
6	12,225	12,105
7	12,228	12,105
8	14,209	13,808
9	14,217	13,809
10	15,228	14,207
11	15,252	14,207
12	17,822	17,808
13	19,800	17,808
14	19,821	19,788

Tabella 35_Confronto con modello intero

Per queste frequenze naturali è stato calcolato l'errore relativo come:

$$\text{errore \%} = \frac{f_{CB} - f_I}{f_I} \cdot 100$$

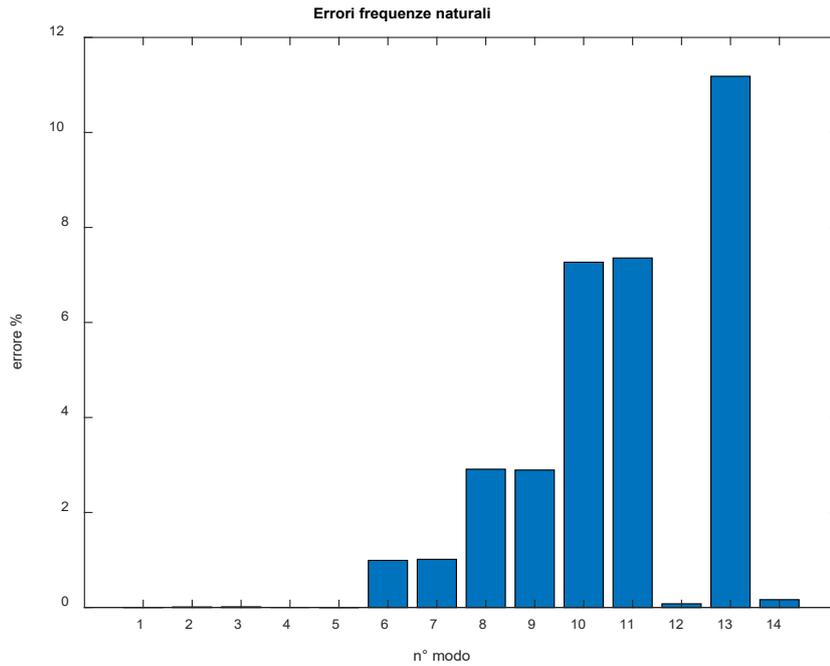


Figura 911_Errori relativi rispetto al modello intero

Si tratta di errori bassi, ma non così tanto quanto si era visto per la trave, probabilmente sarebbero più bassi se si prendessero tutti i nodi di interfaccia. Anche nelle ruote, comunque, il modello ridotto è sempre più rigido del modello intero e si avrebbero errori maggiori per modi superiori.

Il MAC derivante da questa riduzione è abbastanza buono ed è rappresentato di seguito:

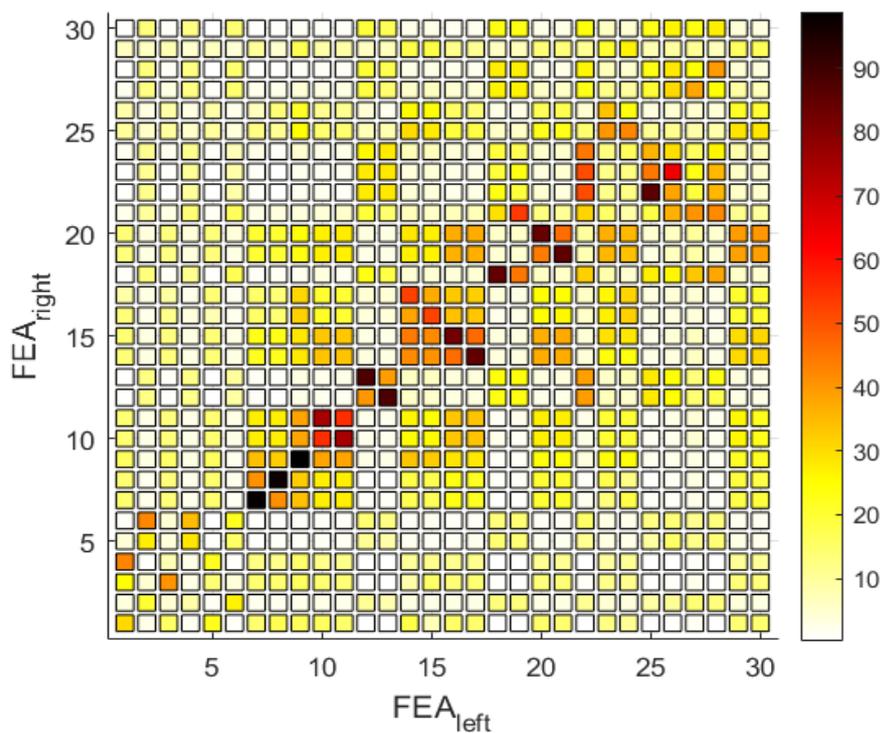


Figura 922

Ovviamente si potrebbe effettuare la stessa prova sulla condotta e si otterrebbero risultati simili per via della similarità fra le due ruote.

La seconda prova è stata fatta sempre sul pignone completamente libero ma in seguito all'applicazione del rigid joint. In questo caso c'è un solo nodo di interfaccia, per cui vanno aggiunti altri nodi master per continuare ad avere una buona riduzione. A tale scopo viene chiamato in causa il MoGeSec, col quale vengono selezionati un numero di nodi master addizionali pari a otto.

Grandezza	Numero
Nodi master addizionali	8
Gdl master totali	30
Nodi slaves	80092
Modi addizionali selezionati	20
Gdl matrici ridotte	50

Tabella 36__Caratteristiche prova

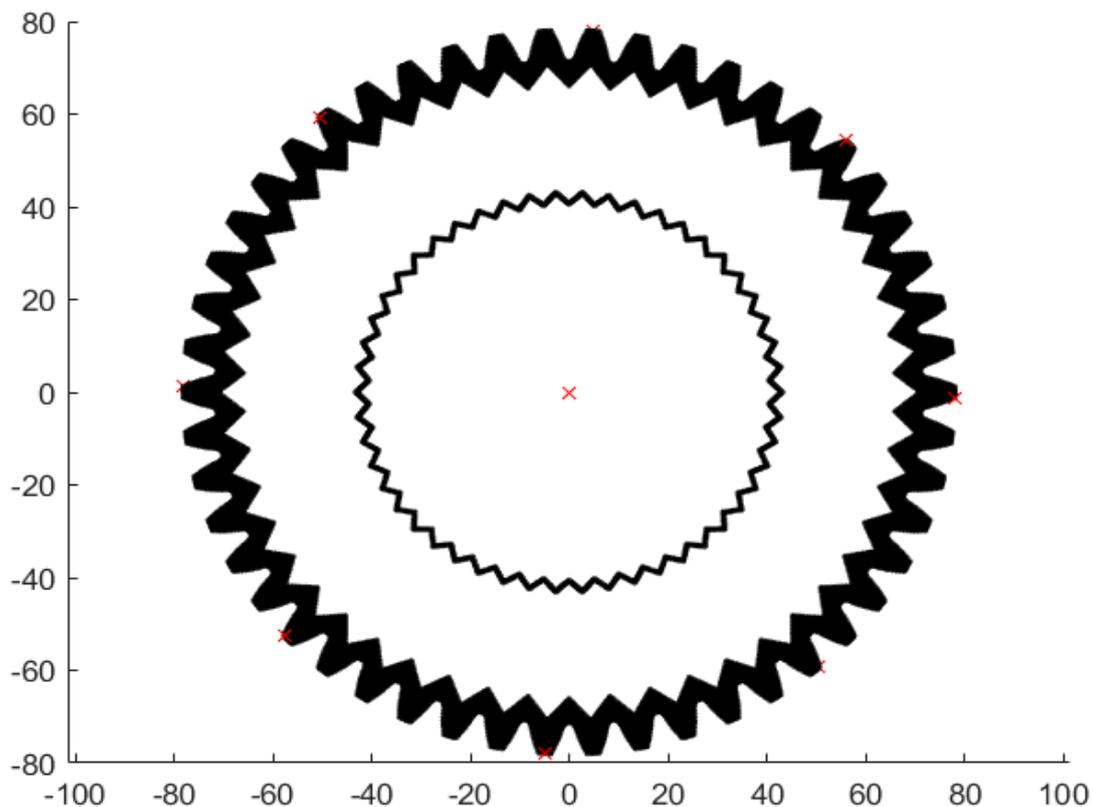


Figura 93_Rappresentazione nodi selezionati

In questa figura sono raffigurati gli otto nodi addizionali, da notare che per questione di simmetria metà di essi si trovano dalla parte delle z positive e metà dalla parte opposta. Inoltre per ricavare da questi nodi il massimo delle informazioni modali essi vengono scelti il più possibile distanti l'uno dall'altro. Il nodo centrale è il nodo in cui sono condensati i nodi a contatto con l'albero in seguito all'applicazione del rigid joint e anch'esso, come detto in precedenza, viene considerato come un nodo master.

Le prime venti frequenze naturali (esclusi i modi rigidi) assumono i seguenti valori:

N°modo	Frequenza (kHz) Craig-Bampton	Frequenza (kHz) modello intero
1	4,9848	4,9848
2	4,9848	4,9848
3	9,1010	9,1010
4	9,1010	9,1010
5	9,4824	9,4784
6	14,443	14,443
7	14,443	14,443
8	18,604	17,955
9	18,605	17,955
10	20,104	18,355
11	20,104	18,355
12	20,982	18,604
13	21,072	18,604
14	23,440	20,104

Tabella 37__ Confronto con modello intero

In questo caso la riduzione risulta migliore del caso precedente, in quanto viene mantenuta la simmetria fra alcuni autovalori nel modello intero (frequenze uguali a due a due).

