



**Politecnico
di Torino**

Politecnico di Torino

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica

A.a. 2021/2022

Sessione di Laurea ottobre 2022

**Modello dinamico di un sistema robotizzato
composto da un robot mobile e un robot
collaborativo**

Relatori:

Prof. Stefano Mauro
Ing. Laura Salamina

Candidati:

Nunzio Inchingolo
Matricola 285977

Sommario

| | |
|--|----|
| 1. Introduzione | 8 |
| 1.1. Wheeled Mobile Robot (WMR): definizione e applicazioni | 8 |
| 1.2. Differenze principali tra robot AGV e robot AMR | 8 |
| 1.3. Robot Collaborativi: definizione e applicazioni | 9 |
| 1.4. Obiettivi della ricerca | 10 |
| 2. STUDIO PRELIMINARE PER DEFINIZIONE DEL MODELLO DINAMICO DEL ROBOT | 12 |
| 2.1. Descrizione robot MiR250 | 12 |
| 2.1.1. Caratteristiche tecniche MIR250 | 13 |
| 2.1.2. Sensori a bordo | 14 |
| 2.1.3. Movimentazione MiR250 | 17 |
| 2.2. Sistemi di riferimento | 20 |
| 2.3. Analisi cinematica | 21 |
| 2.3.1. Grandezze cinematiche dal SdR locale $G - xyz$ al SdR fisso $W - XYZ$ | 21 |
| 2.3.2. Cinematica inversa | 22 |
| 2.4. Risposta in frequenza servo-sistema controllo di velocità | 24 |
| 2.4.1. Equazioni differenziali | 25 |
| 2.4.2. Trasformata di Laplace | 27 |
| 2.4.3. Risposta in frequenza | 29 |
| 2.5. Modello di attrito | 31 |
| 2.5.1. Attrito longitudinale | 32 |
| 2.5.2. Attrito tangenziale | 35 |
| 2.5.3. Momento di auto-allineamento | 37 |
| 2.5.4. Problema numerico nel calcolo di σ_i | 39 |
| 2.5.5. Attrito volvente | 42 |
| 3. MODELLO DINAMICO MIR A DUE RUOTE | 44 |
| 3.1. Dinamica modello a tre GDL | 44 |
| 3.2. Generazione traiettoria | 45 |
| 3.3. Risultati simulazioni | 47 |
| 3.3.1. Traiettoria rettilinea | 47 |
| 3.3.2. Traiettoria con una curva | 49 |
| 3.3.3. Traiettoria con due curve | 50 |
| 3.3.4. Traiettoria con quattro curve | 52 |
| 4. MODELLO DINAMICO COMPLETO DEL MiR250 | 54 |
| 4.1. Caster wheels | 54 |
| 4.1.1. Analisi cinematica | 54 |

| | | |
|-----------|--|-----------|
| 4.1.2. | Analisi dinamica | 57 |
| 4.2. | Calcolo delle reazioni normali dinamiche | 62 |
| 4.2.1. | Equilibrio alle rotazioni nel piano xz | 62 |
| 4.2.2. | Equilibrio alle rotazioni nel piano yz | 63 |
| 4.2.3. | Equilibrio lungo l'asse z | 64 |
| 4.3. | Smussamento funzioni del coefficiente di attrito | 66 |
| 4.4. | Dinamica del modello completo | 69 |
| 4.5. | Risultato simulazioni | 70 |
| 4.5.1. | Traiettoria rettilinea | 70 |
| 4.5.2. | Traiettoria con una curva | 72 |
| 4.5.3. | Traiettoria a due curve | 73 |
| 4.5.4. | Traiettoria a quattro curve | 75 |
| 4.5.5. | Analisi dell'influenza delle caster wheels sulla precisione del MIR250 | 76 |
| 5. | IDENTIFICAZIONE DEL MODELLO | 79 |
| 5.1. | Acquisizione dei dati sperimentali | 79 |
| 5.2. | Identificazione dei parametri | 81 |
| 6. | VALIDAZIONE MODELLO DINAMICO DEL SISTEMA ROBOTIZZATO MiR-UR5 | 87 |
| 6.1. | Presentazione del modello dinamico UR5 | 87 |
| 6.2. | Combinazione dei modelli dinamici del MiR e UR5 | 90 |
| 6.2.1. | Estrazione dei disturbi di forza da parte dell'UR5 agenti sul MiR | 90 |
| 6.2.2. | Dinamica del MiR legata ai disturbi generati dall'UR5 | 91 |
| 6.2.3. | Calcolo delle reazioni normali dinamiche dovute ai disturbi dell'UR5 | 92 |
| 6.3. | Validazione del sistema robotizzato MiR-UR5 | 94 |
| 7. | CONCLUSIONE | 97 |
| | Bibliografia | 98 |

Indice delle figure

| | |
|--|----|
| Figura 1.1 - robot Curiosity su Marte [3] | 8 |
| Figura 1.2 - Modelli UR3, UR5 e UR10 della Universal Robots | 10 |
| Figura 1.3 - sistema robotico composto da un MiR250 e un UR5 | 11 |
| Figura 2.1 - robot MiR250..... | 13 |
| Figura 2.2 - telecamera 3D Intel RealSenseTM a), posizione della telecamera sul MIR250 b)..... | 14 |
| Figura 2.3 - Laser Scanner Sick S300 Professional a), posizione dei laser scanner sul MIR250 b)..... | 15 |
| Figura 2.4 - 24 V DC Motor con Encoder incrementale a), posizione dei motori sul MIR250 b)..... | 16 |
| Figura 2.5 - SICK Safety System a), SICK Safe Motion b) | 16 |
| Figura 2.6 - zone di sicurezza | 16 |
| Figura 2.7 - driving wheel e caster wheels | 17 |
| Figura 2.8 - schema cinematico Differential Wheeled Robot | 18 |
| Figura 2.9 - dettaglio caster wheel | 19 |
| Figura 2.10 - schema del modello MIR250 con sistemi di riferimento | 20 |
| Figura 2.11 - modello a tre gradi di libertà | 21 |
| Figura 2.12 - schema analisi cinematica | 23 |
| Figura 2.13 - poligoni dei vettori per il calcolo di $VC3$ (a sinistra) e $VC4$ (a destra)..... | 23 |
| Figura 2.14 - schema cinematico ruota i-esima..... | 24 |
| Figura 2.15 – schema a blocchi del servosistema..... | 25 |
| Figura 2.16 - Circuito del motore elettrico | 26 |
| Figura 2.17 - DCL i-esima ruota motrice | 26 |
| Figura 2.18 - schema a blocchi servo-sistema | 27 |
| Figura 2.19 - schema a blocchi servosistema semplificato..... | 28 |
| Figura 2.20 - diagrammi di Bode G_{ol} | 30 |
| Figura 2.21 - diagrammi di Bode G_{cl} | 30 |
| Figura 2.22 - diagrammi di Bode $G_{compliance}$ | 31 |
| Figura 2.23 - ruota i-esima con moto di pura rotazione a) e pura traslazione b) | 33 |
| Figura 2.24 - ruota i-esima con moto di rotolamento senza strisciamento..... | 33 |
| Figura 2.25 - forza di attrito longitudinale in funzione del fattore di slittamento | 35 |
| Figura 2.26 - ruota i-esima sul piano $\lambda i \mu i$ | 36 |
| Figura 2.27 - forza di attrito trasversale in funzione dell'angolo di deriva..... | 37 |
| Figura 2.28 - momento di auto-allineamento in funzione del fattore di slittamento..... | 38 |
| Figura 2.29 - DCL ruota i-esima..... | 39 |
| Figura 2.30 - fattore di slittamento secondo modello di Delft..... | 40 |
| Figura 2.31 - confronto tra modello di Delft e modello linearizzato | 41 |
| Figura 2.32 - confronto tra modello di Delft e modello sinusoidale..... | 41 |
| Figura 2.33 - confronto tra modello di Delft e modello di Delft modificato | 42 |
| Figura 2.34 - DCL ruota i-esima..... | 43 |
| Figura 3.1 - Velocità del centro di massa G nel SdR relativo..... | 44 |
| Figura 3.2 - DCL del modello a tre gradi di libertà del MIR..... | 45 |
| Figura 3.3 - traiettoria di set | 47 |
| Figura 3.4 - spostamenti e velocità di set | 47 |
| Figura 3.5 - traiettoria di set a), spostamenti e velocità di set b) | 48 |
| Figura 3.6 - confronto velocità angolari di set e out delle ruote motrici..... | 48 |
| Figura 3.7 - confronto spostamenti ideali (SET) e reali (OUT) a), confronto traiettoria ideale e reale b)..... | 49 |
| Figura 3.8 - traiettoria di set a), spostamenti e velocità di set b) | 49 |

| | |
|---|----|
| Figura 3.9 - confronto velocità angolari di set e out delle ruote motrici..... | 50 |
| Figura 3.10 - confronto spostamenti ideali (SET) e reali (OUT) a), confronto traiettoria ideale e reale b)..... | 50 |
| Figura 3.11 - traiettoria di set a), spostamenti e velocità di set b) | 51 |
| Figura 3.12 - confronto velocità angolari di set e out delle ruote motrici..... | 51 |
| Figura 3.13 - confronto spostamenti ideali (SET) e reali (OUT) a), confronto traiettoria ideale e reale b)..... | 52 |
| Figura 3.14 - traiettoria di set a), spostamenti e velocità di set b) | 52 |
| Figura 3.15 - confronto velocità angolari di set e out delle ruote motrici..... | 53 |
| Figura 3.16 - confronto spostamenti ideali (SET) e reali (OUT) a), confronto traiettoria ideale e reale b)..... | 53 |
| Figura 4.1 - schema cinematico caster wheels anteriori | 55 |
| Figura 4.2 - DCL i-esima caster wheel..... | 58 |
| Figura 4.3 - rappresentazione grafica delle condizioni iniziali imposte sul sistema | 60 |
| Figura 4.4 - posizione angolare assoluta caster wheel nel tempo a), particolare b) | 61 |
| Figura 4.5 – inclinazione γ_i della velocità di C_i rispetto al SdR $Oi' - xi' yi' zi'$ nel tempo..... | 61 |
| Figura 4.6 - inclinazione δ_i della caster wheel rispetto al SdR $(Oi' - xi' yi' zi')$ nel tempo | 62 |
| Figura 4.7 - DCL del MIR250 nel piano xz..... | 63 |
| Figura 4.8 - DCL del MIR250 nel piano yz | 64 |
| Figura 4.9 - DCL trave con carico uniformemente distribuito a), soluzione trave con carico uniformemente distribuito b) | 65 |
| Figura 4.10 - smussamento funzione del coefficiente di attrito longitudinale $f_{l\sigma i}$ con $n=23$ a), particolare delle funzioni del coefficiente di attrito b) | 68 |
| Figura 4.11 -- smussamento funzione del coefficiente di attrito tangenziale $f_{t\sigma i}$ con $n=20$ a), particolare delle funzioni del coefficiente di attrito b) | 68 |
| Figura 4.12 - DCL del modello completo del MiR | 69 |
| Figura 4.13 - confronto velocità angolari di set e out delle ruote motrici..... | 71 |
| Figura 4.14 - andamento delle reazioni normali a) e della deflessione delle caster wheels b)..... | 71 |
| Figura 4.15 - confronto spostamenti ideali (SET) e reali (OUT) a), confronto traiettoria ideale e reale b)..... | 72 |
| Figura 4.16 - confronto velocità angolari di set e out delle ruote motrici..... | 72 |
| Figura 4.17 - andamento delle reazioni normali a) e della deflessione delle caster wheels b)..... | 73 |
| Figura 4.18 - confronto spostamenti ideali (SET) e reali (OUT) a), confronto traiettoria ideale e reale b)..... | 73 |
| Figura 4.19 - confronto velocità angolari di set e out delle ruote motrici..... | 74 |
| Figura 4.20 - andamento delle reazioni normali a) e della deflessione delle caster wheels b)..... | 74 |
| Figura 4.21 - confronto spostamenti ideali (SET) e reali (OUT) a), confronto traiettoria ideale e reale b)..... | 75 |
| Figura 4.22 - confronto velocità angolari di set e out delle ruote motrici..... | 75 |
| Figura 4.23 - andamento delle reazioni normali a) e della deflessione delle caster wheels b)..... | 76 |
| Figura 4.24 - confronto spostamenti ideali (SET) e reali (OUT) a), confronto traiettoria ideale e reale b)..... | 76 |
| Figura 4.25 – risultato simulazioni su traiettoria con una curva..... | 77 |
| Figura 4.26 – risultato simulazioni su traiettoria a due curve | 77 |
| Figura 4.27 – risultato simulazioni su traiettoria a quattro curve..... | 78 |
| Figura 5.1 - telecamere 3D OptiTrack a), telecamera OptiTrack installata b) | 79 |
| Figura 5.2 - traiettorie sperimentali del sistema robotizzato MiR-UR acquisite con le telecamere 3D..... | 80 |
| Figura 5.3 - set di velocità sperimentali nel SdR relativo del MiR corrispondenti alle traiettorie sperimentali in Figura 5.2 | 80 |
| Figura 5.4 - confronto tra le coordinate di G simulate e sperimentali a), confronto traiettorie b) | 81 |
| Figura 5.5 - andamento dei parametri per ogni iterazione | 82 |
| Figura 5.6 - coefficiente di attrito longitudinale delle caster wheels prima a) e dopo b) l'identificazione | 83 |
| Figura 5.7 - coefficiente di attrito tangenziale delle caster wheels prima a) e dopo b) l'identificazione | 83 |
| Figura 5.8 - coefficiente di attrito longitudinale della driving wheel n°3 prima a) e dopo b) l'identificazione | 84 |
| Figura 5.9 - coefficiente di attrito tangenziale della driving wheel n°3 prima a) e dopo b) l'identificazione .. | 84 |

| | |
|--|----|
| Figura 5.10 - coefficiente di attrito longitudinale della driving wheel n°4 prima a) e dopo b) l'identificazione | 85 |
| Figura 5.11 - coefficiente di attrito tangenziale della driving wheel n°4 prima a) e dopo b) l'identificazione | 85 |
| Figura 5.12 - confronto degli spostamenti sperimentali e simulati prima a) e dopo b) l'identificazione | 86 |
| Figura 5.13 - confronto traiettoria sperimentale e simulata prima a) e dopo b) l'ottimizzazione..... | 86 |
| Figura 6.1 - modello multibody dell'UR5 implementato su Simscape | 87 |
| Figura 6.2 - dinamica del giunto joint 1 | 88 |
| Figura 6.3 - risultato della simulazione del modello dell'UR5 in quattro istanti..... | 89 |
| Figura 6.4 - modello completo UR5 in ambiente Simulink | 89 |
| Figura 6.5 - MiR con armadietto vista longitudinale a), vista trasversale b)..... | 90 |
| Figura 6.6 - SdR link 0 a), SdR del MiR b) | 91 |
| Figura 6.7 - DCL del MiR con i disturbi generati dall'UR5 | 91 |
| Figura 6.8 - dinamica longitudinale sistema MiR-UR..... | 92 |
| Figura 6.9 - dinamica trasversale sistema MiR-UR | 93 |
| Figura 6.10 - set di posizione dei link UR5 a), set di velocità MiR b) | 95 |
| Figura 6.11 - confronto spostamenti sperimentali e simulati con modello MiR-UR5 non ottimizzato a) e ottimizzato b)..... | 95 |
| Figura 6.12 - confronto traiettorie sperimentali e simulate con parametri non identificati a) e con parametri identificati b)..... | 96 |

1. Introduzione

1.1. Wheeled Mobile Robot (WMR): definizione e applicazioni

Un “Wheeled Mobile Robot” (WMR), è un veicolo dotato di ruote in grado di muoversi in autonomia senza il bisogno di alcun intervento da parte di operatori umani. Il WMR è provvisto di attuatori elettrici per generarne il moto e di una serie di sensori che, comunicando con un computer di bordo, ne permettono il controllo. Il WMR può spostarsi liberamente all’interno di un volume di lavoro predeterminato per soddisfare particolari esigenze. L’ambiente di lavoro può essere:

- **Strutturato:** impianti industriali o, più in generale, spazi ben organizzati;
- **Non strutturato:** ambiente ostile, rischioso o addirittura inaccessibile all’uomo [1].

Un esempio di applicazione in ambiente non strutturato potrebbe essere il rover “Curiosity” (Figura 1.1) per la missione spaziale “Mars Science Laboratory” lanciato verso Marte per permetterne l’esplorazione [2].



Figura 1.1 - robot Curiosity su Marte [3]

Quando, invece, parliamo di ambiente strutturato, gli Automated Guided Vehicle (AGV) e gli Autonomous Mobile Robots (AMR) sono lo standard. Entrambi sono utilizzati in ambito industriale e permettono di eseguire diversi compiti come prelievo, trasporto e scarico di merci con metodi di localizzazione differenti.

1.2. Differenze principali tra robot AGV e robot AMR

Entrambi i tipi di robot sono nati per lavorare in ambito industriale, eseguire operazione di carico/scarico e trasporto sfruttando principi di navigazione differenti. In particolare, gli AGV sfruttano tre modalità di navigazione:

- **Navigazione a filo guida:** consente al veicolo di navigare automaticamente utilizzando un filo posto sotto al terreno nel quale scorre un segnale elettrico ad una determinata frequenza. Il sistema di navigazione si adatta bene ad ambienti sporchi in cui l’uso di sistemi ottici è impossibile e in corridoi particolarmente lunghi. La modifica del percorso è molto onerosa in quanto per la posa si applica un taglio nel pavimento con successiva resinatura.

- **Navigazione a spot magnetici o banda magnetica:** consente al veicolo di navigare automaticamente utilizzando spot magnetici o banda magnetica. Per la banda vale il medesimo discorso della navigazione a filo. Gli spot invece risultano veloci da installare e da modificare in quanto non introducono alcuna modifica aggiuntiva nella pavimentazione.
- **Navigazione laser:** consente al veicolo di navigare autonomamente utilizzando un laser posto nella parte superiore del robot e dei catarifrangenti posti a spot sui muri che contornano il layout. È un sistema molto versatile, per cambiare percorsi è necessario agire sul computer di bordo. In caso di aggiunta di tratte è necessario aggiungere anche i catarifrangenti. Non è di conseguenza adatto a luoghi sporchi.

Gli AMR sono molto più versatili non dovendo inserire spot o fili guida di alcun tipo nell'ambiente in cui operano. Questi robot sono in grado di navigare autonomamente utilizzando uno o più laser utilizzati per definire la mappa dell'ambiente in cui l'AMR lavora e per la navigazione.

La localizzazione avviene grazie alla triangolazione dei segnali provenienti da laser che, rispetto alla mappa acquisita, forniscono le coordinate del robot rispetto a un sistema di riferimento assoluto. L'obiettivo della mappatura è di utilizzare il layout circostante per creare dei riferimenti fissi utili per la localizzazione del robot.

1.3. Robot Collaborativi: definizione e applicazioni

I robot collaborativi o "Cobot" sono robot antropomorfi con base fissa e con movimenti su n assi progettati per rispettare criteri di sicurezza, flessibilità e compattezza e studiati per lavorare a stretto contatto con l'operatore, senza l'utilizzo di barriere protettive, a differenza dei classici robot industriali [2].

In particolare, le differenze fra i robot tradizionali e i robot collaborativi possono essere descritte, semplificando, secondo le seguenti proprietà:

- Sicurezza;
- Flessibilità;
- Velocità di messa in opera.
- Payload

Molteplici aziende ne hanno prodotto diversi modelli. Vengono riportati in Figura 1.2 i Cobot UR prodotti dalla Universal Robots:



Figura 1.2 - Modelli UR3, UR5 e UR10 della Universal Robots

Anche i robot collaborativi trovano impiego in molti settori, tra cui farmaceutico, alimentare, automotive, metallurgico, etc.[4]. Questo grazie anche alla grande varietà di operazioni che riesco a svolgere:

- Pick&Place;
- Asservimento macchine utensili;
- Manipolazione materiale;
- Controllo qualità;
- Assemblaggio;
- Finitura superficiale;
- Saldatura;
- Erogazione.

1.4. Obiettivi della ricerca

L'oggetto di questa ricerca si basa sulla modellazione matematica di un sistema robotico realmente esistente composto da un AMR (MiR250) assemblato a un robot collaborativo (UR5). Il sistema risultante (Figura 1.3) unisce le spiccate capacità di manipolazione e collaborazione di un Cobot alla mobilità autonoma di un AMR raggiungendo un nuovo livello di versatilità.



Figura 1.3 - sistema robotico composto da un MiR250 e un UR5

Quello che però ci si aspetta dalla combinazione dei robot è che le loro dinamiche interagiscano tra di loro andando quindi a generare delle deviazioni sia nella traiettoria percorsa dal MiR sia in quella dell'UR5. L'obiettivo è quello di quantificare queste deviazioni andando a creare un modello dinamico del sistema che riproduca quanto più fedelmente possibile il suo reale comportamento. La realizzazione del modello può essere divisa in tre fasi:

- **Fase I:** modellazione matematica della dinamica del sistema MiR250 – UR5;
- **Fase II:** acquisizione dati sperimentali attraverso sistema di visione 3D;
- **Fase III:** validazione del modello.

Il progetto è stato svolto in collaborazione con Robogest S.r.l.

2. STUDIO PRELIMINARE PER DEFINIZIONE DEL MODELLO DINAMICO DEL ROBOT

2.1. Descrizione robot MiR250

I Mobile Industrial Robots (MiR), che ricoprono una vasta gamma di prodotti, sono un esempio di AMR. Il robot MiR250 Figura 2.1 è stato oggetto della modellazione matematica, prima, e dell'acquisizione dei dati sul campo, poi, nella parte sperimentale. Si riporta in tabella la nomenclatura utilizzata per i diversi parametri.

Tabella 1 - nomenclatura dei parametri geometrici, inerziali e di controllo

| Parametro | Nomenclatura |
|--|----------------|
| Dati geometrici e inerziali | |
| Lunghezza MiR250 | l |
| Larghezza MiR250 | w |
| Raggio ruote motrici | rd |
| Raggio Caster Wheels | rc |
| Offset Caster Wheels | b_{caster} |
| Inerzia del veicolo lungo z | I_v |
| Centro di massa e geometrico del MiR250 | G |
| Centro di massa e geometrico dell'i-esima ruota | C_i |
| Giunto rotoidale che vincola l'i-esima ruota al telaio | O_i |
| Distanza di G da C ₃ e C ₄ lungo x | ad |
| Distanza di G da C ₃ e C ₄ lungo y | bd |
| Distanza di G dai giunti delle Caster Wheels lungo x | a |
| Distanza di G dai giunti delle Caster Wheels lungo y | b |
| Spessore ruote motrici | ed |
| Spessore Caster Wheels | ec |
| Massa ruote motrici | mdw |
| Inerzia lungo l'asse di rotazione delle ruote motrici | Idw_1 |
| Inerzia lungo l'asse diametrale delle ruote motrici | Idw_2 |
| Massa Caster Wheels | mcw |
| Inerzia lungo l'asse di rotazione delle Caster Wheels | Icw_1 |
| Inerzia lungo l'asse diametrale delle Caster Wheels | Icw_2 |
| Dati sull'attuazione elettrica | |
| Velocità massima motore | vel_{Max} |
| Costante di tempo circuito elettrico del motore | τ_E |
| Corrente massima circuito elettrico del motore | i_{Max} |
| Costante di coppia | k_C |
| Coppia massima | $Torque_{Max}$ |
| Resistenza del circuito elettrico | R |
| Induttanza del circuito elettrico | L |
| Forza contro-elettromotrice massima | V_{eMAX} |
| Rapporto di riduzione | rap_{rid} |
| Inerzia del motore elettrico | $Inertia$ |
| Dati sull'anello di controllo interno di corrente | |
| Guadagno proporzionale | $k_{P,i}$ |

| | |
|---|-----------|
| Guadagno integrativo | $k_{I,i}$ |
| Dati sull'anello esterno di controllo velocità | |
| Guadagno proporzionale | $k_{P,v}$ |
| Guadagno integrativo | $k_{I,v}$ |



Figura 2.1 - robot MiR250

2.1.1. Caratteristiche tecniche MiR250

La fase di modellazione matematica del MiR250 è stata preceduta dalla raccolta di una serie di dati indispensabili per generare un modello quanto più fedele possibile al sistema fisico reale.

Si riporta in Tabella 2, Tabella 3, Tabella 4 e in Tabella 5 il valore dei dati geometrici, inerziali e di controllo del MiR250.

Tabella 2 - dati geometrici e inerziali del MiR250

| Notazione | Valore |
|--------------|-------------------------------|
| l | 0.8000 [m] |
| w | 0.5800 [m] |
| rd | 0.1000 [m] |
| rc | 0.0625 [m] |
| b_{caster} | 0.0700 [m] |
| I_v | 6.7534 [kg · m ²] |
| ad | 0.0000 [m] |
| bd | 0.2050 [m] |
| a | 0.2500 [m] |
| b | 0.1875 [m] |
| ed | 0.0330 [m] |
| ec | 0.0213 [m] |
| mdw | 1.1037 [kg] |
| Idw_1 | 0.0055 [kg · m ²] |
| Idw_2 | 0.0029 [kg · m ²] |
| mcw | 1.0262 [kg] |
| Icw_1 | 0.0020 [kg · m ²] |
| Icw_2 | 0.0010 [kg · m ²] |

Tabella 3 - dati sull'attuazione elettrica

| Notazione | Valore |
|-------------|------------------|
| vel_{Max} | 274.9627 [rad/s] |
| τ_E | 0.0010 [s] |

| | |
|----------------|---------------------------|
| i_{Max} | 22.7700 [A] |
| k_C | 0.15 [Nm/A] |
| $Torque_{Max}$ | 3.4155 [Nm] |
| R | 1.8113 [Ω] |
| L | 0.0018 [H] |
| V_{eMAX} | 41.2444 [V] |
| rap_{rid} | 10.167 [-] |
| $Inertia$ | 0.0020 [$kg \cdot m^2$] |

Tabella 4 - dati sull'anello di controllo interno di corrente

| Notazione | Valore |
|-------------|---------------|
| $k_{P,int}$ | 5 [V/A] |
| $k_{I,int}$ | 1 [V/(A · s)] |

Tabella 5 - dati sull'anello esterno di controllo velocità

| Notazione | Valore |
|-------------|---------------|
| $k_{P,ext}$ | 5 [A/V] |
| $k_{I,ext}$ | 1 [A/(V · s)] |

2.1.2. Sensori a bordo

Come si è detto, il vantaggio dei robot AMR rispetto agli AGV sta nella capacità di adeguarsi in maniera del tutto autonoma a eventuali variazioni dell'ambiente in cui operano, aumento o riduzione degli ostacoli, rendendolo sicuro e flessibile. Tutto questo è dovuto alla presenza di una serie di sensori di visione 3D, laser scanner e di velocità.

2.1.2.1. Sistema di visione 3D

I sensori di visione sono composti da due telecamere 3D Intel RealSense™ D435 (Figura 2.2) montate su sostegni in metallo e utilizzate per individuare ed evitare gli ostacoli presenti lungo la traiettoria. Forniscono le coordinate dei punti (point clouds) che definiscono lo spazio 3D individuato dalle telecamere [5].



a)



b)

Figura 2.2 - telecamera 3D Intel RealSense™ a), posizione della telecamera sul MIR250 b)

Si riporta in **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.** Tabella 6 il volume coperto dal sistema di visione 3D.

Tabella 6 - dati sul sistema di visione 3D

| Parametro | Valore |
|---|-----------|
| Altezza del campo visivo | 1.800 [m] |
| Profondità del campo visivo | 1.200 [m] |
| Angolo orizzontale del campo visivo | 114° |
| Estensione minima del campo visivo in profondità | 0.250 [m] |
| Altezza minima del campo visivo davanti al robot | 0.050 [m] |
| Altezza massima del campo visivo davanti al robot | 0.500 [m] |

2.1.2.2. Laser scanner

Il MiR250 è dotato di due sensori Laser Sick S300 Professional (Figura 2.3) utilizzati per:

- Mappatura;
- Localizzazione;
- Evitare gli ostacoli.



a)



b)

Figura 2.3 - Laser Scanner Sick S300 Professional a), posizione dei laser scanner sul MiR250 b)

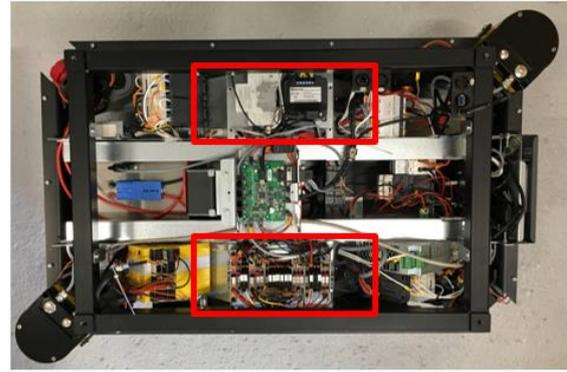
Ciascun sensore offre una copertura di 270°, quindi, il MiR250 ne possiede uno anteriormente e uno posteriormente per offrire una copertura di 360°. Per garantire una maggior precisione nell'acquisizione della mappa, è necessario che il MiR250 si avvicini quanto più possibile agli ostacoli presenti nell'ambiente da mappare [6].

2.1.2.3. Encoder

Gli encoder incrementali sono montati direttamente nel motore (Figura 2.4); la loro funzione è quella di rilevare la velocità di rotazione delle ruote e comunicarla al SICK Safety System (Figura 2.5 a), più precisamente al modulo SICK Safe Motion (Figura 2.5 b) in modo tale da permettere al PLC di conoscere la velocità del robot.



a)



b)

Figura 2.4 - 24 V DC Motor con Encoder incrementale a), posizione dei motori sul MIR250 b)



a)



b)

Figura 2.5 - SICK Safety System a), SICK Safe Motion b)

La comunicazione con il PLC è fondamentale per garantire la sicurezza degli operatori che lavorano nello stesso ambiente del MiR250. Infatti, sono predisposte cinque distanze di sicurezza (Figura 2.6) entro le quali il MiR limita la propria velocità in un certo intervallo (Tabella 7). La velocità delle driving wheels viene rilevata dagli encoder incrementali che mandano un segnale in tensione proporzionale alla velocità di rotazione al SICK Safe Motion. Questo modulo permette di comunicare la velocità delle ruote al PLC che ne limita il massimo valore raggiungibile in funzione della distanza dagli ostacoli rilevati dai laser scanners [7].

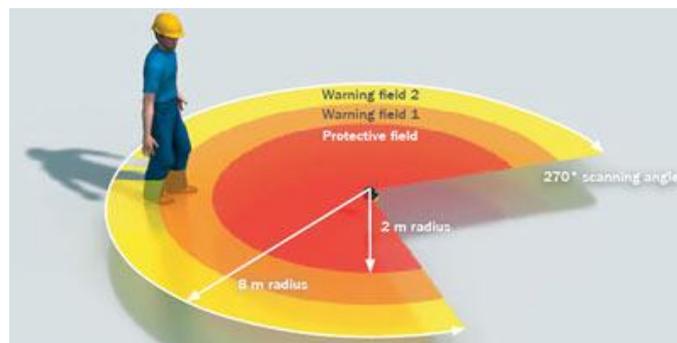


Figura 2.6 - zone di sicurezza

Tabella 7 - intervalli delle velocità per ogni zona di sicurezza

| Zona | Da | A |
|------|----------|---------|
| 1 | -1.4 m/s | 0.2 m/s |

| | | |
|---|----------|---------|
| 2 | 0.21 m/s | 0.4 m/s |
| 3 | 0.41 m/s | 0.8 m/s |
| 4 | 0.81 m/s | 1.1 m/s |
| 5 | 1.11 m/s | 2.0 m/s |

2.1.3. Movimentazione MiR250

Il robot MiR250 è dotato di due ruote motrici e quattro ruote folli pivotanti (Figura 2.7). In questa trattazione, si farà riferimento alle ruote motrici e alle ruote pivotanti rispettivamente con i termini *driving wheels* e *caster wheels*.

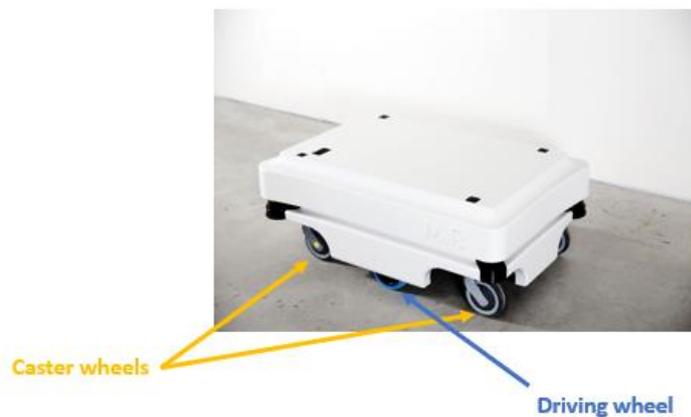


Figura 2.7 - driving wheel e caster wheels

Le driving wheels vengono azionate separatamente in modo tale da controllare la traiettoria del MiR facendo variare la loro velocità relativa. In questo modo non è necessario che le driving wheels dispongano anche del moto di sterzata per controllare la traiettoria. I robot che vengono movimentati in questo modo vengono chiamati *Differential Wheeled Robot*.

2.1.3.1. Differential Wheeled Robot

La rotazione relativa delle due driving wheels permette al robot di cambiare la direzione del moto [8]. Per farne un'analisi cinematica si riporta in Figura 2.8 la vista dall'alto di un corpo rigido composto da due ruote motrici e un telaio che le collega per evitarne il moto relativo lungo la direzione \vec{n} .

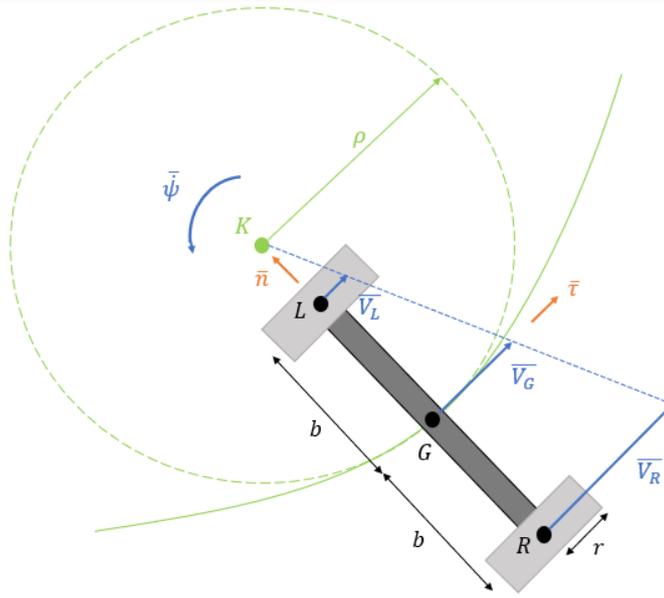


Figura 2.8 - schema cinematico Differential Wheeled Robot

L'analisi cinematica viene effettuata nel sistema di riferimento locale con origine nel centro di massa G . Quello che si vorrebbe è che il centro di massa segua la traiettoria che in Figura 2.8 è rappresentata con il tratto verde continuo. Per fare ciò il centro di massa deve avere istante per istante una velocità tangente alla traiettoria:

$$\overline{V}_G = V_G \cdot \bar{\tau} \quad (2.1)$$

Si può tracciare, a questo punto, la circonferenza osculatrice, tangente alla traiettoria istante per istante, il cui centro K rappresenta il centro di istantanea rotazione del corpo rigido in questione che ruota attorno a K con velocità angolare $\dot{\psi}$. Di conseguenza applicando le equazioni cardinali della cinematica si ottiene che:

$$\overline{V}_G = \overline{V}_K + \dot{\psi} \times (G - K) = \bar{0} + \dot{\psi} \times \rho(-\bar{n}) \quad (2.2)$$

Che riporta alla seguente equazione scalare:

$$V_G = \dot{\psi} \cdot \rho \quad (2.3)$$

Andando a derivare l'equazione (2.2) rispetto al tempo si ottiene:

$$\frac{d(\overline{V}_G)}{dt} = \frac{dV_G}{dt} \cdot \bar{\tau} + V_G \cdot \frac{d(\bar{n})}{dt} = \dot{V}_G \cdot \bar{\tau} + V_G \cdot \dot{\psi} \cdot \bar{n} \quad (2.4)$$

E sostituendo (2.3) in (2.4) si ottiene:

$$\overline{a}_G = \frac{d(\overline{V}_G)}{dt} = \dot{V}_G \cdot \bar{\tau} + \frac{V_G^2}{\rho} \cdot \bar{n} \quad (2.5)$$

Nota la legge del moto del centro di massa, si procede con il ricavare le velocità dei punti R ed L che rappresentano il punto in cui le ruote sono incernierate al telaio. Anche in questo caso si sfruttano le equazioni cardinali della cinematica:

$$\begin{cases} \overline{V}_L = \overline{V}_G + \dot{\psi} \cdot (L - G) = \overline{V}_G + \dot{\psi} \cdot b \cdot \bar{n} = (V_G - \dot{\psi} \cdot b) \cdot \bar{\tau} \\ \overline{V}_R = \overline{V}_G + \dot{\psi} \cdot (R - G) = \overline{V}_G + \dot{\psi} \cdot b \cdot (-\bar{n}) = (V_G + \dot{\psi} \cdot b) \cdot \bar{\tau} \end{cases} \quad (2.6)$$

Una volta note le velocità \overline{V}_L e \overline{V}_R , è possibile ricavare le velocità angolari delle ruote motrici. Supponendo che non ci sia slittamento valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_L = \frac{V_L}{r} \\ \dot{\theta}_R = \frac{V_R}{r} \end{cases} \quad (2.7)$$

In questo modo è possibile ricavare le velocità di rotazione di set delle ruote motrici in modo tale che il robot compia la traiettoria desiderata.

Vediamo adesso alcuni casi particolari:

- $\dot{\theta}_L = \dot{\theta}_R = \dot{\theta}$

Risolvendo il sistema presente in (2.6) si ottiene:

$$\begin{cases} V_G = V_L = V_R = \dot{\theta} \cdot r \\ \dot{\psi} = 0 \\ \rho = \infty \end{cases} \quad (2.8)$$

Moto di pura traslazione, il centro di istantanea rotazione si trova a infinito.

- $\dot{\theta}_R = -\dot{\theta}_L = \dot{\theta}$

Risolvendo il sistema presente in (2.6) si ottiene:

$$\begin{cases} V_G = 0 \\ \dot{\psi} = \frac{V_R}{b} = -\frac{V_L}{b} \\ \rho = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

Moto di rotazione attorno a G che in questo caso coincide con il centro di istantanea rotazione K .

Tutte le altre combinazioni intermedie permettono di ottenere contemporaneamente avanzamento e rotazione del robot.

2.1.3.2. Caster Wheels

Lo scopo delle caster wheels (Figura 2.9) è quello di equilibrare longitudinalmente il robot ed evitare movimenti di beccheggio. Potendo ruotare anche attorno al giunto rotoidale che le vincola al telaio, possono orientarsi in maniera tale da ridurre l'attrito radente a favore dell'attrito volvente che genera un disturbo inferiore nella dinamica dell'intero sistema.



Figura 2.9 - dettaglio caster wheel

2.2. Sistemi di riferimento

Vengono qui presentati i sistemi di riferimento utilizzati per la determinazione della posizione dell'AMR MiR250. D'ora in avanti si farà riferimento all'AMR MiR250 semplicemente con l'acronimo MiR. Oltre a un sistema di riferimento fisso è necessario un sistema di riferimento solidale al corpo rigido e altri sei sistemi di riferimento solidali alle ruote aventi origine nei centri di rotazione delle ruote C_i .

Si riporta in Figura 2.10 uno schema del MiR con tutti i sistemi di riferimento (SdR) utilizzati.

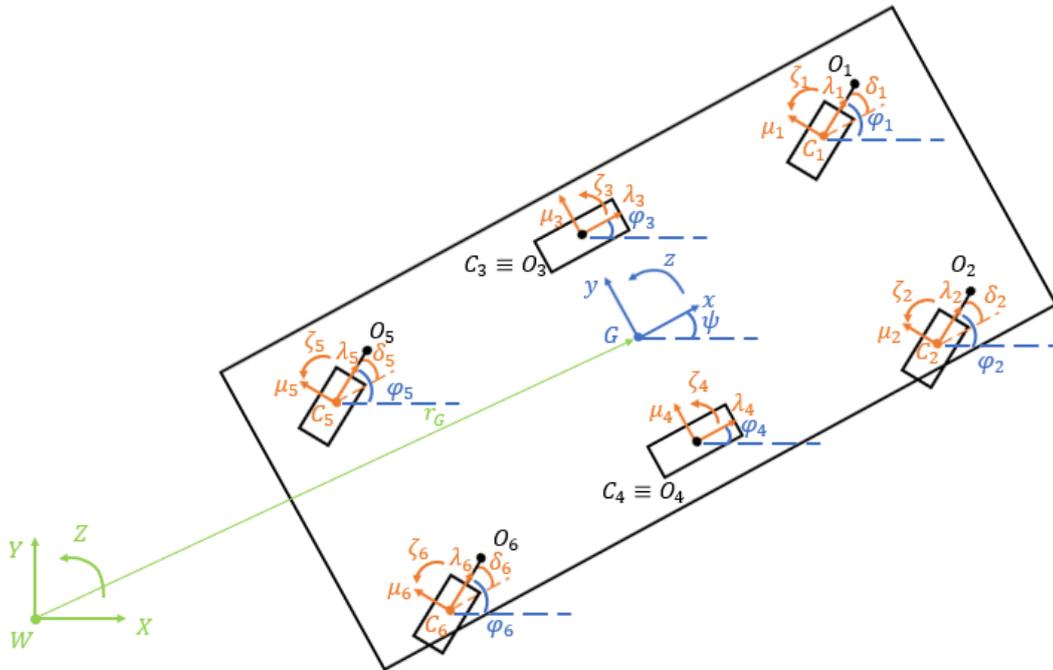


Figura 2.10 - schema del modello MiR250 con sistemi di riferimento

Facendo riferimento alla Figura 2.10, si definiscono i sistemi di riferimento nel seguente modo:

- $W - XYZ$ (SdR fisso con origine in W)
- $G - xyz$ (SdR solidale al corpo rigido in G)
- $C_i - \lambda_i\mu_i\zeta_i$ (SdR solidale all' i -esima ruota con origine nella cerniera C_i)

I sistemi di riferimento generano tra di loro le seguenti rotazioni relative:

- ψ : rotazione di $(G - xyz)$ rispetto a $(W - XYZ)$
- φ_i : rotazione di $(C_i - \lambda_i\mu_i\zeta_i)$ rispetto a $(W - XYZ)$
- δ_i : rotazione di $(C_i - \lambda_i\mu_i\zeta_i)$ rispetto a $(G - xyz)$

Per concludere si specifica che i punti C_i rappresentano i punti per cui passa l'asse di rotazione della ruota i -esima mentre i punti O_i rappresentano i punti in cui la ruota è incernierata al telaio. Nel caso delle ruote motrici C_3 e C_4 coincidono rispettivamente con O_3 e O_4 , mentre per le caster wheels esiste un offset quindi vale:

$$\overline{C_i O_i} = b_{caster} \quad (2.10)$$

Per poter studiare la dinamica del MiR250 e crearne il modello, è stato semplificato il sistema rimuovendo tutte quelle componenti che avrebbero generato disturbo. Per questo motivo sono state rimosse inizialmente le caster wheels che servono per equilibrare il sistema.

