

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale
in Ingegneria Matematica

Tesi di Laurea Magistrale

Una formulazione secondo la “teoria gradiente” del comportamento anelastico di un tessuto bifasico



Relatori

prof. Alfio Grillo
dott. Alessandro Giammarini

firma dei relatori

.....
.....

Candidato

Andrea Pastore

firma del candidato

.....

Anno Accademico 2021-2022

Sommario

L'obiettivo di questa Tesi è di costruire un modello matematico che descriva i cambiamenti nella microstruttura di una particolare classe di sistemi biologici, noti come tessuti biologici, il cui comportamento meccanico è anelastico sotto le condizioni di carico tipicamente riscontrate sperimentalmente. Nella nostra descrizione, un tessuto biologico è studiato come un mezzo bifase, costituito da una fase solida, comprendente le cellule, i filamenti proteici e la matrice extracellulare, e una fase fluida, che rappresenta il fluido interstiziale.

A tal scopo, iniziamo con il richiamare alcuni concetti di Geometria Differenziale e di Analisi Funzionale, in quanto sono gli strumenti più naturali per formalizzare la Meccanica dei Continui. In seguito, presentiamo la formulazione classica della cinematica delle miscele bifasi, in cui la fase solida è ipotizzata avere un comportamento elastoplastico. Una volta che la cinematica è descritta, per dualità introduciamo le forze generalizzate agenti sul sistema in esame, e facciamo ricorso al *Principio delle Potenze Virtuali* per ottenere le corrispondenti equazioni dinamiche [1]. Infine, per chiudere il modello matematico, specifichiamo l'insieme delle leggi costitutive per le forze interne generalizzate, in accordo con gli assiomi della teoria delle relazioni costitutive. Seguendo questo paradigma, siamo in grado di descrivere sia il flusso del fluido interstiziale sia la risposta elastoplastica della fase solida, che comprende il moto e l'evoluzione delle distorsioni plastiche. Queste ultime soddisfano una equazione differenziale tensoriale ordinaria, nota, in letteratura, come la *legge di flusso*.

Sebbene tutto ciò sia piuttosto standard (si veda, per esempio, [2] per una rassegna e [3] per la *“poro-meccanica a secondo gradiente”*), utilizziamo le equazioni ottenute mediante questo approccio come base per il confronto con il caso in cui la risposta plastica della fase solida sia di tipo *“gradiente”* [4]. Questo è, infatti, l'argomento principale e il risultato più significativo della Tesi, la quale adatta la *“teoria gradiente”* [4] di Gurtin&Anand della elastoplasticità al contesto delle miscele bifasi e lo specializza alla caratterizzazione di un tessuto biologico. Una delle differenze chiave rispetto all'approccio classico è che il campo tensoriale che descrive le trasformazioni strutturali emerse grazie alla plasticità non è più visto come una variabile interna, in quanto, ora, viene considerato come un descrittore cinematico. Pertanto, essa ha il diritto di avere una forza duale generalizzata ed una equazione dinamica associata, determinata grazie al Principio delle Potenze Virtuali. Questa equazione viene chiusa mediante l'introduzione di relazioni costitutive appropriate, che portano ad una equazione differenziale tensoriale alle derivate parziali nella variabile di struttura stessa, mentre il fluido è ipotizzato seguire la legge di Darcy.

Infine, per poter osservare se e come il modello secondo la *“teoria gradiente”* possa risolvere meglio gli effetti di bordo, testiamo e confrontiamo i due modelli di rimodellamento simulando test di indentazione e torsione, utilizzando il software commerciale COMSOL®.

Ringraziamenti

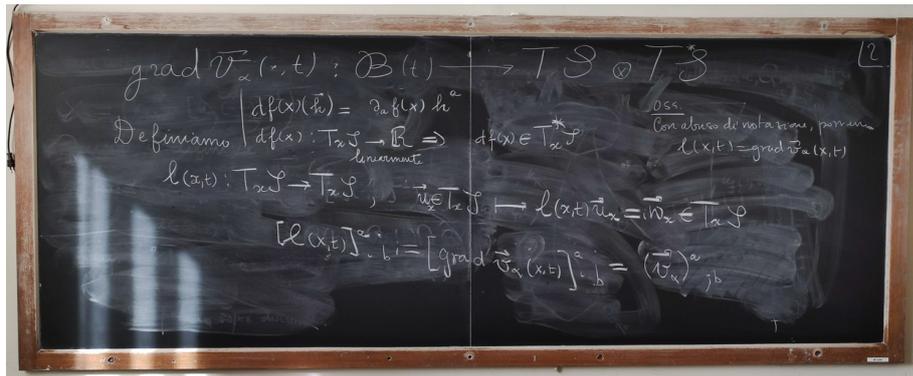
Vorrei ringraziare, innanzitutto, il mio relatore, ossia il Prof. Alfio Grillo, in quanto, fin dal primo incontro nel corso di *Metodi Variazionali e Applicazioni*, si è rivelato essere una vera e propria guida scientifica per me ed è grazie a lui che mi sono appassionato alla Meccanica Analitica e alla Meccanica dei Continui. Aver avuto la possibilità di entrare a far parte del suo gruppo, e collaborare nel suo progetto di Ricerca, è stata per me una occasione di grande crescita, non solo in ambito scientifico, ma anche nel comprendere cosa significa “lavorare in gruppo”. Inoltre, vorrei ringraziare il Dott. Alessandro Giammarini per il prezioso aiuto che mi ha dato durante la stesura della Tesi e durante i vari pomeriggi passati a riempire di calcoli la piccola lavagnetta della biblioteca.

Vorrei ringraziare tutti i miei compagni di corso con i quali, in questi cinque anni, ho avuto possibilità di conoscere e di legare, creando amicizie che dureranno ben oltre il fine dell’Università. Vorrei ringraziare, in particolare, i miei amici e colleghi Nicole, Rosario, Francesco, Giulio, Alessandro, Davide, Ciro, Alessia e tanti altri.

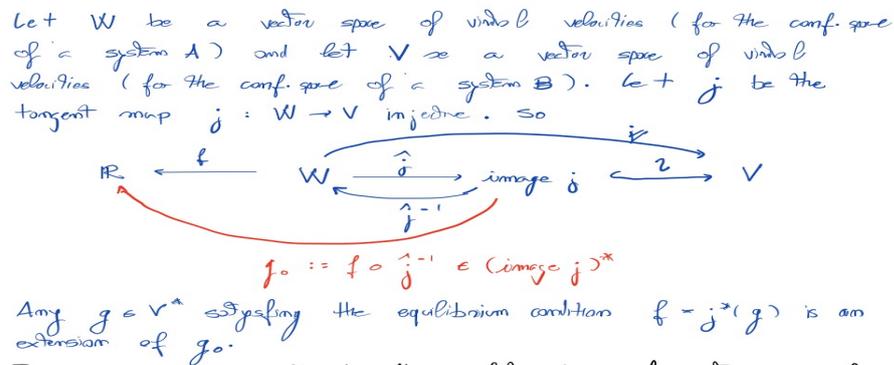
Vorrei ringraziare anche i miei amici di infanzia Alberto, Arianna e Federica con i quali, sebbene le scelte diverse fatte negli anni, ho sempre potuto contare su di loro nei momenti di difficoltà. Inoltre, vorrei ringraziare i miei amici che ho conosciuto durante il Liceo e nei primi anni di Università, ossia Daniele, Claudio, Teodora, Miriam, Stefano, Kevin, Andrea C., Gianluca, Gabriele, Andrea R., Andrea S., Federica, Simone e tanti altri, con i quali ho instaurato delle vere e sincere amicizie.

Vorrei ringraziare mia mamma Daniela e mio papà Franco, non solo per avermi permesso di potermi iscrivere all’Università e avermi sostenuto nei momenti difficili dell’Università e della vita, ma per avermi insegnato i valori più importanti nella vita, ossia la disponibilità e il rispetto del prossimo. Ringrazio, in particolare, i miei nonni Piera, Nicola, Gio, il mio prozio Nando, i miei zii Barbara, Elisa, Massimo e Paolo e i miei cugini Alessia, Alessandro e Gabriele, per essere stati sempre vicini e pronti a sostenermi nei momenti difficili dell’Università e della vita.

Infine, vorrei ringraziare la mia migliore amica e fidanzata Giulia che è la persona che mi è stata più vicina di tutte in questi cinque anni e che mi ha aiutato a dare sempre il meglio di me. Assieme a lei, ringrazio anche suo papà Mario, sua mamma Adriana e la sua nonna Anna, che mi hanno accettato come un “secondo figlio” nelle loro vite.



(a) In Figura 1a è riportata una delle prime lavagne scritte assieme al Prof. Alfio Grillo e al Dott. Alessandro Giammarini durante la prima consulenza svolta per la Tesi. In particolare, si discuteva sul fatto che il gradiente di una funzione scalare f sia il vettore rappresentate il differenziale df , che è un covettore, rispetto al *teorema di rappresentazione di Riesz* [5].



(b) In Figura 1b, invece, è riportata una delle pagine di appunti che presi durante le spiegazioni del Prof. Reuven Segev per il corso di dottorato “*Introduction to Geometric Continuum Mechanics (didattica di eccellenza)*”, offerto dal programma di dottorato con il titolo di “Dottorato di Ricerca in Matematica e Pura ed Applicata” (PoliTo, UniTo). In particolare, nell’immagine è riportato come il teorema di Hahn-Banach possa essere usato per definire gli *stress interni* [1, 6, 7].



(c) Nella Figura 1c, infine, viene fotografato il cortile dell’Università della Svizzera Italiana (USI), a Lugano (Svizzera), dove si è tenuto il congresso “*International Multigrid Conferenze 2022 (IMG2022)*” dal 22 al 26 Agosto 2022. Per il suddetto congresso sono stato invitato a presentare un *talk* [8], basato sul lavoro svolto in questa Tesi, all’interno del Minisimposio “*New challenges in the Modeling and Numerics of meta-materials and biological, industrial and geological multi-scale media*”, organizzato dal Dr. Ariel Ramírez-Torres e dal Prof. Alfio Grillo.

Figura 1: Alcune immagini rappresentative del lavoro svolto e degli avvenimenti più salienti avvenuti durante il periodo in cui si è preparata questa Tesi Magistrale.

Indice

Elenco delle tabelle	7
Elenco delle figure	8
1 Introduzione	11
2 Richiami di Geometria Differenziale e cinematica	13
2.1 Richiami di Geometria Differenziale	13
2.2 Varietà materiali e configurazioni	25
2.3 Approccio lagrangiano alla cinematica	30
2.4 Cinematica del rimodellamento	34
3 Dinamica classica delle miscele bifasiche	39
3.1 Bilancio di massa di fase	39
3.2 Principio delle Potenze Virtuali	45
3.2.1 Forma euleriana delle equazioni dinamiche	45
3.2.2 Forma lagrangiana delle equazioni dinamiche	52
3.3 Dissipazione	54
3.3.1 Forma euleriana della dissipazione	55
3.3.2 Forma lagrangiana della dissipazione	58
3.4 Ipotesi costitutive	59
3.5 Legge di flusso plastico standard	65
4 Teoria gradiente per un continuo monofasico	71
4.1 Principio delle Potenze Virtuali	71
5 Estensione della “teoria gradiente” al caso di miscele bifasiche	77
5.1 Principio delle Potenze Virtuali	77
5.1.1 Forma euleriana delle equazioni dinamiche	77
5.1.2 Forma lagrangiana delle equazioni dinamiche	84
5.1.3 Ipotesi di Gurtin&Anand sulla plasticità	85
5.2 Dissipazione	86
5.2.1 Forma euleriana della dissipazione	87
5.2.2 Forma lagrangiana della dissipazione	88
5.3 Ipotesi costitutive	89
5.4 Legge di flusso secondo “teoria gradiente”	93
6 Problemi <i>benchmark</i>	103
6.1 Riepilogo dei modelli nel caso bifasico	103
6.1.1 <i>Benchmark</i> : Indentazione in controllo di carico	104
6.1.2 <i>Benchmark</i> : Torsione in controllo di spostamento	110

6.2	Riepilogo dei modelli nel caso monofasico	116
6.2.1	<i>Benchmark</i> : Indentazione in controllo di carico	117
7	Conclusioni	121
A	Trasposti per tensori del terzo ordine	123

Elenco delle tabelle

6.1	Parametri materiali utilizzati nelle simulazioni del problema <i>benchmark</i> di indentazione per il confronto dei modelli ODE e PDE degli specchietti precedenti.	107
6.2	Parametri materiali utilizzati nelle simulazioni del problema <i>benchmark</i> di torsione per il confronto dei modelli ODE e PDE degli specchietti precedenti.	112
6.3	Parametri materiali utilizzati nelle simulazioni del problema <i>benchmark</i> di indentazione per il confronto dei modelli ODE e PDE degli specchietti precedenti.	119

Elenco delle figure

1	Alcune immagini rappresentative del lavoro svolto e degli avvenimenti più salienti avvenuti durante il periodo in cui si è preparata questa Tesi Magistrale.	4
2.1	Rappresentazione grafica di come la decomposizione moltiplicativa per il gradiente di deformazione $\mathbf{F}(X, t)$ collega gli spazi tangenti dei due piazzamenti con lo stato naturale [9, 10].	36
6.1	Problema <i>benchmark</i> di indentazione per il modello bifasico, dove viene rappresentata in rosso la linea di indentazione e il corrispondente carico applicato.	105
6.2	Programma di carico nel problema <i>benchmark</i> di indentazione. In particolare, i pallini rossi in figura corrispondono agli istanti di tempo più salienti per la simulazione che sono rappresentati nelle figure successive.	105
6.3	Confronto dello spostamento verticale del punto centrale della linea di indentazione nel caso del modello standard e di quello secondo “teoria gradiente” [4].	108
6.4	Grafico della pressione sulla sezione verticale centrale del provino ortogonale alla linea di indentazione. A tempo fissato, si osserva un comportamento qualitativamente simile nei due modelli. La pressione è leggermente minore nel caso PDE rispetto a quello ODE .	109
6.5	Problema <i>benchmark</i> di torsione per il modello bifasico, dove viene applicata sulla faccia superiore, contornata in rosso, la torsione piana come espresso nelle Equazioni (6.1.18a)-(6.1.18c).	110
6.6	Programma dell’angolo imposto nel problema <i>benchmark</i> di torsione. I pallini rossi in figura corrispondono agli istanti di tempo più salienti per la simulazione che sono rappresentati nelle figure successive.	110
6.7	Grafico della norma di Frobenius del tensore di Burgers, ossia $\ \mathfrak{B}\ $ su una sezione verticale centrale. Si osserva un accumulo alla base delle incompatibilità delle distorsioni anelastiche, le quali comportano una maggiore dissipazione alla base.	113
6.8	Profili di pressione sulla sezione verticale centrale del corpo ortogonale alla linea di indentazione nel caso del modello ODE e PDE . Si osserva lo sviluppo di una “bolla di pressione” [11, 12] nel modello ODE la quale non si forma nel caso del modello PDE .	114
6.9	Confronto tra l’andamento nel tempo della pressione p e della porosità φ_f tra il modello standard ODE e quello secondo la “teoria gradiente” PDE al centro del provino. Si osserva che il modello PDE qualitativamente ammette un comportamento della fase fluida più simile a quello di un caso in cui non è presente rimodellamento rispetto al caso rappresentato dal modello ODE .	115
6.10	Problema <i>benchmark</i> di indentazione per il modello monofase, dove è rappresentata in rosso la linea di indentazione e il carico applicato.	117
6.11	Programma di carico nel problema <i>benchmark</i> di indentazione, dove il pallino rosso corrisponde all’istante di tempo finale per la simulazione.	117

6.12 Confronto della deformazione residua della linea di indentazione nel caso del continuo monofase, dove nel modello **PDE** si osserva un maggiore recupero della deformazione e una più alta regolarità della superficie. 119

Capitolo 1

Introduzione

Nell'ambito della biomeccanica teorica e computazionale, un problema di interesse biologico e ingegneristico è lo studio della risposta meccanica di una particolare classe di tessuti biologici, ad esempio, gli aggregati multicellulari, ad *azioni* meccaniche esterne. I tessuti biologici che sono trattati nella Tesi sono modellati nell'ambito della Teoria delle Miscele [13, 14, 15] come dei sistemi bifasici, comprendenti una fase solida ed una fluida. In particolare, durante le prove di compressione [16, 17, 18], si osserva che i tessuti biologici in esame esibiscono una risposta meccanica di tipo elastoplastico, manifestando delle deformazioni residue a fine processo. Questo fenomeno può essere imputabile ad un *cambiamento irreversibile nella microstruttura* dello scheletro solido del tessuto ed è noto, nella comunità di Biomeccanica, con il nome di *rimodellamento della microstruttura* [19].

Uno degli aspetti di interesse nella modellazione dei tessuti biologici precedentemente descritti è un tipo particolare di interazione, che nasce grazie all'azione congiunta del moto del fluido e degli effetti anelastici di rimodellamento, che si osserva al bordo del tessuto. Queste interazioni, dette *effetti di bordo*, si manifestano, in particolare, nelle porzioni maggiormente interessate dall'accumulo di *difetti*, o *incompatibilità*, nella microstruttura [20, 21, 22, 23, 4], e comportano, in tali porzioni, e secondo quanto da noi osservato, un comportamento della fase solida più duttile rispetto che altrove. Tali effetti di bordo sono particolarmente ostici da catturare per alcuni modelli di plasticità, come quelli di tipo J_2 [24, 25, 9], in cui il rimodellamento è un fenomeno che viene *risolto* solo “temporalmente” e non anche “spazialmente”.

Un modo possibile, ed elegante, che permette di catturare gli effetti di bordo è quello di utilizzare dei modelli di *ordine superiore*, ossia quelli secondo una “teoria gradiente” per la plasticità [23, 4]. Infatti, tali modelli permettono di ottenere le equazioni associate al rimodellamento in *dualità*, secondo il Principio delle Potenze Virtuali [26], rispetto ad una cinematica *arricchita*, ossia contemplante la variabile di rimodellamento e il suo gradiente.

L'obiettivo di questa Tesi è quello di estendere e generalizzare il modello di plasticità secondo la “teoria gradiente” [4], sviluppata da Gurtin&Anand nel contesto di materiali duttili, come gli acciai, al caso di un tessuto biologico bifasico. Sotto le ipotesi di Gurtin&Anand [4], alcuni degli aspetti chiave che verranno affrontati nella Tesi sono l'introduzione di una energia dei difetti nel solido, [22, 23, 4], l'assegnazione di opportune leggi costitutive per le forze generalizzate associate alla microstruttura [23, 4] e la riformulazione dei modelli in [23, 4] secondo il linguaggio della Geometria Differenziale [6, 27, 28].

Nella parte conclusiva della Tesi, sono riportati alcuni problemi *benchmark* che abbiamo implementato nel software commerciale COMSOL Multiphysics® [29, 30] per poter confrontare il modello in “teoria gradiente” con un modello standard di plasticità di tipo J_2 alla Perzyna [9]. In particolare, si vuole mostrare che, nel caso in cui sono manifeste le incompatibilità prodotte dal rimodellamento, gli effetti di bordo saranno catturati solamente dal

modello secondo la “teoria gradiente”.

In questa Tesi sono trattati temi scientifici che sono attualmente parte di un programma di ricerca ideato e condotto dal Prof. Alfio Grillo, dal Dott. Alessandro Giammarini, dal Dr. Ariel Ramírez Torres e dal sottoscritto. Alcuni dei risultati preliminari di tale ricerca sono stati presentati nei sommari

- [8] Pastore, A., Giammarini, A., Grillo, A.: “A comparison between a standard and a “gradient theory” formulation of anelastic deformations of biphasic tissues” [abstract]. In: International Multigrid Conference 2022 (IMG2022); 2022 Agosto 22-26; Lugano, Svizzera.
- [31] Giammarini, A., Pastore, A., Ramírez Torres, A., Grillo, A.: “A constrained formulation of remodelling for biphasic systems” [abstract]. In: International Multigrid Conference 2022 (IMG2022); 2022 Agosto 22-26; Lugano, Svizzera.

In particolare, i risultati riportati nel secondo sommario verranno estesi e, auspicabilmente, messi nel formato di un manoscritto da sottoporre ad una rivista scientifica di settore.

Struttura della Tesi:

- Nel Capitolo 2 sono richiamati alcuni fondamenti della Geometria Differenziale, in cui è dato particolare rilievo all’algebra tensoriale nel formalismo covariante. In seguito, in riferimento alla Teoria delle Miscele [15, 13], si è descritta la cinematica delle miscele bifasiche, in entrambe le sue descrizioni *euleriana* e *lagrangiana*. Infine, è stata presentata la modellazione del fenomeno del rimodellamento della struttura interna, mediante l’introduzione delle distorsioni anelastiche e della decomposizione [9, 10].
- Nel Capitolo 3, dopo una breve discussione sui bilanci di massa, viene studiata la dinamica delle miscela bifasiche dove, in *dualità* alla cinematica, sono dichiarate le forze generalizzate duali interne ed esterne [26, 32, 33]. In particolare, si descrive il caso di una cinematica “standard”, ossia priva di descrittori cinematici associati al rimodellamento. In seguito, mediante lo studio della dissipazione della miscela, si dichiarano le leggi costitutive per le forze duali interne, richiedendo una fase solida iperelastica ed flusso alla Darcy per la fase fluida [34, 14, 35, 12]. Infine, viene presentato un modello “standard” per l’evoluzione della variabile associata al rimodellamento nell’ambito della plasticità di tipo J_2 alla Perzyna [18, 36, 35, 12].
- Nel Capitolo 4 si introduce la “teoria gradiente” per gli effetti anelastici di Gurtin&Anand nel caso di deformazioni finite [4] per un continuo monofasico, in cui si *arricchisce* la cinematica promuovendo la variabile associata al rimodellamento, e il suo gradiente, al grado di descrittori cinematici [4, 31, 8, 37]. Per dualità, si introducono delle forze generalizzate associate alla variabile di microstruttura e, mediante il Principio delle Potenze Virtuali [26, 4], si sono ottenute delle nuove equazioni dinamiche per il rimodellamento.
- Nel Capitolo 5 viene generalizzata ed estesa la teoria di Gurtin&Anand [4], esposta nel Capitolo 4, al caso di una miscela bifasica [37, 31, 8], aggiornando la sua lista di descrittori cinematici come prescritto nel Capitolo 4. Adattando le ipotesi costitutive fatte in [4] alla nostra scelta dei descrittori cinematici, si ottiene, infine, un modello di plasticità secondo “teoria gradiente” per la plasticità in una miscela bifasica.
- Nel Capitolo 6, infine, sono posti a confronto i due modelli di plasticità “standard” e secondo “teoria gradiente” nel di un continuo monofasico e bifasico. Si sono implementati nel software commerciale COMSOL® [29, 30] dei problemi *benchmark* di indentazione e di torsione su un provino del materiale in esame [8].

Capitolo 2

Richiami di Geometria Differenziale e cinematica

2.1 Richiami di Geometria Differenziale

La teoria delle miscele bifasiche trattata in questa Tesi viene presentata utilizzando diversi concetti e strumenti propri della Geometria Differenziale [6, 38, 39, 40]. Citando¹ [6]:

“Il linguaggio della Geometria Differenziale risulta essere il più adatto allo studio della Meccanica dei Continui, in quanto un corpo continuo, per essere tale, non necessita solamente di un essere un insieme continuo di punti, bensì ha anche bisogno di poter definire su di esso dei campi e di calcolarne i gradienti.”

Pertanto, il modo più naturale per lavorare in meccanica è di considerare i corpi continui come delle *varietà differenziabili*. Prima di introdurre tale concetto, occorre definire la continuità di una varietà in senso topologico. A tal proposito, forniamo la seguente definizione preliminare:

Definizione 2.1.1 (Spazio topologico di Hausdorff).

Uno spazio topologico è detto di Hausdorff se, per ogni coppia di punti distinti dello spazio, è possibile individuare, per ciascun punto della coppia, un intorno aperto disgiunto dall'intorno aperto associato all'altro punto della coppia stessa.

Definizione 2.1.2 (Varietà topologica di dimensione n [6]).

Dato uno spazio topologico di Hausdorff \mathcal{M} , e considerato lo spazio Euclideo n -dimensionale \mathbb{R}^n , con $n \in \mathcal{A}$ con \mathcal{A} sottoinsieme numerabile di \mathbb{N} , diciamo che \mathcal{M} è una *varietà topologica di dimensione n* se, per ogni punto di \mathcal{M} , esiste un intorno aperto di tale punto che può essere posto in corrispondenza biunivoca con un insieme aperto di \mathbb{R}^n . Tale proprietà può essere anche espressa dicendo che, se esiste una famiglia di insiemi aperti $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$, con $\mathcal{U}_\alpha \subset \mathcal{M}$, $\forall \alpha \in \mathcal{A}$, che è un ricoprimento di \mathcal{M} , allora esiste anche una famiglia di omeomorfismi² $\{\phi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \rightarrow \phi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha) \subset \mathbb{R}^n\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$, ciascuno dei quali rappresenta la corrispondenza biunivoca tra l'insieme $\mathcal{U}_\alpha \subset \mathcal{M}$ e $\phi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$. Infine, per ogni $\alpha \in \mathcal{A}$, chiamiamo *carta* di \mathcal{M} la coppia $(\mathcal{U}_\alpha, \phi_\alpha)$, e chiamiamo *atlante* di \mathcal{M} l'insieme di tutte le carte di \mathcal{M} , ossia $\{(\mathcal{U}_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$.

¹Si noti che il seguente testo virgolettato è una traduzione dell'autore della Tesi.

²Si ricorda che un omeomorfismo tra due insiemi è un'applicazione biunivoca e continua tra due spazi topologici.

L'introduzione di una carta $(\mathcal{U}_\alpha, \phi_\alpha)$ definisce un sistema di *coordinate locali* “su” \mathcal{U}_α , poiché essa associa ciascun punto della varietà (che sono da considerare come *quantità intrinseche*) con una n -upla di numeri reali, che ne costituisce una possibile rappresentazione. In formule scriviamo:

$$\forall p \in \mathcal{U}_\alpha \quad \phi_\alpha(p) = \left(\phi_\alpha^1(p), \dots, \phi_\alpha^n(p) \right) \in \mathbb{R}^n. \quad (2.1.1)$$

Definizione 2.1.3 (Funzione di transizione [6, 27]).

Prese due carte $(\mathcal{U}_\alpha, \phi_\alpha)$ e $(\mathcal{U}_\beta, \phi_\beta)$, distinte e *sovrapponibili*, ossia con intersezione non banalmente non vuota, allora è possibile definire la composizione

$$\phi_{\alpha,\beta} := \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) \rightarrow \phi_\beta(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta), \quad (2.1.2)$$

che prende il nome di *funzione di transizione* [6, 27] e rappresenta un *cambio di coordinate*.

Osservazione 1 (Funzione di transizione e cambio di coordinate).

Si noti che, a rigore, i termini “funzione di transizione” e “cambio di coordinate” possono non essere intesi come sinonimi, poiché la funzione di transizione è, come da nome, una *funzione* che agisce come descritto nella Equazione (2.1.2), mentre il “cambio di coordinate” è l'azione che si deve compiere sugli elementi delle immagini delle restrizioni di ϕ_α e ϕ_β sull'intersezione $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$. Infatti, fissato $p \in \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$, e posto $\xi_\alpha = \phi_\alpha(p)$ e $\xi_\beta = \phi_\beta(p)$, la funzione di transizione è $\phi_{\alpha,\beta}$ come definita in (2.1.2), mentre il cambio di coordinate è $\xi_\beta = \phi_{\alpha,\beta}(\xi_\alpha)$. Inoltre, data l'invertibilità della funzione di transizione, è possibile individuare il cambio di coordinate inverso dato da $\xi_\alpha = \phi_{\beta,\alpha}(\xi_\beta)$ con $\phi_{\beta,\alpha} = \phi_{\alpha,\beta}^{-1}$.

L'introduzione del concetto di *funzione di transizione* nella Equazione (2.1.2), per una coppia di carte $(\mathcal{U}_\alpha, \phi_\alpha)$ e $(\mathcal{U}_\beta, \phi_\beta)$, permette di lavorare con funzioni su \mathbb{R}^n , per le quali, grazie all'Analisi Matematica, la nozione di *differenziabilità* è nota. Si ha, dunque, la seguente:

Definizione 2.1.4 (Compatibilità tra carte [6]).

Data una varietà topologica \mathcal{M} , e date due carte di \mathcal{M} , indicate con $(\mathcal{U}_\alpha, \phi_\alpha)$ e $(\mathcal{U}_\beta, \phi_\beta)$, per le quali è possibile definire le funzioni di transizione $\phi_{\alpha,\beta}$ e $\phi_{\beta,\alpha}$, diciamo che le due carte sono C^k -compatibili, con $k \in \mathbb{N}$, se $\phi_{\alpha,\beta} \in C^k[\phi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)]$ e $\phi_{\beta,\alpha} \in C^k[\phi_\beta(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)]$. Inoltre, diciamo che le due carte sono C^∞ -compatibili se $\phi_{\alpha,\beta} \in C^\infty[\phi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)]$ e $\phi_{\beta,\alpha} \in C^\infty[\phi_\beta(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)]$. Infine, nel caso in cui le due carte non ammettono funzioni di transizione, diciamo *convenzionalmente* che le due carte sono C^k -compatibili per ogni $k \in \mathbb{N}$ arbitrario.

Definizione 2.1.5 (Compatibilità tra atlanti [6]).

Data una varietà topologia \mathcal{M} e dato un atlante di \mathcal{M} , indicato con $\{(\mathcal{U}_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$, diciamo che l'atlante è di *classe* C^k se, per ogni coppia di carte dell'atlante, le carte della coppia sono C^k -compatibili tra loro. Inoltre, due atlanti di \mathcal{M} di classe C^k , indicati con $\{(\mathcal{U}_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ e $\{(\mathcal{V}_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta \in \mathcal{B}}$, con $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbb{N}$, si dicono *compatibili* se l'atlante definito da $\{(\mathcal{U}_1, \phi_1), \dots, (\mathcal{V}_1, \psi_1), \dots\}$ è ancora di classe C^k .

Definizione 2.1.6 (Atlante massimale [6]).

Data una varietà topologica \mathcal{M} , supponiamo che esistano atlanti di \mathcal{M} tali da essere C^k -compatibili tra loro. Considerata la totalità dei suddetti atlanti, definiamo *atlante massimale* di classe C^k di \mathcal{M} come l'unione di tutti gli atlanti della totalità considerata.

Definizione 2.1.7 (Varietà differenziabile di dimensione n [6]).

Data una varietà topologica \mathcal{M} di dimensione n , con $n \in \mathbb{N}$, diciamo che essa è una *varietà differenziabile* di dimensione n se essa è dotata di un atlante massimale di classe C^k con $k \in \mathbb{N}$. Inoltre, nel caso in cui l'atlante massimale sia di classe C^∞ , diciamo che \mathcal{M} è una *varietà liscia*.

Definizione 2.1.8 (Varietà differenziabile prodotto [6]).

Date \mathcal{M} varietà differenziabile m -dimensionale e \mathcal{N} varietà differenziabile n -dimensionale, siano $\{(\mathcal{U}_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ e $\{(\mathcal{V}_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta \in \mathcal{B}}$, con $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbb{N}$, gli atlanti massimali di classe C^k associati, rispettivamente, alle varietà differenziabili \mathcal{M} e \mathcal{N} . Indichiamo con $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ il prodotto cartesiano tra le varietà topologiche \mathcal{M} e \mathcal{N} , ossia

$$\mathcal{M} \times \mathcal{N} := \{(p, q) \mid p \in \mathcal{M}, q \in \mathcal{N}\}. \quad (2.1.3)$$

Si può dimostrare che $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ è una varietà topologica $(m + n)$ -dimensionale, detta *varietà topologica prodotto*. Inoltre, consideriamo l'insieme formato dalla totalità dei possibili prodotti cartesiani delle carte dell'atlante di \mathcal{M} con quelle dell'atlante di \mathcal{N} , ossia l'insieme $\{(\mathcal{U}_\alpha \times \mathcal{V}_\beta, (\phi_\alpha, \psi_\beta))\}_{\alpha \in \mathcal{A}, \beta \in \mathcal{B}}$ dove

$$(\phi_\alpha, \psi_\beta)(p, q) := (\phi_\alpha(p), \psi_\beta(q)), \quad \forall p \in \mathcal{M}, \quad \forall q \in \mathcal{N}. \quad (2.1.4)$$

Allora, si può dimostrare che tale totalità è un atlante massimale di classe C^k per la varietà topologica prodotto e, pertanto, dotando tale varietà con il suddetto atlante, si ha che $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ è anche una varietà differenziabile, detta *varietà differenziabile prodotto*. Infine, se le due varietà differenziabili \mathcal{M} e \mathcal{N} sono lisce, allora anche la varietà differenziabile prodotto $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ è liscia.

Definizione 2.1.9 (Rappresentazione in coordinate di una funzione [6]).

Siano \mathcal{M} e \mathcal{N} due varietà differenziabili di dimensione, rispettivamente, m e n , e sia $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ una funzione continua. Dati $p \in \mathcal{M}$ e $q = f(p) \in \mathcal{N}$, si può dimostrare che esistono sempre una carta (\mathcal{U}, ϕ) di \mathcal{M} contenente p ed una carta (\mathcal{V}, ψ) di \mathcal{N} contenente q , tale per cui $f(\mathcal{U}) = \mathcal{V}$. Pertanto, risulta ben definita la mappa

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \psi(\mathcal{V}) \subset \mathbb{R}^n \quad (2.1.5)$$

che associa la rappresentazione in coordinate locali dei punti di \mathcal{U} , rispetto alla carta (\mathcal{U}, ϕ) , alla rappresentazione in coordinate locali dei punti di $\mathcal{V} = f(\mathcal{U})$, rispetto alla carta (\mathcal{V}, ψ) . Tale mappa viene detta la *rappresentazione in coordinate locali di f* .

Osservazione 2 (Regolarità delle rappresentazioni in coordinate [6]).

Si noti, dalla (2.1.5), che la rappresentazione in coordinate della funzione f agisce sulle m -uple di numeri reali, contenute in un aperto $\phi(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^m$, e restituisce n -uple di numeri reali, contenute in un aperto $\psi(\mathcal{V}) \subset \mathbb{R}^n$. Pertanto, essa è una funzione per cui, dall'Analisi, è noto il concetto di *differenziabilità*.

Definizione 2.1.10 (Funzioni differenziabili [6]).

Date \mathcal{M} e \mathcal{N} varietà differenziabili e data $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, siano $p \in \mathcal{M}$ e $q \in \mathcal{N}$ tali per cui $q = f(p)$. Diciamo che f è una funzione *differenziabile di classe C^k* in un punto $p \in \mathcal{M}$ se esistono delle carte (\mathcal{U}, ϕ) e (\mathcal{V}, ψ) , come in 2.1.9, rispetto alle quali la rappresentazione in coordinate della funzione f , definita in (2.1.5), è di classe C^k in p . Questa definizione risulta essere *ben posta* in quanto si può dimostrare non dipendere dalle scelte delle carte che assegniamo, ossia la differenziabilità e il tipo di classe di f non cambiano al cambiare delle carte scelte. Infine, se le varietà \mathcal{M} e \mathcal{N} sono lisce ed f è differenziabile di classe C^∞ , allora diciamo che f è *liscia*.

Esempio 2.1.1.

Alcuni esempi di mappe tra varietà sono le seguenti:

- Se $\mathcal{N} = \mathbb{R}$, la mappa $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ è detta una *funzione* (reale).
- Se $\mathcal{M} = (a, b) \subset \mathbb{R}$, la mappa $f : (a, b) \rightarrow \mathcal{N}$ è detta una *curva parametrizzata*.

Definizione 2.1.11 (Rappresentazione locale di una curva [6]).

Sia \mathcal{M} una varietà liscia m -dimensionale e sia $p \in \mathcal{M}$ un punto della varietà fissato. Indichiamo con $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto di \mathbb{R} e consideriamo la collezione di curve parametrizzate, lisce e passanti per il punto $p \in \mathcal{M}$, ossia $\{\gamma : I \rightarrow \mathcal{M} \mid p \in \gamma(I)\}$. Senza perdita di generalità, possiamo assumere $0 \in I$ e che $\gamma(0) = p$ e consideriamo una carta di \mathcal{M} , indicata con (\mathcal{U}, ϕ) , passante per p , ossia tale per cui $p \in \mathcal{U}$. Allora, definiamo la *rappresentazione locale della curva* γ come la composizione $\phi \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ tale per cui

$$\forall t \in I \quad (\phi \circ \gamma)(t) = \phi(\gamma(t)) =: (\gamma^1(t), \dots, \gamma^m(t)) \in \mathbb{R}^m. \quad (2.1.6)$$

In parole, la rappresentazione locale della curva γ , ossia $\phi \circ \gamma$, associa al parametro $t \in I$ la m -upla di coordinate che rappresentano localmente $\gamma(t)$ nella carta (\mathcal{U}, ϕ) .

Definizione 2.1.12 (Curve tangenti in un punto [6]).

Sia data una varietà m -dimensionale \mathcal{M} e un intervallo aperto $I \subset \mathbb{R}$. Inoltre, si considerino due curve parametrizzate su \mathcal{M} , indicate con $\gamma_1 : I \rightarrow \mathcal{M}$ e $\gamma_2 : I \rightarrow \mathcal{M}$, passanti per un punto $p \in \mathcal{M}$, ossia, senza perdita di generalità, assumiamo che $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$. Allora diciamo che le due curve sono *tangenti in p* se

$$\left(\frac{d\gamma_1^i}{dt} \right) (0) = \left(\frac{d\gamma_2^i}{dt} \right) (0), \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.1.7)$$

Definizione 2.1.13 (Vettore tangente e spazio tangente [6]).

Data una varietà differenziabile \mathcal{M} ed un punto $p \in \mathcal{M}$, consideriamo la totalità delle curve di \mathcal{M} parametrizzate e passanti per il punto $p \in \mathcal{M}$. Si può dimostrare che la relazione di tangenza tra curve in un punto è una *relazione di equivalenza* [6]. Pertanto, definiamo un *vettore tangente* in $p \in \mathcal{M}$, indicato con \mathbf{v} , come una classe di equivalenza di curve parametrizzate tangenti in p . L'insieme di tutti i vettori tangenti in p si può dotare della struttura di spazio vettoriale e, con tale struttura, prende il nome *spazio tangente alla varietà \mathcal{M} in p* , e si denota con $T_p\mathcal{M}$.

Sia data una base $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^m$ di vettori di $T_p\mathcal{M}$, allora ogni vettore $\mathbf{v} \in T_p\mathcal{M}$ è *decomponibile* rispetto a tale base come segue:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^m v^i \mathbf{e}_i \equiv v^i \mathbf{e}_i, \quad v^i \in \mathbb{R}, \quad (2.1.8)$$

dove si è usata la *notazione di Einstein* per sottintendere il simbolo di sommatoria quando vengono sommati indici ripetuti. L'indice ripetuto " i " nella Equazione (2.1.8) si dice essere *saturato*, in quanto compare solamente nel termine a destra dell'uguaglianza e non in quello a sinistra.

Definizione 2.1.14 (Covettori e spazio cotangente [6]).

Data una varietà differenziabile \mathcal{M} ed un punto $p \in \mathcal{M}$, consideriamo lo spazio tangente alla varietà \mathcal{M} nel punto $p \in \mathcal{M}$, indicato con $T_p\mathcal{M}$. Si definisce un *covettore in p* come un'applicazione lineare da $T_p\mathcal{M}$ a \mathbb{R} , ossia come un'applicazione del tipo

$$\boldsymbol{\alpha} : T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (2.1.9)$$

L'insieme di tutti i covettori in un punto $p \in \mathcal{M}$ può essere, nuovamente, dotato di una struttura di spazio vettoriale e, con tale struttura, prende il nome di *spazio cotangente di \mathcal{M} in $p \in \mathcal{M}$* , e si indica con

$$T_p^*\mathcal{M} := \mathcal{L}(T_p\mathcal{M}, \mathbb{R}) = \{\boldsymbol{\alpha} : T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \mid \boldsymbol{\alpha} \text{ lineare}\}. \quad (2.1.10)$$

Osservazione 3 (Spazio duale [6]).

Si noti che, dalla definizione che abbiamo dato di spazio cotangente nella Definizione 2.1.14, segue che lo spazio cotangente alla varietà \mathcal{M} in $p \in \mathcal{M}$, indicato con $T_p^*\mathcal{M}$, è lo *spazio duale* allo spazio tangente ad \mathcal{M} nel punto $p \in \mathcal{M}$, indicato con $T_p\mathcal{M}$.

Data la base $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^m$ di $T_p\mathcal{M}$, definiamo le *proiezioni* di tale base come l'insieme di covettori $\{\mathbf{e}^i\}_{i=1}^m \subset T_p^*\mathcal{M}$ definiti come segue:

$$\mathbf{e}^j(\mathbf{e}_i) := \delta^j_i, \quad i, j = 1, \dots, m, \quad (2.1.11)$$

dove δ^j_i rappresenta il simbolo di Kronecker. Fissato $\mathbf{v} \in T_p\mathcal{M}$, la proiezione \mathbf{e}^j associa al vettore \mathbf{v} la sua j -esima componente, in quanto, sfruttando la linearità delle proiezioni, risulta che

$$\mathbf{e}^j(\mathbf{v}) = \mathbf{e}^j(v^i \mathbf{e}_i) = v^i \mathbf{e}^j(\mathbf{e}_i) = v^i \delta^j_i = v^j. \quad (2.1.12)$$

Inoltre, la collezione di covettori $\{\mathbf{e}^i\}_{i=1}^m$ forma una base di $T_p^*\mathcal{M}$, in quanto, dato $\boldsymbol{\alpha} \in T_p^*\mathcal{M}$, si ha che

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{v}) = \boldsymbol{\alpha}(v^i \mathbf{e}_i) = v^i \underbrace{\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{e}_i)}_{\alpha_i} = \alpha_i v^i = \mathbf{e}^i(\mathbf{v}) \alpha_i = \alpha_i \mathbf{e}^i(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in T_p\mathcal{M}. \quad (2.1.13)$$

Pertanto, possiamo decomporre il covettore $\boldsymbol{\alpha}$ rispetto alla base $\{\mathbf{e}^i\}_{i=1}^m$ come segue:

$$\boldsymbol{\alpha} \equiv \alpha_i \mathbf{e}^i, \quad \alpha_i := \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{e}_i), \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.1.14)$$

Gli scalari α_i sono detti le componenti di $\boldsymbol{\alpha}$ rispetto alla base $\{\mathbf{e}^i\}_{i=1}^m$ e sono definiti come il risultato dell'azione del covettore sui vettori di base. La base delle proiezioni $\{\mathbf{e}^i\}_{i=1}^m \subset T_p^*\mathcal{M}$ si dice essere la base *duale* della base $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^m \subset T_p\mathcal{M}$ in virtù della relazione in (2.1.11).

Osservazione 4 (Riflessività [6]).

Siccome le varietà differenziabili \mathcal{M} che stiamo considerando sono di dimensione finita, gli spazi tangenti sono spazi vettoriali *riflessivi*, ossia ciascun $T_p\mathcal{M}$ può essere assimilato al proprio *biduale*, ossia lo spazio duale di $T_p\mathcal{M}^*$. Pertanto, ha senso studiare l'effetto di applicare un “vettore” (in realtà, un *co-co-vettore*) ad un covettore, definendo tale operazione come

$$\mathbf{v}(\boldsymbol{\alpha}) := \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{v}), \quad (2.1.15)$$

dove $\mathbf{v} \in T_p\mathcal{M}$ e $\boldsymbol{\alpha} \in T_p^*\mathcal{M}$ per un dato $p \in \mathcal{M}$. Da questa proprietà, segue che, pensare di *applicare un covettore ad un vettore* è uguale a pensare di *applicare un vettore ad un covettore*, e questo implica che ha senso porre vettori e covettori sullo stesso livello di importanza. Inoltre, questo fatto motiva la seguente notazione detta di *dualità* (o di *pairing*):

$$\langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{v} \rangle := \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}(\boldsymbol{\alpha}) =: \langle \mathbf{v}, \boldsymbol{\alpha} \rangle. \quad (2.1.16)$$

Osservazione 5 (Notazione covariante e controvariante [6, 5]).

Nel seguito, le componenti di un vettore sono sempre indicizzate tramite *apici*, mentre le componenti di un covettore sono sempre indicizzate tramite *pedici*. La diversa notazione non è motivata solamente da una maggiore distinguibilità tra vettori e covettori, bensì è principalmente legata al diverso comportamento che tali componenti hanno quando avviene un cambio di base. In particolare, date due basi di $T_p\mathcal{M}$, indicate con $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^m$ e $\{\tilde{\mathbf{e}}_i\}_{i=1}^m$, consideriamo il *cambio di base* definito da

$$\tilde{\mathbf{e}}_j = Q^i_j \mathbf{e}_i, \quad i, j = 1, \dots, m. \quad (2.1.17)$$

Tale cambio di base è rappresentabile dalla matrice reale, indicata con $[[Q^i_j]] \in \mathbb{R}^{m,m}$. Consideriamo ora le basi $\{\mathbf{e}^i\}_{i=1}^m, \{\tilde{\mathbf{e}}^i\}_{i=1}^m \subset T_p^*\mathcal{M}$ duali alle basi precedentemente definite. Il cambio di base nello spazio tangente è percepito anche dalle basi duali, mediante il seguente *cambio di base*

$$\tilde{\mathbf{e}}^j = P^j_i \mathbf{e}^i, \quad i, j = 1, \dots, m. \quad (2.1.18)$$

Anche in questo caso, possiamo raccogliere i coefficienti del cambio di base in una matrice reale, indicata con $[[P^j_i]] \in \mathbb{R}^{m,m}$. Inoltre, possiamo dimostrare facilmente che le matrici rappresentative dei due cambi di base siano l'una l'inversa dell'altra, ossia $[[P^j_i]] = [[Q^i_j]]^{-1}$, infatti, per ogni $i, j = 1, \dots, m$ si ha che

$$\begin{aligned} \delta^i_j &= \tilde{\mathbf{e}}^i(\tilde{\mathbf{e}}_j) = P^i_\ell \mathbf{e}^\ell(Q^n_j \mathbf{e}_n) \\ &= P^i_\ell Q^n_j \mathbf{e}^\ell(\mathbf{e}_n) \\ &= P^i_\ell Q^n_j \delta^\ell_n \\ &= P^i_\ell Q^\ell_j. \end{aligned} \quad (2.1.19)$$

Avendo fissato come si trasformano i vettori e i covettori di base, siamo interessati a studiare come cambiano invece le componenti di un vettore e di un covettore rispetto a tali basi. Risulta fondamentale osservare che i vettori e i covettori *non* cambiano se cambia la base di $T_p\mathcal{M}$, in quanto essi sono elementi di spazi vettoriali e pertanto oggetti *intrinseci*. Ciò che cambia, invece, sono le componenti di tali oggetti rispetto alla diversa base scelta.

- Sia $\mathbf{v} \in T_p\mathcal{M}$ un vettore. In virtù delle due basi definite e dell'effetto del cambio di base sui vettori di base, si hanno le seguenti decomposizioni

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i = \tilde{v}^j \tilde{\mathbf{e}}_j = \tilde{v}^j Q^i_j \mathbf{e}_i. \quad (2.1.20)$$

Pertanto, si è ottenuto che le componenti di un vettore cambiano in maniera *contraria* rispetto a come cambiano i vettori di base, ossia $v^i = Q^i_j \tilde{v}^j$, da cui si ha

$$\tilde{v}^i = P^i_j v^j, \quad i, j = 1, \dots, m. \quad (2.1.21)$$

La Equazione (2.1.21) motiva la scelta di nominare le componenti di un vettore come *controvarianti* e di indicarle sempre con degli apici, in quanto l'apice è l'indice che nella (2.1.21) non si satura.

- Sia $\boldsymbol{\alpha} \in T_p^*\mathcal{M}$ un covettore. Dunque, usando il cambio di base per le basi duali, si ha

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha_i \mathbf{e}^i = \tilde{\alpha}_j \tilde{\mathbf{e}}^j = \tilde{\alpha}_j P^j_i \mathbf{e}^i. \quad (2.1.22)$$

Pertanto, si è ottenuto che le componenti di un covettore cambiano in maniera *coerente* rispetto a come cambiano i vettori di base, ossia $\alpha_i = P^j_i \tilde{\alpha}_j$, da cui si ha

$$\tilde{\alpha}_i = Q^j_i \alpha_j, \quad i, j = 1, \dots, m. \quad (2.1.23)$$

Dalla Equazione (2.1.23) segue che le componenti di un covettore sono nominate *covarianti*, e si indicano tramite dei pedici, in quanto il pedice non satura nella (2.1.23).

Definizione 2.1.15 (Fibrato tangente e fibrato cotangente [6]).

Data la varietà differenziabile \mathcal{M} , si definisce *fibrato tangente* l'unione disgiunta degli spazi tangenti, ossia l'unione delle coppie punto-spazio tangente della varietà nel punto:

$$T\mathcal{M} := \cup_{p \in \mathcal{M}} \{p\} \times T_p\mathcal{M} \equiv \sqcup_{p \in \mathcal{M}} T_p\mathcal{M}. \quad (2.1.24)$$

Allo stesso modo, si definisce *fibrato cotangente* l'unione disgiunta degli spazi cotangenti, ossia l'unione delle coppie punto-spazio cotangente della varietà nel punto:

$$T^*\mathcal{M} := \cup_{p \in \mathcal{M}} \{p\} \times T_p^*\mathcal{M} \equiv \sqcup_{p \in \mathcal{M}} T_p^*\mathcal{M}. \quad (2.1.25)$$

Richiami di algebra tensoriale

Definizione 2.1.16 (Prodotto tensoriale in un punto $p \in \mathcal{M}$ [6]).

Data la varietà differenziabile \mathcal{M} e $p \in \mathcal{M}$, consideriamo i vettori $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p\mathcal{M}$ e i covettori $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in T_p^*\mathcal{M}$. Possiamo definire l'operazione di *prodotto tensoriale*, anche noto come *prodotto diadico*, tra tali vettori e covettori nei seguenti modi possibili

$$\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} : T_p^*\mathcal{M} \times T_p^*\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{t.c.} \quad (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \mathbf{v}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{w}(\boldsymbol{\beta}), \quad (2.1.26a)$$

$$\mathbf{v} \otimes \boldsymbol{\beta} : T_p^*\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{t.c.} \quad (\mathbf{v} \otimes \boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w}) = \mathbf{v}(\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}(\mathbf{w}), \quad (2.1.26b)$$

$$\boldsymbol{\alpha} \otimes \mathbf{w} : T_p\mathcal{M} \times T_p^*\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{t.c.} \quad (\boldsymbol{\alpha} \otimes \mathbf{w})(\mathbf{v}, \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{v})\mathbf{w}(\boldsymbol{\beta}), \quad (2.1.26c)$$

$$\boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{\beta} : T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{t.c.} \quad (\boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{\beta})(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{v})\boldsymbol{\beta}(\mathbf{w}). \quad (2.1.26d)$$

Inoltre, indichiamo tramite $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ lo *spazio dei prodotti tensoriali* tra gli elementi di \mathcal{X} e \mathcal{Y} , dove \mathcal{X} e \mathcal{Y} possono essere uno qualunque tra $T_p\mathcal{M}$ e $T_p^*\mathcal{M}$.

Consideriamo, per semplicità, il caso del prodotto tensoriale di due covettori $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in T_p^*\mathcal{M}$, riportato nell'Equazione (2.1.26d), e appliciamolo ai due vettori generici $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p\mathcal{M}$ e, indicando con $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^m$ una base di $T_p\mathcal{M}$ e con $\{\mathbf{e}^i\}_{i=1}^m$ una base di $T_p^*\mathcal{M}$, si ha che

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{\beta})(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{v})\boldsymbol{\beta}(\mathbf{w}) \\ &= \boldsymbol{\alpha}(v^i \mathbf{e}_i)\boldsymbol{\beta}(w^j \mathbf{e}_j) \\ &= v^i w^j \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{e}_i)\boldsymbol{\beta}(\mathbf{e}_j) \\ &= v^i w^j (\boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{\beta})(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j). \end{aligned} \quad (2.1.27)$$

In particolare, osserviamo che, per la definizione di componente di un covettore nella Equazione (2.1.14), si può scrivere che

$$(\boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{\beta})(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{e}_i)\boldsymbol{\beta}(\mathbf{e}_j) = \alpha_i \beta_j. \quad (2.1.28)$$

Si noti come, da quest'ultima relazione, sia possibile decomporre un qualunque prodotto tensoriale tra covettori rispetto ad una *base dello spazio dei prodotti tensoriali tra covettori*, ossia $T_p^*\mathcal{M} \otimes T_p^*\mathcal{M}$. Infatti, sostituendo la (2.1.28) nella (2.1.27), si conclude che

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{\beta})(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= v^i w^j (\boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{\beta})(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) \\ &= \alpha_i \beta_j v^i w^j \\ &= \alpha_i \beta_j \mathbf{e}^i(\mathbf{v}) \mathbf{e}^j(\mathbf{w}) \\ &= \alpha_i \beta_j (\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j)(\mathbf{v}, \mathbf{w}), \end{aligned} \quad (2.1.29)$$

ossia l'insieme $\{\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j\}_{i,j=1}^m$ forma una base dello spazio dei prodotti tensoriali tra covettori $T_p^*\mathcal{M} \otimes T_p^*\mathcal{M}$. Con lo stesso ragionamento, possiamo definire le basi degli altri spazi di prodotti tensoriali, definiti in (2.1.26a)-(2.1.26c), ossia, fissate le basi $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^m \subset T_p\mathcal{M}$ e $\{\mathbf{e}^i\}_{i=1}^m \subset T_p^*\mathcal{M}$, possiamo esprimere tali prodotti tensoriali in componenti, rispetto alle basi dei rispettivi spazi, come segue:

$$\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} = v^i w^j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \in T_p\mathcal{M} \otimes T_p\mathcal{M}, \quad (2.1.30a)$$

$$\mathbf{v} \otimes \boldsymbol{\beta} = v^i \beta_j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j \in T_p\mathcal{M} \otimes T_p^*\mathcal{M}, \quad (2.1.30b)$$

$$\boldsymbol{\alpha} \otimes \mathbf{w} = \alpha_i w^j \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j \in T_p^*\mathcal{M} \otimes T_p\mathcal{M}, \quad (2.1.30c)$$

$$\boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{\beta} = \alpha_i \beta_j \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \in T_p^*\mathcal{M} \otimes T_p^*\mathcal{M}. \quad (2.1.30d)$$

Seguendo lo stesso ragionamento, è dunque possibile *generalizzare* il prodotto tensoriale ad un prodotto di numero arbitrario tra vettori e covettori, arrivando, dunque, alla seguente definizione:

Definizione 2.1.17 (Tensore in un punto $p \in \mathcal{M}$ [6, 39, 40]).

Data una varietà differenziabile \mathcal{M} e un punto $p \in \mathcal{M}$, definiamo un *tensore* nel punto $p \in \mathcal{M}$ come un'applicazione multilineare della forma

$$\mathbf{T} : \underbrace{T_p^* \mathcal{M} \times \cdots \times T_p^* \mathcal{M}}_{r \text{ volte}} \times \underbrace{T_p \mathcal{M} \times \cdots \times T_p \mathcal{M}}_{s \text{ volte}} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (2.1.31)$$

In particolare, si dice che \mathbf{T} è un tensore *controvariante di rango r* e *covariante di rango s* e l'*ordine* del tensore è definito come la somma $r + s$. L'insieme dei tensori del tipo descritto nell'Equazione (2.1.31) viene indicato con $[T_p \mathcal{M}]_s^r$ ed è dotato della struttura di spazio vettoriale.

Definizione 2.1.18 (Componenti di un tensore [6, 39, 40]).

Data la varietà differenziabile m -dimensionale \mathcal{M} e un punto $p \in \mathcal{M}$, indichiamo con $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^m$ e $\{\mathbf{e}^i\}_{i=1}^m$ le basi, rispettivamente, degli spazi $T_p \mathcal{M}$ e $T_p^* \mathcal{M}$. Fissati r e s interi, consideriamo un tensore $\mathbf{T} \in [T_p \mathcal{M}]_s^r$ e una collezione di r covettori $\boldsymbol{\alpha}^1, \dots, \boldsymbol{\alpha}^r \in T_p^* \mathcal{M}$ e di s vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s \in T_p \mathcal{M}$. Applicando il tensore \mathbf{T} a tale collezione, per la linearità, si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\boldsymbol{\alpha}^1, \dots, \boldsymbol{\alpha}^r, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s) &= (\boldsymbol{\alpha}^1)_{i_1} \cdots (\boldsymbol{\alpha}^r)_{i_r} (\mathbf{v}_1)^{j_1} \cdots (\mathbf{v}_s)^{j_s} \mathbf{T}(\mathbf{e}^{i_1}, \dots, \mathbf{e}^{i_r}, \mathbf{e}_{j_1}, \dots, \mathbf{e}_{j_s}) \\ &= (\boldsymbol{\alpha}^1)_{i_1} \cdots (\boldsymbol{\alpha}^r)_{i_r} (\mathbf{v}_1)^{j_1} \cdots (\mathbf{v}_s)^{j_s} T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}. \end{aligned} \quad (2.1.32)$$

dove si definiscono le *componenti del tensore* rispetto alle basi $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^m$ e $\{\mathbf{e}^i\}_{i=1}^m$ come

$$T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} := \mathbf{T}(\mathbf{e}^{i_1}, \dots, \mathbf{e}^{i_r}, \mathbf{e}_{j_1}, \dots, \mathbf{e}_{j_s}). \quad (2.1.33)$$

Seguendo lo stesso ragionamento che abbiamo usato per definire gli elementi di base per lo spazio dei prodotti tensoriali, si ha che lo spazio dei tensori $[T_p \mathcal{M}]_s^r$ è dotato di una base i cui elementi sono i prodotti tensoriali degli elementi delle basi di $T_p \mathcal{M}$ e di $T_p^* \mathcal{M}$. Pertanto, un generico tensore in p , indicato con $\mathbf{T} \in [T_p \mathcal{M}]_s^r$, ammette la decomposizione

$$\mathbf{T} = T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{i_r} \otimes \mathbf{e}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}^{j_s}. \quad (2.1.34)$$

In Meccanica, una classe di tensori frequentemente utilizzati è la classe dei *tensori del secondo ordine*, ossia quelli per cui $r + s = 2$. Gli elementi di tale classe possono essere di quattro tipologie distinte, in base al tipo di *indici* che possiedono:

$$\text{se } \mathbf{T} \in [T_p \mathcal{M}]_0^2 \quad \text{allora} \quad \mathbf{T} = T^{ab} \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_b, \quad (2.1.35a)$$

$$\text{se } \mathbf{T} \in [T_p \mathcal{M}]_2^0 \quad \text{allora} \quad \mathbf{T} = T_{ab} \mathbf{e}^a \otimes \mathbf{e}^b, \quad (2.1.35b)$$

$$\text{se } \mathbf{T} \in [T_p \mathcal{M}]_1^1 \quad \text{allora} \quad \mathbf{T} = T^a_b \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}^b, \quad (2.1.35c)$$

$$\text{se } \mathbf{T} \in [T_p \mathcal{M}]_1^1 \quad \text{allora} \quad \mathbf{T} = T_a^b \mathbf{e}^a \otimes \mathbf{e}_b. \quad (2.1.35d)$$

Osservazione 6 (*Operatività* della applicazione lineare associata [39, 40]).

Spesso, definire un tensore come un'applicazione lineare da uno spazio tangente, o cotangente, ad un altro spazio tangente, o cotangente, è *operativamente* più semplice rispetto alla definizione di tensore data precedentemente. Pertanto, nel seguito della Tesi, quando si introdurrà un tensore, lo si farà introducendo la sua applicazione lineare associata e *identificando* il tensore con questo ultimo.

Definizione 2.1.19 (Applicazione lineare associata ad un tensore del secondo ordine [6, 39, 40]).

Sia \mathbf{T} un tensore del secondo ordine, definito come in (2.1.35a)-(2.1.35d). A seconda del tipo

di tensore \mathbf{T} , possiamo associare univocamente ad esso un'applicazione lineare, indicata con un lieve abuso di notazione tramite la stessa \mathbf{T} , definita come segue:

se $\mathbf{T} \in [T_p\mathcal{M}]_0^2$, allora $\mathbf{T} : T_p^*\mathcal{M} \rightarrow T_p\mathcal{M}$, quindi $\forall \alpha \in T_p^*\mathcal{M}$ si ha $\mathbf{T}\alpha = T^{ab}\alpha_b e_a \in T_p\mathcal{M}$,
 se $\mathbf{T} \in [T_p\mathcal{M}]_1^1$, allora $\mathbf{T} : T_p\mathcal{M} \rightarrow T_p\mathcal{M}$, quindi $\forall v \in T_p\mathcal{M}$ si ha $\mathbf{T}v = T^a_b v^b e_a \in T_p\mathcal{M}$,
 se $\mathbf{T} \in [T_p\mathcal{M}]_1^1$, allora $\mathbf{T} : T_p^*\mathcal{M} \rightarrow T_p^*\mathcal{M}$, quindi $\forall \alpha \in T_p^*\mathcal{M}$ si ha $\mathbf{T}\alpha = T_a^b \alpha_b e^a \in T_p^*\mathcal{M}$,
 se $\mathbf{T} \in [T_p\mathcal{M}]_2^0$, allora $\mathbf{T} : T_p\mathcal{M} \rightarrow T_p^*\mathcal{M}$, quindi $\forall v \in T_p\mathcal{M}$ si ha $\mathbf{T}v = T_{ab} v^b e^a \in T_p^*\mathcal{M}$.

Definizione 2.1.20 (Tensore trasposto [39, 40]).

Data una varietà differenziabile \mathcal{M} di dimensione m e un punto $p \in \mathcal{M}$, consideriamo un tensore del secondo ordine $\mathbf{T} : T_p\mathcal{M} \rightarrow T_p\mathcal{M}$. Si definisce il tensore *trasposto*, o *aggiunto*, di \mathbf{T} come il tensore $\mathbf{T}^T : T_p^*\mathcal{M} \rightarrow T_p^*\mathcal{M}$ definite come

$$\mathbf{T}^T = (\mathbf{T}^T)_a^b e^a \otimes e_b, \quad (\mathbf{T}^T)_a^b = T^b_a. \quad (2.1.37)$$

Definizione 2.1.21 (Tensore inverso [39, 40]).

Data una varietà differenziabile \mathcal{M} di dimensione m e un punto $p \in \mathcal{M}$, consideriamo un tensore del secondo ordine $\mathbf{T} : T_p\mathcal{M} \rightarrow T_p\mathcal{M}$. Se \mathbf{T} è *invertibile*, si definisce il tensore *inverso* di \mathbf{T} come il tensore $\mathbf{T}^{-1} : T_p\mathcal{M} \rightarrow T_p\mathcal{M}$ definite come

$$\mathbf{T}^{-1} = (\mathbf{T}^{-1})^a_b e_a \otimes e^b, \quad (\mathbf{T}^{-1})^a_c (\mathbf{T})^c_b = \delta^a_b, \quad (\mathbf{T})^a_c (\mathbf{T}^{-1})^c_b = \delta^a_b. \quad (2.1.38)$$

Definizione 2.1.22 (Tensore identità su $T_p\mathcal{M}$ e su $T_p^*\mathcal{M}$ [39, 40]).

Data una varietà differenziabile \mathcal{M} di dimensione m , sia $p \in \mathcal{M}$. Definiamo il tensore *identità* su $T_p\mathcal{M}$, indicato con $\mathbf{i} \in [T_p\mathcal{M}]_1^1$, come il tensore misto che associa ad un vettore se stesso, ossia

$$\mathbf{i} : T_p\mathcal{M} \rightarrow T_p\mathcal{M}, \quad \mathbf{i} = \delta^a_b e_a \otimes e^b. \quad (2.1.39)$$

dove δ^a_b è il simbolo di Kronecker. Inoltre, definiamo il tensore *identità* su $T_p^*\mathcal{M}$ come il tensore trasposto di \mathbf{i} , ossia il tensore che realizza la “identità” sullo spazio duale:

$$\mathbf{i}^T : T_p^*\mathcal{M} \rightarrow T_p^*\mathcal{M}, \quad \mathbf{i}^T = \delta_a^b e^a \otimes e_b. \quad (2.1.40)$$

Nel seguito, per brevità di esposizione, assumeremo noti i concetti degli operatori *traccia*, indicata con “tr”, e *determinante*, indicato con “det”, per un tensore del secondo ordine, e, per quanto riguarda le loro definizioni, si rimanda a [6, 38, 39, 40].

Definizione 2.1.23 (Tensore metrico [6, 5, 39, 40]).

Data una varietà differenziabile \mathcal{M} e un punto $p \in \mathcal{M}$, consideriamo un tensore $\mathbf{g} \in [T_p\mathcal{M}]_2^0$. Diciamo che \mathbf{g} è un *tensore metrico* in p se

$$\mathbf{g} : T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{t.c.} \quad T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \ni (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto \mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathbb{R}, \quad (2.1.41)$$

è un tensore *simmetrico*, ossia $\mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{g}(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ per ogni coppia $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M}$, ed è definito positivo, ossia $\mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0$ per ogni $\mathbf{v} \in T_p\mathcal{M}$ e $\mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$ se, e solo se, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Il tensore metrico \mathbf{g} , per costruzione, induce una norma $\|\cdot\|_{\mathbf{g}} : T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ che misura i vettori dello spazio tangente $T_p\mathcal{M}$, ossia $\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{g}}^2 := \mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ per ogni $\mathbf{v} \in T_p\mathcal{M}$. In particolare, presi $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p\mathcal{M}$, si ha che

$$\mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{g}(v^a e_a, w^b e_b) = v^a w^b \mathbf{g}(e_a, e_b) = g_{ab} v^a w^b, \quad (2.1.42)$$

dove abbiamo definito le componenti di \mathbf{g} come $g_{ab} := \mathbf{g}(\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b)$. Dunque, al tensore metrico \mathbf{g} è associabile, pagando un lieve abuso di notazione, l'applicazione lineare

$$\mathbf{g} : T_p\mathcal{M} \rightarrow T_p^*\mathcal{M}, \quad \mathbf{g} = g_{ab}\mathbf{e}^a \otimes \mathbf{e}^b, \quad (2.1.43)$$

tale per cui, ad ogni vettore $\mathbf{v} \in T_p\mathcal{M}$, essa associa il covettore $\mathbf{v}^\flat := \mathbf{g}\mathbf{v} = g_{ab}v^b\mathbf{e}^a \in T_p^*\mathcal{M}$. In particolare, abbiamo denotato il covettore \mathbf{v}^\flat con il simbolo “ \flat ”, detto *bemolle*, in quanto il ruolo algebrico del tensore metrico è analogo a quello del simbolo *bemolle* in Musica. Infatti, applicare un tensore metrico ad un vettore, o ad un tensore con un indice alto, permette di “abbassare” l'indice saturante, mentre il *bemolle*, in Musica, viene utilizzato per indicare un abbassamento di un semitono di una nota musicale.

Ricordando che il tensore metrico \mathbf{g} ammette, per costruzione [38, 5, 39, 40], determinante pari ad 1, ossia $\det \mathbf{g} = 1$, allora si può dimostrare che esso è un tensore invertibile nel senso specificato nella Equazione (2.1.21). Allora, definiamo il tensore metrico inverso \mathbf{g}^{-1} come il tensore la cui applicazione lineare associata è

$$\mathbf{g}^{-1} : T_p^*\mathcal{M} \rightarrow T_p\mathcal{M}, \quad \mathbf{g}^{-1} = (g^{-1})^{ab}\mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_b. \quad (2.1.44)$$

Dualmente a \mathbf{g} , il tensore \mathbf{g}^{-1} associa ad ogni covettore $\boldsymbol{\alpha} \in T_p^*\mathcal{M}$ un vettore $\boldsymbol{\alpha}^\sharp := \mathbf{g}^{-1}\boldsymbol{\alpha} = (g^{-1})^{ab}\alpha_b\mathbf{e}_a \in T_p\mathcal{M}$. Seguendo il ragionamento fatto in precedenza, il vettore $\boldsymbol{\alpha}^\sharp$ è indicato con il simbolo “ \sharp ”, detto *diesis*, in quanto il tensore metrico inverso permette di “alzare” l'indice saturante del covettore, o del tensore con un indice basso, a cui è applicato. Ciò permette nuovamente un'analogia con la Musica, in quanto il *diesis* indica un innalzamento di un semitono di una data nota musicale.

Osservazione 7 (Notazione³ per il tensore metrico [39, 40]).

Il pregio di lavorare utilizzando i tensori metrici è quello di poter essere sempre coerenti con il formalismo covariante e, pertanto, essere sempre coscienti se gli enti matematici presenti nelle equazioni siano vettori o covettori e, nel caso dei tensori, di quale ordine e tipo. Il prezzo che si paga, tuttavia, è che le equazioni che si ottengono possono essere *piuttosto complicate*. Allora, nel seguito, quando sarà conveniente posporre la correttezza formale per alleggerire la notazione, sostituirò il tensore metrico, o il tensore metrico inverso, con il simbolo di un “puntino basso”, ossia “.” [39, 40].

Osservazione 8 (Dipendenza dei vettori dal punto “di applicazione” [6, 38]).

In precedenza, abbiamo introdotto i concetti di vettore, covettore e tensore a partire da quella di spazio tangente ad una varietà differenziabile in un suo punto, che possiamo chiamare “punto di applicazione” per il suddetto vettore, covettore o tensore. Per brevità di esposizione, nella notazione utilizzata per indicare vettori, covettori e tensori in un dato punto abbiamo ommesso la dipendenza esplicita dal punto stesso. Tuttavia, risulta *fondamentale* osservare che, data una varietà differenziabile \mathcal{M} e due punti $p, q \in \mathcal{M}$, se si considerano $\mathbf{v} \in T_p\mathcal{M}$ e $\mathbf{w} \in T_q\mathcal{M}$, allora non è definita la somma “ $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ ”, in quanto \mathbf{v} e \mathbf{w} sono elementi di spazi vettoriali distinti [6, 38]. Pertanto, è importante distinguere chiaramente se un vettore appartiene ad uno spazio tangente piuttosto che ad un altro. Di conseguenza, per potersi “muovere” sulla varietà \mathcal{M} da punto a punto, è conveniente introdurre il concetto di *campo vettoriale*, ossia una funzione che associa, ad ogni punto $p \in \mathcal{M}$, un elemento dello spazio tangente $T_p\mathcal{M}$.

³Questa osservazione è basata sulle lezioni del corso di Dottorato “Metodi variazionali in biomeccanica” tenuto dal Prof. Grillo A. nell'anno accademico 2021/2022. Tale corso appartiene al programma di dottorato dal titolo "Dottorato di Ricerca in Matematica Pura ad Applicata" (PoliTo e UniTo).

Definizione 2.1.24 (Campi vettoriali, covettoriali e tensoriali [6, 1, 39, 40]).

