



**Politecnico
di Torino**

Politecnico di Torino

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

A.A 2021/2022

Sessione di Laurea Luglio 2022

Tesi di Laurea Magistrale

**Ottimizzazione di traiettorie per
missioni a fly-by multipli con
Asteroidi Near-Earth**

Relatore:

Prof. Lorenzo Casalino

Candidato:

Andrea Iapichello

Ringraziamenti

Ringrazio prima di tutto i miei genitori e mia sorella (K) per tutto quello che hanno sempre fatto per me e per avermi sostenuto in questi anni. Vi ringrazio per avermi insegnato a sognare in grande e per avermi dato la possibilità di inseguire i miei sogni. Vi voglio bene.

Ringrazio i miei nonni, anche chi non c'è più, per l'affetto che mi avete dato in questi anni, anche se lontani. Questo traguardo è anche per voi.

Ringrazio Laura che mi ha sostenuto nell'ultimo anno e che ha sempre cercato un modo per farmi sorridere.

Ringrazio il Professore Lorenzo Casalino, che mi ha seguito in questo percorso, per la sua enorme disponibilità. Grazie per avermi fatto appassionare a questo lavoro e al mondo degli asteroidi.

Infine, voglio ringraziare tutti i miei amici e i colleghi universitari con cui ho condiviso questi anni di gioie e dolori, vi auguro un prospero futuro.

Indice

1.	Generalità sugli asteroidi	1
1.1	La Fascia Principale.....	1
1.2	Near-Earth Objects	3
1.2.1	Effetto Yarkovsky	5
1.3	Protezione Planetaria	6
1.3.1	Rischi per la Terra.....	7
1.3.2	Scala Torino	8
1.3.3	Scala Palermo.....	9
1.4	Missioni verso i NEAs.....	10
1.4.1	DART	10
1.4.2	OSIRIS-Rex	11
1.4.3	Mining	12
2.	Richiami di Meccanica Orbitale	13
2.1	Le leggi di Keplero	13
2.2	La legge di gravitazione universale.....	13
2.3	Problema degli N corpi.....	14
2.4	Problema dei due corpi.....	15
2.5	Costanti del moto.....	16
2.5.1	Conservazione dell'energia meccanica	16
2.5.2	Conservazione del momento angolare.....	17
2.6	Equazione della traiettoria	17
2.6.1	Tipi di orbite.....	18
2.7	Posizione in funzione del tempo	20
2.8	Sistemi di coordinate	21
2.8.1	Sistema eliocentrico-eclittico.....	22
2.8.2	Sistema geocentrico-equatoriale.....	22
2.8.3	Sistema perifocale	23
2.9	Elementi orbitali classici	24
2.10	Sistema di riferimento temporale	25
2.10.1	Julian Date.....	25
2.11	Manovre Orbitali	25
2.11.1	Cambiamento di piano orbitale.....	27
2.11.2	Rotazione degli apsidi.....	27

2.11.3	Trasferta tra orbite circolari complanari	28
2.11.4	Propulsione elettrica.....	30
3.	Ottimizzazione di traiettorie spaziali	32
3.1	Funzione obiettivo	32
3.1.1	Funzioni obiettivo di Mayer	33
3.1.2	Funzioni obiettivo di Lagrange.....	33
3.1.3	Scalarizzazione della funzione obiettivo	34
3.1.4	Scelta della funzione obiettivo.....	35
3.2	Teoria del controllo ottimale	35
3.3	Problema differenziale ai limiti (BVP)	38
4.	Modello matematico	42
4.1	Equazioni del moto	42
4.2	Equazioni di stato e variabili aggiunte	43
4.3	Condizioni al contorno	45
4.3.1	Condizioni intermedie.....	46
4.4	Condizioni iniziali.....	47
5.	Analisi della missione	48
5.1	Obiettivi della missione	48
5.1.1	Fly-by	48
5.1.2	Rendez-vous.....	49
5.2	Selezione degli asteroidi.....	49
5.2.1	Asteroidi a bassa inclinazione	50
5.2.2	Asteroidi ad alta inclinazione	52
5.2.3	Candidati per il rendez-vous.....	53
5.2.4	Candidati per i fly-by.....	53
5.3	Caratteristiche del satellite	55
5.4	Ipotesi semplificative.....	56
6.	Risultati	57
6.1	2017 SV19	57
6.2	2020 XF – 2017 OO1 – 2017 SV19.....	62
6.3	2020 XF – 2018 NW - 2017 SV19.....	66
6.4	2012 LA	71
6.5	2017 HP49 – 2018 XC4 – 2012 LA.....	73
6.6	2021 LV – 2020 XF – 2015 JD – 2012 LA	77
6.7	2017 UQ6.....	82
6.8	2019 EF1 – 2021 PN1 – 2016 EP84 – 2017 UQ6	83

6.9	2012 DE31 – 2018 GR11 – 2004 OB – 2017 UQ6	87
6.10	2000 SG344	93
6.11	2018 NV – 2019 YP3 – 2000 SG344	97
6.12	Sintesi risultati	101
7.	Conclusioni.....	103
	Bibliografia	105
	Appendice A	107

Indice delle figure

Figura 1. 1 Fascia degli asteroidi.....	1
Figura 1. 2 Asteroidi scoperti dal 1996 al 2019	2
Figura 1. 3 Percentuale di asteroidi in funzione della distanza dal Sole	3
Figura 1. 4 Numero di NEAs per dimensione (al Nov. 2019).....	4
Figura 1. 5 Effetto Yarkovsky diurno e stagionale	5
Figura 1. 6 Bolidi documentati tra il 1994 e il 2013	7
Figura 1. 7 Scala Torino	8
Figura 1. 8 Confronto Empire State Building e Apophis	9
Figura 1. 9 Schema della missione DART.....	11
Figura 2. 1 Problema degli N corpi.....	14
Figura 2. 2 Perigeo, Apogeo e angolo v	18
Figura 2. 3 Tipi di coniche	19
Figura 2. 4 Area spazzata nel tempo t	20
Figura 2. 5 Orbita ellittica e circonferenza ausiliaria.....	20
Figura 2. 6 Coordinate eliocentriche-eclittiche.....	22
Figura 2. 7 Coordinate geocentriche-equatoriali	23
Figura 2. 8 Coordinate perifocali	23
Figura 2. 9 Elementi orbitali classici.....	24
Figura 2. 10 Giorno sidereo e giorno solare.....	25
Figura 2. 11 Triangolo di velocità per cambi di piano.....	27
Figura 2. 12 Rotazione linea degli apsidi.....	28
Figura 2. 13 Trasferta generica vs Trasferta di Hohmann	29
Figura 2. 14 Componenti della spinta	30
Figura 5. 1 Orbita a bassa inclinazione - nera 2000 SG344, arancione Terra.....	50
Figura 5. 2 Orbita ad alta inclinazione di 1999 AN10.....	52
Figura 6. 1 Orbita di 2017 SV19 e incontro ravvicinato (Feb 2029)	58
Figura 6. 2 Raggio della traiettoria in funzione del tempo	59
Figura 6. 3 Inclinazione, eccentricità, energia, raggio e velocità in funzione del tempo	59
.....
Figura 6. 4 Massa totale in funzione del tempo	60
Figura 6. 5 Componenti e modulo della spinta T	60
Figura 6. 6 Traiettoria in 2D e in 3D nel s.d.r. eliocentrico.....	61
Figura 6. 7 Traiettoria in 2D e in 3D in coordinate ECI.....	61

Figura 6. 8 Raggio della traiettoria in funzione del tempo	62
Figura 6. 9 Inclinazione, eccentricità, energia, raggio e velocità in funzione del tempo	63
.....	
Figura 6. 10 Traiettoria in 2D e in 3D nel s.d.r. eliocentrico.....	63
Figura 6. 11 Traiettoria in 2D e in 3D in coordinate ECI.....	64
Figura 6. 12 Massa totale in funzione del tempo	64
Figura 6. 13 Componenti e modulo della spinta T.....	65
Figura 6. 14 Vettori spinta lungo il terzo arco nel piano X-Y	65
Figura 6. 15 Vettori spinta lungo i primi 2 archi nel piano X-Y	66
Figura 6. 16 Raggio della traiettoria in funzione del tempo	67
Figura 6. 17 Inclinazione, eccentricità, energia, raggio e velocità in funzione del tempo	67
.....	
Figura 6. 18 Traiettoria in 2D e in 3D nel s.d.r. eliocentrico.....	68
Figura 6. 19 Traiettoria in 2D e in 3D in coordinate ECI.....	68
Figura 6. 20 Massa totale in funzione del tempo	69
Figura 6. 21 Componenti e modulo della spinta totale T.....	69
Figura 6. 22 Vettori di spinta lungo i 3 archi nel piano X-Y	70
Figura 6. 23 Orbita di 2012 LA e incontro ravvicinato (Dic 2029).....	71
Figura 6. 24 Raggio della traiettoria nel caso di durata maggiore della missione	72
Figura 6. 25 Raggio della traiettoria in funzione del tempo	73
Figura 6. 26 Inclinazione, eccentricità, energia, raggio e velocità in funzione del tempo	74
.....	
Figura 6. 27 Traiettoria in 2D e in 3D nel s.d.r. eliocentrico.....	74
Figura 6. 28 Traiettoria in 2D e 3D in coordinate ECI.....	75
Figura 6. 29 Massa totale in funzione del tempo	75
Figura 6. 30 Componenti e modulo della spinta T.....	76
Figura 6. 31 Vettori di spinta del primo e secondo arco nel piano X-Y	76
Figura 6. 32 Vettori spinta lungo il terzo arco nel piano X-Y	77
Figura 6. 33 Raggio della traiettoria in funzione del tempo	78
Figura 6. 34 Inclinazione, eccentricità, energia, raggio e velocità in funzione del tempo	78
.....	
Figura 6. 35 Traiettoria in 2D e 3D nel s.d.r. eliocentrico.....	79
Figura 6. 36 Traiettoria in 2D e in 3D in coordinate ECI.....	79
Figura 6. 37 Massa totale in funzione del tempo	80
Figura 6. 38 Componenti e modulo della spinta T.....	80
Figura 6. 39 Vettori di spinta lungo i 4 archi sul piano X-Y	81
Figura 6. 40 Orbita di 2017 UQ6 e incontro ravvicinato (Ago 2029).....	82

Figura 6. 41 Raggio della traiettoria in funzione del tempo	84
Figura 6. 42 Inclinazione, eccentricità, energia, raggio e velocità in funzione del tempo	84
.....	
Figura 6. 43 Traiettoria in 2D e in 3D nel s.d.r. eliocentrico.....	85
Figura 6. 44 Traiettoria in 2D e in 3D in coordinate ECI.....	85
Figura 6. 45 Massa totale in funzione del tempo	86
Figura 6. 46 Componenti e modulo della spinta T.....	86
Figura 6. 47 Vettori spinta lungo i 4 archi nel piano X-Y	87
Figura 6. 48 Raggio della traiettoria in funzione del tempo	88
Figura 6. 50 Traiettoria in 2D e in 3D nel s.d.r. eliocentrico.....	89
Figura 6. 49 Inclinazione, eccentricità, energia, raggio e velocità in funzione del tempo	89
.....	
Figura 6. 51 Traiettoria in 2D e in 3D in coordinate ECI.....	90
Figura 6. 52 Massa totale in funzione del tempo	90
Figura 6. 53 Componenti e modulo della spinta T.....	91
Figura 6. 54 Vettori spinta lungo i 4 archi nel piano X-Y	92
Figura 6. 55 Orbita 2000 SG344 e incontro ravvicinato (Dec 2030)	93
Figura 6. 56 Inclinazione, eccentricità, energia, raggio e velocità in funzione del tempo	94
.....	
Figura 6. 57 Raggio della traiettoria in funzione del tempo	94
Figura 6. 58 Traiettoria in 2D e in 3D nel s.d.r. elioeccentrico.....	95
Figura 6. 59 Traiettoria in 2D e in 3D in coordinate ECI.....	95
Figura 6. 60 Massa totale in funzione del tempo	96
Figura 6. 61 Componenti e modulo della spinta T.....	96
Figura 6. 62 Raggio della traiettoria in funzione del tempo	97
Figura 6. 63 Inclinazione, eccentricità, energia, raggio e velocità in funzione del tempo	98
.....	
Figura 6. 64 Traiettoria in 2D e in 3D nel s.d.r. eliocentrico.....	98
Figura 6. 65 Traiettoria in 2D e in 3D in coordinate ECI.....	99
Figura 6. 66 Massa totale in funzione del tempo	99
Figura 6. 67 Componenti e modulo della spinta T.....	100
Figura 6. 68 Vettori spinta lungo i 3 archi nel piano X-Y	101

Indice delle tabelle

Tabella 2. 1 Caratteristiche particolari delle orbite.....	19
Tabella 5. 1 Candidati per il rendez-vous	53
Tabella 5. 2 Candidati per i fly-by nei diversi anni	54
Tabella 6. 1 Elementi orbitali di 2017 SV19 all'epoca 59600 MJD.....	58
Tabella 6. 2 Traiettoria diretta con rendez-vous 2017 SV19.....	58
Tabella 6. 3 Caratteristiche della traiettoria	62
Tabella 6. 4 Caratteristiche della traiettoria	66
Tabella 6. 5 Elementi orbitali di 2012 LA all'epoca 59600 MJD.....	71
Tabella 6. 6 Traiettorie dirette con diverse durate con rendez-vous 2012 LA.....	71
Tabella 6. 7 Candidati per i fly-by della traiettoria con rendez-vous 2012 LA	72
Tabella 6. 8 Caratteristiche della traiettoria	73
Tabella 6. 9 Caratteristiche della traiettoria	77
Tabella 6. 10 Elementi orbitali di 2017 UQ6 all'epoca 59800 MJD	82
Tabella 6. 11 Traiettorie dirette con diverse durate con rendez-vous 2017 UQ6	83
Tabella 6. 12 Caratteristiche della traiettoria	83
Tabella 6. 13 Caratteristiche della traiettoria	88
Tabella 6. 14 Elementi orbitali di 2000 SG344 all'epoca 59800 MJD.....	93
Tabella 6. 15 Traiettorie dirette con diverse durate con rendez-vous 2000 SG344....	94
Tabella 6. 16 Caratteristiche della missione	97

Sommario

Gli asteroidi sono dei piccoli corpi celesti, nella maggior parte dei casi di composizione rocciosa o metallica, e residui del disco protoplanetario che non sono stati inglobati nei pianeti durante la formazione del Sistema Solare. Le orbite di questi corpi sono altamente instabili, poiché i pianeti come Giove, con le loro influenze gravitazionali, possono spingere gli asteroidi verso il Sistema Solare interno. Se un asteroide ha un'orbita che lo porta nelle vicinanze della Terra viene classificato come *near-Earth Asteroid (NEA)*.

Il concetto di asteroide come minaccia risale a tempi antichi, tempi in cui gli avvistamenti di questi oggetti venivano considerati come presagio di disastri naturali o guerre, anche a causa delle culture e delle religioni dei diversi popoli. Col tempo, astronomi e scienziati iniziarono a prendere consapevolezza del rischio che questi corpi potrebbero rappresentare per l'umanità, basti pensare infatti che, nel 1694, l'astronomo Edmond Halley ipotizzò che il diluvio universale narrato nella Bibbia fosse il risultato di un impatto da asteroide.

Negli ultimi 50 anni, è aumentata, nella comunità scientifica, la consapevolezza del rischio che rappresentano questi oggetti. Si è cominciato quindi a osservare la volta celeste per catalogare questi corpi e per individuare quelli che, in un futuro prossimo, potrebbero rappresentare una minaccia per la Terra. Inoltre, sono state effettuate alcune missioni (Dawn, OSIRIS-Rex, Hayabusa 1 e 2 ecc.) con l'obiettivo di studiare gli asteroidi, o addirittura riportare sulla Terra alcuni campioni di materiale asteroidale; l'analisi di questi campioni ha un ritorno scientifico importante, in quanto potrebbe portare a nuove scoperte sull'origine e sulla formazione del Sistema Solare, oltre alla possibilità di sviluppare tecnologie in grado di mitigare il rischio di impatto con la Terra.

Il progetto ANIME (*Asteroid Nodal Intersection Multiple Encounters*) dell'Agenzia Spaziale Europea (ESA) ha l'obiettivo di esplorare 3 NEAs, la cui data di lancio prevista è nel tardo 2026, con un satellite a propulsione elettrica e con una traiettoria progettata per ottimizzare il ritorno scientifico della missione. Lo scopo di questa tesi è quello di sfruttare l'approccio utilizzato per il progetto ANIME, in modo da trovare traiettorie alternative nella finestra di lancio compresa tra il 2025 e il 2030. Il lavoro è stato diviso essenzialmente in due fasi: la prima fase è stata finalizzata alla ricerca di asteroidi che, in tale periodo, hanno un incontro ravvicinato con la Terra; ricavata tale lista di asteroidi, è stato possibile passare alla seconda fase, ovvero la fase di ottimizzazione delle traiettorie. Per l'ottimizzazione è stata utilizzata la *teoria del controllo ottimale*, che consiste nel ricercare una legge di controllo che rende massimo o minimo un particolare indice di prestazione. In questo caso, essendo i consumi di propellente così importanti per le missioni spaziali, l'indice da minimizzare è la quantità di propellente utilizzato.

Alla fine del processo sono state trovate circa 50 traiettorie, che intercettano dai 2 ai 4 asteroidi. I candidati per il rendez-vous finale sono i 3 asteroidi 2012 LA, 2017 SV19 e 2017 UQ6. La maggior parte delle traiettorie contiene fly-bys con asteroidi molto piccoli, che non sono potenzialmente pericolosi. Una nota di riguardo va alla traiettoria contenente gli asteroidi 2012 DE31 e 2004 OB, dalle dimensioni rispettivamente di 160 e 600 metri di diametro, che la rendono la più interessante dal punto di vista scientifico. Quasi tutte le traiettorie analizzate hanno un ΔV minore di 5 km/s, mentre solo un paio superano questa

soglia. Questo aspetto si traduce in una quantità di propellente molto contenuta, grazie alla propulsione elettrica, e dimostra quindi la fattibilità delle missioni verso i NEAs.

Summary

Asteroids are small celestial bodies, which have a rocky or metallic composition in most cases, that are what remains of the protoplanetary disk that were not incorporated into the planets during the formation of the Solar System. The orbits of these bodies are highly unstable because planets as Jupiter can push asteroids towards the inner Solar System with their gravitational influences. If an asteroid has a close encounter with the Earth, it is classified as *near-Earth Asteroid (NEA)*.

The idea of asteroids as a threat, dates to ancient times, when uncommon objects in the sky were seen as omen of natural disasters or wars, also due to the ancient beliefs or religion. Over time, astronomers and scientists began to gain awareness of the risk that these bodies could represent for the humankind; just think that, in 1694, the astronomer Edmond Halley hypothesized that the universal flood narrated in the Bible was the result of the impact of an asteroid.

In the last 50 years, the awareness of the risk that these bodies could represent, has increased in the scientific community. We therefore began to observe the sky in order to catalogue asteroids and to identify those that could represent a threat for the Earth in the near future. In addition, some missions towards asteroids were carried out (as Dawn, OSIRIS-Rex, Hayabusa 1 and 2 etc.). The goal of these missions was to study this bodies or even bringing back some samples of asteroid material to Earth; the analysis of these samples has an important scientific return, as it could lead to new discoveries on the origin and formation of the Solar System, as well as the possibility of developing technologies capable of mitigating the risk of impact with the Earth.

ANIME project (*Asteroid Nodal Intersection Multiple Encounters*) of the European Space Agency (ESA), aims to explore 3 NEAs with a spacecraft equipped with electric propulsion. The trajectory is designed to optimize the scientific return of the mission, with a foreseen launch in late 2026. The purpose of this thesis is to exploit the approach used in the ANIME project, in order to find alternative trajectories in the launch window between 2025 and 2030. The work was essentially divided in two phases: the first phase was aimed at the search for asteroids that have a close encounter with the Earth, in the considered period of time; once obtained this list, it was possible to move on the second phase, that is the phase of optimization of the trajectories. For the optimization, the *theory of optimal control* was used: it consists in searching for a control law that makes a particular performance index maximum or minimum. Since propellant consumption is so important for space missions, the index to be minimized is the amount of propellant used.

At the end of the process, about 50 trajectories were found, exploring from 2 to 4 asteroids. The candidates for the final rendez-vous are the 3 asteroids 2012 LA, 2017 SV19 and 2017 UQ6. The majority of the trajectories contain multiple fly-by with small asteroids, which are not potentially dangerous. A special note goes to the trajectory containing asteroids 2012 DE31 and 2004 OB, which measures respectively 160 and 600 meters in diameter, which make this trajectory the most interesting from a scientific point of view. Almost all the trajectories have a ΔV less than 5 km/s, while only a couple exceed this threshold. This aspect results in a very low quantity of propellant used, thanks to the electric propulsion, and therefore demonstrates the feasibility of missions towards NEAs.

Capitolo 1

1. Generalità sugli asteroidi

Gli asteroidi o planetoidi sono corpi celesti, di composizione metallica o rocciosa, generalmente con un diametro inferiore al chilometro e privi di atmosfera. Nella maggior parte dei casi questi corpi non hanno una forma sferica. L'oggetto più grande finora conosciuto è Cerere, con un diametro di circa 1000 km, scoperto nel 1801. La scoperta di questi corpi avviene principalmente tramite osservazione diretta, ed è questo il motivo per cui prima di tale data non è stato scoperto alcun asteroide: la dimensione e la luminosità di questi corpi sono strettamente legate, e quindi senza adeguati strumenti è molto difficile scoprirne di nuovi, specie se molto piccoli.

1.1 La Fascia Principale

La maggior parte degli asteroidi orbita tra Marte e Giove, ad una distanza compresa tra 2 e 4 UA dal sole, generalmente in orbite dalla bassa eccentricità, in una regione dello spazio conosciuta come fascia principale. Questi corpi celesti potrebbero essere residui della formazione del Sistema Solare, ovvero corpi che non sono stati incorporati nei pianeti che conosciamo oggi, probabilmente per colpa delle enormi perturbazioni gravitazionali di Giove. Si stima che la fascia principale contenga tra 1.1 e 1.9 milioni di asteroidi più grandi di 1 km di diametro, e milioni di asteroidi più piccoli. Un altro gruppo numeroso di asteroidi è quello che popola l'orbita di Giove, nei punti Lagrangiani stabili L4 ed L5, che vengono chiamati Greci e Troiani. Si stima che il numero totale di asteroidi maggiori di 1 km di diametro siano circa 1 milione, approssimativamente lo stesso numero della fascia principale.

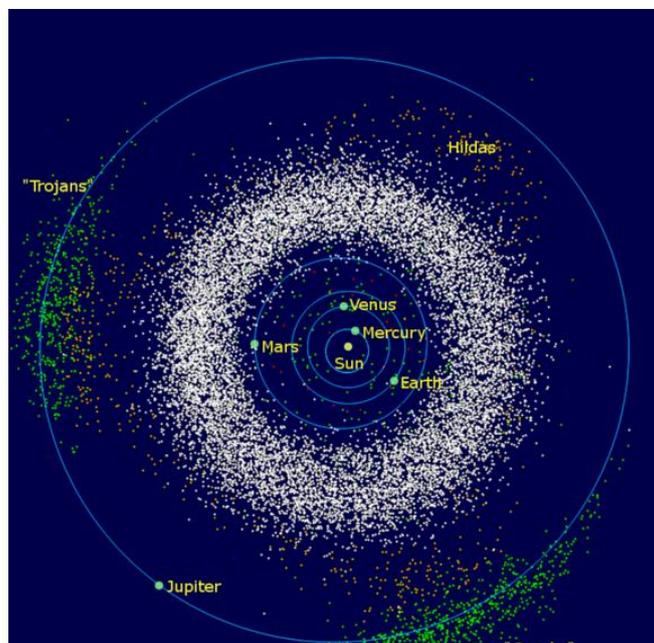


Figura 1. 1 Fascia degli asteroidi

Al mese di Maggio del 2022, i corpi celesti catalogati sono 1169399; 607011 di questi appartengono alla categoria chiamata “*numbered minor planets*”, ovvero asteroidi e comete le cui orbite sono determinate con un buon grado di accuratezza. I rimanenti 562388 appartengono alla categoria chiamata “*unnumbered minor planets*”, cioè corpi le cui orbite sono determinate in modo approssimativo a causa dell’insufficiente quantità di osservazioni. Questi cataloghi vengono stilati dal Jet Propulsion Laboratory della NASA e vengono costantemente aggiornati.

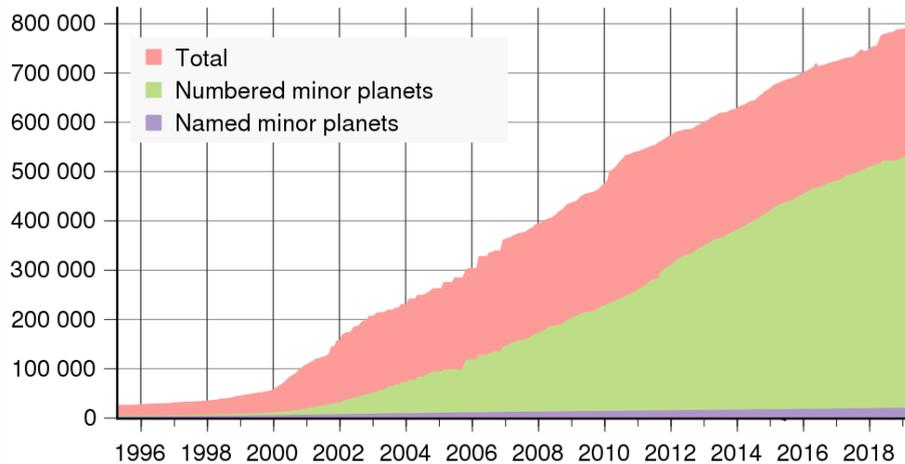


Figura 1. 2 Numero di asteroidi scoperti dal 1996 al 2019

Essendosi formati insieme agli altri corpi del Sistema Solare, gli asteroidi possono essere molto utili per fini di ricerca scientifica. Questi corpi sono composti da diversi elementi e hanno proprietà chimiche che possono essere utili per studiare l’origine o il passato del Sistema Solare stesso. Inoltre, conoscendoli meglio è possibile studiare dei modi per poter prevenire danni da collisione alla terra. Secondo queste considerazioni, è possibile fare una classificazione degli asteroidi in base alle loro proprietà chimiche.

Gli asteroidi nella fascia principale possono essere divisi in:

- **C-Type:** principalmente composti da carbonio, sono gli asteroidi più comuni nella fascia principale, componendone circa il 75 %. Occupano prevalentemente la parte più esterna della fascia, raggiungendo le 3.5 UA dal sole. Hanno una bassa albedo (quantità di luce riflessa dal corpo) a causa del colore scuro, dovuto all’alta percentuale di carbonio, e la loro composizione chimica è molto simile a quella della nebulosa primitiva del Sistema Solare.
- **M-Type:** principalmente composti da ferro e nickel, rappresentano circa il 10 % della fascia principale. Hanno un’albedo moderatamente alta.
- **S-Type:** principalmente composti da ferro e silicati di magnesio, rappresentano circa il 15% degli asteroidi. Sono predominanti nella parte più interna della fascia a circa 2.2 AU dal sole, e sono comuni nella parte centrale della fascia a 3 AU. Hanno un colore tendente al rosso e anche questi sono moderatamente luminosi.

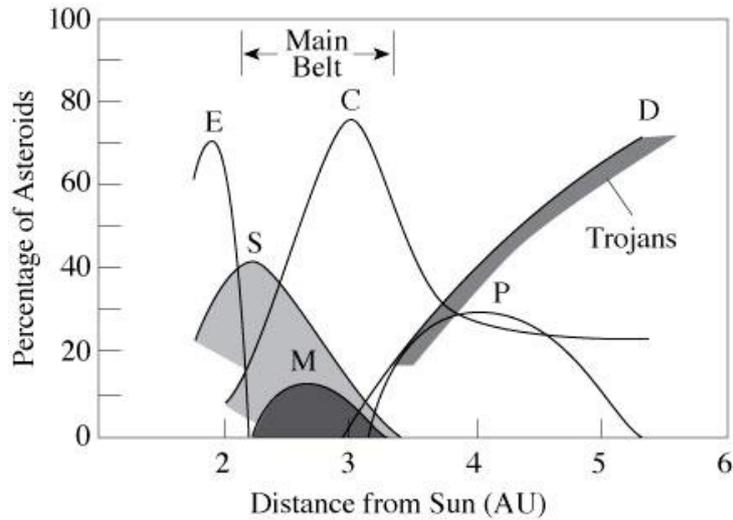


Figura 1. 3 Percentuale di asteroidi in funzione della distanza dal Sole

Fuori dalla fascia principale esistono anche altri tipi di asteroidi, come quelli bianchi (E) a circa 2 UA dal sole, oppure i rossi (D) la cui predominanza aumenta allontanandosi dal sole.

1.2 Near-Earth Objects

Per *Near-Earth Objects* (NEOs) si intende un corpo celeste minore, la cui orbita lo porta nelle prossimità della Terra. Convenzionalmente, un corpo si definisce NEO se il suo perielio è minore di 1.3 AU. I NEOs si dividono a loro volta in NEA, *Near-Earth Asteroids* (NEAs), e *Near-Earth Comets* (NECs). Una piccola parte di NEAs può essere stata in passato una NECs, che ha in seguito perduto il suo rivestimento superficiale di ghiaccio e che ha lasciato a nudo il proprio nucleo solido. Se il corpo ha una magnitudine assoluta H minore o uguale a 22 e una *Minimum Orbit Intersection Distance* (MOID), cioè la distanza tra i due punti più vicini delle orbite osculanti dei due corpi, l'oggetto viene classificato come *potentially hazardous object* (PHO).

Dalla magnitudine assoluta, che è una misura della luminosità del corpo, si può stimare la dimensione del diametro attraverso la formula:

$$D = \frac{1329}{\sqrt{p}} * 10^{-0.2*H} \quad [km]$$

in cui p rappresenta l'albedo geometrico (generalmente intorno al 14%), mentre H la magnitudine assoluta. Questa formula però può portare a dei risultati errati, in quanto l'albedo può variare dal 5% al 30%, portando a un errore non indifferente, specialmente quando si va a valutare il volume dell'oggetto.

Un censimento di fine 2021 ha catalogato 27323 NEAs, 2224 dei quali sono sufficientemente grandi e arrivano talmente vicino alla Terra che vengono considerati PHOs. Le dimensioni di questi corpi sono molto variabili, ma la maggior parte ha un diametro compreso tra i 30m e 100m. Il più piccolo near-Earth conosciuto è 2008 TS26, con un diametro di circa 1m, mentre il più grande è 1924 TD, il cui diametro stimato è di circa 38 km.

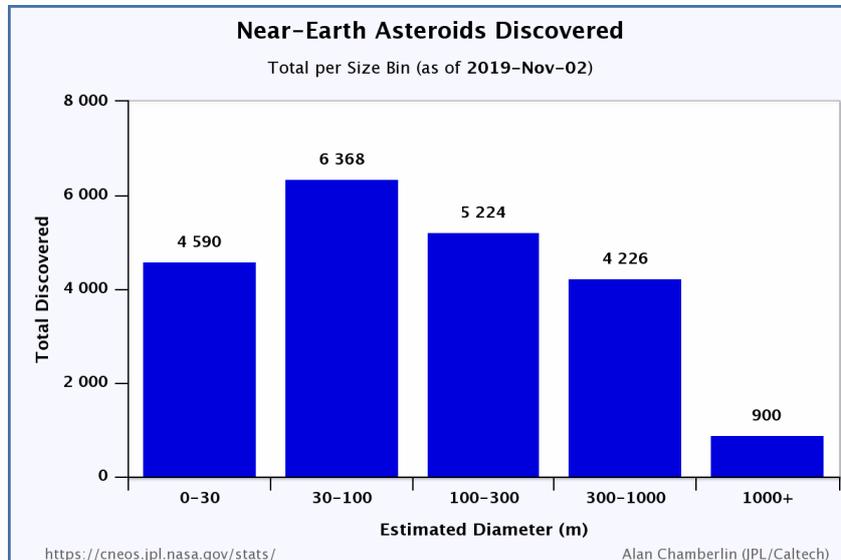


Figura 1. 4 Numero di NEAs per dimensione (al Nov. 2019)

I NEA vengono classificati anche in base alla loro orbita, secondo 4 gruppi:

- **Atiras**, asteroidi la cui orbita è interna a quella della Terra: l'afelio di questi asteroidi è minore del perielio della Terra;
- **Atens**, asteroidi il cui semiasse maggiore è minore di 1 AU e intersecano l'orbita della Terra;
- **Apollo**, asteroidi il cui semiasse maggiore è maggiore di 1 AU e intersecano l'orbita della Terra;
- **Amors**. Asteroidi la cui orbita è esterna a quella della Terra: il perielio di questi asteroidi è maggiore dell'afelio della Terra. Alcuni di questi asteroidi intersecano l'orbita di Marte.

Gli Atiras e gli Amors non intersecano l'orbita della Terra, e quindi non rappresentano un pericolo immediato. Questi asteroidi non hanno una vita molto lunga, si parla di qualche milione di anni, e questo è un dettaglio importante perché denota il fatto che questi corpi non si sono formati nelle loro attuali orbite con il resto del Sistema Solare, ma da altri punti dello spazio. I NEAs sono destinati a decadere verso il sole oppure essere espulsi dal Sistema Solare a causa dell'effetto fionda con i pianeti più grandi. Le loro orbite però sono continuamente minacciate dall'interazione gravitazionale con altri pianeti, dallo scontro con altri asteroidi o da meccanismi termici l'effetto Yarkovsky, rendendo quindi le traiettorie di questi corpi variabili nei secoli.

1.2.1 Effetto Yarkovsky

L'effetto Yarkovsky è una perturbazione non gravitazionale agente su piccoli corpi celesti rotanti, ed è una conseguenza diretta della diversa temperatura nelle facce degli asteroidi. La superficie dell'asteroide illuminata, quella in cui è giorno, è riscaldata dal sole e si raffredda durante la notte. A causa delle proprietà termiche della superficie, c'è una differenza tra la quantità di radiazione assorbita dal sole e l'emissione di radiazione sotto forma di calore, quindi la regione più calda dell'asteroide è quella che si trova a "pomeriggio". Questo comporta una differenza tra la direzione di assorbimento e quella di ri-emissione della radiazione, che si traduce nella nascita di una forza che agisce lungo la direzione del moto lungo l'orbita. Se l'oggetto ha una rotazione prograda (concorde con il verso della rotazione attorno al sole), la forza è in verso concorde alla direzione del moto e causa un costante aumento del semi-asse maggiore dell'orbita, allontanandolo dal sole; se l'oggetto ha una rotazione retrograda, il verso della forza è opposto al moto, il semi-asse maggiore si riduce e l'asteroide si avvicina lentamente al sole. Questo effetto è conosciuto come *effetto diurno*. L'effetto diurno è predominante per asteroidi con diametro maggiore di 100 metri. Esiste anche un'altra conseguenza dell'effetto Yarkovsky che prende il nome di *effetto stagionale*. Questo effetto dipende dall'inclinazione dell'asse di spin dell'asteroide. Se è presente un'elevata inclinazione dell'asse di spin rispetto al piano di rivoluzione, l'asteroide sarà esposto a considerevoli intervalli di tempo in cui uno degli emisferi è maggiormente esposto alla radiazione solare. Questo è l'analogo di ciò che avviene nella Terra con l'alternarsi delle stagioni. Per gli asteroidi però la conseguenza di questo fenomeno è che il calore accumulato dalla superficie viene re-irradiato dall'emisfero "estivo", con una forza proporzionale alla superficie riscaldata. Questo effetto è predominante per corpi piccoli, dal diametro di qualche decina di metri.

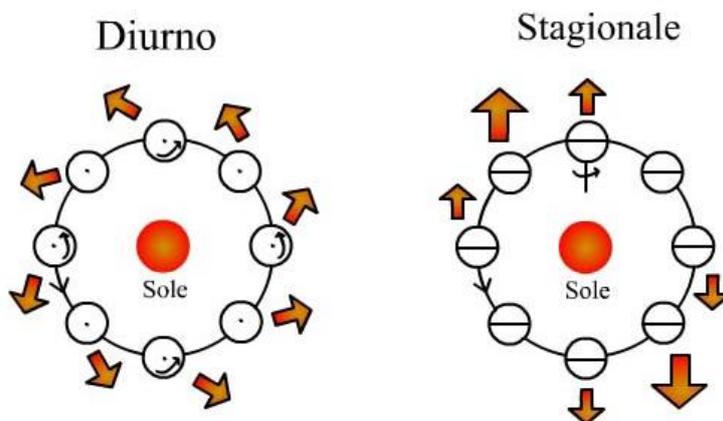


Figura 1. 5 Effetto Yarkovsky diurno e stagionale

L'effetto Yarkovsky non è quindi trascurabile per la maggior parte degli asteroidi. Per gli asteroidi più grandi (~1km), se nel corto periodo l'effetto è trascurabile, non vale la stessa

cosa per il lungo periodo: la forza agisce costantemente, e nonostante sia una forza molto bassa, in milioni di anni le orbite possono essere perturbate abbastanza da arrivare dalla fascia degli asteroidi al Sistema Solare interno.

1.3 Protezione Planetaria

Dagli anni '90 l'osservazione dei NEAs viene portata avanti per motivi scientifici ma soprattutto di rischio. Infatti, la comunità scientifica è sempre stata consapevole che anche corpi piccoli possono creare grandi crateri di impatto, e che gli effetti di tale impatto possono essere registrati su aree ancora più grandi. Questa preoccupazione è stata ulteriormente accentuata dopo che la comunità scientifica ha deliberato come ipotesi più accreditata per l'estinzione di massa del Cretaceo-Paleocene, l'impatto con un asteroide di circa 10-15 km di diametro.

Come detto in precedenza, il numero di NEAs attualmente conosciuti è circa ~30000, ma il conteggio aumenta quotidianamente poiché vengono osservati e classificati nuovi asteroidi. Inoltre, le numerose interferenze gravitazionali e non, in un futuro non troppo remoto, potrebbero tramutare dei corpi attualmente innocui in potenzialmente pericolosi per la Terra.

Con la consapevolezza sempre crescente di dover studiare questi corpi per mapparli ed eventualmente mitigare i rischi di possibili impatti, negli anni sono nati diversi enti che si occupano di protezione planetaria. Il più importante tra questi è il *Planetary Defense Coordination Office* (PDCO), un'organizzazione di protezione planetaria fondata dalla NASA nel 2016. La sua missione è quella di catalogare NEOs e PHO le cui orbite passano entro 5 milioni di km dalla Terra e che potrebbero colpirla, e di aiutare il governo degli Stati Uniti a coordinare gli sforzi per mitigare o deflettere delle potenziali minacce una volta trovate. L'osservazione viene fatta tramite una gran varietà di telescopi a terra e nello spazio. La NASA sta inoltre sviluppando il *NEO Surveyor Space Telescope*, un satellite ottimizzato per la ricerca e la caratterizzazione di corpi near-Earth, in modo da accelerare la scoperta di asteroidi attualmente sconosciuti. Il PDCO sponsorizza anche tecniche e dimostrazioni tecnologiche per deflettere un asteroide da una possibile traiettoria di impatto con la terra. Stanno venendo inoltre sviluppate missioni per determinare l'efficacia delle nuove tecnologie, nel caso in cui queste tecniche dovessero essere utilizzate contro una reale minaccia da impatto.

Esistono anche altri enti che si occupano di trovare nuovi NEOs, come per esempio la *SpaceGuard Foundation* (SGF), un'organizzazione privata di tipo no-profit con sede in Frascati (Italia), il cui scopo è quello di proteggere la Terra da un eventuale minaccia di impatto. Questa fondazione agisce come un organismo internazionale che raggruppa sia le organizzazioni *SpaceGuard* di varie nazioni, sia singoli astronomi interessati alle attività della fondazione.

1.3.1 Rischi per la Terra

Ogni anno centinaia di piccoli asteroidi passano ad una distanza minore di quella Terra-Luna, questi corpi comunque non sono preoccupanti a causa della loro dimensione: in caso di impatto si disintegrerebbero nell'atmosfera. Non è improbabile però che alcuni oggetti, o parte di essi, riescano a sopravvivere alle elevate temperature dell'entrata in atmosfera, arrivando a terra. Negli ultimi anni sono stati documentati episodi di oggetti denominati *fireball* (o *bolidi*), ovvero *palle di fuoco*: sono piccoli asteroidi che bruciano in atmosfera, denominati così per il loro aspetto molto brillante. Generalmente i *fireball* lasciano una scia che culmina con un bagliore molto intenso, spesso con frammentazione visibile. E' il caso della *meteora di Chelyabinsk*, un NEO di circa 20 metri di diametro, entrato nell'atmosfera terrestre nella regione degli Urali in Russia il 15 Febbraio 2013. L'oggetto è esploso a circa 30 km di altitudine, creando un'onda d'urto con un'energia cinetica stimata di 400-500 kilotoni, l'equivalente dell' energia sprigionata da circa 30 bombe atomiche sganciate su Hiroshima. L'evento ha causato numerosi danni: circa 7000 edifici danneggiati e 1500 persone ferite. Successivamente sono stati rinvenuti a terra dei frammenti dell'asteroide.

Un episodio analogo è avvenuto nel Febbraio 2018, quando l'asteroide 2008 TC3, di 4 metri di diametro e 80 tonnellate di peso, è esploso a circa 37 km sopra il deserto del Sudan. La maggior parte di esso si è vaporizzato, ma successivamente a terra sono stati raccolti circa 11 kg di materiale sopravvissuto all'esplosione. E' stato il primo caso di impatto da asteroide che era stato previsto prima dell'entrata nell'atmosfera. In questo caso non sono stati documentati danni o feriti.

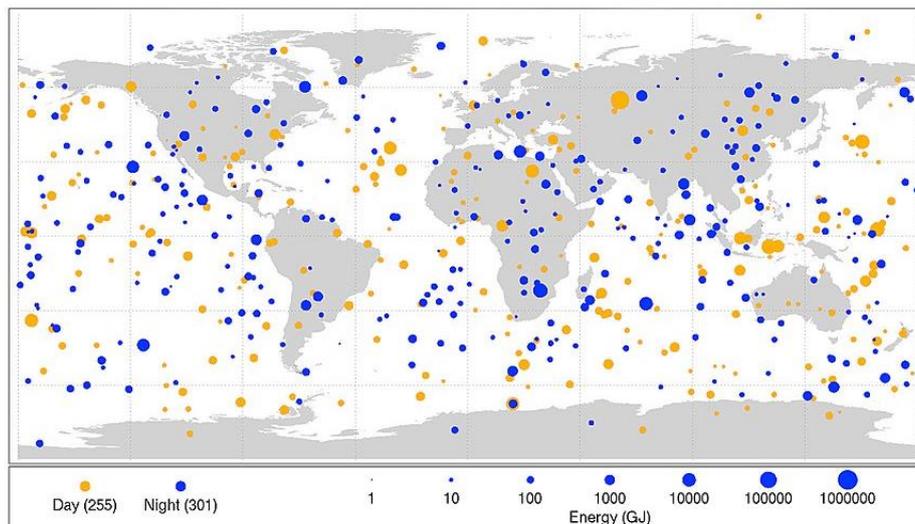


Figura 1. 6 Bolidi documentati tra il 1994 e il 2013

Nel caso di corpi più grandi però, l'impatto con la Terra potrebbe avere conseguenze molto gravi, tanto più quanto è grande l'asteroide. Nel caso di impatto con oggetti di dimensioni modeste (> 1 km), l'impatto, già catastrofico di per sé, potrebbe attivare una serie di effetti a

catena come tsunami, terremoti e, nel peggiore dei casi, cambiamenti climatici simili a quelli prodotti dall'*inverno nucleare*.

Per valutare la pericolosità di una possibile collisione si usano 2 scale: la scala Torino e la scala Palermo.

1.3.2 Scala Torino

La scala Torino è un metodo per caratterizzare il rischio di impatto associato ai NEOs nel futuro prossimo, un periodo di circa 100 anni. Si tratta di una scala con valori interi da 0 a 10, in cui il singolo valore di rischio è una combinazione tra la probabilità statistica di impatto e la sua potenziale energia cinetica. Il valore 0 indica una minaccia trascurabile, per esempio un asteroide troppo piccolo per penetrare l'atmosfera terrestre; il valore 10 indica una minaccia certa, con un asteroide grande abbastanza da causare una catastrofe planetaria.

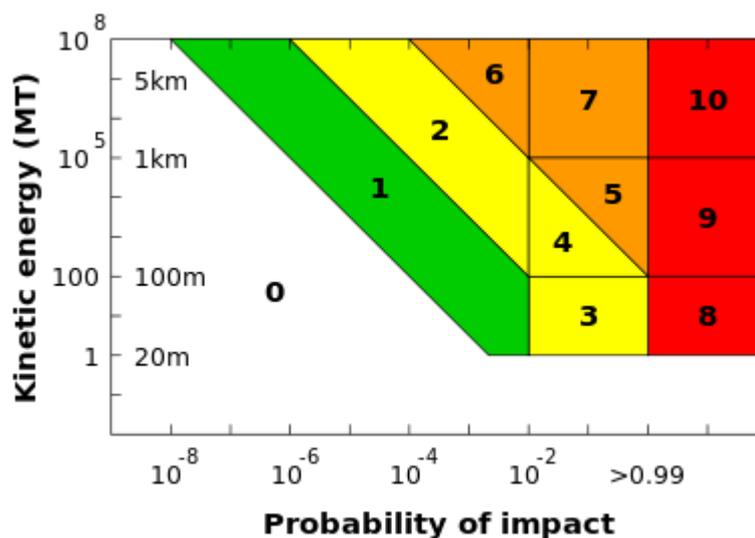


Figura 1. 7 Scala Torino

Il livello di minaccia è rappresentato anche da colori:

- Bianco: probabilità nulla o asteroide troppo piccolo;
- Verde: collisione molto improbabile. Molto spesso il rischio torna a 0 dopo nuove osservazioni;
- Giallo: merita l'attenzione degli astronomi. E' il caso di incontri ravvicinati, con chance di collisione maggiore o uguale dell'1%, con un possibile impatto capace di causare una distruzione localizzata. Molto spesso il rischio torna a 0 dopo nuove osservazioni;
- Arancione: minaccia. E' il caso di incontri ravvicinati con grandi asteroidi che potrebbero portare a distruzione regionale. E' necessaria un'analisi di dove e quando avverrà la collisione, richiamando l'attenzione dei governi in merito a eventuali piani di emergenza da attuare.

- Rosso: collisione certa. La collisione può causare una distruzione localizzata o uno tsunami per asteroidi piccoli (1 evento ogni 50-10000 anni), mentre asteroidi grandi possono causare una catastrofe globale (1 evento ogni 100000 anni). L'asteroide che ha provocato l'impatto di Chicxulub, che ha causato l'estinzione dei dinosauri non volatili, è stata stimata 10 nella scala Torino.

