

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

Tesi di Laurea Magistrale

Avamprogetto di un velivolo per la mobilità urbana

valutazione delle caratteristiche dinamiche, dimensionamento delle
superfici di controllo e del sistema propulsivo



**Politecnico
di Torino**

Relatore
Prof. Piero Gili

Correlatore:
Prof. Angelo Lerro

Laureando
Pasquale Rispoli
Matr: 275552

ANNO ACCADEMICO 2021-2022

Alla mia Famiglia

Sommario

La mobilità urbana è uno dei temi più discussi al giorno d'oggi ed è ormai noto che l'elettrico rappresenta un punto di partenza per la mobilità del futuro sia per quanto riguarda il settore automobilistico ma anche per quanto riguarda quello aeronautico, infatti, da queste premesse nasce il concetto di Urban Air Mobility (UAM).

L'obiettivo del presente lavoro di Tesi è quello di effettuare un'analisi preliminare di un velivolo innovativo completamente elettrico in configurazione VTOL (Vertical take off and Landing) adibito alla mobilità urbana. La prima parte della trattazione riguarda lo studio parametrico della stabilità statica longitudinale in funzione di alcune variabili geometriche e aerodinamiche. La seconda parte riguarda invece lo studio parametrico delle caratteristiche dinamiche del velivolo a partire dalle condizioni di volo livellato. Nella terza parte si discutono i criteri di dimensionamento delle superfici di controllo longitudinale (equilibratore) laterale (alettoni) e direzionale (timoni), mentre l'ultima parte è dedicata al dimensionamento preliminare dei principali componenti del sistema propulsivo, ovvero dei motori elettrici, delle batterie e dei fan. L'approccio utilizzato per svolgere l'intero lavoro si basa su un modello semplificato del velivolo e il codice utilizzato per svolgere tutti i calcoli necessari è stato sviluppato in ambiente MATLAB[®].

Indice

1	Introduzione	8
1.1	Caratteristiche dell'aeromobile	9
1.1.1	Fase di decollo e atterraggio verticale	12
1.1.2	Configurazioni del velivolo	14
2	Sistemi di riferimento	17
2.1	Angoli e Matrici di rotazione	18
2.1.1	Matrice di rotazione S	19
2.1.2	Matrice di rotazione R	19
3	Stabilità statica	21
3.1	Schema a due superfici	21
3.2	Forze e momenti aerodinamici	22
3.2.1	Portanza	23
3.2.2	Resistenza	28
3.2.3	Momento aerodinamico di beccheggio	30
3.3	Punto neutro del velivolo	33
3.4	Risultati ottenuti	33
3.4.1	Coefficiente di Portanza C_L	34
3.4.2	Coefficiente di Momento C_M	35
3.4.3	Derivata C_{L_α}	37
3.4.4	Derivata $C_{L_{\delta_e}}$	37
3.4.5	Derivata C_{M_α}	37
3.4.6	Posizione del punto neutro N	39
3.4.7	Derivata $C_{M_{\delta_e}}$	40
4	Dinamica del velivolo	42
4.1	Convenzioni utilizzate	42
4.1.1	Velocità del velivolo e velocità del vento relativo	42
4.1.2	Forze e momenti	44
4.2	Equazioni della cinematica	46
4.3	Equazioni della dinamica	47
4.4	Condizioni di equilibrio (trim)	48
4.5	Linearizzazione delle equazioni	50

5	Dinamica longitudinale	55
5.1	Stima delle derivate aerodinamiche della dinamica longitudinale .	58
5.1.1	Derivate rispetto a u	58
5.1.2	Derivate rispetto a w	59
5.1.3	Derivate rispetto a q	60
5.1.4	Derivate rispetto ad $\dot{\alpha}$	62
6	Dinamica latero-direzionale	64
6.1	Stime delle derivate aerodinamiche della dinamica latero-direzionale	66
6.1.1	Derivate rispetto a v	66
6.1.2	Derivate rispetto a p	78
6.1.3	Derivate rispetto a r	89
6.2	Derivate di controllo	94
6.2.1	Derivate di controllo della dinamica longitudinale	94
6.2.2	Derivate di controllo della dinamica latero - direzionale .	94
7	Stabilità dinamica	100
7.1	Stabilità dinamica longitudinale	102
7.1.1	Risultati ottenuti	102
7.2	Stabilità dinamica latero-direzionale	105
7.2.1	Risultati ottenuti	105
8	Dimensionamento delle superfici di comando	108
8.1	Dimensionamento dell'equilibratore	108
8.2	Dimensionamento del timone	111
8.3	Dimensionamento degli alettoni	113
9	Dimensionamento del sistema propulsivo	116
9.1	Bilancio delle potenze	116
9.2	Dimensionamento dei propulsori	118
9.2.1	Risultati ottenuti	120
9.3	Dimensionamento delle batterie	122
9.4	Diametro dei fan	124
A	<i>Flap effectiveness</i>	126
B	Distribuzione delle corde	131

Elenco delle figure

1.1	Immagini e-VTOL concesse gentilmente da <i>SELT S.R.L</i> [1] . . .	9
1.2	Profilo di missione	11
1.3	Modello semplificato del velivolo	11
1.4	Vista dall'alto (a sinistra) e vista laterale (a destra) dei <i>thrusters</i>	13
1.5	Processo di dimensionamento del ThrustPod	13
2.1	Sistemi di riferimento	17
3.1	Assi di prua	21
3.2	Schema a due superfici portanti	22
3.3	Angoli caratteristici	23
3.4	Relazione tra gli angoli caratteristici (tutti gli angoli sono rappresentati nel loro verso positivo)	25
3.5	Schema delle forze e momenti agenti sul velivolo	30
3.6	Andamento del coefficiente di portanza C_L del velivolo completo nella <i>Configurazione 1</i>	34
3.7	Andamento del coefficiente di portanza C_L del velivolo completo nella <i>Configurazione 2</i>	34
3.8	Andamento del coefficiente di portanza C_L del velivolo completo nella <i>Configurazione 3</i>	35
3.9	Andamento del coefficiente di momento del velivolo completo nella <i>Configurazione 1</i>	35
3.10	Andamento del coefficiente di momento del velivolo completo nella <i>Configurazione 2</i>	36
3.11	Andamento del coefficiente di momento del velivolo completo nella <i>Configurazione 3</i>	36
3.12	Andamento della derivata C_{M_α} nella <i>Configurazione 1</i>	37
3.13	Andamento della derivata C_{M_α} nella <i>Configurazione 2</i>	38
3.14	Andamento della derivata C_{M_α} nella <i>Configurazione 3</i>	38
3.15	Andamento della posizione longitudinale del punto neutro nella <i>Configurazione 1</i>	39
3.16	Andamento della posizione longitudinale del punto neutro nella <i>Configurazione 2</i>	39
3.17	Andamento della posizione longitudinale del punto neutro nella <i>Configurazione 3</i>	40

3.18	Andamento della derivata $C_{M_{\delta_e}}$ nella <i>Configurazione 1</i>	40
3.19	Andamento della derivata $C_{M_{\delta_e}}$ nella <i>Configurazione 2</i>	41
3.20	Andamento della derivata $C_{M_{\delta_e}}$ nella <i>Configurazione 3</i>	41
5.1	Variazione di velocità in seguito ad una variazione della rotazione di beccheggio	60
6.1	Forze agenti sul timone	67
6.2	Effetto diedro	70
6.3	Effetto dell'angolo di freccia alare	74
6.4	Vista tridimensionale del modello per il calcolo delle derivate rispetto a p	78
6.5	Variazione delle velocità sugli impennaggi e variazione dell'incidenza laterale in seguito ad una variazione di velocità di rollio Δp	79
6.6	Vista laterale e coordinate x e z	80
6.7	Variazione di velocità sulle semiali e variazione di incidenza sulla striscia infinitesima	82
6.8	Contributo delle ali alla derivata $\mathcal{N}_p$	86
6.9	Contributo degli impennaggi alle derivate rispetto alla velocità di rollio r	90
6.10	Forze generate dalla variazione di deflessione dei timoni	95
6.11	Forze generate sulla striscia infinitesima in seguito alla variazione di deflessione degli alettoni	97
7.1	Autovalori della dinamica longitudinale nella <i>Configurazione 1</i>	102
7.2	Autovalori della dinamica longitudinale nella <i>Configurazione 2</i>	103
7.3	Autovalori della dinamica longitudinale nella <i>Configurazione 3</i>	104
7.4	Autovalori della dinamica latero-direzionale nella <i>Configurazione 1</i>	105
7.5	Autovalori della dinamica latero-direzionale nella <i>Configurazione 2</i>	106
7.6	Autovalori della dinamica latero-direzionale nella <i>Configurazione 3</i>	107
8.1	Deflessione dell'equilibratore necessaria per trimmare il velivolo al variare delle velocità di volo per diversi valori del rapporto di corde $\frac{c_e}{c_{w_2}}$	109
8.2	Deflessione dell'equilibratore necessaria per trimmare il velivolo al variare delle velocità di volo per diversi valori del rapporto $\frac{l_e}{l_{w_2}}$	109
8.3	Deflessione dell'equilibratore necessaria per trimmare il velivolo al variare delle velocità di volo per diversi valori del rapporto di superfici $\frac{S_{w_2}}{S_{w_1}}$	110
8.4	Deflessione dell'equilibratore necessaria per trimmare il velivolo al variare delle velocità di volo per diversi valori di $x_{AC_{w_2}}$	110
8.5	Deflessione dell'equilibratore necessaria per trimmare il velivolo al variare delle velocità di volo per diversi valori di $z_{AC_{w_2}}$	111
8.6	Deflessione del timone necessaria per equilibrare il velivolo in seguito ad una raffica di intensità pari a $0.2 V_{stall}$	113

8.7	Velocità massima di rollio in condizioni di regime al variare della velocità di volo e per un rapporto di corde $\frac{c_a}{c_{w1}} = 0.3$	114
8.8	Velocità massima di rollio in condizioni di regime al variare della velocità di volo e per un rapporto di corde $\frac{c_a}{c_{w1}} = 0.4$	115
8.9	Velocità massima di rollio in condizioni di regime al variare della velocità di volo e per un rapporto di corde $\frac{c_a}{c_{w1}} = 0.5$	115
9.1	Schema delle forze agenti sul velivolo in fase di salita	116
9.2	Potenza propulsiva richiesta in condizioni di salita per diverse velocità di volo e per diversi angoli di rampa	120
9.3	Potenza complessiva richiesta ai motori elettrici in condizioni di salita per diverse velocità di volo e per diversi angoli di rampa	120
9.4	Potenza propulsiva richiesta a ciascuno dei tre motori elettrici installati in condizioni di salita per diverse velocità di volo e per diversi angoli di rampa	121
9.5	Potenza propulsiva richiesta in condizioni di crociera	123
9.6	carico sul disco al variare della velocità di volo in condizioni di salita con angolo di rampa pari a 5 deg	125
9.7	carico sul disco al variare della velocità di volo in condizioni di salita con angolo di rampa pari a 10 deg	125
A.1	Modello tridimensionale di una generica superficie portante dotata di flap	127
B.1	Distribuzione delle corde in un'ala trapezia	131

Elenco delle tabelle

1.1	Dati sulle masse e inerzie	12
1.2	Dati relativi alla <i>Configurazione 1</i>	14
1.3	Dati relativi alla <i>Configurazione 2</i>	15
1.4	Dati relativi alla <i>Configurazione 3</i>	16
3.1	Derivata C_{L_α} nelle tre configurazioni	37
3.2	Derivata $C_{L_{\delta_e}}$ nelle tre configurazioni	37
7.1	Autovalori della dinamica longitudinale nella <i>Configurazione 1</i> .	102
7.2	Autovalori della dinamica longitudinale nella <i>Configurazione 2</i> .	103
7.3	Autovalori della dinamica longitudinale nella <i>Configurazione 3</i> .	104
7.4	Autovalori della dinamica latero-direzionale nella <i>Configurazione 1</i>	105
7.5	Autovalori della dinamica latero-direzionale nella <i>Configurazione 2</i>	106
7.6	Autovalori della dinamica latero-direzionale nella <i>Configurazione 3</i>	107
9.1	Rendimenti	119
9.2	Caratteristiche tecniche della batteria	122
9.3	Risultati dimensionamento della batteria	124

Capitolo 1

Introduzione

Nei prossimi anni si stima un aumento della popolazione mondiale, infatti, dall'ultima prospettiva delle Nazioni Unite, [2] i 7,7 miliardi di persone nel 2019 (circa 8 miliardi a novembre 2021) cresceranno fino a circa 10 miliardi nel 2050: la maggior parte delle persone vivrà in ambiente urbano e la crescita urbana aumenterà, portando a una maggiore necessità di sviluppo dei trasporti. Inoltre, il cambiamento climatico è un problema sempre più emergente dato l'incremento della temperatura media della superficie terrestre, l'incremento delle emissioni di gas serra (come CO₂) e le emissioni di sostanze nocive per l'uomo e per l'ambiente (ad esempio N₂O, e particolato PM_{2.5} e PM₁₀) che sono destinate ad aumentare ulteriormente nei prossimi anni [3]: ovviamente i veicoli terrestri convenzionali contribuiscono in maniera importante all'inquinamento, inoltre, l'elevata densità di popolazione nelle grandi città comporta un aumento del tempo necessario per gli spostamenti urbani ed extraurbani. Un problema secondario derivante dall'elevato impiego dei veicoli convenzionali è l'inquinamento acustico che pur non rappresentando di fatto una priorità rimane comunque un problema da risolvere [4].

Per ridurre le problematiche sopra menzionate, è necessario rivisitare il concetto di mobilità urbana che infatti, negli ultimi anni, si orienta verso una prospettiva futura in cui aeromobili completamente elettrici prenderanno il posto dei tradizionali veicoli terrestri. Questa visione innovativa dei trasporti urbani prende il nome di *Mobilità Aerea Urbana* o *Urban Air Mobility (UAM)* che prevede l'impiego di una particolare classe di aeromobili, i *Vertical Take-Off and Landing (VTOL)* ed in particolare i *electric - Vertical Take-Off and Landing (e-VTOL)* ossia velivoli non convenzionali che riescono ad effettuare le fasi di decollo e atterraggio seguendo una traiettoria completamente verticale: in [5] sono mostrate diverse configurazioni di VTOL in cui vengono messi in risalto i vantaggi e le limitazioni di ciascuna configurazione.

Tutti i principali *concepts* che riguardano questa categoria di velivoli possono essere raggruppati in tre categorie principali:

- *multicotteri*, caratterizzati da uno scarso range operativo per cui sono

destinati quasi esclusivamente alle operazioni urbane ;

- *aeromobili lift + cruise*, destinati principalmente all'impiego urbano ed extraurbano;
- *velivoli ad ala o propulsori basculanti*, destinati principalmente ad operazioni extraurbane e regionali.

L'idea che sta alla base di tutti i diversi *concepts* è quella di ottimizzare le due fasi di volo principali ossia:

- la fase hovering in cui le forze agenti sul velivolo necessarie al sostentamento sono generate esclusivamente dai propulsori (eliche, rotori e fan);
- la fase di crociera in cui le forze necessarie al sostentamento sono generate dalle ali mentre i propulsori generano solamente le forze necessarie all'avanzamento;

Un discorso a parte va fatto per i multicotteri in quanto per questa categoria di velivoli, nella fase di crociera le forze necessarie al sostentamento e all'avanzamento sono generate entrambe dai rotori.

1.1 Caratteristiche dell'aeromobile

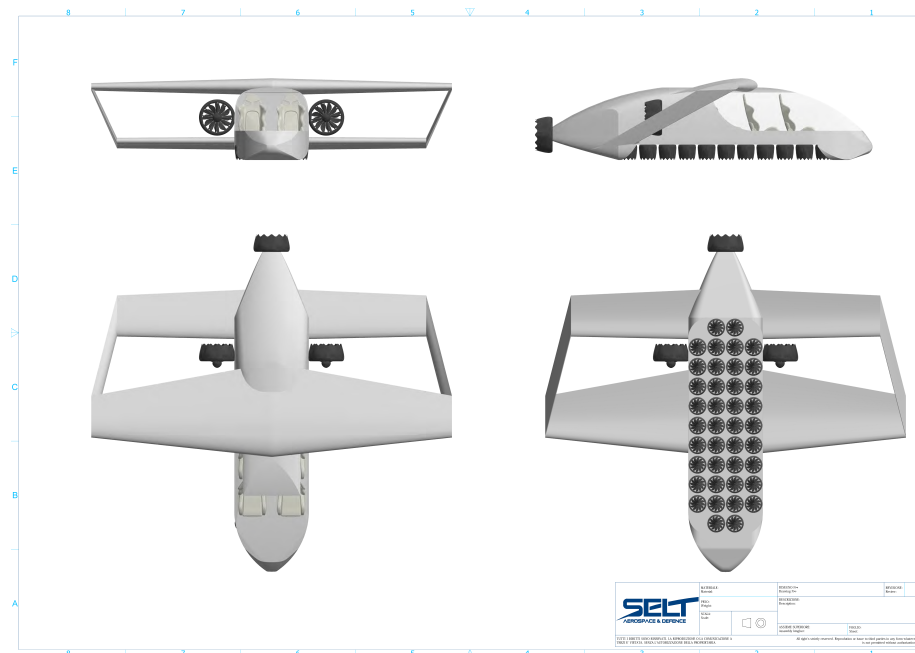


Figura 1.1: Immagini e-VTOL concesse gentilmente da *SELT S.R.L* [1]

Il velivolo e-VTOL (in Figura 1.1) oggetto della presente Tesi presenta una configurazione innovativa poiché permette di ottimizzare in maniera efficace gli aspetti legati alla propulsione in entrambe le fasi di volo dal momento che i propulsori installati funzionano in maniera indipendente nelle due fasi: infatti in prossimità del ventre della fusoliera del velivolo sono installati dei *thrusters* che hanno esclusivamente la funzione di generare la spinta verticale necessaria nella fase di decollo/atterraggio verticale (attraverso la tecnologia *ThrustPod* [6]) mentre nella parte posteriore del velivolo sono installati dei propulsori che generano la spinta orizzontale necessaria all'avanzamento in fase di crociera. Le principali specifiche dell'aeromobile sono elencate di seguito:

- *Vertical Take-Off and Landing (VTOL)*: l'aeromobile deve essere in grado di effettuare l'hovering per un totale di 4 min : decollo (60 s), atterraggio (90 s) e transizione da/per crociera (30 s) e operazioni di emergenza (60 s);
- *Completamente elettrico*: le unità di spinta sono alimentate esclusivamente da motori elettrici, in accordo con lo scopo di ridurre l'inquinamento ambientale e acustico. pertanto è necessaria una batteria che riesca a garantire l'energia richiesta ai motori elettrici per tutto il profilo di missione;
- *Autonomia*: il velivolo è progettato per operare in ambiente urbano e extraurbano per cui si richiede che un range di missione di circa 250 km da percorrere in meno di 90 min
- *Altitudine*: l'aeromobile deve essere in grado di seguire il profilo di missione illustrato in Figura 1.2 ossia:
 - decollo dal livello del mare
 - salita fino a 3000 m (dove non è richiesta la pressurizzazione)
 - crociera alla quota di 3000 m
 - discesa fino al livello del mare
- *Payload*: il velivolo deve ospitare 5 passeggeri (80 kg ciascuno) con il proprio bagaglio (10 kg) per ciascun passeggero
- *Dimensioni massime*: il velivolo non può eccedere la superficie massima di 64 m^2 e non può superare la lunghezza di 8 m perchè deve essere in grado di operare anche in piccoli ambienti come ad esempio i vertiporti

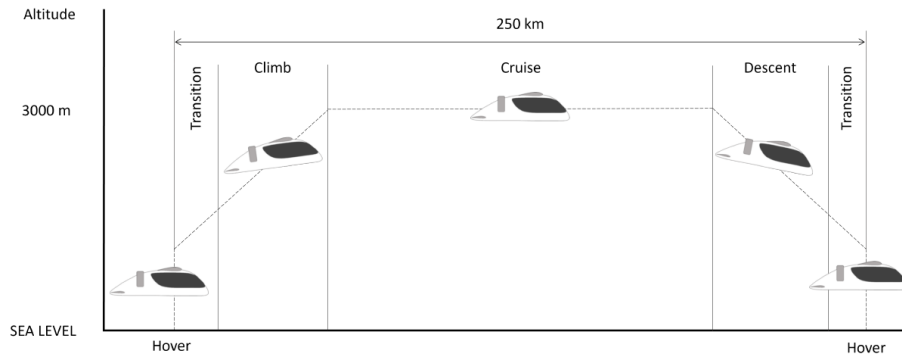


Figura 1.2: Profilo di missione

Alle specifiche appena elencate si aggiungono altri vincoli progettuali tra cui la configurazione *box wing* caratterizzata dalla presenza di due superfici portanti collegate tra loro da due paratie che fungono da impennaggi verticali: questa configurazione presenta notevoli vantaggi in termini di efficienza aerodinamica in virtù della riduzione della resistenza indotta dai vortici di estremità, in accordo con la teoria elaborata da Prandtl relativamente agli studi effettuati sulla *box wing* [9].

In Figura 1.3 è illustrato il modello semplificato del velivolo

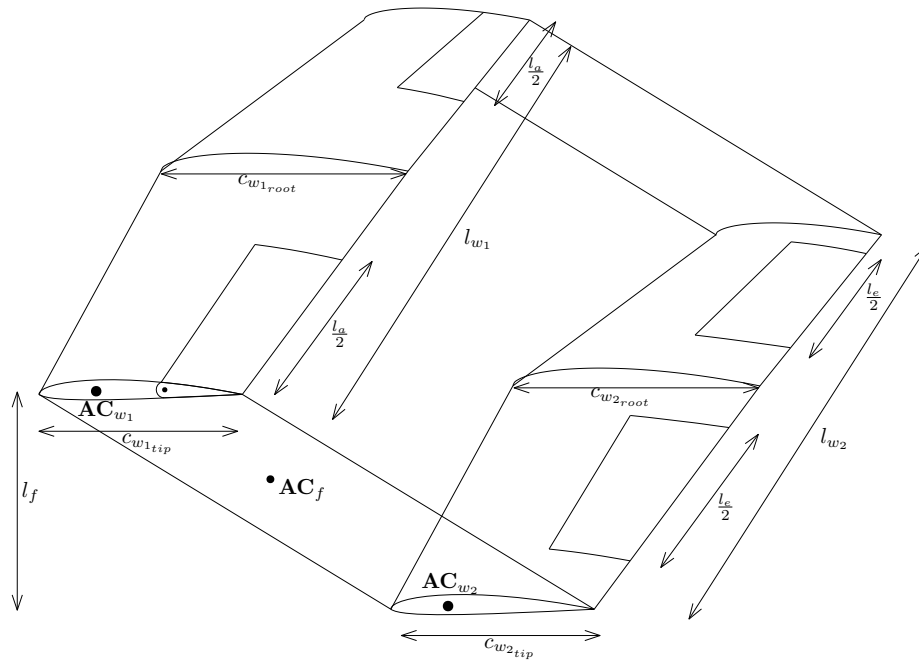


Figura 1.3: Modello semplificato del velivolo

Il profilo aerodinamico selezionato per entrambe le ali è un profilo NACA 64-618 mentre quello selezionato per gli impennaggi verticali è un profilo NACA 0008.

I dati relativi alla massa complessiva del velivolo e ai momenti d'inerzia sono riportati nella Tabella 1.1

Grandezza	Simbolo	Unità di misura	Valore
Massa complessiva del velivolo	m	kg	2000
Distanza longitudinale del bari- centro dalla prua del velivolo	x_G	m	3.15
Distanza verticale del baricentro dalla base del velivolo	z_G	m	1.4
Momento d'inerzia	I_{xx}	$kg\,m^2$	1750
Momento d'inerzia	I_{yy}	$kg\,m^2$	2500
Momento d'inerzia	I_{zz}	$kg\,m^2$	4000
Momento d'inerzia	I_{xz}	$kg\,m^2$	0

Tabella 1.1: Dati sulle masse e inerzie

1.1.1 Fase di decollo e atterraggio verticale

Lo studio dettagliato della fase di atterraggio e decollo verticale esula dallo scopo del lavoro di Tesi pertanto di seguito si presenta solamente una breve panoramica sulla tecnologia ThrustPod che sta alla base del funzionamento dei *thrusters*. Una trattazione più approfondita di questa tecnologia innovativa è riportata in [7]

Tecnologia ThrustPod

La tecnologia ThrustPod (TP) si basa su propulsori elettrici retrattili (i *thrusters*) progettati esclusivamente per generare la forza verticale per le fasi di hovering e di spostamento verticale: i *thrusters* sono disposti su più file nella parte ventrale della fusoliera e possono essere retratti all'interno della fusoliera stessa in modo tale da non influenzare negativamente l'aerodinamica del velivolo in fase di crociera. L'obiettivo di questa tecnologia, infatti è quello di evitare la presenza di superfici mobili necessarie per l'orientazione della spinta ottimizzando allo stesso tempo la fase di crociera mediante la retrazione dei *thrusters*. I vantaggi derivanti da questa configurazione sono:

- la riduzione della complessità meccanica associata alla necessità di ruotare le superfici per orientare la spinta;
- il design ottimizzato dei fan che operano quasi esclusivamente nelle condizioni di progetto. In questo modo non è necessario alcun sistema di regolazione del passo delle pale del fan o di regolazione della forma dei condotti

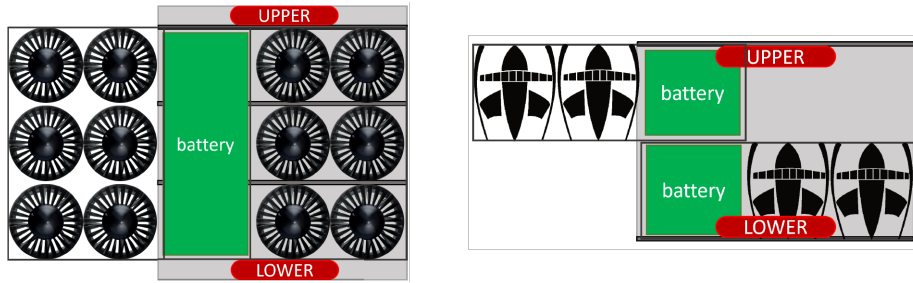


Figura 1.4: Vista dall'alto (a sinistra) e vista laterale (a destra) dei *thrusters*

La Figura 1.4 mostra due file di propulsori ciascuna delle quali costituita da sei *thrusters* disposti su 3 righe e 2 colonne e lo spazio ricavato tra i thrusters può essere utilizzato per collocarvi alcune celle della batteria.

Il design del TP è integrato al design dell'intero velivolo ed è strettamente legato al design della fusoliera, infatti, aumentando ad esempio le righe del TP aumenterebbe la lunghezza della fusoliera. Il dimensionamento del TP è un processo iterativo in quanto occorre analizzare l'effetto dei seguenti parametri:

- lunghezza della fusoliera
- numero dei thrusters
- diametro dei fan
- numero di file

In Figura 1.5 è illustrato il processo di dimensionamento del ThrustPod

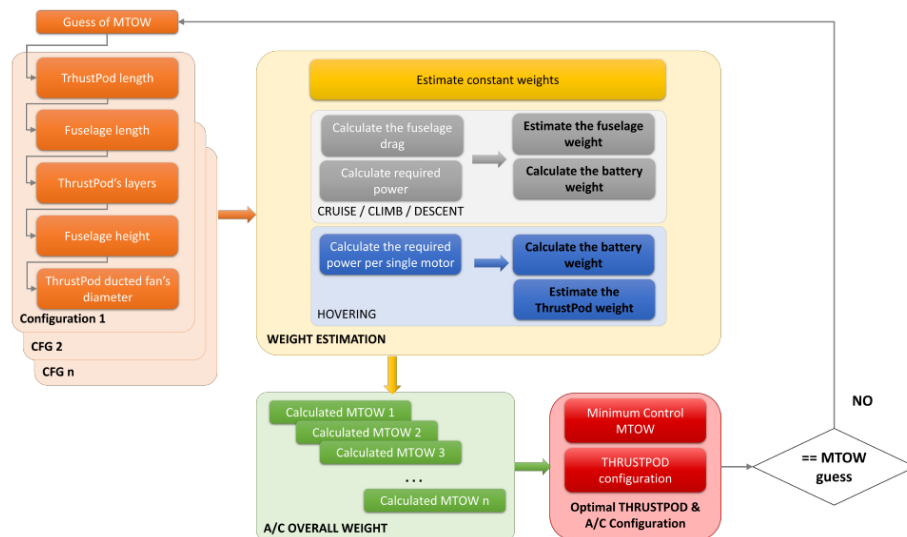


Figura 1.5: Processo di dimensionamento del ThrustPod

1.1.2 Configurazioni del velivolo

Lo scopo del presente lavoro di Tesi è quello di effettuare uno studio parametrico delle principali caratteristiche dinamiche e aerodinamiche del velivolo in condizioni di crociera, e di proporre inoltre un dimensionamento preliminare delle superfici di comando e dei principali componenti del sistema propulsivo che generano la spinta orizzontale necessaria all'avanzamento nelle fasi di crociera e salita. In particolare, i risultati presentati nel corso della trattazione della stabilità statica e dinamica fanno riferimento a tre configurazioni geometriche presentate di seguito.

Configurazione 1

Grandezza	Simbolo	Unità di misura	Valore
Superficie dell'ala w_1	S_{w_1}	m^2	7.5
Superficie dell'ala w_2	S_{w_2}	m^2	7.5
Superficie frontale della fusoliera	S_{fus}	m^2	2
Aspect Ratio dell'ala w_1	AR_{w_1}	-	4.8
Aspect Ratio dell'ala w_2	AR_{w_2}	-	4.8
Corda al tip dell'ala w_1	$c_{tip_{w_1}}$	m	1.5
Corda al tip dell'ala w_2	$c_{tip_{w_2}}$	m	1.5
Corda alla radice dell'ala w_1	$c_{root_{w_1}}$	m	1.5
Corda alla radice dell'ala w_2	$c_{root_{w_2}}$	m	1.5
Angolo di freccia dei quarti di corda dei centri aerodinamici dell'ala w_1	Λ_{w_1}	deg	2
Angolo di freccia dei quarti di corda dei centri aerodinamici dell'ala w_2	Λ_{w_2}	deg	2
Angolo diedro dell'ala w_1	Γ_{w_1}	deg	5
Angolo diedro dell'ala w_2	Γ_{w_2}	deg	5
Distanza longitudinale dalla prua del centro aerodinamico dell'ala w_1	$x_{AC_{w_1}}$	m	2.4
Distanza verticale dalla base del velivolo del centro aerodinamico dell'ala w_1	$z_{AC_{w_1}}$	m	1.6
Distanza longitudinale dalla prua del centro aerodinamico dell'ala w_2	$x_{AC_{w_2}}$	m	5
Distanza verticale dalla base del velivolo del centro aerodinamico dell'ala w_2	$z_{AC_{w_2}}$	m	0.3

Tabella 1.2: Dati relativi alla *Configurazione 1*

Configurazione 2

Grandezza	Simbolo	Unità di misura	Valore
Apertura alare dell'ala w_1	l_{w_1}	m	8
Apertura alare dell'ala w_2	l_{w_2}	m	6
Superficie frontale della fusoliera	S_{fus}	m^2	2
Corda al tip dell'ala w_1	$c_{tip_{w_1}}$	m	0.8
Corda al tip dell'ala w_2	$c_{tip_{w_2}}$	m	0.8
Corda alla radice dell'ala w_1	$c_{root_{w_1}}$	m	1.7
Corda alla radice dell'ala w_2	$c_{root_{w_2}}$	m	1
Angolo di freccia dei quarti di corda dei centri aerodinamici dell'ala w_1	Λ_{w_1}	deg	2
Angolo di freccia dei quarti di corda dei centri aerodinamici dell'ala w_2	Λ_{w_2}	deg	2
Angolo diedro dell'ala w_1	Γ_{w_1}	deg	5
Angolo diedro dell'ala w_2	Γ_{w_2}	deg	5
Distanza longitudinale dalla prua del centro aerodinamico dell'ala w_1	$x_{AC_{w_1}}$	m	2.73
Distanza verticale dalla base del velivolo del centro aerodinamico dell'ala w_1	$z_{AC_{w_1}}$	m	1.5
Distanza longitudinale dalla prua del centro aerodinamico dell'ala w_2	$x_{AC_{w_2}}$	m	5.25
Distanza verticale dalla base del velivolo del centro aerodinamico dell'ala w_2	$z_{AC_{w_2}}$	m	0.1

Tabella 1.3: Dati relativi alla *Configurazione 2*

Dal momento che entrambe le ali hanno forma trapezia, la superficie alare S_w della generica ala w può essere calcolata come:

$$S_w = \frac{(c_{tip_w} + c_{root_w})l_w}{2}; \quad (1.1)$$

E di conseguenza si ricava l'Aspect Ratio:

$$AR_w = \frac{l_w^2}{S_w} \quad (1.2)$$

Configurazione 3

Grandezza	Simbolo	Unità di misura	Valore
Apertura alare dell'ala w_1	l_{w_1}	m	8
Apertura alare dell'ala w_2	l_{w_2}	m	6
Superficie frontale della fusoliera	S_{fus}	m^2	2
Corda al tip dell'ala w_1	$c_{tip_{w_1}}$	m	0.8
Corda al tip dell'ala w_2	$c_{tip_{w_2}}$	m	0.8
Corda alla radice dell'ala w_1	$c_{root_{w_1}}$	m	1.8
Corda alla radice dell'ala w_2	$c_{root_{w_2}}$	m	1
Angolo di freccia dei quarti di corda dei centri aerodinamici dell'ala w_1	Λ_{w_1}	deg	2
Angolo di freccia dei quarti di corda dei centri aerodinamici dell'ala w_2	Λ_{w_2}	deg	2
Angolo diedro dell'ala w_1	Γ_{w_1}	deg	5
Angolo diedro dell'ala w_2	Γ_{w_2}	deg	5
Distanza longitudinale dalla prua del centro aerodinamico dell'ala w_1	$x_{AC_{w_1}}$	m	2.75
Distanza verticale dalla base del velivolo del centro aerodinamico dell'ala w_1	$z_{AC_{w_1}}$	m	1.5
Distanza longitudinale dalla prua del centro aerodinamico dell'ala w_2	$x_{AC_{w_2}}$	m	6.75
Distanza verticale dalla base del velivolo del centro aerodinamico dell'ala w_2	$z_{AC_{w_2}}$	m	0.1

Tabella 1.4: Dati relativi alla *Configurazione 3*

Capitolo 2

Sistemi di riferimento

Si introducono tre sistemi di riferimento (Figura 2.1):

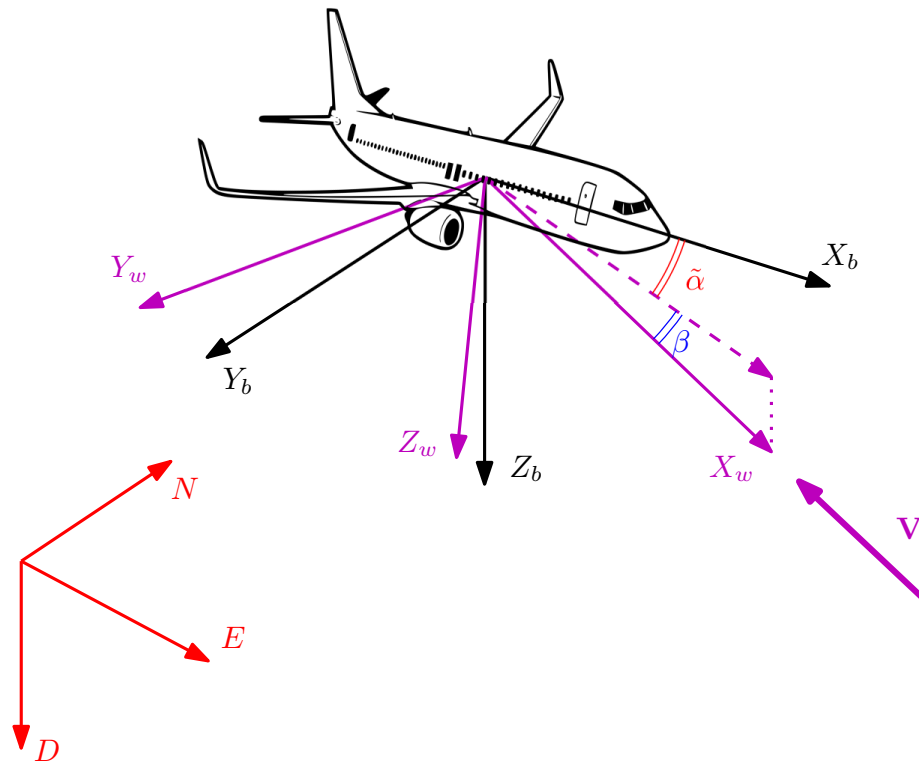


Figura 2.1: Sistemi di riferimento

Sistema di riferimento Body X_b, Y_b, Z_b a cui sono associati i versori $\mathbf{i}_b, \mathbf{j}_b, \mathbf{k}_b$ centrato nel baricentro e solidale con il velivolo dove:

- l'asse X_b è parallelo al pavimento del velivolo;
- l'asse Z_b è ortogonale all'asse X_b , giace nel piano di simmetria del velivolo ed è diretto verso il ventre del velivolo;
- l'asse Y_b invece è perpendicolare agli altri due in modo tale da formare una terna destrorsa (in pratica Y_b è rivolto verso la destra del pilota)

In questo sistema di riferimento si esprimono le componenti del momento aerodinamico, le componenti della forza aerodinamica e le componenti della velocità del velivolo

Sistema di riferimento Vento X_w, Y_w, Z_w (centrato anch'esso nel baricentro) a cui sono associati i versori $\mathbf{i}_w, \mathbf{j}_w, \mathbf{k}_w$ in cui:

- l'asse X_w ha la stessa direzione ma verso opposto al vento relativo $\mathbf{V}$
- l'asse Z_w è ortogonale a X_w , giace nel piano di simmetria del velivolo ed è uscente dal ventre del velivolo stesso
- l'asse Y_w di conseguenza in modo tale da formare una terna destrorsa

In questo sistema di riferimento è possibile esprimere le forze aerodinamiche in termini di resistenza, portanza e devianza

Sistema di riferimento NED (inerziale) X_N, Y_N, Z_N a cui sono associati i versori $\mathbf{i}_N, \mathbf{j}_N, \mathbf{k}_N$ in cui:

- l'asse X_N è rivolto verso il Nord geografico;
- l'asse Y_N è rivolto verso Est;
- l'asse Z_N è rivolto verso il basso;

2.1 Angoli e Matrici di rotazione

Le matrici di rotazione permettono di esprimere le coordinate di un generico vettore da un sistema di riferimento ad un altro, in particolare, in questa trattazione si pone particolare attenzione alla matrice di rotazione S che mette in relazione il s.d.r NED con il s.d.r $Body$ e alla matrice di rotazione R che mette in relazione il s.d.r $Vento$ con il s.d.r $Body$

2.1.1 Matrice di rotazione S

Siano ψ , θ , ϕ i tre angoli di Eulero. La matrice di rotazione S si ottiene come prodotto di tre matrici di rotazione, ciascuna delle quali corrisponde proprio ad un angolo di Eulero. E'importante notare che le rotazioni vanno eseguite necessariamente nell'ordine seguente:

1. Rotazione dell'angolo ϕ :

$$S_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$$

2. Rotazione dell'angolo θ :

$$S_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

3. Rotazione dell'angolo ψ :

$$S_\psi = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quindi la matrice di rotazione complessiva è:

$$\begin{aligned} S &= S_\phi S_\theta S_\psi \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\cos \phi \sin \psi + \sin \phi \sin \theta \cos \psi & \cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \theta \sin \psi & \sin \phi \cos \theta \\ \sin \phi \sin \psi + \cos \phi \sin \theta \cos \psi & -\sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \theta \sin \psi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2.1.2 Matrice di rotazione R

Per quanto riguarda la matrice di rotazione R , occorre effettuare una prima rotazione attorno l'asse Z_w di un angolo pari a β (denominato *angolo di sideslip*, considerato positivo se il vento relativo proviene dalla destra del pilota). A questo punto basterà effettuare una rotazione di $\tilde{\alpha}$ (denominato *angolo di incidenza geometrico*) attorno l'asse Y_w , per cui le matrici di rotazione sono:

- Matrice di rotazione per l'angolo $\tilde{\alpha}$

$$R_{\tilde{\alpha}} = \begin{bmatrix} \cos \tilde{\alpha} & 0 & -\sin \tilde{\alpha} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \tilde{\alpha} & 0 & \cos \tilde{\alpha} \end{bmatrix}$$

- Matrice di rotazione per l'angolo β

$$R_\beta = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice di rotazione risultante è:

$$R = R_{\tilde{\alpha}} R_\beta \tag{2.1}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \tilde{\alpha} \cos \beta & -\cos \tilde{\alpha} \sin \beta & -\sin \tilde{\alpha} \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ \cos \beta \sin \tilde{\alpha} & -\sin \tilde{\alpha} \sin \beta & \cos \tilde{\alpha} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

Capitolo 3

Stabilità statica

3.1 Schema a due superfici

Il velivolo può essere schematizzato come un velivolo a due superfici portanti. L'ala anteriore è dotata di alettoni mentre l'ala posteriore è dotata di equilibratore. Per identificare facilmente la posizione nel piano di simmetria di tutti i punti notevoli del velivolo, è utile introdurre un sistema di coordinate xz che ha origine nella prua del velivolo in cui l'asse x giace alla base del velivolo mentre l'asse z è ortogonale all'asse x e diretto verso l'alto [Figura 3.1].