Data una varietà differenziabile \mathcal{M} ed un punto $p \in \mathcal{M}$, indichiamo con $T_p\mathcal{M}$ lo spazio tangente ad \mathcal{M} nel punto p e con $T\mathcal{M}$ il fibrato tangente alla varietà \mathcal{M} , definito in (2.1.24). Definiamo un *campo vettoriale* su \mathcal{M} come

$$\mathbf{v} : \mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M}, \quad \text{tale che} \quad \forall p \in \mathcal{M}, \quad \mathbf{v}(p) \in T_p\mathcal{M}, \quad (2.1.45)$$

ossia come una funzione che, ad ogni punto, associa un vettore “applicato” in tal punto. In maniera analoga, indicando con $T_p^*\mathcal{M}$ lo spazio cotangente di \mathcal{M} nel punto p , e con $T^*\mathcal{M}$ il fibrato cotangente di \mathcal{M} nella Equazione (2.1.25), si può definire un *campo covettoriale* come

$$\boldsymbol{\alpha} : \mathcal{M} \rightarrow T^*\mathcal{M}, \quad \text{tale che} \quad \forall p \in \mathcal{M}, \quad \boldsymbol{\alpha}(p) \in T_p^*\mathcal{M}, \quad (2.1.46)$$

ossia come una funzione che, ad ogni punto, associa un covettore “applicato” in tal punto. Infine, indicando con $[T_p\mathcal{M}]^r_s$ lo spazio dei tensori applicati al punto $p \in \mathcal{M}$, controvarianti di rango r e covarianti di rango s , e con $[T\mathcal{M}]^r_s := \sqcup_{p \in \mathcal{M}} \{p\} \times [T_p\mathcal{M}]^r_s$, definiamo un *campo tensoriale* su \mathcal{M} (del tipo precedente) come

$$\mathbf{T} : \mathcal{M} \rightarrow [T\mathcal{M}]^r_s, \quad \text{tale che} \quad \forall p \in \mathcal{M}, \quad \mathbf{T}(p) \in [T_p\mathcal{M}]^r_s, \quad (2.1.47)$$

ossia come una funzione che, ad ogni punto, associa un tensore “applicato” in tal punto.

Operatori differenziali covarianti per campi vettoriali

Definizione 2.1.25 (Simboli di Christoffel [6]).

Data una varietà differenziabile \mathcal{M} di dimensione m , siano $\{\mathbf{e}_a\}_{a=1}^m$ i campi vettoriali che, valutati in un punto $p \in \mathcal{M}$, restituiscono i vettori di base di $T_p\mathcal{M}$. Definiamo i *simboli di Christoffel* di \mathcal{M} come i campi $\gamma^c_{ab} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, in numero m^3 , tali per cui vale

$$\mathbf{e}_{a,b} = \gamma^c_{ab} \mathbf{e}_c, \quad \forall a, b, c \in \{1, \dots, m\}, \quad (2.1.48)$$

dove si è usata la seguente notazione per indicare le derivate parziali: $\frac{\partial \mathbf{e}_a}{\partial x^b} \equiv \mathbf{e}_{a,b}$.

Per $m = 3$, i simboli di Christoffel sono $3^3 = 27$ campi che codificano completamente la *connessione* [6] della varietà, ossia permettono di definire una operazione, detta *derivata covariante* [6, 5]. Se i vettori di base $\{\mathbf{e}_a\}_{a=1}^3$ sono definiti a partire da una terna di vettori di base cartesiana $\{\boldsymbol{\varepsilon}_i\}_{i=1}^3$ tramite le relazioni

$$\mathbf{e}_a(x) = \frac{\partial \zeta^i}{\partial x^a}(x) \boldsymbol{\varepsilon}_i, \quad (2.1.49)$$

dove $x = (x^1, x^2, x^3)$ è una rappresentazione parametrica, in coordinate generalizzate, del punto $p \in \mathcal{M}$ e $z^i = \zeta^i(x)$ è la i -esima coordinata cartesiana di $p \in \mathcal{M}$, allora si ha

$$\mathbf{e}_{a,b}(x) = \frac{\partial^2 \zeta^i}{\partial x^a \partial x^b}(x) \boldsymbol{\varepsilon}_i = \frac{\partial^2 \zeta^i}{\partial x^a \partial x^b}(x) \frac{\partial \xi^c}{\partial z^i}(\zeta(x)) \mathbf{e}_c(x) = \gamma^c_{ab}(x) \mathbf{e}_c(x), \quad (2.1.50)$$

essendo $\xi^c(z) = x^c$ il cambio di coordinate inverso a $z^i = \zeta^i(x)$ ed avendo identificato i simboli di Christoffel con la espressione

$$\gamma^c_{ab}(x) = \frac{\partial^2 \zeta^i}{\partial x^a \partial x^b}(x) \frac{\partial \xi^c}{\partial z^i}(\zeta(x)). \quad (2.1.51)$$

Ipotizzando che le funzioni ζ^i , per $i = 1, 2, 3$, siano di classe C^2 , possiamo concludere che i simboli di Christoffel γ^a_{bc} , definiti in (2.1.51), risultino *simmetrici* negli indici bassi.

Definizione 2.1.26 (Derivata covariante di un campo vettoriale [6, 5]).

Data la varietà differenziabile \mathcal{M} di dimensione 3, siano $\{\mathbf{e}_a\}_{a=1}^3$ i campi vettoriali che, valutati in un punto $p \in \mathcal{M}$, restituiscono i vettori di base di $T_p\mathcal{M}$ e siano assegnati i simboli di Christoffel definiti nella Equazione (2.1.48). Inoltre, si consideri $\mathbf{v} : \mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M}$ un campo vettoriale di \mathcal{M} . Allora, si definisce la *derivata covariante del campo \mathbf{v}* come il campo tensoriale $\nabla\mathbf{v} : \mathcal{M} \rightarrow [T\mathcal{M}]_1^1$ definito nel seguente modo:

$$\nabla\mathbf{v} := \mathbf{v}_{,b} \otimes \mathbf{e}^b. \quad (2.1.52)$$

Ricordando che il campo \mathbf{v} è esprimibile rispetto ai vettori di base $\{\mathbf{e}_a\}_{a=1}^3$ come $\mathbf{v} = v^a \mathbf{e}_a$, possiamo esprimere le componenti di $\nabla\mathbf{v}$, indicate con $(\nabla\mathbf{v})^a_b$, oppure con $v^a_{;b}$ (si veda, ad esempio [5]), come

$$\begin{aligned} \nabla\mathbf{v} &= (v^a \mathbf{e}_a)_{,b} \otimes \mathbf{e}^b = v^a_{,b} \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}^b + v^a (\mathbf{e}_a)_{,b} \otimes \mathbf{e}^b \\ &= v^a_{,b} \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}^b + v^a (\gamma^c_{ab} \mathbf{e}_c) \otimes \mathbf{e}^b \\ &= (v^a_{,b} + \gamma^c_{cb} v^c) \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}^b \\ &= v^a_{;b} \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}^b, \end{aligned} \quad (2.1.53)$$

da cui segue che

$$v^a_{;b} = v^a_{,b} + \gamma^a_{cb} v^c. \quad (2.1.54)$$

Osservazione 9 (Derivata covariante di un campo covettoriale [6, 5]).

Si noti che, detti $\{\mathbf{e}^a\}_{a=1}^3$ i campi che associano ad ogni punto della varietà i covettori di base, possiamo derivare la relazione $\mathbf{e}^a \mathbf{e}_b = \delta^a_b$ lungo la direzione individuata da \mathbf{e}_c , ossia

$$(\mathbf{e}^a)_{,c} (\mathbf{e}_b) = -\mathbf{e}^a (\mathbf{e}_b)_{,c} = -\mathbf{e}^a (\gamma^d_{bc} \mathbf{e}_d) = -\gamma^a_{bc}, \quad (2.1.55)$$

ottenendo che le derivate dei covettori di base sono espresse in funzione dei simboli di Christoffel come

$$(\mathbf{e}^a)_{,c} = -\gamma^a_{bc} \mathbf{e}^b, \quad \forall a, b, c \in \{1, 2, 3\}. \quad (2.1.56)$$

Pertanto, dato $\boldsymbol{\alpha} : \mathcal{M} \rightarrow T^*\mathcal{M}$ un campo covettoriale tale che $\boldsymbol{\alpha} = \alpha_a \mathbf{e}^a$, possiamo definire la sua *derivata covariante* come il campo tensoriale $\nabla\boldsymbol{\alpha} : \mathcal{M} \rightarrow [T\mathcal{M}]_2^0$ definito come

$$\begin{aligned} \nabla\boldsymbol{\alpha} &= \boldsymbol{\alpha}_{,b} \otimes \mathbf{e}^b = (\alpha_a \mathbf{e}^a)_{,b} \otimes \mathbf{e}^b \\ &= \alpha_{a,b} \mathbf{e}^a \otimes \mathbf{e}^b + \alpha_a (\mathbf{e}^a)_{,b} \otimes \mathbf{e}^b \\ &= \alpha_{a,b} \mathbf{e}^a \otimes \mathbf{e}^b + \alpha_a (-\gamma^c_{cb} \mathbf{e}^c) \otimes \mathbf{e}^b \\ &= (\alpha_{a,b} - \gamma^c_{cb} \alpha_c) \mathbf{e}^a \otimes \mathbf{e}^b \\ &= \alpha_{a;b} \mathbf{e}^a \otimes \mathbf{e}^b, \end{aligned} \quad (2.1.57)$$

dove si sono definite le componenti di $\nabla\boldsymbol{\alpha}$, indicate con i simboli $(\nabla\boldsymbol{\alpha})_{ab}$ o $\alpha_{a;b}$, come

$$\alpha_{a;b} = \alpha_{a,b} - \gamma^c_{cb} \alpha_c. \quad (2.1.58)$$

Osservazione 10 (Derivata covariante di un campo tensoriale [39, 40]).

Si noti che la definizione di *derivata covariante di un campo tensoriale* dipende, in generale, dall'ordine e tipo del campo tensoriale considerato, ossia dal numero di indici delle componenti del tensore e dal fatto che siano apici o pedici. Pertanto, non introdurremo qui la derivata covariante di un tensore ma, a seconda delle necessità dei prossimi capitoli, la calcoleremo nel caso del tensore specifico. In questa sede, ci limitiamo ad osservare che, indicando $\mathbf{g} : \mathcal{M} \rightarrow [T\mathcal{M}]_2^0$ il campo tensoriale che, ad ogni punto, associa il tensore metrico in tal punto, per la scelta dei simboli di Christoffel in (2.1.51), si ha che la *derivata covariante di \mathbf{g}* è il campo tensoriale nullo, ossia $(\nabla\mathbf{g})(p) = \mathbf{0}$ per ogni $p \in \mathcal{M}$.

Definizione 2.1.27 (Divergenza di un campo vettoriale [6, 5]).

Data una varietà differenziabile \mathcal{M} di dimensione 3, consideriamo un campo vettoriale $\mathbf{v} : \mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M}$ e sia $\nabla \mathbf{v} : \mathcal{M} \rightarrow [T\mathcal{M}]^1_1$ la sua derivata covariante. Si definisce la *divergenza* di \mathbf{v} come il campo scalare $\operatorname{div} \mathbf{v} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$(\operatorname{div} \mathbf{v})(p) := \operatorname{tr}[\nabla \mathbf{v}(p)] = (\mathbf{i}^T : \nabla \mathbf{v})(p) = [\mathbf{v}(p)]^a_{;a}, \quad \forall p \in \mathcal{M}. \quad (2.1.59)$$

Definizione 2.1.28 (Simboli di Levi-Civita [27, 5]).

Indichiamo con ε^{abc} i *simboli di Levi-Civita*, con $a, b, c \in \{1, 2, 3\}$. Tali simboli sono definiti nel seguente modo:

$$\varepsilon^{abc} = \begin{cases} +1, & \text{se } (a, b, c) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), \\ -1, & \text{se } (a, b, c) = (1, 3, 2), (2, 1, 3), (3, 2, 1), \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (2.1.60)$$

Definizione 2.1.29 (Matrice rappresentativa del tensore metrico).

Data la varietà differenziabile \mathcal{M} di dimensione 3 ed un punto $p \in \mathcal{M}$, consideriamo \mathbf{g}_p il tensore metrico di \mathcal{M} in p e sia $\{\mathbf{e}_a(p)\}_{a=1}^3$ una base per $T_p\mathcal{M}$. Consideriamo, inoltre, le componenti del tensore metrico $(\mathbf{g}_p)_{ab}$ rispetto alla base $\{\mathbf{e}_a(p)\}_{a=1}^3$, definite come

$$(\mathbf{g}_p)_{ab} = \mathbf{g}_p(\mathbf{e}_a(p), \mathbf{e}_b(p)). \quad (2.1.61)$$

Indichiamo con il simbolo $\llbracket \mathbf{g}_p \rrbracket$ la *matrice rappresentativa* del tensore metrico \mathbf{g}_p rispetto alla base materiale $\{\mathbf{e}_a(p)\}_{a=1}^3$, ossia la matrice che colleziona le componenti definite in (2.1.61).

Definizione 2.1.30 (Rotore di un campo vettoriale [6, 27]).

Data una varietà differenziabile \mathcal{M} di dimensione 3, consideriamo un campo vettoriale $\mathbf{v} : \mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M}$. Si definisce il *rotore* di \mathbf{v} come il campo vettoriale $\operatorname{curl} \mathbf{v} : \mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M}$ tale che

$$(\operatorname{curl} \mathbf{v})(p) := \frac{1}{\det \llbracket \mathbf{g}_p \rrbracket} \varepsilon^{abc} [\nabla \mathbf{v}^b]_{c;b} \mathbf{e}_a(p), \quad \forall p \in \mathcal{M}. \quad (2.1.62)$$

Definizione 2.1.31 (Prodotto “vettoriale” tra tensori [4]).

Data una varietà differenziabile \mathcal{M} di dimensione 3 e un punto $p \in \mathcal{M}$, consideriamo un tensore $\mathbf{A} \in [T_p\mathcal{M}]^0_2$ e un tensore $\mathbf{B} \in [T_p\mathcal{M}]^1_1$. Si definisce il prodotto “vettoriale” [4] tra i tensori \mathbf{A} e \mathbf{B} come il tensore del terzo ordine $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \in [T_p\mathcal{M}]^1_1$ tale che

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})^a_{\ b\ c} := \frac{1}{\det \llbracket \mathbf{g}_p \rrbracket} \varepsilon^{amn} A_{bm} B^c_{\ n}, \quad (2.1.63)$$

dove ε^{amn} sono i simboli di Levi-Civita della varietà \mathcal{M} e $\llbracket \mathbf{g}_p \rrbracket$ è la matrice rappresentativa del tensore metrico \mathbf{g}_p rispetto alle basi scelte.

La definizione dei precedenti operatori differenziali per il caso di campi tensoriali è una diretta generalizzazione del caso per campi vettoriali e, in caso di necessità, saranno richiamate le loro definizioni nei capitoli successivi.

2.2 Varietà materiali e configurazioni

In questa Sezione, sono introdotti i principali strumenti usati per formalizzare, nell’ambito della Teoria delle Miscele [13, 15], la *cinematica* di un tessuto biologico, idealizzato matematicamente come un sistema continuo bifasico, composto da una fase solida e da una fluida. In particolare, assumiamo che la fase solida sia composta dall’insieme di cellule, di filamenti

proteici e della matrice extracellulare (ECM) che formano la struttura di un tessuto soffice, mentre la fase fluida rappresenta il fluido interstiziale [12, 35]. Nel seguito, si indicherà sempre con il pedice $\alpha = s$ la fase solida, mentre con $\alpha = f$ la fase fluida. Le due fasi sono supposte essere *immiscibili*, ossia si suppone l'esistenza, nella micro-scala, di un'interfaccia ben definita che separa la fase solida da quella fluida⁴.

Definizione 2.2.1 (Varietà materiali ed particelle materiali [41, 42, 35]).

Associamo a ciascuna fase della miscela una *varietà materiale* che indichiamo, rispettivamente, con \mathfrak{M}_s per la fase solida e con \mathfrak{M}_f per la fase fluida. Gli elementi di \mathfrak{M}_s e \mathfrak{M}_f sono dette *particelle materiali* e sono indicate come \mathfrak{X}_s e \mathfrak{X}_f .

Nella Tesi, si identifica lo spazio fisico con lo spazio Euclideo tridimensionale, indicato con \mathcal{S} , il quale è dotato della struttura di spazio affine. Inoltre, consideriamo un intervallo di tempo \mathcal{T} aperto e limitato, ossia esiste un tempo $T > 0$ tale per cui $\mathcal{T} =]0, T[$.

Definizione 2.2.2 (Configurazione di riferimento della fase solida [41, 42]).

Siano date \mathfrak{M}_s e \mathfrak{M}_f le varietà materiali associate, rispettivamente, alla fase solida e alla fase fluida della miscela. Supponiamo che esista un *embedding*, indicato con

$$\kappa_R : \mathfrak{M}_s \rightarrow \mathcal{S} \quad (2.2.1)$$

tale da mappare ogni particella materiale $\mathfrak{X}_s \in \mathfrak{M}_s$ in un punto spaziale $\kappa_R(\mathfrak{X}_s) \in \mathcal{S}$. Allora, definiamo il *piazzamento di riferimento della fase solida*, indicato con \mathcal{B}_R , come l'immagine di \mathfrak{M}_s attraverso la funzione κ_R , ossia $\mathcal{B}_R := \kappa_R(\mathfrak{M}_s) \subset \mathcal{S}$.

Definizione 2.2.3 (Configurazione corrente della miscela [41, 42]).

Dato l'istante di tempo $t \in \mathcal{T}$, supponiamo di poter descrivere il moto della fase α , con $\alpha \in \{s, f\}$, tramite l'introduzione di una famiglia di *embedding* tempo-dipendenti della forma

$$\kappa_\alpha(\cdot, t) : \mathfrak{M}_\alpha \rightarrow \mathcal{S}, \quad \alpha \in \{s, f\}, \quad (2.2.2)$$

la quale associa una particella materiale della fase α , indicata con $\mathfrak{X}_\alpha \in \mathfrak{M}_\alpha$, con la posizione $\kappa_\alpha(\mathfrak{X}_\alpha, t) \in \mathcal{S}$ che tale particella materiale occupa al tempo t . Allora, definiamo il *piazzamento corrente della miscela*, all'istante fissato $t \in \mathcal{T}$, come l'intersezione delle immagini

$$\mathcal{B}(t) := \kappa_s(\mathfrak{M}_s, t) \cap \kappa_f(\mathfrak{M}_f, t) \subset \mathcal{S}, \quad (2.2.3)$$

ossia come l'insieme dei punti spaziali che, al tempo $t \in \mathcal{T}$, ospitano *contemporaneamente* una particella materiale solida ed una fluida.

Osservazione 11 (Immersione della fase solida in quella fluida [5]).

In questa Tesi, si suppone, per semplicità, che la fase solida sia totalmente immersa nella fase fluida, ad ogni istante di tempo $t \in \mathcal{T}$, ossia che $\kappa_s(\mathfrak{M}_s, t) \subseteq \kappa_f(\mathfrak{M}_f, t)$, da cui segue che $\mathcal{B}(t) \equiv \kappa_s(\mathfrak{M}_s, t)$. Pertanto, risulta legittimo identificare la configurazione corrente della miscela con quella associata al suo solo scheletro solido ad ogni istante di tempo $t \in \mathcal{T}$. Una formulazione più generale che non richiede questa ipotesi è trattata in [43].

La mappa $\kappa_s(\cdot, t)$, definita nell'Equazione (2.2.2), è iniettiva (per definizione di embedding) ma non è suriettiva. Per renderla biettiva, e dunque invertibile, definiamo la sua *restrizione all'immagine* come la mappa

$$\check{\kappa}_s(\cdot, t) : \mathfrak{M}_s \rightarrow \mathcal{B}(t), \quad (2.2.4)$$

⁴Questa ipotesi è tuttavia un'idealizzazione del modello rispetto alla realtà fisica, in quanto esiste sempre una zona, in concomitanza dell'interfaccia tra le fasi, in cui vi è una *transizione di fase*.

dove facciamo riferimento all'Osservazione 11 per la scelta del codominio della mappa nella Equazione (2.2.4). Assumendo che $\mathcal{B}(t) \neq \emptyset$ per ogni $t \in \mathcal{T}$, allora risulta ben definita la composizione

$$\kappa_{\mathbb{R}} \circ [\check{\kappa}_s(\cdot, t)]^{-1} : \mathcal{B}(t) \rightarrow \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \quad (2.2.5)$$

la quale è una mappa iniettiva ma, in generale, non suriettiva, in quanto $\kappa_{\mathbb{R}}$ non è suriettiva. Dunque, possiamo indicare con $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}^{\text{eff}}(t)$ l'immagine di tale mappa, ossia l'insieme definito come

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}^{\text{eff}}(t) := \left\{ X \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \text{ t.c. } X = \{\kappa_{\mathbb{R}} \circ [\check{\kappa}_s(\cdot, t)]^{-1}\}(x) \text{ con } x \in \mathcal{B}(t) \right\}. \quad (2.2.6)$$

Nel contesto della Tesi, si suppone, per semplicità, che $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}^{\text{eff}}(t) \equiv \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ per ogni $t \in \mathcal{T}$, ossia che la composizione definita in (2.2.5) sia biiettiva, da cui segue che $\kappa_{\mathbb{R}}$ è anche suriettiva.

Definizione 2.2.4 (Cambio di configurazione della fase solida [5]).

Data la precedente ipotesi, la mappa definita in Equazione (2.2.5), per $t \in \mathcal{T}$ fissato, è invertibile e si definisce *cambio di configurazione della fase solida* l'inversa di tale mappa, ossia si ha la biiezione

$$\begin{aligned} \check{\chi}(\cdot, t) &:= \{\kappa_{\mathbb{R}} \circ [\check{\kappa}_s(\cdot, t)]^{-1}\}^{-1} \\ &= [\check{\kappa}_s(\cdot, t)] \circ \kappa_{\mathbb{R}}^{-1} \circ : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathcal{B}(t) \subset \mathcal{S}. \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Rilassando l'ipotesi di suriettività sulla $\check{\chi}(\cdot, t)$, si ottiene l'*embedding* $\chi(\cdot, t) : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathcal{S}$, il quale associa ad un dato punto della configurazione di riferimento $X \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ la posizione $\chi(X, t)$ occupata dalla particella materiale $\mathfrak{X}_s = \kappa_{\mathbb{R}}^{-1}(X)$ al tempo $t \in \mathcal{T}$. Nella Equazione (2.2.7), possiamo esplicitare che gli argomenti della mappa di moto siano i punti della configurazione di riferimento e il tempo riscrivendola come

$$\chi : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}, \quad \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \times \mathcal{T} \ni (X, t) \mapsto \chi(X, t) \in \mathcal{S}. \quad (2.2.8)$$

Tale funzione χ prende comunemente il nome di *moto della fase solida* [5], sebbene il vero moto sia dato dalla valutazione di χ in un dato punto fisso $X \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, ossia $\chi(X, \cdot) : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}$.

Osservazione 12 (Varietà differenziabili triviali [6]).

Nel seguito, trattiamo le varietà $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ e $\mathcal{B}(t)$ come varietà differenziabili “triviali” [6]. Tali varietà, in italiano, sono dette “banali”, in quanto è sufficiente dichiarare un solo sistema di coordinate $\phi_{\mathbb{R}} : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}^3$ per parametrizzare completamente i punti di $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ in \mathbb{R}^3 , e, analogamente, dichiarare un solo sistema di coordinate $\phi_t : \mathcal{B}(t) \rightarrow \mathbb{R}^3$ (eventualmente, diverso dal primo) per parametrizzare $\mathcal{B}(t)$ in \mathbb{R}^3 . Si ricorda che a tali varietà, inoltre, viene richiesto di essere lisce e connesse (si ricordi la Definizione 2.1.10). In particolare, per ogni $X \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ e per ogni $x \in \mathcal{B}(t)$, si hanno i sistemi di coordinate

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \ni X \mapsto \phi_{\mathbb{R}}(X) \equiv (X^1, X^2, X^3) \in \mathbb{R}^3, \quad (2.2.9a)$$

$$\mathcal{B}(t) \ni x \mapsto \phi_t(x) \equiv (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3. \quad (2.2.9b)$$

Una conseguenza dell'introduzione di sistemi di coordinate sul piazzamento di riferimento $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ e su quello corrente $\mathcal{B}(t)$ è la possibilità di rappresentare in coordinate le funzioni definite su di esse mediante la composizione con le mappe nelle Equazioni (2.2.9a)-(2.2.9b). Un vantaggio della rappresentazione in coordinate si può osservare nel caso, per esempio, del moto χ , in quanto ciò permette di identificare χ come la collezione di tre “componenti”, ossia $\chi \equiv (\chi^1, \chi^2, \chi^3)$, tali per cui

$$(\chi^1, \chi^2, \chi^3)(\cdot, t) := \phi_t \circ \chi(\cdot, t) \circ \phi_{\mathbb{R}}^{-1} : (X^1, X^2, X^3) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3.$$

In tal modo, si può esprimere il moto *in coordinate* come segue:

$$x^a = \chi^a(X^1, X^2, X^3, t), \quad a \in \{1, 2, 3\}.$$

Definizione 2.2.5 (Mappa di identità temporale materiale [5]).

Siano \mathcal{B}_R il piazzamento di riferimento e \mathcal{T} l'insieme di tempi. Si definisce la *mappa di identità temporale materiale* come la mappa

$$\mathbf{t} : \mathcal{B}_R \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}, \quad \mathcal{B}_R \times \mathcal{T} \ni (X, t) \mapsto \mathbf{t}(X, t) = t \in \mathcal{T}. \quad (2.2.10)$$

In vista della prossima Sezione, risulta conveniente introdurre il concetto di *moto inverso* rispetto alla mappa χ .

Definizione 2.2.6 (Moto inverso e identità temporale spaziale [44]).

Ricordando che la mappa $\check{\chi}(\cdot, t) : \mathcal{B}_R \rightarrow \mathcal{B}(t)$ definita in Equazione (2.2.7) è invertibile per $t \in \mathcal{T}$ fissato, siano $X \in \mathcal{B}_R$ e $x \in \mathcal{B}(t)$ tali per cui $x = \chi(X, t)$. Allora definiamo la mappa di *moto inverso* rispetto a $\chi(\cdot, t)$, indicata con $\Xi(\cdot, t)$, come la mappa

$$\Xi(\cdot, t) := [\check{\chi}(\cdot, t)]^{-1} : \mathcal{B}(t) \rightarrow \mathcal{B}_R, \quad \mathcal{B}(t) \ni x \mapsto \Xi(x, t) = X \in \mathcal{B}_R. \quad (2.2.11)$$

Inoltre, introduciamo una mappa proiezione in tempo spaziale, detta *identità temporale spaziale*, definita come

$$\mathcal{T} : \mathcal{S} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}, \quad \mathcal{S} \times \mathcal{T} \ni (x, t) \mapsto \mathcal{T}(x, t) = t \in \mathcal{T}. \quad (2.2.12)$$

Pertanto, dati $x \in \mathcal{B}(t)$ e $t \in \mathcal{T}$, la coppia di mappe (Ξ, \mathcal{T}) agisce sulla coppia (x, t) restituendo la coppia (X, t) con $X = [\check{\chi}(\cdot, t)]^{-1}(x)$, ossia

$$(\Xi, \mathcal{T}) : \mathcal{S} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{B}_R \times \mathcal{T}, \quad \mathcal{S} \times \mathcal{T} \ni (x, t) \mapsto (\Xi(x, t), t) \in \mathcal{B}_R \times \mathcal{T}. \quad (2.2.13)$$

Osservazione 13 (Identità sul prodotto cartesiano $\mathcal{B}_R \times \mathcal{T}$).

Risulta importante osservare che la composizione delle coppie di mappe “inverse” (Ξ, \mathcal{T}) con la coppia di mappe “dirette” (χ, \mathbf{t}) restituisca l'identità sul prodotto cartesiano $\mathcal{B}_R \times \mathcal{T}$, indicata con il simbolo $\text{id}_{\mathcal{B}_R \times \mathcal{T}}$. Infatti, considerando $X \in \mathcal{B}_R$ e $t \in \mathcal{T}$, si ottiene che

$$\begin{aligned} [(\Xi, \mathcal{T}) \circ (\chi, \mathbf{t})](X, t) &= (\Xi(\chi(X, t), \mathbf{t}(X, t)), \mathcal{T}(\chi(X, t), \mathbf{t}(X, t))) \\ &= (\Xi(x, t), \mathcal{T}(x, t)) \\ &= (X, t) \\ &= \text{id}_{\mathcal{B}_R \times \mathcal{T}}(X, t). \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

Dato un punto $X \in \mathcal{B}_R$, supponiamo di avere una base $\{\mathbf{E}_A(X, t)\}_{A=1}^3$ di $T_X \mathcal{B}_R$ e la sua base duale $\{\mathbf{E}^A(X, t)\}_{A=1}^3$ di $T_X^* \mathcal{B}_R$. Allo stesso modo, fissato $t \in \mathcal{T}$ e dato $x \in \mathcal{B}(t)$, supponiamo di avere $\{\mathbf{e}_a(x, t)\}_{a=1}^3$ base di $T_x \mathcal{S}$ e la sua base duale $\{\mathbf{e}^a(x, t)\}_{a=1}^3$ base di $T_x^* \mathcal{S}$. Formalmente, abbiamo scelte i vettori e covettori di base come dipendenti dal tempo, tuttavia, ipotizziamo, che i campi tensoriali associati a tali elementi ammettano derivata parziale nulla rispetto al tempo.

Definizione 2.2.7 (Tensore gradiente di deformazione [5, 28, 45]).

Fissati $t \in \mathcal{T}$ e $X \in \mathcal{B}_R$, si dice *gradiente di deformazione* la *mappa tangente* di $\chi(\cdot, t)$ in X , che restituisce il tensore a due punti $\mathbf{F}(X, t)$ definito come

$$\mathbf{F}(X, t) := T\chi(X, t) : T_X \mathcal{B}_R \rightarrow T_x \mathcal{S}, \quad x = \chi(X, t). \quad (2.2.15)$$

In particolare, in componenti, si ha

$$\mathbf{F}(X, t) = [\mathbf{F}(X, t)]^a{}_A \mathbf{e}_a(x, t) \otimes \mathbf{E}^A(X, t), \quad [\mathbf{F}(X, t)]^a{}_A = \chi^a{}_{,A}(X, t). \quad (2.2.16)$$

Fissato l'istante di tempo $t \in \mathcal{T}$, il campo tensoriale che ad ogni punto di \mathcal{B}_R associa il tensore gradiente di deformazione in tale punto è indicato come

$$\mathbf{F}(\cdot, t) : \mathcal{B}_R \rightarrow T\mathcal{S} \otimes T^* \mathcal{B}_R. \quad (2.2.17)$$

Nel seguito, indichiamo con $J(X, t) := \det \mathbf{F}(X, t)$ la *deformazione volumetrica* della fase solida e assumiamo che essa sia positiva in ogni punto $X \in \mathcal{B}_R$ e in ogni istante $t \in \mathcal{T}$. Tale ipotesi permette che lo scheletro solido del mezzo poroso non possa *auto-compenetrarsi* e/o che possa *strapparsi* durante il moto.

Una diretta conseguenza della richiesta che J sia positivo è che il tensore $\mathbf{F}(X, t)$, per $X \in \mathcal{B}_R$ e $t \in \mathcal{T}$ fissati, è *invertibile*. Pertanto, possiamo definire il seguente:

Definizione 2.2.8 (Tensore inverso del gradiente di deformazione [5, 28, 45]).

Dato il punto $X \in \mathcal{B}_R$ e l'istante di tempo $t \in \mathcal{T}$, sia $\mathbf{F}(X, t)$ il gradiente di deformazione e sia $x = \chi(X, t)$. Allora, si definisce il tensore *inverso* di $\mathbf{F}(X, t)$, indicato con $\mathbf{F}^{-1}(x, t)$, il tensore

$$\mathbf{F}^{-1}(x, t) : T_x \mathcal{S} \rightarrow T_X \mathcal{B}_R, \quad X = \Xi(x, t), \quad (2.2.18)$$

le cui componenti, rispetto alle basi scelte, sono definite come

$$\mathbf{F}^{-1}(x, t) = [\mathbf{F}^{-1}(x, t)]^A_a \mathbf{E}_A(X, t) \otimes \mathbf{e}^a(x, t), \quad [\mathbf{F}^{-1}(x, t)]^A_a = \Xi^A_{,a}(x, t). \quad (2.2.19)$$

Il campo tensoriale che ad ogni punto di $x \in \mathcal{B}(t)$, per $t \in \mathcal{T}$ fissato, associa il tensore inverso del gradiente di deformazione $\mathbf{F}^{-1}(x, t)$ viene indicato con

$$\mathbf{F}^{-1}(\cdot, t) : \mathcal{B}(t) \rightarrow T \mathcal{B}_R \otimes T^* \mathcal{S}. \quad (2.2.20)$$

Osserviamo, inoltre, che per poter rappresentare il campo tensoriale $\mathbf{F}^{-1}(\cdot, t)$ come una funzione che agisce su \mathcal{B}_R occorre comporre tale campo con la mappa di moto $\chi(\cdot, t)$ con t fissato, ossia [45]

$$[\mathbf{F}^{-1}(\cdot, t) \circ \chi(\cdot, t)] : \mathcal{B}_R \rightarrow T \mathcal{B}_R \otimes T^* \mathcal{S}. \quad (2.2.21)$$

Definizione 2.2.9 (Tensore gradiente di deformazione trasposto [28, 45]).

Dato il punto $X \in \mathcal{B}_R$ e l'istante di tempo $t \in \mathcal{T}$, sia $\mathbf{F}(X, t)$ il gradiente di deformazione e sia $x = \chi(X, t)$. Allora, si definisce il tensore *trasposto* di $\mathbf{F}(X, t)$, indicato con $\mathbf{F}^T(x, t)$, il tensore

$$\mathbf{F}^T(x, t) : T_x^* \mathcal{S} \rightarrow T_X^* \mathcal{B}_R, \quad X = \Xi(x, t), \quad (2.2.22a)$$

le cui componenti, rispetto alle basi scelte, sono definite come

$$\mathbf{F}^T(x, t) = [\mathbf{F}^T(x, t)]^A_a \mathbf{E}^A(X, t) \otimes \mathbf{e}_a(x, t), \quad [\mathbf{F}^T(x, t)]^A_a = [\mathbf{F}(X, t)]^a_A. \quad (2.2.23a)$$

Definizione 2.2.10 (Tensore gradiente di deformazione inverso trasposto [28, 45]).

Dato il punto $X \in \mathcal{B}_R$ e l'istante di tempo $t \in \mathcal{T}$, sia $\mathbf{F}(X, t)$ il gradiente di deformazione e sia $x = \chi(X, t)$. Allora, si definisce il tensore *inverso trasposto* di $\mathbf{F}(X, t)$, indicato con $\mathbf{F}^{-T}(X, t)$, il tensore

$$\mathbf{F}^{-T}(X, t) : T_X^* \mathcal{B}_R \rightarrow T_x^* \mathcal{S}, \quad x = \chi(X, t). \quad (2.2.24)$$

le cui componenti sono definite come

$$\mathbf{F}^{-T}(X, t) = [\mathbf{F}^{-T}(X, t)]^A_a \mathbf{e}^a(x, t) \otimes \mathbf{E}_A(X, t), \quad [\mathbf{F}^{-T}(X, t)]^A_a = [\mathbf{F}^{-1}(x, t)]^A_a. \quad (2.2.25)$$

Definizione 2.2.11 (Velocità della fase α -esima [13, 15]).

Dato $t \in \mathcal{T}$, si definisce il campo di velocità associata alla fase α -esima come il seguente campo vettoriale tempo-dipendente

$$\mathbf{v}_\alpha(\cdot, t) : \mathcal{B}(t) \rightarrow T \mathcal{S}, \quad \alpha \in \{s, f\}, \quad (2.2.26)$$

dove, fissato $x \in \mathcal{B}(t)$, si ha che

$$\mathbf{v}_\alpha(x, t) = [\mathbf{v}_\alpha(x, t)]^a \mathbf{e}_a(x, t) \in T_x \mathcal{S}, \quad \alpha \in \{s, f\}. \quad (2.2.27)$$

Nel seguito, indichiamo con l'insieme $\{\gamma^{abc}\}_{a,b,c=1}^3$ la collezione dei simboli di Christoffel *spaziali*, ossia allo spazio euclideo \mathcal{S} , e indichiamo con $\{\Gamma^A_{BC}\}_{A,B,C=1}^3$ i simboli di Christoffel *materiali*, ossia associati al piazzamento di riferimento \mathcal{B}_R .

Definizione 2.2.12 (Gradienti di velocità della fase α -esima [5, 13, 15]).

Dato $t \in \mathcal{T}$, si definisce il *gradiente di velocità* associato alla fase α -esima come la derivata covariante di $\mathbf{v}_\alpha(\cdot, t)$, ossia il campo tensoriale

$$\text{grad } \mathbf{v}_\alpha(\cdot, t) : \mathcal{B}(t) \rightarrow T\mathcal{S} \otimes T^*\mathcal{S}, \quad \alpha \in \{\text{s, f}\}. \quad (2.2.28)$$

dove, fissato $x \in \mathcal{B}(t)$, si ha

$$\text{grad } \mathbf{v}_\alpha(x, t) = (\text{grad } \mathbf{v}_\alpha(x, t))^a_b \mathbf{e}_a(x, t) \otimes \mathbf{e}^b(x, t) \in T_x\mathcal{S} \otimes T_x^*\mathcal{S}, \quad \alpha \in \{\text{s, f}\}. \quad (2.2.29)$$

Ricordando la Equazione (2.1.54), le componenti del gradiente di velocità \mathbf{v}_α sono definite come segue

$$(\text{grad } \mathbf{v}_\alpha)^a_b \equiv (\mathbf{v}_\alpha)^a_{;b} := (\mathbf{v}_\alpha)^a_{,b} + \gamma^a_{db}(\mathbf{v}_\alpha)^d, \quad \alpha \in \{\text{s, f}\}. \quad (2.2.30)$$

Definizione 2.2.13 (Derivata sostanziale rispetto alla fase α -esima [41, 42]).

Si definisce la *derivata sostanziale rispetto alla fase α -esima* della funzione $h : \mathcal{S} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{Y}$, con \mathcal{Y} insieme arbitrario di scalari, vettori, covettori, o tensori di qualunque ordine e tipo, come il seguente operatore differenziale

$$D_\alpha h := \partial_t h + (\text{grad } h) \mathbf{v}_\alpha, \quad \alpha \in \{\text{s, f}\}. \quad (2.2.31)$$

La derivata sostanziale $D_\alpha h$, a differenza della derivata parziale in tempo che calcola come h cambi rimanendo fissati nello spazio, calcola come la quantità h cambi in tempo *seguendo* il moto della fase α -esima.

Definizione 2.2.14 (Accelerazione della fase α -esima [41, 42]).

Si definisce *accelerazione della fase α -esima* come la derivata sostanziale rispetto alla fase α della velocità associata alla fase α , ossia la quantità

$$\mathbf{a}_\alpha := D_\alpha \mathbf{v}_\alpha = \partial_t \mathbf{v}_\alpha + (\text{grad } \mathbf{v}_\alpha) \mathbf{v}_\alpha, \quad \alpha \in \{\text{s, f}\}. \quad (2.2.32)$$

2.3 Approccio lagrangiano alla cinematica

Nella Meccanica dei Continui e, in particolare, nella Teoria delle Miscele [13, 15] è importante distinguere se una grandezza fisica sia *spaziale* (anche detta *Euleriana*) oppure se sia “*riportata*” ai punti del piazzamento di riferimento \mathcal{B}_R (anche detta *Lagrangiana*). Una grandezza si dice Euleriana se è espressa come funzione del piazzamento corrente della miscela $\mathcal{B}(t)$, ad un dato istante di tempo $t \in \mathcal{T}$. Al contrario, una grandezza Lagrangiana è espressa come una funzione del piazzamento di riferimento \mathcal{B}_R . In particolare, è fondamentale essere in grado di passare da una rappresentazione all'altra tramite opportune composizioni di funzioni. Preliminarmente, osserviamo che, tramite l'introduzione della coppia di funzioni

$$(\chi, \mathbf{t}) : \mathcal{B}_R \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S} \times \mathcal{T}, \quad \mathcal{B}_R \times \mathcal{T} \ni (X, t) \mapsto (\chi(X, t), t) \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}, \quad (2.3.1)$$

definite dalle Equazioni (2.2.8) e (2.2.10), risulta possibile definire, tramite opportune composizioni, la *forma Lagrangiana di una grandezza spaziale*.

Definizione 2.3.1 (Forma Lagrangiana di una funzione scalare).

Consideriamo una funzione scalare spaziale, o *euleriana*, $f : \mathcal{S} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$. Se vale che $f(x, t) = y$ con $t \in \mathcal{T}$ e $x \in \mathcal{B}(t)$, allora esiste un elemento $X \in \mathcal{B}_R$ tale che $x = \chi(X, t)$ e $t = \mathbf{t}(X, t)$. Dunque possiamo scrivere che

$$f(x, t) = f(\chi(X, t), \mathbf{t}(X, t)) = [f \circ (\chi, \mathbf{t})](X, t) =: f_{(L)}(X, t), \quad (2.3.2)$$

dove $f_{(L)} := [f \circ (\chi, \mathbf{t})] : \mathcal{B}_R \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ è detta la forma *Lagrangiana* di f .

Nel seguito, indichiamo con $\mathbf{V}_\alpha := \mathbf{v}_\alpha \circ (\chi, \mathbf{t})$ la velocità della fase α -esima come funzione del piazzamento di riferimento \mathcal{B}_R e del tempo.

Osservazione 14 (Relazione di compatibilità).

Ricordiamo, preliminarmente, che sebbene la mappa $\chi(\cdot, t)$ ammette tre componenti $\chi^a(\cdot, t)$, essa *non* è un campo vettoriale, in quanto non si trasforma come tale. Tuttavia, la derivata in tempo di χ , indicata con $\partial_t \chi$, è un campo vettoriale, in quanto ottenuto come limite di un rapporto incrementale. Possiamo, pertanto, rappresentare $\partial_t \chi$ in componenti come segue:

$$\partial_t \chi = (\partial_t \chi)^a [e_a \circ (\chi, \mathbf{t})] = (\partial_t \chi^a) [e_a \circ (\chi, \mathbf{t})]. \quad (2.3.3)$$

Una richiesta atta a legare la descrizione Lagrangiana ed Euleriana del moto è di richiedere che la velocità del solido valutata prodotto cartesiano $\mathcal{B}_R \times \mathcal{T}$ sia *uguale* alla derivata in tempo del moto χ , ossia

$$\mathbf{V}_s \equiv \partial_t \chi, \quad (\mathbf{V}_s)^a \equiv (\partial_t \chi)^a \equiv \partial_t \chi^a. \quad (2.3.4)$$

Una conseguenza della Equazione (2.3.4) per il tensore \mathbf{F} , definito in (2.2.15), è che, in generale, la derivata in tempo di \mathbf{F} , indicata con $\dot{\mathbf{F}}$, non è uguale al tensore ottenuto derivando le componenti \mathbf{F} , ossia

$$(\dot{\mathbf{F}})^a{}_A \neq \overline{\dot{F}^a{}_A}. \quad (2.3.5)$$

Infatti, dato $\mathbf{F} = F^a{}_A [e_a \circ (\chi, \mathbf{t})] \otimes \mathbf{E}^A$, la derivata in tempo di tensore \mathbf{F} è definita come

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{F}} &= \overline{\dot{F}^a{}_A} [e_a \circ (\chi, \mathbf{t})] \otimes \mathbf{E}^A + F^a{}_A [(e_a)_{,b} \circ (\chi, \mathbf{t})] (\partial_t \chi^b) \otimes \mathbf{E}^A \\ &= \overline{\dot{F}^a{}_A} [e_a \circ (\chi, \mathbf{t})] \otimes \mathbf{E}^A + F^a{}_A [(\gamma^c{}_{ab} e_c) \circ (\chi, \mathbf{t})] (\mathbf{V}_s)^b \otimes \mathbf{E}^A \\ &= \{ \overline{\dot{F}^a{}_A} + [\gamma^a{}_{cb} \circ (\chi, \mathbf{t})] F^c{}_A (\mathbf{V}_s)^b \} [e_a \circ (\chi, \mathbf{t})] \otimes \mathbf{E}^A \\ &=: (\dot{\mathbf{F}})^a{}_A [e_a \circ (\chi, \mathbf{t})] \otimes \mathbf{E}^A. \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Un'ulteriore conseguenza della Equazione (2.3.4), che utilizza il risultato ottenuto nella (2.3.6), consiste nel poter esprimere il gradiente materiale di \mathbf{V}_s in funzione della derivata di \mathbf{F} come segue:

$$\begin{aligned} \text{Grad} \mathbf{V}_s &= \{ (\partial_t \chi^a) [e_a \circ (\chi, \mathbf{t})] \}_{,A} \otimes \mathbf{E}^A \\ &= \{ \overline{\dot{F}^a{}_A} [e_a \circ (\chi, \mathbf{t})] + F^b{}_A (\mathbf{V}_s)^a [(e_a)_{,b} \circ (\chi, \mathbf{t})] \} \otimes \mathbf{E}^A \\ &= \{ \overline{\dot{F}^a{}_A} [e_a \circ (\chi, \mathbf{t})] + F^b{}_A (\mathbf{V}_s)^a [(\gamma^c{}_{ab} e_c) \circ (\chi, \mathbf{t})] \} \otimes \mathbf{E}^A \\ &= \{ \overline{\dot{F}^a{}_A} + [\gamma^a{}_{cb} \circ (\chi, \mathbf{t})] F^b{}_A (\mathbf{V}_s)^c \} [e_a \circ (\chi, \mathbf{t})] \otimes \mathbf{E}^A \\ &= \{ \overline{\dot{F}^a{}_A} + [\gamma^a{}_{bc} \circ (\chi, \mathbf{t})] F^b{}_A (\mathbf{V}_s)^c \} [e_a \circ (\chi, \mathbf{t})] \otimes \mathbf{E}^A \\ &= (\dot{\mathbf{F}})^a{}_A [e_a \circ (\chi, \mathbf{t})] \otimes \mathbf{E}^A \\ &= \dot{\mathbf{F}}, \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

dove, dopo il quinto segno di uguale, si è ricordato che i simboli di Christoffel sono simmetrici negli indici bassi.

Teorema 2.3.1 (Relazioni notevoli per le derivate di funzioni scalari).

Data $f : \mathcal{S} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{Y}$, con \mathcal{Y} insieme di scalari, valgono le seguenti relazioni

$$\text{Grad}f_{(L)} = [\mathbf{F}^T \text{grad}f] \circ (\chi, \mathbf{t}), \quad (2.3.8a)$$

$$\dot{f}_{(L)} = [D_s f] \circ (\chi, \mathbf{t}). \quad (2.3.8b)$$

Dimostrazione. Per dimostrare la Equazione (2.3.8a), vogliamo mostrare che essa valga in componenti e, in particolare, ricordiamo che

$$\text{grad}f(x, t) = f_{,a}(x, t)\mathbf{e}^a(x, t), \quad \text{Grad}f_{(L)}(X, t) = f_{(L),A}(X, t)\mathbf{E}^A(X, t). \quad (2.3.9)$$

Dunque, ricordando che \mathbf{t} non dipende esplicitamente dalle variabili spaziali, si ha che

$$\begin{aligned} [\text{Grad}f_{(L)}]_A &= f_{(L),A} \\ &= [f \circ (\chi, \mathbf{t})]_{,A} \\ &= [f_{,a} \circ (\chi, \mathbf{t})]\chi^a_{,A} + [\partial_t f \circ (\chi, \mathbf{t})] \underbrace{\mathbf{t}_{,A}}_{=0} \\ &= [f_{,a} \circ (\chi, \mathbf{t})]F^a_A \\ &= [(\mathbf{F}^T)_A{}^a(\text{grad}f)_a] \circ (\chi, \mathbf{t}) \\ &= [\mathbf{F}^T \text{grad}f]_A \circ (\chi, \mathbf{t}). \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

Da quest'ultima relazione, segue direttamente la Equazione (2.3.8a). Per dimostrare, invece, la Equazione (2.3.8b), è sufficiente calcolare la derivata rispetto al tempo della $f_{(L)}$ ricordando che $\partial_t \mathbf{t} \equiv 1$, ossia

$$\begin{aligned} \dot{f}_{(L)} &= \overline{\dot{f} \circ (\chi, \mathbf{t})} \\ &= [f_{,a} \circ (\chi, \mathbf{t})] \partial_t \chi^a + [\partial_t f \circ (\chi, \mathbf{t})] \partial_t \mathbf{t} \\ &= [f_{,a} \circ (\chi, \mathbf{t})](\mathbf{V}_s)^a + [\partial_t f \circ (\chi, \mathbf{t})] \\ &= [(\text{grad}f)_a(\mathbf{v}_s)^a + \partial_t f] \circ (\chi, \mathbf{t}) \\ &= [(\text{grad}f)\mathbf{v}_s + \partial_t f] \circ (\chi, \mathbf{t}) \\ &= [D_s f] \circ (\chi, \mathbf{t}). \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

La dimostrazione è pertanto conclusa. \square

Teorema 2.3.2 (Relazioni notevoli per le derivate delle velocità).

Siano date \mathbf{v}_α la velocità della fase α -esima e la composizione $\mathbf{V}_\alpha = \mathbf{v}_\alpha \circ (\chi, \mathbf{t})$. Allora, vale la seguente relazione tra i loro gradienti:

$$\text{Grad}\mathbf{V}_\alpha = [\text{grad}\mathbf{v}_\alpha \circ (\chi, \mathbf{t})]\mathbf{F}, \quad \alpha \in \{s, f\}. \quad (2.3.12)$$

Dimostrazione.

Per dimostrare la relazione (2.3.12) è conveniente esplicitare la definizione di $\text{Grad}\mathbf{V}_\alpha$ come derivata covariante di $\mathbf{V}_\alpha = (\mathbf{V}_\alpha)^a[\mathbf{e}_a \circ (\chi, \mathbf{t})]$:

$$\begin{aligned} \text{Grad}\mathbf{V}_\alpha &= (\mathbf{V}_\alpha)_{,B} \otimes \mathbf{E}^B \\ &= [\mathbf{v}_\alpha \circ (\chi, \mathbf{t})]_{,B}^a [\mathbf{e}_a \circ (\chi, \mathbf{t})] \otimes \mathbf{E}^B + [\mathbf{v}_\alpha \circ (\chi, \mathbf{t})]^a [\mathbf{e}_a \circ (\chi, \mathbf{t})]_{,B} \otimes \mathbf{E}^B \\ &= [(\mathbf{v}_\alpha)_{,b}^a \circ (\chi, \mathbf{t})] F^b_B [\mathbf{e}_a \circ (\chi, \mathbf{t})] \otimes \mathbf{E}^B + [\mathbf{v}_\alpha \circ (\chi, \mathbf{t})]^a [(\mathbf{e}_a)_{,b} \circ (\chi, \mathbf{t})] F^b_B \otimes \mathbf{E}^B \\ &= \{[(\mathbf{v}_\alpha)_{,b}^a \circ (\chi, \mathbf{t})] F^b_B \otimes \mathbf{E}^B + [\mathbf{v}_\alpha \circ (\chi, \mathbf{t})]^a [(\gamma^c_{ab} \mathbf{e}_c) \circ (\chi, \mathbf{t})] F^b_B \otimes \mathbf{E}^B\} \\ &= \{[(\mathbf{v}_\alpha)_{,b}^a \circ (\chi, \mathbf{t})] F^b_B \otimes \mathbf{E}^B + \{[\gamma^a_{cb}(\mathbf{v}_\alpha)^c \mathbf{e}_a] \circ (\chi, \mathbf{t})\} F^b_B \otimes \mathbf{E}^B\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (\{[(\mathbf{v}_\alpha)^a_{,b} + \gamma^a_{cb}(\mathbf{v}_\alpha)^c] \mathbf{e}_a\} \circ (\chi, \mathbf{t})) F^b_B \otimes \mathbf{E}^B \\
 &= [(\text{grad} \mathbf{v}_\alpha)^a_b \circ (\chi, \mathbf{t})] F^b_B [\mathbf{e}_\alpha \circ (\chi, \mathbf{t})] \otimes \mathbf{E}^B \\
 &= [\text{grad} \mathbf{v}_\alpha \circ (\chi, \mathbf{t})] \mathbf{F}.
 \end{aligned} \tag{2.3.13}$$

La dimostrazione è così conclusa. \square

Si noti che la relazione nell'Equazione (2.3.12) per la fase solida, utilizzando la Equazione (2.3.7) espressa nella Osservazione 14, può essere riscritto come

$$\dot{\mathbf{F}} = [\text{grad} \mathbf{v}_s \circ (\chi, \mathbf{t})] \mathbf{F}. \tag{2.3.14}$$

Nel seguito indicheremo il *gradiente materiale della velocità α -esima* come $\mathbf{L}_\alpha := \text{Grad} \mathbf{V}_\alpha$, mentre la *forma materiale del gradiente di velocità* è indicato con $\boldsymbol{\ell}_\alpha := \text{grad} \mathbf{v}_\alpha \circ (\chi, \mathbf{t})$. Pertanto le relazioni notevoli per i gradienti delle velocità precedentemente ottenute possono essere riscritte in maniera compatta come

$$\mathbf{L}_\alpha = \boldsymbol{\ell}_\alpha \mathbf{F}, \quad \alpha \in \{s, f\}, \tag{2.3.15a}$$

$$\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{L}_s = \boldsymbol{\ell}_s \mathbf{F}. \tag{2.3.15b}$$

Nel seguito, riferendoci alla definizione data nella Equazione (2.1.59), indichiamo con “div” la divergenza *spaziale*, ossia associata allo spazio euclideo, e con “Div” la divergenza *materiale*, ossia associata al piazzamento di riferimento \mathcal{B}_R . Inoltre, con i simboli “tr” e “Tr” indichiamo, rispettivamente, la traccia di un tensore *spaziale* e la traccia di un tensore *materiale*.

Teorema 2.3.3 (Relazione notevole per la deformazione volumica).

Data $J = \det \mathbf{F}$ la deformazione volumica, vale la seguente relazione

$$\dot{J} = J \text{tr} \boldsymbol{\ell}_s = J [\text{div} \mathbf{v}_s \circ (\chi, \mathbf{t})]. \tag{2.3.16}$$

Dimostrazione. Per provare la Equazione (2.3.16), occorre ricordare che

$$\begin{aligned}
 \dot{J} &= J \mathbf{F}^{-T} : \dot{\mathbf{F}} = J (\mathbf{F}^{-T})_a^A (\dot{\mathbf{F}})^a_A \\
 &= J [\mathbf{F}^{-1} \circ (\chi, \mathbf{t})]_a^A (\dot{\mathbf{F}})^a_A \\
 &= J \text{Tr} \{ [\mathbf{F}^{-1} \circ (\chi, \mathbf{t})] \dot{\mathbf{F}} \} \\
 &= J \{ \dot{\mathbf{F}} [\mathbf{F}^{-1} \circ (\chi, \mathbf{t})] \} \\
 &= J \text{tr} \boldsymbol{\ell}_s \\
 &= J [\text{div} \mathbf{v}_s \circ (\chi, \mathbf{t})],
 \end{aligned} \tag{2.3.17}$$

dove nel penultimo passaggio abbiamo usata la relazione (2.3.15b). \square

Teorema 2.3.4 (Identità di Piola [5]).

Dato il gradiente di deformazione \mathbf{F} , si può dimostrare la seguente identità, comunemente nota come l'Identità di Piola:

$$\text{Div}(J \mathbf{F}^{-T}) = \mathbf{0}, \quad \text{ossia, in componenti,} \quad [J (\mathbf{F}^{-T})_a^A]_{;A} = 0. \tag{2.3.18}$$

Dimostrazione. Omessa. \square

Nel seguito, si denotano con $\mathbf{g}(x, t) : T_x \mathcal{S} \rightarrow T_x^* \mathcal{S}$ il tensore metrico associato a \mathcal{S} in $x \in \mathcal{S}$ e $t \in \mathcal{T}$, e con $\mathbf{G}(x, t) : T_X \mathcal{B}_R \rightarrow T_X^* \mathcal{B}_R$ il tensore metrico associato a \mathcal{B}_R in $X \in \mathcal{B}_R$ e $t \in \mathcal{T}$, e indichiamo i loro campi tensoriali associati come

$$\mathbf{g} : \mathcal{S} \times \mathcal{T} \rightarrow [T \mathcal{S}]_2^0, \quad \text{con l'ipotesi che} \quad \partial_t \mathbf{g} \equiv \mathbf{0},$$

$$\mathbf{G} : \mathcal{B}_R \times \mathcal{T} \rightarrow [T\mathcal{B}_R]_2^0, \quad \text{con l'ipotesi che} \quad \partial_t \mathbf{G} \equiv \mathbf{0}.$$

Inoltre, indichiamo con $\mathbf{i}(x, t) : T_x \mathcal{S} \rightarrow T_x \mathcal{S}$ il tensore identità associato a \mathcal{S} in $x \in \mathcal{S}$ e $t \in \mathcal{T}$, e con $\mathbf{I}(X, t) : T_X \mathcal{B}_R \rightarrow T_X \mathcal{B}_R$ il tensore identità associato a \mathcal{B}_R in $X \in \mathcal{B}_R$ e $t \in \mathcal{T}$.

Definizione 2.3.2 (Tensore destro di Cauchy-Green [5, 28, 45]).

Dato $X \in \mathcal{B}_R$, sia $\mathbf{F}(X, t)$ il gradiente di deformazione in tale punto e all'istante di tempo $t \in \mathcal{T}$. Si definisce il *tensore destro di Cauchy-Green* come

$$\mathbf{C}(X, t) := \mathbf{F}^T(\chi(X, t), t) \mathbf{g}(\chi(X, t), t) \mathbf{F}(X, t). \quad (2.3.19)$$

Sfruttando le composizioni con le mappe (χ, \mathbf{t}) , si può definire il campo tensoriale \mathbf{C} che ad ogni coppia $(X, t) \in \mathcal{B}_R \times \mathcal{T}$ associa $\mathbf{C}(X, t)$ come

$$\mathbf{C} := [\mathbf{F}^T \circ (\chi, \mathbf{t})][\mathbf{g} \circ (\chi, \mathbf{t})]\mathbf{F}. \quad (2.3.20)$$

Dalla Equazione (2.3.19), osserviamo che il tensore $\mathbf{C}(X, t) : T_X \mathcal{B}_R \rightarrow T_X^* \mathcal{B}_R$ è due volte covariante, simmetrico e definito positivo. Dunque, tale tensore è un tensore metrico *indotto* dal moto χ che “trasporta” la metrica spaziale \mathbf{g} sul piazzamento di riferimento \mathcal{B}_R . In particolare, $\mathbf{C}(X, t)$ è il *pull-back* [5] del tensore metrico $\mathbf{g}(x)$ attraverso il moto $\chi(\cdot, t)$, e in Letteratura [5], si utilizza la notazione $\mathbf{C}(X, t) := (\chi^* \mathbf{g})(X, t)$.

2.4 Cinematica del rimodellamento

A seguito di un processo meccanico, atto, per esempio, alla deformazione di un provino di materiale biologico, possono avvenire dei fenomeni *anelastici* tali da comportare il *rimodellamento della struttura interna* [36, 35]. Fino ad ora, abbiamo presentato e descritto gli strumenti matematici che permettono di studiare il comportamento di un tessuto in campo *elastico*, ossia in assenza di trasformazioni strutturali irreversibili, imputabili a fenomeni anelastici. Tuttavia, per rappresentare la *struttura interna*, e il modo in cui può cambiare nel tempo, è necessario introdurre una nuova variabile che tenga conto delle variazioni microstrutturali.

Consideriamo, come esempio preliminare, di avere un corpo continuo nel piazzamento di riferimento \mathcal{B}_R e che, tramite una trasformazione $\chi(\cdot, t)$, esso si trovi, al tempo t , nel piazzamento corrente $\mathcal{B}(t)$. Supponiamo che il corpo sia soggetto ad *azioni esterne*, che si possono aggiungere a quelle “classiche”, solitamente identificate con la forza di gravità e le forze di contatto, oltre ad eventuali spostamenti prescritti. Può succedere che, anche in assenza di qualsiasi azione esterna, del tipo appena elencato, il corpo non sia in uno stato privo di sforzi interni. Pertanto, come riportato in [9], al fine di ottenere uno stato del materiale in cui quest'ultimo sia privo di sforzi è necessario eseguire un processo *fittizio* che consiste nel “tagliare” il corpo in porzioni infinitamente piccole, in maniera *isoterma*, in modo tale che ciascuna porzione possa rilassarsi indipendentemente dalle porzioni vicine. La collezione delle porzioni così ottenute viene denominata “*stato naturale*” [9] del materiale al tempo t . La trasformazione che porta una delle generiche porzione del corpo, ad esempio quella centrata nel punto materiale che occupa il punto spaziale $x \in \mathcal{B}(t)$, nello stato naturale, verrà rappresentata dal tensore

$$\mathbf{F}_e^{-1}(x, t) : T_x \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{N}_X(t), \quad X = \Xi(x, t), \quad (2.4.1)$$

dove $\mathcal{N}_X(t)$ prende il nome di *stato naturale del corpo in X al tempo t* [9], e $\mathbf{F}_e^{-1}(x, t)$ descrive lo scarico completo del corpo dagli sforzi interni. Dalla (2.4.1) segue banalmente

che il tensore $\mathbf{F}_e(X, t)$ è invertibile e prende il nome di tensore di *distorsione elastica totale*. È possibile riportare ciascuna porzione di materiale dal proprio stato naturale $\mathcal{N}_X(t)$ allo stato associato al piazzamento di riferimento tramite un'altra trasformazione, che indichiamo

$$\mathbf{K}^{-1}(X, t) : \mathcal{N}_X(t) \rightarrow T_X \mathcal{B}_R, \quad (2.4.2)$$

rappresentante la distorsione necessaria per riottenere il piazzamento di riferimento. Anche il tensore $\mathbf{K}(X, t)$ è invertibile, per costruzione, e, rappresentando la distorsione imputabile ai cambiamenti della struttura interna, prende il nome di *tensore di distorsione anelastica totale*. Da quanto detto, segue che il piazzamento di riferimento, in generale, non è uno stato privo di sforzi interni. Se, adesso, rieseguiamo questi passaggi al tempo iniziale di osservazione, detto $t = t_0$, individueremo lo stato naturale $\mathcal{N}_X(t_0)$ a partire dal piazzamento iniziale $\mathcal{B}(t_0)$. Un esempio rappresentativo di questo fenomeno è il caso di un'arteria [46]. Infatti, un'arteria cava a sezione cilindrica, priva di carichi esterni nel suo piazzamento di riferimento, se venisse tagliata si *rilasserebbe* aprendosi lentamente fino ad esaurire ogni stress interno. Andando a ritroso, possiamo ridefinire lo stato naturale come $\mathcal{N}_X(t) := \mathbf{K}(X, t)T_X \mathcal{B}_R$, da cui abbiamo che

$$\mathbf{K}(X, t) : T_X \mathcal{B}_R \rightarrow \mathcal{N}_X(t), \quad (2.4.3a)$$

$$\mathbf{F}_e(X, t) : \mathcal{N}_X(t) \rightarrow T_x \mathcal{S}. \quad (2.4.3b)$$

Per quanto detto precedentemente, \mathbf{K} e \mathbf{F}_e non sono la mappa tangente di alcuna mappa di supporto. Tuttavia, come per i fibrati tangenti, pensiamo lo stato naturale del materiale come $\mathcal{N}(t) := \sqcup_{X \in \mathcal{B}_R} \mathcal{N}_X(t)$.

Tramite questa discussione⁵, si è sostanzialmente motivata la necessità di introdurre una *decomposizione moltiplicativa* per il gradiente di deformazione in due tensori, in modo tale da poter *separare* e *risolvere* singolarmente gli aspetti anelastici e quelli elastici del moto.

Definizione 2.4.1 (Decomposizione BKL [9, 10]).

Dati il punto $X \in \mathcal{B}_R$ e l'istante $t \in \mathcal{T}$, si definisce la *decomposizione moltiplicativa* BKL (abbreviazione per *Bilby-Kröner-Lee*) del gradiente di deformazione $\mathbf{F}(X, t)$, come

$$\mathbf{F}(X, t) = \mathbf{F}_e(X, t)\mathbf{K}(X, t). \quad (2.4.4)$$

Il tensore $\mathbf{K}(X, t)$ è noto come *tensore delle distorsioni anelastiche*, o anche come *tensore di rimodellamento*, mentre $\mathbf{F}_e(X, t)$ prende il nome di *tensore delle distorsioni elastiche*.

Come si può osservare in Figura 2.1, i due tensori $\mathbf{K}(X, t)$ e $\mathbf{F}_e(X, t)$ non sono mappe tangenti di alcuna mappa di supporto: in Letteratura [9, 4], tali tensori sono detti “*incompatibili*” o “*non-integrabili*”. Spesso, gli indici dei vettori e tensori associati allo stato naturale si indicano con *lettere greche* e, quindi, la relazione (2.4.4) diviene, in componenti,

$$[\mathbf{F}(X, t)]^a_A = [\mathbf{F}_e(X, t)]^a_\alpha [\mathbf{K}(X, t)]^\alpha_A. \quad (2.4.5)$$

Indicando con $\mathcal{N}_X^*(t)$ lo spazio duale di $\mathcal{N}_X(t)$, e considerando le basi $\{\epsilon_\alpha(X, t)\}_{\alpha=1}^3 \subset \mathcal{N}_X(t)$ e $\{\epsilon^\alpha(X, t)\}_{\alpha=1}^3 \subset \mathcal{N}_X^*(t)$, denotiamo il tensore metrico in $X \in \mathcal{B}_R$ e $t \in \mathcal{T}$ associato allo stato naturale $\mathcal{N}_X(t)$ come

$$\boldsymbol{\eta}(X, t) : \mathcal{N}_X(t) \rightarrow \mathcal{N}_X^*(t), \quad \boldsymbol{\eta}(X, t) = [\boldsymbol{\eta}(X, t)]_{\alpha\beta} \epsilon^\alpha(X, t) \otimes \epsilon^\beta(X, t). \quad (2.4.6)$$

⁵La precedente discussione è presa dalle lezioni del corso di Dottorato “*Metodi variazionali in biomeccanica*” tenuto dal Prof. Grillo A. nell'anno accademico 2021/2022. Tale corso appartiene al programma di dottorato dal titolo “Dottorato di Ricerca in Matematica Pura ad Applicata” (PoliTo e UniTo).

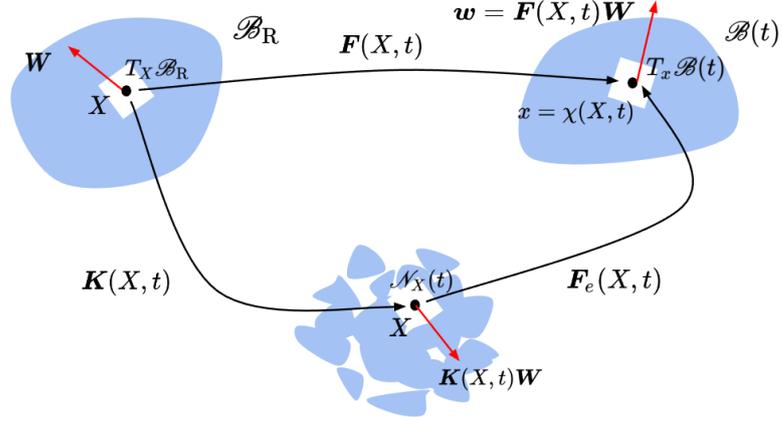


Figura 2.1: Rappresentazione grafica di come la decomposizione moltiplicativa per il gradiente di deformazione $\mathbf{F}(X, t)$ collega gli spazi tangenti dei due piazzamenti con lo stato naturale [9, 10].

Osservazione 15 (Sulla natura del tensore $\mathbf{K}(X, t)$ [47, 37]).

Nel seguito, tratteremo il tensore di rimodellamento $\mathbf{K}(X, t)$ come un automorfismo su $T_X \mathcal{B}_R$, ossia ipotizzando che lo stato naturale $\mathcal{N}_X(t) = \mathbf{K}(X, t)T_X \mathcal{B}_R$ sia *immerso* nello spazio tangente $T_X \mathcal{B}_R$. Grazie a questa ipotesi, fissato $X \in \mathcal{B}_R$ e $t \in \mathcal{T}$, i vettori di base dello stato naturale $\mathcal{N}_X(t)$ risultano essere identificabili con quelli dello spazio tangente $T_X \mathcal{B}_R$ e ciò permette di definire “agevolmente” gli operatori differenziali *covarianti* anche per elementi dello stato naturale. Inoltre, seguono le identificazioni:

$$\eta \mapsto \mathbf{G}, \quad \epsilon \text{ “indice greco”} \mapsto \mathbf{E} \text{ “indice latino maiuscolo”}. \quad (2.4.7)$$

Osserviamo che aver disaccoppiato i fenomeni elastici e anelastici per mezzo della decomposizione del gradiente di deformazione in Equazione (2.4.4), permette di ottenere dei risultati analoghi anche per altre grandezze fisiche. Per esempio, sfruttando la Equazione (2.4.4), il gradiente di velocità della fase solida in forma materiale ℓ_s si riscrive come

$$\begin{aligned} \ell_s &= \dot{\mathbf{F}}[\mathbf{F}^{-1} \circ (\chi, t)] \\ &= [\dot{\mathbf{F}}_e \mathbf{K} + \mathbf{F}_e \dot{\mathbf{K}}] \mathbf{K}^{-1} [\mathbf{F}_e^{-1} \circ (\chi, t)] \\ &= \dot{\mathbf{F}}_e \mathbf{K} \mathbf{K}^{-1} [\mathbf{F}_e^{-1} \circ (\chi, t)] + \mathbf{F}_e \dot{\mathbf{K}} \mathbf{K}^{-1} [\mathbf{F}_e^{-1} \circ (\chi, t)] \\ &= \dot{\mathbf{F}}_e [\mathbf{F}_e^{-1} \circ (\chi, t)] + \mathbf{F}_e \mathbf{L}_K [\mathbf{F}_e^{-1} \circ (\chi, t)] \\ &= \ell_e + \ell_K, \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

dove $\ell_e := \dot{\mathbf{F}}_e [\mathbf{F}_e^{-1} \circ (\chi, t)] \in T\mathcal{S} \otimes T^*\mathcal{S}$ è il tasso di variazione delle distorsioni elastiche, $\mathbf{L}_K := \dot{\mathbf{K}} \mathbf{K}^{-1}$ e $\ell_K := \mathbf{F}_e \mathbf{L}_K [\mathbf{F}_e^{-1} \circ (\chi, t)]$ rappresentano il tasso delle variazioni delle distorsioni plastiche, rispettivamente, nello stato naturale e nella configurazione corrente.

Come ulteriore conseguenza della decomposizione BKL in (2.4.4), applicando il teorema di Binet, possiamo ottenere una relazione tra i determinanti dei tensori \mathbf{F} , \mathbf{K} e \mathbf{F}_e , ossia

$$\begin{aligned} J(X, t) &= \det \mathbf{F}(X, t) \\ &= [\det(\mathbf{F}_e \mathbf{K})](X, t) \\ &= [\det \mathbf{F}_e(X, t)][\det \mathbf{K}(X, t)] \\ &= J_e(X, t) J_K(X, t), \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

dove $J_e(X, t) := \det \mathbf{F}_e(X, t)$ e $J_K(X, t) = \det \mathbf{K}(X, t)$ sono, rispettivamente, i contributi alla deformazione volumetrica totale dovuti alle distorsioni elastiche e plastiche. Supponiamo, inoltre, che J_e e J_K siano positivi per ogni scelta di $X \in \mathcal{B}_R$ e $t \in \mathcal{T}$.

In analogia a quanto dimostrato nella Equazione (2.3.16), valgono

$$\dot{J}_e = J_e \operatorname{tr} \ell_e, \quad \dot{J}_K = J_K \operatorname{tr} \ell_K = J_K \operatorname{Tr} \mathbf{L}_K. \quad (2.4.10)$$

Osservazione 16 (Decomposizione del tasso delle distorsioni plastiche \mathbf{L}_K [4]).

