

POLITECNICO DI TORINO

Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale



Tesi di Laurea Magistrale

**Ottimizzazione indiretta del consumo di
propellente per un lander lunare con
dinamica rotazionale**

Relatore

Prof. Lorenzo CASALINO

Candidato

Alessandro SANTORO

ANNO ACCADEMICO 2021-2022

Sommario

Il 2022 è l'anno della missione NASA *Artemis 1*, la prima di nuova generazione che punta a riportare l'umanità sulla superficie lunare nel 2024. La Luna è tornata ad essere, dopo 50 anni dall'ultimo allunaggio, la destinazione di missioni spaziali di diverse agenzie – pubbliche e private – da tutto il mondo, che negli anni a venire invieranno sulla sua superficie non solo esseri umani, ma anche orbiter, lander e rover. Lo studio di una missione verso la Luna (e in particolare di una manovra di discesa e allunaggio) quindi, torna ad essere oggi di particolare interesse. Affinché un allunaggio riesca, è necessario sviluppare algoritmi di Guida, Navigazione e Controllo (GNC) che siano accurati, robusti e sicuri nel trasferire la sonda da un'orbita di parcheggio a uno specifico punto sulla superficie della Luna rispettando, in ogni istante della missione i vincoli imposti, ad esempio, per ragioni di sicurezza. Di fondamentale importanza è poi il risparmio di propellente, che si traduce in una minore massa al decollo del lanciatore (quindi riduzione dei costi per il lancio) o, a parità di massa al decollo, in un maggior carico utile, con tutte le conseguenze scientifiche, economiche, logistiche che ne conseguono. Questa tesi, attraverso la Teoria del Controllo Ottimale, si propone di ottimizzare il consumo di propellente durante le fasi di *Powered Descent and Landing* di un lander a tre gradi di libertà, due traslazionali e uno rotazionale, prendendo ispirazione dal *Concept of Operations* delle missioni Apollo. Considerando i vincoli imposti agli istanti iniziale e finale, viene formulato un problema differenziale ai limiti (Boundary Value Problem - BVP) la cui soluzione numerica, attraverso un metodo indiretto, fornirà la traiettoria ottimale cercata.

Indice

Elenco delle tabelle	IV
Elenco delle figure	V
1 Introduzione all'esplorazione Lunare	1
1.1 Passato	1
1.2 Tra passato e presente. Un nuovo interesse globale	4
1.3 Futuro	5
2 Definizione della Missione	8
3 Modellizzazione della Missione	15
3.1 Assunzioni	15
3.2 Definizione dei sistemi di riferimento	18
4 Teoria del Controllo Ottimale e metodo di risoluzione del problema	20
4.1 Classificazione dei metodi numerici	21
4.1.1 Metodi diretti	21
4.1.2 Metodi indiretti	21
4.1.3 Algoritmi evuzionistici	22
4.2 Teoria del Controllo Ottimale	22
4.3 Problema differenziale ai limiti	28
4.4 Implementazione del metodo	31
5 Applicazione della teoria del controllo ottimale	33
5.1 Funzionale di costo	33
5.2 Equazioni del Moto	34
5.3 Controlli	34
5.4 Condizioni al contorno	35
5.5 Hamiltoniano ed equazioni differenziali per le variabili aggiunte . . .	36

6	Risultati	40
6.1	Caso 1: θ_f e ω_f liberi	41
6.2	Caso 2: $\theta_f = -\pi/2$ e ω_f libero	46
6.3	Caso 3: $\theta_f = -\pi/2$ e $\omega_f = 0$	53
6.4	Caso 4: Discesa verticale da 20 metri	58
6.5	Confronto tra i diversi casi	62
6.6	Considerazioni sui controlli	69
7	Conclusioni	71
	Bibliografia	74

Elenco delle tabelle

3.1	Tabella riassuntiva delle caratteristiche del lander	19
6.1	Fattori di adimensionalizzazione	41
6.2	Caso 1 - Condizioni al Contorno e Valori iniziali di tentativo	42
6.3	Caso 2 - Condizioni al Contorno e Valori iniziali di tentativo	48
6.4	Caso 3 - Condizioni al Contorno e Valori iniziali di tentativo	53
6.5	Caso 4 - Condizioni al Contorno e Valori iniziali di tentativo	58
6.6	Confronto per le durate e i consumi dei diversi casi	62

Elenco delle figure

1.1	Prima foto scattata dalla sonda Luna 9	2
1.2	Eugene Cernan, comandante dell' Apollo 17	4
1.3	Raffigurazione del Lunar Gateway in cui si evidenzia il contributo delle diverse agenzie - credits by ESA	6
1.4	Moon Village, concept art - credits by ESA	7
2.1	Raffigurazione delle fasi di allunaggio delle missioni Apollo [1]: Il Lunar Module (LM) eseguiva l' <i>undocking</i> prima e la separazione dopo dal <i>Command and Service Module</i> (CSM) prima di compiere la <i>Descent Orbit Insertion</i> (DOI) a seguito della quale arrivava al punto in cui iniziava la fase di <i>Powered Descent and Landing</i> con la manovra di <i>Powered Descent Initiaton</i> (PDI), prima di raggiungere il sito di atterraggio (" <i>Landing</i> " in figura). Si possono notare anche le direzioni dei vettori Luna-Terra (" <i>Earth</i> ") e Luna-Sole (" <i>Sun</i> ")	9
2.2	Corrispondenza tra le fasi di <i>Powered Descent and Landing</i> e il funzionamento del LGC [2].	10
2.3	Dimensioni del Lunar Module 10	12
2.4	Disposizione dei propulsori del RCS a bordo dei LM. La legenda " <i>System A</i> " e " <i>System B</i> " indica che a bordo del LM c'erano due sistemi paralleli di pompaggio di propellente dai serbatoi ai propulsori.	13
2.5	Rappresentazione 3D del lander	14
3.1	Schematizzazione del moto del satellite nel piano	18
6.1	Caso 1: Traiettoria	43
6.2	Caso 1: Velocità orizzontale e verticale	44
6.3	Caso 1: Angolo di beccheggio	44
6.4	Caso 1: Velocità angolare	45
6.5	Caso 1: Massa	45
6.6	Caso 1: Hamiltoniano	46

6.7	Caso 2: Traiettorie che risulterebbe se la spinta dipendesse dalla SF_1 anche nell'ultimo tratto	47
6.8	Caso 2: Traiettorie - Ingrandimento per l'arco 2 a destra	49
6.9	Caso 2: Velocità orizzontale e verticale	49
6.10	Caso 2: Angolo di beccheggio - Ingrandimento per l'arco 2 a destra	50
6.11	Caso 2: Velocità angolare - Ingrandimento per l'arco 2 a destra	50
6.12	Caso 2: Massa	51
6.13	Caso 2: Hamiltoniano	51
6.14	Caso 3: Traiettorie - Ingrandimento per l'arco 2 a destra	54
6.15	Caso 3: Velocità orizzontale e verticale	54
6.16	Caso 3: Angolo di beccheggio - Ingrandimento per l'arco 2 a destra	55
6.17	Caso 3: Velocità angolare - Ingrandimento per l'arco 2 a destra	55
6.18	Caso 3: Massa	56
6.19	Caso 3: Hamiltoniano	56
6.20	Caso 3: Variazione di θ con la quota - Ingrandimento per l'arco 2 a destra	57
6.21	Caso 4: Traiettorie - Ingrandimento per gli archi 2 e 3 a destra	59
6.22	Caso 4: Velocità orizzontale e verticale	59
6.23	Caso 4: Angolo di beccheggio - Ingrandimento per gli archi 2 e 3 a destra	60
6.24	Caso 4: Velocità angolare - Ingrandimento per gli archi 2 e 3 a destra	60
6.25	Caso 4: Massa	61
6.26	Caso 4: Hamiltoniano	61
6.27	Confronto tra le traiettorie nel caso di R_{xf} libero	62
6.28	Confronto tra gli andamenti delle velocità nel caso di R_{xf} libero	64
6.29	Confronto tra gli andamenti delle velocità nel caso di R_{xf} libero lungo l'ultimo tratto	65
6.30	Confronto tra gli andamenti delle velocità verticali caso di R_{xf} libero	66
6.31	Confronto tra gli andamenti di θ nel caso di R_{xf} libero	66
6.32	Confronto tra le velocità angolari nei diversi casi	67
6.33	Confronto tra le traiettorie nel caso di $R_{xf} = 0$	68
6.34	Confronto tra i livelli di spinta nei diversi casi	69
6.35	Confronto tra le coppie nei diversi casi	69

Capitolo 1

Introduzione all'esplorazione Lunare

Ancor prima che i viaggi spaziali fossero anche solo pensabili, la Luna ha da sempre ispirato la creatività dell'uomo: dalla letteratura alla scultura, dalla pittura fino al cinematografia, la contemplazione del nostro satellite ha sempre suscitato interesse nelle menti e negli animi umani di ogni epoca. Quando poi, nel ventesimo secolo, il progresso della tecnologia ha permesso all'uomo di raggiungerla, di studiare da vicino la sua natura e indagare sul suo *eterno peregrinar*, allora la Luna è diventata la più grande ispirazione per l'ingegno umano. L'uomo non era più limitato a contemplarla e osservarla dalla Terra: aveva, per la prima volta, gli strumenti e le conoscenze necessarie per arrivare direttamente su di essa.

