



Politecnico di Torino

Tesi di Laurea Magistrale

OTTIMIZZAZIONE DI MISSIONI VERSO ASTEROIDI ATEN
MEDIANTE L'UTILIZZO DI EARTH GRAVITY ASSIST

Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale Politecnico
di Torino

Relatore

Prof. Lorenzo Casalino

Candidato

Michele Francesco Bruno

INDICE

Introduzione	8
1.1 Gli asteroidi: generalità e suddivisione principale	8
1.2 Fascia principale	10
1.2.1 I Troiani	11
1.2 Near-Earth Objects	12
Richiami di meccanica orbitale	14
2.1 Leggi di Keplero	14
2.2 Legge di gravitazione universale	14
2.3 Problema dei due corpi	15
2.3.1 Conservazione del momento angolare	16
2.3.2 Conservazione dell'energia meccanica	16
2.4 Equazione della traiettoria e delle coniche	17
2.5 Sistemi di coordinate	19
2.5.1 Sistema eliocentrico-eclittico	20
2.5.2 Sistema geocentrico-equatoriale	20
2.5.3 Sistema perifocale	21
2.6 Parametri orbitali classici	22
2.7 Manovre Orbitali	23
2.7.1 Principali manovre a uno o due impulsi	24
2.8 Traiettorie interplanetarie	29
Propulsione elettrica	31
3.1 Cenni sulla propulsione elettrica	31
3.2 Manovre con propulsione elettrica	32
Teoria del controllo ottimale	35
4.1 Il problema di ottimizzazione	35
4.1.1 Principio di Massimo di Pontryagin	37
4.2 Problema differenziale ai limiti (BVP)	39
Modello matematico	42
5.1 Problema Dinamico	42
Definizione della missione	46
6.1 Analisi della missione	46
6.1.1 Aten	46
6.1.2 EGA: Earth Gravity Assist	47
6.2 Selezione degli asteroidi	49
6.2.1 Primo step	49

6.2.2 Secondo Step	49
Risultati	51
7.1 2000 BM19.....	51
7.1.1 Missioni Dirette.....	53
7.1.2 Missione con EGA	60
7.2 2003 SD220	66
7.2.1 Missioni Dirette.....	68
7.2.2 Missione con EGA	73
7.3 2001 CK32	76
7.3.1 Missione Diretta.....	77
7.3.2 Missione con EGA	80
Conclusioni.....	84
Appendice.....	86
Bibliografia e Sitografia	87

SOMMARIO

La maggior parte degli asteroidi si trova in una zona compresa tra le orbite di Marte e Giove chiamata fascia principale, ma si possono trovare asteroidi anche in zone più vicine al Sole: questo è il caso dei NEOs (Near-Earth objects), ovvero piccoli corpi celesti del sistema solare la cui orbita li porta in prossimità della Terra, rendendoli molto interessanti sia da un punto di vista scientifico che di sicurezza della civiltà umana. Negli ultimi anni, infatti, l'interesse della comunità scientifica verso questa classe di corpi celesti è aumentato in modo considerevole come dimostrato dal gran numero di missioni del recente passato (NEAR, Hayabusa, Dawn, OSIRIS-REx). Di questo gruppo di asteroidi fanno parte gli Aten, la cui orbita presenta un semiasse maggiore minore dell'unità astronomica ma interseca quella della Terra. Lo scopo di questa tesi è quello di trovare traiettorie interessanti dal punto di vista del consumo di propellente verso asteroidi che presentano un semiasse maggiore minore dell'unità. Verrà effettuato un confronto tra missioni dirette e missioni con EGA (Earth Gravity Assist) in modo da valutare la fattibilità e la convenienza in termini di massa finale delle due soluzioni. Le missioni spaziali all'interno del sistema solare richiedono infatti grandi quantità di propellente per essere svolte, ed ogni chilogrammo in più sul velivolo diminuisce la massa disponibile per il carico utile ed aumenta considerevolmente il costo totale della missione. Il lavoro è stato diviso in tre parti: inizialmente è stato necessario effettuare una selezione preliminare degli asteroidi che si è conclusa con la scelta di tre asteroidi, 2000 BM19, 2003 SD220 e 2001 CK32, caratterizzati da semiasse maggiore minore di 1 UA, un apoastro vicino all'unità ed un'inclinazione non troppo elevata; nella seconda parte invece si è passati allo studio di ottimizzazione delle traiettorie nel quale è stata utilizzata la teoria del controllo ottimale in modo da minimizzare il consumo di propellente ed infine è stato effettuato un confronto tra missioni dirette e missioni con EGA in modo da valutare la convenienza di queste ultime. In conclusione, la tesi dimostra come lo sfruttamento della gravità della Terra permetta, aumentando leggermente la durata della missione, di abbassare i consumi di propellente in modo da avere più disponibilità per il carico utile e ridurre i costi di missione.

ABSTRACT

Most asteroids are found in an area between the orbits of Mars and Jupiter called the main belt, but asteroids can also be found in areas closer to the Sun: this is the case of NEOs (Near-Earth objects), small celestial bodies in the solar system whose orbits bring them close to the Earth, making them very interesting both from a scientific point of view and for the safety of human civilisation. In recent years, in fact, the scientific community's interest in this class of celestial bodies has increased considerably, as demonstrated by the large number of missions in the recent past (NEAR, Hayabusa, Dawn, OSIRIS-Rex). Among this group of asteroids are the Atens, whose orbits intersect the Earth's one and are characterized by a semi-major axis smaller than 1 AU. The aim of this thesis is to find interesting trajectories in terms of propellant consumption towards asteroids with a semi-major axis smaller than the astronomical unity. A comparison will be made between direct missions and EGA (Earth Gravity Assist) missions in order to assess the feasibility and convenience in terms of final mass of the two solutions. As a matter of fact, space missions within the solar system require large amounts of propellant and each additional kilogram on the aircraft decreases the mass available for payload and considerably increases the total cost of the mission. The work was divided into three parts: initially, it was necessary to carry out a selection of asteroids, which ended with the choice of three asteroids, 2000 BM19, 2003 SD220 and 2001 CK32, characterized by a semi-major axis smaller than 1 AU, an apoaster close to unity and a not too high inclination; in the second part, however, the focus moved on to the trajectory optimisation study in which the theory of optimal control was used to minimise propellant consumption, and finally, a comparison was made between direct missions and EGA missions to assess the convenience of the latter. In conclusion, the thesis demonstrates how exploiting Earth's gravity allows, by slightly increasing mission duration, lower propellant consumption in order to have more availability for the payload and reduce mission costs.

Capitolo 1

Introduzione

In questo primo capitolo verrà effettuata una panoramica sui piccoli corpi celesti chiamati asteroidi: si parlerà infatti della loro composizione, delle loro principali ubicazioni all'interno del Sistema Solare e delle loro classificazioni più importanti.

1.1 Gli asteroidi: generalità e suddivisione principale

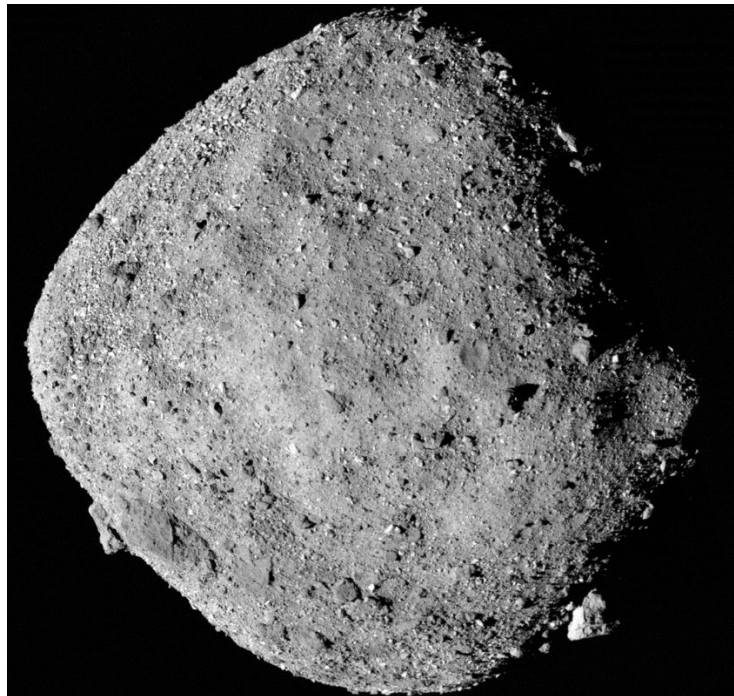


Figura 1.1: Asteroide 101955 Bennu

L'esplorazione dello spazio profondo è un tema che, con il passare degli anni, risulta sempre più al centro dell'interesse di tutte le agenzie spaziali del mondo. Molte di queste, infatti, negli ultimi anni hanno progettato diverse missioni per indagare su alcune caratteristiche di questo ambiente e in modo particolare sugli asteroidi, piccoli corpi celesti prevalentemente rocciosi e metallici. Questi corpi celesti presentano una forma solitamente non sferica, sono privi di atmosfera e orbitano attorno al Sole seguendo traiettorie ellittiche spesso caratterizzate da un'elevata eccentricità. Secondo la teoria più accreditata gli asteroidi sarebbero residui del disco protoplanetario che, durante la formazione del Sistema Solare, non sono stati incorporati dagli altri pianeti. La composizione degli asteroidi è molto variabile: possono infatti essere composti da componenti volatili oppure da metalli come

nichel, ferro, platino e oro. Gli asteroidi che presentano alte concentrazioni di platino possono contenerne fino a 100 grammi per tonnellata, 10-20 volte superiori alle miniere a cielo aperto del Sudafrica. Le dimensioni di questi corpi celesti vanno da circa un metro a quasi 1000 km di diametro: i più grandi sono Ceres (1000 km), Pallas (500 km) e Vesta (500 km) e sono gli unici della fascia principale che hanno una forma simil-sferica. Diverse sono le missioni spaziali che hanno rivolto la loro attenzione agli asteroidi, dalla sonda Hayabusa della JAXA verso 25143 Itokawa alle più recenti della NASA, OSIRIS-Rex verso 101955 Bennu e Lucy che prevede un itinerario di otto asteroidi (uno della fascia principale e sette troiani). La maggior parte degli asteroidi si trova in una zona compresa tra le orbite di Marte e Giove, chiamata fascia principale, ma essi sono presenti anche in prossimità del pianeta Terra, è il caso dei NEAs (Near Earth Asteroids).

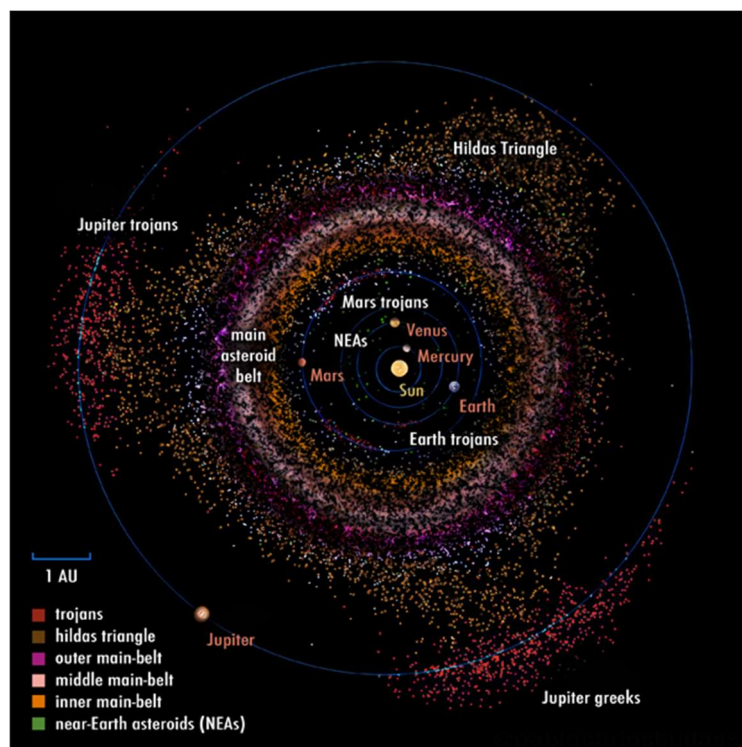


Figura 1.2: Inner Solar System Objects

Gli asteroidi possono essere suddivisi fondamentalmente in tre gruppi in base alla loro composizione:

- C-type (carbonacei): sono gli asteroidi più comuni del Sistema Solare (75% circa) e sono composti prevalentemente di carbonio. Vengono anche chiamati primitivi in quanto hanno una composizione molto simile al Sole e alla nebulosa solare primitiva, tranne che per l'idrogeno, l'elio e gas volatili. Con un'albedo di circa 0.03, sono dei corpi celesti molto scuri a causa dell'elevata percentuale di carbonio. Occupano prevalentemente la parte esterna della fascia principale, a circa 3.5 unità

astronomiche dal Sole, distanza alla quale l'80% degli asteroidi è di questo tipo, ma possono essere trovati anche a circa 2 UA anche se in percentuali minori.

- S-type (silicio, "stony"): rappresentano circa il 17% degli asteroidi conosciuti e hanno una composizione metallica, sono infatti composti prevalentemente da silicati di nichel, ferro e magnesio. Data la loro composizione, presentano un'albedo relativamente alta e sono quindi moderatamente luminosi. Sono prevalenti nella parte interna della fascia principale, entro 2.2 unità astronomiche di distanza dal Sole.
- M-type (metallici): sono gli asteroidi più luminosi e numericamente più rari. Come quelli di tipo S sono composti principalmente di metalli, in questo caso però contengono elevate concentrazioni di nichel e ferro.

1.2 Fascia principale

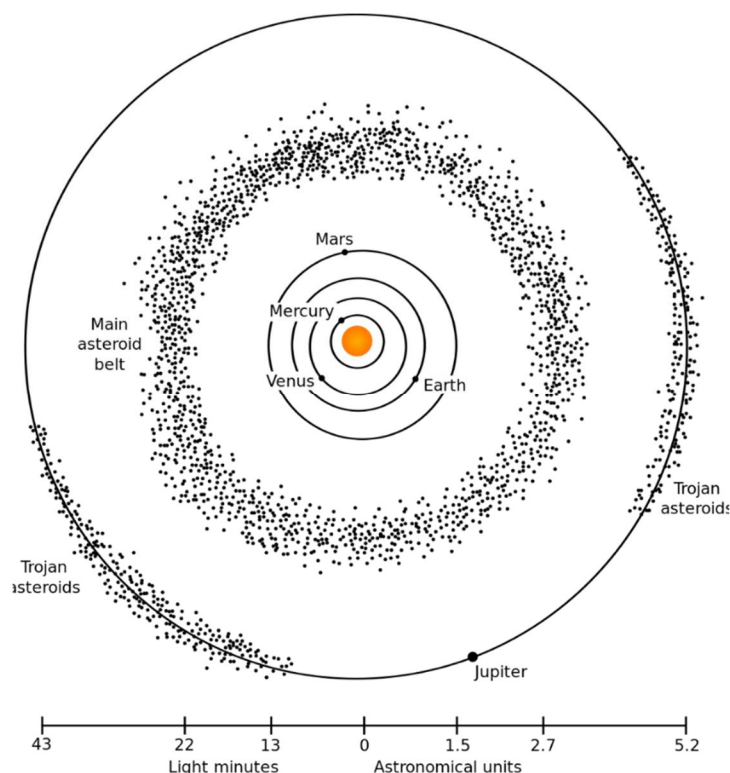


Figura 1.3: Fascia Principale

La fascia principale è una zona toroidale del Sistema Solare ad una distanza compresa tra 2 e 4 unità astronomiche dal Sole, tra le orbite di Marte e Giove, che ospita la maggior parte degli asteroidi. Questa fascia occupa lo spazio fra i due pianeti citati e risulta essere molto

più ampia rispetto allo spazio fra qualsiasi altra coppia di pianeti vicini del Sistema Solare: ogni pianeta, infatti, ha in media una distanza dal Sole circa 1.3-2 volte di quello successivo, ma nel caso di Marte e Giove questo valore è circa 3.4. È per giustificare questa grande distanza apparentemente priva di corpi celesti principali che gli astronomi che per primi osservarono gli asteroidi della fascia principale andavano in realtà alla ricerca di un potenziale pianeta compreso fra le due orbite. Secondo la teoria più accreditata, questi asteroidi non sono stati incorporati a formare un pianeta probabilmente a causa della grande forza gravitazionale esercitata da Giove che ne ha reso difficoltoso l'assemblaggio. Attualmente si conoscono centinaia di migliaia di asteroidi e il numero totale, a seconda delle dimensioni, può raggiungere i milioni: oltre 200 asteroidi hanno un diametro maggiore di 100 km, ma se si considera un diametro di 1 km o più il conteggio può arrivare a 1.7 milioni. Circa metà della massa della fascia è contenuta nei quattro asteroidi più grandi, Cerere, Vesta, Pallade e Igea. Questi asteroidi, in seguito ad alcune circostanze come possono essere urti o perturbazioni gravitazionali, possono uscire dalla loro orbita convenzionale e avvicinarsi ai pianeti, attratti dalla forza gravitazionale. Tra i pianeti soggetti a questo fenomeno è compresa anche la Terra, alla quale ogni anno si avvicinano un buon numero di asteroidi, che vengono chiamati NEAs (Near Earth Asteroids).

1.2.1 I Troiani

Come si può notare nella figura 1.3, esiste un altro gruppo molto numeroso di asteroidi che popola l'orbita di Giove: questi asteroidi vengono chiamati Troiani (sono infatti denominati con nomi degli eroi dell'Iliade) e sono localizzati in corrispondenza dei punti Lagrangiani stabili L4 e L5. In questi punti, l'attrazione gravitazionale del Sole e del pianeta Giove è bilanciata dalla forza centrifuga dell'asteroide. Il numero di questi asteroidi è molto simile a quello della fascia principale: si stima infatti che il numero sia dell'ordine del milione. Il termine "asteroide troiano" si riferisce specificamente agli asteroidi dell'orbita di Giove ma esistono anche asteroidi troiani (localizzati nei punti lagrangiani) di Marte, Nettuno e della Terra.

1.2 Near-Earth Objects

I NEOs (Near Earth Objects) sono corpi celesti minori, asteroidi (NEAs: Near Earth Asteroids) o comete (NECs: Near Earth Comets), che presentano orbite che li portano entro un raggio di 195 milioni di chilometri dal Sole, il che significa che possono passare nei pressi dell'orbita della Terra. Convenzionalmente, in termini di parametri orbitali, un corpo si definisce NEO se il suo perielio è minore di 1.3 unità astronomiche. I NEAs (Near Earth Asteroids) sono per la maggior parte asteroidi di dimensioni che vanno da pochi metri a quasi 40 chilometri di diametro. Questi asteroidi sopravvivono nelle loro orbite solo per pochi milioni di anni e la loro orbita viene estremamente influenzata dalle perturbazioni planetarie che ne causano l'espulsione dal Sistema Solare o il decadimento verso il Sole, un pianeta o un altro corpo celeste. Secondo la teoria più accreditata, l'origine accettata di questi asteroidi è la fascia principale dalla quale si spostano verso il Sistema solare interno a causa di risonanze orbitali con Giove. Nonostante la vita relativamente breve, le loro orbite risultano particolarmente instabili in quanto continuamente minacciate dall'interazione gravitazionale con altri corpi celesti, dagli urti con altri asteroidi o da fenomeni come l'effetto Yarkovsky che rendono le loro traiettorie variabili nel tempo. L'interesse per questi asteroidi è puramente scientifico e in gran parte legato alla difesa planetaria: una più approfondita comprensione delle caratteristiche di questi corpi celesti, in modo particolare delle loro orbite e composizioni chimiche, fornisce maggiori informazioni necessarie a sviluppare strategie per evitare impatti con il nostro pianeta ma permette anche di raccogliere ulteriori dati sulla storia e formazione del Sistema Solare. Si parla in questo caso di asteroidi potenzialmente pericolosi (PHA: Potentially Hazardous Asteroids). Sono considerati PHA tutti gli asteroidi con una distanza minima di intersezione dell'orbita terrestre (MOID: Minimum Orbit Intersection Distance) minore o uguale a 0.05 UA e una magnitudine assoluta (H) minore o uguale a 22. Sono stati proposti diversi modi per modificare l'orbita di questi piccoli corpi celesti, nel caso in cui il rischio di collisione raggiunga probabilità elevate, tuttavia, la scarsa conoscenza della struttura interna impedisce di prevedere le conseguenze di un impatto o di un'esplosione che avvenga nelle loro vicinanze con l'obiettivo di defletterli o distruggerli.

I NEAs vengono suddivisi fondamentalmente in quattro gruppi in base alla distanza del perielio, alla distanza dell'afelio ed il loro semiasse maggiore:

- Amors: sono asteroidi la cui orbita è esterna a quella della Terra ma interna a quella di Marte e prendono questo nome dall'asteroide 1221 Amor. Sono caratterizzati da un semiasse maggiore superiore a 1 UA ed un perielio compreso tra 1.017 UA e 1.3 UA. Rappresentano il secondo gruppo più numeroso comprendendo il 36% circa dei NEOs.

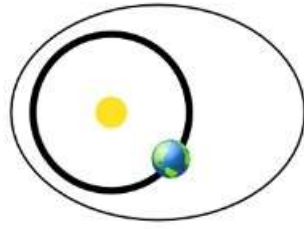


Figura 1.4: Orbita degli asteroidi Amor in rapporto a quella della Terra

- Apollos: sono asteroidi la cui orbita interseca quella della Terra e presenta un semiasse maggiore superiore a 1 UA. Sono caratterizzati da un perielio ad una distanza inferiore a 1.017 UA. Prendono il loro nome dall'asteroide 1862 Apollo. Questo gruppo è quello più numeroso rappresentando circa il 55% dei NEOs.



Figura 1.5: Orbita degli asteroidi Apollo in rapporto a quella della Terra

- Atens: sono asteroidi la cui orbita interseca quella della Terra e presenta un semiasse maggiore minore di 1 UA. Sono caratterizzati da un afelio ad una distanza maggiore di 0.983 UA. Prendono il loro nome dall'asteroide 2062 Aten.



Figura 1.6: Orbita degli asteroidi Aten in rapporto a quella della Terra

- Atiras: sono asteroidi la cui orbita è interna a quella della Terra e prendono questo nome dall'asteroide 163693 Atira. Sono caratterizzati da un semiasse maggiore minore di 1 UA ed un afelio minore di 0.983 UA. Questi asteroidi appresentano il gruppo meno numeroso tra i NEOs.

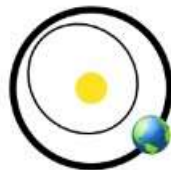


Figura 1.7: Orbita degli asteroidi Atira in rapporto a quella della Terra

Capitolo 2

Richiami di meccanica orbitale

Questo secondo capitolo è focalizzato sulla fenomenologia della meccanica dei corpi celesti, partendo dalle leggi di Keplero e dalla legge di gravitazione universale si arriverà a descrivere le manovre orbitali utili per la comprensione delle tecniche utilizzate in questa tesi.

2.1 Leggi di Keplero

- I. L'orbita descritta da un pianeta è un'ellisse, di cui il Sole occupa uno dei due fuochi.
- II. Il raggio vettore che unisce il centro del Sole con il centro del pianeta spazza aree uguali in tempi uguali.
- III. Il quadrato del tempo che il pianeta impiega a percorrere la sua orbita è proporzionale al cubo del semiasse maggiore.

2.2 Legge di gravitazione universale

La legge di gravitazione universale, formulata da Isaac Newton nell'opera *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, afferma che nell'universo due corpi si attraggono in modo direttamente proporzionale al prodotto delle loro masse e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza. Il fisico inglese introdusse una forza di gravitazione universale per spiegare i moti planetari descritti dalle leggi di Keplero.

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

Dove $G = 6.673 \times 10^{-11} [Nm^2kg^{-2}]$ è detta costante di gravitazione universale, M e m rappresentano rispettivamente le masse del corpo centrale e del corpo orbitante e r è il raggio vettore che unisce i centri di massa dei due corpi.

2.3 Problema dei due corpi

Il problema dei due corpi descrive il moto di due corpi puntiformi sotto l'azione delle sole forze di interazione gravitazionale dei due corpi stessi, che si suppongono forze centrali per le quali valga il terzo principio della dinamica:

$$\ddot{\vec{r}}_{12} = -G \frac{(m_1 + m_2)}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}$$

È possibile semplificare questo problema con l'introduzione dell'ipotesi secondo cui il corpo orbitante ha una massa molto più piccola dell'altro:

$$m_1 \gg m_2$$

La nuova formulazione prende il nome di problema dei due corpi ristretto e la sua formulazione differenziale diventa:

$$\ddot{\vec{r}} = -G \frac{M}{r^3} \vec{r}$$

Dove M è la massa del corpo centrale ed il prodotto GM può essere riscritto come $\mu = GM$, che viene chiamata costante gravitazionale del corpo centrale. Per missioni interplanetarie in campo eliocentrico $\mu = 132500 \times 10^6 \text{ km}^3 \text{ s}^{-2}$.

Risolvendo l'equazione differenziale del problema dei due corpi ristretto e introducendo alcuni parametri si ottiene l'equazione che esprime la distanza tra i due corpi e quindi la traiettoria dell'orbita del corpo secondario:

$$r = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1 + \frac{B}{\mu} \cos v}$$

Dove B è una costante integrativa, h è il momento angolare e v è l'anomalia vera, definita come l'angolo tra B ed il raggio vettore. È importante a questo punto evidenziare come alcune quantità fisiche, considerando il problema dei due corpi ristretto, rimangano costanti durante tutta la percorrenza dell'orbita. Il campo gravitazionale è infatti conservativo e radiale, per cui l'energia meccanica e il momento angolare del sistema isolato si conservano.

2.3.1 Conservazione del momento angolare

Moltiplicando ambo i membri dell'equazione differenziale del problema dei due corpi ristretto per il raggio $\vec{r}$ e portando il secondo membro a sinistra dell'uguale si ottiene:

$$\vec{r} \wedge \ddot{\vec{r}} + \vec{r} \wedge \mu \frac{\vec{r}}{r^2} = 0$$

Sviluppando i prodotti vettoriali e sfruttando la regola della derivazione del prodotto vettoriale si ottiene:

$$\frac{d}{dt} (\vec{r} \wedge \dot{\vec{r}}) = 0$$

Dove il termine in parentesi è il momento angolare h . Essendo la derivata nulla, h risulta costante nel tempo in direzione modulo e verso. Ciò porta alla conclusione che il moto del corpo avviene su un piano, detto appunto piano orbitale, ed il momento angolare risulta sempre perpendicolare a tale piano.

2.3.2 Conservazione dell'energia meccanica

Moltiplicando scalarmente ambo i membri dell'equazione differenziale del problema dei due corpi ristretto per la velocità $\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ si ottiene:

$$\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3} \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = 0$$

Dalla quale si ottiene che:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} \right) = 0$$

Il termine tra parentesi è l'energia meccanica specifica ϵ che, essendo la sua derivata nel tempo nulla, risulta costante nel tempo.