Osserviamo che il tensore \mathbf{L}_K è un tensore misto nello stato naturale, ossia ha componenti $(\mathbf{L}_K)^A_B = (\dot{\mathbf{K}})^A_C (\mathbf{K}^{-1})^C_B$. Pertanto, possiamo definire il tensore $\mathbf{L}_K^b := \mathbf{G} \mathbf{L}_K$, avente entrambi gli indici naturali bassi, in quanto, in componenti, si ha $(\mathbf{L}_K^b)_{AB} := (\mathbf{G})_{AC} (\mathbf{L}_K)^C_B$. Dunque, per il tensore \mathbf{L}_K ha senso definire la *parte simmetrica* \mathbf{D}_K e la *parte antisimmetrica* \mathbf{W}_K tali per cui $\mathbf{L}_K^b = \mathbf{D}_K + \mathbf{W}_K$, ossia

$$\mathbf{D}_K := \operatorname{sym}(\mathbf{G} \mathbf{L}_K) = \frac{\mathbf{G} \mathbf{L}_K + \mathbf{L}_K^T \mathbf{G}}{2}, \quad (2.4.11a)$$

$$\mathbf{W}_K := \operatorname{skew}(\mathbf{G} \mathbf{L}_K) = \frac{\mathbf{G} \mathbf{L}_K - \mathbf{L}_K^T \mathbf{G}}{2}. \quad (2.4.11b)$$

Il tensore \mathbf{W}_K è noto, in particolare, come il tensore di “*spin plastico*” [4].

Osservazione 17 (Ipotesi di plasticità secondo Gurtin&Anand [4]).

Nel seguito, assumiamo le medesime ipotesi sulle distorsioni plastiche che sono introdotte da Gurtin e Anand in [4]. In particolare, supponiamo che le distorsioni plastiche non contribuiscano alla deformazione volumica totale, ossia che siano *isocore*, il che richiede che $\mathbf{J}_K = 1$, e che non siano presenti spin plastici, cioè $\mathbf{W}_K = \mathbf{0}$. Come conseguenza delle due ipotesi, seguono due risultati fondamentali sulla plasticità studiata in questa Tesi:

- il primo risultato, che segue direttamente dalla Equazione (2.4.10), è che il tasso \mathbf{L}_K ha *traccia nulla*, coincidendo, quindi, con la sua parte deviatorica;
- il secondo risultato, che segue dalla Osservazione 16, è che il tensore \mathbf{L}_K^b coincide con la sua parte simmetrica, ossia $\mathbf{G} \mathbf{L}_K \equiv \mathbf{D}_K$.

Pertanto, si ha che il tensore \mathbf{D}_K può essere posto in relazione diretta con il tensore $\dot{\mathbf{K}}$, in quanto

$$\mathbf{D}_K = \mathbf{L}_K^b = \mathbf{G} \dot{\mathbf{K}} \mathbf{K}^{-1}, \quad (2.4.12)$$

e, di conseguenza, il tensore $\mathbf{G} \dot{\mathbf{K}} \mathbf{K}^{-1}$ è simmetrico e deviatorico.

Definizione 2.4.2 (Tensore destro di Cauchy-Green elastico [25]).

Dati un punto $X \in \mathcal{B}_R$ ed un istante di tempo $t \in \mathcal{T}$, si definisce il *tensore destro di Cauchy-Green elastico* in tal punto e in tale istante come

$$\mathbf{C}_e(X, t) := \mathbf{F}_e^T(\chi(X, t), t) \mathbf{g}(\chi(X, t), t) \mathbf{F}_e(X, t). \quad (2.4.13)$$

Inoltre, definiamo il campo tensoriale che, ad ogni coppia $(X, t) \in \mathcal{B}_R \times \mathcal{T}$, associa il tensore \mathbf{C}_e , come

$$\mathbf{C}_e := [\mathbf{F}_e^T \circ (\chi, t)] \mathbf{g} \circ (\chi, t) \mathbf{F}_e. \quad (2.4.14)$$

Definizione 2.4.3 (Tensore destro di Cauchy-Green plastico [25]).

Dati un punto $X \in \mathcal{B}_R$ ed un istante di tempo $t \in \mathcal{T}$, si definisce il *tensore destro di Cauchy-Green plastico* in tal punto e in tale istante come

$$\mathbf{C}_K(X, t) := \mathbf{K}^T(X, t) \mathbf{G}(X, t) \mathbf{K}(X, t). \quad (2.4.15)$$

Inoltre, definiamo il campo tensoriale che, ad ogni coppia $(X, t) \in \mathcal{B}_R \times \mathcal{I}$, associa il tensore \mathbf{C}_K , come

$$\mathbf{C}_K := \mathbf{K}^T \mathbf{G} \mathbf{K}. \quad (2.4.16)$$

Sebbene non ci siano delle mappe di supporto alla base dei tensori \mathbf{F}_e e \mathbf{K} , le strutture delle Equazioni (2.4.14) e (2.4.16) suggeriscono che \mathbf{C}_e sia *moralmente* un *pull-back* del tensore metrico \mathbf{g} nello stato naturale e che \mathbf{C}_K sia *moralmente* un *pull-back* del tensore metrico (dello stato naturale) \mathbf{G} al piazzamento di riferimento \mathcal{B}_R .

Definizione 2.4.4 (Tensore sinistro di Cauchy-Green elastico [25]).

Dati un istante di tempo $t \in \mathcal{I}$ ed un punto $x = \chi(X, t) \in \mathcal{B}(t)$, con $X \in \mathcal{B}_R$, si definisce il *tensore sinistro di Cauchy-Green elastico* il tensore

$$\mathbf{b}_e(x, t) := \mathbf{F}_e(X, t) \mathbf{G}^{-1}(X, t) \mathbf{F}_e^T(x, t), \quad X = \Xi(x, t). \quad (2.4.17)$$

Inoltre, definiamo il campo tensoriale che, ad ogni coppia $(x, t) \in \mathcal{B}(t) \times \mathcal{I}$, associa il tensore $\mathbf{b}_e(x, t)$ come

$$\mathbf{b}_e := [\mathbf{F}_e \circ (\Xi, \mathcal{J})][\mathbf{G}^{-1} \circ (\Xi, \mathcal{J})] \mathbf{F}_e^T. \quad (2.4.18)$$

Definizione 2.4.5 (Tensore sinistro di Cauchy-Green plastico [25, 35]).

Dati un punto $X \in \mathcal{B}_R$ ed un istante di tempo $t \in \mathcal{I}$, si definisce il *tensore sinistro di Cauchy-Green plastico* in tal punto e in tale istante, il tensore

$$\mathbf{B}_K(X, t) := \mathbf{K}^{-1}(X, t) \mathbf{G}^{-1}(X, t) \mathbf{K}^{-T}(X, t). \quad (2.4.19)$$

Inoltre, definiamo il campo tensoriale che, ad ogni coppia $(X, t) \in \mathcal{B}_R \times \mathcal{I}$, associa il tensore \mathbf{B}_K come

$$\mathbf{B}_K := \mathbf{C}_K^{-1} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{K}^{-T}. \quad (2.4.20)$$

Tale tensore, nella teoria standard della plasticità per i materiali isotropi [25, 35], viene utilizzato come variabile descrittiva per un'opportuna legge di flusso plastico. A tal proposito, se ne calcola la derivata, che può essere determinata a partire dalle relazioni

$$\overline{\dot{\mathbf{K}}^{-1}} = -\mathbf{K}^{-1} \dot{\mathbf{K}} \mathbf{K}^{-1}, \quad \overline{\dot{\mathbf{K}}^{-T}} = -\mathbf{K}^{-T} \dot{\mathbf{K}}^T \mathbf{K}^{-T}, \quad (2.4.21)$$

da cui segue

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{B}}_K &= \overline{\dot{\mathbf{K}}^{-1}} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{K}^{-T} + \mathbf{K}^{-1} \mathbf{G}^{-1} \overline{\dot{\mathbf{K}}^{-T}} \\ &= (-\mathbf{K}^{-1} \dot{\mathbf{K}} \mathbf{K}^{-1}) \mathbf{G}^{-1} \mathbf{K}^{-T} + \mathbf{K}^{-1} \mathbf{G}^{-1} (-\mathbf{K}^{-T} \dot{\mathbf{K}}^T \mathbf{K}^{-T}) \\ &= -\mathbf{K}^{-1} \mathbf{L}_K \mathbf{G}^{-1} \mathbf{K}^{-T} - \mathbf{K}^{-1} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{L}_K^T \mathbf{K}^{-T} \\ &= -\mathbf{K}^{-1} \left(\mathbf{L}_K \mathbf{G}^{-1} + \mathbf{G}^{-1} \mathbf{L}_K^T \right) \mathbf{K}^{-T}. \end{aligned} \quad (2.4.22)$$

Sfruttando la definizione (2.4.11a), segue che il termine in parentesi della (2.4.22) può essere riscritto in funzione di \mathbf{D}_K come segue:

$$2 \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}_K \mathbf{G}^{-1} = \mathbf{L}_K \mathbf{G}^{-1} + \mathbf{G}^{-1} \mathbf{L}_K^T. \quad (2.4.23)$$

Pertanto, sostituendo la Equazione (2.4.23) nella (2.4.22) e riordinando i termini, si ottiene la seguente relazione tra i tensori $\dot{\mathbf{B}}_K$ e \mathbf{D}_K :

$$\frac{1}{2} \dot{\mathbf{B}}_K = -\mathbf{K}^{-1} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}_K \mathbf{G}^{-1} \mathbf{K}^{-T}. \quad (2.4.24)$$

Capitolo 3

Dinamica classica delle miscele bifasiche

In questo capitolo si introducono le basi dello studio della dinamica di una miscela bifasica, come conseguenza della Cinematica descritta nel Capitolo 2, attraverso il paradigma della *dualità* e del Principio delle Potenze Virtuali [26, 37]. In particolare, viene presentato un modello di plasticità standard, nel ambito della plasticità di tipo J_2 , per descrivere l'evoluzione in tempo delle distorsioni plastiche [35].

3.1 Bilancio di massa di fase

Definizione 3.1.1 (Frazioni di volume [13]).

Dato l'istante di tempo $t \in \mathcal{T}$, indichiamo con

$$\varphi_\alpha(\cdot, t) : \mathcal{B}(t) \rightarrow]0,1[, \quad \alpha \in \{s, f\}, \quad (3.1.1)$$

la *frazione di volume* della fase α -esima della miscela bifasica al tempo t . Essa rappresenta il volume occupato dalla fase α -esima per unità di volume della miscela al tempo t fissato.

Osservazione 18 (Misure di volume).

Dal punto di vista della Teoria della misura, la frazione di volume della fase α rappresenta la derivata di Radon-Nikodym¹ della misura di volume dv_α della fase α rispetto alla misura di volume dv della miscela, ossia in forma compatta

$$dv_\alpha(x, t) = \varphi_\alpha(x, t) dv(x), \quad \alpha \in \{s, f\}. \quad (3.1.2)$$

Indichiamo con $\varphi_p(\cdot, t) : \mathcal{B}(t) \rightarrow]0,1[$ la *frazione di vuoti* del mezzo poroso, anche detta la sua *porosità*. Essa è definita come *il complemento a 1 della frazione di volume della fase solida*, pertanto la seguente relazione è sempre verificata: $\varphi_s + \varphi_p \equiv 1$.

Definizione 3.1.2 (Condizione di saturazione [48, 13, 14]).

In questa Tesi, si ipotizza che la miscela bifasica sia *satura*, ossia $\varphi_p \equiv \varphi_f$, il che implica che i pori del mezzo poroso siano interamente occupati dalla fase fluida. Pertanto, *la condizione*

¹Questa osservazione è basata sulle lezioni del corso di Dottorato "Teorie "strain-gradient" per problemi biomeccanici: modelli, metodi ed implementazione" tenuto dal Prof. Grillo A. e dal Dr. Di Stefano S. nel periodo accademico di Agosto-Settembre 2022. Tale corso appartiene al programma di dottorato dal titolo "Dottorato di Ricerca in Matematica Pura ad Applicata" (PoliTo e UniTo).

di saturazione risulta essere una conseguenza della condizione fisico/geometrica che abbiamo imposto per la porosità:

$$\varphi_s + \varphi_f \equiv 1. \quad (3.1.3)$$

Definizione 3.1.3 (Densità di massa intrinseca e apparente [14, 15]).

Dato l'istante di tempo $t \in \mathcal{T}$, indichiamo con

$$\varrho_\alpha(\cdot, t) : \mathcal{B}(t) \rightarrow]0, +\infty[, \quad \alpha \in \{s, f\}, \quad (3.1.4)$$

la *densità di massa intrinseca* della fase α -esima, definita come la massa della fase α -esima della miscela per unità di volume della fase stessa. Inoltre, indichiamo con

$$\rho_\alpha(\cdot, t) : \mathcal{B}(t) \rightarrow]0, +\infty[, \quad \alpha \in \{s, f\}, \quad (3.1.5)$$

si indica la *densità di massa apparente* della fase α -esima, definita come la massa di tale fase per unità di volume della miscela.

La densità di massa intrinseca ϱ_α rappresenta la densità di massa *vera* della fase α -esima, mentre quella apparente ρ_α rappresenta la densità di massa *pesata* dalla frazione di volume della fase stessa. Vale, pertanto, la relazione

$$\rho_\alpha = \varphi_\alpha \varrho_\alpha, \quad \alpha \in \{s, f\}. \quad (3.1.6)$$

Dalla Equazione (3.1.6), si nota che, nel caso in cui $\varphi_\alpha \equiv 1$, allora le due densità di massa coincidono.

Inoltre, possiamo definire la *densità di massa della miscela* come

$$\rho := \rho_s + \rho_f. \quad (3.1.7)$$

Osservazione 19 (Densità intrinseca costante).

Nel seguito, ipotizzeremo che le densità di massa intrinseca delle due fasi siano delle costanti sia in spazio sia in tempo. Quindi, per ogni $t \in \mathcal{T}$ e per ogni $x \in \mathcal{B}(t)$, si ha

$$\varrho_\alpha(x, t) \equiv \varrho_{\alpha 0}, \quad \alpha \in \{s, f\}, \quad (3.1.8)$$

dove $\varrho_{\alpha 0}$ è una costante reale positiva. Questa ipotesi motiva l'importanza di distinguere la densità di massa intrinseca da quella apparente. Infatti, sebbene la densità intrinseca ϱ_α sia costante, la densità apparente *non* lo è in generale, in quanto essa dipende anche dalla frazione di volume φ_α che può variare sia in spazio che in tempo.

Come conseguenza della Osservazione 19, per ogni $t \in \mathcal{T}$ e per ogni $x \in \mathcal{B}(t)$, la Equazione (3.1.6) si può riscrivere come

$$\rho_\alpha(x, t) = \varphi_\alpha(x, t) \varrho_{\alpha 0}, \quad \alpha \in \{s, f\}. \quad (3.1.9)$$

Nel seguito, per non appesantire la notazione, indicheremo la costante di densità di massa intrinseca associata alla fase α -esima, ossia $\varrho_{\alpha 0}$, con lo stesso simbolo con cui indichiamo la funzione di densità di massa intrinseca, ossia ϱ_α .

In seguito alla definizione di densità ρ_α , possiamo definire l'*impulso associato alla fase α -esima* come $\rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha$ e possiamo definire l'*impulso di miscela* come la somma $\sum_\alpha \rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha$. Da quest'ultima, possiamo definire la *velocità di miscela* come

$$\mathbf{v} := \frac{1}{\rho} \sum_\alpha \rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha \quad \implies \quad \rho \mathbf{v} = \rho_s \mathbf{v}_s + \rho_f \mathbf{v}_f. \quad (3.1.10)$$

Definizione 3.1.4 (Derivata sostanziale di miscela [41, 42]).

Si definisce *derivata sostanziale di miscela* della funzione $h : \mathcal{S} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{Y}$, con \mathcal{Y} insieme arbitrario di scalari, vettori, covettori, o tensori di qualunque ordine e tipo, come

$$Dh := \partial_t h + (\text{grad}h) \mathbf{v}. \quad (3.1.11)$$

Dalla definizione segue che la derivata sostanziale associata alla fase α nell'Equazione (2.2.31), può essere espressa come

$$\begin{aligned} D_\alpha h &= \partial_t h + (\text{grad}h) \mathbf{v}_\alpha \\ &= \partial_t h + (\text{grad}h) (\mathbf{v} + \mathbf{u}_\alpha) \\ &= \partial_t h + (\text{grad}h) \mathbf{v} + (\text{grad}h) \mathbf{u}_\alpha \\ &= Dh + (\text{grad}h) \mathbf{u}_\alpha, \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

da cui si ottiene che

$$Dh = D_\alpha h - (\text{grad}h) \mathbf{u}_\alpha. \quad (3.1.13)$$

Definizione 3.1.5 (Accelerazione della miscela [41, 42]).

Si definisce *accelerazione di miscela*, indicata con \mathbf{a} , la derivata sostanziale di miscela della velocità di miscela, ossia

$$\mathbf{a} := D\mathbf{v} = \partial_t \mathbf{v} + (\text{grad}\mathbf{v}) \mathbf{v}. \quad (3.1.14)$$

Teorema 3.1.1 (Teorema di Reynolds [49, 5]).

Sia dato un istante di tempo $t \in \mathcal{T}$ e sia \mathcal{S} lo spazio Euclideo tridimensionale. Consideriamo una regione limitata $\mathcal{R}(t) \subset \mathcal{S}$ e una funzione $\psi(\cdot, t) : \mathcal{R}(t) \rightarrow \mathbb{R}$ definita su $\mathcal{R}(t)$ al tempo t . Supponiamo, inoltre, che la velocità migrazionale di $\mathcal{R}(t)$ [50], ossia la velocità con cui evolve il bordo della regione $\partial\mathcal{R}(t)$, sia $\mathbf{v}\mathbf{n}$, dove $\mathbf{v}(\cdot, t)$ è la velocità di miscela e $\mathbf{n}(\cdot, t) : \partial\mathcal{R}(t) \rightarrow T^*\mathcal{S}$ è il campo delle co-normali a $\partial\mathcal{R}(t)$. Dunque, vale la seguente relazione:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{R}(t)} \psi \, dv = \int_{\mathcal{R}(t)} \partial_t \psi \, dv + \int_{\partial\mathcal{R}(t)} (\psi \mathbf{v}) \mathbf{n} \, da. \quad (3.1.15)$$

Dimostrazione. Omessa. □

Consideriamo una regione $\mathcal{R}(t) \subset \mathcal{B}(t)$ e assumiamo la seguente *legge di bilancio di massa globale* per la densità apparente della fase α -esima

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{R}(t)} \rho_\alpha \, dv = \int_{\mathcal{R}(t)} r_\alpha \, dv + \int_{\partial\mathcal{R}(t)} \rho_\alpha (\mathbf{v} - \mathbf{v}_\alpha) \mathbf{n} \, da, \quad (3.1.16)$$

dove $\rho_\alpha (\mathbf{v} - \mathbf{v}_\alpha) \mathbf{n}$ è il flusso *compensativo* della fase α -esima attraverso il bordo di $\mathcal{R}(t)$ e r_α un termine di pozzo o sorgente. Il termine r_α rappresenta lo scambio di massa tra la fase α -esima con tutte le altre fasi della miscela.

Teorema 3.1.2 (Forma locale del bilancio di massa [14, 15]).

La forma locale del bilancio di massa per la fase α -esima della miscela è espressa dalla seguente equazione:

$$\partial_t \rho_\alpha + \text{div}(\rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha) = r_\alpha \quad \text{in } \mathcal{B}(t). \quad (3.1.17)$$

Dimostrazione. Applicando il teorema di Reynolds al primo membro della Equazione (3.1.16), e semplificando l'integrale di bordo corrispondente alla velocità \mathbf{v} , si ottiene che

$$\int_{\mathcal{R}(t)} \partial_t \rho_\alpha \, dv + \int_{\partial \mathcal{R}(t)} \rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha \mathbf{n} \, da = \int_{\mathcal{R}(t)} r_\alpha \, dv. \quad (3.1.18)$$

Per il teorema di Gauss, possiamo riscrivere il secondo termine a primo membro della Equazione (3.1.18) come

$$\int_{\partial \mathcal{R}(t)} \rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha \mathbf{n} \, da = \int_{\mathcal{R}(t)} \operatorname{div}(\rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha) \, dv. \quad (3.1.19)$$

Pertanto, sostituendo la Equazione (3.1.19) nella (3.1.18) e riorganizzandone opportunamente i termini, concludiamo che

$$\int_{\mathcal{R}(t)} \{ \partial_t \rho_\alpha + \operatorname{div}(\rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha) - r_\alpha \} \, dv = 0. \quad (3.1.20)$$

Siccome la Equazione (3.1.20) è valida per ogni regione $\mathcal{R}(t)$ contenuta in $\mathcal{B}(t)$, allora, tramite *localizzazione* [42], segue la tesi. \square

Osservazione 20 (Il caso $r_\alpha \equiv 0$).

Nel seguito, assumiamo che, per entrambe le fasi, non siano presenti scambi di massa, ossia che nella Equazione (3.1.17) i termini r_α siano nulli per $\alpha \in \{s, f\}$. Questa ipotesi è motivata dal fatto che, per le scale temporali che coinvolgono i problemi affrontati nella Tesi, si suppone che gli scambi di massa tra le fasi e/o i fenomeni di crescita volumetrica non siano apprezzabili. Pertanto, possiamo riscrivere la Equazione (3.1.17), per entrambe le fasi, come

$$\partial_t \rho_s + \operatorname{div}(\rho_s \mathbf{v}_s) = 0, \quad \text{in } \mathcal{B}(t), \quad (3.1.21a)$$

$$\partial_t \rho_f + \operatorname{div}(\rho_f \mathbf{v}_f) = 0, \quad \text{in } \mathcal{B}(t). \quad (3.1.21b)$$

In riferimento alla Osservazione 19, l'ipotesi di densità intrinseche costanti, accoppiata all'ipotesi di r_α nulli, permette di riscrivere le Equazioni (3.1.21a) e (3.1.21b) solamente in funzione delle frazioni di volume delle due fasi, ossia

$$\partial_t \varphi_s + \operatorname{div}(\varphi_s \mathbf{v}_s) = 0, \quad \text{in } \mathcal{B}(t), \quad (3.1.22a)$$

$$\partial_t \varphi_f + \operatorname{div}(\varphi_f \mathbf{v}_f) = 0, \quad \text{in } \mathcal{B}(t). \quad (3.1.22b)$$

Per la prima Equazione (3.1.22a) sviluppiamo la divergenza come segue:

$$\operatorname{div}(\varphi_s \mathbf{v}_s) = (\operatorname{grad} \varphi_s) \mathbf{v}_s + \varphi_s \operatorname{div} \mathbf{v}_s. \quad (3.1.23)$$

Pertanto, sostituendo la (3.1.23) nell'Equazione (3.1.22a) e sfruttando la definizione di derivata sostanziale rispetto alla fase solida, si ottiene

$$\partial_t \varphi_s + (\operatorname{grad} \varphi_s) \mathbf{v}_s + \varphi_s \operatorname{div} \mathbf{v}_s = 0 \quad \implies \quad D_s \varphi_s + \varphi_s \operatorname{div} \mathbf{v}_s = 0. \quad (3.1.24)$$

La nuova forma del bilancio locale di massa per la fase solida, ottenuta in (3.1.24), risulta più maneggevole della forma precedente per la presenza di una derivata sostanziale. Come si vedrà nella Sezione 3.2, tale derivata è molto “comoda” da utilizzare quando occorre trasformare le equazioni del modello in forma materiale, ossia eseguendo una trasformazione di Piola all'indietro sul piazzamento di riferimento \mathcal{B}_R .

Sommando la Equazione (3.1.22a) con la (3.1.22b), e ricordando la condizione di saturazione espressa come nella (3.1.3), si ottiene la relazione

$$\operatorname{div}(\varphi_s \mathbf{v}_s + \varphi_f \mathbf{v}_f) = 0, \quad (3.1.25)$$

la quale, nel seguito, prende il nome di “*condizione di incomprimibilità della miscela*” [51].

Con l’obiettivo di ottenere un’equazione per il modello che contempra sia il bilancio di massa che le ipotesi per la fase fluida, che verranno affrontate nella Sezione 3.4, riscriviamo la relazione (3.1.25) in funzione della seguente grandezza fisica:

Definizione 3.1.6 (Velocità di filtrazione [48, 13]).

Detta φ_f la frazione di volume della fase fluida e detta $\mathbf{v}_{fs} := \mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s$ la velocità relativa della fase fluida rispetto a quella solida, definiamo la *velocità di filtrazione* come

$$\mathbf{q} := \varphi_f \mathbf{v}_{fs} = \varphi_f (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s). \quad (3.1.26)$$

Dal punto di vista fisico, \mathbf{q} rappresenta il flusso massico del fluido rispetto al solido attraverso i pori dello scheletro solido.

Per riscrivere la Equazione (3.1.25) in funzione della velocità di filtrazione \mathbf{q} , si eseguono i seguenti passaggi:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\varphi_s \mathbf{v}_s + \varphi_f \mathbf{v}_f + \varphi_f \mathbf{v}_s - \varphi_f \mathbf{v}_s) &= 0 \\ \implies \operatorname{div}((\varphi_s + \varphi_f) \mathbf{v}_s + \varphi_f (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s)) &= 0 \\ \implies \operatorname{div} \mathbf{v}_s + \operatorname{div}(\varphi_f \mathbf{v}_{fs}) &= 0. \end{aligned} \quad (3.1.27)$$

Pertanto, ricordando la definizione in (3.1.26), la Equazione (3.1.27) può essere infine riscritta come

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_s + \operatorname{div} \mathbf{q} = 0, \quad \text{in } \mathcal{B}(t). \quad (3.1.28)$$

Osservazione 21 (Pseudo-vettori e le loro forme materiali [28, 52]).

La velocità di filtrazione è rappresentabile come un campo vettoriale, ossia come $\mathbf{q}(\cdot, t) : \mathcal{B}(t) \rightarrow T\mathcal{S}$ per $t \in \mathcal{T}$ fissato, il che significa che, per $x \in \mathcal{B}(t)$, esiste un vettore $\mathbf{q}(x, t) \in T_x\mathcal{S}$ a cui essa è uguale. Tuttavia, $\mathbf{q}(x, t)$ non è *propriamente* un vettore, in quanto non si trasforma come tale a seguito di un cambiamento di sistema di riferimento. Per esempio, considerando le trasformazioni indotte dal gradiente di deformazione e dal suo tensore inverso, laddove un vettore $\mathbf{w}(x, t) \in T_x\mathcal{S}$ si trasforma come

$$\mathbf{W} = \chi^* \mathbf{w} = [(\mathbf{F}^{-1} \mathbf{w}) \circ (\chi, \mathbf{t})] \quad \text{t.c.} \quad \mathbf{W}(X, t) \in T_X \mathcal{B}_R, \quad (3.1.29)$$

uno pseudo-vettore, come \mathbf{q} , si trasforma nel seguente modo

$$\mathbf{Q} = \chi^* \mathbf{q} = J[(\mathbf{F}^{-1} \mathbf{q}) \circ (\chi, \mathbf{t})] \quad \text{t.c.} \quad \mathbf{Q}(X, t) \in T_X \mathcal{B}_R, \quad (3.1.30)$$

ossia tenendo conto del cambio di volume descritto da J . Questa osservazione si può estendere facilmente al caso della differenza tra covettori e pseudo-covettori, tensori e pseudo-tensori, di qualunque ordine e tipo².

²Questa osservazione è basata sulle lezioni del corso di Dottorato “*Introduction to Geometric Continuum Mechanics (didattica di eccellenza)*” tenuto dal Prof. Segev R. nel periodo accademico di Maggio 2022. Tale corso appartiene al programma di dottorato dal titolo “Dottorato di Ricerca in Matematica Pura ad Applicata” (PoliTo e UniTo).

Forma materiale del bilancio di massa

A seguito delle considerazioni avanzate nella Osservazione 21, in questo paragrafo siamo interessati ad ottenere la forma materiale della Equazione (3.1.28). A tal fine, ricordando che \mathbf{q} è un pseudo-vettore, definiamo la forma materiale della velocità di filtrazione come

$$\mathbf{Q} := J[\mathbf{F}^{-1} \circ (\chi, \mathbf{t})][\mathbf{q} \circ (\chi, \mathbf{t})]. \quad (3.1.31)$$

In seguito, calcoliamo la divergenza materiale di \mathbf{Q} come

$$\begin{aligned} \text{Div} \mathbf{Q} &= Q^A_{;A} \\ &= \{J[\mathbf{F}^{-1} \circ (\chi, \mathbf{t})]^A_a [\mathbf{q} \circ (\chi, \mathbf{t})^a]\}_{;A} \\ &= \underbrace{\{J[\mathbf{F}^{-T} \circ (\chi, \mathbf{t})]_a^A\}_{;A} [\mathbf{q} \circ (\chi, \mathbf{t})^a]}_{=0} + J[\mathbf{F}^{-1} \circ (\chi, \mathbf{t})]^A_a [\mathbf{q} \circ (\chi, \mathbf{t})^a]_{;A} \\ &= J[\mathbf{F}^{-1} \circ (\chi, \mathbf{t})]^A_a [q^a_{;b} \circ (\chi, \mathbf{t})] F^b_A \\ &= J[q^a_{;a} \circ (\chi, \mathbf{t})] \\ &= J[\text{div} \mathbf{q} \circ (\chi, \mathbf{t})]. \end{aligned} \quad (3.1.32)$$

Si noti che, al terzo uguale, si è utilizzata l'identità di Piola, espressa in (2.3.18), e, al quarto segno di uguale, si sono sottintesi i passaggi per calcolare la derivata covariante della composizione in quanto analoghi a quelli svolti per dimostrare il Teorema 2.3.2. Ora, componendo per le mappe (χ, \mathbf{t}) e moltiplicando per J la Equazione (3.1.28), possiamo sfruttare le relazioni in (2.3.16) e (3.1.32) per scrivere la forma materiale di (3.1.28) come

$$\dot{J} + \text{Div} \mathbf{Q} = 0, \quad \text{su } \mathcal{B}_R. \quad (3.1.33)$$

Osservazione 22 (Cambi di misura tra i piazzamenti \mathcal{B}_R e $\mathcal{B}(t)$ [5, 53]).

Nel seguito della Tesi, un'operazione che viene fatta molto spesso è quella di operare un *cambio di misura* per trasformare un integrale sul piazzamento di riferimento \mathcal{B}_R ad uno sul piazzamento corrente $\mathcal{B}(t)$, e viceversa. Dunque, in questa Osservazione, mostriamo come si trasformano le misure di volume e di area quando si vuole cambiare un integrale da un piazzamento all'altro. Siano dV e dA le misure, rispettivamente, di volume ed area sul piazzamento di riferimento \mathcal{B}_R e si indichino, invece, con dv e da le misure, rispettivamente, di volume ed area sul piazzamento corrente $\mathcal{B}(t)$. Ricordando [5], la legge di trasformazione delle misure di volume risulta essere la seguente:

$$dv \circ (\chi, \mathbf{t}) = JdV. \quad (3.1.34)$$

Mostriamo, ora, come sono legati dal moto gli elementi di superficie da e dA . Ricordiamo, in particolare, la *formula di Nanson* [5] per che lega i co-versori normali $\mathbf{n} \in T^* \mathcal{S}$ e $\mathbf{N} \in T^* \mathcal{B}_R$, ossia

$$(\mathbf{n} da) \circ (\chi, \mathbf{t}) = J \mathbf{F}^{-T} \mathbf{N} dA. \quad (3.1.35)$$

Applicando ad entrambi i membri della Equazione (3.1.35) il tensore metrico inverso \mathbf{g}^{-1} , opportunamente composto per le mappe (χ, \mathbf{t}) , e definendo $\mathbf{n}^\# := \mathbf{g}^{-1} \mathbf{n}$, si ottiene

$$(\mathbf{n}^\# da) \circ (\chi, \mathbf{t}) = J[\mathbf{g}^{-1} \circ (\chi, \mathbf{t})] \mathbf{F}^{-T} \mathbf{N} dA. \quad (3.1.36)$$

Dunque, possiamo applicare la Equazione (3.1.36) alla (3.1.35) e, sfruttando il fatto che $\|\mathbf{n}\|^2 = \mathbf{n}^\# \mathbf{n} = 1$, si ottiene che [53]

$$(da)^2 \circ (\chi, \mathbf{t}) = [(\mathbf{n}^\# da)(\mathbf{n} da)] \circ (\chi, \mathbf{t})$$

$$\begin{aligned}
 &= J(\mathbf{g}^{-1} \circ (\chi, \mathbf{t}))^{ab} (\mathbf{F}^{-T})_b{}^B N_B J(\mathbf{F}^{-T})_a{}^A N_A (dA)^2 \\
 &= J^2 \{ [(\mathbf{F}^{-1})^A{}_a (\mathbf{g}^{-1})^{ab}] \circ (\chi, \mathbf{t}) \} (\mathbf{F}^{-T})_b{}^B N_A N_B (dA)^2 \\
 &= J^2 \{ [(\mathbf{F}^{-1} \mathbf{g}^{-1}) \circ (\chi, \mathbf{t})] \mathbf{F}^{-T} \}^{AB} N_A N_B (dA)^2 \\
 &= J^2 (\mathbf{C}^{-1})^{AB} (\mathbf{N})_A (\mathbf{N})_B (dA)^2 \\
 &= J^2 (\mathbf{N} \otimes \mathbf{N}) : \mathbf{C}^{-1} (dA)^2, \tag{3.1.37}
 \end{aligned}$$

da cui, estraendo la radice quadrata di entrambi i membri, si conclude che gli elementi di superficie si trasformano come segue [53]:

$$da \circ (\chi, \mathbf{t}) = J \sqrt{(\mathbf{N} \otimes \mathbf{N}) : \mathbf{C}^{-1}} dA. \tag{3.1.38}$$

3.2 Principio delle Potenze Virtuali

In questa sezione, siamo interessati ad ottenere le equazioni dinamiche del sistema bifasico in esame tramite un approccio *variazionale* piuttosto che *bilancista*. I motivi di questa scelta che differenzia, in particolar modo, il calcolo del bilancio di massa dal bilancio dell'impulso sono sostanzialmente due [26, 54, 42]:

1. Derivare i bilanci locali dell'impulso in questo modo permette di ottenere proprietà per le grandezze coinvolte che non si manifesterebbero esplicitamente con l'approccio bilancista. Infatti, richiedendo l'*oggettività* della potenza virtuali interna, seguono alcune proprietà di simmetria per gli scambi di impulso e per gli sforzi interni che, nel caso bilancista, andrebbero richieste o ottenute tramite ulteriori equazioni di bilancio. Questo è il caso, per esempio, della simmetria del tensore degli sforzi di Cauchy, in cui, nell'approccio bilancista, occorre introdurre il bilancio di momento angolare.
2. Utilizzare il paradigma variazionale per ottenere le equazioni del modello permette di modificare facilmente le equazioni nel caso in cui si vogliano aggiungere nuovi descrittori cinematici. Infatti, le forze che vengono introdotte nel modello sono, per definizione, gli enti duali ai descrittori cinematici che vengono dichiarati *a priori*.

3.2.1 Forma euleriana delle equazioni dinamiche

Definizione 3.2.1 (Descrittori cinematici standard [42, 57]).

Nel seguito, indicheremo i *descrittori cinematici standard* con la seguente collezione di campi vettoriali e tensoriali *virtuali*:

$$\mathcal{D}\mathcal{C} := \{ \mathbf{v}_{vs}, \mathbf{v}_{vf}, \text{grad } \mathbf{v}_{vs}, \text{grad } \mathbf{v}_{vf} \}, \tag{3.2.1}$$

dove le coppie $(\mathbf{v}_{vs}, \mathbf{v}_{vf})$ appartengono ad una insieme \mathcal{H} di velocità virtuali compatibili con i vincoli imposti.

Osservazione 23 (“Primissima” ipotesi costitutiva³).

È importante notare che la Equazione (3.2.1) rappresenta una “primissima” *ipotesi costitutiva* del modello, in quanto la scelta del numero e del tipo di descrittori cinematici influenza la scala e la tipologia di fenomeni che sono *risolti* dal modello. In questo caso, non avendo riservato (o *allocato*) un posto alle variabili rappresentative del rimodellamento della struttura interna, tale fenomeno non ammetterà una equazione dinamica associata.

³Osservazione tratta dal corso di Dottorato “*Metodi variazionali in biomeccanica*” tenuto dal Prof. Grillo A. nell'anno accademico 2021/2022. Tale corso appartiene al programma di dottorato dal titolo “Dottorato di Ricerca in Matematica Pura ad Applicata” (PoliTo e UniTo).

Osservazione 24 (Bordo di Dirichlet e di Neumann per χ).

Osserviamo preliminarmente che, grazie alla scelta dei descrittori cinematici fatta nella Equazione (3.2.1), le equazioni dinamiche, che si otterranno a valle della localizzazione del Principio dei Lavori Virtuali [37], comprendono una equazione per i punti interni ed una per una porzione di bordo, per ciascuna fase. Grazie all'assunzione di particolari relazioni costitutive, le equazioni dinamiche saranno riscritte in funzione del loro descrittore cinematico associato, e, in particolare, le equazioni di bordo avranno valenza di condizioni al contorno per quelle sui punti interni. Tuttavia, in generale, le forze di superficie non sono assegnate su tutto il bordo, ma solamente su una sua porzione che, nel seguito, viene chiamato il *bordo di Neumann*. Sulla restante porzione di bordo, che chiameremo *bordo di Dirichlet*, assegniamo il valore prescritto del moto, ossia χ sul bordo. Dunque, scomponiamo i bordi, rispettivamente, del piazzamento di riferimento, indicato con $\partial\mathcal{B}_R$, e di quello corrente, indicato con $\partial\mathcal{B}(t)$, nella porzione di Dirichlet e nella porzione di Neumann per la variabile χ come segue:

$$\partial\mathcal{B}_R = \partial_D^X \mathcal{B}_R \sqcup \partial_N^X \mathcal{B}_R, \quad \partial\mathcal{B}(t) = \partial_D^X \mathcal{B}(t) \sqcup \partial_N^X \mathcal{B}(t). \quad (3.2.2)$$

Osserviamo, in particolare, che sui bordi di Dirichlet le velocità virtuali $\mathbf{v}_{v\alpha}$ sono nulle, in quanto su di essi il moto del solido e del fluido è noto *a priori*. Pertanto, questa condizione sulle velocità virtuali, assieme ad eventuali altre, rientrano all'interno della definizione dell'insieme \mathcal{H} .

Avendo fissato le variabili che descrivono la cinematica della miscela in (3.2.1), per *dualità*, possiamo definire le loro forze interne duali. In particolare, per ciascuna delle due fasi, introduciamo: lo *scambio di impulso* associato alla fase α -esima, duale a $\mathbf{v}_{v\alpha}$, ossia

$$\mathbf{m}_\alpha(\cdot, t) : \mathcal{B}(t) \rightarrow T^*\mathcal{S}, \quad \mathbf{m}_\alpha(x, t) = [m_\alpha(x, t)]_a \mathbf{e}^a(x, t), \quad (3.2.3)$$

e il *tensore degli sforzi di Cauchy* associato alla fase α -esima, duale a $\text{grad}\mathbf{v}_{v\alpha}$, ossia

$$\boldsymbol{\sigma}_\alpha^{(\text{tot})}(\cdot, t) : \mathcal{B}(t) \rightarrow T^*\mathcal{S} \otimes T\mathcal{S}, \quad \boldsymbol{\sigma}_\alpha^{(\text{tot})}(x, t) = [\boldsymbol{\sigma}_\alpha^{(\text{tot})}(x, t)]_a^b \mathbf{e}^a(x, t) \otimes \mathbf{e}_b(x, t), \quad (3.2.4)$$

dove tale tensore, in generale, può contenere eventuali contributi cinetici macroscopici.

Definizione 3.2.2 (Potenza virtuale interna, senza rimodellamento [42]).

Consideriamo la regione di spazio $\mathcal{B}(t) \subset \mathcal{S}$ occupata dalla miscela al tempo $t \in \mathcal{T}$. Definiamo la *potenza virtuale interna* [42] della miscela, associata alle velocità virtuali $\mathbf{v}_{vs}, \mathbf{v}_{vf}$, come

$$\mathcal{W}_v^{(\text{int})}(\mathbf{v}_{vs}, \mathbf{v}_{vf}) := \int_{\mathcal{B}(t)} \left\{ \sum_\alpha \mathbf{m}_\alpha \mathbf{v}_{v\alpha} + \sum_\alpha \boldsymbol{\sigma}_\alpha^{(\text{tot})} : \text{grad} \mathbf{v}_{v\alpha} \right\} dv. \quad (3.2.5)$$

La struttura della Equazione (3.2.5) è dovuta all'ipotesi fondamentale che $\mathcal{W}_v^{(\text{int})}(\mathbf{v}_{vs}, \mathbf{v}_{vf})$ sia una funzione lineare delle velocità virtuali \mathbf{v}_{vs} e \mathbf{v}_{vf} , e che sia invariante per sovrapposizione di moti rigidi.

Osservazione 25 (Chiusura dell'impulso per la miscela [42]).

Una conseguenza dell'oggettività della potenza virtuale interna (3.2.5) è la condizione di *chiusura dell'impulso per la miscela*. Sia $\mathbf{c} : \mathcal{B}(t) \rightarrow T\mathcal{S}$ un campo vettoriale costante e consideriamo la trasformazione

$$\mathbf{v}_{v\alpha} \mapsto \tilde{\mathbf{v}}_{v\alpha} := \mathbf{v}_{v\alpha} + \mathbf{c}, \quad \alpha \in \{s, f\}. \quad (3.2.6)$$

Allora, osservando che $\text{grad}\tilde{\mathbf{v}}_{v\alpha} = \text{grad}\mathbf{v}_{v\alpha}$, la potenza virtuale interna valutata nelle velocità trasformate è espressa come

$$\mathcal{W}_v^{(\text{int})}(\tilde{\mathbf{v}}_{vs}, \tilde{\mathbf{v}}_{vf}) = \int_{\mathcal{B}(t)} \left\{ \sum_\alpha \mathbf{m}_\alpha \tilde{\mathbf{v}}_{v\alpha} + \sum_\alpha \boldsymbol{\sigma}_\alpha^{(\text{tot})} : \text{grad} \tilde{\mathbf{v}}_{v\alpha} \right\} dv$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\mathcal{B}(t)} \left\{ \sum_{\alpha} \mathbf{m}_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} + \sum_{\alpha} \boldsymbol{\sigma}_{\alpha}^{(\text{tot})} : \text{grad } \mathbf{v}_{\alpha} \right\} dv + \int_{\mathcal{B}(t)} (\mathbf{m}_s + \mathbf{m}_f) \mathbf{c} dv \\
 &= \mathcal{W}_v^{(\text{int})}(\mathbf{v}_{vs}, \mathbf{v}_{vf}) + \int_{\mathcal{B}(t)} (\mathbf{m}_s + \mathbf{m}_f) \mathbf{c} dv. \tag{3.2.7}
 \end{aligned}$$

Per l'oggettività della potenza virtuale interna, ossia richiedendo che la potenza virtuale interna sia uguale a quella calcolata nelle velocità trasformate, possiamo concludere che l'ultimo termine della Equazione deve necessariamente essere nullo per ogni scelta di \mathbf{c} . Pertanto, segue la seguente condizione, detta di “chiusura dell'impulso per la miscela” [42]:

$$\mathbf{m}_s + \mathbf{m}_f \equiv \mathbf{0}. \tag{3.2.8}$$

Osservazione 26 (Simmetria del tensore degli sforzi di Cauchy di miscela [42]).

Tramite un ragionamento analogo al precedente, possiamo anche dimostrare la “simmetria” del tensore degli sforzi di Cauchy della miscela, il quale è definito come $\boldsymbol{\sigma}^{(\text{tot})} := \boldsymbol{\sigma}_s^{(\text{tot})} + \boldsymbol{\sigma}_f^{(\text{tot})}$. Infatti, considerando un campo tensoriale costante $\boldsymbol{\Omega} : \mathcal{B}(t) \rightarrow [T\mathcal{S}]^1_1$, tale che $\boldsymbol{\Omega}^b(x) = \mathbf{g}(x)\boldsymbol{\Omega}(x)$ è un tensore antisimmetrico rappresentante la velocità angolare di rotazione rigida, definiamo la seguente trasformazione

$$\mathbf{v}_{\alpha} \mapsto \tilde{\mathbf{v}}_{\alpha} := \mathbf{v}_{\alpha} + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{r}, \quad \alpha \in \{s, f\}, \tag{3.2.9}$$

dove $\mathbf{r} : \mathcal{B}(t) \rightarrow T\mathcal{S}$ è il campo vettoriale rappresentante la “posizione”, ossia soddisfacente la relazione $\text{grad } \mathbf{r} = \mathbf{i}$. Allora, osservando che $\text{grad } \tilde{\mathbf{v}}_{\alpha} = \text{grad } \mathbf{v}_{\alpha} + \boldsymbol{\Omega}$, la potenza virtuale interna valutata nelle velocità trasformate è espressa come

$$\begin{aligned}
 \mathcal{W}_v^{(\text{int})}(\tilde{\mathbf{v}}_{vs}, \tilde{\mathbf{v}}_{vf}) &= \int_{\mathcal{B}(t)} \left\{ \sum_{\alpha} \mathbf{m}_{\alpha} \tilde{\mathbf{v}}_{\alpha} + \sum_{\alpha} \boldsymbol{\sigma}_{\alpha}^{(\text{tot})} : \text{grad } \tilde{\mathbf{v}}_{\alpha} \right\} dv \\
 &= \int_{\mathcal{B}(t)} \left\{ \sum_{\alpha} \mathbf{m}_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} + \sum_{\alpha} \boldsymbol{\sigma}_{\alpha}^{(\text{tot})} : \text{grad } \mathbf{v}_{\alpha} \right\} dv \\
 &\quad + \underbrace{\int_{\mathcal{B}(t)} (\mathbf{m}_s + \mathbf{m}_f)(\boldsymbol{\Omega} \mathbf{r}) dv}_{=0} + \int_{\mathcal{B}(t)} (\boldsymbol{\sigma}_s^{(\text{tot})} + \boldsymbol{\sigma}_f^{(\text{tot})}) : \boldsymbol{\Omega} dv \\
 &= \mathcal{W}_v^{(\text{int})}(\mathbf{v}_{vs}, \mathbf{v}_{vf}) + \int_{\mathcal{B}(t)} (\boldsymbol{\sigma}^{(\text{tot})})^{\#} : \boldsymbol{\Omega}^b dv. \tag{3.2.10}
 \end{aligned}$$

dove si è definito il tensore $(\boldsymbol{\sigma}^{(\text{tot})})^{\#} := \mathbf{g}^{-1} \boldsymbol{\sigma}^{(\text{tot})}$. Pertanto, richiedendo l'oggettività della potenza virtuale interna, si ha necessariamente che il secondo termine dopo l'ultimo segno di uguale della Equazione (3.2.10) è nullo per ogni scelta di $\boldsymbol{\Omega}^b$ antisimmetrico. Per realizzare tale richiesta, è sufficiente che il tensore $(\boldsymbol{\sigma}^{(\text{tot})})^{\#}$ sia simmetrico, ossia ortogonale a $\boldsymbol{\Omega}^b$:

$$(\boldsymbol{\sigma}^{(\text{tot})})^{\#} = \mathbf{g}^{-1} \boldsymbol{\sigma}^{(\text{tot})} = (\boldsymbol{\sigma}^{(\text{tot})})^T \mathbf{g}^{-1} = (\boldsymbol{\sigma}^{(\text{tot})})^{\#T}. \tag{3.2.11}$$

Osserviamo che il secondo termine della Equazione (3.2.5) può essere riscritto come

$$\boldsymbol{\sigma}_{\alpha}^{(\text{tot})} : \text{grad } \mathbf{v}_{\alpha} = \text{div}[(\boldsymbol{\sigma}_{\alpha}^{(\text{tot})})^T \mathbf{v}_{\alpha}] - (\text{div } \boldsymbol{\sigma}_{\alpha}^{(\text{tot})}) \mathbf{v}_{\alpha}. \tag{3.2.12}$$

Definizione 3.2.3 (Energia cinetica associata alla fase α -esima [41, 42]).

Si definisce *energia cinetica associata alla fase α -esima* la quantità

$$\mathcal{K}_{\alpha} := \frac{1}{2} \rho_{\alpha} \|\mathbf{v}_{\alpha}\|^2, \tag{3.2.13}$$

dove con il simbolo $\|\cdot\|$ intendiamo la norma Euclidea.

Definiamo l'*energia cinetica totale della miscela* come la somma delle singole energie

$$\mathcal{K} := \sum_{\alpha} \frac{1}{2} \rho_{\alpha} \|\mathbf{v}_{\alpha}\|^2. \quad (3.2.14)$$

Indicando con $\mathbf{u}_{\alpha} := \mathbf{v}_{\alpha} - \mathbf{v}$ la velocità relativa della fase α -esima rispetto a quella di miscela, possiamo riscrivere la Equazione (3.2.14) come

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \sum_{\alpha} \frac{1}{2} \rho_{\alpha} \|\mathbf{u}_{\alpha} + \mathbf{v}\|^2 \\ &= \sum_{\alpha} \frac{1}{2} \rho_{\alpha} \{ \|\mathbf{u}_{\alpha}\|^2 + 2\mathbf{u}_{\alpha} \cdot \mathbf{v} + \|\mathbf{v}\|^2 \} \\ &= \sum_{\alpha} \frac{1}{2} \rho_{\alpha} \|\mathbf{u}_{\alpha}\|^2 + \underbrace{\left(\sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} \right)}_{=0} \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho \|\mathbf{v}\|^2, \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

dove il secondo termine della Equazione (3.2.15) è nullo in quanto è la somma di impulsi relativi. Dunque, manipolando algebricamente tale equazione, si ottiene la relazione

$$\frac{1}{2} \rho \|\mathbf{v}\|^2 = - \sum_{\alpha} \frac{1}{2} \rho_{\alpha} \|\mathbf{u}_{\alpha}\|^2 + \sum_{\alpha} \frac{1}{2} \rho_{\alpha} \|\mathbf{v}_{\alpha}\|^2. \quad (3.2.16)$$

Definizione 3.2.4 (Frazione di massa associata alla fase α -esima [42]).

Se definisce *frazione di massa associata alla fase α -esima* come il rapporto

$$\xi_{\alpha} := \rho_{\alpha} / \rho, \quad \alpha \in \{s, f\}. \quad (3.2.17)$$

Per la Equazione (3.1.7), segue che $\xi_s + \xi_f \equiv 1$.

Dalla definizione di velocità di miscela nell'Equazione (3.1.10), dividendo per ρ e usando la (3.2.17), si ottiene

$$\mathbf{v} = \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} (\mathbf{u}_{\alpha} + \mathbf{v}) = \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} + \mathbf{v} \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} \implies \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} = \mathbf{0}. \quad (3.2.18)$$

Riscriviamo il secondo termine nella Equazione (3.2.16) sfruttando il risultato di (3.2.18), cioè

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \frac{1}{2} \rho_{\alpha} \|\mathbf{u}_{\alpha}\|^2 &= \frac{1}{2} \rho_s \mathbf{u}_s \cdot \left(-\frac{\xi_f}{\xi_s} \mathbf{u}_f \right) + \frac{1}{2} \rho_f \mathbf{u}_f \cdot \left(-\frac{\xi_s}{\xi_f} \mathbf{u}_s \right) \\ &= -\frac{1}{2} \rho \xi_s \mathbf{u}_s \cdot \mathbf{u}_f - \frac{1}{2} \rho \xi_f \mathbf{u}_f \cdot \mathbf{u}_s \\ &= -\frac{1}{2} \rho \mathbf{u}_s \cdot \mathbf{u}_f. \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

Alla luce della (3.2.19), l'Equazione (3.2.16) diviene

$$\frac{1}{2} \rho \|\mathbf{v}\|^2 = \frac{1}{2} \rho \mathbf{u}_s \cdot \mathbf{u}_f + \sum_{\alpha} \frac{1}{2} \rho_{\alpha} \|\mathbf{v}_{\alpha}\|^2. \quad (3.2.20)$$

Definendo con $\mathcal{K}^{(m)} := \frac{1}{2} \rho \|\mathbf{v}\|^2$ l'*energia cinetica di miscela*, possiamo interpretare la Equazione (3.2.20) come la scomposizione dell'energia cinetica di miscela in una quota associata alle energie cinetiche delle singole fasi ed una associata all'interazione tra le fasi, ossia

$$\mathcal{K}^{(m)} = \frac{1}{2} \rho \mathbf{u}_s \cdot \mathbf{u}_f + \mathcal{K}. \quad (3.2.21)$$

Consideriamo l'accelerazione di miscela $\mathbf{a} = D\mathbf{v}$ e, sfruttando la relazione (3.2.18), si ottiene:

$$\mathbf{a} = D\mathbf{v} = D \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} = \sum_{\alpha} (D\xi_{\alpha}) \mathbf{v}_{\alpha} + \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} D\mathbf{v}_{\alpha}. \quad (3.2.22)$$

Osserviamo che, dalla Definizione (3.2.17), si ha che la derivata sostanziale delle frazioni di massa si scrive come

$$D\xi_{\alpha} = D(\rho_{\alpha}/\rho) = \frac{1}{\rho^2} (\rho D\rho_{\alpha} - \rho_{\alpha} D\rho) = \frac{1}{\rho} (D\rho_{\alpha} - \xi_{\alpha} D\rho). \quad (3.2.23)$$

Pertanto, sviluppando le derivate nella Equazione (3.2.21) e usando la (3.2.23), si ha che

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \sum_{\alpha} (D\xi_{\alpha}) \mathbf{v}_{\alpha} + \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} D\mathbf{v}_{\alpha} \\ &= \sum_{\alpha} \left[\frac{1}{\rho} (D\rho_{\alpha} - \xi_{\alpha} D\rho) \right] \mathbf{v}_{\alpha} + \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} D\mathbf{v}_{\alpha} \\ &= \sum_{\alpha} \left\{ \frac{1}{\rho} [D_{\alpha}\rho_{\alpha} - (\text{grad}\rho_{\alpha})\mathbf{u}_{\alpha}] - \xi_{\alpha} \frac{1}{\rho} [-\rho \text{div}\mathbf{v}] \right\} \mathbf{v}_{\alpha} + \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} [\mathbf{a}_{\alpha} - (\text{grad}\mathbf{v}_{\alpha})\mathbf{u}_{\alpha}] \\ &= \sum_{\alpha} \left\{ \frac{1}{\rho} [-\rho_{\alpha} \text{div}\mathbf{v}_{\alpha} - (\text{grad}\rho_{\alpha})\mathbf{u}_{\alpha}] + \xi_{\alpha} \text{div}\mathbf{v} \right\} \mathbf{v}_{\alpha} + \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} \mathbf{a}_{\alpha} - \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} (\text{grad}\mathbf{v}_{\alpha})\mathbf{u}_{\alpha} \\ &= \sum_{\alpha} \frac{1}{\rho} [-\rho_{\alpha} \text{div}\mathbf{u}_{\alpha} - (\text{grad}\rho_{\alpha})\mathbf{u}_{\alpha}] \mathbf{v}_{\alpha} + \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} \mathbf{a}_{\alpha} - \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} (\text{grad}\mathbf{u}_{\alpha})\mathbf{u}_{\alpha} - \underbrace{(\text{grad}\mathbf{v}) \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}}_{=0} \\ &= - \sum_{\alpha} \frac{1}{\rho} \text{div}(\rho_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}) \mathbf{v}_{\alpha} + \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} \mathbf{a}_{\alpha} - \frac{1}{\rho} \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} (\text{grad}\mathbf{u}_{\alpha})\mathbf{u}_{\alpha} \\ &= - \sum_{\alpha} \frac{1}{\rho} \text{div}(\rho_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}) \mathbf{u}_{\alpha} - \underbrace{\sum_{\alpha} \frac{1}{\rho} \text{div}(\rho_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}) \mathbf{v}}_{=0} + \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} \mathbf{a}_{\alpha} - \frac{1}{\rho} \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} (\text{grad}\mathbf{u}_{\alpha})\mathbf{u}_{\alpha}. \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

Dunque, sviluppando il primo termine della Equazione (3.2.24) come segue

$$\begin{aligned} \text{div}(\rho_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}) \mathbf{u}_{\alpha} &= (\rho_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha})^a{}_{;a} (\mathbf{u}_{\alpha})^b \mathbf{e}_b \\ &= [((\mathbf{u}_{\alpha})^b (\rho_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha})^a)_{;a}] \mathbf{e}_b - \rho_{\alpha} (\mathbf{u}_{\alpha})^b{}_{;a} (\mathbf{u}_{\alpha})^a \mathbf{e}_b \\ &= \text{div}(\mathbf{u}_{\alpha} \otimes \rho_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}) - \rho_{\alpha} \text{grad}(\mathbf{u}_{\alpha}) \mathbf{u}_{\alpha}, \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

la Equazione (3.2.24) viene riscritta nel seguente modo [42]:

$$\mathbf{a} = \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} \mathbf{a}_{\alpha} - \frac{1}{\rho} \sum_{\alpha} \text{div}(\mathbf{u}_{\alpha} \otimes \rho_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}). \quad (3.2.26)$$

La precedente Equazione suggerisce di introdurre la *componente dinamica dello sforzo* come la quantità [42]

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} := \sum_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}^b \otimes \rho_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}, \quad (3.2.27)$$

da cui la Equazione (3.2.26) può essere riscritta come [42]

$$\mathbf{a} = \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} \mathbf{a}_{\alpha} - \frac{1}{\rho} \text{div} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\#}. \quad (3.2.28)$$

Moltiplicando entrambi i membri della Equazione (3.2.28) per ρ_{β} , si ottengono le seguenti relazioni

$$\rho_{\beta} \mathbf{a} = \rho_{\beta} \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} \mathbf{a}_{\alpha} - \xi_{\beta} \text{div} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\#}$$

$$= \rho_\beta(\xi_s \mathbf{a}_s + \xi_f \mathbf{a}_f) - \operatorname{div}(\xi_\beta \bar{\boldsymbol{\sigma}}^\#) + \bar{\boldsymbol{\sigma}}^\# \operatorname{grad} \xi_\beta, \quad \beta \in \{s, f\}. \quad (3.2.29)$$

Pertanto, sfruttando opportunamente la relazione $\xi_s + \xi_f = 1$ nella Equazione (3.2.29) per i valori di $\beta \in \{s, f\}$, si ottengono infine le relazioni [42]

$$\rho_s \mathbf{a} = \rho_s \mathbf{a}_s + \rho_s \xi_f (\mathbf{a}_f - \mathbf{a}_s) - \operatorname{div}(\xi_s \bar{\boldsymbol{\sigma}}^\#) + \bar{\boldsymbol{\sigma}}^\# \operatorname{grad} \xi_s, \quad (3.2.30a)$$

$$\rho_f \mathbf{a} = \rho_f \mathbf{a}_f + \rho_f \xi_s (\mathbf{a}_s - \mathbf{a}_f) - \operatorname{div}(\xi_f \bar{\boldsymbol{\sigma}}^\#) + \bar{\boldsymbol{\sigma}}^\# \operatorname{grad} \xi_f. \quad (3.2.30b)$$

Osservazione 27 (Componente dinamica e statica dello sforzo [42]).

Dalla definizione di $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ nella Equazione (3.2.27), ossia della componente dinamica dello sforzo totale, possiamo decomporre i tensori degli sforzi di ciascuna fase in una componente dinamica ed una “statica”, come fatto in [42]:

$$\boldsymbol{\sigma}_\alpha^{(\text{tot})} := \boldsymbol{\sigma}_\alpha - \xi_\alpha \bar{\boldsymbol{\sigma}}, \quad \alpha \in \{s, f\}. \quad (3.2.31)$$

In particolare, la componente $\boldsymbol{\sigma}_\alpha = \boldsymbol{\sigma}_\alpha^{(\text{tot})} + \xi_\alpha \bar{\boldsymbol{\sigma}}$ può essere chiamata “statica” in quanto è un porzione dello sforzo totale $\boldsymbol{\sigma}_\alpha^{(\text{tot})}$ che non necessariamente si annulla se la miscela è ferma, a differenza del termine di sforzo dinamico $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$. Osserviamo, infine, che lo sforzo di Cauchy di miscela, definito nella Osservazione 26, può essere scritto, coerentemente con [42], come segue:

$$\boldsymbol{\sigma}^{(\text{tot})} = \sum_\alpha \boldsymbol{\sigma}_\alpha^{(\text{tot})} = \sum_\alpha (\boldsymbol{\sigma}_\alpha - \xi_\alpha \bar{\boldsymbol{\sigma}}) = \left(\sum_\alpha \boldsymbol{\sigma}_\alpha \right) - \bar{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (3.2.32)$$

dove si è ricordato il fatto che $\sum_\alpha \xi_\alpha = 1$.

Come fatto per le forze interne, tramite la dualità possiamo introdurre anche le forze duali esterne. Tuttavia, tali forze esterne, possono essere o delle forze di volume oppure delle forze di superficie, agenti sulla porzione di bordo di Neumann interessata al moto χ , ossia $\partial_N^\chi \mathcal{B}(t)$, come ricordato nella Osservazione 24. Pertanto, definiamo le *forze per unità di volume* agenti sulle due fasi dovute all’accelerazione di gravità, ossia

$$(\rho_\alpha \mathbf{f})(\cdot, t) : \mathcal{B}(t) \rightarrow T^* \mathcal{S}, \quad (\rho_\alpha \mathbf{f})(x, t) = \rho_\alpha(x, t) [\mathbf{f}(x, t)]_a \mathbf{e}^a(x, t), \quad (3.2.33)$$

e le *trazioni*, ossia le forze per unità di superficie agenti sulla porzione di bordo di Neumann $\partial_N^\chi \mathcal{B}(t)$, definite come

$$(\xi_\alpha \boldsymbol{\tau})(\cdot, t) : \partial_N^\chi \mathcal{B}(t) \rightarrow T^* \mathcal{S}, \quad (\xi_\alpha \boldsymbol{\tau})(x, t) = \xi_\alpha(x, t) [\boldsymbol{\tau}(x, t)]_a \mathbf{e}^a(x, t). \quad (3.2.34)$$

Definizione 3.2.5 (Potenza virtuale esterna, senza rimodellamento [42]).

Consideriamo la regione di spazio $\mathcal{B}(t) \subset \mathcal{S}$ occupata dalla miscela al tempo $t \in \mathcal{T}$. Definiamo la *potenza virtuale esterna* [42] della miscela, associata alle velocità virtuali \mathbf{v}_{vs} e \mathbf{v}_{vf} , come

$$\mathcal{W}_v^{(\text{ext})}(\mathbf{v}_{vs}, \mathbf{v}_{vf}) := \int_{\mathcal{B}(t)} \sum_\alpha \rho_\alpha (\mathbf{f} - \mathbf{a}^b) \mathbf{v}_{v\alpha} \, dv + \int_{\partial_N^\chi \mathcal{B}(t)} \sum_\alpha \xi_\alpha \boldsymbol{\tau} \mathbf{v}_{v\alpha} \, da, \quad (3.2.35)$$

dove si è definito $\mathbf{a}^b := \mathbf{g}\mathbf{a}$.

Invochiamo il *Principio delle Potenze Virtuali* [26] imponendo che la potenza virtuale interna sia uguale alla potenza virtuale esterna, ossia che

$$\mathcal{W}_v^{(\text{int})}(\mathbf{v}_{vs}, \mathbf{v}_{vf}) = \mathcal{W}_v^{(\text{ext})}(\mathbf{v}_{vs}, \mathbf{v}_{vf}), \quad \forall (\mathbf{v}_{vs}, \mathbf{v}_{vf}) \in \mathcal{H}, \quad (3.2.36)$$

dove \mathcal{H} è un opportuno spazio funzionale i cui elementi sono le velocità virtuali compatibili con i vincoli imposti. Sostituendo le definizioni riportate in (3.2.5) e (3.2.35) nella (3.2.36) e

sfruttando la relazione ottenuta nella Equazione (3.2.12), il Principio delle Potenze Virtuali assume la forma

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{B}(t)} \left\{ \sum_{\alpha} \mathbf{m}_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} + \sum_{\alpha} \operatorname{div}[(\boldsymbol{\sigma}_{\alpha}^{(\text{tot})})^T \mathbf{v}_{\alpha}] - \sum_{\alpha} (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_{\alpha}^{(\text{tot})}) \mathbf{v}_{\alpha} \right\} \mathrm{d}v \\ &= \int_{\mathcal{B}(t)} \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} (\mathbf{f} - \mathbf{a}^b) \mathbf{v}_{\alpha} \mathrm{d}v + \int_{\partial_{\text{N}}^{\times} \mathcal{B}(t)} \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} \boldsymbol{\tau} \mathbf{v}_{\alpha} \mathrm{d}a. \end{aligned} \quad (3.2.37)$$

Richiamiamo il *teorema di Gauss* per trasformare il secondo integrale di volume nella potenza virtuale interna della Equazione (3.2.37) in un integrale di flusso attraverso $\partial_{\text{N}}^{\times} \mathcal{B}(t)$, cioè

$$\int_{\mathcal{B}(t)} \operatorname{div}[(\boldsymbol{\sigma}_{\alpha}^{(\text{tot})})^T \mathbf{v}_{\alpha}] \mathrm{d}v = \int_{\partial_{\text{N}}^{\times} \mathcal{B}(t)} (\boldsymbol{\sigma}_{\alpha}^{(\text{tot})} \mathbf{n}) \mathbf{v}_{\alpha} \mathrm{d}a. \quad (3.2.38)$$

Sostituendo quanto ottenuto per Gauss nella Equazione (3.2.37) e raccogliendo opportunamente tutti i termini portati al secondo membro, si ottiene la relazione

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{B}(t)} \sum_{\alpha} \left\{ -\mathbf{m}_{\alpha} + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_{\alpha}^{(\text{tot})} + \rho_{\alpha} (\mathbf{f} - \mathbf{a}^b) \right\} \mathbf{v}_{\alpha} \mathrm{d}v \\ &+ \int_{\partial_{\text{N}}^{\times} \mathcal{B}(t)} \sum_{\alpha} \left\{ -\boldsymbol{\sigma}_{\alpha}^{(\text{tot})} \mathbf{n} + \xi_{\alpha} \boldsymbol{\tau} \right\} \mathbf{v}_{\alpha} \mathrm{d}a = 0, \end{aligned} \quad (3.2.39)$$

per ogni scelta delle velocità virtuali $(\mathbf{v}_{\text{vs}}, \mathbf{v}_{\text{vf}}) \in \mathcal{H}$. Localizzando la relazione ottenuta in (3.2.39), si ottengono infine le *equazioni dinamiche* per le due fasi e le rispettive condizioni al bordo di Neumann:

$$-\mathbf{m}_{\alpha} + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_{\alpha}^{(\text{tot})} + \rho_{\alpha} (\mathbf{f} - \mathbf{a}^b) = \mathbf{0} \quad \text{in } \mathcal{B}(t), \quad (3.2.40a)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{\alpha}^{(\text{tot})} \mathbf{n} = \xi_{\alpha} \boldsymbol{\tau} \quad \text{su } \partial_{\text{N}}^{\times} \mathcal{B}(t). \quad (3.2.40b)$$

Tali equazioni sono note come le “*equazioni di bilancio locali dell’impulso*” [13, 14] scritte in forma locale.

Osservazione 28 (Forma equivalente della potenza virtuale esterna [42]).

In questa osservazione, si intende rimarcare che la scelta delle forze esterne agenti sulla miscela e, di conseguenza, la forma della potenza virtuale esterna, sono, in generale, arbitrarie. Per esempio, la scelta, fatta in [42] e riportata nella Tesi, di definire un’unica trazione $\boldsymbol{\tau}$ e, conseguentemente, introdurre le frazioni di massa ξ_{α} per “pesarne” il contributo per ciascuna fase, è dettato dalla volontà degli Autori di definire le trazioni lungo tutto il bordo. Nel seguito, mostriamo, dunque, una riscrittura della potenza virtuale esterna, equivalente a quella riportata in Equazione (3.2.35), che permette di ottenere delle equazioni dinamiche scritte solamente in funzione delle parti “statiche” dei termini coinvolti. Preliminarmente, data la forza di volume \mathbf{f} introdotta in (3.2.33), definiamo, per ciascuna fase, la *forza di volume depurata* \mathbf{f}_{α} come [42]

$$\rho_{\alpha} \mathbf{f}_{\alpha} := \rho_{\alpha} \mathbf{f} + \rho_{\alpha} (\mathbf{a}_{\alpha}^b - \mathbf{a}^b) - \operatorname{div}(\xi_{\alpha} \bar{\boldsymbol{\sigma}}), \quad \alpha \in \{\text{s}, \text{f}\}. \quad (3.2.41)$$

Riorganizzando i termini nella definizione precedente, si ha la seguente

$$\rho_{\alpha} (\mathbf{f} - \mathbf{a}^b) = \rho_{\alpha} (\mathbf{f}_{\alpha} - \mathbf{a}_{\alpha}^b) + \operatorname{div}(\xi_{\alpha} \bar{\boldsymbol{\sigma}}), \quad \alpha \in \{\text{s}, \text{f}\}, \quad (3.2.42)$$

la quale, se sostituita nella definizione della potenza virtuale esterna (3.2.35), permette di ottenere la seguente riscrittura della potenza esterna, in cui figurano dei contributi associati al moto relativo della fase α -esima rispetto alla miscela:

$$\mathcal{W}_{\text{v}}^{(\text{ext})}(\mathbf{v}_{\text{vs}}, \mathbf{v}_{\text{vf}}) = \int_{\mathcal{B}(t)} \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} (\mathbf{f}_{\alpha} - \mathbf{a}_{\alpha}^b) \mathbf{v}_{\alpha} \mathrm{d}v + \int_{\partial_{\text{N}}^{\times} \mathcal{B}(t)} \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} \boldsymbol{\tau} \mathbf{v}_{\alpha} \mathrm{d}a$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{\mathcal{B}(t)} \sum_{\alpha} \operatorname{div}(\xi_{\alpha} \bar{\boldsymbol{\sigma}}) \mathbf{v}_{v\alpha} \, dv \\
 & = \int_{\mathcal{B}(t)} \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} (\mathbf{f}_{\alpha} - \mathbf{a}_{\alpha}^b) \mathbf{v}_{v\alpha} \, dv + \int_{\partial_N^x \mathcal{B}(t)} \sum_{\alpha} [\xi_{\alpha} \boldsymbol{\tau} + \xi_{\alpha} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{n}] \mathbf{v}_{v\alpha} \, da \\
 & \quad - \int_{\mathcal{B}(t)} \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \operatorname{grad} \mathbf{v}_{v\alpha} \, dv \\
 & =: \int_{\mathcal{B}(t)} \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} (\mathbf{f}_{\alpha} - \mathbf{a}_{\alpha}^b) \mathbf{v}_{v\alpha} \, dv + \int_{\partial_N^x \mathcal{B}(t)} \sum_{\alpha} \boldsymbol{\tau}_{\alpha} \mathbf{v}_{v\alpha} \, da \\
 & \quad - \int_{\mathcal{B}(t)} \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \operatorname{grad} \mathbf{v}_{v\alpha} \, dv, \tag{3.2.43}
 \end{aligned}$$

dove si è definita la *trazione depurata* $\boldsymbol{\tau}_{\alpha}$, in analogia con lo sforzo di Cauchy statico $\boldsymbol{\sigma}_{\alpha}$ nella Equazione (3.2.31), come

$$\boldsymbol{\tau}_{\alpha} := \xi_{\alpha} \boldsymbol{\tau} + \xi_{\alpha} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{n}. \tag{3.2.44}$$

Pertanto, utilizzando la nuova espressione della potenza virtuale esterna riportata nella Equazione (3.2.43), uguagliamola alla potenza virtuale interna in (3.2.5), invocando il Principio delle Potenze Virtuali, e, riorganizzando i termini, si ottiene [42]

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathcal{B}(t)} \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} (\mathbf{f}_{\alpha} - \mathbf{a}_{\alpha}^b) \mathbf{v}_{v\alpha} \, dv + \int_{\partial_N^x \mathcal{B}(t)} \sum_{\alpha} \boldsymbol{\tau}_{\alpha} \mathbf{v}_{v\alpha} \, da \\
 & = \int_{\mathcal{B}(t)} \sum_{\alpha} [\mathbf{m}_{\alpha} \mathbf{v}_{v\alpha} + \underbrace{(\boldsymbol{\sigma}_{\alpha}^{(\text{tot})} + \xi_{\alpha} \bar{\boldsymbol{\sigma}})}_{=\boldsymbol{\sigma}_{\alpha}}] : \operatorname{grad} \mathbf{v}_{v\alpha} \, dv. \tag{3.2.45}
 \end{aligned}$$

Infine, mediante le stesse operazioni utilizzate per localizzare la Equazione (3.2.37), siamo in grado di ottenere la forma locale delle equazioni dinamiche per le due fasi, in riferimento alle componenti “statiche” e depurate delle forze duali introdotte precedentemente, ossia

$$-\mathbf{m}_{\alpha} + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_{\alpha} + \rho_{\alpha} (\mathbf{f}_{\alpha} - \mathbf{a}_{\alpha}^b) = \mathbf{0} \quad \text{in } \mathcal{B}(t), \tag{3.2.46a}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{\alpha} \mathbf{n} = \boldsymbol{\tau}_{\alpha} \quad \text{su } \partial_N^x \mathcal{B}(t). \tag{3.2.46b}$$

Osserviamo, in conclusione, che tali equazioni dinamiche sono *equivalenti* a quelle riportate nelle Equazioni (3.2.42) e (3.2.44), e, per mostrarlo, è sufficiente sostituire le espressioni riportate in (3.2.40a) e (3.2.40b) per “riassemblare” le parte dinamica e statica di $\boldsymbol{\sigma}_{\alpha}$.

