



**Politecnico
di Torino**

Politecnico di Torino

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

A.a. 2021/2022

Sessione di Laurea 04 2022

**Analisi delle criticità del metodo
dell'aggiunto per l'ottimizzazione di
forma in ambito aerodinamico**

Relatori:

Larocca Francesco

Ferrero Andrea

Candidato:

Michelotti Andrea - 278734

Ringraziamenti

Un ringraziamento scontato nella circostanza ma non nel sentimento:

Grazie ai miei relatori per aver dato fiducia al mio progetto iniziale senza avere pregiudizi.

Grazie a Mari, per essere la mia compagna di vita in tutte le circostanze.

Grazie alla mia famiglia per avermi sempre sostenuto.

Grazie a tutte le persone che sono rimaste nella mia vita nonostante la distanza.

Sommario

Data la crescente necessità di ridurre i costi in termini di consumi e di progettazione di un velivolo, l'interesse rivolto alle metodologie di ottimizzazione è cresciuto negli anni. Numerose tecniche per problemi vincolati e non sono state sviluppate, tra queste vi è quella dell'aggiunto la quale prevede la risoluzione del sistema di equazioni di governo utilizzando un vettore di variabili alternative, strettamente legate alla parametrizzazione utilizzata per la geometria considerata. È inizialmente illustrato il problema dell'*Aggiunto* per un sistema di equazioni da ottimizzare. Successivamente sono presentati gli strumenti utilizzati e la metodologia applicata.

In seguito, sono descritti i casi di studio affrontati e la definizione dei modelli di calcolo adottati per la loro risoluzione.

Dopo di ciò, è presentata la problematica della scelta dei valori dei cosiddetti *Push Factors*. Essi sono i pesi delle funzioni obiettivo e di vincolo all'interno della funzione di penalità in un generico problema di ottimizzazione. Poiché la soluzione dipende dalla scelta del loro valore e quello di ottimo è noto a posteriori, sono state effettuate le analisi di sensitività dei coefficienti allo scopo di individuare delle linee guida utili alla loro definizione a priori.

In conclusione, sono presentati i risultati ottenuti e le considerazioni tratte.

Indice

1	Introduzione	6
1.1	Problemi di ottimizzazione in ambito fluidodinamico	6
1.2	Altri ottimizzazioni in ambito fluidodinamico	9
1.2.1	Scambio termico e perdite di pressione	9
1.2.2	Ottimizzazione del flusso di massa attraverso una valvola	9
1.2.3	Ottimizzazione dei parametri del modello di turbolenza $k - \epsilon$	9
2	Il problema di ottimizzazione	11
2.0.1	Schema rappresentativo di un problema di ottimizzazione	12
2.0.2	Problemi di ottimizzazione vincolata e non	13
2.0.3	Normalizzazione delle variabili di progetto	13
2.0.4	Generico problema di ottimizzazione	13
2.0.5	Tecniche di risoluzione per problemi di ottimo vincolato	14
2.0.6	Funzioni di penalità	14
2.0.7	Moltiplicatori di Lagrange	14
2.0.8	Le condizioni di Karush-Kuhn-Tucker	15
2.0.9	Tecniche moderne : Sequential Quadratic Programming (SQP)	15
3	Metodologia	16
3.1	Strumenti utilizzati	16
3.2	Equazioni di Navier-Stokes	16
3.2.1	Equazione di conservazione della massa	17
3.2.2	Equazione di conservazione della quantità di moto	17
3.2.3	Equazione di conservazione dell'energia	17
3.2.4	Modello del materiale	18
3.2.5	Trasmissione del calore	18
3.2.6	Energia totale	18
3.2.7	Equazione di stato dei gas	19
3.3	Natura dei flussi viscosi	19
3.4	RANS: Reynolds-Averaged Navier-Stokes equations	20
3.5	Griglia di calcolo	22
3.6	Metodi MultiGrid	22
3.6.1	Cicli MultiGrid	24
3.7	Metodo dell'Aggiunto	24
3.7.1	Approccio discreto	25
3.7.2	Approccio continuo	26
3.8	Metodi di deformazione della geometria	27
3.8.1	Funzioni di bump di Hicks-Henne	27
3.8.2	Free-Form Deformation Box	28
3.9	Casi di studio	28
3.9.1	Profilo NACA 0012	29
3.9.2	Profilo RAE 2822	29
3.10	Procedura elaborato	30

3.10.1	Procedura utilizzata per l'ottimizzazione in flusso turbolento utilizzando la suite di SU2	31
3.11	Impostazioni utilizzate	32
3.11.1	Griglia di calcolo	32
3.11.2	Algoritmo di ottimizzazione	32
3.11.3	Funzioni utilizzate nei casi in esame	33
3.11.4	Parametri prestazionali considerati	33
4	NACA 0012	34
4.1	Analisi di sensitività	35
4.1.1	MultiGrid	38
4.1.2	Grid Algorithm	39
4.1.3	Linear solver	40
4.1.4	Schema numerico	41
4.1.5	Numero di CFL	42
4.1.6	Configurazione finale	43
4.1.7	Conclusioni	43
4.2	Confronto con tutorial SU2	44
4.2.1	Confronto tra le griglie di calcolo	44
4.2.2	Risultati ottenuti	44
5	RAE 2822	46
5.1	Analisi strato limite	46
5.1.1	Convergenza mesh	48
5.1.2	Numero di CFL	55
5.1.3	MultiGrid	55
5.2	Linear solver	57
5.2.1	Grid Algorithm	57
5.2.2	Analisi modello di turbolenza	59
5.2.3	Configurazione finale	60
5.2.4	Considerazioni	60
6	Studio del Push Factor	61
6.1	Caso Inviscido	62
6.1.1	AIRFOIL_THICKNESS =	62
6.1.2	AIRFOIL_THICKNESS > +5% AIRFOIL_THICKNESS < -5%	63
6.1.3	AIRFOIL_THICKNESS = @PF = 0.0001 LIFT > LIFT_originale	64
6.1.4	AIRFOIL_THICKNESS = LIFT > LIFT_originale @PF = 0.001	66
6.2	Caso viscoso	67
6.2.1	AIRFOIL_THICKNESS =	67
6.2.2	AIRFOIL_THICKNESS = @PF = 0.0001 DRAG	69
6.2.3	AIRFOIL_THICKNESS = @PF = 0.0001 LIFT > LIFT_originale	70
6.2.4	AIRFOIL_THICKNESS < +5% AIRFOIL_THICKNESS > -5%	72
6.2.5	AIRFOIL_THICKNESS < +5% @PF = 0.0001 AIRFOIL_THICKNESS > -5% @PF = 0.0001 LIFT > LIFT_originale	73
6.2.6	AIRFOIL_THICKNESS < +5% @PF = 0.0001 AIRFOIL_THICKNESS > -5% @PF = 0.0001 LIFT > LIFT_originale @PF = 0.001 MOMENT_Z = MOMENT_Z.originale	75

6.2.7	AIRFOIL_THICKNESS < +5% @PF = 0.0001	
	AIRFOIL_THICKNESS > -5% @PF = 0.0001	
	LIFT > LIFT_originale	
	MOMENT_Z = MOMENT_Z_originale @PF = 0.001	77
7	Conclusioni	79
7.1	Risultati	79
7.2	Lavori futuri	80
	Bibliografia	81

Capitolo 1

Introduzione

In un problema di ottimizzazione l'obiettivo non è la ricerca di un miglioramento rispetto ad una condizione iniziale, bensì la ricerca della migliore soluzione possibile soddisfacente tutte le condizioni al contorno imposte. In generale, ogniqualvolta si cerchi di ottenere una configurazione che minimizzi o massimizzi un particolare parametro, si fa riferimento ad un problema di ottimizzazione. Nella realtà dei fatti, la complessità di alcuni problemi è tale da non consentire il raggiungimento del valore di ottimo e, per questo motivo, si accettano miglioramenti più che utopie.

È ritenuto che il primo problema di ottimizzazione della storia sia associato alla leggenda della fondazione della città di Cartagine ad opera della regina fenicia Didone. Fuggita da Tiro nell'880 a.C., sulle coste settentrionali dell'Africa, Didone chiese a Iarba, re dei Getuli, un terreno sul quale edificare la città di Cartagine. Questi le fornì un foglio di pelle di toro dicendole che avrebbe potuto appropriarsi di tanto terreno quanto poteva racchiuderne con quella pelle. La regina decise quindi di tagliare quel foglio in tante strisce, le unì tra di loro e con la corda così ottenuta poté delineare un semicerchio affacciato sul mare. In questo modo, Didone racchiuse un'area equivalente a 15 campi da calcio.

Quello della fondazione di Cartagine è un problema *isoperimetrico*: dato un perimetro, determinare la superficie avente area massima racchiusa dallo stesso.

1.1 Problemi di ottimizzazione in ambito fluidodinamico

Per quanto riguarda i problemi di ottimizzazione in ambito fluidodinamico, è comune porre l'obiettivo di minimizzare la resistenza generata da un corpo in movimento immerso in un fluido oppure ottimizzare il miscelamento di combustibile e comburente per massimizzare una combustione.

Definito correttamente il problema di ottimizzazione da affrontare, le più grandi difficoltà ad esso associate sono la modellazione del sistema considerato, la scelta della tecnica di ottimizzazione più opportuna e la sua implementazione. In ambito fluidodinamico, gli ultimi due aspetti sono strettamente dipendenti dalla formulazione delle equazioni di governo.

Negli ultimi 20 anni, l'interesse nella ricerca di soluzioni di ottimo si è intensificata soprattutto grazie alla crescita delle potenze di calcolo disponibili. A scopo illustrativo, in Figura 1.1 è possibile osservare la ricerca condotta da D. Thévenin [1] il quale ha cercato quanti documenti relativi all'ottimizzazione CFD sono stati pubblicati utilizzando il motore di ricerca Scopus <http://www.scopus.com> tra il 1999 (anno di riferimento a cui è associato il valore di 1) e il 2006:

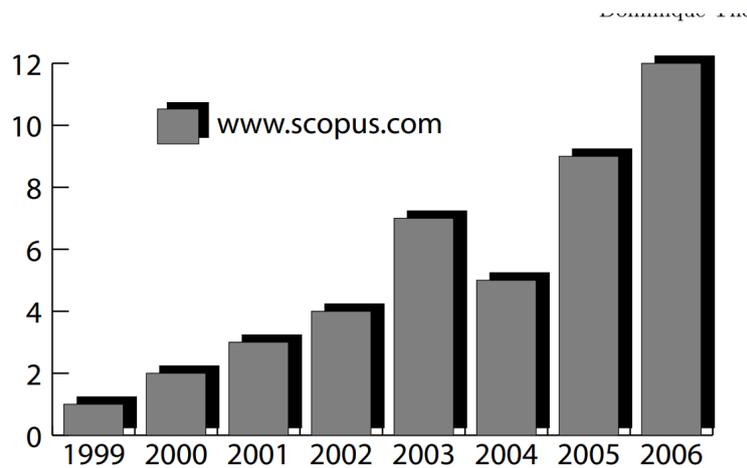


Figura 1.1: Numero di pubblicazioni relative all'ottimizzazione CFD utilizzando il motore di ricerca Scopus [1]. Il valore espresso è il rapporto rispetto al valore di riferimento (1999).

Un esempio esplicativo di un problema di ottimizzazione di forma vincolato in ambito aerodinamico è illustrato in Figura 1.2 e descritto in [2].

In questo caso è presentato il confronto tra la geometria originale e quella ottenuta dalla risoluzione del problema. I vincoli imposti sono stati:

- $C_L = 0.5$;
- $C_{M_x} = 0.17$.

In particolare, data la natura transonica del flusso attorno all'ala, la geometria finale non presenta onde d'urto su alcun lato e questo ha permesso la riduzione della resistenza dell'8.5%.

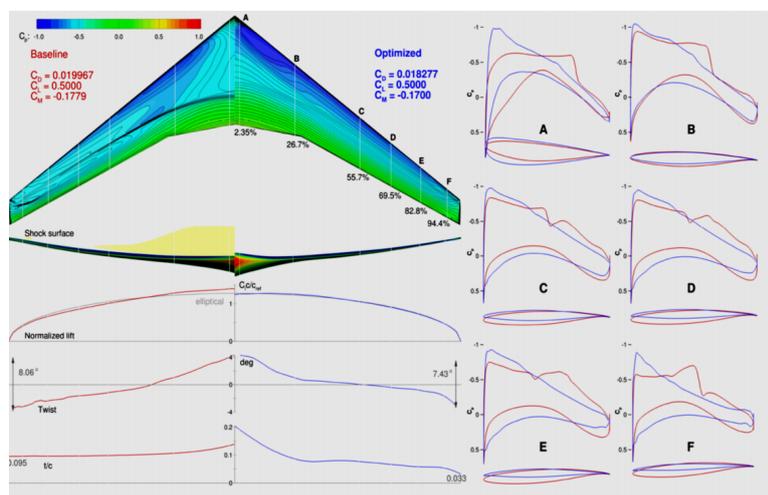


Figura 1.2: Ottimizzazione di forma dell'ala del Common Research Model [2]. Confronto tra la geometria di base e quella ottimizzata.

In [6], è possibile osservare un problema di ottimizzazione in cui la funzione obiettivo è il rapporto Portanza/Resistenza in condizioni di crociera nel caso di un missile supersonico con angolo di attacco non nullo.

Le variabili di progetto sono associate alla appendici aerodinamiche e i vincoli imposti riguardano la posizione del centro di pressione e un valore massimo di C_D pari a quello della configurazione di partenza. Quest'ultima condizione consente di ridurre lo spazio delle soluzioni

accettabili e di imporre che il rapporto Portanza/Resistenza sia ulteriormente migliorato rispetto alla configurazione iniziale.

In questo caso, la tecnica di ottimizzazione adottata è una combinazione di Reinforcement Learning [3], Transfer Learning [4] e modelli semi-empirici [5]. Questa struttura ha consentito un'elevata riduzione dei tempi di calcolo grazie all'utilizzo di modelli surrogati. Per ulteriori informazioni su queste tecniche, si faccia riferimento a [6].

In Figura 1.3 è possibile osservare il confronto tra la geometria di base e quelle ottimizzate mediante Multi-Objective Particle Swarm Optimization e Transfer Learning - Deep Deterministic Policy Gradient.

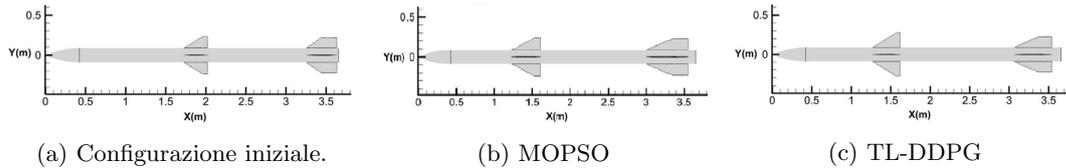


Figura 1.3: Confronto tra (a) configurazione iniziale e quelle di ottimo ottenute mediante (b) MOPSO (Multi-Objective Particle Swarm Optimization) e (c) TL-DDPG (Transfer Learning - Deep Deterministic Policy Gradient) [6].

In Figura 1.4, invece, è possibile osservare un problema di ottimizzazione applicato all'ala posteriore multi-elemento di un veicolo da competizione [7]. È presentato il confronto tra la configurazione iniziale, quella di massima deportanza, quella di minima resistenza e quella associata alla massima efficienza complessiva.

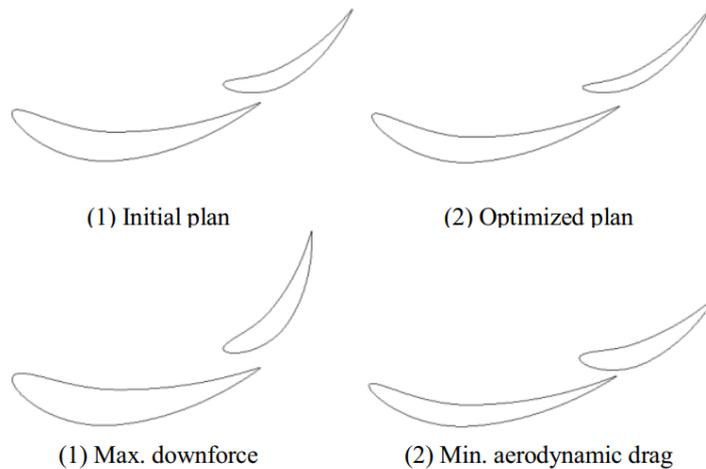


Figura 1.4: Confronto tra (1) la configurazione iniziale, (2) la configurazione di massima efficienza (ottimo), (3) la configurazione di massima deportanza e (4) la configurazione di minima resistenza [7].

In Figura 1.5 è possibile osservare il confronto tra le distribuzioni del numero di Mach relativamente alla geometria di base e a quelle ottenute durante il processo di ottimizzazione, in particolare alle iterazioni 11 e 13, nel caso dell'ottimizzazione di forma della palettatura di una turbina transonica. È possibile osservare che le geometrie ottenute durante il ciclo di ottimizzazione presentano una distribuzione molto più uniforme del numero di Mach: ciò consente di non generare onde d'urto con conseguente riduzione del coefficiente di resistenza. In questo problema è stato scelto di ottimizzare una funzione di penalità mediante combinazione di Artificial Neural Networks e Algoritmi Genetici.

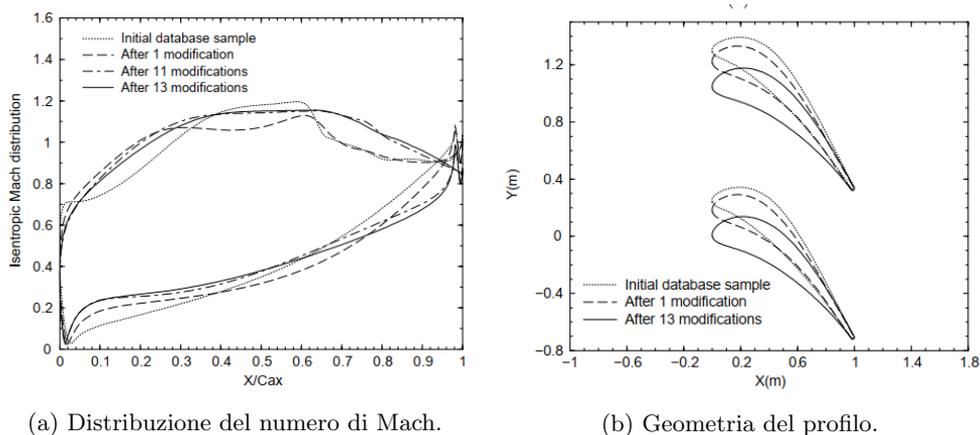


Figura 1.5: Confronto tra le distribuzioni di numero di Mach attorno alle geometrie di base e ottimizzate alle iterazioni 11 e 13 [1].

Nel seguente elaborato sono stati analizzati solamente casi 2D per ragioni di economia di calcolo. È comunque possibile estendere quanto osservato al caso 3D considerando il fatto che la complessità del problema cresce notevolmente.

Per ulteriori approfondimenti, si può fare riferimento a [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14] e [15].

1.2 Altri ottimizzazioni in ambito fluidodinamico

1.2.1 Scambio termico e perdite di pressione

In [1], è possibile osservare un problema di ottimizzazione multi-obiettivo, ovvero minimizzazione/massimizzazione di più funzioni obiettivo contemporaneamente, applicato ad uno scambiatore di calore a flussi incrociati in cui l'obiettivo è quello di massimizzare lo scambio termico e minimizzare la perdita di pressione totale.

I parametri di progetto sono la posizione dei diversi tubi di raffreddamento, le condizioni al contorno sono le temperature di ingresso ed uscita, la pressione di uscita, il numero di tubi e le condizioni di vincolo sono di natura geometrica in quanto i tubi non possono compenetrarsi.

In questo caso, la tecnica di ottimizzazione utilizzata è un Algoritmo Evolutivo, EA.

In Figura 1.6 è possibile osservare il fronte di Pareto e le possibili soluzioni appartenenti allo stesso.

Altri casi di studio analoghi a questo sono [16], [17], [18], [19], [20].

1.2.2 Ottimizzazione del flusso di massa attraverso una valvola

Un altro esempio di ottimizzazione topologica e di forma è quello della geometria della valvola di scarico di un motore endotermico al fine di massimizzare la portata di gas esausti fissato il salto di pressione [21]. In Figura 1.7 è possibile osservare il comportamento dei gas di scarico all'interno della geometria rispetto alla configurazione originale e quelle ottimizzate.

1.2.3 Ottimizzazione dei parametri del modello di turbolenza $k - \epsilon$

In conclusione, è stato scelto di presentare un problema di ottimizzazione diverso dai casi precedenti in quanto, nonostante il tema sia il modello di turbolenza $k - \epsilon$, l'obiettivo è la minimizzazione dell'errore di approssimazione delle soluzioni RANS rispetto alle DNS variando i parametri caratteristici del modello di turbolenza in esame [1].

In Figura 1.8 è possibile osservare il confronto tra i risultati ottenuti con i valori di riferimento di Wilcox (1998) e con le DNS.

Per visionare applicazioni analoghe, è possibile fare riferimento a [22], [23], [24], [25].

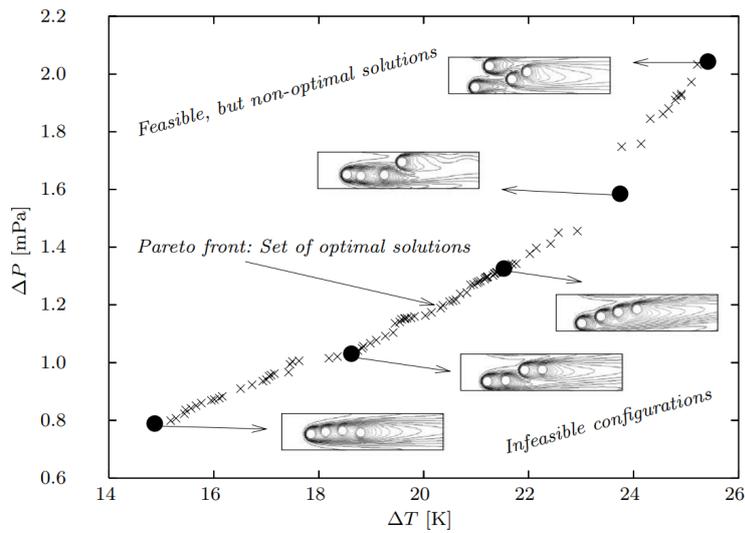


Figura 1.6: Alcune soluzioni appartenenti al fronte di Pareto dopo 20 generazioni [1].

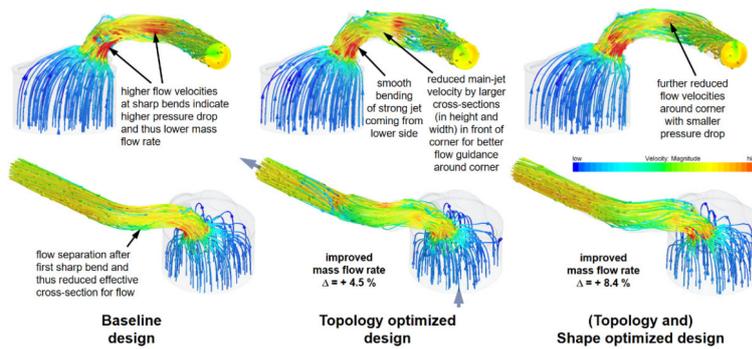
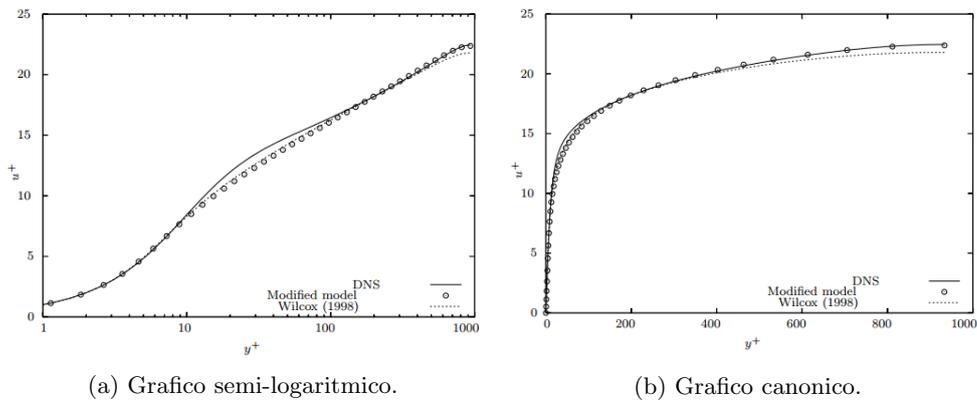


Figura 1.7: Confronto tra la geometria di base e quelle ottenute a seguito dell'ottimizzazione [21].



(a) Grafico semi-logaritmico.

(b) Grafico canonico.

Figura 1.8: Confronto tra i risultati ottenuti rispetto a quelli di riferimento (Wilcox, 1998) e DNS [1] utilizzando (a) un grafico semi-logaritmico e (b) un grafico canonico.

Capitolo 2

Il problema di ottimizzazione

Un problema di ottimizzazione è costituito da due principali componenti:

- la formulazione del modello matematico come sistema di funzioni;
- la soluzione del problema di ottimizzazione nella forma generale:

$$\min_{\{\bar{x}\}} f(\bar{x}), \quad \text{con } \bar{x} = x_1, x_2, \dots, x_n^T \in \mathfrak{R}^n \quad (2.1)$$

soggetto a:

$$g_j(\bar{x}) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (2.2)$$

$$h_j(\bar{x}) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, r \quad (2.3)$$

in cui:

- \bar{x} : vettore delle variabili di progetto;
- $f(\bar{x})$: funzione obiettivo, che deve essere minimizzata;
- $g(\bar{x})$: funzioni di vincolo di disuguaglianza;
- $h(\bar{x})$: funzioni di vincolo di uguaglianza.

La soluzione del problema di ottimizzazione è un vettore \bar{x}^* che denota la configurazione delle variabili di progetto che rendono *minima* la funzione obiettivo.

È opportuno ricordare che, nel caso in cui si volesse *massimizzare* la funzione obiettivo, bisognerebbe apportare le seguenti modifiche:

$$\max_{\{\bar{x}\}} f(\bar{x}) = - \min_{\{\bar{x}\}} -f(\bar{x}) \quad (2.4)$$

$$g_j(\bar{x}) \leq 0 \implies g_j \bar{x} \geq 0 \quad (2.5)$$

oppure, per rimanere consistenti con la scrittura generale

$$\tilde{g}_j(\bar{x}) = -g_j(\bar{x}) \quad \text{tale che} \quad \min_{\{\bar{x}\}} f(\bar{x}) \quad \text{soggetta a} \quad \tilde{g}_g(\bar{x}) \leq 0 \quad (2.6)$$

e per ottenere il massimo della funzione basta valutare $-f(\bar{x}^*)$.

In Figura 2.1 è possibile avere una classificazione dei possibili problemi di ottimizzazione a seconda delle condizioni imposte.

Per una trattazione esaustiva sull'argomento, si può fare riferimento a [26] e [27].

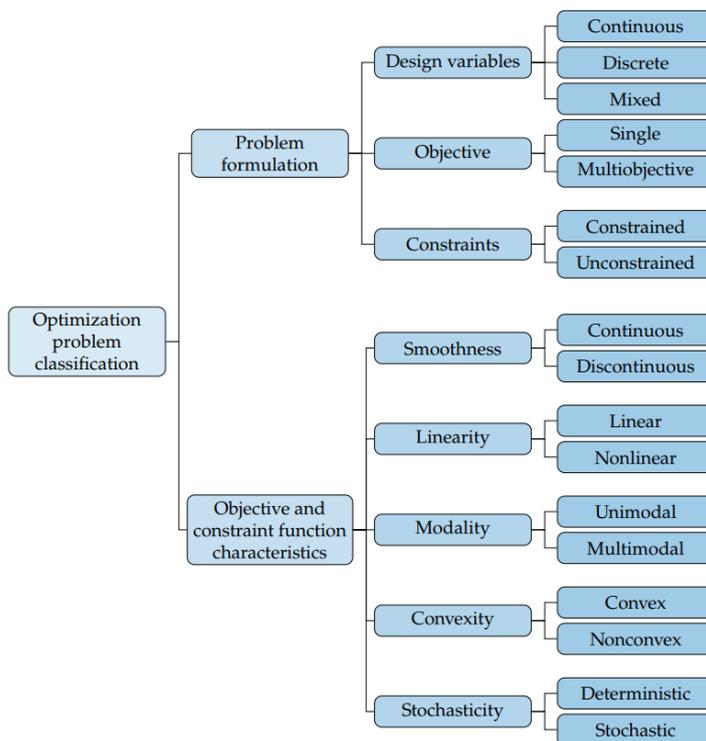


Figura 2.1: Classificazione dei problemi di ottimizzazione a seconda delle condizioni imposte [27].

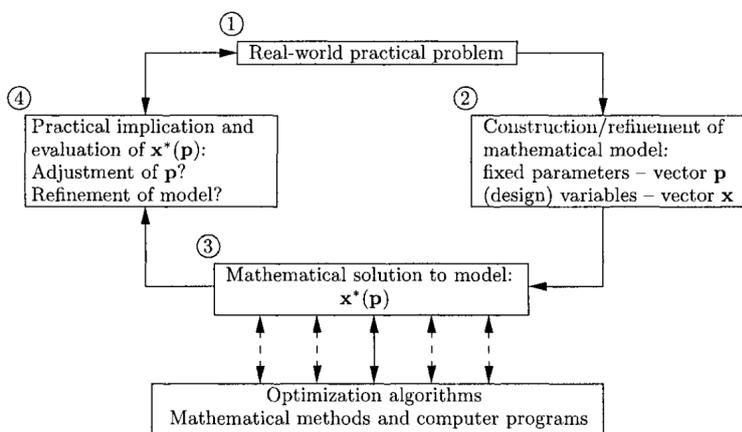


Figura 2.2: Procedura generale per la risoluzione di un problema di ottimizzazione.

2.0.1 Schema rappresentativo di un problema di ottimizzazione

Nella figura 2.2 è riportato un generico schema rappresentativo della sequenza di passaggi necessari alla risoluzione di un problema di ottimizzazione.

A partire dalla definizione del problema (1), è definito il modello matematico rappresentativo dello stesso. Esso deve essere caratterizzato dalle variabili di progetto \bar{x} e da parametri funzionali \bar{p} . Mediante opportuni algoritmi, l'obiettivo della soluzione di un problema di ottimizzazione è il calcolo delle variabili di progetto che minimizzano la funzione obiettivo $f(\bar{x})$ prefissata. La soluzione deve essere successivamente valutata nel contesto considerato ed eventualmente può essere necessario modificare i parametri descrittivi del problema in esame.