2.4 Equazione della traiettoria e delle coniche

L'equazione trovata nel paragrafo precedente relativa alla traiettoria del corpo secondario può essere riscritta come segue:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}$$

Dove sono stati introdotti i parametri $p = h^2/\mu$ che rappresenta il semilatus rectum, la semiapertura della traiettoria in corrispondenza del fuoco (dove $v = \pi/2$), ed $e = B/\mu$ che rappresenta l'eccentricità della traiettoria del corpo. Dall'equazione appena esposta è possibile notare che se $v = 0$ il raggio è minimo, cioè il corpo secondario si trova nel punto chiamato periapside; se invece $v = \pi$, il raggio è massimo ed il corpo si trova nel punto chiamato apoapside. In base al corpo primario (centrale), questi due punti possono assumere nomi diversi: periastro e apoastro sono i nomi generali per un corpo qualsiasi, perielio e afelio sono riferiti al Sole ed infine perigeo e apogeo si riferiscono alla Terra. Per determinare il tipo di curva rappresentata dalla traiettoria è necessario comparare l'equazione della traiettoria con quella generale di una conica. Una conica è il luogo dei punti che sta sul piano in modo che la distanza da un certo punto (detto fuoco) e la distanza da una certa retta (detta direttrice) stanno in rapporto costante e pari al parametro e , eccentricità della conica. Nella definizione di conica appena esposta ricadono le circonferenze, le ellissi, le iperboli e le parabole. Le prime due coniche sono chiuse mentre le restanti due sono aperte, ciò che determina la forma dell'orbita sono i valori di energia e momento angolare (che insieme determinano l'eccentricità).

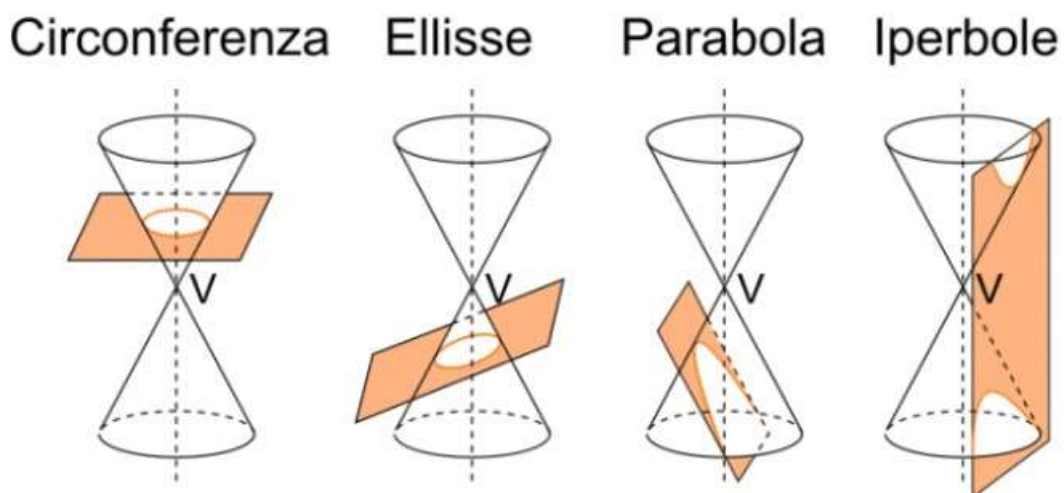


Figura 2.1: Tipi di coniche

Ogni tipo di orbita presenta una certa simmetria a due fuochi (F e F'), dove F è il fuoco primario e rappresenta il punto che corrisponde al centro di massa del corpo principale

mentre F' è il fuoco secondario, detto anche “libero” in quanto in quel punto non giace nessun corpo. I due fuochi sono ben distinguibili nell'ellisse e nell'iperbole mentre coincidono nella circonferenza. Per quanto riguarda invece la parabola, il fuoco secondario giace ad una distanza infinita da quello primario.

È possibile definire per ogni tipo di orbita delle grandezze geometriche fondamentali:

- Semilatus rectum p : semiapertura della conica in corrispondenza del fuoco
- Semiasse maggiore a : semidistanza tra apoastro e periastro. Esso risulta coincidente con il raggio nella circonferenza, è un valore infinito nella parabola e risulta negativo nell'iperbole
- Semiasse minore b : semidistanza tra gli anti-apsidi
- Semidistanza focale c : semidistanza tra i due fuochi. Essa risulta nulla per la circonferenza, infinita per la parabola e negativa per l'iperbole

Quanto appena detto può essere riassunto nella figura 2.2, rappresentante un'orbita ellittica.

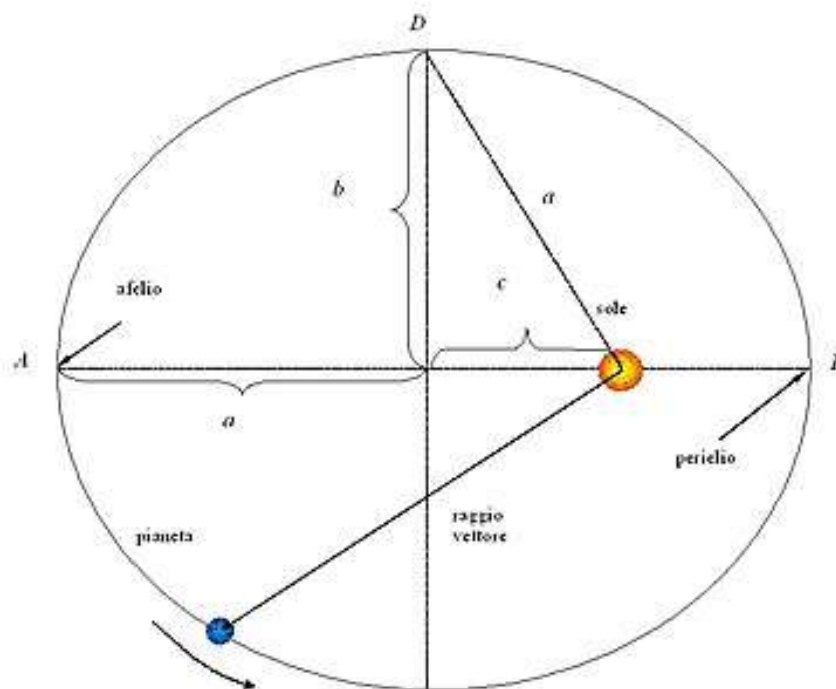


Figura 2.2: Orbita ellittica

Le grandezze appena definite sono legate dalle seguenti utili relazioni:

$$e = \frac{c}{a}; \quad \varepsilon = -\frac{\mu}{2a}; \quad h = \sqrt{\mu p};$$

$$a^2 = b^2 + c^2; \quad p = a(1 - e^2);$$

$$r_p = \frac{p}{1 + e} = a(1 - e); \quad r_a = \frac{p}{1 - e} = a(1 + e);$$

In base al valore di queste grandezze, le orbite assumono quindi forme diverse. Quanto detto è riassunto nella tabella sottostante.

Orbita	a	e	ε
Ellittica	> 0	< 1	< 0
Circolare	> 0	0	< 0
Iperbolica	< 0	> 1	> 0
Parabolica	∞	1	0

2.5 Sistemi di coordinate

Nello studio della meccanica dei corpi celesti è di fondamentale importanza utilizzare un sistema di riferimento conveniente. Esistono delle caratteristiche fondamentali che è necessario stabilire per descrivere un sistema di riferimento:

- Un'origine
- Un orientamento per il piano x-y
- La direzione principale
- Il verso dell'asse z, ovvero la normale al piano x-y

La terna x-y-z è una terna destrorsa e perciò è necessario scegliere il verso dell'asse y in questo senso. I sistemi presentati in questo paragrafo sono tutti non inerziali ma, in base al tipo di missione e in particolare alla durata della stessa, essi possono essere approssimati molto bene a sistemi di riferimento inerziali.

2.5.1 Sistema eliocentrico-eclittico

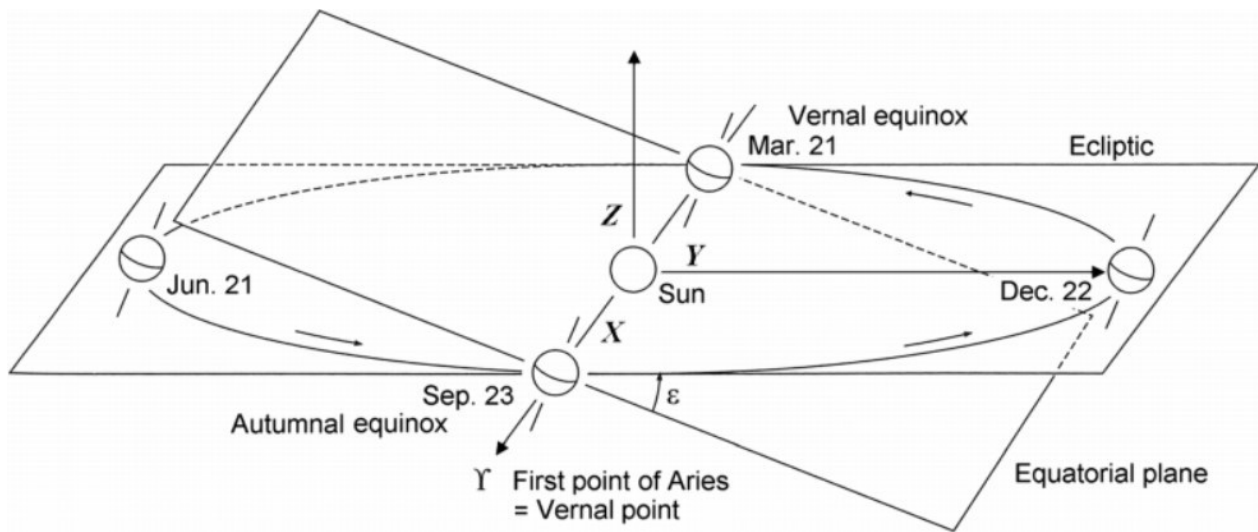


Figura 2.3: Sistema eliocentrico-eclittico

Dalla figura 2.3, rappresentante il sistema di riferimento eliocentrico-eclittico, possiamo notare le 4 caratteristiche necessarie per definire un sistema di riferimento espone precedentemente:

- L'origine del sistema è il centro di massa del Sole
- Il piano fondamentale è quello dell'eclittica, ovvero il piano su cui giace l'orbita della Terra
- La direzione x è data dall'intersezione tra il piano equatoriale della Terra e il piano dell'eclittica. Il giorno dell'equinozio di primavera il vettore che collega il centro di massa della Terra e il centro di massa del Sole individua la direzione ed il verso positivo (l'asse punta verso la costellazione dell'Ariete o equinozio vernale) dell'asse x
- Il verso dell'asse normale z è quello del momento angolare del moto di rivoluzione della Terra intorno al Sole

2.5.2 Sistema geocentrico-equatoriale

- L'origine del sistema è il centro di massa della Terra
- Il piano fondamentale è il piano equatoriale della Terra
- La direzione e il verso dell'asse x sono le stesse rispetto al sistema eliocentrico-eclittico, infatti, l'asse punta anche in questo caso verso l'equinozio vernale
- L'asse z è positivo verso il polo Nord terrestre

Il sistema di riferimento qui riportato non è solidale con la Terra: non segue la Terra nella sua rotazione, bensì è fisso rispetto alle stelle, tant'è che gli assi hanno direzione fissa e parallela agli assi del sistema eliocentrico-eclittico.

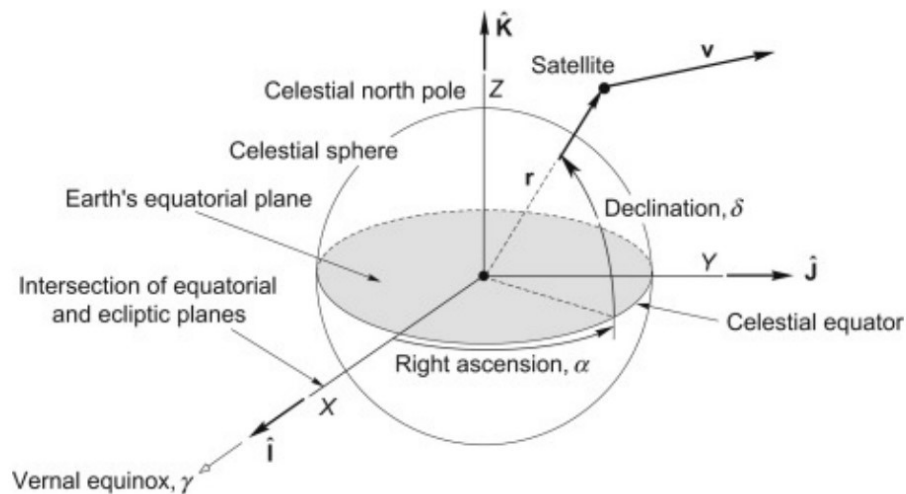


Figura 2.4: Sistema geocentrico-equatoriale

2.5.3 Sistema perifocale

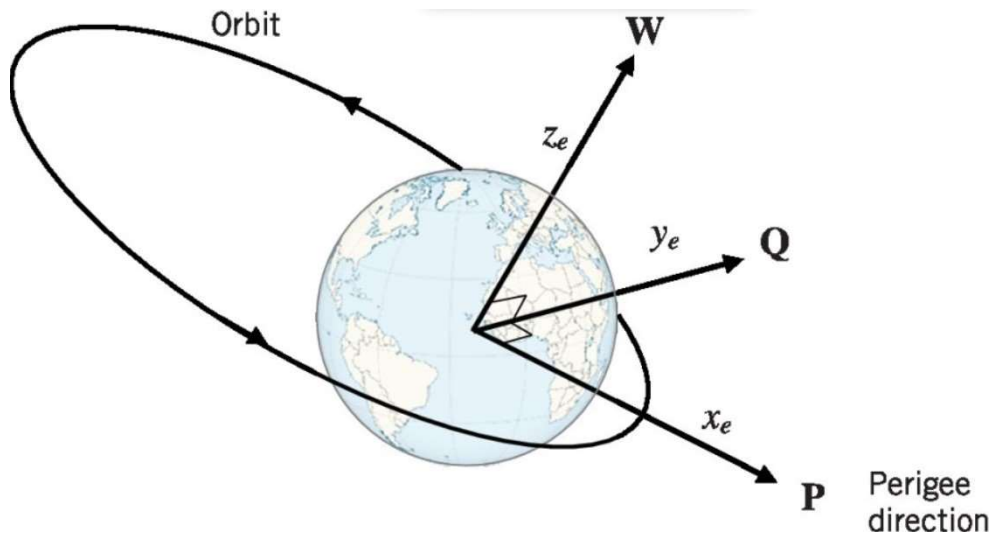


Figura 2.5: Sistema perifocale

- L'origine di tale sistema di riferimento è il centro del corpo principale
- Il piano fondamentale è il piano su cui giace l'orbita del corpo orbitante
- L'asse x è diretto lungo la direzione del periastro

- L'asse z ha direzione e verso del momento angolare del corpo secondario

Questo sistema di riferimento rappresenta uno dei più convenienti per descrivere l'orbita di un corpo secondario attorno ad un corpo primario.

2.6 Parametri orbitali classici

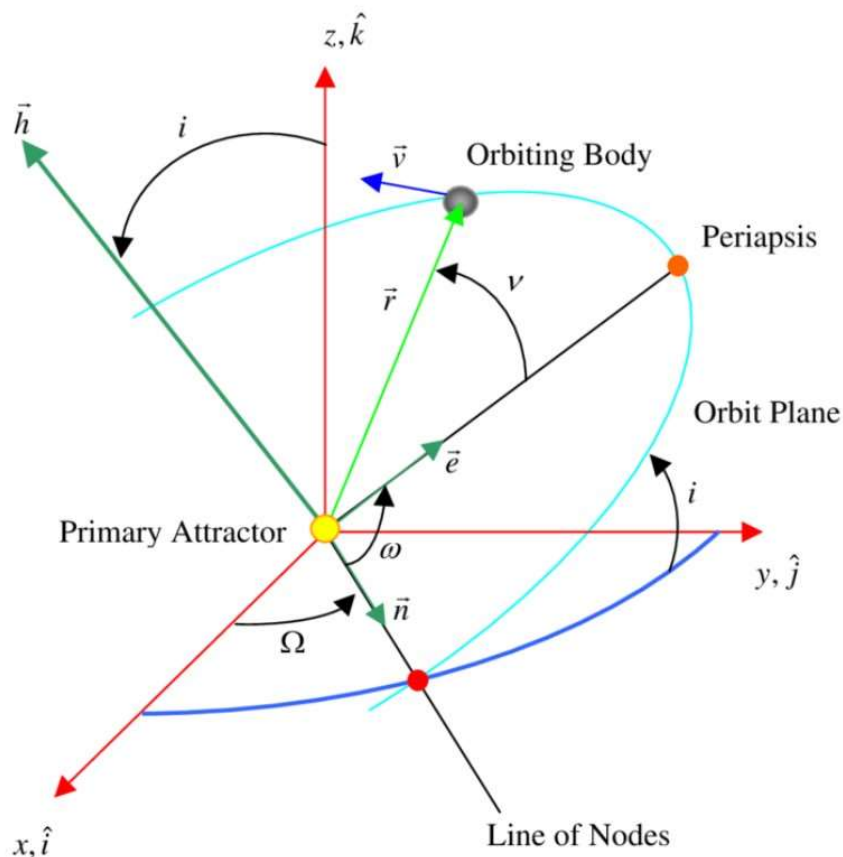


Figura 2.6: Parametri orbitali classici

In meccanica orbitale sono sufficienti 5 parametri indipendenti per descrivere in modo univoco un'orbita in termini di dimensione, forma e orientamento nello spazio. Per quanto riguarda la posizione nel tempo di un corpo (satellite) lungo la sua orbita è necessario introdurre un ulteriore parametro. I parametri orbitali classici sono rappresentati in figura 2.6 e sono:

- Semiasse maggiore a , che definisce la dimensione dell'orbita
- Eccentricità dell'orbita e , che definisce la forma dell'orbita
- Inclinazione i , che è l'angolo tra l'eclittica ed il piano orbitale

- Longitudine del nodo ascendente Ω , che è l'angolo tra la direzione dell'equinozio vernale e la posizione del nodo ascendente
- Argomento del periastro ω , che è l'angolo tra la posizione del nodo ascendente e la direzione del periastro
- Anomalia vera v , che è l'angolo tra il raggio vettore che punta al satellite e la direzione del periastro e serve a calcolare la posizione nel tempo del satellite

Un'alternativa potrebbe essere quella di sostituire l'anomalia vera con una variabile temporale, ovvero il tempo tra il passaggio al periastro e il punto considerato. Esistono poi situazioni in cui alcuni parametri orbitali potrebbero essere indeterminati: se l'inclinazione è nulla Ω e ω non sono distinguibili in quanto manca la posizione del nodo ascendente, si considera quindi come parametro la loro somma detta longitudine del periastro; se invece l'eccentricità è nulla sono v e ω a non essere distinguibili e si considera quindi come parametro la loro somma, detta argomento della latitudine; se infine sono nulle sia l'eccentricità che l'inclinazione Ω , v e ω sono indistinguibili e si considera solo la loro somma, detta longitudine vera.

2.7 Manovre Orbitali

Durante le missioni spaziali, per raggiungere l'orbita target oppure effettuare un rendez-vous di un corpo celeste come può essere un pianeta o un asteroide, è necessario effettuare delle variazioni di uno o più parametri orbitali classici. Per fare ciò vengono effettuate delle manovre orbitali per mezzo della spinta T , generalmente realizzata tramite l'espulsione di una certa massa di propellente m_p . Le manovre orbitali possono essere necessarie anche per compensare le perturbazioni o correggere eventuali errori di ignizione. Si assume inizialmente un modello semplificato con manovre impulsive, caratterizzate da spinta infinita applicata in un tempo infinitesimo e una variazione di energia solamente cinetica. Questa ipotesi è valida per missioni interplanetarie dove il tempo di missione è molto maggiore del tempo di manovra. Tale modello semplificato non è invece valido nel caso di propulsione elettrica, caratterizzata da bassa spinta e tempi di missione brevi. Quando si parla di manovre in ambito spaziale è necessario introdurre alcune grandezze fondamentali oltre alle già citate spinta T e massa di propellente m_p :

- La portata di propellente $\dot{m}_p$, più utilizzata rispetto alla massa
- Il costo della manovra ΔV (salto di velocità), ovvero l'impulso per unità di massa necessario per effettuare la manovra desiderata nel caso in cui questa sia di tipo impulsivo. Il ΔV si calcola come la variazione di velocità da imprimere alla sonda per ottenere una V_2 consona all'orbita che si vuole raggiungere

- L'impulso specifico I_{sp} , dato dal rapporto tra l'impulso totale (definito come l'integrale nel tempo della spinta T) e la forza peso della massa di propellente consumato (sulla Terra). L'impulso specifico è una misura dell'efficienza con cui un motore propulsivo utilizza il carburante per fornire spinta. Maggiore è l'impulso specifico, più è efficiente il motore propulsivo e minore il propellente consumato
- La velocità efficace di scarico c , ovvero la velocità della massa di propellente all'uscita dall'ugello in condizioni di pressione esterna nulla

Queste grandezze sono legate tra loro dalle seguenti relazioni:

- Equazione di Tsiolkowski (rocket equation)

$$\Delta V = c \ln \frac{m_0}{m_f}$$

Dove m_0 e m_f sono rispettivamente la massa iniziale prima dell'impulso e la massa finale. Si può notare come la massa finale sia strettamente legata al ΔV : con un aumento troppo elevato di quest'ultimo il carico utile (frazione della massa finale) può calare drasticamente

$$m_f = m_0 e^{\left(-\frac{\Delta V}{c}\right)}$$

- L'equazione della spinta

$$T = \dot{m}_p c$$

- La definizione di impulso specifico

$$I_{sp} = \frac{I_{TOT}}{\dot{m}_p g_0}$$

2.7.1 Principali manovre a uno o due impulsi

Aggiustamento degli apsi

Una manovra molto utile per modificare la forma dell'orbita è chiamata manovra di aggiustamento degli apsi, che consiste nel modificare l'altezza di un apside incrementando la velocità in quello opposto. A causa delle perdite di gravità questa manovra risulta molto più efficace al periastro piuttosto che all'apoastro.

Ponendo Δz l'innalzamento voluto dell'apside, essendo a la metà dell'asse maggiore, la variazione del semiasse maggiore sarà $\Delta a = \Delta z / 2$. Conoscendo la variazione del semiasse richiesta, si può ricavare Δz e da ciò ricavare V_2 e ΔV . Considerando un'orbita quasi circolare si ha che

$$\frac{dV}{V} = \frac{da}{2a}$$

Quindi la variazione percentuale del semiasse maggiore è doppia rispetto a quella della velocità.

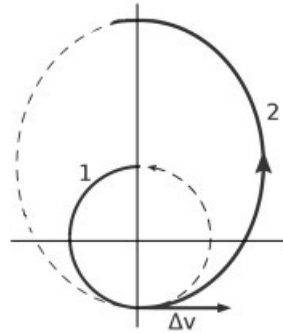


Figura 2.7: Innalzamento dell'apostro

Rotazione della linea degli apside

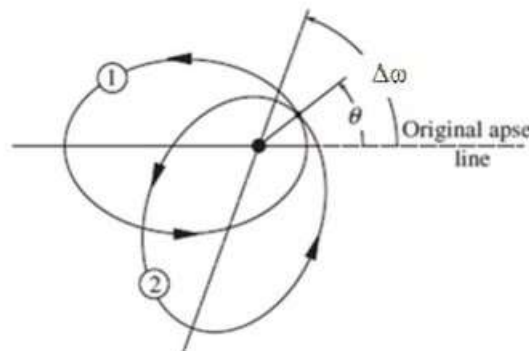


Figura 2.8: Rotazione della linea degli apside

Come è stato spiegato nel paragrafo sui parametri orbitali, la linea degli apside è individuata sul piano orbitale dall'argomento del periastro ω . La manovra di rotazione della linea degli apside consiste nell'applicare un impulso ΔV in modo da ruotare tale linea di un angolo $\Delta\omega$. Per passare dall'orbita 1 all'orbita 2 della figura 2.8 è necessario che l'impulso sia fornito in un punto in comune a entrambe le orbite. L'orbita subisce solamente una rotazione e la sua forma non cambia: energia, semiasse maggiore e momento angolare infatti rimangono costanti. La manovra viene effettuata a raggio costante e di conseguenza anche la velocità tangenziale rimane costante. È però necessario variare il verso della componente radiale della velocità. Il costo della manovra risulta:

$$\Delta V = 2 \frac{\mu}{h} e \left| \sin \frac{\Delta\omega}{2} \right|$$

Cambiamento del piano orbitale

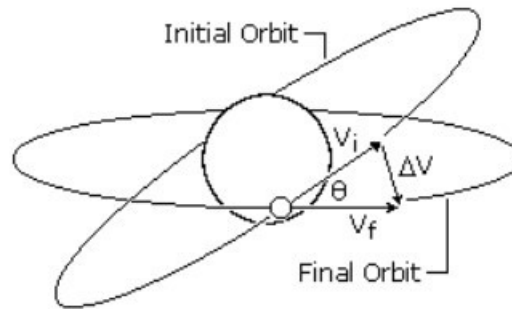


Figura 2.9: Cambio del piano orbitale

Come si può notare dalla figura 18, rappresentante una manovra di cambio di piano, è necessario fornire alla sonda spaziale un ΔV che presenti una componente perpendicolare al piano dell'orbita di partenza. In generale, è necessario fornire tale impulso in uno dei due punti di intersezione tra le due orbite. Durante questa manovra raggio, energia e momento angolare rimangono costanti.

$$\Delta V = 2V \sin \frac{\theta}{2}$$

Dove θ rappresenta la variazione Δi dell'inclinazione dell'orbita. Questo tipo di manovra rappresenta uno dei più costosi in termini di ΔV e di portata di propellente, anche per piccole variazioni dell'inclinazione.

Trasferimenti tra orbite circolari complanari

Ipotizzando che le orbite siano circolari e complanari, per passare da un'orbita di raggio r_1 ad una più grande di raggio r_2 è necessario che l'orbita di trasferimento intersechi (o sia almeno tangente) entrambe le orbite circolari. È infatti necessario imporre due vincoli:

$$r_p \leq r_1, \text{ con } r_p = \frac{p}{1+e} \text{ dal paragrafo 2.4}$$
$$r_a \geq r_2, \text{ con } r_a = \frac{p}{1-e} \text{ dal paragrafo 2.4}$$

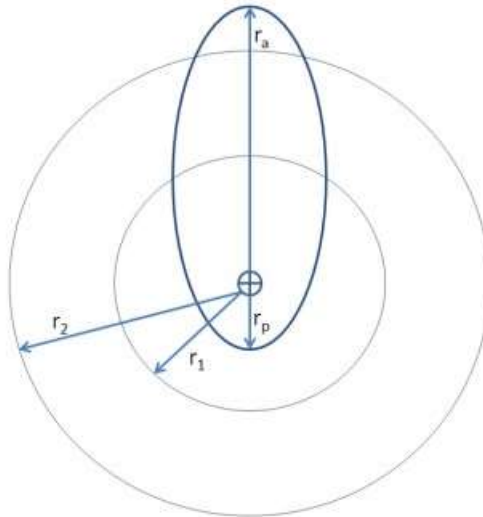


Figura 2.10: Trasferimento tra orbite circolari

Esistono infinite combinazioni di semilatus rectum ed eccentricità e l'orbita di trasferimento può assumere una forma parabolica e iperbolica oltre che ellittica con un naturale incremento del costo ΔV (figura 2.11).