3.2.2 Forma lagrangiana delle equazioni dinamiche

In questa sottosezione, ci proponiamo di trasformare le equazioni di bilancio locale dell’impulso in (3.2.40a) e (3.2.40b), ottenute tramite il Principio delle Potenze Virtuali, nella cosiddetta *forma materiale*. Preliminarmente, osserviamo che, per costruzione, il tensore $\boldsymbol{\sigma}_{\alpha}$ è uno pseudo-tensore. Dunque, alla luce della Osservazione 21, possiamo definire la sua forma materiale come segue:

Definizione 3.2.6 (Primo tensore di Piola-Kirchoff associato alla fase α -esima [5]).

Si definisce il *primo tensore di Piola-Kirchoff associato alla fase α -esima*, con $\alpha \in \{s, f\}$, la trasformazione di Piola all’indietro del tensore degli sforzi di Cauchy associato alla fase α -esima, ossia

$$\mathbf{P}_{\alpha}^{(\text{tot})} := J[\boldsymbol{\sigma}_{\alpha}^{(\text{tot})} \circ (\boldsymbol{\chi}, \mathbf{t})] \mathbf{F}^{-T}. \tag{3.2.47}$$

Osservazione 29 (Contributo alla potenza fornito dagli sforzi interni).

La necessità di introdurre il tensore della Definizione 3.2.6 nasce dalla volontà di esprimere il contributo alla potenza virtuale interna associata agli sforzi, presente nella Equazione (3.2.5), sul piazzamento di riferimento \mathcal{B}_R . Infatti, grazie all'identità in (2.3.12), possiamo scrivere che

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{B}(t)} \boldsymbol{\sigma}_\alpha^{(\text{tot})} : \text{grad} \mathbf{v}_{v\alpha} \, dv &= \int_{\mathcal{B}_R} [(\boldsymbol{\sigma}_\alpha^{(\text{tot})} : \text{grad} \mathbf{v}_{v\alpha}) \circ (\chi, \mathbf{t})] J \, dV \\
 &= \int_{\mathcal{B}_R} [\boldsymbol{\sigma}_\alpha^{(\text{tot})} \circ (\chi, \mathbf{t})] : \{(\text{Grad} \mathbf{V}_{v\alpha})[\mathbf{F}^{-1} \circ (\chi, \mathbf{t})]\} J \, dV \\
 &= \int_{\mathcal{B}_R} \left\{ J[\boldsymbol{\sigma}_\alpha^{(\text{tot})} \circ (\chi, \mathbf{t})] \mathbf{F}^{-T} \right\} : \text{Grad} \mathbf{V}_{v\alpha} \, dV \\
 &=: \int_{\mathcal{B}_R} \mathbf{P}_\alpha^{(\text{tot})} : \text{Grad} \mathbf{V}_{v\alpha} \, dV, \tag{3.2.48}
 \end{aligned}$$

da cui segue che $\mathbf{P}_\alpha^{(\text{tot})}$ rappresenta l'ente duale a $\text{Grad} \mathbf{V}_{v\alpha}$ nella dualità indotta dalla potenza interna.

Osservazione 30 (Componente dinamica e statica del primo Piola-Kirchhoff [42]).

Seguendo quanto osservato per lo sforzo di Cauchy associato alla fase α -esima nella Equazione (3.2.31), osserviamo che anche il primo tensore di Piola-Kirchhoff può essere decomposto in una parte dinamica ed una “statica”, ossia

$$\mathbf{P}_\alpha^{(\text{tot})} = \mathbf{P}_\alpha - J[(\xi_\alpha \bar{\boldsymbol{\sigma}}) \circ (\chi, \mathbf{t})] \mathbf{F}^{-T}, \quad \mathbf{P}_\alpha := J[\boldsymbol{\sigma}_\alpha \circ (\chi, \mathbf{t})] \mathbf{F}^{-T}. \tag{3.2.49}$$

Teorema 3.2.1 (Relazione tra le divergenze per $\mathbf{P}_\alpha^{(\text{tot})}$ e $\boldsymbol{\sigma}_\alpha^{(\text{tot})}$ [5]).

Dati $\boldsymbol{\sigma}_\alpha^{(\text{tot})}$ il tensore degli sforzi e $\mathbf{P}_\alpha^{(\text{tot})}$ il primo tensore di Piola-Kirchhoff, entrambi associati alla fase α , vale la seguente relazione tra le loro divergenze:

$$\text{Div} \mathbf{P}_\alpha^{(\text{tot})} = J[\text{div} \boldsymbol{\sigma}_\alpha^{(\text{tot})} \circ (\chi, \mathbf{t})]. \tag{3.2.50}$$

Dimostrazione.

Ricordando l'identità di Piola in (2.3.18), dimostriamo la relazione per componenti:

$$\begin{aligned}
 (\text{Div} \mathbf{P}_\alpha^{(\text{tot})})_a &= \{J[\boldsymbol{\sigma}_\alpha^{(\text{tot})} \circ (\chi, \mathbf{t})]_a{}^b (\mathbf{F}^{-T})_b{}^A\}_{;A} \\
 &= J\{[\boldsymbol{\sigma}_\alpha^{(\text{tot})} \circ (\chi, \mathbf{t})]_a{}^b\}_{;A} (\mathbf{F}^{-T})_b{}^A + [\boldsymbol{\sigma}_\alpha^{(\text{tot})} \circ (\chi, \mathbf{t})]_a{}^b \underbrace{[J(\mathbf{F}^{-T})_b{}^A]_{;A}}_{=0} \\
 &= J[(\boldsymbol{\sigma}_\alpha^{(\text{tot})})_a{}^b{}_{;c} \circ (\chi, \mathbf{t})] F^c{}_A (\mathbf{F}^{-T})_b{}^A \\
 &= J[(\boldsymbol{\sigma}_\alpha^{(\text{tot})})_a{}^b{}_{;b} \circ (\chi, \mathbf{t})] \\
 &= J[(\text{div} \boldsymbol{\sigma}_\alpha^{(\text{tot})}) \circ (\chi, \mathbf{t})]_a. \tag{3.2.51}
 \end{aligned}$$

Segue, pertanto, la tesi. \square

Per ottenere le equazioni di bilancio dell'impulso in forma lagrangiana è sufficiente considerare singolarmente i termini nell'Equazione (3.2.39) e farne il *pull-back* [5] sul piazzamento di riferimento \mathcal{B}_R . Iniziamo con il riscrivere il termine di integrale di volume associato alla sola fase α , sfruttando il cambio di misura di volume in (3.1.34) e l'identità in (3.2.51):

$$\begin{aligned}
 &\int_{\mathcal{B}(t)} \left\{ -\mathbf{m}_\alpha + \text{div} \boldsymbol{\sigma}_\alpha^{(\text{tot})} + \rho_\alpha (\mathbf{f} - \mathbf{a}^b) \right\} \mathbf{v}_{v\alpha} \, dv \\
 &= \int_{\mathcal{B}_R} \left\{ [-\mathbf{m}_\alpha + \text{div} \boldsymbol{\sigma}_\alpha^{(\text{tot})} + \rho_\alpha (\mathbf{f} - \mathbf{a}^b)] \circ (\chi, \mathbf{t}) \right\} \mathbf{V}_{v\alpha} J \, dV
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\mathcal{B}_R} \left\{ -J[\mathbf{m}_\alpha \circ (\chi, \mathbf{t})] + J[\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_\alpha^{(\text{tot})} \circ (\chi, \mathbf{t})] + \varrho_\alpha \Phi_\alpha [\mathbf{f} - \mathbf{a}^b] \circ (\chi, \mathbf{t}) \right\} \mathbf{V}_{v_\alpha} dV \\
 &= \int_{\mathcal{B}_R} \left\{ -J[\mathbf{m}_\alpha \circ (\chi, \mathbf{t})] + \operatorname{Div} \mathbf{P}_\alpha^{(\text{tot})} + \varrho_\alpha \Phi_\alpha [\mathbf{f} - \mathbf{a}^b] \circ (\chi, \mathbf{t}) \right\} \mathbf{V}_{v_\alpha} dV. \quad (3.2.52)
 \end{aligned}$$

Riscriviamo, ora, il termine di bordo della Equazione (3.2.39) per la sola fase α come integrale sul piazzamento di riferimento \mathcal{B}_R , ricordando, in particolare, la formula di Nanson [53] in (3.1.35) e la relazione per il cambio di misura di area in (3.1.38):

$$\begin{aligned}
 &\int_{\partial_N^x \mathcal{B}(t)} \left\{ -\boldsymbol{\sigma}_\alpha^{(\text{tot})} \mathbf{n} + \xi_\alpha \boldsymbol{\tau} \right\} \mathbf{v}_{v_\alpha} da \\
 &= \int_{\partial_N^x \mathcal{B}_R} \left\{ [-\boldsymbol{\sigma}_\alpha^{(\text{tot})} \mathbf{n} + \xi_\alpha \boldsymbol{\tau}] \circ (\chi, \mathbf{t}) \right\} \mathbf{V}_{v_\alpha} [da \circ (\chi, \mathbf{t})] \\
 &= \int_{\partial_N^x \mathcal{B}_R} \left\{ -J[\boldsymbol{\sigma}_\alpha^{(\text{tot})} \circ (\chi, \mathbf{t})] \mathbf{F}^{-T} \mathbf{N} + J[\xi_\alpha \circ (\chi, \mathbf{t})] \sqrt{(\mathbf{N} \otimes \mathbf{N}) : \mathbf{C}^{-1}[\boldsymbol{\tau} \circ (\chi, \mathbf{t})]} \right\} \mathbf{V}_{v_\alpha} dA \\
 &=: \int_{\partial_N^x \mathcal{B}_R} \left\{ -\mathbf{P}_\alpha^{(\text{tot})} \mathbf{N} + [\xi_\alpha \circ (\chi, \mathbf{t})] \boldsymbol{\tau}_R \right\} \mathbf{V}_{v_\alpha} dA, \quad (3.2.53)
 \end{aligned}$$

dove si è definita la grandezza $\boldsymbol{\tau}_R := J \sqrt{(\mathbf{N} \otimes \mathbf{N}) : \mathbf{C}^{-1}[\boldsymbol{\tau} \circ (\chi, \mathbf{t})]}$ [53].

Pertanto, sostituendo i risultati (3.2.52) e (3.2.53) nella Equazione (3.2.39), concludiamo che il principio delle potenze virtuali in forma materiale assume la forma

$$\begin{aligned}
 &\int_{\mathcal{B}_R} \sum_\alpha \left\{ -J[\mathbf{m}_\alpha \circ (\chi, \mathbf{t})] + \operatorname{Div} \mathbf{P}_\alpha^{(\text{tot})} + \varrho_\alpha \Phi_\alpha [\mathbf{f} - \mathbf{a}^b] \circ (\chi, \mathbf{t}) \right\} \mathbf{V}_{v_\alpha} dV \\
 &+ \int_{\partial_N^x \mathcal{B}_R} \sum_\alpha \left\{ -\mathbf{P}_\alpha^{(\text{tot})} \mathbf{N} + [\xi_\alpha \circ (\chi, \mathbf{t})] \boldsymbol{\tau}_R \right\} \mathbf{V}_{v_\alpha} dA = 0, \quad (3.2.54)
 \end{aligned}$$

per ogni scelta delle velocità virtuali materiali $(\mathbf{V}_{vs}, \mathbf{V}_{vf}) \in \mathcal{H}_R$, dove \mathcal{H}_R è l'insieme delle velocità virtuali compatibili con i vincoli prescritti composte per le mappe (χ, \mathbf{t}) . Dunque, localizzando, si ottengono le seguenti *equazioni dinamiche in forma materiale* per le due fasi $\alpha \in \{s, f\}$:

$$-J[\mathbf{m}_\alpha \circ (\chi, \mathbf{t})] + \operatorname{Div} \mathbf{P}_\alpha^{(\text{tot})} + \varrho_\alpha \Phi_\alpha [\mathbf{f} - \mathbf{a}^b] \circ (\chi, \mathbf{t}) = \mathbf{0}, \quad \text{in } \mathcal{B}_R, \quad (3.2.55a)$$

$$\mathbf{P}_\alpha^{(\text{tot})} \mathbf{N} = [\xi_\alpha \circ (\chi, \mathbf{t})] \boldsymbol{\tau}_R, \quad \text{su } \partial_N^x \mathcal{B}_R. \quad (3.2.55b)$$

3.3 Dissipazione

Nelle sezioni precedenti, abbiamo ricavato i bilanci locali di massa e i bilanci locali di impulso che descrivono la dinamica del modello, in dualità ai descrittori cinematici dichiarati in (3.2.1). Tuttavia, come osservato, esse non sono sufficienti per risolvere completamente il problema meccanico, in quanto il numero di equazioni ottenute non uguaglia il numero di incognite prodotte.

Abbiamo quindi bisogno di introdurre delle ulteriori ipotesi, sotto forma di relazioni tra le variabili dinamiche e cinematiche, che aggiungano informazioni riguardanti il comportamento meccanico dei materiali considerati. Queste ipotesi sono dette le *ipotesi costitutive* per il problema e permettono di aggiungere nuove equazioni al modello, dette *relazioni costitutive* [55].

Per verificare che il legame costitutivo proposto sia *termodinamicamente ammissibile*, si studia la dissipazione della miscela. Per approfondimenti, si rimanda, ad esempio, a [55, 56]. Pertanto, in questa sezione, si introducono i concetti fondamentali della dissipazione per una miscela bifasica trattata solamente in ambito meccanico.

3.3.1 Forma euleriana della dissipazione

Definizione 3.3.1 (Energia libera di Helmholtz).

Associamo a ciascuna fase α della miscela, una funzione scalare detta *energia libera di Helmholtz* per unità di massa, definita per $t \in \mathcal{T}$ fissato, come

$$\psi_\alpha(\cdot, t) : \mathcal{B}(t) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \alpha \in \{s, f\}. \quad (3.3.1)$$

Segue che, moltiplicando tale campo per la densità apparente della fase α -esima, si ottiene l'energia libera per unità di volume $\rho_\alpha \psi_\alpha$.

Inoltre, definiamo l'*energia libera di Helmholtz di miscela* [13] per unità di massa come la media pesata delle singole energie libere rispetto alle densità, ossia

$$\psi := \frac{1}{\rho} \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \psi_{\alpha}. \quad (3.3.2)$$

Indichiamo con $\mathcal{R}(t) \subset \mathcal{B}(t)$ un generico sottoinsieme proprio e aperto di $\mathcal{B}(t)$. Supponiamo che la velocità migrazionale dell'insieme $\mathcal{R}(t)$ sia $\mathbf{v}\mathbf{n}$, dove $\mathbf{v}(\cdot, t)$ è il campo vettoriale della velocità di miscela e $\mathbf{n}(\cdot, t) : \partial\mathcal{R}(t) \rightarrow T^*\mathcal{S}$ è il campo delle co-normali a $\partial\mathcal{R}(t)$.

Grazie alla definizione dell'energia libera di Helmholtz, possiamo definire l'*energia totale* della miscela per unità di volume come la somma dell'energia libera per unità di volume e l'energia cinetica per unità di volume, ossia come $\rho\psi + \mathcal{K}$. Pertanto, se integriamo tale quantità sulla regione $\mathcal{R}(t)$, otteniamo l'energia totale contenuta in $\mathcal{R}(t)$. Essa è una grandezza globale tempo-dipendente rappresentante l'energia totale che la miscela può fornire nella regione $\mathcal{R}(t)$. Tuttavia, per *snellire* i calcoli che seguono, ci poniamo già nelle condizioni di “lavoro” per questa Tesi che prevedono la trascurabilità di tutti i termini inerziali. Ciò comporta la possibilità di trascurare l'energia cinetica nello studio della dissipazione. Inoltre, nel limite considerato, le accelerazioni delle due fasi, ossia \mathbf{a}_s e \mathbf{a}_f , l'accelerazione di miscela, ossia \mathbf{a} , e il tensore $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ sono trascurabili. Pertanto, sono valide le seguenti relazioni:

$$\rho_{\alpha} \mathbf{f}_{\alpha} \equiv \rho_{\alpha} \mathbf{f}, \quad \boldsymbol{\sigma}_{\alpha}^{(\text{tot})} \equiv \boldsymbol{\sigma}_{\alpha}, \quad \boldsymbol{\tau}_{\alpha} \equiv \xi_{\alpha} \boldsymbol{\tau}. \quad (3.3.3)$$

Definizione 3.3.2 (Dissipazione globale di miscela [54, 57]).

Definiamo la *dissipazione globale della miscela* nel volume $\mathcal{R}(t)$ come la differenza tra potenza *netta* sviluppata su $\mathcal{R}(t)$ e la derivata in tempo dell'energia totale su $\mathcal{R}(t)$, corretta da un termine associato ai flussi relativi, ossia

$$\int_{\mathcal{R}(t)} \mathcal{D} \, dv := -\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{R}(t)} \rho\psi \, dv + \int_{\partial\mathcal{R}(t)} \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \psi_{\alpha} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\alpha}) \mathbf{n} \, da + \mathcal{W}_{\mathcal{R}(t)}(\mathbf{v}_s, \mathbf{v}_f). \quad (3.3.4)$$

La potenza netta $\mathcal{W}_{\mathcal{R}(t)}$ prodotta su $\mathcal{R}(t)$ è solamente dovuta alla forza volumica esterna \mathbf{f} , agente su $\mathcal{R}(t)$, e dalle tensioni interne che agiscono sul bordo $\partial\mathcal{R}(t)$. Pertanto, essa è esprimibile come

$$\mathcal{W}_{\mathcal{R}(t)}(\mathbf{v}_s, \mathbf{v}_f) := \int_{\mathcal{R}(t)} \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \mathbf{f}_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \, dv + \int_{\partial\mathcal{R}(t)} \sum_{\alpha} (\boldsymbol{\sigma}_{\alpha}^T \mathbf{v}_{\alpha}) \mathbf{n} \, da. \quad (3.3.5)$$

Consideriamo il primo termine a secondo membro della Equazione (3.3.4) ed applichiamo il *teorema di Reynolds*, ottenendo

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{R}(t)} \rho\psi \, dv &= -\int_{\mathcal{R}(t)} \partial_t(\rho\psi) \, dv - \int_{\partial\mathcal{R}(t)} \rho\psi \mathbf{v}\mathbf{n} \, da \\ &= -\int_{\mathcal{R}(t)} \sum_{\alpha} [\partial_t(\rho_{\alpha} \psi_{\alpha})] \, dv - \int_{\partial\mathcal{R}(t)} \rho\psi \mathbf{v}\mathbf{n} \, da. \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

Ora, concentrandoci sul secondo termine del secondo membro della Equazione (3.3.4), ossia

$$\int_{\partial\mathcal{R}(t)} \sum_{\alpha} (\rho_{\alpha}\psi_{\alpha})(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\alpha})\mathbf{n} \, da = \int_{\partial\mathcal{R}(t)} \rho\psi\mathbf{v}\mathbf{n} \, da - \int_{\partial\mathcal{R}(t)} \sum_{\alpha} (\rho_{\alpha}\psi_{\alpha})\mathbf{v}_{\alpha}\mathbf{n} \, da. \quad (3.3.7)$$

Se sostituiamo i risultati ottenuti in (3.3.6) e in (3.3.7) nella Equazione (3.3.4), possiamo scrivere la dissipazione globale come segue:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{R}(t)} \mathcal{D} \, dv &= - \int_{\mathcal{R}(t)} \sum_{\alpha} [\partial_t(\rho_{\alpha}\psi_{\alpha})] \, dv - \int_{\partial\mathcal{R}(t)} \sum_{\alpha} (\rho_{\alpha}\psi_{\alpha})\mathbf{v}_{\alpha}\mathbf{n} \, da \\ &\quad + \int_{\mathcal{R}(t)} \sum_{\alpha} \rho_{\alpha}\mathbf{f}_{\alpha}\mathbf{v}_{\alpha} \, dv + \int_{\partial\mathcal{R}(t)} \sum_{\alpha} (\boldsymbol{\sigma}_{\alpha}^T\mathbf{v}_{\alpha})\mathbf{n} \, da \\ &= - \int_{\mathcal{R}(t)} \sum_{\alpha} [\partial_t(\rho_{\alpha}\psi_{\alpha})] \, dv - \int_{\partial\mathcal{R}(t)} \sum_{\alpha} \operatorname{div}[(\rho_{\alpha}\psi_{\alpha})\mathbf{v}_{\alpha}] \, da \\ &\quad + \int_{\mathcal{R}(t)} \sum_{\alpha} \rho_{\alpha}\mathbf{f}_{\alpha}\mathbf{v}_{\alpha} \, dv + \int_{\partial\mathcal{R}(t)} \sum_{\alpha} (\boldsymbol{\sigma}_{\alpha}^T\mathbf{v}_{\alpha})\mathbf{n} \, da \\ &= - \int_{\mathcal{R}(t)} \sum_{\alpha} \{ \partial_t(\rho_{\alpha}\psi_{\alpha}) + \operatorname{div}(\rho_{\alpha}\psi_{\alpha}\mathbf{v}_{\alpha}) \} \, dv \\ &\quad + \int_{\mathcal{R}(t)} \sum_{\alpha} \rho_{\alpha}\mathbf{f}_{\alpha}\mathbf{v}_{\alpha} \, dv + \int_{\partial\mathcal{R}(t)} \sum_{\alpha} (\boldsymbol{\sigma}_{\alpha}^T\mathbf{v}_{\alpha})\mathbf{n} \, da. \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

Sviluppiamo il primo integrando della dissipazione espressa nella Equazione (3.3.8), ottenendo la seguente

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho_{\alpha}\psi_{\alpha}) + \operatorname{div}(\rho_{\alpha}\psi_{\alpha}\mathbf{v}_{\alpha}) &= (\partial_t\rho_{\alpha})\psi_{\alpha} + \rho_{\alpha}(\partial_t\psi_{\alpha}) + \psi_{\alpha}\operatorname{div}(\rho_{\alpha}\mathbf{v}_{\alpha}) + \rho_{\alpha}(\operatorname{grad}\psi_{\alpha})\mathbf{v}_{\alpha} \\ &= \psi_{\alpha} \underbrace{[\partial_t\rho_{\alpha} + \operatorname{div}(\rho_{\alpha}\mathbf{v}_{\alpha})]}_{=0} + \rho_{\alpha}[\partial_t\psi_{\alpha} + (\operatorname{grad}\psi_{\alpha})\mathbf{v}_{\alpha}] \\ &= \rho_{\alpha}D_{\alpha}\psi_{\alpha}, \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato il bilancio locale di massa per la fase α -esima. Alla luce dei risultati ottenuti, possiamo riscrivere la Equazione (3.3.8) come

$$\int_{\mathcal{R}(t)} \mathcal{D} \, dv = - \int_{\mathcal{R}(t)} \sum_{\alpha} \rho_{\alpha}D_{\alpha}\psi_{\alpha} \, dv + \int_{\mathcal{R}(t)} \sum_{\alpha} \rho_{\alpha}\mathbf{f}_{\alpha}\mathbf{v}_{\alpha} \, dv + \int_{\partial\mathcal{R}(t)} \sum_{\alpha} (\boldsymbol{\sigma}_{\alpha}^T\mathbf{v}_{\alpha})\mathbf{n} \, da. \quad (3.3.10)$$

Inoltre, applichiamo il teorema di Gauss al termine di bordo nella Equazione (3.3.10), ottenendo

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{R}(t)} \sum_{\alpha} (\boldsymbol{\sigma}_{\alpha}^T\mathbf{v}_{\alpha})\mathbf{n} \, da &= \int_{\mathcal{R}(t)} \sum_{\alpha} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_{\alpha}^T\mathbf{v}_{\alpha}) \, dv \\ &= \int_{\mathcal{R}(t)} \sum_{\alpha} (\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}_{\alpha})\mathbf{v}_{\alpha} \, dv + \int_{\mathcal{R}(t)} \sum_{\alpha} \boldsymbol{\sigma}_{\alpha} : \operatorname{grad}\mathbf{v}_{\alpha} \, dv. \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

Sostituendo tale risultato nella Equazione (3.3.10), si ottiene che la *disuguaglianza di dissipazione globale* diviene

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{R}(t)} \mathcal{D} \, dv &= \int_{\mathcal{R}(t)} \sum_{\alpha} \{ -\rho_{\alpha}D_{\alpha}\psi_{\alpha} + (\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}_{\alpha} + \rho_{\alpha}\mathbf{f}_{\alpha})\mathbf{v}_{\alpha} + \boldsymbol{\sigma}_{\alpha} : \operatorname{grad}\mathbf{v}_{\alpha} \} \, dv \\ &= \int_{\mathcal{R}(t)} \sum_{\alpha} \{ -\rho_{\alpha}D_{\alpha}\psi_{\alpha} + \mathbf{m}_{\alpha}\mathbf{v}_{\alpha} + \boldsymbol{\sigma}_{\alpha} : \operatorname{grad}\mathbf{v}_{\alpha} \} \, dv \geq 0. \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

dove nel penultimo segno di uguale abbiamo sostituito il *bilancio locale dell'impulso per la fase α -esima*, espresso in (3.2.40a).

Siccome la disuguaglianza (3.3.12) vale per ogni $\mathcal{R}(t)$ sottoinsieme di $\mathcal{B}(t)$, possiamo localizzare la disequazione (3.3.12) ottenendo la seguente disuguaglianza locale di dissipazione [14, 15, 57]:

$$\mathcal{D} = \sum_{\alpha} \{-\rho_{\alpha} D_{\alpha} \psi_{\alpha} + \mathbf{m}_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} + \boldsymbol{\sigma}_{\alpha} : \text{grad} \mathbf{v}_{\alpha}\} \geq 0. \quad (3.3.13)$$

Quest'ultima relazione, ricordando che $\sum_{\alpha} \mathbf{m}_{\alpha} = \mathbf{0}$, si può riscrivere come

$$\mathcal{D} = \sum_{\alpha} \{-\rho_{\alpha} D_{\alpha} \psi_{\alpha} + \boldsymbol{\sigma}_{\alpha} : \text{grad} \mathbf{v}_{\alpha}\} + \mathbf{m}_{\text{f}} \mathbf{v}_{\text{fs}} \geq 0. \quad (3.3.14)$$

Siamo interessati a studiare le *miscele incomprimibili*, ossia miscele in cui è rispettato il *vincolo di incomprimibilità* [56] espresso dalla (3.1.25) come conseguenza della condizione di saturazione:

$$\text{div}(\varphi_{\text{s}} \mathbf{v}_{\text{s}} + \varphi_{\text{f}} \mathbf{v}_{\text{f}}) \equiv 0 \quad \text{in } \mathcal{B}(t), \quad \forall t \in \mathcal{T}. \quad (3.3.15)$$

Manipoliamo algebricamente l'espressione in (3.3.15) in modo tale da renderla maggiormente *compatibile* con la scrittura della dissipazione in (3.3.14):

$$\begin{aligned} \text{div}(\varphi_{\text{s}} \mathbf{v}_{\text{s}} + \varphi_{\text{f}} \mathbf{v}_{\text{f}}) &= 0 \\ \implies (\text{grad} \varphi_{\text{f}}) \mathbf{v}_{\text{f}} + \varphi_{\text{f}} \text{div} \mathbf{v}_{\text{f}} + (\text{grad} \varphi_{\text{s}}) \mathbf{v}_{\text{s}} + \varphi_{\text{s}} \text{div} \mathbf{v}_{\text{s}} &= 0 \\ \implies (\text{grad} \varphi_{\text{f}}) \mathbf{v}_{\text{f}} + \varphi_{\text{f}} \text{div} \mathbf{v}_{\text{f}} - (\text{grad} \varphi_{\text{f}}) \mathbf{v}_{\text{s}} + \varphi_{\text{s}} \text{div} \mathbf{v}_{\text{s}} &= 0 \\ \implies \varphi_{\text{f}} \text{div} \mathbf{v}_{\text{f}} + \varphi_{\text{s}} \text{div} \mathbf{v}_{\text{s}} + (\text{grad} \varphi_{\text{f}}) \mathbf{v}_{\text{fs}} &= 0. \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

Osserviamo che la divergenza della velocità \mathbf{v}_{α} è esprimibile come

$$\text{div} \mathbf{v}_{\alpha} = (\mathbf{v}_{\alpha})^a{}_{;a} = \delta^a{}_b (\mathbf{v}_{\alpha})^b{}_{;a} = (\mathbf{i})^a{}_b (\mathbf{v}_{\alpha})^b{}_{;a} = (\mathbf{i}^{\text{T}})_b{}^a (\mathbf{v}_{\alpha})^b{}_{;a} = \mathbf{i}^{\text{T}} : \text{grad} \mathbf{v}_{\alpha}, \quad (3.3.17)$$

da cui, sostituendo l'Equazione (3.3.17) in (3.3.16), si ha la seguente espressione per il vincolo di incomprimibilità

$$\varphi_{\text{f}} \mathbf{i}^{\text{T}} : \text{grad} \mathbf{v}_{\text{f}} + \varphi_{\text{s}} \mathbf{i}^{\text{T}} : \text{grad} \mathbf{v}_{\text{s}} + (\text{grad} \varphi_{\text{f}}) \mathbf{v}_{\text{fs}} = 0. \quad (3.3.18)$$

Per richiedere che anche il vincolo di incomprimibilità sia soddisfatto assieme alla disuguaglianza di dissipazione, possiamo “appendere” [56] il vincolo (3.3.18) alla disuguaglianza (3.3.14). Per fare ciò si deve moltiplicare l'espressione del vincolo (3.3.18) per un *moltiplicatore di Lagrange* $p(\cdot, t) : \mathcal{B}(t) \rightarrow \mathbb{R}$ opportuno e poi sommare il prodotto alla disuguaglianza di dissipazione. Tale moltiplicatore p permette di avere la consistenza tra le grandezze fisiche sommate e prende il nome di *pressione della fase fluida in miscela*.

Pertanto la *nuova dissipazione*, ottenuta dalla somma precedentemente descritta, viene detta la dissipazione *arricchita*, o “*augmented*” [37], della miscela ed assume la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{(a)} &:= \mathcal{D} + p \left(\varphi_{\text{f}} \mathbf{i}^{\text{T}} : \text{grad} \mathbf{v}_{\text{f}} + \varphi_{\text{s}} \mathbf{i}^{\text{T}} : \text{grad} \mathbf{v}_{\text{s}} + (\text{grad} \varphi_{\text{f}}) \mathbf{v}_{\text{fs}} \right) \\ &= \sum_{\alpha} \left\{ -\rho_{\alpha} D_{\alpha} \psi_{\alpha} + (\boldsymbol{\sigma}_{\alpha} + p \varphi_{\alpha} \mathbf{i}^{\text{T}}) : \text{grad} \mathbf{v}_{\alpha} \right\} + (\mathbf{m}_{\text{f}} + p \text{grad} \varphi_{\text{f}}) \mathbf{v}_{\text{fs}} \\ &= \sum_{\alpha} \left\{ -\rho_{\alpha} D_{\alpha} \psi_{\alpha} + (\boldsymbol{\sigma}_{\alpha} + p \varphi_{\alpha} \mathbf{i}^{\text{T}}) : \text{grad} \mathbf{v}_{\alpha} \right\} + \mathbf{m}_{\text{fd}} \mathbf{v}_{\text{fs}} \geq 0, \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

dove si è definita la *parte dissipativa dell'impulso* \mathbf{m}_{f} come la grandezza [14, 15, 57]

$$\mathbf{m}_{\text{fd}} := \mathbf{m}_{\text{f}} + p \text{grad} \varphi_{\text{f}}. \quad (3.3.20)$$

Infine, possiamo supporre che il *fluido sia isoterma*, ossia tale per cui $D_f\psi_f = 0$; pertanto, la dissipazione arricchita, espressa nell'Equazione (3.3.19), diviene infine

$$\mathcal{D}^{(a)} = -\varrho_s \varphi_s D_s \psi_s + \sum_{\alpha} (\boldsymbol{\sigma}_{\alpha} + p \varphi_{\alpha} \mathbf{i}^T) : \text{grad} \mathbf{v}_{\alpha} + \mathbf{m}_{\text{fd}} \mathbf{v}_{\text{fs}} \geq 0. \quad (3.3.21)$$

Osservazione 31 (Ipotesi di fluido isoterma).

L'ipotesi di fluido isoterma è un'ipotesi avanzata per tutti i fenomeni dissipativi che studiamo in questa Tesi. Infatti, siamo interessati principalmente agli effetti dissipativi associati al rimodellamento della struttura interna, quando essi sono imputabili ad interazioni prettamente meccanica.

3.3.2 Forma lagrangiana della dissipazione

Prima di discutere delle ipotesi costitutive che possono essere dedotte dalla dissipazione presentata nell'Equazione (3.3.21), risulta conveniente calcolare la forma materiale della dissipazione stessa. Dunque, trasportiamo la Equazione (3.3.21) nel piazzamento di riferimento, eseguendone il *pull-back* su \mathcal{B}_R . Evidenziando che $\mathcal{D}^{(a)}$ si trasforma come uno pseudo-scalare, si ottiene che la forma materiale della dissipazione arricchita è definita come

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_R^{(a)} &:= J[\mathcal{D}^{(a)} \circ (\chi, \mathbf{t})] \\ &= -\varrho_s J[\varphi_s \circ (\chi, \mathbf{t})][D_s \psi_s \circ (\chi, \mathbf{t})] \\ &\quad + \sum_{\alpha} J[(\boldsymbol{\sigma}_{\alpha} + p \varphi_{\alpha} \mathbf{i}^T) \circ (\chi, \mathbf{t})] : [\text{grad} \mathbf{v}_{\alpha} \circ (\chi, \mathbf{t})] \\ &\quad + J[\mathbf{m}_{\text{fd}} \circ (\chi, \mathbf{t})] \mathbf{V}_{\text{fs}} \geq 0. \end{aligned} \quad (3.3.22)$$

Ricordando le definizioni di Φ_s e applicando le identità (2.3.8b) e (2.3.12), possiamo scrivere la (3.3.22) come

$$\mathcal{D}_R^{(a)} = -\varrho_s \Phi_s \overline{[\psi_s \circ (\chi, \mathbf{t})]} + \sum_{\alpha} (\mathbf{P}_{\alpha} + \mathbf{p} \Phi_{\alpha} \mathbf{F}^{-T}) : \text{Grad} \mathbf{V}_{\alpha} + J[\mathbf{m}_{\text{fd}} \circ (\chi, \mathbf{t})] \mathbf{V}_{\text{fs}} \geq 0, \quad (3.3.23)$$

dove si è indicata con $\mathbf{p} := p \circ (\chi, \mathbf{t})$ la pressione del fluido in funzione dei punti di \mathcal{B}_R e del tempo.

Nel seguito, sarà conveniente utilizzare le frazioni di volume proiettate nello stato naturale in quanto costanti, pertanto osserviamo che per (2.4.4) si ha

$$\Phi_{\alpha} = J[\varphi_{\alpha} \circ (\chi, \mathbf{t})] = J_{\mathbf{K}} J_e[\varphi_{\alpha} \circ (\chi, \mathbf{t})] =: J_{\mathbf{K}} \Phi_{\alpha\nu}, \quad (3.3.24)$$

dove $\Phi_{\alpha\nu} := J_e[\varphi_{\alpha} \circ (\chi, \mathbf{t})]$ è la frazione di volume della fase α -esima nello stato naturale. Pertanto, ricordando che $\text{Grad} \mathbf{V}_s = \dot{\mathbf{F}}$, la forma definitiva della dissipazione standard in forma materiale è espressa come

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_R^{(a)} &= -\varrho_s J_{\mathbf{K}} \Phi_{sv} \overline{[\psi_s \circ (\chi, \mathbf{t})]} \\ &\quad + (\mathbf{P}_s + \mathbf{p} \Phi_s \mathbf{F}^{-T}) : \dot{\mathbf{F}} + (\mathbf{P}_f + \mathbf{p} \Phi_f \mathbf{F}^{-T}) : \text{Grad} \mathbf{V}_f \\ &\quad + J[\mathbf{m}_{\text{fd}} \circ (\chi, \mathbf{t})] \mathbf{V}_{\text{fs}}. \end{aligned} \quad (3.3.25)$$

Osservando la struttura della forma materiale della dissipazione arricchita, ottenuta nella Equazione (3.3.25), notiamo che i termini che necessitano una ipotesi costitutiva sono quattro: l'energia libera di Helmholtz della fase solida $\psi_s \circ (\chi, \mathbf{t})$, le parti costitutive dei due primi tensori di Piola-Kirchoff per le due fasi, ossia $\mathbf{P}_{\text{sc}} := \mathbf{P}_s + \mathbf{p} \Phi_s \mathbf{F}^{-T}$ e $\mathbf{P}_{\text{fc}} := \mathbf{P}_f + \mathbf{p} \Phi_f \mathbf{F}^{-T}$, e, infine, la parte dissipativa dell'impulso del fluido \mathbf{m}_{fd} .

3.4 Ipotesi costitutive

In questa Sezione, siamo interessati ad utilizzare la struttura della dissipazione ottenuta nell'Equazione (3.3.25) per dedurre le ipotesi costitutive per le quattro grandezze precedentemente descritte. In particolare, analizzeremo nel seguito un *set* di ipotesi costitutive che sono comunemente utilizzate per descrivere un mezzo poro-elastoplastico nell'ambito della plasticità standard [35, 12].

Supponiamo, in particolare, che il fluido sia *macroscopicamente* non-viscoso, anche detto *di ordine 0*. Di conseguenza, $\text{Grad}\mathbf{V}_f$ non viene presa come una variabile costitutiva indipendente e, pertanto, si richiede che $\mathbf{P}_{fc} \equiv \mathbf{0}$, coerentemente con il metodo di Coleman&Noll.

Ipotesi sull'energia libera di Helmholtz

Iniziamo a trattare costitutivamente l'energia libera associata fase solida assumendo che essa dipenda funzionalmente solamente dalle distorsioni di tipo elastico. In particolare, per l'oggettività del materiale, possiamo esprimere l'energia libera come una funzione scalare del tensore \mathbf{C}_e , ossia

$$\psi_s \circ (\chi, \mathbf{t}) = \hat{\psi}_{s,e} \circ \mathbf{C}_e. \quad (3.4.1)$$

Come conseguenza, la derivata nel tempo di $\psi_s \circ (\chi, \mathbf{t})$ che compare nella Equazione (3.3.23), si può esprimere come

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\hat{\psi}_{s,e} \circ \mathbf{C}_e] &= \left[\frac{\partial \hat{\psi}_{s,e}}{\partial \mathbf{C}_e} \circ \mathbf{C}_e \right] : \dot{\mathbf{C}}_e \\ &= \left[\frac{\partial \hat{\psi}_{s,e}}{\partial \mathbf{C}_e} \circ \mathbf{C}_e \right] : \left\{ \overline{[\mathbf{F}_e^T \circ (\chi, \mathbf{t})]} [\mathbf{g} \circ (\chi, \mathbf{t})] \mathbf{F}_e + [(\mathbf{F}_e^T \mathbf{g}) \circ (\chi, \mathbf{t})] \dot{\mathbf{F}}_e \right\}. \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

Tramite la decomposizione moltiplicativa $\mathbf{F}_e = \mathbf{F}\mathbf{K}^{-1}$, possiamo esprimere le derivate in tempo dei tensori \mathbf{F}_e e $\mathbf{F}_e^T \circ (\chi, \mathbf{t})$ presenti nella Equazione (3.4.2) come

$$\dot{\mathbf{F}}_e = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{K}^{-1} - \mathbf{F}\mathbf{K}^{-1}\dot{\mathbf{K}}\mathbf{K}^{-1} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{K}^{-1} - \mathbf{F}_e\mathbf{L}_K, \quad (3.4.3)$$

da cui segue che

$$\overline{[\mathbf{F}_e^T \circ (\chi, \mathbf{t})]} = \mathbf{K}^{-T}\dot{\mathbf{F}}^T - \mathbf{L}_K^T[\mathbf{F}_e^T \circ (\chi, \mathbf{t})]. \quad (3.4.4)$$

Sostituendo, possiamo riscrivere la (3.4.2) esplicitamente in componenti (trascurando momentaneamente le composizioni per semplicità di notazione) come

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_{s,e} &= \left[\frac{\partial \hat{\psi}_{s,e}}{\partial (\mathbf{C}_e)_{MN}} \right] \left[(\mathbf{K}^{-T}\dot{\mathbf{F}}^T)_{M^a} - (\mathbf{L}_K^T\mathbf{F}_e^T)_{M^a} \right] g_{ab}(\mathbf{F}_e)^{b_N} \\ &\quad + \left[\frac{\partial \hat{\psi}_{s,e}}{\partial (\mathbf{C}_e)_{MN}} \right] (\mathbf{F}_e^T)_{M^a} g_{ab} \left[(\dot{\mathbf{F}}\mathbf{K}^{-1})^{b_N} - (\mathbf{F}_e\mathbf{L}_K)^{b_N} \right] \\ &= (\mathbf{g}\mathbf{F}_e)_{aN} \left[\frac{\partial \hat{\psi}_{s,e}}{\partial (\mathbf{C}_e)_{NM}} \right] (\mathbf{K}^{-T})_{M^a} (\dot{\mathbf{F}})^a_A - (\mathbf{F}_e^T \mathbf{g}\mathbf{F}_e)_{CN} \left[\frac{\partial \hat{\psi}_{s,e}}{\partial (\mathbf{C}_e)_{NM}} \right] (\mathbf{L}_K)^C_M \\ &\quad + (\mathbf{g}\mathbf{F}_e)_{bM} \left[\frac{\partial \hat{\psi}_{s,e}}{\partial (\mathbf{C}_e)_{MN}} \right] (\mathbf{K}^{-T})_{N^B} (\dot{\mathbf{F}})^b_B - (\mathbf{F}_e^T \mathbf{g}\mathbf{F}_e)_{CM} \left[\frac{\partial \hat{\psi}_{s,e}}{\partial (\mathbf{C}_e)_{MN}} \right] (\mathbf{L}_K)^C_N \\ &= (\mathbf{g}\mathbf{F}_e)_{aN} \left[2 \frac{\partial \hat{\psi}_{s,e}}{\partial (\mathbf{C}_e)_{NM}} \right] (\mathbf{K}^{-T})_{M^a} (\dot{\mathbf{F}})^a_A - (\mathbf{C}_e)_{CN} \left[2 \frac{\partial \hat{\psi}_{s,e}}{\partial (\mathbf{C}_e)_{NM}} \right] (\mathbf{L}_K)^C_M. \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

Pertanto, scrivendo la (3.4.5) in forma compatta ed esplicitando nuovamente le composizioni, otteniamo la seguente espressione per la derivata in tempo dell'energia libera di Helmholtz associata alla fase solida:

$$\overline{\dot{\psi}_s \circ (\chi, \mathbf{t})} = [\mathbf{g} \circ (\chi, \mathbf{t})] \mathbf{F}_e \left[2 \frac{\partial \hat{\psi}_{s,e}}{\partial \mathbf{C}_e} \circ \mathbf{C}_e \right] \mathbf{K}^{-\text{T}} : \dot{\mathbf{F}} - \mathbf{C}_e \left[2 \frac{\partial \hat{\psi}_{s,e}}{\partial \mathbf{C}_e} \circ \mathbf{C}_e \right] : \mathbf{L}_K. \quad (3.4.6)$$

Infine, sostituendo la relazione ottenuta in (3.4.6) nella dissipazione (3.3.25), si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_R^{(a)} = & \left\{ -J_K [\mathbf{g} \circ (\chi, \mathbf{t})] \mathbf{F}_e \left[2 \Phi_{sv} \varrho_s \left(\frac{\partial \hat{\psi}_{s,e}}{\partial \mathbf{C}_e} \circ \mathbf{C}_e \right) \right] \mathbf{K}^{-\text{T}} + \mathbf{P}_s + \mathfrak{p} \Phi_s \mathbf{F}^{-\text{T}} \right\} : \dot{\mathbf{F}} \\ & + J_K \mathbf{C}_e \left[2 \Phi_{sv} \varrho_s \left(\frac{\partial \hat{\psi}_{s,e}}{\partial \mathbf{C}_e} \circ \mathbf{C}_e \right) \right] : \mathbf{L}_K \\ & + J[\mathbf{m}_{\text{fd}} \circ (\chi, \mathbf{t})] \mathbf{V}_{\text{fs}} \geq 0. \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

Osservazione 32 (Contributi dissipativi associati al solido).

Nella (3.4.7) si nota la presenza di due termini disaccoppiati: un contributo di dissipazione è imputabile direttamente al moto fase solida ed è duale a $\dot{\mathbf{F}}$, ed uno associato al rimodellamento della struttura interna, duale al tasso di distorsioni plastiche \mathbf{L}_K .

Ipotesi sugli effetti dissipativi della fase solida

Ipotizziamo, ora, che la fase solida della miscela bifasica incomprimibile in esame sia composta da un materiale *iperelastico* [58, 5]. Questa ipotesi implica che la variabile $\dot{\mathbf{F}}$ non è una variabile costitutiva indipendente e quindi, per il metodo di Coleman&Noll [5], si conclude che il coefficiente del termine $\dot{\mathbf{F}}$ nell'Equazione (3.4.7) deve essere necessariamente identicamente nullo. Pertanto, il primo tensore di Piola-Kirchhoff della fase solida \mathbf{P}_s risulta essere espresso come la somma di una parte idrostatica e di una parte *costitutiva*, ossia

$$\mathbf{P}_s = -\mathfrak{p} \Phi_s \mathbf{F}^{-\text{T}} + \mathbf{P}_{\text{sc}}, \quad (3.4.8)$$

dove la parte *costitutiva* del tensore \mathbf{P}_s , indicata con \mathbf{P}_{sc} , è definita come

$$\mathbf{P}_{\text{sc}} = J_K [\mathbf{g} \circ (\chi, \mathbf{t})] \mathbf{F}_e \left[2 \Phi_{sv} \varrho_s \left(\frac{\partial \hat{\psi}_{s,e}}{\partial \mathbf{C}_e} \circ \mathbf{C}_e \right) \right] \mathbf{K}^{-\text{T}}. \quad (3.4.9)$$

Per ottenere analiticamente l'espressione del tensore \mathbf{P}_{sc} , occorre assegnare costitutivamente la energia libera di Helmholtz $\hat{\psi}_{s,e} \circ \mathbf{C}_e$. In Letteratura, sono state studiate diverse relazioni empiriche per le energie libere di diversi materiali (si veda, per esempio, [53, 34]).

Applicando la trasformazione di Piola all'interno alla decomposizione di \mathbf{P}_s riportata nella Equazione (3.4.8), possiamo ottenere la decomposizione per il tensore degli sforzi di Cauchy associato alla fase solida in una parte idrostatica ed una *costitutiva*, ossia

$$\boldsymbol{\sigma}_s = -p \varphi_s \mathbf{i}^{\text{T}} + \boldsymbol{\sigma}_{\text{sc}}, \quad \boldsymbol{\sigma}_{\text{sc}} = \frac{1}{J \circ (\Xi, \mathcal{J})} [\mathbf{P}_{\text{sc}} \circ (\Xi, \mathcal{J})] \mathbf{F}^{\text{T}}. \quad (3.4.10)$$

Come conseguenza delle Equazioni (3.4.8) e (3.4.9), possiamo riscrivere la forma materiale della dissipazione arricchita della miscela, espressa nella (3.4.7), come

$$\mathcal{D}_R^{(a)} = J_K \mathbf{C}_e \left[2 \Phi_{sv} \varrho_s \left(\frac{\partial \hat{\psi}_{s,e}}{\partial \mathbf{C}_e} \circ \mathbf{C}_e \right) \right] : \mathbf{L}_K + J[\mathbf{m}_{\text{fd}} \circ (\chi, \mathbf{t})] \mathbf{V}_{\text{fs}} \geq 0. \quad (3.4.11)$$

In particolare, l'ipotesi di ammettere la fase solida come un solido iperelastico ha permesso che la miscela ammetta solamente effetti dissipativi legati alla fase fluida e al rimodellamento della struttura interna, per il quale possiamo dare le seguenti definizioni:

Definizione 3.4.1 (Tensore di Mandel naturale [59]).

Si definisce il *tensore di Mandel* associato allo stato naturale come il tensore del secondo ordine, indicato con \mathbf{M}_ν , definito come

$$\mathbf{M}_\nu := \mathbf{C}_e \left[2\Phi_{s\nu\varrho_s} \left(\frac{\partial \hat{\psi}_{s,e}}{\partial \mathbf{C}_e} \circ \mathbf{C}_e \right) \right]. \quad (3.4.12)$$

Mediante tale definizione, si ha che $J_{\mathbf{K}}\mathbf{M}_\nu$ è la forza duale al tensore \mathbf{L}_K , nella dualità indotta dalla dissipazione espressa nella Equazione (3.4.11).

Definizione 3.4.2 (Tensore di Mandel [59]).

Detto \mathbf{M}_ν il tensore di Mandel associato allo stato naturale, definito in (3.4.12), allora si definisce il *tensore di Mandel materiale* come il tensore del secondo ordine, indicato con \mathbf{M} , definito da

$$\mathbf{M} := J_{\mathbf{K}}\mathbf{K}^T \mathbf{M}_\nu \mathbf{K}^{-T}. \quad (3.4.13)$$

Grazie alle precedenti definizioni, possiamo scrivere la dissipazione nell'Equazione (3.4.11) in una forma più compatta come segue [35, 12]:

$$\mathcal{D}_R^{(a)} = J_{\mathbf{K}}\mathbf{M}_\nu : \mathbf{L}_K + J[\mathbf{m}_{\text{fid}} \circ (\chi, \mathbf{t})] \mathbf{V}_{\text{fs}} \geq 0. \quad (3.4.14)$$

Ora, in aggiunta all'ipotesi di iperelasticità per la fase solida, assumiamo che il materiale sia *omogeneo*, ossia che il suo comportamento non dipenda dal punto materiale considerato, e *isotropo* [58, 53]. Pertanto, esprimiamo l'energia $\psi_{s,e}$ come una funzione *isotropa* di \mathbf{C}_e , e, quindi, come funzione degli invarianti del tensore \mathbf{C}_e , definiti come [53]

$$I_{1e} = \hat{I}_{1e} \circ \mathbf{C}_e = \text{Tr}(\mathbf{G}^{-1}\mathbf{C}_e) = \text{Tr}(\mathbf{B}_K\mathbf{C}), \quad (3.4.15a)$$

$$I_{2e} = \hat{I}_{2e} \circ \mathbf{C}_e = \frac{1}{2} \left\{ I_{1e}^2 - \text{Tr}[(\mathbf{G}^{-1}\mathbf{C}_e)^2] \right\} = \frac{1}{2} \left\{ I_{1e}^2 - \text{Tr}[(\mathbf{B}_K\mathbf{C})^2] \right\}, \quad (3.4.15b)$$

$$I_{3e} = \hat{I}_{3e} \circ \mathbf{C}_e = \det(\mathbf{C}_e) = J_e^2, \quad (3.4.15c)$$

dove, nelle Equazioni (3.4.15a) e (3.4.15b), si è fatto uso della seguente relazione:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\mathbf{G}^{-1}\mathbf{C}_e) &= \text{Tr} \left(\mathbf{G}^{-1}[\mathbf{F}_e^T \circ (\chi, \mathbf{t})][\mathbf{g} \circ (\chi, \mathbf{t})\mathbf{F}_e] \right) \\ &= \text{Tr} \left(\mathbf{G}^{-1}\mathbf{K}^{-T}[\mathbf{F}^T \circ (\chi, \mathbf{t})][\mathbf{g} \circ (\chi, \mathbf{t})\mathbf{F}\mathbf{K}^{-1}] \right) \\ &= \text{Tr} \left(\mathbf{G}^{-1}\mathbf{K}^{-T}\mathbf{C}\mathbf{K}^{-1} \right) \\ &= \text{Tr} \left(\mathbf{K}\mathbf{B}_K\mathbf{C}\mathbf{K}^{-1} \right) \\ &= \text{Tr}(\mathbf{B}_K\mathbf{C}). \end{aligned} \quad (3.4.16)$$

Scriviamo, dunque, che

$$\hat{\psi}_{s,e} \circ \mathbf{C}_e \equiv \tilde{\psi}_{s,e} \circ (I_{1e}, I_{2e}, I_{3e}). \quad (3.4.17)$$

In particolare, assumiamo che il comportamento meccanico della fase solida della miscela sia di tipo *Neo-hookeano*, ossia che esso ammetta la seguente espressione per l'energia libera di Helmholtz [53]:

$$\begin{aligned} \Phi_{s\nu\varrho_s}[\tilde{\psi}_{s,e} \circ (I_{1e}, I_{2e}, I_{3e})] &= \frac{\mu_e}{2}(I_{1e} - 3) - \mu_e \log J_e + \frac{\lambda_e}{2}(\log J_e)^2 \\ &= \frac{\mu_e}{2}(I_{1e} - 3) - \frac{\mu_e}{2} \log I_{3e} + \frac{\lambda_e}{8}(\log I_{3e})^2, \end{aligned} \quad (3.4.18)$$

dove le costanti μ_e e λ_e sono i *parametri di Lamé* della fase solida [53].

Data l'espressione per l'energia libera nella Equazione (3.4.18), possiamo calcolarne esplicitamente la derivata rispetto al tensore \mathbf{C}_e , ossia [53]

$$\begin{aligned} \Phi_{sv\ell_s} \left(\frac{\partial \hat{\psi}_{s,e}}{\partial \mathbf{C}_e} \circ \mathbf{C}_e \right) &= \sum_{j=1}^3 \Phi_{sv\ell_s} \left[\frac{\partial \tilde{\psi}_{s,e}}{\partial I_{je}} \circ (I_{1e}, I_{2e}, I_{3e}) \right] \left(\frac{\partial \hat{I}_{je}}{\partial \mathbf{C}_e} \circ \mathbf{C}_e \right) \\ &=: \sum_{j=1}^3 s_{j,e} \left(\frac{\partial \hat{I}_{je}}{\partial \mathbf{C}_e} \circ \mathbf{C}_e \right), \end{aligned} \quad (3.4.19)$$

dove i coefficienti $s_{j,e}$ sono definiti come segue:

$$s_{1,e} := \Phi_{sv\ell_s} \left[\frac{\partial \tilde{\psi}_{s,e}}{\partial I_{1e}} \circ (I_{1e}, I_{2e}, I_{3e}) \right] = \frac{\mu_e}{2}, \quad (3.4.20a)$$

$$s_{2,e} := \Phi_{sv\ell_s} \left[\frac{\partial \tilde{\psi}_{s,e}}{\partial I_{2e}} \circ (I_{1e}, I_{2e}, I_{3e}) \right] = 0, \quad (3.4.20b)$$

$$s_{3,e} := \Phi_{sv\ell_s} \left[\frac{\partial \tilde{\psi}_{s,e}}{\partial I_{3e}} \circ (I_{1e}, I_{2e}, I_{3e}) \right] = -\frac{\mu_e}{2} \frac{1}{I_{3e}} + \frac{\lambda_e}{4} \frac{\log I_{3e}}{I_{3e}}. \quad (3.4.20c)$$

Ricordiamo, inoltre, le seguenti identità sulle derivate del primo e terzo invariante di \mathbf{C}_e [28, 52]:

$$\frac{\partial \hat{I}_{1e}}{\partial \mathbf{C}_e} \circ \mathbf{C}_e = \mathbf{G}^{-1}, \quad \frac{\partial \hat{I}_{3e}}{\partial \mathbf{C}_e} \circ \mathbf{C}_e = I_{3e} \mathbf{C}_e^{-1}. \quad (3.4.21)$$

Sostituendo le espressioni riportate nelle Equazioni (3.4.20a)-(3.4.20c) e (3.4.21) nella Equazione (3.4.19), si ottiene

$$\Phi_{sv\ell_s} \left(\frac{\partial \hat{\psi}_{s,e}}{\partial \mathbf{C}_e} \circ \mathbf{C}_e \right) = \frac{\mu_e}{2} (\mathbf{G}^{-1} - \mathbf{C}_e^{-1}) + \frac{\lambda_e}{4} (\log I_{3e}) \mathbf{C}_e^{-1}. \quad (3.4.22)$$

Pertanto, sostituendo la Equazione (3.4.22) nella definizione del tensore di Mandel associato allo stato naturale, riportata in (3.4.12), si ha che

$$\mathbf{M}_\nu = \mu_e (\mathbf{C}_e \mathbf{G}^{-1} - \mathbf{I}^T) + \frac{\lambda_e}{2} (\log I_{3e}) \mathbf{I}^T. \quad (3.4.23)$$

Inoltre, sostituendo la Equazione (3.4.22) nella (3.4.9), possiamo ottenere l'espressione della parte costitutiva del primo tensore di Piola-Kirchhoff associato alla fase solida nel caso Neo-Hookeano, ossia

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{sc} &= J_{\mathbf{K}} [\mathbf{g} \circ (\chi, \mathbf{t})] \mathbf{F}_e \left[\mu_e (\mathbf{G}^{-1} - \mathbf{C}_e^{-1}) + \frac{1}{2} \lambda_e (\log I_{3e}) \mathbf{C}_e^{-1} \right] \mathbf{K}^{-T} \\ &= J_{\mathbf{K}} [\mathbf{g} \circ (\chi, \mathbf{t})] \{ \mu_e \mathbf{F} \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{K}^{-T} - \mu_e \mathbf{F} \mathbf{C}^{-1} + \frac{1}{2} \lambda_e (\log I_{3e}) \mathbf{F} \mathbf{C}^{-1} \} \\ &= J_{\mathbf{K}} [\mathbf{g} \circ (\chi, \mathbf{t})] \mathbf{F} [\mu_e (\mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{K}^{-T} - \mathbf{C}^{-1}) + \frac{1}{2} \lambda_e (\log I_{3e}) \mathbf{C}^{-1}], \end{aligned} \quad (3.4.24)$$

dove, nello sviluppo dei calcoli relativi alla Equazione (3.4.24), si è fatto ricorso alle seguenti relazioni tra i tensori \mathbf{C}_e e \mathbf{C} :

$$\mathbf{C}_e = \mathbf{K}^{-T} \mathbf{C} \mathbf{K}^{-1}, \quad \mathbf{C}_e^{-1} = \mathbf{K} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{K}^T. \quad (3.4.25)$$

Ipotesi sugli effetti dissipativi della fase fluida

Siccome nella Tesi l'attenzione è principalmente rivolta nello studio degli effetti plastici della fase solida, si è scelto di studiare la fase fluida attraverso il *modello di flusso di Darcy* [14, 15]. Nel modello di Darcy, ricordando che $\mathbf{P}_{fc} \equiv \mathbf{0}$, il primo tensore di Piola-Kirchhoff associato alla fluida è solamente composto da un contributo idrostatico, ossia

$$\mathbf{P}_f = -p\Phi_f \mathbf{F}^{-T}, \quad (3.4.26)$$

e, applicando una trasformazione di Piola inversa, il tensore degli sforzi di Cauchy associato alla fase fluida diviene

$$\boldsymbol{\sigma}_f = -p\varphi_f \mathbf{i}^T. \quad (3.4.27)$$

Pertanto, nel modello di Darcy, vi è un solo ente dissipativo associato alla fase fluida, ossia il termine $J[\mathbf{m}_{fd} \circ (\chi, \mathbf{t})]$, il quale è l'ente duale a \mathbf{V}_{fs} nella dualità indotta dalla potenza [14].

L'ipotesi costitutiva che viene fatta nel modello di Darcy è che l'impulso \mathbf{m}_{fd} sia una funzione *lineare* della velocità di filtrazione $\mathbf{q} = \varphi_f \mathbf{v}_{fs}$, ossia

$$\mathbf{m}_{fd} := \boldsymbol{\lambda} \mathbf{q} = \varphi_f \boldsymbol{\lambda} \mathbf{v}_{fs}, \quad (3.4.28)$$

dove è stata ipotizzata l'esistenza di un campo tensoriale $\boldsymbol{\lambda}(\cdot, t) : T\mathcal{S} \rightarrow T^*\mathcal{S}$ che associa ad ogni $x \in \mathcal{B}(t)$ il tensore $\boldsymbol{\lambda}(x, t) = [\boldsymbol{\lambda}(x, t)]_{ab} \mathbf{e}^a(x) \otimes \mathbf{e}^b(x)$, noto come *resistività idraulica* della fase fluida [14].

Utilizzando la Equazione (3.4.28), e definendo la composizione di $\boldsymbol{\lambda}$ con la coppia di mappe (χ, \mathbf{t}) come $\boldsymbol{\lambda}_{(L)} := \boldsymbol{\lambda} \circ (\chi, \mathbf{t})$, possiamo riscrivere il termine di dissipazione associato alla fase fluida nella (3.4.14) come

$$\begin{aligned} J[\mathbf{m}_{fd} \circ (\chi, \mathbf{t})] \mathbf{V}_{fs} &= J[(\boldsymbol{\lambda} \varphi_f \mathbf{v}_{fs}) \circ (\chi, \mathbf{t})] \mathbf{V}_{fs} \\ &= \Phi_f (\boldsymbol{\lambda}_{(L)})_{ab} (\mathbf{V}_{fs})^b (\mathbf{V}_{fs})^a \\ &= \boldsymbol{\lambda}_{(L)} : \Phi_f (\mathbf{V}_{fs} \otimes \mathbf{V}_{fs}) \\ &= (\text{sym } \boldsymbol{\lambda}_{(L)}) : \Phi_f (\mathbf{V}_{fs} \otimes \mathbf{V}_{fs}) \end{aligned} \quad (3.4.29)$$

Osserviamo che nella Equazione (3.4.29) si è usata la proprietà di simmetria del tensore $\mathbf{V}_{fs} \otimes \mathbf{V}_{fs}$, che, dunque, *seleziona* solo la parte simmetrica di $\boldsymbol{\lambda}_{(L)}$. Inoltre, nel caso in cui $\boldsymbol{\lambda}_{(L)}$ sia simmetrico e definito positivo allora la componente dissipativa associata alla fase fluida è sempre non-negativa ed è nulla se e solo se $\mathbf{V}_{fs} = \mathbf{0}$.

Equazioni del modello per il moto e per la pressione

Avendo fissato le ipotesi costitutive per la fase solida e per la fase fluida, siamo in grado di ottenere le equazioni che permettono di calcolare χ e p . Per ottenere l'equazione per χ , sommiamo le equazioni dinamiche associate alle due fasi, ossia le Equazioni (3.2.40a), su α , e ricordiamo le decomposizioni ottenute per $\boldsymbol{\sigma}_s$ e $\boldsymbol{\sigma}_f$, rispettivamente, in (3.4.10) e (3.4.27):

$$\begin{aligned} -(\mathbf{m}_s + \mathbf{m}_f) + \text{div}(-p\varphi_s \mathbf{i}^T - p\varphi_f \mathbf{i}^T + \boldsymbol{\sigma}_{sc}) + (\rho_s + \rho_f) \mathbf{f} &= \mathbf{0} \\ \implies -(\mathbf{m}_s + \mathbf{m}_f) + \text{div}(-p\mathbf{i}^T + \boldsymbol{\sigma}_{sc}) + \rho \mathbf{f} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.4.30)$$

In particolare, ricordando la *chiusura dell'impulso* nella Osservazione 25, otteniamo

$$\text{div}(-p\mathbf{i}^T + \boldsymbol{\sigma}_{sc}) + \rho \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad (3.4.31)$$

dove il tensore $\boldsymbol{\sigma}_{sc}$ è definito come visto nella Equazione (3.4.10). Inoltre, conviene scrivere la Equazione (3.4.31) in forma materiale e, a tal scopo, componiamo la Equazione (3.4.31) per le mappe (χ, \mathbf{t}) e moltiplichiamo per J , ottenendo

$$J[\operatorname{div}(-p\mathbf{i}^T + \boldsymbol{\sigma}_{sc}) \circ (\chi, \mathbf{t})] + J[(\rho\mathbf{f}) \circ (\chi, \mathbf{t})] = \mathbf{0}. \quad (3.4.32)$$

Ora, adattando la relazione tra le divergenze spaziali e materiali dei tensori degli sforzi, espressa nella Equazione (3.2.50), otteniamo la equazione per χ in forma materiale:

$$\operatorname{Div}(-\mathbf{p}J\mathbf{F}^{-T} + \mathbf{P}_{sc}) + J[(\rho\mathbf{f}) \circ (\chi, \mathbf{t})] = \mathbf{0}. \quad (3.4.33)$$

Per quanto riguarda la fase fluida, invece, sostituendo le Equazioni (3.4.27) e (3.3.20) nell'equazione di bilancio del fluido possiamo sviluppare i termini \mathbf{m}_f e $\boldsymbol{\sigma}_f$ come segue

$$\begin{aligned} -\mathbf{m}_f + \operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}_f + \rho_f\mathbf{f} &= \mathbf{0} \\ \implies -\mathbf{m}_{fd} + p(\operatorname{grad}\varphi_f) - \operatorname{div}(p\varphi_f\mathbf{i}^T) + \rho_f\mathbf{f} &= \mathbf{0} \\ \implies -\mathbf{m}_{fd} - \varphi_f(\operatorname{grad}p) + \rho_f\mathbf{f} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.4.34)$$

Da quest'ultima relazione, sostituendo il termine \mathbf{m}_{fd} con l'ipotesi di Darcy in (3.4.28), otteniamo che

$$\mathbf{m}_{fd} = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{q} = -\varphi_f(\operatorname{grad}p) + \rho_f\mathbf{f}. \quad (3.4.35)$$

Possiamo supporre che il tensore $\boldsymbol{\lambda}$ sia invertibile e, di conseguenza, definire con $\boldsymbol{\pi} := \varphi_f\boldsymbol{\lambda}^{-1}$ il tensore di *permeabilità idraulica*. Grazie ad esso, possiamo riscrivere la Equazione (3.4.35) evidenziando la velocità di filtrazione a primo membro, ottenendo che

$$\mathbf{q} = -\boldsymbol{\pi}[\operatorname{grad}p - \varrho_f\mathbf{f}]. \quad (3.4.36)$$

Pertanto, sostituendo l'espressione della \mathbf{q} nella (3.1.28), otteniamo l'equazione per p :

$$\operatorname{div}\mathbf{v}_s - \operatorname{div}[\boldsymbol{\pi}(\operatorname{grad}p - \varrho_f\mathbf{f})] = \mathbf{0}. \quad (3.4.37)$$

Per quanto riguarda l'espressione analitica del tensore di permeabilità idraulica $\boldsymbol{\pi}$, si è ipotizzato che tale tensore sia *sferico* e dipendente dalla deformazione volumica J secondo l'espressione [34]

$$\boldsymbol{\pi} = \pi\mathbf{g}^{-1}, \quad \boldsymbol{\pi} \circ (\chi, \mathbf{t}) = \pi_0 \left[\frac{J - J_{\mathbf{K}}\Phi_{sv}}{1 - J_{\mathbf{K}}\Phi_{sv}} \right]^\kappa \exp \left[\frac{m_0}{2} \left(\frac{J^2 - J_{\mathbf{K}}^2}{J_{\mathbf{K}}^2} \right) \right], \quad (3.4.38)$$

dove π_0 è una permeabilità idraulica di riferimento e i parametri κ e m_0 sono coefficienti caratteristici del problema in esame.

Conviene, infine, riscrivere la Equazione (3.4.37) relativamente al piazzamento di riferimento \mathcal{B}_R . Pertanto, sostituiamo l'espressione di \mathbf{q} ottenuta nella Equazione (3.4.36) nella definizione della forma materiale \mathbf{Q} in (3.1.31), ottenendo

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= J[\mathbf{F}^{-1} \circ (\chi, \mathbf{t})][\mathbf{q} \circ (\chi, \mathbf{t})] \\ &= J[\mathbf{F}^{-1} \circ (\chi, \mathbf{t})]\{-\boldsymbol{\pi}(\operatorname{grad}p - \varrho_f\mathbf{f})\} \circ (\chi, \mathbf{t}) \\ &= -J[\mathbf{F}^{-1} \circ (\chi, \mathbf{t})][\boldsymbol{\pi} \circ (\chi, \mathbf{t})]\mathbf{F}^{-T}\{\mathbf{F}^T\operatorname{grad}p - \varrho_f\mathbf{F}^T\mathbf{f}\} \circ (\chi, \mathbf{t}) \\ &=: -\mathbf{II}[\operatorname{Grad}p - \varrho_f\mathbf{f}_R], \end{aligned} \quad (3.4.39)$$

dove si è usata la proprietà espressa nella Equazione (2.3.8a) per i gradienti del campo scalare di pressione p . Nella Equazione (3.4.39), si sono definite la forma "materiale" della

forza di volume \mathbf{f} , indicata come $\mathbf{f}_R := (\mathbf{F}^T \mathbf{f}) \circ (\chi, \mathbf{t})$ e la forma materiale del tensore $\boldsymbol{\pi}$ come [34]

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Pi} &:= J[\mathbf{F}^{-1} \circ (\chi, \mathbf{t})][\boldsymbol{\pi} \circ (\chi, \mathbf{t})]\mathbf{F}^{-T} \\ &= J[\boldsymbol{\pi} \circ (\chi, \mathbf{t})][\mathbf{F}^{-1} \circ (\chi, \mathbf{t})][\mathbf{g} \circ (\chi, \mathbf{t})]\mathbf{F}^{-T} \\ &= J[\boldsymbol{\pi} \circ (\chi, \mathbf{t})]\mathbf{C}^{-1}. \end{aligned} \quad (3.4.40)$$

Pertanto, sostituendo la Equazione (3.4.39) nella forma materiale della Equazione (3.1.28), che avevamo riportato nella (3.1.33), si ottiene la forma materiale dell'equazione del modello per la pressione, ossia

$$\dot{J} - \text{Div}[\boldsymbol{\Pi}(\text{Grad} \mathbf{p} - \varrho_t \mathbf{f}_R)] = 0. \quad (3.4.41)$$

3.5 Legge di flusso plastico standard

Nella Sezione 3.4, in virtù delle ipotesi che si sono fatte su quali siano gli enti dissipativi della teoria, abbiamo ottenuto che la dissipazione della miscela è fondamentalmente composta da due contributi:

- Il primo è associato propriamente al flusso della fase fluida, ossia all'attrito che si genera nel moto relativo delle due fasi il quale, in forma materiale, è espresso come [35]

$$\mathcal{D}_{R,\text{flow}} := (\text{sym } \boldsymbol{\lambda}_{(L)}) : \Phi_f(\mathbf{V}_{fs} \otimes \mathbf{V}_{fs}). \quad (3.5.1)$$

- Il secondo, invece, è un contributo macroscopicamente osservabile dovuto agli effetti plastici coinvolti nel rimodellamento e, in forma materiale, esso assume la forma [35]

$$\mathcal{D}_{R,\text{rem}} := J_{\mathbf{K}} \mathbf{M}_\nu : \mathbf{L}_{\mathbf{K}}. \quad (3.5.2)$$

Pertanto, la *dissipazione residua* della miscela, espressa in forma materiale, assume complessivamente la forma [35]

$$\mathcal{D}_{R,\text{residual}} = (\text{sym } \boldsymbol{\lambda}_{(L)}) : \Phi_f(\mathbf{V}_{fs} \otimes \mathbf{V}_{fs}) + J_{\mathbf{K}} \mathbf{M}_{s\nu} : \mathbf{L}_{\mathbf{K}} \geq 0. \quad (3.5.3)$$

Nel seguito, supponiamo che i due contributi dissipativi siano entrambi non-negativi, indipendentemente l'uno dall'altro. Ciò implica che anche nel caso in cui il flusso sia nullo, ossia che $\mathcal{D}_{R,\text{flow}} = 0$, in generale la dissipazione totale non è nulla perché rimane un termine dissipativo associato al rimodellamento, ossia $\mathcal{D}_{R,\text{rem}} \neq 0$. Viceversa, in assenza di rimodellamento, vi è comunque un effetto dissipativo dovuto al flusso del fluido [35].

