Politecnico di Torino

Corso di Laurea Magistrale
in Ingegneria Aerospaziale

A.a. 2021/2022

Sessione di Laurea ottobre 2022

Ottimizzazione di traiettorie con metodi indiretti

Analisi e interpretazione delle caratteristiche delle soluzioni

Relatore:
Prof. Lorenzo Casalino

Candidato:
Simone Arca

Sommario

L'obiettivo che ci si pone in questa tesi è quello di cercare di comprendere ed analizzare le caratteristiche delle manovre necessarie ad effettuare delle piccole variazioni di orbita, siano esse piccole variazioni di eccentricità, inclinazione, estensione, orientamento degli apsidi o una combinazione di più variazioni.
Questo tipo di manovre può essere impiegato in varie tipologie di missioni; tra le altre, vi è un sempre maggiore interesse verso missioni che hanno come obiettivo finale il raggiungimento dell'orbita di determinati asteroidi.
Le ragioni sono essenzialmente tre:

1. una ragione puramente **scientifica** di analizzare la composizione chimica (interna) degli asteroidi, per avere un quadro più completo della formazione del nostro sistema solare

2. una ragione **industriale/economica** nello sfruttare gli enormi giacimenti di materiali contenuti negli asteroidi,sia per questioni logistiche dovute a missioni con richieste particolarmente stringenti di payload (ad esempio,missioni che prevedono equipaggio umano) sia per questioni puramente economiche di estrazione di minerali che sulla Terra sono considerati rari e preziosi (nonché fortemente impattanti sull'ecosistema terrestre)

3. una ragione di tipo **"difensivo"** contro gli asteroidi ritenuti pericolosi perché aventi un'orbita che potrebbe intersecare in futuro quella terrestre. Questa eventualità rende necessario l'adottare per tempo delle contromisure che consistano banalmente nella deviazione dell'orbita dell'asteroide in questione

Oltre alle motivazioni per questo tipo di missione, in questa trattazione si analizzano i risultati che si ottengono dall'applicazione di un particolare metodo di calcolo, il quale permette di ricercare le traiettorie ottimali per raggiungere, partendo da quella terrestre, una determinata orbita. Questo metodo fa parte della categoria dei cosiddetti **metodi di ottimizzazione indiretti**.

Indice

Elenco delle figure

Capitolo 1

Introduzione

Gli asteroidi sono dei particolari corpi celesti che per composizione chimica possono essere ascrivibili a dei pianeti terrestri,ma che si differenziano da questi ultimi sia per forma (che negli asteroidi è quasi mai sferica) sia per dimensioni e, in ultimo, anche per l'assenza di un'atmosfera.
Gran parte degli asteroidi presenti nel Sistema Solare sono concentrati in quella che viene chiamata la *fascia principale*, una zona compresa tra le orbite di Marte e Giove e che comprende, tra gli altri, i tre asteroidi più grandi (nonché gli unici con forma grossomodo sferica) del Sistema Solare interno, ossia Cerere (il più grande,avente un diametro di $900 - 1000\ km$), Pallade e Vesta.

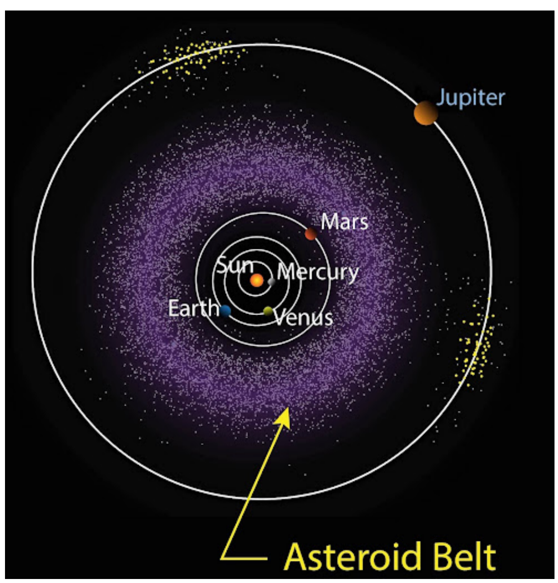

Figura 1.1: Fascia principale degli asteroidi

1.1 Origine degli asteroidi

Nel XIX secolo,all'epoca della scoperta dei tre asteroidi maggiori citati in precedenza, la comunità scientifica ipotizzava che questi corpi fossero il risultato della frammentazione di un pianeta (di dimensioni molto maggiori) in conseguenza a una sua esplosione dovuta a fenomeni di instabilità del nucleo o di un impatto con una cometa.
In realtà queste ipotesi vennero accantonate con il passare degli anni,quando si iniziò a poter analizzare la composizione chimica dei vari asteroidi della fascia principale; infatti venne alla luce l'eterogeneità della chimica dei vari asteroidi, rendendo di fatto molto improbabile la loro discendenza da un pianeta comune. Perciò, l'ipotesi ad oggi più accreditata è quella che sostiene che gli asteroidi altro non siano che degli abbozzi di pianeti che non sono riusciti a formarsi completamente secondo il meccanismo ipotizzato dall'astronomo russo Viktor Safronov nel 1969.
Secondo questa ipotesi, chiamata *planetesimale* e largamente accettata dalla comunità scientifica, i pianeti si formerebbero a partire da una nube di granelli di polveri che, collidendo tra loro ad alta velocità, si aggregano formando ammassi sempre più grandi fino a formare dei proto-pianeti e, successivamente, dei pianeti veri e propri.
I planetesimi (nome dato a questi aggregati di polveri rocciose e metalliche) che invece non riescono a svilupparsi in pianeti, possono diventare semplici satelliti o asteroidi; nel caso della fascia principale, gli asteroidi che la compongono non sono riusciti ad organizzarsi in pianeti veri e propri a causa delle forti perturbazioni gravitazionali dovute alla presenza di Giove.
A causa di ciò infatti, questi frammenti furono caratterizzati da un eccessivo incremento della loro energia orbitale e dunque furono soggetti a collisioni di eccessiva intensità le quali, anziché favorire l'aggregazione di due planetesimi, ne causarono la frammentazione; inoltre queste perturbazioni hanno fatto sì che la materia venisse dispersa in una regione più estesa, rendendo dunque ancora più difficile l'accrescimento di questi corpi. In questo contesto si inserisce la prima ragione che giustifica l'interesse dell'uomo verso il raggiungimento di questi oggetti spaziali, una ragione puramente scientifica: i planetesimi sono, con molta probabilità, costituiti dalla materia primordiale contenuta nel *disco proto-planetario*, ovvero l'ammasso di polveri e gas citato in precedenza, avente forma discoidale e orbitante attorno a una stella (fig.1.2), durante la formazione del Sistema Solare.

Per cui, prelevarne dei campioni interni per studiarne la composizione chimica è di vitale interesse per fare luce sulla composizione chimica della nebulosa da cui ha avuto origine tutto il Sistema Solare stesso.

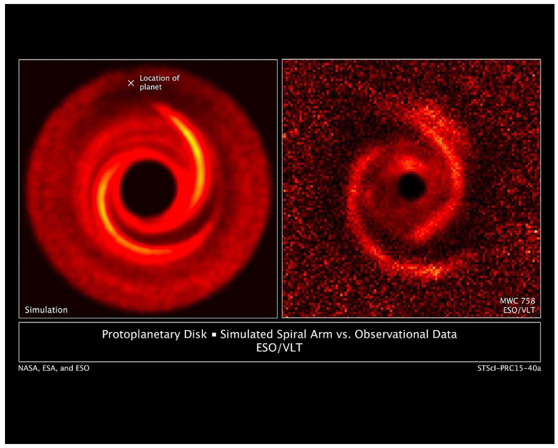

Figura 1.2: Disco protoplanetario attorno alla stella MWC 758. A sinistra, simulazione del computer, a destra effettiva osservazione con telescopio ESO/VLT

1.2 Classificazione degli asteroidi

Il vasto numero di asteroidi presenti nel Sistema Solare rende necessaria una loro classificazione; questa può essere realizzata secondo due diversi criteri:

- classificazione di tipo ***spettrale***, ossia in base alla composizione chimica della superficie dell'asteroide e alla sua albedo
- classificazione di tipo ***orbitale***, ossia in base alle caratteristiche orbitali dell'asteroide

1.2.1 Classificazione spettrale

Da parecchio tempo la classificazione maggiormente utilizzata è quella proposta dall'astronomo statunitense David James Tholen nel 1984; questo criterio prevede 14 tipi diversi di asteroidi, anche se la stragrande maggioranza degli asteroidi è compresa nei 3 gruppi principali. Questi sono:

- Gruppo C, ossia gli asteroidi *carboniosi.* Sono i più comuni e comprendono al loro interno 4 tipi (B,F,G e lo stesso tipo C) che comprendono comunque asteroidi carboniosi ma che differiscono tra loro per assorbimento dell'ultravioletto e albedo.
  L'asteroide Cerere appartiene al tipo G, uno dei sottogruppi degli asteroidi carboniosi.

- Gruppo S, ossia gli asteroidi *silicati*, sono il secondo gruppo più numeroso. Sono formati da minerali silicati e sono caratterizzati da una luminosità leggermente maggiore rispetto agli asteroidi del gruppo C.

- Gruppo X, ossia gli asteroidi che, banalmente, non rientrano nei due gruppi precedenti.
  A questo gruppo appartengono 3 tipi: il tipo M (terzo per numero di asteroidi) è il gruppo dei cosiddetti asteroidi *metallici* (ossia composti principalmente da ferro e nichel) e i gruppi P ed E, i quali sono molto meno numerosi e differiscono dal tipo M principalmente per il valore di albedo (rispettivamente più e meno elevato).

Esistono poi altri 6 tipi di asteroidi i quali sono però molto rari (addirittura i tipi Q,R e V sono composti da un unico asteroide, avente caratteristiche spettrali uniche rispetto a tutti gli altri).
Ai fini di un ipotetico sfruttamento delle risorse presenti negli asteroidi (il cosiddetto *asteroid mining*), solo tre di queste categorie risultano particolarmente attraenti.
Queste sono :

- **tipo C**, dal quale si possono sfruttare i giacimenti d'acqua durante delle missioni di esplorazione spaziale.
  Questo infatti ridurrebbe di gran lunga il peso dei veicoli spaziali in fase di lancio, facendo risparmiare una notevole quantità di risorse e denaro.
  Inoltre in questi asteroidi sono largamente disponibili sostanze quali carbonio organico e fosforo, ingredienti fondamentali per la produzione di fertilizzanti e dunque utili per un'eventuale coltivazione di cibo nello spazio.

- **tipo S**, dal quale estrarre una serie di diversi metalli quali nichel e cobalto (molto utilizzati, tra le altre applicazioni, nell'industria aerospaziale) ma anche metalli ben più preziosi quali oro, platino, rodio ecc.
  In questo caso dunque si parla a uno sfruttamento minerario più improntato ad un'ottica industriale/commerciale piuttosto che scientifica/esplorativa.

- **tipo M**, gruppo nel quale gli elementi metallici sono ancora più abbondanti che negli asteroidi del tipo S.

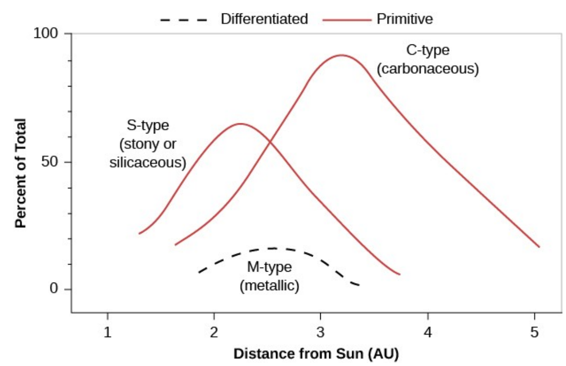

Figura 1.3: Distribuzione dei tre tipi (C, M ed S) di asteroidi rispetto alla distanza dal Sole. Gli asteroidi C ed S sono "primitivi" mentre quelli M sono "mutati" da nuclei di vecchi corpi celesti

Lo sviluppo dell'estrazione mineraria nello spazio e dunque lo spostamento (anche solo parziale) di questo tipo di industria dal suolo terrestre, porterebbe innegabili benefici da un punto di vista ambientale; questo, tuttavia, a fronte di colossali investimenti iniziali per la costruzione di tutte le tecnologie e le attrezzature necessarie.
A causa dell'enormità dei costi, questo tipo di missioni è ancora allo stadio iniziale; infatti, ad oggi, sono soltanto tre le missioni che prevedono il prelievo di campioni di materiali da asteroidi (più per scopo scientifico per ora, piuttosto che industriale) : le giapponesi *Hayabusa 1* e *Hayabusa 2* e la sonda della NASA *OSIRIS-REx*.
In tutto, queste tre missioni hanno portato (o programmano di farlo,visto che l'atterraggio di *OSIRIS-REx* è programmato nel 2023) un totale di circa 1 grammo di materiale estratto da asteroidi.

1.2.2 Classificazione orbitale

Questo tipo di classificazione prevede l'inserimento di asteroidi in famiglie e gruppi con altri asteroidi aventi delle caratteristiche orbitali analoghe.
Solitamente si parla di famiglie quando si pensa che gli asteroidi che vi appartengono abbiano un origine comune,ossia che si siano formati tutti a partire dallo stesso evento (come una collisione tra due macro-asteroidi, ad esempio); gli appartenenti ad un gruppo invece hanno in comune solo i parametri orbitali.
Vi sono tre gruppi in particolare che vale la pena di citare se si prende in esame la terza motivazione del viaggio verso gli asteroidi (introdotta nel sommario di questa trattazione), ovvero la necessità di dover essere pronti a provvedere alla deviazione di asteroidi considerati pericolosi a causa del fatto che la loro orbita si potrebbe trovare ad intersecare quella terrestre.

Infatti questi oggetti pericolosi (denominati **PHOs**, ossia *potentially hazardous objects*) appartengono ai seguenti tre gruppi:

- **Asteroidi *Aten***, aventi semiasse maggiore di lunghezza inferiore a 1au
- **Asteroidi *Apollo***, aventi semiasse maggiore di lunghezza superiore a 1au e perielio inferiore a 1.017 au
- **Asteroidi *Amor***, aventi semiasse maggiore di lunghezza superiore a 1au e perielio compreso tra 1.017au e 1.3 au

Questi tre gruppi di asteroidi costituiscono i cosiddetti **NEA**, *near Earth asteroids*, ovvero asteroidi la cui orbita è molto vicina a quella terrestre.
Mentre gli appartenenti al gruppo *Amor* hanno un'orbita che quasi mai interseca quella della Terra, molti degli asteroidi degli altri due gruppi sono inclusi nella lista dei *PHO*.
Sono vari i metodi teorizzati per la deviazione dell'orbita degli asteroidi potenzialmente pericolosi: si passa da un semplice sgancio di ordigno nucleare nei pressi dell'asteroide (metodo ritenuto ormai poco efficace per il rischio che l'asteroide venga frantumato e la Terra venga colpita da una ancor più devastante pioggia di meteoriti), al cosiddetto **trattore gravitazionale**, ossia un veicolo spaziale che, ruotando attorno all'asteroide, trasmette a quest'ultimo, tramite un campo gravitazionale, un impulso che ne modifica la traiettoria.

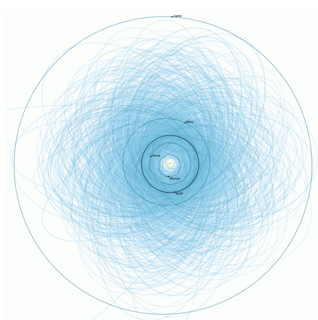

Figura 1.4: Orbite dei PHO

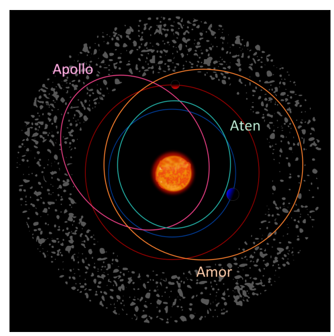

Figura 1.5: Localizzazione dei NEA

Capitolo 2

Richiami di meccanica del volo - Principali manovre orbitali ad un impulso

Per manovre orbitali si intendono tutta una serie di operazioni svolte allo scopo di modificare l'orbita di un veicolo spaziale, per compensare eventuali perturbazioni che minacciano di far variare l'orbita voluta o per correggere eventuali possibili errori in fase di ignizione.
Queste operazioni hanno ovviamente un costo, quantificato attraverso il parametro ΔV (generalmente espresso in km/s).
Le manovre orbitali possono essere caratterizzate da uno o più impulsi; le manovre ad un singolo impulso (ossia quelle che verranno approfondite in questo capitolo) sono tali da permettere:

- variazioni di quota, ossia aggiustamento degli apsidi;
- variazioni di inclinazione;
- variazioni di argomento ω, ovvero rotazioni della linea degli apsidi

Si possono ovviamente vedere le manovre a più impulsi come ripetizioni o combinazioni di più manovre a impulso singolo. L'esempio più illustre di manovra a più impulsi è sicuramente la *trasferta di Hohmann*, ossia la manovra a due impulsi caratterizzata dal più basso consumo in termini di Δv (entro certi limiti).
In questo capitolo verranno descritte le manovre a singolo impulso principali, mentre verranno omesse quelle a più impulsi perché non strettamente utili ai fini della trattazione.