Negli anni, alcuni asteroidi sono stati classificati con valore 1 e in seguito declassati a 0. Al momento, nessun oggetto è classificato con un valore diverso da 0. Il 24 Dicembre 2004, all'osservatorio Kitt Peak in America, venne scoperto un asteroide di circa 370 metri di diametro, 2004 MN4 (Apophis), a cui fu attribuito un valore della scala Torino 4, il più alto mai registrato finora. Questo si traduceva in una probabilità d'impatto con la Terra del 2.7%, Venerdì 13 Aprile 2029. Ulteriori osservazioni e calcoli sull'orbita portarono, il 28 Dicembre 2004, alla conclusione che il passaggio del 2029 non avrebbe creato pericoli alla Terra, facendo scendere il rischio d'impatto a 0, nonostante altri passaggi successivi fossero valutati 1 sulla scala Torino. Nel 2006, dopo anni di osservazioni, è stato escluso come minaccia anche il passaggio ravvicinato del 2036. Nel 2021 Apophis è stato ufficialmente rimosso dalla lista *Sentry* della NASA, che si occupa di stilare gli incontri ravvicinati e stimare la probabilità d'impatto.

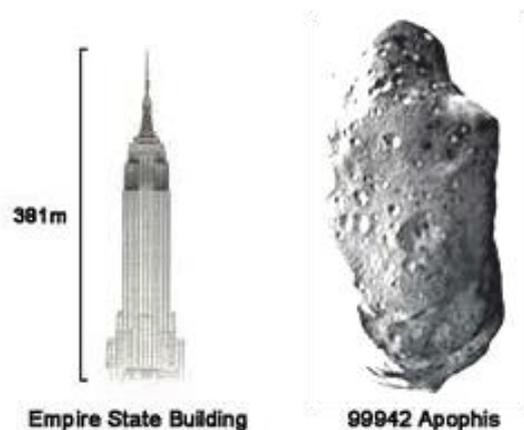


Figura 1. 8 Confronto Empire State Building e Apophis

1.3.3 Scala Palermo

La scala Palermo (*Palermo Technical Impact Hazard Scale*) è una scala simile alla scala Torino, la cui introduzione è nata dal fatto di poter assegnare un grado di priorità ad eventi che nella scala Torino sono classificati allo stesso livello. La scala Palermo è in base logaritmica, quindi può avere valori sia negativi che positivi, ed esprime rapporto tra la probabilità che avvenga un evento specifico e la probabilità media che un oggetto delle stesse dimensioni possa colpire la Terra negli anni che separano dall'evento considerato; quest'ultima probabilità viene chiamata *background risk*. In confronto, la scala Torino può essere vista come uno strumento di comunicazione al pubblico circa l'entità del rischio

associato, mentre la scala Palermo è uno strumento per gli esperti per quantificare dettagliatamente il livello di preoccupazione relativo ad un determinato evento.

Il valore della scala Palermo è definito dall'equazione:

$$PS = \log_{10} \frac{Pi}{Fb * T}$$

con:

- Pi probabilità che accada l'impatto;
- T è l'intervallo di tempo, in anni, dalla possibile collisione;
- Fb è la frequenza di background dell'impatto, che dipende dall'energia cinetica dell'asteroide.

Anche in questo caso, l'asteroide che detiene il record di valore più alto è Apophis, il cui incontro del 2029 è stato classificato 1.10 nella scala Palermo, vale a dire che la probabilità di collisione con la Terra era stimata circa 13 volte più grande del background risk.

1.4 Missioni verso i NEAs

Negli ultimi anni sono state diverse le missioni che hanno avuto come target degli asteroidi. Come è stato visto in precedenza, le motivazioni dietro queste missioni sono le più disparate: per conoscere più informazioni sulla formazione del Sistema Solare, per prevenire il rischio di possibili impatti, o per cercare informazioni sull'origine della vita. Alcuni studiosi, infatti, ipotizzano che i corpi minori dello spazio (soprattutto le comete), possano aver portato i precursori della vita, ovvero sostanze come aminoacidi, acidi nucleici, zuccheri, ecc.; questi composti avrebbero poi formato negli oceani il *brodo primordiale*, precursori dei primi batteri viventi contenenti RNA (teoria di Oparin, Miller e Urey). Inoltre, negli ultimi anni sta prendendo forma l'ipotesi di usare gli asteroidi per l'estrazione mineraria, data la ricchezza di materiali di cui sono composti questi oggetti. Lo studio dei NEOs è quindi di grande interesse scientifico.

1.4.1 DART

Il *Double Asteroid Redirection Test* (DART) è una missione della NASA il cui obiettivo è quello di testare un metodo di difesa planetaria contro i NEOs. Il target della missione è il piccolo asteroide Dimorphos (anche conosciuta come Dydimos B), una "luna" dell'asteroide Dydimos.

Lo scopo della missione è quello di far schiantare deliberatamente la sonda spaziale nel piccolo asteroide Dimorphos. La sonda, con una massa di 500 kg e una velocità di circa 6.6 km/s, dovrebbe produrre una differenza di velocità dell'asteroide di circa 0.4 mm/s, che porterebbe il sistema di asteroidi a variare leggermente la loro traiettoria. Nonostante la variazione sia molto piccola, lungo il corso di decine di anni, il cambiamento cumulativo derivante da questa piccola variazione potrebbe mitigare il rischio di un ipotetico impatto con la Terra. Il sistema Dydimos-Dimorphos non è una minaccia per la Terra, ma è stato semplicemente scelto per questo test.

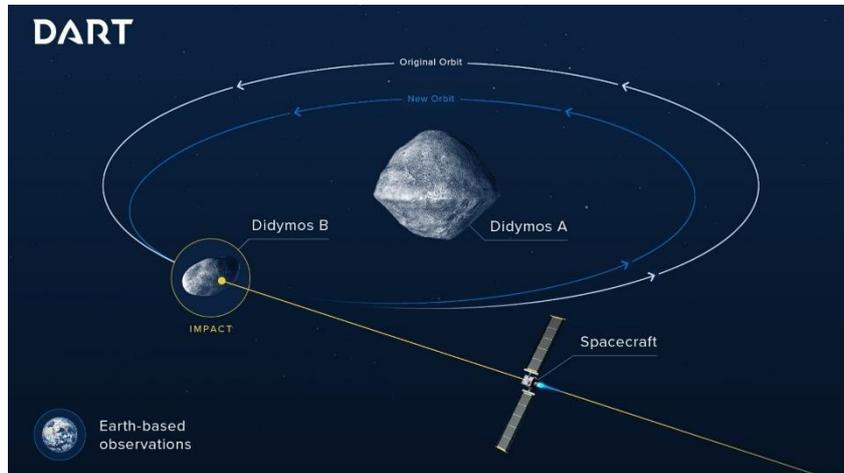


Figura 1. 9 Schema della missione DART

1.4.2 OSIRIS-Rex

La missione OSIRIS-Rex è del tipo *asteroid sample return*, ovvero una missione finalizzata al raccoglimento di campioni dalla superficie del corpo target, e al rientro sulla Terra di tali campioni. Questi possono essere scavati dal terreno, per esempio tramite un trapano in grado di perforare le rocce, oppure tramite collettori per catturare le particelle di vento solare o di residui cometari.

L'obiettivo della missione è quello di portare sulla Terra un campione di 60 grammi dall'asteroide 1999 RQ36 (Bennu). Ci si aspetta che il materiale possa permettere agli scienziati di scoprire di più sulla formazione e sull'evoluzione del Sistema Solare, e sull'origine dei materiali organici che portò all'origine della vita sulla Terra. Il rientro dei campioni sulla Terra è previsto per il 24 Settembre 2023.

1.4.3 Mining

L'idea di estrarre materiali preziosi dagli asteroidi sta prendendo ormai forma. La composizione degli asteroidi varia da corpi rocciosi a corpi metallici, con alte concentrazioni di metalli rari come oro, argento, e platino. L'asteroide 2008 TC3, che ha impattato la terra e discusso nei capitoli precedenti, conteneva al suo interno, tra gli altri minerali, dei nanodiamanti. Un asteroide con alta concentrazione di platino potrebbe contenere fino a 100 g di platino per tonnellata, circa 10-20 volte di più delle miniere a pozzo aperto in Sud Africa. Questo significa che un asteroide di 500 metri di diametro potrebbe contenere circa 175 volte la quantità di platino estratta globalmente in un anno.

Tuttavia, l'estrazione degli asteroidi è momentaneamente praticabile in un futuro non troppo prossimo. Le infrastrutture e le tecniche per l'estrazione e per la raffinazione delle risorse in situ sono in via di sviluppo, rendendo molto improbabili dei rendimenti a breve termine per le società minerarie. Nel 2012, l'unica azienda ad aver fino a quel tempo condotto degli studi di fattibilità, stimò che un singolo asteroide lungo 30 metri e ricco di platino, avrebbe potuto contenere una quantità di platino dal valore di 25-50 miliardi di dollari (al prezzo del 2012). La Deep Space Industries (DSI) è un'impresa americana fondata nel 2013, che prevedeva di iniziare l'attività mineraria entro il 2023. La DSI spera di cominciare l'attività mineraria per metalli e acqua, tramite l'uso di stampanti 3D per il processo di estrazione.

Capitolo 2

2. Richiami di Meccanica Orbitale

2.1 Le leggi di Keplero

Le 3 leggi di Keplero riguardano il movimento e le orbite dei pianeti. Queste leggi valgono sotto le seguenti ipotesi:

- La massa del pianeta è trascurabile rispetto a quella della stella di riferimento;
- Il pianeta e la stella possono essere materializzati come due corpi materiali;
- Le interazioni gravitazionali con altri pianeti o corpi come satelliti possono essere trascurate.

Se queste ipotesi sono rispettate, valgono le 3 leggi di Keplero:

- 1) L'orbita descritta da un pianeta è un'ellisse, di cui il Sole occupa uno dei due fuochi;
- 2) Il raggio vettore che unisce il centro del pianeta con il centro del Sole spazza aree uguali in tempi uguali;
- 3) Il quadrato del periodo di un pianeta è proporzionale al cubo del semi-asse maggiore.

2.2 La legge di gravitazione universale

Isaac Newton dedusse dalle leggi di Keplero la spiegazione dinamica dei moti planetari introducendo la *forza di gravitazione universale*. La legge di gravitazione universale afferma che due corpi si attraggono con una forza proporzionale al quadrato della loro distanza.

$$\mathbf{F} = -G \frac{M * m}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r} \quad (2.1)$$

con:

- $G = 6.673 * 10^{-11} [Nm^2kg^{-2}]$ detta anche *costante di gravitazione universale*;
- M e m sono rispettivamente le masse del corpo centrale e la massa del corpo orbitante;
- \mathbf{r} è il raggio vettore che unisce i centri di massa dei due corpi.

Teoricamente, la legge si basa sull'idea che le masse siano puntiformi. Nella realtà non è così, tuttavia il modello è valido a patto di considerare delle distanze molto maggiori della dimensione caratteristica dei corpi.

2.3 Problema degli N corpi

Per problema degli N corpi si intende lo studio di un sistema di N masse ($m_1, m_2, m_3, \dots, m_N$) considerate puntiformi, immerse in un campo gravitazionale e senza l'interferenza di altre forze, come le forze solari o magnetiche. In questo sistema di N corpi, il corpo *i-esimo* di massa m_i è quello di cui vogliamo studiare il moto. Il vettore somma di tutte le forze gravitazionali agenti su m_i verrà utilizzato per determinarne l'equazione del moto.

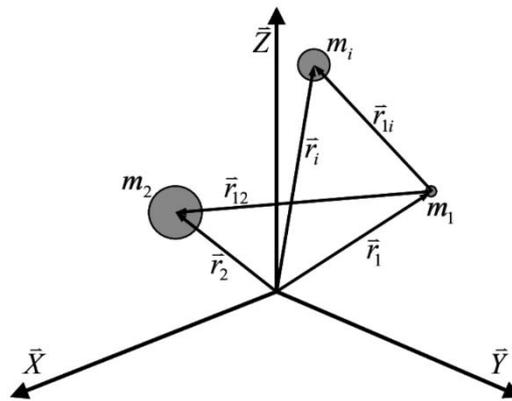


Figura 2. 1 Problema degli N corpi

Se si definisce un sistema di riferimento inerziale con centro in O, si può scrivere la forza che il corpo *i-esimo* esercita sul *j-esimo*:

$$\mathbf{F}_{ji} = -G \frac{m_i * m_j}{(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)^3} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \quad (2.2)$$

Eseguendo la stessa operazione per tutte le altre masse si ottiene:

$$\mathbf{F}_{ji} = -G \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \frac{m_i * m_j}{(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)^3} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \quad (2.3)$$

Ricordando che la seconda legge di Newton può essere scritta come:

$$m_i * \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \quad (2.4)$$

Se sostituiamo al secondo termine, dopo alcuni passaggi algebrici si ottiene:

$$\ddot{\mathbf{r}}_{ij} = -G * \frac{m_i + m_j}{\|\mathbf{r}_{ij}\|^3} \mathbf{r}_{ij} - G * m_n \sum_{\substack{n \\ n \neq i \\ n \neq j}} \left(\frac{\mathbf{r}_{nj}}{\|\mathbf{r}_{nj}\|^3} - \frac{\mathbf{r}_{ni}}{\|\mathbf{r}_{ni}\|^3} \right) \quad (2.5)$$

Dove con \mathbf{r}_{ij} si intende la differenza $\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$, discorso analogo per \mathbf{r}_{ni} e \mathbf{r}_{nj} . Questa rappresenta un'equazione differenziale di secondo grado, poiché per trovare la posizione del corpo i -esimo è necessario integrare due volte. Il primo termine è legato alla forza che agisce tra i 2 corpi, mentre il secondo termine può essere interpretato come l'effetto dei disturbi gravitazionali degli altri $N-2$ corpi. Si può scrivere questa equazione per tutti gli altri corpi, ottenendo un sistema di N equazioni che però sono accoppiate ($\ddot{\mathbf{r}}_{ij}$ infatti dipende da \mathbf{r}_j). Il risultato è che per risolvere il sistema è necessario ricorrere a metodi numerici, poiché non è possibile trovare una soluzione analitica. L'unico caso in cui si può trovare la soluzione analitica è $N=2$.

2.4 Problema dei due corpi

Come già anticipato, il caso più semplice è il caso in cui $N=2$, ovvero un corpo i che orbita attorno a un corpo j . L'ultima equazione si riduce, in quanto non saranno presenti disturbi gravitazionali di altri corpi:

$$\ddot{\mathbf{r}}_{ij} = -G * \frac{m_i + m_j}{\|\mathbf{r}_{ij}\|^3} \mathbf{r}_{ij} \quad (2.6)$$

che nel caso di 2 corpi diventa

$$\ddot{\mathbf{r}}_{12} = -G * \frac{m_1 + m_2}{\|\mathbf{r}_{12}\|^3} \mathbf{r}_{12} \quad (2.7)$$

Se uno dei due corpi ha una massa molto maggiore dell'altro ($M \gg m$), la forza esercitata dal corpo più piccolo a quella più grande è sicuramente trascurabile, quindi si parlerà di *problema dei due corpi ristretto*. L'equazione si riduce a:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -G \frac{M}{r^3} \mathbf{r} \quad (2.8)$$

Si può definire una *costante gravitazionale* del corpo maggiore μ , data dal prodotto di G per M . Il problema dei due corpi, ristretto e non, è un caso ideale, nella realtà infatti esistono i disturbi gravitazionali degli altri pianeti. Tuttavia, se i due corpi si trovano vicino tra loro, rispetto agli altri, il modello descrive bene la fisica del sistema.

2.5 Costanti del moto

Il campo gravitazionale è un campo *conservativo*, vale a dire che un oggetto che si muove sotto l'influenza della sola gravità non perde o guadagna energia meccanica, ma l'energia "cambia forma", passando da cinetica a potenziale e viceversa.

2.5.1 Conservazione dell'energia meccanica

Moltiplicando scalarmente l'equazione (2.8) per la velocità $\dot{\mathbf{r}}$ e sostituendo μ , si ottiene

$$\dot{\mathbf{r}} * \ddot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{r}} * \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} = 0 \quad (2.9)$$

Considerando che $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$ e $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{a}$, e sostituendo facendo comparire le derivate, si ottiene

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} \right) = 0 \quad (2.10)$$

Se la variazione nel tempo di una certa quantità è nulla, l'espressione deve essere una costante, che in questo caso chiamiamo E .

$$E = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} \quad (2.11)$$

E rappresenta l'energia meccanica specifica. Il primo termine rappresenta l'energia cinetica per unità di massa del satellite, mentre il secondo termine rappresenta l'energia potenziale. L'energia meccanica totale rimane costante, mentre i due contributi energetici variano a seconda della posizione nell'orbita.

2.5.2 Conservazione del momento angolare

Partendo sempre dall'equazione (2.8), ma moltiplicando vettorialmente per \mathbf{r} , si ottiene

$$\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} = \mathbf{0} \quad (2.12)$$

Sviluppando i prodotti e facendo comparire le derivate, si ottiene

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \mathbf{0} \quad (2.13)$$

Il prodotto $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ è una costante del moto e viene chiamato h , ovvero *momento angolare specifico*. Dato che h è il prodotto vettoriale tra \mathbf{r} e \mathbf{v} , deve essere sempre perpendicolare al piano contenente questi due vettori, ma dato che h è costante, \mathbf{r} e \mathbf{v} devono sempre rimanere sullo stesso piano. Quindi si può concludere che il moto del satellite deve essere confinato in un piano che è fisso nello spazio, piano chiamato *piano orbitale*.

2.6 Equazione della traiettoria

Nel paragrafo 2.4 è stata ricavata l'equazione nel caso di un piccolo corpo orbitante un grande corpo centrale. Se l'equazione è semplice, non si può dire la stessa cosa per la sua soluzione, poiché la soluzione in funzione del tempo è più complessa a causa della doppia integrazione. Dall'equazione però è possibile ottenere delle informazioni riguardo la forma dell'orbita. Moltiplicando vettorialmente per il momento angolare h l'equazione e sviluppando i prodotti si ottiene:

$$\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}) = \frac{d}{dt}\left(\mu \frac{\mathbf{r}}{r}\right) \quad (2.14)$$

Integrando si ottiene una costante integrativa B e si può ricavare il modulo del raggio della traiettoria

$$r = \frac{h^2/\mu}{1 + \left(\frac{B}{\mu}\right) \cos v} \quad (2.15)$$

in cui v è l'angolo di *anomalia vera* ed è l'angolo compreso tra il vettore B e il raggio vettore r . Per determinare il tipo di curva che rappresenta quest'equazione, è necessario compararla con l'equazione generale di una *conica* scritta in coordinate polari e con origine in un fuoco. Per *conica* si intende il luogo dei punti che sta sul piano, in modo che la distanza da un certo punto (fuoco) e la distanza da una certa retta (*direttrice*) stiano in un rapporto costante pari al valore di eccentricità della conica.

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v} \quad (2.16)$$

L'equazione appena scritta è matematicamente identica all'equazione della traiettoria, in cui p è una costante geometrica delle coniche chiamata *semi-latus rectum*, cioè la distanza tra il punto P della conica e il fuoco quando $v = \pi/2$; la costante e rappresenta invece l'*eccentricità* della conica. Dall'equazione è possibile notare che se $v = 0$ il raggio è minimo, cioè si è nel punto chiamato periapside; se $v = \pi$, il raggio è massimo, e si è nel punto di apoapside. In base al corpo centrale, questi due punti possono assumere nomi diversi, per esempio, perielio-afelio per il Sole, perigeo-apogeo per la Terra, periastro-apoastro per un corpo qualsiasi.

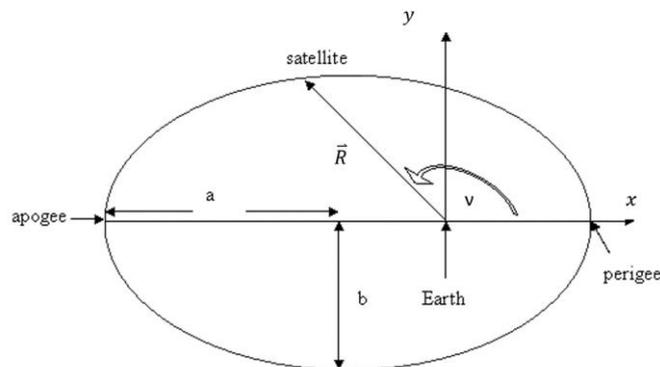


Figura 2. 2 Perigeo, Apogeo e angolo v

2.6.1 Tipi di orbite

A questa famiglia di curve chiamate coniche appartengono le circonferenze, le ellissi, le parabole e le iperboli. Per determinare quali di queste un corpo seguirà nella sua traiettoria, è

necessario fare alcune considerazioni geometriche sulle coniche. Quando si parla di orbite, la direttrice della conica non ha un particolare significato fisico; al contrario, i concetti di fuoco ed eccentricità sono fondamentali per la comprensione del moto orbitale.

A causa della loro simmetria, tutti i tipi di coniche hanno due fuochi (in F e F'). Il fuoco primario (F) rappresenta il punto in cui giace il corpo centrale, cioè quello di massa maggiore. Il fuoco secondario (F'), o fuoco "libero", non ha particolare importanza nella meccanica orbitale. Nella parabola, che rappresenta il caso limite tra un'orbita aperta e una chiusa, il fuoco secondario giace ad una distanza infinita dal fuoco primario.

La lunghezza della corda che passa tra i due fuochi è chiamata *asse maggiore* ed è definita come $2a$, in cui a è il *semi-asse maggiore*. Nel caso della circonferenza l'asse maggiore coincide col diametro, per la parabola è una distanza infinita, mentre per l'iperbole l'asse maggiore è una quantità negativa. La distanza tra i due fuochi è definita come $2c$, ed è nulla per la circonferenza, infinita per le parabole e negativa per le iperboli. Con i due parametri appena definiti è possibile scrivere la formula dell'eccentricità:

$$e = \frac{c}{a} \quad (2.17)$$

I quattro tipi di coniche, che hanno diversi valori di c e a , differiscono quindi per il valore di eccentricità:

- $e = 0 \rightarrow$ Orbita circolare;
- $0 < e < 1 \rightarrow$ Orbita ellittica;
- $e = 1 \rightarrow$ Orbita parabolica;
- $e > 1 \rightarrow$ Orbita iperbolica;

Dal problema dei due corpi è possibile dimostrare inoltre che l'energia meccanica specifica calcolata nel paragrafo 2.5.1 è proporzionale al semi-asse maggiore dell'orbita.

$$E = -\frac{\mu}{2a} \quad (2.18)$$

Orbita	a	e	E
Circolare	> 0	0	< 0
Ellittica	> 0	< 1	< 0
Parabolica	∞	1	0
Iperbolica	< 0	> 1	> 0

Tabella 2. 1 Caratteristiche particolari delle orbite

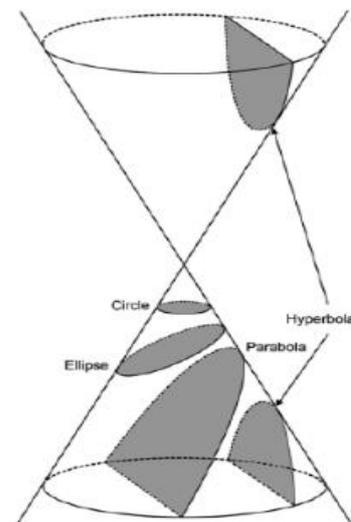


Figura 2. 3 Tipi di coniche

2.7 Posizione in funzione del tempo

Dalla seconda legge di Keplero è stato appurato che durante il periodo orbitale, il raggio vettore spazza un'area uguale all'area totale dell'ellisse. Ipotizziamo che il corpo si muova dal periastro al tempo t_p , fino ad arrivare al punto P al tempo t , in cui l'anomalia vera vale v . L'area spazzata nell'intervallo di tempo $t-t_p$ equivale ad A_1 .

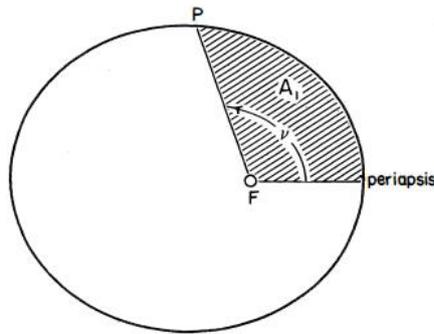


Figura 2. 4 Area spazzata nel tempo t

Sempre per la seconda legge di Keplero, dato che l'area viene spazzata ad un rateo costante, si può scrivere:

$$\frac{t - t_p}{A_1} = \frac{T_p}{\pi ab} \quad (2.19)$$

con T_p periodo orbitale, a semi-asse maggiore e b semi-asse minore dell'ellisse. L'incognita di questa equazione è l'area A_1 . Per trovare questa incognita, viene costruita una circonferenza di raggio a circoscritta nell'ellisse. Il prolungamento del *semi-latus rectum* dell'ellisse intercetta la circonferenza nel punto Q. Viene introdotto un nuovo angolo E , chiamato *anomalia eccentrica*. Tramite delle considerazioni geometriche sull'equazione cartesiana dell'ellisse, l'area spazzata dall'ellisse viene calcolata riscaldando l'area spazzata dal cerchio.

$$A_1 = \frac{ab}{2}(E - e \sin E) \quad (2.20)$$

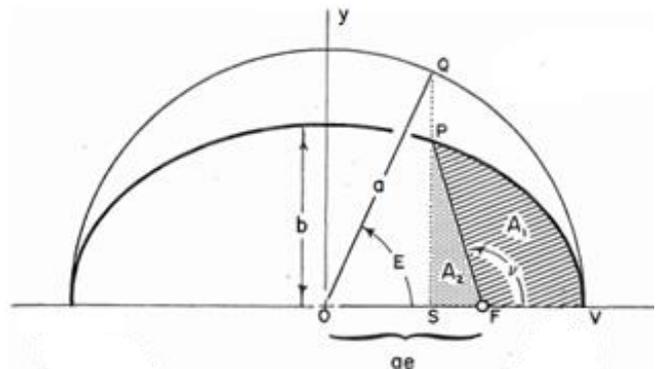


Figura 2. 5 Orbita ellittica e circonferenza ausiliaria

Andando a sostituire l'equazione (2.20) nella (2.19), e riscrivendo la formula del periodo orbitale, si trova:

$$\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t - t_p) = M = E - e \sin E \quad (2.21)$$

Questa è l'*equazione di Keplero* ed è di essenziale importanza per lo studio dell'orbita di un corpo. M è definita come l'anomalia media, cioè l'angolo che il corpo avrebbe spazzato nello stesso intervallo di tempo, sull'orbita circolare costruita sull'ellisse, piuttosto che sull'ellisse stessa. La relazione tra questi due angoli è una relazione trascendente, cioè noto M , si può calcolare E solo in maniera iterativa. L'ultimo passo è quello di trovare la relazione che lega l'anomalia eccentrica E all'anomalia vera v .

Dalla figura precedente:

$$\cos E = \frac{ae + r \cos v}{a} = \frac{e + \cos v}{1 + e \cos v} \quad (2.22)$$

Si può scrivere anche una relazione tra i due angoli del tipo:

$$\tan \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{v}{2} \quad (2.23)$$

2.8 Sistemi di coordinate

Al fine di descrivere un' orbita, è essenziale scegliere un sistema di riferimento adatto. In generale, un sistema di riferimento è descritto da:

- Posizione dell'origine;
- Orientamento del piano fondamentale **X-Y**;
- Direzione principale (per esempio dell'asse **X**);
- Verso della normale al piano **X-Y**, cioè il verso di **Z**.

L'asse **Y** è sempre scelto in modo da formare una terna destrorsa di assi, mentre la direzione **Z** deve essere perpendicolare al piano fondamentale, quindi è necessario solamente specificare quale direzione sia quella positiva.

2.8.1 Sistema eliocentrico-eclittico

Il sistema eliocentrico-eclittico ha origine nel centro del Sole e il piano fondamentale $\mathbf{X}_E\text{-}\mathbf{Y}_E$ coincide con quello dell'eclittica, cioè il piano in cui giace l'orbita terrestre. La direzione \mathbf{X}_E è data dall'intersezione tra il piano dell'eclittica e il piano equatoriale terrestre. Il giorno dell'equinozio di primavera, il vettore che collega il centro della Terra e il centro del Sole individua la direzione e il verso positivo dell'asse \mathbf{X}_E , che punta verso la costellazione dell'Ariete Υ (o *equinozio vernale*). Questo sistema di riferimento non è un vero e proprio sistema inerziale, poiché la linea dei nodi ruota a causa della precessione degli equinozi, tuttavia questa rotazione è trascurabile per missioni di breve durata. Il verso positivo di \mathbf{Z}_E è quello del momento angolare del moto di rivoluzione terrestre intorno al Sole.

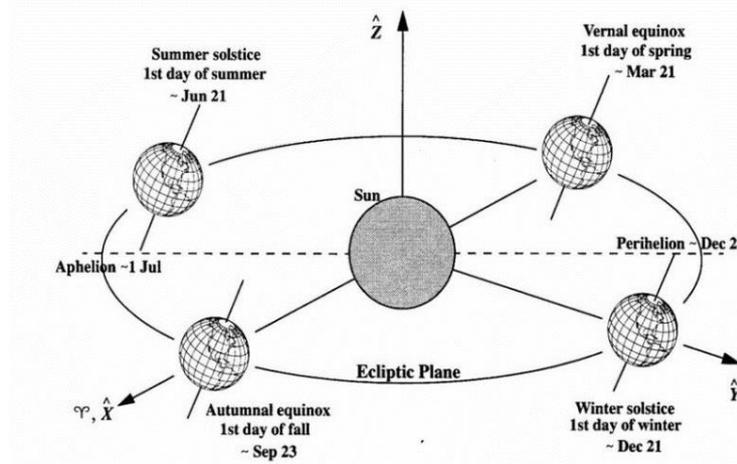


Figura 2. 6 Coordinate eliocentriche-eclittiche

2.8.2 Sistema geocentrico-equatoriale

Il sistema geocentrico-equatoriale ha origine nel centro della Terra e il piano fondamentale è quello equatoriale terrestre. L'asse \mathbf{X} anche in questo caso punta in direzione dell'*equinozio vernale*. La direzione \mathbf{Z} positiva punta verso il polo Nord. Questo sistema di coordinate non è solidale alla Terra, e quindi non ruota con essa; il sistema infatti è fisso rispetto alle stelle, eccetto per la precessione degli equinozi. Generalmente si preferisce utilizzare la notazione \mathbf{IJK} piuttosto che \mathbf{XYZ} per differenziare il sistema geocentrico da quello eliocentrico. Il sistema di riferimento viene anche chiamato *Earth-centered inertial* e indicato con la sigla *ECI*.

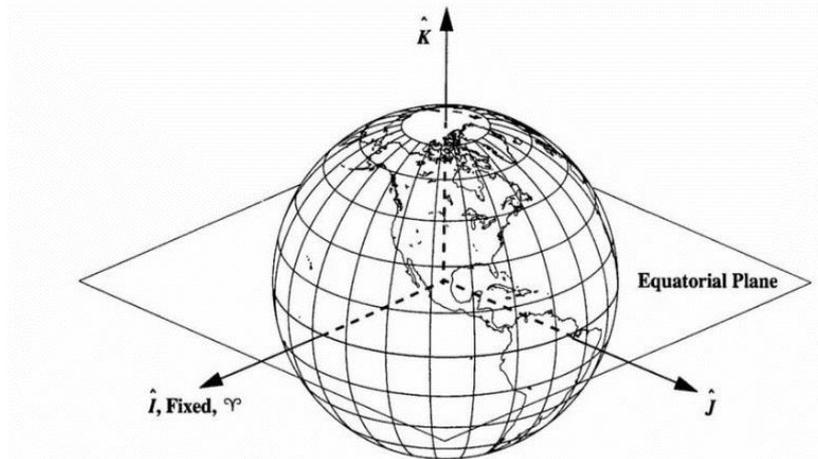


Figura 2. 7 Coordinate geocentriche-equatoriali

2.8.3 Sistema perifocale

Tipicamente usato per descrivere il moto dei satelliti, l'origine del sistema perifocale è il corpo centrale, più grande, mentre il piano fondamentale è il piano in cui giace l'orbita del corpo più piccolo. L'asse X_w è diretto lungo la direzione del periastro, l'asse Y_w è ruotato di 90° nella direzione del moto orbitale, mentre l'asse Z_w agente lungo la direzione del momento angolare h completa la terna destrorsa. Anche in questo caso si preferisce utilizzare una notazione diversa e $(XYZ)_w$ diventano PQW .

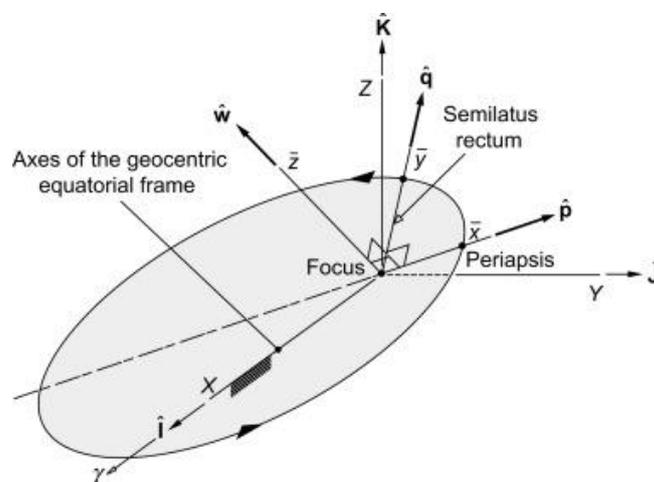


Figura 2. 8 Coordinate perifocali

2.9 Elementi orbitali classici

Gli elementi orbitali sono delle quantità che definiscono in un modo univoco le orbite. I parametri orbitali sono 6, di cui 5 servono per descrivere la forma, la dimensione e l'orientamento dell'orbita, mentre 1 serve per individuare la posizione del corpo lungo la sua orbita in un particolare istante di tempo.

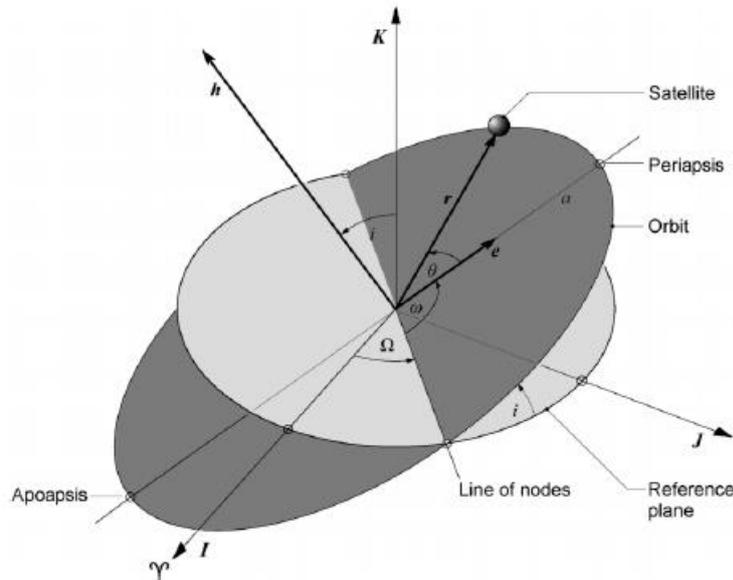


Figura 2. 9 Elementi orbitali classici

I parametri orbitali sono:

- a , *semi-asse maggiore* - costante che definisce la dimensione dell'orbita;
- e , *eccentricità* - costante che definisce la forma della conica;
- i , *inclinazione* - l'angolo compreso tra il versore \mathbf{K} e il vettore momento angolare \mathbf{h} ;
- Ω , *longitudine del nodo ascendente* - angolo compreso tra il versore \mathbf{I} e il nodo ascendente, cioè il punto in cui il satellite incrocia il piano fondamentale;
- ω , *argomento del periastro* - l'angolo, nel piano dell'orbita, tra il nodo ascendente e il periastro, misurato in direzione del moto del satellite;
- T , *tempo di passaggio al periastro*;

Questi elementi sono validi per descrivere l'orbita di un satellite attorno alla Terra in coordinate geocentriche-equatoriali, oppure per descrivere il moto di un pianeta attorno ad una stella in coordinate eliocentriche-eclittiche. Esistono anche altri tipi di elementi, utili per descrivere determinati tipi di orbite. Per esempio, si può trovare al posto di ω , la *longitudine del periastro* Π , data dalla somma di ω e Ω , oppure si può trovare la *longitudine vera (all'epoca)* θ , data dalla somma di ω e Ω e v_0 .

2.10 Sistema di riferimento temporale

E' utile definire un sistema di riferimento temporale e la misura del *giorno* è l'unità di tempo più adatta. Occorre però fare la distinzione tra 2 concetti di *giorno*, il *giorno solare* e il *giorno sidereo*. Il *giorno sidereo* rappresenta il lasso di tempo che la Terra impiega per ritrovarsi, dopo un giro completo, nella stessa posizione rispetto alle stelle fisse. Il *giorno solare* è definito come il tempo necessario affinché il Sole transiti due volte sullo stesso meridiano. Per fare ciò, la Terra deve ruotare un po' di più, di circa 1° , in quanto nel frattempo si è spostata lungo la sua orbita. Quindi il giorno sidereo ($23h\ 56m\ 04s$) è leggermente più breve di quello solare ($24h\ 03m\ 56s$).

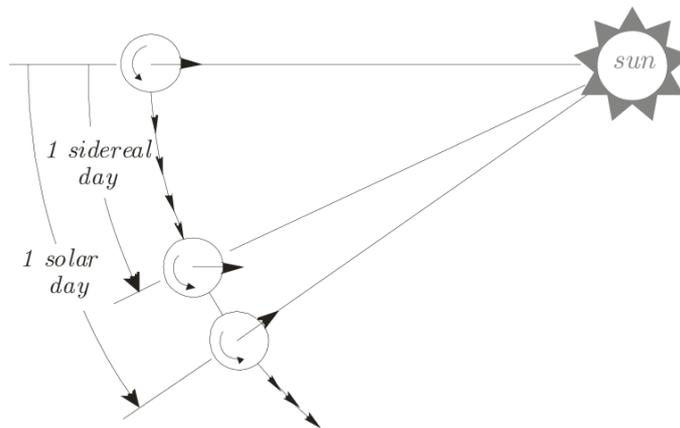


Figura 2. 10 Giorno sidereo e giorno solare

2.10.1 Julian Date

Il concetto di *Julian Date* (JD) è stato introdotto da Giuseppe Scaligero nel 1583 ed è sostanzialmente un modo per uniformare il tempo attraverso diversi secoli e calendari diversi. Il giorno Giuliano è una misura del tempo, che conta i giorni siderali a partire dal 1° gennaio 4713 a.C. alle ore 12:00 UT. Al giorno d'oggi, il Julian Date assume valori molto alti, quindi si preferisce utilizzare il *Modified Julian Date* (MJD), cioè il JD a cui viene sottratto 2400000,5.

2.11 Manovre Orbitali

Le manovre orbitali consistono in dei cambiamenti dei parametri orbitali, in modo da variare la forma dell'orbita stessa. Le manovre possono servire per compensare le perturbazioni, per correggere eventuali errori di ignizione oppure per le trasferte. Questi cambiamenti vengono

effettuati tramite una *spinta* T , generalmente realizzata tramite l'espulsione di una certa quantità di propellente \dot{m}_p . Le due grandezze sono legate tra di loro dalla *velocità efficace di scarico* c , cioè la velocità del propellente all'uscita dell'ugello nel caso di pressione esterna nulla.

$$T = \dot{m}_p c \quad (2.24)$$

Il ΔV è una misura dell'impulso per unità di massa che è necessario per compiere una manovra spaziale. Considerando un propulsore chimico, il ΔV rappresenta il cambiamento di velocità che il satellite può realizzare bruciando la totalità del suo propellente. Per manovre multiple, il ΔV aumenta linearmente. L'equazione di Tsiolkovsky, anche chiamata *classical rocket equation*, descrive il moto di un razzo, ovvero un veicolo capace di accelerare espellendo massa ad alta velocità grazie al principio fisico della *conservazione della quantità di moto*.

$$\Delta V = I_{SP} g_0 \ln \left(\frac{m_0}{m_f} \right) \quad (2.25)$$

I_{sp} rappresenta l'*impulso specifico*, ed è un parametro intrinseco del propulsore.

$$I_{SP} = \frac{I_{TOT}}{\dot{m}_p g_0} \quad (2.26)$$

L'impulso specifico è dato dal rapporto tra l'*impulso totale*, ovvero l'integrale nel tempo della spinta T , e il peso che il propellente avrebbe consumato sulla Terra. L'impulso specifico da informazioni su quanto un propulsore consuma per fornire una determinata spinta. Più I_{sp} è alto, più è efficiente il motore e quindi meno propellente consuma.

L'equazione di Tsiolkovsky mostra che la massa finale m_f di un satellite è strettamente legata al ΔV e quindi il carico utile può diminuire in maniera drastica con l'aumento del ΔV della missione.

$$m_f = m_0 \exp \left(-\frac{\Delta V}{I_{SP} g_0} \right) = m_0 \exp \left(-\frac{\Delta V}{c} \right) \quad (2.27)$$

L'obiettivo è quindi quello di effettuare le manovre orbitali con il minimo ΔV possibile per limitare l'impiego di carburante. Nei prossimi paragrafi verranno accennati alcune delle manovre tipiche a 1 e 2 impulsi.

2.11.1 Cambiamento di piano orbitale

Questa manovra ha lo scopo di cambiare l'inclinazione dell'orbita. La manovra avviene con un solo impulso e il costo è pari a:

$$\Delta V = 2 V \sin \frac{\Delta i}{2} \quad (2.28)$$

La massima efficienza della manovra, che corrisponde al minimo ΔV , si ha quando la velocità è minima, ovvero all'apoastro. In generale per eseguire un cambio di manovra, occorre spingere intorno a uno dei due nodi che intersecano il piano iniziale e il piano finale. Il ΔV richiesto è dato dalla differenza di velocità tangenziale relativa ai due piani in quel punto.

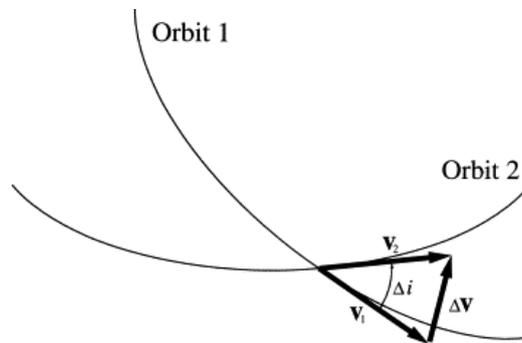


Figura 2. 11 Triangolo di velocità per cambi di piano

Queste manovre sono piuttosto costose a livello di ΔV e chi analizza le traiettorie delle missioni cerca di evitarle il più possibile per limitare il consumo di propellente.

2.11.2 Rotazione degli apsi

La rotazione della linea degli apsi è una manovra a un impulso che permette di ruotare tale linea di un angolo $\Delta\omega$. La manovra va effettuata spingendo nei punti in comune alle due orbite, con una velocità tangente all'ellisse di arrivo. Il costo della manovra è pari a:

$$\Delta V = 2 \frac{\mu}{h} e \left| \sin \frac{\Delta\omega}{2} \right| \quad (2.29)$$

La manovra viene effettuata a raggio costante, non varia quindi il semi-asse maggiore a e quindi nemmeno il contenuto energetico dell'orbita.

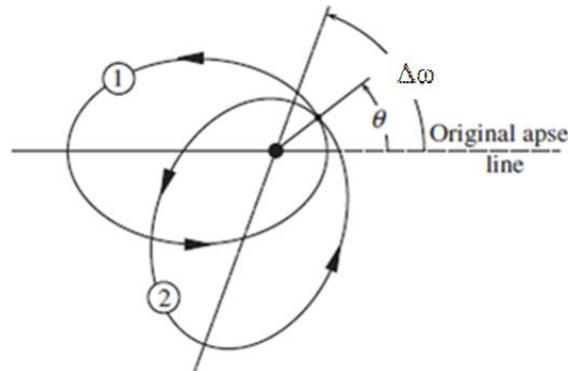


Figura 2. 12 Rotazione linea degli apsidi

2.11.3 Trasferta tra orbite circolari complanari

Lo scopo di tale manovra è quello di passare da un'orbita circolare a un'altra, con lo stesso fuoco, tramite un'orbita di trasferimento. Per passare da un'orbita r_1 a un'orbita r_2 , con $r_2 > r_1$, occorre che il raggio di periastro debba essere minore o uguale al raggio dell'orbita di partenza, mentre il raggio di apoastro deve essere maggiore o uguale al raggio dell'orbita di arrivo. Considerazioni analoghe possono essere fatte nel caso di trasferimento con $r_2 < r_1$.

$$r_{Pt} = \frac{p_t}{1 + e_t} \leq r_1 \quad r_{At} = \frac{p_t}{1 - e_t} \geq r_2 \quad (2.30)$$

Come si vede dalle formule, la forma dell'orbita di trasferimento dipende dalla combinazione di eccentricità e_t e semi-latus rectum p_t , e il numero di queste combinazioni è infinito. Si può dimostrare che un'orbita di trasferimento ellittica bitangente alle orbite di partenza e arrivo è quella che implica il minor ΔV possibile. In questo caso:

$$r_{Pt} = r_1 \quad r_{At} = r_2 \quad (2.31)$$

Questo tipo di trasferta viene chiamata *trasferta di Hohmann*.

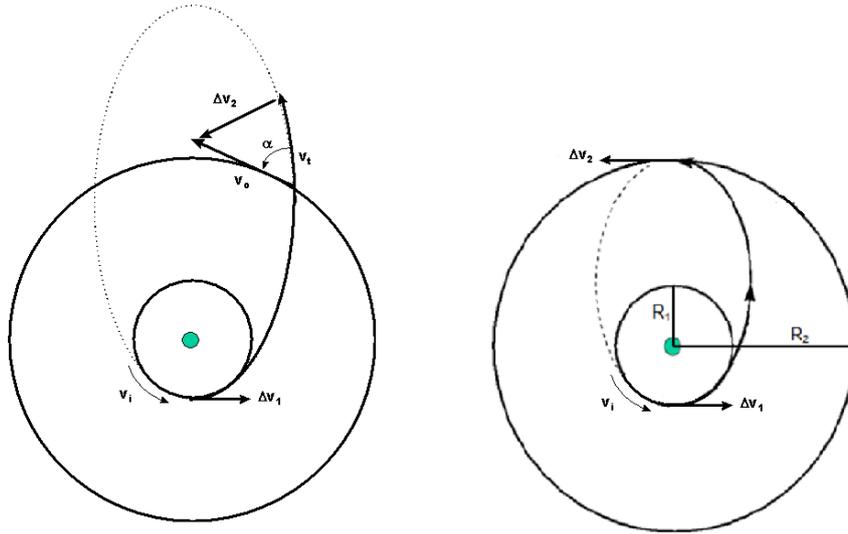


Figura 2. 13 Trasferta generica vs Trasferta di Hohmann

Nella trasferta di Hohmann, primo impulso ΔV_1 serve ad alzare l'apoastro fino a raggiungere l'orbita di arrivo. Il secondo impulso ΔV_2 serve invece per circularizzare l'orbita. La trasferta permette di risparmiare propellente poiché durante i due impulsi, si spinge parallelamente alla direzione della velocità della traiettoria. Ipotizzando di avere un satellite dotato di velocità V_1 e di voler ottenere una velocità V_2 tramite un ΔV , il teorema di Carnot dice che:

$$V_2^2 = V_1^2 + \Delta V^2 - 2V_1\Delta V \cos(\pi - \beta) \quad (2.32)$$

β è l'angolo compreso tra i due vettori. Se V_2 è parallelo a V_1 , $\beta = 0^\circ$ e l'equazione si riduce a:

$$V_2^2 = V_1^2 + \Delta V^2 \quad (2.33)$$

Da questa formula si ottengono i due contributi di ΔV della trasferta di Hohmann:

$$\Delta V_1 = V_1 - V_{c1} = V_{c1} \left[\sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} - 1 \right] \quad (2.34)$$

$$\Delta V_2 = V_{c2} - V_2 = V_{c2} \left[1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}} \right] \quad (2.35)$$

$$\Delta V_H = \Delta V_1 + \Delta V_2 \quad (2.36)$$

Se la trasferta di Hohmann è quella che richiede il ΔV minore, a questa spesa minima corrisponde il tempo di percorrenza massimo: tra tutte le manovre, infatti, la trasferta di Hohmann è la più lenta. Inoltre, il vantaggio di usare questo tipo di trasferta dipende dal rapporto tra il raggio della orbita di arrivo e quello dell'orbita di partenza. Se questo rapporto supera il valore di 12, ovvero se l'orbita finale è almeno 12 volte più grande di quella iniziale, è preferibile usare manovre a 3 impulsi poiché richiedono un ΔV minore rispetto al ΔV della trasferta di Hohmann.