1.1 Passato

Storicamente, i primi passi dell'esplorazione lunare furono mossi durante la Guerra Fredda quando, il 2 gennaio del 1959, la sonda sovietica Luna 1 sorvolò (anche se si sarebbe dovuta schiantare) la Luna, passandole a circa 6000 km. Otto mesi dopo, Luna 2 raggiunse il Mare della Serenità, un cratere su cui il satellite si schiantò. Nel settembre del '59, ancora i sovietici con Luna 3 fornirono i primi scatti della faccia nascosta della Luna. In risposta ai sovietici, gli Stati Uniti d'America svilupparono i programmi Pioneer e Ranger. Mentre le missioni Pioneer

fallirono tutte – alcune delle quali anche durante il lancio – le sonde Ranger 7, 8 e 9, lanciate tra il 1964 e il 1965, raggiunsero la Luna inviando immagini dettagliate su possibili siti di allunaggio per una futura missione umana, prima di schiantarsi al suolo. I sovietici non furono da meno: la sonda Luna 9 fu la prima, nel 1966 ad effettuare un atterraggio "morbido" su un altro corpo celeste e a inviare a Terra la prima foto della superficie lunare (in figura 1.1) mentre è di Luna 10, lanciata solo due mesi dopo, la prima orbita attorno al nostro satellite. Nel maggio del 1966 ebbe inizio il programma NASA Surveyor, che lanciò nello spazio sette lander lunari. Questi avevano lo scopo di dimostrare la reale fattibilità di un atterraggio morbido sul suolo lunare e raccogliere immagini per la scelta dei siti di allunaggio con equipaggio delle future missioni Apollo. La missione Luna 9 prima e il programma Surveyor dopo dimostrarono che un allunaggio umano fosse possibile: prima di queste missioni c'era il sospetto che il suolo lunare potesse non sopportare il peso di una capsula, in quanto questa sarebbe potuta sprofondare nello strato di polvere se questo fosse stato troppo spesso.

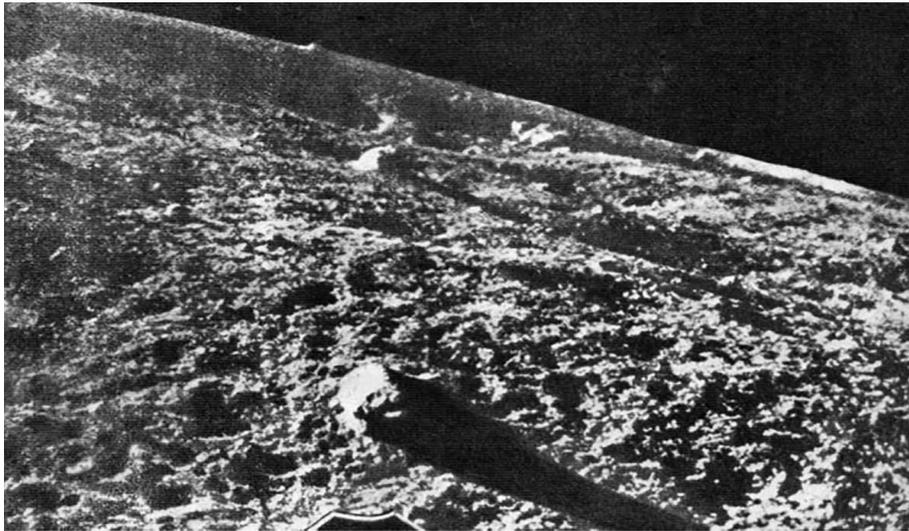


Figura 1.1: Prima foto scattata dalla sonda Luna 9

Al programma Surveyor seguì il programma Lunar Orbiter: furono in tutto cinque le missioni lanciate dagli Stati Uniti nel 1966 e nel 1967 che realizzarono una mappatura del 99 % del suolo lunare. Contemporaneamente a tutte queste missioni, entrambe le superpotenze preparavano la più ambiziosa: portare per la prima volta

un uomo sulla Luna. Il 25 maggio del 1961, poco dopo il rientro dallo spazio del cosmonauta russo Jurij Gagarin, il presidente americano John F. Kennedy propose al Congresso che gli Stati Uniti «*si impegnassero a raggiungere l'obiettivo, prima della fine del decennio, di far atterrare un uomo sulla Luna e riportarlo sano e salvo sulla Terra*». Nello stesso anno, ebbe inizio il programma Apollo, che durò fino al 1972 e che portò in tutto dodici uomini a camminare sulla superficie lunare. La più emblematica di queste missioni fu sicuramente la Apollo 11: partiti il 16 luglio del 1969 dalla rampa 39A del Kennedy Space Center in Florida, Neil Armstrong, Edwin Aldrin eseguirono con successo il 20 luglio il primo allunaggio della storia nel cratere Mare Tranquillitatis a bordo del lander lunare Eagle, mentre Micheal Collins rimase in orbita lunare a bordo del *Command and Service Module* (CSM). I due astronauti rimasero sulla Luna 21 ore e 36 minuti in tutto, dopo le quali decollarono per effettuare un rendezvous con il CSM e ritornare sani e salvi sulla Terra il 24 Luglio, effettuando un ammaraggio nell'Oceano Pacifico. Seguirono altre quattro missioni, durante le quali si svolsero diversi esperimenti sulla superficie lunare e furono prelevati diversi campioni di rocce che ancora oggi sono oggetto di studio. L'ultima missione Apollo fu la 17, nel dicembre del 1972; si sarebbero dovute realizzare anche le missioni 18,19 e 20 ma la riduzione del budget federale e la perdita di interesse dell'opinione pubblica portarono alla cancellazione delle missioni. Il 14 dicembre del 1972 l'umanità lasciò la superficie lunare per l'ultima volta, senza farci più ritorno.

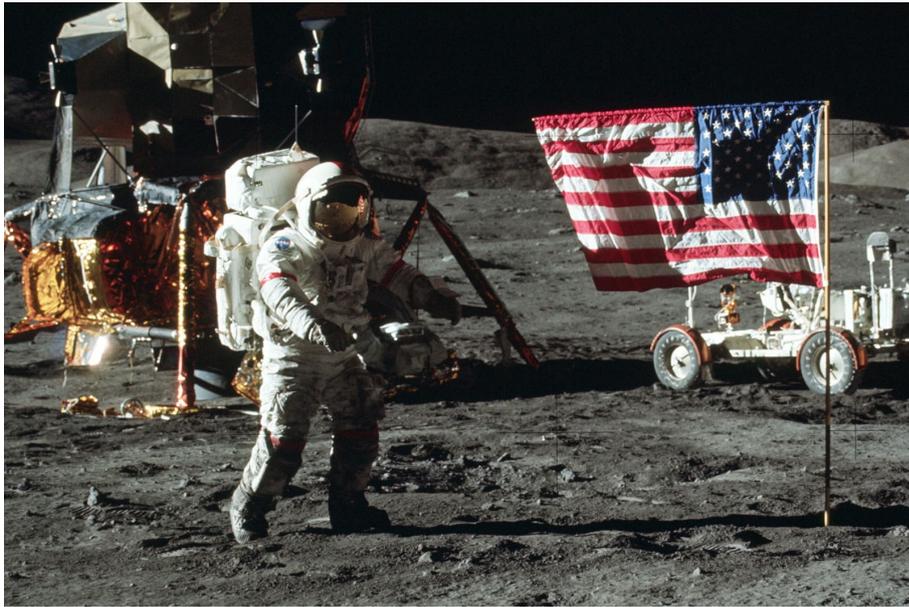


Figura 1.2: Eugene Cernan, comandante dell'Apollo 17

1.2 Tra passato e presente. Un nuovo interesse globale

Dopo la fine del programma Apollo e del programma Luna sovietico, con il lancio dei due rover Lunochod nel 1976 – e a causa della sempre maggiore importanza delle missioni umane in orbita bassa – si dovette aspettare il 1990 prima che la missione Hiten (la prima giapponese verso la Luna) fosse lanciata. Nel 1994 fu lanciata la sonda NASA Clementine, per effettuare delle ricerche sulla presenza d'acqua nelle zone polari del nostro satellite e nel 1998 il Lunar Prospector avrebbe dovuto confermare i dati ottenuti da Clementine; tuttavia la sonda non riuscì a dare una risposta definitiva. Dieci anni dopo, grazie alla sonda LCrOSS (Lunar Crater Observation and Sensing Satellite), la NASA riuscì a dimostrare la presenza di acqua in alcune zone in ombra nei pressi del polo sud della Luna. Nel 2003 l'Agenzia Spaziale Europea (ESA) ha lanciato il satellite SMART-1 – primo satellite di manifattura europea ad esplorare la Luna - che ha effettuato una mappatura completa della superficie lunare anche nei raggi X, prima di schiantarsi in maniera controllata sulla superficie nel 2006. Nel 2007 la giapponese SELENE contribuì a

mappare le anomalie gravitazionali della Luna, impiegando due piccoli orbiter e un lander. Il 2009 fu l'anno del lancio del Lunar Reconnaissance Orbiter (LRO), grazie al quale si ebbe una mappatura 3D della Luna con una precisione di 100 metri e una copertura del 98,2 %. Tra il 2011 e il 2012 fu realizzata la missione GRAIL (Gravity Recovery and Interior Laboratory), durante la quale due satelliti mapparono il campo gravitazionale della Luna e la sua struttura interna, fino al loro schianto controllato sulla superficie. Il 2007 è stato anche l'anno di inizio del programma cinese di esplorazione della Luna: da allora sono state lanciate cinque sonde, che hanno mappato in tre dimensioni la superficie lunare in vista di futuri atterraggi. L'ultima di queste missioni, Chang'e 5, è partita il 23 novembre 2020 verso la Luna, da cui grazie all'operazione congiunta di un lander/ascender e un orbiter, è riuscita a riportare sulla Terra, il 16 dicembre dello stesso anno, un campione della superficie lunare. Se storicamente la NASA è l'agenzia spaziale ad aver mostrato un particolare interesse verso la Luna, si può notare come negli ultimi 20 anni l'esplorazione lunare è diventata di interesse (non solo a fini scientifici, ma anche commerciali) per diverse agenzie da parte di tutto il mondo: le agenzie spaziali delle già citate Europa, Cina e Russia ma anche Canada, Giappone, India, Emirati Arabi Uniti; saranno coinvolte, più o meno direttamente, alla realizzazione di una missione lunare.

