



**Politecnico
di Torino**

Politecnico di Torino

Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

Anno accademico 2021/2022

**Evasione da punti lagrangiani
per missioni verso asteroidi**

Relatore:

Lorenzo Casalino

Candidata:

Valeria Dessanti 267776

Ai miei genitori

Contents

Introduzione	2
1 Missioni nel punto L2 del sistema Sole-Terra	5
1.1 Cenni storici	6
1.2 Missioni attuali	8
1.3 Missioni future	10
2 Asteroidi Near-Earth	13
2.1 Missioni passate verso asteroidi Near-Earth	13
3 Fondamenti di meccanica orbitale	17
3.1 Sistemi di riferimento	17
3.2 Parametri orbitali	19
3.3 Problema dei due corpi	21
3.4 Problema dei tre corpi circolare ristretto	22
3.5 Funzione del potenziale gravitazionale	25
3.6 Punti lagrangiani	26
3.6.1 Punti collineari	26
3.6.2 Punti equilateri	28
3.7 Missioni interplanetarie	29
3.7.1 Escape	29
3.7.2 Fase eliocentrica	31
4 Teoria del controllo ottimale	35
4.0.1 Equazioni differenziali con condizioni al contorno	40
5 Modello dinamico	45
5.1 Perturbazioni	49
5.1.1 Non perfetta sfericità della Terra	50
5.1.2 Perturbazione lunisolare	52
5.1.3 Pressione di radiazione	53
5.1.4 Codice di calcolo	55
6 Risultati	60
6.1 Escape dal punto L2 Sole-Terra per arrivare a 2013 XY20	60
6.1.1 Escape da L2	61
6.1.2 Dall'uscita dalla sfera d'influenza terrestre fino all'asteroide 2013 XY20	69
6.1.3 Orbita completa	72
6.2 Orbita diretta verso 2013 XY20	73
6.3 Confronto tra orbita che parte da L2 ed orbita diretta	74

6.3.1	Semiassse maggiore	75
6.3.2	Inclinazione orbitale	77
6.3.3	Eccentricità orbitale	80
6.3.4	Consumo di propellente	82
7	Conclusioni	87

List of Tables

6.1	Date di spegnimento dei motori	62
6.2	Massa finale dell'escape [kg]	63
6.3	Massa iniziale (massa a fine escape) e finale del secondo tratto di orbita per le orbite $t_0=160$ e $t_0=161$ [kg]	71
6.4	Massa iniziale (massa a fine escape) e finale del secondo tratto di orbita per le date $t_0=162$ e $t_0=163$ [kg]	71
6.5	Variazione percentuale del semiasse maggiore ottenuta con l'escape	77
6.6	Variazione percentuale dell'inclinazione ottenuta con l'escape	78
6.7	Variazione percentuale di eccentricità ottenuta con l'escape	81

List of Figures

1.1	Rappresentazione dei cinque punti di Lagrange	5
1.2	Esempio di orbita Lissajous.	6
1.3	Confronto tra la sensibilità di Wilkinson e di due precedenti missioni con gli stessi obiettivi.	7
1.4	Rappresentazione della traiettoria delle sonde Herschel e Planck	8
1.5	Rappresentazione delle traiettorie degli asteroidi seguiti da Gaia.	9
1.6	Foto del telescopio James Webb	10
2.1	Rappresentazione della traiettoria seguita da NEAR.	14
2.2	Foto della sonda OSIRIS-REx sulla superficie di Bennu.	15
3.1	Sistema di riferimento geocentrico equatoriale.	18
3.2	Sistema di riferimento eliocentrico-eclittica.	18
3.3	Un'orbita e i suoi parametri orbitali.	19
3.4	Ogni curva ottenuta mediante il sezionamento del cono rappresenta una conica, nonché una possibile traiettoria.	20
3.5	Rappresentazione del problema dei due corpi, uno di massa m_2 ed uno di massa m_1	21
3.6	Rappresentazione del problema dei tre corpi	23
3.7	Andamento dell'energia.	27
3.8	Curve equipotenziali.	28
3.9	Manovra di fuga in direzione pianeta più esterno rispetto a quello di partenza.	30
3.10	Manovra di Hohmann verso un outer planet.	31
3.11	Manovra biellittica.	33
5.1	Sistema di riferimento EME2000	47
5.2	Sistemi di riferimento EME2000 e topocentrico.	47
5.3	Rappresentazione di alcune armoniche.	51
5.4	Rappresentazione del corpo perturbatore e della sua azione perturbatrice in un sistema di riferimento EME2000.	53
5.5	Cono d'ombra generato dalla Terra.	55
6.1	Manovre di fuga di diversa durata dal punto L2 del sistema Sole-Terra per diverse date di partenza. L'orbita lunare è rappresentata in nero ed è segnata la sua posizione il giorno della partenza.	65
6.2	Manovra di fuga dal punto L2 del sistema Sole-Terra per missioni della stessa durata ma diversa data di partenza. L'orbita lunare è rappresentata in nero ed è segnata la sua posizione il giorno della partenza.	66
6.3	$t_0=162$, traiettoria più corta e più lunga	66
6.4	Velocità dello spacecraft a fine escape	68
6.5	Confronto tra i valori della velocità alla fine dell'escape per le varie partenze e durate	69

6.6	Miglior traiettoria: $t_0=161$, 105 giorni	70
6.7	Peggior traiettoria: $t_0=163$, 115 giorni	70
6.8	Caso migliore: $t_0=161$, 105 days	72
6.9	Caso peggiore: $t_0=163$, 115 days	73
6.10	Discrepanza tra i valori del semiasse maggiore a fine escape e all'inizio dell'orbita diretta per le varie partenze e missioni	76
6.11	Confronto tra le varie partenze	77
6.12	Differenza tra l'inclinazione dell'orbita partita da L2 all'escape e l'inclinazione iniziale dell'orbita diretta per le varie partenze e missioni	79
6.13	Confronto tra le differenze di inclinazione delle varie partenze	80
6.14	Differenze tra le eccentricità orbitali di orbita indiretta e diretta per le varie date di partenza	81
6.15	Confronto delle differenze di eccentricità tra le varie partenze	82
6.16	Massa finale di orbita indiretta e diretta	83
6.17	Risparmio di carburante tra le due orbite per le varie partenze e durate	84
6.18	Confronto tra i risparmi di carburante per le varie partenze	85

Abstract

La tesi consiste nello studio di missioni ottimizzate che partono dal punto Lagrangiano L2 del sistema Sole-Terra e che sono dirette verso asteroidi della categoria Near-Earth asteroids. In particolare viene considerata una missione diretta verso l'asteroide 2013 XY20. Lo studio viene svolto simulando la partenza del satellite da quattro date distanziate l'una dall'altra di due mesi e considerando che, per ognuna di queste date di partenza, il satellite esegua la fuga dalla sfera d'influenza terrestre in un arco di tempo variabile tra 50 e 115 giorni.

Una prima analisi può essere svolta trascurando la sfera d'influenza terrestre e dunque considerando che la partenza avvenga da posizione e velocità coincidenti con quelle della Terra. L'analisi condotta in questa tesi permetterà una valutazione più precisa dell'orbita reale, nella quale si considera cosa accade nella fuga e si esaminano le differenze in termini di consumo e traiettoria seguita tra le varie escape.

Per dimostrare la convenienza nell'effettuare missioni che partano da punti Lagrangiani, si va a vedere quanto i parametri orbitali alla fine della fuga siano più vicini ai parametri orbitali che si devono raggiungere al termine della missione, ossia quelli dell'asteroide, rispetto ai parametri orbitali iniziali dell'orbita che esegue il satellite nello studio preliminare, coincidenti con i parametri orbitali dell'orbita Terrestre.

Le simulazioni avvengono sfruttando tre codici Fortran diversi: uno per l'escape, uno per il secondo tratto dell'orbita che parte da L2 ed uno per l'orbita diretta. Questi codici applicano la teoria del controllo ottimale con metodo indiretto, che partendo da parametri di tentativo suddivide la macro traiettoria in tante sotto parti e risolve un sistema di equazioni differenziali con condizioni al contorno note, le quali permettono di trovare, tra tutte le traiettorie possibili e dopo un adeguato numero di iterazioni, la traiettoria che minimizza il consumo di propellente.

Introduzione

In tanti, nei decenni, si son chiesti quale sia l'effettiva utilità del riservare grossi fondi per l'ambito spaziale a discapito di altri più urgenti ed immediati. Le missioni spaziali sono però completamente incentrate sulla concretezza: concrete come gli assorbitori armonici che, inventati per smorzare le pesanti vibrazioni presenti nel lancio di un razzo, vengono oggi usati in tutto il mondo per ponti, grattacieli ed edifici collocati in zone sismiche; concrete come le vite che vengono salvate grazie all'utilizzo della coperta termica, figlia delle tecnologie di produzione delle tute degli astronauti; concrete come un programma tv il cui segnale è rimbalzato su un satellite.

L'assenza di risorse cui obbliga l'ambiente spaziale sprona la tecnologia ad inventare nuove strumentazioni o migliorarne di già esistenti, sempre più all'avanguardia ed utili. Nello spazio la gravità è molto variabile in base a dove ci si trova, l'atmosfera terrestre è un lusso che nessun altro pianeta a portata di mano ha e stessa cosa si può dir del clima. Son proprio questi fattori che permettono lo studio della risposta del corpo umano alle diverse condizioni e l'invenzione di nuovi dispositivi biomedici applicabili in vari ambiti, ma spesso in uno con il quale, potenzialmente, dovremo far fronte tutti: la vecchiaia. Gli astronauti infatti nei brevi periodi che passano in orbita, subiscono un precoce processo di invecchiamento che porta a perdita muscolare ed osteoporosi, fra le altre cose.

La ISS è solo un primo tassello nel mondo delle stazioni spaziali. Sarebbe interessante collocarne di nuove in ambientazioni ancor differenti come la Luna, Marte o dei particolari punti dello spazio chiamati punti lagrangiani. Questi ultimi sono cinque punti caratteristici di un sistema binario di corpi celesti come possono essere Sole-Terra, Terra-Luna o Sole-Giove, nei quali si potrebbero collocare dei satelliti e mantenerli in orbita a costo pressoché nullo oppure attraverso i quali si potrebbero far passare delle missioni per ridurre la spesa di combustibile. Infatti questi cinque punti sono dei punti di equilibrio delle forze d'attrazione gravitazionale dei corpi caratteristici del sistema, nel caso di studio Sole e Terra, la cui somma bilancia le forze centrifughe necessarie affinché il satellite resti in un'orbita a tale distanza. Questi son di due tipi: collineari (L1, L2 ed L3) ed equilateri (L4 ed L5).

Tra i vari punti lagrangiani, L1 ed L2 destano un notevole interesse a seconda di qual è l'oggetto della missione e son già popolati da sonde che gli orbitano attorno. Sono entrambi collocati sulla congiungente i due corpi principali, a distanze speculari dalla Terra e molto maggiori della distanza Terra-Luna. L1 è tra il Sole e la Terra e permette un'ottima osservazione del Sole indipendente dal moto terrestre e lunare, che non ne offuscherebbe mai l'osservazione.

L2 è oltre la Terra e la Luna e gode di una vista privilegiata dello spazio, sempre con la stessa illuminazione da parte del Sole, fattore che influenza molto il funzionamento e la gestione degli apparati di bordo ottici e non, nonché ne fornisce l'energia necessaria al funzionamento. Qui sarebbe ideale il posizionamento di una stazione fissa, da usare come base per la partenza di missioni che qui abbandonino la sfera d'influenza terrestre a basso costo e si dirigano verso altri pianeti o asteroidi.

La fuga mediante propulsione elettrica a bassa spinta dal punto L2 del sistema Sole-Terra

verso l'asteroide, appartenente alla classe Near-Earth orbit, chiamato 2013 XY20 è proprio l'oggetto di questo studio.

Dopo un breve cenno storico sulle missioni già collocate in orbita attorno al punto L2 e dirette verso asteroidi Near-Earth, verrà trattata la meccanica celeste che sta dietro al moto di un corpo quale un satellite soggetto all'attrazione gravitazionale di più corpi, nel così noto "problema dei tre corpi", ad azioni perturbative quali la radiazione solare, che concorrono a cambiare l'energia e la geometria dell'orbita della sonda, e si scenderà più nel dettaglio della fisica che sta dietro il punto lagrangiano in questione.

Poiché i corpi celesti che determinano, insieme alla spinta dei motori, l'esatta traiettoria del satellite sono anch'essi in moto, allora a seconda della diversa data di partenza avranno una posizione e pertanto un'influenza differenti sul satellite, che verranno perpetrate per un arco temporale variabile con la durata della missione stessa. Tutto ciò concorre al rendere una traiettoria più o meno conveniente, con la convenienza intesa prettamente come minor consumo di propellente, elemento chiave di qualsiasi missione spaziale.

Nello studio si utilizzerà il modello matematico della teoria del controllo ottimale, il quale permetterà di scegliere, tra tutte le traiettorie possibili, solamente quelle ottimali dal punto di vista del consumo di propellente, con una velocità all'uscita dalla sfera d'influenza terrestre non fissata a priori ma frutto dell'ottimizzazione in atto.

In seguito alla descrizione del metodo matematico e del modello dinamico che ne deriva in base alle condizioni al contorno applicate, verranno mostrati i risultati dell'analisi dello studio delle possibili traiettorie derivanti da missioni partite in date diverse e durate un numero diverso di giorni, dei loro parametri orbitali e consumi, nonché il confronto con gli stessi aspetti di orbite che non hanno il privilegio di partire dal punto L2 e che invece partono dalla Terra.

Chapter 1

Missioni nel punto L2 del sistema Sole-Terra

Una sonda collocata nell'esatto punto L2 sente l'attrazione gravitazionale del Sole e della Terra provenire esattamente dalla stessa direzione: la congiungente i tre corpi. Poiché Sole e Terra si trovano entrambi dallo stesso lato rispetto alla sonda, allora le due forze avranno lo stesso verso e pertanto si sommeranno.

Considerando un corpo in orbita attorno ad un corpo principale come il Sole, tanto più questo è lontano dal corpo principale e dunque l'orbita grande, quanto più la percorrerà ad una velocità minore. Il periodo orbitale della Terra è infatti maggiore di Venere, più vicina al Sole, ma minore di Marte, più lontano. Secondo questa logica, un corpo orbitante in L2 dovrebbe avere un periodo orbitale maggiore rispetto a quello terrestre. In realtà non è così, perché l'attrazione combinata dei due corpi fa percorrere ad un satellite posto in L2 una rivoluzione nello stesso periodo orbitale della Terra.

Il bilanciamento tra la forza gravitazionale totale e la forza centrifuga necessaria per far orbitare lì lo spacecraft fa sì che il costo per il mantenimento in orbita sia minimo, nonostante degli aggiustamenti siano via via necessari perché tale punto è instabile: una perturbazione non contrastata porterebbe il corpo ad allontanarsi dalla Terra lungo la direzione della congiungente.

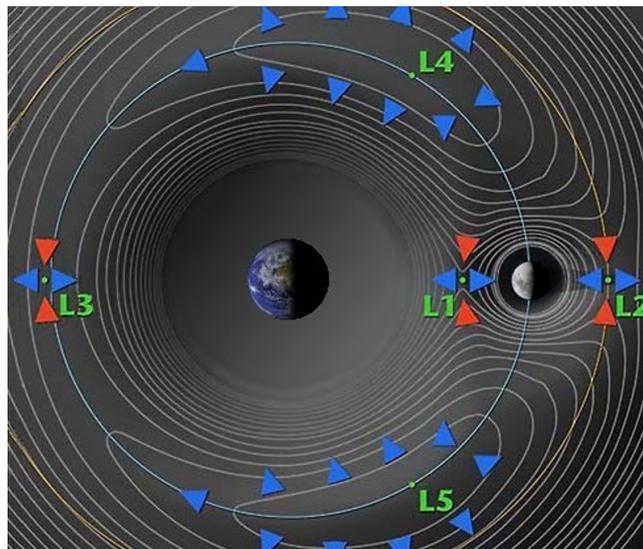


Figure 1.1: Rappresentazione dei cinque punti di Lagrange

Le orbite nei pressi di L2 sono dette orbite Lissajous, dalla somiglianza con le curve omonime. Il corpo non sta orbitando in realtà attorno ad L2 perché quest'ultimo non è dotato di massa e pertanto non è in grado di esercitare una forza gravitazionale che forzi il moto di un altro corpo attorno a sé, ma è solamente sede dell'equilibrio tra le forze. Ciò che ne risulta è una traiettoria tridimensionale in questa zona se il satellite, collocato in un campo di forza gravitazionale generato da due corpi molto più massivi di sé, ha una massa trascurabile rispetto a questi.

Queste traiettorie non è detto che siano chiuse, dipende dal moto planare rispetto a quello extra-planare: il rapporto tra le frequenze di questi due moti deve essere un numero razionale. Non esiste un'unica orbita Lissajous possibile, ma tante e che si differenziano a seconda della distanza dal punto di Lagrange. Sono possibili non solo attorno ad L2, ma anche attorno ad L1 ed L3. Non sono periodiche, al contrario di un particolare caso chiamato orbita Halo.

L'orbita Halo è anch'essa una soluzione particolare del problema dei tre corpi che verrà in seguito analizzata, possibile sotto determinate condizioni e semplificazioni. In queste orbite la frequenza del moto sul piano eguaglia la frequenza del moto fuori dal piano. L'orbita è chiusa e ha una forma che ricorda quella di un cerchio. Anche quest'orbita non è unica: ne sono possibili varie, simmetriche a coppie rispetto al piano dell'orbita dei due corpi principali.

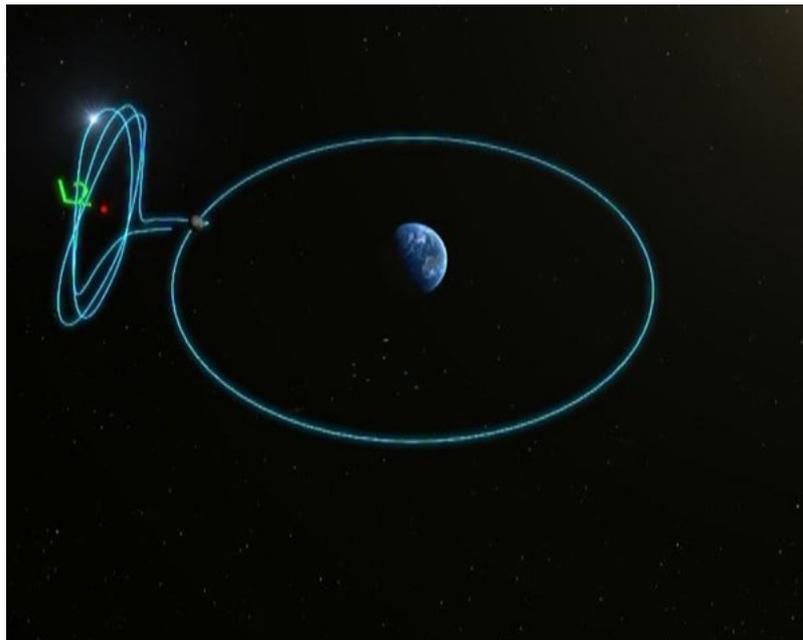


Figure 1.2: Esempio di orbita Lissajous.

1.1 Cenni storici

Wilkinson

La sonda Wilkinson Microwave Anisotropy Probe della Nasa fu la prima ad orbitare in un'orbita Lissajous attorno a L2. Lanciata il 30 giugno 2001, fu operativa per 9 anni ed un mese, durante i quali studiò la radiazione cosmica di fondo rimanente dal Big Bang mediante l'utilizzo di microonde attraverso le quali misurò le differenze di temperatura tra le radiazioni e mappò il cielo una volta ogni sei mesi. I dati ottenuti servirono per creare

un modello sulla composizione fisica dell'universo, che andò in parte a confermarne uno teorico precedente e teorizzare la presenza dell'energia oscura, in parte rilevarono delle anomalie tutt'ora inspiegate, come la presenza di una macchia fredda nella radiazione, a bassa densità di materia. Questa fu una delle scoperte chiave dell'anno 2003. Venne infine dismessa posizionandola in un'orbita eliocentrica nella quale potesse non essere d'intralcio alle missioni future.

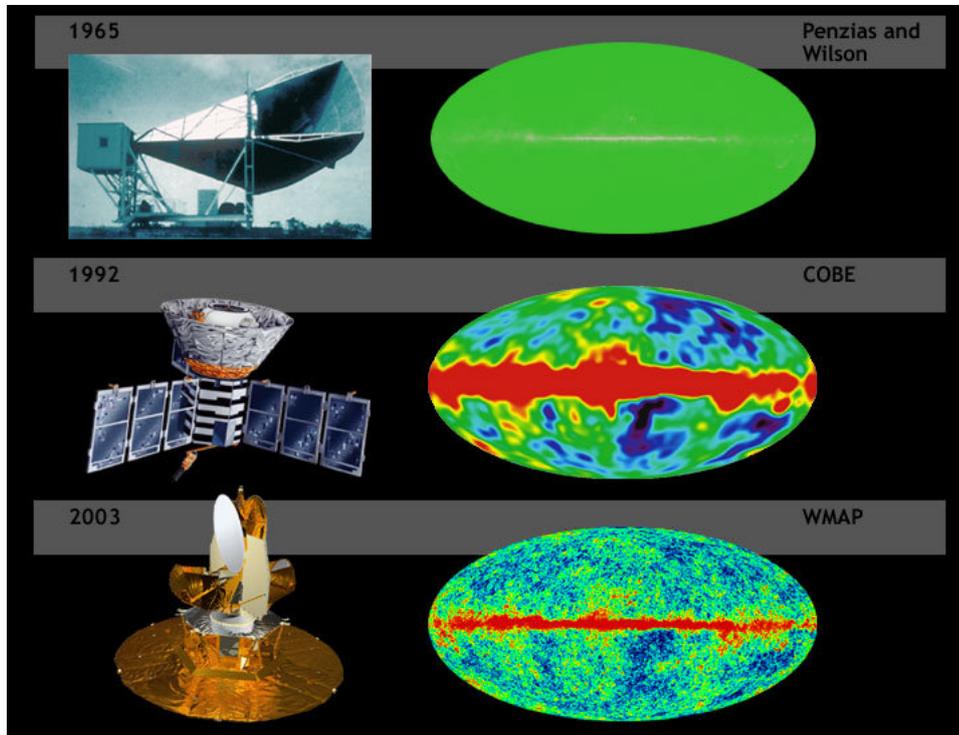


Figure 1.3: Confronto tra la sensibilità di Wilkinson e di due precedenti missioni con gli stessi obiettivi.

WIND

Un'altra sonda NASA chiamata WIND, lanciata nel 1994, orbitò attorno ad L2 tra il novembre 2003 e l'aprile 2004, prima di dirigersi verso il suo vero target: il punto L1. Inizialmente studiò la magnetosfera terrestre effettuando varie orbite che ci passassero attraverso, poi passò all'analisi del vento solare ancora imperturbato dalla magnetosfera nella zona di L1. L1 è infatti più consono allo studio del Sole e della sua attività. Ha già fornito materiale utile per più di 5000 pubblicazioni scientifiche ed attualmente possiede un quantitativo di carburante che le permetterebbe di orbitare ancora per 52 anni, almeno fino al 2074.

Herschel

L'osservatorio spaziale Herschel fu un telescopio ESA attivo dal 2009 al 2013 in un'orbita Lissajous che si occupava dell'osservazione delle nebulose che ospitano la nascita delle stelle, il cui scopo era studiare il processo di formazione primordiale di sostanze necessarie alla vita, come l'acqua. Il suo viaggio terminò quando l'elio liquido responsabile della refrigerazione esaurì, un anno dopo il tempo previsto. Fu il più grande telescopio ad infrarossi mai lanciato. Al termine previsto della missione, venne immesso in un'orbita eliocentrica leggermente superiore a quella della Terra.

Planck

Nel 2009 un'altra sonda ESA chiamata Planck si indirizzò verso L2 con lo scopo di approfondire gli studi fatti dalla sonda NASA Wilkinson e terminando il proprio viaggio allo stesso modo. Utilizzando microonde ed infrarosso, permise lo studio di anisotropie dell'universo, densità di materia ordinaria e materia oscura con una precisione molto elevata grazie alla bassa risoluzione angolare e all'alta sensibilità dei payload. Fu la prima missione europea a studiare lo sfondo cosmico a microonde, che permea tutto l'universo. Anch'essa venne infine spostata da L2 ad un'orbita eliocentrica.

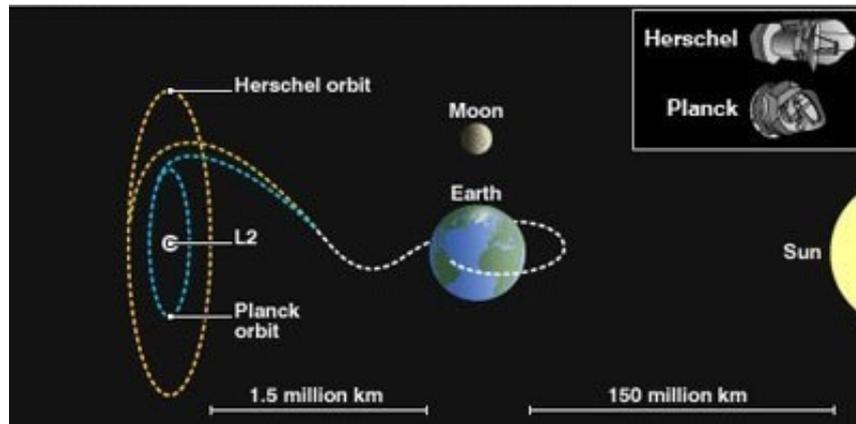


Figure 1.4: Rappresentazione della traiettoria delle sonde Herschel e Planck

Chang'e 2

La cinese Chang'e 2 iniziò il proprio viaggio nel 2010 con l'obiettivo principale di studiare la Luna orbitandole attorno. Dopo il completamento di questo task, si diresse verso L2 del sistema Sole-Terra per testare dei sistemi di navigazione e controllo, dove rimase circa un anno e dal quale evase in direzione dell'asteroide 4179 Toutatis, un asteroide appartenente alla categoria Near-Earth, di 2,6 km di diametro, a lenta rotazione attorno al proprio asse, potenzialmente pericoloso per la Terra e dalla forma allungata ed irregolare. Nel dicembre del 2012 Chang'e 2 sorvolò 4179 Toutatis, raggiungendo una distanza minima di 3,2 km dalla sua superficie. Nel 2014 è stato perso il contatto a causa dell'indebolimento del segnale derivante dalla grossa distanza rispetto alla Terra. Si stima che però torni a distanze dalla Terra sufficienti per riprendere le comunicazioni verso il 2027.

1.2 Missioni attuali

Attualmente son presenti tre sonde: la sonda ESA Gaia, la russa Spektr-RG e James Webb.

Gaia

Gaia esegue un'orbita Lissajous dal 2013 e terminerà la missione, a meno di ulteriori proroghe, a fine 2022. Consiste in due telescopi e strumentazioni come star tracker, spettrometri e fotometri che permettono la misurazione di temperatura, massa, età, composizione elementare, luminosità, velocità e posizione di oltre un milione di stelle, pianeti ed asteroidi, con lo scopo di catalogazione e creazione di una mappa 3D molto precisa della Via Lattea e un po' meno precisa di galassie più lontane. Tutto ciò è reso possibile

sia dalle misurazioni molto precise che è in grado di fare, sia dal fatto che già solo nei primi cinque anni della sua orbita ha seguito l'orbita dei suoi obiettivi per 70 volte. Sta riuscendo anche in intenti per i quali non era stata progettata, come l'individuazione di terremoti stellari, che avvengono sulla superficie di una stella e ne modificano la forma, fornendo importanti informazioni sul funzionamento interno delle stelle.

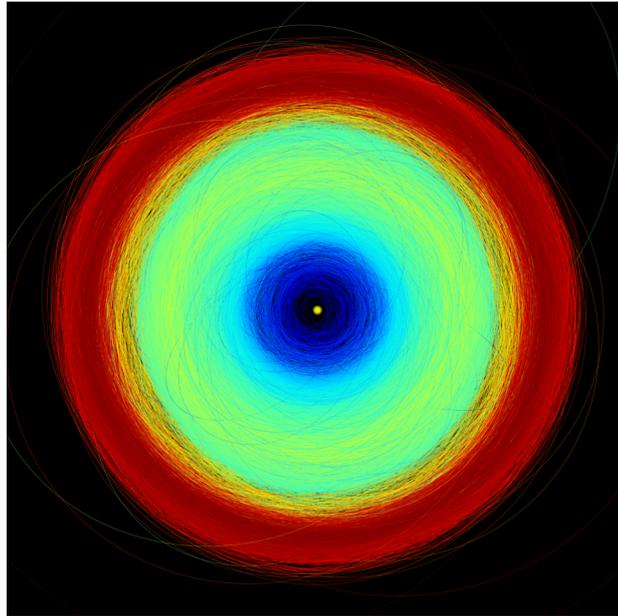


Figure 1.5: Rappresentazione delle traiettorie degli asteroidi seguiti da Gaia.

Spektr-RG

Spektr-RG è un altro telescopio spaziale, lanciato nel 2019 e posto in orbita halo attorno a L2. Questo svolge misurazioni nello spettro dei raggi X e gamma per l'analisi della materia oscura, di cluster costituiti da centinaia di migliaia di galassie e dei nuclei galattici attivi, zone al centro di una galassia nelle quali è presente un buco nero super massiccio caratterizzate dall'emissione di elevatissime quantità di radiazione, persino superiori a quelle della galassia stessa che lo ospita. I nuclei galattici attivi sono attualmente il mezzo migliore per lo studio del comportamento dello spazio-tempo nelle vicinanze degli oggetti più densi e massicci nonché per testare la teoria della relatività generale.

James Webb

James Webb è l'ultimo arrivato. Frutto di una collaborazione tra NASA, ESA e CSA, è stato lanciato nel dicembre 2021 ed è l'erede del telescopio Hubble. Servirà per indagare sulla formazione dell'universo. Segue un'orbita Halo, nella quale lavora a temperature criogeniche, sotto i 50 K. Rispetto ai precedenti telescopi è all'avanguardia sia in termini di banda dell'infrarosso utilizzata, sia per l'eliminazione di interferenze provenienti da corpi non oggetto di studio. Permette l'osservazione di circa 100 corpi contemporaneamente, con una precisione maggiore rispetto ai suoi predecessori.