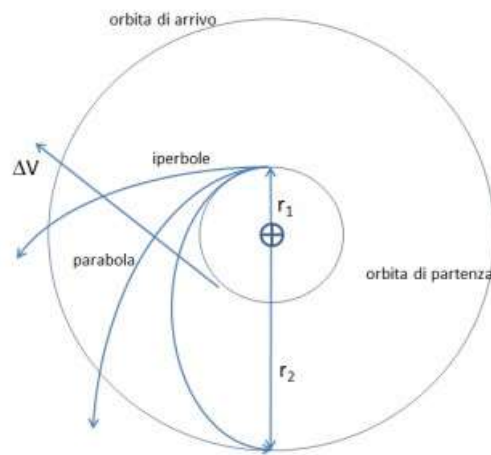


Figura 2.11: Tipologie di trasferta tra orbite circolari

Prendendo in esame una trasferta ellittica bitangente alle due orbite, detta trasferta di Hohmann, si può dimostrare che è quella che presenta il minor costo possibile in termini di ΔV anche se può rappresentare la più lunga in termini di tempo.

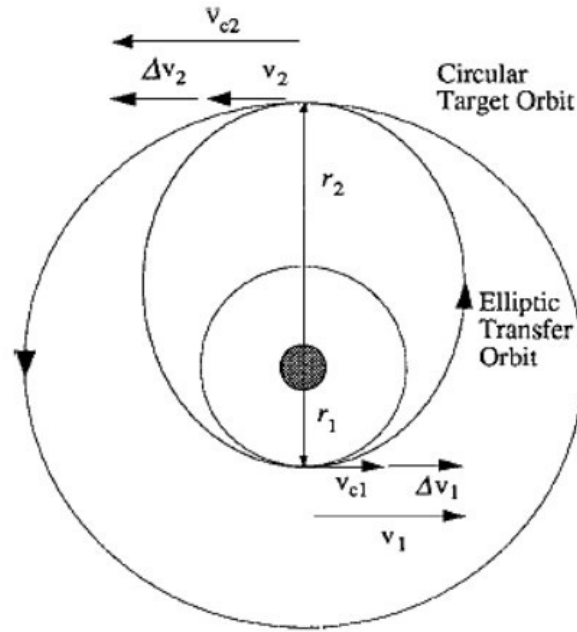


Figura 2.12: Trasferta di Hohmann

Questa trasferta consiste in una traiettoria semiellittica tangente ad entrambe le orbite circolari nei loro apside (figura 2.12), con periastro sull'orbita circolare interna e apoastro sull'orbita esterna:

$$\begin{aligned} r_p &= r_1 & r_a &= r_2 \\ a_H &= \frac{r_1 + r_2}{2} & e_H &= \frac{r_2 - r_1}{r_1 + r_2} \end{aligned}$$

I ΔV sono paralleli alle velocità circolari relative alle due orbite, pertanto, non ci sono perdite per disallineamento. Inoltre, non essendoci componenti radiali, non ci sono perdite per gravità.

$$\begin{aligned} V_{c1} &= \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} \\ V_{c1} + \Delta V_1 &= V_1 \\ V_{c2} = \Delta V_2 + V_2 &= \sqrt{\frac{\mu}{r_2}} \end{aligned}$$

Dove le velocità V_1 e V_2 sono rispettivamente le velocità al periastro e all'apoastro dell'orbita di trasferimento e si possono ottenere effettuando un bilancio dell'energia meccanica specifica:

$$\varepsilon = -\frac{\mu}{2a} = \frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r}$$

$$\varepsilon_H = -\frac{\mu}{2a_H} = -\frac{\mu}{r_1 + r_2} = \frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r}$$

$$V_1 = \sqrt{2\left(-\frac{\mu}{r_1 + r_2} + \frac{\mu}{r_1}\right)}$$

$$V_2 = \sqrt{2\left(-\frac{\mu}{r_1 + r_2} + \frac{\mu}{r_2}\right)}$$

Da queste relazioni è possibile ricavare i costi dei due impulsi:

$$\Delta V_1 = V_1 - V_{c1} = V_{c1} \left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} - 1 \right)$$

$$\Delta V_2 = V_2 - V_{c2} = V_{c2} \left(1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}} \right)$$

Quindi, il costo complessivo della trasferta di Hohmann risulta essere:

$$\Delta V = |\Delta V_1| + |\Delta V_2|$$

In questo caso la trasferta avviene verso un'orbita circolare più grande e quindi gli impulsi sono entrambi positivi. Nel caso in cui la trasferta avvenisse verso un'orbita circolare più piccola sono necessari invece due impulsi negativi. Come già accennato la manovra di Hohmann è la trasferta più economica ma anche quella più lunga in termini di tempo:

$$\Delta t_H = \pi \sqrt{\frac{a_H^3}{\mu}}$$

Per ridurre il Δt , si sfruttano traiettorie diverse anche se più dispendiose: paraboliche e iperboliche.

2.8 Traiettorie interplanetarie

Le traiettorie interplanetarie si fondano sulle seguenti ipotesi:

- Le orbite dei pianeti vengono considerate circolari e complanari
- Viene utilizzata l'approssimazione patched-conic: ogni pianeta, infatti, ha una sua sfera d'influenza, ovvero la regione dello spazio in cui l'effetto del corpo è

predominante su quello degli altri corpi celesti. All'interno di tale regione, la traiettoria (e quindi la conica descritta) di un corpo attratto dal pianeta si può considerare non influenzata dagli altri corpi celesti. Quando il veicolo si allontana abbastanza dal pianeta, l'influenza di quest'ultimo diventa trascurabile rispetto a quella del Sole e perciò la sonda descriverà un'altra conica, questa volta attorno alla stella, raccordata alla precedente

- Le dimensioni delle sfere di influenza sono trascurabili rispetto alle distanze eliocentriche

Si può inoltre affermare che nelle missioni interplanetarie il tempo di permanenza nella sfera d'influenza di un pianeta è molto minore rispetto a quello impiegato nella fase eliocentrica della missione, motivo per cui nell'analisi delle missioni di rendez-vous verso gli asteroidi selezionati non è stata presa in considerazione la parte planetocentrica. La missione inizia infatti al di fuori della sfera d'influenza della Terra ipotizzando che la sonda spaziale presenti un eccesso iperbolico di velocità adeguato nel punto più adatto per la traiettoria. Data l'ipotesi che le orbite dei pianeti sono circolari e complanari, la manovra più conveniente è sicuramente la trasferta di Hohmann spiegata precedentemente anche se nell'ottimizzazione delle traiettorie effettuata in questa trattazione non vengono seguite trasferte Hohmann impulsive, ma traiettorie genericamente più complesse e caratterizzate da propulsione elettrica. Non è però sempre possibile effettuare questa trasferta in quanto esiste una finestra di lancio finita per effettuare questo tipo di manovra. Se si perde l'intervallo di tempo corretto, ovvero se si perde la finestra di lancio, non sarà possibile effettuare la trasferta di Hohmann. Nel caso in cui si decidesse di effettuare lo stesso la trasferta, questa risulterà più costosa rispetto a quella di Hohmann. Si definisce periodo sinodico τ_s l'intervallo di tempo necessario affinché i pianeti coinvolti nella trasferta interplanetaria si rifasino nuovamente e si ripresenti quindi una nuova finestra di lancio:

$$\tau_s = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}$$

Dove ω_1 è la velocità angolare del pianeta di partenza e ω_2 è la velocità angolare del pianeta di arrivo.

Capitolo 3

Propulsione elettrica

In questo capitolo verrà effettuata una panoramica sul funzionamento della propulsione elettrica e sulle principali classificazioni.

3.1 Cenni sulla propulsione elettrica

La propulsione elettrica è una classe di propulsione spaziale il cui principio di funzionamento si basa sull'accelerazione di un propellente grazie alle sue proprietà elettriche e/o magnetiche. Il principale vantaggio nell'uso della propulsione elettrica nelle missioni spaziali sta nell'elevata efficienza con cui la massa di propellente viene utilizzata per produrre spinta: da ciò ne consegue che è necessaria una minor quantità di propellente rispetto a sistemi propulsivi tradizionali ed è quindi possibile aumentare la massa di carico utile ed effettuare missioni precedentemente inaccessibili. I propulsori elettrici, infatti offrono solitamente impulsi specifici maggiori e prestazioni migliori rispetto ai propulsori chimici in quanto non hanno limiti energetici, tuttavia a causa degli attuali limiti tecnologici nella potenza elettrica disponibile a bordo delle sonde spaziali essi generano una spinta di diversi ordini di grandezza inferiore. La spinta iniziale è piuttosto bassa, ma può continuare per mesi o addirittura anni e può anche rallentare e cambiare direzione e questo è uno dei vantaggi più importanti. Esistono diversi modi per ottenere energia elettrica, il più comune è l'utilizzo di pannelli solari, ma si possono anche utilizzare batterie, celle a combustibile e generatori nucleari. L'accelerazione del fluido può avvenire fondamentalmente in tre modi, in base alle proprietà elettromagnetiche sfruttate:

- Propulsione elettrotermica: il propellente viene scaldato elettricamente mediante effetto Joule ed espande in un ugello fornendo spinta. In base a come avviene il riscaldamento del fluido si distinguono i resistogetti e gli arcogetti. In questo caso più i propellenti sono leggeri migliori risulteranno gli impulsi specifici. I propellenti più utilizzati sono l'ammoniaca e l'idrazina
- Propulsione elettrostatica: il propellente viene inizialmente ionizzato per poi essere accelerato mediante forze elettrostatiche. Il fascio di ioni deve infine essere neutralizzato da un opportuno fascio di elettroni. Per ogni ione espulso è necessario, infatti, espellere anche un elettrone in quanto se si espellesse solo gli ioni il propulsore si caricherebbe negativamente e tenderebbe a riattrarre gli ioni appena espulsi
- Propulsione elettromagnetica: il propellente ionizzato è accelerato mediante forze elettromagnetiche dovute all'interazione di campi magnetici interni o esterni con la corrente elettrica del flusso di propellente ionizzato. La propulsione elettromagnetica

può essere classificata in propulsione stazionaria (a funzionamento continuo) e propulsione instazionaria (a funzionamento pulsato)

La distinzione tra i vari tipi di propulsione elettrica è spesso molto sottile, poiché i meccanismi di accelerazione possono sovrapporsi. È possibile fare una seconda distinzione in base alle potenze e alle spinte disponibili, che definiscono il tipo di missione:

- Micropropulsori: vengono utilizzati principalmente per manovre di precisione e sviluppano potenze di pochi W e spinte dell'ordine dei μN
- Propulsori con potenze da 1kW: vengono utilizzati fondamentalmente per manovre di inserimento in orbita di piccoli satelliti, missioni di station keeping e per missioni robotiche (piccole sonde spaziali) interplanetarie
- Propulsori con potenze caratteristiche comprese tra 5 e 10kW: vengono utilizzati soprattutto per inserimenti in orbita GEO e per operazioni di deorbita di grandi satelliti
- Propulsori con potenze $\geq 100 \text{ kW}$: questa classe di propulsori non è ancora stata utilizzata ma sarà fondamentale per lo sviluppo della presenza umana nello spazio

3.2 Manovre con propulsione elettrica

Come si è già anticipato nel capitolo precedente le manovre con propulsione elettrica sono fondamentalmente differenti rispetto a quella a propulsione chimica caratterizzate da manovre impulsive. Per lo studio delle manovre con propulsione elettrica, infatti, cade l'ipotesi di manovra impulsiva in quanto le missioni sono caratterizzate da accelerazioni ridotte e spinte relativamente piccole ma continue nel tempo. Viene introdotta a questo riguardo l'approssimazione di Edelbaum, caratterizzata dalle seguenti ipotesi:

- Orbite quasi circolari caratterizzate da basse inclinazioni

$$r \approx a \approx p, \quad e \approx 0, \quad V = \sqrt{\frac{\mu}{r^2}}, \quad i \approx 0$$

- $E \approx \nu \approx M$

dove E è l'anomalia eccentrica caratterizzata dalla relazione $\cos E = \frac{e + \cos \nu}{1 + e \cos \nu}$

ed M è l'anomalia media $M = E - e \sin E$

- Spinte ed accelerazioni contenute

$$\frac{T}{m} \ll \frac{\mu}{r^2}, \quad A_V \ll \frac{\mu}{r^2}, \quad A_R \ll \frac{\mu}{r^2}, \quad A_W \ll \frac{\mu}{r^2}$$

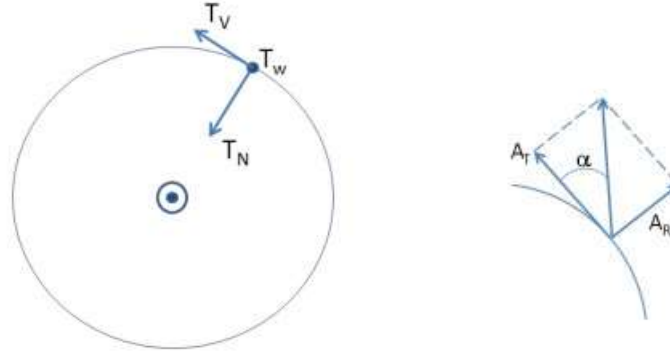


Figura 3.1: Componenti della spinta e dell'accelerazione

Nella figura 3.1 sono raffigurate le tre componenti della spinta:

- $T_V // V$, porta ad una variazione di a , e ed ω e quindi dell'energia dell'orbita
- $T_N \perp V$, non porta alla variazione dell'energia dell'orbita perché si spinge perpendicolarmente a V e a rimane costante. Variano però e ed ω
- T_W è la componente perpendicolare al piano orbitale e modifica i parametri che definiscono l'orientamento del piano nello spazio: i e Ω

Le assunzioni appena esposte permettono di semplificare le equazioni planetarie di Gauss che descrivono le variazioni temporali dei parametri orbitali classici. Le equazioni di Gauss per il modello di Edelbaum diventano:

$$\frac{da}{dt} = 2 \frac{T_V a}{mV}$$

$$\frac{de}{dt} = \left[2 \cos v \frac{T_V}{m} - \sin v \frac{T_N}{m} \right] \frac{1}{V}$$

$$\frac{di}{dt} = \cos(v + \omega) \frac{T_W}{m} \frac{1}{V}$$

Date le ipotesi di orbite circolari e inclinazioni contenute non sono state prese in considerazione le equazioni relative alle variazioni temporali di ω e Ω .

È necessario a questo punto comprendere in quale direzione conviene applicare la spinta in modo tale da ottimizzare la variazione di a , e ed i . Definendo α l'angolo nel piano tra la spinta e la direzione tangenziale e β l'angolo fuori dal piano tra la spinta e il piano orbitale, le componenti della spinta saranno:

$$T_V = T \cos \alpha \cos \beta$$

$$-T_N = T \sin \alpha \cos \beta = T_R$$

$$T_W = T \sin \beta$$

Da queste relazioni è possibile ricavare le direzioni ottimali di spinta per ottenere le variazioni dei parametri orbitali volute. Per massimizzare il semiasse maggiore a è necessario applicare la spinta in direzione tangenziale e quindi α e β risultano nulli,

esattamente come nel caso delle manovre impulsive. Per ottenere il massimo incremento dell'eccentricità e il discorso risulta un po' più complicato in quanto è necessario avere $\tan \alpha = \frac{1}{2} \tan \nu$ e β nullo. La direzione della spinta varia quindi in base all'anomalia vera del punto in cui ci si trova. In prima approssimazione è possibile semplificare l'espressione ponendo $\alpha = \nu$. Infine, per ottenere il massimo incremento dell'inclinazione i è necessario che $\beta = \pm \pi/2$.

Capitolo 4

Teoria del controllo ottimale

Questo capitolo è incentrato sulla teoria del controllo ottimale: si parlerà quindi del problema di ottimizzazione, delle funzioni obiettivo e del problema differenziale ai limiti.

4.1 Il problema di ottimizzazione

Un problema di ottimizzazione consiste nel ricercare la legge di controllo che rende massimo o minimo un particolare indice di prestazione. La scelta dell'obiettivo da massimizzare o minimizzare si basa sostanzialmente sui requisiti della missione: se è necessario portare una certa massa di payload il più lontano possibile al più basso costo in termini di propellente o nel minor tempo possibile, oppure se è necessario che i tempi di propulsione non superino una certa soglia. Gli obiettivi sono tradotti matematicamente in funzioni obiettivo, ovvero in funzioni a più variabili che molto spesso sono dei parametri fisici come, ad esempio, la massa di propellente, il ΔV totale, il tempo di trasferta o l'accelerazione. Dato il grande peso che i consumi di propellente hanno sui costi di missione (sia per i trasferimenti orbitali che per la messa in orbita della sonda) diventa fondamentale minimizzare tale quantità o, in alternativa, massimizzare la massa finale del veicolo, fissata quella iniziale. La formulazione del problema può essere riassunta nel seguente modo: si vuole trovare l'evoluzione del controllo che minimizza una certa funzione obiettivo lungo una traiettoria che segue delle leggi della dinamica, con determinate condizioni iniziali e finali e determinati vincoli. Per la ricerca di soluzioni significative, il problema di ottimo deve quindi essere risolto o ricercando soluzioni approssimate o con metodi numerici. Tra i metodi numerici, le tecniche di ottimizzazione indiretta offrono un'elevata precisione numerica e sono caratterizzate da un importante contenuto teorico, un numero limitato di parametri e tempi di calcolo limitati.

La teoria del controllo ottimale è basata sul calcolo variazionale e verrà spiegata, nel corso di questo capitolo, scegliendo la forma più adatta all'ottimizzazione di traiettorie spaziali e al metodo adottato per la soluzione del problema differenziale. La teoria del controllo ottimale viene applicata a un generico sistema descritto da un vettore di variabili di stato x e le equazioni differenziali che ne descrivono l'evoluzione del sistema tra il tempo iniziale e il tempo finale sono in funzione di x , u (vettore di controllo) e del tempo t (variabile indipendente).

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t) \quad (4.1)$$

Risulta conveniente suddividere la traiettoria in un numero n di sottointervalli (archi) all'interno dei quali le variabili sono continue. Il j -esimo intervallo inizia a $t_{(j-1)+}$ e termina a t_{j-} e i valori che le variabili assumono agli estremi sono $x_{(j-1)+}$ e $x_{(j)-}$. Vengono inoltre imposte condizioni al contorno di tipo misto (coinvolgono i valori delle variabili di stato e della variabile indipendente tempo sia ai contorni esterni che a quelli interni):

$$\chi(x_{(j-1)+}, x_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-}) = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (4.2)$$

Il problema di ottimo si pone come la ricerca dei valori massimi o minimi relativi di un funzionale che, nella sua forma generale, è del tipo:

$$J = \varphi(x_{(j-1)+}, x_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-}) + \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} \Phi(x(t), u(t), t) dt \quad j = 1, \dots, n \quad (4.3)$$

Dove:

- φ è una funzione dipendente dai valori assunti dalle variabili e dal tempo ai contorni (interni ed esterni)
- l'integrale esteso a tutta la traiettoria di Φ dipende dal tempo e dai valori assunti in ogni punto da variabili e controlli

Con l'introduzione di opportune variabili ausiliarie è sempre possibile ricondursi al caso $\varphi = 0$ (formulazione di Lagrange) o $\Phi = 0$ (formulazione di Mayer). Introducendo i moltiplicatori di Lagrange, le costanti μ relative alle condizioni al contorno e le variabili aggiunte λ relative alle equazioni di stato, è possibile riscrivere il funzionale nel seguente modo:

$$J^* = \varphi + \mu^T \chi + \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} (\Phi + \lambda^T (f - \dot{x})) dt \quad j = 1, \dots, n \quad (4.4)$$

I due funzionali J e J^* dipendono dal tempo t , dalle variabili di stato x e dalle loro derivate $\dot{x}$ e dai controlli u . Se le condizioni al contorno e le equazioni di stato sono rispettate i due funzionali coincidono ($J=J^*$). Integrando per parti per eliminare la dipendenza da $\dot{x}$ e differenziando si ottiene la variazione prima del funzionale δJ^* :

$$\begin{aligned} \delta J^* = & \left(-H_{(j-1)+} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{(j-1)+}} + \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial t_{(j-1)+}} \right) \delta t_{(j-1)+} + \left(H_{j-} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j-}} + \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial t_{j-}} \right) \delta t_{j-} \\ & + \left(-\lambda_{(j-1)+} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{(j-1)+}} + \mu^T \left[\frac{\partial \chi}{\partial x_{(j-1)+}} \right] \right) \delta x_{(j-1)+} \\ & + \left(\lambda_{j-} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{j-}} + \mu^T \left[\frac{\partial \chi}{\partial x_{j-}} \right] \right) \delta x_{j-} \\ & + \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} \left(\left(\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda}^T \right) \delta x + \frac{\partial H}{\partial u} \delta u \right) dt \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (4.6)$$

Dove H è l'Hamiltoniano del sistema ed è definito come:

$$H = \Phi + \lambda^T f \quad (4.8)$$

Per trovare la condizione di ottimo è necessario a questo punto imporre la stazionarietà del funzionale. La derivata del potenziale deve essere nulla per ogni possibile variazione e deve essere compatibile con le equazioni differenziali e le condizioni al contorno. L'introduzione di variabili e costanti aggiunte permette, con una loro opportuna scelta, di annullare contemporaneamente il coefficiente di ciascuna delle variazioni nell'equazione di δJ^* , assicurando la stazionarietà del funzionale espressa dalla condizione $\delta J^* = 0$. Annullando i coefficienti di δx e δu si ottengono due importanti relazioni:

- Le equazioni differenziali di Eulero-Lagrange per le variabili aggiunte

$$\frac{d\lambda}{dt} = - \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^T \quad (4.9)$$

- Le equazioni algebriche per i controlli

$$\left(\frac{\partial H}{\partial u} \right)^T = 0 \quad (4.10)$$

La funzione obiettivo da ottimizzare che è stata scelta in questa trattazione è la massa finale della sonda spaziale, che deve essere massimizzata.

$$J = m_f$$

Nel caso preso in esame si ha una velocità efficace di scarico e una massa iniziale costanti, per cui la massa finale risulta univocamente legata alla massa di propellente necessaria alla missione (a sua volta legata ai costi di missione e quindi anche al ΔV) che viene ovviamente minimizzata.

4.1.1 Principio di Massimo di Pontryagin

Le leggi di controllo risultano indipendenti dalla ricerca dell'ottimo del funzionale J^* . Se uno dei controlli è soggetto a un vincolo, esso deve appartenere a un dato dominio di ammissibilità. In presenza di tale vincolo, il valore ottimale del controllo in ogni punto della traiettoria è quello che, appartenendo al dominio di ammissibilità, rende massimo l'Hamiltoniano (4.8) in quel punto se si cercano i massimi di J e viceversa. Questo principio prende il nome di Principio di Massimo di Pontryagin.

A questo punto si hanno due possibilità:

- il valore ottimale del controllo è quello fornito dall'equazione algebrica per i controlli (4.10) se rientra nel dominio di ammissibilità e quindi il vincolo non interviene in quel punto.
- Il valore ottimale è agli estremi del dominio, cioè il controllo assume il valore massimo o minimo, se quello fornito dall'equazione precedente non rientra nel dominio di ammissibilità.

Un caso particolare sopraggiunge se l'Hamiltoniano è lineare rispetto a uno dei controlli soggetto a vincoli, in quanto nell'equazione (4.10) il controllo non compare esplicitamente e di conseguenza non può essere determinato. Nel caso in cui si debba massimizzare il potenziale J , si hanno quindi due possibilità:

- se nell'equazione (4.8) il coefficiente del controllo è non nullo, allora l'Hamiltoniano H è massimizzato per il valore massimo del controllo se il coefficiente è positivo e per il valore minimo se è negativo. Si parla di controllo bang-bang, in accordo con il Principio di Massimo di Pontryagin.
- se invece il coefficiente del controllo è identicamente nullo durante un arco singolare (intervallo finito di tempo), allora è necessario imporre l'annullamento di tutte le derivate successive del coefficiente rispetto al tempo, finché in una di esse non appaia esplicitamente il controllo. Il controllo ottimale viene infine determinato ponendo uguale a zero quest'ultima derivata.

In caso di condizioni al contorno mancanti, è conveniente rifarsi al j -esimo contorno, scrivendo per questo le condizioni che derivano dal considerarlo come estremo finale del $(j-1)$ -esimo sottointervallo o come estremo iniziale del j -esimo sottointervallo. Annullando i coefficienti δx_{j-} , δx_{j+} , δt_{j-} e δt_{j+} nell'espressione (4.6) si ottiene:

$$\left(-\lambda_{j-}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{j-}} + \mu^T \left[\frac{\partial \chi}{\partial x_{j-}} \right] \right) = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (4.11)$$

$$\left(\lambda_{j+}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{j+}} + \mu^T \left[\frac{\partial \chi}{\partial x_{j+}} \right] \right) = 0 \quad j = 0, \dots, n-1 \quad (4.12)$$

$$\left(H_{j-} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j-}} + \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial t_{j-}} \right) = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (4.13)$$

$$\left(-H_{j+} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j+}} + \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial t_{j+}} \right) = 0 \quad j = 0, \dots, n-1 \quad (4.14)$$

Eliminando le costanti aggiunte μ dalle quattro equazioni precedenti, si ottengono le condizioni al contorno di ottimo del tipo:

$$\sigma \left(x_{(j-1)+}, x_{j-}, \lambda_{(j-1)+}, \lambda_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-} \right) = 0 \quad (4.15)$$

che, con le condizioni assegnate (4.2), completano il sistema differenziale dato dalle equazioni (4.1) e (4.9).

4.2 Problema differenziale ai limiti (BVP)

Il metodo indiretto, adottato soprattutto per l'ottimizzazione dei trasferimenti orbitali e per missioni spaziali in generale, prevede l'applicazione della teoria del controllo ottimale al sistema di equazioni differenziali. La teoria del controllo ottimale, come spiegato precedentemente, formula il problema di ottimizzazione come un problema matematico soggetto a condizioni al contorno sia differenziali che algebriche. La teoria del controllo ottimale può essere studiata come un sistema di equazioni differenziali ai limiti (BVP) in cui alcuni dei valori iniziali delle variabili sono incogniti:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t) \quad \text{Equazioni Differenziali di Stato}$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^T \quad \text{Equazioni differenziali di Eulero – Lagrange}$$

$$\chi(x_{(j-1)+}, x_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-}) = 0 \quad \text{Condizioni al contorno imposte}$$

$$\sigma(x_{(j-1)+}, x_{j-}, \lambda_{(j-1)+}, \lambda_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-}) = 0 \quad \text{Condizioni al contorno di ottimo}$$

La soluzione di questo problema consiste nel trovare quali valori iniziali consentono, integrando numericamente il sistema differenziale, di soddisfare tutte le condizioni al contorno, sia imposte che di ottimo. Il problema in esame presenta alcune particolarità:

- l'intervallo di integrazione è suddiviso in sottointervalli in cui le equazioni differenziali possono avere differente espressione.
- La durata di ciascun sottointervallo è generalmente incognita.
- le condizioni al contorno possono essere non-lineari e coinvolgere i valori delle variabili sia ai contorni esterni sia a quelli interni.
- le variabili possono essere discontinue ai contorni interni e il loro valore dopo la discontinuità può essere incognito.