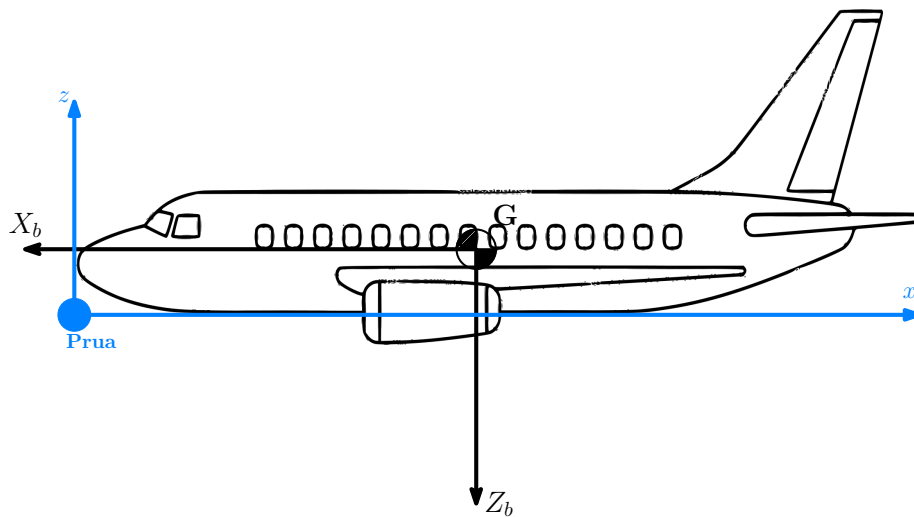


Figura 3.1: Assi di prua

Nella Figura 3.2 sono riportate le coordinate dei punti notevoli del velivolo in coordinate di prua e in coordinate body: queste ultime, inoltre, rappresentano

proprio le componenti del vettore posizione di ciascun punto notevole rispetto al baricentro espresse nel sistema di riferimento body.

La relazione che lega le coordinate nei due sistemi di riferimento è banale, infatti, indicando con (x_S, z_S) le coordinate di un generico punto S del velivolo nel sistema di riferimento di prua e con (X_S, Z_S) le coordinate di S nel sistema di riferimento body, allora:

$$\begin{cases} x_S = x_G - X_S \\ z_S = z_G - Z_S \end{cases}$$

dove (x_G, z_G) sono le coordinate del baricentro nel sistema di riferimento di prua

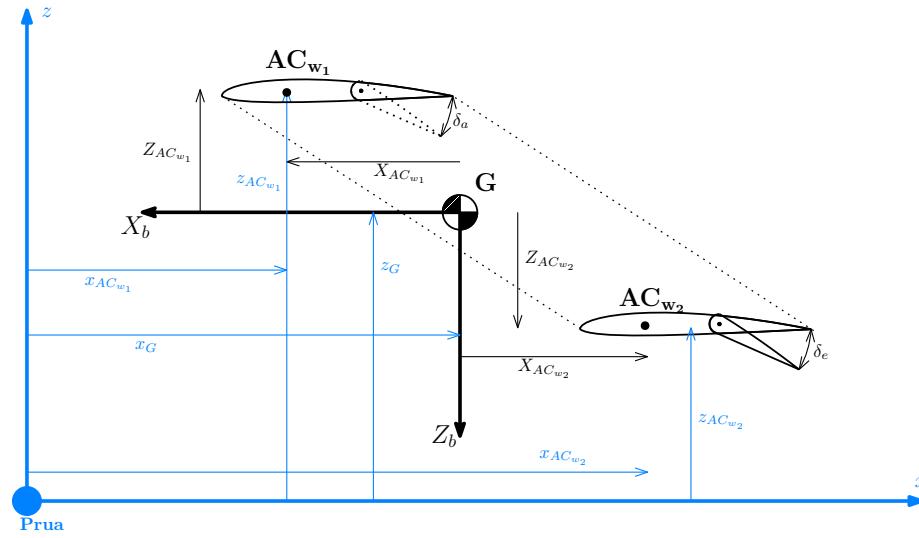


Figura 3.2: Schema a due superfici portanti

3.2 Forze e momenti aerodinamici

In questa sezione si focalizza l'attenzione sulle forze e momenti aerodinamici che agiscono sul velivolo al fine di calcolare i coefficienti aerodinamici e le relative derivate rispetto all'angolo d'incidenza aerodinamica del velivolo completo α e all'angolo di deflessione dell'equilibratore δ_e . Per procedere al calcolo delle derivate aerodinamiche occorre effettuare alcune ipotesi preliminari:

- Dal momento che in questa parte della trattazione ci si concentra esclusivamente sulle forze e momenti nel piano di simmetria, è lecito assumere nullo l'angolo di sideslip;
- Nel calcolo della portanza complessiva del velivolo si trascura il contributo della fusoliera, che però, non è trascurabile nel calcolo della resistenza complessiva;

- Per il velivolo completo e per ciascuna superficie aerodinamica si approssima che la portanza e la resistenza siano rispettivamente parallele all'asse X_b e Z_b : infatti, a rigore, resistenza e portanza sono orientate rispettivamente in direzione parallela e ortogonale alla direzione del vento relativo che investe la superficie aerodinamica considerata. Tale approssimazione è valida per angoli piccoli, ossia in condizioni molto lontane dallo stallo, per cui tale approssimazione è più che ragionevole.

3.2.1 Portanza

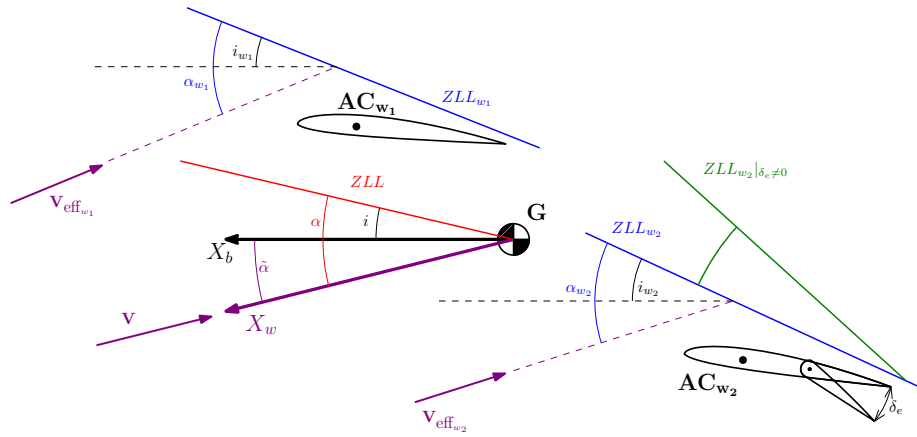


Figura 3.3: Angoli caratteristici

Ala anteriore (w_1)

In riferimento alla figura [3.3], l'angolo α_{w_1} , ossia l'*angolo di incidenza aerodinamica* dell'ala w_1 è l'angolo formato tra la direzione individuata dal vettore $\mathbf{V}_{\text{eff}w_1}$ (velocità effettiva del vento che investe l'ala w_1) e l'asse ZLL_{w_1} ossia l'asse che individua la direzione di portanza nulla dell'ala stessa mentre l'angolo i_{w_1} detto *angolo di calettamento dell'ala w_1* è l'angolo formato tra ZLL_{w_1} e l'asse X_b ed è un angolo fisso.

La portanza dell'ala è:

$$L_{w_1} = \frac{1}{2} \rho V_{\text{eff}w_1}^2 S_{w_1} C_{Lw_1} \quad (3.1)$$

Dove $V_{\text{eff}w_1} = |\mathbf{V}_{\text{eff}w_1}|$. Tuttavia è possibile approssimare $V_{\text{eff}w_1} \simeq V$ con $V = |\mathbf{V}|$. Supponendo di essere in condizioni lontane dallo stallo, il coefficiente di portanza C_{Lw_1} può essere espresso come funzione lineare di α_{w_1} :

$$C_{Lw_1} = a_{w_1} \alpha_{w_1} \quad (3.2)$$

in cui il coefficiente $a_{w_1} = \frac{\partial C_{Lw_1}}{\partial \alpha_{w_1}}$ rappresenta proprio la pendenza della curva $C_L - \alpha$ dell'ala e può essere ricavato a partire dalla pendenza della curva $a_{2D} =$

$c_L - \alpha$ del profilo bidimensionale che costituisce la sezione alare, in accordo con la seguente formulazione:

$$a_{w_1} = \frac{a_{2D}}{1 + \frac{a_{2D}}{\pi AR_{w_1} e_{w_1}}} \quad (3.3)$$

Per stimare il fattore di Oswald e_{w_1} è possibile utilizzare la relazione di Obert [8]:

$$e_{w_1} = \frac{1}{1.05 + 0.007\pi AR_{w_1}} \quad (3.4)$$

Ala posteriore (w_2)

La portanza dell'ala è:

$$L_{w_2} = \frac{1}{2} \rho V_{\text{eff}w_2}^2 S_{w_2} C_{Lw_2} \quad (3.5)$$

Analogamente a quanto fatto per l'ala w_1 si definiscono l'angolo d'incidenza aerodinamico α_{w_2} definito come l'angolo tra la direzione individuata dal vettore $\mathbf{V}_{\text{eff}w_2}$ e l'asse ZLL_{w_2} (ossia l'asse di portanza nulla in condizioni di deflessione nulla dell'equilibratore) e l'angolo di calettamento definito come l'angolo formato tra l'asse ZLL_{w_2} e l'asse X_b . Anche in questo caso è possibile approssimare $V_{\text{eff}w_2} = |\mathbf{V}_{\text{eff}w_2}| \simeq V$. È importante notare che per deflessioni non nulle dell'equilibratore, varia l'inclinazione dell'asse portanza nulla dell'ala w_2 . Il coefficiente di portanza dell'ala C_{Lw_2} è esprimibile come:

$$C_{Lw_2} = C_{Lw_2}|_{\delta_e=0} + \Delta C_{Lw_2}(\delta_e) \quad (3.6)$$

Dove $C_{Lw_2}|_{\delta_e=0}$ è il coefficiente di portanza in condizioni di deflessione nulla dell'equilibratore e pertanto vale: $C_{Lw_2}|_{\delta_e=0} = a_{w_2} \alpha_{w_2}$ mentre il termine $\Delta C_{Lw_2}(\delta_e)$ rappresenta la variazione del coefficiente di portanza in seguito alla deflessione dell'equilibratore pertanto dipende esclusivamente dalla deflessione dell'equilibratore δ_e . Per semplicità si suppone che tale relazione sia lineare:

$$\Delta C_{Lw_2}(\delta_e) = b_{w_2} \delta_e \quad (3.7)$$

In Appendice A si dimostra che il coefficiente $b_{w_2} = \frac{\partial C_{Lw_2}}{\partial \delta_e}$ può essere espresso come segue:

$$b_{w_2} = a_{w_2} \tau_{e,3D} \quad (3.8)$$

Riassumendo, il coefficiente di portanza dell'ala w_2 è una funzione lineare di α_{w_2} e δ_e :

$$C_{Lw_2} = a_{w_2} \alpha_{w_2} + b_{w_2} \delta_e \quad (3.9)$$

La stima del coefficiente $a_{w_2} = \frac{\partial C_{Lw_2}}{\partial \alpha_{w_2}}$ è identica all'ala w_1 , infatti:

$$a_{w_2} = \frac{a_{2D}}{1 + \frac{a_{2D}}{\pi AR_{w_2} e_{w_2}}} \quad (3.10)$$

dove anche in questo caso il fattore di Oswald vale:

$$e_{w_2} = \frac{1}{1.05 + 0.007\pi AR_{w_2}} \quad (3.11)$$

Velivolo completo

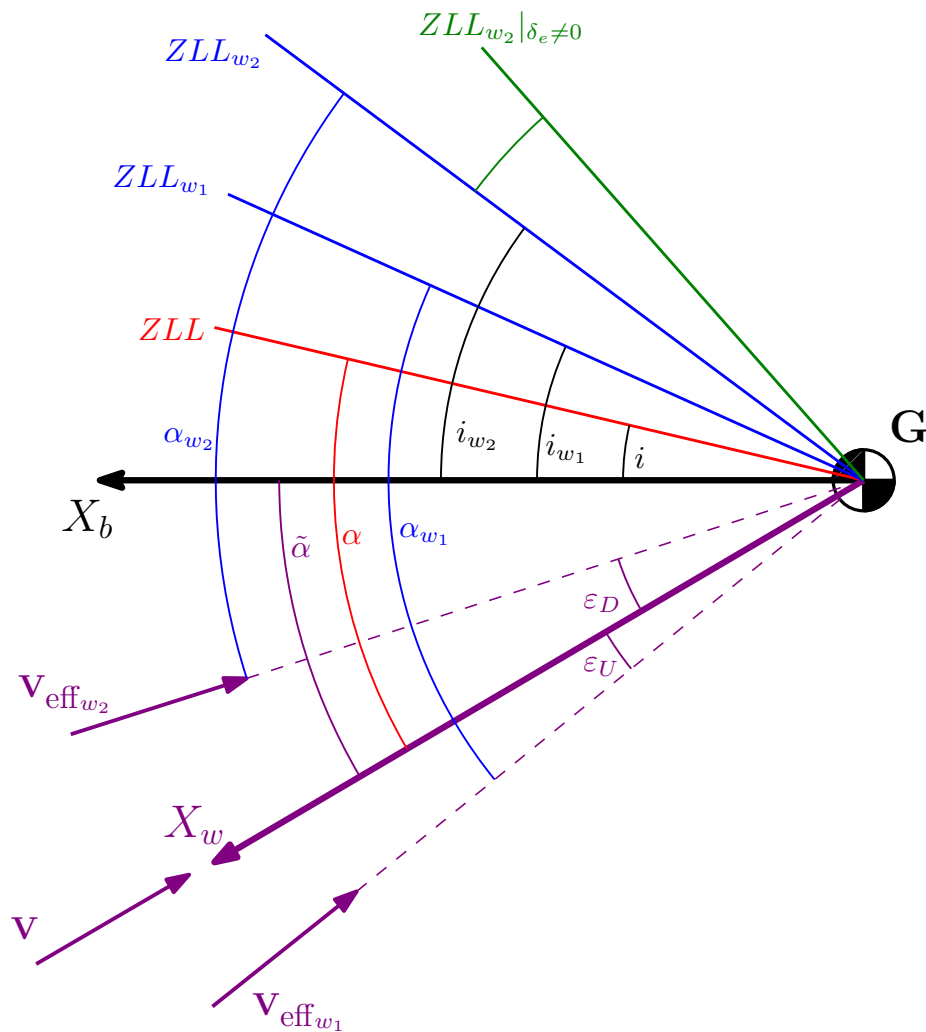


Figura 3.4: Relazione tra gli angoli caratteristici (tutti gli angoli sono rappresentati nel loro verso positivo)

Nello schema in figura [3.4] sono riportate le relazioni tra tutti gli angoli coinvolti nello studio della stabilità statica longitudinale.

Per uniformità di convenzioni utilizzate, anche per il velivolo completo si definisce l'*angolo di incidenza aerodinamico* α definito, per l'appunto, come l'angolo formato tra la direzione individuata tra il vettore $\mathbf{V}$ e l'asse ZLL ossia l'asse di portanza nulla dell'intero velivolo valutato in condizioni di deflessione nulla delle superfici mobili. È facile dimostrare che tale asse è fisso in quanto dipende

esclusivamente dalla configurazione geometrica del velivolo, pertanto anche in questo caso è possibile definire l'angolo di calettamento i come l'angolo formato tra l'asse ZLL e l'asse X_b .

Gli angoli ε_U e ε_D sono rispettivamente gli angoli di upwash e downwash che descrivono la variazione di inclinazione della velocità del vento relativo dovuta all'interferenza reciproca delle due ali. Evidenze sperimentali hanno mostrato che tali angoli sono funzioni lineari degli angoli di incidenza coinvolti. Nel caso dell'upwash occorre tener conto anche della dipendenza della deflessione dell'equilibratore e anche in questo caso si suppone una dipendenza lineare. Di conseguenza è possibile scrivere che:

$$\begin{cases} \varepsilon_D = \varepsilon_{D_0} + \varepsilon_{D_\alpha} \alpha_{w_1} \\ \varepsilon_U = \varepsilon_{U_0} + \varepsilon_{U_\alpha} \alpha_{w_2} + \varepsilon_{U_{\delta_e}} \delta_e \end{cases} \quad (3.12)$$

In cui $\varepsilon_{D_\alpha} = \frac{\partial \varepsilon_D}{\partial \alpha_{w_1}}$, $\varepsilon_{U_\alpha} = \frac{\partial \varepsilon_U}{\partial \alpha_{w_2}}$ e $\varepsilon_{U_{\delta_e}} = \frac{\partial \varepsilon_U}{\partial \delta_e}$.

Procedendo in maniera analoga a quanto fatto per il calcolo di $b_{w_2} = \frac{\partial C_{Lw_2}}{\partial \delta_e}$, si ottiene che:

$$\varepsilon_{U_{\delta_e}} = \frac{\partial \varepsilon_U}{\partial \delta_e} = \frac{\partial \varepsilon_U}{\partial \alpha_{w_2}} \tau_{e,3D} = \varepsilon_{U_\alpha} \tau_{e,3D} \quad (3.13)$$

In definitiva:

$$\begin{cases} \varepsilon_D = \varepsilon_{D_0} + \varepsilon_{D_\alpha} \alpha_{w_1} \\ \varepsilon_U = \varepsilon_{U_0} + \varepsilon_{U_\alpha} \alpha_{w_2} + \varepsilon_{U_\alpha} \tau_{e,3D} \delta_e \end{cases} \quad (3.14)$$

Tuttavia, per semplificare la trattazione, si trascura il termine associato a δ_e , infatti, dal momento che le deflessioni dell'equilibratore non sono elevate e che $\tau_{e,3D}$ è dell'ordine di 0.2-0.3, è ragionevole effettuare tale semplificazione. I termini ε_{D_0} e ε_{D_α} sono nulli in caso di assenza di svergolamento delle ali: benchè in questa trattazione si trascuri lo svergolamento alare, in fase di avamprogetto è opportuno tenere in considerazione questi due parametri al fine di conferire al codice una maggiore versatilità che permetta il riutilizzo dello stesso in fasi successive del progetto, ovvero nel momento in cui è nota la legge di svergolamento.

Facendo riferimento allo schema in 3.4 si evince che:

$$\begin{cases} \alpha_{w_1} = i_{w_1} + (\alpha - i) + \varepsilon_U \\ \alpha_{w_2} = i_{w_2} + (\alpha - i) - \varepsilon_D \end{cases} \quad (3.15)$$

Sostituendo ε_D e ε_U dalle 3.14 ed esplicitando rispetto ad α_{w_1} e α_{w_2} :

$$\begin{cases} \alpha_{w_1} = -\frac{i - i_{w_1} - \alpha - \varepsilon_{U_0} + i\varepsilon_{U_\alpha} - i_{w_2}\varepsilon_{U_\alpha} - \alpha\varepsilon_{U_\alpha} + \varepsilon_{D_0}\varepsilon_{U_\alpha}}{1 + \varepsilon_{D_\alpha}\varepsilon_{U_\alpha}} \\ \alpha_{w_2} = -\frac{i - i_{w_2} - \alpha + \varepsilon_{D_0} - i\varepsilon_{D_\alpha} + i_{w_1}\varepsilon_{D_\alpha} + \alpha\varepsilon_{D_\alpha} + \varepsilon_{U_0}\varepsilon_{D_\alpha}}{1 + \varepsilon_{D_\alpha}\varepsilon_{U_\alpha}} \end{cases} \quad (3.16)$$

E' possibile definire i seguenti coefficienti:

$$\begin{aligned}
h_0 &= -\frac{i - i_{w_1} - \varepsilon_{U_0} + i\varepsilon_{U_\alpha} - i_{w_2}\varepsilon_{U_\alpha} + \varepsilon_{D_0}\varepsilon_{U_\alpha}}{1 + \varepsilon_{D_\alpha}\varepsilon_{U_\alpha}} \\
h_\alpha &= -\frac{-1 - \varepsilon_{U_\alpha}}{1 + \varepsilon_{D_\alpha}\varepsilon_{U_\alpha}} \\
k_0 &= -\frac{i - i_{w_2} + \varepsilon_{D_0} - i\varepsilon_{D_\alpha} + i_{w_1}\varepsilon_{D_\alpha} + \varepsilon_{D_\alpha}\varepsilon_{U_0}}{1 + \varepsilon_{D_\alpha}\varepsilon_{U_\alpha}} \\
k_\alpha &= -\frac{-1 + \varepsilon_{D_\alpha}}{1 + \varepsilon_{D_\alpha}\varepsilon_{U_\alpha}}
\end{aligned}$$

In questo modo le 3.16 si semplificano:

$$\begin{cases} \alpha_{w_1} = h_0 + h_\alpha \alpha \\ \alpha_{w_2} = k_0 + k_\alpha \alpha \end{cases} \quad (3.17)$$

Dal momento che il velivolo presenta due superfici portanti occorre scegliere una superficie, una corda e un'apertura alare di riferimento per esprimere tutti i coefficienti aerodinamici: in questa trattazione si decide di scegliere superficie, corda e apertura alare dell'ala w_1 . Pertanto, la portanza del velivolo completo si esprime come:

$$L = \frac{1}{2} \rho V^2 S_{w_1} C_L \quad (3.18)$$

Trascurando il contributo della fusoliera alla portanza del velivolo completo visto che le sue ridotte dimensioni non consentono di generare una forza portante comparabile a quella generata da entrambe le ali, si ha che la portanza del velivolo complessivo è data dalla somma della portanza delle due ali:

$$L = L_{w_1} + L_{w_2} \quad (3.19)$$

Dividendo la precedente equazione per $\frac{1}{2} \rho V^2 S_{w_1}$ si ottiene che:

$$C_L = C_{L_{w_1}} + \frac{S_{w_2}}{S_{w_1}} C_{L_{w_2}} = C_{L_{w_1}} + \sigma C_{L_{w_2}} \quad (3.20)$$

dove $\sigma = \frac{S_{w_2}}{S_{w_1}}$. Sostituendo le equazioni 3.2 e 3.9 e le equazioni 3.17 si ottiene che:

$$C_L = a_{w_1} h_0 + \sigma a_{w_2} k_0 + (a_{w_1} h_\alpha + \sigma a_{w_2} k_\alpha) \alpha + (b_{w_2} \sigma) \delta_e \quad (3.21)$$

Pertanto:

$$C_L = C_{L_0} + C_{L_\alpha} \alpha + C_{L_{\delta_e}} \delta_e \quad (3.22)$$

con:

$$C_{L_0} = a_{w_1} h_0 + \sigma a_{w_2} k_0 \quad (3.23)$$

$$C_{L_\alpha} = a_{w_1} h_\alpha + \sigma a_{w_2} k_\alpha \quad (3.24)$$

$$C_{L_{\delta_e}} = b_{w_2} \sigma \quad (3.25)$$

Per come è stato definito, l'asse ZLL è l'asse di portanza nulla del velivolo completo in condizioni di equilibratore in posizione neutra, pertanto se $\delta_e = 0$ e se il vettore velocità $\mathbf{V}$ è allineato a tale asse (ossia se $\alpha = 0$), allora la portanza deve essere nulla e quindi $C_L = 0$. Quindi:

$$\vec{C}_L = C_{L_0} + C_{L_\alpha} \vec{\alpha} + C_{L_{\delta_e}} \vec{\delta_e}$$

Da cui si ottiene che $C_{L_0} = 0$. Questa condizione permette, inoltre, di calcolare il valore dell'angolo i , infatti:

$$C_{L_0} = a_{w_1} h_0 + \sigma a_{w_2} k_0 = 0$$

Sostituendo i valori di h_0 e k_0 si ottiene il valore di i :

$$i = \frac{a_{w_1}(i_{w_1} + \varepsilon_{U_0} + (i_{w_2} - \varepsilon_{D_0})\varepsilon_{U_\alpha}) + a_{w_2}(i_{w_2} - \varepsilon_{D_0} - \varepsilon_{D_\alpha}(i_{w_1} + \varepsilon_{U_0}))\sigma}{a_{w_1} + a_{w_1}\varepsilon_{U_\alpha} + a_{w_2}\sigma - a_{w_2}\varepsilon_{D_\alpha}\sigma} \quad (3.26)$$

3.2.2 Resistenza

La resistenza aerodinamica del velivolo completo è data dalla somma delle resistenze delle due ali a cui si aggiunge stavolta il contributo della fusoliera in quanto l'ordine di grandezza della resistenza della fusoliera è comparabile a quello della resistenza delle ali

Generica ala w

Trascurando gli effetti della comprimibilità, la resistenza $D_w = \frac{1}{2}\rho V^2 S_w C_{D_w}$ della generica ala w è dovuta essenzialmente a due contributi:

- Resistenza parassita $D_{w_0} = \frac{1}{2}\rho V^2 S_w C_{D_{w_0}}$ (o resistenza di profilo) che è dovuta principalmente alle forze dissipative che agiscono sul profilo (forze viscosse e distribuzione di pressione in seguito alla separazione del flusso).
- Resistenza indotta dai vortici di estremità $D_{w_i} = \frac{1}{2}\rho V^2 S_w C_{D_{w_i}}$ che invece è strettamente legata alla portanza. Dal momento che il velivolo in esame presenta due superfici portanti, occorre tenere in considerazione anche gli effetti della mutua induzione di entrambe le ali, per cui è utile ricondursi ai risultati ottenuti da Prandtl per un velivolo biplano in configurazione box-wing [9], [10]. I risultati ottenuti da Prandtl mostrano che la resistenza agente sulla generica ala w può essere espressa come:

$$D_{w_i} = \frac{L_w^2}{\pi \frac{1}{2} \rho V^2 l_w^2 e_w} K \quad (3.27)$$

Dividendo tutto per $\frac{1}{2}\rho V^2 S_w$ e tenendo conto che $AR_w = \frac{l_w^2}{S_w}$, si ottiene che:

$$C_{D_{w_i}} = \frac{C_{L_w}^2}{\pi AR_w e_w} K \quad (3.28)$$

Il fattore K è proprio il parametro che tiene in considerazione la mutua induzione delle due ali e vale circa [9], [10] :

$$K = \frac{0.44 + 0.9594 \frac{G}{l}}{0.44 + 2.219 \frac{G}{l}} \quad (3.29)$$

dove G è la distanza verticale tra le due ali e $l = \frac{l_{w1} + l_{w2}}{2}$

Pertanto:

$$D_w = D_{w_0} + D_{w_i}$$

da cui, dividendo per $\frac{1}{2}\rho V^2 S_w$ si ottiene che:

$$\begin{aligned} C_{D_w} &= C_{D_{w_0}} + C_{D_{w_i}} \rightarrow \\ \rightarrow C_{D_w} &= C_{D_{w_0}} + \frac{C_{L_w}^2}{\pi A R_w e_w} K \end{aligned} \quad (3.30)$$

Fusoliera

Si sceglie di adimensionalizzare la resistenza della fusoliera nel modo seguente:

$$D_{fus} = \frac{1}{2}\rho V^2 S_{fus} C_{D_{fus}} \quad (3.31)$$

dove S_{fus} è la superficie frontale della fusoliera. Il vantaggio di adimensionalizzare la resistenza della fusoliera in questo modo risiede nel fatto che il coefficiente $C_{D_{fus}}$ dipende esclusivamente dai parametri relativi alla fusoliera.

La resistenza della fusoliera è dovuta essenzialmente alla resistenza parassita ossia alle forze viscosi e alla distribuzione di pressioni che agiscono sul fuso nella zona di separazione, pertanto così come per le ali è ragionevole supporre $C_{D_{fus}}$ costante.

Analogamente a quanto fatto per la portanza, è possibile esprimere la resistenza del velivolo complessivo D come:

$$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S_{w_1} C_D \quad (3.32)$$

Inoltre:

$$D = D_{fus} + D_{w_1} + D_{w_2} \quad (3.33)$$

Dividendo tutto per $\frac{1}{2}\rho V^2 S_{w_1}$:

$$\begin{aligned} C_D &= \frac{S_{fus}}{S_{w_1}} C_{D_{fus}} + C_{D_{w_1}} + \frac{S_{w_2}}{S_{w_1}} C_{D_{w_2}} \\ &= \sigma_{fus} C_{D_{fus}} + C_{D_{w_1}} + \sigma C_{D_{w_2}} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Dove si è posto $\sigma_{fus} = \frac{S_{fus}}{S_{w_1}}$. Tenendo presente la 3.30 si ottiene che:

$$C_D = \sigma_{fus} C_{D_{fus}} + C_{D_{w_1}} + K \frac{C_{L_{w_1}}^2}{\pi A R_{w_1} e_{w_1}} + \sigma \left(C_{D_{w_2}} + K \frac{C_{L_{w_2}}^2}{\pi A R_{w_2} e_{w_2}} \right) \quad (3.35)$$

e ancora, sostituendo le 3.2,3.9 e le 3.17 si ottiene che:

$$C_D = \sigma_{fus} C_{D_{fus}} + C_{D_{w10}} + K \frac{(a_{w1}(h_0 + h_\alpha \alpha))^2}{\pi A R_{w1} e_{w1}} + \sigma \left(C_{D_{w20}} + K \frac{(a_{w2}(k_0 + k_\alpha \alpha) + b_{w2} \delta_e)^2}{\pi A R_{w2} e_{w2}} \right) \quad (3.36)$$

Derivando l'equazione 3.36 rispetto ad α e a δ_e si ottengono le derivate aerodinamiche della resistenza:

$$\frac{\partial C_D}{\partial \alpha} = C_{D_\alpha} = \frac{2a_{w1}^2 h_\alpha K (h_0 + h_\alpha \alpha)}{\pi A R_{w1} e_{w1}} + \frac{2a_{w2} K k_\alpha (a_{w2}(k_0 + k_\alpha \alpha) + b_{w2} \delta_e) \sigma}{\pi A R_{w2} e_{w2}} \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial C_D}{\partial \delta_e} = C_{D_{\delta_e}} = \frac{2b_{w2} K (a_{w2}(k_0 + k_\alpha \alpha) + b_{w2} \delta_e) \sigma}{\pi A R_{w2} e_{w2}} \quad (3.38)$$

È importante notare che entrambe le derivate dipendono dall'angolo di incidenza α e dalla deflessione dell'equilibratore δ_e

3.2.3 Momento aerodinamico di beccheggio

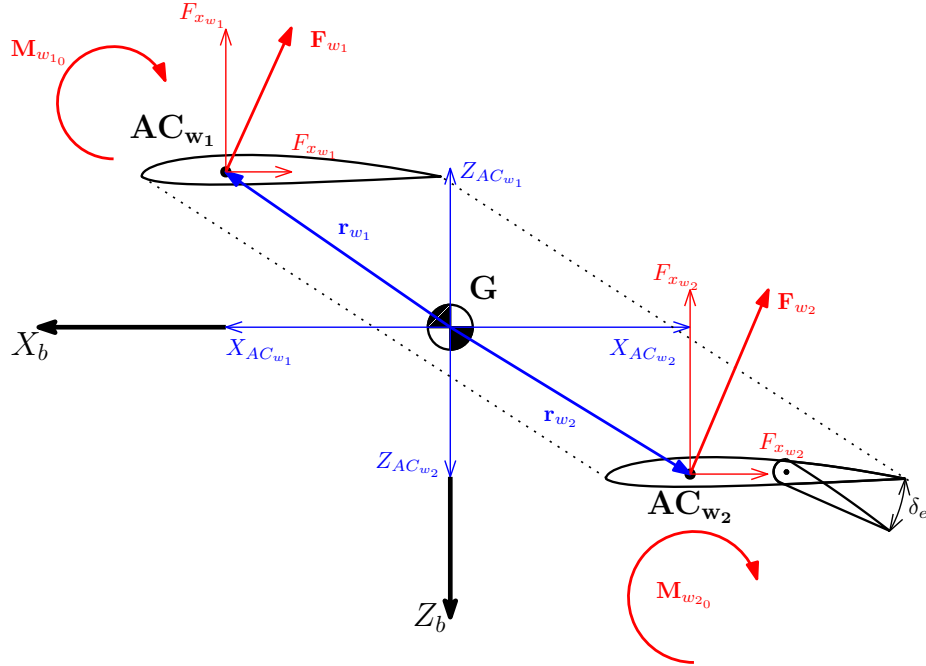


Figura 3.5: Schema delle forze e momenti agenti sul velivolo

Nel piano longitudinale il momento aerodinamico risultante rispetto al baricentro $\mathbf{M}_G$ presenta solo la componente lungo l'asse y_b in quanto tutte le forze agenti sono interamente contenute nel piano di simmetria, per cui $\mathbf{M}_G = \mathcal{M} \mathbf{j}_b = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{M} \\ 0 \end{bmatrix}_b$.

Indicando con:

- $\mathbf{r}_{AC_{w_1}} = X_{AC_{w_1}} \mathbf{i}_b + Z_{AC_{w_1}} \mathbf{k}_b = \begin{bmatrix} X_{AC_{w_1}} \\ 0 \\ Z_{AC_{w_1}} \end{bmatrix}_b$ il vettore posizione del centro aerodinamico dell'ala w_1 rispetto al baricentro;
- $\mathbf{r}_{AC_{w_2}} = X_{AC_{w_2}} \mathbf{i}_b + Z_{AC_{w_2}} \mathbf{k}_b = \begin{bmatrix} X_{AC_{w_2}} \\ 0 \\ Z_{AC_{w_2}} \end{bmatrix}_b$ il vettore posizione del centro aerodinamico dell'ala w_2 rispetto al baricentro;
- $\mathbf{M}_{w_{10}} = \mathcal{M}_{w_{10}} \mathbf{j}_b = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{M}_{w_{10}} \\ 0 \end{bmatrix}_b$ il momento focale dell'ala w_1 ;
- $\mathbf{M}_{w_{20}} = \mathcal{M}_{w_{20}} \mathbf{j}_b = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{M}_{w_{20}} \\ 0 \end{bmatrix}_b$ il momento focale dell'ala w_2 ;
- $\mathbf{F}_{w_1} = F_{x_{w_1}} \mathbf{i}_b + F_{z_{w_1}} \mathbf{k}_b = \begin{bmatrix} F_{x_{w_1}} \\ 0 \\ F_{z_{w_1}} \end{bmatrix}_b$ è la forza aerodinamica totale agente sull'ala w_1 ;
- $\mathbf{F}_{w_2} = F_{x_{w_2}} \mathbf{i}_b + F_{z_{w_2}} \mathbf{k}_b = \begin{bmatrix} F_{x_{w_2}} \\ 0 \\ F_{z_{w_2}} \end{bmatrix}_b$ è la forza aerodinamica totale agente sull'ala w_2 ;

Il momento aerodinamico è dato da:

$$\mathbf{M}_G = \mathbf{M}_{w_{10}} + \mathbf{M}_{w_{20}} + \mathbf{r}_{AC_{w_1}} \times \mathbf{F}_{w_1} + \mathbf{r}_{AC_{w_2}} \times \mathbf{F}_{w_2} \quad (3.39)$$

L'unica componente del momento aerodinamico non nulla è quella di beccheggio ossia quella lungo l'asse Y_b :

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{w_{10}} + \mathcal{M}_{w_{20}} - F_{z_{w_1}} X_{AC_{w_1}} + F_{x_{w_1}} Z_{AC_{w_1}} - F_{z_{w_2}} X_{AC_{w_2}} + F_{x_{w_2}} Z_{AC_{w_2}} \quad (3.40)$$

Ricordando l'ipotesi effettuata all'inizio del capitolo secondo la quale è possibile assumere la portanza parallela all'asse Z_b e la resistenza parallela a X_b e dal momento che le componenti della forza aerodinamica F_{x_w}, F_{z_w} di entrambe le

ali sono negative [Figura 3.5] mentre per definizione, portanza e resistenza sono positive, si può scrivere che:

$$\begin{aligned} F_{x_w} &= -D_w; \\ F_{z_w} &= -L_w; \end{aligned}$$

Per cui si ottiene che:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{w_{1_0}} + \mathcal{M}_{w_{2_0}} + L_{w_1} X_{AC_{w_1}} - D_{w_1} Z_{AC_{w_1}} + L_{w_2} X_{AC_{w_2}} - D_{w_2} Z_{AC_{w_2}} \quad (3.41)$$

Per la generica ala w si definisce la corda media aerodinamica $\bar{c}_w$:

$$\bar{c}_w = \frac{2}{S_w} \int_0^{l_w/2} c_w(y)^2 dy \quad (3.42)$$

A questo punto si esprimono i momenti in funzione dei rispettivi coefficienti adimensionali:

$$\mathcal{M}_{w_{1_0}} = \frac{1}{2} \rho V^2 S_{w_1} \bar{c}_{w_1} C_{\mathcal{M}_{w_{1_0}}} \quad (3.43)$$

$$\mathcal{M}_{w_{2_0}} = \frac{1}{2} \rho V^2 S_{w_2} \bar{c}_{w_2} C_{\mathcal{M}_{w_{2_0}}} \quad (3.44)$$

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2} \rho V^2 S_{w_1} \bar{c}_{w_1} C_{\mathcal{M}} \quad (3.45)$$

Ricordando le espressioni di portanza e resistenza, si divide l'equazione 3.41 per $\frac{1}{2} \rho V^2 S_{w_1} \bar{c}_{w_1}$, si ottiene che:

$$\begin{aligned} C_{\mathcal{M}} &= \frac{X_{AC_{w_1}}}{\bar{c}_{w_1}} C_{L_{w_1}} + \sigma \frac{X_{AC_{w_2}}}{\bar{c}_{w_1}} C_{L_{w_2}} - \frac{Z_{AC_{w_1}}}{\bar{c}_{w_1}} \left(\frac{C_{L_{w_1}}^2 K}{\pi A R_{w_1} e_{w_1}} + C_{D_{w_{1_0}}} \right) \\ &- \sigma \frac{Z_{AC_{w_2}}}{\bar{c}_{w_1}} \left(\frac{C_{L_{w_2}}^2 K}{\pi A R_{w_2} e_{w_2}} + C_{D_{w_{2_0}}} \right) + C_{\mathcal{M}_{w_{1_0}}} + \sigma \chi C_{\mathcal{M}_{w_{2_0}}} \end{aligned} \quad (3.46)$$

dove si è introdotto $\chi = \frac{\bar{c}_{w_2}}{\bar{c}_{w_1}}$

Sostituendo le 3.2, 3.9 e 3.17 si ottiene che:

$$\begin{aligned} C_{\mathcal{M}} &= \frac{X_{AC_{w_1}}}{\bar{c}_{w_1}} (a_{w_1} (h_0 + h_\alpha \alpha)) + \sigma \frac{X_{AC_{w_2}}}{\bar{c}_{w_1}} (a_{w_2} (k_0 + k_\alpha \alpha + b_{w_2} \delta_e)) \\ &- \frac{Z_{AC_{w_1}}}{\bar{c}_{w_1}} \left(\frac{(a_{w_1} (h_0 + h_\alpha \alpha))^2 K}{\pi A R_{w_1} e_{w_1}} + C_{D_{w_{1_0}}} \right) \\ &- \sigma \frac{Z_{AC_{w_2}}}{\bar{c}_{w_1}} \left(\frac{(a_{w_2} (k_0 + k_\alpha \alpha + b_{w_2} \delta_e))^2 K}{\pi A R_{w_2} e_{w_2}} + C_{D_{w_{2_0}}} \right) + C_{\mathcal{M}_{w_{1_0}}} + \sigma \chi C_{\mathcal{M}_{w_{2_0}}} \end{aligned} \quad (3.47)$$

A questo punto si deriva rispetto ad α e δ_e :

$$C_{\mathcal{M}_\alpha} = \frac{a_{w_1} h_\alpha X_{AC_{w_1}}}{\bar{c}_{w_1}} - \frac{2a_{w_1}^2 h_\alpha K Z_{AC_{w_1}} (h_0 + h_\alpha \alpha)}{AR_{w_1} \bar{c}_{w_1} e_{w_1} \pi} - \frac{2a_{w_2} K k_\alpha Z_{AC_{w_2}} (a_{w_2} (k_0 + k_\alpha \alpha) + b_{w_2} \delta_e) \sigma}{AR_{w_2} \bar{c}_{w_1} e_{w_2} \pi} \quad (3.48)$$

$$C_{\mathcal{M}_{\delta_e}} = \frac{b_{w_2} X_{AC_{w_2}} \sigma}{\bar{c}_{w_1}} - \frac{2b_{w_2} K Z_{AC_{w_2}} (a_{w_2} (k_0 + k_\alpha \alpha) + b_{w_2} \delta_e) \sigma}{AR_{w_2} \bar{c}_{w_1} e_{w_2} \pi} \quad (3.49)$$

3.3 Punto neutro del velivolo

Indicando con $\mathcal{M}_N = \frac{1}{2} \rho V^2 S_{w_1} \bar{c}_{w_1} C_{\mathcal{M}_N}$ il momento aerodinamico di beccheggio rispetto al punto neutro N , e indicando con X_N la coordinata longitudinale di N nel sistema di riferimento body, dal teorema di trasporto dei momenti si ha che:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_N + X_N L \quad (3.50)$$

Dividendo per $\frac{1}{2} \rho V^2 S_{w_1} \bar{c}_{w_1}$:

$$C_{\mathcal{M}} = C_{\mathcal{M}_N} + \frac{X_N}{\bar{c}_{w_1}} C_L \quad (3.51)$$

Derivando rispetto ad α :

$$C_{\mathcal{M}_\alpha} = \underbrace{C_{\mathcal{M}_{N_\alpha}}}_0 + \frac{X_N}{\bar{c}_{w_1}} C_{L_\alpha} \quad (3.52)$$

dove $\frac{\partial C_{\mathcal{M}_N}}{\partial \alpha} = C_{\mathcal{M}_{N_\alpha}} = 0$ per definizione di punto neutro

Ricordando la correlazione tra le coordinate di prua e quelle in assi body:

$$x_N = x_G - \bar{c}_{w_1} \frac{C_{\mathcal{M}_\alpha}}{C_{L_\alpha}} \quad (3.53)$$