Figure 1.6: Foto del telescopio James Webb

1.3 Missioni future

Euclid

Euclid è un telescopio in fase di realizzazione da parte dell'ESA, il cui lancio è previsto nel 2023 e che si immetterà in un'orbita Halo. Il suo obiettivo sarà lo studio della materia oscura, dell'energia oscura e dell'evoluzione dell'universo mediante l'utilizzo di tecnologie che lavorano nel vicino infrarosso e nel visibile. Sarà il primo a studiare effettivamente le ere evolutive dell'universo e la sua espansione negli ultimi dieci miliardi di anni, arrivando a calcolarne l'accelerazione causata dall'energia oscura.

PLATO

Nel 2026 inizierà la missione ESA PLATO, che studierà gli esopianeti rocciosi usando il metodo del transito. Questo consiste nello studiare le variazioni di luminosità che subisce una stella quando un corpo le passa davanti e permette pertanto l'individuazione di pianeti finora sconosciuti, così come della loro eventuale atmosfera. Un maggiore focus sulle loro atmosfere e composizioni verrà approfondito dalla sonda NASA ARIEL dal 2029 in poi.

LiteBIRD

LiteBIRD, prevista per il 2028, è una missione dell'agenzia spaziale giapponese che attraverso l'utilizzo delle microonde fornirà una mappa del cielo e studierà le onde gravitazionali primordiali in base ad analisi sulla loro polarizzazione. Tutto ciò permetterà dunque di studiare il Big Bang e testare l'effettiva veridicità di alcune teorie a riguardo. Verrà fornito sia di un telescopio a bassa frequenza, sia di uno ad alta frequenza.

Comet Interceptor

Il 2029 sarà l'anno del lancio del Comet Interceptor ESA, una missione della categoria di tipo fast per i tempi di realizzazione, la massa ed il budget contenuti. Sarà la prima a studiare una cometa dinamicamente nuova, non periodica e probabilmente direttamente

proveniente dalla Nube di Oort o da un'altra galassia, senza mai aver attraversato la parte interna del sistema solare ed esserne quindi stata contaminata. Studierà dunque un oggetto completamente nuovo. Per via dei brevi tempi di anticipo nell'individuazione del passaggio di questo tipo di comete, questa verrà collocata in L2, dove rimarrà finché non le verrà affidata la missione, per un tempo orientativamente di tre anni.

ATHENA

ATHENA è previsto duri quattro anni dal 2034 in poi. L'ESA, la JAXA e la NASA stanno progettando una navicella che lavori con i raggi X ed esamini corpi celesti con strutture a gas caldo e corpi neri super massivi durante un'orbita Halo molto larga. Servirà per trovare risposte su come si assembli la materia nelle strutture a larga scala che attualmente osserviamo nell'Universo e su come la crescita dei buchi neri super massivi influenzi la crescita dell'Universo stesso. Le sue strumentazioni saranno almeno cento volte più sensibili di quelle dei suoi predecessori Chandra e XMM-Newton.

Chapter 2

Asteroidi Near-Earth

2013 XY20 è un asteroide appartenente alla categoria degli asteroidi Near-Earth, insieme ad altri 29000 al momento noti.

Questi sono caratterizzati da un'orbita vicina a quella terrestre, la cui minima distanza fissata dal Sole è fissata per convenzione ad 1,3 UA. Non è detto che intersechino l'orbita terrestre o siano potenzialmente pericolosi. Vengono considerati pericolosi quando incrociano l'orbita della Terra e hanno un diametro superiore ai 140 m. Il più grande NEA attualmente conosciuto è 1036 Ganymed, con un diametro di 41 km.

La loro orbita resta immutata per periodi lunghissimi, che vanno dai 10 ai 100 milioni di anni, ma oltre tale arco temporale è molto probabile che per vari motivi che vanno dal sorvolo ravvicinato di un pianeta, all'impatto con un altro oggetto o al semplice decadimento orbitale, la loro orbita vari.

In particolare 2013 XY20 è un asteroide non potenzialmente pericoloso che effettua un'orbita di 441 giorni attorno al Sole, passando da una distanza minima di 1,01 UA ad una distanza massima di 1,26 UA dal Sole. La minima distanza che raggiunge dalla Terra è di 0,03 UA, una distanza elevata. Al momento esistono solo stime del suo diametro, effettuate in base a come riflette la luce. Potrebbe andare dai 13 ai 59 m di diametro.

L'idea è sempre quella di effettuare una missione che possa sorvolarli o atterrarci sopra, in modo da studiarne la composizione e le caratteristiche per approfondire la conoscenza dell'universo, dell'evoluzione e poter eventualmente trovare delle corrispondenze tra la loro composizione e quella dei campioni di asteroidi rinvenuti sulla Terra. Al momento non è ancora stata programmata una missione che preveda la presenza di astronauti, ma in futuro potrebbe essere possibile.

Son però state già effettuate missioni senza equipaggio, come la precedentemente citata Chang'e 2.

2.1 Missioni passate verso asteroidi Near-Earth

NEAR

La prima missione a far visita ad un asteroide Near-Earth fu la sonda NEAR della NASA nel 2001, che sorvolò ben due asteroidi. Inizialmente nel 1996, dopo un breve periodo in cui orbitò in un'orbita di parcheggio aspettando l'avvicinamento dell'asteroide, fece un flyby attorno a 253 Mathilde, un asteroide di 61 km di diametro del quale mappò il 60 % della superficie, fotografandolo più di 500 volte e permettendone una stima di massa, gravità e altre caratteristiche.

Poi l'anno successivo si diresse verso l'asteroide NEA EROS, di 17 km di diametro e a forma di mezza Luna, fallendo un primo tentativo di inserimento nella sua orbita e riuscendovi poi nel 2000. Da qui ne osservò la superficie per un anno e studiò il campo gravitazionale, i cui risultati indicarono la compattezza della sua struttura interna. Gli ingegneri decisero infine di farla atterrare sull'asteroide stesso, fornendo così ulteriori dati sia in avvicinamento sia all'arrivo sulla sua superficie grazie ad un altimetro laser, una fotocamera multispettrale, un magnetometro e due spettrometri, uno infrarosso ed uno a raggi X e gamma.

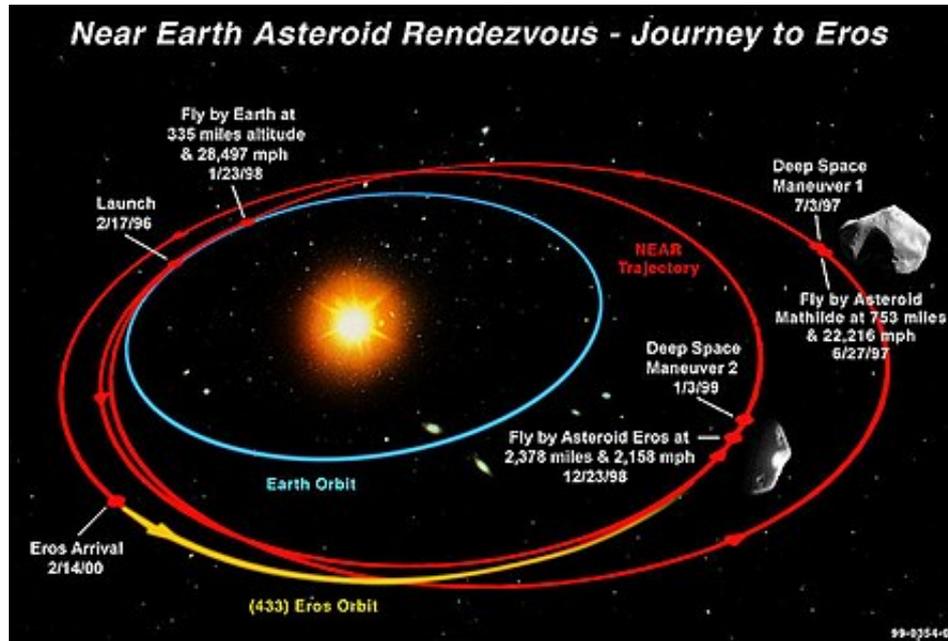


Figure 2.1: Rappresentazione della traiettoria seguita da NEAR.

Hayabusa

Hayabusa fu una sonda della JAXA che fece visita a 25143 Itokawa, un asteroide lungo 535 m e a forma di nocciolina, nel 2005 grazie all'utilizzo di motori a ioni.

Una fase iniziale fu orbitare attorno all'asteroide per studiarne forma, morfologia, costituzione e rotazione. La fase finale vide l'atterraggio sulla sua superficie per un arco temporale di 30 minuti e la raccolta di campioni rocciosi che vennero poi riportati sulla Terra per essere studiati nel 2010.

Era previsto anche un minilander che lo ispezionasse, ma ne fallì l'atterraggio.

Hayabusa2

Il successore di Hayabusa si diresse nel 2014 verso 162173 Ryugu, un asteroide di 980 m di diametro. Qui sganciò due rover, grazie ai quali raccolse campioni, per poi tornare sulla Terra nel 2020 e lasciarli cadere a sud dell'Australia grazie ad un paracadute per permetterne l'analisi.

Rimasta in orbita ed indirizzatasi verso il deep space, al momento la sua missione è stata prolungata fino al 2031, quando effettuerà un rendez-vous verso l'asteroide 1998 KY26. Fu la prima missione a permettere la trasmissione di immagini dalla superficie di un asteroide.

OSIRIS-REx

Nel 2016 venne inviata alla volta di 101955 Benu. Questo ha un diametro di 500 m ed è l'asteroide con il punteggio più alto nella scala Palermo di pericolosità. Dopo due anni di viaggio, ha iniziato la sua orbita attorno a Benu e, nel 2023, riporterà sulla Terra 60 g di campioni dell'asteroide. E' stato catalogato, per via delle sue caratteristiche al momento note, come un asteroide molto antico ma che non ha subito grosse variazioni dalla sua formazione e che pertanto potrà fornire importanti informazioni.



Figure 2.2: Foto della sonda OSIRIS-REx sulla superficie di Bennu.

Chapter 3

Fondamenti di meccanica orbitale

Qualsiasi sia il target di missione, un satellite sarà sempre soggetto all'attrazione gravitazionale di uno o più corpi celesti di massa molto maggiore rispetto a lui. Nel caso in cui il corpo fosse solo uno, per determinare la traiettoria dello spacecraft si deve risolvere il cosiddetto "problema dei due corpi". Questo è di più facile risoluzione rispetto al "problema dei tre corpi", caso nel quale esso senta anche l'attrazione di un altro corpo. Qui si possono scrivere in forma esplicita solamente soluzioni particolari del problema. Si può però studiare in maniera approssimata imponendo delle semplificazioni, passando così al "problema dei tre corpi circolare ristretto".

A seconda della diversa interazione ed uso dei motori, saranno possibili vari tipi di traiettorie dette coniche. Ogni orbita può essere descritta da un set di parametri orbitali che la definiscono completamente e può essere tracciata in diversi sistemi di riferimento.

Verrà fatto un focus sulle varie fasi della missione, che passa dall'essere all'interno della sfera d'influenza terrestre alla partenza, a quella del Sole mentre si dirige verso l'asteroide. Dopo aver descritto questi fondamenti, verranno analizzati più nel dettaglio i punti lagrangiani e la meccanica che li caratterizza.

3.1 Sistemi di riferimento

Una stessa orbita può essere raffigurata in diversi sistemi di riferimento, apparendo così in maniera diversa. La scelta del sistema di riferimento è dettata dalla necessità di mostrare meglio un aspetto rispetto ad un altro, come si vedrà più avanti.

I sistemi di riferimento usati in questa tesi sono:

- geocentrico equatoriale
- eliocentrico-eclittica

Sistema di riferimento geocentrico equatoriale

L'origine è il centro della Terra ed il piano fondamentale il suo piano equatoriale. Questo sistema di riferimento non ruota con la Terra, ma è fisso.

Si possono utilizzare sia coordinate cartesiane sia polari (raggio e posizioni angolari).

La terna di assi è destrorsa e costituita da:

- asse X che punta in direzione della costellazione dell'Ariete il giorno dell'equinozio di primavera, in un punto chiamato punto vernale
- asse Y collocato sul piano equatoriale a 90° est dall'asse X
- asse Z perpendicolare al piano equatoriale e che punta verso la stella Polare

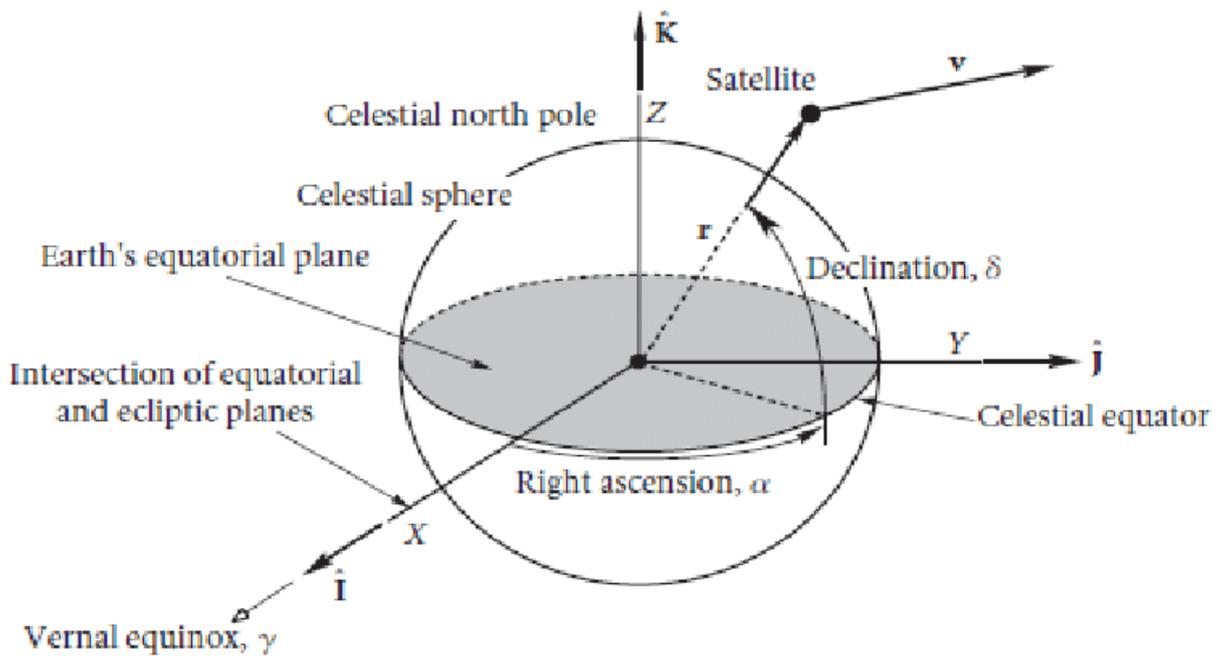


Figure 3.1: Sistema di riferimento geocentrico equatoriale.

Sistema di riferimento eliocentrico-eclittica

La sua origine è il centro del Sole ed il suo piano fondamentale il piano dell'eclittica, dato dal moto apparente del Sole rispetto alla sfera celeste per un osservatore posto sulla Terra. Anche questo è un sistema di riferimento fisso, nel quale si possono usare sia coordinate polari sia cartesiane.

La sua terna di assi è destrorsa ed è costituita da:

- asse X diretto in direzione del punto vernale
- asse Y a 90° est rispetto ad X sul piano fondamentale
- asse Z perpendicolare al piano fondamentale e diretto verso la stella polare

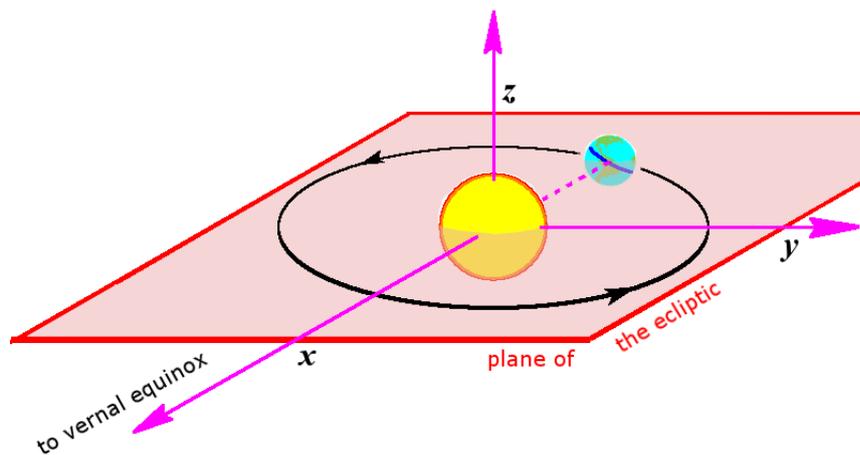


Figure 3.2: Sistema di riferimento eliocentrico-eclittica.

3.2 Parametri orbitali

Un'orbita viene completamente determinata da un set di sei grandezze chiamate parametri orbitali. Noti questi, è possibile tracciarla.

I parametri orbitali sono:

- il semiasse maggiore " a "
- l'eccentricità " e "
- l'inclinazione " i "
- l'anomalia vera " ν "
- la longitudine del nodo ascendente " ω "
- l'argomento del periastro " Ω "

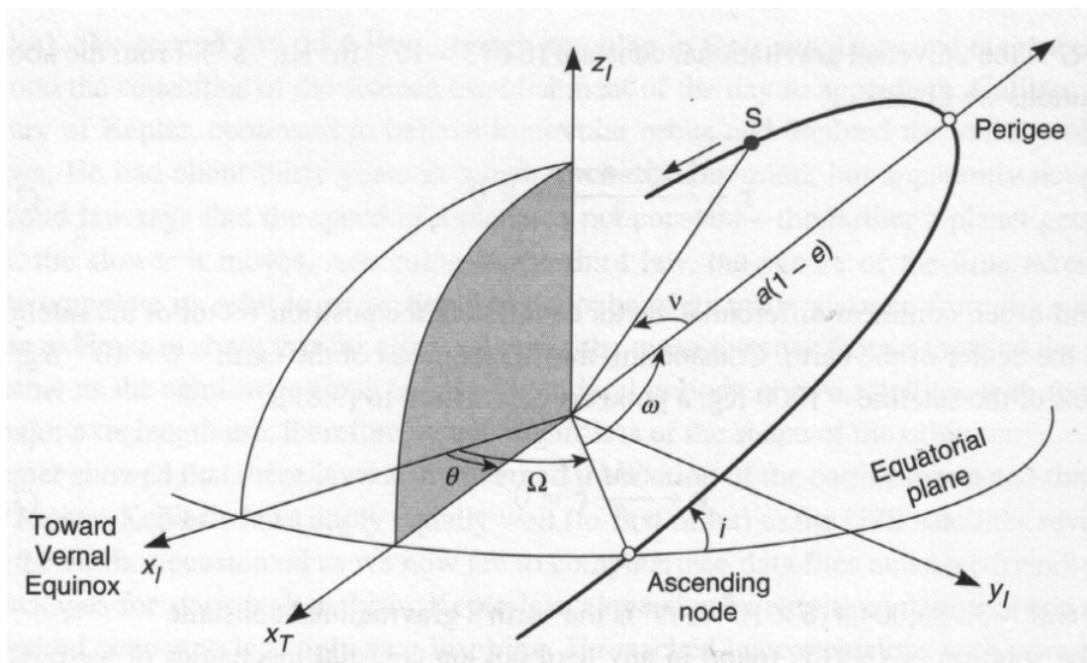


Figure 3.3: Un'orbita e i suoi parametri orbitali.

Semiasse maggiore

Riguarda sia la grandezza, sia l'energia dell'orbita.

Per un'orbita circolare il semiasse maggiore è il raggio dell'orbita, costante. Per un'orbita ellittica il valore del semiasse è anch'esso positivo. Queste due sono caratterizzate da un'energia negativa. Una parabola ha un semiasse maggiore infinito, il quale comporta un'energia orbitale nulla. Invece un'iperbole ha un semiasse maggiore negativo perché per via della fisica del problema l'altro ramo non sarebbe una traiettoria percorribile e la sua

energia è positiva.

L'energia orbitale viene infatti descritta come:

$$E = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a}$$

Il primo modo di definire l'energia orbitale ha un termine cinetico ed uno potenziale: poiché l'energia orbitale è costante, tanto più il satellite si trova vicino al corpo principale e dunque a raggi bassi, quanto più percorrerà l'orbita velocemente. Il contrario avviene ai raggi elevati, infatti l'apoastro è il punto di minima velocità orbitale.

Inclinazione

E' l'angolo tra il piano di riferimento (equatore del corpo principale o piano dell'eclittica) e l'orbita del satellite. Se il suo valore è maggiore di 180° , l'orbita è detta retrograda ed è in verso opposto a quello di rotazione del corpo attorno al quale si sta ruotando. Altrimenti è detta diretta.

Eccentricità

E' indicativa della forma dell'orbita. Per valori minori di 1 le orbite sono chiuse, al di sopra indica orbite aperte.

Se $e=0$: orbita circolare.

Per $0 < e < 1$: orbita ellittica. Più è alto il valore, più si discosta da un cerchio.

Se $e=1$: orbita parabolica.

Se $e > 1$: orbita iperbolica.

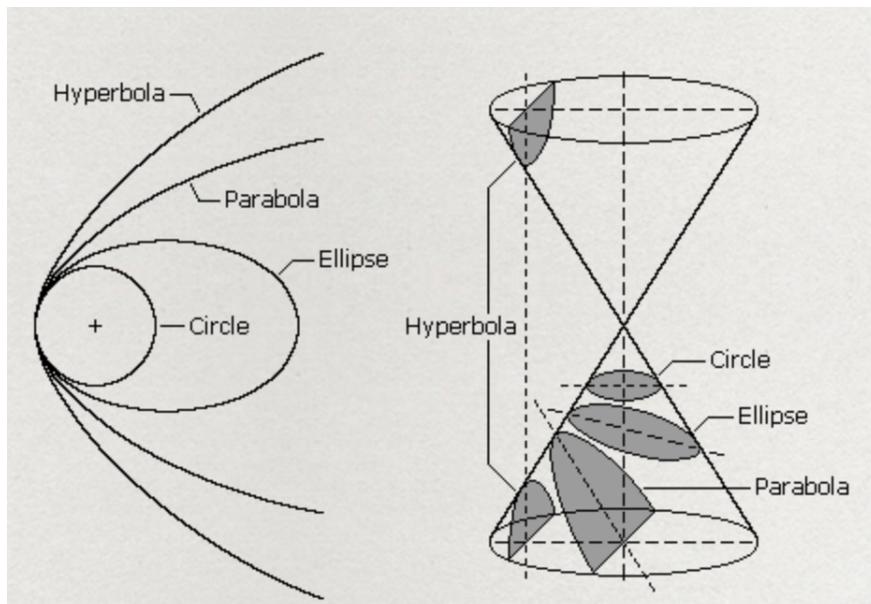


Figure 3.4: Ogni curva ottenuta mediante il sezionamento del cono rappresenta una conica, nonché una possibile traiettoria.

Anomalia vera

Descrive la posizione angolare del satellite in quel determinato punto della sua orbita. E' l'angolo, posto sul piano orbitale, tra la linea chiamata degli apside (che unisce apogeo e perigeo) dal lato nel quale indica il perigeo e la posizione del satellite.

Man mano che il satellite si muove lungo la sua orbita, l'anomalia vera cambia e passa da 0° a 360° a orbita conclusa. E' l'unico parametro orbitale tempo-dipendente anche nel caso in cui non si effettuino manovre.

Longitudine del nodo ascendente

La linea dei nodi è la linea ottenuta dall'intersezione tra il piano dell'orbita ed un piano di riferimento, che può essere il piano equatoriale del pianeta attorno al quale si sta orbitando o il piano dell'orbita solare.

Questa ad un estremo ha un punto chiamato nodo ascendente, nel quale per via del senso di percorrenza dell'orbita si passa dall'emisfero meridionale a quello settentrionale del corpo principale, e all'altro estremo ha il nodo discendente, nel quale accade l'opposto.

La longitudine del nodo ascendente è la distanza angolare, sul piano di riferimento, tra il nodo ascendente e l'asse "x" del sistema di riferimento, che per un corpo orbitante attorno al Sole punta in direzione della costellazione dell'Ariete usando un sistema di riferimento eliocentrico.

Argomento del periastro

E' l'angolo tra il nodo ascendente e la direzione del perigeo, dunque è un angolo sul piano orbitale.

3.3 Problema dei due corpi

Il problema dei due corpi permette di conoscere la traiettoria di un corpo di massa m_1 soggetto ad un'unica forza: l'attrazione gravitazionale di un altro corpo di massa m_2 .

La forza gravitazionale è una forza prettamente attrattiva che un corpo dotato di massa esercita su altri corpi, spingendoli ad avvicinarsi a sè. Questa forza dipende dalla distanza tra i due: tanto più i due corpi saranno lontani, tanto meno imponente sarà la forza attrattiva. Considerando la mutua distanza pari ad r , la forza di gravità può essere scritta come:

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$$

con $G = 6,67 * 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$ pari alla costante gravitazionale.

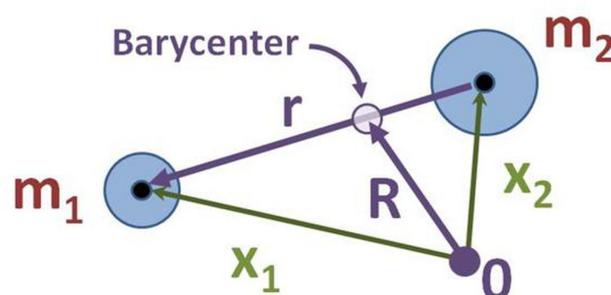


Figure 3.5: Rappresentazione del problema dei due corpi, uno di massa m_2 ed uno di massa m_1 .

Per semplificare il problema si fanno delle ipotesi:

- le due masse sono puntiformi
- $m_2 \gg m_1$
- agiscono solo le forze gravitazionali

Si ottiene così che l'accelerazione \ddot{r} cui è soggetto il corpo, chiamata anche equazione del moto. è:

$$\ddot{r} = -\frac{\mu}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Risolvendola si può trovare la posizione del corpo. Volendo trovare la traiettoria del satellite, μ è riferita al corpo primario, più massivo, ed è pari a Gm_2 . Sfruttando il concetto di momento angolare orbitale:

$$h = \vec{r} \wedge \dot{\vec{r}}$$

si ottiene:

$$r = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1 + e \cos(\nu)}$$

Volendola scrivere solamente alle dipendenze dei parametri orbitali:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\nu)}$$

Questo tipo di problema è più semplice perché è possibile trovare dunque una soluzione analitica, cosa che non sarà più possibile nel caso in cui ci fosse in ballo anche l'attrazione di un altro corpo.

3.4 Problema dei tre corpi circolare ristretto

Permette di studiare il moto di un corpo di massa m soggetto all'attrazione di due corpi principali m_1 ed m_2 nel caso in cui valgano due ipotesi:

- il terzo corpo sia molto meno massivo dei due principali: $m_1 > m_2 > m$
- i due corpi principali compiano un'orbita circolare attorno al baricentro del sistema binario

Si considera un sistema di riferimento centrato nel baricentro e ruotante con esso. Nell'equazione del moto compariranno pertanto l'accelerazione centripeta e accelerazioni apparenti come quella derivante dalla forza di Coriolis.

Per trovare l'espressione del baricentro e scrivere le equazioni in base al moto relativo, si introducono delle grandezze:

$$M = m_1 + m_2$$

$$\mu = \frac{m_2}{M}$$

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau}$$

Grazie alle quali si può scrivere:

$$m_2 = \mu M$$

$$m_1 = (1 - \mu)M$$

Chiamando R la distanza totale tra m_1 ed m_2 :

$$(1 - \mu)Mx = \mu M(R - x)$$

$$x = \mu R$$

Le posizioni dei corpi rispetto al centro di massa del sistema possono esser scritte come:

$$m_1 = \begin{bmatrix} -\mu R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$m_2 = \begin{bmatrix} (1 - \mu)R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$m = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

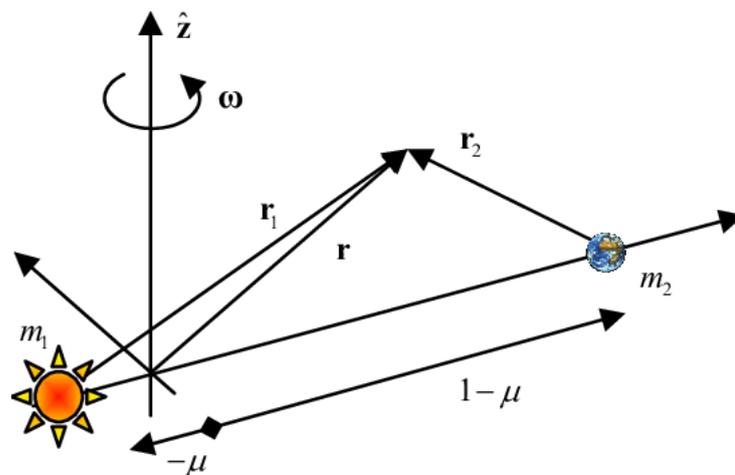


Figure 3.6: Rappresentazione del problema dei tre corpi

La posizione relativa di m rispetto ai corpi principali è:

$$r_1 = \begin{bmatrix} X + \mu R \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

$$r_2 = \begin{bmatrix} X - (1 - \mu)R \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

Si ottiene l'equazione del moto:

$$\ddot{r} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) + 2\vec{\omega} \wedge \dot{\vec{r}} = \frac{1}{m}(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$$

con:

$$\vec{F}_1 = -G \frac{(1-\mu)Mm}{r_1^3} \vec{r}_1$$

$$\vec{F}_2 = -G \frac{\mu Mm}{r_2^3} \vec{r}_2$$

Considerando che:

$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}$$

ed eseguendo tutti i prodotti vettoriali presenti nell'equazione del moto si ottiene, dividendo in componenti:

$$\ddot{X} - \omega^2 X - 2\omega \dot{Y} = -GM(1-\mu)(X + \mu R) \frac{1}{r_1^3} - GM\mu(X - (1-\mu)R) \frac{1}{r_2^3}$$

$$\ddot{Y} - \omega^2 Y + 2\omega \dot{X} = -GM(1-\mu)Y \frac{1}{r_1^3} - GM\mu Y \frac{1}{r_2^3}$$

$$\ddot{Z} = -GM(1-\mu)Z \frac{1}{r_1^3} - GM\mu Z \frac{1}{r_2^3}$$

Queste equazioni si possono adimensionalizzare mediante le seguenti grandezze:

$$\vec{\rho} = \frac{\vec{r}}{R}$$

$$\xi = \frac{X}{R}$$

$$\eta = \frac{Y}{R}$$

$$\zeta = \frac{Z}{R}$$

$$\tau = T\omega$$

$$\frac{d}{dt} = \omega \frac{d}{d\tau}$$

Ottenendo:

$$\xi'' - \xi - 2\eta' = -(1-\mu) \frac{\xi + \mu}{\rho_1^3} - \mu \frac{\xi - (1-\mu)}{\rho_2^3}$$

$$\eta'' - \eta + 2\xi' = -(1-\mu) \frac{\eta}{\rho_1^3} - \mu \frac{\eta}{\rho_2^3}$$

$$\zeta'' = -(1-\mu) \frac{\zeta}{\rho_1^3} - \mu \frac{\zeta}{\rho_2^3}$$

Se prima non era possibile la risoluzione per via analitica, ora grazie alle ipotesi semplificative fatte e attraverso l'utilizzo di un sistema di riferimento ruotante e centrato nel baricentro del sistema, si può arrivare ad uno studio analitico se si introduce un'altra grandezza: il potenziale.