La soluzione del BVP viene ottenuta riducendolo a una successione di problemi ai valori iniziali che viene portata alla convergenza secondo il metodo di Newton. Il primo problema che incombe è l'indeterminatezza della durata di ciascun arco. Risulta quindi conveniente e

necessaria l'introduzione, in sostituzione alla variabile indipendente t , di una variabile ε definita nel j -esimo sottointervallo come:

$$\varepsilon = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{\tau_j} \quad (4.16)$$

dove τ_j è la durata incognita dell'intervallo. In questo modo, gli estremi di integrazione sono fissati e corrispondono a valori interi consecutivi della nuova variabile ε . Le equazioni differenziali vengono riformulate introducendo il nuovo vettore delle variabili che include sia variabili di stato che variabili aggiunte, $y = (x, \lambda)$:

$$\frac{dy}{dt} = f^*(y, t) \quad (4.17)$$

Si deve però tenere conto, a questo punto, che compaiono anche parametri costanti ed è quindi conveniente introdurre un nuovo vettore $z = (y, c)$ che contiene il vettore delle variabili ed un vettore dei parametri costanti c . Il sistema di equazioni differenziali assume quindi la forma:

$$\frac{dz}{d\varepsilon} = f(z, \varepsilon) \quad (4.18)$$

Le condizioni al contorno possono quindi essere genericamente espresse come:

$$\Psi(s) = 0 \quad (4.19)$$

dove s è un vettore che contiene i valori assunti dalle variabili a ogni contorno (esterno o interno) e i parametri costanti incogniti. I valori iniziali di alcune variabili sono incogniti e la ricerca della soluzione si traduce nel determinare, attraverso un procedimento iterativo, quali valori devono assumere per soddisfare (4.19). Il procedimento viene descritto supponendo che nessuno dei valori iniziali sia noto e che sia necessario, alla prima iterazione, scegliere dei valori di tentativo p^1 . La r -esima iterazione inizia con l'integrazione delle equazioni (4.18) con i valori iniziali p^r trovati dall'iterazione precedente. Si impone quindi:

$$z(0) = p^r \quad (4.20)$$

E da qui si procede all'integrazione delle equazioni differenziali lungo tutta la traiettoria. In ciascuno dei contorni si determina il valore delle variabili di stato e al termine dell'integrazione si calcola l'errore sulle condizioni al contorno Ψ^r alla r -esima iterazione. Tale metodo è conosciuto come metodo di shooting. Considerando ora una variazione Δp , essa produce una variazione dell'errore sulle condizioni al contorno di una quantità pari a:

$$\Delta \Psi = \left[\frac{\partial \Psi}{\partial p} \right] \Delta p \quad (4.21)$$

Essendo lo scopo quello di annullare l'errore sulle condizioni al contorno, volendo cioè ottenere $\Delta \Psi = -\Psi^r$ ad ogni nuova iterazione $r+1$ e fintanto che l'errore non risulta inferiore alla tolleranza richiesta, i valori iniziali vengono corretti di una quantità:

$$\Delta p = p^{r+1} - p^r = - \left[\frac{\partial \Psi}{\partial p} \right]^{-1} \Psi^r \quad (4.22)$$

Dove

$$\left[\frac{\partial \Psi}{\partial p} \right] = \left[\frac{\partial \Psi}{\partial s} \right] \left[\frac{\partial s}{\partial p} \right]$$

Se alcuni dei valori iniziali delle variabili sono noti, il problema risulta semplificato in quanto il vettore p si riduce alla stima delle sole componenti incognite di $z(0)$ e il vettore Ψ alle sole condizioni al contorno non esplicite al tempo iniziale. La matrice che compare nella (4.22) può essere valutata numericamente: la j -esima riga viene trovata variando la j -esima componente di p di un Δp piccolo, per poi integrare le equazioni (4.18) in modo da calcolare la variazione delle condizioni al contorno $\Delta \Psi(\Delta p)$ e valutare quindi le nuove condizioni al contorno $\Delta \Psi / \Delta p$. Questa procedura permette spesso una soluzione più rapida, ma non è sempre in grado di garantire la convergenza, rendendo l'algoritmo più instabile. Una simile procedura numerica può inoltre essere utilizzata per il calcolo dello Jacobiano e della matrice $\partial \Psi / \partial s$, ma anche in questo caso l'approccio analitico è più preciso. La linearizzazione introdotta per il calcolo della correzione Δp induce errori che possono compromettere la convergenza della soluzione facendo aumentare l'errore sulle condizioni al contorno. Vengono adottate quindi alcune precauzioni che sembrano migliorare la procedura:

- Per evitare di allontanarsi troppo dalla soluzione, viene introdotto un coefficiente $K_1 = 0.1 \div 1$ con lo scopo di rendere la correzione apportata una frazione di quella valutata:

$$p^{r+1} = p^r + K_1 \Delta p$$

- Ad ogni iterazione si confronta l'errore massimo sulle condizioni al contorno E_{max}^{r+1} con quello ottenuto all'iterazione precedente E_{max}^r . Se l'errore massimo è inferiore ad un multiplo di quello precedente, cioè se $E_{max}^{r+1} < K_2 E_{max}^r$, si procede con la nuova iterazione. K_2 deve essere superiore all'unità: un valore $K_2 = 2 \div 3$ garantisce buoni risultati.
- Se invece, a differenza del caso precedente, l'errore alla nuova iterazione è troppo grande rispetto al precedente, si dimezza la correzione. Si integrano cioè le equazioni del moto con i valori di tentativo:

$$p^{r+1} = p^r + K_1 \Delta p / 2$$

È stato fissato a 5 il numero massimo di bisezioni possibili. Dopo questo valore il processo si arresta a significare il fatto che la soluzione di tentativo scelta non è in grado di portare a convergenza e bisogna quindi modificarla.

Capitolo 5

Modello matematico

In questo capitolo verranno introdotte le equazioni che descrivono il problema preso in considerazione che sarà studiato adottando il problema dei due corpi. La teoria del controllo ottimale verrà applicata a queste equazioni.

5.1 Problema Dinamico

Per descrivere il moto della sonda spaziale è stato necessario prima di tutto scegliere un sistema di riferimento, in questo caso un sistema di riferimento inerziale eliocentrico, ed in secondo luogo introdurre le equazioni differenziali del problema:

$$\frac{dr}{dt} = v \quad (5.1)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\mu}{r^3}r + \frac{T}{m} \quad (5.2)$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{T}{c} \quad (5.3)$$

Dove r è il raggio vettore della traiettoria, v è il vettore velocità della sonda e T è il vettore spinta. Riprendendo la formulazione dell'Hamiltoniano del capitolo precedente e combinandolo con le espressioni vettoriali appena esposte, si ottiene:

$$H = \lambda_r^T + \lambda_v^T \left(g + \frac{T}{m} \right) - \lambda_m \frac{T}{c} \quad (5.4)$$

Dove λ_m rappresenta il coefficiente di Lagrange della massa, mentre λ_v rappresenta le variabili aggiunte relative alle tre equazioni della dinamica, più precisamente quelle della velocità (u, v, w). Introducendo la definizione di Switching function:

$$S_F = \frac{\lambda_v^T T}{mT} - \frac{\lambda_m}{c} \quad (5.5)$$

È possibile riscrivere la (5.4) nel seguente modo:

$$H = \lambda_r^T + \lambda_v^T g + TS_F \quad (5.6)$$

Dal momento che la Teoria del Controllo Ottimale impone la massimizzazione dell'Hamiltoniano in modo da ottenere una soluzione ottima, sarà necessario avere il vettore spinta parallelo al primer vector λ_v . Si ottiene quindi una nuova formulazione della switching function:

$$S_F = \frac{\lambda_V}{m} - \frac{\lambda_m}{c} \quad (5.7)$$

In base al valore e soprattutto al segno assunti dalla S_F , legata strettamente alla spinta, si hanno differenti scenari:

$$S_F < 0 \rightarrow T = 0$$

$$S_F > 0 \rightarrow T = T_{max}$$

Il sistema di riferimento ottimale è un sistema di riferimento inerziale basato sul piano equatoriale dove non vengono prese in considerazione l'accelerazione di Coriolis e le accelerazioni inerziali. Anche la nutazione e la precessione vengono considerate nulle. La posizione del veicolo è descritta del raggio r , dalla longitudine θ e dalla latitudine ϕ , mentre la velocità è descritta dalle componenti u (radiale), v (direzione Est) e w (direzione Nord).

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r \\ \theta \\ \phi \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

Proiettando le equazioni di stato nel sistema di riferimento scelto si ottengono le seguenti relazioni:

$$\frac{dr}{dt} = u \quad (5.8)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{r \cos \phi} \quad (5.9)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{w}{r} \quad (5.10)$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\mu}{r^2} + \frac{v^2 + w^2}{r} + \frac{T_u}{m} \quad (5.11)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{-uv + vwtan\phi}{r} + \frac{T_v}{m} \quad (5.12)$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{-uv - v^2tan\phi}{r} + \frac{T_w}{m} \quad (5.13)$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{T}{m} \quad (5.14)$$

Dove le componenti della spinta sono definite come $T_u = T \sin \gamma_T$, $T_v = T \cos \gamma_T \cos \psi_T$ e $T_w = T \cos \gamma_T \sin \psi_T$ con γ_T angolo di elevazione della spinta (flight path angle) e ψ_T angolo di heading della spinta. È possibile a questo punto riformulare l'espressione dell'Hamiltoniano:

$$\begin{aligned}
H = & \lambda_r u + \lambda_\theta \frac{v}{r \cos \phi} + \lambda_\phi \frac{w}{r} + \lambda_u \left(-\frac{\mu}{r^2} + \frac{v^2 + w^2}{r} + \frac{T}{m} \sin \gamma_T \right) \\
& + \lambda_v \left(\frac{-uv + v w \tan \phi}{r} + \frac{T}{m} \cos \gamma_T \cos \psi_T \right) \\
& + \lambda_w \left(\frac{-uv - v^2 \tan \phi}{r} + \frac{T}{m} \cos \gamma_T \sin \psi_T \right) - \lambda_m \frac{T}{m} \quad (5.15)
\end{aligned}$$

Imponendo uguali a zero le derivate parziali dell'Hamiltoniano è possibile ottenere i valori ottimali di γ_T e ψ_T , che rappresentano il controllo che definisce la direzione della spinta

$$\frac{dH}{d\gamma_T} = 0 \quad \frac{dH}{d\psi_T} = 0$$

Da cui si ricava:

$$\sin \gamma_T = \frac{\lambda_u}{\lambda_v} \quad (4.17)$$

$$\cos \gamma_T \cos \psi_T = \frac{\lambda_v}{\lambda_v} \quad (4.18)$$

$$\cos \gamma_T \sin \psi_T = \frac{\lambda_w}{\lambda_v} \quad (4.19)$$

Il primer vector λ_v è quindi definito come:

$$\lambda_v = \sqrt{\lambda_u^2 + \lambda_v^2 + \lambda_w^2}$$

A questo punto è necessario definire le equazioni differenziali delle variabili aggiunte $\lambda = [\lambda_r \ \lambda_\theta \ \lambda_\phi \ \lambda_u \ \lambda_v \ \lambda_w \ \lambda_m]$. Per fare ciò vengono riprese le equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{d\lambda}{dt} = - \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^T$$

Che diventano:

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_r = & \frac{1}{r^2} \left[\lambda_\theta \frac{v}{r \cos \phi} + \lambda_\phi w + \lambda_u \left(-\frac{2}{r} + v^2 + w^2 \right) + \lambda_v (-uv + v w \tan \phi) \right. \\
& \left. + \lambda_w (-uw - v^2 \tan \phi) \right] \quad (4.20)
\end{aligned}$$

$$\dot{\lambda}_\theta = 0 \quad (4.21)$$

$$\dot{\lambda}_\phi = \frac{1}{r \cos^2 \phi} (-\lambda_\theta v \sin \phi - \lambda_v v w + \lambda_w v^2) \quad (4.22)$$

$$\dot{\lambda}_u = \frac{1}{r} (-\lambda_r r + \lambda_v v + \lambda_w w) \quad (4.23)$$

$$\dot{\lambda}_v = \frac{1}{r} \left[-\lambda_\theta \frac{1}{\cos\phi} - 2\lambda_u v + \lambda_v(u - w \tan\phi) + 2\lambda_w v \tan\phi \right] \quad (4.24)$$

$$\dot{\lambda}_w = \frac{1}{r} (-\lambda_\phi - 2\lambda_u w - \lambda_v v \tan\phi + \lambda_w u) \quad (4.25)$$

$$\dot{\lambda}_m = \frac{T\lambda_v}{m^2} \quad (4.26)$$

Capitolo 6

Definizione della missione

In questo capitolo vengono definiti il tipo e le principali caratteristiche delle missioni che sono state studiate per l'elaborazione della presente tesi.

6.1 Analisi della missione

Uno dei principali fattori che impattano sui costi di una missione spaziale è sicuramente rappresentato dalla massa di propellente necessaria, parametro che è anche strettamente legato alla massa di carico pagante e alla massa finale, da qui la necessità di un'ottimizzazione della traiettoria percorsa dai veicoli: seguire una traiettoria sub-ottimale, infatti, significa allocare più massa per il propellente e ciò si traduce in una massa iniziale del veicolo maggiore con un conseguente aumento del costo complessivo della missione. Un'altra situazione altrettanto indesiderata può sorgere mantenendo costante la massa iniziale e quindi il costo di missione: in questo caso, infatti, la traiettoria sub-ottimale si traduce in un carico pagante minore allo stesso costo. Lo scopo di questo lavoro è quello di trovare missioni convenienti da un punto di vista della massa finale verso asteroidi facenti parte del gruppo Aten. Per fare ciò si effettuerà uno studio di ottimizzazione di missioni prendendo in esame sia missioni dirette e che missioni con EGA in modo da trovare le soluzioni migliori e valutare l'impatto che gli assist gravitazionali hanno sulla massa finale di una sonda spaziale.

6.1.1 Aten

Gli asteroidi Aten, come spiegato nel capitolo 1, si evolvono su orbite con semiasse maggiore inferiore a 1 UA e distanza dell'afelio maggiore di 0,983 UA e trascorrono la maggior parte del loro tempo all'interno dell'orbita terrestre. Attualmente, rappresentano una piccola parte degli asteroidi che attraversano l'orbita della Terra (ECO: Earth Cross Objects) ma il loro numero potrebbe essere gravemente sottostimato a causa delle difficoltà di individuazione di questi piccoli corpi celesti. Le loro orbite inoltre potrebbero essere perturbate da un avvicinamento a Mercurio o Venere trasformando in futuro asteroidi semplicemente ECO in PHA, motivo per cui è necessario uno studio profondo di questi piccoli corpi celesti.

6.1.2 EGA: Earth Gravity Assist

Quando una sonda parte per una missione spaziale verso un altro pianeta o un asteroide per effettuare un rendez-vous, deve prima liberarsi dal campo gravitazionale della Terra e, una volta uscito dalla sfera di influenza del pianeta, entra nello spazio interplanetario, dove la forza dominante è il campo gravitazionale del Sole. Quando la traiettoria del veicolo lo porta nelle vicinanze di un pianeta o di un altro corpo celeste relativamente grande, la sua traiettoria può essere influenzata dal campo gravitazionale di tale corpo. In alcuni casi è possibile ottenere accelerazioni e decelerazioni anche senza l'attivazione dei propulsori. Questo meccanismo è noto come effetto "fionda gravitazionale" e si presenta quando la traiettoria di un corpo di piccole dimensioni, come può essere una sonda spaziale ma anche un piccolo corpo celeste come una cometa o un asteroide, lo porta a passare vicino ad un corpo celeste di grandi dimensioni (pianeta o stella): in accordo con la legge di conservazione della quantità di moto, il pianeta cede una parte della sua energia cinetica al veicolo, restringendo impercettibilmente la sua orbita, mentre la sonda spaziale guadagna energia cinetica. La somma delle energie cinetiche dei corpi rimane costante ed essendo la massa della sonda parecchi ordini di grandezza più piccola di quella del pianeta, il risultato sulla sonda è significativo mentre la decelerazione subita dal pianeta, in accordo con la terza legge di Newton, è praticamente impercettibile. In base alla traiettoria, il veicolo può guadagnare fino a due volte la velocità orbitale del pianeta.

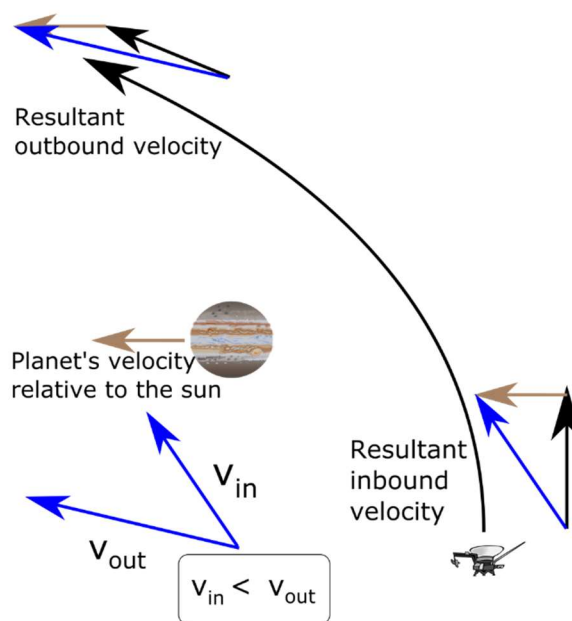


Figura 6.1: Assist gravitazionale

Quanto raffigurato in figura 6.1 può essere dimostrato analiticamente. La velocità del veicolo aumenta mentre ci si avvicina al pianeta e diminuisce mentre ci si allontana. La velocità guadagnata è fondamentalmente identica a quella persa, quindi il bilancio è nullo,

però la sonda è affetta anche dalla velocità con cui il pianeta orbita intorno al Sole. Sia la quantità di moto che l'energia cinetica si conservano:

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

Dove m_1 è la massa del satellite, m_2 è la massa del pianeta, u è la velocità prima del fly by e v è la velocità dopo il fly by. Sviluppando le equazioni in modo da trovare v_1 e v_2 si ottiene:

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} u_2$$

$$v_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} u_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1$$

Essendo $m_1 \ll m_2$ le due relazioni trovate si riducono a:

$$v_1 \approx -u_1 + 2u_2$$

$$v_2 \approx u_2$$

Queste manovre di "assistenza gravitazionale" sono ormai una parte standard del volo spaziale. Esse sfruttano il fatto che l'attrazione gravitazionale dei pianeti può essere utilizzata per modificare la traiettoria e la velocità di un veicolo spaziale. L'accelerazione o il rallentamento del veicolo spaziale dipende dal fatto che esso passi dietro o davanti al pianeta mentre quest'ultimo segue la sua orbita. L'effetto fionda gravitazionale può essere utilizzato anche per effettuare manovre di cambio del piano dell'orbita senza l'utilizzo dei propulsori. Tra le missioni più importanti in cui è stato sfruttato questo fenomeno possono essere citate:

- Facenti parte del programma Voyager per l'esplorazione del Sistema Solare esterno, le sonde Voyager 1 e Voyager 2, lanciate dalla NASA nel 1977 a distanza di 16 giorni, riuscirono a guadagnare l'energia per fuggire alla gravità del Sole grazie a manovre di assistenza gravitazionale con Giove e Saturno.
- Una manovra molto interessante è stata praticata nel 1992 dalla sonda Ulysses: questo veicolo sfruttò un assist gravitazionale con Giove per cambiare l'inclinazione

orbitale e uscire dal piano dell'eclittica in modo da poter osservare direttamente i poli solari.

- La missione spaziale Cassini-Huygens, lanciata il 15/10/1997 con il compito di studiare il sistema di Saturno, ha eseguito manovre di assist gravitazionali con Venere e con la Terra in modo da raggiungere Giove ed in seguito Saturno risparmiando carburante.

6.2 Selezione degli asteroidi

Come esposto nei paragrafi precedenti l'obiettivo è trovare missioni convenienti verso asteroidi Aten. È stata quindi necessaria una selezione degli asteroidi a partire dalle due liste della NASA: gli asteroidi numerati, che oltre ad avere un nome hanno anche un numero di classificazione univoco, e gli asteroidi non numerati che sono classificati in ordine cronologico di scoperta e non hanno ancora un numero di classificazione in quanto hanno un'incertezza particolarmente elevata sui parametri orbitali a causa di una mancanza di osservazioni e di dati. I file utilizzati sono stati presi dal sito ufficiale della NASA ssd.jpl.nasa.gov e sono aggiornati al 13/09/2021.

6.2.1 Primo step

Essendo gli Aten caratterizzati da un semiasse maggiore minore di 1 unità astronomica, è stato creato in prima approssimazione un programma Matlab che legge in input le liste di asteroidi e fornisce come output due liste di asteroidi, numerati e non numerati, che soddisfano il vincolo. Sono stati trovati 1876 asteroidi non numerati e 245 asteroidi numerati. Si è deciso, per semplicità e dal momento che le orbite e i parametri dei non numerati potrebbero essere affetti da errori, di prendere solamente la lista di asteroidi numerati che è stata riportata in appendice.

6.2.2 Secondo Step

In questo secondo e ultimo step sono stati selezionati i 3 asteroidi target. È stato deciso di prendere asteroidi con una bassa inclinazione, minore di 10° , una distanza dell'afelio

nell'intorno dell'unità astronomica e una distanza del perielio compresa tra 0.4 e 0.7 UA. È stato quindi necessario implementare le seguenti formule per il calcolo degli absidi:

$$r_p = a * (1 - e) \quad r_a = a * (1 + e)$$

Al termine del processo sono stati scelti come asteroidi 2000 BM19, 2003 SD220 e 2001 CK32.

Capitolo 7

Risultati

In questo capitolo vengono esposti i risultati ottenuti in seguito al lavoro effettuato con il codice Fortran e processati e sviluppati attraverso il programma MATLAB in modo da ottenere i grafici relativi alle traiettorie percorse dalla sonda spaziale e agli andamenti dei principali parametri orbitali. In questa tesi sono state studiate possibili missioni comprese tra il 2023 ed il 2048. Per quanto riguarda invece il veicolo, è stata presa una massa di riferimento di 1400 kg mentre per quel che riguarda il motore, esso presenta le specifiche riportate in tabella.

Consumo specifico (Isp)	2100 s
Spinta (T)	0.2 N

7.1 2000 BM19

Il primo studio di ottimizzazione di missione è stato effettuato sull'asteroide 2000 BM19 che, come si può evincere dalla tabella sottostante, presenta un'orbita leggermente inclinata (6.8883°) con un semiasse maggiore minore dell'unità (0.7405352 UA) e un'eccentricità di 0.35868797, da cui è stato possibile ricavare il valore dei raggi di afelio e perielio dell'orbita. Come si può notare dalla Fig. X, rappresentate l'orbita di 2000 BM19, i raggi di afelio e perielio sono particolarmente diversi in quanto l'orbita presenta una modesta eccentricità. L'asteroide è classificato come NEA a causa della prossimità della sua orbita con la Terra ed è categorizzato come asteroide Aten. Non è considerato come PHA perché in seguito a simulazioni al computer è stato appurato come non ci siano imminenti potenziali collisioni. 2000 BM19 presenta un tempo di rivoluzione attorno al Sole pari a 233 giorni (0.63 anni) ed un periodo di rotazione attorno al proprio asse di 9.46 ore. Un diametro di 0.8 km lo rende più grande del 97% degli asteroidi.

Epoch	59396
Semiasse maggiore (a)	0.7405352 UA
Eccentricità (e)	0.35868797
Inclinazione (i)	6.8883°
Argomento del periastro (w)	247.59373°
Longitudine del nodo ascendente	70.33418°

Anomalia media (M)	345.4047818°
Raggio afelio	1.006 UA
Raggio perielio	0.475 UA

Come si può notare dai valori dei parametri orbitali e dal grafico in basso, in cui è rappresentata l'orbita dell'asteroide confrontata con quella della Terra, sarà necessario effettuare un cambio di piano per poter immettersi su un'orbita tale da poter raggiungere 2000 BM19: ciò verrà effettuato in un primo momento principalmente mediante la spinta ed un consumo di carburante e in un secondo momento, per ridurre il fabbisogno di propellente, si utilizzerà l'Earth gravity assist (EGA) con lo scopo di trovare missioni efficienti e poter confrontare le soluzioni ottenute.

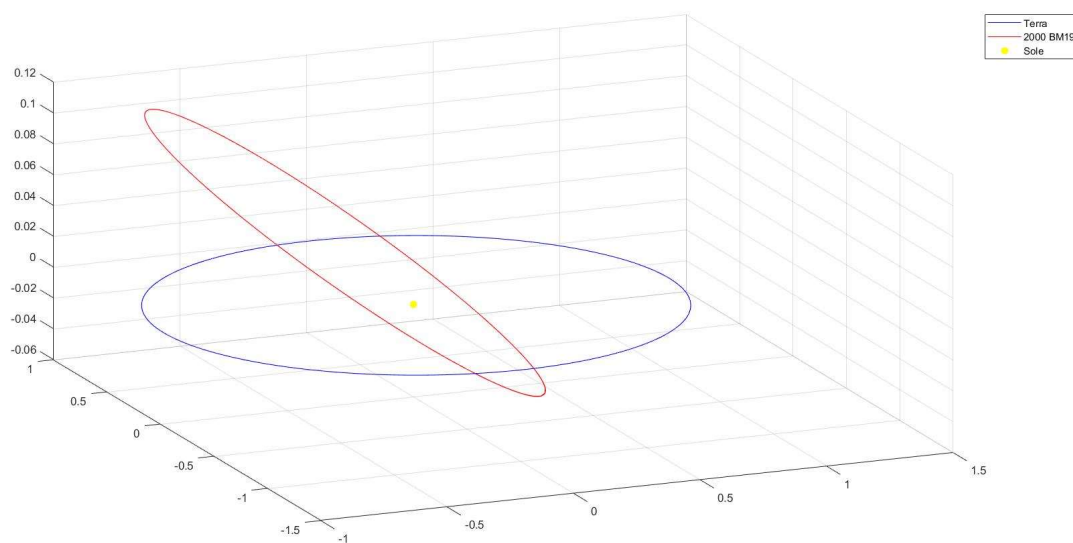


Figura 7.1: Orbita di 2000 BM19

La figura rappresentante lo spazio tridimensionale, così come tutte le successive rappresentati le traiettorie nelle tre dimensioni, presenta l'asse z non in scala in modo da poter cogliere e distinguere bene le caratteristiche delle varie orbite e traiettorie.

7.1.1 Missioni Dirette

Come detto precedentemente, il primo step è stato quello di individuare alcune missioni dirette, in modo particolare sono state trovate due missioni: la prima con una durata abbastanza lunga mentre per quanto riguarda la seconda si è cercata una missione un po' più breve. I trasferimenti diretti sono molto costosi, la sonda infatti attraverso l'eccesso di velocità iperbolica di fuga ed il sistema EP fornisce i cambiamenti d'orbita richiesti a spese di una grande frazione di propellente. Il tempo di missione può essere notevolmente ridotto a scapito però della massa finale.