A questo punto, il sistema può essere schematizzato come in Figura 2.11.

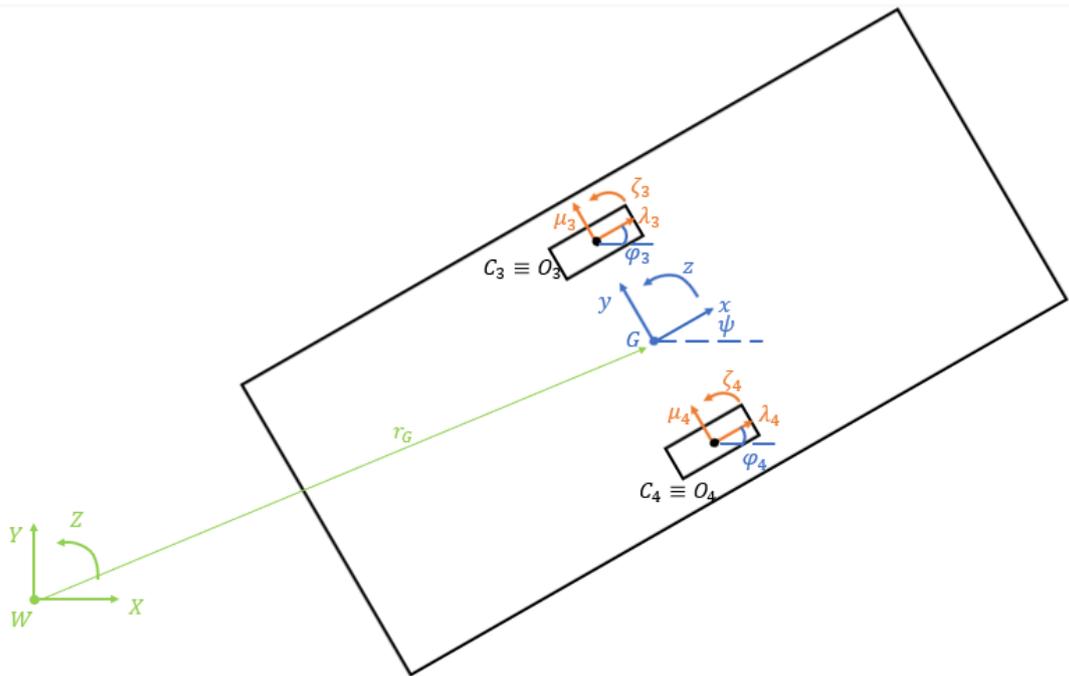


Figura 2.11 - modello a tre gradi di libertà

2.3. Analisi cinematica

Con le semplificazioni adottate, la posizione del sistema nel piano XY può essere determinata da tre grandezze scalari: il sistema ha tre gradi di libertà. Questo perché le ruote motrici non possono compiere una rotazione relativa rispetto al telaio del MiR e, di conseguenza, il loro orientamento è combinazione lineare dell'orientamento del MiR:

$$\begin{cases} \varphi_3 = \psi \\ \varphi_4 = \psi \end{cases} \quad (2.11)$$

La traiettoria desiderata, infatti, non viene eseguita dal MiR facendo variare l'orientamento delle ruote motrici ma assegnando loro delle velocità di rotazione opportunamente calcolate applicando la cinematica inversa. Tutti i robot che generano la propria traiettoria in questo modo rientrano in una categoria chiamata "Differential Wheeled Robots".

2.3.1. Grandezze cinematiche dal SdR locale (G – xyz) al SdR fisso (W – XYZ)

Avendo tre gradi di libertà, la cinematica del sistema può essere definita da una grandezza vettoriale e una scalare: \overline{V}_G e $\dot{\psi}$, rispettivamente.

Queste grandezze sono ricavate studiando la dinamica longitudinale (lungo x), trasversale (lungo y) e rotazionale (lungo z) nel sistema di riferimento relativo al MiR (G – xyz). Dopo aver ottenuto istante per istante le velocità e gli spostamenti nel sistema di riferimento relativo, si ricavano i dati di posizione nel sistema di riferimento assoluto (W – XYZ) attraverso la matrice di rotazione:

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

Applicando la notazione di Einstein, l'espressione matriciale può essere espressa in forma algebrica nel seguente modo:

$$a_i = b_{ij} \cdot c_j \quad (2.13)$$

Derivando rispetto al tempo si ottiene:

$$\frac{d(a_i)}{dt} = \frac{d(b_{ij})}{dt} \cdot c_j + b_{ij} \cdot \frac{d(c_j)}{dt} \quad (2.14)$$

Che riporta alla seguente espressione matriciale:

$$\begin{Bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{Bmatrix} = \dot{\psi} \begin{bmatrix} -\sin \psi & -\cos \psi \\ \cos \psi & -\sin \psi \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

Andando a derivare ancora un'altra volta si otterrebbe anche l'accelerazione rispetto al sistema di riferimento fisso partendo dal sistema di riferimento solidale al MiR:

$$\frac{d^2(a_i)}{dt^2} = \frac{d^2(b_{ij})}{dt^2} \cdot c_j + 2 \cdot \frac{d(b_{ij})}{dt} \cdot \frac{d(c_j)}{dt} + b_{ij} \cdot \frac{d^2(c_j)}{dt^2} \quad (2.16)$$

Tornando alla notazione matriciale:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{Bmatrix} = \ddot{\psi} \begin{bmatrix} -\sin \psi & -\cos \psi \\ \cos \psi & -\sin \psi \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} - \dot{\psi}^2 \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} + 2\dot{\psi} \begin{bmatrix} -\sin \psi & -\cos \psi \\ \cos \psi & -\sin \psi \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

2.3.2. Cinematica inversa

Dato che il sistema in considerazione è in grado di muoversi dando una velocità di rotazione di set alle ruote motrici, è necessario utilizzare la cinematica inversa per ricavare queste velocità partendo dalla velocità del centro di massa $\overline{V_G}$ e dalla velocità angolare ψ del MiR. Per ricavare le velocità di rotazione delle ruote è possibile sfruttare le equazioni cardinali della cinematica, ricavare i poligoni dei vettori associati da cui calcolare le incognite scalari $\dot{\theta}_3$ e $\dot{\theta}_4$:

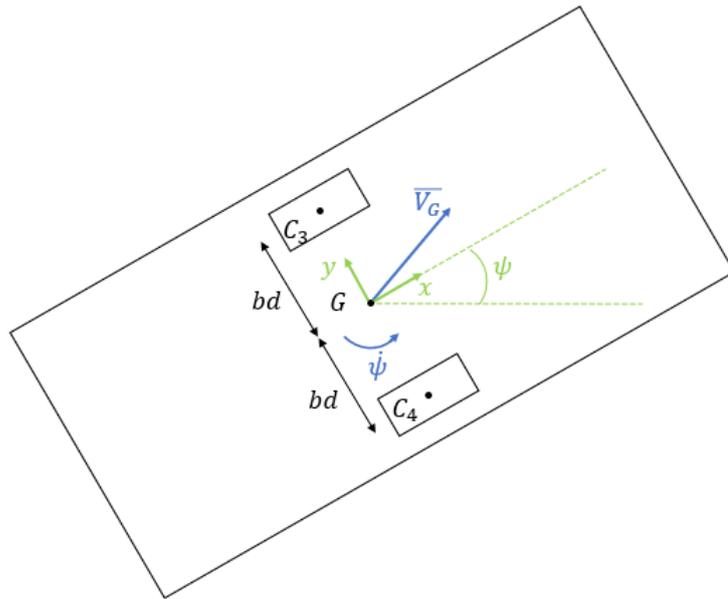


Figura 2.12 - schema analisi cinematica

Il primo passo è ricavare le velocità di C_3 e di C_4 :

$$\begin{cases} \overline{V}_{C_3} = \overline{V}_G + \overline{\psi} \times (C_3 - G) \\ \overline{V}_{C_4} = \overline{V}_G + \overline{\psi} \times (C_4 - G) \end{cases} \quad (2.18)$$

Dove i termini $(C_3 - G)$ e $(C_4 - G)$ sono vettori di modulo bd , direzione lungo la congiungente dei punti e versi che puntano rispettivamente a C_3 e C_4 . Dall'equazione (2.18) è possibile ricavare i poligoni dei vettori che permettono di trasformare le equazioni vettoriali in equazioni scalari:

Si riportano in Figura 2.13 i poligoni dei vettori per il calcolo di \overline{V}_{C_3} e di \overline{V}_{C_4} .

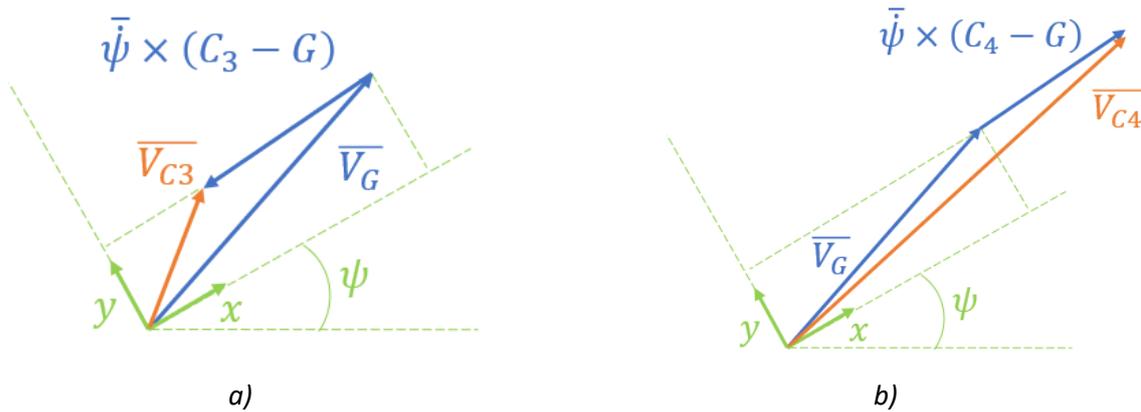


Figura 2.13 - poligoni dei vettori per il calcolo di \overline{V}_{C_3} (a sinistra) e \overline{V}_{C_4} (a destra)

Proiettando i vettori lungo le direzioni x e y , che per l'equazione (2.11) corrispondono alle direzioni $\lambda_3, \mu_3, \lambda_4$ e μ_4 , si ottiene:

$$\begin{cases} V_{C3,\lambda3} = V_{G,x} - \dot{\psi} \cdot bd \\ V_{C3,\mu3} = V_{G,y} \\ V_{C4,\lambda4} = V_{G,x} + \dot{\psi} \cdot bd \\ V_{C4,\mu4} = V_{G,y} \end{cases} \quad (2.19)$$

Una volta nota la velocità della cerniera della ruota si può calcolare la velocità di rotazione della ruota partendo dal seguente schema.

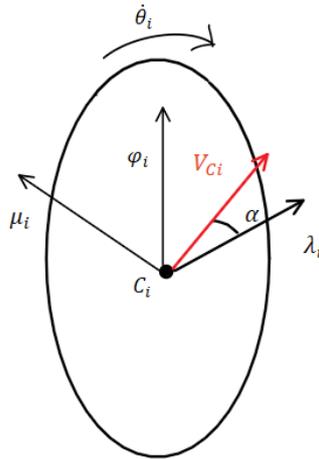


Figura 2.14 - schema cinematico ruota i-esima

Si calcola la velocità di rotazione della ruota supponendo che rotoli senza strisciare. Vale quindi la seguente relazione:

$$\dot{\theta}_i \cdot rd = V_{C_i,\lambda_i} \quad (2.20)$$

Che vale per entrambe le ruote motrici per calcolarne la velocità di rotazione di set necessaria per ottenere una determinata traiettoria.

2.4. Risposta in frequenza servo-sistema controllo di velocità

Nell'analisi del modello dinamico del sistema, il primo passo è stato studiare le prestazioni del servosistema di controllo velocità. L'analisi si può suddividere in tre parti:

- Ricavare le equazioni differenziali che descrivono la dinamica del sistema;
- Applicare la trasformata di Laplace per passare al dominio della variabile complessa "s";
- Ricavare le funzioni di trasferimento del servosistema in anello aperto $G_{OL}(s)$ e in anello chiuso $G_{CL}(s)$.

L'intero servosistema può essere schematizzato come in Figura 2.15, le grandezze in questione sono tutte in funzione del tempo.

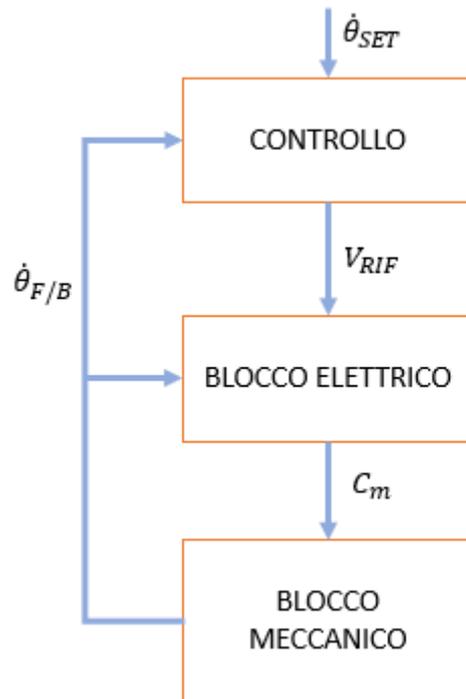


Figura 2.15 – schema a blocchi del servosistema

2.4.1. Equazioni differenziali

Per ogni blocco esiste un'equazione differenziale che permette di ottenere un output a fronte di un dato input.

2.4.1.1. Controllo

Il controllo è composto da un anello esterno (controllore PI_{ext}) che restituisce una corrente proporzionale all'errore tra la velocità di set $\dot{\theta}_{SET}$ e quella di feedback $\dot{\theta}_{F/B}$ e un anello interno (controllore PI_{int}) che restituisce la tensione di armatura V_{RIF} proporzionale all'errore tra la corrente ottenuta dall'anello di controllo esterno i_{SET} e la corrente di feedback $i_{F/B}$. L'utilizzo di un anello esterno e di un anello interno permette di aumentare la stabilità del sistema grazie all'introduzione di una componente smorzante. Si riporta di seguito il sistema di equazioni differenziali che descrivono il controllo:

$$\begin{cases} PI_{ext}(t) = k_{p,ext} \cdot \dot{\theta}_{err}(t) + k_{i,ext} \cdot \int_{t_0}^t \dot{\theta}_{err}(\tau) d\tau \\ PI_{int}(t) = k_{p,int} \cdot i_{err}(t) + k_{i,int} \cdot \int_{t_0}^t i_{err}(\tau) d\tau \end{cases} \quad (2.21)$$

Da notare che nel controllore PI_{ext} non è presente un segnale in tensione o in corrente ma una velocità angolare. In realtà questo non è fisicamente possibile poiché nella realtà è presente un encoder che permette di misurare la velocità angolare delle ruote trasformando queste in un segnale in tensione attraverso un guadagno che dimensionalmente sarebbe pari a $\left[\frac{V}{rad/s}\right]$. Nella trattazione è stato omesso questo passaggio poiché si suppone che il modulo del guadagno sia unitario e il passaggio da $[rad/s]$ a $[V]$ è sottinteso.

2.4.1.2. Blocco elettrico

Nel blocco elettrico si ha il modello a parametri concentrati del circuito di alimentazione del motore elettrico che viene schematizzato come segue:

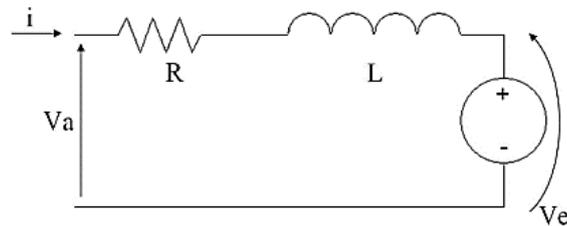


Figura 2.16 - Circuito del motore elettrico

Risolvendo l'equazione alla maglia del circuito si ottiene la seguente equazione differenziale:

$$V_A - V_e = i \cdot R + L \cdot \frac{di}{dt} \quad (2.22)$$

Dove V_A rappresenta la tensione di armatura che alimenta il motore elettrico, tipicamente si ottiene amplificando la tensione di riferimento V_{RIF} in uscita dal blocco di controllo. V_e rappresenta la forza contro-elettromotrice dovuta alla legge di Faraday-Neumann-Lenz a causa della variazione del flusso di campo magnetico nel tempo che attraversa la maglia. Infine, si hanno R ed L che rappresentano rispettivamente la resistenza e l'induttanza del circuito.

2.4.1.3. Blocco meccanico

A questo punto, generata la corrente all'interno del circuito, l'interazione tra il campo magnetico generato dalle coppie polari e la corrente passante nel circuito, produce una coppia C_m proporzionale alla corrente e ad una costante di coppia k_c che dipende dal motore elettrico. La coppia, vinta l'inerzia e la forza di attrito, genera la rotazione della ruota. Si riporta di seguito il diagramma di corpo libero (DCL) della i -esima ruota motrice nel piano ortogonale al suo asse di rotazione:

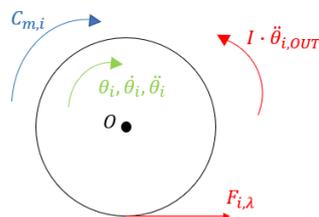


Figura 2.17 - DCL i -esima ruota motrice

Dal DCL è possibile ricavare il seguente equilibrio dinamico:

$$C_{m,i} = I \cdot \ddot{\theta}_{i,OUT} + F_{i,\lambda} \cdot r_d \quad (2.23)$$

Nel DCL è stato trascurato, per semplicità analitica, il contributo dovuto alla resistenza al rotolamento, o attrito volvente, proporzionale alla velocità. Questa assunzione è stata adottata poiché il suo contributo, specialmente nel transitorio, è trascurabile rispetto alle altre forze in gioco.

2.4.2. Trasformata di Laplace

Dopo aver ricavato le equazioni differenziali che descrivono la dinamica del servosistema, si applica la trasformata di Laplace per passare dal dominio del tempo al dominio della variabile complessa di Laplace che permetterà di effettuare l'analisi della risposta in frequenza del servo-sistema ricavandone informazioni sulle sue prestazioni: guadagno statico, larghezza di banda, stabilità, cedevolezza.

Applicando la trasformata alle equazioni ricavate in precedenza (supponendo nulle le condizioni iniziali) si ottiene il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \overline{PI_{ext}}(s) = k_{p,ext} \cdot \overline{\theta_{i,err}}(s) + k_{I,ext} \cdot \frac{\overline{\theta_{i,err}}(s)}{s} \\ \overline{PI_{int}}(s) = k_{p,int} \cdot \overline{i_{err}}(s) + k_{I,int} \cdot \frac{\overline{i_{err}}(s)}{s} \\ \overline{V_{A,i}}(s) - \overline{V_{e,i}}(s) = \overline{i_{OUT}}(s) \cdot R + L \cdot s \cdot \overline{i_{OUT}}(s) \\ \overline{C_{m,i}}(s) = I \cdot s \cdot \overline{\theta_i}(s) + \overline{F_{i,\lambda}} \cdot r_d \end{cases} \quad (2.24)$$

Dove il pedice "i" indica a quale ruota ci si sta riferendo. Avendo escluso le caster wheels, il pedice "i" può essere uguale a 3 (driving wheel di sinistra) o a 4 (driving wheel di destra).

Il sistema di equazioni così ottenuto può essere anche rappresentato in forma grafica attraverso uno schema a blocchi che ne permette una più intuitiva interpretazione e facilita i passaggi algebrici necessari per ricavare le funzioni di trasferimento $G_{OL}(s)$ e $G_{CL}(s)$.

Si riporta in Figura 2.18 lo schema a blocchi della i-esima ruota motrice.

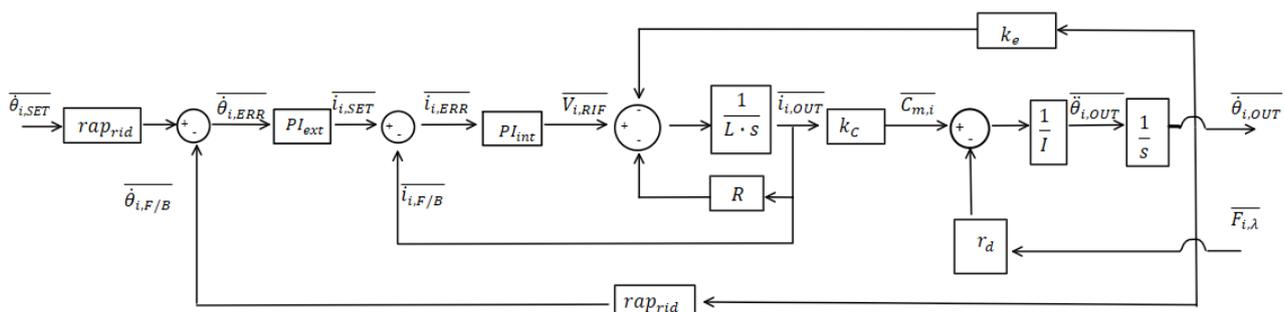


Figura 2.18 - schema a blocchi servo-sistema

Come è già stato anticipato, attraverso alcuni passaggi algebrici, che non vengono qui riportati, è possibile rielaborare l'intero schema a blocchi ottenendone uno più semplice con cui ricavare le funzioni di trasferimento $G_{OL}(s)$, $G_{CL}(s)$ e $G_{compliance}(s)$. Quest'ultima rappresenta la rotazione della ruota sotto l'azione della forzante esterna. In Figura 2.19 si riporta lo schema a blocchi risultante a seguito dei passaggi algebrici.

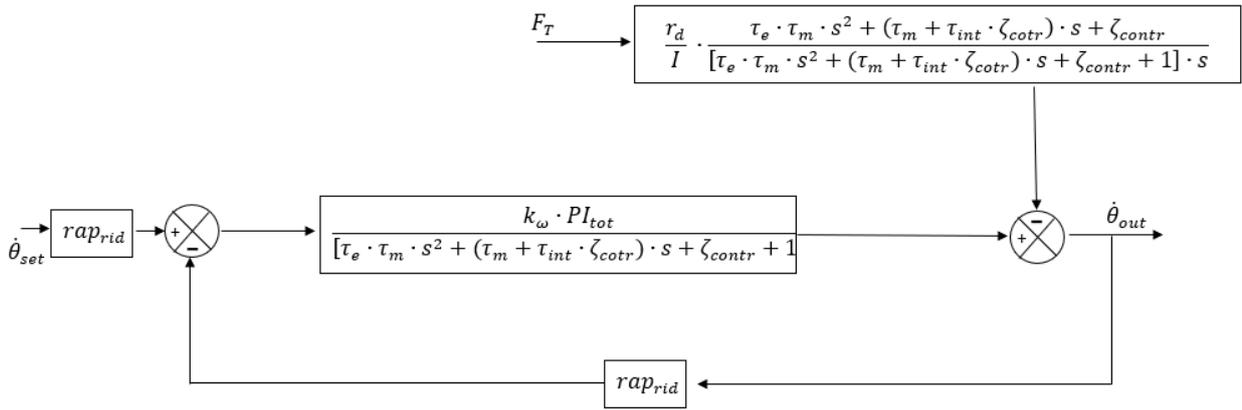


Figura 2.19 - schema a blocchi servosistema semplificato

Ricordando che:

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{OL}(s) = \frac{\overline{\dot{\theta}_{i,F/B}(s)}}{\overline{\dot{\theta}_{i,err}(s)}} \\ G_{CL}(s) = \frac{\overline{\dot{\theta}_{i,OUT}(s)}}{\overline{\dot{\theta}_{i,SET}(s)}} \\ G_{compliance}(s) = \frac{\overline{\dot{\theta}_{i,OUT}(s)}}{\overline{F_{i,\lambda}(s)}} \end{array} \right. \quad (2.25)$$

Si ricavano le seguenti funzioni di trasferimento:

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{OL}(s) = \frac{k_{\omega} \cdot rap_{rid} \cdot PI_{tot}(s)}{[\tau_e \cdot \tau_m \cdot s^2 + (\tau_m + \tau_{int} \cdot \zeta_{cotr}) \cdot s + \zeta_{cotr} + 1]} \\ G_{CL}(s) = \frac{k_{\omega} \cdot rap_{rid} \cdot PI_{tot}(s)}{[\tau_e \cdot \tau_m \cdot s^2 + (\tau_m + \tau_{int} \cdot \zeta_{cotr}) \cdot s + \zeta_{cotr} + 1] + k_{\omega} \cdot rap_{rid} \cdot PI_{tot}(s)} \\ G_{compliance}(s) = \frac{r_d}{I} \cdot \frac{\tau_e \cdot \tau_m \cdot s^2 + (\tau_m + \tau_{int} \cdot \zeta_{cotr}) \cdot s + \zeta_{cotr}}{[\tau_e \cdot \tau_m \cdot s^2 + (\tau_m + \tau_{int} \cdot \zeta_{cotr}) \cdot s + \zeta_{cotr} + 1 + k_{\omega} \cdot rap_{rid} \cdot PI_{tot}(s)] \cdot s} \end{array} \right. \quad (2.26)$$

A generare la rotazione della ruota si hanno, quindi, due contributi come esplicitato dalla seguente equazione:

$$\overline{\dot{\theta}_{i,OUT}} = G_{CL}(s) \cdot \overline{\dot{\theta}_{i,SET}} - G_{compliance}(s) \cdot \overline{F_{i,\lambda}} \quad (2.27)$$

Il primo contributo è legato alla velocità di set $\overline{\dot{\theta}_{i,SET}}$ che viene imposta mentre, il secondo, è dovuto al disturbo proveniente dall'esterno che, in questo caso, è la forza di attrito $\overline{F_{i,\lambda}}$. Ritornando al sistema presentato in (2.26), dall'espressione di $G_{compliance}(s)$, si può notare come questa funzione di trasferimento sia inversamente proporzionale all'inerzia della ruota. Questo vuol dire che la rotazione generata da $\overline{F_{i,\lambda}}$ è tanto più piccola quanto più grande è l'inerzia della ruota. L'analisi delle funzioni di trasferimento è importante proprio per effettuare considerazioni di questo tipo permettendo di trovare i parametri critici del sistema.

Si esplicitano di seguito le costanti di tempo, il fattore di smorzamento e la funzione di trasferimento complessiva dei controllori PI_{ext} e PI_{int} :

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta_{contr} = \frac{k_{I,int} \cdot I}{k_e \cdot k_C} \\ \tau_e = \frac{L}{R} \\ \tau_m = \frac{I \cdot R}{k_e \cdot k_C} \\ \tau_{int} = \frac{k_{P,int}}{k_{I,int}} \\ \tau_{ext} = \frac{k_{P,ext}}{k_{I,ext}} \\ PI_{tot}(s) = PI_{ext} \cdot PI_{int} = \frac{k_{I,ext} \cdot k_{I,int}}{s^2} \cdot [(\tau_{ext} \cdot \tau_{int}) \cdot s^2 + (\tau_{ext} + \tau_{int}) \cdot s + 1] \end{array} \right. \quad (2.28)$$

2.4.3. Risposta in frequenza

Una volta ottenute le funzioni di trasferimento queste possono essere utilizzate per ricavare la risposta del sistema forzato, come in questo caso, come somma di un integrale particolare e di un integrale generale. Non viene considerato in questo caso l'integrale generale poiché l'interesse va sulla risposta del sistema a regime. Per studiare la risposta in frequenza del sistema a regime si sostituisce alla variabile di Laplace la soluzione complessa $s = j \cdot \omega$ dove ω rappresenta la frequenza di eccitazione della forzante.

A questo punto è possibile ricavare $G_{OL}(j\omega)$, $G_{CL}(j\omega)$ e $G_{compliance}(j\omega)$ analiticamente attraverso passaggi algebrici o numericamente andando ad applicare un "sine sweep" alle funzioni di trasferimento andandone a calcolare per ogni valore della frequenza di eccitazione il modulo e la fase.

Le funzioni di trasferimento dipendono solo dal sistema che si analizza, non dipendono dai segnali in ingresso e in uscita. Calcolando il modulo e la fase delle funzioni di trasferimento si ottiene il diagramma di Bode che riporta in forma grafica la tendenza del sistema ad amplificare o attenuare, seguire o sfasare un segnale in ingresso. Nel caso specifico considerando la sola $G_{CL}(j\omega)$ l'ampiezza della risposta in uscita sarà pari a:

$$\overline{\dot{\theta}_{i,OUT}} = |G_{CL}(j\omega)| \cdot \overline{\dot{\theta}_{i,SET}} \quad (2.29)$$

Mentre la fase sarà pari a:

$$\varphi = \arg(G_{CL}(j\omega)) = \arctg\left(\frac{Im[G_{CL}(j\omega)]}{Re[G_{CL}(j\omega)]}\right) \quad (2.30)$$

Si riportano in Figura 2.20, Figura 2.21 e in Figura 2.22 rispettivamente i diagrammi di Bode delle funzioni di trasferimento $G_{OL}(s)$, $G_{CL}(s)$ e $G_{compliance}(s)$.

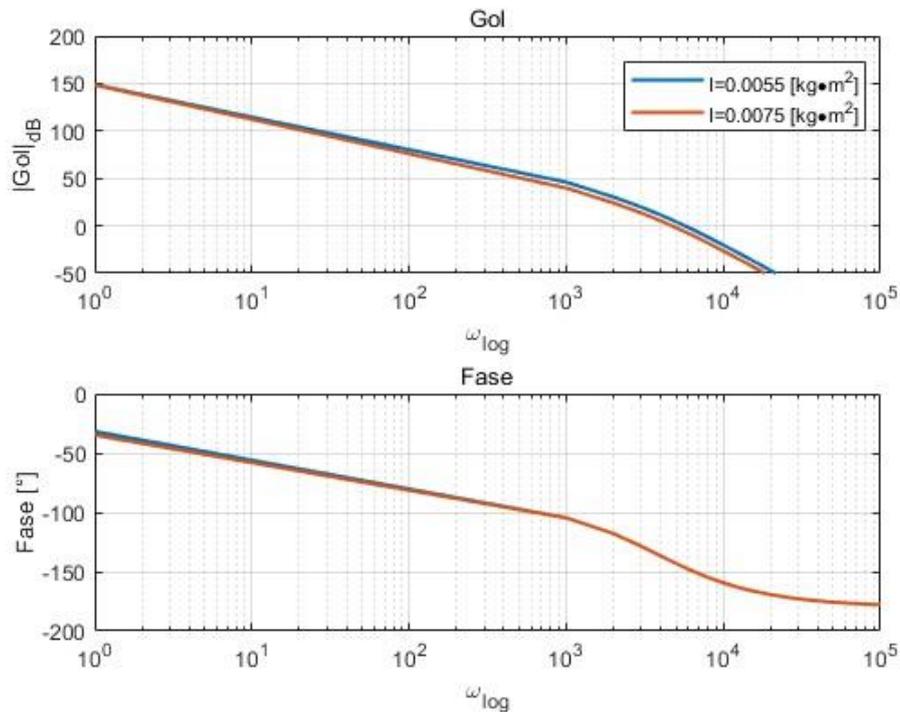


Figura 2.20 - diagrammi di Bode G_{ol}

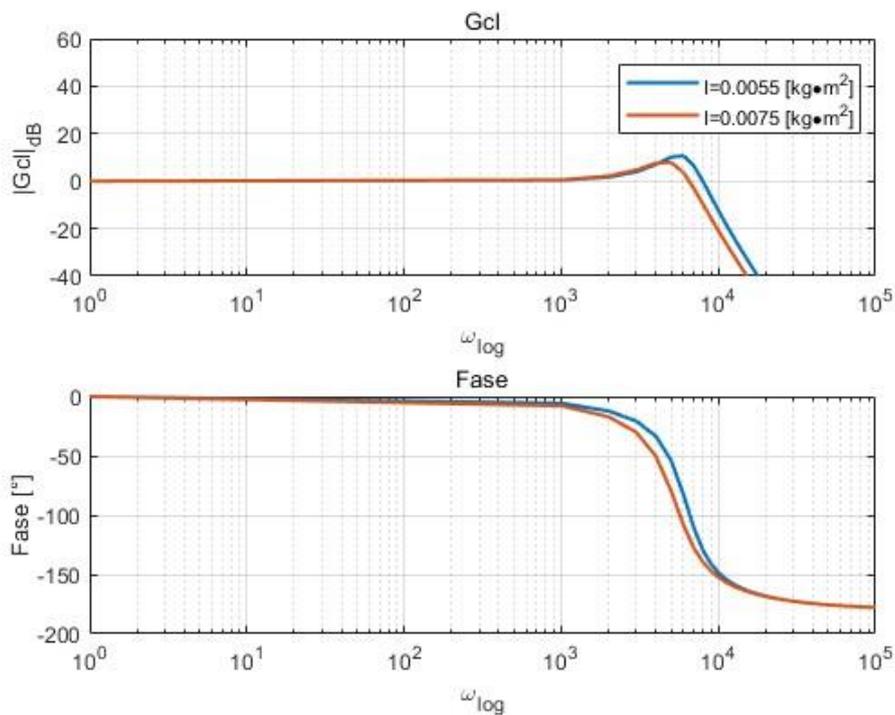


Figura 2.21 - diagrammi di Bode G_{cl}

In blu vengono rappresentati i diagrammi di Bode delle funzioni di trasferimento senza considerare l'inerzia del motore mentre, in rosso, vengono rappresentate le stesse funzioni di trasferimento considerando l'inerzia del motore.

Nonostante la variazione sia minima, dai diagrammi è evidente l'incremento della stabilità del sistema. Analiticamente può essere spiegato dall'aumento dello smorzamento (equazione (2.28)) mentre

graficamente lo si intuisce dalla ω_{gc} (gain cross-over) che si sposta a sinistra aumentando il margine di fase. Questo significa che ci si allontana dalla condizione per cui nella funzione di trasferimento G_{OL} avvengono contemporaneamente $|G_{OL}(j\omega)|_{dB} = 0$ e $\varphi = 180^\circ$ che rappresentano, insieme, la condizione di instabilità del sistema. Questo lo si evince anche dalla funzione di trasferimento G_{CL} il cui picco di risonanza si abbassa e si sposta a sinistra, coerentemente sia con la spiegazione analitica che con quella grafica dell'aumento della stabilità del sistema.

Come è già stato detto esiste un'altra causa della rotazione della ruota motrice e questa risiede proprio nel disturbo generato dalla forza di attrito. La tendenza del sistema a cedere ai disturbi esterni si esprime con la funzione di trasferimento $G_{compliance}(j\omega)$. Si riportano in Figura 2.22 i diagrammi di Bode.

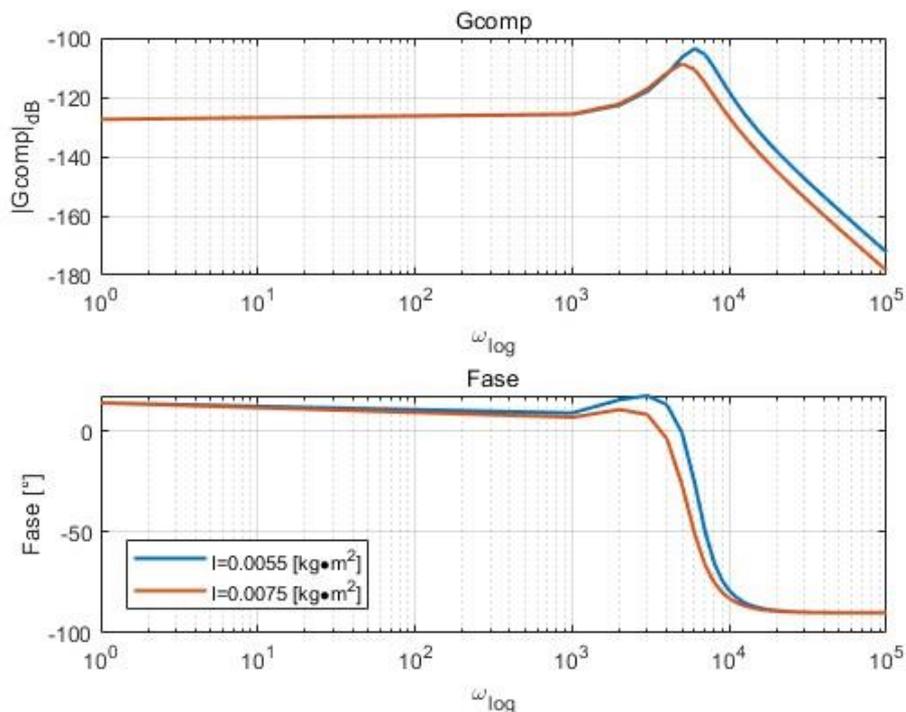


Figura 2.22 - diagrammi di Bode $G_{compliance}$

Da questi diagrammi si evince come la ruota, grazie ovviamente al controllo, tende ad anticipare leggermente la forzante per basse frequenze per giungere infine a piccole rotazioni e ad uno sfasamento di 90° per alte frequenze quindi la ruota diventa praticamente insensibile al disturbo esterno dovuto all'attrito. Come ci si poteva aspettare, aumentare l'inerzia della ruota contribuisce all'incremento della rigidità del sistema: a parità di frequenza di eccitazione la rotazione è inferiore.

2.5. Modello di attrito

Le prestazioni del MiR sono fortemente influenzate dalle forze di attrito che si instaurano nella superficie di contatto tra le ruote e il piano su cui avviene il moto. L'attrito è indispensabile per la trazione di un qualsiasi veicolo terrestre in quanto, per il terzo principio della dinamica, permette al piano su cui avviene il rotolamento della ruota di rispondere con una reazione uguale e contraria alla spinta derivante dalla ruota stessa. Queste forze poi vengono trasmesse al telaio del MiR mediante i giunti che lo collegano alle ruote e, applicando l'equilibrio dinamico, si ottiene la legge del moto del MiR [9]. Queste forze possono agire in tre modi:

- Forza di attrito longitudinale: è la componente che genera la forza di trazione del veicolo;

- Forza di attrito trasversale: è la componente che frena il veicolo qualora dovesse slittare lungo la direzione y a causa, per esempio, di un'elevata forza centrifuga o, in condizioni di aderenza, bilancia la forza centrifuga;
- Momento di auto-allineamento: è una coppia che viene generata sulla ruota che permette all'asse λ_i di allinearsi con la velocità $\overline{V_{Ci}}$ della cerniera dell' i -esima ruota.

Questi contributi possono essere studiati in maniera indipendente, tuttavia, valutare le forze di attrito non è un processo semplice a causa della non linearità di questo fenomeno fisico. La complessità nel riuscire a ricavare un'opportuna legge fisica che modelli le forze di attrito, sta nel fatto che queste dipendono da diversi fattori:

- Forza di adesione: è una proprietà della gomma che tende ad instaurare un legame chimico con la superficie a contatto e dipende fortemente dalla temperatura
- Usura: ovviamente anch'essa è coinvolta nella valutazione delle forze di attrito, le asperità in uno pneumatico usurato sono spianate e di conseguenza si ha meno penetrazione con le asperità della superficie a contatto a parità di carico.

Ci sarebbero da considerare, inoltre, anche altri fenomeni fisici come l'isteresi e fenomeni di natura viscosa. Trovare un modello matematico che riesca a tener conto di tutti questi fattori non è affatto semplice. In questa trattazione, si fa riferimento al modello di Delft [10] per cercare di considerare tutti i fattori che caratterizzano l'attrito. Questo modello è di natura semi-empirica e permette di valutare la forza di attrito longitudinale, la forza di attrito trasversale e il momento di auto-allineamento.

2.5.1. Attrito longitudinale

L'attrito longitudinale è la componente delle forze di attrito che genera il moto del MiR. La valutazione della forza è possibile attraverso il calcolo di un fattore di slittamento σ_i calcolato per ciascuna ruota con cui poi è possibile calcolare la forza di attrito $F_{i,\lambda}(\sigma_i)$ agente sulla ruota attraverso un grafico sperimentale.

Formalmente il fattore di slittamento viene definito nel seguente modo:

$$\sigma_i = \frac{\dot{\theta}_i \cdot rd - V_{Ci,\lambda_i}}{\max(\dot{\theta}_i \cdot rd, V_{Ci})} \quad \sigma_i \in [-1, 1] \quad (2.31)$$

Dove $\dot{\theta}_i \cdot rd$ rappresenta la velocità periferica della ruota, cioè la velocità della ruota nel punto di contatto con la superficie, mentre V_{Ci,λ_i} rappresenta la velocità della cerniera della ruota lungo la direzione λ_i .

Si riporta in Figura 2.23 una rappresentazione grafica della ruota lungo la direzione longitudinale per poter visualizzare le velocità $\dot{\theta}_i \cdot rd$ e V_{Ci,λ_i} .