3.4 Risultati ottenuti

Di seguito si presentano i risultati ottenuti per le tre configurazioni descritte nell'introduzione

3.4.1 Coefficiente di Portanza C_L

Configurazione 1

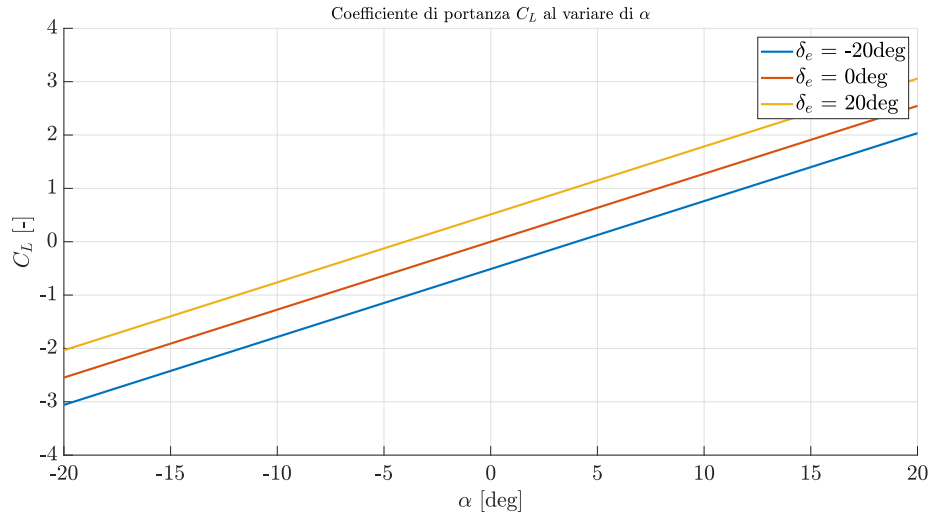


Figura 3.6: Andamento del coefficiente di portanza C_L del velivolo completo nella *Configurazione 1*

Configurazione 2

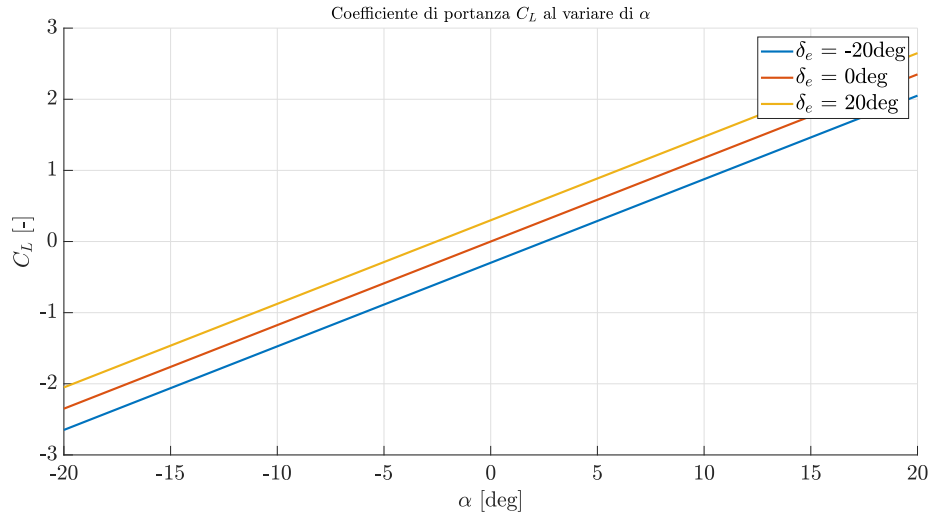


Figura 3.7: Andamento del coefficiente di portanza C_L del velivolo completo nella *Configurazione 2*

Configurazione 3

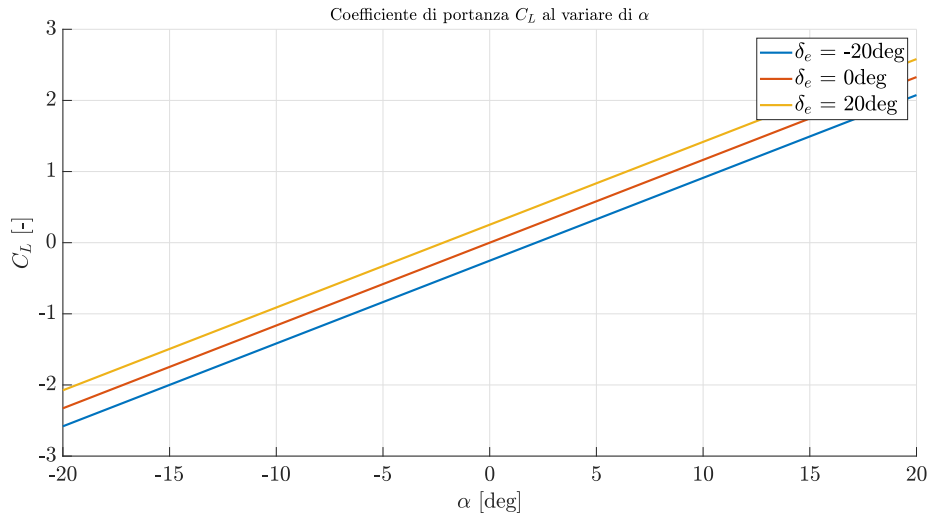


Figura 3.8: Andamento del coefficiente di portanza C_L del velivolo completo nella *Configurazione 3*

3.4.2 Coefficiente di Momento C_M

Configurazione 1

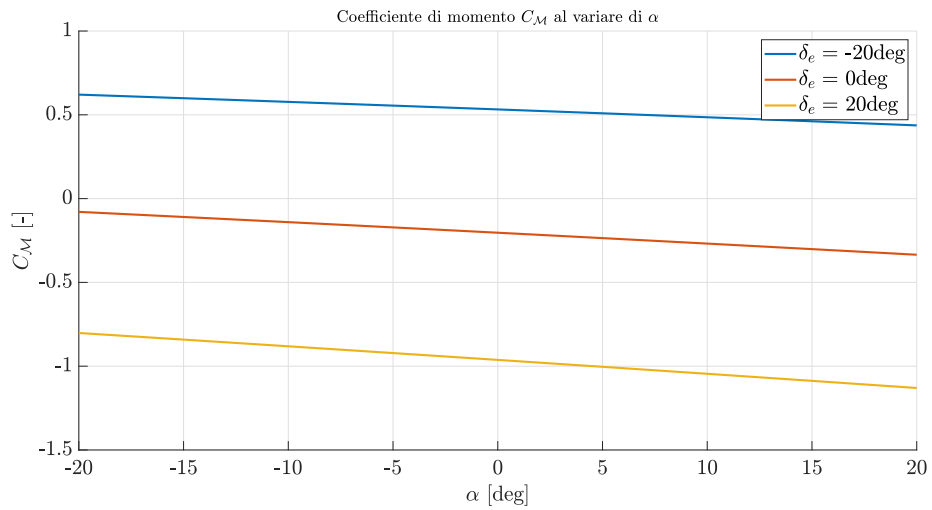


Figura 3.9: Andamento del coefficiente di momento del velivolo completo nella *Configurazione 1*

Configurazione 2

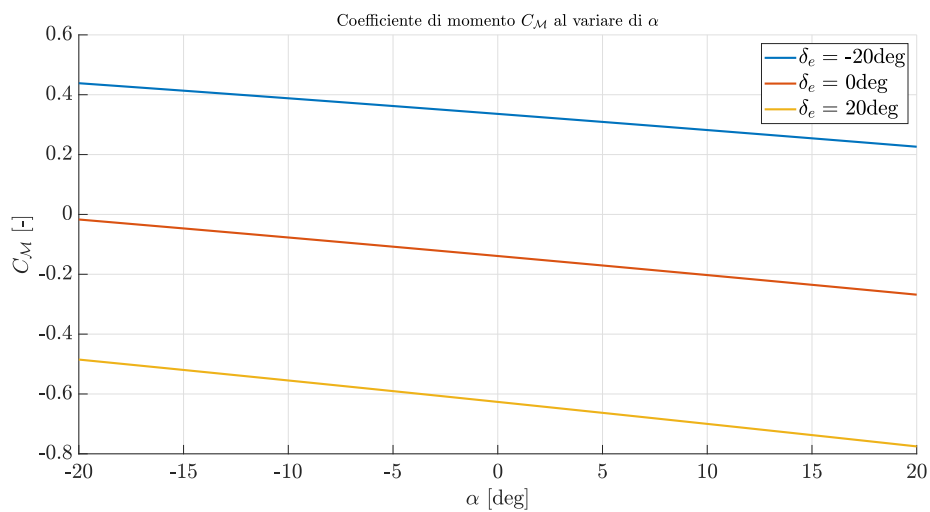


Figura 3.10: Andamento del coefficiente di momento del velivolo completo nella Configurazione 2

Configurazione 3

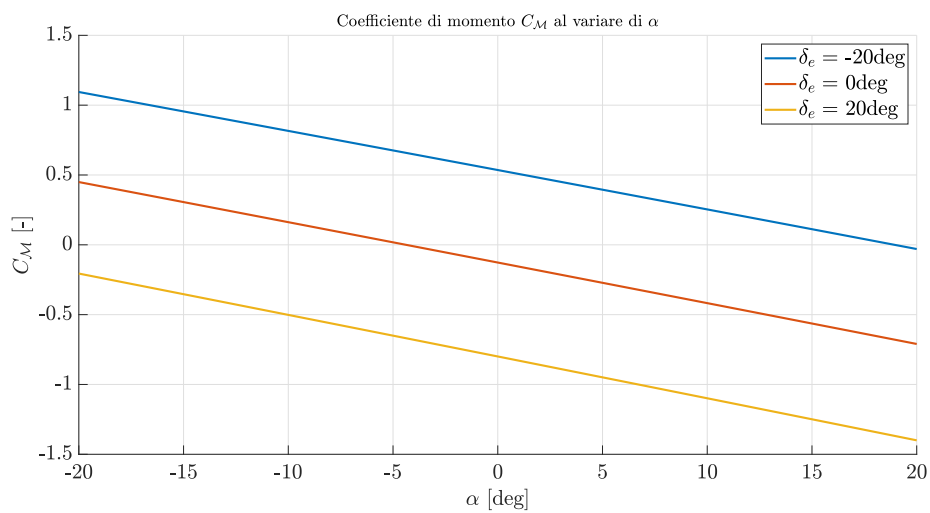


Figura 3.11: Andamento del coefficiente di momento del velivolo completo nella Configurazione 3

3.4.3 Derivata C_{L_α}

Configurazione	Derivata C_{L_α} [1/rad]
<i>Configurazione 1</i>	7.29
<i>Configurazione 2</i>	6.73
<i>Configurazione 3</i>	6.67

Tabella 3.1: Derivata C_{L_α} nelle tre configurazioni

3.4.4 Derivata $C_{L_{\delta_e}}$

Configurazione	Derivata $C_{L_{\delta_e}}$ [1/rad]
<i>Configurazione 1</i>	1.47
<i>Configurazione 2</i>	0.86
<i>Configurazione 3</i>	0.72

Tabella 3.2: Derivata $C_{L_{\delta_e}}$ nelle tre configurazioni

3.4.5 Derivata C_{M_α}

Configurazione 1

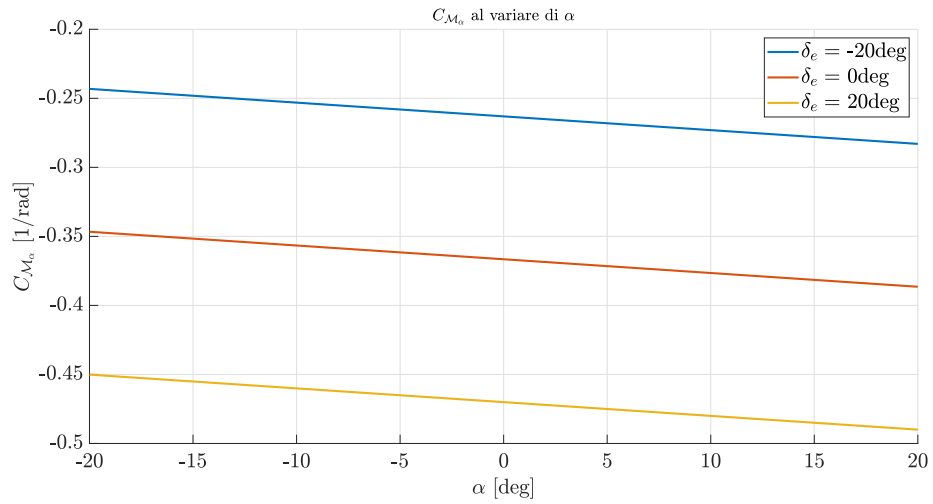


Figura 3.12: Andamento della derivata C_{M_α} nella *Configurazione 1*

Configurazione 2

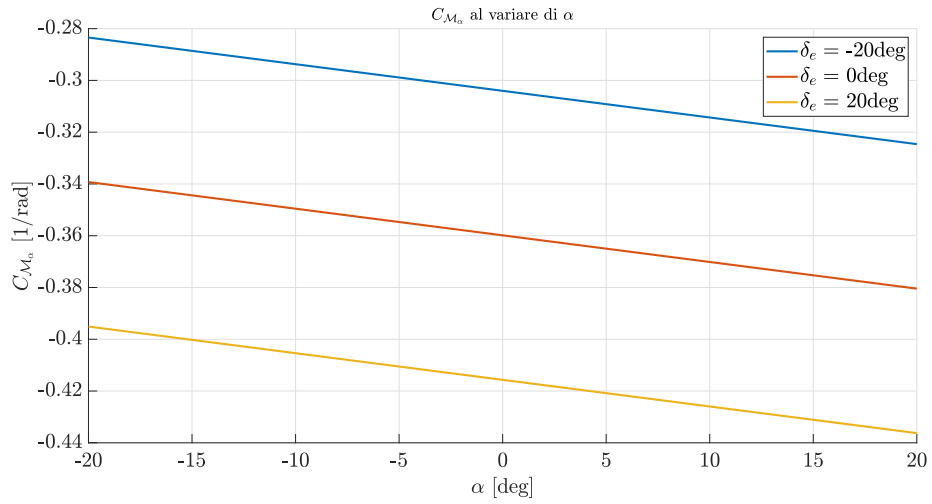


Figura 3.13: Andamento della derivata C_{M_α} nella Configurazione 2

Configurazione 3

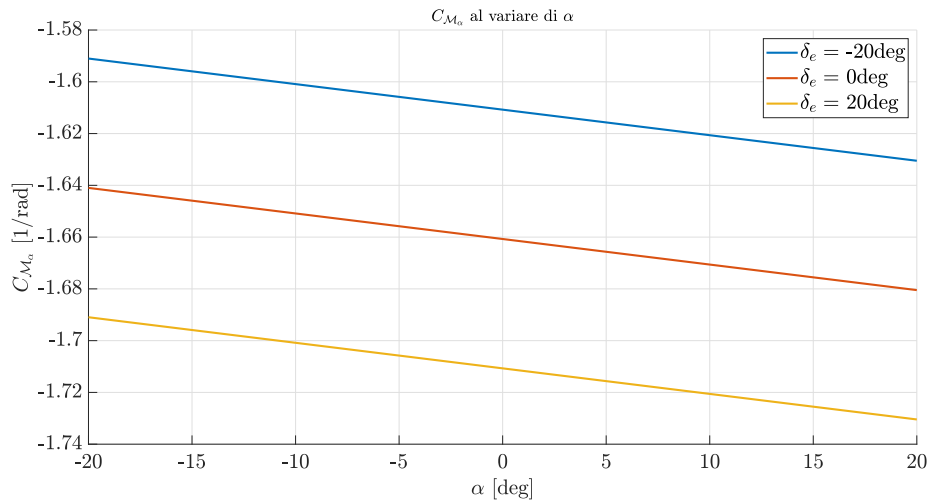


Figura 3.14: Andamento della derivata C_{M_α} nella Configurazione 3

3.4.6 Posizione del punto neutro N

Configurazione 1

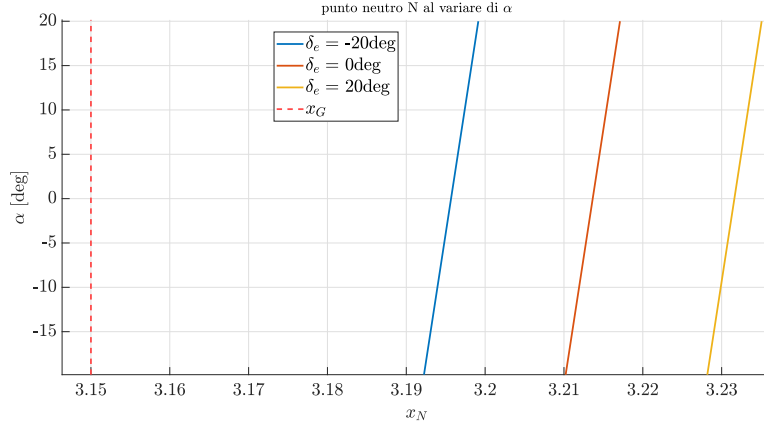


Figura 3.15: Andamento della posizione longitudinale del punto neutro nella *Configurazione 1*

Configurazione 2

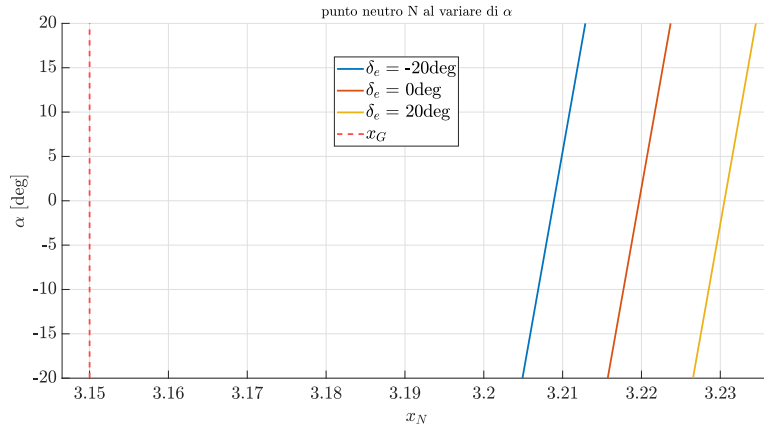


Figura 3.16: Andamento della posizione longitudinale del punto neutro nella *Configurazione 2*

Configurazione 3

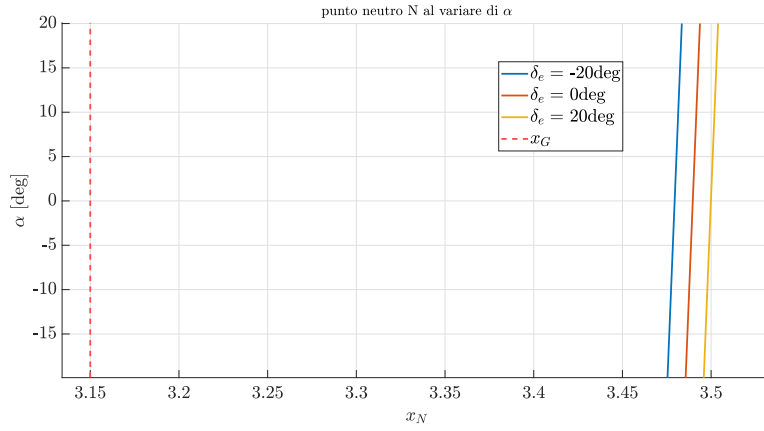


Figura 3.17: Andamento della posizione longitudinale del punto neutro nella *Configurazione 3*

3.4.7 Derivata $C_{M_{\delta_e}}$

Configurazione 1

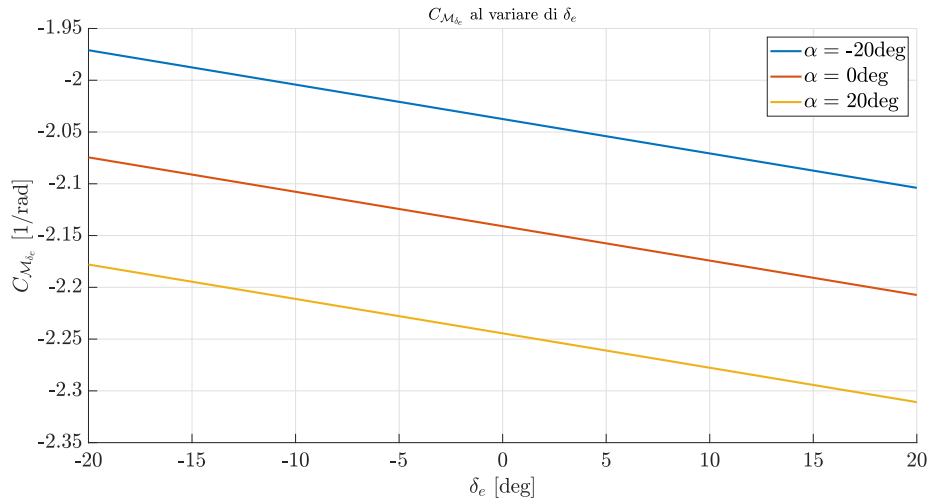


Figura 3.18: Andamento della derivata $C_{M_{\delta_e}}$ nella *Configurazione 1*

Configurazione 2

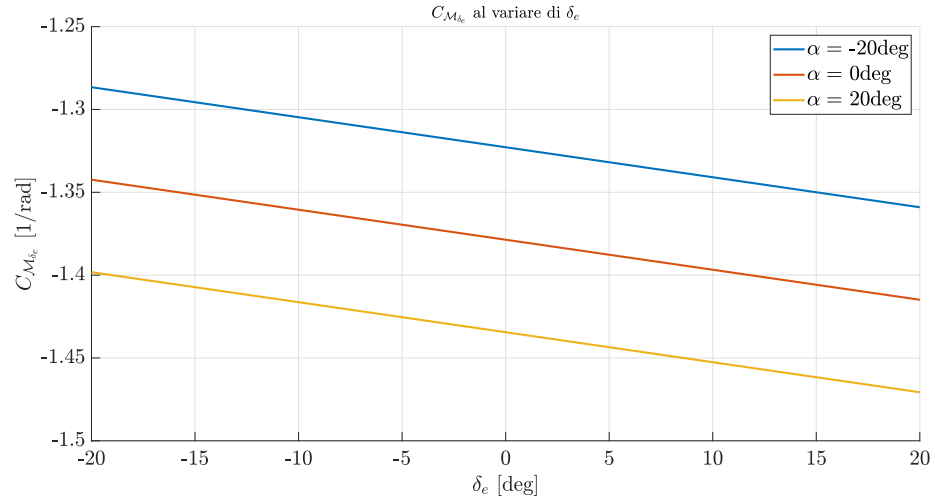


Figura 3.19: Andamento della derivata $C_{M_{\delta_e}}$ nella *Configurazione 2*

Configurazione 3

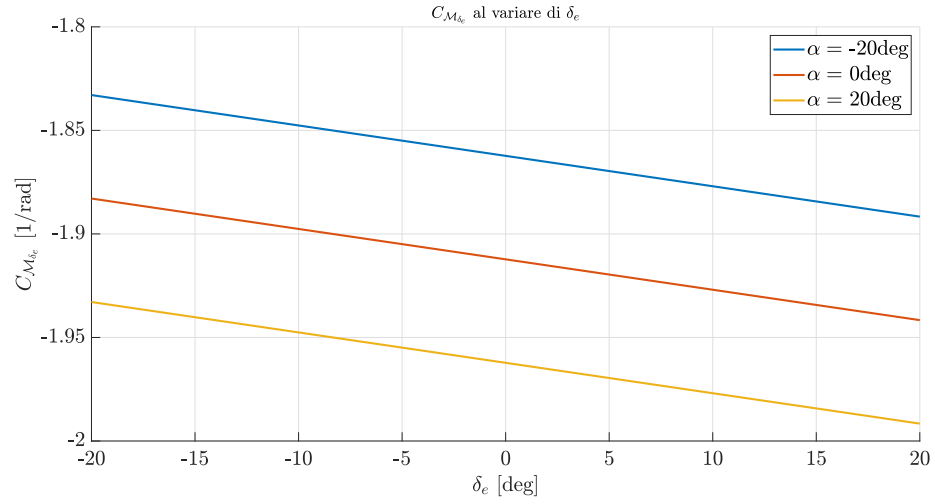


Figura 3.20: Andamento della derivata $C_{M_{\delta_e}}$ nella *Configurazione 3*

Capitolo 4

Dinamica del velivolo

4.1 Convenzioni utilizzate

4.1.1 Velocità del velivolo e velocità del vento relativo

Indicando con:

- $\mathbf{V}_G$ la velocità del baricentro del velivolo;
- $\mathbf{V}_{gust}$ la velocità di un'eventuale raffica
- $\mathbf{V}$ è la velocità del vento relativo al velivolo

tra queste grandezze esiste la seguente relazione vettoriale:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_{gust} - \mathbf{V}_G \quad (4.1)$$

Le componenti della velocità del baricentro del velivolo $\mathbf{V}_G$ in assi body è la seguente:

$$\mathbf{V}_G = u_G \mathbf{i}_b + v_G \mathbf{j}_b + w_G \mathbf{k}_b = \begin{bmatrix} u_G \\ v_G \\ w_G \end{bmatrix}_b ;$$

Per quanto riguarda la velocità del vento relativo $\mathbf{V}$ e la velocità della raffica $\mathbf{V}_{gust}$, è conveniente esprimere le loro componenti in assi body nel modo seguente:

$$\mathbf{V} = -u \mathbf{i}_b - v \mathbf{j}_b - w \mathbf{k}_b = \begin{bmatrix} -u \\ -v \\ -w \end{bmatrix}_b \quad (4.2)$$

$$\mathbf{V}_{gust} = -u_{gust} \mathbf{i}_b - v_{gust} \mathbf{j}_b - w_{gust} \mathbf{k}_b = \begin{bmatrix} -u_{gust} \\ -v_{gust} \\ -w_{gust} \end{bmatrix}_b \quad (4.3)$$

Il motivo di questa scelta è spiegato di seguito. Sostituendo le componenti appena definite nell'equazione 4.1 si ottiene che:

$$\begin{bmatrix} -u \\ -v \\ -w \end{bmatrix}_b = \begin{bmatrix} -u_{gust} \\ -v_{gust} \\ -w_{gust} \end{bmatrix}_b - \begin{bmatrix} u_G \\ v_G \\ w_G \end{bmatrix}_b$$

Da cui si ottengono le seguenti relazioni:

$$u = u_{gust} + u_G; \quad (4.4)$$

$$v = v_{gust} + v_G; \quad (4.5)$$

$$w = w_{gust} + w_G; \quad (4.6)$$

In particolare, in aria calma (assenza di raffiche) si ha che:

$$\mathbf{V}_G = -\mathbf{V}$$

ossia:

$$u = u_G;$$

$$v = v_G;$$

$$w = w_G;$$

A questo punto è chiaro il motivo per cui è conveniente aver espresso in questo modo le velocità: infatti in aria calma la distinzione tra le grandezze $\{u, v, w\}$ (ossia le componenti della velocità del vento relativo cambiate di segno) e le grandezze $\{u_G, v_G, w_G\}$ (ossia le componenti della velocità del baricentro del velivolo) è puramente formale pertanto è possibile utilizzare indistintamente le due grandezze qualora sia rispettata la condizione di aria calma. E' conveniente, inoltre, esprimere u, v, w in funzione del modulo della velocità del vento relativo ($V = |\mathbf{V}| \geq 0$) e degli angoli aerodinamici $\tilde{\alpha}$ e β . A tale scopo si esprime $\mathbf{V}$ nel sistema i riferimento vento:

$$\mathbf{V} = -V \mathbf{i}_w = \begin{bmatrix} -V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_w$$

Mentre nel sistema di riferimento body: $\mathbf{V} = -u\mathbf{i}_b - v\mathbf{j}_b - w\mathbf{k}_b = \begin{bmatrix} -u \\ -v \\ -w \end{bmatrix}_b$ Per

trovare il legame tra le componenti dei due sistemi di riferimento è sufficiente applicare la matrice di rotazione R come di seguito:

$$\begin{bmatrix} -u \\ -v \\ -w \end{bmatrix}_b = R \begin{bmatrix} -V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_w = \begin{bmatrix} -V \cos \tilde{\alpha} \cos \beta \\ -V \sin \beta \\ -V \cos \beta \sin \alpha \end{bmatrix}_b \quad (4.7)$$

Da cui si ottiene:

$$\begin{cases} u = V \cos \tilde{\alpha} \cos \beta \\ v = V \sin \beta \\ w = V \cos \beta \sin \alpha \end{cases} \quad (4.8)$$

4.1.2 Forze e momenti

Forza aerodinamica risultante $\mathbf{F}$

Come sarà meglio spiegato nel capitolo 4.3, le componenti della forza aerodinamica risultante $\mathbf{F}$ devono essere espresse nel sistema di riferimento body, tuttavia, in ambito aeronautico le componenti di $\mathbf{F}$ sono convenzionalmente espresse in assi vento, in accordo con le definizioni di resistenza D , portanza L e portanza laterale (o devianza) Q .

In particolare:

- in assi vento:

$$\mathbf{F} = -D\mathbf{i}_w - Q\mathbf{j}_w - L\mathbf{k}_w = \begin{bmatrix} -D \\ -Q \\ -L \end{bmatrix}_w ;$$

- in assi body:

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i}_b + F_y\mathbf{j}_b + F_z\mathbf{k}_b = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}_b ;$$

Analogamente a quanto fatto per la velocità del vento relativo, si applica la matrice di rotazione R per trovare il legame tra le componenti nei due sistemi di riferimento:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}_b &= R \begin{bmatrix} -D \\ -Q \\ -L \end{bmatrix}_w \\ &= \begin{bmatrix} -D \cos(\tilde{\alpha}) \cos(\beta) + L \sin(\tilde{\alpha}) + Q \cos(\tilde{\alpha}) \sin(\beta) \\ -Q \cos(\beta) - D \sin(\beta) \\ -L \cos(\tilde{\alpha}) - D \cos(\beta) \sin(\tilde{\alpha}) + Q \sin(\tilde{\alpha}) \sin(\beta) \end{bmatrix}_b \end{aligned}$$

Da cui si ottiene:

$$\begin{cases} F_x = -D \cos(\tilde{\alpha}) \cos(\beta) + L \sin(\tilde{\alpha}) + Q \cos(\tilde{\alpha}) \sin(\beta); \\ F_y = -Q \cos(\beta) - D \sin(\beta); \\ F_z = -L \cos(\tilde{\alpha}) - D \cos(\beta) \sin(\tilde{\alpha}) + Q \sin(\tilde{\alpha}) \sin(\beta) \end{cases} \quad (4.9)$$

Forza peso $\mathbf{W}$

La forza peso $\mathbf{W}$ è banalmente esprimibile in assi NED come:

$$\mathbf{W} = mg\mathbf{k}_N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix}_N$$

Dal momento che è necessario esprimere anche la forza peso in assi body, si applica la matrice di rotazione S :

$$\begin{bmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{bmatrix}_b = S \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix}_N = \begin{bmatrix} -mg \sin \theta \\ mg \cos \theta \sin \phi \\ mg \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix}_b$$

Da cui si ottiene:

$$\begin{cases} W_x = -mg \sin \theta; \\ W_y = mg \cos \theta \sin \phi; \\ W_z = mg \cos \theta \cos \phi \end{cases} \quad (4.10)$$

Forza propulsiva risultante $\mathbf{T}$

In prima approssimazione è possibile ritenere la spinta complessiva generata dai propulsori $\mathbf{T}$ allineata con l'asse X_b pertanto:

$$\mathbf{T} = T \mathbf{i}_b = \begin{bmatrix} T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_b$$

Momento delle forze aerodinamiche $\mathbf{M}_G$

Il momento aerodinamico risultante rispetto al baricentro si esprime in assi body come:

$$\mathbf{M}_G = \mathcal{L} \mathbf{i}_b + \mathcal{M} \mathbf{j}_b + \mathcal{N} \mathbf{k}_b = \begin{bmatrix} \mathcal{L} \\ \mathcal{M} \\ \mathcal{N} \end{bmatrix}_b$$

Momento della forza peso $\mathbf{M}_{W_G}$

Il momento della forza peso rispetto al baricentro è ovviamente nullo:

$$\mathbf{M}_{W_G} = 0$$

Momento delle forze propulsive $\mathbf{M}_{T_G}$

In prima approssimazione è possibile ritenere il momento generato dalle forze propulsive all'incirca nullo. Tuttavia, nel caso il velivolo sia dotato di più di un motore e in caso di avaria di uno dei motori, allora la componente di imbardata del momento generato dalle forze propulsive non è più nullo. In sostanza:

- in condizioni funzionamento regolare dei motori

$$\mathbf{M}_{T_G} = 0$$

- in condizioni di avaria di uno dei motori installati:

$$\mathbf{M}_{T_G} = \mathcal{N}_T \mathbf{k}_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathcal{N}_T \end{bmatrix}_b \neq 0$$

Momento angolare $\mathbf{H}_G$

Il momento angolare $\mathbf{H}_G$ del velivolo rispetto al suo baricentro è esprimibile come segue:

$$\mathbf{H}_G = \mathcal{I}_G \boldsymbol{\omega}$$

dove $\mathcal{I}_G$ è il tensore d'inerzia definito come:

$$\mathcal{I}_G = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Dal momento che il velivolo presenta un piano di simmetria, allora: $I_{xy} = I_{yx} = 0$; $I_{zy} = I_{zx} = 0$ per cui:

$$\mathcal{I}_G = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & -I_{xz} \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ -I_{zx} & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$

La velocità angolare del velivolo $\boldsymbol{\omega}$ si esprime in assi body come:

$$\boldsymbol{\omega} = p\mathbf{i}_b + q\mathbf{j}_b + r\mathbf{k}_b = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}_b$$

4.2 Equazioni della cinematica

Sia Ω la matrice di velocità angolare definita di seguito:

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix}$$

allora si può dimostrare che:

$$\dot{S} = -\Omega S$$

Operando tutte le sostituzioni e le semplificazioni si ottengono le *3 equazioni della cinematica*:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \frac{\sin \phi}{\cos \theta} & \frac{\cos \phi}{\cos \theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

4.3 Equazioni della dinamica

In questa sezione si ricavano le 6 equazioni della dinamica nell'ipotesi di aria calma (assenza di raffiche) e di corretto funzionamento di tutti i propulsori. Si parte scrivendo le equazioni cardinali della dinamica in forma vettoriale:

$$\mathbf{F} + \mathbf{W} + \mathbf{T} = m \left. \frac{d\mathbf{V}_G}{dt} \right|_{NED} \quad (4.12)$$

$$\mathbf{M}_G + \cancel{\mathbf{M}_{\mathbf{W}_G}} + \mathbf{M}_{\mathbf{T}_G} = \left. \frac{d\mathbf{H}_G}{dt} \right|_{NED} \quad (4.13)$$

Si può dimostrare che vale la seguente relazione (Poisson):

$$\left. \frac{d\mathbf{V}_G}{dt} \right|_{NED} = \left. \frac{d\mathbf{V}_G}{dt} \right|_{Body} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_G \quad (4.14)$$

Dove $\left. \frac{d\mathbf{V}_G}{dt} \right|_{NED}$ è la derivata nel tempo di $\mathbf{V}_G$ valutata nel sistema di riferimento NED e dunque rappresenta proprio l'accelerazione del velivolo rispetto al sistema di riferimento inerziale, mentre $\left. \frac{d\mathbf{V}_G}{dt} \right|_{Body}$ indicata anche con la notazione $\dot{\mathbf{V}}_G$ rappresenta la derivata temporale di $\mathbf{V}_G$ valutata nel sistema di riferimento body.

A questo punto si applica il teorema di Poisson anche per il calcolo di $\left. \frac{d\mathbf{H}_G}{dt} \right|_{NED}$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\mathbf{H}_G}{dt} \right|_{NED} &= \left. \frac{d\mathbf{H}_G}{dt} \right|_{Body} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}_G \\ &= \left. \frac{d(\mathcal{I}_G \boldsymbol{\omega})}{dt} \right|_{Body} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathcal{I}_G \boldsymbol{\omega}) \\ &= \mathcal{I}_G \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathcal{I}_G \boldsymbol{\omega}) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Dove, nell'ultima equazione è stata utilizzata la notazione $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \left. \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \right|_{Body}$.

A questo punto si esprimono tutte le grandezze vettoriali in assi body considerando che:

- in aria calma:

$$\begin{cases} u_G = u; \\ v_G = v; \\ w_G = w; \end{cases}$$

$$\bullet \dot{\mathbf{V}}_G = \left. \frac{d\mathbf{V}_G}{dt} \right|_{Body} = \dot{u}_G \mathbf{i}_b, \dot{v}_G \mathbf{j}_b, \dot{w}_G \mathbf{k}_b = \dot{u} \mathbf{i}_b, \dot{v} \mathbf{j}_b, \dot{w} \mathbf{k}_b = \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix}_b$$

$$\bullet \dot{\boldsymbol{\omega}} = \left. \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \right|_{Body} = \dot{p} \mathbf{i}_b, \dot{q} \mathbf{j}_b, \dot{r} \mathbf{k}_b = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix}_b$$

In questo modo si ottengono le *6 Equazioni della Dinamica*:

- Equazioni delle Forze

$$\begin{aligned} F_x + T - mg \sin \theta &= m(\dot{u} + qw - rv) \\ F_y + mg \cos \theta \sin \phi &= m(\dot{v} + ru - pw) \\ F_z + mg \cos \theta \cos \phi &= m(\dot{w} + pv - qu) \end{aligned} \quad (4.16)$$

- Equazioni dei Momenti

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= I_{xx}\dot{p} - I_{xz}\dot{r} + qr(I_{zz} - I_{yy}) - I_{xz}pq \\ \mathcal{M} &= I_{yy}\dot{q} + rq(I_{xx} - I_{zz}) + I_{xz}(p^2 - r^2) \\ \mathcal{N} &= -I_{xz}\dot{p} + I_{zz}\dot{r} + pq(I_{yy} - I_{xx}) + I_{xz}qr \end{aligned} \quad (4.17)$$

A queste equazioni vanno aggiunte le 3 equazioni della cinematica (4.11)

4.4 Condizioni di equilibrio (trim)

Le condizioni di equilibrio sono immediatamente ricavabili dalle equazioni precedenti ponendo :

$$\begin{aligned} \dot{u} &\rightarrow \dot{u}_{eq} = 0 \\ \dot{v} &\rightarrow \dot{v}_{eq} = 0 \\ \dot{w} &\rightarrow \dot{w}_{eq} = 0 \\ u &\rightarrow u_{eq} \\ v &\rightarrow v_{eq} = 0 \\ u &\rightarrow u_{eq} \\ \dot{p} &\rightarrow \dot{p}_{eq} = 0 \\ \dot{q} &\rightarrow \dot{q}_{eq} = 0 \\ \dot{r} &\rightarrow \dot{r}_{eq} = 0 \\ p &\rightarrow p_{eq} = 0 \\ q &\rightarrow q_{eq} = 0 \\ r &\rightarrow r_{eq} = 0 \\ \theta &\rightarrow \theta_{eq} \\ \phi &\rightarrow \phi_{eq} = 0 \end{aligned}$$

Le condizioni di equilibrio sono:

$$\begin{cases} F_{x_{eq}} + T_{eq} - mg \sin \theta_{eq} = 0 \\ F_{y_{eq}} = 0 \\ F_{z_{eq}} + mg \cos \theta_{eq} = 0 \\ \mathcal{L}_{eq} = 0 \\ \mathcal{M}_{eq} = 0 \\ \mathcal{N}_{eq} = 0 \end{cases} \quad (4.18)$$

Considerando che all'equilibrio $\beta_{eq} = 0$ e ipotizzando che $\tilde{\alpha}_{eq}$ sia molto piccolo, allora, in accordo con le 4.9, le componenti della forza lungo gli assi body diventano:

$$\begin{cases} F_{x_{eq}} = -D_{eq} \\ F_{y_{eq}} = -Q_{eq} \\ F_{z_{eq}} = -L_{eq} \end{cases} \quad (4.19)$$

Inoltre, per quanto riguarda l'angolo di beccheggio θ_{eq} si ha che:

$$\theta_{eq} = \tilde{\alpha}_{eq} + \gamma_{eq} = \alpha_{eq} - i + \gamma_{eq};$$

dove γ_{eq} è l'angolo di rampa che in condizioni di trim è nullo (poichè il volo è livellato); anche l'angolo di incidenza geometrica $\tilde{\alpha}_{eq} = \alpha_{eq} - i$ è un angolo molto piccolo, pertanto anche θ_{eq} è un angolo molto piccolo per cui: $\sin(\theta_{eq}) \simeq 0$, $\cos(\theta_{eq}) \simeq 1$ e dunque le condizioni di equilibrio si riducono a:

$$\begin{cases} D_{eq} = T_{eq} \\ Q_{eq} = 0 \\ L_{eq} = mg = W \\ \mathcal{L}_{eq} = 0 \\ \mathcal{M}_{eq} = 0 \\ \mathcal{N}_{eq} = 0 \end{cases} \quad (4.20)$$

In particolare la terza e la quinta equazione possono essere riscritte come:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 S_{w_1} C_{L_{eq}} = W \\ \frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 S_{w_1} \bar{c}_{w_1} C_{\mathcal{M}_{eq}} = 0 \end{cases} \quad (4.21)$$

dove $C_{L_{eq}}$ e $C_{\mathcal{M}_{eq}}$ sono entrambe funzioni di α_{eq} e δ_{eq} , infatti dalle equazioni 3.21 e 3.47 si ha che:

$$C_{L_{eq}} = (a_{w_1} h_\alpha + \sigma a_{w_2} k_\alpha) \alpha_{eq} + (b_{w_2} \sigma) \delta_{eq} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned}
C_{\mathcal{M}_{eq}} &= \frac{X_{AC_{w_1}}}{\bar{c}_{w_1}} (a_{w_1}(h_0 + h_\alpha \alpha_{eq})) + \sigma \frac{X_{AC_{w_2}}}{\bar{c}_{w_1}} (a_{w_2}(k_0 + k_\alpha \alpha_{eq} + b_{w_2} \delta_{eq})) \\
&- \frac{Z_{AC_{w_1}}}{\bar{c}_{w_1}} \left(\frac{(a_{w_1}(h_0 + h_\alpha \alpha_{eq}))^2 K}{\pi A R_{w_1} e_{w_1}} + C_{D_{w_{10}}} \right) \\
&- \sigma \frac{Z_{AC_{w_2}}}{\bar{c}_{w_1}} \left(\frac{(a_{w_2}(k_0 + k_\alpha \alpha_{eq} + b_{w_2} \delta_{eq}))^2 K}{\pi A R_{w_2} e_{w_2}} + C_{D_{w_{20}}} \right) + C_{\mathcal{M}_{w_{10}}} + \sigma \chi C_{\mathcal{M}_{w_{20}}}
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Quindi il set di equazioni ottenute è un sistema di due equazioni nelle incognite α_{eq} e δ_{eq} . Data la complessità delle funzioni, è conveniente risolvere il sistema attraverso un metodo numerico che è possibile implementare in MATLAB mediante il comando `fsolve`. Noti α_{eq} e δ_{eq} è possibile calcolare $C_{D_{eq}}$ applicando l'equazione 3.36 che per comodità viene riportata di seguito:

$$\begin{aligned}
C_{D_{eq}} &= \sigma_{fus} C_{D_{fus}} + C_{D_{w_{10}}} + K \frac{(a_{w_1}(h_0 + h_\alpha \alpha_{eq}))^2}{\pi A R_{w_1} e_{w_1}} \\
&+ \sigma \left(C_{D_{w_{20}}} + K \frac{(a_{w_2}(k_0 + k_\alpha \alpha_{eq} + b_{w_2} \delta_{eq}))^2}{\pi A R_{w_2} e_{w_2}} \right)
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Di conseguenza si calcola:

$$T_{eq} = D_{eq} = \frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 S_{w_1} C_{D_{eq}}$$

Inoltre, noti α_{eq} e δ_{eq} si calcolano le derivate:

- C_{D_α} applicando la 3.37;
- $C_{D_{\delta_e}}$ applicando la 3.38;
- $C_{\mathcal{M}_\alpha}$ applicando la 3.48;
- $C_{\mathcal{M}_{\delta_e}}$ applicando la 3.49;

4.5 Linearizzazione delle equazioni

Le equazioni della dinamica e della cinematica presentano di per sè una struttura non lineare che richiederebbe metodi risolutivi molto complessi che esulano da un'analisi preliminare effettuata in sede di avamprogetto per cui si decide di linearizzare le equazioni sfruttando la teoria delle piccole perturbazioni, prendendo come condizione di riferimento le condizioni di trim studiate nella sezione precedente.