2.0.2 Problemi di ottimizzazione vincolata e non

Nella definizione del generico problema di ottimizzazione, sono state espresse le funzioni di vincolo $g(\bar{x})$ e $h(\bar{x})$. La rimozione delle stesse comporta la risoluzione di un problema non-vincolato. La distinzione tra queste due tipologie di problemi è molto importante in quanto le tecniche utilizzabili possono essere diverse. In linea generale, si può asserire che i problemi di ottimizzazione non-vincolati sono un sottoinsieme di quelli vincolati in quanto la formulazione di questi ultimi dovrebbe essere tale che la rimozione delle funzioni di vincolo non compromette la correttezza degli algoritmi utilizzati. Inoltre, problemi di ottimizzazione non-vincolati, data la diversa natura degli stessi, possono essere risolti con algoritmi più efficienti di quelli utilizzati nell'ambito dell'ottimizzazione vincolata e questi ultimi non possono essere utilizzati per quest'ultima categoria.

2.0.3 Normalizzazione delle variabili di progetto

Al fine di favorire la convergenza dell'algoritmo di ottimizzazione scelto, può essere opportuno se non necessario *normalizzare* opportunamente le variabili di progetto. Questa procedura è prevista nei casi in cui le stesse presentano ordini di grandezza molto diversi. Ciò comporterebbe una distorsione delle funzione obiettivo e una possibile insensibilità dell'algoritmo di ottimizzazione alla variazione del valore delle componenti del vettore delle variabili di progetto. Come fattori di scala si possono utilizzare dei valori di riferimento compatibili con i parametri imposti nel problema in esame. È opportuno evidenziare il fatto che ciascuna variabile deve essere scalata indipendentemente dalle altre, quindi con un fattore di scala individuale.

2.0.4 Generico problema di ottimizzazione

In un generico problema di ottimizzazione ad una variabile descrivibile nella formulazione:

$$\min_{\{x\}} f(x) \quad (2.7)$$

per trovare un punto di minimo o massimo locale o globale è necessario che la derivata della funzione obiettivo sia nulla:

$$x^* \quad \text{tale che} \quad \frac{df(x^*)}{dx} = 0. \quad (2.8)$$

Inoltre, per conoscere la natura della soluzione nel punto stesso, è necessario valutare la derivata del secondo ordine $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$ della funzione obiettivo la quale consente di riconoscere la curvatura della funzione stessa.

Estendendo questo concetto si definiscono rispettivamente il *gradiente* e la matrice *hessiana* come:

$$\bar{\nabla} f(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

$$\mathbf{H}(\bar{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}) = \bar{\nabla}^2 f(\bar{x}) \quad (2.10)$$

Al fine di ottenere un punto di minimo *locale* in \bar{x}^* è necessario che la funzione $f(\bar{x}^*)$ soddisfi le seguenti proprietà:

$$\bar{\nabla} f(\bar{x}^*) = 0 \quad (2.11)$$

$$\mathbf{H}(\bar{x}^*) \text{ sia definita positiva} \quad (2.12)$$

Queste due funzioni consentono di esprimere l'espansione in serie di Taylor della funzione obiettivo valutata in un intorno del generico vettore delle variabili di progetto:

$$f(\bar{x} + \bar{\delta}) = f(\bar{x}) + \bar{\nabla}^T f(\bar{x}) \delta + \frac{1}{2} \bar{\delta}^T \mathbf{H}(\bar{x} + \theta \bar{\delta}) \bar{\delta} \quad (2.13)$$

in cui $\bar{\delta} = \lambda \bar{u}$ con λ ampiezza del passo, \bar{u} vettore direzione lungo la quale valutare la funzione obiettivo nel punto $\hat{x}' = \hat{x} + \lambda \hat{u}$ a partire dal punto \hat{x} e $\theta \in [0, 1]$ fattore correttivo.

Utilizzando opportuni algoritmi iterativi di *discesa del gradiente* è possibile ricercare la soluzione di ottimo a partire da una configurazione iniziale del vettore delle variabili di progetto.

2.0.5 Tecniche di risoluzione per problemi di ottimo vincolato

Come illustrato in precedenza, un problema di ottimizzazione vincolato presenta funzioni di vincolo di disuguaglianza $g_j(\bar{x})$ e di uguaglianza $h_j(\bar{x})$.

Per la risoluzione di questi problemi, è necessario utilizzare delle tecniche che permettano di valutare se la soluzione ottenuta ad ogni iterazione dell'algoritmo scelto rispetti tutti i vincoli imposti. Sono di seguito illustrate alcune delle tecniche più comunemente usate.

2.0.6 Funzioni di penalità

La tecnica più semplice è il metodo della *funzione di penalità* e il problema di ottimizzazione può essere scritto come:

$$\min_{\{\bar{x}\}P(\bar{x})} \quad (2.14)$$

in cui

$$P(\bar{x}, \bar{\rho}, \bar{\beta}) = f(\bar{x}) + \sum_{j=1}^r \rho_j h_j^2(\bar{x}) + \sum_{j=1}^m \beta_j g_j^2(\bar{x}) \quad (2.15)$$

è la funzione di penalità $P(\bar{x}, \bar{\rho}, \bar{\beta})$ e i coefficienti $\bar{\rho}$ e $\bar{\beta}$ sono *parametri di penalità* definibili come:

$$\rho_j \gg 0, \quad \beta_j = \begin{cases} 0 & \text{se } g_j(\bar{x}) \leq 0 \\ \mu_j \gg 0 & \text{se } g_j(\bar{x}) > 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

2.0.7 Moltiplicatori di Lagrange

Questo approccio consente di riscrivere il problema di ottimizzazione vincolato in una formulazione non-vincolata introducendo i *moltiplicatori di Lagrange*. La funzione obiettivo è quindi sostituita dalla *funzione di Laplace* che nel caso di sole equazioni di vincolo di uguaglianza è esprimibile come:

$$L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = f(\bar{x}) + \sum_{j=1}^r \lambda_j h_j(\bar{x}) \quad (2.17)$$

con r pari al numero di funzioni di vincolo di uguaglianza. Nel caso di funzioni di disuguaglianza, la forma è la seguente:

$$L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = f(\bar{x}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(\bar{x}). \quad (2.18)$$

Con questa tecnica, la funzione obiettivo non risulta essere solo funzione del vettore delle variabili di progetto \bar{x} ma anche del vettore dei moltiplicatori di Lagrange $\bar{\lambda}$.

2.0.8 Le condizioni di Karush-Kuhn-Tucker

Nel caso di vincoli di disuguaglianza, è necessario che il problema soddisfi le condizioni di *Karush-Kuhn-Tucker*:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}^*) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\bar{x}^*) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.19)$$

$$g_j(\bar{x}^*) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (2.20)$$

$$\lambda_j^* g_j(\bar{x}^*) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (2.21)$$

$$\lambda_j^* \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (2.22)$$

assumendo che:

- $f(\bar{x}), g_j \in C^1$;
- esiste $\bar{\lambda}^*$.

Esse sono una condizione *sufficiente* affinché \bar{x}^* è di configurazione di minimo locale in un problema vincolato se $f(\bar{x})$ e $g_j(\bar{x})$ sono funzioni *convesse* per $j = 1, 2, \dots, m$.

Nella trattazione appena esposta era stata assunta l'esistenza di $\bar{\lambda}^*$. È possibile garantirla tramite la condizione di *qualifica dei vincoli* in \bar{x}^* . Essa è esprimibile come:

$$\bar{\nabla} g_j(\bar{x}^*) \bar{k} < 0, \quad \forall j | g_j(\bar{x}^*) = 0 \quad (\text{è un vincolo attivo}) \quad (2.23)$$

con $\bar{k} \in \mathfrak{R}^n$.

Questa condizione è soddisfatta sempre se almeno una delle seguenti condizioni è soddisfatta:

- se tutte le funzioni di vincolo sono convesse e almeno una configurazione delle variabili di progetto \bar{x} appartiene allo spazio delle soluzioni possibili;
- se il rango dello Jacobiano associato alle funzioni di vincolo attive in \bar{x}^* è massimo;
- tutti le funzioni di vincolo sono lineari.

2.0.9 Tecniche moderne : Sequential Quadratic Programming (SQP)

La *Sequential Quadratic Programming* è una tecnica di risoluzione di problemi di ottimizzazione vincolata basata sull'applicazione del metodo di Newton per la determinazione della soluzione di una funzione di Lagrange soddisfacente le condizioni di Karush-Kuhn-Tucker. Per ulteriori informazioni in merito, si può fare riferimento a [26].

Capitolo 3

Metodologia

3.1 Strumenti utilizzati

GMSH GMSH è un generatore di griglie di calcolo open-source per la generazione di griglie di calcolo non strutturate in 2D e 3D. [28] .

SU2 *SU²* è una suite open-source di strumenti per l'analisi e la soluzione di problemi di ottimizzazione alle derivate parziali sviluppata in C++ dal gruppo di ricerca dell'Università di Stanford e scaricabile al sito <https://su2code.github.io/download.html> [29].

É stato utilizzato come strumento principale per le simulazioni CFD, nonchè per la soluzione del problema di ottimizzazione.

Python Python è un linguaggio di programmazione di alto livello orientato agli oggetti.

Esso può essere utilizzato per interfacciare software dotati di API come GMSH, così da poter scrivere script per automatizzare i processi.

É stato utilizzato per automatizzare il problema di ottimizzazione. Gli script sono forniti assieme alla suite di SU2.

MATLAB MATLAB è un ambiente di calcolo sviluppato in C dall'azienda MathWorks.

É stato utilizzato per interfacciare tutti i programmi in un'unica architettura: dalla scrittura dei files .geo per la generazione delle mesh in GMSH all'applicazione degli script Python per la soluzione dei problemi di ottimizzazione utilizzando la suite di SU2.

-

3.2 Equazioni di Navier-Stokes

Le equazioni di Navier-Stokes sono le funzioni di governo in ambito fluidodinamico. Esse costituiscono un sistema caratterizzato dalle equazioni di conservazione di massa, della quantità di moto e dell'energia, dall'equazione del modello del materiale considerato, da quella della trasmissione del calore e dall'equazione di stato dei gas.

Le variabili coinvolte sono le seguenti:

- Ω : volume di controllo;
- S : superficie di controllo associata al volume di controllo;
- \hat{n} : vettore normale uscente dalla superficie di controllo;
- ρ : densità;
- \bar{q} : vettore velocità;
- t : tempo;

- $[\bar{\sigma}]$: tensore degli sforzi di superficie;
- \bar{f}_Ω : vettore delle forze di volume;
- \bar{q}_T : vettore dei flussi termici;
- E : energia totale.

3.2.1 Equazione di conservazione della massa

Forma integrale

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \int_{\Omega} \rho d\Omega + \int_S \rho \bar{q} \cdot \hat{n} dS \quad (3.1)$$

Forma differenziale conservativa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot \rho \bar{q} = 0 \quad (3.2)$$

3.2.2 Equazione di conservazione della quantità di moto

Forma integrale

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \bar{q} dv = - \int_S \rho [\bar{q}\bar{q}] \cdot \hat{n} dS - \int_S [\bar{\sigma}] \cdot \hat{n} ds + \int_{\Omega} \rho \bar{f}_\Omega d\Omega \quad (3.3)$$

Forma differenziale conservativa

$$\rho \frac{d\bar{q}}{dt} = - \bar{\nabla} \cdot [\bar{\sigma}] + \rho \bar{f}_v \quad (3.4)$$

3.2.3 Equazione di conservazione dell'energia

Forma integrale

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho E d\Omega = - \int_S \rho E \bar{q} \cdot \hat{n} dS + \int_S [\bar{\sigma}] \cdot \hat{n} \cdot \bar{q} dS + \int_{\Omega} \rho \bar{f}_\Omega \cdot \bar{q} d\Omega - \int_S \bar{q}_T \cdot \hat{n} dS \quad (3.5)$$

Forma differenziale conservativa

$$\rho \frac{dE}{dt} = \bar{\nabla} \cdot ([\bar{\sigma}] \cdot \bar{q}) + \rho \bar{f}_\Omega \cdot \bar{q} - \bar{\nabla} \cdot \bar{q}_T \quad (3.6)$$

Equazione conservazione	# Eq.	Inc. presenti	Inc. aggiunte	# Inc. aggiunte
Massa	1		ρ, \bar{q}	4
Quantità di moto	3	ρ, \bar{q}	$[\bar{\sigma}]$	6
Energia	1	$\rho, \bar{q}, [\bar{\sigma}]$	E, \bar{q}_T	4

Tabella 3.1: Confronto tra il numero di equazioni e quello di variabili nel sistema di equazioni di conservazione.

per un totale di 5 equazioni in 14 incognite.

Analizzando il sistema considerato, si può osservare come esso non sia determinato. Di conseguenza è necessario introdurre funzioni aggiuntive per chiudere il problema.

3.2.4 Modello del materiale

Per quanto riguarda la natura del materiale fluido considerato, si può fare riferimento a due modelli generali differenziati in funzione della sua risposta rispetto agli sforzi di taglio applicati allo stesso.

In particolare, si distinguono i flussi *newtoniani* in cui la variazione della velocità è linearmente proporzionale allo sforzo tagliente applicato e il coefficiente è la viscosità del fluido in esame, e quelli *non-newtoniani* in cui tale dipendenza è non-lineare in quanto la viscosità è funzione dello sforzo stesso.

Il modello di fluido newtoniano generale è applicato all'interno del tensore degli sforzi di superficie $[\bar{\sigma}]$:

$$[\bar{\sigma}] = -p[\bar{I}] + [\bar{\tau}] \quad (3.7)$$

$$\tau_{ij} = \mu \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] - \frac{2}{3} \delta_{ij} \bar{\nabla} \cdot \bar{q}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3.8)$$

con μ che è la viscosità cinematica del fluido e δ_{ij} è l'operatore di Kronecker.

Introducendo questo modello, il numero di equazioni e variabili si modifica nel seguente modo:

Equazione	# Eq.	Inc. presenti	Inc. aggiunte	# Inc. aggiunte
Modello del materiale	6	$[\bar{\sigma}], p, \bar{q}$	ν	1

Tabella 3.2: Quantitativo di equazioni e variabili aggiunte al sistema introducendo il modello di fluido newtoniano.

3.2.5 Trasmissione del calore

Si considera l'equazione di trasmissione del calore formulata da Fourier:

$$\bar{q}_T = -\nabla(kT) \quad (3.9)$$

in cui k è la conducibilità termica del materiale considerato.

Equazione	# Eq.	Inc. presenti	Inc. aggiunte	# Inc. aggiunte
Trasmissione del calore	3	\bar{q}_T, T	k	1

Tabella 3.3: Quantitativo di equazioni e variabili aggiunte al sistema introducendo il modello di trasmissione del calore.

3.2.6 Energia totale

L'energia totale del fluido può essere scomposta nella sommatoria dell'energia interna e in quella cinetica:

$$E = e + \frac{q^2}{2} \quad (3.10)$$

con e rappresentante l'energia interna e $\frac{q^2}{2}$ l'energia cinetica entrambe espresse per unità di massa. In particolare:

$$e = c_v T = \frac{1}{\gamma - 1} RT \quad (3.11)$$

in cui c_v è il calore specifico a volume costante, γ è il coefficiente di dilatazione adiabatica ed R è la costante del gas considerato.

Da ciò si può osservare che:

$$E = e + \frac{q^2}{2} = \frac{1}{\gamma - 1} RT + \frac{q^2}{2}. \quad (3.12)$$

in cui non sono presenti variabili aggiuntive.

Equazione	# Eq.	Inc. presenti	Inc. aggiunte	# Inc. aggiunte
Energia totale	1	T, q		0

Tabella 3.4: Quantitativo di equazioni e variabili aggiunte al sistema introducendo l'equazione dell'energia totale.

3.2.7 Equazione di stato dei gas

L'ultimo modello introdotto è quello associato ai gas:

$$\frac{p}{\rho} = RT. \quad (3.13)$$

Come nel caso precedente, anche questo modello non introduce variabili al sistema.

In conclusione, un riassunto del sistema delle equazioni di Navier-Stokes in termini di equazioni e variabili:

Equazione	# Eq.	Inc. presenti	Inc. aggiunte	# Inc. aggiunte
Massa	1		ρ, \bar{q}	4
Quantità di moto	3	ρ, \bar{q}	$[\bar{\sigma}]$	6
Energia	1	$\rho, \bar{q}, [\bar{\sigma}]$	E, \bar{q}_T	4
Modello del materiale	6	$[\bar{\sigma}], p, \bar{q}$	ν	1
Trasmissione del calore	3	\bar{q}_T, T	k	1
Energia totale	1	T, q		0
Stato dei gas	1	p, ρ, T		0
Totale	16			16

Tabella 3.5: Quantitativo di equazioni e variabili del sistema di equazioni di Navier-Stokes.

3.3 Natura dei flussi viscosi

Data la necessità di trattare l'ottimizzazione di forma in ambito aerodinamico nel contesto di flussi viscosi, è opportuno illustrare brevemente il comportamento di tale tipologia di condizioni operative. Per ulteriori informazioni si può fare riferimento a [30], [31], [32].

Il comportamento di un flusso viscoso può essere stimato utilizzando il *numero di Reynolds*. Esso è un fattore adimensionale che fornisce una misura del rapporto tra le forze di inerzia associate ai flussi convettivi e le forze viscosive agenti nel flusso stesso:

$$Re = \frac{\rho L q}{\mu} \quad Re \in [0, \text{inf}) \quad (3.14)$$

con L la distanza dal punto di origine dello strato limite sulla superficie del corpo considerata.

Il numero di Reynolds è nullo quando il flusso è in quiete.

Da prove sperimentali si può osservare come esista un valore *critico* del numero di Reynolds Re_{cr} che funge da spartiacque tra le due strutture caratteristiche di un flusso viscoso, quella laminare e quella turbolenta.

Nella condizione laminare, il flusso presenta una struttura ordinata e ben definita mentre in quella turbolenta il flusso si presenta caotico e intrinsecamente non-stazionario nonostante la possibile stazionarietà delle condizioni al contorno applicate. Ciò è dovuto alla generazione di strutture vorticosi di diverse dimensioni e natura.

Le strutture vorticosi generate a seguito di gradienti di pressione all'interno del campo di moto hanno come conseguenza la generazione di gradienti di velocità e annesso scambio di quantità di moto tra particelle. Come osservato nella definizione del modello del fluido 3.2, gli sforzi di taglio dipendono dai gradienti di velocità. In particolare, oltre agli sforzi di taglio dovuti al flusso viscoso in prossimità della superficie del corpo considerato, si generano delle tensioni taglienti aggiuntive dovute alla natura delle strutture vorticosi attorno al corpo stesso.

Per agevolare l'analisi di questo comportamento casuale, è possibile effettuare la *decomposizione di Reynolds* 3.1 la quale consente di analizzare la variazione temporale di una generica grandezza $u(t)$ associata al flusso in esame come sovrapposizione di due funzioni, una costante U data dal valore medio della grandezza nel tempo e una componente di fluttuazione $u'(t)$ attorno a tale media:

$$u(t) = U + u'(t) \quad (3.15)$$

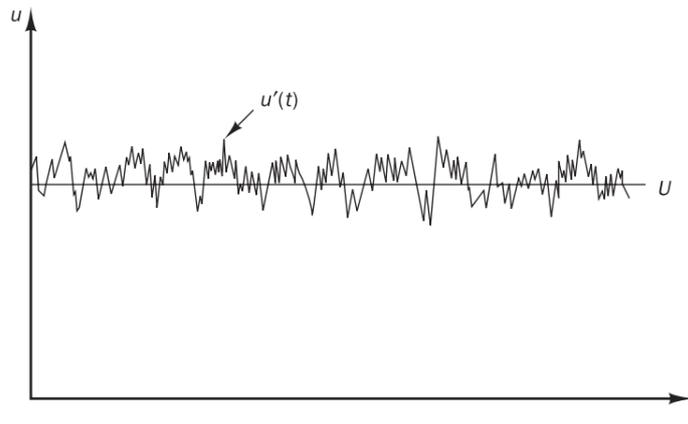


Figura 3.1: Andamento della grandezza $u(t)$ come sovrapposizione di U e $u'(t)$ [30].

È opportuno osservare che la componente di fluttuazione, data la sua natura, presenta un valore medio nel tempo nullo.

Al fine di studiare questa particolare tipologia di flussi, sono stati sviluppati diversi metodi di modellazione. In particolare le equazioni RANS (Reynolds-Averaged Navier-Stokes), le LES (Large Eddy Simulations) e le DNS (Direct Numerical Simulations). Per ulteriori dettagli si può fare riferimento a [30], [32].

Questi metodi sono stati elencati in funzione della fedeltà e del costo computazionale richiesto in ordine crescente. Le simulazioni in flusso viscoso effettuate in questo elaborato sono state realizzate utilizzando le equazioni RANS.

3.4 RANS: Reynolds-Averaged Navier-Stokes equations

Di seguito è illustrata la derivazione dell'equazione di trasporto mediata nel tempo utilizzando la decomposizione di Reynolds associata alle generiche grandezze scalari ϕ e ψ e quella vettoriale \mathbf{a} . Per evitare confusione con i simboli di vettore e media temporale, in questa sezione si è scelto

di rappresentare le grandezze vettoriali evidenziandole in grassetto piuttosto che utilizzando il tratto verticale presente nel resto del documento.

Relativamente alla natura del flusso considerato, per semplicità è fatto riferimento ad un flusso incompressibile.

La decomposizione di Reynolds applicata alla generica funzione scalare ϕ è esprimibile come segue:

$$\phi = \Phi + \phi' \quad (3.16)$$

Ricordando le seguenti proprietà:

$$\overline{\phi'} = 0, \quad \overline{\phi} = \frac{1}{\Delta t} \int_t \phi dt = \Phi, \quad \frac{\overline{\partial \phi}}{\partial s} = \frac{\partial \Phi}{\partial s}, \quad \overline{\int \phi ds} = \int \Phi ds$$

$$\overline{\phi + \psi} = \Phi + \Psi, \quad \overline{\phi \psi} = \Phi \Psi + \overline{\phi' \psi'}, \quad \overline{\phi \Psi} = \Phi \Psi, \quad \overline{\phi' \Psi} = 0$$

$$\overline{\nabla \cdot \mathbf{a}} = \nabla \cdot \mathbf{A}, \quad \overline{\nabla \cdot (\phi \mathbf{a})} = \nabla \cdot (\overline{\phi \mathbf{a}}) = \nabla \cdot (\Phi \mathbf{A}) + \nabla \cdot (\overline{\phi' \mathbf{a}'})$$

$$\overline{\nabla \cdot \nabla \phi} = \nabla \cdot \nabla \Phi$$

è possibile andare a valutare l'equazione mediata nel tempo utilizzando la decomposizione di Reynolds della componente nella direzione \hat{i} dell'equazione vettoriale della conservazione della quantità di moto.

In particolare:

$$u = U + u', \quad \bar{q} = \bar{Q} + \bar{q}', \quad p = P + p'$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (u \mathbf{q}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla \cdot \nabla u \quad (3.17)$$

↓

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot (U \mathbf{Q}) + \nabla \cdot (u' \mathbf{q}') = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \nabla \cdot \nabla U \quad (3.18)$$

Confrontando le equazioni 3.17 e 3.18, si può osservare come, a seguito della mediazione del tempo e della decomposizione di Reynolds, sia comparso un termine aggiuntivo:

$$\nabla \cdot (u' \mathbf{q}') = \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{\rho u'^2}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{\rho u'v'}}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{\rho u'w'}}{\partial z} \quad (3.19)$$

il quale è associato al trasporto convettivo di quantità di moto dovuto ai vortici generati dalla struttura turbolenta del flusso.

Inoltre, i vari termini della sommatoria sono le componenti di sforzo normale e di taglio aggiuntive date dalla natura turbolenta del flusso proiettate nella direzione \hat{i} :

$$\tau_{xx} = \frac{\partial \overline{\rho u'^2}}{\partial x}, \quad \tau_{xy} = \frac{\partial \overline{\rho u'v'}}{\partial y}, \quad \tau_{xz} = \frac{\partial \overline{\rho u'w'}}{\partial z}, \quad (3.20)$$

Il tensore ad esso associato costituisce il *tensore degli sforzi di Reynolds* le cui componenti sono sempre non-nulle nonostante siano medie temporali di prodotti di variabili fluttuanti. Questo perchè, nonostante la componente fluttuante abbia media temporale nulla, la struttura dei vortici garantisce la non-nullità degli stessi. In aggiunta a ciò, in un flusso turbolento l'intensità degli sforzi di Reynolds è maggiore della resistenza di attrito viscoso dovuta allo strato limite attorno al corpo considerato.

3.5 Griglia di calcolo

Al fine di risolvere le equazioni differenziali di governo, è necessario suddividere il dominio fisico continuo in un insieme discreto di punti di controllo. Collegando opportunamente questi punti, è possibile definire dei volumi o *celle* attraverso le quali è possibile calcolare i flussi delle variabili di interesse.

Da un punto di vista discreto, le derivate parziali presenti nelle equazioni differenziali considerate possono essere approssimate a derivate su intervalli finiti considerando la variazione del valore delle variabili di interesse nei punti della griglia di calcolo rispetto alla distanza tra gli stessi.

A tal proposito, i principali schemi numerici utilizzati per il loro calcolo si possono suddividere in tre principali categorie:

- Differenze Finite;
- Volumi Finiti;
- Elementi Finiti.

Per la risoluzione di problemi in ambito fluidodinamico, il metodo prevalentemente utilizzato è quello dei Volumi Finiti. Esso consente la risoluzione delle equazioni di governo in forma integrale (equazione 3.2) suddividendo il dominio in un numero finito di elementi arbitrari.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U d\Omega + \int_S \bar{F} \cdot \bar{n} dS + \int_{\Omega} q_{\Omega} d\Omega \quad (3.21)$$

Figura 3.2: Equazione generale in forma integrale in cui U è la variabile di interesse, F è il flusso della stessa e q_{Ω} è un termine di sorgente.

Tanto più la griglia di calcolo è raffinata, tanto maggiore è l'accuratezza della soluzione ricercata.

Utilizzando il software GMSH, le griglie di calcolo generabili sono sempre di tipo *non strutturato*, quindi i nodi costituenti la tassellazione sono numerati ma non in una sequenza predefinita. Valutando solamente problemi bidimensionali, le possibili forme assumibili dalle celle sono quelle triangolare e quadrilatera.

3.6 Metodi MultiGrid

Nella figura 3.3 è diagrammato l'errore compiuto nella valutazione della componente u della velocità in un flusso alla Couette all'interno di una cavità [30]. È possibile notare che la velocità di convergenza della soluzione all'incrementarsi della finezza della griglia di calcolo utilizzata tende a ridursi a meno di una fase di transitorio iniziale.

Sia dato un generico sistema di equazioni da risolvere mediante metodo iterativo

$$[\bar{A}]\bar{x} = \bar{b} \quad (3.22)$$

in cui \bar{x} è la soluzione esatta.

Durante una generica iterazione del metodo scelto si ottiene una soluzione y tale che:

$$[\bar{A}]\bar{y} = \bar{b} - \bar{r} \quad (3.23)$$

in cui \bar{r} è il vettore dei residui. È altresì possibile definire il vettore dell'errore commesso tra la soluzione reale e quella associata alla generica iterazione come:

$$\bar{e} = \bar{x} - \bar{y}. \quad (3.24)$$

Combinando 3.23 e 3.24, si ottiene:

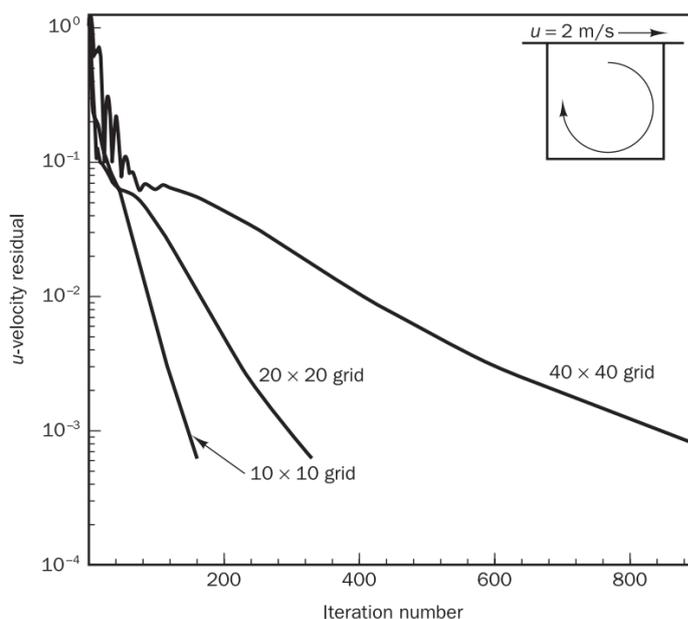


Figura 3.3: Andamento dei residui sulla componente u della velocità all'aumentare del numero di iterazioni. Il problema considerato è la descrizione del campo di moto associato ad un flusso alla Couette in una cavità [30].

$$[\bar{A}]\bar{e} = \bar{r} \quad (3.25)$$

che associa l'errore con il residuo alla generica iterazione.

È possibile riscrivere il sistema in una forma che consente di evidenziare la relazione tra l'errore calcolato tra due iterazioni successive:

$$\bar{e}^{(k)} = [\bar{T}]\bar{e}^{(k-1)} + \bar{c} \quad (3.26)$$

in cui gli elementi T_{ij} corrispondono a A_{ij} e il $\bar{c} = \frac{r_i}{A_{ii}}$.

L'equazione 3.24 permette di osservare la propagazione dell'errore durante il susseguirsi delle iterazioni.

Effettuando l'analisi di stabilità di Neumann è possibile esprimere l'errore commesso in serie di Fourier. In questo modo, esso è dato dalla sovrapposizione di forme d'onda a diversa pulsazione e lunghezza d'onda. È quindi possibile correlare queste ultime alla dimensione delle celle della griglia di calcolo utilizzata. In particolare, tanto più è corta la lunghezza d'onda, tanto più la componente dell'errore ad essa associata tenderà a smorzarsi e quindi alla convergenza della soluzione.

Il problema delle griglie di calcolo più raffinate dipende dalla variabilità nella dimensione delle diverse celle costituenti la griglia di calcolo in quanto l'errore associato a quelle più grandi presenta delle componenti d'onda con lunghezza superiore e quindi minore velocità di convergenza.

Per questo motivo sono stati introdotti i metodi MultiGrid i quali consentono di accelerare la convergenza della soluzione cercata iterando il problema utilizzando griglie di calcolo a diversa risoluzione. Questo consente di ridurre la variabilità delle lunghezze d'onda all'interno della stessa griglia di calcolo in quanto, in una grossolana, la differenza tra le dimensioni delle celle è meno marcata rispetto ad una raffinata.

Sebbene questo metodo richieda un numero maggiore di iterazioni, poiché il costo computazionale associato ad una griglia di calcolo grossolana è minore di quello di una raffinata e il guadagno ottenuto in velocità di convergenza complessiva può essere maggiore, questi metodi possono essere un valido strumento per la soluzione di un problema complesso.

Una procedura elementare di questo metodo può essere così suddivisa:

- Iterazione sulla griglia più raffinata;
- Restrizione (*Restriction*);
- Prolungamento (*Prolongation*);
- Correzione della soluzione;
- Ulteriori iterazioni;

Iterazione sulla griglia più raffinata Iterazione della soluzione senza raggiungere la convergenza della stessa. In questa fase l'obiettivo è quello di ridurre le componenti dell'errore con le più basse lunghezze d'onda.