Per queste frequenze naturali è stato calcolato l'errore relativo come:

$$\text{errore \%} = \frac{f_{CB} - f_I}{f_I} \cdot 100$$

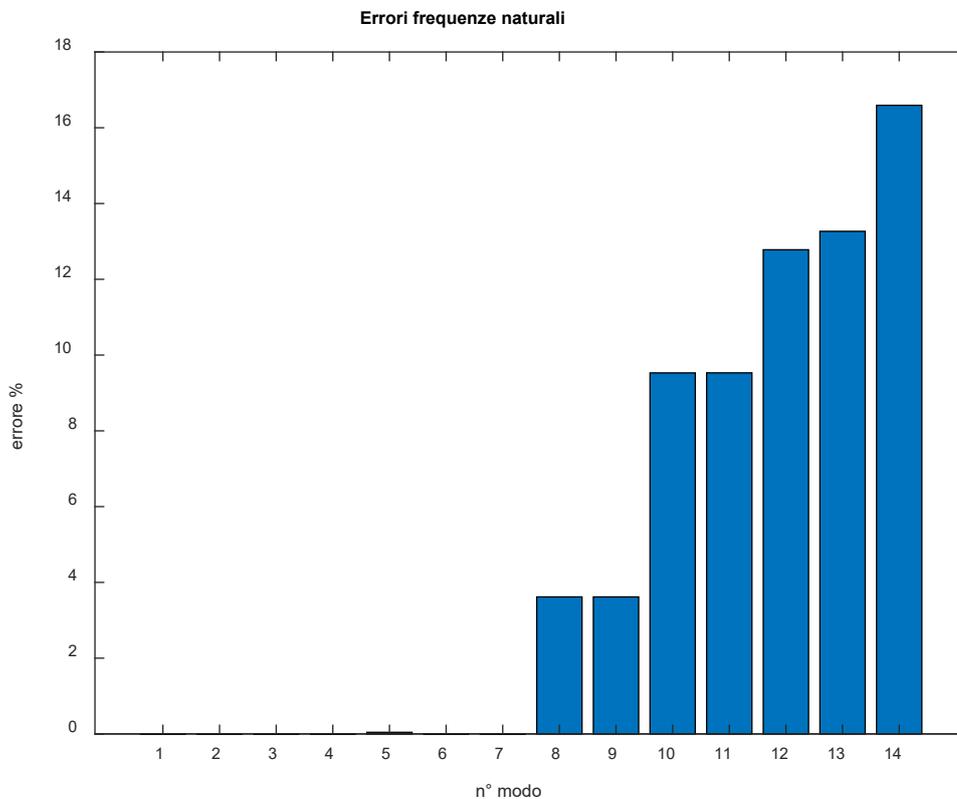


Figura 94_ Errori relativi rispetto al modello intero

Come si può notare gli errori relativi tendono ad aumentare al crescere del modo analizzato, ma si tratta comunque di un ottimo risultato in quanto la matrice ridotta è più di mille volte più piccola della matrice intera. Dunque al costo di un errore massimo del 16% circa si riuscirebbe ad avere dimensioni decisamente ridotte, in ogni caso anche per le ruote vale quanto visto per la trave, cioè si potrebbero aumentare i nodi master per diminuire gli errori relativi.

Si può confermare la bontà della riduzione, dunque soprattutto l'ottima scelta dei nodi master tramite il MoGeSec, col seguente MAC.

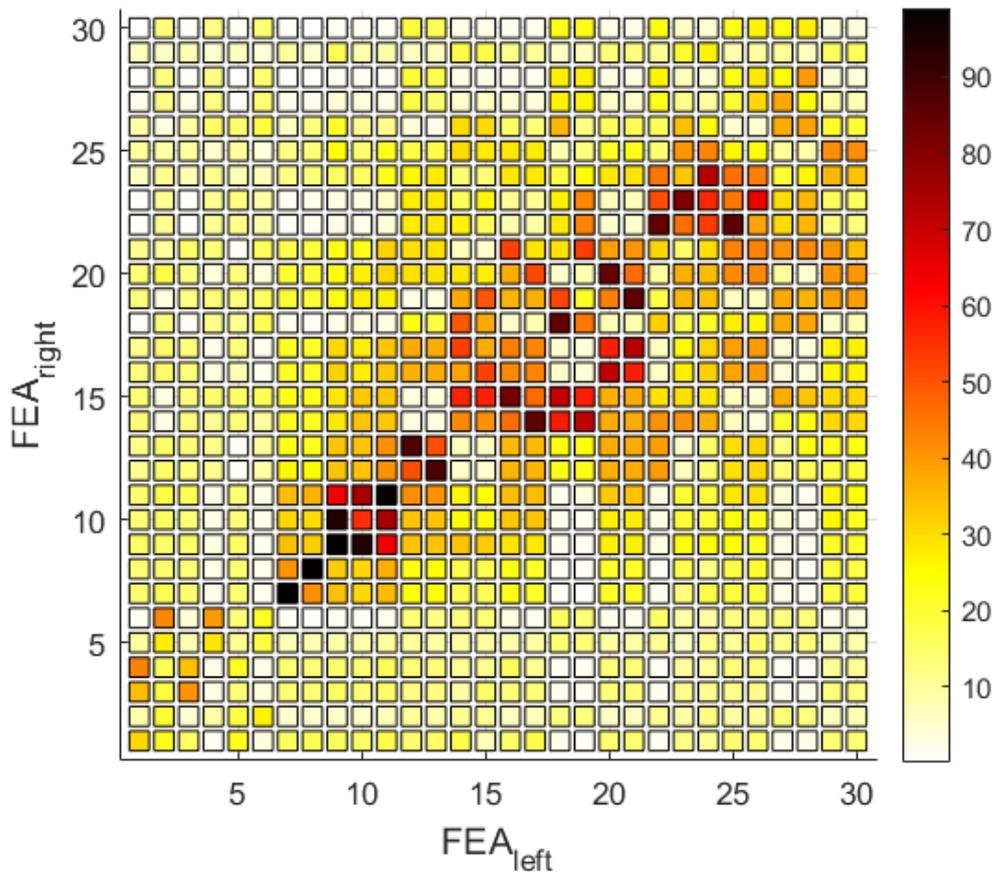


Figura 95

Si può notare che anche la matrice quattro per quattro intorno al quindicesimo modo rappresenta una buona corrispondenza fra modello intero e ridotto, poiché intorno a quel modo ci sono quattro frequenze naturali molto simili, come si può vedere dalla tabella, perciò i modi vengono invertiti. La stessa considerazione si poteva fare nella prova precedente.

L'ultima prova sulla singola ruota viene fatta vincolando la struttura su tutti i gdl del nodo centrale eccetto quello di applicazione della coppia. Per quest'applicazione viene fatta una prova con le stesse caratteristiche della precedente, l'unica differenza è la dimensione della matrice ridotta che passa da 50 a 45 poiché il nodo centrale ha un solo grado di libertà in questo caso. Una struttura del genere ha perciò un solo modo rigido, nella tabella seguente si riportano le prime 15 frequenze.

N°modo	Frequenza (kHz) Craig-Bampton	Frequenza (kHz) modello intero
1	4,0027	4,0027
2	4,0027	4,0028
3	4,4779	4,4479
4	4,9848	4,9848
5	4,9848	4,9856
6	9,1010	9,1010
7	9,1010	9,1010
8	10,778	10,778
9	10,778	10,778
10	14,443	14,443
11	14,443	14,876
12	18,605	18,604
13	18,605	18,611
14	20,104	20,104

Tabella 38_Confronto con modello intero

Nel caso vincolato la riduzione sembra ancora migliore, in questo caso tutti gli autovalori mantengono la simmetria e gli errori restano molto bassi anche per modi maggiori.

L'errore relativo si calcola come:

$$\text{errore \%} = \frac{f_{CB} - f_I}{f_I} \cdot 100$$

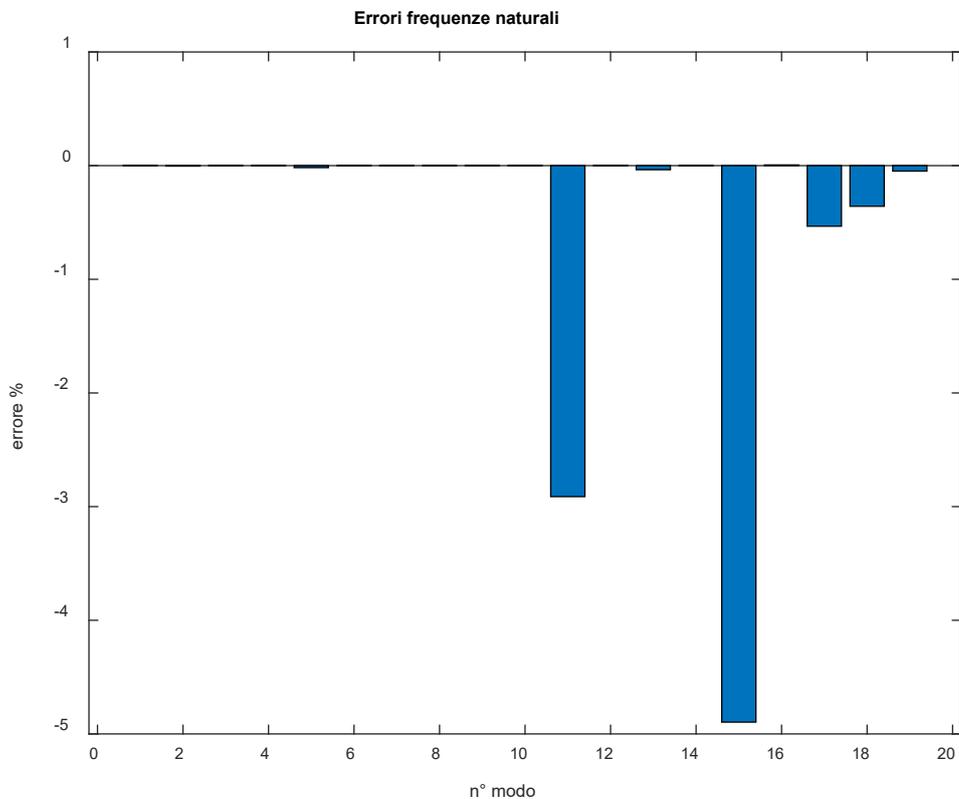


Figura 96_Errori relativi

Anche il MAC è molto preciso, a conferma di quanto visto per le frequenze.