Missione	Lunga	Breve
Partenza	08/05/2041	10/05/2045
Rendez-vous	04/02/2048	12/03/2048
Durata missione (giorni)	2462.74049066747	1036.94932605506
Durata missione (adimensionata)	42.3643055991952	17.8377049089610
Massa finale (kg)	903.956927565940	877.273408733190

Come si può notare dai risultati riportati in tabella, la durata della missione è stata più che dimezzata e come anticipato precedentemente ciò va a scapito della massa finale che passa da 903.95 kg circa a 877.27 kg. Vengono ora riportati i grafici relativi alle traiettorie trovate ed agli andamenti dei vari parametri.

Missione Lunga

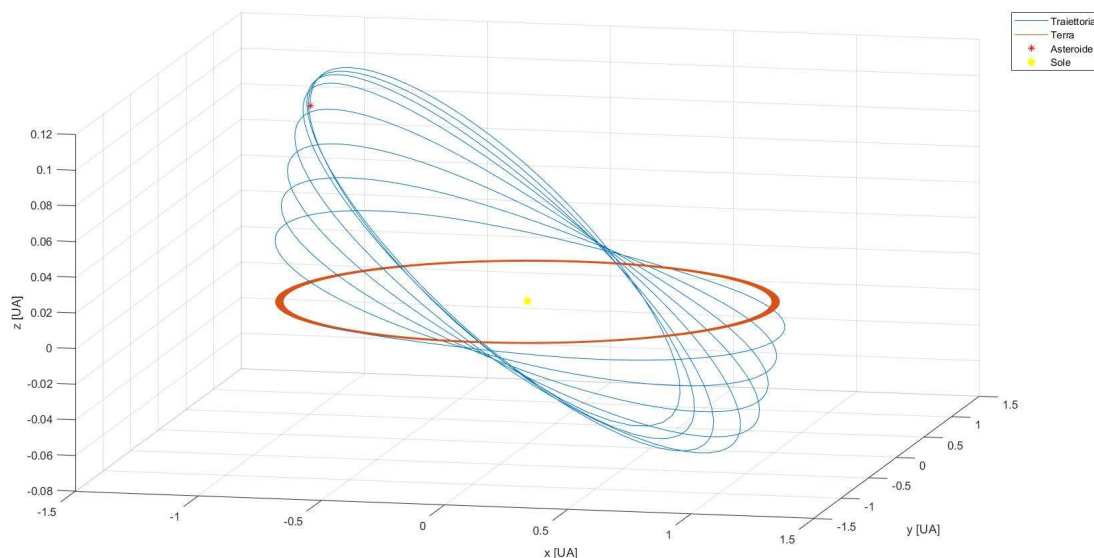


Figura 7.2: Traiettoria 3D

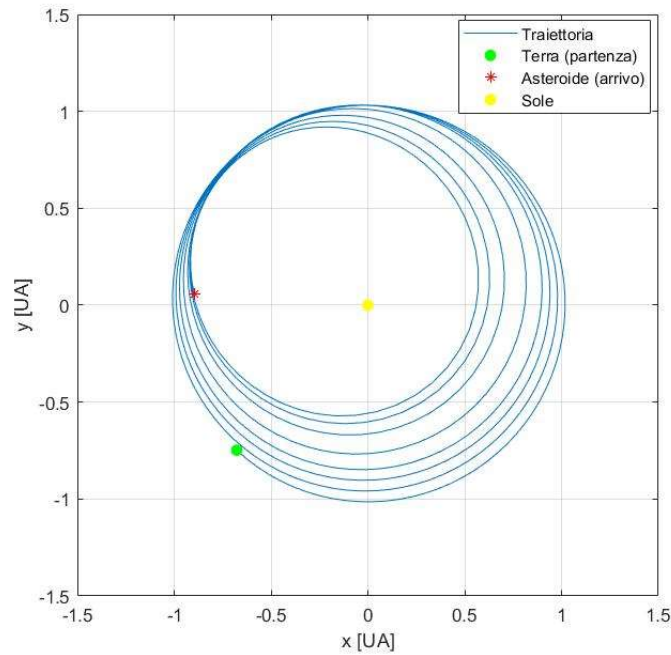


Figura 7.3: Traiettorie 2D

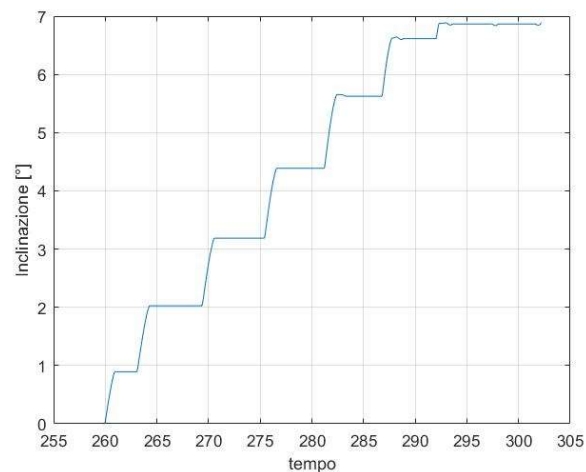


Figura 7.4: Inclinazione dell'orbita

Come si evince dai grafici sopra riportati il cambiamento di piano viene effettuato gradualmente, come dimostrato anche dall'andamento dell'inclinazione dell'orbita che passa da un valore nullo relativo all'orbita della Terra ad un valore massimo di 6.8883° relativo all'orbita di 2000 BM19. Ad ogni rivoluzione attorno al Sole, attraverso l'uso di propellente, l'inclinazione viene aumentata fino ad ottenere l'orbita necessaria per il rendez-vous dell'asteroide.

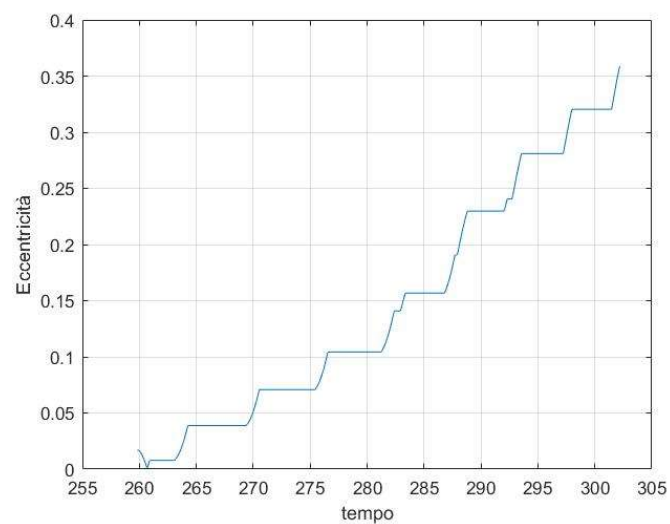


Figura 7.5: Eccentricità

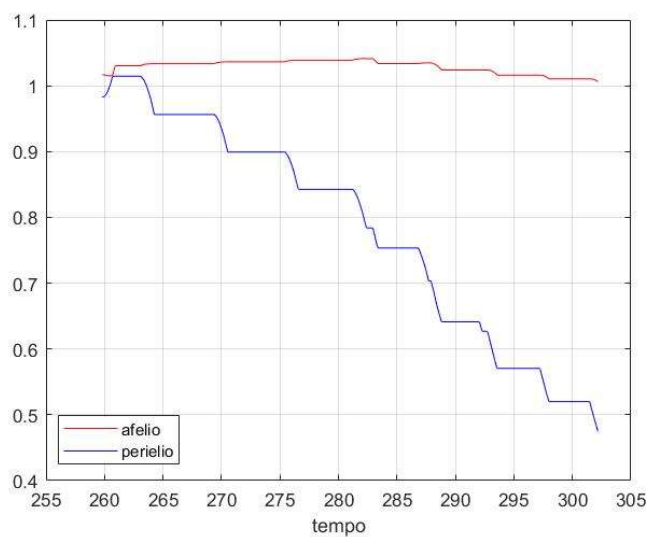


Figura 7.6: Afelio e Perielio

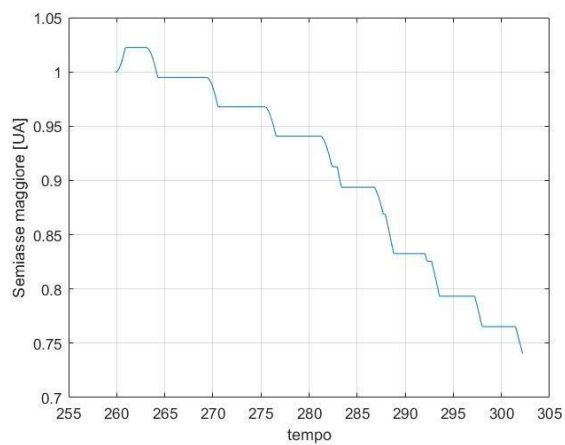
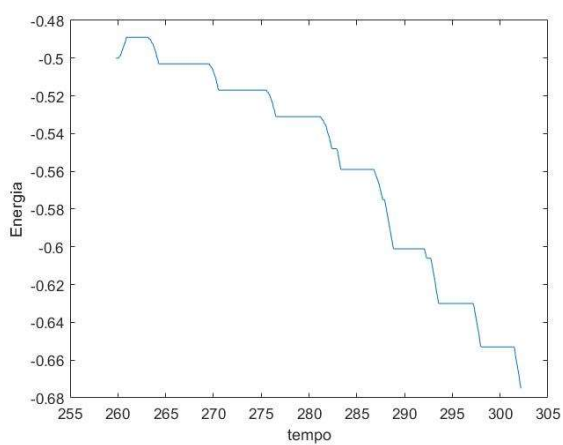


Figura 7.7: Energia e semiasse maggiore

L'orbita di 2000 BM19, oltre ad avere un'inclinazione differente rispetto a quella della Terra, presenta anche una modesta eccentricità ed è perciò necessario intervenire anche sulle posizioni di afelio e perielio dell'orbita. Come si può notare dai grafici sopra riportati, aumentando l'eccentricità deve necessariamente diminuire il raggio del perielio, essendo i due parametri strettamente collegati dalla relazione $r_p = a * (1 - e)$. Per quanto riguarda invece l'afelio, data la relazione $r_a = a * (1 + e)$, rimane pressoché costante in quanto il semiasse diminuisce e l'eccentricità dell'orbita aumenta. Si può concludere quindi che è necessario un cambio di piano unito ad un abbassamento del perielio per poter raggiungere l'asteroide target. Nella parte iniziale della missione in realtà si rileva un momentaneo aumento del raggio del perielio con un conseguente aumento dell'energia e del semiasse maggiore in quanto la sonda si sposta su un'orbita più grande in un primo momento. Da questo punto in poi i parametri precedentemente citati decrescono continuamente a prova del fatto che il veicolo si sposta su orbite sempre meno energetiche e quindi più interne fino a raggiungere l'orbita dell'asteroide con semiasse maggiore pari a circa 0.74 UA.

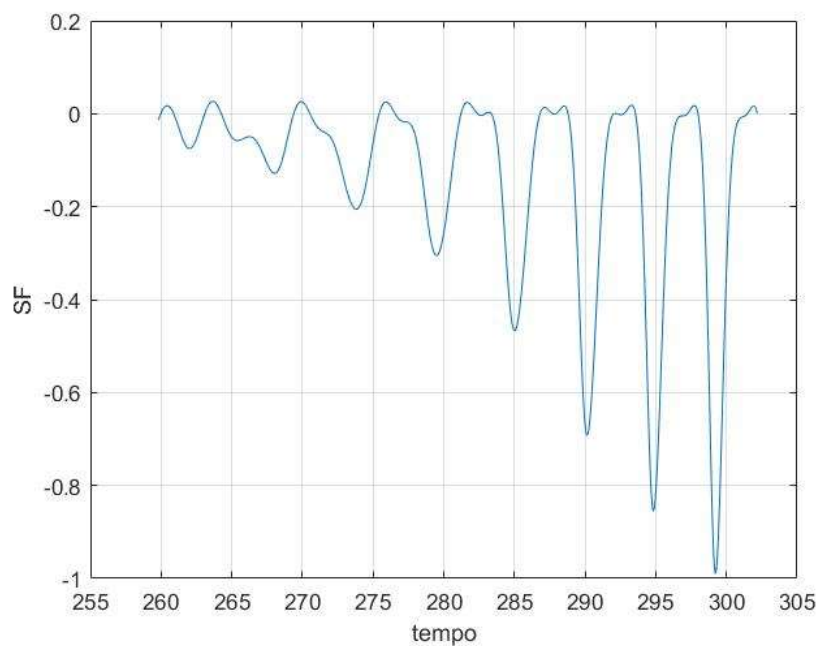


Figura 7.8: Switching Function

La figura 7.8 rappresenta l'andamento della Switching Function, parametro che ci dà un'indicazione sullo stato dei motori, ovvero se la SF è positiva i motori sono accesi e la spinta è maggiore di zero, se invece la SF è negativa i motori sono spenti. Come si può notare la spinta risulta maggiore di zero in corrispondenza delle manovre di cambio di piano e di cambiamento di forma dell'orbita. La SF si azzerà all'istante finale in quanto si ha il rendez-vous con l'asteroide.

Missione Breve

La missione lunga, nonostante abbia una massa finale accettabile e quindi un buon valore di consumo di carburante, risulta difficilmente praticabile a causa della durata estremamente lunga. Perciò si è provveduto ad accorciare la durata di missione per trovare soluzioni più realistiche.

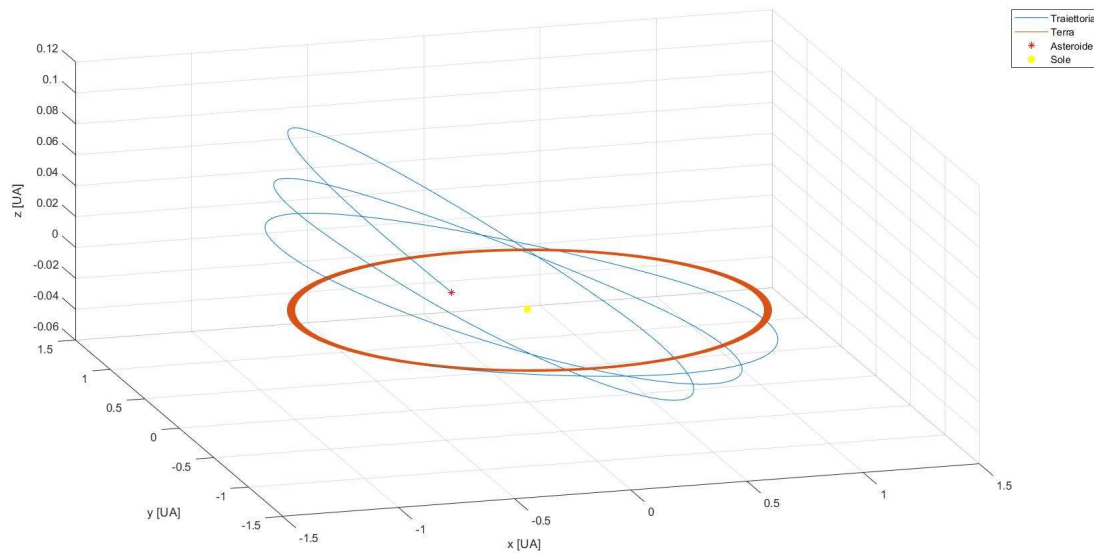


Figura 7.9: Traiettorie 3D

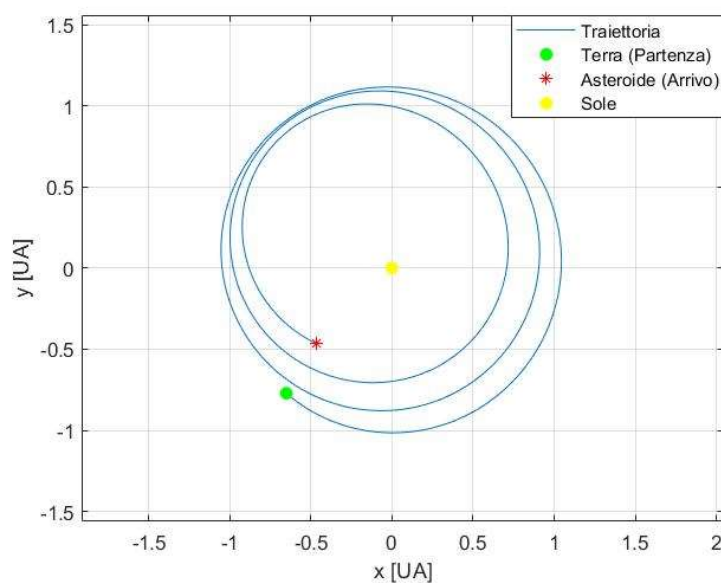


Figura 7.10: Traiettorie 2D

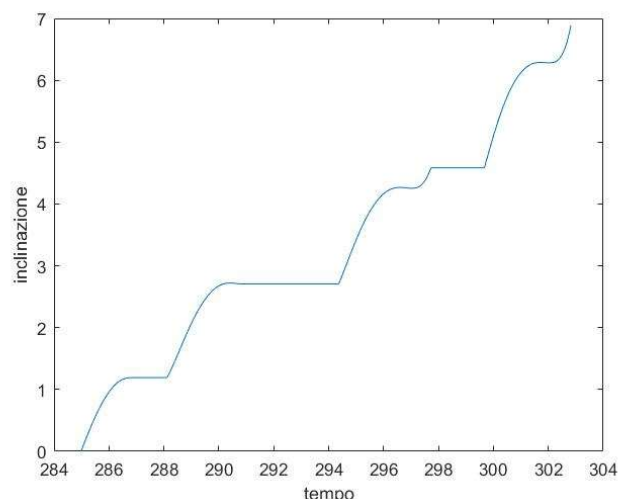


Figura 7.11: Inclinazione

Quanto detto precedentemente per la missione di lunga durata può essere applicato anche alla soluzione breve. L'unica differenza, infatti, è che le manovre di cambio di piano e di abbassamento del perielio sono più repentine in quanto è necessario raggiungere un'inclinazione dell'orbita di 6.8883° ed un semiasse maggiore di 0.74 UA in un tempo minore e quindi con un numero minore di rivoluzioni attorno al Sole. Da ciò ne consegue che le singole manovre saranno in numero minori ma sicuramente più costose a livello di propellente e questo va a scapito della massa finale che, come riportato in tabella, risulta minore. Quanto appena detto può essere notato anche nell'aumento della pendenza delle varie curve relative a eccentricità, afelio e perielio, semiasse ed energia in funzione del tempo e dalla diminuzione del numero di gradini, nonché dal ridotto numero di picchi della Switching function.

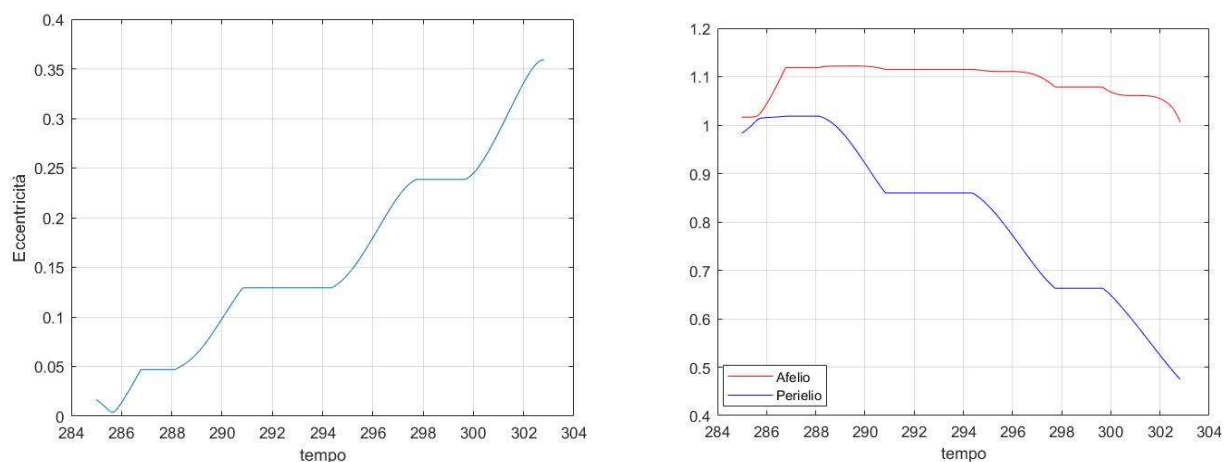


Figura 7.12: Eccentricità e Afelio-Perielio

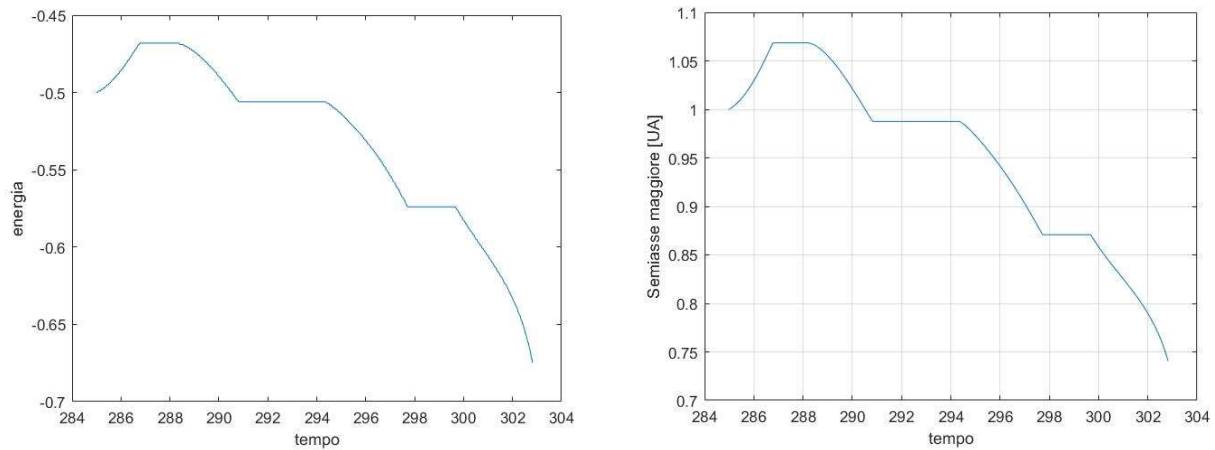


Figura 7.13: Energia e Semiassse maggiore

Gli andamenti riportati in figura 7.13 rappresentanti l'energia e il semiasse maggiore in funzione del tempo dimostrano la stretta dipendenza di questi due parametri data dalla relazione $\epsilon = -\frac{\mu}{2a}$ dove ϵ è l'energia meccanica specifica, μ rappresenta il parametro gravitazionale ed a è il semiasse maggiore. Una diminuzione del semiasse maggiore, che in questo caso di orbite ellittiche è positivo, porta ad un aumento in modulo dell'energia che infatti si attesta su valori più negativi.

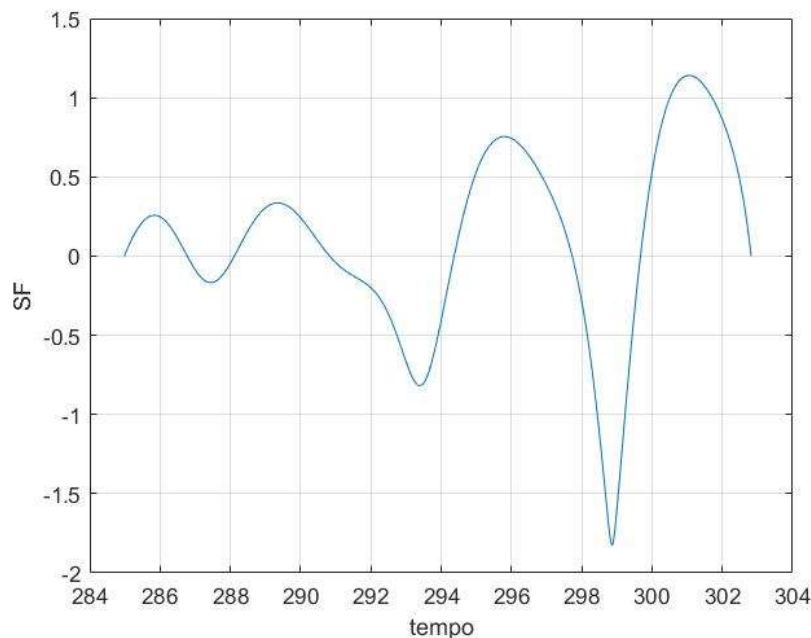


Figura 7.14: Switching Function

7.1.2 Missione con EGA

L'idea alla base della missione con EGA (Earth Gravity Assist) è quella di sfruttare la gravità della Terra allungando la durata della missione così da permettere alla sonda spaziale di effettuare un fly by del pianeta in modo da ridurre il consumo di propellente e trovare missioni più efficienti. In meccanica orbitale, infatti, una manovra di assistenza gravitazionale consiste nello sfruttamento del movimento relativo e della gravità di un pianeta (in questo caso la Terra) per alterare la traiettoria e la velocità di un veicolo spaziale, in genere per risparmiare propellente e ridurre le spese. L'EGA può essere utilizzata per accelerare o decelerare un veicolo spaziale, cioè per aumentare o diminuire la sua velocità o riorientare la traiettoria. Ciò avviene mediante uno scambio di energia: qualsiasi guadagno o perdita di energia cinetica e di velocità da parte di un veicolo spaziale è corrispondentemente perso o guadagnato dal corpo gravitazionale, in conformità con la terza legge di Newton.

Missione	EGA
Partenza	09/02/2044
Fly By	03/06/2045
Rendez-vous	12/03/2048
Durata missione (giorni)	1492.82710734012
Durata missione (adimensionata)	25.6797596099860
Massa finale (kg)	924.475096099718

Come si evince dai risultati riportati in tabella, la missione ha una durata di circa 4 anni (1492.8 giorni) in cui dopo circa un anno dalla partenza dalla Terra si effettua un fly by del pianeta in modo da sfruttare la gravità ed effettuare un cambio di piano necessario per raggiungere l'asteroide target. Come si può notare la durata della missione risulta maggiore di circa un anno rispetto alla missione breve precedentemente analizzata ma comunque inferiore rispetto alla missione lunga. La massa finale invece risulta maggiore di entrambe le missioni dirette, rendendo questa soluzione molto buona dal punto di vista dei costi. Infatti, grazie all'EGA si riesce ad abbassare il consumo di propellente ed aumentare il carico utile, ciò però a scapito della durata della missione.