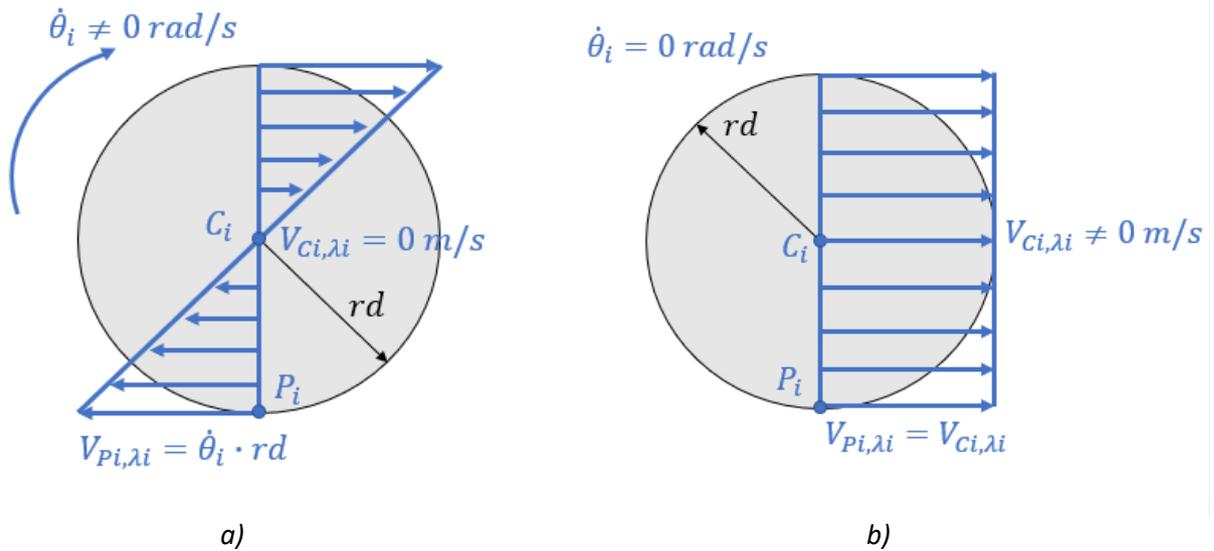


Figura 2.23 - ruota i -esima con moto di pura rotazione a) e pura traslazione b)

Per poterne facilitare la visualizzazione, il moto dell' i -esima ruota è stato scomposto in moto di pura rotazione (Figura 2.23 a) e pura traslazione (Figura 2.23 b). Il punto P_i rappresenta il punto di contatto della ruota con il piano su cui avviene il moto e, quindi, avente velocità pari a $\dot{\theta}_i \cdot rd$ mentre C_i rappresenta il centro geometrico della ruota e cioè il punto in cui la ruota è incernierata al telaio e avente velocità V_{C_i} .

Dall'equazione (2.31) si evince come se il numeratore fosse nullo, allora anche lo slittamento σ_i sarebbe nullo e quindi non c'è moto relativo tra il piano e la ruota. Graficamente questo risultato si può ottenere sommando i due profili di velocità in Figura 2.23 e ottenendo quindi un moto di rototraslazione (Figura 2.24). Si ipotizza che nel moto di pura traslazione (Figura 2.23 b) la velocità del centro della ruota V_{C_i} sia pari a $\dot{\theta}_i \cdot rd$ dove $\dot{\theta}_i$ è la velocità di rotazione della ruota nel moto di pura rotazione (Figura 2.23 a). In Figura 2.24, a seguito della somma vettoriale dei profili delle velocità in Figura 2.23, il punto P_i ha velocità nulla, ciò vuol dire che rappresenta il centro di istantanea rotazione. La sua velocità è uguale a quella del pavimento e, non essendoci moto relativo, non c'è slittamento.

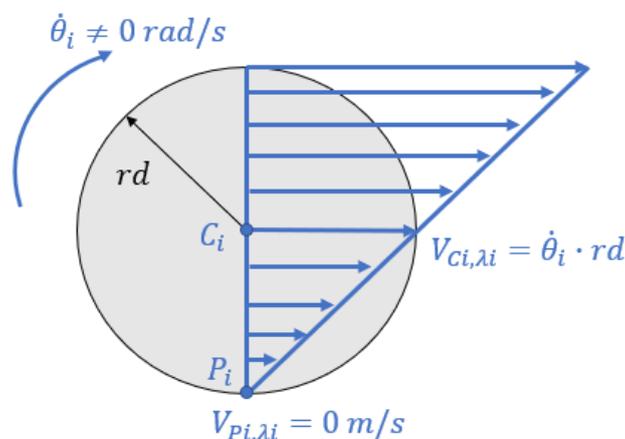


Figura 2.24 - ruota i -esima con moto di rotolamento senza strisciamento

Dopo aver calcolato il fattore di slittamento è possibile valutare la forza di attrito agente sulla ruota attraverso una funzione $F_{i,\lambda}(\sigma_i)$ [11]. La funzione potrebbe essere rappresentata da un polinomio di grado n :

$$F_{i,\lambda}(\sigma_i) = a_n \cdot \sigma_i^n + a_{n-1} \cdot \sigma_i^{n-1} + \dots + a_1 \cdot \sigma_i + a_0 \quad (2.32)$$

Dove i coefficienti del polinomio possono essere determinati sperimentalmente. Questi coefficienti permettono di ottenere una funzione $F_{i,\lambda}(\sigma_i)$ che riproduce tanto più fedelmente le reali forze di attrito quanto più correttamente vengono stimati i coefficienti.

Si riporta in Figura 2.25 la funzione per il calcolo della forza di attrito longitudinale $F_{i,\lambda}(\sigma_i)$ utilizzata per il modello dinamico del MiR. Come è possibile notare è stata introdotta in prima approssimazione una funzione continua con derivata prima continua a tratti. Nel grafico è possibile distinguere:

- Una regione di stabilità nell'intervallo $\sigma_i \in [-s_1; s_2]$, in cui la forza di attrito cresce linearmente con lo slittamento;
- Una regione di instabilità negli intervalli $\sigma_i \in [-s_2; -s_1] \vee \sigma_i \in [s_1; s_2]$ dove la forza di attrito decresce linearmente con lo slittamento. In questi intervalli si assiste al fenomeno dello *stick-slip*;
- Una regione di instabilità negli intervalli $\sigma_i \in [-1; -s_2] \vee \sigma_i \in [s_2; 1]$ dove la forza di attrito è costante e non dipende più dallo slittamento.

I gradi di libertà su cui è possibile intervenire in modo da modificare la forma della curva per meglio interpolare eventuali dati sperimentali sono:

- Slittamento s_1 : delimita la regione di stabilità cioè quell'intervallo del dominio in cui la forza di attrito aumenta linearmente con lo slittamento. In s_1 la forza di attrito longitudinale raggiunge il valore massimo e vale $F_{\lambda,st}$;
- Slittamento s_2 : si trova nella regione di instabilità al termine dell'intervallo in cui avviene il fenomeno dello *stick-slip*. A partire da s_2 la forza di attrito è costante e vale $F_{\lambda,inst}$;
- Coefficiente di attrito f_a : fisicamente serve per calcolare la forza di attrito generata in condizioni di stabilità e cioè per $-s_1 \leq \sigma_i \leq s_1$ dove lo slittamento è molto basso;

- Coefficiente di attrito f : serve per calcolare la forza di attrito longitudinale generata in condizioni di instabilità e cioè per $\sigma_i \leq -s_2$ v $\sigma_i \geq s_2$. Insieme al coefficiente di attrito statico f_a viene utilizzato anche per valutare il comportamento dell'attrito longitudinale in condizioni di incipiente slittamento.

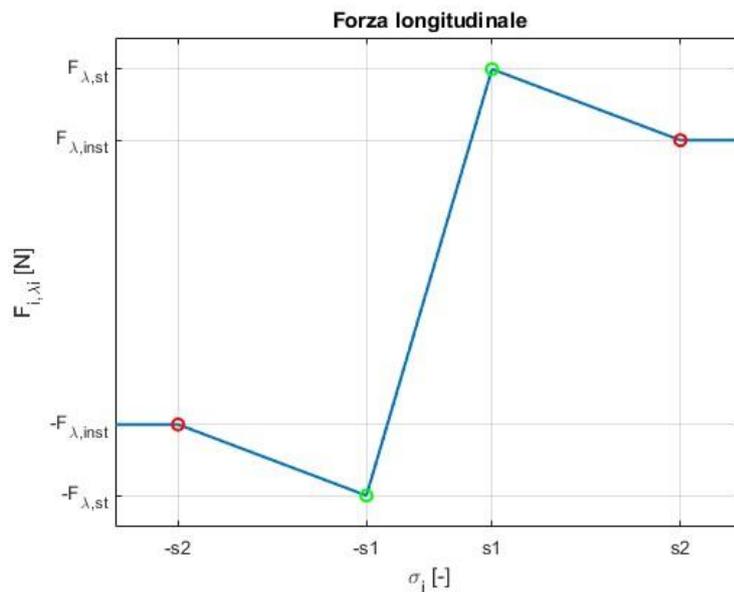


Figura 2.25 - forza di attrito longitudinale in funzione del fattore di slittamento

In Tabella 8 si riportano i valori dei parametri della funzione $F_{i,\lambda_i}(\sigma_i)$ per il calcolo della forza di attrito longitudinale.

Tabella 8 - valori dei parametri di F_{i,λ_i}

| Parametro | Valore |
|---|--------------|
| s_1 | 0.2 [-] |
| s_2 | 0.8 [-] |
| f | 0.2 [-] |
| f_a | 0.3 [-] |
| $F_{i,\lambda_i}(s_1) = F_{\lambda,st}$ | 122.0100 [N] |
| $F_{i,\lambda_i}(s_2) = F_{\lambda,inst}$ | 81.3400 [N] |

2.5.2. Attrito tangenziale

È stato detto che il modello di Delft può essere utilizzato anche per ricavare un modello per la forza di attrito tangenziale. In questo caso la funzione che descrive la forza di attrito tangenziale agente sull' i -esima ruota dipende da un angolo α_i chiamato *angolo di deriva*. Questo angolo rappresenta su ciascuna ruota l'inclinazione della velocità $\overline{V}_{C_i,t}$ rispetto al versore $\overline{\lambda}_i$.

Si riporta in Figura 2.26 la vista dall'alto dell' i -esima ruota. In Figura 2.26 al punto C_i della ruota i -esima è stata assegnata una generica velocità \overline{V}_{C_i} .

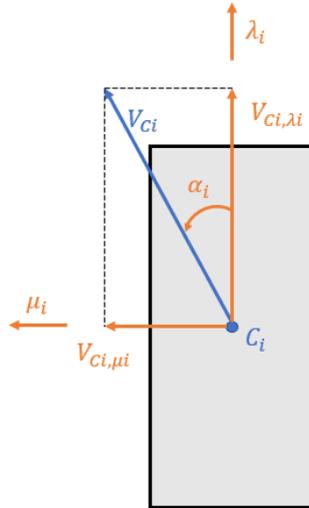


Figura 2.26 - ruota i -esima sul piano $\lambda_i \mu_i$

L'angolo di deriva viene definito nel seguente modo:

$$\alpha_i = \arcsin\left(\frac{V_{Ci,\mu i}}{V_{Ci}}\right) \quad (2.33)$$

Dopo aver calcolato l'angolo di deriva, che in questo caso rappresenta l'inclinazione α_i della velocità della cerniera della ruota rispetto all'asse λ_i , si sfrutta una funzione empirica $F_{i,\mu i}(\alpha_i)$ [11] per il calcolo della forza di attrito. Anche la funzione $F_{i,\mu i}(\alpha_i)$ può essere rappresentata da un polinomio di grado n :

$$F_{i,\mu i}(\alpha_i) = b_n \cdot \alpha_i^n + b_{n-1} \cdot \alpha_i^{n-1} + \dots + b_1 \cdot \alpha_i + b_0 \quad (2.34)$$

In Figura 2.27, con le stesse ipotesi fatte per l'attrito longitudinale, si riporta il modello matematico di attrito trasversale. Come nel modello di attrito longitudinale, anche in questo caso il dominio può essere suddiviso in tre regioni:

- Una regione di stabilità nell'intervallo $\alpha_i \in [-a_1; a_2]$, in cui la forza di attrito cresce linearmente con l'angolo di deriva;
- Una regione di instabilità negli intervalli $\alpha_i \in [-a_2; -a_1] \vee \alpha_i \in [a_1; a_2]$ dove la forza di attrito decresce linearmente con l'angolo di deriva.
- Una regione di instabilità negli intervalli $\alpha_i \in \left[-\frac{\pi}{2}; -a_2\right] \vee \alpha_i \in \left[a_2; \frac{\pi}{2}\right]$ dove la forza di attrito è costante e non dipende più dall'angolo di deriva.

I parametri che possono essere modificati sono:

- Angolo di deriva α_1 : delimita la regione di stabilità cioè quell'intervallo del dominio in cui la forza di attrito aumenta linearmente con l'angolo di deriva. In a_1 la forza di attrito trasversale raggiunge il valore massimo e vale $F_{\mu, st}$;
- Angolo di deriva α_2 : si trova nella regione di instabilità al termine dell'intervallo in cui avviene il fenomeno dello stick-slip. A partire da a_2 la forza di attrito è costante e vale $F_{\mu, inst}$;
- Coefficiente di attrito f_a : è lo stesso scelto per il calcolo della forza di attrito longitudinale. Serve per calcolare la forza di attrito tangenziale in condizioni di stabilità cioè per $-a_1 \leq \alpha_i \leq a_1$;
- Coefficiente di attrito f : è lo stesso scelto per il calcolo della forza di attrito longitudinale. Serve per calcolare la forza di attrito tangenziale in condizioni di instabilità e, quindi per $\alpha_i \leq -a_2 \vee \alpha_i \geq a_2$. Anche in questo caso il coefficiente di attrito f_a , insieme a f , viene utilizzato per riprodurre

il comportamento dell'attrito tangenziale in condizioni di stick-slip che avviene per $-a_2 \leq \alpha_i \leq -a_1 \vee a_1 \leq \alpha_i \leq a_2$.

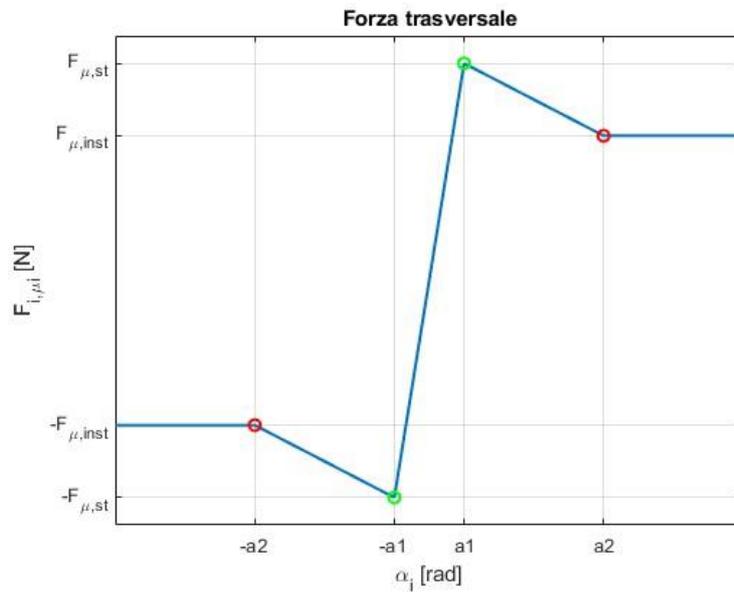


Figura 2.27 - forza di attrito trasversale in funzione dell'angolo di deriva

In Tabella 9 si riportano i valori dei parametri della funzione $F_{i,\mu}(\alpha_i)$ per il calcolo della forza di attrito tangenziale.

Tabella 9 - valori dei parametri di $F_{i,\mu}$

| Parametro | Valore |
|---------------------------------|--------------|
| a_1 | 0.0873 [rad] |
| a_2 | 0.4363 [rad] |
| $F_{i,\mu}(a_1) = F_{\mu,st}$ | 97.6080 [N] |
| $F_{i,\mu}(a_2) = F_{\mu,inst}$ | 65.0720 [N] |

2.5.3. Momento di auto-allineamento

Oltre ai due contributi precedentemente citati, ne esiste un altro, il momento di auto-allineamento, che viene generato da uno spostamento della retta d'azione della forza di attrito tangenziale che non passa per il punto di contatto della ruota con la superficie. Questo genera un momento che tende ad allineare la ruota con la direzione della velocità del centro della ruota. Per valutarne il modulo si sfrutta ancora una volta α_i definito nel paragrafo precedente. Come per l'attrito longitudinale e tangenziale, anche il momento $M_i(\alpha_i)$ [12] può essere definito da un polinomio di grado n che interpola i dati sperimentali:

$$M_i(\alpha_i) = c_n \cdot \alpha_i^n + c_{n-1} \cdot \alpha_i^{n-1} + \dots + c_1 \cdot \alpha_i + c_0 \quad (2.35)$$

Si riporta in Figura 2.28 il grafico della funzione $M_i(\alpha_i)$. Anche in questo caso si possono distinguere tre regioni differenti:

- Una regione di stabilità nell'intervallo $\alpha_i \in [-am_1; am_1]$, in cui il momento di auto-allineamento cresce linearmente con l'angolo di deriva;
- Una regione di instabilità negli intervalli $\alpha_i \in [-am_2; -am_1] \vee \alpha_i \in [am_1; am_2]$ dove il momento di auto-allineamento decresce linearmente con l'angolo di deriva.

- Una regione di instabilità negli intervalli $\alpha_i \in \left[-\frac{\pi}{2}; -am_2\right] \vee \alpha_i \in \left[am_2; \frac{\pi}{2}\right]$ dove il momento di auto-allineamento è costante e pari a zero.

In questo caso si hanno a disposizione quattro gradi di libertà:

- Angolo di deriva am_1 : delimita la regione di stabilità cioè quell'intervallo del dominio in cui il momento di auto-allineamento aumenta linearmente con l'angolo di deriva. In am_1 il momento raggiunge il valore massimo e vale M_{st} ;
- Angolo di deriva am_2 : si trova nella regione di instabilità al termine dell'intervallo in cui avviene il fenomeno dello stick-slip. A partire da am_2 il momento di auto-allineamento è costante e vale M_{inst} ;
- Coefficiente di attrito f_a : è lo stesso scelto per il calcolo della forza di attrito longitudinale e tangenziale. Serve per calcolare il momento di auto-allineamento in condizioni di aderenza cioè per $-am_1 \leq \alpha_i \leq am_1$;
- Coefficiente di attrito f : è lo stesso scelto per il calcolo della forza di attrito longitudinale e tangenziale. In questo caso viene utilizzato, insieme al coefficiente di attrito statico f_a , solo per descrivere come evolve il momento di auto-allineamento in condizioni di stick-slip per $-am_2 \leq \alpha_i \leq -am_1 \vee am_1 \leq \alpha_i \leq am_2$.

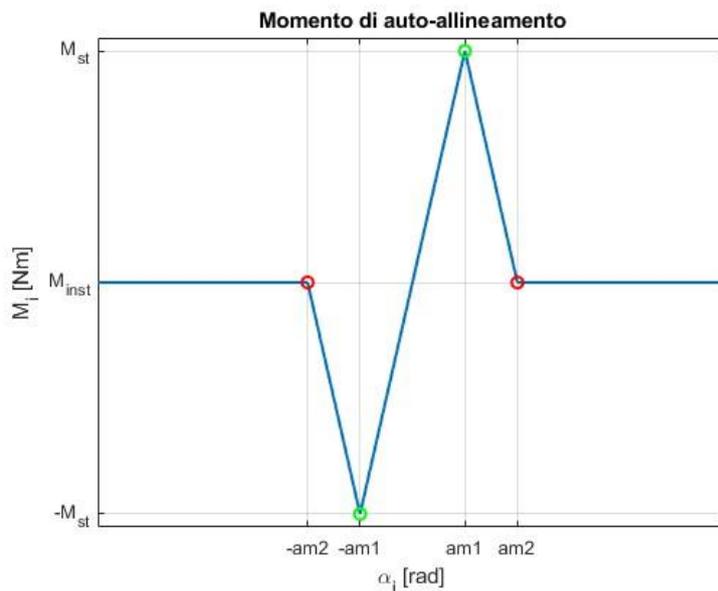


Figura 2.28 - momento di auto-allineamento in funzione del fattore di slittamento

In Tabella 10 si riportano i valori dei parametri della funzione $M_i(\alpha_i)$ per il calcolo della forza di attrito tangenziale.

Tabella 10 - valori dei parametri di M_i

| Parametro | Valore |
|------------------------|--------------|
| am_1 | 0.0436 [rad] |
| am_2 | 0.0873 [rad] |
| $M_i(am_1) = M_{st}$ | 1.0412 [Nm] |
| $M_i(am_2) = M_{inst}$ | 0.0000 [Nm] |

Finora sono stati trattati i moduli delle forze di attrito senza considerarne i versi. Si studia di seguito il verso delle forze di attrito rispetto al sistema di riferimento locale della ruota. Si riporta in Figura 2.29 il DCL della ruota ipotizzando i versi delle forze concordi con i versori del sistema di riferimento locale della i -esima ruota.

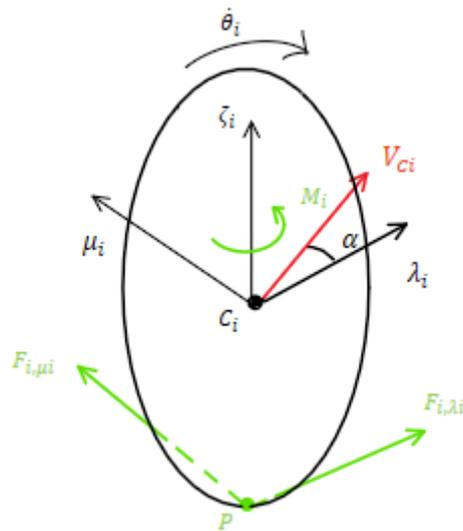


Figura 2.29 - DCL ruota i -esima

Nel DCL non sono state rappresentate la forza peso e la reazione normale, che verranno poi trattate nel paragrafo successivo, la coppia motrice e le reazioni vincolari agenti sulla ruota da parte del telaio del MiR che equilibrano le forze di attrito e il momento di auto-allineamento per semplicità rappresentativa.

Seguendo questa scelta arbitraria dei versi delle forze di attrito valgono le seguenti relazioni:

$$F_{i,\lambda i} = F_{i,\lambda i}(\sigma_i) \quad (2.36)$$

$$F_{i,\mu i} = -F_{i,\mu i}(\alpha_i) \quad (2.37)$$

$$M_i = M_i(\alpha_i) \quad (2.38)$$

2.5.4. Problema numerico nel calcolo di σ_i

Come è possibile notare dall'equazione (2.31) la definizione del fattore di slittamento secondo il modello di Delft è tutt'altro che lineare e questo genera dei problemi nell'intorno dello zero per cui se il denominatore decresce più velocemente del numeratore allora il fattore di slittamento aumenta invece che diminuire nonostante la velocità periferica $\dot{\theta}_i \cdot r d$ e la velocità di trascinarsi $V_{C_i,\lambda i}$ della ruota si avvicinino.

La definizione dello slittamento nell'equazione (2.31) genera il grafico in Figura 2.30.

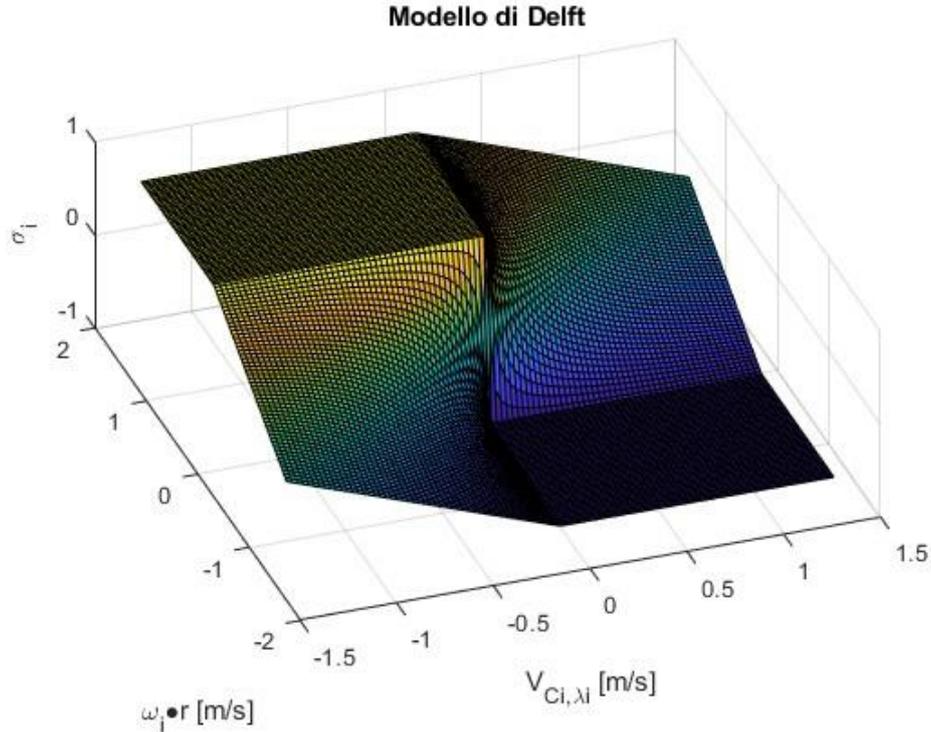


Figura 2.30 - fattore di slittamento secondo modello di Delft

Come da definizione il massimo valore che il fattore può assumere è unitario e questa condizione si raggiunge o quando una delle due velocità è nulla oppure quando sono discordi.

Per ovviare al problema nell'intorno dello zero sono state proposte delle funzioni alternative che andassero ad approssimare il modello di Delft senza discostarsi troppo da esso e che, soprattutto, andassero a risolvere il problema nell'intorno dello zero.

Sono state proposte tre funzioni alternative di cui si riportano di seguito il grafico e l'errore assoluto rispetto al modello di Delft che si commette nel calcolo del fattore di slittamento:

2.5.4.1. Modello linearizzato

Il primo modello alternativo è stato ricavato andando a mantenere costante il denominatore del modello di Delft a cui è stato attribuito il valore della massima velocità periferica di set imposta dal controllo.

Si riporta di seguito la definizione:

$$\sigma_i = \begin{cases} \frac{\dot{\theta}_i \cdot rd - V_{Ci, \lambda i}}{\max(|\dot{\theta}_{i, SET} \cdot rd|)} & \forall \dot{\theta}_i \cdot rd, V_{Ci, \lambda i} \ni \dot{\theta}_i \cdot rd \cdot V_{Ci, \lambda i} > 0 \\ \frac{\dot{\theta}_i \cdot rd}{|\dot{\theta}_i \cdot rd|} & \forall \dot{\theta}_i \cdot rd, V_{Ci, \lambda i} \ni \dot{\theta}_i \cdot rd \cdot V_{Ci, \lambda i} \leq 0 \end{cases} \quad (2.39)$$

Anche in questo caso, qualora le velocità dovessero essere discordi o una delle velocità dovesse essere nulla, il fattore di slittamento assume il valore massimo.

Si riporta in Figura 2.31 il grafico relativo al modello linearizzato.

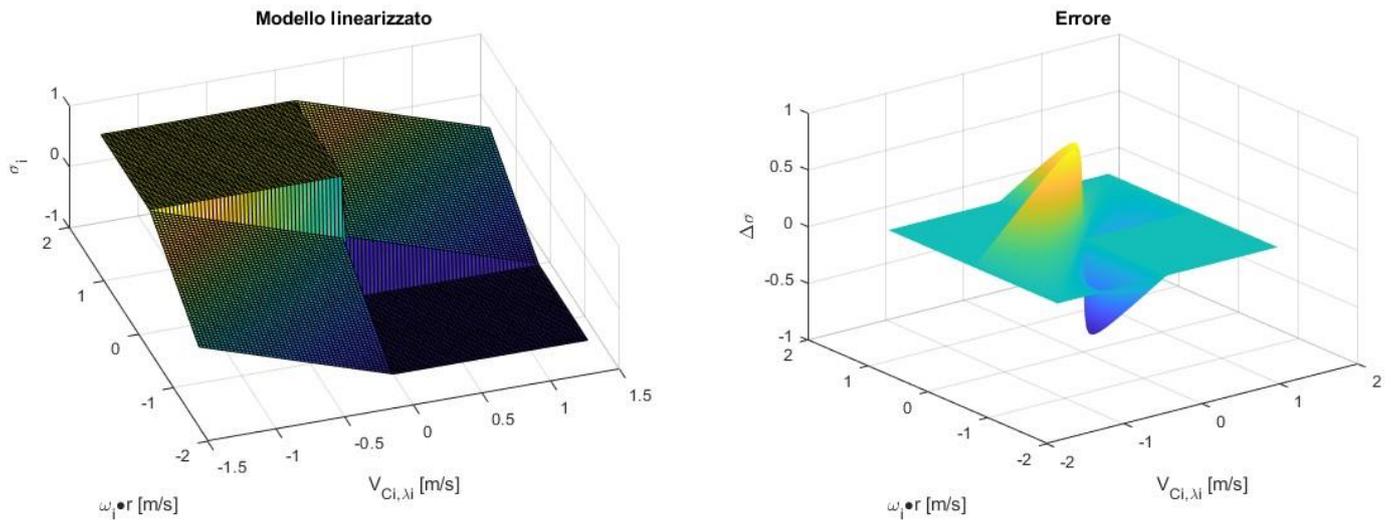


Figura 2.31 - confronto tra modello di Delft e modello linearizzato

Anche se il modello linearizzato risolve il problema nell'intorno dello zero, non è un buon candidato per sostituire il modello di Delft a causa dell'errore introdotto nel calcolo del fattore di slittamento che risulta essere grossolano anche quando ci si allontana dall'intorno dello zero.

2.5.4.2. Modello sinusoidale

È stata quindi cercata una funzione alternativa che potesse avvicinarsi al modello di Delft, è stato quindi introdotto un andamento sinusoidale nel primo e terzo quadrante attraverso la seguente funzione:

$$\sigma_i = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\dot{\theta}_i \cdot rd - V_{Ci,\lambda i}}{\max(|\dot{\theta}_{i,SET} \cdot rd|)}\right) & \forall \dot{\theta}_i \cdot rd, V_{Ci,\lambda i} \ni \dot{\theta}_i \cdot rd \cdot V_{Ci,\lambda i} > 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\dot{\theta}_i \cdot rd}{|\dot{\theta}_i \cdot rd|}\right) & \forall \dot{\theta}_i \cdot rd, V_{Ci,\lambda i} \ni \dot{\theta}_i \cdot rd \cdot V_{Ci,\lambda i} \leq 0 \end{cases} \quad (2.40)$$

Si riporta in Figura 2.32 il grafico relativo al modello sinusoidale definito in (2.40).

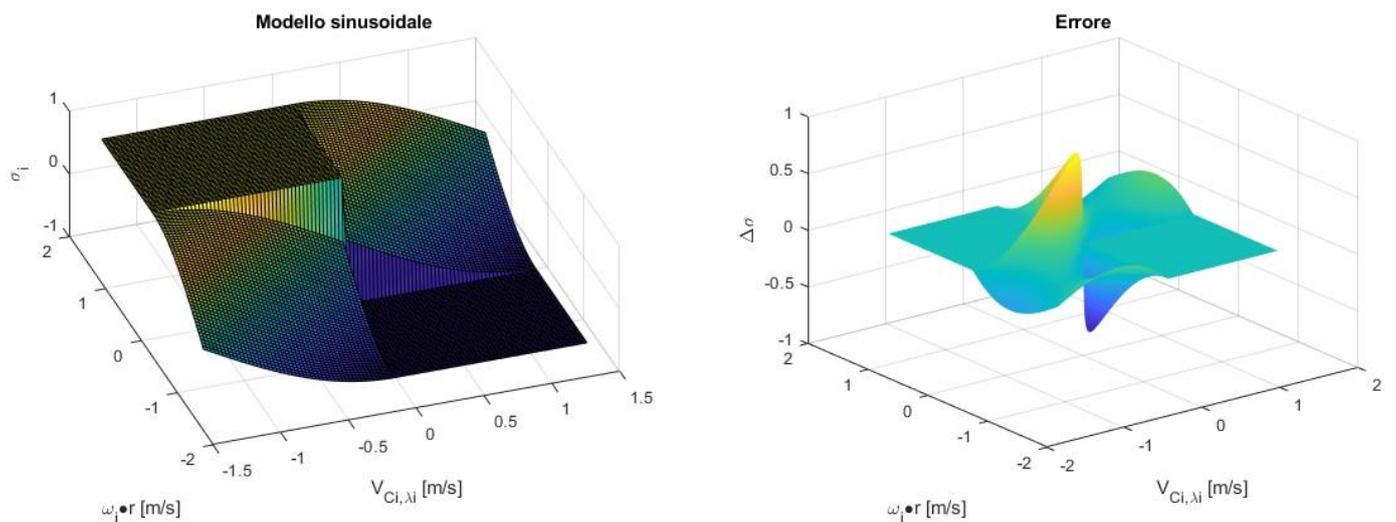


Figura 2.32 - confronto tra modello di Delft e modello sinusoidale

Anche in questo caso, non è stata trovata una soluzione valida alternativa al modello di Delft poiché nonostante l'errore massimo sia leggermente più basso, questo miglioramento viene compensato da un incremento degli errori fuori dall'intorno dello zero.

2.5.4.3. Modello di Delft linearizzato nell'intorno dello zero

Come ultima funzione alternativa si propone la funzione di Delft con una porzione del dominio nell'intorno dello zero in cui il modello viene linearizzato. Quest'area in cui avviene la linearizzazione assume la forma di una circonferenza il cui raggio viene chiamato r_{lin} e supponendo di chiamare σ'_i il modello di Delft modificato allora vale:

$$\lim_{r_{lin} \rightarrow 0} \sigma'_i = \sigma_i \quad (2.41)$$

Dunque, si è andati alla ricerca di un raggio che fosse piccolo abbastanza da non rendere σ'_i troppo diversa da σ_i ma grande abbastanza da risolvere il problema nell'intorno dello zero.

Dopo diversi tentativi si è scelto un valore di $r_{lin} = 0.02 \text{ [m/s]}$ ottenendo i seguenti risultati mostrati in Figura 2.33. Dal grafico dell'errore in Figura 2.33 si può notare come solo nell'intorno dello zero, dove viene applicata la linearizzazione, è presente un discostamento dal modello di Delft mentre, nella restante parte del dominio, c'è una perfetta sovrapposizione tra i due modelli.

Quest'ultima funzione è stata quindi scelta per calcolare il fattore di slittamento utilizzato per calcolare le forze di attrito agenti sulle ruote.

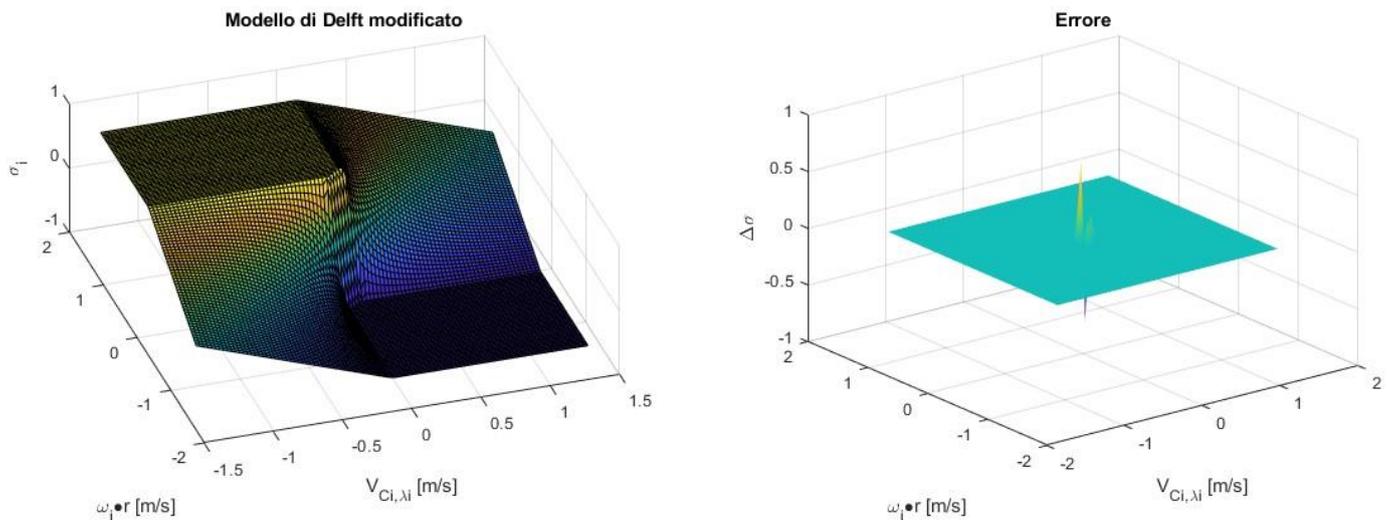


Figura 2.33 - confronto tra modello di Delft e modello di Delft modificato

2.5.5. Attrito volvente

Esiste un'altra componente tra le forze dissipative agente sulle ruote dovuta al ciclo di isteresi che caratterizza la compressione e la distensione della ruota. Il lavoro necessario per deformare la ruota non è lo stesso che viene restituito nella fase di distensione poiché una parte dell'energia accumulata viene dissipata sotto forma di calore.

Nella pratica è come se la distribuzione delle forze di pressione avesse un baricentro leggermente spostato di una quantità b_{volv} che genera una coppia resistente al moto e che quindi genera lavoro negativo, dissipativo. Si riporta in Figura 2.34 il DCL della ruota con coppia motrice e attrito volvente.

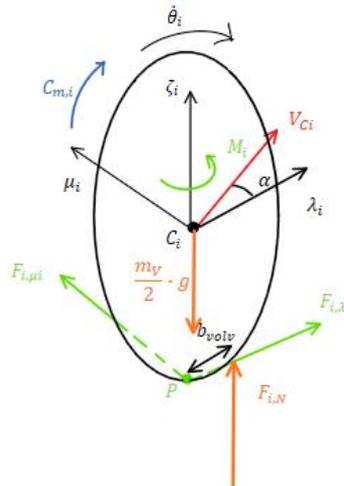


Figura 2.34 - DCL ruota i-esima

Anche in questo caso non sono state rappresentate le reazioni vincolari che servono per garantire l'equilibrio lungo la direzione μ_i e λ_i per semplicità rappresentativa. Si ricorda, quindi, che queste reazioni ci sono ma sono state omesse. Quindi l'attrito volvente genererà una coppia resistente pari a:

$$C_{volv} = F_{i,N} \cdot b_{volv} \quad (2.42)$$

Dove b_{volv} dipende dalla deformazione della ruota, dal materiale e da altri fattori. Nel modello la coppia generata dall'isteresi è stata modellizzata nel seguente modo:

$$C_{volv} = F_{i,N} \cdot (kk \cdot \dot{\theta}_i + kv \cdot \dot{\theta}_i^2) \quad (2.43)$$

Dunque, la dissipazione dipende anche dalla velocità della ruota e i coefficienti kk e kv possono essere determinati sperimentalmente e contengono tutte le informazioni che avrebbero portato alla definizione di b_{volv} .

3. MODELLO DINAMICO MIR A DUE RUOTE

Dopo aver studiato tutte le forze in gioco durante il moto del MiR, si applicano le equazioni di Newton-Eulero per ricavare l'equilibrio dinamico alle traslazioni e alle rotazioni nel SdR ($G - xyz$).

3.1. Dinamica modello a tre GDL

Si supponga che la velocità del centro di massa G del MiR sia composta da due contributi, uno tangenziale e uno normale alla direzione di massima estensione del MiR come riportato nello schema in Figura 3.1.

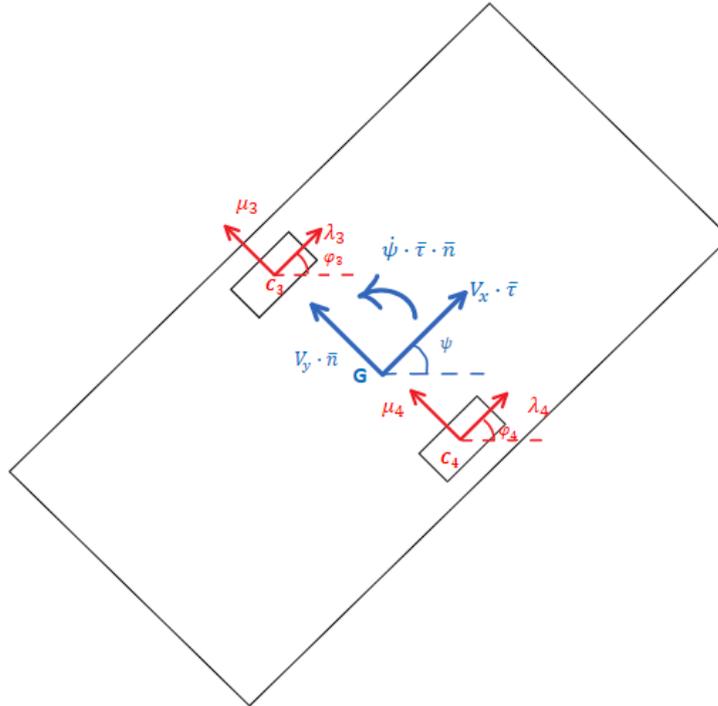


Figura 3.1 - Velocità del centro di massa G nel SdR relativo

Di conseguenza posso definire in maniera formale la velocità di G come somma vettoriale dei due contributi:

$$\overline{V_G} = V_x \cdot \bar{\tau} + V_y \cdot \bar{n} = \dot{x}_G \cdot \bar{\tau} + \dot{y}_G \cdot \bar{n} \quad (3.1)$$

Andando a derivare:

$$\frac{d(\overline{V_G})}{dt} = \overline{a_G} = a_x \cdot \bar{\tau} + V_x \cdot \dot{\psi} \cdot \bar{n} + a_y \cdot \bar{n} - V_y \cdot \dot{\psi} \cdot \bar{\tau} \quad (3.2)$$

E quindi in definitiva:

$$\overline{a_G} = (a_x - V_y \cdot \dot{\psi}) \cdot \bar{\tau} + (a_y + V_x \cdot \dot{\psi}) \bar{n} \quad (3.3)$$

Di conseguenza l'accelerazione lungo le due direzioni deve tener conto anche del moto rotatorio del corpo rigido al quale il sistema di riferimento è solidale. Dopo aver espresso le accelerazioni del MiR nel SdR solidale, è possibile tracciare il diagramma di corpo libero (Figura 3.2) e ricavare le equazioni di equilibrio dinamico attraverso Newton-Eulero.