2.11.4 Propulsione elettrica

I propulsori elettrici tipicamente offrono impulsi specifici maggiori rispetto ai propulsori tradizionali, tuttavia essi generano una spinta di diversi ordini di grandezza inferiore rispetto ai propulsori chimici a causa degli attuali limiti tecnologici nella potenza elettrica disponibile a bordo delle sonde spaziali. Per lo studio delle manovre con propulsione elettrica, cade l'ipotesi di manovra impulsiva finora considerata con la propulsione chimica, infatti propulsione elettrica è caratterizzata da piccole spinte che necessitano di tempo lunghi per raggiungere valori significativi. L'approssimazione è basata sulle seguenti ipotesi:

- $r \approx a \approx p, e \approx 0;$
- $E \approx M \approx v;$
- $i \approx 0;$
- $\frac{T}{m} \ll \frac{\mu}{r^2}$
- $A_V \approx A_T \ll \frac{\mu}{r^2};$
- $A_R \ll \frac{\mu}{r^2}$
- $A_W \ll \frac{\mu}{r^2}$

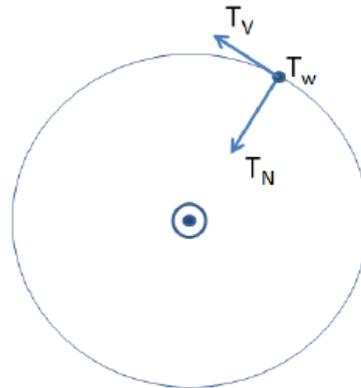


Figura 2. 14 Componenti della spinta

Si hanno 3 componenti della spinta:

- $T_V // V$, varia l'energia, ovvero variano a, e e ω ;
- $T_N \perp V$, variano e e ω Non cambia l'energia poiché si spinge perpendicolarmente a V , che non varia in modulo;
- T_W , variano i e Ω : la componente di spinta perpendicolare al piano orbitale modifica i parametri che definiscono l'orientamento del piano nello spazio.

In pratica, le ipotesi di Edelbaum prendono in considerazione orbite quasi circolari, a bassa inclinazione, e con accelerazioni piccole rispetto alla velocità circolare. La velocità varia in modo graduale e la traiettoria prende la forma di una spirale. L'approssimazione di Edelbaum

consente di risolvere il problema dell'ottimizzazione di una trasferta a bassa spinta tra orbite circolari, andando a semplificare le equazioni di Gauss per le variazioni dei parametri orbitali classici. Le equazioni di Gauss semplificate con le approssimazioni di Edelbaum sono:

$$\dot{a} = 2 \frac{T_V}{m} \frac{a}{V} \quad (2.37)$$

$$\dot{e} = \left[2 \cos \nu \frac{T_V}{m} - \sin \nu \frac{T_N}{m} \right] \frac{1}{V} \quad (2.38)$$

$$\dot{e} = \cos(\nu + \omega) \frac{T_W}{m} \frac{1}{V} \quad (2.39)$$

Definendo α l'angolo tra la spinta e la direzione tangenziale (nel piano), e β l'angolo tra la spinta e il piano orbitale (fuori dal piano), si possono scrivere le componenti della spinta come:

$$\begin{aligned} T_V &= T \cos \alpha \cos \beta \\ T_N &= T \cos \beta \sin \alpha \\ T_W &= T \sin \beta \end{aligned} \quad (2.40)$$

In ogni punto ci sarà, quindi, una direzione ottimale di spinta per modificare i parametri desiderati. In particolare, dalle relazioni ricavate si può dimostrare che:

- per massimizzare la variazione di semi-asse maggiore, occorre che $\alpha = \beta = 0^\circ$, ovvero la spinta deve essere tangenziale;
- Per massimizzare la variazione di eccentricità, occorre che $\tan \alpha = \frac{1}{2} \tan \nu$ e $\beta = 0^\circ$. Se approssimiamo $\alpha \approx \nu$, occorre spingere in direzione perpendicolare al periastro;
- Per massimizzare la variazione di inclinazione, occorre che $\beta = \pm 90^\circ$.

Capitolo 3

3. Ottimizzazione di traiettorie spaziali

Un problema di ottimizzazione consiste nel cercare una *legge di controllo* che rende massimo o minimo un particolare indice di prestazione. In altre parole, si tratta di cercare la soluzione migliore tra tutte le soluzioni possibili. E' necessario scegliere quindi l'obiettivo da conseguire, basato principalmente sui requisiti della missione, per esempio portare una certa massa di payload il più lontano possibile oppure una durata di missione prestabilita. Questi obiettivi vengono tradotti numericamente in delle funzioni che vengono chiamate *funzioni costo*, che nella maggior parte dei casi sono dei parametri fisici come la massa di propellente, il ΔV di missione o la durata di una trasferta; questi parametri sono quelli da minimizzare per raggiungere la condizione di ottimo. E' possibile anche cercare di ottimizzare parametri che sono tra loro discordanti, e che quindi i due minimi o massimi delle rispettive funzioni costo non coincidono. In questo caso è necessario scrivere una funzione costo complessiva, che prende in considerazione le diverse quantità da ottimizzare ma opportunamente pesate.

3.1 Funzione obiettivo

Nel linguaggio informatico spesso non si parla di funzione costo ma di *funzione obiettivo*, ma le due funzioni sono essenzialmente le stesse. Nella forma generale, una funzione obiettivo è così fatta:

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{t}) = \varphi(\mathbf{x}(t_0), t_0, \mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{t}) dt \quad (3.1)$$

dove t_0 e t_f sono il tempo iniziale e il tempo finale della missione, \mathbf{x} è il vettore di stato e \mathbf{u} è il vettore dei comandi. La funzione di costo è la somma di due contributi: il primo termine è quello di *Mayer*, funzione delle sole condizioni agli estremi, mentre il secondo termine è quello di *Lagrange*, dipendente da tutto il percorso effettuato. Solitamente è presente solo il termine di Mayer o il termine di Lagrange, dipende da ciò che si vuole ottimizzare, ma non è raro trovarli entrambi. Definendo alcune variabili ausiliarie è possibile ricondursi ad una formulazione di Mayer ($L=0$) o di Lagrange ($\varphi=0$).

3.1.1 Funzioni obiettivo di Mayer

Nel caso di formulazione di Mayer, la funzione obiettivo è solo funzione delle condizioni finali. In questa categoria ricadono quindi tutte le funzioni obiettivo connesse ad una variabile caratteristica relativa all'istante finale della traiettoria.

La funzione obiettivo più semplice è il tempo di trasferta, infatti se lo si vuole minimizzare la funzione diventa:

$$J = t_f \quad (3.2)$$

Se la variabile da minimizzare è il ΔV , la funzione costo è data dalla somma di tutti gli incrementi di velocità:

$$J = \sum_{i=1}^N \|\Delta V_i\| \quad (3.3)$$

E' possibile anche considerare i vincoli di missione liberi e trasformare le condizioni agli estremi come funzioni obiettivo:

$$J = \phi(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_f)) \quad (3.4)$$

Con ϕ funzione da vincolare.

3.1.2 Funzioni obiettivo di Lagrange

Questo tipo di funzioni vengono utilizzate per ottimizzare delle grandezze il cui andamento è variabile durante la missione. Il costo è rappresentato da una funzione integrale sul tempo.

Un esempio è quello relativo all'accelerazione fornita dal sistema propulsivo γ . Minimizzare l'integrale significa minimizzare l'utilizzo della spinta.

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \gamma^2 dt \quad (3.5)$$

Nel caso di propulsione a bassa spinta, la funzione obiettivo può essere scritta come:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2} dt \quad (3.6)$$

dove x,y,z sono le 3 componenti dell'accelerazione in un sistema di riferimento cartesiano.

Allo stesso modo si può scrivere la funzione obiettivo legata alla massa di propellente:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} m_p(t) dt \quad (3.7)$$

La massa di propellente è strettamente legata alla massa finale, e per questo motivo l'equazione (3.7) è equivalente a massimizzare m_f con la formulazione di Mayer ($J=m_f$). La formulazione di Lagrange è più conveniente, poiché la massa di propellente è dipendente dal tempo, e se si utilizzasse la formulazione di Mayer con m_f questa dipendenza andrebbe persa. In ogni caso, è sempre possibile passare da una formulazione all'altra.

3.1.3 Scalarizzazione della funzione obiettivo

Come già detto, è possibile che i parametri da ottimizzare siano diversi, e che quindi esistano diverse funzioni obiettivo. Questi parametri potrebbero essere tra loro contrastanti, quindi è necessario raggiungere un compromesso tra i diversi obiettivi. In questi casi è necessario scrivere una funzione costo complessiva, che prende in considerazione le diverse quantità da ottimizzare ma opportunamente pesate.

$$J = \sum_{i=1}^N \alpha_i J_i \quad (3.8)$$

In questa equazione α_i rappresenta il peso relativo alla funzione obiettivo i -esima. Per scegliere i pesi delle singole funzioni non esiste un metodo deterministico.

3.1.4 Scelta della funzione obiettivo

Per questo lavoro di tesi la funzione obiettivo preferita è la formulazione di Mayer per la massa finale.

$$J = m_f \quad (3.9)$$

Vengono quindi ricercate delle traiettorie in cui venga massimizzata la massa finale, aumentando quindi il carico utile a disposizione del velivolo. Facendo riferimento all'equazione sulla massa finale derivata dall'equazione di Tsiolkovsky, la massa finale è funzione di c , m_0 e ΔV . Nel caso in esame, la velocità efficace di scarico e la massa iniziale sono fissati, quindi la massa finale risulta univocamente legata allo sforzo propulsivo della traiettoria. Massimizzando la massa finale, stiamo quindi minimizzando il ΔV .

3.2 Teoria del controllo ottimale

La *teoria del controllo ottimale* si basa sulla scrittura di equazioni ausiliarie, chiamate *moltiplicatori di Lagrange*, connesse sia alle variabili fisiche del problema che alla condizione di ottimo. Il generico sistema a cui si applica la teoria del controllo ottimale è descritto da un vettore di variabili di stato \mathbf{x} . Le equazioni differenziali che ne descrivono l'evoluzione tra gli istanti iniziale e finale (*contorni esterni*) sono funzioni di \mathbf{x} , del vettore dei controlli \mathbf{u} e della variabile indipendente tempo t , e hanno questa forma:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (3.10)$$

E' conveniente suddividere la traiettoria in un numero n di sotto-intervalli, chiamati *archi*, all'interno dei quali le variabili sono continue. Il j -esimo intervallo inizia a $t_{(j-1)+}$ e termina al tempo t_{j-} , e i valori che le variabili assumono ai suoi estremi sono $\mathbf{x}_{(j-1)+}$ e \mathbf{x}_{j-} , dove i segni $-$ e $+$ indicano i valori assunti subito prima e subito dopo il punto considerato. Il sistema è soggetto anche a delle condizioni al contorno di tipo misto, cioè coinvolgono i valori delle variabili di stato e della variabile indipendente sia ai contorni esterni che a quelli interni.

$$\mathbf{x}(\mathbf{x}_{(j-1)+}, \mathbf{x}_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-}) = 0 \quad (3.11)$$

E' utile riscrivere il funzionale introducendo i moltiplicatori di Lagrange, costanti μ associate alle condizioni al contorno, e variabili λ , associate alle equazioni di stato:

$$J^* = \varphi + \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\chi} + \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} (\Phi + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{f} - \dot{\mathbf{x}})) dt \quad j = 1, \dots, n \quad (3.12)$$

I due funzionali J e J^* dipendono dal tempo t , dalle variabili di stato \mathbf{x} e dalle loro derivate $\dot{\mathbf{x}}$, e dai controlli \mathbf{u} . I moltiplicatori di Lagrange per i vincoli discreti, cioè puntuali (condizioni al bordo), non sono funzioni del tempo, mentre quelli all'interno dell'integrale hanno una dipendenza temporale e sono delle vere e proprie variabili aggiuntive. Se le condizioni al contorno e le equazioni di stato sono rispettate, vale che $J=J^*$. Integrando per parti per eliminare la dipendenza da $\dot{\mathbf{x}}$ e differenziando si ottiene la variazione prima del funzionale δJ^* .

$$\begin{aligned} \delta J^* = & \left(-H_{(j-1)+} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{(j-1)+}} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t_{(j-1)+}} \right) \delta t_{(j-1)+} \\ & + \left(H_{j-} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j-}} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t_{j-}} \right) \delta t_{j-} \\ & + \left(-\boldsymbol{\lambda}_{(j-1)+}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}_{(j-1)+}} + \boldsymbol{\mu}^T \left[\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{x}_{(j-1)+}} \right] \right) \delta \mathbf{x}_{(j-1)+} \\ & + \left(-\boldsymbol{\lambda}_{j-}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}_{j-}} + \boldsymbol{\mu}^T \left[\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{x}_{j-}} \right] \right) \delta \mathbf{x}_{j-} \\ & + \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} \left(\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T \right) + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} \right) dt \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (3.13)$$

H rappresenta l'*Hamiltoniano*.

$$H = \Phi + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f} \quad (3.14)$$

La condizione necessaria di ottimo richiede la stazionarietà del potenziale, e quindi l'annullamento della sua variazione prima per qualunque scelta di variazioni $\delta \mathbf{x}$, $\delta \mathbf{u}$, $\delta \mathbf{x}_{(j-1)+}$, $\delta \mathbf{x}_{j-}$, $\delta t_{(j-1)+}$, δt_{j-} compatibili con le equazioni differenziali e condizioni al contorno. L'introduzione di variabili e costanti aggiunte, se scelte opportunamente, permettono di annullare contemporaneamente il coefficiente di ciascuna delle variazioni dell'equazione (3.13), assicurando quindi la stazionarietà del potenziale δJ^* . Ponendo uguale a 0 la variazione del funzionale si ricavano le relazioni note come *equazioni di Eulero-Lagrange* relative alle variabili aggiunte

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (3.15)$$

e quelle relative ai controlli

$$0 = -\frac{\partial H}{\partial u} \quad (3.16)$$

Il primo set di equazioni viene detto set di equazioni aggiunte perché riguardano le variabili di *co-state*. Il secondo set viene detto set di equazioni di controllo. Esistono poi altri parametri indipendenti dal tempo, per i quali bisogna scrivere ulteriori set di equazioni aggiuntive, tra cui le *condizioni di trasversalità*. Queste condizioni riguardano la finestra temporale che si considera, nel caso in cui parametri come il tempo o la posizione iniziale e finale vengano presi in considerazione nell'ottimizzazione.

E' interessante notare come le leggi di controllo siano indipendenti dalla ricerca dell'ottimo del funzionale J^* . Se uno dei controlli è soggetto a un vincolo, deve appartenere a un dato *dominio di ammissibilità*. In presenza di tale vincolo, il valore ottimale del controllo in ogni punto della traiettoria è quello che, appartenendo al dominio di ammissibilità, rende massimo l'Hamiltoniano (3.14), se si cercano i massimi di J , e viceversa. Questo principio prende il nome di *Principio di Massimo di Pontryagin*. Esistono quindi due possibilità:

- Il valore ottimale del controllo è quello fornito dall'equazione (3.16) se rientra nel dominio di ammissibilità e quindi il vincolo non interviene in quel punto;
- Il valore ottimale è agli estremi del dominio, cioè il controllo assume il valore massimo o minimo, se quello fornito dall'equazione precedente non rientra nel dominio di ammissibilità.

Si ha un caso particolare se l'Hamiltoniano è lineare rispetto a uno dei controlli soggetto a vincoli, in quanto nell'equazione (3.16) il controllo non compare esplicitamente e quindi non può essere determinato. Se J deve essere massimizzato, si hanno due possibilità:

- Se nell'equazione (3.14) il coefficiente del controllo in questione è non nullo, H è massimizzato per il valore massimo del controllo se il coefficiente è positivo e minimo se negativo (controllo *bang-bang*), in accordo col principio di Pontryagin;
- Se nella stessa equazione il coefficiente del controllo in questione è identicamente nullo durante un intervallo finito di tempo (*arco singolare*), allora è necessario imporre l'annullamento di tutte le derivate successive del coefficiente rispetto al tempo, fino a quando in una di esse non appare esplicitamente il controllo. Il controllo ottimale viene quindi determinato ponendo uguale a zero quest'ultima derivata.

Per quanto riguarda le condizioni al contorno mancanti, è conveniente riferirsi al j -esimo contorno, scrivendo per questo le condizioni che derivano dal considerarlo come estremo finale del $(j-1)$ -esimo sotto-intervallo o come estremo iniziale del j -esimo sotto-intervallo. Ponendo uguale a 0 i coefficienti δx_{j-} , δx_{j+} , δt_{j-} , δt_{j+} nell'espressione del δJ^* , si ottiene:

$$-\lambda_{j-}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{j-}} + \boldsymbol{\mu}^T \left[\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial x_{j-}} \right] = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.17)$$

$$\lambda_{j+}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{j+}} + \boldsymbol{\mu}^T \left[\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial x_{j+}} \right] = 0 \quad j = 0, \dots, n-1 \quad (3.18)$$

$$H_{j-} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j-}} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t_{j-}} = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.19)$$

$$-H_{j+} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j+}} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t_{j+}} = 0 \quad j = 0, \dots, n-1 \quad (3.20)$$

Dove i pedici j_- e j_+ indicano i valori assunti rispettivamente subito prima e subito dopo il punto j . Le equazioni (3.16) e (3.18) non hanno significato all'inizio della traiettoria ($j = 0$), mentre le equazioni (3.17) e (3.19) non hanno significato al termine della traiettoria ($j = n$). Eliminando le costanti aggiunte $\boldsymbol{\mu}$ dal set di equazioni sovrastante, si ottengono le condizioni al contorno di ottimo del tipo:

$$\boldsymbol{\sigma}(x_{(j-1)+}, x_{j-}, \boldsymbol{\lambda}_{(j-1)+}, \boldsymbol{\lambda}_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-}) = 0 \quad (3.21)$$

che, con le condizioni assegnate (3.11), completano il sistema differenziale dato dalle equazioni (3.10) e (3.14).

3.3 Problema differenziale ai limiti (BVP)

In un *metodo indiretto*, la soluzione numerica delle equazioni differenziali è combinata alla risoluzione di sistemi non lineari di equazioni algebriche derivati da un problema alle condizioni al bordo (*Boundary Values Problem BVP*). Questi metodi si basano sul calcolo variazionale, che permette di trovare le condizioni di ottimo del primo ordine. Essi portano a un problema differenziale ai limiti che ha come soluzione le traiettorie ottimali; ognuna di esse viene in seguito analizzata per assicurarsi che rispetti i vincoli e le condizioni al contorno, dopo di che vengono scartate quelle col costo maggiore.

Il metodo indiretto adottato per l'ottimizzazione di traiettorie spaziali prevede l'applicazione della teoria del controllo ottimale al sistema di equazioni (3.10). La teoria del controllo ottimale formula un nuovo sistema di equazioni differenziali ai limiti in cui alcuni dei valori iniziali delle variabili sono incogniti. La soluzione di questo problema consiste nel trovare dei valori iniziali che consentono, una volta integrato numericamente il sistema, di soddisfare tutte le condizioni al contorno.

Il problema in esame presenta alcune particolarità:

- L'intervallo di integrazione è diviso in sotto-intervalli, i quali hanno come estremi i diversi fly-by;
- In ogni sotto-intervallo le equazioni differenziali possono avere differente espressione;
- La durata di ciascun sotto-intervallo è generalmente sconosciuta;
- Le condizioni al contorno possono essere non-lineari e coinvolgere i valori delle variabili sia ai contorni esterni sia a quelli interni;
- Le variabili possono essere discontinue ai contorni interni e il loro valore dopo la discontinuità può essere incognito.

La soluzione al problema ai limiti viene ottenuta riducendolo a una successione di problemi ai valori iniziali che viene portata a convergere attraverso il metodo di Newton.

Un primo problema da risolvere per poter attuare l'integrazione è rappresentato dal fatto che la durata dei diversi archi è sconosciuta. Risulta quindi conveniente introdurre una variabile ε al posto della variabile indipendente t durante le integrazioni. Nel generico arco j , è definita come:

$$\varepsilon = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{\tau_j} \quad (3.22)$$

dove τ_j è la durata incognita dell'intervallo. In questo modo, gli estremi di integrazione sono fissati e corrispondono a valori interi consecutivi della nuova variabile ε .

Per la risoluzione con metodo indiretto, il vettore di co-stato diventa adesso

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \boldsymbol{\lambda}(t) \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

e il sistema di equazioni differenziali assume la forma:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}^*(\mathbf{y}, t) \quad (3.24)$$

Si deve tenere in conto anche della presenza di alcuni parametri incogniti ma costanti, come la durata degli intervalli. Quindi si introduce il vettore \mathbf{c} , cioè il vettore dei parametri costanti. essendo \mathbf{z} il vettore che contiene $\mathbf{y}(t)$ e \mathbf{c} , si può riformulare il problema:

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\varepsilon} = \mathbf{f}(\mathbf{z}, \varepsilon) \quad (3.25)$$

Le condizioni al contorno si possono scrivere, con una formulazione generale come

$$\Psi(\mathbf{s}) = 0 \quad (3.26)$$

dove \mathbf{s} è un vettore che contiene i valori assunti dalle variabili ai contorni, esterni o interni, e i parametri costanti incogniti. I valori iniziali di alcune variabili sono incogniti, e la ricerca della soluzione si traduce nel determinare, attraverso un procedimento iterativo, quali valori devono assumere per soddisfare le equazioni (3.26). La procedura viene descritta supponendo che nessuno dei valori iniziali sia noto e alla prima iterazione occorre scegliere dei valori di tentativo \mathbf{p}^1 . La r -esima iterazione inizia con l'integrazione delle equazioni (3.25) con i valori iniziali \mathbf{p}^r trovati dall'iterazione precedente. Si fissa quindi

$$z(0) = \mathbf{p}^r \quad (3.27)$$

e si procede all'integrazione delle equazioni lungo tutta la traiettoria. Al termine dell'integrazione si calcola l'errore sulle condizioni al contorno Ψ^r alla r -esima iterazione rispetto alle condizioni $\Psi(\mathbf{s})$. Questo metodo è soprannominato *metodo di shooting*.

Si consideri una variazione $\Delta\mathbf{p}$: essa produce una variazione dei valori alle condizioni al contorno di

$$\Delta\Psi = \left[\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{p}} \right] \Delta\mathbf{p} \quad (3.28)$$

Poiché l'obiettivo è di annullare l'errore, cioè $\Delta\Psi = -\Psi^r$, ad ogni nuova iterazione $r+1$ i valori iniziali vengono corretti di

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}^{r+1} - \mathbf{p}^r = - \left[\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{p}} \right]^{-1} \Psi^r \quad (3.29)$$

finché l'errore non sarà inferiore alla tolleranza richiesta. La matrice che appare nell'equazione (3.29) può essere quindi valutata numericamente tramite una variazione di \mathbf{p} e l'integrazione numerica delle equazioni (3.25). L'integrazione delle equazioni differenziali è effettuata tramite il metodo basato sulle formule di Adams.

Si può trovare il valore di $\Delta\mathbf{p}$ attraverso una valutazione numerica della matrice $\partial\Psi/\partial\mathbf{p}$: la riga j viene trovata variando la riga stessa di un valore Δp_j piccolo, per poi integrare l'equazione (3.25) per valutare le nuove condizioni al contorno $\Delta\Psi/\Delta p$. Questa procedura permette spesso una soluzione più rapida, ma è meno precisa rispetto al metodo precedente, rendendo l'algoritmo più instabile. In maniera simile si può valutare la matrice Jacobiana $\partial\Psi/\partial\mathbf{s}$, ma anche in questo caso l'approccio analitico è più preciso.

La linearizzazione introdotta per il calcolo della correzione Δp induce errori che possono compromettere la convergenza della soluzione, quindi vengono adottate delle precauzioni che sembrano migliorare la procedura. Alcune di queste sono:

- Viene introdotto un coefficiente K_1 , stimato tra 0.1 e 1, il cui scopo è quello di non fare allontanare troppo la nuova stima con la precedente;

$$K_1 \Delta p + p^r = p^{r+1}$$

- Al termine di ogni iterazione si confronta l'errore massimo sulle condizioni al contorno E_{max}^{r+1} con quello ottenuto all'iterazione precedente E_{max}^r . Se l'errore massimo è inferiore ad un multiplo di quello precedente, quindi $E_{max}^{r+1} < K_2 E_{max}^r$, si procede con una nuova iterazione. K_2 deve essere superiore all'unità, generalmente $K_2 = 2 \div 3$ garantisce buoni risultati;
- Se l'errore alla nuova iterazione è molto grande rispetto al precedente, si dimezza la correzione, integrando le equazioni del moto con i valori di tentativo

$$K_1 \frac{\Delta p}{2} + p^r = p^{r+1}$$

Se è necessario la bisezione può essere ripetuta fino a 5 volte, dopo di che il procedimento si arresta poiché la soluzione di tentativo non è in grado di portare alla convergenza.

Capitolo 4

4. Modello matematico

Definito l'approccio con cui risolvere il problema, la fase successiva è esplicitare le equazioni nella loro forma vettoriale. E' necessario proiettare le equazioni in un opportuno sistema di riferimento: in questo caso è stato scelto un sistema di riferimento inerziale di tipo eliocentrico poiché è più conveniente data l'assenza di accelerazioni di trascinalamento o di Coriolis.

4.1 Equazioni del moto

Per descrivere il moto del velivolo vengono usate le equazioni trovate dalla trattazione del problema dei due corpi. Le equazioni differenziali del moto sono:

$$\frac{dr}{dt} = \mathbf{V} \quad (4.1)$$

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\mu_{sun}}{r^3} \mathbf{r} + \frac{\mathbf{T}}{m} \quad (4.2)$$

$$\frac{dm}{dt} = -\dot{m} \quad (4.3)$$

con r raggio della traiettoria, che ne descrive la posizione, \mathbf{V} è il vettore velocità e \mathbf{T} è il vettore della spinta, nonché la variabile di controllo. Tramite le equazioni di stato è possibile determinare l'Hamiltoniano H

$$H = \lambda_r^T + \lambda_V^T \left(\mathbf{g} + \frac{\mathbf{T}}{m} \right) - \lambda_m \dot{m} \quad (4.4)$$

che può essere riscritto come:

$$H = \lambda_r^T \mathbf{V} + \lambda_V^T \mathbf{g} + T S_F \quad (4.5)$$

in cui S_F rappresenta la *Switching Function*.

$$S_F = \frac{\lambda_V^T \mathbf{T}/T}{m} - \lambda_m \frac{\dot{m}}{T} \quad (4.6)$$

Nelle equazioni, λ_m rappresenta il coefficiente di Lagrange della massa, mentre λ_V sono le variabili aggiunte che competono alle tre equazioni della dinamica, quelle della velocità (u, v, w). La Switching Function è una funzione strettamente collegata al modulo della spinta. La massimizzazione dell'Hamiltoniano dipende dal segno della Switching Function. Il modulo della spinta è derivato da una modalità del controllo *bang-bang* e sono possibili diversi scenari:

- La spinta è massima T_{MAX} se $S_F > 0$, poiché è conveniente spingere;
- La spinta è nulla se $S_F < 0$;
- Arco singolare se $S_F = 0$.

4.2 Equazioni di stato e variabili aggiunte

In questo modello vengono utilizzate coordinate sferiche in un sistema di riferimento inerziale basato sul piano equatoriale: la posizione del velivolo è descritta dal raggio r , dalla longitudine ϑ e dalla latitudine ϕ , mentre la velocità è descritta dalla componente in direzione radiale u , in direzione Est v e in direzione Nord w .

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r \\ \vartheta \\ \phi \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Le equazioni di stato del sistema sono le seguenti:

$$\frac{dr}{dt} = u \quad (4.8)$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{v}{r \cos\phi} \quad (4.9)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{w}{r} \quad (4.10)$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{r^2} + \frac{v^2}{r} + \frac{w^2}{r} + \frac{T}{m} \sin\gamma_T \quad (4.11)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{uv}{r} + \frac{vw}{r} \tan\phi + \frac{T}{m} \cos\gamma_T \cos\psi_T \quad (4.12)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{uw}{r} + \frac{v^2}{r} \tan\phi + \frac{T}{m} \cos\gamma_T \sin\psi_T \quad (4.13)$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{T}{c} \quad (4.14)$$

dove γ e ψ sono gli angoli di *flight path angle*, o elevazione, e di *heading* della velocità relativa V_r , mentre γ_T e ψ_T sono gli stessi angoli ma relativi alla spinta T .

Considerando l'equazione (4.4), è possibile determinare l'Hamiltoniano:

$$\begin{aligned} H = & \lambda_r u + \lambda_\vartheta \frac{v}{r \cos\phi} + \lambda_\phi \frac{w}{r} + \lambda_u \left(-\frac{\mu}{r^2} + \frac{v^2}{r} + \frac{w^2}{r} + \frac{T}{m} \sin\gamma_T \right) \\ & + \lambda_v \left(-\frac{uv}{r} + \frac{vw}{r} \tan\phi + \frac{T}{m} \cos\gamma_T \cos\psi_T \right) \\ & + \lambda_w \left(-\frac{uw}{r} + \frac{v^2}{r} \tan\phi + \frac{T}{m} \cos\gamma_T \sin\psi_T \right) - \lambda_m \frac{T}{c} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Dalla equazione del controllo (3.16) è possibile determinare i valori di ottimo del controllo, in questo caso γ_T e ψ_T ; è sufficiente derivare l'Hamiltoniano rispetto a queste due quantità e porre tutto uguale a 0.

$$\frac{dH}{d\gamma_T} = 0 \quad (4.16)$$

$$\frac{dH}{d\psi_T} = 0 \quad (4.17)$$

Dalle equazioni (4.16) e (4.17) è possibile ricavare gli angoli di ottimo del controllo, cioè la direzione della spinta:

$$\sin\gamma_T = \frac{\lambda_u}{\lambda_v} \quad (4.18)$$

$$\cos\gamma_T \cos\psi_T = \frac{\lambda_v}{\lambda_w} \quad (4.19)$$

$$\cos\gamma_T \sin\psi_T = \frac{\lambda_w}{\lambda_v} \quad (4.20)$$

in cui il *primer vector* λ_v , parallelo alla direzione della spinta ottimale, è definito come:

$$\lambda_v = \sqrt{\lambda_u^2 + \lambda_v^2 + \lambda_w^2} \quad (4.21)$$

Sempre dalla teoria del controllo ottimale, in particolare considerando l'equazione di Eulero-Lagrange (3.15) è possibile determinare le equazioni differenziali delle variabili aggiunte:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_r = \frac{1}{r^2} \left[\lambda_\vartheta \frac{v}{\cos\phi} + \lambda_\vartheta w + \lambda_u \left(-\frac{2}{r} + v^2 + w^2 \right) + \lambda_v (-uv + vw \tan\phi) \right. \\ \left. + \lambda_w (-uw - v^2 \tan\lambda_v) \right] \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\dot{\lambda}_\vartheta = 0 \quad (4.23)$$

$$\dot{\lambda}_\phi = \frac{1}{r \cos^2\phi} (-\lambda_\vartheta \sin\phi - \lambda_v vw + \lambda_w v^2) \quad (4.24)$$

$$\dot{\lambda}_u = \frac{1}{r} (-\lambda_r r + \lambda_v v + \lambda_w w) \quad (4.25)$$

$$\dot{\lambda}_v = \frac{1}{r} \left(-\lambda_\vartheta \frac{1}{\cos\phi} - 2\lambda_u v + \lambda_v (u - w \tan\phi) + 2\lambda_w v \tan\phi \right) \quad (4.26)$$

$$\dot{\lambda}_w = \frac{1}{r} (-\lambda_\phi - 2\lambda_u w - \lambda_v v \tan\phi + \lambda_w u) \quad (4.27)$$

$$\dot{\lambda}_m = \frac{T}{m^2} \lambda_v \quad (4.28)$$

Questo set di equazioni, insieme al set di equazioni di stato, compongono il sistema differenziale del problema.

4.3 Condizioni al contorno

Ottenute le equazioni differenziali, è necessario imporre le condizioni al contorno. La missione è suddivisa in N archi, tanti quanti sono gli asteroidi che si intende raggiungere. Il tempo di partenza è fissato a t_0 , mentre ogni asteroide verrà raggiunto a un tempo t_N diverso. Ogni arco della traiettoria avrà quindi delle condizioni al contorno proprie.

Nel caso di missione con solo rendez-vous, quindi senza fly-by intermedi, il velivolo (S/C) al tempo t_0 avrà la stessa posizione e la stessa velocità della Terra e una certa massa iniziale:

$$\mathbf{r}_{S/C}(t_0) = \mathbf{r}_{Earth}(t_0)$$

$$\mathbf{V}_{S/C}(t_0) = \mathbf{V}_{Earth}(t_0)$$

$$m_0(t_0) = 1000 \text{ kg}$$

Quando viene raggiunto l'asteroide al tempo t_f , la posizione e la velocità del velivolo devono essere uguali a quelle dell'oggetto appena raggiunto:

$$\mathbf{r}_{S/C}(t_f) = \mathbf{r}_{asteroid}(t_f)$$

$$\mathbf{V}_{S/C}(t_f) = \mathbf{V}_{asteroid}(t_f)$$

4.3.1 Condizioni intermedie

Se la missione prevede dei fly-by, all'arrivo nei pressi dell'asteroide, il velivolo dovrà avere la stessa posizione e la stessa velocità del corpo stesso. Indicando con i il generico punto intermedio in cui è previsto l' i -esimo fly-by e con $i-$ il punto immediatamente prima si può scrivere per l'arrivo:

$$\mathbf{r}_{S/C}(t_{i-}) = \mathbf{r}_i(t_{i-})$$

$$\mathbf{V}_{S/C}(t_{i-}) = \mathbf{V}_i(t_{i-})$$

Per la ripartenza il discorso su posizione e velocità è lo stesso, ma la differenza è che potrebbe essere passato un lasso di tempo denominato t_{STAY} , per esempio per le osservazioni. Il tempo di ripartenza è quindi dato da:

$$t_{i+} = t_{i-} + t_{STAY}$$

Dato che questo lasso di tempo è molto breve, almeno rispetto alla durata totale della missione, nel nostro caso t_{STAY} viene considerato nullo e il tempo di arrivo e partenza coincidono. Per quanto riguarda la massa invece, quella della ripartenza è la stessa dell'arrivo:

$$\mathbf{r}_{S/C}(t_{i+}) = \mathbf{r}_i(t_{i+})$$

$$\mathbf{V}_{S/C}(t_{i+}) = \mathbf{V}_i(t_{i+})$$

$$m(t_{i+}) = m(t_{i-})$$

4.4 Condizioni iniziali

Come già preannunciato nella sezione 3.3, è necessario un set di condizioni iniziali da cui partire per effettuare l'integrazione delle equazioni differenziali. Questi valori sono contenuti nel vettore \mathbf{p} .

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} t_0 \\ t_f \\ r_0 \\ \vartheta_0 \\ \phi_0 \\ u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \lambda_{r_0} \\ \lambda_{\vartheta_0} \\ \lambda_{\phi_0} \\ \lambda_{u_0} \\ \lambda_{v_0} \\ \lambda_{w_0} \end{bmatrix}$$

Nel vettore \mathbf{p} :

- t_0 e t_f rappresentano il tempo di partenza dalla terra e di arrivo al primo asteroide;
- r_0, ϑ_0, ϕ_0 rappresentano la posizione iniziale del velivolo;
- u_0, v_0, w_0 rappresentano la velocità iniziale del velivolo;
- $\lambda_{r_0}, \lambda_{\vartheta_0}, \lambda_{\phi_0}, \lambda_{u_0}, \lambda_{v_0}, \lambda_{w_0}$ rappresentano le variabili aggiunte iniziali.

Ogni arco necessita di un vettore \mathbf{p} di condizioni iniziali, quindi il pedice delle quantità contenute nel vettore cambia in base all'arco considerato.

Le quantità contenute nel vettore \mathbf{p} non sono tutte note a priori, quindi il problema passa dall'essere un *problema alle condizioni al contorno* (BVP) a un *problema alle condizioni iniziali* (IVP). Come già spiegato nel capitolo 3.3, il problema viene risolto con il *metodo di shooting*, cioè si ipotizza una soluzione iniziale di tentativo \mathbf{p}^I e si integra il sistema di equazioni differenziali. I risultati vengono poi confrontati con le condizioni al contorno: se l'errore è minore di una certa tolleranza, i valori iniziali scelti sono corretti, in caso contrario occorre scegliere un nuovo set di parametri iniziali. Quando vengono trovati i valori iniziali, viene trovata anche la soluzione ottimale della traiettoria e di conseguenza anche tutte le informazioni su come variano le grandezze nel tempo.

Capitolo 5

5. Analisi della missione

La proposta ANIME (*Asteroid Nodal Intersection Multiple Encounters*) dell'Agenzia Spaziale Europea (ESA), è una missione che ha l'obiettivo di esplorare 3 NEAs. Questa missione, il cui lancio dovrebbe avvenire nel tardo 2026, ha passato la prima selezione ma non ancora quella finale. L'obiettivo in questione verrebbe conseguito con un satellite a propulsione elettrica, la cui traiettoria è progettata per ottimizzare il ritorno scientifico della missione. Lo scopo di questa tesi è quello di utilizzare la filosofia basata sul progetto ANIME, in modo da trovare traiettorie alternative nella finestra di lancio compresa tra il 2025 e il 2030. Il lavoro è stato diviso in due macro-fasi: la prima fase è stata finalizzata alla ricerca di asteroidi che, in tale periodo, hanno un incontro ravvicinato con la Terra; ricavata tale lista di asteroidi, è stato possibile passare alla seconda fase, ovvero la fase di ottimizzazione delle traiettorie tramite la *teoria del controllo ottimale*.

5.1 Obiettivi della missione

Come già discusso nel Capitolo 1, gli asteroidi e in particolare i *Near-Earth Asteroids*, possono essere ottimi obiettivi scientifici o addirittura economici. Da un punto di vista della meccanica orbitale questi corpi sono anche molto semplici da visitare poiché non sono necessari elevati costi propulsivi in termini di ΔV . In tutte le traiettorie, si ha un asteroide finale, con cui viene effettuato un rendez-vous, e una serie di asteroidi intermedi, con cui vengono effettuati dei fly-bys. La missione ha quindi l'obiettivo di sorvolare questi corpi e studiarli.

5.1.1 Fly-by

Per fly-by si intende il passaggio ravvicinato di una sonda in prossimità di un pianeta o di un altro corpo celeste. Questo passaggio avviene ad alta velocità, e generalmente dura molto poco: si parla di qualche ora al massimo. I fly-by vengono spesso utilizzati come metodi per la prima esplorazione di un corpo sconosciuto, poiché non presentano particolari complicazioni nella loro realizzazione. Non dovendo eseguire manovre molto complesse (come un'entrata in orbita), l'unico requisito per effettuare un sorvolo è che le due traiettorie debbano intersecarsi in almeno un punto in cui i corpi si troveranno contemporaneamente. Per i motivi appena elencati, il consumo di propellente di queste manovre rimane molto contenuto.

Durante il fly-by gli strumenti della sonda rimangono accesi per raccogliere il maggior numero di dati possibile nel breve lasso di tempo. Nel caso in cui la comunicazione con la Terra non sia possibile o immediata, questi dati vengono salvati nelle memorie tramite il computer di bordo e inviate sulla Terra nei giorni successivi. Le informazioni ottenute da questo sorvolo possono essere utilizzate in seguito per la pianificazione di una missione *ad hoc*.

Nel caso in cui il corpo in questione sia molto grande, come un pianeta, un fly-by può essere utile per sfruttare l'effetto di *fionda gravitazionale*. Questo effetto è dovuto alla *legge di conservazione della quantità di moto*: il pianeta, infatti, cede dell'energia cinetica alla sonda, restringendo impercettibilmente la sua orbita, mentre la sonda guadagna energia cinetica. In base alla traiettoria, la sonda può guadagnare fino a due volte la velocità orbitale del pianeta.

5.1.2 Rendez-vous

Per rendez-vous si intende una manovra effettuata da una sonda e un altro oggetto (naturale o artificiale), avente come obiettivo l'avvicinamento degli stessi. Solitamente la sonda viene chiamata *veicolo attivo* o *chaser*, mentre il secondo corpo viene chiamato *veicolo passivo* o *target*. La difficoltà di questa manovra risiede nel fatto che le velocità orbitali e le orbite dei due corpi devono essere uguali. Al contrario del fly-by, il rendez-vous è una manovra a bassa velocità relativa, e quindi molto lunga.

5.2 Selezione degli asteroidi

Come già accennato nel Capitolo 1, gli asteroidi conosciuti sono superiore al milione, e sono catalogati dalla NASA in due categorie, i *numbered* e gli *unnumbered*. La prima categoria ha un numero di classificazione univoco, poiché i parametri orbitali degli oggetti sono noti; la seconda categoria invece è numerata in ordine cronologico di scoperta, perché le poche osservazioni di questi corpi fanno sì che l'incertezza sui loro parametri orbitali sia molto elevata. Nel momento in cui un corpo *unnumbered* viene classificato con certezza, viene spostato nella categoria *numbered*.

La tipologia di missione studiata trascina con sé una problematica che non è trascurabile: essendo la maggior parte degli asteroidi oggetti molto piccoli, anche un minimo errore nel calcolo dell'orbita e quindi della traiettoria, potrebbe portare al fallimento della missione. È necessario quindi conoscere con estrema accuratezza i parametri orbitali dei NEAs in modo da intercettarli. Essendo questo uno studio preliminare riguardo le possibili traiettorie, al fine della selezione degli asteroidi, entrambe le categorie sopracitate sono state trattate assumendo che i loro parametri orbitali fossero esatti e costanti.

Al fine di selezionare i candidati adatti, sono state effettuate alcune scremature in modo da eliminare ad ogni step gli asteroidi che non sono idonei alla missione. Queste scremature sono state effettuate con l'ausilio di Matlab e saranno presentate nei paragrafi successivi.

5.2.1 Asteroidi a bassa inclinazione

Il primo passo verso la selezione dei candidati è quello distinguere due categorie di asteroidi: quelli a bassa inclinazione e quelli ad alta inclinazione. Quelli a bassa inclinazione, generalmente minore di qualche grado, hanno velocità relative molto basse e quindi rappresentano i possibili candidati idonei per il rendez-vous finale. Questi asteroidi presentano orbite quasi circolari, e intersecano l'orbita terrestre in un punto qualsiasi.

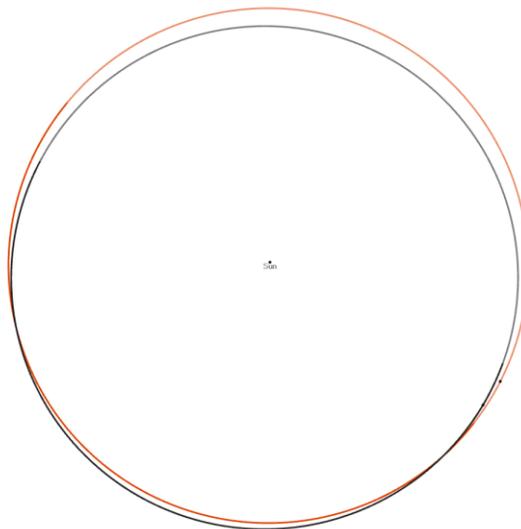


Figura 5. 3 Orbita a bassa inclinazione - nera
2000 SG344, arancione Terra

Per trovare gli asteroidi di questo tipo è stato sufficiente calcolare i raggi agli apsi con le formule

$$r_p = \frac{a}{(1 + e)} \quad r_a = \frac{a}{(1 - e)}$$

e imporre che:

$$\begin{aligned} r_p &> 0.9 \text{ UA} \\ r_a &< 1.1 \text{ UA} \\ i &< 5^\circ \end{aligned}$$

L'asteroide *numbered* che rispetta questi criteri è solamente 1, mentre quelli *unnumbered* sono 44, per un totale di 45 asteroidi.

Successivamente è stata valutata la finestra temporale dei passaggi, cioè si è calcolata la posizione degli asteroidi nella finestra 2025-2030. Tramite l'equazione di Keplero (2.21) è stata calcolata dapprima l'*anomalia eccentrica E*, da cui è stata ricavata l'*anomalia vera v*, e successivamente è stato possibile valutare la *longitudine vera θ* tramite la formula:

$$\theta_{ast} = v + \omega + \Omega$$

Questa è un'approssimazione del problema, in quanto l'angolo θ rappresenta la posizione del corpo nel caso in cui l'inclinazione dell'orbita sia nulla. Tuttavia, parlando di angoli molto piccoli, è un'ipotesi valida. Il valore di θ è riferito però all'epoca in cui sono stati registrati i parametri orbitali. E' stato necessario quindi calcolare il valore dell'angolo di longitudine vera nella finestra temporale di nostro interesse: questo obiettivo è stato raggiunto calcolando il valore di θ a intervalli di 10 giorni a partire dal 2025, tramite la formula:

$$\theta_{ast_{EP}} = \theta_{ast_{EP_0}} + (EP - EP_0) * n_{ast}$$

in cui $\theta_{ast_{EP_0}}$ è il valore dell'angolo di longitudine vera all'epoca di riferimento, EP rappresenta l'epoca in cui si vuole calcolare il valore dell'angolo, EP_0 è l'epoca di riferimento, mentre n rappresenta il *moto medio* dell'asteroide. Il moto medio rappresenta la velocità angolare richiesta da un corpo per completare un'orbita, assumendo un moto circolare costante.

$$n_{ast} = \frac{2\pi}{T}$$

dove T è il periodo orbitale, espresso in giorni:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu_{sun}}}$$

Allo stesso modo, è stata calcolata parallelamente la posizione della terra nella stessa finestra temporale di interesse e infine si è calcolata la differenza tra gli angoli di longitudine vera della terra e degli asteroidi alle varie epoche:

$$\Delta\theta = \theta_{ast} - \theta_{Earth}$$

A quel punto è stato possibile imporre la condizione sulla prima classe di asteroidi:

$$\Delta\theta < 10^\circ$$

5.2.2 Asteroidi ad alta inclinazione

Per gli asteroidi ad alta inclinazione il discorso cambia completamente. Le orbite di questi corpi presentano tendenzialmente alte eccentricità, che, unite alle alte inclinazioni, li portano ad allontanarsi eccessivamente dall'orbita terrestre. Il possibile incontro tra la Terra e questi oggetti avviene in uno dei due nodi che sta nelle prossimità dell'orbita terrestre.