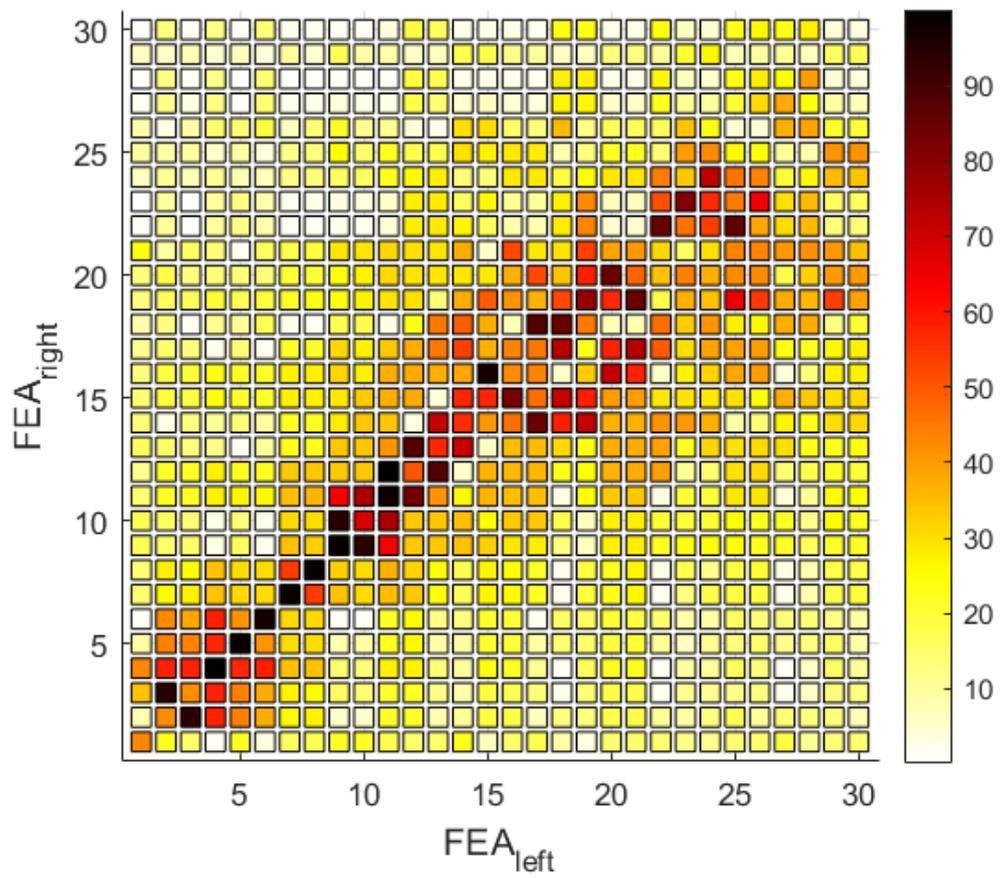


Figura 97

9.2 Applicazione sull'intero ingranaggio

A questo punto si può passare ad analizzare l'ingranamento complessivo. Verranno fatte principalmente due tipologie di prove, la prima selezionando fra i nodi master anche i nodi di contatto oltre al nodo centrale e ai nodi addizionali (se ce ne fosse bisogno); nella seconda prova invece i nodi di contatto verranno considerati come slaves.

9.2.1 Nodi di contatto come master

Per evitare di espandere gli spostamenti per ogni iterazione del metodo di Newmark è vantaggioso che per tutte le posizioni di un mesh-cycle si abbiano gli stessi nodi master, dunque in questa prima prova tutti i nodi di contatto per le venti posizioni analizzate vengono considerati nodi master. Nella prima prova non verranno utilizzati nodi addizionali, si aggiungeranno dopo in una prova.

Grandezza	Pignone	Condotta
Nodi master di contatto	112	102
Gdl master totali	337	306
Nodi slaves	79988	79998
Modi addizionali selezionati	20	20
Gdl matrici ridotte	357	326

Tabella 39_Caratteristiche prima prova

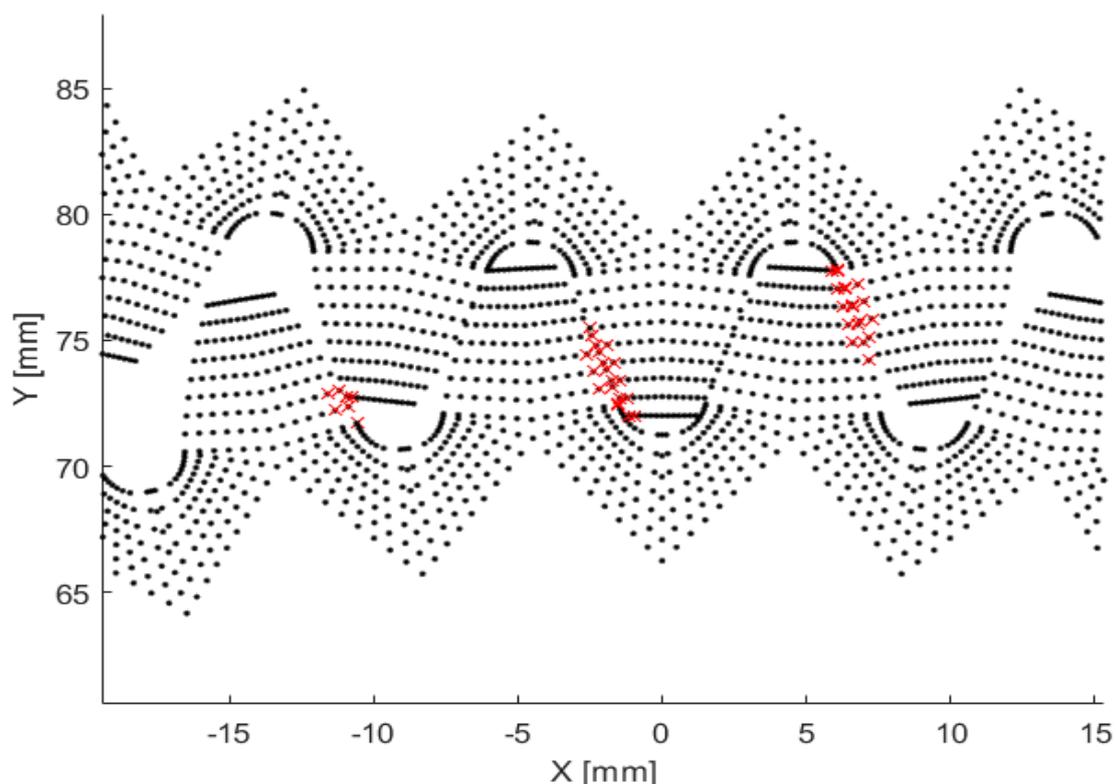


Figura 98_Rappresentazione nodi master di contatto

La riduzione in questo caso viene fatta separatamente per le due ruote e successivamente le matrici ridotte verranno assemblate. L'errore relativo, rappresentato nella figura seguente, verrà dunque calcolato rispetto al modello intero comprensivo delle due ruote, prima di sommare il contributo della rigidità di contatto.

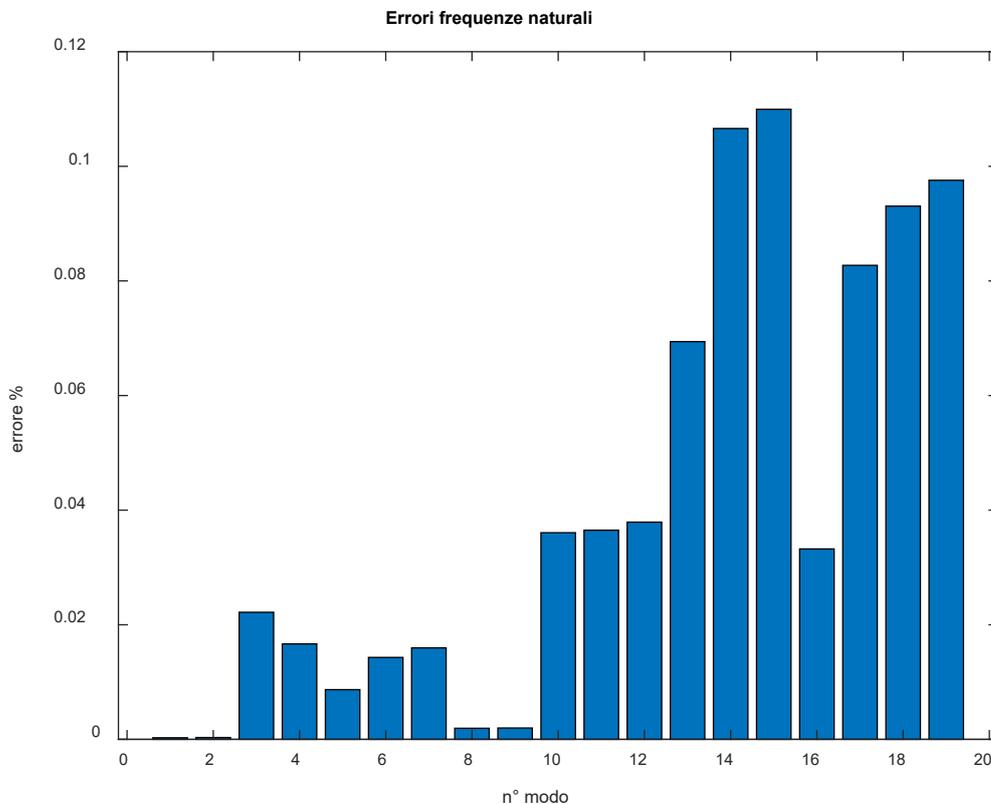


Figura 99_Errori rispetto al modello intero

Dal confronto fra le frequenze sembra un'ottima riduzione, in realtà fare un confronto del genere è poco indicativo per la struttura in esame. Infatti, poiché le frequenze naturali sono molto vicine fra di loro, come si può vedere dall'elenco seguente (in cui come al solito è escluso il modo rigido), è facile che il modello ridotto si avvicini al modello intero.