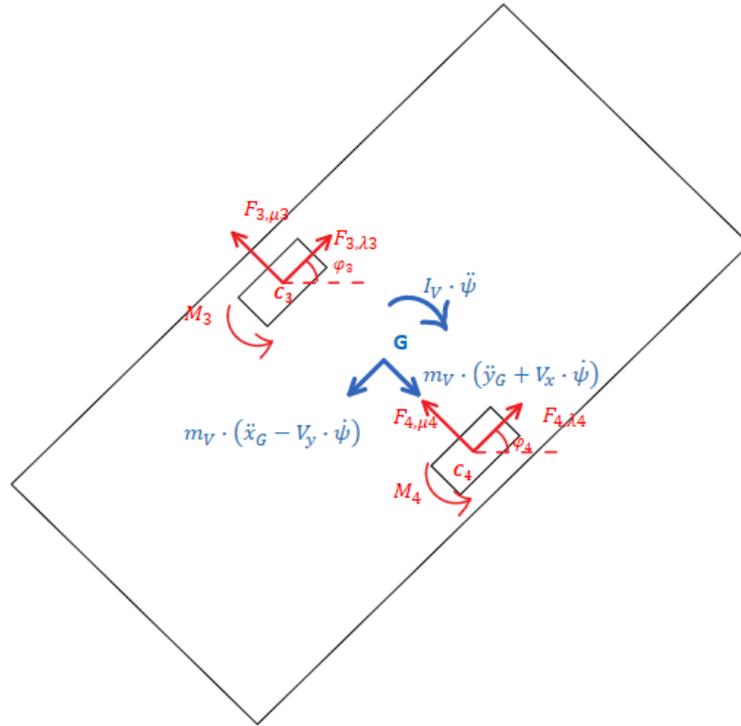


Figura 3.2 - DCL del modello a tre gradi di libertà del MIR

Dal diagramma di corpo libero è possibile ricavare le seguenti equazioni di equilibrio:

$$x: F_{3,\lambda 3} + F_{4,\lambda 4} = m_V \cdot (\ddot{x}_G - V_y \cdot \dot{\psi}) \quad (3.4)$$

$$y: F_{3,\mu 3} + F_{4,\mu 4} = m_V \cdot (\ddot{y}_G + V_x \cdot \dot{\psi}) \quad (3.5)$$

$$z: (F_{4,\lambda 4} - F_{3,\lambda 3}) \cdot bd + M_4 + M_3 = I_V \cdot \ddot{\psi} \quad (3.6)$$

Dalle equazioni di equilibrio espresse in **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.** (3.4), (3.5) e (3.6) è possibile ricavare, rispettivamente, le accelerazioni \ddot{x}_G , \ddot{y}_G e $\ddot{\psi}$. Note le accelerazioni, integrando, si ottengono le velocità \dot{x}_G , \dot{y}_G , $\dot{\psi}$ e gli spostamenti x_G , y_G , ψ .

3.2. Generazione traiettoria

Il comando di velocità angolare alle ruote motrici viene ricavato applicando la cinematica inversa. Di conseguenza si parte da una traiettoria ideale che il robot deve seguire applicando una legge del moto del centro di massa G .

La traiettoria è definita da un set di punti nel piano identificati dalle coordinate $X_{G,k}$ e $Y_{G,k}$ ($k = 1, 2, \dots, K$) nel SdR assoluto ($W - XYZ$). Il pedice k identifica l'istante temporale k -esimo e tutti gli istanti temporali sono equispaziati tra loro.

Dopo aver ricavato le coordinate $X_{G,k}$ e $Y_{G,k}$ istante per istante, diventa semplice calcolare la velocità nel tempo. Il processo di calcolo si basa su un'ipotesi semplificativa: la velocità viene considerata costante in modulo negli spostamenti infinitesimi. Dato che si hanno a disposizione K istanti temporali, ci sono $K - 1$ intervalli temporali in cui calcolare la velocità e ciascun intervallo viene chiamato $I_{tempo,k}$. Si può procedere con il calcolo delle velocità:

$$\dot{X}_{G,k} = \frac{\Delta X_{G,k}}{I_{tempo,k}} = \frac{X_{G,k} - X_{G,k-1}}{t_k - t_{k-1}} \quad k = 2, 3, 4, \dots, K \quad (3.7)$$

$$\dot{Y}_{G,k} = \frac{\Delta Y_{G,k}}{I_{tempo,k}} = \frac{Y_{G,k} - Y_{G,k-1}}{t_k - t_{k-1}} \quad k = 2, 3, 4, \dots, K \quad (3.8)$$

A questo punto vanno inserite le velocità iniziali e finali di set che sono già note e uguali a zero:

$$\begin{cases} \dot{X}_{G,1} = \dot{X}_{G,K+1} = 0 \text{ m/s} \\ \dot{Y}_{G,1} = \dot{Y}_{G,K+1} = 0 \text{ m/s} \end{cases} \quad (3.9)$$

Queste velocità vengono riferite a nuovi istanti temporali chiamati t'_k e definiti in questo modo:

$$\begin{cases} t'_k = \frac{t_k + t_{k-1}}{2} & k = 2, 3, 4, \dots, K \\ t'_1 = 0 \text{ s} \\ t'_{K+1} = t_K \end{cases} \quad (3.10)$$

Dato che per definire il moto del corpo rigido nel piano sono necessarie una grandezza vettoriale e una scalare (tre grandezze scalari), è necessario definire ancora un'altra grandezza per poter descrivere compiutamente la posizione del MiR nel tempo e cioè la sua posizione angolare ψ . Dato che la legge del moto di set è data in condizioni ideali, quindi senza slittamento, per ricavare la posizione angolare del MiR istante per istante basta imporre la condizione di tangenza alla traiettoria. Quindi:

$$\psi_k = \arcsin\left(\frac{\Delta Y_{G,k}}{\sqrt{\Delta X_{G,k}^2 + \Delta Y_{G,k}^2}}\right) = \arcsin\left(\frac{Y_{G,k} - Y_{G,k-1}}{\sqrt{(X_{G,k} - X_{G,k-1})^2 + (Y_{G,k} - Y_{G,k-1})^2}}\right) \quad k = 2, 3, 4, \dots, K \quad (3.11)$$

Si impone poi la posizione angolare iniziale:

$$\psi_1 = \psi_2 \quad (3.12)$$

La condizione espressa in (3.12) è stata una scelta arbitraria per imporre velocità angolare nulla nel primo tratto, si potrebbe imporre qualsiasi condizione ovviamente sempre evitando dei valori ψ_1 e ψ_2 troppo diversi tra loro che, comunque, a causa della dinamica del sistema potrebbero non essere perfettamente seguiti.

Analogamente al calcolo delle velocità \dot{X}_G e \dot{Y}_G , si prosegue con il calcolo della velocità angolare $\dot{\psi}$:

$$\dot{\psi}_k = \frac{\Delta \psi_k}{I_{tempo,k}} = \frac{\psi_k - \psi_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} \quad k = 2, 3, 4, \dots, K \quad (3.13)$$

Anche in questo caso vanno inserite le condizioni al contorno:

$$\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_{K+1} = 0 \text{ rad/s} \quad (3.14)$$

A questo punto la cinematica del robot è completamente definita ed è possibile applicare la cinematica inversa per ricavare le velocità angolare delle ruote motrici. Si riporta in Figura 3.3 un esempio di traiettoria

di set mentre in Figura 3.4 si riportano gli andamenti delle coordinate $X_G(t)$, $Y_G(t)$ e $\psi_G(t)$ e delle velocità $\dot{X}_G(t)$, $\dot{Y}_G(t)$ e $\dot{\psi}(t)$ nel tempo.

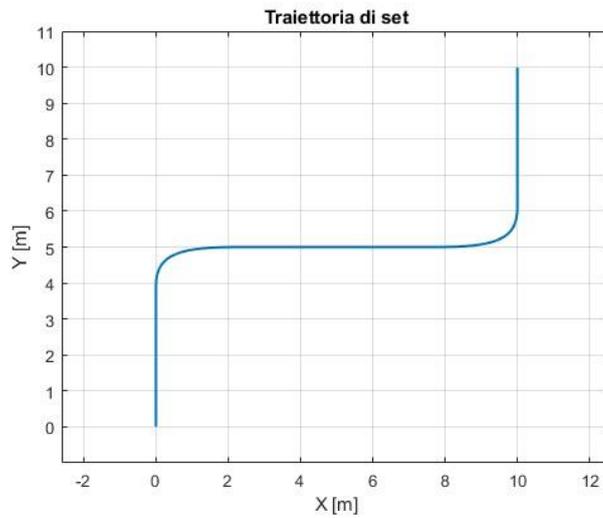


Figura 3.3 - traiettoria di set

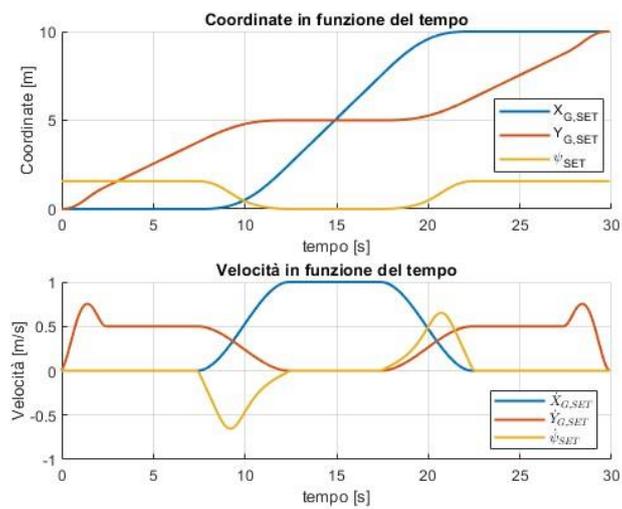


Figura 3.4 - spostamenti e velocità di set

3.3. Risultati simulazioni

A questo punto tutte le fisiche presentate e analizzate nei capitoli precedenti, sono state implementate sia in uno script MatLab che in ambiente Simulink. Sono state effettuate, quindi, delle simulazioni di cui si riportano di seguito i risultati.

3.3.1. Traiettoria rettilinea

Di seguito si riportano la traiettoria (Figura 3.5 a) e gli spostamenti e velocità di set (Figura 3.5 b) che vengono assegnati al robot.

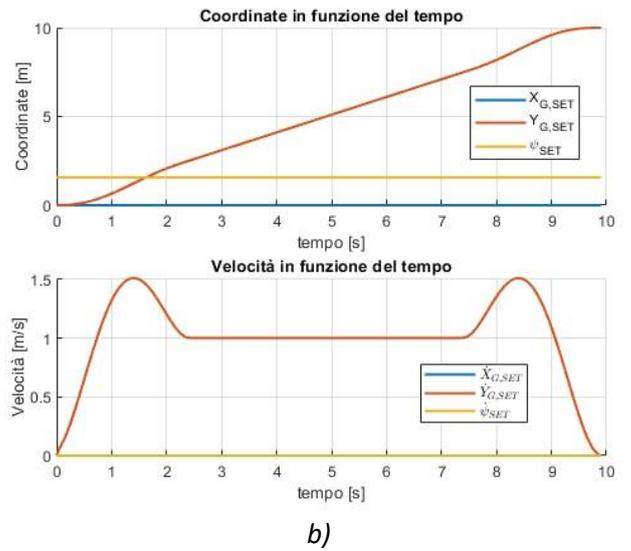
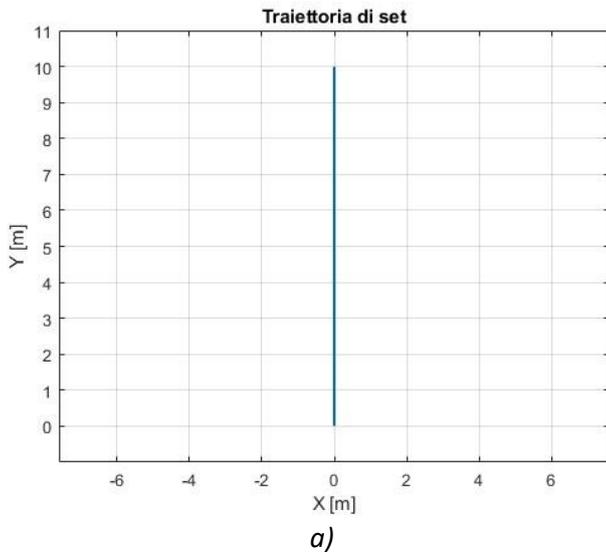


Figura 3.5 - traiettoria di set a), spostamenti e velocità di set b)

Una volta assegnata la traiettoria, e i relativi spostamenti e velocità che il robot dovrebbe avere affinché venga seguita, attraverso la cinematica inversa si ricavano le velocità angolari di set delle ruote motrici $\omega_{3,SET}$ e $\omega_{4,SET}$. Si riporta in Figura 3.6 il confronto tra le velocità angolari simulate $\omega_{3,OUT}$ e $\omega_{4,OUT}$ e quelle di set. Come già era possibile aspettarsi, per avere una traiettoria rettilinea è necessario che le ruote motrici mantengano nel tempo la stessa velocità angolare.

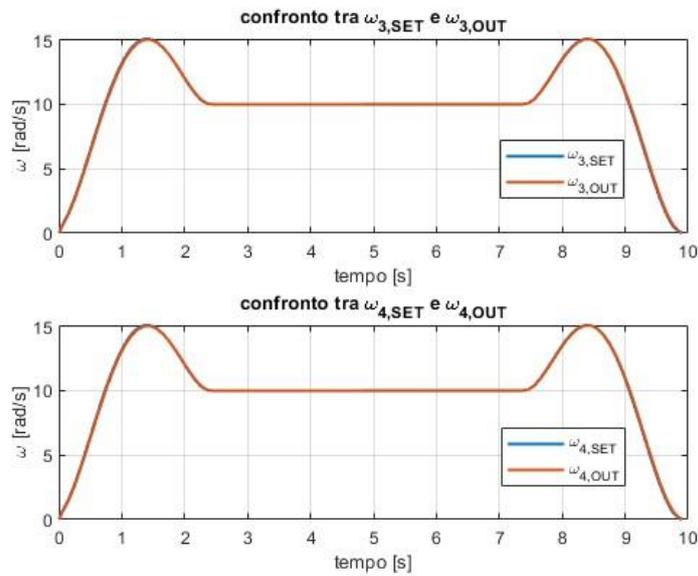
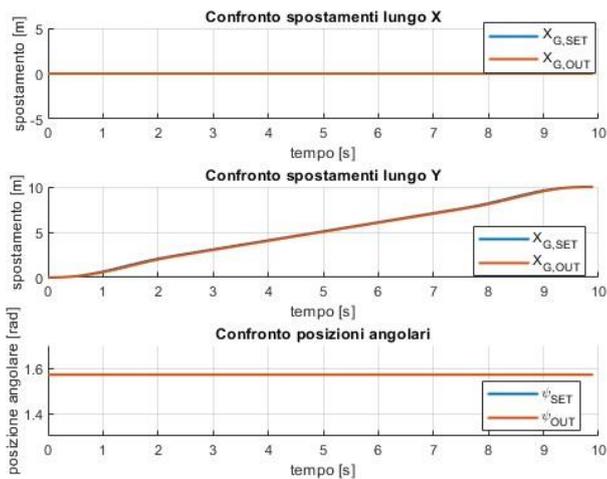
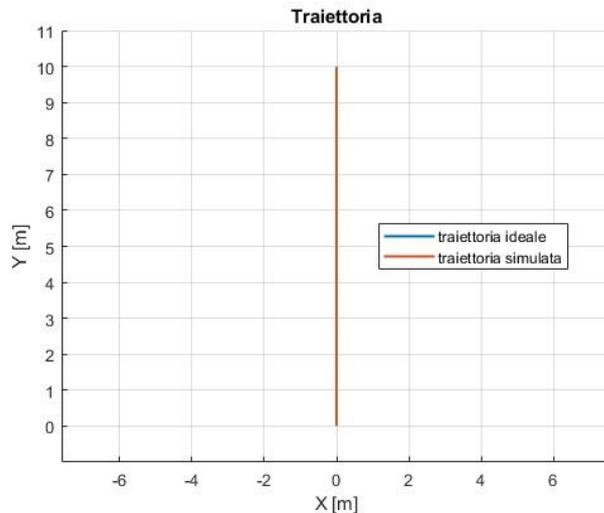


Figura 3.6 - confronto velocità angolari di set e out delle ruote motrici

A questo punto si riporta il confronto tra gli spostamenti e la traiettoria ideali e reali in Figura 3.7. In Figura 3.7 b) è chiaro come il modello riesca a seguire molto bene la traiettoria di set grazie alla sua dinamica che permette di rispettare gli spostamenti di set nel tempo Figura 3.7 a).



a)

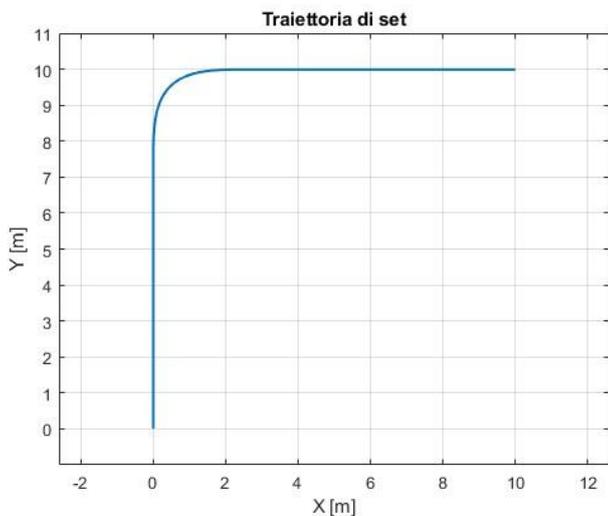


b)

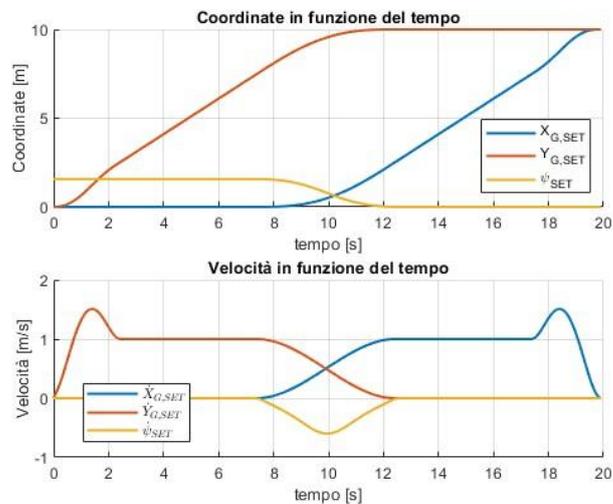
Figura 3.7 - confronto spostamenti ideali (SET) e reali (OUT) a), confronto traiettoria ideale e reale b)

3.3.2. Traiettoria con una curva

Adesso si cerca di dare delle traiettorie sempre più articolate per visualizzare gli effetti della dinamica del sistema sulla precisione del MIR. Si riportano di seguito in Figura 3.8 la traiettoria, gli spostamenti e le velocità di set assegnati al modello:



a)



b)

Figura 3.8 - traiettoria di set a), spostamenti e velocità di set b)

Si riportano in Figura 3.9 le velocità angolari simulate ottenute dalle ruote motrici $\omega_{3,OUT}$ e $\omega_{4,OUT}$ confrontate con quelle di set $\omega_{3,SET}$ e $\omega_{4,SET}$. Come è possibile notare in Figura 3.9 il blocco di controllo velocità funziona egregiamente dato che le velocità ottenute seguono molto bene il segnale di set.

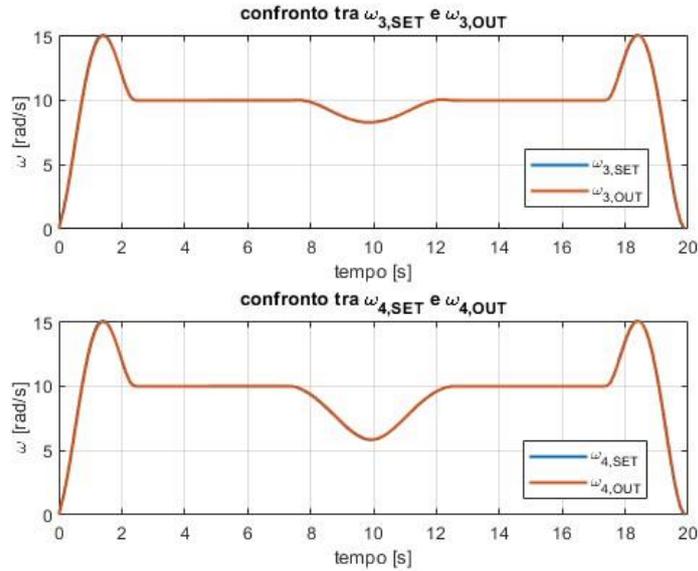


Figura 3.9 - confronto velocità angolari di set e out delle ruote motrici

Si riporta Figura 3.10 il confronto tra le velocità e la traiettoria ideali e reali. Dalla Figura 3.10 b) è possibile notare come ci sia uno statismo nella posizione angolare reale del MiR ψ_{OUT} e questo è dovuto alla sua dinamica che non solo ne ritarda la rotazione ma il suo valore a regime è anche inferiore rispetto a quello di set.

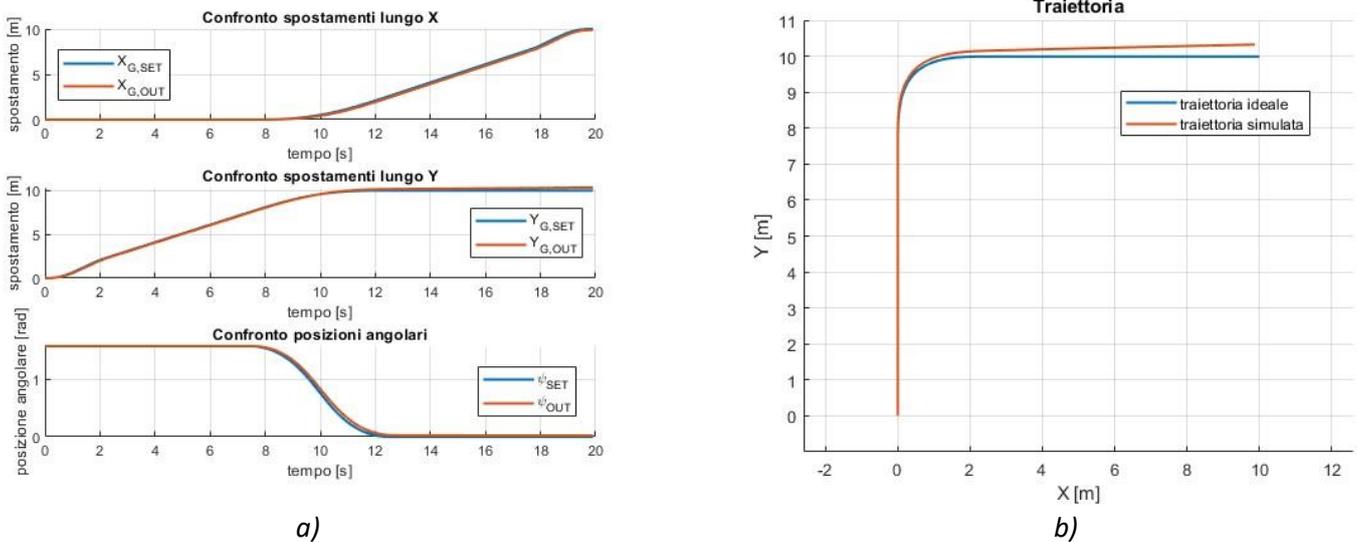
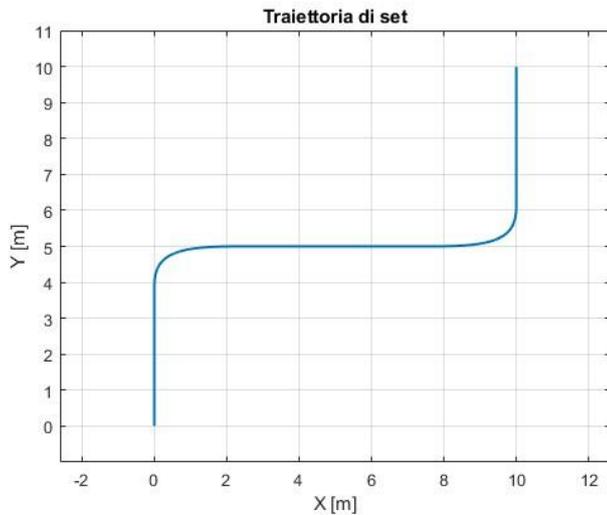


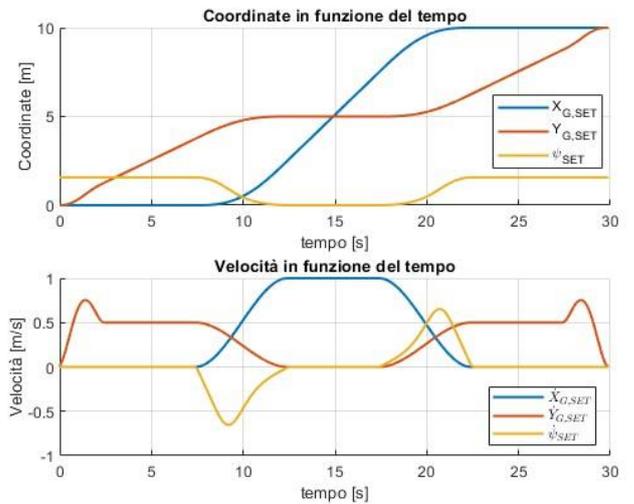
Figura 3.10 - confronto spostamenti ideali (SET) e reali (OUT) a), confronto traiettoria ideale e reale b)

3.3.3. Traiettoria con due curve

Si riportano in Figura 3.11 la traiettoria, gli spostamenti e le velocità di set.



a)



b)

Figura 3.11 - traiettoria di set a), spostamenti e velocità di set b)

Si riportano in Figura 3.12 le velocità angolari simulate ottenute dalle ruote motrici $\omega_{3,OUT}$ e $\omega_{4,OUT}$ confrontate con quelle di set $\omega_{3,SET}$ e $\omega_{4,SET}$, mentre, in Figura 3.13, si riporta il confronto tra le velocità e la traiettoria ideali e simulate. Dal grafico in Figura 3.12 è possibile notare come nonostante i controllori PI_{int} e PI_{ext} permettano di seguire perfettamente i segnali di set $\omega_{3,SET}$ e $\omega_{4,SET}$, comunque il robot si discosta, anche se leggermente, dagli spostamenti impostati come è possibile notare dalla Figura 3.13. Questo è dovuto alla dinamica del modello del MiR che non possiede un anello di retroazione che permetta di controllare la posizione quindi la traiettoria finale del modello è il risultato della sua dinamica.

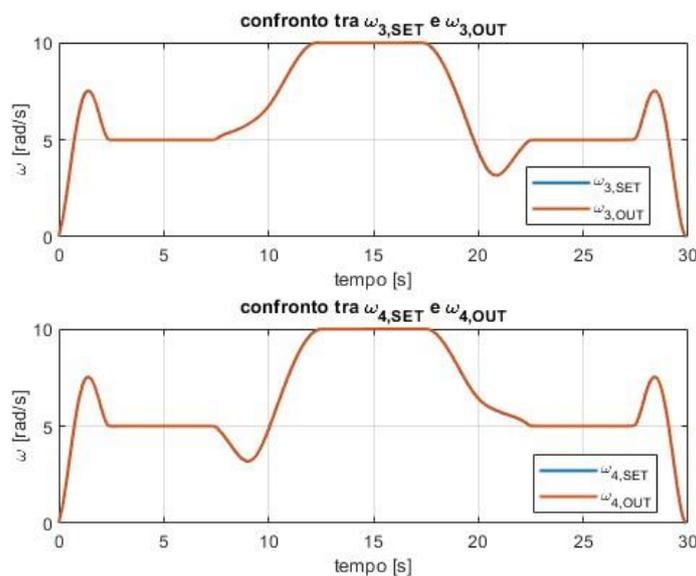
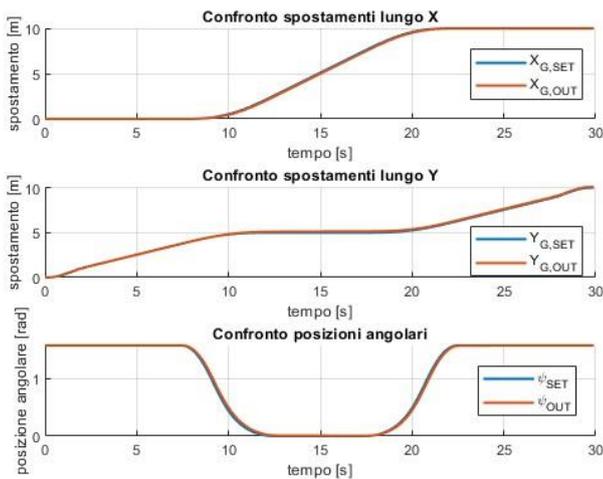
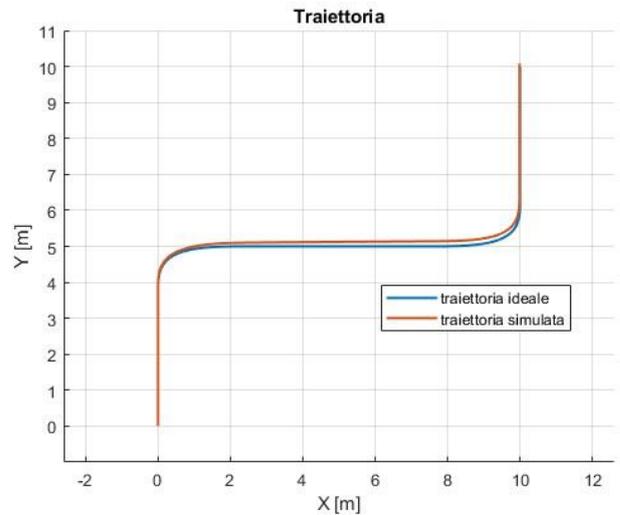


Figura 3.12 - confronto velocità angolari di set e out delle ruote motrici



a)

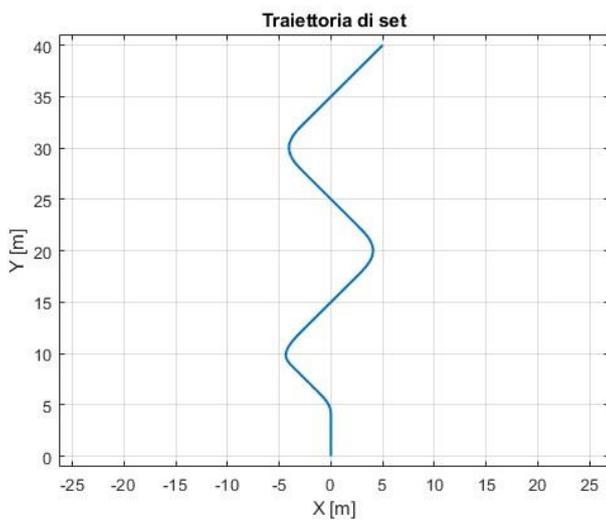


b)

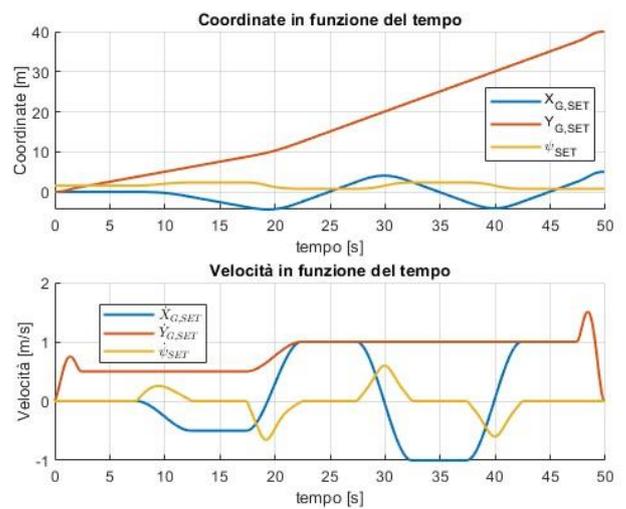
Figura 3.13 - confronto spostamenti ideali (SET) e reali (OUT) a), confronto traiettoria ideale e reale b)

3.3.4. Traiettoria con quattro curve

Infine, per sollecitare ulteriormente il sistema, è stato sottoposto a un set di traiettoria che prevede ben quattro curve come rappresentato in Figura 3.14.



a)



b)

Figura 3.14 - traiettoria di set a), spostamenti e velocità di set b)

Come al solito, a seguito della simulazione in ambiente Simulink, è stato effettuato il confronto tra le velocità di rotazione di set delle ruote motrici $\omega_{3,SET}$ e $\omega_{4,SET}$ con quelle di output $\omega_{3,OUT}$ e $\omega_{4,OUT}$. Dalla Figura 3.15 si nota chiaramente come il servosistema di controllo in velocità, permette di seguire molto bene le velocità di rotazione di set.

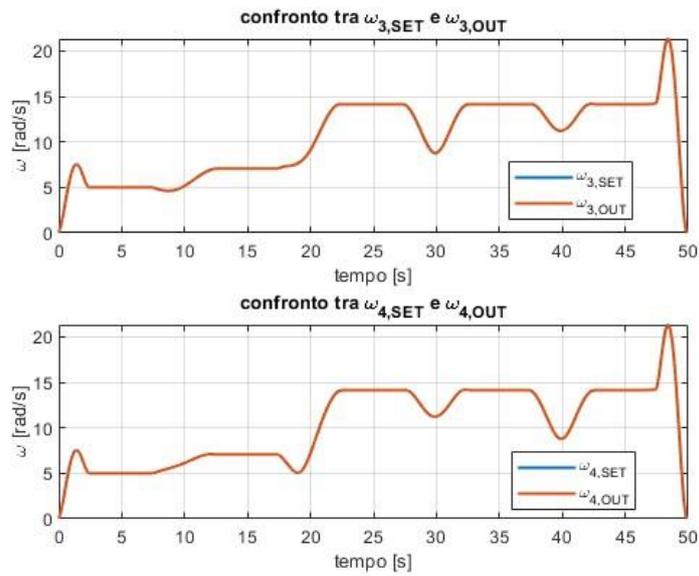


Figura 3.15 - confronto velocità angolari di set e out delle ruote motrici

Infine, si riporta il confronto della traiettoria e degli spostamenti ideali e simulati. Come negli altri casi, anche qui si ha un leggero discostamento dalla traiettoria ideale come si nota in Figura 3.16 e questo è sempre dovuto alla dinamica del sistema.

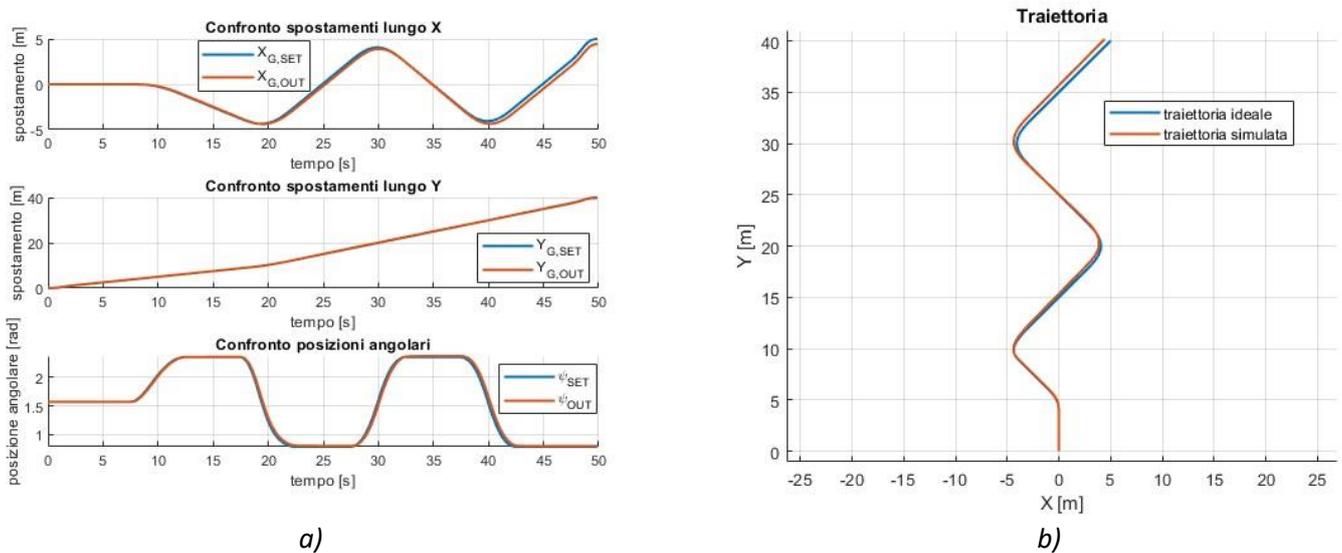


Figura 3.16 - confronto spostamenti ideali (SET) e reali (OUT) a), confronto traiettoria ideale e reale b)

4. MODELLO DINAMICO COMPLETO DEL MiR250

Dopo aver studiato la dinamica del modello semplificato e aver simulato il suo comportamento dandogli delle traiettorie di set, si aggiungono adesso altri elementi al modello per renderlo quanto più simile al sistema reale. Per farlo si introducono le caster wheels che nel modello iniziale erano state rimosse e delle reazioni normali alle ruote che risentano dei transitori del MiR nelle fasi di accelerazione e decelerazione.

4.1. Caster wheels

Le caster wheels hanno come unico scopo quello di equilibrare il robot ed evitare movimenti di beccheggio. È stato detto, inoltre, che queste possono ruotare liberamente attorno al giunto rotoidale che le lega al telaio in O_i , quindi, parallelamente al loro asse diametrale. Non essendo comandate da alcun attuatore, la dinamica delle caster wheel è governata dalle forze di attrito. L'equazione (2.11) valida per le ruote motrici questa volta non è più rispettata e, di conseguenza, ci sono ben quattro gradi di libertà in più: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_5$ e φ_6 .

4.1.1. Analisi cinematica

Il primo passo è quello di ricavare le grandezze cinematiche che permettono di conoscere la posizione nel tempo delle caster wheels che, potendo ruotare liberamente rispetto al telaio, richiedono l'introduzione di un nuovo SdR ($O_i - x'_i y'_i z'_i$) con origine nel giunto rotoidale O_i per poterne studiare la cinematica relativa.

Per ricavare le coordinate rispetto al sistema di riferimento relativo ($O_i - x'_i y'_i z'_i$) partendo dal sistema di riferimento ($G - xyz$) possiamo sfruttare le seguenti matrici di trasformazione omogenee:

$$(O_1 - x'_1 y'_1 z'_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{Bmatrix} = [x - a \quad y - b \quad 1] \quad (4.1)$$

$$(O_2 - x'_2 y'_2 z'_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{Bmatrix} = [x - a \quad y + b \quad 1] \quad (4.2)$$

$$(O_3 - x'_3 y'_3 z'_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -bd \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{Bmatrix} = [x \quad y - bd \quad 1] \quad (4.3)$$

$$(O_4 - x'_4 y'_4 z'_4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & bd \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{Bmatrix} = [x \quad y + bd \quad 1] \quad (4.4)$$

$$(O_5 - x'_5 y'_5 z'_5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{Bmatrix} = [x + a \quad y - b \quad 1] \quad (4.5)$$

$$(O_6 - x'_6 y'_6 z'_6) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{Bmatrix} = [x + a \quad y + b \quad 1] \quad (4.6)$$

Dall'equazione (4.1) fino all'equazione (4.6) si può notare come il sistema di riferimento ($G - xyz$) sia stato semplicemente traslato. Di conseguenza la posizione angolare di un qualsiasi corpo rigido rispetto a ($O_i - x'_i y'_i z'_i$) è identica a quella rispetto a ($G - xyz$).

Si riporta in Figura 4.1 uno schema semplificato del MiR contenente le sole due caster wheels anteriori per semplicità rappresentativa.

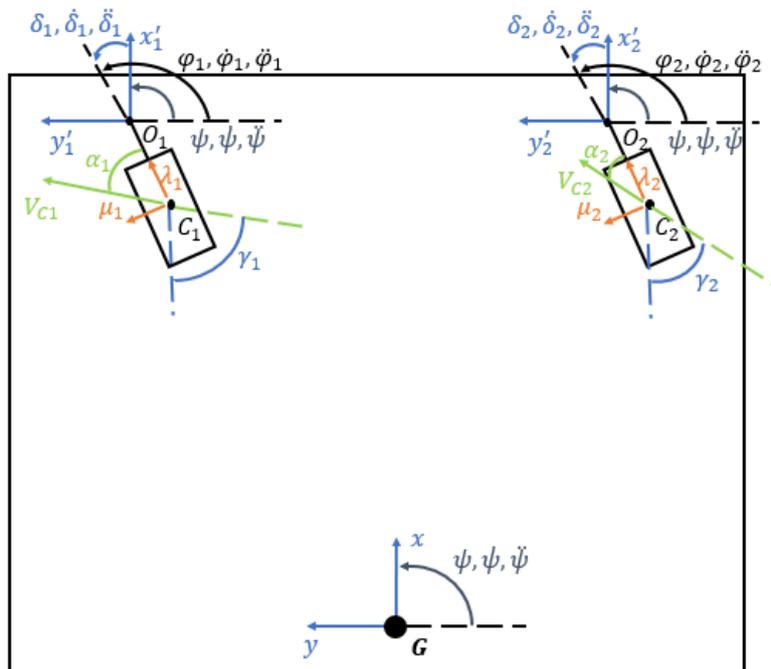


Figura 4.1 - schema cinematico caster wheels anteriori

L'obiettivo è ricavare le componenti delle velocità $\overline{V_{C_i}}$ lungo le direzioni λ_i e μ_i per poter calcolare lo slittamento longitudinale e tangenziale delle caster wheels.

