



**Politecnico
di Torino**

POLITECNICO DI TORINO

**Corso di laurea Magistrale in
Ingegneria Aerospaziale**

Tesi di Laurea Magistrale

**Analisi del flusso viscoso all'interno di
canali interpalari di turbomacchina**

Relatore:

Prof. Francesco LAROCCA

Correlatore:

Prof. Andrea FERRERO

Candidato:

Marco CASTIGLIONE

A.A. 2021-2022

Sommario

L'obiettivo di questa tesi è analizzare il flusso all'interno del canale interpolare di una turbina di bassa pressione caratterizzata dal profilo T106C Cascade, in particolare nella regione vicina all'*endwall*, dominata da flussi complessi fortemente tridimensionali. Lo studio è realizzato effettuando un set di simulazioni attraverso il software commerciale STAR-CCM+. La definizione dell'analisi computazionale si è incentrata principalmente sulla scelta dei modelli fisici di turbolenza e di transizione e sulla generazione della mesh, evidenziando i requisiti richiesti dai solver per risolvere accuratamente il flusso, in particolare in prossimità delle pareti. Con questo studio si vuole mettere principalmente in evidenza come i parametri di meshing, dei modelli fisici e dei solver influenzano la stabilità e la robustezza del modello numerico, ma anche l'accuratezza e la convergenza della soluzione. Particolare riguardo è riservato al fenomeno della transizione del flusso da laminare a turbolento, la quale determina la separazione laminare del flusso sul dorso. Infatti, tale fenomeno non è individuabile con i tradizionali modelli di turbolenza, come è stato constatato confrontando l'analisi in regime "*fully turbulent*" con un set di simulazioni che implementano un modello di transizione. I risultati si sono rivelati soddisfacenti nell'evidenziare le strutture vorticose principali, i profili di pressione attorno al profilo a diverse distanze dalla parete di fondo e nello stimare le perdite di pressione totale attraverso la schiera di palette. Tuttavia, l'analisi non è stata in grado di risolvere i flussi secondari di minore intensità, il che ha portato a concludere che sia necessario implementare dei modelli di turbolenza e transizione calibrati ad hoc per il problema fluidodinamico di interesse, eventualmente in combinazione con un ulteriore affinamento della griglia computazionale.

Indice

Elenco delle figure	IV
Elenco delle tabelle	VI
1 Introduzione	1
1.1 Approcci al problema fluidodinamico	1
1.2 Applicazione dell'analisi CFD al progetto di tesi	2
2 Modelli fisici per la fluidodinamica	4
2.1 Le leggi di bilancio	4
2.2 Flusso inviscido: equazioni di Eulero	6
2.3 Modellazione della turbolenza	7
2.3.1 Modelli algebrici	11
2.3.2 Modelli a una equazione	12
2.3.3 Modelli a due equazioni	13
2.4 Modellazione della transizione	16
2.4.1 Modello $\gamma - Re_{\theta t}$	18
2.4.2 Modello " <i>Gamma Transition</i> "	22
3 Metodo ai volumi finiti	25
3.1 Discretizzazione spaziale	26
3.2 Approssimazione delle equazioni	26
3.2.1 Approssimazione degli integrali	27
3.2.2 Valutazione dei flussi convettivi	28
3.2.3 Valutazione dei flussi diffusivi	30
3.3 Integrazione temporale	32
3.3.1 Schemi espliciti	32
3.3.2 Schemi impliciti	32
3.4 Il sistema di equazioni algebriche	33
3.4.1 Implementazione delle condizioni al contorno	34

4	Analisi CFD	35
4.1	Descrizione della geometria e del dominio	36
4.1.1	Generazione del dominio	38
4.1.2	Definizione dei contorni	42
4.2	Generazione della griglia computazionale	43
4.2.1	Il processo di <i>meshing</i>	43
4.2.2	Dimensionamento della mesh: valutazione dell'unità di parete	45
4.2.3	Scelta della geometria e dei parametri di <i>meshing</i>	47
4.2.4	Valutazione della qualità delle mesh	61
4.3	Scelta dei modelli e delle condizioni iniziali e al contorno	64
4.3.1	Caso "Inviscid"	65
4.3.2	Caso "Turbulent"	67
4.3.3	Casi "Transition" e "Refinement"	72
4.4	Processing	75
4.4.1	Scelta e definizione dei <i>Solver</i>	75
4.4.2	Condizioni di arresto e avvio delle simulazioni	84
5	Risultati	85
5.1	Campi di velocità	85
5.2	Confronto tra i <i>test case</i>	87
5.2.1	Influenza del modello di transizione sulla soluzione	87
5.2.2	Studio della convergenza di griglia	89
5.3	Coefficiente di pressione	93
5.4	Perdite di pressione totale	96
5.4.1	Andamento complessivo delle perdite	100
5.5	Strutture vorticose	101
5.6	Linee di corrente	107
6	Conclusioni	111
	Bibliografia	113

Elenco delle figure

2.1	Esempio di grandezza scomposta nelle componenti media e fluttuante	8
2.2	Profilo Aerospatale-A e relativa griglia computazionale [11]	16
2.3	Andamento del coefficiente di attrito a parete per diversi <i>test case</i> [11]	17
2.4	Andamento del coefficiente di pressione sul profilo Aerospatale-A [11]	18
3.1	Schema di discretizzazione delle leggi di trasporto	27
3.2	Rappresentazione esemplificativa della definizione di ξ	30
4.1	Geometria della pala T106C <i>Cascade</i>	36
4.2	Dominio bidimensionale sul piano xy	39
4.3	Ripartizione del del flusso nell'attraversamento della pala	40
4.4	Dominio tridimensionale	41
4.5	Panoramica dei contorni delimitanti il dominio tridimensionale	42
4.6	Geometria dei triangoli al variare della <i>face quality</i>	43
4.7	Descrizione dei parametri di qualità delle celle tridimensionali	45
4.8	Processo di costruzione delle celle prismatiche	48
4.9	Confronto tra una mesh semplice poliedrica e una con un <i>prism layer</i>	50
4.10	Struttura dello strato limite turbolento	52
4.11	Mesh caso "Inviscid"	53
4.12	Mesh caso "Turbulent"	55
4.13	Mesh caso "Transition"	57
4.14	Mesh caso "Refinement"	59
4.15	Distribuzione della <i>face quality</i> sulle superfici solide nel caso "Inviscid"	63
4.16	Leggi della parete per diverse grandezze adimensionali	70
4.17	Funzione 4.15 applicata al dominio computazionale	73
4.18	Ciclo multi-giglia "V-Cycle"	82
5.1	Campo di Mach valutato a $z/c_x = 1.0$ per il caso "Inviscid"	86
5.2	Campo di Mach valutato a $z/c_x = 1.0$ per il caso "Transition"	86
5.3	Campo di Mach valutato a $z/c_x = 0.01$ per il caso "Transition"	86
5.4	Distribuzione di C_p tra i diversi <i>test case</i> a $z/c_x = 1.0$	87
5.5	Distribuzione del coefficiente di pressione ottenuta da Wei et al [29]	88
5.6	Distribuzione di C_p tra i casi "Transition" e "Refinement" a $z/c_x = 1.0$	89

5.7	Confronto tra i campi di velocità nei casi “Transition” e “Refinement” .	90
5.8	Distribuzione di C_p tra i casi “Transition” e “Refinement” a $z/c_x = 0.01$	91
5.9	Distribuzione di C_p^0 in scia a diverse distanze assiali	92
5.10	Distribuzione di C_p^0 in scia ottenuta da Marconcini et al [30]	92
5.11	Distribuzione di C_p al variare della distanza dall' <i>endwall</i>	93
5.12	Distribuzioni del coefficiente di pressione ottenute da Pichler et al [31] .	94
5.13	Distribuzioni del coefficiente di pressione sulla superficie dorsale	95
5.14	Distribuzioni del coefficiente di portanza C_L lungo l'altezza della paletta	95
5.15	Coefficiente di perdita di pressione totale a diverse sezioni yz	99
5.16	Andamento assiale delle perdite <i>mass-averaged</i>	100
5.17	Processo di formazione del vortice a ferro di cavallo su di un cilindro . .	102
5.18	<i>Streamwise vorticity</i> a monte del bordo d'attacco	102
5.19	<i>Streamwise vorticity</i> valutata a diverse sezioni assiali yz	106
5.20	Schema delle strutture secondarie proposto da Goldstein [35]	107
5.21	Andamento delle linee di flusso nell'immediata vicinanza dell' <i>endwall</i> .	108
5.22	Linee di flusso in prossimità del bordo d'attacco della paletta	109
5.23	Linee di flusso lungo il dorso del profilo	110
5.24	Linee di flusso a valle della schiera di palette	110

Elenco delle tabelle

4.1	Caratteristiche geometriche della schiera di pale T106C <i>Cascade</i>	37
4.2	Dimensioni della schiera di pale T106C usata per la simulazione	39
4.3	Caratteristiche geometriche della del dominio computazionale	41
4.4	Parametri utilizzati per la generazione della mesh nel caso "Inviscid" . .	54
4.5	Parametri utilizzati per la generazione della mesh nel caso "Turbulent"	56
4.6	Parametri utilizzati per la generazione della mesh nel caso "Transition"	58
4.7	Parametri utilizzati per la generazione della mesh nel caso "Refinement"	60
4.8	Numero di elementi di mesh prodotti per ciascun caso	62
4.9	Descrizione dei parametri di qualità medi per ciascuna mesh prodotta .	62
4.10	Modelli comuni a tutte le simulazioni	64
4.11	Proprietà del fluido specificate nel nodo " <i>Gas</i> "	65
4.12	Valori di stima del flusso inviscido in ingresso e uscita	66
4.13	Condizioni al contorno e iniziali nel caso "Inviscid"	67
4.14	Condizioni al contorno e iniziali nel caso "Turbulent"	71
4.15	Condizioni al contorno e iniziali nei casi "Transition" e "Refinement" .	74
4.16	Passi temporali utilizzati per l'integrazione temporale	79
4.17	Parametri del <i>solver</i> AMG	83
5.1	Confronto tra le mesh dei casi "Transition" e "Refinement"	89

Capitolo 1

Introduzione

L'analisi fluidodinamica ha sempre ricoperto un ruolo fondamentale negli ambiti aeronautico, spaziale, automobilistico, ambientale ed industriale in generale. La sua importanza è da ricercare nel fatto che la comprensione dei flussi, sia esterni (come un'ala investita da una corrente) che interni (come il flusso all'interno di condotti), ha da sempre rappresentato uno strumento fondamentale per l'ottimizzazione dei processi, aumentando l'efficienza e riducendo le perdite, con evidente riscontro in ambito ecologico ed economico. Questo aspetto è evidente soprattutto in ambito *automotive* e *aerospace*, in cui gli obiettivi principali sono la massimizzazione delle prestazioni e la riduzione dei consumi. La trattazione delle problematiche legate al moto dei fluidi è però sempre stata una sfida ingegneristica di notevole difficoltà, principalmente legata al fatto che le leggi che governano tali fenomeni sono di difficile risoluzione in forma esatta, se non per casi estremamente semplici.

1.1 Approcci al problema fluidodinamico

Nei primi anni del '900 l'analisi fluidodinamica si è limitata ad un intenso studio di carattere sperimentale, volto a costruire correlazioni e corroborare i vari modelli teorici. Tale impegno ha di fatto posto le basi della moderna aerodinamica. Questi *setup* fanno riferimento ad un esperimento fisico, al vero o su un modello simile, effettuando misure delle grandezze fluidodinamiche di interesse per lo studio dello specifico problema. Tuttavia, certe grandezze risultano difficili se non impossibili da misurare, in particolare per quanto riguarda i parametri geometrici, per via della complessità dei modelli impiegati. Per queste ragioni l'analisi sperimentale può risultare molto onerosa in termini di risorse impiegate.

A partire dal secondo dopoguerra, con l'evolversi degli strumenti tecnologici, e in particolare con l'avvento dei computer, è radicalmente cambiato il modo in cui venivano approcciati i problemi di carattere fluidodinamico. Nasce infatti la fluidodinamica computazionale (CFD, dall'inglese *Computational Fluid Dynamics*), uno strumento potente in grado di risolvere numericamente le leggi di bilancio che governano i flussi,

in forma approssimata. Tale approccio ha consentito la risoluzione di problemi fino ad allora impossibili da risolvere empiricamente, ad esempio caratterizzati da geometrie complesse, fenomeni di mescolamento o turbolenza. Seppur i vantaggi non furono evidenti inizialmente, a causa della scarsa potenza di calcolo delle risorse *hardware*, oggi questo strumento consente di ridurre enormemente i costi dell'analisi: se da un lato la simulazione fluidodinamica richiede tempi relativamente lunghi (da qualche ora a più giorni) rispetto alle prove sperimentali (che in genere richiedono qualche minuto) dall'altro i tempi di allestimento di queste ultime sono molto più onerosi rispetto alle fasi di *pre-processing* della CFD, in particolare quando è richiesto di effettuare più prove, variando alcuni parametri. Questo vantaggio ha col tempo fatto sì che la fluidodinamica computazionale diventi lo strumento d'analisi principale.

Nonostante i vantaggi della CFD, questa risente di alcune limitazioni, che rappresentano ancora oggi delle sfide ingegneristiche di notevole importanza. Ad esempio, la possibilità di realizzare numericamente simulazioni ad elevato numero di Reynolds si scontra con il costo e i tempi computazionali, proporzionali al cubo di questo valore. In questo senso le risorse computazionali possono rappresentare una forte limitazione. Al contrario, con l'analisi sperimentale è possibile, sfruttando la similitudine fluidodinamica (ad esempio facendo uso di gallerie del vento criogeniche o pressurizzate), studiare flussi con numeri di Reynolds elevati, anche dell'ordine di $10^6 \div 10^7$. Inoltre, alcuni modelli fisici risultano ancora difficilmente applicabili in ambito computazionale, soprattutto per quanto riguarda la modellazione della transizione del flusso, da laminare a turbolento, per cui i modelli proposti non consentono di ottenere i risultati attesi dalle prove empiriche. Per tali ragioni l'approccio più valido consiste attualmente in uno studio integrato numerico-sperimentale, in cui le misure empiriche consentono la comprensione del fenomeno fisico e la validazione dei codici di calcolo numerico, con quest'ultimo che a sua volta guida al meglio l'indagine sperimentale.

1.2 Applicazione dell'analisi CFD al progetto di tesi

Uno dei problemi attuali di natura aerodinamica, in ambito aeronautico, consiste nell'ottimizzazione dei processi coinvolti nella propulsione. Le turbomacchine, infatti, sono componenti del motore aeronautico interessati da fenomeni fluidodinamici complessi, molto spesso fonte di perdite. Risultano di particolare rilevanza i cosiddetti flussi secondari, ossia componenti del campo di moto non allineati alla direzione principale del flusso, frutto della complessa evoluzione dello strato limite sulle superfici coinvolte. Molti sono stati gli studi al riguardo, che hanno dato frutto a numerosi modelli teorici che prevedono la formazione di strutture vorticose, in particolare tra la superficie delle palette che compongono la schiera della turbomacchina e la parete di fondo. La difficoltà principale è però legata al fatto che tali strutture sono fortemente tridimensionali, risultando estremamente difficoltoso ricavare modelli, sia teorici che numerici, in grado di prevedere le perdite che ne derivano.

La seguente tesi si pone l'obiettivo di andare a descrivere il flusso viscoso all'interno dei canali interpalari di una turbina di bassa pressione attraverso un'analisi numerica, sfruttando il software commerciale STAR-CCM+, con l'obiettivo di cogliere le strutture coerenti che si formano in prossimità dell'*endwall*. Nella fattispecie, verrà studiata la palettatura formata dal profilo *T106C high-lift Cascade*, la cui vasta presenza in letteratura consente di poter validare i risultati ottenuti e di conseguenza il codice numerico impiegato.

La prima parte della tesi verterà nella presentazione dei modelli fisici in grado di descrivere i fenomeni fluidodinamici, con particolare riguardo ai modelli di turbolenza e transizione di recente teorizzazione, che consentono di risolvere alcune problematiche relative alla complessità di tali fenomenologie, come la presenza di scale temporali e spaziali continue e la loro natura intrinsecamente stocastica, che hanno portato alla formulazione dei cosiddetti modelli semi-empirici, oggetto tuttora di dibattito circa la loro chiusura. In seguito verranno analizzate le tecniche di discretizzazione spaziale e integrazione temporale che consentono di applicare i modelli fisici all'analisi computazionale, e le problematiche relative alla loro ottimizzazione, in termini sia di robustezza e stabilità del modello numerico che di accuratezza e convergenza della soluzione.

La seconda parte della tesi è invece incentrata sul *setting* vero e proprio del problema da analizzare. Verrà posta particolare attenzione sulle problematiche relative alla generazione di una griglia computazionale ad hoc, che richiede un approfondito studio per la scelta dei parametri di *meshing*, e sulla scelta del modello di turbolenza più indicato per cogliere le caratteristiche del problema in esame, anche in relazione alle risorse computazionali disponibili. La descrizione è completata dalla scelta degli opportuni *solver* che consentono di controllare, correggere e in generale prevedere più realisticamente il comportamento delle grandezze fluidodinamiche all'interno del dominio, aumentando la consistenza del modello numerico, ossia la tendenza a rappresentare fedelmente la fisica descritta dalle equazioni di governo. Lo studio si focalizzerà su 4 differenti *test case*: i primi tre differiranno per i modelli fisici rappresentati, ossia il tipo di flusso simulato. Nella fattispecie esse saranno simulazioni svolte in regime non viscoso, turbolento completamente sviluppato e in presenza di transizione del flusso laminare. La quarta simulazione, invece, sarà svolta in regime di transizione, ma con una griglia computazionale sensibilmente più fine, in modo tale da poter valutare gli effetti che quest'ultimo aspetto ha sull'accuratezza dei risultati.

Infine verranno presentati i risultati ottenuti, confrontandoli con quelli sperimentali e numerici presenti in letteratura, in modo da poterne verificare l'accuratezza e confermare l'applicabilità di quei modelli che attualmente rappresentano lo stato dell'arte della fluidodinamica e dell'analisi numerica e facendo uso di uno dei software commerciali più completo ed avanzato.

Capitolo 2

Modelli fisici per la fluidodinamica

Alla base di una qualsiasi simulazione fluidodinamica vi è la scelta del corretto modello teorico che descriva, analiticamente, i fenomeni che l'analisi vuole cogliere. Come si vedrà nel paragrafo 4.3, tale scelta è influenzata sia dalla natura fisica del problema, frutto di predizioni e di studi sperimentali, che dalle esigenze più propriamente legate all'analisi numerica, come il costo computazionale e le problematiche legate alla discretizzazione (convergenza, accuratezza e stabilità della soluzione). A tale scopo, in questo capitolo verranno introdotti i concetti fondamentali della teoria fluidodinamica, alla base dei vari modelli fisici utili alla descrizione analitica di fenomeni specifici. Particolare riguardo verrà riservato alla presentazione dei modelli che descrivono i flussi turbolenti, oggetto tuttora di dibattiti circa la loro rappresentazione sulle scale dissipative, data la loro natura intrinsecamente stocastica.

2.1 Le leggi di bilancio

Il principio fondamentale su cui si basa la descrizione analitica dei flussi è che, in un sistema isolato, il valore di alcune particolari proprietà misurabili si mantiene invariato, man mano che il sistema evolve nel tempo. Le quantità che determinano le leggi di conservazione dipendono dal tipo di problema oggetto di studio, che nel caso della dinamica dei fluidi sono la massa, la quantità di moto e l'energia.

La legge di bilancio della massa, detta anche legge di continuità, afferma che la variazione temporale della massa all'interno di un volume di controllo arbitrario V , fisso nello spazio, sia uguale al flusso netto di massa dal volume attraverso la sua superficie S :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \int_S (\rho \bar{v} \cdot \bar{n}) dS \quad (2.1)$$

dove \bar{v} è il vettore velocità del flusso e \bar{n} il vettore uscente dalla superficie che delimita il volume di controllo. Il segno negativo al secondo membro è dovuto al fatto che il vettore \bar{n} è positivo quando uscente dal volume di controllo. La legge di bilancio della quantità di moto è un'estensione della seconda legge della dinamica di Newton: la variazione sostanziale della quantità di moto del sistema è pari alla somma dei vari contributi dinamici esterni al sistema, sia di campo (come le forze gravitazionali o elettromagnetiche) che di superficie (come nel caso delle forze di pressione e le sollecitazioni di taglio). La variazione sostanziale della quantità di moto a sua volta è somma di due contributi, legati rispettivamente alla variazione temporale della grandezza nel volume e alla sua convezione da parte del campo di moto. Essendo la quantità di moto una grandezza vettoriale, tale sarà anche la legge di conservazione, espressa da 3 equazioni, ciascuna relativa ad una componente vettoriale:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \bar{v} dV + \int_S (\rho \bar{v} \bar{v} \cdot \bar{n}) dS = - \int_S p \bar{n} dS + \int_S \bar{\bar{\tau}} \cdot \bar{n} dS + \int_V \rho \bar{f} dV \quad (2.2)$$

in cui $\bar{\bar{\tau}}$ rappresenta il tensore degli sforzi viscosi e \bar{f} la risultante delle forze di campo. In tale sistema di equazioni il primo termine rappresenta la risultante delle inerzie locali, il secondo termine il flusso di quantità di moto attraverso la superficie, il terzo e quarto termine sono forze di superficie, rispettivamente dovute alla pressione idrostatica e agli sforzi viscosi, mentre l'ultimo termine è rappresentativo delle forze di campo. La legge di bilancio dell'energia afferma infine che la variazione sostanziale dell'energia totale all'interno del volume di controllo è dovuta alla potenza delle forze applicate al sistema e al flusso netto di calore, nella sua componente volumetrica (ad esempio per effetti radiativi), e superficiale (dovuta alla conduzione termica):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho E dV + \int_S (\rho E \bar{v} \cdot \bar{n}) dS = \\ = - \int_S p \bar{v} \cdot \bar{n} dS + \int_S (\bar{\bar{\tau}} \cdot \bar{v}) \cdot \bar{n} dS + \int_V \rho \bar{f} \cdot \bar{v} dV + \int_V \rho \dot{\xi} dV + \int_S \bar{q} \cdot \bar{n} dS \end{aligned} \quad (2.3)$$

Il termine $\dot{\xi}$ rappresenta il calore assorbito dal volume per unità di massa e di tempo e \bar{q} il flusso di calore per unità di superficie e di tempo. L'energia totale specifica E è a sua volta somma dell'energia interna e di quella cinetica:

$$E = e + \frac{1}{2} |\bar{v}|^2 \quad (2.4)$$

La descrizione analitica della dinamica dei fluidi si completa con ulteriori 4 equazioni, ossia la legge di stato dei gas perfetti:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{R}{\mathcal{M}} T \quad (2.5)$$

la legge di Stokes per i fluidi newtoniani:

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \nabla \cdot \bar{v} \right) \quad (2.6)$$

la legge di Fourier per la conduzione termica:

$$\bar{q} = -\bar{k} \nabla T \quad (2.7)$$

e la legge calorica:

$$e = c_v T \quad (2.8)$$

in tali equazioni τ_{ij} rappresenta la componente generica del tensore degli sforzi, δ_{ij} il delta di Kronecker, \bar{k} la matrice conducibilità termica e c_v il calore specifico a volume costante. Le equazioni 2.1-2.8 rappresentano nell'insieme un sistema non lineare di equazioni differenziali parziali (PDE) in grado di descrivere esaustivamente le proprietà termiche e dinamiche dei fluidi. Tuttavia, attualmente non esiste una soluzione esatta in forma chiusa, anche se opportune semplificazioni consentono di poter applicare il sistema a casi specifici.

2.2 Flusso inviscido: equazioni di Eulero

Nell'assunzione di flusso non viscoso ($\mu = 0$), stazionario ($\partial/\partial t = 0$) e in assenza di scambi di calore per conduzione ($\bar{k} = 0$), sorgenti di energia ($\dot{\xi} = 0$) e forze di campo ($\bar{f} = 0$) il sistema di equazioni si riduce alla seguente forma:

$$\int_S (\rho \bar{v} \cdot \bar{n}) dS = 0 \quad (2.9a)$$

$$\int_S (\rho \bar{v} \bar{v} \cdot \bar{n}) dS + \int_S p \bar{n} dS = 0 \quad (2.9b)$$

$$\int_S (\rho E \bar{v} \cdot \bar{n}) dS + \int_S p \bar{v} \cdot \bar{n} dS = 0 \quad (2.9c)$$

Esse prendono in nome di equazioni di Eulero, valide per la descrizione di un flusso inviscido, stazionario e comprimibile.

In forma differenziale, scomponendo le varie componenti vettoriali, questo sistema di equazioni assume la forma:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (2.10a)$$

$$\frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_i} + \frac{\partial p}{\partial x_j} = 0 \quad (2.10b)$$

$$\frac{\partial(u_i(\rho E + p))}{\partial x_i} = 0 \quad (2.10c)$$

In cui il pedice “ i ” rappresenta la generica componente della grandezza vettoriale, mentre “ j ” nell’equazione 2.10b identifica la componente spaziale della legge vettoriale. Queste equazioni rappresentano la tipologia di flusso matematicamente più semplice da studiare, e consentono di derivare in via preliminare il campo di moto e le forze aerodinamiche di forma e di pressione. È da sottolineare che tali equazioni non sono rappresentative di un flusso reale, in cui le componenti d’attrito non sono mai trascurabili. Tuttavia, una tale descrizione si avvicina alla realtà per flussi caratterizzati da un elevato numero di Reynolds.

2.3 Modellazione della turbolenza

La difficoltà principale legata all’analisi dei flussi turbolenti, come accennato precedentemente, risiede nella loro natura intrinsecamente casuale e fortemente tridimensionale, legata alle fluttuazioni irregolari e su diverse scale temporali e spaziali delle variabili che descrivono il fenomeno. Per tale ragione le leggi di bilancio (dette anche equazioni di Navier-Stokes nel caso viscoso, per distinguerle da quelle di Eulero), sebbene in grado di descrivere in modo esaustivo le proprietà di qualsiasi flusso, risultano di fatto inapplicabili nel risolvere la turbolenza.

Per ovviare a questo problema è possibile operare alcune semplificazioni sulle equazioni di Navier-Stokes. Una prima approssimazione consiste nello scomporre le grandezze istantanee coinvolte in una componente media e una fluttuante. Considerando la generica grandezza g si può scrivere:

$$g = \bar{g} + g' \quad (2.11)$$

Questo processo prende il nome di decomposizione alla Reynolds. Nel caso più generale, la componente media \bar{g} può essere valutata come media d’insieme, funzione sia del tempo che dello spazio:

$$\bar{g}(\bar{x}, t) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g(\bar{x}, t) \quad (2.12)$$

in cui N identifica il numero di campioni ricavati da un set di esperimenti indipendenti in un dato punto del dominio \bar{x} e istante temporale t . Il numero di campioni deve risultare statisticamente rilevante (idealmente N tende ad infinito). Nel caso di turbolenza stazionaria il valore medio non è più dipendente dal tempo, e può essere operata una media dei valori istantanei di un campione in un dato intervallo temporale:

$$\bar{g}(\bar{x}) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} g(\bar{x}, t) dt \quad (2.13)$$

La scelta di T è dettata da necessità di carattere statistico: nell'ipotesi di turbolenza stazionaria tale valore deve essere molto maggiore della scala temporale che caratterizza le fluttuazioni turbolente del flusso. È possibile inoltre tenere conto degli effetti della compressibilità effettuando una media pesata sulla densità locale del flusso:

$$\bar{g}(\bar{x}) = \frac{\int_t^{t+T} \rho(\bar{x}, t) g(\bar{x}, t) dt}{\int_t^{t+T} \rho(\bar{x}, t) dt} \quad (2.14)$$

che prende il nome di media di Favre, e porta alla omonima decomposizione. Tale procedura non è necessaria quando la turbolenza non si manifesta in fluttuazioni significative della densità, preferendo la decomposizione alla Reynolds. In figura 2.1 è mostrato un esempio di decomposizione di una generica grandezza.

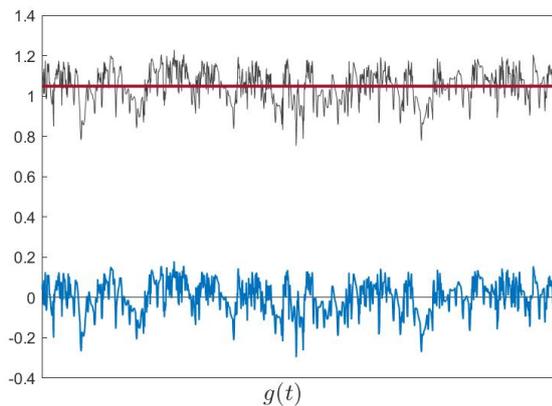


Figura 2.1: Scomposizione di una generica grandezza $g(t)$ nella sua componente media \bar{g} (in rosso) e fluttuante g' (in blu)

Si considerino le equazioni di Navier-Stokes in assenza di sorgenti, in forma differenziale e con i termini vettoriali scomposti nelle loro componenti:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (2.15a)$$

$$\frac{\partial(\rho u_j)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_i} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} \quad (2.15b)$$

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(u_i(\rho E + p))}{\partial x_i} = \frac{\partial(u_i \tau_{ij} + q_i)}{\partial x_i} \quad (2.15c)$$

sostituendo le grandezze con le rispettive componenti della decomposizione alla Reynolds ed effettuando una media temporale, come in equazione 2.13, si ottengono le cosiddette equazioni di Navier-Stokes mediate alla Reynolds, o RANS (*Reynolds-Averaged Navier-Stokes*) che descrivono il bilancio delle quantità medie del flusso:

$$\overline{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_i}} = 0 \quad (2.16a)$$

$$\overline{\frac{\partial \rho(\bar{u}_j + u'_j)}{\partial t} + \frac{\partial \rho(\bar{u}_i + u'_i)(\bar{u}_j + u'_j)}{\partial x_i}} = -\overline{\frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial x_j} + \frac{\partial(\bar{\tau}_{ij} + \tau'_{ij})}{\partial x_i}} \quad (2.16b)$$

$$\begin{aligned} \overline{\frac{\partial \rho(\bar{E} + E')}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)(\rho(\bar{E} + E') + (\bar{p} + p'))}{\partial x_i}} &= \\ &= \overline{\frac{\partial((\bar{u}_i + u'_i)(\bar{\tau}_{ij} + \tau'_{ij}) + (\bar{q}_i + q'_i))}{\partial x_i}} \end{aligned} \quad (2.16c)$$

La mediazione, indicata con una barra superiore, è operata tenendo conto di alcune proprietà di carattere statistico:

- il valore medio delle grandezze fluttuanti è nullo, ossia $\overline{g'} = 0$;
- il valore medio del prodotto di due fluttuazioni è nullo solo se non vi è correlazione tra le due grandezze, per cui $\overline{g'h'} \neq 0$ se $\rho_{g,h} \neq 0$, in cui ρ identifica la funzione di correlazione. Da ciò si deduce che $\overline{g'g'} \neq 0$;
- la media è permutabile con la derivazione e gode della proprietà distributiva con la somma:

$$\overline{\frac{\partial g}{\partial x}} = \frac{\partial \bar{g}}{\partial x} \qquad \overline{g + h + k} = \bar{g} + \bar{h} + \bar{k}$$

Semplificando dunque le equazioni di Navier-Stokes mediate, tenendo conto delle proprietà appena descritte, si ottiene:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{u}_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (2.17a)$$

$$\frac{\partial(\rho \bar{u}_j)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_i} + \frac{\partial(\rho \overline{u'_i u'_j})}{\partial x_i} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_i} \quad (2.17b)$$

$$\frac{\partial(\rho \bar{E})}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}_i(\rho \bar{E} + \bar{p}))}{\partial x_i} + \frac{\partial(\rho \overline{u'_i E'} + \overline{u'_i p'})}{\partial x_i} = \frac{\partial(\bar{u}_i \bar{\tau}_{ij} + \overline{u'_i \tau'_{ij}} + \bar{q}_i)}{\partial x_i} \quad (2.17c)$$

Le equazioni così ottenute sono formalmente simili alle equazioni di Navier-Stokes originali. In particolare l'equazione 2.17b, che rappresenta la conservazione della quantità di moto mediata, può essere scritta nella seguente forma:

$$\frac{\partial(\rho \bar{u}_j)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_i} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \frac{\partial(\bar{\tau}_{ij} - \overline{\rho u'_i u'_j})}{\partial x_i} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \frac{\partial(\bar{\tau}_{ij} + \tau_{ij}^r)}{\partial x_i} \quad (2.18)$$

in cui τ_{ij}^r è un elemento del tensore degli sforzi di Reynolds. Esso deriva dalla media del termine convettivo e correla le componenti delle fluttuazioni di velocità:

$$\overline{\tau^r} = -\rho \begin{pmatrix} \overline{u'u'} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{u'v'} & \overline{v'v'} & \overline{v'w'} \\ \overline{u'w'} & \overline{v'w'} & \overline{w'w'} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

Il tensore è simmetrico: le componenti della diagonale principale sono sforzi normali, mentre le altre componenti rappresentano gli sforzi di taglio. Il termine τ_{ij}^r rappresenta quindi il flusso medio di quantità di moto dovuto alle fluttuazioni turbolente di velocità. In flussi turbolenti sviluppati tali sforzi tendono ad essere preponderanti, rispetto a quelli generati dal flusso medio:

$$\|\tau_{ij}^r\| \gg \|\bar{\tau}_{ij}\| \quad \rightarrow \quad \left\| \frac{\partial(-\overline{\rho u'_i u'_j})}{\partial x_k} \right\| \gg \left\| \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial^2 \bar{u}_j}{\partial x_i \partial x_k} \right) \right\| \quad (2.20)$$

Il tensore degli sforzi di Reynolds fornisce un set di 6 incognite aggiuntive nell'analisi dei flussi turbolenti. Per chiudere il sistema è dunque necessario integrare alle equazioni di Reynolds mediate una congrua interpretazione analitica di $\overline{\tau^r}$. La valutazione delle singole componenti fluttuanti di velocità non è di facile attuazione, e per questo motivo il tensore degli sforzi di Reynolds è modellato tenendo conto di alcune ipotesi.

I modelli più comuni si basano sull'ipotesi di Boussinesq [1], che introduce una viscosità turbolenta μ_T (*eddy viscosity*) che emuli la cascata energetica dei vortici delle scale dissipative, ossia quelle più piccole tra le scale della turbolenza. Secondo tale approssimazione il generico elemento del tensore degli sforzi di Reynolds è pari a:

$$\tau_{ij}^r = 2\mu_T S_{ij} - \frac{2}{3}\rho k \delta_{ij} \quad (2.21)$$

In cui S_{ij} è un elemento del tensore della velocità di deformazione media del flusso e k l'energia cinetica turbolenta (o TKE, da *Turbulent Kinetic Energy*):

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} \quad (2.22)$$

Si noti come tale forma sia analoga alla relazione che sussiste tra gli sforzi viscosi e i gradienti di velocità media in un fluido newtoniano:

$$\tau_{ij} = 2\mu S_{ij} - p \delta_{ij} \quad (2.23)$$

Sotto tale ipotesi la modellazione dello sforzo di Reynolds si riduce alla modellazione della viscosità turbolenta, alla base dei modelli di turbolenza di primo ordine, i più utilizzati in ambito computazionale. Si fa distinzione tra modelli algebrici, a una o a due equazioni, in base al numero di incognite necessarie a chiudere il sistema RANS.

2.3.1 Modelli algebrici

Il modo più semplice di valutare la viscosità turbolenta è assumerla uniforme all'interno del dominio e pari a:

$$\mu_T = \rho \frac{U_0 \delta_0}{R_T} \quad (2.24)$$

in cui U_0 e δ_0 sono la velocità e la lunghezza caratteristiche del flusso medio e R_T può essere interpretato come un numero di Reynolds turbolento, costante del flusso. Il range di applicabilità di tale modello è tuttavia limitato a flussi planari bidirezionali, in cui è nota la direzione del flusso: il modello infatti presuppone che la viscosità turbolenta vari solo lungo tale direzione, e che rimanga costante trasversalmente. Queste assunzioni sono valide solo per flussi molto semplici e delimitati da superfici solide.

Un modo più efficace di valutare la viscosità turbolenta, o meglio la viscosità cinematica turbolenta, è di specificarla come prodotto di una lunghezza l^* e di una velocità u^* :

$$\nu_T = l^* u^* \quad (2.25)$$

A tale scopo il modello algebrico *mixing-length* pone:

$$\left. \begin{aligned} l^* &= l_m \\ u^* &= l_m \left| \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right| \end{aligned} \right\} \mu_T = \rho l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right| \quad (2.26)$$

in cui l_m è la lunghezza di miscelazione, misura della propagazione delle perturbazioni della velocità prodotte dai vortici. Smargorinsky [2] propose di applicare l'equazione 2.22 per la velocità di deformazione media, ottenendo:

$$\mu_T = \rho l_m^2 \sqrt{2S_{ij}S_{ij}} \quad (2.27)$$

A differenza del modello di viscosità turbolenta uniforme, questo modello è potenzialmente applicabile a qualsiasi flusso turbolento, ma richiede di specificare correttamente $l_m(x)$: la lunghezza di miscelazione è fortemente dipendente dalla geometria, e per flussi complessi o non noti può richiedere un grande impegno per la sua valutazione.

2.3.2 Modelli a una equazione

Il problema di stimare la lunghezza di miscelazione è risolvibile utilizzando una o due equazioni di trasporto, per valutare altrettante incognite aggiuntive coinvolte nell'analisi turbolenta. Tra i modelli a una equazione, quello più utilizzato in ambito aeronautico è stato descritto da Spalart e Allmaras [3], nel quale viene direttamente introdotta un'equazione di trasporto per ν_T , nella forma:

$$\frac{\partial \nu_T}{\partial t} + \frac{\partial (\nu_T u_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\nu_T}{\sigma_\nu} \frac{\partial \nu_T}{\partial x_i} \right) + \mathcal{P}_\nu \quad (2.28)$$

in cui il σ_ν è una costante specifica del modello, di derivazione empirica e pari a $2/3$, mentre il termine di produzione \mathcal{P}_ν è funzione della viscosità laminare, di quella turbolenta, della vorticità del flusso medio, dei gradienti della viscosità turbolenta e della distanza a parete. Lo sviluppo dell'equazione di trasporto, per cui si rimanda al paper originale, porta alla definizione di alcune costanti di carattere empirico, specifiche del problema in esame.

In generale, i modelli a una equazione rappresentano il più basso livello di modellazione per cui la descrizione della turbolenza risulta completa, ossia senza la necessità di stimare alcuna grandezza. Tuttavia, il modello Spalart-Allmaras non consente di raggiungere alti livelli di descrizione del fenomeno, e dunque una accuratezza maggiore, in favore di un minor costo computazionale, dovuto alla più semplice descrizione del fenomeno.

2.3.3 Modelli a due equazioni

Con il progressivo aumento della potenza di calcolo, e dell'efficienza della discretizzazione spaziale e temporale del problema fisico, si sono sempre più affermati modelli di turbolenza più complessi e completi, come modelli non lineari, che si basano sulla risoluzione diretta di un'equazione per il trasporto dello sforzo di Reynolds, e, soprattutto modelli del primo ordine a due equazioni.