Uno dei principali vantaggi che caratterizza questo tipo di approccio consiste nella possibilità di disaccoppiare e dunque di trattare separatamente la dinamica longitudinale e la dinamica latero-direzionale, semplificando in tal modo

l'analisi dinamica rendendo di fatto molto più immediato l'individuazione dei modi propri del velivolo.

Per procedere alla linearizzazione si esprimono tutte le variabili dinamiche e cinematiche come perturbazioni dalla condizione di trim, in particolare:

1. Variabili cinematiche:

$$\theta = \theta_{eq} + \Delta\theta;$$

$$\phi = \cancel{\phi_{eq}}^0 + \Delta\phi;$$

$$\psi = \psi_{eq} + \Delta\psi;$$

$$u = u_{eq} + \Delta u;$$

$$v = \cancel{v_{eq}}^0 + \Delta v;$$

$$w = w_{eq} + \Delta w;$$

$$\dot{u} = \cancel{\dot{u}_{eq}}^0 + \Delta\dot{u};$$

$$\dot{v} = \cancel{\dot{v}_{eq}}^0 + \Delta\dot{v};$$

$$\dot{w} = \cancel{\dot{w}_{eq}}^0 + \Delta\dot{w};$$

$$\dot{p} = \cancel{\dot{p}_{eq}}^0 + \Delta\dot{p};$$

$$p = \cancel{p_{eq}}^0 + \Delta p;$$

$$q = \cancel{q_{eq}}^0 + \Delta q;$$

$$r = \cancel{r_{eq}}^0 + \Delta r;$$

$$\dot{q} = \cancel{\dot{q}_{eq}}^0 + \Delta\dot{q};$$

$$\dot{r} = \cancel{\dot{r}_{eq}}^0 + \Delta\dot{r};$$

2. Variabili dinamiche:

$$T = T_{eq} + \Delta T;$$

$$F_x = F_{x_{eq}} + \Delta F_x;$$

$$F_y = \cancel{F_{y_{eq}}}^0 + \Delta F_y;$$

$$F_z = F_{z_{eq}} + \Delta F_z;$$

$$\mathcal{L} = \cancel{\mathcal{L}_{eq}}^0 + \Delta\mathcal{L};$$

$$\mathcal{M} = \cancel{\mathcal{M}_{eq}}^0 + \Delta\mathcal{M};$$

$$\mathcal{N} = \cancel{\mathcal{N}_{eq}}^0 + \Delta\mathcal{N};$$

Alla luce di quanto esposto in precedenza, è possibile considerare in maniera indipendente la dinamica longitudinale e quella latero-direzionale. Le forze e momenti caratteristici della dinamica longitudinale sono $F_x, F_z, \mathcal{M}, T$, mentre le variabili cinematiche caratteristiche sono u, w, q, θ e le loro derivate. Nella dinamica latero-direzionale, invece, le forze e momenti caratteristici sono $F_y, \mathcal{L}, \mathcal{N}$ mentre le variabili cinematiche caratteristiche sono v, p, r, ϕ e le loro derivate (non si considera l'angolo di azimuth ψ poichè ovviamente la dinamica non è influenzata dalla specifica direzione percorsa dal velivolo). Al fine di disaccoppiare le equazioni è necessario che forze e momenti della dinamica longitudinale siano funzione solamente delle variabili cinematiche proprie della dinamica longitudinale e viceversa per quanto riguarda la dinamica latero-direzionale, per cui è ragionevole effettuare le seguenti ipotesi:

1. Dinamica Longitudinale

- $F_x = F_x(u, w, \dot{w}, q, \delta_e)$;
- $F_z = F_z(u, w, \dot{w}, q, \delta_e)$
- $T = T(u)$
- $\mathcal{M} = \mathcal{M}(u, w, \dot{w}, q, \delta_e)$;

2. Dinamica Latero-Direzionale

- $F_y = F_y(v, p, r, \delta_r)$;
- $\mathcal{L} = \mathcal{L}(v, p, r, \delta_r, \delta_a)$;
- $\mathcal{N} = \mathcal{N}(v, p, r, \delta_r, \delta_a)$

A questo punto si esprimono tutte le perturbazioni rispetto alla configurazione di equilibrio attraverso sviluppi di Taylor.

1. Dinamica Longitudinale

- $\Delta F_x = \left. \frac{\partial F_x}{\partial u} \right|_{eq} \Delta u + \left. \frac{\partial F_x}{\partial w} \right|_{eq} \Delta w + \left. \frac{\partial F_x}{\partial \dot{w}} \right|_{eq} \Delta \dot{w} + \left. \frac{\partial F_x}{\partial q} \right|_{eq} \Delta q + \left. \frac{\partial F_x}{\partial \delta_e} \right|_{eq} \Delta \delta_e$;
- $\Delta F_z = \left. \frac{\partial F_z}{\partial u} \right|_{eq} \Delta u + \left. \frac{\partial F_z}{\partial w} \right|_{eq} \Delta w + \left. \frac{\partial F_z}{\partial \dot{w}} \right|_{eq} \Delta \dot{w} + \left. \frac{\partial F_z}{\partial q} \right|_{eq} \Delta q + \left. \frac{\partial F_z}{\partial \delta_e} \right|_{eq} \Delta \delta_e$;
- $\Delta T = \left. \frac{\partial T}{\partial u} \right|_{eq} \Delta u$

$$\bullet \Delta \mathcal{M} = \left. \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial u} \right|_{eq} \Delta u + \left. \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial w} \right|_{eq} \Delta w + \left. \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \dot{w}} \right|_{eq} \Delta \dot{w} + \left. \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial q} \right|_{eq} \Delta q + \left. \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \delta_e} \right|_{eq} \Delta \delta_e;$$

2. Dinamica Latero-Direzionale

$$\begin{aligned} \bullet \Delta F_y &= \left. \frac{\partial F_y}{\partial v} \right|_{eq} \Delta v + \left. \frac{\partial F_y}{\partial p} \right|_{eq} \Delta p + \left. \frac{\partial F_y}{\partial r} \right|_{eq} \Delta r + \left. \frac{\partial F_y}{\partial \delta_r} \right|_{eq} \Delta \delta_r; \\ \bullet \Delta \mathcal{L} &= \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} \right|_{eq} \Delta v + \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p} \right|_{eq} \Delta p + \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} \right|_{eq} \Delta r + \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \delta_r} \right|_{eq} \Delta \delta_r + \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \delta_a} \right|_{eq} \Delta \delta_a; \\ \bullet \Delta \mathcal{N} &= \left. \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial v} \right|_{eq} \Delta v + \left. \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial p} \right|_{eq} \Delta p + \left. \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial r} \right|_{eq} \Delta r + \left. \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \delta_r} \right|_{eq} \Delta \delta_r + \left. \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \delta_a} \right|_{eq} \Delta \delta_a; \end{aligned}$$

Sostituendo le precedenti relazioni nelle eq. 4.16 e 4.17 si ottiene:

$$\begin{aligned} F_{x_{eq}} + \Delta F_x + T_{eq} + \Delta T - gm \sin(\Delta\theta + \theta_{eq}) &= m(\Delta\dot{u} - \Delta r \Delta v + \Delta q(w_{eq} + \Delta w)) \\ \Delta F_y + gm \cos(\Delta\theta + \theta_{eq}) \sin(\Delta\phi) &= m(\Delta r(u_{eq} + \Delta u) + \Delta\dot{v} - \Delta p(w_{eq} + \Delta v)) \\ F_{z_{eq}} + \Delta F_z + gm \cos(\Delta\phi) \cos(\Delta\theta + \theta_{eq}) &= m(-\Delta q(u_{eq} + \Delta u) + \Delta p \Delta v + \Delta\dot{w}) \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{L} &= I_{xx} \Delta \dot{p} - I_{xz} \Delta \dot{r} - I_{xz} \Delta p \Delta q + \Delta q \Delta r (I_{zz} - I_{yy}) \\ \Delta \mathcal{M} &= I_{yy} \Delta \dot{q} + \Delta r \Delta p (I_{xx} - I_{zz}) + I_{xz} (\Delta p^2 - \Delta r^2) \\ \Delta \mathcal{N} &= -I_{xz} \Delta \dot{p} + I_{zz} \Delta \dot{r} + \Delta p \Delta q (I_{yy} - I_{xx}) + I_{xz} \Delta q \Delta r \end{aligned} \quad (4.26)$$

Tenendo presente che:

$$\begin{aligned} \cos(\theta_{eq} + \Delta\theta) &= \cos(\theta_{eq}) \cos(\Delta\theta) - \sin(\theta_{eq}) \sin(\Delta\theta) \\ \sin(\theta_{eq} + \Delta\theta) &= \sin(\theta_{eq}) \cos(\Delta\theta) + \cos(\theta_{eq}) \sin(\Delta\theta) \\ \cos(\phi_{eq} + \Delta\phi) &= \cos(\phi_{eq}) \cos(\Delta\phi) - \sin(\phi_{eq}) \sin(\Delta\phi) \\ \sin(\phi_{eq} + \Delta\phi) &= \sin(\phi_{eq}) \cos(\Delta\phi) + \cos(\phi_{eq}) \sin(\Delta\phi) \end{aligned}$$

E approssimando: $\sin(\Delta\theta) \simeq \Delta\theta$, $\sin(\Delta\phi) \simeq \Delta\phi$, $\cos(\Delta\theta) \simeq 1$, $\cos(\Delta\phi) \simeq 1$ allora le equazioni 4.25 si riducono a:

$$\begin{aligned} F_{x_{eq}} + \Delta F_x + T_{eq} + \Delta T - gm \cos(\theta_{eq}) \Delta\theta - gm \sin(\theta_{eq}) &= m(\Delta\dot{u} - \Delta r \Delta v + \Delta q(w_{eq} + \Delta w)) \\ \Delta F_y + gm \Delta\phi \cos(\theta_{eq}) - gm \Delta\phi \Delta\theta \sin(\theta_{eq}) &= m(\Delta r(u_{eq} + \Delta u) + \Delta\dot{v} - \Delta p(w_{eq} + \Delta v)) \\ F_{z_{eq}} + \Delta F_z + gm \cos(\theta_{eq}) - gm \sin(\theta_{eq}) &= m(-\Delta q(u_{eq} + \Delta u) + \Delta p \Delta v + \Delta\dot{w}) \end{aligned} \quad (4.27)$$

Inoltre, imponendo la condizione di equilibrio:

$$\begin{aligned} F_{x_{eq}} + T_{eq} - gm \sin(\theta_{eq}) &= 0 \\ F_{z_{eq}} + gm \cos(\theta_{eq}) &= 0 \end{aligned}$$

e trascurando i termini di ordine superiore al primo, il sistema si riduce a:

$$\begin{aligned} \Delta F_x + \Delta T - gm \Delta \theta \cos(\theta_{eq}) &= m(\Delta \dot{u} + w_{eq} \Delta q) \\ \Delta F_y + gm \Delta \phi \cos(\theta_{eq}) &= m(\Delta r u_{eq} + \Delta \dot{v} - \Delta p w_{eq}) \\ \Delta F_z - gm \Delta \theta \sin(\theta_{eq}) &= m(-\Delta q u_{eq} + \Delta \dot{w}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{L} &= I_{xx} \Delta \dot{p} - I_{xz} \Delta \dot{r} \\ \Delta \mathcal{M} &= I_{yy} \Delta \dot{q} \\ \Delta \mathcal{N} &= -I_{xz} \Delta \dot{p} + I_{zz} \Delta \dot{r} \end{aligned}$$

A questo punto si sostituiscono gli sviluppi di Taylor ed utilizzando la consueta notazione: $\left. \frac{\partial (\cdot)}{\partial [\cdot]} \right|_{eq} \rightarrow (\cdot)_{[\cdot]}$ per esprimere le derivate aerodinamiche, si ottengono le *Equazioni linearizzate*:

$$\begin{aligned} F_{x_u} \Delta u + F_{x_w} \Delta w + F_{x_{\dot{w}}} \Delta \dot{w} + F_{x_q} \Delta q + F_{x_{\delta_e}} \Delta \delta_e + T_u \Delta u &= m(\Delta \dot{u} + w_{eq} \Delta q) \\ F_{y_v} \Delta v + F_{y_p} \Delta p + F_{y_r} \Delta r + F_{y_{\delta_r}} \Delta \delta_r &= m(\Delta r u_{eq} + \Delta \dot{v} - \Delta p w_{eq}) \\ F_{z_u} \Delta u + F_{z_w} \Delta w + F_{z_{\dot{w}}} \Delta \dot{w} + F_{z_q} \Delta q + F_{z_{\delta_e}} \Delta \delta_e &= m(-\Delta q u_{eq} + \Delta \dot{w}) \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_v \Delta v + \mathcal{L}_p \Delta p + \mathcal{L}_r \Delta r + \mathcal{L}_{\delta_r} \Delta \delta_r + \mathcal{L}_{\delta_a} \Delta \delta_a &= I_{xx} \Delta \dot{p} - I_{xz} \Delta \dot{r} \\ \mathcal{M}_u \Delta u + \mathcal{M}_w \Delta w + \mathcal{M}_{\dot{w}} \Delta \dot{w} + \mathcal{M}_q \Delta q + \mathcal{M}_{\delta_e} \Delta \delta_e &= I_{yy} \Delta \dot{q} \\ \mathcal{N}_v \Delta v + \mathcal{N}_p \Delta p + \mathcal{N}_r \Delta r + \mathcal{N}_{\delta_r} \Delta \delta_r + \mathcal{N}_{\delta_a} \Delta \delta_a &= -I_{xz} \Delta \dot{p} + I_{zz} \Delta \dot{r} \end{aligned} \quad (4.29)$$

Capitolo 5

Dinamica longitudinale

Facendo riferimento alle 4.28 e 4.29, le equazioni della dinamica longitudinale sono:

$$\begin{aligned} F_{x_u} \Delta u + F_{x_w} \Delta w + F_{x_{\dot{w}}} \Delta \dot{w} + F_{x_q} \Delta q + F_{x_{\delta_e}} \Delta \delta_e + T_u \Delta u &= m(\Delta \dot{u} + w_{eq} \Delta q) \\ F_{z_u} \Delta u + F_{z_w} \Delta w + F_{z_{\dot{w}}} \Delta \dot{w} + F_{z_q} \Delta q + F_{z_{\delta_e}} \Delta \delta_e &= m(-\Delta q u_{eq} + \Delta \dot{w}) \\ \mathcal{M}_u \Delta u + \mathcal{M}_w \Delta w + \mathcal{M}_{\dot{w}} \Delta \dot{w} + \mathcal{M}_q \Delta q + \mathcal{M}_{\delta_e} \Delta \delta_e &= I_{yy} \Delta \dot{q} \end{aligned} \quad (5.1)$$

A queste equazioni va aggiunta l'equazione della cinematica, che, nel caso della dinamica longitudinale si riduce a:

$$\Delta \dot{\theta} = \Delta q$$

Il sistema di equazioni appena ricavato può essere riscritto nella forma:

$$\Delta \dot{\mathbf{x}}_{LON} = A_{LON} \Delta \mathbf{x}_{LON} + B_{LON} \Delta \boldsymbol{\delta}_{LON}$$

Dove :

$$\Delta \mathbf{x}_{LON} = \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta w \\ \Delta q \\ \Delta \theta \end{bmatrix}$$

è il vettore di stato della dinamica longitudinale, mentre:

$$\Delta \boldsymbol{\delta}_{LON} = [\Delta \delta_e]$$

è il vettore dei comandi della dinamica longitudinale che in realtà dovrebbe includere anche il comando di manetta, tuttavia in questa trattazione si considerano solo i comandi impartiti dal pilota sulle superfici di comando che nel caso del moto nel piano longitudinale si riducono al solo comando di equilibratore.

Per la scrittura della matrice di stato A_{LON} e la matrice di controllo B_{LON} occorre effettuare alcune considerazioni.

Nella dinamica longitudinale, il moto avviene nel piano di simmetria del velivolo, pertanto $\beta = 0$ per cui le componenti della forza aerodinamica in accordo con le 4.9 diventano:

$$\begin{aligned} F_x &= -D \cos(\tilde{\alpha}) + L \sin(\tilde{\alpha}); \\ F_z &= -L \cos(\tilde{\alpha}) - D \sin(\tilde{\alpha}); \end{aligned}$$

Analogamente a quanto fatto per le condizioni di equilibrio si approssima $\sin(\tilde{\alpha}) \simeq 0$, $\cos(\tilde{\alpha}) \simeq 1$ dal momento che è ragionevole ipotizzare che gli angoli di incidenza si mantengano sempre molto piccoli durante il moto [11] e quindi si ottiene un'ulteriore semplificazione:

$$F_x = -D; \quad (5.2)$$

$$F_z = -L; \quad (5.3)$$

Inoltre è utile esprimere le derivate rispetto a $u, w, \dot{w}$ rispettivamente in funzione delle derivate rispetto a $\alpha, \dot{w}$.

Ricordando le 4.8 e considerando che nella dinamica longitudinale $\beta = 0$ si ottiene che:

$$\begin{aligned} u &= V \cos(\tilde{\alpha}); \\ w &= V \sin(\tilde{\alpha}); \end{aligned}$$

All'equilibrio valgono le seguenti approssimazioni:

$$\begin{aligned} w_{eq} &= V_{eq} \sin(\tilde{\alpha}_{eq}) \xrightarrow{\simeq \tilde{\alpha}_{eq}} \simeq V_{eq} \tilde{\alpha}_{eq} \\ u_{eq} &= V_{eq} \cos(\tilde{\alpha}_{eq}) \xrightarrow{\simeq 1} \simeq V_{eq} \end{aligned}$$

Esprimendo tutte le grandezze mediante perturbazioni della condizione di equilibrio e considerando sempre $\sin(\cdot) \simeq (\cdot)$ $\cos(\cdot) \simeq 1$ si può scrivere che:

$$\begin{aligned} u_{eq} + \Delta u &= (V_{eq} + \Delta V) \cos(\tilde{\alpha}_{eq} + \Delta \tilde{\alpha}) \simeq V_{eq} + \Delta V; \\ w_{eq} + \Delta w &= (V_{eq} + \Delta V) \sin(\tilde{\alpha}_{eq} + \Delta \tilde{\alpha}) \simeq (V_{eq} + \Delta V)(\tilde{\alpha}_{eq} + \Delta \tilde{\alpha}); \end{aligned}$$

Sviluppando e trascurando i termini meno rilevanti (termini del second'ordine) considerando anche $\tilde{\alpha}_{eq}$ come termine infinitesimo, si ottiene che:

$$\begin{aligned} \cancel{u_{eq}} + \Delta u &= \underbrace{\cancel{V_{eq}}}_{u_{eq}} + \Delta V; \\ \cancel{w_{eq}} + \Delta w &= \underbrace{\cancel{V_{eq} \tilde{\alpha}_{eq}}}_{w_{eq}} + V_{eq} \Delta \tilde{\alpha} + \underbrace{\cancel{\Delta V \tilde{\alpha}_{eq}}}_{2^{\circ} \text{ord.}} + \underbrace{\cancel{\Delta V \Delta \tilde{\alpha}}}_{2^{\circ} \text{ord.}} \end{aligned}$$

In definitiva si ottengono le seguenti approssimazioni :

$$\begin{aligned}\Delta u &\simeq \Delta V; \\ \Delta w &\simeq V_{eq} \Delta \tilde{\alpha}; \\ \Delta \dot{w} &= V_{eq} \Delta \dot{\tilde{\alpha}}\end{aligned}$$

Inoltre, considerando che $\alpha = \tilde{\alpha} + i$ e che dunque $\Delta \alpha = \Delta \tilde{\alpha}$, allora:

$$\begin{aligned}\Delta u &\simeq \Delta V; \\ \Delta w &\simeq V_{eq} \Delta \alpha; \\ \Delta \dot{w} &= V_{eq} \Delta \dot{\alpha}\end{aligned}$$

e quindi è possibile esprimere le derivate rispetto a u , w , $\dot{w}$ come segue:

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial(.)}{\partial u} \right|_{eq} &= \left. \frac{\partial(.)}{\partial V} \right|_{eq} \\ \left. \frac{\partial(.)}{\partial w} \right|_{eq} &= \left. \frac{\partial(.)}{\partial \alpha} \right|_{eq} \left. \frac{\partial \alpha}{\partial w} \right|_{eq} = \frac{1}{V_{eq}} \left. \frac{\partial(.)}{\partial \alpha} \right|_{eq} \\ \left. \frac{\partial(.)}{\partial \dot{w}} \right|_{eq} &= \left. \frac{\partial(.)}{\partial \dot{\alpha}} \right|_{eq} \left. \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \dot{w}} \right|_{eq} = \frac{1}{V_{eq}} \left. \frac{\partial(.)}{\partial \dot{\alpha}} \right|_{eq}\end{aligned}\tag{5.4}$$

Alla luce di queste considerazioni, si nota che le derivate aerodinamiche elencate di seguito possono essere trascurate [11]:

- $F_{x_q} = - \left. \frac{\partial D}{\partial q} \right|_{eq} \simeq 0;$
- $F_{x_{\dot{w}}} = - \left. \frac{\partial D}{\partial \dot{w}} \right|_{eq} = - \frac{1}{u_{eq}} \left. \frac{\partial D}{\partial \dot{\alpha}} \right|_{eq} \simeq 0;$
- $F_{z_{\dot{w}}} = - \frac{1}{u_{eq}} \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right|_{eq} \simeq 0;$
- $F_{x_q} = - \left. \frac{\partial L}{\partial q} \right|_{eq} \simeq 0;$

Matrice di stato A_{LON} Una convenzione che si utilizza di solito per scrivere la matrice di stato è quella di dividere le derivate aerodinamiche delle forze e del momento di beccheggio rispettivamente per la massa del velivolo m e per il momento d'inerzia I_{yy} , per cui, introducendo la seguente notazione:

$$\begin{aligned}\hat{F}_{x(.)} &= \frac{F_{x(.)}}{m} \\ \hat{F}_{z(.)} &= \frac{F_{z(.)}}{m} \\ \hat{\mathcal{M}}_{(.)} &= \frac{\mathcal{M}_{(.)}}{I_{yy}}\end{aligned}$$

la matrice di stato assume la forma seguente¹:

¹Secondo la trattazione riportata in [11] è possibile trascurare w_{eq} nella scrittura della matrice di stato

$$A_{LON} = \begin{bmatrix} \hat{F}_{x_u} + \hat{T}_u & \hat{F}_{x_w} & 0 & -g \\ \hat{F}_{z_u} & \hat{F}_{z_w} & u_{eq} & 0 \\ \hat{\mathcal{M}}_u + \hat{\mathcal{M}}_{\dot{w}} \hat{F}_{z_u} & \hat{\mathcal{M}}_w + \hat{\mathcal{M}}_{\dot{w}} \hat{F}_{z_w} & \hat{\mathcal{M}}_q + \hat{\mathcal{M}}_{\dot{w}} u_{eq} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Matrice di controllo B_{LON} La matrice di controllo è data da:

$$\begin{bmatrix} \hat{F}_{x_{\delta_e}} \\ \hat{F}_{z_{\delta_e}} \\ \hat{\mathcal{M}}_{\delta_e} + \hat{\mathcal{M}}_{\dot{w}} \hat{F}_{z_{\delta_e}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

5.1 Stima delle derivate aerodinamiche della dinamica longitudinale

5.1.1 Derivate rispetto a u

Considerando che:

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2} \rho V^2 S_{w_1} C_D; \\ L &= \frac{1}{2} \rho V^2 S_{w_1} C_L; \\ \mathcal{M} &= \frac{1}{2} \rho V^2 S_{w_1} C_{\mathcal{M}}; \\ T &= \frac{1}{2} \rho V^2 S_{w_1} \bar{c}_{w_1} C_T; \end{aligned}$$

allora:

$$\begin{aligned} F_{x_u} &= - \frac{\partial D}{\partial u} \Big|_{eq} = - \frac{\partial D}{\partial V} \Big|_{eq} = - \frac{1}{2} \rho S_{w_1} \left(V_{eq}^2 \frac{\partial C_D}{\partial V} \Big|_{eq} + 2 V_{eq} C_{D_{eq}} \right) \\ F_{z_u} &= - \frac{\partial L}{\partial u} \Big|_{eq} = - \frac{\partial L}{\partial V} \Big|_{eq} = - \frac{1}{2} \rho S_{w_1} \left(V_{eq}^2 \frac{\partial C_L}{\partial V} \Big|_{eq} + 2 V_{eq} C_{L_{eq}} \right) \\ \mathcal{M}_u &= \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial u} \Big|_{eq} = \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial V} \Big|_{eq} = \frac{1}{2} \rho S_{w_1} \bar{c}_{w_1} \left(V_{eq}^2 \frac{\partial C_{\mathcal{M}}}{\partial V} \Big|_{eq} + 2 V_{eq} C_{\mathcal{M}_{eq}} \right)^0 \\ T_u &= \frac{\partial T}{\partial u} \Big|_{eq} = \frac{\partial T}{\partial V} \Big|_{eq} = \frac{1}{2} \rho S_{w_1} \left(V_{eq}^2 \frac{\partial C_T}{\partial V} \Big|_{eq} + 2 V_{eq} C_{T_{eq}} \right) \end{aligned}$$

E' possibile riesprimere le derivate $\frac{\partial C_D}{\partial V} \Big|_{eq}$ $\frac{\partial C_L}{\partial V} \Big|_{eq}$ $\frac{\partial C_{\mathcal{M}}}{\partial V} \Big|_{eq}$ $\frac{\partial C_T}{\partial V} \Big|_{eq}$ come segue:

$$\frac{\partial C_{(.)}}{\partial V} \Big|_{eq} = \frac{1}{V_s} \frac{\partial C_{(.)}}{\partial (V/V_s)} \Big|_{eq} = \frac{1}{V_s} \frac{\partial C_{(.)}}{\partial M} \Big|_{eq}$$

dove V_s è la velocità del suono relativa alle condizioni di volo di riferimento e M è il numero di Mach.

Tale derivata assumerebbe un valore rilevante nel momento in cui il velivolo volasse in regime prossimo a quello transonico ($M \simeq M_{DD}$ dove M_{DD} è il Mach di *Drag Divergence*) ma dal momento che il velivolo è progettato per volare a Mach nettamente inferiori a M_{DD} (così come tutti i velivoli appartenenti alla categoria e-VTOL) allora è più che ragionevole trascurare tale derivata.

5.1.2 Derivate rispetto a w

Derivata F_{z_w}

In riferimento a 5.3 si può scrivere che:

$$F_z = -L = -\frac{1}{2}\rho V^2 S_{w1} C_L$$

e tenendo presente le 5.4 si ha che:

$$F_{z_w} = -\left. \frac{\partial L}{\partial w} \right|_{eq} = -\frac{1}{V_{eq}} \left. \frac{\partial L}{\partial \alpha} \right|_{eq} = -\frac{1}{V_{eq}} \left(\frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 S_{w1} \left. \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right|_{eq} \right)$$

Dove $\left. \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right|_{eq}$ è banalmente il C_{L_α} calcolato nelle condizioni di trim

Derivata F_{x_w}

In riferimento a 5.2 si ha che:

$$F_x = -D = -\frac{1}{2}\rho V^2 S_{w1} C_D$$

e dunque tenendo presente le 5.4:

$$F_{x_w} = -\left. \frac{\partial D}{\partial w} \right|_{eq} = -\frac{1}{V_{eq}} \left. \frac{\partial D}{\partial \alpha} \right|_{eq} = -\frac{1}{V_{eq}} \left(\frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 S_{w1} \left. \frac{\partial C_D}{\partial \alpha} \right|_{eq} \right)$$

Dove $\left. \frac{\partial C_D}{\partial \alpha} \right|_{eq}$ è il C_{D_α} calcolato nelle condizioni di trim.

Derivata $\mathcal{M}_w$

Dal momento che:

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2}\rho V^2 S_{w1} \bar{c}_{w1} C_{\mathcal{M}}$$

e dunque:

$$\mathcal{M}_w = \frac{1}{V_{eq}} \left. \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \alpha} \right|_{eq} = \frac{1}{V_{eq}} \left(\frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 S_{w1} \bar{c}_{w1} \left. \frac{\partial C_{\mathcal{M}}}{\partial \alpha} \right|_{eq} \right)$$

Dove $\left. \frac{\partial C_{\mathcal{M}}}{\partial \alpha} \right|_{eq}$ è il $C_{\mathcal{M}_\alpha}$ calcolato nelle condizioni di trim

5.1.3 Derivate rispetto a q

Derivata $\mathcal{M}_q$

$$\mathcal{M}_q = \frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 S_{w1} \bar{c}_{w1} \left. \frac{\partial C_M}{\partial q} \right|_{eq}$$

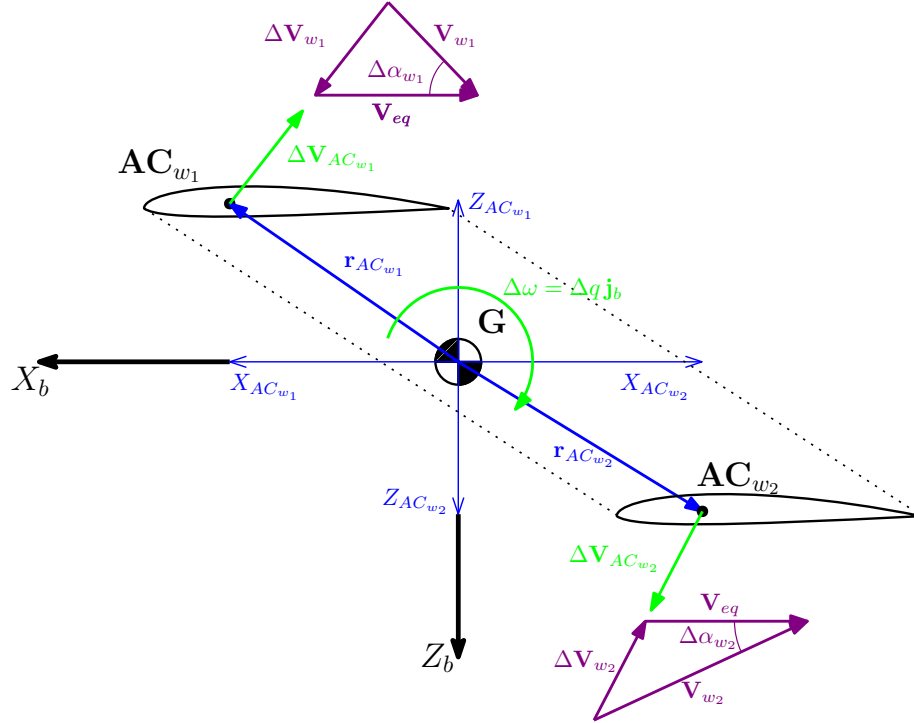


Figura 5.1: Variazione di velocità in seguito ad una variazione della rotazione di beccheggio

In riferimento alla figura 5.1 si ha che per la generica ala w , in seguito ad una variazione della velocità di beccheggio, si verifica una variazione della velocità del centro aerodinamico $\Delta \mathbf{V}_{AC_w}$ in accordo con la formula dell'atto di moto rigido:

$$\Delta \mathbf{V}_{AC_w} = \Delta \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AC_w}; \quad (5.7)$$

dove $\Delta \mathbf{V}_{AC_w} = \begin{bmatrix} \Delta u_{AC_w} \\ \Delta v_{AC_w} \\ \Delta w_{AC_w} \end{bmatrix}_b$, $\Delta \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta q \\ 0 \end{bmatrix}_b$ e $\mathbf{r}_{AC_w} = \begin{bmatrix} X_{AC_w} \\ 0 \\ Z_{AC_w} \end{bmatrix}_b$

dove X_{AC_w} e Z_{AC_w} sono le coordinate del centro aerodinamico dell'ala w nel sistema di riferimento body.

Osservazione: $\Delta \mathbf{V}_{AC_w}$ è la variazione di velocità del centro aerodinamico dell'ala ma ai fini della valutazione della variazione delle incidenze, occorre fare

riferimento alle variazioni della velocità del vento relativo all'ala $\Delta \mathbf{V}_w$ che, in aria calma, è proprio uguale ed opposta a $\Delta \mathbf{V}_{AC_w}$:

$$\Delta \mathbf{V}_w = -\Delta \mathbf{V}_{AC_w} \quad (5.8)$$

In sostanza la velocità del vento che effettivamente investe l'ala $\mathbf{V}_w$ è data dalla somma tra la velocità del vento in condizioni di equilibrio $\mathbf{V}_{eq}$ più la variazione $\Delta \mathbf{V}_w$ dovuta alla rotazione di beccheggio ²:

$$\mathbf{V}_w = \mathbf{V}_{eq} + \Delta \mathbf{V}_w \quad (5.9)$$

Analogamente a quanto fatto nel capitolo 4.1.1, si definiscono le componenti di $\Delta \mathbf{V}_w$ come segue:

$$\Delta \mathbf{V}_w = \begin{bmatrix} -\Delta u_w \\ -\Delta v_w \\ -\Delta w_w \end{bmatrix}_b$$

Allora applicando la 5.8:

$$\begin{bmatrix} -\Delta u_w \\ -\Delta v_w \\ -\Delta w_w \end{bmatrix}_b = - \begin{bmatrix} \Delta u_{AC_w} \\ \Delta v_{AC_w} \\ \Delta w_{AC_w} \end{bmatrix}_b \quad (5.10)$$

da cui:

$$\begin{cases} \Delta u_w = \Delta u_{AC_w} \\ \Delta v_w = \Delta v_{AC_w} \\ \Delta w_w = \Delta w_{AC_w} \end{cases} \quad (5.11)$$

E' ragionevole ritenere che la componente di $\Delta \mathbf{V}_w$ che contribuisce maggiormente alla variazione d'incidenza è la terza ossia:

$$\Delta w_w = -\Delta q X_{AC_w}$$

Pertanto è possibile approssimare la variazione dell'angolo di incidenza nel modo seguente:

$$\Delta \alpha_w \simeq \frac{\Delta w_w}{V_{eq}} = -\frac{\Delta q X_{AC_w}}{V_{eq}} \quad (5.12)$$

Da cui segue una variazione di portanza pari a:

$$\Delta L_w = \frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 S_{w1} a_w \Delta \alpha_w \quad (5.13)$$

Trascurando la variazione della resistenza, si ha che la variazione della forza aerodinamica agente sull'ala è pari a:

$$\Delta \mathbf{F}_w = -\Delta L_w \mathbf{k}_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\Delta L_w \end{bmatrix}_b \quad (5.14)$$

²per quanto riguarda il modulo della velocità è ragionevole supporre che $|\mathbf{V}_w| \simeq |\mathbf{V}_{eq}| = V_{eq}$

Da cui si ricava la variazione di momento aerodinamico:

$$\Delta \mathbf{M}_{\mathbf{G}_w} = \mathbf{r}_{AC_w} \times \Delta \mathbf{F}_w \quad (5.15)$$

Come è ovvio che sia, la variazione del momento aerodinamico riguarda esclusivamente la componente di beccheggio:

$$\Delta \mathcal{M}_w = X_{AC_w} \Delta L_w \quad (5.16)$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{M} &= \Delta \mathcal{M}_{w_1} + \Delta \mathcal{M}_{w_2} \\ &= -\frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 (X_{AC_{w_1}} a_{w_1} \Delta \alpha_{w_1} + X_{AC_{w_2}} a_{w_2} \Delta \alpha_{w_2}) \\ &= -\frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 \left(\frac{X_{AC_{w_1}}^2 a_{w_1} \Delta q}{V_{eq}} + \frac{X_{AC_{w_2}}^2 a_{w_2} \Delta q}{V_{eq}} \right) \end{aligned}$$

Da cui si ottiene:

$$\begin{aligned} \Delta C_{\mathcal{M}} &= \frac{\Delta \mathcal{M}}{\frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 S w_1 \bar{c}_{w_1}} \\ &= -\frac{\Delta q}{S_{w_1} \bar{c}_{w_1} V_{eq}} (X_{AC_{w_1}}^2 a_{w_1} + X_{AC_{w_2}}^2 a_{w_2}) \end{aligned}$$

Infine:

$$\left. \frac{\partial C_{\mathcal{M}}}{\partial q} \right|_{eq} = -\frac{1}{S_{w_1} \bar{c}_{w_1} V_{eq}} (X_{AC_{w_1}}^2 a_{w_1} + X_{AC_{w_2}}^2 a_{w_2}) \quad (5.17)$$

5.1.4 Derivate rispetto ad $\dot{\alpha}$

Derivata $\mathcal{M}_{\dot{w}}$

$$\mathcal{M}_{\dot{w}} = \frac{1}{V_{eq}} \left. \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \dot{\alpha}} \right|_{eq} = \frac{1}{2} \rho V_{eq} S_{w_1} \bar{c}_{w_1} \left. \frac{\partial C_{\mathcal{M}}}{\partial \dot{\alpha}} \right|_{eq}$$

Questa derivata è dovuta al ritardo che impiega il downwash ad instaurarsi sull'ala w_2 poichè, in seguito ad una variazione di incidenza, il flusso proveniente dall'ala w_1 deve percorrere una distanza pari a quella tra i fuochi delle due ali prima di investire l'ala w_2 . Per quanto riguarda l'upwash sull'ala w_1 , invece, questo ragionamento non è applicabile dal momento che in questo caso, la deflessione delle linee di flusso avviene per mezzo di propagazione dei disturbi che viaggiano alla velocità del suono per cui è ragionevole considerare che le linee di flusso sull'ala w_1 si deflettano quasi istantaneamente.