Per fare ciò è indispensabile ricavare la velocità del centro C_i della i-esima caster wheel. Si riporta quindi l'equazione valida per l'i-esima caster wheel:

$$\overline{V_{C_i}} = \overline{V_{t_i}} + \overline{V_{r_i}} \quad (4.7)$$

Dall'equazione (4.7) emerge che la velocità del punto C_i della i-esima caster wheel è somma vettoriale di una velocità di trascinalamento $\overline{V_{t_i}}$, che rappresenta la velocità che il punto C_i avrebbe se fosse solidale a O_i , e di una velocità relativa $\overline{V_{r_i}}$ che rappresenta la velocità del punto C_i rispetto al sistema di riferimento relativo ($O_i - x'_i y'_i z'_i$). Esplicitiamo quindi i due termini:

$$\overline{V_{ti}} = \overline{V_{O_i}} + \dot{\psi} \times (C_i - O_i) = \overline{V_G} + \dot{\psi} \times (O_i - G) + \dot{\psi} \times (C_i - O_i) \quad (4.8)$$

$$\overline{V_{ri}} = \dot{\delta}_i \times (C_i - O_i) \quad (4.9)$$

Combinando l'equazione (4.7) con la (4.8) e la (4.9) si ottiene:

$$\overline{V_{C_i}} = \overline{V_G} + \dot{\psi} \times (O_i - G) + (\dot{\psi} + \dot{\delta}_i) \times (C_i - O_i) \quad (4.10)$$

L'equazione (4.10) vale per tutte le ruote, sostituendo al pedice i gli opportuni valori che identificano le ruote si ottiene:

$$\begin{cases} \overline{V_{C_1}} = \overline{V_G} + \dot{\psi} \times (O_1 - G) + (\dot{\psi} + \dot{\delta}_1) \times (C_1 - O_1) \\ \overline{V_{C_2}} = \overline{V_G} + \dot{\psi} \times (O_2 - G) + (\dot{\psi} + \dot{\delta}_2) \times (C_2 - O_2) \\ \overline{V_{C_3}} = \overline{V_G} + \dot{\psi} \times (O_3 - G) + (\dot{\psi} + \dot{\delta}_3) \times (C_3 - O_3) \\ \overline{V_{C_4}} = \overline{V_G} + \dot{\psi} \times (O_4 - G) + (\dot{\psi} + \dot{\delta}_4) \times (C_4 - O_4) \\ \overline{V_{C_5}} = \overline{V_G} + \dot{\psi} \times (O_5 - G) + (\dot{\psi} + \dot{\delta}_5) \times (C_5 - O_5) \\ \overline{V_{C_6}} = \overline{V_G} + \dot{\psi} \times (O_6 - G) + (\dot{\psi} + \dot{\delta}_6) \times (C_6 - O_6) \end{cases} \quad (4.11)$$

Ricordando che le ruote motrici per l'equazione (2.11) non possono compiere rotazioni relative rispetto al telaio, allora:

$$\dot{\delta}_3 = \dot{\delta}_4 = \bar{0} \quad (4.12)$$

Sapendo inoltre che C_3 e C_4 coincidono rispettivamente con O_3 e O_4 allora:

$$(C_3 - O_3) = (C_4 - O_4) = \bar{0} \quad (4.13)$$

Dunque, il sistema espresso in (4.11) diventa:

$$\begin{cases} \overline{V_{C_1}} = \overline{V_G} + \dot{\psi} \times (O_1 - G) + (\dot{\psi} + \dot{\delta}_1) \times (C_1 - O_1) \\ \overline{V_{C_2}} = \overline{V_G} + \dot{\psi} \times (O_2 - G) + (\dot{\psi} + \dot{\delta}_2) \times (C_2 - O_2) \\ \overline{V_{C_3}} = \overline{V_G} + \dot{\psi} \times (C_3 - G) \\ \overline{V_{C_4}} = \overline{V_G} + \dot{\psi} \times (C_3 - G) \\ \overline{V_{C_5}} = \overline{V_G} + \dot{\psi} \times (O_5 - G) + (\dot{\psi} + \dot{\delta}_5) \times (C_5 - O_5) \\ \overline{V_{C_6}} = \overline{V_G} + \dot{\psi} \times (O_6 - G) + (\dot{\psi} + \dot{\delta}_6) \times (C_6 - O_6) \end{cases} \quad (4.14)$$

Per ogni equazione vettoriale si ottengono due equazioni scalari. Risolvendo il sistema di equazioni vettoriali si ottengono le componenti delle velocità dei centri delle ruote lungo le direzioni x e y del sistema di riferimento relativo ($G - xyz$).

$$\begin{cases} V_{C1,x} = \dot{x}_G - \dot{\psi} \cdot b + (\dot{\delta}_1 + \dot{\psi}) \cdot b_{caster} \cdot \sin \delta_1 \\ V_{C1,y} = \dot{y}_G + \dot{\psi} \cdot a - (\dot{\delta}_1 + \dot{\psi}) \cdot b_{caster} \cdot \cos \delta_1 \end{cases} \quad (4.15)$$

$$\begin{cases} V_{C2,x} = \dot{x}_G + \dot{\psi} \cdot b + (\dot{\delta}_2 + \dot{\psi}) \cdot b_{caster} \cdot \sin \delta_2 \\ V_{C2,y} = \dot{y}_G + \dot{\psi} \cdot a - (\dot{\delta}_2 + \dot{\psi}) \cdot b_{caster} \cdot \cos \delta_2 \end{cases} \quad (4.16)$$

$$\begin{cases} V_{C3,x} = \dot{x}_G - \dot{\psi} \cdot bd \\ V_{C3,y} = \dot{y}_G \end{cases} \quad (4.17)$$

$$\begin{cases} V_{C4,x} = \dot{x}_G + \dot{\psi} \cdot bd \\ V_{C4,y} = \dot{y}_G \end{cases} \quad (4.18)$$

$$\begin{cases} V_{C5,x} = \dot{x}_G - \dot{\psi} \cdot b + (\dot{\delta}_5 + \dot{\psi}) \cdot b_{caster} \cdot \sin \delta_5 \\ V_{C5,y} = \dot{y}_G - \dot{\psi} \cdot a - (\dot{\delta}_5 + \dot{\psi}) \cdot b_{caster} \cdot \cos \delta_5 \end{cases} \quad (4.19)$$

$$\begin{cases} V_{C6,x} = \dot{x}_G + \dot{\psi} \cdot b + (\dot{\delta}_6 + \dot{\psi}) \cdot b_{caster} \cdot \sin \delta_6 \\ V_{C6,y} = \dot{y}_G - \dot{\psi} \cdot a - (\dot{\delta}_6 + \dot{\psi}) \cdot b_{caster} \cdot \cos \delta_6 \end{cases} \quad (4.20)$$

Note le componenti delle velocità dei centri delle ruote è possibile ricavarne il modulo e l'inclinazione rispetto all'asse x' del sistema di riferimento relativo ($O_i - x'_i y'_i z'_i$) che in Figura 4.1 viene definita con γ_i dove il pedice i indica l' i -esima ruota.

$$\begin{cases} V_{Ci} = \sqrt{V_{Ci,x}^2 + V_{Ci,y}^2} \\ \gamma_i = \arctg\left(\frac{V_{Ci,y}}{V_{Ci,x}}\right) \end{cases} \quad (4.21)$$

Adesso, conoscendo l'inclinazione γ_i della velocità V_{Ci} rispetto all'asse x'_i e conoscendo l'inclinazione δ_i delle ruote rispetto all'asse x'_i , si può calcolare l'inclinazione α_i della velocità V_{Ci} rispetto alla direzione λ_i e, di conseguenza, anche la componente di V_{Ci} lungo la direzione λ_i .

$$\begin{cases} \alpha_i = \gamma_i - \delta_i \\ V_{Ci,\lambda_i} = V_{Ci} \cdot \cos \alpha_i \end{cases} \quad (4.22)$$

Attraverso l'equazione (4.22) si ottengono le grandezze cinematiche necessarie per il calcolo delle forze di attrito longitudinali e tangenziali.

4.1.2. Analisi dinamica

Una volta note α_i e V_{C_i, λ_i} , è possibile calcolare le forze di attrito $F_{i, \lambda_i}(\sigma_i)$ e $F_{i, \mu_i}(\alpha_i)$ agenti sulle caster wheels. In questo caso non è stato considerato il contributo del momento di auto-allineamento poiché genera un contributo trascurabile rispetto a quello causato dalla forza di attrito tangenziale F_{i, μ_i} .

Si riporta in Figura 4.2 il DCL della i -esima caster wheel:

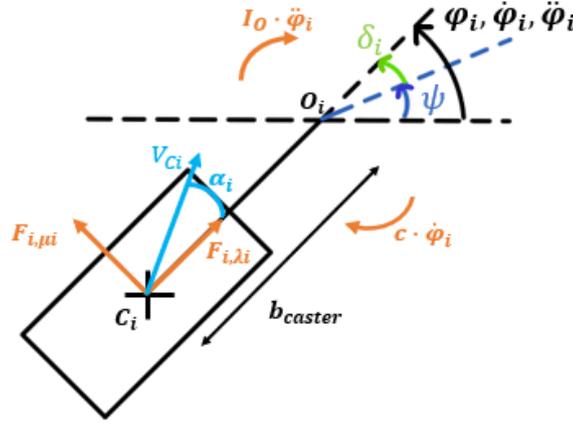


Figura 4.2 - DCL i -esima caster wheel

Nel DCL il parametro φ_i e le sue derivate fanno riferimento alla posizione, velocità e accelerazione angolare della generica caster wheel rispetto all'asse X del SdR assoluto ($W - XYZ$). Sottraendo a questo grado di libertà ψ ottengo la posizione angolare della caster wheel rispetto al SdR relativo ($G - xyz$) che viene indicata con δ_i .

L'angolo δ_i , come visto nel paragrafo precedente, è fondamentale per il calcolo di α_i che rappresenta l'angolo compreso tra la direzione della velocità del centro della i -esima ruota $\overline{V_{C_i}}$ e l'asse λ_i del SdR relativo alla i -esima ruota ($C_i - \lambda_i \mu_i \varphi_i$).

Nel diagramma di corpo libero riportato in Figura 4.2 mancano le reazioni vincolari del telaio sul giunto rotoidale per semplicità rappresentativa. Inoltre, avendo scelto O_i come polo di riduzione dell' i -esima caster wheel, in quel punto dovrebbe essere concentrata l'inerzia alla traslazione della caster wheel che non è stata considerata proprio per il suo contributo trascurabile.

A questo punto si ricava l'equazione di equilibrio:

$$I_{O_i} \cdot \ddot{\varphi}_i + c \cdot \dot{\varphi}_i + F_{i, \mu_i} \cdot \overline{O_i C_i} = 0 \quad (4.23)$$

Attraverso i passaggi algebrici in (4.24), (4.25) e (4.26):

$$I_{O_i} \cdot \ddot{\varphi}_i + c \cdot \dot{\varphi}_i - k(\alpha_i) \cdot \alpha_i \cdot b_{caster} = 0 \quad (4.24)$$

$$I_{O_i} \cdot \ddot{\varphi}_i + c \cdot \dot{\varphi}_i - k(\alpha_i) \cdot (\gamma_i - \delta_i) \cdot b_{caster} = 0 \quad (4.25)$$

$$I_{O_i} \cdot \ddot{\varphi}_i + c \cdot \dot{\varphi}_i - k(\alpha_i) \cdot (\gamma_i - \varphi_i + \psi) \cdot b_{caster} = 0 \quad (4.26)$$

Si giunge alla seguente formulazione:

$$I_{O_i} \cdot \ddot{\varphi}_i + c \cdot \dot{\varphi}_i + k(\alpha_i) \cdot b_{caster} \cdot \varphi_i = k(\alpha_i) \cdot (\gamma_i + \psi) \cdot b_{caster} \quad (4.27)$$

L'equazione (4.27) è valida per tutte le caster wheels. Si tratta quindi di un sistema del secondo ordine descritto, appunto, da un'equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti non costanti poiché il coefficiente k del termine di ritorno elastico è funzione di α_i .

Il termine I_{O_i} rappresenta l'inerzia alla rotazione attorno al giunto rotoidale in O_i e si ricava applicando il teorema di Huygen-Steiner:

$$I_{O_i} = I_{cw_2} + mcw \cdot b_{caster}^2 \quad (4.28)$$

Il contributo dissipativo è concentrato tutto in c che rappresenta il coefficiente di attrito viscoso e il suo valore è stato ricavato sottoponendo il sistema ad una forzante e modificando iterativamente il valore di c fino ad ottenere il comportamento di un sistema criticamente smorzato o sovra-smorzato: senza oscillazioni attorno al valore di regime.

Per ricavare il comportamento nel tempo delle caster wheels, è stata assegnata una legge del moto al telaio del MiR e sono state imposte le condizioni iniziali $\dot{\varphi}_i(t = 0 \text{ s})$ e $\varphi_i(t = 0 \text{ s})$.

- Legge del moto del telaio

$$\begin{cases} \psi = \text{cost.} = \pi/2 \\ \dot{\psi} = 0 \text{ rad/s} \\ \overline{V_G} = \overline{\dot{x}_G} = \text{cost.} \cdot \bar{\tau} \end{cases} \quad (4.29)$$

- Condizioni iniziali caster wheel

$$\begin{cases} \varphi_i(t = 0 \text{ s}) = \frac{3}{4} \pi \text{ rad} \\ \dot{\varphi}_i(t = 0 \text{ s}) = 0 \text{ rad/s} \end{cases} \quad (4.30)$$

Partendo dallo schema presente in Figura 4.1, la legge del moto attribuita al telaio e le condizioni iniziali assegnate alle caster wheels possono essere rappresentate graficamente come in Figura 4.3:

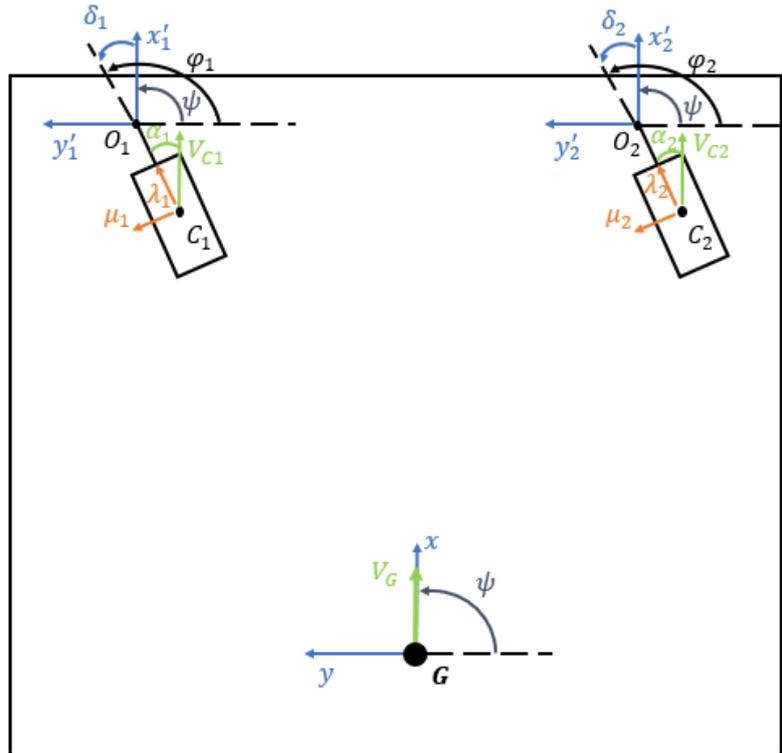


Figura 4.3 - rappresentazione grafica delle condizioni iniziali imposte sul sistema

Avendo imposto la legge del moto al telaio e le condizioni iniziali, attraverso il sistema in (4.14) si ricavano tutte le velocità iniziali dei centri C_i delle ruote:

$$\begin{cases} \overline{V_{C1}}(t=0) = \overline{V_G} \\ \overline{V_{C2}}(t=0) = \overline{V_G} \\ \overline{V_{C3}}(t=0) = \overline{V_G} \\ \overline{V_{C4}}(t=0) = \overline{V_G} \\ \overline{V_{C5}}(t=0) = \overline{V_G} \\ \overline{V_{C6}}(t=0) = \overline{V_G} \end{cases} \quad (4.31)$$

A regime, una volta estinti i transitori, partendo dall'equazione (4.27) si ha:

$$k(\alpha_i) \cdot b_{caster} \cdot \varphi_i = k(\alpha_i) \cdot (\gamma_i + \psi) \cdot b_{caster} \quad (4.32)$$

Con le opportune semplificazioni si ottiene:

$$\varphi_i(t = \infty) = (\gamma_i + \psi) \quad (4.33)$$

Ma poiché a infinito:

$$\overline{V_{C_i}}(t = \infty) = \overline{V_G} \quad (4.34)$$

Allora:

$$\gamma_i(t = \infty) = 0 \text{ rad} \quad (4.35)$$

E in conclusione sostituendo l'equazione (4.35) in (4.33) si ottiene:

$$\varphi_i(t = \infty) = \psi \tag{4.36}$$

Si analizza la dinamica di una generica caster wheel dato che a tutte sono state assegnate le stesse condizioni iniziali.

Si riporta in Figura 4.4 l'andamento nel tempo di φ_i , γ_i e δ_i al variare del fattore di smorzamento viscoso c .

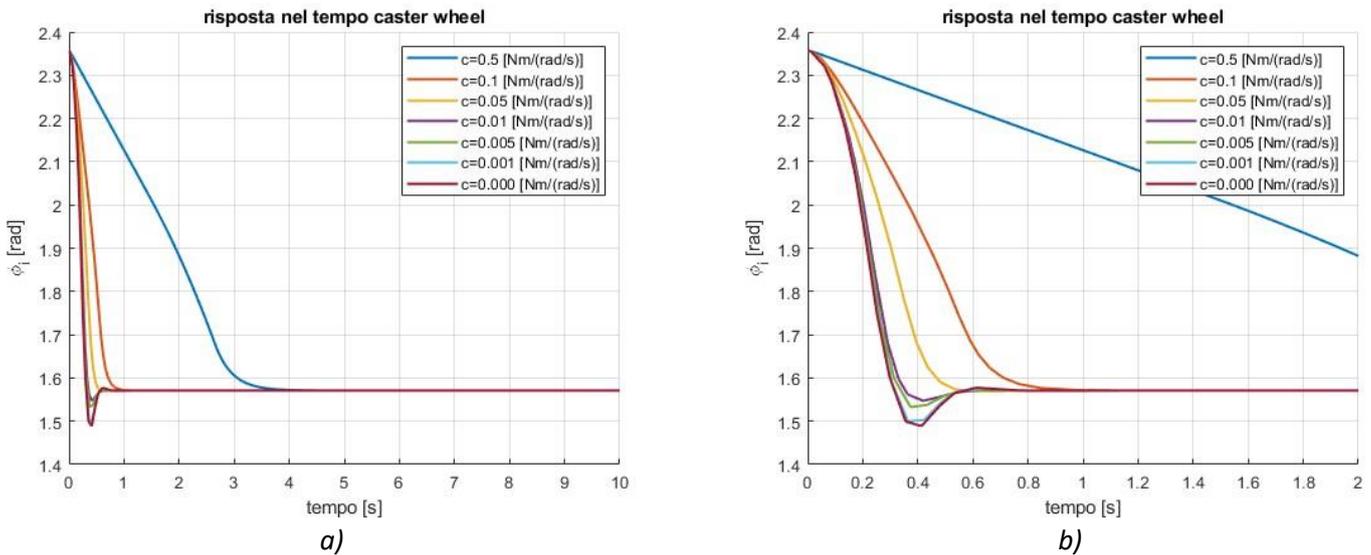


Figura 4.4 - posizione angolare assoluta caster wheel nel tempo a), particolare b)

Come si può notare dalla Figura 4.4, una riduzione del fattore di smorzamento, aumenta la prontezza del sistema e allo stesso tempo ne riduce la stabilità. Non disponendo di dati sperimentali per confrontare il modello con il sistema reale, la scelta del fattore di smorzamento viene presa sulla base del buon senso cercando di immaginare come si comporta una caster wheel reale. Poiché l'allineamento della caster wheel con la direzione del moto è quasi istantaneo, si sceglie un fattore di smorzamento $c = 0.005 \frac{Nm}{rad/s}$ che rappresenta un buon compromesso tra prontezza e stabilità del sistema.

In Figura 4.5 si riporta l'andamento di γ_i nel tempo:

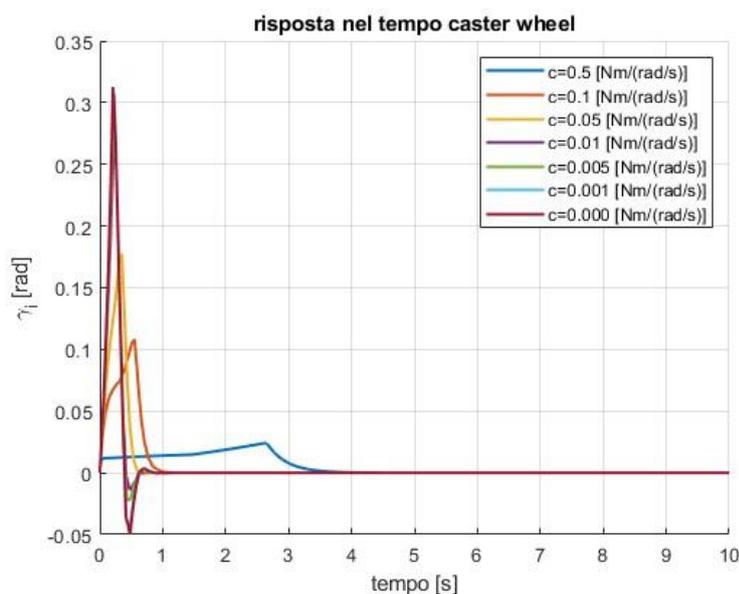


Figura 4.5 – inclinazione γ_i della velocità di C_i rispetto al SdR ($O'_i - x'_i y'_i z'_i$) nel tempo

Il risultato della simulazione in Figura 4.5 segue quanto atteso. Si parte da un valore nullo di γ_i come si nota dalle condizioni iniziali espresse in equazione (4.31) da cui si ricava che le velocità di tutte le cerniere C_i sono allineate con il SdR ($O'_i - x'_i y'_i z'_i$). Subito dopo si ha un transitorio dove γ_i non è più pari a zero, questo perché a causa delle forze di attrito viene generata una velocità relativa δ_i rispetto al telaio. La velocità della cerniera, quindi, non è più allineata con il SdR sopra indicato. Infine, estinto il transitorio, γ_i torna ad essere nullo come già previsto dall'equazione (4.35) poiché la generica caster wheel si è allineata con la direzione che permette alla ruota stessa di introdurre solo attrito volvente, non ci sono più componenti di attrito tangenziale agenti sulla ruota.

Infine, si riporta l'andamento della posizione angolare δ_i della i -esima ruota rispetto al SdR ($O'_i - x'_i y'_i z'_i$):

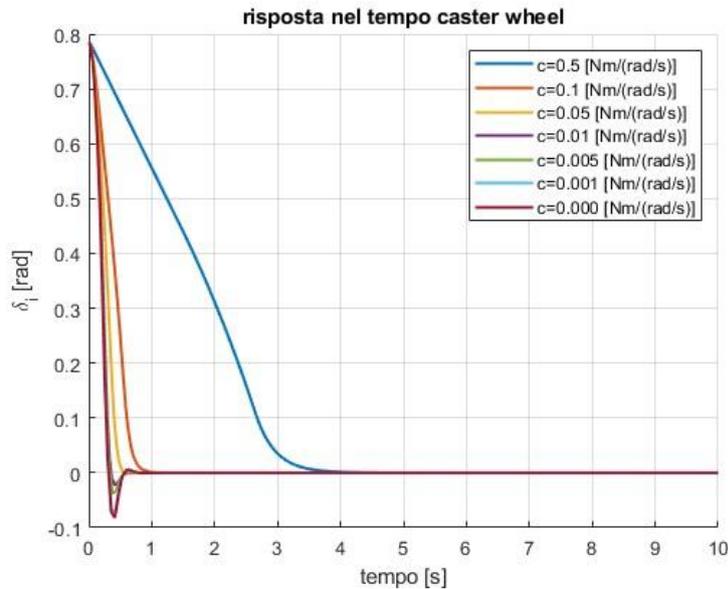


Figura 4.6 - inclinazione δ_i della caster wheel rispetto al SdR ($O'_i - x'_i y'_i z'_i$) nel tempo

Sapendo che:

$$\delta_i = \varphi_i - \psi \quad (4.37)$$

È chiaro che il suo andamento in Figura 4.6 non può che essere uguale a quello di φ_i presente in Figura 4.4 ma con i valori traslati di $\psi = \text{cost.} = \pi/2$. Anche in questo la simulazione rispetta quello che ci aspettavamo: $\delta_i(t = \infty) = 0 \text{ rad}$ poiché le caster wheel sono allineate con i SdR ($O'_i - x'_i y'_i z'_i$).

4.2. Calcolo delle reazioni normali dinamiche

Riprendendo il DCL presente in Figura 2.34 ogni ruota è soggetta a una reazione normale $F_{i,N}$ per contrastare il carico verticale agente sull'asse ζ_i derivante dal telaio. Queste reazioni non sono costanti nel tempo a causa dei transitori delle fasi di accelerazione e decelerazione del MiR che generano forze di inerzia.

Per calcolare le reazioni normali delle ruote si rappresenta il DCL del MiR nei piani xz e yz del sistema di riferimento ($G - xyz$).

4.2.1. Equilibrio alle rotazioni nel piano xz

Si riporta in Figura 4.7 il diagramma di corpo libero del MiR nel piano xz :

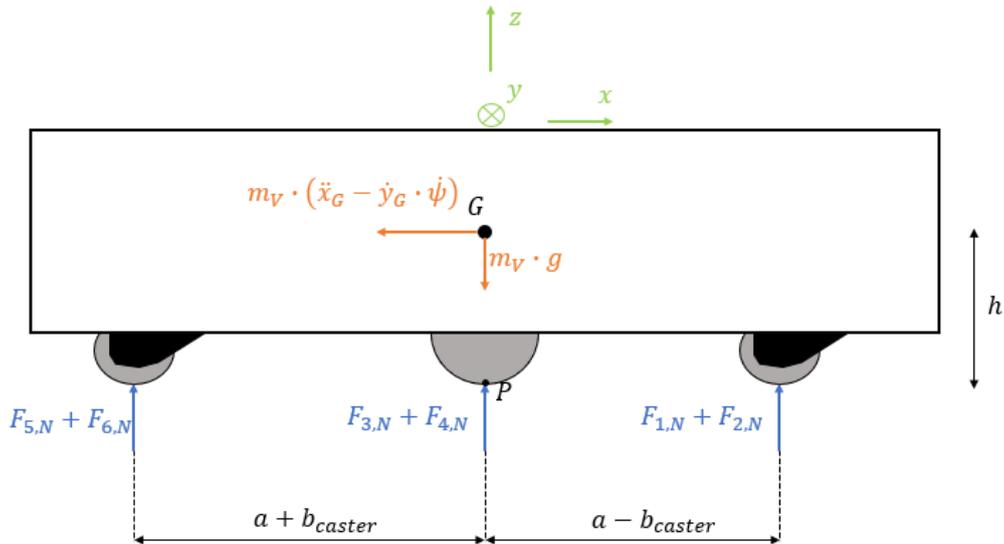


Figura 4.7 - DCL del MIR250 nel piano xz

Il DCL è rappresentato in una configurazione particolare per semplificarne la rappresentazione, infatti:

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta_5 = \delta_6 = 0 \text{ rad} \quad (4.38)$$

Nel ricavare l'equazione di equilibrio, ovviamente, si tiene conto della rotazione relativa δ_i che ogni caster wheel può subire. Non sono state rappresentate, per semplicità rappresentativa, le forze di attrito $F_{i,\lambda i}$ longitudinali poiché, nell'equilibrio attorno al polo P , non generano momenti.

Si riporta di seguito l'equazione di equilibrio:

$$m_V \cdot (\ddot{x}_G - \dot{y}_G \cdot \dot{\psi}) \cdot h = -F_{1,N} \cdot (a - b_{caster} \cdot \cos \delta_1) - F_{2,N} \cdot (a - b_{caster} \cdot \cos \delta_2) + F_{5,N} \cdot (a + b_{caster} \cdot \cos \delta_5) + F_{6,N} \cdot (a + b_{caster} \cdot \cos \delta_6) \quad (4.39)$$

4.2.2. Equilibrio alle rotazioni nel piano yz

Si riporta in Figura 4.8 il diagramma di corpo libero nel piano yz:

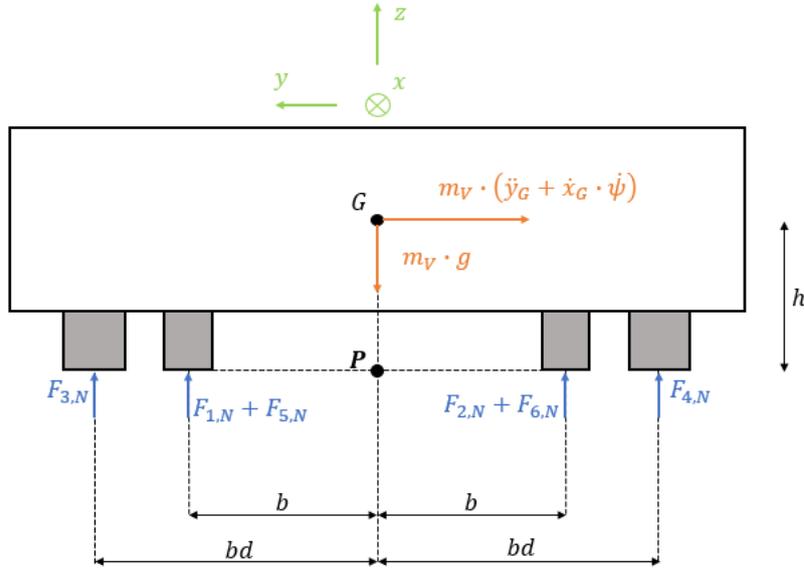


Figura 4.8 - DCL del MIR250 nel piano yz

Come nel caso precedente, il sistema è rappresentato nella configurazione particolare espressa in (4.38) e non sono state rappresentate le forze di attrito tangenziali $F_{i,\mu i}$ per semplificarne la rappresentazione grafica e che, comunque, non generano alcun momento nell'equilibrio attorno al polo P .

Si riporta di seguito l'equazione di equilibrio attorno al polo P :

$$m_V \cdot (\ddot{y}_G + \dot{x}_G \cdot \dot{\psi}) \cdot h = -F_{1,N} \cdot (b - b_{caster} \cdot \sin \delta_1) - F_{5,N} \cdot (b - b_{caster} \cdot \sin \delta_5) - F_{3,N} \cdot bd + F_{2,N} \cdot (b + b_{caster} \cdot \sin \delta_2) + F_{6,N} \cdot (b + b_{caster} \cdot \sin \delta_6) + F_{4,N} \cdot bd \quad (4.40)$$

4.2.3. Equilibrio lungo l'asse z

Partendo dal diagramma di corpo libero in Figura 4.7 o in Figura 4.8 si ricava l'equazione di equilibrio lungo l'asse z:

$$m_V \cdot g = F_{1,N} + F_{2,N} + F_{3,N} + F_{4,N} + F_{5,N} + F_{6,N} \quad (4.41)$$

Combinando le equazioni (4.39), (4.40) e (4.41) linearmente indipendenti in un unico sistema si ottiene:

$$\begin{cases} y: m_V \cdot (\ddot{x}_G - \dot{y}_G \cdot \dot{\psi}) \cdot h = -F_{1,N} \cdot (a - b_{caster} \cdot \cos \delta_1) - F_{2,N} \cdot (a - b_{caster} \cdot \cos \delta_2) + \\ \quad + F_{5,N} \cdot (a + b_{caster} \cdot \cos \delta_5) + F_{6,N} \cdot (a + b_{caster} \cdot \cos \delta_6) \\ x: m_V \cdot (\ddot{y}_G + \dot{x}_G \cdot \dot{\psi}) \cdot h = -F_{1,N} \cdot (b - b_{caster} \cdot \sin \delta_1) - F_{5,N} \cdot (b - b_{caster} \cdot \sin \delta_5) + \\ \quad - F_{3,N} \cdot bd + F_{2,N} \cdot (b + b_{caster} \cdot \sin \delta_2) + F_{6,N} \cdot (b + b_{caster} \cdot \sin \delta_6) + F_{4,N} \cdot bd \\ z: m_V \cdot g = F_{1,N} + F_{2,N} + F_{3,N} + F_{4,N} + F_{5,N} + F_{6,N} \end{cases} \quad (4.42)$$

Dal sistema in (4.42) è possibile notare come ci siano sei incognite a fronte di tre sole equazioni di equilibrio. Di conseguenza sono attualmente presenti ∞^3 soluzioni. Sono necessarie altre tre equazioni per chiudere il sistema e vengono ricavate facendo delle assunzioni.

Partendo dalla Figura 4.7 il MiR in quella configurazione può essere considerato come una struttura a doppio portale con carico equamente distribuito. Il sistema può essere ricondotto a una trave continua (il telaio) su appoggi fissi (le ruote) e caricata uniformemente. Si riporta in Figura 4.9 lo schema di una trave caricata inferiormente dalla reazione delle fondamenta e superiormente dai carichi di punta dei pilastri [12].

$$F_{6,N} = F_{5,N} = \frac{m_V \cdot (\ddot{x}_G - \dot{y}_G \cdot \dot{\psi}) \cdot h + \frac{m_V \cdot g}{4} \cdot [2 \cdot a - b_{caster} \cdot (\cos \delta_1 + \cos \delta_2)]}{4 \cdot a - b_{caster} \cdot (\cos \delta_1 + \cos \delta_2) + b_{caster} \cdot (\cos \delta_5 + \cos \delta_6)} \quad (4.47)$$

$$F_{2,N} = F_{1,N} = \frac{m_V \cdot g}{4} - F_{6,N} \quad (4.48)$$

$$F_{4,N} = \frac{1}{2 \cdot bd} \cdot \{m_V \cdot (\ddot{y}_G + \dot{x}_G \cdot \dot{\psi}) \cdot h + F_{2,N} \cdot [2 \cdot bd - b_{caster} \cdot (\sin \delta_1 + \sin \delta_2)]\} + \frac{1}{2 \cdot bd} \cdot \{F_{6,N} \cdot [2 \cdot bd - b_{caster} \cdot (\sin \delta_5 + \sin \delta_6)]\} \quad (4.49)$$

$$F_{3,N} = m_V \cdot g - 2 \cdot F_{6,N} - 2 \cdot F_{2,N} - F_{4,N} \quad (4.50)$$

4.3. Smussamento funzioni del coefficiente di attrito

È stato anche detto che i parametri $f, f_a, s1, s2, a1, a2, am1$ e $am2$ delle funzioni $F_{i,\lambda_i}(\sigma_i), F_{i,\mu_i}(\alpha_i)$ e $M_i(\alpha_i)$ possono essere ottimizzati in modo tale che il modello di attrito si adatti al comportamento reale del fenomeno.

Per aumentare l'adattabilità del modello di attrito al comportamento reale è stato introdotto un ulteriore grado di libertà: le funzioni $F_{i,\lambda_i}(\sigma_i)$ e $F_{i,\mu_i}(\alpha_i)$ vengono approssimate con l'unione di spline cubiche [13]. In sostanza il metodo è basato sulla scelta di un numero n di nodi x_j equispaziati che generano $n - 1$ intervalli. Ciascun intervallo è il dominio di un polinomio di terzo grado così definito:

$$S_j(x) = a_j x^3 + b_j x^2 + c_j x + d_j \quad x \in [x_j, x_{j+1}] \quad (4.51)$$

Dove il pedice del polinomio coincide con quello del nodo che lo precede.

L'unione dei $n - 1$ polinomi di terzo grado genera la funzione approssimata della funzione di partenza. Quindi detta $y = f(x)$ una generica funzione in x allora vale:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bigcup_{j=1}^{n-1} S_j(x) = y(x) \quad (4.52)$$

Dovendo ricavare quattro coefficienti per ciascun polinomio, in definitiva si hanno $4 \cdot (n - 1)$ incognite. È necessario un numero uguale di equazioni per determinare univocamente il valore di questi coefficienti. Le condizioni che vengono imposte sono le seguenti:

- Il polinomio è interpolante, di conseguenza vale la seguente equazione:

$$S_j(x_j) = y(x_j) \quad j = 1, 2, \dots, n - 1 \quad (4.53)$$

Che impone l'uguaglianza dell'estremo sinistro di ciascun polinomio alla funzione di partenza nel j -esimo nodo. Dato che l'ultimo nodo alla sua destra non ha alcun polinomio, allora si impone separatamente la condizione sull'ultimo nodo:

$$S_{j-1}(x_j) = y(x_j) \quad j = n \quad (4.54)$$

- Continuità della funzione, quindi vale:

$$S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1}) \quad j = 1, 2, \dots, n-2 \quad (4.55)$$

$$a_{j+1}x_{j+1}^3 + b_{j+1}x_{j+1}^2 + c_{j+1}x_{j+1} + d_{j+1} = a_jx_{j+1}^3 + b_jx_{j+1}^2 + c_jx_{j+1} + d_j \quad j = 1, 2, \dots, n-2 \quad (4.56)$$

- Continuità della derivata prima:

$$\frac{d[S_{j+1}(x_{j+1})]}{dx} = \frac{d[S_j(x_{j+1})]}{dx} \quad j = 1, 2, \dots, n-2 \quad (4.57)$$

$$3a_{j+1}x_{j+1}^2 + 2b_{j+1}x_{j+1} + c_{j+1} = 3a_jx_{j+1}^2 + 2b_jx_{j+1} + c_j \quad j = 1, 2, \dots, n-2 \quad (4.58)$$

- Continuità della derivata seconda:

$$\frac{d^2[S_{j+1}(x_{j+1})]}{dx^2} = \frac{d^2[S_j(x_{j+1})]}{dx^2} \quad j = 1, 2, \dots, n-2 \quad (4.59)$$

$$6a_{j+1}x_{j+1} + 2b_{j+1} = 6a_jx_{j+1} + 2b_j \quad j = 1, 2, \dots, n-2 \quad (4.60)$$

Unendo le quattro condizioni si ha a disposizione un numero di equazioni pari a:

$$n + n - 2 + n - 2 + n - 2 = 4n - 6 \quad (4.61)$$

Dunque, mancano ancora due equazioni per chiudere il sistema. Si impone di conseguenza l'uguaglianza della derivata terza nei nodi x_2 e x_{n-1} :

$$\frac{d^3[S_{j+1}(x_{j+1})]}{dx^3} = \frac{d^3[S_j(x_{j+1})]}{dx^3} \quad j = 1, n-2 \quad (4.62)$$

$$6a_{j+1} = 6a_j \quad j = 1, n-2 \quad (4.63)$$

In questo modo tutti i coefficienti dei polinomi di terzo grado sono stati univocamente determinati. Quindi il nuovo grado di libertà, su cui si può lavorare per modificare le funzioni di attrito, è il numero di nodi intermedi. Vengono riportati di seguito i risultati dello smussamento delle funzioni di attrito. Si indica con:

- $f_l(\sigma_i)$ la funzione del coefficiente di attrito longitudinale;
- $f_{ls}(\sigma_i)$ la funzione del coefficiente di attrito longitudinale smussata;
- $f_t(\alpha_i)$ la funzione del coefficiente di attrito tangenziale;
- $f_{ts}(\alpha_i)$ la funzione del coefficiente di attrito tangenziale smussata.

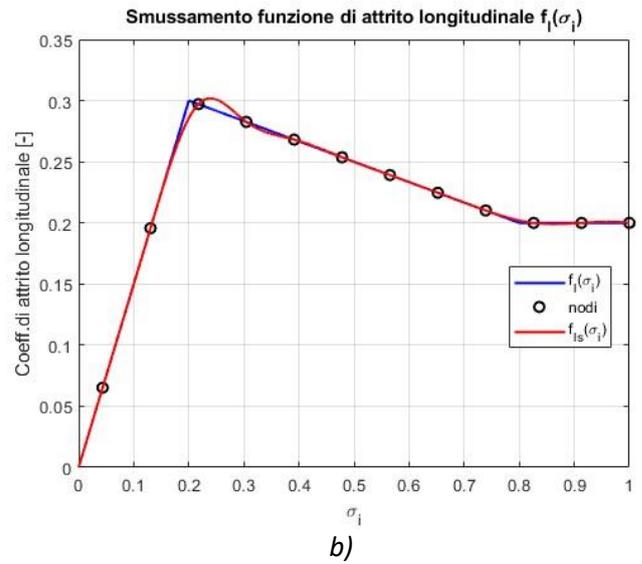
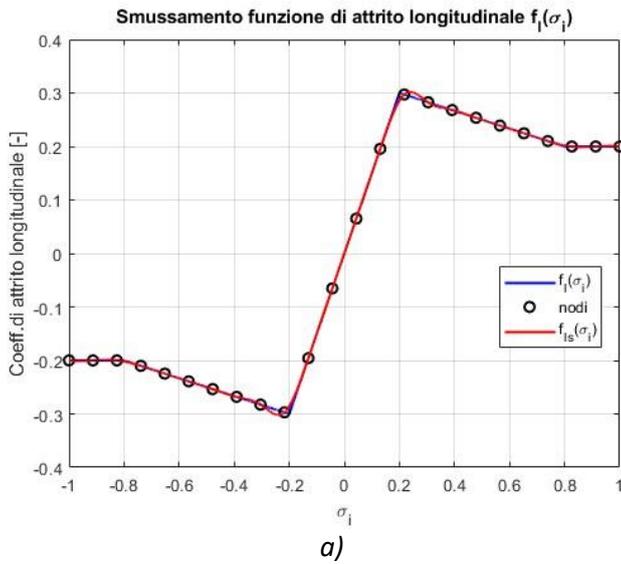


Figura 4.10 - smussamento funzione del coefficiente di attrito longitudinale $f_l(\sigma_i)$ con $n=23$ a), particolare delle funzioni del coefficiente di attrito b)

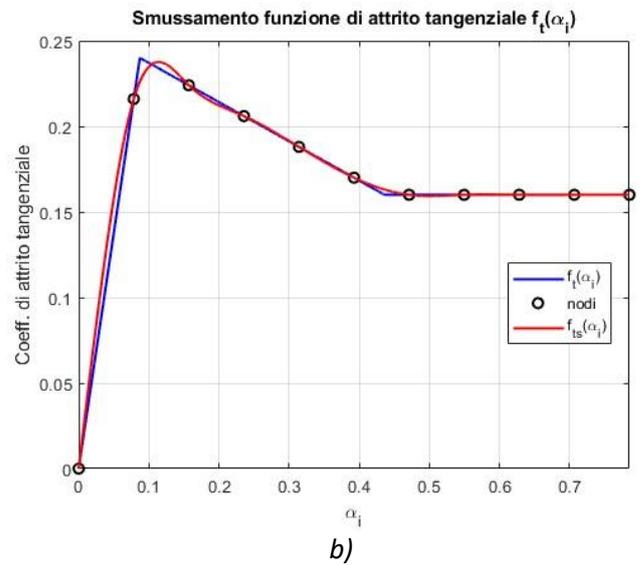
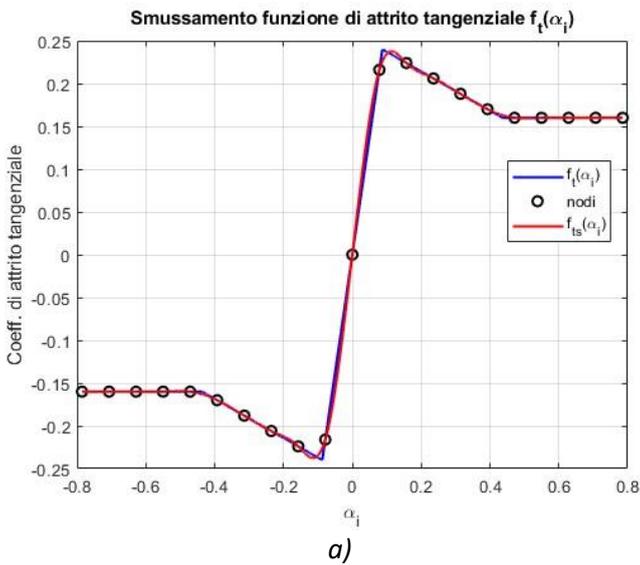


Figura 4.11 -- smussamento funzione del coefficiente di attrito tangenziale $f_t(\alpha_i)$ con $n=20$ a), particolare delle funzioni del coefficiente di attrito b)

In questa fase non è stato considerato il momento di auto-allineamento $M_i(\alpha_i)$ poiché il suo contributo è trascurabile rispetto a tutte le altre forze in gioco.