Restrizione (*Restriction*) La soluzione ottenuta sulla griglia di calcolo più raffinata è utilizzata per ricercare la soluzione su una più grossolana. In questo modo, le componenti dell'errore a cui erano associate le lunghezze d'onda più grandi presentano dimensioni comparabili a quelle delle celle della nuova griglia di calcolo. Questo le rende corte, quindi maggiormente smorzate. Data la diversa dimensione del sistema di equazioni associato, è necessario effettuare un'opportuna interpolazione rispetto a quello precedente. In questa fase, l'attenzione non è posta direttamente sulla soluzione y del problema, bensì si utilizza la formulazione espressa in 3.25.

Prolungamento (*Prolongation*) L'errore ottenuto sulla griglia di calcolo più grossolana è trasferito su quella più fine utilizzando un'opportuna interpolazione.

Correzione della soluzione L'errore trasferito durante la fase di Prolungamento è utilizzato per correggere la soluzione ottenuta sulla griglia più raffinata sommandolo alla stessa.

Ulteriori iterazioni Iterazioni aggiuntive per incrementare la convergenza della soluzione ricercata utilizzando quella adattata come valore di partenza.

In Figura 3.4 è possibile notare la differenza tra un approccio diretto e l'utilizzo del MultiGrid. In questo caso il problema considerato è la conduzione in un'asta isolata con generazione di calore interna [30].

3.6.1 Cicli MultiGrid

È possibile combinare i vari passaggi del metodo MultiGrid in diversi modi, variandone l'ordine, il numero di iterazioni per ciascuno di essi e il numero di griglie grossolane utilizzate (il *livello* dello schema).

In particolare, i cicli più utilizzati sono quello a V, a W, ad F e il Full Multi Grid. Essi sono illustrati in Figura 3.5.

3.7 Metodo dell'Aggiunto

La metodologia dell'Aggiunto è utilizzata per il calcolo del gradiente della funzione obiettivo rispetto alla sensitività della geometria alle variazioni delle variabili di progetto nell'ambito di un problema di ottimizzazione [1].

Sono descritte due formulazioni, quella discreta e quella continua: la principale differenza nei due approcci è che nel primo le derivate sono calcolate come valori medi.

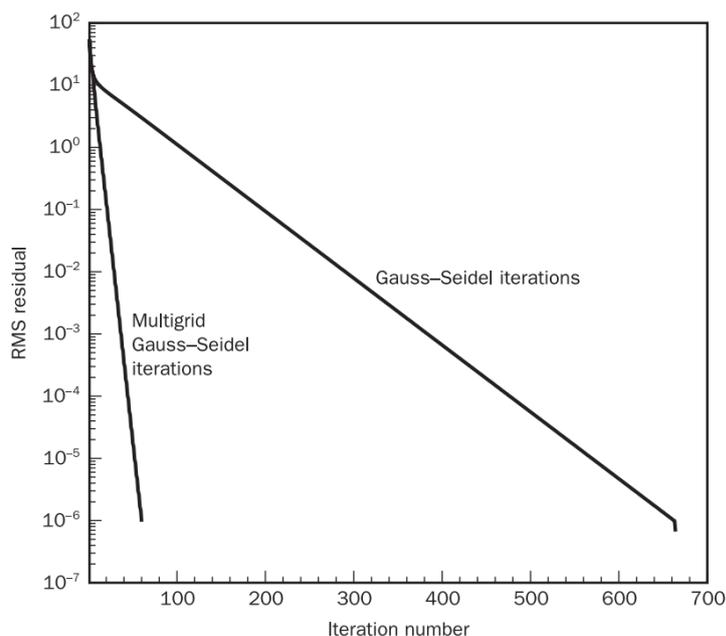


Figura 3.4: Andamento dello scarto quadratico medio dei residui in un problema di conduzione in un'asta isolata con generazione di calore interna [30].

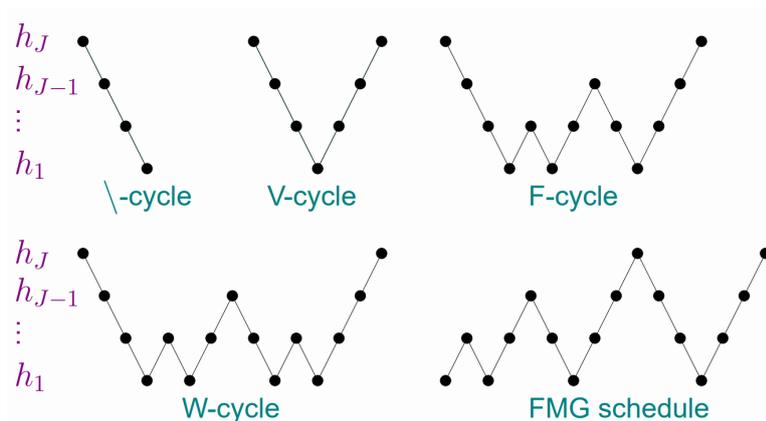


Figura 3.5: Cicli V, W, F e Full [33].

3.7.1 Approccio discreto

Data una funzione obiettivo F , se b_i è la generica variabile di design con $i = 1, \dots, N$ ed N sia il numero delle variabili in esame, la derivata totale della funzione obiettivo risulta essere:

$$\frac{dF}{db_i} = \frac{\partial F}{\partial b_i} + \frac{\partial F}{\partial U_k} \frac{\partial U_k}{\partial b_i}. \quad (3.27)$$

Sia $R_m(U) = 0$ con $m = 1, \dots, M$ l'equazione rappresentante i residui (teorici) associata ad un generico punto m della griglia di calcolo e U la soluzione fluidodinamica associata alla geometria considerata. Applicando la definizione della derivata totale alla generica equazione dei residui, data la costanza degli stessi 3.28, si ottiene:

$$\frac{dR_m}{db_i} = \frac{\partial R_m}{\partial b_i} + \frac{\partial R_m}{\partial U_k} \frac{\partial U_k}{\partial b_i} = 0. \quad (3.28)$$

Combinando le due equazioni 3.27 ed 3.28, introducendo il vettore delle variabili dell'Aggiunto Ψ_m con $m = 1, \dots, M$ si ottiene:

$$\frac{dF}{db_i} = \frac{\partial F}{\partial b_i} + \Psi_m \frac{\partial R_m}{\partial b_i} \quad (3.29)$$

con

$$\Psi_m = -\frac{1}{\frac{\partial R_m}{\partial U_k}} \frac{\partial F}{\partial U_k}. \quad (3.30)$$

Da 3.30 è possibile ricavare il sistema di equazioni dell'Aggiunto 3.31 di cui Ψ_m è soluzione.

$$\frac{\partial F}{\partial U_k} + \Psi \frac{\partial R_m}{\partial U_k} = 0 \quad (3.31)$$

Sempre da 3.30 è possibile osservare che tale formulazione prevede la risoluzione di una sola equazione, rendendola indipendente dal numero di variabili di progetto N .

3.7.2 Approccio continuo

Nel caso della formulazione continua, le equazioni alle derivate parziali dell'Aggiunto sono prima scritte in forma integrale, successivamente discretizzate e infine risolte.

Come derivato nel caso precedente, in questa trattazione il gradiente della funzione obiettivo F rispetto alla generica variabile di progetto b_i è:

$$\frac{\partial F}{\partial b_i} = \int_{\Omega} \gamma \frac{\partial U}{\partial b_i} d\Omega + \int_S \zeta B_1 \frac{\partial U}{\partial b_i} dS + \frac{\partial F_g}{\partial b_i} \quad (3.32)$$

con:

- $\gamma, \zeta = f(\text{geometria, variabili di stato});$
- $\frac{\partial U_k}{\partial b_i}$: sensitività della geometria rispetto alle variabili di progetto;
- B_1 : operatore differenziale;
- $\frac{\partial F_g}{\partial b_i}$: gradiente della funzione obiettivo rispetto alle variabili di progetto;
- Ω : dominio fluido;
- S : contorno del dominio fluido ($\partial\Omega$).

Per quanto riguarda il termine $\frac{\partial U}{\partial b_i}$, la sua espressione può essere ottenuta a partire dalle condizioni al contorno applicate a Ω e S :

$$L \frac{\partial U}{\partial b_i} = \phi, \quad \text{su } \Omega \quad (3.33)$$

$$B_2 \frac{\partial U}{\partial b_i} = \epsilon, \quad \text{su } S \quad (3.34)$$

in cui ϕ e ϵ sono funzioni note e L e B_2 operatori noti.

Introducendo le variabili dell'Aggiunto Ψ calcolate dalla discretizzazione e dalla soluzione delle equazioni alle derivate parziali dell'Aggiunto 3.34, 3.35, il gradiente della funzione obiettivo rispetto alla generica variabile di progetto può essere espresso come 3.37.

$$L^* \Psi = \gamma \quad (3.35)$$

$$B_2^* \Psi = \zeta \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial F}{\partial b_i} = \int_{\Omega} \Psi \phi d\Omega + \int_S B_1^* \Psi \epsilon dS + \frac{\partial F}{\partial b_i}. \quad (3.37)$$

Combinando 3.32 e 3.37 si ottiene una formulazione in cui non è presente il gradiente della funzione obiettivo rispetto alla sensitività della griglia di calcolo.

3.8 Metodi di deformazione della geometria

Poichè il metodo dell'Aggiunto prevede una diversa definizione delle variabili di progetto rispetto a quelle originali, l'analisi di sensitività della geometria deve essere svolta in funzione del nuovo sistema. Per questo motivo è necessario definire sia funzioni di mappatura per ricostruire la geometria considerata, sia per deformarla al fine di valutarne la sensitività.

Per quanto riguarda la fase ricostruzione, la suite di SU2 prevede l'utilizzo delle curve di Bézier mentre per quella di deformazione si possono utilizzare due tecniche distinte, le funzioni di *bump* di Hicks-Henne e la *Free-Form Deformation Box*.

In questa trattazione, si è fatto uso solamente della prima tecnica mentre la seconda è delegata agli studi futuri.

3.8.1 Funzioni di bump di Hicks-Henne

Esse sono funzioni analitiche che sommano alla geometria originale delle distribuzioni di deformazioni al fine di alterare la geometria considerata.

Considerando il caso bidimensionale, esse sono espresse come:

$$y = y_0 + \sum_{i=1}^N b_i(x) \tag{3.38}$$

$$b_i(x) = a_i [\sin(\pi x \frac{\log(0.5)}{\log h_i})]^{t_i}, \quad x \in [0,1] \tag{3.39}$$

in cui:

- x : coordinata spaziale adimensionale;
- y : funzione di forma della geometria deformata;
- y_0 : funzione di forma della geometria originale;
- N : numero di funzioni applicate;
- $b_i(x)$: funzioni di base;
- a_i : ampiezza della funzione di base i -esima;
- h_i : posizione del punto di massimo della deformazione;
- t_i : larghezza della deformazione;

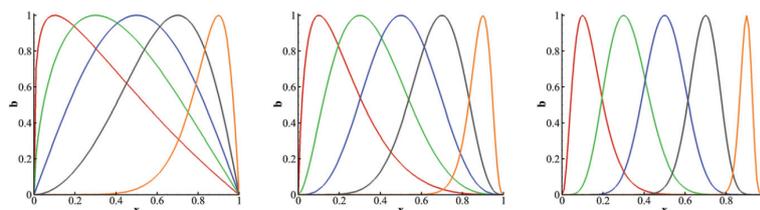


Figura 3.6: Distribuzioni delle deformazioni al variare della larghezza della deformazione t_i fissati $N = 5$, $a_i = 1$ e h_i rispetta una distribuzione uniforme nell'intervallo $[0.1, 0.9]$ [34].

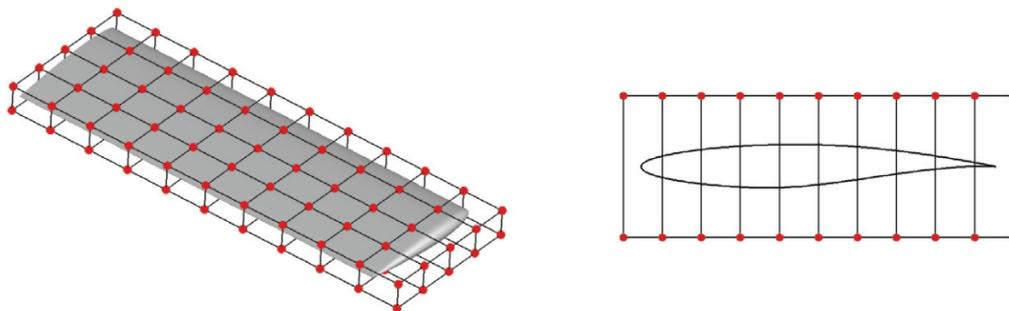


Figura 3.7: Vista della FFD per un caso tridimensionale e per quello planare. I punti evidenziati sono i punti di controllo, le nuove variabili di progetto [34].

3.8.2 Free-Form Deformation Box

Il concetto alla base di questa metodologia è codificare univocamente la forma di un oggetto fisico all'interno di un parallelepipedo caratterizzato da una griglia di punti di controllo (le nuove variabili di progetto) uniforme in modo tale che, nell'ipotesi di corpi elastici, ad una deformazione applicata al volume di controllo ne corrisponda una e una sola associata al corpo al suo interno.

A partire dalla disposizione dei punti di controllo sul volume di riferimento, è possibile ricostruire la geometrie originali applicando funzioni interpolanti, in particolare quelle di Bézier.

Nel caso più generale, la geometria X è esprimibile come:

$$X(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n P_{i,j,k} B_i^l(\xi) B_j^m(\eta) B_k^n(\zeta) \quad (3.40)$$

con:

- l, m, n gradi della funzione di Bézier;
- $\xi, \eta, \zeta \in [0,1]$ coordinate parametriche;
- $P_{i,j,k}$ le coordinate cartesiane dei punti di controllo (i, j, k) ;
- X le coordinate cartesiane (x, y, z) associate alle coordinate (ξ, η, ζ) del volume di controllo;
- B_i^l, B_j^m, B_k^n polinomi di Bernstein nella forma generica:

$$B_i^l(\xi) = \frac{l!}{i!(l-i)!} \xi^i (1-\xi)^{l-i} \quad (3.41)$$

In questo caso, il numero di variabili di progetto dipende dal grado del polinomio desiderato. Nel caso di problemi bidimensionali, il perimetro di controllo risulta essere un rettangolo.

Per la definizione di linee guida per affrontare un problema bidimensionale di ottimizzazione di profili alari utilizzando queste due metodologie, si può fare riferimento a [34].

3.9 Casi di studio

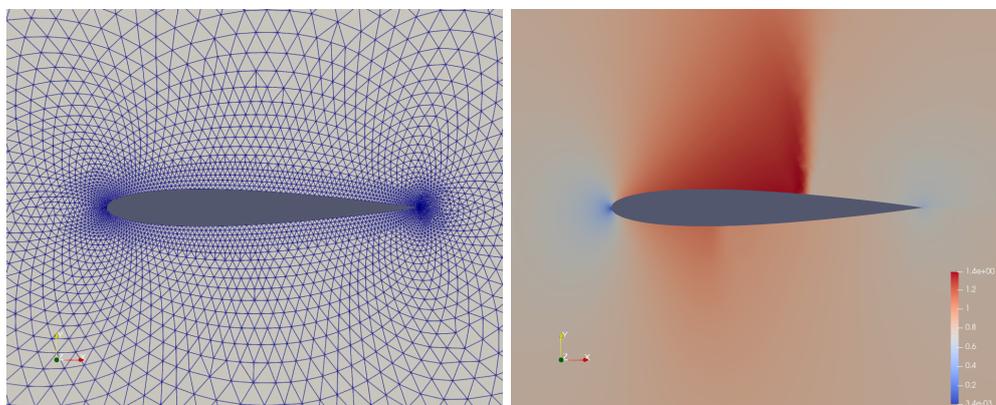
Per lo sviluppo del seguente elaborato sono stati valutati due casi di studio disponibili sul sito ufficiale del software SU^2 <https://su2code.github.io/tutorials/home/> così da avere una soluzione di riferimento con cui confrontare i risultati ottenuti.

3.9.1 Profilo NACA 0012

https://su2code.github.io/tutorials/Inviscid_2D_Unconstrained_NACA0012/

Condizioni al contorno:

- Natura del flusso: inviscido;
- Pressione: 101325 Pa;
- Temperatura: 273.15 K;
- Numero di Mach: 0.8;
- Angolo di Attacco: 1.25°.



(a) Griglia di calcolo utilizzata nel tutorial per il profilo NACA0012.

(b) Campo di Mach calcolato attorno al profilo NACA0012.

Figura 3.8: Mesh e campo di Mach per il caso di studio del NACA0012.

3.9.2 Profilo RAE 2822

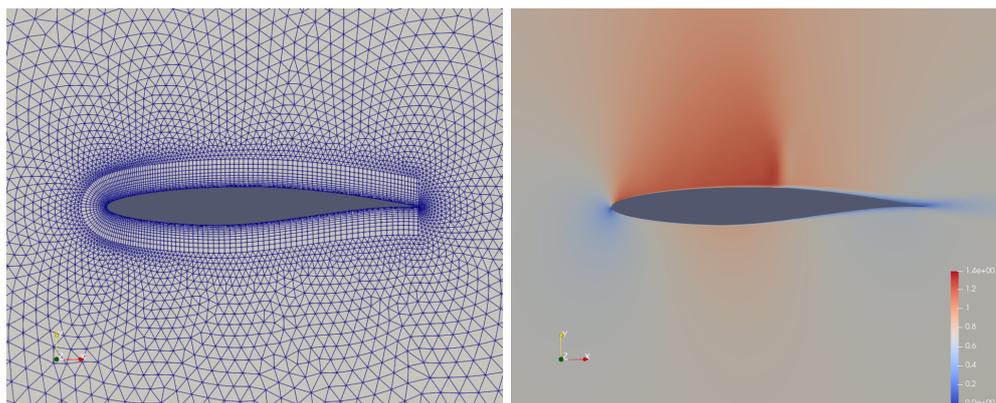
https://su2code.github.io/tutorials/Turbulent_2D_Constrained_RAE2822/

Condizioni al contorno:

- Natura del flusso: viscoso;
- Temperatura: 288.15 K;
- Numero di Mach: 0.8;
- Numero di Reynolds: 6.5 E6;
- Angolo di Attacco: 0°.

In entrambe le situazioni, il flusso risultante è transonico. In particolare, nel primo caso si genera un'onda d'urto su entrambi i lati del profilo (figura 3.8) mentre nel caso del RAE2822, data la non simmetria del profilo, si genera una sola onda d'urto sull'estradosso (figura 3.9).

Per comodità, nella tabella 3.6 sono riportati i parametri utilizzati nel file di configurazione di SU^2 per entrambi i casi di studio:



(a) Griglia di calcolo utilizzata nel tutorial per il profilo RAE2822. (b) Campo di Mach calcolato attorno al profilo RAE2822.

Figura 3.9: Mesh e campo di Mach per il caso di studio del RAE2822.

Parametro	NACA 0012	RAE 2822
SOLVER	EULER	RANS
MACH_NUMBER	0.85	0.725
AOA [°]	1.25	2.31
INIT_OPTION		REYNOLDS
FS_PRESSURE [Pa]	101325	108988
FS_TEMPERATURE [K]	273.15	255.55
REYNOLDS_NUMBER		653700
VISCOSITY_MODEL		SUTHERLAND
MU_CONSTANT [$\frac{kg}{m \cdot s}$]		1.552849e-05
MU_REF [$\frac{kg}{m \cdot s}$]		1.716e-05
MU_T_REF [K]		273.15
SUTHERLAND_CONSTANT		110.4
REF_DIMENSIONALIZATION	FS_PRESS_EQ_ONE	FS_PRESS_EQ_ONE

Tabella 3.6: Tabella comparativa delle configurazioni iniziali per i casi di studio.

3.10 Procedura elaborato

Dato l'elevato numero di simulazioni richieste e il tempo di calcolo maggiore nel caso di flusso viscoso, si è deciso di effettuare un'analisi preliminare in campo inviscido ottenendo come risultato finale una configurazione di partenza per il caso viscoso.

In prima istanza, è stata effettuata un'analisi di convergenza della griglia di calcolo per poi passare alla valutazione dello schema numerico più opportuno.

Al fine di automatizzare l'intero processo, è stata scritta in MATLAB un'architettura per orchestrare tutti i programmi, ottenendo una pipeline completa e libera la cui struttura è la seguente:

in cui i blocchi presenti sono:

- GMSH: generazione della griglia di calcolo a partire dalla geometria iniziale utilizzando GMSH;
- File .cfg: generazione del file di configurazione della simulazione CFD da utilizzare in SU2;

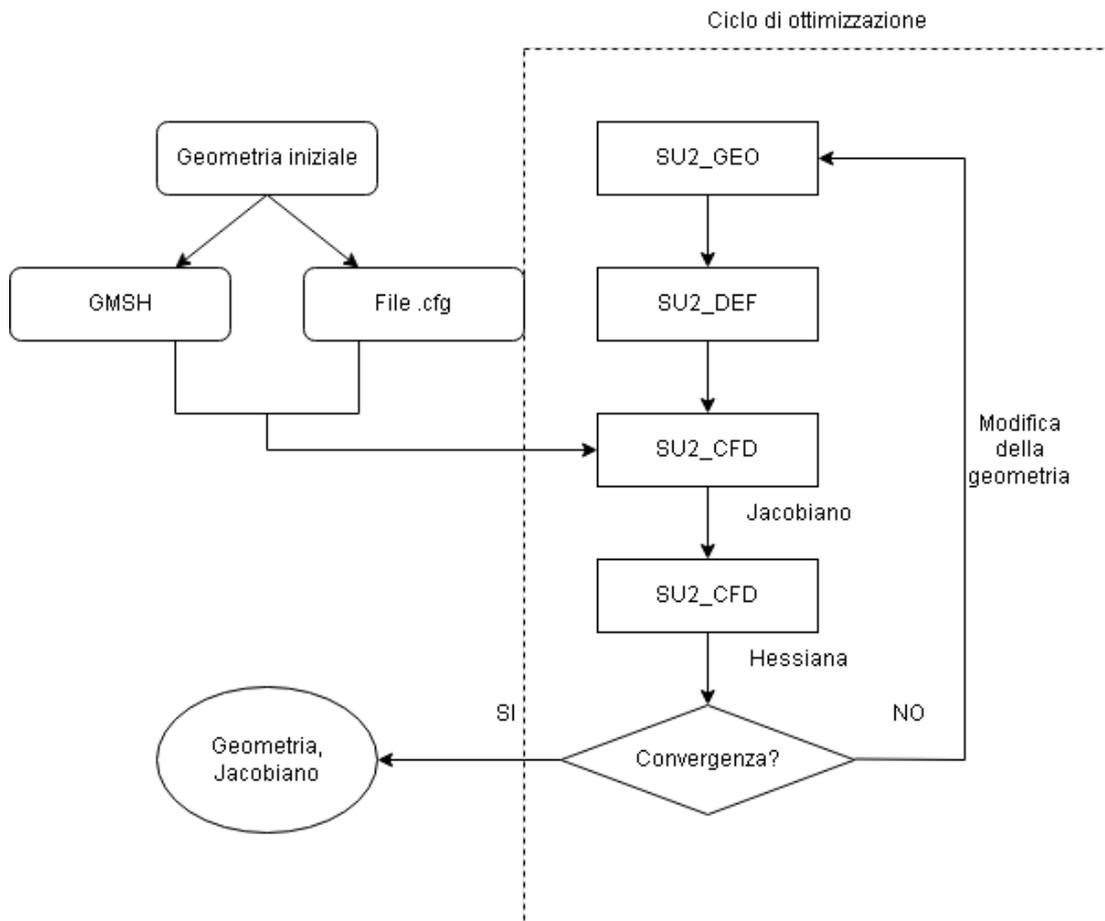


Figura 3.10: Procedura per il problema di ottimizzazione utilizzando la suite di SU2 [34].

- SU2_CFD: solutore CFD;
- SU2_DEF: programma per la deformazione della griglia di calcolo;
- SU2_GEO: programma per la definizione dei parametri e il calcolo dei vincoli geometrici;
- Jacobiano: matrice delle derivate del primo ordine associate alla sensitività della geometria considerata;
- Hessiana: matrice delle derivate del secondo ordine associate alla sensitività della geometria considerata.

3.10.1 Procedura utilizzata per l'ottimizzazione in flusso turbolento utilizzando la suite di SU2

Durante la soluzione del problema di ottimizzazione nel caso di flusso viscoso, quindi utilizzando come solutori RANS e NAVIER-STOKES, è stato necessario modificare la procedura originale 3.10 come illustrato in 3.11.

Ciò è dovuto ad un problema legato al fatto che, una volta ottenuta la prima soluzione diretta delle equazioni di governo, l'algoritmo per risolvere il problema di ottimo prevede il calcolo delle sensitività delle funzioni obiettivo e di vincolo a partire dalla soluzione appena ottenuta.

Per fare ciò, è richiesto che il comando RESTART_SOL all'interno del file di configurazione di SU2 sia impostato su YES: ciò vuol dire che come inizializzazione per la soluzione del problema di ottimo sia utilizzata quella del campo di moto ottenuta in precedenza.

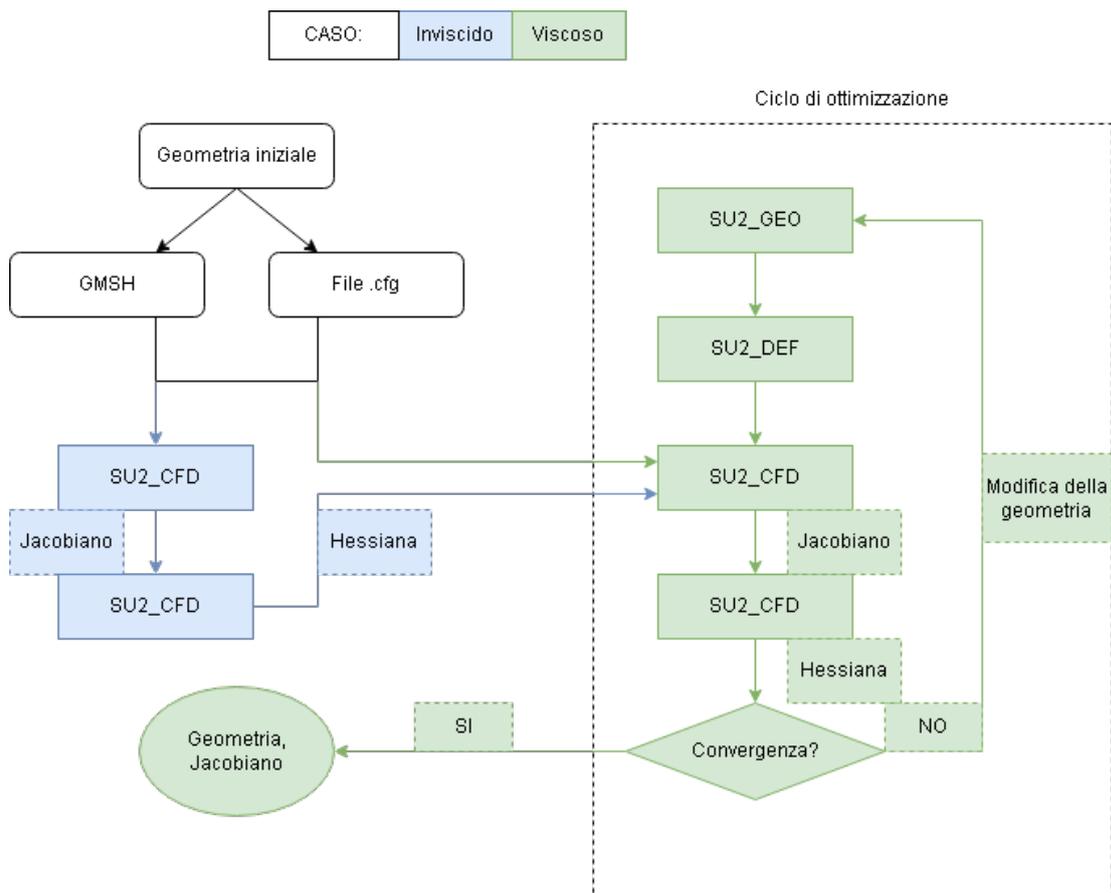


Figura 3.11: Procedura per il problema di ottimizzazione utilizzando la suite di SU2 [34].

Nel caso di flussi non viscosi tale metodo funziona correttamente mentre nel caso viscoso ciò non accade poiché tale comando rimane implicitamente impostato su NO.

È stata quindi proposta una soluzione per ovviare a ciò: è effettuata una prima iterazione del problema di ottimizzazione impostando il solutore su EULER e successivamente essa è utilizzata come inizializzazione per il problema in flusso viscoso.

È possibile che tale metodologia abbia conseguenze sulla soluzione ottenuta dal problema di ottimizzazione ma all’attuale stato del software (v. 7.2.1) non sono disponibili alternative.

In ogni caso, il bug è stato segnalato e dovrebbe essere risolto nella release successiva a quella utilizzata quindi sarà necessario effettuare dei test per verificare eventuali discrepanze con quanto illustrato nel seguente elaborato.

3.11 Impostazioni utilizzate

Sono di seguito riportate alcune impostazioni comuni ai diversi casi di studio:

3.11.1 Griglia di calcolo

La struttura della griglia di calcolo è di tipo O-grid poiché si considera una condizione di flusso transonico con raggio pari a 50 m.

3.11.2 Algoritmo di ottimizzazione

In generale è utilizzato l’algoritmo SLSQP [35] con le condizioni di Karush–Kuhn–Tucker [26] implementato nel pacchetto SciPy [36] di Python.

3.11.3 Funzioni utilizzate nei casi in esame

Sono di seguito illustrate le funzioni disponibili nella suite di SU^2 utilizzate nei casi di studio considerati.

Funzione obiettivo utilizzata È stata utilizzata solamente la resistenza (DRAG) come funzione obiettivo.

Funzioni di vincolo utilizzate Le funzioni di vincolo utilizzate nello svolgimento dei problemi di ottimizzazione sono le seguenti:

Funzione di vincolo in SU2	Descrizione
AIRFOIL_THICKNESS	Spessore del profilo
LIFT	Portanza
MOMENT_Z	Momento di beccheggio

Per quanto riguarda i vincoli geometrici, i casi analizzati sono descritti nella forma:

- AIRFOIL_THICKNESS < +5%: lo spessore del profilo ottimizzato deve essere minore dello spessore iniziale incrementato del 5%;
- AIRFOIL_THICKNESS > -5%: lo spessore del profilo ottimizzato deve essere maggiore dello spessore iniziale ridotto del 5%.

3.11.4 Parametri prestazionali considerati

Sono stati considerati i seguenti parametri prestazionali:

- Tempo di calcolo;
- C_i ;
- C_d ;
- errore relativo rispetto a:

– caso precedente:

$$e_{rel} = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{f(x_k)}, \quad x_k \in \text{Intervallo};$$

– caso griglia di calcolo più fine. In questo caso l'errore relativo è calcolato prendendo come riferimento il caso con la griglia di calcolo più fine.

$$e_{rel} = \frac{f(x_k) - f(x_N)}{f(x_N)}, \quad x_N | \#elementi \equiv \#elementi_{max};$$

I valori finali per ciascuna analisi sono stati scelti come compromesso tra accuratezza e tempo di calcolo data la ridotta disponibilità di potenza computazionale.