1.3 Futuro

“We’re going to stay” è il motto con cui la NASA ha annunciato ufficialmente le missioni di nuova generazione verso la Luna che riporteranno, entro il 2025, l'uomo sulla sua superficie. Lo scopo delle prossime missioni lunari – a cui parteciperanno non solo gli americani, ma anche l'Europa, la Russia e la Cina, in primis è quello di garantire una presenza costante sulla Luna e/o in orbita, tramite la costruzione di stazioni spaziali e basi lunari. A questo proposito, si citano il Lunar Gateway (fig. 1.3) – una stazione spaziale in orbita cislunare costruita da NASA, ESA, JAXA (Japan Aerospace Exploration Agency) e CSA (Canadian Space Agency) – e il

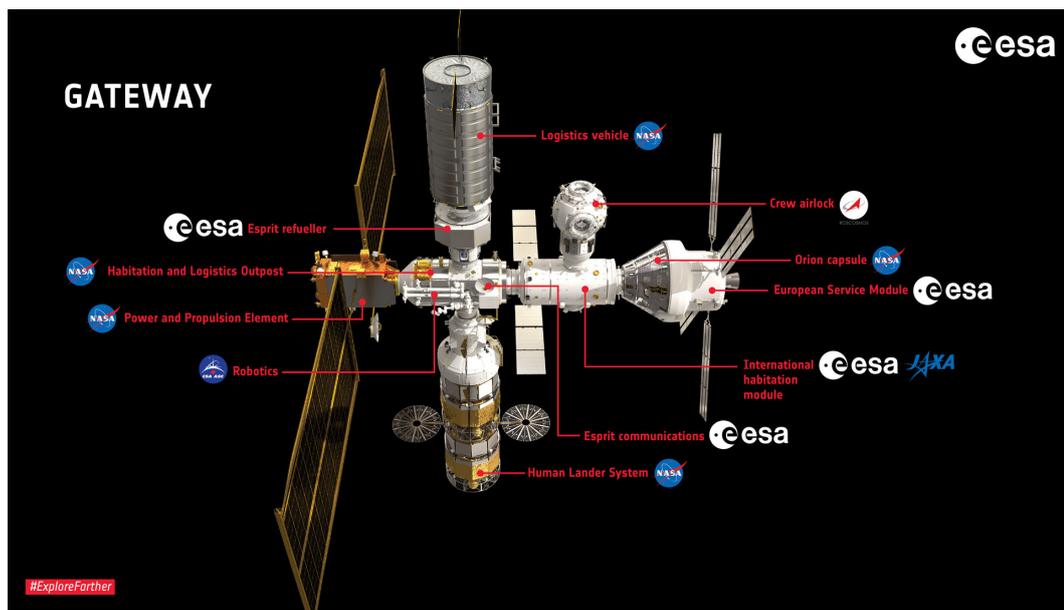


Figura 1.3: Raffigurazione del Lunar Gateway in cui si evidenzia il contributo delle diverse agenzie - credits by ESA

Moon Village, un ambizioso progetto ESA che mira a costruire basi permanenti sulla superficie lunare. Anche Cina e Russia hanno firmato un accordo preliminare per la costruzione di una stazione orbitante, simile al Gateway. Dalla Luna poi, partiranno le missioni umane verso Marte: quanto sarà appreso sulla Luna tornerà utile per preparare, sotto ogni punto di vista, i viaggi verso il pianeta rosso. Le future missioni lunari puntano a sfruttare le risorse in loco: il Moon Village ESA verrà costruito da rover che useranno la regolite lunare per la costruzione delle diverse basi lunari attraverso tecniche di 3D printing; grazie alle recenti scoperte riguardanti la presenza di ghiaccio d'acqua ai poli, si sta cercando di trovare come estrarre questo ghiaccio e rendere l'acqua usufruibile dagli astronauti; oppure si potrebbe pensare di estrarre dall'acqua idrogeno e ossigeno, che potranno essere usati come carburanti per un decollo dalla Luna verso lo spazio profondo. A questo proposito si ricorda un altro progetto europeo, l'ISRU (In Situ Resource Utilization), che mira proprio a ricavare dalla superficie lunare materiali per propellenti, fonti di energia e costruzioni oltre che per favorire la vita umana sulla Luna. C'è da dire poi che nelle future missioni lunari, un ruolo sempre più importante lo avranno le diverse agenzie private: la NASA, in supporto al programma Artemis opererà anche il programma Commercial Lunar Payload Services (CLPS), attraverso il quale si servirà di agenzie

private che invieranno merci, lander e rover sulla Luna. Ancora, l'Human Landing System, ovvero la nave con cui i futuri astronauti arriveranno dall'orbita lunare alla superficie, è la Moonship della SpaceX – una versione modificata della Starship, con cui il fondatore Elon Musk vorrebbe portare il primo uomo su Marte entro il 2030.

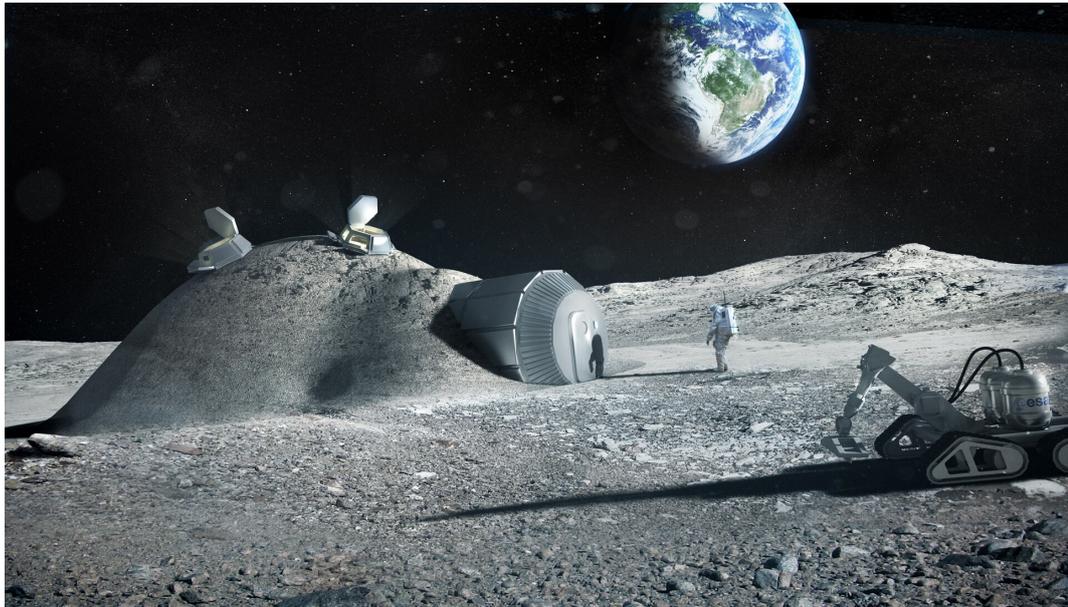


Figura 1.4: Moon Village, concept art - credits by ESA

Capitolo 2

Definizione della Missione

La traiettoria da ottimizzare che seguirà il lander per allunare prende ispirazione direttamente dalle missioni Apollo, le cui fasi sono riportate in figura 2.1.

La discesa inizia quando, su un'orbita circolare di parcheggio a 100 km di quota, il lander compie la *Descent Orbit Insertion* (DOI), ovvero una accensione del motore in direzione opposta alla velocità orbitale tale per cui il satellite percorre una trasferta di Hohmann che ha un perilunio distante 15 km dalla superficie lunare. In questo punto inizia la *Powered Descent Phase*, oggetto di studio di questa tesi, che si può suddividere in tre fasi principali: la *Braking Phase*, la *Approach Phase* e la *Terminal Vertical Descent*.