In Figura 2.25 e in Figura 2.27, direttamente le forze di attrito, questo perché le reazioni normali alle ruote erano costanti dato che non veniva considerata la dinamica del veicolo e di conseguenza valeva:

$$F_{3,\lambda 3}(\sigma_3) = f_l(\sigma_3) \cdot F_{3,N} = f_l(\sigma_3) \cdot \frac{m_V \cdot g}{2} \quad (4.64)$$

$$F_{4,\lambda 4}(\sigma_4) = f_l(\sigma_4) \cdot F_{4,N} = f_l(\sigma_4) \cdot \frac{m_V \cdot g}{2} \quad (4.65)$$

$$F_{3,\mu 3}(\alpha_3) = f_t(\alpha_3) \cdot F_{3,N} = f_t(\alpha_3) \cdot \frac{m_V \cdot g}{2} \quad (4.66)$$

$$F_{4,\mu 4}(\alpha_4) = f_t(\alpha_4) \cdot F_{4,N} = f_t(\alpha_4) \cdot \frac{m_V \cdot g}{2} \quad (4.67)$$

Adesso invece le reazioni normali sono funzione del tempo poiché dipendono dalla dinamica del sistema, quindi per l'i-esima ruota vale:

$$F_{i,\lambda i}(\sigma_i, t) = f_l(\sigma_i) \cdot F_{i,N}(t) \quad (4.68)$$

$$F_{i,\mu i}(\alpha_i, t) = f_t(\alpha_i) \cdot F_{i,N}(t) \quad (4.69)$$

Quindi se nelle equazioni (4.64), (4.65), (4.66) e (4.67) la reazione normale era costante, adesso nelle equazioni (4.68) e (4.69) non lo è più e, di conseguenza, $F_{i,N}(t)$ è stato rimosso nella fase di smussamento per essere poi introdotto nel calcolo delle forze di attrito una volta calcolate $f_{ls}(\sigma_i)$ e $f_{ts}(\alpha_i)$ presenti in Figura 4.10 e in Figura 4.11.

4.4. Dinamica del modello completo

Come è possibile notare il sistema di forze agente sul modello completo è molto più articolato rispetto a quello del modello a due ruote. Si riporta in Figura 4.12 il DCL del modello completo del MiR:

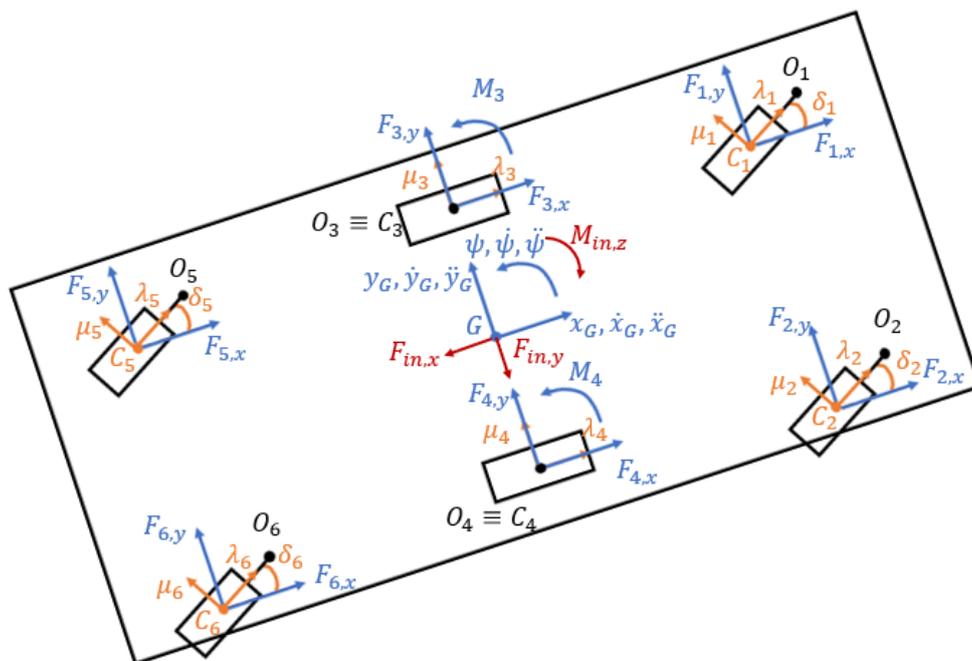


Figura 4.12 - DCL del modello completo del MiR

Come è possibile notare dal diagramma di corpo libero, invece che considerare le forze di attrito agenti in direzione longitudinale $F_{i,\lambda i}$ e in direzione tangenziale $F_{i,\mu i}$ alle ruote, sono state considerate le loro proiezioni

in direzione x e y del SdR relativo ($G - xyz$) per ricavare in maniera più semplice le equazioni cardinali della dinamica.

Questo, ovviamente è possibile attraverso la matrice di rotazione in (4.70) valida per la generica i -esima ruota:

$$\begin{Bmatrix} F_{i,x} \\ F_{i,y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \delta_i & -\sin \delta_i \\ \sin \delta_i & \cos \delta_i \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} F_{i,\lambda i} \\ F_{i,\mu i} \end{Bmatrix} \quad (4.70)$$

Che nel caso particolare delle ruote motrici dove $\delta_3 = \delta_4 = 0 \text{ rad}$, sempre per l'equazione (2.10), si ha:

$$\begin{Bmatrix} F_{3,x} \\ F_{3,y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 0 & -\sin 0 \\ \sin 0 & \cos 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} F_{3,\lambda 3} \\ F_{3,\mu 3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{3,\lambda 3} \\ F_{3,\mu 3} \end{Bmatrix} \quad (4.71)$$

$$\begin{Bmatrix} F_{4,x} \\ F_{4,y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 0 & -\sin 0 \\ \sin 0 & \cos 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} F_{4,\lambda 4} \\ F_{4,\mu 4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{4,\lambda 4} \\ F_{4,\mu 4} \end{Bmatrix} \quad (4.72)$$

A questo punto si applica Newton-Eulero per ricavare le equazioni cardinali della dinamica:

$$x: F_{1,x} + F_{2,x} + F_{3,x} + F_{4,x} + F_{5,x} + F_{6,x} = F_{in,x} = m_V \cdot (\ddot{x}_G - \dot{y}_G \cdot \dot{\psi}) \quad (4.73)$$

$$y: F_{1,y} + F_{2,y} + F_{3,y} + F_{4,y} + F_{5,y} + F_{6,y} = F_{in,y} = m_V \cdot (\ddot{y}_G + \dot{x}_G \cdot \dot{\psi}) \quad (4.74)$$

$$\begin{aligned} z: & -F_{1,x}(b - b_{caster} \sin \delta_1) + F_{1,x}(a - b_{caster} \cos \delta_1) + F_{2,x}(b - b_{caster} \sin \delta_2) + \\ & + F_{2,y}(a - b_{caster} \cos \delta_2) - F_{3,x}bd + F_{4,x}bd + M_3 + M_4 - F_{5,x}(b - b_{caster} \sin \delta_5) + \\ & - F_{5,y}(a + b_{caster} \cos \delta_5) + F_{6,x}(b + b_{caster} \sin \delta_6) - F_{6,y}(a + b_{caster} \cos \delta_6) = M_{in,z} = \\ & = I_V \cdot \ddot{\psi} \end{aligned} \quad (4.75)$$

Una volta note le leggi che descrivono la dinamica del sistema, basta esplicitare \ddot{x}_G , \ddot{y}_G e $\ddot{\psi}$, implementare le equazioni in un solutore numerico, ad esempio in ambiente Simulink, e si ricavano gli andamenti nel tempo delle tre coordinate $x_G(t)$, $y_G(t)$ e $\psi(t)$.

4.5. Risultato simulazioni

Dopo aver aggiunto le caster wheels al modello dinamico e aver inserito anche delle reazioni normali alle ruote che tenessero conto dei transitori del MiR, ne è stato implementato un modello in ambiente Simulink per effettuare alcune simulazioni imponendo delle traiettorie di set.

Ovviamente per apprezzare gli effetti delle caster wheels sulla dinamica del sistema, vengono utilizzate le stesse traiettorie di set assegnate al modello semplificato a due ruote.

4.5.1. Traiettoria rettilinea

La traiettoria e le velocità di set sono riportate in Figura 3.5, si riporta direttamente il confronto della velocità di rotazione ideale delle ruote motrici ($\omega_{3,SET}$ e $\omega_{4,SET}$) con quella simulata ($\omega_{3,OUT}$ e $\omega_{4,OUT}$). Come è possibile notare in Figura 4.13 il controllo riesce a garantire una sovrapposizione quasi perfetta tra le velocità angolari simulate e quelle ideali.

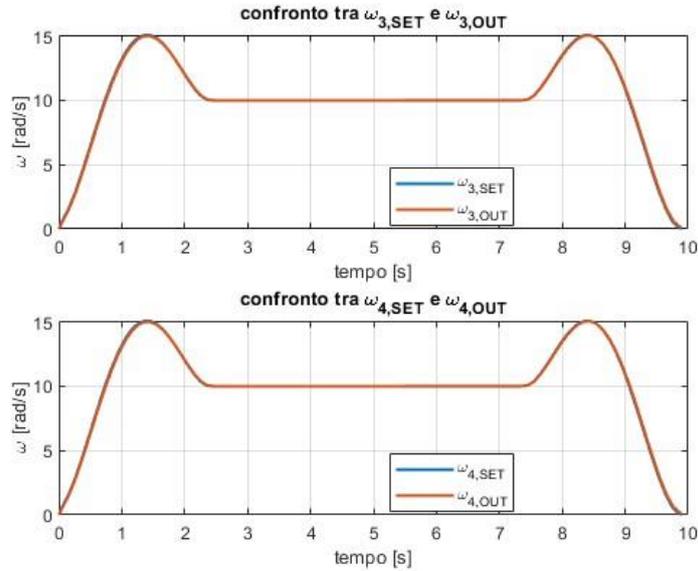


Figura 4.13 - confronto velocità angolari di set e out delle ruote motrici

Si riporta in Figura 4.14 l'andamento delle reazioni normali alle ruote $F_{i,N}$ e della deflessione delle caster wheels δ_i . Come ci si poteva aspettare, nel transitorio iniziale le reazioni $F_{5,N}$ e $F_{6,N}$, ovviamente sovrapposte per l'equazione (4.45), tendono ad avere un andamento crescente a causa dell'accelerazione per poi decrescere nella fase di decelerazione. Comportamento opposto hanno le reazioni delle ruote anteriori $F_{1,N}$ e $F_{2,N}$ anch'esse sovrapposte per l'equazione (4.44). Non cambia invece la reazione normale delle ruote motrici $F_{3,N}$ ed $F_{4,N}$ in quanto non intervengono nell'equilibrio alle rotazioni nel piano xz .

Compiendo una traiettoria perfettamente rettilinea ed essendo $\delta_i(t = 0) = 0 \text{ rad}$ allora l'andamento della deflessione $\delta_i(t)$ delle caster wheels non può che essere piatto e pari a zero come è possibile notare dalla Figura 4.14 b).

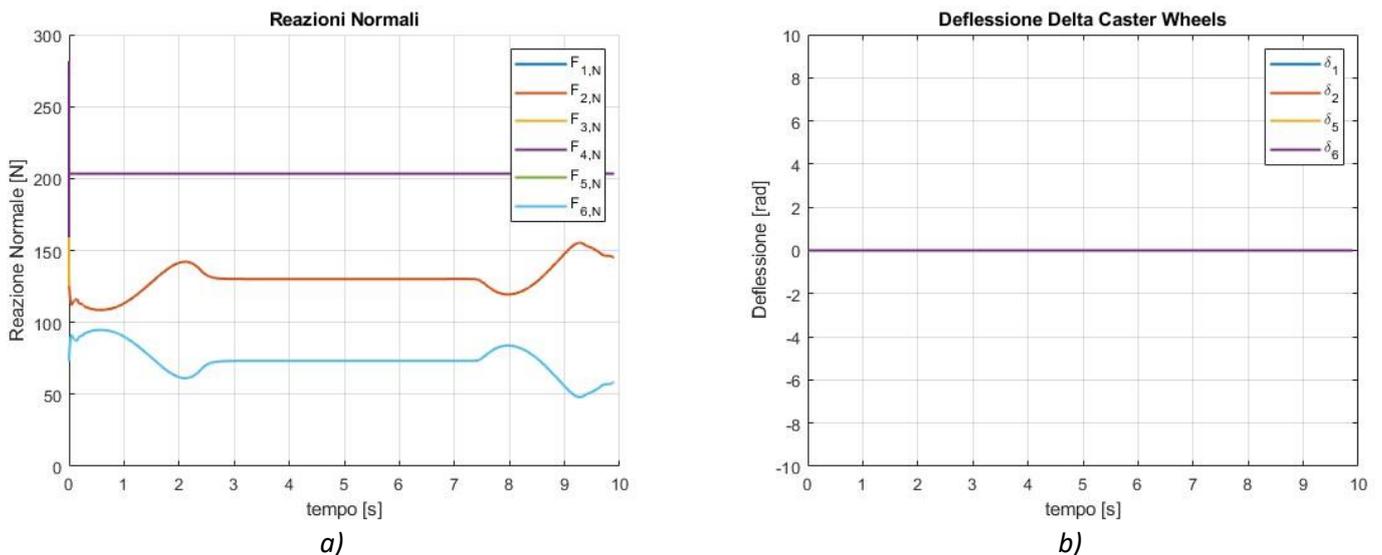
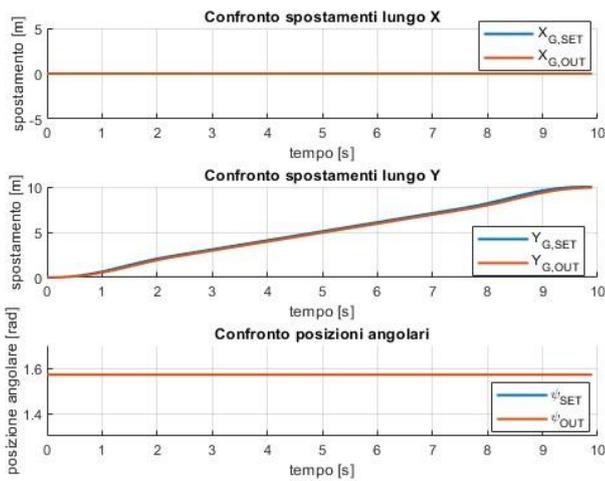
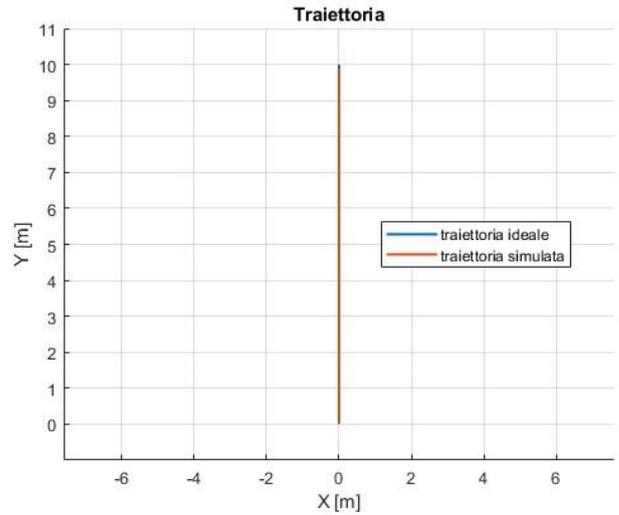


Figura 4.14 - andamento delle reazioni normali a) e della deflessione delle caster wheels b)

Si riporta adesso il confronto tra gli spostamenti e le traiettorie ideali e simulate. Come è possibile notare dalla Figura 4.15 a) il modello completo del MiR riesce a seguire molto bene gli spostamenti e le rotazioni ideali e questo si traduce in una sovrapposizione quasi perfetta della traiettoria ideale con quella simulata in Figura 4.15 b).



a)



b)

Figura 4.15 - confronto spostamenti ideali (SET) e reali (OUT) a), confronto traiettoria ideale e reale b)

4.5.2. Traiettoria con una curva

Per la traiettoria e le velocità di set si fa riferimento alla Figura 3.8. Si riportano di seguito le velocità di rotazione simulate delle ruote motrici ($\omega_{3,OUT}$ e $\omega_{4,OUT}$) confrontate con quelle ideali ($\omega_{3,SET}$ e $\omega_{4,SET}$). Anche in questo caso si può notare come il servosistema in controllo di velocità funzioni egregiamente permettendo alle ruote motrici di seguire le velocità angolari di set $\omega_{3,SET}$ e $\omega_{4,SET}$. Si nota come per curvare verso destra la velocità di rotazione $\omega_{3,OUT}$ sia maggiore rispetto a $\omega_{4,OUT}$ coerentemente con quanto ci si aspetta dopo aver studiato la cinematica del differential wheeled robot.

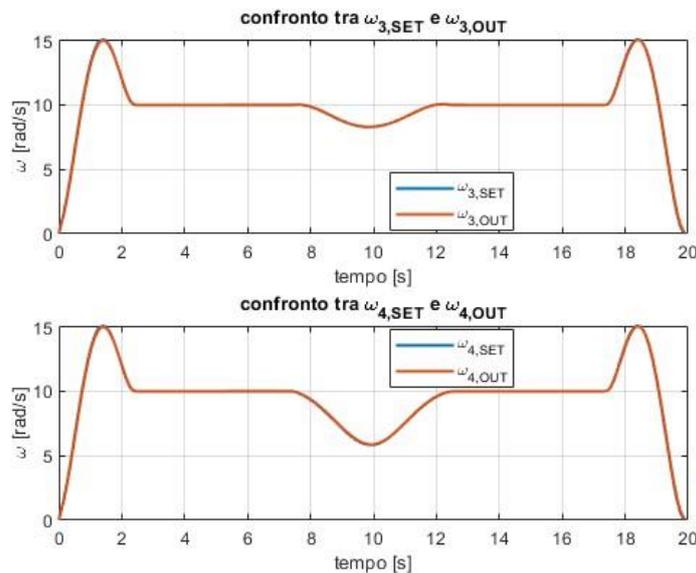


Figura 4.16 - confronto velocità angolari di set e out delle ruote motrici

Si riportano in Figura 4.17 adesso le reazioni normali $F_{l,N}$ e la deflessione delle caster wheels δ_i . Rispetto al caso della traiettoria rettilinea, in Figura 4.17 a) si può notare come le reazioni normali delle ruote motrici varino mentre il robot sta curvando. Questo è causato dalla forza centrifuga che per essere bilanciata ha bisogno di una coppia uguale e contraria generata in questo caso dalle ruote motrici. Le caster wheels invece ruotano attorno all'asse diametrale: le ruote anteriori ruotano in senso orario mentre quelle posteriori in senso antiorario coerentemente con quanto ci si aspetta dato che il centro di istantanea rotazione del telaio

durante la fase di curvatura si trova alla destra del MiR e, quindi, per garantire la tangenza della traiettoria delle cerniere O_i alla circonferenza osculatrice è necessario che le caster wheel ruotino così come rappresentato in Figura 4.17 b).

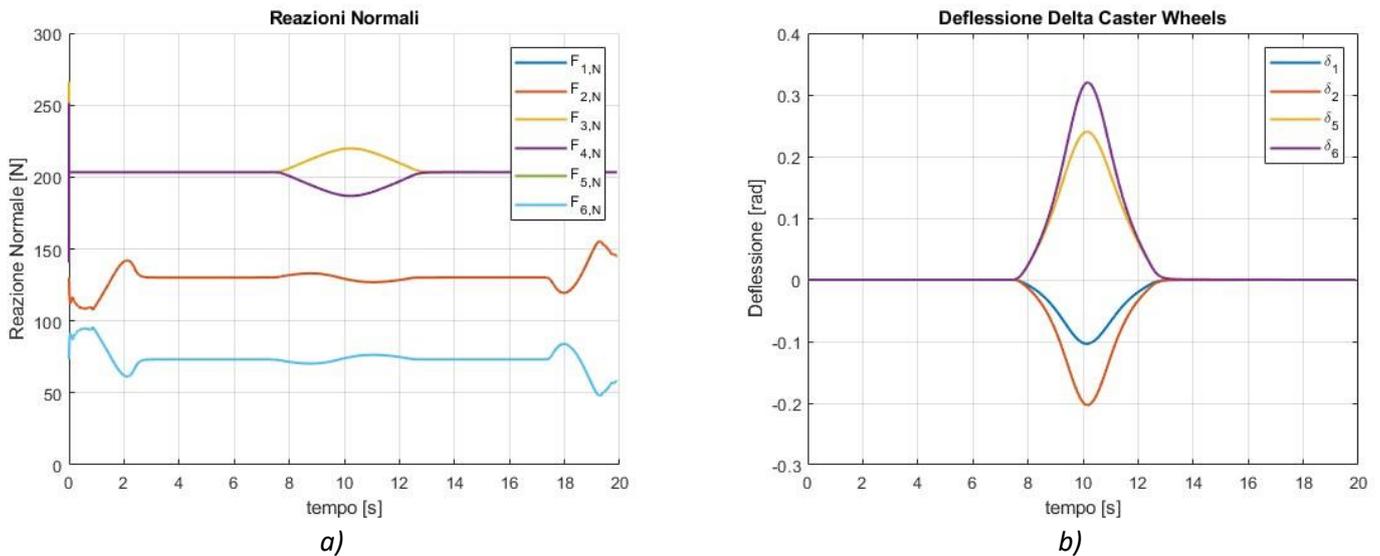


Figura 4.17 - andamento delle reazioni normali a) e della deflessione delle caster wheels b)

Si riporta in Figura 4.18 il confronto tra gli spostamenti simulati (out) e ideali (set) e il confronto tra la traiettoria ideale e simulata. In Figura 4.18 a) si nota come la rotazione del telaio reale ψ_{OUT} sia innanzitutto in ritardo rispetto a quella prevista da ψ_{SET} a causa della sua dinamica. Si nota anche la presenza di uno statismo, il MiR infatti non riesce a portare a termine la rotazione prevista e questo porta ad accumulare un errore anche lungo in X e Y del SdR assoluto ($W - XYZ$) come è possibile notare dalla Figura 4.18 b).

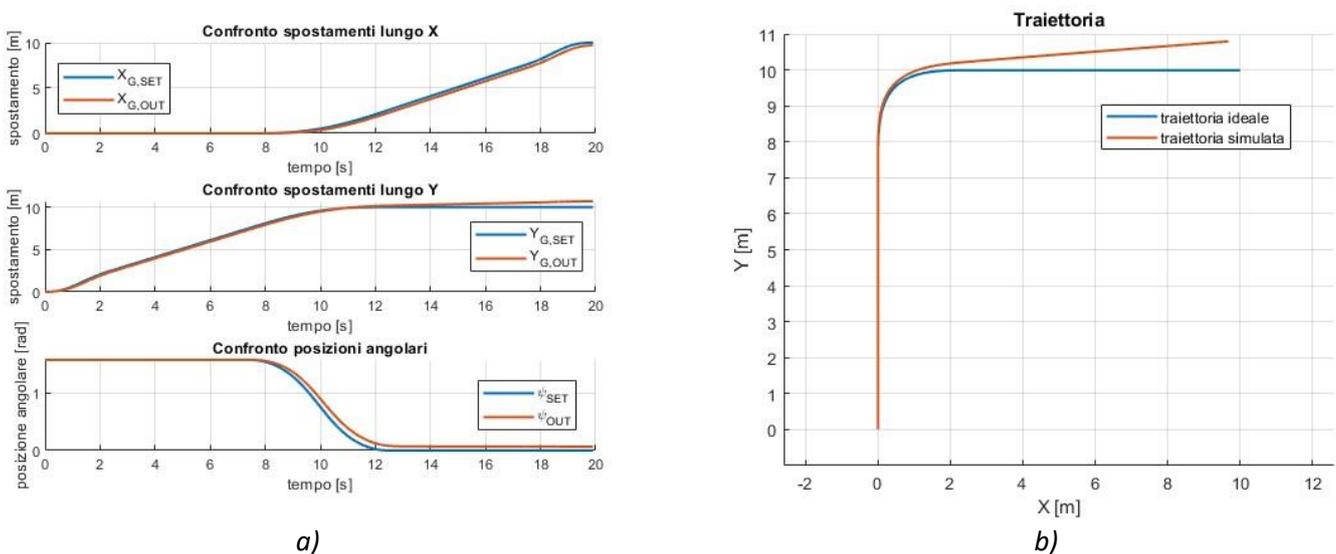


Figura 4.18 - confronto spostamenti ideali (SET) e reali (OUT) a), confronto traiettoria ideale e reale b)

4.5.3. Traiettoria a due curve

Per la traiettoria e le velocità di set si rimanda alla Figura 3.11. Si riporta in Figura 4.19 il confronto tra le velocità angolari ideali ($\omega_{3,SET}$ e $\omega_{4,SET}$) e simulate ($\omega_{3,OUT}$ e $\omega_{4,OUT}$) delle ruote motrici. Dalla Figura 4.19 le velocità angolari delle ruote motrici $\omega_{3,OUT}$ e $\omega_{4,OUT}$ seguono molto bene i segnali di set, ancora una volta è possibile notare come nel momento in cui il MiR ruota verso destra la velocità angolare $\omega_{4,OUT}$ sia minore rispetto alla velocità $\omega_{3,OUT}$, viceversa accade, invece, nel momento in cui il MiR ruota verso sinistra.

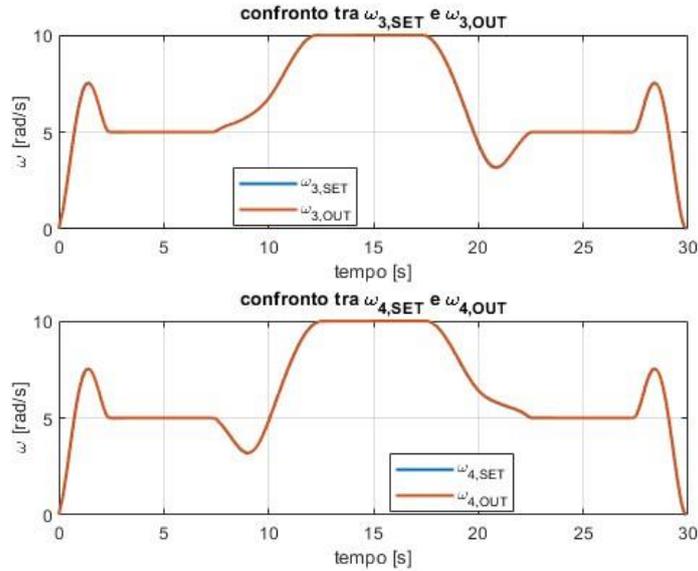


Figura 4.19 - confronto velocità angolari di set e out delle ruote motrici

Si riportano in Figura 4.20 le reazioni normali alle ruote e la deflessione delle caster wheels. Anche in questo caso diventa interessante analizzare come cambiano le reazioni normali delle ruote motrici $F_{3,N}$ e $F_{4,N}$ a causa della forza centrifuga che cambia verso nelle due curve. Questa genera inizialmente, nella prima curva, un valore di $F_{3,N} > F_{4,N}$ (Figura 4.20 a) per contrastare il momento generato dalla forza centrifuga mentre viene percorsa curva verso destra. Nella seconda curva, invece, si ha $F_{3,N} < F_{4,N}$ (Figura 4.20 a) poiché questa volta il momento generato dalla forza centrifuga ha cambiato verso e di conseguenza deve cambiare anche il verso del momento generato dalle reazioni normali alle ruote motrici.

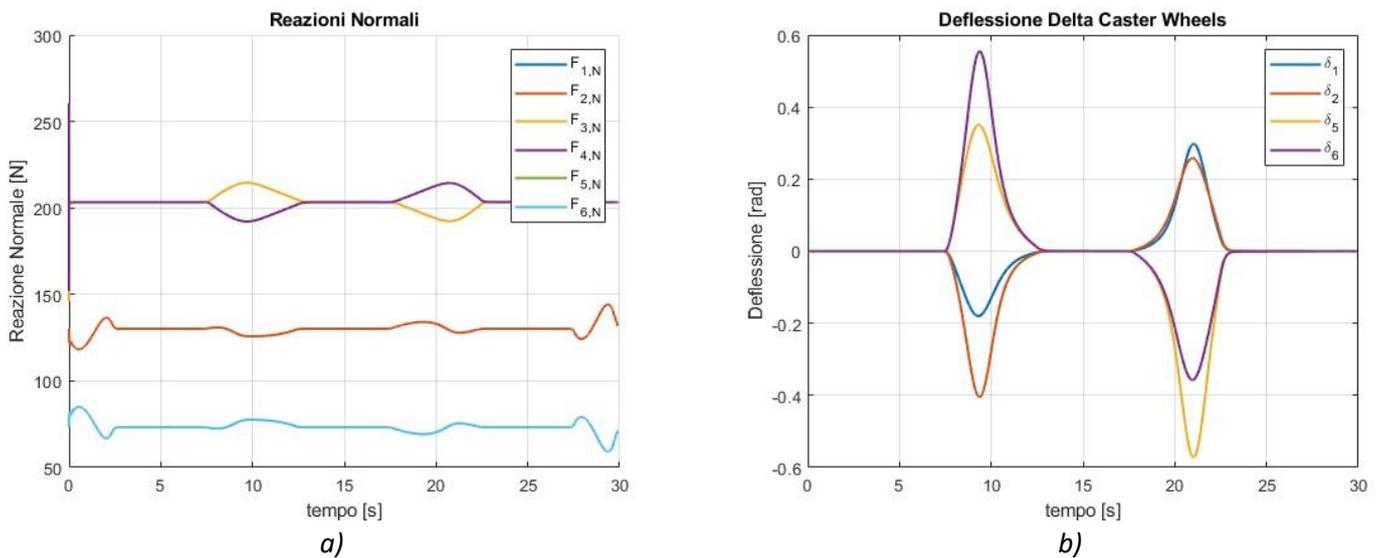
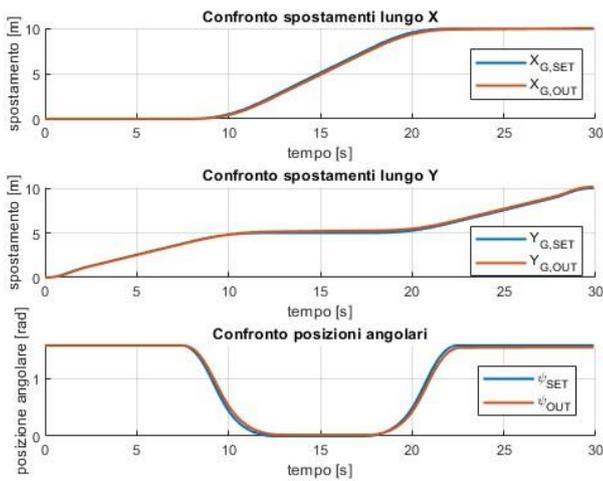
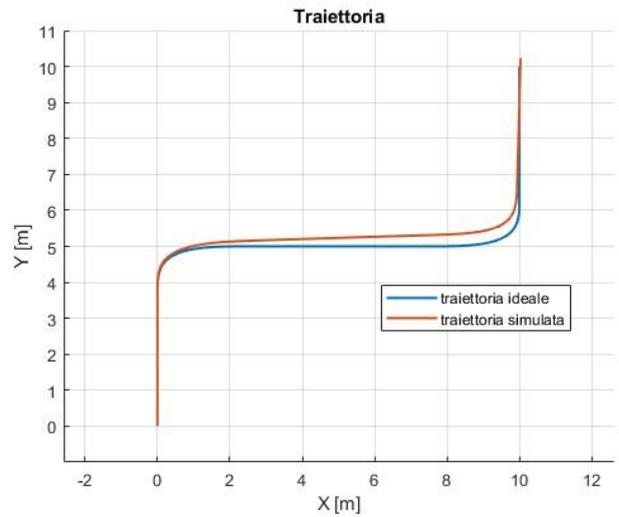


Figura 4.20 - andamento delle reazioni normali a) e della deflessione delle caster wheels b)

Si riporta, infine, in Figura 4.21 il confronto tra gli spostamenti, e le conseguenti traiettorie, ideali e simulati. Dalla Figura 4.21 a) è possibile notare ancora una volta degli statismi sia nella rotazione oraria, prima, sia nella rotazione antioraria, poi, del MiR. Questo, in realtà, ha un effetto benefico nel raggiungimento del target finale poiché gli errori sul posizionamento angolare essendo opposti si compensano a vicenda come è possibile notare in Figura 4.21 b).



a)



b)

Figura 4.21 - confronto spostamenti ideali (SET) e reali (OUT) a), confronto traiettoria ideale e reale b)

4.5.4. Traiettoria a quattro curve

Per la traiettoria e le velocità di set si rimanda alla Figura 3.14. Si riportano in Figura 4.22 le velocità angolari delle ruote motrici $\omega_{3,OUT}$ e $\omega_{4,OUT}$ confrontate con i segnali di set $\omega_{3,SET}$ e $\omega_{4,SET}$. Ancora una volta in Figura 4.22 si ha prova del corretto funzionamento del servosistema in controllo di velocità dato che i segnali $\omega_{3,OUT}$ e $\omega_{4,OUT}$ sono quasi perfettamente sovrapposti a $\omega_{3,SET}$ e $\omega_{4,SET}$.

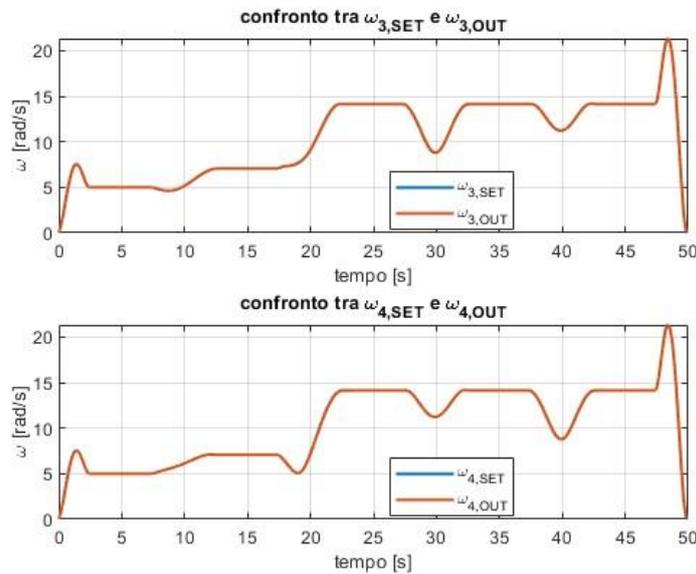
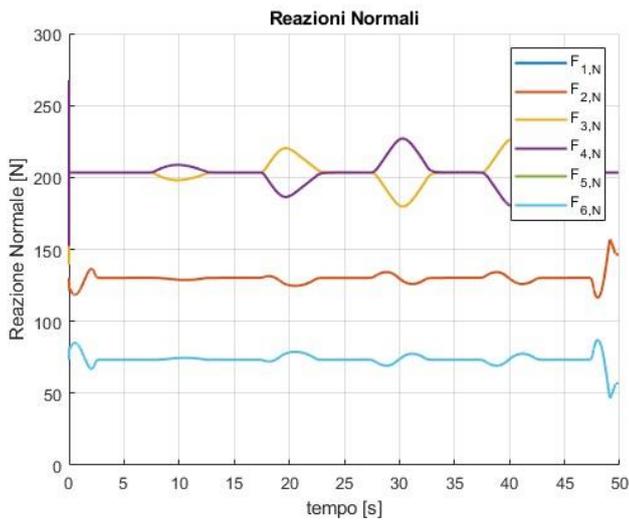
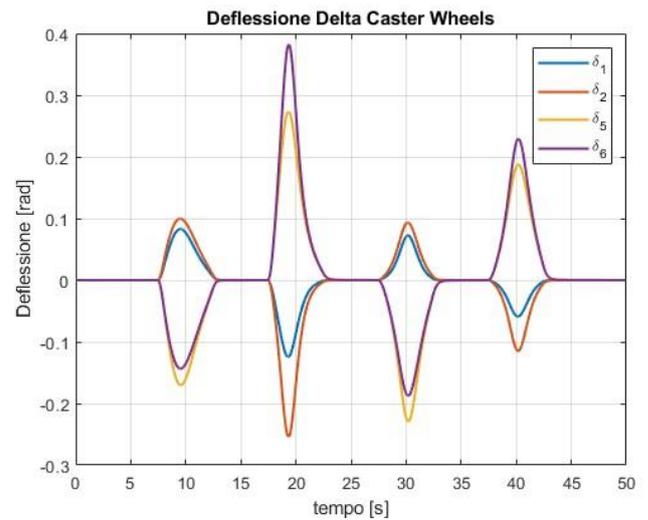


Figura 4.22 - confronto velocità angolari di set e out delle ruote motrici

Si riportano in Figura 4.23 le reazioni normali e la deflessione delle caster wheels. In Figura 4.23 a) è possibile notare come ad ogni curva equivale una ripartizione diversa delle reazioni normali alle ruote motrici $F_{3,N}$ ed $F_{4,N}$ sempre per equilibrare il momento generato dalla forza centrifuga. Invece, in Figura 4.23 b) si vede come le caster wheels anteriori e posteriori alternino rotazioni orarie e antiorarie a causa delle forze di attrito tangenziali $F_{i,\mu i}$ agenti su di esse.



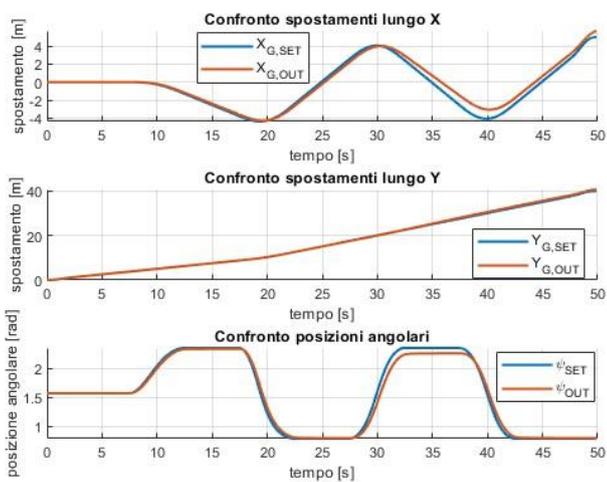
a)



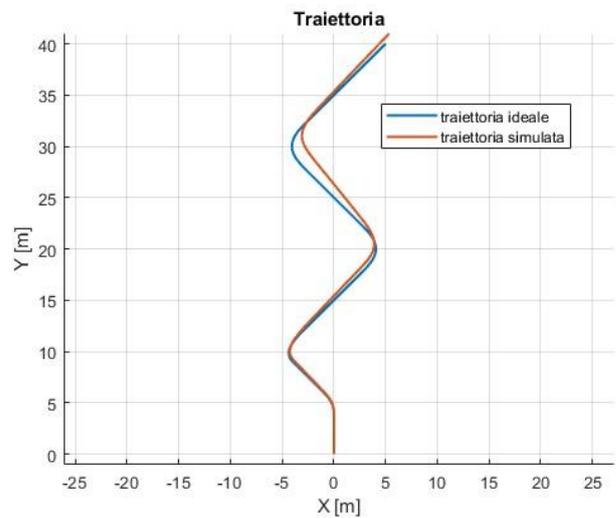
b)

Figura 4.23 - andamento delle reazioni normali a) e della deflessione delle caster wheels b)

Si riporta in Figura 4.24 il confronto tra gli spostamenti e le traiettorie ideali e simulate. Le considerazioni che si possono trarre dalla Figura 4.24 sono simili a quelle dei casi precedenti, semplicemente è stato ritenuto opportuno stressare maggiormente il modello richiedendogli una traiettoria più articolata e, come ci si poteva aspettare, ci sono ancora statismi nel posizionamento angolare alla fine di ogni rotazione. Come nei casi precedenti, rotazioni opposte generano statismi opposti che si compensano dando un effetto benefico al raggiungimento del target finale.



a)



b)

Figura 4.24 - confronto spostamenti ideali (SET) e reali (OUT) a), confronto traiettoria ideale e reale b)

4.5.5. Analisi dell'influenza delle caster wheels sulla precisione del MIR250

Dato che sia il modello semplificato a due ruote, sia il modello completo del MiR sono stati sottoposti alle stesse traiettorie di set, sarebbe interessante visualizzare l'effetto che le caster wheels hanno sulla precisione del robot sia nel seguire la traiettoria ideale, sia nel raggiungere il target finale.

A tal proposito si riportano in Figura 4.25, Figura 4.26 e Figura 4.27 la traiettoria reale seguita da entrambi i modelli.