Capitolo 4

NACA 0012

Per comodità sono riportate le condizioni operative associate al caso del profilo NACA0012:

https://su2code.github.io/tutorials/Inviscid_2D_Unconstrained_NACA0012/

Condizioni al contorno:

- Natura del flusso: inviscido;
- Pressione: 101325 Pa;
- Temperatura: 273.15 K;
- Numero di Mach: 0.8;
- Angolo di Attacco: 1.25°.

4.1 Analisi di sensitività

Superficie. Parametro: numero punti di controllo totali. Si è scelto di utilizzare un numero di punti di discretizzazione del profilo nell'intervallo [100, 1100] con passo 200. La distribuzione è equi spaziata e il numero di punti è equivalente tra i due lati del profilo.

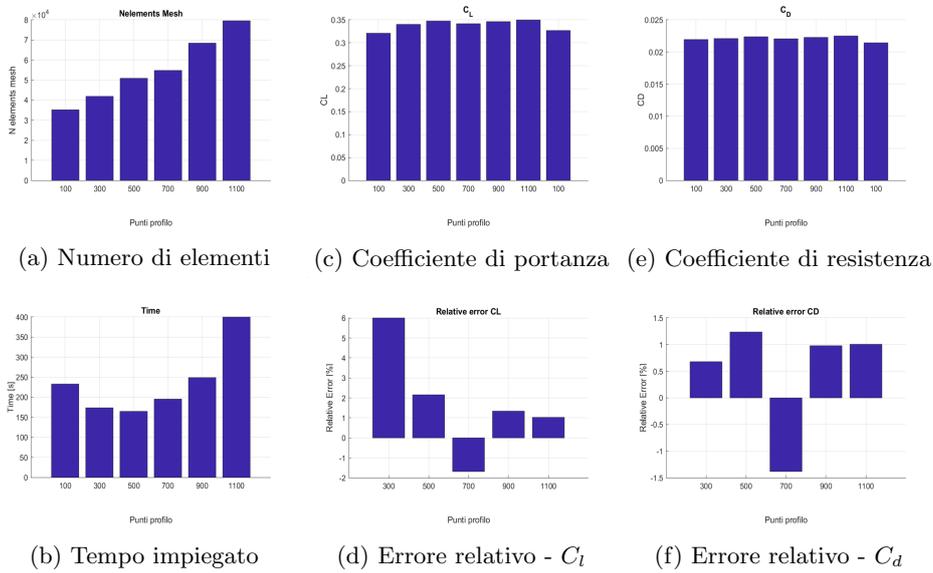
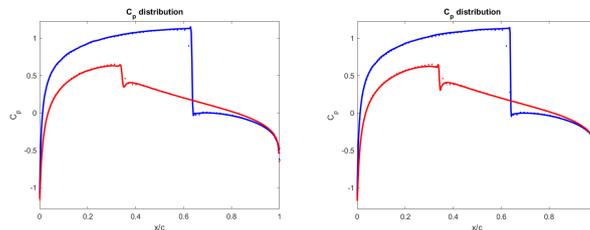


Figura 4.1: Prestazioni al variare del numero di punti sul profilo.



(a) Numero di elementi: 700 (b) Numero di elementi: 1100

Figura 4.2: Confronto tra le distribuzioni del C_p tra 700 e 1100 punti di controllo.

È stato scelto 700 come numero di elementi per discretizzare l'intero perimetro del profilo.

Dominio. Parametro: dimensione caratteristica delle celle. Si è scelto di utilizzare l'intervallo $[0.09, 0.01]m$ con passo $0.02m$ come valore della dimensione caratteristica delle celle del dominio distanti al massimo $1m$ dalla geometria del profilo.

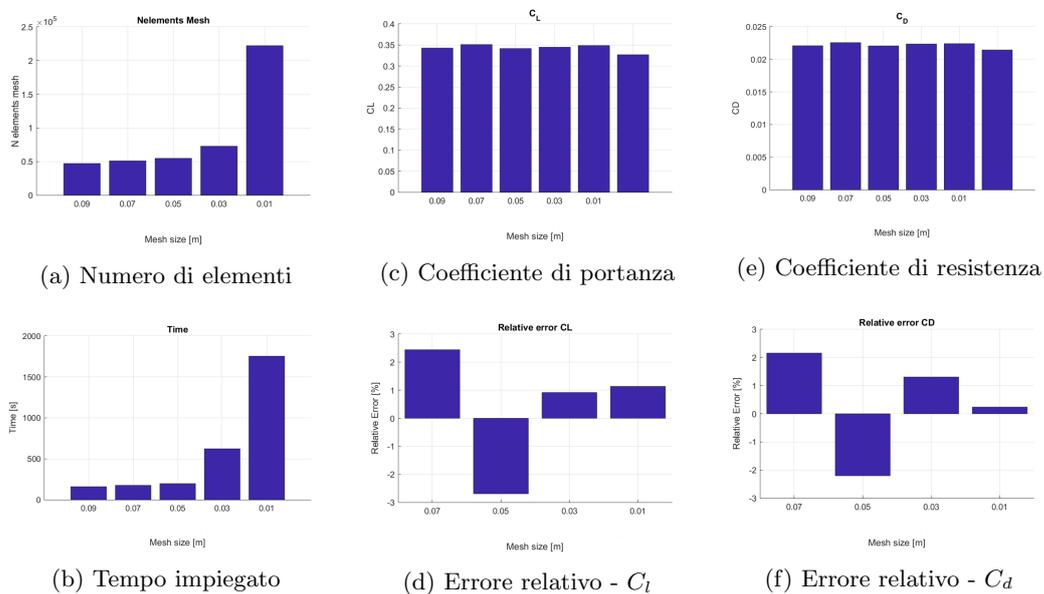


Figura 4.3: Prestazioni al variare della dimensione caratteristica delle celle del dominio.

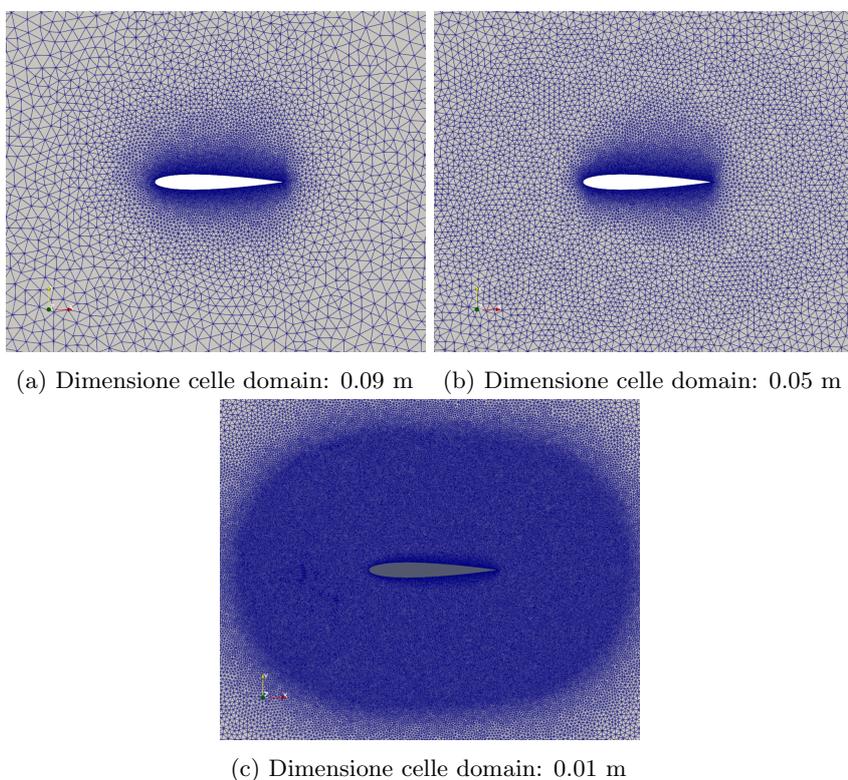


Figura 4.4: Variazione della dimensione caratteristica delle celle del dominio.

È stato scelto $0.05m$ come dimensione minima per le celle del dominio distanti al massimo $1m$ dalla geometria.

Farfield. Parametro: dimensione celle al contorno. Si è scelto di utilizzare l'intervallo $[10, 1]m$ con passo $2.5m$.

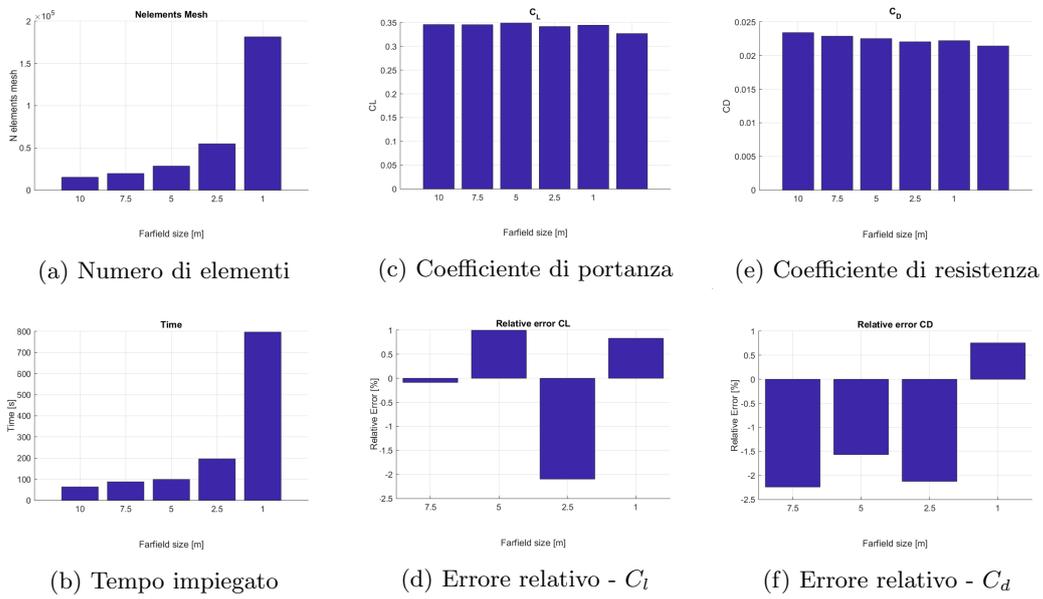


Figura 4.5: Prestazioni al variare della dimensione delle celle del farfield.

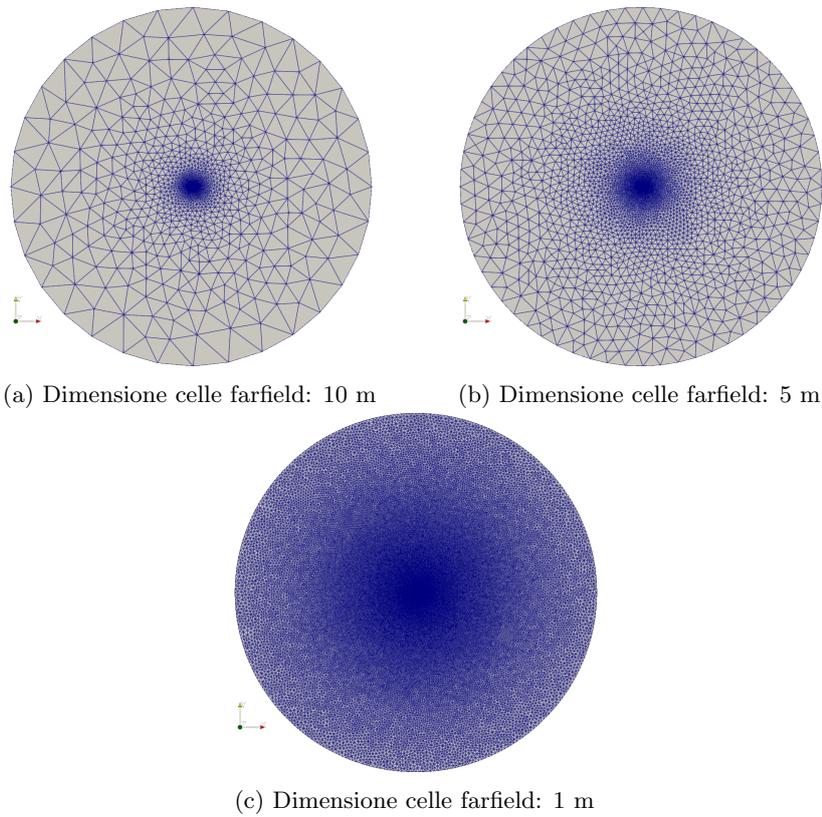


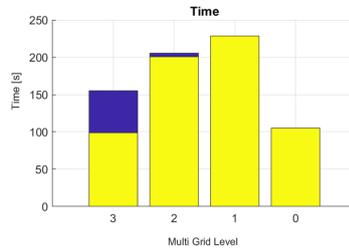
Figura 4.6: Variazione della dimensione delle celle del farfield.

É stato scelto $5m$ come dimensione delle celle del farfield.

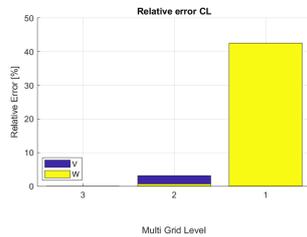
4.1.1 MultiGrid

Cycle e Level I possibili cicli sono quello W e quello V.

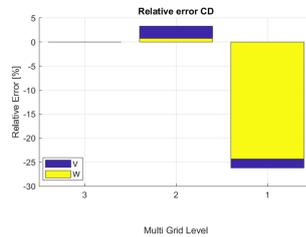
Per quanto riguarda il livello, si possono avere i seguenti valori: 0 (disabilitato), 1, 2, 3.



(a) Tempo impiegato



(b) Errore relativo - C_l

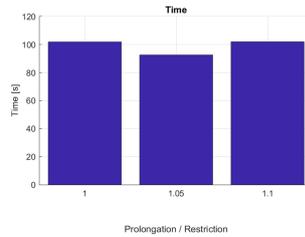


(c) Errore relativo - C_d

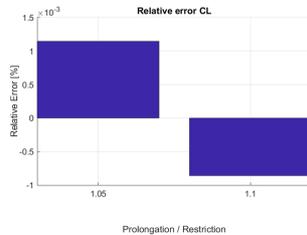
Figura 4.7: Prestazioni al variare del livello e del ciclo dell'algorithm di MultiGrid.

È stato scelto il ciclo W e 3 come valore del livello dell'algorithm di MultiGrid.

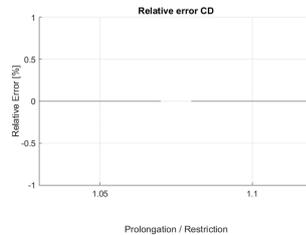
Prolongation e Restriction Si è scelto di utilizzare l'intervallo [1, 1.1] con passo 0.05. I valori sono stati valutati in coppia.



(a) Tempo impiegato



(b) Errore relativo - C_l



(c) Errore relativo - C_d

Figura 4.8: Prestazioni al variare del valore di prolongation e restriction.

È stato scelto 1.05 come valore di prolongation e restriction.

4.1.2 Grid Algorithm

Per il caso inviscido, i possibili algoritmi di tassellazione sono: MeshAdapt, Automatic, Delaunay, Frontal-Delaunay e Packing.

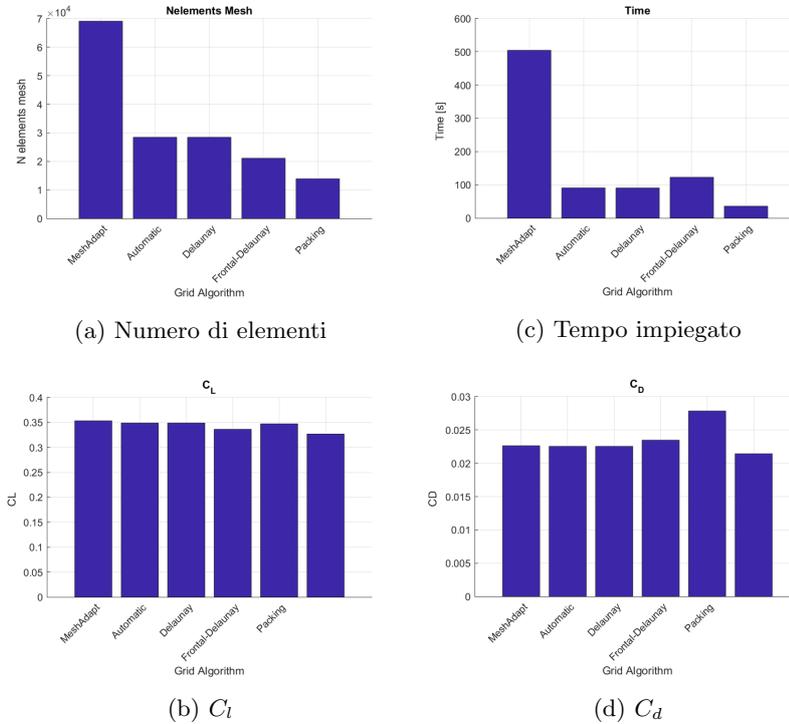
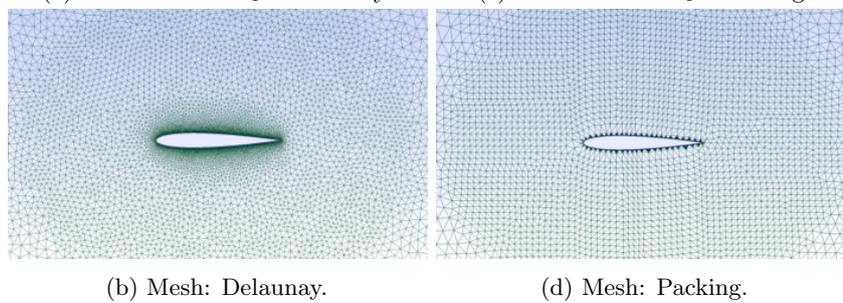
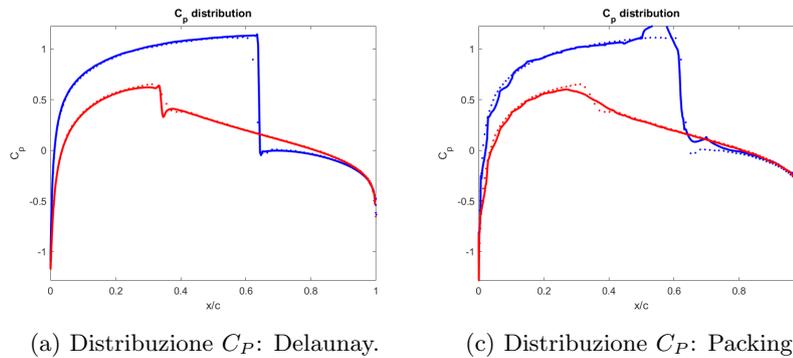


Figura 4.9: Prestazioni al variare dell'algoritmo di tassellazione.



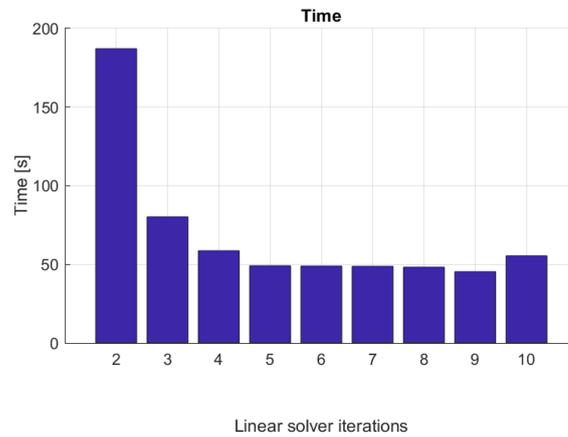
(b) Mesh: Delaunay. (d) Mesh: Packing.

Figura 4.10: Variazione dell'algoritmo di tassellazione.

È stato scelto l'algoritmo di Delaunay.

4.1.3 Linear solver

Numero di iterazioni Si è scelto di variare il numero di iterazioni per la soluzione del sistema lineare nell'intervallo $[2, 10]$ con passo 1.



(a) Tempo impiegato

Figura 4.11: Variazione numero di iterazioni del solutore lineare.

É stato scelto un numero di iterazioni pari a 9.

Solutori e Precondizionatori I tipi di solutore lineare sono BCGSTAB [37] e FGMRES [38]. Per quanto riguarda i preconditionatori, quelli disponibili sono: ILU, LUSGS, LINELET, JACOBI.

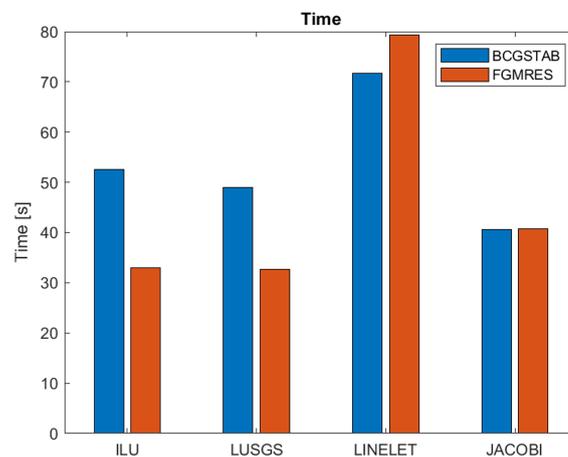
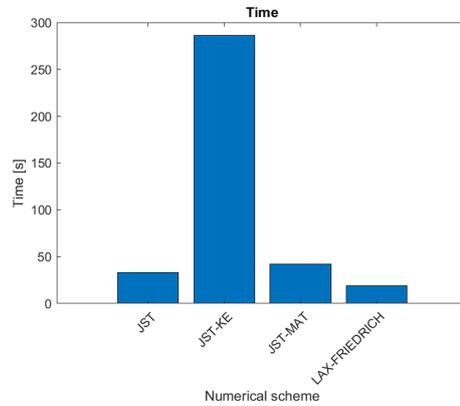


Figura 4.12: Tempo impiegato

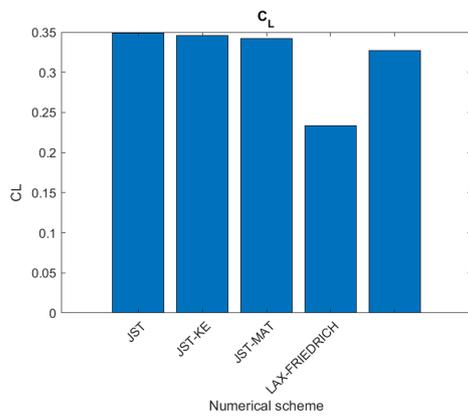
É stato scelto FGMRES come solutore e ILU come preconditionatore.

4.1.4 Schema numerico

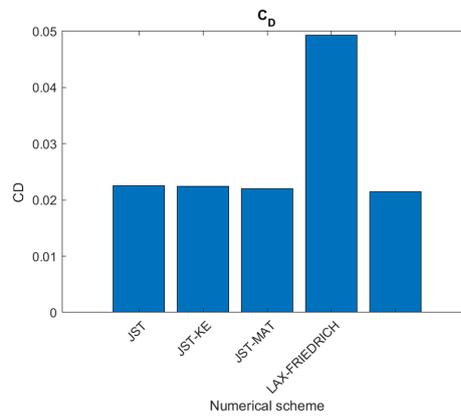
Per il flusso transonico, gli schemi numerici disponibili sono: JST, JST-KE, JST-MAT [39], LAX-FRIEDRICHS [40].



(a) Tempo impiegato



(b) C_l



(c) C_d

Figura 4.13: Variazione dello schema numerico.

È stato scelto lo schema Jameson-Schmidt-Turkel: è possibile notare come in campo inviscido tale schema presenti over/under-shooting in prossimità della discontinuità nel campo di moto.

Lo schema classico LAX-FRIEDRICHS, nonostante sia di poco più rapido del JST, presenta risultati discrepanti con i valori di riferimento.

4.1.5 Numero di CFL

Per valutare un intervallo specifico del valore del numero di CFL, in prima istanza si è scelto di utilizzare l'intervallo $[1E-4, 1E4]$ con fattore 10 tra un valore e il successivo.

Data la difficoltà nel valutare a priori il numero di CFL più adatto al problema considerato, è possibile modificarne il valore successivamente ad ogni iterazione.

L'algoritmo implementato nella suite di SU^2 si basa sulla variazione dei residui tra una iterazione e quella successiva. Nella forma generale:

$$\text{CFL} = \text{CFL} \times \left(\frac{R(\rho)_{\text{old}}}{R(\rho)_{\text{new}}} \right)^{\text{Fattore}} \quad (4.1)$$

con:

- $R(\rho)_{\text{old}}$: valore dei residui associati alla densità all'iterazione precedente;
- $R(\rho)_{\text{new}}$: valore dei residui associati alla densità all'iterazione successiva;
- Fattore: parametro di incremento o riduzione del valore di CFL tra iterazioni successive. È impostato in fase di definizione del problema.

Sono state valutate le configurazioni con adattamento attivo e non per valutare se, data la difficoltà nel trovare un valore adeguato di tale numero per ogni caso di studio, fosse più opportuno indagare il problema utilizzando come prima istanza una modalità adattiva.

Adattamento: abilitato. Si è scelto di utilizzare l'intervallo $[50, 150]$ con passo 10.

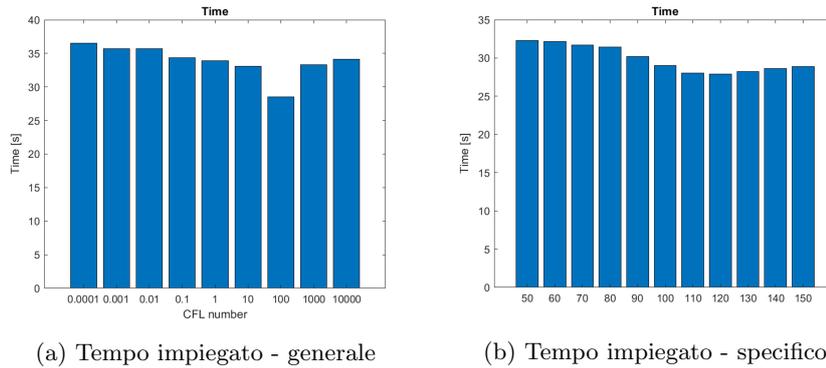


Figura 4.14: Prestazioni al variare del numero di CFL con adattamento abilitato.

Il miglior risultato si attesta sui 28 secondi per un valore di CFL pari a 110.

Adattamento: disabilitato. Si è scelto di utilizzare l'intervallo $[20, 260]$ con passo 20.

Il miglior risultato si attesta sui 26 secondi per un valore di CFL pari a 180, con un decremento pari al 7% rispetto al caso precedente.

Si può affermare che l'adattamento del numero di CFL è uno strumento utile nel caso di problemi più complessi di quello trattato in quanto consente di ottenere un valore di riferimento per effettuare uno studio con numero di CFL statico.

Utilizzando SU^2 è possibile misurare il valore medio del numero di CFL durante ogni iterazione così da poter restringere il numero di tentativi utili per trovare quello più adatto al problema.

È stato scelto di disabilitare l'adattamento del numero di CFL e il suo valore è stato imposto pari a 180.

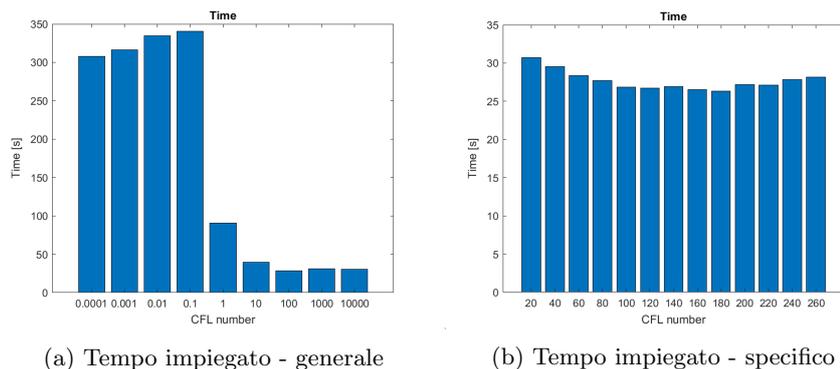


Figura 4.15: Prestazioni al variare del numero di CFL con adattamento disabilitato.

4.1.6 Configurazione finale

É riportata una tabella riassuntiva dei parametri utilizzati per la definizione del modello finale.

In particolare, sono indicati il valore utilizzato come primo tentativo, successivamente quello scelto a seguito delle analisi di sensitività svolte in precedenza e questi sono affiancati dal valore utilizzato nel relativo caso di studio disponibile nella repository di SU^2 .

Se il valore del parametro non è presente, è perché non è stato possibile recuperarlo poiché mancante o non disponibile.

Parametro	Valore iniziale	Valore finale	Valore tutorial
Numero punti superficie		700	
Dimensione minima celle		0.05 m	
Dimensione celle farfield		5 m	
MGLEVEL: cycle	W	W	V
MGLEVEL: level	3	3	2
MG Prolongation		1.05	1
MG Restriction		1.05	1
Algoritmo di meshing		Delaunay	Delaunay
LINEAR_SOLVER_ITER	2	9	2
LINEAR_SOLVER	FGMRES	FGMRES	FGMRES
LINEAR_SOLVER_PREC	ILU	ILU	LU_SGS
CFL	10	180	10
CFL_ADAPT	SI	NO	NO

Tabella 4.1: Tabella riassuntiva dei valori dei files .cfg.

4.1.7 Conclusioni

Dall'analisi svolta, si può osservare come le modifiche apportate alla tassellazione del campo di moto siano le principali cause di variazione delle grandezze aerodinamiche a ragione del fatto che la corretta definizione della griglia di calcolo è il principale aspetto su cui si deve porre l'attenzione in fase di pre-processing.

4.2 Confronto con tutorial SU2

Inizialmente, è stato effettuato uno studio preliminare per verificare il corretto funzionamento della procedura. Il risultato ottenuto utilizzando la configurazione finale illustrata in precedenza è stato confrontato con quello presentato come caso di studio sul sito ufficiale di SU2 (https://su2code.github.io/tutorials/Inviscid_2D_Unconstrained_NACA0012/).

4.2.1 Confronto tra le griglie di calcolo

Nella figura 4.16 è possibile osservare la differenza tra le griglie di calcolo finale e quella utilizzata nel tutorial.