Tra questi ultimi, il più noto è il modello $k - \varepsilon$ [4], in cui due equazioni di trasporto sono risolte per l'energia cinetica turbolenta k e il tasso di dissipazione turbolenta ε (o TDR, da *Turbulent Dissipation Rate*). Facendo riferimento all'equazione 2.25, è possibile definire la viscosità turbolenta nelle nuove variabili:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= C_\mu^{3/4} \frac{k^{3/2}}{l_m} \\ u^* &= C_\mu^{1/4} k^{1/2} \end{aligned} \right\} \mu_T = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (2.29)$$

L'equazione per ε deriva dal fatto che il tasso di dissipazione risulta proporzionale a U^3/L , dove U e L rappresentano le scale di velocità e lunghezza dei vortici energetici, mentre la seconda relazione lega la velocità caratteristica con l'energia cinetica risultante. La costante C_μ , pari a 0.09 ovunque tranne che in prossimità delle pareti, è di derivazione empirica, e ha carattere universale. Come per i modelli a una equazione, questo modello non richiede di specificare il valore di l_m . Attraverso l'ipotesi di viscosità turbolenta e la relativa definizione in termini di k e ε , in aggiunta con due ulteriori equazioni, rispettivamente per il trasporto di k e di ε :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial(ku_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\nu_T}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) + \mathcal{P}_k - \varepsilon \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial(\varepsilon u_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) + C_{\varepsilon 1} \frac{\mathcal{P}_k \varepsilon}{k} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (2.31)$$

il modello risulta completo. In particolare, l'equazione 2.30 è ottenuta sottraendo all'equazione di Navier-Stokes per il bilancio dell'energia (2.15c) l'equazione 2.17c, e modellando il flusso di energia come processo diffusivo, mentre l'equazione 2.31 è di derivazione empirica. Il termine di produzione di energia cinetica turbolenta \mathcal{P}_k è in forma chiusa, ossia completamente definito dalle variabili locali del flusso:

$$\mathcal{P}_k = \nu_T S_{ij}^2 - \frac{2}{3} k \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \nu_T \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 \quad (2.32)$$

Il modello viene completato dalla valutazione delle 5 costanti, di cui Launder e Sharma [5] danno una definizione standard, di carattere empirico:

$$C_\mu = 0.09 \quad C_{\varepsilon 1} = 1.44 \quad C_{\varepsilon 2} = 1.92 \quad \sigma_k = 1.0 \quad \sigma_\varepsilon = 1.3$$

Tra i modelli a due equazioni, questo modello è il più semplice dal punto di vista analitico, ed è virtualmente applicabile a qualsiasi flusso turbolento completamente sviluppato. Tuttavia, in prossimità delle pareti e in presenza di forti curvature o di separazione, il modello $k - \varepsilon$ può risultare inaccurato. Ciò è dovuto al fatto che l'equazione per il tasso di dissipazione dell'energia cinetica turbolenta è stata formulata empiricamente, ricorrendo a delle costanti che, sebbene valide in numerosi casi, sono comunque il risultato di un compromesso. Ad esempio, il valore di C_μ tende a decrescere man mano che ci si avvicina alla parete, in particolare per $y^+ < 50$. È possibile, tramite un processo di *trial-and-error*, adattare i coefficienti, ma entro un range limitato. Un'ulteriore difficoltà è legata al fatto che il termine dissipativo nell'equazione 2.31 tende ad infinito, quando valutato in prossimità della parete, in quanto l'energia cinetica turbolenta è nulla a parete, per la condizione di tangenza:

$$\lim_{y^+ \rightarrow 0} C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} = +\infty \quad (2.33)$$

Per risolvere la turbolenza in prossimità delle superfici, Wilcox [6] propose di sostituire la variabile ε e la relativa equazione di trasporto con $\omega := \varepsilon/k\beta^*$ (o SDR, da *Specific Dissipation Rate*, $\beta^* = 0.09$), grandezza relativa alla frequenza caratteristica dei vortici. In tal modo, la viscosità turbolenta può essere definita come:

$$\mu_T = \rho \frac{C_\mu k}{\beta^* \omega} \quad (2.34)$$

Di conseguenza, l'equazione di trasporto per ω sarà:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial(\omega u_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\nu_T}{\sigma_\omega} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right) + C_{\omega 1} \frac{\mathcal{P}_k}{\nu_T} - C_{\omega 2} \omega^2 \quad (2.35)$$

mentre l'equazione di trasporto dell'energia cinetica turbolenta è la stessa del modello $k - \varepsilon$ (2.30). Come si può notare, il termine dissipativo non risulta più singolare a parete, in quanto ω tende a valori sempre crescenti, ma finiti, al diminuire della distanza a parete, permettendo lo studio della turbolenza nello strato limite interno e in presenza di gradienti avversi di pressione. Tuttavia, l'accuratezza del modello è fortemente sensibile alla stima del valore di ω nei contorni del flusso libero, in particolare in ingresso, che non può essere nullo a causa dell'ipotesi di flusso completamente sviluppato.

Per tale ragione, Menter [7] propose di unire i vantaggi di entrambi i modelli a due equazioni, ossia una minore sensibilità alle condizioni al contorno ($k - \varepsilon$) e una maggiore accuratezza in prossimità delle superfici solide ($k - \omega$). Il modello parte da un'equazione di trasporto derivata dalle equazioni 2.30 e 2.31:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial(\omega u_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\nu_T}{\sigma_\omega} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right) + (C_{\varepsilon 1} - 1) \frac{\mathcal{P}_k}{\nu_T} - (C_{\varepsilon 2} - 1) \omega^2 + \frac{2\nu_T}{\sigma_\omega k} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_i} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) \quad (2.36)$$

L'equazione, che rappresenta il trasporto di ε scritta in termini di ω , formalmente è identica all'equazione 2.35, se non per un termine addizionale di diffusione incrociata, nullo in presenza di turbolenza omogenea. Menter introduce una funzione dipendente dalla distanza a parete y , che va a moltiplicare il termine di cross-diffusione:

$$(1 - F_1) \frac{2\nu_T}{\sigma_\omega k} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_i} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) \quad (2.37a)$$

$$F_1 = \tanh \left(\min \left\{ \max \left\{ \frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500\nu}{y^2 \omega} \right\}, \frac{4C_\mu k}{\sigma_\omega C D_{k\omega} y^2} \right\}^4 \right) \quad (2.37b)$$

$$C D_{k\omega} = \max \left\{ \frac{2\nu_T}{\sigma_\omega k} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_i} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right), 10^{-10} \right\} \quad (2.37c)$$

La funzione $(1 - F_1)$ ha valore unitario lontano dalla parete, cosicché l'equazione 2.36 mantenga il significato di un'equazione per il trasporto di ε (2.31), mentre è nulla in prossimità della parete, riducendosi all'equazione standard per il trasporto di ω (2.35). Poiché l'equazione 2.36 appare formalmente simile all'equazione di trasporto di ω , questo modello è stato nominato da Menter SST $k - \omega$, in cui l'acronimo SST, dall'inglese *Shear Stress Transport*, è dovuto al fatto che è stata introdotta una nuova relazione costitutiva per gli sforzi di Reynolds: i modelli precedentemente descritti, che si basano sull'ipotesi di *eddy viscosity*, tendono a sovrastimare τ_{ij}^r in presenza di gradienti avversi di pressione, in quanto il tasso di produzione di energia cinetica turbolenta \mathcal{P}_k è significativamente maggiore del tasso di dissipazione \mathcal{D}_k . Ciò risulta evidente riscrivendo l'equazione 2.21 nella forma: [8]

$$\tau_{ij}^r = \rho \sqrt{\frac{\mathcal{P}_k}{\mathcal{D}_k}} a_1 k \quad (2.38)$$

in cui a_1 è una costante. Questo problema può essere risolto modellando lo sforzo di Reynolds attraverso un'ulteriore legge di trasporto, ma dato che questo problema risulta significativo solo all'interno dello strato limite, Menter introduce una nuova relazione per la viscosità turbolenta:

$$\mu_T = \rho \frac{a_1 k}{\max\{a_1 \omega, \Omega F_2\}} \quad (2.39)$$

dove $\Omega = \partial u_i / \partial x_j$ e F_2 è una funzione che, similmente a F_1 , ha valore unitario nello strato limite e zero nel flusso esterno. In presenza di gradiente favorevole di pressione si ha $\Omega < a_1 k$, e la relazione assumerà la forma dell'equazione 2.34, mentre in presenza di gradienti avversi di pressione e/o in prossimità della parete si avrà:

$$\mu_T = \rho \frac{a_1 k}{\Omega} \quad \longrightarrow \quad \tau_{ij} = \mu_T \Omega = \rho a_1 k \quad (2.40)$$

in accordo con l'ipotesi di Bradshaw, secondo cui all'interno di uno strato limite lo sforzo di attrito è direttamente proporzionale all'energia cinetica turbolenta [9], ipotesi non soddisfatta dai modelli standard.

2.4 Modellazione della transizione

Tutti i modelli per risolvere la turbolenza esposti nella sezione precedente hanno un forte limite: non sono in grado di predire la transizione del flusso da laminare a turbolento. Ciò è dovuto al fatto che essi si basano sulla considerazione, non sempre vera, che la turbolenza sia ovunque completamente sviluppata. Sono individuabili 3 principali meccanismi di transizione [10]:

Transizione naturale in cui lo strato limite laminare, soggetto a piccoli disturbi, diventa instabile oltre un certo numero di Reynolds, detto critico, formando le cosiddette onde di Tollmien-Schlichting;

Transizione di bypass in risposta a grandi disturbi al di fuori dello strato limite, in genere con livelli di turbolenza del flusso esterno superiori all'1%;

Transizione indotta dalla separazione dove la separazione dello strato limite laminare dà origine alla transizione, formando spesso una bolla di separazione laminare a monte del punto di transizione, poiché lo strato limite laminare si riattacca in risposta alla maggiore miscelazione del flusso turbolento.

Questi fenomeni influenzano fortemente il comportamento del flusso, in particolare per quanto riguarda la separazione del flusso e di conseguenza l'andamento della scia, come mostrato ad esempio da Xia e Chen [11] studiando il profilo Aerospaziale-A, mostrato in figura 2.2. L'esperimento è stato condotto ad un'incidenza $\alpha = 13.1^\circ$, numero di Mach pari a $M = 0.15$ e numero di Reynolds $Re = 2.1 \cdot 10^6$ e imponendo una turbolenza di monte di intensità $I\% = 0.2\%$. In figura 2.3 è mostrato l'andamento del coefficiente di attrito a parete sul dorso ottenuto facendo uso di un modello di Turbolenza e due differenti modelli di transizione, confrontati con i dati sperimentali ottenuti alle medesime condizioni nella galleria del vento F1 dell'ONERA Fauga-Mauzac center [12].

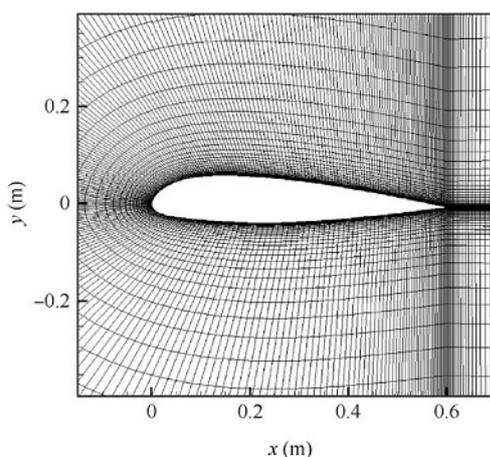


Figura 2.2: Profilo Aerospaziale-A e relativa griglia computazionale

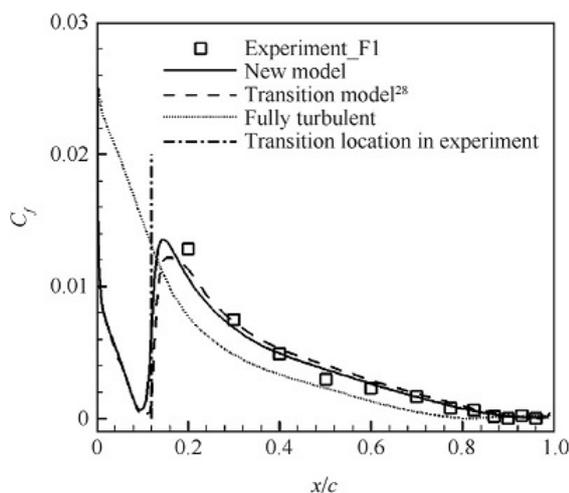


Figura 2.3: Andamento del coefficiente di attrito a parete intorno al profilo Aerospatiale-A per diversi *test case*

I dati sperimentali mostrano come una bolla di separazione laminare si formi al 12% della corda, con conseguente aumento dell'attrito, oltre il quale lo strato limite è completamente turbolento. Questo fenomeno è correttamente previsto dai modelli di transizione, che seguono l'incremento dell'attrito tipico del passaggio da uno strato limite laminare a turbolento, in accordo con i dati sperimentali. Il modello turbolento, invece, mostra aderenza con i dati solo in quella regione in cui il flusso è effettivamente sviluppato, non prevedendo la separazione laminare del flusso.

Ciò è dovuto al fatto che nel caso di flusso a monte già turbolento, dunque completamente sviluppato, il fenomeno della separazione laminare viene fortemente attenuato. La turbolenza infatti mescola il flusso, per cui i filetti fluidi ad alta velocità vengono spinti verso la parte interna dello strato limite, vicino alla superficie solida. Questo fenomeno, che prende il nome di *entrainment*, fa sì che quella porzione di fluido in prossimità della parete sia costretta a muoversi più energicamente, incrementando dunque la sua energia cinetica. In tale condizione lo strato limite, quando incontra un gradiente di pressione avverso, è in grado di resistergli più facilmente. Alla fine, la pressione crescente vince e interrompe il flusso nello strato limite, ma il flusso rimane attaccato più a lungo, ritardando o prevenendo l'insorgere della separazione rispetto allo strato limite laminare, meno energetico negli strati più interni. In figura 2.4 è mostrato l'andamento del coefficiente di pressione dell'esperimento appena esposto.

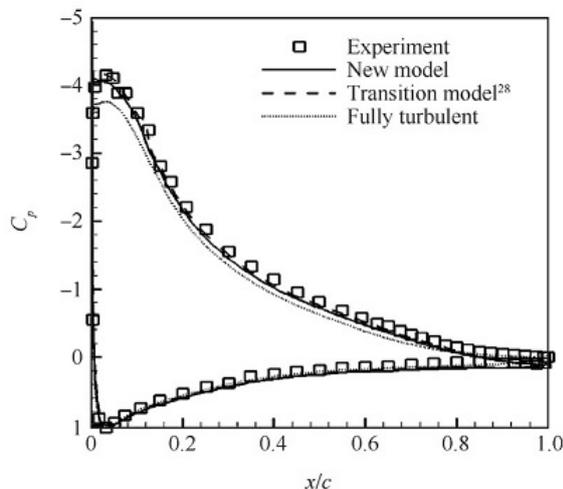


Figura 2.4: Andamento del coefficiente di pressione intorno al profilo Aeroespatale-A

Risulta dunque cruciale l'utilizzo di un modello che, in aggiunta ai modelli di turbolenza, sia in grado di predire la transizione del flusso, da laminare a turbolento. A tale scopo si introduce il fattore intermittenza γ , grandezza locale definita come il rapporto tra il tempo in cui il flusso è turbolento e il tempo di osservazione totale. Essendo la turbolenza caratterizzata da una forte vorticità $\bar{\omega}$, l'intermittenza viene valutata come:

$$\gamma(\bar{x}, t) = Prob \left\{ |\bar{\omega}(\bar{x}, t)| > \omega_{turbulence} \right\} \quad (2.41)$$

in cui $Prob \{ \dots \}$ identifica la funzione probabilità e $\omega_{turbulence}$ è un valore di soglia oltre il quale il flusso è considerato localmente turbolento. Secondo tale definizione, per $\gamma = 0$ il flusso è completamente laminare, mentre per $\gamma = 1$ il flusso è completamente turbolento. Durante il processo di transizione l'intermittenza passa da 0 a 1.

Come nel caso dei modelli per la turbolenza, i modelli per la transizione che verranno esposti di seguito si basano sulla modellazione di una o più equazioni di trasporto, di carattere analitico o semi-empirico.

2.4.1 Modello $\gamma - Re_{\theta t}$

Dal punto di vista pratico, il fatto che la transizione possa avere più cause, come accennato in precedenza, rappresenta uno degli aspetti più problematici. Un modello teorico-analitico che riesca a cogliere tutti questi meccanismi (o solo alcuni di essi) risulta dunque impraticabile, soprattutto se si considera che l'interazione di effetti lineari e non lineari riveste una fondamentale importanza. Per tale motivo Menter et al [13], piuttosto che modellare effettivamente i diversi processi di transizione, formularono un insieme di equazioni di trasporto che consentano di combinare i modelli di turbolenza già esistenti a delle correlazioni sperimentali di carattere locale (concetto che prende il nome di *Local Correlation-based Transition Modeling*, o LCTM).

Le correlazioni sono introdotte attraverso *trigger function* che innescano il processo di transizione attraverso il parametro Re_θ , ossia il *momentum-thickness Reynolds number*, definito come:

$$Re_\theta = \frac{\rho U_\infty \theta}{\mu} \quad (2.42a)$$

$$\theta = \int_0^\infty \frac{u}{U_\infty} \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy \quad (2.42b)$$

dove u è il modulo della velocità locale, U_∞ la velocità a monte e θ il *momentum-thickness*. In genere, queste correlazioni legano il valore del *momentum-thickness Reynolds number* di transizione $Re_{\theta t}$ con alcune variabili globali, come l'intensità turbolenta $I\%$ a monte. A determinare localmente l'innescò della transizione interviene un'equazione di trasporto dell'intermittenza, formulata come segue:

$$\frac{\partial(\rho\gamma)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\gamma u_i)}{\partial x_i} = \mathcal{P}_\gamma - \mathcal{D}_\gamma + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\gamma} \right) \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} \right) \quad (2.43)$$

\mathcal{P}_γ e \mathcal{D}_γ sono rispettivamente il termine di produzione e di dissipazione di γ :

$$\mathcal{P}_\gamma = F_{length} \rho S (\gamma F_{onset})^{c_{a1}} (1 - c_{e1} \gamma) \quad (2.44a)$$

$$\mathcal{D}_\gamma = c_{a2} \rho \Omega \gamma F_{turb} (1 - c_{e2} \gamma) \quad (2.44b)$$

in cui S è il modulo del tensore degli sforzi, F_{length} una correlazione empirica che controlla la lunghezza della regione di transizione, F_{turb} disabilita il termine dissipativo al di fuori dello strato limite o nel sottostrato viscoso mentre F_{onset} è il termine che innescò la transizione, definito come segue:

$$F_{onset} = \max\{F_{onset2} - F_{onset3}, 0\} \quad (2.45a)$$

$$F_{onset2} = \min\left\{ \max\left\{ \frac{Re_v}{2.193 Re_{\theta c}}, \left(\frac{Re_v}{2.193 Re_{\theta c}} \right)^4 \right\}, 2.0 \right\} \quad (2.45b)$$

$$F_{onset3} = \max\left\{ 1 - \left(\frac{R_T}{2.5} \right)^3, 0 \right\} \quad (2.45c)$$

$$Re_v = \frac{\rho y^2 S}{\mu} \quad R_T = \frac{\rho k}{\mu \omega} \quad (2.45d)$$

Si noti come, invece di Re_θ , si faccia uso del numero di Reynolds legato alla vorticità (2.45d), di più semplice valutazione in un'analisi computazionale, essendo definito da proprietà locali, ma che richiede la conoscenza del contorno che separa la regione dello strato limite con il flusso esterno. Tale valore può in seguito essere correlato con Re_θ . Il valore di innescò $Re_{\theta c}$ nell'equazione 2.45b determina dove l'intermittenza aumenta

all'interno dello strato limite, ed è legato a $Re_{\theta t}$ da una correlazione empirica. Le costanti dell'equazione sono:

$$c_{a1} = 0.5 \quad c_{e1} = 1.0 \quad c_{a2} = 0.03 \quad c_{e2} = 50 \quad \sigma_\gamma = 1.0$$

In aggiunta all'equazione dell'intermittenza, Menter introduce una seconda equazione per trasportare l'informazione del livello di turbolenza del flusso libero e del gradiente di pressione adimensionale nello strato limite, per innescare la transizione tramite correlazioni in modo da legare il *momentum-thickness Reynolds number* di transizione alle variabili locali del flusso. Tale scelta è giustificata dal fatto che, in flussi reali, l'intensità della turbolenza può cambiare considerevolmente all'interno del dominio, e una correlazione di $Re_{\theta t}$ con una o più variabili globali risulta irrealistica. Per tale ragione viene introdotta un'equazione di trasporto di $\tilde{Re}_{\theta t}$, alla stregua di una grandezza scalare del flusso:

$$\frac{\partial(\rho\tilde{Re}_{\theta t})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\tilde{Re}_{\theta t}u_i)}{\partial x_i} = \mathcal{P}_{\theta t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sigma_{\theta t}(\mu + \mu_T) \frac{\partial \tilde{Re}_{\theta t}}{\partial x_i} \right) \quad (2.46)$$

in cui il termine di produzione è costruito in maniera tale che nel flusso libero il valore di $\tilde{Re}_{\theta t}$ ottenuto dall'equazione di trasporto corrisponda al valore $Re_{\theta t}$ ottenuto tramite correlazioni empiriche:

$$\mathcal{P}_{\theta t} = c_{\theta t} \frac{\rho}{t} (Re_{\theta t} - \tilde{Re}_{\theta t})(1 - F_{\theta t}) \quad (2.47a)$$

$$F_{\theta t} = \min \left\{ \max \left\{ F_{wake} e^{-(y/\delta)^4}, 1 - \left(\frac{\gamma - 1/c_{e2}}{1 - 1/c_{e2}} \right) \right\}, 1.0 \right\} \quad (2.47b)$$

$$t = \frac{500\mu}{\rho U^2} \quad F_{wake} = e^{-(Re_\omega/10^5)^2} \quad \delta = \frac{50\Omega y}{U} \frac{15}{2} \frac{\tilde{Re}_{\theta t} \mu}{\rho U} \quad Re_\omega = \frac{\rho \omega y^2}{\mu} \quad (2.47c)$$

in cui $F_{\theta t}$ (equazione 2.47b) è utilizzato per annullare il termine di produzione nello strato limite. L'idea è che la produzione di $\tilde{Re}_{\theta t}$ avvenga solo nel flusso libero, valutata tramite funzioni di correlazione, e che successivamente sia diffusa all'interno dello stato limite secondo l'equazione 2.46. Le costanti dell'equazione, sempre di derivazione empirica, sono:

$$c_{e2} = 50 \quad c_{\theta t} = 0.03 \quad \sigma_{\theta t} = 10.0$$

Le due equazioni di trasporto così definite (equazioni 2.43 e 2.46) sono state calibrate per essere accoppiate con le equazioni di trasporto del modello SST $k - \omega$ (equazioni 2.30 e 2.36). L'accoppiamento è ottenuto andando a modificare il termine di produzione dell'energia cinetica turbolenta come segue:

$$\tilde{\mathcal{P}}_k = \gamma_{eff} \mathcal{P}_k \quad (2.48a)$$

$$\gamma_{eff} = \max\{\gamma, \gamma_{sep}\} \quad (2.48b)$$

$$\gamma_{sep} = \min\left\{8e^{-(R_T/15)^4} \max\left\{\left(\frac{Re_v}{2.193Re_{\theta c}}\right) - 1, 0\right\}, 5\right\} F_{\theta t} \quad (2.48c)$$

in cui \mathcal{P}_k è il termine di produzione di k nell'equazione di trasporto originale del modello di turbolenza SST $k - \omega$ (equazione 2.32) e γ_{eff} l'intermittenza effettiva, introdotto in modo tale da predire in modo più accurato il punto di riattacco del flusso turbolento in caso di separazione indotta dalla transizione. Ciò è giustificato dal fatto che il valore di intermittenza valutato dall'equazione di trasporto tende ad essere sottostimato in caso di flusso separato, risultando in una produzione di energia cinetica turbolenta minore e dunque posizionando il punto di riattacco più a valle rispetto alle evidenze empiriche. Per tale ragione si definisce un'intermittenza di separazione γ_{sep} (equazione 2.48c) che corregga il valore dell'intermittenza in caso di flusso separato.

Un'ulteriore modifica al modello di turbolenza consiste nella ridefinizione del parametro F_1 nell'equazione 2.37:

$$\tilde{F}_1 = \max\{F_1, F_3\} \quad (2.49a)$$

$$F_3 = e^{-(R_y/120)^8} \quad (2.49b)$$

$$R_y = \frac{\rho y \sqrt{k}}{\mu} \quad (2.49c)$$

tale scelta risulta essenziale in quanto, integrando le equazioni per la transizione, potrebbe accadere che al centro dello strato limite laminare il parametro possa avere valore nullo, comportamento non desiderato in quanto in prossimità della parete è necessario che risulti attivo il modello $k - \omega$.

Il modello risultante dalle equazioni per il trasporto di γ e $Re_{\theta t}$ e dalle correlazioni empiriche ad esse associate prende il nome di modello $\gamma - Re_{\theta t}$, e rappresenta il modello di applicazione generale più accurato nel prevedere la transizione del flusso laminare, indipendentemente dai meccanismi specifici. Esso tuttavia risulta di difficile implementazione, sia per il notevole costo computazionale che per la sensibilità alle condizioni al contorno, che influenzano fortemente il parametro di produzione di $Re_{\theta t}$, nonché la corretta delimitazione del flusso esterno, che determina come e in che misura quest'ultima variabile sia trasportata all'interno dello strato limite.

2.4.2 Modello “*Gamma Transition*”

Il modello $\gamma - Re_{\theta t}$ è in grado di fornire una vera capacità predittiva, ma risulta computazionalmente costoso, in quanto risolve due equazioni di trasporto aggiuntive al modello SST $k - \omega$ a due equazioni. Per tale motivo Menter et al [14], partendo dal modello $\gamma - Re_{\theta t}$, rimuove l’equazione di trasporto del *momentum-thickness Reynolds number* di transizione e semplifica notevolmente le correlazioni per prevedere l’innesco della transizione. Il modello risultante prende il nome di *Gamma Transition* o γ model, e risolve solo un’equazione di trasporto, risultando dunque più veloce e meno costoso dal punto di vista computazionale.

Nella considerazione che i concetti “LCTM” e di intermittenza costituiscano il metodo più flessibile per includere tutti i possibili meccanismi di transizione nelle simulazioni, e che il modello sopracitato possa essere facilmente combinato con formulazioni di modelli già esistenti e perfezionato mediante nuove correlazioni di transizione, Menter parte da una osservazione di carattere generale: il modello $\gamma - Re_{\theta t}$, introducendo l’intensità turbolenta nelle correlazioni, non è invariante rispetto al sistema di riferimento, risultando dunque valido solo in domini le cui pareti sono stazionarie rispetto agli assi inerziali. Ciò, sebbene in molti casi non comporti problemi, risulta problematico per un modello universale.

Per ovviare a ciò è possibile valutare le correlazioni che innescano la transizione utilizzando direttamente le informazioni che provengono internamente lo strato limite, evitando dunque di formulare una legge che trasporti $Re_{\theta t}$ dal flusso esterno, in modo tale da non legare tale variabile a grandezze invarianti. Ciò comporta anche che le correlazioni che innescano la transizione siano più intuitive e di facile implementazione.

La nuova formulazione del modello è dunque basata sull’equazione 2.43 per il trasporto di γ , che resta formalmente invariata rispetto alla formulazione impiegata nel modello $\gamma - Re_{\theta t}$. Tuttavia, il termine di produzione \mathcal{P}_γ (equazione 2.44a risulta notevolmente semplificato:

$$\mathcal{P}_\gamma = F_{length} \rho S \gamma (1 - \gamma) F_{onset} \quad (2.50)$$

con F_{onset} come in equazione 2.45 e F_{length} non più determinato da una correlazione, ma costante. Il termine dissipativo \mathcal{D}_γ non varia, ed è quindi formulato come in 2.44b. Non essendo più presente l’equazione per il trasporto di $Re_{\theta t}$, il valore di $Re_{\theta c}$ in F_{onset} è ottenuto algebricamente, in funzione delle variabili locali del flusso:

$$Re_{\theta c} = f(I\%_L, \lambda_{\theta L}) \quad (2.51)$$

in cui $I\%_L$ rappresenta l’intensità turbolenta locale e $\lambda_{\theta L}$ il gradiente di pressione, sempre locale. Le costanti del modello sono:

$$F_{length} = 100 \quad c_{a2} = 0.06 \quad c_{e2} = 50 \quad \sigma_\gamma = 1.0$$

L’introduzione di $I\%_L$ e $\lambda_{\theta L}$ rappresenta la principale novità, in quanto non richiede altre equazioni di trasporto. Le variabili sono formulate in modo tale da avere

significato fisico all'interno dello strato limite, dove avviene l'innescò della transizione. L'Intensità turbolenta locale è definita come:

$$I\%_L = \min\left\{100\frac{\sqrt{2k/3}}{\omega y}, 100\right\} \quad (2.52)$$

il termine ωy rappresenta la scala di velocità, e sostituisce il valore U del modello $\gamma - Re_{\theta t}$. L'equazione 2.52 è definita in modo tale da raccordarsi con l'intensità turbolenta del flusso libero. Il gradiente di pressione è invece definito come segue:

$$\lambda_{\theta L} = \min\left\{\max\left\{-7.57 \cdot 10^{-3} \frac{\partial V}{\partial y} \frac{y^2}{\nu} + 0.0128, -1.0\right\}, 1.0\right\} \quad (2.53)$$

Il gradiente di velocità $\partial V/\partial y$ nel caso più generale può essere compiuto come $\nabla(\bar{n} \cdot \bar{u}) \cdot \bar{n}$, dove \bar{n} è la normale alla parete. I coefficienti sono scelti in modo tale che il gradiente di pressione a $y = \delta/2$ sia uguale al gradiente del flusso libero. La correlazione che lega $Re_{\theta c}$ con $I\%_L$ e $\lambda_{\theta L}$, di carattere sperimentale, è la seguente:

$$Re_{\theta c} = C_{TU1} + C_{TU2} \exp\left[-C_{TU3} I\%_L F_{PG}(\lambda_{\theta L})\right] \quad (2.54)$$

che rappresenta una notevole semplificazione rispetto alle correlazioni del modello a due equazioni. Le costanti sono parametri di modellazione definibili dall'utente, anche se generalmente assumono tali valori:

$$C_{TU1} = 100 \qquad C_{TU2} = 1000 \qquad C_{TU3} = 1.0$$

La funzione $F_{PG}(\lambda_{\theta L})$, puramente empirica, tiene conto della dipendenza di Re_V , e dunque di $Re_{\theta c}$, da gradienti di pressione avversi:

$$F_{PG}(\lambda_{\theta L}) = \max\{\tilde{F}_{PG}, 0\} \quad (2.55)$$

$$\tilde{F}_{PG} = \begin{cases} \min\{1 + C_{PG1}\lambda_{\theta L}, C_{PG1}^{lim}\} & \text{per } \lambda_{\theta L} \geq 0 \\ \min\{1 + C_{PG2}\lambda_{\theta L} + C_{PG3}\min\{\lambda_{\theta L} + 0.0681, 0\}, C_{PG2}^{lim}\} & \text{per } \lambda_{\theta L} < 0 \end{cases} \quad (2.56)$$

Anche in questo caso le costanti sono controllabili dall'utente, e generalmente valgono:

$$C_{PG1} = 14.68 \qquad C_{PG2} = -7.34 \qquad C_{PG3} = 0.0$$

$$C_{PG1}^{lim} = 1.5 \qquad C_{PG2}^{lim} = 3.0$$

L'accoppiamento del modello *Gamma Transition* con il modello SST $k - \omega$ è identico al caso precedente, modificando quindi il termine di produzione dell'energia cinetica turbolenta e introducendo un'intermittenza effettiva che tenga conto del comportamento del flusso in caso di riattacco del flusso turbolento. È stato tuttavia introdotto un secondo termine di produzione \mathcal{P}_k^{lim} all'equazione 2.30, per garantire la corretta generazione di energia cinetica turbolenta nei punti di transizione, per livelli turbolenza bassi:

$$\mathcal{P}_k^{lim} = 5C_k \max\{\gamma - 0.2, 0\} (1 - \gamma) F_{on}^{lim} \max\{3C_{SEP}\mu - \mu_T, 0\} S\omega \quad (2.57a)$$

$$F_{on}^{lim} = \min\left\{\max\left\{\frac{Re_V}{2.2Re_{\theta_c}^{lim}} - 1, 0\right\}, 3\right\} \quad (2.57b)$$

$$Re_{\theta_c}^{lim} = 1100 \quad C_k = 1.0 \quad C_{SEP} = 1.0 \quad (2.57c)$$

La necessità di tale termine si basa sull'osservazione che, per valori molto bassi di turbolenza, il modello SST richiede una durata di esecuzione relativamente lunga per produrre turbolenza all'interno dello strato limite, anche se innescato correttamente dal modello di transizione. Il termine è progettato per risultare nullo al termine del transitorio relativo alla transizione.

Capitolo 3

Metodo ai volumi finiti

Il modello matematico che deriva dai modelli fisici è un sistema di equazioni alle derivate parziali (PDE) non risolvibile analiticamente. Pertanto, esso viene approssimato in un sistema di equazioni algebriche delle variabili in gioco in una serie di posizioni discrete nello spazio (corrispondenti alle posizioni dei centrocella o dei vertici) e del tempo (corrispondenti alle iterazioni per i casi stazionari o agli step temporali per i casi non stazionari). Esistono tre principali tipologie di discretizzazione delle equazioni:

- differenze finite (FDM), in cui le equazioni sono risolte in forma differenziale, approssimando le derivate a differenze di quantità valutate ai vertici delle celle o ai centri delle facce;
- volumi finiti (FVM), attraverso il quale vengono approssimate e risolte le equazioni in forma integrale, assegnando la soluzione a ciascun nodo del dominio computazionale (tipicamente il centrocella). La formulazione garantisce il rispetto del principio di conservazione delle proprietà del fluido, essendo i flussi valutati esplicitamente;
- elementi finiti (FEM), che riformula le equazioni, in forma integrale o differenziale, in un problema variazionale. Questa discretizzazione utilizza opportune funzioni, in genere polinomiali, di forma che approssimano le leggi di bilancio, valutate ai vertici delle celle o sulle facce. La soluzione del problema si riconduce dunque alla ricerca di un sistema di polinomi che interpoli i dati minimizzando l'errore.

STAR-CCM+ implementa sia il metodo ai volumi finiti che agli elementi finiti. Tuttavia, il secondo metodo non risulta accurato in problemi di carattere fluidodinamico, in quanto non garantisce la conservazione delle grandezze all'interno del dominio. Il metodo FEM è infatti tipicamente applicato alla meccanica dei solidi, come la propagazione degli sforzi e la valutazione delle deformazioni meccaniche. Di seguito verrà dunque approfondito il metodo di discretizzazione e approssimazione ai volumi finiti, che verrà applicato al problema in esame.

3.1 Discretizzazione spaziale

La generica equazione di trasporto di uno scalare ϕ è ottenuta integrando la legge differenziale nel volume di controllo e applicando il teorema della divergenza di Gauss:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \phi dV + \int_S \rho \bar{u} \phi \cdot \bar{n} dS = \int_S \Gamma \nabla \phi \cdot \bar{n} dS + \int_V Q_\phi dV \quad (3.1)$$

in cui S è la superficie che racchiude il volume di controllo V , Γ il coefficiente di diffusività e Q_ϕ è rappresentativo delle quantità sorgente. Si possono distinguere dunque quattro termini:

- il termine transitorio, che indica la variazione temporale della proprietà del fluido ϕ all'interno del volume di controllo;
- il termine convettivo, che esprime il tasso netto di diminuzione di ϕ attraverso il contorno del volume di controllo, a causa degli effetti convettivi;
- il termine diffusivo, che corrisponde al tasso netto di aumento di ϕ attraverso il contorno del volume di controllo, a causa degli effetti diffusivi;
- il termine sorgente, che esprime la generazione/distruzione di ϕ all'interno del volume di controllo.

La legge di trasporto è valutata in ciascun nodo computazionale, a cui è assegnato il volume della cella corrispondente V_i , la superficie di ciascuna faccia che lo delimita $S_{i,j}$ e la sua normale uscente $\bar{n}_{i,j}$. Il pedice $i \in \{1, \dots, N\}$ identifica una delle N celle in cui è suddiviso il dominio computazionale, mentre il pedice j una delle facce che delimita la i -esima cella. L'equazione (che è una legge di conservazione), deve risultare valida per ciascuna cella, ma anche per l'intero dominio computazionale. In altri termini, sommando tutte le equazioni applicate su ciascuna cella, la legge risultante deve garantire la conservazione di ϕ . In figura 3.1 è rappresentato graficamente lo schema di discretizzazione.

3.2 Approssimazione delle equazioni

Alla discretizzazione del modello fisico segue la sua approssimazione, al fine di ottenere un set di equazioni algebriche lineari. Per tale ragione è necessario approssimare gli integrali di superficie e volumetrici. Il principio alla base del processo di approssimazione è che, per celle sufficientemente piccole, le grandezze sulle facce e ai vertici possono essere valutate dai valori ai centrocella mediante funzioni polinomiali.

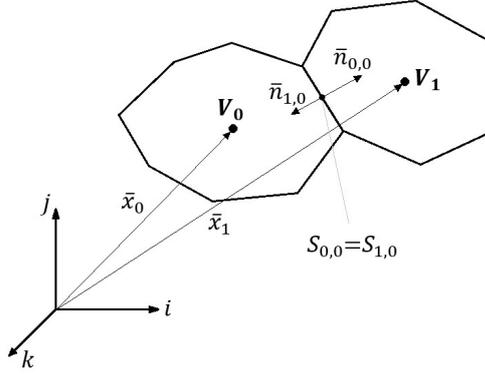


Figura 3.1: Schema di discretizzazione della generica legge di trasporto 3.1 applicata a due celle poliedriche V_1 e V_2 . \bar{x}_0 e \bar{x}_1 identificano la posizione dei centrocella rispetto al sistema di riferimento cartesiano, $S_{0,0} = S_{1,0}$ è la faccia comune alle celle, di normale $\bar{n}_{0,0}$ rispetto alla cella 0 e $\bar{n}_{1,0}$ rispetto alla cella 1

3.2.1 Approssimazione degli integrali

Il flusso netto attraverso il contorno del volume di controllo è la somma degli integrali sulle facce del volume:

$$\int_{S_i} \bar{f} \cdot d\bar{S} = \sum_j \int_{S_{i,j}} \bar{f} \cdot d\bar{S} \quad (3.2)$$

dove \bar{f} è il flusso convettivo o diffusivo e $\bar{S} = S\bar{n}$. L'approssimazione più semplice dell'integrale si ottiene tramite la regola del punto medio: l'integrale è approssimato al valore medio di \bar{f} su ciascuna faccia della cella, che è a sua volta approssimato dal valore al centro della faccia:

$$\int_{S_{i,j}} \bar{f} \cdot d\bar{S} = \overline{f_{i,j}} S_{i,j} \approx f_{i,j} S_{i,j} \quad (3.3)$$

Tale approssimazione è accurata al secondo ordine. Si noti che, poiché il valore di $f_{i,j}$ nel centro della faccia è sconosciuto, per preservare l'accuratezza questo valore deve essere calcolato con un'accuratezza del secondo ordine.

Per quanto riguarda gli integrali di volume, la più semplice approssimazione accurata al secondo ordine può essere ottenuta sostituendo l'integrando con il suo valore medio, che può essere approssimato al valore del centrocella:

$$\int_{V_i} q dV = \bar{q}_i V_i \approx q_i V_i \quad (3.4)$$

dove q rappresenta la grandezza volumetrica. Poiché il valore al centro della cella è noto, non è necessaria alcuna interpolazione. L'integrale è esatto se q è costante o

varia linearmente attraverso la cella. Le approssimazioni di ordine superiore richiedono la conoscenza di q n posizioni diverse dal centrocella, e per mantenere l'accuratezza dell'approssimazione integrale, i valori delle variabili ai vertici e al centro delle facce devono essere ottenuti con pari accuratezza.

Applicando le discretizzazioni appena ottenute all'equazione 3.1 si ottiene:

$$\frac{d}{dt}(\rho\phi V)_i + \sum_j [\rho\phi(\bar{u} \cdot \bar{n})S]_{i,j} = \sum_j [\Gamma(\nabla\phi \cdot \bar{n})S]_{i,j} + (Q_\phi V)_i \quad (3.5)$$

Per ottenere un'accuratezza del secondo ordine, i centri delle facce e i centrocella corrispondono ai centroidi degli elementi di mesh.

3.2.2 Valutazione dei flussi convettivi

Il generico flusso convettivo può essere riscritto come segue:

$$[\rho\phi(\bar{u} \cdot \bar{n})S]_{i,j} = (\dot{m}\phi)_{i,j} = \dot{m}_{i,j}\phi_{i,j} \quad (3.6)$$

dove $\dot{m}_{i,j}$ è la portata in massa attraverso la j -esima faccia della cella i . La grandezza $\phi_{i,j}$ al centro della faccia non è nota, e dev'essere interpolata a partire dai valori ai centrocella ϕ_i . La sua valutazione può essere effettuata in diversi modi, che variano per stabilità e accuratezza dello schema numerico. Il metodo più semplice consiste nell'interpolazione *upwind* di primo ordine (FOU) in cui si fa uso della seguente funzione a gradino:

$$(\dot{m}\phi)_{i,j} = \begin{cases} \dot{m}_{i,j}\phi_i & \text{per } \dot{m}_{i,j} \geq 0 \\ \dot{m}_{i,j}\phi_{i+1} & \text{per } \dot{m}_{i,j} < 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

Un valore positivo della portata corrisponde a un flusso uscente, e l'informazione della grandezza ϕ è estrapolata direttamente dal centrocella. Nel caso di flusso entrante ($\dot{m}_{i,j} < 0$) il valore di $\phi_{i,j}$ viene estrapolato dalla cella adiacente. Questo schema si basa sulle proprietà di trasporto del flusso: per convezione una grandezza è trasportata da monte a valle. Se le linee di flusso sono ortogonali alla faccia della cella, tale approssimazione risulta sufficientemente accurata. In caso contrario tale schema può produrre errori, detti di diffusione artificiale o numerica. Un vantaggio dello schema FOU è che è incondizionatamente limitato, producendo dunque soluzioni stabili che convergono con robustezza. Uno schema *upwind* di secondo ordine (SOU) è il seguente:

$$(\dot{m}\phi)_{i,j} = \begin{cases} \dot{m}_{i,j}\phi_{i,j} & \text{per } \dot{m}_{i,j} \geq 0 \\ \dot{m}_{i,j}\phi_{i+1,j} & \text{per } \dot{m}_{i,j} < 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

dove il valore di ϕ sulla faccia j è ottenuto interpolando linearmente i dati al centrocella, come segue:

$$\phi_{i,j} = \phi_i + \bar{s}_{i,j} \cdot (\nabla\phi)_i \quad (3.9a)$$

$$\phi_{i+1,j} = \phi_{i+1} + \bar{s}_{i+1,j} \cdot (\nabla\phi)_{i+1} \quad (3.9b)$$

in cui $\bar{s}_{i,j} = \bar{x}_{i,j} - \bar{x}_i$ e $\bar{s}_{i+1,j} = \bar{x}_{i,j} - \bar{x}_{i+1}$ sono i vettori congiungenti i centrocella al centro della faccia. Il problema della valutazione dei gradienti $(\nabla\phi)_i$ e $(\nabla\phi)_{i+1}$, è specifico del problema fluidodinamico, e sarà trattato nella sezione 4.4.