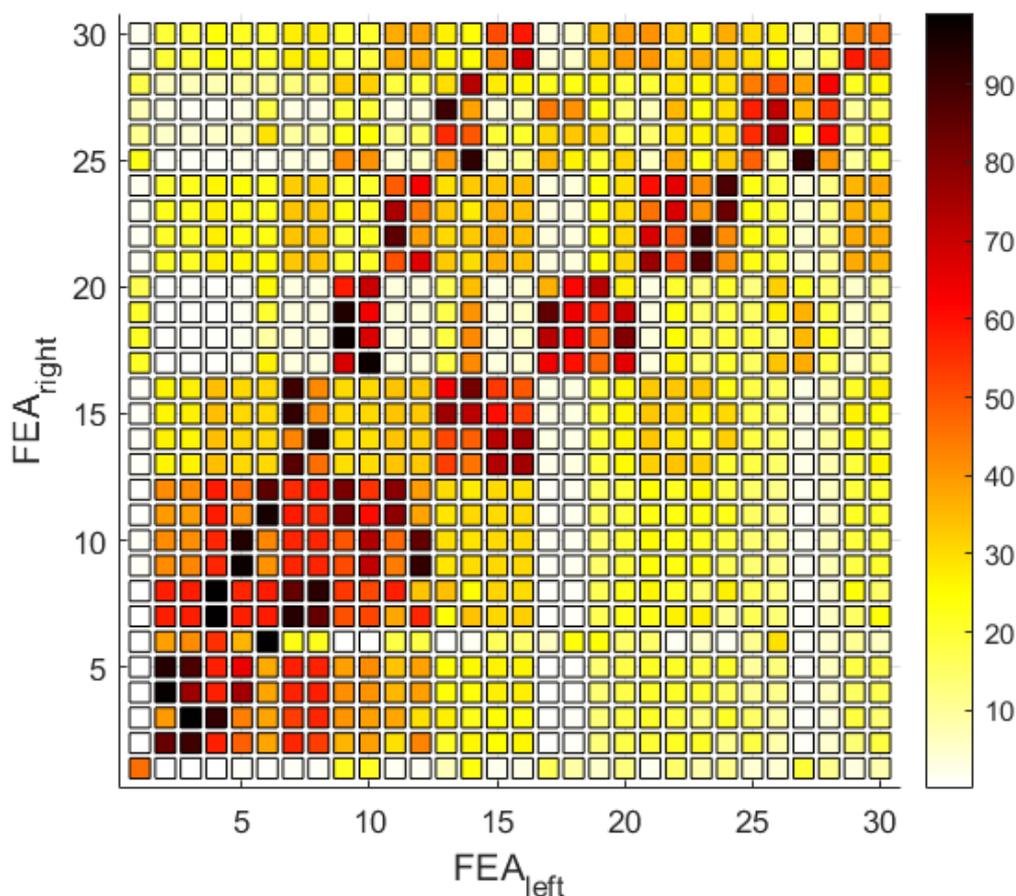
N°modo	Frequenza (kHz) modello intero
1	4,0027
2	4,0027
3	4,0027
4	4,0030
5	4,3285
6	4,4779
7	4,4779
8	4,9848
9	4,9848
10	4,9848
11	4,9849
12	9,1010
13	9,1010

14	9,1010
15	9,1010

Tabella 40_Frequenze modello intero

Queste frequenze in molti casi sono uguali a quattro a quattro poiché le due ruote sono identiche e dunque le frequenze che si ripetono due volte in una singola ruota, qui hanno molteplicità pari a quattro. In virtù di quanto detto d'ora in avanti per le prove sulla struttura intera si analizzerà soltanto il MAC.

In questo caso, come si può vedere dalla figura seguente, la riduzione non è molto buona, le celle scure sono presenti anche in zone lontane dalla diagonale per via del diverso andamento degli autovettori. Nonostante ciò la maggior parte delle celle sulla diagonale principale o al più sulle prime codiagonali sono di colore scuro, dunque gli stessi modi sono abbastanza simili fra di loro. Si può notare che poiché in tutto sono stati calcolati quaranta modi aggiuntivi la riduzione è precisa per tutti i modi analizzati nel MAC.



In generale l'errore si riduce all'aumentare del numero di nodi aggiuntivi, ma aumentarli troppo ha alcuni aspetti negativi. Per prima cosa si impiega tanto tempo a trovare un numero elevato di gdl aggiuntivi, in quanto essi derivano dall'analisi modale della struttura, perciò ad esempio trovarne 450 vorrebbe dire calcolare 450 autovalori e autovettori delle matrici intere, tra l'altro per avere un risultato migliore i nodi di contatto vengono considerati nel calcolo dei nodi aggiuntivi per cui calcolando 450 autovalori si otterrebbero un numero di dof aggiuntivi pari a

450 – n° gdl di contatto, perciò non si migliora di molto la precisione. Oltre a questo, per risolvere le equazioni di Newmark in breve tempo è ovviamente meglio avere matrici ridotte di dimensioni minori, anche al costo di una minor qualità. A scopo indicativo è stata fatta una prova avente stessi nodi master di contatto della prova precedente più alcuni nodi addizionali ricavati dal MoGeSec.

Grandezza	Pignone	Condotta
Nodi master di contatto	112	102
Nodi master addizionali	36	46
Gdl master totali	445	444
Nodi slaves	79952	79952
Gdl matrici ridotte	465	464

Tabella 41_Prova ggiungendo nodi addizionali

Nella pagina seguente è rappresentato il MAC e la struttura analizzata con i nodi master selezionati in rosso, si può notare l'aggiunta di un certo numero di nodi addizionali per ruota rispetto alla prova precedente.

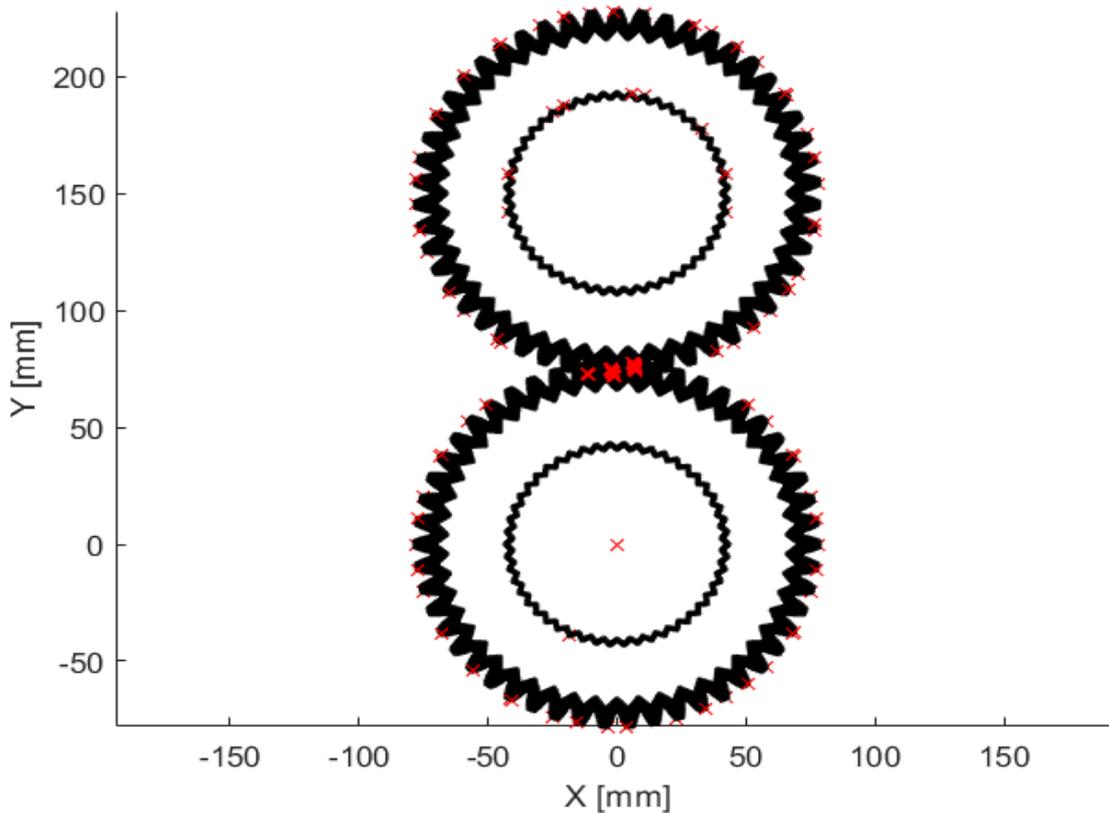


Figura 100_Rappresentazione nodi master addizionali e di contatto

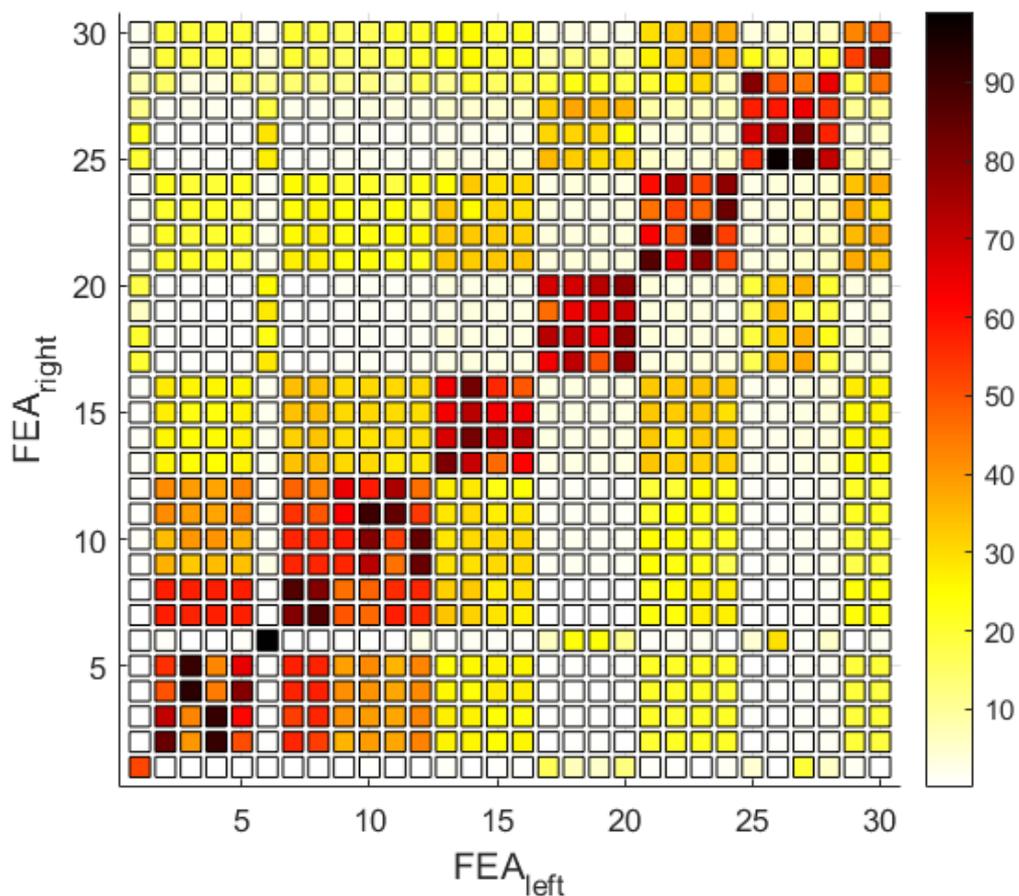


Figura 101

Come ci si aspettava questa riduzione è meglio della precedente, soprattutto non ci sono più celle scure nelle zone lontane dalle diagonali, a conferma di una maggior precisione. Inoltre anche il confronto fra gli stessi modi è leggermente più preciso, dunque nel caso in cui si decidesse di utilizzare una riduzione del genere, cioè selezionando tutti i nodi di contatto dell'intero mesh-cycle è consigliabile aggiungere qualche nodo addizionale, ma non in numero eccessivo per non rallentare troppo i procedimenti. In questo caso ne sono stati aggiunti una quarantina per ruota si potrebbe provare a vedere se aggiungendone di meno si raggiungerebbe una precisione simile, in quanto già in questo caso i tempi di calcolo non sono brevi.