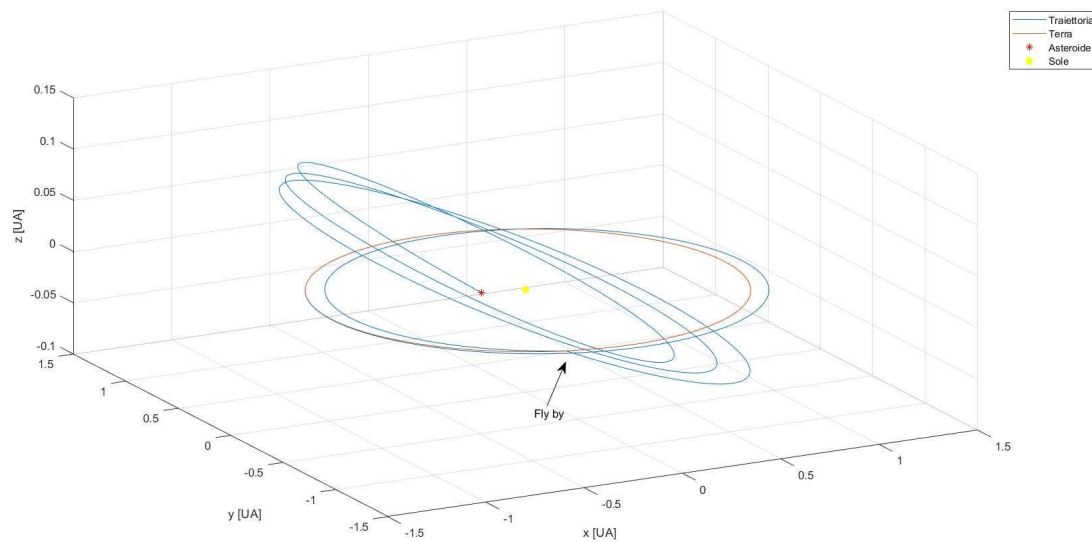


Figura 7.15: Traiettorie 3D

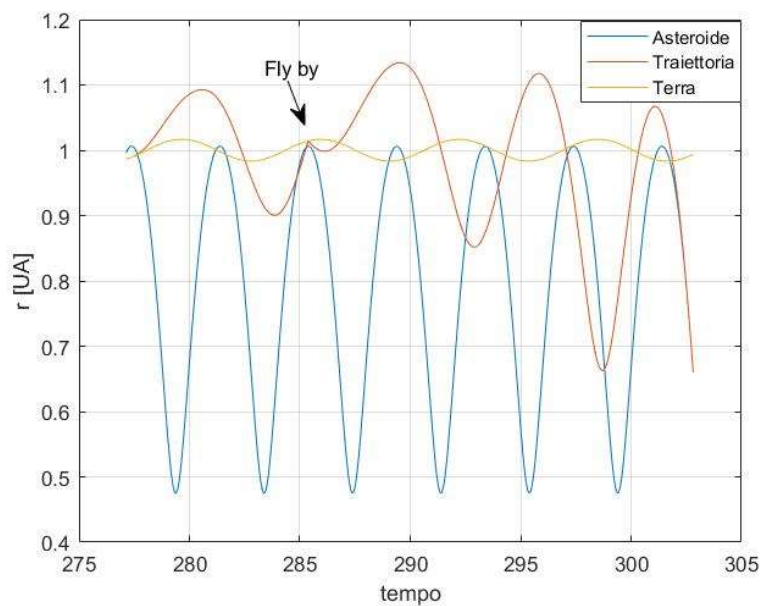


Figura 7.16: Traiettorie in funzione del tempo

I grafici sopra riportati rappresentano la traiettoria del veicolo verso l'asteroide target. Il fly by della Terra avviene ad un tempo adimensionato pari a 285.385743861286 ed è ben visibile nei grafici. La sonda spaziale, infatti, parte dalla Terra e dopo circa una rivoluzione attorno al Sole effettua un fly by del pianeta con un conseguente cambio di piano come dimostra il repentino incremento dell'inclinazione dell'orbita.

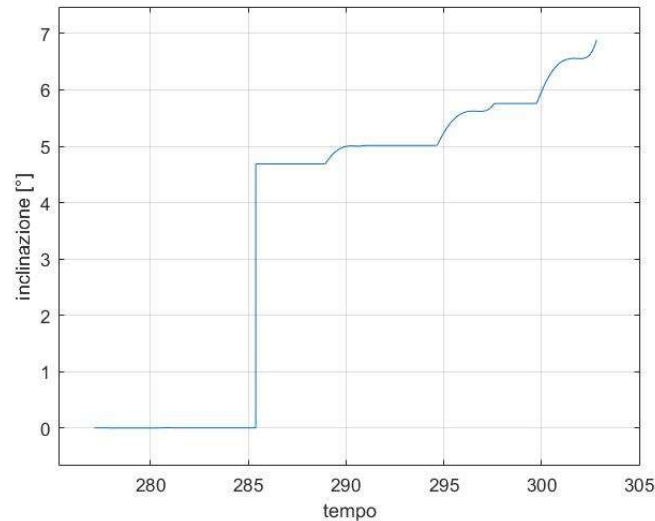


Figura 7.17: Inclination dell'orbita

Grazie all'assist gravitazionale, e quindi all'energia scambiata tra il veicolo e la Terra, l'inclinazione dell'orbita passa dai circa 0° dell'orbita della Terra a circa 4.6869° , effettuando quindi una manovra di cambio di piano consistente senza l'utilizzo dei motori e di propellente, come anche dimostrato dall'andamento della switching function che risulta minore di zero durante il fly by. A questo punto, per raggiungere l'inclinazione dell'orbita dell'asteroide target è necessario accendere i motori e consumare quindi propellente. I tre picchi della SF dopo il fly by rappresentano le manovre di cambio di piano e abbassamento del perielio effettuate per passare da un'orbita all'altra fino ad arrivare ad effettuare il rendez-vous con 2000 BM19 in corrispondenza del quale la SF si annulla.

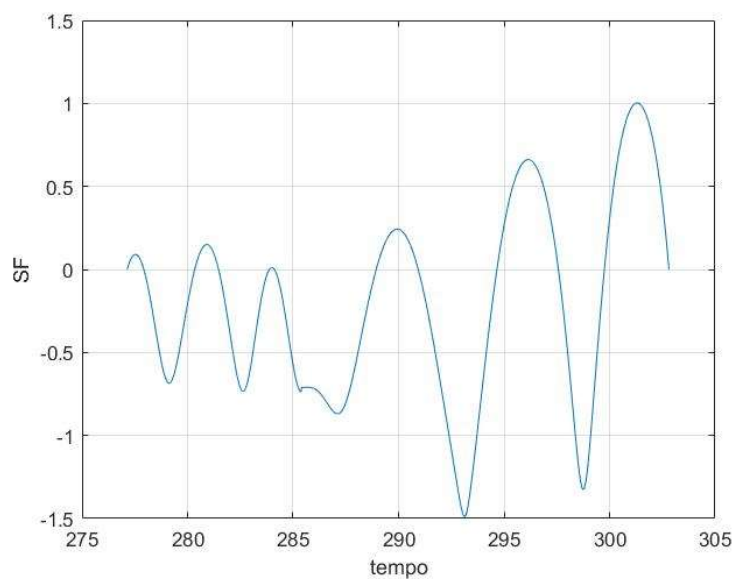


Figura 7.18: Switching function

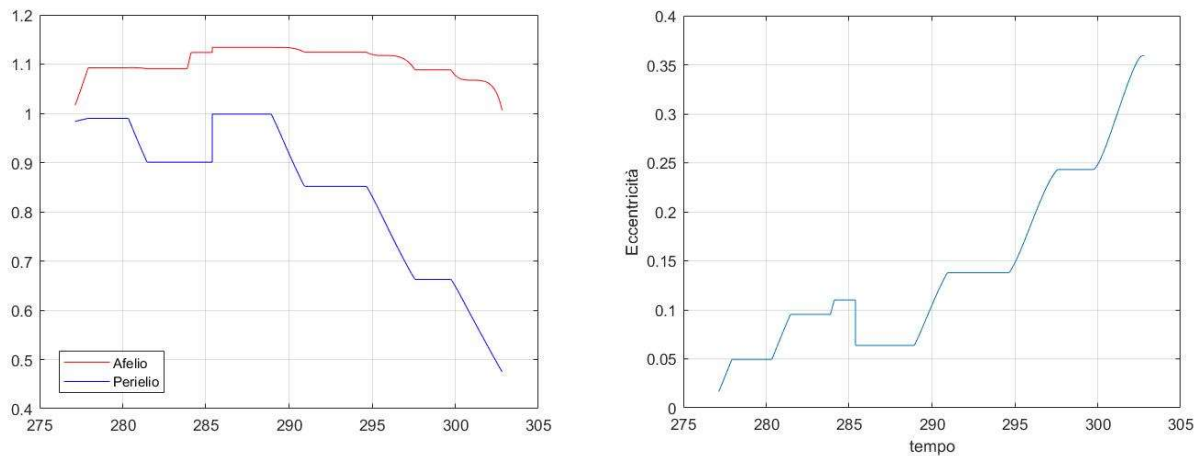


Figura 7.19: Afelio-Perielio ed eccentricità

Infine, vengono riportati gli andamenti nel tempo di afelio, perielio, eccentricità e semiasse maggiore. Prima del fly by si può notare come inizialmente il perielio ed il semiasse maggiore aumentino per poi diminuire in modo da spostarsi su un'orbita tale da permettere alla sonda spaziale di sfruttare l'assist gravitazionale. In seguito al fly by della Terra, il veicolo si sposta su un'orbita inizialmente più grande (il semiasse aumenta) e quindi più energetica per poi spostarsi su orbite sempre meno energetiche come dimostrato dall'abbassamento del perielio e del semiasse maggiore che hanno un andamento a gradini decrescente. I valori finali dei parametri riportati coincidono con quelli dell'orbita di 2000 BM19.

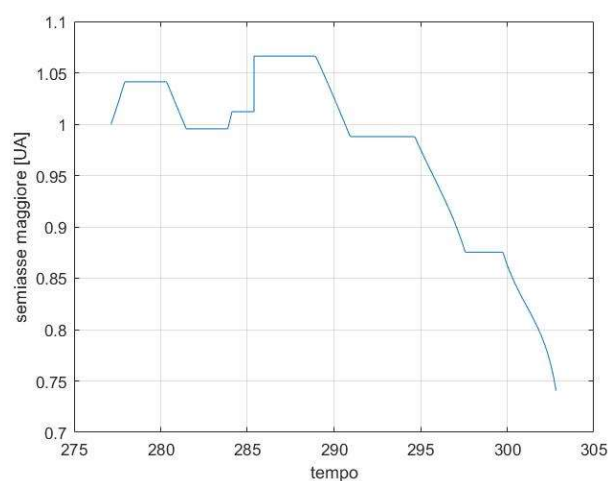


Figura 7.20: Semiasse maggiore

Soluzione alternativa con EGA

Prima di trovare la soluzione ottimale esposta nel paragrafo precedente, era stata trovata un'altra soluzione convergente le cui informazioni sono riportate in tabella.

Missione	EGA
Partenza	31/10/2043
Fly By	10/02/2045
Rendez-vous	22/08/2047
Durata missione (giorni)	1391.23936141611
Durata missione (adimensionata)	23.9322371528830
Massa finale (kg)	761.001914968191

Come si può notare, questa missione presenta una durata minore rispetto a quella precedente, si passa infatti da circa 1492 giorni a 1391 giorni, il che sarebbe positivo da un punto di vista di durata della missione. Il problema che ha fatto scartare questa soluzione è però il valore della massa finale: per questa missione, infatti, la quantità di propellente necessaria è risultata molto maggiore e ciò si traduce in un aumento dei costi di missione. La massa finale ha infatti un valore di circa 760 kg, molto inferiore rispetto ai 920 kg della missione precedente e alle masse finali trovate per le missioni dirette, e ciò rende questa soluzione sicuramente non ottimale perché nonostante lo sfruttamento dell'assist gravitazionale i costi risultano troppo elevati in termini di propellente.

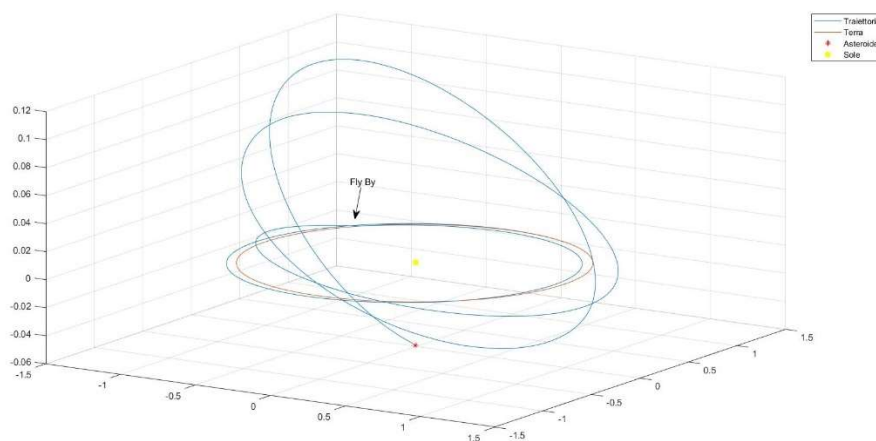


Figura 7.21: Traiettoria 3D

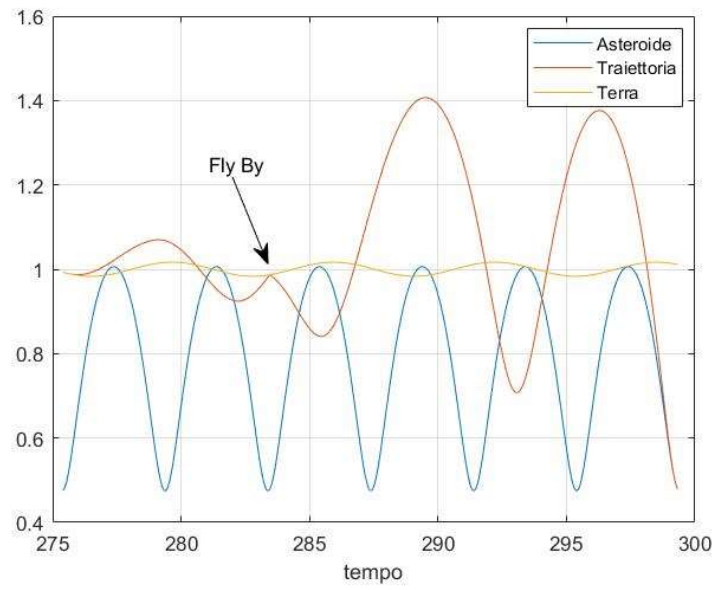


Figura 7.22: Andamento dei raggi delle traiettorie

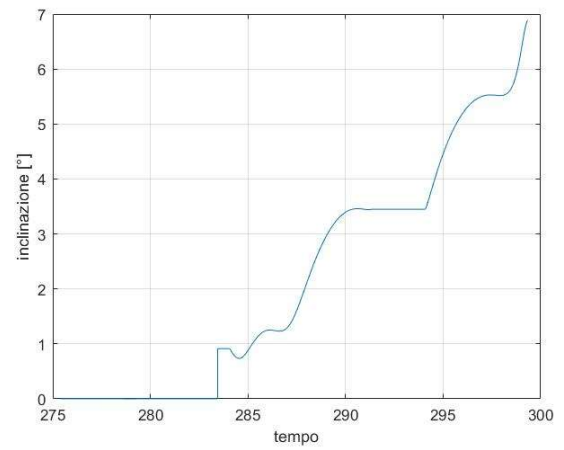
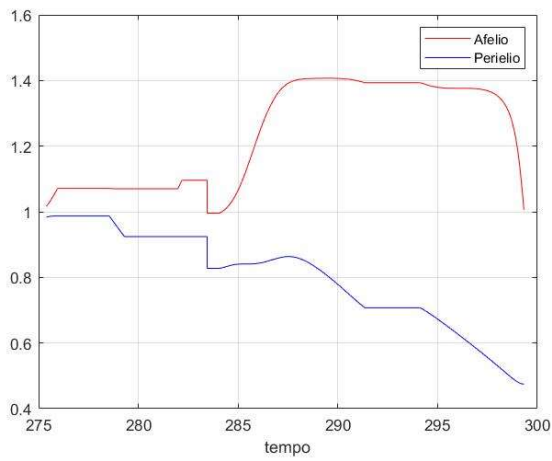


Figura 7.23: Afelio-Perielio e inclinazione

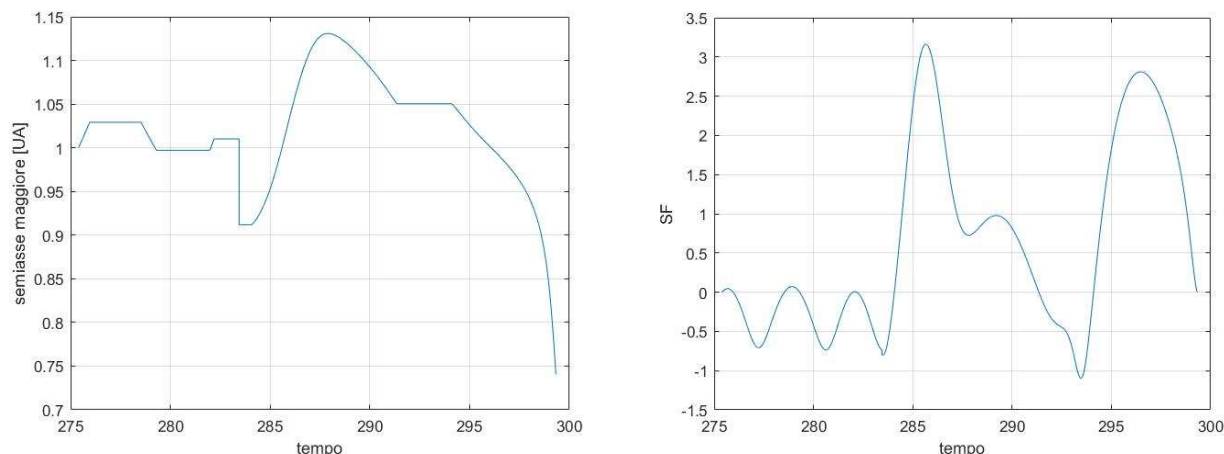


Figura 7.24: Semiasse maggiore e SF

Come si può notare dai grafici sopra riportati, l'assist gravitazionale e quindi l'energia scambiata tra la sonda e la Terra, non è sufficiente a garantire una buona variazione dell'inclinazione dell'orbita. In seguito al fly by, infatti, l'inclinazione passa da circa 0° a circa 0.9136° , un valore troppo piccolo se si pensa che nella missione precedente l'EGA permette di spostarsi su un'orbita con inclinazione pari a 4.6869° . Le restanti manovre per il cambio di piano e l'abbassamento del perielio necessitano dei motori accesi e ciò si traduce in un aumento considerevole dei costi. Come si può notare dal grafico della switching function infatti, in seguito al fly by, sono presenti due tratti di durata relativamente lunga in cui i motori risultano costantemente accesi.

7.2 2003 SD220

Il secondo studio di ottimizzazione di missione è stato effettuato sull'asteroide 2003 SD220 che, come si può evincere dalla tabella sottostante, presenta un'orbita leggermente più inclinata di 2000 BM19 (8.51458°) con un semiasse maggiore sempre minore dell'unità (0.8266938 UA) ma più maggiore rispetto al primo asteroide ed un'eccentricità inferiore e pari a 0.21063093 , da cui è stato possibile ricavare il valore dei raggi di afelio e perielio dell'orbita. 2003 SD220 è stato scoperto il 29 settembre 2003 dagli astronomi del progetto LONEOS (Lowell Observatory Near-Earth-Object Search) dell'osservatorio Anderson Mesa Station. Anche questo asteroide appartiene al gruppo Aten ed è classificato sia come NEA che come PHA. 2003 SD220 presenta un tempo di rivoluzione attorno al Sole di 275

giorni (0.75 anni) ed un periodo di rotazione attorno al proprio asse di 285 ore. Per quanto riguarda le caratteristiche fisiche, questo asteroide ha un diametro di 0.791 km, una magnitudine pari a 17.65 ed un'albedo di 0.34.

Epoch	59396
Semiasse maggiore (a)	0.8266938 UA
Eccentricità (e)	0.21063093
Inclinazione (i)	8.51458°
Argomento del periastro (w)	326.93397°
Longitudine del nodo ascendente	273.91418°
Anomalia media (M)	351.768336°
Raggio afelio	1.001 UA
Raggio perielio	0.654 UA

Come si può notare dai valori dei parametri orbitali e dal grafico in basso, in cui è rappresentata l'orbita dell'asteroide confrontata con quella della Terra, sarà necessario effettuare manovre di cambio di piano unite a manovre di abbassamento del perielio in modo da poter immettersi su un'orbita tale da poter raggiungere 2003 SD220: ciò verrà effettuato in un primo momento principalmente mediante la spinta ed un consumo di carburante e in un secondo momento, per ridurre il fabbisogno di propellente, si utilizzerà l'Earth Gravity Assist (EGA) con lo scopo di trovare missioni efficienti e poter confrontare le soluzioni ottenute.

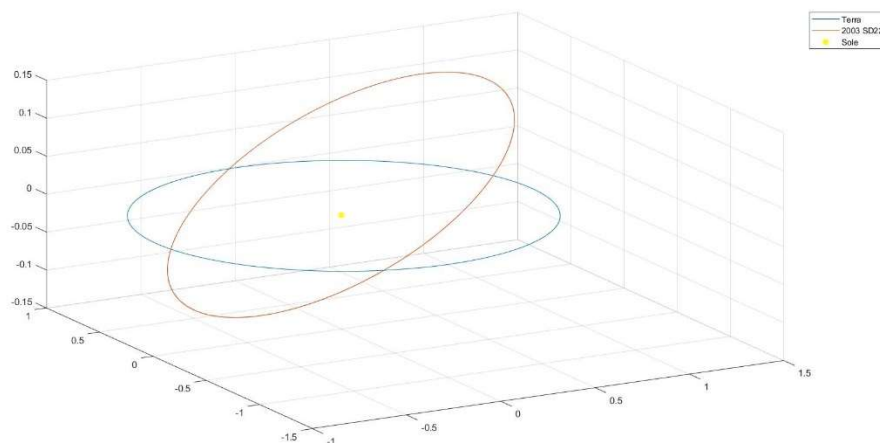


Figura 7.25: Orbita di 2003 SD220

7.2.1 Missioni Dirette

Missione	Lunga	Breve
Partenza	27/06/2023	23/03/2024
Rendez-vous	27/10/2028	02/06/2027
Durata missione (giorni)	1949.08335495429	1165.58872734597
Durata missione (adimensionata)	33.5283247262520	20.0505726183430
Massa finale (kg)	1021.61763631061	936.058635144042

Come nel caso dell'asteroide 2000 BM19, sono state individuate due soluzioni per effettuare missioni su 2003 SD220: una lunga della durata di circa 5 anni ed una più breve di circa 3 anni. Come si può notare dai dati riportati in tabella, la durata della missione è stata accorciata di circa due anni e ciò, come già espresso nel caso precedente, ha portato ad un abbassamento abbastanza marcato della massa finale che è passata da circa 1021.62 kg a 936.06 kg. Per quanto riguarda le missioni dirette si tratta quindi di trovare un compromesso tra una durata contenuta della missione e una massa finale accettabile.

Missione lunga

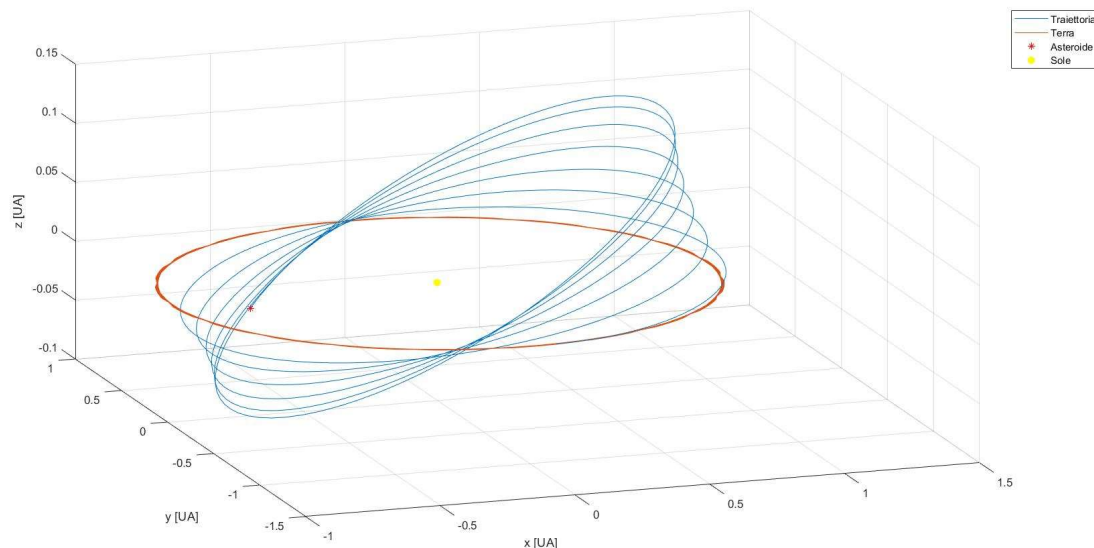


Figura 7.26: Traiettoria 3D

Anche in questo caso, come nella missione verso l'asteroide 2000 BM19, le manovre di cambio di piano sono molto graduali data l'elevata durata di missione, ad ogni rivoluzione infatti l'inclinazione varia di circa 1° , fino a raggiungere l'inclinazione dell'orbita target di 8.51458° .

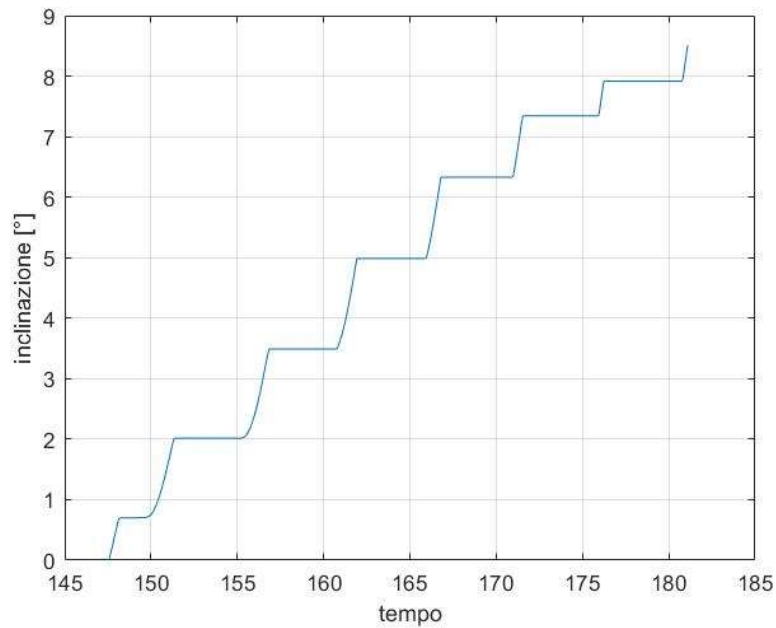


Figura 7.27: inclinazione

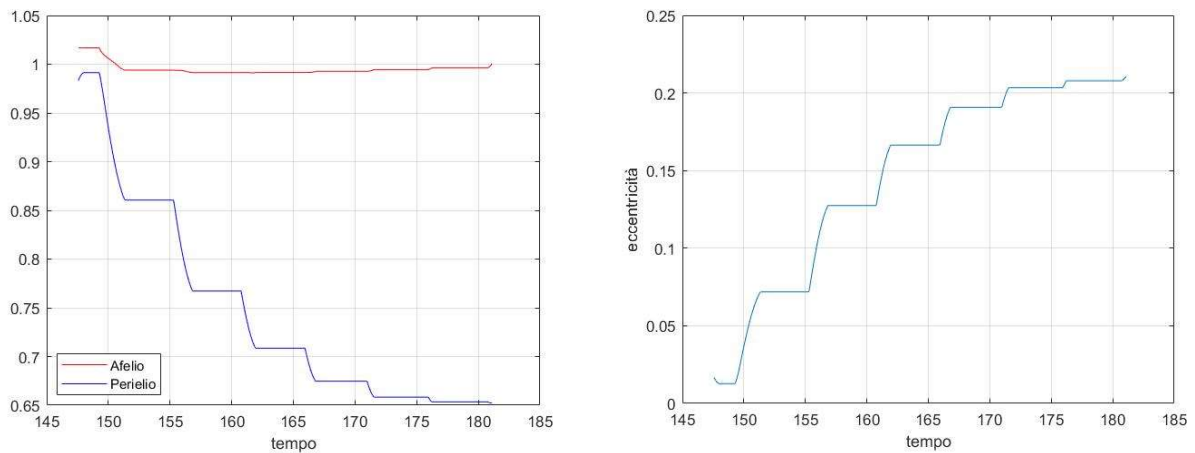


Figura 7.28: Afelio-Perielio ed eccentricità

Come si può notare dagli andamenti di afelio e perielio, eccentricità e semiasse maggiore, anche in questo caso la forma dell'orbita viene modificata e si ha un forte abbassamento del perielio dovuto all'eccentricità dell'orbita target. L'andamento della switching function, che dà un'indicazione di quando vengono effettuate le manovre, rispecchia gli andamenti a gradini dei vari parametri analizzati: ogni tratto positivo della SF, infatti, corrisponde ad una variazione a gradino dei parametri orbitali.