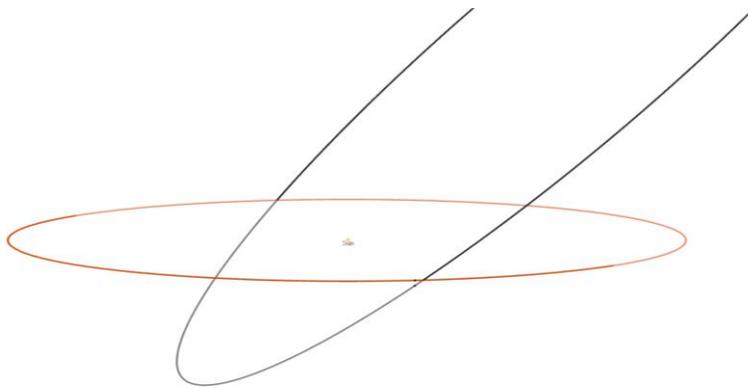


Figura 5. 4 Orbita ad alta inclinazione di 1999 AN10

Per trovare questi asteroidi è necessario calcolare il raggio dei due nodi:

$$r_{asc} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(-\omega)} \quad r_{disc} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\pi - \omega)}$$

Per questa categoria di asteroidi è stato imposto che:

$$\begin{aligned} 0.9 \text{ UA} &< r_{asc} < 1.1 \text{ UA} \\ 0.9 \text{ UA} &< r_{disc} < 1.1 \text{ UA} \end{aligned}$$

Gli asteroidi *numbered* che rispettano questi criteri sono 777, mentre quelli *unnumbered* sono 12959, per un totale di 13736 asteroidi.

Per valutare i passaggi ai nodi delle orbite ad alta inclinazione, è stato sufficiente calcolare il tempo di passaggio ai nodi, di cui si conosce la longitudine vera:

$$t_{asc} = \frac{T}{2\pi} (E_{asc} - e \sin E_{asc}) \quad t_{disc} = \frac{T}{2\pi} (E_{disc} - e \sin E_{disc})$$

$$\theta_{asc} = \Omega \quad \theta_{disc} = \pi + \Omega$$

Calcolando l'angolo di longitudine vera della Terra allo stesso modo del paragrafo precedente è stato possibile imporre la condizione:

$$\Delta\theta_{asc,disc} = \theta_{asc,disc} - \theta_{Earth}$$

$$\Delta\theta_{asc,disc} < 3^\circ$$

5.2.3 Candidati per il rendez-vous

I candidati per il rendez-vous sono 20 e sono riportati nella tabella 5.1: questi sono il risultato della scrematura degli asteroidi a bassa inclinazione. Gli asteroidi contrassegnati con “*” avranno incontri ravvicinati multipli tra il 2025 e il 2030, mentre gli altri avranno solo un incontro ravvicinato.

2008 ST	2013 GH66	2021 EJ3
2020 PN1*	2015 JD3*	2020 PC*
2008 HU4	2000 SG344*	2011 BL45*
2011 AA37	2006 RH120	2015 VC2
2017 TP4	2018 FM2	2008 UA202
2012 TF79	2017 UQ6*	2012 LA
2019 UO1	2017 SV19	

Tabella 5. 1 Candidati per il rendez-vous

5.2.4 Candidati per i fly-by

I candidati per i fly-by sono 270 e sono riportati nella tabella 5.2: questi sono il risultato della scrematura degli asteroidi ad alta inclinazione. I candidati sono stati catalogati in

base all'epoca di passaggio, in modo da facilitarne la selezione nella fase di ottimizzazione delle traiettorie.

2025	2020 CR1	2019 BZ3	2020 PX5		2026	2014 AF16	2021 DH1	2019 LL6	2020 YB1
	2007 SQ6	2007 XB23	2020 PN1			2020 CX1	2021 RE6	2016 RN41	2018 NV
	2006 HU50	2020 YP	2020 PP1			2011 WV134	2018 GY	2018 BB5	2019 YS3
	2020 HS7	2018 AV11	2012 RR16			2003 KN18	2021 FS	2017 UL52	2020 ML
	2009 BE	2020 BA15	2015 RO35			2006 CS	2013 FW13	2015 UH52	2020 PN1
	2011 AL37	2021 JC1	2018 RO8			2021 GW4	2020 FW5	2018 WH1	2020 PP1
	2019 RQ	2020 KW1	2010 SE			2007 TD71	2016 GF135	2017 YM1	2015 RT82
	2020 KO3	2014 HQ124				2020 BV7	2019 GQ5	2019 YP3	2021 RE6
	2017 BB7	2016 LR51				1999 MN	2021 GN6	2016 BN14	
2004 WH1	2018 BY6			1997 NC1	2008 HU4	2021 SQ			
2027	2021 AM6	2008 BD15	2019 XT2	2013 GH66	2028	2020 NC	2019 JV5	2018 LQ2	
	2016 CJ31	2008 ON8	1994 XL1	2020 KH5		2020 ML	2019 LZ1	2021 RQ9	
	2015 CG13	2016 NK22	2007 CM26	2021 LV		2016 PC2	2017 KC36	2007 TT24	
	2019 BC5	2005 OK3	2021 CZ3	2016 LA49		2014 CE	2015 MZ53	2018 RC3	
	2010 FQ	1999 AN10	2013 EB	2018 OQ		2011 CR1	2017 QO1	2019 CF5	2019 DQ
	2020 CX1	2014 QN362	2020 DS3	2019 YS3		2010 CA	2019 CG5	2019 OM	2012 DK4
	2014 DH6	2009 CC2	2019 DN1	2006 BX7		2011 BL45	2017 HP49	2019 CF5	2018 FG2
	2012 DJ61	2017 QC36	2018 FZ2	2020 PN1		2021 CZ3	2021 KQ2	2011 OB26	2015 FC117
	2016 FZ13	2020 RW7	2009 DD45	2004 QJ13		2002 CC14	2019 LW4	2000 CO101	2020 FW5
	2014 FA7	2018 SD2	2015 EG	2020 QB2		2008 CT1	2020 EJ	2009 QE34	2012 FT35
	2021 GQ5	2019 LV1	2000 RS11	2013 RR43		2015 DZ199	2001 WN5	2008 KZ5	2018 GR11
	2018 GZ	2018 WZ1	2012 RM15	2012 EY11		2012 DE31	2018 NW	2018 TZ	2011 SD173
	2020 SR1	2021 PZ9	2017 FO	2014 QN266		2017 QL	2017 OO1	2017 UA52	2015 XF261
	2002 CW11	2020 XF	2014 FA7			2019 EF1	2011 GR59	2018 PV24	2018 HF2
	2014 HL129	2020 RQ2	2020 FE4			2021 PV	2020 OX5	2018 PV24	2021 KQ2
2020 PD3	2006 SB	2001 HB		2020 FB7	2021 PN1	2017 WW1	2019 KD		
2029	2011 CO14	2018 LK	2016 GX	2015 VL64	2030	2012 DE31	2015 EK7	1991 JW	2007 MJ13
	2016 EP84	2020 NC	2021 JC1	2021 FA		2006 JF42	2016 NE33	2020 XR	2006 CT
	2016 CC136	2001 QE71	2006 VW2	2008 UA202		2021 CU	2017 PK25	2009 WZ104	2020 OP2
	2017 QO	2013 PJ10	2014 GQ17	2016 EQ85		2015 JD	2018 XC4	2011 EK	2021 PN1
	2018 NS	2011 QD50	2013 XK22	2002 NN4		2004 SA	2011 SQ5	2019 RB3	
	2019 AS13	2021 PP	2019 NJ			2021 RH1	2011 GJ3	2004 OB	
	2019 QV1	2020 PG6	2021 MK1			2021 AX6			
	2019 DA1	2021 DM2	2010 NN			2011 FS9			
	2000 CO101	2001 EB18	2016 NL22			2017 GN6			
	2005 ES70	2010 PJ9	2014 HC199			2021 GQ5			
	2021 FA	2021 DM2	2018 BY6			2020 KM4			
	2017 KK27	2018 VY4	2007 HE15			2014 WP362			
	2001 QE71	2017 WG14	2010 PJ9			2016 LK49			
	2021 JR7	2010 WB	2018 RS			2018 MD7			
	2017 BM123	2012 EZ1	2004 SE26			2021 RA10			
2020 KV6	2007 DB61	2020 RD5		2014 DJ10					

Tabella 5. 2 Candidati per i fly-by alle diverse epoche

Le date degli incontri ravvicinati di tutti i candidati riportati nelle tabelle 5.1 e 5.2, sono state confrontate con un catalogo fornito dall'ESA contenente le stesse informazioni, in modo da validare il processo di selezione degli asteroidi.

5.3 Caratteristiche del satellite

Il velivolo del progetto anime è un CubeSat 12U con una massa iniziale di 21 kg. Lo spacecraft (*s/c*) è equipaggiato con un propulsore a ioni Busek BIT-3, che ha una spinta nominale T di 1 mN e impulso specifico I_{sp} di 2100 secondi ipotizzato costante. La massa di propellente stivata è di 1.5 kg e garantisce un ΔV di circa 1.5 km/s.

Satelliti così piccoli permettono, in generale, di abbattere i costi di produzione e di lancio; d'altro canto le dimensioni ridotte dei sottosistemi "limitano" il passaggio di informazioni, inficiando sulle performances del satellite. Generalmente, i satelliti utilizzati per questo genere di missioni hanno dimensioni grandi, in parte per via della strumentazione scientifica, e in parte per via delle dimensioni dei serbatoi di propellente. Confrontando le dimensioni dei velivoli delle principali missioni effettuate verso i NEAs, si trova:

- Hayabusa 2, peso al lancio di 609 kg;
- NEAR, peso al lancio di 805 kg;
- Osiris-Rex, peso al lancio di 2100 kg;
- Dawn, peso al lancio di 1218 kg.

Sulla base di queste considerazioni, il velivolo con cui sono state analizzate le traiettorie ha una massa iniziale di 1000 kg. Inoltre, lo *s/c* è dotato di un propulsore a ioni del tipo *gridded ion thruster*, con una spinta massima di 125 mN e un impulso specifico I_{sp} di 3900 secondi costante. Il fatto di considerare l'impulso specifico costante rende, di conseguenza, anche la velocità efficace di scarico costante; la spinta, quindi, varierà solamente con la portata di propellente, che dipende dalla potenza.

$$c = \frac{T}{\dot{m}_p} \quad T = \frac{2\eta P}{c}$$

La potenza massima è di circa 4 kW e l'efficienza η è di 0.625

5.4 Ipotesi semplificative

E' necessario introdurre alcune ipotesi che riguardano il modello usato per lo studio delle traiettorie. Queste ipotesi servono a semplificare le analisi e possono essere considerate accettabili poiché si tratta di uno studio preliminare di fattibilità.

- 1 La prima ipotesi, e forse la più irrealistica, è quella già accennata in precedenza di considerare esatti i parametri orbitali dei NEAs. Nella realtà, questi possono essere leggermente diversi e possono variare col tempo, in base al numero di osservazione effettuate. E' preferibile scegliere asteroidi *numbered*, poiché si ha una maggior precisione sui loro parametri orbitali.
- 2 Si ipotizza che il satellite, alla partenza, si trovi già fuori dalla sfera di influenza gravitazionale terrestre e che possieda una velocità rispetto alla Terra nulla. Questo implica che le fasi di lancio e di fuga dalla sfera di influenza non vengano prese in considerazione nelle analisi.
- 3 Il tempo di permanenza nei pressi degli asteroidi è considerato nullo. I fly-by generalmente durano qualche ora, lasso di tempo trascurabile rispetto alla durata totale della missione.
- 4 Per tenere in considerazione il fatto che il motore potrebbe essere spento in alcuni momenti per ragioni impreviste, si ipotizza conservativamente che la spinta possieda un *duty cycle* (il rapporto tra il tempo in cui l'onda quadra assume valore positivo e il periodo totale considerato) nominale del 90%. Nei 15 giorni prima di un fly-by o del rendez-vous, il duty cycle viene ridotto al 70% per tenere in considerazione i periodi in cui la spinta è nulla per motivi di guida e navigazione oppure di osservazione degli asteroidi.

Capitolo 6

6. Risultati

Per la selezione dei target si possono utilizzare diversi approcci in funzione delle esigenze della missione. Per esempio, si può preferire una missione dalla breve durata, a discapito degli aspetti scientifici, o favorire certi asteroidi per le loro proprietà, pur consumando di più. Ogni missione ha quindi il proprio compromesso in termini di durata, consumo e rilevanza scientifica. A prescindere da quale sia l'aspetto della missione che si vuole massimizzare, il metodo per ricercare delle possibili traiettorie è sempre lo stesso. Il primo step è quello di utilizzare gli asteroidi candidati per il rendez-vous e cercare di far convergere il problema ai valori iniziali descritto nei capitoli precedenti, imponendo come data di arrivo sull'asteroide quella dell'incontro ravvicinato con la Terra. Se l'ottimizzazione va a buon fine, la traiettoria appena trovata serve come base di partenza per la ricerca di possibili fly-by. Il metodo per fare ciò è quello di analizzare l'andamento del raggio della traiettoria nel caso di solo rendez-vous e selezionare tra gli asteroidi candidati per il fly-by quelli i cui raggi, all'epoca di passaggio ai nodi, siano compatibili con il raggio della traiettoria. In questo modo è possibile scartare tutti gli asteroidi che non rispettano tale criterio. Si cercano quindi quegli asteroidi che potrebbero trovarsi nelle vicinanze del tragitto effettuato dal satellite, in modo da intercettarli variando di poco la traiettoria, e quindi consumando poco propellente.

Per effettuare le analisi delle traiettorie è stato utilizzato un codice Fortran sviluppato per risolvere il problema di ottimo attraverso un procedimento iterativo, il cui scopo è quello di trovare una strategia di spinta che permetta di portare a termine la missione con la massima massa finale possibile.

Le traiettorie che hanno come rendez-vous gli asteroidi 2017 SV19, 2012 LA, 2017 UQ6 e 2000 SG344 sono riportate nei paragrafi successivi, in cui sarà riportato anche un breve excursus su tali asteroidi. Queste traiettorie sono state selezionate tra quelle trovate per motivi scientifici o di costi propulsivi.

6.1 2017 SV19

2017 SV19 è un asteroide molto piccolo della classe AMOR che la NASA ha classificato nel 2017 come NEA data la sua orbita prossima alla terra, tuttavia non è considerato come pericoloso per la Terra, in quanto le simulazioni non hanno indicato possibili collisioni in un imminente futuro. Il suo periodo orbitale è di 400.43 giorni e si stima che le sue dimensioni siano comprese tra i 17 e i 78 metri di diametro. 2017 SV19 sarà protagonista di un incontro ravvicinato con la Terra il 26 febbraio 2029, quando passerà ad una distanza di circa 4.5 milioni di km dalla Terra, circa 12 volte la distanza Terra – Luna.

a	e	i	Ω	ω	M	H
1.06321 AU	0.040669	1.303°	343.831°	156.901°	203.592°	25.2 mag

Tabella 6. 1 Elementi orbitali di 2017 SV19 all'epoca 59600 MJD

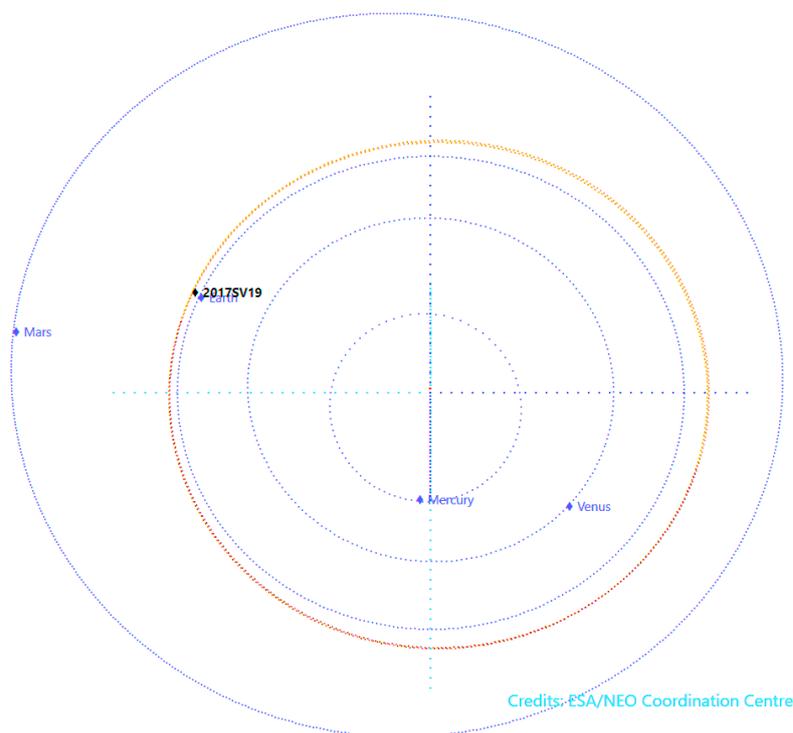


Figura 6. 1 Orbita di 2017 SV19 e incontro ravvicinato (Feb 2029)

La prima traiettoria analizzata è quella diretta verso questo asteroide, senza alcun fly-by intermedio. Dall'analisi dei passaggi precedentemente effettuata si è cercata una traiettoria la cui data di arrivo fosse all'incirca quella del passaggio ravvicinato alla terra.

Asteroide	Data partenza	Data rendez-vous	ΔV
2017 SV19	20/02/2027	16/05/2029	1.20505786 km/s

Tabella 6. 2 Traiettoria diretta con rendez-vous 2017 SV19

La durata della missione è di 2 anni e 3 mesi circa. Dalla traiettoria è possibile notare un'orbita molto simile a quella della terra per la maggior parte della missione. Durante la fase finale si ha un sostanziale aumento del raggio della traiettoria per intercettare l'asteroide.

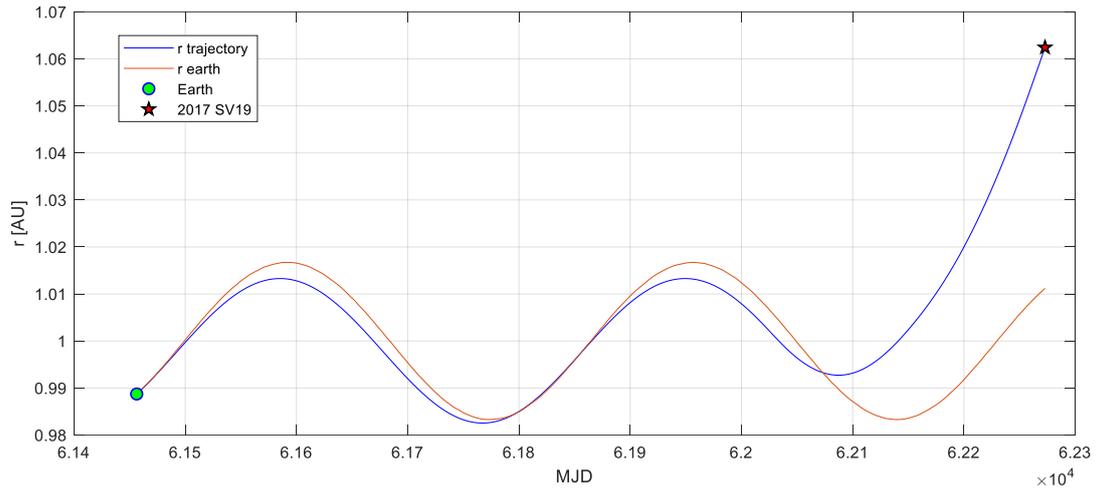


Figura 6. 2 Raggio della traiettoria in funzione del tempo

I motori sono spenti per la maggior parte della missione, non fornendo quindi alcuna spinta, dunque la fase di coasting è piuttosto prolungata. Verso la fine della missione, vengono accesi i motori in modo da aumentare l'energia meccanica dell'orbita e modificarne quindi l'eccentricità e l'inclinazione. La durata della missione è di 816 giorni ma la maggior parte del ΔV della missione viene quindi usato nei mesi antecedenti all'arrivo nell'asteroide target.

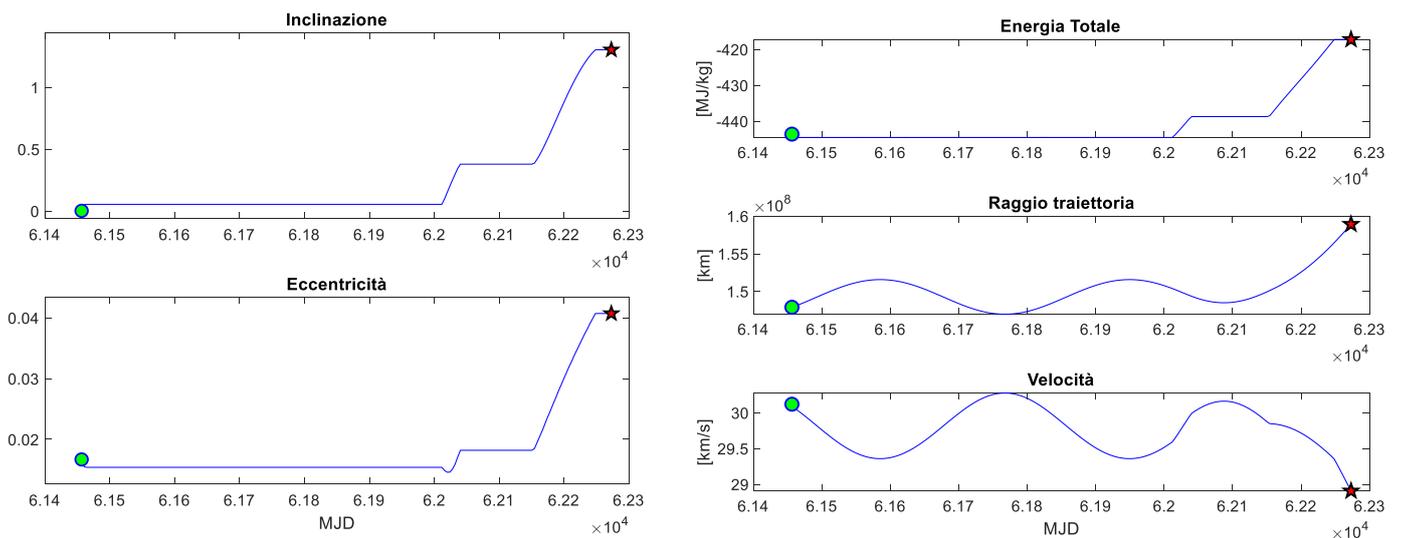


Figura 6. 3 Inclinazione, eccentricità, energia, raggio e velocità in funzione del tempo

La massa finale del veicolo è di 969 kg, quindi il consumo di propellente è di circa 31 kg.

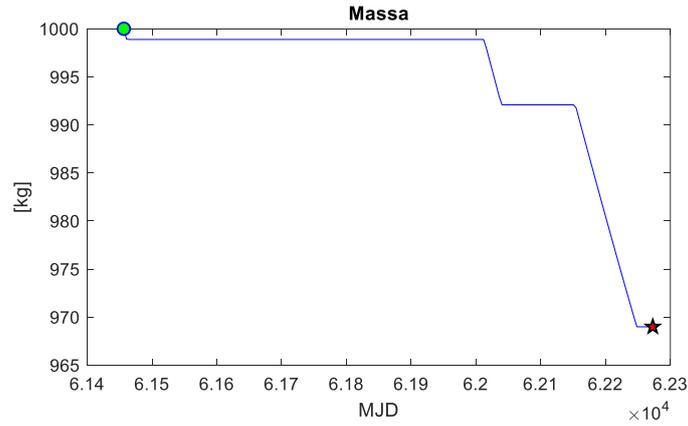


Figura 6. 4 Massa totale in funzione del tempo

La strategia di spinta consiste in 4 momenti distinti di spinta: il primo è alla partenza, e dura pochi giorni mentre gli altri 3, come già anticipato, si verificano verso la fine della missione e hanno una durata variabile.

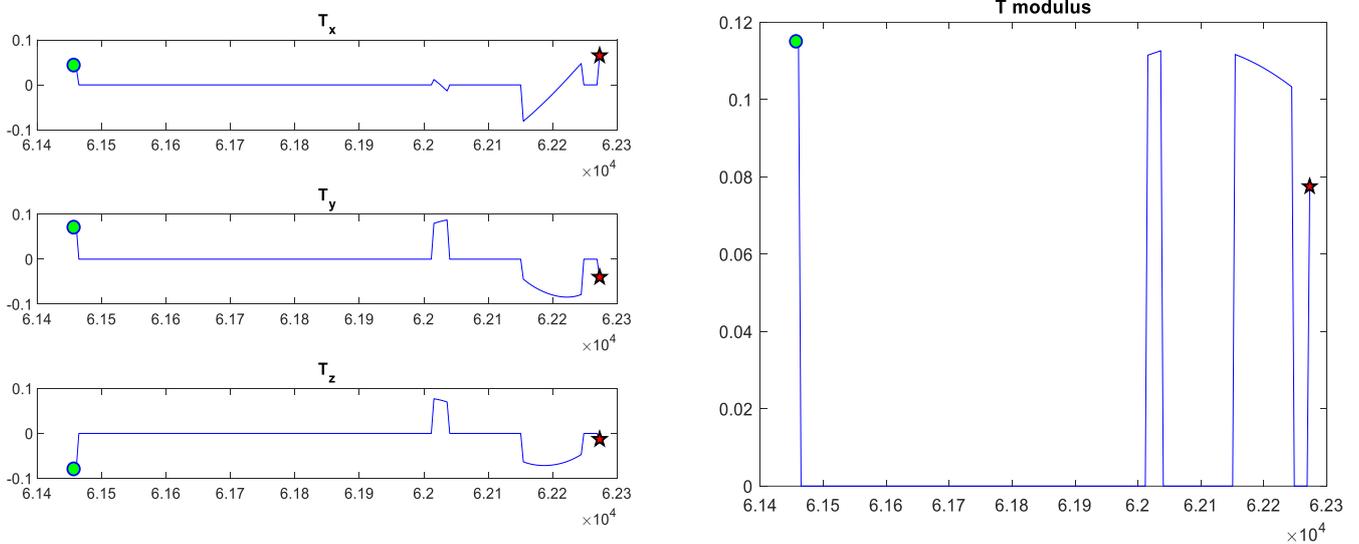


Figura 6. 5 Componenti e modulo della spinta T

Le figure 6.6 e 6.7 rappresentano la traiettoria in diversi sistemi di riferimento.

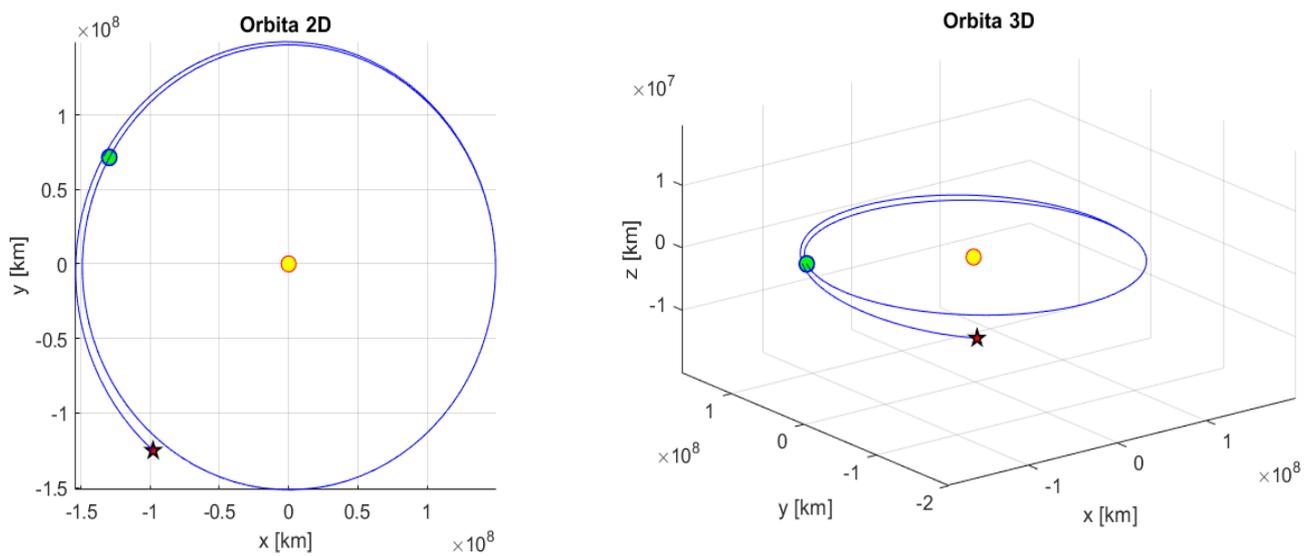


Figura 6. 6 Traiettoria in 2D e in 3D nel s.d.r. eliocentrico

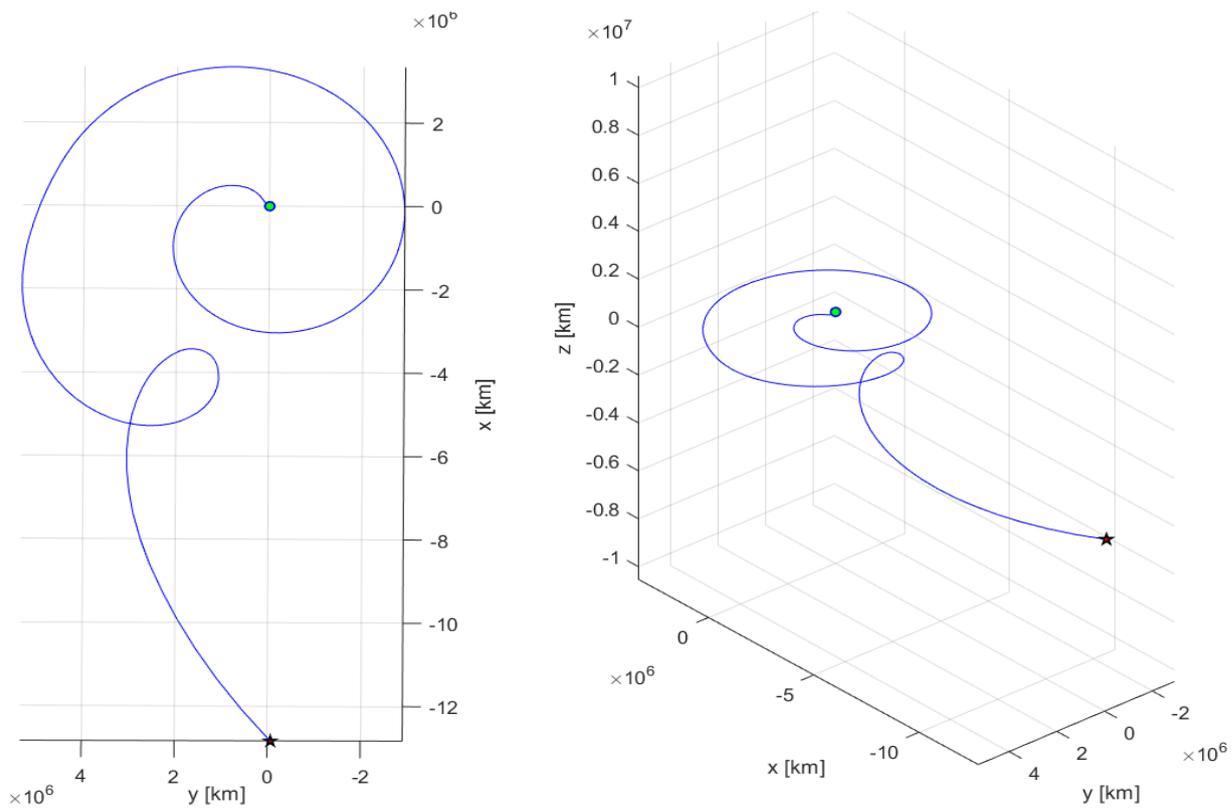


Figura 6. 7 Traiettoria in 2D e in 3D in coordinate ECI

Questa traiettoria è la base per le successive analisi. Le traiettorie migliori che hanno come rendez-vous l'asteroide 2017 SV19 sono 2, hanno entrambe 2 fly-by intermedi e verranno analizzate nei prossimi paragrafi.

6.2 2020 XF – 2017 OO1 – 2017 SV19

2020 XF è piccolo asteroide della classe ATEN, incluso nella Risk List dell'ESA ma non nella Priority List, dal diametro di circa 16 metri. 2017 OO1 è un piccolo asteroide sempre della classe ATEN, dal diametro di circa 43 metri.

	Asteroide	Data Fly-by	ΔV
Partenza	Terra	21/01/2027	0 km/s
1° Fly-by	2020 XF	16/11/2027	0.807938 km/s
2° Fly-by	2017 OO1	21/07/2028	0.144543 km/s
Rendez-vous	2017 SV19	11/08/2029	1.727632 km/s
		Durata 2.55y	TOT 2.680112 km/s

Tabella 6. 3 Caratteristiche della traiettoria

La traiettoria della missione è mostrata in figura 6.8. Il primo asteroide viene raggiunto dopo circa 10 mesi, il successivo dopo 8 mesi, e dopo più di anno avviene il rendez-vous.

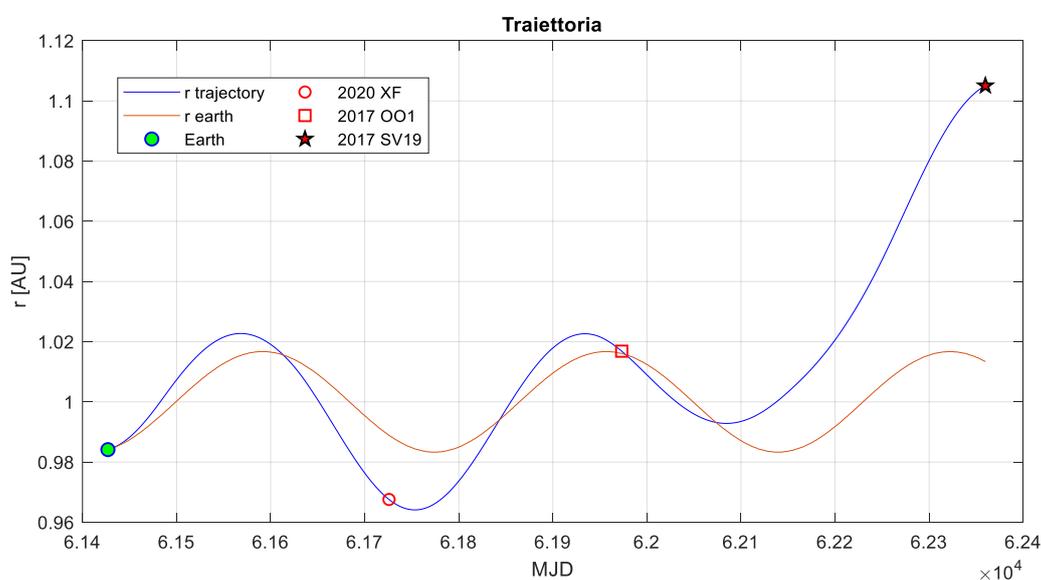


Figura 6. 8 Raggio della traiettoria in funzione del tempo

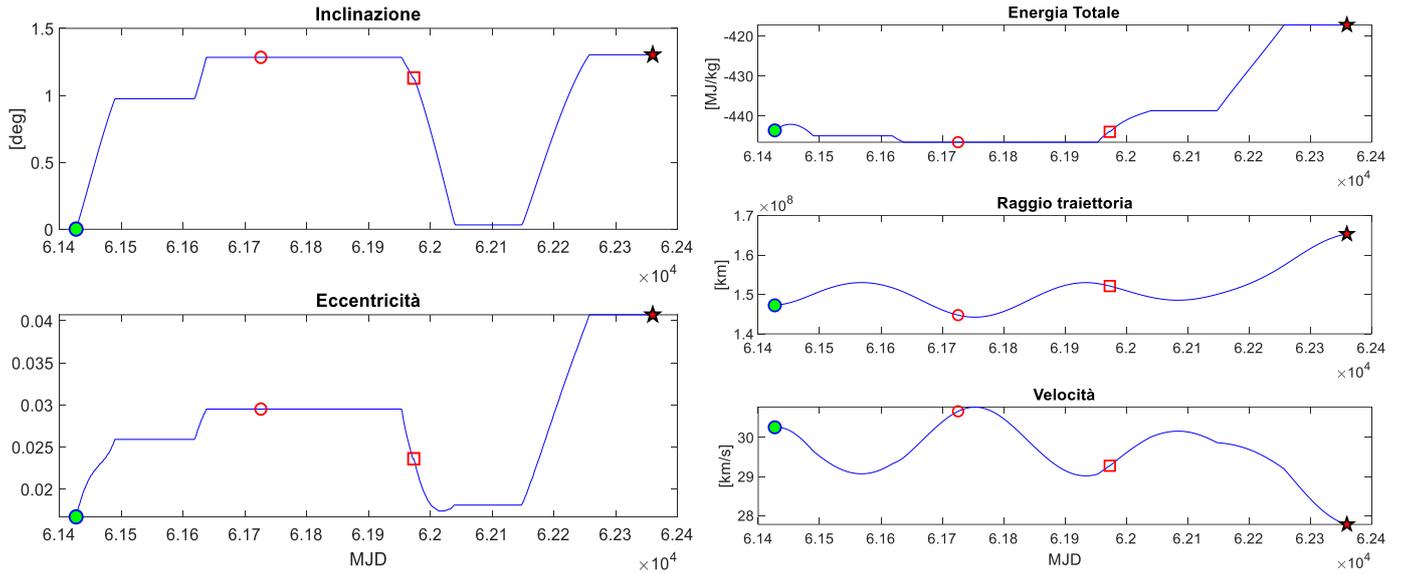


Figura 6. 9 Inclinazione, eccentricità, energia, raggio e velocità in funzione del tempo

La traiettoria in questo caso non ricalca quella della terra, e questo è dovuto principalmente al fatto che all’inizio della missione vi è un cambiamento importante dell’eccentricità della traiettoria. Nonostante l’ampiezza delle oscillazioni risulti quindi ridotta rispetto al caso precedente, i due andamenti del raggio delle traiettorie risultano molto simili.

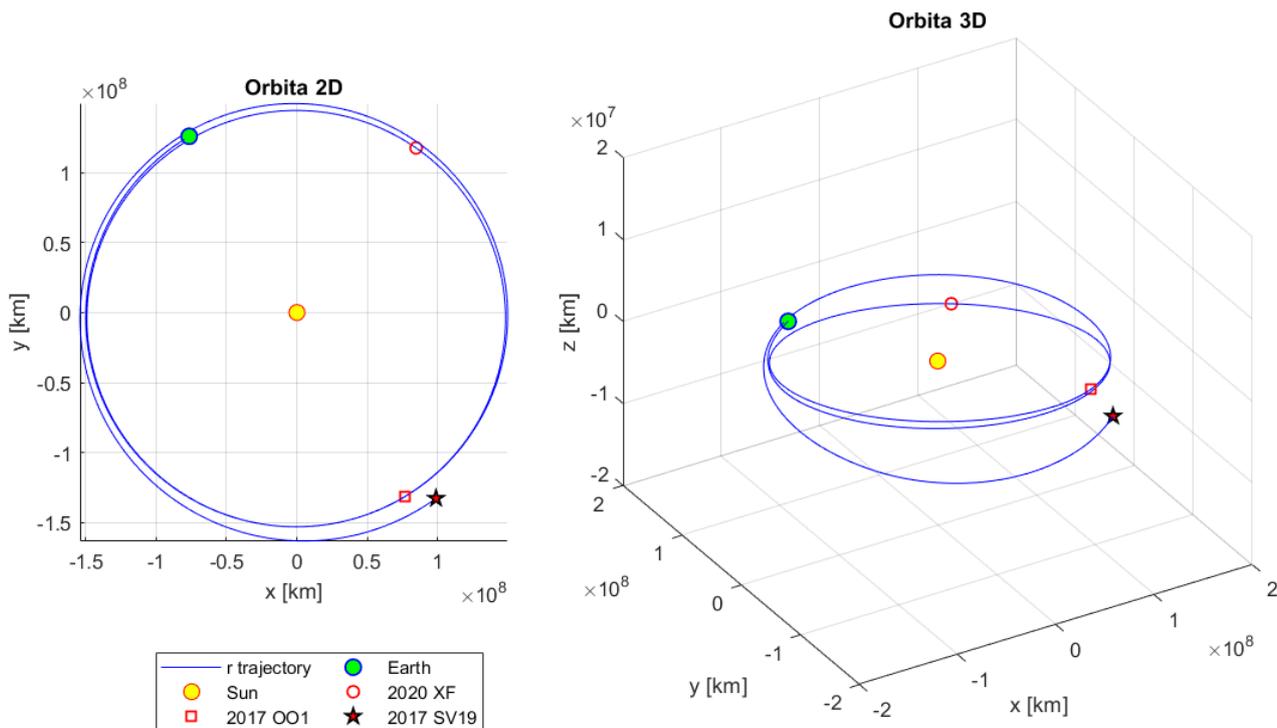


Figura 6. 10 Traiettoria in 2D e in 3D nel s.d.r. eliocentrico

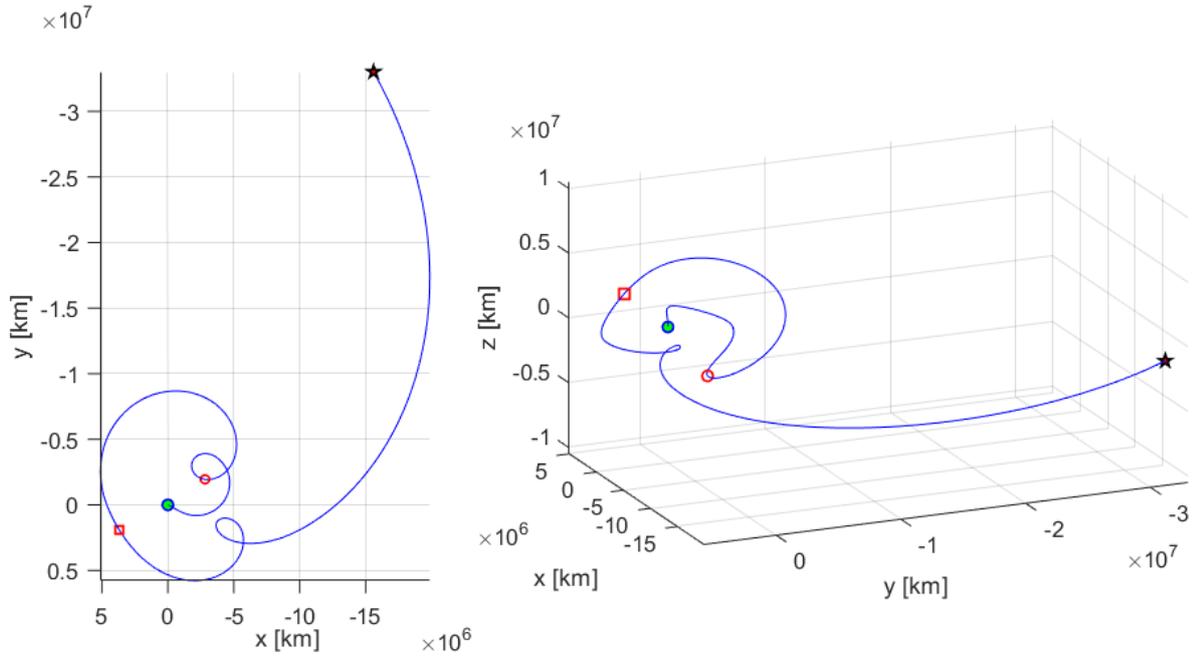


Figura 6. 11 Traiettoria in 2D e in 3D in coordinate ECI

Per quanto riguarda la massa di carburante, il consumo è all'incirca di 68 kg di propellente, che portano lo spacecraft ad una massa finale di 932 kg. Rispetto al caso precedente osserviamo quindi un aumento della quantità di propellente consumato di circa 2,19 volte.

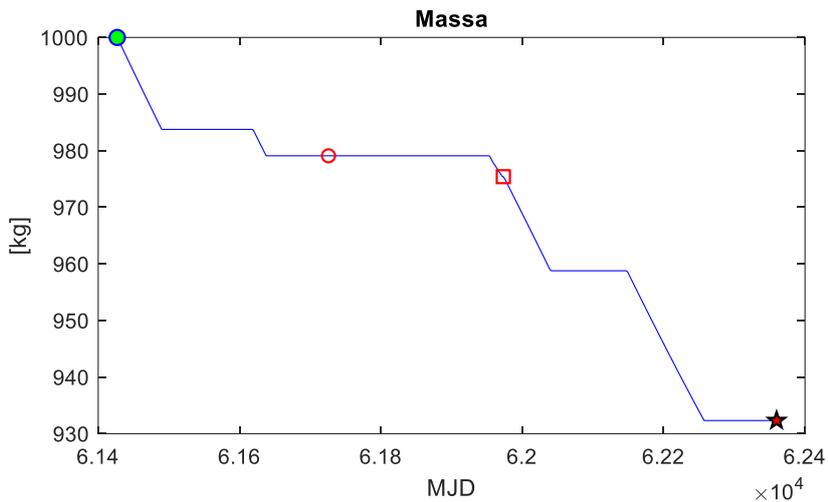


Figura 6. 12 Massa totale in funzione del tempo

La strategia di spinta consiste in 6 momenti in cui la spinta è non nulla. Già dall'inizio della missione i motori sono accesi, in quanto entrambi i flyby avvengono molto presto a eccentricità e inclinazioni maggiori di quelli di partenza. La direzione della spinta è inizialmente concorde alla direzione del moto, per poi susseguirsi un breve periodo di spinta

in direzione opposta al moto in modo da diminuire leggermente il periodo orbitale. Dopo una prima spinta iniziale, si spengono i motori, per poi riaccenderli prima del fly-by con l'asteroide 2020 XF. Il secondo arco invece è caratterizzato quasi totalmente da una fase di coasting, i motori vengono accesi infatti solamente in prossimità del fly-by con l'asteroide 2017 OO1. E' interessante considerare il ΔV relativo a questo arco, che equivale a solamente 144 m/s, uno tra i più bassi trovati in questo studio. L'ultimo arco è caratterizzato dai consumi maggiori. La quasi totalità del tempo i motori sono accesi poiché il secondo fly-by ha cambiato le caratteristiche dell'orbita dello spacecraft. Occorre quindi spingere tangenzialmente alla traiettoria per aumentare il semiasse maggiore, con componente lungo z non nulla in modo da modificare anche l'inclinazione.