Un'ulteriore approssimazione di ampio utilizzo in problematiche fluidodinamiche è rappresentata dallo schema alle differenze centrate (CDS):

$$(\dot{m}\phi)_{i,j} = \dot{m}_{i,j}[f\phi_i + (1-f)\phi_{i+1}] \quad (3.10)$$

nel quale il termine f è un fattore di interpolazione, legato alla variazione dei volume tra due celle adiacenti:

$$f = \frac{V_{i+1}}{V_i + V_{i+1}} \quad (3.11)$$

Tale schema è formalmente accurato al secondo ordine. Tuttavia, è soggetto a errori di dispersione e problemi di stabilità, soprattutto in simulazioni stazionarie. Gli errori di dispersione rendono problematica la discretizzazione di quantità definite positive (come la temperatura o l'energia cinetica turbolenta) che devono essere limitate. Un vantaggio significativo delle differenze centrate è che, quando viene utilizzato per discretizzare la velocità, preserva l'energia cinetica turbolenta rispetto allo schema *upwind* di secondo ordine, in cui k è suscettibile di veloci decadimenti innaturali.

Tra gli schemi ibridi figura lo schema alle differenze centrate limitato (BCD), in cui il flusso è valutato come segue:

$$(\dot{m}\phi)_{i,j} = \begin{cases} \dot{m}_{i,j}\phi_{FOU} & \text{per } \xi < 0 \text{ o } \xi > 1 \\ \dot{m}_{i,j}(\sigma\phi_{CDS} + (1-\sigma)\phi_{SOU}) & \text{per } 0 \leq \xi \leq 1 \end{cases} \quad (3.12)$$

Il termine ξ individua un variabile normalizzata, descrittiva dell'andamento locale di ϕ , nonché delle proprietà di limitatezza dello schema convettivo. Facendo riferimento alla figura 3.2 per cui, nota la velocità $\bar{u}_{i,j}$, è possibile definire una cella a monte ($i-1$) e a valle ($i+1$) rispetto alla cella i , variabile ξ è definita come segue:

$$\xi = \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}} \quad (3.13)$$

sulla base di tale parametro si può definire il cosiddetto criterio di limitatezza: quando ϕ_i è limitato tra ϕ_{i-1} e ϕ_{i+1} , ossia quando $0 \leq \xi \leq 1$, la soluzione non produce oscillazioni numeriche, garantendo una maggiore stabilità e convergenza. Sulla base di tale criterio lo schema decide di valutare $\phi_{i,j}$ utilizzando lo schema *upwind* di primo ordine (ϕ_{FOU})

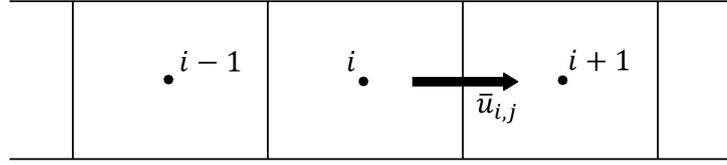


Figura 3.2

quando il criterio di limitatezza non è soddisfatto, e gli schemi di secondo ordine (ϕ_{SOU} e ϕ_{CDS}) quando è garantita una soluzione non oscillatoria. Il termine $\sigma = f(\xi)$ è un *blending factor* che assicura stabilità e accuratezza dello schema. Pertanto, lo schema alle differenze centrate limitato può essere più dissipativo dello schema CDS, specialmente su mesh più grossolane, ma nel complesso fornisce un buon compromesso tra accuratezza e robustezza, dato che garantisce una soluzione limitata.

Varianti dello schema ibrido di ordine superiore fanno uso di schemi MUSCL (*Monotonic Upstream-centered Scheme for Conservation Laws*) [15], che ricostruiscono i flussi a partire dallo stato della cella in step temporali precedenti. Ad esempio, facendo uso dello schema MUSCL *upwind* accurato al terzo ordine (M3) si ottiene:

$$(\dot{m}\phi)_{i,j} = \begin{cases} \dot{m}_{i,j}\phi_{FOU} & \text{per } \xi < 0 \text{ o } \xi > 1 \\ \dot{m}_{i,j}(\sigma_{M3}\phi_{M3} + (1 - \sigma_{M3})\phi_{CD3}) & \text{per } 0 \leq \xi \leq 1 \end{cases} \quad (3.14)$$

dove ϕ_{CD3} è ottenuto tramite uno schema centrato, anch'esso accurato al terzo ordine. Uno schema di tal tipo garantisce una velocità di convergenza maggiore e una minore dissipazione rispetto allo schema BCD, ma è fortemente soggetto a fenomeni oscillatori spuri nel caso di forti gradienti. Il criterio di limitatezza garantisce comunque una certa robustezza, passando ad uno schema accurato al primo ordine quando necessario.

3.2.3 Valutazione dei flussi diffusivi

Per quanto riguarda il generico flusso diffusivo, è necessario approssimare il gradiente $\nabla\phi$. Per ottenere un valore accurato al secondo ordine, facendo uso dei valori al centrocella, si può scrivere

$$\nabla\phi_{i,j} = (\phi_{i+1} - \phi_i)\bar{\alpha} + \overline{\nabla\phi} - (\overline{\nabla\phi} \cdot \bar{d}s)\bar{\alpha} \quad (3.15)$$

dove:

$$\bar{ds} = \bar{x}_{i+1} - \bar{x}_i \quad (3.16a)$$

$$\bar{\alpha} = \frac{\bar{n}_{i,j} S_{i,j}}{(\bar{n}_{i,j} S_{i,j}) \cdot \bar{ds}} \quad (3.16b)$$

$$\overline{\nabla\phi} = \frac{\nabla\phi_i + \nabla\phi_{i+1}}{2} \quad (3.16c)$$

in tal modo il termine diffusivo in equazione 3.5 può essere riscritto come segue:

$$[\Gamma(\nabla\phi \cdot \bar{n})S]_{i,j} = \Gamma_{i,j}[(\phi_{i+1} - \phi_i)\bar{\alpha} \cdot \bar{n}_{i,j} + \overline{\nabla\phi} \cdot \bar{n}_{i,j} - (\overline{\nabla\phi} \cdot \bar{ds})\bar{\alpha} \cdot \bar{n}_{i,j}]S_{i,j} \quad (3.17)$$

dove $\Gamma_{i,j}$ è valutato come media armonica dei valori ai centrocella. Il secondo e terzo termine dell'equazione 3.17 rappresentano contributi di cross-diffusione, o gradienti secondari, essenziali per garantire l'accuratezza in mesh non ortogonali. L'approssimazione è infatti fortemente sensibile all'ortogonalità tra le celle adiacenti, in quanto l'angolo tra \bar{n} e \bar{ds} , se maggiore di 90° , può portare a soluzioni spurie. Per garantire la validità della mesh in tal senso è possibile verificare se tale angolo, detto di *skewness*, tenda a valori piccoli tra gli elementi di mesh. Questo aspetto sarà approfondito nella sezione 4.2.4.

Può accadere che i gradienti secondari destabilizzino la soluzione. In tal caso è possibile formulare il termine diffusivo omettendo tali contributi:

$$[\Gamma(\nabla\phi \cdot \bar{n})S]_{i,j} = \Gamma_{i,j}[(\phi_{i+1} - \phi_i)\bar{\alpha} \cdot \bar{n}_{i,j}]S_{i,j} \quad (3.18)$$

3.3 Integrazione temporale

Nel caso di flusso stazionario, la discretizzazione delle equazioni di governo risulta conclusa. Nel caso in cui sia presente il termine transitorio è necessario discretizzare la derivata temporale, suddividendo l'intervallo temporale T della simulazione in step $\Delta t = t^k - t^{k-1}$. La soluzione delle equazioni di governo ad un certo istante temporale è ottenuta sulla base delle soluzioni ad istanti temporali precedenti. Gli schemi di integrazione temporale si distinguono tra il numero di istanti temporali utilizzati per l'integrazione e su quali istanti sono integrati i flussi.

3.3.1 Schemi espliciti

Lo schema di Eulero esplicito fa uso di una differenza in avanti del primo ordine:

$$\frac{d}{dt}(\rho\phi V)_i = \frac{(\rho\phi V)_i^{k+1} - (\rho\phi V)_i^k}{\Delta t} \quad (3.19)$$

La soluzione all'istante k è nota, per cui è possibile valutare la soluzione all'istante successivo mettendo in evidenza ϕ^{k+1} :

$$\phi_i^{k+1} = \phi_i^k - \frac{\Delta t}{\rho_i^k V_i} H_i^k \quad (3.20)$$

H_i^k rappresenta i contributi convettivi, diffusivi e di sorgente valutati all'istante corrente, dunque noti. Lo schema di Eulero esplicito è il più semplice metodo di discretizzazione spaziale, ma è soggetto a forti instabilità, portando all'amplificazione degli errori di discretizzazione, dunque alla divergenza della soluzione.

3.3.2 Schemi impliciti

Lo schema di Eulero implicito, accurato al primo ordine, approssima il termine transitorio dell'equazione 3.1 utilizzando una differenza all'indietro:

$$\frac{d}{dt}(\rho\phi V)_i = \frac{(\rho\phi V)_i^k - (\rho\phi V)_i^{k-1}}{\Delta t} \quad (3.21)$$

in cui la soluzione è valutata all'istante corrente (k) e all'istante precedente ($k - 1$). Una discretizzazione temporale accurata al secondo ordine nota come BDF2 (*Backward Differentiation Formula*) utilizza, oltre alla soluzione all'istante k e all'istante $k - 1$, la soluzione all'istante $k - 2$:

$$\frac{d}{dt}(\rho\phi V)_i = \left[\frac{3}{2}(\rho\phi V)_i^k - 2(\rho\phi V)_i^{k-1} + \frac{1}{2}(\rho\phi V)_i^{k-2} \right] \frac{1}{\Delta t} \quad (3.22)$$

La valutazione al primo step temporale è effettuata tramite una discretizzazione del primo ordine, poiché sono disponibili solo due istanti temporali. Lo schema BDF3, sempre accurato al secondo ordine, utilizza 4 istanti temporali:

$$\frac{d}{dt}(\rho\phi V)_i = \left[\frac{11}{6}(\rho\phi V)_i^k - 3(\rho\phi V)_i^{k-1} + \frac{3}{2}(\rho\phi V)_i^{k-2} - \frac{1}{3}(\rho\phi V)_i^{k-3} \right] \frac{1}{\Delta t} \quad (3.23)$$

Lo schema utilizza i tre istanti temporali precedenti, oltre a quello attuale. Gli schemi di secondo ordine che utilizzano più istanti temporali sono combinazioni lineari di più BDF. Le formule sopracitate si basano su step temporali costanti, ma nella realtà essi sono variabili, per adattarsi ai fenomeni fisici del problema, che possono richiedere spaziature temporali diverse, risultando in una discretizzazione temporale non regolare.

3.4 Il sistema di equazioni algebriche

Discretizzate le equazioni di trasporto nello spazio e nel tempo e approssimando le relazioni non lineari si ottiene un sistema di equazioni lineari, ciascuno relativo ad uno specifico nodo i , che consente di valutare la soluzione allo step temporale successivo $k + 1$. Le equazioni del sistema sono scritte in forma differenziale:

$$\frac{a_i}{\omega} \Delta\phi_i + \sum_n a_n \phi_n = r \quad (3.24)$$

dove $\Delta\phi_i = \phi_i^{k+1} - \phi_i^k$, a_i e a_n sono coefficienti, risultato del processo di discretizzazione e approssimazione, il pedice n della sommatoria si riferisce alle celle adiacenti la cella i e r è un termine residuo:

$$r = - \left[\frac{d}{dt}(\rho\phi V)_i^{k-1} + \sum_j [\rho\phi(\bar{u} \cdot \bar{n}) S]_{i,j}^{k-1} = \sum_j [\Gamma(\nabla\phi \cdot \bar{n}) S]_{i,j}^{k-1} + (Q_\phi V)_i^{k-1} \right] \quad (3.25)$$

che rappresenta la forma discretizzata dell'equazione 3.1 all'istante precedente. Per definizione, tale termine tende ad annullarsi all'aumentare dell'accuratezza della soluzione, che a sua volta dipende, oltre che dai metodi di discretizzazione ed approssimazione adoperati, anche dalla scelta di un'adeguata spaziatura spaziale (ossia della griglia computazionale) e temporale del problema fisico, influenzando consistenza, stabilità e convergenza della soluzione. Un modo per controllare la qualità della soluzione numerica può essere dunque quello di controllare l'andamento dei residui ad ogni iterazione.

A causa della natura non lineare del problema, STAR-CCM+ ottiene la la soluzione iterativamente su due livelli: un ciclo di iterazione interno che risolve il sistema lineare e un ciclo esterno che controlla e aggiorna la soluzione ad un dato istante temporale. Tale aspetto verrà approfondito nella sezione 4.4.1.

3.4.1 Implementazione delle condizioni al contorno

Il sistema di equazioni lineari non rappresenta un problema di per se ben posto, in quanto è necessario definire le condizioni iniziali e agli estremi del dominio computazionale.

Le precedenti espressioni per la valutazione dei flussi convettivi e diffusivi sono valide per tutte le facce interne del dominio computazionale. Sulle facce esterne, che coincidono con i limiti del dominio, vengono applicate le condizioni al contorno: gli integrali sulle superfici di contorno sono espressi in funzione di dati noti, provenienti dall'esterno e definiti dall'utente (o derivanti da specifiche proprietà della superficie, come la condizione di tangenza in caso di pareti), e dalle celle interne. Si distinguono due tipologie di condizioni al contorno:

- nel caso delle condizioni al contorno di Dirichlet viene imposto il valore al contorno ϕ_b , esplicitato dall'utente o derivabile da altre condizioni al contorno definite in fase di *pre-processing*, per cui i flussi convettivi (equazione 3.6) sono calcolati sostituendo a $\phi_{0,j}$ il valore esterno ϕ_b , e i flussi diffusivi (equazione 3.17) sostituendo a ϕ_1 il valore al contorno e alla quantità $\overline{\nabla\phi}$ il gradiente $\nabla\phi_0$, non avendo esplicitato il gradiente al contorno $\overline{\nabla\phi_b}$:

$$[\rho\phi(\bar{u} \cdot \bar{n})S]_{0,j} = (\dot{m}\phi)_{0,j} = \dot{m}_{0,j}\phi_b \quad (3.26)$$

$$\nabla\phi_{0,j} = (\phi_b - \phi_0)\bar{\alpha} + \nabla\phi_0 - (\nabla\phi_0 \cdot \bar{d}s)\bar{\alpha} \quad (3.27)$$

- nel caso delle condizioni al contorno di Neumann, avendo imposto anche il valore del gradiente al contorno $\nabla\phi_b$, i flussi diffusivi al contorno possono essere calcolati valutando la quantità $\overline{\nabla\phi}$ come segue:

$$\overline{\nabla\phi} = \frac{\nabla\phi_b + \nabla\phi_0}{2} \quad (3.28)$$

La valutazione dei flussi convettivi resta la medesima del caso precedente.

Capitolo 4

Analisi CFD

La simulazione oggetto di questa tesi riguarda il flusso attraverso il canale interpolare di una turbina di bassa pressione (*LP Turbine*) e alta portanza (*high-lift*). Tale categoria di turbomacchina si sta sempre più affermando nel campo della propulsione in ambito civile in quanto, col progressivo aumento del *bypass ratio* (si pensi al turbofan Trent 7000 di Rolls-Royce [16], che vanta un rapporto di diluizione di 10 : 1), il ruolo degli stadi di turbina a bassa pressione e del *fan* risultano di primaria importanza nella generazione della spinta, contribuendo fino all'80%. D'altro canto, tali schiere di turbina sono soggette ad un flusso fortemente tridimensionale e non stazionario, a causa degli effetti di scia delle schiere a monte, influenzando e perturbando lo sviluppo dello strato limite, in particolare sul ventre della paletta, e causando una riduzione dell'efficienza. Studi al riguardo hanno portato al successo dello sviluppo di profili *high-lift* ed *ultra-high-lift* [17].

Nella fattispecie, si analizzerà la schiera lineare costituita da pale di profilo T106C *high-lift Cascade*, sulla quale è presente una vasta bibliografia, sia per quanto riguarda le analisi sperimentali, in galleria del vento, che per le simulazioni numeriche, attraverso le quali è stato possibile studiarne le performance. Si è fatto uso del software commerciale STAR-CCM+ [18] che implementa diversi modelli di turbolenza e transizione del flusso laminare, nonché diversi approcci per la risoluzione delle equazioni discretizzate. Tali aspetti verranno successivamente approfonditi.

Tipicamente, un progetto di fluidodinamica computazionale si compone di tre fasi:

pre-processing in cui vengono definite tutte le caratteristiche geometriche, di griglia e fisiche inerenti al problema;

processing che consiste nella definizione dei parametri di risoluzione delle equazioni discretizzate, delle condizioni di arresto, nonché dell'avvio vero e proprio della simulazione;

post-processing dove vengono selezionati i risultati grezzi di interesse ed analizzati, al fine di poter valutare altre grandezze di riferimento e visualizzare i risultati in forma tabulare e grafica.

Nelle sezioni che seguono saranno approfonditi gli aspetti legati ai primi due step. Si tenga conto che il processo sopra esposto non è sempre lineare, poiché la definizione dei parametri coinvolti è spesso il risultato di un *trade-off*, che può richiedere aggiustamenti e correzioni in diverse fasi della progettazione computazionale, tenendo anche conto dei risultati ottenuti nel corso di simulazioni precedenti.

4.1 Descrizione della geometria e del dominio

Nella fase di *Pre-processing*, come delineato precedentemente, verranno assegnate le caratteristiche del problema reale, correttamente tradotte nei parametri che definiscono il problema, una volta discretizzato ed approssimato numericamente. In particolare, si definirà la geometria della pala e del dominio che ingloba il flusso attorno ad essa, si assegneranno le vari superfici che delimitano il volume, che verrà poi diviso opportunamente in celle, tramite il processo di *meshing*. Infine, si sceglieranno i modelli fisici che governano il fenomeno fisico, nonché le condizioni al contorno del flusso e le caratteristiche del fluido.

In tabella 4.1 sono esposte le caratteristiche geometriche della schiera di palette T106C, mostrata in figura 4.1, riferite ad una lunghezza unitaria della corda.

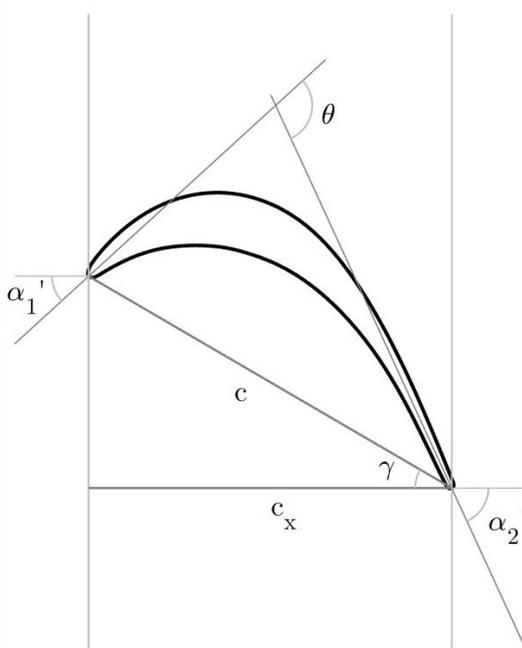


Figura 4.1: Geometria della pala T106C *Cascade*

Corda assiale	$c_x/c = 0.859$
Solidità	$\sigma = c/t = 1.053$
Calettamento	$\gamma = 30.5^\circ$
Angolo geometrico in ingresso	$\alpha'_1 = 42.7^\circ$
Angolo geometrico in uscita	$\alpha'_2 = 65.5^\circ$
Inarcamento	$\theta = 108.2^\circ$
Altezza della pala	$h/c = 3$

Tabella 4.1: Caratteristiche geometriche della schiera di pale T106C *Cascade*

Per il dimensionamento della geometria, e quindi del dominio, è necessario fare alcune considerazioni sulle caratteristiche del flusso. In generale, qualsiasi studio di carattere aerodinamico è svolto impostando i parametri adimensionali (Reynolds e Mach) piuttosto che le grandezze dimensionali (temperatura, pressione, densità...). Ciò è dovuto al fatto che, indipendentemente dalla dimensione caratteristica e dalle condizioni del flusso, è possibile effettuare più agevolmente simulazioni in condizioni differenti e confrontare diverse geometrie alle stesse condizioni. In particolare, per il problema aerodinamico trattato vengono forniti il Mach e il numero di Reynolds a valle isentropici, quest'ultimo riferito alla corda assiale del profilo di pala: $M_{2,is}$ e $Re_{2,is}$. Dalla definizione del numero di Reynolds è possibile ricavare la lunghezza della corda assiale, da cui si potranno in seguito ricavare le altre grandezze geometriche della pala:

$$Re_{2,is} = \frac{V_{2,is} \cdot c_x \cdot \rho_{2,is}}{\mu_{2,is}} \quad (4.1)$$

La densità a valle isentropica è valutabile noti $M_{2,is}$ e la densità totale a monte ρ_1^0 :

$$\rho_{2,is} = \rho_1^0 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_{2,is}^2 \right)^{\gamma - 1} \quad (4.2)$$

dove γ è il coefficiente di dilatazione adiabatica, che per l'aria secca a bassa temperatura è circa costante e pari a 1.4. Allo stesso modo è possibile ricavare la temperatura statica a valle isentropica dalla conoscenza della temperatura totale a monte:

$$T_{2,is} = T_1^0 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_{2,is}^2 \right)^{-1} \quad (4.3)$$

Da quest'ultima grandezza è possibile valutare la viscosità dinamica isentropica, sfruttando la legge di Sutherland, e la velocità a valle isentropica:

$$\mu_{2,is} = S \frac{T_{2,is}^{1.5}}{\chi + T_{2,is}} \quad (4.4)$$

$$V_{2,is} = M_{2,is} \sqrt{\gamma \cdot R^* \cdot T_{2,is}} \quad (4.5)$$

in cui:

$$S = 1.46 \cdot 10^{-6} \frac{Pa \cdot s}{\sqrt{K}} \quad \chi = 110K \quad R^* = \frac{R}{\mathcal{M}} \approx 287 \frac{J}{Kg \cdot K}$$

dove l'ultimo termine rappresenta la costante universale specifica per l'aria secca. Il termine $\sqrt{\gamma \cdot R^* \cdot T_{2,is}}$ è pari alla velocità del suono isentropica a valle $a_{2,is}$. Date quindi le condizioni totali a monte del flusso è possibile ricavare sia la corda assiale del profilo di pala che le condizioni statiche a valle, per una data configurazione adimensionale del flusso, caratterizzata da un certo valore di Mach e Reynolds isentropici a valle. La scelta delle condizioni totali è arbitraria, poiché scaleranno conseguentemente le altre grandezze per mantenere i gruppi adimensionale scelti. In genere tali simulazioni sono svolte in condizioni standard, a bassa temperatura, cosicché l'approssimazione di flusso ideale sia applicabile. Per le simulazioni qui esposte si useranno i seguenti valori di pressione e temperatura totali a monte:

$$p_1^0 = 10^5 Pa \quad T_1^0 = 300K \quad \rho_1^0 = \frac{p_1^0}{R^* \cdot T_1^0} = 1.161 \frac{kg}{m^3}$$

I gruppi adimensionali qui adottati sono:

$$M_{2,is} = 0.4 \quad Re_{2,is} = 10^5$$

Si riportano in tabella 4.2 i dati relativi alle dimensioni geometriche della schiera, utilizzando le formule e i dati sopra menzionati:

4.1.1 Generazione del dominio

Il primo passo necessario all'implementazione del dominio computazionale è quello di creare una sezione bidimensionale, che si sviluppa lungo un piano perpendicolare l'estensione della pala, per poi estruderlo lungo questa dimensione. Per convenzione, si considererà che la pala si estenda lungo l'asse z , che la corda assiale sia parallela all'asse x e che quindi la schiera di pale si estenda lungo l'asse y .

c_x	12.31mm
$c = c_x / (c_x/c)$	14.33mm
$t = c/\sigma$	13.61mm
$h = c \cdot (h/c)$	43mm

Tabella 4.2: Dimensioni della schiera di pale T106C usata per la simulazione

Si procede dunque alla generazione della sezione sul piano xy . A differenza delle prove sperimentali in galleria del vento, in cui l'interazione mutuale tra le pale è ottenuta realizzando parte della schiera, idealmente infinita, come nel caso dell'esperimento di Duden e Fottner, in cui si è fatto uso di una schiera lineare di 7 pale [19], la simulazione verrà svolta studiando il campo di moto attorno a una sola pala, sfruttando la possibilità fornita dal software di impostare una condizione di periodicità tra i contorni che separano la pala con il resto della schiera, in modo tale da ridurre l'estensione del dominio e conseguentemente il numero di elementi di mesh, snellendo considerevolmente il costo computazionale (o, in alternativa, permettendo un maggior affinamento della griglia, a parità di complessità computazionale). Una condizione imprescindibile di tale geometria è che, affinché essa sia periodica lungo le superfici che separano le palette, la distanza tra le due superfici periodiche sia pari al passo t per ogni valore di x . Tali contorni verranno nominati upper boundary e lower boundary, come mostrato in figura 4.2, insieme alla denominazione delle restanti parti che compongono il dominio bidimensionale.

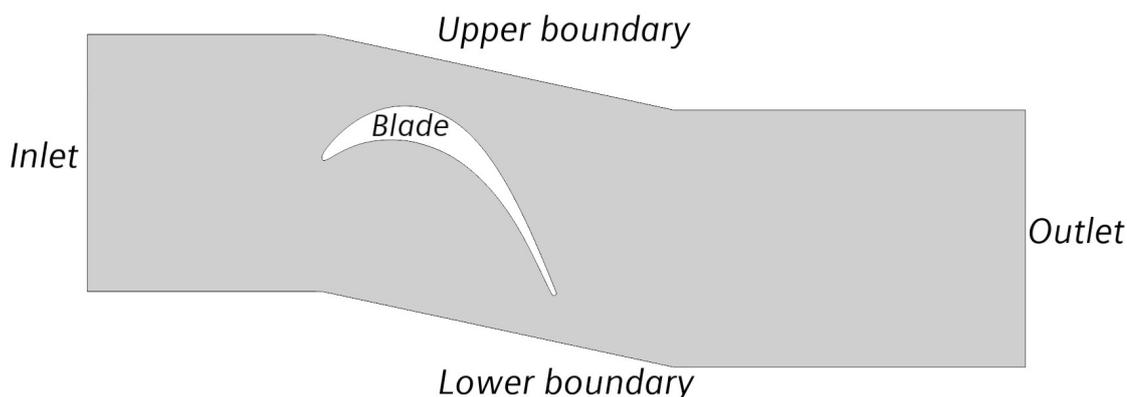


Figura 4.2: Dominio bidimensionale sul piano xy

La figura mostra inoltre come si sia scelto un dominio delimitato da 3 segmenti spezzati, sfruttando il fatto che il passo della schiera è inferiore all'estensione della paletta lungo l'asse y . Si consideri che la forma geometrica dei contorni che formano l'interfaccia periodica non ha alcuna influenza sulla natura fluidodinamica del problema, proprio per la loro caratteristica di periodicità; pertanto, la scelta è da considerarsi arbitraria. Optare per delle linee spezzate ha permesso di creare un dominio estremamente semplice, senza spigoli e curvature tali da generare una griglia computazionale non conforme ai contorni e influire sulla coincidenza delle interfacce periodiche, invalidando i risultati.

Per quanto riguarda l'estensione lungo l'asse x il dominio è così ripartito: una regione a monte del profilo delimitata dalla sezione di ingresso, denominata Inlet, posta a una distanza pari alla corda assiale dal bordo d'attacco, cosicché il flusso in ingresso non venga "inquinato" dalle perturbazioni generate dalla pala, e avere una condizione di ingresso indisturbata. A valle della pala si ha la regione in cui si svilupperà la scia, di lunghezza pari a due corde assiali, in modo tale che anche la sezione d'uscita, detta Outlet, possa essere assimilata ad una regione di flusso asintoticamente indisturbato. Tra le due regioni si sviluppa il canale interpalare, ripartito dalla pala tra una sezione superiore, che risente della pala fittizia precedente, e una sezione inferiore, che risente della pala fittizia successiva: il flusso proveniente dalla regione a monte verrà conseguentemente ripartito tra i due canali, così come mostrato in figura 4.3.

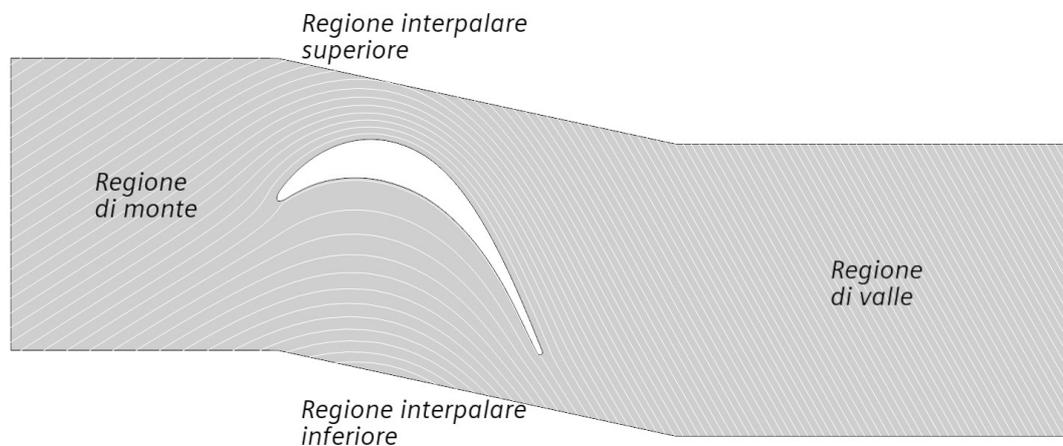


Figura 4.3: Ripartizione del del flusso nell'attraversamento della pala

Il passaggio finale per la generazione del dominio tridimensionale consiste nell'estensione, lungo l'asse z , della superficie bidimensionale precedentemente descritta. In assenza di raccordi, svergolamenti e rastremazioni, il processo si riduce ad una semplice estrusione lungo l'asse z la cui scelta della lunghezza deve tenere conto di due aspetti fondamentali: il primo è legato al costo computazionale della simulazione, che impone una non eccessiva estensione del dominio, al fine di non aumentare inutilmente

i tempi della simulazione, mentre il secondo è relativo ai fenomeni fluidodinamici che si vogliono cogliere, per cui è richiesto un dominio sufficientemente grande lungo l'asse della pala, così da cogliere sia gli effetti dell'interazione del flusso con la parete di fondo, che si risolvono in un'altezza relativamente piccola del dominio, sia le caratteristiche aerodinamiche bidimensionali del profilo alare, lontano dalle estremità della pala (idealmente si dovrebbe disporre di una pala di estensione infinita). Per tali ragioni è stata effettuata un'estrusione di 18.47mm , pari a $1.5c_x$, ossia circa il 43% dell'altezza totale della pala, in figura 4.4 si riporta il dominio così ottenuto.

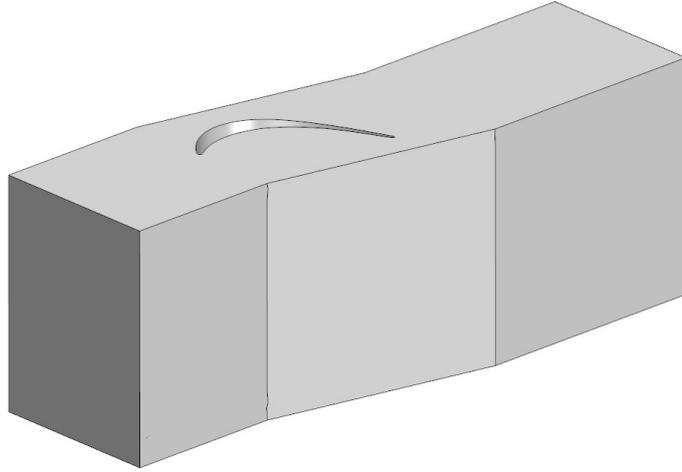


Figura 4.4: Dominio tridimensionale, ottenuto per estrusione lungo l'asse z

Le superfici che delimitano il dominio lungo l'asse z prendono il nome di Endwall e Midspan. La prima, posta inferiormente, sarà una superficie solida, corrispondente alla parete di fondo, mentre la seconda non è altro che un piano di simmetria, in modo tale che il flusso confinato nel dominio sia equivalente a quello di una paletta alta $3c_x$, delimitata da due superfici solide parallele. In figura 4.5 si riporta una panoramica delle superfici delimitanti il dominio, mentre in tabella 4.3 la loro posizione rispetto al sistema di riferimento cartesiano utilizzato.

Inlet	$x = -1.5c_x$
Outlet	$x = 2.5c_x$
Midspan	$z = 1.5c_x$
Endwall	$z = 0$

Tabella 4.3: Caratteristiche geometriche della del dominio computazionale

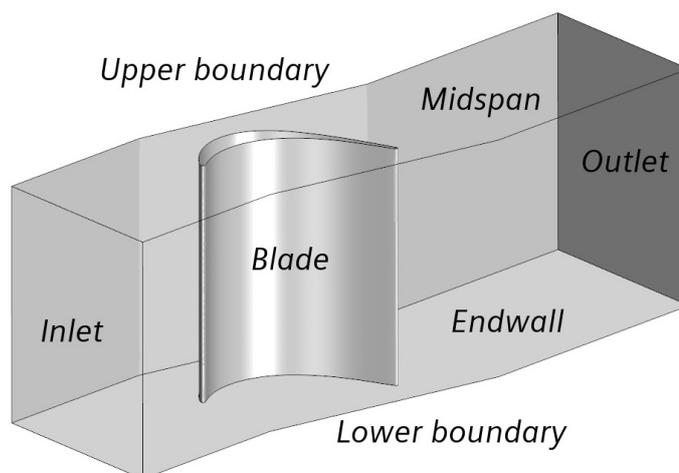


Figura 4.5: Panoramica dei contorni delimitanti il dominio tridimensionale

4.1.2 Definizione dei contorni

Un passaggio fondamentale, prima della generazione della griglia computazionale, consiste nell'assegnare correttamente le caratteristiche fluidodinamiche dei contorni che delimitano il dominio, in modo tale che la mesh sia compatibile con caratteristiche fisiche del problema.

Come è stato anticipato nel paragrafo precedente, i due segmenti corrispondenti ai contorni *Lower boundary* e *Upper boundary*, così come le omonime superfici derivate dal processo di estrusione, hanno la caratteristica di essere dei contorni periodici, e le grandezze fluidodinamiche in tali posizioni del dominio saranno ricavate dalle informazioni interne al dominio stesso.

Le superfici solide saranno invece quelle denominate *Blade* ed *Endwall*, corrispondenti rispettivamente a quella parte di pala contenuta nel dominio e alla parete di fondo in cui la paletta è incastrata.

La sezione *Midspan* ha caratteristiche simili alle superfici periodiche, essendo le sue proprietà interamente determinate dalle condizioni interne al dominio, tenendo conto della condizione di simmetria imposta in tale superficie.

Le sezioni di ingresso e uscita, infine, sono le uniche che richiedono la definizione di alcune grandezze fluidodinamiche. Nella superficie di *Inlet* la condizione imposta è quella di serbatoio (denominata *Stagnation Inlet* in STAR-CCM+), che necessita della definizione delle grandezze totali in ingresso al dominio. In tale sezione, inoltre, sarà imposta l'incidenza del flusso in arrivo alla pala. Nella superficie di *Outlet* invece saranno fornite le condizioni statiche di uscita (essa prende il nome di *Pressure Outlet* nelle impostazioni del software). Tale aspetto sarà approfondito e completato nel paragrafo 4.3, inerente alle condizioni al contorno.

4.2 Generazione della griglia computazionale

Il processo che porta alla creazione della griglia di calcolo, che prende il nome di *meshing*, risulta cruciale nella fase di pre-processing, in quanto qualità e risoluzione della discretizzazione spaziale del dominio influenzano fortemente la robustezza e la stabilità del metodo numerico, e in ultima istanza concorrono a determinare la convergenza e l'accuratezza della soluzione numerica.

Per tale ragione, non esiste un metodo per la costruzione della griglia computazionale, che dev'essere implementata in funzione della specifica geometria, del problema fisico di interesse e del metodo di discretizzazione delle equazioni di governo.

4.2.1 Il processo di *meshing*

Il processo di *meshing* operato da STAR-CCM+ si compone essenzialmente di due fasi: la discretizzazione di tutte le superfici che racchiudono il dominio geometrico, processo che prende il nome di *surface meshing*, e la successiva creazione della mesh tridimensionale, a partire dalle superfici discretizzate.

Il processo di *surface meshing* genera inizialmente elementi triangolari fortemente distorti, non adatti alla generazione di una mesh funzionale. A tal proposito, viene utilizzato un parametro, misura della qualità degli elementi triangolari prodotti, che prende il nome di *face quality*. Il manuale di STAR-CCM+ [20] definisce tale parametro come il rapporto tra il raggio della circonferenza inscritta r e quello della circonferenza circoscritta R al triangolo, moltiplicato per 2. In figura 4.6 sono illustrate queste definizioni per diversi triangoli.

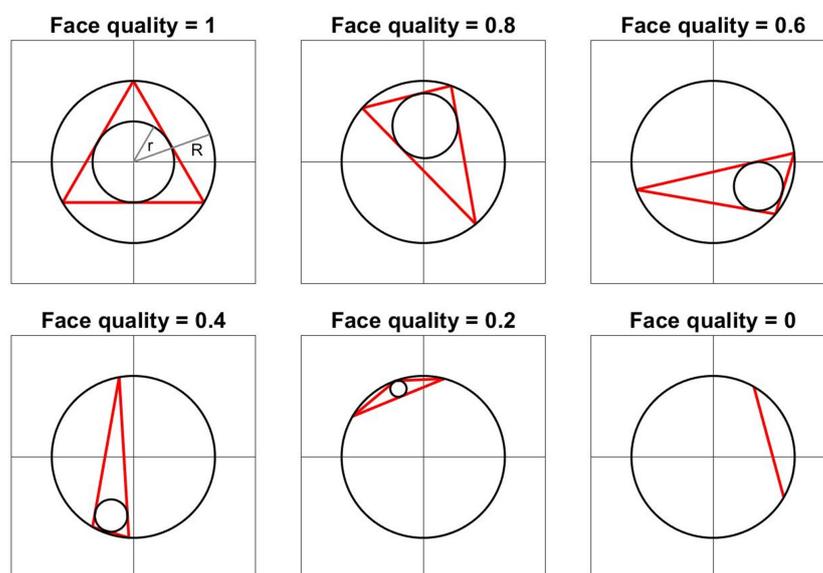


Figura 4.6: Geometria dei triangoli al variare della *face quality*

Un elemento di superficie ideale è rappresentato da un triangolo equilatero, che possiede una *face quality* pari a 1, mentre un qualunque altro triangolo possiede un valore inferiore. Tipicamente, un elemento di superficie è considerato di bassa qualità se possiede una *face quality* inferiore a 0.01. Al fine di migliorare la qualità complessiva di una superficie e ottimizzarla per il successivo *meshing* volumetrico, vengono svolti una serie di *surface remeshing*, al cui termine viene invocato il *tool automatic surface repair*, allo scopo di risolvere un range di problemi di tipo geometrico sulle superfici finali, in modo automatico.

Al termine del processo si ottiene una superficie discretizzata con elementi triangolari, complessivamente al di sopra di una certa soglia di qualità. Il passaggio successivo consiste, come preannunciato, nella costruzione della griglia tridimensionale. Sono disponibili vari tipi di geometrie per le celle, al fine di soddisfare i requisiti relativi alla geometria del dominio da discretizzare e alla tipologia di flusso da analizzare:

- celle tetraedriche;
- celle poliedriche, di forma arbitraria;
- *trimmed cell*, di forma esaedrica, opportunamente troncate ove necessario;
- *thin mesh*, celle di forma prismatica adatte a volumi sottili;
- *prism layer mesh*, prismi ortogonali alle superfici solide, utili per cogliere lo strato limite a parete.

Ciascuna geometria offre i propri vantaggi nella generazione della mesh. La scelta dipende da molti fattori, tra cui il tempo disponibile per la costruzione della mesh, l'accuratezza della soluzione e la velocità di convergenza desiderati, la quantità di memoria RAM disponibile, la qualità della mesh di superficie di partenza (poiché facce di bassa qualità portano a celle volumetriche di scarsa qualità o non valide), particolari geometrie del dominio e fenomeni fluidodinamici da cogliere.

Anche nel caso delle celle tridimensionali esistono dei parametri che ne determinano la qualità, in particolare per quanto concerne la capacità di valutare correttamente i flussi diffusivi e convettivi. Risultano di particolare rilevanza la *face validity*, misura della concavità della cella, in quanto si vuole che le normali alle superfici della cella abbiano direzione opposta al suo centroide, la *cell quality*, misura dell'orientamento relativo delle facce, in modo simile alla *face quality*, il tasso di variazione di volume tra celle adiacenti e l'ortogonalità della mesh, misurata attraverso l'angolo tra il segmento congiungente i centroidi di due celle adiacenti e la normale alla superficie in comune. In figura 4.7 queste proprietà sono mostrate graficamente.