Per ottenere la legge di flusso plastico, ossia l'equazione che descriva nel tempo l'evoluzione del rimodellamento, dobbiamo concentrarci sullo studio della dissipazione associata al rimodellamento della struttura interna, ossia sulla Equazione (3.5.2). Ricordando la Osservazione 17 sulle ipotesi della plasticità secondo Gurtin e Anand [4], possiamo scrivere il termine dissipativo come [35]

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{R,\text{rem}} &= J_{\mathbf{K}} \mathbf{M}_\nu : \mathbf{L}_{\mathbf{K}} \\ &= J_{\mathbf{K}} (\mathbf{M}_\nu)_A^B (\mathbf{L}_{\mathbf{K}})^A_B \\ &= J_{\mathbf{K}} (\mathbf{M}_\nu)_A^B (\mathbf{G}^{-1})^{AC} (\mathbf{G})_{CD} (\mathbf{L}_{\mathbf{K}})^D_B \\ &= J_{\mathbf{K}} (\mathbf{G}^{-1})^{CA} (\mathbf{M}_\nu)_A^B (\mathbf{G})_{CD} (\mathbf{L}_{\mathbf{K}})^D_B \\ &= J_{\mathbf{K}} \mathbf{M}_\nu^\sharp : \mathbf{L}_{\mathbf{K}}^\flat \end{aligned}$$

$$= J_{\mathbf{K}} \mathbf{M}_{\nu}^{\sharp} : \mathbf{D}_{\mathbf{K}} \geq 0. \quad (3.5.4)$$

Dalla relazione (2.4.24), possiamo esprimere il tensore $\mathbf{D}_{\mathbf{K}}$ in funzione di $\dot{\mathbf{B}}_{\mathbf{K}}$ come

$$\mathbf{D}_{\mathbf{K}} = -\frac{1}{2} \mathbf{G} \mathbf{K} \dot{\mathbf{B}}_{\mathbf{K}} \mathbf{K}^{\mathbf{T}} \mathbf{G}, \quad (3.5.5)$$

e, grazie a tale risultato, possiamo riscrivere la (3.5.4) nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\text{R,rem}} &= J_{\mathbf{K}} \mathbf{M}_{\nu}^{\sharp} : \left(-\frac{1}{2} \mathbf{G} \mathbf{K} \dot{\mathbf{B}}_{\mathbf{K}} \mathbf{K}^{\mathbf{T}} \mathbf{G}\right) \\ &= -\frac{1}{2} J_{\mathbf{K}} (\mathbf{K}^{\mathbf{T}} \mathbf{G} \mathbf{M}_{\nu}^{\sharp} \mathbf{G} \mathbf{K}) : \dot{\mathbf{B}}_{\mathbf{K}} \\ &= -\frac{1}{2} J_{\mathbf{K}} (\mathbf{K}^{\mathbf{T}} \mathbf{M}_{\nu}^{\flat} \mathbf{K}) : \dot{\mathbf{B}}_{\mathbf{K}}. \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

Dalla definizione riportata nella Equazione (3.4.13) possiamo scrivere la Equazione (3.5.6) rispetto al tensore di Mandel materiale, infatti valgono le relazioni

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\nu} &= J_{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{K}^{-\mathbf{T}} \mathbf{M} \mathbf{K}^{\mathbf{T}} \\ \implies \mathbf{M}_{\nu}^{\flat} &= J_{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{K}^{-\mathbf{T}} \mathbf{M} \mathbf{K}^{\mathbf{T}} \mathbf{G} \\ \implies J_{\mathbf{K}} \mathbf{K}^{\mathbf{T}} \mathbf{M}_{\nu}^{\flat} &= \mathbf{M} \mathbf{K}^{\mathbf{T}} \mathbf{G}, \end{aligned} \quad (3.5.7)$$

dalle quali segue che [35, 11]

$$\mathcal{D}_{\text{R,rem}} = -\frac{1}{2} (\mathbf{M} \mathbf{K}^{\mathbf{T}} \mathbf{G} \mathbf{K}) : \dot{\mathbf{B}}_{\mathbf{K}} = -\frac{1}{2} (\mathbf{M}_s \mathbf{B}_{\mathbf{K}}^{-1}) : \dot{\mathbf{B}}_{\mathbf{K}}. \quad (3.5.8)$$

Grazie alla relazione (3.5.8), abbiamo mostrato che, sotto le ipotesi di Gurtin&Anand [4], ai fini dello studio della dissipazione, è equivalente usare come ente cinematico di rimodellamento la derivata in tempo del tensore $\mathbf{B}_{\mathbf{K}}$ al posto di $\mathbf{D}_{\mathbf{K}}$.

Osserviamo, in particolare, che la quantità $\mathbf{B}_{\mathbf{K}}^{-1} : \dot{\mathbf{B}}_{\mathbf{K}}$ è nulla in quanto [35]

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{\mathbf{K}}^{-1} : \dot{\mathbf{B}}_{\mathbf{K}} &= -2(\mathbf{K}^{\mathbf{T}} \mathbf{G} \mathbf{K}) : (\mathbf{K}^{-1} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}_{\mathbf{K}} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{K}^{-\mathbf{T}}) \\ &= -2\mathbf{I} : \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}_{\mathbf{K}} \\ &= -2 \text{Tr} \mathbf{L}_{\mathbf{K}} = 0. \end{aligned} \quad (3.5.9)$$

Pertanto, possiamo provare che la dissipazione associata al rimodellamento sia solamente dipendente dalla *parte deviatorica* del tensore \mathbf{M} . Infatti, decomponendo \mathbf{M} come

$$\mathbf{M} = \text{dev} \mathbf{M} + \frac{1}{3} (\text{Tr} \mathbf{M}) \mathbf{I}^{\mathbf{T}}, \quad (3.5.10)$$

e sostituendo la decomposizione in (3.5.10) nella Equazione (3.5.8), si ottiene [35, 11, 12]

$$\mathcal{D}_{\text{R,rem}} = -\frac{1}{2} [(\text{dev} \mathbf{M}) \mathbf{B}_{\mathbf{K}}^{-1}] : \dot{\mathbf{B}}_{\mathbf{K}}, \quad (3.5.11)$$

dove il secondo termine si annulla per via della Equazione (3.5.9).

Per il modello standard di plasticità supponiamo che il sistema sia interessato dal fenomeno del rimodellamento quando lo sforzo supera una certa soglia, detto di *sforzo di snervamento*. Pertanto, è importante cercare una *legge di rimodellamento* generalizzata che ammetta un meccanismo di *attivazione* basato sul raggiungimento di un valore critico da parte di una misura equivalente di sforzo, come, ad esempio, lo *sforzo di Von Mises* [9]. Seguendo quanto fatto in [35], indicando con $\sigma_y > 0$ la tensione di snervamento del materiale in esame, definiamo la *superficie di snervamento* [9] come

$$f(\boldsymbol{\sigma}_{\text{sc}}) := \phi(\boldsymbol{\sigma}_{\text{sc}}) - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_y = 0, \quad \phi(\boldsymbol{\sigma}_{\text{sc}}) := \|\text{dev} \boldsymbol{\sigma}_{\text{sc}}\|. \quad (3.5.12)$$

La funzione $\phi(\boldsymbol{\sigma}_{\text{sc}})$ è detta la *funzione di snervamento* [24, 9].

Richiediamo, inoltre, che il *flusso plastico* sia ortogonale alla superficie di snervamento, e ciò possiamo esprimerlo mediante la relazione di *normalità* [24, 25]

$$\mathcal{L}_{\mathbf{v}_s} \mathbf{b}_e = -2\gamma_{\mathbf{K}} \mathbf{b}_e \text{dev} \boldsymbol{\sigma}_{\text{sc}}, \quad (3.5.13)$$

dove $\mathcal{L}_{\mathbf{v}_s} \mathbf{b}_e$ è la *derivata di Lie* [5] del tensore \mathbf{b}_e , definito nella Equazione (2.4.18), eseguita rispetto alla velocità della fase solida, ossia \mathbf{v}_s . Inoltre, assumendo che il rimodellamento non possa aver luogo fintanto che si abbia $f(\boldsymbol{\sigma}_{\text{sc}}) \leq 0$, definiamo il parametro $\gamma_{\mathbf{K}} \geq 0$ mediante il seguente meccanismo di attivazione [18, 35], alla Perzyna [9]:

$$\gamma_{\mathbf{K}} := \lambda_{\mathbf{K}} \frac{[\|\text{dev} \boldsymbol{\sigma}_{\text{sc}}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_y]_+}{\|\text{dev} \boldsymbol{\sigma}_{\text{sc}}\|}, \quad (3.5.14)$$

dove $[\cdot]_+ : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ indica la funzione *parte positiva*, ossia

$$[x]_+ = \begin{cases} x, & \text{se } x > 0, \\ 0, & \text{se } x \leq 0. \end{cases} \quad (3.5.15)$$

In particolare, il parametro $\lambda_{\mathbf{K}}$ è preso come proporzionale alla frazione di volume della fase solida φ_s mediante l'introduzione di uno scalare costante $\lambda_0 > 0$, ossia [18, 35]

$$\lambda_{\mathbf{K}} = \lambda_0 \varphi_s = \lambda_0 \frac{[\Phi_s \circ (\Xi, \mathcal{J})]}{[J \circ (\Xi, \mathcal{J})]}. \quad (3.5.16)$$

Pertanto, sostituendo la Equazione (3.5.16) nella (3.5.14), quest'ultima diviene

$$\gamma_{\mathbf{K}} := \lambda_0 \frac{[\Phi_s \circ (\Xi, \mathcal{J})]}{[J \circ (\Xi, \mathcal{J})]} \frac{[\|\text{dev} \boldsymbol{\sigma}_{\text{sc}}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_y]_+}{\|\text{dev} \boldsymbol{\sigma}_{\text{sc}}\|}. \quad (3.5.17)$$

Nel seguito, ci proponiamo di riscrivere la *normality rule*, espressa nella Equazione (3.5.13), relativamente al piazzamento di riferimento \mathcal{B}_R . Osserviamo, preliminarmente, che il tensore \mathbf{P}_{sc} , espresso costitutivamente nella Equazione (3.4.9), può essere riscritto in funzione del tensore di Mandel \mathbf{M} , definito in (3.4.13), come

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\text{sc}} &= J_{\mathbf{K}} \mathbf{F}_e^{-\text{T}} \mathbf{M}_\nu \mathbf{K}^{-\text{T}} \\ &= J_{\mathbf{K}} \mathbf{F}_e^{-\text{T}} (J_{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{K}^{-\text{T}} \mathbf{M} \mathbf{K}^{\text{T}}) \mathbf{K}^{-\text{T}} \\ &= \mathbf{F}^{-\text{T}} \mathbf{M}. \end{aligned} \quad (3.5.18)$$

Calcolando la trasformazione di Piola all'indietro del tensore \mathbf{P}_{sc} , possiamo esprimere la parte costitutiva del tensore degli sforzi di Cauchy associato alla fase solida, ossia $\boldsymbol{\sigma}_s$, in funzione di \mathbf{M} :

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{sc}} \circ (\chi, \mathbf{t}) = J^{-1} \mathbf{P}_{\text{sc}} [\mathbf{F}^{\text{T}} \circ (\chi, \mathbf{t})] = J^{-1} \mathbf{F}^{-\text{T}} \mathbf{M} [\mathbf{F}^{\text{T}} \circ (\chi, \mathbf{t})]. \quad (3.5.19)$$

Come conseguenza della struttura della Equazione (3.5.19), possiamo specializzare tale equazione per le parti deviatoriche dei tensori $\boldsymbol{\sigma}_{\text{sc}}$ e \mathbf{M} , ossia

$$\begin{aligned} (\text{dev} \boldsymbol{\sigma}_{\text{sc}}) \circ (\chi, \mathbf{t}) &= [\boldsymbol{\sigma}_{\text{sc}} - \frac{1}{3} (\text{tr} \boldsymbol{\sigma}_{\text{sc}}) \mathbf{i}^{\text{T}}] \circ (\chi, \mathbf{t}) \\ &= J^{-1} \mathbf{F}^{-\text{T}} \mathbf{M} [\mathbf{F}^{\text{T}} \circ (\chi, \mathbf{t})] - \frac{1}{3} J^{-1} \text{tr} \left(\mathbf{F}^{-\text{T}} \mathbf{M} [\mathbf{F}^{\text{T}} \circ (\chi, \mathbf{t})] \right) [\mathbf{i}^{\text{T}} \circ (\chi, \mathbf{t})] \\ &= J^{-1} \mathbf{F}^{-\text{T}} \left(\mathbf{M} - \frac{1}{3} (\text{Tr} \mathbf{M}) \mathbf{I}^{\text{T}} \right) [\mathbf{F}^{\text{T}} \circ (\chi, \mathbf{t})] \end{aligned}$$

$$= J^{-1} \mathbf{F}^{-\text{T}}(\text{dev} \mathbf{M})[\mathbf{F}^{\text{T}} \circ (\chi, \mathfrak{t})]. \quad (3.5.20)$$

Osserviamo che il tensore \mathbf{b}_e , se opportunamente composto per la coppia di mappe (χ, \mathfrak{t}) , può essere riscritto in funzione di \mathbf{B}_K , definito nella Equazione (2.4.20), nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_e \circ (\chi, \mathfrak{t}) &= \mathbf{F}_e \mathbf{G}^{-1}[\mathbf{F}_e^{\text{T}} \circ (\chi, \mathfrak{t})] \\ &= \mathbf{F}[\mathbf{F}^{-1} \circ (\chi, \mathfrak{t})] \mathbf{F}_e \mathbf{G}^{-1}[\mathbf{F}_e^{\text{T}} \circ (\chi, \mathfrak{t})] \mathbf{F}^{-\text{T}}[\mathbf{F}^{\text{T}} \circ (\chi, \mathfrak{t})] \\ &= \mathbf{F} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{K}^{-\text{T}}[\mathbf{F}^{\text{T}} \circ (\chi, \mathfrak{t})] \\ &= \mathbf{F} \mathbf{B}_K[\mathbf{F}^{\text{T}} \circ (\chi, \mathfrak{t})]. \end{aligned} \quad (3.5.21)$$

Dalla Equazione (3.5.21), possiamo calcolare operativamente la derivata di Lie di \mathbf{b}_e [24, 25], presente nella Equazione (3.5.13), come funzione dei punti di \mathcal{B}_R e del tempo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{v}_s} \mathbf{b}_e \circ (\chi, \mathfrak{t}) &= \mathbf{F} \overline{[\mathbf{F}^{-1} \circ (\chi, \mathfrak{t})] \dot{[\mathbf{b}_e \circ (\chi, \mathfrak{t})]} \mathbf{F}^{-\text{T}}[\mathbf{F}^{\text{T}} \circ (\chi, \mathfrak{t})]} \\ &= \mathbf{F} \overline{[\mathbf{F}^{-1} \circ (\chi, \mathfrak{t})] \mathbf{F} \mathbf{B}_K \dot{[\mathbf{F}^{\text{T}} \circ (\chi, \mathfrak{t})]} \mathbf{F}^{-\text{T}}[\mathbf{F}^{\text{T}} \circ (\chi, \mathfrak{t})]} \\ &= \mathbf{F} \dot{\mathbf{B}}_K [\mathbf{F}^{\text{T}} \circ (\chi, \mathfrak{t})]. \end{aligned} \quad (3.5.22)$$

Pertanto, richiamando le Equazioni (3.5.20), (3.5.21) e (3.5.22) e componendo la Equazione (3.5.13) per le mappe (χ, \mathfrak{t}) , possiamo scrivere la forma materiale della *legge di flusso* nel caso di plasticità standard, come

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \dot{\mathbf{B}}_K [\mathbf{F}^{\text{T}} \circ (\chi, \mathfrak{t})] &= \mathcal{L}_{\mathbf{v}_s} \mathbf{b}_e \circ (\chi, \mathfrak{t}) \\ &= -2 \gamma_K J^{-1} [\mathbf{b}_e \circ (\chi, \mathfrak{t})] \mathbf{F}^{-\text{T}}(\text{dev} \mathbf{M})[\mathbf{F}^{\text{T}} \circ (\chi, \mathfrak{t})] \\ &= -2 \gamma_K J^{-1} \mathbf{F} \mathbf{B}_K [\mathbf{F}^{\text{T}} \circ (\chi, \mathfrak{t})] \mathbf{F}^{-\text{T}}(\text{dev} \mathbf{M})[\mathbf{F}^{\text{T}} \circ (\chi, \mathfrak{t})], \end{aligned} \quad (3.5.23)$$

dove, per semplicità, si è ridefinito il parametro γ_K come la composizione $\gamma_K \circ (\chi, \mathfrak{t})$.

Infine, manipolando algebricamente la Equazione (3.5.23), la legge di flusso nel modello standard assume la forma seguente [18, 35]:

$$\dot{\mathbf{B}}_K = -2 \frac{\gamma_K}{J} \mathbf{B}_K \text{dev} \mathbf{M}. \quad (3.5.24)$$

In vista dello studio del modello di plasticità secondo la “teoria gradiente” [4], proposta da Gurtin&Anand [4], e riadattata e generalizzata al caso bifasico, rispettivamente, nei Capitoli 4 e 5, riscriviamo la Equazione (3.5.24) in funzione del tasso \mathbf{D}_K . A tal proposito, ricordando la relazione che lega i tensori $\dot{\mathbf{B}}_K$ e \mathbf{D}_K espressa nella Equazione (2.4.24), possiamo riscrivere la (3.5.24) come

$$\frac{1}{2} \dot{\mathbf{B}}_K = -\frac{\gamma_K}{J} \mathbf{B}_K \text{dev} \mathbf{M} = -\mathbf{K}^{-1} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}_K \mathbf{G}^{-1} \mathbf{K}^{-\text{T}}. \quad (3.5.25)$$

Esplicitando la definizione di \mathbf{B}_K , riportata nella Equazione (2.4.20), possiamo riscrivere la Equazione (3.5.25) come

$$\frac{\gamma_K}{J} (\mathbf{K}^{-1} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{K}^{-\text{T}}) \text{dev} \mathbf{M} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}_K \mathbf{G}^{-1} \mathbf{K}^{-\text{T}}, \quad (3.5.26)$$

da cui, manipolando algebricamente l’espressione ottenuta, segue che

$$\mathbf{D}_K = \frac{\gamma_K}{J} \mathbf{K}^{-\text{T}} (\text{dev} \mathbf{M}) \mathbf{K}^{\text{T}} \mathbf{G}. \quad (3.5.27)$$

Il secondo membro della Equazione (3.5.27) può essere riscritto in termini del tensore di Mandel associato allo stato naturale \mathbf{M}_ν , la cui relazione con \mathbf{M} è espressa in (3.4.13), osservando che

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}^{-\text{T}}(\text{dev}\mathbf{M})\mathbf{K}^{\text{T}} &= \mathbf{K}^{-\text{T}}[\mathbf{M} - \frac{1}{3}(\text{Tr}\mathbf{M})\mathbf{I}^{\text{T}}]\mathbf{K}^{\text{T}} \\
 &= \mathbf{K}^{-\text{T}}\mathbf{M}\mathbf{K}^{\text{T}} - \frac{1}{3}[\text{Tr}(\mathbf{K}^{-\text{T}}\mathbf{M}\mathbf{K}^{\text{T}})]\mathbf{I}^{\text{T}} \\
 &= \mathbf{M}_\nu - \frac{1}{3}(\text{Tr}\mathbf{M}_\nu)\mathbf{I}^{\text{T}} \\
 &= \text{dev}\mathbf{M}_\nu.
 \end{aligned} \tag{3.5.28}$$

Infine, possiamo applicare il tensore $\text{dev}\mathbf{M}_\nu$ a sinistra del tensore metrico \mathbf{G} , ottenendo la riscrittura

$$\begin{aligned}
 (\text{dev}\mathbf{M}_\nu)\mathbf{G} &= \mathbf{M}_\nu\mathbf{G} - \frac{1}{3}(\text{Tr}\mathbf{M}_\nu)\mathbf{G} \\
 &= \mathbf{M}_\nu^{\flat} - \frac{1}{3}[\text{Tr}(\mathbf{M}_\nu^{\flat}\mathbf{G}^{-1})]\mathbf{G} \\
 &= \text{dev}\mathbf{M}_\nu^{\flat}.
 \end{aligned} \tag{3.5.29}$$

Pertanto, in conclusione, la legge di flusso nel caso del modello di plasticità standard può essere espressa in funzione del tasso $\mathbf{D}_{\mathbf{K}}$ come

$$\mathbf{D}_{\mathbf{K}} = \frac{\gamma\mathbf{K}}{J}\text{dev}\mathbf{M}_\nu^{\flat}. \tag{3.5.30}$$

In conclusione, ricordiamo che, siccome avevamo supposto che la fase solida fosse un materiale solido iperelastico con una risposta meccanica di tipo Neo-Hookeana, allora avevamo espresso costitutivamente il tensore di Mandel nello stato naturale, ossia \mathbf{M}_ν , come nella Equazione (3.4.23). Possiamo, di conseguenza, esprimere costitutivamente anche il tensore $\text{dev}\mathbf{M}_\nu^{\flat}$ come una funzione dei tensori \mathbf{F} e \mathbf{K} come segue:

$$\text{dev}\mathbf{M}_\nu^{\flat} = \mu_e \text{dev}(\mathbf{C}_e) = \mu_e \text{dev}(\mathbf{K}^{-\text{T}}\mathbf{C}\mathbf{K}^{-1}). \tag{3.5.31}$$

Capitolo 4

Teoria gradiente per un continuo monofasico

In questo Capitolo, si presenta sinteticamente la *teoria gradiente* sviluppata da Gurtin e Anand [4] per un continuo monofasico, riadattata, nel contesto della Tesi, ai lavori svolti in [37, 33, 8, 31].

4.1 Principio delle Potenze Virtuali

La teoria gradiente, presentata da Gurtin&Anand [4], viene sviluppata per un continuo monofasico elasto-plastico sotto due ipotesi fondamentali, spesso usate per studiare la plasticità standard per materiali duttili non-biologici come, per esempio, gli acciai:

1. Nel materiale lo *spin plastico* è nullo, ossia si impone la condizione $\mathbf{W}_{\mathbf{K}} = \mathbf{0}$, ricordando la definizione nell'Equazione (2.4.11b). Da questa ipotesi, segue che $\mathbf{L}_{\mathbf{K}}^b = \mathbf{D}_{\mathbf{K}}$ è un tensore simmetrico.
2. Le distorsioni plastiche sono isocore. Pertanto, si assume $J_{\mathbf{K}} = 1$ ossia $\mathbf{K}^{-T} : \dot{\mathbf{K}} = \text{Tr} \mathbf{L}_{\mathbf{K}} = 0$ da cui segue $\text{Tr}(\mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}_{\mathbf{K}}) = 0$.

Come conseguenza delle due ipotesi avanzate, nella teoria della plasticità sviluppata in [4] il descrittore cinematico più conveniente è il tensore $\mathbf{D}_{\mathbf{K}}$ il quale, oltre ad essere simmetrico per costruzione, è anche deviatorico.

A differenza di quanto fatto in [4], in cui, nella formulazione del Principio dei Lavori Virtuali, si introducono le variazioni virtuali di \mathbf{F}_e e di $\mathbf{D}_{\mathbf{K}}$, dette $\delta \mathbf{F}_e$ e $\delta \mathbf{D}_{\mathbf{K}}$, in questa Tesi utilizziamo $\delta \mathbf{F}$ e $\delta \mathbf{K}$. Per mostrare come passare da una formulazione all'altra, definiamo le forze generalizzate duali a $\delta \mathbf{F}_e$ e $\delta \mathbf{D}_{\mathbf{K}}$ e a $\text{Grad} \delta \mathbf{D}_{\mathbf{K}}^1$, essendo quest'ultimo il descrittore cinematico che occorre introdurre per passare da una teoria standard ad una "teoria gradiente" [4] per la plasticità.

Osservazione 33 (Variazioni virtuali dei descrittori \mathbf{F} , \mathbf{F}_e e \mathbf{K}).

Risulta fondamentale osservare quali siano le dimensioni fisiche delle variazioni virtuali per i tensori considerati, partendo in particolare da $\delta \chi$. Data la mappa di moto χ , supponiamo

¹Il paradigma della dualità che si è utilizzato per introdurre la struttura di questo Capitolo, e dei successivi, è basata sulle lezioni del corso di Dottorato "Teorie "strain-gradient" per problemi biomeccanici: modelli, metodi ed implementazione" tenuto dal Prof. Grillo A. e dal Dr. Di Stefano S. e sul lavoro [33].

di trasformarla come

$$\chi \mapsto \tilde{\chi}(\cdot, \cdot, \varepsilon) = \chi + \varepsilon \mathbf{U}, \quad (4.1.1)$$

dove \mathbf{U} è un campo vettoriale con le dimensioni fisiche di una velocità, ossia $[\mathbf{U}] = L/T$, e il coefficiente ε ha dimensione fisica di un tempo, ossia $[\varepsilon] = 1/T$. Allora, seguendo l'approccio in [53], si definisce la variazione virtuale di χ , indicata con $\delta\chi$, come la *derivata di Gâteaux* di χ lungo la direzione individuata da \mathbf{U} , ossia

$$\delta\chi := \frac{d\tilde{\chi}}{d\varepsilon}(\cdot, \cdot, 0) = \mathbf{U} \quad \Longrightarrow \quad [\delta\chi] = L/T. \quad (4.1.2)$$

Come conseguenza della Equazione (4.1.1), e ricordando l'Osservazione 14, possiamo calcolare anche il gradiente di deformazione trasformato come

$$\mathbf{F} \mapsto \tilde{\mathbf{F}}(\cdot, \cdot, \varepsilon) = \mathbf{F} + \varepsilon \text{Grad}\mathbf{U}, \quad (4.1.3)$$

da cui segue che la variazione virtuale $\delta\mathbf{F}$ è definita come

$$\delta\mathbf{F} := \frac{d\tilde{\mathbf{F}}}{d\varepsilon}(\cdot, \cdot, 0) = \text{Grad}\mathbf{U} \quad \Longrightarrow \quad [\delta\mathbf{F}] = [\text{Grad}\mathbf{U}] = 1/T. \quad (4.1.4)$$

In analogia a quanto fatto nella Equazione (4.1.3), in cui \mathbf{F} viene trasformato mediante l'introduzione di un tensore $\text{Grad}\mathbf{U}$, le cui dimensioni fisiche sono $[\text{Grad}\mathbf{U}] = 1/T$, trasformiamo il tensore \mathbf{K} come

$$\mathbf{K} \mapsto \tilde{\mathbf{K}}(\cdot, \cdot, \varepsilon) = \mathbf{K} + \varepsilon \mathbf{V}, \quad (4.1.5)$$

dove il parametro ε ha dimensione fisica di un tempo e \mathbf{V} ha dimensione fisica $[\mathbf{V}] = 1/T$. Di conseguenza, la variazione virtuale $\delta\mathbf{K}$ è

$$\delta\mathbf{K} := \frac{d\tilde{\mathbf{K}}}{d\varepsilon}(\cdot, \cdot, 0) = \mathbf{V} \quad \Longrightarrow \quad [\delta\mathbf{K}] = [\mathbf{V}] = 1/T. \quad (4.1.6)$$

Pertanto, definiamo la variazione virtuale di $\mathbf{D}_{\mathbf{K}}$ come

$$\delta\mathbf{D}_{\mathbf{K}} := \mathbf{G}(\delta\mathbf{K})\mathbf{K}^{-1}, \quad (4.1.7)$$

la quale coincide con $\delta\mathbf{L}_{\mathbf{K}}^b$ per le ipotesi precedentemente avanzate sull'assenza di spin plastico [4]. In conclusione, le dimensioni fisiche di $\delta\mathbf{D}_{\mathbf{K}}$ sono $[\delta\mathbf{D}_{\mathbf{K}}] = [\delta\mathbf{K}] = 1/T$.

Osservazione 34 (Bordo di Neumann e di Dirichlet per \mathbf{K}).

Nell'ambito della "teoria gradiente" per la plasticità, utilizzando un linguaggio "informatico", si sono *allocate* due nuove variabili, ossia due nuovi descrittori cinematici, che, nella teoria di Gurtin e Anand [4], sono i tensori $\mathbf{D}_{\mathbf{K}}$ e $\text{Grad}\mathbf{D}_{\mathbf{K}}$. Ricordando quanto visto nella Osservazione 24, per i nuovi descrittori cinematici, per dualità, si possono ottenere delle *equazioni dinamiche* sia definite nei punti interni di $\mathcal{B}_{\mathbf{R}}$ che su una porzione del suo bordo. Pertanto, analogamente a quanto introdotto nella Equazione (3.2.2), definiamo una decomposizione del bordo $\partial\mathcal{B}_{\mathbf{R}}$ in una parte di Dirichlet ed una di Neumann per la variabile $\mathbf{D}_{\mathbf{K}}$, ossia

$$\partial\mathcal{B}_{\mathbf{R}} = \partial_{\mathbf{D}}^{\mathbf{K}}\mathcal{B}_{\mathbf{R}} \sqcup \partial_{\mathbf{N}}^{\mathbf{K}}\mathcal{B}_{\mathbf{R}}. \quad (4.1.8)$$

In particolare, equivalentemente a quanto detto nella Osservazione 24, sul bordo di Neumann $\partial_{\mathbf{N}}^{\mathbf{K}}\mathcal{B}_{\mathbf{R}}$ viene assegnata la *forza per unità di superficie* duale a $\mathbf{D}_{\mathbf{K}}$, mentre, sul bordo di Dirichlet $\partial_{\mathbf{D}}^{\mathbf{K}}\mathcal{B}_{\mathbf{R}}$, viene assegnato il valore della variabile $\mathbf{D}_{\mathbf{K}}$. Come conseguenza, sulla porzione di bordo $\partial_{\mathbf{D}}^{\mathbf{K}}\mathcal{B}_{\mathbf{R}}$ le variazioni virtuali $\delta\mathbf{D}_{\mathbf{K}}$ sono nulle.

Seguendo l'approccio presentato in [4] per le forze generalizzate duali interne, introduciamo:

- la forza generalizzata duale a $\delta \mathbf{F}_e$, $\mathbf{P}_e \div \delta \mathbf{F}_e$, che coincide con il primo tensore di Piola-Kirchhoff “elastico”, definito come

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_e(\cdot, t) &: \mathcal{B}_R \rightarrow T\mathcal{S} \otimes T^*\mathcal{B}_R, \\ \mathbf{P}_e(X, t) &= [\mathbf{P}_e(X, t)]^a A e_a(\chi(X, t), t) \otimes \mathbf{E}^A(X, t); \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

- la forza generalizzata duale a $\delta \mathbf{K}_K$, $\mathbf{T}_K \div \delta \mathbf{D}_K$, definita come

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_K(\cdot, t) &: \mathcal{B}_R \rightarrow T\mathcal{B}_R \otimes T\mathcal{B}_R, \\ \mathbf{T}_K(X, t) &= [\mathbf{T}_K(X, t)]^{AB} \mathbf{E}_A(X, t) \otimes \mathbf{E}_B(X, t); \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

- la forza generalizzata duale a $\text{Grad} \delta \mathbf{D}_K$, $\mathbb{K} \div \text{Grad} \delta \mathbf{D}_K$, definita come

$$\begin{aligned} \mathbb{K}(\cdot, t) &: \mathcal{B}_R \rightarrow T\mathcal{B}_R \otimes T\mathcal{B}_R \otimes T\mathcal{B}_R, \\ \mathbb{K}(X, t) &= [\mathbb{K}(X, t)]^{ABC} \mathbf{E}_A(X, t) \otimes \mathbf{E}_B(X, t) \otimes \mathbf{E}_C(X, t). \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

Definizione 4.1.1 (Potenza virtuale interna, secondo Gurtin&Anand [4]).

Per il continuo monofasico elasto-plastico in esame, si definisce la *potenza virtuale interna*

$$\mathcal{W}_v^{(\text{int})}(\delta \mathbf{F}_e, \delta \mathbf{D}_K) := \int_{\mathcal{B}_R} J_K \{ \mathbf{P}_e : \delta \mathbf{F}_e + \mathbf{T}_K : \delta \mathbf{D}_K + \mathbb{K} : \text{Grad} \delta \mathbf{D}_K \} dV. \quad (4.1.12)$$

Dalla decomposizione moltiplicativa $\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \mathbf{K}$ segue che una variazione virtuale per il gradiente di deformazione elastico \mathbf{F}_e è legata alle variazioni virtuali $\delta \mathbf{F}$ e $\delta \mathbf{K}$ dalla relazione

$$\delta \mathbf{F}_e = (\delta \mathbf{F}) \mathbf{K}^{-1} - \mathbf{F}_e (\delta \mathbf{K}) \mathbf{K}^{-1}, \quad (4.1.13)$$

con $\delta \mathbf{F} = \text{Grad} \delta \chi$ ed essendo $\delta \chi$ la variazione virtuale associata al moto χ . Possiamo, dunque, riscrivere la definizione di potenza virtuale interna in (4.1.12) come

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{B}_R} J_K \left\{ \mathbf{P}_e : [(\delta \mathbf{F}) \mathbf{K}^{-1} - \mathbf{F}_e (\delta \mathbf{K}) \mathbf{K}^{-1}] + \mathbf{T}_K : \delta \mathbf{D}_K + \mathbb{K} : \text{Grad} \delta \mathbf{D}_K \right\} dV \\ &= \int_{\mathcal{B}_R} \left\{ \mathbf{P} : \delta \mathbf{F} - J_K \mathbf{M}_\nu : (\delta \mathbf{K}) \mathbf{K}^{-1} + J_K \mathbf{T}_K : \delta \mathbf{D}_K + J_K \mathbb{K} : \text{Grad} \delta \mathbf{D}_K \right\} dV, \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

dove $\mathbf{P} := J_K \mathbf{P}_e \mathbf{K}^{-T}$ è il primo tensore di Piola-Kirchhoff, $\mathbf{M}_\nu := [\mathbf{F}_e^T \circ (\chi, t)] \mathbf{P}_e$ è il tensore di Mandel associato allo stato naturale. Inoltre, Gurtin e Anand [4] definiscono le variazioni virtuali dei tassi di distorsione plastica come $\delta \mathbf{L}_K := (\delta \mathbf{K}) \mathbf{K}^{-1}$, cosicché si ha

$$\begin{aligned} J_K \mathbf{M}_\nu : \delta \mathbf{L}_K &= J_K (\mathbf{M}_\nu)_A^B (\delta \mathbf{L}_K)^A_B \\ &= J_K (\mathbf{M}_\nu)_A^B (\mathbf{G}^{-1})^{AC} (\delta \mathbf{L}_K^b)_{CB} \\ &= J_K (\mathbf{G}^{-1})^{CA} (\mathbf{M}_\nu)_A^B (\delta \mathbf{L}_K^b)_{CB} \\ &= J_K (\mathbf{M}_\nu^\sharp)^{CB} (\delta \mathbf{L}_K^b)_{CB} \\ &= J_K \mathbf{M}_\nu^\sharp : \delta \mathbf{L}_K^b \\ &= J_K \mathbf{M}_\nu^\sharp : \delta \mathbf{D}_K \\ &= J_K \text{Sym}_0(\mathbf{M}_\nu^\sharp) : \delta \mathbf{D}_K, \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

dove gli ultimi due passaggi sono motivati dall'ipotesi di assenza di spin plastico e dal fatto che $\delta \mathbf{D}_K$ sia un tensore simmetrico.

Teorema 4.1.1 (Simmetria del tensore \mathbf{M}_ν^\sharp [5]).

Se il materiale di cui è costituito il corpo è isotropo allora il tensore di Mandel è simmetrico, ossia $\mathbf{M}_\nu^\sharp = (\mathbf{M}_\nu^\sharp)^\top$.

Dimostrazione. Omessa. □

Sostituendo il termine (4.1.15) nella espressione della potenza virtuale interna, siamo in grado di esprimere tale potenza virtuale in funzione di $\delta\chi$ e $\delta\mathbf{K}$ come

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{W}}_\nu^{(\text{int})}(\delta\chi, \delta\mathbf{K}) &= \int_{\mathcal{B}_R} \left\{ \mathbf{P} : \delta\mathbf{F} + J_{\mathbf{K}}(\mathbf{T}_{\mathbf{K}} - \mathbf{M}_\nu^\sharp) : \delta\mathbf{D}_{\mathbf{K}} + J_{\mathbf{K}}\mathbb{K} : \text{Grad } \delta\mathbf{D}_{\mathbf{K}} \right\} dV \\ &= \int_{\mathcal{B}_R} \left\{ \mathbf{P} : \delta\mathbf{F} + J_{\mathbf{K}}\mathbf{T}_{\mathbf{K},n} : \delta\mathbf{D}_{\mathbf{K}} + J_{\mathbf{K}}\mathbb{K} : \text{Grad } \delta\mathbf{D}_{\mathbf{K}} \right\} dV, \quad (4.1.16)\end{aligned}$$

dove abbiamo definito il termine di forza netta generalizzata $\mathbf{T}_{\mathbf{K},n} := \mathbf{T}_{\mathbf{K}} - \mathbf{M}_\nu^\sharp$.

Per poter introdurre la potenza virtuale esterna, occorre introdurre le forze esterne, per unità di volume, agenti sul corpo e le forze, per unità di superficie, agenti sul bordo. Pertanto, trascurando le inerzie, introduciamo:

- il campo delle *trazioni*, duale a $\delta\chi$, agente sulla porzione di bordo $\partial_N^X \mathcal{B}_R$, ossia

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau}(\cdot, t) &: \partial_N^X \mathcal{B}_R \rightarrow T^* \mathcal{S}, \\ \boldsymbol{\tau}(X, t) &= [\boldsymbol{\tau}(X, t)]_a \mathbf{e}^a(\chi(X, t), t); \quad (4.1.17)\end{aligned}$$

- il campo delle forze per unità di volume, duali a $\delta\chi$, agenti su \mathcal{B}_R , ossia

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(\cdot, t) &: \mathcal{B}_R \rightarrow T^* \mathcal{S}, \\ \mathbf{f}(X, t) &= [\mathbf{f}(X, t)]_a \mathbf{e}^a(\chi(X, t), t); \quad (4.1.18)\end{aligned}$$

- il campo delle forze duali $\delta\mathbf{D}_{\mathbf{K}}$, agente sulla porzione di bordo $\partial_N^K \mathcal{B}_R$, ossia

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(\cdot, t) &: \partial_N^K \mathcal{B}_R \rightarrow T \mathcal{B}_R \otimes T \mathcal{B}_R, \\ \mathbf{T}(X, t) &= [\mathbf{T}(X, t)]_{AB} \mathbf{E}^A(X, t) \otimes \mathbf{E}^B(X, t). \quad (4.1.19)\end{aligned}$$

Definizione 4.1.2 (Potenza virtuale esterna, secondo Gurtin&Anand [4]).

Per il continuo monofasico elasto-plastico in esame, si definisce la *potenza virtuale esterna*

$$\hat{\mathcal{W}}_\nu^{(\text{ext})}(\delta\chi, \delta\mathbf{K}) := \int_{\partial_N^X \mathcal{B}_R} \boldsymbol{\tau} \delta\chi \, dA + \int_{\mathcal{B}_R} \mathbf{f} \delta\chi \, dV + \int_{\partial_N^K \mathcal{B}_R} \mathbf{T} : \delta\mathbf{D}_{\mathbf{K}} \, dA. \quad (4.1.20)$$

Date le potenze virtuali definite in (4.1.16) e (4.1.20), invochiamo nuovamente il *Principio delle Potenze Virtuali* [4, 26], imponendo che

$$\hat{\mathcal{W}}_\nu^{(\text{int})}(\delta\chi, \delta\mathbf{K}) = \hat{\mathcal{W}}_\nu^{(\text{ext})}(\delta\chi, \delta\mathbf{K}), \quad \forall (\delta\chi, \delta\mathbf{K}) \in \mathcal{H}, \quad (4.1.21)$$

dove \mathcal{H} è un opportuno insieme di variazioni virtuali compatibili con i vincoli imposti.

Prima di procedere con l'applicazione di tale Principio, concentriamoci sul manipolare il primo e il terzo integrando della Equazione (4.1.16). Il primo termine può essere sviluppato in componenti e, tramite l'applicazione del teorema di Gauss, si ha che

$$\int_{\mathcal{B}_R} \mathbf{P} : \text{Grad } \delta\chi \, dV = \int_{\mathcal{B}_R} (\mathbf{P})_a^A (\delta\chi)_{;A}^a \, dV$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\mathcal{B}_R} [(\mathbf{P}^T)^A{}_a(\delta\chi)^a]_{;A} dV - \int_{\mathcal{B}_R} (\mathbf{P})_a{}^A{}_{;A}(\delta\chi)^a dV \\
 &= \int_{\partial_N^X \mathcal{B}_R} (\mathbf{P})_a{}^A(\delta\chi)^a (\mathbf{N})_A dA - \int_{\mathcal{B}_R} (\text{Div} \mathbf{P})_a(\delta\chi)^a dV \\
 &= \int_{\partial_N^X \mathcal{B}_R} (\mathbf{P}\mathbf{N})\delta\chi dA - \int_{\mathcal{B}_R} (\text{Div} \mathbf{P})\delta\chi dV. \tag{4.1.22}
 \end{aligned}$$

Possiamo operare allo stesso modo anche sul terzo termine della Equazione (4.1.16), ottenendo che

$$\begin{aligned}
 &\int_{\mathcal{B}_R} J_{\mathbf{K}} \mathbb{K} : \text{Grad} \delta \mathbf{D}_{\mathbf{K}} dV \\
 &= \int_{\mathcal{B}_R} J_{\mathbf{K}} \mathbb{K}^{ABC} (\delta \mathbf{D}_{\mathbf{K}})_{AB;C} dV \\
 &= \int_{\mathcal{B}_R} [J_{\mathbf{K}} \mathbb{K}^{ABC} (\delta \mathbf{D}_{\mathbf{K}})_{AB}]_{;C} dV - \int_{\mathcal{B}_R} (J_{\mathbf{K}} \mathbb{K}^{ABC})_{;C} (\delta \mathbf{D}_{\mathbf{K}})_{AB} dV \\
 &= \int_{\partial_N^K \mathcal{B}_R} [J_{\mathbf{K}} \mathbb{K}^{ABC} N_C (\delta \mathbf{D}_{\mathbf{K}})_{AB} dA - \int_{\mathcal{B}_R} [\text{Div}(J_{\mathbf{K}} \mathbb{K})]^{AB} (\delta \mathbf{D}_{\mathbf{K}})_{AB} dV \\
 &= \int_{\partial_N^K \mathcal{B}_R} (J_{\mathbf{K}} \mathbb{K} \mathbf{N}) : \delta \mathbf{D}_{\mathbf{K}} dA - \int_{\mathcal{B}_R} \text{Div}(J_{\mathbf{K}} \mathbb{K}) : \delta \mathbf{D}_{\mathbf{K}} dV, \tag{4.1.23}
 \end{aligned}$$

dove, dopo il terzo simbolo di uguaglianza, si è ricordata la Osservazione 34, dove si evidenzia che sul bordo di Dirichlet $\partial_D^K \mathcal{B}_R$ si ha $\delta \mathbf{D}_{\mathbf{K}} = \mathbf{0}$.

Applichiamo ora la (4.1.21) sostituendo le riscritture ottenute in (4.1.22) e in (4.1.23):

$$\begin{aligned}
 &\int_{\partial_N^X \mathcal{B}_R} (\mathbf{P}\mathbf{N})\delta\chi dA - \int_{\mathcal{B}_R} (\text{Div} \mathbf{P})\delta\chi dV + \int_{\mathcal{B}_R} J_{\mathbf{K}} \mathbf{T}_{\mathbf{K},n} : \delta \mathbf{D}_{\mathbf{K}} dV \\
 &+ \int_{\partial_N^K \mathcal{B}_R} (J_{\mathbf{K}} \mathbb{K} \mathbf{N}) : \delta \mathbf{D}_{\mathbf{K}} dA - \int_{\mathcal{B}_R} \text{Div}(J_{\mathbf{K}} \mathbb{K}) : \delta \mathbf{D}_{\mathbf{K}} dV \\
 &= \int_{\partial_N^X \mathcal{B}_R} \boldsymbol{\tau} \delta\chi dA + \int_{\mathcal{B}_R} \mathbf{f} \delta\chi dV + \int_{\partial_N^K \mathcal{B}_R} \mathbf{T} : \delta \mathbf{D}_{\mathbf{K}} dA. \tag{4.1.24}
 \end{aligned}$$

Riordinando i termini in base alle velocità virtuali presenti negli integrandi, si ottiene

$$\begin{aligned}
 &- \int_{\mathcal{B}_R} (\text{Div} \mathbf{P} + \mathbf{f})\delta\chi dV + \int_{\mathcal{B}_R} [J_{\mathbf{K}} \mathbf{T}_{\mathbf{K},n} - \text{Div}(J_{\mathbf{K}} \mathbb{K})] : \delta \mathbf{D}_{\mathbf{K}} dV \\
 &+ \int_{\partial_N^X \mathcal{B}_R} (\mathbf{P}\mathbf{N} - \boldsymbol{\tau})\delta\chi dA + \int_{\partial_N^K \mathcal{B}_R} (J_{\mathbf{K}} \mathbb{K} \mathbf{N} - \mathbf{T}) : \delta \mathbf{D}_{\mathbf{K}} dA = 0. \tag{4.1.25}
 \end{aligned}$$

Siccome le variazioni virtuali $\delta \mathbf{D}_{\mathbf{K}}$ sono simmetriche e deviatoriche, si ha che le parti sferiche delle forze generalizzate duali a $\delta \mathbf{D}_{\mathbf{K}}$ nella (4.1.25) non compiono potenza. Pertanto, gli integrandi del secondo e del quarto termine della Equazione (4.1.25) possono essere riscritte solamente in termini delle loro parti deviatoriche, ossia

$$[J_{\mathbf{K}} \mathbf{T}_{\mathbf{K},n} - \text{Div}(J_{\mathbf{K}} \mathbb{K})] : \delta \mathbf{D}_{\mathbf{K}} \equiv \text{dev}[J_{\mathbf{K}} \mathbf{T}_{\mathbf{K},n} - \text{Div}(J_{\mathbf{K}} \mathbb{K})] : \delta \mathbf{D}_{\mathbf{K}}, \tag{4.1.26a}$$

$$(J_{\mathbf{K}} \mathbb{K} \mathbf{N} - \mathbf{T}) : \delta \mathbf{D}_{\mathbf{K}} \equiv \text{dev}(J_{\mathbf{K}} \mathbb{K} \mathbf{N} - \mathbf{T}) : \delta \mathbf{D}_{\mathbf{K}}. \tag{4.1.26b}$$

Pertanto, tramite tecniche standard di localizzazione, si ottengono le equazioni dinamiche per il modello di Gurtin&Anand [4]:

$$\text{Div} \mathbf{P} + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \tag{4.1.27a}$$

$$\mathbf{P}\mathbf{N} = \boldsymbol{\tau}, \tag{4.1.27b}$$

$$\operatorname{dev}(J_{\mathbf{K}}\mathbf{T}_{\mathbf{K},n}) - \operatorname{dev}\operatorname{Div}(J_{\mathbf{K}}\mathbb{K}) = \mathbf{0}, \quad \text{in } \mathcal{B}_{\mathbf{R}}, \quad (4.1.27c)$$

$$\operatorname{dev}(J_{\mathbf{K}}\mathbb{K}\mathbf{N}) = \operatorname{dev}\mathbf{T}, \quad \text{su } \partial_{\mathbf{N}}^{\mathbf{K}}\mathcal{B}_{\mathbf{R}}, \quad (4.1.27d)$$

dove ricordiamo che $J_{\mathbf{K}} = 1$.

Per chiudere il sistema di Equazioni (4.1.27a)-(4.1.27d) è necessario esprimere costitutivamente i tensori \mathbf{P} , $\mathbf{T}_{\mathbf{K},n}$ e \mathbb{K} , oltre ad assegnare le forze esterne \mathbf{f} , $\boldsymbol{\tau}$ e $\operatorname{dev}\mathbf{T}$. La procedura per far ciò è mostrata dettagliatamente nel Capitolo 5, in cui è trattato il caso bifasico. Per tale ragione, e poiché le forze determinate costitutivamente in questo modo possono essere particolarizzate al caso monofasico con poche riformulazioni, non ci soffermiamo oltre su questo argomento.

Capitolo 5

Estensione della “teoria gradiente” al caso di miscele bifasiche

5.1 Principio delle Potenze Virtuali

5.1.1 Forma euleriana delle equazioni dinamiche

Consideriamo, ora, un nuovo modello in cui le trasformazioni strutturali del materiale in esame sono la manifestazione di una cinematica interna al materiale stesso, la cui dinamica ne costituisce il *rimodellamento*. A tal proposito, seguendo [37, 8, 31], e come nei capitoli precedenti, introduciamo il tensore \mathbf{K} ed il suo gradiente materiale $\text{Grad}\mathbf{K}$ come descrittori cinematici del rimodellamento, unitamente alle velocità virtuali \mathbf{V}_v e $\text{Grad}\mathbf{V}_v$ ad essi associati. Questi ultimi si aggiungono a tutti gli altri enti cinematici virtuali presenti nella Equazione (3.2.1), ottenendo

$$\mathcal{D}\mathcal{E}^{(\text{rem})} := \{\mathbf{v}_{\text{vs}}, \mathbf{v}_{\text{vf}}, \text{grad } \mathbf{v}_{\text{vs}}, \text{grad } \mathbf{v}_{\text{vf}}, \mathbf{V}_v, \text{Grad}\mathbf{V}_v\}. \quad (5.1.1)$$

Si noti che, la presenza di \mathbf{V}_v e di $\text{Grad}\mathbf{V}_v$ rende il modello risultante un *modello di ordine 1* nelle variabili di rimodellamento. Inoltre, definiamo

$$\mathbf{v} := \dot{\mathbf{K}}, \quad (5.1.2a)$$

$${}^e\mathbf{v} := \dot{\mathbf{K}} \circ (\Xi, \mathcal{T}), \quad (5.1.2b)$$

rispettivamente, la velocità associata alla variabile di rimodellamento e la sua forma euleriana.

Osservazione 35 (Derivata covariante di \mathbf{K} e \mathbf{V}_v).

Per coerenza con quanto svolto nel Capitolo 3, i nuovi descrittori cinematici $\text{Grad}\mathbf{K}$ e $\text{Grad}\mathbf{V}_v$ sono definiti come le derivate covarianti di \mathbf{K} e del campo delle velocità virtuali associate al rimodellamento, \mathbf{V}_v . Pertanto, ricordando che $\mathbf{K} = K^A{}_B \mathbf{E}_A \otimes \mathbf{E}^B$, si ha che la derivata covariante di \mathbf{K} è definita come

$$\begin{aligned} \text{Grad}\mathbf{K} &= \mathbf{K}_{,D} \otimes \mathbf{E}^D \\ &= \left(K^A{}_{B,D} \mathbf{E}_A \otimes \mathbf{E}^B + K^A{}_B (\mathbf{E}_A)_{,D} \otimes \mathbf{E}^B + K^A{}_B \mathbf{E}_A \otimes (\mathbf{E}^B)_{,D} \right) \otimes \mathbf{E}^D \\ &= \left(K^A{}_{B,D} \mathbf{E}_A \otimes \mathbf{E}^B + K^A{}_B \Gamma^M{}_{AD} \mathbf{E}_M \otimes \mathbf{E}^B - K^A{}_B \Gamma^B{}_{ND} \mathbf{E}_A \otimes \mathbf{E}^N \right) \otimes \mathbf{E}^D \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(K^A_{B,D} + \Gamma^A_{MD} K^M_B - \Gamma^N_{BD} K^A_N \right) \mathbf{E}_A \otimes \mathbf{E}^B \otimes \mathbf{E}^D \\
 &=: K^A_{B;D} \mathbf{E}_A \otimes \mathbf{E}^B \otimes \mathbf{E}^D,
 \end{aligned} \tag{5.1.3}$$

dove si sono usate le Equazioni (2.1.54) e (2.1.58), opportunamente riscritte nel piazzamento di riferimento, per esprimere le derivate degli elementi di base $\{\mathbf{E}_A\}_{A=1}^3$ rispetto ai simboli di Christoffel materiali Γ^A_{BC} . Dunque, le componenti dei tensori $\text{Grad}\mathbf{V}_v$ e $\text{Grad}\mathbf{K}$, rispetto alla base $\{\mathbf{E}_A\}_{A=1}^3$, sono definite come

$$(\text{Grad}\mathbf{K})^A_{B;D} = K^A_{B;D} = K^A_{B,D} + \Gamma^A_{MD} K^M_B - \Gamma^N_{BD} K^A_N, \tag{5.1.4a}$$

$$(\text{Grad}\mathbf{V}_v)^A_{B;D} = (\mathbf{V}_v)^A_{B;D} = (\mathbf{V}_v)^A_{B,D} + \Gamma^A_{MD} (\mathbf{V}_v)^M_B - \Gamma^N_{BD} (\mathbf{V}_v)^A_N. \tag{5.1.4b}$$

Data la nuova lista di descrittori cinematici virtuali nell'Equazione (5.1.1), dobbiamo *aggiornare* le potenze virtuali interna ed esterna scritte nelle Equazioni (3.2.5) e (3.2.35), aggiungendo opportune potenze virtuali di grado 0 e grado 1 legate al rimodellamento. Le corrispettive densità di potenza sono definite nel piazzamento di riferimento \mathcal{B}_R e possono essere ridefinite nel piazzamento corrente $\mathcal{B}(t)$ tramite opportune operazioni di *push-forward* seguendo $\chi(\cdot, t)$.

Termini di ordine 0.

Dati $X \in \mathcal{B}_R$ e $t \in \mathcal{T}$, introduciamo, per dualità alla variabile \mathbf{V}_v , i tensori [54, 32, 33, 20]

$$\mathbf{Y}(\cdot, t) : \mathcal{B}_R \rightarrow T^*\mathcal{B}_R \otimes T\mathcal{B}_R, \quad \mathbf{Y}(X, t) = [\mathbf{Y}(X, t)]_A^B \mathbf{E}^A(X, t) \otimes \mathbf{E}_B(X, t), \tag{5.1.5a}$$

$$\mathbf{Z}(\cdot, t) : \mathcal{B}_R \rightarrow T^*\mathcal{B}_R \otimes T\mathcal{B}_R, \quad \mathbf{Z}(X, t) = [\mathbf{Z}(X, t)]_A^B \mathbf{E}^A(X, t) \otimes \mathbf{E}_B(X, t), \tag{5.1.5b}$$

associati, rispettivamente, alla potenza virtuale interna ed alla potenza virtuale esterna. Pertanto, nella potenza virtuale interna ed esterna si aggiungono, rispettivamente, i termini

$$\int_{\mathcal{B}_R} \mathbf{Y} : \mathbf{V}_v \, dV, \quad \int_{\mathcal{B}_R} \mathbf{Z} : \mathbf{V}_v \, dV. \tag{5.1.6}$$

Soffermiamoci sul primo termine della Equazione (5.1.6) e scriviamolo in forma euleriana, come gli altri termini già presenti nella Equazione (3.2.5). In particolare, l'integrando si può scrivere come

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Y}(X, t) : \mathbf{V}_v(X, t) &= \mathbf{Y}(\Xi(x, t), \mathcal{T}(x, t)) : \mathbf{V}_v(\Xi(x, t), \mathcal{T}(x, t)) \\
 &= \{[\mathbf{Y} \circ (\Xi, \mathcal{T})](x, t)\} : \{[\mathbf{V}_v \circ (\Xi, \mathcal{T})](x, t)\} \\
 &= \{[\mathbf{Y} \circ (\Xi, \mathcal{T})] : [\mathbf{V}_v \circ (\Xi, \mathcal{T})]\}(x, t) \\
 &=: \{[\mathbf{Y} \circ (\Xi, \mathcal{T})] : {}^e\mathbf{V}_v\}(x, t),
 \end{aligned} \tag{5.1.7}$$

dove si è definita la forma euleriana di \mathbf{V}_v come ${}^e\mathbf{V}_v := \mathbf{V}_v \circ (\Xi, \mathcal{T})$. Pertanto, il primo integrale nella (5.1.6) diviene

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{B}_R} \mathbf{Y} : \mathbf{V}_v \, dV &= \int_{\mathcal{B}(t)} \left\{ (\det \mathbf{F}^{-1}) [\mathbf{Y} \circ (\Xi, \mathcal{T})] : {}^e\mathbf{V}_v \right\} \, dv \\
 &= \int_{\mathcal{B}(t)} \left\{ \frac{1}{J \circ (\Xi, \mathcal{T})} [\mathbf{Y} \circ (\Xi, \mathcal{T})] : {}^e\mathbf{V}_v \right\} \, dv \\
 &= \int_{\mathcal{B}(t)} \left\{ \left[\frac{1}{J} \mathbf{Y} \right] \circ (\Xi, \mathcal{T}) : {}^e\mathbf{V}_v \right\} \, dv := \int_{\mathcal{B}(t)} {}^e\mathbf{Y} : {}^e\mathbf{V}_v \, dv,
 \end{aligned} \tag{5.1.8}$$

avendo definito la forma euleriana della \mathbf{Y} come ${}^e\mathbf{Y} := \left[\frac{1}{J} \mathbf{Y} \right] \circ (\Xi, \mathcal{T})$.

Tramite lo stesso ragionamento e conti analoghi, possiamo operare un *push-forward* anche sull'integrale associato alla potenza virtuale esterna, ottenendo che

$$\int_{\mathcal{B}_R} \mathbf{Z} : \mathbf{V}_v \, dV := \int_{\mathcal{B}(t)} {}^e\mathbf{Z} : {}^e\mathbf{V}_v \, dv, \quad (5.1.9)$$

dove si è definita la forma euleriana di \mathbf{Z} come ${}^e\mathbf{Z} := [\frac{1}{J}\mathbf{Z}] \circ (\Xi, \mathcal{J})$.

Osservazione 36 (Forma euleriana di ${}^e\mathbf{Y}$ e ${}^e\mathbf{Z}$).

Si noti che la terminologia “*forma euleriana*” di ${}^e\mathbf{Y}$ e ${}^e\mathbf{Z}$ è riferita esclusivamente all'insieme di definizione di tali campi tensoriali. Tuttavia, si ha che ${}^e\mathbf{Y}$ e ${}^e\mathbf{Z}$ sono definiti in modo tale che ${}^e\mathbf{Y}(x, t)$ e ${}^e\mathbf{Z}(x, t)$ sono elementi di $T_X^*\mathcal{B}_R \otimes T_X\mathcal{B}_R$, dove $X = \Xi(x, t)$. Per ottenere tensori appartenenti a $T_x^*\mathcal{S} \otimes T_x\mathcal{S}$ occorre eseguire una trasformazione *in due passaggi* che conduce a

$$\begin{aligned} {}^e\mathbf{y} &:= \frac{1}{J \circ (\Xi, \mathcal{J})} [\mathbf{F}^{-T} \circ (\Xi, \mathcal{J})] \{ [\mathbf{K}^T \circ (\Xi, \mathcal{J})] [\mathbf{Y} \circ (\Xi, \mathcal{J})] \} \mathbf{F}^T \\ &= [\mathbf{F}^{-T} \circ (\Xi, \mathcal{J})] \{ [\mathbf{K}^T \circ (\Xi, \mathcal{J})] {}^e\mathbf{Y} \} \mathbf{F}^T, \end{aligned} \quad (5.1.10a)$$

$$\begin{aligned} {}^e\mathbf{z} &:= \frac{1}{J \circ (\Xi, \mathcal{J})} [\mathbf{F}^{-T} \circ (\Xi, \mathcal{J})] \{ [\mathbf{K}^T \circ (\Xi, \mathcal{J})] [\mathbf{Z} \circ (\Xi, \mathcal{J})] \} \mathbf{F}^T \\ &= [\mathbf{F}^{-T} \circ (\Xi, \mathcal{J})] \{ [\mathbf{K}^T \circ (\Xi, \mathcal{J})] {}^e\mathbf{Z} \} \mathbf{F}^T. \end{aligned} \quad (5.1.10b)$$

Termini di ordine 1.

Per quanto concerne i termini duali a $\text{Grad}\mathbf{V}_v$, è necessario introdurre un nuovo termine di volume, sia nella potenza virtuale interna sia nella potenza virtuale esterna, ed un nuovo termine di bordo nella potenza virtuale esterna. Nel seguito, tuttavia, per uniformarci alla trattazione in [4], supporremo nulla la potenza virtuale esterna di grado 1 [37, 26]. Inoltre, trattiamo separatamente i termini rimanenti, iniziando con la potenza virtuale interna.

Dati $X \in \mathcal{B}_R$, $t \in \mathcal{T}$, definiamo, per dualità indotta dalla potenza virtuale interna, il campo tensoriale del terzo ordine [4, 37, 31, 8]

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(\cdot, t) &: \mathcal{B}_R \rightarrow T^*\mathcal{B}_R \otimes T\mathcal{B}_R \otimes T\mathcal{B}_R, \\ X &\mapsto \mathbf{y}(X, t) = [\mathbf{y}(X, t)]_A^{BC} \mathbf{E}^A(X, t) \otimes \mathbf{E}_B(X, t) \otimes \mathbf{E}_C(X, t), \end{aligned} \quad (5.1.11)$$

dal quale è possibile definire il nuovo termine di potenza virtuale interna su \mathcal{B}_R come

$$\int_{\mathcal{B}_R} \mathbf{y} : \text{Grad}\mathbf{V}_v \, dV = \int_{\mathcal{B}_R} \mathbf{y}_A^{BC} (\mathbf{V}_v)^A_{B,C} \, dV. \quad (5.1.12)$$

Teorema 5.1.1 (Identità per i gradienti di ${}^e\mathbf{V}_v$).

Definito il tensore ${}^e\mathbf{V}_v := \mathbf{V}_v \circ (\Xi, \mathcal{J})$ come la forma euleriana del tensore di velocità virtuale associato al rimodellamento, valgono la seguente identità tra i gradienti di \mathbf{V}_v e ${}^e\mathbf{V}_v$:

$$\text{grad } {}^e\mathbf{V}_v = [\text{Grad}\mathbf{V}_v \circ (\Xi, \mathcal{J})] \mathbf{F}^{-1}, \quad (5.1.13a)$$

$$\text{Grad}\mathbf{V}_v = [\text{grad } {}^e\mathbf{V}_v \circ (\chi, \mathfrak{t})] \mathbf{F}. \quad (5.1.13b)$$

Dimostrazione.

Esplicitando il tensore \mathbf{V}_v come $\mathbf{V}_v = (\mathbf{V}_v)^A_B \mathbf{E}_A \otimes \mathbf{E}^B$, allora, per definizione, $\text{grad } {}^e\mathbf{V}_v$ si ha che

$$\begin{aligned} \text{grad } {}^e\mathbf{V}_v &= ({}^e\mathbf{V}_v)_{,b} \otimes \mathbf{e}^b \\ &= ({}^e\mathbf{V}_v)^A_{B,b} [\mathbf{E}_A \circ (\Xi, \mathcal{J})] \otimes [\mathbf{E}^B \circ (\Xi, \mathcal{J})] \otimes \mathbf{e}^b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + ({}^e\mathbf{V}_v)^A{}_B [\mathbf{E}_A \circ (\Xi, \mathcal{T})]_{,b} \otimes [\mathbf{E}^B \circ (\Xi, \mathcal{T})] \otimes \mathbf{e}^b \\
 & + ({}^e\mathbf{V}_v)^A{}_B [\mathbf{E}_A \circ (\Xi, \mathcal{T})] \otimes [\mathbf{E}^B \circ (\Xi, \mathcal{T})]_{,b} \otimes \mathbf{e}^b.
 \end{aligned} \tag{5.1.14}$$

Ora, ricordando le definizioni in (5.1.4b), possiamo sviluppare i conti come segue:

$$\begin{aligned}
 \text{grad } {}^e\mathbf{V}_v & = [({}^e\mathbf{V}_v)^A{}_{B,M} \circ (\Xi, \mathcal{T})] (\mathbf{F}^{-1})^M{}_b [\mathbf{E}_A \circ (\Xi, \mathcal{T})] \otimes [\mathbf{E}^B \circ (\Xi, \mathcal{T})] \otimes \mathbf{e}^b \\
 & + ({}^e\mathbf{V}_v)^A{}_B [(\mathbf{E}_A)_{,M} \circ (\Xi, \mathcal{T})] (\mathbf{F}^{-1})^M{}_b \otimes [\mathbf{E}^B \circ (\Xi, \mathcal{T})] \otimes \mathbf{e}^b \\
 & + ({}^e\mathbf{V}_v)^A{}_B [\mathbf{E}_A \circ (\Xi, \mathcal{T})] \otimes [(\mathbf{E}^B)_{,M} \circ (\Xi, \mathcal{T})] (\mathbf{F}^{-1})^M{}_b \otimes \mathbf{e}^b \\
 & = \left[\left(({}^e\mathbf{V}_v)^A{}_{B,M} \mathbf{E}_A \otimes \mathbf{E}^B \right) \circ (\Xi, \mathcal{T}) \right] \otimes (\mathbf{F}^{-1})^M{}_b \mathbf{e}^b \\
 & + \left[\left(({}^e\mathbf{V}_v)^A{}_B \Gamma^C{}_{AM} \mathbf{E}_C \otimes \mathbf{E}^B \right) \circ (\Xi, \mathcal{T}) \right] \otimes (\mathbf{F}^{-1})^M{}_b \mathbf{e}^b \\
 & - \left[\left(({}^e\mathbf{V}_v)^A{}_B \Gamma^B{}_{CM} \mathbf{E}_A \otimes \mathbf{E}^C \right) \circ (\Xi, \mathcal{T}) \right] \otimes (\mathbf{F}^{-1})^M{}_b \mathbf{e}^b \\
 & = \left[\left(({}^e\mathbf{V}_v)^A{}_{B;M} \mathbf{E}_A \otimes \mathbf{E}^B \right) \circ (\Xi, \mathcal{T}) \right] \otimes (\mathbf{F}^{-1})^M{}_b \mathbf{e}^b \\
 & = \left[\left(({}^e\mathbf{V}_v)^A{}_{B;M} \mathbf{E}_A \otimes \mathbf{E}^B \otimes \mathbf{E}^M \right) \circ (\Xi, \mathcal{T}) \right] (\mathbf{F}^{-1})^N{}_b [\mathbf{E}_N \circ (\Xi, \mathcal{T})] \otimes \mathbf{e}^b \\
 & = [\text{Grad } \mathbf{V}_v \circ (\Xi, \mathcal{T})] \mathbf{F}^{-1}.
 \end{aligned} \tag{5.1.15}$$

Per dimostrare la relazione (5.1.13b), sufficiente comporre la (5.1.13a) per le mappe (χ, \mathbf{t}) e isolare il termine $\text{Grad } \mathbf{V}_v$. \square

Pertanto, operando un *push-forward* sul termine nella Equazione (5.1.12) e sfruttando la Equazione (5.1.13a), si ottiene che

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{B}_R} \boldsymbol{\mathcal{Y}} : \text{Grad } \mathbf{V}_v \, dV & = \int_{\mathcal{B}_R} [\boldsymbol{\mathcal{Y}}]_A{}^{BC} [{}^e\mathbf{V}_v]^A{}_{B;C} \, dV \\
 & = \int_{\mathcal{B}(t)} \left\{ (\det \mathbf{F}^{-1}) [(\boldsymbol{\mathcal{Y}})_A{}^{BC} \circ (\Xi, \mathcal{T})] ({}^e\mathbf{V}_v)^A{}_{B;a} (\mathbf{F} \circ (\Xi, \mathcal{T}))^a{}_C \right\} \, dv \\
 & = \int_{\mathcal{B}(t)} \left\{ \frac{1}{J \circ (\Xi, \mathcal{T})} [(\boldsymbol{\mathcal{Y}})_A{}^{BC} \circ (\Xi, \mathcal{T})] (\mathbf{F}^T)_{C^a} \right\} ({}^e\mathbf{V}_v)^A{}_{B;a} \, dv \\
 & =: \int_{\mathcal{B}(t)} ({}^e\boldsymbol{\mathcal{Y}})_A{}^{Ba} ({}^e\mathbf{V}_v)^A{}_{B;a} \, dv \\
 & = \int_{\mathcal{B}(t)} {}^e\boldsymbol{\mathcal{Y}} : \text{grad } {}^e\mathbf{V}_v \, dv,
 \end{aligned} \tag{5.1.16}$$

dove si è definita la forma euleriana della $\boldsymbol{\mathcal{Y}}$ come ${}^e\boldsymbol{\mathcal{Y}} := \frac{1}{J \circ (\Xi, \mathcal{T})} [\boldsymbol{\mathcal{Y}} \circ (\Xi, \mathcal{T})] \mathbf{F}^T$.

Per introdurre il nuovo termine di bordo della potenza virtuale esterna, duale a $\text{Grad } \mathbf{V}_v$, definiamo un campo tensoriale agente su una porzione di bordo di \mathcal{B}_R , detta *di Neumann per il rimodellamento* e indicata con $\partial_N^K \mathcal{B}_R$, ossia

$$\mathbf{T}(\cdot, t) : \partial_N^K \mathcal{B}_R \rightarrow T^* \mathcal{B}_R \otimes T \mathcal{B}_R, \quad \mathbf{T}(X, t) = [\mathbf{T}(X, t)]_A{}^B \mathbf{E}^A(X, t) \otimes \mathbf{E}_B(X, t), \tag{5.1.17}$$

e si introduce il nuovo termine della potenza virtuale esterna come l'integrale di superficie definito da

$$\int_{\partial_N^K \mathcal{B}_R} \mathbf{T} : \mathbf{V}_v \, dA. \tag{5.1.18}$$

Nota la relazione (3.1.38), possiamo riscrivere il termine della Equazione (5.1.18) come

$$\int_{\partial_N^K \mathcal{B}_R} \mathbf{T} : \mathbf{V}_v \, dA = \int_{\partial_N^K \mathcal{B}(t)} \left\{ \mathbf{T} : \mathbf{V}_v \left(\frac{1}{J \sqrt{(\mathbf{N} \otimes \mathbf{N}) : \mathbf{C}^{-1}}} \right) \right\} \circ (\Xi, \mathcal{T}) \, da$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\partial_N^{\mathcal{K}} \mathcal{B}(t)} \left[\left(\frac{1}{J\sqrt{(\mathbf{N} \otimes \mathbf{N}) : \mathbf{C}^{-1}}} \mathbf{T} \right) \circ (\Xi, \mathcal{T}) \right] : {}^e \mathbf{v}_v \, da \\
 &=: \int_{\partial_N^{\mathcal{K}} \mathcal{B}(t)} {}^e \mathbf{T} : {}^e \mathbf{v}_v \, da, \tag{5.1.19}
 \end{aligned}$$

dove si è definita la forma euleriana di \mathbf{T} come ${}^e \mathbf{T} := \left(\frac{1}{J\sqrt{(\mathbf{N} \otimes \mathbf{N}) : \mathbf{C}^{-1}}} \mathbf{T} \right) \circ (\Xi, \mathcal{T})$.