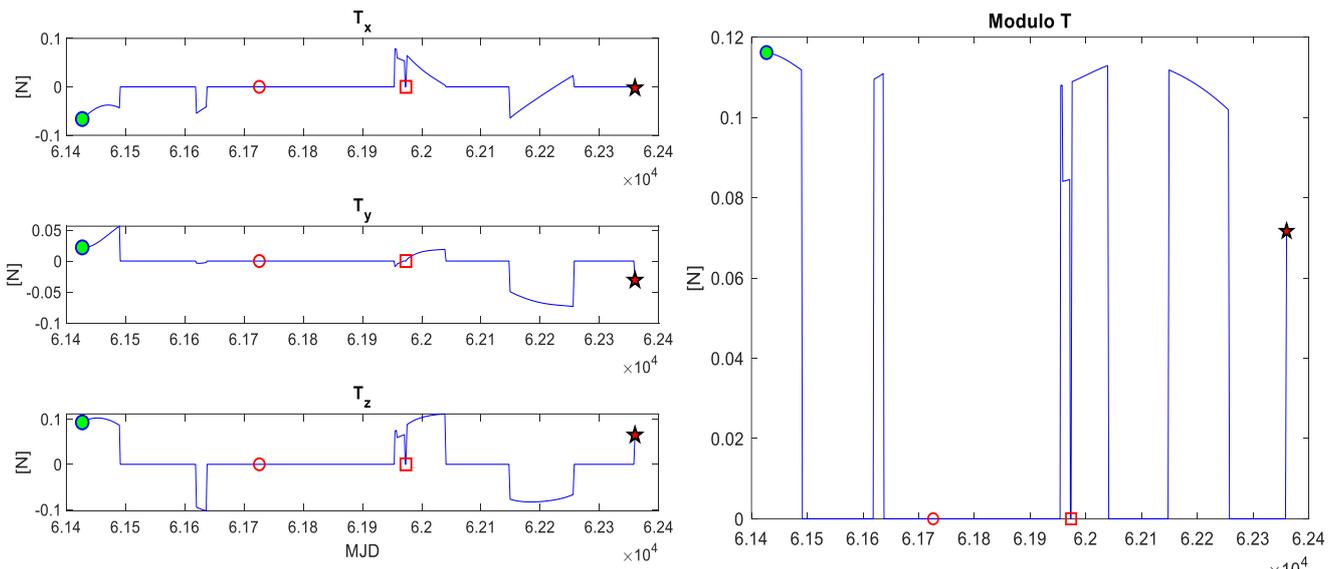


Figura 6. 13 Componenti e modulo della spinta T

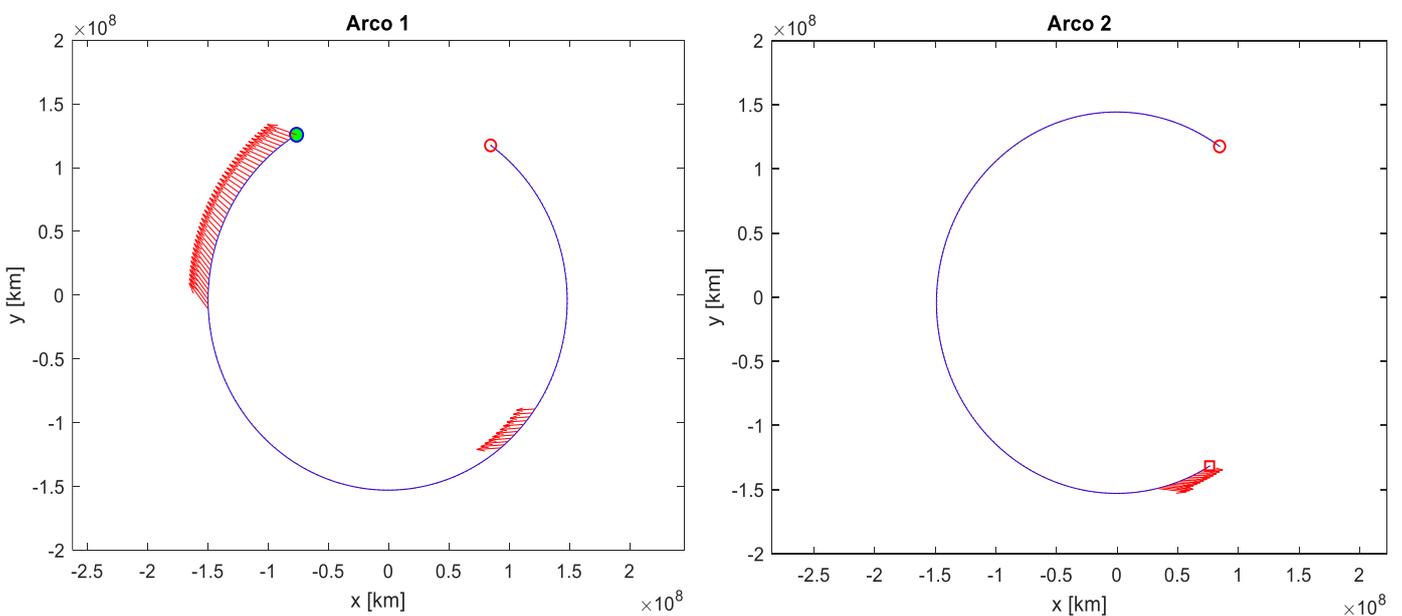


Figura 6. 14 Vettori spinta lungo il terzo arco nel piano X-Y

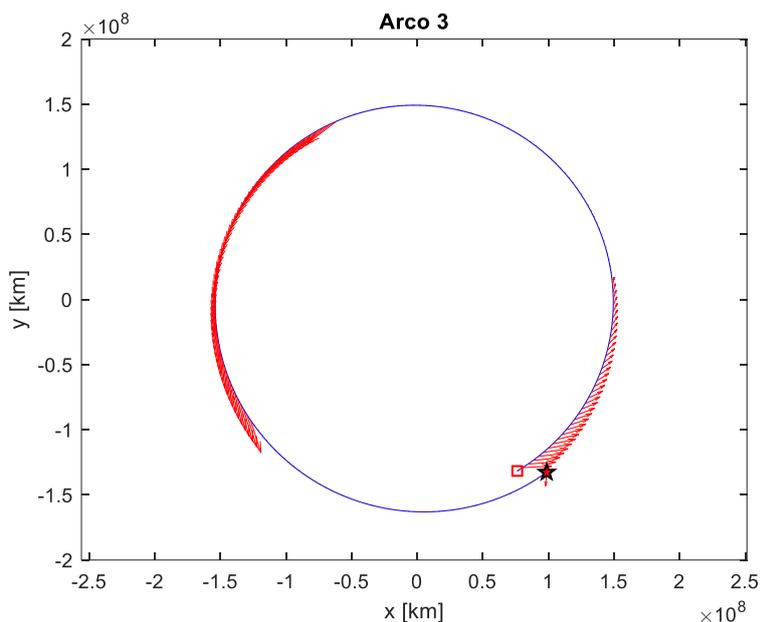


Figura 6. 15 Vettori spinta lungo i primi 2 archi nel piano X-Y

6.3 2020 XF – 2018 NW - 2017 SV19

Questa traiettoria condivide un asteroide per il fly-by e l'asteroide RV con quella precedentemente analizzata. L'asteroide 2017 OO1 viene scambiato con 2018 NW, un piccolo asteroide della classe APOLLO, incluso nella Risk List dell'ESA ma non nella Priority List, dal diametro di circa 10 metri.

	Asteroide	Data Fly-by	ΔV
Partenza	Terra	30/09/2026	0 km/s
1° Fly-by	2020 XF	02/12/2027	0.271756 km/s
2° Fly-by	2018 NW	13/07/2028	0.510781 km/s
Rendez-vous	2017 SV19	09/05/2029	1.006094 km/s
		Durata 2.60y	TOT 1.788631 km/s

Tabella 6. 4 Caratteristiche della traiettoria

Questa traiettoria è molto interessante dal punto di vista dei consumi perché, come si può vedere dalla tabella sovrastante, il ΔV della missione risulta più piccolo di circa 0.9 km/s.

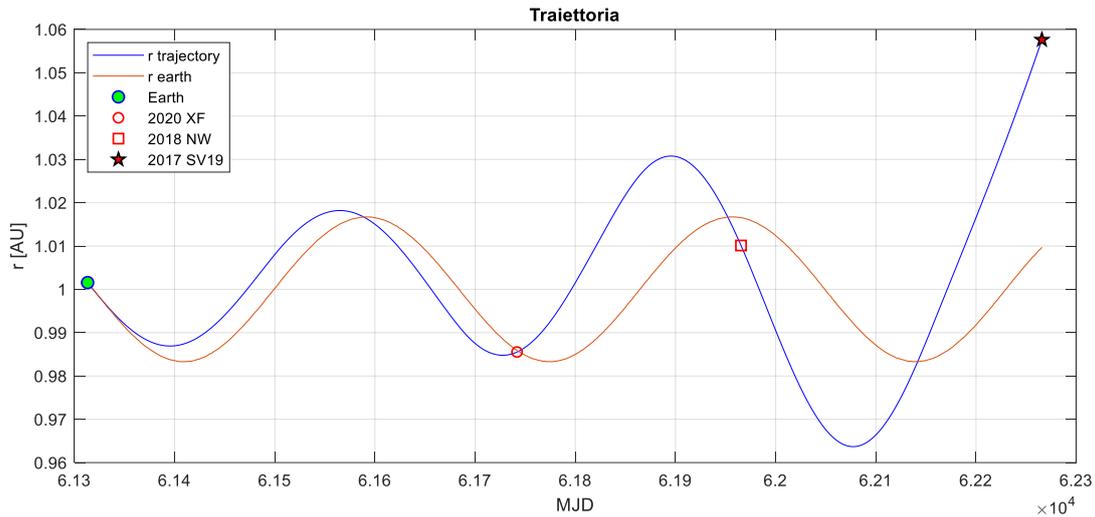


Figura 6. 16 Raggio della traiettoria in funzione del tempo

I motivi di questo risparmio in termini di ΔV sono essenzialmente 2:

- il fly-by con l'asteroide 2020 XF avviene circa 16 giorni dopo rispetto alla traiettoria precedentemente analizzata. In questo modo l'asteroide viene intercettato precisamente nel nodo della sua traiettoria, punto in cui la sua inclinazione rispetto l'eclittica è quasi nulla, quindi il ΔV del primo fly-by si abbassa del 66% rispetto al caso precedente;
- nel caso precedente, il secondo fly-by avveniva a inclinazione ed eccentricità minori, che costringevano ad un aumento dei consumi per ritornare ai valori di eccentricità ed inclinazione con cui sarebbe dovuto avvenire il rendez-vous. In questo caso invece il secondo fly-by avviene ad un'inclinazione e ad un'eccentricità intermedie, che non comportano "sprechi" di propellente. Il ΔV per il rendez-vous si abbassa rispetto al caso precedente del 58%.

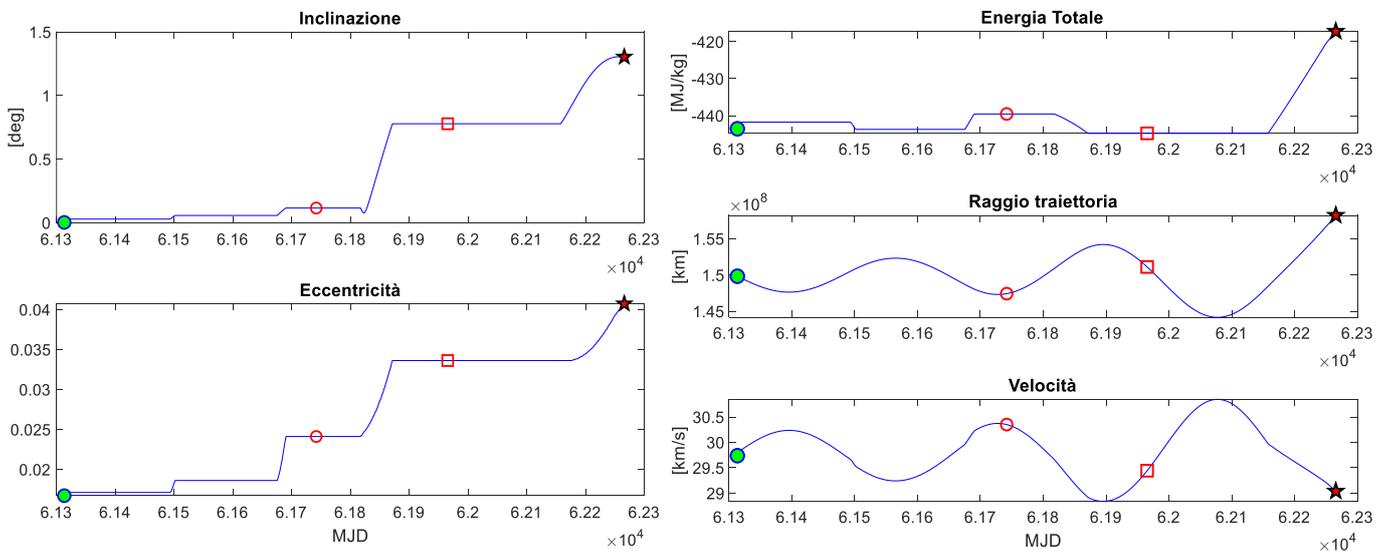


Figura 6. 17 Inclinazione, eccentricità, energia, raggio e velocità in funzione del tempo

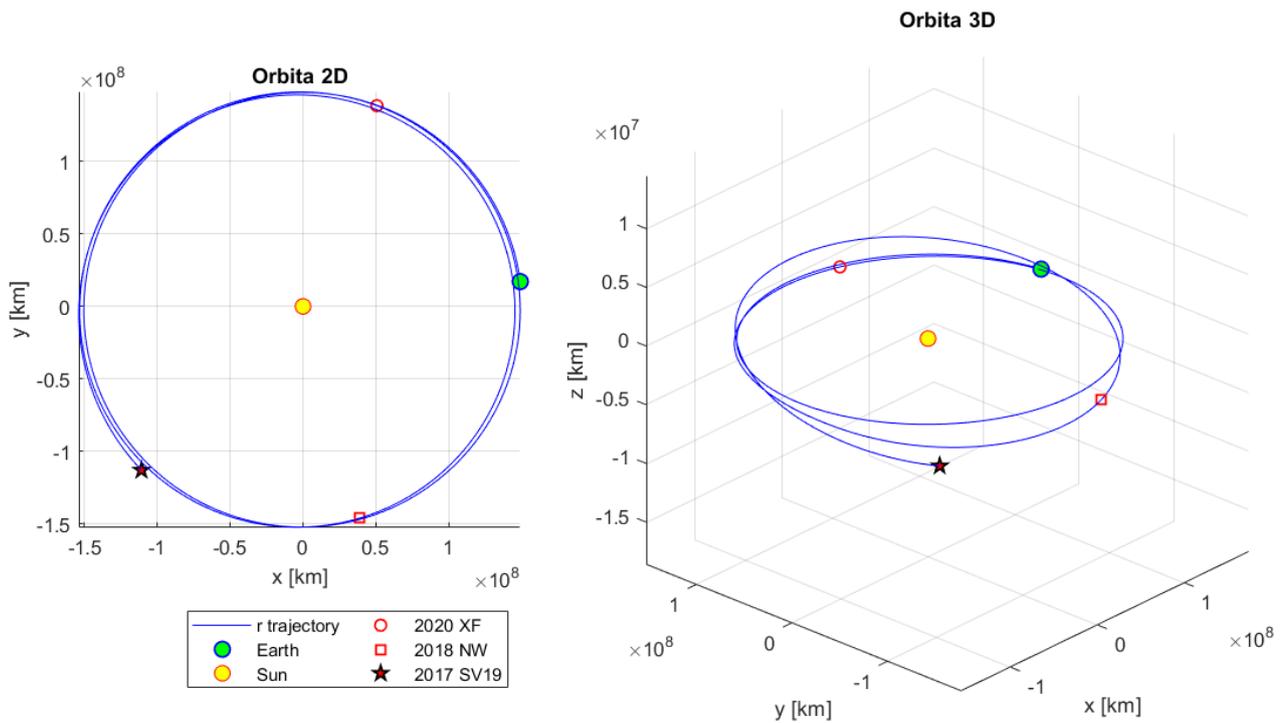


Figura 6. 18 Traiettoria in 2D e in 3D nel s.d.r. eliocentrico

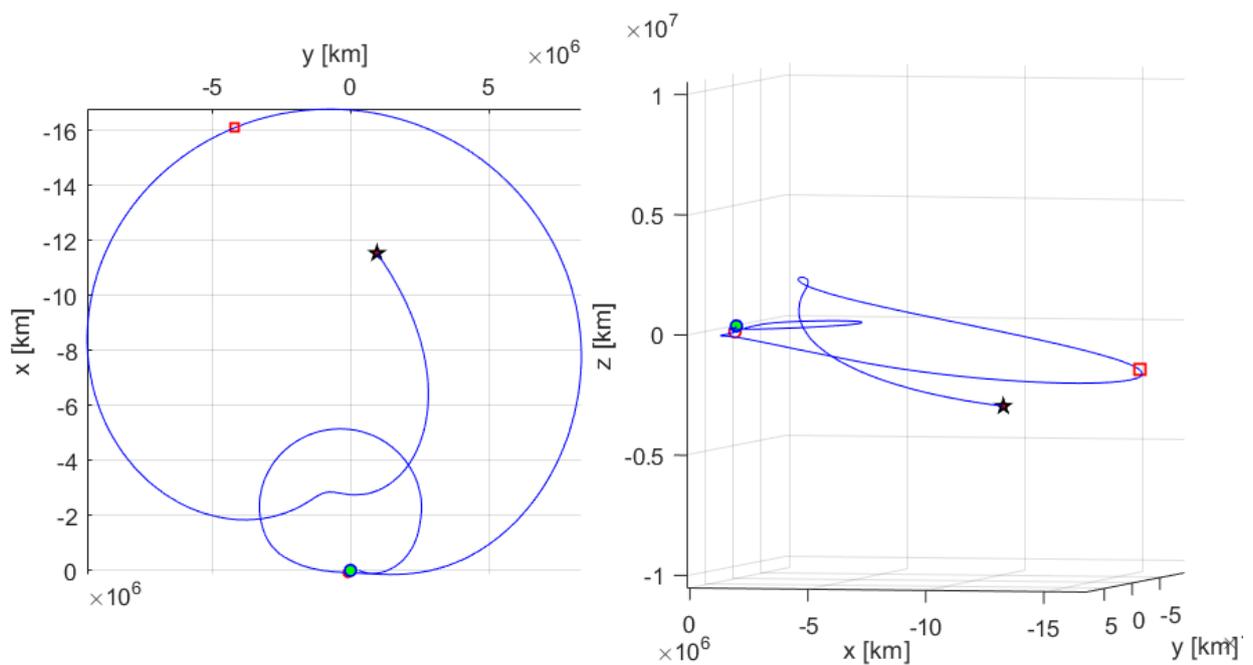


Figura 6. 19 Traiettoria in 2D e in 3D in coordinate ECI

La diminuzione del ΔV richiesto per la missione, si traduce in una riduzione del consumo di propellente rispetto al caso precedente. La massa finale è di circa 954 kg, che corrisponde ad un consumo di propellente di circa 46 kg, 22kg in meno della traiettoria precedente.

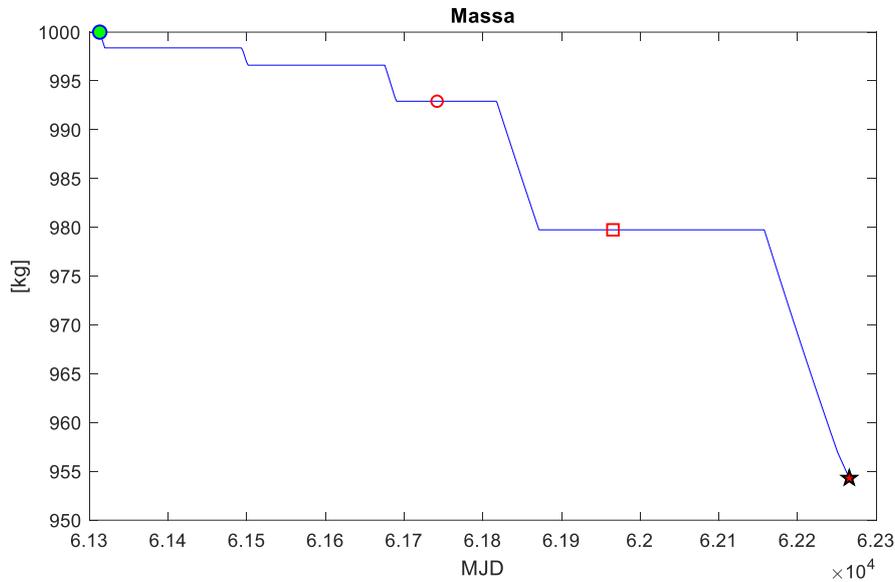


Figura 6. 20 Massa totale in funzione del tempo

La strategia propulsiva si basa su 5 accensioni più o meno lunghe del motore. Il primo arco prevede 3 accensioni del motore, di cui la prima già alla partenza ma per brevissimo tempo (10 giorni). La direzione della prima spinta è tangenziale alla traiettoria e concorde con la direzione dello spacecraft. La seconda spinta è più breve della prima, è in direzione opposta al moto e avendo anche una componente lungo z non nulla, fa variare l'inclinazione della traiettoria. L'ultima spinta ha caratteristiche molto simili alla prima, ma viene mantenuta per un tempo più lungo. Dopo il primo fly-by, il motore viene acceso una sola volta, per un tempo di circa 50 giorni. La direzione della spinta ha una componente preponderante lungo la

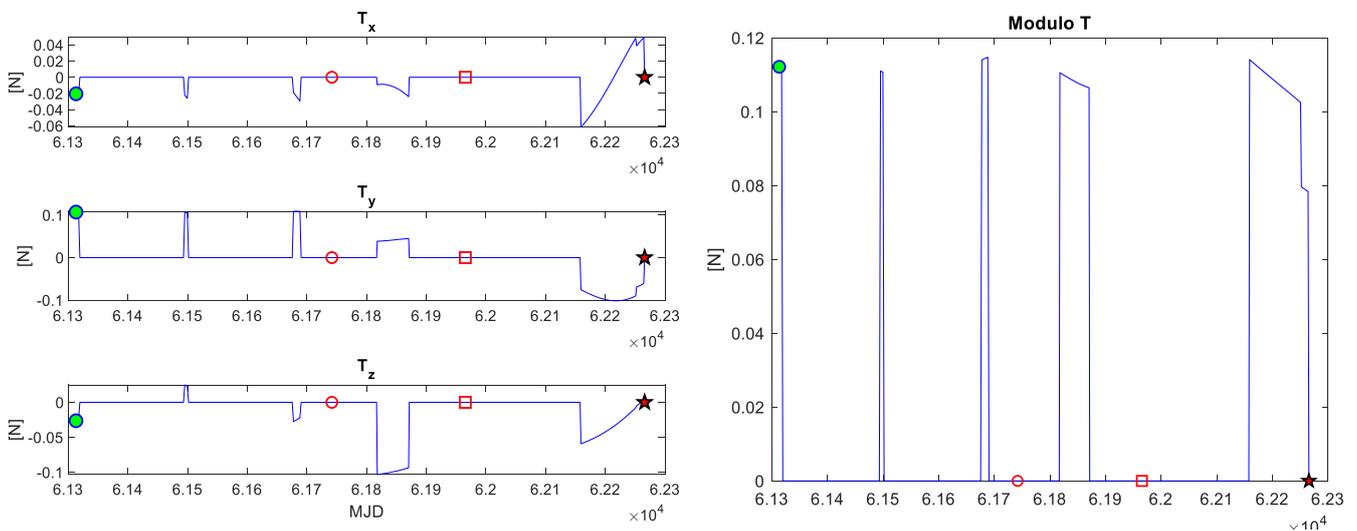


Figura 6. 21 Componenti e modulo della spinta totale T

direzione z, dovuta alla variazione di inclinazione necessaria (circa 1°) ad intercettare l'asteroide 2018 NW per il secondo fly-by. L'ultimo arco presenta una fase di coasting che dura per più del 50% del tempo, mentre per la restante parte troviamo una spinta la cui direzione varia col tempo ed è combinazione delle componenti della spinta lungo i 3 assi.

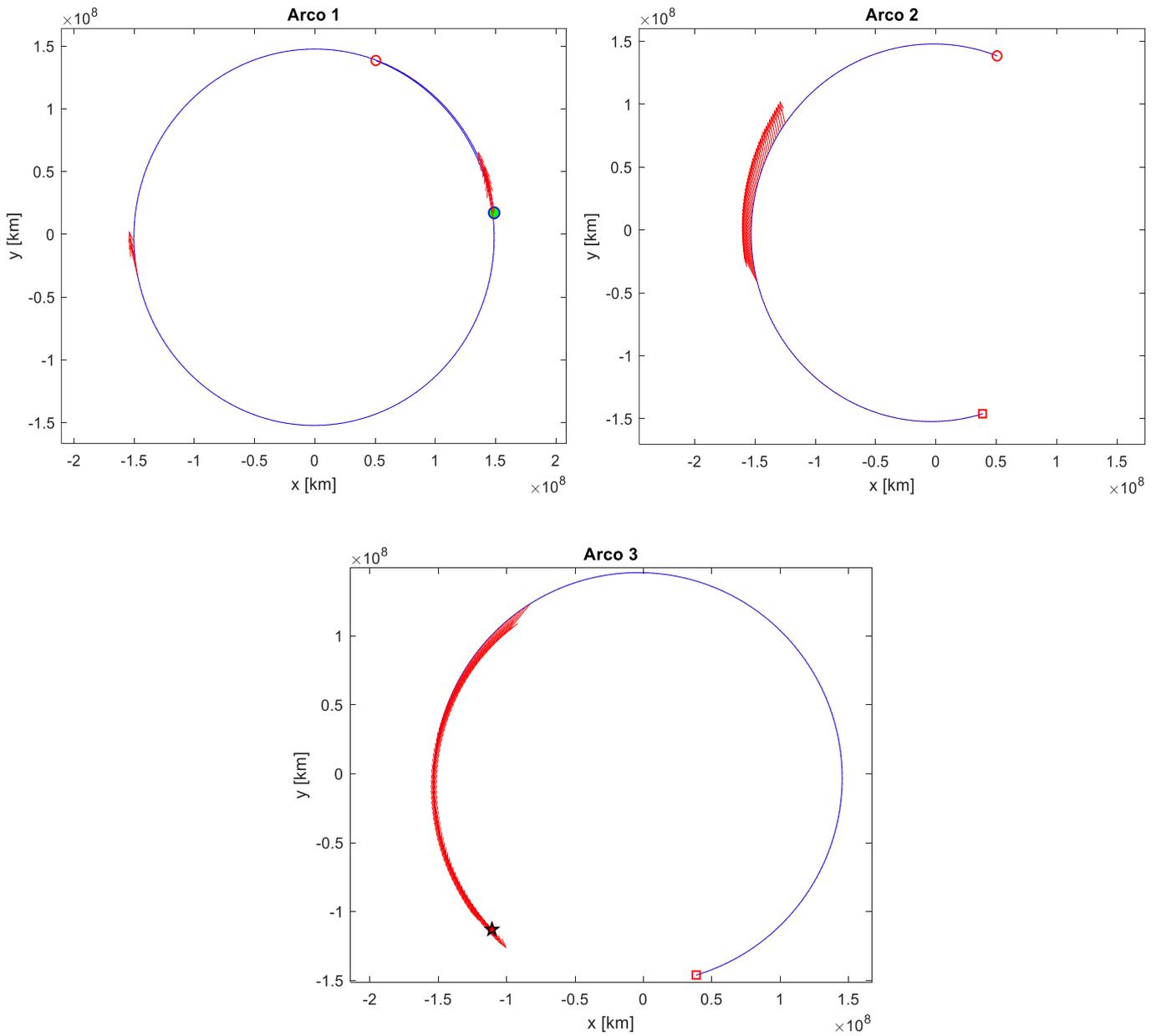


Figura 6. 22 Vettori di spinta lungo i 3 archi nel piano X-Y

6.4 2012 LA

2012 LA è un asteroide molto piccolo della classe AMOR classificato dalla NASA nel 2012, ma che non rappresenta un vero e proprio pericolo per la Terra. Il suo periodo orbitale è di 387.6 giorni e si stima che abbia un diametro medio di circa 11 metri.

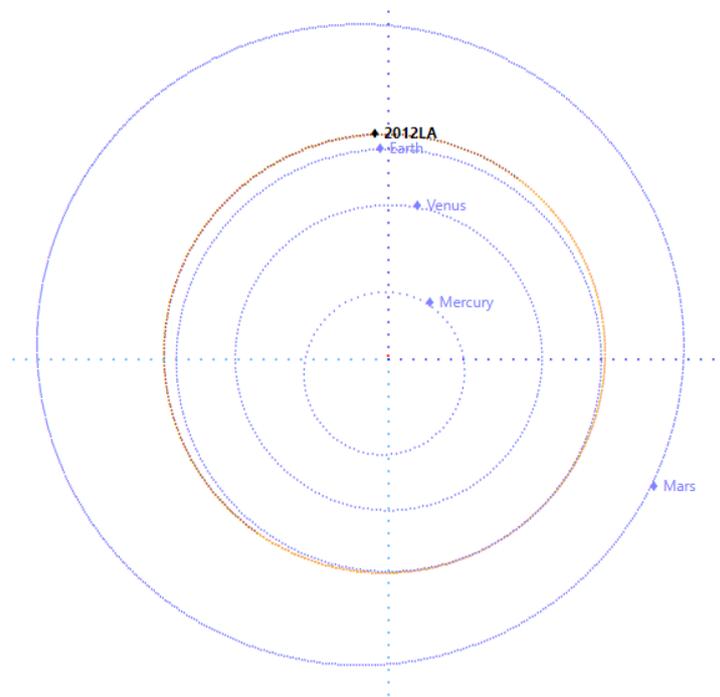


Figura 6. 23 Orbita di 2012 LA e incontro ravvicinato (Dic 2029)

2012 LA sarà protagonista di due incontri ravvicinati con la Terra: uno il 2 Febbraio 2029, quando passerà ad una distanza di circa 21 milioni di km dalla Terra, e l'altro il 25 Dicembre 2029, quando passerà ad una distanza di circa 12 milioni di km dalla Terra.

a	e	i	Ω	ω	M	H
1.04032 AU	0.021542	3.159°	234.096°	79.563°	329.963°	27.6 mag

Tabella 6. 5 Elementi orbitali di 2012 LA all'epoca 59600 MJD

Dall'analisi delle traiettorie dirette, ovvero senza alcun fly-by intermedio, sono state trovate due traiettorie, le quali differiscono per l'anno di partenza, il mese di arrivo e la durata della missione. I consumi sono pressoché identici in entrambi i casi.

Asteroide	Data partenza	Data rendez-vous	ΔV
2012 LA	22/02/2028	01/12/2029	2.122309 km/s
2012 LA	20/12/2026	18/07/2029	2.105589 km/s

Tabella 6. 6 Traiettorie dirette con diverse durate con rendez-vous 2012 LA

Entrambe le traiettorie sono state utilizzate come punto di partenza per la ricerca di eventuali manovre con fly-by intermedi. La prima traiettoria diretta, ovvero quella con la durata minore, non è di particolare interesse di per sé, poiché durata minore significa anche minor probabilità di trovare degli asteroidi che possano candidarsi per dei fly-by intermedi; tuttavia, è stata trovata una manovra a 2 fly-by intermedi che verrà analizzata in seguito.

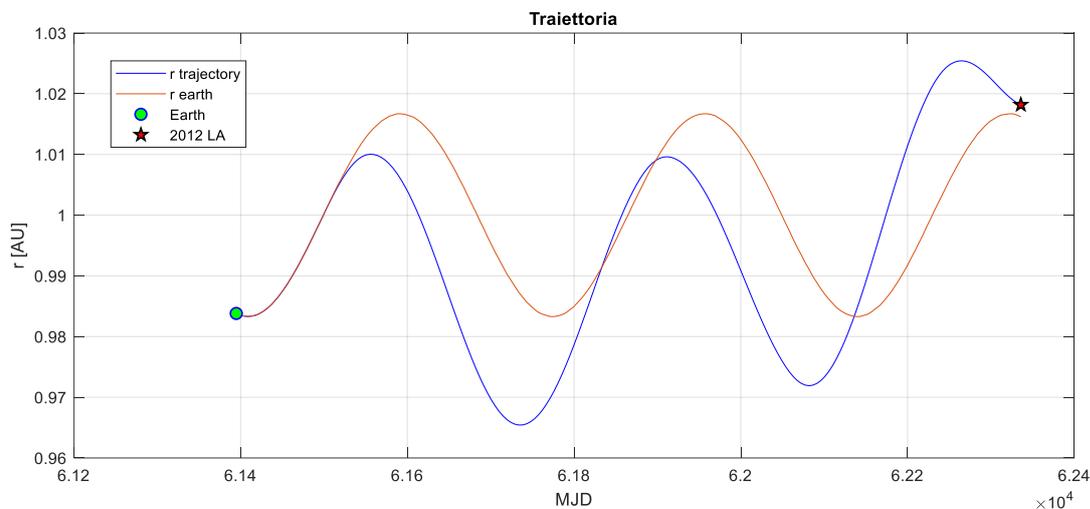


Figura 6. 24 Raggio della traiettoria nel caso di durata maggiore della missione

Il discorso cambia invece per la traiettoria più lunga, poiché sono state analizzate 24 combinazioni di asteroidi per fly-by multipli, 16 delle quali convergevano, di cui 11 con un ΔV minore di 5 km/s. I candidati principali per manovre a 2 e 3 fly-by sono quelli riportati nella tabella sottostante. Come si può vedere la maggior parte non supera i 20 metri di diametro e non raggiungono le dimensioni necessarie per essere considerati potenzialmente pericolosi (PHOs); tuttavia qualcuno di loro è incluso nella Risk List (RL), mentre nessuno di loro è inserito in una Priority List (PL). Per quanto riguarda la rilevanza scientifica di questi corpi, non si sa nulla sulla loro natura, e quindi sono sconosciute le loro composizioni o il loro valore in termini di materiali preziosi.

	Asteroide	Classe	Incontro	Diametro	RL	PL
1° Fly-by	2021 LV	Apollo	31/05/2027	~9 m	Si	No
	2013 GH66	Apollo	17/04/2027	~12 m	No	No
	2014 HL129	Apollo	10/05/2027	~10 m	No	No
2° Fly-by	2021 CZ3	Apollo	21/12/2027	~3 m	No	No
	2020 XF	Aten	06/12/2027	~16 m	Si	No
3° Fly-by	2019 CG5	Apollo	29/05/2028	~13 m	No	No
	2019 LW4	Apollo	18/06/2028	~17 m	Si	No
	2017 HP49	Apollo	03/06/2028	~90 m	No	No
	2015 JD	Apollo	19/05/2028	~29 m	No	No

Tabella 6. 7 Candidati per i fly-by della traiettoria con rendez-vous 2012 LA

6.5 2017 HP49 – 2018 XC4 – 2012 LA

Questa traiettoria a 2 fly-by intermedi è stata analizzata partendo dalla traiettoria con rendez-vous diretto con il periodo più corto, come anticipato in precedenza. L'asteroide 2018 XC4 non è stato inserito nella tabella precedente poiché la traiettoria di partenza è quella di durata minore, quindi non tutti gli asteroidi della tabella sono compatibili per dei fly-by. Questo asteroide misura circa 27 metri di diametro e non è considerato potenzialmente pericoloso. Questa traiettoria è una delle più interessanti dal punto di vista scientifico perché 2017 HP49 è uno dei più grandi, inoltre è la traiettoria a 2 fly-by intermedi con il consumo minore.

	Asteroide	Data Fly-by	ΔV
Partenza	Terra	22/12/2027	0 km/s
1° Fly-by	2017 HP49	08/06/2028	0.509427 km/s
2° Fly-by	2018 XC4	15/12/2028	0.456049 km/s
Rendez-vous	2012 LA	23/11/2029	1.364169 km/s
		Durata 1.92y	TOT 2.329645 km/s

Tabella 6. 8 Caratteristiche della traiettoria

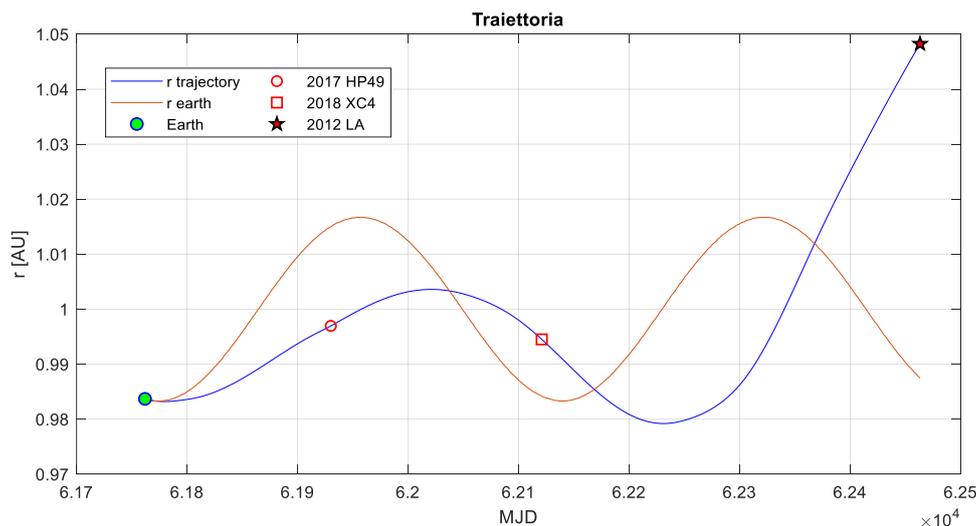


Figura 6. 25 Raggio della traiettoria in funzione del tempo

La durata della missione è di meno di due anni, circa 150 giorni più breve rispetto alle traiettorie analizzate in precedenza. La traiettoria dello spacecraft non segue molto l'andamento di quella terrestre, anzi risulta molto più allungata, dovuto al cambiamento di eccentricità nelle prime fasi della missione. Una volta cambiata l'eccentricità dell'orbita, i due asteroidi per il fly-by vengono quindi intercettati senza effettuare manovre molto costose. Una volta eseguiti i 2 fly-by, si nota dal grafico un repentino aumento del raggio della

traiettoria, dovuto alla spinta che aumenta l'eccentricità dell'orbita per intercettare l'asteroide 2012 LA. A questa manovra si aggiunge anche un cambio di inclinazione di più di 1.5° . Questa combinazione di manovre si traduce nella fase più costosa a livello propulsivo dell'intera missione.

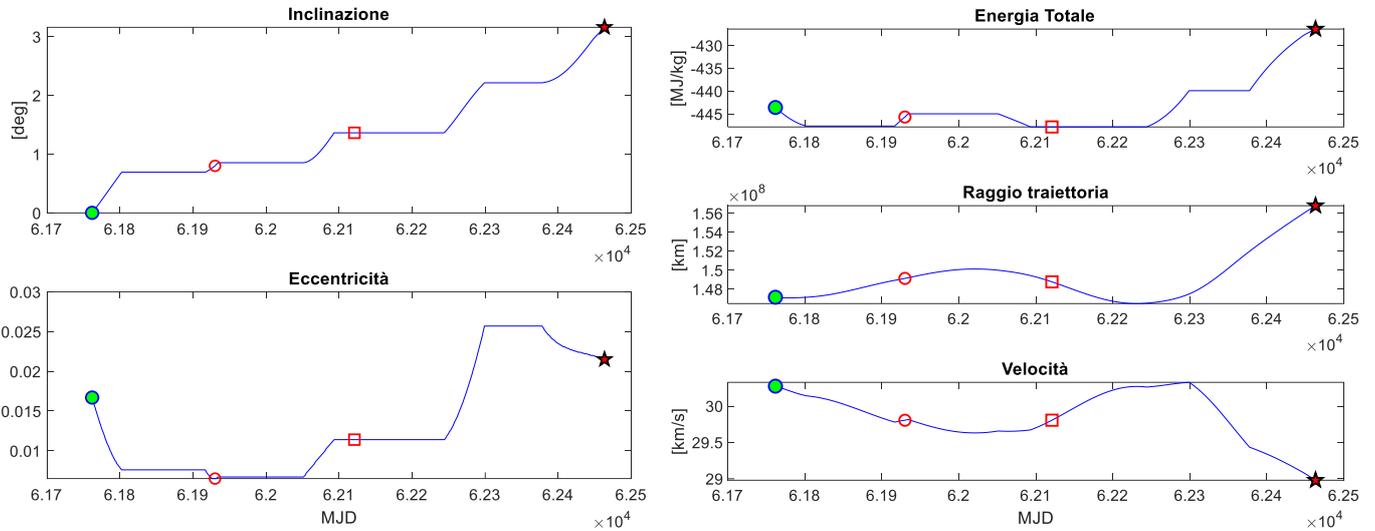


Figura 6. 26 Inclinazione, eccentricità, energia, raggio e velocità in funzione del tempo

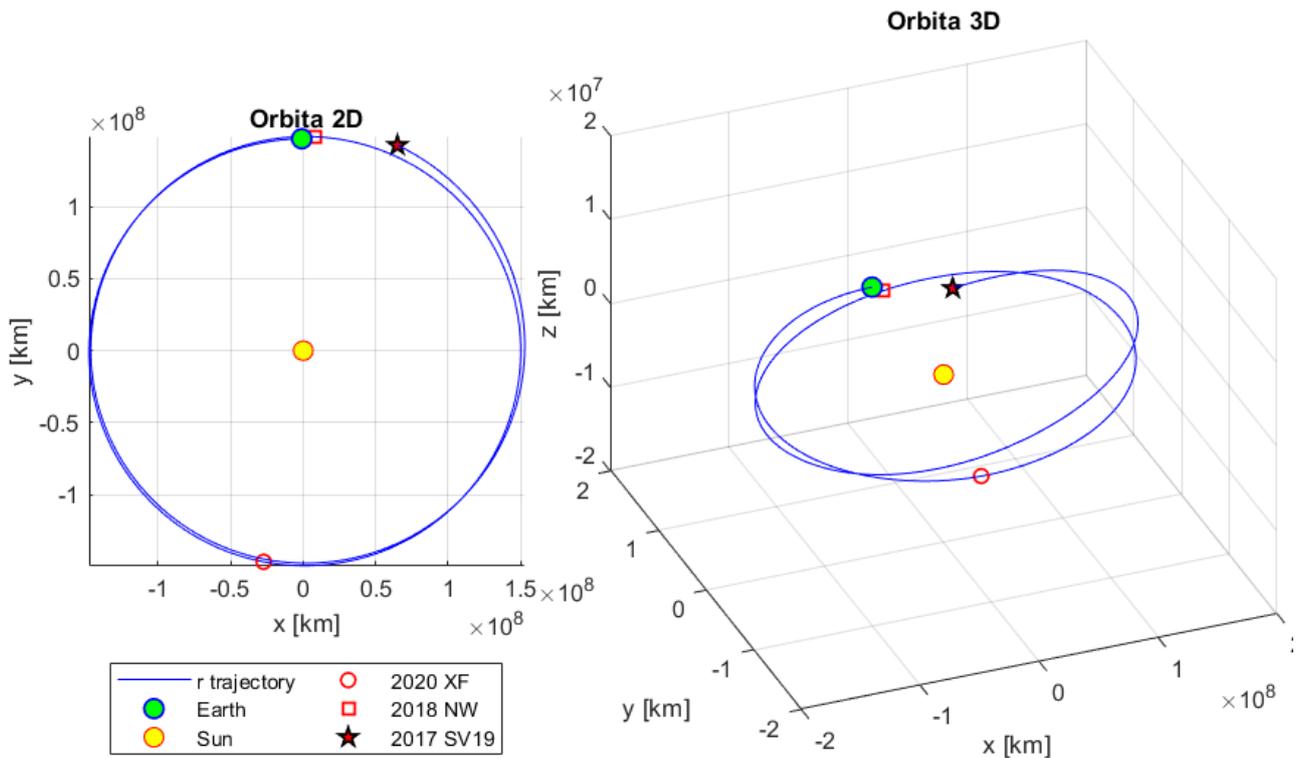


Figura 6. 27 Traiettoria in 2D e in 3D nel s.d.r. eliocentrico

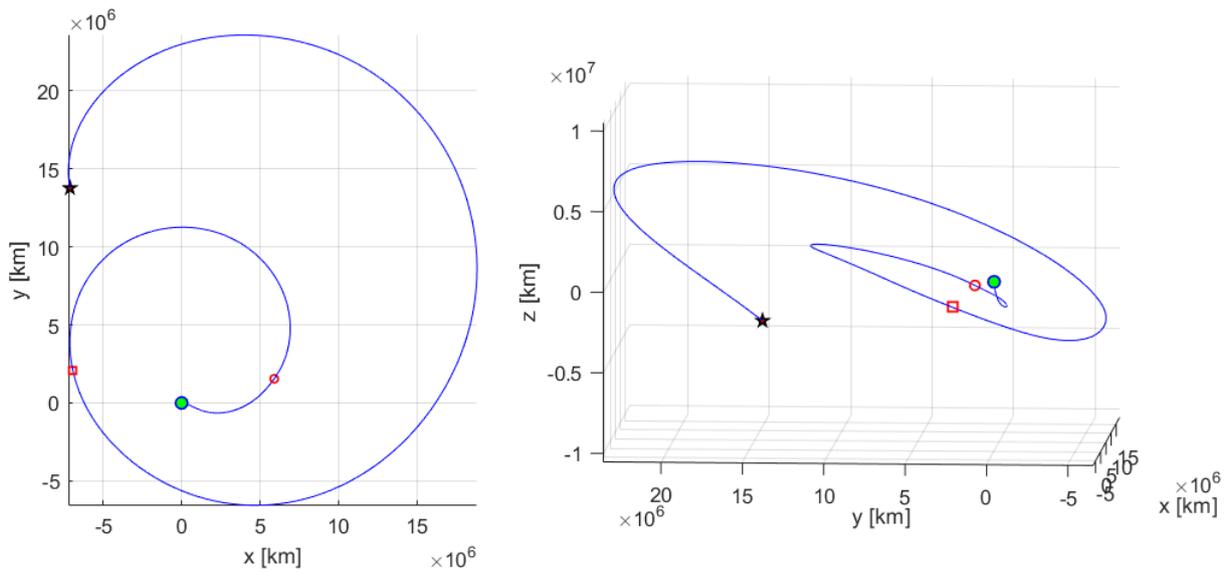


Figura 6. 28 Traiettoria in 2D e 3D in coordinate ECI

La massa finale dello spacecraft è di 941 kg, quindi possiamo calcolare un consumo di 59 kg di propellente.