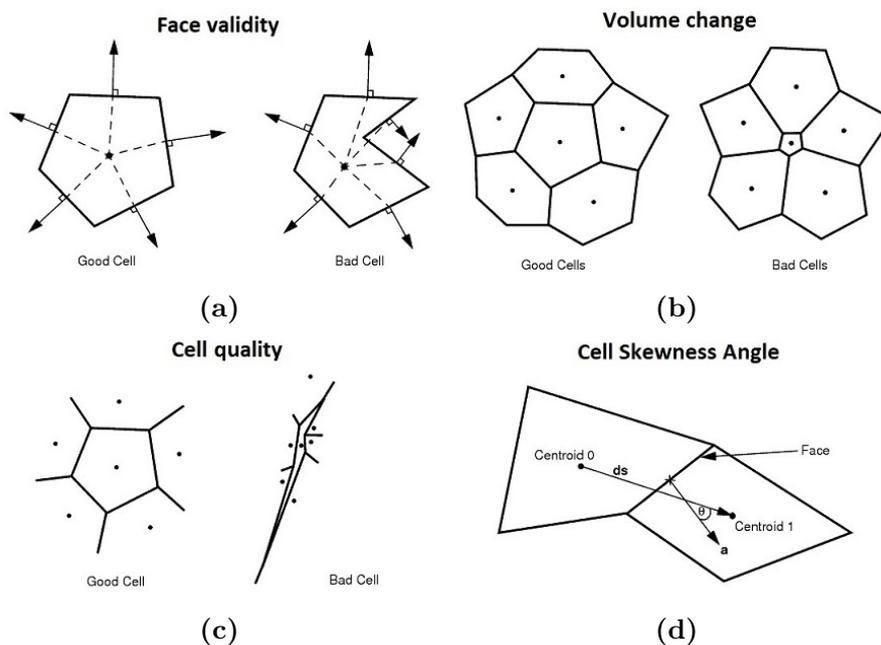


Figura 4.7: Descrizione dei parametri di qualità delle celle tridimensionali: nelle figure (a), (b) e (c) sono mostrati esempi di celle di alta qualità, idonee per l'analisi computazionale, e di bassa qualità, che necessitano di essere riparate, secondo ciascun parametro di riferimento. In figura (d) viene individuato l'angolo tra il segmento congiungente i centroidi di due celle adiacenti e la normale alla superficie in comune, denominato *Cell Skewness Angle* e indicato con θ

Tali parametri sono utilizzati, come nel caso del *surface meshing*, per avviare più cicli di ottimizzazione e impostare una soglia di qualità che la mesh finale deve soddisfare.

Infine, risulta di particolare rilevanza durante processo di definizione della griglia computazionale l'utilizzo di vari controlli personalizzati, che possono essere applicati localmente per raffinare la mesh o migliorarne la qualità nei punti più critici. Tali controlli possono essere applicati a spigoli, superfici o volumi.

Nei paragrafi che seguono verranno descritte e giustificate le scelte di *meshing* relative al problema oggetto di questa tesi.

4.2.2 Dimensionamento della mesh: valutazione dell'unità di parete

La scelta della dimensione delle celle è cruciale al fine di una buona simulazione numerica, sia in termini qualitativi della soluzione finale che di costo computazionale: una discretizzazione spaziale effettuata tramite elementi di piccole dimensioni permette di cogliere efficacemente le caratteristiche fluidodinamiche del problema e, contenendo i gradienti tra celle adiacenti, assicura un'alta convergenza e accuratezza dello schema

numerico, ma di contro implica una enorme quantità di volumi, che appesantiscono la simulazione, aumentandone enormemente il costo computazionale. Di contro, una griglia più grossolana, con celle di dimensioni maggiori, porta a una simulazione più veloce e spesso a una velocità di convergenza maggiore, ma risulta in una minore qualità in termini di accuratezza.

Tutte queste considerazioni, tuttavia, sono subordinate ad una scelta fisicamente coerente al problema fluidodinamico, caratterizzato dalle scale spaziali che si vogliono cogliere, a loro volta determinate dai gradienti spaziali che caratterizzano le grandezze fluidodinamiche. Nel caso oggetto di analisi è possibile ricavare una dimensione caratteristica studiando lo strato limite interno turbolento.

Lo strato interno è quella regione dello strato limite più vicino alla parete, in cui risulta una buona approssimazione supporre che lo sforzo di taglio totale si mantenga costante e pari allo sforzo a parete:

$$\tau_{ij} = \mu \frac{\partial u_i}{\partial j} - \rho \overline{u'_i u'_j} \approx \tau_{w,i} \quad (4.6)$$

Questa equazione deriva dalle leggi di bilancio mediate alla Reynolds, opportunamente approssimate per lo strato limite. In questo caso j identifica la direzione normale alla parete, il primo termine individua lo sforzo d'attrito viscoso, mentre il secondo termine è lo sforzo di Reynolds, come descritto nel paragrafo 2.3.

Allontanandosi dalla parete, la distribuzione della velocità nello strato interno risulta indipendente dalle condizioni esterne da cui si sviluppa lo strato limite, come il suo spessore e la velocità esterna U_e . Ne segue che il profilo di velocità è completamente determinato dalle caratteristiche del fluido (μ e ρ) e dallo sforzo di taglio a parete τ_w : $U = U(y, \rho, \mu, \tau_w)$.

Dall'analisi dimensionale si può dedurre che le quantità formano due gruppi di variabili indipendenti:

$$U^+ = \frac{U}{u_\tau} \quad y^+ = \frac{y \cdot u_\tau}{\nu} \quad \left(u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \right) \quad (4.7)$$

Che adimensionalizzano rispettivamente la velocità e la distanza dalla parete e prendono il nome di variabili interne. Nella regione vicina alla parete, il profilo di velocità può dunque essere scritto nella forma:

$$U^+ = f(y^+) \quad (4.8)$$

Che prende il nome di legge della parete. Tale legge ha carattere universale: le caratteristiche del flusso, a una data distanza dalla parete y^+ , saranno qualitativamente equivalenti. Risulta quindi conveniente, al fine di scalare la mesh, valutare la distanza corrispondente ad una unità di parete. Facendo riferimento all'equazione 4.7 risulta:

$$y_{y^+=1} = \frac{1 \cdot \nu}{u_\tau} = \frac{\mu}{\rho} \sqrt{\frac{\rho}{\tau_w}} = \sqrt{\frac{\mu^2}{\rho \cdot \tau_w}} \quad (4.9)$$

I parametri necessari alla determinazione dell'unità di parete possono essere stimati preliminarmente, facendo riferimento alle condizioni isentropiche d'uscita. Nel dettaglio, lo sforzo di attrito a parete τ_w può essere valutato stimando il relativo coefficiente, per cui vale la seguente formula [21]:

$$\sqrt{\frac{2}{C_f}} = \frac{1}{k} \log \left(Re \sqrt{\frac{C_f}{2}} \right) + C - \frac{1}{k} \quad (4.10)$$

che prende il nome di *Prandtl's smooth flow formula* ed è basata sulla legge di parete che descrive lo strato limite nella regione logaritmica ($30 \div 50 < y^+ < 300 \div 1000$). I coefficienti $C = 5$ e $k = 0.41$ sono chiamati rispettivamente costante di Coles e di Von Karman, di derivazione empirica. Sostituendo il valore del Reynolds isentropico d'uscita nell'equazione 4.10 risulta, tramite un processo iterativo di risoluzione dell'equazione:

$$C_f = 4.3 \cdot 10^{-3}$$

Dalla definizione del coefficiente di attrito a parete si può ricavare lo sforzo di attrito risultante:

$$\tau_w = \frac{1}{2} \rho_{2, is} V_{2, is}^2 C_f = 43.13 Pa$$

con il quale è possibile valutare la lunghezza corrispondente ad una unità di parete:

$$y_{y^+=1} = \sqrt{\frac{\mu_{2, is}^2}{\rho_{2, is} \cdot \tau_w}} = 2.654 \cdot 10^{-6} m$$

Nel paragrafo 4.1 sono state introdotte le grandezze isentropiche d'uscita $\rho_{2, is}$, $V_{2, is}$ e $\mu_{2, is}$, i cui valori verranno esplicitati nei capitoli successivi.

4.2.3 Scelta della geometria e dei parametri di *meshing*

Alla luce di quanto detto finora, risulta necessario operare una scelta relativa alla geometria delle celle che comporranno la griglia computazionale, al loro dimensionamento, sfruttando l'unità di parete, e a quali controlli utilizzare per regolare la griglia localmente.

Nel caso del problema in esame, la scelta si riduce a celle di forma tetraedrica o poliedrica per gran parte del dominio di calcolo, in quanto adatte a cogliere le caratteristiche di flussi tridimensionali.

Gli elementi tetraedrici consentono una generazione della griglia più veloce e leggera, in termini di risorse utilizzate, in quanto richiede semplicemente l'inserimento di vertici interni al dominio, a partire dalla mesh di superficie, secondo il metodo di triangolazione di Delaunay [22]. Le celle poliedriche, invece, richiedono uno step successivo: infatti, a partire dalla mesh tetraedrica, vengono calcolati i centroidi di ciascun tetraedro e dei triangoli che formano la *surface mesh*, che in seguito vengono collegati, dall'esterno del dominio verso l'interno, formando poliedri (di 14 facce in media) secondo lo schema mostrato in figura 4.8, in un caso bidimensionale.

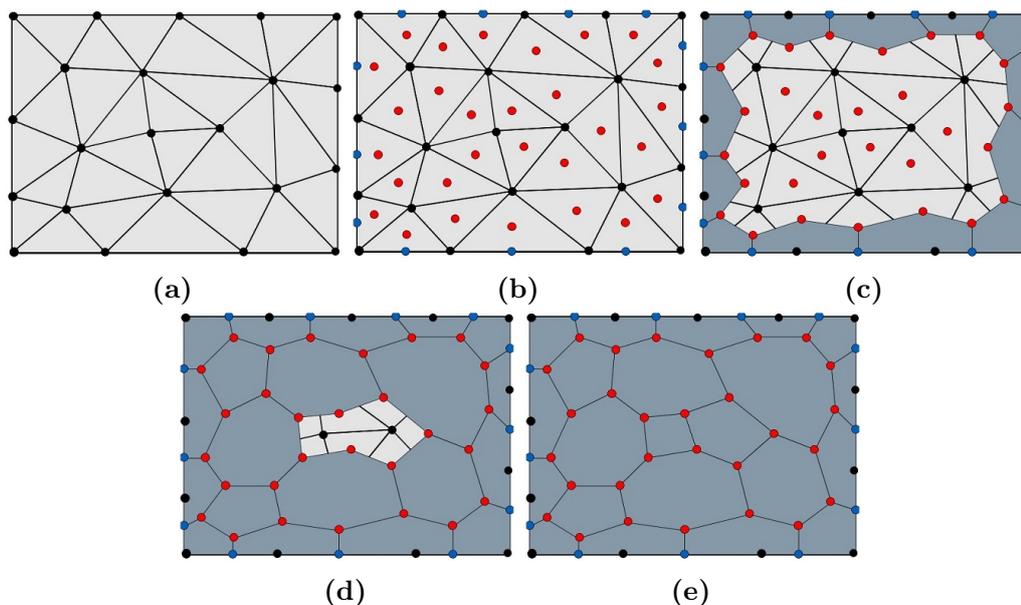


Figura 4.8: Processo di costruzione delle celle prismatiche: partendo da una mesh tetraedrica (a), vengono individuati i centroidi di ciascuna cella, in rosso, e delle facce che compongono i contorni, in blu (b). Si procede poi iterativamente dal contrno (c) verso l'interno (d) andando a congiungere ciascun centroide con quello adiacente, fino a formare una poligonale chiusa (e), rappresentativa della cella prismatica

Tale processo, seppur più dispendioso, genera tuttavia dalle 5 alle 8 volte meno celle rispetto alla mesh tetraedrica, con un conseguente risparmio in termini di memoria, di costo computazionale e di tempi di convergenza durante la fase di simulazione, che devono essere presi in considerazione contro eventuali aumenti di tempi e costi durante il processo di *meshing*.

In termini di accuratezza generale, a parità di numero di celle, quelle poliedriche producono soluzioni più accurate rispetto alle tetraedriche. Tuttavia, con l'infittirsi della mesh, le soluzioni tendono ad essere indipendenti dalla geometria della cella. Infine, in termini di qualità, entrambe le geometrie dipendono direttamente dalla qualità della mesh di superficie di partenza anche se, per domini complessi, la qualità

complessiva delle celle poliedriche può risentirne maggiormente rispetto a quelle tetraedriche, a parità di *face quality*.

Sulla base delle caratteristiche di ciascuna geometria per la mesh volumetrica, si è optato per una mesh poliedrica, in quanto interessati al raggiungimento di risultati quanto più accurati e in tempi relativamente brevi, anche a discapito di un aumento del costo computazionale per la generazione della griglia che, almeno in una fase preliminare, non avrà un grande numero di celle computazionali. Per tale ragione è necessario costruire un'ottima mesh di superficie, che possa dar luogo a elementi di volume di buona qualità. Risulta dunque cruciale dimensionare adeguatamente la mesh, fornendo alcuni parametri che definiscono sia globalmente che localmente le dimensioni target, minime e massime della mesh di superficie e della successiva mesh di volume. Tali parametri sono:

Base Size, che corrisponde a una dimensione caratteristica del modello, valore di riferimento per la definizione degli altri parametri. In generale, risulta conveniente impostare una dimensione utile per ridimensionare gli altri valori;

Target Surface Size. Questo valore specifica la lunghezza dei lati degli elementi di superficie a cui tende il *mesher* in assenza di qualsiasi affinamento. Una sua riduzione genera una mesh di superficie più raffinata e dettagliata, ma aumenta il numero di celle finali e di conseguenza il tempo computazionale;

Minimum Surface Size, limite inferiore della lunghezza dei lati degli elementi di superficie. La riduzione della dimensione minima delle celle bidimensionali consente una maggiore rifinitura nelle regioni in cui è richiesto un maggior dettaglio, a discapito di un inevitabile maggior tempo computazionale;

Surface Growth Rate, controllo che determina la velocità con cui le dimensioni di facce adiacenti variano attraverso le superfici, in presenza di zone maggiormente affinate rispetto al resto della mesh di superficie;

Maximum Tet Size, limite massimo consentito della dimensione delle celle volumetriche nel dominio. Per una mesh poliedrica, questo valore viene applicato agli spigoli della mesh tetraedrica generata inizialmente dal *mesher* poliedrico, influenzando dunque indirettamente la costruzione dei poliedri;

Volume Growth Rate, controllo sulla velocità a cui il volume degli elementi di mesh adiacenti varia tra la superficie del dominio e il *core* e tra zone a diverso affinamento.

Le celle poliedriche risultano valide per la maggior parte del volume computazionale. Tuttavia, in prossimità delle superfici solide (*blade* e *endwall*) non sono adeguate a risolvere correttamente lo strato limite a parete. Per tale ragione risulta conveniente inserire un *prism layer*. Si tratta di celle di forma prismatica ortogonali alla superficie, disposte in strati (*layers*) di spessore crescente, secondo una progressione geometrica.

Una configurazione tale consente di cogliere opportunamente i gradienti di velocità in prossimità delle pareti, ma anche di ridurre il numero globale di celle prodotte in quanto, a parità di risoluzione spaziale voluta, le celle poliedriche dovrebbero avere in media un volume minore. Quest'ultimo aspetto è visibile in figura 4.9.

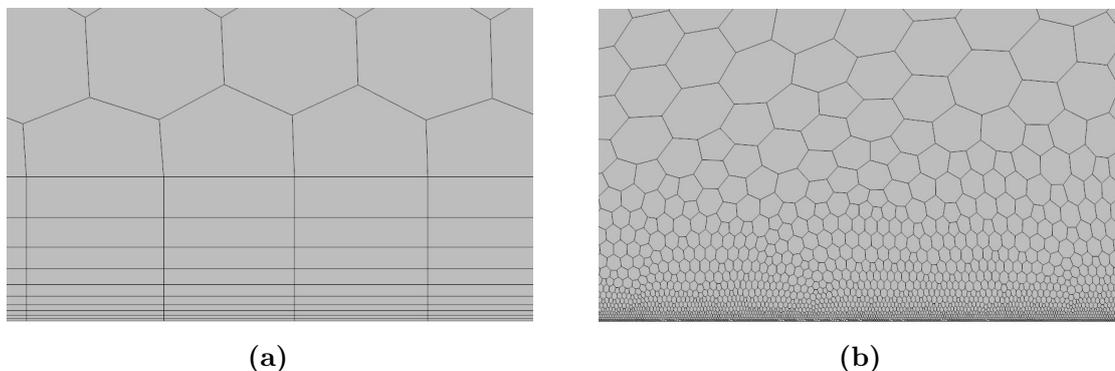


Figura 4.9: Confronto tra una mesh ottenuta utilizzando solo celle poliedriche (a) e facendo uso del *prism layer* in prossimità della parete (b), a parità di risoluzione spaziale

I parametri che controllano la costruzione del *prism layer* sono:

Number of Prism Layers, parametro che controlla il numero di strati di celle prismatiche generati all'interno sulla superficie solida;

Prism Layer Near Wall Thickness, l'altezza del primo strato di celle prismatiche prodotte, nell'immediata prossimità della superficie solida. Tale strato prende il nome di *near wall layer*;

Prism Layer Total Thickness, ossia l'altezza cumulativa dei *layer* prodotti.

A completare la caratterizzazione della mesh intervengono dei controlli locali che definiscono la costruzione della mesh di superficie su specifici contorni, che andranno successivamente ad influenzare la mesh volumetrica finale, oppure agendo direttamente sulle celle tridimensionali. Le prime tipologie di controllo sono essenzialmente variazioni locali dei parametri definiti globalmente, ad esempio raffinando la mesh laddove risulta necessario o modificando i parametri del *prism layer* su particolari superfici solide. Nel secondo caso rientrano principalmente controlli sulla *tet size* e sulla velocità di accrescimento del volume delle celle. Un controllo di superficie di particolare importanza in questo contesto è l'affinamento di scia (*wake Refinement*), che produce celle di minor volume a valle del corpo selezionato. Tale controllo risulta utile in quanto le strutture turbolente, generate dall'interazione del flusso con la schiera di pale e l'*endwall*, si sviluppano e interagiscono tra loro nella regione di valle, per cui è auspicabile avere in tale parte di volume una mesh più fine. I parametri di tale controllo sono:

Distance, la distanza per cui la scia si estende dalla superficie selezionata;

Direction, ossia la direzione verso cui la scia si sviluppa dalla superficie;

Spread Angle, l'angolo entro cui si allarga l'affinamento della scia, rispetto alla direzione specificata;

Isotropic Size, che consente di definire il limite superiore della dimensione delle celle nella zona di scia;

Growth Rate, per controllare la velocità di accrescimento delle celle attraverso il volume della scia, a partire dalla superficie che l'ha generata. Quando la dimensione della cella raggiunge quella massima specificata dall'*isotropic size* gli elementi posti a valle avranno volume costante.

Come spiegato nel paragrafo 4.2.2, la scala di riferimento, caratteristica dei fenomeni fluidodinamici tipici dello strato limite turbolento, è la lunghezza corrispondente ad una unità di parete $y_{y^+=1}$, ricavata tramite l'equazione 4.9. Risulta dunque auspicabile utilizzare tale valore come *base size*, attraverso il quale ricavare gli altri parametri di *meshing*, che saranno dunque espressi come multipli dell'unità di parete.

Per poter ricavare gli altri parametri, a partire dalla dimensione di base, risulta di fondamentale importanza considerare la struttura dello strato limite turbolento, che convenzionalmente si sviluppa per una distanza da parete pari a δ , valore proporzionale al numero di Reynolds. Esso si compone di 2 zone: una più interna, che si sviluppa da parete fino a circa 0.2δ e in cui è valida l'approssimazione dettata dalla legge della parete, denominata *inner layer*, e una esterna, che prende il nome di *outer layer* o regione di scia. A sua volta, l'*inner layer* si suddivide in una regione contenuta nell'immediata prossimità della parete, nel quale lo sforzo viscoso domina su quello di Reynolds e che prende il nome di *viscous sublayer*, la già citata regione logaritmica (*log layer*), in cui lo sforzo di Reynolds è preponderante, ed una zona di raccordo tra queste due regioni, che prende il nome di *buffer layer*. Una rappresentazione dello strato limite turbolento è visualizzata in figura 4.10.

In genere, il sottostrato viscoso termina ad una distanza dalla parete pari a $y^+ \approx 5$, la regione di raccordo si estende entro $30 \div 50$ unità di parete, mentre lo strato logaritmico ha un'estensione che dipende dal numero di Reynolds e dal gradiente di pressione normale la parete. In linea di massima, il limite superiore dell'*inner layer* si colloca in un range che va da 300 a 1000 unità di parete. Tali valori, in quanto scalabili attraverso il parametro adimensionale y^+ risultano ideali per la definizione delle dimensioni caratteristiche della mesh.

In particolare, in prossimità della parete è desiderabile che la mesh abbia un'estensione verticale dell'ordine dell'unità di parete o dell'altezza del *viscous sublayer*, andando così a definire il parametro *Prism Layer Near Wall Thickness*, mentre l'altezza totale del *prism layer* può essere posta in corrispondenza del limite superiore dell'*inner layer*. Tale parametro può anche risultare utile a definire la grandezza

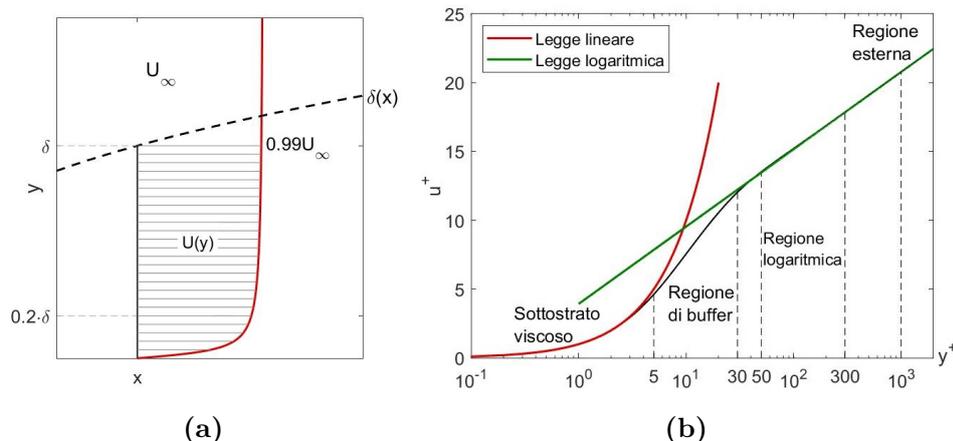


Figura 4.10: In (a) è mostrata la struttura dello strato limite, che si sviluppa entro un'altezza $\delta(x)$ dalla parete, luogo dei punti in cui la velocità tangenziale del flusso è pari al 99% del flusso esterno U_∞ . In (b) è invece mostrato nel dettaglio la distribuzione della velocità tangenziale dello strato limite interno, espressa in unità di parete, in cui sono evidenziate le regioni in cui è suddiviso

degli elementi di superficie, poiché non è necessaria una caratterizzazione raffinata per cogliere le strutture coerenti del flusso esterno, e di conseguenza anche del parametro *Maximum Tet Size*. Di contro, nella regione di scia si vuole avere una risoluzione spaziale maggiore, per cui è possibile ridurre l'*Isotropic Size* rispetto al *Target Surface Size* di un fattore pari a 2 o 3. Infine, il parametro *Minimum Surface Size*, andando a regolare la dimensione delle celle lungo le direzioni ortogonali alle pareti nei punti di maggior curvatura, deve essere sufficientemente piccolo da permettere di applicare un adeguato affinamento della griglia in prossimità della paletta, ma non eccessivamente, per non aumentare oltremisura i tempi computazionali. Un buon compromesso è rappresentato da un valore che sia multiplo dello spessore del sottostato viscoso.

Al fine di avere una valutazione completa del fenomeno, sono state adottate più configurazioni di *meshing*, ciascuna relativa ad una particolare caratterizzazione fluidodinamica della simulazione e del livello di affinamento desiderato. Tali configurazioni sono consequenziali, in quanto il risultato ottenuto tramite una mesh sarà il punto di partenza per la costruzione della mesh successiva. In particolare verranno estratti i valori dello sforzo di attrito a parete medio sulle varie superfici solide, da cui si ricaverà l'unità di parete che scalerà l'intera mesh, ossia il valore della *base size*. Le simulazioni condotte sono relative all'analisi del flusso in regime inviscido, turbolento totalmente sviluppato e in presenza di transizione da una condizione laminare. Per semplicità tali configurazioni verranno chiamate rispettivamente “**Inviscid**”, “**Turbulent**” e “**Transition**”. A queste analisi si aggiunge un'ulteriore simulazione, condotta in regime di transizione, ma con una mesh più fine, che sarà chiamato, sempre per praticità, “**Refinement**”. In totale saranno analizzate dunque 4 mesh.

La mesh relativa alla simulazione “Inviscid” è mostrata in figura 4.11. La *base size* adottata in questo caso è pari a quella stimata precedentemente a partire dalla definizione di unità di parete, e presenta un *prism layer* che si estende fino a $y^+ = 300$. Nella regione prossima la pala è auspicabile avere una risoluzione maggiore della mesh di superficie, al fine di poter approssimare più opportunamente quelle superfici dotate di maggior curvatura e ottenere di conseguenza una costruzione del *prism layer* più adeguata. Per tale ragione sono stati imposti due controlli personalizzati di superficie, uno per le superfici dorsali e ventrali della pala e un secondo, più stringente, sui bordi d’attacco e di fuga. Poiché tale griglia verrà utilizzata per effettuare simulazioni in regime non viscoso, non è necessario affinare la regione di scia. In tabella 4.4 sono esposti i parametri di *meshing* sopra descritti.

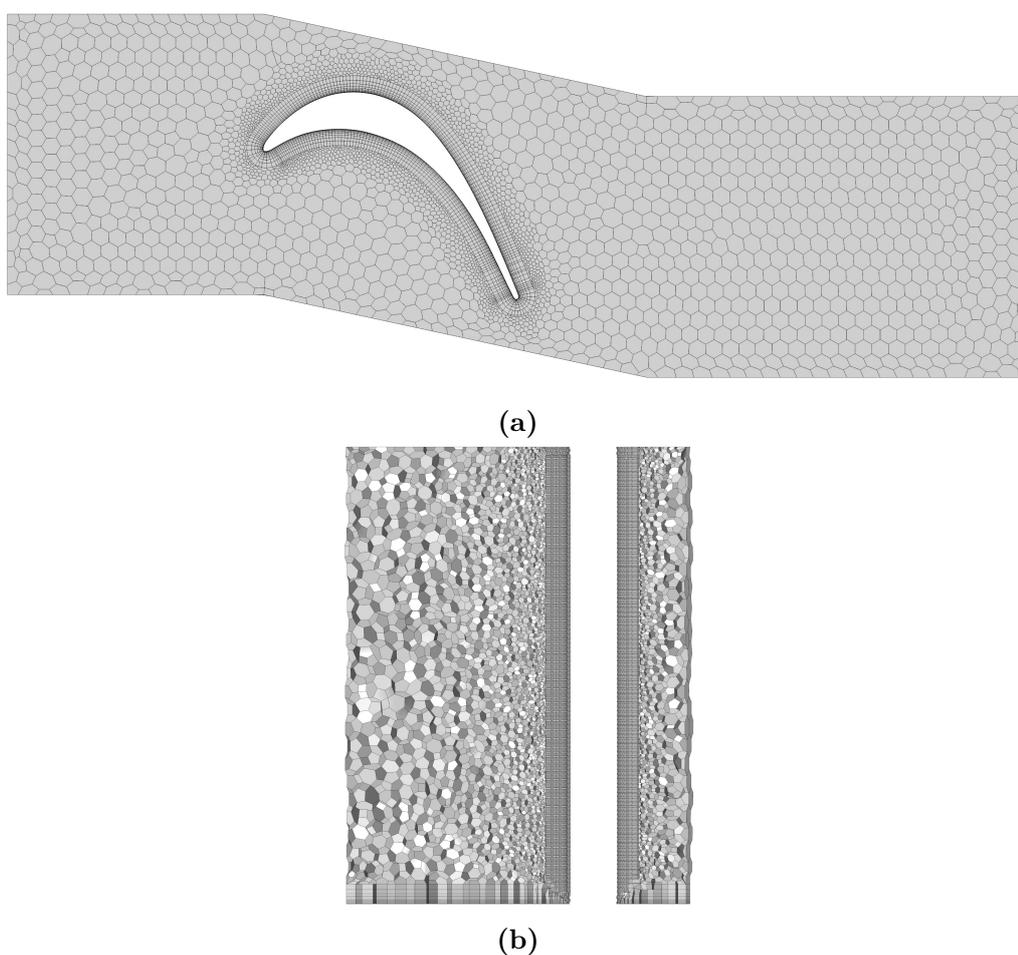


Figura 4.11: Mesh caso “Inviscid”, mostrata (a) sul piano xy e (b) in una sezione parallela al piano yz , a metà della corda assiale, in cui si può apprezzare il *prism layer* generato in prossimità di pala e parete di fondo

Parametro	Valore	y^+	[m]
<i>Base Size</i>	$2.654 \cdot 10^{-6} \text{ m}$	1	-
<i>Target Surface Size</i>	30,000%	300	$7.962 \cdot 10^{-4}$
<i>Minimum Surface Size</i>	1,000%	10	$2.654 \cdot 10^{-5}$
<i>Surface Growth Rate</i>	1.2	-	-
<i>Maximum Tet Size</i>	30,000%	300	$7.962 \cdot 10^{-4}$
<i>Volume Growth Rate</i>	1.2	-	-
<i>Number of Prism Layers</i>	10	-	-
<i>Prism Layer Near Wall Thickness</i>	$1.327 \cdot 10^{-5} \text{ m}$	5	-
<i>Prism Layer Total Thickness</i>	30,000%	300	$7.962 \cdot 10^{-4}$
Controlli di superficie sulla pala			
<i>Target Surface Size</i>	10,000%	100	$2.654 \cdot 10^{-4}$
<i>Minimum Surface Size</i>	1,000%	10	$2.654 \cdot 10^{-5}$
Controlli di superficie su bordo d'attacco e di fuga			
<i>Target Surface Size</i>	5,000%	50	$1.327 \cdot 10^{-4}$
<i>Minimum Surface Size</i>	500%	5	$1.327 \cdot 10^{-5}$

Tabella 4.4: Parametri utilizzati per la generazione della mesh nel caso "Inviscid"

Per quanto riguarda la mesh nel caso “Turbulent”, in figura 4.12, la *base size* è stata ottenuta facendo uso della stima del coefficiente d’attrito a parete ottenuto precedentemente, ma utilizzando le grandezze d’uscita ρ_2 , V_2 e μ_2 ottenute attraverso la simulazione inviscida, risultando in un valore di $y_{y^+=1}$ leggermente maggiore rispetto al caso precedente. In aggiunta, è stato infittito il *prism layer* che circonda le superfici solide, incrementando il numero di *layer* e riducendo l’altezza del primo strato di celle al di sotto di una unità di parete, coerentemente ai requisiti del modello adottato per risolvere la turbolenza, come è stato approfondito nel paragrafo 2.3.3. Infine, è stato leggermente ridotto il tasso di crescita degli elementi in superficie. Queste modifiche sono riassunte in tabella 4.5. I controlli di superficie restano i medesimi del caso “Inviscid”.

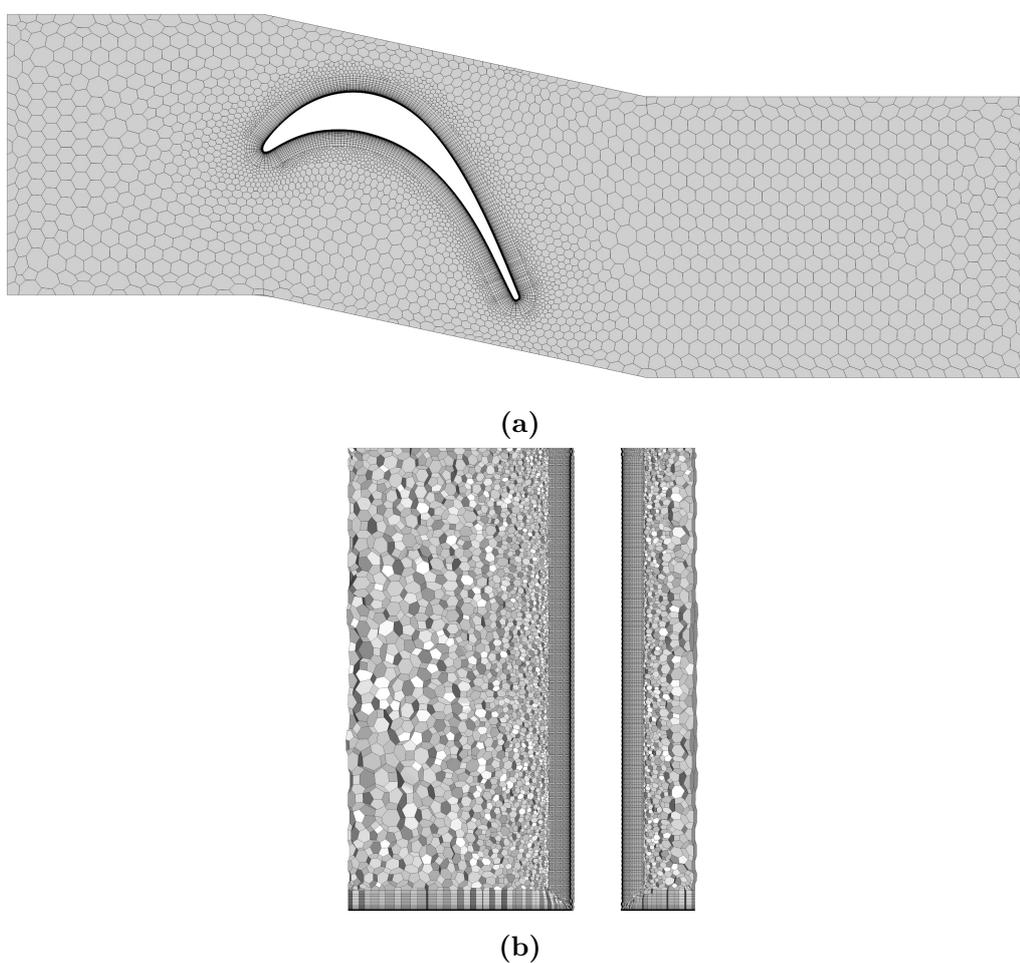


Figura 4.12: Mesh caso “Turbulent”, mostrata (a) sul piano xy e (b) in una sezione parallela al piano yz , a metà della corda assiale

Parametro	Valore	y^+	[m]
<i>Base Size</i>	$2.669 \cdot 10^{-6} \text{ m}$	1	-
<i>Target Surface Size</i>	30,000%	300	$8.007 \cdot 10^{-4}$
<i>Minimum Surface Size</i>	1,000%	10	$2.669 \cdot 10^{-5}$
<i>Surface Growth Rate</i>	1.1	-	-
<i>Maximum Tet Size</i>	30,000%	300	$8.007 \cdot 10^{-4}$
<i>Volume Growth Rate</i>	1.2	-	-
<i>Number of Prism Layers</i>	25	-	-
<i>Prism Layer Near Wall Thickness</i>	$2.135 \cdot 10^{-6} \text{ m}$	0.8	-
<i>Prism Layer Total Thickness</i>	30,000%	300	$8.007 \cdot 10^{-4}$
Controlli di superficie sulla pala			
<i>Target Surface Size</i>	10,000%	100	$2.669 \cdot 10^{-4}$
<i>Minimum Surface Size</i>	1,000%	10	$2.669 \cdot 10^{-5}$
Controlli di superficie su bordo d'attacco e di fuga			
<i>Target Surface Size</i>	5,000%	50	$1.335 \cdot 10^{-4}$
<i>Minimum Surface Size</i>	500%	5	$1.335 \cdot 10^{-5}$

Tabella 4.5: Parametri utilizzati per la generazione della mesh nel caso "Turbulent"

A partire dalla soluzione turbolenta è stata costruita la mesh del caso “Transition”, in figura 4.13: l’unità di parete è stata ottenuta a partire dalle valutazioni dello sforzo d’attrito a parete medio sulla superficie della pala e delle condizioni d’uscita del flusso, risultando in un valore leggermente inferiore rispetto ai due casi precedenti. In questa mesh sono stati introdotti sia un affinamento della regione di scia che un controllo di superficie applicato all’*endwall*: nel primo caso l’affinamento è stato ottenuto riducendo di un terzo la dimensione degli elementi di superficie nella regione a valle della pala, definendone direzione, estensione e angolo di sviluppo. La generazione delle celle tridimensionali realizzerà di conseguenza una mesh più fine nella regione di scia. Per quanto riguarda il controllo sull’*endwall* è stato ridimensionato il *prism layer*, utilizzando come unità di parete il valore ottenuto a partire dalle valutazioni dello sforzo d’attrito a parete media sulla superficie della parete di fondo. I parametri descritti sono esposti in tabella 4.6.

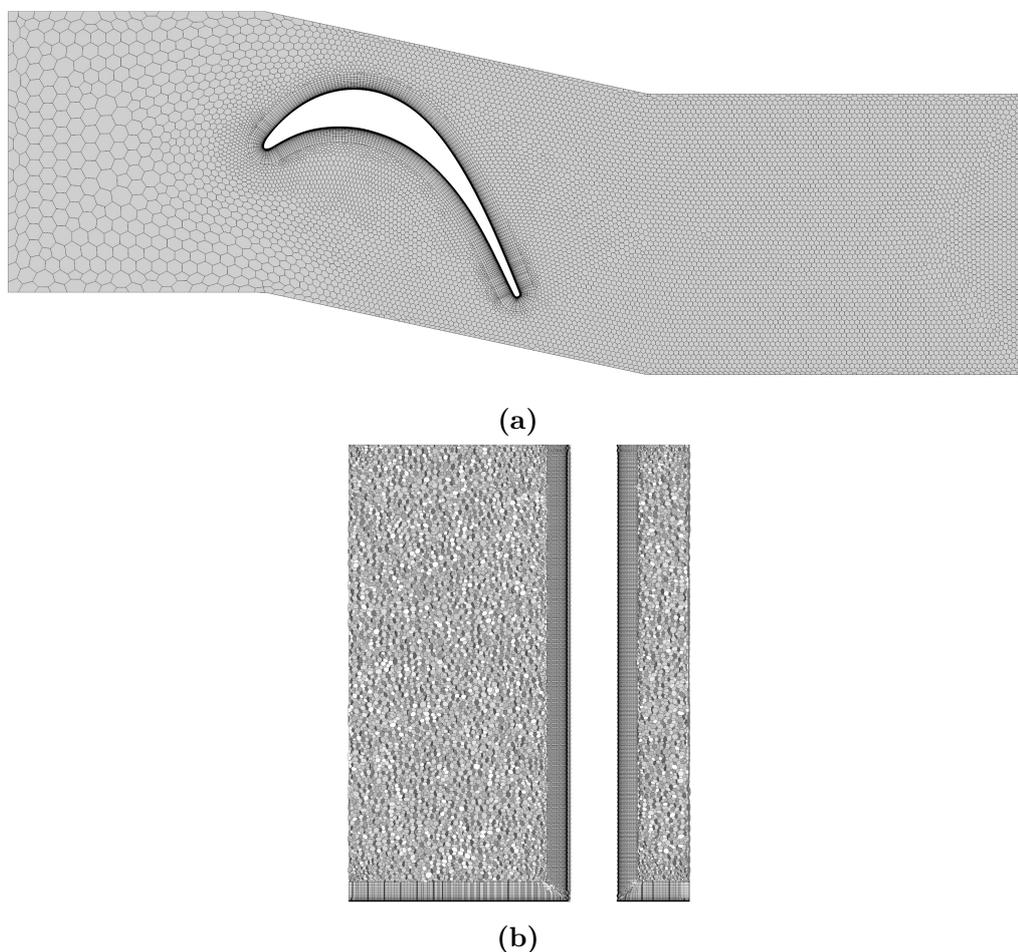


Figura 4.13: Mesh caso “Transition”, mostrata (a) sul piano xy e (b) in una sezione parallela al piano yz , a metà della corda assiale

Parametro	Valore	y^+	[m]
<i>Base Size</i>	$2.453 \cdot 10^{-6} m$	1	-
<i>Target Surface Size</i>	30,000%	300	$7.359 \cdot 10^{-4}$
<i>Minimum Surface Size</i>	1,000%	10	$2.453 \cdot 10^{-5}$
<i>Surface Growth Rate</i>	1.1	-	-
<i>Maximum Tet Size</i>	20,000%	200	$4.906 \cdot 10^{-4}$
<i>Volume Growth Rate</i>	1.2	-	-
<i>Number of Prism Layers</i>	25	-	-
<i>Prism Layer Near Wall Thickness</i>	$1.962 \cdot 10^{-6} m$	0.8	-
<i>Prism Layer Total Thickness</i>	30,000%	300	$7.359 \cdot 10^{-4}$
Raffinamento di scia			
<i>Wake Distance</i>	40 mm	-	-
<i>Wake Direction [x, y, z]</i>	[1,0,0]	-	-
<i>Wake Spread Angle</i>	50°	-	-
<i>Wake Isotropic Size</i>	10,000%	100	$2.453 \cdot 10^{-4}$
<i>Wake Growth Rate</i>	1.2	-	-
Controlli di superficie sulla pala			
<i>Target Surface Size</i>	10,000%	100	$2.453 \cdot 10^{-4}$
<i>Minimum Surface Size</i>	1,000%	10	$2.453 \cdot 10^{-5}$
Controlli di superficie su bordo d'attacco e di fuga			
<i>Target Surface Size</i>	5,000%	50	$1.227 \cdot 10^{-4}$
<i>Minimum Surface Size</i>	500%	5	$1.227 \cdot 10^{-5}$
Controlli di superficie sull'endwall			
<i>Prism Layer Near Wall Thickness</i>	$2.086 \cdot 10^{-6} m$	0.85	-
<i>Prism Layer Total Thickness</i>	31,889%	318.89	$7.822 \cdot 10^{-4}$

Tabella 4.6: Parametri utilizzati per la generazione della mesh nel caso "Transition"

Infine, la mesh del caso “Refinement”, in figura 4.14, non introduce ulteriori controlli personalizzati, ma si limita a ridurre del 50% la dimensione globale delle celle bidimensionale, oltre che ridimensionare l’unità di parete sulla base dello sforzo d’attrito a parete medio ottenuto nella simulazione “Turbulent”. Alcuni parametri tuttavia non sono stati ridotti, perché sovrascritti da controlli di superficie più stringenti, come nel caso del controllo sui bordi d’attacco e di fuga, esteso all’intera superficie della pala, o in quanto risulterebbe in un affinamento non conveniente in termini di risoluzione spaziale desiderata o complessità computazionale, come nel caso dell’altezza totale del *prism layer* che, se ridotta, risulterebbe anche in una non completa risoluzione dello strato limite interno. È inoltre stato ridotto ulteriormente lo spessore del primo strato di celle in prossimità della parete, in congruenza coi requisiti del solver, così come verrà esplicito nel paragrafo 4.4.1. Le impostazioni relative al controllo di scia e sull’*endwall* restano identiche al caso precedente, come mostrato in tabella 4.7.