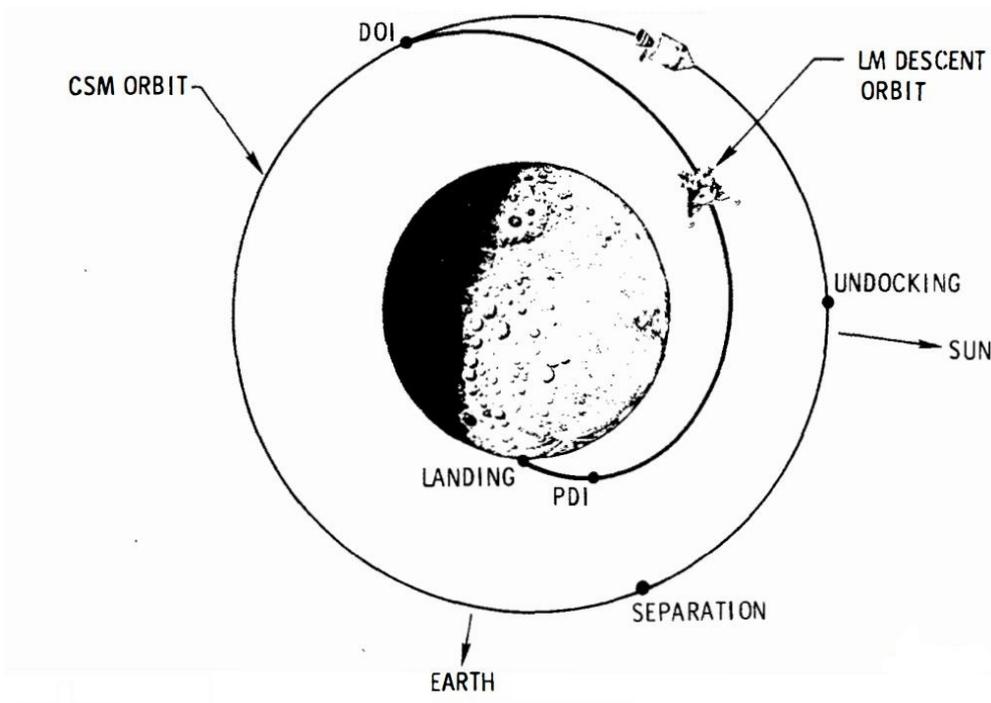


Figura 2.1: Rappresentazione delle fasi di allunaggio delle missioni Apollo [1]: Il Lunar Module (LM) eseguiva l'*undocking* prima e la separazione dopo dal *Command and Service Module* (CSM) prima di compiere la *Descent Orbit Insertion* (DOI) a seguito della quale arrivava al punto in cui iniziava la fase di *Powered Descent and Landing* con la manovra di *Powered Descent Initiation* (PDI), prima di raggiungere il sito di atterraggio ("*Landing*" in figura). Si possono notare anche le direzioni dei vettori Luna-Terra ("*Earth*") e Luna-Sole ("*Sun*")

Durante la *Braking Phase* il lander riduce quasi completamente la sua velocità orbitale mantenendo massimo il livello di spinta; durante la *Approach Phase* avviene la correzione dell'assetto; nella *Terminal Vertical Descent*, il lander esegue una discesa verticale che lo porta sul suolo lunare. Nelle missioni Apollo, la divisione delle tre fasi era strettamente legata al funzionamento del computer di bordo (*Lunar Module Guidance Computer* - LGC):

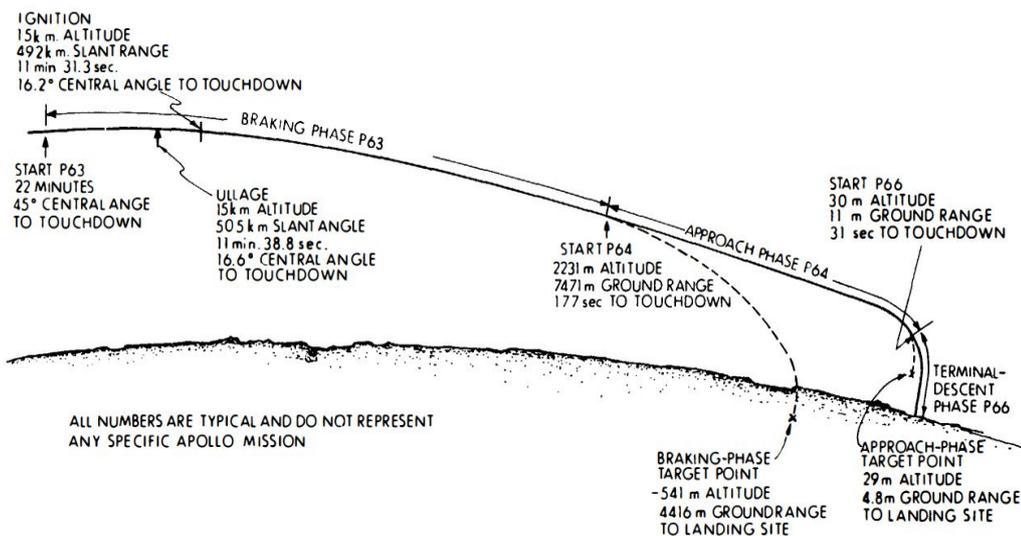


Figura 2.2: Corrispondenza tra le fasi di *Powered Descent and Landing* e il funzionamento del LGC [2].

Come si può vedere dalla figura 2.2 ad ognuna delle tre fasi era associato un particolare algoritmo di guida che veniva dato in input manualmente dall'equipaggio e che aveva particolari punti target da raggiungere lungo la discesa; in particolare, gli algoritmi erano:

- *Program 63* per la Braking Phase;
- *Program 64* per la Approach Phase;
- *Program 66* per la Terminal Vertical Descent;

C'è da dire anche che nel caso delle missioni Apollo i vincoli da rispettare non erano solo su posizione, velocità e assetto finali, ma anche sulla visibilità dei siti di allunaggio da parte degli astronauti attraverso le finestre del lander e questo ha avuto conseguenze sul consumo di propellente. Analogamente alle traiettorie delle missioni Apollo, anche quella oggetto di questa tesi, opera la PDI a 15 km di quota e a circa 500 km (questa distanza è indicativa, sarà chiaro nei capitoli successivi il motivo) in direzione della velocità orbitale dal sito di atterraggio. Per quanto riguarda invece le dimensioni, la massa e la spinta, sono state tutte ridotte di un ordine di grandezza. Facendo riferimento alla missione Apollo 11,

il lander aveva una massa di 15103 kg e un livello massimo di spinta di 45000 N [3]; per il lander di questa tesi sono stati scelti una massa iniziale di 1600 kg e un livello massimo di spinta di 4000 N. Per quanto riguarda invece la dinamica rotazionale, è stato necessario definire la spinta fornita dal sistema di controllo d'assetto (*Reaction Control System* - RCS) e la geometria del lander. La spinta dell'RCS, analogamente a quanto fatto per la spinta del propulsore principale, è stata scalata di 10, passando da 450 N a 45 N. Per il calcolo delle dimensioni è stato eseguito il seguente procedimento: è stato considerato un satellite cilindrico che avesse le dimensioni tali da contenere il Lunar Module 10 [4], le cui dimensioni sono riportate in figura 2.3; poi, proporzionalmente alla massa, anche il volume del cilindro è stato ridotto di 10, quindi le lunghezze (altezza e diametro) di un fattore $\sqrt[3]{10}$.

In particolare, per il cilindro di cui sono state poi decimate le dimensioni, si è scelto:

- diametro $d = 14', 10'' = 4.52m$

- altezza $h = 15', 0.355'' = 4.60m$

che, scalati di $\sqrt[3]{10}$, danno, per il lander che si vuole fare allunare:

- diametro $d = 2.09m$

- altezza $h = 2.13m$

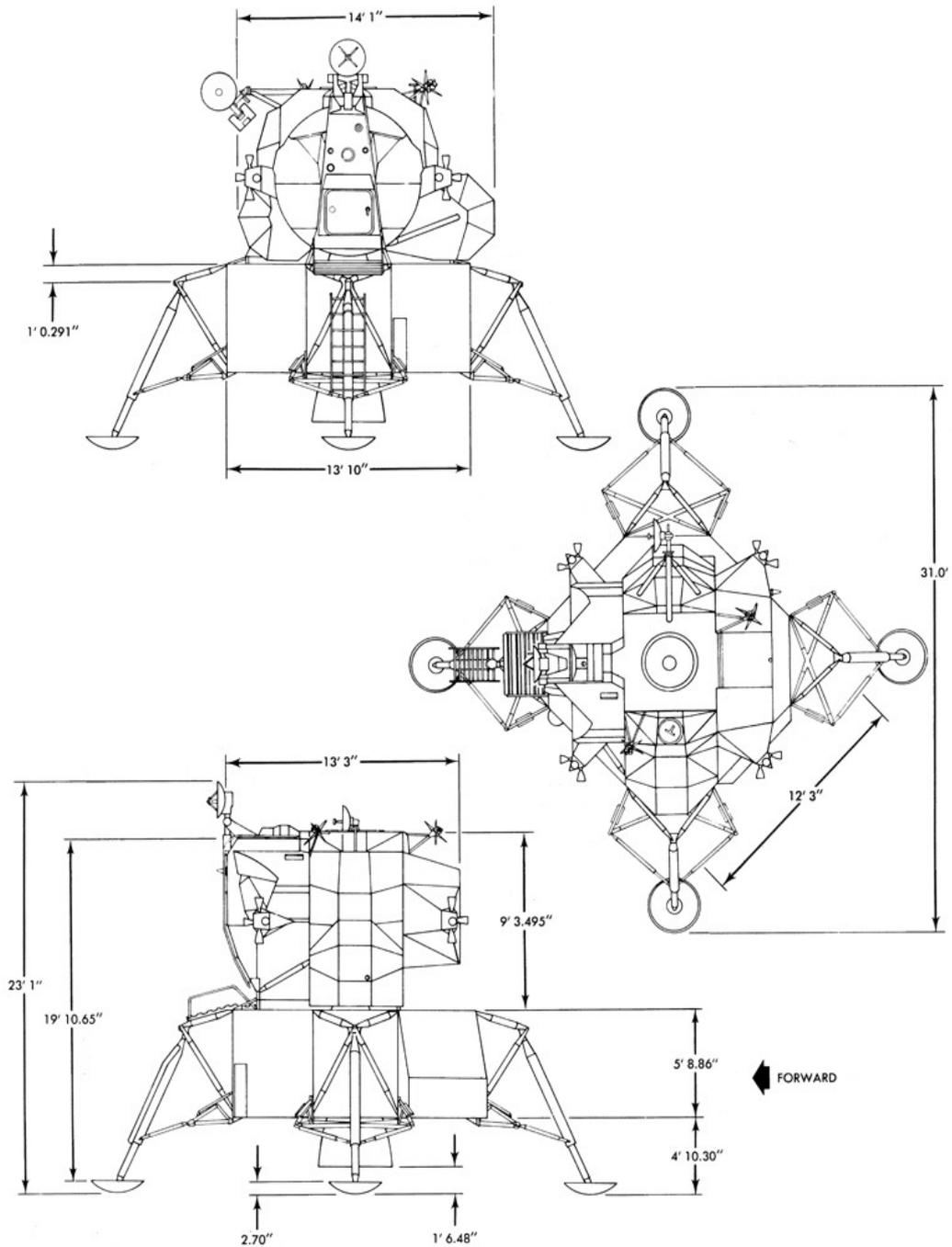


Figura 2.3: Dimensioni del Lunar Module 10

Per quanto riguarda la disposizione dei thrusters per il controllo di assetto, si è

scelta la stessa configurazione del RCS dei landers delle missioni Apollo: 16 in tutto per garantire un controllo d'assetto – con ridondanza per ragioni di sicurezza – attorno a tutti e tre gli assi corpo del satellite, posti in maniera tale che il braccio della spinta esercitata da ognuno di essi giacesse sempre nel piano parallelo alle basi e che contenesse il baricentro (figura 2.4).

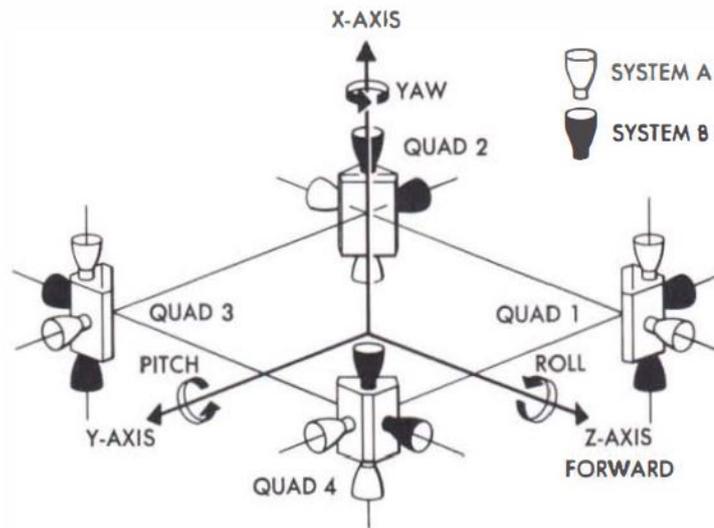


Figura 2.4: Disposizione dei propulsori del RCS a bordo dei LM. La legenda "System A" e "System B" indica che a bordo del LM c'erano due sistemi paralleli di pompaggio di propellente dai serbatoi ai propulsori.

Essendo il solido assial-simmetrico, il baricentro appartiene all'asse di simmetria del satellite; inoltre, ipotizzando la massa uniformemente distribuita all'interno del volume, il piano contenente il baricentro si troverà a metà altezza del cilindro. In figura 2.5, un concept 3D semplificato del lander.

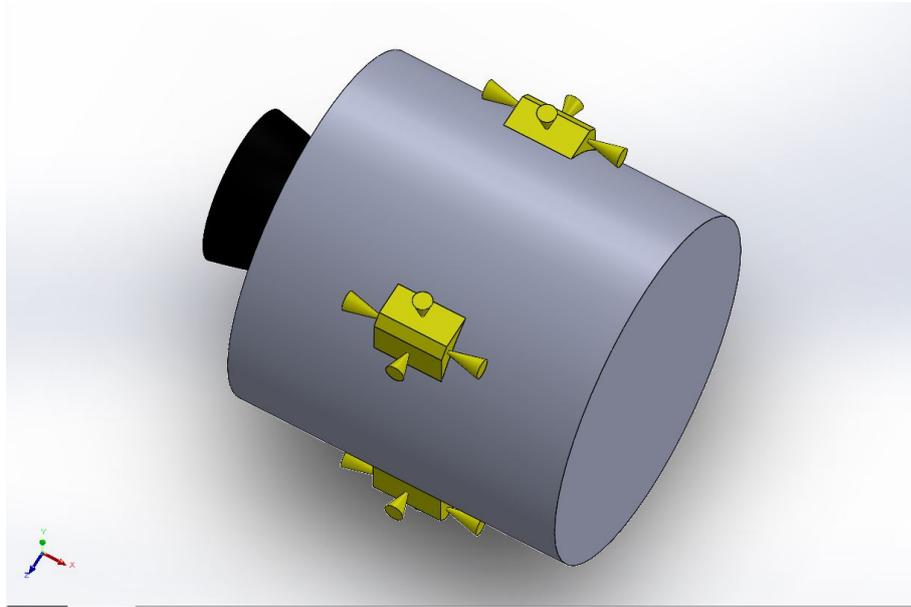


Figura 2.5: Rappresentazione 3D del lander

Si specifica subito che questa figura è del tutto rappresentativa: la traiettoria è stata calcolata per quello che in figura è solo il cilindro grigio, l'azione dei propulsori dell'RCS (in giallo in figura 2.5) è applicata puntualmente sul bordo del cerchio che contiene il baricentro. Si specifica anche che le dimensioni per l'RCS e per il propulsore principale (nero in figura 2.5) non sono il risultato di un dimensionamento: ai fini di questa tesi ciò che importa sono le caratteristiche propulsive di entrambi i sistemi e, per il caso dell'RCS, la loro posizione rispetto al baricentro del satellite.

Si fa anche presente che, nel calcolo dei momenti di inerzia si è considerato il solo cilindro: sia il propulsore principale che quelli per il controllo d'assetto, guardando anche la definizione di altezza e diametro del cilindro a partire dal Lunar Module 10, sono già compresi nel calcolo del volume del cilindro; quella in figura 2.5 è una semplice rappresentazione del satellite.

Capitolo 3

Modellizzazione della Missione

Descritta la missione, si costruisce adesso il modello che sarà implementato numericamente, attraverso cui si otterrà la traiettoria ottimale cercata. Come già detto nel capitolo precedente, la manovra inizia a circa 500 km in direzione della velocità orbitale dal punto target, ad una quota di 15 km cui corrisponde una velocità orbitale di 1.692 km/s . Saranno questi alcuni dei valori del vettore di stato all'istante iniziale. Al fine di avere una formulazione completa del problema, vengono prima elencate delle assunzioni sia sul campo di moto in cui il lander si muove, sia sulle sue caratteristiche propulsive. In seguito, vengono definiti i sistemi di riferimento in cui verranno scritte le equazioni del moto.

3.1 Assunzioni

- **Assunzione 1:** Non si considerano le forze aerodinamiche legate alla presenza di atmosfera. Questa, nel caso di un allunaggio, è relistica, essendo la Luna priva di atmosfera.
- **Assunzione 2:** Si trascura la curvatura della Luna. Durante la fase di discesa il lander è così vicino alla superficie lunare che la curvatura è impercettibile.

- **Assunzione 3:** L'accelerazione gravitazionale è costante. Anche questa ipotesi è causata dalla vicinanza del lander alla superficie: i rapporti tra la quota e il raggio della Luna e tra la distanza percorsa in direzione della velocità orbitale e il raggio della Luna sono dei valori piccoli, per cui è ragionevole ipotizzare l'attrazione gravitazionale della Luna costante.
- **Assunzione 4:** Il moto di rotazione della Luna attorno al suo asse è trascurato, in quanto la durata della discesa è del tutto trascurabile rispetto al periodo di rotazione della Luna attorno al proprio asse, che è noto sia di circa 27 giorni.
- **Assunzione 5:** Sia per il propulsore principale che per quelli per il controllo di assetto, si ipotizza che gli ugelli siano perfettamente espansi ($p_\infty = p_{ex}$). La spinta è generata dall'espulsione attraverso un ugello di gas che sono il risultato di una combustione di propellenti liquidi all'interno del motore. L'espressione della spinta nella forma più generale (non distinguendo ancora tra la spinta principale e la spinta per il controllo d'assetto) è:

$$T = \dot{m}V_{ex} + (p_\infty - p_{ex})A_{ex} \quad (3.1)$$

in cui:

- \dot{m} è la portata di gas;
- V_{ex} è la velocità dei gas in uscita;
- p_∞ è la pressione dell'ambiente esterno;
- A_{ex} è la sezione di uscita dell'ugello
- p_{ex} è la pressione dei gas sulla sezione di uscita dell'ugello;

La completa espansione dell'ugello comporta che $p_\infty = p_{ex}$ e che $V_{ex} = c$, da cui si ha per la spinta:

$$T = \dot{m}V_{ex} = \dot{m}c \quad (3.2)$$

dove c è la velocità efficace di scarico, dipende dai propellenti usati ed è legata all'Impulso specifico dalla relazione

$$I_{sp} = \frac{c}{g_0}$$

(in cui g_0 è l'accelerazione gravitazionale terrestre a quota zero). Si ha quindi, per la portata che esce da un propulsore:

$$\dot{m} = \frac{T}{c} \quad (3.3)$$

Nel caso di questo lander si ha:

$$- I_{sp1} = 290 \text{ s} = \text{Impulso specifico del propulsore principale, quindi } c_1 = 290 \text{ s} \times 9.80665 \text{ m/s}^2 = 2843.93 \text{ m/s}$$

$$- I_{sp2} = 280 \text{ s} = \text{Impulso specifico del sistema propulsivo per il controllo d'assetto, quindi } c_2 = 280 \text{ s} \times 9.80665 \text{ m/s}^2 = 2745.86 \text{ m/s}.$$

Per la definizione degli impulsi specifici si è fatto riferimento ancora una volta a [4].