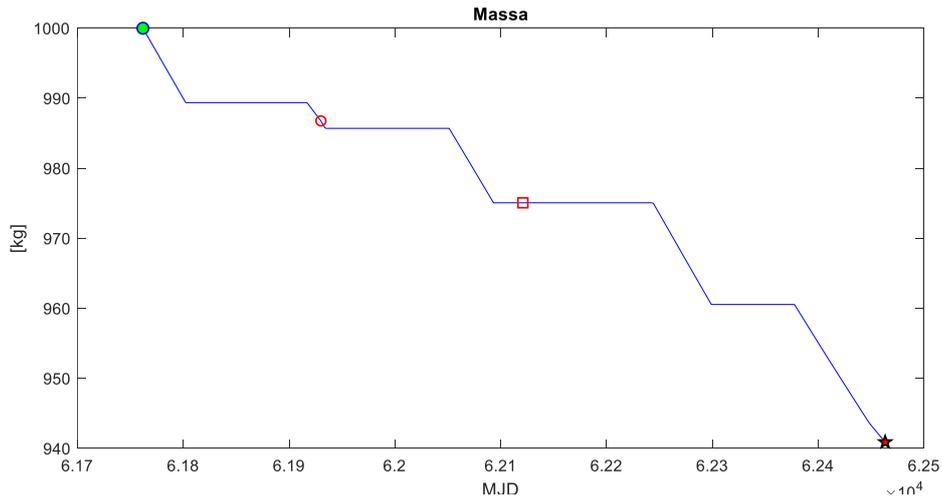


Figura 6. 29 Massa totale in funzione del tempo

La strategia propulsiva si basa su 5 accensioni del motore. La missione inizia spingendo in direzione discorde al verso del moto per abbassare l'apostro della traiettoria e con una componente di spinta in direzione z non nulla per variare l'inclinazione. La seconda fase di spinta avviene poco prima del fly-by con l'asteroide 2017 HP49, questa volta in direzione concorde al moto e con tutte le componenti della spinta non nulle.

La fase di spinta continua anche dopo il fly-by, anzi viene aumentata in modulo anche se per pochi giorni. 70 giorni prima del fly-by con l'asteroide 2018 XC4 il propulsore viene acceso per circa 40 giorni, con una componente di spinta preponderante lungo la direzione z poiché è necessario un aumento dell'inclinazione. Dopo il secondo fly-by, il motore viene acceso 2 volte: la prima spinta ha componente in direzione x e z per aumentare sensibilmente l'eccentricità e l'inclinazione per il RV, la seconda in direzione tangenziale alla traiettoria per abbassare lievemente l'eccentricità e aumentare il semiasse maggiore.

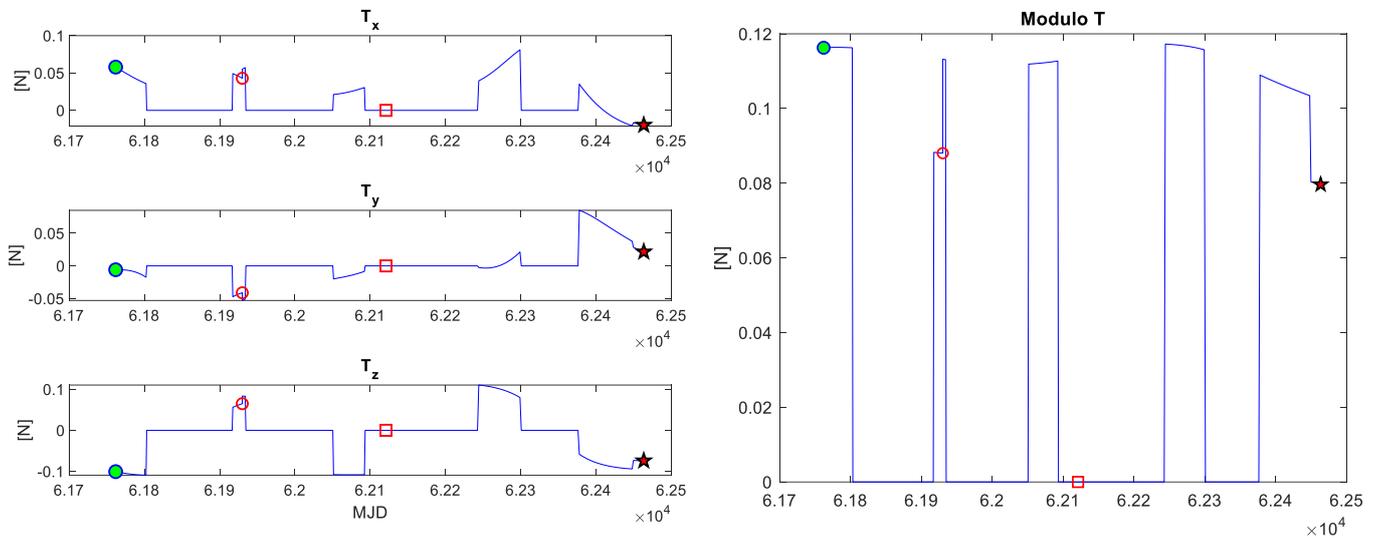


Figura 6. 30 Componenti e modulo della spinta T

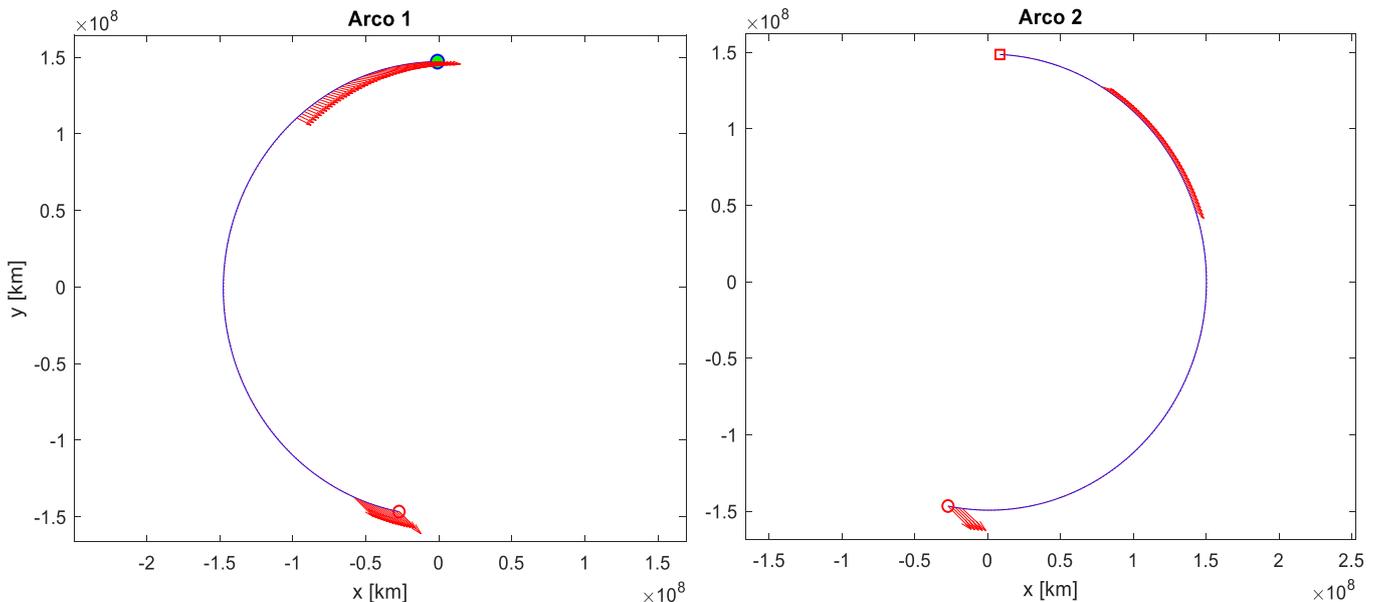


Figura 6. 31 Vettori di spinta del primo e secondo arco nel piano X-Y

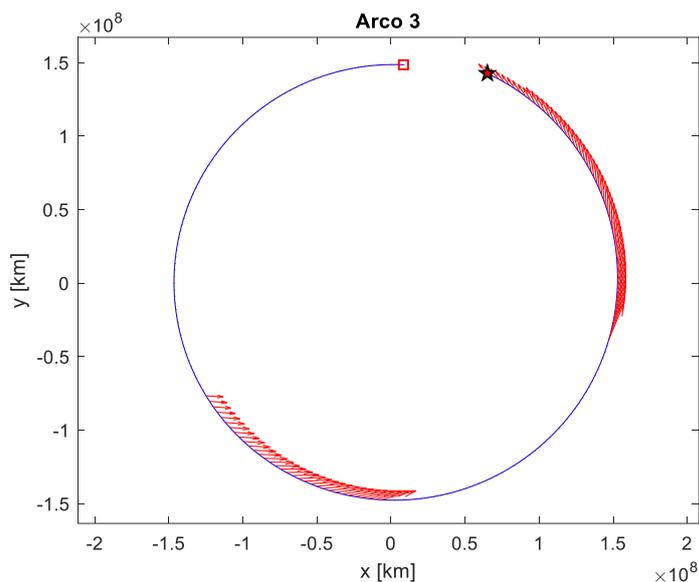


Figura 6. 32 Vettori spinta lungo il terzo arco nel piano X-Y

6.6 2021 LV – 2020 XF – 2015 JD – 2012 LA

La prima traiettoria a 3 fly-by intermedi presentata è una di quelle con il ΔV tra i più bassi tra tutte le traiettorie a 4 asteroidi. Gli asteroidi sono stati presentati nei paragrafi precedenti e notiamo che 2020 XF ritorna anche in questa traiettoria. Dalla tabella è possibile notare i consumi piuttosto bassi per i vari fly-by, mentre il 50% del ΔV dell'intera missione viene richiesto solamente nella fase finale, ovvero per raggiungere l'asteroide target 2012 LA.

	Asteroide	Data Fly-by	ΔV
Partenza	Terra	17/10/2026	0 km/s
1° Fly-by	2021 LV	02/06/2027	0.604596 km/s
2° Fly-by	2020 XF	22/11/2027	0.515305 km/s
3° Fly-by	2015 JD	18/05/2028	0.629126 km/s
Rendez-vous	2012 LA	01/07/2029	1.752813 km/s
		Durata 2.70y	TOT 3.501840 km/s

Tabella 6. 9 Caratteristiche della traiettoria

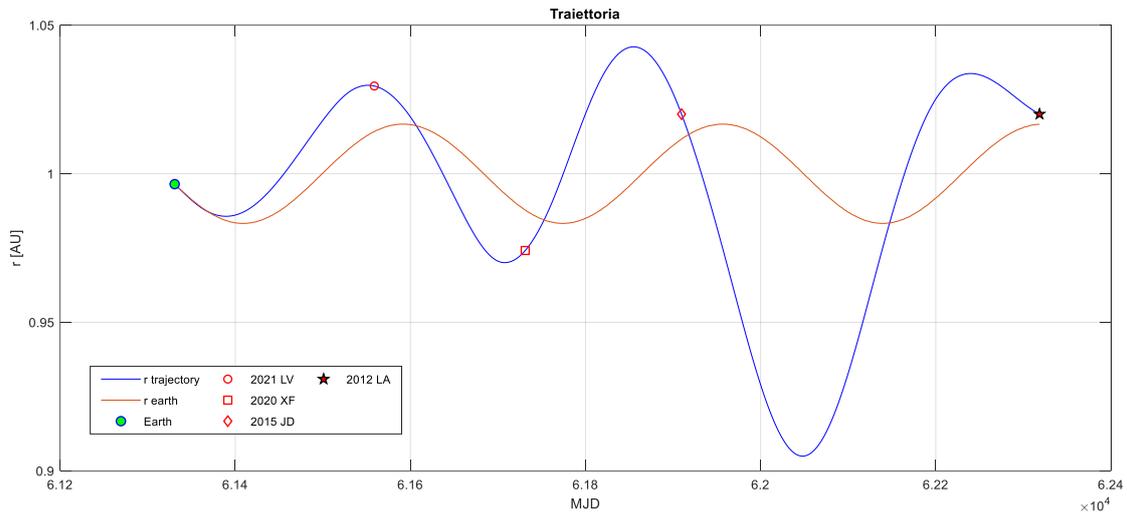


Figura 6. 33 Raggio della traiettoria in funzione del tempo

Si vede come la traiettoria risulti molto diversa rispetto a quella della terra, infatti l'ampiezza delle oscillazioni sembrerebbe ridursi ad ogni orbita; questo è dovuto al fatto che si hanno delle variazioni di inclinazione e di eccentricità, e quindi di semiasse maggiore dell'ellisse, che crescono quasi linearmente nel tempo fino al fly-by dell'asteroide 2015 JD. L'asteroide target 2012 LA viene intercettato ad un'inclinazione maggiore dei precedenti, mentre la sua eccentricità è minore. Questo rappresenta il principale motivo di consumo di propellente dell'ultimo arco di traiettoria.

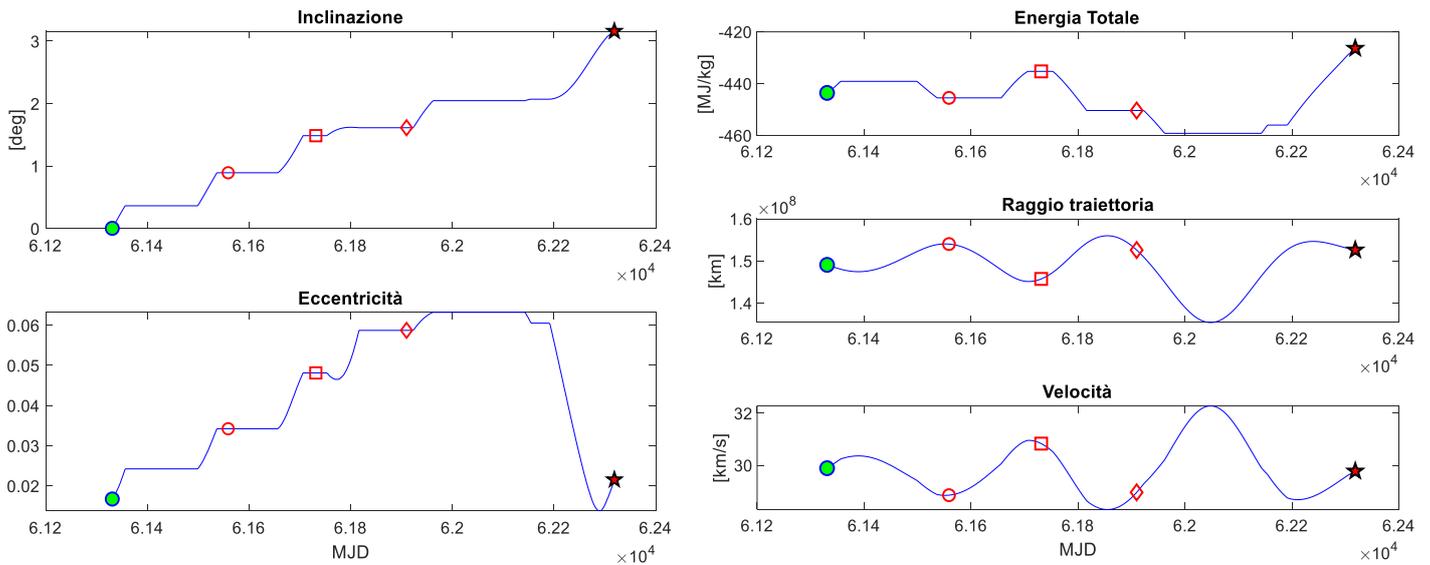


Figura 6. 34 Inclinazione, eccentricità, energia, raggio e velocità in funzione del tempo

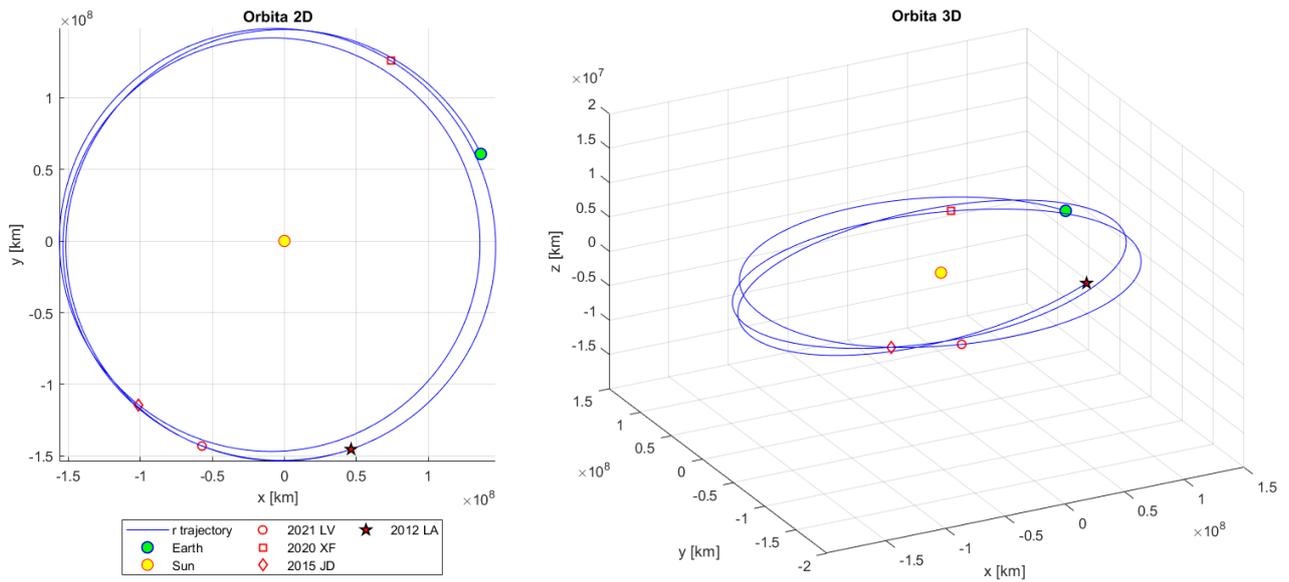


Figura 6. 35 Traiettoria in 2D e 3D nel s.d.r. eliocentrico

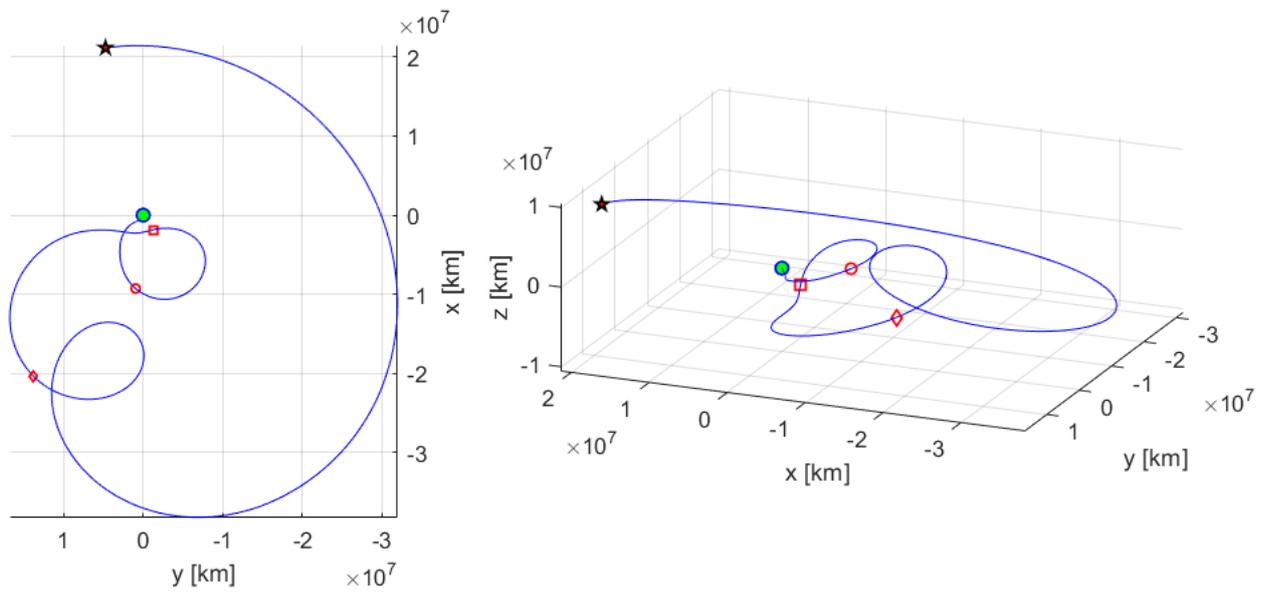


Figura 6. 36 Traiettoria in 2D e in 3D in coordinate ECI

La massa finale dello spacecraft è di 912 kg, quindi la quantità di propellente consumato per le manovre è di 88 kg.

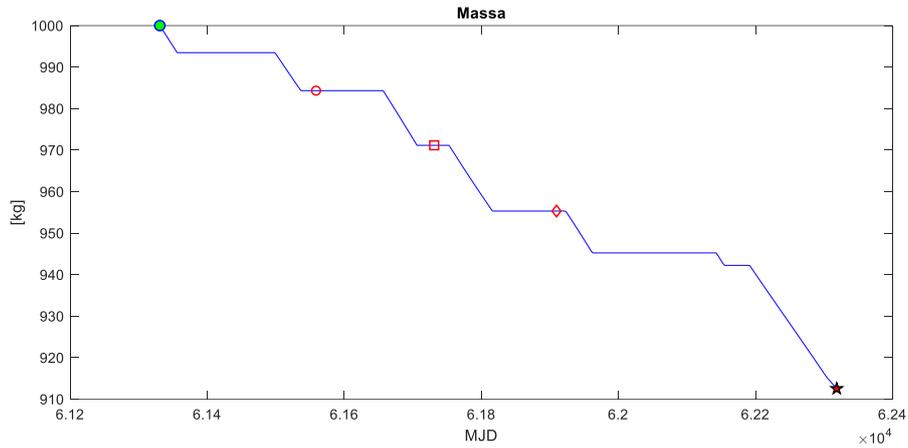


Figura 6. 37 Massa totale in funzione del tempo

La strategia di spinta vede maggiori fasi di spinta e per tempi più lunghi rispetto ai casi precedenti. La durata della missione è di 988 giorni, mentre i giorni in cui la spinta è non nulla e quindi i motori accesi sono 370 giorni, più di 1/3 della durata totale.

Le fasi di spinta sono 7, 4 tra l'inizio della missione e il terzo fly-by e 3 prima del RV con l'asteroide 2012 LA. Il primo arco è caratterizzato da due fasi di spinta, la prima in verso concorde col moto e direzione variabile, la seconda invece in direzione tangenziale ma in verso opposto al moto. Il secondo arco presenta una sola fase di spinta ma molto lunga, che parte in direzione tangenziale, per poi far prevalere la componente radiale, con verso concorde alla direzione del moto. Stesso discorso vale per il terzo arco, spinta che serve ad aumentare l'eccentricità dell'orbita e raggiungere l'asteroide 2015 JD. L'ultimo arco è il più lungo tra i 4, presenta 3 fasi di spinta, di cui la prima in direzione tangenziale alla traiettoria ma verso opposto mentre la terza in direzione tangenziale e verso concorde. La fase di spinta intermedia è molto più corta e ha una componente radiale più grande rispetto alle due precedentemente citate.

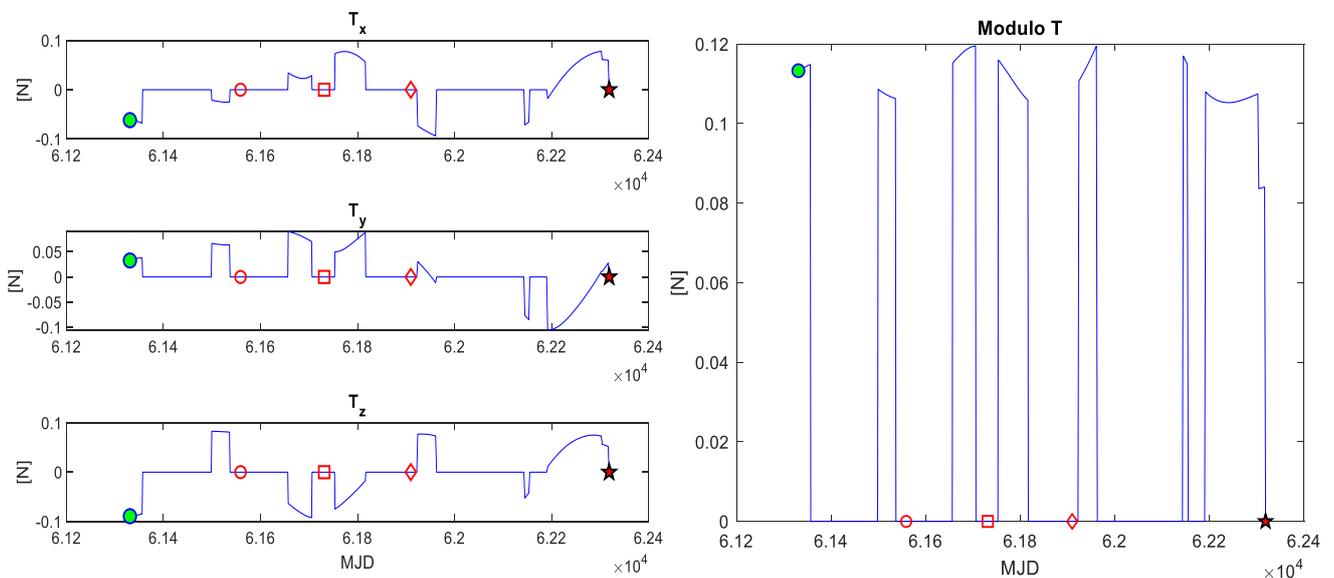


Figura 6. 38 Componenti e modulo della spinta T

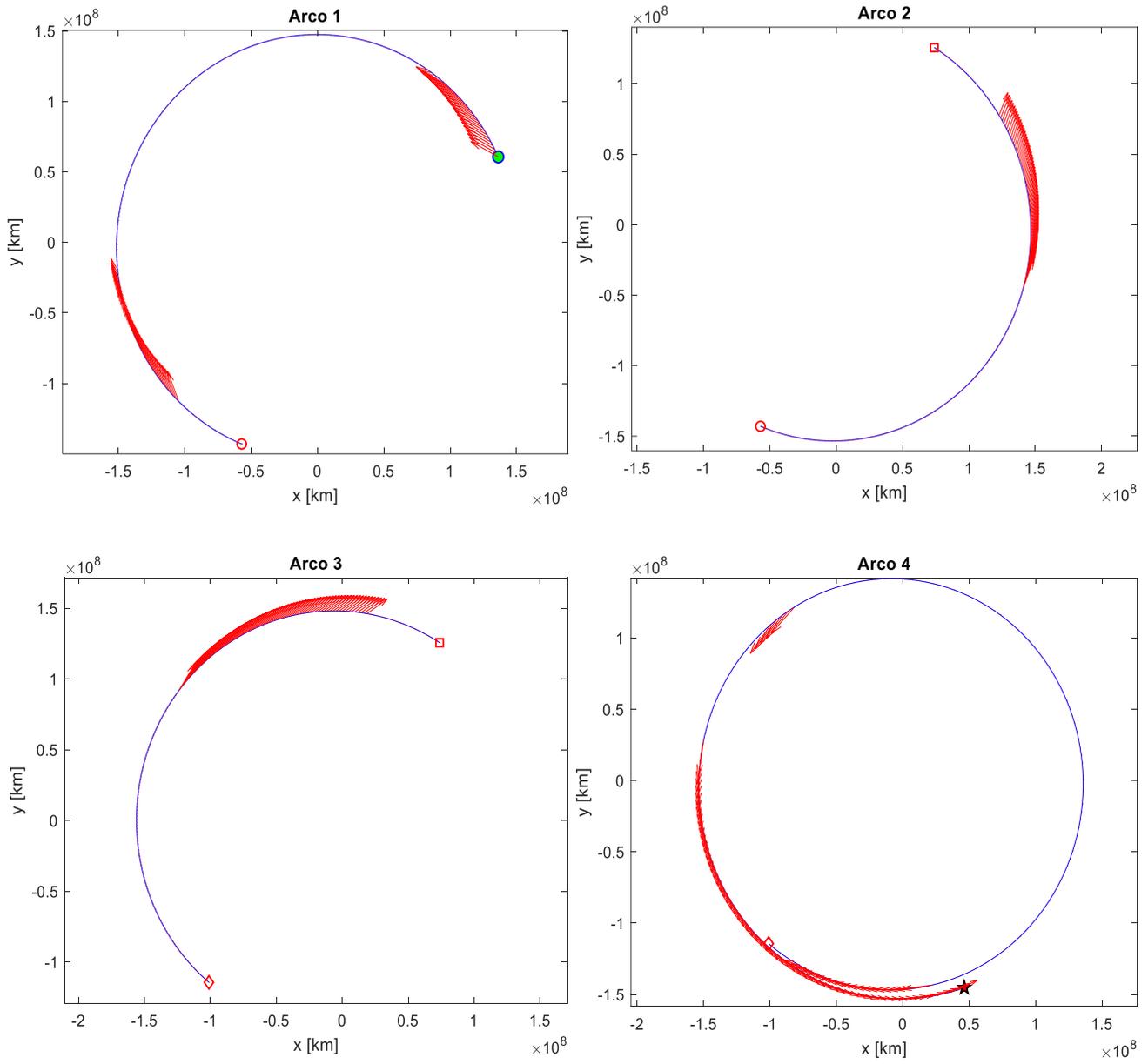


Figura 6. 39 Vettori di spinta lungo i 4 archi sul piano X-Y

6.7 2017 UQ6

2017 UQ6 è un asteroide della classe ATEN con diametro di circa 17 metri, catalogato nel 2017. E' incluso nella Risk List dell'ESA, ma non nella Priority List, in quanto nel periodo tra il 2087 e il 2104 alcuni passaggi ravvicinati potrebbero mettere la terra a rischio. Tuttavia, si tratta di possibilità piuttosto remote, con una probabilità di impatto nel 2090 stimata allo 0.000021%. Di questo asteroide non si conosce la composizione, e un fly-by potrebbe essere interessante per analizzarne la natura.

Nella finestra temporale di interesse, l'asteroide 2017 UQ6 e la terra si incontreranno il 16 Ottobre 2028, ad una distanza di circa 7.6 milioni di km, e il 13 Febbraio 2029, ad una distanza di circa 16.5 milioni di km.

a	e	i	Ω	ω	M	H
0.943807 AU	0.10971	0.59°	333.364°	229.758°	55.521°	27.1 mag

Tabella 6. 10 Elementi orbitali di 2017 UQ6 all'epoca 59800 MJD

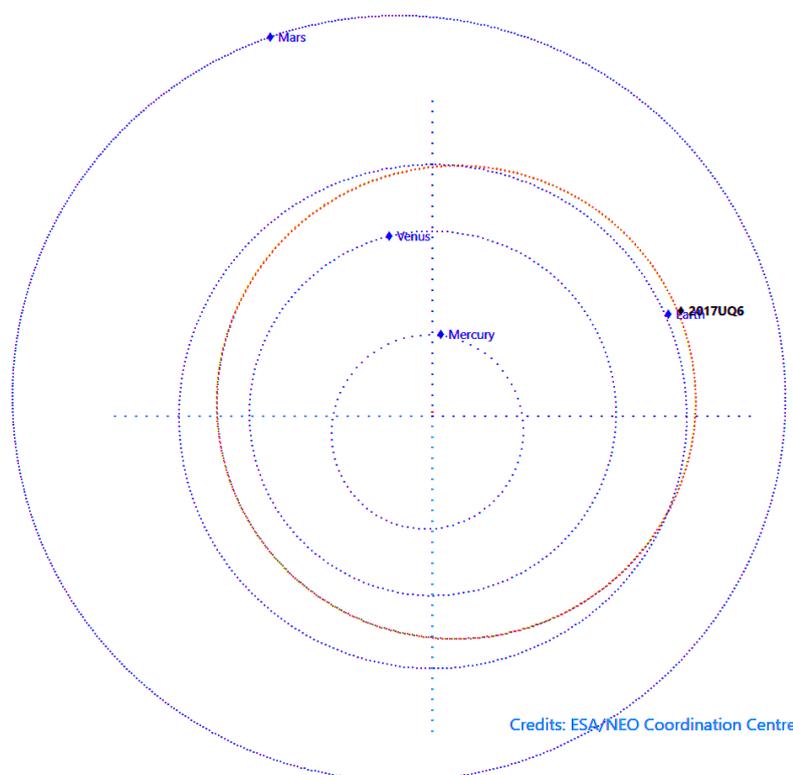


Figura 6. 40 Orbita di 2017 UQ6 e incontro ravvicinato (Ago 2029)

Dall'analisi della traiettoria con solo rendez-vous per l'asteroide 2017 UQ6, sono state ottenute due traiettorie con due periodi di arrivo diversi.

Asteroide	Data partenza	Data rendez-vous	ΔV
2017 UQ6	17/04/2027	07/08/2029	1.932455 km/s
2017 UQ6	27/06/2027	02/01/2029	1.981478 km/s

Tabella 6. 11 Traiettorie dirette con diverse durate con rendez-vous 2017 UQ6

Da questo punto di partenza sono state trovate 14 traiettorie a fly-by multipli, tra cui le due più interessanti sono mostrate nei paragrafi successivi.

6.8 2019 EF1 – 2021 PN1 – 2016 EP84 – 2017 UQ6

La particolarità di questa combinazione di asteroidi è che, tra tutte le traiettorie a 4 asteroidi analizzate, questa risulta essere quella che richiede il minor ΔV . Inoltre, questa traiettoria ha un arrivo nel target nel 2030, rispetto al 2029 delle precedenti.

	Asteroide	Data Fly-by	ΔV
Partenza	Terra	05/06/2027	0 km/s
1° Fly-by	2019 EF1	16/03/2028	0.766905 km/s
2° Fly-by	2021 PN1	03/08/2028	0.783598 km/s
3° Fly-by	2016 EP84	08/12/2028	1.131657 km/s
Rendez-vous	2017 UQ6	14/02/2030	0.763835 km/s
		Durata 2.70y	TOT 3.445995 km/s

Tabella 6. 12 Caratteristiche della traiettoria

Le dimensioni dei 3 target di fly-by sono rispettivamente di 20,40 e 12 metri di diametro medio. Inoltre, 2016 EP84 è incluso nella Risk List dell'ESA. Il ΔV contenuto e le dimensioni dei target rendono questa traiettoria interessante, anche grazie alla data di lancio nel 2027, che offrirebbe più tempo per un eventuale preparazione della missione.

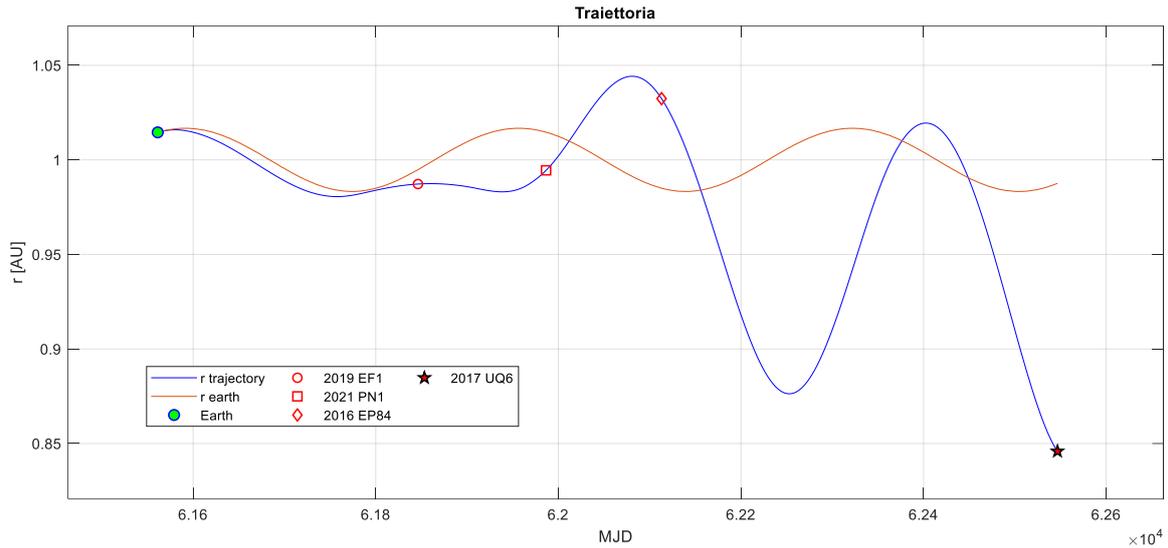


Figura 6. 41 Raggio della traiettoria in funzione del tempo

Dopo una prima fase in cui non viene modificata l'eccentricità, viene abbassato l'apoastro per intercettare l'asteroide 2019 EF1, aumentando però l'inclinazione. Successivamente l'inclinazione viene abbassata e mantenuta costante poiché gli altri 3 asteroidi vengono intercettati a un'inclinazione costante pari a circa 0.5°. L'eccentricità della traiettoria invece aumenta col tempo, in particolare si ha una repentina variazione tra il primo e il terzo fly-by, dopo il quale aumenta in maniera più graduale. Dal grafico si evince come i 3 fly-by intermedi avvengano molto vicino l'un l'altro, il terzo a 9 mesi di distanza dal primo e a 4 mesi di distanza dal secondo, mentre la durata per raggiungere l'asteroide target 2017 UQ6 è superiore a un anno.

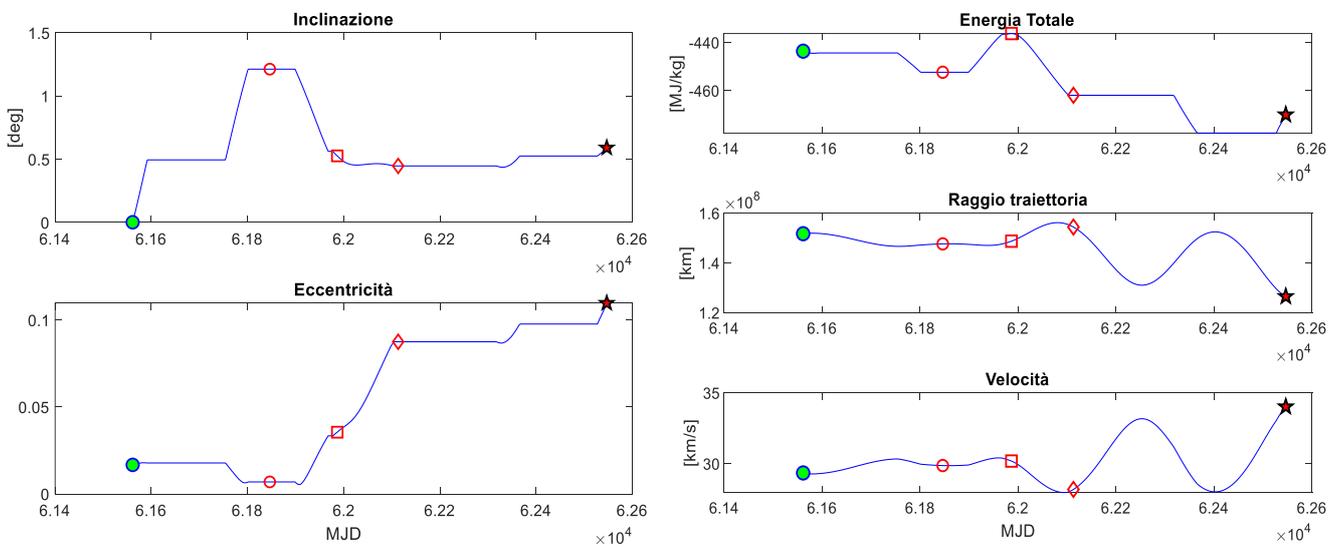


Figura 6. 42 Inclinazione, eccentricità, energia, raggio e velocità in funzione del tempo

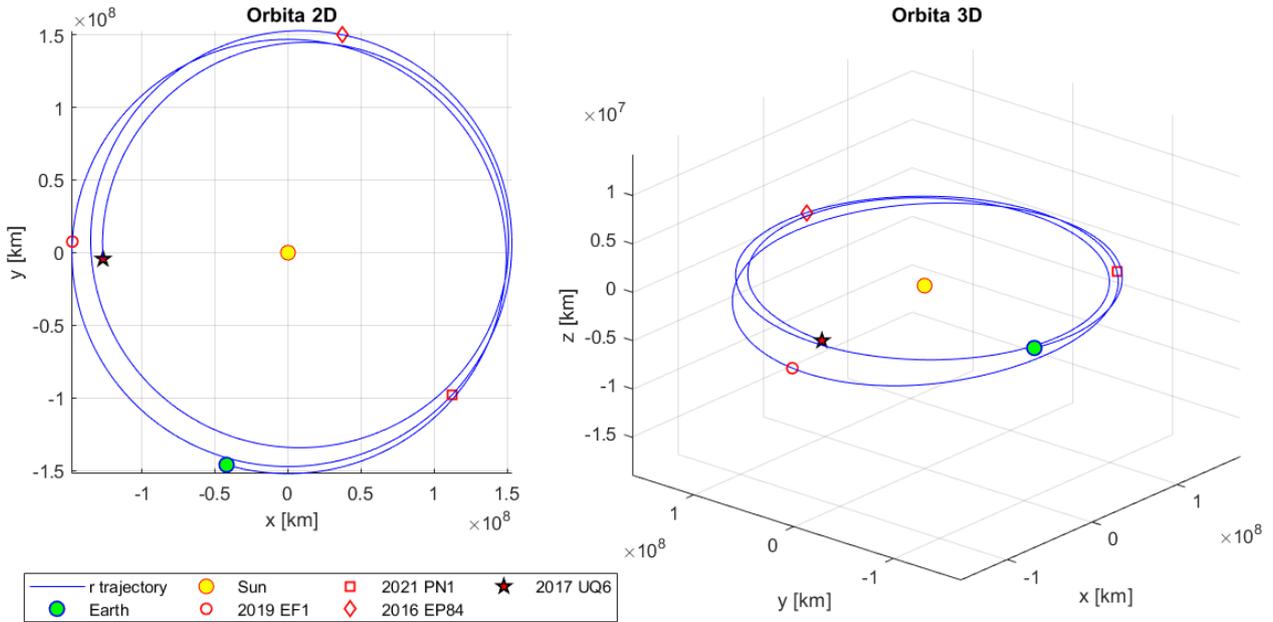


Figura 6. 43 Traiettoria in 2D e in 3D nel s.d.r. eliocentrico

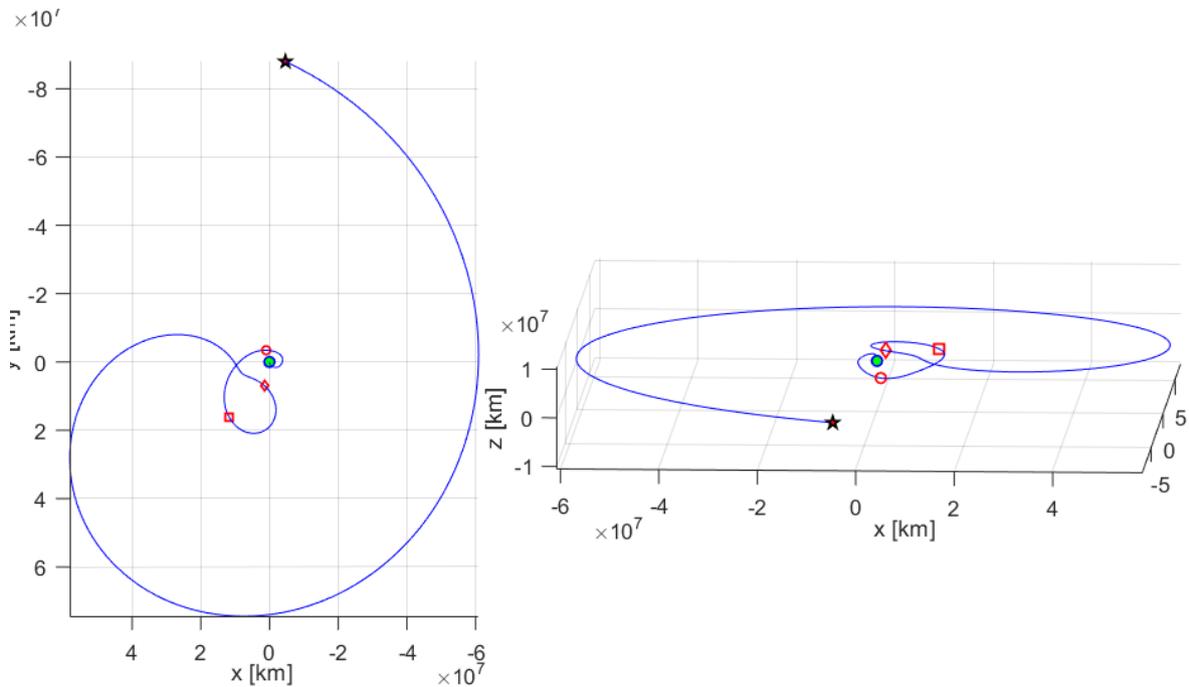


Figura 6. 44 Traiettoria in 2D e in 3D in coordinate ECI

La massa finale dello spacecraft è di 914 kg, quindi si può calcolare un consumo di propellente di 86 kg di propellente, di cui il 56 % viene utilizzato solamente tra il primo e il terzo fly-by, in una finestra temporale di soli 267 giorni, su un totale di 985 giorni di missione.

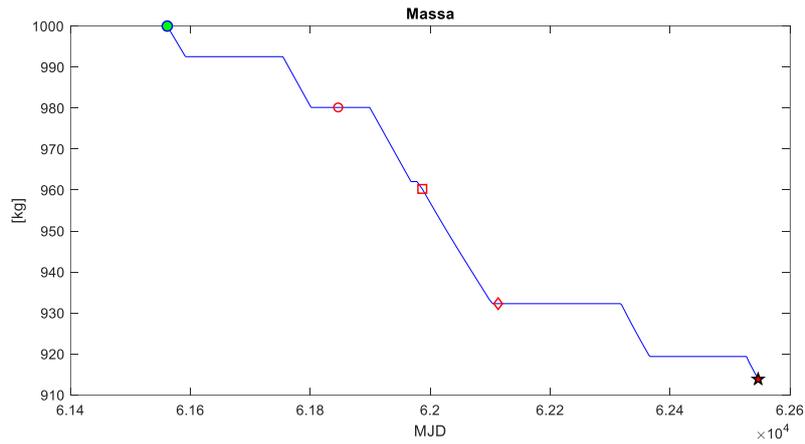


Figura 6. 45 Massa totale in funzione del tempo

La strategia di spinta si basa su 6 fasi di spinta non nulla. Nel primo arco abbiamo 2 fasi di spinta, la prima delle quali parte dall'inizio della missione e ha una componente radiale prevalente, mentre la seconda avviene prima del primo fly-by e ha una componente tangenziale prevalente in direzione opposta al moto dello s/c. Il secondo e il terzo arco sono i più corti tra tutti e 4 gli archi, data la vicinanza tra i fly-by intermedi. Nel secondo arco si spinge tangenzialmente in direzione concorde al moto, per poi aggiungersi anche una piccola componente radiale. Prima di raggiungere il secondo asteroide, inizia una fase di spinta che durerà poi anche nel terzo arco, fase in cui la componente radiale ha il predominio. A metà arco le due componenti invertono la direzione la direzione della spinta che diventa concorde col moto dello s/c. Il quarto arco è il più lungo tra i 4, dovuta al lungo tempo per arrivare all'asteroide target 2017 UQ6, ed è un arco in cui predomina la fase di coasting. La componente della spinta in direzione z è quasi nulla, poiché come accennato prima, gli ultimi 3 asteroidi hanno un'inclinazione quasi costante tra di loro. Quando il motore è acceso, la spinta è in direzione parallela alla traiettoria dello spacecraft.