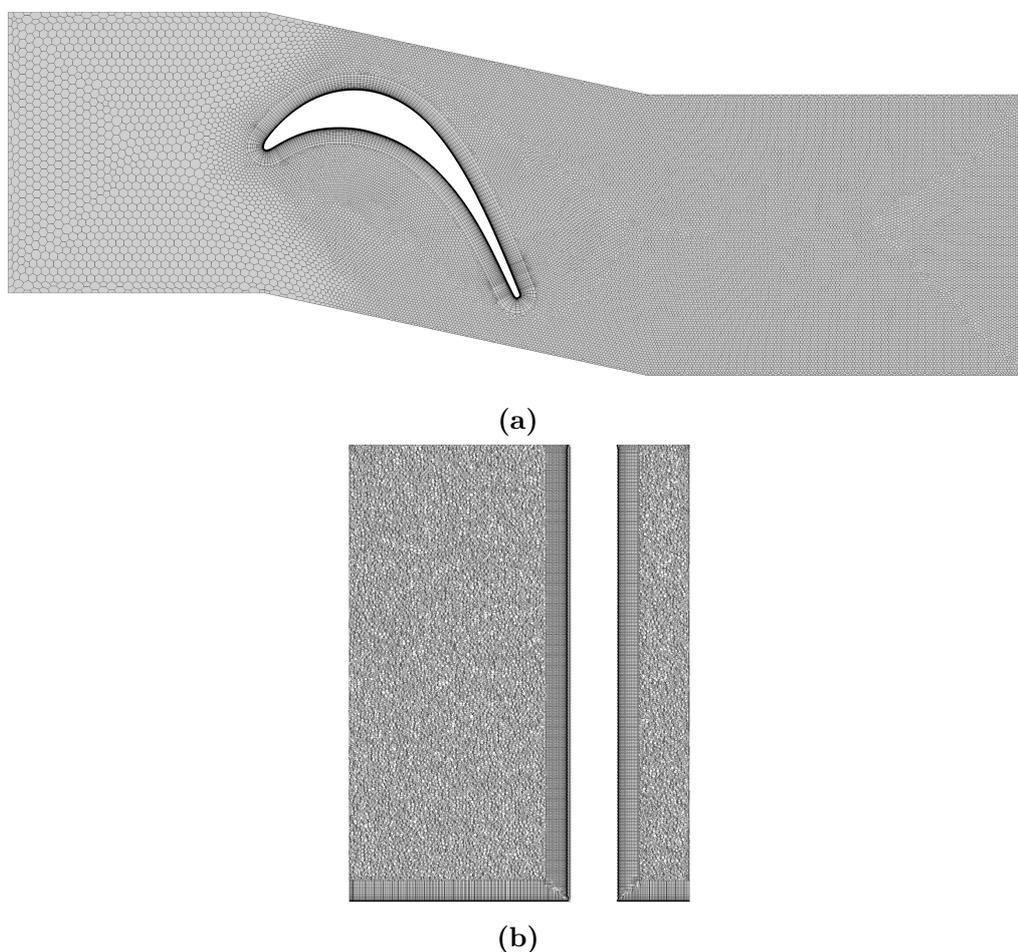


Figura 4.14: Mesh caso “Refinement”, mostrata (a) sul piano xy e (b) in una sezione parallela al piano yz , a metà della corda assiale

Parametro	Valore	y^+	[m]
<i>Base Size</i>	$2.662 \cdot 10^{-6} m$	1	-
<i>Target Surface Size</i>	15,000%	150	$3.993 \cdot 10^{-4}$
<i>Minimum Surface Size</i>	1,000%	10	$2.662 \cdot 10^{-5}$
<i>Surface Growth Rate</i>	1.1	-	-
<i>Maximum Tet Size</i>	10,000%	100	$2.662 \cdot 10^{-4}$
<i>Volume Growth Rate</i>	1.2	-	-
<i>Number of Prism Layers</i>	25	-	-
<i>Prism Layer Near Wall Thickness</i>	$1.331 \cdot 10^{-6} m$	0.5	-
<i>Prism Layer Total Thickness</i>	30,000%	300	$7.986 \cdot 10^{-4}$
Raffinamento di scia			
<i>Wake Distance</i>	40 mm	-	-
<i>Wake Direction [x, y, z]</i>	[1,0,0]	-	-
<i>Wake Spread Angle</i>	50°	-	-
<i>Wake Isotropic Size</i>	5,000%	50	$1.331 \cdot 10^{-4}$
<i>Wake Growth Rate</i>	1.2	-	-
Controlli di superficie sulla pala			
<i>Target Surface Size</i>	5,000%	50	$1.331 \cdot 10^{-4}$
<i>Minimum Surface Size</i>	500%	5	$1.331 \cdot 10^{-5}$
Controlli di superficie sull'endwall			
<i>Prism Layer Near Wall Thickness</i>	$1.397 \cdot 10^{-6} m$	0.52	-
<i>Prism Layer Total Thickness</i>	31,480%	314.8	$8.380 \cdot 10^{-4}$

Tabella 4.7: Parametri utilizzati per la generazione della mesh nel caso "Refinement"

4.2.4 Valutazione della qualità delle mesh

La valutazione della qualità delle griglie computazionali relative ai 4 casi verrà effettuata secondo i parametri qualitativi introdotti in precedenza: per la mesh di superficie si valuterà la *face quality*, mentre per la mesh volumetrica finale si considereranno i parametri *cell quality*, *face validity*, *volume change* e *skewness angle*.

Un elemento di superficie è considerato di scarsa qualità se possiede una *face quality* inferiore a 0.01. Tuttavia il processo di *surface remeshing* previene il formarsi di elementi non idonei impostando una soglia minima di qualità e effettuando un numero di cicli di ottimizzazione tale da garantirne il raggiungimento. Nei casi in esame il valore di soglia è stato impostato a 0.2, ottenuto tramite 8 cicli di ottimizzazione. Ciò nonostante, è preferibile ottenere elementi che si avvicinano ad un valore prossimo all'unità.

Per quanto riguarda le celle tridimensionali, un valore della *cell quality* inferiore a 10^{-5} indica la presenza di volumi degeneri, ossia eccessivamente distorti. Un valore relativamente basso di tale parametro non implica necessariamente la presenza di celle di bassa qualità: gli elementi che compongono il *prism layer*, ad esempio, avendo uno sviluppo planare, risultano di qualità inferiore rispetto a quelle che formano il *core* del dominio, ma tale caratteristica è voluta al fine di cogliere opportunamente lo strato limite a parete.

Il parametro *face validity* è quello che limita maggiormente la qualità globale della mesh. Un valore inferiore a 1 comporta, infatti, che alcune facce di una cella abbiano la normale diretta verso l'interno della cella, andando ad influire negativamente nella valutazione dei flussi numerici attraverso le celle adiacenti. Inoltre, un valore inferiore a 0.5 implica la presenza di volumi negativi della mesh, elementi non validi che inficiano sulla fattibilità della simulazione e che devono necessariamente essere rimossi. Una mesh di buona qualità, dunque, deve quindi possedere una *face validity* non inferiore a 1 su tutto il dominio.

Anche se la faccia di una cella ha normale uscente rispetto al centrocella, è preferibile che tale vettore sia quanto più possibile allineato al segmento congiungente i centroidi delle due celle adiacenti aventi tale faccia in comune, in modo tale da consentire la diffusione delle quantità senza che queste assumano valori illimitati. Il parametro che misura questo fenomeno, di natura puramente geometrica, è l'angolo di *skewness*, che idealmente si vorrebbe pari a 0° ovunque. Un valore inferiore a 85° è comunque accettabile, mentre un valore di 90° o superiore implicherebbe la presenza di celle concave, e di conseguenza una *face validity* inferiore a 1, con dirette conseguenze sulla convergenza dei risultati.

Infine, l'ultimo parametro per la valutazione delle celle volumetriche è il *volume change*, poiché è preferibile avere variazioni locali di volume non eccessive tra gli elementi adiacenti. Un valore superiore a 0.01 è considerato accettabile, ed è preferibile che si approssimi all'unità. Valori che si potrebbero ritenere non idonei in senso assoluto sono comunque accettabili laddove la mesh passa da una zona più raffinata al *core*, ma è possibile migliorare tale andamento consentendo una transizione tra le due zone più graduale, intervenendo sui parametri *surface growth rate* e *volume growth rate*.

Anche in questo caso è possibile impostare una soglia minima, che il mesher tenta di raggiungere invocando più cicli di *meshing*. Tale valore è stato impostato pari a 0.01.

In tabella 4.8 si può apprezzare la differente complessità delle mesh prodotte, in termini di numero di elementi di superficie e tridimensionali. Come si può notare, la variazione dei parametri di costruzione della mesh porta ad una differenza sostanziale della complessità computazionale. In tabella 4.9 è invece riportato un prospetto della qualità globale delle mesh nei termini dei parametri sopradescritti.

Caso	Elementi 2D	Elementi 3D
<i>Inviscid</i>	65,104	420,095
<i>Turbulent</i>	68,748	886,796
<i>Transition</i>	156,408	1,640,499
<i>Refinement</i>	401,600	4,722,023

Tabella 4.8: Numero di elementi di mesh prodotti per ciascun caso

Caso	Face quality	Face validity	Cell quality	Volume change	Skewness angle
<i>Inviscid</i>	0.962	1.0	0.723	0.598	19.0°
<i>Turbulent</i>	0.959	1.0	0.724	0.605	19.1°
<i>Transition</i>	0.964	1.0	0.733	0.633	18.7°
<i>Refinement</i>	0.964	1.0	0.742	0.654	18.0°

Tabella 4.9: Descrizione dei parametri di qualità medi per ciascuna mesh prodotta

Si procede dunque ad analizzare individualmente i vari casi. La griglia “Inviscid” presenta celle di superficie di *face quality* media di 0.962, segno di una mesh bidimensionale di ottima qualità, in grado di generare elementi di volume adeguati. Come si può vedere in figura 4.15, in corrispondenza dei bordi d’attacco e di fuga la *face quality* assume valori inferiori a 0.7, pari allo 0.8% della superficie totale del dominio, a causa delle forti curvature. Tali valori sono comunque ampiamente accettabili. La mesh finale contiene celle tridimensionali di *cell quality* media pari a circa 0.723, *face validity* unitario ovunque nel dominio, angolo di *skewness* medio di 19.0° e massimo di 84.1° e tasso di variazione dei volumi medio di 0.598 e minimo di 0.011. I valori medi si discostano sufficientemente dai valori di soglia, per cui la mesh si può considerare idonea all’analisi computazionale.

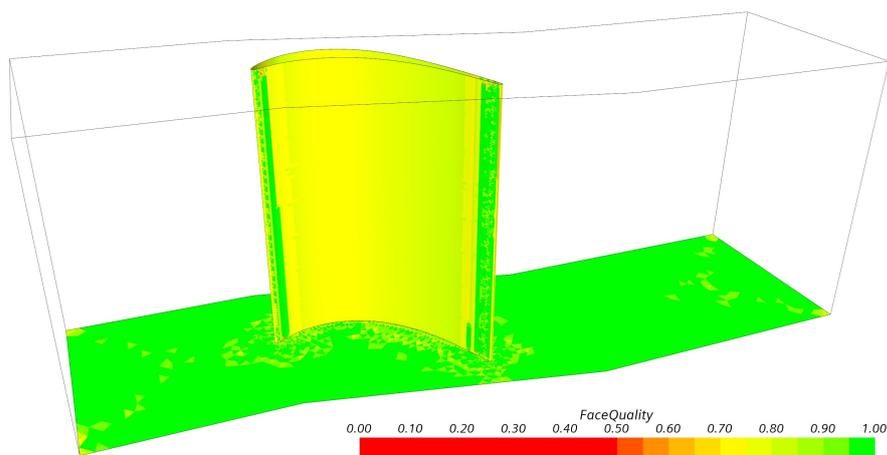


Figura 4.15: Distribuzione della *face quality* sulle superfici solide nel caso “Inviscid”

Per quanto riguarda la mesh nel caso “Turbulent”, le modifiche introdotte risultano in una mesh leggermente più raffinata rispetto alla precedente e più idonea all’analisi in regime *fully Turbulent*. L’affinamento introdotto ha portato a una qualità della mesh globalmente migliorata: anche se gli elementi di superficie possiedono in media una *face quality* leggermente minore, il valore della *cell quality* si attesta a circa 0.724. Inoltre, le celle risultano lievemente più omogenee, con un tasso di variazione medio dei volumi di circa 0.605. Lo *skewness angle* medio, infine, risulta circa uguale al caso laminare.

Le mesh nei casi “Transition” e “Refinement” vedono un netto incremento delle qualità globali, soprattutto grazie all’introduzione dei controlli sulla scia: vi è infatti un netto miglioramento sia nel tasso di crescita delle celle che nell’orientamento delle facce nel dominio. In particolare, nel caso della griglia più raffinata, anche la qualità minima degli elementi di superficie è nettamente maggiore, pari a circa 0.36 (a fronte di un valore minimo accettato dal *mesher* di 0.2), risultando in una mesh non solo più omogenea, ma soprattutto capace di generare elementi volumetrici più idonei a cogliere i vari flussi attraverso le facce.

4.3 Scelta dei modelli e delle condizioni iniziali e al contorno

Una volta definita la geometria del dominio computazionale ed assegnate le griglie di calcolo, è necessario caratterizzare dal punto di vista fluidodinamico ciascun caso d'analisi. Tali scelte verranno in seguito giustificate sulla base delle necessità legate ai vincoli computazionali, ossia il costo legato alla risoluzione delle equazioni discretizzate, e l'aderenza del modello computazionale con quello fisico.

L'impostazione dei modelli fisici viene effettuata su STAR-CCM+ tramite un certo numero di nodi, alcuni propri del problema nel suo complesso e del suo trattamento, altri specifici di ciascuna simulazione. I nodi comuni alle simulazioni sono presentati in tabella 4.10.

Aspetto fisico	Modello
Spazio	<i>Three Dimensional</i>
Materiale	<i>Gas</i>
Legge di stato	<i>Ideal Gas</i>
Valutazione dei flussi	<i>Coupled Flow/Energy</i>

Tabella 4.10: Modelli comuni a tutte le simulazioni

Il primo nodo, relativo alla modellazione dello spazio, stabilisce che il flusso ha carattere tridimensionale, ed è compatibile con una mesh le cui celle si sviluppano egualmente in tutte le direzioni. Ciò ha diverse implicazioni, tra cui la valutazione dei gradienti, dei flussi e in generale delle diverse componenti delle grandezze vettoriali, che saranno egualmente preponderanti nelle tre dimensioni.

Il secondo e terzo nodo sono invece relativi al fluido e alle sue caratteristiche. Nel dettaglio, il nodo “*Gas*” riguarda la scelta del materiale, con le sue proprietà intensive, come la massa molecolare, la viscosità dinamica, la conducibilità termica e il calore specifico, che dovranno essere definite. In particolare, il gas di riferimento è l'aria, le cui caratteristiche sono riportate in tabella 4.11. Il valore della viscosità dinamica è ricavato dall'equazione 4.4, mentre le altre proprietà sono di default. Il nodo *Ideal Gas* specifica che verrà applicata la legge di stato dei gas perfetti per valutare le grandezze di stato, in associazione con le leggi di bilancio.

L'ultimo nodo è invece stabilisce il modo in cui i flussi sono valutati al fine di risolvere le leggi di bilancio. Il modello *Coupled Flow* risolve le equazioni di conservazione di massa e quantità di moto simultaneamente. I vantaggi di questa formulazione sono la sua robustezza nel risolvere i flussi con termini sorgente dominanti e il fatto che il tempo computazionale scala linearmente con il numero di celle, in modo tale che il tasso di convergenza non diminuisca velocemente man mano che la mesh viene affinata.

Proprietà	Valore
Peso molare	28.96 $kg/kmol$
Viscosità dinamica*	$1.806 \cdot 10^{-5} Pa \cdot s$
Calore specifico	1003.62 $J/kg \cdot K$
Conducibilità termica*	0.0260305 $W/m \cdot K$
Numero di Prandtl turbolento*	0.9

Tabella 4.11: Proprietà del fluido specificate nel nodo “Gas”. Con * sono indicate quelle proprietà non specificabili nella simulazione “Inviscid”

Il modello *Coupled Energy* estende l'accoppiamento delle leggi di conservazione anche al bilancio dell'energia, utilizzando come incognita aggiuntiva l'entalpia specifica.

Di seguito verranno presentati i modelli selezionati per ciascun caso, con le relative condizioni iniziali e al contorno, sulla base dei contorni definiti nel paragrafo 4.1.2.

4.3.1 Caso ”Inviscid”

Per quanto riguarda il modello fisico relativo alla simulazione nel caso “Inviscid”, volendo usare le leggi di bilancio nella forma presentata nel paragrafo 2.2, è necessario che le equazioni siano valutate nell'assunzione di flusso stazionario e in assenza di viscosità, selezionando rispettivamente i nodi “Steady” e “Inviscid”. In tal modo è possibile derivare il campo di flusso preliminare attorno alla schiera di pale e stimare alcune grandezze utili alle analisi successive, come le condizioni statiche reali di ingresso e uscita del flusso. I modelli non necessitano di ulteriori specificazioni.

Per quanto riguarda le condizioni iniziali e al contorno, esse sono derivate dalle informazioni del flusso nella sezione d'uscita, in quanto in tale sezione sono state definite i parametri adimensionali ($M_{2,is}$ e $Re_{2,is}$), attraverso il quale ricavare le grandezze dimensionali d'uscita dopo aver arbitrariamente scelto le condizioni totali a monte (p_1^0 e T_1^0). Facendo riferimento ai passaggi esposti nel paragrafo 4.1 e ricordando che i gruppi adimensionali adottati sono:

$$M_{2,is} = 0.4 \qquad Re_{2,is} = 10^5$$

mentre i valori di pressione e temperatura totali a monte scelti sono:

$$p_1^0 = 10^5 Pa \qquad T_1^0 = 300K \qquad \rightarrow \qquad \rho_1^0 = \frac{p_1^0}{R^* \cdot T_1^0} = 1.161 \frac{kg}{m^3}$$

si ottengono i valori d'ingresso e d'uscita del flusso in tabella 4.12.

T_1^0	300	K	$p_{2,is}$	89.6	kPa
p_1^0	100	kPa	$\rho_{2,is}$	1.073	kg/m^3
ρ_1^0	1.161	kg/m^3	$\mu_{2,is}$	$1.806 \cdot 10^{-5}$	$Pa \cdot s$
$M_{2,is}$	0.4	—	$\nu_{2,is}$	$1.683 \cdot 10^{-5}$	m^2/s
$Re_{2,is}$	10^5	—	$a_{2,is}$	342	m/s
$T_{2,is}$	290.7	K	$V_{2,is}$	136.7	m/s

Tabella 4.12: Valori di stima del flusso inviscido in ingresso e uscita

La scelta delle condizioni al contorno, come specificato nel paragrafo 4.1.2, si limita alla definizione delle condizioni totali e dell'incidenza del flusso nella sezione Inlet e delle condizioni statiche nella sezione Outlet, che possono essere assimilate alle condizioni a monte (pedice 1) e a valle isentropiche (pedice 2, *is*) appena valutate. L'angolo d'incidenza del flusso d'ingresso α_{in} , è stato scelto per tutte le simulazioni pari a 32.7° , in linea con l'esperimento di Duden e Fottner [19].

Le condizioni iniziali richieste dal software prevedono la definizione, su tutto il dominio, della pressione statica, della temperatura e della velocità locale. La soluzione più semplice consiste nel porre questi valori costanti su tutto il dominio e pari ai valori d'uscita, ossia $p_{2,is}$, $T_{2,is}$ e $V_{2,is}$, quest'ultima ad un angolo d'incidenza pari a quello imposto al flusso d'ingresso α_{in} .

In tabella 4.13 sono riportate le condizioni iniziali e al contorno del flusso così descritte, in cui $p_{ref} = 50 \text{ kPa}$ è una pressione statica di riferimento che scala i valori assoluti per ridurre gli errori di *round-off* e p_{ss} è la pressione statica che il modello usa qualora in ingresso si abbia un flusso supersonico, dato che in tale condizione l'informazione arriva solo dall'esterno e non è possibile estrapolare un valore della pressione statica dal dominio. Tale grandezza è ottenuta dalla relazione isentropica per la pressione, con Mach leggermente superiore all'unità. Il valore in tabella è stato ottenuto ponendo $M = 1.02$:

$$p_{ss} = p_1^0 \left(1 + \frac{\gamma + 1}{2} 1.02^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad (4.11)$$

Condizioni iniziali	Pressione	$p_{2,is} - p_{ref}$	39.6 <i>kPa</i>
	Temperatura	$T_{2,is}$	290.7 <i>K</i>
	Velocità	$V_{2,is}$	136.7 <i>m/s</i> @ 32.7°
Condizioni al contorno Inlet	Angolo del flusso	α_{in}	32.7°
	Pressione totale	$p_1^0 - p_{ref}$	50 <i>kPa</i>
	Temperatura totale	T_1^0	300 <i>K</i>
	Pressione statica supersonica	$p_{ss} - p_{ref}$	1.6 <i>kPa</i>
Condizioni al contorno Outlet	Pressione	$p_{2,is} - p_{ref}$	39.6 <i>kPa</i>
	Temperatura	$T_{2,is}$	290.7 <i>K</i>

Tabella 4.13: Condizioni al contorno e iniziali nel caso “Inviscid”

4.3.2 Caso “Turbulent”

La simulazione della turbolenza richiede un modello specifico che vada ad integrarsi alle leggi di bilancio mediate alla Reynolds (RANS). La scelta del modello è dettata principalmente da aspetti legati all’accuratezza e stabilità della soluzione numerica, alle caratteristiche macroscopiche del flusso e al costo computazionale.

Tra i modelli di turbolenza esposti in sezione 2.3, STAR-CCM+ ne implementa 4: Spalart-Allmaras, $k - \varepsilon$, $k - \omega$ e SST (Menter) $k - \omega$.

Il modello Spalart-Allmaras rappresenta una buona scelta per le applicazioni in cui gli strati limite sono in gran parte attaccati o si verifica una lieve separazione. Tuttavia, esso non è adatto a flussi dominati da forti sforzi di taglio e gradienti di velocità, e flussi in cui si verifica un complesso ricircolo, in particolare con trasferimento di calore. In generale, i modelli a una equazione rappresentano il più basso livello di modellazione per cui la descrizione della turbolenza risulta completa, e per tale ragione il modello Spalart-Allmaras non consente di raggiungere alti livelli di descrizione del fenomeno, e dunque una buona accuratezza, in favore di un minor costo computazionale dovuto alla più semplice descrizione del fenomeno. Esso risulta dunque adatto per lo studio di flussi attorno a geometrie semplici.

Il modello $k - \varepsilon$ fornisce un buon compromesso tra robustezza, costo computazionale e accuratezza. Tra i modelli a due equazioni, questo modello è il più semplice dal punto di vista analitico, ed è virtualmente applicabile a qualsiasi flusso turbolento completamente sviluppato. Tuttavia, come esposto precedentemente, in prossimità delle pareti e in presenza di forti curvature o separazione il modello può risultare inaccurato. Ciò richiede

l'implementazione di costanti ad hoc, spesso ottenibili solo empiricamente. È possibile, tramite un processo di *trial-and-error*, adattare i coefficienti, ma entro un range limitato.

Il modello $k - \omega$ è simile al modello precedente, in quanto vengono risolte due equazioni di trasporto, ma differisce nella scelta della seconda variabile trasportata. È probabile che le differenze in termini di performance siano il risultato di piccole differenze nei modelli, piuttosto che un grado più elevato di complessità nella fisica catturata. Tuttavia, il modello $k - \omega$ risulta superiore nel caso di flussi dominati da strati limite, in particolare nel sottostrato viscoso. Ciò è dovuto soprattutto al fatto che tale modello richiede un'ottima risoluzione spaziale in prossimità delle superfici solide, nell'ordine dell'unità di parete. Il vantaggio del modello $k - \omega$ è accentuato rispetto al modello $k - \varepsilon$ in presenza di forti gradienti di pressione avversi. Ciononostante, il modello risulta particolarmente problematico da implementare per risolvere il flusso libero, risultando particolarmente sensibile alla stima ω ai contorni del dominio (in particolare in ingresso), che non può essere nullo a causa dell'ipotesi di flusso completamente sviluppato. Anche in questo caso la stima può essere ottenuta empiricamente, ma molto spesso è il risultato di numerosi tentativi *time-consuming*.

Il modello SST (Menter) $k - \omega$ unisce i vantaggi di entrambi i modelli a due equazioni: una minore sensibilità alle condizioni al contorno ($k - \varepsilon$) e una maggiore accuratezza in prossimità delle superfici solide ($k - \omega$), rappresentando il modello di turbolenza basato sul concetto di *eddy viscosity* più accurato, ma anche complesso, tra quelli disponibili per applicazioni industriali. Inoltre, questo modello allevia la mancanza di sensibilità a gradienti di pressione avversi attraverso il concetto di *Shear Stress Transport*, stimando correttamente lo sforzo di taglio, dunque prevedendo più accuratamente la separazione turbolenta.

Alla luce delle considerazioni appena esposte sulla modellazione della turbolenza si è optato per l'implementazione di quest'ultimo modello per il caso "Turbulent": il profilo di pala T106C, caratterizzato da una forte curvatura, genera inevitabilmente forti gradienti di pressione avversa sul dorso, che influenzano notevolmente il flusso di scia.

La caratterizzazione fisica del problema turbolento è completata dal cosiddetto "Wall Treatment", ossia un congruo modello che preveda il flusso in prossimità delle pareti. Nell'applicazione dei modelli di turbolenza è necessario tenere in considerazione che i forti gradienti di velocità dello strato limite sono causa di componenti di vorticità non trascurabili. Per tale ragione è necessario imporre valori specifici di turbolenza sui centroidi delle celle vicine alle superfici solide. Ciò si traduce nella scelta di un'opportuna legge per lo strato limite turbolento, nella forma dell'equazione 4.8. Facendo riferimento alla figura 4.10b del paragrafo 4.2.3, si distinguono due regioni: una interna, suddivisa a sua volta in sottostrato viscoso, la regione di *buffer* e la regione logaritmica, e una esterna, dove gli effetti della turbolenza sono preponderanti.

Per il modello di turbolenza SST (Menter) $k - \omega$ sono disponibili diversi approcci per il trattamento dello strato limite turbolento:

High- y^+ , equivalente alla legge della parete standard, utilizzando relazioni algebriche che prevedano le distribuzioni di velocità, temperatura e turbolenza attraverso il sottostrato viscoso e la regione logaritmica, al fine di fornire le condizioni al contorno nei centroidi delle celle vicine alla parete se si trovano nello strato logaritmico ($30 < y^+ < 300$);

Low- y^+ , adatto a mesh molto fini a parete ($y^+ < 1$), in cui la modellazione si limita all'ipotesi di flusso laminare negli starti più interni, maggiormente dominati dalla viscosità, risultando adatto soprattutto per bassi numeri di Reynolds;

All- y^+ , in cui il flusso è modellato per sottostrato viscoso e regione logaritmica, ma adottando un'opportuna legge di raccordo nella regione di *buffer*, tale legge è nominata "*Blended Wall Functions*", per distinguerla dalla "*Standard Wall Functions*" del modello *High- y^+* . Questo modello risulta il più accurato nel prevedere le condizioni a contorno a parete, avendo un ampio range di applicabilità.

Data l'alta risoluzione spaziale del *prism layer* in prossimità della paletta, si è scelto di operare un trattamento completo dello strato limite, in modo da avere una stima accurata delle variabili turbolente a parete. L'andamento delle funzioni a parete, per diverse grandezze, sono mostrate in figura 4.16, in cui si può apprezzare come le funzioni "*Blended*" diano previsioni più accurate rispetto alle leggi standard.

Alla luce delle considerazioni appena fatte, la simulazione turbolenta implementa i nodi "*Turbulent*", "*Reynold-Average Navier-Stokes*", "*K-Omega Turbulence*" e "*SST (Menter) k-Omega*" per quanto riguarda la scelta del modello di turbolenza, e i nodi "*Wall Distance*" e "*All y^+ Wall Treatment*" per quanto riguarda la modellazione delle leggi di parete. Inoltre, data la natura tempo-dipendente della turbolenza, si è optato per una trattazione non stazionaria delle leggi di bilancio, tramite il nodo "*Implicit Unsteady*", che risolve ciascun step temporale implicitamente, metodo più stabile della controparte esplicita, come evidenziato nel paragrafo 3.3.

A completare il modello di turbolenza sono stati attivati alcuni parametri aggiuntivi che tengono conto degli effetti della compressibilità (*Compressibility correction*) e si è imposto un limite inferiore sulla scala temporale della turbolenza, vincolando la viscosità turbolenta. Tale impostazione prende il nome di *Realizability Option*, che fa uso del *Durbin Scale Limiter*. Quest'ultima impostazione è giustificata dal fatto che è stato osservato [23] che i modelli di chiusura a due equazioni possano causare una crescita inaspettatamente grande dell'energia cinetica turbolenta nelle zone di ristagno, col rischio di perturbare la soluzione a valle.

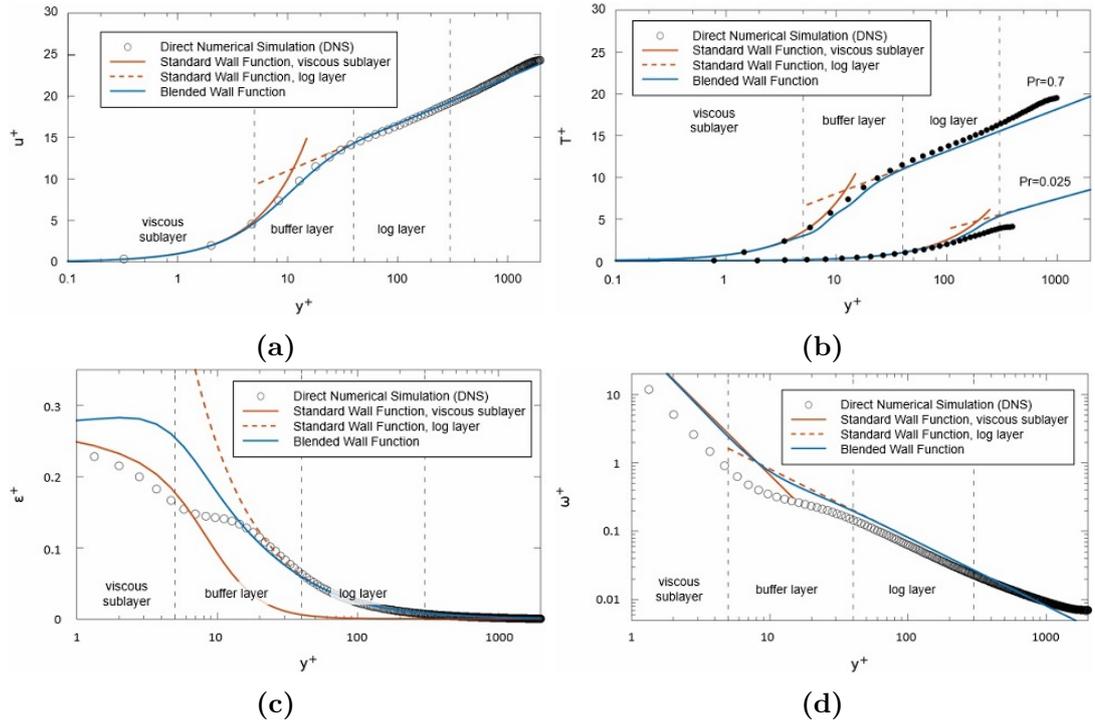


Figura 4.16: Distribuzione a parete di velocità (a), temperatura (b), tasso di dissipazione turbolenta (c) e *specific dissipation rate* (d) adimensionali, utilizzando la funzione “standard” (in rosso) e “Blended” (in blu) e confrontando le leggi con i risultati ottenuti tramite simulazione numerica diretta (DNS)

Scelti i modelli, è necessario definire le condizioni iniziali e al contorno. Per evitare l’insorgere di forti gradienti che possono ridurre stabilità e velocità di convergenza della soluzione, si è scelto di estrapolare ed utilizzare i campi di pressione, velocità e temperatura della soluzione inviscida come condizioni iniziali. Le condizioni al contorno invece non differiscono dalla simulazione inviscida, se non per la specificazione della turbolenza iniziale e ai contorni “Inlet” e “Outlet”. Il modello SST $k - \omega$ richiede di definire la turbolenza in termini di k e ω , ma è possibile caratterizzare la turbolenza tramite grandezze più facilmente stimabili, come l’intensità turbolenta $I\%$ e l’*Eddy length scale* ℓ , da cui è possibile ricavare gli altri parametri della turbolenza.

Per quanto riguarda l’intensità turbolenta, sebbene un valore rappresentativo per le macchine di geometria complessa o rotanti, come le turbomacchine, si attesti tra il 5% e il 20%, studi condotti da Halstead et al [24] suggeriscono una intensità turbolenta di *inlet* sensibilmente inferiore, tra il 3% e il 5%.

Per quanto riguarda la scala di lunghezza dei vortici, una valida stima, generalmente presente in letteratura, è rappresentata dalla relazione:

$$\ell = 0.07 \cdot D$$

in cui D è una lunghezza caratteristica del flusso. Nei casi in esame $D = c_x$. Tramite questi valori è possibile definire una scala di velocità u_τ :

$$k = \frac{3}{2} \left(V_{in} \frac{I\%}{100} \right)^2 \quad \longrightarrow \quad u_\tau = \sqrt{k} \quad (4.12)$$

attraverso cui inizializzare la simulazione. V_{in} è la velocità media nella sezione “Inlet” ottenuta dalla simulazione inviscida. In tabella 4.14 sono sintetizzate le scelte relative alle condizioni al contorno e iniziali che vanno ad integrare quelle già applicate per la simulazione inviscida. I parametri κ e E rappresentano rispettivamente la costante di Von Kármán e la costante di Coles, che caratterizzano la legge di parete per lo strato limite turbolento in corrispondenza della regione logaritmica.

Condizioni iniziali	Pressione	} Soluzione inviscida	
	Temperatura		
	Velocità		
	Intensità turbolenta	$I\%$	3%
	<i>Eddy length scale</i>	ℓ	$8.615 \cdot 10^{-4} \text{ m}$
	Scala di velocità	u_τ	2.743 m/s
Condizioni al contorno Inlet	Angolo del flusso	α_{in}	32.7°
	Pressione totale	$p_1^0 - p_{ref}$	50 kPa
	Temperatura totale	T_1^0	300 K
	Pressione statica supersonica	$p_{ss} - p_{ref}$	1.6 kPa
	Intensità turbolenta	$I\%$	3%
	<i>Eddy length scale</i>	ℓ	$8.615 \cdot 10^{-4} \text{ m}$
Condizioni al contorno Outlet	Pressione	$p_{2,is} - p_{ref}$	39.6 kPa
	Temperatura	$T_{2,is}$	290.7K
	Intensità turbolenta	$I\%$	3%
	<i>Eddy length scale</i>	ℓ	$8.615 \cdot 10^{-4} \text{ m}$
Condizioni al contorno Blade	Costante di Von Kármán	κ	0.41
	Costante di Coles	E	5

Tabella 4.14: Condizioni al contorno e iniziali nel caso “Turbulent”

4.3.3 Casi "Transition" e "Refinement"

Le ultime due simulazioni integrano, ai modelli utilizzati nella simulazione turbolenta, un ulteriore modello per la transizione. STAR-CCM+ implementa entrambi i modelli presentati nel paragrafo 2.4, entrambi compatibili con il modello SST $k - \omega$.

Il modello *Gamma Transition*, tra i metodi capaci di reale capacità predittiva della transizione, rappresenta quello più economico computazionalmente, dovendo risolvere una sola equazione di trasporto aggiuntiva. Inoltre, facendo uso di correlazioni per la variabile $Re_{\theta t}$, non richiede di definire il contorno del flusso libero. Tuttavia, il fatto che l'equazione di trasporto del *momentum-thickness Reynolds number* di transizione sia sostituita da correlazioni semi-empiriche porta inevitabilmente ad una bassa accuratezza nella predizione dell'innesco della transizione, soprattutto per geometrie complesse, e di conseguenza un possibile aumento della produzione di γ e, in ultimo, una sovrastima dell'energia cinetica turbolenta, che può ostacolare o ritardare la separazione del flusso laminare, o anticipare il riattacco del flusso turbolento.

Il modello $\gamma - Re_{\theta t}$, implementando una legge di trasporto per $Re_{\theta t}$, fornisce un approccio semi-locale per prevedere l'innesco della transizione ad uno strato limite turbolento. Per tale ragione, esso richiede un'accurata definizione del flusso esterno, attraverso cui applicare le correlazioni per la valutazione di $Re_{\theta t}$, variabile successivamente trasportata nello strato limite, nonché la corretta definizione di alcune correlazioni critiche, omesse in fase di pubblicazione. Tuttavia STAR-CCM+ implementa un set di correlazioni applicabili ad una vasta gamma di flussi. Una possibile ottimizzazione all'analisi qui presentata può dunque essere l'implementazione di un set di correlazioni che possano aderire più efficacemente alla geometria della pala e alle condizioni del flusso derivanti.

In generale, questo modello risulta essere superiore al modello *Gamma transition* nel prevedere più accuratamente il reale insorgere della transizione, dunque il fenomeno della separazione laminare e della turbolenza indotta dalla separazione. Per tale ragione verrà implementato ai casi "Transition" e "Refinement", aggiungendo ai nodi descritti per il caso "Turbulent", ancora validi, il nodo "*Gamma-ReTheta Transition*".

La delimitazione del contorno del flusso libero è effettuata definendo una funzione d'innesco, che risulti nulla all'interno dello strato limite, e unitaria nel flusso libero. Il manuale di STAR-CCM+ [25] suggerisce, in assenza di una regola generale per la definizione del flusso libero, di far uso della variabile y^+ , nell'assunzione che lo strato limite abbia ovunque spessore costante. Facendo riferimento alla valutazione dell'unità di parete per la costruzione delle mesh relative ai casi "Transition" e "Refinement" (tabelle 4.6 e 4.7) e considerando che lo strato limite interno termina a circa $1000y^+$, come visualizzato in figura 4.10b, si può porre il bordo del flusso libero a 1000 unità di parete, considerando il valore medio tra i due casi in esame:

$$y_{y^+=1,m} = \frac{y_{y^+=1,tr} + y_{y^+=1,ref}}{2} = 2.557 \cdot 10^{-6} \text{ m} \quad (4.13)$$

$$\delta = 1000 y_{y^+=1,m} = 2.557 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad (4.14)$$

Dove $y_{y^+=1,tr}$ e $y_{y^+=1,ref}$ rappresentano le unità di parete, valutate rispettivamente nella mesh "Transition" e "Refinement". Facendo uso dello spessore δ appena trovato, la funzione da implementare nel nodo è dunque la seguente:

$$\text{\$WallDistance} > 2.557E - 03?1 : 0 \quad (4.15)$$

Dove $\text{\$WallDistance}$ identifica la distanza a parete, valutata ai centocella della mesh. In figura 4.17 è mostrata la funzione applicata ad una sezione xy del dominio.

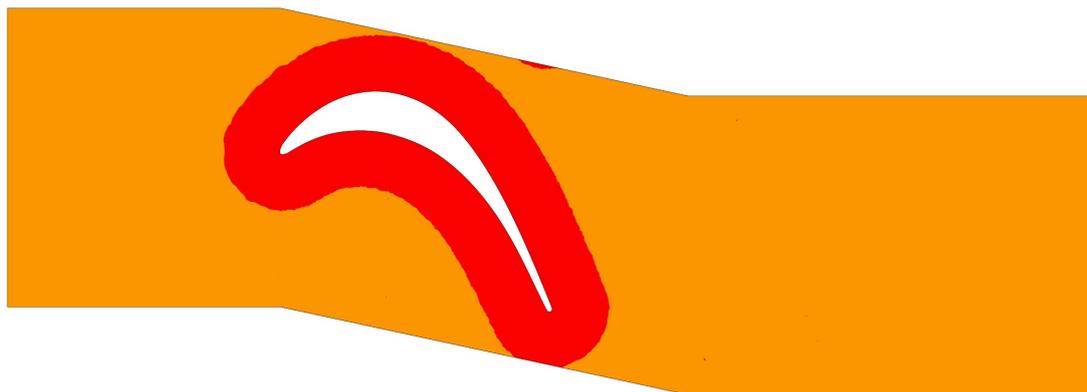


Figura 4.17: Funzione 4.15 applicata al dominio computazionale. In rosso è evidenziata l'area appartenente allo stato limite, dove la funzione ha valore nullo, mentre in arancione il flusso libero, in cui la funzione ha valore unitario

Il modello è completato dalla definizione di un valore per l'intermittenza iniziale. Menter et al [26] suggeriscono di porre $\gamma = 1$ nel flusso libero, invece di un valore molto piccolo, come nel modello originale. Ciò presenta numerosi vantaggi, specialmente nelle zone di ristagno e vicino al limite dello strato limite, dove la formulazione originale può interferire col modello di turbolenza. In tabella 4.15 sono riassunte le condizioni iniziali e al contorno dei modelli "Transition" e "Refinement". Si noti come tutti i parametri, esclusa l'intermittenza, siano gli stessi del caso "Turbulent".