3.5 Funzione del potenziale gravitazionale

Lagrange analizzando il problema dei tre corpi si accorse nel 1772 che ci sono cinque punti spaziali nei quali la combinazione delle forze gravitazionali dei due corpi principali bilancia la forza centrifuga necessaria a mantenere il terzo corpo in orbita.

Il calcolo della loro posizione fu possibile previa introduzione del concetto di potenziale. Se nel caso del problema dei due corpi il potenziale aveva la classica forma:

$$U = -\frac{Gm_1}{r}$$

ora che i corpi principali son due e il sistema di riferimento non è inerziale assume l'espressione:

$$\begin{aligned} U &= \frac{Gm_1}{r_1} + \frac{Gm_2}{r_2} + \frac{1}{2}\omega^2(X^2 + Y^2) \\ &= \frac{1-\mu}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2} + \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2) \end{aligned}$$

Laddove il potenziale sia altissimo, vorrebbe dire che servirebbe un grande lavoro per spostare il corpo da un punto ad un altro. Quello che è utile è invece vedere se esistono punti dove il potenziale è basso, in modo da dover effettuare meno lavoro per eseguire lo spostamento.

Studiando il gradiente del potenziale nelle tre direzioni adimensionate ξ , η e ζ , si vede che questo corrisponde a parte dell'equazione del moto, che può pertanto essere riscritta così:

$$\begin{aligned} \xi'' - 2\eta' &= \frac{dU}{d\xi} \\ \eta'' + 2\xi' &= \frac{dU}{d\eta} \\ \zeta'' &= \frac{dU}{d\zeta} \end{aligned}$$

Infatti:

In direzione ξ

$$\frac{dU}{d\xi} = \xi - \frac{1-\mu}{\rho_1^2} \frac{d\rho_1}{d\xi} - \frac{\mu}{\rho_2^2} \frac{d\rho_2}{d\xi}$$

Poiché:

$$\begin{aligned} \rho_1^2 &= (\xi + \mu)^2 + \eta^2 + \zeta^2 \\ \rho_2^2 &= (\xi - (1 - \mu))^2 + \eta^2 + \zeta^2 \end{aligned}$$

e dunque:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_1}{d\xi} &= \frac{\xi + \mu}{\rho_1} \\ \frac{d\rho_2}{d\xi} &= \frac{\xi - (1 - \mu)}{\rho_2} \end{aligned}$$

si può riscrivere la derivata del potenziale come:

$$\frac{dU}{d\xi} = \xi - (1 - \mu) \frac{\xi + \mu}{\rho_1^3} - \mu \frac{\xi - (1 - \mu)}{\rho_2^3}$$

In direzione η

$$\frac{dU}{d\eta} = \eta - \frac{1 - \mu}{\rho_1^2} \frac{d\rho_1}{d\eta} - \frac{\mu}{\rho_2^2} \frac{d\rho_2}{d\eta}$$

con:

$$\frac{d\rho_1}{d\eta} = \frac{\eta}{\rho_1}$$

$$\frac{d\rho_2}{d\eta} = \frac{\eta}{\rho_2}$$

e si riscrive allora la derivata del potenziale in base a quanto ottenuto:

$$\frac{dU}{d\eta} = \eta - \frac{1 - \mu}{\rho_1^2} \frac{\eta}{\rho_1^3} - \mu \frac{\eta}{\rho_2^3}$$

In direzione ζ

$$\frac{dU}{d\zeta} = -(1 - \mu) \frac{\zeta}{\rho_1^3} - \mu \frac{\zeta}{\rho_2^3}$$

3.6 Punti lagrangiani

Per trovare i punti di equilibrio si vanno allora a cercare i punti stazionari del potenziale e nello specifico i punti nei quali questo è minimo: si deriva la funzione potenziale e la si eguaglia a zero. Dall'equazione del moto vedo infatti che se il gradiente del potenziale si annulla, anche la forza risultante lo fa.

Applicando:

$$\frac{dU}{d\xi} = 0$$

$$\frac{dU}{d\eta} = 0$$

$$\frac{dU}{d\zeta} = 0$$

Da quest'ultima si vede che:

$$-(1 - \mu) \frac{\zeta}{\rho_1^3} - \mu \frac{\zeta}{\rho_2^3} = 0$$

è valida se e solo se:

$$\zeta = 0$$

Questo vuol dire che il moto avviene nel piano $\xi\eta$.

3.6.1 Punti collineari

I primi tre punti si trovano sulla congiungente i due corpi principali, coincidente dunque con l'asse ξ .

Si trovano imponendo che il gradiente del potenziale in direzione η sia nullo:

$$\frac{dU}{d\eta} = 0$$

che è verificato appunto quando:

$$\eta = 0$$

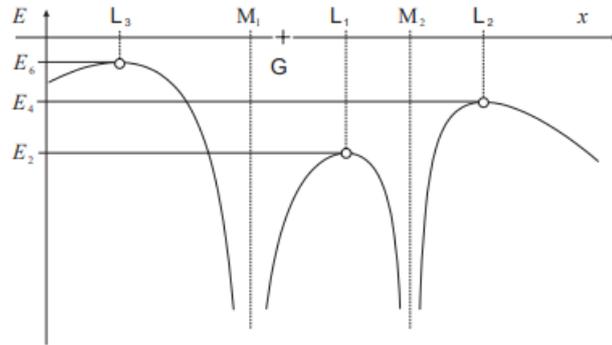


Figure 3.7: Andamento dell'energia.

L1

Questo punto di equilibrio si trova tra il Sole e la Terra:

$$-\mu < \xi < 1 - \mu$$

Imponendo infatti:

$$\frac{dU}{d\xi} = \xi - (1 - \mu) \frac{\xi + \mu}{\rho_1^3} - \mu \frac{\xi - (1 - \mu)}{\rho_2^3}$$

$$\rho_1 + \rho_2 = 1$$

si ottiene l'esatta posizione nel caso valga l'ipotesi $m_1 \gg m_2$:

$$\rho_2 \simeq \sqrt[3]{\frac{\mu}{3}}$$

L2

Questo punto di equilibrio si trova oltre la Terra, dal lato opposto rispetto al Sole:

$$\xi > 1 - \mu$$

Imponendo infatti:

$$\frac{dU}{d\xi} = \xi - (1 - \mu) \frac{\xi + \mu}{\rho_1^3} - \mu \frac{\xi - (1 - \mu)}{\rho_2^3}$$

$$\rho_1 - \rho_2 = 1$$

si ottiene l'esatta posizione nel caso valga l'ipotesi $m_1 \gg m_2$:

$$\rho_2 \simeq \sqrt[3]{\frac{\mu}{3}}$$

Pertanto si trova esattamente alla stessa distanza dalla Terra di L1, ma dal lato opposto.

L3

Questo punto di equilibrio si trova oltre il Sole dal lato opposto rispetto alla Terra:

$$\xi < -\mu$$

Imponendo infatti:

$$\frac{dU}{d\xi} = \xi - (1 - \mu) \frac{\xi + \mu}{\rho_1^3} - \mu \frac{\xi - (1 - \mu)}{\rho_2^3}$$

$$\rho_2 - \rho_1 = 1$$

si ottiene l'esatta posizione nel caso valga l'ipotesi $m_1 \gg m_2$:

$$\rho_2 \simeq 2$$

$$\rho_1 \simeq 1$$

3.6.2 Punti equilateri

Non si trovano sulla congiungente i due corpi principali.

Si individuano imponendo:

$$\frac{dU}{d\xi} = 0$$

$$\frac{dU}{d\eta} = 0$$

E si trova:

$$\rho_1 = \rho_2 = 1$$

L4 ed L5 si trovano allora alla stessa distanza dai corpi principali e sono i vertici di due triangoli equilateri con base comune.

Le loro coordinate sono:

$$\xi = \frac{1}{2} - \mu$$

$$\eta = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

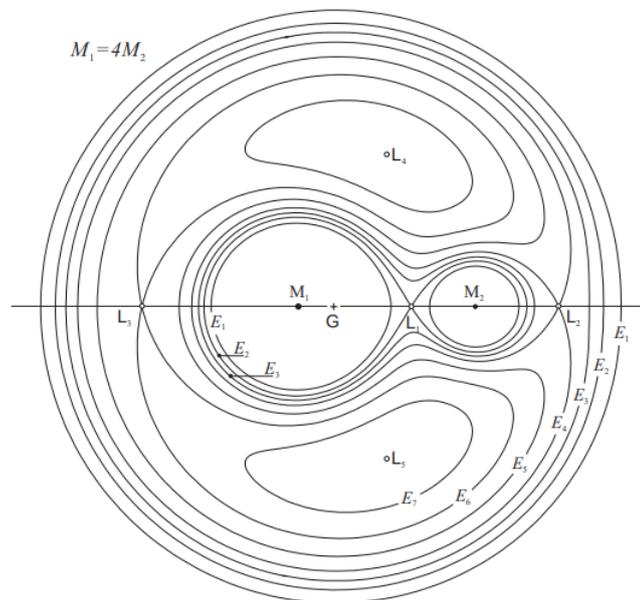


Figure 3.8: Curve equipotenziali.

3.7 Missioni interplanetarie

Il metodo utilizzato per studiare le varie fasi di una missione si chiama metodo delle patched conics.

Per vedere infatti le forze cui è soggetta la sonda, si considera che questa sia via via soggetta solamente all'attrazione gravitazionale di un solo corpo principale e dunque lo studio si riduce alla risoluzione di un problema dei due corpi in ognuna delle fasi.

Queste zone in cui si sente solamente l'attrazione gravitazionale di un corpo sono dette sfere d'influenza di quel corpo.

Considerando ad esempio di partire dalla Terra, all'inizio ci si trova all'interno della sfera d'influenza terrestre. Questa fase è detta planetocentrica.

Il raggio della sfera d'influenza terrestre può essere stimato, considerando la sua massa, la massa del Sole e la loro mutua distanza, come:

$$r \simeq \left(\frac{m_T}{m_S}\right)^{\frac{2}{5}} r_{TS}$$

Una volta raggiunta una distanza alla quale ragionevolmente la forza gravitazionale esercitata dalla Terra sul corpo si è ridotta notevolmente ed inizia invece a prevalere l'attrazione esercitata da parte del Sole, si dirà che il satellite è uscito dalla sfera d'influenza terrestre e si trova nel tratto interplanetario eliocentrico. Qui le μ presenti nelle equazioni non saranno più riferite alla Terra, ma al Sole.

Quando ci si avvicina sufficientemente al corpo target della missione da sentirne l'influenza più di quanto si senta quella del Sole, allora qui si entra nella sfera d'influenza del target e la μ sarà riferita a lui. Anche questo tratto di orbita è planetocentrico.

3.7.1 Escape

La missione parte generalmente da un'orbita di parcheggio vicina alla Terra, nella quale il satellite si trova ad un raggio r_{leo} e con una velocità v_{leo} .

$$v_{leo} = \sqrt{\left(\frac{\mu_T}{r_{leo}}\right)}$$

Per evadere si deve uscire da quest'orbita esercitando una spinta che generi una variazione di velocità pari a quella voluta e nella direzione voluta.

$$v_0 = v_{leo} + \Delta V$$

Dopo la spinta iniziale il corpo si immette in un'orbita aperta rispetto alla Terra con una velocità iniziale v_0 . Le orbite aperte son di due tipi: paraboliche o iperboliche. Se l'orbita fosse parabolica, il satellite arriverebbe al confine della sfera d'influenza con una velocità nulla e non riuscirebbe pertanto a completare l'evasione.

$$v_{inf,parabolica} = 0$$
$$\Delta V_{par} = (\sqrt{2} - 1)v_{leo}$$

Quando questa velocità all'estremità della sfera d'influenza, chiamata $v_{infinito}$, non è nulla allora si ha un eccesso iperbolico di velocità che permette di evadere ed è caratteristico appunto delle orbite iperboliche rispetto alla Terra.

$$\Delta V_{ip} = \sqrt{v_{inf}^2 + \frac{2\mu_T}{r_{leo}}} - v_{leo}$$

Bisogna tener conto però di dove si vuole andare, se verso un pianeta più esterno della Terra rispetto al Sole (come ad esempio Marte) o se verso uno più interno (come Venere). La somma vettoriale della velocità del pianeta di partenza e della velocità iperbolica deve esser pari alla velocità rispetto al Sole necessaria ad entrare nella traiettoria eliocentrica voluta, nonché velocità di ingresso della manovra di Hohmann.

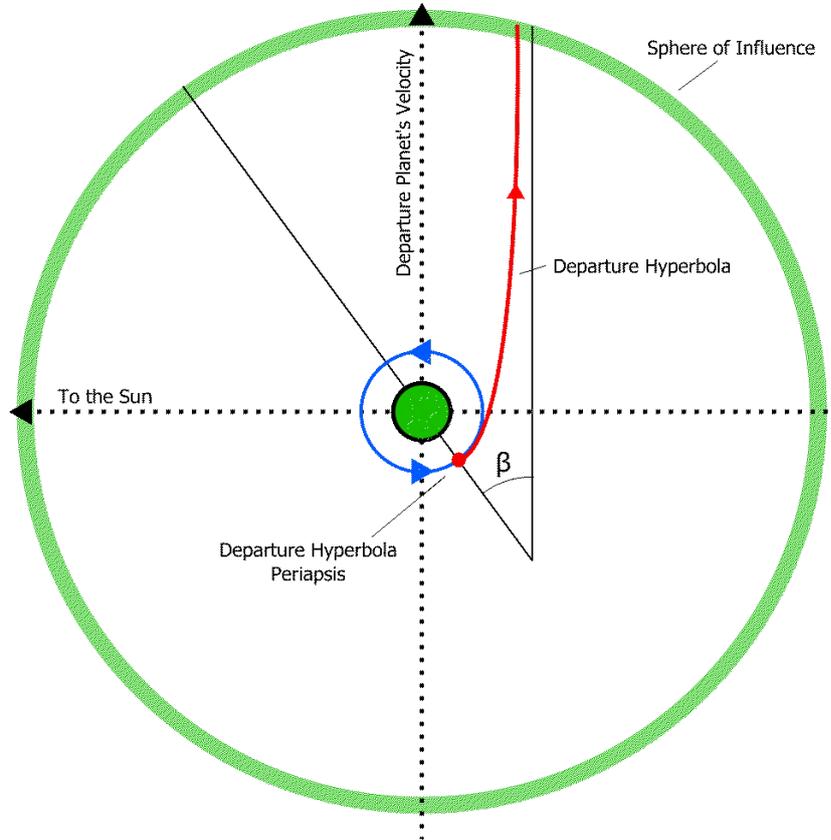


Figure 3.9: Manovra di fuga in direzione pianeta più esterno rispetto a quello di partenza.

L'energia all'interno dell'orbita iperbolica è ovviamente costante e si conserva tra punto iniziale e finale, dunque si può scrivere come:

$$E = \frac{v_0^2}{2} - \frac{\mu_T}{r_{leo}} = \frac{v_{inf}^2}{2} - \frac{\mu_T}{r_{inf}}$$

Il punto iniziale di manovra avrà un angolo β rispetto alla direzione della velocità del pianeta Terra. Se il pianeta target è più interno:

$$\beta = \arccos\left(\frac{1}{e}\right)$$

Se il pianeta target è più esterno:

$$\beta = \arccos\left(\frac{1}{e}\right) + \pi$$

Conviene evadere da orbite a raggio minore perché caratterizzate da velocità orbitali maggiori e dunque, partendo da velocità alte di base, sarà necessario spinger meno per arrivare a velocità alte.

Può essere allora una buona alternativa effettuare una fuga a due impulsi chiamata

manovra di Oberth: partendo da un'orbita di raggio r_1 , si frena in maniera da effettuare un abbassamento del perigeo ed immettersi all'apogeo di un'orbita ellittica al cui perigeo, nonché raggio di un'orbita più bassa e dunque caratterizzata da velocità di percorrenza maggiori, si spingerà nuovamente in modo da accelerare ed immettersi in un'orbita iperbolica di fuga. Volendo ottenere la stessa v_{inf} della fuga ad un solo impulso, poiché con la Oberth si parte da una velocità maggiore essendo al perigeo dell'orbita ellittica, si dovranno fornire dei ΔV minori e dunque si risparmierà carburante.

3.7.2 Fase eliocentrica

Tra tutte le traiettorie possibili, quella più lunga ma anche meno costosa deriva da una manovra detta di Hohmann. Rispetto al Sole, una volta usciti dalla sfera d'influenza del pianeta di partenza, ci si immette in una traiettoria ellittica tangente sia all'orbita iniziale sia a quella finale.

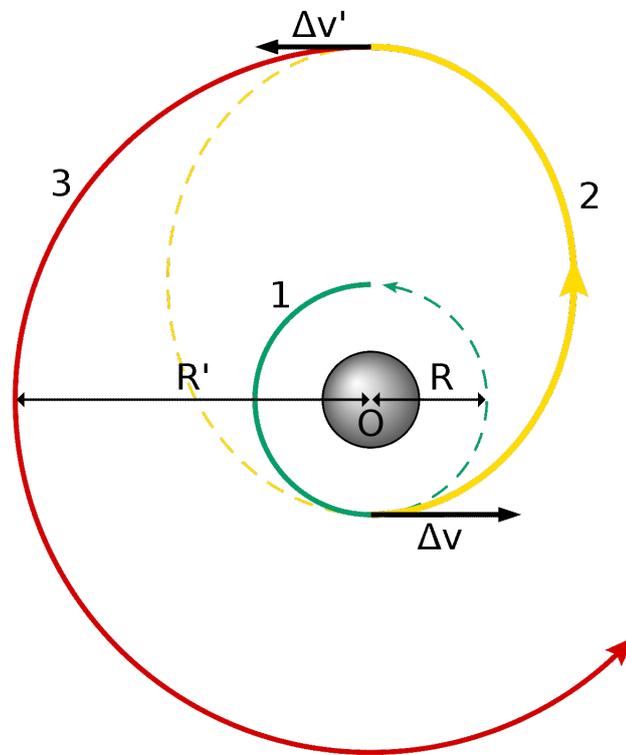


Figure 3.10: Manovra di Hohmann verso un outer planet.

A seconda del pianeta target, ossia se questo sia più interno o più esterno della Terra rispetto al Sole, si è al perielio o all'apoelio dell'orbita. Considerando che inizialmente si era in un'orbita circolare bassa attorno alla Terra, la manovra eseguita consiste in un innalzamento dell'apoelio nel caso in cui ci si sposti verso un pianeta più esterno o in un abbassamento del perielio nel caso in cui ci si sposti verso un pianeta più interno.

Quindi il punto iniziale della manovra è il perielio nel caso in cui ci si sposti verso un outer planet, invece è l'apoelio se ci si sposta verso un inner planet.

Il semiasse maggiore dell'orbita nel caso della Hohmann è la media del raggio al punto iniziale e a quello finale (rispettivamente perielio e apoelio se si va ai raggi maggiori, sennò apoelio e perielio) nonché dunque somma dei raggi dell'orbita del pianeta iniziale e del pianeta finale.

$$a_H = \frac{r_a + r_p}{2} = \frac{r_{Terra} + r_{Venere}}{2}$$

$$a_H = \frac{r_p + r_a}{2} = \frac{r_{Terra} + r_{Marte}}{2}$$

$$\Delta T = \frac{T_H}{2} = \pi \sqrt{\frac{a_H^3}{\mu_{Sole}}}$$

Considerando di andare verso un pianeta più esterno, le velocità dei pianeti nella propria orbita circolare sono:

$$v_{c1} = \sqrt{\frac{\mu_{Sole}}{r_{Terra}}}$$

$$v_{c2} = \sqrt{\frac{\mu_{Sole}}{r_{Marte}}}$$

Queste sono anche le velocità prima di immettersi nella Hohmann e da raggiungere dopo la Hohmann per immettersi nell'orbita del pianeta di arrivo.

Nella Hohmann bisognerà dunque avere rispettivamente all'inizio e alla fine:

$$v_{H1} = v_{c1} + \Delta V_1$$

$$v_{H2} = v_{c2} - \Delta V_2$$

$$\Delta V_{TOT} = \Delta V_1 + \Delta V_2$$

Il primo ΔV sarà accelerante perché si passa dalla velocità dell'orbita circolare alla velocità al perigeo di un'orbita di pari raggio e lo stesso si può dire del secondo perché si passa dalla velocità all'apogeo dell'orbita alla velocità circolare di un'orbita di pari raggio.

L'energia orbitale è:

$$E = -\frac{\mu_{Sole}}{r_{Terra} + r_{Marte}} = \frac{V_{H1}^2}{2} - \frac{\mu_{Sole}}{r_{Terra}} = \frac{V_{H2}^2}{2} - \frac{\mu_{Sole}}{r_{Marte}}$$

Le alternative alla Hohmann sono varie:

- manovra ellittica non bitangente
- manovra biellittica
- manovra biparabolica

La manovra di Hohmann è infatti ottimale solo entro certe condizioni: se il raggio dell'orbita di arrivo è 16 volte o più il raggio dell'orbita di partenza, allora conviene una manovra a 3 impulsi.

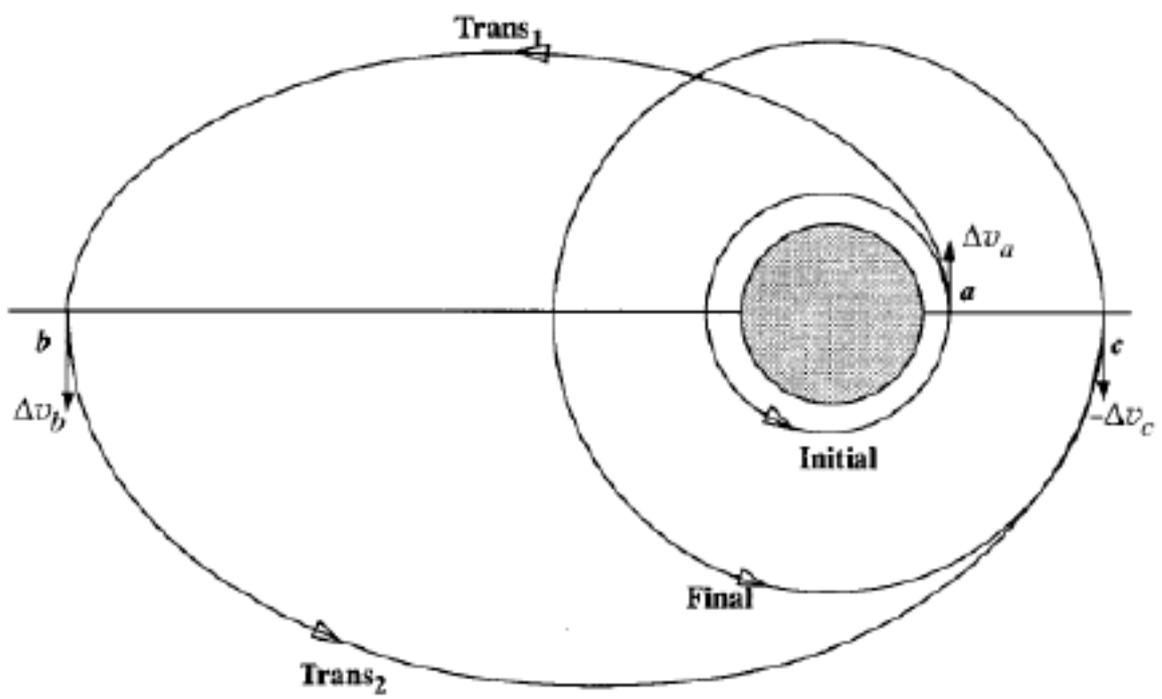


Figure 3.11: Manovra biellittica.

Chapter 4

Teoria del controllo ottimale

La teoria del controllo ottimale fornisce un metodo matematico che permette di trovare, per un sistema dinamico in evoluzione nel tempo, quali sono le esatte leggi di controllo che devono essere applicate per ottenere una massimizzazione di un certo parametro caratteristico del sistema. I controlli vanno infatti ad influenzare e determinare il comportamento del sistema, forzandolo ad agire in un modo rispetto ad un altro.

I metodi matematici possono essere diretti o indiretti. I metodi diretti effettuano una parametrizzazione di controllo e variabili di stato che permette di suddividere così la traiettoria generando un gran numero di variabili che rendono la risoluzione computazionalmente lunga. Al contrario i metodi indiretti effettuano una suddivisione della traiettoria in tanti segmenti che vengono studiati come problemi agli estremi in forma differenziale. Questi ultimi generano un minor numero di parametri ed una maggior precisione numerica con un minor tempo di risoluzione, ma hanno il problema di essere di difficile convergenza e non robusti nel fornire una soluzione al variare delle condizioni previste.

In questo studio son stati utilizzati i metodi indiretti.

Uno tra i tanti sistemi dinamici analizzabili è proprio il moto di un satellite, il cui comportamento viene descritto da delle variabili dette variabili di stato, che non sono altro che i parametri che definiscono il suo moto (come le componenti che descrivono la sua posizione e velocità) messi insieme in un vettore chiamato vettore di stato.

Queste grandezze variano nel tempo, il quale è invece un parametro indipendente. Il satellite, a seconda di come il motore spinge, seguirà una traiettoria piuttosto che un'altra ed è pertanto facile capire che bisognerà decidere quando e per quanto spingere per controllarne adeguatamente il comportamento.

Per una missione spaziale è facile che il parametro che si vuole ottimizzare sia la massa, che si vuole sia la massima possibile a fine missione grazie ad un consumo minimizzato il più possibile in modo da imbarcare meno propellente e al suo posto portare delle strumentazioni utili agli studi da effettuare.

L'evoluzione del sistema è pertanto descritta dall'equazione dinamica, che sarebbe un'equazione differenziale nella quale chi varia nel tempo è il vettore di stato e il cui cambiamento è funzione delle variabili stesse che contiene, dei controlli applicati e del tempo:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t)$$

con 'x' le variabili di stato e 'u' i controlli.

Agli estremi destro e sinistro di ogni arco nel quale la traiettoria viene suddivisa e anche della traiettoria completa valgono delle condizioni al contorno. I valori in due estremi contigui possono non essere identici e ciò permette di tenere in considerazione discontinuità come l'esecuzione di manovre impulsive, che comportano variazioni considerate istantanee di massa e velocità, ma anche l'imposizione di vincoli da rispettare.

Un generico intervallo j inizia nel tempo t_{j-} e termina nell'istante t_{j+} . L'estremità destra di un sottointervallo $x_{(j-1)+}$ confina con l'estremità sinistra di un sottointervallo x_{j-} . Le condizioni al contorno delle variabili di stato possono essere miste e date da relazioni non lineari nel tempo. Si scrivono come:

$$\chi = (x_{(j-1)+}, x_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-}) = 0 \quad j = 1, \dots, n$$

Anche i controlli possono essere vincolati.

In ogni arco di traiettoria, al contrario di quanto succede agli estremi per le varie grandezze, valgono invece delle leggi di controllo omogenee al suo interno.

La risoluzione del problema di ottimo consiste nell'effettuare un calcolo variazionale in cui si massimizzi o minimizzi un quantitativo chiamato funzionale 'J', che al suo interno considera i valori assunti dal vettore di stato e dai controlli durante tutto l'intervallo di missione considerato ed il valore dello stato all'istante finale. Tutto ciò deve avvenire soddisfacendo le equazioni algebriche e le condizioni di estremità.

La formulazione generale del funzionale è del tipo:

$$J = \varphi(x_{(j-1)+}, x_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-}) + \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} \Phi(u(t), x(t), t) dt \quad j = 1, \dots, n$$

ed è costituita da due elementi:

- φ dipendente dai valori delle variabili di stato e della variabile indipendente tempo agli estremi considerati
- l'integrale della funzione Φ che dipende dai valori che assumono il vettore di stato, i controlli e il tempo

La formulazione del funzionale può essere di due tipi: Mayer o Lagrange.

La formulazione di Lagrange è di tipo integrale:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \Phi(x, \dot{x}, t) dt$$

Quella di Mayer viene preferita ed è del tipo:

$$J = \varphi(x(t_0), x(t_f), t_0, t_f)$$

Si introducono due quantità aggiuntive chiamate moltiplicatori di Lagrange che permettono di tenere in considerazione le equazioni differenziali e le condizioni al contorno da rispettare. I moltiplicatori sono:

- le variabili aggiunte ' λ ', associate alle equazioni di stato
- le costanti aggiunte ' μ ', riguardanti le condizioni al contorno χ

Queste permettono di scrivere l'una o l'altra formulazione:

- quella di Lagrange se $\varphi=0$
- quella di Mayer se $\Phi=0$

Utilizzandole si può riscrivere il funzionale trasformato come:

$$J^* = \varphi + \mu^T \chi + \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} (\Phi + \lambda^T (f - \dot{x})) dt \quad j = 1, \dots, n$$

Il valore del funzionale J e del funzionale trasformato J^* devono essere uguali se le equazioni differenziali e le condizioni al contorno son soddisfatte e ciò deve valere per qualunque scelta dei moltiplicatori di Lagrange si faccia. Entrambi i funzionali dipendono dalle variabili di stato, dalle loro derivate, dai controlli e dal tempo.