Nel tentativo di avere dimensioni delle matrici ridotte minori si può pensare di non considerare come nodi master tutti i nodi di contatto dell'intero mesh-cycle, ma ad esempio si potrebbe pensare di considerare come nodi master soltanto i nodi di contatto di quella determinata posizione. Unico problema di quest'approccio è che per ogni iterazione del metodo di Newmark bisogna conoscere gli spostamenti dell'iterazione precedente, ad ogni modo per i nodi di contatto che si ripetono per due posizioni angolari consecutivi non si presenta questo problema, se invece i nodi di contatto della posizione successiva erano stati considerati nodi slaves basta applicare la formula (74) per il calcolo degli spostamenti dei nodi osservabili. Una volta ottenuti gli spostamenti, le velocità e le accelerazioni riferiti a questa iterazione, ma dei nodi di contatto dell'iterazione successiva, si può andare avanti.

Grandezza	Pignone	Condotta
Nodi master di contatto	36	36
Gdl master totali	109	108
Nodi slaves	80064	80064
Modi aggiuntivi selezionati	20	20
Gdl matrici ridotte	129	128

Tabella 42_Caratteristiche prova con solo i nodi di contatto di una posizione

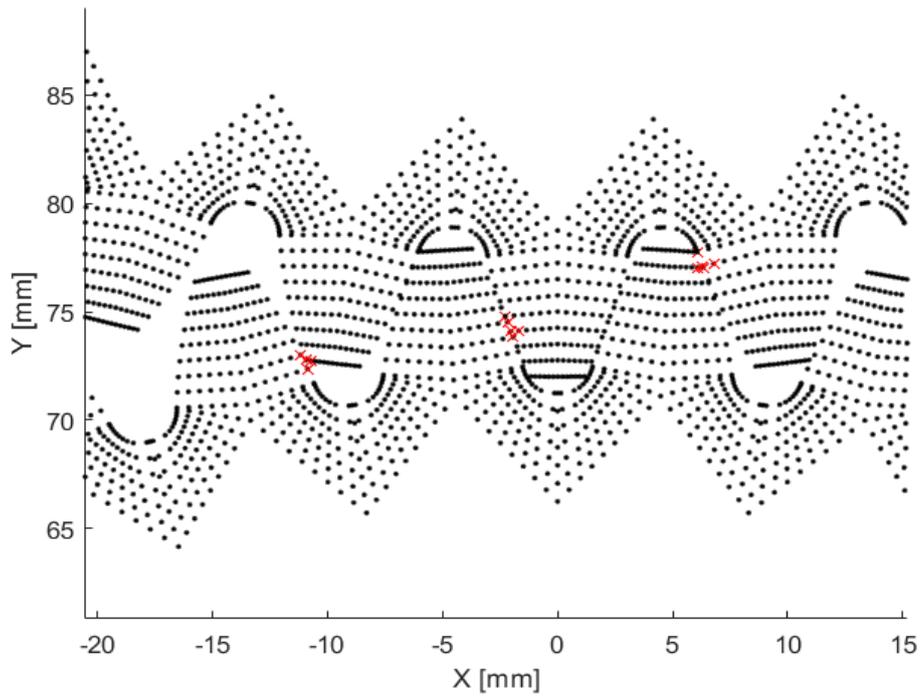


Figura 102_Rappresentazione nodi master di contatto

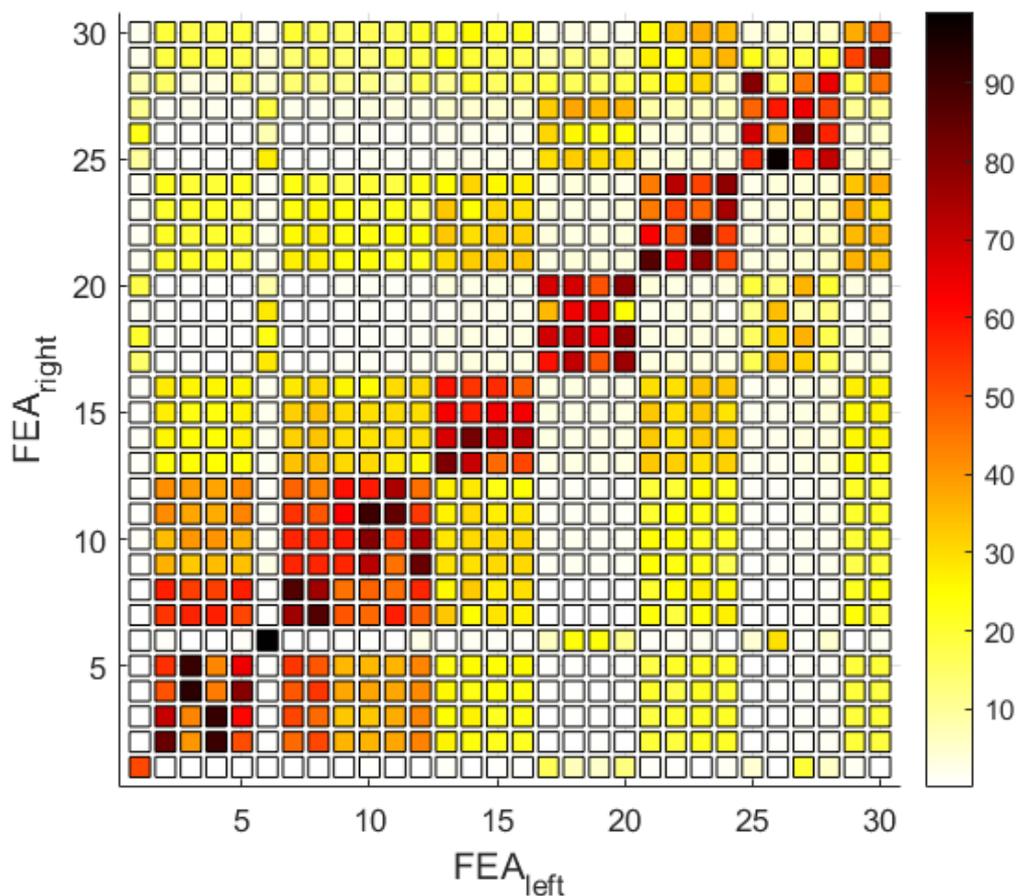


Figura 103

Come si può notare anche con un numero di nodi master minore si ottiene una buona riduzione, dunque si potrebbe pensare di utilizzare quest'approccio o in caso si potrebbe pensare di cambiare i nodi master ogni due posizioni o ad esempio ogni cinque. O ancora se si volesse migliorare la qualità della riduzione anche in questo caso si potrebbero aggiungere nodi master addizionali.

L'ultima prova che verrà fatta è la prova con CB controlled. Questo metodo potrebbe servire nel caso in cui si volessero utilizzare nodi master diversi per ogni posizione, come visto nella prova precedente. Il vantaggio di un approccio del genere sta nel fatto che non servirà applicare la formula per ogni ciclo in quanto gli spostamenti di interesse vengono calcolati in automatico. La prova che verrà fatta ha come nodi master tutti i nodi di contatto della prima posizione e come nodi osservabili i restanti nodi di contatto dell'intero mesh-cycle.

Grandezza	Pignone	Condotta
Nodi master di contatto	36	36
Gdl master totali	109	108
Nodi osservabili	76	66
Nodi slaves (no osservabili)	79988	79998
Modi addizionali selezionati	20	20
Gdl matrici ridotte	357	326

Tabella 43_Caratteristiche prove CB controlled

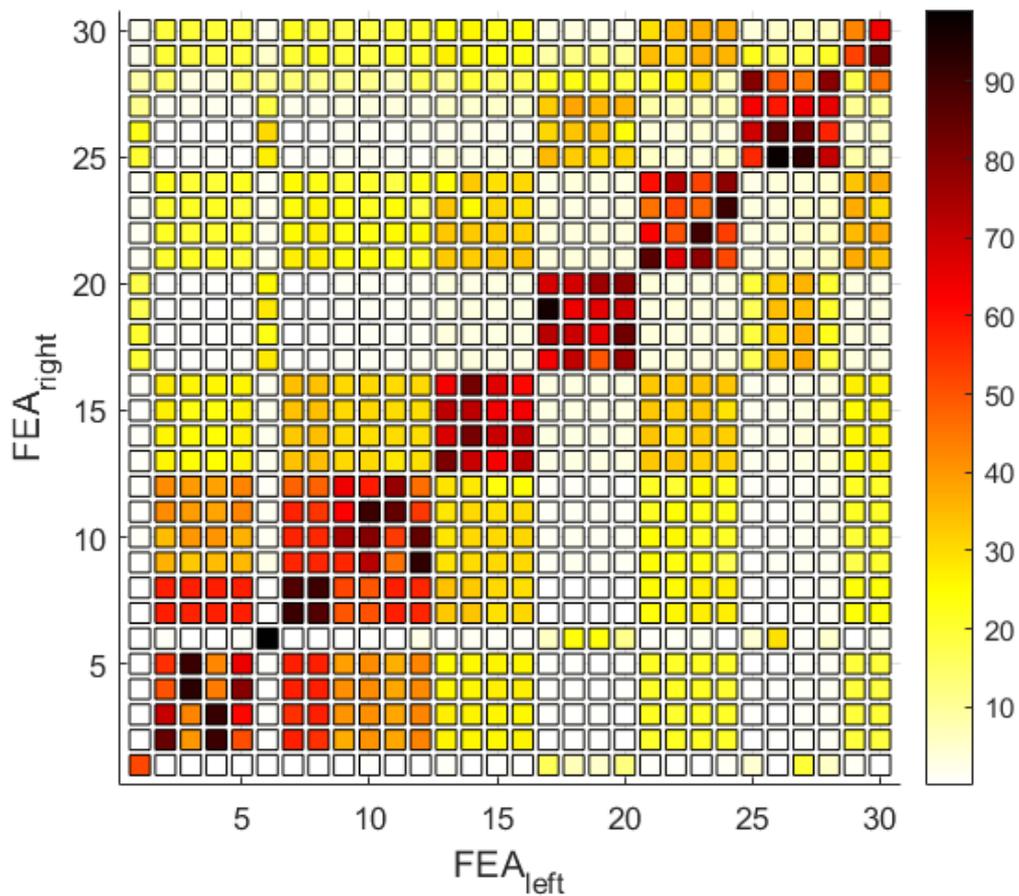


Figura 104

Il MAC di questa prova è molto buono, inoltre esso sembra meglio sia della prova con CB base avente come nodi master tutti i nodi di contatto dell'intero mesh cycle, sia della prova avente come nodi master solo quelli di contatto di una sola posizione. Dunque sembra che considerando alcuni nodi osservabili anziché master il modello si comporti meglio, ciò era stato visto anche per la trave in termini di frequenze ma non in termini di modi. Probabilmente perché questo modello ha molti più nodi dunque anche eliminando alcune righe dalle matrici Φ_{fix} e Φ_{flex} la matrice ridotta non ne risente molto. Se così fosse utilizzare un approccio del genere sarebbe molto vantaggioso, occorre soltanto selezionare nodi master e nodi osservabili diversi per ogni posizione ma non servirà mai espandere gli spostamenti in un determinato mesh cycle.