	Pressione	}	Soluzione inviscida
	Temperatura		
	Velocità		
Condizioni iniziali	Intensità turbolenta	$I\%$	3%
	<i>Eddy length scale</i>	ℓ	$8.615 \cdot 10^{-4} m$
	Scala di velocità	u_τ	2.743 m/s
	Scala di velocità	γ	1.0
Condizioni al contorno Inlet	Angolo del flusso	α_{in}	32.7°
	Pressione totale	$p_1^0 - p_{ref}$	50 kPa
	Temperatura totale	T_1^0	300 K
	Pressione statica supersonica	$p_{ss} - p_{ref}$	1.6 kPa
	Intensità turbolenta	$I\%$	3%
	<i>Eddy length scale</i>	ℓ	$8.615 \cdot 10^{-4} m$
Condizioni al contorno Outlet	Pressione	$p_{2,is} - p_{ref}$	39.6 kPa
	Temperatura	$T_{2,is}$	290.7K
	Intensità turbolenta	$I\%$	3%
	<i>Eddy length scale</i>	ℓ	$8.615 \cdot 10^{-4} m$
Condizioni al contorno Blade	Costante di Von Kármán	κ	0.41
	Costante di Coles	E	5

Tabella 4.15: Condizioni al contorno e iniziali nei casi "Transition" e "Refinement"

4.4 Processing

Terminata la fase di *pre-processing*, è necessario stabilire lo schema di discretizzazione e di risoluzione delle equazioni imposte dai modelli, stabilendo le condizioni di esistenza della soluzione, opportunamente corretta dai *limiter*. Il processo risolutivo e il suo controllo è affidato ai risolutori (*solver*), attivati ad ogni iterazione o step temporale. Il processo iterativo terminerà sulla base di opportune condizioni di arresto. Tale fase, come preannunciato all'inizio del capitolo, prende il nome di *processing*.

4.4.1 Scelta e definizione dei *Solver*

Tipicamente, ciascun modello richiama i *solver* richiesti. Tuttavia, modelli diversi possono utilizzare lo stesso risolutore e talvolta richiederne più di uno, in quanto alcuni modelli possono controllarne altri. I modelli possono anche definire dei *solver* accessori. Per questo motivo, in molti casi è necessario definire opportunamente il set di *solver* attraverso il quale ottenere la soluzione ad ogni step.

Coupled flow solver

Come descritto nella sezione precedente, le equazioni di bilancio sono risolte simultaneamente, accoppiate tra di loro. I modelli *Coupled Flow/Energy* fanno dunque riferimento al risolutore *Coupled flow*. L'equazione di trasporto risolta dallo schema è:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \bar{W} dV + \oint_S (\bar{F} + \bar{G}) \cdot \bar{n} dS = \int_V \bar{H} dV \quad (4.16)$$

dove i vettori sono definiti come:

$$\bar{W} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \bar{v} \\ \rho E \end{bmatrix} \quad \bar{F} = \begin{bmatrix} \rho \bar{v} \\ \rho \bar{v} \bar{v} + p \bar{I} \\ \rho \bar{v} H + p \bar{v} \end{bmatrix} \quad \bar{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\tau} \\ \bar{\tau} \cdot \bar{v} + \bar{q} \end{bmatrix} \quad \bar{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{f} \\ \dot{\xi} + \bar{f} \cdot \bar{v} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

in cui H è l'entalpia totale, legata all'energia totale dalla seguente relazione:

$$H = h + \frac{1}{2} |\bar{v}|^2 = C_p T + \frac{1}{2} |\bar{v}|^2 = E + \frac{\rho}{p} \quad (4.18)$$

Tuttavia, a bassi numeri di Mach il sistema può risultare *stiff*, portando a problemi di convergenza, per tale ragione viene introdotta una matrice di preconditionamento $\bar{\Gamma}$ che moltiplica il termine transitorio [27]:

$$\bar{\Gamma} = \begin{bmatrix} \theta & 0 & \rho T \\ \theta \bar{v} & \rho \bar{I} & \rho T \bar{v} \\ \theta H - 1 & \rho \bar{v} & \rho T H + \rho C_p \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Il termine ρ_T è la derivata della densità rispetto alla temperatura, valutata a pressione costante, che per un gas ideale risulta pari a $-p/RT$. Il parametro θ è così definito:

$$\theta = \frac{1}{U_r} - \frac{\rho_T}{\rho C_p} \quad (4.20)$$

in cui U_r è una velocità di riferimento, necessariamente minore delle velocità locali di convezione e diffusione, affinché il sistema rimanga ben condizionato. Il suo valore è ulteriormente limitato per prevenire l'amplificazione delle perturbazioni di pressione nelle zona di stagnazione, aumentando la stabilità. U_r è dunque così determinato:

$$U_r = \min \left\{ \max \left\{ |\bar{v}|, \frac{\nu}{\Delta x}, 2\sqrt{\frac{\delta p}{\rho}}, U_{r,min} \right\}, a \right\} \quad (4.21)$$

dove Δx è la distanza tra i centrocella degli elementi di griglia coinvolti nel processo diffusivo, δp la variazione di pressione tra celle adiacenti e a la velocità locale del suono. Il sistema così ottenuto è discretizzato e approssimato nello spazio, secondo quanto descritto nei paragrafi 3.1 e 3.2, facendo uso di schemi accurati al secondo ordine:

$$V_i \bar{\Gamma}_i \frac{\partial \bar{Q}_i}{\partial t} + \sum_j [(\bar{f} + \bar{g}) \cdot \bar{n} S]_{i,j} = \bar{h}_i V_i \quad (4.22)$$

Il flusso convettivo è discretizzato tramite uno schema ROE, basato sulle differenze *upwind*. Questo schema si basa sul fatto che $\bar{f}_{i,j}$ contiene informazioni caratteristiche che si propagano attraverso il dominio con velocità e direzione definite da autovalori e autovettori del sistema. Suddividendo $\bar{f}_{i,j}$ in parti, ciascuna contenente un'informazione caratteristica, e applicando uno schema alle differenze *upwind*, coerente con la direzione di propagazione, si ottiene:

$$\bar{f}_{i,j} = \frac{\bar{f}_i + \bar{f}_{i+1}}{2} - \frac{1}{2} \bar{\Gamma}_i |\bar{A}| \Delta \bar{Q} \quad (4.23)$$

in cui $\Delta \bar{Q} = \bar{Q}_{i+1} - \bar{Q}_i$ e $\bar{A} = \bar{M} |\bar{\Lambda}| \bar{M}^{-1}$, con $\bar{\Lambda}$ la matrice diagonale degli autovalori di $\bar{f}_{i,j}$ e \bar{M} matrice modale che diagonalizza $\bar{\Gamma}_i^{-1} (\partial \bar{f} / \partial \bar{Q})$. La soluzione ricostruita come in equazione 4.23 può essere vista come una differenza centrale più una matrice di dissipazione aggiuntiva, formalmente accurata al secondo ordine. Questo termine aggiuntivo di dissipazione, combinando le dissipazioni di pressione e velocità, fornisce quell'accoppiamento tra pressione e velocità necessario per la stabilità e la convergenza di flussi fortemente subsonici.

Il termine di dissipazione viene modificato localmente per fornire una migliore dissipazione numerica in un ampio intervallo di soluzioni, da quella completamente stazionaria (Strouhal nullo) a quella fortemente instazionaria (Strouhal elevato), migliorando l'accuratezza della simulazione per flussi instabili e ottenendo una simulazione più robusta, in quanto è possibile specificare un limite alla quantità di dissipazione

numerica introdotta attraverso un fattore di preconditionamento, nullo in assenza di correzione e unitario in caso di correzione completa. Data la natura fortemente non stazionaria del problema in esame tale valore è posto pari a 0.95.

La trattazione delle equazioni di governo qui descritta è applicata a tutti i casi di studio. Le uniche differenze consistono nella forma analitica delle equazioni di trasporto da discretizzare, sulla base di quanto descritto nel capitolo 2, scegliendo l'opportuno modello ("Inviscid" per la simulazione inviscida, "Turbulent" per le altre).

Integrazione temporale

A determinare la forma analitica delle equazioni di governo intervengono anche i modelli "Steady" e "Unsteady", che determinano la presenza o meno del termine transitorio nell'equazione 4.16.

Nel primo caso, in cui rientra la simulazione del caso "Inviscid", essendo il termine transitorio omissivo, il concetto di iterazione temporale perde di significato, è non risulta necessaria alcuna integrazione nel tempo. Tuttavia, ad ogni iterazione, la soluzione marcia da uno stato iniziale, di tentativo, alla soluzione finale stazionaria utilizzando un approccio *pseudo-time-marching*, ossia trovando una soluzione stazionaria, facendo evolvere la soluzione in avanti fino a convergenza, tramite step temporali fittizi. Tale schema è implementato nel solver *Coupled Implicit*, facendo uso di uno schema di Eulero implicito. In tal modo l'equazione 4.16 diventa:

$$\left(\bar{D}_i + \sum_j \bar{S}_{j,k}\right) \Delta \bar{Q} = -\bar{R}_i^k \quad (4.24)$$

in cui:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{Q} &= \bar{Q}_i^{k+1} - \bar{Q}_i^k & \bar{D}_i &= \frac{V_i}{\Delta \tau_i} \bar{\Gamma}_i + \sum_j \bar{S}_{j,k} \\ \bar{S}_{j,k} &= \frac{\partial \bar{F}_{i,j}}{\partial \bar{Q}_{i,k}} - \frac{\partial \bar{G}_{i,j}}{\partial \bar{Q}_{i,k}} & \bar{R}_i^k &= \sum_j (\bar{F} + \bar{G})_{i,j}^k \end{aligned}$$

Ad ogni iterazione temporale fittizia la simulazione converge ad una soluzione stazionaria man mano che il vettore dei residui \bar{R} decade. Tale parametro può essere usato dunque per valutare la velocità di convergenza della soluzione, quindi la stabilità dello schema.

Nel caso del modello "Unsteady", in cui rientrano le altre simulazioni, il termine transitorio è presente ed è necessario, come esposto nel paragrafo 3.3, operare una scelta tra uno schema esplicito e uno implicito, a cui corrisponde il relativo *solver*. Essendo il fenomeno della turbolenza e del distacco di vortici tipicamente dominato da fenomeni diffusivi, l'integrazione implicita fornisce una soluzione più accurata, rispetto a quella esplicita, indicata quando le scale temporali sono dello stesso ordine di grandezza dei processi acustici (come la propagazione di un'onda d'urto).

Tramite il solver *Implicit Unsteady*, ogni step temporale fisico impiega un certo numero di *inner iteration* per far convergere la soluzione in quel dato istante, tramite l'approccio *pseudo-time-marching* precedentemente descritto (in quanto la soluzione può essere considerata stazionaria ad ogni step temporale) regolato dalla condizione CFL. L'equazione di conservazione 4.16 viene riscritta introducendo un termine transitorio preconditionato aggiuntivo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \bar{W} dV + \bar{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_V \bar{Q} dV + \oint_S (\bar{F} + \bar{G}) \cdot \bar{n} dS = \int_V H dV \quad (4.25)$$

dove Δt denota il passo temporale fisico che viene applicato uniformemente a tutte le celle, mentre $\Delta \tau$ è uno step temporale fittizio, variabile localmente. Man mano che le *inner iteration* giungono a convergenza, il secondo termine dell'equazione tende ad annullarsi secondo il seguente processo iterativo:

$$\left(\bar{\Gamma} + \frac{3}{2} \frac{\Delta \tau}{\Delta t} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{Q}} \right) \Delta \bar{Q} = \Delta \tau \left(\bar{R}^{i-1} + \frac{3\bar{W}^{i-1} - 4\bar{W}^k + \bar{W}^{k-1}}{2\Delta t} \right) \quad (4.26)$$

dove $\Delta \bar{Q} = \bar{Q}^i - \bar{Q}^{i-1}$, l'apice i identifica l'iterazione interna e k l'istante temporale (tempo fisico). Durante le iterazioni interne, \bar{W}^k e \bar{W}^{k-1} sono costanti e \bar{W}^{i-1} è calcolato da \bar{Q}^{i-1} . Quando le iterazioni interne convergono, la soluzione all'istante fisico successivo \bar{W}^{k+1} è data da $\bar{W}(\Delta \bar{Q})$. Per ogni iterazione interna, il sistema lineare è dunque risolto per $\Delta \bar{Q}$.

Il passo temporale fittizio $\Delta \tau$, associato alle iterazioni delle simulazioni stazionarie o alle *inner iteration*, è calcolato considerando la condizione di Courant-Friedrichs-Lewy e le condizioni di stabilità di Von Neumann:

$$\Delta \tau_i = \min \left\{ \frac{CFL \cdot V_i}{\lambda_{max,i}}, \frac{\Delta x_i^2}{\nu} \right\} \quad (4.27)$$

in cui CFL è il numero Courant, Δx è una lunghezza caratteristica della cella e λ_{max} è l'autovalore massimo del sistema preconditionato.

È necessario dunque impostare la dimensione fisica del passo temporale, il numero di Courant e il numero di *inner iteration* ad ogni step temporale fisico.

I fenomeni transitori generalmente governano la dimensione fisica del passo temporale, per cui è auspicabile utilizzare il tempo caratteristico dei vortici energetici:

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt[4]{\beta^* \omega}} = \frac{\ell}{u_\tau} \quad (4.28)$$

impiegando il valore di u_τ ottenuto tramite l'equazione 4.12 e la scala di lunghezza del flusso in ingresso si ottengono, per ciascun caso in esame, gli step temporali in tabella 4.16.

Caso	Δt
<i>Turbulent</i>	$3.141 \cdot 10^{-4} \text{ s}$
<i>Transition</i>	$3.170 \cdot 10^{-4} \text{ s}$
<i>Refinement</i>	$3.178 \cdot 10^{-4} \text{ s}$

Tabella 4.16: Passi temporali utilizzati per l'integrazione temporale

Il numero Courant, come spiegato precedentemente, controlla la dimensione dei degli step pseudo-temporali locali utilizzati per marciare verso la soluzione stazionaria o pseudo-stazionaria. In generale, per una simulazione stazionaria, un numero CFL maggiore produce una convergenza più rapida. Pertanto, è auspicabile utilizzare il valore di CFL più grande possibile assicurandosi comunque che il risolutore rimanga stabile. In generale, un CFL unitario è indicato per transitori con forti gradienti, mentre successivamente è possibile aumentarne il valore fino a $10^5 \div 10^6$.

Il numero di iterazioni interne per step temporale è più difficile da quantificare. In genere, si determina questo numero osservando l'effetto che una sua variazione ha sui risultati, verificando che al termine delle iterazioni interne la soluzione abbia raggiunto una buona convergenza. In genere, il numero di iterazioni interne diminuisce al diminuire di Δt , in quanto la soluzione evolve meno da un istante temporale al successivo. Esiste quindi un equilibrio ottimale tra Δt e numero di *inner iteration* per un dato problema. Dopo un processo di *trial and error* si è convenuto ad un valore ottimale di 20 iterazioni per step temporale.

Gradienti e *limiter*

Per ricostruire le variabili sulle facce delle celle, è necessario valutare i loro gradienti ai centrocella e sulle facce. Tali valori sono utilizzati anche per calcolare i gradienti secondari dei termini di diffusione, i gradienti di pressione per l'accoppiamento pressione-velocità e le velocità di deformazione media per i modelli di turbolenza. Il risolutore *Gradients* discretizza questi valori utilizzando un metodo misto Green-Gauss/minimi quadrati (G/LSQ):

$$\bar{\nabla}\phi_i = \sum_j (\phi_i - \phi_{i-1})_j \bar{w}_{i,j} \quad (4.29)$$

in cui:

$$\bar{w}_{i,j} = \beta \bar{w}_{i,j}^{LSQ} + (1 - \beta) \bar{w}_{i,j}^G \quad \bar{w}_{i,j}^{LSQ} = \left(\sum_j \frac{\bar{d}s \times \bar{d}s}{|\bar{d}s|^2} \right)^{-1} \frac{\bar{d}s}{|\bar{d}s|^2}$$

$$\bar{w}_{i,j}^G = \frac{S_{i,j} \bar{n}_{i,j}}{V_{i-1} + V_i} \quad \bar{d}s = \bar{x}_i - \bar{x}_{i-1}$$

In tali equazioni il pedice $i - 1$ si riferisce alla cella adiacente a i , che condivide con quest'ultima la faccia j . β è un fattore geometrico che determina quando viene usato il metodo di Gauss ($\beta = 0$) o il metodo LSQ ($\beta = 1$) o un metodo misto ($0 < \beta < 1$) per calcolare i gradienti. Il valore di β è unitario se il rapporto tra gli autovalori del tensore dei minimi quadrati della cella è maggiore di un valore minimo specificato, generalmente pari a 0.1. Negli altri casi, il suo valore è 1 se l'angolo di *skewness* tra due celle adiacenti è minore di un angolo massimo, 0 se l'angolo è maggiore di un angolo minimo, entrambi specificabili (rispettivamente 75° e 88° , valori di *default*). In caso contrario, il valore di β varia linearmente con l'angolo di *skewness*, tra 0 e 1.

Se si utilizzassero gradienti non limitati per la discretizzazione delle equazioni, i valori ricostruiti sulle celle possono non rispettare il criterio di limitatezza introdotto nel paragrafo 3.2.2. Per tale motivo vengono introdotti dei *limiter* che si basano sui gradienti delle celle adiacenti. Il valore ricostruito della grandezza sulla cella è:

$$\phi_{i,j} = \phi_i + (\bar{x}_{i,j} - \bar{x}_i) \cdot \overline{\nabla\phi}_i \quad (4.30)$$

Per ogni cella è richiesto dunque un valore di $\overline{\nabla\phi}$ limitato, in modo tale che la grandezza, valutata sulla faccia, sia compresa tra i valori dei centroidi adiacenti. Si definisce un fattore di scala α , rapporto il valore limitato e illimitato, e si introduce il parametro $r_{i,j}$, definito come:

$$r_{i,j} = \begin{cases} \frac{\Delta_{i,j}}{\Delta_{max}} & \text{per } \Delta_{i,j} > 0 \\ \frac{\Delta_{i,j}}{\Delta_{min}} & \text{per } \Delta_{i,j} \leq 0 \end{cases} \quad (4.31)$$

in cui:

$$\phi_i^{max} = \max\{\phi_i, \phi_{i-1}\} \longrightarrow \Delta_{max} = \phi_i^{max} - \phi_i \quad (4.32a)$$

$$\phi_i^{min} = \min\{\phi_i, \phi_{i-1}\} \longrightarrow \Delta_{min} = \phi_i^{max} - \phi_i \quad (4.32b)$$

$$\Delta_{i,j} = \phi_{i,j} - \phi_i = (\bar{x}_{i,j} - \bar{x}_i) \cdot \overline{\nabla\phi}_i \quad (4.32c)$$

in tal modo il gradiente limitato risulta essere:

$$\overline{\nabla\phi}_{i,lim} = \alpha_{i,j} \overline{\nabla\phi}_i \quad (4.33)$$

STAR-CCM+ implementa 3 diversi *limiter*:

- Venkatakrisnan [28], dove il fattore di scala è pari a:

$$\alpha_{i,j} = \frac{2r_{i,j} + 1}{r_{i,j}(2r_{i,j} + 1) + 1} \quad (4.34)$$

- Min-Mod, per cui:

$$\alpha_{i,j} = \min\{1, 1/r_{i,j}\} \quad (4.35)$$

- Venkatakrishnan modificato, dove:

$$\alpha_{i,j} = \frac{r_{i,j}(2r_{i,j} + 1) + 1}{r_{i,j}(r_{i,j}(2r_{i,j} + 1) + 1) + 1} \quad (4.36)$$

Per i casi in studio è stato utilizzato il *limiter* Venkatakrishnan, che fornisce il giusto compromesso tra accuratezza e stabilità della soluzione. Tuttavia, per evitare che quest'ultimo possa essere eccessivamente limitante per la soluzione, risultando molto dissipativo e riducendo la velocità di convergenza (soprattutto in zone del dominio in cui i gradienti sono molto piccoli), è stato applicato il *Total Variation Bounded gradient limiting* (TVB), che aggiunge alla variabile ricostruita una quantità δ , così definita:

$$\delta = \psi \cdot \max_j \{\Delta_{max} - \Delta_{min}\} \quad (4.37)$$

in cui ψ è un valore, compreso tra 0 e 1, che determina quanto i gradienti sono limitati: valori crescenti di ψ riducono l'azione dei *limiter*. Ciò può migliorare la precisione, in particolare in presenza di campi quasi uniformi. Tuttavia, valori eccessivamente grandi possono portare alla perdita di robustezza ed a una minore accuratezza. Per tale ragione è stato imposto un valore di 0.05.

***Solver* accessori**

Gli algoritmi di risoluzione iterativi convenzionali come Jacobi e Gauss-Seidel convergono in modo significativamente più lento con l'aumento della dimensione della mesh. Il costo computazionale, infatti, aumenta quadraticamente con il numero di celle computazionali. Per accelerare la convergenza della simulazione è stato attivato il solver *Algebraic Multigrid* (AMG).

Il metodo AMG si basa sul fatto che gli algoritmi iterativi classici riducono efficacemente le componenti dell'errore numerico le cui lunghezze d'onda sono dello stesso ordine di grandezza della dimensione della cella (*high-frequency errors*). Gli errori a bassa frequenza, tuttavia, vengono ridotti piuttosto lentamente con tale metodo. Lo scopo è quello di aumentare le frequenze armoniche degli errori numerici a frequenza più bassa, affinché abbiano una lunghezza d'onda dell'ordine della dimensione di griglia, aumentandone lo smorzamento.

Il processo iterativo trasferisce i residui della soluzione su griglie sempre più grossolane, derivate da combinazioni aritmetiche dei coefficienti della griglia originale. Queste iterazioni portano gli errori ad essere di frequenza più alta rispetto alla dimensione delle celle, e possono così essere ridotti in modo efficiente. La soluzione è così trasferita su griglie via via più fini, ritornando alla mesh originale. Tale *solver* è

quindi invocato ogni qual volta i residui del sistema lineare discretizzato non decadono abbastanza rapidamente o divergono.

Il metodo di generazione delle griglie grossolane può avere un impatto significativo sull'efficienza dell'algoritmo. Il risolutore fornisce due strategie, a cicli fissi e flessibili: il primo effettua il ciclo completo di trasferimento dei residui ogni qual volta il *solver* è invocato, mentre il secondo monitora i residui in modo tale che, se si riducono oltre una certa tolleranza, la soluzione si sposta a una griglia più fine, altrimenti continua a un livello più grossolano. Il secondo metodo non fa uso di tutti i livelli del ciclo completo, risultando più economico dal punto di vista computazionale, ma è limitato a sistemi lineari non *stiff*.

La tipologia di cicli invocati dal *solver* per le simulazioni in esame sono denominati *V-Cycle*, che si compongono di due fasi: tramite un processo di trasferimento dei residui verso griglie sempre più grossolane (ramo sinistro), genera dei fattori correttivi che verranno applicati a griglie sempre più fini (ramo destro) fino alla griglia originale, in un processo a "V", come mostrato in figura 4.18. Tale metodo rappresenta il più semplice tra i cicli fissi. Generalmente la griglia grossolana contiene poche celle, e a tale livello vengono eseguiti dei cicli di rilassamento della soluzione prima di ripetere il processo del ramo destro.

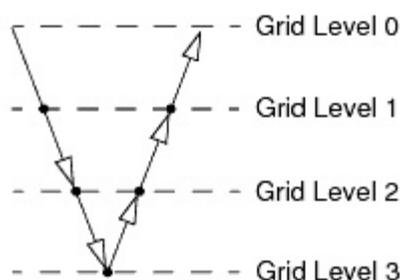


Figura 4.18: Ciclo multi-griglia "V-Cycle"

Lo schema, che è applicato ai solver impiegati nella risoluzione delle equazioni di governo (*Coupled Implicit*, *K-Omega Turbulence* e *GammaReTheta Transition*), richiede di specificare il parametro "Epsilon", valore di cutoff al di sotto del quale i residui si considerano giunti a convergenza, e "Convergence tolerance", fattore di riduzione dei residui nel caso in cui non si raggiunga il valore di cutoff. L'*AMG Linear Solver* lavora entro un numero massimo di cicli, oltre il quale il risolutore si interrompe, passando all'iterazione successiva.

Il solver può essere impiegato per valutare automaticamente il CFL ad ogni iterazione: al termine di ogni ciclo, se i criteri non venissero soddisfatti, il numero di Courant si riduce di un fattore 10, ed entro un certo numero di cicli, determinati dal parametro "Target AMG Cycles", il CFL è ulteriormente ridotto del 10%. In caso contrario il CFL aumenta con andamento esponenziale ad ogni iterazione. La

configurazione migliore dei parametri del *solver*, ottenuta a seguito di un processo di *trial and error*, è esposta nella tabella 4.17, in cui si riportano anche i parametri relativi al numero di Courant.

Parametro	Valore
<i>Max Cycles</i>	30
<i>Convergence Tolerance</i>	0.1
<i>Epsilon</i>	$2 \cdot 10^{-16}$
<i>Target AMG Cycles</i>	8
<i>Initial CFL</i>	$1 \div 50$
<i>Minimum CFL</i>	0.1
<i>Maximum CFL</i>	10^6

Tabella 4.17: Parametri del *solver* AMG. Il valore iniziale del numero di Courant è 1 nella simulazione inviscida, 50 nelle altre simulazioni

A completare il set di *solver* vi sono i risolutori *Wall distance* e *K-Omega Viscosity*, entrambi applicati al *Solver K-Omega Turbulence*. Il primo effettua, in fase di inizializzazione della simulazione, una proiezione esatta dei valori del centrocella rispetto alla parete solida più vicina, secondo lo schema *Implicit Tree*, che consiste nella triangolazione della mesh di superficie. Il valore risulta utile alla valutazione degli effetti relativi alla prossimità della parete nei flussi viscosi.

Il secondo risolutore controlla ed aggiorna la viscosità turbolenta ad ogni iterazione, in modo da evitare che la simulazione produca valori eccessivamente alti di tale parametro, riducendo l'accuratezza della soluzione. Il *solver* fa uso del seguente schema di aggiornamento:

$$\mu_T^k = \omega_\mu \mu_T^{k+1} + (1 - \omega_\mu) \mu_T^k \quad (4.38)$$

dove ω_μ è un fattore di rilassamento, pari a 0.95. Il solutore limita il rapporto μ_T/μ a 10,000.

In ultimo, un fattore di scala denominato *Explicit Relaxation* viene applicato al risolutore *Coupled Implicit* per rilassare esplicitamente tutte le correzioni del *solver* prima di aggiornare la soluzione. Questo parametro ha lo scopo di aumentare la stabilità numerica e la convergenza della soluzione, specialmente ad alti CFL o quando la linearizzazione porta a una bassa velocità di convergenza. Il valore scelto è 0.25 per i transitori, che comporta l'applicazione di una correzione del 25%, successivamente incrementato a 0.3. Questa scelta è dovuta al fatto che, durante le prime iterazioni della simulazione, è auspicabile avere uno schema più robusto, anche se lentamente

convergente, dati i forti gradienti coinvolti. In seguito è invece preferibile avere un solutore stabile, che non porti a soluzioni oscillatorie, difficilmente convergenti.

4.4.2 Condizioni di arresto e avvio delle simulazioni

A concludere il *setup* delle simulazioni è la definizione delle condizioni di arresto. Le iterazioni descritte nella sezione precedente, infatti, marcano indefinitamente nel tempo, e per tale ragione risulta necessario fissare dei criteri che arrestano la simulazione quando la soluzione risulta sufficientemente accurata. Esistono diversi criteri che possono determinare automaticamente la convergenza della soluzione.

Un primo approccio, prettamente numerico, consiste nel monitorare i residui del sistema lineare. Generalmente tali valori decrescono con andamento esponenziale ad ogni iterazione, la cui velocità è proporzionale alla velocità di convergenza della soluzione. Un problema ben strutturato in genere produce residui che tendono all'*epsilon* di macchina, limite fisico dell'hardware, corrispondente alla differenza minima tra due valori rappresentabili in *floating point*. Il monitoraggio dei residui è inoltre in grado di stabilire se la soluzione stia effettivamente convergendo e a quale velocità, potendo così stabilire la qualità del problema numerico anche nel corso delle iterazioni intermedie.

Un secondo approccio, legato alla fisica del problema, consiste nel monitorare il *total mass imbalance*, ossia lo squilibrio di massa accumulato all'interno del dominio ad ogni iterazione, definito come:

$$m_{imbalance}(k) = m_0 - m(k) + \int \dot{m}_{in} dk - \int \dot{m}_{out} dk \quad (4.39)$$

dove m_0 è la massa totale nel dominio a simulazione inizializzata, $m(k)$ è la massa totale all'iterazione k , \dot{m}_{in} il flusso di massa entrante e \dot{m}_{out} quello uscente il dominio, attraverso i suoi contorni. Tale valore tende ad annullarsi a convergenza, con andamento asintotico per le simulazioni stazionarie e oscillatorio per quelle non stazionarie. Nel caso di simulazione inizializzata con valori di tentativo questo parametro può non tendere a 0, e in tal caso si monitora solo il suo andamento ad ogni iterazione. Il sistema può dunque essere impostato in modo tale che le iterazioni vengano arrestate nel momento in cui il *total mass imbalance* assuma andamento asintotico per un numero sufficiente di iterazioni.

Altre grandezze fisiche monitorabili per stabilire l'accuratezza e la convergenza della simulazione sono i coefficienti di forza (portanza e resistenza) dei corpi immersi del flusso, che possono essere facilmente confrontati con valori tipici del problema di studio.

La simulazione così delineata è stata effettuata facendo uso delle risorse di calcolo fornite da hpc@polito, progetto di Academic Computing del Dipartimento di Automatica e Informatica presso il Politecnico di Torino (<http://www.hpc.polito.it>).

Capitolo 5

Risultati

5.1 Campi di velocità

Le figure 5.1 e 5.2 mostrano i campi di Mach valutati su una sezione xy del dominio, a distanza $z/c_x = 1$ dall'*endwall*, rispettivamente per il caso “Inviscid” e “Transition”, allo scopo di verificare l'aderenza dei risultati ottenuti con il problema fluidodinamico reale.

Lo scopo della simulazione inviscida, in tal senso, è quella di verificare che, qualitativamente, i valori del Mach in ingresso e uscita siano coerenti con il comportamento tipico di una turbina assiale. Dalla prima immagine si può ricavare che $M_{in} \approx 0.2$ e $M_{out} \approx 0.4$, per cui il flusso viene accelerato dalla schiera di pale. È da sottolineare che il risultato ottenuto da questa simulazione non è fisicamente aderente con la realtà, ma fornisce dati importanti su quei fenomeni dominati dalle forze d'inerzia e di pressione.

La simulazione del caso “Transition” ha invece lo scopo di essere quanto più coerente con il reale comportamento della palettatura. Si può notare come si formi una scia ben distinta, e che complessivamente l'accelerazione del flusso tra monte e valle della palettatura risulti minore rispetto al caso inviscido, risultato delle perdite di natura viscosa. Si noti anche come in prossimità del bordo di fuga si apprezzi una lieve separazione del flusso. Verificando i risultati a $z/c_x = 0.01$ (figura 5.3), in una zona dominata da flussi fortemente tridimensionali, la separazione al bordo di fuga è ulteriormente anticipata e si presenta con un'estensione maggiore, oltre alla presenza di deformazioni del flusso lungo il dorso della pala. Tali aspetti verranno analizzati in seguito.

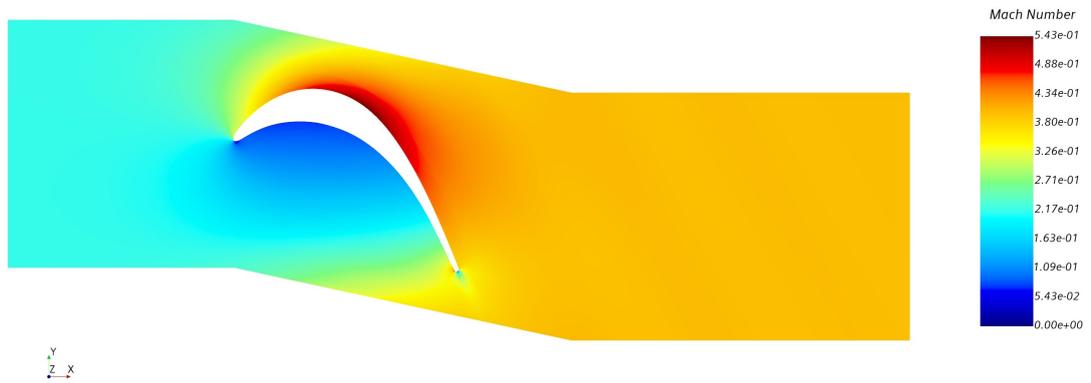


Figura 5.1: Campo di Mach valutato a $z/c_x = 1.0$ per il caso “Inviscid”

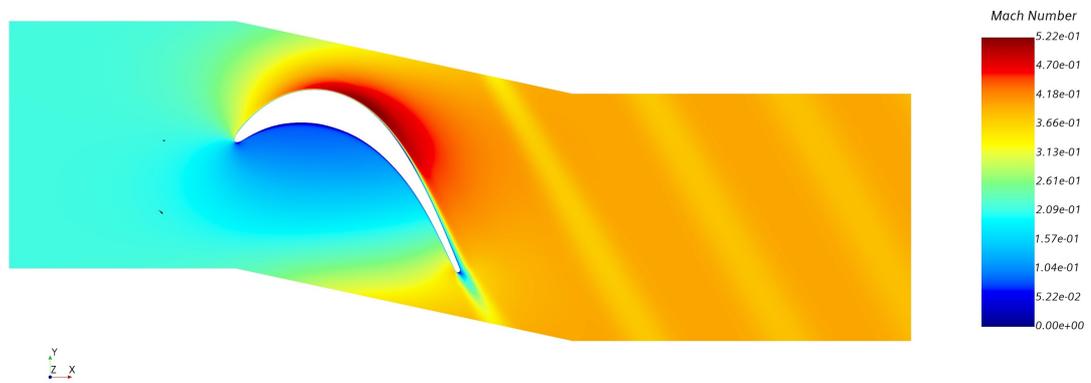


Figura 5.2: Campo di Mach valutato a $z/c_x = 1.0$ per il caso “Transition”

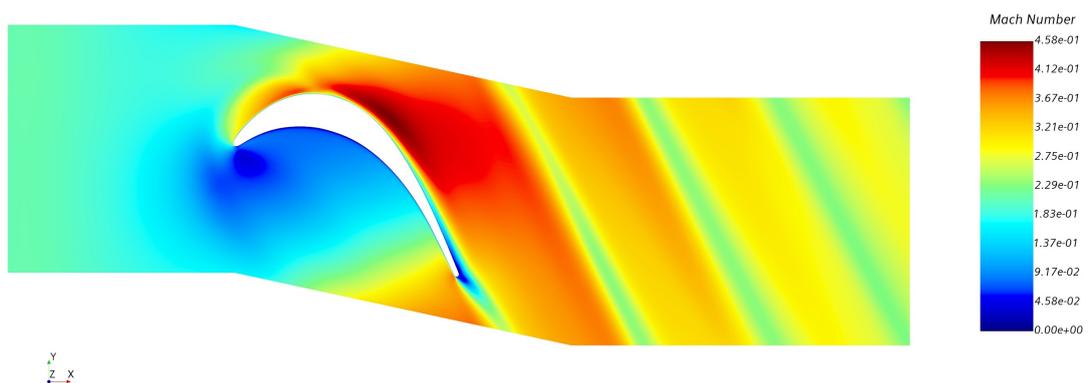


Figura 5.3: Campo di Mach valutato a $z/c_x = 0.01$ per il caso “Transition”

5.2 Confronto tra i *test case*

Nella seguente sezione verranno messi a confronto i risultati ottenuti dalle 4 simulazioni, ponendo particolare attenzione a come la scelta del set di modelli fisici e dei parametri di *meshing* influiscano sia sull'accuratezza e della soluzione numerica che sull'aderenza fisica dei risultati ottenuti.

5.2.1 Influenza del modello di transizione sulla soluzione

L'aspetto legato alla separazione del flusso sul dorso è la più chiara manifestazione della differenza tra l'utilizzo del solo modello di turbolenza e l'implementazione di un modello di transizione, e pertanto può essere approfondito andando a valutare la distribuzione del coefficiente di pressione attorno alla pala. Tale coefficiente è così definito:

$$C_p = \frac{p(\bar{x}) - p_2}{p_1^0 - p_2} \quad (5.1)$$

dove p_1^0 è la pressione totale all'*inlet* e p_2 quella statica all'*outlet*. In figura 5.4 è possibile confrontare tale distribuzione nei casi "Inviscid", "Turbulent" e "Transition" all'altezza $z/c_x = 1$.

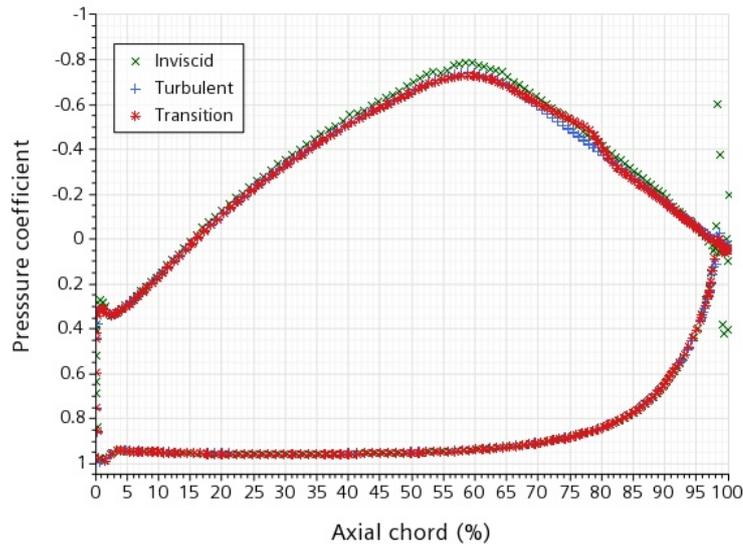


Figura 5.4: Confronto dell'andamento del coefficiente di pressione a $z/c_x = 1.0$ tra i casi "Inviscid" (verde), "Turbulent" (blu) e "Transition" (rosso)

Si può vedere come la simulazione turbolenta, nonostante un lieve aumento della pressione sul dorso per la presenza dei contributi viscosi, mantenga lo stesso andamento della simulazione inviscida, senza riuscire quindi a cogliere il fenomeno della separazione. L'impiego del modello $\gamma - Re_{\theta t}$ ha portato a definire una regione di lieve separazione, a circa il 70% della corda assiale. Tale andamento è coerente con quanto ottenuto da Duden e Fottner [19], ma non risulta della stessa estensione rispetto ai dati sperimentali. Effettuando il confronto con altre soluzioni numeriche, come quella di Wei et al [29], in figura 5.5, facendo uso dei medesimi modelli di turbolenza e transizione, si nota invece una buona aderenza dei risultati. Una possibile giustificazione è che a tale distanza dalla parete di fondo il flusso può essere considerato quasi bidimensionale, e in tale porzione di pala i fenomeni di instabilità non sono tali da innescare la transizione, come è possibile notare confrontando le figure 5.2 e 5.3. Per verificare l'accuratezza dei risultati è possibile effettuare uno studio più approfondito sui modelli di transizione, e in particolare delle correlazioni usate per derivare le grandezze d'innescio.

Si sottolinea che i risultati sperimentali di Duden e Fottner sono stati ottenuti a diverse condizioni rispetto a quelle imposte nelle simulazioni qui trattate, utilizzando differenti combinazioni di Re e Mach isentropici d'uscita, rispettivamente $Re_{2, is} = 1.2 \cdot 10^5$, $5 \cdot 10^5$ e $M = 0.30$, 0.59 , 0.80 . Tale aspetto influenza i risultati ottenuti, seppur in misura non sufficiente da impedire un confronto qualitativo tra i risultati.