2.1 Problema dei due corpi

Il problema dei due corpi è di fondamentale importanza per lo studio e la previsione (anche se entrambi di prima approssimazione) delle orbite di oggetti come satelliti, asteroidi, pianeti e stelle.
Esso consiste nel valutare le traiettorie che due masse puntiformi percorrono quando sono soggette l'una alle forze di interazione generate dall'altra, senza considerare nessun altra interazione con altri corpi esterni. Queste forze sono considerate forze **centrali**, ossia forze aventi direzione sempre rivolta verso un punto fisso detto *centro della forza* e modulo dipendente dalla distanza tra questo centro e il punto di applicazione della forza. Per queste forze centrali vale il terzo principio della dinamica. Si considerano i due corpi all'interno di un sistema di riferimento inerziale X',Y',Z' e, centrato nel corpo di massa maggiore, un sistema di riferimento X,Y,Z:

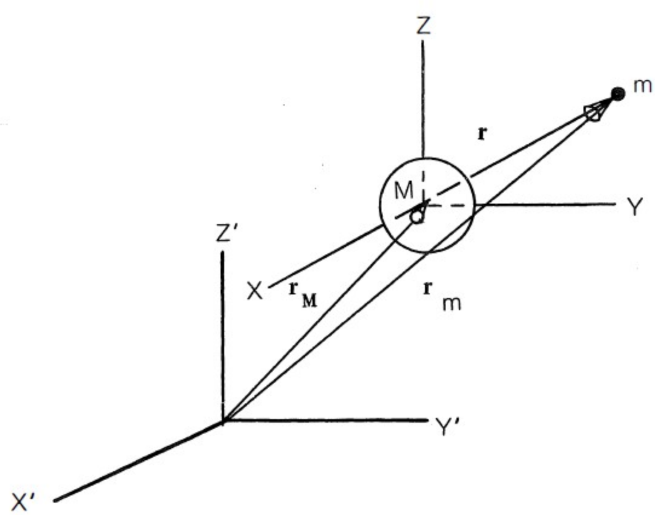

Figura 2.1: I corpi all'interno del sistema

dove la distanza dei corpi di massa M ed m dall'origine del sistema inerziale è, rispettivamente, r_M e r_m; per cui la distanza tra i due corpi sarà pari a

$$r = r_M - r_m \tag{2.1}$$

Applicando la legge di Newton nel sistema inerziale si ottengono:

$$m\ddot{\vec{r}}_m = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r^3}\vec{r} \tag{2.2}$$

ossia la forza che il corpo di massa M esercita sul corpo di massa m

$$M\ddot{\vec{r}}_M = \frac{G \cdot M \cdot m}{r^3}\vec{r} \tag{2.3}$$

che è invece la forza agente sul corpo di massa M ad opera del corpo di massa m. Si ricorda che G è la costante gravitazionale universale ed è pari a $6.67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$. Sottraendo la (2.3) alla (2.2) si ottiene che:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{G(M+m)}{r^3}\vec{r} \tag{2.4}$$

Questa è l'equazione del moto per il problema dei due corpi. Considerando che, nella stragrande maggioranza dei problemi che vengono trattati (tra cui quello in esame), la massa di uno dei due corpi è notevolmente maggiore di quella dell'altro, si può affermare che

$$G(M+m) \simeq GM = \mu \tag{2.5}$$

dove il valore di μ dipende chiaramente dal corpo in questione; nel nostro caso è il pianeta Terra ed è dunque pari a circa $3.98 \cdot 10^{15} m^3/s^2$. Per cui l'equazione del moto si può riscrivere nella seguente forma:

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3}\vec{r} = 0 \tag{2.6}$$

Si definisce inoltre l'*energia meccanica specifica* $\mathcal{E}$ di un generico satellite, che è la somma della sua energia cinetica e la sua energia potenziale entrambe per unità di massa:

$$\mathcal{E} = \frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} \tag{2.7}$$

Questa energia meccanica specifica rimane sempre costante lungo la sua orbita attorno al corpo più grande.
Un'altra quantità che si conserva è il momento angolare specifico h:

$$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{V} = cost. \tag{2.8}$$

L'angolo sotteso tra il vettore velocità e il piano orizzontale è chiamato *flight-path angle* (ϕ), perciò il modulo del momento angolare sarà:

$$h = rV\cos\phi \tag{2.9}$$

2.1.1 Orbita ellittica

Un'orbita ellittica è caratterizzata geometricamente da 4 parametri:

- a: il semiasse maggiore
- e: l'eccentricità

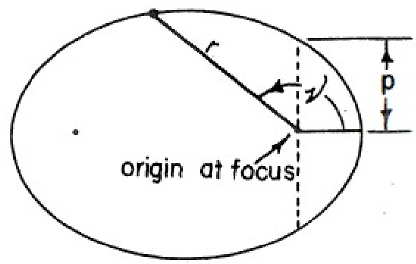

Figura 2.2: Parametri geometrici dell'ellittica

- p: il semilatus rectum, ossia la distanza tra fuoco ed ellisse lungo la direzione verticale
- c: la semidistanza tra i due fuochi

Per individuare invece una posizione specifica lungo l'orbita si fa utilizzo dell'angolo ν, chiamato *anomalia*; se $\nu = 0°$ l'oggetto si trova esattamente nel punto di periastro, mentre se $\nu = 180°$ l'oggetto è sull'apoastro.
A questo punto sono molto utili le seguenti relazioni:

$$p = a(1 - e^2) \tag{2.10}$$

$$p = r(1 + e\cos\nu) \tag{2.11}$$

Per cui, per periastro e apoastro:

$$r_p = \frac{p}{1+e}$$

$$r_a = \frac{p}{1-e}$$

Dunque, facendo uso della relazione (2.10):

$$r_p = \frac{a(1-e^2)}{(1+e)} = a(1-e) \tag{2.12}$$

$$r_a = \frac{a(1-e^2)}{(1+e)} = a(1+e) \tag{2.13}$$

Si può dimostrare (cosa che non verrà fatta in questa trattazione per non risultare troppo prolissi) che:

$$p = \frac{h^2}{\mu} \tag{2.14}$$

dove, essendo $h = cost.$ è anche vero che:

$$h = rV\cos\phi = r_pV_p \Longrightarrow V_p = \frac{h}{r_p} \tag{2.15}$$

Per cui,considerando le relazioni (2.14) e (2.15)

$$\mathcal{E} = \frac{V_p^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \frac{p \cdot \mu}{2r_p^2} - \frac{\mu}{r_p}$$

Per cui, risolvendo una serie di passaggi algebrici (dopo aver sostituito r_p con la relazione (2.12) e p con la relazione (2.10)), si ottiene che:

$$\mathcal{E} = -\frac{\mu}{2a} \tag{2.16}$$

2.2 Manovre nel piano dell'orbita: Aggiustamento degli apsidi

Un modo particolarmente efficace per aggiustare l'altezza di uno degli apsidi consiste nell'imprimere un certo ΔV nell'apside opposto.
In particolare, si nota che una manovra fatta al periastro per modificare l'altezza dell'apoastro è ben più efficace (dunque meno dispendiosa) di una manovra fatta all'apoastro per modificare l'altezza del periastro. Questo si può dimostrare in pochi passaggi, partendo dall'espressione dell'energia specifica $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} = \frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} \tag{2.17}$$

Quindi, isolando la V^2:

$$V^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \tag{2.18}$$

Se si volesse imprimere una variazione alla velocità V in un punto dell'orbita mantenendo tuttavia r costante, si dovrà differenziare ambo i lati dell'equazione (2.18):

$$2VdV = -\frac{2\mu}{r^2}\cancelto{0}{dr} + \frac{\mu}{a^2}da \Longrightarrow da = \frac{2a^2}{\mu}VdV \tag{2.19}$$

Si può considerare la relazione generale mostrata dall'equazione (2.19) per piccoli e tuttavia finiti ΔV applicati a uno degli apsidi.
Se si applicasse il ΔV in corrispondenza del periastro:

$$\Delta h_a = \frac{4a^2}{\mu}V_p\Delta V_p$$

mentre, per una manovra all'apoastro:

$$\Delta h_p = \frac{4a^2}{\mu}V_a\Delta V_a$$

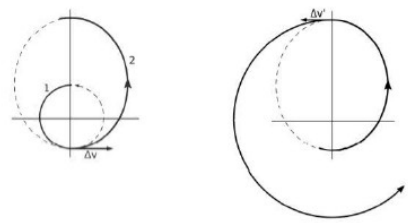

Figura 2.3: A sinistra: innalzamento dell'apoastro ; A destra: innalzamento del periastro

Siccome, all'interno dell'orbita, $V_p = V_{max}$ e $V_a = V_{min}$, per ottenere lo stesso aggiustamento Δh, $\Delta V_a >> \Delta V_p$.
Ecco dunque dimostrata l'effettiva maggiore convenienza in termini di ΔV nel modificare l'apoastro imprimendo un ΔV al periastro.

2.3 Manovre nel piano dell'orbita: Rotazione della linea degli apsidi

Una manovra di semplice rotazione della linea degli apsidi è una manovra che, dato un impulso ΔV, provoca una variazione $\Delta\omega$.
Questa variazione di argomento, può essere vista anche in termini di anomalia:

$$\Delta\omega = \nu_1 - \nu_2 \tag{2.20}$$

Questa manovra è caratterizzata da :

- $\mathcal{E} = \frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} = cost$, che si traduce in $V = cost$
- $h = rV\cos\phi = rv_\theta = cost$, che si traduce in $v_\theta = cost$

Dunque, a variare in questo tipo di manovra è la componente radiale della velocità, v_r; perciò l'impulso sarà caratterizzato da un $\Delta V = 2v_r$.
Si può ottenere facilmente l'espressione di v_θ partendo appunto dall'espressione del momento angolare:

$$h = rv_\theta = \frac{h^2/\mu}{1 + e\cos\nu} v_\theta \Rightarrow v_\theta = \frac{\mu}{h}(1 + e\cos\nu) \tag{2.21}$$

Ora, sapendo che questa manovra non modifica la dimensione dell'orbita, si può tranquillamente affermare che:

$$p = r(1 + e\cos\nu) = cost \Longrightarrow dp = \dot{r}(1 + e\cos\nu) - r\dot{\nu}e\sin\nu = 0 \tag{2.22}$$

A questo punto si fa un'ulteriore considerazione riguardo le componenti di V:

$$\begin{cases} v_r = \dot{r} = V \sin\phi \\ v_\theta = r\dot{\theta} = V \cos\phi \end{cases} \Rightarrow \frac{v_r}{v_\theta} = \tan\phi = \frac{\dot{r}}{r\dot{\theta}} \tag{2.23}$$

Per cui, considerando l'equazione (2.22), si ha che:

$$\tan\phi = \frac{e \sin\nu}{1 + e\cos\nu} \tag{2.24}$$

E dunque :

$$v_r = v_\theta \tan\phi = \frac{\mu}{h} e \sin\nu \tag{2.25}$$

La manovra di rotazione degli apsidi viene giocoforza ottenuta tramite un impulso applicato in entrambi i punti dell'intersezione dell'orbita di partenza con quella di arrivo. Questa intersezione, come si può vedere dalla figura (2.4), è posta in corrispondenza della bisettrice dell'angolo $\Delta\omega$, per cui $\nu = \frac{\Delta\omega}{2}$.
Infine, sapendo che:

$$\frac{\mu}{p} = \frac{\mu}{h^2/\mu} = \frac{\mu^2}{h^2} \Longrightarrow \frac{\mu}{h} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} = \sqrt{\frac{\mu}{a(1-e^2)}}$$

e quindi, l'espressione finale del ΔV sarà:

$$\Delta V = 2v_r = 2e \sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)\sqrt{\frac{\mu}{a(1-e^2)}} \tag{2.26}$$

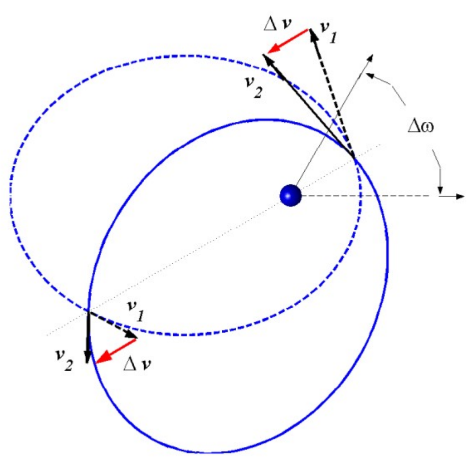

Figura 2.4: Manovra di rotazione della linea degli apsidi

2.4 Manovre fuori dal piano dell'orbita: Modifica del piano orbitale

Imprimere un ΔV giacente nel piano dell'orbita ne può cambiare la dimensione o può far ruotare la linea degli apsidi, ma per cambiarne l'inclinazione si necessita di un ΔV con una componente perpendicolare al piano orbitale di partenza.
In particolare, se l'obbiettivo della manovra è unicamente il cambio di piano dell'orbita, rimangono costanti il raggio, la velocità e il flight-path angle. Dalla

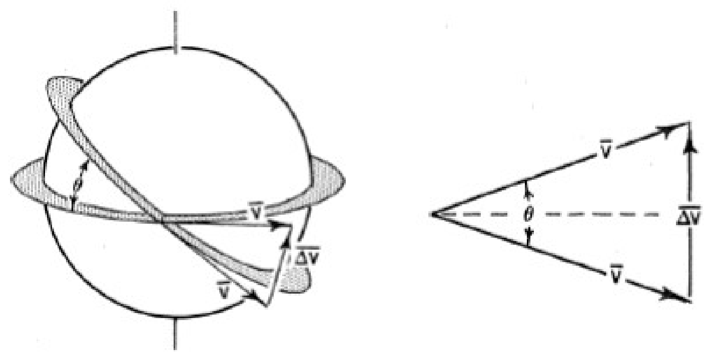

Figura 2.5: Manovra di cambio del piano orbitale

figura (2.5) si nota appunto che il ΔV non cambia il modulo della velocità ma solo la sua inclinazione; dal triangolo a destra si evince che:

$$V^2 = \left(\frac{\Delta V}{2}\right)^2 + \left(V \cos\frac{\theta}{2}\right)$$

Per cui si ricava che il costo della manovra, per orbite quasi circolari, è:

$$\Delta V = 2V \sin\frac{\theta}{2} \tag{2.27}$$

Perciò si giunge alla conclusione che, più è alta la velocità V, maggiore sarà il costo per effettuare una variazione θ di inclinazione. In particolare, al contrario della manovra per il cambiamento degli apsidi, per una modifica del piano dell'orbita è più vantaggioso imprimere il ΔV in corrispondenza dell'apoastro, punto dell'orbita in cui $V = V_{min}$.

Capitolo 3

Ottimizzazione di traiettorie spaziali

Per ogni missione spaziale,uno dei requisiti più stringenti è il peso del veicolo spaziale; ciò infatti influenza direttamente la fattibilità (che sia essa fattibilità dei costi o fattibilità ingegneristica) della missione stessa.
Perciò è di vitale importanza l'utilizzo di particolari metodi di calcolo che hanno come scopo l'ottimizzazione della traiettoria che il veicolo deve percorrere; ciò si traduce nella ricerca, tra le infinite traiettorie possibili, di quella caratterizzata dal valore minimo di massa di propellente utilizzata (o,analogamente, dal valore minimo di massa totale del veicolo).
Per cui,ponendo la massa di propellente utilizzato (o la massa totale finale dello *spacecraft*) come indice di controllo, gli algoritmi di ottimizzazione sono in grado di trovare una legge di controllo che rende minimo (o massimo, nel caso della massa totale) questo indice.
Esistono fondamentalmente tre diverse tecniche per la risoluzione di problemi di ottimizzazione:

- **tecniche enumerative**, le quali ricercano la soluzione ottimale in tutti i punti del dominio (di norma discretizzato) della funzione.
  Un esempio di questo tipo di tecnica è la *programmazione dinamica*,che prevede una suddivisione del problema in vari sottoproblemi, in ognuno dei quali viene ricercata la sotto-soluzione ottimale.

- **tecniche numeriche**, le quali si dividono in metodi indiretti e metodi diretti.
  I primi ricercano il minimo (o il massimo) di una funzione risolvendo un insieme di funzioni non lineari e ricercando iterativamente la soluzione finché il gradiente della funzione obiettivo è nullo; i secondi invece utilizzano il gradiente come guida per la ricerca della soluzione.