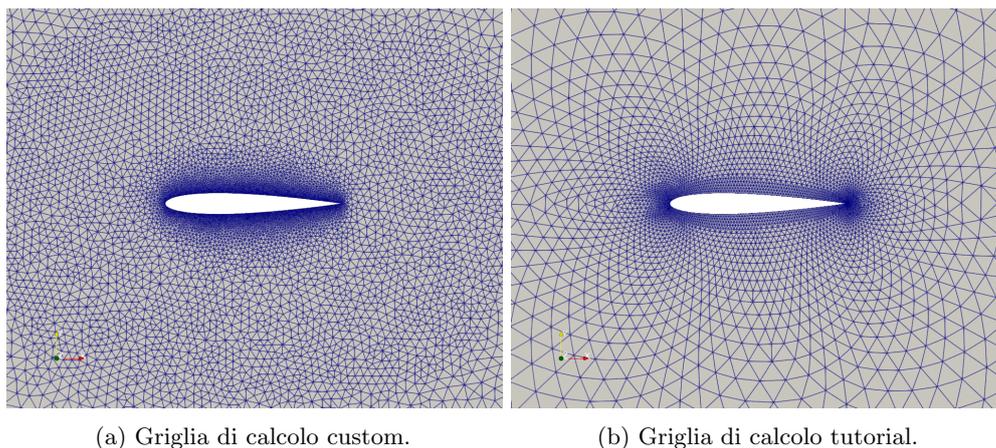


Figura 4.16: Confronto tra la griglia di calcolo custom e quella utilizzata nel tutorial.

# celle custom	# celle tutorial
27689	10216

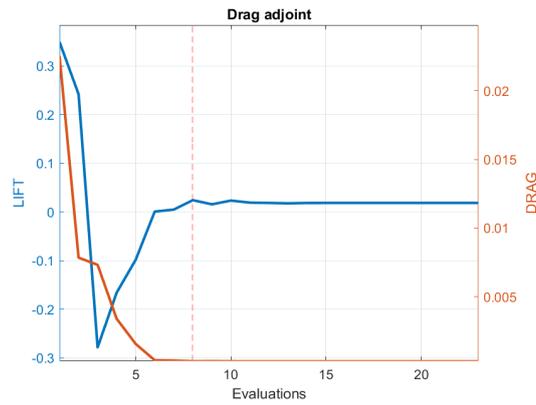
4.2.2 Risultati ottenuti

Sono di seguito riportati i dati ottenuti risolvendo il problema di ottimizzazione così formulato:

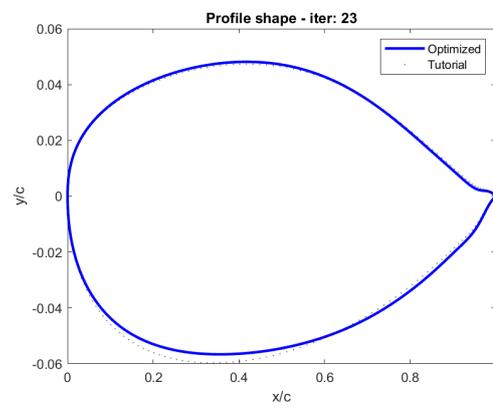
$$\text{Minimizzare: } C_d \tag{4.2}$$

In questo caso, si è potuto osservare come il solo infittimento della griglia di calcolo abbia consentito di ottenere un risultato migliore in termini della funzione obiettivo a causa della maggiore risoluzione del campo di moto.

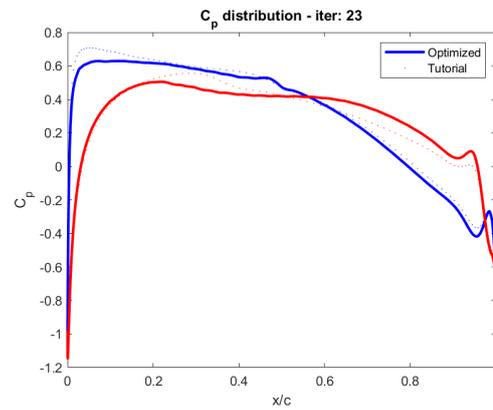
Si sarebbero potuti ottenere risultati migliori seguendo le linee guida presentati in [34] ma questo non era l'obiettivo del lavoro.



(a) Andamento delle prestazioni aerodinamiche.



(b) Differenza tra la geometria ottimizzata ottenuta nel caso di studio di SU^2 e quella a seguito dell'analisi di sensitività.



(c) Differenza distribuzione C_P tra griglia di calcolo custom e tutorial.

Grandezza	Valore tutorial	Valore custom	Variazione percentuale
Drag	0.00056	0.00029	-47%

Capitolo 5

RAE 2822

Per comodità sono riportate le condizioni operative associate al caso del profilo RAE2822:

https://su2code.github.io/tutorials/Turbulent_2D_Constrained_RAE2822/

Condizioni al contorno:

- Natura del flusso: viscoso;
- Temperatura: 288.15 K;
- Numero di Mach: 0.8;
- Numero di Reynolds: 6.5 E6;
- Angolo di Attacco: 0°.

Data la natura viscosa del flusso considerato, al fine di garantire una maggiore accuratezza del modello, è stato necessario svolgere un'attività di analisi della griglia di calcolo più approfondita rispetto al caso precedente. In particolare, è stato necessario effettuare un'analisi di sensitività della griglia di calcolo relativamente allo strato limite.

Nei grafici in cui è presentata la distribuzione del C_P , la linea puntinata coincide con la distribuzione disponibile dal tutorial mentre quella continua è associata alla soluzione del problema di ottimizzazione.

5.1 Analisi strato limite

Poiché SU2 non prevede l'utilizzo di *funzioni di parete*, è stato necessario valutare lo spessore della prima cella dello strato limite al fine di mantenere $y^+ < 1$.

Calcolato tale valore, valutato lo spessore totale dello strato limite utilizzando come prima approssimazione il modello della lamina piana, è stato possibile procedere con l'analisi di sensitività.

Boundary layer: Ratio Si è scelto di utilizzare l'intervallo $[1.05, 1.3]$ con passo 0.05.

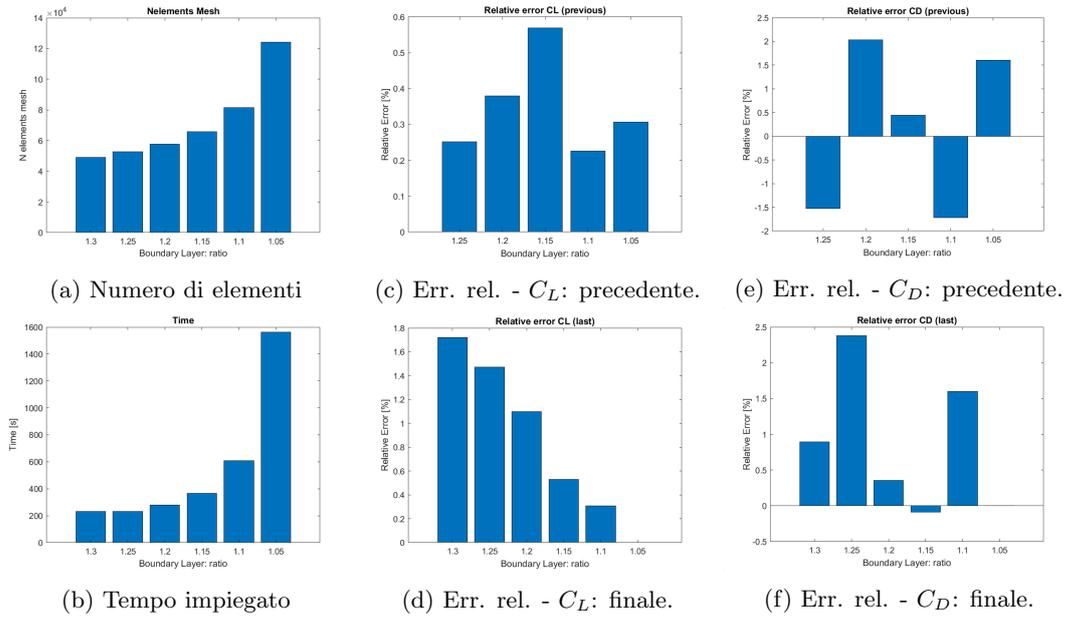


Figura 5.1: Prestazioni al variare del rapporto di espansione dell'altezza delle celle all'interno dello strato limite.

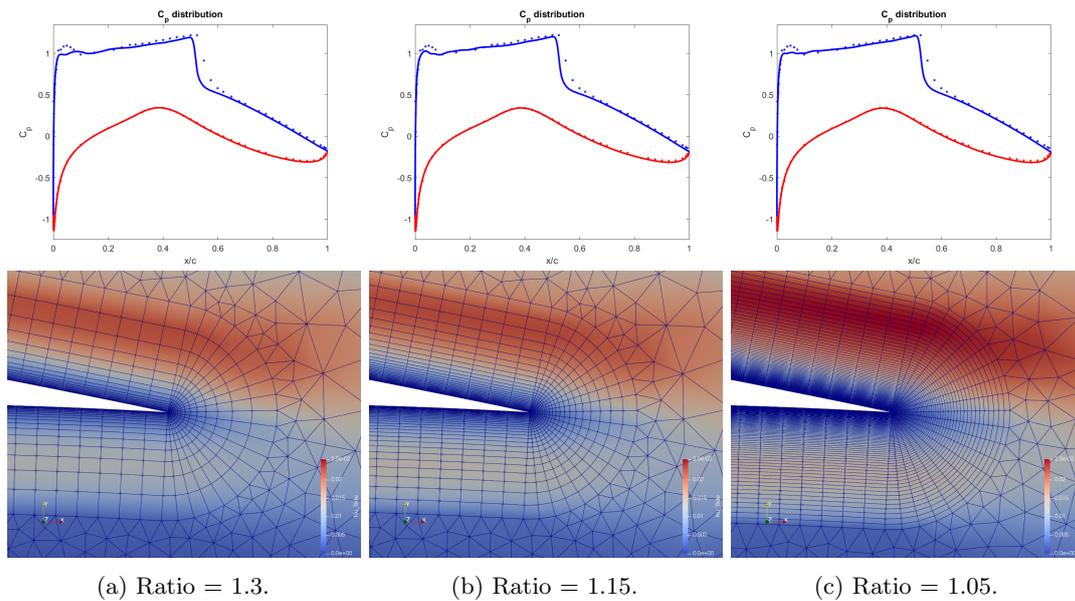


Figura 5.2: Variazione rapporto di espansione delle celle all'interno dello strato limite.

È stato scelto un valore di rapporto di espansione delle celle all'interno dello strato limite pari a 1.15.

5.1.1 Convergenza mesh

Poiché in questo particolare caso di studio non vi è presenza di onde d'urto su entrambi i lati del profilo, si è scelto di variare la distribuzione dei punti sugli stessi in maniera indipendente l'uno dall'altro così da ottenere un infittimento localizzato a seconda delle necessità. In entrambi i casi la distribuzione dei punti è costante sul lato.

Superficie. Parametro: numero punti di controllo estradosso (onda d'urto). Si è scelto di utilizzare l'intervallo [150, 900] con passo 150.

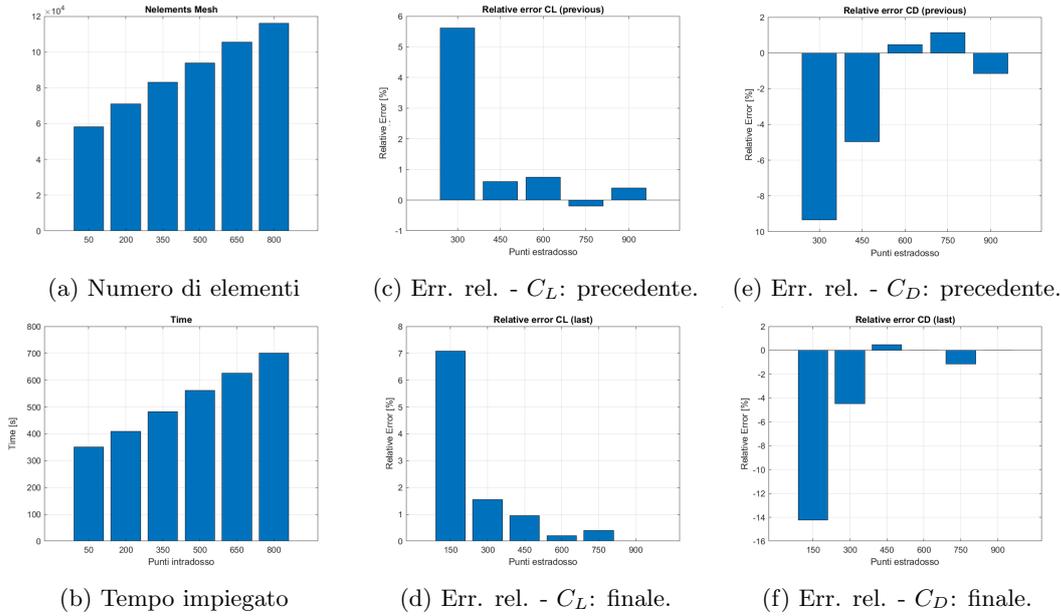


Figura 5.3: Prestazioni al variare del numero di punti sull'estradosso.

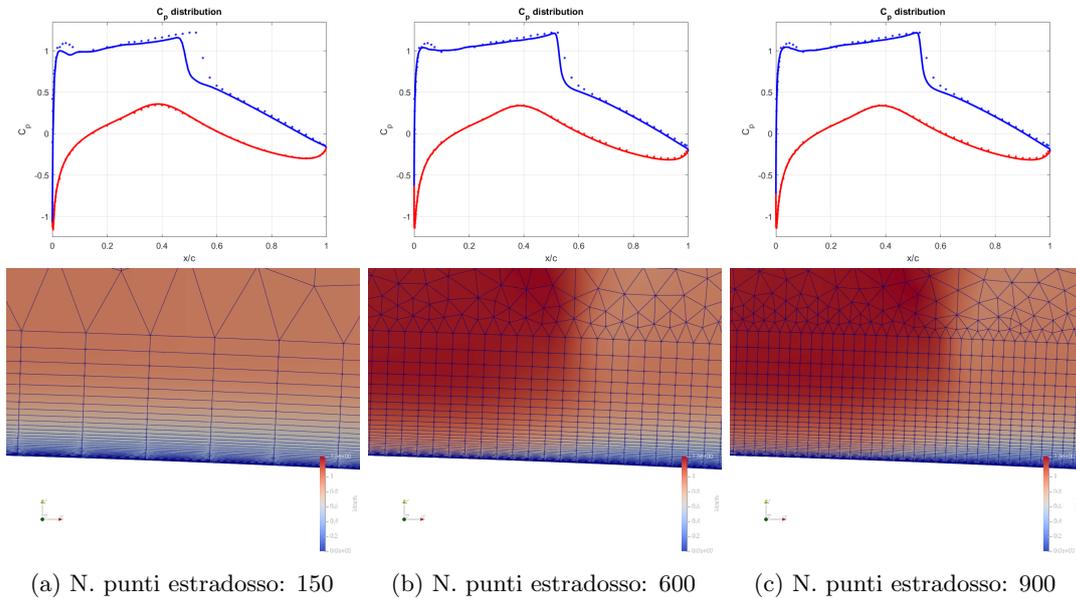


Figura 5.4: Variazione numero di punti sull'estradosso.

É stato scelto un numero di punti sull'estradosso pari a 600.

Superficie. Parametro: numero punti di controllo intradosso (no onda d'urto). Si è scelto di utilizzare l'intervallo [50, 800] con passo 150.

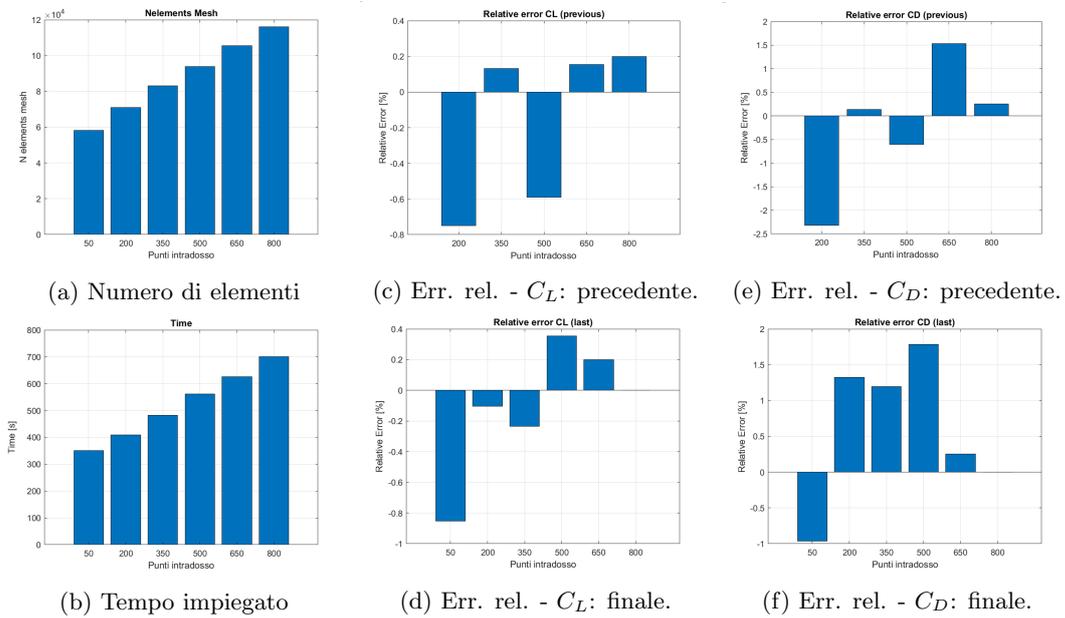


Figura 5.5: Prestazioni al variare del numero di punti sull'intradosso.

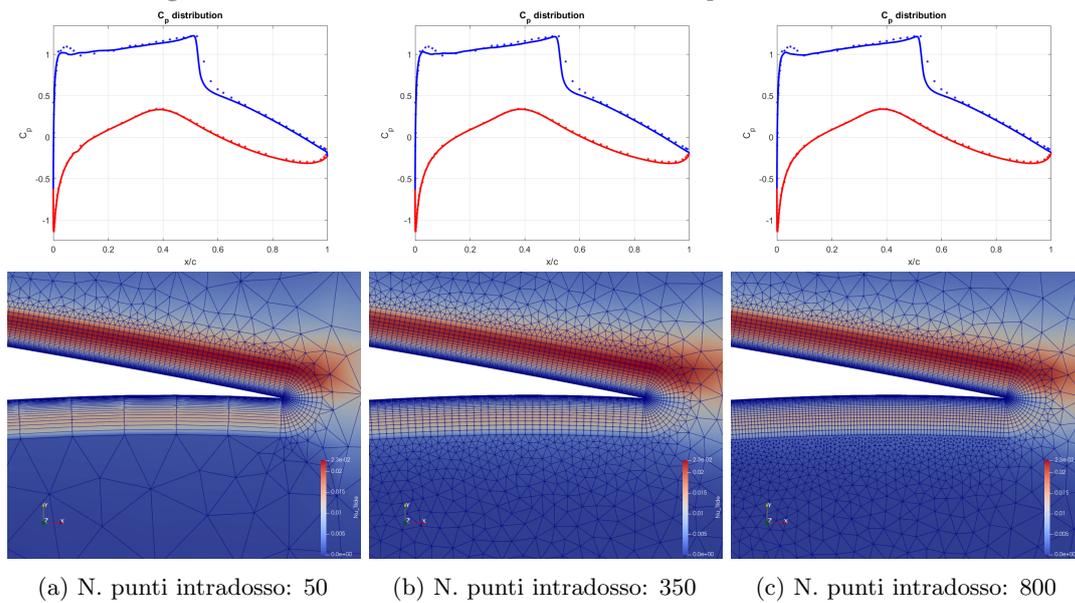


Figura 5.6: Variazione numero di punti sull'intradosso.

È stato scelto un numero di punti all'intradosso pari a 350.

Dominio: Wake size @ distance=0.5 m, height=0.05 m. Si è scelto di utilizzare l'intervallo $[0.09, 0.01]m$ con passo $0.02m$.

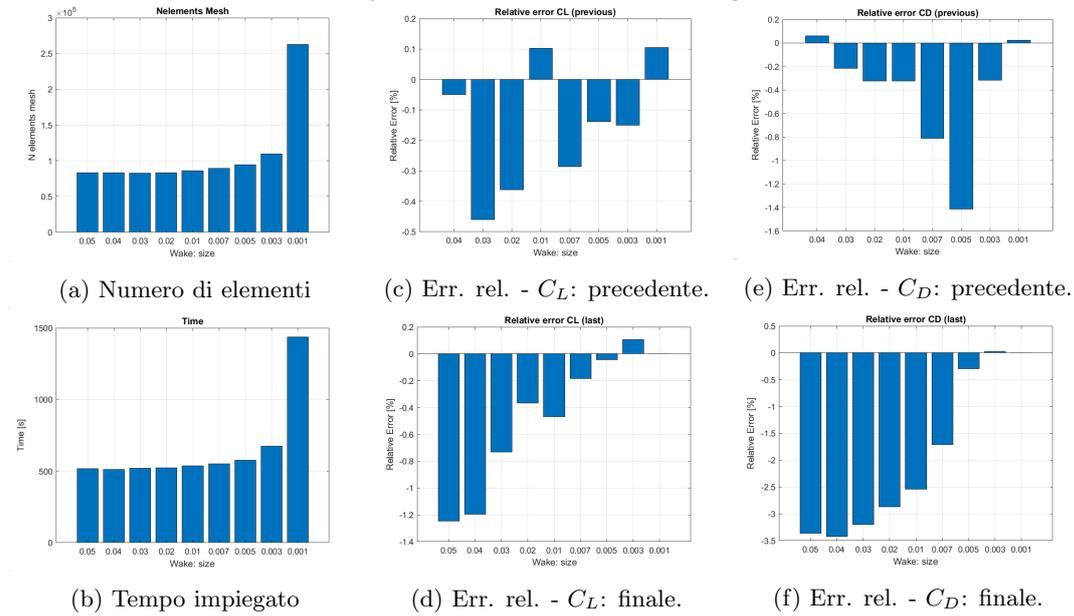


Figura 5.7: Prestazioni al variare della dimensione caratteristica delle celle dell'infittimento della scia.

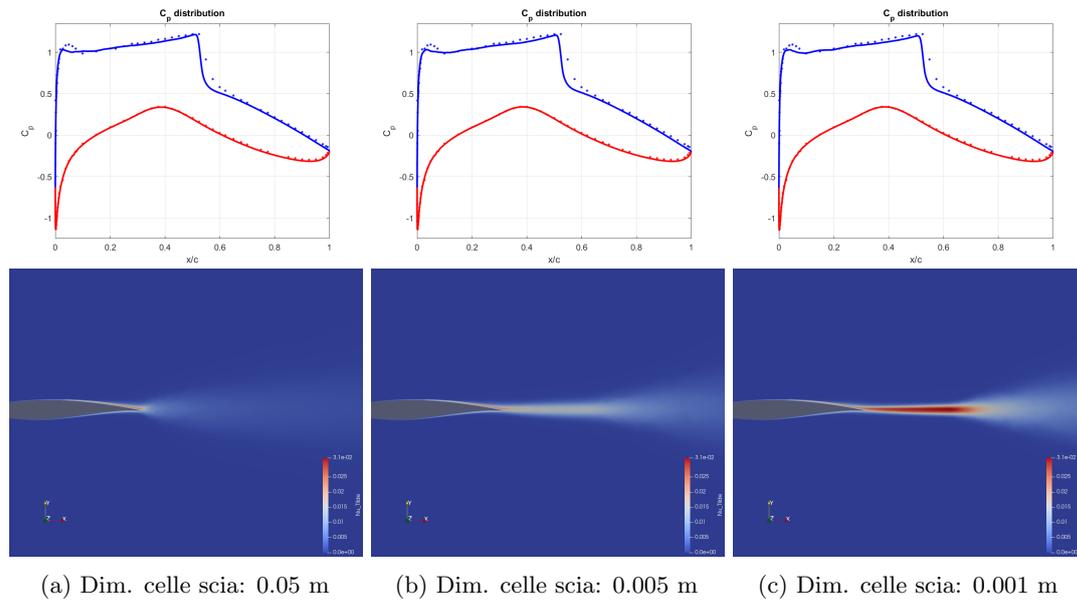


Figura 5.8: Variazione dimensione caratteristica delle celle nella scia.

È stato scelto $0.005m$ come valore per la dimensione caratteristica delle celle della scia.

Dominio: Wake distance @ size=0.005 m, height=0.05 m. Si è scelto di utilizzare l'intervallo $[0.09, 0.01]m$ con passo $0.02m$.

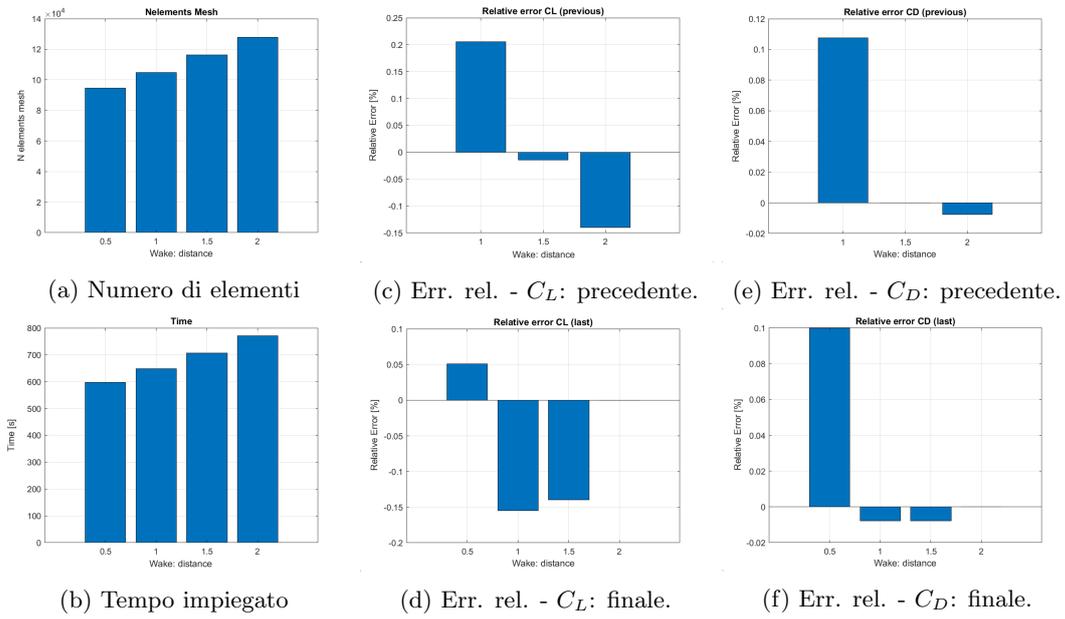


Figura 5.9: Prestazioni al variare della lunghezza dell'infittimento della scia.

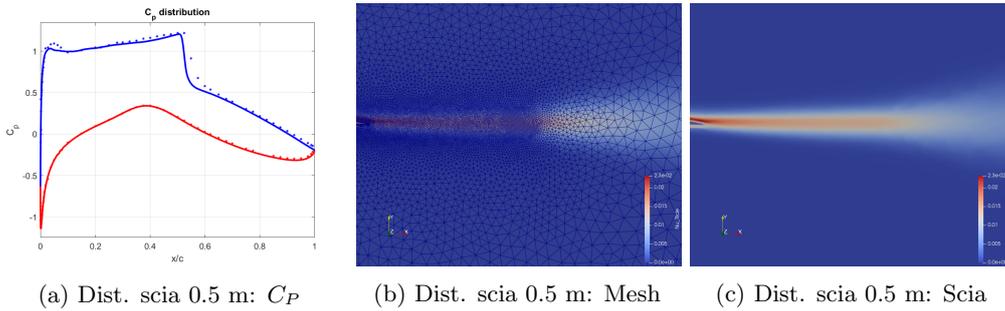


Figura 5.10: Distanza scia: 0.5 m.

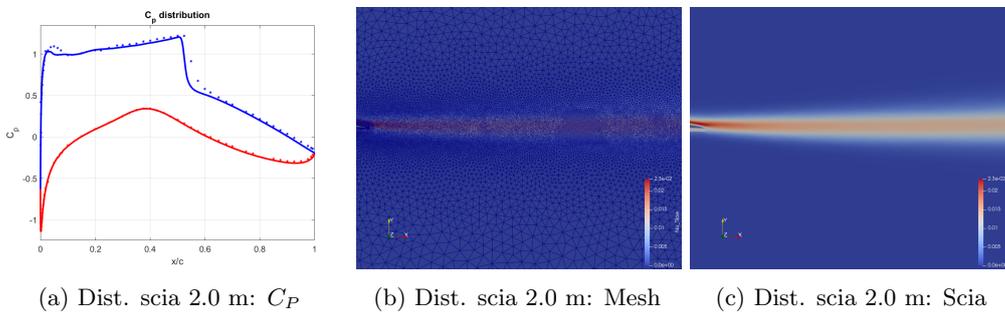


Figura 5.11: Distanza scia: 2.0 m.

È stata scelta una lunghezza dell'infittimento associato alla scia pari a $0.5m$.

Dominio: Wake height @ size=0.005 m, distance=0.5 m. Si è scelto di utilizzare l'intervallo $[0.09, 0.01]m$ con passo $0.02m$.

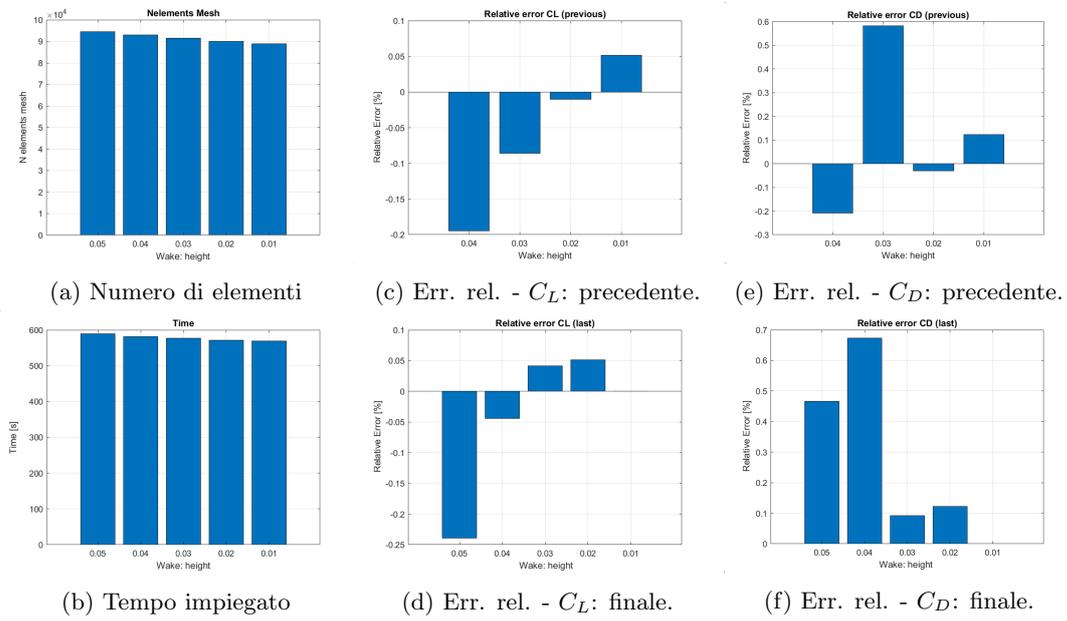


Figura 5.12: Prestazioni al variare dell'altezza dell'infittimento della scia.