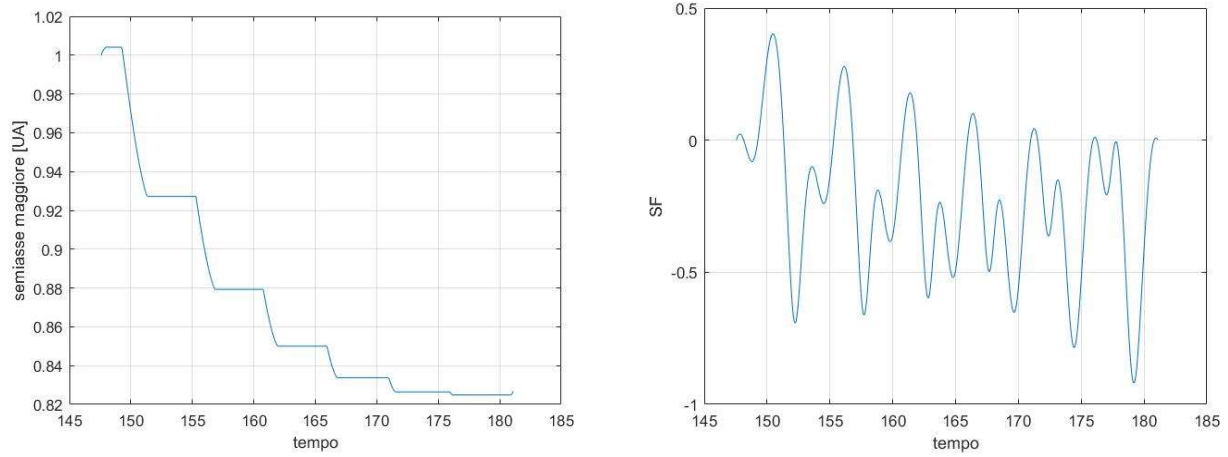


Figura 7.29: Semiasse maggiore e SF

Missione breve

Come per il primo asteroide, anche in questo caso si è cercato di accorciare la durata della missione diretta ed è stata trovata la seguente soluzione.

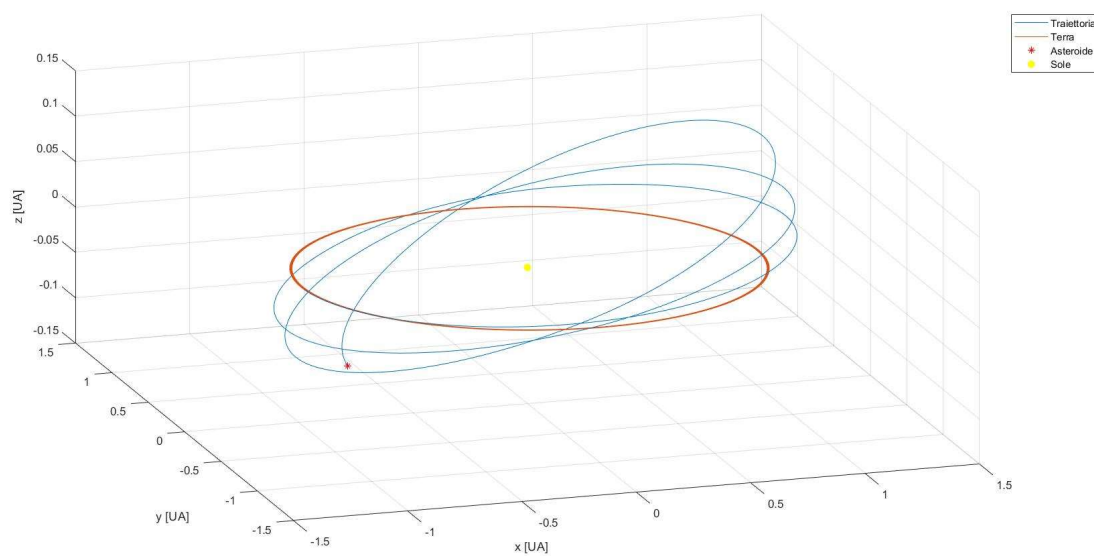


Figura 7.30: Traiettoria 3D

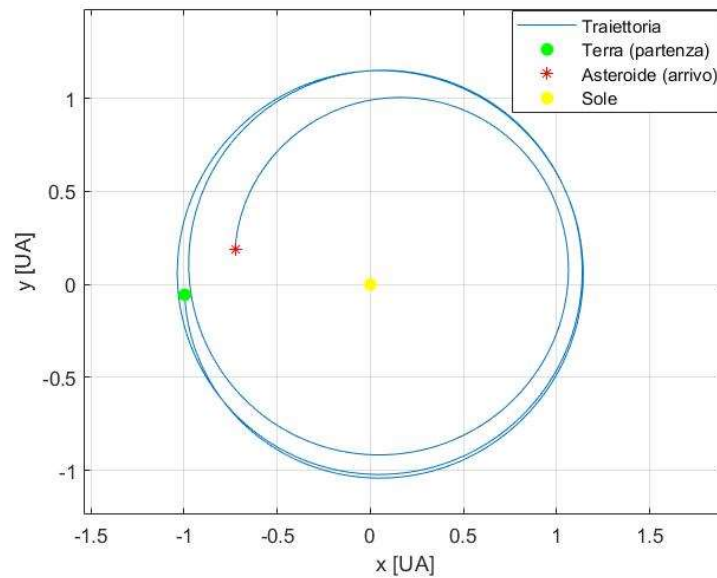


Figura 7.31: Traiettorie 2D

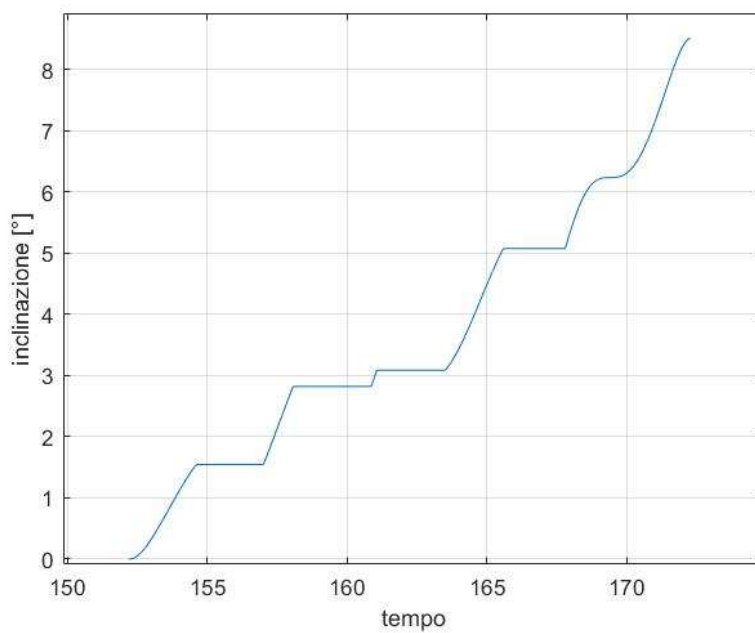


Figura 7.32: Inclinatione

La principale differenza con la missione di lunga durata è rappresentata dall'iniziale aumento del raggio dell'afelio e del semiasse maggiore a testimoniare come in prima battuta il veicolo si sposti su un'orbita più grande ed energetica per poi spostarsi su orbite gradualmente meno energetiche, più eccentriche e più inclinate, fino al raggiungimento dell'orbita target.

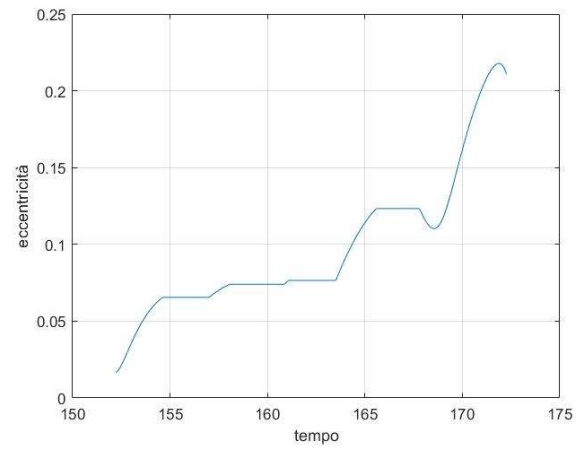
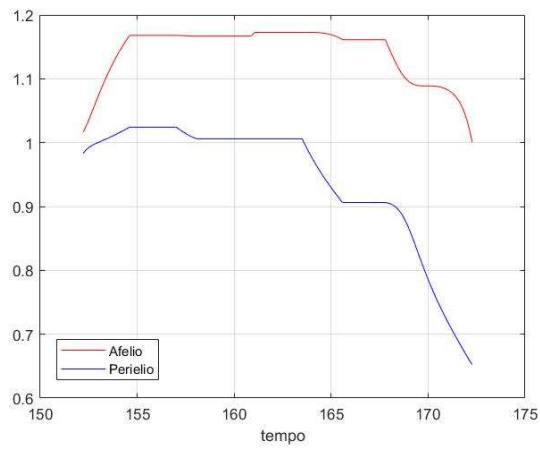


Figura 7.33: Afelio-Perielio e eccentricità

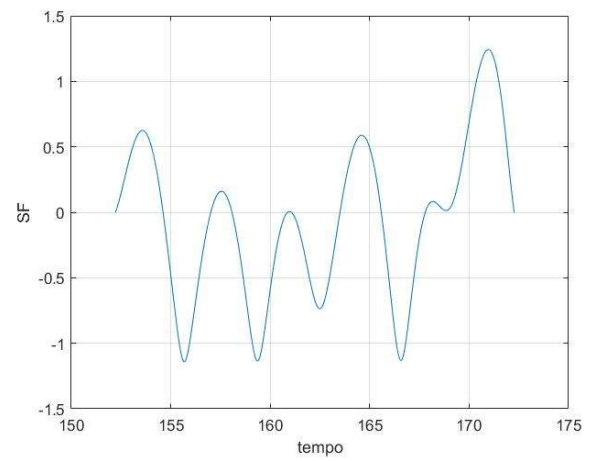
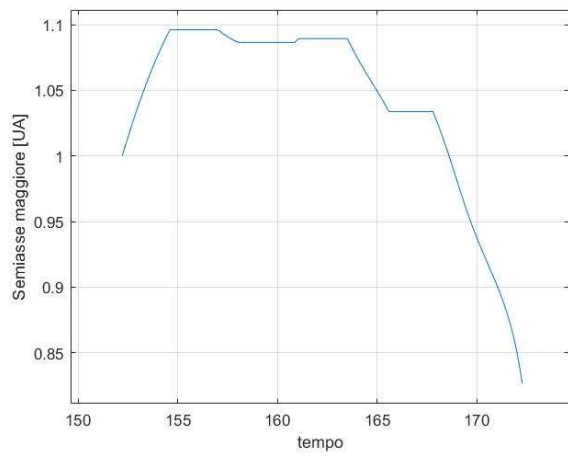


Figura 7.34: Semiasse maggiore e SF

7.2.2 Missione con EGA

Missione	EGA
Partenza	24/02/2023
Flyby	26/06/2024
Rendez-vous	22/01/2028
Durata missione (giorni)	1793.86507638864
Durata missione (adimensionata)	30.8582445401120
Massa finale (kg)	1043.17267196410

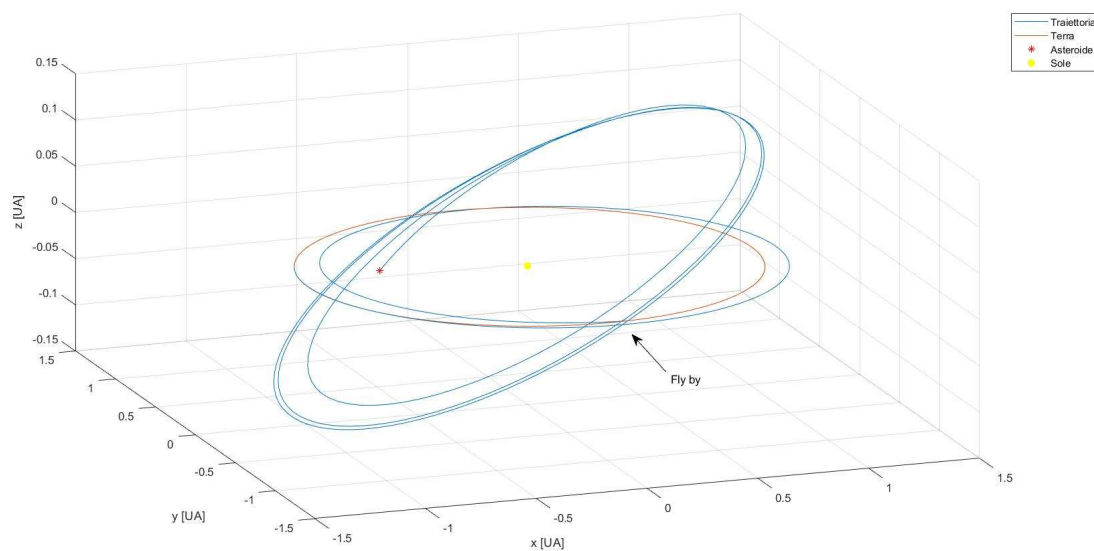


Figura 7.35: Traiettoria 3D

Le figure riportate rappresentano la traiettoria del veicolo con il fly by della Terra in dettaglio.

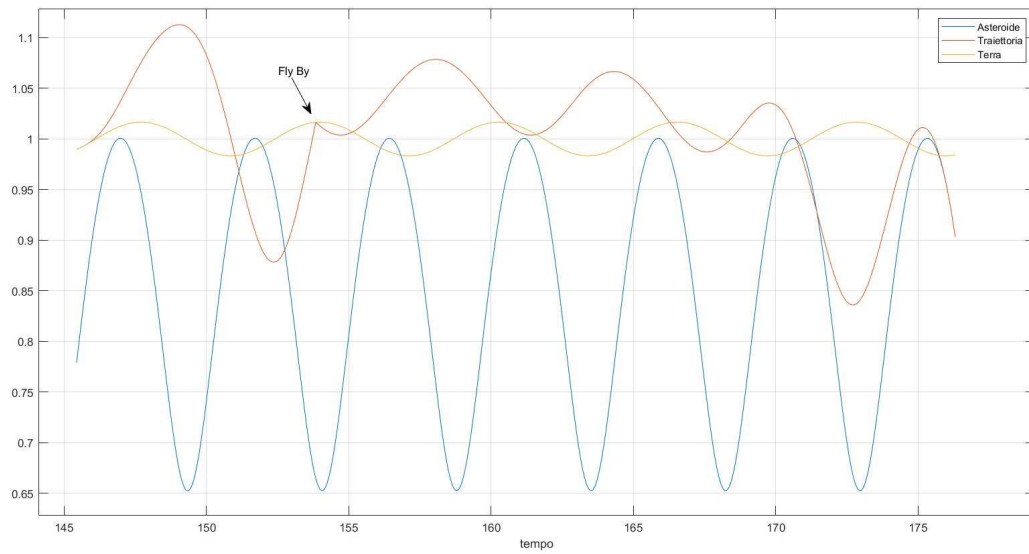


Figura 7.36: Andamento dei raggi delle traiettorie

In questa missione, come si può notare dall'andamento dell'inclinazione dell'orbita, l'assist gravitazionale fornito dalla Terra è particolarmente efficiente e permette di effettuare una manovra di cambio di piano per passare da un'inclinazione di 0° ad una di circa 7.5° , non molto lontana da quella dell'orbita target di 8.51458° , senza l'accensione dei motori e l'utilizzo di propellente.

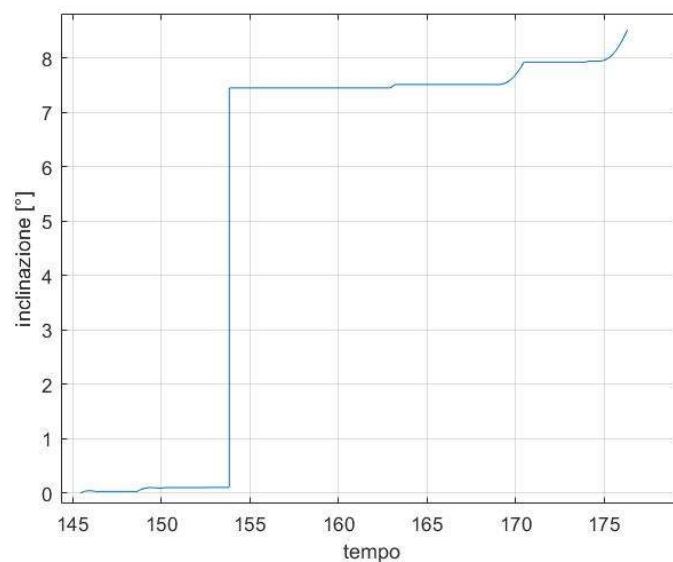


Figura 7.37: Inclinazione

Vengono ora riportati gli andamenti di afelio e perielio, eccentricità, semiasse maggiore e switching function. Essendo l'orbita di 2003 SD220 un'orbita interna a quella della Terra e quindi più piccola e meno energetica, l'afelio, il perielio e il semiasse maggiore hanno un andamento globalmente decrescente, attestandosi negli istanti finali sui valori propri dell'orbita target. È interessante notare come l'eccentricità, in seguito ad un aumento iniziale, subisca una repentina diminuzione in seguito all'assist gravitazionale a dimostrazione del fatto che la sonda spaziale si posizioni inizialmente su un'orbita relativamente poco eccentrica attraverso la manovra di cambio di piano.

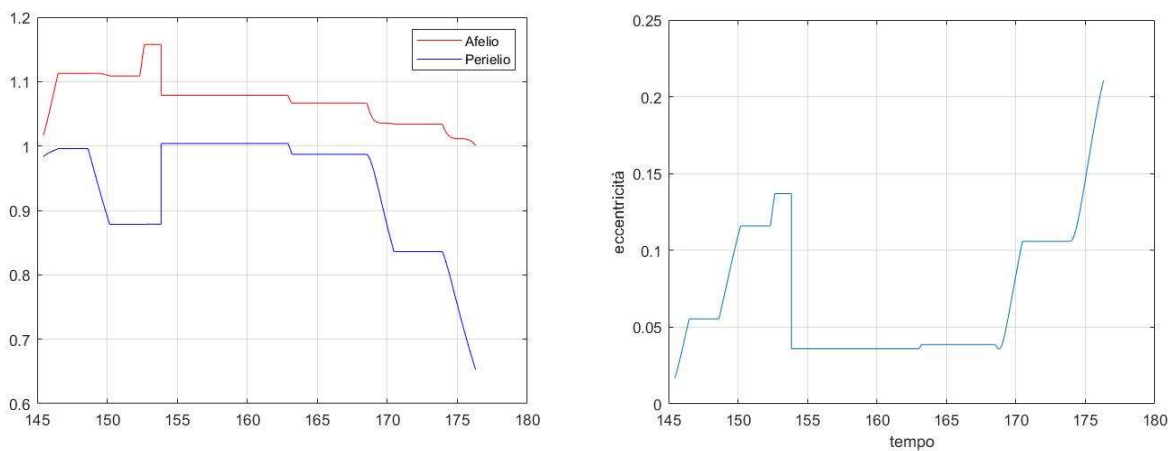


Figura 7.38: Afelio-Perielio ed eccentricità

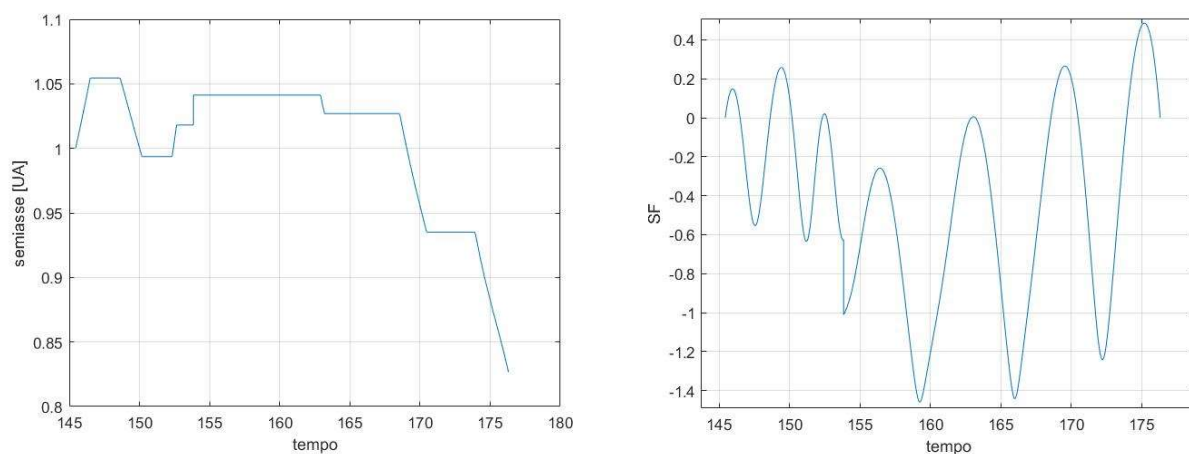


Figura 7.39: Semiasse maggiore e SF

7.3 2001 CK32

L'ultimo studio di ottimizzazione di missioni è stato fatto sull'asteroide 2001 CK32, un asteroide con caratteristiche molto simili a entrambi gli asteroidi precedenti (2000 BM19 e 2003 SD220). Presenta infatti un semiasse maggiore (0.7248995) ed un'eccentricità (0.38260242) molto simili al primo asteroide, mentre per quanto riguarda l'inclinazione (8.13428), essa risulta molto simile a quella del secondo asteroide. 2001 CK32 è un NEA appartenente anch'esso al gruppo Aten ed è stato scoperto il 13/02/2001 dal profetto LINEAR (Lincoln Near-Earth-Asteroid Research). È stato inoltre classificato come ECA (earth crosser asteroid), come Venus-crosser e Mercury-crosser ma non come PHA. Questo asteroide presenta un tempo di rivoluzione di 225 giorni (0.62 anni) ed un diametro di circa 500 m, stimato dalla magnitudine assoluta ($H=19.13$) utilizzando la formula:

$$D = \frac{1.329 \times 10^6}{\sqrt{0.14}} \times 10^{-0.2H}$$

Epoch	59396
Semiasse maggiore (a)	0.7248995 UA
Eccentricità (e)	0.38260242
Inclinazione (i)	8.13428°
Argomento del periastro (w)	234.03159°
Longitudine del nodo ascendente	109.40746°
Anomalia media (M)	143.9462783°
Raggio afelio	1.002 UA
Raggio perielio	0.447 UA

Nella figura sotto riportata (figura 7.40) è stata rappresentata l'orbita di 2001 CK32 in comparazione con quella della Terra.

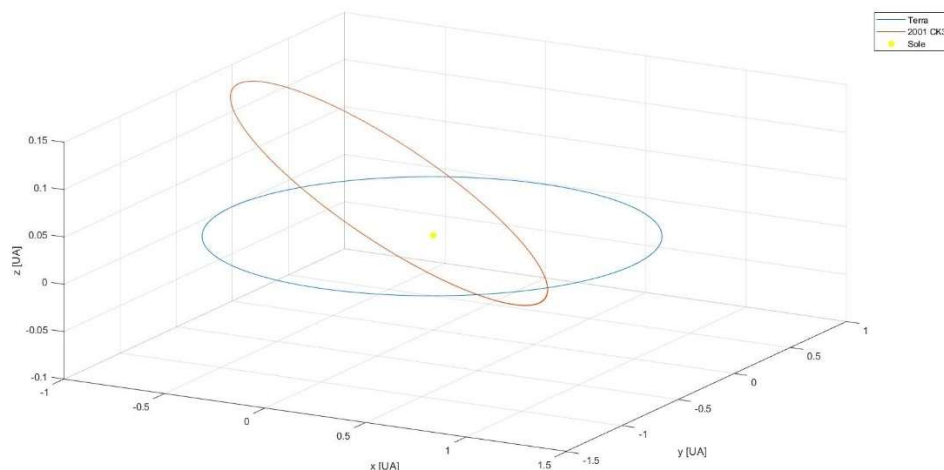


Figura 7.40: Orbita di 2001 CK32

7.3.1 Missione Diretta

In questo ultimo studio si è deciso di fare un confronto direttamente tra una missione diretta breve ed una missione con EGA. Di seguito sono riportate le caratteristiche della missione diretta.

Missione	Diretta
Partenza	19/12/2039
Rendez-vous	29/05/2043
Durata missione (giorni)	1256.47085742346
Durata missione (adimensionata)	21.6139360123745
Massa finale (kg)	816.711979395307

Vengono ora riportati i grafici relativi alla traiettoria trovata per questa missione. Come si può notare dalle figure, infatti, come nei casi precedenti, è necessario effettuare un cambio di piano unito ad una modifica della forma dell'orbita per raggiungere l'asteroide target.