- **tecniche probabilistiche**, simili alle tecniche enumerative, ma utilizzano informazioni aggiuntive per effettuare la ricerca della soluzione.
  Fanno parte di questo tipo di tecnica gli algoritmi **evolutivi**, ossia metodi stocastici di ottimizzazione che si ispirano ai fenomeni biologici dell'evoluzione naturale.

In questo lavoro verrà utilizzata l'ottimizzazione indiretta,la quale si basa sulla cosiddetta **"Teoria del controllo ottimale"**.
I metodi indiretti vengono preferiti alle altre tecniche nelle applicazioni di tipo aerospaziale perchè offrono una maggiore precisione di calcolo e un limitato numero di parametri (e dunque un minor costo computazionale) a fronte però di una complessità a monte sicuramente maggiore di quella dei metodi diretti, i quali vengono preferiti in tutte quelle applicazioni di minore criticità.
Inoltre bisogna menzionare l'elevata dipendenza che la convergenza alla soluzione nei metodi indiretti ha nei riguardi della soluzione tentativo che viene utilizzata prima di iniziare la procedura di calcolo.

3.1 Teoria del controllo ottimale

Verrà ora descritta la teoria del controllo ottimale, estensione del calcolo variazionale e derivante dal lavoro indipendente e contemporaneo del matematico sovietico L.Pontryagin e del matematico statunitense R.E.Bellman negli anni '50 del novecento.

Lo stato del sistema in esame è, secondo questa teoria, descritto da un vettore di variabili di stato x .
Le variazioni di x tra gli istanti iniziali e finali del dominio sono descritte da equazioni differenziali funzioni di x stesso, del vettore di controllo u e della variabile indipendente t, ossia il tempo. Perciò

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t) \tag{3.1}$$

Fatte queste definizioni, si suddivide la traiettoria in n sotto-intervalli (o archi); il j-esimo intervallo inizierà a $t = t_{(j-1)_+}$, sarà caratterizzato dal valore di variabili di stato $x_{(j-1)_+}$ e finirà a $t = t_{j_-}$ con il valore $x = t_{j_-}$.
Si noti come la notazione con i pedici + e - serve ad indicare i valori delle variabili immediatamente prima e dopo rispetto al punto di giunzione tra un arco e quello successivo; questo è necessario a causa delle eventuali discontinuità di alcune variabili (per esempio,la velocità che vede una discontinuità a cavallo di una manovra impulsiva o il tempo,nel caso di manovra di fly-by di un pianeta).
All'interno di questi archi,le variabili di stato e di controllo sono continue mentre, nei punti di giunzione tra gli archi, vengono imposti dei vincoli,cioè delle condizioni al contorno.

Queste condizioni (imposte per ogni sotto-intervallo) sono di tipo misto, ossia tipiche di un problema in cui la soluzione richiesta deve soddisfare condizioni di Neumann (vincolo sul valore della derivata della soluzione ai bordi del dominio) e di Dirichlet (vincolo sul valore della soluzione ai bordi del dominio) in modo mutuamente esclusivo su parti disgiunte del confine; oltre a ciò, queste condizioni sono tipicamente non lineari e vengono espresse, per ogni j-esimo arco, come:

$$\chi(x_{(j-1)_+}, x_{j_-}, t_{(j-1)_+}, t_{j_-}) = 0 \qquad j = 1, ..., n \tag{3.2}$$

Lo scopo principale del problema di ottimo consiste nel trovare i punti di massimo e/o minimo locali di un certo *funzionale* J descritto come segue:

$$J = \varphi(x_{(j-1)_+}, x_{j_-}, t_{(j-1)_+}, t_{j_-}) + \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{(j-1)_+}}^{t_{j_-}} \phi(x(t), u(t), t)dt \tag{3.3}$$

Come si può notare, il funzionale J è la somma di due termini: la funzione φ, che dipende dai valori che il vettore di variabili di stato x e la variabile indipendente t assumono nei contorni di ogni j-esimo sotto-intervallo, e l'integrale esteso su tutta la traiettoria della funzione ϕ, la quale invece dipende dai valori che x,t e u (il vettore dei controlli) assumono all'interno di ogni sotto-intervallo.
Introducendo delle specifiche funzioni ausiliarie, ci si può ricondurre a due diversi casi secondo la formulazione adottata:

- caso $\varphi = 0 \Rightarrow$ formulazione di Lagrange
- caso $\phi = 0 \Rightarrow$ formulazione di Mayer

Qui verrà utilizzata la formulazione di Mayer.

Si procede riscrivendo il funzionale J con l'introduzione dei due moltiplicatori di Lagrange:

- μ, costanti associati alle condizioni al contorno
- λ, variabili associate alle equazioni di stato

Questi moltiplicatori fanno sì che il funzionale diventi:

$$J^* = \varphi + \mu^T\chi + \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{(j-1)_+}}^{t_{j_-}} (\phi + \lambda^T(f - \dot{x}))dt \tag{3.4}$$

Se le condizioni al contorno e le equazioni di stato sono soddisfatte ($\chi = 0$, $\dot{x} = f$) allora i due funzionali J e J^* e i loro valori agli estremi coincidono.
Integrando per parti il funzionale J^* ci si svincola dalla dipendenza dalla derivata $\dot{x}$; per cui si otterrà:

$$J^* = \varphi + \mu^T\chi + \sum_{j=1}^{n}(\lambda^T x_{(j-1+} - \lambda^T x_{j_-}) + \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{(j-1)_+}}^{t_{j_-}} (\phi + \lambda^T - \dot{\lambda}^T x) \tag{3.5}$$

Ora, differenziando J^* si ottiene la *variazione prima* del funzionale (δJ^*), ossia la variazione del funzionale al primo ordine nella variazione dei suoi argomenti δt, δx e δu (tenendo presente che, in questo caso, le parentesi quadre indicano una matrice).

$$\begin{aligned}\delta J^* = \left(-H_{(j-1)_+} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{(j-1)_+}} + \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial t_{(j-1)_+}}\right)\delta t_{(j-1)_+} + \\ + \left(-H_{j_-} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j_-}} + \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial t_{j_-}}\right)\delta t_{j_-} + \\ + \left(\lambda^T_{(j-1)_+} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{(j-1)_+}} + \mu^T \left[\frac{\partial \chi}{\partial x_{(j-1)_+}}\right]\right)\delta x_{(j-1)_+} + \\ + \left(-\lambda^T_{j_-} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{j_-}} + \mu^T \left[\frac{\partial \chi}{\partial x_{j_-}}\right]\right)\delta x_{j_-} + \\ + \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1+}}^{t_{j_-}} \left(\left(\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda}^T\right)\delta x + \frac{\partial H}{\partial u}\delta u\right) dt\end{aligned} \tag{3.6}$$

In questa espressione compare l'*Hamiltoniano* del sistema (H), ossia una funzione che esprime l'istantaneo incremento dell'espressione lagrangiana del problema. Questa funzione, all'interno della teoria del controllo ottimale, è definita come:

$$H = \phi + \lambda^T f \tag{3.7}$$

La condizione di ottimo deve passare necessariamente dalla stazionarietà del funzionale (e dunque dall'annullamento della sua variazione prima $\delta J^* = 0$) qualunque sia la scelta delle variazioni δx, δu, $\delta x_{(j-1)_+}$, δx_{j_-}, $\delta t_{(j-1)_+}$, δt_{j_-}, ovviamente compatibile con le equazioni differenziali e le condizioni al contorno. Introducendo le opportune variabili e costanti aggiunte, si riesce ad annullare i coefficienti di ognuna delle variazioni dell'equazione (3.6), garantendo dunque la stazionarietà del funzionale.
Inoltre,essendo i moltiplicatori di Lagrange del tutto arbitrari, possono essere scelti in modo da annullare i coefficienti delle variazioni δx e δu. Ciò che si ricava da questa semplificazione sono le equazioni differenziali di Eulero-Lagrange per le variabili aggiunte (3.8) e le equazioni algebriche per i controlli (3.9)

$$\dot{\lambda} = -\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^T \tag{3.8}$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^T = 0 \tag{3.9}$$

Si osserva che le leggi di controllo, così come le condizioni al contorno, siano formalmente indipendenti dalla ricerca dei punti di massimo o di minimo del funzionale.
Inoltre bisogna prestare attenzione al fatto che alcuni controlli possano essere soggetti a determinati vincoli, ossia siano limitati all'interno di un certo dominio (ad esempio la spinta, compresa nell'intervallo $0 \leq T \leq T_{max}$ o anche il coefficiente di portanza $0 \leq C_L \leq C_{L,max}$, con entrambi i valori di T_{max} e $C_{L,max}$ limiti superiori fissi definiti da condizioni di ammissibilità). Non si prenderanno in esame i casi in cui il vincolo dipenda dal tempo o dalle variabili di stato, ma solo quelli in cui esso è esplicito e costante.
In presenza di questo vincolo, il valore ottimale di controllo in ogni punto della traiettoria è quel valore tale per cui si rende minimo (o massimo, in base al tipo di problema per cui si cerca la soluzione) l'Hamiltoniano H in quel punto (come afferma il *Principio di massimo di Pontryagin*. Si possono avere, a questo punto, due possibilità:

- **Controllo non vincolato**: se il valore ottimale del controllo appartiene al dominio di ammissibilità, allora è quello che viene fornito dall'equazione (3.9) e, perciò, il vincolo non interviene in quel punto.

- **Controllo vincolato**: se il valore che viene fornito dall'equazione (3.9) non appartiene al dominio di ammissibilità, allora il valore ottimale di controllo appartiene agli estremi del dominio stesso.

Se invece l'Hamiltoniano è lineare rispetto a uno dei controlli soggetto a vincoli si ha un caso particolare (infatti nell'equazione (3.9) il controllo non compare esplicitamente ed è quindi indeterminabile). Dunque, se si rientra in questo caso particolare si avranno due ulteriori possibilità se si vuole (come nel caso di questa trattazione) massimizzare J:

- se nell'equazione (3.7) il coefficiente di controllo è diverso da zero (positivo o negativo che sia), allora H è massimizzato per il valore massimo del controllo se il coefficiente è positivo,mentre è massimizzato per il valore minimo se il coefficiente è negativo;

- se nell'equazione (3.7) il coefficiente di controllo è pari a zero durante un intervallo discreto di tempo (arco singolo), allora è necessario imporre a zero tutte le derivate successive del coefficiente rispetto al tempo; questo fino a quando in una di esse non appare esplicitamente il controllo. A questo punto, il controllo ottimale viene determinato ponendo a zero quest'ultima derivata.

Nelle prossime righe si provvederà a determinare le generiche condizioni al contorno riferite al j-esimo contorno, considerandolo o come l'estremo finale del (j-1)-esimo sotto-intervallo o come l'estremo iniziale del j-esimo sotto-intervallo. Annullando nell'ordine i coefficienti delle variazioni δx_{j_-},δx_{j_+},δt_{j_-},δt_{j_+}, quello che si ottiene è:

$$-\lambda_{j_-}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{j_-}} + \mu^T \left[\frac{\partial \chi}{\partial x_{j_-}} \right] = 0 \qquad j = 1, ..., n \tag{3.10}$$

$$\lambda_{j_+}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{j_+}} + \mu^T \left[\frac{\partial \chi}{\partial x_{j_+}} \right] = 0 \qquad j = 0, ..., n-1 \tag{3.11}$$

$$H_{j_-} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j_-}} + \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial t_{j_-}} = 0 \qquad j = 1, ..., n \tag{3.12}$$

$$-H_{j_+} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j_+}} + \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial t_{j_+}} = 0 \qquad j = 0, ..., n-1 \tag{3.13}$$

Andando dunque ad eliminare le costanti aggiunte μ dalle equazioni (3.10),(3.11),(3.12) e (3.13), si ottengono delle condizioni al contorno di ottimo del tipo:

$$\sigma(x_{(j-1)_+}, x_{j_-}, \lambda_{(j-1)_+}, \lambda_{j_-}, t_{(j-1)_+}, t_{j_-}) = 0 \tag{3.14}$$

Queste condizioni al contorno di ottimo, insieme alle condizioni assegnate (3.2), completano il sistema differenziale dato dalle equazioni (3.1) e (3.8).
Considerando ora una generica variabile di stato x sottoposta a particolari condizioni al contorno, le equazioni (3.10) e (3.11) forniscono particolari condizioni di ottimo per la variabile aggiunta corrispondente λ_x:

- se la variabile di stato x è assegnata esplicitamente all'istante iniziale (il vettore delle condizioni imposte χ contiene l'equazione $x_0 - a = 0$ con a valore assegnato), non ci sono condizioni sulla corrispondente variabile aggiunta;

- se il valore iniziale della variabile di stato x_0 non compare né nella funzione ϕ né nelle condizioni al contorno, la corrispondente variabile aggiunta è nulla all'istante iniziale (λ_{x_0}); anche in questo caso queste considerazioni si estendono a una analoga situazione al tempo finale;

- se una variabile di stato è continua e non assegnata al punto interno i (χ contiene l'equazione $x_{j_+} = x_{j_-}$), la corrispondente variabile aggiunta è anch'essa continua ($\lambda_{x_j+} = \lambda_{x_j-}$);

- se una variabile di stato è continua e assegnata esplicitamente a un contorno interno, (χ contiene le equazioni $x_{j_+} = x_{j_-} = a$), la corrispondente variabile aggiunta ha una discontinuità "libera", cioè il valore di λ_{x_j+} è indipendente da λ_{x_j-} e deve essere determinato dalla procedura di ottimizzazione.

In maniera del tutto analoga, se H non dovesse dipendere esplicitamente dal tempo, allora anche le equazioni (3.12) e (3.13) fornirebbero particolari condizioni al contorno:

- se il tempo iniziale t_0 non compare esplicitamente nè nelle condizioni al contorno nè nella funzione φ, allora $H_{|t=t_0} = 0$. Situazione analoga se invece è il tempo finale a non comparire esplicitamente in φ e χ: in quel caso si annulla l'Hamiltoniano al tempo finale;

- se il tempo intermedio t_j non compare esplicitamente nella funzione φ (in questo caso non si tira in ballo χ perchè l'unica condizione in essa è la continuità del tempo, perciò $t_{j_+} = t_{j_-}$), allora l'Hamiltoniano è continuo in j, dunque $H_{j_+} = H_{j_-}$;

- se il tempo t_j è esplicitamente assegnato (dunque in χ assume un valore ben preciso $t_{j_+} = t_{j_-} = a$), l'Hamiltoniano in quel punto ha una discontinuità “libera”.