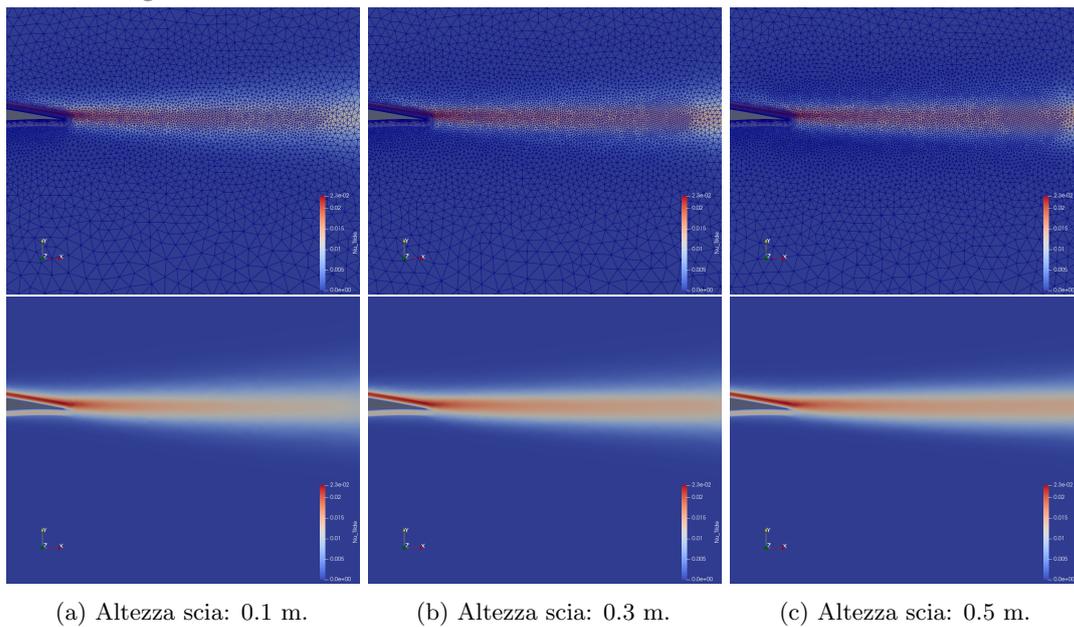


Figura 5.13: Variazione altezza scia.

É stata scelta un'altezza per l'infittimento della scia $0.3m$.

Dominio: dimensione celle @ distanza=1 m. Si è scelto l'intervallo $[0.07, 0.01]m$ con passo $0.02m$.

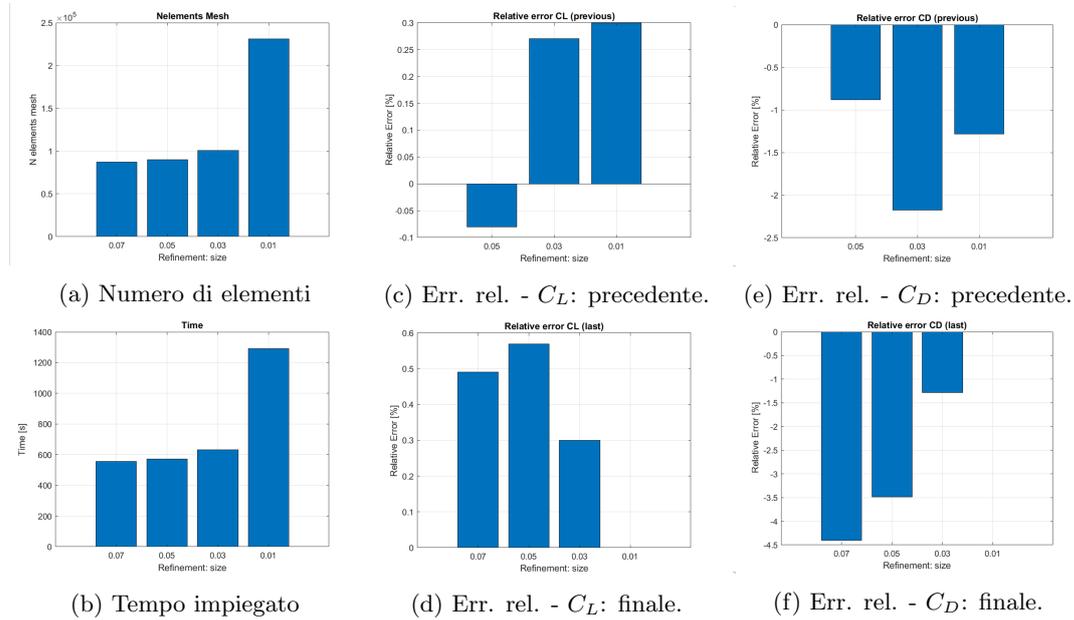


Figura 5.14: Prestazioni al variare della dimensione delle celle dell'infittimento.

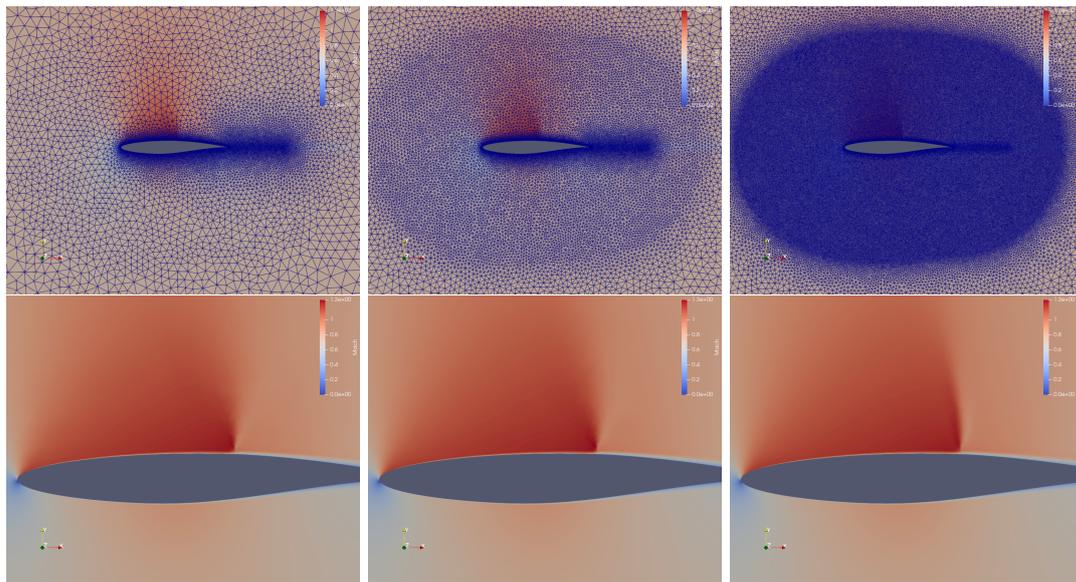


Figura 5.15: Variazione dimensione delle celle nel dominio entro un raggio di 1 m dal profilo.

Si può notare come l'infittimento del dominio attorno al profilo non alteri le prestazioni aerodinamiche di quest'ultimo bensì consente di ottenere una riduzione dell'errore di approssimazione.

È stato scelto un valore per la dimensione caratteristica delle celle per l'infittimento pari a $0.03m$.

Dominio: distanza refinement dal profilo @ dimensione celle=0.03 m. Si è scelto di utilizzare l'intervallo $[0.25, 1]m$ con passo 0.25m.

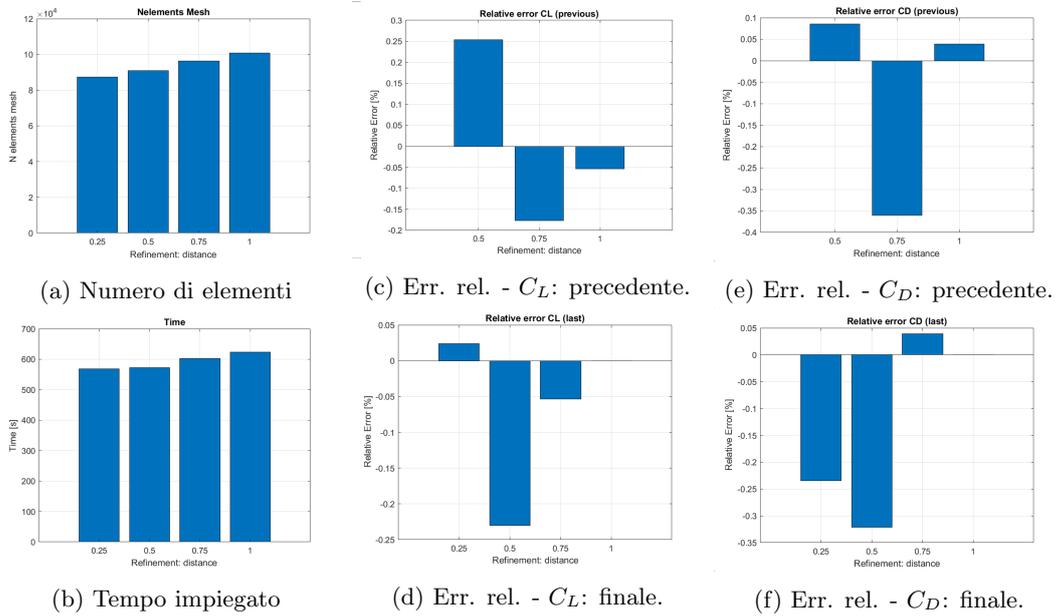


Figura 5.16: Prestazioni al variare della distanza dell'infitimento dal profilo.

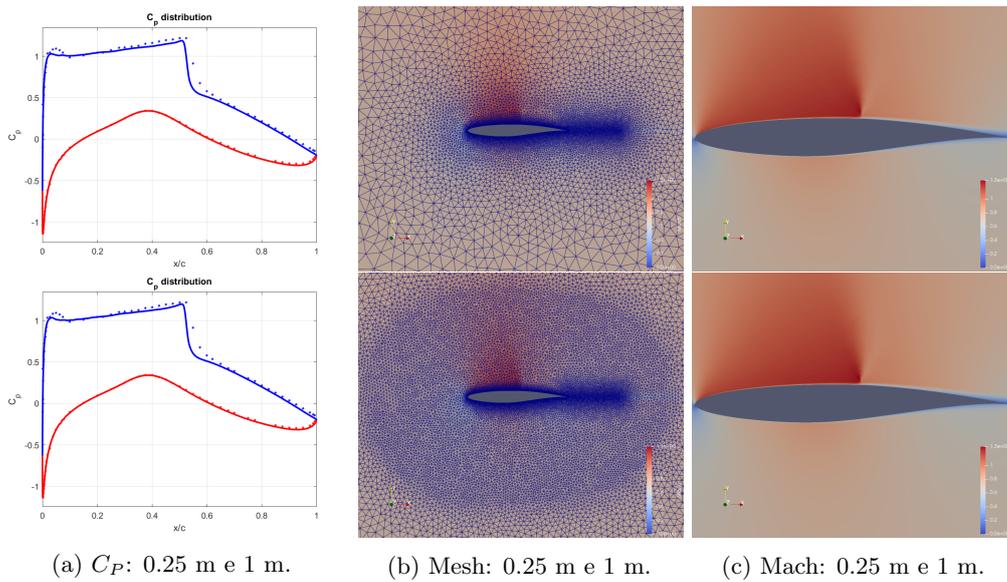


Figura 5.17: Variazione distanza dell'infitimento dal profilo.

É stato scelto 0.25m come valore della distanza dell'infitimento dal profilo.

5.1.2 Numero di CFL

Si è scelto di utilizzare l'intervallo $[100, 800]$ con passo 100 con l'opzione di adattamento disabilitata.

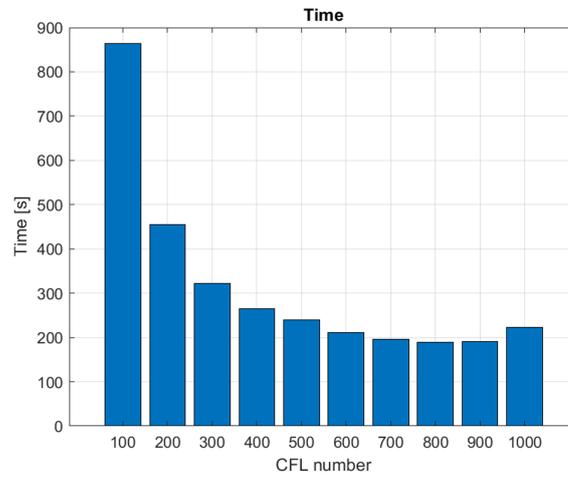


Figura 5.18: Prestazioni al variare del numero di CFL.

È stato scelto 800 come valore del numero di CFL con adattamento disattivato.

5.1.3 MultiGrid

Cycle e Level Dall'analisi svolta per il caso inviscido, è stato scelto di utilizzare il ciclo W poiché più stabile e performante di quello V.

Per quanto concerne i livelli di profondità del ciclo, per la griglia di calcolo utilizzata il livello 3 non permette la convergenza della soluzione. Di conseguenza, si è scelto di limitare l'intervallo di analisi a 0, 1 e 2.

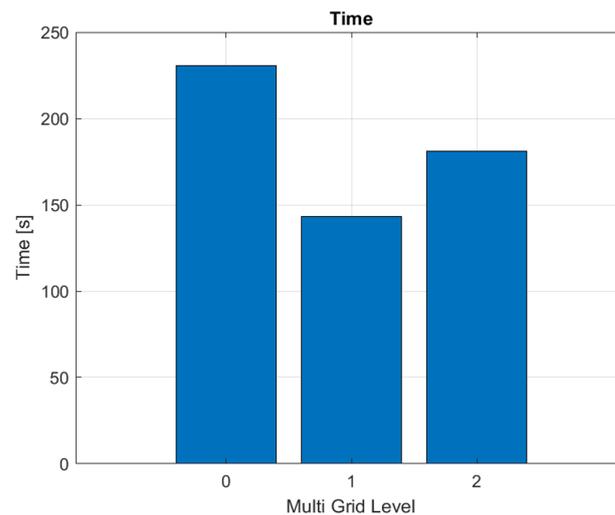


Figura 5.19: Prestazioni al variare del livello di MultiGrid per il ciclo W.

È stato scelto il livello 1.

Prolongation Si è scelto di utilizzare l'intervallo $[1.1, 1.3]$ con passo 0.05.

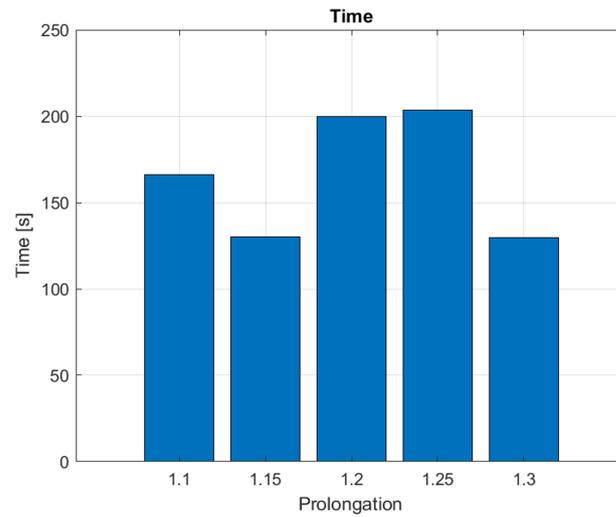


Figura 5.20: Prestazioni al variare del valore di Prolongation.

È stato scelto 1.15 come valore di Prolongation.

Restriction Si è scelto di utilizzare l'intervallo $[1, 1.1]$ con passo 0.05.

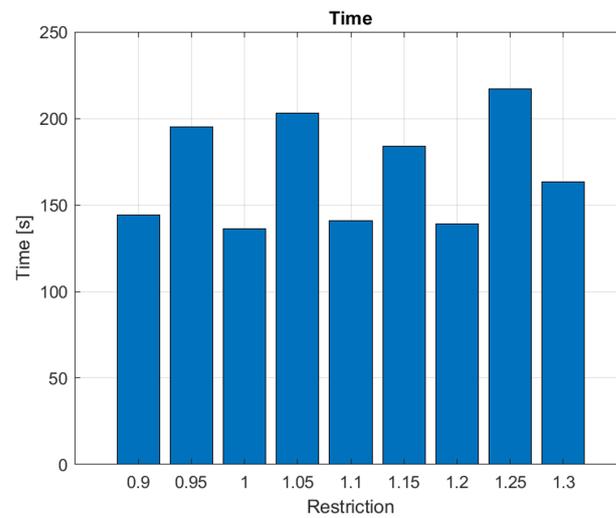


Figura 5.21: Prestazioni al variare del livello di Restriction.

È stato scelto 1 come valore di Restriction.

5.2 Linear solver

Numero di iterazioni Si è scelto di utilizzare l'intervallo $[1, 21]$ con passo 1.

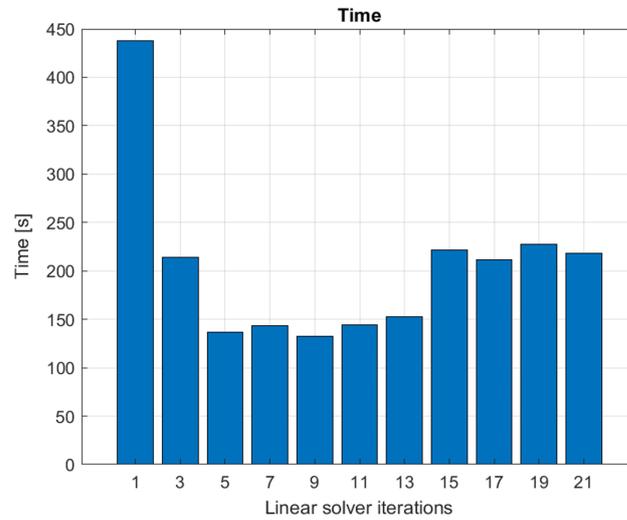


Figura 5.22: Prestazioni al variare del numero di iterazioni del solutore lineare.

È stato scelto 9 come numero delle iterazioni per l'utilizzo del solutore lineare.

5.2.1 Grid Algorithm

Per il caso inviscido, i possibili algoritmi di tassellazione sono: Automatic, Delaunay, Frontal-Delaunay, F-D for quads e Packing.

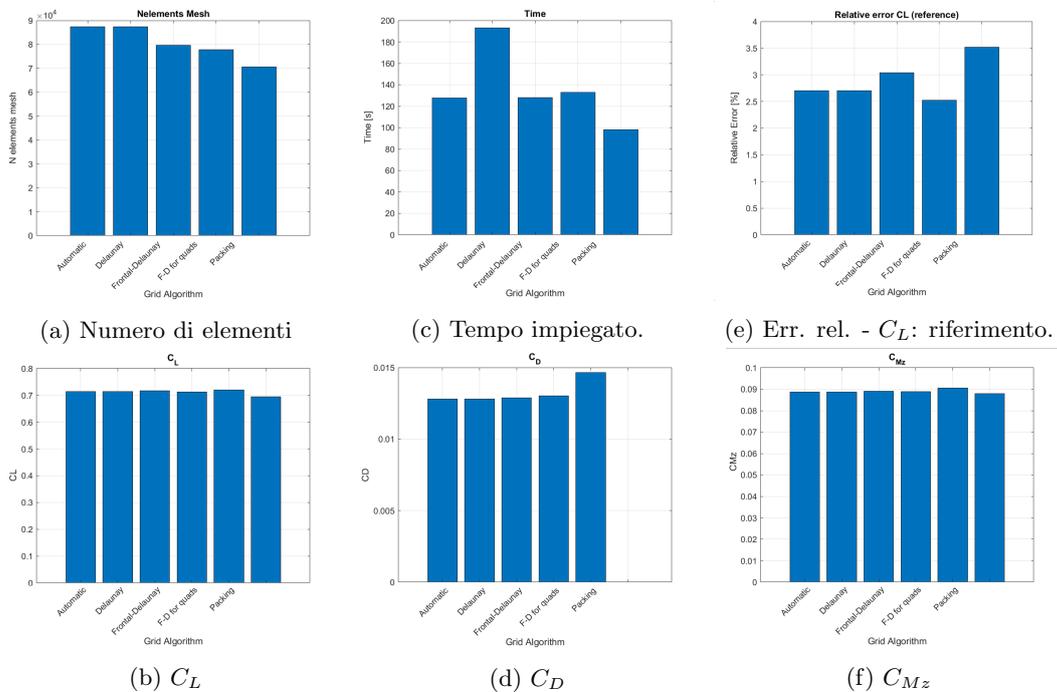


Figura 5.23: Prestazioni al variare dell'algoritmo di tassellazione.

È stato scelto Frontal-Delaunay come algoritmo di tassellazione.

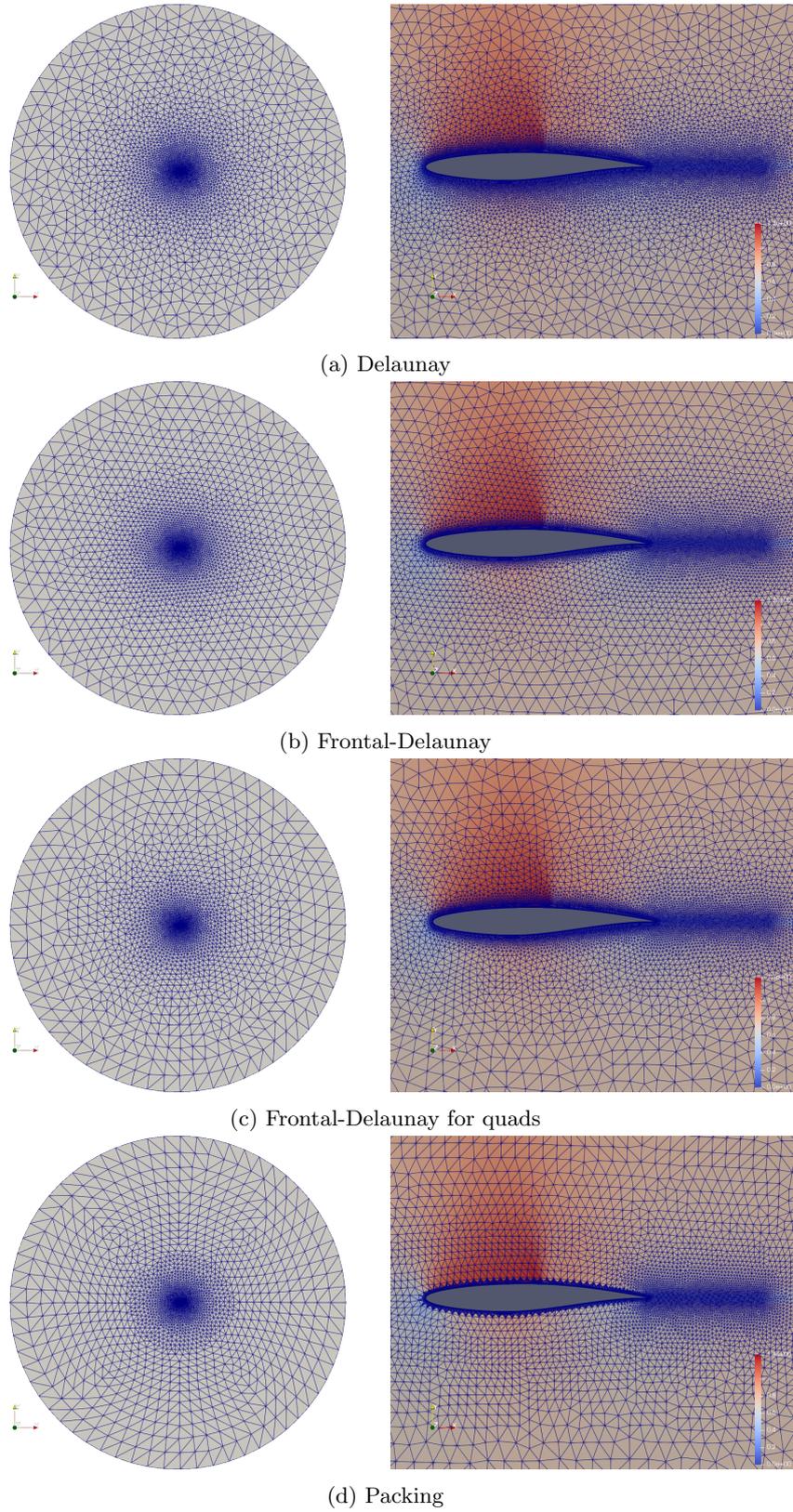


Figura 5.24: Variazione algoritmo di tassellazione.

5.2.2 Analisi modello di turbolenza

Al fine di valutare con maggiore accuratezza gli effetti della turbolenza sul problema in essere, sono stati confrontati i diversi modelli implementati all'interno di SU2: Spalart-Almaras, SA_NEG, $k - \omega$ SST, SA_E, SA_COMP, SA_E_COMP.

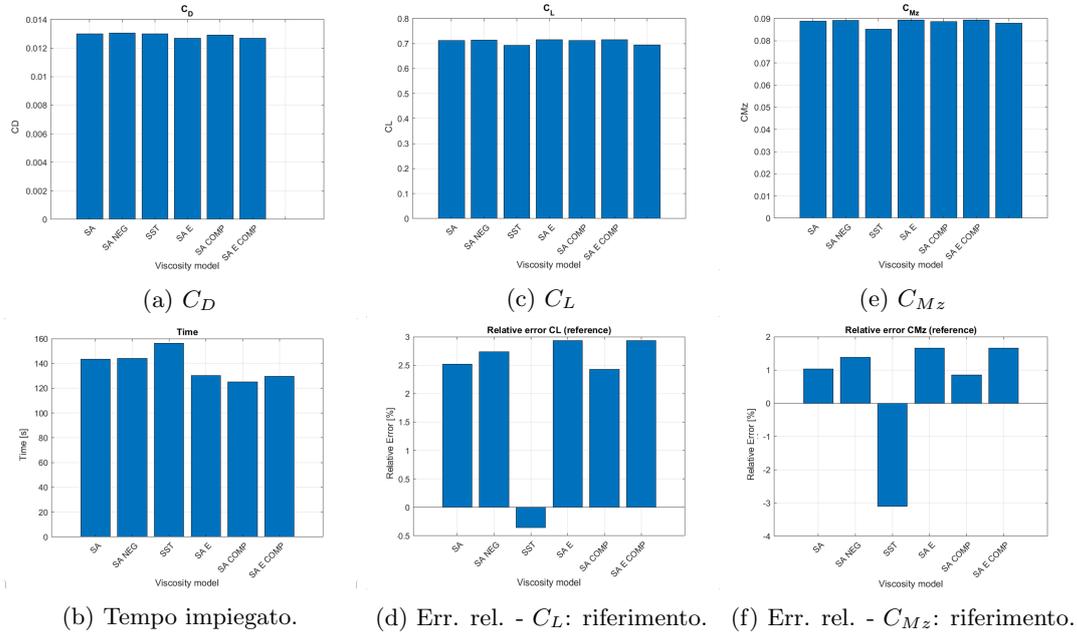


Figura 5.25: Prestazioni al variare del modello di turbolenza.

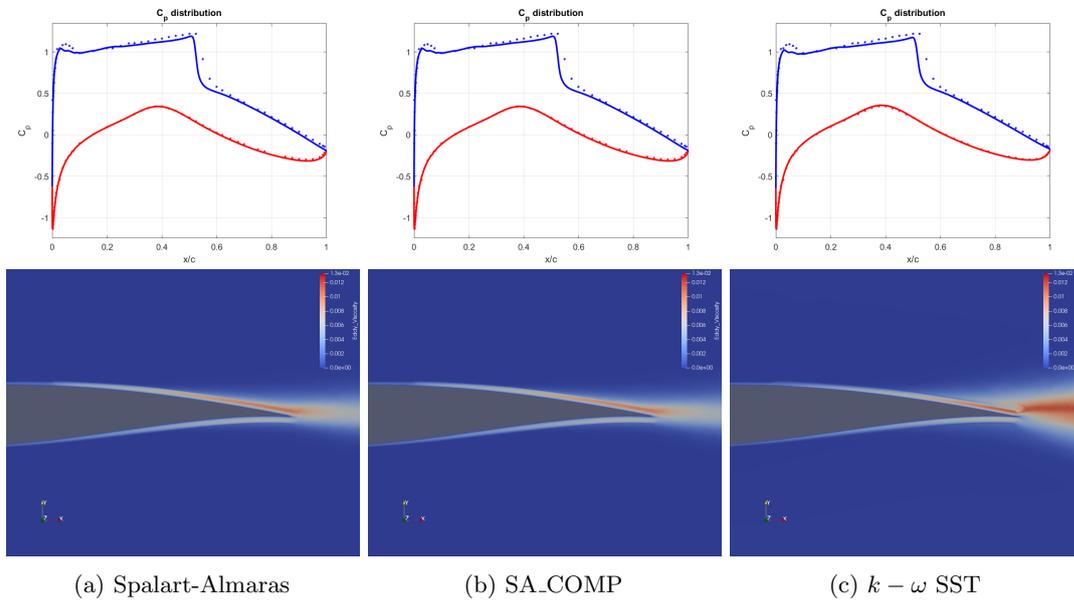


Figura 5.26: Variazione del modello di turbolenza.

È stato scelto Spalart-Almaras originale come modello di turbolenza in quanto affidabile e meno dispendioso in termini di risorse computazionali.

5.2.3 Configurazione finale

Parametro	Valore iniziale	Valore finale
Ratio strato limite	NaN	1.15
Numero punti superficie	150 + 600	700
Dimensione celle scia	NaN	0.005 m
Distanza scia	NaN	0.5 m
Altezza scia	NaN	0.3 m
Dimensione minima celle	0.05 m	0.03 m
Distanza infittimento	NaN	0.5 m
Dimensione celle farfield	5 m	5 m
MGLEVEL: cycle	W	W
MGLEVEL: level	3	1
MG Prolongation	1.05	1.15
MG Restriction	1.05	1
Algoritmo di tassellazione	Delaunay	Frontal-Delaunay
LINEAR_SOLVER_ITER	9	9
LINEAR_SOLVER	FGMRES	FGMRES
LINEAR_SOLVER_PREC	ILU	ILU
CFL	180	800
CFL_ADAPT	NO	NO

Tabella 5.1: Tabella riassuntiva dei valori dei files .cfg.

5.2.4 Considerazioni

Il passaggio tra due distribuzioni di punti uniformi genera una discrepanza che comporta la generazione di irregolarità nella distribuzione delle grandezze termo-fluidodinamiche lungo il profilo.

Per questo motivo si è scelto di utilizzare una distribuzione uniforme lungo tutto il perimetro del profilo utilizzando in totale 700 punti.

L'analisi di sensitività svolta non ha risentito di questa modifica.

Capitolo 6

Studio del Push Factor

Durante la definizione delle funzioni obiettivo e di vincolo all'interno di SU2, è necessario associare a ciascuna di esse un valore di Push Factor. Questi coefficienti sono analoghi ai fattori di penalità introdotti nel metodo della funzione di penalità per la risoluzione di problemi di ottimizzazione vincolata.