Il vantaggio di selezionare i nodi master come nodi di contatto è che le molle si possono attaccare alla struttura anche dopo aver ridotto le matrici e ciò permetterebbe ad esempio di modificare la rigidità di contatto senza effettuare una nuova riduzione. Perciò per condurre l'analisi degli spostamenti occorre ridurre le due ruote singolarmente, accoppiare le matrici ridotte e sommare la K_{cont} ai nodi di contatto di quella determinata posizione. Successivamente occorre accoppiare le matrici di trasformazione delle due strutture per poi moltiplicarla per il vettore forza opportunamente ordinato. Dopodiché verranno fatti i passaggi già visti più volte.

$$K_v = \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} F_{m1} \\ F_{s1} \\ F_{m2} \\ F_{s2} \end{bmatrix}$$

$$F_v = T' \cdot F \quad (80)$$

$$u_v = K_v \setminus F_v \quad (81)$$

$$u = T u_v \quad (82)$$

A questo punto occorre riordinare il vettore spostamento u e successivamente dividerlo nei vettori spostamento u_1 e u_2 , rispettivamente riferiti a prima e seconda ruota. Come ultimo passaggio occorre moltiplicare gli spostamenti ottenuti per la matrice di trasformazione del rigid joint, ottenendo finalmente gli spostamenti dell'intera struttura.

Non verranno riportati i grafici degli spostamenti ottenuti, poiché sono praticamente identici a quelli visti nella parte iniziale, ma sono stati calcolati gli errori assoluti rispetto al modello intero. La prova con cui è stata condotta quest'analisi è quella con CB controlled poiché come si è visto è una delle migliori, ma anche con altre prove si otterrebbero risultati molto simili.

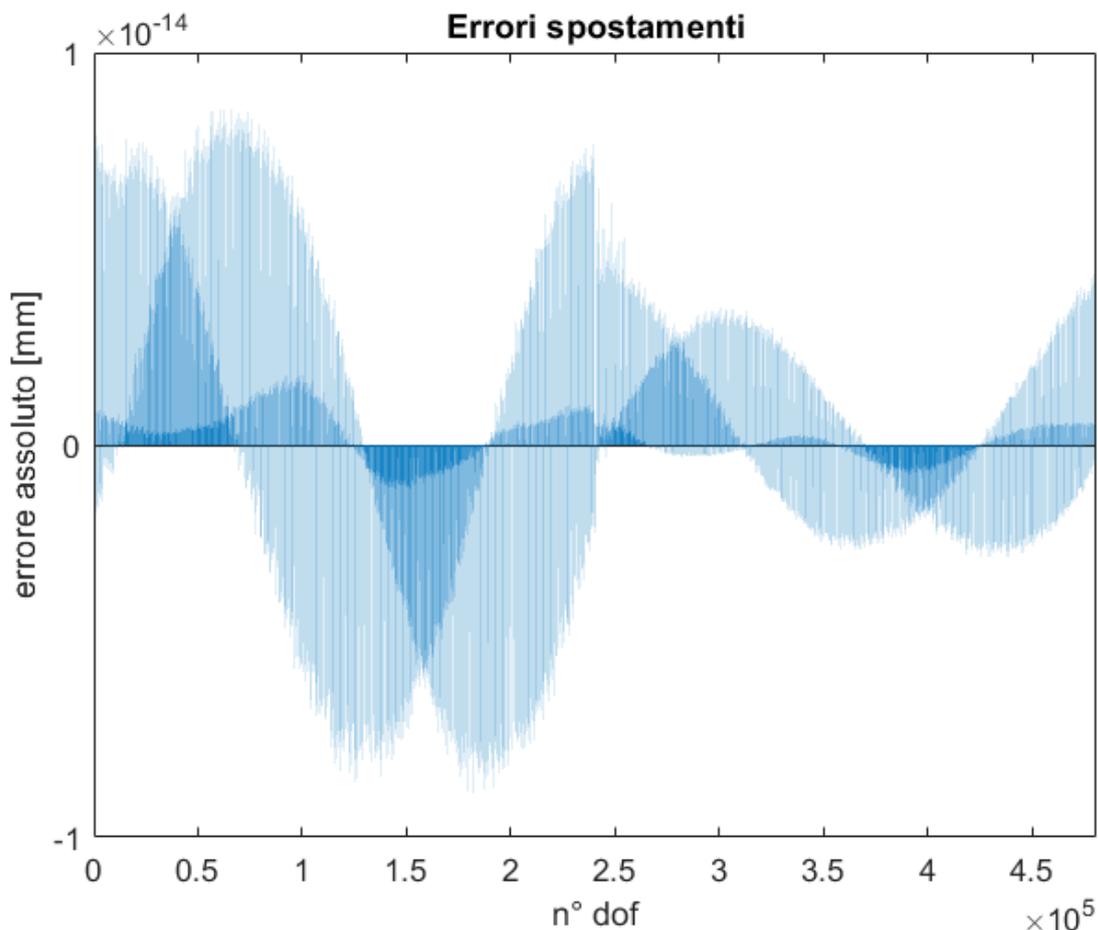


Figura 105_Errori assoluti rispetto al modello intero

In termini di spostamenti la riduzione è estremamente precisa, addirittura si sono ottenuti errori anche più bassi rispetto a quelli del modello trave.

Ad ogni modo se si dovesse avere la necessità di calcolare gli spostamenti di nodi di particolare interesse (come ad esempio i nodi che si trovano sulla cartella della ruota) basta applicare sempre la formula (76) $u_c = T_c u_s = T_c [\Phi_{fix} \Phi_{flex}] \begin{bmatrix} u_m \\ \eta \end{bmatrix}$, evitando dunque di re-espandere completamente gli spostamenti derivanti dalle matrici ridotte.

Di queste quattro prove viste finora si sconsiglia di usare la prima in quanto porta con sé i risultati peggiori e non porta grandi vantaggi rispetto alla prova col metodo di CB controlled che, come la prima tiene traccia di tutti i nodi di contatto ed ha i risultati migliori in assoluto. Inoltre poiché la riduzione va fatta per ogni posizione non è un problema cambiare nodi master, a patto che si conoscano gli spostamenti di tutti i nodi che saranno master per le altre posizioni. La seconda prova, cioè quella in cui sono stati aggiunti nodi addizionali è pure sconsigliata, non tanto per i risultati ottenuti, ma principalmente per i tempi di calcolo e le dimensioni delle matrici maggiori. La terza prova è quella avente le dimensioni minori, i risultati non sono della stessa qualità della prova con CB controlled, ma sono comunque buoni. Unica cosa che alla fine di ogni iterazione va utilizzata la formula (76) per il calcolo degli spostamenti dei nodi master per l'iterazione successiva. In questa trattazione non si dà una soluzione definitiva poiché applicando il metodo di Newmark potrebbero saltare fuori nuove esigenze che in questo lavoro non sono state considerate.

9.2.2 Nodi addizionali come master

La seconda tipologie di prove verrà fatta selezionando soltanto i nodi addizionali come nodi master, oltre ovviamente al nodo su cui è applicata la coppia, dunque i nodi di contatto saranno nodi slaves per tutte le prove. Per fare una scelta del genere occorre sommare la matrice K_{cont} prima di ridurre le matrici, dunque per questo set di prove le analisi e i confronti verranno fatti col modello intero comprensivo della rigidità di contatto. Poiché la K_{cont} collega le due strutture per utilizzare questo approccio occorre necessariamente effettuare un'unica riduzione per l'intero ingranaggio, in modo che la rigidità di contatto sia un contributo interno alla struttura.