Integrando per parti si può eliminare la dipendenza del funzionale trasformato J^* dalla derivata del vettore di stato:

$$J^* = \varphi + \mu^T \chi + \sum_j (\lambda_{(j-1)+}^T x_{(j-1)+} - \lambda_{j-}^T x_{j-}) + \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} (\Phi + \lambda^T f - \dot{\lambda}^T x) dt \quad j = 1, \dots, n$$

Introducendo una grandezza chiamata Hamiltoniano del sistema e pari a:

$$H = \Phi + \lambda^T f$$

si può allora scrivere la derivata del funzionale trasformato alle dipendenze dell'Hamiltoniano:

$$\begin{aligned} \delta J^* = & (-H_{(j-1)+} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{(j-1)+}} + \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial t_{(j-1)+}}) \delta t_{(j-1)+} \\ & + (H_{j-} - \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j-}} + \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial t_{j-}}) \delta t_{j-} \\ & + (\lambda_{(j-1)+}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{(j-1)+}} + \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial x_{(j-1)+}}) \delta x_{(j-1)+} \\ & + (-\lambda_{j-}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{j-}} + \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial x_{j-}}) \delta x_{j-} \\ & + \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} ((\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda}^T) \delta x + \frac{\partial H}{\partial u} \delta u) dt \quad j = 1, \dots, n \quad (4.1) \end{aligned}$$

Per trovare i punti stazionari del funzionale modificato e dunque trovare le condizioni di ottimo bisogna:

- imporre uguale a zero la sua derivata prima e il suo annullamento deve avvenire per qualunque variazione delle variabili del sistema presenti nell'equazione stessa ($\partial t, \partial x, \partial u$ nei vari estremi)
- rispettare le condizioni al contorno e le equazioni imposte
- scegliere accuratamente le variabili aggiunte e le costanti aggiunte in modo che si annullino i coefficienti moltiplicativi di ognuna di queste variazioni

Tutto ciò garantisce che la derivata del funzionale modificato sia nulla e dunque la stazionarietà.

Annullando i coefficienti di δx e δu si ottengono le seguenti equazioni:

- Le equazioni differenziali di Eulero Lagrange:

$$\frac{d\lambda}{dt} = -(\frac{dH}{dx})^T \quad (4.2)$$

valide per le variabili aggiuntive

- Le equazione algebriche:

$$\left(\frac{dH}{du}\right)^T = 0 \quad (4.3)$$

valide per i controlli

I controlli sono indipendenti dal punto stazionario che si sta cercando: che questo sia un massimo o un minimo non influisce sulle equazioni algebriche.

Possono però essere vincolati a trovarsi all'interno di un certo range. La spinta data dal propulsore infatti non può essere negativa, dunque ha come valore minimo ammissibile lo zero, e ha un valore massimo dato di default dal modello di propulsore stesso, che chiameremo T_{max} . I controlli qua analizzati avranno un valore esplicito e costante, dunque noto e non tempo-dipendente o legato alle variabili di stato.

In caso ci sia un vincolo, si utilizza il principio del massimo di Pontryagin: il valore ottimale del controllo si ottiene trovando il punto di stazionarietà dell'Hamiltoniano in quel punto della traiettoria, che sia esso di minimo o di massimo.

Ci son due possibilità:

- Controllo localmente non vincolato: il valore ottimale del controllo si ottiene dall'equazione algebrica se quanto ottenuto appartiene al dominio di ammissibilità previsto, ma non è frutto dell'imposizione di un vincolo. E' dunque il valore effettivamente ottimale
- Controllo vincolato: il valore ottimale che si ottiene è al di fuori del dominio possibile, dunque il suo valore verrà forzato ad assumere uno dei due valori di estremità previsti, il massimo o il minimo

Se l'Hamiltoniano è lineare rispetto al controllo vincolato, allora poiché non appare esplicitamente nell'equazione algebrica non può essere trovato così il suo valore. Ci sono allora due possibilità anche per questo caso:

- Controllo di tipo Bang-Bang: Se nell'equazione dell'Hamiltoniano il coefficiente del controllo vincolato è diverso da zero, allora per massimizzare l'Hamiltoniano si assume il massimo valore del controllo se il coefficiente è positivo, mentre se è negativo si assume il minimo valore possibile del range. Questo deriva dal principio del massimo di Pontryagin
- Se nell'equazione dell'Hamiltoniano il coefficiente del controllo vincolato si annulla, allora bisogna imporre uguale a zero qualunque derivata del coefficiente rispetto al tempo finché in una di queste non compare esplicitamente il controllo stesso che prima non compariva nell'equazione algebrica. Imponendo uguale a zero la derivata nella quale compare, si può allora trovare il controllo ottimale

Per le condizioni al contorno di ottimo mancanti si prende in considerazione il j -esimo estremo e si scrivono le condizioni al contorno considerandolo come estremo superiore del j -esimo intervallo (+) ed estremo inferiore del j -esimo intervallo (-) ed andando ad annullare i coefficienti moltiplicativi di δx_{j+} , δx_{j-} , δt_{j+} e δt_{j-} nell'equazione che esprime il potenziale modificato J^* :

$$-\lambda_{j-}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{j-}} + \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial x_{j-}} = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (4.4)$$

$$\lambda_{j+}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{j+}} + \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial x_{j+}} = 0 \quad j = 0, \dots, n - 1 \quad (4.5)$$

$$H_{j-} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j-}} + \frac{\partial \chi}{\partial t_{j-}} = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (4.6)$$

$$-H_{j+} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j+}} + \frac{\partial \chi}{\partial t_{j+}} = 0 \quad j = 0, \dots, n-1 \quad (4.7)$$

Le equazioni riferite all'istante $j-$, essendo indicative di ciò che accade leggermente prima dell'istante j , non valgono per l'istante $j=0$ ossia l'istante nel quale si parte. Stesso discorso si può fare per l'istante $j+$ perché non si considera ciò che succede dopo l'istante finale. A questo punto si giunge alle condizioni di contorno ottimali se dalle precedenti quattro equazioni si eliminano le costanti aggiuntive μ :

$$\sigma(x_{(j-1)+}, x_{j-}, \lambda_{(j-1)+}, \lambda_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-}) = 0 \quad (4.8)$$

Quest'equazione va a chiudere il sistema di equazioni necessarie alla risoluzione, che permettono di trovare variabili, variabili aggiunte e controlli:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t) \quad (4.9)$$

$$\chi(x_{(j-1)+}, x_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-}) = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (4.10)$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^T \quad (4.11)$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^T = 0 \quad (4.12)$$

$$\sigma(x_{(j-1)+}, x_{j-}, \lambda_{(j-1)+}, \lambda_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-}) = 0 \quad (4.13)$$

Se una variabile di stato x è soggetta ad un vincolo, allora

$$-\lambda_{j-}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{j-}} + \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial x_{j-}} = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (4.14)$$

$$-\lambda_{j+}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{j+}} + \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial x_{j+}} = 0 \quad j = 0, \dots, n-1 \quad (4.15)$$

forniscono i valori ottimali nello specifico per le variabili aggiuntive λ_x :

- se il valore della variabile x all'istante iniziale ($t=0$) è noto e pari ad 'a' allora il valore di λ_{x0} è libero perché non ci sono condizioni aggiuntive su di lui e stesso discorso si può fare per l'istante finale
- se il valore iniziale o finale di x non è indicato nelle equazioni, allora il corrispettivo λ nello stesso istante è nullo
- se il valore della variabile x non è dato in un generico istante j (dunque è libera) ma è continuo, allora $\lambda_{x_{j+}} = \lambda_{x_{j-}}$
- se x è nota agli estremi dell'interfaccia e continua (ossia son dati $x_{j-} = x_{j+} = a$) allora il corrispettivo λ_x ha una discontinuità libera e va calcolato mediante l'ottimizzazione

Se l'Hamiltoniano non dipende strettamente dal tempo, allora le equazioni:

$$H_{j-} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j-}} + \frac{\partial \chi}{\partial t_{j-}} = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (4.16)$$

$$H_{j+} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j+}} + \frac{\partial \chi}{\partial t_{j+}} = 0 \quad j = 0, \dots, n-1 \quad (4.17)$$

permettono di dire che:

- se il tempo iniziale o finale non compaiono esplicitamente nelle equazioni ed è dunque libero, allora l'Hamiltoniano al corrispondente istante è nullo
- se il tempo iniziale o finale son dati, allora l'Hamiltoniano corrispondente è libero
- se il valore temporale ad un istante intermedio j compare solo nell'equazione della continuità temporale ($t_{j-} = t_{j+}$) ed è dunque libero ma continuo, allora anche l'Hamiltoniano è continuo
- se il valore temporale ad un istante intermedio j è esplicitamente dato, allora il corrispondente Hamiltoniano è discontinuo

4.0.1 Equazioni differenziali con condizioni al contorno

L'ottimizzazione matematicamente consiste nel risolvere un sistema di equazioni differenziali con condizioni al contorno algebriche e differenziali.

Non tutti i valori iniziali delle grandezze son noti, pertanto alcuni andranno trovati mediante integrazione numerica e dovranno soddisfare, per esser validi, sia le condizioni al contorno frutto di vincoli χ sia quelle derivanti dall'ottimizzazione σ .

Considerando il campo di applicazione di questo studio, ossia l'ottimizzazione di traiettorie, bisogna considerare di dividere l'orbita completa in tante parti chiamate archi, all'interno dei quali vale un determinato sistema di equazioni differenziali che può differire ovviamente da arco ad arco e la cui durata è generalmente ignota.

Passando da un arco a quello contiguo le variabili possono esser discontinue e dunque assumere dei nuovi valori, i quali possono essere ignoti.

Le condizioni al contorno sono sia riguardanti gli estremi completi, sia gli estremi intermedi degli archi, e possono essere non lineari o anche miste.

La risoluzione completa passa pertanto per una serie di risoluzioni di problemi ai valori iniziali la cui convergenza si ottiene attraverso l'applicazione del metodo di Newton, che permette di trovare i valori iniziali ignoti.

La variabile indipendente tempo viene sostituita negli archi j -esimi con una variabile ϵ per ovviare al problema dell'indefinitezza della durata degli archi:

$$\epsilon = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{\tau_j}. \quad (4.18)$$

con τ_j pari alla durata incognita.

Si riformula il problema iniziale introducendo un vettore y contenente variabili di stato x e variabili aggiunte λ , che non son dunque più distinte. $y=f(x,\lambda)$. E si riscrivono così le equazioni differenziali alle sue dipendenze:

$$\frac{dy}{dt} = f^*(y, t) \quad (4.19)$$

Considerando una nuova variabile z nella quale sia compreso sia ciò che è compreso in y sia i parametri costanti (come durata τ_j) raggruppati in un vettore c , si può scrivere:

$$\frac{dz}{d\epsilon} = f^*(y, c, \epsilon) = f(z, \epsilon) \quad (4.20)$$

Per le variabili si può scrivere l'equazione:

$$\frac{dy}{d\epsilon} = \tau_y \frac{dy}{dt} \quad (4.21)$$

Mentre per i parametri:

$$\frac{dc}{d\epsilon} = 0 \quad (4.22)$$

Il vettore s non contiene solo i parametri costanti come c , ma anche i valori delle variabili ad ogni estremità:

$$s = (y_{0+}, y_{1\pm}, \dots, y_{n-}, c) = (z_{0+}, z_{1\pm}, \dots, z_{n-}) \quad (4.23)$$

Tutte le condizioni al contorno, di ottimo e imposte, vengono allora raggruppate in:

$$\Psi(s) = 0 \quad (4.24)$$

che permette proprio di trovare i valori iniziali incogniti delle variabili.

In questo processo tutti i valori iniziali vengono considerati incogniti e, nel caso in cui non lo fossero, si semplificherebbe solo il procedimento.

Si integra per varie iterazioni l'equazione differenziale in z , usando come valore iniziale di tentativo 'p' quello trovato alla precedente iterazione, che chiameremo r-esima. Si può pertanto dire che:

$$z(0) = p^r \quad (4.25)$$

Il primo valore di tentativo p^1 dovrà dunque esser scelto arbitrariamente e solo dopo si può far partire il processo di integrazione ed iterativo sull'intera traiettoria.

Ad ogni passo di integrazione si troveranno dunque i valori delle variabili di stato nei vari estremi. Alla fine dell'integrazione si analizza e confronta l'errore nelle condizioni al contorno Ψ , che riferito all'r-esima integrazione è Ψ^r . Cambiare il valore di tentativo fa infatti variare l'errore sulle condizioni al contorno $\Delta\Psi$:

$$\Delta p = p^{r+1} - p^r = -\left[\frac{\partial\Psi}{\partial p}\right]^{-1}\Psi^r \quad (4.26)$$

$$\Delta\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial p}\Delta p \quad (4.27)$$

con:

$$\left[\frac{\partial\Psi}{\partial p}\right] = \left[\frac{\partial\Psi}{\partial s}\right]\left[\frac{\partial s}{\partial p}\right] \quad (4.28)$$

In questo prodotto matriciale la prima matrice contiene le derivate delle condizioni al contorno rispetto alle variabili dalle quali dipendono, mentre la seconda contiene le derivate delle variabili al contorno rispetto ai propri valori iniziali, in pratica sono i valori assunti da $\frac{dz}{dp}$ ai confini ϵ .

$$\left[\frac{dz}{dp}\right] = g(\epsilon) \quad (4.29)$$

con:

$$\left[\frac{dg}{d\epsilon}\right] = [\dot{g}] = \frac{d}{d\epsilon}\left[\frac{\partial z}{\partial p}\right] = \left[\frac{\partial}{\partial p}\frac{dz}{d\epsilon}\right] = \left[\frac{df}{dp}\right] = \left[\frac{df}{dz}\right]\left[\frac{dz}{dp}\right] = \left[\frac{df}{dz}\right][g] \quad (4.30)$$

La convergenza si ha quando l'errore sulle condizioni al contorno è nullo, cosa verificata se:

$$\Delta\Psi = -\Psi^r \quad (4.31)$$

Tornando al problema dei valori iniziali, per il sistema omogeneo $[\dot{g}] = 0$ i valori iniziali si ottengono:

$$[g(0)] = \left[\frac{\partial z(0)}{\partial p}\right] = [I] \quad (4.32)$$

Dall'espressione iniziale dipendente dai valori di tentativo a loro volta ottenuti dall'iterazione precedente, si ottiene la matrice identità I .

Il metodo permette di considerare anche le discontinuità delle variabili: considerando che in un generico punto di interfaccia tra due archi, che chiameremo 'i', ci sia una discontinuità tra il valore da un lato z_i^+ e quello dall'altro z_i^- che fa sì che questi differiscano di un fattore moltiplicativo h, basta cambiare il valore di h per considerare la discontinuità.

$$z_i^+ = h z_i^- \quad (4.33)$$

$$[g_i^+] = \left[\frac{\partial h}{\partial z} \right] [g_i^-] \quad (4.34)$$

Se all'inizio alcuni dei valori son noti, come già anticipato, si semplifica il tutto perché in questo modo p contiene solo i valori ignoti di z(0) e Ψ solamente quelle condizioni al contorno che sono ignote all'inizio.

Nel problema differenziale ai limiti, la matrice $\left[\frac{\partial \Psi}{\partial p} \right]$ può essere valutata numericamente attraverso un metodo che varia uno degli i-esimi componenti di p, p_i , di una piccola quantità Δp_i mantenendo gli altri costanti nell'integrazione. In questo modo variando l'i-esima componente varia anche l'i-esima riga.

Si integra così il sistema principale e si vanno a valutare la variazioni degli errori che si hanno a causa della variazione della grandezza p $\Delta \Psi(\Delta p_i)$. L'i-esima riga si ottiene grazie alla linearizzazione :

$$\frac{\Delta \Psi^T}{\Delta p_i} \quad (4.35)$$

Questo metodo è di difficile convergenza, ma in caso di raggiungimento della convergenza permette dei tempi computazionali di risoluzione brevi. Le approssimazioni numeriche fatte, soprattutto in termini di convergenza, vanno infatti a minare la buona riuscita della convergenza.

Ciò che succede è che, ottenendo il primo valore di tentativo della prima iterazione p mediante la linearizzazione, l'errore che si genera sulle condizioni al contorno può ingigantirsi invece di diminuire. Per ovviare a questo problema si può:

- invece di applicare la correzione totale Δp precedentemente calcolata, se ne applica solamente una frazione:

$$p^{r+1} = p^r + K_1 \Delta p \quad (4.36)$$

con $0,1 < K_1 < 1$, il cui valore viene calcolato sperimentalmente e funzione della distanza tra la prima soluzione e quella effettiva

- ad ogni iterazione si calcola p^{r+1}
- si integra l'equazione differenziale del moto
- si calcola il nuovo errore, ottenuto all'iterazione r+1, con quello frutto dell'iterazione precedente r. Se:

$$Err_{r+1} < K_2 Err_r \quad (4.37)$$

con K_2 che dev'essere maggiore di 1, ma è ottimale tra 2 e 3.

Se tale disequaglianza è soddisfatta, allora si può passare alla prossima iterazione. Dunque l'errore può anche crescere da un'iterazione a quella successiva, ma essere comunque controllato dal valore di K_2

- se la disequazione non fosse verificata e dunque l'errore crescesse troppo da un'iterazione alla successiva, allora si effettuerebbe una bisezione della correzione. La nuova correzione:

$$p^{r+1} = p^r + K_1 \frac{\Delta p}{2} \quad (4.38)$$

viene così applicata all'integrazione come nuovo valore di tentativo. Nel caso in cui ciò non bastasse a verificare la disequazione e rendere dunque il nuovo errore accettabile, si potrebbe effettuare la bisezione per altre quattro volte. Se ciò non dovesse bastare, allora la soluzione di tentativo sarebbe sbagliata ed incompatibile con la convergenza del metodo, che per essere raggiunta richiede che venga scelta una nuova soluzione di tentativo.

Tale procedura, nonostante sia meno precisa del metodo analitico, viene utilizzata per calcolare:

- lo Jacobiano del sistema
- la matrice $\frac{\partial \Psi}{\partial s}$

Chapter 5

Modello dinamico

Il modello che verrà illustrato descrive la dinamica e dunque il moto dello spacecraft, illustrato come un corpo puntiforme di massa variabile, in diminuzione per via del consumo di propellente, e non effettivamente come un corpo tridimensionale.

Il suo comportamento può essere studiato con il problema dei due corpi precedentemente studiato, nel quale il satellite è soggetto perlopiù alla forza attrattiva di un unico corpo più massivo di lui, ma sul quale agiscono anche delle altre forze chiamate perturbative che concorrono a modificarne la traiettoria rispetto a quanto previsto.

Posizione \vec{r} , velocità \vec{v} e massa m sono le variabili di stato del caso ed i loro valori iniziali sono dati.

Il punto di partenza nel primo caso di studio è il punto L2 del sistema Sole-Terra, mentre nel secondo è la Terra. La massa iniziale è di 850 kg per entrambi e la massa finale è invece frutto dell'ottimizzazione applicata. Il punto di arrivo è sempre il satellite 2013 XY20.

Per ogni variabile di stato viene scritta un'equazione differenziale vettoriale:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \quad (5.1)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r} + \frac{\vec{T}}{m} + \vec{a}_P \quad (5.2)$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{T}{c} \quad (5.3)$$

Il termine $-\frac{\mu}{r^3}\vec{r}$ rappresenta il potenziale gravitazionale della Terra se questa fosse esattamente sferica, cosa che non è però vera e che va dunque considerata nei successivi termini.

T è la spinta erogata dal motore, che è l'azione di controllo che agisce sul sistema e dunque determina la traiettoria che questo segue. È dipendente dal motore scelto e il suo valore viene assunto nullo o pari al valore massimo possibile (pari a T_{max}). Ciò che cambia è per quanto tempo il motore spinge.

c è la velocità efficace dei gas di scarico ed è assunta costante.

a_P è l'azione perturbativa, che interviene nel variare la velocità del corpo e la cui fonte possono essere diversi fenomeni:

$$a_P = a_J + a_{lsg} + a_{srp} \quad (5.4)$$

con:

- a_J è la perturbazione dovuta alla non perfetta sfericità della Terra, la cui forza di attrazione gravitazionale non sarà pertanto uguale in tutte le direzioni e agirà dunque diversamente a seconda di dove si trova il satellite

- a_{lsg} è l'azione perturbativa generata dall'attrazione gravitazionale della Luna e del Sole, che esercitano la propria forza attrattiva diversamente a seconda di dove si trovano e dunque della loro distanza, in quella precisa data, dal satellite
- a_{srp} è l'effetto perturbativo generato dalle radiazioni solari, la quale esercita una vera e propria pressione che, applicata sulla superficie dello spacecraft, diventa una spinta cui quest'ultimo è soggetto e che, seppur piccola, è sempre presente e dunque ha un'azione cumulativa modesta

Queste dipendono dalle variabili di stato e influenzano allora le derivate delle variabili aggiunte.

L'espressione generale dell'Hamiltoniano:

$$H = \Phi + \lambda^T f \quad (5.5)$$

applicata al problema appena descritto diventa:

$$H = \lambda_r^T \vec{v} + \lambda_v^T \left(-\frac{\mu^T \vec{r}}{r^2} + \frac{\vec{T}}{m} + a_P \right) - \lambda_m \frac{\vec{T}}{c} \quad (5.6)$$

Mentre i valori delle variabili aggiuntive vengono dati dalle equazioni di Eulero Lagrange:

$$\frac{d\lambda_x}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (5.7)$$

con x che via via è r, θ, φ, u, v, w ed m.

L'ottimizzazione fornisce anche le condizioni al contorno di ottimo a partire da un problema ai valori al contorno.

Bisogna introdurre il concetto di switching function SF:

$$SF = \frac{\lambda_v}{m} - \frac{\lambda_m}{c} \quad (5.8)$$

la quale è l'interruttore che gestisce la spinta. La spinta deve essere parallela alla velocità per avere valore ottimale ed il suo valore è:

- massimo (T_{max}) se $SF > 0$
- minimo (tipicamente zero) se $SF < 0$
- se $SF = 0$ l'arco è singolare

che sostituito nell'equazione dell'Hamiltoniano ne permette la riscrittura come segue:

$$H = \lambda_r^T \vec{v} + \lambda_v^T \left(-\frac{\mu \vec{r}}{r^2} \right) - T SF + a_P \quad (5.9)$$

La SF permette la massimizzazione dell'Hamiltoniano ed il raggiungimento dell'ottimizzazione. Il sistema di riferimento utilizzato per questo studio è l'EME2000, nonché un sistema di riferimento geocentrico equatoriale J2000 basato sulla posizione di equatore ed equinozio nell'anno 2000. I tre versori sono \vec{I}, \vec{J} e \vec{K} . La precessione e la nutazione sono trascurati. La posizione è descritta dalle coordinate polari raggio r, ascensione retta θ e declinazione δ .

Questo identifica la posizione:

$$r = r \cos \theta \cos \varphi \vec{I} + r \sin \theta \cos \varphi \vec{J} + r \sin \varphi \vec{K} \quad (5.10)$$

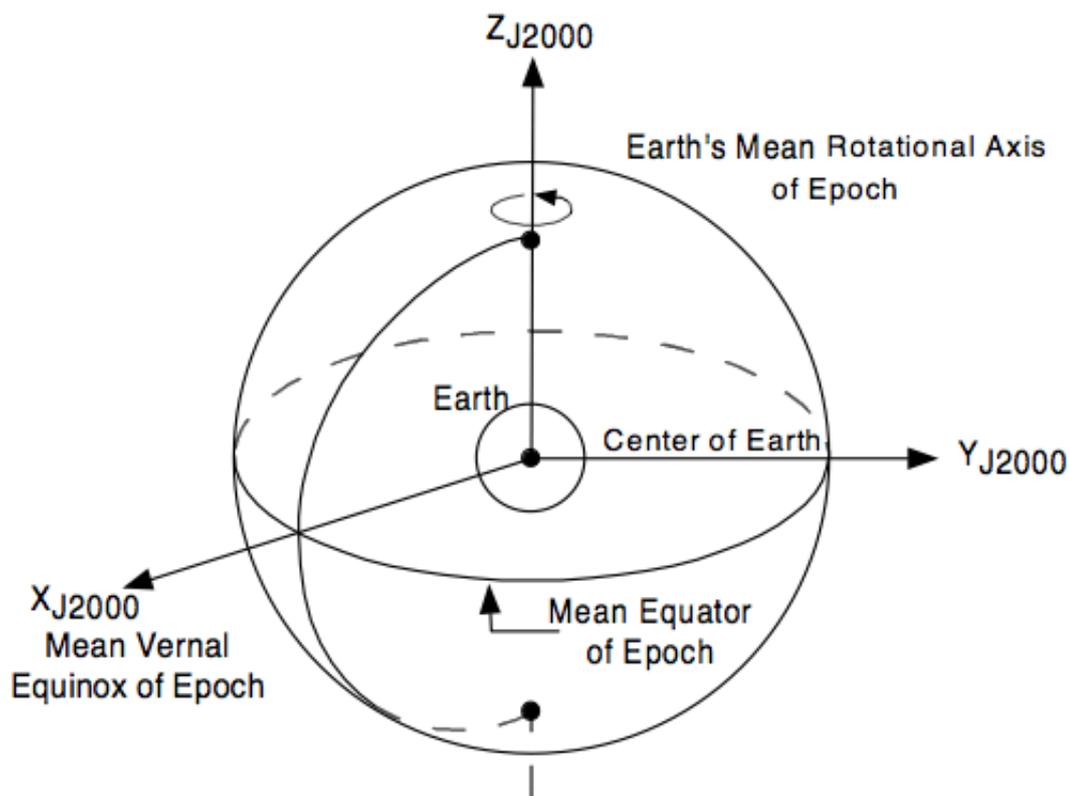


Figure 5.1: Sistema di riferimento EME2000

Il sistema di riferimento topocentrico ha origine in un punto strategico e non è un sistema di riferimento inerziale, ma in moto. I suoi versori sono \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} . La direzione \vec{i} è quella radiale, la direzione \vec{j} punta verso est e invece quella \vec{k} indica il nord.

La posizione da lui individuata è data da:

$$\begin{bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \varphi & \sin \theta \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{I} \\ \vec{J} \\ \vec{K} \end{bmatrix}$$

Il moltiplicatore dei versori \vec{I} , \vec{J} e \vec{K} è la matrice di rotazione, che permette di passare da un sistema di riferimento ad un altro.

In questo sistema di riferimento la posizione e la velocità son dati da:

$$\vec{r} = r\vec{i} \tag{5.11}$$

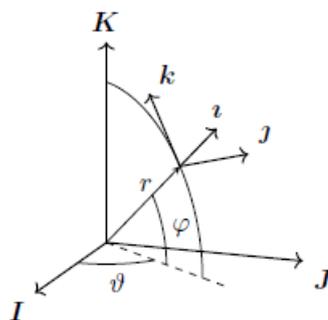


Figure 5.2: Sistemi di riferimento EME2000 e topocentrico.

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} \quad (5.12)$$

Si possono riscrivere ora come scalari e nel sistema di riferimento desiderato le equazioni differenziali vettoriali precedentemente scritte:

$$\frac{dr}{dt} = u \quad (5.13)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{r \cos \varphi} \quad (5.14)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{w}{r} \quad (5.15)$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\mu}{r^2} + \frac{v^2 + w^2}{r} + \frac{T_u}{m} + (a_p)_u \quad (5.16)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{-uv + vw \tan \varphi}{r} + \frac{T_v}{m} + (a_p)_v \quad (5.17)$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{-uw - v^2 \tan \varphi}{r} + \frac{T_w}{m} + (a_p)_w \quad (5.18)$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{T}{c} \quad (5.19)$$

Il vettore di stato riferito alle condizioni iniziali è dato da: $\mathbf{x} = [r_0, \theta_0, \varphi_0, u_0, v_0, w_0, m_0]$ e la massa finale è massimizzata.

Considerando che γ_T è l'angolo di elevazione e ψ_T l'angolo di heading della spinta, si possono considerare le tre componenti della spinta, corrispondenti a:

- $T_u = T \sin \gamma_T$ in direzione u
- $T_v = T \cos \gamma_T \cos \psi_T$ in direzione v
- $T_w = T \cos \gamma_T \sin \psi_T$ in direzione w

Le equazioni appena scritte facilitano il processo che si deve svolgere per trovare le condizioni di ottimo ossia massimizzare l'Hamiltoniano.

$$\begin{aligned} H = & \lambda_r u + \lambda_\theta \frac{v}{r \cos \varphi} + \lambda_\varphi \frac{w}{r} + \\ & + \lambda_u \left(-\frac{\mu}{r^2} + \frac{v^2}{r} + \frac{w^2}{r} + \frac{T}{m} \sin \gamma_T \right) + \\ & + \lambda_v \left(\frac{uv}{r} + \frac{vw}{r} \tan \varphi + \frac{T}{m} \cos \gamma_T \cos \psi_T \right) + \\ & + \lambda_w \left(-\frac{uw}{r} - \frac{v^2}{r} \tan \varphi + \frac{T}{m} \cos \gamma_T \sin \psi_T \right) - \lambda_m \frac{T}{c} \quad (5.20) \end{aligned}$$

Derivando l'Hamiltoniano ed imponendo uguali a zero le sue derivate parziali, si ottengono γ_T e ψ_T ottimali, che sono effettivamente i valori del controllo ricercati perché indicano la direzione della spinta che deve fornire il motore.

Il vettore u è il vettore del controllo, costituito da $u = [\gamma_T \ \psi_T]$. Derivando l'Hamiltoniano rispetto al controllo ed imponendo la condizione di stazionarietà:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial u} \right)^T = 0 \quad (5.21)$$

si possono scrivere le equazioni algebriche del controllo sapendo che λ_V è il modulo della variabile aggiunta riferita alla velocità e la sua direzione è quella ottimale in quanto parallelo alla direzione ottimale della spinta, dipendente da γ_T e ψ_T :

$$\lambda_V = \sqrt{\lambda_u^2 + \lambda_v^2 + \lambda_w^2} \quad (5.22)$$

$$\sin \gamma_T = \frac{\lambda_u}{\lambda_V} \quad (5.23)$$

$$\cos \psi_T \cos \gamma_T = \frac{\lambda_v}{\lambda_V} \quad (5.24)$$

$$\sin \psi_T \cos \gamma_T = \frac{\lambda_w}{\lambda_V} \quad (5.25)$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial H^T}{\partial x} \quad (5.26)$$

definiscono l'ultimo set di equazioni differenziali utile alla risoluzione del problema di ottimizzazione e son riferite appunto alle variabili aggiuntive, che permettono di trovare.