3.2 Problema differenziale ai limiti

Il metodo indiretto adottato per l'ottimizzazione delle trasferte orbitali prevede l'applicazione della teoria del controllo ottimale al sistema di equazioni (3.1); le condizioni al contorno di quest'ultimo dipendono dal tipo di orbite tra le quali avviene appunto il trasferimento.
La teoria del controllo ottimale formula un nuovo sistema di equazioni differenziali ai limiti (**BVP**, *boundary value problem*), in cui i valori iniziali delle variabili sono però incogniti. Per ovviare a questo problema si vanno a ricercare i valori iniziali per i quali si riescono a soddisfare tutte le condizioni, sia quelle imposte sia quelle di ottimo, integrando numericamente il sistema differenziale. Seguirà una descrizione del metodo di risoluzione BVP e di come il problema venga formulato per adattarsi alle caratteristiche di suddetto metodo.
La teoria del controllo ottimale consiste in essenzialmente un problema matematico soggetto a vincoli differenziali e algebrici.
Essendo i valori iniziali di (alcune) variabili di stato e delle variabili aggiunte incogniti, il problema di ottimo si traduce essenzialmente in un problema BVP descritto dalle equazioni differenziali (3.1) e (3.8). I controlli sono stabiliti dalle equazioni algebriche (3.9) e supportati dalle condizioni al contorno imposte (3.2) e di ottimo (3.14). Queste sono le caratteristiche che rappresentano il problema:

- l'intervallo di integrazione è suddiviso in sotto-intervalli nei quali le equazioni possono avere differente espressione;

- la durata di ciascun intervallo è generalmente incognita;

- le condizioni al contorno possono essere non lineari e coinvolgere i valori delle variabili ai contorni sia esterni sia interni;

- le variabili possono essere discontinue ai contorni interni e il loro valore può dunque essere incognito dopo la discontinuità

La principale difficoltà che emerge dall'applicazione delle tecniche di ottimizzazione indiretta è la soluzione del problema ai limiti; il metodo per la soluzione di questo problema è dunque strumento indispensabile, così come la ricerca di analogie tra le sue caratteristiche e quelle del problema in esame.
La soluzione del problema differenziale ai limiti viene ricercata riducendo quest'ultimo a una successione di problemi ai valori iniziali, portati alla convergenza con l'applicazione del metodo di Newton.
Primo passo è aggirare il problema dell'indeterminatezza della durata di ciascun sotto-intervallo: viene eseguito un cambio di variabile (ai soli fini dell'integrazione) sostituendo la variabile tempo t con una nuova variabile ε. Questa viene definita, per il generico j-esimo sotto-intervallo, nel seguente modo:

$$\varepsilon = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{\tau_j} \tag{3.15}$$

dove con τ_j si definisce la durata (generalmente incognita, come già anticipato in precedenza) del sotto-intervallo. Dunque i contorni (esterni ed interni) risultano fissati grazie all'introduzione di questi due nuovi parametri incogniti τ_j, i quali corrispondono a valori interi consecutivi della nuova variabile indipendente ε.
Ci si riferisce al problema in esame con il sistema di equazioni generico dato dalle espressioni (3.1) e (3.8), in cui, ai controlli, è stata sostituita l'espressione (3.9) . Si ottiene dunque un problema differenziale nelle variabili non più distinte tra quelle di stato e quelle aggiunte:

$$\frac{dy}{dt} = f^*(y, t) \tag{3.16}$$

Bisogna però tenere presente il fatto che, nel problema in esame, compaiono dei parametri costanti (la durata dei sotto-intervalli τ_j, i valori delle variabili dopo le discontinuità etc.); perciò è comodo introdurre un nuovo vettore $z = (y, c)$ contenente le variabili di stato e le variabili aggiunte (racchiuse in y) e il nuovo vettore c dei parametri costanti.
Una volta applicato il cambio di variabile da t ad ε si avrà il sistema espresso secondo la seguente forma:

$$\frac{dz}{d\varepsilon} = f(z, \varepsilon) \tag{3.17}$$

Se si esplicita il secondo membro del sistema (3.17) per le variabili di stato e aggiunte si ha:

$$\frac{dy}{d\varepsilon} = \tau_j \frac{dy}{dt} \tag{3.18}$$

mentre per i parametri costanti si ha:

$$\frac{dc}{d\varepsilon} = 0 \tag{3.19}$$

Le condizioni al contorno sono invece espresse, senza distinzione tra quelle imposte e quelle di ottimo, secondo la forma:

$$\psi(s) = 0 \tag{3.20}$$

dove s è un vettore che contiene sia i valori che le variabili assumono in ogni contorno (sia esso interno o esterno) $\varepsilon = 0, 1, ...n$, sia ai parametri costanti incogniti:

$$s = (y_0, y_1, ..., y_n, c) \tag{3.21}$$

I valori di alcune variabili sono generalmente incogniti e la ricerca della soluzione consiste nel determinare, tramite un processo iterativo, quali sono i valori che devono assumere queste variabili per soddisfare le equazioni (3.20).
Si suppone che nessuno dei valori iniziali sia noto, per cui alla prima iterazione si debba scegliere dei valori di tentativo p^1. Alla r-esima iterazione si integrano le equazioni (3.17) con i valori iniziali p^r che risultano dall'iterazione precedente. Si fissa dunque :

$$z(0) = p^r \tag{3.22}$$

A questo punto si integrano le equazioni lungo tutta la traiettoria tenendo però conto delle eventuali discontinuità delle variabili ai contorni interni. In ciascun contorno viene determinato il valore delle variabili di stato e, al termine dell'integrazione, si calcola l'errore sulle condizioni al contorno ψ^r alla r-esima iterazione.
Una piccola variazione Δp però porta a variare l'errore sulle condizioni al contorno di una quantità (trascurando i termini superiori al primo ordine) pari a:

$$\Delta\psi = \left[\frac{\partial\psi}{\partial p}\right]\Delta p \tag{3.23}$$

Si ha necessità di annullare l'errore sulle condizioni al contorno, ossia si vuole ottenere $\Delta\psi = -\psi^r$; perciò, a ogni iterazione, i valori iniziali vengono corretti di una quantità pari a:

$$\Delta p = p^{r+1} - p^r = -\left[\frac{\partial\psi}{\partial p}\right]^{-1}\psi^r \tag{3.24}$$

Questa correzione viene fatta fino a quando le condizioni al contorno (3.20) non siano verificate con la precisione desiderata.
La matrice che moltiplica il Δp nell'espressione (3.23) viene calcolata come prodotto di due matrici:

$$\left[\frac{\partial\psi}{\partial p}\right] = \left[\frac{\partial\psi}{\partial s}\right]\left[\frac{\partial s}{\partial p}\right] \tag{3.25}$$

La prima matrice si ottiene semplicemente derivando le condizioni al contorno rispetto alle grandezze che vi compaiono.
La seconda matrice contiene invece le derivate dei valori delle variabili nei contorni rispetto ai valori iniziali, ossia i valori che vengono assunti ai contorni $\varepsilon = 0, 1, ...n$ dalla matrice

$$\left[\frac{\partial z}{\partial p}\right] = [g(\varepsilon)] \tag{3.26}$$

Essa viene ottenuta integrando il sistema di equazioni differenziali che si ottiene derivando il sistema principale (3.17) rispetto a ciascuno dei valori iniziali:

$$[\dot{g}] = \frac{d}{d\varepsilon}\left[\frac{\partial z}{\partial p}\right] = \left[\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial z}{\partial \varepsilon}\right)\right] = \left[\frac{\partial f}{\partial p}\right] \tag{3.27}$$

Si precisa che $\dot{g}$ indica la derivata di g rispetto alla nuova variabile ε che sostituisce, per l'appunto, la variabile t.
Esplicitando lo Jacobiano dell'espressione (3.17), l'equazione (3.27) diventa:

$$[\dot{g}] = \left[\frac{\partial f}{\partial z}\right]\left[\frac{\partial z}{\partial p}\right] = \left[\frac{\partial f}{\partial z}\right][g] \tag{3.28}$$

I valori iniziali del sistema omogeneo (3.28) si ottengono dalla derivata della relazione (3.22); perciò si ottiene così la matrice identità:

$$[g(0)] = \left[\frac{\partial z(0)}{\partial p}\right] = [I] \tag{3.29}$$

Con questo metodo è possibile anche trattare le discontinuità delle variabili; infatti, considerando una discontinuità localizzata nel punto i, è sufficiente aggiornare il vettore delle variabili z e la matrice g attraverso una relazione h, la quale lega i valori delle variabili prima e dopo suddetta discontinuità:

$$z_{i_+} = h(z_{i_-}) \tag{3.30}$$

$$[g_{i_+}] = \left[\frac{\partial h}{\partial z}\right][g_{i_-}] \tag{3.31}$$

Questo accorgimento rende inutile la distinzione, all'interno della definizione del vettore s, tra i vettori y_{i_+} e y_{i_-}; infatti l'una è funzione nota, attraverso la relazione h, dell'altra e del vettore c.
Il problema reale, nel nostro caso, risulta notevolmente semplificato dal fatto che alcuni dei valori iniziali delle variabili sono noti; dunque il vettore p si riduce essenzialmente alla stima delle sole componenti incognite di $z(0)$, mentre il vettore ψ si riduce alle sole condizioni al contorno non esplicite al tempo iniziale.
La matrice dell'equazione (3.24) può essere valutata anche numericamente: la sua i-esima riga si ottiene variando la i-esima componente di p di una piccola quantità Δp (mantenendo invece fisse le altre) e successivamente integrando le equazioni (3.17). Diviene così possibile il calcolo della variazione al contorno $\Delta\psi(\Delta p)$ e, tramite una linearizzazione, ottenere la riga corrispondente come $\Delta\psi^T/\Delta p$. Empiricamente si è giunti alla conclusione che i valori adatti di questa variazione Δp sono dell'ordine di $10^{-6} \div 10^{-7}$.
Questa procedura è, talvolta, una più semplice e rapida soluzione del BVP anche se non sempre è in grado di garantire la convergenza; infatti la determinazione della matrice nell'equazione (3.23) è meno precisa rispetto al suo calcolo attraverso la soluzione del sistema (3.28) e, vista la grande sensibilità del problema, le approssimazioni numeriche potrebbero compromettere l'effettiva convergenza.

Analoga procedura numerica può essere inoltre utilizzata per il calcolo del Jacobiano e della matrice $[\frac{\partial\psi}{\partial s}]$; tuttavia si è preferito mantenere la valutazione analitica. Sono stati poi usati, nell'impostazione dei codici, i valori ottenuti tramite il metodo numerico per verificare, dopo un confronto con i risultati ottenuti analiticamente dello Jacobiano e della matrice $[\frac{\partial\psi}{\partial s}]$, l'esattezza di queste espressioni.
L'integrazione di tutte le equazioni differenziali, sia per il sistema principale (3.17) sia per quello omogeneo (3.28), viene svolta con un metodo a passo e ordine variabile basato sulle formule di Adams.
Verrà richiesta una precisione pari a 10^{-7}, il che si traduce nell'imporre che $E_{max} = max(\psi_i) < 10^{-7}$.
La linearizzazione introdotta per il calcolo della correzione Δp (data dall'equazione (3.24)) applicata ai valori iniziali di tentativo, introduce errori che possono inficiare sulla buona riuscita della convergenza, facendo così aumentare (anzichè diminuire) l'errore sulle condizioni al contorno ad ogni iterazione. Dunque si sono presi alcuni accorgimenti:

- per evitare di allontanarsi troppo dalla soluzione, la correzione apportata è soltanto una frazione di quella determinata, ossia:

$$p^{r+1} = p^r + K_1\Delta p \tag{3.32}$$

  dove $K_1 = 0.1 \div 1$, valore determinato empiricamente durante la prova dei codici a seconda che la soluzione di partenza sia lontana o vicina a quella cercata;

- ad ogni iterazione, dopo aver determinato il nuovo vettore dei valori iniziali di tentativo p^{r+1} tramite la (3.32) e dopo aver integrato le equazioni del moto, si confronta l'errore massimo sulle condizioni al contorno E^{r+1}_{max} con quello ottenuto dall'iterazione precedente (E^r_{max}): se l'errore è inferiore ad un multiplo di quello precedente (dunque, se $E^{r+1}_{max} < K_2 E^r_{max}$) si procede con la nuova iterazione.
  Il valore di K_2, dato che, soprattutto nelle prime iterazioni, l'errore sulle condizioni al contorno deve aumentare per convergere alla soluzione, deve essere superiore all'unità; in particolare, se $K_2 = 2 \div 3$, vengono garantiti buoni risultati;

- se invece l'errore l'errore alla nuova iterazione è troppo grande rispetto a quello dell'iterazione precedente, si procede alla bisezione della correzione apportata, ossia viene dimezzata:

$$p^{r+1} = p^r + K_1\frac{\Delta p}{2} \tag{3.33}$$

  Questa bisezione verrà ripetuta fino a quando non si ottiene un valore di E^{r+1}_{max} sufficientemente basso, andando non oltre un massimo di cinque bisezioni; superato questo limite, il procedimento si arresta perché la soluzione di tentativo scelta non è in grado di portare alla convergenza.

Capitolo 4

Definizione del problema

L'analisi preliminare delle traiettorie interplanetarie dei satelliti viene affrontata considerando la massa del satellite come puntiforme e posta sotto l'influenza di un singolo corpo celeste; viene cioè applicata, in prima analisi, la cosiddetta approssimazione *patched conic*.
Per descrivere le soluzioni ottimali per le traiettorie si utilizza un sistema di riferimento eliocentrico e si sfruttano le equazioni del problema dei due corpi per descrivere il moto del satellite. Le equazioni differenziali del moto sono le seguenti:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V} \tag{4.1}$$

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{V} + \frac{\vec{T}}{m} \tag{4.2}$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{T}{c} \tag{4.3}$$

dove $\vec{r}$ è il vettore posizione, $\vec{V}$ il vettore velocità, $\vec{g}$ è l'accelerazione gravitazionale, $\vec{T}$ la spinta e c la velocità efficace di scarico.
É possibile introdurre ora l'Hamiltoniano, definito dall'equazione (3.7) e ora tradotto nei termini del problema in esame:

$$H = \vec{\lambda_r^T} \cdot \vec{V} + \vec{\lambda_V^T} \cdot \vec{g} + S_F \vec{T} \tag{4.4}$$

dove il coefficiente S_F, chiamato *switching function*, è definito in questo modo:

$$S_F = \frac{\vec{\lambda_V^T} T/T}{m} - \frac{\lambda_m q}{T} \tag{4.5}$$

L'equazione di Eulero-Lagrange per le variabili aggiunte (3.8) fornisce le seguenti espressioni:

$$\left[\frac{d\vec{\lambda_r}}{dt}\right]^T = \vec{\lambda_r^T} \left[\frac{\partial g}{\partial r}\right] \tag{4.6}$$

$$\left[\frac{d\vec{\lambda_v}}{dt}\right]^T = -\vec{\lambda_r^T} \tag{4.7}$$

$$\frac{d\lambda_m}{dt} = \frac{\vec{\lambda_v} \cdot \vec{T}}{m^2} \tag{4.8}$$

Le equazioni (4.1),(4.2),(4.3) e (4.6),(4.7) costituiscono il sistema di equazioni differenziali che verrà integrato numericamente.
Le variabili di controllo ottimizzate devono massimizzare H (in accordo con il principio del massimo di Pontryagin); tipicamente queste variabili di controllo sono il modulo e la direzione della spinta, perciò è subito evidente che la direzione ottimale della spinta è quella parallela al vettore aggiunto velocità λ_v. La switching function diventa:

$$S_F = \frac{\lambda_v}{m} - \lambda_m \frac{q}{T} \tag{4.9}$$

e, se la velocità efficace di scarico c è costante, si semplifica ulteriormente in:

$$S_F = \frac{\lambda_v}{m} - \frac{\lambda_m}{c} \tag{4.10}$$

Ora il modulo della spinta resta come unica variabile di controllo; esso è massimo quando la switching function S_F è positiva ($S_F > 0$), mentre è nullo quando la switching function assume valori negativi ($S_F < 0$), in tutti e due i casi per rendere comunque massimo l'Hamiltoniano.
Si verifica la condizione di arco singolare quando S_F rimane uguale a zero durante un intervallo di tempo finito; in questo caso, l'equazione (4.4) non è sufficiente per definire il valore del modulo della spinta ottimale.
Per definire invece il valore ottimale di c:

$$\frac{\partial H}{\partial c} = 0 \Longrightarrow c_{ott} = 2\frac{\lambda_m}{\lambda_v} m \tag{4.11}$$

La velocità efficace di scarico è vincolata, perciò è $c_{min} \leq c \leq c_{max}$; se:

- $c_{ott} > c_{max} \Rightarrow c = c_{max}$
- $c_{ott} < c_{min} \Rightarrow c = c_{min}$
- $c_{min} < c_{ott} < c_{max} \Rightarrow c = c_{ott} = 2\frac{\lambda_m}{\lambda_v} m$

Si ha dunque che la condizione di potenza massima è quella per cui $S_F > 0$ e, viceversa, si ha potenza minima quando $S_F < 0$. Siccome S_F assume valore minimo quando c è minima, allora S_F è sempre positiva se c non è limitata (ossia se $c_{min} = 0$).
Se $c = c_{ott}$ si ha che:

$$T = \frac{2\eta P}{c_{ott}} = \frac{2\eta P \lambda_v}{2m\lambda_m} = \frac{\lambda_v P}{\lambda_m m} \tag{4.12}$$

assumendo $\eta = 1$; e dunque:

$$\frac{T}{m} = \frac{\lambda_v P}{\lambda_m m^2} \tag{4.13}$$

Se c non è vincolata, si ha $\lambda_m m^2 = cost$ e dunque $T/m \propto \lambda_v$.
Per massimizzare H bisogna dunque massimizzare il prodotto:

$$T \cdot S_F = T\left(\frac{\lambda_v}{m} - \frac{\lambda_m q}{T}\right) = \frac{\lambda_v}{m}\left(T - \frac{m\lambda_m}{\lambda_v} q\right) \tag{4.14}$$

Perciò deve essere massimizzata la funzione

$$\bar{H} = T - \frac{m\lambda_m}{\lambda_v} q \tag{4.15}$$

H è una combinazione lineare di T e q, dipendete dal parametro $K = m\lambda_m/\lambda_v$, il quale varia lungo la traiettoria, nonostante sia noto in ogni punto di quest'ultima.
Per migliorare l'accuratezza del metodo numerico, la traiettoria viene suddivisa in archi in cui la spinta è massima (condizione di P_{max}, dunque $S_F > 0$) e altri in cui la spinta è nulla (condizione di P_{min}, dunque $S_F < 0$). Il numero e l'ordine degli archi vengono assegnati a priori mentre le lunghezze temporali dei singoli archi sono sconosciute.
Le condizioni al contorno per le condizioni di ottimo impongono che la switching function sia uguale a zero nelle estremità di ogni arco di spinta.
La procedura numerica fornisce la soluzione di ottimo corrispondente alla traiettoria assegnata a priori.
Dopodiché la soluzione viene controllata in accordo con il Principio di Massimo di Pontryagin: se quest'ultimo viene violato, vengono rimossi o aggiunti archi di spinta o archi a spinta nulla, tenendo sempre in conto il comportamento di S_F per ottenere una migliore soluzione.