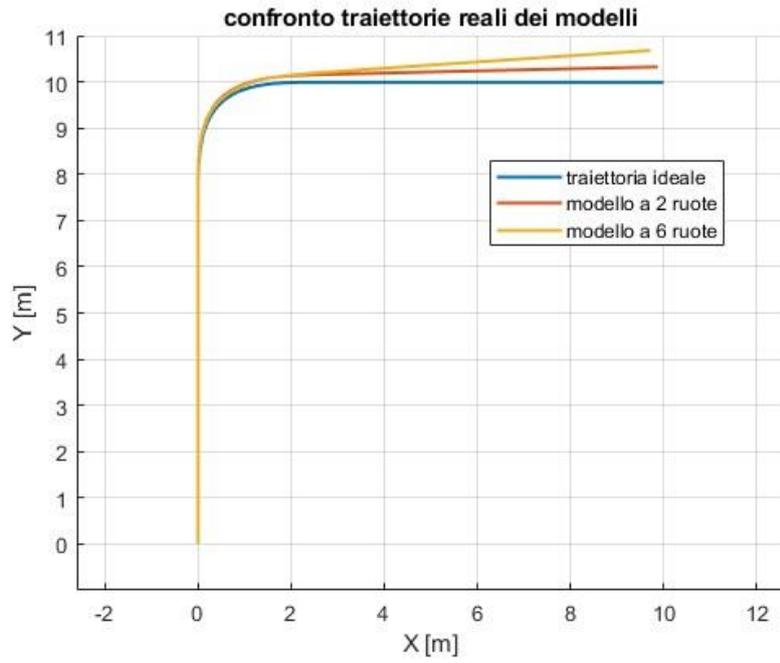


Figura 4.25 – risultato simulazioni su traiettoria con una curva

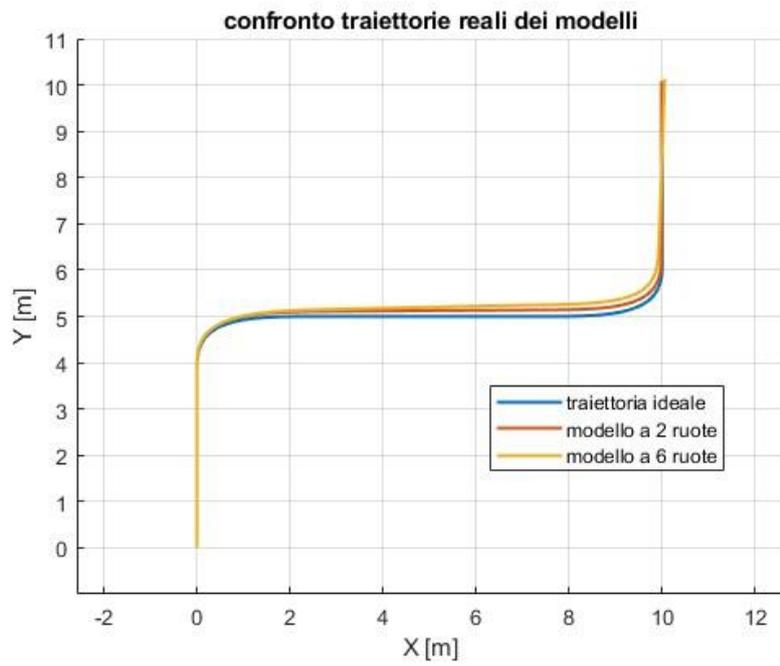


Figura 4.26 – risultato simulazioni su traiettoria a due curve

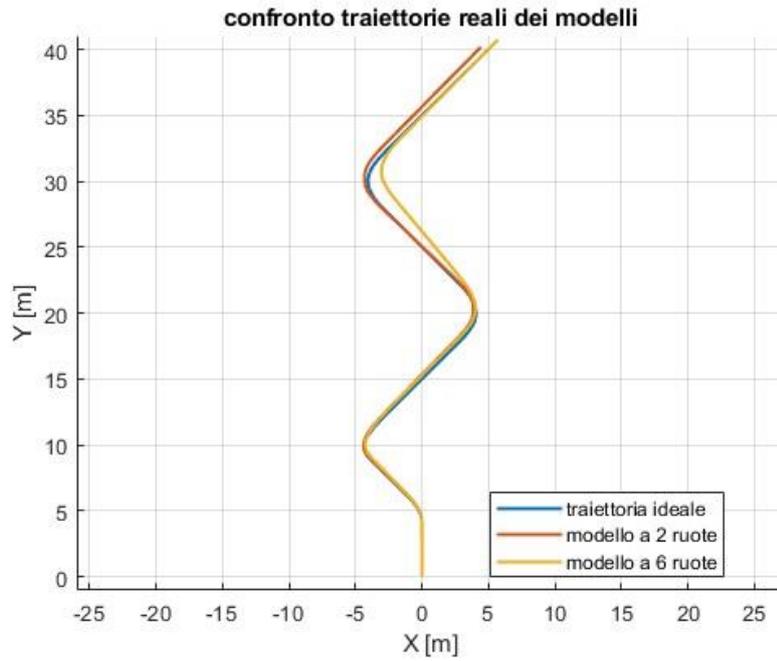


Figura 4.27 – risultato simulazioni su traiettoria a quattro curve

Come è possibile notare, in tutte le traiettorie le caster wheels hanno un effetto negativo sia nell'inseguire la traiettoria di set, sia nel raggiungimento del target finale. Questo perché se l'unico disturbo nel caso del modello a due ruote risiede nel carico inerziale, nel modello completo si aggiunge l'attrito causato dal contatto delle caster wheels con la superficie su cui avviene il moto.

5. IDENTIFICAZIONE DEL MODELLO

Il processo di identificazione si basa sulla variazione di alcuni parametri del modello in modo tale da modificarne la dinamica. Nella ricerca del valore di questi parametri, si vuole trovare la giusta combinazione che renda il comportamento dinamico del modello simile a quello del sistema reale. Questo presuppone che ci sia un confronto iterativo tra un set di dati sperimentali e un set di dati simulati. Ad ogni confronto viene cambiato il valore dei parametri del modello.

I dati sperimentali utilizzati in fase di identificazione e validazione fanno riferimento al sistema robotizzato MiR-UR5 con l'UR5 fisso in modo tale da semplificare il processo di stima dei parametri ottimali del modello.

5.1. Acquisizione dei dati sperimentali

Per acquisire i dati sperimentali sono state installate presso la ROBOGEST s.r.l. le telecamere 3D della OptiTrack (Figura 5.1).



a)



b)

Figura 5.1 - telecamere 3D OptiTrack a), telecamera OptiTrack installata b)

Nella fase di calibrazione dello strumento, deve essere definita l'origine del sistema di riferimento assoluto con opportuno orientamento degli assi. Dopo aver definito il sistema di riferimento assoluto, è necessario generare il corpo rigido di cui le telecamere 3D misurano la posizione nel tempo. Per farlo, vengono disposti dei *marker* catarifrangenti di forma sferica sul corpo. Per definire compiutamente le coordinate e l'orientamento nello spazio dei marker è necessario posizionarne almeno tre sul corpo rigido di cui si vuole acquisire la legge del moto. che

I marker vengono individuati dalle telecamere 3D e attraverso il software è possibile rilevare la posizione nel tempo del corpo rigido definito. I marker sono stati fissati sul MiR per poterne acquisire dati di movimento.

Si riportano in Figura 5.2 le traiettorie sperimentali rettilinee ottenute durante le acquisizioni con le telecamere 3D.

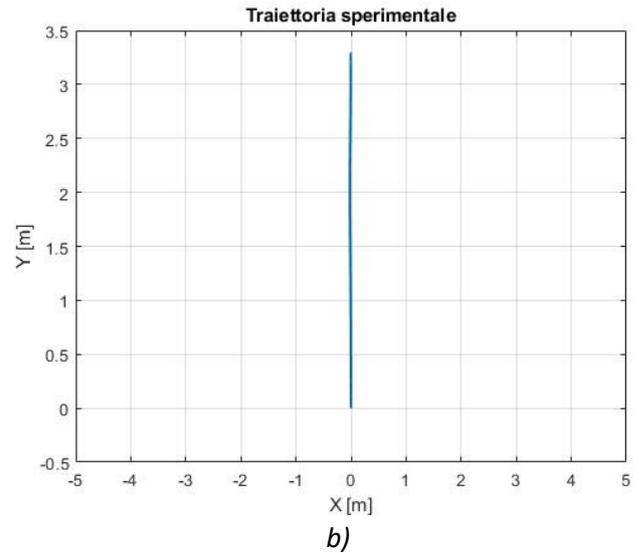
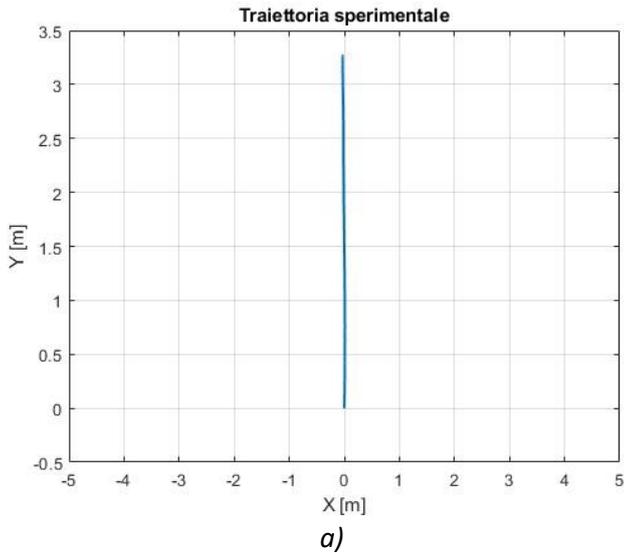


Figura 5.2 - traiettorie sperimentali del sistema robotizzato MiR-UR acquisite con le telecamere 3D

Affinché si possa effettuare il confronto tra la traiettoria reale e quella simulata è necessario che il set di velocità sia lo stesso per il modello e per il sistema reale. Di conseguenza, al modello è stato attribuito lo stesso set di velocità che è stato dato al sistema robotizzato reale in fase di acquisizione della traiettoria sperimentale. I set di velocità sperimentali sono stati acquisiti direttamente dal software del MiR e a ciascuno di essi è associata una traiettoria sperimentale acquisita attraverso le telecamere 3D. Il set di velocità sperimentale in Figura 5.3 a) genera la traiettoria sperimentale in Figura 5.2 a) e il set di velocità sperimentale in Figura 5.3 b) genera la traiettoria sperimentale in Figura 5.2 b).

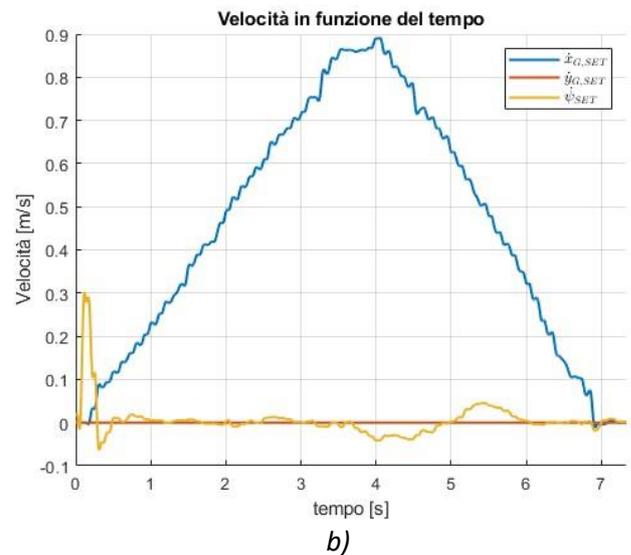
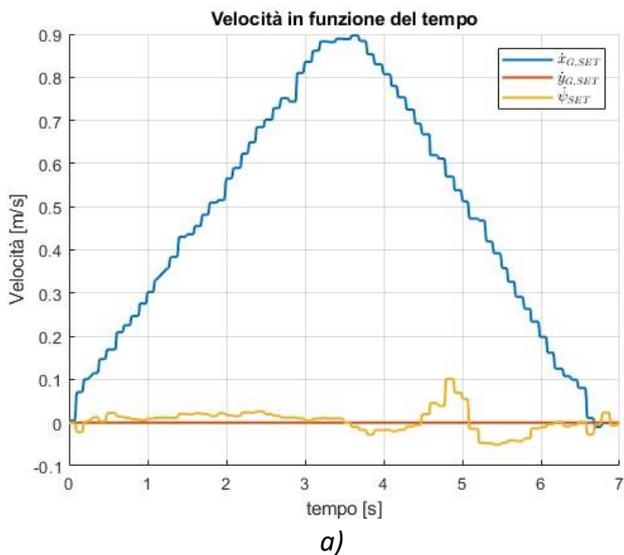


Figura 5.3 - set di velocità sperimentali nel SdR relativo del MiR corrispondenti alle traiettorie sperimentali in Figura 5.2

E' stato attribuito al modello il set di velocità presente in Figura 5.3 a). I risultati della simulazione sono stati confrontati con i dati sperimentali. Una volta terminata la simulazione, in Figura 5.4 a) è stata confrontata la variazione nel tempo delle coordinate di G del modello ($X_{G,SIM}$, $Y_{G,SIM}$ e ψ_{SIM}) con le coordinate di G del sistema reale ($X_{G,EXP}$, $Y_{G,EXP}$ e ψ_{EXP}). In Figura 5.4 b), è stata confrontata la traiettoria eseguita dal modello con quella acquisita sperimentalmente.

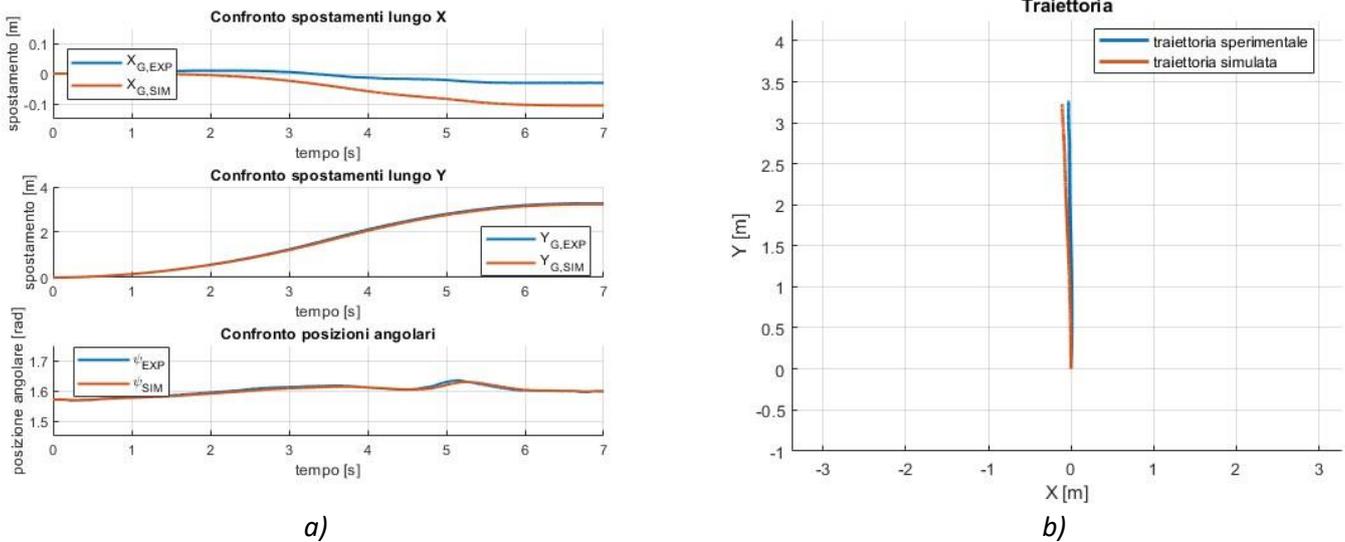


Figura 5.4 - confronto tra le coordinate di G simulate e sperimentali a), confronto traiettorie b)

Come è possibile notare dai confronti in Figura 5.4, il comportamento del modello non si discosta molto dal sistema reale se non nel suo posizionamento lungo l'asse X. Si cerca, quindi, di migliorare il modello identificando alcuni parametri in modo da ridurre l'errore presente nell'andamento della coordinata $X_{G,SIM}$.

5.2. Identificazione dei parametri

Si cercano adesso i parametri che più influenzano la dinamica del modello. Attraverso l'ausilio dell'Add-On "Parameter Estimator" di Simulink, questi parametri vengono iterativamente modificati in modo tale da minimizzare la Sum Squared of Errors (SSE) tra i dati sperimentali e quelli simulati. Nel caso specifico i dati sperimentali sono $X_{G,EXP}(t)$, $Y_{G,EXP}(t)$ e $\psi_{EXP}(t)$ mentre quelli simulati sono $X_{G,SIM}(t)$, $Y_{G,SIM}(t)$ e $\psi_{SIM}(t)$ rappresentati entrambi in Figura 5.4 a). In ogni iterazione vengono modificati i parametri cercando di minimizzare la SSE. Minimizzando la SSE, i dati simulati si sovrappongono sempre di più a quelli sperimentali. Il processo iterativo si conclude quando viene trovato il valore dei parametri che minimizza la SSE.

Per aumentare l'adattabilità del modello al sistema reale, prima della fase di identificazione, sono stati introdotti dei nuovi coefficienti di attrito equivalenti a f_a ed f , già definiti nel paragrafo 2.5, ma riferiti alle caster wheels ($f_{a,c}$ e f_c), alla driving wheel n°3 ($f_{a,d3}$ e f_{d3}) e alla driving wheel n°4 ($f_{a,d4}$ e f_{d4}). Gli slittamenti s_1 ed s_2 e gli angoli di deriva a_1 e a_2 sono invece uguali per tutte le ruote.

In definitiva, i parametri che sono stati oggetto di identificazione sono i seguenti:

- $f_{a,c}$: coefficiente di attrito statico valido per tutte le caster wheels;
- f_c : coefficiente di attrito dinamico valido per tutte le caster wheels;
- $f_{a,d3}$: coefficiente di attrito statico valido per la driving wheel n°3;
- f_{d3} : coefficiente di attrito dinamico valido per la driving wheel n°3;
- $f_{a,d4}$: coefficiente di attrito statico valido per la driving wheel n°4;
- f_{d4} : coefficiente di attrito dinamico valido per la driving wheel n°4;
- Slittamento s_1 ;
- Slittamento s_2 ;
- Angolo di deriva a_1 ;
- Angolo di deriva a_2 .

Si riporta in Figura 5.5 l'andamento dei parametri durante la fase di identificazione:

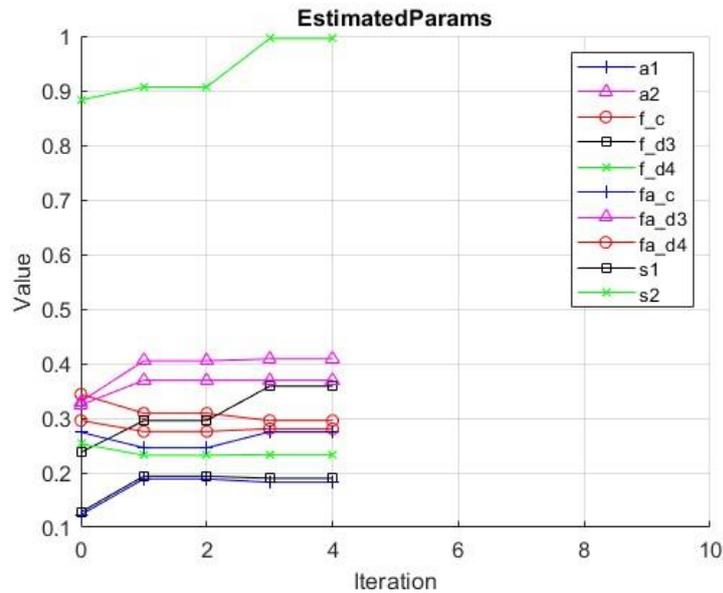


Figura 5.5 - andamento dei parametri per ogni iterazione

In Tabella 11 si riportano i valori iniziali e finali dei parametri identificati:

Tabella 11 - confronto valori iniziali e finali dei parametri ottimizzati

| Parametro | Valore iniziale | Valore finale |
|------------|-----------------|---------------|
| $f_{a,c}$ | 0.3 [-] | 0.2747 [-] |
| f_c | 0.2 [-] | 0.2956 [-] |
| $f_{a,d3}$ | 0.3 [-] | 0.3694 [-] |
| f_{d3} | 0.2 [-] | 0.3585 [-] |
| $f_{a,d4}$ | 0.3 [-] | 0.2807 [-] |
| f_{d4} | 0.2 [-] | 0.2333 [-] |
| s_1 | 0.2 [-] | 0.1899 [-] |
| s_2 | 0.8 [-] | 0.9953 [-] |
| a_1 | 0.0873 [rad] | 0.1827 [rad] |
| a_2 | 0.4363 [rad] | 0.4086 [rad] |

Una volta identificati i parametri, gli andamenti delle funzioni di attrito cambiano in maniera significativa. In questo caso le funzioni per il calcolo del coefficiente di attrito non sono uguali per tutte le ruote. Sono state introdotte, infatti, delle funzioni per il calcolo del coefficiente di attrito longitudinale $f_l(\sigma_i)$ e tangenziale $f_t(\alpha_i)$ per le caster wheels ($f_{l,cw}(\sigma_i)$ e $f_{t,cw}(\alpha_i)$), per la driving wheel n°3 ($f_{l,dw3}(\sigma_i)$ e $f_{t,dw3}(\alpha_i)$) e per la driving wheel n°4 ($f_{l,dw4}(\sigma_i)$ e $f_{t,dw4}(\alpha_i)$). Pertanto, a parità di slittamento longitudinale o tangenziale, vengono generate delle forze di attrito diverse a seconda della ruota che si considera. Le nuove funzioni per il calcolo dei coefficienti di attrito sono così definite:

- $f_{l,cw}(\sigma_i)$ $i = 1,2,5,6$: funzione per il calcolo del coefficiente di attrito longitudinale delle caster wheels;
- $f_{t,cw}(\alpha_i)$ $i = 1,2,5,6$: funzione per il calcolo del coefficiente di attrito tangenziale delle caster wheels;
- $f_{l,dw3}(\sigma_i)$ $i = 3$: funzione per il calcolo del coefficiente di attrito longitudinale dalla driving wheel n°3;
- $f_{t,dw3}(\alpha_i)$ $i = 3$: funzione per il calcolo del coefficiente di attrito tangenziale della driving wheel n°3;

- $f_{l,dw4}(\sigma_i)$ $i = 4$: funzione per il calcolo del coefficiente di attrito longitudinale dalla driving wheel n°4;
- $f_{t,dw4}(\alpha_i)$ $i = 4$: : funzione per il calcolo del coefficiente di attrito tangenziale della driving wheel n°4;

Si riporta in Figura 5.6 l'andamento di $f_{l,cw}(\sigma_i)$ ($i = 1,2,5,6$) prima e dopo l'identificazione dei parametri.

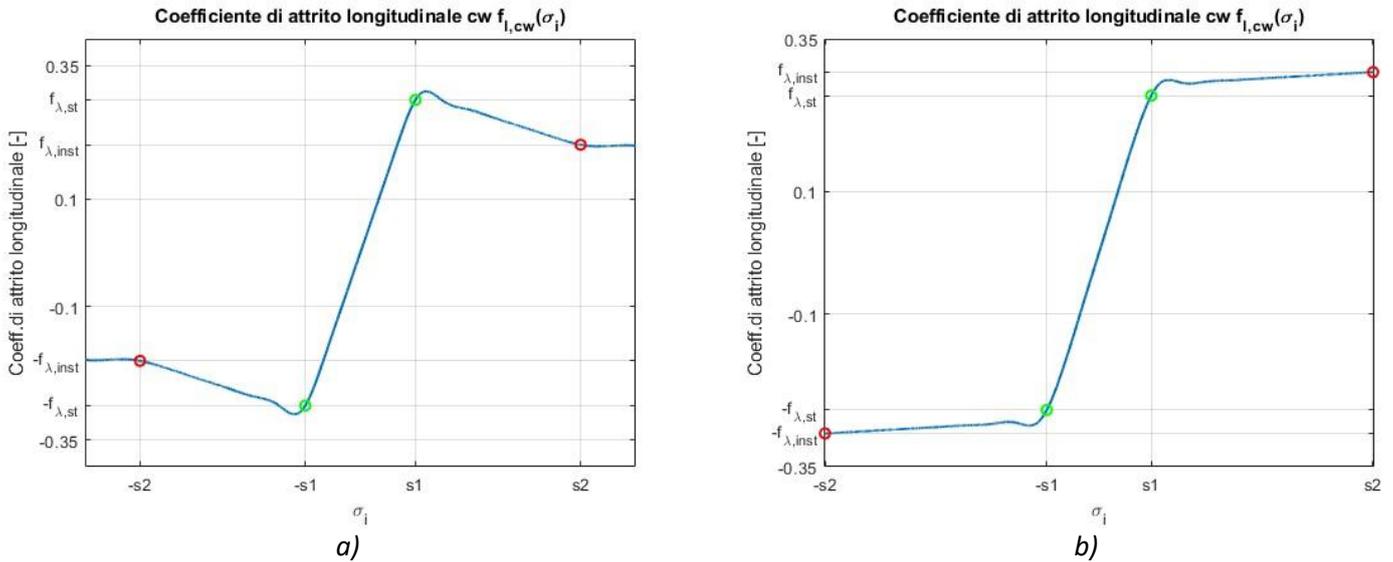


Figura 5.6 - coefficiente di attrito longitudinale delle caster wheels prima a) e dopo b) l'identificazione

Si riporta in Figura 5.7 l'andamento di $f_{t,cw}(\alpha_i)$ ($i = 1,2,5,6$) prima e dopo l'identificazione dei parametri.

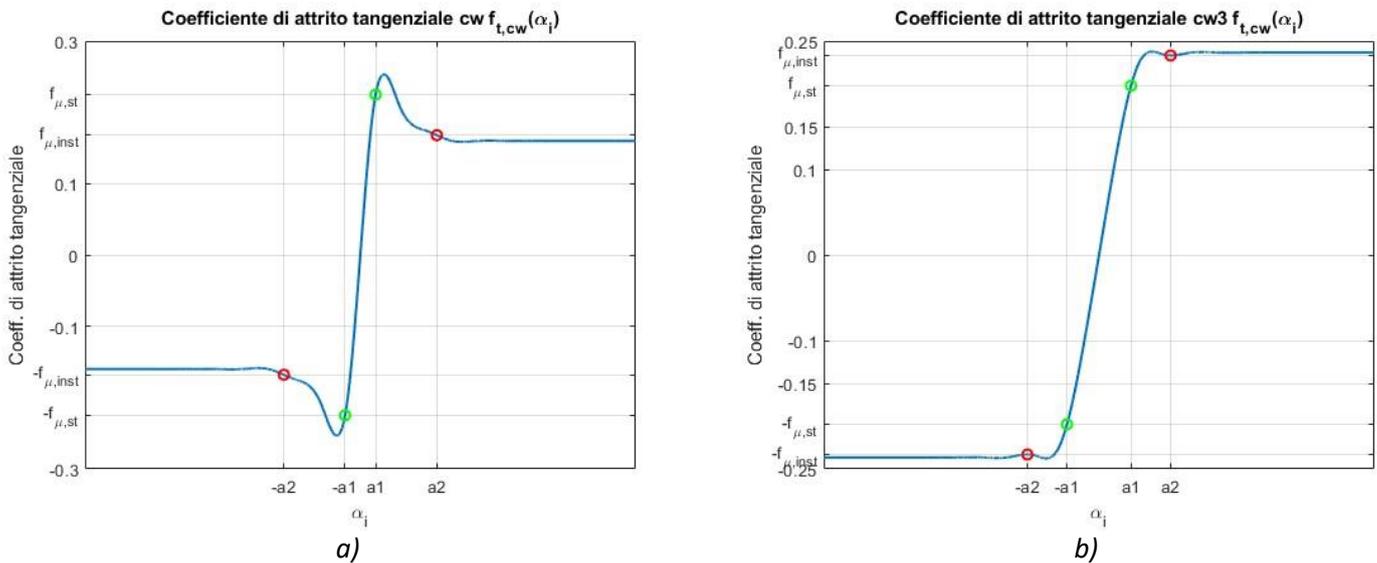


Figura 5.7 - coefficiente di attrito tangenziale delle caster wheels prima a) e dopo b) l'identificazione

Si riporta in Figura 5.8 l'andamento di $f_{l,dw3}(\sigma_i)$ ($i = 3$) prima e dopo l'identificazione dei parametri.

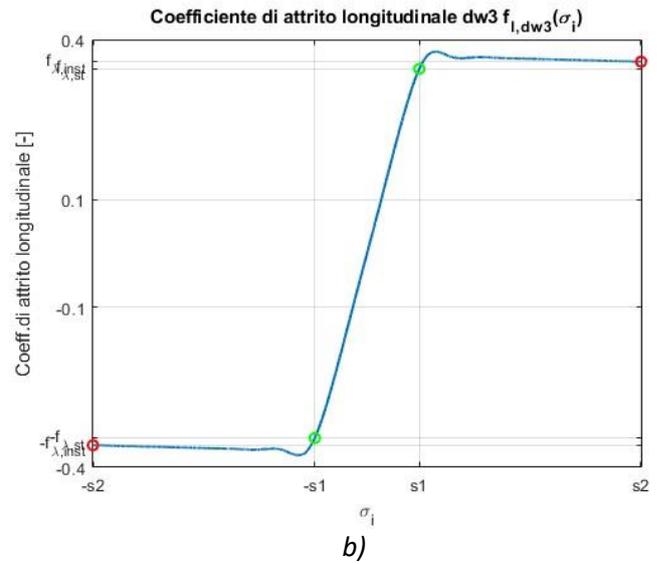
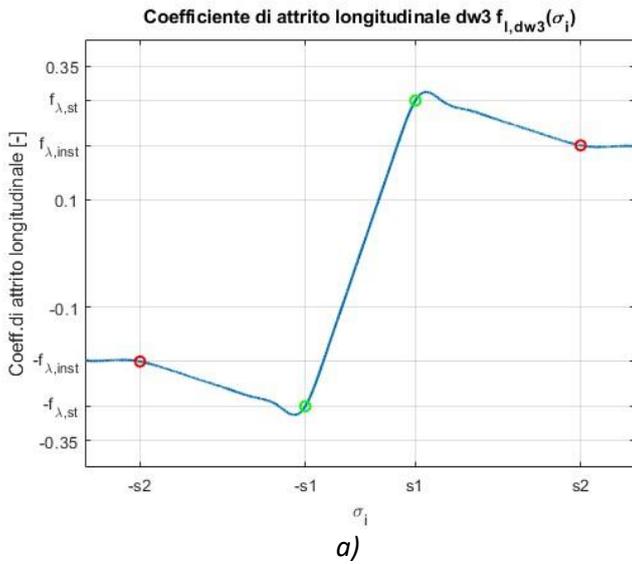


Figura 5.8 - coefficiente di attrito longitudinale della driving wheel n°3 prima a) e dopo b) l'identificazione

Si riporta in Figura 5.9 l'andamento di $f_{t,dw3}(\alpha_i)$ ($i = 3$) prima e dopo l'identificazione dei parametri.

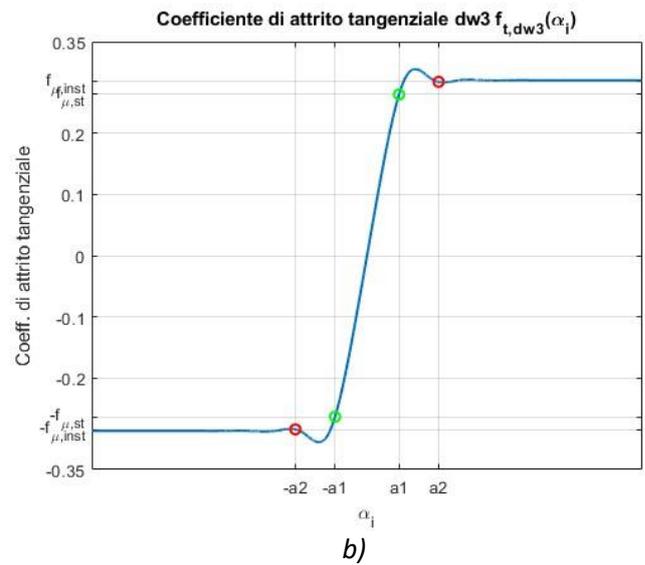
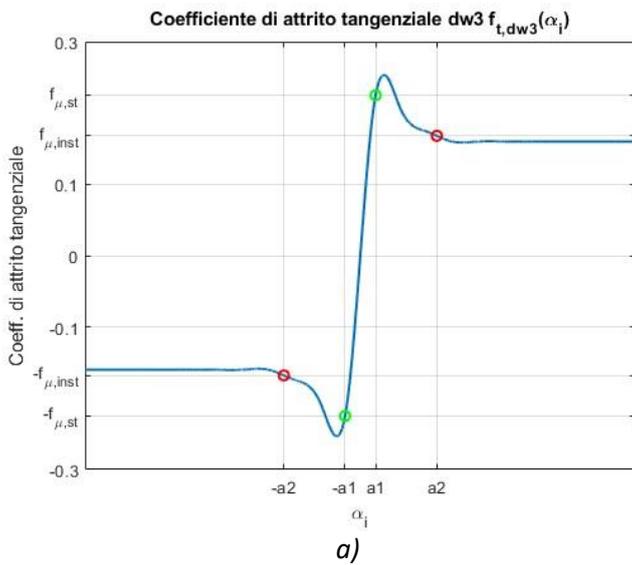


Figura 5.9 - coefficiente di attrito tangenziale della driving wheel n°3 prima a) e dopo b) l'identificazione

Si riporta in Figura 5.10 l'andamento di $f_{l,dw4}(\sigma_i)$ ($i = 4$) prima e dopo l'identificazione dei parametri.

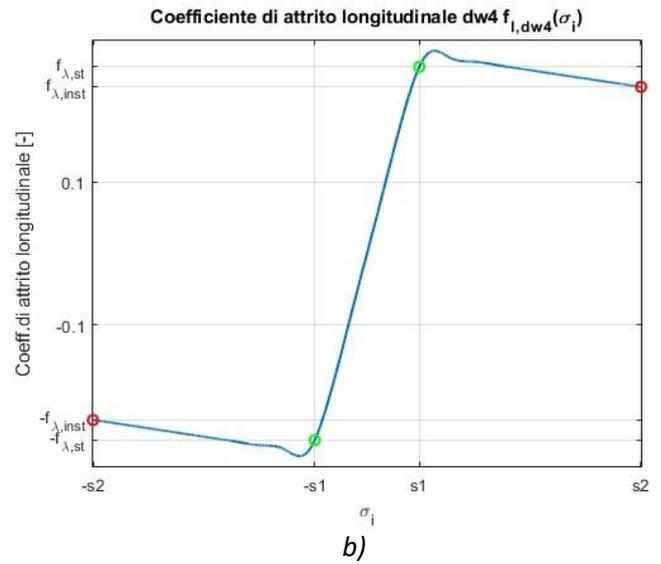
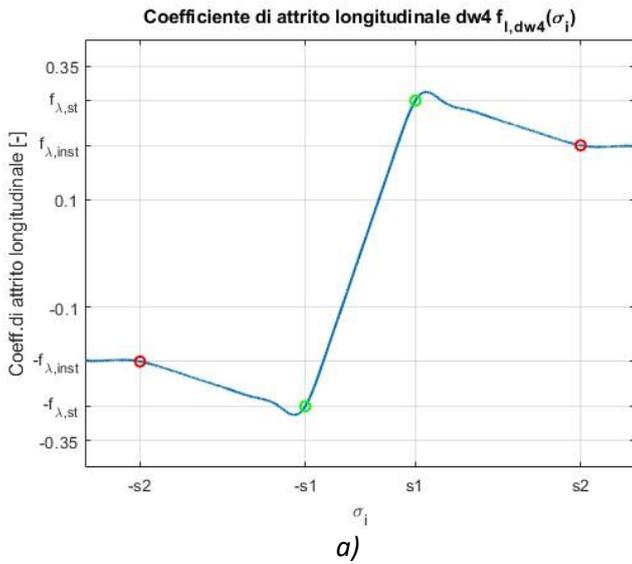


Figura 5.10 - coefficiente di attrito longitudinale della driving wheel n°4 prima a) e dopo b) l'identificazione

Si riporta in Figura 5.11 l'andamento di $f_{t,dw4}(\alpha_i)$ ($i = 4$) prima e dopo l'identificazione dei parametri.

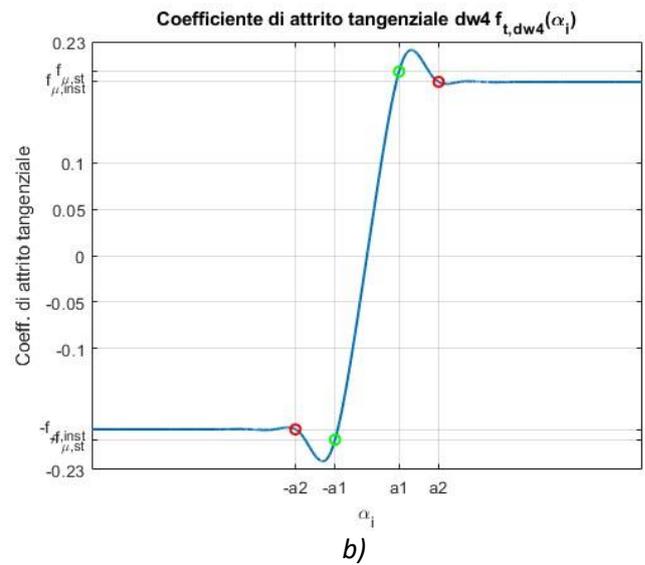
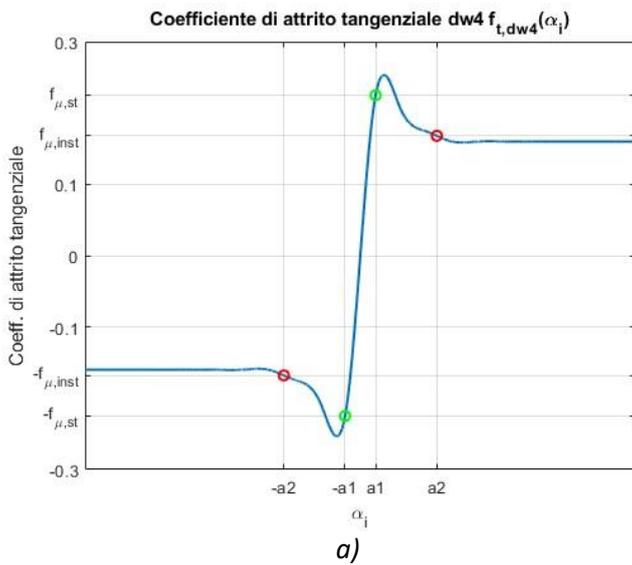
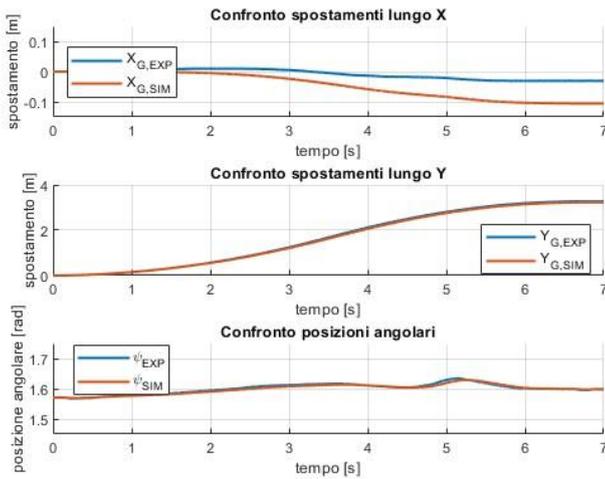
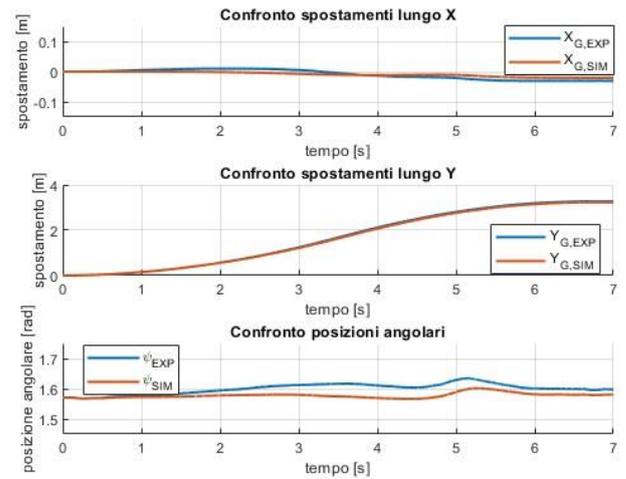


Figura 5.11 - coefficiente di attrito tangenziale della driving wheel n°4 prima a) e dopo b) l'identificazione

Terminata l'identificazione, è stata eseguita una nuova simulazione inserendo il set di velocità sperimentale presente in Figura 5.3 a). I risultati della simulazione sono stati nuovamente confrontati con la traiettoria e gli spostamenti sperimentali. In Figura 5.12 si riportano i confronti degli spostamenti sperimentali con quelli ottenuti dalla simulazione prima e dopo l'identificazione.



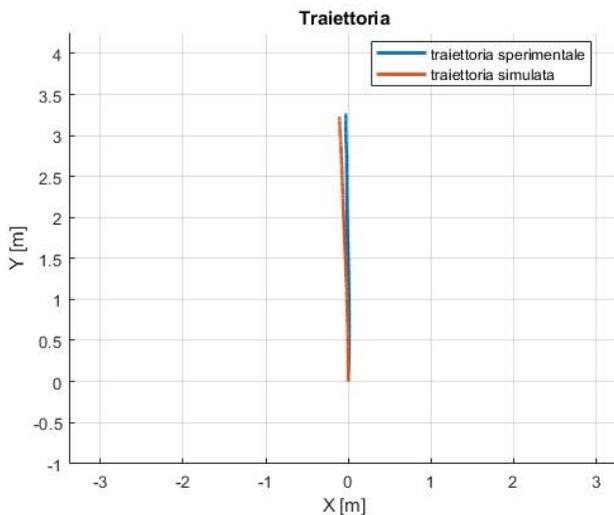
a)



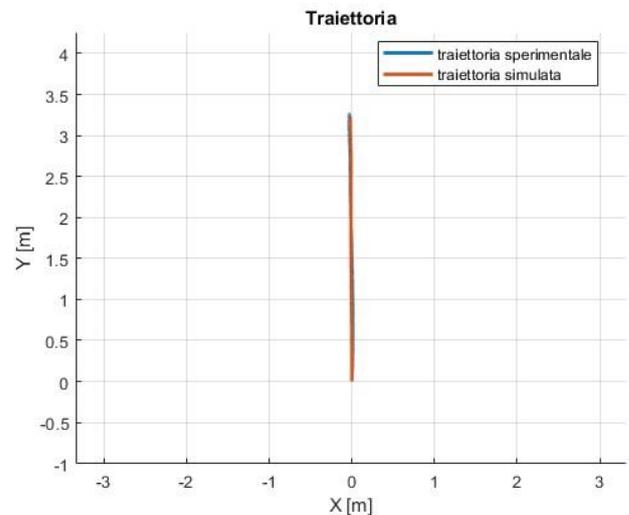
b)

Figura 5.12 - confronto degli spostamenti sperimentali e simulati prima a) e dopo b) l'identificazione

Come è possibile notare dalla Figura 5.12, a seguito dell'identificazione, quella differenza che inizialmente era presente tra le coordinate $X_{G,EXP}$ e $X_{G,SIM}$ è stata ridotta mentre aumenta leggermente la differenza tra le orientazioni ψ_{EXP} e ψ_{SIM} . Nel complesso si può dire che, a seguito dell'identificazione dei parametri, il comportamento del modello si avvicina molto a quello del sistema robotico reale. Questo lo si evince anche dal confronto tra le traiettorie sperimentali e simulate in Figura 5.13 dove, a seguito dell'identificazione, la traiettoria del modello riproduce più fedelmente la traiettoria sperimentale.



a)



b)

Figura 5.13 - confronto traiettoria sperimentale e simulata prima a) e dopo b) l'ottimizzazione

Il processo di identificazione dei parametri è stato eseguito sul modello del sistema robotico MiR-UR5 considerando l'UR5 come un carico statico. Questa scelta deriva dalla necessità di alleggerire il carico computazionale a cui è sottoposto il Parameter Estimator durante l'identificazione dei parametri, un processo già di per sé più o meno duraturo a seconda della complessità del modello; una identificazione per una simulazione di dieci secondi ha richiesto 20 ore di computazione.