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_r = & \frac{1}{r^2} \left[\lambda_\theta \frac{v}{\cos \varphi} + \lambda_\varphi w + \lambda_u \left(-\frac{2}{r} + v^2 + w^2 \right) + \right. \\ & \left. + \lambda_v (-uv + vw \tan \varphi) + \lambda_w (-uw - v^2 \tan \varphi) \right] + \frac{dH}{da_P} \frac{da_P}{dr} \end{aligned} \quad (5.27)$$

$$\dot{\lambda}_\theta = 0 \quad (5.28)$$

$$\dot{\lambda}_\varphi = \frac{1}{r \cos^2 \varphi} (\lambda_\theta v \sin \varphi - \lambda_v vw + \lambda_w v^2) + \frac{dH}{da_P} \frac{da_P}{d\varphi} \quad (5.29)$$

$$\dot{\lambda}_u = \frac{1}{r} (-\lambda_r r + \lambda_v v + \lambda_w w) + \frac{dH}{da_P} \frac{da_P}{du} \quad (5.30)$$

$$\dot{\lambda}_v = \frac{1}{r} \left(-\lambda_\theta \frac{1}{\cos \theta} - 2\lambda_u v - \lambda_v (u - w \tan \varphi) + 2\lambda_w v \tan \varphi \right) + \frac{dH}{da_P} \frac{da_P}{dv} \quad (5.31)$$

$$\dot{\lambda}_w = \frac{1}{r} (-\lambda_\varphi - 2\lambda_u w - \lambda_v (v \tan \varphi + \lambda_w u)) + \frac{dH}{da_P} \frac{da_P}{dw} \quad (5.32)$$

$$\dot{\lambda}_m = \frac{T}{m^2} \lambda_V + \frac{dH}{da_P} \frac{da_P}{dm} \quad (5.33)$$

5.1 Perturbazioni

Ora si entrerà nello specifico delle perturbazioni precedentemente citate e che vanno ad alterare il modello derivante dall'analisi del problema dei due corpi. Lo spacecraft non seguirà infatti la traiettoria prevista nel caso in cui fosse unicamente soggetto all'attrazione gravitazionale di un unico corpo principale e oltretutto di forma perfettamente sferica.

In linea di massima agiscono varie perturbazioni:

- l'attrazione gravitazionale di più di un corpo, come possono essere il Sole o la Luna, cosa che fa sì che il problema dei due corpi non rispecchi più il comportamento della sonda e ci si debba spostare più sull'analisi data dal problema dei tre corpi
- la pressione di radiazione solare, data dall'emissione di fotoni da parte del Sole ed il cui impatto sulla superficie dello spacecraft comporta una cessione di quantità di moto da queste particelle al satellite, che risulta in una spinta

- la non perfetta sfericità della Terra, che fa sì che il campo d'attrazione gravitazionale terrestre non sia uniforme. Bisogna allora sfruttare un modello che ne studi le peculiarità e pertanto gli effetti
- la resistenza atmosferica, che è una forza sempre frenante per lo spacecraft e agente quasi solamente se si è in orbita bassa rispetto alla Terra. Bisogna prevedere delle azioni di correzione dell'orbita per evitare un decadimento orbitale laddove si sia in orbita bassa rispetto alla Terra

La resistenza aerodinamica è assente per questo caso di studio considerando che il punto L2 è già collocato al di fuori della zona nella quale si trova l'atmosfera e nel caso dell'orbita diretta viene invece tralasciata.

Gli altri effetti sono invece tutti agenti sul satellite e verranno pertanto considerati e trattati.

5.1.1 Non perfetta sfericità della Terra

La Terra non è una sfera perfetta, ma è schiacciata ai poli e a livello equatoriale ha un maggior rigonfiamento, dove risulta anche più massiva.

Ipotizzando che questa sia perfettamente sferica si arriva al classico modello del potenziale secondo cui questo è inversamente proporzionale alla distanza dal centro della Terra come prevede $-\frac{\mu}{r}$ ed è uguale in tutte le direzioni uscenti dal centro.

A causa della non perfetta sfericità della Terra, l'attendibilità di questo modello cade e per studiare l'attrazione gravitazionale esatta che viene esercitata sul satellite bisognerà allora studiare qual è il potenziale gravitazionale del punto della Terra sul quale il satellite sta orbitando.

Son disponibili vari modelli approssimativi e tra questi si è deciso di utilizzare il modello chiamato EGM 2008 (Earth geopotential model), più veritiero dei precedenti grazie ai dati forniti dalla sonda GRACE. Questo, partendo dal modello che ipotizza la perfetta sfericità, va ad aggiungere all'espressione del campo gravitazionale associata alla superficie equipotenziale del campo gravitazionale terrestre che meglio si adatta nel senso dei minimi quadrati al livello globale medio del mare, i coefficienti atti a considerare tutti gli effetti delle non perfette simmetrie separatamente. I coefficienti cosiddetti coefficienti armonici tengono dunque conto di cose diverse e sono fino ad un grado n pari a 2190 ed uno m pari a 2159.

La rotazione terrestre viene considerata uniforme e i suoi moti di precessione e nutazione son stati trascurati nella creazione del modello. A seconda dell'accuratezza che si vuole abbia il modello, questo verrà troncato ad un certo ordine e ci sarà pertanto un diverso numero di coefficienti considerati.

Si ottiene la seguente espressione:

$$\Phi = -\frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^N \left(\frac{r_E}{r}\right)^n \sum_{m=0}^N (C_{nm} \cos \lambda m + S_{nm} \sin \lambda m) P_{nm} \sin \varphi \quad (5.34)$$

con:

- μ pari al parametro gravitazionale terrestre, funzione di costante di gravitazione universale e massa terrestre
- r_E è il raggio dell'ellissoide terrestre
- N è un coefficiente che è stato settato in questo caso ad 8

- φ è la latitudine terrestre, coincidente con la declinazione perché il moto di nutazione è stato trascurato
- λ è la longitudine terrestre, ottenuta mediante la seguente espressione:

$$\lambda = \theta - \theta_{Gref} - w_e(t - t_{ref}) \quad (5.35)$$

con θ_{Gref} pari all'ascensione retta di Greenwich al tempo di riferimento pari a 51544.5 MJD e w_e la velocità angolare di rotazione terrestre considerando il giorno sidereo ma senza considerare il fenomeno di precessione

- C_{nm} ed S_{nm} sono i coefficienti sferici armonici, immessi nella forma non normalizzata per rendere il tutto computazionalmente più veloce anche se meno accurato
- $P_{nm} \sin \varphi$ sono i cosiddetti polinomi di Legendre, di ordine m e grado n :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1) \quad (5.36)$$

$$P_n^m(x) = (-1^m) (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} [P_n(x)] \quad (5.37)$$

Suddividendo la Terra mediante l'utilizzo di una griglia, nell'analisi se $n \neq m$ allora si indica un'armonica tesserale, mentre se $n=m$ si indica un'armonica settoriale.

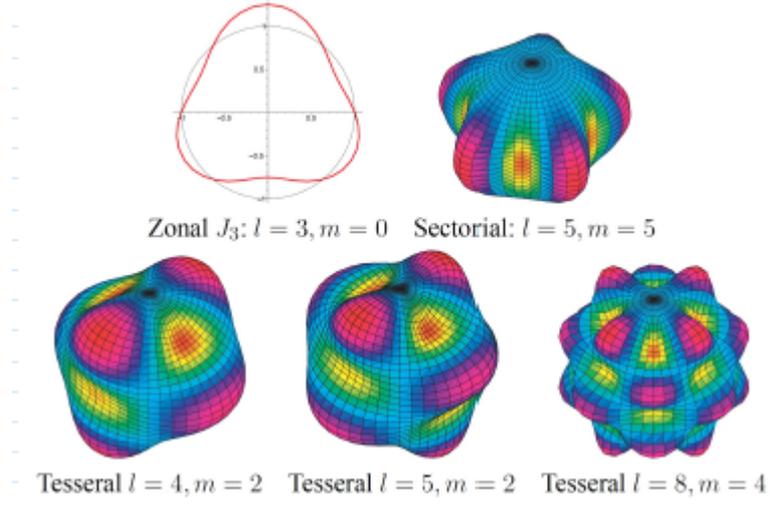


Figure 5.3: Rappresentazione di alcune armoniche.

L'accelerazione perturbativa dovuta alla non perfetta sfericità della Terra matematicamente è pari al gradiente di $-\Phi$. Considerando un sistema di riferimento topocentrico le componenti di quest'accelerazione sono:

$$a_{Ju} = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad (5.38)$$

$$a_{Jv} = -\frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \quad (5.39)$$

$$a_{Jw} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \quad (5.40)$$

La derivazione rispetto ad r e θ è di facile esecuzione, mentre non si può dire lo stesso per quella rispetto a φ perché richiede la derivazione dei polinomi di Legendre, che viene

ottenuta in maniera ricorsiva sfruttando le proprietà dei polinomi di Legendre stessi. Ponendo $P_{nm} = 0$ si ottiene per $m > n$:

$$\frac{dP_{nm}}{d\varphi} = \frac{P_{n(m+1)} - (n+m)(n-m+1)P_{n(m-1)}}{2} \quad \text{se } m > 0 \quad (5.41)$$

Se $m=0$ vale invece:

$$\frac{dP_{nm}}{d\varphi} = P_{n1} \quad (5.42)$$

5.1.2 Perturbazione lunisolare

L'azione perturbativa di un altro corpo come può essere la Luna o il Sole sulla traiettoria dello spacecraft si studia mediante le effemeridi, che sono tabelle che catalogano informazioni come la distanza e le traiettorie dei corpi celesti nei vari archi temporali, utili soprattutto per via della variabilità di queste grandezze.

Nel caso particolare di studio vengono utilizzate le effemeridi DE430 JPL per conoscere le posizioni della Luna e del Sole, la cui perturbazione viene studiata separatamente.

Queste forniscono le loro posizioni nel sistema di riferimento International Celestial Reference Frame (ICRF), molto simile all'EME2000 e per questo vengono qua trascurate le differenze tra i due, in coordinate rettangolari.

Considerando con la sigla 'b' il generico corpo celeste perturbatore, la sua posizione in coordinate rettangolari rispetto alla Terra è:

$$r_b = x_b \vec{I} + y_b \vec{J} + z_b \vec{K} \quad (5.43)$$

e la sua costante gravitazionale è pari a μ_b .

In realtà l'azione perturbativa non è pari all'attrazione gravitazionale che il corpo perturbatore esercita sul satellite, ma è pari alla differenza di attrazione gravitazionale che questo esercita sulla Terra e sul satellite.

Considerando infatti che:

$$R = r - r_b \quad (5.44)$$

sia pari alla distanza relativa del satellite rispetto al corpo perturbatore, mentre r_b sia la posizione relativa della Terra rispetto al corpo perturbatore

$$a_{bg} = -\frac{\mu_b}{R^3} \vec{R} - \frac{\mu_b}{r_b^3} \vec{r}_b \quad (5.45)$$

questa è l'accelerazione derivante dalla presenza del corpo perturbatore sul satellite, che non coincide con l'accelerazione effettivamente derivante dall'attrazione gravitazionale che il corpo perturbatore esercita sul satellite, che coincide invece con il primo termine.

Proiettando il tutto in un sistema di riferimento topocentrico relativo a quella data si può scomporre l'accelerazione perturbatrice nelle sue componenti:

$$(a_{bg})_u = \frac{\mu_b}{R^3} [(r_b)_u - r] - \frac{\mu_b}{r_b^3} (r_b)_u \quad (5.46)$$

$$(a_{bg})_v = \frac{\mu_b}{R^3} (r_b)_v - \frac{\mu_b}{r_b^3} (r_b)_v \quad (5.47)$$

$$(a_{bg})_w = \frac{\mu_b}{R^3} (r_b)_w - \frac{\mu_b}{r_b^3} (r_b)_w \quad (5.48)$$

con:

$$R = \sqrt{[r - (r_b)_u]^2 + (r_b)_v^2 + (r_b)_w^2} \quad (5.49)$$

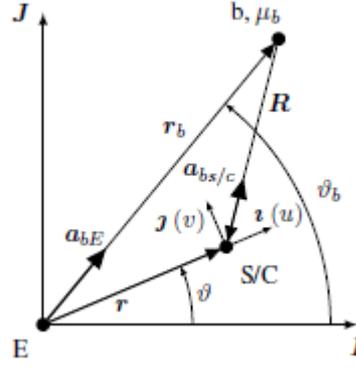


Figure 5.4: Rappresentazione del corpo perturbatore e della sua azione perturbatrice in un sistema di riferimento EME2000.

La posizione del corpo perturbatore nel sistema di riferimento topocentrico dello spacecraft è:

$$(r_b)_u = x_b \cos \theta \cos \varphi + y_b \sin \theta \cos \varphi + z_b \sin \varphi \quad (5.50)$$

$$(r_b)_v = -x_b \sin \theta + y_b \cos \theta \quad (5.51)$$

$$(r_b)_w = -x_b \cos \theta \sin \varphi - y_b \sin \theta \sin \varphi + z_b \cos \varphi \quad (5.52)$$

Effettuando separatamente prima l'analisi dell'azione perturbativa della Luna e poi l'analisi di quella del Sole, si può scrivere l'azione perturbatrice lunisolare come somma delle due e suddividerla in componenti:

$$(a_{lsp})_u = (a_{lg})_u + (a_{sg})_u \quad (5.53)$$

$$(a_{lsp})_v = (a_{lg})_v + (a_{sg})_v \quad (5.54)$$

$$(a_{lsp})_w = (a_{lg})_w + (a_{sg})_w \quad (5.55)$$

Scritte in questa forma e poiché la gravità dipende solamente dalle distanze e posizioni relative, queste azioni perturbative sono unicamente funzione delle variabili di stato che indicano la posizione e dunque r , θ e φ .

Nel caso in cui il corpo perturbatore sia molto lontano rispetto alla distanza che intercorre tra la Terra e lo spacecraft, come può essere il caso del Sole, e dunque valga $r_b \ll r$ allora i vari corpi possono essere considerati come complanari e si trova un'espressione della perturbazione tangenziale semplificata dipendente dal seno della differenza tra la posizione angolare del Sole θ_s e la posizione angolare dello spacecraft θ .

5.1.3 Pressione di radiazione

Dei vari effetti perturbativi, questo è quello meno influente nel nostro caso perché va a comportare variazioni solo di qualche grammo.

Il Sole emette continuamente particelle, che siano queste ad alta energia o siano fotoni. Considerando il caso della luce, questa contiene fotoni ossia particelle che si muovono alla velocità della luce e sono energetiche. Quando la luce incide su qualcosa e dunque i fotoni si sbattono contro qualcosa, gli cedono la propria quantità di moto e dunque l'energia. Questa pressione generata dall'impatto ed esercitata sulla superficie dello spacecraft, corrisponde dunque ad una forza che si esercita sul satellite e questo ne comporta un'accelerazione, la cui direzione dipenderà dalla direzione d'incidenza ossia quella della

congiungente tra il Sole e lo spacecraft.

La pressione esercitata da un fotone che impatta ad una distanza R dal Sole è:

$$p = \frac{L_s}{4\pi r^2 c} \quad (5.56)$$

con:

- L_s pari alla potenza irradiata dal Sole
- c corrisponde alla velocità della luce nel vuoto

Ad una distanza R^* pari a quella che intercorre tra il Sole e la Terra la pressione di radiazione è di $p^* = 4.55682 * 10^{-6} \frac{N}{m^2}$.

Considerando il satellite come un corpo sferico, l'accelerazione perturbativa derivante dalla pressione di radiazione solare è:

$$a_{srp} = (1 + \eta)p * \left(\frac{R^*}{R}\right)^2 \frac{S \vec{R}}{m R} = \frac{\Gamma \vec{R}}{m R^3} \quad (5.57)$$

con:

- η pari alla riflettività, che può andare da 0 per un corpo che assorbe completamente le radiazioni impattanti su di sé fino ad 1 per un corpo che riflette tutto ciò che gli incide sopra. In questo caso si prende un valore di riflettività di 0.7
- S è la superficie dello spacecraft sulla quale impattano i fotoni e dunque potenzialmente sede di spinta
- m è la massa dello spacecraft

Suddividendo l'azione perturbatrice derivante dalla pressione di radiazione nelle sue componenti si ottiene:

$$(a_{srp})_u = \frac{\Gamma}{m R^3} [(r_s)_u - r] \quad (5.58)$$

$$(a_{srp})_v = \frac{\Gamma}{m R^3} (r_s)_v \quad (5.59)$$

$$(a_{srp})_w = \frac{\Gamma}{m R^3} (r_s)_w \quad (5.60)$$

Quest'accelerazione perturbatrice dipende pertanto inversamente dal quadrato della distanza tra il Sole ed il satellite, esattamente come l'accelerazione perturbatrice dipendente dalla forza gravitazionale esercitata da un altro corpo sul satellite. Le due hanno però stessa direzione ma verso opposto: l'accelerazione derivante dalla pressione di radiazione spinge in direzione opposta al Sole, mentre l'accelerazione gravitazionale attira il corpo verso il Sole.

L'accelerazione dovuta alla pressione di radiazione in più dipende dalla massa, il cui valore è variabile e crea pertanto un termine aggiuntivo nella derivata rispetto al tempo della variabile aggiunta riferita alla massa.

Ci saranno dei periodi nei quali questo disturbo non è presente perché il satellite si trova nella zona d'ombra generata dalla presenza della Terra nel tratto che intercorre tra il satellite e la fonte di luce.

Considerando due coni di generatrice diversa ma centrata nel Sole, la posizione angolare

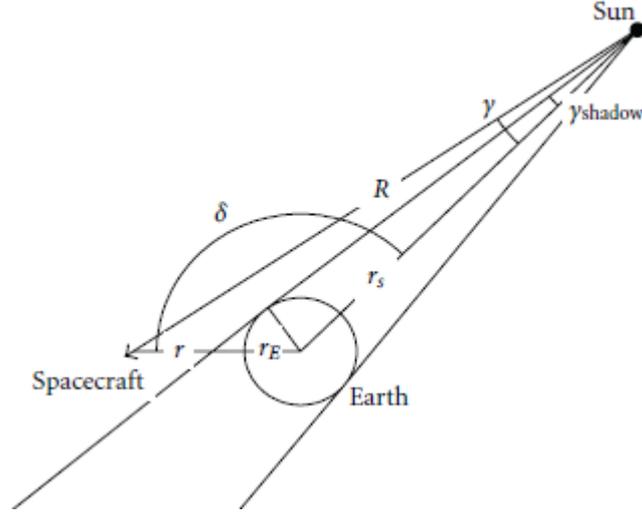


Figure 5.5: Cono d'ombra generato dalla Terra.

del satellite è data da un angolo γ_{sc} e si trova sulla superficie di un cono con asse centrale coincidente con la congiungente Sole-Terra:

$$\gamma_{sc} = \arcsin\left(\frac{r \sin \delta}{R}\right) \quad (5.61)$$

con δ pari alla distanza angolare tra la congiungente Sole-Terra ed il vettore che parte dal centro della Terra ed individua la posizione dello spacecraft. Si può esprimere nel seguente modo:

$$\delta = \arccos\left[\frac{(r_s)_u}{r_s}\right] \quad (5.62)$$

Sole e spacecraft si trovano dallo stesso lato rispetto alla Terra se $(r_s)_u > 0$ ed in tal caso non si ha il problema dell'oscuramento del satellite da parte dell'ombra terrestre. Se $(r_s)_u < 0$ Sole e satellite sono da lati opposto rispetto alla Terra e dunque è possibile che il satellite sia in ombra, ma non è detto.

La zona d'ombra generata dall'eclissi è un cono di semiapertura γ_{shadow} :

$$\gamma_{shadow} = \arcsin\left(\frac{r_E}{r_s}\right) \quad (5.63)$$

con r_s pari alla distanza Sole-Terra ed r_E coincidente con il raggio terrestre.

Il satellite di troverà nella zona d'ombra pertanto se $(r_s)_u < 0$ e al contempo $\gamma_{sc} < \gamma_{shadow}$.

5.1.4 Codice di calcolo

Il codice di calcolo riporta il metodo indiretto di ottimizzazione come precedentemente descritto e prevede la presenza delle perturbazioni trattate. La macrostruttura del codice è pertanto quanto è appena stato spiegato.

Vengono assunti però dei valori iniziali peculiari del punto di partenza della singola missione.

Per comodità si utilizzano delle grandezze note per rendere adimensionali le grandezze o vederle come multipli di grandezze caratteristiche.

Grandezze ed incognite

Il problema consta di 14 variabili chiamate NY e che sono, in ordine:

- r, θ e φ per la posizione
- u, v e w per la velocità
- le variabili aggiunte corrispondenti alla posizione e la velocità: $\lambda_r, \lambda_\theta, \lambda_\varphi, \lambda_u, \lambda_v$ e λ_w
- la massa m
- la variabile aggiunta riferita alla massa

Alle quali ne son state aggiunte due:

- il tempo di spegnimento del motore t_1
- il tempo finale t_2

raggiungendo così 16 variabili.

Le incognite sono:

- t_1
- t_2
- $\lambda_r, \lambda_\theta, \lambda_\varphi, \lambda_u, \lambda_v$ e λ_w

Specifiche della spinta e del motore

Il codice prevede due fasi per il motore: spento o acceso. Vengono chiamate N_{cmpmax} . Le manovre sono del tipo a singolo impulso e la spinta viene fornita da un motore Ariane group RIT 2X, le cui specifiche sono le seguenti:

- potenza disponibile:

$$P = 4.2kW \quad (5.64)$$

- efficienza:

$$\eta = 0.625 \quad (5.65)$$

- impulso specifico costante pari a:

$$I_{sp} = 3300s \quad (5.66)$$

Valori iniziali

Il primo codice di calcolo, chiamato el220, studia unicamente la fuga dalla sfera d'influenza terrestre partendo dal punto L2 del sistema Sole-Terra sfruttando le grandezze adimensionali.

Le equazioni riferite alla partenza sono:

$$r_0 = r_{ST,0} \left[\frac{1}{3\mu_S} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (5.67)$$

$$\theta_0 = \theta_{S,0} + \pi \quad (5.68)$$

$$\varphi_0 = -\varphi_{S,0} \quad (5.69)$$

$$u_0 = 0 \quad (5.70)$$

$$v_0 = v_{S,0} \frac{r_0}{r_{S,0}} \quad (5.71)$$

$$w_0 = -w_{S,0} \frac{r_0}{r_{S,0}} \quad (5.72)$$

Anche la distanza dalla Terra del punto di arrivo è fissata perché si considera che l'attrazione gravitazionale della Terra non sia più preponderante rispetto all'attrazione gravitazionale del Sole quando ci si trova ad una distanza pari a $3 * 10^6$ km, che viene settata come punto di fine escape.

Il secondo codice di calcolo, chiamato *esarv*, studia la trasferta interplanetaria tra il punto nel quale avviene la fuga dalla sfera d'influenza terrestre, le cui coordinate sono input immessi manualmente nel codice, e l'asteroide target di missione 2013 XY20, la cui traiettoria è nota da database. Vengono quindi forniti sia la posizione sia la velocità iniziale del satellite, che non sono altro che output del precedente codice *el22o*.

Il terzo codice di calcolo, chiamato *esav*, studia una missione con partenza dalla Terra e arrivo allo stesso asteroide.

Adimensionalizzazioni

Per comodità è previsto l'utilizzo di quantità adimensionate rispetto a vari fattori:

- le distanze vengono adimensionate rispetto al raggio equatoriale terrestre o alla distanza Sole-Terra:

$$R_T = 6378.1363 km \quad (5.73)$$

$$r_{ST} = 1UA = 1.5 * 10^8 km \quad (5.74)$$

pertanto le distanze saranno multipli del massimo raggio terrestre o della distanza Sole-Terra a seconda che si stia percorrendo un tratto all'interno della sfera d'influenza terrestre oppure si sia all'interno della sfera d'influenza del Sole

- le velocità vengono adimensionate o rispetto alla velocità circolare corrispondente ad una distanza pari al raggio equatoriale terrestre, chiamata anche prima velocità cosmica, oppure se si è in un tratto eliocentrico si preferisce adimensionare rispetto alla velocità orbitale della Terra attorno al Sole

$$v_{cosmica} = \sqrt{\frac{\mu_T}{R_T}} = 7.9054 \frac{Km}{s} \quad (5.75)$$

$$v_{elio} = \sqrt{\frac{\mu_S}{r_{ST}}} = 29.7847 \frac{Km}{s} \quad (5.76)$$

- il tempo viene adimensionato o rispetto al periodo orbitale che avrebbe un satellite posto nella più bassa orbita possibile (quella nel quale lo spacecraft orbita ad un raggio pari al raggio equatoriale terrestre) oppure rispetto al periodo orbitale della Terra attorno al Sole se si sta parlando di un tratto eliocentrico

$$t = \frac{R_T}{v_{cosmica}} = 806.811s \quad (5.77)$$

$$t = \frac{r_{ST}}{v_c} = 1anno \quad (5.78)$$

Considerando che un anno corrispondente al percorrere una distanza angolare pari a 2π allora si può usare come tempo di adimensionalizzazione il seguente:

$$t_{conv} = \frac{365g}{2\pi} = 58.1324209giorni \quad (5.79)$$

dunque una quantità unitaria corrisponde a poco meno di due mesi

- l'accelerazione può essere adimensionata, tenendo conto che si è usato come riferimento il moto della Terra attorno al Sole:

$$a_{conv} = \frac{\mu_S}{r_{ST}^2} = 5.930083517 * 10^6 \frac{km}{s^2} \quad (5.80)$$

- la massa può essere invece rapportata alla massa iniziale della missione m_0 , corrispondente a 850 kg, in modo da avere un rateo iniziale pari ad 1 che, man mano che si consuma combustibile con il progredire della missione, assumerà valori inferiori all'unità

$$m = \frac{m_t}{m_0} \quad (5.81)$$

Chapter 6

Risultati

In questo capitolo verrà analizzata la traiettoria di fuga dalla sfera d'influenza terrestre con partenza dal punto lagrangiano L2 del sistema Sole-Terra e destinazione l'asteroide 2013 XY20.

Cambiando data di partenza e durata della missione, si ottengono traiettorie molto diverse tra loro e pertanto non tutte saranno convenienti al fine di effettuare una missione che consumi il meno possibile. Per poter capire come mai queste traiettorie differiscano così tanto le une dalle altre e quali siano i fattori che influiscono su di loro rendendole tali, viene simulata la stessa missione da quattro date di partenza diverse, l'una distanziata dalla precedente e dalla successiva di due mesi. In ognuna di queste quattro date partiranno 14 missioni di diversa durata, con fughe che vanno da un minimo di 50 giorni fino ad un massimo di 115 giorni, con una differenza tra l'una e l'altra di 5 giorni.

Lo studio verrà condotto scegliendo, grazie all'utilizzo della teoria del controllo ottimale, tra tutte le traiettorie possibili quelle con velocità Vinfinito ottimale all'uscita dalla sfera d'influenza terrestre e pertanto questa velocità non sarà fissata a priori.

Verranno trovate la data di partenza e la durata della missione più convenienti.

Lo scopo dello studio è dimostrare la convenienza dell'effettuare missioni che abbiano come punto di partenza il punto lagrangiano L2, quindi questo tipo di traiettoria verrà confrontata con un'orbita diretta che abbia lo stesso target di arrivo, l'asteroide 2013 XY20, ma che abbia un diverso punto di partenza: la Terra. Il vantaggio verrà sottolineato in termini di parametri orbitali dell'orbita L2 alla fine dell'escape più simili a quelli che si devono raggiungere alla fine della missione, ossia quelli dell'asteroide, rispetto ai parametri orbitali iniziali dell'orbita diretta, che sono dunque i parametri orbitali dell'orbita terrestre. Una maggior vicinanza tra i valori dei parametri orbitali implica che lo spacecraft deve eseguire manovre meno dispendiose per raggiungere l'obiettivo, dunque questo si traduce in un minor consumo di propellente.

6.1 Escape dal punto L2 Sole-Terra per arrivare a 2013 XY20

Questa traiettoria è stata suddivisa in due tratti, che sono stati studiati con due codici Fortran diversi:

- La fuga dal punto lagrangiano L2 del sistema Sole-Terra.
- Dall'uscita dalla sfera d'influenza terrestre fino all'asteroide 2013 XY20.

6.1.1 Escape da L2

La prima parte è la fuga vera e propria. Lo spacecraft parte dal punto lagrangiano L2, che si trova a 1.5 milioni di km dalla Terra, con una massa iniziale di 850 kg. Il punto di uscita dalla sfera d'influenza terrestre viene collocato a $3 * 10^6$ km, distanza alla quale la gravità terrestre e dunque la sua forza attrattiva diventano sufficientemente piccole e lo spacecraft sente principalmente l'attrazione solare, dunque viene considerato da questo punto in poi all'interno della sfera d'influenza del Sole. Questo punto è quindi il raggio finale dell'orbita.

In questo tratto dell'orbita non viene consumato un ingente quantitativo di propellente, il cui consumo va da un minimo di 0.2 kg nel caso delle missioni di durata massima (e dunque che consumano meno), fino ad un massimo di 7 kg per quelle di durata minima (e dunque che consumano di più). Il consumo non è grosso perché per l'escape il satellite ha come punto di partenza già un punto che si trova relativamente lontano dal centro della Terra, che è il punto di massima attrazione gravitazionale visto che questa varia come $1/r^2$, e all'interno della sfera d'influenza terrestre l'attrazione gravitazionale della Terra è il fattore che più influisce sull'orbita del satellite. Il punto in questione è oltretutto il punto L2, che si trova ad una distanza dal Sole e dalla Terra tale che l'attrazione gravitazionale combinata di questi due corpi celesti eguaglia la forza centrifuga necessaria per mantenere in posizione il satellite, dunque il satellite rimarrebbe su quest'orbita a costo praticamente zero. La netta differenza tra i consumi della missione più lunga e più corta risiede perlopiù nell'orbita in cui ci si va ad immettere e nelle influenze subite da parte del Sole e della Luna.

A livello di distanza dalla Terra partire in giornate diverse non cambia dunque la situazione per l'escape perché comunque il punto L2 si trova sempre alla stessa distanza dalla Terra, ma a livello di posizione più o meno favorevole del Sole e della Luna la data di partenza è importante.

Variare la durata della missione influisce sul consumo perché, se c'è bisogno di raggiungere il target in un arco temporale più ristretto, allora i motori dovranno spingere per più tempo e dunque sfrutteranno un maggior quantitativo di propellente ed il consumo salirà. Un fattore che può correre in aiuto del satellite è appunto l'attrazione della Luna, legata alla posizione della stessa nella data di inizio della missione e alla durata della missione stessa. La Luna dovrà però trovarsi nella metà della propria orbita di rivoluzione attorno alla Terra favorevole ai fini di una spinta accelerante per lo spacecraft e, a seconda della durata della missione, si otterrà questo effetto benefico un numero di volte diverso, per un tempo diverso a seconda di quando si parte, con un effetto cumulativo pertanto differente e che va rapportato all'effetto frenante ricevuto quando la Luna era nella metà sfavorevole della propria orbita, dove invece frenava lo spacecraft.

Se l'orbita ha una durata tale che ha goduto per più tempo dell'effetto benefico, allora il motore avrà dovuto spingere meno perché il satellite avrà guadagnato un po' di velocità grazie alla Luna. Questo è il caso nel quale ad esempio l'orbita sia durata meno di 1.5 volte l'orbita Lunare e, alla partenza, la Luna stava iniziando a percorrere il proprio tratto di orbita favorevole per generare spinta accelerante. Se l'orbita fosse durata meno di 1.5 volte quella lunare ma alla partenza la Luna stava iniziando il tratto di orbita sfavorevole, allora la situazione sarebbe stata opposta, con un effetto negativo che avrebbe prevalso ed un maggior consumo.