- **Assunzione 6:** Sia per il propulsore principale che per i propulsori del RCS, esistono dei valori massimi e minimi di spinta; definendo T_{main} la spinta del motore principale e T_{RCS} quella per il controllo d'assetto, si ha:

$$0 \leq T_{main_{min}} \leq T_{main} \leq T_{main_{max}} \quad (3.4)$$

$$0 \leq T_{RCS_{min}} \leq T_{RCS} \leq T_{RCS_{max}} \quad (3.5)$$

- **Assunzione 7:** Sia il propulsore principale che quelli per il controllo d'assetto sono rigidamente fissati al lander, cioè sono fisse le direzioni di spinta rispetto agli assi corpo del satellite.
- **Assunzione 8:** il satellite si muove nel piano. La spinta principale è un vettore che appartiene al piano verticale, mentre la coppia generata dai propulsori è ortogonale a questo piano. Il satellite ha quindi tre gradi di libertà: due traslazionali e uno rotazionale attorno all'asse di beccheggio. Quest'ultima assunzione è legata alla definizione dei sistemi di riferimento, nel prossimo paragrafo.

3.2 Definizione dei sistemi di riferimento

Si definiscono quindi i sistemi di riferimento e le grandezze in essi misurate. Il satellite si muove nel piano X-Z, direzioni, rispettivamente, della velocità orbitale nell'istante della *Powered Descent Initiation* e della quota (quindi del raggio-vettore che congiunge il centro della Luna e il satellite).

Ci si pone nel caso in cui la PDI inizia esattamente al perilunio della trasferta di Hohmann: non considerando la curvatura della superficie lunare, la velocità orbitale è ortogonale al raggio-vettore Luna-satellite. Risulta inoltre evidente che l'accelerazione di gravità è negativa, cioè:

$$\mathbf{g} = -g\hat{z} = -1.623 \hat{z} \text{ m/s}^2 \quad (3.6)$$

Un sistema di riferimento inerziale è centrato sul punto target, che quindi ha coordinate $[0,0,0]$. Dalla definizione del piano X-Z, l'asse Y è entrante nel piano per completare la terna destrorsa. Si definisce poi un secondo sistema di riferimento solidale al lander (con il pedice 'b' in figura), in cui l'asse di rollio x_b è concorde alla direzione di spinta, l'asse di beccheggio y_b è parallelo (e lo è sempre, essendo il moto piano) all'asse Y inerziale, e l'asse di imbardata z_b è tale da completare la terna destrorsa. La rotazione θ - e la corrispondente velocità di rotazione ω_y - attorno all'asse di beccheggio sono quindi definite positive in senso orario.

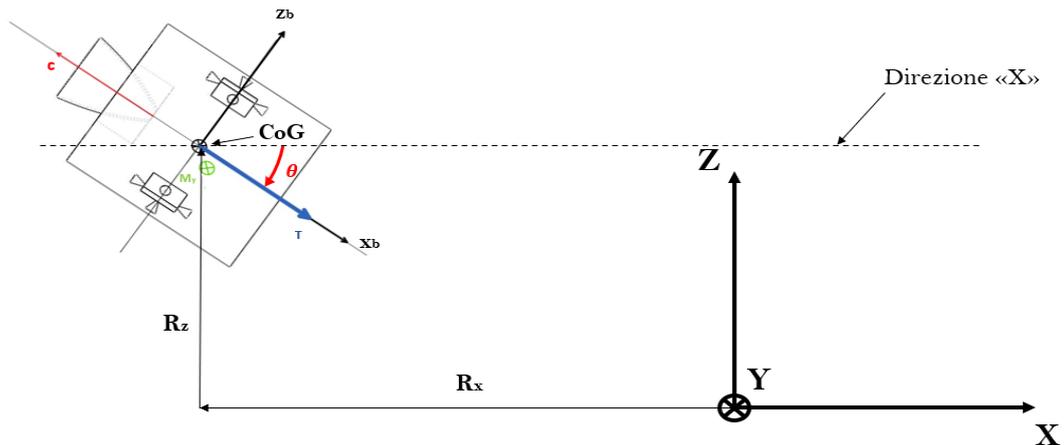


Figura 3.1: Schematizzazione del moto del satellite nel piano

Rispetto al sistema di riferimento inerziale, si definiscono quindi la quota R_z e la distanza orizzontale R_x che separano il centro di massa del satellite (CoG) dall'origine del sistema fisso in ogni istante della discesa.

Nota sulla coppia M_y : nel capitolo precedente, si è visto che la spinta del singolo propulsore per il controllo di assetto è di 45 N: facendo riferimento alle figure 2.5 e 3.1, seguendo le assunzioni e ricordando quanto detto nel capitolo precedente in merito alla rappresentazione CAD del satellite, si può definire il valore della coppia:

$$M_y = 2 \times T_{RCS} \times l_y = 133.01 Nm \quad (3.7)$$

In cui $l_y = \frac{d}{2} \sqrt{2}$ è il braccio della coppia generata dai propulsori del RCS. Si definisce il momento di inerzia del cilindro attorno all'asse y_b :

$$I_y = \frac{1}{12} m \left(3 \left(\frac{d}{2} \right)^2 + h^2 \right) = 1041.73 kg \ m^2 \quad (3.8)$$

Nella tabella 3.1 sono riassunte le proprietà di massa, spinta e geometria del lander.

Massa Iniziale	1600 Kg
Spinta propulsore principale T	4000 N
Spinta singolo propulsore RCS	45 N
Coppia M_y	133.01 Nm
Momento di inerzia I_y	1041.73 kg m^2
altezza h	2.13 m
diametro d	2.09 m

Tabella 3.1: Tabella riassuntiva delle caratteristiche del lander

Capitolo 4

Teoria del Controllo Ottimale e metodo di risoluzione del problema

Definite le proprietà del lander, si espone la Teoria del Controllo Ottimale, la cui applicazione consente la formulazione e la risoluzione (tramite un opportuno metodo numerico) del problema di ottimizzazione. In generale, un problema di ottimizzazione consiste nella ricerca della legge di controllo che massimizza (o minimizza) un particolare indice di prestazione. Data l'influenza dei consumi di propellente sui costi di una missione spaziale – sia essa una manovra orbitale, una trasferta interplanetaria o, come nel caso di studio di questa tesi, una discesa propulsa su un corpo celeste (la Luna) – diventa fondamentale minimizzare la quantità di propellente necessaria alla manovra o, fissata la massa iniziale del veicolo, massimizzare la massa finale. Il problema di ottimo consiste quindi di ricercare la tecnica che consenta di compiere la manovra in maniera tale da massimizzare la massa finale. La soluzione analitica per i problemi di ottimo esiste solo per pochi casi di scarso interesse pratico mentre, se si vogliono ottenere risultati significativi, diventa necessario o adottare alcune approssimazioni o servirsi di metodi numerici.

4.1 Classificazione dei metodi numerici

I metodi numerici sviluppati per risolvere problemi di ottimizzazione si suddividono in tre categorie: metodi diretti, metodi indiretti e algoritmi evolutivisti, ognuno dei quali porta con sé vantaggi e svantaggi.

4.1.1 Metodi diretti

I metodi diretti trovano la soluzione tramite un'approssimazione che consiste in una discretizzazione temporale della traiettoria in più archi, lungo ognuno dei quali sia le variabili di stato che i controlli sono costanti a tratti. Ognuno degli istanti temporali che discretizzano la traiettoria diventa quindi un parametro di ottimizzazione. La coerenza con le equazioni del moto – garantita integrandole numericamente da un istante generico al successivo – genera dei vincoli tali per cui il valore delle variabili alla fine di un'integrazione deve coincidere col valore iniziale di quella successiva. L'approssimazione dei metodi indiretti sta nella riscrittura in forma discreta di tutte le funzioni, le equazioni e i modelli scritti in forma continua. I metodi diretti risultano relativamente semplici da implementare, anche se la soluzione ottenuta è approssimata e non è garantito che quella trovata sia effettivamente la soluzione ottimale.

4.1.2 Metodi indiretti

I metodi indiretti trasformano il problema di ottimo in un problema differenziale ai limiti (*Boundary Value Problem* - BVP). Anche in questo caso la traiettoria può essere divisa in archi, ma solo se necessario (ad esempio, in presenza di discontinuità di una o più variabili di stato). Nei metodi indiretti, la legge del controllo ottimo deriva dall'applicazione del Principio di Massimo di Pontryagin (PMP), derivato dall'applicazione del calcolo variazionale al problema di ottimizzazione [5]. Tramite la teoria del controllo ottimale viene formulato un nuovo sistema di equazioni differenziali in cui alcuni dei valori iniziali delle variabili – di stato e/o aggiunte – non sono noti. La soluzione del BVP consiste quindi nel trovare i valori iniziali incogniti che consentono, integrando il sistema di equazioni differenziali, di trovare la soluzione ottimale rispettando le condizioni imposte e di ottimo. Il vantaggio

dei metodi indiretti è che hanno un'elevata precisione numerica e consentono di ottenere la soluzione ottimale con un numero limitato di parametri. Di contro, l'introduzione dei moltiplicatori di Lagrange, dovendone definire uno per ogni variabile di stato, raddoppia le dimensioni del problema.