Dalla trattazione riportata in [11] è possibile esprimere la variazione di incidenza dell'ala w_2 come:

$$\Delta \alpha_{w_2} = \frac{\partial \varepsilon_D}{\partial t} \Delta t = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \Delta t = \varepsilon_{D\alpha} \dot{\alpha} \Delta t \quad (5.18)$$

dove

$$\Delta t = \frac{d_{AC}}{V_{eq}}; \quad d_{AC} = |X_{AC_{w_1}} - X_{AC_{w_2}}|$$

Allora la variazione di portanza è :

$$\begin{aligned} \Delta L_{w_2} &= \frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 S_{w_2} a_{w_2} \Delta \alpha_{w_2} \\ &= \frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 S_{w_2} a_{w_2} \varepsilon_{D_\alpha} \dot{\alpha} \frac{d_{AC}}{V_{eq}} \end{aligned}$$

mentre la variazione di momento è:

$$\Delta \mathcal{M} = X_{AC_{w_2}} \Delta L_{w_2}$$

da cui:

$$\begin{aligned} \Delta C_{\mathcal{M}} &= \frac{\Delta \mathcal{M}}{\frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 S_{w_1} \bar{c}_{w_1}} \\ &= \frac{S_{w_2}}{S_{w_1}} \frac{X_{AC_{w_2}}}{\bar{c}_{w_1}} a_{w_2} \varepsilon_{D_\alpha} \dot{\alpha} \frac{d_{AC}}{V_{eq}} \end{aligned}$$

Infine si ottiene:

$$\left. \frac{\partial C_{\mathcal{M}}}{\partial \dot{\alpha}} \right|_{eq} = \frac{S_{w_2}}{S_{w_1}} \frac{X_{AC_{w_2}}}{\bar{c}_{w_1}} a_{w_2} \varepsilon_{D_\alpha} \frac{d_{AC}}{V_{eq}} \quad (5.19)$$

Capitolo 6

Dinamica latero-direzionale

Facendo riferimento alle 4.28 e 4.29, le equazioni della dinamica latero-direzionale sono:

$$\begin{aligned} F_{y_v} \Delta v + F_{y_p} \Delta p + F_{y_r} \Delta r + F_{y_{\delta_r}} \Delta \delta_r &= m(\Delta r u_{eq} + \Delta \dot{v} - \Delta p w_{eq}) \\ \mathcal{L}_v \Delta v + \mathcal{L}_p \Delta p + \mathcal{L}_r \Delta r + \mathcal{L}_{\delta_r} \Delta \delta_r + \mathcal{L}_{\delta_a} \Delta \delta_a &= I_{xx} \Delta \dot{p} - I_{xz} \Delta \dot{r} \\ \mathcal{N}_v \Delta v + \mathcal{N}_p \Delta p + \mathcal{N}_r \Delta r + \mathcal{N}_{\delta_r} \Delta \delta_r + \mathcal{N}_{\delta_a} \Delta \delta_a &= -I_{xz} \Delta \dot{p} + I_{zz} \Delta \dot{r} \end{aligned} \quad (6.1)$$

A queste equazioni andrebbero aggiunte due equazioni della cinematica, che, nel caso della dinamica longitudinale si riducono a:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\phi} &= \Delta p \\ \Delta \dot{\psi} &= \Delta r \end{aligned}$$

tuttavia, la seconda equazione è superflua ai fini dello studio della dinamica in quanto il moto del velivolo non è influenzato dall'angolo ψ .

Anche in questo caso, il sistema di equazioni può essere riscritto nella forma:

$$\Delta \dot{\mathbf{x}}_{LAT} = A_{LAT} \Delta \mathbf{x}_{LAT} + B_{LAT} \Delta \boldsymbol{\delta}_{LAT}$$

Dove :

$$\Delta \mathbf{x}_{LAT} = \begin{bmatrix} \Delta v \\ \Delta p \\ \Delta r \\ \Delta \phi \end{bmatrix}$$

è il vettore di stato della dinamica latero-direzionale, mentre:

$$\Delta \boldsymbol{\delta}_{LAT} = \begin{bmatrix} \Delta \delta_a \\ \Delta \delta_r \end{bmatrix}$$

è il vettore dei comandi della dinamica latero-direzionale che include i comandi di alettone e di timone.

Matrice di stato A_{LAT} Analogamente alla dinamica longitudinale, è convenzione esprimere le derivate aerodinamiche dividendole per la massa se si tratta di forze oppure dividendole per il rispettivo momento d'inerzia se si tratta di momenti. Dunque, indicando con:

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{L}}_{(\cdot)} &= \frac{\mathcal{L}_{(\cdot)}}{I_{xx}} \\ \hat{\mathcal{N}}_{(\cdot)} &= \frac{\mathcal{N}_{(\cdot)}}{I_{zz}} \\ \hat{F}_{y_{(\cdot)}} &= \frac{F_{y_{(\cdot)}}}{m}\end{aligned}$$

e introducendo un'ulteriore notazione:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{(\cdot)}^* &= \frac{\hat{\mathcal{L}}_{(\cdot)}}{1 - \frac{I_{xz}^2}{I_{xx}I_{zz}}} \\ \mathcal{N}_{(\cdot)}^* &= \frac{\hat{\mathcal{N}}_{(\cdot)}}{1 - \frac{I_{xz}^2}{I_{xx}I_{zz}}}\end{aligned}$$

la matrice di stato diventa:

$$A_{LAT} = \begin{bmatrix} \hat{F}_{y_v} & \hat{F}_{y_p} & -(u_{eq} - \hat{F}_{y_r}) & g \\ \mathcal{L}_v^* + \frac{I_{xz}}{I_{xx}}\mathcal{N}_v^* & \mathcal{L}_p^* + \frac{I_{xz}}{I_{xx}}\mathcal{N}_p^* & \mathcal{L}_r^* + \frac{I_{xz}}{I_{xx}}\mathcal{N}_r^* & 0 \\ \mathcal{N}_v^* + \frac{I_{xz}}{I_{zz}}\mathcal{L}_v^* & \mathcal{N}_p^* + \frac{I_{xz}}{I_{zz}}\mathcal{L}_p^* & \mathcal{N}_r^* + \frac{I_{xz}}{I_{zz}}\mathcal{L}_r^* & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

Matrice di controllo La matrice di controllo è la seguente:

$$\begin{bmatrix} 0 & \hat{F}_{y_{\delta_r}} \\ \mathcal{L}_{\delta_a}^* + \frac{I_{xz}}{I_{xx}}\mathcal{N}_{\delta_a}^* & \mathcal{L}_{\delta_r}^* + \frac{I_{xz}}{I_{xx}}\mathcal{N}_{\delta_r}^* \\ \mathcal{N}_{\delta_a}^* + \frac{I_{xz}}{I_{zz}}\mathcal{L}_{\delta_a}^* & \mathcal{N}_{\delta_r}^* + \frac{I_{xz}}{I_{zz}}\mathcal{L}_{\delta_r}^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

6.1 Stime delle derivate aerodinamiche della dinamica latero-direzionale

Prima di procedere al calcolo delle derivate aerodinamiche è opportuno fare alcune considerazioni. In riferimento alle 4.9 si evince che la forza F_y può essere espressa come:

$$F_y = -Q \cos(\beta) - D \sin(\beta)$$

Considerando (ragionevolmente) l'angolo β molto piccolo allora:

$$F_y = -Q; \quad (6.4)$$

E' conveniente inoltre, esprimere le derivate aerodinamiche rispetto a β anzicchè rispetto a v considerando che :

$$v = V \sin(\beta)$$

e analogamente a quanto fatto per la dinamica longitudinale si esprimono le grandezze rispetto all'equilibrio tenendo sempre presente che $\cos(.) \simeq 1$ e $\sin(.) \simeq (.)$, si ottiene che:

$$\Delta v \simeq V_{eq} \Delta \beta$$

Pertanto, le derivate rispetto a v sono esprimibili come:

$$\left. \frac{\partial (.)}{\partial v} \right|_{eq} = \left. \frac{\partial (.)}{\partial \beta} \right|_{eq} \left. \frac{\partial \beta}{\partial v} \right|_{eq} = \frac{1}{V_{eq}} \left. \frac{\partial (.)}{\partial \beta} \right|_{eq} = \frac{1}{u_{eq}} \left. \frac{\partial (.)}{\partial \beta} \right|_{eq} \quad (6.5)$$

6.1.1 Derivate rispetto a v

Derivata F_{y_v}

In riferimento a 4.9 e a 6.5 e considerando che:

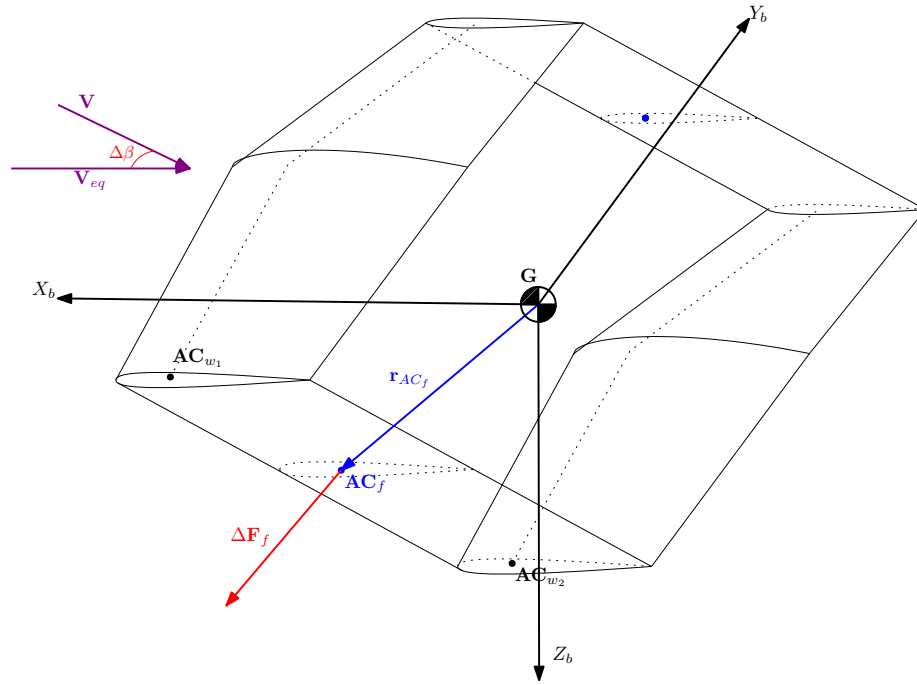
$$Q = \frac{1}{2} \rho V^2 S_{w_1} C_Q$$

allora:

$$F_{y_v} = - \left. \frac{\partial Q}{\partial v} \right|_{eq} = - \frac{1}{V_{eq}} \left. \frac{\partial Q}{\partial \beta} \right|_{eq} = - \frac{1}{2} \rho V_{eq} S_{w_1} \left. \frac{\partial C_Q}{\partial \beta} \right|_{eq}$$

Si faccia riferimento allo schema in Figura 6.1

Vista tridimensionale



Profilo del timone

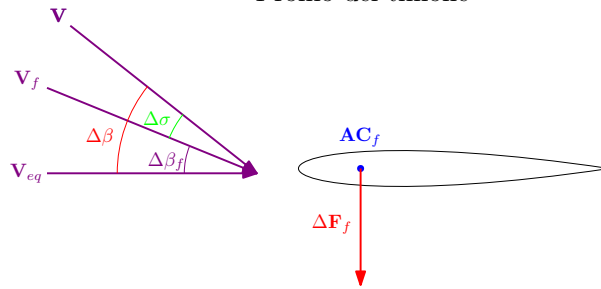


Figura 6.1: Forze agenti sul timone

Per una variazione $\Delta\beta$, la variazione di portanza laterale sul singolo impennaggio verticale è pari a:

$$\Delta Q_f = \frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 S_f a_f \Delta\beta_f$$

Dove $\Delta\beta_f$ è la variazione dell'angolo di incidenza (laterale) relativa all'impen-

naggio, S_f è la superficie dell'impennaggio mentre a_f è la pendenza della curva $C_{Q_f} - \beta_f$ la cui stima è analoga a quella di a_{w_1} e a_{w_2} . Dal momento che il flusso d'aria che investe entrambi gli impennaggi viene disturbato dalla presenza della fusoliera, occorre tenere in considerazione l'angolo di sidewash σ , pertanto:

$$\Delta\beta_f = \Delta\beta - \Delta\sigma = \left(\Delta\beta - \frac{\partial\sigma}{\partial\beta} \Delta\beta \right) = \Delta\beta (1 - \sigma_\beta) \quad (6.6)$$

Considerando che gli impennaggi sono due e che è ragionevole ritenere che l'angolo di sidewash sia uguale per entrambi gli impennaggi, la variazione di portanza laterale complessiva ΔQ è:

$$\Delta Q = 2\Delta Q_f = \rho V_{eq} S_f a_f \Delta\beta (1 - \sigma_\beta)$$

La variazione del coefficiente C_Q è:

$$\Delta C_Q = \frac{\Delta Q}{\frac{1}{2}\rho V_{eq}^2 S_{w_1}} = 2 \frac{S_f}{S_{w_1}} a_f \Delta\beta (1 - \sigma_\beta)$$

La derivata dunque è:

$$\left. \frac{\partial C_Q}{\partial \beta} \right|_{eq} = 2 \frac{S_f}{S_{w_1}} a_f (1 - \sigma_\beta) \quad (6.7)$$

Derivata $\mathcal{N}_v$

Considerando che:

$$\mathcal{N} = \frac{1}{2} \rho V^2 S_{w_1} l_{w_1} C_{\mathcal{N}}$$

e tenendo presente la 6.5 allora:

$$\left. \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial v} \right|_{eq} = \frac{1}{V_{eq}} \left. \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \beta} \right|_{eq} = \frac{1}{2} \rho V_{eq} S_{w_1} l_{w_1} \left. \frac{\partial C_{\mathcal{N}}}{\partial \beta} \right|_{eq}$$

Questa derivata è dovuta principalmente al contributo stabilizzante degli impennaggi verticali, infatti a seguito di una perturbazione $\Delta\beta$, la variazione di momento di imbardata $\Delta\mathcal{N}$ generata da entrambi gli impennaggi tende a far ritornare il velivolo nella configurazione di partenza. In questa trattazione si considera soltanto la variazione di portanza laterale degli impennaggi trascurando il contributo della variazione della resistenza aerodinamica.

Pertanto la variazione di momento aerodinamico $\Delta\mathbf{M}_{\mathbf{G}_f}$ dovuta alla portanza laterale ΔQ_f agente sul singolo timone è data da:

$$\Delta\mathbf{M}_{\mathbf{G}_f} = \mathbf{r}_{AC_f} \times \Delta\mathbf{F}_f \quad (6.8)$$

dove:

$$\Delta\mathbf{F}_f = \begin{bmatrix} 0 \\ -\Delta Q_f \\ 0 \end{bmatrix}_b \quad (6.9)$$

$$\mathbf{r}_{AC_f} = \begin{bmatrix} X_{AC_f} \\ Y_{AC_f} \\ Z_{AC_f} \end{bmatrix}_b \quad (6.10)$$

con $X_{AC_f}, Y_{AC_f}, Z_{AC_f}$ coordinate del centro aerodinamico dell'impennaggio verticale nel sistema di riferimento body. La componente di imbardata di tale momento vale:

$$\Delta \mathcal{N}_f = -X_{AC_f} \Delta Q_f \quad (6.11)$$

Per semplificare la trattazione si suppone che il centro aerodinamico dell'impennaggio verticale sia situato esattamente nel centro per cui:

$$X_{AC_f} = \frac{(X_{AC_{w_1}} + X_{AC_{w_2}})}{2} \quad (6.12)$$

A questo punto è possibile calcolare la variazione complessiva del momento aerodinamico di imbardata:

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{N} &= 2\Delta \mathcal{N}_f \\ &= -2 \underbrace{\frac{(X_{AC_{w_1}} + X_{AC_{w_2}})}{2}}_{X_{AC_f}} \Delta Q_f \\ &= -2 \frac{(X_{AC_{w_1}} + X_{AC_{w_2}})}{2} \frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 S_f a_f \Delta \beta (1 - \sigma_\beta) \end{aligned}$$

Da cui:

$$\begin{aligned} \Delta C_N &= \frac{\Delta \mathcal{N}}{\frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 S_{w_1} l_{w_1}} \\ &= - (X_{AC_{w_1}} + X_{AC_{w_2}}) \frac{S_f}{S_{w_1} l_{w_1}} a_f (1 - \sigma_\beta) \Delta \beta \end{aligned}$$

Quindi:

$$\left. \frac{\partial C_N}{\partial \beta} \right|_{eq} = - (X_{AC_{w_1}} + X_{AC_{w_2}}) \frac{S_f}{S_{w_1} l_{w_1}} a_f (1 - \sigma_\beta) \quad (6.13)$$

Derivata $\mathcal{L}_v$

Considerando che:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \rho V^2 S_{w_1} l_{w_1} C_{\mathcal{L}}$$

e tenendo presente la 6.5 allora:

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} \right|_{eq} = \frac{1}{V_{eq}} \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta} \right|_{eq} = \frac{1}{2} \rho V_{eq} S_{w_1} l_{w_1} \left. \frac{\partial C_{\mathcal{L}}}{\partial \beta} \right|_{eq}$$

Questa è una derivata di stabilità ed è influenzata essenzialmente da tre fattori:

- Effetto stabilizzante dell'angolo diedro;
- Effetto stabilizzante della freccia alare;
- Effetto stabilizzante dell'impennaggio verticale

1. Effetto diedro

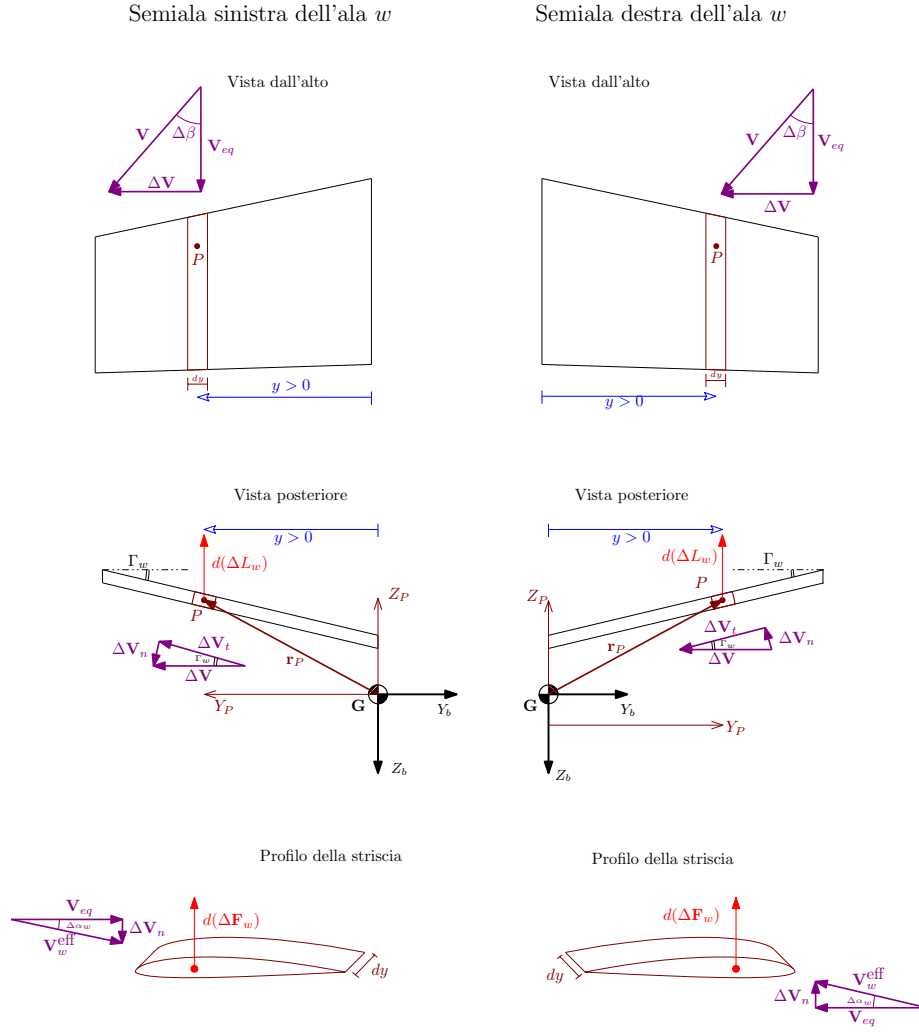


Figura 6.2: Effetto diedro

Per studiare l'effetto diedro è conveniente studiare separatamente ciascuna semiala che costituisce la generica ala w . A tal proposito, per ciascuna semiala si introduce la coordinata y (che per comodità viene definita sempre positiva) la quale individua la posizione di un generico punto P della semiala al fine di implementare il metodo della striscia infinitesima [Figura 6.2]. La variazione di velocità $\Delta \mathbf{V} = -\Delta v \mathbf{i}_b$ può essere scomposta in una componente tangenziale al piano della semiala ($\Delta \mathbf{V}_t$ in Figura 6.2) e in una componente normale a tale piano ($\Delta \mathbf{V}_n$ in Figura 6.2). Quest'ul-

tima, componendosi con la velocità $\mathbf{V}_{eq}$ è responsabile della variazione dell'incidenza $\Delta\alpha_w$. A questo punto si ragiona separatamente per le due semiali:

- Per la semiala destra:

La variazione dell'incidenza $\Delta\alpha_w$ è pari a:

$$\Delta\alpha_w = \frac{\Gamma_w \Delta\beta}{V_{eq}} \quad (6.14)$$

Pertanto la variazione infinitesima di portanza $d(\Delta L_w)$ sulla striscia è:

$$d(\Delta L_w) = \frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 a_w \Delta\alpha_w c_w(y) y dy \quad (6.15)$$

mentre la variazione infinitesima di momento aerodinamico dovuta alla portanza generata sulla striscia è pari a:

$$d(\Delta \mathbf{M}_{\mathbf{G}_w}^{dx}) = \mathbf{r}_P \times d(\Delta \mathbf{F}_w) \quad (6.16)$$

dove:

$$d(\Delta \mathbf{F}_w) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -d(\Delta L_w) \end{bmatrix}_b \quad (6.17)$$

$$\mathbf{r}_P = \begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{bmatrix}_b \quad (6.18)$$

Per la semiala destra $Y_P = y$ e quindi la componente di rollio del momento vale:

$$d(\mathcal{L}_w^{dx}) = -y d(\Delta L_w) \quad (6.19)$$

Integrando si ottiene:

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{L}_w^{dx} &= - \int_0^{l_w/2} y d(\Delta L_w) \\ &= - \int_0^{l_w/2} \frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 a_w \Delta\alpha_w c_w(y) y dy \\ &= - \int_0^{l_w/2} \frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 a_w \frac{\Gamma_w \Delta\beta}{V_{eq}} c_w(y) y dy \\ &= - \frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 a_w \frac{\Gamma_w \Delta\beta}{V_{eq}} \int_0^{l_w/2} c_w(y) y dy \end{aligned}$$

- Per la semiala sinistra:

La variazione dell'incidenza $\Delta\alpha_w$ è pari a:

$$\Delta\alpha_w = -\frac{\Gamma_w\Delta\beta}{V_{eq}} \quad (6.20)$$

Pertanto la variazione infinitesima di portanza $d(\Delta L_w)$ è:

$$d(\Delta L_w) = \frac{1}{2}\rho V_{eq}^2 a_w \Delta\alpha_w c_w(y) y dy \quad (6.21)$$

mentre la variazione infinitesima di momento aerodinamico dovuta alla portanza generata sulla striscia 'e pari a:

$$d(\Delta \mathbf{M}_{\mathbf{G}_w}^{sx}) = \mathbf{r}_P \times d(\Delta \mathbf{F}_w) \quad (6.22)$$

dove:

$$d(\Delta \mathbf{F}_w) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -d(\Delta L_w) \end{bmatrix}_b \quad (6.23)$$

$$\mathbf{r}_P = \begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{bmatrix}_b \quad (6.24)$$

Stavolta, per la semiala sinistra occorre tener presente che $Y_P = -y$ e quindi la componente di rollio del momento vale:

$$d(\mathcal{L}_w^{sx}) = y d(\Delta L_w) \quad (6.25)$$

Integrando si ottiene:

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{L}_w^{sx} &= \int_0^{l_w/2} y d(\Delta L_w) \\ &= \int_0^{l_w/2} \frac{1}{2}\rho V_{eq}^2 a_w \Delta\alpha_w c_w(y) y dy \\ &= -\int_0^{l_w/2} \frac{1}{2}\rho V_{eq}^2 a_w \frac{\Gamma_w \Delta\beta}{V_{eq}} c_w(y) y dy \\ &= -\frac{1}{2}\rho V_{eq}^2 a_w \frac{\Gamma_w \Delta\beta}{V_{eq}} \int_0^{l_w/2} c_w(y) y dy \end{aligned}$$

Dunque la variazione di momento di rollio dovuta alla generica ala w risulta:

$$\Delta \mathcal{L}_w = \Delta \mathcal{L}_w^{dx} + \Delta \mathcal{L}_w^{sx} = -2\frac{1}{2}\rho V_{eq}^2 a_w \frac{\Gamma_w \Delta\beta}{V_{eq}} \int_0^{l_w/2} c_w(y) y dy$$

Per cui la variazione di momento di rollio complessiva dovuta all'effetto diedro è data da:

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{L} &= \Delta\mathcal{L}_{w_1} + \Delta\mathcal{L}_{w_2} \\ &= -\rho V_{eq} \Delta\beta \left(\Gamma_{w_1} \int_0^{l_{w_1}/2} c_{w_1}(y) dy + \Gamma_{w_2} \int_0^{l_{w_2}/2} c_{w_2}(y) dy \right)\end{aligned}$$

Da cui:

$$\begin{aligned}\Delta C_{\mathcal{L}} &= \frac{\Delta\mathcal{L}}{\frac{1}{2}\rho V_{eq}^2 l_{w_1} S_{w_1}} \\ &= -\frac{2\Delta\beta}{S_{w_1} l_{w_1}} \left(\Gamma_{w_1} \int_0^{l_{w_1}/2} c_{w_1}(y) dy + \Gamma_{w_2} \int_0^{l_{w_2}/2} c_{w_2}(y) dy \right)\end{aligned}$$

Dunque:

$$\left(\frac{\partial C_{\mathcal{L}}}{\partial \beta} \Big|_{eq} \right)_{\Gamma} = -\frac{2}{S_{w_1} l_{w_1}} \left(\Gamma_{w_1} \int_0^{l_{w_1}/2} c_{w_1}(y) dy + \Gamma_{w_2} \int_0^{l_{w_2}/2} c_{w_2}(y) dy \right)$$

2. Effetto dell'angolo di freccia

Anche per studiare l'effetto dell'angolo di freccia occorre studiare separatamente il contributo di ciascuna semiala della generica ala w . Anche in questo caso si introduce la coordinata y (positiva) per poter applicare il metodo della striscia infinitesima [Figura 6.3]. In condizioni di angolo di sideslip non nullo, la velocità del vento normale al bordo di attacco $\mathbf{V}_n$ è diversa per le due semiali

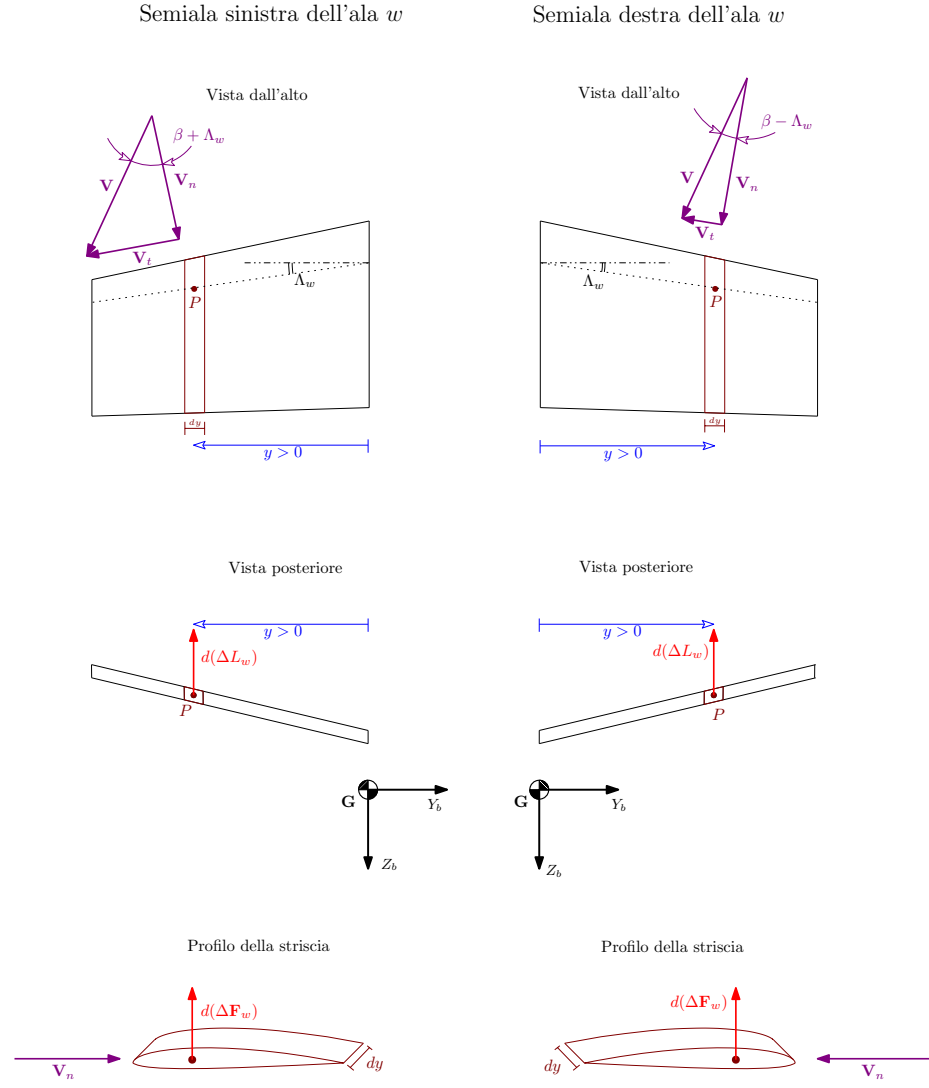


Figura 6.3: Effetto dell'angolo di freccia alare

In riferimento alla Figura 6.3, per la generica ala w si ha che:

- Per la semiala destra:

$$V_n = V \cos(\beta - \Lambda_w)$$

La portanza generata sulla striscia infinitesima è:

$$dL_w = \frac{1}{2} \rho (V_n^{dx})^2 \alpha_w c_w(y) dy$$

Quindi applicando la 6.19 per il calcolo della componente di rollio della variazione di momento aerodinamico dovuta alla portanza generata sulla striscia, si ottiene che :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_w^{dx} &= - \int_0^{l_w/2} y dL_w \\ &= - \int_0^{l_w/2} \frac{1}{2} \rho V^2 \cos^2 (\beta - \Lambda_w) a_w \alpha_w c_w(y) y dy \\ &= - \frac{1}{2} \rho V^2 \cos^2 (\beta - \Lambda_w) a_w \alpha_w \int_0^{l_w/2} c_w(y) y dy\end{aligned}$$

- Per la semiala sinistra:

$$V_n = V \cos (\beta + \Lambda_w)$$

La portanza generata sulla striscia infinitesima è:

$$dL_w = \frac{1}{2} \rho (V_n)^2 \alpha_w c_w(y) dy$$

Applicando la 6.25 per il calcolo della componente di rollio della variazione di momento aerodinamico dovuta alla portanza generata sulla striscia, si ottiene che:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_w^{sx} &= \int_0^{l_w/2} y dL_w \\ &= \int_0^{l_w/2} \frac{1}{2} \rho V^2 \cos^2 (\beta + \Lambda_w) a_w \alpha_w c_w(y) y dy \\ &= \frac{1}{2} \rho V^2 \cos^2 (\beta + \Lambda_w) a_w \alpha_w \int_0^{l_w/2} c_w(y) y dy\end{aligned}$$

Dunque:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_w &= \mathcal{L}_w^{dx} + \mathcal{L}_w^{sx} \\ &= \frac{1}{2} \rho V^2 a_w \alpha_w [-\cos^2 (\beta - \Lambda_w) + \cos^2 (\beta + \Lambda_w)] \int_0^{l_w/2} c_w(y) y dy\end{aligned}$$

Sapendo inoltre che:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_w &= \cancel{\mathcal{L}_{w_{eq}}}^0 + \Delta \mathcal{L}_w \\ \beta &= \cancel{\beta_{eq}}^0 + \Delta \beta \\ \alpha_w &\simeq \alpha_{eq} \\ V &\simeq V_{eq}\end{aligned}$$

Allora:

$$\Delta \mathcal{L}_w = \frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 a_w \alpha_{eq} [-\cos^2(\Delta\beta - \Lambda_w) + \cos^2(\Delta\beta + \Lambda_w)] \int_0^{l_w/2} c_w(y) y dy$$

Da cui:

$$\begin{aligned} \Delta C_{\mathcal{L}} &= \frac{\Delta \mathcal{L}}{\frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 S_{w_1} l_{w_1}} \\ &= \frac{\Delta \mathcal{L}_{w_1} + \Delta \mathcal{L}_{w_2}}{\frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 S_{w_1} l_{w_1}} \\ &= \frac{a_{w_1} \alpha_{eq}}{S_{w_1} l_{w_1}} [-\cos^2(\Delta\beta - \Lambda_{w_1}) + \cos^2(\Delta\beta + \Lambda_{w_1})] \int_0^{l_{w_1}/2} c_{w_1}(y) y dy + \\ &\quad + \frac{a_{w_2} \alpha_{eq}}{S_{w_1} l_{w_1}} [-\cos^2(\Delta\beta - \Lambda_{w_2}) + \cos^2(\Delta\beta + \Lambda_{w_2})] \int_0^{l_{w_2}/2} c_{w_2}(y) y dy \end{aligned}$$

Quindi, infine:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial C_{\mathcal{L}}}{\partial \beta} \right)_{eq} \Big|_{\Lambda} &= -\frac{a_{w_1} \alpha_{eq}}{S_{w_1} l_{w_1}} [4 \cos(\Lambda_{w_1}) \sin(\Lambda_{w_1})] \int_0^{l_{w_1}/2} c_{w_1}(y) y dy + \\ &\quad -\frac{a_{w_2} \alpha_{eq}}{S_{w_1} l_{w_1}} [4 \cos(\Lambda_{w_2}) \sin(\Lambda_{w_2})] \int_0^{l_{w_2}/2} c_{w_2}(y) y dy \end{aligned} \quad (6.26)$$

3. Contributo del timone

Facendo riferimento alla Figura 6.1 e all'equazione 6.8, la componente di rollio della variazione di momento aerodinamico $\Delta \mathbf{M}_{\mathbf{G}_f}$ dovuta alla portanza laterale ΔQ_f agente sul singolo timone vale:

$$\Delta \mathcal{L}_f = Z_{AC_f} \Delta Q_f \quad (6.27)$$

Anche in questo caso è possibile supporre che ¹:

$$Z_{AC_f} = \frac{(Z_{AC_{w_1}} + Z_{AC_{w_2}})}{2} \quad (6.28)$$

La variazione di momento di rollio complessiva pertanto è:

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{L} &= 2 \Delta \mathcal{L}_f \\ &= 2 \underbrace{\frac{(Z_{AC_{w_1}} + Z_{AC_{w_2}})}{2}}_{Z_{AC_f}} \Delta Q_f \\ &= 2 \frac{(Z_{AC_{w_1}} + Z_{AC_{w_2}})}{2} \frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 S_f a_f \Delta\beta (1 - \sigma_\beta) \end{aligned}$$

¹tale approssimazione è possibile solo per ali trapezie poichè in tal caso la corda media aerodinamica coincide con la corda baricentrica

Da cui:

$$\begin{aligned}\Delta C_{\mathcal{L}} &= \frac{\Delta \mathcal{L}}{\frac{1}{2}\rho V_{eq}^2 S_{w_1} l_{w_1}} \\ &= (Z_{AC_{w_1}} + Z_{AC_{w_2}}) \frac{S_f}{S_{w_1} l_{w_1}} a_f (1 - \sigma_\beta) \Delta \beta\end{aligned}$$

Quindi:

$$\left(\frac{\partial C_{\mathcal{L}}}{\partial \beta} \right) \Big|_{eq}_f = (Z_{AC_{w_1}} + Z_{AC_{w_2}}) \frac{S_f}{S_{w_1} l_{w_1}} a_f (1 - \sigma_\beta) \quad (6.29)$$

Quindi alla fine $\frac{\partial C_{\mathcal{L}}}{\partial \beta} \Big|_{eq}$ è dato da:

$$\frac{\partial C_{\mathcal{L}}}{\partial \beta} \Big|_{eq} = \left(\frac{\partial C_{\mathcal{L}}}{\partial \beta} \Big|_{eq} \right)_{\Gamma} + \left(\frac{\partial C_{\mathcal{L}}}{\partial \beta} \Big|_{eq} \right)_{\Lambda} + \left(\frac{\partial C_{\mathcal{L}}}{\partial \beta} \Big|_{eq} \right)_f \quad (6.30)$$

6.1.2 Derivate rispetto a p

Derivata F_{y_p}

La derivata F_{y_p} può essere espressa come segue:

$$F_{y_p} = - \left. \frac{\partial Q}{\partial p} \right|_{eq} = - \frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 S_{w1} \left. \frac{\partial C_Q}{\partial p} \right|_{eq}$$

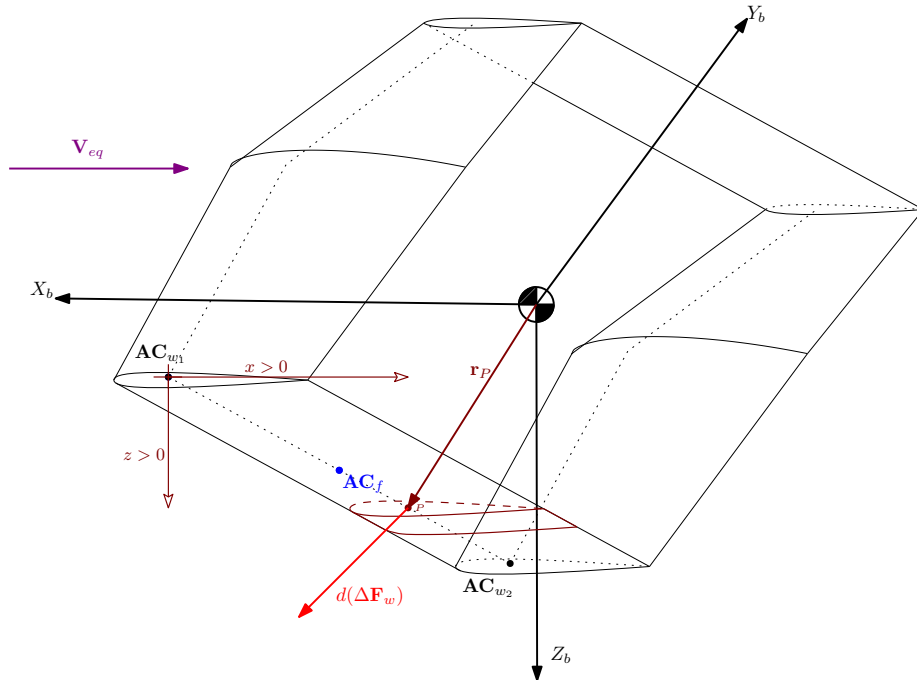
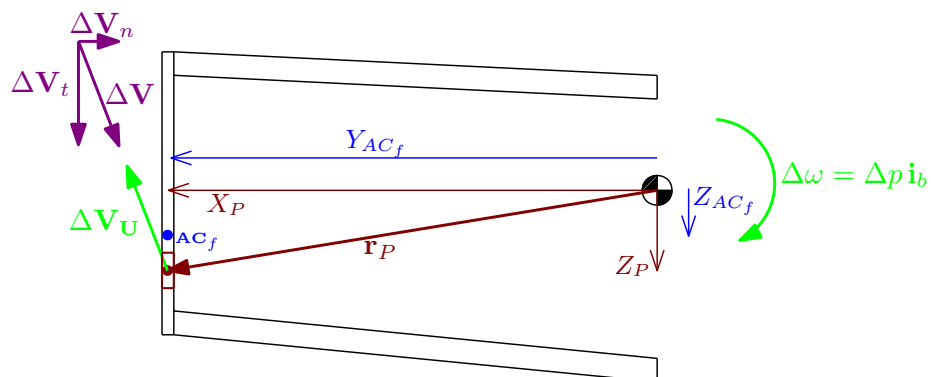


Figura 6.4: Vista tridimensionale del modello per il calcolo delle derivate rispetto a p

Vista posteriore



Profilo della striscia dell'impennaggio verticale

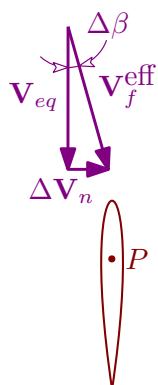


Figura 6.5: Variazione delle velocità sugli impennaggi e variazione dell'incidenza laterale in seguito ad una variazione di velocità di rollio Δp

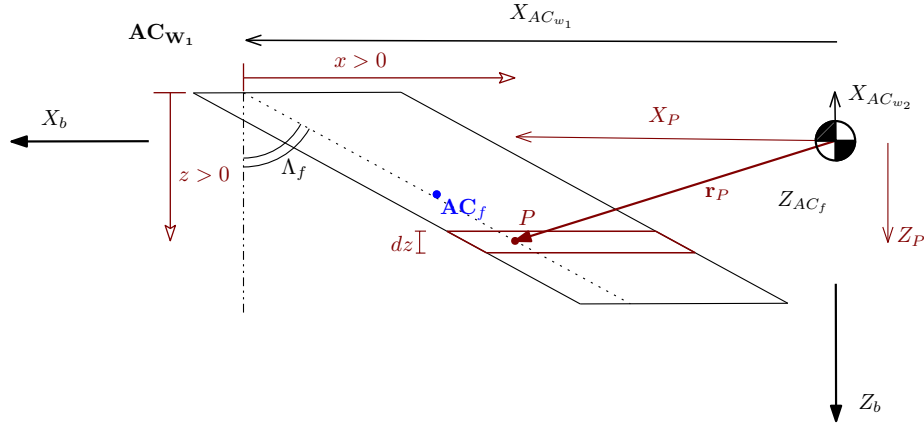


Figura 6.6: Vista laterale e coordinate x e z

Questa derivata è dovuta principalmente al contributo dei due impennaggi verticali. Una variazione di velocità di rollio produce, infatti una variazione di velocità $\Delta \mathbf{V}_P$ nel punto P del timone e di conseguenza una variazione del vento relativo al timone $\Delta \mathbf{V} = -\Delta \mathbf{V}_P$. In particolare, la componente normale al piano del timone $\Delta \mathbf{V}_n$, combinandosi con $\mathbf{V}_{eq}$ genera una variazione dell'angolo di sideslip del timone pari a $\Delta \beta_f$