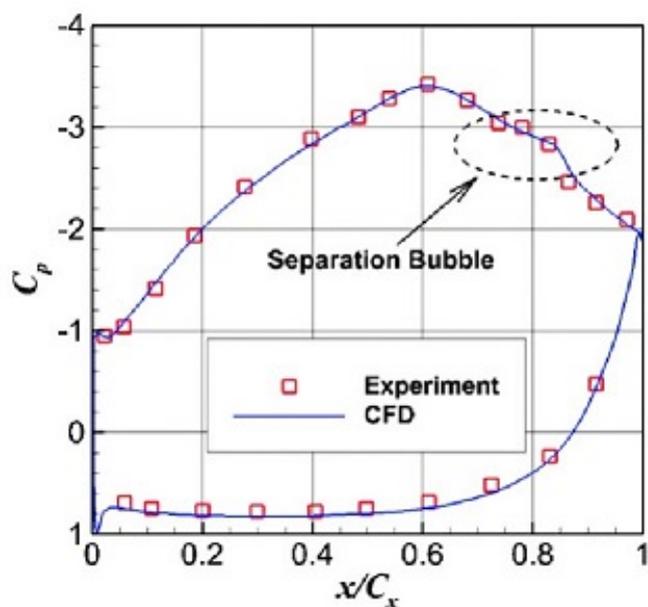


Figura 5.5: Distribuzione del coefficiente di pressione ottenuta numericamente da Wei et al nella mezzeria della paletta

5.2.2 Studio della convergenza di griglia

Confrontando i risultati dei casi “Transition” e “Refinement” è possibile studiare gli effetti che l’affinamento della griglia computazionale ha sui risultati. I due casi, infatti, differiscono solo per il numero di celle impiegate per risolvere le equazioni di governo, impiegando i medesimi modelli di turbolenza (SST $k - \omega$) e di transizione ($\gamma - Re_{\theta t}$), e le stesse condizioni iniziali e al contorno. In tabella 5.1 sono riassunte le caratteristiche relative alle dimensioni delle mesh prodotte.

Mesh	Target surface size	Elementi 2D	Elementi 3D
Transition	300 y^+	156,408	1,640,499
Refinement	150 y^+	401,600	4,722,023

Tabella 5.1: Confronto tra le mesh dei casi “Transition” e “Refinement”

Si ricorda che la mesh del caso “Refinement” impiega elementi ottenuti dimezzando le dimensioni caratteristiche della mesh del caso “Transition”, risultando in un numero di celle totale circa quattro volte più grande. In figura 5.6 è stata messa a confronto la distribuzione del coefficiente di pressione nei due casi, a $z/c_x = 1$. I due campi risultano equivalenti nell’intera regione prossima alla superficie della paletta, se non per un maggiore dettaglio.

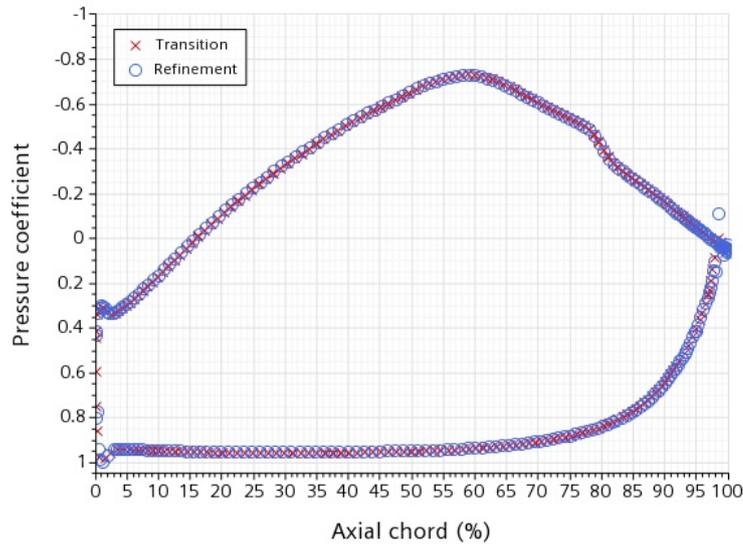
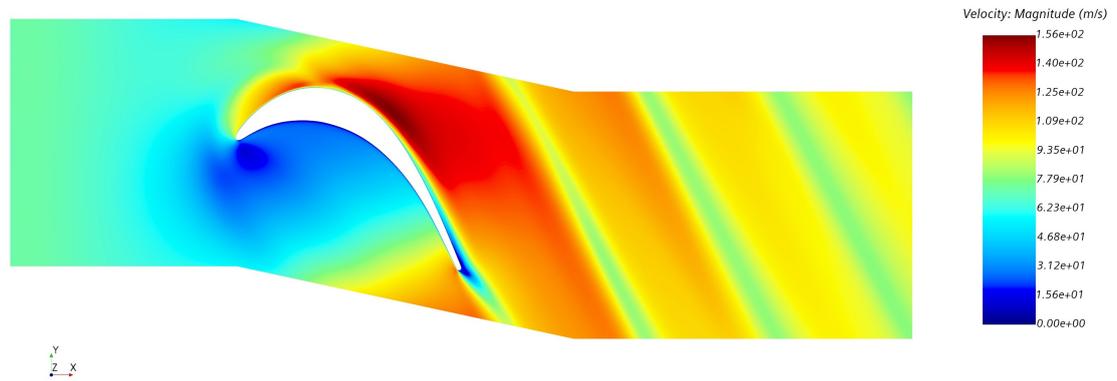
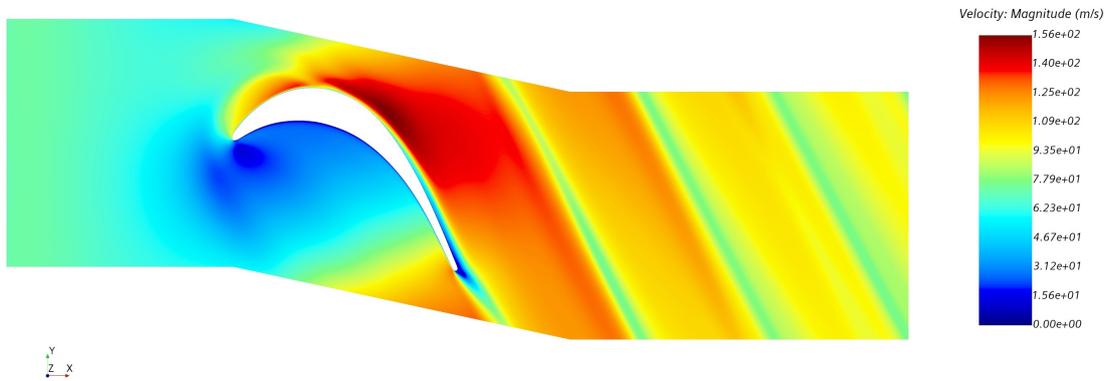


Figura 5.6: Confronto dell’andamento del coefficiente di pressione a $z/c_x = 1.0$ tra i casi “Transition” (rosso) e “Refinement” (blu)

I risultati tuttavia variano sensibilmente se si considera una sezione prossima alla parete di fondo. In figura 5.7 è possibile confrontare i campi di velocità alla sezione $z/c_x = 0.01$, mentre in figura 5.8 è visualizzata la distribuzione del coefficiente di pressione alla stessa sezione. Si noti come nella simulazione del caso “Refinement” la separazione sia più accentuata rispetto al caso “Transition”, risultando dunque in una perdita di pressione totale maggiore.



(a)



(b)

Figura 5.7: Campi di velocità del caso “Transition” (a) e “Refinement” (b) valutati su un piano xy a $z/c_x = 0.01$

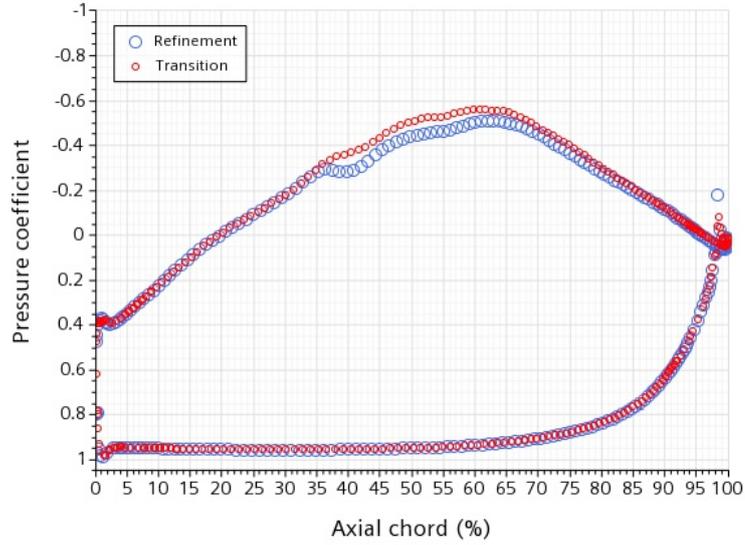


Figura 5.8: Confronto dell’andamento del coefficiente di pressione a $z/c_x = 0.01$ tra i casi “Transition” (rosso) e “Refinement” (blu)

Questo aspetto può essere ulteriormente verificato confrontando il coefficiente di perdita di pressione totale per diverse sezioni a valle della pala. Tale coefficiente è definito come segue:

$$C_p^0 = \frac{p_1^0 - p^0(\bar{x})}{p_1^0 - p(\bar{x})} \quad (5.2)$$

in cui $p^0(\bar{x})$ e $p(\bar{x})$ sono rispettivamente le pressioni totale e statica locali. È importante valutare la caduta di pressione totale a valle della paletta in quanto indice degli effetti viscosi, come la separazione, e legati alla turbolenza, come il mescolamento del flusso e il fenomeno del *vortex shedding*. In tal senso, una maggiore accuratezza dei risultati in termini di perdite totali è auspicabile. Valutando tale parametro alle sezioni assiali $x/c_x = 1.1$, $x/c_x = 1.3$ e $x/c_x = 1.5$, come in figura 5.9, si nota il tipico andamento della pressione totale lungo la scia, con un progressivo appiattimento della curva dovuto al raccordarsi con le condizioni del flusso esterno. Si può vedere come le perdite di pressione totale della griglia affinata risultino maggiori e concentrate in un’area minore, in accordo con i risultati ottenuti da Marconcini et al [30], facendo uso sia di modelli RANS che LES, a $Re_{2, is} = 1.2 \cdot 10^5$ e $M = 0.59$, come mostrato in figura 5.10.

La differenza può essere giustificata dal fatto che l’affinamento è stato operato in particolare nella regione di scia, modificando i parametri del *wake refinement*, che ha portato a una qualità dei risultati in tale regione molto più vicina al *test case* computazionale di riferimento, in termini di perdite di pressione totale. In generale vi è dunque una sottostima delle perdite di scia, verificate anche dalla limitatezza della zona di separazione sul dorso, ma una diminuzione della dimensione degli elementi di

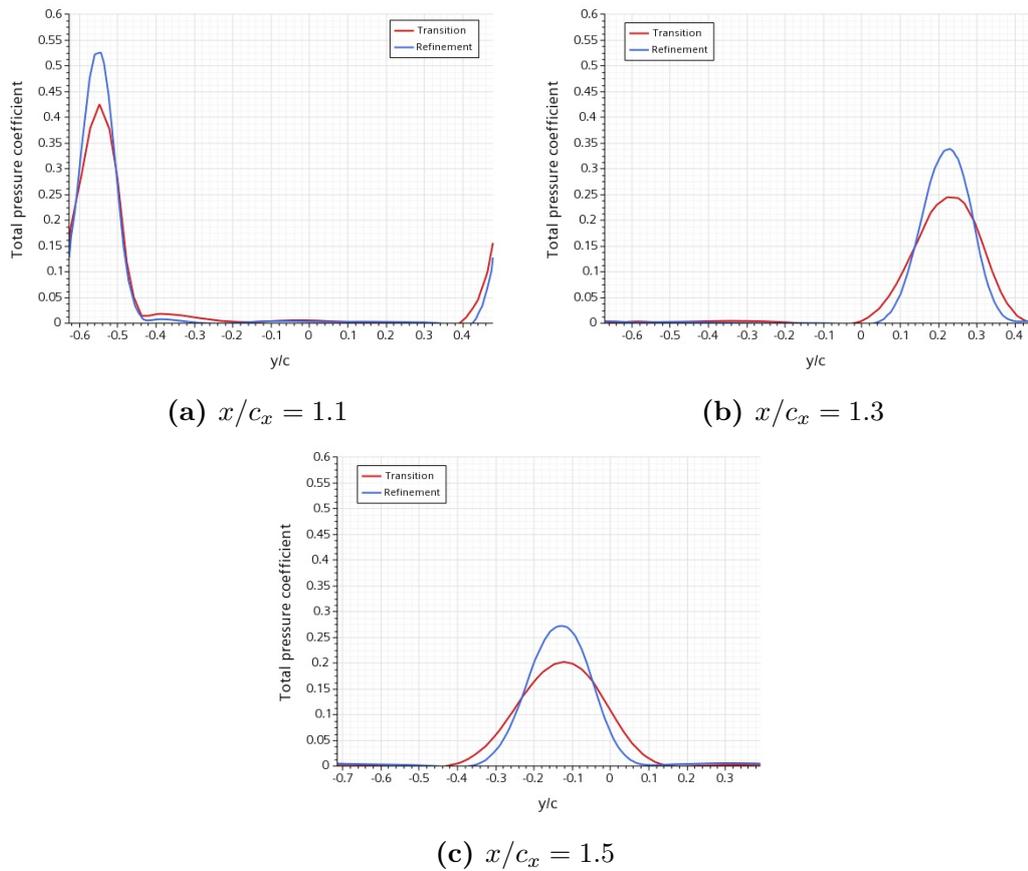


Figura 5.9: Distribuzione del coefficiente di perdita di pressione totale valutato in scia a $x/c_x = 1.1$ (a), $x/c_x = 1.3$ (b) e $x/c_x = 1.5$ (c) nel caso “Transition” (rosso) e “Refinement” (blu)

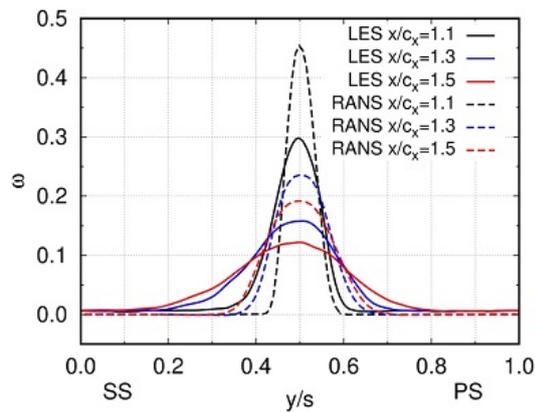


Figura 5.10: Distribuzione del coefficiente di perdita di pressione totale ω in scia, a diverse distanze assiali, ottenuta da Marconcini et al

mesh porta ad un progressivo miglioramento dei risultati fisici, dunque un aumento dell'accuratezza complessiva. Tale aspetto prescinde comunque dal corretto utilizzo dei modelli di turbolenza e transizione, sia in termini di *setting* che di scelta delle condizioni al contorno, in particolare per quanto riguarda le variabili della turbolenza in ingresso.

5.3 Coefficiente di pressione

Le analisi successive verteranno sullo studio dei fenomeni fluidodinamici derivati dalla simulazione "Refinement". Dato che il flusso è influenzato principalmente dalla presenza della parete di fondo, è possibile valutare l'andamento del coefficiente di pressione attorno al profilo al variare della distanza dall'*endwall*. In figura 5.11 è mostrato l'andamento del coefficiente lontano a parete ($z/c_x = 1.0$), in una sezione intermedia ($z/c_x = 0.3$) e in prossimità dell'*endwall* ($z/c_x = 0.02$ e $z/c_x = 0.01$).

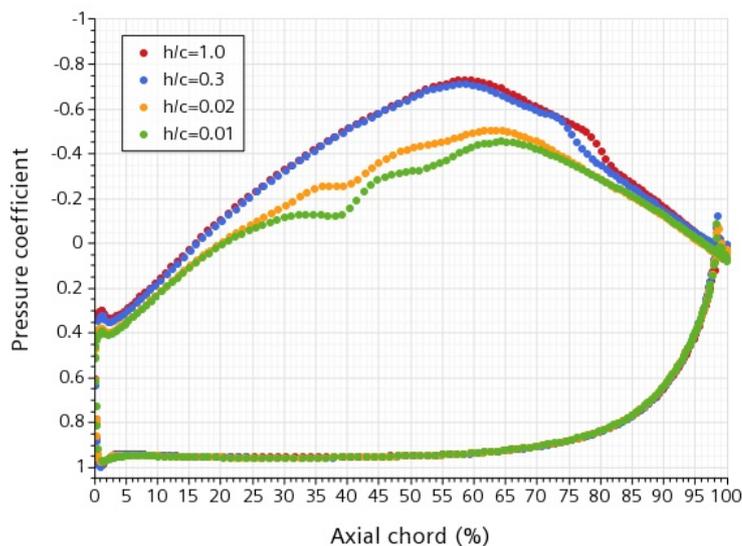


Figura 5.11: Distribuzione del coefficiente di pressione al variare della distanza dall'*endwall*, ottenuto dalla simulazione "Refinement"

Le variazioni più importanti si notano sul dorso della pala dove, avvicinandosi sempre di più alla parete di fondo, il flusso accelera sempre di meno, e i picchi minimi di pressione sono sempre meno marcati e spostati a valle della palettatura, andamento coerente con i risultati numerici di Pichler et al [31], mostrati in figura 5.12. Ciò è giustificato dalla presenza di strutture coerenti energetiche in prossimità del raccordo tra dorso e *endwall*, in particolare sulla superficie dorsale, che verranno discussi nel paragrafo 5.5.

Tali strutture però non influenzano l'andamento del coefficiente di pressione in corrispondenza della superficie ventrale, che risulta invece quasi invariato. Questa differenza è imputabile ad una componente trasversale della velocità, generata dalla

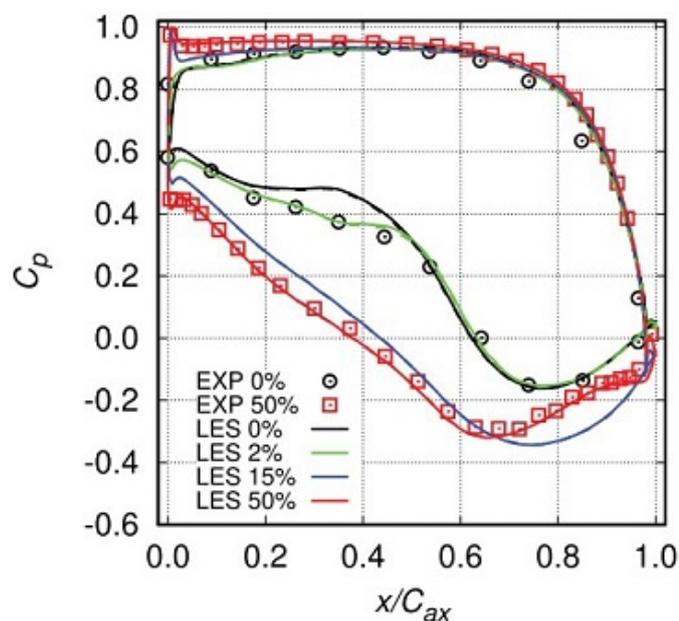


Figura 5.12: Distribuzioni del coefficiente di pressione ottenute da Pichler et al attraverso sia prove sperimentali che tramite *Large Eddy Simulation* (LES)

differenza di pressione tra ventre e dorso della pala successiva la schiera (appartenente, dunque, allo stesso canale interpaleare) che trasporta le strutture vorticosi generate sul bordo d'attacco lontane dal ventre della paletta. La zona influenzata dalle strutture secondarie è fortemente limitata in altezza, giacché a $z/c_x = 0.3$ la distribuzione di C_p è quasi identica alla sezione di mezzeria. L'estensione di questa regione è evidenziabile valutando il coefficiente di pressione attraverso l'intera superficie della pala, come è stato fatto in figura 5.13, che mostra come l'influenza delle strutture vorticosi termina a circa $z/c_x = 0.15$, in cui è presente, a circa il 60% della corda assiale, una bolla di bassa pressione (si noti che in figura la corrente procede da destra verso sinistra, come mostrato dagli assi cartesiani).

L'andamento del coefficiente di pressione lungo l'altezza della paletta è responsabile soprattutto di una variazione delle sue prestazioni man mano che ci si avvicina alla parete di fondo. In figura 5.14 è mostrato l'andamento del coefficiente di portanza C_L al variare della distanza dall'*endwall*, in cui si può vedere come, entro $z/c_x = 0.4$ vi è una sensibile diminuzione delle prestazioni, fino al 15% circa, rispetto alla porzione di pala distante dalla parete, dove la portanza è pressoché costante. Essendo il dorso del profilo responsabile della maggior parte delle forze aerodinamiche prodotte, in quanto sede di forti depressioni, è chiaro come la perturbazione causata dalle componenti trasversali di velocità sia il principale responsabile di tale diminuzione di portanza.

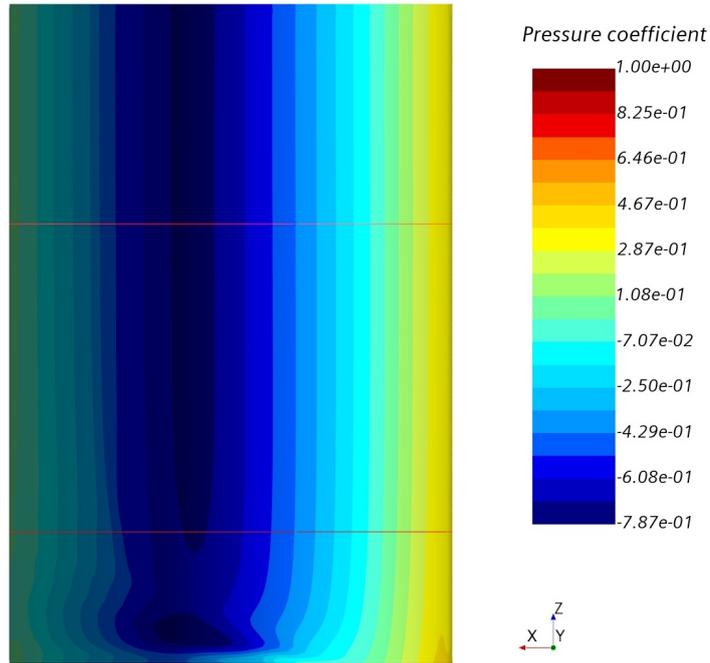


Figura 5.13: Distribuzione del coefficiente di pressione sull'intera superficie dorsale della paletta. Le linee rosse corrispondono alle altezze $z/c_x = 1.0$ e $z/c_x = 0.3$.

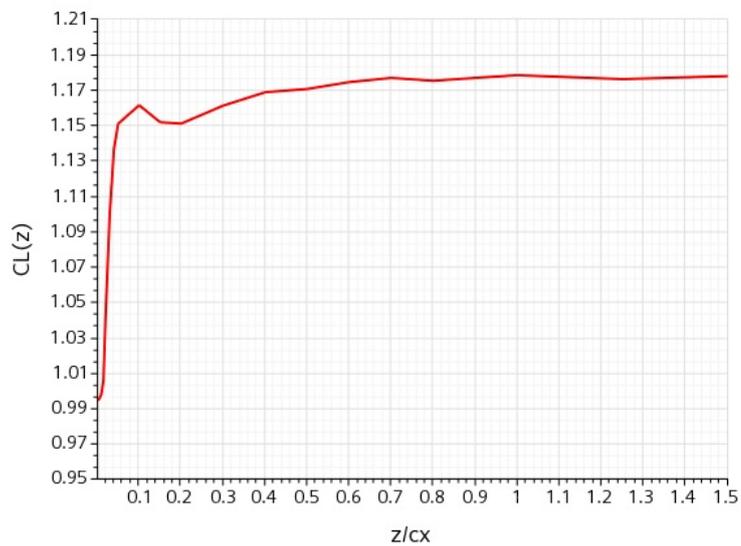


Figura 5.14: Distribuzioni del coefficiente di portanza C_L lungo l'altezza della paletta

5.4 Perdite di pressione totale

Per poter valutare le perdite dovute alla formazione delle strutture vorticose in prossimità dell'*endwall* risulta utile valutare il coefficiente di perdita di pressione totale (equazione 5.2) per diverse sezioni yx della pala e della scia, ortogonali alla direzione del flusso. Tale coefficiente è definito in modo tale che per $C_p^0 = 0$ non si hanno perdite ($p^0(\bar{x}) = p_1^0$) mentre le perdite risultano massime per $C_p^0 = 1$.

Il risultato, in figura 5.15, mostra come, a circa $x/c_x = 0.7$ (5.15b) si formi, dal dorso della pala, una bolla in cui le perdite risultano elevate, e che si sviluppa fino a quando il flusso è vincolato dalla paletta (5.15d). Distaccatosi dal bordo di fuga, tale zona tende successivamente a mescolarsi con il flusso esterno, allontanandosi dalla parete di fondo (5.15e - 5.15l) e riducendosi di intensità. Tale configurazione, tipica delle schiere di pale caratterizzate da una grande deflessione della corrente, è dovuta alla formazione del *passage vortex*, struttura assiale che si forma dall'interazione del flusso attraverso il canale interpalare con lo strato limite bidimensionale dell'*endwall* in corrispondenza del dorso.

Una seconda zona ad alte perdite, attaccata alla parete di fondo ma meno energetica, si sviluppa a circa $x/c_x = 0.9$ (5.15c), raggiungendo la massima intensità in corrispondenza del bordo di fuga e continuando a svilupparsi in dimensione lungo la scia. La struttura che genera queste perdite è chiamata *corner vortex*. I due vortici descritti sono stati teorizzati e modellizzati da Hawtorne [32], e successivamente confermati da prove in galleria del vento [33]. Tali strutture saranno approfondite nella sezione successiva.

Si noti come l'estensione degli strati limite bidimensionali formati in corrispondenza del profilo di pala e dell'*endwall*, seppur fortemente dissipativi, contribuiscono in misura molto limitata rispetto alle perdite dovute ai flussi secondari. Pertanto si può affermare che, per queste tipologie di schiere, le perdite di prestazioni sono principalmente imputabili alla formazione di queste strutture, che possono essere ridotte modellando opportunamente la zona di raccordo tra pala e parete di fondo.

La simulazione non è stata in grado di cogliere le perdite dovute alle strutture più piccole, limitandosi alla descrizione qualitativa dei vortici più energetici. Pertanto, un affinamento della griglia in prossimità della parete di fondo è auspicabile, con particolare attenzione alla generazione delle celle ottenute dall'interazione dei *prism layer* nella zona di raccordo. Tuttavia, tale affinamento implicherebbe un aumento del costo computazionale insostenibile, per la trattazione di questa tesi.

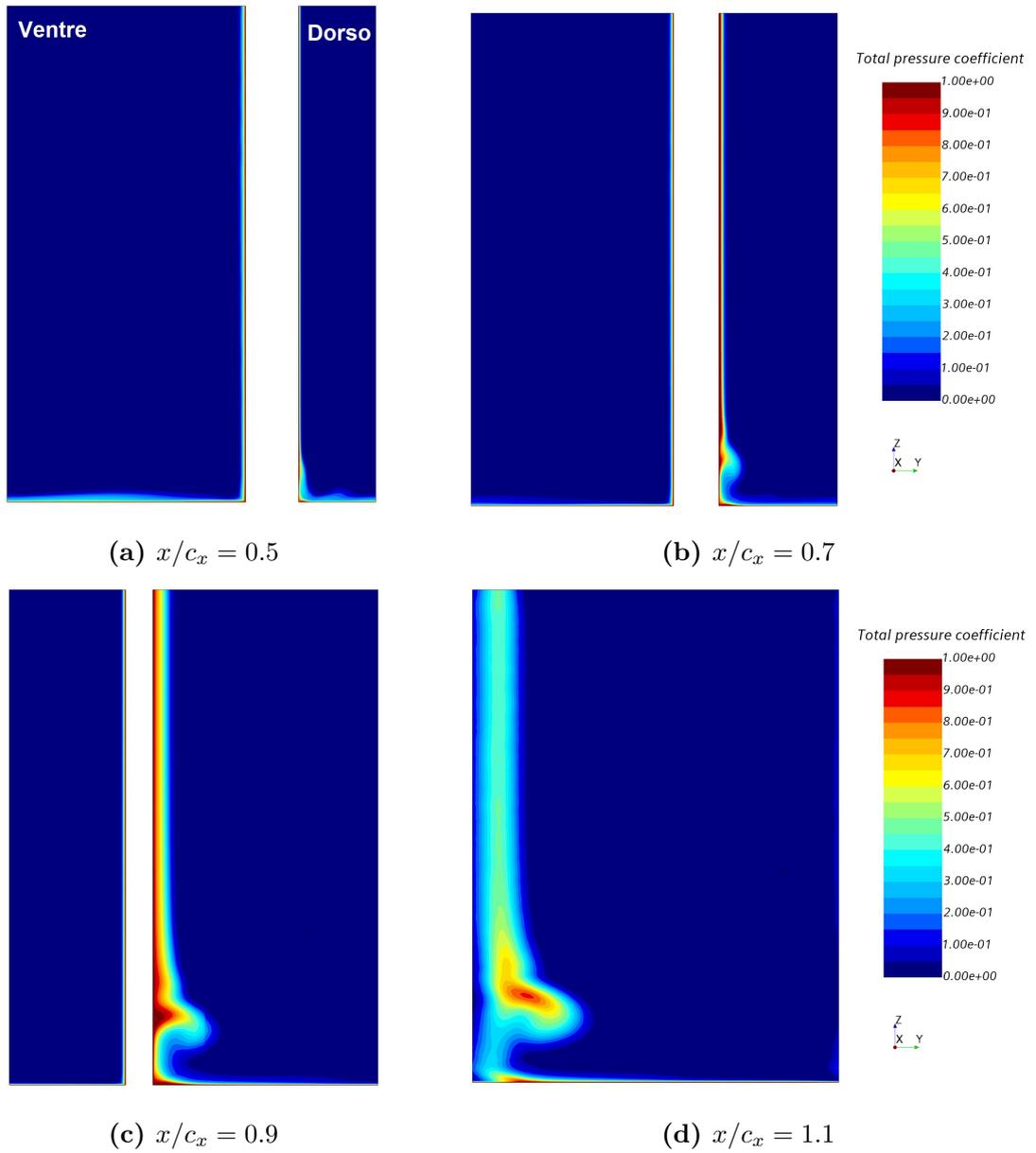


Figura 5.15: Coefficiente di perdita di pressione totale a diverse sezioni yz

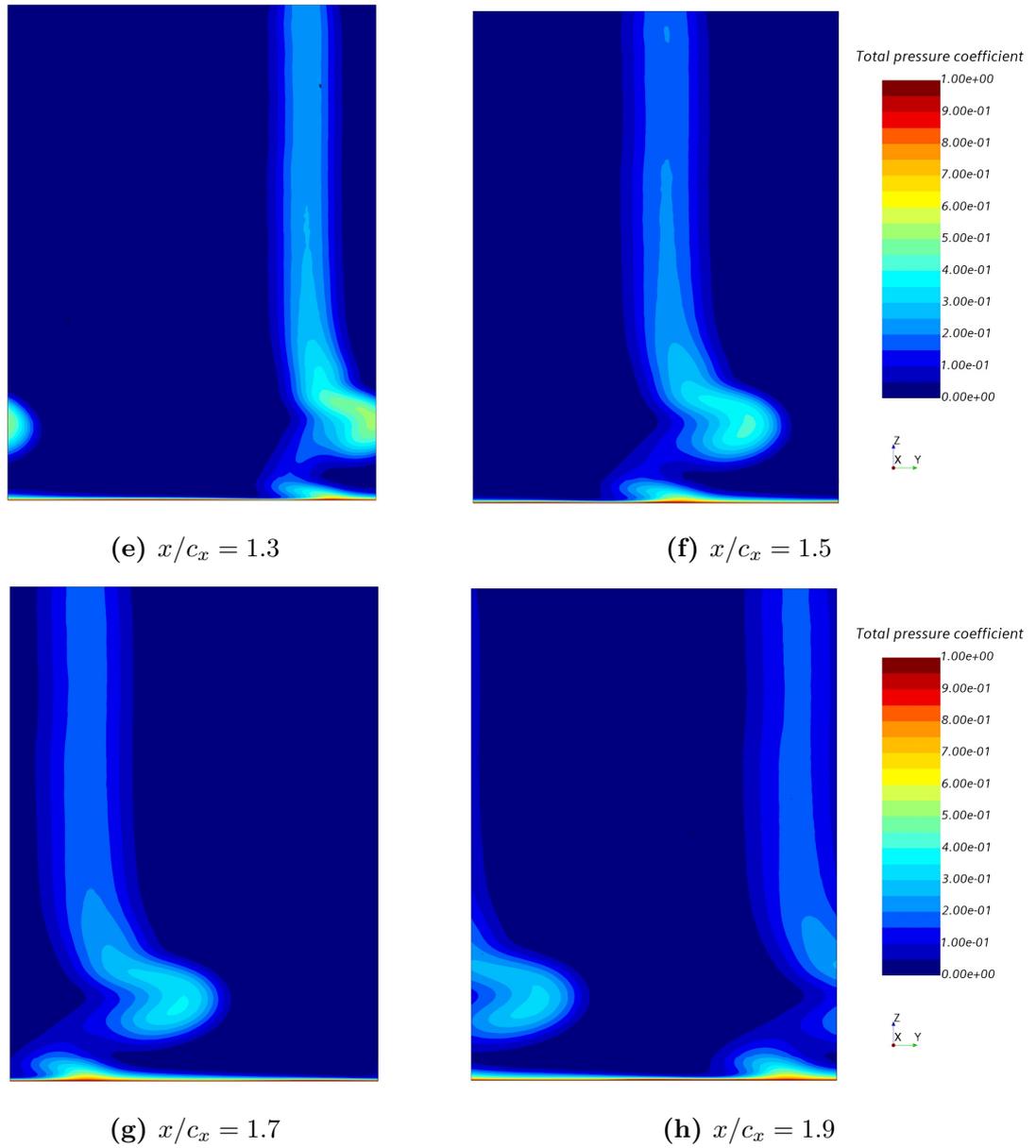


Figura 5.15: Coefficiente di perdita di pressione totale a diverse sezioni yz (cont.)

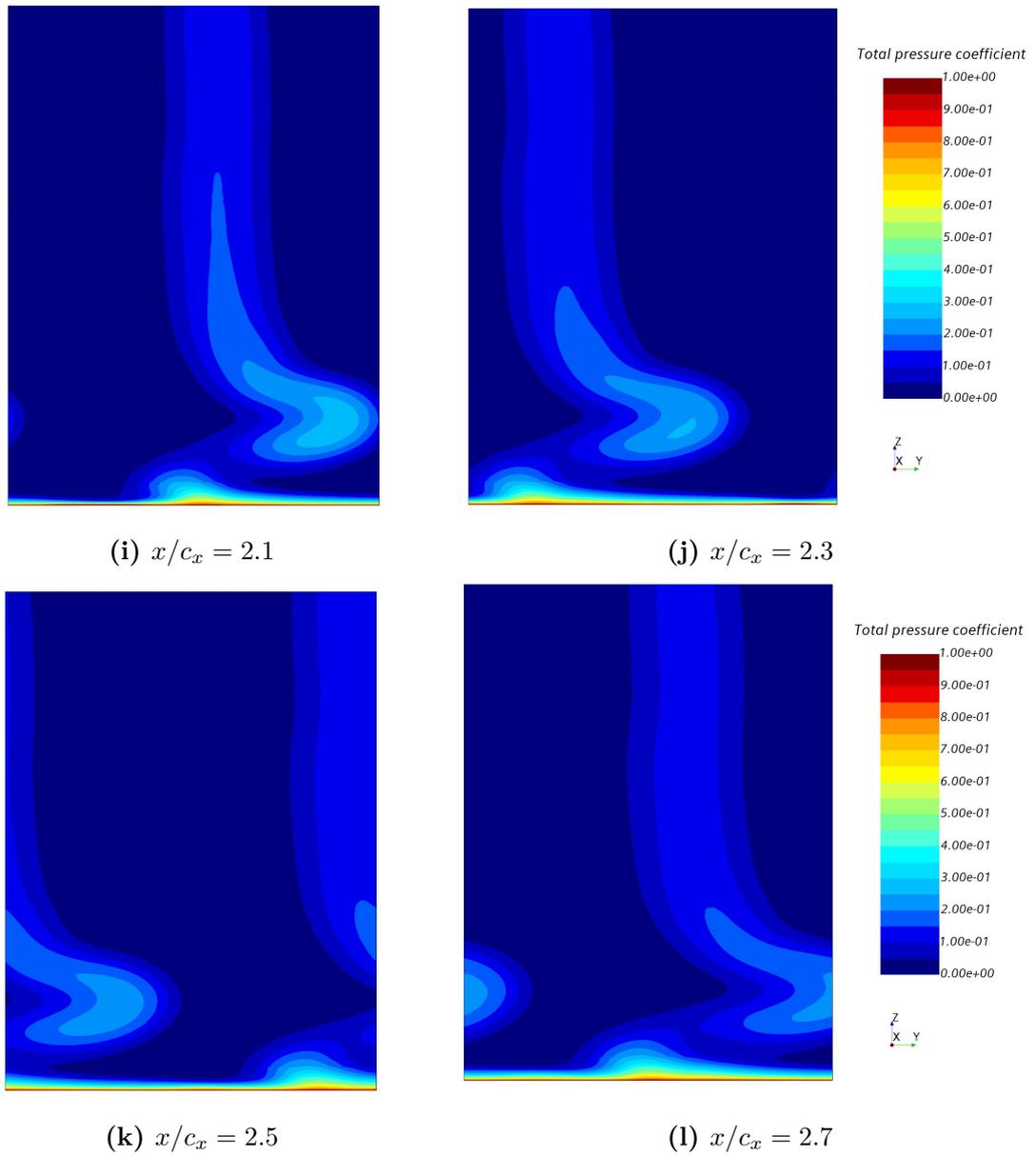


Figura 5.15: Coefficiente di perdita di pressione totale a diverse sezioni yz (cont.)

5.4.1 Andamento complessivo delle perdite

Per avere un'idea dell'estensione spaziale di queste perdite è utile visualizzare il loro andamento lungo la direzione assiale. Per tale ragione si definisce una media pesata sulla massa delle perdite di pressione totale:

$$\zeta = \frac{\int_A C_p^0 \rho \bar{u} \cdot \bar{n} dA}{\int_A \rho \bar{u} \cdot \bar{n} dA} \quad (5.3)$$

dove il termine al denominatore rappresenta la portata in massa attraverso la superficie A , integrando questa espressione attraverso diverse sezioni yz del dominio si ottiene il diagramma in figura 5.16, che mostra dunque le perdite medie di ciascuna sezione assiale del dominio. Come si può notare, si il maggior incremento delle perdite in corrispondenza della parte finale della pala, in prossimità del bordo di fuga e subito a valle ($0.7 < x/c_x < 1.1$), successivamente, quando il flusso si allontana dalla schiera, il lieve incremento delle perdite è dovuto al trasporto di quantità di moto dalla scia al flusso libero e alla conseguente dissipazione per effetto delle strutture vorticosi.

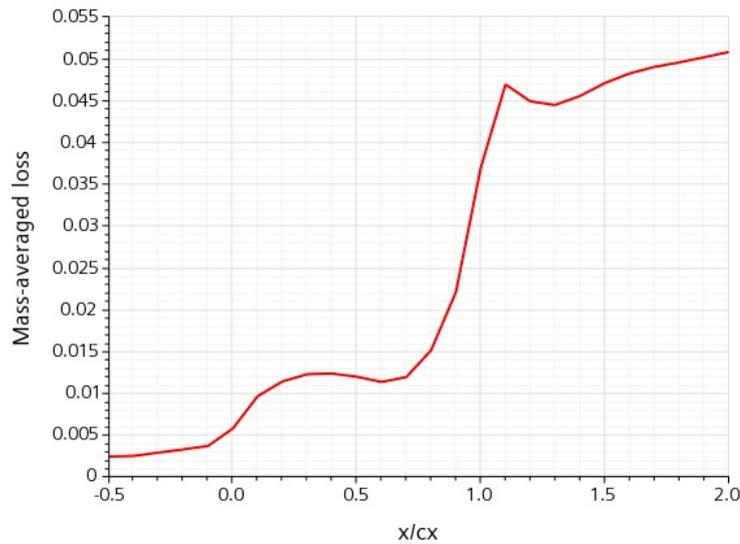


Figura 5.16: Andamento assiale delle perdite *mass-averaged*

5.5 Strutture vorticose

Le perdite di pressione sono dunque giustificate dalla presenza di strutture vorticose formatesi dall'interazione del flusso in zone diverse del dominio, dominate da diverse componenti di velocità, a loro volta dovute ai gradienti di pressione trasversali tra dorso e ventre del canale interpalaire e agli strati limite bidimensionali formati in corrispondenza del profilo di pala e dell'*endwall*, che interagiscono in corrispondenza della zona di raccordo. Risulta utile poter visualizzare tali strutture, con particolare enfasi rivolta alla loro intensità, estensione spaziale e come evolvono all'interno del canale interpalaire e in scia.

A tale scopo si definisce la *streamwise vorticity*, misura della componente di vorticità parallela al flusso medio, definita come:

$$\Omega_s = \bar{\Omega} \cdot \bar{u} \quad (5.4)$$

in cui le componenti del vettore vorticità sono i gradienti trasversali della velocità:

$$\omega_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad \rightarrow \quad \bar{\Omega} = \nabla \times \bar{u} \quad (5.5)$$

In figura 5.19 è riportato l'andamento di Ω_s lungo diverse sezioni assiali, sia lungo il canale interpalaire (5.19a - 5.19f) che in scia (5.19g - 5.19h) similmente a quanto svolto da Hodson et al [34]. Nei pressi del bordo d'attacco (5.19a) si può notare un piccolo ma intenso vortice in prossimità dell'*endwall*, sul dorso della paletta. La presenza di questo vortice è da imputarsi alla perturbazione prodotta dall'interazione tra lo strato limite della parete di fondo e il bordo d'attacco, e prende il nome di *horseshoe vortex*: il flusso, fortemente decelerato dalla paletta, si separa dall'*endwall* e si arrotola su se stesso, generando dei vortici che si biforcano tra dorso e ventre, assumendo per l'appunto una configurazione a ferro di cavallo, come mostrato in figura 5.17. La struttura in figura corrisponde al vortice distaccatosi dal ventre (HP), spinto verso il dorso dai gradienti trasversali di pressione, come si può notare dalla lunga coda che si trascina a parete.