4.1.3 Algoritmi evolutivistici

Negli algoritmi evolutivistici le soluzioni candidate all'ottimizzazione del problema in esame hanno il ruolo di un individuo in una popolazione, a cui una *fitness function* conferisce una particolare qualità. Nel momento in cui il processo evolutivo inizia, le diverse soluzioni iniziali vengono combinate e mutate tra loro, creando nuove soluzioni "figlie" delle precedenti, tra le quali solo quelle con i migliori *fitness* sopravvivono: le soluzioni sopravvissute sono quelle che ottimizzano il problema.

Nei paragrafi successivi viene esposta la teoria del controllo ottimale in una forma che ben si adatta alla ottimizzazione di traiettorie spaziali e al metodo indiretto adottato per la soluzione del BVP che nasce dalla sua applicazione.

4.2 Teoria del Controllo Ottimale

La teoria del controllo ottimale si applica a un generico sistema descritto da un vettore di variabili di stato \mathbf{x} ; le equazioni differenziali che ne descrivono l'evoluzione tra gli istanti iniziale e finale sono funzioni di \mathbf{x} , del vettore dei controlli \mathbf{u} e della variabile indipendente tempo t (tempo) e hanno la generica formula:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (4.1)$$

In questo caso particolare, è conveniente suddividere la traiettoria in n sottointervalli, o archi, all'interno di ciascuno dei quali le variabili siano continue. Il j -esimo intervallo inizia al tempo $t_{(j-1)+}$ e termina al tempo t_{j-} e i valori che le variabili assumono ai suoi estremi sono $\mathbf{x}_{(j-1)+}$ e \mathbf{x}_{j-} dove i segni $-$ e $+$ indicano rispettivamente i valori assunti subito prima o dopo il punto considerato: in questo modo è possibile tenere in conto le eventuali discontinuità delle variabili

(ad esempio sono discontinue la velocità e la massa in seguito a una manovra impulsiva) che si applicano ai punti di giunzione tra i vari archi (*contorni interni*). Con questa formulazione è inoltre possibile e conveniente far assumere al secondo membro delle equazioni 4.1 espressioni diverse a seconda dell'arco considerato. Sono inoltre imposte condizioni al contorno che, in generale, sono di tipo misto, cioè che coinvolgono i valori delle variabili di stato e del tempo sia ai contorni esterni che interni. Le condizioni imposte sono, nella forma più generale, non-lineari e vengono espresse come:

$$\chi(\mathbf{x}_{(j-1)+}, \mathbf{x}_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-}) = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (4.2)$$

Il problema di ottimizzazione consiste nella ricerca di un funzionale che, nella sua forma generale, è del tipo

$$J = \varphi(\mathbf{x}_{(j-1)+}, \mathbf{x}_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-}) + \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} \Phi(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \quad j = 1, \dots, n \quad (4.3)$$

Il funzionale J è la somma di due termini: la funzione φ , dipendente dai valori assunti dalle variabili e dal tempo ai contorni interni ed esterni (in letteratura definito *Costo di Mayer* o *terminal cost*) e l'integrale esteso a tutta la traiettoria della funzione Φ , che dipende dal tempo e dai valori assunti in ogni punto da variabili e controlli e definito in letteratura *Costo di Lagrange* o *running cost*. Ponendo $\varphi = 0$ o $\Phi = 0$ si hanno rispettivamente la forma di Lagrange e la forma di Mayer, quest'ultima utilizzata in questa trattazione. È utile riscrivere il funzionale introducendo i moltiplicatori di Lagrange $\boldsymbol{\mu}$ associati alle condizioni al contorno e $\boldsymbol{\lambda}$, detti anche variabili aggiunte o variabili di co-stato, in quanto associati alle equazioni di stato:

$$J^* = \varphi + \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\chi} + \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} (\Phi + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{f} - \dot{\mathbf{x}})) dt \quad j = 1, \dots, n \quad (4.4)$$

I due funzionali J e J^* dipendono dal tempo t , dalle variabili di stato \mathbf{x} e dalle loro derivate $\dot{\mathbf{x}}$ e dai controlli \mathbf{u} . Ovviamente, se condizioni al contorno ed equazioni di stato sono soddisfatte, i due funzionali coincidono. Integrando per parti per eliminare la dipendenza dalle derivate delle variabili $\dot{\mathbf{x}}$ si ottiene:

$$\begin{aligned}
 J^* = & \varphi + \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\chi} + \sum_j (\boldsymbol{\lambda}_{(j-1)_+}^T \mathbf{x}_{(j-1)_+} - \boldsymbol{\lambda}_{j_-}^T \mathbf{x}_{j_-}) + \\
 & + \sum_j \int_{t_{(j-1)_+}}^{t_{j_-}} (\Phi + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f} - \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T \mathbf{x}) dt \quad j = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

e scrivendo la variazione prima del funzionale J^* si ottiene:

$$\begin{aligned}
 \delta J^* = & \left(-H_{(j-1)_+} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{(j-1)_+}} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t_{(j-1)_+}} \right) \delta t_{(j-1)_+} + \\
 & + \left(H_{j_-} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j_-}} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t_{j_-}} \right) \delta t_{j_-} + \\
 & + \left(\boldsymbol{\lambda}_{(j-1)_+}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}_{(j-1)_+}} + \boldsymbol{\mu}^T \left[\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{x}_{(j-1)_+}} \right] \right) \delta \mathbf{x}_{(j-1)_+} + \\
 & + \left(-\boldsymbol{\lambda}_{j_-}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}_{j_-}} + \boldsymbol{\mu}^T \left[\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{x}_{j_-}} \right] \right) \delta \mathbf{x}_{j_-} + \\
 & + \sum_j \int_{t_{(j-1)_+}}^{t_{j_-}} \left(\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T \right) \delta \mathbf{x} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \right) dt
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

dove si è definito l'Hamiltoniano H del sisema come

$$H = \Phi + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f} \tag{4.7}$$

La condizione necessaria di ottimo prescrive la stazionarietà del funzionale e quindi l'annullarsi della sua variazione prima per qualunque scelta di variazioni di $\delta \mathbf{x}$, $\delta \mathbf{u}$, $\delta \mathbf{x}_{(j-1)_+}$, $\delta \mathbf{x}_{j_-}$, $\delta t_{(j-1)_+}$, δt_{j_-} compatibile con le equazioni differenziali e con le condizioni al contorno. L'introduzione di variabili e costanti aggiunte permette, con una loro opportuna scelta, di annullare contemporaneamente il coefficiente di ciascuna delle variazioni nell'espressione 4.6, assicurando quindi la stazionarietà del funzionale espressa da $\delta J^* = 0$. Annullando i coefficienti di $\delta \mathbf{x}$ e $\delta \mathbf{u}$ all'interno dell'integrale per ogni punto della traiettoria si ottengono, rispettivamente, le equazioni di Eulero-Lagrange per le variabili aggiunte:

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} = - \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \quad (4.8)$$

e le equazioni algebriche per i controlli:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \right)^T = 0 \quad (4.9)$$

Si noti come le leggi di controllo siano formalmente indipendenti dal fatto di ricercare i massimi o i minimi di J . Può succedere che uno o più controlli siano soggetti a un vincolo, cioè appartengono a un dominio di ammissibilità (per esempio, la spinta di un propulsore ha un valore massimo T_{max} che riesce a fornire). Non si considerano i casi in cui il vincolo dipende dal tempo o dalle variabili di stato, ma solo da quelli in cui esso è esplicito e costante, come nei casi illustrati in precedenza. In presenza di un tale vincolo, il *Principio di massimo di Pontryagin* [5] afferma che il valore ottimale del controllo in ogni punto della traiettoria è quello che, appartenendo al dominio di ammissibilità, rende massimo (se si vuole massimizzare J) o minimo (se lo si vuole minimizzare) l'Hamiltoniano (4.7) in quel punto:

$$H(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \boldsymbol{\lambda}^*(t), t) \geq H(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}^*(t), t) \quad (4.10)$$

in cui \mathbf{x}^* e $\boldsymbol{\lambda}^*$ sono i valori di \mathbf{x} e $\boldsymbol{\lambda}$ per cui J presenta un massimo locale, mentre \mathbf{u}^* è, tra tutti gli \mathbf{u} ammissibili, quello che **massimizza** l'Hamiltoniano. Si hanno due possibilità:

- il valore ottimale del controllo è quello fornito dalla equazione 4.9 se rientra nel dominio di ammissibilità e quindi il vincolo non interviene in quel punto;
- il valore ottimale è agli estremi del dominio, cioè il controllo assume il valore massimo o minimo, se quello fornito dall'equazione 4.9 non rientra nel dominio di ammissibilità.