Verranno fatte una serie di prove con diverso numero di nodi addizionali selezionati tramite il MoGeSec, la prima prova ha le seguenti caratteristiche:

Grandezza	Struttura intera
Nodi master addizionali	8
Gdl master totali	25
Nodi slaves	160192
Modi addizionali selezionati	20
Gdl matrici ridotte	45

Tabella 44_ Caratteristiche prima prova

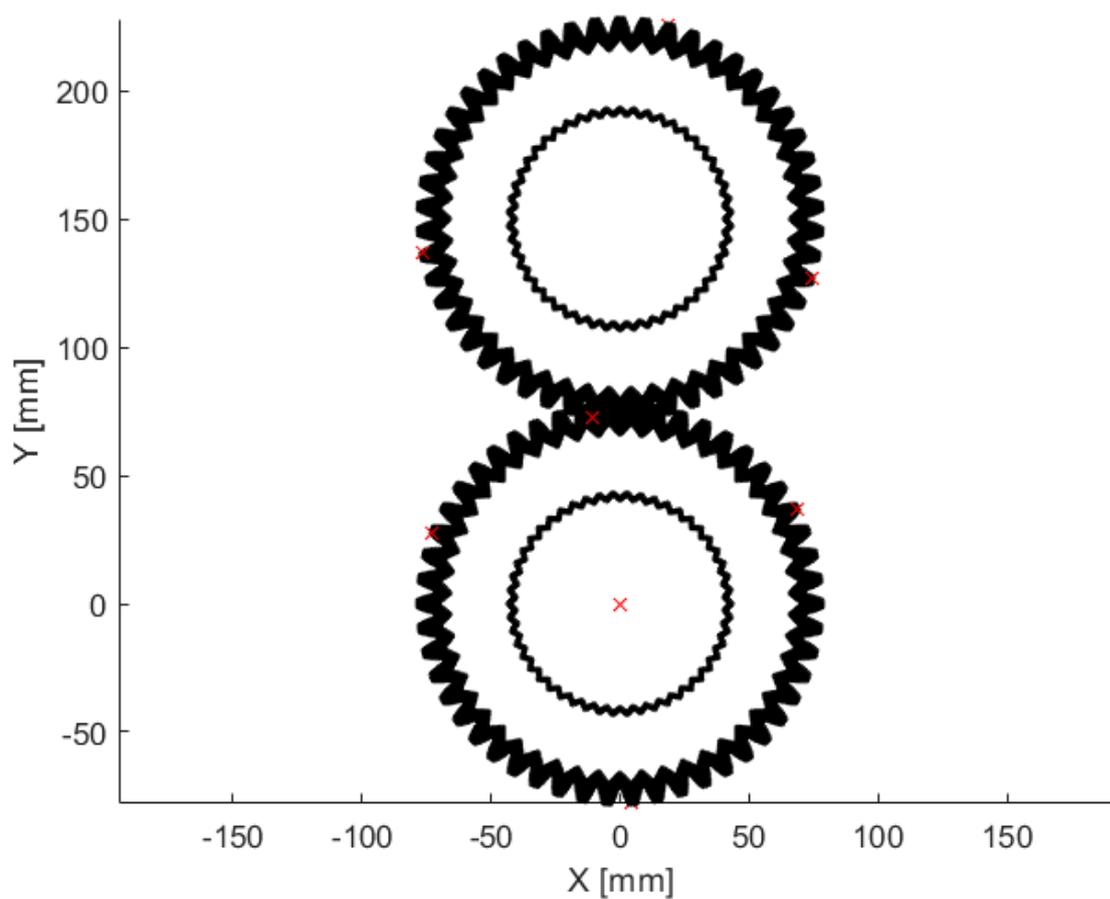


Figura 106_Rappresentazione nodi addizionali selezionati

Nella figura precedente sono rappresentati i nodi addizionali selezionati, si può notare come vengano selezionati il più possibile simmetrici e distanti fra di loro per ottenere maggior informazioni modali possibili.

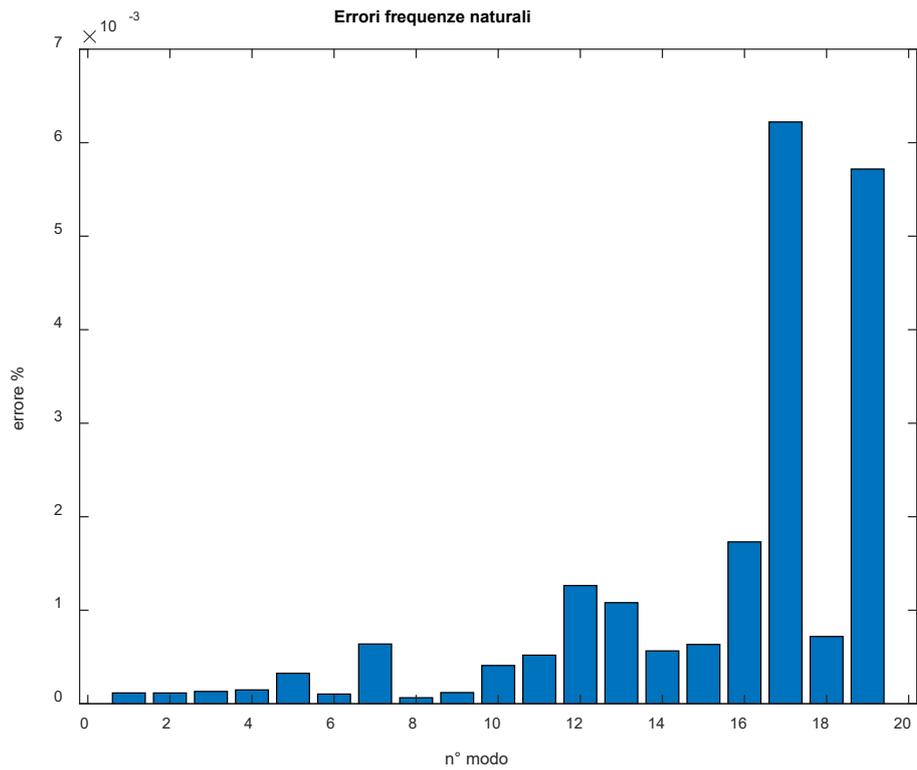


Figura 107_Errori rispetto al modello intero

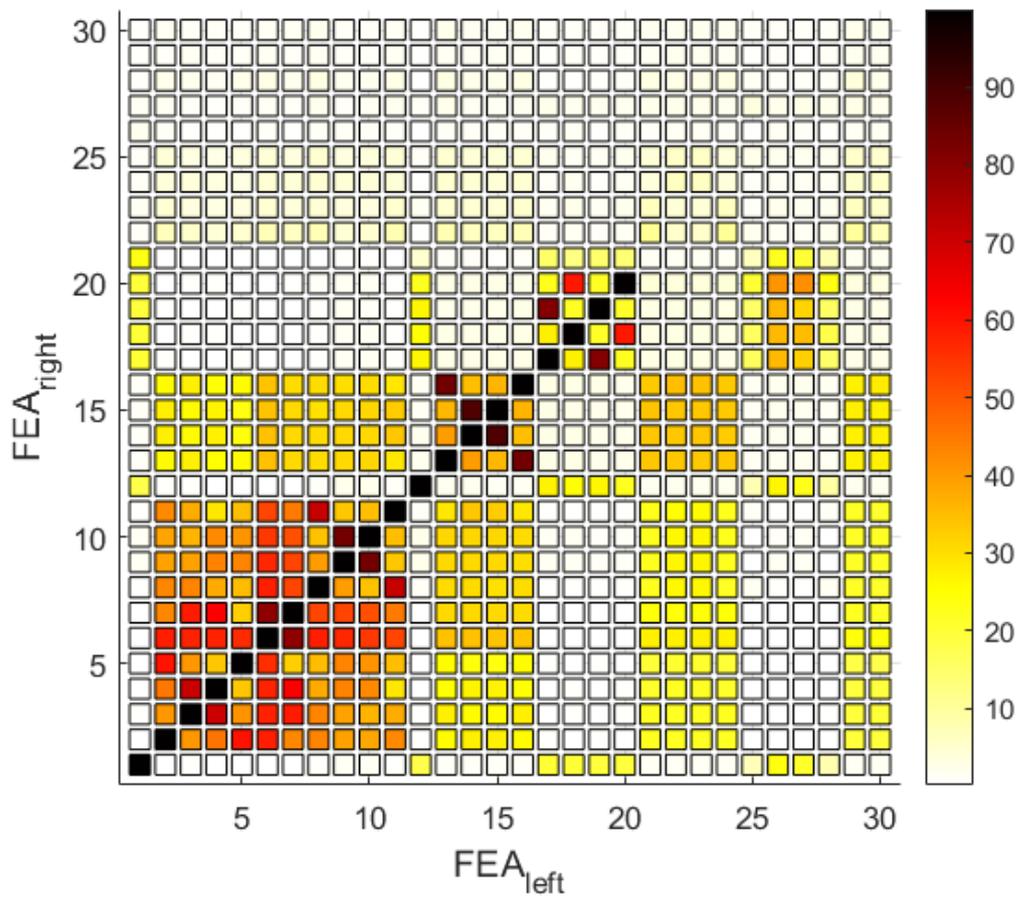


Figura 108_MAC prova

Sia il confronto fra le frequenze che il confronto fra i modi sono risultati di assoluta qualità, specialmente se si considera che le dimensioni delle matrici ridotte sono molto limitate. Addirittura si tratta di una riduzione di ben quattro ordini di grandezza e i risultati sono veramente soddisfacenti, ciò conferma la grande importanza nella scelta dei giusti nodi master per rappresentare la struttura e quindi del MoGeSec. Inoltre un altro motivo per cui si hanno risultati del genere è che in matrici così piccole i modi aggiuntivi hanno grande influenza sulla riduzione e dunque gli autovettori della matrice intera vengono riprodotti meglio. A scopo indicativo sono state fatte altre due prove come questa ma con un diverso numero di nodi aggiuntivi selezionati per vedere come cambiano i risultati in termini di autovettori.

	Nodi master aggiuntivi	Nodi slaves	Gdl matrici ridotte	r
Prova 1	28	160172	105	20
Prova 2	18	160182	75	20