Dalla formula dell'atto di moto rigido:

$$\Delta \mathbf{V}_P = \Delta \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P; \quad (6.31)$$

$$\text{dove } \Delta \mathbf{V}_P = \begin{bmatrix} \Delta u_P \\ \Delta v_P \\ \Delta w_P \end{bmatrix}_b, \Delta \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \Delta p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_b \text{ e } \mathbf{r}_P = \begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{bmatrix}_b$$

$$\text{Ponendo } \Delta \mathbf{V} = \begin{bmatrix} -\Delta u \\ -\Delta v \\ -\Delta w \end{bmatrix}_b \text{ e tenendo conto che: } \Delta \mathbf{V} = -\Delta \mathbf{V}_P \text{ si ottiene che:}$$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ \Delta v = Z_P \Delta p \\ \Delta w = -Y_P \Delta p \end{cases} \quad (6.32)$$

Introducendo le coordinate di comodo x e z (positive) è possibile dedurre che:

$$\begin{cases} X_P = X_{AC_{w_1}} - x \\ Y_P = Y_{AC_{w_1}} \\ Z_P = Z_{AC_{w_1}} - z \end{cases} \quad (6.33)$$

$$\text{Per cui } \Delta \mathbf{V}_n = -\Delta v \mathbf{j}_b = (Z_{AC_{w_1}} - z) \Delta p \mathbf{j}_b$$

La variazione $\Delta \beta_f$ pertanto vale:

$$\Delta \beta_f = \frac{\Delta v}{V_{eq}} = -\frac{(Z_{AC_{w_1}} - z) \Delta p}{V_{eq}} \quad (6.34)$$

La variazione di portanza laterale sulla singola striscia di timone vale:

$$d(\Delta Q_f) = \frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 a_f \Delta \beta_f c_f dz \quad (6.35)$$

Integrando si ottiene la variazione di portanza laterale del singolo timone è:

$$\Delta Q_f = \frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 \int_0^{l_f} a_f \Delta \beta_f c_f dz$$

Dove si ritiene c_f circa costante e pari a:

$$c_f \simeq \frac{c_{tip_{w_1}} + c_{tip_{w_2}}}{2}$$

mentre:

$$l_f = |Z_{AC_{w_1}} - Z_{AC_{w_2}}|$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \Delta Q_f &= \frac{1}{2} \rho V_{eq} a_f c_f \Delta p \int_0^{l_f} (z - Z_{AC_{w_1}}) dz \\ \Delta Q &= 2 \Delta Q_f = \rho V_{eq} a_f c_f \Delta p \int_0^{l_f} (z - Z_{AC_{w_1}}) dz \\ \Delta C_Q &= \frac{\Delta Q}{\frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 S_{w_1}} = 2 \Delta p \frac{a_f c_f}{S_{w_1} V_{eq}} \int_0^{l_f} (z - Z_{AC_{w_1}}) dz \end{aligned}$$

Infine:

$$\left. \frac{\partial C_Q}{\partial p} \right|_{eq} = 2 \frac{a_f c_f}{S_{w_1} V_{eq}} \int_0^{l_f} (z - Z_{AC_{w_1}}) dz \quad (6.36)$$

Derivata $\mathcal{L}_p$

La derivata $\mathcal{L}_p$ può essere espressa come segue:

$$\mathcal{L}_p = \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p} \right|_{eq} = \frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 S_{w_1} l_{w_1} \left. \frac{\partial C_{\mathcal{L}}}{\partial p} \right|_{eq}$$

Tale derivata di smorzamento è dovuta principalmente a due contributi:

- Contributo dell'ala
- Contributo degli impennaggi verticali

1. *Contributo delle ali* Si procede calcolando i contributi ai momenti di ciascuna semiala per la generica ala w

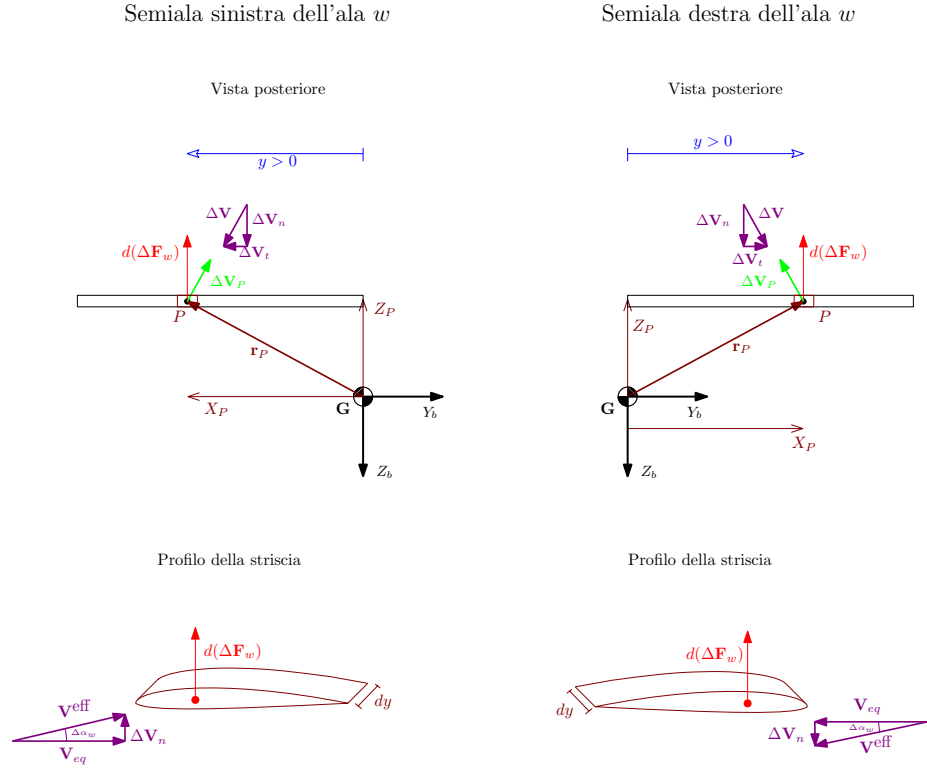


Figura 6.7: Variazione di velocità sulle semiali e variazione di incidenza sulla striscia infinitesima

- Semiala destra
Operando in maniera simile a quanto fatto per il timone si calcola la variazione di velocità sul generico punto P dovuta all'incremento della velocità di rollio Δp . Dall'atto di moto rigido:

$$\Delta \mathbf{V}_P = \Delta \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P; \quad (6.37)$$

$$\text{dove } \Delta \mathbf{V}_P = \begin{bmatrix} \Delta u_P \\ \Delta v_P \\ \Delta w_P \end{bmatrix}_b, \quad \Delta \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \Delta p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_b \quad \text{e } \mathbf{r}_P = \begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{bmatrix}_b$$

La variazione di velocità del vento relativo invece è: $\Delta \mathbf{V} = \begin{bmatrix} -\Delta u \\ -\Delta v \\ -\Delta w \end{bmatrix}_b$ e tenendo conto che: $\Delta \mathbf{V} = -\Delta \mathbf{V}_P$ Introducendo la consueta coordinata y (positiva) [Figura 6.7] allora $Y_P = y$. La componente di $\Delta \mathbf{V}$ che genera la variazione di incidenza sull'ala è proprio quella normale al piano alare ossia $\Delta \mathbf{V}_n = -\Delta w \mathbf{k}_b = y \Delta p \mathbf{k}_b$ (Figura 6.7).

Pertanto la variazione di incidenza vale:

$$\Delta\alpha_w = \frac{\Delta p y}{V_{eq}} \quad (6.38)$$

Da cui si ricava poi la variazione di portanza sulla striscia infinitesima:

$$d(\Delta L_w) = \frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 a_w \Delta\alpha_w c_w(y) dy \quad (6.39)$$

La variazione infinitesima di momento aerodinamico dovuta alla semiala destra è pari a:

$$d(\Delta \mathbf{M}_{\mathbf{G}_w}^{dx}) = \mathbf{r}_P \times d(\Delta \mathbf{F}_w) \quad (6.40)$$

dove:

$$d(\Delta \mathbf{F}_w) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -d(\Delta L_w) \end{bmatrix}_b \quad (6.41)$$

$$\mathbf{r}_P = \begin{bmatrix} X_P \\ y \\ Z_P \end{bmatrix}_b \quad (6.42)$$

la componente di rollio del momento vale:

$$d(\mathcal{L}_w^{dx}) = -y d(\Delta L_w) \quad (6.43)$$

Integrando si ottiene:

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{L}_w^{dx} &= -\frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 \int_0^{l_w/2} a_w \Delta\alpha_w c_w(y) y dy \\ &= -\frac{1}{2} \rho V_{eq} a_w \Delta p \int_0^{l_w/2} c_w(y) y^2 dy \end{aligned}$$

- Semiala sinistra

Il procedimento è identico a quello della semiala destra con l'unica differenza che in questo caso occorre tener presente che $Y_p = -y$, per cui:

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_w &= -\frac{\Delta p y}{V_{eq}} \\ \Delta \mathcal{L}_w^{sx} &= \frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 \int_0^{l_w/2} a_w \Delta\alpha_w c_w(y) y dy \\ &= -\frac{1}{2} \rho V_{eq} a_w \Delta p \int_0^{l_w/2} c_w(y) y^2 dy \end{aligned}$$

Pertanto la variazione di momento di rollio per l'ala w :

$$\Delta \mathcal{L}_w = \Delta \mathcal{L}_w^{dx} + \Delta \mathcal{L}_w^{sx} = -\rho V_{eq} a_w \Delta p \int_0^{l_w/2} c_w(y) y^2 dy$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{L} &= \Delta \mathcal{L}_{w_1} + \Delta \mathcal{L}_{w_2} \\ \Delta C_{\mathcal{L}} &= \frac{\Delta \mathcal{L}}{\frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 S_{w_1} l_{w_1}} \\ &= -2 \frac{\Delta p}{V_{eq} S_{w_1} l_{w_1}} \left[a_{w_1} \int_0^{l_{w_1}/2} c_{w_1}(y) y^2 dy + a_{w_2} \int_0^{l_{w_2}/2} c_{w_2}(y) y^2 dy \right] \end{aligned}$$

Per cui la derivata è:

$$\left(\frac{\partial C_{\mathcal{L}}}{\partial p} \Big|_{eq} \right)_w = \frac{-2}{V_{eq} S_{w_1} l_{w_1}} \left[a_{w_1} \int_0^{l_{w_1}/2} c_{w_1}(y) y^2 dy + a_{w_2} \int_0^{l_{w_2}/2} c_{w_2}(y) y^2 dy \right] \quad (6.44)$$

2. *Contributo degli impennaggi verticali* Come già dimostrato nel caso della F_{y_p} su una striscia infinitesima la variazione $\Delta \beta$ vale:

$$\Delta \beta = \frac{\Delta v_P}{V_{eq}} = -\frac{(Z_{AC_{w_1}} - z) \Delta p}{V_{eq}} \quad (6.45)$$

Pertanto la variazione di portanza laterale sulla singola striscia di timone vale:

$$d(\Delta Q_f) = \frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 a_f \Delta \beta c_f dz \quad (6.46)$$

Dallo schema in Figura 6.4 si evince che la variazione infinitesima di momento aerodinamico è la seguente:

$$d(\Delta \mathbf{M}_{\mathbf{G}_f}) = \mathbf{r}_P \times d(\Delta \mathbf{F}_f) \quad (6.47)$$

dove:

$$d(\Delta \mathbf{F}_f) = \begin{bmatrix} 0 \\ -d(\Delta Q_f) \\ 0 \end{bmatrix}_b \quad (6.48)$$

$$\mathbf{r}_P = \begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{bmatrix}_b \quad (6.49)$$

Dove si ricorda che:

$$\begin{cases} X_P = X_{AC_{w_1}} - x \\ Y_P = Y_{AC_{w_1}} \\ Z_P = Z_{AC_{w_1}} - z \end{cases} \quad (6.50)$$

Pertanto la componente di rollio del momento vale:

$$d(\Delta\mathcal{L}_f) = \int_0^{l_f} \frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 S_f c_f a_f \Delta\beta(Z_{AC_{w_1}} - z) dz$$

Integrando:

$$\Delta\mathcal{L}_f = \int_0^{l_f} \frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 S_f c_f a_f \Delta\beta(Z_{AC_{w_1}} - z) dz$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{L}_f &= -\frac{1}{2} \rho V_{eq} \Delta p S_f c_f a_f \int_0^{l_f} (Z_{AC_{w_1}} - z)^2 dz; \\ \Delta\mathcal{L} &= 2\Delta\mathcal{L}_f = -\rho V_{eq} \Delta p S_f c_f a_f \int_0^{l_f} (Z_{AC_{w_1}} - z)^2 dz; \\ \Delta C_{\mathcal{L}} &= \frac{\Delta\mathcal{L}}{\frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 S_{w_1} l_{w_1}} \\ &= -2 \frac{a_f c_f \Delta p}{S_{w_1} l_{w_1} V_{eq}} \int_0^{l_f} (z - Z_{AC_{w_1}})^2 dz \end{aligned}$$

Infine:

$$\left(\frac{\partial C_{\mathcal{L}}}{\partial p} \Big|_{eq} \right)_f = -2 \frac{a_f c_f}{S_{w_1} l_{w_1} V_{eq}} \int_0^{l_f} (z - Z_{AC_{w_1}})^2 dz \quad (6.51)$$

La derivata $\frac{\partial C_{\mathcal{L}}}{\partial p} \Big|_{eq}$ è data dalla somma dei due contributi delle ali e degli impennaggi:

$$\frac{\partial C_{\mathcal{L}}}{\partial p} \Big|_{eq} = \left(\frac{\partial C_{\mathcal{L}}}{\partial p} \Big|_{eq} \right)_w + \left(\frac{\partial C_{\mathcal{L}}}{\partial p} \Big|_{eq} \right)_f \quad (6.52)$$

Derivata $\mathcal{N}_p$

La derivata $\mathcal{N}_p$ può essere espressa nel modo seguente:

$$\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial p} \Big|_{eq} = \frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 S_{w_1} l_{w_1} \frac{\partial C_{\mathcal{N}}}{\partial p} \Big|_{eq}$$

Tale derivata è una cross-derivative ed è dovuta principalmente al contributo delle ali e degli impennaggi verticali.

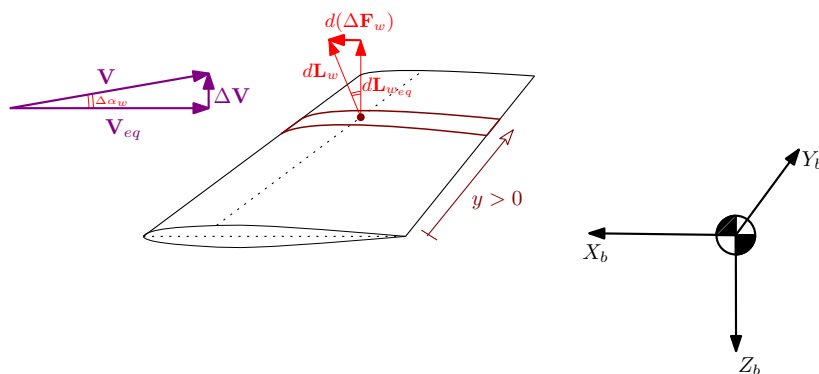
1. *Contributo delle ali*

Le ali contribuiscono al momento di imbardata $\mathcal{N}$ perchè, a seguito di una

variazione di velocità di rollio Δp , varia l'incidenza sulle ali, e di conseguenza varia la direzione della portanza che dunque avrà una componente nel piano $X_b - Y_b$ che genera a sua volta una variazione del momento di imbardata. Trascurando la variazione della resistenza e trascurando la variazione del modulo della portanza, su ciascuna striscia infinitesima si ha che: $dL_w \simeq dL_{w_{eq}}$, per cui la variazione di forza aerodinamica nel piano longitudinale $d(\Delta F_{x_w})$ vale circa:

$$d(\Delta F_{x_w}) = dL_{w_{eq}} \sin(\Delta\alpha_w) \simeq dL_{w_{eq}} \Delta\alpha_w \quad (6.53)$$

Semiala destra



Semiala sinistra

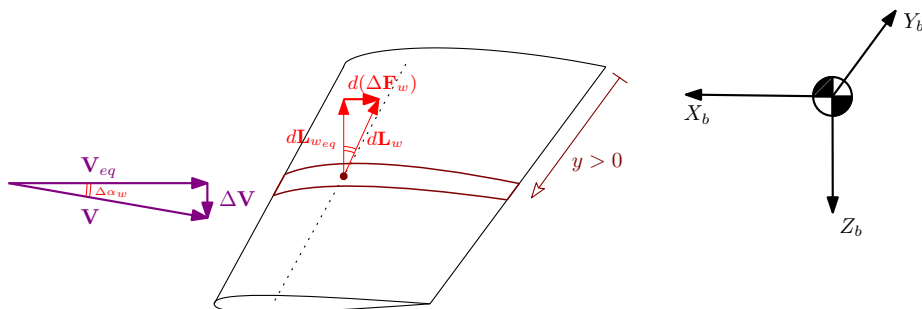


Figura 6.8: Contributo delle ali alla derivata $\mathcal{N}_p$

Facendo riferimento alla Figura 6.8, per la generica ala w si ha che:

- Semiala destra

La variazione di momento aerodinamico della singola striscia è:

$$d(\Delta \mathbf{M}_{\mathbf{G}_w}^{dx}) = \mathbf{r}_P \times d(\Delta \mathbf{F}_w) \quad (6.54)$$

dove:

$$d(\Delta \mathbf{F}_w) = \begin{bmatrix} d(\Delta F_{x_w}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_b \quad (6.55)$$

$$\mathbf{r}_P = \begin{bmatrix} X_P \\ y \\ Z_P \end{bmatrix}_b \quad (6.56)$$

la componente di imbardata vale:

$$d(\mathcal{N}_w^{dx}) = y d(\Delta F_{x_w}) = y d(\Delta L_w) \Delta \alpha_w \quad (6.57)$$

$$\begin{aligned} \Delta \alpha_w &= \frac{\Delta p y}{V_{eq}} \\ \Delta \mathcal{N}_w^{dx} &= - \int_0^{l_w/2} y dL_w \Delta \alpha_w \end{aligned}$$

Dove $dL_w \simeq dL_{w_{eq}} = \frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 a_w \alpha_{eq} c_w(y) dy$ per cui:

$$\Delta \mathcal{N}_w^{dx} = - \frac{1}{2} \rho V_{eq} a_w \alpha_{eq} \Delta p \int_0^{l_w/2} c_w(y) y^2 dy$$

- Semiala sinistra. Il procedimento è identico alla semiala destra ad eccezione del fatto che in questo caso $Y_P = -y$, per cui:

$$\begin{aligned} \Delta \alpha_w &= - \frac{\Delta p y}{V_{eq}} \\ \Delta \mathcal{N}_w^{sx} &= \int_0^{l_w/2} y dL_w \Delta \alpha_w \end{aligned}$$

Dove $dL_w \simeq dL_{w_{eq}} = \frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 a_w \alpha_{eq} c_w(y) dy$
per cui:

$$\Delta \mathcal{N}_w^{sx} = - \frac{1}{2} \rho V_{eq} a_w \alpha_{eq} \Delta p \int_0^{l_w/2} c_w(y) y^2 dy$$

Si ottiene, dunque:

$$\begin{aligned} \Delta N_w &= \Delta \mathcal{N}_w^{dx} + \Delta \mathcal{N}_w^{sx} \\ &= - \rho V_{eq} a_w \alpha_{eq} \Delta p \int_0^{l_w/2} c_w(y) y^2 dy \end{aligned}$$

²si approssima per semplicità che: $\alpha_{w_{eq}} \simeq \alpha_{eq}$

Sommando i contributi di entrambe le ali:

$$\begin{aligned}
\Delta \mathcal{N} &= \Delta N_{w_1} + \Delta N_{w_2} \\
&= -\rho V_{eq} \alpha_{eq} \Delta p \left(a_{w_1} \int_0^{l_{w_1}/2} c_{w_1}(y) y^2 dy + a_{w_2} \int_0^{l_{w_2}/2} c_{w_2}(y) y^2 dy \right) \\
\Delta C_N &= \frac{\Delta \mathcal{N}}{\frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 S_{w_1} l_{w_1}} \\
&= -2 \frac{\alpha_{eq} \Delta p}{S_{w_1} l_{w_1} V_{eq}} \left(a_{w_1} \int_0^{l_{w_1}/2} c_{w_1}(y) y^2 dy + a_{w_2} \int_0^{l_{w_2}/2} c_{w_2}(y) y^2 dy \right)
\end{aligned}$$

Infine:

$$\left(\frac{\partial C_N}{\partial p} \Big|_{eq} \right)_w = -2 \frac{\alpha_{eq}}{S_{w_1} l_{w_1} V_{eq}} \left(a_{w_1} \int_0^{l_{w_1}/2} c_{w_1}(y) y^2 dy + a_{w_2} \int_0^{l_{w_2}/2} c_{w_2}(y) y^2 dy \right) \quad (6.58)$$

2. Contributo degli impennaggi verticali

Prendendo la componente di imbardata dall'equazione 6.47 si ha che:

$$d(\Delta \mathcal{N}_f) = -X_P d(\Delta Q_f) \quad (6.59)$$

dove si ricorda che $X_P = X_{AC_{w_1}} - x$, mentre.

$$\Delta \beta = -\frac{\Delta p(Z_{AC_{w_1}} - z)}{V_{eq}}; \quad (6.60)$$

Quindi integrando si ottiene che:

$$\begin{aligned}
\Delta \mathcal{N}_f &= -\int_0^{l_f} \frac{1}{2} V_{eq}^2 a_f c_f \Delta \beta (X_{AC_{w_1}} - x) dz \\
&= \int_0^{l_f} \frac{1}{2} V_{eq}^2 a_f c_f \frac{\Delta p(Z_{AC_{w_1}} - z)}{V_{eq}} (X_{AC_{w_1}} - x) dz \\
&= \frac{1}{2} \rho V_{eq} a_f c_f \Delta p \int_0^{l_f} (X_{AC_{w_1}} - x)(Z_{AC_{w_1}} - z) dz
\end{aligned}$$

Inoltre dalla Figura 6.6 si evince che:

$$x = x(z) = z \tan(\Lambda_f)$$

Pertanto:

$$\begin{aligned}
\Delta \mathcal{N}_f &= \frac{1}{2} \rho V_{eq} a_f c_f \Delta p \int_0^{l_f} (X_{AC_{w_1}} - z \tan(\Lambda_f))(Z_{AC_{w_1}} - z) dz \\
\Delta \mathcal{N} = 2\Delta \mathcal{N}_f &= \rho V_{eq} a_f c_f \Delta p \int_0^{l_f} (X_{AC_{w_1}} - z \tan(\Lambda_f))(Z_{AC_{w_1}} - z) dz \\
\Delta C_{\mathcal{N}} &= \frac{\Delta \mathcal{N}}{\frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 S_{w_1} l_{w_1}} \\
&= \frac{a_f c_f \Delta p}{V_{eq} S_{w_1} l_{w_1}} \int_0^{l_f} (X_{AC_{w_1}} - z \tan(\Lambda_f))(Z_{AC_{w_1}} - z) dz
\end{aligned}$$

la derivata $\left. \frac{\partial C_{\mathcal{N}}}{\partial p} \right|_{eq}$ è dunque:

$$\left(\left. \frac{\partial C_{\mathcal{N}}}{\partial p} \right|_{eq} \right)_f = \frac{a_f c_f}{V_{eq} S_{w_1} l_{w_1}} \int_0^{l_f} (X_{AC_{w_1}} - z \tan(\Lambda_f))(Z_{AC_{w_1}} - z) dz \quad (6.61)$$

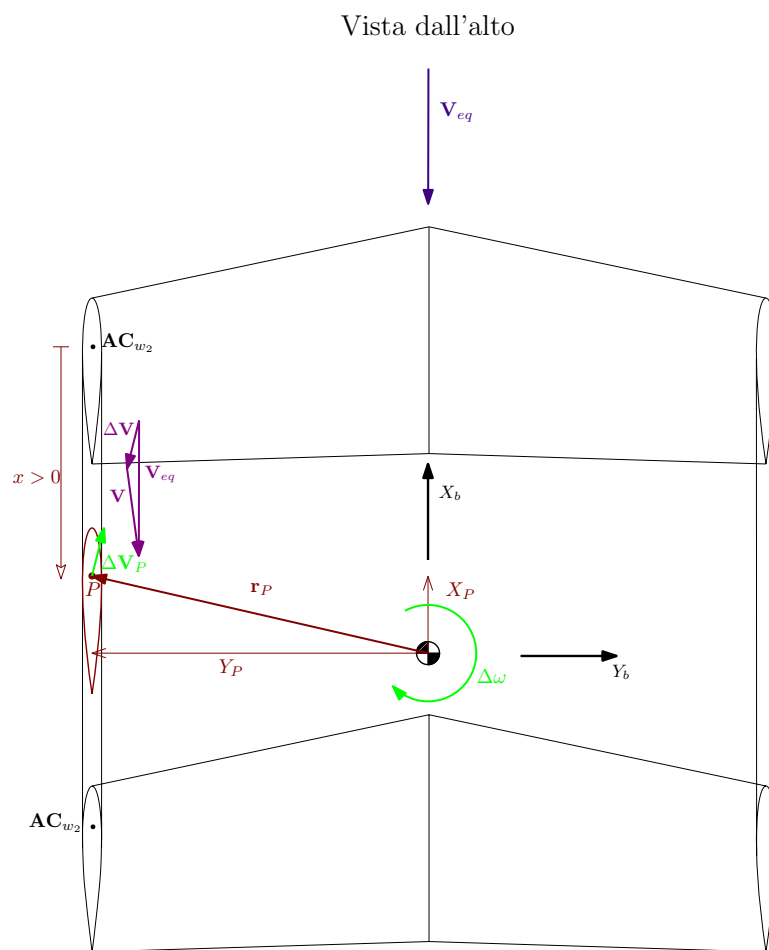
In definitiva:

$$\left. \frac{\partial C_{\mathcal{N}}}{\partial p} \right|_{eq} = \left(\left. \frac{\partial C_{\mathcal{N}}}{\partial p} \right|_{eq} \right)_f + \left(\left. \frac{\partial C_{\mathcal{N}}}{\partial p} \right|_{eq} \right)_w \quad (6.62)$$

6.1.3 Derivate rispetto a r

Derivata F_{y_r}

$$\left. \frac{\partial F_y}{\partial r} \right|_{eq} = - \left. \frac{\partial Q}{\partial r} \right|_{eq} = - \frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 S_{w_1} \left. \frac{\partial C_Q}{\partial r} \right|_{eq}$$



Profilo della striscia infinitesima del timone

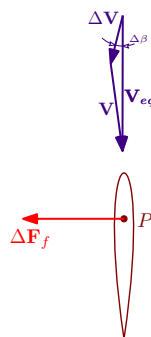


Figura 6.9: Contributo degli impennaggi alle derivate rispetto alla velocità di rollio r

Anche questa derivata è dovuta principalmente al contributo dei due impennaggi verticali. Una variazione di velocità di imbardata produce, infatti una variazione di velocità del punto P del timone pari a $\Delta \mathbf{V}_P$ e di conseguenza una variazione del vento relativo $\Delta \mathbf{V} = -\Delta \mathbf{V}_P$.

Dalla formula dell'atto di moto rigido:

$$\Delta \mathbf{V}_P = \Delta \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P; \quad (6.63)$$

$$\text{dove } \Delta \mathbf{V}_P = \begin{bmatrix} \Delta u_P \\ \Delta v_P \\ \Delta w_P \end{bmatrix}_b, \Delta \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta r \end{bmatrix}_b \text{ e } \mathbf{r}_P = \begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{bmatrix}_b$$

$$\text{Ponendo } \Delta \mathbf{V} = \begin{bmatrix} -\Delta u \\ -\Delta v \\ -\Delta w \end{bmatrix}_b \text{ e tenendo conto che: } \Delta \mathbf{V} = -\Delta \mathbf{V}_P \text{ si ottiene che:}$$

$$\begin{cases} \Delta u = -Y_P \Delta r \\ \Delta v = X_P \Delta r \\ \Delta w = 0 \end{cases} \quad (6.64)$$

Introducendo le coordinate x e z (positive) è possibile dedurre che:

$$\begin{cases} X_P = X_{AC_{w_1}} - x \\ Y_P = Y_{AC_{w_1}} \\ Z_P = Z_{AC_{w_1}} - z \end{cases} \quad (6.65)$$

Per cui $\Delta \mathbf{V}_{P_n} = -\Delta v_P \mathbf{j}_b = (Z_{AC_{w_1}} - z) \Delta p \mathbf{j}_b$

La velocità del vento che effettivamente investe la striscia $\mathbf{V}_w$ è data dalla somma tra la velocità $\mathbf{V}_{eq}$ e la variazione $\Delta \mathbf{V}$ dovuta alla rotazione di imbardata ³:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_{eq} + \Delta \mathbf{V} \quad (6.66)$$

E' ragionevole ritenere che la componente di $\Delta \mathbf{V}$ che contribuisce maggiormente alla variazione dell'angolo di sideslip è la seconda ossia:

$$\Delta v = X_P \Delta r$$

La variazione $\Delta \beta_f$ pertanto vale:

$$\Delta \beta_f = \frac{\Delta v}{V_{eq}} = \frac{\Delta r (X_{AC_{w_1}} - x)}{V_{eq}} \quad (6.67)$$

La variazione di portanza laterale sulla singola striscia di timone vale:

$$d(\Delta Q_f) = \frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 a_f \Delta \beta_f dz \quad (6.68)$$

³per quanto riguarda il modulo della velocità è ragionevole supporre che $|\mathbf{V}| \simeq |\mathbf{V}_{eq}| = V_{eq}$

Integrando si ottiene la variazione di portanza laterale del singolo timone è:

$$\Delta Q_f = \frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 \int_0^{l_f} a_f \Delta \beta_f c_f dz$$

Tenendo conto che:

$$x = z \tan(\Lambda_f) \quad (6.69)$$

Allora:

$$\begin{aligned} \Delta Q_f &= \frac{1}{2} \rho V_{eq} c_f a_f \Delta r \int_0^{l_f} (X_{AC_{w_1}} - \underbrace{z \tan(\Lambda_f)}_x) dz \\ \Delta Q &= 2 \Delta Q_f = \rho V_{eq} c_f a_f \Delta r \int_0^{l_f} (X_{AC_{w_1}} - z \tan(\Lambda_f)) dz \\ \Delta C_Q &= \frac{\Delta Q}{\frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 S_{w_1}} = 2 \frac{a_f c_f \Delta r}{V_{eq} S_{w_1}} \int_0^{l_f} (X_{AC_{w_1}} - z \tan(\Lambda_f)) dz \end{aligned}$$

Pertanto:

$$\left. \frac{\partial C_Q}{\partial r} \right|_{eq} = \frac{\Delta Q}{\frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 S_{w_1}} = 2 \frac{a_f c_f}{V_{eq} S_{w_1}} \int_0^{l_f} (X_{AC_{w_1}} - z \tan(\Lambda_f)) dz \quad (6.70)$$

Derivata $\mathcal{N}_r$

$$\left. \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial r} \right|_{eq} = \frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 S_{w_1} l_{w_1} \left. \frac{\partial C_N}{\partial r} \right|_{eq}$$

Anche questa derivata dipende solo dagli impennaggi verticali, pertanto si calcola il momento generato dalla singola striscia di timone:

$$d(\Delta \mathbf{M}_{\mathbf{G}_f}) = \mathbf{r}_P \times d(\Delta \mathbf{F}_f) \quad (6.71)$$

dove:

$$d(\Delta \mathbf{F}_f) = \begin{bmatrix} 0 \\ -d(\Delta Q_f) \\ 0 \end{bmatrix}_b \quad (6.72)$$

$$\mathbf{r}_P = \begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{bmatrix}_b = \begin{bmatrix} X_{AC_{w_1}} - x \\ Y_{AC_{w_1}} \\ Z_{AC_{w_1}} - z \end{bmatrix}_b \quad (6.73)$$

Pertanto la componente di imbardata vale:

$$\begin{aligned}
\Delta \mathcal{N}_f &= - \int_0^{l_f} \frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 c_f a_f \Delta \beta (X_{AC_{w_1}} - x) dz \\
&= - \frac{1}{2} \rho V_{eq} c_f a_f \Delta r \int_0^{l_f} (X_{AC_{w_1}} - \underbrace{z \tan(\Lambda_f)}_x)^2 dz \\
\Delta \mathcal{N} &= 2 \Delta \mathcal{N}_f = - \rho V_{eq} c_f a_f \Delta r \int_0^{l_f} (X_{AC_{w_1}} - z \tan(\Lambda_f))^2 dz \\
\Delta C_{\mathcal{N}} &= \frac{\Delta \mathcal{N}}{\frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 S_{w_1} l_{w_1}} = -2 \frac{a_f c_f \Delta r}{V_{eq} S_{w_1} l_{w_1}} \int_0^{l_f} (X_{AC_{w_1}} - z \tan(\Lambda_f))^2 dz
\end{aligned}$$

Pertanto:

$$\left. \frac{\partial C_{\mathcal{N}}}{\partial r} \right|_{eq} = -2 \frac{a_f c_f}{V_{eq} S_{w_1} l_{w_1}} \int_0^{l_f} (X_{AC_{w_1}} - z \tan(\Lambda_f))^2 dz \quad (6.74)$$

Derivata $\mathcal{L}_r$

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} \right|_{eq} = \frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 S_{w_1} l_{w_1} \left. \frac{\partial C_{\mathcal{L}}}{\partial r} \right|_{eq}$$

Si procede analogamente a quanto fatto per $\mathcal{N}_r$, considerando stavolta la componente di rollio del momento:

$$\begin{aligned}
\Delta \mathcal{L}_f &= \int_0^{l_f} \frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 c_f a_f \Delta \beta (Z_{AC_{w_1}} - z) dz \\
&= \frac{1}{2} \rho V_{eq} c_f a_f \Delta r \int_0^{l_f} (X_{AC_{w_1}} - \underbrace{z \tan(\Lambda_f)}_x) (Z_{AC_{w_1}} - z) dz \\
\Delta \mathcal{L} &= 2 \Delta \mathcal{L}_f = \rho V_{eq} c_f a_f \Delta r \int_0^{l_f} (X_{AC_{w_1}} - z \tan(\Lambda_f)) (Z_{AC_{w_1}} - z) dz \\
\Delta C_{\mathcal{L}} &= \frac{\Delta \mathcal{L}}{\frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 S_{w_1} l_{w_1}} = 2 \frac{a_f c_f \Delta r}{V_{eq} S_{w_1} l_{w_1}} \int_0^{l_f} (X_{AC_{w_1}} - z \tan(\Lambda_f)) (Z_{AC_{w_1}} - z) dz
\end{aligned}$$

Pertanto:

$$\left. \frac{\partial C_{\mathcal{L}}}{\partial r} \right|_{eq} = 2 \frac{a_f c_f}{V_{eq} S_{w_1} l_{w_1}} \int_0^{l_f} (X_{AC_{w_1}} - z \tan(\Lambda_f)) (Z_{AC_{w_1}} - z) dz \quad (6.75)$$

6.2 Derivate di controllo

6.2.1 Derivate di controllo della dinamica longitudinale

Derivata $F_{x_{\delta_e}}$

Considerando che : $F_x = -D$:

$$F_{x_{\delta_e}} = -\frac{\partial D}{\partial \delta_e} = -\frac{1}{2}\rho V_{eq}^2 S_{w_1} \left. \frac{\partial C_D}{\partial \delta_e} \right|_{eq}$$

Derivata $F_{z_{\delta_e}}$

Considerando che : $F_z = -L$:

$$F_{z_{\delta_e}} = -\frac{\partial L}{\partial \delta_e} = -\frac{1}{2}\rho V_{eq}^2 S_{w_1} \left. \frac{\partial C_L}{\partial \delta_e} \right|_{eq}$$

Derivata $\mathcal{M}_{\delta_e}$

$$\mathcal{M}_{\delta_e} = \frac{1}{2}\rho V_{eq}^2 S_{w_1} c_{w_1} \left. \frac{\partial C_M}{\partial \delta_e} \right|_{eq}$$

6.2.2 Derivate di controllo della dinamica latero - direzionale

Derivata $F_{y_{\delta_r}}$

Dal momento che: $F_{y_{\delta_r}} = -\left. \frac{\partial Q}{\partial \delta_r} \right|_{eq}$ si ha che:

$$F_{y_{\delta_r}} = -\frac{1}{2}\rho V_{eq}^2 S_{w_1} \left. \frac{\partial C_Q}{\partial \delta_r} \right|_{eq}$$

Si procede analogamente al caso dell'equilibratore, ossia si considera il parametro :

$$\tau_{r,3D} = \frac{S_r}{S_f} \tau_r \quad (6.76)$$

Dove τ_r è il rudder power effectiveness del profilo bidimensionale (Appendice A)

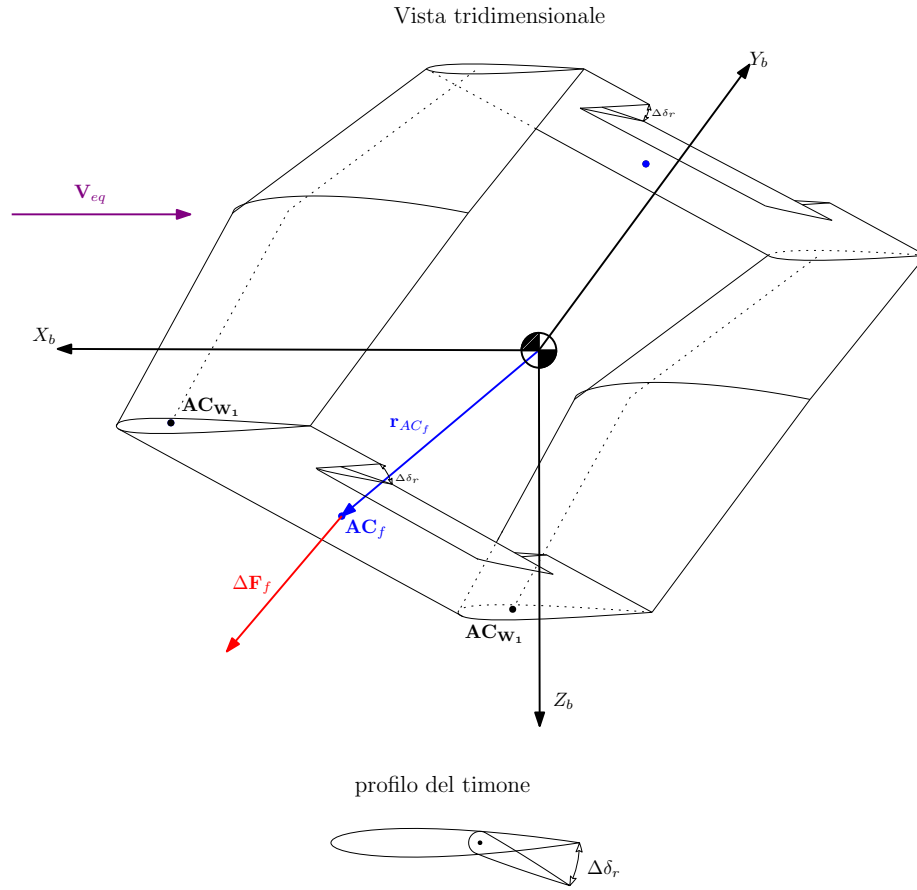


Figura 6.10: Forze generate dalla variazione di deflessione dei timoni

Allora la variazione della portanza laterale dell'impennaggio verticale dovuta ad una variazione della deflessione del timone vale:

$$\begin{aligned}\Delta Q_f &= -\frac{1}{2}\rho V_{eq}^2 S_r \Delta C_{Q_f} = \frac{1}{2}\rho V_{eq}^2 S_f \underbrace{\frac{S_r}{S_f} \tau_r a_f}_{\tau_{r3D}} \Delta \delta_r \\ \Delta Q &= 2\Delta Q_f \\ &= -2\frac{1}{2}\rho V_{eq}^2 S_f a_f \tau_{r3D} \Delta \delta_r \\ \Delta C_Q &= \frac{\Delta Q}{\frac{1}{2}\rho V_{eq}^2 S_{w1}} = -\frac{2S_f a_f \tau_{r3D} \Delta \delta_r}{S_{w1}}\end{aligned}$$

Da cui:

$$\left. \frac{\partial C_Q}{\partial \delta_r} \right|_{eq} = -\frac{2S_f a_f \tau_{r3D}}{S_{w1}} \quad (6.77)$$

Derivata $\mathcal{N}_{\delta_r}$

$$\mathcal{N}_{\delta_r} = \frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 S_{w_1} l_{w_1} \left. \frac{\partial C_{\mathcal{N}}}{\partial \delta_r} \right|_{eq}$$

Considerando che il timone è posizionato al centro dell'impennaggio verticale e che dunque la posizione del centro aerodinamico dell'intero impennaggio verticale non varia a seguito di una deflessione del timone, allora è possibile ripetere lo stesso procedimento utilizzato per il calcolo delle derivata $\mathcal{N}_v$ pertanto:

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{N}_f &= -\frac{(X_{AC_{w_1}} + X_{AC_{w_2}})}{2} \Delta Q_f \\ &= -\frac{(X_{AC_{w_1}} + X_{AC_{w_2}})}{2} \frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 S_f (-a_f \tau_{r_{3D}} \Delta \delta_r) \\ \Delta \mathcal{N} &= 2 \Delta \mathcal{N}_f \\ &= (X_{AC_{w_1}} + X_{AC_{w_2}}) \frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 S_f a_f \tau_{r_{3D}} \Delta \delta_r \\ \Delta C_{\mathcal{N}} &= \frac{\Delta \mathcal{N}}{\frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 S_{w_1} l_{w_1}} = \frac{(X_{AC_{w_1}} + X_{AC_{w_2}})}{S_{w_1} l_{w_1}} S_f a_f \tau_{r_{3D}} \Delta \delta_r \end{aligned}$$

Da cui:

$$\left. \frac{\partial C_{\mathcal{N}}}{\partial \delta_r} \right|_{eq} = \frac{(X_{AC_{w_1}} + X_{AC_{w_2}})}{S_{w_1} l_{w_1}} S_f a_f \tau_{r_{3D}} \quad (6.78)$$

Derivata $\mathcal{L}_{\delta_r}$

$$\mathcal{L}_{\delta_r} = \frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 S_{w_1} l_{w_1} \left. \frac{\partial C_{\mathcal{L}}}{\partial \delta_r} \right|_{eq}$$

Si procede analogamente a quanto fatto per $\mathcal{N}_r$, considerando stavolta la componente di rollio del momento:

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{L}_f &= \frac{(Z_{AC_{w_1}} + Z_{AC_{w_2}})}{2} \Delta Q_f \\ &= \frac{(Z_{AC_{w_1}} + Z_{AC_{w_2}})}{2} \frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 S_f (-a_f \tau_{r_{3D}} \Delta \delta_r) \\ \Delta \mathcal{L} &= 2 \Delta \mathcal{L}_f \\ &= -(Z_{AC_{w_1}} + Z_{AC_{w_2}}) \frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 S_f a_f \tau_{r_{3D}} \Delta \delta_r \\ \Delta C_{\mathcal{L}} &= \frac{\Delta \mathcal{L}}{\frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 S_{w_1} l_{w_1}} = -\frac{(Z_{AC_{w_1}} + Z_{AC_{w_2}})}{S_{w_1} l_{w_1}} S_f a_f \tau_{r_{3D}} \Delta \delta_r \end{aligned}$$

Da cui:

$$\left. \frac{\partial C_{\mathcal{L}}}{\partial \delta_r} \right|_{eq} = -\frac{(Z_{AC_{w_1}} + Z_{AC_{w_2}})}{S_{w_1} l_{w_1}} S_f a_f \tau_{r_{3D}} \quad (6.79)$$

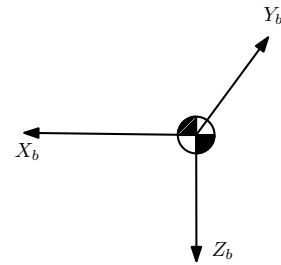
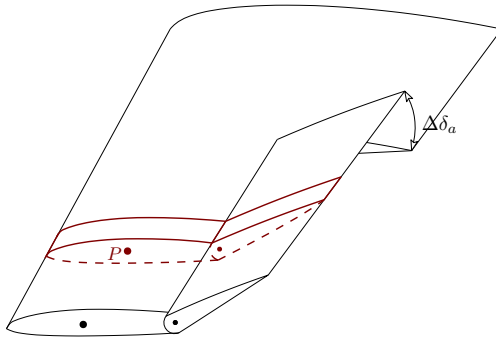
Derivata $\mathcal{L}_{\delta_a}$

$$\mathcal{L}_{\delta_a} = \frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 S_{w_1} l_{w_1} \left. \frac{\partial C_L}{\partial \delta_a} \right|_{eq}$$

Per quanto riguarda la deflessione dell'alettone $\Delta\delta_a$ si considera:

- Per la semiala sinistra $\Delta\delta_a > 0$ se la deflessione dell'alettone è verso l'alto;
- Per la semiala destra $\Delta\delta_a > 0$ se la deflessione dell'alettone è verso il basso

Semiala sinistra



Semiala destra

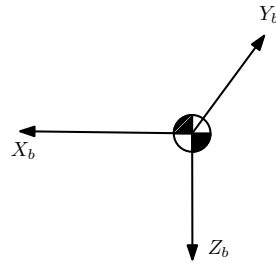
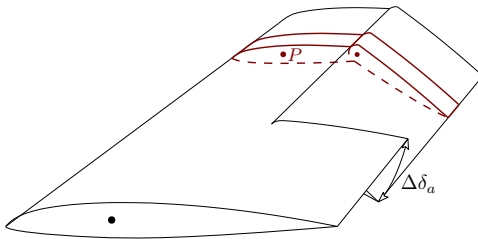


Figura 6.11: Forze generate sulla striscia infinitesima in seguito alla variazione di deflessione degli alettoni

In questo modo, un comando di alettone positivo genera un momento di rollio positivo⁴. Ricordando inoltre che l'alettone è posizionato solamente sull'ala w_1 , si ha che per una striscia infinitesima di ala in cui è presente l'alettone:

- Per la semiala destra: Indicando con ΔC_{L_s} la variazione del coefficiente di portanza della singola striscia infinitesima si ha che:

$$d(\Delta L_w) = \frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 \Delta C_{L_s} c_{w_1}(y) dy \quad (6.80)$$

$$\Delta C_{L_s} = a_{w_1} \tau_a \Delta \delta_a$$

Dove anche in questo caso il parametro τ_a è l'alieron effectiveness del profilo bidimensionale.