Definizione 5.1.1 (Potenza virtuale interna in “teoria gradiente” [4]).

Considerando la regione di spazio $\mathcal{B}(t) \subset \mathcal{S}$ occupata dalla miscela al tempo $t \in \mathcal{T}$, definiamo la *potenza virtuale interna* della miscela, associata alle velocità virtuali in (5.1.1), come

$$\begin{aligned}
 &\mathcal{W}_v^{(\text{int})}(\mathbf{v}_{\text{vs}}, \mathbf{v}_{\text{vf}}, {}^e \mathbf{v}_v) \\
 &:= \int_{\mathcal{B}(t)} \left\{ \sum_{\alpha} \mathbf{m}_{\alpha} \mathbf{v}_{v\alpha} + \sum_{\alpha} \boldsymbol{\sigma}_{\alpha}^{(\text{tot})} : \text{grad } \mathbf{v}_{v\alpha} + {}^e \mathbf{Y} : {}^e \mathbf{v}_v + {}^e \boldsymbol{\mathcal{Y}} : \text{grad } {}^e \mathbf{v}_v \right\} dv. \tag{5.1.20}
 \end{aligned}$$

Definizione 5.1.2 (Potenza virtuale esterna in “teoria gradiente” [4, 42]).

Considerando la regione di spazio $\mathcal{B}(t) \subset \mathcal{S}$ occupata dalla miscela al tempo $t \in \mathcal{T}$, definiamo la *potenza virtuale esterna* della miscela, associata alle velocità virtuali in (5.1.1), come

$$\begin{aligned}
 \mathcal{W}_v^{(\text{ext})}(\mathbf{v}_{\text{vs}}, \mathbf{v}_{\text{vf}}, {}^e \mathbf{v}_v) &:= \int_{\mathcal{B}(t)} \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} (\mathbf{f} - \mathbf{a}^b) \mathbf{v}_{v\alpha} \, dv + \int_{\partial_N^{\mathcal{X}} \mathcal{B}(t)} \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} \boldsymbol{\tau} \mathbf{v}_{v\alpha} \, da \\
 &+ \int_{\mathcal{B}(t)} {}^e \mathbf{Z} : {}^e \mathbf{v}_v \, dv + \int_{\partial_N^{\mathcal{K}} \mathcal{B}(t)} {}^e \mathbf{T} : {}^e \mathbf{v}_v \, da. \tag{5.1.21}
 \end{aligned}$$

In maniera analoga a quanto fatto nel capitolo precedente, possiamo invocare il *Principio delle Potenze Virtuali* utilizzando le potenze virtuali in “teoria gradiente”, riportate nelle Equazioni (5.1.20) e (5.1.21). in modo tale da ottenere le nuove equazioni dinamiche e le relative condizioni al contorno. Dunque, si impone che

$$\mathcal{W}_v^{(\text{int})}(\mathbf{v}_{\text{vs}}, \mathbf{v}_{\text{vf}}, \mathbf{v}_v) = \mathcal{W}_v^{(\text{ext})}(\mathbf{v}_{\text{vs}}, \mathbf{v}_{\text{vf}}, \mathbf{v}_v), \quad \forall (\mathbf{v}_{\text{vs}}, \mathbf{v}_{\text{vf}}, \mathbf{v}_v) \in \mathcal{H}, \tag{5.1.22}$$

dove \mathcal{H} è un opportuno spazio funzionale contenente le velocità virtuali compatibili con i vincoli imposti. Risulta semplice scegliere lo spazio \mathcal{H} come il prodotto cartesiano di tre sottospazi di spazi di Sobolev che verranno esplicitati dopo aver dichiarato le condizioni di Dirichlet di interesse per il problema considerato. Per il momento, non imponiamo alcun vincolo alle velocità virtuali del rimodellamento, cosicché sia possibile osservare una forma “unconstrained” [37, 33] dell’equazione dinamica associata al rimodellamento.

Osservazione 37 (Gradiente materiale di $\boldsymbol{\mathcal{Y}}$ e gradiente spaziale di ${}^e \boldsymbol{\mathcal{Y}}$).

Dato il campo tensoriale $\boldsymbol{\mathcal{Y}}(\cdot, t)$ definito nella (5.1.11), possiamo definire il tensore del quarto ordine $\text{Grad} \boldsymbol{\mathcal{Y}}$, detto *gradiente materiale di $\boldsymbol{\mathcal{Y}}$* , come la derivata covariante del campo $\boldsymbol{\mathcal{Y}}(\cdot, t)$, ossia

$$\begin{aligned}
 \text{Grad} \boldsymbol{\mathcal{Y}} &= \boldsymbol{\mathcal{Y}}_{,D} \otimes \mathbf{E}^D \\
 &= [\boldsymbol{\mathcal{Y}}_A^{BC} \mathbf{E}^A \otimes \mathbf{E}_B \otimes \mathbf{E}_C]_{,D} \otimes \mathbf{E}^D \\
 &= \boldsymbol{\mathcal{Y}}_A^{BC}{}_{,D} \mathbf{E}^A \otimes \mathbf{E}_B \otimes \mathbf{E}_C \otimes \mathbf{E}^D \\
 &\quad + \boldsymbol{\mathcal{Y}}_A^{BC} (\mathbf{E}^A)_{,D} \otimes \mathbf{E}_B \otimes \mathbf{E}_C \otimes \mathbf{E}^D \\
 &\quad + \boldsymbol{\mathcal{Y}}_A^{BC} \mathbf{E}^A \otimes (\mathbf{E}_B)_{,D} \otimes \mathbf{E}_C \otimes \mathbf{E}^D
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \mathfrak{y}_A^{BC} \mathbf{E}^A \otimes \mathbf{E}_B \otimes (\mathbf{E}_C)_{,D} \otimes \mathbf{E}^D \\
 = & \mathfrak{y}_A^{BC}{}_{,D} \mathbf{E}^A \otimes \mathbf{E}_B \otimes \mathbf{E}_C \otimes \mathbf{E}^D \\
 & + \mathfrak{y}_A^{BC} (-\Gamma^A{}_{LD} \mathbf{E}^L) \otimes \mathbf{E}_B \otimes \mathbf{E}_C \otimes \mathbf{E}^D \\
 & + \mathfrak{y}_A^{BC} \mathbf{E}^A \otimes (\Gamma^M{}_{BD} \mathbf{E}_M) \otimes \mathbf{E}_C \otimes \mathbf{E}^D \\
 & + \mathfrak{y}_A^{BC} \mathbf{E}^A \otimes \mathbf{E}_B \otimes (\Gamma^N{}_{CD} \mathbf{E}_N) \otimes \mathbf{E}^D \\
 = & (\mathfrak{y}_A^{BC}{}_{,D} - \Gamma^L{}_{AD} \mathfrak{y}_L^{BC} + \Gamma^B{}_{MD} \mathfrak{y}_A^{MC} + \Gamma^C{}_{ND} \mathfrak{y}_A^{BN}) \mathbf{E}^A \otimes \mathbf{E}_B \otimes \mathbf{E}_C \otimes \mathbf{E}^D \\
 = & \mathfrak{y}_A^{BC}{}_{;D} \mathbf{E}^A \otimes \mathbf{E}_B \otimes \mathbf{E}_C \otimes \mathbf{E}^D, \tag{5.1.23}
 \end{aligned}$$

dove nella Equazione (5.1.23), si è definita la componente $(\text{Grad}\mathfrak{y})_A^{BC}{}_D$ come segue

$$\mathfrak{y}_A^{BC}{}_{;D} := \mathfrak{y}_A^{BC}{}_{,D} - \Gamma^L{}_{AD} \mathfrak{y}_L^{BC} + \Gamma^B{}_{MD} \mathfrak{y}_A^{MC} + \Gamma^C{}_{ND} \mathfrak{y}_A^{BN}. \tag{5.1.24}$$

Inoltre, ricordando la definizione della forma euleriana di \mathfrak{y} , ossia ${}^e\mathfrak{y} := \frac{1}{J \circ (\Xi, \mathcal{J})} [\mathfrak{y} \circ (\Xi, \mathcal{J})] \mathbf{F}^T$, si osserva che tale tensore è esprimibile rispetto alla base materiale $\{\mathbf{E}_A\}_{A=1}^3$ e alla base spaziale $\{\mathbf{e}_a\}_{a=1}^3$ come

$${}^e\mathfrak{y} = ({}^e\mathfrak{y})_A{}^{Bb} [\mathbf{E}^A \circ (\Xi, \mathcal{J})] \otimes [\mathbf{E}_B \circ (\Xi, \mathcal{J})] \otimes \mathbf{e}_b. \tag{5.1.25}$$

Dunque, definiamo il tensore del quarto ordine $\text{grad}{}^e\mathfrak{y}$, detto *gradiente spaziale di ${}^e\mathfrak{y}$* , come

$$\begin{aligned}
 \text{grad}{}^e\mathfrak{y} = & ({}^e\mathfrak{y})_{,d} \otimes \mathbf{e}^d \\
 = & \{({}^e\mathfrak{y})_A{}^{Bb} [\mathbf{E}^A \circ (\Xi, \mathcal{J})] \otimes [\mathbf{E}_B \circ (\Xi, \mathcal{J})] \otimes \mathbf{e}_b\}_{,d} \otimes \mathbf{e}^d \\
 = & ({}^e\mathfrak{y})_A{}^{Bb}{}_{,d} [\mathbf{E}^A \circ (\Xi, \mathcal{J})] \otimes [\mathbf{E}_B \circ (\Xi, \mathcal{J})] \otimes \mathbf{e}_b \otimes \mathbf{e}^d \\
 & + ({}^e\mathfrak{y})_A{}^{Bb} [(\mathbf{E}^A)_{,L} \circ (\Xi, \mathcal{J})] (\mathbf{F}^{-1})^L{}_d \otimes [\mathbf{E}_B \circ (\Xi, \mathcal{J})] \otimes \mathbf{e}_b \otimes \mathbf{e}^d \\
 & + ({}^e\mathfrak{y})_A{}^{Bb} [\mathbf{E}^A \circ (\Xi, \mathcal{J})] \otimes [(\mathbf{E}_B)_{,M} \circ (\Xi, \mathcal{J})] (\mathbf{F}^{-1})^M{}_d \otimes \mathbf{e}_b \otimes \mathbf{e}^d \\
 & + ({}^e\mathfrak{y})_A{}^{Bb} [\mathbf{E}^A \circ (\Xi, \mathcal{J})] \otimes [\mathbf{E}_B \circ (\Xi, \mathcal{J})]_{,d} \otimes (\mathbf{e}_b)_{,d} \otimes \mathbf{e}^d \\
 = & ({}^e\mathfrak{y})_A{}^{Bb}{}_{,d} [\mathbf{E}^A \circ (\Xi, \mathcal{J})] \otimes [\mathbf{E}_B \circ (\Xi, \mathcal{J})] \otimes \mathbf{e}_b \otimes \mathbf{e}^d \\
 & + ({}^e\mathfrak{y})_A{}^{Bb} [(-\Gamma^A{}_{PL} \mathbf{E}^P) \circ (\Xi, \mathcal{J})] (\mathbf{F}^{-1})^L{}_d \otimes [\mathbf{E}_B \circ (\Xi, \mathcal{J})] \otimes \mathbf{e}_b \otimes \mathbf{e}^d \\
 & + ({}^e\mathfrak{y})_A{}^{Bb} [\mathbf{E}^A \circ (\Xi, \mathcal{J})] \otimes [(\Gamma^Q{}_{BM} \mathbf{E}_Q) \circ (\Xi, \mathcal{J})] (\mathbf{F}^{-1})^M{}_d \otimes \mathbf{e}_b \otimes \mathbf{e}^d \\
 & + ({}^e\mathfrak{y})_A{}^{Bb} [\mathbf{E}^A \circ (\Xi, \mathcal{J})] \otimes [\mathbf{E}_B \circ (\Xi, \mathcal{J})]_{,d} \otimes (\gamma^r{}_{bd} \mathbf{e}_r) \otimes \mathbf{e}^d \\
 = & ({}^e\mathfrak{y})_A{}^{Bb}{}_{;d} [\mathbf{E}^A \circ (\Xi, \mathcal{J})] \otimes [\mathbf{E}_B \circ (\Xi, \mathcal{J})] \otimes \mathbf{e}_b \otimes \mathbf{e}^d, \tag{5.1.26}
 \end{aligned}$$

dove si sono definite le componenti come

$$\begin{aligned}
 ({}^e\mathfrak{y})_A{}^{Bb}{}_{;d} := & ({}^e\mathfrak{y})_A{}^{Bb}{}_{,d} - [\Gamma^P{}_{AL} \circ (\Xi, \mathcal{J})] ({}^e\mathfrak{y})_P{}^{Bb} (\mathbf{F}^{-1})^L{}_d \\
 & + [\Gamma^B{}_{QM} \circ (\Xi, \mathcal{J})] ({}^e\mathfrak{y})_A{}^{Qb} (\mathbf{F}^{-1})^M{}_d + \gamma^b{}_{rd} ({}^e\mathfrak{y})_A{}^{Br}. \tag{5.1.27}
 \end{aligned}$$

Analizzando la struttura delle nuove potenze virtuali, osserviamo che esse sono uguali a quelle presentate nelle Equazioni (3.2.5) e (3.2.35) a meno di termini aggiuntivi associati solamente al rimodellamento, sui quali ci concentreremo. In particolare, riscriviamo il termine di ordine 1 per il rimodellamento nella potenza interna come

$$\begin{aligned}
 {}^e\mathfrak{y} : \text{grad}{}^e\mathbf{v}_v = & ({}^e\mathfrak{y})_A{}^{Bb} ({}^e\mathbf{v}_v)^A{}_{B;b} \\
 = & [({}^e\mathfrak{y})_A{}^{Bb} ({}^e\mathbf{v}_v)^A{}_B]_{;b} - ({}^e\mathfrak{y})_A{}^{Bb}{}_{;b} ({}^e\mathbf{v}_v)^A{}_B \\
 = & \{[{}^T({}^e\mathfrak{y})]{}^b{}_A ({}^e\mathbf{v}_v)^A{}_B\}_{;b} - (\text{div}{}^e\mathfrak{y})_A{}^B ({}^e\mathbf{v}_v)^A{}_B \\
 = & \text{div}[{}^T({}^e\mathfrak{y}) : {}^e\mathbf{v}_v] - (\text{div}{}^e\mathfrak{y}) : {}^e\mathbf{v}_v, \tag{5.1.28}
 \end{aligned}$$

dove abbiamo definito il tensore del terzo ordine ${}^T(\mathbf{e}\mathbf{y})$ con la notazione utilizzata in [37], riportata nell'Appendice A:

$${}^T(\mathbf{e}\mathbf{y}) := [{}^T(\mathbf{e}\mathbf{y})]{}^b{}_A{}^B \mathbf{e}_b \otimes [\mathbf{E}^A \circ (\Xi, \mathcal{J})] \otimes [\mathbf{E}_B \circ (\Xi, \mathcal{J})] \quad \text{t.c.} \quad [{}^T(\mathbf{e}\mathbf{y})]{}^b{}_A{}^B := (\mathbf{e}\mathbf{y})_A{}^{Bb}.$$

Sostituiamo le espressioni delle nuove potenze virtuali nella Equazione (5.1.22), ricordando la riscrittura (3.2.12) per i tensori degli sforzi e usando la riscrittura introdotta (5.1.28):

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{B}(t)} \left\{ \sum_{\alpha} \mathbf{m}_{\alpha} \mathbf{v}_{\nu\alpha} + \sum_{\alpha} \boldsymbol{\sigma}_{\alpha}^{(\text{tot})} : \text{grad } \mathbf{v}_{\nu\alpha} + {}^e\mathbf{Y} : {}^e\mathbf{v}_{\nu} + \text{div}[{}^T(\mathbf{e}\mathbf{y}) : {}^e\mathbf{v}_{\nu}] - (\text{div } {}^e\mathbf{y}) : {}^e\mathbf{v}_{\nu} \right\} d\mathbf{v} \\ &= \int_{\mathcal{B}(t)} \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} (\mathbf{f} - \mathbf{a}^b) \mathbf{v}_{\nu\alpha} d\mathbf{v} + \int_{\partial_{\mathcal{N}}^{\mathcal{X}} \mathcal{B}(t)} \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} \boldsymbol{\tau} \mathbf{v}_{\nu\alpha} da \\ &+ \int_{\mathcal{B}(t)} {}^e\mathbf{Z} : {}^e\mathbf{v}_{\nu} d\mathbf{v} + \int_{\partial_{\mathcal{N}}^{\mathcal{K}} \mathcal{B}(t)} {}^e\mathbf{T} : {}^e\mathbf{v}_{\nu} da. \end{aligned} \quad (5.1.29)$$

Analogamente a quanto fatto nel Capitolo 3 per il tensore degli sforzi, applichiamo il teorema di Gauss al termine della Equazione (5.1.29) sotto segno di divergenza:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}(t)} \text{div}[{}^T(\mathbf{e}\mathbf{y}) : {}^e\mathbf{v}_{\nu}] d\mathbf{v} &= \int_{\mathcal{B}(t)} \{ [{}^T(\mathbf{e}\mathbf{y})]{}^b{}_A{}^B ({}^e\mathbf{v}_{\nu})^A{}_B \}_{;b} d\mathbf{v} \\ &= \int_{\partial_{\mathcal{N}}^{\mathcal{K}} \mathcal{B}(t)} (\mathbf{e}\mathbf{y})_A{}^{Bb} ({}^e\mathbf{v}_{\nu})^A{}_B n_b da \\ &= \int_{\partial_{\mathcal{N}}^{\mathcal{K}} \mathcal{B}(t)} (\mathbf{e}\mathbf{y}\mathbf{n}) : {}^e\mathbf{v}_{\nu} da. \end{aligned} \quad (5.1.30)$$

Si noti che gli integrali di superficie nella (5.1.30) sono ristretti al bordo di Neumann per la variabile di rimodellamento poiché, in generale, ${}^e\mathbf{v}_{\nu}$ deve annullarsi identicamente su un eventuale bordo di Dirichlet per la variabile di rimodellamento stessa.

Infine, manipolando algebricamente la Equazione (5.1.29) e sostituendo l'integrale trasformato nella (5.1.30), concludiamo, che

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{B}(t)} \sum_{\alpha} \left\{ -\mathbf{m}_{\alpha} + \text{div} \boldsymbol{\sigma}_{\alpha}^{(\text{tot})} + \rho_{\alpha} (\mathbf{f} - \mathbf{a}^b) \right\} \mathbf{v}_{\nu\alpha} d\mathbf{v} + \int_{\partial_{\mathcal{N}}^{\mathcal{X}} \mathcal{B}(t)} \sum_{\alpha} \left\{ -\boldsymbol{\sigma}_{\alpha}^{(\text{tot})} \mathbf{n} + \xi_{\alpha} \boldsymbol{\tau} \right\} \mathbf{v}_{\nu\alpha} da \\ &+ \int_{\mathcal{B}(t)} \left\{ -{}^e\mathbf{Y} + \text{div } {}^e\mathbf{y} + {}^e\mathbf{Z} \right\} : {}^e\mathbf{v}_{\nu} d\mathbf{v} + \int_{\partial_{\mathcal{N}}^{\mathcal{K}} \mathcal{B}(t)} \left\{ -{}^e\mathbf{y}\mathbf{n} + {}^e\mathbf{T} \right\} : {}^e\mathbf{v}_{\nu} da = 0, \end{aligned} \quad (5.1.31)$$

per ogni $(\mathbf{v}_{\nu s}, \mathbf{v}_{\nu f}, \mathbf{v}_{\nu}) \in \mathcal{H}$. Localizzando la Equazione (5.1.31), si ottengono infine le equazioni dinamiche per il modello in “teoria gradiente”, ossia

$$-\mathbf{m}_{\alpha} + \text{div} \boldsymbol{\sigma}_{\alpha}^{(\text{tot})} + \rho_{\alpha} (\mathbf{f} - \mathbf{a}^b) = \mathbf{0} \quad \text{in } \mathcal{B}(t), \quad (5.1.32a)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{\alpha}^{(\text{tot})} \mathbf{n} = \xi_{\alpha} \boldsymbol{\tau} \quad \text{su } \partial_{\mathcal{N}}^{\mathcal{X}} \mathcal{B}(t), \quad (5.1.32b)$$

$${}^e\mathbf{Y} - \text{div } {}^e\mathbf{y} - {}^e\mathbf{Z} = \mathbf{0} \quad \text{in } \mathcal{B}(t), \quad (5.1.32c)$$

$${}^e\mathbf{y}\mathbf{n} = {}^e\mathbf{T} \quad \text{su } \partial_{\mathcal{N}}^{\mathcal{K}} \mathcal{B}(t). \quad (5.1.32d)$$

Si noti che le equazioni dinamiche associate alla fase solida e fluida sono uguali a quelle ottenute nel Capitolo 3 e che l'equazione dinamica ottenuta per il rimodellamento assume la forma di una legge di bilancio locale per le forze duali ai nuovi descrittori cinematici. In Letteratura, tale relazione prende il nome di “*Microstress balance equation*” [4].

5.1.2 Forma lagrangiana delle equazioni dinamiche

In questa sottosezione, ci proponiamo di trasformare in forma lagrangiana le equazioni dinamiche riportate in (5.1.32a)-(5.1.32d). In particolare, ci concentreremo sul trasformare solamente le Equazioni (5.1.32c) e (5.1.32d) in quanto le forme lagrangiane delle restanti equazioni sono state calcolate nella Sezione 3.3. Dunque, eseguiamo il *pull-back* della Equazione (5.1.32c), componendola con le mappe (χ, \mathfrak{t}) e moltiplicandola per J :

$$J[{}^e\mathbf{Y} \circ (\chi, \mathfrak{t})] - J[\operatorname{div} {}^e\mathbf{y} \circ (\chi, \mathfrak{t})] - J[{}^e\mathbf{Z} \circ (\chi, \mathfrak{t})] = \mathbf{0}. \quad (5.1.33)$$

Grazie alle relazioni $\mathbf{Y} = J[{}^e\mathbf{Y} \circ (\chi, \mathfrak{t})]$ e $\mathbf{Z} = J[{}^e\mathbf{Z} \circ (\chi, \mathfrak{t})]$, riscriviamo la Equazione (5.1.33) come

$$\mathbf{Y} - J[\operatorname{div} {}^e\mathbf{y} \circ (\chi, \mathfrak{t})] - \mathbf{Z} = \mathbf{0}. \quad (5.1.34)$$

Per riscrivere il secondo termine presente nella Equazione (5.1.34), utilizziamo il seguente:

Teorema 5.1.2 (Relazione tra le divergenze di \mathbf{y} e ${}^e\mathbf{y}$).

Sia \mathbf{y} la forza duale al descrittore cinematico $\operatorname{Grad}\mathbf{v}$, nella dualità indotta dal termine di potenza interna (5.1.12), e sia ${}^e\mathbf{y}$ la sua forma euleriana. Allora, vale la seguente relazione tra le divergenze di \mathbf{y} e ${}^e\mathbf{y}$:

$$J[\operatorname{div} {}^e\mathbf{y} \circ (\chi, \mathfrak{t})] = \operatorname{Div}\mathbf{y}, \quad \text{con} \quad \mathbf{y} = J[{}^e\mathbf{y} \circ (\chi, \mathfrak{t})]\mathbf{F}^{-\mathbf{T}}. \quad (5.1.35)$$

Dimostrazione.

Preliminarmente, ricordando la definizione di $\operatorname{Grad}\mathbf{y}$ in (5.1.23) e di $\operatorname{grad}{}^e\mathbf{y}$ in (5.1.26), esprimiamo in componenti il tensore $\operatorname{Grad}[{}^e\mathbf{y} \circ (\chi, \mathfrak{t})]$, definito come la derivata covariante materiale del tensore ${}^e\mathbf{y}$ composto per le mappe (χ, \mathfrak{t}) :

$$\begin{aligned} \operatorname{Grad}[{}^e\mathbf{y} \circ (\chi, \mathfrak{t})] &= [{}^e\mathbf{y} \circ (\chi, \mathfrak{t})]_{,C} \otimes \mathbf{E}^C \\ &= [({}^e\mathbf{y})_A^{Bb}]_{,d} \circ (\chi, \mathfrak{t}) F^d_C \mathbf{E}^A \otimes \mathbf{E}_B \otimes [e_b \circ (\chi, \mathfrak{t})] \otimes \mathbf{E}^C \\ &\quad + [{}^e\mathbf{y} \circ (\chi, \mathfrak{t})]_A^{Bb} (\mathbf{E}^A)_{,C} \otimes \mathbf{E}_B \otimes [e_b \circ (\chi, \mathfrak{t})] \otimes \mathbf{E}^C \\ &\quad + [{}^e\mathbf{y} \circ (\chi, \mathfrak{t})]_A^{Bb} \mathbf{E}^A \otimes (\mathbf{E}_B)_{,C} \otimes [e_b \circ (\chi, \mathfrak{t})] \otimes \mathbf{E}^C \\ &\quad + [{}^e\mathbf{y} \circ (\chi, \mathfrak{t})]_A^{Bb} \mathbf{E}^A \otimes \mathbf{E}_B \otimes [(e_b)_{,d} \circ (\chi, \mathfrak{t})] F^d_C \otimes \mathbf{E}^C \\ &= [({}^e\mathbf{y})_A^{Bb}]_{,d} \circ (\chi, \mathfrak{t}) F^d_C \mathbf{E}^A \otimes \mathbf{E}_B \otimes [e_b \circ (\chi, \mathfrak{t})] \otimes \mathbf{E}^C \\ &\quad + [{}^e\mathbf{y} \circ (\chi, \mathfrak{t})]_A^{Bb} (-\Gamma^A_{PC} \mathbf{E}^P) \otimes \mathbf{E}_B \otimes [e_b \circ (\chi, \mathfrak{t})] \otimes \mathbf{E}^C \\ &\quad + [{}^e\mathbf{y} \circ (\chi, \mathfrak{t})]_A^{Bb} \mathbf{E}^A \otimes (\Gamma^Q_{BC} \mathbf{E}^Q) \otimes [e_b \circ (\chi, \mathfrak{t})] \otimes \mathbf{E}^C \\ &\quad + [{}^e\mathbf{y} \circ (\chi, \mathfrak{t})]_A^{Bb} \mathbf{E}^A \otimes \mathbf{E}_B \otimes [(\gamma^r_{bd} e_r) \circ (\chi, \mathfrak{t})] F^d_C \otimes \mathbf{E}^C \\ &= [{}^e\mathbf{y} \circ (\chi, \mathfrak{t})]_A^{Bb}{}_{,C} \mathbf{E}^A \otimes \mathbf{E}_B \otimes [e_b \circ (\chi, \mathfrak{t})] \otimes \mathbf{E}^C. \end{aligned} \quad (5.1.36)$$

Dunque, dalla Equazione (5.1.36), si sono definite le componenti

$$\begin{aligned} [{}^e\mathbf{y} \circ (\chi, \mathfrak{t})]_A^{Bb}{}_{,C} &:= [({}^e\mathbf{y})_A^{Bb}]_{,d} \circ (\chi, \mathfrak{t}) F^d_C - \Gamma^P_{AC} [({}^e\mathbf{y})_P^{Bb} \circ (\chi, \mathfrak{t})] \\ &\quad + \Gamma^B_{QC} [({}^e\mathbf{y})_A^{Qb} \circ (\chi, \mathfrak{t})] + \{[\gamma^b_{rd} ({}^e\mathbf{y})_A^{Br}] \circ (\chi, \mathfrak{t})\} F^d_C, \end{aligned} \quad (5.1.37)$$

per le quali, osservando la definizione (5.1.27), è semplice notare che vale la relazione:

$$[{}^e\mathbf{y} \circ (\chi, \mathfrak{t})]_A^{Bb}{}_{,C} [(\mathbf{F}^{-1})^C_d \circ (\chi, \mathfrak{t})] = [({}^e\mathbf{y})_A^{Bb}]_{,d} \circ (\chi, \mathfrak{t}). \quad (5.1.38)$$

Dunque, possiamo procedere con la dimostrazione della Equazione (5.1.35) in componenti:

$$(\operatorname{Div}\mathbf{y})_A^B = \mathbf{y}_A^{BC}{}_{;C}$$

$$\begin{aligned}
 &= \{J[{}^e\mathbf{y} \circ (\chi, \mathbf{t})]_A{}^{Bd}(\mathbf{F}^{-T})_d{}^C\}_{;C} \\
 &= J[{}^e\mathbf{y} \circ (\chi, \mathbf{t})]_A{}^{Bd};C[(\mathbf{F}^{-1})^C{}_d \circ (\chi, \mathbf{t})] + [{}^e\mathbf{y} \circ (\chi, \mathbf{t})]_A{}^{Bd} \underbrace{[J(\mathbf{F}^{-T})_d{}^C]_{;C}}_{=0}, \quad (5.1.39)
 \end{aligned}$$

dove l'ultimo termine è nullo per l'identità di Piola (2.3.18). Ora, sfruttando la relazione ottenuta in (5.1.38), si conclude che

$$\begin{aligned}
 (\text{Div}\mathbf{y})_A{}^B &= J[({}^e\mathbf{y})_A{}^{Bd};d \circ (\chi, \mathbf{t})] \\
 &= J[(\text{div}{}^e\mathbf{y})_A{}^B \circ (\chi, \mathbf{t})], \quad (5.1.40)
 \end{aligned}$$

da cui segue la Tesi. \square

Pertanto, sostituendo la relazione tra le divergenze in (5.1.35) nella Equazione (5.1.34), si ottiene la forma materiale dell'equazione dinamica associata al rimodellamento:

$$\mathbf{Y} - \text{Div}\mathbf{y} - \mathbf{Z} = \mathbf{0}, \quad \text{in } \mathcal{B}_R. \quad (5.1.41)$$

Per quanto riguarda la forma materiale della Equazione (5.1.32d), osserviamo che il termine di bordo per il rimodellamento nella Equazione (5.1.31) può essere riscritto sfruttando, come fatto nel Capitolo 3, le Equazioni (3.1.35) e (3.1.38):

$$\begin{aligned}
 &\int_{\partial_N^K \mathcal{B}(t)} \{-{}^e\mathbf{y}\mathbf{n} + {}^e\mathbf{T}\} : {}^e\mathbf{v}_v \, da \\
 &= \int_{\partial_N^K \mathcal{B}_R} \{[-{}^e\mathbf{y}\mathbf{n} + {}^e\mathbf{T}] \circ (\chi, \mathbf{t})\} : \mathbf{v}_v \, [da \circ (\chi, \mathbf{t})] \\
 &= \int_{\partial_N^K \mathcal{B}_R} \left\{ -J[{}^e\mathbf{y} \circ (\chi, \mathbf{t})] \mathbf{F}^{-T} \mathbf{N} + J\sqrt{(\mathbf{N} \otimes \mathbf{N})} : \mathbf{C}^{-1}[{}^e\mathbf{T} \circ (\chi, \mathbf{t})] \right\} : \mathbf{v}_v \, dA \\
 &= \int_{\partial_N^K \mathcal{B}_R} \{-\mathbf{y}\mathbf{N} + \mathbf{T}\} : \mathbf{v}_v \, dA. \quad (5.1.42)
 \end{aligned}$$

Da tale termine, come fatto nel caso del modello in teoria standard nel Capitolo 3, possiamo estrarre le condizioni al contorno da imporre sul bordo di Neumann $\partial_N^K \mathcal{B}_R$ per l'equazione dinamica associata al rimodellamento, ossia

$$\mathbf{y}\mathbf{N} = \mathbf{T}, \quad \text{su } \partial_N^K \mathcal{B}_R. \quad (5.1.43)$$

In conclusione, la collezione delle equazioni dinamiche, scritte in forma materiale, per il modello secondo “teoria gradiente” si ottiene unendo le equazioni dinamiche per il rimodellamento, ossia (5.1.41) e (5.1.43), a quelle standard, ossia (3.2.55a) e (3.2.55b):

$$-J[\mathbf{m}_\alpha \circ (\chi, \mathbf{t})] + \text{Div}\mathbf{P}_\alpha^{(\text{tot})} + \varrho_\alpha \Phi_\alpha[\mathbf{f} - \mathbf{a}^b] \circ (\chi, \mathbf{t}) = \mathbf{0}, \quad \text{in } \mathcal{B}_R, \quad (5.1.44a)$$

$$\mathbf{P}_\alpha^{(\text{tot})} \mathbf{N} = [\xi_\alpha \circ (\chi, \mathbf{t})] \boldsymbol{\tau}_R, \quad \text{su } \partial_N^X \mathcal{B}_R, \quad (5.1.44b)$$

$$\mathbf{Y} - \text{Div}\mathbf{y} = \mathbf{Z}, \quad \text{in } \mathcal{B}_R, \quad (5.1.44c)$$

$$\mathbf{y}\mathbf{N} = \mathbf{T}, \quad \text{su } \partial_N^K \mathcal{B}_R. \quad (5.1.44d)$$

5.1.3 Ipotesi di Gurtin&Anand sulla plasticità

Nella sottosezione precedente, abbiamo ricavato, tramite l'utilizzo di opportuni *pull-back* sui termini che compaiono nel Principio delle Potenze Virtuali (5.1.31), la forma materiale delle equazioni dinamiche del modello, riportate nelle Equazioni (5.1.44a)-(5.1.44d). In particolare, si è osservato che le equazioni dinamiche del modello sono ottenute senza supporre alcun

vincolo sulle velocità virtuali materiali \mathbf{V}_{vs} , \mathbf{V}_{vf} e \mathbf{V}_v . Dunque, ci proponiamo di riscrivere le equazioni dinamiche associate al rimodellamento, ossia le (5.1.44c) e (5.1.44d), nel caso in cui siano rispettate le *ipotesi sulla plasticità* di Gurtin&Anand [4] che avevamo richiesto per il modello standard nell’Osservazione 17. Ricordiamo che tali ipotesi supponevano che le distorsioni plastiche fossero isocore, ossia tali che $J_{\mathbf{K}} = 1$, e che non fossero presenti spin plastici, ossia $\mathbf{W}_{\mathbf{K}} = \mathbf{0}$. In riferimento all’Osservazione 17, i vincoli che si devono imporre sulle velocità virtuali sono i seguenti:

$$J_{\mathbf{K}} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{G}\mathbf{V}_v\mathbf{K}^{-1} \quad \text{deviatorico}, \quad (5.1.45a)$$

$$\mathbf{W}_{\mathbf{K}} = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{G}\mathbf{V}_v\mathbf{K}^{-1} \quad \text{simmetrico}. \quad (5.1.45b)$$

Pertanto, richiediamo che la velocità virtuale materiale \mathbf{V}_v sia tale che il tensore $\mathbf{G}\mathbf{V}_v\mathbf{K}^{-1}$ sia deviatorico e simmetrico. Coerentemente con quanto ipotizzato, l’integrale su $\mathcal{B}(t)$ associato al rimodellamento nella Equazione (5.1.31) si riscrive come

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{B}(t)} \{-{}^e\mathbf{Y} + \text{div } {}^e\mathbf{y} + {}^e\mathbf{Z}\} : {}^e\mathbf{v}_v \, dv \\ &= \int_{\mathcal{B}_R} \{-\mathbf{Y} + \text{Div } \mathbf{y} + \mathbf{Z}\} : \mathbf{v}_v \, dV \\ &= \int_{\mathcal{B}_R} \{(-\mathbf{Y} + \text{Div } \mathbf{y} + \mathbf{Z})\mathbf{K}^T\} : (\mathbf{v}_v\mathbf{K}^{-1}) \, dV \\ &= \int_{\mathcal{B}_R} \{\mathbf{G}^{-1}(-\mathbf{Y} + \text{Div } \mathbf{y} + \mathbf{Z})\mathbf{K}^T\} : (\mathbf{G}\mathbf{V}_v\mathbf{K}^{-1}) \, dV \\ &= \int_{\mathcal{B}_R} \text{Sym}_0 \{\mathbf{G}^{-1}(-\mathbf{Y} + \text{Div } \mathbf{y} + \mathbf{Z})\mathbf{K}^T\} : (\mathbf{G}\mathbf{V}_v\mathbf{K}^{-1}) \, dV, \end{aligned} \quad (5.1.46)$$

dove, nell’ultimo passaggio, grazie all’ipotesi che $\mathbf{G}\mathbf{V}_v\mathbf{K}^{-1}$ sia deviatorico e simmetrico, la doppia contrazione ha permesso di *filtrare* la parte non simmetrica e deviatorica del tensore duale a $\mathbf{G}\mathbf{V}_v\mathbf{K}^{-1}$. Osserviamo che nella Equazione (5.1.46) si è utilizzato il simbolo “Sym₀” per indicare sinteticamente la parte simmetrica e deviatorica [4].

Pertanto, come conseguenza del Principio delle Potenze Virtuali, l’equazione dinamica associata al rimodellamento, sotto l’ipotesi di Gurtin&Anand [4], assume la forma

$$\text{Sym}_0(\mathbf{G}^{-1}\mathbf{Y}\mathbf{K}^T) - \text{Sym}_0(\mathbf{G}^{-1}(\text{Div } \mathbf{y})\mathbf{K}^T) = \text{Sym}_0(\mathbf{G}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{K}^T), \quad \text{in } \mathcal{B}_R. \quad (5.1.47)$$

Seguendo lo stesso ragionamento, anche le condizioni sul bordo di Neumann $\partial_N^K \mathcal{B}_R$ possono essere riscritte come

$$\text{Sym}_0(\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{y}\mathbf{N})\mathbf{K}^T) = \text{Sym}_0(\mathbf{G}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{K}^T), \quad \text{su } \partial_N^K \mathcal{B}_R. \quad (5.1.48)$$

In conclusione, le equazioni dinamiche espresse in forma materiale, assumendo le ipotesi di Gurtin&Anand [4] per la plasticità, sono riassunte nel seguente schema:

$$-J[\mathbf{m}_\alpha \circ (\chi, \mathbf{t})] + \text{Div } \mathbf{P}_\alpha^{(\text{tot})} + \varrho_\alpha \Phi_\alpha[\mathbf{f} - \mathbf{a}^b] \circ (\chi, \mathbf{t}) = \mathbf{0}, \quad \text{in } \mathcal{B}_R, \quad (5.1.49a)$$

$$\mathbf{P}_\alpha^{(\text{tot})}\mathbf{N} = [\xi_\alpha \circ (\chi, \mathbf{t})]\boldsymbol{\tau}_R, \quad \text{su } \partial_N^K \mathcal{B}_R, \quad (5.1.49b)$$

$$\text{Sym}_0(\mathbf{G}^{-1}\mathbf{Y}\mathbf{K}^T) - \text{Sym}_0(\mathbf{G}^{-1}(\text{Div } \mathbf{y})\mathbf{K}^T) = \text{Sym}_0(\mathbf{G}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{K}^T), \quad \text{in } \mathcal{B}_R, \quad (5.1.49c)$$

$$\text{Sym}_0(\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{y}\mathbf{N})\mathbf{K}^T) = \text{Sym}_0(\mathbf{G}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{K}^T), \quad \text{su } \partial_N^K \mathcal{B}_R. \quad (5.1.49d)$$

5.2 Dissipazione

In questa sezione, similmente a quanto fatto per la dissipazione standard nella Sezione 3.3, studiamo gli effetti dissipativi nella miscela nel caso in cui le distorsioni plastiche siano descritte tramite la “teoria gradiente”, formulata nella Sezione 5.1.

5.2.1 Forma euleriana della dissipazione

Consideriamo una regione $\mathcal{R}(t) \subset \mathcal{B}(t)$ e, ricordando la definizione della dissipazione globale di miscela introdotta nella Sezione 3.3, seguendo l'approccio riportato in [54, 57], e trascurando le inerzie come fatto precedentemente nel Capitolo 3, possiamo scrivere

$$\int_{\mathcal{R}(t)} \mathcal{D} \, dv := -\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{R}(t)} \rho \psi \, dv + \int_{\partial \mathcal{R}(t)} \sum_{\alpha} (\rho_{\alpha} \psi_{\alpha}) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\alpha}) \mathbf{n} \, da + \mathcal{W}_{\mathcal{R}(t)}(\mathbf{v}_s, \mathbf{v}_f, {}^e \mathbf{V}). \quad (5.2.1)$$

I primi due termini a secondo membro della Equazione (5.2.1), non dipendendo direttamente dai nuovi descrittori cinematici introdotti nella (5.1.1), sono uguali ai relativi termini nel caso standard studiato nel Capitolo 3. Pertanto, la riscrittura di tali termini non verrà nuovamente affrontata in questa sezione e, per i conti espliciti, si rimanda alla Sezione 3.3.

Il terzo termine a secondo membro della (5.2.1), invece, risulta essere diverso da quello precedentemente introdotto nella Sezione 3.3, in quanto, per costruzione, esso deve contenere due contributi aggiuntivi associati ai nuovi descrittori cinematici ${}^e \mathbf{V}$ e $\text{Grad}^e \mathbf{V}$. Pertanto, supponiamo che la potenza netta contenga, in aggiunta ai termini presenti in (3.3.5), anche un termine associato a ${}^e \mathbf{Z}$ e uno associato a ${}^e \mathbf{Y}$. In formule, scriviamo che

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\mathcal{R}(t)}(\mathbf{v}_s, \mathbf{v}_f, {}^e \mathbf{V}) := & \int_{\mathcal{R}(t)} \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \mathbf{f}_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \, da + \int_{\partial \mathcal{R}(t)} \sum_{\alpha} (\boldsymbol{\sigma}_{\alpha}^T \mathbf{v}_{\alpha}) \mathbf{n} \, da \\ & + \int_{\mathcal{R}(t)} {}^e \mathbf{Z} : {}^e \mathbf{V} \, dv + \int_{\partial \mathcal{R}(t)} ({}^e \mathbf{Y} \mathbf{n}) : {}^e \mathbf{V} \, da. \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

Possiamo sviluppare i primi due addendi della (5.2.2) seguendo quanto fatto per ottenere la Equazione (3.3.12) nel caso della dissipazione standard. Dunque, si ottiene che

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{R}(t)} \mathcal{D} \, dv = & \int_{\mathcal{R}(t)} \sum_{\alpha} \{-\rho_{\alpha} D_{\alpha} \psi_{\alpha} + \mathbf{m}_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} + \boldsymbol{\sigma}_{\alpha} : \text{grad} \mathbf{v}_{\alpha}\} \, dv \\ & + \int_{\mathcal{R}(t)} {}^e \mathbf{Z} : {}^e \mathbf{V} \, dv + \int_{\partial \mathcal{R}(t)} ({}^e \mathbf{Y} \mathbf{n}) : {}^e \mathbf{V} \, da \geq 0. \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

Applicando il teorema di Gauss al termine di bordo presente nella Equazione (5.2.3), possiamo riscrivere quest'ultimo come segue:

$$\begin{aligned} \int_{\partial \mathcal{R}(t)} ({}^e \mathbf{Y} \mathbf{n}) : {}^e \mathbf{V} \, da &= \int_{\partial \mathcal{R}(t)} ({}^e \mathbf{Y})_A^{Bb} n_b ({}^e \mathbf{V})^A_B \, da \\ &= \int_{\mathcal{R}(t)} [({}^e \mathbf{Y})_A^{Bb} ({}^e \mathbf{V})^A_B]_{;b} \, dv \\ &= \int_{\mathcal{R}(t)} ({}^e \mathbf{Y})_A^{Bb}{}_{;b} ({}^e \mathbf{V})^A_B \, dv + \int_{\mathcal{R}(t)} ({}^e \mathbf{Y})_A^{Bb} ({}^e \mathbf{V})^A_{B;b} \, dv \\ &= \int_{\mathcal{R}(t)} (\text{div} {}^e \mathbf{Y}) : {}^e \mathbf{V} \, dv + \int_{\mathcal{R}(t)} {}^e \mathbf{Y} : \text{grad}^e \mathbf{V} \, dv. \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

Dunque, sostituendo il risultato ottenuto in (5.2.4) nella Equazione (5.2.3), si ottiene che

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{R}(t)} \mathcal{D} \, dv = & \int_{\mathcal{R}(t)} \sum_{\alpha} \{-\rho_{\alpha} D_{\alpha} \psi_{\alpha} + \mathbf{m}_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} + \boldsymbol{\sigma}_{\alpha} : \text{grad} \mathbf{v}_{\alpha}\} \, dv \\ & + \int_{\mathcal{R}(t)} \{{}^e \mathbf{Z} + \text{div} {}^e \mathbf{Y}\} : {}^e \mathbf{V} \, dv + \int_{\mathcal{R}(t)} {}^e \mathbf{Y} : \text{grad}^e \mathbf{V} \, dv \geq 0, \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

e, tenendo conto dell'equazione dinamica associata al rimodellamento (5.1.32c), si conclude che la dissipazione globale della miscela nella regione $\mathcal{R}(t)$ ammette l'espressione

$$\int_{\mathcal{R}(t)} \mathcal{D} \, dv = \int_{\mathcal{R}(t)} \sum_{\alpha} \{-\rho_{\alpha} D_{\alpha} \psi_{\alpha} + \mathbf{m}_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} + \boldsymbol{\sigma}_{\alpha} : \text{grad} \mathbf{v}_{\alpha}\} \, dv$$

$$+ \int_{\mathcal{R}(t)} {}^e\mathbf{Y} : {}^e\mathbf{v} \, dv + \int_{\mathcal{R}(t)} {}^e\mathbf{y} : \text{grad}^e\mathbf{v} \, dv \geq 0. \quad (5.2.6)$$

Alla stregua di quanto fatto nella Sezione 3.3, localizzando la disuguaglianza in (5.2.6), si ottiene, infine, che la disuguaglianza locale di dissipazione della miscela, nel caso di una “teoria gradiente” [4] per il rimodellamento, assume la forma

$$\mathcal{D} = \sum_{\alpha} \{-\rho_{\alpha} D_{\alpha} \psi_{\alpha} + \mathbf{m}_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} + \boldsymbol{\sigma}_{\alpha} : \text{grad} \mathbf{v}_{\alpha}\} + {}^e\mathbf{Y} : {}^e\mathbf{v} + {}^e\mathbf{y} : \text{grad}^e\mathbf{v} \geq 0. \quad (5.2.7)$$

La dissipazione ottenuta in (5.2.7) può essere ulteriormente semplificata in base a ciò che si è fatto nella Sezione 3.3, ossia utilizzando la condizione di chiusura dell’impulso (3.2.8) e assumendo che il fluido sia *isotermo*. Pertanto, la dissipazione in (5.2.7) si riscrive come

$$\mathcal{D} = -\rho_s D_s \psi_s + \sum_{\alpha} \boldsymbol{\sigma}_{\alpha} : \text{grad} \mathbf{v}_{\alpha} + \mathbf{m}_f \mathbf{v}_{fs} + {}^e\mathbf{Y} : {}^e\mathbf{v} + {}^e\mathbf{y} : \text{grad}^e\mathbf{v} \geq 0. \quad (5.2.8)$$

Possiamo *attaccare* alla dissipazione il vincolo di incomprimibilità in (3.3.15), opportunamente riscritto come in (3.3.18), tramite l’introduzione un moltiplicatore di Lagrange [56], detto *pressione della fase fluida* ed indicato con p , ottenendo così la dissipazione arricchita:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{(a)} &:= \mathcal{D} + p \left(\varphi_f \mathbf{i}^T : \text{grad} \mathbf{v}_f + \varphi_s \mathbf{i}^T : \text{grad} \mathbf{v}_s + (\text{grad} \varphi_f) \mathbf{v}_{fs} \right) \\ &= -\rho_s D_s \psi_s + \sum_{\alpha} (\boldsymbol{\sigma}_{\alpha} + p \varphi_{\alpha} \mathbf{i}^T) : \text{grad} \mathbf{v}_{\alpha} + (\mathbf{m}_f + p \text{grad} \varphi_f) \mathbf{v}_{fs} \\ &\quad + {}^e\mathbf{Y} : {}^e\mathbf{v} + {}^e\mathbf{y} : \text{grad}^e\mathbf{v} \\ &= -\rho_s D_s \psi_s + \sum_{\alpha} (\boldsymbol{\sigma}_{\alpha} + p \varphi_{\alpha} \mathbf{i}^T) : \text{grad} \mathbf{v}_{\alpha} + \mathbf{m}_{fd} \mathbf{v}_{fs} \\ &\quad + {}^e\mathbf{Y} : {}^e\mathbf{v} + {}^e\mathbf{y} : \text{grad}^e\mathbf{v} \geq 0. \end{aligned} \quad (5.2.9)$$

Nel passaggio dalla Equazione (5.2.8) alla (5.2.9), si è usata la definizione della parte dissipativa dello scambio di impulso della fase fluida, indicato con \mathbf{m}_{fd} nella (3.3.20).

5.2.2 Forma lagrangiana della dissipazione

In questa sottosezione, come fatto nella Sezione 3.3, siamo interessati a trasformare la dissipazione arricchita, riportata nella Equazione (5.2.9), in forma materiale, operando un *pull-back* di tale equazione al piazzamento di riferimento \mathcal{B}_R .

Preliminarmente, osserviamo che il *pull-back* al piazzamento di riferimento \mathcal{B}_R delle grandezze pseudo-scalari ${}^e\mathbf{Y} : {}^e\mathbf{v}$ e ${}^e\mathbf{y} : \text{grad}^e\mathbf{v}$ è calcolato, sfruttando le definizioni di ${}^e\mathbf{Y}$ e ${}^e\mathbf{y}$, e l’identità in (5.1.13a), come segue:

$$\chi^*({}^e\mathbf{Y} : {}^e\mathbf{v}) := J[{}^e\mathbf{Y} \circ (\chi, \mathbf{t})] : [{}^e\mathbf{v} \circ (\chi, \mathbf{t})] = \mathbf{Y} : \mathbf{v}, \quad (5.2.10a)$$

$$\begin{aligned} \chi^*({}^e\mathbf{y} : \text{grad}^e\mathbf{v}) &:= J[{}^e\mathbf{y} \circ (\chi, \mathbf{t})] : [\text{grad}^e\mathbf{v} \circ (\chi, \mathbf{t})] \\ &= J[{}^e\mathbf{y} \circ (\chi, \mathbf{t})] : \left\{ \text{Grad} \mathbf{v} [\mathbf{F}^{-1} \circ (\chi, \mathbf{t})] \right\} \\ &= \left\{ J[{}^e\mathbf{y} \circ (\chi, \mathbf{t})] \mathbf{F}^{-T} \right\} : \text{Grad} \mathbf{v} = \mathbf{y} : \text{Grad} \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (5.2.10b)$$

Definiamo, dunque, la forma materiale della dissipazione arricchita espressa in (5.2.9) come $\mathcal{D}_R^{(a)} := J[\mathcal{D}^{(a)} \circ (\chi, \mathbf{t})]$ e, utilizzando i conti ottenuti nella Sezione 3.3 e i nuovi risultati riportati nelle Equazioni (5.2.10a) e (5.2.10b), possiamo ricavare la seguente espressione:

$$\mathcal{D}_R^{(a)} = -\rho_s J_{\mathbf{K}} \Phi_{sv} \overline{[\psi_s \circ (\chi, \mathbf{t})]} + (\mathbf{P}_s + \mathbf{p} \Phi_s \mathbf{F}^{-T}) : \dot{\mathbf{F}} + J[\mathbf{m}_{fd} \circ (\chi, \mathbf{t})] \mathbf{V}_{fs}$$

$$+ \mathbf{Y} : \mathbf{V} + \mathbf{y} : \text{Grad} \mathbf{V} \geq 0. \quad (5.2.11)$$

Osserviamo che nella precedente espressione, abbiamo ricordato l'ipotesi che la fase fluida non ammette effetti dissipativi di ordine 1, ossia che $\mathbf{P}_{fc} := \mathbf{P}_f + p\Phi_f \mathbf{F}^{-T} \equiv \mathbf{0}$.

5.3 Ipotesi costitutive

In questa Sezione, si formalizza la scelta delle ipotesi costitutive per il nuovo modello di plasticità, basandosi sulle assegnazioni fatte in [4] per il caso monofasico. In particolare, seguendo l'approccio utilizzato in [4] per studiare la plasticità secondo la “teoria gradiente”, occorre introdurre un tensore, che chiameremo *tensore di Burgers* [4], che sia una misura della *non-integrabilità*, o “*incompatibilità*” [4], del tensore di rimodellamento \mathbf{K} . Infatti, in base a quanto osservato nella Sezione 2.4, il tensore \mathbf{K} non è un tensore integrabile, ossia esso non è mappa tangente di alcun moto. Come conseguenza della sua non-integrabilità, si può dimostrare che, definendo opportunamente il rotore materiale del tensore \mathbf{K} , esso è, in generale, non-identicamente nullo. Pertanto, il rotore materiale di \mathbf{K} risulta essere un indicatore della non-integrabilità di \mathbf{K} e definiremo il tensore di Burgers [4] come una funzione di tale rotore. Introduciamo, preliminarmente, le seguenti definizioni:

Definizione 5.3.1 (Simboli di Levi-Civita materiali [5, 27]).

Indichiamo con ε^{ABC} i *simboli di Levi-Civita materiali*, ossia associati al piazzamento di riferimento \mathcal{B}_R , al variare degli indici A, B, C nell'insieme $\{1,2,3\}$. Tali simboli sono definiti nel seguente modo:

$$\varepsilon^{ABC} = \begin{cases} +1, & \text{se } (A, B, C) = (1,2,3), (2,3,1), (3,1,2), \\ -1, & \text{se } (A, B, C) = (1,3,2), (2,1,3), (3,2,1), \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (5.3.1)$$

Definizione 5.3.2 (Matrice rappresentativa del tensore metrico materiale).

Sia \mathbf{G} il tensore metrico materiale, ossia associato al piazzamento di riferimento \mathcal{B}_R , e sia $\{\mathbf{E}_A\}_{A=1}^3$ la base materiale. Consideriamo, inoltre, le componenti del tensore metrico G_{AB} rispetto alla base materiale $\{\mathbf{E}_A\}_{A=1}^3$, definite come

$$G_{AB} = \mathbf{G}(\mathbf{E}_A, \mathbf{E}_B). \quad (5.3.2)$$

Indichiamo con il simbolo $\llbracket \mathbf{G} \rrbracket$ la *matrice rappresentativa* del tensore metrico materiale \mathbf{G} rispetto alla base materiale $\{\mathbf{E}_A\}_{A=1}^3$, ossia la matrice che colleziona le componenti definite in (5.3.2). Infine, indichiamo con il simbolo $G := \det \llbracket \mathbf{G} \rrbracket$ il *determinante* di tale matrice.

Definizione 5.3.3 (Rotore materiale di \mathbf{K} [4]).

Detto \mathbf{K} il tensore di rimodellamento, si definisce il *rotore materiale del tensore \mathbf{K}* , indicato con $\text{Curl} \mathbf{K}$, come il tensore le cui componenti sono date da

$$(\text{Curl} \mathbf{K})^{AB} := \frac{1}{\sqrt{G}} \varepsilon^{AMN} K^B{}_{N;M}, \quad (5.3.3)$$

ossia come il tensore ottenuto *anti-simmetrizzando* il gradiente di \mathbf{K} . In particolare, si è fatto ricorso ai simboli ε^{AMN} come nella Definizione 5.3.1 e a G come nella Definizione 5.3.2. Si noti che in [4] non compare il fattore $1/\sqrt{G}$ in quanti gli Autori non utilizzano il formalismo covariante. Invece, utilizziamo tale fattore nella Equazione (5.3.3) avendo adattato al caso del rotore di un campo tensoriale del secondo ordine la definizione di rotore di un campo vettoriale, richiamata in (2.1.62).

Definizione 5.3.4 (Tensore di Burgers \mathfrak{B} [4]).

Si definisce il *tensore di Burgers* come il tensore del secondo ordine definito come

$$\mathfrak{B} := \frac{1}{J_{\mathbf{K}}} \mathbf{K} \text{Curl} \mathbf{K}. \quad (5.3.4)$$

In componenti, si ha che

$$\mathfrak{B}^{AB} := \frac{1}{J_{\mathbf{K}} \sqrt{G}} K^A_{C \varepsilon^{CMN}} K^B_{N;M}. \quad (5.3.5)$$

Teorema 5.3.1 (Proprietà di \mathfrak{B} [4, 54]).

Il tensore di Burgers \mathfrak{B} è chiamato così in quanto si trasforma come un tensore rispetto a rotazioni (proprie) nello stato naturale. Inoltre, esso è indipendente dal cambiamento del piazzamento di riferimento \mathcal{B}_R . In altre parole, detto \mathbf{R}_ν un tensore di rotazione (propria) associato allo stato naturale, allora il tensore di Burgers trasformato $\tilde{\mathfrak{B}}$ è tale che

$$\tilde{\mathfrak{B}} = \mathbf{R}_\nu \mathfrak{B} \mathbf{R}_\nu^T. \quad (5.3.6)$$

Dimostrazione.

Nella Sezione 2.4 si è introdotto il tensore $\mathbf{K} = K^A_B \mathbf{E}_A \otimes \mathbf{E}_B$ in modo che il suo indice alto fosse *naturale*, ossia associato allo stato naturale $\mathcal{N}(t)$. Pertanto, dato il tensore di rotazione (propria) \mathbf{R}_ν , i tensori \mathbf{K} e $\text{Curl} \mathbf{K}$ trasformati risultano essere

$$\mathbf{K} \mapsto \tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{R}_\nu \mathbf{K}, \quad (5.3.7a)$$

$$\text{Curl} \mathbf{K} \mapsto \text{Curl} \tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{R}_\nu \text{Curl} \mathbf{K}. \quad (5.3.7b)$$

Dunque, operando le trasformazioni nella definizione nell'Equazione (5.3.5), il tensore di Burgers trasformato è tale che

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{B}}^{AB} &= \frac{1}{J_{\tilde{\mathbf{K}}} \sqrt{G}} (\mathbf{R}_\nu)^A_M K^M_{C \varepsilon^{CPQ}} (\mathbf{R}_\nu)^B_N K^N_{Q;P} \\ &= (\mathbf{R}_\nu)^A_M \left\{ \frac{1}{J_{\mathbf{K}} \sqrt{G}} K^M_{C \varepsilon^{CPQ}} K^N_{Q;P} \right\} (\mathbf{R}_\nu^T)^N_B \\ &= (\mathbf{R}_\nu)^A_M \mathfrak{B}^{MN} (\mathbf{R}_\nu^T)^N_B, \end{aligned} \quad (5.3.8)$$

da cui segue la Tesi. Invece, per la dimostrazione dell'indipendenza di \mathfrak{B} dal cambiamento di piazzamento di riferimento \mathcal{B}_R si rimanda a [54]. \square

Seguendo l'approccio di Gurtin&Anand [4], supponiamo di poter decomporre l'energia libera di Helmholtz associata alla fase solida ψ_s nella somma di due *contributi energetici*:

- il primo, indicato con $\psi_{s,e}$, è un termine standard associato alla sola componente elastica della deformazione, dipendente dal tensore \mathbf{C}_e , ed equivale, sostanzialmente, all'unico termine energetico che si ha nel modello standard nella Equazione (3.4.1);
- il secondo, invece, prende il nome di *energia dei difetti* [4] ed è un *nuovo* termine energetico, indicato con $\psi_{s,b}$, il quale dipende solamente dal tensore di Burgers \mathfrak{B} definito in (5.3.4).

Pertanto, l'energia libera di Helmholtz viene decomposta come segue:

$$\psi_s \circ (\chi, \mathbf{t}) = \psi_{s,e} \circ (\chi, \mathbf{t}) + \psi_{s,b} \circ (\chi, \mathbf{t}) = \hat{\psi}_{s,e} \circ \mathbf{C}_e + \hat{\psi}_{s,b} \circ \mathfrak{B}. \quad (5.3.9)$$

Avere imposto che $\hat{\psi}_{s,b}$ sia una funzione di \mathfrak{B} , piuttosto che di $\text{Curl}\mathbf{K}$, permette di ottenere una teoria in cui le equazioni dinamiche sono covarianti rispetto a rotazione proprie dello stato naturale ed indipendenti da trasformazioni sul piazzamento di riferimento \mathcal{B}_R .

Volendo calcolare il termine $[\hat{\psi}_s \circ (\chi, \mathfrak{t})]$ al fine di esplicitare la dissipazione materiale arricchita nella Equazione (5.2.11), osserviamo che la derivata in tempo di $\hat{\psi}_{s,e} \circ \mathbf{C}_e$ è già stata calcolata nel caso standard, ed è riportata nell'Equazione (3.4.6). Pertanto, calcoliamo singolarmente la derivata in tempo del termine $\hat{\psi}_{s,b} \circ \mathfrak{B}$, iniziando con il derivare il tensore di Burgers, come definito in (5.3.4), e ricordando che $J_{\mathbf{K}} = 1$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}^{AB} &= \frac{1}{J_{\mathbf{K}}\sqrt{G}} \dot{K}^A{}_C \varepsilon^{CMN} K^B{}_{N;M} + \frac{1}{J_{\mathbf{K}}\sqrt{G}} K^A{}_C \varepsilon^{CMN} \dot{K}^B{}_{N;M} \\ &= \frac{1}{J_{\mathbf{K}}\sqrt{G}} [\dot{K}^A{}_D (\mathbf{K}^{-1})^D{}_F] K^F{}_C \varepsilon^{CMN} K^B{}_{N;M} + \frac{1}{J_{\mathbf{K}}\sqrt{G}} K^A{}_C \varepsilon^{CMN} \dot{K}^B{}_{N;M} \\ &= (\mathbf{L}\mathbf{K})^A{}_F \mathfrak{B}^{FB} + \frac{1}{J_{\mathbf{K}}\sqrt{G}} K^A{}_C \varepsilon^{CMN} \dot{K}^B{}_{N;M}. \end{aligned} \quad (5.3.10)$$

Nel seguito, impiegando la notazione utilizzata in [4], indichiamo la derivata della componente dell'energia libera di Helmholtz associata a Burgers, ossia $\hat{\psi}_{s,b} \circ \mathfrak{B}$, rispetto al tensore \mathfrak{B} , come

$$\mathfrak{R}_\nu := \Phi_{s\nu} \varrho_s \left[\frac{\partial \hat{\psi}_{s,b}}{\partial \mathfrak{B}} \circ \mathfrak{B} \right], \quad (5.3.11)$$

e, successivamente, deriviamo nel tempo il termine $\Phi_{s\nu} \varrho_s [\hat{\psi}_{s,b} \circ \mathfrak{B}]$, ricordando che entrambi i termini $\Phi_{s\nu}$ e ϱ_s sono costanti in tempo:

$$\begin{aligned} \Phi_{s\nu} \varrho_s \frac{d}{dt} [\hat{\psi}_{s,b} \circ \mathfrak{B}] &= \Phi_{s\nu} \varrho_s \left[\frac{\partial \hat{\psi}_{s,b}}{\partial \mathfrak{B}} \circ \mathfrak{B} \right] : \dot{\mathfrak{B}} = \mathfrak{R}_\nu : \dot{\mathfrak{B}} = (\mathfrak{R}_\nu)_{AB} \dot{\mathfrak{B}}^{AB} \\ &= (\mathfrak{R}_\nu)_{AB} (\mathbf{L}\mathbf{K})^A{}_F \mathfrak{B}^{FB} + \frac{1}{J_{\mathbf{K}}\sqrt{G}} (\mathfrak{R}_\nu)_{AB} K^A{}_C \varepsilon^{CMN} \dot{K}^B{}_{N;M} \\ &= (\mathfrak{R}_\nu)_{AB} (\mathfrak{B}^T)^{BF} (\mathbf{L}\mathbf{K})^A{}_F + \frac{1}{J_{\mathbf{K}}\sqrt{G}} (\mathfrak{R}_\nu^T)_{BA} K^A{}_C \varepsilon^{CMN} \dot{K}^B{}_{N;M}. \end{aligned} \quad (5.3.12)$$

Impiegando la notazione di prodotto “vettoriale” [4] tra tensori, introdotta nella Equazione (2.1.63), possiamo riscrivere il secondo termine presente nello sviluppo della Equazione (5.3.12) come

$$\begin{aligned} \frac{1}{J_{\mathbf{K}}\sqrt{G}} (\mathfrak{R}_\nu^T)_{BA} K^A{}_C \varepsilon^{CMN} \dot{K}^B{}_{N;M} &= -\frac{1}{J_{\mathbf{K}}\sqrt{G}} \varepsilon^{MCN} (\mathfrak{R}_\nu^T \mathbf{K})_{BC} \dot{K}^B{}_{N;M} \\ &= -\frac{1}{J_{\mathbf{K}}\sqrt{G}} \varepsilon^{MCP} \delta_P{}^N (\mathfrak{R}_\nu^T \mathbf{K})_{BC} \dot{K}^B{}_{N;M} \\ &= -\frac{1}{J_{\mathbf{K}}\sqrt{G}} \varepsilon^{MCP} (\mathfrak{R}_\nu^T \mathbf{K})_{BC} (\mathbf{I})^N{}_P \dot{K}^B{}_{N;M} \\ &= -\frac{1}{J_{\mathbf{K}}} [(\mathfrak{R}_\nu^T \mathbf{K}) \times \mathbf{I}]^M{}_B{}^N \dot{K}^B{}_{N;M} \\ &= -\frac{1}{J_{\mathbf{K}}} \{[(\mathfrak{R}_\nu^T \mathbf{K}) \times \mathbf{I}]^T\}_B{}^{NM} \dot{K}^B{}_{N;M} \\ &= -\frac{1}{J_{\mathbf{K}}} [(\mathfrak{R}_\nu^T \mathbf{K}) \times \mathbf{I}]^T : \text{Grad}\dot{\mathbf{K}}. \end{aligned} \quad (5.3.13)$$

Come conseguenza della precedente riscrittura, possiamo scrivere la Equazione (5.3.12) in forma compatta come segue:

$$\Phi_{sv}\varrho_s \frac{d}{dt} [\hat{\psi}_{s,b} \circ \mathfrak{B}] = (\mathfrak{R}_\nu \mathfrak{B}^T) : \mathbf{L}_K - \frac{1}{J_K} [(\mathfrak{R}_\nu^T \mathbf{K}) \times \mathbf{I}]^T : \text{Grad} \dot{\mathbf{K}}. \quad (5.3.14)$$

Dunque, esprimendo il tasso \mathbf{L}_K in funzione di $\dot{\mathbf{K}}$ nelle relazioni riportate nelle Equazioni (3.4.6) e (5.3.12), la derivata in tempo del termine $\Phi_{sv}\varrho_s [\psi_s \circ (\chi, \mathbf{t})]$, nel caso del modello in “teoria gradiente”, si esprime in funzione di $\dot{\mathbf{F}}$, $\dot{\mathbf{K}}$ e di $\text{Grad} \dot{\mathbf{K}}$ come segue:

$$\begin{aligned} \Phi_{sv}\varrho_s \overline{[\psi_s \circ (\chi, \mathbf{t})]} &= [\mathbf{g} \circ (\chi, \mathbf{t})] \mathbf{F}_e \left[2\Phi_{sv}\varrho_s \left(\frac{\partial \hat{\psi}_{s,e}}{\partial \mathbf{C}_e} \circ \mathbf{C}_e \right) \right] \mathbf{K}^{-T} : \dot{\mathbf{F}} \\ &\quad - \mathbf{C}_e \left[2\Phi_{sv}\varrho_s \left(\frac{\partial \hat{\psi}_{s,e}}{\partial \mathbf{C}_e} \circ \mathbf{C}_e \right) \right] \mathbf{K}^{-T} : \dot{\mathbf{K}} \\ &\quad + (\mathfrak{R}_\nu \mathfrak{B}^T \mathbf{K}^{-T}) : \dot{\mathbf{K}} - \frac{1}{J_K} [(\mathfrak{R}_\nu^T \mathbf{K}) \times \mathbf{I}]^T : \text{Grad} \dot{\mathbf{K}}. \end{aligned} \quad (5.3.15)$$

Infine, sostituendo la (5.3.15) nella dissipazione in (5.2.11), otteniamo l’espressione analitica della dissipazione materiale arricchita nel modello secondo “teoria gradiente” [4]:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_R^{(a)} &= \left\{ -J_K [\mathbf{g} \circ (\chi, \mathbf{t})] \mathbf{F}_e \left[2\Phi_{sv}\varrho_s \left(\frac{\partial \hat{\psi}_{s,e}}{\partial \mathbf{C}_e} \circ \mathbf{C}_e \right) \right] \mathbf{K}^{-T} + \mathbf{P}_s + \mathbf{p} \Phi_s \mathbf{F}^{-T} \right\} : \dot{\mathbf{F}} \\ &\quad + J[\mathbf{m}_{fd} \circ (\chi, \mathbf{t})] \mathbf{V}_{fs} \\ &\quad + \left\{ -J_K \mathfrak{R}_\nu \mathfrak{B}^T \mathbf{K}^{-T} + J_K \mathbf{C}_e \left[2\Phi_{sv}\varrho_s \left(\frac{\partial \hat{\psi}_{s,e}}{\partial \mathbf{C}_e} \circ \mathbf{C}_e \right) \right] \mathbf{K}^{-T} + \mathbf{Y} \right\} : \dot{\mathbf{K}} \\ &\quad + \left\{ [(\mathfrak{R}_\nu^T \mathbf{K}) \times \mathbf{I}]^T + \mathbf{y} \right\} : \text{Grad} \dot{\mathbf{K}} \geq 0. \end{aligned} \quad (5.3.16)$$

A questo punto, per quanto riguarda il comportamento meccanico della fase solida e della fase fluida, possiamo assumere le *stesse* ipotesi costitutive che abbiamo usato nella Sezione 3.4, ossia che:

- la *fase solida* ammette un comportamento meccanico iperelastico e l’energia di deformazione elastica viene assunta *Neo-hookeana* (si vedano le Equazioni (3.4.9) e (3.4.23));
- la *fase fluida* è di ordine 0 e segue un regime di flusso di Darcy (si vedano le Equazioni (3.4.26) e (3.4.28)).

Una conseguenza importante di queste ipotesi è che le equazioni del modello associate alla fase solida, per ottenere il moto, e alla fase fluida, per ottenere la pressione, sono le medesime sia per il modello standard e sia per quello in “teoria gradiente” [4]. Inoltre, ricordando la definizione in (3.4.12) per il tensore di Mandel associato allo stato naturale \mathbf{M}_ν , possiamo riscrivere la (5.3.16) come

$$\mathcal{D}_R^{(a)} = J[\mathbf{m}_{fd} \circ (\chi, \mathbf{t})] \mathbf{V}_{fs} + \mathbf{Y}_d : \dot{\mathbf{K}} + \mathbf{y}_d : \text{Grad} \dot{\mathbf{K}}, \quad (5.3.17)$$

dove sono state definite le parti dissipative di \mathbf{Y} e \mathbf{y} :

$$\mathbf{Y}_d := \mathbf{Y} + J_K \mathbf{M}_\nu \mathbf{K}^{-T} - J_K \mathfrak{R}_\nu \mathfrak{B}^T \mathbf{K}^{-T}, \quad (5.3.18a)$$

$$\mathbf{y}_d := \mathbf{y} + [(\mathfrak{R}_\nu^T \mathbf{K}) \times \mathbf{I}]^T. \quad (5.3.18b)$$

Ipotesi sull’energia libera dei difetti

Rifacendoci a [4], nel seguito supponiamo che l’energia libera dei difetti dipenda unicamente dalla norma di Frobenius del tensore di Burgers \mathfrak{B} e, in particolare, assumiamo che l’energia libera sia direttamente proporzionale a tale norma tramite l’introduzione di una lunghezza caratteristica L_b e di un parametro materiale μ_b , con dimensioni fisiche di densità di energia, cosicché si abbia

$$\Phi_{sv} \varrho_s [\hat{\psi}_{s,b} \circ \mathfrak{B}] := \frac{1}{2} \mu_b L_b^2 \|\mathfrak{B}\|^2 \equiv \frac{1}{2} \mu_b L_b^2 (\mathfrak{B})^{AB} (\mathfrak{B}^b)_{AB}, \quad (5.3.19)$$

dove si è definito il tensore $\mathfrak{B}^b := \mathbf{G}\mathfrak{B}\mathbf{G}$. La lunghezza caratteristica L_b è detta una lunghezza “energetica” [4] in quanto essa stima la rilevanza del contributo energetico associato alle incompatibilità delle distorsioni plastiche rispetto alla espressione dell’energia libera totale della fase solida.