Essere più lontani dalla Luna quando questa si trova nella metà orbita sfavorevole converrebbe dunque allo spacecraft perché in questo modo sentirebbe meno la sua attrazione gravitazionale e pertanto il suo effetto negativo, così come essere più vicino quando è favorevole.

Quando la durata della missione si allunga, lo spegnimento dei motori avviene prima

perché lo spacecraft si inserisce in un'orbita meno energetica, nella quale è richiesta una minor velocità orbitale a parità di raggio rispetto ad un'orbita più energetica, dunque il motore dovrà fornire una minor variazione di velocità. Questo tipo di traiettorie sono più lunghe a livello di arco percorso, il quale viene oltretutto percorso più lentamente.

Il consumo alle durate basse è necessariamente alto, ma nonostante le oscillazioni dovute alle posizioni più o meno favorevoli man mano che la missione termina in un tempo diverso ed è dunque soggetta ad un'azione perturbativa differente, più aumenta la durata della missione e per più tempo il satellite avrà a disposizione l'azione solare e dunque si noterà una tendenza all'aumento della velocità finale.

Avendo già ricevuto questo salto di velocità dal lavoro dei corpi celesti, allora il motore dovrà svolgere meno lavoro lui stesso per ottenere la stessa spinta rispetto al caso nel quale nessun fattore benefico fosse intervenuto. Ovviamente questo si traduce in una diminuzione di consumo, come ad esempio nel caso $t_0=162$ e durata 105 giorni.

Dal punto di vista della Terra, queste traiettorie sono dei rami di differenti iperboli visto che il satellite esce dalla sfera d'influenza terrestre con una velocità diversa da zero, il cui valore è ottimizzato dalla teoria del controllo ottimale.

La varietà nelle date di partenza e nelle durate della missione permettono l'analisi delle differenze tra le varie missioni stesse in termini sia di velocità dello spacecraft al raggio d'uscita dalla sfera d'influenza terrestre, sia delle effettive traiettorie che segue e del distinto uso dei motori che in queste si fa.

Il codice Fortran usa quantità adimensionali per indicare le date di partenza. Una quantità unitaria equivale a due mesi. La prima partenza avviene in $t_0=160$, che equivale al giorno 19/6/2025. Le successive date di partenza sono distanziate l'una dall'altra di una quantità unitaria fino all'ultima data di partenza pari a $t_0=163$, dunque $t_0=161$ avviene due mesi dopo 160 ed equivale al giorno 16/8/2025 e lo stesso discorso vale per $t_0=162$ (14/10/2025) e $t_0=163$ (10/12/2025).

Per ogni data di partenza ed ogni missione la tabella riporta il giorno di inizio della missione e la data nella quale avviene lo spegnimento dei motori sia nella forma adimensionata sia nella forma canonica pari al formato giorno/mese/anno.

Duration [days]	Departure Date			
	160	161	162	163
	19/06/2025	16/08/2025	13/10/2025	10/12/2025
115	20/06/2025	17/08/2025	14/10/2025	11/12/2025
110	20/06/2025	17/08/2025	14/10/2025	11/12/2025
105	20/06/2025	17/08/2025	14/10/2025	11/12/2025
100	20/06/2025	17/08/2025	14/10/2025	12/12/2025
95	21/06/2025	17/08/2025	15/10/2025	12/12/2025
90	21/06/2025	18/08/2025	15/10/2025	12/12/2025
85	22/06/2025	19/08/2025	16/10/2025	13/12/2025
80	22/06/2025	19/08/2025	16/10/2025	14/12/2025
75	23/06/2025	20/08/2025	17/10/2025	15/12/2025
70	25/06/2025	21/08/2025	18/10/2025	16/12/2025
65	26/06/2025	23/08/2025	20/10/2025	17/12/2025
60	28/06/2025	25/08/2025	22/10/2025	19/12/2025
55	01/07/2025	28/08/2025	25/10/2025	22/12/2025
50	04/07/2025	31/08/2025	28/10/2025	26/12/2025

Table 6.1: Date di spegnimento dei motori

Per tutte le escape più lunghe (115 giorni) infatti lo spegnimento dei motori avviene il giorno dopo la partenza visto che non c'è bisogno di grosse spinte, mentre per le escape più corte avviene circa 15 giorni dopo.

Le fughe di durata 50 giorni hanno una massa finale di circa 843 kg, che differisce tra una data di partenza e l'altra di massimo 0,2 kg e che vede la data $t_0=162$ come quella di minimo consumo ed alta ma non massima velocità finale. La missione che parte in $t_0=163$ ha massa finale minima ma anche velocità massima e circa pari a quella partita in $t_0=160$, la quale ha però una velocità discretamente minore. Le simulazioni hanno mostrato che, facendo partire la missione in $t_0=160.2$ ossia circa due settimane dopo, la massa finale sarebbe 1 kg in meno rispetto a $t_0=160$, dunque situazione ancor più sfavorevole perché la durata della missione coincide con un maggior tratto dell'orbita sfavorevole della Luna. Lo stesso discorso si può fare per le fughe di 115 giorni, le quali hanno qualsiasi sia la data di partenza una massa finale di circa 849 kg, il cui valore esatto differisce tra l'una e l'altra di un massimo di 0,13 kg e che vede sempre la data $t_0=162$ come la data di partenza di minimo consumo perché termina in un tempo favorevole.

Duration [days]	Departure Date			
	160	161	162	163
	19/06/2025	16/08/2025	13/10/2025	10/12/2025
115	849,6915	849,7995	849,8245	849,6943
110	849,5987	849,7087	849,7371	849,6079
105	849,483	849,5944	849,6266	849,4987
100	849,3388	849,4518	849,4883	849,3622
95	849,1619	849,2767	849,3185	849,1950
90	848,9479	849,0647	849,1118	848,9915
85	848,6897	848,8072	848,8584	848,7402
80	848,3702	848,4868	848,5406	848,4229
75	847,9634	848,07977	848,1348	848,0170
70	847,4439	847,5597	847,6165	847,498
65	846,7821	846,899	846,9574	846,8382
60	845,9344	846,0517	846,108	845,9836
55	844,8094	844,9244	844,968	844,8243
50	843,1921	843,3006	843,3128	843,1231

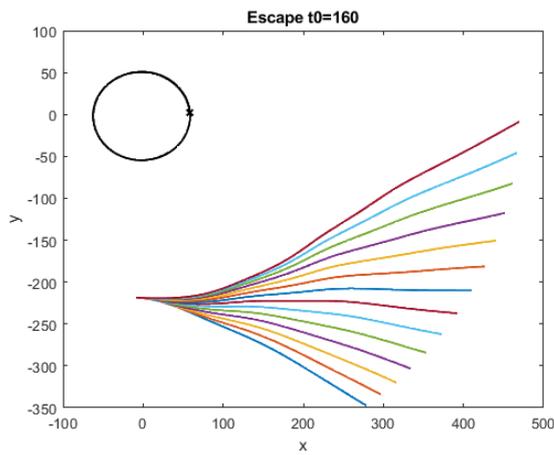
Table 6.2: Massa finale dell'escape [kg]

Per ogni data di partenza vengono disegnate tutte le missioni di diversa durata, che corrispondono quindi ad archi di diversa lunghezza. Il punto d'inizio della missione è ovviamente comune a tutte ed è il punto L2 del sistema Sole-Terra, che si trova ad una distanza fissa dalla Terra pari a 1.5 milioni di km lungo la congiungente Sole-Terra, dal lato opposto della Terra rispetto al Sole.

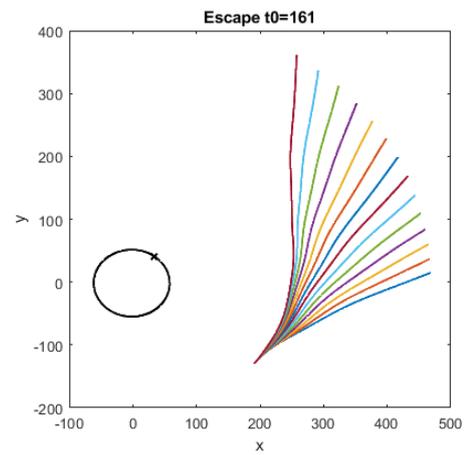
L2 è fermo rispetto alla Terra perché ha il suo stesso periodo orbitale per via del bilanciamento tra le forze, ma non è fermo in maniera assoluta e pertanto sarà lo stesso per missioni che hanno la stessa data di partenza, mentre sarà diverso tra le varie date di inizio missione visto che si sposta come la Terra. Il moto circolare di L2 attorno al Sole è visibile in figura 6.2, dove vengono raffigurate missioni della stessa lunghezza ma con partenza differente.

Le manovre di escape non sono delle iperboli perfette e la motivazione risiede sempre nell'attrazione Luni-Solare. Quando la missione dura meno, la curva è più simile ad un'iperbole perfetta. Quando la missione si allunga, la Luna e il Sole hanno a disposizione un tempo maggiore per esercitare la propria attrazione gravitazionale sul satellite, modificandone pian piano la traiettoria man mano che questo si allontana di più dalla Terra e sente sempre meno la sua influenza e sempre più quella degli altri corpi celesti.

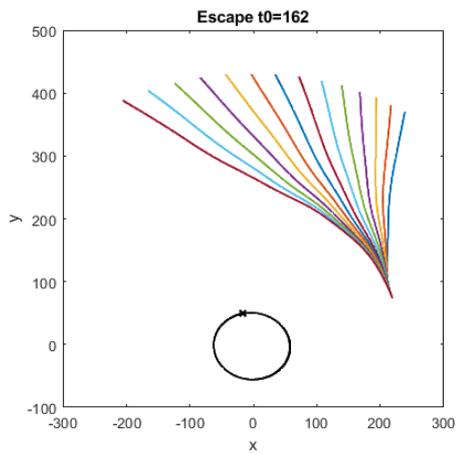
Man mano che aumenta la durata della missione, la traiettoria diventa non solo più lunga ma anche più vicina alla Terra rispetto ad una più corta nella quale ci si allontana subito. Questa sezione di traiettoria viene graficata in un sistema di riferimento geocentrico equatoriale, la cui origine è il centro della Terra. L'asse X punta in direzione del punto vernale, il piano XY è il piano equatoriale terrestre e l'asse Z coincide con l'asse di rotazione terrestre e punta verso la stella polare. L'unità di misura utilizzata è il raggio terrestre, pari a 6378 km.



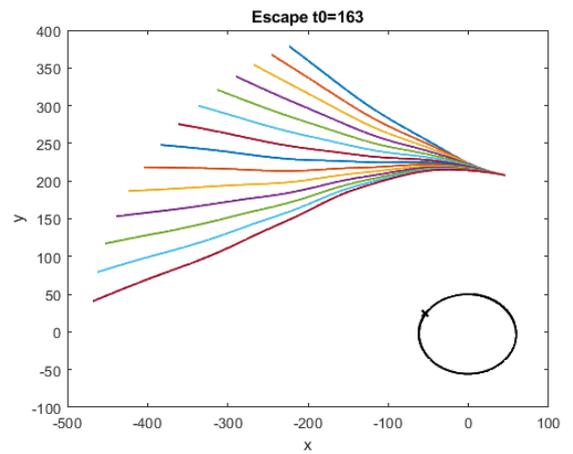
(a) t0=160



(b) t0=161



(c) t0=162



(d) t0=163

Figure 6.1: Manovre di fuga di diversa durata dal punto L2 del sistema Sole-Terra per diverse date di partenza. L'orbita lunare è rappresentata in nero ed è segnata la sua posizione il giorno della partenza.

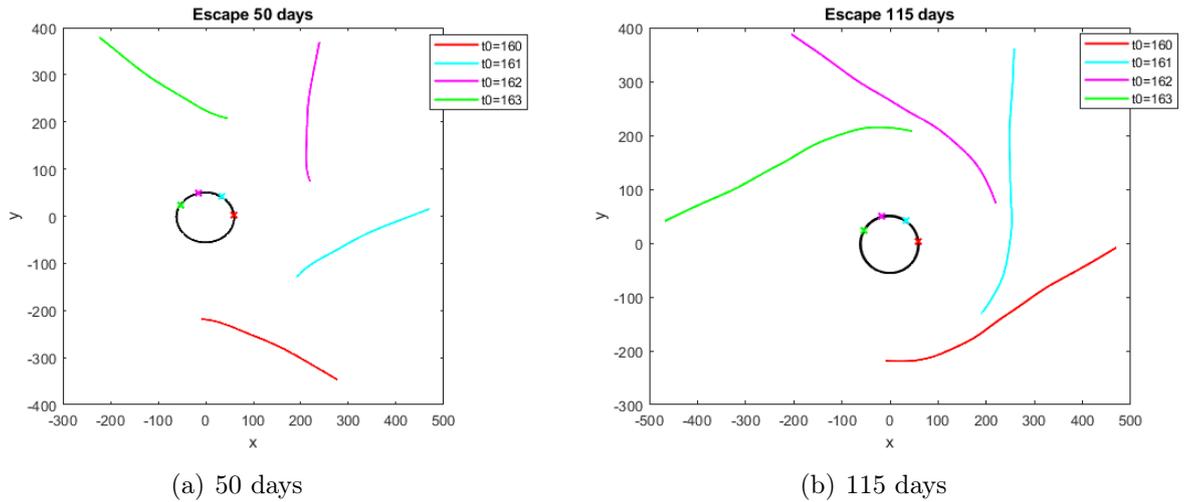


Figure 6.2: Manovra di fuga dal punto L2 del sistema Sole-Terra per missioni della stessa durata ma diversa data di partenza. L'orbita lunare è rappresentata in nero ed è segnata la sua posizione il giorno della partenza.

Per rendere l'idea delle distanze e delle diverse lunghezze delle traiettorie a seconda della durata dell'escape in termini eliocentrici, vengono raffigurate la missione più corta (50 giorni) e quella più lunga (115 g) partite in data $t_0=162$ in un sistema di riferimento eliocentrico-eclittica.

L'origine del sistema di riferimento eliocentrico-eclittica è il centro del Sole e l'unità di misura è l'unità astronomica UA. L'unità astronomica è la distanza tra il Sole e la Terra ed equivale a 150 milioni di km. Gli asterischi indicano la posizione del punto L2 e del punto di evasione, collocato a 3×10^6 km dalla Terra. In questo sistema di riferimento la distanza tra la terra ed il punto L2 è minima visto che si sta parlando di 150 milioni di km VS 1,5 milioni di km ed è pari a 0,01 UA.

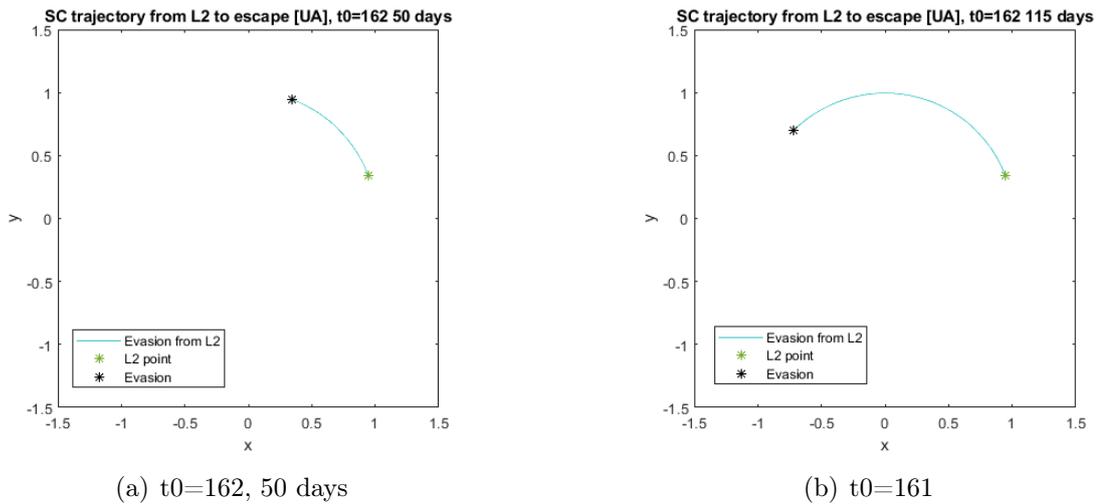


Figure 6.3: $t_0=162$, traiettoria più corta e più lunga

In figura 6.4 è rappresentata la velocità dello spacecraft all'uscita dalla sfera d'influenza terrestre per le varie partenze e durate.

L'andamento è simile ad una sinusoide che non raggiunge sempre gli stessi picchi massimi e minimi a causa della diversa posizione della Luna. La Luna genera una spinta accelerante massima quando è nella posizione più favorevole per la generazione di una forza concorde con la direzione della velocità del satellite, mentre causa una massima decelerazione quando si trova nella posizione peggiore sempre in termini di direzioni relative tra la velocità del satellite e la forza gravitazionale della Luna.

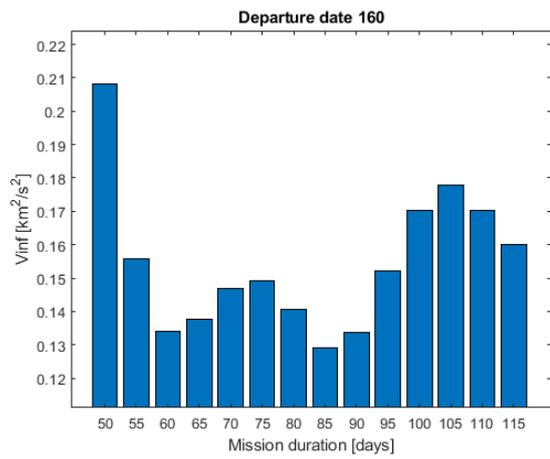
Ci vogliono circa 30 giorni per raggiungere i massimi relativi di velocità e questo è concorde col fatto che il periodo sinodico della Luna è 29 giorni e allora, dopo tale arco temporale, la Luna sarà nuovamente nella stessa fase della propria orbita: quella più favorevole. Per circa 14 giorni l'azione della Luna sarà favorevole, mentre per altri 14 sarà sfavorevole e raggiungerà alla fine di questa fase i minimi relativi di velocità poiché penalizzata per più tempo. Questo trend è confermato per tutte le partenze, la cui condizione iniziale rispetto alla Luna differisce di qualche giorno essendo distanziate l'una dall'altra di poco più del doppio del periodo di rivoluzione lunare. La velocità raggiunta dal satellite non sarà sempre la stessa dopo ogni periodo sinodico perché, al variare della lunghezza della missione, la distanza dalla Luna varia e bisogna considerare anche l'effetto accelerante / frenante dell'attrazione gravitazionale solare.

La velocità massima viene raggiunta per la missione partita il $t_0=163$ e durata 50 giorni, dunque la missione più corta e che, fra tutte le partenze, è quella che consuma di più. La velocità massima si raggiunge con la missione più corta perché lo spacecraft ha bisogno di una velocità significativa per raggiungere una distanza grande come 3 milioni di km in breve tempo, quindi più è alta la velocità che viene fornita allo spacecraft e minore sarà il tempo che questo impiega per percorrere tale distanza ed uscire dalla sfera d'influenza terrestre perché la stessa distanza viene percorsa in un arco temporale minore grazie all'immissione in un'orbita più energetica.

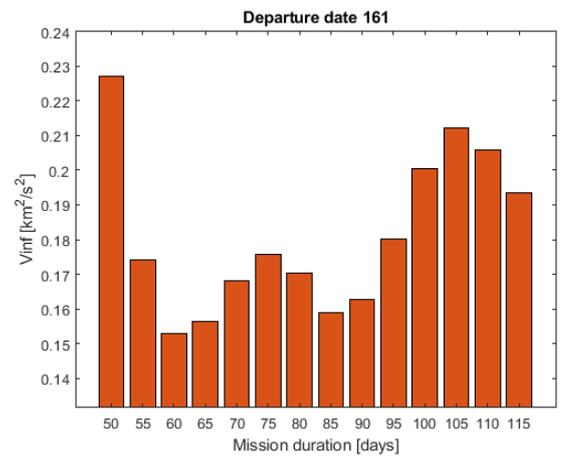
Nei casi più favorevoli si arriverà dunque ad alte velocità senza un altrettanto grande consumo.

Si ha un forte interesse nell'averne un'alta velocità quando si è all'esterno della sfera d'influenza perché, partendo da una base maggiore, il motore dovrà spingere per meno tempo per arrivare a velocità più elevate che potranno servire nelle fasi successive della missione.

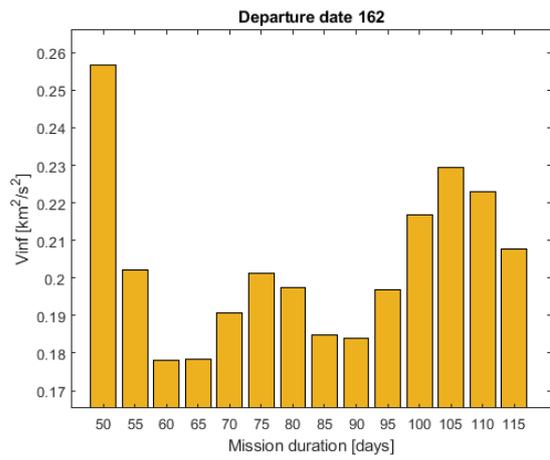
In questo caso di studio la convenienza in realtà dipende dalla traiettoria dell'asteroide che si vuole raggiungere, dalla sua posizione rispetto al nostro punto di fuga e dalla differenza tra quelli che sono i parametri orbitali dell'orbita nella quale si è immesso lo spacecraft alla fine della fuga e i parametri orbitali che lo stesso deve raggiungere alla fine dell'orbita, dunque quelli dell'asteroide stesso.



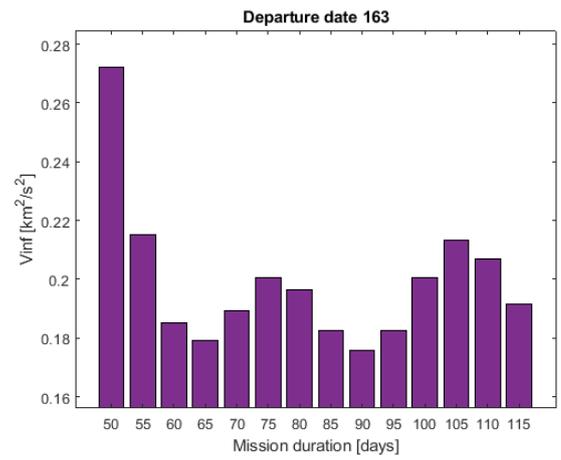
(a) $t_0=160$



(b) $t_0=161$



(c) $t_0=162$



(d) $t_0=163$

Figure 6.4: Velocità dello spacecraft a fine escape

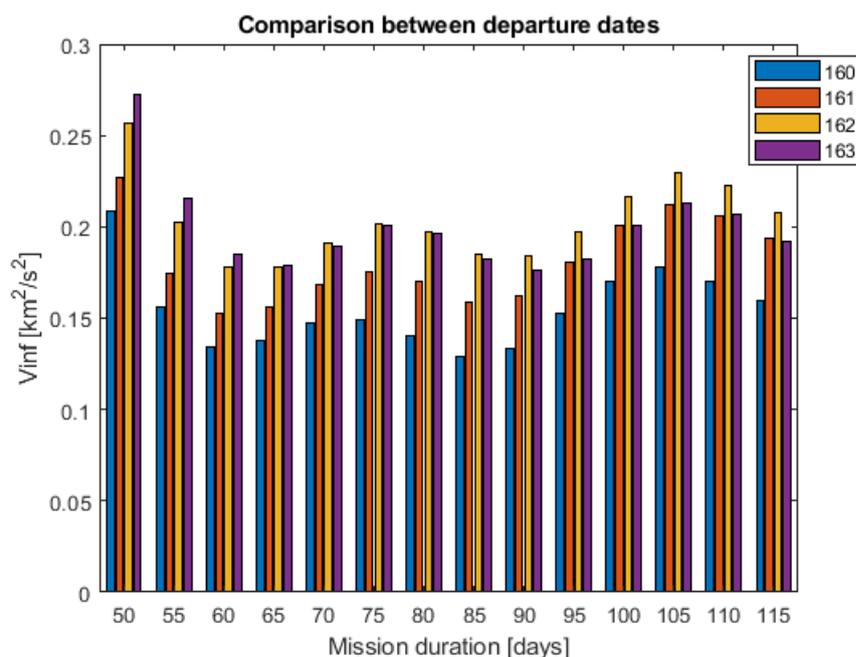


Figure 6.5: Confronto tra i valori della velocità alla fine dell’escape per le varie partenze e durate

6.1.2 Dall’uscita dalla sfera d’influenza terrestre fino all’asteroide 2013 XY20

La seconda parte di questa prima orbita va dalla fine dell’escape fino al raggiungimento dell’asteroide 2013 XY20.

Questo tratto di orbita richiede un consumo di propellente molto maggiore rispetto alla fuga perché son maggiori le distanze da percorrere, son richiesti anche più passaggi nella stessa orbita prima di riuscire ad intercettare l’asteroide e si è ormai fuori dalla zona di equilibrio L2.

L’asteroide appartiene alla categoria Near-Earth orbit. Compie un’orbita attorno al Sole in 441 giorni (1.21 anni), passando da una distanza minima dal Sole di 1,01 UA (pari proprio alla distanza Sole-L2) fino a 1,26 UA.

Per questo secondo segmento di traiettoria la dipendenza dalla data di inizio missione e dalla sua durata è significativa ed è influenzata dall’attrazione dei tre corpi (Sole, Terra, Luna), le loro posizioni relativamente allo spacecraft e ovviamente anche dalla traiettoria del target di missione.

Vengono raffigurate solamente l’orbita migliore e peggiore in termini di consumo di propellente, che sono rispettivamente $t_0=161$ 105 giorni e $t_0=163$ 115 giorni. Si nota la grossa differenza in termini di lunghezza della traiettoria tra le due e le grosse differenze geometriche e dunque dei parametri orbitali tra l’orbita iniziale nella quale è stato immesso lo spacecraft alla fine dell’escape e l’orbita finale nella quale si trova nel caso peggiore. Infatti nel caso migliore viene eseguita una piccola manovra e subito ci si immette nell’orbita voluta, nella quale si aspetta l’asteroide e alla fine dell’escape si ha uno dei valori più alti di velocità grazie al fatto che il Sole si trova in una posizione favorevole e ha avuto molto tempo per agire sullo spacecraft ed incrementarne la velocità.

Il sistema di riferimento è eliocentrico-eclittica e l’unità di misura le unità astronomiche.

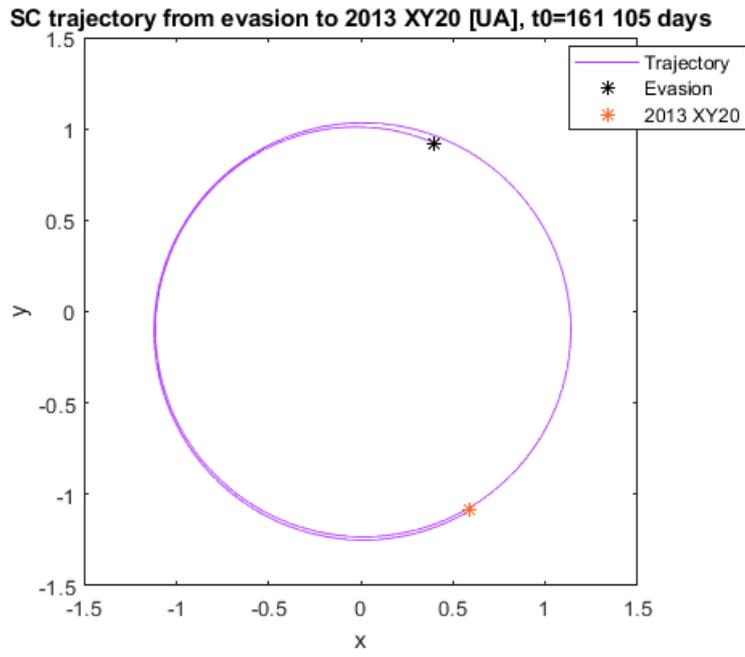


Figure 6.6: Miglior traiettoria: $t_0=161$, 105 giorni

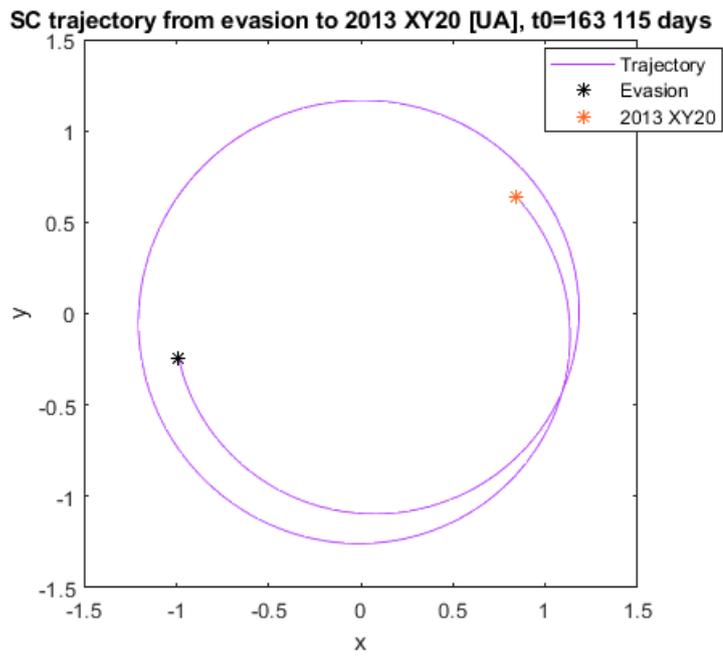


Figure 6.7: Peggior traiettoria: $t_0=163$, 115 giorni

Duration [days]	Departure date			
	160		161	
	Beginning	End	Beginning	End
115	849,6915	788,7616	849,7995	793,0772
110	849,5987	788,1553	849,7087	793,4919
105	849,483	787,5605	849,5944	793,5383
100	849,3388	786,9757	849,4518	793,2469
95	849,1619	786,4041	849,2767	792,6861
90	848,9479	785,8434	849,0647	791,9306
85	848,6897	785,2865	848,8072	791,1016
80	848,3702	784,7143	848,4868	790,2183
75	847,9634	784,1018	848,0798	789,2433
70	847,4439	783,4255	847,5597	788,1184
65	846,7821	782,6526	846,899	786,8198
60	845,9344	781,7363	846,0517	785,3081
55	844,8094	780,5786	844,9244	783,4626
50	843,1921	778,9643	843,3006	781,039

Table 6.3: Massa iniziale (massa a fine escape) e finale del secondo tratto di orbita per le orbite $t_0=160$ e $t_0=161$ [kg]

Duration [days]	Departure date			
	162		163	
	Beginning	End	Beginning	End
115	849,8245	775,8269	849,6943	759,8265
110	849,7371	777,2375	849,6079	760,8336
105	849,6266	778,648	849,4987	761,8516
100	849,4883	780,0436	849,3622	762,8714
95	849,3185	781,412	849,1950	763,8827
90	849,1118	782,748	848,9915	764,8975
85	848,8584	784,0493	848,7402	765,9214
80	848,5406	785,3084	848,4229	766,9716
75	848,1348	786,4998	848,017	768,0571
70	847,6165	787,6349	847,498	769,1711
65	846,9574	788,4989	846,8382	770,3188
60	846,108	788,9703	845,9836	771,4875
55	844,968	788,8705	844,8244	772,6458
50	843,3128	787,7105	843,1231	773,6845

Table 6.4: Massa iniziale (massa a fine escape) e finale del secondo tratto di orbita per le date $t_0=162$ e $t_0=163$ [kg]

6.1.3 Orbita completa

La miglior orbita è ovviamente quella le cui variazioni dei parametri orbitali tra l'orbita iniziale e quella finale sono meno imponenti e dunque costose per il motore da fornire, comportando un minor consumo di propellente.