Poiché i valori ammissibili sono tutti i numeri reali strettamente positivi, non è afferabile a priori che esista un valore univoco per ogni funzione. Essi sono dipendenti dal problema considerato ed è possibile che vi sia interferenza tra gli stessi nel caso di sistemi di funzioni di vincolo: per questo motivo è stata svolta un'analisi di sensitività all'incrementare della complessità del problema al fine di valutare un criterio col quale scegliere il valore corretto dei Push Factor ad inizio progetto.

In particolare, si è scelto di svolgere tale analisi prima per un flusso inviscido, così da ottenere un risultato preliminare utile come configurazione di partenza per la successiva analisi viscosa al fine di ridurre il numero complessivo di simulazioni.

In entrambi i casi è stato scelto di utilizzare il profilo RAE 2822, le griglie di calcolo utilizzate sono state quelle ottenute negli studi illustrati nei capitoli precedenti e le condizioni operative sono quelle espresse nella tabella 3.6 associate alla tipologia di flusso considerata.

Le funzioni di vincolo possono essere espresse in termini di uguaglianza e disuguaglianza. I titoli delle sezioni illustreranno la casistica considerata.

È stata valutata la sola deformazione ottenuta dalle funzioni di Hicks-Henne. Uno studio analogo andrebbe svolto anche nel caso della Free-Form Deformation.

Per effettuare una più approfondita analisi dei dati, sono stati impostati dei filtri associati alle equazioni di vincolo imposte al fine di scandagliare la sequenza di soluzioni per verificare che la procedura di ottimizzazione presenti come ultima soluzione quella migliore tra quelle generate. Questo approccio è risultato essere efficace, in particolare nel caso in cui la procedura non sia andata a convergenza.

Si è scelto di identificare i casi in cui i valori non si discostassero del più del 5% e del 10% da quelli di riferimento.

Il valore di Push Factor associato alla funzione obiettivo è inizialmente fissato pari a 1.

6.1 Caso Inviscido

6.1.1 AIRFOIL_THICKNESS =

Minimizzare: C_d

Soggetto a: AIRFOIL_THICKNESS = AIRFOIL_THICKNESS originale

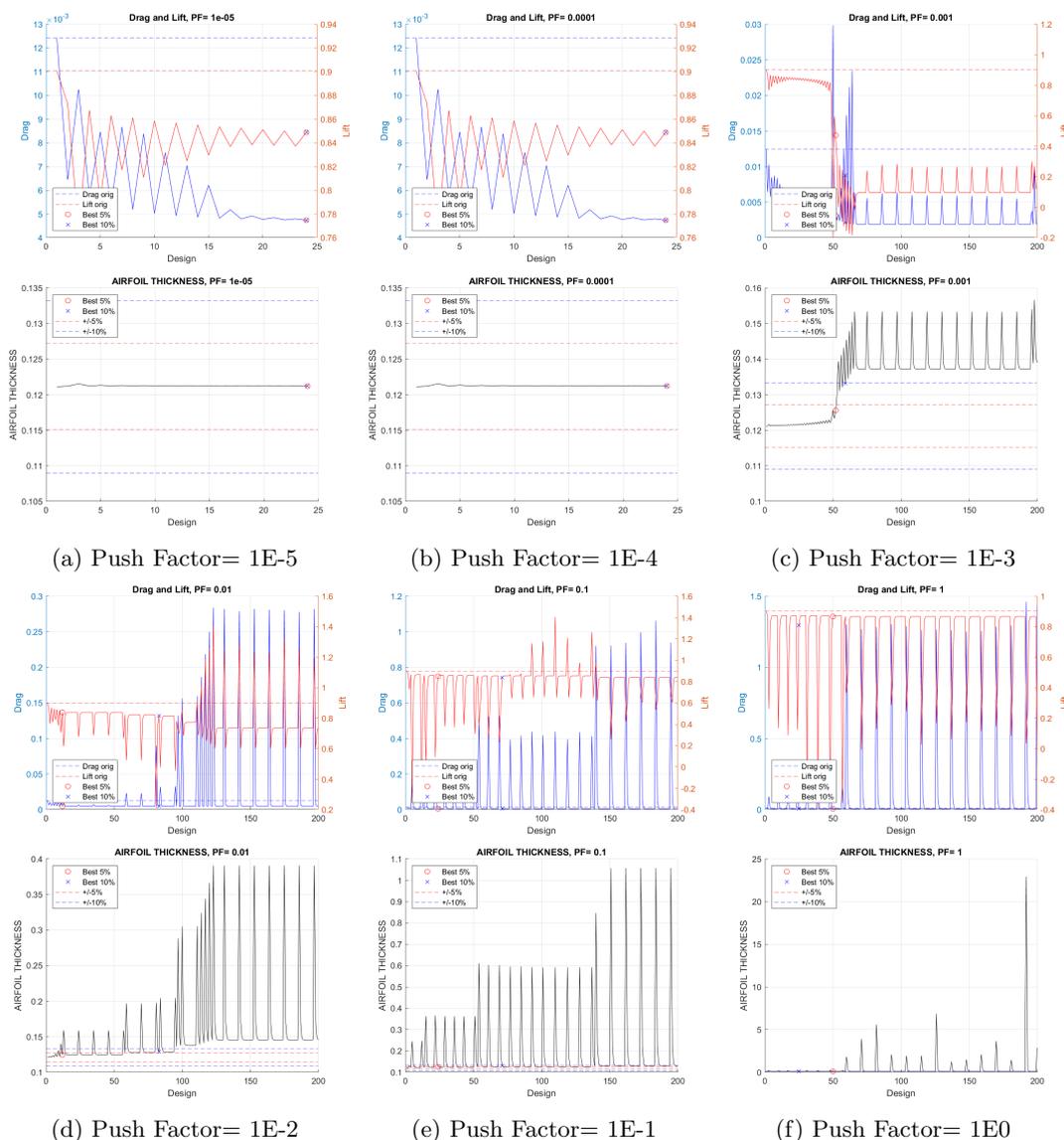


Figura 6.1: Variazione del Push Factor dell'equazione di vincolo applicata allo spessore.

Da questa prima analisi si può osservare come esista un valore minimo al di sotto del quale la soluzione non varia al ridursi del valore del Push Factor. D'altro canto, ciò comporta che per valori maggiori il processo risulta instabile ed esso si arresta solo nel caso in cui la geometria ottenuta dalla soluzione del sistema dell'Aggiunto non permetta la convergenza della simulazione CFD ad essa associata.

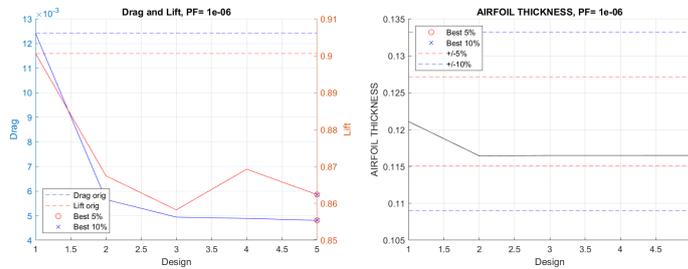
È possibile osservare come, all'aumentare del valore del Push Factor, l'instabilità nella ricerca della soluzione si presenti ad un numero di iterazioni sempre minore. Si può evincere ciò anche dall'andamento crescente dei valori dello spessore. Inoltre, come nel caso di soluzioni instabili, vi è un'alternanza di valori di picco e plateau. In questi casi, i vincoli non sono più rispettati.

Per questa equazione di vincolo, è stato scelto un valore di Push Factor pari a $1E - 4$.

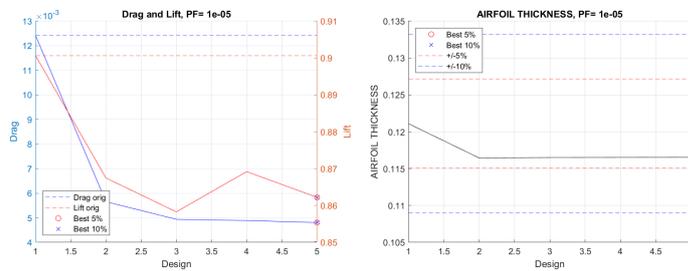
6.1.2 AIRFOIL_THICKNESS > +5%
AIRFOIL_THICKNESS < -5%

Minimizzare: C_d

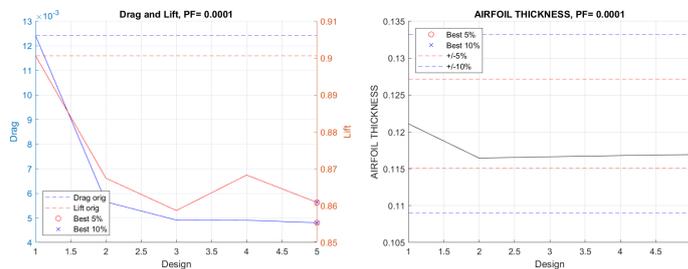
Soggetto a: AIRFOIL_THICKNESS < +5%
 AIRFOIL_THICKNESS > -5%



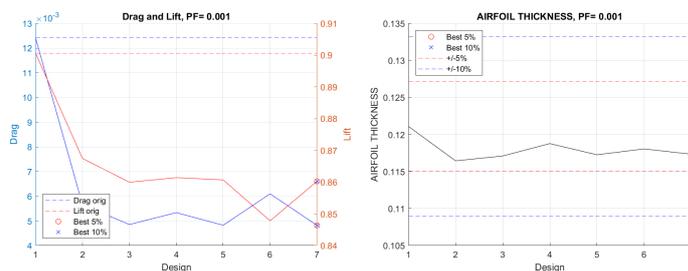
(a) Push Factor= 1E-6



(b) Push Factor= 1E-5



(c) Push Factor= 1E-4



(d) Push Factor= 1E-3

Figura 6.2: Variazione del Push Factor di un sistema di disequazioni applicate allo spessore.

Come osservato in precedenza, si può vedere come esista un valore minimo del Push Factor al di sotto del quale la soluzione non cambia.

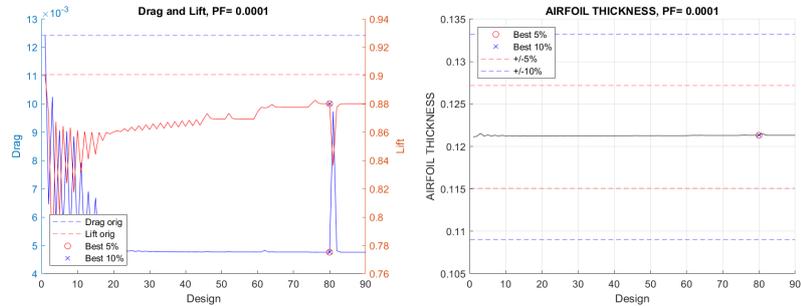
È interessante notare come in questa situazione, in cui i vincoli sono meno stringenti, la soluzione è ottenuta in un numero molto ristretto di valutazioni.

La differenza relativa tra i valori della resistenza nei casi $1E-3$ e $1E-4$ è pari a -0.25%. Per questa condizione, è stato scelto un valore di Push Factor pari a $1E-4$.

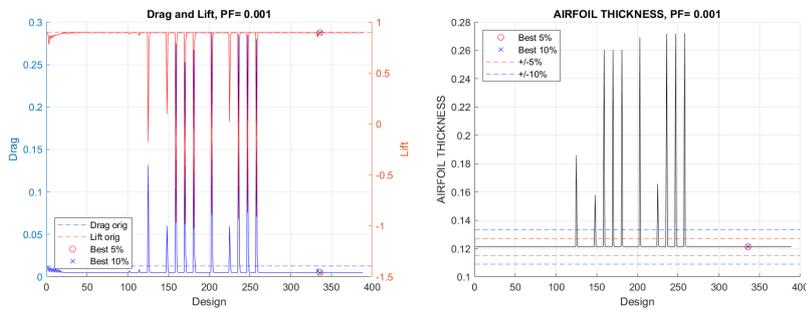
6.1.3 AIRFOIL_THICKNESS = @PF = 0.0001 LIFT > LIFT_originale

Minimizzare: C_d

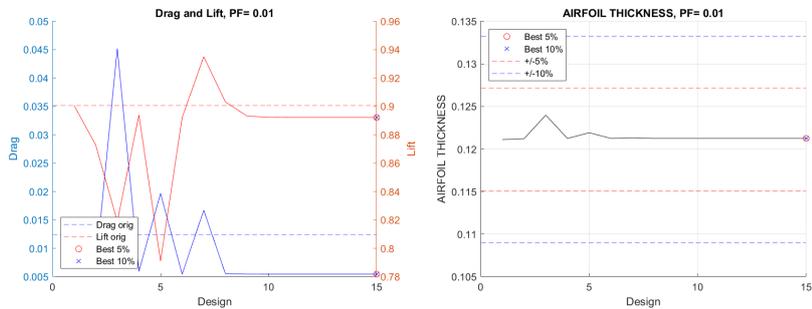
Soggetto a: AIRFOIL_THICKNESS = AIRFOIL_THICKNESS originale @PF = 0.0001



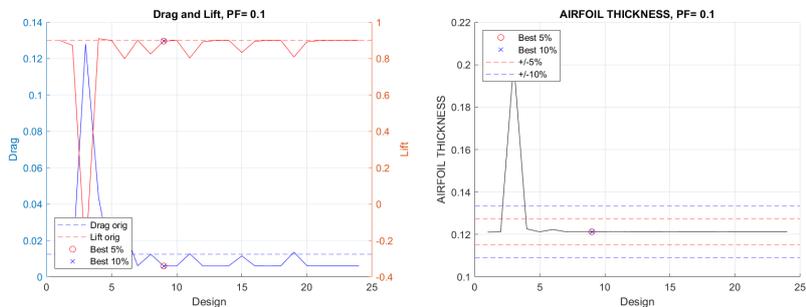
(a) Push Factor= 1E-4



(b) Push Factor= 1E-3



(c) Push Factor= 1E-2



(d) Push Factor= 1E-1

Figura 6.3: Variazione del Push Factor della disequazione applicata alla portanza, fissato quello dell'equazione dello spessore.

Push Factor	DRAG	A_T filtro	LIFT filtro	# sol	Δ A-T	Δ LIFT
0.0001	0.00476	0.12132	0.88047	79	0.18 %	-2.24 %
0.001	0.00492	0.12125	0.89676	336	0.12 %	-0.43%
0.01	0.00545	0.12125	0.89220	15	0.12 %	-0.94 %
0.1	0.00600	0.12124	0.89623	9	0.11 %	-0.49 %

Tabella 6.1: Tabella comparativa dei diversi risultati ottenuti dall'applicazione del filtro al variare del valore del Push Factor.

L'unico caso in cui il processo di ricerca dell'ottimo ha raggiunto la convergenza della soluzione è stato il caso con Push Factor pari a 0.01. È possibile osservare, però, che il valore di portanza ottenuto dalla soluzione finale non rispetta il vincolo imposto.

Data la convergenza del solutore e lo scarto tra il valore di riferimento e quello ottenuto dalla soluzione è stato scelto di utilizzare il valore di Push Factor pari a 0.1.

6.1.4 AIRFOIL_THICKNESS = LIFT > LIFT_originale @PF = 0.001

Questo caso è stato analizzato per osservare se ci fosse interazione tra i Push Factor applicati a vincoli diversi.

Minimizzare: C_d

Soggetto a: AIRFOIL_THICKNESS = AIRFOIL_THICKNESS originale @PF = 0.0001

LIFT > LIFT originale

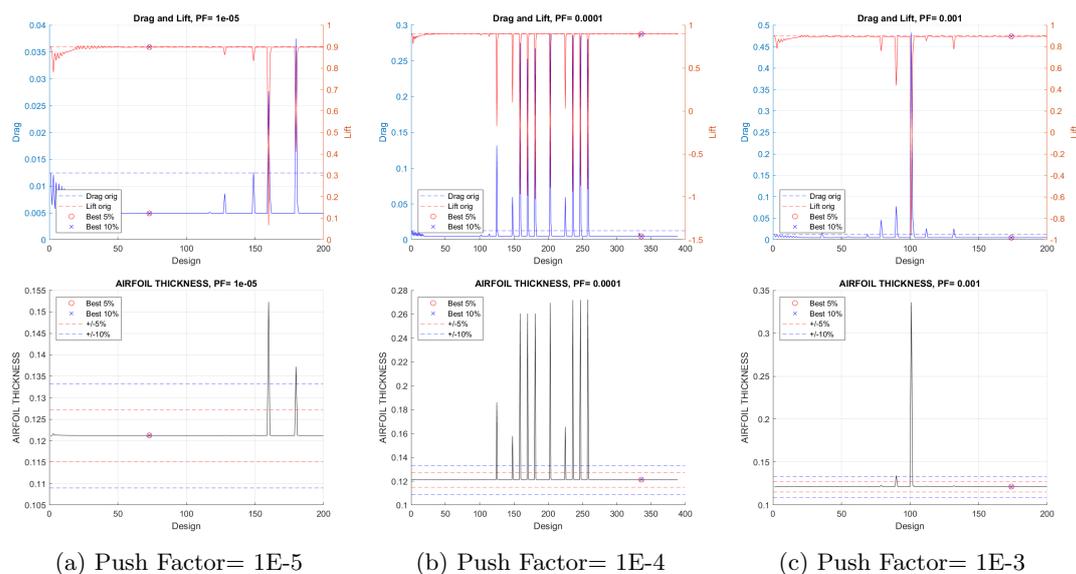


Figura 6.4: Variazione del Push Factor dell'equazione di vincolo applicata allo spessore, fissato quello della disequazione al lift.

Push Factor	DRAG	A_T filtro	LIFT filtro	# sol	Δ A_T	Δ LIFT
0.000001	0.00492	0.12122	0.8972	73	0.10 %	-0.38 %
0.0001	0.00492	0.12125	0.89676	336	0.12 %	-0.43%
0.001	0.00492	0.12148	0.89452	174	0.31 %	-0.68 %

Tabella 6.2: Tabella comparativa dei diversi risultati ottenuti dall'applicazione del filtro al variare del valore del Push Factor.

Al fine di valutare correttamente quale sia la coppia di valori da dover applicare in un particolare caso di studio, potrebbe essere opportuno effettuare un'analisi preliminare con tecniche riconducibili alla metodologia Design Of Experiment: uno studio full-factorial con 2 variabili e 3 livelli comporterebbe la necessità di risolvere 9 problemi di ottimizzazione.

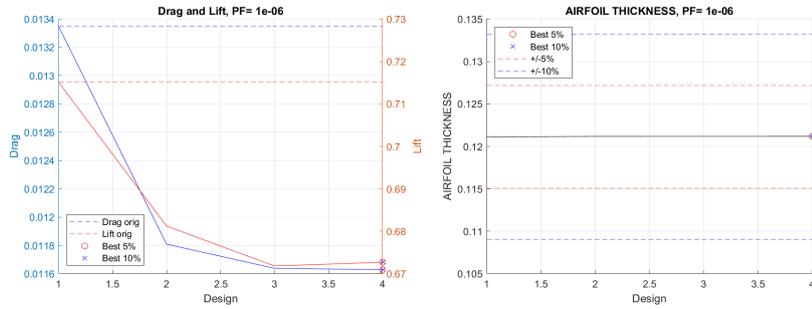
Considerando che mediamente ogni soluzione richiede 26 secondi di tempo e che l'algoritmo di ottimizzazione potrebbe non arrestarsi per centinaia di iterazioni, tale metodologia risulta essere troppo dispendiosa.

6.2 Caso viscoso

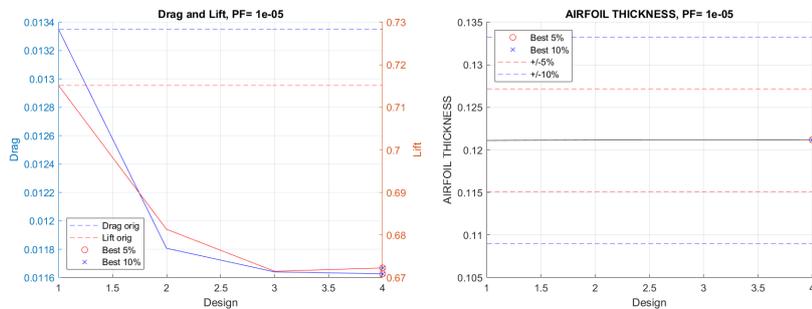
6.2.1 AIRFOIL_THICKNESS =

Minimizzare: C_d

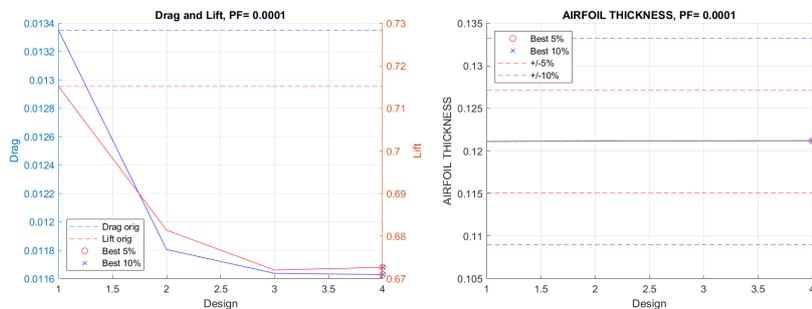
Soggetto a: AIRFOIL_THICKNESS = AIRFOIL_THICKNESS originale



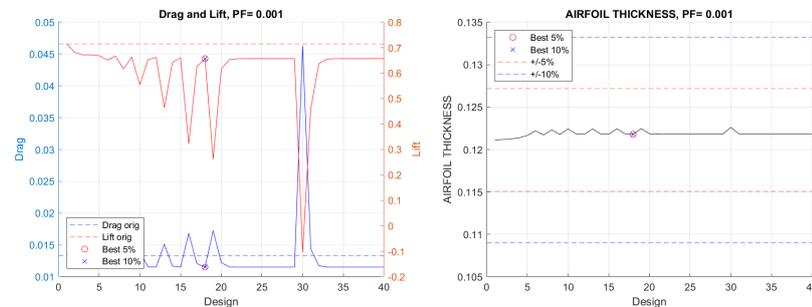
(a) Push Factor= 1E-6



(b) Push Factor= 1E-5



(c) Push Factor= 1E-4



(d) Push Factor= 1E-3

Figura 6.5: Variazione del Push Factor di un'equazione di vincolo applicata allo spessore.

Push Factor	DRAG	A_T filtro	# sol	Δ A_T
0.000001	0.01163	0.12119	4	0.07 %
0.00001	0.01163	0.12119	4	0.07 %
0.0001	0.01163	0.12120	4	0.08 %
0.001	0.01152	0.12179	18	0.57 %

Tabella 6.3: Tabella comparativa dei diversi risultati ottenuti dall'applicazione del filtro al variare del valore del Push Factor.

Come osservato nel caso inviscido, anche in questa situazione esiste un valore minimo del Push Factor al di sotto del quale la soluzione ottenuta non varia in modo significativo.

È opportuno osservare come, una volta applicati i filtri, il caso con Push Factor pari a 0.001 generi una soluzione migliore rispetto agli altri casi in termini di funzione obiettivo. Probabilmente il solutore non accetta una discrepanza dello 0.5% rispetto al valore di riferimento, di conseguenza la soluzione non converge.

Nell'ipotesi in cui tale valore sia ritenuto ragionevole, bisognerebbe eventualmente modificare i parametri di convergenza interni all'algoritmo utilizzato oppure ritenere valida la soluzione trovata e partire da quella come valore di base. Un'altra alternativa potrebbe essere quella di scalare il valore di riferimento all'interno della funzione di vincolo di un fattore 0.95 così da accettare tale incertezza.

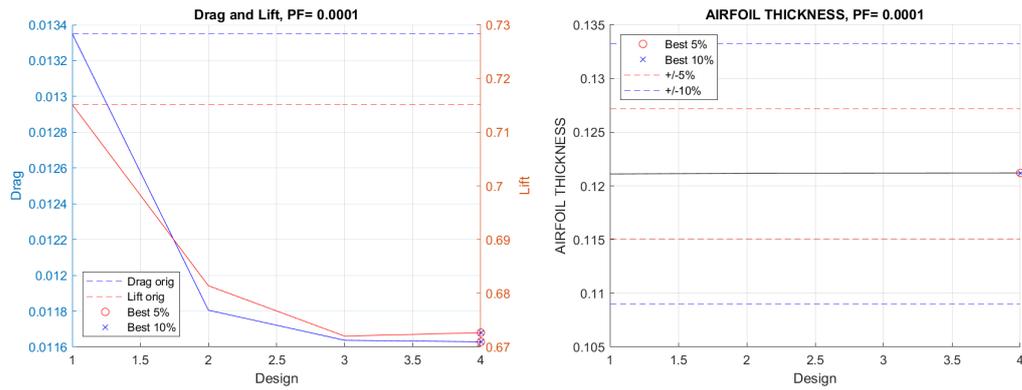
Data la convergenza dell'algoritmo, è stato scelto un valore di Push Factor pari a 0.0001.

6.2.2 AIRFOIL_THICKNESS = @PF = 0.0001 DRAG

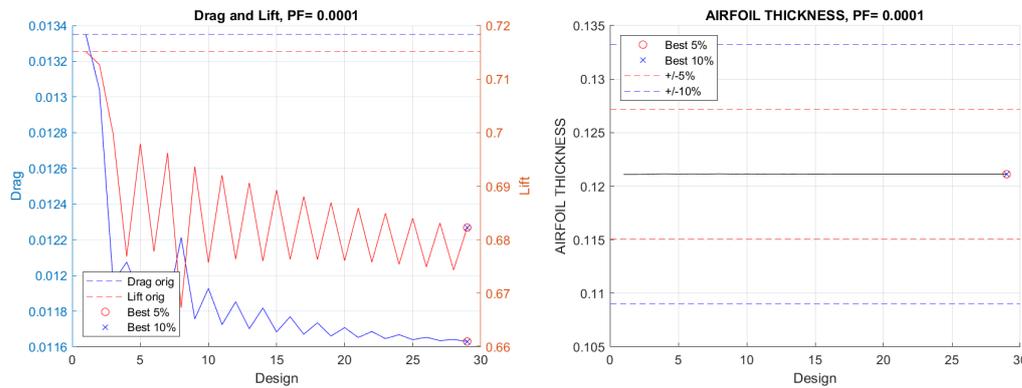
Al fine di valutare se il Push Factor della funzione obiettivo possa incidere sulla soluzione ottenuta, in particolare per valutare se il caso precedente in cui esso valeva 0.001 potesse rientrare nell'insieme delle soluzioni accettabili, è stata effettuata una valutazione della sua variazione.

Minimizzare: C_d

Soggetto a: AIRFOIL_THICKNESS = AIRFOIL_THICKNESS originale @PF = 0.0001



(a) Push Factor= 1E0



(b) Push Factor= 1E-1

Figura 6.6: Variazione del Push Factor della funzione obiettivo, fissato quello dell'equazione di vincolo.

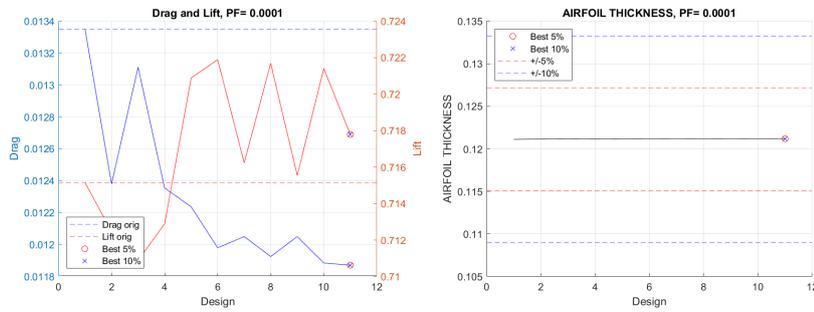
Nonostante il numero di iterazioni sia stato maggiore nel caso di un valore di Push Factor minore, entrambi i solutori hanno converso a due soluzioni quasi coincidenti (differenza dello 0.014%).

Per questo motivo si è scelto di mantenere tale valore pari a 1.

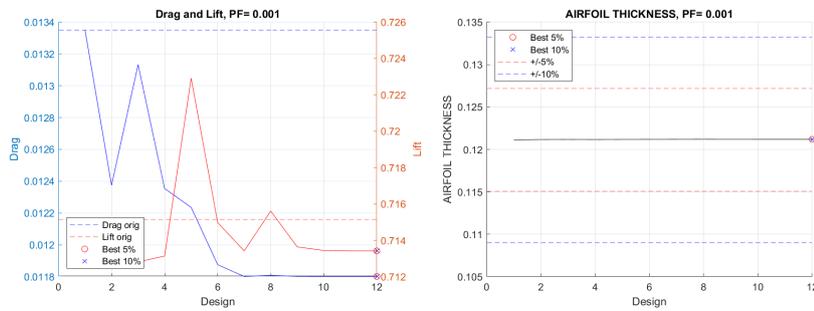
**6.2.3 AIRFOIL_THICKNESS = @PF = 0.0001
LIFT > LIFT_originale**

Minimizzare: C_d

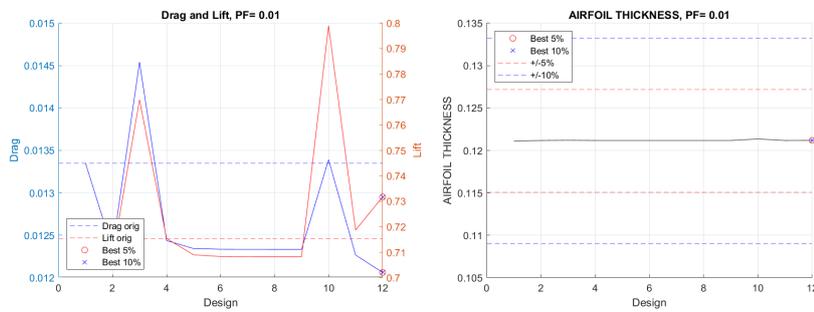
Soggetto a: AIRFOIL_THICKNESS = AIRFOIL_THICKNESS originale @PF = 0.0001
LIFT > LIFT originale



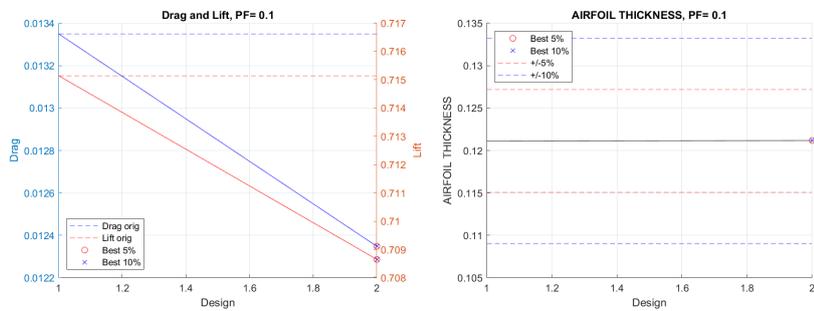
(a) Push Factor= 1E-4



(b) Push Factor= 1E-3



(c) Push Factor= 1E-2



(d) Push Factor= 1E-1

Figura 6.7: Variazione del Push Factor della disequazione applicata della portanza, fissato quello dell'equazione dello spessore.