Grazie alla Equazione (5.3.19), possiamo ottenere un’espressione analitica per il termine \mathfrak{R}_ν , definito in (5.3.11), come

$$\begin{aligned} (\mathfrak{R}_\nu)_{MN} &= \frac{\partial}{\partial \mathfrak{B}_{MN}} \left[\frac{1}{2} \mu_b L_b^2 (\mathfrak{B})^{AB} (\mathfrak{B}^b)_{AB} \right] \\ &= \frac{1}{2} \mu_b L_b^2 \left[\delta_M^A \delta_N^B (\mathfrak{B}^b)_{AB} + (\mathfrak{B})^{AB} \delta_{MA} \delta_{NB} \right] \\ &= \frac{1}{2} \mu_b L_b^2 \left[(\mathfrak{B}^b)_{MN} + (\mathfrak{B}^b)_{MN} \right] \\ &= \mu_b L_b^2 (\mathfrak{B}^b)_{MN}. \end{aligned} \quad (5.3.20)$$

Dunque, con questa assegnazione, si ottiene la seguente espressione per \mathfrak{R}_ν :

$$\mathfrak{R}_\nu = \mu_b L_b^2 \mathfrak{B}^b \equiv \mu_b L_b^2 \mathbf{G}\mathfrak{B}\mathbf{G}. \quad (5.3.21)$$

5.4 Legge di flusso secondo “teoria gradiente”

In questa sezione, siamo interessati ad ottenere la legge di flusso plastico per il modello in cui le distorsioni plastiche evolvono seguendo la “teoria gradiente”. A tal fine, occorre introdurre delle espressioni costitutive per le parti dissipative delle forze duali ai descrittori cinematici associati al rimodellamento, ossia \mathbf{Y}_d e \mathbf{Y}_d , appoggiandoci alle ipotesi costitutive utilizzate in [4]. Tuttavia, occorre osservare che, in [4], a differenza di questo lavoro di Tesi, vengono utilizzati come descrittori cinematici associati al rimodellamento i tensori \mathbf{D}_K e $\text{Grad}\mathbf{D}_K$ e, di conseguenza, sono le loro forze duali ad essere assegnate costitutivamente. Pertanto, occorre riscrivere la dissipazione residua, ottenuta nella Equazione (5.3.17), esprimendola rispetto ai descrittori cinematici \mathbf{D}_K e $\text{Grad}\mathbf{D}_K$. Osserviamo, preliminarmente, che i termini $\mathbf{Y}_d : \dot{\mathbf{K}}$ e $\mathbf{Y}_d : \text{Grad}\dot{\mathbf{K}}$ possono essere riscritti rispetto ai descrittori cinematici \mathbf{D}_K e $\text{Grad}\mathbf{D}_K$ come segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_d : \dot{\mathbf{K}} &= (\mathbf{Y}_d)_A^B \dot{K}^A_B \\ &= (\mathbf{Y}_d)_A^B \delta^A_M \dot{K}^M_D \delta^D_B \\ &= (\mathbf{Y}_d)_A^B (\mathbf{G}^{-1})^{AN} G_{NM} \dot{K}^M_D (\mathbf{K}^{-1})^D_E K^E_B \\ &= (\mathbf{G}^{-1})^{NA} (\mathbf{Y}_d)_A^B (\mathbf{K}^T)_B^E G_{NM} \dot{K}^M_D (\mathbf{K}^{-1})^D_E \\ &= (\mathbf{G}^{-1} \mathbf{Y}_d \mathbf{K}^T)^{NE} (\mathbf{G} \dot{\mathbf{K}} \mathbf{K}^{-1})_{NE} \\ &= (\mathbf{Y}_d^\# \mathbf{K}^T) : \mathbf{D}_K, \end{aligned} \quad (5.4.1a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_d : \text{Grad}\dot{\mathbf{K}} &= (\mathbf{Y}_d)_B^{NM} \dot{K}^B_{N;M} \\ &= (\mathbf{Y}_d)_B^{NM} [\dot{K}^B_D \delta^D_N]_{;M} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (\mathbf{y}_d)_B^{NM} [\dot{K}^B_D (\mathbf{K}^{-1})^D_E K^E_N]_{;M} \\
 &= (\mathbf{y}_d)_B^{NM} [(\mathbf{G}^{-1})^{BF} (\mathbf{D}_K)_{FE} K^E_N]_{;M} \\
 &= (\mathbf{y}_d)_B^{NM} (\mathbf{G}^{-1})^{BF} \{(\mathbf{D}_K)_{FE;M} K^E_N + (\mathbf{D}_K)_{FE} K^E_{N;M}\} \\
 &= (\mathbf{y}_d^\sharp)^{FNM} K^E_N (\mathbf{D}_K)_{FE;M} + (\mathbf{y}_d^\sharp)^{FNM} (\text{Grad } \mathbf{K})^E_{NM} (\mathbf{D}_K)_{FE} \\
 &= [(\mathbf{y}_d^\sharp)^t]^{FMN} (\mathbf{K}^T)_N^E (\mathbf{D}_K)_{FE;M} + (\mathbf{y}_d^\sharp)^{FNM} [(\text{Grad } \mathbf{K})^T]_{NM}^E (\mathbf{D}_K)_{FE} \\
 &= [((\mathbf{y}_d^\sharp)^t) \mathbf{K}^T]^{FME} (\mathbf{D}_K)_{FE;M} + (\mathbf{y}_d^\sharp)^{FNM} [(\text{Grad } \mathbf{K})^T]_{NM}^E (\mathbf{D}_K)_{FE} \\
 &= \{[(\mathbf{y}_d^\sharp)^t) \mathbf{K}^T]^t\}^{FEM} (\text{Grad } \mathbf{D}_K)_{FEM} + [\mathbf{y}_d^\sharp : (\text{Grad } \mathbf{K})^T]^{FE} (\mathbf{D}_K)_{FE} \\
 &= [((\mathbf{y}_d^\sharp)^t) \mathbf{K}^T]^t : \text{Grad } \mathbf{D}_K + [\mathbf{y}_d^\sharp : (\text{Grad } \mathbf{K})^T] : \mathbf{D}_K. \tag{5.4.1b}
 \end{aligned}$$

Sostituendo le espressioni ottenute nelle Equazioni (5.4.1a) e (5.4.1b) nella dissipazione in (5.3.17), otteniamo che la dissipazione nel modello in “teoria gradiente” è esprimibile in funzione della coppia di descrittori cinematici \mathbf{D}_K e $\text{Grad } \mathbf{D}_K$ come

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_R^{(a)} &= J[\mathbf{m}_{fd} \circ (\chi, \mathbf{t})] \mathbf{V}_{fs} \\
 &\quad + [\mathbf{Y}_d^\sharp \mathbf{K}^T + \mathbf{y}_d^\sharp : (\text{Grad } \mathbf{K})^T] : \mathbf{D}_K + [((\mathbf{y}_d^\sharp)^t) \mathbf{K}^T]^t : \text{Grad } \mathbf{D}_K \geq 0. \tag{5.4.2}
 \end{aligned}$$

Seguendo quanto fatto in [4], assumiamo che le parti dissipative delle forze duali ai descrittori cinematici \mathbf{D}_K e $\text{Grad } \mathbf{D}_K$, nella dualità indotta dalla dissipazione in (5.4.2), possano essere espressi come funzioni *lineari* di \mathbf{D}_K e $\text{Grad } \mathbf{D}_K$. A tal proposito, indichiamo con σ_Y lo sforzo di snervamento della fase solida e introduciamo una seconda lunghezza caratteristica, indicata con ℓ_b , dalla quale possiamo definire la seguente quantità:

$$d_K := \sqrt{\|\mathbf{D}_K\|^2 + \ell_b^2 \|\text{Grad } \mathbf{D}_K\|^2}. \tag{5.4.3}$$

Si noti che la struttura del termine d_K ricorda una *norma di Sobolev* [60] per il tasso \mathbf{D}_K , in cui la norma di $\text{Grad } \mathbf{D}_K$ è soppesata dalla lunghezza caratteristica ℓ_b , detta *dissipativa*.

Procediamo, dunque, con l’assegnare le forze duali presenti nella Equazione (5.4.2) come fatto in [4], e con la notazione utilizzata in [37], ossia imponendo che

$$\mathbf{Y}_d^\sharp \mathbf{K}^T + \mathbf{y}_d^\sharp : (\text{Grad } \mathbf{K})^T := \frac{\sigma_Y}{d_K} \left(\frac{d_K}{d_0}\right)^m \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}_K \mathbf{G}^{-1}, \tag{5.4.4a}$$

$$[((\mathbf{y}_d^\sharp)^t) \mathbf{K}^T]^t := \frac{\ell_b^2 \sigma_Y}{d_K} \left(\frac{d_K}{d_0}\right)^m \mathbf{G}^{-1} \underline{\otimes} \mathbf{G}^{-1} \underline{\otimes} \mathbf{G}^{-1} : \text{Grad } \mathbf{D}_K, \tag{5.4.4b}$$

dove si sono introdotti il parametro materiale $d_0 > 0$ e l’esponente $m > 0$ che soppesa la norma di Sobolev di \mathbf{D}_K . In particolare, il termine a destra della Equazione (5.4.4b) è un tensore del terzo ordine totalmente controvariante definito, in componenti e a meno degli scalari che moltiplicano l’espressione, come

$$(\mathbf{G}^{-1} \underline{\otimes} \mathbf{G}^{-1} \underline{\otimes} \mathbf{G}^{-1} : \text{Grad } \mathbf{D}_K)^{ABC} := (\mathbf{G}^{-1})^{AL} (\mathbf{G}^{-1})^{BM} (\mathbf{G}^{-1})^{CN} (\text{Grad } \mathbf{D}_K)_{LMN}.$$

Inoltre, il tensore definito precedentemente può essere *formalmente* esplicitato in forma compatta, ossia senza l’utilizzo di indici, riscrivendo l’operazione in indici come

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{G}^{-1} \underline{\otimes} \mathbf{G}^{-1} \underline{\otimes} \mathbf{G}^{-1} : \text{Grad } \mathbf{D}_K)^{ABC} &= (\mathbf{G}^{-1})^{AL} (\mathbf{G}^{-1})^{BM} (\mathbf{G}^{-1})^{CN} (\text{Grad } \mathbf{D}_K)_{LMN} \\
 &= (\mathbf{G}^{-1})^{AL} [(\text{Grad } \mathbf{D}_K) \mathbf{G}^{-1}]_{LM}^C (\mathbf{G}^{-1})^{BM} \\
 &= (\mathbf{G}^{-1})^{AL} \{[(\text{Grad } \mathbf{D}_K) \mathbf{G}^{-1}]^t\}_L^C {}_M (\mathbf{G}^{-1})^{BM} \\
 &= (\mathbf{G}^{-1})^{AL} \{[(\text{Grad } \mathbf{D}_K) \mathbf{G}^{-1}]^t \mathbf{G}^{-1}\}_L^{CB}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (\mathbf{G}^{-1})^{AL} \{ \{ [(\text{Grad} \mathbf{D}_K) \mathbf{G}^{-1}]^t \mathbf{G}^{-1} \}^t \}_L^{BC} \\
 &= \{ \mathbf{G}^{-1} \{ [(\text{Grad} \mathbf{D}_K) \mathbf{G}^{-1}]^t \mathbf{G}^{-1} \}^t \}^{ABC}, \quad (5.4.5)
 \end{aligned}$$

e dunque possiamo formalmente definire l’operazione introdotta precedentemente come

$$\mathbf{G}^{-1} \underline{\otimes} \mathbf{G}^{-1} \underline{\otimes} \mathbf{G}^{-1} : \text{Grad} \mathbf{D}_K := \mathbf{G}^{-1} \{ [(\text{Grad} \mathbf{D}_K) \mathbf{G}^{-1}]^t \mathbf{G}^{-1} \}^t. \quad (5.4.6)$$

Nel seguito, per semplicità, assumiamo $m = 1$, cosicché le assegnazioni possano essere riscritte nella seguente forma semplificata:

$$\mathbf{Y}_d^\# \mathbf{K}^T + \mathbf{y}_d^\# : (\text{Grad} \mathbf{K})^T := \frac{\sigma_Y}{d_0} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}_K \mathbf{G}^{-1}, \quad (5.4.7a)$$

$$[(\mathbf{y}_d^\#)^t \mathbf{K}^T]^t := \frac{\ell_b^2 \sigma_Y}{d_0} \mathbf{G}^{-1} \underline{\otimes} \mathbf{G}^{-1} \underline{\otimes} \mathbf{G}^{-1} : \text{Grad} \mathbf{D}_K. \quad (5.4.7b)$$

Ora, ci proponiamo di isolare i termini dissipativi \mathbf{Y}_d e \mathbf{y}_d dalle due relazioni ottenute. In particolare, possiamo isolare direttamente il tensore \mathbf{y}_d dalla relazione (5.4.7b), riscrivendo tale Equazione in componenti, utilizzando la convenzione introdotta precedentemente:

$$\begin{aligned}
 [(\mathbf{y}_d^\#)^t \mathbf{K}^T]^{ACB} &= \frac{\ell_b^2 \sigma_Y}{d_0} (\mathbf{G}^{-1})^{AL} (\mathbf{G}^{-1})^{BM} (\mathbf{G}^{-1})^{CN} (\text{Grad} \mathbf{D}_K)_{LMN} \\
 \implies (\mathbf{y}_d^\#)^{ACD} (\mathbf{K}^T)_{D^B} &= \frac{\ell_b^2 \sigma_Y}{d_0} (\mathbf{G}^{-1})^{AL} (\mathbf{G}^{-1})^{BM} (\mathbf{G}^{-1})^{CN} (\text{Grad} \mathbf{D}_K)_{LMN}, \quad (5.4.8)
 \end{aligned}$$

da cui segue che

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{y}_d^\#)^{ADC} &= \frac{\ell_b^2 \sigma_Y}{d_0} (\mathbf{G}^{-1})^{AL} (\mathbf{G}^{-1})^{BM} (\mathbf{K}^{-T})_{B^D} (\mathbf{G}^{-1})^{CN} (\text{Grad} \mathbf{D}_K)_{LMN} \\
 &= \frac{\ell_b^2 \sigma_Y}{d_0} (\mathbf{G}^{-1})^{AL} (\text{Grad} \mathbf{D}_K)_{LMN} (\mathbf{G}^{-1} \mathbf{K}^{-T})^{MD} (\mathbf{G}^{-1})^{CN} \\
 &= \frac{\ell_b^2 \sigma_Y}{d_0} \{ \mathbf{G}^{-1} [(\text{Grad} \mathbf{D}_K) \mathbf{G}^{-1}] \}^A{}_M{}^C (\mathbf{G}^{-1} \mathbf{K}^{-T})^{MD} \\
 &= \frac{\ell_b^2 \sigma_Y}{d_0} \{ \mathbf{G}^{-1} [(\text{Grad} \mathbf{D}_K) \mathbf{G}^{-1}]^t \}^A{}_M{}^C (\mathbf{G}^{-1} \mathbf{K}^{-T})^{MD} \\
 &= \frac{\ell_b^2 \sigma_Y}{d_0} \{ \mathbf{G}^{-1} [(\text{Grad} \mathbf{D}_K) \mathbf{G}^{-1}]^t (\mathbf{G}^{-1} \mathbf{K}^{-T}) \}^{ACD} \\
 &= \frac{\ell_b^2 \sigma_Y}{d_0} \{ \{ \mathbf{G}^{-1} [(\text{Grad} \mathbf{D}_K) \mathbf{G}^{-1}]^t (\mathbf{G}^{-1} \mathbf{K}^{-T}) \}^t \}^{ADC}. \quad (5.4.9)
 \end{aligned}$$

Dunque, la parte dissipativa del tensore \mathbf{y} ammette la seguente espressione analitica:

$$\mathbf{y}_d = \frac{\ell_b^2 \sigma_Y}{d_0} \{ [(\text{Grad} \mathbf{D}_K) \mathbf{G}^{-1}]^t (\mathbf{G}^{-1} \mathbf{K}^{-T}) \}^t. \quad (5.4.10)$$

Grazie alla Equazione (5.4.9), possiamo riscrivere il termine $\mathbf{y}_d^\# : (\text{Grad} \mathbf{K})^T$, presente nella (5.4.7a), nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{y}_d^\# : (\text{Grad} \mathbf{K})^T]^{AQ} &= (\mathbf{y}_d^\#)^{ADC} [(\text{Grad} \mathbf{K})^T]_{DC}{}^Q \\
 &= \frac{\ell_b^2 \sigma_Y}{d_0} \{ \{ \mathbf{G}^{-1} [(\text{Grad} \mathbf{D}_K) \mathbf{G}^{-1}]^t (\mathbf{G}^{-1} \mathbf{K}^{-T}) \}^t \}^{ADC} (\text{Grad} \mathbf{K})^Q{}_{DC} \\
 &= \frac{\ell_b^2 \sigma_Y}{d_0} (\mathbf{G}^{-1})^{AL} (\mathbf{G}^{-1})^{BM} (\mathbf{G}^{-1})^{CN} (\text{Grad} \mathbf{D}_K)_{LMN} (\text{Grad} \mathbf{K})^Q{}_{DC}. \quad (5.4.11)
 \end{aligned}$$

Possiamo, di conseguenza, riscrivere la (5.4.7a) come

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_d^\sharp \mathbf{K}^T &= \frac{\sigma_Y}{d_0} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}_K \mathbf{G}^{-1} \\ &\quad - \frac{\ell_b^2 \sigma_Y}{d_0} \{ \mathbf{G}^{-1} [(\text{Grad} \mathbf{D}_K) \mathbf{G}^{-1}]^t (\mathbf{G}^{-1} \mathbf{K}^{-T}) \}^t : (\text{Grad} \mathbf{K})^T, \end{aligned} \quad (5.4.12)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_d^\sharp &= \frac{\sigma_Y}{d_0} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}_K \mathbf{G}^{-1} \mathbf{K}^{-T} \\ &\quad - \frac{\ell_b^2 \sigma_Y}{d_0} \{ \mathbf{G}^{-1} [(\text{Grad} \mathbf{D}_K) \mathbf{G}^{-1}]^t (\mathbf{G}^{-1} \mathbf{K}^{-T}) \}^t : [(\text{Grad} \mathbf{K})^T \mathbf{K}^{-T}]. \end{aligned} \quad (5.4.13)$$

In conclusione, dalle Equazioni (5.4.10) e (5.4.13), otteniamo le seguenti assegnazioni costitutive per i tensori \mathbf{Y}_d e \mathbf{y}_d in una forma *equivalente* a quella fatta in [4]:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_d &= \frac{\sigma_Y}{d_0} \mathbf{D}_K \mathbf{G}^{-1} \mathbf{K}^{-T} \\ &\quad - \frac{\ell_b^2 \sigma_Y}{d_0} \{ [(\text{Grad} \mathbf{D}_K) \mathbf{G}^{-1}]^t (\mathbf{G}^{-1} \mathbf{K}^{-T}) \}^t : [(\text{Grad} \mathbf{K})^T \mathbf{K}^{-T}], \end{aligned} \quad (5.4.14a)$$

$$\mathbf{y}_d = \frac{\ell_b^2 \sigma_Y}{d_0} \{ [(\text{Grad} \mathbf{D}_K) \mathbf{G}^{-1}]^t (\mathbf{G}^{-1} \mathbf{K}^{-T}) \}^t. \quad (5.4.14b)$$

Queste ultime possono essere espresse in componenti, seguendo quanto visto nelle Equazioni (5.4.9) e (5.4.11), come segue:

$$\begin{aligned} (\mathbf{Y}_d)_{A^B} &= \frac{\sigma_Y}{d_0} (\mathbf{D}_K)_{AM} (\mathbf{G}^{-1})^{MN} (\mathbf{K}^{-T})_N{}^B \\ &\quad - \frac{\ell_b^2 \sigma_Y}{d_0} (\text{Grad} \mathbf{D}_K)_{AMN} (\mathbf{G}^{-1})^{NC} (\mathbf{G}^{-1} \mathbf{K}^{-T})^{MD} K^E{}_{D;C} (\mathbf{K}^{-T})_E{}^B, \end{aligned} \quad (5.4.15a)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{y}_d)_{A^BC} &= \frac{\ell_b^2 \sigma_Y}{d_0} (\text{Grad} \mathbf{D}_K)_{AMN} (\mathbf{G}^{-1})^{NC} (\mathbf{G}^{-1})^{MP} (\mathbf{K}^{-T})_P{}^B \\ &= \frac{\ell_b^2 \sigma_Y}{d_0} (\text{Grad} \mathbf{D}_K)_{AMN} (\mathbf{G}^{-1} \mathbf{K}^{-T})^{MB} (\mathbf{G}^{-1})^{NC}. \end{aligned} \quad (5.4.15b)$$

Sostituendo le Equazioni (5.4.14a) e (5.4.14b), rispettivamente, nella (5.3.18a) e (5.3.18b), ed esprimendo \mathfrak{R}_ν come in (5.3.21), si ottengono le seguenti espressioni per le forze duali \mathbf{Y} e \mathbf{y} :

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= \underbrace{-J_K M_\nu \mathbf{K}^{-T}}_{\text{Termine non-dissipativo in teoria standard}} + \underbrace{J_K \mu_b L_b^2 \mathbf{G} \mathfrak{B} \mathbf{G} \mathfrak{B}^T \mathbf{K}^{-T}}_{\text{Termine non-dissipativo in teoria gradiente}} \\ &\quad + \underbrace{\frac{\sigma_Y}{d_0} \mathbf{D}_K \mathbf{G}^{-1} \mathbf{K}^{-T}}_{\text{Termine dissipativo in teoria standard}} \\ &\quad - \underbrace{\frac{\ell_b^2 \sigma_Y}{d_0} \{ [(\text{Grad} \mathbf{D}_K) \mathbf{G}^{-1}]^t (\mathbf{G}^{-1} \mathbf{K}^{-T}) \}^t : [(\text{Grad} \mathbf{K})^T \mathbf{K}^{-T}]}_{\text{Termine dissipativo in teoria gradiente}}, \end{aligned} \quad (5.4.16a)$$

$$\mathbf{y} = \underbrace{-\mu_b L_b^2 [(\mathfrak{B}^b \mathbf{K}) \times \mathbf{I}]^T}_{\text{Termine non-dissipativo in teoria gradiente}} + \underbrace{\frac{\ell_b^2 \sigma_Y}{d_0} \{ [(\text{Grad} \mathbf{D}_K) \mathbf{G}^{-1}]^t (\mathbf{G}^{-1} \mathbf{K}^{-T}) \}^t}_{\text{Termine dissipativo in teoria gradiente}}. \quad (5.4.16b)$$

Avendo l’obiettivo di ottenere la legge di flusso plastico per il modello in “teoria gradiente” [4], sostituiamo le espressioni ottenute nelle Equazioni (5.4.16a) e (5.4.16b) nella equazione dinamica associata al rimodellamento in (5.1.47). Per semplicità, supponiamo che nella Equazione (5.1.47) il tensore \mathbf{Z} sia nullo, ossia che siano nulli i contributi esterni dei “microstress” [4], e riscriviamo la (5.1.47) applicando il tensore metrico \mathbf{G} a sinistra e a destra di tale equazione. In definitiva, l’equazione dinamica per il rimodellamento assume la forma

$$\text{Sym}_0(\mathbf{Y}\mathbf{K}^T\mathbf{G}) = \text{Sym}_0((\text{Div}\mathbf{Y})\mathbf{K}^T\mathbf{G}). \quad (5.4.17)$$

Preliminarmente, esplicitiamo la divergenza materiale $\text{Div}\mathbf{Y}$ basandoci sulla espressione di \mathbf{Y} nella Equazione (5.4.16b), la cui scrittura in componenti è ottenuta ricordando le Equazioni (5.4.15a) e (5.4.15b):

$$\begin{aligned} \text{Div}\mathbf{Y} &= -J\mu_b L_b^2 \left[\frac{1}{\sqrt{G}} (\mathfrak{B}^{bT})_{AB} K^B_{F\varepsilon^{FDC}} \right]_{;C} \mathbf{E}^A \otimes \mathbf{E}_D \\ &\quad + \frac{\ell_b^2 \sigma_Y}{d_0} \{ (\text{Grad}\mathbf{D}\mathbf{K})_{AMN} (\mathbf{G}^{-1})^{NC} (\mathbf{G}^{-1} \mathbf{K}^{-T})^{MD} \}_{;C} \mathbf{E}^A \otimes \mathbf{E}_D \\ &= -\mu_b L_b^2 \left[\frac{1}{\sqrt{G}} (\mathfrak{B}^{bT})_{AB} K^B_{F\varepsilon^{FDC}} \right]_{;C} \mathbf{E}^A \otimes \mathbf{E}_D \\ &\quad + \frac{\ell_b^2 \sigma_Y}{d_0} (\text{Grad}\mathbf{D}\mathbf{K})_{AMN;C} (\mathbf{G}^{-1})^{NC} (\mathbf{G}^{-1} \mathbf{K}^{-T})^{MD} \mathbf{E}^A \otimes \mathbf{E}_D \\ &\quad + \frac{\ell_b^2 \sigma_Y}{d_0} (\text{Grad}\mathbf{D}\mathbf{K})_{AMN} (\mathbf{G}^{-1})^{NC} (\mathbf{G}^{-1})^{MB} (\mathbf{K}^{-T})_{B^D};C \mathbf{E}^A \otimes \mathbf{E}_D. \end{aligned} \quad (5.4.18)$$

L’ultima relazione ottenuta può essere ulteriormente semplificata sfruttando la relazione che lega il gradiente materiale di \mathbf{K}^{-T} con quello di \mathbf{K}^T , ossia

$$(\mathbf{K}^{-T})_{B^D};C = -(\mathbf{K}^{-T})_{B^I} (\mathbf{K}^T)_{I^J};C (\mathbf{K}^{-T})_{J^D}. \quad (5.4.19)$$

Dunque, sostituendo la Equazione (5.4.19) nella (5.4.18), si ottiene la seguente espressione per il tensore $\text{Div}\mathbf{Y}$:

$$\begin{aligned} \text{Div}\mathbf{Y} &= -J_K \mu_b L_b^2 \left[\frac{1}{J_K \sqrt{G}} (\mathfrak{B}^{bT})_{AB} K^B_{F\varepsilon^{FDC}} \right]_{;C} \mathbf{E}^A \otimes \mathbf{E}_D \\ &\quad + \frac{\ell_b^2 \sigma_Y}{d_0} (\text{Grad}\mathbf{D}\mathbf{K})_{AMN;C} (\mathbf{G}^{-1})^{NC} (\mathbf{G}^{-1} \mathbf{K}^{-T})^{MD} \mathbf{E}^A \otimes \mathbf{E}_D \\ &\quad - \frac{\ell_b^2 \sigma_Y}{d_0} (\text{Grad}\mathbf{D}\mathbf{K})_{AMN} (\mathbf{G}^{-1})^{NC} (\mathbf{G}^{-1} \mathbf{K}^{-T})^{MI} (\mathbf{K}^{-1})^D{}_J K^J{}_{I;C} \mathbf{E}^A \otimes \mathbf{E}_D. \end{aligned} \quad (5.4.20)$$

Inoltre, moltiplichiamo a destra le espressioni di \mathbf{Y} e $\text{Div}\mathbf{Y}$, riportate, rispettivamente, nella Equazione (5.4.16a) e (5.4.20), per il tensore $\mathbf{K}^T\mathbf{G}$, ottenendo

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}\mathbf{K}^T\mathbf{G} &= -J_K M_\nu^b + J_K \mu_b L_b^2 \mathbf{G}\mathfrak{B}\mathbf{G}\mathfrak{B}^T\mathbf{G} + \frac{\sigma_Y}{d_0} \mathbf{D}\mathbf{K} \\ &\quad - \frac{\ell_b^2 \sigma_Y}{d_0} (\text{Grad}\mathbf{D}\mathbf{K})_{AMN} (\mathbf{G}^{-1})^{NC} (\mathbf{G}^{-1} \mathbf{K}^{-T})^{MD} K^E{}_{D;C} G_{EQ} \mathbf{E}^A \otimes \mathbf{E}^Q, \end{aligned} \quad (5.4.21a)$$

$$(\text{Div}\mathbf{Y})\mathbf{K}^T\mathbf{G} = \left\{ -\mu_b L_b^2 \left[\frac{1}{\sqrt{G}} (\mathfrak{B}^{bT})_{AB} K^B_{F\varepsilon^{FDC}} \right]_{;C} (\mathbf{K}^T)_D{}^P G_{PQ} \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\ell_b^2 \sigma_Y}{d_0} [(\text{Grad} \mathbf{D}_{\mathbf{K}})_{AQN} (\mathbf{G}^{-1})^{NC}]_{;C} \\
 & - \frac{\ell_b^2 \sigma_Y}{d_0} (\text{Grad} \mathbf{D}_{\mathbf{K}})_{AMN} (\mathbf{G}^{-1})^{NC} (\mathbf{G}^{-1} \mathbf{K}^{-T})^{MI} K^P{}_{I;C} G_{PQ} \left. \vphantom{\frac{\ell_b^2 \sigma_Y}{d_0}} \right\} \mathbf{E}^A \otimes \mathbf{E}^Q.
 \end{aligned} \tag{5.4.21b}$$

Innanzitutto, osserviamo che il secondo termine del secondo membro della (5.4.21a) coincide con il terzo termine del secondo membro della (5.4.21b). Inoltre, conviene riscrivere il primo termine del secondo membro della Equazione (5.4.21b) utilizzando la *regola di Leibniz* per la derivata covariante, ossia

$$\begin{aligned}
 & -\mu_b L_b^2 \left[\frac{1}{\sqrt{G}} (\mathfrak{B}^{bT})_{AB} K^B{}_F \varepsilon^{FDC} \right]_{;C} (\mathbf{K}^T)_D{}^P G_{PQ} \mathbf{E}^A \otimes \mathbf{E}^Q \\
 & = -\mu_b L_b^2 \left[\frac{1}{\sqrt{G}} (\mathfrak{B}^{bT})_{AB} K^B{}_F \varepsilon^{FDC} K^P{}_D G_{PQ} \right]_{;C} \mathbf{E}^A \otimes \mathbf{E}^Q \\
 & + \mu_b L_b^2 \left[\frac{1}{\sqrt{G}} (\mathfrak{B}^{bT})_{AB} K^B{}_F \varepsilon^{FDC} K^P{}_{D;C} G_{PQ} \right] \mathbf{E}^A \otimes \mathbf{E}^Q.
 \end{aligned} \tag{5.4.22}$$

Prima di continuare a riscrivere i termini in (5.4.22), ricordiamo il seguente risultato sui simboli di Levi-Civita materiali.

Teorema 5.4.1 (Legge di trasformazione dei simboli di Levi-Civita materiali [27]).
 Siano ε^{ABC} i simboli di Levi-Civita materiali, ossia associati al piazzamento di riferimento \mathcal{B}_R , e sia \mathbf{K} il tensore di rimodellamento. Si può dimostrare che vale la seguente relazione:

$$\varepsilon^{BPR} J_{\mathbf{K}} = \varepsilon^{FDC} K^B{}_F K^P{}_D K^R{}_C. \tag{5.4.23}$$

Dimostrazione. Omessa. □

Dalla relazione (5.4.23), ricordando che $J_{\mathbf{K}} = 1$, segue che

$$(\mathbf{K}^{-1})^C{}_R \varepsilon^{BPR} = \varepsilon^{FDC} K^B{}_F K^P{}_D, \tag{5.4.24}$$

e, sostituendo la Equazione (5.4.24), possiamo riscrivere il primo termine nella Equazione (5.4.22) come

$$\begin{aligned}
 & -\mu_b L_b^2 \left[\frac{1}{\sqrt{G}} (\mathfrak{B}^{bT})_{AB} (\mathbf{K}^{-1})^C{}_R \varepsilon^{BPR} G_{PQ} \right]_{;C} \mathbf{E}^A \otimes \mathbf{E}^Q \\
 & = \mu_b L_b^2 \left[\frac{1}{\sqrt{G}} \varepsilon^{PBR} (\mathfrak{B}^{bT})_{AB} (\mathbf{K}^{-1})^C{}_R \right]_{;C} G_{PQ} \mathbf{E}^A \otimes \mathbf{E}^Q \\
 & = \mu_b L_b^2 [(\mathfrak{B}^{bT} \times \mathbf{K}^{-1})^P{}_A{}^C]_{;C} G_{PQ} \mathbf{E}^A \otimes \mathbf{E}^Q \\
 & = \mu_b L_b^2 [\text{Div}(\mathfrak{B}^{bT} \times \mathbf{K}^{-1})]^P{}_A G_{PQ} \mathbf{E}^A \otimes \mathbf{E}^Q \\
 & = \mu_b L_b^2 \{[\text{Div}(\mathfrak{B}^{bT} \times \mathbf{K}^{-1})]^T\}_A{}^P G_{PQ} \mathbf{E}^A \otimes \mathbf{E}^Q \\
 & = \mu_b L_b^2 \{[\text{Div}(\mathfrak{B}^{bT} \times \mathbf{K}^{-1})]^T \mathbf{G}\}_{AQ} \mathbf{E}^A \otimes \mathbf{E}^Q \\
 & = \mu_b L_b^2 [\text{Div}(\mathfrak{B}^{bT} \times \mathbf{K}^{-1})]^T \mathbf{G},
 \end{aligned} \tag{5.4.25}$$

dove, al secondo uguale, ricordando la definizione (2.1.63) di prodotto “vettoriale” [4] tra tensori, si è definito il tensore

$$(\mathfrak{B}^{bT} \times \mathbf{K}^{-1})^P{}_A{}^C := \frac{1}{\sqrt{G}} \varepsilon^{PBR} (\mathfrak{B}^{bT})_{AB} (\mathbf{K}^{-1})^C{}_R. \tag{5.4.26}$$

Il secondo termine della Equazione (5.4.22) può essere riscritto in una forma simile al secondo termine del secondo membro della (5.4.21a) come segue:

$$\begin{aligned}
 & \mu_b L_b^2 \left[\frac{1}{\sqrt{G}} (\mathfrak{B}^{bT})_{AB} K^B{}_F \varepsilon^{FDC} K^P{}_{D;C} G_{PQ} \right] \mathbf{E}^A \otimes \mathbf{E}^Q \\
 &= -J_K \mu_b L_b^2 (\mathfrak{B}^{bT})_{AB} \left[\frac{1}{J_K \sqrt{G}} K^B{}_F \varepsilon^{FCD} K^P{}_{D;C} \right] G_{PQ} \mathbf{E}^A \otimes \mathbf{E}^Q \\
 &= -J_K \mu_b L_b^2 G_{AM} (\mathfrak{B}^T)^{MN} G_{NB} \mathfrak{B}^{BP} G_{PQ} \mathbf{E}^A \otimes \mathbf{E}^Q \\
 &= -J_K \mu_b L_b^2 \mathbf{G} \mathfrak{B}^T \mathbf{G} \mathfrak{B} \mathbf{G}.
 \end{aligned} \tag{5.4.27}$$

Pertanto, sostituendo le due espressioni riportate nelle Equazioni (5.4.25) e (5.4.27) nel primo termine del secondo membro della (5.4.21b), si conclude che

$$\begin{aligned}
 (\text{Div } \mathfrak{Y}) \mathbf{K}^T \mathbf{G} &= \mu_b L_b^2 [\text{Div}(\mathfrak{B}^{bT} \times \mathbf{K}^{-1})]^T \mathbf{G} - J_K \mu_b L_b^2 \mathbf{G} \mathfrak{B}^T \mathbf{G} \mathfrak{B} \mathbf{G} \\
 &+ \frac{\ell_b^2 \sigma_Y}{d_0} \text{Div}[(\text{Grad } \mathbf{D}_K) \mathbf{G}^{-1}] \\
 &- \frac{\ell_b^2 \sigma_Y}{d_0} (\text{Grad } \mathbf{D}_K)_{AMN} (\mathbf{G}^{-1})^{NC} (\mathbf{G}^{-1} \mathbf{K}^{-T})^{MI} K^P{}_{I;C} G_{PQ} \mathbf{E}^A \otimes \mathbf{E}^Q.
 \end{aligned} \tag{5.4.28}$$

Per sostituire l’espressione di $\mathbf{Y} \mathbf{K}^T \mathbf{G}$ in (5.4.21a) e l’espressione di $(\text{Div } \mathfrak{Y}) \mathbf{K}^T \mathbf{G}$ in (5.4.28) nella Equazione (5.4.17), occorre esprimere esplicitamente le loro parti simmetriche e deviatoriche. Esplicitiamo, dunque, la definizione di parte simmetrica e deviatorica nel caso, rispettivamente, di un tensore del secondo ordine totalmente covariante e di un tensore del terzo ordine.

Definizione 5.4.1 (Parte simmetrica e deviatorica di un tensore del secondo ordine [4]). Dato un punto $X \in \mathcal{B}_R$ e una base $\{\mathbf{E}_I\}_{I=1}^3$ di $T_X \mathcal{B}_R$, consideriamo un tensore del secondo ordine $\mathbf{A} \in [T_X \mathcal{B}_R]_2^0$ ossia rappresentata da $\mathbf{A} = A_{IJ} \mathbf{E}^I \otimes \mathbf{E}^J$. Definiamo il tensore *parte simmetrica e deviatorica di \mathbf{A}* , indicato con $\text{Sym}_0(\mathbf{A})$, come il tensore del secondo ordine definito come

$$\begin{aligned}
 \text{Sym}_0(\mathbf{A}) &:= \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{G}^{-1} \mathbf{A}) \mathbf{G} \\
 &= \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) - \frac{1}{3} \mathbf{G}(\mathbf{G}^{-1} : \mathbf{A}).
 \end{aligned} \tag{5.4.29}$$

Definizione 5.4.2 (Parte simmetrica e deviatorica di un tensore del terzo ordine [4]). Dato un punto $X \in \mathcal{B}_R$ e una base $\{\mathbf{E}_I\}_{I=1}^3$ di $T_X \mathcal{B}_R$, consideriamo un tensore del terzo ordine $\mathcal{A} \in [T_X \mathcal{B}_R]_2^1$ ossia rappresentato da $\mathcal{A} = A_{IJK} \mathbf{E}^I \otimes \mathbf{E}^J \otimes \mathbf{E}^K$. Definiamo il tensore *parte simmetrica e deviatorica di \mathcal{A}* , indicato con $\text{SYM}_0(\mathcal{A})$, come il tensore del terzo ordine definito come [37]

$$\text{SYM}_0(\mathcal{A}) := \frac{1}{2}(\mathcal{A} + {}^t \mathcal{A}) - \frac{1}{3} \mathbf{G} \otimes (\mathbf{G}^{-1} : \mathcal{A}). \tag{5.4.30}$$

Dunque, possiamo sostituire le espressioni ottenute nelle Equazioni (5.4.21a) e (5.4.28) nell’equazione dinamica per il rimodellamento (5.4.17) e, richiamando la simmetria di \mathbf{M}_ν , le ipotesi di Gurtin&Anand [4] sul tasso \mathbf{D}_K , e semplificando i due termini uguali presenti nelle Equazioni (5.4.21a) e (5.4.21b), otteniamo che

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\ell_b^2 \sigma_Y}{d_0} \text{Sym}_0\{\text{Div}[(\text{Grad } \mathbf{D}_K) \mathbf{G}^{-1}]\} + \frac{\sigma_Y}{d_0} \mathbf{D}_K \\
 &= J_K \text{dev}(\mathbf{M}_\nu^b) - J_K \mu_b L_b^2 [\mathbf{G} \text{dev}(\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{B}^T + \mathfrak{B}^T \cdot \mathfrak{B}) \mathbf{G}] + \mu_b L_b^2 \text{Sym}_0\{[\text{Div}(\mathfrak{B}^{bT} \times \mathbf{K}^{-1})]^T \mathbf{G}\}.
 \end{aligned}$$

$$(5.4.31)$$

Osserviamo, inoltre, che per il primo termine a primo membro della Equazione (5.4.31) l'applicazione dell'operatore Sym_0 è superfluo, in quanto possiamo riscrivere tale termine, ragionando in componenti e ricordando la simmetria di \mathbf{D}_K , come

$$\begin{aligned} (\text{Sym}_0\{\text{Div}[(\text{Grad}\mathbf{D}_K)\mathbf{G}^{-1}]\})_{AQ} &= \frac{1}{2}[(\mathbf{D}_K)_{AQ;N}(\mathbf{G}^{-1})^{NC}]_{;C} + \frac{1}{2}[(\mathbf{D}_K)_{QA;N}(\mathbf{G}^{-1})^{NC}]_{;C} \\ &\quad - \underbrace{\frac{1}{3}G_{AQ}[\mathbf{G}^{-1}]^{LP}(\mathbf{D}_K)_{PL;N}(\mathbf{G}^{-1})^{NC}]_{;C}}_{=0} \\ &= [(\mathbf{D}_K)_{AQ;N}(\mathbf{G}^{-1})^{NC}]_{;C} \\ &= \{\text{Div}[(\text{Grad}\mathbf{D}_K)\mathbf{G}^{-1}]\}_{AQ}, \end{aligned} \quad (5.4.32)$$

da cui, riscrivendo il risultato in (5.4.32) in forma compatta, segue che

$$\text{Sym}_0\{\text{Div}[(\text{Grad}\mathbf{D}_K)\mathbf{G}^{-1}]\} = \text{Div}[(\text{Grad}\mathbf{D}_K)\mathbf{G}^{-1}]. \quad (5.4.33)$$

Si noti, in particolare, che il terzo termine dopo il primo uguale della Equazione (5.4.32) è nullo in quanto, grazie alla relazione $\text{Tr}\mathbf{D}_K = 0$, si conclude che

$$(\mathbf{G}^{-1})^{LP}(\mathbf{D}_K)_{PL;N} = (\mathbf{G}^{-1} : \mathbf{D}_K)_{;N} = [\text{Grad}(\text{Tr}\mathbf{D}_K)]_N = 0, \quad \forall N \in \{1,2,3\}. \quad (5.4.34)$$

Infine, possiamo riscrivere anche il terzo termine a secondo membro della Equazione (5.4.31) in modo tale che l'operatore Sym_0 e la divergenza possano “scambiarsi”. In particolare, riscriviamo tale termine nelle sue componenti, esplicitandole come nella Equazione (5.4.29), ossia

$$\begin{aligned} (\text{Sym}_0\{[\text{Div}(\mathfrak{B}^{bT} \times \mathbf{K}^{-1})]^T \mathbf{G}\})_{AQ} &= \frac{1}{2}(\mathfrak{B}^{bT} \times \mathbf{K}^{-1})^P{}_{A^C};C G_{PQ} \\ &\quad + \frac{1}{2}(\mathfrak{B}^{bT} \times \mathbf{K}^{-1})^P{}_{Q^C};C G_{PA} \\ &\quad - \frac{1}{3}G_{AQ}(\mathbf{G}^{-1} : [\text{Div}(\mathfrak{B}^{bT} \times \mathbf{K}^{-1})]^T \mathbf{G}) \\ &= \frac{1}{2}G_{QP}(\mathfrak{B}^{bT} \times \mathbf{K}^{-1})^P{}_{A^C};C \\ &\quad + \frac{1}{2}G_{AP}(\mathfrak{B}^{bT} \times \mathbf{K}^{-1})^P{}_{Q^C};C \\ &\quad - \frac{1}{3}G_{AQ}((\mathbf{G}^{-1})^{MN}(\mathfrak{B}^{bT} \times \mathbf{K}^{-1})^P{}_{M^C};C G_{PN}) \\ &= \frac{1}{2}[\mathbf{G}(\mathfrak{B}^{bT} \times \mathbf{K}^{-1})]_{QA^C};C \\ &\quad + \frac{1}{2}[\mathbf{G}(\mathfrak{B}^{bT} \times \mathbf{K}^{-1})]_{AQ^C};C \\ &\quad - \frac{1}{3}G_{AQ}((\mathbf{G}^{-1})^{NM}[\mathbf{G}(\mathfrak{B}^{bT} \times \mathbf{K}^{-1})]_{NM^C};C) \\ &= \frac{1}{2}\{^t[\mathbf{G}(\mathfrak{B}^{bT} \times \mathbf{K}^{-1})]\}_{AQ^C};C \\ &\quad + \frac{1}{2}[\mathbf{G}(\mathfrak{B}^{bT} \times \mathbf{K}^{-1})]_{AQ^C};C \\ &\quad - \frac{1}{3}\{\mathbf{G} \otimes [\mathbf{G}^{-1} : \mathbf{G}(\mathfrak{B}^{bT} \times \mathbf{K}^{-1})]\}_{AQ^C};C \\ &= \{\text{SYM}_0[\mathbf{G}(\mathfrak{B}^{bT} \times \mathbf{K}^{-1})]\}_{AQ^C};C \\ &= (\text{Div}\{\text{SYM}_0[\mathbf{G}(\mathfrak{B}^{bT} \times \mathbf{K}^{-1})]\})_{AQ}. \end{aligned} \quad (5.4.35)$$

Pertanto, alla luce della Equazione (5.4.35), possiamo riscrivere precedente termine, in forma compatta, come

$$\text{Sym}_0\{[\text{Div}(\mathfrak{B}^{bT} \times \mathbf{K}^{-1})]^T \mathbf{G}\} = \text{Div}\{\text{SYM}_0[\mathbf{G}(\mathfrak{B}^{bT} \times \mathbf{K}^{-1})]\}. \quad (5.4.36)$$

In conclusione, sostituendo le riscritture dei termini sopra calcolati nelle Equazioni (5.4.32) e (5.4.35) ed esplicitando che $J_{\mathbf{K}} = 1$, la legge di flusso plastico secondo la “teoria gradiente” [4] per la plasticità, nel caso di una miscela bifasica, ammette la seguente espressione:

$$-\frac{\ell_b^2 \sigma_Y}{d_0} \text{Div}[(\text{Grad} \mathbf{D}_{\mathbf{K}}) \mathbf{G}^{-1}] + \frac{\sigma_Y}{d_0} \mathbf{D}_{\mathbf{K}} = \text{dev} \mathbf{M}_\nu^b - L_b^2 \mathcal{R}(\mathbf{K}), \quad (5.4.37)$$

dove si è definito il termine forzante $\mathcal{R}(\mathbf{K})$ come

$$\mathcal{R}(\mathbf{K}) := \mu_b \left(\mathbf{G} \text{dev}(\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{B}^T + \mathfrak{B}^T \cdot \mathfrak{B}) \mathbf{G} - \text{Div}\{\text{SYM}_0[\mathbf{G}(\mathfrak{B}^{bT} \times \mathbf{K}^{-1})]\} \right). \quad (5.4.38)$$

Diversamente da quanto fatto in [4], adattiamo la Equazione (5.4.37) per far sì che essa realizzi il meccanismo di attivazione utilizzato anche dal modello standard, in (3.5.13). Dunque, in analogia all’equazione di flusso plastico scritta in forma materiale (3.5.30), otteniamo che la legge di flusso in “teoria gradiente” [4] assume la forma

$$-\ell_b^2 \text{Div}[(\text{Grad} \mathbf{D}_{\mathbf{K}}) \mathbf{G}^{-1}] + \mathbf{D}_{\mathbf{K}} = \frac{\gamma_{\mathbf{K}}}{J} \left\{ \text{dev} \mathbf{M}_\nu^b - L_b^2 \mathcal{R}(\mathbf{K}) \right\}, \quad (5.4.39)$$

dove il termine di attivazione $\gamma_{\mathbf{K}}$ è definito come in (3.5.14).

Osservazione 38 (Confronto tra le leggi di flusso plastiche).

Attraverso uno studio parametrico delle lunghezze ℓ_b e L_b , si nota che la Equazione (3.5.30), ossia la legge di flusso plastico nel modello standard, è un caso particolare della legge nel caso della “teoria gradiente”, come espresso in Equazione (5.4.39). Infatti, se le lunghezze caratteristiche ℓ_b e L_b sono poste uguali a zero, allora la legge di flusso in teoria gradiente permette di riottenere la legge di flusso standard. In particolare, la legge di flusso nel modello in “teoria gradiente” [4] si differenzia da quella del modello standard per la presenza dei seguenti termini:

- un termine di “diffusione”, ossia il primo termine della Equazione (5.4.39), in cui compare un operatore ellittico applicato al tensore $\mathbf{D}_{\mathbf{K}}$, il quale è soppesato dal quadrato della lunghezza caratteristica dissipativa ℓ_b .
- un termine “forzante” aggiuntivo associato al rimodellamento, ossia il termine $\mathcal{R}(\mathbf{K})$, il quale viene soppesato dal quadrato della lunghezza caratteristica energetica L_b .

Capitolo 6

Problemi *benchmark*

6.1 Riepilogo dei modelli nel caso bifasico

Nei precedenti due capitoli, sono stati formalizzati due modelli per lo studio di tessuti biologici, modellabili come mezzi bifasici, le cui equazioni descrivono l'evoluzione del moto della fase solida, del fluido interstiziale e delle distorsioni anelastiche presenti nel solido. La differenza chiave tra i due modelli risiede, come visto nei Capitolo 3 e 5, nel differente approccio allo studio del rimodellamento. Infatti, nel Capitolo 3 la plasticità è stata studiata tramite l'utilizzo di una “*normality rule*” nell'ambito della plasticità di tipo J_2 alla Perzyna [24, 25, 9], mentre nel Capitolo 5 si è utilizzato un approccio secondo la “*teoria gradiente*” [4, 37]. In particolare, ricordiamo che le equazioni di *bulk* dei due modelli proposti, espresse nella loro forma materiale come equazioni sul piazzamento di riferimento \mathcal{B}_R , per la fase solida e fluida sono le seguenti:

$$\text{Div}[-J\mathbf{p}\mathbf{F}^{-T} + \mathbf{P}_{sc}] + J[(\rho\mathbf{f}) \circ (\chi, \mathbf{t})] = \mathbf{0}, \quad \text{in } \mathcal{B}_R, \quad t > 0, \quad (6.1.1a)$$

$$\dot{J} - \text{Div}[\mathbf{\Pi}(\text{Grad}\mathbf{p} - \varrho_f\mathbf{f}_R)] = 0, \quad \text{in } \mathcal{B}_R, \quad t > 0, \quad (6.1.1b)$$

dove la forza \mathbf{f} per unità di massa viene identificata con la accelerazione di gravità.

Per quanto riguarda la fase fluida, in entrambi i modelli si fa riferimento alla permabilità idraulica materiale $\mathbf{\Pi}$ definita nella Equazione (3.4.40), ossia

$$\mathbf{\Pi} = J\pi_0 \left[\frac{J - J_{\mathbf{K}}\Phi_{s\nu}}{1 - J_{\mathbf{K}}\Phi_{s\nu}} \right]^\kappa \exp \left[\frac{m_0}{2} \left(\frac{J^2 - J_{\mathbf{K}}^2}{J_{\mathbf{K}}^2} \right) \right] \mathbf{C}^{-1}. \quad (6.1.2)$$

Per quanto concerne il modello per l'evoluzione delle distorsioni plastiche, ricordiamo le equazioni che avevamo ottenuto, rispettivamente, nel Capitolo 3 e 5, ossia

Modello standard (ODE)

$$\mathbf{D}_{\mathbf{K}} = \frac{\gamma_{\mathbf{K}}}{J} \text{dev} \mathbf{M}_{\nu}^b, \quad \text{su } \mathcal{B}_R, \quad t > 0, \quad (6.1.3a)$$

Modello secondo la “teoria gradiente” (PDE)

$$-\ell_b^2 \text{Div}[(\text{Grad}\mathbf{D}_{\mathbf{K}})\mathbf{G}^{-1}] + \mathbf{D}_{\mathbf{K}} = \frac{\gamma_{\mathbf{K}}}{J} \left\{ \text{dev} \mathbf{M}_{\nu}^b - L_b^2 \mathcal{R}(\mathbf{K}) \right\}, \quad \text{su } \mathcal{B}_R, \quad t > 0, \quad (6.1.3b)$$

$$\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}_{\mathbf{K}} \mathbf{K}, \quad \text{su } \mathcal{B}_R, \quad t > 0, \quad (6.1.3c)$$

dove il parametro di attivazione $\gamma_{\mathbf{K}}$, dipendente dallo sforzo costitutivo della fase solida $\boldsymbol{\sigma}_{sc}$ e dallo sforzo di snervamento σ_Y , è definito come

$$\gamma_{\mathbf{K}} = \lambda_0 \frac{[\Phi_s \circ (\Xi, \mathcal{T})]}{[J \circ (\Xi, \mathcal{T})]} \frac{[\|\text{dev} \boldsymbol{\sigma}_{sc}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_Y]_+}{\|\text{dev} \boldsymbol{\sigma}_{sc}\|}. \quad (6.1.4)$$

Inoltre, nel caso del modello in teoria gradiente, il termine “forzante” $\mathfrak{R}(\mathbf{K})$ è definito come nella Equazione (5.4.38), ossia

$$\mathfrak{R}(\mathbf{K}) := \mu_b \left(\mathbf{G} \operatorname{dev}(\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{B}^T + \mathfrak{B}^T \cdot \mathfrak{B}) \mathbf{G} - \operatorname{Div}\{\operatorname{SYM}_0[\mathbf{G}(\mathfrak{B}^{bT} \times \mathbf{K}^{-1})]\} \right). \quad (6.1.5)$$

Il tensore \mathbf{P}_{sc} , ossia la parte costitutiva del primo tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff associato alla fase solida, e $\operatorname{dev}\mathbf{M}_\nu^b$, ossia la parte deviatorica del tensore degli sforzi di Mandel “bemollizzato” associato allo stato naturale, sono ottenibili come visto nelle Equazioni (3.4.24) e (3.5.31). In particolare, a seguito della richiesta che la fase solida del provino sia composta da un materiale omogeneo, isotropo e iperelastico di tipo Neo-Hookeano, possiamo esprimere costitutivamente \mathbf{P}_{sc} e $\operatorname{dev}\mathbf{M}_\nu^b$ come

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\text{sc}} &= \mathfrak{F}^{\mathbf{P}_{\text{sc}}} \circ (\mathbf{F}, \mathbf{K}) \\ &= J_{\mathbf{K}}[\mathbf{g} \circ (\chi, \mathfrak{t})] \mathbf{F} [\mu_e(\mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{K}^{-T} - \mathbf{C}^{-1}) + \frac{1}{2} \lambda_e(\log I_{3e}) \mathbf{C}^{-1}], \end{aligned} \quad (6.1.6a)$$

$$\operatorname{dev}\mathbf{M}_\nu^b = \mathfrak{F}^{\operatorname{dev}\mathbf{M}_\nu^b} \circ (\mathbf{F}, \mathbf{K}) = \mu_e \operatorname{dev}(\mathbf{K}^{-T} \mathbf{C} \mathbf{K}^{-1}). \quad (6.1.6b)$$

In questo capitolo finale, siamo interessati a confrontare i due modelli proposti, tramite l’implementazione nel software commerciale agli Elementi Finiti COMSOL Multiphysics®, due problemi *benchmark* noti in Letteratura [29, 30]. In particolare, modelleremo dapprima un problema di *indentazione* in controllo di carico, in cui una forza di taglio deforma un provino cubico [8], e, in seguito, un problema di *torsione* in controllo di spostamento [8].

I due modelli descritti precedentemente sono costruiti su un piazzamento di riferimento \mathcal{B}_R che, per semplicità, viene preso come un parallelepipedo regolare. In particolare, per questi parallelepipedi possiamo individuare delle porzioni di bordo, che chiamiamo *facce*, che permettono la decomposizione del bordo $\partial\mathcal{B}_R$ come

$$\partial\mathcal{B}_R = \mathcal{F}_T \cup \mathcal{F}_B \cup \mathcal{F}_L, \quad (6.1.7)$$

dove \mathcal{F}_T è la faccia superiore (“Top”), \mathcal{F}_B è la faccia inferiore (“Bottom”) e \mathcal{F}_L intendiamo la faccia laterale (“Lateral”). Assumiamo, nel seguito, che l’intervallo di tempo \mathcal{T} sia preso come un intervallo chiuso e limitato del tipo $\mathcal{T} = [0, T_f]$ dove T_f indica il tempo di fine simulazione.

6.1.1 *Benchmark: Indentazione in controllo di carico*

Consideriamo un provino di materiale poro-elastoplastico, *bifasico*, di forma cubica e con un lato di $200 \mu\text{m}$, la cui faccia inferiore \mathcal{F}_B è incastrata e la cui faccia laterale \mathcal{F}_L è libera. Sulla faccia superiore \mathcal{F}_T , ed in particolare sulla curva $\gamma : [0, T_f] \rightarrow \mathcal{F}_T$ il cui supporto è il segmento mediano che collega due lati opposti, che prende il nome di *linea di indentazione*, viene applicata una forza, indicata con $\boldsymbol{\tau}_R(X, t)$. In particolare, come si può vedere nel *disegno* in Figura 6.1, possiamo esprimere tale forza come

$$\boldsymbol{\tau}_R(X, t) = \boldsymbol{\tau}_{\text{ind}}(t) \delta(X - \gamma(t)), \quad \forall X \in \mathcal{B}_R, \quad \forall t \in [0, T_f], \quad (6.1.8)$$

dove con $\delta(X - \gamma(t))$ intendiamo la Delta di Dirac lungo la curva γ e la norma $\boldsymbol{\tau}_{\text{ind}}(t) = \|\boldsymbol{\tau}_{\text{ind}}(t)\|$ indica la dipendenza dell’intensità con cui il provino viene compresso lungo la linea di indentazione rispetto al tempo. Dal punto di vista implementativo, per motivi di instabilità numerica, si è optato per realizzare l’indentazione pensando alla linea come ad una striscia sottile e alla forza di contatto $\boldsymbol{\tau}_R$ come ad una forza per unità di superficie. Come si può osservare in Figura 6.2, la trazione $\boldsymbol{\tau}_{\text{ind}}(t)$ è nulla per i primi 25s, poi da 25s fino a 50s si ha un incremento lineare del carico fino al valore massimo di 10 kPa di

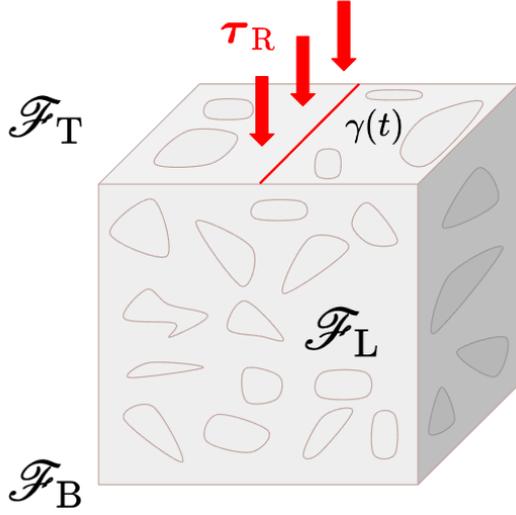


Figura 6.1: Problema *benchmark* di indentaione per il modello bifasico, dove viene rappresentata in rosso la linea di indentaione e il corrispondente carico applicato.

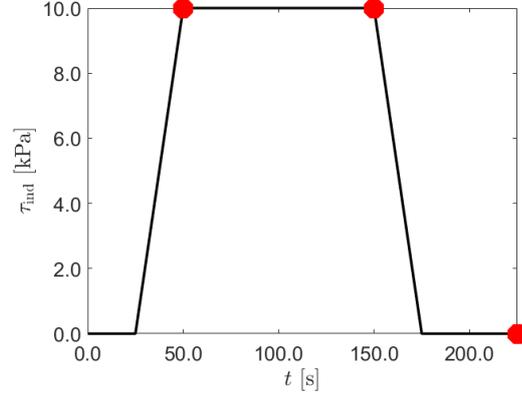


Figura 6.2: Programma di carico nel problema *benchmark* di indentaione. In particolare, i pallini rossi in figura corrispondono agli istanti di tempo più salienti per la simulazione che sono rappresentati nelle figure successive.

compressione. In seguito, vi è una fase di mantenimento del carico costante da 50 s fino a 150 s, a cui segue una decrescita lineare del carico applicato fino ad arrivare a rimuovere completamente il carico a 175 s. Infine, da 175 s fino a fine simulazione, ossia a $T_f = 225$ s viene mantenuto il carico nullo.

Per quanto riguarda le condizioni al contorno per l'equazione associata al moto χ , ossia la Equazione (6.1.1a), identifichiamo il bordo di Dirichlet $\partial_D^X \mathcal{B}_R$ con la faccia inferiore del provino \mathcal{F}_B in cui vincoliamo il corpo a rimanere fisso. Ciò implica che

$$\partial_D^X \mathcal{B}_R \equiv \mathcal{F}_B \quad \Longrightarrow \quad \chi|_{\mathcal{F}_B}(X, t) = X, \quad t \in]0, T_f]. \quad (6.1.9)$$

Inoltre, identifichiamo il bordo di Neumann per χ , indicato con $\partial_N^X \mathcal{B}_R$, con l'unione della faccia laterale e di quella superiore, ossia $\mathcal{F}_L \cup \mathcal{F}_T$, e assumiamo che il bordo laterale sia *libero* e che, come osservato precedentemente, sulla faccia superiore sia applicata la forza di indentaione lungo la linea di carico $\gamma(t)$. Si richiede, dunque, che

$$\partial_N^X \mathcal{B}_R \equiv \mathcal{F}_L \cup \mathcal{F}_T \quad \Longrightarrow \quad (\mathbf{P}_s \mathbf{N})|_{\mathcal{F}_L}(X, t) = \mathbf{0}, \quad t \in]0, T_f], \quad (6.1.10a)$$

$$\Longrightarrow \quad (\mathbf{P}_s \mathbf{N})|_{\mathcal{F}_T}(X, t) = \tau_{\text{ind}}(t) \delta(X - \gamma(t)), \quad t \in]0, T_f]. \quad (6.1.10b)$$

L'equazione del modello per la fase fluida, ossia la Equazione (6.1.1b), richiede anch'essa delle condizioni al contorno per essere risolta, ossia richiede di assegnare sui bordi di Neumann $\partial_N^p \mathcal{B}_R$ i valori di $\mathbf{P}_f \mathbf{N}$, dove \mathbf{N} è il campo delle co-normali al bordo. Tuttavia tramite l'utilizzo del modello di Darcy, possiamo equivalentemente imporre delle condizioni sul valore della pressione p al bordo e sulla velocità di filtrazione normale $\mathbf{Q} \mathbf{N}$ al bordo. In particolare, assumiamo che la velocità di filtrazione normale sia nulla su \mathcal{F}_B e su \mathcal{F}_L (sottolineiamo che \mathcal{F}_L è impermeabile) e che su \mathcal{F}_T la pressione sia nulla, ossia che il fluido possa uscire liberamente. Possiamo, dunque, scrivere che

$$\partial_N^p \mathcal{B}_R \equiv \mathcal{F}_B \cup \mathcal{F}_L \quad \Longrightarrow \quad (\mathbf{Q} \mathbf{N})|_{(\mathcal{F}_B \cup \mathcal{F}_L)}(X, t) = \mathbf{0}, \quad t \in]0, T_f], \quad (6.1.11a)$$

$$\partial_D^p \mathcal{B}_R \equiv \mathcal{F}_T \quad \Longrightarrow \quad p|_{\mathcal{F}_T}(X, t) = 0, \quad t \in]0, T_f], \quad (6.1.11b)$$

essendo $\partial_N^p \mathcal{B}_R$ e $\partial_D^p \mathcal{B}_R$, rispettivamente, il bordo di Neumann e Dirichlet per la pressione.

Nel seguito, viene confrontato il modello standard della plasticità riportato nella Equazione (6.1.3a) con il modello secondo la teoria gradiente in (6.1.3b). Nel caso del modello standard si ha una ODE per il tensore \mathbf{K} , dunque in tal caso non vi è necessità di introdurre delle condizioni al contorno. Per il modello in “teoria gradiente” [4], invece, si ha una PDE nella variabile \mathbf{D}_K a cui sono associate le condizioni al contorno viste nella Equazione (5.1.49d), le quali necessitano di sostituire le espressioni analitiche di \mathbf{Y} date in (5.4.16b). Per semplicità, nel seguito faremo riferimento a condizioni di Neumann omogenee per la variabile \mathbf{K} su tutto il corpo, ossia

$$\partial_N^K \mathcal{B}_R \equiv \partial \mathcal{B}_R \quad \Longrightarrow \quad (\mathbf{Y}\mathbf{N})|_{\partial \mathcal{B}_R}(X, t) = \mathbf{0}, \quad t \in]0, T_f]. \quad (6.1.12)$$

Per concludere l’inizializzazione del problema *benchmark* in esame, dobbiamo assegnare le condizioni iniziali per le Equazioni (6.1.1a), (6.1.1b) e per l’equazione del rimodellamento, indipendentemente dal fatto che il modello di plasticità sia quello standard oppure quello secondo “teoria gradiente” [4]. Pertanto, assumendo che il piazzamento di riferimento \mathcal{B}_R coincida con il piazzamento iniziale, assegniamo le seguenti condizioni iniziali:

$$\chi(X, 0) = X, \quad \text{su } \mathcal{B}_R, \quad t = 0, \quad (6.1.13a)$$

$$\mathbf{p}(X, 0) = 0, \quad \text{su } \mathcal{B}_R, \quad t = 0, \quad (6.1.13b)$$

$$\mathbf{K}(X, 0) = \mathbf{I}(X), \quad \text{su } \mathcal{B}_R, \quad t = 0. \quad (6.1.13c)$$

Inoltre, nel caso del modello in teoria gradiente, come conseguenza della Equazione (6.1.13c), si ha come ulteriore condizione iniziale che il tasso \mathbf{D}_K è inizialmente uguale al tensore nullo:

$$\mathbf{D}_K(X, 0) = \mathbf{0}, \quad \text{in } \mathcal{B}_R, \quad t = 0. \quad (6.1.14)$$

In riferimento al problema *benchmark* di indentazione in esame, proponiamo, per semplicità, i seguenti quadri riassuntivi delle simulazioni svolte, in cui sono esposti il modello matematico e le relative condizioni iniziali e al contorno:

Problema di indentazione - Modello standard [ODE]

Equazioni del modello:

$$\text{Div}[-\mathbf{p}J\mathbf{F}^{-T} + \mathbf{P}_{sc}] + J[(\rho\mathbf{f}) \circ (\chi, \mathbf{t})] = \mathbf{0}, \quad \text{in } \mathcal{B}_R, \quad t \in]0, T_f],$$

$$\dot{J} - \text{Div}[\mathbf{II}(\text{Grad}\mathbf{p} - \varrho_f\mathbf{f}_R)] = 0, \quad \text{in } \mathcal{B}_R, \quad t \in]0, T_f],$$

$$\dot{\mathbf{K}} = \frac{\gamma_K}{J} \mathbf{G}^{-1}(\text{dev}\mathbf{M}_\nu^b)\mathbf{K}, \quad \text{in } \mathcal{B}_R \quad t \in]0, T_f].$$

Condizioni al contorno:

$$\partial_D^X \mathcal{B}_R \equiv \mathcal{F}_B \quad \Longrightarrow \quad \chi|_{\mathcal{F}_B}(X, t) = X, \quad t \in]0, T_f],$$

$$\partial_N^X \mathcal{B}_R \equiv \mathcal{F}_L \cup \mathcal{F}_T \quad \Longrightarrow \quad (\mathbf{P}_s\mathbf{N})|_{\mathcal{F}_L}(X, t) = \mathbf{0}, \quad t \in]0, T_f],$$

$$(\mathbf{P}_s\mathbf{N})|_{\mathcal{F}_T}(X, t) = \boldsymbol{\tau}_{\text{ind}}(t)\delta(X - \gamma(t)), \quad t \in]0, T_f],$$

$$\partial_N^p \mathcal{B}_R \equiv \mathcal{F}_B \cup \mathcal{F}_L \quad \Longrightarrow \quad (\mathbf{Q}\mathbf{N})|_{(\mathcal{F}_B \cup \mathcal{F}_L)}(X, t) = \mathbf{0}, \quad t \in]0, T_f],$$

$$\partial_D^p \mathcal{B}_R \equiv \mathcal{F}_T \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{p}|_{\mathcal{F}_T}(X, t) = 0 \quad t \in]0, T_f].$$

Condizioni iniziali:

$$\chi(X, 0) = X, \quad \text{in } \mathcal{B}_R, \quad t = 0,$$

$$\mathbf{p}(X, 0) = 0, \quad \text{in } \mathcal{B}_R, \quad t = 0,$$

$$\mathbf{K}(X, 0) = \mathbf{I}(X), \quad \text{in } \mathcal{B}_R, \quad t = 0.$$

Problema di indentazione - Modello secondo “teoria gradiente” [PDE]

Equazioni del modello:

$$\begin{aligned}
 \text{Div}[-\mathbf{p}J\mathbf{F}^{-T} + \mathbf{P}_{\text{sc}}] + J[(\rho\mathbf{f}) \circ (\chi, \mathbf{t})] &= \mathbf{0}, & \text{in } \mathcal{B}_R, \quad t \in]0, T_f], \\
 \dot{j} - \text{Div}[\mathbf{II}(\text{Grad}\mathbf{p} - \varrho_f\mathbf{f}_R)] &= 0, & \text{in } \mathcal{B}_R, \quad t \in]0, T_f], \\
 -\ell_b^2 \text{Div}[(\text{Grad}\mathbf{D}_K)\mathbf{G}^{-1}] + \mathbf{D}_K &= \frac{\gamma\mathbf{K}}{J} \left\{ \text{dev}\mathbf{M}_\nu^b - L_b^2\mathcal{R}(\mathbf{K}) \right\}, & \text{in } \mathcal{B}_R \quad t \in]0, T_f], \\
 \dot{\mathbf{K}} &= \mathbf{G}^{-1}\mathbf{D}_K\mathbf{K}, & \text{in } \mathcal{B}_R \quad t \in]0, T_f].
 \end{aligned}$$

Condizioni al contorno:

$$\begin{aligned}
 \partial_D^X \mathcal{B}_R \equiv \mathcal{F}_B &\implies \chi|_{\mathcal{F}_B}(X, t) = X, & t \in]0, T_f], \\
 \partial_N^X \mathcal{B}_R \equiv \mathcal{F}_L \cup \mathcal{F}_T &\implies (\mathbf{P}_s\mathbf{N})|_{\mathcal{F}_L}(X, t) = \mathbf{0}, & t \in]0, T_f], \\
 &(\mathbf{P}_s\mathbf{N})|_{\mathcal{F}_T}(X, t) = \boldsymbol{\tau}_{\text{ind}}(t)\delta(X - \gamma(t)), & t \in]0, T_f], \\
 \partial_N^p \mathcal{B}_R \equiv \mathcal{F}_B \cup \mathcal{F}_L &\implies (\mathbf{Q}\mathbf{N})|_{(\mathcal{F}_B \cup \mathcal{F}_L)}(X, t) = \mathbf{0}, & t \in]0, T_f], \\
 \partial_D^p \mathcal{B}_R \equiv \mathcal{F}_T &\implies \mathbf{p}|_{\mathcal{F}_T}(X, t) = 0 & t \in]0, T_f]. \\
 \partial_N^K \mathcal{B}_R \equiv \partial\mathcal{B}_R &\implies (\mathbf{y}\mathbf{N})|_{\partial\mathcal{B}_R}(X, t) = \mathbf{0} & t \in]0, T_f].
 \end{aligned}$$

Condizioni iniziali:

$$\begin{aligned}
 \chi(X, 0) &= X, & \text{in } \mathcal{B}_R, & \quad t = 0, \\
 \mathbf{p}(X, 0) &= \mathbf{0}, & \text{in } \mathcal{B}_R, & \quad t = 0, \\
 \mathbf{K}(X, 0) &= \mathbf{I}(X), \quad \mathbf{D}_K(X, 0) = \mathbf{0}, & \text{in } \mathcal{B}_R, & \quad t = 0.
 \end{aligned}$$

Parametri del modello bifasico nel problema di indentazione

Nella Tabella 6.1 si riportano i valori dei parametri materiali per il provino in esame.