Per individuare il processo di generazione di questa struttura, in figura 5.18 è rappresentata la distribuzione di *streamwise vorticity* su un piano normale alla direzione del flusso in ingresso, immediatamente a monte del bordo d'attacco. Come si può vedere, è individuabile una componente di vorticità trasversale in prossimità del raccordo della pala, responsabile della formazione dei due vortici che si biforcano sui due lati del profilo.

A partire da $x/c_x = 0.4$ (5.19b), la struttura vorticoso dominante è però il *passage vortex* (P) che, procedendo lungo la paletta, si separa progressivamente dall'*endwall* accrescendo di intensità. Si può notare anche la presenza del piccolo *corner vortex* (C) che si sviluppa lungo a zona di raccordo tra dorso e parete di fondo, mantenendosi stabile e coerente lungo l'intero canale interpalaire. A $x/c_x = 0.6$ (5.19c) si nota una struttura vorticoso tra la superficie dorsale e il *passage vortex*, che progressivamente sovrasta quest'ultimo, accrescendosi di dimensione. Tale struttura corrisponde al ramo

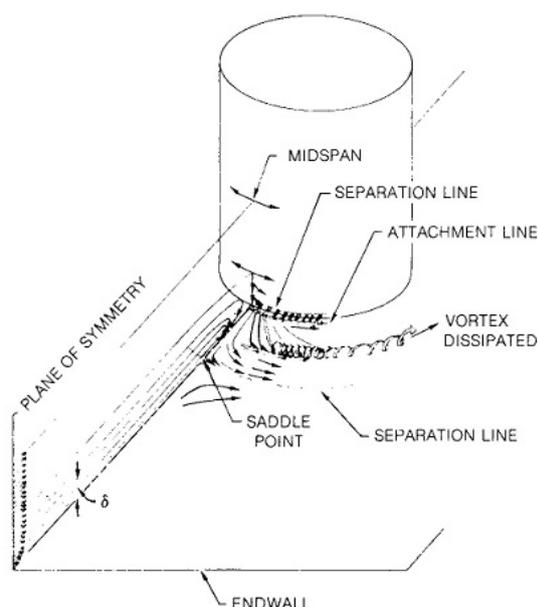


Figura 5.17: Processo di formazione del vortice a ferro di cavallo su di un cilindro

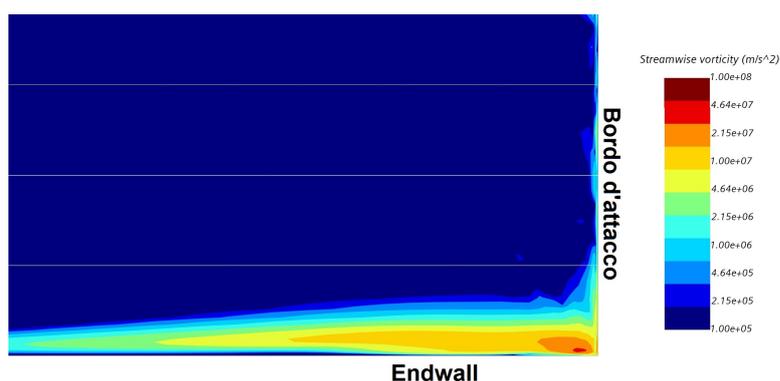


Figura 5.18: Streamwise vorticity a monte del bordo d'attacco

del vortice a ferro di cavallo distaccatosi dal dorso della pala (HS), trascinato dal più energetico vortice di passaggio.

A $x/c_x = 1$ (5.19f), si vede la formazione di vorticità lungo il bordo di fuga del profilo. Tale strutture sono generate dall'interazione del flusso sul dorso, fortemente deviato in direzione radiale, con il flusso di ventre, che si mantiene quasi orizzontale. Si noti inoltre come il *passage vortex* abbia ormai raggiunto dimensioni ragguardevoli e si stia progressivamente separando sia dal dorso della pala che dall'*endwall*. Si notano ancora il *corner vortex*, che a partire da $x/c_x = 0.8$ (5.19d) inizia a perdere di intensità, e il ramo dorsale dell'*horseshoe vortex*.

Le ultime due figure (5.19g - 5.19h) corrispondono a due sezioni della scia immediatamente a valle della pala. Si possono notare le strutture formatesi dal distacco dei vortici a valle della pala, che si estendono velocemente in dimensione, perdendo progressivamente intensità. Il vortice inferiore, interagendo con il vortice di passaggio, risulta sensibilmente più intenso di quello superiore, e di fatto costituisce la struttura dominante della scia.

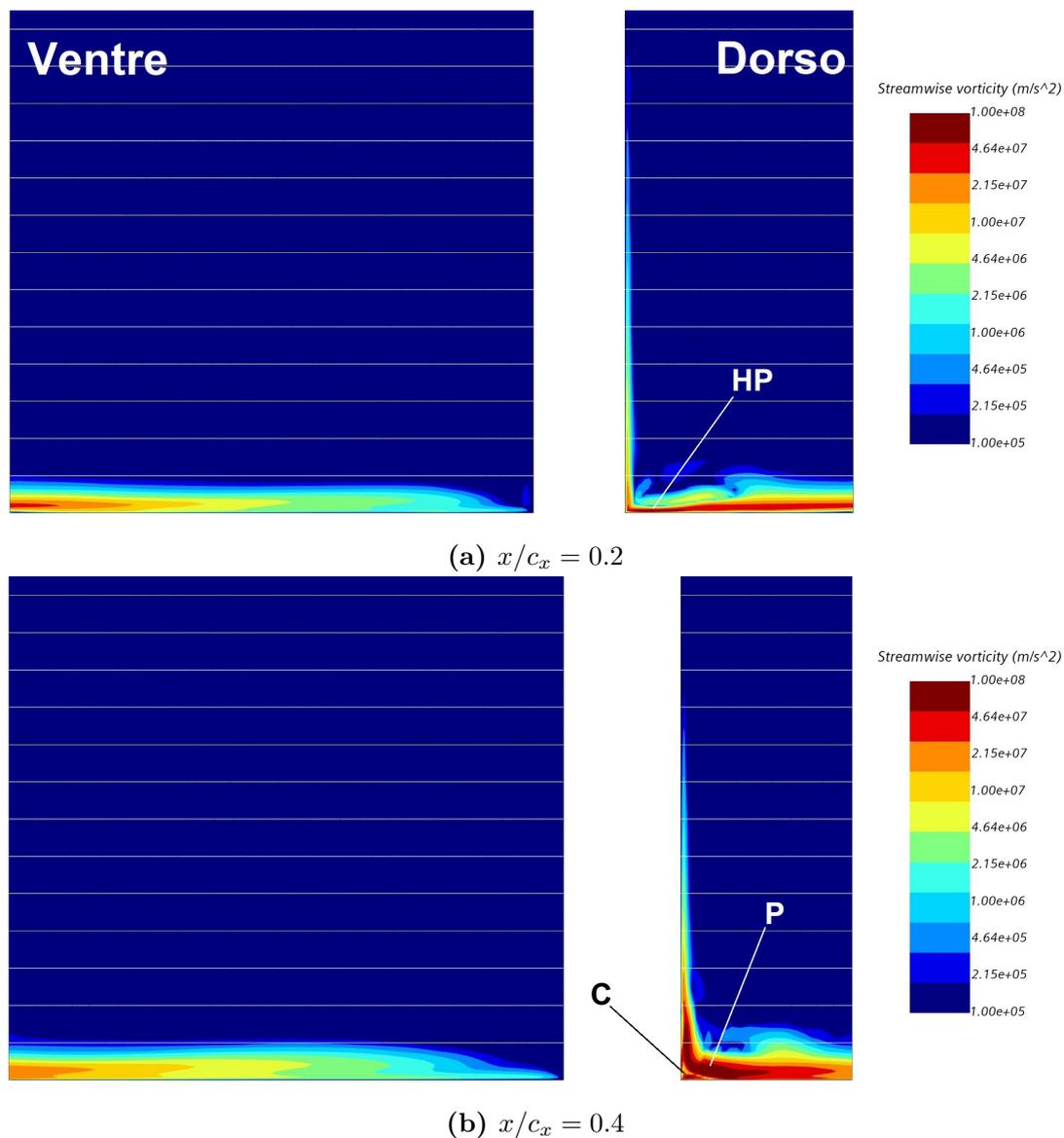


Figura 5.19: *Streamwise vorticity* valutata a diverse sezioni assiali yz . Le linee bianche orizzontali corrispondono ad incrementi $\Delta z/c_x = 0.05$

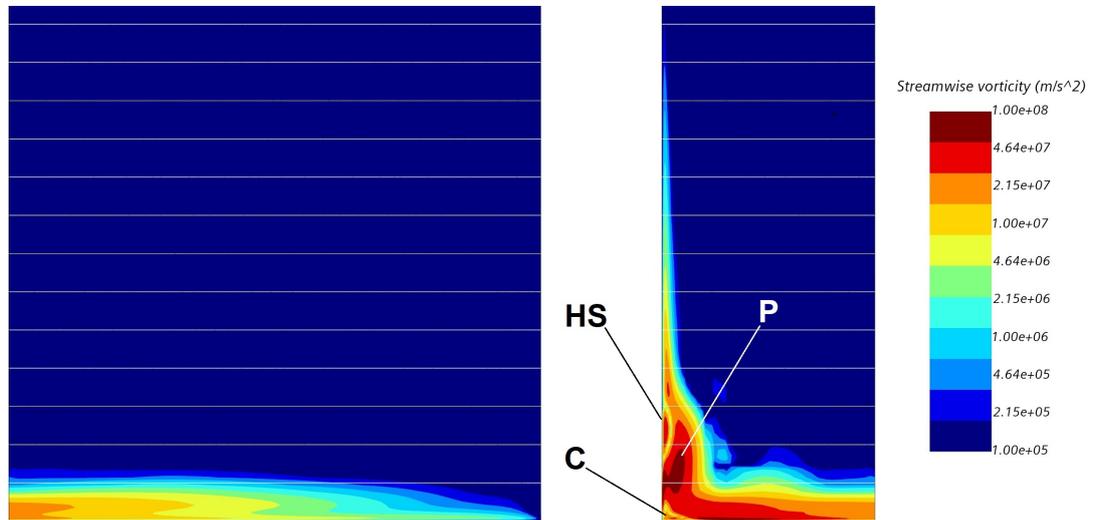
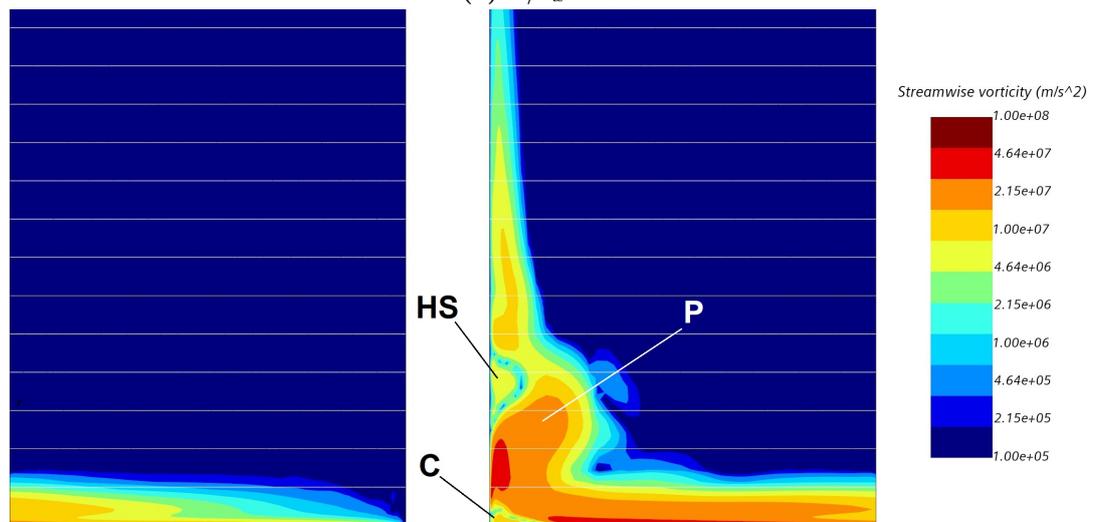
(c) $x/c_x = 0.6$ (d) $x/c_x = 0.8$

Figura 5.19: *Streamwise vorticity* valutata a diverse sezioni assiali yz . Le linee bianche orizzontali corrispondono ad incrementi $\Delta z/c_x = 0.05$ (cont.)

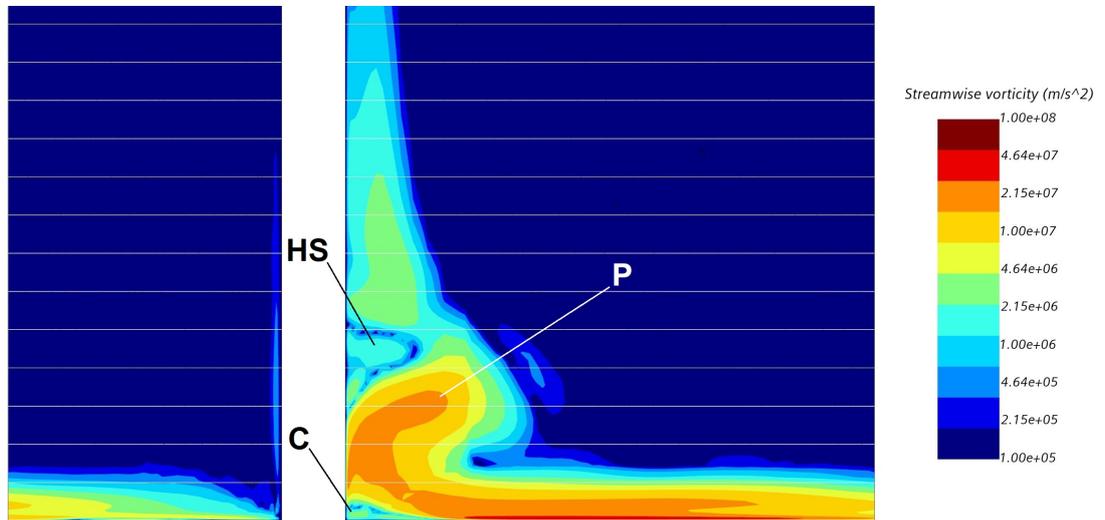
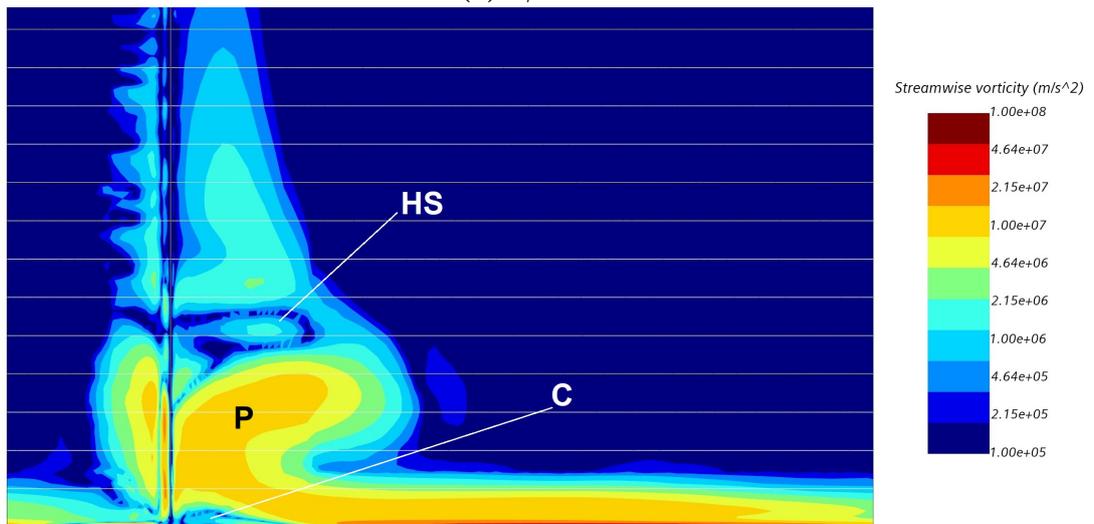
(e) $x/c_x = 0.9$ (f) $x/c_x = 1.0$

Figura 5.19: *Streamwise vorticity* valutata a diverse sezioni assiali yz . Le linee bianche orizzontali corrispondono ad incrementi $\Delta z/c_x = 0.05$ (cont.)

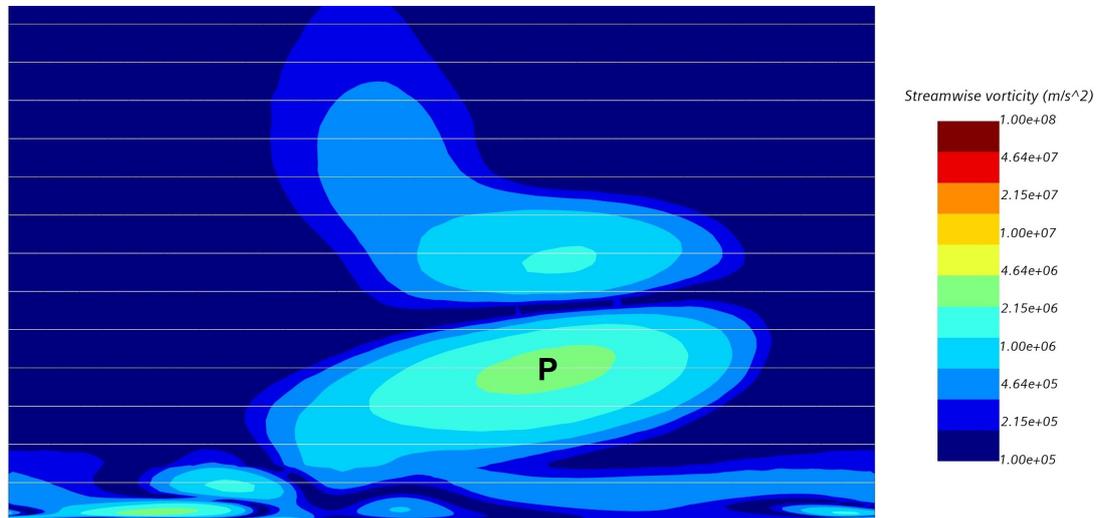
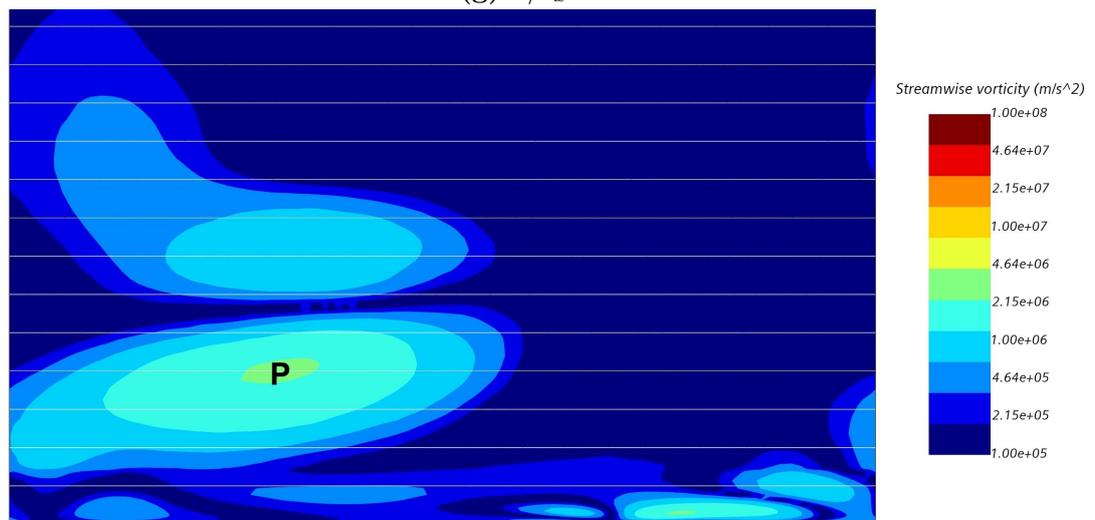
(g) $x/c_x = 1.2$ (h) $x/c_x = 1.4$

Figura 5.19: *Streamwise vorticity* valutata a diverse sezioni assiali yz . Le linee bianche orizzontali corrispondono ad incrementi $\Delta z/c_x = 0.05$ (cont.)

5.6 Linee di corrente

Infine, risulta utile visualizzare le strutture e i fenomeni tridimensionali descritti nei paragrafi precedenti. Per tale ragione è possibile tracciare le linee di corrente (*streamlines*) che investono il profilo in prossimità dell'*endwall*. Uno schema teorico delle strutture individuabili, proposto da Goldstein et al [35], è mostrato in figura 5.20, per poter mettere a confronto i risultati ottenuti con quanto presente in letteratura.

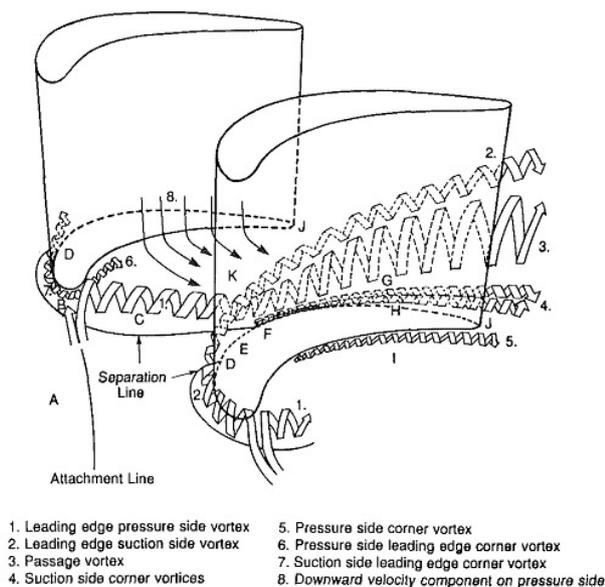


Figura 5.20: Schema delle strutture secondarie proposto da Goldstein [35]

In figura 5.21 è verificabile l'effetto che il gradiente di pressione trasversale ha sul flusso in prossimità del dorso della paletta. Come si può notare, l'effetto si fa sempre più debole man mano che la corrente si allontana dall'*endwall*, e già a $z/c_x = 0.015$ (5.21e) il flusso non risente più della presenza della parete. Nell'immediata vicinanza dell'*endwall* (5.21a - 5.21b) si nota anche l'invilupparsi delle linee di flusso, corrispondente al ramo ventrale del vortice a ferro di cavallo (HP).

In figura 5.22 è mostrato l'effetto dell'*horseshoe vortex* in prossimità del bordo d'attacco, in cui si può notare sia la zona in cui il flusso si separa che i vortici conseguenti (HP e HS).

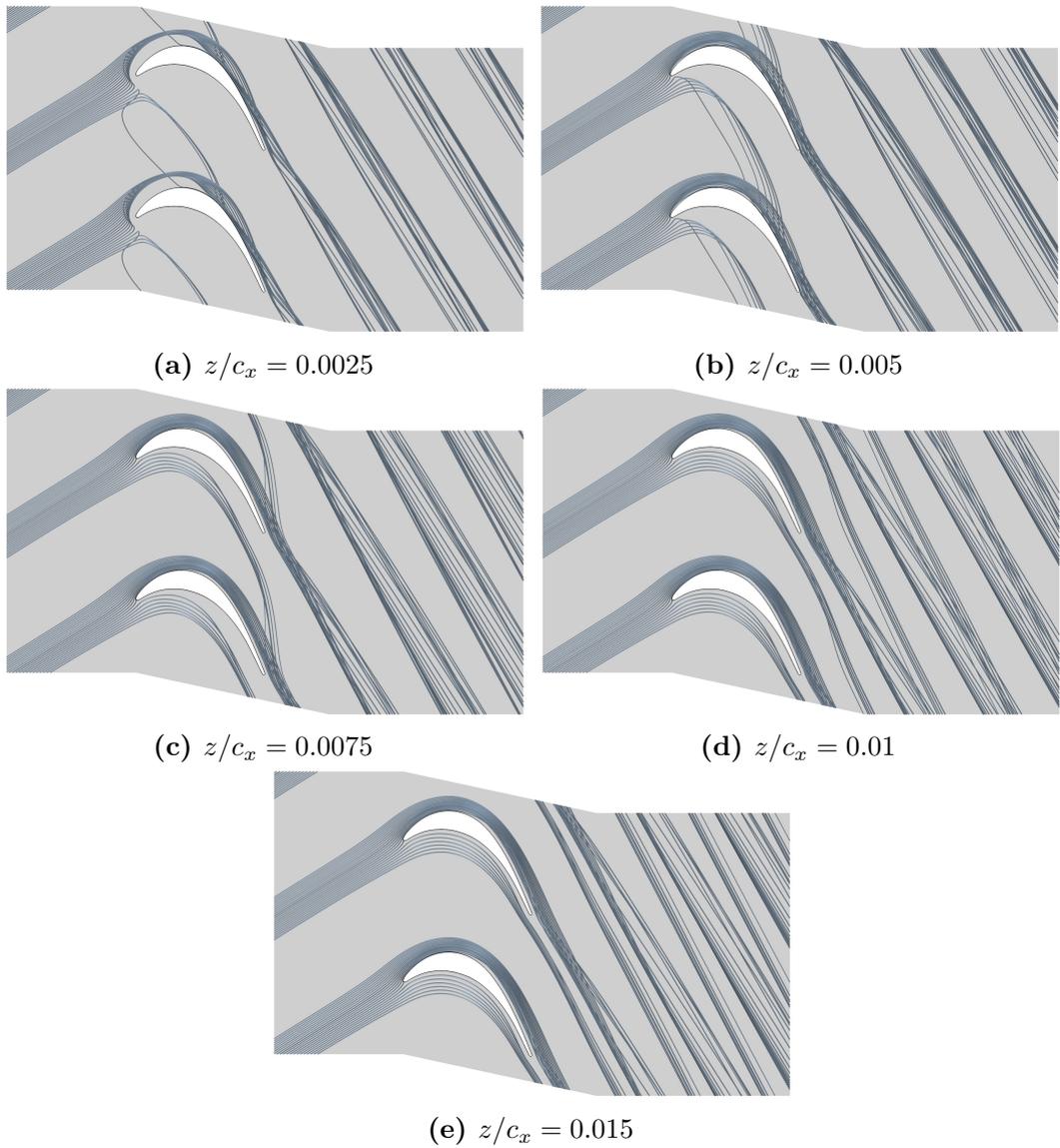


Figura 5.21: Andamento delle linee di flusso nell'immediata vicinanza dell'*endwall*

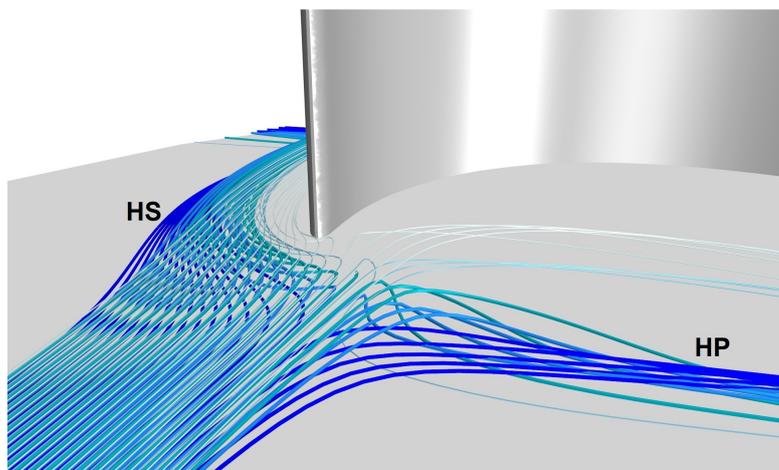
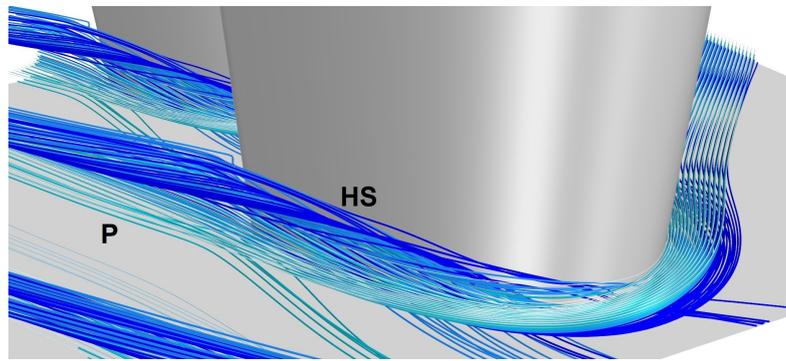


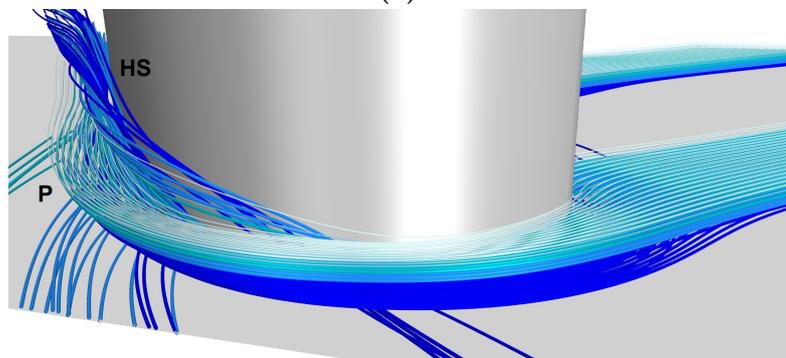
Figura 5.22: Linee di flusso in prossimità del bordo d'attacco della paletta

Nelle figure 5.23a e 5.23b sono invece visualizzate le linee di flusso che investono la superficie dorsale della paletta, in una zona vicina all'*endwall* che si estende fino a $z/c_x = 0.05$. Ciascuna sezione è evidenziata da linee di diverse colori, in cui le linee più chiare corrispondono alle sezioni più lontane dalla parete. Si notano chiaramente la formazione e lo sviluppo del *passage vortex* (P) a circa metà della corda assiale e il ramo dorsale del vortice a ferro di cavallo che lo sovrasta progressivamente (HS).

Infine, l'immagine in Figura 5.24 mostra come il flusso immediatamente a valle della paletta sia dominato dal *passage vortex* che, come affermato nella sezione precedente, caratterizza il flusso in scia, e come i flussi secondari diventino sempre più estesi man mano che si procede verso valle.



(a)



(b)

Figura 5.23: Linee di flusso lungo il dorso del profilo

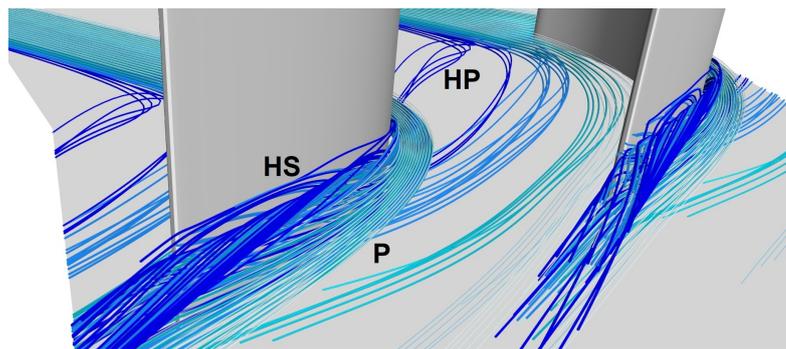


Figura 5.24: Linee di flusso a valle della schiera di palette

Capitolo 6

Conclusioni

L'analisi computazionale descritta in questa tesi aveva lo scopo di evidenziare i fenomeni fluidodinamici che si manifestano nell'interazione tra il canale interpalare di turbomacchina caratterizzata dal profilo *T106C high-lift Cascade* e l'*endwall* tramite un'analisi computazionale, con particolare enfasi sulla scelta dei modelli fisici e sulla progettazione della mesh, aspetti cruciali dell'analisi CFD.

Vi sono alcune discrepanze tra i risultati numerici qui ottenuti e i dati sperimentali presenti in letteratura, in particolare per quanto riguarda la separazione laminare e il complesso fenomeno della transizione indotta dalla separazione. Per tale ragione è auspicabile un ulteriore approfondimento sui modelli che possano cogliere tali fenomeni. Il modello $\gamma - Re_{\theta t}$ proposto da Menter rappresenta tuttora il modello di transizione più valido, ma è di difficile applicazione, a causa delle numerose funzioni di correlazione necessarie alla sua implementazione. In questa tesi sono state utilizzate le funzioni di default fornite da STAR-CCM+, che forniscono uno strumento versatile e accurato in molti casi, ma non consente un'analisi ad hoc del problema fluidodinamico. Questo si è tradotto, ad esempio, in una sovrastima delle prestazioni della pala in prossimità della parete di fondo.

Il confronto tra le griglie computazionali dei casi "transition" e "refinement" ha però mostrato un aumento dell'accuratezza dei risultati con l'affinamento della mesh, evidenziato soprattutto nella scia, dove il flusso è stato in grado di cogliere più puntualmente le perdite di pressione totale. Si potrebbe pensare che un affinamento ulteriore della griglia, soprattutto all'interno del canale interpalare e nell'immediata zona a monte del bordo d'attacco, possa consentire una risoluzione spaziale dei vortici più piccoli dei flussi secondari e influenzare anche la separazione laminare del flusso. Ciò è giustificato dal fatto che i modelli di turbolenza e transizione applicati necessitano di griglie molto affinate, soprattutto in prossimità delle superfici solide, con dimensioni dell'ordine dell'unità di parete o meno.

Analizzando i risultati prodotti è facile constatare come le strutture formatesi in corrispondenza del dorso del profilo, in prossimità dell'*endwall*, siano numerose e particolarmente complesse, frutto dell'interazione di zone di flusso caratterizzate da fenomeni

fluidodinamici diversi. Il modello proposto da Goldstein prevede la presenza di numerosi vortici più piccoli, soprattutto in corrispondenza della zona di raccordo tra pala e parete di fondo, che non sono stati individuati dalla simulazione. Effettuando un confronto con i risultati ottenuti è possibile però affermare che la simulazione è stata in grado di cogliere, con una risoluzione accettabile, le strutture principali dei flussi secondari.

Si sottolinea infine che l'approccio impiegato in questa analisi per effettuare le simulazioni costituisce solo uno dei modi con il quale si possono studiare i flussi in cui i fenomeni viscosi sono preponderanti. Il metodo impiegato è principalmente dettato dalle risorse computazionali disponibili. Nell'ottica di un'analisi più approfondita, si potrebbero applicare modelli più dispendiosi, come la DNS, e utilizzare mesh molto più raffinate.

Bibliografia

- [1] Boussinesq J. *Théorie analytique de la chaleur: mise en harmonie avec la thermodynamique et la théorie mécanique de la lumière*. Paris. Gauthier-Villars, 1903.
- [2] Smargorinsky J. «General Circulation Experiments with the Primitive Equations». In: *Monthly Weather Review* 91.3 (1963), pp. 99–164.
- [3] Spalart P.R. e Allmaras S.R. «A One-Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows». In: *La Recherche Aérospatiale* 1 (1994), pp. 5–21.
- [4] Jones W.P. e Launder B.E. «The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence». In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 15.2 (1972), pp. 301–314.
- [5] Launder B.E. e Sharma B.I. «Application of the energy-dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disc». In: *Letters in Heat and Mass Transfer* 1.2 (1974), pp. 131–137.
- [6] Wilcox C.D. *Turbulence modelling for CFD*. Third edition. DCW Industries Inc., 1993.
- [7] Menter F.R. «Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications». In: *AIAA Journal* 32.8 (1994), pp. 1598–1605.
- [8] Menter F.R. «Performance of popular turbulence model for attached and separated adverse pressure gradient flows». In: *AIAA Journal* 30.8 (1992), pp. 2066–2072.
- [9] Bradshaw P. e Perot J.B. «A note on turbulent energy dissipation in the viscous wall region». In: *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics* 5.12 (1993), pp. 3305–3306.
- [10] Durbin P.A. «Perspectives on the Phenomenology and Modeling of Boundary Layer Transition». In: *Flow, Turbulence and Combustion* 99 (2017), pp. 1–23.
- [11] Xia C. and Chen W. «Boundary-layer transition prediction using a simplified correlation-based model». In: *Chinese Journal of Aeronautics* 29.1 (2016), pp. 66–75.
- [12] Langtry R.B. «A correlation-based transition model using local variables for unstructured parallelized CFD codes». In: University of Stuttgart. 2006.

-
- [13] Menter F.R., Langtry R.B., Likki S.R., Suzen Y.B., Huang P.G. e Völker S. «A Correlation-Based Transition Model Using Local Variables — Part I: Model Formulation». In: *Journal of Turbomachinery* 128.3 (2004), pp. 413–422.
- [14] Menter F.R., Smirnov P.E., Liu T. e Avancha R. «A One-Equation Local Correlation-Based Transition Model». In: *Flow, Turbulence and Combustion* 95 (2015), pp. 583–619.
- [15] van Leer B. «Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov’s method». In: *Journal of Computational Physics* 32.1 (1979), pp. 101–136.
- [16] Rolls-Royce. *Trent 7000 for the Airbus A330neo*. URL: www.rolls-royce.com/products-and-services/civil-aerospace/airlines/trent-7000.aspx#/.
- [17] Hodson H.P. e Howell R.J. «The role of transition in high-lift low-pressure turbines for aeroengines». In: *Progress in Aerospace Sciences* 41.6 (2005), pp. 419–454.
- [18] Siemens Digital Industries Software. *Simcenter STAR-CCM+*. version 2020.3. 2020.
- [19] Duden A. e Fottner L. «Influence of taper, Reynolds number and Mach number on the secondary flow field of a highly loaded turbine cascade». In: *Journal of Power and Energy* 211.4 (1997), pp. 309–320.
- [20] Siemens Digital Industries Software. *Simcenter STAR-CCM+ User Guide*. version 2020.3, in “Checking the Surface Mesh”. 2020, pp. 2382–2835.
- [21] Durand W.F. *Aerodynamic theory*. 1st edition. Springer, 1935.
- [22] Delaunay B. «Sur la sphère vide. A la mémoire de Georges Voronoï». In: *Bulletin de l’Académie des Sciences de l’URSS. Classe des sciences mathématiques et na* 6 (1934), pp. 793–800.
- [23] Durbin P.A. «On the k-ε stagnation point anomaly». In: *International Journal of Heat and Fluid Flow* 17 (1996), pp. 89–90.
- [24] Halstead D.E., Wisler D.C., Okiishi T.H., Walker G.J., Hodson H.P. e Shin H. «Boundary Layer Development in Axial Compressors and Turbines: Part 1-4 — Composite Picture». In: *Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air* 1 (1995).
- [25] Siemens Digital Industries Software. *Simcenter STAR-CCM+ User Guide*. version 2020.3, in “Defining the Free-Stream Edge”. 2020, pp. 4149–4150.
- [26] Menter F.R., Esch T. e Kubacki S. «Transition modelling based on local variables». In: 5th International Symposium on Turbulence Modeling e Measurements. 2002.
- [27] Weiss J.M. e Smith W.A. «Preconditioning applied to variable and constant density flows». In: *AIAA Journal* 33.11 (1995), pp. 2050–2057.

- [28] Venkatakrishnan V. «On the accuracy of limiters and convergence to steady state solutions». In: *AIAA-93-0880* (1994).
- [29] Wei Z., Qiao W., Liu J. e Duan W. «Reduction of endwall secondary flow losses with leading-edge fillet in a highly loaded low-pressure turbine». In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part A: Journal of Power and Energy* 230.2 (2016), pp. 184–195.
- [30] Marconcini M., Pacciani R., Arnone A., Michelassi V., Pichler R., Zhao Y. e Sandberg R. «Large Eddy Simulation and RANS Analysis of the End-Wall Flow in a Linear Low-Pressure-Turbine Cascade: Part II - Loss Generation». In: *Journal of Turbomachinery* 141.12 (2019).
- [31] Pichler R., Zhao Y., Sandberg R., Michelassi V., Pacciani R., Marconcini M. e Arnone A. «Large-Eddy Simulation and RANS Analysis of the End-Wall Flow in a Linear Low-Pressure Turbine Cascade, Part I: Flow and Secondary Vorticity Fields Under Varying Inlet Condition». In: *Journal of Turbomachinery* 141.12 (2019).
- [32] Hawthorne W.R. «Rotational Flow Through Cascades Part I. The Components of Vorticity». In: *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* 8.3 (1955), pp. 266–279.
- [33] Wang H.P., Olson S.J., Goldstein R.J. e Eckert E.R.G. «Flow visualization in a linear turbine cascade of high performance turbine blades». In: *Journal of Turbomachinery* 119 (1997), pp. 1–8.
- [34] Hodson H.P. e Dominy R.G. «Three-Dimensional Flow in a Low-Pressure Turbine Cascade at Its Design Condition». In: *Journal of Turbomachinery* 109.2 (1987), pp. 177–185.
- [35] Goldstein R.J. e Spores R.A. «Turbulent Transport on the Endwall in the Region Between Adjacent Turbine Blades». In: *Journal of Heat Transfer* 110.4a (1988), pp. 862–869.