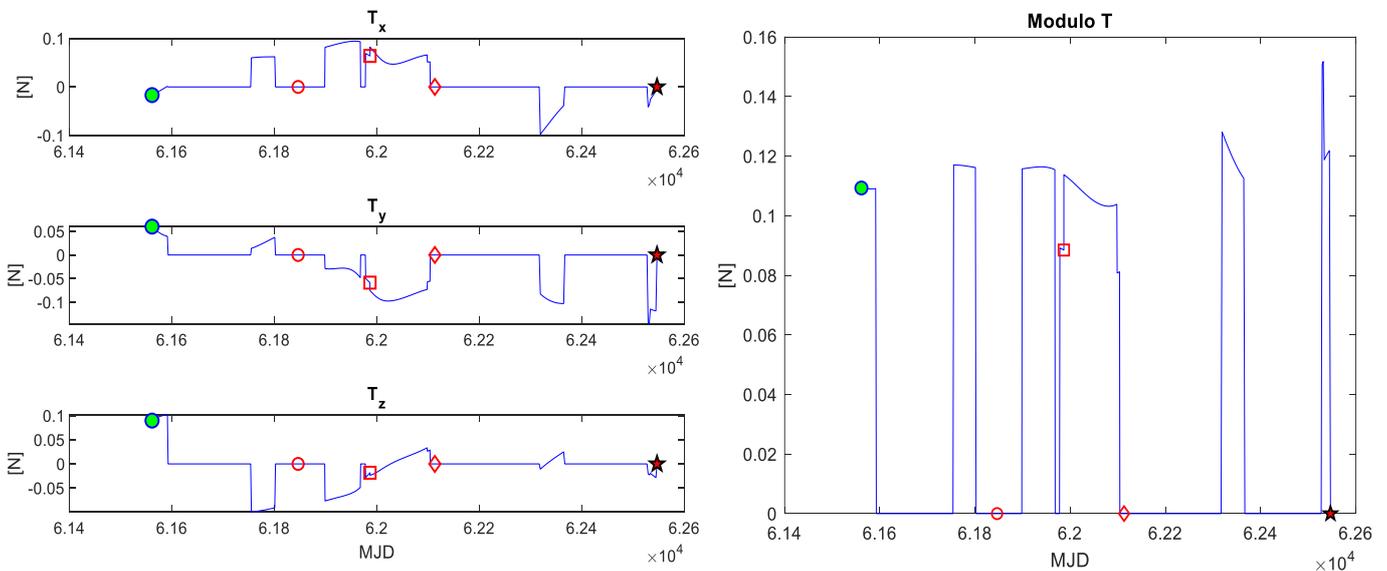


Figura 6. 46 Componenti e modulo della spinta T

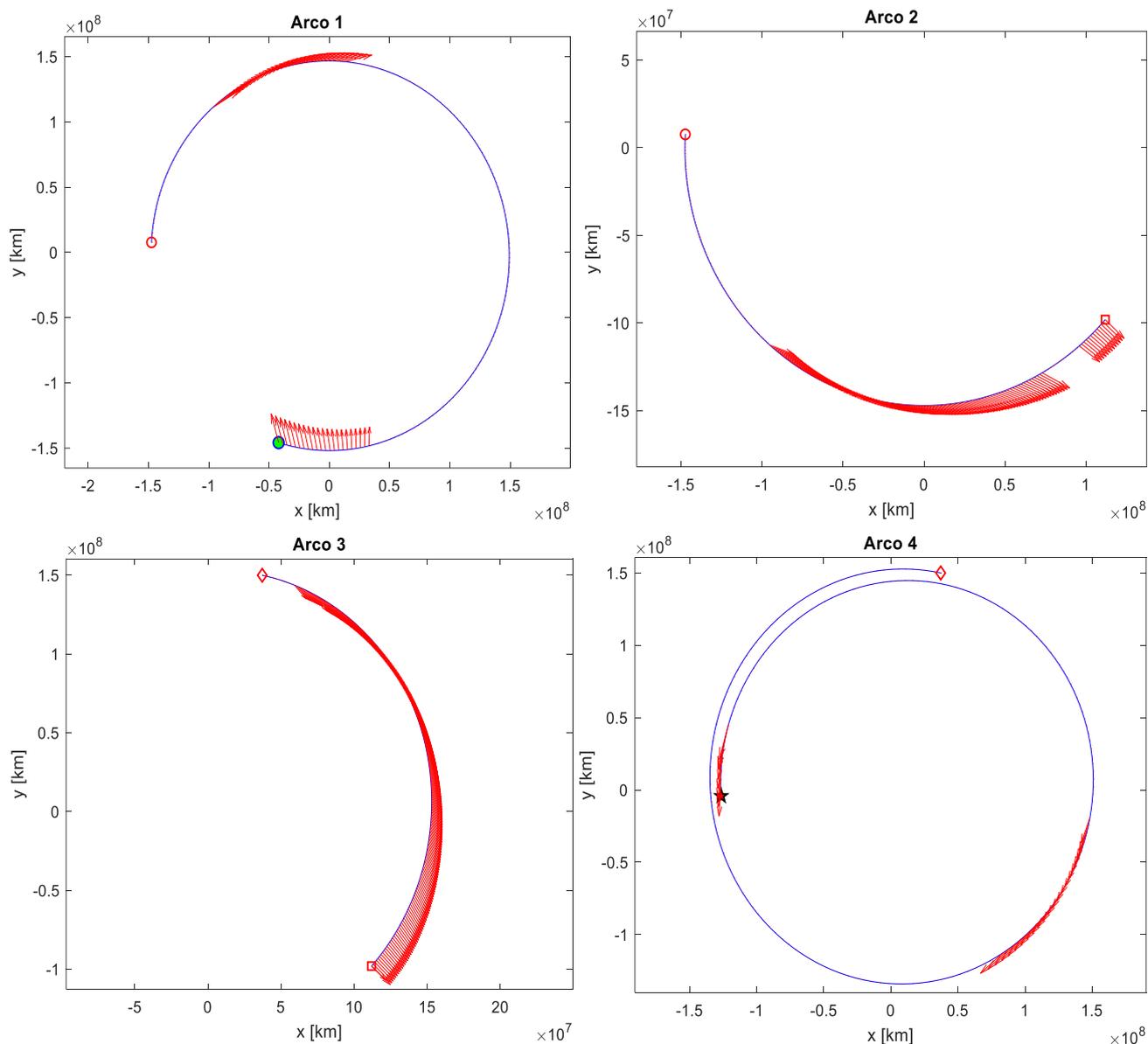


Figura 6. 47 Vettori spinta lungo i 4 archi nel piano X-Y

6.9 2012 DE31 – 2018 GR11 – 2004 OB – 2017 UQ6

Questa traiettoria è forse quella più interessante in termini scientifici rispetto a tutte le altre. L'asteroide 2012 DE31 non è classificato nella Risk List dell'ESA, tuttavia la differenza rispetto agli altri asteroidi finora considerati è la dimensione: si parla di un diametro medio di circa 160 metri. Ancora più interessante però è l'asteroide 2004 OB, anche questo non incluso nella Risk List dell'ESA, che vanta un diametro di circa 600 metri, ovvero più grande del 97% degli asteroidi – ma comunque più piccolo di quelli classificati “large”. Quest'ultimo

asteroide è inserito tra quelli che vengono chiamati “Accessible NEAs”, ovvero corpi celesti che potrebbero essere visitati un giorno dalla presenza umana.

	Asteroide	Data Fly-by	ΔV
Partenza	Terra	02/11/2026	0 km/s
1° Fly-by	2012 DE31	21/02/2028	1.462566 km/s
2° Fly-by	2018 GR11	13/04/2028	0.0978 km/s
3° Fly-by	2004 OB	26/09/2028	1.400989 km/s
Rendez-vous	2017 UQ6	08/03/2029	1.454575 km/s
		Durata 2.35y	TOT 4.415964 km/s

Tabella 6. 13 Caratteristiche della traiettoria

Rispetto al caso precedente, il ΔV totale della missione aumenta, tuttavia il costo aggiuntivo della missione potrebbe essere giustificato dalla rilevanza scientifica dei target della missione. Inoltre, questa traiettoria è più corta in termini di tempo di circa 110 giorni, il che significa che si potrebbe cercare di risparmiare in termini di ΔV aumentando la durata della missione. In ogni caso, il costo complessivo della traiettoria risulta nella media con le altre traiettorie a 4 asteroidi.

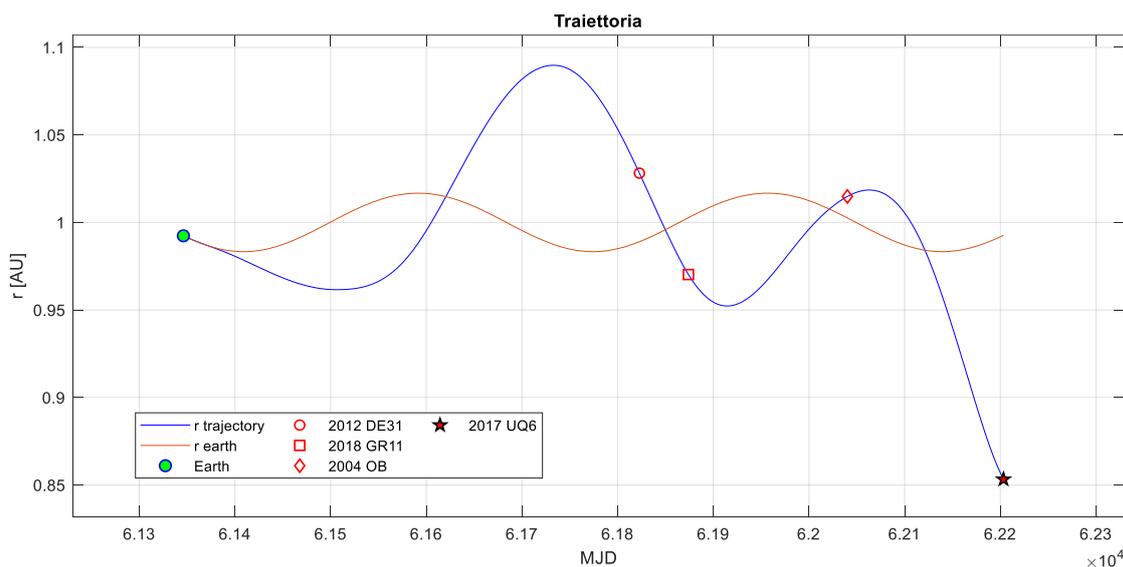


Figura 6. 48 Raggio della traiettoria in funzione del tempo

Nella prima fase della missione si crea uno sfasamento tra la traiettoria dello spacecraft e la terra, e questo dovuto alla fase di spinta che parte dall’istante iniziale della missione. A seguito di questa manovra viene alzato l’apoastro, aumenta quindi l’eccentricità, e viene aumentata anche l’inclinazione. Quest’ultima viene mantenuta costante fino alla fine del secondo fly-by, perché i primi due asteroidi vengono raggiunti a inclinazione uguale. Alla fine del secondo fly-by vengono modificati nuovamente i parametri di eccentricità e di inclinazione, in

particolare il primo viene abbassato perché viene abbassato l'apostro, il secondo invece dopo un repentino calo torna ad aumentare fino ad arrivare al terzo fly-by. La fase finale è quella dove eccentricità e inclinazione aumentano insieme per raggiungere il target.

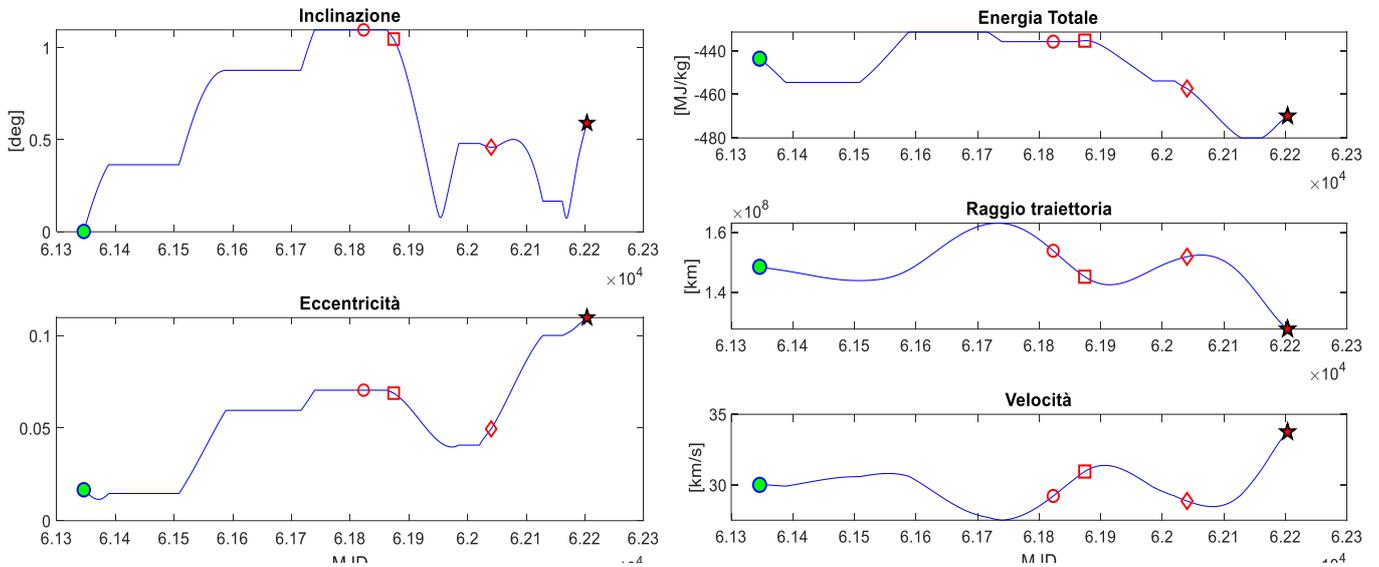


Figura 6. 50 Inclinazione, eccentricità, energia, raggio e velocità in funzione del tempo

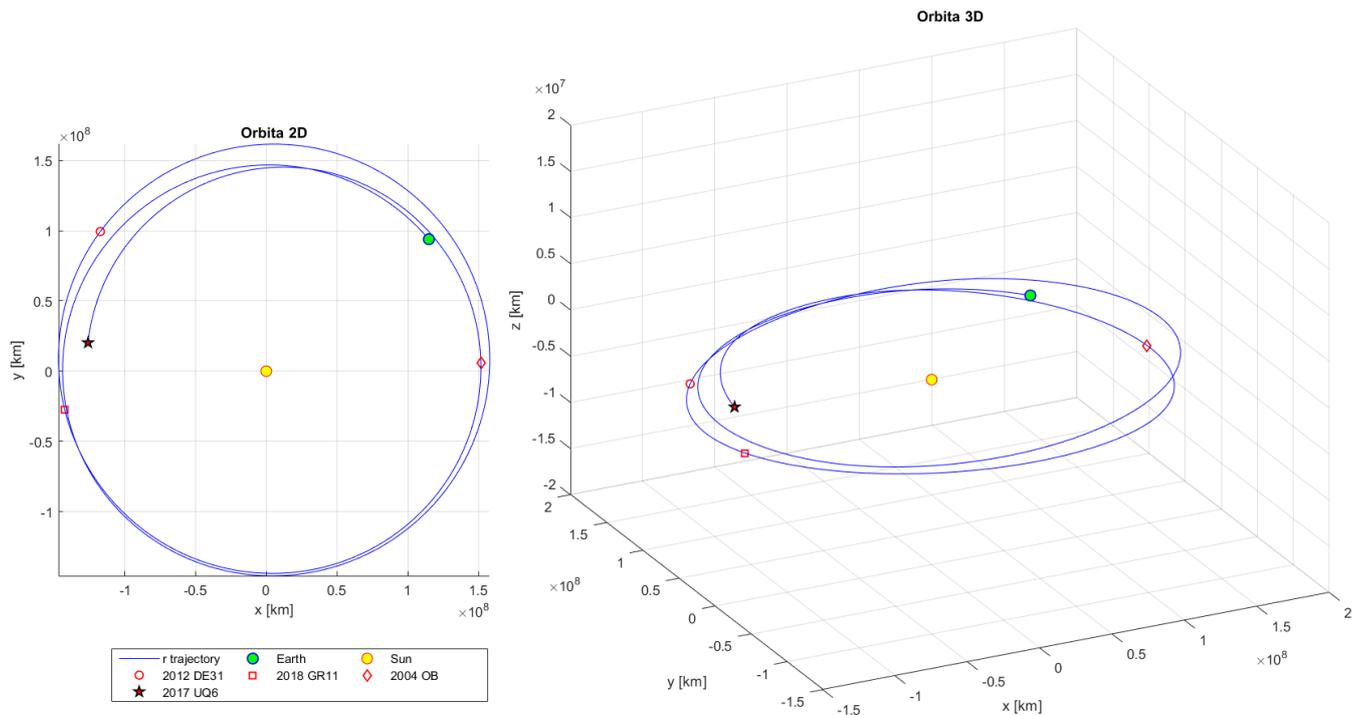


Figura 6. 49 Traiettoria in 2D e in 3D nel s.d.r. eliocentrico

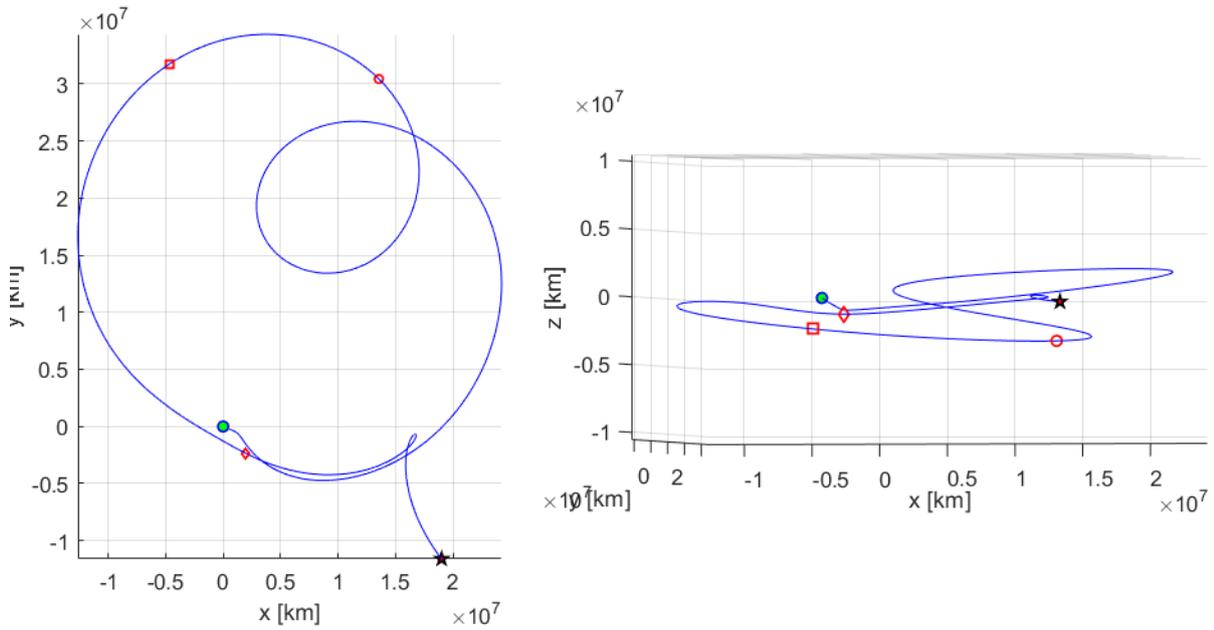


Figura 6. 51 Traiettoria in 2D e in 3D in coordinate ECI

La massa finale è di 891 kg, il consumo di propellente è quindi di 109 kg. Rispetto alla traiettoria a 3 fly-by intermedi sempre con target 2017 UQ6, notiamo un consumo superiore del 28%. Questo era da aspettarselo, dato che il ΔV richiesto per la missione è maggiore. Al contrario del caso precedente, si può notare che i consumi sono molto più distribuiti nel tempo. E' da notare anche il fatto che il consumo di propellente dal primo al secondo fly-by è di soli 2.5 kg, rendendo quindi l'arco di traiettoria un arco quasi totalmente in fase di coasting.

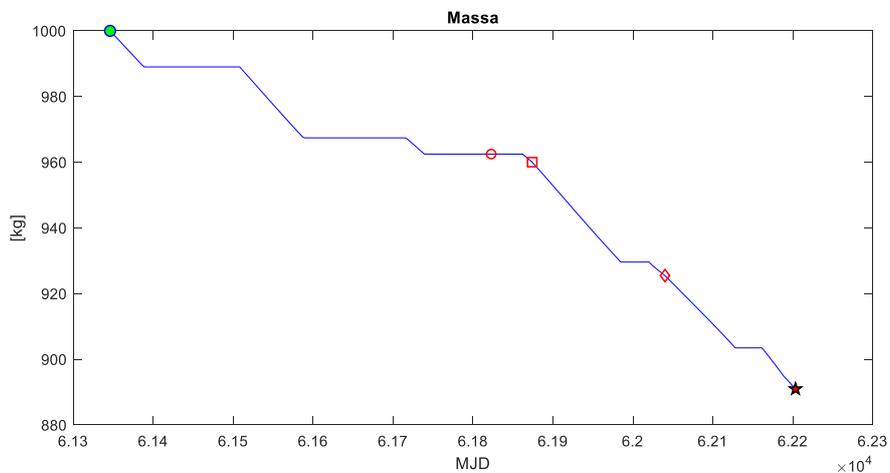


Figura 6. 52 Massa totale in funzione del tempo

La strategia di spinta si divide in 7 fasi di spinta non nulla. Il primo arco è l'arco più lungo, poiché il primo incontro avviene ad un tempo molto distante dalla partenza. La missione inizia spingendo in direzione opposta al moto per ottenere uno sfasamento della traiettoria rispetto all'orbita terrestre, e con una componente di spinta in direzione z non nulla per variare l'inclinazione della traiettoria. Le due fasi di spinta successive sono entrambe in direzione tangenziale alla traiettoria, cambiano però il tempo di spinta e il verso: la seconda fase di spinta del primo arco è in verso concorde col moto dello s/c e dura circa 80 giorni, la terza fase di spinta è in verso discorde e dura 20 giorni. Il secondo arco è, come preannunciato, il più corto tra i 4. L'arco di traiettoria dura 50 giorni e la fase di spinta dura solamente meno di 10 giorni. La componente preponderante di questa fase di spinta è quella radiale, tuttavia il modulo della spinta è molto basso e questo, insieme al breve tempo di accensioni dei motori, giustifica la quantità irrisoria di propellente usato in questo arco.

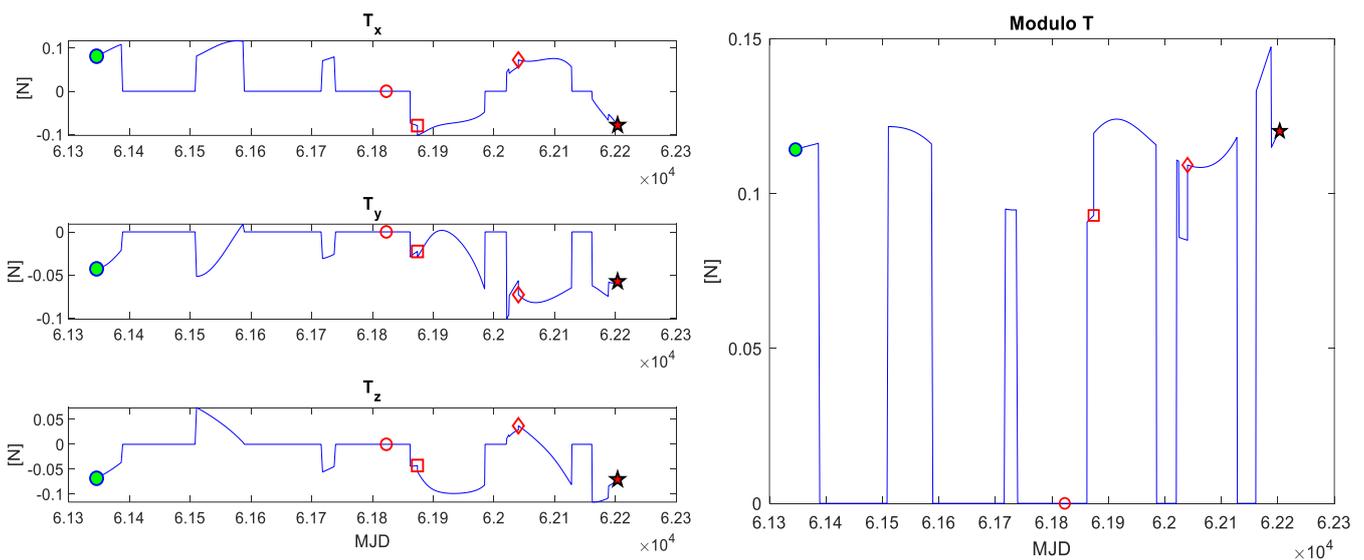


Figura 6.53 Componenti e modulo della spinta T

Il terzo arco contiene due fasi di spinta. La prima fase è la continuazione della fase di spinta derivante dal secondo arco. Questa ha inizialmente una componente radiale, che varia col tempo fino a diventare quasi tangenziale con verso opposto alla direzione del moto, dovuto alla necessità di abbassare l'apoastro della traiettoria per intercettare il terzo asteroide. Il terzo arco si chiude con un'ulteriore fase di spinta, in direzione radiale e con due moduli differenti, fase che verrà proseguita nel quarto ed ultimo arco. Nel quarto arco la componente della spinta in direzione z cambia il verso durante la fase di spinta. L'ultima fase di spinta ha tutte e 3 le componenti della spinta negative, con verso concorde alla direzione del moto, per aumentare l'eccentricità e inclinazione e raggiungere il target.

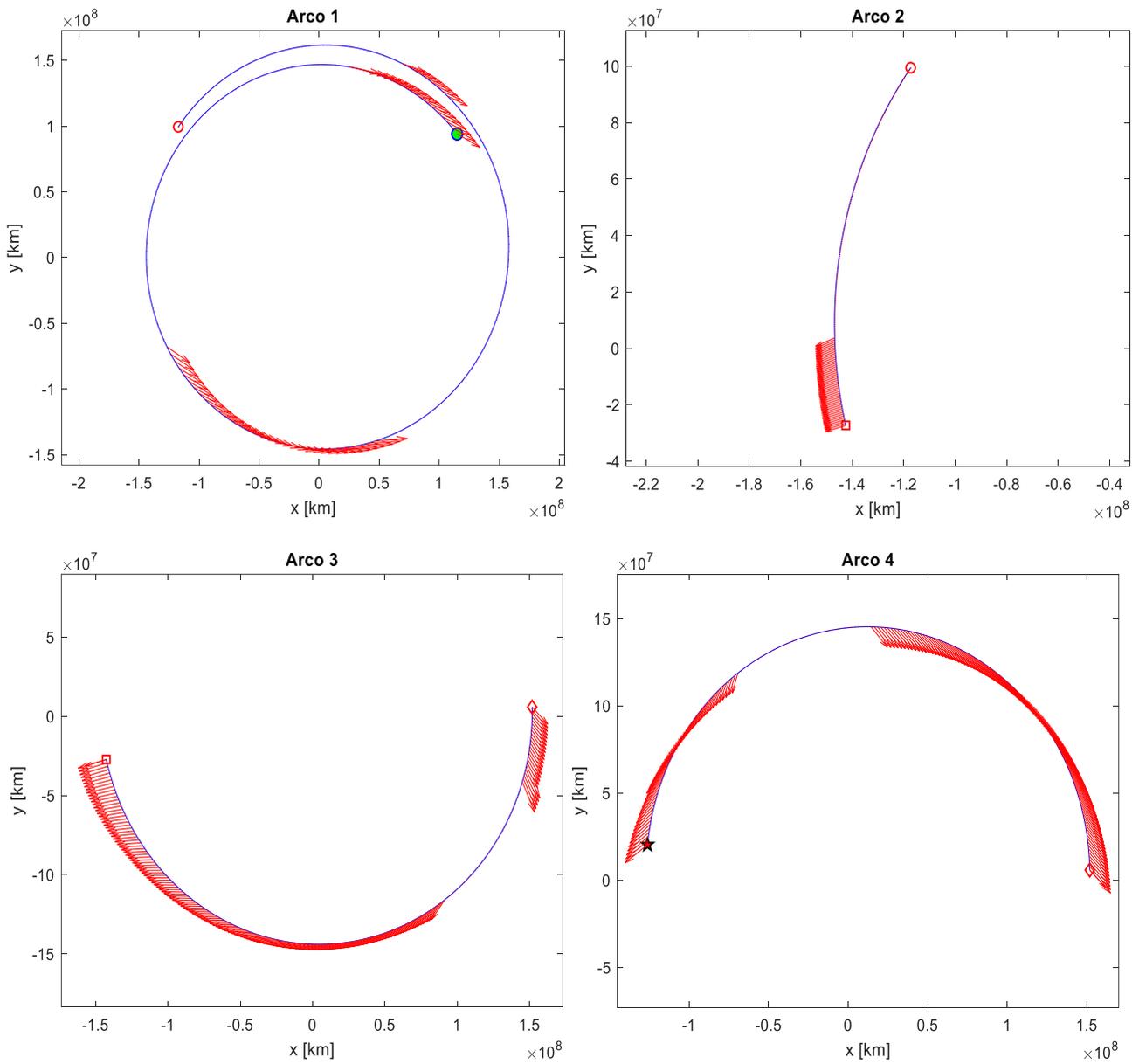


Figura 6. 54 Vettori spinta lungo i 4 archi nel piano X-Y

6.10 2000 SG344

L'asteroide 2000 SG344 è un piccolo asteroide della classe ATEN, dal diametro di circa 40 metri. Questo asteroide è molto interessante perché, nonostante la sua dimensione contenuta, è classificato come 3° nella Risk List dell'ESA. Le possibilità di impatto con la Terra sono molteplici: il 22 Settembre 2030 si è stimata una probabilità d'impatto di 1 su 500. Inoltre, sempre in questo secolo sono previsti altri passaggi ravvicinati la cui probabilità d'impatto supera quella del 2030 (2069,2097). Anche dal punto di vista scientifico è molto interessante, perché è messo in cima alla lista dei potenziali target visitabili dall'uomo in futuro.

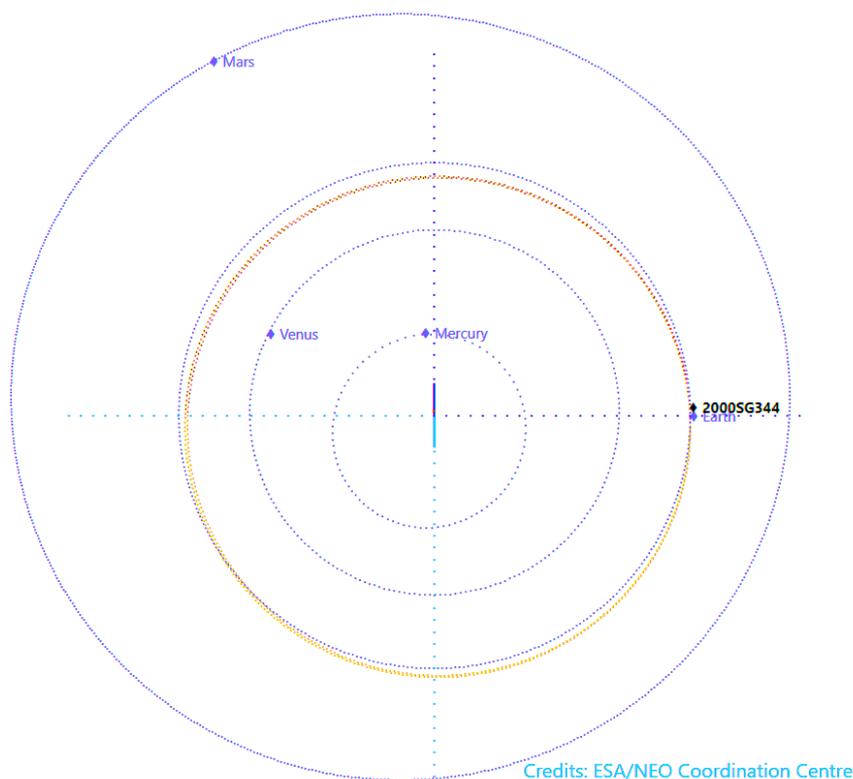


Figura 6. 55 Orbita 2000 SG344 e incontro ravvicinato (Dec 2030)

a	e	i	Ω	ω	M	H
0.977736 AU	0.066911	0.112°	191.858°	275.398°	131.667°	24.8 mag

Tabella 6. 14 Elementi orbitali di 2000 SG344 all'epoca 59800 MJD

2000 SG344 sarà protagonista di molteplici incontri ravvicinati con la Terra nella finestra 2025-2030. Dall'analisi delle traiettorie dirette, ovvero senza alcun fly-by intermedio, sono state trovate 3 traiettorie, le quali differiscono per l'anno di partenza, il mese di arrivo e la durata della missione.

Asteroide	Data partenza	Data rendez-vous	ΔV
2000 SG344	01/10/2025	06/05/2028	0.838589 km/s
2000 SG344	07/06/2026	17/10/2027	1.318539 km/s
2000 SG344	24/08/2025	18/07/2029	0.962789 km/s

Tabella 6. 15 Traiettorie dirette con diverse durate con rendez-vous 2000 SG344

Sono state analizzate 13 traiettorie a uno o due fly-by, aventi come rendez-vous l'asteroide 2000 SG344. La traiettoria più interessante è mostrata nel capitolo successivo, ed ha come traiettoria di base quella più economica, cioè quella con l'arrivo a metà 2028.

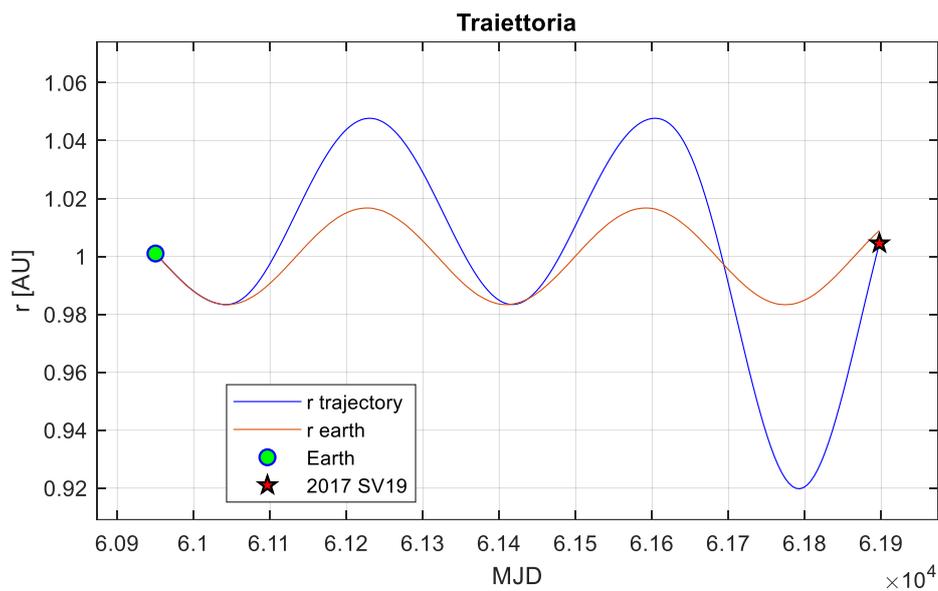


Figura 6. 57 Raggio della traiettoria in funzione del tempo

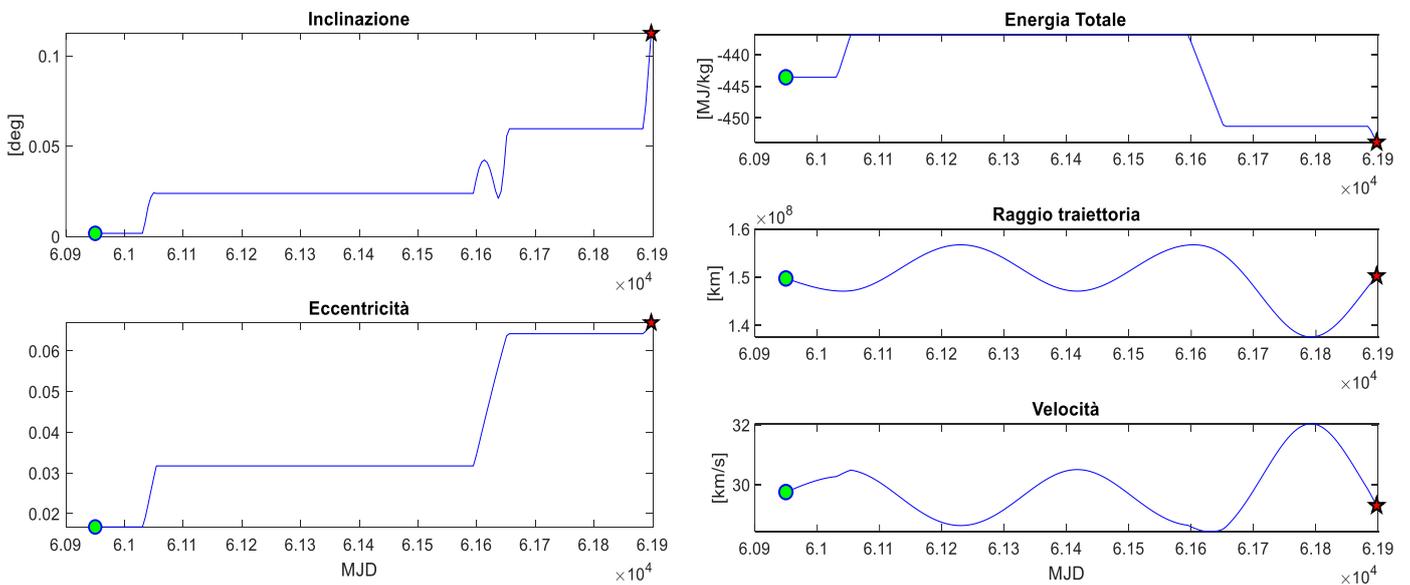


Figura 6. 56 Inclinazione, eccentricità, energia, raggio e velocità in funzione del tempo

La missione non prevede manovre molto complesse, si hanno solo delle piccole variazioni di eccentricità e di inclinazione. La prima orbita avviene a semi-asse maggiore uguale, infatti l'ampiezza dell'oscillazione della traiettoria è uguale a quella della Terra. Successivamente, verso l'inizio del 2027 viene modificato leggermente anche il semi-asse maggiore per immettersi su un'orbita che intercetti 2000 SG344. La variazione di inclinazione è molto bassa, circa 0.1 grado. La durata totale della missione è di 948 giorni.

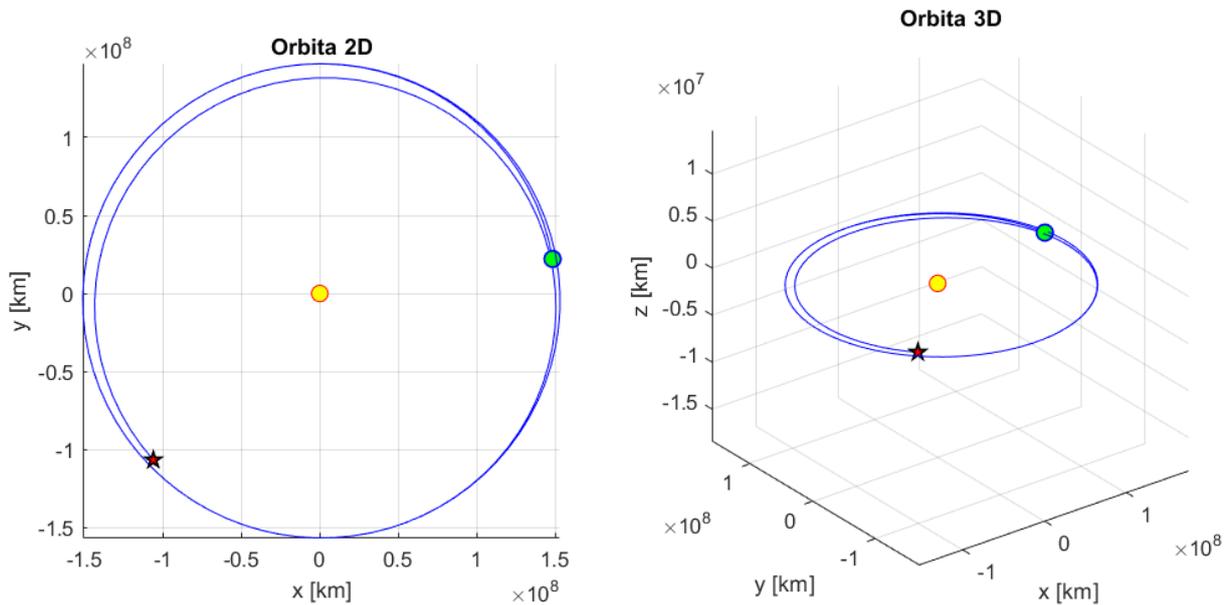


Figura 6. 58 Traiettoria in 2D e in 3D nel s.d.r. eliocentrico

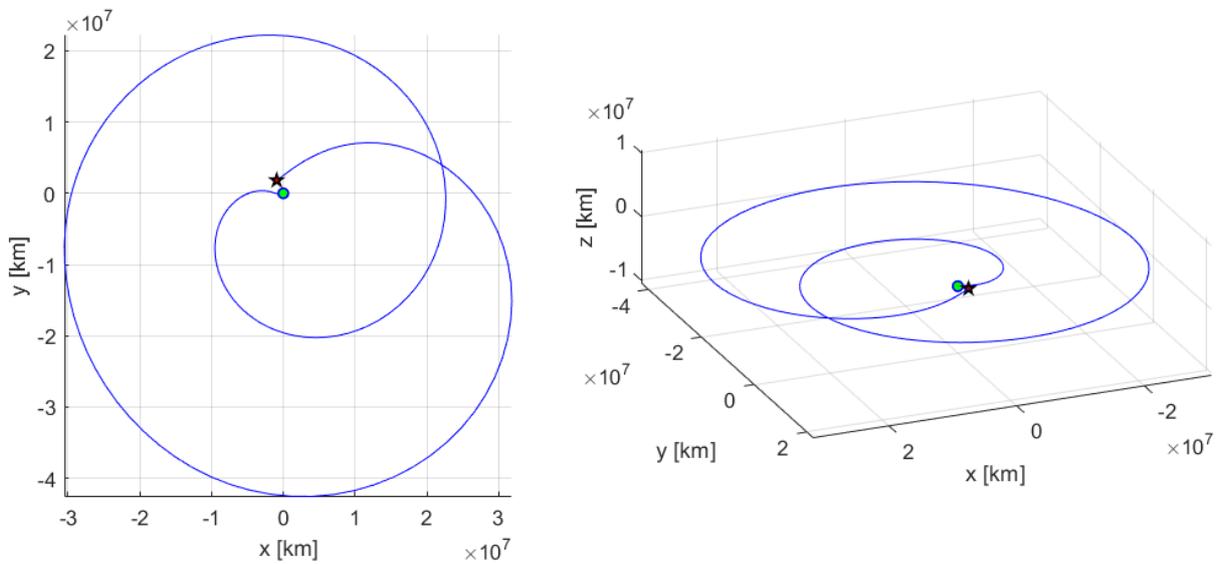


Figura 6. 59 Traiettoria in 2D e in 3D in coordinate ECI

La massa finale dello spacecraft è di 978 kg, quindi il consumo è di 22 kg di propellente.

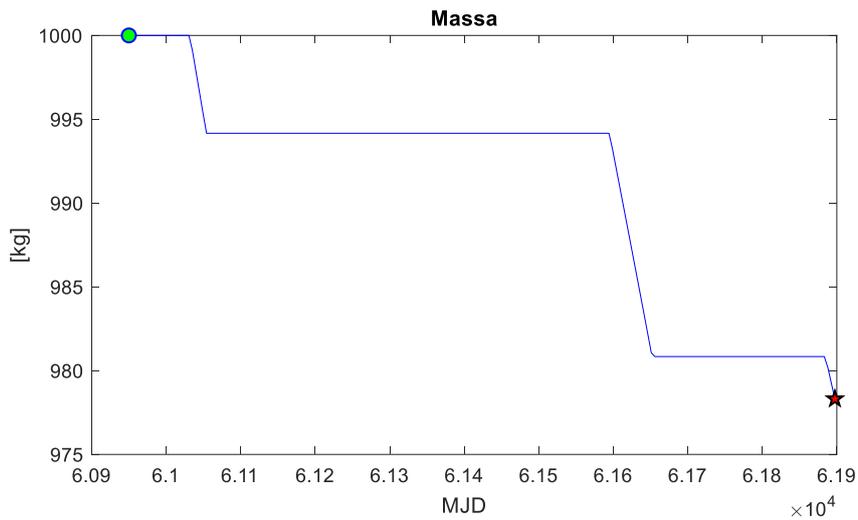


Figura 6. 60 Massa totale in funzione del tempo

La strategia di spinta si basa su 3 accensioni del motore: la prima subito dopo la partenza, dalla durata di circa 10 giorni; la seconda a metà 2027 dalla durata di 50 giorni; la terza all'arrivo, dalla durata di qualche giorno. Tutte le spinte sono caratterizzate da componenti in direzione preponderanti. La prima è in verso concorde al moto, le ultime 2 in verso opposto.

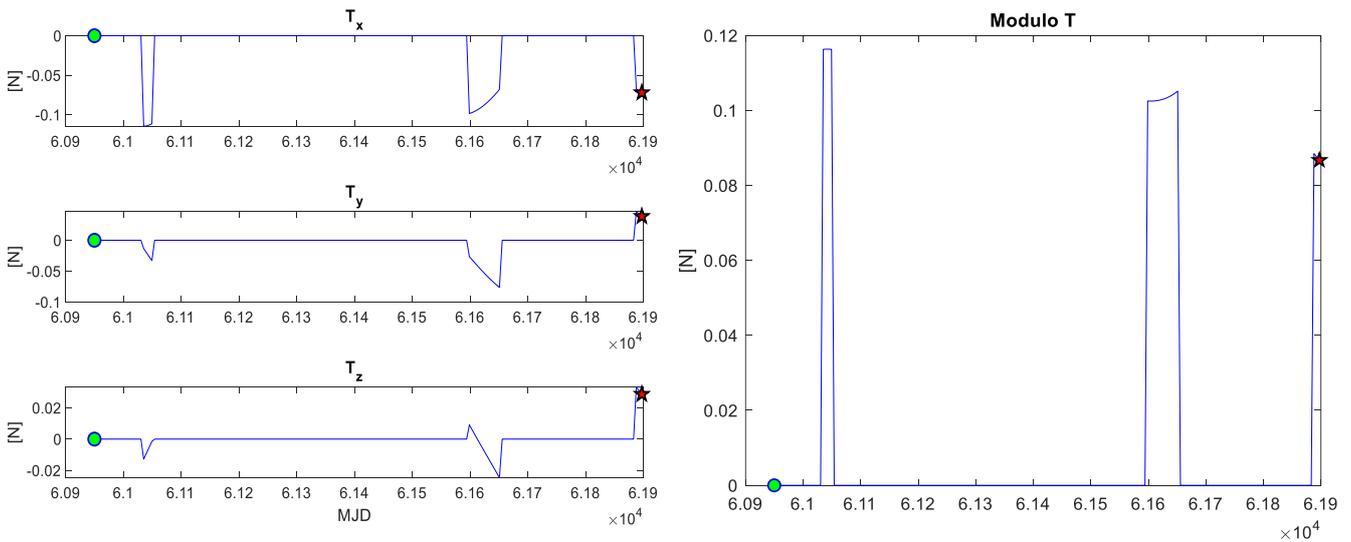


Figura 6. 61 Componenti e modulo della spinta T

6.11 2018 NV – 2019 YP3 – 2000 SG344

Una delle principali differenze con le traiettorie precedentemente analizzate sta nel fatto che questa è l'unica con partenza nel 2025 e l'unica con arrivo nel 2028. Questa traiettoria si classifica prima in termini di risparmio di propellente: questo è garantito dal più basso ΔV trovato per una missione a 2 fly-by intermedi.