Parametri	Valori	Unità	Riferimento	Equazione
Φ_{sv}	0.6		[35]	(6.1.2), (6.1.4)
ϱ_s	10^{-3}	[kg/m ³]	[35]	(6.1.1a)
ϱ_f	10^{-3}	[kg/m ³]	[35]	(6.1.1b)
π_0	2.578×10^{-3}	[mm ⁴ /(N s)]	[35]	(6.1.2)
κ	0.0848		[35]	(6.1.2)
m_0	4.638		[35]	(6.1.2)
λ_0	1.0	[mm ² /(N s)]	[8, 31]	(6.1.4)
σ_y	0.5	[kPa]	[8, 31]	(6.1.4)
ℓ_b	10	[μm]	[8, 31]	(6.1.3b)
L_b	10	[μm]	[8, 31]	(6.1.3b)
μ_b	10	[kPa]	[8, 31]	(6.1.5)
μ_e	20	[kPa]	[35]	(6.1.6a)
λ_e	13	[kPa]	[35]	(6.1.6a), (6.1.6b)

 Tabella 6.1: Parametri materiali utilizzati nelle simulazioni del problema *benchmark* di indentazione per il confronto dei modelli **ODE** e **PDE** degli specchietti precedenti.

Confronto dell'abbassamento della linea di indentazione

Un primo fattore di confronto che abbiamo tenuto sotto osservazione, tramite le simulazioni, è il recupero della forma a seguito della rimozione dei carichi imposti. Infatti, siccome la microstruttura del materiale in esame è soggetto al *rimodellamento*, ci aspettiamo che, per entrambi i modelli, il corpo presenti una deformazione residua non nulla alla fine della simulazione [16, 17]. In particolare, riportiamo nella Figura 6.3 come la posizione del punto centrale della linea di indentazione. Durante la fase di aumento del carico imposto, si osserva

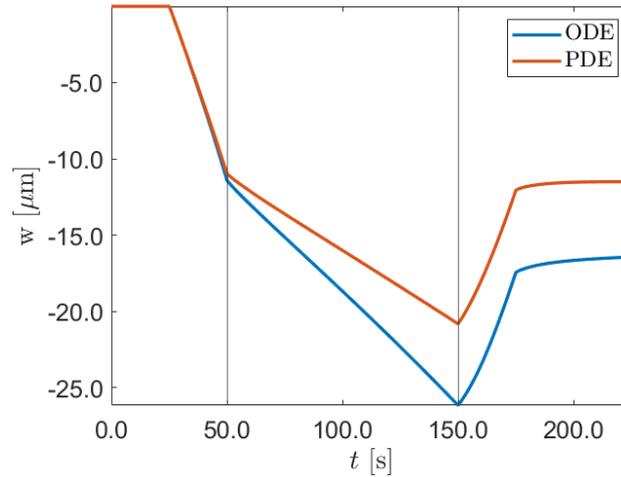


Figura 6.3: Confronto dello spostamento verticale del punto centrale della linea di indentazione nel caso del modello standard e di quello secondo “teoria gradiente” [4].

in entrambi i modelli il medesimo abbassamento del punto mediano. In seguito, durante la fase di mantenimento del carico costante, si osserva che il modello **PDE** predice uno spostamento minore, in valore assoluto, rispetto a quello predetto dal modello **ODE**, fino ad un massimo di circa $5 \mu\text{m}$. Infine, nella fase in cui avviene il rilascio graduale del carico, e la sua conseguente rimozione (il primo tratto dell’ultimo riquadro in Figura 6.3), si osserva un recupero della deformazione qualitativamente simile tra i due modelli. In definitiva, il modello **PDE** mostra un maggior recupero della deformazione imposta, il che potrebbe essere dovuto al contributo della “forzante” $\mathcal{R}(\mathbf{K})$ che tende ad attenuare il rimodellamento, diminuendo, di conseguenza, la deformazione residua.

Confronto della pressione nella sezione verticale centrale

Un secondo fattore che abbiamo confrontato è la distribuzione della pressione della fase fluida all’interno del provino. In particolare, come si è riportato nella Figura 6.4, si sono confrontate le distribuzioni della pressione lungo la sezione verticale centrale del provino, ortogonale rispetto alla linea di indentazione, negli istanti $t = 50$ s, $t = 150$ s e $t = 225$ s. Come osservato nella didascalia della Figura 6.2, tali istanti di tempo corrispondono, rispettivamente, all’inizio della fase di mantenimento, alla fine della fase di mantenimento e alla fine della simulazione. Nella Figura 6.4 si osserva che i profili della pressione ottenuti dai due modelli sono *qualitativamente* simili. Istante per istante, i modelli prevedono che:

- per $t = 50$ s, vi sia un accumulo di pressione, sotto la linea di indentazione, in quanto, fino a quel momento, il materiale è sottoposto a carichi crescenti;

- per $t = 150$ s, vi è la fine di un processo di fuoriuscita di fluido attraverso \mathcal{F}_T , che porta ad un abbassamento della pressione e ad una conseguente stratificazione verticale della pressione stessa;
- per $t = 225$ s, si osserva, in entrambi i modelli, che il provino si trova in uno stato di lieve depressione, che porterebbe ad un flusso entrante attraverso \mathcal{F}_T .

Dal punto di vista *quantitativo*, invece, si osserva che i valori di pressione sono leggermente più bassi nel caso del modello secondo “teoria gradiente”.

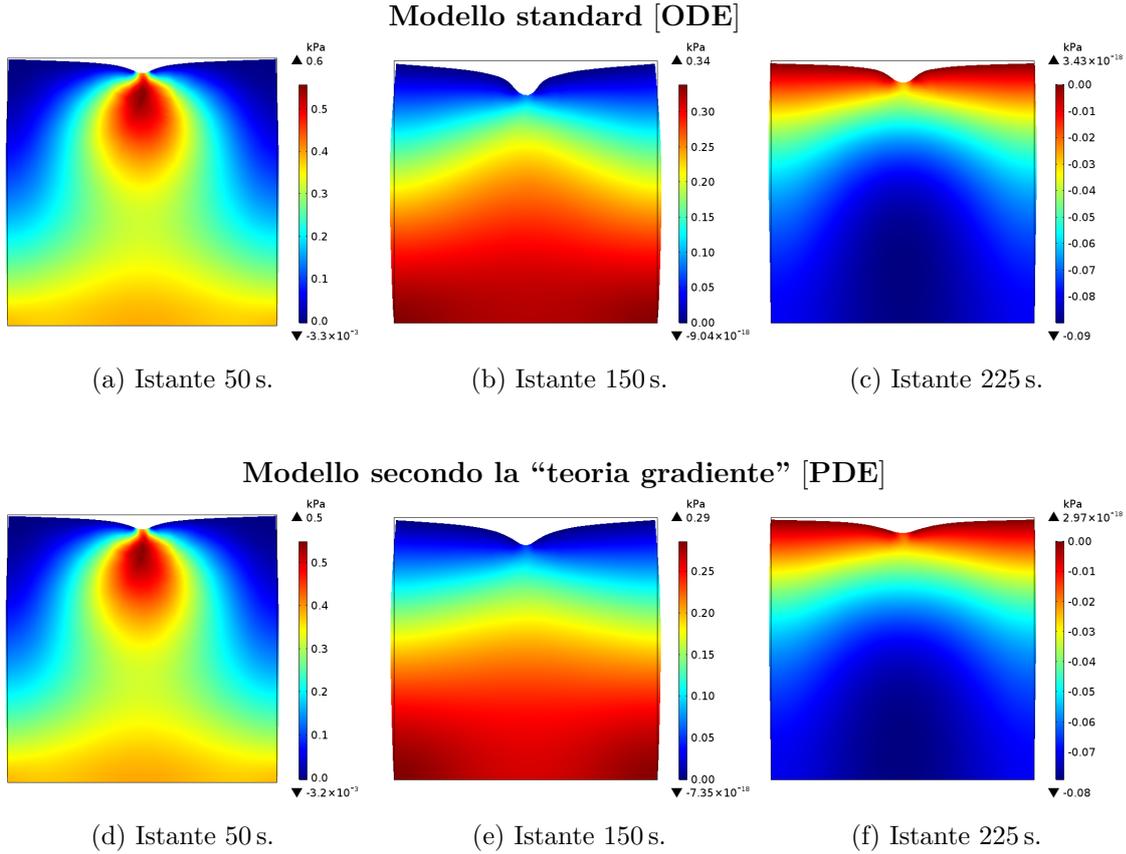


Figura 6.4: Grafico della pressione sulla sezione verticale centrale del provino ortogonale alla linea di indentazione. A tempo fissato, si osserva un comportamento *qualitativamente* simile nei due modelli. La pressione è leggermente minore nel caso **PDE** rispetto a quello **ODE**.

Un aspetto che è interessante osservare dalla Figura 6.4 riguarda la deformazione residua che viene impressa dal carico nella zona limitrofa alla linea di indentazione. Infatti, non solo si vede chiaramente che il modello **PDE** prevede un maggior recupero della deformazione, come osservato anche nella Figura 6.3, ma prevede anche una maggiore regolarità della superficie superiore. Riteniamo che questo fenomeno possa essere imputabile alla capacità del modello in “teoria gradiente” [4] di risolvere gli *effetti di bordo* il che è dovuto ad una cinematica più “ricca” rispetto al caso del modello standard **ODE**.

Siccome, per la scelta dei parametri utilizzati nella Tabella 6.1, il comportamento qualitativo della fase fluida è il medesimo per i due modelli, abbiamo deciso di simulare un altro problema *benchmark* in cui gli effetti di incompatibilità delle distorsioni anelastiche, misurati da \mathfrak{B} , potessero essere più evidenti. Siccome il tensore \mathfrak{B} dipende da $\text{Curl}\mathbf{K}$, si è deciso, di conseguenza, di implementare un problema di *torsione* per un provino bifasico.

6.1.2 Benchmark: Torsione in controllo di spostamento

Consideriamo un provino di materiale poro-elastoplastico *bifasico* la cui forma è quella di una parallelepipedo retto con un lato di $400 \mu\text{m}$ di altezza e con un lato di base lungo $200 \mu\text{m}$, incastrato in corrispondenza di \mathcal{F}_B e libero su \mathcal{F}_L . In riferimento al *disegno* in Figura 6.5, sulla faccia superiore \mathcal{F}_T viene assegnata una *torsione piana*, ossia, data la funzione $\theta : [0, T_f] \rightarrow \mathbb{R}$ che assegna ad ogni istante di tempo un angolo espresso in radianti, prescriviamo, in componenti, che su \mathcal{F}_T il moto sia

$$\chi^1(X^1, X^2, X^3, t) = -X^1 + X^1 \cos \theta(t) - X^2 \sin \theta(t), \quad (6.1.18a)$$

$$\chi^2(X^1, X^2, X^3, t) = -X^2 + X^2 \cos \theta(t) + X^1 \sin \theta(t), \quad (6.1.18b)$$

$$\chi^3(X^1, X^2, X^3, t) = X^3. \quad (6.1.18c)$$

Come si può osservare dalla Figura 6.6, l'angolo $\theta(t)$ che viene prescritto è nullo per i primi 25s, si ha un incremento lineare fino all'angolo massimo di π radianti da 25s fino a 75s. In seguito, vi è una fase di mantenimento della spostamento imposto da 75s fino a 150s, a cui segue una rotazione inversa della faccia superiore fino a tornare all'angolo iniziale a 200s. Infine, da 200s fino a $T_f = 250$ s, ossia la fine della simulazione, viene mantenuto lo spostamento angolare nullo.

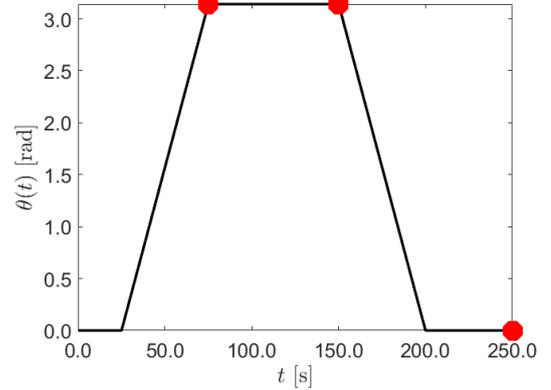
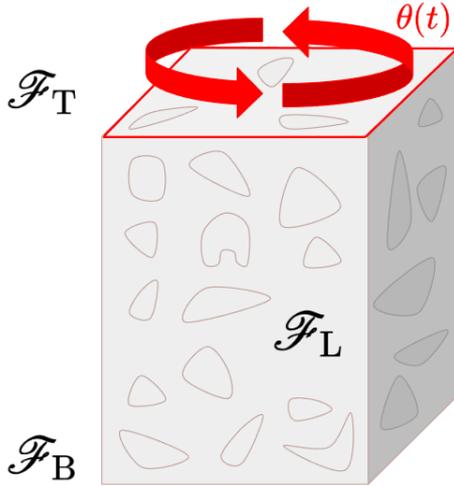


Figura 6.5: Problema *benchmark* di torsione per il modello bifasico, dove viene applicata sulla faccia superiore, contornata in rosso, la torsione piana come espresso nelle Equazioni (6.1.18a)-(6.1.18c).

Figura 6.6: Programma dell'angolo imposto nel problema *benchmark* di torsione. I pallini rossi in figura corrispondono agli istanti di tempo più salienti per la simulazione che sono rappresentati nelle figure successive.

Le condizioni al contorno per l'equazione associata a χ , ossia la Equazione (6.1.1a), sono dunque:

$$\partial_D^X \mathcal{B}_R \equiv \mathcal{F}_B \cup \mathcal{F}_T \implies \chi|_{\mathcal{F}_B}(X, t) = X, \quad t \in]0, T_f], \quad (6.1.19a)$$

$$\chi|_{\mathcal{F}_T}(X, t) \text{ come in (6.1.18a)-(6.1.18c)}, \quad t \in]0, T_f], \quad (6.1.19b)$$

$$\partial_N^X \mathcal{B}_R \equiv \mathcal{F}_L \implies (\mathbf{P}_s \mathbf{N})|_{\mathcal{F}_L}(X, t) = \mathbf{0}, \quad t \in]0, T_f]. \quad (6.1.19c)$$

Per quanta riguarda la fase fluida, in questo problema *benchmark* abbiamo assunto che il fluido possa uscire solamente dalla faccia laterale \mathcal{F}_L e che lo faccia mantenendo una

pressione nulla su tale porzione di bordo. Di conseguenza, le condizioni da imporre per il fluido sono le seguenti:

$$\partial_{\mathbf{N}}^{\mathbf{p}} \mathcal{B}_{\mathbf{R}} \equiv \mathcal{F}_{\mathbf{B}} \cup \mathcal{F}_{\mathbf{T}} \quad \Longrightarrow \quad (\mathbf{QN})|_{(\mathcal{F}_{\mathbf{B}} \cup \mathcal{F}_{\mathbf{T}})}(X, t) = \mathbf{0}, \quad t \in]0, T_f], \quad (6.1.20a)$$

$$\partial_{\mathbf{D}}^{\mathbf{p}} \mathcal{B}_{\mathbf{R}} \equiv \mathcal{F}_{\mathbf{L}} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{p}|_{\mathcal{F}_{\mathbf{L}}}(X, t) = 0 \quad t \in]0, T_f]. \quad (6.1.20b)$$

Analogamente a quanto fatto nella sezione precedente, nel caso del modello **PDE**, faremo riferimento a condizioni di Neumann omogenee per la variabile $\mathbf{D}_{\mathbf{K}}$:

$$\partial_{\mathbf{N}}^{\mathbf{K}} \mathcal{B}_{\mathbf{R}} \equiv \partial \mathcal{B}_{\mathbf{R}} \quad \Longrightarrow \quad (\mathbf{YN})|_{\partial \mathcal{B}_{\mathbf{R}}}(X, t) = \mathbf{0}, \quad t \in]0, T_f]. \quad (6.1.21)$$

Infine, assegniamo le medesime condizioni iniziali del problema *benchmark* precedente per le Equazioni (6.1.1a), (6.1.1b) e per l'equazione del rimodellamento. Pertanto, assumendo che il piazzamento di riferimento $\mathcal{B}_{\mathbf{R}}$ coincida con il piazzamento iniziale, assegniamo le seguenti condizioni iniziali:

$$\chi(X, 0) = X, \quad \text{in } \mathcal{B}_{\mathbf{R}}, \quad t = 0, \quad (6.1.22a)$$

$$\mathbf{p}(X, 0) = 0, \quad \text{in } \mathcal{B}_{\mathbf{R}}, \quad t = 0, \quad (6.1.22b)$$

$$\mathbf{K}(X, 0) = \mathbf{I}(X), \quad \text{in } \mathcal{B}_{\mathbf{R}}, \quad t = 0, \quad (6.1.22c)$$

da cui segue, nel caso del modello **PDE**, la ulteriore condizione iniziale

$$\mathbf{D}_{\mathbf{K}}(X, 0) = \mathbf{0}, \quad \text{in } \mathcal{B}_{\mathbf{R}}, \quad t = 0. \quad (6.1.23)$$

Per chiarezza espositiva, riportiamo degli specchietti che illustrano brevemente i modelli a confronto testati sul problema *benchmark* discusso.

Problema di torsione - Modello standard [ODE]

Equazioni del modello:

$$\text{Div}[-\mathbf{p}J\mathbf{F}^{-\mathbf{T}} + \mathbf{P}_{\text{sc}}] + J[(\rho\mathbf{f}) \circ (\chi, \mathbf{t})] = \mathbf{0}, \quad \text{in } \mathcal{B}_{\mathbf{R}}, \quad t \in]0, T_f],$$

$$\dot{J} - \text{Div}[\mathbf{II}(\text{Grad}\mathbf{p} - \varrho_f\mathbf{f}_{\mathbf{R}})] = 0, \quad \text{in } \mathcal{B}_{\mathbf{R}}, \quad t \in]0, T_f],$$

$$\dot{\mathbf{K}} = \frac{\gamma_{\mathbf{K}}}{J} \mathbf{G}^{-1}(\text{dev}\mathbf{M}_{\nu}^{\mathbf{b}})\mathbf{K}, \quad \text{in } \mathcal{B}_{\mathbf{R}} \quad t \in]0, T_f].$$

Condizioni al contorno:

$$\partial_{\mathbf{D}}^{\chi} \mathcal{B}_{\mathbf{R}} \equiv \mathcal{F}_{\mathbf{B}} \cup \mathcal{F}_{\mathbf{T}} \quad \Longrightarrow \quad \chi|_{\mathcal{F}_{\mathbf{B}}}(X, t) = X, \quad t \in]0, T_f],$$

$$\chi|_{\mathcal{F}_{\mathbf{T}}}(X, t) \text{ come in (6.1.18a)-(6.1.18c)}, \quad t \in]0, T_f],$$

$$\partial_{\mathbf{N}}^{\chi} \mathcal{B}_{\mathbf{R}} \equiv \mathcal{F}_{\mathbf{L}} \quad \Longrightarrow \quad (\mathbf{P}_s\mathbf{N})|_{\mathcal{F}_{\mathbf{L}}}(X, t) = \mathbf{0}, \quad t \in]0, T_f],$$

$$\partial_{\mathbf{N}}^{\mathbf{p}} \mathcal{B}_{\mathbf{R}} \equiv \mathcal{F}_{\mathbf{B}} \cup \mathcal{F}_{\mathbf{T}} \quad \Longrightarrow \quad (\mathbf{QN})|_{(\mathcal{F}_{\mathbf{B}} \cup \mathcal{F}_{\mathbf{T}})}(X, t) = \mathbf{0}, \quad t \in]0, T_f],$$

$$\partial_{\mathbf{D}}^{\mathbf{p}} \mathcal{B}_{\mathbf{R}} \equiv \mathcal{F}_{\mathbf{L}} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{p}|_{\mathcal{F}_{\mathbf{L}}}(X, t) = 0 \quad t \in]0, T_f].$$

Condizioni iniziali:

$$\chi(X, 0) = X, \quad \text{in } \mathcal{B}_{\mathbf{R}}, \quad t = 0,$$

$$\mathbf{p}(X, 0) = 0, \quad \text{in } \mathcal{B}_{\mathbf{R}}, \quad t = 0,$$

$$\mathbf{K}(X, 0) = \mathbf{I}(X), \quad \text{in } \mathcal{B}_{\mathbf{R}}, \quad t = 0.$$

Problema di torsione - Modello secondo "teoria gradiente" [PDE]

Equazioni del modello:

$$\begin{aligned}
 \text{Div}[-\mathbf{p}J\mathbf{F}^{-T} + \mathbf{P}_{\text{sc}}] + J[(\rho\mathbf{f}) \circ (\chi, \mathbf{t})] &= \mathbf{0}, & \text{in } \mathcal{B}_{\text{R}}, \quad t \in]0, T_f], \\
 \dot{J} - \text{Div}[\mathbf{II}(\text{Grad}\mathbf{p} - \varrho_f\mathbf{f}_{\text{R}})] &= 0, & \text{in } \mathcal{B}_{\text{R}}, \quad t \in]0, T_f], \\
 -\ell_{\text{b}}^2 \text{Div}[(\text{Grad}\mathbf{D}_{\mathbf{K}})\mathbf{G}^{-1}] + \mathbf{D}_{\mathbf{K}} &= \frac{\gamma\mathbf{K}}{J} \left\{ \text{dev}\mathbf{M}_{\text{v}}^{\text{b}} - L_{\text{b}}^2\mathcal{R}(\mathbf{K}) \right\}, & \text{in } \mathcal{B}_{\text{R}} \quad t \in]0, T_f], \\
 \dot{\mathbf{K}} &= \mathbf{G}^{-1}\mathbf{D}_{\mathbf{K}}\mathbf{K}, & \text{in } \mathcal{B}_{\text{R}} \quad t \in]0, T_f].
 \end{aligned}$$

Condizioni al contorno:

$$\begin{aligned}
 \partial_{\text{D}}^{\chi}\mathcal{B}_{\text{R}} \equiv \mathcal{F}_{\text{B}} \cup \mathcal{F}_{\text{T}} &\implies \chi|_{\mathcal{F}_{\text{B}}}(X, t) = X, & t \in]0, T_f], \\
 &\chi|_{\mathcal{F}_{\text{T}}}(X, t) \text{ come in (6.1.18a)-(6.1.18c)}, & t \in]0, T_f], \\
 \partial_{\text{N}}^{\chi}\mathcal{B}_{\text{R}} \equiv \mathcal{F}_{\text{L}} &\implies (\mathbf{P}_{\text{s}}\mathbf{N})|_{\mathcal{F}_{\text{L}}}(X, t) = \mathbf{0}, & t \in]0, T_f], \\
 \partial_{\text{N}}^{\mathbf{p}}\mathcal{B}_{\text{R}} \equiv \mathcal{F}_{\text{B}} \cup \mathcal{F}_{\text{T}} &\implies (\mathbf{Q}\mathbf{N})|_{(\mathcal{F}_{\text{B}} \cup \mathcal{F}_{\text{T}})}(X, t) = \mathbf{0}, & t \in]0, T_f], \\
 \partial_{\text{D}}^{\mathbf{p}}\mathcal{B}_{\text{R}} \equiv \mathcal{F}_{\text{L}} &\implies \mathbf{p}|_{\mathcal{F}_{\text{L}}}(X, t) = 0 & t \in]0, T_f], \\
 \partial_{\text{N}}^{\mathbf{K}}\mathcal{B}_{\text{R}} \equiv \partial\mathcal{B}_{\text{R}} &\implies (\mathcal{Y}\mathbf{N})|_{\partial\mathcal{B}_{\text{R}}}(X, t) = \mathbf{0}, & t \in]0, T_f].
 \end{aligned}$$

Condizioni iniziali:

$$\begin{aligned}
 \chi(X, 0) &= X, & \text{in } \mathcal{B}_{\text{R}}, \quad t = 0, \\
 \mathbf{p}(X, 0) &= \mathbf{0}, & \text{in } \mathcal{B}_{\text{R}}, \quad t = 0, \\
 \mathbf{K}(X, 0) &= \mathbf{I}(X), \quad \mathbf{D}_{\mathbf{K}}(X, 0) = \mathbf{0}, & \text{in } \mathcal{B}_{\text{R}}, \quad t = 0.
 \end{aligned}$$

Parametri del modello bifasico nel problema di torsione

Nella Tabella 6.2 sono riportati i valori dei parametri caratteristici del provino bifasico in esame.

Parametri	Valori	Unità	Riferimento	Equazione
Φ_{sv}	0.6		[35]	(6.1.2), (6.1.4)
ϱ_{s}	10^{-3}	[kg/m ³]	[35]	(6.1.1a)
ϱ_{f}	10^{-3}	[kg/m ³]	[35]	(6.1.1b)
π_0	2.578×10^{-3}	[mm ⁴ /(N s)]	[35]	(6.1.2)
κ	0.0848		[35]	(6.1.2)
m_0	4.638		[35]	(6.1.2)
λ_0	1.0	[mm ² /(N s)]	[8, 31]	(6.1.4)
σ_y	0.5	[kPa]	[8, 31]	(6.1.4)
ℓ_{b}	1.0	[mm]	[8, 31]	(6.1.3b)
L_{b}	2.0	[mm]	[8, 31]	(6.1.3b)
μ_{b}	10	[kPa]	[8, 31]	(6.1.5)
μ_{e}	20	[kPa]	[35]	(6.1.6a)
λ_{e}	13	[kPa]	[35]	(6.1.6a), (6.1.6b)

 Tabella 6.2: Parametri materiali utilizzati nelle simulazioni del problema *benchmark* di torsione per il confronto dei modelli **ODE** e **PDE** degli specchietti precedenti.

Norma di Frobenius del tensore di Burgers nella sezione verticale centrale

Ricollegandoci alla discussione finale della sezione precedente, nella Figura 6.7 sono riportate le distribuzioni della norma di Frobenius del tensore di Burgers, ossia $\|\mathfrak{B}\|$, sulla sezione verticale centrale del provino. In particolare, sono rappresentati i tre istanti di tempo più

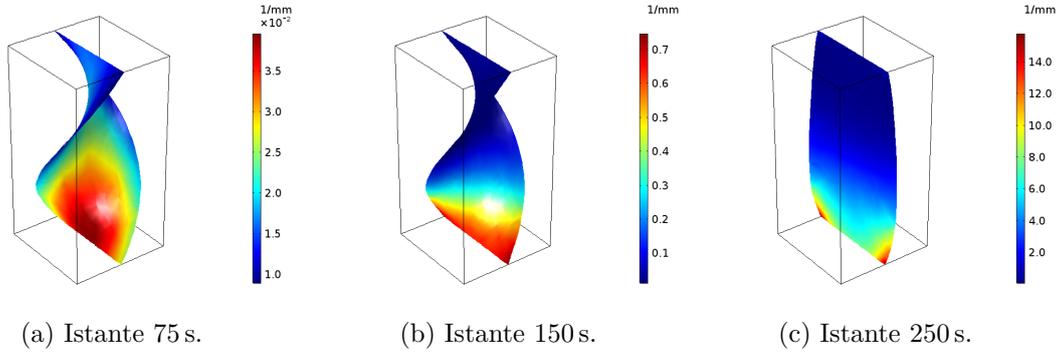


Figura 6.7: Grafico della norma di Frobenius del tensore di Burgers, ossia $\|\mathfrak{B}\|$ su una sezione verticale centrale. Si osserva un accumulo alla base delle incompatibilità delle distorsioni anelastiche, le quali comportano una maggiore dissipazione alla base.

salienti della simulazione del problema in esame, ossia l'istante $t = 75$ s in cui inizia la fase di mantenimento, l'istante $t = 150$ s in cui finisce la fase di mantenimento e l'istante $t = 250$ s in cui si conclude la simulazione. Dalla Figura 6.7, si osserva che le incompatibilità delle distorsioni anelastiche, misurate da $\|\mathfrak{B}\|$, tendono ad accumularsi progressivamente sul fondo del provino, ossia dove il provino è incastrato. La parte inferiore del provino, dunque, tende ad ammettere un comportamento più duttile rispetto al resto del corpo, evidenziando degli *effetti di bordo* che non sono manifesti nelle simulazioni del modello **ODE**. Questo fenomeno può essere imputabile al nuovo termine “forzante” $\mathcal{R}(\mathbf{K})$ in (6.1.5), che dipende direttamente dal tensore di Burgers \mathfrak{B} , che tende a far evolvere il rimodellamento in maniera diversa a seconda di dove i *difetti* sono maggiormente localizzati.

Confronto della pressione nella sezione verticale centrale

Nel paragrafo precedente, si è osservato come, tramite un problema di torsione, sia possibile indurre una maggiore concentrazione di distorsioni anelastiche nel solido rispetto, per esempio, al problema di indentazione discusso nella Sezione 6.1.1. In tale sezione, avevamo osservato un simile comportamento qualitativo dei profili di pressione interni al provino nei due modelli confrontati, il che potrebbe essere imputabile ad una minore presenza delle incompatibilità delle distorsioni plastiche. Pertanto, come prossima analisi, abbiamo deciso di rappresentare la pressione della fase fluida su una sezione verticale centrale del provino sottoposto a torsione nei tre istanti di tempo $t = 75, 150, 250$ s. Come si può osservare dalla Figura 6.8, in questo caso si possono notare anche *qualitativamente* delle differenze sostanziali nei risultati ottenuti dai due modelli. Infatti, nel caso del modello **ODE**, durante la fase di mantenimento, l'accoppiamento del rimodellamento con il fluido fa sì che si generi una “*bolla di pressione*” [11, 12], ossia una zona di depressione all'interno del corpo che tende a produrre un flusso di fluido entrante. Nel caso, invece, del modello **PDE** tale fenomeno non è presente, ossia il provino ammette valori positivi di pressione al suo interno, che determinano un flusso di fluido uscente.

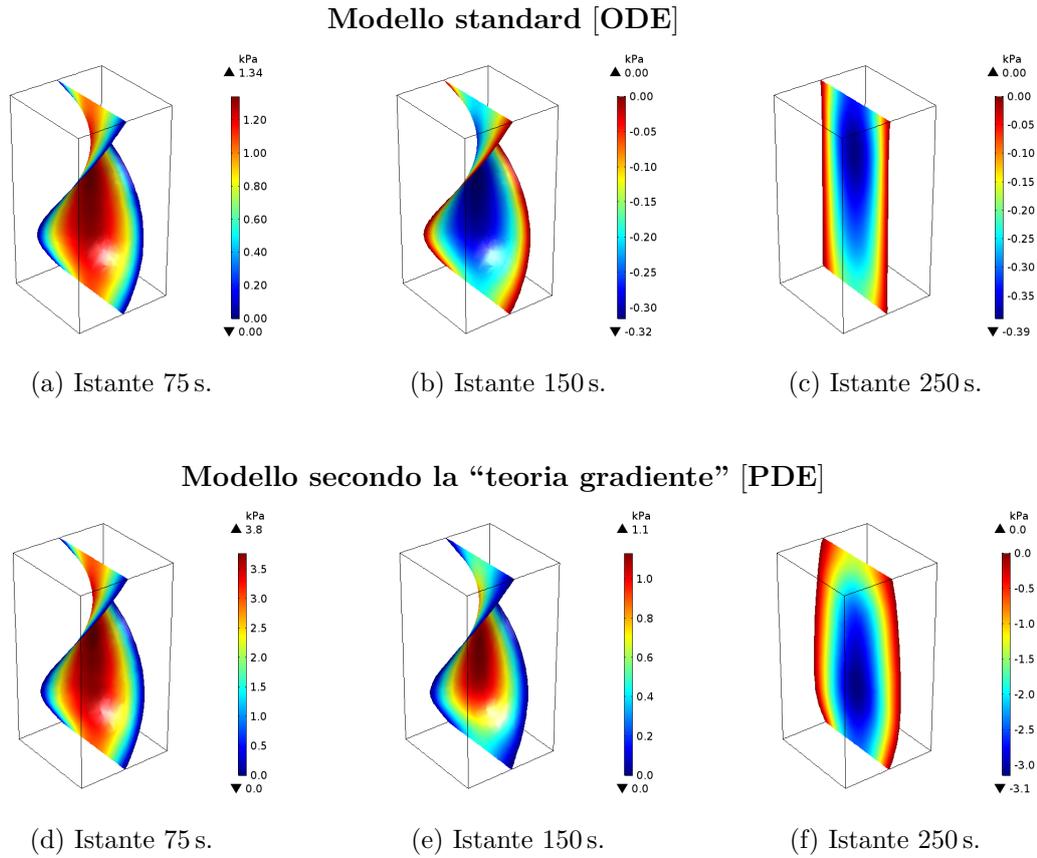


Figura 6.8: Profili di pressione sulla sezione verticale centrale del corpo ortogonale alla linea di indentazione nel caso del modello **ODE** e **PDE**. Si osserva lo sviluppo di una “*bolla di pressione*” [11, 12] nel modello **ODE** la quale non si forma nel caso del modello **PDE**.

Confronto della pressione e della porosità al centro del provino

Per concludere i confronti tra i due modelli testati sul problema *benchmark* in esame, abbiamo riportato nelle Figure 6.9a e 6.9b, rispettivamente, l’andamento in tempo della pressione e della porosità nel centro del provino. In particolare, nelle suddette figure, è stato anche riportato l’andamento in tempo della pressione e porosità per un provino di un materiale perfettamente elastico, in cui non è presente il fenomeno del rimodellamento della microstruttura. Concentrandoci sulla Figura 6.9a, osserviamo che, in accordo con quanto detto nel paragrafo precedente, la pressione della fase fluida nel modello **ODE**, durante la fase di mantenimento, decresce fino a diventare negativa nel centro del provino. Coerentemente con questo risultato, possiamo osservare che, durante il mantenimento del carico, la porosità nel modello **ODE** non decresce particolarmente rispetto al valore di partenza, come si può vedere nella Figura 6.9b. Questo è dovuto al flusso entrante di fase fluida che è indotto dalla “*bolla di pressione*” [11, 12] formatasi. Nel modello secondo la “*teoria gradiente*” [4], indicato con **PDE**, si osserva che la pressione assume valori maggiori durante la fase di torsione e subisce una discesa drastica durante la fase di mantenimento, rimanendo tuttavia sempre positiva. Questo fenomeno produce, coerentemente con quanto detto nel paragrafo precedente, un flusso uscente di fluido che porta la porosità a decrescere durante la fase di mantenimento, come si osserva nella Figura 6.9b. Infine, nella fase di torsione inversa, si osserva un ulteriore abbassamento della pressione fino a valori negativi, che corrispondono ad un flusso entrante di fluido attraverso la faccia laterale. Anche dall’andamento della porosità si registra un flusso entrante di fluido durante la torsione inversa, in quanto, a fine

simulazione, vi è quasi un totale recupero della frazione di volume fluida iniziale.

Riteniamo, infine, particolarmente degno di nota il fatto che, con la scelta dei parametri utilizzati per il modello **PDE**, il comportamento della fase fluida risulta essere molto più simile a quello del caso senza rimodellamento rispetto a quello in cui il rimodellamento segue il modello standard in (6.1.3a). Infatti, sia nel modello **PDE** che nel modello senza rimodellamento non si osserva la formazione della “*bolla di pressione*” [11, 12], che è invece prevista dal modello **ODE**, e gli andamenti qualitativi della pressione e della porosità sono simili.

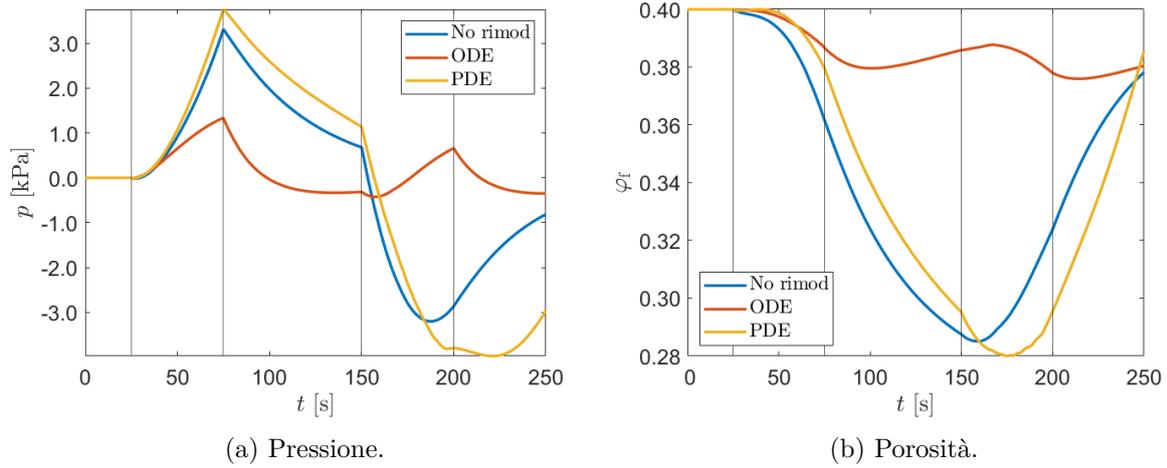


Figura 6.9: Confronto tra l’andamento nel tempo della pressione p e della porosità φ_f tra il modello standard **ODE** e quello secondo la “teoria gradiente” **PDE** al centro del provino. Si osserva che il modello **PDE** qualitativamente ammette un comportamento della fase fluida più simile a quello di un caso in cui non è presente rimodellamento rispetto al caso rappresentato dal modello **ODE**.

6.2 Riepilogo dei modelli nel caso monofasico

In questa sezione, viene proposto un problema *benchmark* [8], implementato nel software commerciale COMSOL Multiphysics® [29, 30], per confrontare i modelli descritti precedentemente anche al caso monofasico, come esposto nel Capitolo 4. In particolare, si sono testati i due modelli di plasticità, ossia quello standard, presentato nel Capitolo 3, e quello secondo la “teoria gradiente”, illustrato nel Capitolo 5, per un problema di indentazione [8].

Nel Capitolo 4, ci siamo limitati a riportare la derivazione, tramite invocazione del Principio delle Potenze Virtuali [26, 4, 23], delle equazioni dinamiche per il continuo monofasico in esame. Per completare tale modello, possiamo *specializzare* le ipotesi fatte e i risultati ottenuti nei Capitoli 3 e 5 al caso di un continuo monofasico. Operativamente, al fine di ottenere la versione monofasica dei due modelli di plasticità considerati, è sufficiente rifarsi alla Meccanica dei Continui di base, piuttosto che la Teoria della Miscele.

Di conseguenza, in questa sezione, le uniche equazioni che compongono il modello per il continuo monofase in esame sono l’equazione per χ e l’equazione per \mathbf{K} . Pertanto, richiamiamo l’equazione dinamica per il moto nella Equazione (4.1.27a), ossia

$$\text{Div} \mathbf{P} + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad \text{in } \mathcal{B}_R, \quad t > 0. \quad (6.2.1)$$

Assumendo che il solido sia un materiale omogeneo, isotropo e iperelastico di tipo Neo-Hookeano, assegniamo costitutivamente il primo tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff come fatto nel Capitolo 3, specializzando, la Equazione (3.4.9) al caso di un continuo monofasico:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathcal{F} \circ (\mathbf{F}, \mathbf{K}) \\ &= J_{\mathbf{K}} [\mathbf{g} \circ (\chi, \mathbf{t})] \mathbf{F} [\mu_e (\mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{K}^{-\text{T}} - \mathbf{C}^{-1}) + \frac{1}{2} \lambda_e (\log I_{3e}) \mathbf{C}^{-1}]. \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

I modelli di plasticità, che specializziamo al caso monofasico, sono riportati nella Equazione (3.5.30), nel caso del modello standard, e nella Equazione (5.4.39), nel caso del modello in “teoria gradiente”, ossia:

Modello standard (ODE)

$$\mathbf{D}_{\mathbf{K}} = \frac{\gamma_{\mathbf{K}}}{J} \text{dev} \mathbf{M}_{\nu}^b, \quad \text{su } \mathcal{B}_R, \quad t > 0, \quad (6.2.3a)$$

Modello secondo la “teoria gradiente” (PDE)

$$-\ell_b^2 \text{Div} [(\text{Grad} \mathbf{D}_{\mathbf{K}}) \mathbf{G}^{-1}] + \mathbf{D}_{\mathbf{K}} = \frac{\gamma_{\mathbf{K}}}{J} \left\{ \text{dev} \mathbf{M}_{\nu}^b - L_b^2 \mathcal{R}(\mathbf{K}) \right\}, \quad \text{su } \mathcal{B}_R, \quad t > 0, \quad (6.2.3b)$$

$$\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}_{\mathbf{K}} \mathbf{K}, \quad \text{su } \mathcal{B}_R, \quad t > 0, \quad (6.2.3c)$$

dove $\boldsymbol{\sigma}$ è il tensore degli sforzi di Cauchy del solido monofasico in esame e $\gamma_{\mathbf{K}}$ è un termine di attivazione, dipendente dallo sforzo di snervamento σ_Y , definito come

$$\gamma_{\mathbf{K}} = \lambda_0 \frac{\left[\|\text{dev} \boldsymbol{\sigma}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_Y \right]_+}{\|\text{dev} \boldsymbol{\sigma}\|}. \quad (6.2.4)$$

Nella Equazione (6.2.3b), come conseguenza delle ipotesi costitutive sulla fase solida, il tensore $\text{dev} \mathbf{M}_{\nu}^b$ è espresso costitutivamente come

$$\text{dev} \mathbf{M}_{\nu}^b = \mathcal{F}^{\text{dev} \mathbf{M}_{\nu}^b} \circ (\mathbf{F}, \mathbf{K}) = \mu_e \text{dev} (\mathbf{K}^{-\text{T}} \mathbf{C} \mathbf{K}^{-1}), \quad (6.2.5)$$

e il termine “forzante” $\mathcal{R}(\mathbf{K})$ è definito come

$$\mathcal{R}(\mathbf{K}) := \mu_b \left(\mathbf{G} \text{dev} (\boldsymbol{\mathfrak{B}} \cdot \boldsymbol{\mathfrak{B}}^{\text{T}} + \boldsymbol{\mathfrak{B}}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{\mathfrak{B}}) \mathbf{G} - \text{Div} \{ \text{SYM}_0 [\mathbf{G} (\boldsymbol{\mathfrak{B}}^{\text{bT}} \times \mathbf{K}^{-1})] \} \right). \quad (6.2.6)$$

Nel seguito, come fatto nella Sottosezione 6.1.1, assumiamo che il piazzamento di riferimento \mathcal{B}_R per entrambi i modelli monofisici considerati sia di forma cubica con bordo decomponibile come

$$\partial\mathcal{B}_R = \mathcal{F}_T \cup \mathcal{F}_B \cup \mathcal{F}_L, \quad (6.2.7)$$

dove \mathcal{F}_T è la faccia superiore (“Top”), \mathcal{F}_B è la faccia inferiore (“Bottom”) e \mathcal{F}_L è la faccia laterale (“Lateral”). Assumiamo, nel seguito, che l’intervallo di tempo \mathcal{T} sia preso come un intervallo chiuso e limitato del tipo $\mathcal{T} = [0, T_f]$ dove T_f indica il tempo di fine simulazione.

6.2.1 *Benchmark*: Indentazione in controllo di carico

Consideriamo un provino di materiale elastoplastico *monofasico* di forma cubica con un lato di $200\ \mu\text{m}$, incastrato dalla faccia inferiore \mathcal{F}_B e libero sulla faccia laterale \mathcal{F}_L . Sulla faccia superiore \mathcal{F}_T , ed in particolare sulla *linea di indentazione* $\gamma : [0, T_f] \rightarrow \mathcal{F}_T$ viene applicata una forza di contatto, indicata con $\tau_R(X, t)$. In particolare, come si può vedere nel *disegno* in Figura 6.10, esprimiamo tale forza come

$$\tau_R(X, t) = \tau_{\text{ind}}(t)\delta(X - \gamma(t)), \quad \forall X \in \mathcal{B}_R, \quad \forall t \in [0, T_f], \quad (6.2.8)$$

dove $\delta(X - \gamma(t))$ è la Delta di Dirac lungo la curva γ e definiamo $\tau_{\text{ind}}(t) = \|\tau_{\text{ind}}(t)\|$.

Dalla Figura 6.11, si vede che la trazione $\tau_{\text{ind}}(t)$ è nulla per i primi 25 s, cresce linearmente da 25 s fino a 50 s ad un valore massimo di 30 kPa, decresce linearmente da 50 s a 75 s, dove viene rimosso completamente e, infine, fino a $T_f = 225$ s, ossa la fine della simulazione, viene mantenuto il carico nullo.

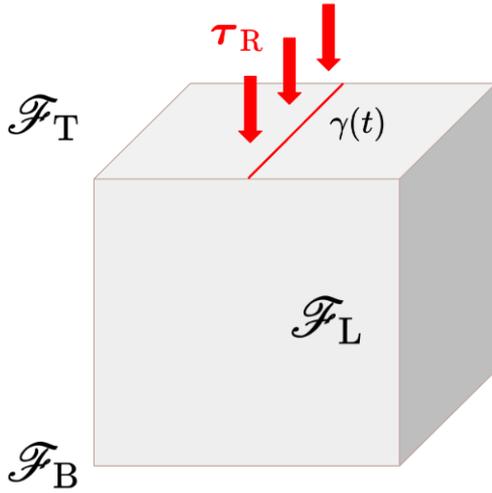


Figura 6.10: Problema *benchmark* di indentazione per il modello monofase, dove è rappresentata in rosso la linea di indentazione e il carico applicato.

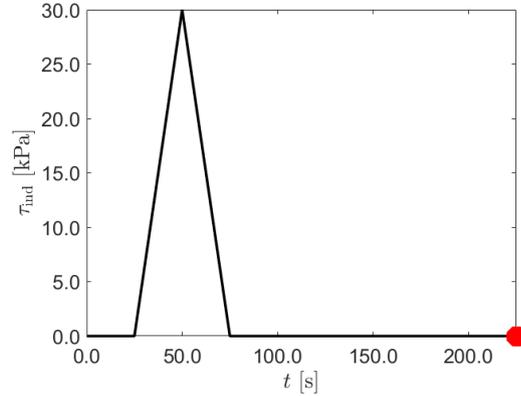


Figura 6.11: Programma di carico nel problema *benchmark* di indentazione, dove il pallino rosso corrisponde all’istante di tempo finale per la simulazione.

Per quanto riguarda le condizioni al contorno e le condizioni iniziali per i due modelli, specializziamo al caso monofasico le stesse scelte che sono fatte nella Sottosezione 6.1.1, nel caso del *benchmark* di indentazione. Per fare ciò, è sufficiente tralasciare le condizioni al contorno e le condizioni iniziali per la pressione, in quanto non definita nel caso monofasico. L’unica differenza sostanziale che vogliamo evidenziare è che, nel caso del modello in “*teoria gradiente*” [4], la PDE nella variabile \mathbf{D}_K necessita delle condizioni al contorno riportate

nella Equazione (5.1.49d). In particolare, occorre sostituire l'espressione analitica di \mathbb{K} , a valle delle leggi costitutive specializzate al caso monofase. Per semplicità, nel seguito faremo riferimento a condizioni di Neumann omogenee per la variabile \mathbf{D}_K su tutto il bordo del provino, ossia

$$\partial_N^K \mathcal{B}_R \equiv \partial \mathcal{B}_R \quad \Longrightarrow \quad [\text{dev}(J_K \mathbb{K} \mathbf{N})]_{|\partial \mathcal{B}_R}(X, t) = \mathbf{0}, \quad t \in]0, T_f]. \quad (6.2.9)$$

Per semplicità, condensiamo tali ipotesi in due specchietti riassuntivi, che mostrano quali problemi sono implementati per il provino monofasico descritto precedentemente:

Problema di indentazione - Modello standard [ODE]

Equazioni del modello:

$$\begin{aligned} \text{Div} \mathbf{P} + \mathbf{f} &= \mathbf{0}, & \text{in } \mathcal{B}_R, & \quad t \in]0, T_f], \\ \dot{\mathbf{K}} &= \frac{\gamma_K}{J} \mathbf{G}^{-1} (\text{dev} M_\nu^b) \mathbf{K}, & \text{in } \mathcal{B}_R & \quad t \in]0, T_f]. \end{aligned}$$

Condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} \partial_D^X \mathcal{B}_R \equiv \mathcal{F}_B & \Longrightarrow \chi_{|\mathcal{F}_B}(X, t) = X, & t \in]0, T_f], \\ \partial_N^X \mathcal{B}_R \equiv \mathcal{F}_L \cup \mathcal{F}_T & \Longrightarrow (\mathbf{P} \mathbf{N})_{|\mathcal{F}_L}(X, t) = \mathbf{0}, & t \in]0, T_f], \\ & \Longrightarrow (\mathbf{P} \mathbf{N})_{|\mathcal{F}_T}(X, t) = \tau_{\text{ind}}(t) \delta(X - \gamma(t)), & t \in]0, T_f]. \end{aligned}$$

Condizioni iniziali:

$$\begin{aligned} \chi(X, 0) &= X, & \text{in } \mathcal{B}_R, & \quad t = 0, \\ \mathbf{K}(X, 0) &= \mathbf{I}(X), & \text{in } \mathcal{B}_R, & \quad t = 0. \end{aligned}$$

Problema di indentazione - Modello secondo "teoria gradiente" [PDE]

Equazioni del modello:

$$\begin{aligned} \text{Div} \mathbf{P} + \mathbf{f} &= \mathbf{0}, & \text{in } \mathcal{B}_R, & \quad t \in]0, T_f], \\ -\ell_b^2 \text{Div}[(\text{Grad} \mathbf{D}_K) \mathbf{G}^{-1}] + \mathbf{D}_K &= \frac{\gamma_K}{J} \left\{ \text{dev} M_\nu^b - L_b^2 \mathcal{R}(\mathbf{K}) \right\}, & \text{in } \mathcal{B}_R & \quad t \in]0, T_f], \\ \dot{\mathbf{K}} &= \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}_K \mathbf{K}, & \text{su } \mathcal{B}_R & \quad t \in]0, T_f]. \end{aligned}$$

Condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} \partial_D^X \mathcal{B}_R \equiv \mathcal{F}_B & \Longrightarrow \chi_{|\mathcal{F}_B}(X, t) = X, & t \in]0, T_f], \\ \partial_N^X \mathcal{B}_R \equiv \mathcal{F}_L \cup \mathcal{F}_T & \Longrightarrow (\mathbf{P} \mathbf{N})_{|\mathcal{F}_L}(X, t) = \mathbf{0}, & t \in]0, T_f], \\ & \Longrightarrow (\mathbf{P} \mathbf{N})_{|\mathcal{F}_T}(X, t) = \tau_{\text{ind}}(t) \delta(X - \gamma(t)), & t \in]0, T_f], \\ \partial_N^K \mathcal{B}_R \equiv \partial \mathcal{B}_R & \Longrightarrow [\text{dev}(J_K \mathbb{K} \mathbf{N})]_{|\partial \mathcal{B}_R}(X, t) = \mathbf{0}, & t \in]0, T_f]. \end{aligned}$$

Condizioni iniziali:

$$\begin{aligned} \chi(X, 0) &= X, & \text{in } \mathcal{B}_R, & \quad t = 0, \\ \mathbf{K}(X, 0) &= \mathbf{I}(X), \quad \mathbf{D}_K(X, 0) = \mathbf{0}, & \text{in } \mathcal{B}_R, & \quad t = 0. \end{aligned}$$

Parametri del modello monofasico nel problema di indentazione

Nella Tabella 6.3 sono riportati i valori dei parametri caratteristici del provino monofasico in esame.

Parametri	Valori	Unità	Riferimento	Equazione
μ_e	20	[kPa]	[35]	(6.2.2)
λ_e	13	[kPa]	[35]	(6.2.2), (6.2.5)
λ_0	1.0	[mm ² /(N s)]	[8, 31]	(6.2.4)
σ_y	0.5	[kPa]	[8, 31]	(6.2.4)
ℓ_b	10	[μm]	[8, 31]	(6.2.3b)
L_b	10	[μm]	[8, 31]	(6.2.3b)
μ_b	10	[kPa]	[8, 31]	(6.2.6)

Tabella 6.3: Parametri materiali utilizzati nelle simulazioni del problema *benchmark* di indentazione per il confronto dei modelli **ODE** e **PDE** degli specchietti precedenti.

Regolarità della linea di indentazione

Nella Figura 6.12 è riportato un ingrandimento della regione di indentazione, alla fine simulazione, nei due modelli confrontati. In particolare, siamo interessati a confrontare il tipo di recupero della deformazione, alla fine del processo di scarico, per i due modelli. Osserviamo che, nel modello **PDE**, la deformazione residua è maggiormente recuperata rispetto al modello **ODE**, il che può essere dovuto all'effetto dal termine “forzante” $\mathcal{R}(\mathbf{K})$, presente nella Equazione (6.2.6). Inoltre, osserviamo che il modello **PDE** riesce a catturare meglio gli *effetti di bordo*, in quanto si osserva una maggiore regolarità della superficie di indentazione ed una differente duttilità, di tale superficie, rispetto al caso **ODE**. La possibilità di catturare meglio gli effetti di bordo è una caratteristica *intrinseca* del modello in “teoria gradiente” [4], in quanto nella cinematica viene scelto anche il tensore $\text{Grad}\mathbf{K}$ come descrittore cinematico.

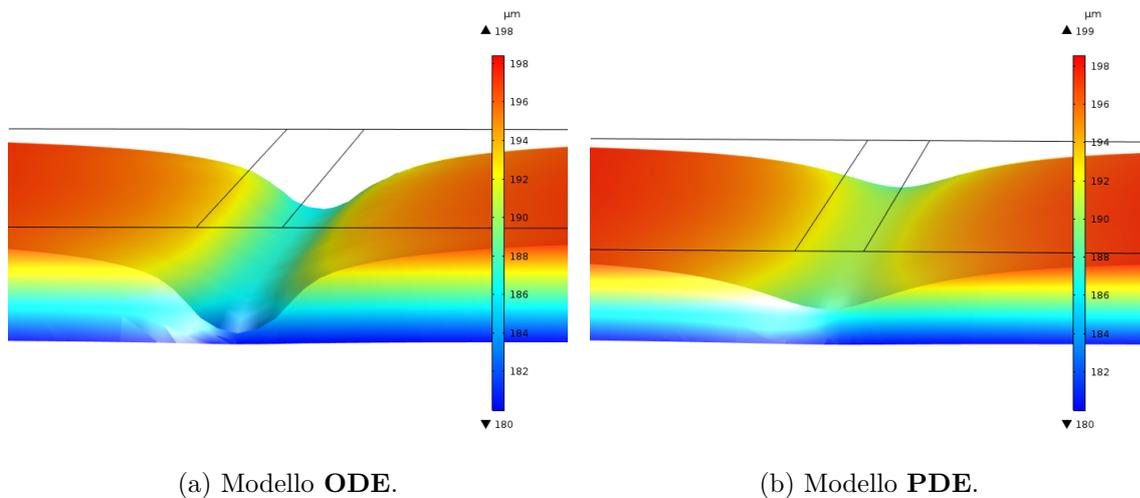


Figura 6.12: Confronto della deformazione residua della linea di indentazione nel caso del continuo monofase, dove nel modello **PDE** si osserva un maggiore recupero della deformazione e una più alta regolarità della superficie.

Capitolo 7

Conclusioni

In questo lavoro di Tesi, si è studiato il comportamento meccanico di una particolare classe di tessuti biologici, che sono modellati come sistemi bifasici nell’ambito della Teoria delle Miscele [13, 14, 15]. Avendo ipotizzato che, a seguito di *azioni* esterne, la fase solida della miscela presenti un comportamento anelastico, ci siamo interessati ai cosiddetti *effetti di bordo*, ossia a delle variazioni di duttilità al bordo. Abbiamo evidenziato che tali aspetti sono legati ad un effetto combinato dato dalla riorganizzazioni della microstruttura e con la presenza di un flusso di fluido interstiziale.

Il principale obiettivo, raggiunto in questa Tesi, è stata la generalizzazione del modello di plasticità di Gurtin&Anand secondo la “teoria gradiente” [4], concepito nell’ambito dei metalli duttili, al caso di tessuto biologico, modellato come una miscela bifasica. In particolare, tale modello è stato confrontato dal punto di vista teorico e computazionale con un modello di plasticità “standard” di tipo J_2 alla Perzyna [9, 18, 35] per confrontare la risoluzione degli effetti di bordo indotti da problemi di indentazione e torsione. Entrambi i modelli considerati, sono stati dimostrati e ottenuti tramite un approccio variazionale, ossia utilizzando una forma generale del Principio delle Potenze Virtuali [26]. Inoltre, abbiamo evidenziato come tali modelli siano delle *particolarizzazioni* del paradigma generale della *dualità*, in quanto essi si distinguono per la scelta dei loro descrittori cinematici e, conseguentemente, per le loro equazioni dinamiche. Dalle considerazioni parametriche riportate nella Osservazione 38, far variare le lunghezze caratteristiche ℓ_b e L_b nel modello in “teoria gradiente” permette di ottenere il modello “standard” come caso limite ($\ell_b, L_b \rightarrow 0$) [8].

Dalle simulazioni dei problemi *benchmark* considerati, si è osservato che, laddove le incompatibilità, misurate tramite $\|\mathfrak{B}\|$, si accumulano nel provino, gli effetti di bordo sono catturati dal modello in “teoria gradiente” e non dal modello standard. In particolare, nel caso di problemi di indentazione, il modello secondo “teoria gradiente” prevede una maggiore regolarità della superficie caricata, ed un maggior recupero della deformazione rispetto al modello standard. Invece, nei problemi di torsione considerati, si osserva una maggiore duttilità nella base del provino, dove si concentrano le distorsioni anelastiche per via del vincolo imposto. Inoltre, nel caso in cui il modello “standard” prevede lo sviluppo di una “bolla di pressione” [11, 12] in fase di mantenimento del carico, tramite la nostra scelta dei parametri, essa non viene predetta dal modello secondo “teoria gradiente”. Infatti, nel caso del modello secondo “teoria gradiente”, il comportamento della fase fluida risulta essere più simile a quello ottenuto in un materiale non soggetto al rimodellamento della microstruttura.

Appendice A

Trasposti per tensori del terzo ordine

La notazione per indicare i vari “trasposti” dei tensori del terzo ordine, nel caso di tensori solamente definiti sul piazzamento di riferimento della fase solida \mathcal{B}_R , che viene presentata nei Capitoli 5 e 6 è presa dal lavoro svolto in [37], ed utilizzata in [31, 8].

Nel seguito, indichiamo con $\{\mathbf{E}_A\}_{A=1}^3$ la collezione dei campi vettoriali che, quando valutati nel punto $X \in \mathcal{B}_R$, restituiscono i vettori di basi $\{\mathbf{E}_A(X, t)\}_{A=1}^3$ dello spazio tangente $T_X \mathcal{B}_R$ e indichiamo con $[T_X \mathcal{B}_R]_0^3$ lo spazio dei tensori del terzo ordine con indici controvarianti. Consideriamo, in particolare, il seguente campo tensoriale del terzo ordine

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^{ABC} \mathbf{E}_A \otimes \mathbf{E}_B \otimes \mathbf{E}_C, \quad (\text{A.0.1})$$

tale per cui, dati $X \in \mathcal{B}_R$ e $t \in \mathcal{T}$, si ha $\mathcal{A}(X, t) \in [T_X \mathcal{B}_R]_0^3$. Introduciamo, pertanto, le seguenti notazioni per indicare i possibili tensori “trasposti” [37] del tensore definito in Equazione (A.0.1).

Definizione A.0.1 (Tensore “trasposto minuscolo destro” [37]).

Dato il tensore \mathcal{A} definito nella Equazione (A.0.1), si definisce il campo tensoriale “trasposto minuscolo destro” di \mathcal{A} , indicato con \mathcal{A}^t , come

$$\mathcal{A}^t = (\mathcal{A}^t)^{ACB} \mathbf{E}_A \otimes \mathbf{E}_C \otimes \mathbf{E}_B, \quad (\mathcal{A}^t)^{ACB} = \mathcal{A}^{ABC}. \quad (\text{A.0.2})$$

Definizione A.0.2 (Tensore “trasposto minuscolo sinistro” [37]).

Dato il tensore \mathcal{A} definito nella Equazione (A.0.1), si definisce il campo tensoriale “trasposto minuscolo sinistro” di \mathcal{A} , indicato con ${}^t\mathcal{A}$, come

$${}^t\mathcal{A} = ({}^t\mathcal{A})^{BAC} \mathbf{E}_B \otimes \mathbf{E}_A \otimes \mathbf{E}_C, \quad ({}^t\mathcal{A})^{BAC} = \mathcal{A}^{ABC}. \quad (\text{A.0.3})$$

Definizione A.0.3 (Tensore “trasposto maiuscolo destro” [37]).

Dato il tensore \mathcal{A} definito nella Equazione (A.0.1), si definisce il campo tensoriale “trasposto maiuscolo destro” di \mathcal{A} , indicato con \mathcal{A}^T , come

$$\mathcal{A}^T = (\mathcal{A}^T)^{BCA} \mathbf{E}_B \otimes \mathbf{E}_C \otimes \mathbf{E}_A, \quad (\mathcal{A}^T)^{BCA} = \mathcal{A}^{ABC}. \quad (\text{A.0.4})$$

Definizione A.0.4 (Tensore “trasposto maiuscolo sinistro” [37]).

Dato il tensore \mathcal{A} definito nella Equazione (A.0.1), si definisce il campo tensoriale “trasposto maiuscolo sinistro” di \mathcal{A} , indicato con ${}^T\mathcal{A}$, come

$${}^T\mathcal{A} = ({}^T\mathcal{A})^{CAB} \mathbf{E}_C \otimes \mathbf{E}_A \otimes \mathbf{E}_B, \quad ({}^T\mathcal{A})^{CAB} = \mathcal{A}^{ABC}. \quad (\text{A.0.5})$$

Bibliografia

- [1] M. Epstein and R. Segev. Differentiable manifolds and the principle of virtual work in continuum mechanics. *Journal of Mathematical Physics*, 21(5):1243–1245, 1980.
- [2] F. Armero. Large-scale modeling of localized dissipative mechanisms in a local continuum: applications to the numerical simulation of strain localization in rate-dependent inelastic solids. *Mechanics of Cohesive-frictional Materials*, 4:101–131, 1999.
- [3] G. Sciarra, F. dell’isola, and O. Coussy. Second gradient poromechanics. *International Journal of Solids and Structures*, 44:6607–6629, 10 2007.
- [4] M. E. Gurtin and L. Anand. A theory of strain-gradient plasticity for isotropic, plastically irrotational materials. part ii: Finite deformations. *International Journal of Plasticity*, 21(12):2297–2318, 2005.
- [5] J. E. Marsden and T. J. R. Hughes. *Mathematical Foundations of Elasticity*. Dover Publications Inc, 1983.
- [6] M. Epstein. *The Geometrical Language of Continuum Mechanics*. Cambridge University Press, 2010.
- [7] R. Segev and M. Epstein. *Geometric Continuum Mechanics*. 01 2020.
- [8] A. Pastore, A. Giammarini, and A. Grillo. A comparison between a standard and a “gradient theory” formulation of anelastic deformations of biphasic tissues. In *International Multigrid Conference 2022 (IMG2022)*. Lugano, Switzerland, 2022 Aug 22-26.
- [9] M. Mićunović. *Thermomechanics of Viscoplasticity*. Springer New York, 2009.
- [10] S. Sadik and A. Yavari. On the origins of the idea of the multiplicative decomposition of the deformation gradient. *Math. Mech. Solids*, 22(4):771–772, 2017.
- [11] S. Di Stefano, M. Carfagna, M. M. Knodel, K. Hashlamoun, S. Federico, and A. Grillo. Anelastic reorganisation of fibre-reinforced biological tissues. *Computing and Visualization in Science*, 20:95–109, 2019.
- [12] S. Di Stefano, A. Giammarini, C. Giverso, and A. Grillo. An elasto-plastic biphasic model of the compression of multicellular aggregates: the influence of fluid on stress and deformation. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 73(79):1420–9039, 2022.
- [13] S. Majid Hassanizadeh. Derivation of basic equations of mass transport in porous media, part 1. macroscopic balance laws. *Advances in Water Resources*, 9(4):196–206, 1986.

-
- [14] S. M. Hassanizadeh. Derivation of basic equations of mass transp. porous med., part 2. generalized darcy's and fick's laws. *Adv. Water Resour.*, 9:207–222, 1986.
- [15] L. Schreyer, M. Murad, and J. Cushman. Macroscale thermodynamics and the chemical potential for swelling porous media. *Transport in Porous Media*, 39:187–225, 05 2000.
- [16] Tomita Vasilica Stirbat, Sham Tlili, Thibault Houver, Jean-Paul Rieu, Catherine Barentin, and Hélène Delanoë-Ayari. Multicellular aggregates: A model system for tissue rheology. *The European physical journal. E, Soft matter*, 36:9898, 08 2013.
- [17] Philippe et al. Marmottant. The role of fluctuations and stress on the effective viscosity of cell aggregates. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 106(41):17271–17275, 2009.
- [18] C. Giverso and L. Preziosi. Modelling the compression and reorganization of cell aggregates. *Mathematical medicine and biology : a journal of the IMA*, 29:181–204, 06 2011.
- [19] L. Taber. Biomechanics of growth, remodeling, and morphogenesis. *Applied Mechanics Reviews*, (8), 1995.
- [20] A. DiCarlo and S. Quiligotti. Growth and balance. *Mechanics Research Communications*, 29(6):449–456, 2002.
- [21] E. Rodriguez, A. Hoger, and A. McCulloch. Stress-dependent finite growth in soft elastic tissues. *J Biomech*, 27:455–467, 1994.
- [22] P. Cermelli and M. E. Gurtin. On the characterization of geometrically necessary dislocations in finite plasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 49(7):1539–1568, 2001.
- [23] M. E. Gurtin and L. Anand. A theory of strain-gradient plasticity for isotropic, plastically irrotational materials. part i: Small deformations. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 53(7):1624–1649, 2005.
- [24] J. C. Simo. A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition: Part I. continuum formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 66(2):199–219, 1988.
- [25] J. C. Simo and T. J. R. Hughes. *Computational Inelasticity*. Springer, 1998.
- [26] P. Germain. The method of virtual power in continuum mechanics. part 2: Microstructure. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 25(3):556–575, 1973.
- [27] B. Felsager. *Geometry, Particles and Fields*. Odense Univ Press Odense, 1998.
- [28] S. Federico, A. Grillo, and R. Segev. Material description of fluxes in terms of differential forms. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 28:379–390, 03 2016.
- [29] www.comsol.com. *COMSOL Multiphysics R v. 5.3a*. COMSOL AB, Stockholm, Sweden.
- [30] *Comsol User's Guide COMSOL Multiphysics R v. 5.3a*. COMSOL AB, Stockholm, Sweden, 2018.

-
- [31] A. Giammarini, A. Pastore, A. Ramìrez-Torres, and A. Grillo. A constrained formulation of remodelling for biphasic systems. In *International Multigrid Conference 2022 (IMG2022)*. Lugano, Switzerland, 2022 Aug 22-26.
- [32] E. Crevacore, S. Di Stefano, and A. Grillo. Coupling among deformation, fluid flow, structural reorganisation and fibre reorientation in fibre-reinforced, transversely isotropic biological tissues. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 111:1–13, 2019.
- [33] A. Grillo and S. Di Stefano. A formulation of volumetric growth as a mechanical problem subjected to non-holonomic and rheonomic constraints. *submitted*, 2022.
- [34] M. H. Holmes and V. C. Mow. The nonlinear characteristics of soft gels and hydrated connective tissues in ultrafiltration. *Journal of Biomechanics*, 23(11):1145–1156, 1990.
- [35] A. Grillo, R. Prohl, and G. Wittum. A poroplastic model of structural reorganisation in porous media of biomechanical interest. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 28:579–601, 2016.
- [36] C. Giverso, S. Di Stefano, A. Grillo, and L. Preziosi. A three dimensional model of multicellular aggregate compression. *Soft Matter*, 15(48):10005–10019, 2019.
- [37] A. Giammarini, A. Pastore, A. Ramìrez-Torres, and A. Grillo. *In preparation*. 2022.
- [38] R. L. Bishop and S. I. Goldberg. *Tensor Analysis on Manifolds*. Prentice-Hall, NJ, 1968.
- [39] S. Federico. Porous materials with statistically oriented reinforcing fibres. In R. W. Ogden L. Dorfmann, editor, *Nonlinear Mechanics of Soft Fibrous Materials. CISM Courses and Lectures No. 559, International Centre for Mechanical Sciences*, pages 307–346. Springer, Berlin, 2015.
- [40] S. Federico and A. Grillo. Linear elastic composites with statistically oriented spheroidal inclusions. In G. J. Weng S. A. Meguid, editor, *Micromechanics and Nanomechanics of Composite Solids*, pages 307–346. Springer International Publishing AG 2018, 2018.
- [41] S. Quiligotti. On bulk growth mechanics of solid-fluid mixtures. *Theoretical and Applied Mechanics*, 2002, 01 2002.
- [42] S. Quiligotti, G. Maugin, and F. dell’isola. An eshelbian approach to the nonlinear mechanics of constrained solid-fluid mixtures. *Acta Mechanica*, 160, 01 2003.
- [43] R. Serpieri and F. Travascio. *Variational Continuum Multiphase Poroelasticity*. Springer, 02 2017.
- [44] S. Federico. The truesdell rate in continuum mechanics. *Zeitch...*, 73, 2022.
- [45] A. Grillo. *Appunti del corso di "Meccanica dei Mezzi Porosi"*. Politecnico di Torino, 2021.
- [46] A. Guillou and R. W. Ogden. *Growth in Soft Biological Tissue and Residual Stress Development*, pages 47–62. Springer Berlin Heidelberg, 2006.
- [47] V. Ciancio, M. Dolfín, M. Francaviglia, and S. Preston. Uniform materials and the multiplicative decomposition of the deformation gradient in finite elasto-plasticity. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 33, 02 2008.

-
- [48] J. Bear and Y. Bachmat. *Introduction to Modeling of Transport Phenomena in Porous Media*. Kluwer, Dordrecht, 1990.
- [49] O. Reynolds. *Papers on Mechanical and Physical Subjects: 1869-1903*. Cambridge University Press, 1900.
- [50] P. Cermelli, E. Fried, and M. E. Gurtin. Transport relations for surface integrals arising in the formulation of balance laws for evolving fluid interfaces. *Journal of Fluid Mechanics*, 544:339–351, 2005.
- [51] G. A. Ateshian. On the theory of reactive mixtures for modeling biological growth. *Biomechanics and modeling in mechanobiology*, 6:423–45, 12 2007.
- [52] S. Federico, A. Grillo, and R. Segev. Correction to: Material description of fluxes in terms of differential forms. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 31, 01 2019.
- [53] J. Bonet and R. D. Wood. *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*. Cambridge University Press, 2 edition, 2008.
- [54] P. Cermelli, E. Fried, and S. Sellers. Configurational stress, yield and flow in rate-independent plasticity. *Proceedings of The Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 457:1447–1467, 06 2001.
- [55] A. C. Eringen. *Mechanics of Continua*. R. E. Krieger Publishing Company, 1980.
- [56] I. Liu. Method of lagrange multipliers for exploitation of the entropy principle. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 46:131–148, 01 1972.
- [57] A. Grillo, S. Federico, and G. Wittum. Growth, mass transfer, and remodeling in fiber-reinforced, multi-constituent materials. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 47(2):388–401, 2012. Nonlinear Continuum Theories.
- [58] R. W. Ogden. *Nonlinear elastic deformations*. Dover books on physics. Dover, Mineola, 1997.
- [59] G. A. Maugin and M. Epstein. Geometrical material structure of elastoplasticity. *International Journal of Plasticity*, 14(1):109–115, 1998.
- [60] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext, Springer, 2010.