Il risparmio di propellente è un requisito fondamentale per le missioni spaziali perché, diminuire la quantità di propellente necessario per il completamento della missione e dunque la quantità di propellente da imbarcare, permette di stivare masse maggiori di componenti, equipaggiamenti e strumentazioni utili per gli studi oggetto della missione. Avere una sonda più leggera richiede oltretutto minori spinte e a sua volta dunque abbassa ancor di più il consumo.

Nel caso peggiore, nonostante una fuga lunga e pertanto poco costosa, il satellite si trova alla fine dell'escape in una situazione sfavorevole per il raggiungimento dell'asteroide e dunque la seconda parte della traiettoria richiederà un gran quantitativo di propellente.

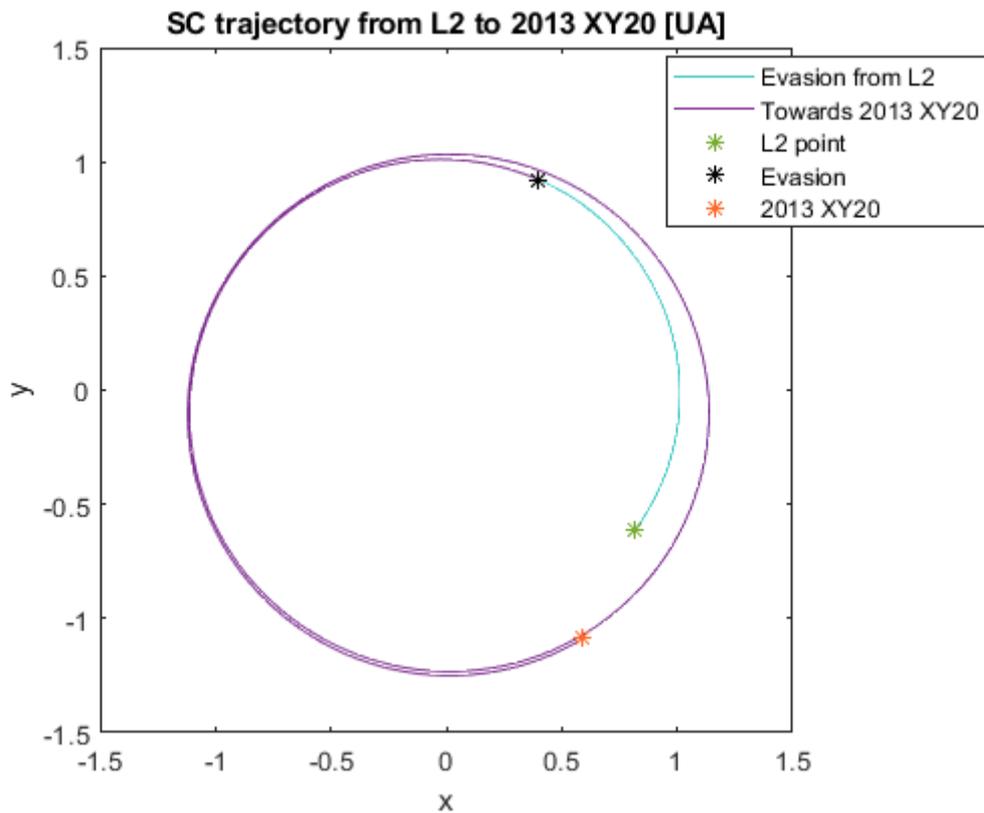


Figure 6.8: Caso migliore: $t_0=161, 105$ days

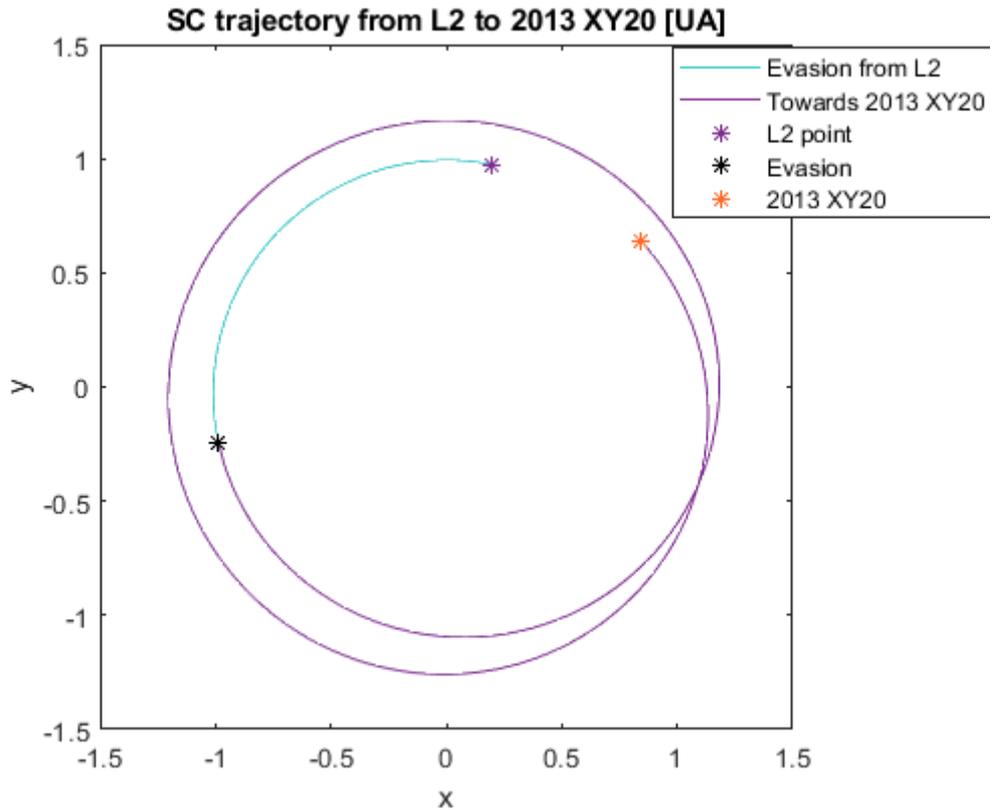


Figure 6.9: Caso peggiore: $t_0=163$, 115 days

6.2 Orbita diretta verso 2013 XY20

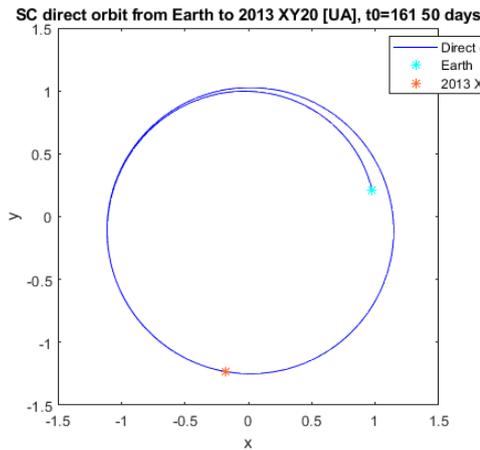
Questa seconda orbita parte dalla Terra, non passa per il punto lagrangiano L2 e si dirige direttamente verso l'asteroide 2013 XY20. Parte lo stesso giorno nel quale avviene la fuga dalla sfera d'influenza terrestre nell'orbita che parte da L2, in modo che la posizione degli astri sia la stessa. La massa iniziale è pari alla massa iniziale della missione L2, 850 kg, e la durata della missione è di due anni esattamente come la durata del secondo tratto della missione indiretta.

I parametri orbitali iniziali di quest'orbita pertanto sono necessariamente quelli dell'orbita terrestre:

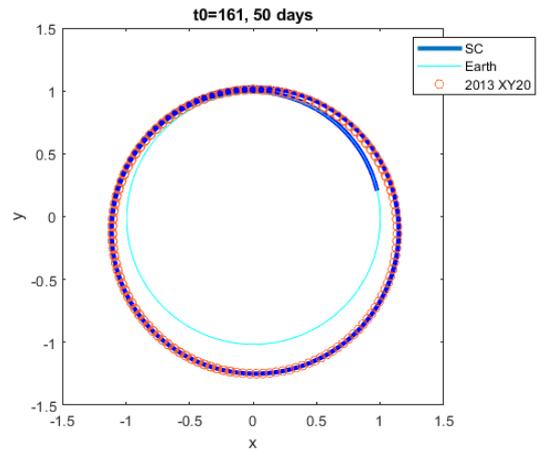
- semiasse maggiore: 1 AU
- inclinazione: $0,0017^\circ$
- eccentricità: 0,0167

Anche questa traiettoria viene mostrata sia per il caso migliore sia per quello peggiore. L'orbita peggiore parte lo stesso giorno nel quale avviene l'escape dell'orbita L2 peggiore, dunque si ha effettivamente una corrispondenza di condizioni non ottimali nella posizione dei corpi che esercitano una forza gravitazionale sul satellite. L'orbita migliore invece parte lo stesso giorno nel quale avviene la fuga della miglior orbita che parte da L2, ma ha una durata diversa: mentre la migliore orbita indiretta durava 105 giorni, la miglior orbita diretta dura solamente 50 giorni (durata minima). Ciò che avviene è infatti che la partenza avviene in una data nella quale si è molto vicini al nodo ascendente dell'asteroide,

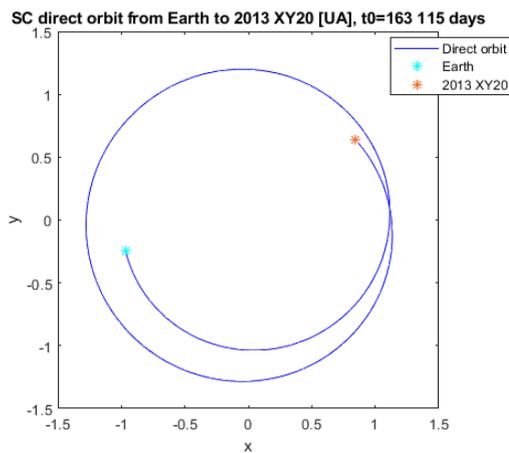
dunque nonostante sia necessaria una certa variazione di inclinazione tra quella dell'orbita di partenza e quella desiderata, questo punto permette di effettuare subito tale variazione. A sinistra viene rappresentata solamente l'orbita del satellite, mentre a destra anche l'orbita terrestre e dell'asteroide. Si vede infatti che nel caso migliore ci si immette subito nell'orbita dell'asteroide e lo si raggiunge.



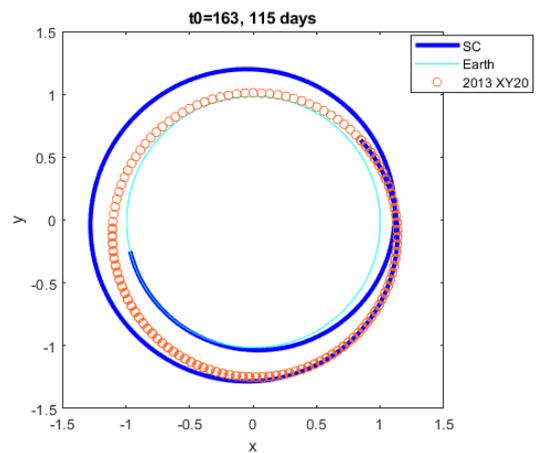
(a) Best case: $t_0=161\ 50$ days



(b) Best case: $t_0=161\ 50$ days



(c) Worst case: $t_0=163\ 115$ days



(d) Best case: $t_0=161\ 50$ days

6.3 Confronto tra orbita che parte da L2 ed orbita diretta

Per ogni orbita simulata son stati analizzati i parametri orbitali (semiasse maggiore, inclinazione ed eccentricità) e il consumo di propellente.

In ogni figura viene mostrata la differenza tra i valori dei parametri orbitali alla fine dell'escape dell'orbita che parte da L2 e i valori dei parametri orbitali iniziali dell'orbita diretta (dunque pari ai parametri orbitali terrestri).

Per ognuna di queste viene anche analizzata qual è la variazione in termini percentuali dei parametri orbitali necessaria dall'inizio della missione che parte dal punto lagrangiano per portarsi allo stesso valore dei parametri orbitali di 2013 XY20 e che viene raggiunta già con l'escape.

Per ogni missione, a parte rarissime eccezioni che verranno sottolineate in seguito, c'è convenienza nel partire da L2 perché i valori dei parametri orbitali all'uscita dalla sfera d'influenza terrestre sono più vicini ai valori dei parametri orbitali dell'asteroide, che devono essere raggiunti per poter arrivare all'asteroide. Infatti il passaggio da un'orbita ad un'altra avviene per mezzo della variazione dei parametri orbitali, la quale è dunque la spesa effettiva della missione e la spinta fornita dal motore va proprio ad agire su questi. Se la discrepanza tra i parametri orbitali iniziali e quelli finali è ridotta, allora anche il consumo di carburante lo sarà.

L'orbita dell'asteroide 2013 XY20 viene individuata dai seguenti parametri orbitali:

- semiasse maggiore: 1.1305990 UA
- eccentricità: 0.10642940
- inclinazione: 2.86269°
- argomento del periastro: 18.18564°
- longitudine del nodo ascendente: 78.63363°

6.3.1 Semiasse maggiore

L'andamento della differenza tra i semiassi maggiori alla fine dell'escape dell'orbita partita da L2 e i semiassi maggiori dell'orbita diretta è lo stesso per ogni data di partenza: si evidenzia una maggior discrepanza per missioni più corte, valori simili tra i due per missioni di durata media e una differenza tra i due che rinvia a crescere con l'aumentare della durata, ma che non raggiunge i picchi delle durate basse perché le orbite non sono altrettanto energetiche, ma avendo ottenuto incrementi energetici dal Sole risulterà anche aumentato il semiasse.

La convenienza aumenta con il posticipo della data di partenza. Poiché il valore iniziale del semiasse dell'orbita diretta è sempre uguale in quanto pari al semiasse dell'orbita terrestre, si vede che la massima convenienza si ottiene per missioni di breve durata che partono da L2.

Il caso migliore è $t_0=163$ e durata 50 giorni.

La motivazione risiede nel fatto che meno dura la missione, più alta è la variazione di velocità che il motore dovrà fornire allo spacecraft perché più alta sarà la velocità orbitale richiesta nell'orbita più energetica nella quale si deve immettere il satellite per raggiungere il limite della sfera d'influenza in poco tempo. Infatti lo spacecraft deve comunque raggiungere una distanza di $3 * 10^6$ km dalla Terra perché è sempre quello il limite della sfera, ma deve farlo in meno tempo. Questo è possibile solo percorrendo un'orbita più corta, che punti più direttamente verso il punto di fuga senza percorrere orbite troppo lunghe e che venga percorsa ad una maggior velocità per via della sua maggior energia orbitale. Questo vuol dire immettersi in orbite caratterizzate da un semiasse maggiore più grande: più alta è l'energia associata a quell'orbita e maggiore sarà anche il suo semiasse. In pratica per missioni più corte la traiettoria dello spacecraft sarà un arco più corto di un'iperbole dotata di un più grande semiasse.

Poiché lo scopo è aumentare il semiasse il più possibile dopo l'escape visto che il semiasse maggiore dell'asteroide è più grande di quello dell'orbita della sonda, allora queste forti variazioni che si hanno con orbite di breve durata sono molto convenienti, ma ovviamente dall'altro lato saranno anche controproducenti in quanto costose a livello di consumo: il semiasse maggiore necessario viene raggiunto in meno tempo, ma questo è possibile solo spingendo e dunque consumando di più.

Sicuramente partire con dei parametri orbitali più vicini a quelli del target rispetto all'orbita diretta è conveniente perché questi son stati ottenuti mediante manovre eseguite in corrispondenza di un punto caratterizzato da minor consumo come è L2, ancor meglio se sfruttando gli effetti favorevoli degli altri corpi celesti, che eseguono lavoro al posto del motore.

Per ogni orbita la tabella illustra la percentuale della variazione di semiasse maggiore necessaria che viene raggiunta con l'escape. Quest'andamento conferma quello della discrepanza tra i parametri orbitali appena spiegato: per missioni più corte l'orbita del satellite raggiunge già qua una grande variazione del semiasse maggiore, che tende a scendere per durate medie e a risalire nuovamente non fino ai picchi iniziali per durate maggiori. La miglior orbita indiretta infatti in termini di discrepanza tra i valori del semiasse maggiore è esattamente quella nella quale già a fine escape si è raggiunta la maggior variazione di semiasse maggiore necessaria.

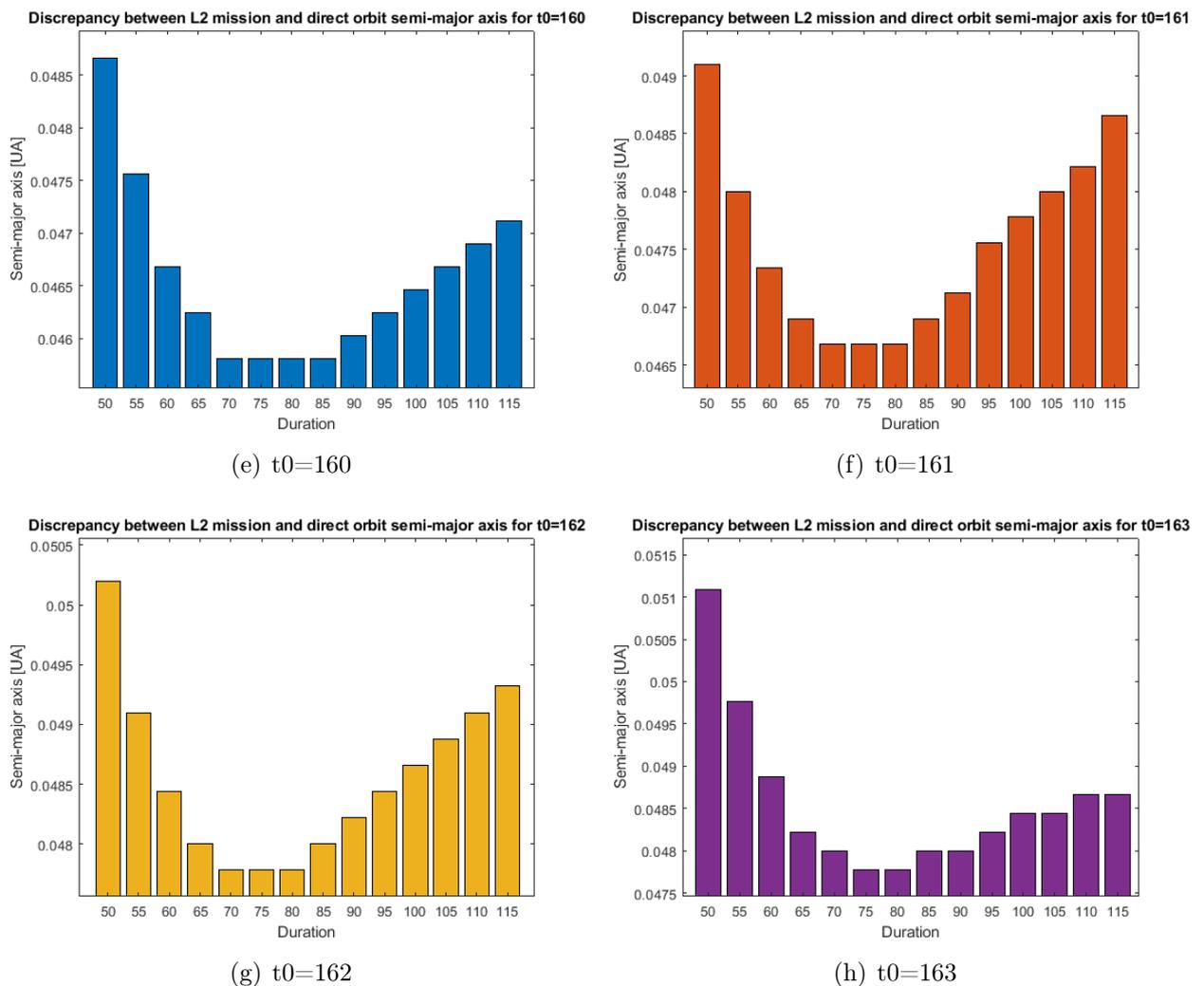


Figure 6.10: Discrepanza tra i valori del semiasse maggiore a fine escape e all'inizio dell'orbita diretta per le varie partenze e missioni

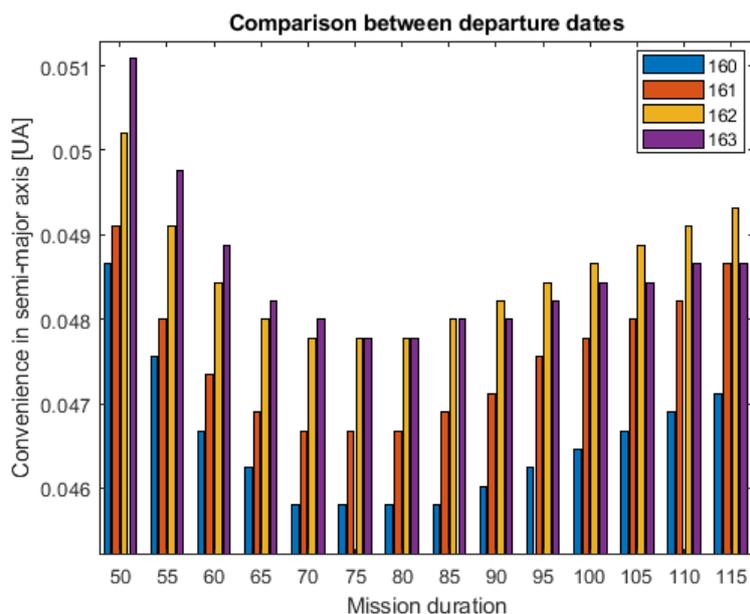


Figure 6.11: Confronto tra le varie partenze

Duration [days]	Departure date			
	160	161	162	163
50	8.85 %	9.24 %	9.66 %	9.94 %
55	7.63 %	8.02 %	8.42 %	8.45 %
60	6.65 %	7.28 %	7.68 %	7.45 %
65	6.17 %	6.79 %	7.19 %	6.7 %
70	5.68 %	6.55 %	6.94 %	6.45 %
75	5.68 %	6.55 %	6.94 %	6.2 %
80	5.68 %	6.55 %	6.94 %	6.2 %
85	5.68 %	6.79 %	7.19 %	6.45 %
90	5.92 %	7.04 %	7.43 %	6.45 %
95	6.17 %	7.53 %	7.68 %	6.7 %
100	6.41 %	7.77 %	7.93 %	6.95 %
105	6.65 %	8.02 %	8.17 %	6.95 %
110	6.9 %	8.26 %	8.42 %	7.2 %
115	7.14 %	8.75 %	8.67 %	7.2 %

Table 6.5: Variazione percentuale del semiasse maggiore ottenuta con l'escape

6.3.2 Inclinazione orbitale

Per l'orbita diretta, partendo dai $0,0017^\circ$ dell'inclinazione dell'orbita terrestre rispetto al piano dell'eclittica, deve essere raggiunta l'inclinazione dell'orbita dell'asteroide, pari a $2,8627^\circ$.

L'andamento della convenienza nel partire da L2 non è univoco per tutte le date di partenza: in caso di partenza $t_0=162$ se si effettuano missioni più lunghe si parte da dei piani orbitali più simili a quello dell'orbita dell'asteroide, mentre per tutte le altre date di partenza conviene effettuare missioni di breve durata.

I valori delle differenze di inclinazione tra l'orbita indiretta e diretta sembrerebbero es-

Duration [days]	Departure date			
	160	161	162	163
50	0.13 %	0.133 %	0.09 %	0.12 %
55	0.12 %	0.13 %	0.09 %	0.113 %
60	0.113 %	0.126 %	0.093 %	0.106 %
65	0.109 %	0.123 %	0.093 %	0.102 %
70	0.102 %	0.12 %	0.093 %	0.095 %
75	0.095 %	0.116 %	0.096 %	0.09 %
80	0.088 %	0.016 %	0.096 %	0.085 %
85	0.085 %	0.112 %	0.096 %	0.081 %
90	0.078 %	0.109 %	0.096 %	0.074 %
95	0.074 %	0.109 %	0.096 %	0.071 %
100	0.067 %	0.106 %	0.096 %	0.067 %
105	0.064 %	0.106 %	0.096 %	0.064 %
110	0.06 %	0.106 %	0.096 %	0.06 %
115	0.057 %	0.102 %	0.096 %	0.057 %

Table 6.6: Variazione percentuale dell'inclinazione ottenuta con l'escape

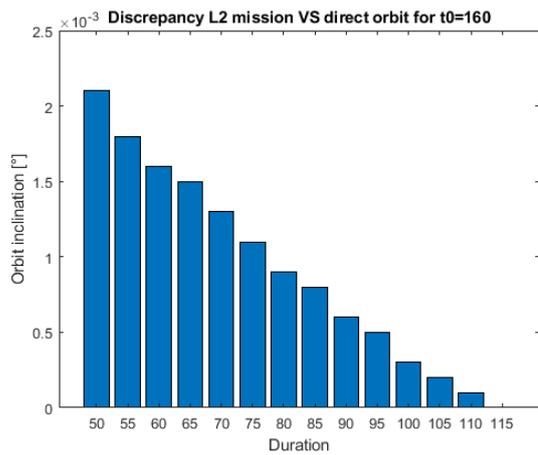
sere molto piccoli, ma in realtà essendo le grandezze in gioco enormi anche una piccola differenza angolare in realtà si traduce in una grande differenza a livello di km.

In due casi non c'è alcun vantaggio nel partire da L2: per le missioni di durata massima partite in $t_0=160$ e $t_0=163$ l'inclinazione dell'orbita L2 e dell'orbita diretta sono le stesse. Il caso più favorevole si ha per la prima partenza ($t_0=160$) e la missione più corta possibile (50 giorni).

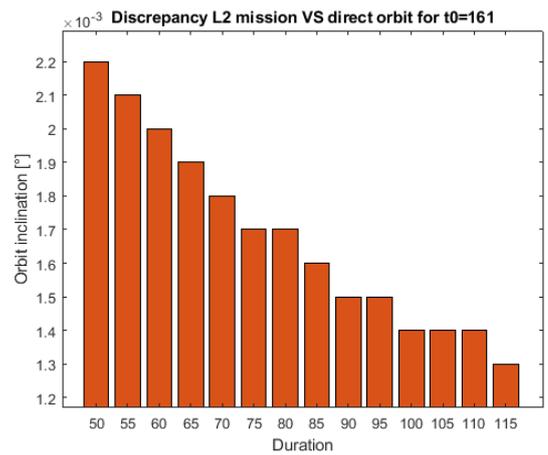
E' importante scegliere dove effettuare il cambio di piano: il costo della variazione d'inclinazione orbitale è minore se il satellite si trova più lontano dal corpo attorno al quale orbita e che esercita la sua attrazione gravitazionale. Tale cambio può anche avvenire a distanze minori, ma in combo con altre manovre come la variazione di eccentricità, che renderebbe possibili piccole variazioni come quelle che servono al satellite in questione a costo praticamente zero.

Per missioni di breve durata l'alta spinta che è stata necessaria per aumentare in maniera significativa il semiasse maggiore al fine di immettersi in un'orbita a più veloce percorrenza può essere sfruttata anche per il cambio di piano orbitale.

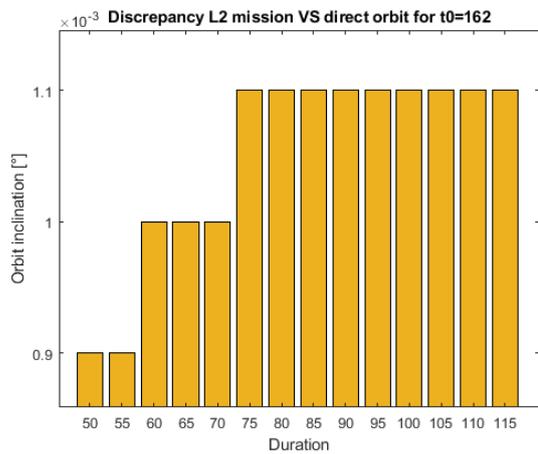
Per ogni orbita la tabella indica la percentuale della variazione di inclinazione necessaria raggiunta alla fine della fuga. Anche per l'inclinazione il contributo della fuga conferma l'andamento della discrepanza tra le inclinazioni delle due orbite: quando il valore dell'inclinazione dell'orbita L2 è più conveniente, il contributo dato dall'escape è maggiore.