4.1 Equazioni di stato e variabili aggiunte

Si sceglie un sistema di riferimento inerziale basato sul piano equatoriale, adottando perciò coordinate sferiche: la posizione dello spacecraft è descritta infatti dal raggio r, dalla longitudine θ e dalla latitudine ϕ:

$$\vec{r} = [r \ \theta \ \phi] \tag{4.16}$$

mentre la velocità viene descritta da un sistema di riferimento locale con la componente radiale u (direzionata verso lo Zenit), la componente v (direzionata verso l'Est) e w (direzionata verso il Nord):

$$\vec{V} = [u \ v \ w] \tag{4.17}$$

Proiettando le equazioni di stato nel riferimento scelto, si ottiene:

$$\frac{dr}{dt} = u \tag{4.18}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{r\cos\phi} \tag{4.19}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{w}{r} \tag{4.20}$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\mu}{r^2} + \frac{v^2}{r} + \frac{w^2}{r} + \frac{T}{m}\sin\gamma_T \tag{4.21}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{uv}{r} + \frac{vw}{r}\tan\phi + \frac{T}{m}\cos\gamma_T\cos\psi_T \tag{4.22}$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{uw}{r} - \frac{v^2}{r}\tan\phi + \frac{T}{m}\cos\gamma_T\sin\psi_T \tag{4.23}$$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{T}{c} \tag{4.24}$$

dove γ_T e ψ_T sono, rispettivamente, gli angoli di *elevazione* (flight path angle) e di *rotta* (heading) del vettore spinta T, i quali ne determinano la direzione; questi vengono misurati rispettivamente dal piano orizzontale (con angoli positivi verso l'alto) e in senso antiorario dal parallelo (con angoli positivi verso Nord). Gli stessi angoli senza il pedice T sono invece riferiti alla velocità relativa V_r:

$$\sin\gamma = \frac{u}{V_r} \tag{4.25}$$

$$\cos\gamma\cos\psi = \frac{v - wr\cos\phi}{V_r} \tag{4.26}$$

$$\cos\gamma\sin\psi = \frac{w}{V_r} \tag{4.27}$$

dove la velocità relativa V_r ha modulo pari a:

$$V_r = \sqrt{u^2 + (v - wr\cos\phi)^2 + w^2} \tag{4.28}$$

Come detto in precedenza, gli angoli γ_T e ψ_T sono i controlli che determinano la direzione della spinta. Se si esplicita l'Hamiltoniano e se ne annullano le derivate parziali rispetto a questi due angoli, ossia:

$$\frac{\partial H}{\partial\gamma_T} = 0 \tag{4.29}$$

$$\frac{\partial H}{\partial\psi_T} = 0 \tag{4.30}$$

si ottengono i valori ottimali per gli angoli di spinta, ovvero:

$$\sin\gamma_T = \frac{\lambda_u}{\lambda_V} \tag{4.31}$$

$$\cos\gamma_T\psi_T = \frac{\lambda_v}{\lambda_V} \tag{4.32}$$

$$\cos\gamma_T\sin\psi_T = \frac{\lambda_w}{\lambda_V} \tag{4.33}$$

con:
$$\lambda_V = \sqrt{\lambda_u^2 + \lambda_v^2 + \lambda_w^2} \tag{4.34}$$
che è il modulo del vettore primario, parallelo alla direzione ottimale della spinta (come già accennato all'inizio del capitolo).
Ora, dalle equazioni di Eulero-Lagrange si ottengono le equazioni differenziali per le variabili aggiunte:

$$\dot{\lambda_r} = \frac{1}{r^2}\left[\lambda_\theta \frac{v}{\cos\phi} + \lambda_\phi w + \lambda_u\left(-\frac{2}{r} + v^2 + w^2\right) + \lambda_v(-uv + vw\tan\phi) + \lambda_w(-uw - v^2\tan\phi)\right] \tag{4.35}$$
$$\dot{\lambda_\theta} = 0 \tag{4.36}$$
$$\dot{\lambda_\phi} = \frac{1}{r\cos^2\phi}(-\lambda_\theta v\sin\phi - \lambda_v vw + \lambda_w v^2) \tag{4.37}$$
$$\dot{\lambda_u} = \frac{1}{r}(-\lambda_r r + \lambda_v v + \lambda_w w) \tag{4.38}$$
$$\dot{\lambda_v} = \frac{1}{r}\left[-\lambda_\phi \frac{1}{\cos\phi} - 2\lambda_u v + \lambda_v(u - w\tan\phi) + 2\lambda_w v\tan\phi\right] \tag{4.39}$$
$$\dot{\lambda_w} = \frac{1}{r}[-\lambda_\phi - 2\lambda_u w - \lambda_v v\tan\phi + \lambda_w u] \tag{4.40}$$
$$\dot{\lambda_m} = \frac{T}{m^2}\lambda_v \tag{4.41}$$
Queste equazioni differenziali ottenute vengono inserite al sistema di equazioni differenziali.

Tutte le analisi sulle traiettorie fatte e descritte più in seguito in questa trattazione, sono state effettuate tramite un codice FORTRAN, che utilizza un processo iterativo per poter risolvere il problema di ottimo.
Come già accennato, il codice è scritto in modo da trovare una strategia per cui la missione che va dal punto di partenza per arrivare al target, venga portata a termine con la massa finale massima possibile.
Il codice estrapola da un file i parametri orbitali del punto di partenza e successivamente quelli dell'asteroide considerato.
La dimensione totale del problema è dettata dal parametro N che, nel caso in esame, è pari a 17: ciò significa che in totale vi sono 17 grandezze incognite. Di queste 17 grandezze si conosce soltanto il valore di una di loro ($\lambda_m = 1$), per cui il valore effettivo delle grandezze incognite sarà definito da k ($k = N - 1 = 16$). Delle 17 grandezze, 13 sono variabili e 4 sono parametri; le 13 variabili sono racchiuse nel vettore Y e sono:
$$Y = [r,\ \theta,\ \phi,\ u,\ v,\ w,\ \lambda_r,\ \lambda_p hi,\ \lambda_u,\ \lambda_v,\ \lambda_w,\ \lambda_m,\ m] \tag{4.42}$$

mentre i 4 parametri (costanti) sono posti all'interno del vettore Y_p e sono:
$$Y_p = [t_0,\ t_f,\ \lambda_\theta,\ V_\infty] \tag{4.43}$$

In alcune condizioni ci sarebbe inoltre un altro parametro tra quelli inclusi in Y_p, ossia il t^*: il t^* è infatti un parametro che misura il tempo intercorso tra l'arrivo dello spacecraft al punto più favorevole dell'orbita selezionata e l'arrivo dell'asteroide in quello stesso punto dell'orbita. In pratica dunque, $t^* = 0$ se lo spacecraft arriva nell'orbita dell'asteroide proprio in prossimità di quest'ultimo (*rendezvous*), altrimenti sarà un termine maggiore di zero e dunque $k = k + 1 = 17$ e Y_p conterrà un parametro aggiuntivo.
Infine, bisogna precisare che tra le condizioni al contorno, si impone che $V_\infty = 0$.
A questo punto il codice, attraverso i valori di tentativo, esegue operazioni di integrazione dei sistemi di equazioni differenziali, iterandoli finché non si giunge a una convergenza della soluzione.

Capitolo 5

Presentazione e commento dei risultati ottenuti

In questo capitolo si analizzano i risultati ottenuti nell'ambito dell'ottimizzazione di traiettorie verso asteroidi partendo dalla Terra e considerando un'unica fase,composta da varie accensioni e spegnimenti del motore, che va semplicemente dalla partenza all'arrivo all'asteroide target.
L'ottimizzazione si può ottenere con diversi metodi di calcolo; in questo lavoro ci si pone come obiettivo l'analisi delle caratteristiche delle soluzioni ottenute tramite metodi indiretti, applicando questi ultimi per un ampio numero di asteroidi "fittizi", ossia asteroidi con parametri orbitali che variano seguendo pattern ben precisi ma che non coincidono con nessun asteroide esistente.
In particolare si studia come la soluzione di ciascuna traiettoria viene influenzata dalla variazione dei parametri orbitali dell'asteroide target.

5.1 Asteroidi fittizi

Si è preso un set di asteroidi fittizi, suddiviso in 4 macro-casi:

- $i = 0$ rad e $\Omega = \omega = M_0 = 0°$
- $i \neq 0$ rad e $\Omega = \omega = M_0 = 0°$
- $i \neq 0$ rad e $\Omega = \omega = 45°$, $M_0 = -45°$
- $i \neq 0$ rad e $\Omega = \omega = 90°$, $M_0 = -90°$

É doveroso precisare innanzitutto che le orbite degli asteroidi qui descritti hanno il loro perielio nel punto in cui $\theta = 0$; θ è la longitudine, ossia una delle tre coordinate che descrivono la posizione dell'asteroide all'interno di un sistema di coordinate sferiche. La linea che congiunge il perielio all'afelio viene chiamata *linea degli apsidi.*

Vi è un'altra linea caratteristiche dell'orbita, ossia la cosiddetta *linea dei nodi*: essa congiunge i due punti (detti, per l'appunto, *nodi*) posti all'intersezione tra l'orbita e il piano di riferimento.
L'angolo tra queste due linee è uno dei parametri orbitali citati all'inizio di questo paragrafo: esso è l'*argomento del periastro*, che viene indicato solitamente con la lettera ω.

Per ciascun caso,eccentricità e inclinazione crescono linearmente da 0.01 a 0.1 con passo 0.01 (tranne che nel caso 1, dove l'inclinazione è costante e pari a 0). Per quanto riguarda invece il valore dell'anomalia media M_0, viene preso sempre pari a $-\omega$ in modo tale da far coincidere il punto di partenza con il nodo ascendente. Questi valori vengono poi associati a 3 valori diversi di semiasse maggiore dell'orbita, ossia 1 UA , 0.95 UA e 1.05 UA.
Gli asteroidi sono numerati in modo consequenziale in modo da essere facilmente individuabili;la Terra (ovviamente il punto di partenza verso questi asteroidi) è identificata con il numero 1 ed ha i seguenti parametri :

n	a	e	i	Ω	ω	$_0$
1	1	0	0	0	0	0

Tabella 5.1: Parametri orbitali dell'orbita di partenza ("Terra")

Avendo definito l'orbita della Terra con questi valori dei parametri orbitali, i valori dei parametri degli asteroidi sono da interpretare più che altro come delle variazioni Δ rispetto a quelle terrestri (per cui, ad esempio, un asteroide avente $e = 0.03$ è un asteroide con un'eccentricità il cui valore è pari a $e = e_{\oplus} + 0.03$).

5.2 Andamento della massa finale a durata fissata

Viene fissata la durata di missione a circa 2 anni ; nel codice usato per implementare il calcolo , i tempi sono adimensionati rispetto al tempo impiegato dalla Terra a percorrere un radiante all'interno della sua orbita, 58.092 giorni (dunque la durata di 2 anni imposta sarebbe D=13).
Si vuole dunque studiare l'andamento della massa finale del veicolo spaziale (e dunque della massa di propellente utilizzato) al variare dei parametri orbitali.

5.2.1 $a = 1 = cost.$

Ci si aspetta che la massa finale diminuisca sempre di più via via che l'orbita di arrivo si discosta, per parametri orbitali, dall'orbita di partenza.
Ed effettivamente è proprio quello che si ottiene;la massa finale, oltre a decrescere all'aumentare dell'eccentricità dell'orbita, diminuisce in modo ancora più evidente se aumenta l'inclinazione e/o se aumentano anche ascensione retta,argomento e anomalia.
Dunque salta subito all'occhio il maggiore costo (in termini di propellente consumato) di una trasferta caratterizzata dalla perpendicolarità tra linea degli apsidi e linea dei nodi ($\omega = 90°$) rispetto a quella nella quale queste due linee coincidono ($\omega = 0°$). A ulteriore conferma di ciò, il caso con un valore di ω intermedio è caratterizzato da un costo anch'esso intermedio tra i due casi discussi in precedenza.

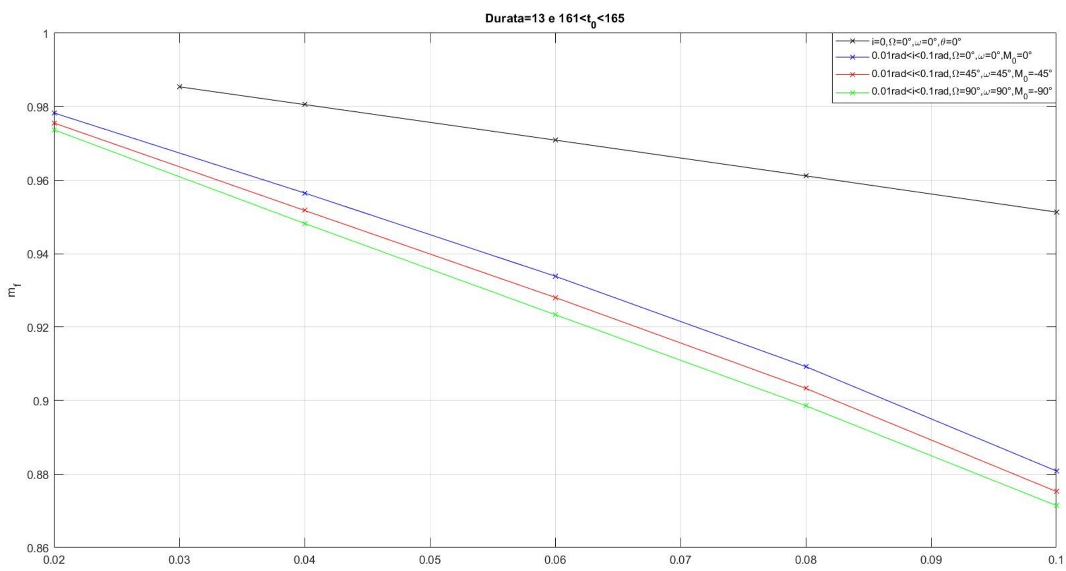

Figura 5.1: Andamento della m_f rispetto all'eccentricità e

5.2.2 $a \neq cost$

In questo sotto-paragrafo si indaga invece l'influenza del semiasse maggiore,che precedentemente veniva lasciata costante e pari al valore dell'orbita di partenza.

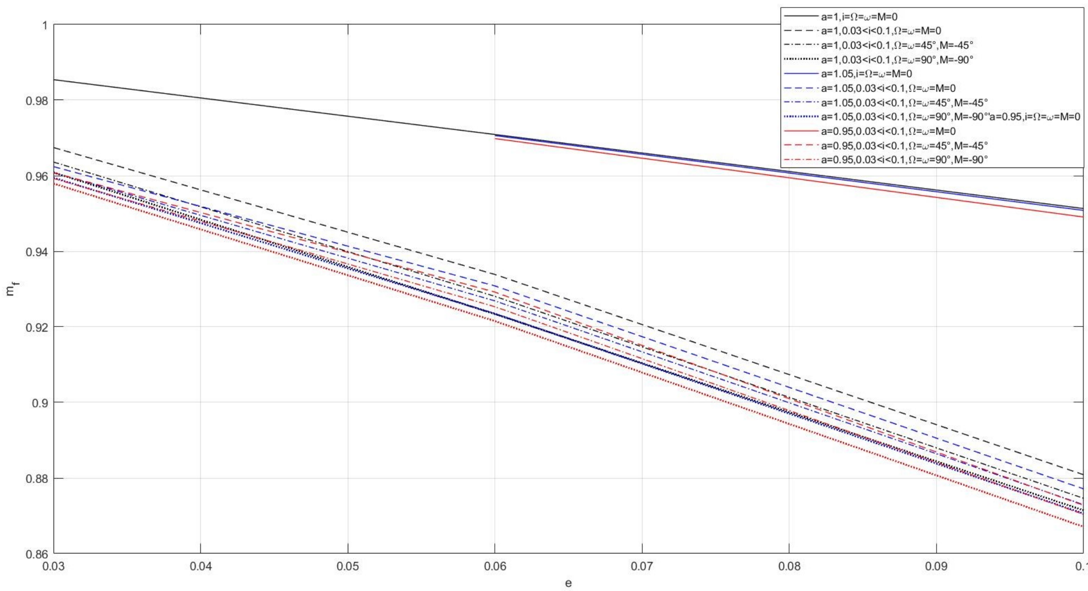

Figura 5.2: Andamento m_f con $a \neq cost$

Come si può notare dalla figura 1.2 c'è un chiaro trend per quanto riguarda l'andamento della m_f : oltre alla già analizzata influenza che gli altri parametri esercitano su di essa, la massa finale diminuisce se il semiasse dell'orbita di arrivo differisce da quello dell'orbita di partenza.
Inoltre si nota che si utilizza più propellente per orbite con un semiasse minore piuttosto che per quelle con semiasse maggiore (rispetto all'orbita di partenza). Questo comportamento si spiega in questo modo: se, in prima approssimazione, si assume $\Delta V \propto V_c = \sqrt{\frac{\mu}{r}}$ (approssimazione valida se si considera $r = cost. = a_{media}$, ossia pari alla media tra il semiasse maggiore di partenza e quello di arrivo), è evidente notare che, al diminuire del raggio (ossia al diminuire del valore di semiasse maggiore finale rispetto a quello iniziale) vi è un conseguente aumento della V_c, dunque del ΔV e, infine, una diminuzione della massa finale (conseguenza di un maggior consumo di propellente).