La variazione infinitesima di momento aerodinamico dovuta alla striscia appartenente alla semiala destra è pari a:

$$d(\Delta \mathbf{M}_{\mathbf{G}_w}^{dx}) = \mathbf{r}_P \times d(\Delta \mathbf{F}_w) \quad (6.81)$$

dove:

$$d(\Delta \mathbf{F}_w) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -d(\Delta L_w) \end{bmatrix}_b \quad (6.82)$$

$$\mathbf{r}_P = \begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{bmatrix}_b \quad (6.83)$$

In particolare, facendo riferimento alla coordinata y si ha che:

$$Y_P = y \quad (6.84)$$

la componente di rollio del momento vale:

$$d(\mathcal{L}_w^{dx}) = -y d(\Delta L_w) \quad (6.85)$$

Integrando:

$$\Delta \mathcal{L}_{w_1}^{dx} = -\frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 a_{w_1} \tau_a \Delta \delta_a \int_{(l_{w_1}-l_a)/2}^{l_{w_1}/2} c_{w_1}(y) y dy$$

- Per la semiala sinistra il ragionamento è analogo al precedente, tuttavia, per le convenzioni adottate occorre tener presente che:

$$\Delta C_{L_s} = -a_{w_1} \tau_a \Delta \delta_a$$

⁴Si ricorda inoltre che il comando di alettone è antisimmetrico

e che :

$$Y_P = -y \quad (6.86)$$

Pertanto il momento di rollio è dato da:

$$\Delta \mathcal{L}_{w_1}^{sx} = -\frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 a_{w_1} \tau_a \Delta \delta_a \int_{(l_{w_1}-l_a)/2}^{l_{w_1}/2} c_{w_1}(y) y \, dy$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{L} &= \Delta \mathcal{L}_{w_1}^{dx} + \Delta \mathcal{L}_{w_1}^{sx} \\ &= -2 \frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 a_{w_1} \tau_a \Delta \delta_a \int_{(l_{w_1}-l_a)/2}^{l_{w_1}/2} c_{w_1}(y) y \, dy \\ \Delta C_{\mathcal{L}} &= \frac{\Delta \mathcal{L}}{\frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 S_{w_1} l_{w_1}} = -\frac{2 a_{w_1} \tau_a \Delta \delta_a}{S_{w_1} l_{w_1}} \int_{(l_{w_1}-l_a)/2}^{l_{w_1}/2} c_{w_1}(y) y \, dy \end{aligned}$$

In definitiva:

$$\left. \frac{\partial C_{\mathcal{L}}}{\partial \delta_a} \right|_{eq} = -\frac{2 a_{w_1} \tau_a}{S_{w_1} l_{w_1}} \int_{(l_{w_1}-l_a)/2}^{l_{w_1}/2} c_{w_1}(y) y \, dy \quad (6.87)$$

Capitolo 7

Stabilità dinamica

La stabilità dinamica è la proprietà del velivolo di ritornare nelle condizioni di equilibrio in seguito ad una perturbazione iniziale. Nella trattazione linearizzata della dinamica del velivolo è stato possibile ricavare sia per la dinamica longitudinale che per la dinamica latero-direzionale, la relativa formulazione agli stati, ossia il seguente sistema:

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = A\Delta \mathbf{x} + B\Delta \boldsymbol{\delta} \quad (7.1)$$

dove:

- $\Delta \mathbf{x}(t)$ è il vettore che contiene le variazioni delle variabili di stato rispetto alla condizione imperturbata (ossia alla condizione di trim);
- $\Delta \boldsymbol{\delta}(t)$ è il vettore che contiene le rispettive variazioni delle variabili di controllo;
- A è la matrice di stato del sistema
- B è la matrice di controllo

Ai fini della stabilità non si considerano le variazioni dei comandi in quanto in questa trattazione si valuta la stabilità a comandi bloccati, pertanto la soluzione del sistema ha la forma seguente:

$$\Delta \mathbf{x}(t) = \Delta \mathbf{x}_0 e^{\lambda t} \quad (7.2)$$

dove $\Delta \mathbf{x}_0 = \Delta \mathbf{x}(0)$. Sostituendo la 7.2 nell'equazione di partenza si ottiene che:

$$A\Delta \mathbf{x}_0 = \lambda \Delta \mathbf{x}_0 \quad (7.3)$$

ossia λ e $\Delta \mathbf{x}_0$ sono rispettivamente gli autovalori e gli autovettori della matrice A . In generale $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\lambda = \eta \pm i\omega \quad \text{con } \omega \geq 0 \quad (7.4)$$

In particolare:

- η è indice dello smorzamento (se $\eta < 0$) o amplificazione (se $\eta > 0$) del sistema.
- ω è la frequenza del sistema smorzato o amplificato. Se $\omega = 0$ il sistema non presenta oscillazioni.

Tuttavia, ai fini pratici, nel caso di modi periodici, è più utile rappresentare il sistema in termini di frequenza naturale ω_n (ossia frequenza del sistema non smorzato) e in termini di coefficiente di smorzamento ξ , tenendo presente che:

$$\eta = -\xi \omega_n \quad (7.5)$$

$$\omega = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (7.6)$$

Da cui si ricava che:

$$\omega_n = \frac{\eta^2}{\sqrt{\eta^2 + \omega^2}} + \omega \sqrt{1 + \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 + \omega^2}}} \left(1 - \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 + \omega^2}} \right) \quad (7.7)$$

$$\xi = -\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 + \omega^2}} \quad (7.8)$$

7.1 Stabilità dinamica longitudinale

La dinamica longitudinale è generalmente caratterizzata da due modi periodici ossia:

- Modo di corto periodo (short period) caratterizzato da un'alta frequenza di oscillazione ed elevato smorzamento
- Modo fugoide (o di lungo periodo) caratterizzato da una bassa frequenza di oscillazione e uno smorzamento relativamente ridotto

7.1.1 Risultati ottenuti

Di seguito si presentano i risultati ottenuti per le tre configurazioni

Configurazione 1

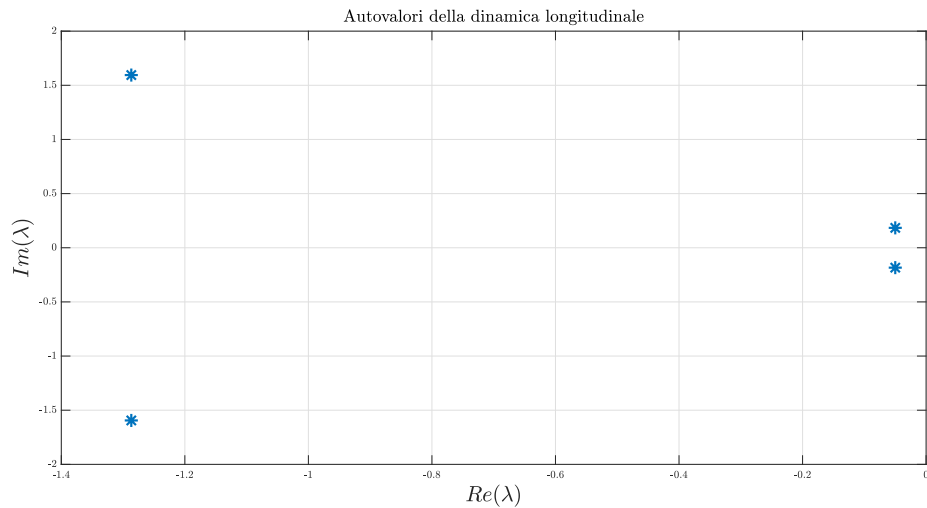


Figura 7.1: Autovalori della dinamica longitudinale nella *Configurazione 1*

Modo	Autovalore λ	$\omega = \Im(\lambda) $ [rad/s]	$\eta = \Re(\lambda)$ [1/s]	ω_n [rad/s]	ξ [-]
Corto periodo (short period)	-1.2867+-1.5945i	1.5945	-1.2867	2.0489	0.6280
Fugoide (lungo periodo)	-0.049943+-0.18373i	0.18373	-0.049943	0.1904	0.2623

Tabella 7.1: Autovalori della dinamica longitudinale nella *Configurazione 1*

Configurazione 2

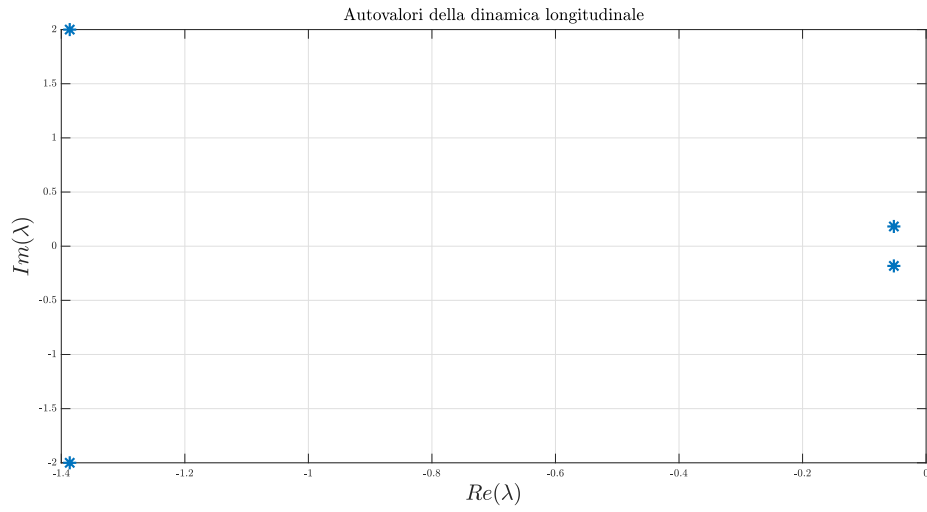


Figura 7.2: Autovalori della dinamica longitudinale nella *Configurazione 2*

Modo	Autovalore λ	$\omega = \Im(\lambda) $ [rad/s]	$\eta = \Re(\lambda)$ [1/s]	ω_n [rad/s]	ξ [-]
Corto periodo (short period)	-1.3864+-2i	2	-1.3864	2.4335	0.5697
Fugoide (lungo periodo)	-0.052215+-0.18216i	0.18216	-0.052215	0.1895	0.2755

Tabella 7.2: Autovalori della dinamica longitudinale nella *Configurazione 2*

Configurazione 3

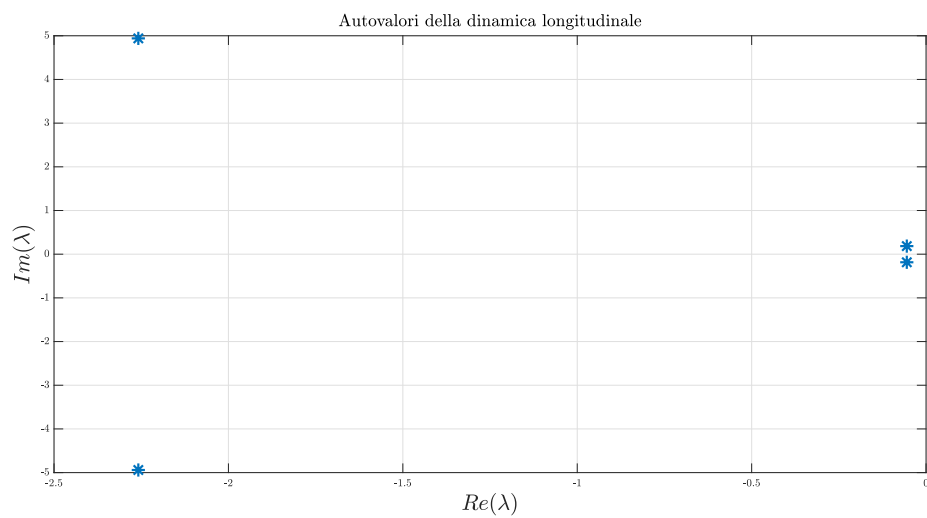


Figura 7.3: Autovalori della dinamica longitudinale nella *Configurazione 3*

Modo	Autovalore λ	$\omega = \Im(\lambda) $ [rad/s]	$\eta = \Re(\lambda)$ [1/s]	ω_n [rad/s]	ξ [-]
Corto periodo (short period)	-2.2583+-4.9402i	4.9402	-2.2583	5.4319	0.4158
Fugoide (lungo periodo)	-0.055248+-0.18498i	0.18498i	-0.055248	0.1931	0.2862

Tabella 7.3: Autovalori della dinamica longitudinale nella *Configurazione 3*

7.2 Stabilità dinamica latero-direzionale

La dinamica longitudinale è generalmente caratterizzata da due modi aperiodici e un modo periodico ossia:

- lo Spiral mode, un modo aperiodico poco smorzato che in certi casi può anche essere amplificato
- il Roll mode, un modo aperiodico altamente smorzato
- il Dutch roll mode, un modo periodico poco smorzato

7.2.1 Risultati ottenuti

Di seguito si presentano i risultati ottenuti per le tre configurazioni

Configurazione 1

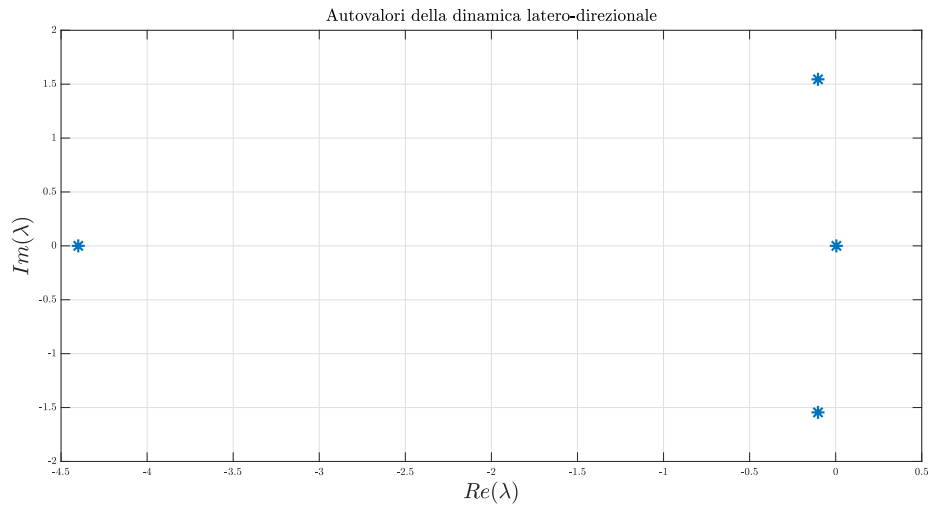


Figura 7.4: Autovalori della dinamica latero-direzionale nella *Configurazione 1*

Modo	Autovalore λ	$\omega = \Im(\lambda) $ [rad/s]	$\eta = \Re(\lambda)$ [1/s]	ω_n [rad/s]	ξ [-]
Dutch Roll Mode	-0.10275+-1.5451i	1.5451	-0.10275	1.5485	0.0664
Roll Mode	-4.4	0	-4.4	non definito	non definito
Spiral Mode	0.0040999	0	0.0040999	non definito	non definito

Tabella 7.4: Autovalori della dinamica latero-direzionale nella *Configurazione 1*

Configurazione 2

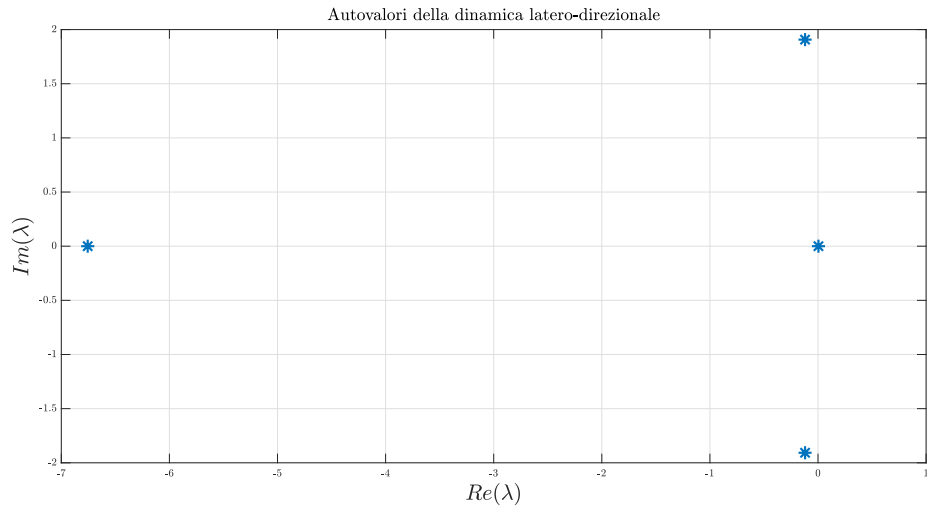


Figura 7.5: Autovalori della dinamica latero-direzionale nella *Configurazione 2*

Modo	Autovalore λ	$\omega = \Im(\lambda) $ [rad/s]	$\eta = \Re(\lambda)$ [1/s]	ω_n [rad/s]	ξ [-]
Dutch Roll Mode	-0.11975+-1.9073i	1.9073	-0.11975	1.9111	0.0627
Roll Mode	-6.7558	0	-6.7558	non definito	non definito
Spiral Mode	0.0040891	0	0.0040891	non definito	non definito

Tabella 7.5: Autovalori della dinamica latero-direzionale nella *Configurazione 2*

Configurazione 3

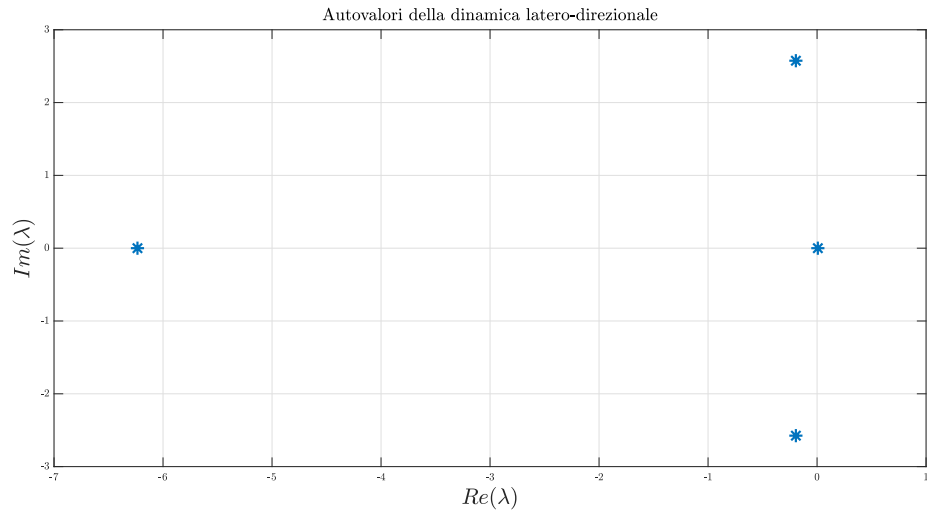


Figura 7.6: Autovalori della dinamica latero-direzionale nella *Configurazione 3*

Modo	Autovalore λ	$\omega = \Im(\lambda) $ [rad/s]	$\eta = \Re(\lambda)$ [1/s]	ω_n [rad/s]	ξ [-]
Dutch Roll Mode	-0.1944+-2.5748i	2.5748	-0.1944	2.5822	0.0753
Roll Mode	-6.2345	0	-6.2345	non definito	non definito
Spiral Mode	0.0071472	0	0.0071472	non definito	non definito

Tabella 7.6: Autovalori della dinamica latero-direzionale nella *Configurazione 3*

Capitolo 8

Dimensionamento delle superfici di comando

8.1 Dimensionamento dell'equilibratore

I parametri caratteristici dell'equilibratore sono due:

- Il rapporto $\frac{c_e}{c_{w_2}}$ ossia il rapporto tra la corda dell'equilibratore e la corda dell'ala w_2 ;
- Il rapporto $\frac{l_e}{l_{w_2}}$ ossia il rapporto tra la lunghezza dell'equilibratore e l'apertura alare dell'ala w_2 ;

Il criterio adottato per il dimensionamento dell'equilibratore consiste in uno studio multiparametrico in cui l'analisi non si limita esclusivamente all'effetto dei parametri caratteristici dell'equilibratore ma si estende allo studio dell'effetto di altri parametri come, ad esempio:

- il calettamento dell'ala w_2 (i_{w_2})
- la posizione orizzontale e verticale del centro aerodinamico dell'ala w_2 (ossia $x_{AC_{w_2}}$ e $z_{AC_{w_2}}$)

Il procedimento che si segue per l'analisi multiparametrica è il seguente:

1. si calcola la deflessione dell'equilibratore in condizioni di trim per tutto il range di velocità previsto dall'involucro di volo $[V_{stall}; V_{max}]$;
2. si osserva per diversi valori dei parametri precedentemente menzionati se la deflessione dell'equilibratore necessaria per trimmare il velivolo rimane ragionevolmente lontana dalla deflessione corrispondente al fondocorsa del comando di equilibratore, in accordo con i requisiti di manovrabilità che devono essere soddisfatti in tutto il range di velocità specificato. Si assume una deflessione di fondocorsa dell'equilibratore pari a circa $\pm 20 \text{ deg}$

Di seguito si presentano i risultati ottenuti:

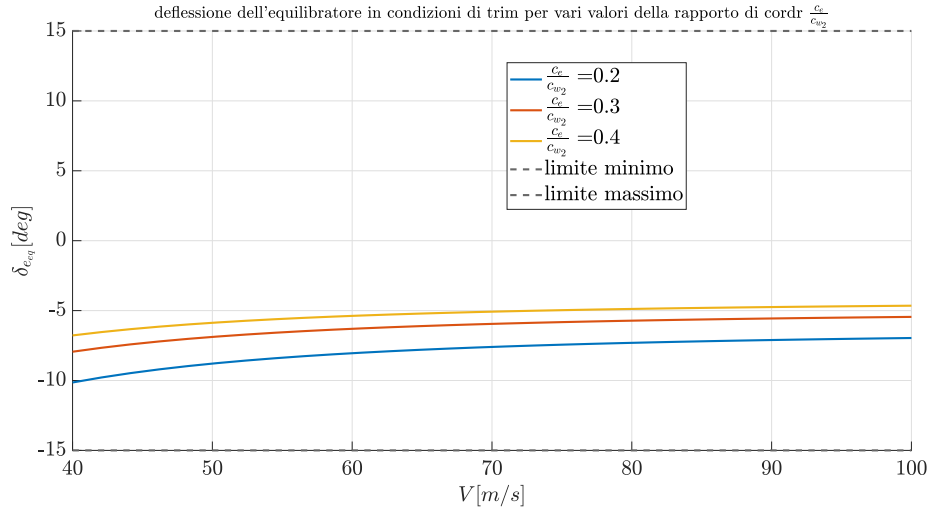


Figura 8.1: Deflessione dell'equilibratore necessaria per trimmare il velivolo al variare delle velocità di volo per diversi valori del rapporto di corde $\frac{c_e}{c_{w2}}$

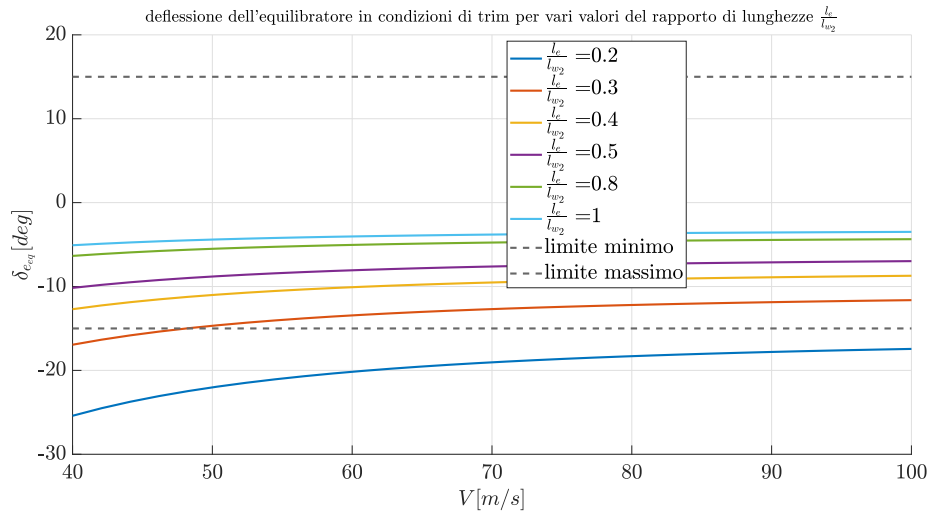


Figura 8.2: Deflessione dell'equilibratore necessaria per trimmare il velivolo al variare delle velocità di volo per diversi valori del rapporto $\frac{l_e}{l_{w2}}$

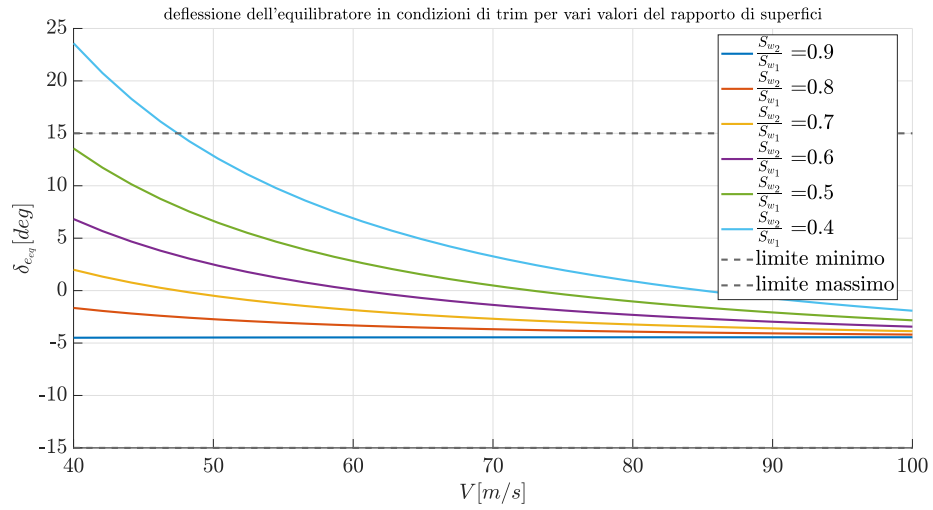


Figura 8.3: Deflessione dell'equilibratore necessaria per trimmare il velivolo al variare delle velocità di volo per diversi valori del rapporto di superfici $\frac{S_{w2}}{S_{w1}}$

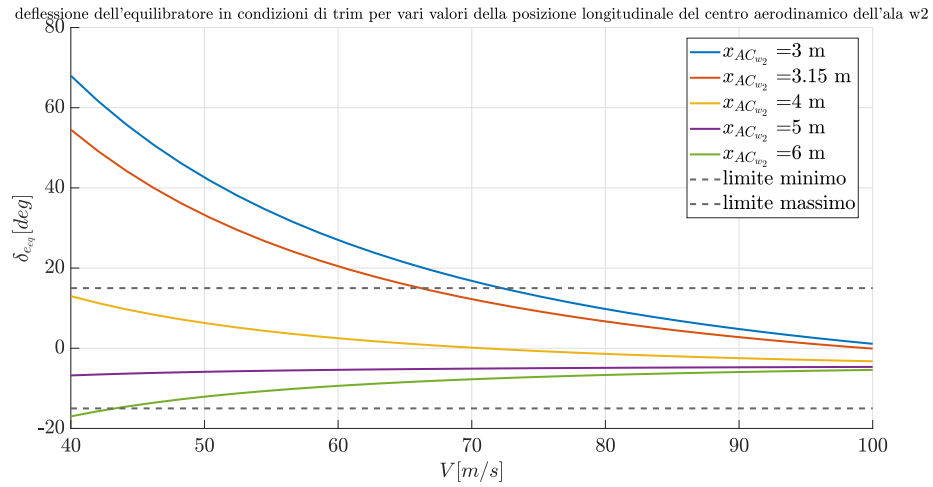


Figura 8.4: Deflessione dell'equilibratore necessaria per trimmare il velivolo al variare delle velocità di volo per diversi valori di $x_{AC_{w2}}$

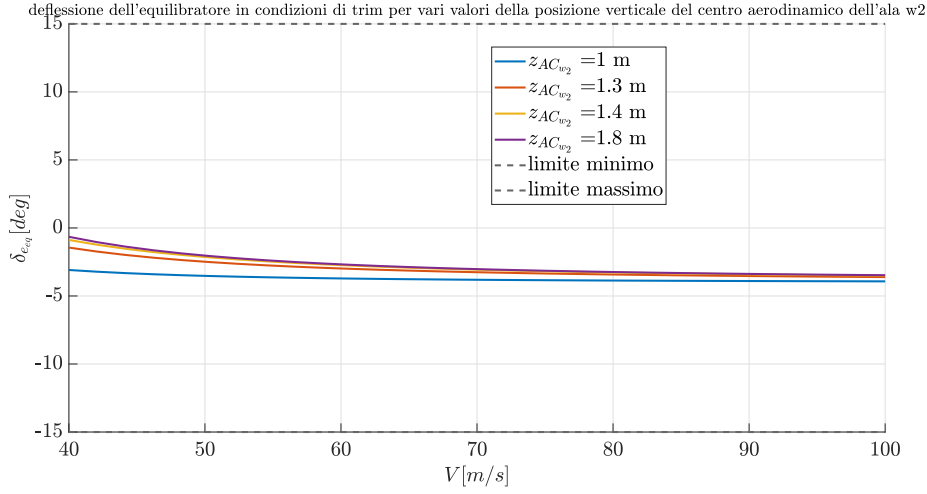


Figura 8.5: Deflessione dell'equilibratore necessaria per trimmare il velivolo al variare delle velocità di volo per diversi valori di z_{ACw_2}

8.2 Dimensionamento del timone

Il dimensionamento del timone consiste nel settaggio di due parametri:

- il rapporto $\frac{c_r}{c_f}$ ossia il rapporto tra la corda del timone e quella dell'intero impennaggio verticale;
- Il rapporto $\frac{l_r}{l_f}$ ossia il rapporto tra la lunghezza del timone e la lunghezza dell'intero impennaggio verticale;

Il criterio che si adotta per il dimensionamento è quello di verificare che in condizioni prossime allo stallo il timone sia in grado di equilibrare il velivolo a seguito di una raffica di intensità, $\Delta v_{gust} = 0.2V_{stall}$. Dal momento che si vuole che la velocità del velivolo $\mathbf{V_G}$ rimanga nel piano di simmetria deve essere che: $\Delta v_G = 0$ per cui facendo riferimento alle 4.5: $\Delta v = \Delta v_{gust} - \cancel{\Delta v_G} = 0.2V_{stall}$ che corrisponde all'incirca ad un'angolo di slideslip pari a circa $\Delta\beta = 15\ deg$

A questo punto si fa riferimento alle formule linearizzate ricavate nel capitolo 4.5 interpretando lo scostamento $\Delta\mathcal{N}$ come variazione del momento di imbardata rispetto alle condizioni di equilibrio in seguito alla raffica laterale.

$$\Delta\mathcal{N} = \left. \frac{\partial\mathcal{N}}{\partial v} \right|_{eq} \Delta v + \left. \frac{\partial\mathcal{N}}{\partial p} \right|_{eq} \Delta p + \left. \frac{\partial\mathcal{N}}{\partial r} \right|_{eq} \Delta r + \left. \frac{\partial\mathcal{N}}{\partial \delta_r} \right|_{eq} \Delta\delta_r + \left. \frac{\partial\mathcal{N}}{\partial \delta_a} \right|_{eq} \Delta\delta_a \quad (8.1)$$

considerando nulle Δp , Δr , $\Delta\delta_r$, e che le derivate vanno calcolate in condizione di stallo si ha che:

$$\Delta \mathcal{N} = \left. \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial v} \right|_{stall} \Delta v + \left. \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \delta_r} \right|_{stall} \Delta \delta_r \quad (8.2)$$

Inoltre $\Delta v = V_{stall} \Delta \beta$, per cui:

$$\Delta \mathcal{N} = \left. \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial v} \right|_{stall} V_{stall} \Delta \beta + \left. \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \delta_r} \right|_{stall} \Delta \delta_r \quad (8.3)$$

Affinchè il velivolo rimanga in condizioni di equilibrio anche in seguito alla raffica deve essere che $\mathcal{N} = \Delta \mathcal{N} = 0$, per cui:

$$\begin{aligned} \delta_r = \Delta \delta_r &= - \frac{\left. \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial v} \right|_{stall}}{\left. \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \delta_r} \right|_{stall}} V_{stall} \Delta \beta \\ &= - \frac{\frac{1}{2} \rho V_{stall} S_{w_1} l_{w_1} \left. \frac{\partial C_N}{\partial \beta} \right|_{stall}}{\frac{1}{2} \rho V_{stall}^2 S_{w_1} l_{w_1} \left. \frac{\partial C_N}{\partial \delta_r} \right|_{stall}} V_{stall} \Delta \beta \\ &= - \frac{\left. \frac{\partial C_N}{\partial \beta} \right|_{stall}}{\left. \frac{\partial C_N}{\partial \delta_r} \right|_{stall}} \Delta \beta \\ &= \frac{1 - \sigma_\beta}{\tau_{r,3D}} \Delta \beta \end{aligned}$$

Dove nell'ultima equazione sono state usate le formule 6.13 e 6.78. E' importante notare che l'unico parametro che influenza il risultato è proprio il fattore $\tau_{r,3D}$ (*rudder effectiveness*) il quale dipende, nel caso del timone, solamente dal rapporto $\frac{c_r}{c_f}$.

I risultati ottenuti sono riportati di seguito:

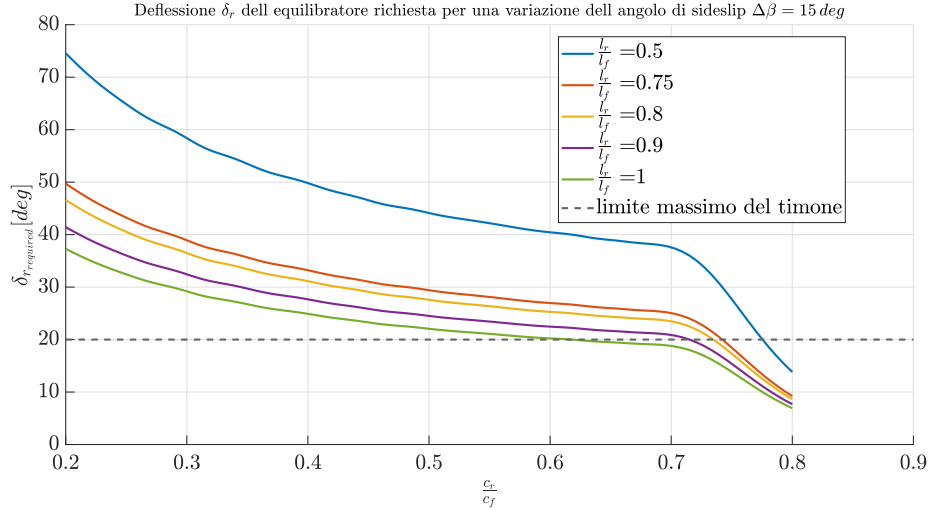


Figura 8.6: Deflessione del timone necessaria per equilibrare il velivolo in seguito ad una raffica di intensità pari a $0.2 V_{stall}$

8.3 Dimensionamento degli alettoni

Il dimensionamento degli alettoni consiste nel settaggio di due parametri:

- Il rapporto $\frac{c_a}{c_{w_1}}$ ossia il rapporto tra la corda dell'equilibratore e la corda dell'ala w_1 ossia quella sulla quale sono installati gli alettoni;
- Il rapporto $\frac{l_e}{l_{w_1}}$ ossia il rapporto tra la lunghezza dell'equilibratore e l'apertura alare dell'ala w_1 ;

Il criterio che si adotta per il dimensionamento degli alettoni fa riferimento alla massima variazione della velocità di rollio di regime Δp_{max} (rispetto condizioni di equilibrio) che si ottiene in seguito ad un comando di alettone di intensità pari alla massima escursione possibile $\Delta \delta_{amax} = 20 \text{ deg}$.