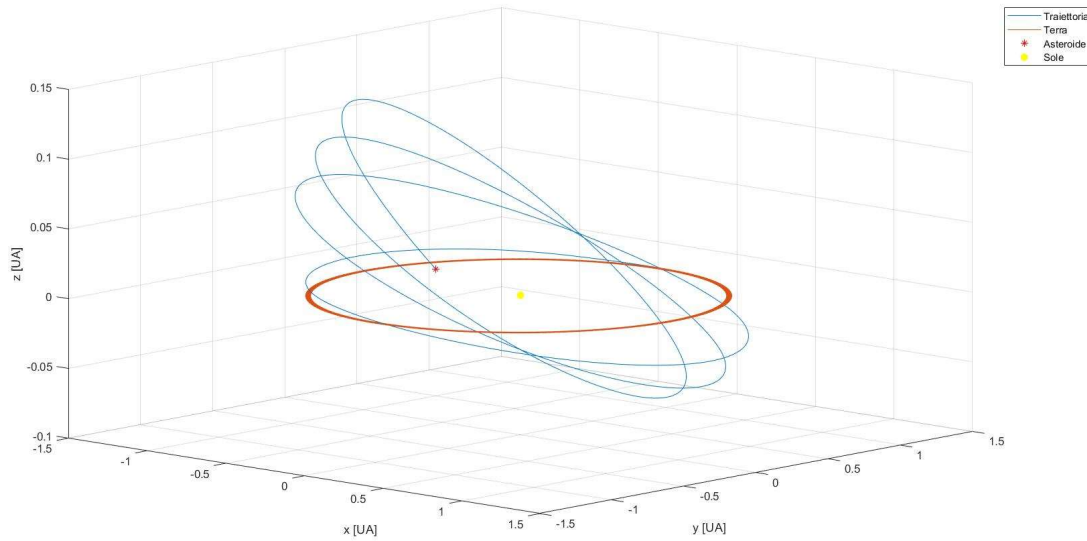


Figura 7.41: Traiettoria 3D

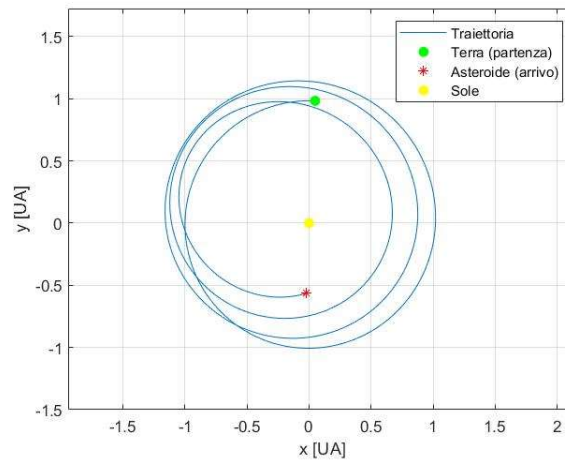


Figura 7.42: Traiettoria 2D

In questo caso le manovre vengono effettuate accendendo i motori e consumando propellente ed è perciò che i grafici dei principali parametri orbitali hanno un andamento a gradini. Ciò è anche dimostrato dall'andamento della switching function, i cui picchi positivi risultano in corrispondenza delle manovre.

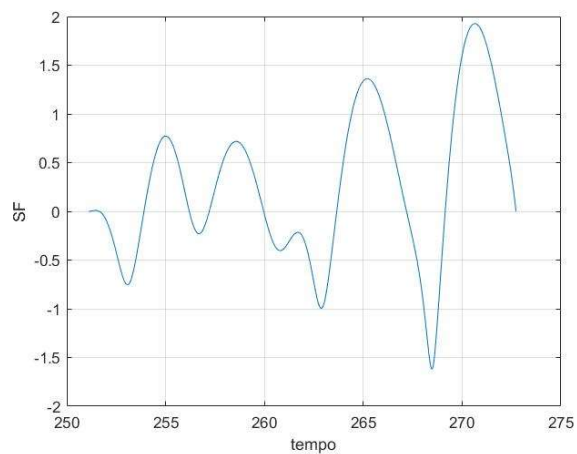
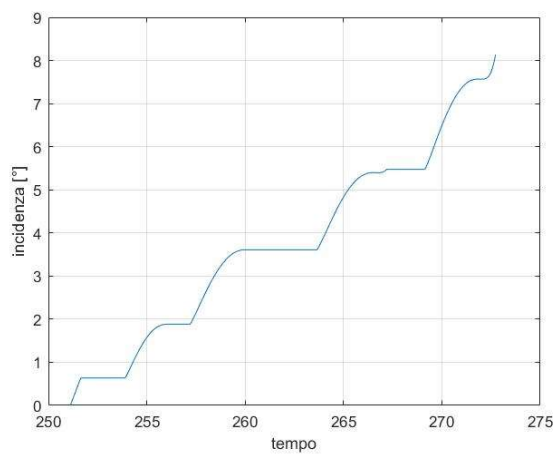


Figura 7.43: Inclinazione e SF

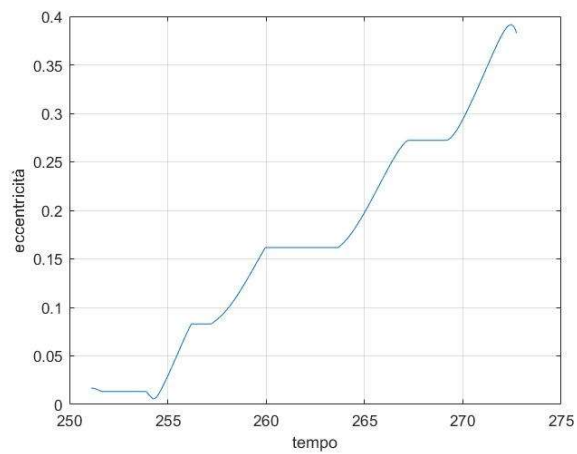
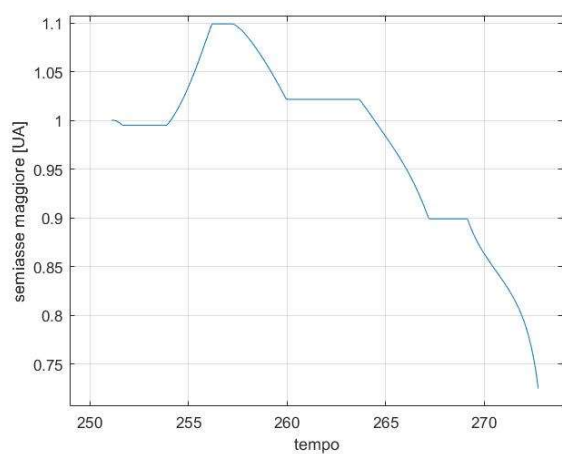


Figura 7.44: Semiasse maggiore ed eccentricità

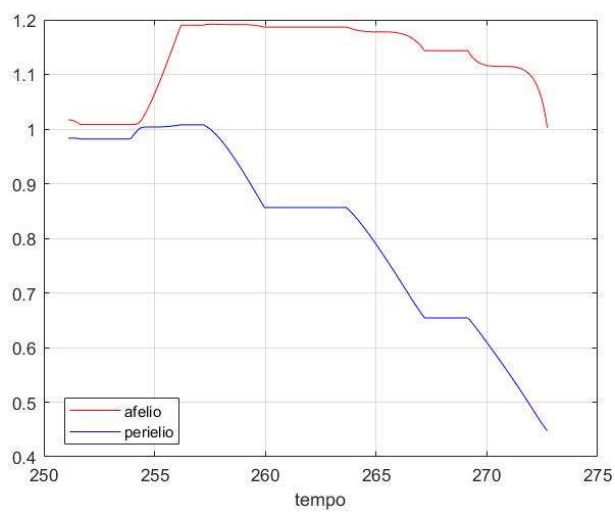


Figura 7.45: Afelio-Perielio

Dagli andamenti di semiasse maggiore e afelio e perielio (e come anche dimostrato dal grafico della traiettoria sul piano x-y) si evince come inizialmente la sonda spaziale si sposti su orbite sempre più grandi ed energetiche, tutti e tre i parametri aumentano infatti all'inizio. In seguito, in modo da immettersi sull'orbita di 2001 CK32, questi parametri decrescono fino a raggiungere i valori tipici dell'orbita target. Questa missione, come dimostrato anche dal valore della massa finale, risulta particolarmente dispendiosa in termini di propellente. Nonostante il tempo di missione sia relativamente breve (circa 3 anni e mezzo), infatti, le manovre necessarie per raggiungere l'asteroide aumentano notevolmente i costi di missione.

7.3.2 Missione con EGA

Come nei casi precedenti è stata impostata una missione che sfrutti l'assist gravitazionale della Terra per cercare di abbattere il consumo di propellente. Come si può notare dai dati riportati in tabella, questa seconda missione prevede una partenza antecedente rispetto a quella della missione breve ed un arrivo conseguente. La durata della missione breve è infatti di circa 1256 giorni mentre questa è risultata di ben 490 giorni più lunga, ciò per permettere alla sonda di effettuare un fly by della Terra e quindi di sfruttare il campo gravitazionale in modo da effettuare una manovra di cambio di piano a motori spenti.

Missione	EGA
Partenza	06/03/2039
Flyby	01/07/2040
Rendez-vous	16/12/2043
Durata missione (giorni)	1746.00018985947
Durata missione (adimensionata)	30.0348680259900
Massa finale (kg)	917.370636310157

Come si pensava, si è ottenuta una massa finale molto maggiore rispetto a quella della missione breve, a dimostrare la bontà di questa soluzione in termini di consumo di propellente e quindi costi di missione.

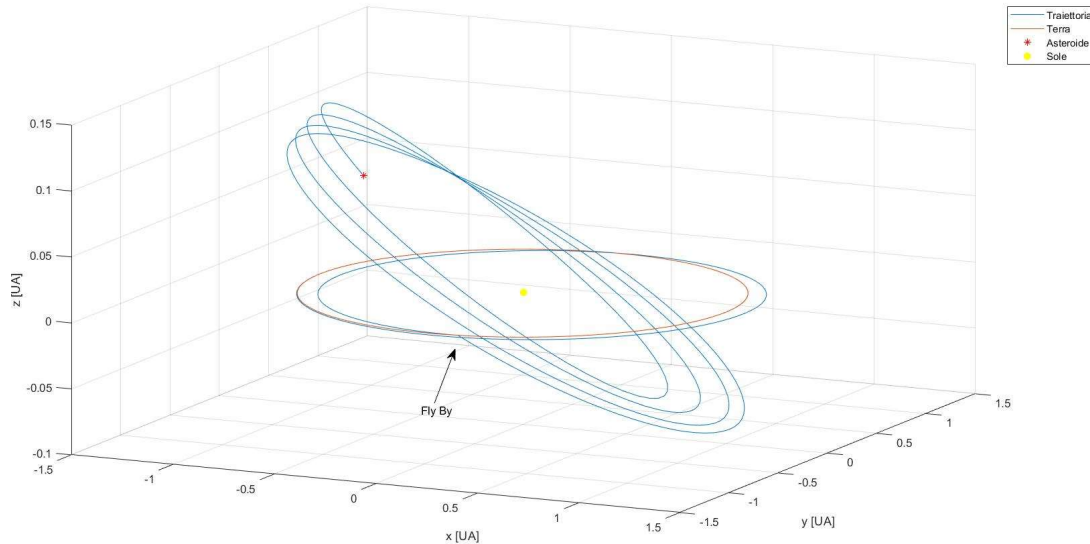


Figura 7.46: Traiettoria 3D

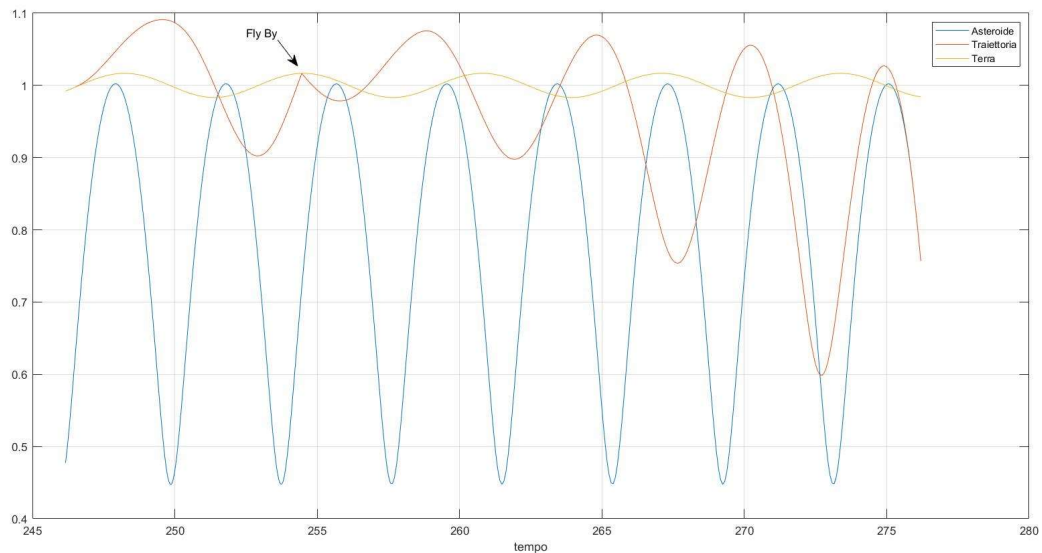


Figura 7.47: Andamento dei raggi delle traiettorie

Nelle figure 7.46 e. 7.47 è stata rappresentata la traiettoria della sonda spaziale verso l'asteroide: la prima immagine riporta la traiettoria sul piano x-y-z rapportata al Sole, all'asteroide target ed all'orbita della Terra ed in seconda istanza è stato rappresentato il raggio della traiettoria in funzione del tempo rapportato ai raggi delle orbite della Terra e

dell'asteroide. Come si può notare è stato evidenziato il punto in cui avviene il fly by della Terra.

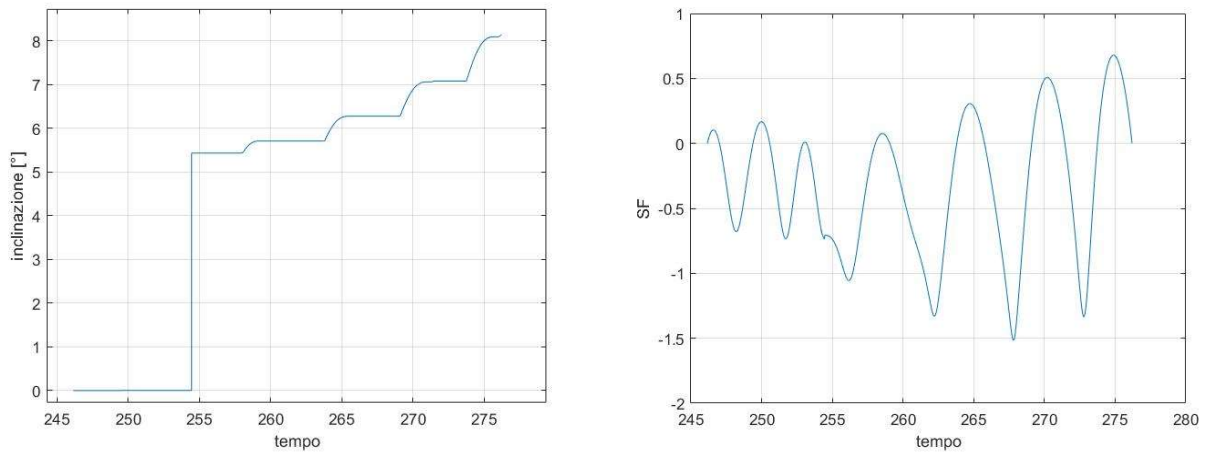


Figura 7.48: Inclinazione e SF

Come si può notare dai grafici relativi all'inclinazione dell'orbita e alla switching function in funzione del tempo, i motori vengono accesi all'inizio per aggiustare la forma dell'orbita in modo da poter effettuare un fly by della Terra (l'inclinazione rimane costante e pari a zero essendo manovre relative alla forma dell'orbita) e negli istanti seguenti all'assist gravitazionale per aggiustare l'inclinazione del piano dell'orbita e la sua forma, ma non durante il fly by (tempo adimensionato pari a 254.456250974708) in cui risultano spenti.

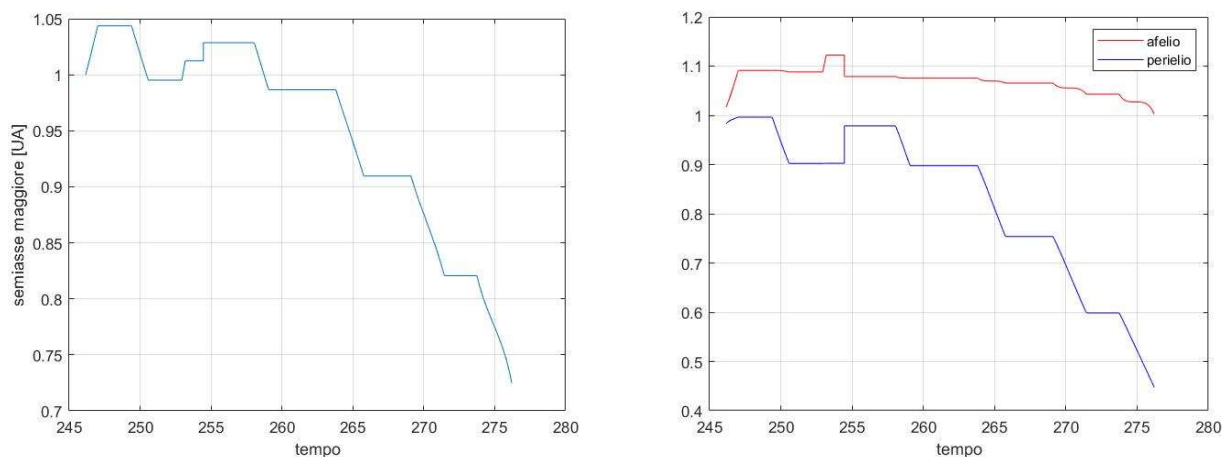


Figura 7.49: Semiasse maggiore e Afelio-Perielio

Gli andamenti relativi al semiasse maggiore, all'eccentricità, all'afelio e al perielio, come ampiamente spiegato nelle missioni precedenti, danno un'indicazione di come la forma

dell'orbita, e di conseguenza anche la sua energia, varia nel tempo fino a raggiungere i valori target.

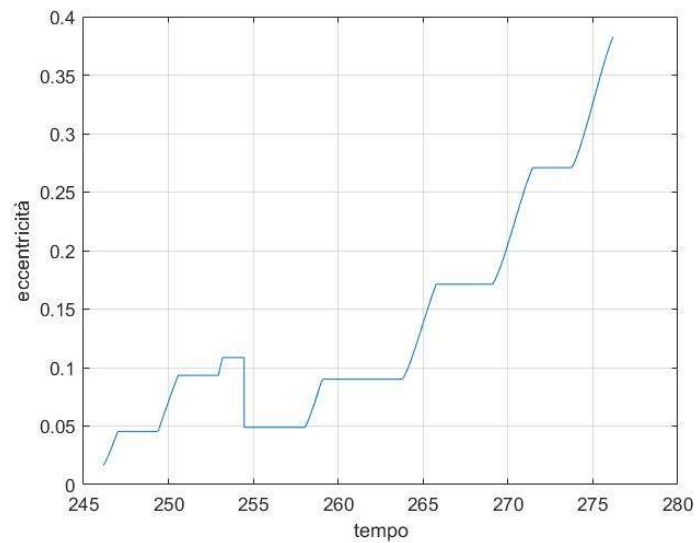


Figura 7.50: Eccentricità

Tabella riassuntiva

Asteroide	Tipo di missione	Durata (giorni)	Massa finale (kg)
2000 BM19	Diretta lunga	2462.74049066747	903.956927565940
2000 BM19	Diretta breve	1036.94932605506	877.273408733190
2000 BM19	EGA	1492.82710734012	924.475096099718
2003 SD220	Diretta lunga	1949.08335495429	1021.61763631061
2003 SD220	Diretta breve	1165.58872734597	936.058635144042
2003 SD220	EGA	1793.86507638864	1043.17267196410
2001 CK32	Diretta	1256.47085742346	816.711979395307
2001 CK32	EGA	1746.00018985947	917.370636310157

Capitolo 8

Conclusioni

Il lavoro qui presentato dimostra la fattibilità di missioni con propulsione elettrica a bassa spinta verso asteroidi appartenenti alla classe NEOs (near Earth objects), e più precisamente alla sottoclasse Atens. In modo particolare si è dimostrato come sia possibile trovare soluzioni più efficienti e ridurre i costi di missione sfruttando il fenomeno dell'EGA (Earth gravity assist): la maggior parte dei cambiamenti orbitali, infatti, è ottenuta mediante un flyby della Terra con un consumo limitato di propellente, in quanto in questa fase della missione i motori risultano spenti. L'efficiente metodo di ottimizzazione indiretta, unito a una procedura adeguata per costruire soluzioni provvisorie, fornisce la convergenza della traiettoria completa in pochi secondi, in modo da poter valutare una vasta gamma di opzioni di missione in tempi brevi. Per quanto riguarda l'asteroide 2000 BM19 si è dimostrato infatti come sia possibile aumentare il carico utile della sonda spaziale e quindi diminuire il consumo di propellente sfruttando un assist gravitazionale: si è passati da una massa finale pari a circa 877.27 kg relativa alla missione breve ad una massa pari a circa 924.47 kg allungando di circa un anno la missione per permettere alla sonda di effettuare un fly by della Terra ed effettuare una manovra di cambio di piano a motori spenti. Un risultato ancora più convincente e interessante è stato trovato per quanto riguarda l'asteroide 2003 SD220, dove si è passati da una massa finale relativa alla missione breve pari a 936.06 kg a 1043.17 kg servendosi dell'EGA risparmiando circa 107.11 kg che possono essere riutilizzati per caricare a bordo ulteriori strumentazioni. Come riportato precedentemente infatti, l'assist gravitazionale permette di effettuare una manovra di cambio di piano consistente, passando da 0° di inclinazione a 7.5° , che si traduce quindi in un risparmio in termini di massa di circa 100 chilogrammi, risultato che attesta la bontà di questa soluzione. Anche per quanto riguarda il terzo asteroide, 2001 CK32, infine, sono stati trovati risultati convincenti. Aumentando di circa 490 giorni la missione ed effettuando un fly by della Terra per sfruttare l'EGA si è passati infatti da una massa finale pari a 816.71 kg ad una di circa 917.37 kg. Ciò si traduce in un notevole risparmio in termini di costi di missione. In conclusione, il concetto di missione proposto in questa tesi può rappresentare una soluzione economica per l'osservazione e il monitoraggio degli asteroidi e potrebbe avere un'applicazione concreta nel prossimo futuro.

Appendice

Aten	1998 DG16	2000 CH59	2008 OC6	2009 XZ1
Ra-Shalom	1998 SD15	2003 AK18	1998 XX2	1994 XL1
Hathor	1998 VR	2006 BQ147	2001 XY10	1998 VF32
Khufu	2000 AF6	2007 TA19	2002 BN	2001 YE4
Amun	2000 BM19	2002 AX1	2005 XV77	2002 XP37
Cruithne	2000 ET70	2007 EX	2005 YS	2006 SF6
Sekhmet	2000 PJ5	2001 CK32	2006 YF13	2006 WO3
1990 VA	2000 UH11	2008 EY5	2008 CN70	2008 UL90
1992 FE	2001 XU1	2009 CQ5	2008 EA32	2012 UA34
1998 WT24	2002 FB3	Akhenaten	2008 VF	2013 QJ10
1989 UQ	2002 NN4	2002 OA22	2012 TS	2005 ES70
1998 RO1	Atira	2005 MB	2000 AC6	2014 YQ15
1998 TU3	2003 SD220	2004 SD20	2009 AM15	2005 GB120
Moshup	2004 EW	1998 SV4	2011 CP4	2009 WZ104
1999 LT7	2004 XZ130	2000 RH60	2004 DH2	2005 MO13
2001 KB67	2005 SG	2002 UA31	2005 BE	2010 JU39
1998 UP1	2005 EK70	2006 RO36	2004 GP	2015 PQ291
1999 FK21	2002 JC	2008 EV5	2004 JG6	2014 SD224
1999 JD6	2005 WJ56	1997 UH9	2009 JO2	2003 YX1
2000 CK33	2006 US216	2006 VB14	2012 JG11	2007 AG
2000 FO10	2002 AU4	2007 BG29	1998 HD14	2007 VL8
2000 QP	1999 AQ10	2005 AY28	1999 MN	2015 VO66
2000 SY2	2003 WP25	2003 EO16	2002 VV17	2016 AU8
2001 AF2	2002 MQ3	1998 ST27	2002 XY38	2004 KH15
1998 XB	2001 HY7	2003 UC20	2004 QD14	2004 MD6
1989 VA	2001 BE10	2006 CJ	2006 UY64	2015 CU
Apophis	2000 EW70	2010 KX7	2010 BB	2004 FJ29
2000 NL10	2001 FZ57	2010 NJ1	2000 ED14	2016 JP
Selqet	2003 NZ6	Duende	2005 BO1	1999 LK1
1999 HF1	2002 QY6	2000 RN77	2007 BG	2004 RX10
1999 YK5	2005 QC5	1998 SO	2008 EG	2012 LF11
2000 BD19	2001 TX44	2001 RY47	2011 BR15	2012 OD1
2000 EE14	2004 TR12	2006 WX1	2008 CN1	2007 ML24
2000 GD2	2006 WY2	2004 XN14	2004 JX20	1998 SZ27
2001 TD2	2000 AZ93	2005 YV128	2014 FK33	2002 JW15
2002 CD	2004 HC	2003 GS	2002 LT38	2002 VE68
2002 CQ11	2006 HR29	2004 FM17	2003 KO2	2004 XL14
2002 DB4	2008 JV19	2006 DS14	2003 KZ18	2005 GE60
2002 EZ16	2001 TW1	2003 HB	2006 JF42	2006 WR127
2002 GB	2004 JW20	2007 EP88	2004 KH17	2007 AA9
2004 VG64	2004 XY60	2001 HC	2006 MD12	2007 CA27
1992 BF	2000 SP43	Agni	2010 JE87	2008 EY68
1997 NC1	2001 TD45	2001 RV17	2014 KZ44	2009 BL71
1998 XE12	2004 RU10	2002 RW25	2002 LT24	2011 XE
2000 EA107	1993 VD	2011 HS4	2005 NW44	2012 DJ61
2000 WO107	2004 EU9	2002 SP	2007 LB15	2013 BE19
2001 QP153	2005 GO21	2003 TL4	2001 RU17	2015 XY378
1991 VE	2007 LL	2005 TG45	2004 SB56	2015 FV118
1994 TF2	2008 EE	2005 UL5	2006 TS7	2020 AV2

Figura Appendice: Lista di asteroidi dopo il primo step di selezione

Bibliografia e Sitografia

https://ssd.jpl.nasa.gov/sb/elem_tables.html

https://www.esa.int/Science_Exploration/Space_Science/Exploring_space

<https://solarsystem.nasa.gov/asteroids-comets-and-meteors/asteroids/in-depth/>

<https://cneos.jpl.nasa.gov/>

<https://web.mit.edu/12.000/www/m2016/finalwebsite/solutions/asteroids.html>

<https://www.spacereference.org/asteroid>

<https://neo.ssa.esa.int/>

Robert G. Jahn (1968) Physics of Electric Propulsion

R.R. Bate, D.D. Mueller, J.E. White Fundamentals of astrodynamics

Lorenzo Casalino Optimization methods for space trajectories, Dispense

Bryson, A. E., e Ho, Y.-C., Revised printing, Applied Optimal Control, Hemisphere Publishing Co., Washington, DC, 1975.

Burghes, D. N., e Graham, A., 1a ed., Introduction to Control Theory, Including Optimal Control, Ellis Horwood Ltd., Chichester, 1980