5.2.3 $i = cost.$

In questo sotto-paragrafo si mettono a confronto le masse finali di traiettorie a inclinazione variabile con quelle di traiettorie a inclinazione costante e pari a 0 e a 0.05 radianti.

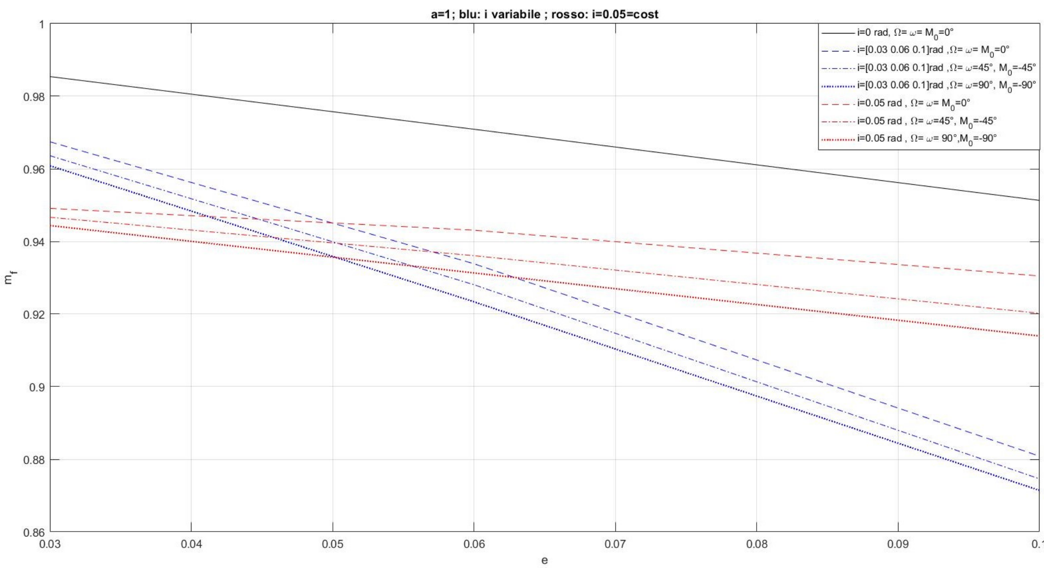

Figura 5.3: Andamento m_f con $i = cost$

Il risultato è esattamente in linea con le previsioni: la curva a $i = 0\ rad$ è quella caratterizzata dall'avere una massa finale maggiore (inclinazione pari all'orbita di partenza) rispetto alle curve con $i = 0.05\ rad$.
Per quanto riguarda invece il paragone con le curve a inclinazione variabile invece si nota come queste ultime intersecano le curve a $i = 0.05\ rad$ in corrispondenza del valore di $e = 0.05$ (esattamente come ci si aspetterebbe, visto che in questi test si fa variare l'eccentricità in modo da corrispondere al valore dell'inclinazione in radianti), dopodiché le curve a inclinazione variabile aumentano appunto di inclinazione e la massa finale conseguente ne va a risentire.

5.3 Analisi degli archi di spinta

Si passa ora all'analisi della variazione degli angoli α (angolo,all'interno del piano orbitale, tra vettore velocità e vettore spinta) e β (angolo,fuori dal piano orbitale, tra vettore velocità e vettore spinta) al variare dei vari parametri orbitali,così come del tempo di partenza t_0.
In generale ci si aspetta che, quando $i = 0°$, le manovre siano caratterizzate da archi di spinta centrati in corrispondenza della linea degli apsidi. Perciò, nell'imporre un angolo maggiore, ci si prefigge lo scopo di analizzare lo spostamento di questi archi dalla linea degli apsidi.

5.3.1 Caso esempio: $a = 0.95$, $e = 0.03$, $i = 0.03$ rad

Verrà ora mostrato il caso $a = 0.95$, $e = 0.03$, $i = 0.03$ rad e, successivamente, verranno mostrati gli altri casi con un doveroso confronto fra di essi. Si parte dall'analisi della posizione degli archi di spinta effettuati dallo spacecraft lungo l'orbita. Ci si aspetta che, quando $\omega = 0°$ (ovverosia quando la posizione dei nodi coincide con quella degli apsidi), gli archi di spinta appaiano centrati a $\theta = 0°$ e $\theta = 180°$, cioè proprio in corrispondenza degli apsidi e, in questo caso, dei nodi.
In questo caso specifico (come si può notare dalla fig. 1.4), avendo l'orbita di arrivo un semiasse maggiore inferiore a quello dell'orbita di partenza, si avranno manovre di "frenata", con la spinta direzionata ad $\alpha = 180°$ nel perielio per ridurre l'estensione dell'afelio (quando $\theta = 0° + n \cdot 360°$) e viceversa nell'afelio per ridurre l'estensione del perielio (quando $\theta = 180° + n \cdot 360°$).
Poiché tra le due orbite vi è anche una differenza di inclinazione, l'angolo β deve obbligatoriamente essere diverso da zero per poter imprimere, tramite il direzionamento extra-planare della spinta, una manovra di modifica dell'inclinazione: infatti avrà valore positivo al nodo ascendente ($\theta = 0°$) e negativo al nodo discendente ($\theta = 180°$). Variando però il valore di ω, i nodi non coincideranno

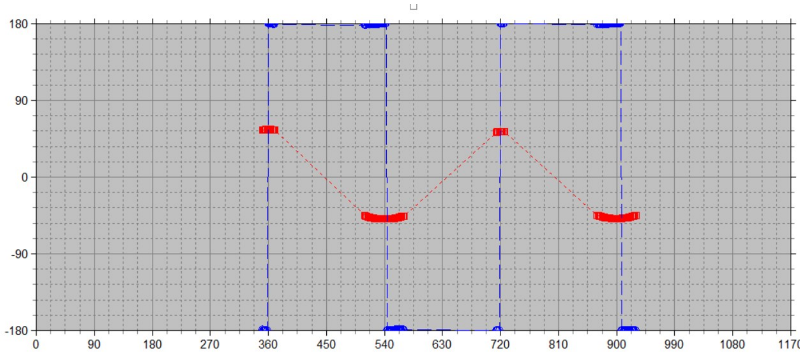

Figura 5.4: $t_0 = 142$; $\omega = 0°$

più con gli apsidi e la spinta non verrà più fornita in corrispondenza dei nodi. Questo viene evidenziato nella fig.1.5 :

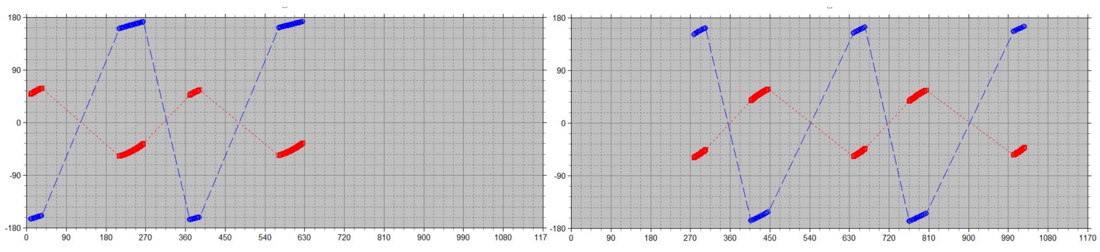

Figura 5.5: $t_0 = 142$. A sinistra $\omega = 45°$. A destra $\omega = 90°$

gli archi si spostano dai nodi perché le manovre ottimali vengono fatte sempre in corrispondenza degli apsidi; in particolare, più aumenta l'angolo ω e più gli archi si spostano dai nodi.

ω, Ω	θ_{nodi}	$\theta(\Delta\theta)$	$\alpha(\Delta\alpha)$
$0°$	$0°$; $180°$	$0°$; $180°$	$180°$
$45°$	$45°$; $225°$	$23°(-22.5°)$; $236°(+11°)$	$165°(-15°)$
$90°$	$90°$; $270°$	$68°(+22.5°)$; $293°(-22.5°)$	$160°(-20°)$

5.3.2 $i \neq cost.$

Le prove sono state fatte considerando :

- tre valori di eccentricità : $e = [0.03\ 0.05\ 0.07]$
- tre valori di inclinazione : $i = [0.03\ 0.05\ 0.07] rad$
- tre valori di ascensione retta, argomento del periastro e anomalia media : $\Omega = \omega = [0°\ 45°\ 90°]$; $M_0 = -\omega$
- due valori di semiasse maggiore : $a = [0.95\ 1.05]$

Quello che ci si aspetta è che, parità di durata e a parità (circa) anche di tempo iniziale, si noti una certa simmetria nel valore dell'angolo α : in particolare,nel passare da un valore all'altro di semiasse maggiore, ci si aspetta che i valori di α risultino invertiti.

Inoltre si è anche provato a traslare (in avanti) il tempo iniziale di una quantità pari a circa π, ossia di circa mezzo anno, considerando il periodo di rotazione all'interno di un'orbita circolare come quella imposta alla Terra in questa trattazione.

Ci si aspetta, in questo caso, che gli archi subiscano semplicemente uno sfasamento.

Per comodità, verrà assegnato, per ogni traiettoria qui analizzata, un codice che identifica ciascuna traiettoria in modo univoco,come descritto nella tabella 3:

traiettoria	a	e	$\Omega,\ \omega$	M_0
$3a_0$	0.95	0.03	0	0
$3b_0$	1.05	0.03	0	0
$5a_0$	0.95	0.05	0	0
$5b_0$	1.05	0.05	0	0
$7a_0$	0.95	0.07	0	0
$7b_0$	1.05	0.07	0	0
$3a_{45}$	0.95	0.03	45	-45
$3b_{45}$	1.05	0.03	45	-45
$5a_{45}$	0.95	0.03	45	-45
$5b_{45}$	1.05	0.05	45	-45
$7a_{45}$	0.95	0.07	45	-45
$7b_{45}$	1.05	0.07	45	-45
$3a_{90}$	0.95	0.03	90	-90
$3b_{90}$	1.05	0.03	90	-90
$5a_{90}$	0.95	0.05	90	-90
$5b_{90}$	1.05	0.05	90	-90
$7a_{90}$	0.95	0.07	90	-90
$7b_{90}$	1.05	0.05	90	-90

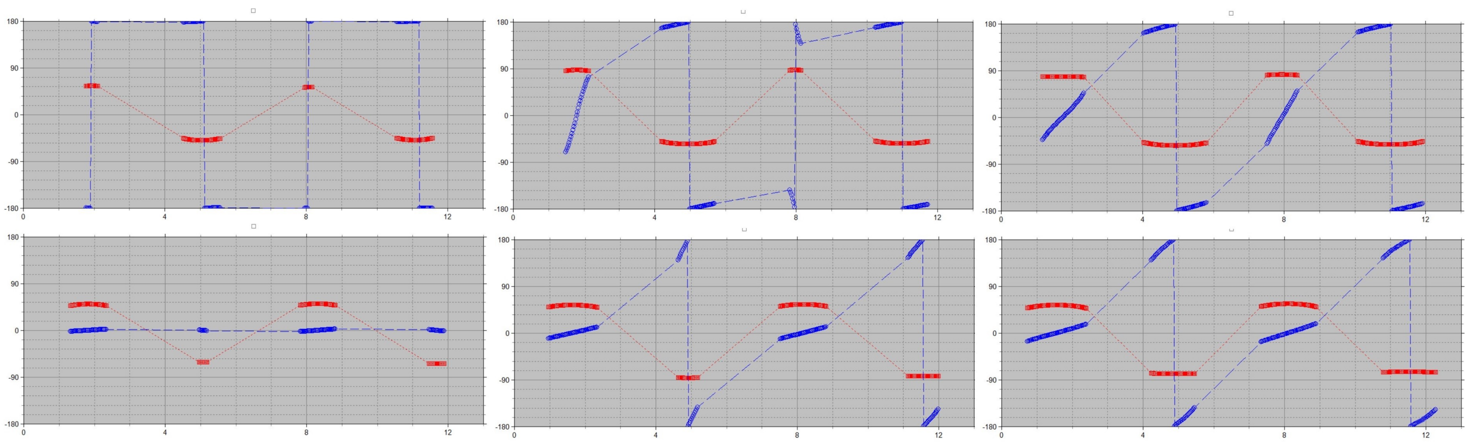

Figura 5.6: $t_0 = 142$; In alto : $3a_0, 5a_0, 7a_0$; In basso : $3b_0, 5b_0, 7b_0$

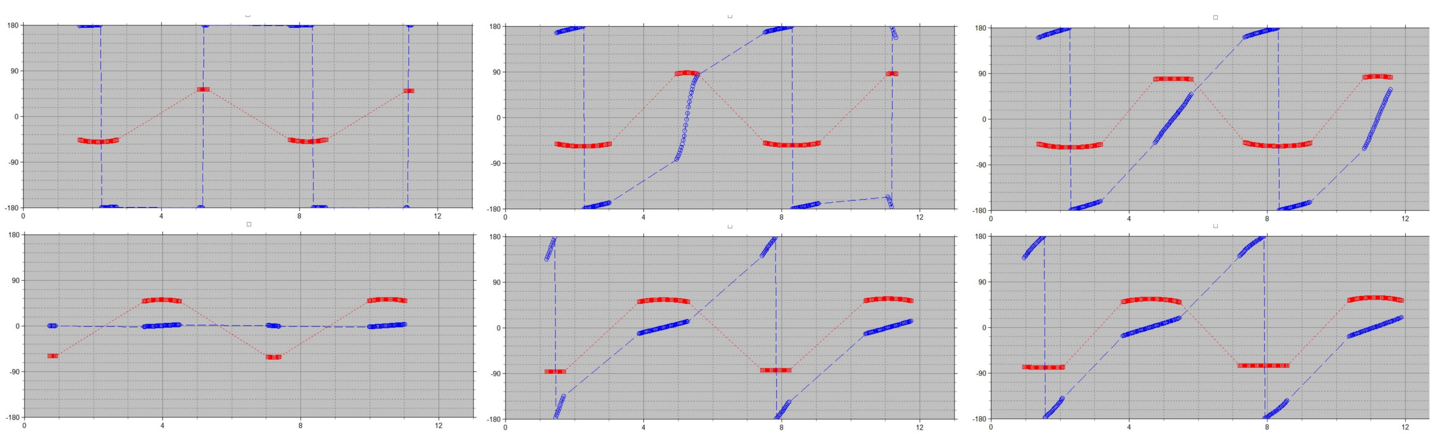

Figura 5.7: $t_0 = 142 + \pi$; In alto : $3a_0, 5a_0, 7a_0$; In basso : $3b_0, 5b_0, 7b_0$

Effettivamente,già solo per le prove fatte a $\omega = 0$, si trovano tutte le previsioni fatte in precedenza:

1. passando da un valore all'altro di semiasse, gli archi sono invertiti e cambiati di posto.
   Questo si nota quando, oltre all'alternanza simmetrica degli angoli α (che passano da 180° a 0°, visto il valore nullo dei parametri Ω, ω e M_0), vi è anche uno scambio a livello di angoli β: infatti, gli archi che, per $a = 0.95$ e $\beta < 0$, sono "corti", per $a = 1.05$ invece sono "lunghi" e viceversa per quelli a $\beta > 0$.

2. spostando il tempo di partenza di $+\pi$ (mezza rotazione all'interno dell'orbita terrestre), gli archi subiscono uno sfasamento.