Per semplificare la trattazione si fa riferimento ad un modello semplificato del *Roll Mode* riportato di seguito:

$$I_{xx} \Delta \dot{p} = \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p} \right|_{eq} \Delta p + \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \delta_a} \right|_{eq} \Delta \delta_a \quad (8.4)$$

In condizioni di regime ($t = t_{regime}$) si ha che:

$$\begin{aligned} \Delta p(t_{regime}) &= \Delta p_{max} = p_{max} \\ \Delta \delta_a(t_{regime}) &= \Delta \delta_{amax} \end{aligned}$$

Pertanto, sostituendo queste condizioni nell'equazione 8.4 si ottiene

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p} \right|_{eq} p_{max} + \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \delta_a} \right|_{eq} \Delta \delta_{amax} = 0$$

Da cui:

$$\begin{aligned}
 p_{max} &= - \frac{\left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \delta_a} \right|_{eq}}{\left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p} \right|_{eq}} \Delta \delta_{amax} \\
 &= - \frac{\frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 S_{w_1} l_{w_1} \left. \frac{\partial C_L}{\partial \delta_a} \right|_{eq}}{\frac{1}{2} \rho V_{eq}^2 S_{w_1} l_{w_1} \left. \frac{\partial C_L}{\partial p} \right|_{eq}} \Delta \delta_{amax} \\
 &= - \frac{\left. \frac{\partial C_L}{\partial \delta_a} \right|_{eq}}{\left. \frac{\partial C_L}{\partial p} \right|_{eq}} \Delta \delta_{amax}
 \end{aligned}$$

Si ricordi che la derivata $\left. \frac{\partial C_L}{\partial p} \right|_{eq}$ dipende da V_{eq} per cui l'analisi va effettuata per tutti i range di velocità. Si procede variando i parametri in questione fintanto che p_{max} raggiunge un range di valori compreso tra 20 deg/s e 100 deg/s. I risultati ottenuti sono riportati di seguito:

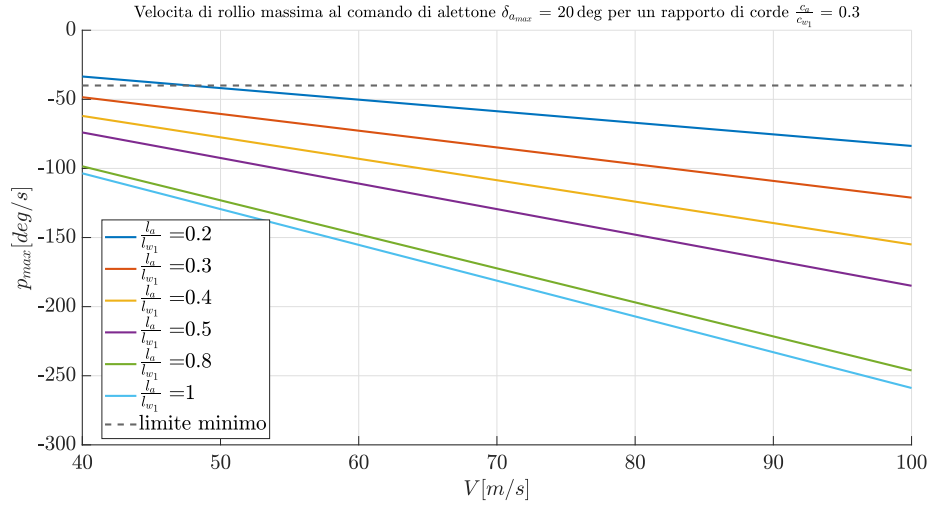


Figura 8.7: Velocità massima di rollio in condizioni di regime al variare della velocità di volo e per un rapporto di corde $\frac{c_a}{c_{w_1}} = 0.3$

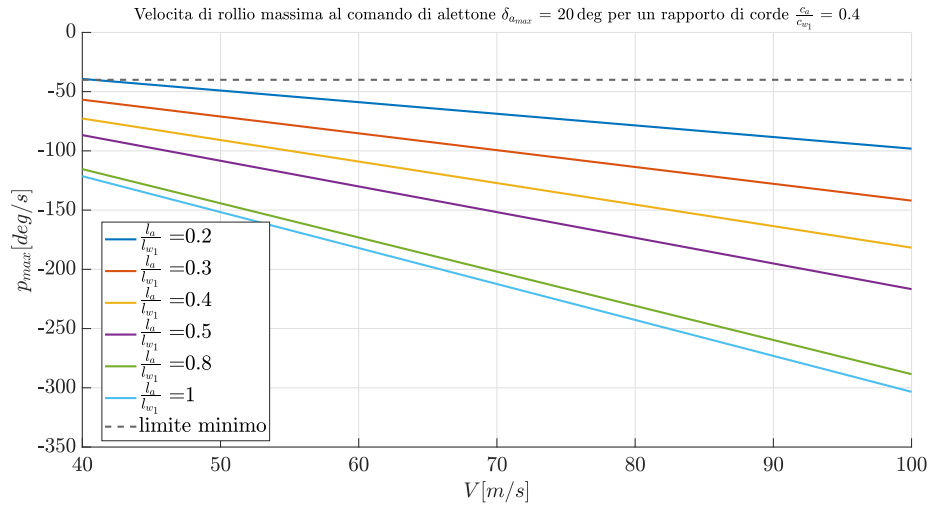


Figura 8.8: Velocità massima di rollio in condizioni di regime al variare della velocità di volo e per un rapporto di corde $\frac{c_a}{c_{w_1}} = 0.4$

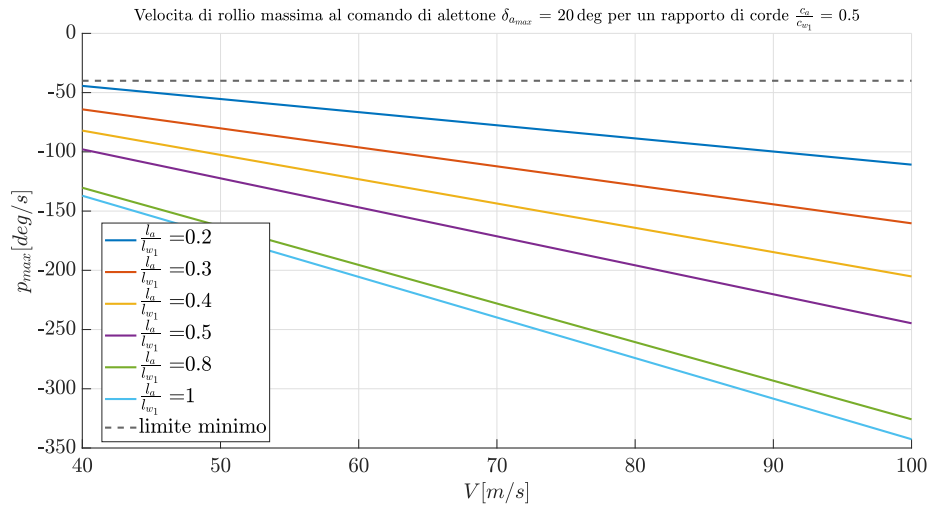


Figura 8.9: Velocità massima di rollio in condizioni di regime al variare della velocità di volo e per un rapporto di corde $\frac{c_a}{c_{w_1}} = 0.5$

Capitolo 9

Dimensionamento del sistema propulsivo

9.1 Bilancio delle potenze

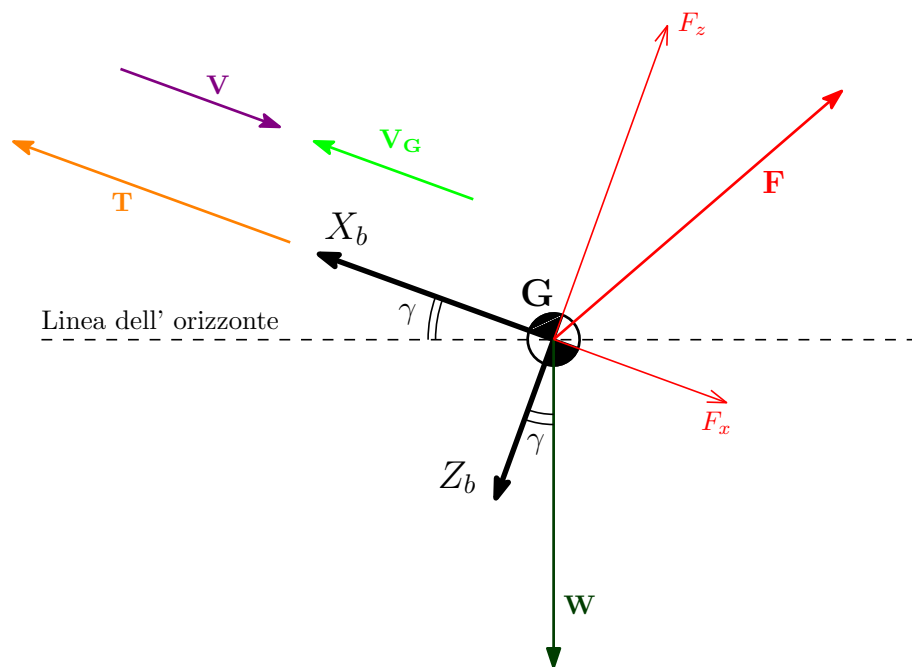


Figura 9.1: Schema delle forze agenti sul velivolo in fase di salita

In questa sezione ci si pone l'obiettivo di ricavare il bilancio di potenze per il velivolo in condizioni di crociera e più in generale in condizioni di salita uniforme. Considerando l'equazione del bilancio di forze 4.16 e moltiplicandola scalarmente per la velocità del velivolo $\mathbf{V}_G$, si ottiene:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{V}_G + \mathbf{W} \cdot \mathbf{V}_G + \mathbf{F} \cdot \mathbf{V}_G = \frac{d\mathbf{V}_G}{dt} \cdot \mathbf{V}_G \quad (9.1)$$

Dal momento che gli angoli di incidenza sono molto piccoli, allora è possibile esprimere le componenti della forza aerodinamica applicando le 5.2 e 5.3 (la portanza laterale è nulla dal momento che nel caso in esame il moto avviene nel piano di simmetria) e inoltre è possibile ritenere la velocità del velivolo quasi parallela all'asse X_b , per cui:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -D\mathbf{i}_b + -Q\mathbf{j}_b - L\mathbf{k}_b = \begin{bmatrix} -D \\ 0 \\ -L \end{bmatrix}_b \\ \mathbf{V}_G &= V_G\mathbf{i}_b = \begin{bmatrix} V_U \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_b \end{aligned}$$

Facendo riferimento allo schema in Figura 9.1, la forza peso $\mathbf{W}$ può essere espressa come:

$$\mathbf{W} = -mg \sin(\gamma)\mathbf{i}_b + mg \cos(\gamma)\mathbf{k}_b = \begin{bmatrix} -mg \sin(\gamma) \\ 0 \\ mg \cos(\gamma) \end{bmatrix}_b$$

Svolgendo i prodotti scalari si ottiene l'equazione di bilancio delle potenze ed indicando con $V_G = |\mathbf{V}_G|$:

$$TV_G - DV_G - V_G \sin \gamma - DV_G = m \frac{dV_G^2}{dt} \quad (9.2)$$

In condizioni di salita uniforme:

$$\begin{aligned} V_G &= V_{G_{eq}} \\ T &= T_{eq} \\ D &= D_{eq} \end{aligned}$$

Supponendo che il velivolo operi in aria calma, allora la velocità del vento relativo che investe il velivolo è uguale ed opposta alla velocità del baricentro del velivolo stesso, ossia: $\mathbf{V}_G = -\mathbf{V}$, in particolare sono uguali i moduli delle velocità: $|\mathbf{V}_G| = |\mathbf{V}| \rightarrow V = V_G$ per cui il bilancio di potenze in condizioni di salita uniforme diventa:

$$T_{eq}V_{eq} - V_{eq}mg \sin(\gamma) - D_{eq}V_{eq} = 0 \quad (9.3)$$

Il termine $T_{eq}V_{eq}$ è noto come *Potenza propulsiva o potenza disponibile* e generalmente viene indicata con Π_T mentre il termine $D_{eq}V_{eq}$ rappresenta la *potenza esercitata dalla resistenza aerodinamica* e di solito viene indicata con Π_D . La differenza tra Π_T e Π_D viene definito eccesso di potenza. In pratica, in condizioni di salita uniforme, l'eccesso di potenza permette al velivolo di guadagnare quota, in particolare se $\gamma = 0deg$ (ossia in condizioni di crociera), l'eccesso di potenza deve essere nullo, e pertanto il termine Π_D assume proprio il significato di *Potenza necessaria*. Per calcolare la potenza propulsiva richiesta in fase di salita è necessario determinare la resistenza D_{eq} , e quindi è necessario aggiungere all'equazione del bilancio di potenze, le equazioni di equilibrio delle forze e del momento di beccheggio:

- Equilibrio delle forze lungo l'asse X_b

$$T_{eq} = mg \sin(\gamma) + D_{eq} \quad (9.4)$$

Osservazione: Si nota immediatamente che l'equazione appena ricavata è ridondante in quanto non è altro che una riformulazione dell'equazione di bilancio di potenze

- Equilibrio delle forze lungo l'asse Z_b

$$L_{eq} = mg \cos(\gamma) \quad (9.5)$$

- Equilibrio del momento di beccheggio

$$\mathcal{M}_{eq} = 0 \quad (9.6)$$

Quindi:

$$\begin{cases} C_{L_{eq}} = \frac{mg \cos \gamma}{\frac{1}{2}\rho V_{eq}^2 S_{w_1}} \\ C_{\mathcal{M}_{eq}} = 0 \end{cases} \quad (9.7)$$

A questo punto si procede in maniera identica a quanto discusso nel paragrafo 4.4 per il calcolo delle condizioni di trim, ossia si calcolano α_{eq} e δ_{eq} da cui successivamente si ricava $C_{D_{eq}}$ e di conseguenza:

$$D_{eq} = \frac{1}{2}\rho V_{eq}^2 S_{w_1} C_{D_{eq}}$$

9.2 Dimensionamento dei propulsori

L'obiettivo è quello di determinare la potenza propulsiva richiesta in fase di salita modo tale da riuscire a determinare la potenza dei tre motori elettrici installati sul velivolo, infatti, la fase di salita è quella più esigente dal punto di vista della richiesta di potenza erogata dai motori, pertanto il dimensionamento effettuato in questo modo garantisce il corretto funzionamento dei propulsori in tutte le altre fasi del volo.

I propulsori installati sul velivolo sono tre e sono costituiti da fan intubati ciascuno dei quali è azionato da un motore elettrico [12].

La potenza complessiva erogata dai motori elettrici Π_M è legata alla potenza propulsiva attraverso una catena di rendimenti [13]:

$$\Pi_M = \frac{\Pi_T}{\eta_P \eta_F \eta_D \eta_M} \quad (9.8)$$

Nella tabella è spiegato il significato dei rendimenti, mentre per una loro stima si fa riferimento a [13]:

Simbolo	Definizione	Significato
η_M	$\frac{\text{potenza all'albero}}{\text{potenza dei motori}}$	Rendimento del motore elettrico
η_F	$\frac{\text{potenza del flusso}}{\text{potenza all'albero}}$	Rendimento del fan
η_D	$\frac{\text{potenza del getto}}{\text{potenza del flusso}}$	Rendimento del condotto del fan dovuto alle perdite per attrito viscoso e per separazione dello strato limite
η_P	$\frac{\text{potenza propulsiva}}{\text{potenza del getto}}$	Rendimento propulsivo

Tabella 9.1: Rendimenti

La potenza erogata da ciascun motore elettrico Π_{SM} è banalmente:

$$\Pi_{SM} = \frac{\Pi_M}{N_M} \quad (9.9)$$

dove N_M è il numero di propulsori.

9.2.1 Risultati ottenuti

Di seguito sono riportati i risultati delle potenze richieste in condizioni di salita al variare della velocità di volo e al variare dell'angolo di rampa:

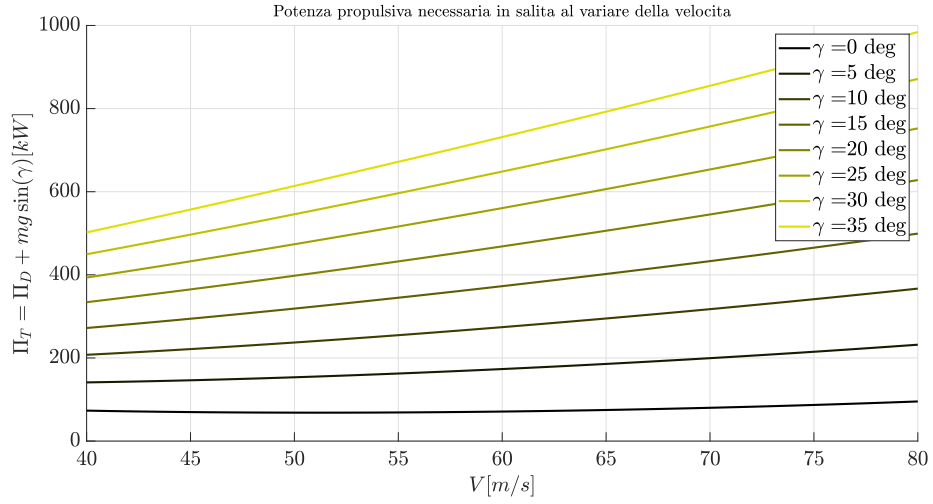


Figura 9.2: Potenza propulsiva richiesta in condizioni di salita per diverse velocità di volo e per diversi angoli di rampa

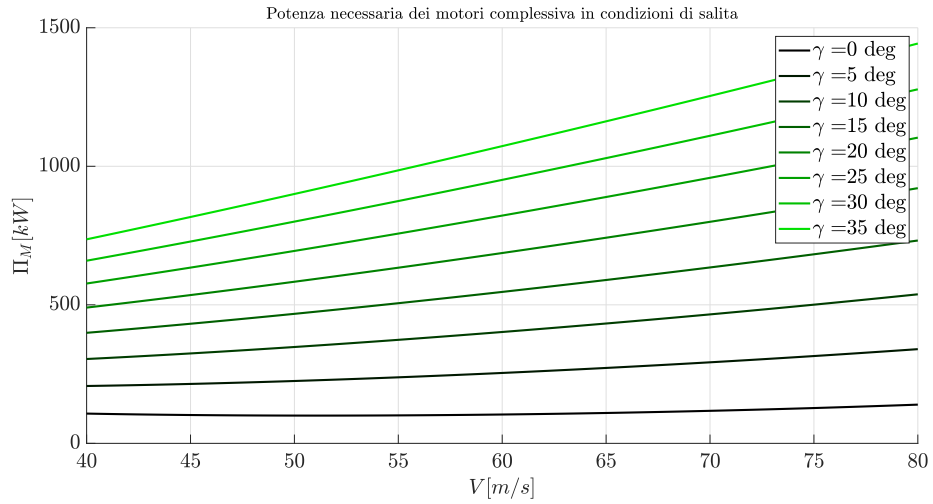


Figura 9.3: Potenza complessiva richiesta ai motori elettrici in condizioni di salita per diverse velocità di volo e per diversi angoli di rampa

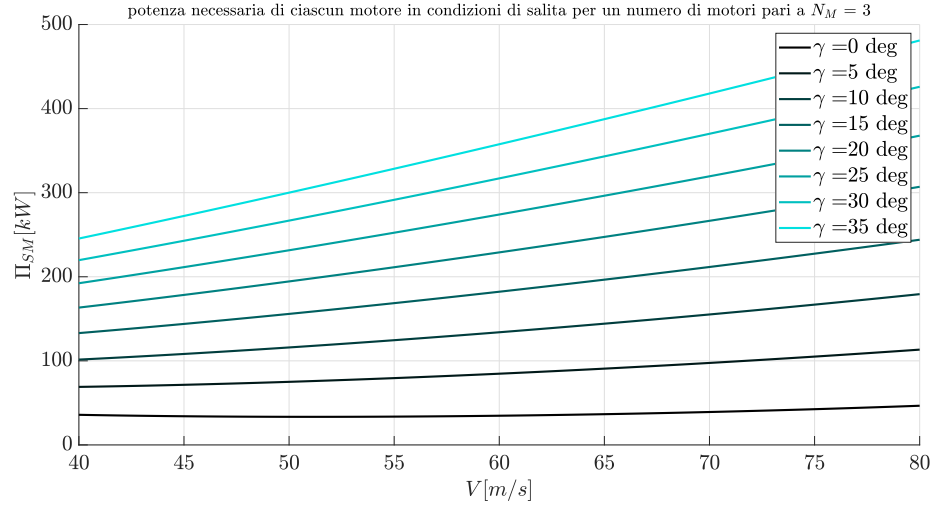


Figura 9.4: Potenza propulsiva richiesta a ciascuno dei tre motori elettrici installati in condizioni di salita per diverse velocità di volo e per diversi angoli di rampa

Analizzando i risultati in Figura 9.4 si evince che per velocità comprese tra 40 m/s e 50 m/s e per angoli di rampa compresi tra 0 deg (crociera) e 5 deg la potenza richiesta a ciascun motore elettrico vale circa 70 kW che corrisponde proprio alla massima potenza erogabile dai propulsori poichè l'installazione di motori elettrici in grado di erogare una potenza maggiore sarebbero troppo pesanti e ciò comporterebbe un peggioramento delle prestazioni e un arretramento eccessivo del baricentro del che penalizzerebbe la stabilità del velivolo. Un possibile rimedio a questa limitazione è quello di utilizzare, anche in fase di salita, i *thrusters* che normalmente verrebbero utilizzati in fase di decollo/atterraggio verticale.

9.3 Dimensionamento delle batterie

Le batterie equipaggiate dal velivolo sono costituite da celle agli ioni di litio con le seguenti caratteristiche:

Simbolo	Significato	Valore	Unità di misura
e_e	Energia specifica	1260000	KJ/m^3
ρ_e	Densità di energia	1440	KJ/kg
SOC_{min}	Stato minimo di carica residua (minimum state of residual charge)	10 %	-

Tabella 9.2: Caratteristiche tecniche della batteria

Il dimensionamento delle batterie si effettua analizzando la potenza richiesta in condizioni di crociera in quanto nelle altre fasi di volo il consumo della carica della batteria può essere considerato praticamente trascurabile visto lo scarso tempo di percorrenza in queste fasi. In particolare si richiede che il velivolo debba percorrere un *Range* pari a circa 250 *km* alla velocità di crociera $V_{cruise} = 250km/h \simeq 70m/s$, da cui si deduce che il tempo di percorrenza in crociera è pari a:

$$t_{cruise} = \frac{Range}{V_{cruise}} = 1h = 3600s \quad (9.10)$$

Dal grafico in figura 9.5 è riportato l'andamento della potenza propulsiva richiesta in condizioni di crociera ed in particolare la potenza richiesta per $V = V_{cruise}$;

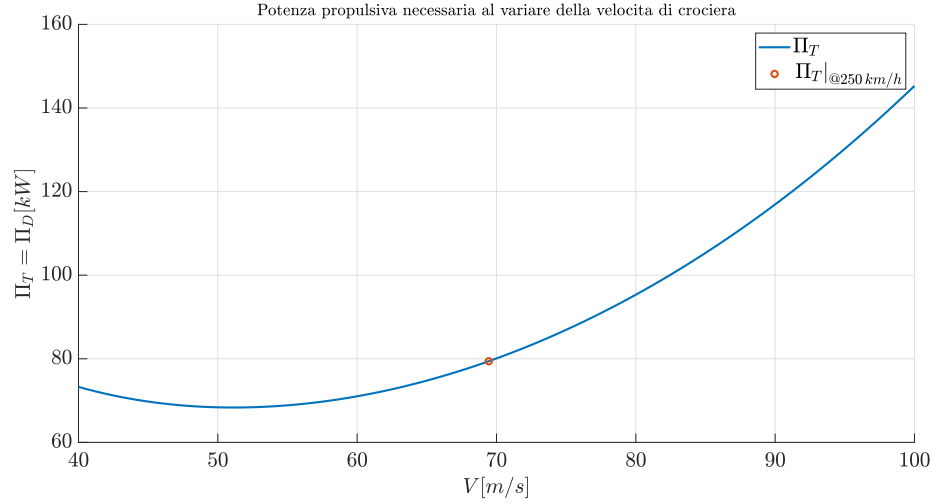


Figura 9.5: Potenza propulsiva richiesta in condizioni di crociera

A questo punto occorre introdurre altri due rendimenti:

- $\eta_B = \frac{\text{potenza elettrica effettiva}}{\text{potenza elettrica della batteria}}$: Rendimento della batteria
- $\eta_{PE} = \frac{\text{potenza dei motori}}{\text{potenza elettrica effettiva erogazione della potenza}}$: Rendimento del sistema elettrico di erogazione della potenza

Anche in questo caso per la stima dei rendimenti si fa riferimento a [13]. Dunque la potenza elettrica erogata dalla batteria Π_B è pari a:

$$\Pi_B = \frac{\Pi_T}{\eta_P \eta_F \eta_D \eta_M \eta_{PE} \eta_B} \quad (9.11)$$

L'energia erogata dalla batteria E_B in condizioni di crociera è pari alla potenza Π_B moltiplicata per il tempo di percorrenza in crociera t_{cruise} . Tuttavia occorre sovradimensionare la capacità batteria in quanto occorre tener conto anche dello stato di carica residuo minimo (SOC_{min}) [13] al di sotto del quale la batteria subirebbe danni irreversibili, per cui:

$$E_B(1 - SOC_{min}) = \Pi_B t_{cruise} \rightarrow E_B = \frac{\Pi_B t_{cruise}}{(1 - SOC_{min})} \quad (9.12)$$

banalmente si ricavano la massa m_B e il volume occupato dalla batteria V_B :

$$m_B = E_B \rho_e \quad (9.13)$$

$$V_B = E_B e_e \quad (9.14)$$

I risultati ottenuti sono riportati in Tabella 9.3

Simbolo	Significato	Valore	Unità di misura
E_B	Energia della batteria	485067	KJ
m_B	peso della batteria	337	kg
V_B	Volume della batteria	0.385	m3

Tabella 9.3: Risultati dimensionamento della batteria

9.4 Diametro dei fan

Il parametro utilizzato per il dimensionamento del diametro dei fan è il carico sul disco μ definito come il rapporto tra la spinta esercitata da ciascun motore T_{SM} e l'area del disco attuatore S_d ossia il cerchio ideale descritto da ciascuna pala del fan durante il ciclo di rotazione. Quindi:

$$\mu = \frac{T_{SM}}{S_d} \quad (9.15)$$

La superficie del disco è pari a $S_d = \frac{\pi d^2}{4}$ dove d è il diametro del disco.

Analogamente a quanto fatto per il dimensionamento dei motori elettrici, anche in questo caso è necessario effettuare il dimensionamento nella fase di volo più critica che corrisponde proprio alla fase di salita in quanto in tal caso la spinta generata dai propulsori è massima; tuttavia non occorre effettuare l'analisi per angoli di rampa superiori a 10 deg in quanto la potenza erogata dei propulsori non sarebbe sufficiente a sostenere il regime di salita uniforme. In Figura 9.6 e Figura 9.7 sono riportati i valori di carico sul disco ottenuti rispettivamente per $\gamma = 5\deg$ e $\gamma = 10\deg$ tenendo presente che i limiti imposti sulla dimensione massima dei propulsori non consentono l'installazione di fan con diametro superiore ad 1 m

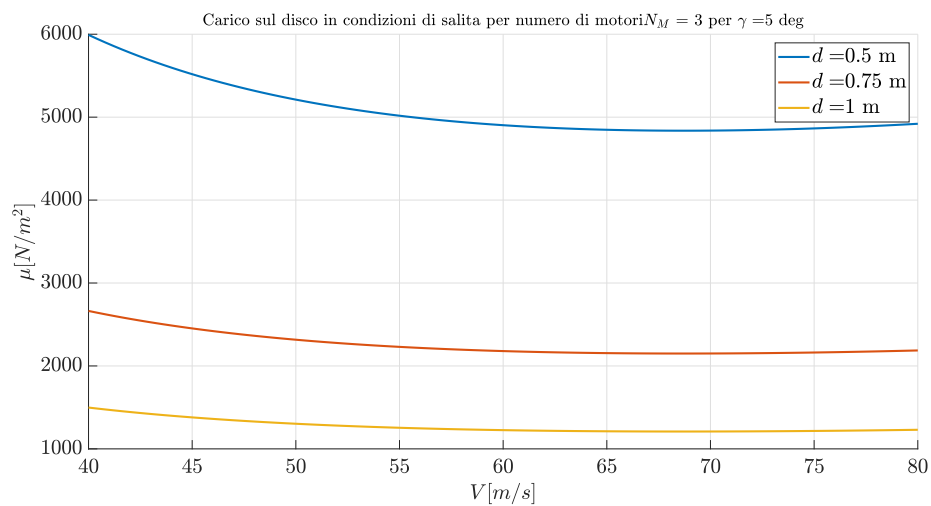


Figura 9.6: carico sul disco al variare della velocità di volo in condizioni di salita con angolo di rampa pari a 5 deg

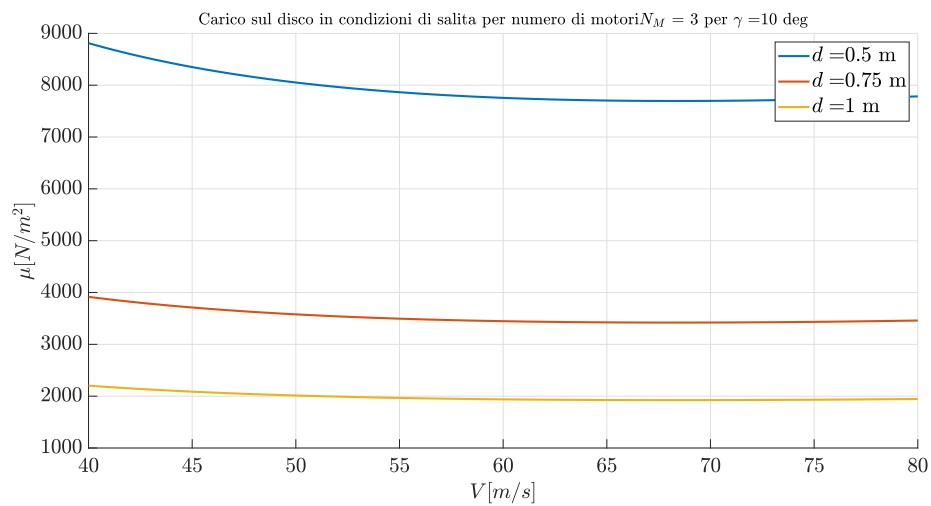


Figura 9.7: carico sul disco al variare della velocità di volo in condizioni di salita con angolo di rampa pari a 10 deg

Appendice A

Flap effectiveness

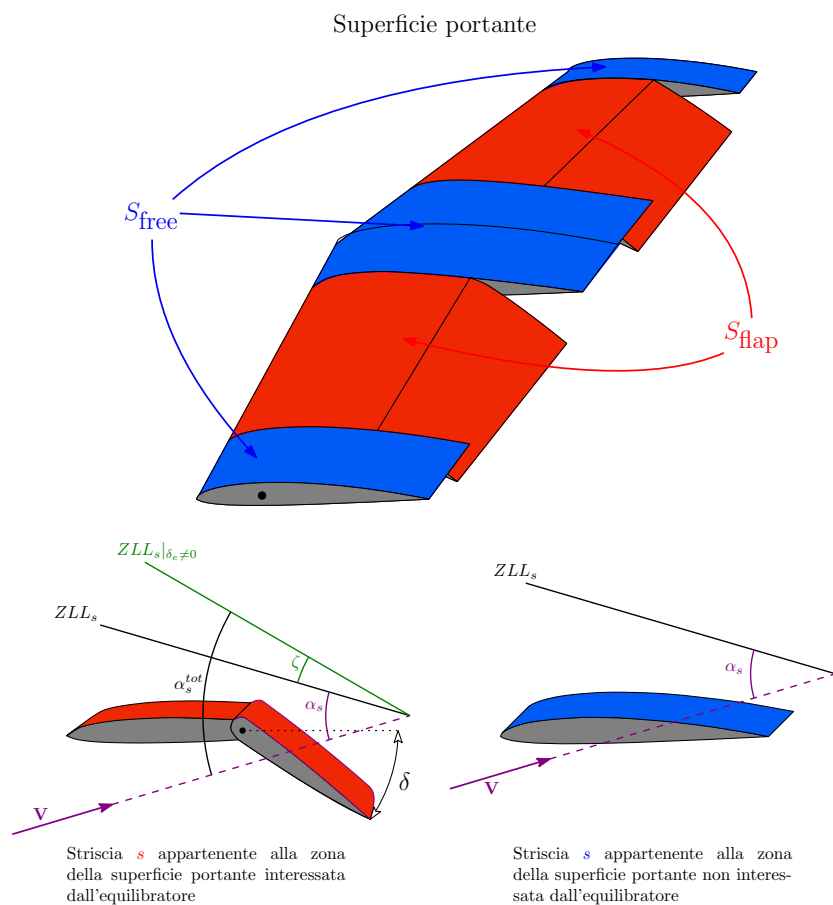


Figura A.1: Modello tridimensionale di una generica superficie portante dotata di flap

Si consideri la Figura A.1 che rappresenta una generica superficie portante dotata di un flap che non si estende per tutta la lunghezza della superficie portante. Considerando una generica striscia infinitesima s occorre distinguere due casi:

1° Caso La striscia s appartiene alla zona della superficie portante interessata dall'equilibratore (evidenziata in rosso nella Figura A.1)

Indicando con:

- δ la deflessione del flap
- ZLL_s la linea di portanza nulla della striscia infinitesima in condizioni di deflessione nulla del flap
- $ZLL_s|_{\delta \neq 0}$ la linea di portanza nulla della striscia infinitesima in condizioni di deflessione non nulla del flap
- α_s l'angolo di incidenza formato tra la direzione individuata dalla velocità del vento relativo che investe la striscia e la linea ZLL_s
- α_s^{tot} l'angolo di incidenza formato tra la direzione individuata dalla velocità del vento relativo che investe la striscia e la linea $ZLL_s|_{\delta \neq 0}$

si nota che l'angolo α_s^{tot} è esprimibile come somma tra l'angolo di incidenza α_s e l'angolo ζ che è proprio l'angolo formato tra gli assi ZLL_s e $ZLL_s|_{\delta \neq 0}$. Tale angolo è funzione esclusivamente della deflessione dell'equilibratore e si annulla se $\delta = 0$. Pertanto:

$$\alpha_s^{tot} = \alpha_s^{tot}(\alpha_s, \delta) = \alpha_s + \zeta(\delta) \quad (A.1)$$

Analogamente a quanto fatto nel capitolo 3.2.1, si esprime il coefficiente di portanza della striscia infinitesima C_{L_s} come funzione lineare degli angoli α_s e δ :

$$C_{L_s} = a_s \alpha_s + b_s \delta \quad (A.2)$$

Il coefficiente $b_s = \frac{\partial C_{L_s}}{\partial \delta}$ può essere riscritto come:

$$\begin{aligned} b_s &= \frac{\partial C_{L_s}}{\partial \delta} \\ &= \frac{\partial C_{L_s}}{\partial \alpha_s} \frac{\partial \alpha_s}{\partial \alpha_s^{tot}} \frac{\partial \alpha_s^{tot}}{\partial \delta} \\ &= \underbrace{\frac{\partial C_{L_s}}{\partial \alpha_s}}_{a_s} \underbrace{\frac{1}{\frac{\partial \alpha_s^{tot}}{\partial \alpha_s}}}_1 \underbrace{\frac{\partial \alpha_s^{tot}}{\partial \delta}}_{\frac{\partial \zeta}{\partial \delta}} \\ &= a_s \frac{\partial \zeta}{\partial \delta} \\ &= a_s \tau \end{aligned}$$

Il parametro $\tau = \frac{\partial \zeta}{\partial \delta}$ è un parametro costante con la deflessione δ e dipende esclusivamente dalle caratteristiche geometriche dell'equilibratore. Tale parametro è noto come *flap effectiveness*

2° Caso La striscia s non appartiene alla zona della superficie portante interessata dall'equilibratore (evidenziata in blu nella Figura A.1)
In questo caso, in assenza di equilibratore si ha semplicemente che:

$$C_{L_s} = a_s \alpha_s \quad (\text{A.3})$$

A questo punto si calcola la portanza complessiva della superficie portante integrando su tutta la superficie S :

$$L = \int_S dL = \int_S \frac{1}{2} \rho V^2 C_{L_s} dS \quad (\text{A.4})$$

Indicando con S_{flap} la superficie interessata dai flap e con S_{free} quella non interessata, si ha che:

$$S = S_{\text{flap}} + S_{\text{free}}$$

Quindi l'integrale diventa:

$$\begin{aligned} L &= \int_{S_{\text{flap}}} \frac{1}{2} \rho V^2 C_{L_s} dS + \int_{S_{\text{free}}} \frac{1}{2} \rho V^2 C_{L_s} dS \\ &= \int_{S_{\text{flap}}} \frac{1}{2} \rho V^2 (a_s \alpha_s + b_s \delta) dS + \int_{S_{\text{free}}} \frac{1}{2} \rho V^2 (a_s \alpha_s) dS \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Considerando che in assenza di svergolamento l'angolo di incidenza è uguale lungo tutta l'apertura alare, allora $\alpha_s = \text{costante} = \alpha$ e dato che il profilo aerodinamico che costituisce la superficie portante è sempre lo stesso allora anche $a_s = \text{costante} = a$. Pertanto:

$$L = \frac{1}{2} \rho V^2 (a \alpha S_{\text{flap}} + a \alpha S_{\text{free}} + b_s \delta S_{\text{flap}}) = \frac{1}{2} \rho V^2 (a \alpha \underbrace{(S_{\text{flap}} + S_{\text{free}})}_S + b_s \delta S_{\text{flap}}) \quad (\text{A.6})$$

Tenendo presente che: $L = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_L$, dividendo la A.6 per $\frac{1}{2} \rho V^2 S$ si ottiene che:

$$C_L = a \alpha + b_s \frac{S_{\text{flap}}}{S} \delta \quad (\text{A.7})$$

Ricordando l'espressione di b_s si ottiene che:

$$C_L = a \alpha + \underbrace{a \tau \frac{S_{\text{flap}}}{S}}_{\tau_{3D}} \delta \quad (\text{A.8})$$

Il termine $\tau_{3D} = \tau \frac{S_{\text{flap}}}{S}$ rappresenta proprio il *flap effectiveness tridimensionale* e tiene conto proprio del fatto che il flap non ricopre interamente la lunghezza della superficie portante. Questo parametro è un'indica l'efficacia dei flap nel variare la portanza complessiva dell'intera superficie portante.

Il discorso effettuato può essere applicato:

- all'equilibratore: in tal caso si parlerebbe di *elevator effectiveness* τ_e ed *elevator effectiveness tridimensionale* $\tau_{e,3D}$
- ai timoni: in tal caso si parlerebbe di *rudder effectiveness* τ_f ed *rudder effectiveness tridimensionale* $\tau_{f,3D}$

Nel caso degli alettoni non avrebbe senso definire l'*aileron effectiveness tridimensionale* in quanto gli alettoni non servono ad incrementare la portanza complessiva sull'ala intera ma servono esclusivamente a creare un momento di rollio

Appendice B

Distribuzione delle corde

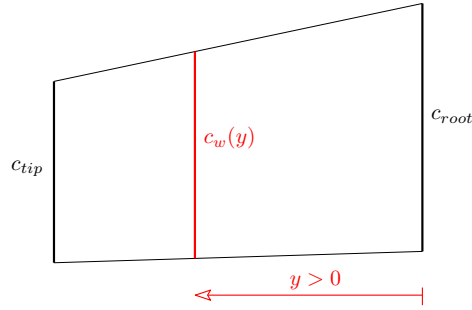


Figura B.1: Distribuzione delle corde in un'ala trapezia

In un'ala trapezia la distribuzione delle corde è lineare, pertanto, indicando con $c_w(y)$ la corda della generica ala w alla posizione y si ha che:

$$c_w(y) = c_{0_w} + c_{1_w} y \quad (\text{B.1})$$

Per calcolare le costanti c_{0_w} e c_{1_w} si impongono le condizioni al contorno:

$$\begin{cases} c_w(y = 0) = c_{root_w} \\ c_w(y = \frac{l_w}{2}) = c_{tip_w} \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Da cui si ottiene che:

$$\begin{cases} c_{0_w} = c_{root_w} \\ c_{1_w} = 2 \frac{c_{tip_w} - c_{root_w}}{l_w} \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

Pertanto:

$$c_w(y) = c_{root_w} + 2 \frac{c_{tip_w} - c_{root_w}}{l_w} y \quad (\text{B.4})$$

Bibliografia

- [1] <http://www.selt-sistemi.com/>
- [2] World population prospects: Highlights, 2019.
- [3] Ipcc, 2021: Summary for policymakers. in: Climate change 2021: The physical science basis. contribution of working group i to the sixth assessment report of the intergovernmental panel on climate change, 2021.
- [4] UN General Assembly. Transforming our world: the 2030 agenda for sustainable development, 2015.
- [5] Alessandro Bacchini and Enrico Cestino. *Electric vtol configurations comparison*. *Aerospace*, 6(3), 2019.
- [6] Brevetto Politecnico di Torino n° 102021000028016, *ThrustPod, Sistema modulare per la spinta verticale degli aeromobili*, 03/11/2021
- [7] A. Lerro, L. Nanu, P: Gili DICUAM 2022 *ThrustPod: a novel solution for vertical take-off and landing systems* 22-24 March 2022
- [8] M.Nita, D.Scholz, *Estimating the Oswald Factor from basic aircraft geometrical parameters*, Deutscher Luft- und Raumfahrtkongress 2012
- [9] National Advisory Committee for aeronautics, technical Note n° 182, *Induced Drag of Multiplanes*
- [10] Report Tesi Martelli, *Approfondimento del calcolo della resistenza dell'ala chiusa alla Prandtl*
- [11] Robert C. Nelson, *Flight Stability and Automatic Control*
- [12] <https://www.mgm-compro.com/products/50-80kw-electric-motors/>
- [13] Patrick Nathen and Andreas Strohmayr and R. Miller and S. D. Grimshaw and J. Taylor, *Architectural performance assessment of an electric vertical take-off and landing (e-VTOL) aircraft based on a ducted vectored thrust concept*, 2021