L'asteroide 2018 NV è un asteroide della classe Aten, con un diametro stimato di circa 100 metri, uno tra i più grandi tra quelli analizzati in questa tesi. L'asteroide 2019 YP3 appartiene alla classe Apollo, e ha un diametro di circa 25 metri. Nessuno dei due corpi è nella Risk List dell'ESA, al contrario di 2000 SG344. Non solo i ridotti consumi, ma anche asteroidi non troppo piccoli, rendono questa traiettoria particolarmente interessante.

	Asteroide	Data Fly-by	ΔV
Partenza	Terra	17/11/2025	0 km/s
1° Fly-by	2018 NV	12/07/2026	0.457541 km/s
2° Fly-by	2019 YP3	25/12/2026	0.269518 km/s
Rendez-vous	2000 SG344	16/06/2028	0.831830 km/s
		Durata 2.58y	TOT 1.558891 km/s

Tabella 6. 16 Caratteristiche della missione

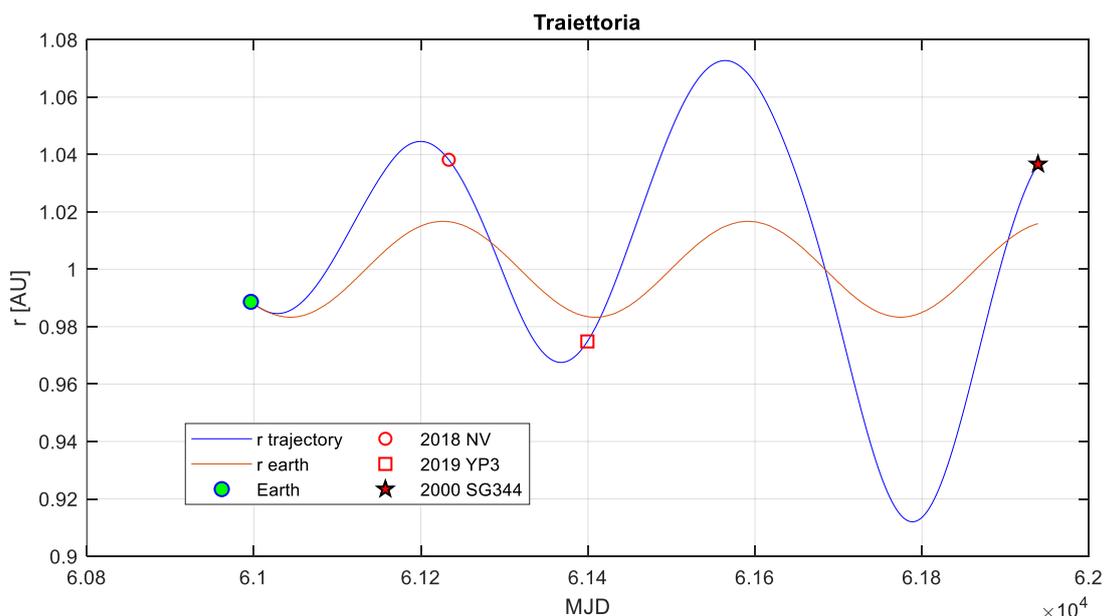


Figura 6. 62 Raggio della traiettoria in funzione del tempo

Il consumo molto basso di questa traiettoria è una diretta conseguenza della bassa inclinazione a cui si trovano gli asteroidi intermedi. I 2 asteroidi di fly-by. Infatti, vengono intercettati a inclinazioni maggiori di quella di partenza, ma comunque molto piccole: si parla infatti di variazioni tra un fly-by e l'altro di pochi decimi di grado. Come già ripetuto più volte, i cambi

di inclinazione sono tra le manovre più costose in termini di propellente. Piccole variazioni di inclinazione quindi garantiscono consumi ridotti. Il consumo di propellente è quindi dovuto per la maggior parte alla variazione di eccentricità della traiettoria, che aumenta con il tempo di missione.

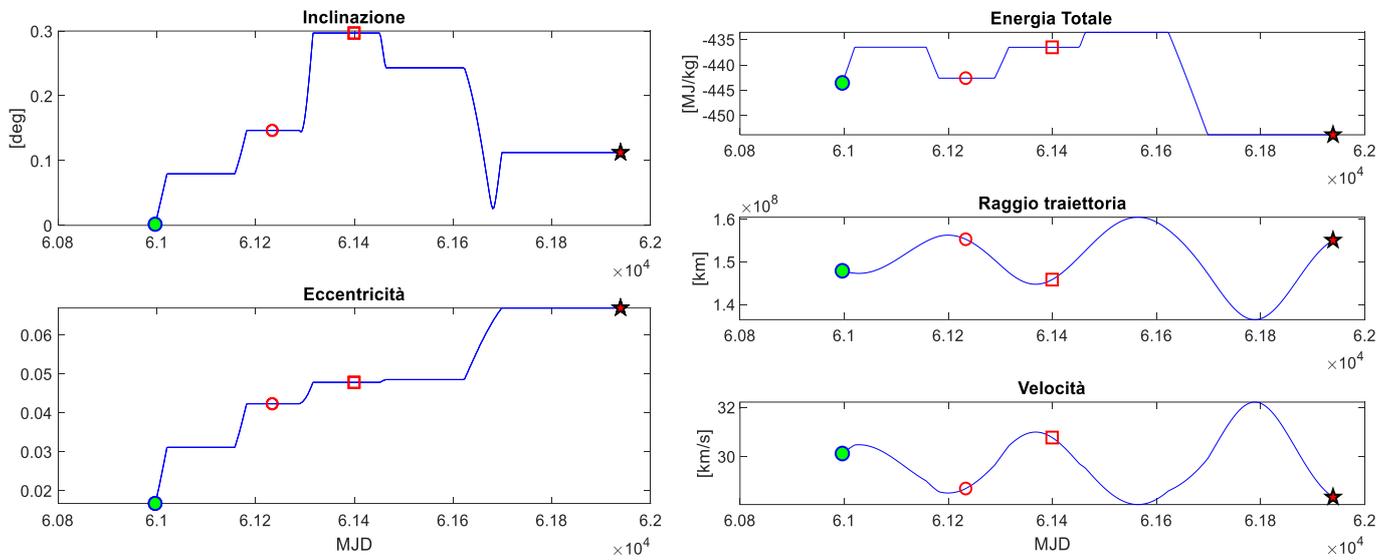


Figura 6. 63 Inclinazione, eccentricità, energia, raggio e velocità in funzione del tempo

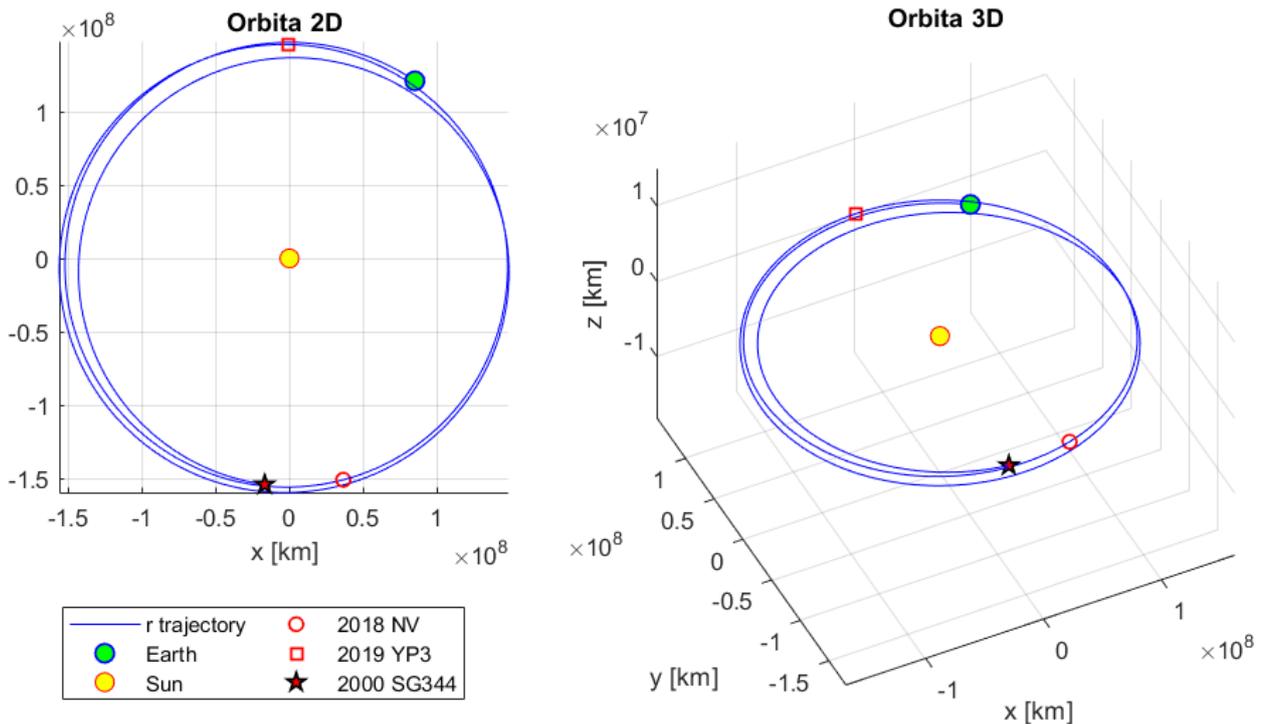


Figura 6. 64 Traiettoria in 2D e in 3D nel s.d.r. eliocentrico

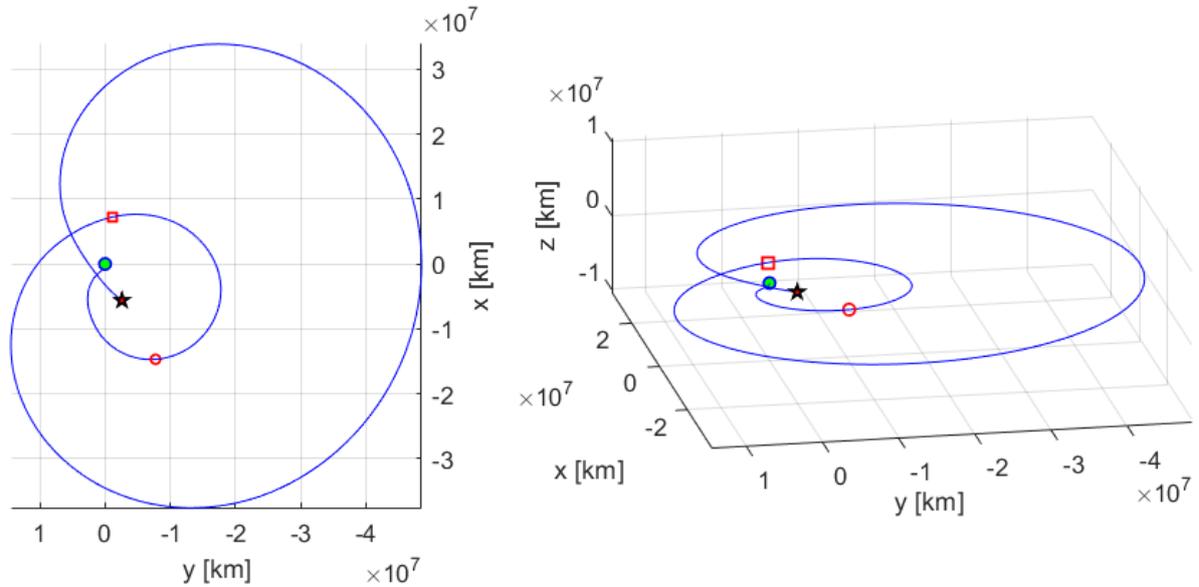


Figura 6. 65 Traiettoria in 2D e in 3D in coordinate ECI

La massa finale del satellite è di 960 kg, quindi si può calcolare un consumo di 40 kg di propellente.

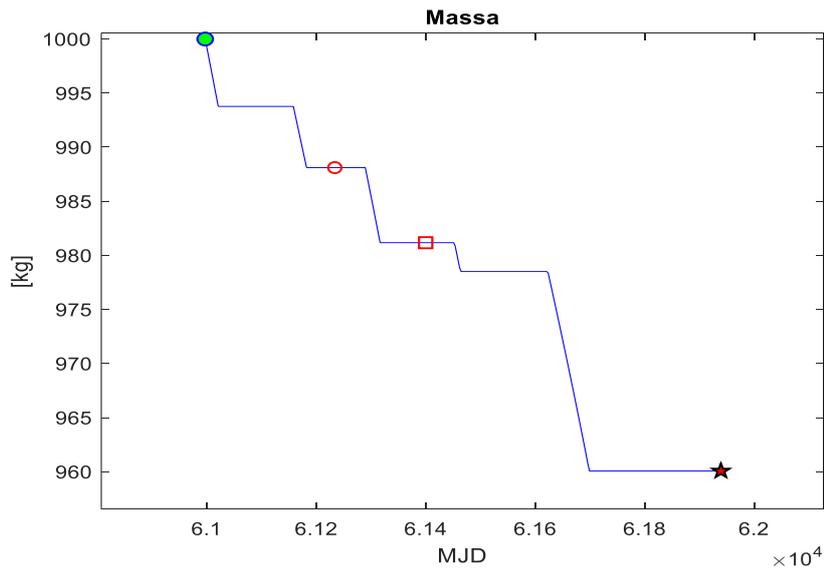


Figura 6. 66 Massa totale in funzione del tempo

La strategia di spinta si divide in 5 fasi di spinta. Le prime due avvengono nel primo arco, una alla partenza, l'altra, più duratura, verso l'arrivo al primo asteroide. Entrambe le fasi sono tangenziali alla traiettoria, la prima in verso concorde al moto, la seconda in verso discorde. La terza fase di spinta avviene nel secondo arco ed è molto breve: il consumo di questa

manovra, e quindi del secondo arco, è di soli 8kg di propellente. La direzione è principalmente tangenziale e il verso è concorde con la direzione del moto. Le ultime due spinte avvengono nell'ultimo arco, il più lungo. La prima è molto breve, la seconda invece è più lunga; entrambe spingono tangenzialmente, la prima in verso concorde al moto, la seconda in verso contrario. Data la durata di quest'ultimo arco, predomina la fase di coasting.

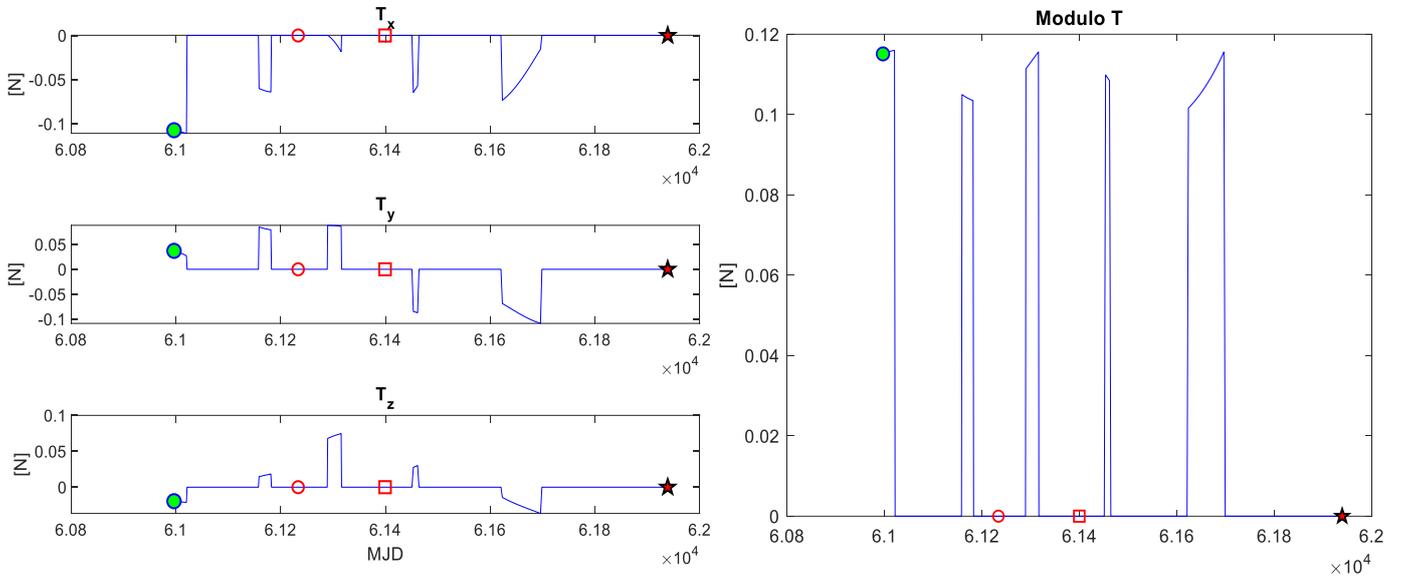
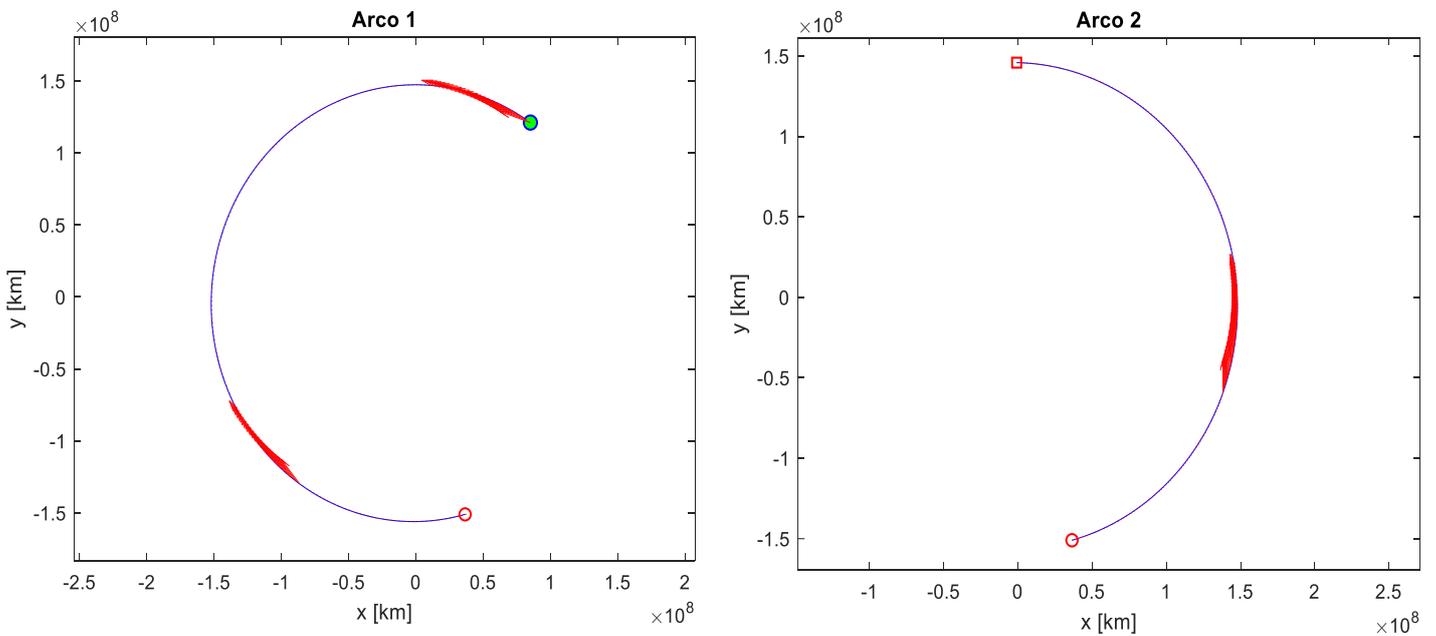


Figura 6. 67 Componenti e modulo della spinta T



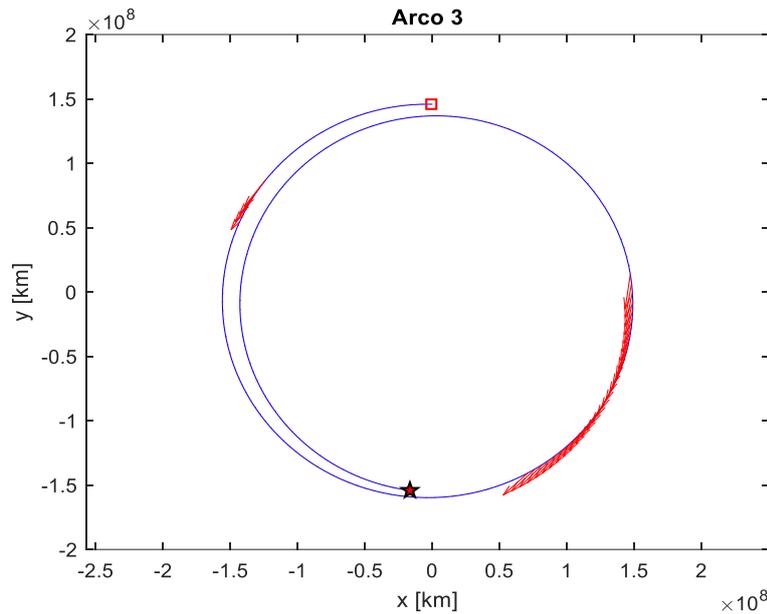


Figura 6. 68 Vettori spinta lungo i 3 archi nel piano X-Y

6.12 Sintesi risultati

E' chiaro che l'elevato numero di asteroidi, fa sì che il numero di possibili combinazioni sia elevatissimo, impossibili da analizzare senza degli algoritmi adatti. Le traiettorie andate a convergenza sono 87, circa il 40% di tutte quelle provate. Queste traiettorie si dividono in:

- 21 traiettorie dirette, ovvero con solo rendez-vous;
- 24 traiettorie a un fly-by e un rendez-vous;
- 26 traiettorie a due fly-by e un rendez-vous;
- 16 traiettorie a tre fly-by e un rendez-vous;

Per quanto riguarda le missioni a due fly-by intermedi, le traiettorie col minor ΔV sono:

- 2020 XF-2018 NW-2017 SV19, con un ΔV di 1.78 km/s;
- 2018 NV-2019 YP3-2000 SG344, con un ΔV di 1.55 km/s.

Per quanto riguarda le missioni a tre fly-by intermedi, la traiettoria col minor ΔV è 2019 EF1-2021 PN1-2016 EP84-2017 UQ6, con un ΔV di 3.44 km/s. Dal punto di vista del ritorno scientifico, vi sono diverse scelte possibili, data la vasta gamma di asteroidi con proprietà e dimensioni, ma forse la più interessante rimane 2012 DE31-2018 GR11- 2004 OB- 2017 UQ6. Una missione verso questi asteroidi potrebbe essere quindi giustificata poiché rilevante scientificamente, nonostante il consumo di propellente superiore alle altre traiettorie descritte.

Un'osservazione che vale la pena fare riguarda l'importanza di intercettare gli asteroidi ad alta inclinazione, cioè quelli per i fly-by, ad un'inclinazione nulla. Affinché questo accada è necessario intercettare questi corpi il più possibile vicino ai loro nodi. Si vede infatti dai risultati ottenuti che le traiettorie più costose in termini propulsivi, sono quelle che richiedono cambi di inclinazione di qualche grado. Questo avvalorava il fatto che i cambi di inclinazione, seppur piccoli, possono aumentare molto il consumo, e quindi è necessario ridurre al minimo questo tipo di manovra.

I dati relativi a tutte le traiettorie trovate si trovano nell'Appendice A.

Capitolo 7

7. Conclusioni

Con il lavoro presentato è stato possibile dimostrare la fattibilità di missioni con propulsione elettrica verso molteplici asteroidi del tipo *near-Earth*. La quasi totalità delle traiettorie presenta un ΔV minore di 5.5 km/s, il che rappresenta un buon risultato poiché questi valori sono totalmente compatibili con quelli realizzabili mediante propulsione elettrica: per fare un esempio, la sonda *Dawn* della NASA, in orbita attorno a Cerere, richiedeva un ΔV di circa 12 km/s. E' evidente, però, che all'aumentare del numero di asteroidi da raggiungere, aumenta anche il ΔV . Inoltre, al crescere del ΔV , a fissata massa iniziale e impulso specifico, sarà necessario un quantitativo di propellente maggiore, che riduce la quantità di payload che la sonda trasporta. E' necessario quindi un compromesso o *trade-off* tra il ritorno scientifico della missione e la spesa in termini propulsivi per effettuarla.

Inoltre, è necessario ricordare che la sonda utilizzata per l'analisi delle traiettorie e quella usata per la proposta ANIME hanno caratteristiche differenti (Capitolo 5.3). Il motore della sonda scelta per la proposta ANIME e la quantità di propellente trasportata garantiscono un ΔV di circa 1.5 km/s. La traiettoria con rendez-vous con l'asteroide 2000 SG344 potrebbe essere quindi una possibile candidata. Tuttavia, la quantità di propellente basterebbe a stento per il completamento della missione, non considerando probabili manovre correttive aggiuntive. Le altre traiettorie a fly-by multipli richiedono un ΔV maggiore di quello che la sonda in questione può garantire. Al fine di poter sfruttare queste traiettorie, le strategie potrebbero essere diverse:

- Si potrebbe pensare di aumentare la quantità di propellente a bordo, riducendo però la frazione di payload. Aumentando la massa di propellente di soli 150 grammi, si potrebbe compiere la traiettoria con 2000 SG344 in sicurezza; aumentando la massa di propellente di 1.2 kg, si potrebbe sfruttare, per esempio, anche la traiettoria 2020 XF -2017 OO1-2017 SV19, con un ΔV di 2.68 km/s;
- Aumentare la massa di propellente ha lo svantaggio di ridurre la frazione di payload, come la strumentazione scientifica, e di aumentare il volume occupato dal serbatoio (a parità di propellente utilizzato). Una soluzione più fattibile potrebbe essere scegliere un motore con un impulso specifico più elevato. Per esempio, scegliendo un motore che ha un impulso specifico doppio, la massa di propellente di 1.5 kg garantisce un ΔV di circa 3 km/s;
- Un compromesso tra le due strategie sopraelencate.

E' necessario anche considerare che il metodo utilizzato per la scrematura dei possibili target potrebbe aver escluso degli asteroidi che si sarebbero potuti trovare in condizioni ottimali per un fly-by. Oltretutto, la selezione degli asteroidi è stata basata sulla lista attuale di quelli conosciuti, e nel prossimo futuro, potrebbe esserci una crescita esponenziale di nuovi asteroidi. Inoltre, il metodo indiretto possiede un limitato dominio di convergenza: è possibile che piccole variazioni della soluzione di tentativo possano determinare la convergenza o meno della soluzione, quindi alcune soluzioni potrebbero non essere state trovate a causa di una stima errata dei valori iniziali. Bisogna inoltre ricordare che queste traiettorie rappresentano

delle soluzioni preliminari di missione, che necessitano di essere approfondite per validarle e renderle a tutte gli effetti realizzabili.

Bibliografia

- [1] NASA/JPL Asteroids. Url: <https://www.jpl.nasa.gov/asteroid-watch>
- [2] Near-Earth Object. Url: https://en.wikipedia.org/wiki/Near-Earth_object
- [3] Orofino V., “*I corpi minori del Sistema Solare: Asteroidi*”, Dispensa del corso di Planetologia, Università del Salento. Ultimo aggiornamento: Agosto 2011.
- [4] Broz M., “*Yarkovsky Effect and the Dynamics of the Solar System*”, Charles University, 2006, Praga.
- [5] La Scala Torino e la Scala Palermo; due strumenti per valutare il rischio impatto. Url: https://www.castfvg.it/Elidoro%20Claudio/Geocities/impatto/im_torinopalermo.html
- [6] Double Asteroid Redirection Test (DART). Url: <https://dart.jhuapl.edu/>
- [7] OSIRIS RE-x. Url: <https://solarsystem.nasa.gov/missions/osiris-rex/in-depth/>
- [8] Mining. Url: <https://web.mit.edu/12.000/www/m2016/finalwebsite/solutions/asteroids.html>
- [9] Roger R. Bate, Donald D. Mueller, Jerry E. White, “*Fundamentals of Astrodynamics*”, Dover Publications, 1971.
- [10] Curtis Howard D., “*Orbital Mechanics for Engineering Students*”, Butterworth-Heinemann, 3° Edition, 11/2013.
- [11] Cornelisse, J.W., Schoyer, H.F.R., and Wakker, K.F., *Rocket Propulsion and Spaceflight Dynamics*, Pitman, London, 1979.
- [12] Jahn, R.G., *Physics of Electric Propulsion*, McGraw-Hill, New York, 1968.
- [13] Casalino L., “*Ottimizzazione Indiretta di traiettorie spaziali*”
- [14] Burghes, D. N., e Graham, A., 1a ed., *Introduction to Control Theory, Including Optimal Control*, Ellis Horwood Ltd., Chichester, 1980.
- [15] J. T. Betts, “*Practical Methods for Optimal Control and Estimation Using Nonlinear Programming*”, 2010. doi: 10.1137/1.9780898718577.
- [16] Casalino L., “*Equazioni in coordinate sferiche*”
- [17] NASA/JPL CalTech. *Small-Body Orbital Elements*. Url: https://ssd.jpl.nasa.gov/?sb_elem.

[18] *ANIME*: the “*Asteroid Nodal Intersection Multiple Encounters*”: CubeSat mission to explore Near-Earth Asteroid diversity. 52nd Lunar e Planetary Science Conference. 2021.

[19] Ferrari F., “*Ottimizzazione di traiettorie per fly-by multipli di asteroidi Near-Earth con veicoli spaziali a bassa spinta*”. Politecnico di Torino, 2020. Url: <http://webthesis.biblio.polito.it/id/eprint/15715>.

[20] <https://neo.ssa.esa.int/search-for-asteroids>

[21] <https://www.spacereference.org/>

Appendici

Appendice A

In questa sezione vengono riportate tutte le traiettorie trovate, divise in base al numero di fly-by e codificate. La codifica della traiettoria serve per rendere più facile l'identificazione delle traiettorie. Ogni traiettoria avrà quindi un codice # del tipo "x.yz":

- x rappresenta il numero di fly-by intermedi, quindi può valere da 0, se la traiettoria prevede solo il rendez-vous, a 3 se la traiettoria ha 3 asteroidi intermedi;
- yz indica l'ordine cronologico della traiettoria;

Traiettorie dirette

#	Asteroide	Data partenza	Data rendez-vous	ΔV [km/s]
0.01	2015 JD3	28/ 5/2026	29/06/2028	1.658554249
0.02	2012 TF79	15/10/2026	27/11/2027	0.913706768
0.03	2000 SG344	07/06/2026	17/10/2027	1.310559609
0.04	2018 FM2	22/10/2025	4/11/2028	1.931159629
0.05	2015 JD3	28/05/2026	29/06/2028	1.658554249
0.06	2008 UA202	15/12/2027	26/09/2028	1.421301016
0.07	2015 VC2	02/10/2029	22/12/2030	1.706208617
0.08	2017 SV19	20/ 2/2027	16/05/2029	1.205057863
0.09	2017 UQ6	17/04/2027	7/ 8/2029	1.932455392
0.10	2017 UQ6	27/06/2027	02/01/2029	1.981478103
0.11	2020 PC	7/12/2028	25/09/2029	1.446914062
0.12	2021 EJ3	28/02/2028	23/04/2029	2.066042444
0.13	2012 LA	22/02/2028	01/12/2029	2.122309602
0.14	2012 LA	20/12/2026	18/07/2029	2.105589077
0.15	2000 SG344	24/ 8/2025	13/04/2030	0.96278977
0.16	2011 BL45	22/07/2028	17/05/2030	1.878771253
0.17	2015 VC2	02/10/2029	22/12/2030	1.706208617
0.18	2008 UA202	22/06/2029	18/ 3/2030	1.318539165
0.19	2000 SG344	1/10/2025	6/ 5/2028	0.838589614
0.20	2000 SG344	7/ 6/2026	17/10/2027	1.310559609
0.21	2000 SG344	24/08/2025	13/04/2030	0.96278977

Traiettorie a 2 asteroidi

#	Fly-by	Rendez-vous
1.01	2016 NK22	2018 FM2
1.02	2017 YM1	2015 JD3
1.03	2014 QN362	2015 JD3
1.04	2016 CC136	2017 SV19
1.05	2016 CC136	2017 SV19
1.06	2004 QJ13	2012 TF79
1.07	2004 SA	2017 UQ6
1.08	2020 PN1	2017 UQ6
1.09	2012 DJ61	2020 PC
1.10	2006 JF42	2021 EJ3
1.11	2017 UA52	2021 EJ3
1.12	2017 HP49	2012 LA
1.13	2013 GH66	2012 LA
1.14	2020 KH5	2012 LA
1.15	2021 LV	2012 LA
1.16	2021 KQ2	2000 SG344
1.17	1999 AN10	2000 SG344
1.18	2018 XC4	2000 SG344
1.19	1999 MN	1991 JW
1.20	2005 OK3	2000 SG344
1.21	2020 PN1	2000 SG344
1.22	2020 YB1	2000 SG344
1.23	2018 NV	2000 SG344
1.24	2018 WH1	2000 SG344

Appendice A

#	Data partenza	Data fly-by	Data rendez-vous	$\Delta V1$ [km/s]	$\Delta V2$ [km/s]	ΔV tot [km/s]
1.01	27/12/2025	13/05/2027	07/06/2028	5.353749565	4.168719889	9.522469454
1.02	09/04/2026	20/12/2026	03/07/2028	0.527721864	1.16157275	1.689294615
1.03	25/ 6/2026	30/ 8/2027	25/07/2028	0.453596052	1.406385294	1.859981346
1.04	23/ 5/2028	09/02/2029	17/ 1/2030	1.14285692	1.316694531	2.459551451
1.05	23/05/2028	09/02/2029	17/01/2030	1.14285692	1.316694531	2.459551451
1.06	12/ 6/2026	02/10/2027	24/07/2028	0.846033877	0.850184735	1.696218612
1.07	06/12/2027	20/09/2028	21/10/2029	1.724942262	2.26357215	3.988514412
1.08	21/12/2026	10/ 5/2028	15/ 8/2029	3.885700788	3.179848722	7.065549511
1.09	24/10/2025	20/ 3/2027	27/10/2029	3.308218346	3.005587911	6.313806257
1.10	06/06/2027	31/05/2028	5/ 1/2029	1.875800518	1.009688173	2.885488692
1.11	06/01/2028	19/11/2028	27/09/2029	1.71932777	4.162159174	5.881486944
1.12	12/12/2027	06/06/2028	26/11/2029	0.29597071	1.865904482	2.161875192
1.13	11/ 8/2026	20/ 4/2027	17/ 7/2029	0.493887873	1.935628723	2.429516596
1.14	4/ 3/2026	04/06/2027	15/10/2028	2.826567864	3.439666586	6.26623445
1.15	05/10/2026	04/06/2027	2/ 8/2029	1.106904252	1.308850777	2.415755029
1.16	9/10/2026	30/01/2028	10/01/2029	2.770745212	2.081655219	4.852400431
1.17	20/ 2/2026	19/08/2027	30/ 5/2030	5.402580438	3.975127013	9.37770745
1.18	26/11/2024	19/03/2028	20/02/2030	3.602003065	3.82043515	7.422438215
1.19	19/10/2024	12/08/2026	20/ 1/2028	2.985014038	6.029373254	9.014387291
1.20	23/ 4/2026	13/07/2027	09/06/2028	1.97629277	1.440062839	3.416355609
1.21	24/ 3/2026	14/07/2027	22/10/2028	1.6214249	2.191562844	3.812987743
1.22	18/08/2025	14/ 6/2026	9/ 9/2028	0.406519828	0.974308644	1.380828472
1.23	12/10/2025	12/ 7/2026	20/ 9/2027	0.227602287	0.738085173	0.96568746
1.24	8/ 1/2026	13/12/2026	22/ 9/2027	0.445679729	0.798803208	1.244482937

Traiettorie a 3 asteroidi

#	Fly-by 1	Fly-by 2	Rendez-vous
2.01	2020 PP1	2018 WH1	2000 SG344
2.02	2017 YM1	2016 NK22	2015 JD3
2.03	2017 YM1	2014 QN362	2015 JD3
2.04	2020 XF	2017 OO1	2017 SV19
2.05	2020 XF	2017 OO1	2017 SV19
2.06	2020 XF	2018 NW	2017 SV19
2.07	2017 YM1	2004 QJ13	2012 TF79
2.08	2004 SA	2018 XC4	2017 UQ6
2.09	2020 PN1	2016 EP84	2017 UQ6
2.10	2021 PN1	2016 EP84	2017 UQ6
2.11	2018 GR11	2004 SA	2017 UQ6
2.12	2018 GR11	20004 OB	2017 UQ6
2.13	2019 XT2	2020 OX5	2017 UQ6
2.14	2020 XF	2020 OX5	2017 UQ6
2.15	2012 DE31	2019 RB3	2017 UQ6
2.16	2012 DE31	2018 GR11	2017 UQ6
2.17	2012 DJ61	1994 XL1	2020 PC
2.18	2017 HP49	2018 XC4	2012 LA
2.19	2014 HL129	2021 CZ3	2012 LA
2.20	2021 LV	2021 CZ3	2012 LA
2.21	1999 AN10	2020 XR	2000 SG344
2.22	2019 LV1	2002 NN4	2000 SG344
2.23	2020 XR	2021 DM2	2011 BL45
2.24	2019 YP3	2014 QN362	2015 JD3
2.25	2018 NV	2019 YP3	2000 SG34
2.26	2018 NV	2016 BN14	2000 SG34

#	Data partenza	Data fly-by 1	Data fly-by 2	Data rendez-vous
2.01	14/09/2025	05/09/2026	18/01/2027	16/09/2028
2.02	22/01/2026	13/12/2026	4/ 7/2027	28/05/2028
2.03	12/12/2025	06/12/2026	28/08/2027	03/12/2028
2.04	26/04/2027	30/11/2027	26/07/2028	21/09/2029
2.05	21/01/2027	16/11/2027	21/07/2028	11/08/2029
2.06	30/09/2026	02/12/2027	13/07/2028	09/05/2029
2.07	12/12/2025	06/12/2026	28/ 9/2027	13/02/2029
2.08	26/ 4/2027	30/09/2028	01/02/2029	28/07/2030
2.09	19/03/2027	21/ 3/2028	23/11/2028	09/06/2029
2.10	30/03/2027	11/08/2028	03/12/2028	21/07/2029
2.11	26/12/2026	03/04/2028	26/09/2028	30/06/2029
2.12	18/07/2027	19/04/2028	26/09/2028	13/ 2/2029
2.13	08/06/2027	5/12/2027	9/ 7/2028	05/02/2029
2.14	04/07/2027	13/11/2027	9/ 7/2028	26/02/2029
2.15	21/10/2026	22/02/2028	14/09/2028	11/02/2029
2.16	13/11/2026	22/02/2028	11/04/2028	22/11/2028
2.17	30/11/2025	17/ 3/2027	26/10/2027	23/10/2029
2.18	22/12/2027	08/06/2028	15/12/2028	23/11/2029
2.19	23/09/2026	2/ 5/2027	7/ 1/2028	17/ 6/2029
2.20	27/11/2026	02/06/2027	24/ 1/2028	07/07/2029
2.21	30/12/2025	9/ 8/2027	23/10/2028	13/03/2030
2.22	09/09/2025	27/11/2027	24/ 5/2029	2/12/2029
2.23	30/11/2027	18/11/2028	12/ 9/2029	12/ 9/2030
2.24	16/ 3/2026	14/12/2026	18/10/2027	16/ 1/2029
2.25	17/11/2025	12/ 7/2026	25/12/2026	16/06/2028
2.26	1/ 9/2025	29/ 7/2026	12/01/2027	5/ 1/2028

#	$\Delta V1$ [km/s]	$\Delta V2$ [km/s]	$\Delta V3$ [km/s]	ΔV tot [km/s]
2.01	1.541515057	0.263969774	2.014011166	3.819495997
2.02	1.071980453	0.632496114	1.692517438	3.396994005
2.03	2.682872854	0.792132858	2.410977847	5.88598356
2.04	0.67724078	0.612248013	2.10460512	3.394093912
2.05	0.807938234	0.144542657	1.727631695	2.680112587
2.06	0.271756141	0.510781001	1.006094082	1.788631224
2.07	2.856697133	0.643683966	1.463861664	4.964242762
2.08	2.872814313	0.619812113	3.486404705	6.979031132
2.09	2.680747404	0.390716974	0.92051214	3.991976518
2.10	3.034778229	0.709233806	1.122939336	4.86695137
2.11	2.159308434	1.791590138	1.38929257	5.340191142
2.12	1.312867876	1.535700088	1.361562265	4.210130229
2.13	1.362956356	1.063558316	1.394654093	3.821168765
2.14	1.00398353	0.758264287	1.974791934	3.737039752
2.15	1.88370396	1.31794689	0.511510952	3.713161802
2.16	1.865690319	7.89E-02	1.574539242	3.519137157
2.17	4.301535465	2.276004304	6.357503581	12.93504335
2.18	0.509427245	0.456049487	1.364168923	2.329645655
2.19	0.315318755	1.492071178	1.894106733	3.701496666
2.20	0.780797043	0.00E+00	1.950444741	2.731241784
2.21	2.193927094	1.534218291	4.455385248	8.183530633
2.22	2.954497219	3.115590087	2.055069387	8.125156694
2.23	2.61585964	0.97913299	2.2401112	5.83510383
2.24	1.920458092	2.224130541	3.193026183	7.337614817
2.25	0.457541955	0.269518914	0.831830196	1.558891065
2.26	2.02063629	1.716702287	1.28595144	5.023290017

Traiettorie a 4 asteroidi

#	Fly-by 1	Fly-by 2	Fly-by 3	Rendez-vous
3.01	2012 DE31	2018 GR11	20004 OB	2017 UQ6
3.02	2012 DE31	2018 GR11	2019 RB3	2017 UQ6
3.03	2013 GH66	2020 XF	2015 JD	2012 LA
3.04	2013 GH66	2020 XF	2019 LW4	2012 LA
3.05	2013 GH66	2021 CZ3	2017 HP49	2012 LA
3.06	2013 GH66	2021 CZ3	2017 HP49	2012 LA
3.07	2013 GH66	2020 XF	2019 LW4	2012 LA
3.08	2014 HL129	2020 XF	2015 JD	2012 LA
3.09	2014 HL129	2020 XF	2017 HP49	2012 LA
3.10	2014 HL129	2021 CZ3	2017 HP49	2012 LA
3.11	2014 HL129	2021 CZ3	2019 LW4	2012 LA
3.12	2021 LV	2021 CZ3	2017 HP49	2012 LA
3.13	2021 LV	2021 CZ3	2019 LW4	2012 LA
3.14	2021 LV	2020 XF	2015 JD	2012 LA
3.15	2021 LV	2020 XF	2017 HP49	2012 LA
3.16	2019 EF1	2021 PN1	2016 EP84	2017 UQ6

#	$\Delta V1$ [km/s]	$\Delta V2$ [km/s]	$\Delta V3$ [km/s]	$\Delta V4$ [km/s]	ΔV tot [km/s]
3.01	1.462566853	9.78E-02	1.400989357	1.454574549	4.415964813
3.02	1.709852739	0.227103168	1.770446633	0.75507917	4.462481709
3.03	1.422925162	1.549503737	0.468927961	2.070951791	5.512308651
3.04	2.156222477	0.221719272	0.384385363	2.172489984	4.934817095
3.05	0.71877496	0.801023212	0.518377868	2.326890367	4.365066408
3.06	0.699568728	0.831146933	0.388145355	2.243469501	4.162330517
3.07	2.156222477	0.221719272	0.384385363	2.172489984	4.934817095
3.08	0.859373076	1.296189232	0.735156131	2.581543653	5.472262092
3.09	0.606364962	1.504596101	0.947078971	2.250934032	5.308974068
3.10	1.330852368	1.511973598	0.92234159	2.428637948	6.193805504
3.11	0.85439727	0.494750988	0.182482474	2.767163732	4.298794465
3.12	1.031517177	0.900747537	0.45470596	2.508029371	4.895000045
3.13	0.646632412	0.542835792	1.048555882	1.751732662	3.989756749
3.14	0.604596882	0.515305137	0.629126216	1.752812709	3.501840943
3.15	0.800612811	0.993270205	1.440998813	2.421868476	5.656750305
3.16	0.766905565	0.783597617	1.131657139	0.763835049	3.44599537

#	Data partenza	Data fly-by 1	Data fly-by 2	Data fly-by 3	Data rendez-vous
3.01	02/11/2026	21/02/2028	13/04/2028	26/09/2028	8/ 3/2029
3.02	28/11/2026	21/02/2028	10/04/2028	16/ 9/2028	09/02/2029
3.03	04/09/2026	17/03/2027	5/11/2027	12/ 5/2028	26/ 7/2029
3.04	12/08/2026	14/07/2027	07/11/2027	18/05/2028	12/ 9/2029
3.05	17/09/2026	9/ 4/2027	8/ 2/2028	10/06/2028	12/06/2029
3.06	19/09/2026	09/04/2027	08/02/2028	10/06/2028	16/06/2030
3.07	12/08/2026	14/07/2027	07/11/2027	18/ 5/2028	12/09/2029
3.08	08/10/2026	27/04/2027	6/11/2027	10/05/2028	21/07/2029
3.09	11/11/2026	27/04/2027	28/10/2027	24/05/2028	1/ 8/2029
3.10	4/12/2026	21/05/2027	11/02/2028	24/ 5/2028	25/07/2029
3.11	15/09/2026	14/05/2027	5/ 2/2028	09/06/2028	16/ 6/2029
3.12	07/09/2026	30/05/2027	08/02/2028	12/06/2028	15/06/2029
3.13	5/10/2026	30/ 5/2027	30/ 1/2028	23/ 5/2028	15/ 1/2030
3.14	17/10/2026	02/06/2027	22/11/2027	18/05/2028	01/07/2029
3.15	14/12/2026	3/ 6/2027	31/10/2027	4/ 6/2028	7/ 7/2029
3.16	05/06/2027	16/03/2028	3/ 8/2028	08/12/2028	14/02/2030