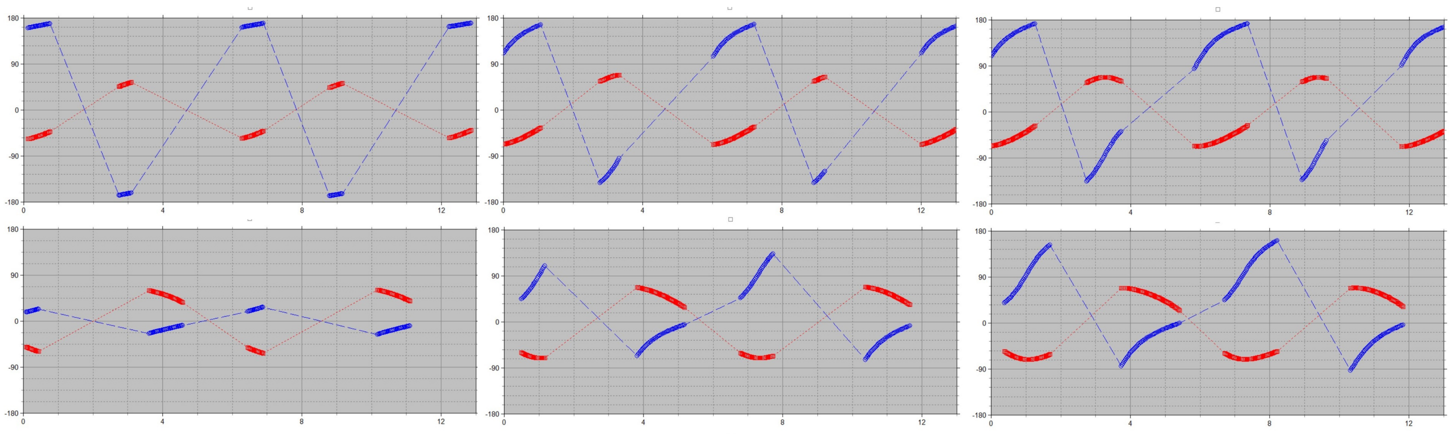

Figura 5.8: $t_0 = 142$; In alto : $3a_{45}, 5a_{45}, 7a_{45}$; In basso : $3b_{45}, 5b_{45}, 7b_{45}$

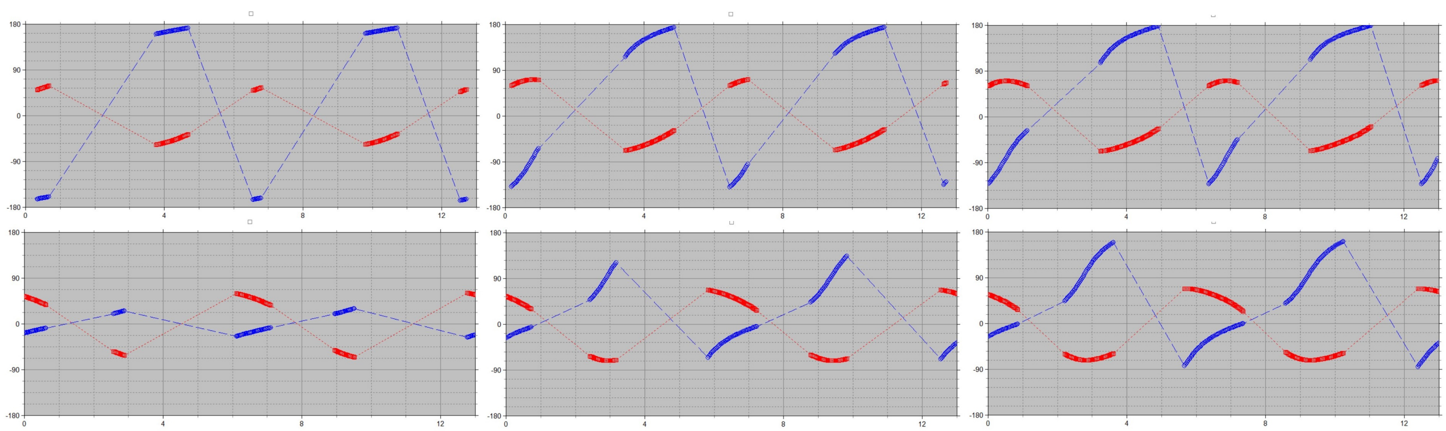

Figura 5.9: $t_0 = 142 + \pi$; In alto : $3a_{45}, 5a_{45}, 7a_{45}$; In basso : $3b_{45}, 5b_{45}, 7b_{45}$

Anche in questo caso si ottengono dei risultati in linea con le aspettative: l'aumento di ascensione retta (e quindi anche di argomento e anomalia) fa sì che gli angoli α non siano più centrati in corrispondenza di 0° e 180° per le manovre di, rispettivamente, accelerazione e frenata; infatti questi angoli risultano leggermente spostati verso angoli minori di 180° (per manovre di frenata) e maggiori di 0° (per manovre di accelerazione).
Si nota che, nel caso a $t_0 = 142$ si hanno rispettivamente 5 archi nel caso "a" e 4 archi nel caso "b". Si ha questo risultato perché, nel primo caso, si parte con una manovra di frenata nella quale viene diminuita l'energia $\mathcal{E} = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r}$; per cui, di conseguenza, aumenta la velocità angolare e si riesce a fare un "mezzo giro" in più rispetto al caso ad $a = 1.05$ nello stesso arco temporale di 2 anni.

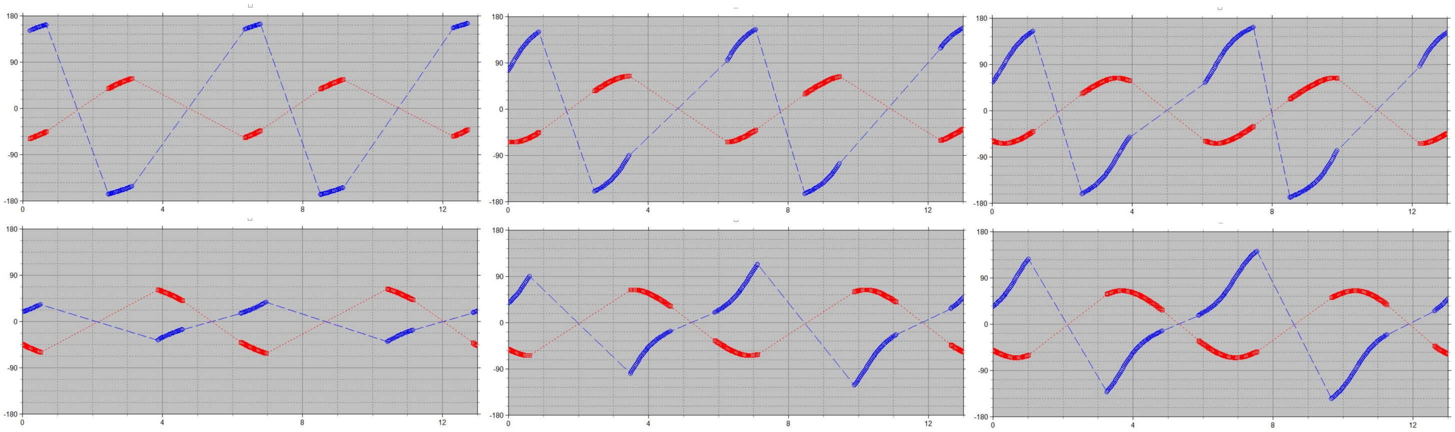

Figura 5.10: $t_0 = 142$; In alto : $3a_{90}, 5a_{90}, 7a_{90}$; In basso : $3b_{90}, 5b_{90}, 7b_{90}$

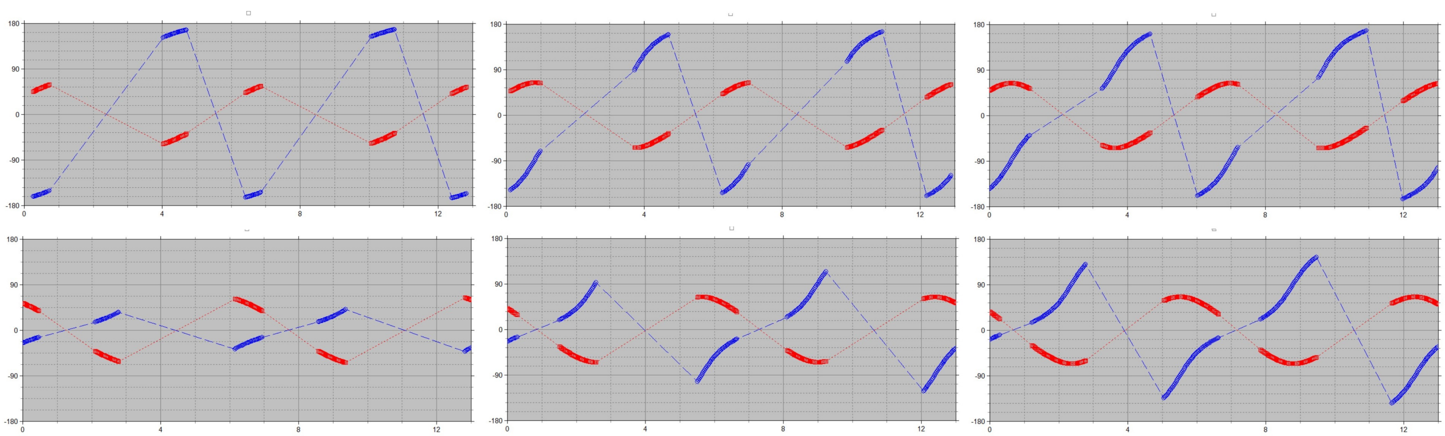

Figura 5.11: $t_0 = 142 + \pi$; In alto : $3a_{90}, 5a_{90}, 7a_{90}$; In basso : $3b_{90}, 5b_{90}, 7b_{90}$

Anche per $\omega = 90°$ si ottengono risultati in linea con le aspettative: si riscontrano gli stessi effetti trovati sugli archi a $\omega = 45°$ (spinta più inclinata sia dentro che fuori dal piano) ma ancora più accentuati.
Nel caso di manovre per orbite a $i = 0.03$ rad, si ha una variazione di α che, nel caso di $\omega = 45°$, si aggira intorno ai $-15°$, mentre per $\omega = 90°$ si sale fino a circa $-20°$.
Si riscontrano variazioni più importanti di α per manovre ad i più elevata: nel caso di manovre per orbite a $i = 0.07$ rad infatti, si ha, per $\omega = 45°$ un $\Delta\alpha \simeq -36°$ e per $\omega = 90°$ invece, $\Delta\alpha \simeq -72°$, addirittura il doppio.

5.3.3 $i = 0\ rad = cost$

In questo range di prove la convergenza è stata molto più complicata da raggiungere rispetto alle altre prove finora fatte; infatti si sono dovuti tollerare errori di qualche ordine di grandezza maggiori rispetto a tutti gli altri test. Tuttavia questi errori sono piuttosto "piccoli", perciò la soluzione trovata è da considerarsi comunque accettabile.
Infatti i risultati sono anche qui in linea con le aspettative perché si identifica ancora il trend delle prove precedenti. (fig. 1.12-1.13).
Per questi valori di parametri orbitali è evidentemente necessario un minor numero di archi di spinta (solo tre,diversamente da quanto accadeva per gli altri test nei quali non si andava mai sotto i quattro archi di spinta), con l'angolo β stabilmente fisso a 0° dato che entrambe le orbite di arrivo e partenza sono caratterizzate da inclinazione nulla.

5.3.4 $i = 0.05\ rad = cost.$

Si identificano chiaramente 3 trend ben definiti:

- per $\omega = 0°$ (fig.1.14-1.15) gli archi sono posizionati in corrispondenza di afelio e perielio (e dunque anche dei nodi) e il valore di α si attesta su 180° o su 0°, in base al tipo di manovra che si intende effettuare: 180° se si vuole "frenare" (abbassamento degli apsidi), 0° se si intende "accelerare" (innalzamento degli apsidi)
- per $\omega = 90°$ (fig.1.18-1.19) gli archi si spostano dai nodi e il valore di α si discosta da quello visto per $\omega = 0°$
- per $\omega = 45°$ (fig. 1.16-1.17) si ha invece una situazione intermedia tra le due analizzate qui sopra

Per il resto,valgono tutte le considerazioni fatte in precedenza riguardo al valore degli angoli al variare di e, allo spostamento degli archi al variare di a e agli effetti dati dal posticipare la partenza di una mezza rivoluzione attorno al Sole.

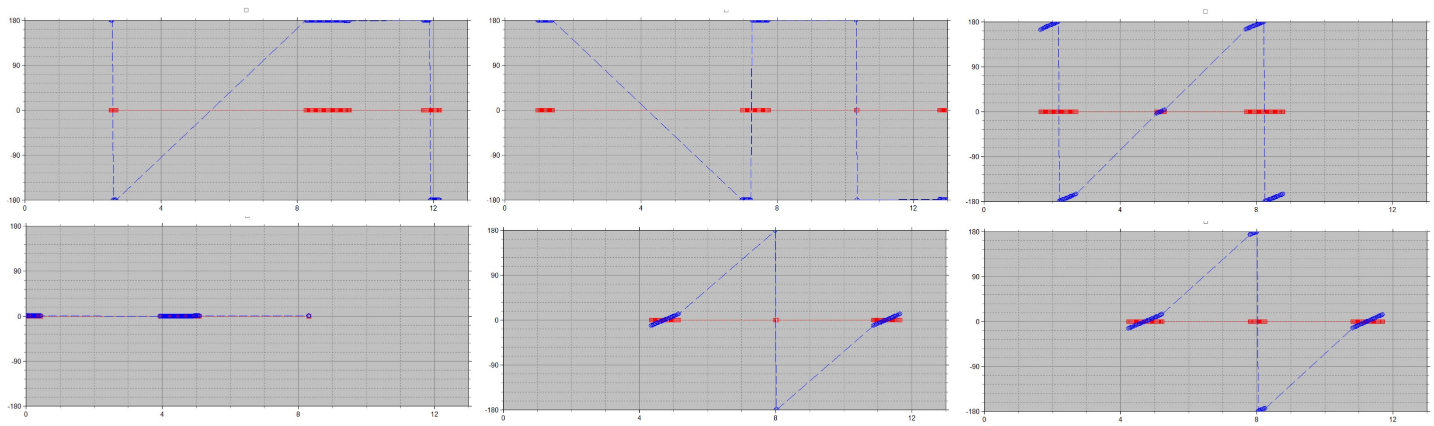

Figura 5.12: $t_0 = 146$; In alto : $3a_0, 5a_0, 7a_0$; In basso : $3b_0, 5b_0, 7b_0$

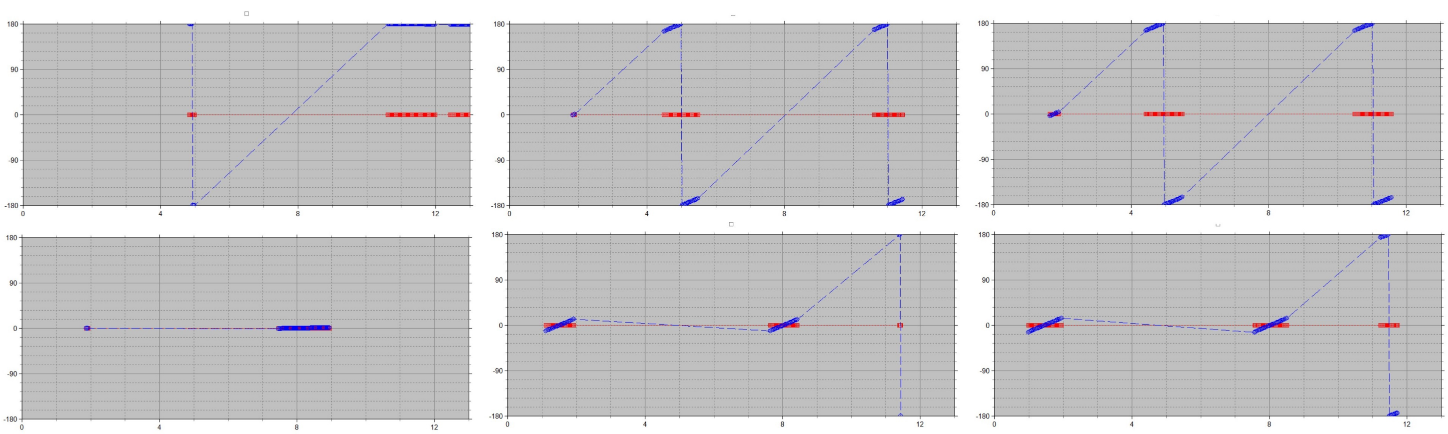

Figura 5.13: $t_0 = 146 + \pi$; In alto : $3a_0, 5a_0, 7a_0$; In basso : $3b_0, 5b_0, 7b_0$