Tabella 45_Caratteristiche prove

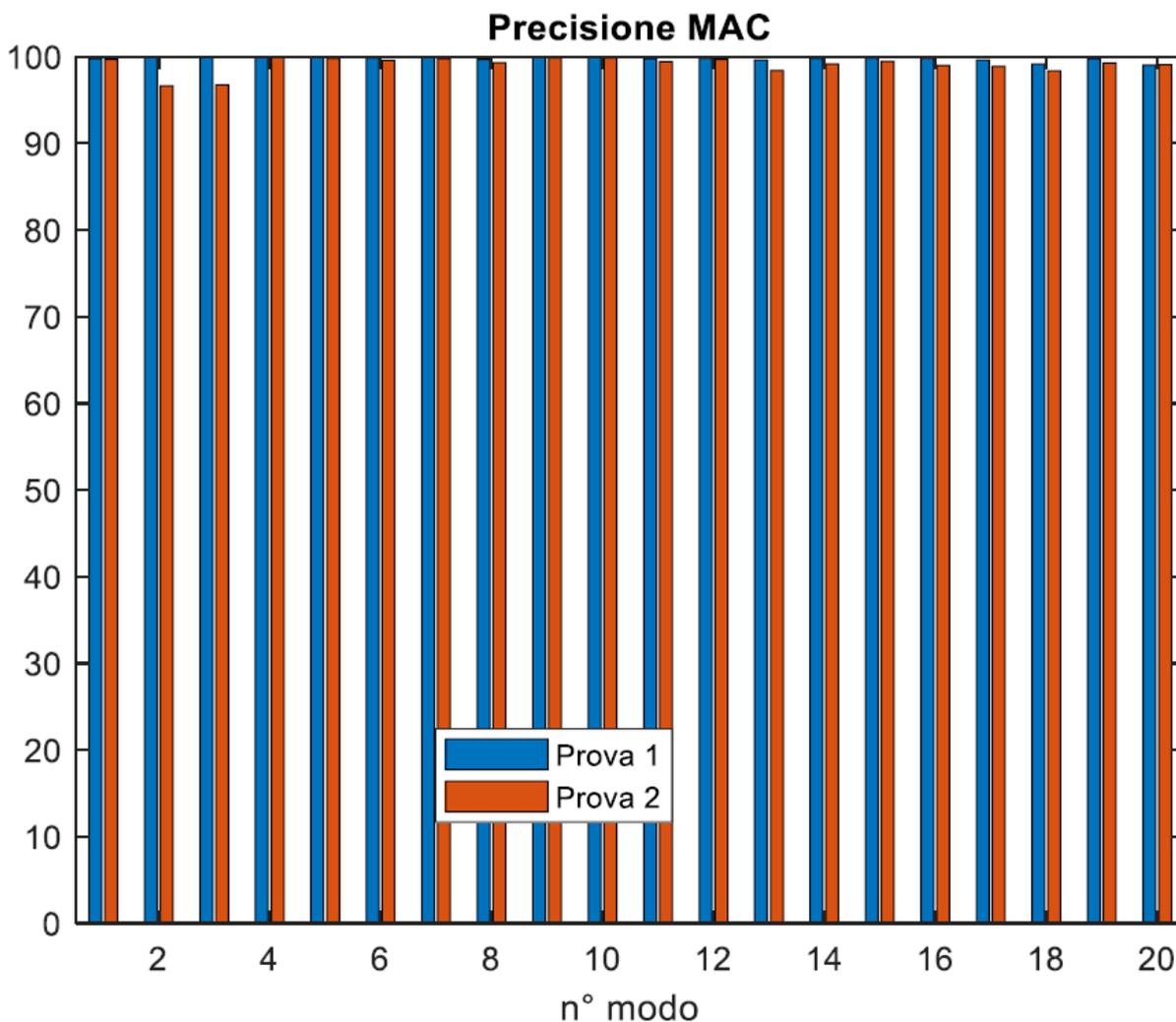


Figura 109_Precisione % MAC prima e seconda prova per diversi modi

Non si notano grandi cambiamenti al variare del numero di nodi addizionali, ciò vuol dire che in questi termini è ininfluenza la scelta di essi per la riduzione delle matrici, dunque se si dovessero avere determinate esigenze, come ad esempio utilizzare nodi master che vadano bene per tutte le posizioni del mesh-cycle, si potrebbe aumentare il numero di nodi addizionali. L'unico problema di questo metodo è il fatto che non si possono attaccare le molle dopo aver fatto la riduzione, ma ad ogni modo le matrici ridotte sono decisamente più piccole (un ordine di grandezza) di quelle ottenute selezionando come nodi master i nodi di contatto, dunque si potrebbero trarre enormi benefici da queste dimensioni particolarmente ridotte.

Gli spostamenti possono essere calcolati similmente a quanto visto in precedenza e si ottengono errori assoluti molto simili.

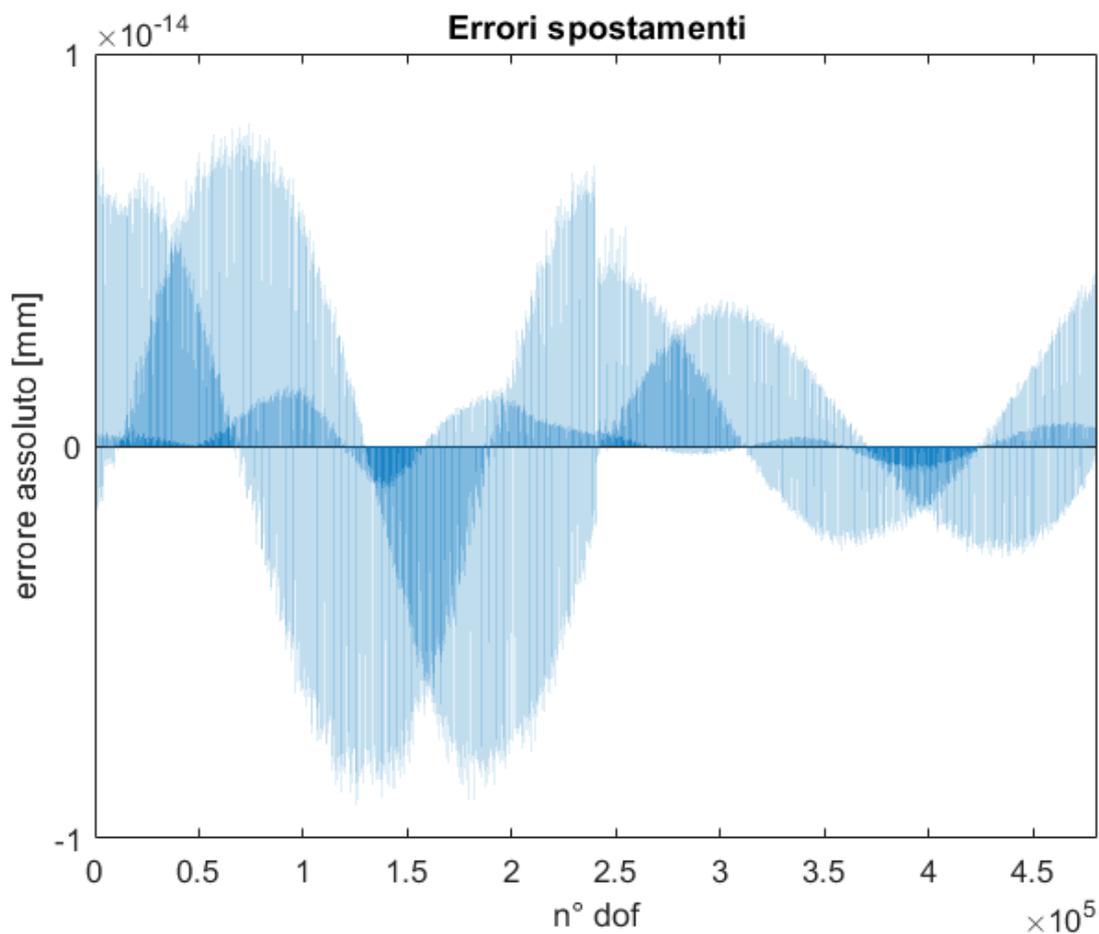


Figura 110_Errori rispetto al modello intero

L'applicazione dei metodi di riduzione alle ruote è terminata. Principalmente sono stati presentati due tipologie di riduzione diversi, per scegliere definitivamente quale sia il più idoneo all'applicazione si rimanda agli studi futuri sul modello analizzato, in questa trattazione ci si è limitati a dare una visione completa sui possibili modi di ridurre l'ingranaggio, presentando vantaggi e svantaggi dei vari casi. Il primo si basa sul considerare i nodi master come nodi di contatto, il vantaggio principale è che è più semplice variare la K_{cont} poiché si evita di effettuare nuovamente la riduzione delle matrici. Su questa prima tipologia sono stati visti diversi metodi e sono stati analizzati vantaggi e svantaggi di ognuno. La seconda tipologia per ridurre la struttura si basa sul non considerare i nodi di contatto come nodi master, ma considerare solo quelli addizionali, il grande vantaggio del metodo è che si hanno matrici di dimensioni di un ordine di grandezza inferiori rispetto a quelle ottenute con l'altro metodo, ciò significherebbe tempi di calcolo nettamente minori, in quanto il tempo di esecuzione del metodo di Newmark dipende dal quadrato delle dimensioni matriciali. Di contro la K_{cont} deve far parte della riduzione e ciò può comportare difficoltà di altro genere.

10 Conclusioni e lavori futuri

Si è giunti alla conclusione del presente lavoro. Nella prima parte principalmente si è verificato che il modello utilizzato per rappresentare l'ingranamento funzionasse bene e a tale scopo sono state fatte varie prove soprattutto in statica. La seconda parte è stata senza dubbio la parte più corposa della tesi, sono stati studiati nel dettaglio vari metodi di riduzione facendo varie prove in statica, ma soprattutto in dinamica, attraverso l'analisi modale, su una struttura più semplice come la trave. Questa parte della tesi è una parte a sé nel senso che contiene informazioni generali sui metodi di riduzione, potrebbe quindi essere utile per una visione generale di un particolare metodo e delle sue applicazioni. Oltre al metodo di Craig-Bampton e il metodo di Craig-Bampton controlled è stato ampiamente analizzato il metodo di Rubin che è un metodo di assoluto valore, ma purtroppo per via delle eccessive dimensioni delle matrici delle ruote non è compatibile con la nostra applicazione. Nella terza e ultima parte della tesi si è tornati a lavorare sulle ruote, sono stati applicati all'ingranaggio i due metodi di riduzione sopra citati e sono stati analizzati i risultati ottenuti. In questa terza parte principalmente sono stati fatti vari confronti fra i risultati derivanti dalle matrici ridotte e i risultati ottenuti dalle matrici intere, sono stati presentati vari modi per ridurre le matrici e ne sono stati presentati vantaggi e svantaggi. In questo lavoro non è stato detto esplicitamente quale metodo di riduzione sia meglio di un altro per quest'applicazione, come detto più volte il passo successivo sarà applicare le equazioni di Newmark alle matrici ridotte e sicuramente andando avanti si capiranno meglio pro e contro di ciascun metodo di riduzione presentato.

11 Riferimenti

1. Fabio Bruzzone (2020); *"2D/3D Nonlinear and Non-Hertzian Tooth Deflection Analysis for Compliant Gear Dynamics"*.
2. Fabian M. Gruber, Daniel J. Rixen (2016); Technical University of Munich, Institute of Applied Mechanics, Germany; *"Evaluation of Substructure Reduction Techniques with Fixed and Free Interfaces"*.
3. Dimitri Krattiger, Martin Zacharczuk, Martin Buck, Robert J. Kuether, Matthew S. Allen, Paolo Tiso, Matthew R. W. Brake (2017); *"Interface Reduction for Hurty/Craig-Bampton Substructured Models: Review and Improvements"*.
4. Elvio Bonisoli; Politecnico di Torino, Department of Mechanical and Aerospace Engineering; *"Reduction techniques"*