Push Factor	DRAG	A_T filtro	LIFT filtro	# sol	Δ A-T	Δ LIFT
0.0001	0.01187	0.12119	0.72140	12	0.18%	0.87 %
0.001	0.01180	0.12119	0.71342	12	0.13 %	-0.24 %
0.01	0.01206	0.12118	0.73175	12	0.12 %	2.32 %
0.1	0.01235	0.12117	0.70865	2	0.11 %	-0.91 %

Tabella 6.4: Tabella comparativa dei diversi risultati ottenuti dall'applicazione del filtro al variare del valore del Push Factor.

Dalla seguente analisi è possibile osservare come all'incrementarsi del valore del Push Factor, l'algoritmo tenda ad arrestarsi in un decrescente numero di valutazioni. In particolare, sia nel caso del Push Factor pari a 0.001, sia in quello pari a 0.1, l'algoritmo non ha raggiunto la convergenza mentre nei restanti casi esso confermava tale andamento.

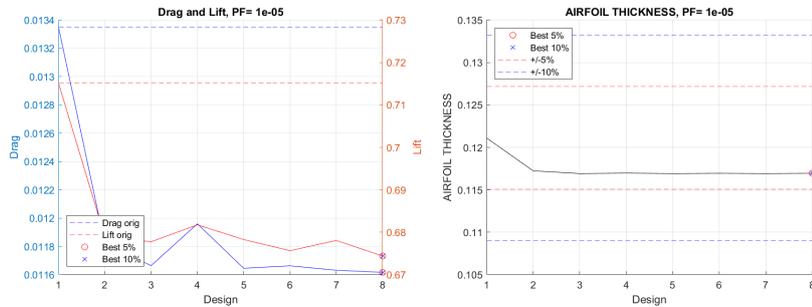
In aggiunta a ciò, è stato valutato anche il caso 0.00001 ma in quest'ultima situazione l'algoritmo convergeva alla prima soluzione, ovvero a quella originale: ciò è in contrasto con quanto osservato sia in questo particolare caso, sia con quelli osservati in precedenza.

Alla riduzione del valore del Push Factor non è stata raggiunta la condizione di plateau oppure, per valori troppo piccoli dello stesso, l'algoritmo non modifica la geometria perché ritiene che la sensitività di quest'ultima sia tale da non fornire soluzioni accettabili.

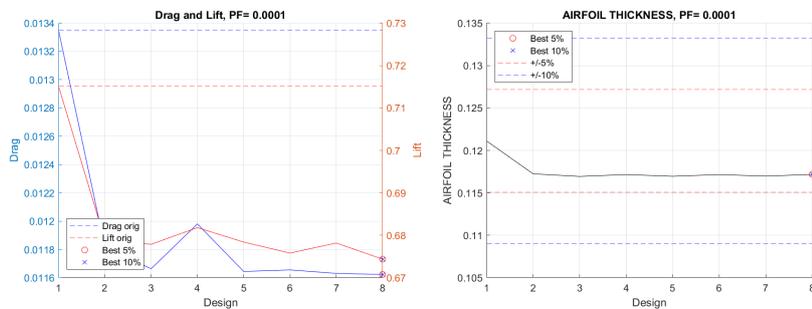
6.2.4 AIRFOIL_THICKNESS < +5%
AIRFOIL_THICKNESS > -5%

Minimizzare: C_d

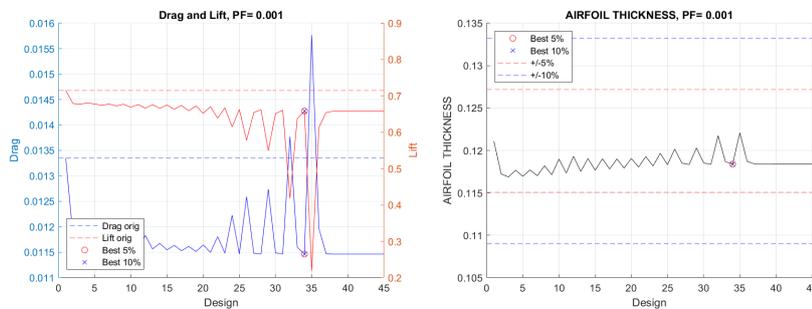
Soggetto a: AIRFOIL_THICKNESS < +5%
 AIRFOIL_THICKNESS > -5%



(a) Push Factor= 1E-5



(b) Push Factor= 1E-4



(c) Push Factor= 1E-3

Figura 6.8: Variazione del Push Factor di un sistema di disequazioni applicate allo spessore.

Push Factor	DRAG	A.T filtro	# sol	Δ A.T
0.00001	0.01162	0.11695	8	-3.43 %
0.0001	0.01162	0.11717	8	-3.25 %
0.001	0.01146	0.11839	34	-2.25 %

Tabella 6.5: Tabella comparativa dei diversi risultati ottenuti dall'applicazione del filtro al variare del valore del Push Factor.

Come osservato nel caso inviscido, anche in questa situazione esiste un valore minimo del Push Factor al di sotto del quale il risultato non cambia.

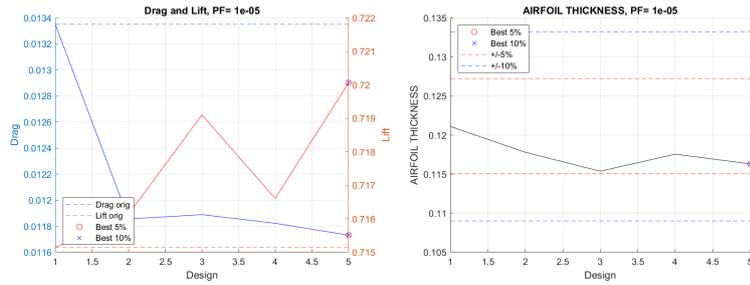
6.2.5 AIRFOIL_THICKNESS < +5% @PF = 0.0001
AIRFOIL_THICKNESS > -5% @PF = 0.0001
LIFT > LIFT_originale

Minimizzare: C_d

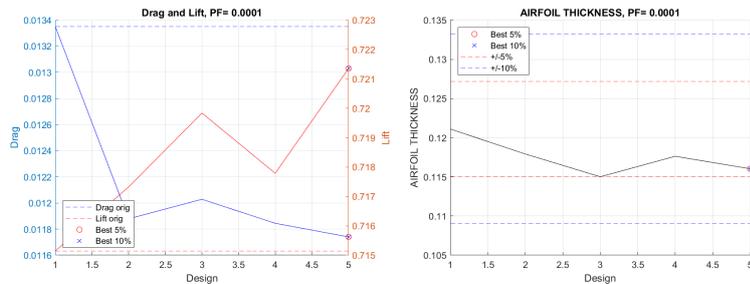
Soggetto a: AIRFOIL_THICKNESS < +5% @PF = 0.0001

AIRFOIL_THICKNESS > -5% @PF = 0.0001

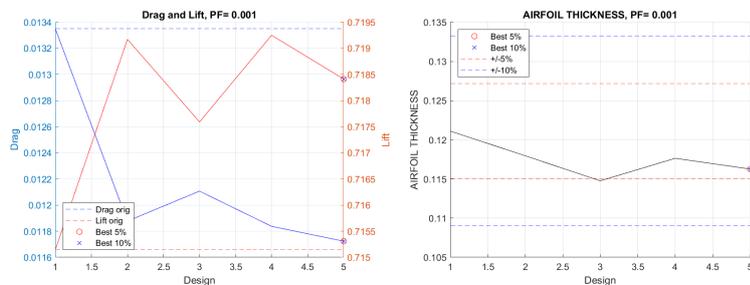
LIFT > LIFT originale



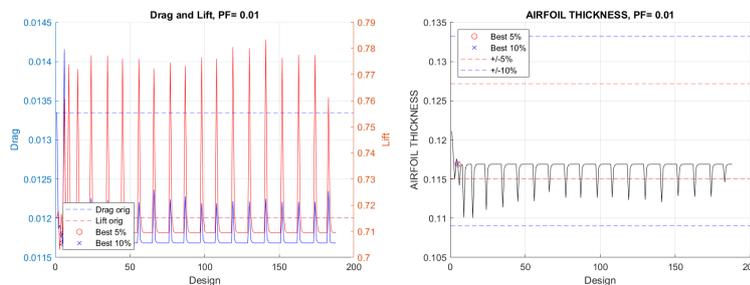
(a) Push Factor= 1E-5



(b) Push Factor= 1E-4



(c) Push Factor= 1E-3



(d) Push Factor= 1E-2

Figura 6.9: Variazione del Push Factor della disequazione applicata alla portanza, fissato quello del sistema di disequazioni di vincolo dello spessore.

Push Factor	DRAG	A.T filtro	LIFT filtro	# sol	Δ A.T	Δ LIFT
0.00001	0.01173	0.11631	0.72006	5	-3.96 %	0.69 %
0.0001	0.01174	0.11604	0.72136	5	-4.19 %	0.87 %
0.001	0.01172	0.11627	0.71841	5	-3.99 %	0.46 %
0.01	0.01168	0.11692	0.70876	5	-3.45 %	-0.89 %

Tabella 6.6: Tabella comparativa dei diversi risultati ottenuti dall'applicazione del filtro al variare del valore del Push Factor.

Come osservato nel caso inviscido, anche in questa situazione esiste un valore minimo del Push Factor al di sotto del quale il risultato non cambia.

6.2.6 AIRFOIL_THICKNESS < +5% @PF = 0.0001
AIRFOIL_THICKNESS > -5% @PF = 0.0001
LIFT > LIFT_originale @PF = 0.001
MOMENT_Z = MOMENT_Z_originale

Minimizzare: C_d

Soggetto a: AIRFOIL_THICKNESS < +5% @PF = 0.0001

AIRFOIL_THICKNESS > -5% @PF = 0.0001

LIFT > LIFT_originale @PF = 0.001

MOMENT_Z = MOMENT_M originale

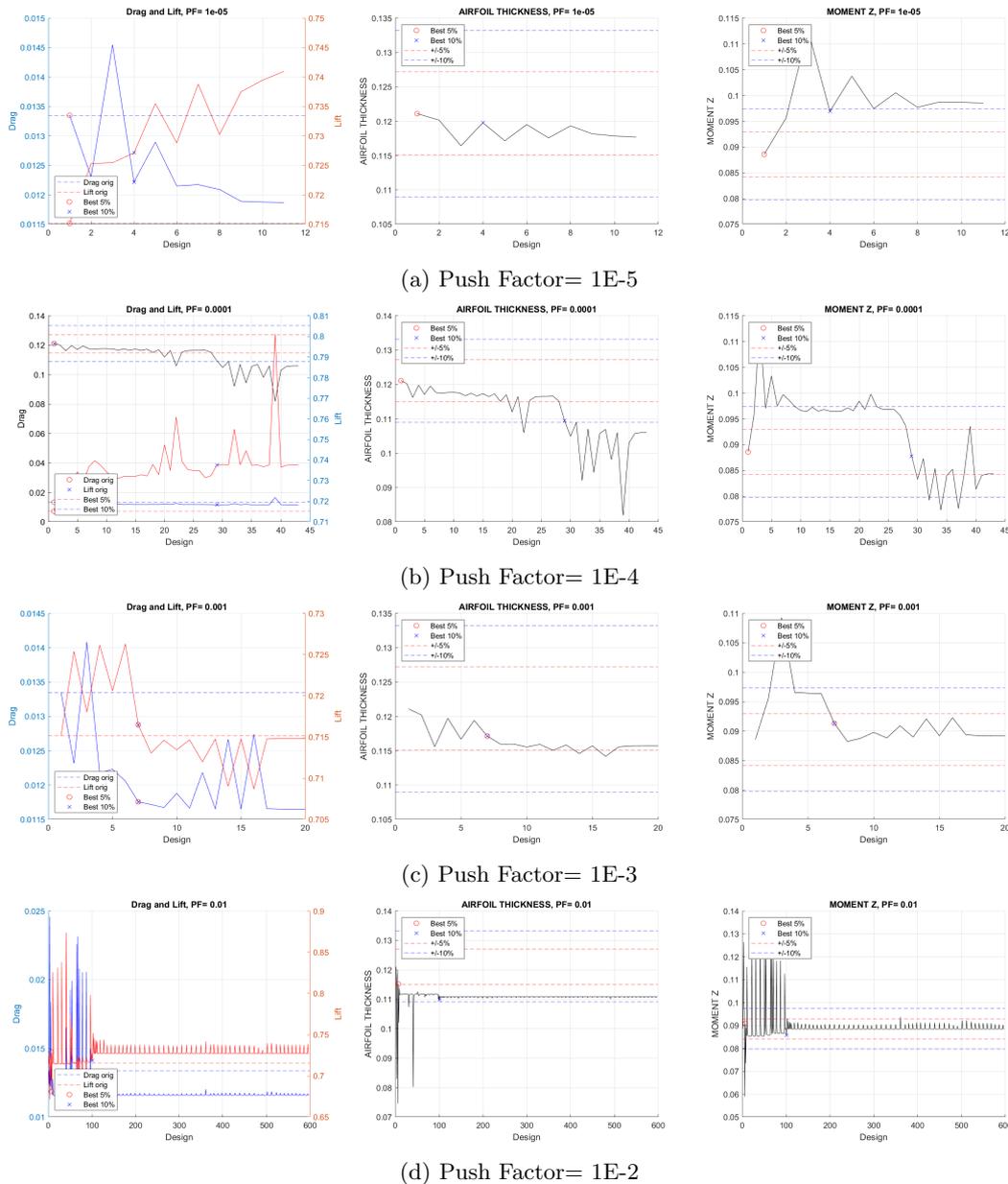


Figura 6.10: Variazione del Push Factor della disequazione applicata al momento, fissati quello del sistema di disequazione dello spessore e quello della disequazione della portanza.

P F	DRAG	A.T filtro	L filtro	M.Z filtro	# sol	Δ A.T	Δ L	Δ M.Z
0.00001	0.01335	0.12111	0.71515	0.08857	1	0 %	0 %	0 %
0.0001	0.01335	0.12111	0.71515	0.08857	1	0 %	0 %	0 %
0.001	0.01176	0.11714	0.71648	0.09134	7	-3.27 %	0.19 %	3.13 %
0.01	0.01233	0.12023	0.72886	0.09085	7	-0.73 %	1.92 %	2.57 %

Tabella 6.7: Tabella comparativa dei diversi risultati ottenuti dall'applicazione del filtro al variare del valore del Push Factor.

In questa situazione, l'algoritmo di ottimizzazione presenta un comportamento discordante rispetto ai casi precedenti: si può notare come l'unico caso in cui esso abbia raggiunto la convergenza della soluzione sia quello a Push Factor = 0.00001 ma la soluzione non rispetta i vincoli imposti. In particolare, dalla seconda iterazione la geometria non rispetta più il vincolo imposto al momento.

Un altro aspetto in disaccordo con quanto osservato finora è il fatto che il numero di soluzioni prima che l'algoritmo si arresti non è crescente all'aumentare del valore del Push Factor. In questo caso, quindi, non è possibile prevedere quale possa essere il comportamento del problema di ottimizzazione al variare del valore del Push Factor.

6.2.7 AIRFOIL_THICKNESS < +5% @PF = 0.0001
AIRFOIL_THICKNESS > -5% @PF = 0.0001
LIFT > LIFT_originale
MOMENT_Z = MOMENT_Z_originale @PF = 0.001

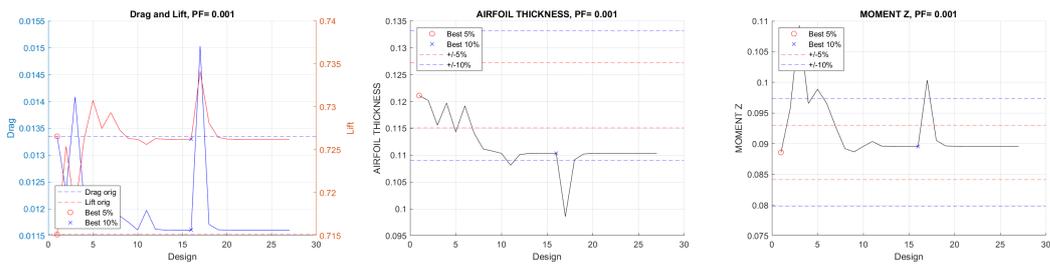
Minimizzare: C_d

Soggetto a: AIRFOIL_THICKNESS < +5% @PF = 0.0001

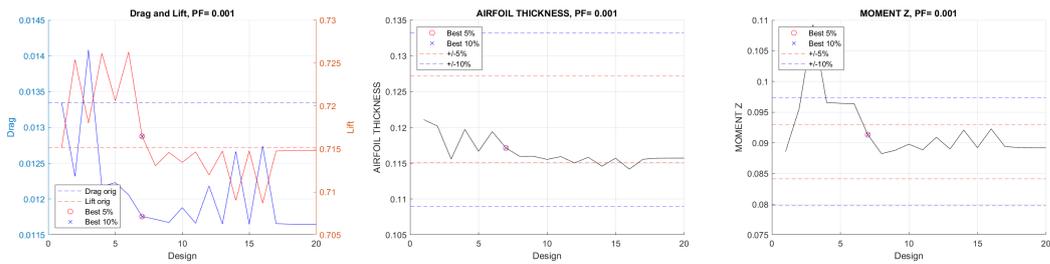
AIRFOIL_THICKNESS > -5% @PF = 0.0001

LIFT > LIFT originale

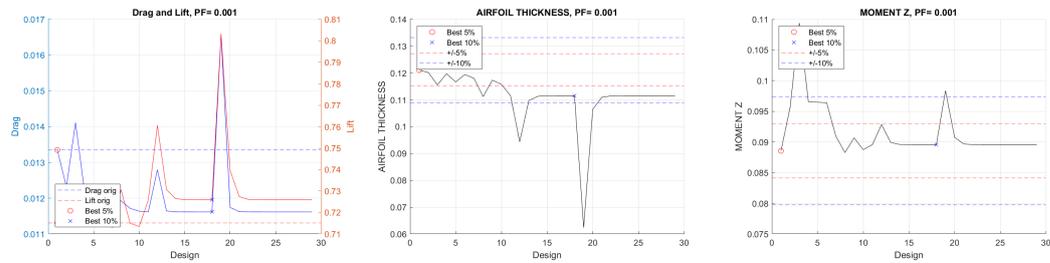
MOMENT_Z = MOMENT_M originale @PF = 0.001



(a) Push Factor= 1E-4



(b) Push Factor= 1E-3



(c) Push Factor= 1E-2

Figura 6.11: Variazione del Push Factor della disequazione applicata alla portanza, fissati quello del sistema di disequazione dello spessore e quello della disequazione del momento.

P F	DRAG	A_T ftr	L ftr	M.Z ftr	# sol	Δ A_T	Δ LIFT	Δ M.Z
0.0001	0.01335	0.12111	0.71515	0.08857	1	0 %	0 %	0 %
0.001	0.01176	0.11714	0.71648	0.09134	7	-3.2740 %	0.1860 %	3.13 %
0.01	0.01335	0.12111	0.71515	0.08857	1	0 %	0 %	0 %

Tabella 6.8: Tabella comparativa dei diversi risultati ottenuti dall'applicazione del filtro al variare del valore del Push Factor.

In tutti e tre i casi l'algoritmo di ottimizzazione non ha mai raggiunto la convergenza della soluzione. L'unico caso in cui una soluzione avrebbe rispettato le tolleranze imposte nei filtri, essa ha presentato una differenza relativa rispetto al valore di riferimento probabilmente superiore a quella ammissibile dall'algoritmo.

Capitolo 7

Conclusioni

7.1 Risultati

In generale, è stato possibile osservare che esiste un valore minimo del Push Factor al di sotto del quale la soluzione ottenuta dall'algoritmo di ottimizzazione non varia al variare dello stesso.

All'aumentare di tale valore si può osservare un incremento del numero di iterazioni dell'algoritmo di ottimizzazione e una maggiore probabilità di instabilità nel raggiungimento della soluzione di ottimo.

Un valore plausibile di primo tentativo per il Push Factor delle funzioni di vincolo può essere 0.0001 mentre, per quanto riguarda quello della funzione obiettivo, esso può essere mantenuto pari ad 1 per ridurre il numero di iterazioni a parità di soluzione andata a convergenza.

Nel caso in cui si applicasse un sistema di vincoli, per garantire il corretto funzionamento dell'algoritmo di ottimizzazione, potrebbe essere necessario fare uso di tecniche associate alla metodologia Design Of Experiments: questo non è sicuro in quanto, all'aumentare della complessità del problema, la correlazione tra Push Factor e instabilità dell'algoritmo potrebbe non essere rispettata, rendendo necessaria un'analisi full-factorial. Quest'ultima servirebbe a valutare tutte le possibili interazioni tra i valori dei Push Factors associati alle diverse funzioni di vincolo applicate.

In alcuni casi, l'algoritmo di ottimizzazione raggiunge la convergenza della soluzione nonostante quest'ultima non soddisfi i requisiti imposti. In queste circostanze non è chiaro quale possa essere il motivo di tale comportamento dato che la discrepanza rispetto al valore imposto risulta essere notevolmente più elevata delle tolleranze ammissibili.

In generale, l'applicazione di filtri per verificare il soddisfacimento dei vincoli imposti può essere un valido aiuto almeno per individuare soluzioni all'interno di un intervallo di incertezza desiderato. Potrebbe essere opportuno modificare i parametri di tolleranza e convergenza del codice dell'algoritmo di ottimizzazione per accettare soluzioni nello stesso intervallo.

Data l'elevata complessità del problema considerato, poiché a piccole variazioni di geometria possono corrispondere comportamenti aerodinamici molto diversi, è possibile che tutte le diverse soluzioni ottenute nei casi di convergenza dell'algoritmo a parità di condizioni considerate siano soluzioni di minimo locale. In particolare, si è potuto osservare variazioni minori dell'1 % tra valori di Push Factor diversi. Accettando questa incertezza, in questi casi si potrebbe comunque parlare di ottimizzazione della geometria nonostante i punti trovati non siano i punti di minimo assoluto della funzione obiettivo? Dato che è più probabile che il modello fisico e le approssimazioni numeriche effettuate nelle varie fasi del processo siano di entità superiore rispetto a questa differenza, da un punto di vista informale la risposta sarebbe affermativa.

È possibile che la necessità di ovviare al bug riscontrato nel software nel caso di flusso viscoso sia un fattore contribuente all'instabilità del problema. D'altro canto, è anche vero che nel caso di flusso inviscido, in cui la procedura risulta essere corretta, è presente il problema della ricerca del giusto valore dei Push Factor. Dall'analisi effettuata, sembra che le instabilità presentino l'andamento crescente presentato in precedenza.

L'elevata dipendenza dai valori del Push Factor, assieme alla loro elevata variabilità e quantità in funzione della complessità del problema sono delle criticità che devono essere considerate nel caso in cui si voglia approcciare un processo di ottimizzazione utilizzando la suite di SU2 alla versione 7.2.1.

7.2 Lavori futuri

Il bug riscontrato è stato segnalato e nelle release successive dovrebbe essere risolto quindi è opportuno effettuare nuovamente delle analisi di sensitività rispetto ai valori di Push Factor nel caso di studi già noti.

A tal proposito, si può fare riferimento a quelli proposti dall'*AIAA Aerodynamic Design Optimisation Discussion Group* (ADODG) in cui sono previsti almeno due studi strettamente correlati a quelli esaminati nel presente documento:

- NACA 0012:

- Flusso: inviscido;
- $Mach = 0.85$;
- $\alpha = 1.25$ deg;
- Problema:

Minimizzare : C_d

Soggetto a : $y(x) \geq y_0(x), \quad \forall x \in [0,1]$

- RAE 2822:

- Flusso: viscoso;
- $Mach = 0.734$;
- $Re = 6.5 \cdot 10^6$;
- Problema:

Minimizzare : C_d

Soggetto a : $C_l = 0.824$

$C_m \geq -0.092$

$S \geq S_0$

Potrebbe essere opportuno controllare i parametri di convergenza dell'algoritmo di ottimizzazione ed eventualmente modificarli così da adattare le tolleranze a quelle desiderate.

Bibliografia

- [1] D. Thévenin, G. Janiga, *Optimization and Computational Fluid Dynamics*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008, doi:10.1007/978-3-540-72153-6
- [2] Zhoujie Lyu and J. R. R. A. Martins, *Aerodynamic Shape Optimization Investigations of the Common Research Model Wing Benchmark*, AIAA Journal, (2014)
- [3] R. S. Sutton and A. G. Barto, *Reinforcement Learning: an introduction*, Adaptive computation and machine learning series, Cambridge, MA : The MIT Press, (2018)
- [4] P. Azunre, *Transfer Learning for Natural Language Processing*, Manning, (2021)
- [5] D. Tarkhov and A. Vasilyev, *Semi-empirical Neural Network Modeling and Digital Twins Development*, Elsevier, Academic Press, (2019)
- [6] X. Yan et al., *Aerodynamic shape optimization using a novel optimizer based on machine learning techniques*, Aerosp. Sci. and Technol. (2019), <https://doi.org/10.1016/j.ast.2019.02.003>
- [7] Z. Yang, W. GU and Q. LI, *Aerodynamic design optimization of race car rear wing*, IEEE (2011)
- [8] M. Secanell, P. Gamboa and A. Suleman, *Design of a morphing airfoil using aerodynamic shape optimization*, AIAA J. 44 (7) (2006) 1550–1562
- [9] Alsalihi, Z. and Van den Braembussche, R.A., *Evaluation of a design method for radial impellers based on artificial neural network and genetic algorithm*, Proc. of ESDA, 6th Biennial Conference on Engineering Systems Design and Analysis, Istanbul, (2002)
- [10] Kostrewa, K., Van den Braembussche, R.A. and Alsalihi, Z., *Optimization of radial turbines by means of design of experiment*, Tech. Rep. VKI-PR-2003-17, von Karman Institute for Fluid Dynamics, (2003)
- [11] Verstraete, T., Alsalihi, Z. and Van den Braembussche, R.A., *Multidisciplinary optimization of a radial compressor for micro gas turbine applications*, ASME Turbo Expo, Paper GT2007-27484 (2007)
- [12] Giannakoglou, K.C. *Acceleration of ga using neural networks, theoretical background. GA for optimization in aeronautics and turbomachinery*, VKI Lecture Series, (2000)
- [13] Baysal, O. and Ghayour, K., *Continuous adjoint sensitivities for optimization with general cost functionals on unstructured meshes*, AIAA Journal 39(1), 48–55, (2001)
- [14] Anderson, W.K., Venkatakrishnan, V., *Aerodynamic design optimization on unstructured grids with a continuous adjoint formulation*, Computers and Fluids 28, 443–480, (1999)
- [15] Alonso, J.J., Kroo, I.M. and Jameson, A., *Advanced algorithms for design and optimization of quiet supersonic platform*, AIAA Paper 2002-0144, (2002)
- [16] Balagangadhar, D., Roy, S., *Design sensitivity analysis of steady fluid-thermal systems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 190, 5465–5479, (2001)
- [17] Bonjour, J., Rocha, L.A.O., Bejan, A., Meunier, F., *Dendritic fins optimization for a coaxial two-stream heat exchanger*, International Journal of Heat and Mass Transfer 47(1), 111–124, (2004)
- [18] Cheng, C.H., Chang, M.H., *Shape design for a cylinder with uniform temperature distribution on the outer surface by inverse heat transfer method*, International Journal of Heat and Mass Transfer 46(1), 101–111, (2003)
- [19] Fabbri, G., *Heat transfer optimization in internally finned tubes under laminar flow conditions*, International Journal of Heat and Mass Transfer 41(10), 1243–1253, (1998)
- [20] Fabbri, G., *Heat transfer optimization in corrugated wall channels*, International Journal of Heat and Mass Transfer 43(23), 4299–4310, (2000)

- [21] Dr. Anselm Hopf, *CFD Topology and Shape Optimization of Ford Applications using Tosca Fluid*, Ford Motor Company, Aachen, Germany
- [22] Guo, Y.Y., He, G. and Hsu, A., *Application of genetic algorithms to the development of a variable Schmidt number model for jet-in-crossflows*, International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow 11, 744–760, (2001)
- [23] Edwards, K., Edgar, T. and Manousiouthakis, V., *Kinetic model reduction using genetic algorithms*, Computers and Chemical Engineering 22(1-2), 239–246, (1998)
- [24] Elliott, L. et al., *Multiobjective genetic algorithm optimization for calculating the reaction rate coefficients for hydrogen combustion*, Industrial and Engineering Chemistry Research 42(6), 1215–1224 (2003)
- [25] Elliott, L. et al., *Reaction mechanism reduction and optimization using genetic algorithms*, Industrial and Engineering Chemistry Research 44(4), 658–667 (2005)
- [26] P. M. Pardalos and D. W. Hearn, *Practical Mathematical Optimization*, Applied Optimization, vol. 97
- [27] J. R. R. A. Martins and A. Ning, *Engineering Design Optimization*, (2020)
- [28] C. Geuzaine and J.-F. Remacle, *Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Volume 79, Issue 11, pages 1309-1331, 2009, <http://http://gmsh.info/>
- [29] Palacios F., Colonna M. R., Aranake A. C., Campos A., Copeland S. R., Economon T. D., Lonkar A. K., Lukaczyk T. W., Taylor T. W. R. and Alonso J. J., “*Stanford University Unstructured (SU2): An open-Source Integrated Computational Environment for Multi-Physics Simulation and Design*”, AIAA Paper, 2013-0287, 2013, doi:10.2514/1.J053813
- [30] H. K. Versteeg and W. Malalasekera, *An Introduction to Computational Fluid Dynamics*, Pearson Education Limited, (2007)
- [31] J.D. Anderson Jr., *Fundamentals of Aerodynamics*, McGraw-Hill, 1221 Avenue of the Americas, New York, NY 10020, 2007
- [32] B. Andersson, R. Andersson, L. Hakansson, M. Mortensen, R. Sudiyo, B. van Wachen, *Computational Fluid Dynamics for Engineers*, Cambridge University Press, United Kingdom, Cambridge
- [33] J. Gopalakrishnan, *Multigrid methods*, University of Florida, Montreal Scientific Computing Days, (2015)
- [34] G. Yang et al., *Sensitivity assessment of optimal solution in aerodynamic design optimisation using SU2*, Aersp. Sci. Technol., (2018), doi:10.1016/j.ast.2018.08.012
- [35] Nocedal, Jorge, and Stephen J. Wright, *Sequential quadratic programming*, Numerical optimization, 2006, 529-562
- [36] *NumPy and SciPy documentation*, <https://docs.scipy.org/doc/>
- [37] H. A. van der Vorst, *Bi-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems*, SIAM J. Sci. Stat. Comp., 13(2):631–644, 1992
- [38] Y. Saad and M. H. Schultz, *GMRES: A GENERALIZED MINIMAL RESIDUAL ALGORITHM FOR SOLVING NONSYMMETRIC LINEAR SYSTEMS*, SIAM J. Sci. Stat. Comp., 1986, doi:10.1137/0907058
- [39] A. Jameson, *Origins and Further Development of the Jameson–Schmidt–Turkel Scheme*, AIAA Journal, 2017, 1–23, doi:10.2514/1.J055493
- [40] D. Lax, *Weak Solutions of Nonlinear Hyperbolic Equations and Their Numerical Computation*, Comm. on Pure and App. Math., 1954, 8:159-193, doi:10.1002/cpa.3160070112