Nella fase di validazione del modello, viene considerata anche la dinamica dell'UR5 in moto sul MiR, in quanto l'operazione richiede un confronto del risultato della simulazione con la traiettoria e gli spostamenti sperimentali utilizzando i parametri ottenuti nella fase di identificazione.

6. VALIDAZIONE MODELLO DINAMICO DEL SISTEMA ROBOTIZZATO MiR-UR5

6.1. Presentazione del modello dinamico UR5

È necessario creare il modello dinamico dell'UR5 da integrare con il modello del MiR, ottenendo un unico sistema per simulare il comportamento del sistema reale.

In questo caso viene utilizzato un modello multibody già validato implementato in Simscape. Il software permette di risolvere le equazioni del moto di un qualsiasi sistema meccanico una volta introdotti i dati geometrici e inerziali dei diversi componenti e una volta definiti i giunti e i vincoli che li collegano tra di loro. La geometria dei diversi componenti può anche essere importata, come in questo caso, da software esterni di disegno: CAD, Solidworks, ecc.

Si riporta di seguito in Figura 6.1 il modello dell'UR5 implementato in ambiente Simscape:

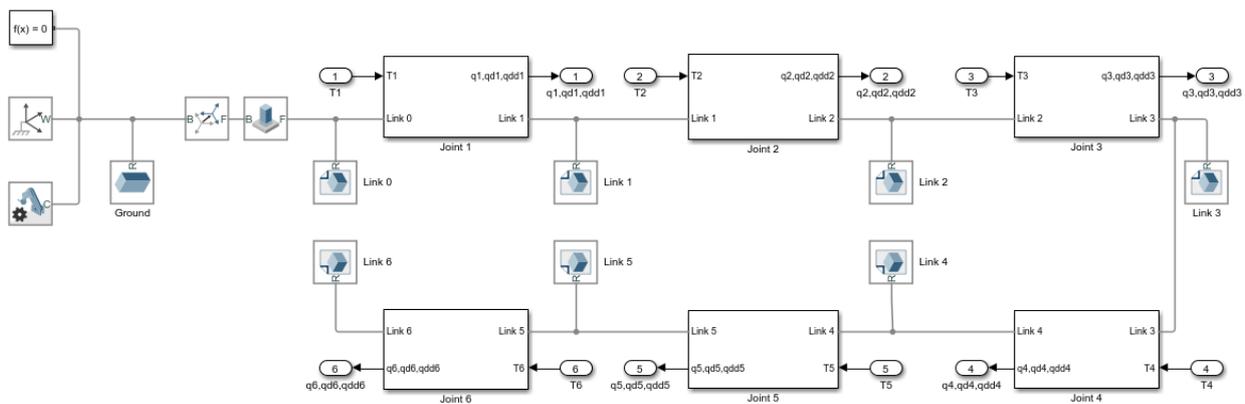


Figura 6.1 - modello multibody dell'UR5 implementato su simscape

Come è possibile notare dalla Figura 6.1, il software Simscape risolve sei dinamiche ognuna delle quali presente nel blocco $joint\ i$ ($i \in [1; 6]$). Ogni blocco riceve in ingresso una coppia T_i ($i \in [1; 6]$) derivante da un motore elettrico controllato in posizione e informazioni geometriche e inerziali del link che precede l' i -esimo giunto di cui si sta risolvendo la dinamica. Da notare che è presente un link denominato $Link\ 0$ che rappresenta la base dell'UR5 che va imbullonata ad un piano e che, quindi, non varia la propria posizione nel tempo. In uscita ogni blocco fornisce la posizione, la velocità e l'accelerazione angolari dell' i -esimo link ($i \in [1; 6]$).

Si passa in Figura 6.2 a un'analisi più dettagliata del giunto vedendo come ne sia stata implementata la dinamica.

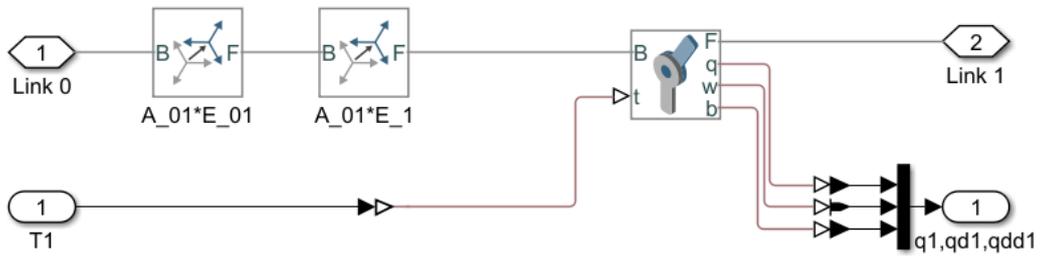
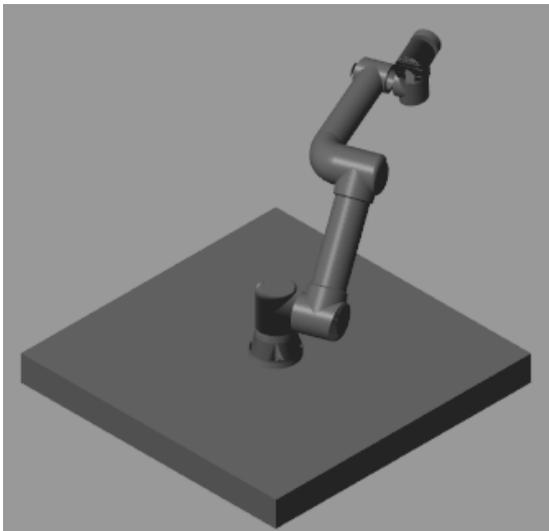
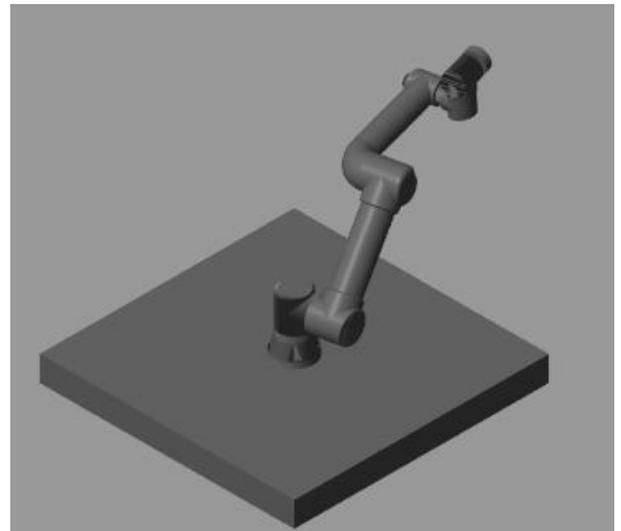


Figura 6.2 - dinamica del giunto joint 1

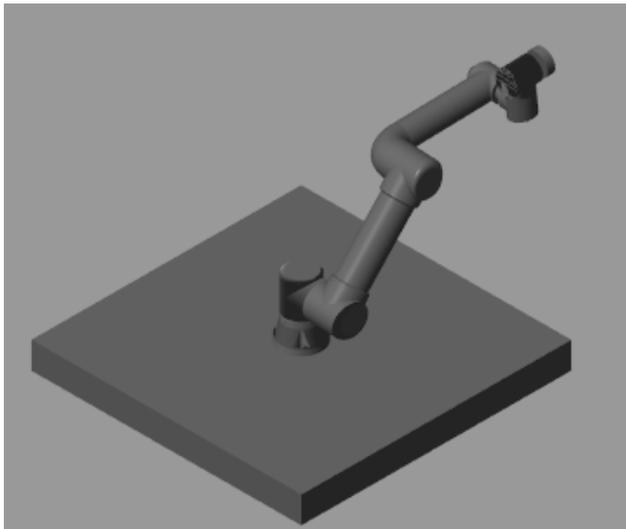
A titolo di esempio si riporta in Figura 6.2 ciò che è presente nel blocco *joint 1* in Figura 6.1. Escludendo gli input e gli output, si applicano due matrici di trasformazione omogenee (una di rotazione e una di traslazione) e si inserisce un giunto rotoidale che collega il *Link 1* al *Link 0*. Le matrici di trasformazione generano una rototraslazione rispetto al SdR solidale al *link 0* che permette di raggiungere la posizione e l'orientamento necessari per inserire il giunto rotoidale. Dopo aver definito il tipo di attuazione, la rigidità elastica, lo smorzamento e altri parametri del giunto, viene risolta la dinamica dell'*i*-esimo giunto. Questo processo viene svolto in parallelo per tutti i giunti e, infine, viene fornita un'animazione dell'intero sistema frutto del risultato della simulazione e dei disegni CAD importati nel software. Si riportano in Figura 6.3 alcuni istanti della simulazione.



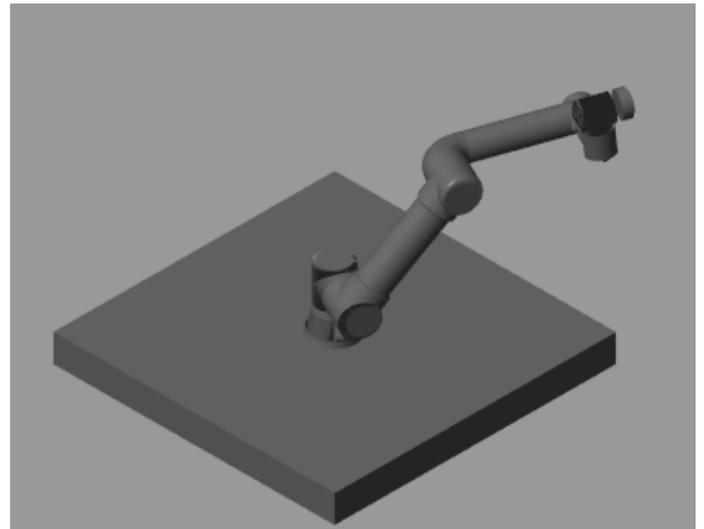
a)



b)



c)



d)

Figura 6.3 - risultato della simulazione del modello dell'UR5 in quattro istanti

Il modello multibody appena descritto è, in realtà, solo una parte di un sistema più complesso che può definirsi un servo-sistema in controllo di posizione. Si riporta in Figura 6.4 l'intero sistema implementato in ambiente Simulink.

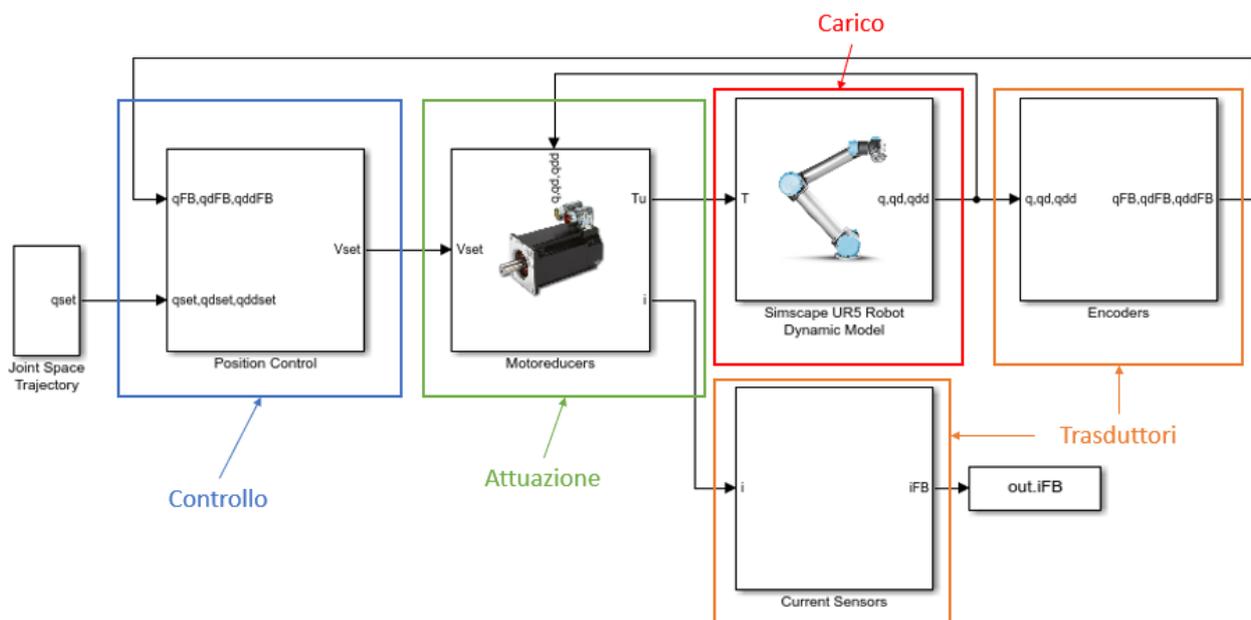


Figura 6.4 - modello completo UR5 in ambiente simulink

Come è possibile notare dalla Figura 6.4, il modello dinamico dell'UR5 non è altro che un servosistema in controllo di posizione composto da:

- **CONTROLLO:** confronta le posizioni angolari q_{FB} misurate dagli encoder con quelle di set q_{set} e genera segnali in tensione V_{set} , che alimentano i motori elettrici, attraverso dei controllori PI .
- **ATTUAZIONE:** è composto dai motori elettrici presenti su ciascun giunto dell'UR5, ricevono in input un segnale in tensione e restituiscono la coppia da applicare al giunto rotoidale.
- **CARICO:** rappresenta il blocco meccanico del sistema; il modello è di tipo inerziale e gravitazionale poiché le uniche forze da vincere per far sì che i giunti ruotino secondo quanto richiesto dal segnale

q_{set} sono l'inerzia alla rotazione e il peso di ciascun link. Questo blocco è costituito dal modello multibody che è stato precedentemente descritto.

- **TRASDUTTORI:** sono composti da trasduttori di corrente e da encoder. Gli encoder posizionati in ciascun giunto comunicano la posizione angolare al corrispondente blocco di controllo per chiudere l'anello di retroazione.

6.2. Combinazione dei modelli dinamici del MiR e UR5

Combinando i due modelli, quello del MiR e quello dell'UR5, è possibile visualizzare le interazioni che esistono tra i due robot mentre sono entrambi in azione. Queste interazioni si traducono in uno scambio di forze attraverso il vincolo che lega la base dell'UR5 al MiR.

Per tener conto del disturbo che viene generato dall'UR5 sulla dinamica del MiR, si studiano nuovamente la dinamica longitudinale, trasversale e delle reazioni normali alle ruote sotto l'azione sia delle forze di attrito che dei disturbi generati dall'UR5.

6.2.1. Estrazione dei disturbi di forza da parte dell'UR5 agenti sul MiR

Tra il MiR e l'UR5 è interposto un armadietto, di altezza H dal pavimento, che contiene il sistema di controllo dell'UR5. In Figura 6.5 si riporta il DCL del MiR con l'armadietto di controllo su cui agiscono tutte le forze derivanti dall'UR5 nel punto T .

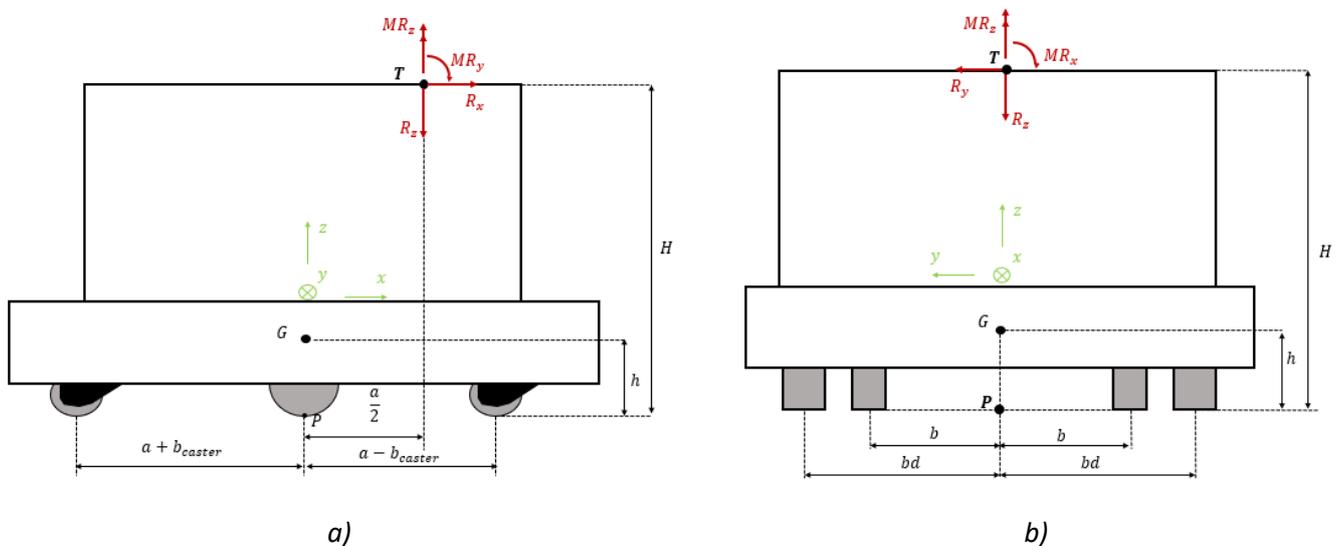


Figura 6.5 - MiR con armadietto vista longitudinale a), vista trasversale b)

Dato che l'UR5 è legato al MiR attraverso un incastro, che blocca tre rotazioni e tre traslazioni relative tra due corpi rigidi nello spazio, ci sono tre forze (R_x , R_y e R_z) e tre coppie (MR_x , MR_y e MR_z) che agiscono sul MiR. Queste forze e coppie sono uguali e contrarie a quelle che agiscono alla base dell'UR5 per evitare moti relativi tra il link 0, appartenente all'UR5, e il MiR.

Le forze e le coppie vengono ricavate direttamente dal modello Simscape dell'UR5. A questo punto è necessario applicare una matrice di trasformazione omogenea alle forze e alle coppie in quanto queste vengono restituite seguendo il verso positivo degli assi del SdR del link 0 ($T - \tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$) come in Figura 6.6 a).

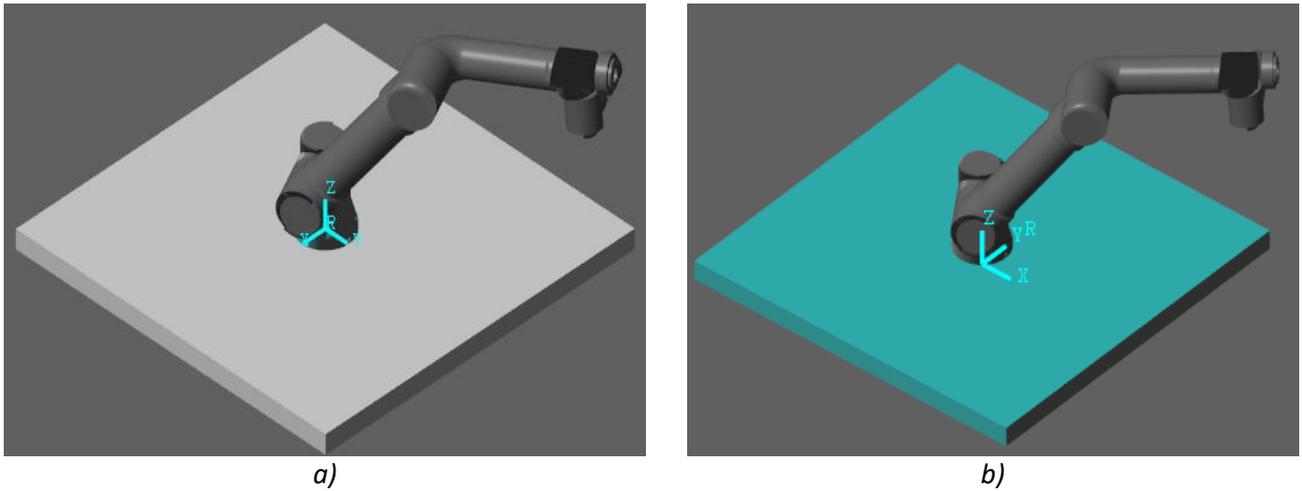


Figura 6.6 - SdR link 0 a), SdR del MiR b)

Dunque, le forze e le coppie agenti sugli assi \tilde{x} e \tilde{y} nel SdR del link 0 devono subire una rotazione positiva di 90° rispetto all'asse z:

$$\begin{Bmatrix} R_x \\ R_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} R_{\tilde{x}} \\ R_{\tilde{y}} \end{Bmatrix} \quad (6.1)$$

$$\begin{Bmatrix} MR_x \\ MR_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} MR_{\tilde{x}} \\ MR_{\tilde{y}} \end{Bmatrix} \quad (6.2)$$

6.2.2. Dinamica del MiR legata ai disturbi generati dall'UR5

Dopo aver applicato la matrice di trasformazione omogenea alle forze derivanti dall'UR5, si studia la dinamica del MiR sotto l'azione delle forze di attrito e dei disturbi provenienti dall'UR5 (Figura 6.7).

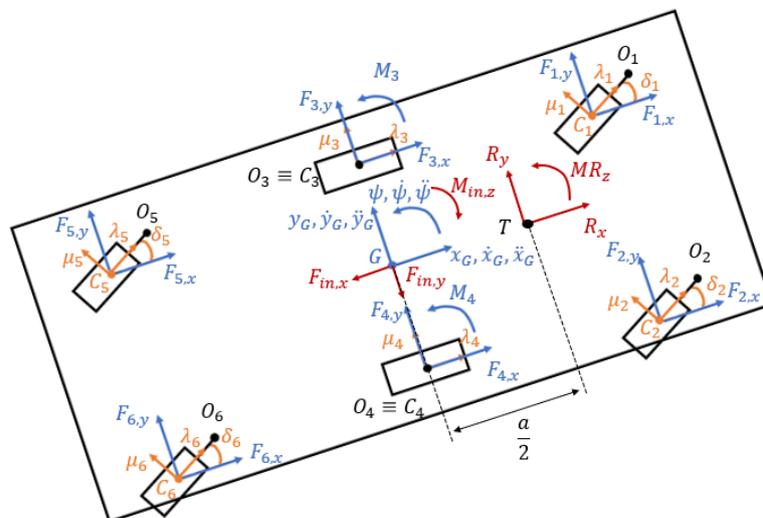


Figura 6.7 - DCL del MiR con i disturbi generati dall'UR5

A questo punto è possibile calcolare l'equilibrio dinamico del MiR.

$$z: R_z = \tilde{F}_{1,N} + \tilde{F}_{2,N} + \tilde{F}_{3,N} + \tilde{F}_{4,N} + \tilde{F}_{5,N} + \tilde{F}_{6,N} \quad (6.7)$$

6.2.3.2. Dinamica trasversale

Si riporta in Figura 6.9 il DCL del MiR eccitato dai disturbi provenienti dall'UR5 nel piano yz.

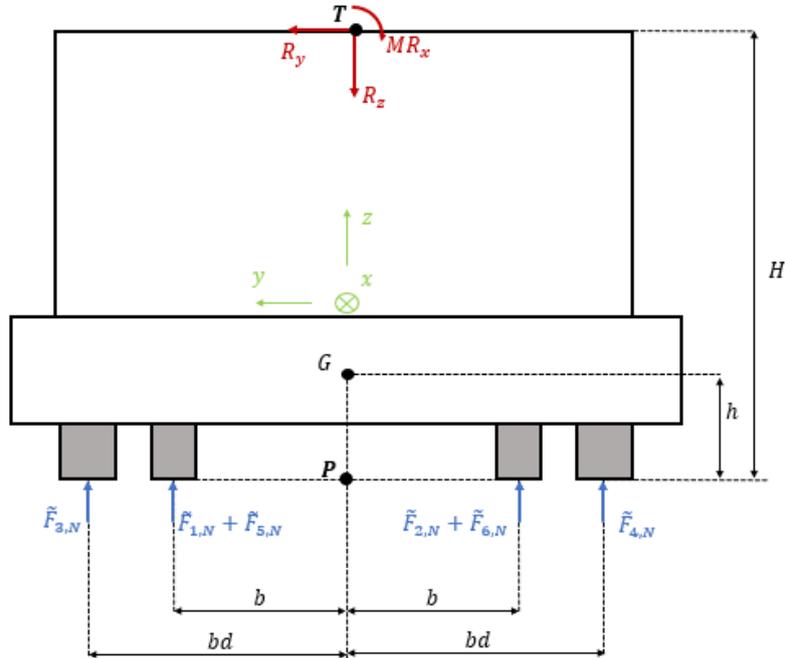


Figura 6.9 - dinamica trasversale sistema MiR-UR

Si ricava l'equilibrio attorno all'asse x :

$$R_y \cdot H - MR_x - \tilde{F}_{1,N} \cdot (b - b_{caster} \cdot \sin \delta_1) - \tilde{F}_{5,N} \cdot (b - b_{caster} \cdot \sin \delta_5) - \tilde{F}_{3,N} \cdot bd + \tilde{F}_{2,N} \cdot (b + b_{caster} \cdot \sin \delta_2) + \tilde{F}_{6,N} \cdot (b + b_{caster} \cdot \sin \delta_6) + \tilde{F}_{4,N} \cdot bd = 0 \quad (6.8)$$

Dato che il sistema è nuovamente tre volte iperstatico, si sfruttano le assunzioni già utilizzate nelle equazioni (4.43), (4.44) e (4.45). Quindi le ultime tre equazioni per chiedere il sistema sono:

$$\tilde{F}_{3,N} + \tilde{F}_{4,N} = \tilde{F}_{1,N} + \tilde{F}_{2,N} + \tilde{F}_{5,N} + \tilde{F}_{6,N} \quad (6.9)$$

$$\tilde{F}_{1,N} = \tilde{F}_{2,N} \quad (6.10)$$

$$\tilde{F}_{5,N} = \tilde{F}_{6,N} \quad (6.11)$$

Si ottiene, in definitiva, il sistema di sei equazioni in sei incognite presente in (6.12).

$$\left\{ \begin{array}{l}
1) \quad \tilde{F}_{1,N} \cdot (a - b_{caster} \cdot \cos \delta_1) + \tilde{F}_{2,N} \cdot (a - b_{caster} \cdot \cos \delta_2) - \tilde{F}_{5,N} \cdot (a + b_{caster} \cdot \cos \delta_5) + \\
\quad \quad \quad - \tilde{F}_{6,N} \cdot (a + b_{caster} \cdot \cos \delta_6) - R_z \cdot \frac{a}{2} - MR_y = 0 \\
2) \quad R_y \cdot H - MR_x - \tilde{F}_{1,N} \cdot (b - b_{caster} \cdot \sin \delta_1) - \tilde{F}_{5,N} \cdot (b - b_{caster} \cdot \sin \delta_5) - \tilde{F}_{3,N} \cdot bd + \\
\quad \quad \quad + \tilde{F}_{2,N} \cdot (b + b_{caster} \cdot \sin \delta_2) + \tilde{F}_{6,N} \cdot (b + b_{caster} \cdot \sin \delta_6) + \tilde{F}_{4,N} \cdot bd = 0 \\
3) \quad R_z = \tilde{F}_{1,N} + \tilde{F}_{2,N} + \tilde{F}_{3,N} + \tilde{F}_{4,N} + \tilde{F}_{5,N} + \tilde{F}_{6,N} \\
4) \quad \tilde{F}_{3,N} + \tilde{F}_{4,N} = \tilde{F}_{1,N} + \tilde{F}_{2,N} + \tilde{F}_{5,N} + \tilde{F}_{6,N} \\
5) \quad \tilde{F}_{1,N} = \tilde{F}_{2,N} \\
6) \quad \tilde{F}_{5,N} = \tilde{F}_{6,N}
\end{array} \right. \quad (6.12)$$

Risolvendo il sistema in (6.12) si ottengono le seguenti reazioni normali:

$$\tilde{F}_{6,N} = \tilde{F}_{5,N} = \frac{-R_z \cdot \frac{a}{4} - R_x \cdot H - MR_y + \frac{R_z}{4} \cdot [2 \cdot a - b_{caster} \cdot (\cos \delta_1 + \cos \delta_2)]}{4 \cdot a - b_{caster} \cdot (\cos \delta_1 + \cos \delta_2) + b_{caster} \cdot (\cos \delta_5 + \cos \delta_6)} \quad (6.13)$$

$$\tilde{F}_{2,N} = \tilde{F}_{1,N} = \frac{R_z}{4} - \tilde{F}_{6,N} \quad (6.14)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_{4,N} = & \frac{1}{2 \cdot bd} \cdot \{MR_x - R_y \cdot H + \tilde{F}_{2,N} \cdot [2 \cdot bd - b_{caster} \cdot (\sin \delta_1 + \sin \delta_2)]\} + \\
& + \frac{1}{2 \cdot bd} \cdot \{\tilde{F}_{6,N} \cdot [2 \cdot bd - b_{caster} \cdot (\sin \delta_5 + \sin \delta_6)]\}
\end{aligned} \quad (6.15)$$

$$\tilde{F}_{3,N} = R_z - 2 \cdot \tilde{F}_{6,N} - 2 \cdot \tilde{F}_{2,N} - \tilde{F}_{4,N} \quad (6.16)$$

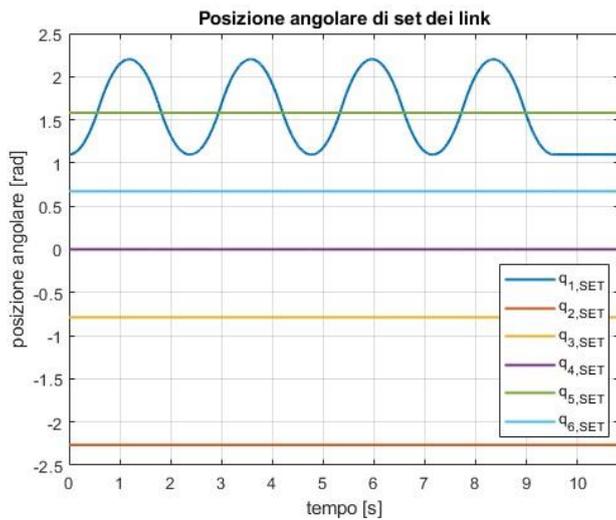
Dal momento che sono note anche le reazioni normali alle ruote $F_{i,N}$ dovute alla dinamica del MiR, si calcolano le reazioni normali alle ruote totali $\hat{F}_{i,N}$ sfruttando il principio di sovrapposizione degli effetti.

$$\hat{F}_{i,N} = \tilde{F}_{i,N} + F_{i,N} \quad (6.17)$$

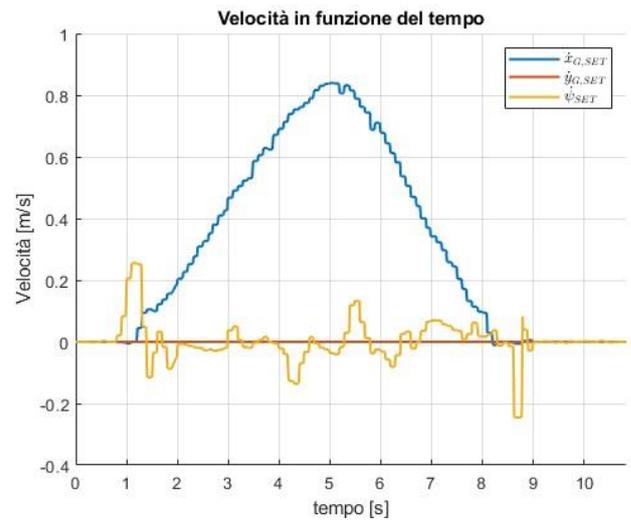
Dopo aver ricavato le equazioni che descrivono la dinamica del nuovo modello che considera anche i disturbi introdotti dall'UR5, il modello Simulink ottimizzato del MiR è stato integrato al modello Simscape già validato dell'UR5. Ne risulta, quindi, un nuovo modello, ottimizzato, che necessita di essere validato.

6.3. Validazione del sistema robotizzato MiR-UR5

Nella fase finale di validazione del sistema robotizzato MiR-UR, sono stati assegnati al modello: una velocità di set sperimentale del MiR (Figura 6.10 b) e i set di posizione sperimentali $q_{j,SET}$ ($j = 1, 2, \dots, 6$) dei link dell'UR5 (Figura 6.10 a).



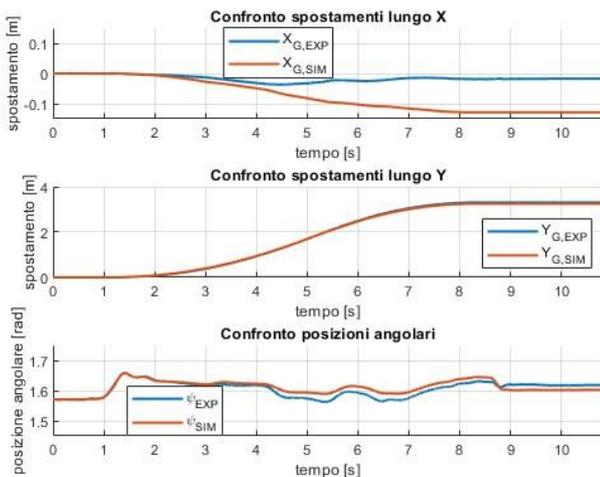
a)



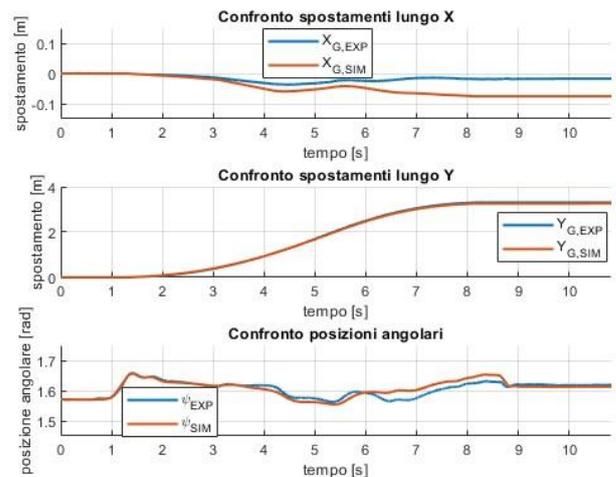
b)

Figura 6.10 - set di posizione dei link UR5 a), set di velocità MiR b)

Terminata la simulazione sono state confrontati gli spostamenti sperimentali e simulati utilizzando prima i parametri non identificati e poi quelli identificati (Figura 6.11). Questo è stato fatto per verificare se effettivamente l'identificazione eseguita considerando l'UR5 come un carico statico abbia davvero contribuito al miglioramento del modello del sistema robotizzato completo con l'UR5 in movimento.



a)



b)

Figura 6.11 - confronto spostamenti sperimentali e simulati con modello MiR-UR5 non ottimizzato a) e ottimizzato b)

Come si evince dai grafici in Figura 6.11, a seguito dell'identificazione del sistema MiR-UR5 con UR5 fisso, ne risulta un evidente miglioramento del modello complessivo del sistema robotizzato MiR-UR5. A riprova di ciò ci sono anche i confronti delle traiettorie, simulate e sperimentali, con i parametri non identificati (Figura 6.12 a) e con i parametri identificati (Figura 6.12 b).

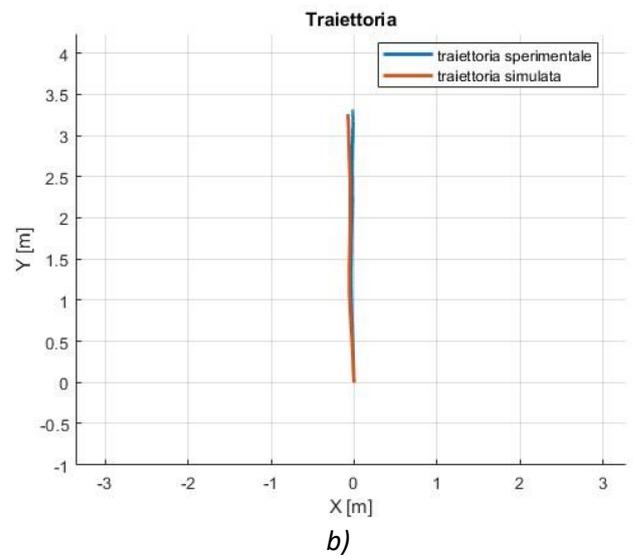
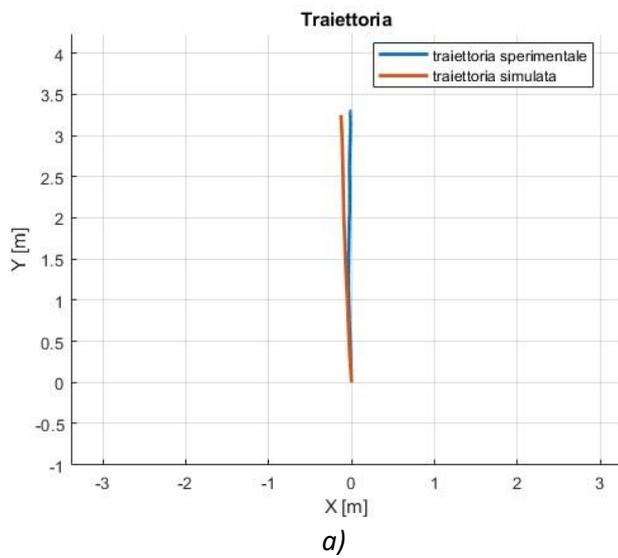


Figura 6.12 - confronto traiettorie sperimentali e simulate con parametri non identificati a) e con parametri identificati b)

Con i risultati presentati in Figura 6.11 b) e in Figura 6.12 b) si conclude il processo di validazione del modello del sistema robotizzato composto dal MiR e dall'UR5.

7. CONCLUSIONE

In questo capitolo si vogliono riassumere brevemente quali sono state le fasi principali della modellazione e validazione del sistema robotizzato MiR-UR5.

L'obiettivo di partenza era quello di creare un modello sufficientemente dettagliato di un sistema realmente esistente e, per farlo, è stato indispensabile scomporlo in sottosistemi più semplici da studiare e modellare. Inizialmente, ci si è focalizzati sugli elementi alla base della trazione di un qualsiasi WMR: la dinamica delle driving wheels e il modello di attrito riducendo il sistema all'essenziale e trascurando ogni forma di disturbo. In seguito, sono state aggiunte le caster wheels dopo averne studiato la dinamica. Segue, quindi, la fase di identificazione di alcuni parametri nel tentativo di ottenere dei risultati delle simulazioni quanto più vicini possibile ai dati sperimentali. In seguito, il modello è stato ulteriormente complicato aggiungendo il disturbo derivante dalla dinamica dell'UR5 e lo studio si è concluso con la validazione del modello del sistema robotizzato completo MiR-UR5.

Si riportano in seguito i possibili miglioramenti da apportare al modello e alla fase di identificazione:

- Utilizzare un modello di attrito diverso. Questo influenzerebbe in maniera significativa la dinamica del modello dal momento che la trazione del robot mobile è generata proprio dalle forze di attrito;
- Ipotizzare coefficienti di attrito f ed f_a , slittamenti s_1 ed s_2 e angoli di deriva α_1 e α_2 diversi per ciascuna ruota. Questo incrementerebbe l'adattabilità del modello al sistema reale;
- Ottimizzare i coefficienti di attrito viscoso c_i su ciascuna caster wheel dal momento che sono stati ipotizzati;
- Conoscere la posizione iniziale delle caster wheels ($\varphi_i(t = 0)$) in modo tale da sfruttare la dinamica del transitorio iniziale per una migliore stima dei parametri in fase di identificazione;

Attraverso un modello validato è possibile studiare e migliorare le performance del sistema. Per esempio, si possono integrare blocchi di controllo feed-forward che compensino errori sulla traiettoria dovuti allo slittamento, oppure, si possono integrare dati dai sensori dei robot per diagnosticare eventuali malfunzionamenti e garantire il corretto funzionamento del robot.

Bibliografia

- [1] Buttolo, M. (s.d.). *robotica mobile*. Tratto da slideshare:
<https://www.slideshare.net/MarcoButtolo/robotica-autonoma>
- [9] Guiggiani, M. (08/03/2007). *Dinamica del veicolo*. CittàStudi.
- [8] Hutchinson, F. D. (s.d.). *Introduction to Robotics and Perception*. Tratto da roboticsbook.
- [5], [6], [7] Mobile Industrial Robot. (s.d.). *mir250*. Tratto da mobile industrial robot: <https://www.mobile-industrial-robots.com/it/solutions/robots/mir250/>
- [3] National Aeronautics and Space Administration (NASA). (2015, Agosto 17). *Looking Up at Mars Rover Curiosity in 'Buckskin' Selfie*. Tratto da NASA's Mars Exploration Program:
<https://www.nasa.gov/jpl/msl/pia19808/looking-up-at-mars-rover-curiosity-in-buckskin-selfie>
- [2] National Aeronautics and Space Administration (NASA). (2017, Agosto 4). *Curiosity Overview*. Tratto da NASA's Mars Exploration Program: https://www.nasa.gov/mission_pages/msl/overview/index.html
- [11] Pacejka, H. B. (s.d.). *Tyre and Vehicle Dynamics*.
- [10] Sidek, S. N. (2008). *Dynamic modeling and control of nonholonomic wheeled mobile robot subjected to wheel slip*. Nashville, Tennessee.
- [13] Tibaldi, A. (2018). *Lezioni di calcolo numerico*.
- [4] Universal Robots. (s.d.). *Settori industriali*. Tratto da Universal Robots: <https://www.universal-robots.com/it/settori-industriali/>
- [12] Università degli studi di Trieste . (2019/2020). *Tecnica delle fondazioni*.