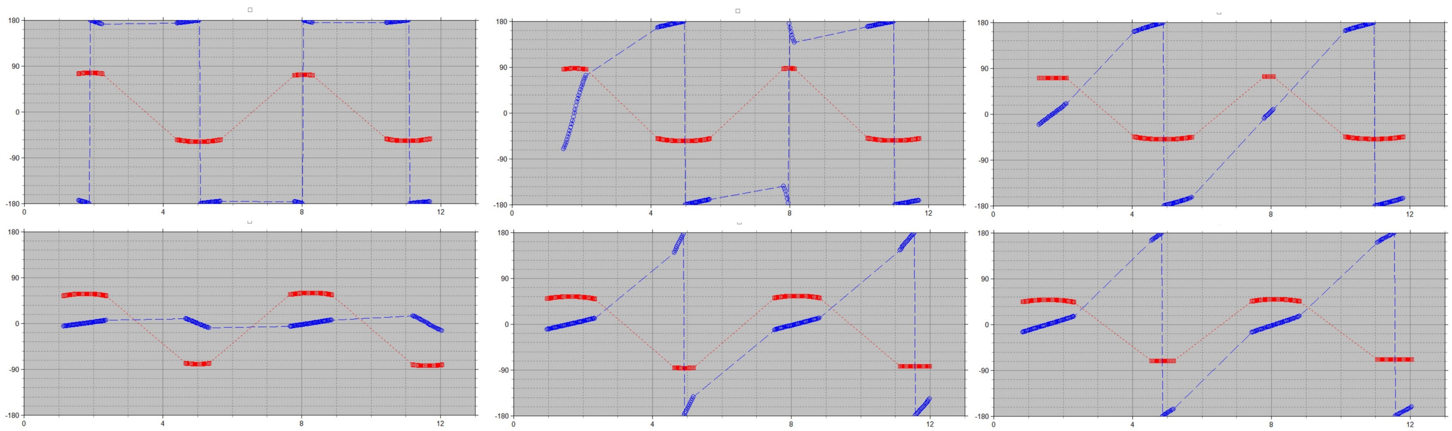

Figura 5.14: $t_0 = 142$; In alto : $3a_0, 5a_0, 7a_0$; In basso : $3b_0, 5b_0, 7b_0$

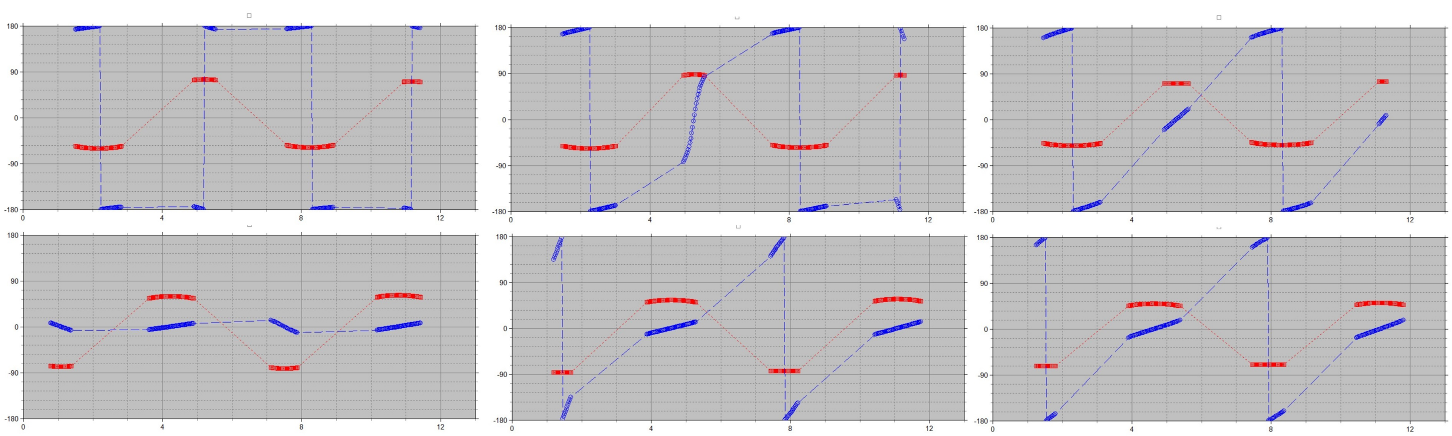

Figura 5.15: $t_0 = 142 + \pi$; In alto : $3a_0, 5a_0, 7a_0$; In basso : $3b_0, 5b_0, 7b_0$

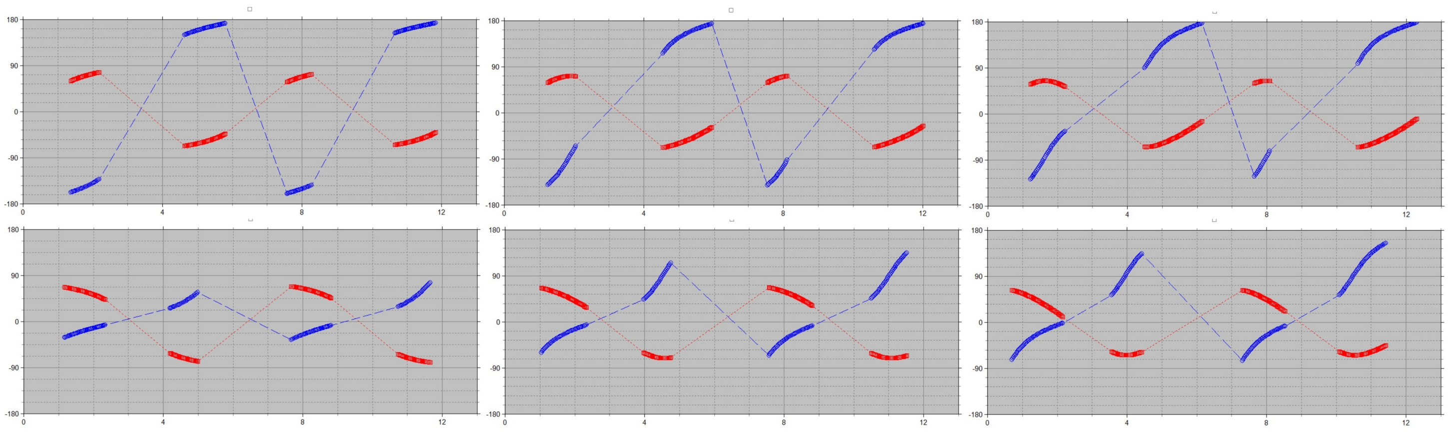

Figura 5.16: $t_0 = 142$; In alto : $3a_{45}, 5a_{45}, 7a_{45}$; In basso : $3b_{45}, 5b_{45}, 7b_{45}$

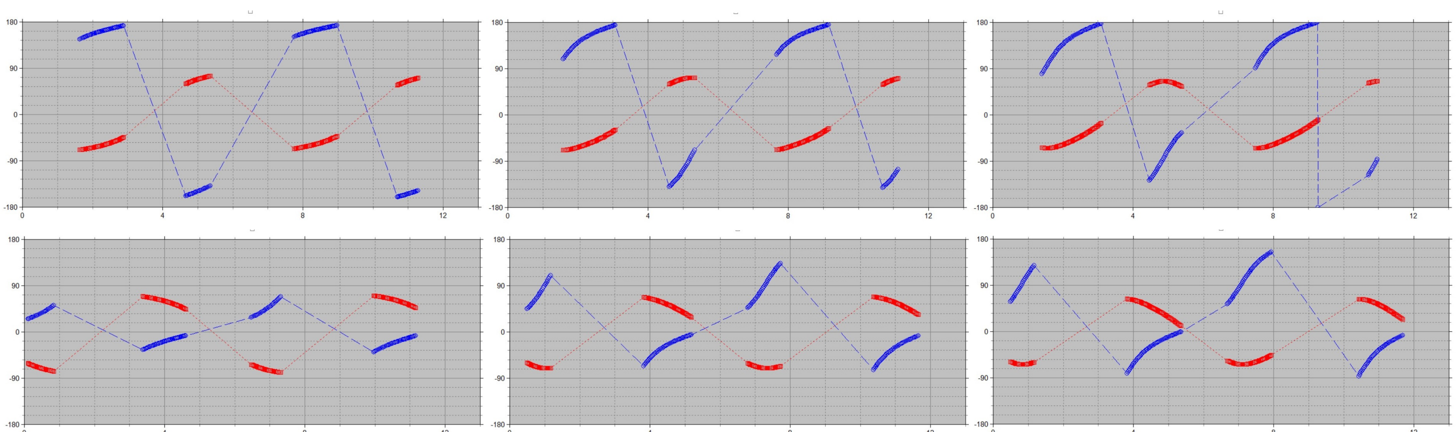

Figura 5.17: $t_0 = 142 + \pi$; In alto : $3a_{45}, 5a_{45}, 7a_{45}$; In basso : $3b_{45}, 5b_{45}, 7b_{45}$

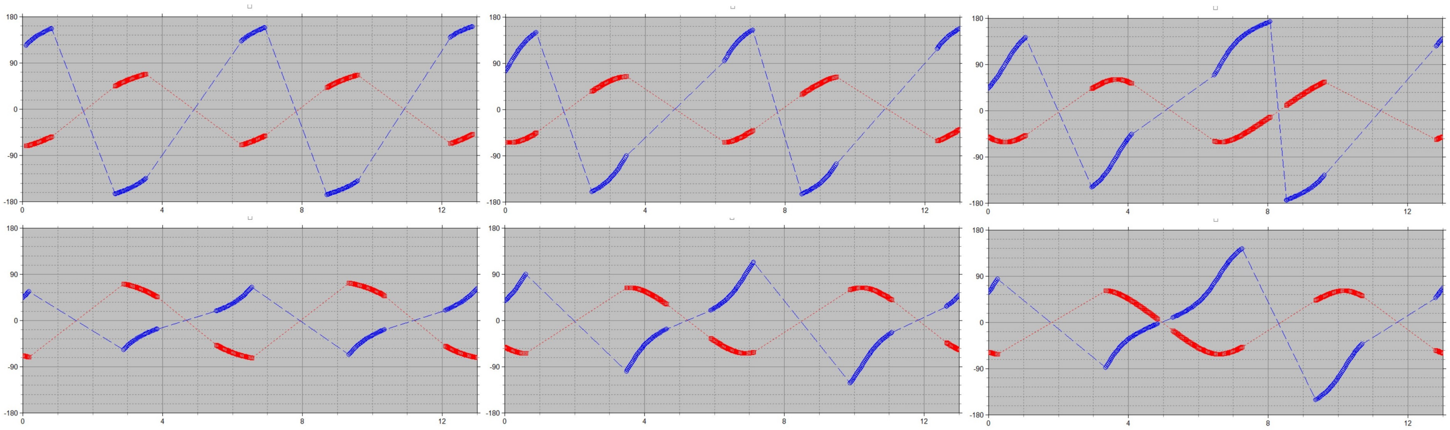

Figura 5.18: $t_0 = 142$; In alto : $3a_{90}, 5a_{90}, 7a_{90}$; In basso : $3b_{90}, 5b_{90}, 7b_{90}$

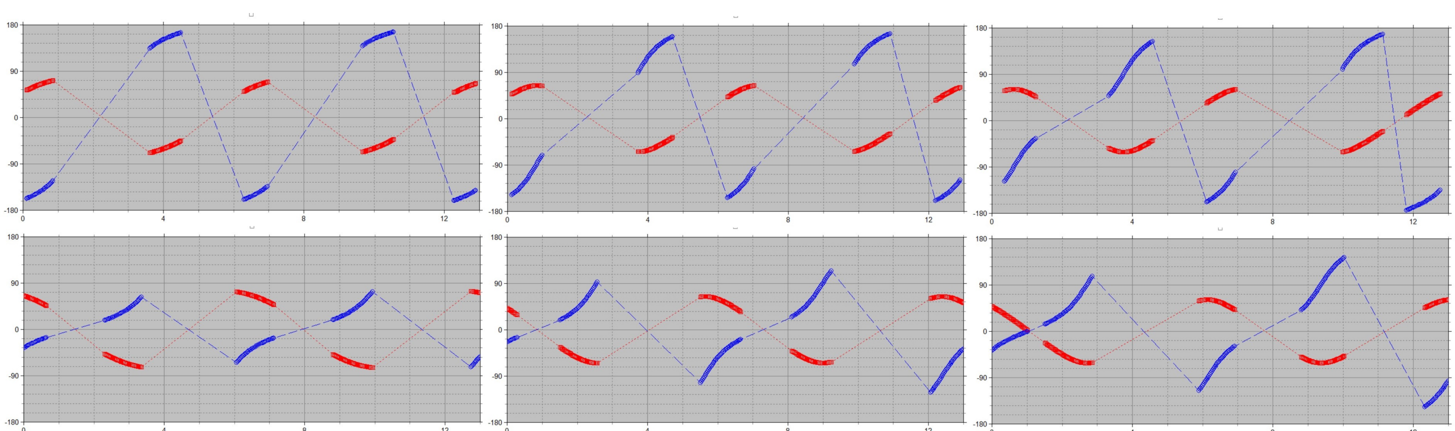

Figura 5.19: $t_0 = 142 + \pi$; In alto : $3a_{90}, 5a_{90}, 7a_{90}$; In basso : $3b_{90}, 5b_{90}, 7b_{90}$

Conclusioni

In questa tesi si è cercato di analizzare e giustificare scientificamente le caratteristiche delle soluzioni ottenute dagli ormai noti metodi indiretti, applicati in un problema di ottimo. In particolare, il problema in questione consisteva nel ricercare le traiettorie ottimali (in questo caso quelle caratterizzate da una massa finale dello spacecraft più elevata possibile) necessarie a far compiere allo spacecraft delle piccole variazioni di orbita.
Per questo motivo, ci si è interrogati sull'influenza di una variazione dei parametri orbitali dell'orbita di arrivo, introducendo dunque degli asteroidi fittizi che assolvessero tale funzione e lasciando fuori l'influenza data dalla durata della missione, fissata a due anni. Inizialmente lo studio si è concentrato sugli effetti che queste variazioni di parametri avessero sulla massa finale: ovviamente, più aumentano le differenze con l'orbita iniziale, più propellente viene consumato.
Nella seconda parte, invece, si è posto l'accento sugli archi propulsi, cercando di capire come si spostassero lungo l'orbita e come ne cambiassero gli angoli α e β al variare dei soliti parametri orbitali. Anche in questo caso, il comportamento adottato dalle soluzioni è perfettamente in linea con le previsioni fatte considerando la teoria.
Si è riscontrata inoltre una certa difficoltà, da parte del codice, di riuscire a portare a convergenza una soluzione per il caso di variazione delle sole eccentricità e semiasse maggiore, rendendo necessaria una maggiore tolleranza degli errori.
Il proseguimento naturale di questo lavoro di tesi potrebbe essere sicuramente uno studio più approfondito dei cambiamenti di posizione degli archi di spinta al variare della posizione della linea degli apsidi, nonché della variazione degli angoli α (o meglio, del loro valore medio) di suddetti archi.
Infine risulterebbe molto interessante un utilizzo dei dati ottenuti tramite questi metodi per guidare la definizione di metodi approssimati, i quali costituirebbero una validissima alternativa ai metodi indiretti; essi infatti permetterebbero una stima comunque attendibile del costo di eventuali trasferte senza dover integrare e portare a convergenza il problema differenziale, cosa che renderebbe il processo di calcolo molto più snello.

Bibliografia

[1] NASA, Jet Propulsion Laboratory, *Asteroids*

[2] Masetti, M. & Mukai, K. *Origin of the Asteroid Belt*, Nasa Goddard Spaceflight Center, 2005

[3] Tholen, D. J. *Asteroid taxonomic classifications. Asteroids II.* Tucson: University of Arizona Press. pp. 1139–1150, 1989

[4] Zhang, C. *The tale of 2 asteroid sample-return missions*, Chemical & Engineering News, 96-39, 2018

[5] Lewis, J.S. *Mining the Sky: Untold Riches from the Asteroids, Comets, and Planets*, Perseus, 1997

[6] Canavan, G. H. & Solem, J. *Interception of near-Earth objects*, 1992

[7] Bate, R. R. , Mueller D.D. & White, J.E. *Fundamentals of Astrodynamics*, Dover Publications, 1971

[8] Colasurdo, G. & Avanzini, G. *Astrodynamics,III Edition*, (pp. 52-53), 2007

[9] Lawrence, C. E. *An Introduction to Mathematical Optimal Control Theory Version 0.2*, University of California, Berkeley

[10] Casalino, L. *Equazioni in coordinate sferiche*

[11] Widnall, S., Peraire, J. *Other Coordinate Systems - Spherical Coordinates*, 2008

[12] The Planets, <https://theplanets.org/asteroid-belt/>

[13] ESA/Hubble, <https://www.spacetelescope.org/images/opo1540a/>

[14] CourseHero,<https://www.coursehero.com/study-guides/astronomy/asteroids/>

[15] NASA/JPL-Caltech, <https://www.jpl.nasa.gov/images/pia17041-orbits-of-potentially-hazardous-asteroids-phas>

[16] KES47 - European Space Agency, <it.wikipedia.org/wiki/Asteroide_near-Earth>