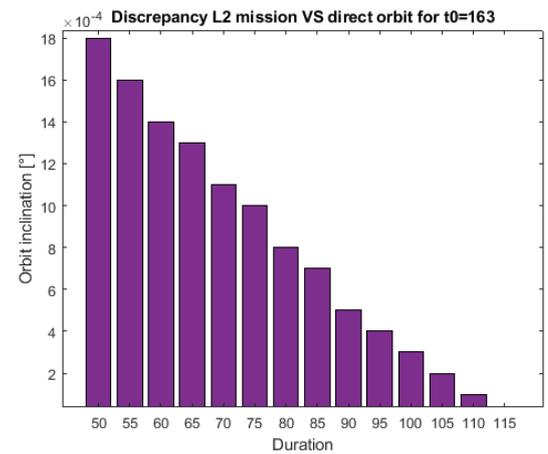
(a) t0=160



(b) t0=161



(c) t0=162



(d) t0=163

Figure 6.12: Differenza tra l'inclinazione dell'orbita partita da L2 all'escape e l'inclinazione iniziale dell'orbita diretta per le varie partenze e missioni

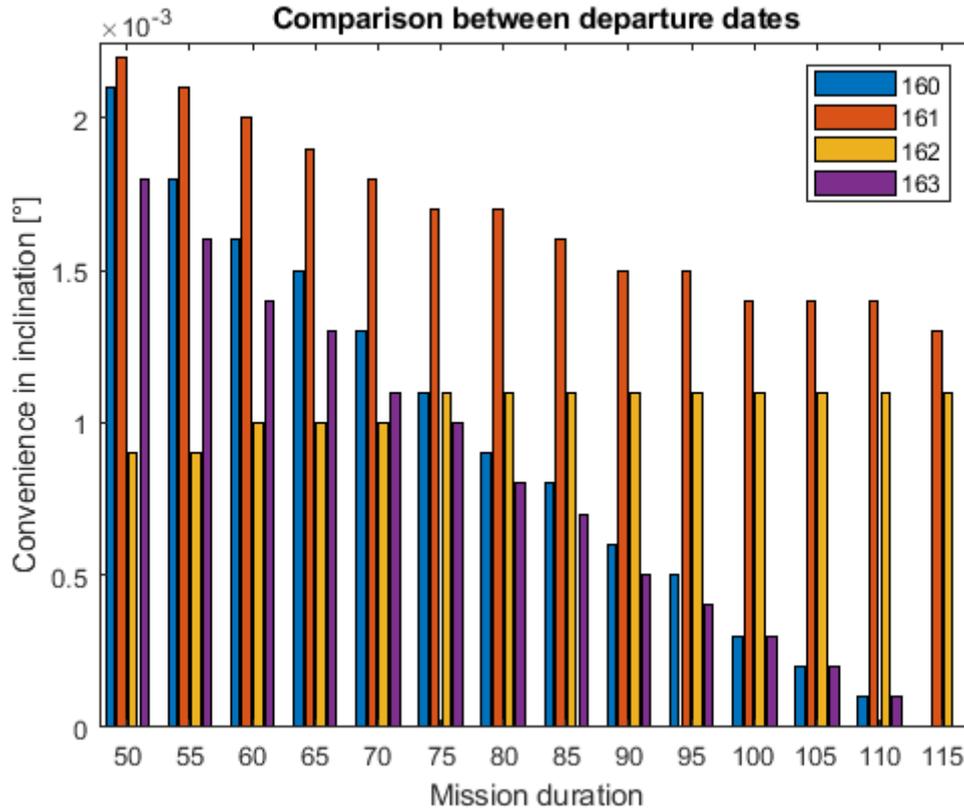


Figure 6.13: Confronto tra le differenze di inclinazione delle varie partenze

6.3.3 Eccentricità orbitale

Anche per l'eccentricità il discorso non è univoco tra le partenze ed è ancor più variegato rispetto alla situazione dell'inclinazione orbitale.

Solo per la partenza più tarda $t_0=163$ la convenienza è tanto maggiore quanto minore è la durata della missione. Per tutte le altre partenze, son più convenienti le missioni di massima durata. La discrepanza massima si ha esattamente nel caso della partenza diversa dalle altre $t_0=163$ e durata 50 giorni.

Addirittura si nota che nel caso di missioni che partono in $t_0=160$ e durano tra i 55 ed i 70 giorni si ha un'eccentricità più simile a quella dell'asteroide se si parte dalla Terra che non se si parte da L2.

Per ogni orbita la tabella mostra la percentuale della variazione di eccentricità necessaria ottenuta con l'escape. Se si parte da $t_0=163$ e la missione dura tra 90 e 115 giorni, l'eccentricità dell'orbita nella quale si immette lo spacecraft all'inizio dell'escape è più vicina all'eccentricità di 2013 XY20 più di quanto non lo sia l'eccentricità a fine escape. Quindi questo richiede delle manovre aggiuntive per ovviare alla diminuzione di eccentricità ottenuta invece dell'aumento che era necessario e rende pertanto queste manovre da scartare a livello di convenienza insieme a quelle precedentemente indicate.

Per missioni di massima durata se si parte da $t_0=161$ e $t_0=162$ una gran parte della variazione di eccentricità desiderata viene ottenuta con l'escape, con un quantitativo massimo raggiunto pari al 27 % per l'orbita $t_0=161$ 115 giorni. Infatti la miglior orbita è proprio vicina a questa.

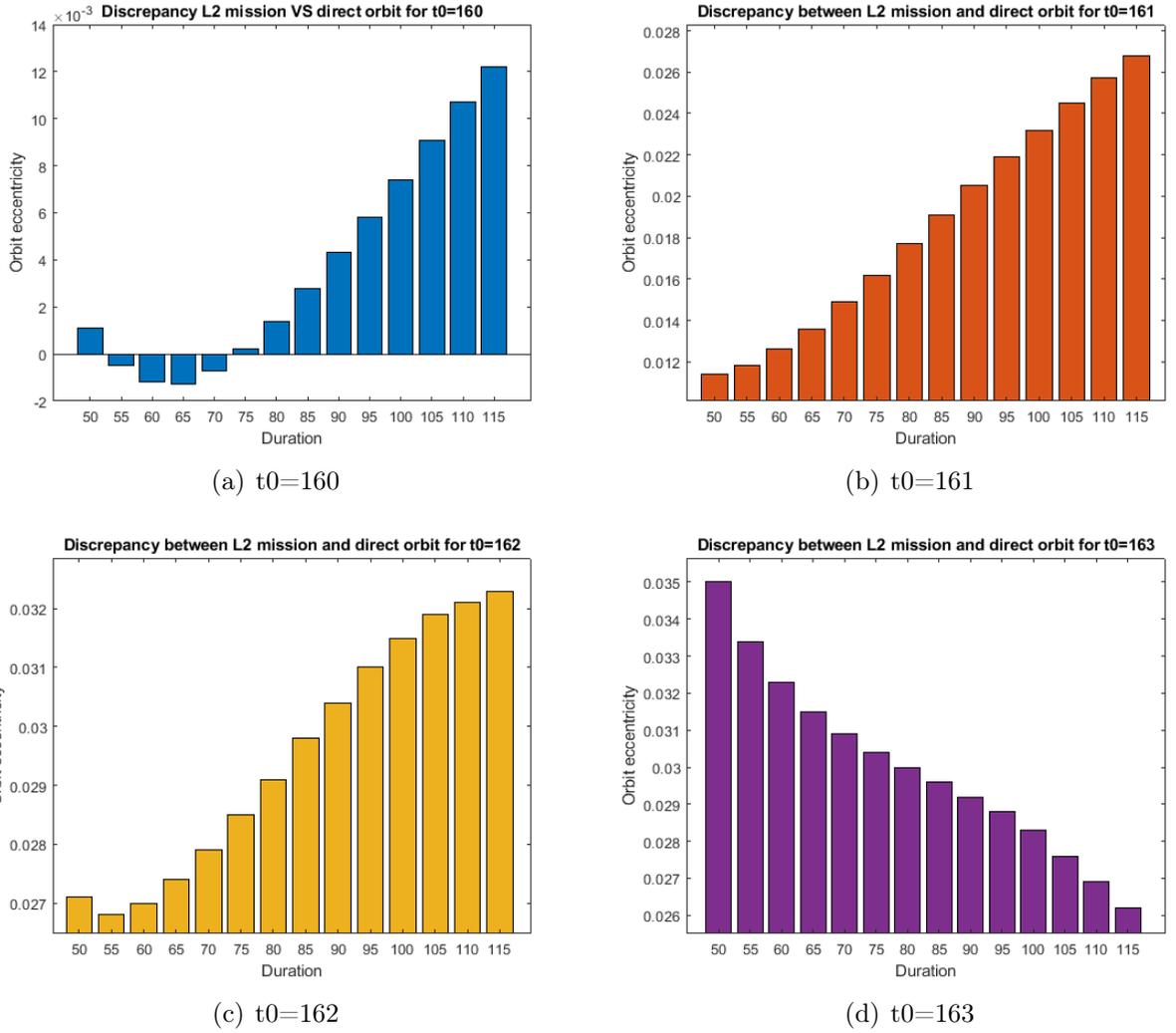


Figure 6.14: Differenze tra le eccentricità orbitali di orbita indiretta e diretta per le varie date di partenza

Duration [days]	Departure date			
	160	161	162	163
50	3.37 %	9.12 %	10.8 %	9.24 %
55	1.62 %	9.6 %	10.35 %	6.6 %
60	0.86 %	10.51 %	10.64 %	4.77 %
65	0.75 %	11.67 %	11.21 %	3.44 %
70	1.4 %	13.18 %	11.92 %	2.44 %
75	2.4 %	14.69 %	12.78 %	1.61 %
80	3.7 %	16.43 %	13.63 %	0.95 %
85	5.22 %	18.05 %	14.63 %	0.23 %
90	6.86 %	19.67 %	15.5 %	-0.37 %
95	8.5 %	21.3 %	16.34 %	-1.04 %
100	10.24 %	22.81 %	17.05 %	-1.9 %
105	12.1 %	24.32 %	17.62 %	-3.03 %
110	13.83 %	25.71 %	17.9 %	-4.2 %
115	15.47 %	27 %	18.2 %	-5.35 %

Table 6.7: Variazione percentuale di eccentricità ottenuta con l'escape

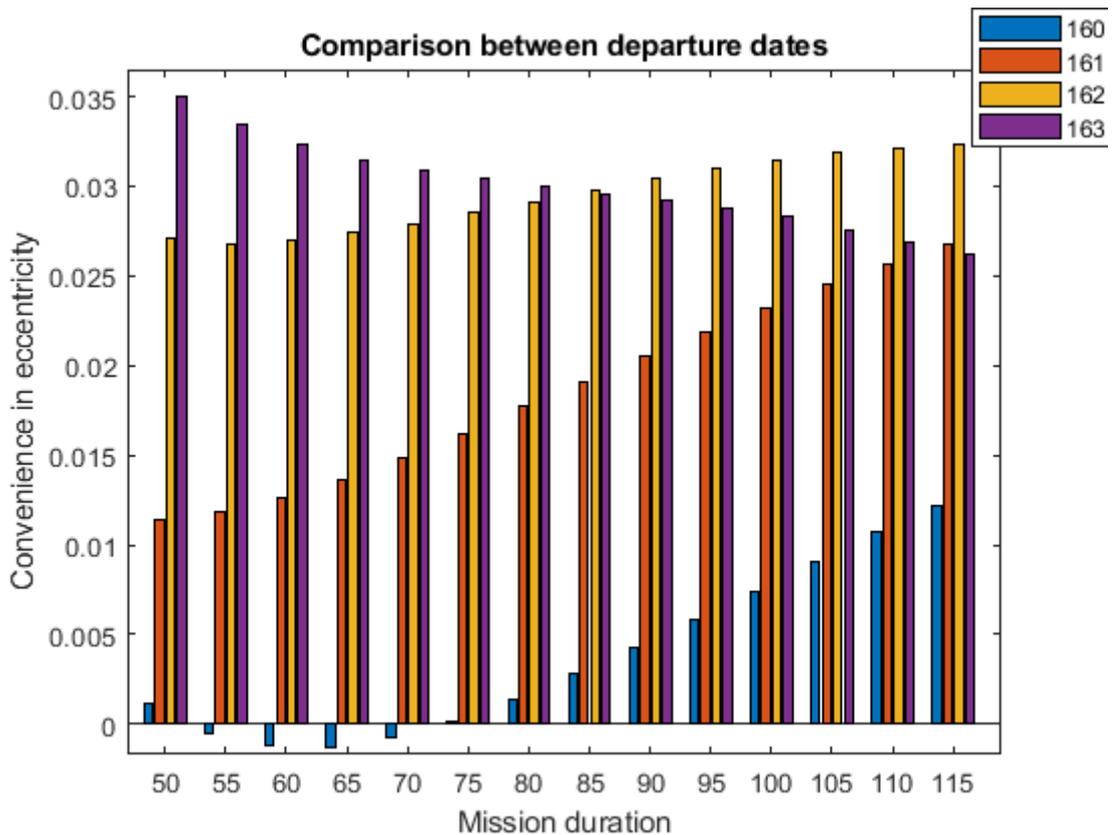


Figure 6.15: Confronto delle differenze di eccentricità tra le varie partenze

6.3.4 Consumo di propellente

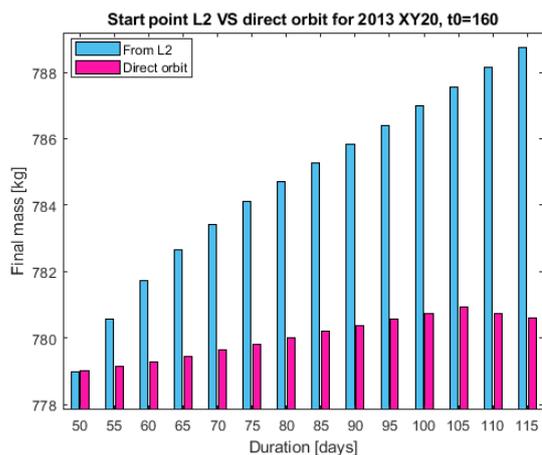
Combinando gli effetti più o meno benefici per le varie date di partenza e missioni, si nota che un minimo di consumo si ottiene nel caso di orbita che parte in $t_0=161$ e dura 105 giorni, anche se la massima differenza tra il consumo dell'orbita indiretta e quello dell'orbita diretta si ha nel caso di partenza $t_0=162$ e durata 100 giorni.

L'orbita che consuma meno propellente è caratterizzata da una grossa differenza nei valori del semiasse maggiore e dell'eccentricità rispetto all'orbita diretta corrispondente anche se non è il caso in cui entrambe le differenze siano le massime possibili, però per entrambi i parametri orbitali è uno dei casi con le differenze più alte. La sua discrepanza in termini di inclinazione dall'orbita diretta non è tra i valori ottimali ma tra quelli di media convenienza, quindi comunque un buon compromesso. Quest'orbita è anche una delle orbite che hanno avuto in fase di fuga una variazione dei parametri orbitali più grande rispetto alla variazione totale necessaria, dunque ha sfruttato al massimo il potenziale del punto di partenza L2.

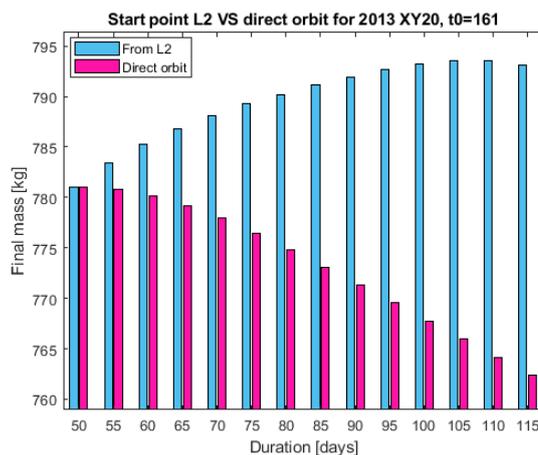
L'orbita diretta ha un costo maggiore nel caso in cui la si voglia far durare il meno possibile solo per missioni che partono in data $t_0=160$, mentre il suo costo scende per durate maggiori. Come si può vedere dalla rappresentazione delle traiettorie, il caso migliore per l'orbita diretta ($t_0=161$ 50 giorni) ha sì la durata minore, ma immette direttamente lo spacecraft nell'orbita desiderata dopo un segmento di traiettoria molto corto e dunque una manovra altrettanto leggera.

Al contrario, l'orbita peggiore ($t_0=163$ e 115 giorni) fa varie manovre percorrendo un'orbita più lunga e la differenza tra il semiasse dell'orbita di fine escape e quello dell'orbita di arrivo a 2013 XY20 è molto grande e pertanto costoso.

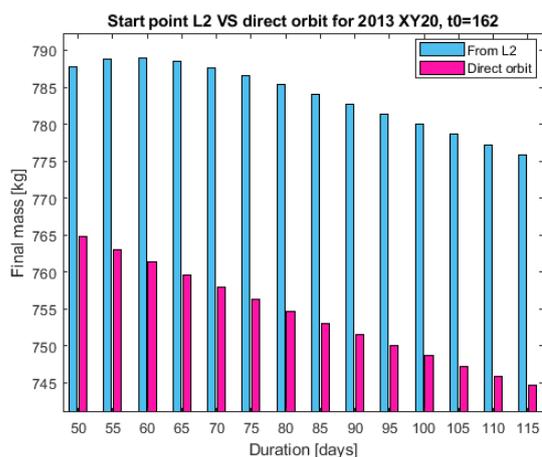
Per l'orbita che parte da L2 il consumo di carburante non diminuisce sempre all'aumentare della durata della missione e tutta questa variabilità è frutto della stretta dipendenza



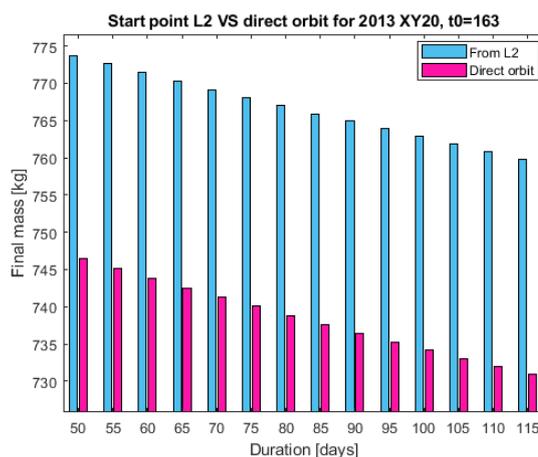
(a) $t_0=160$



(b) $t_0=161$



(c) $t_0=162$

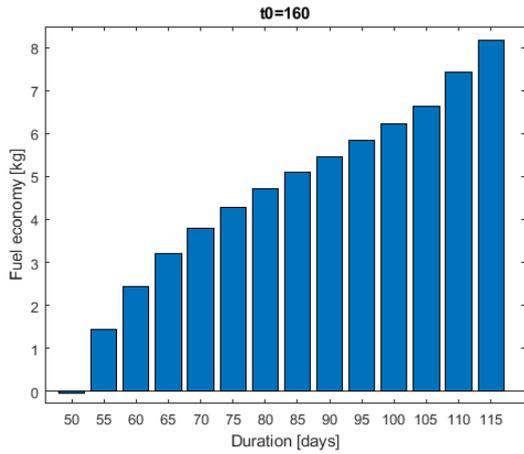


(d) $t_0=163$

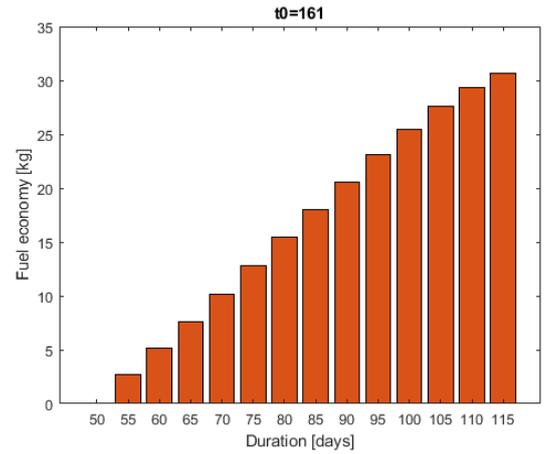
Figure 6.16: Massa finale di orbita indiretta e diretta

dall'attrazione luni-solare, le posizioni relative dei corpi celesti e la traiettoria dell'asteroide stesso.

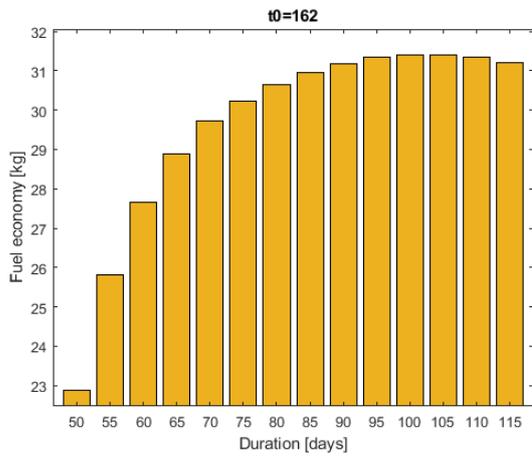
Il massimo risparmio di carburante scegliendo l'orbita che parte da L2 al posto della corrispettiva orbita diretta è di circa 31 kg, un quantitativo molto ingente per una missione spaziale.



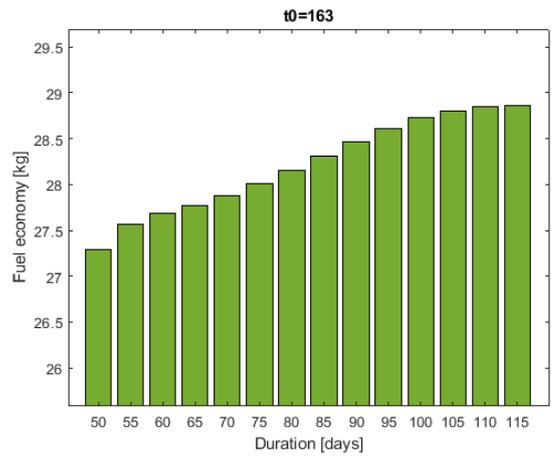
(a) $t_0=160$



(b) $t_0=161$



(c) $t_0=162$



(d) $t_0=163$

Figure 6.17: Risparmio di carburante tra le due orbite per le varie partenze e durate

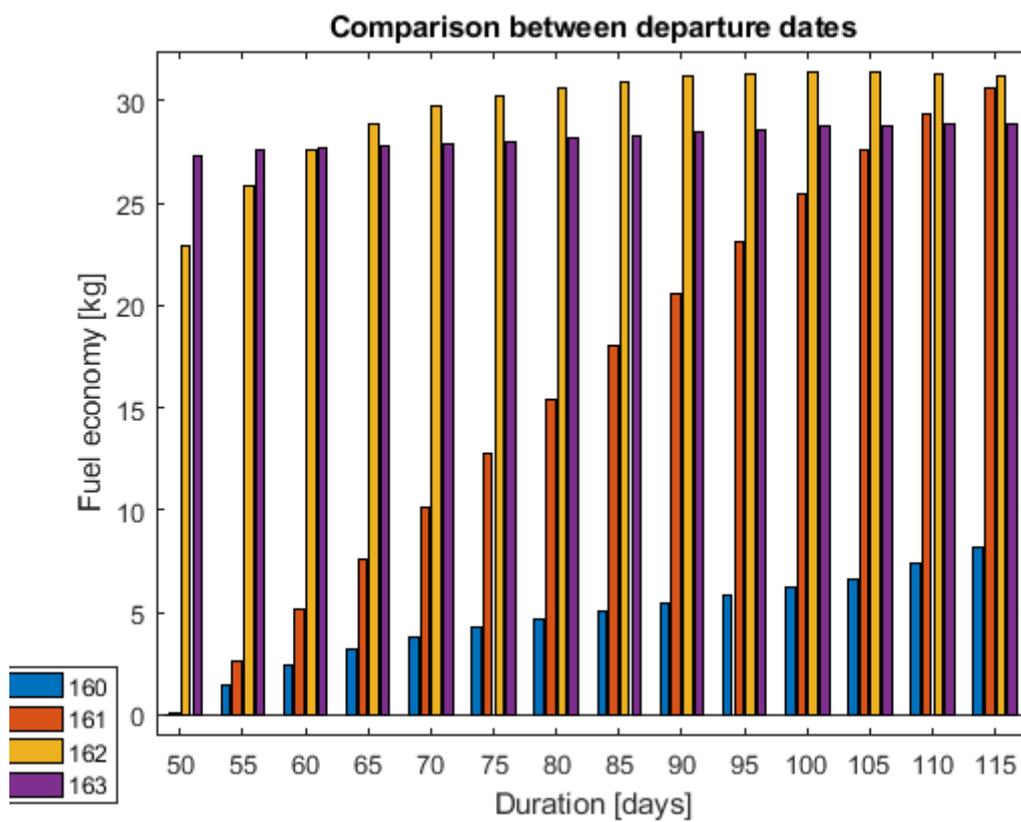


Figure 6.18: Confronto tra i risparmi di carburante per le varie partenze

Chapter 7

Conclusioni

Le simulazioni e le analisi effettuate permettono di capire meglio quali sono gli elementi che influiscono sulla traiettoria di un satellite, in che modo e con quale entità lo fanno a seconda delle diverse condizioni al contorno applicate, che siano queste il punto di partenza della missione, la sua data di inizio o la sua durata.

Sicuramente viste le numerosissime possibili durate, sarebbe possibile approfondire ulteriormente il range di studio, per vedere cosa succede in missioni ancor più corte, nelle quali l'influenza lunare si fa sentire per solamente una sua rivoluzione attorno alla Terra.

Sarebbe anche interessante effettuare la stessa analisi per altri asteroidi o comete, trovando così delle missioni dall'elevata convenienza e dunque fattibilità ed allargare gli orizzonti attualmente conosciuti.

I risultati appena illustrati hanno evidenziato come l'andamento del consumo di carburante in fase di escape sia monotono con il variare della lunghezza della missione poiché non avere il vincolo di terminare la fuga in tempi brevi permette di immettersi in orbite a costo minore, ma confrontando ciò che succede partendo in date diverse si vedono delle convenienze differenti a parità di durata della missione, dovute alla diversa influenza che esercitano la Luna e il Sole a causa del fatto che si trovano in posizioni diverse della propria orbita e a distanze diverse dal satellite.

Facendo variare la durata della missione, l'influenza negativa o positiva che sia viene perpetrata per tempo maggiore o minore e questo, insieme al fatto che la missione termini in un periodo favorevole o meno, va ad influire in maniera netta su quella che è la velocità dello spacecraft all'uscita dalla sfera d'influenza terrestre, la quale è un parametro dunque chiave per la fase successiva della missione visto che dopo l'escape bisogna raggiungere il target asteroide. Ovviamente anche la velocità dello spacecraft all'uscita dalla sfera d'influenza terrestre è influenzata da quanto si è dovuto spingere per via dei vincoli di durata dell'escape e quindi della traiettoria più o meno energetica da seguire.

Trovare un'orbita conveniente è sì legato a ciò che succede nella fuga e alla grande convenienza dello sfruttare il punto L2, ma anche alla traiettoria dell'asteroide stesso, che sarà più o meno simile a quella nella quale si è immesso il satellite alla fine dell'escape e pertanto nel tempo medio di missioni verso asteroidi, che è quindi un vincolo di durata imposto, il motore dovrà effettuare manovre di diversa entità e allora più o meno gravose. Nell'ottica di ottimizzare il consumo di propellente per potersi concentrare di più sulle strumentazioni da imbarcare, effettuare variazioni orbitali che siano più piccole possibili è il fulcro dello studio.

Non è comunque detto che a fine escape tutti i parametri orbitali siano più convenienti rispetto al caso nel quale non si sia partiti da L2 e non si sia trascurata la sfera d'influenza terrestre e questo dipende sempre da tutti i fattori precedentemente citati e dal fatto che si è ottimizzata la fuga di per sé e dunque la massa finale, ma poi ci sono dei nuovi obi-

ettivi e fattori che li influenzano dopo che si è usciti dalla sfera d'influenza terrestre, che possono non collimare con quanto appena ottimizzato nella fuga.
L'insieme di tutti questi fattori e dipendenze rende la missione partita il 16/8/2025 e durata 105 giorni la più conveniente.

Bibliography

- [1] Manuela Battipede (2020/2021), *Appunti del corso di meccanica del volo spaziale*
- [2] Elisa Capello, Fabrizio Dabbene (2020/2021), *Appunti del corso di dinamica e controllo di veicoli spaziali*
- [3] Lorenzo Casalino (2020/2021), *Appunti del corso di propulsione spaziale*
- [4] Luigi Mascolo, Lorenzo Casalino (2020/2021), *ESCAPE TRAJECTORIES FROM LAGRANGIAN POINTS WITH ELECTRIC PROPULSION*
- [5] Locatelli (2021/2022), *Appunti di metodi numerici per l'astronomia*
- [6] Angelo Angeletti (2021/2022), *Appunti del corso di astronomia*
- [7] Luigi Mascolo, Lorenzo Casalino (2022), *Optimal Escape from Sun-Earth and Earth-Moon L2 with Electric Propulsion*
- [8] Francesco Simeoni, Lorenzo Casalino, Alessandro Zavoli, Guido Colasurdo (2012), *Indirect Optimization of Satellite Deployment into a Highly Elliptic Orbit*
- [9] Lucia Pallottino (2012), *Sistemi robotici distribuiti*
- [10] Orofino (2011/2012), *Dispense di planetologia*
- [11] Anna Maria Nobili (2011/2012), *Elementi di meccanica celeste*
- [12] Lorenzo Casalino, *Equazioni in coordinate sferiche*
- [13] Lorenzo Casalino, *Ottimizzazione Indiretta di Traiettorie Spaziali*
- [14] Lorenzo Casalino, *Slides ottimizzazione*
- [15] E. Fabri, U. Penco (2002/2003), *Lezioni di Astronomia*
- [16] <https://www.spacerefence.org/asteroid/2013-xy20>
- [17] GAIA spacecraft, [https://it.upwiki.one/wiki/gaia\(spacecraft\)citenote-ESA2011-10](https://it.upwiki.one/wiki/gaia(spacecraft)citenote-ESA2011-10)
- [18] GAIA mission, <https://www.askanews.it/scienza-e-innovazione/2022/06/13/via-lattea-sorprendenti-novita-dalla-missione-esa-gaia-pn2022061300031/>
- [19] GAIA mission, <https://www.wired.it/article/missione-gaia-mostra-la-mappa-della-via-lattea-piu-dettagliata-di-sempre/>
- [20] Comet interceptor, <https://sci.esa.int/web/cosmic-vision/-/61416-esa-s-new-mission-to-intercept-a-comet>

- [21] Wilkinson, <https://www.nasa.gov/feature/making-sense-of-the-big-bang-wilkinson-microwave-anisotropy-probe>
- [22] WIND spacecraft, [https://it.upwiki.one/wiki/WIND\(spacecraft\)](https://it.upwiki.one/wiki/WIND(spacecraft))
- [23] Herschel telescope, <https://www.esa.int/ScienceExploration/SpaceScience/Herscheloverview>
- [24] Planck, <https://www.esa.int/EnablingSupport/Operations/Planck>
- [25] Planck, <https://www.nasa.gov/missionpages/planck>
- [26] Chang'e 2, <https://solarsystem.nasa.gov/missions/change-2/in-depth/>
- [27] James Webb, <https://www.jwst.nasa.gov/>
- [28] Spektr-RG, <https://directory.eoportal.org/web/eoportal/satellite-missions/s/spektrg-srg>