Un caso particolare è quello in cui l'Hamiltoniano è lineare rispetto a uno dei controlli soggetto a vincoli, in quanto nella corrispondente equazione 4.9 il controllo non compare esplicitamente e non può quindi essere determinato. Si hanno in questo caso ancora due possibilità (in riferimento al caso in cui si vuole massimizzare J):

- se nell'equazione 4.7 il coefficiente del controllo in questione non è nullo, allora H è massimizzato per il valore massimo del controllo se il coefficiente del controllo è positivo, per il valore minimo del controllo se il coefficiente è negativo (controllo bang-bang), secondo il principio di massimo di Pontryagin;
- se nell'equazione 4.7 il coefficiente del controllo è esattamente nullo durante un intervallo finito di tempo (detto *arco singolare*), allora si impongono uguali a zero tutte le derivate successive del coefficiente rispetto al tempo, fino a quando non appare esplicitamente il controllo, che si determina annullando quest'ultima derivata (dalla condizione generalizzata di Legendre-Clebsch si ha che l'ordine di derivazione necessario è sempre pari e con la sua metà si indica l'ordine dell'arco singolare[6]).

Per quanto riguarda le condizioni al contorno mancanti, è conveniente riferirsi al j -esimo contorno, scrivendo per questo le condizioni che derivano dal considerarlo come estremo finale del $(j - 1)$ -esimo sottointervallo o come estremo iniziale del j -esimo sottointervallo; annullando, rispettivamente i coefficienti di $\delta \mathbf{x}_{j-}$, $\delta \mathbf{x}_{j+}$, δt_{j-} , δt_{j+} nella 4.6 si ottiene:

$$-\boldsymbol{\lambda}_{j-}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}_{j-}} + \boldsymbol{\mu}^T \left[\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{x}_{j-}} \right] = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (4.11)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{j+}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}_{j+}} + \boldsymbol{\mu}^T \left[\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{x}_{j+}} \right] = 0 \quad j = 0, \dots, n - 1 \quad (4.12)$$

$$H_{j-} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j-}} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t_{j-}} = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (4.13)$$

$$-H_{j+} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j+}} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t_{j+}} = 0 \quad j = 0, \dots, n - 1 \quad (4.14)$$

dove i pedici j_- e j_+ indicano i valori assunti rispettivamente subito prima e dopo il punto j (come si è detto, la distinzione è necessaria dal momento che possono verificarsi delle discontinuità ai punti di giunzione tra due archi). Le equazioni 4.11 e 4.13 non hanno significato per $j = 0$, cioè all'inizio della traiettoria, così come le equazioni 4.12 e 4.14 perdono significato alla fine, cioè per $j = n$. Eliminando le costanti aggiunte μ dalle equazioni 4.11 ÷ 4.14 si hanno le **condizioni al**

contorno di ottimo del tipo:

$$\sigma(\mathbf{x}_{(j-1)+}, \mathbf{x}_{j-}, \boldsymbol{\lambda}_{(j-1)+}, \boldsymbol{\lambda}_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-}) = 0 \quad (4.15)$$

che, con le condizioni assegnate 4.2, completano il sistema differenziale dato dalle equazioni 4.1 e 4.8. Considerando una generica variabile di stato x , se sottoposta a particolari condizioni di ottimo per la variabile aggiunta corrispondente λ_x :

- se la variabile di stato x è assegnata esplicitamente all'istante iniziale t_0 , sul co-stato corrispondente non ci sono condizioni (λ_{x0} libera); lo stesso dicesi se la variabile è nota all'istante finale t_f ;
- se il valore iniziale della variabile di stato x_0 non compare né nella funzione φ né nelle condizioni al contorno, la corrispondente variabile aggiunta è nulla a t_0 ; analogamente al caso precedente, queste condizioni valgono anche a t_f ;
- se una variabile di stato x è continua e non assegnata al punto interno j , la corrispondente variabile aggiunta λ_x è anch'essa continua;
- se una variabile di stato è continua e assegnata esplicitamente a un contorno interno j , la corrispondente variabile aggiunta ha una discontinuità libera, cioè λ_{xj+} è indipendente da λ_{xj-} e il suo valore deve essere determinato dal processo di ottimizzazione.

Analogamente, se H non è esplicitamente una funzione del tempo, anche le equazioni 4.13 e 4.14 forniscono, in alcuni casi particolari, alcune condizioni al contorno:

- se il tempo iniziale t_0 non compare esplicitamente né nelle condizioni al contorno né nella funzione φ , l'Hamiltoniano è nullo all'istante iniziale ($H_0 = 0$); considerazione analoga vale all'istante finale, per cui si ha $H_f = 0$;
- se il tempo intermedio t_j non compare esplicitamente nella funzione φ , l'Hamiltoniano è continuo in j ;
- se il tempo t_j non è esplicitamente assegnato, l'Hamiltoniano ha in quel punto una discontinuità libera.

Adottando la formulazione appena esposta, la teoria del controllo ottimale fornisce un problema matematico soggetto a vincoli differenziali e algebrici in cui alcuni valori iniziali delle variabili di stato e/o delle variabili aggiunte non sono noti. Il problema di ottimo diventa quindi un problema differenziale ai limiti, risolvibile mediante metodi indiretti, come detto nel paragrafo precedente.

4.3 Problema differenziale ai limiti

Il problema differenziale ai limiti che viene formulato applicando la teoria del controllo ottimale è descritto dalle equazioni differenziali 4.1 e 4.8, in cui i controlli sono determinati dalle 4.9 e che è soggetto alle condizioni al contorno imposte (4.2) e di ottimo (4.15). Il problema in esame presenta alcune particolarità:

- l'intervallo di integrazione è suddiviso in sottointervalli in cui in ognuno di essi le equazioni differenziali possono avere un'espressione differente;
- la durata di ciascun intervallo generalmente è incognita;
- le condizioni al contorno possono essere non-lineari e coinvolgere i valori delle variabili sia ai contorni esterni sia a quelli interni;
- le variabili possono essere discontinue ai contorni interni e il loro valore dopo la discontinuità può essere incognito.

La principale difficoltà delle tecniche di ottimizzazione indirette è proprio la soluzione del BVP che la loro applicazione comporta: il metodo per la sua soluzione è quindi di fondamentale importanza e deve esserci corrispondenza tra le sue caratteristiche e la formulazione del problema stesso. La soluzione del BVP viene ottenuta riducendolo a una successione di problemi ai valori iniziali che viene portata alla convergenza secondo il metodo di Newton. Per risolvere l'indeterminatezza della durata di ciascun sottointervallo si ricorre, ai soli fini dell'integrazione, alla sostituzione della variabile indipendente t con una nuova variabile ε definita nel j -esimo sottointervallo attraverso la relazione:

$$\varepsilon = j - 1 + \frac{t - t_{(j-1)}}{t_j - t_{(j-1)}} = j - 1 + \frac{t - t_{(j-1)}}{\tau_j} \quad j = 1, \dots, n \quad (4.16)$$

dove τ_j è la durata (incognita) del sottointervallo. In questo modo i contorni interni ed esterni risultano fissati, grazie a valori interi consecutivi della nuova variabile ε . Per la descrizione del metodo, ci si riferisce al generico sistema di equazioni dato dalle 4.1 e 4.8, in cui i controlli sono dati dalla 4.9. Si ha quindi un problema differenziale nelle variabili di stato e aggiunte raggruppate in un unico vettore $\mathbf{y} = (\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}^*(\mathbf{y}, t) \quad (4.17)$$

Occorre poi specificare che, in questo caso, nel problema compaiono anche parametri costanti (ad esempio le durate dei sottointervalli τ_j): è quindi utile definire un nuovo vettore $\mathbf{z} = (\mathbf{y}, \mathbf{c})$, in cui \mathbf{y} è il vettore definito precedentemente e \mathbf{c} è il vettore dei parametri costanti. Il sistema di equazioni differenziali assume la forma:

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\varepsilon} = \mathbf{f}(\mathbf{z}, \varepsilon) \quad (4.18)$$

Esplicitando il secondo membro delle equazioni 4.18, si ha:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{y}}{d\varepsilon} = \tau_j \frac{d\mathbf{y}}{dt}; \\ \frac{d\mathbf{c}}{d\varepsilon} = 0 \end{cases} \quad (4.19)$$

Le condizioni al contorno (imposte e di ottimo) sono genericamente espresse come:

$$\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{s}) = 0 \quad (4.20)$$

dove \mathbf{s} è un vettore che contiene i valori delle variabili a ogni contorno (interno o esterno) e i parametri incogniti:

$$\mathbf{s} = (\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_j, \dots, \mathbf{y}_n, \mathbf{c}) \quad (4.21)$$

I valori iniziali di alcune delle variabili sono in genere incogniti e la ricerca della soluzione si traduce nel determinare in maniera iterativa quali valori devono assumere per soddisfare le 4.20. La procedura iterativa viene descritta supponendo che nessuno dei valori iniziali sia noto. La r -esima iterazione inizia con l'integrazione delle equazioni 4.18 lungo tutta la traiettoria, in cui i valori iniziali \mathbf{p}^r sono stati

calcolati nell'iterazione precedente, cioè

$$\mathbf{z}(0) = \mathbf{p}^r \quad (4.22)$$

Nel caso in cui $r = 1$ (il procedimento iterativo è alla prima iterazione) è necessario scegliere opportunamente i valori di tentativo \mathbf{p}^1 . In ciascuno dei contorni si determina il valore delle variabili di stato e al termine dell'integrazione si calcola l'errore sulle condizioni al contorno Ψ^r alla r -esima iterazione. Una variazione $\Delta \mathbf{p}$ porta a variare l'errore sulle condizioni al contorno di una quantità che, linearizzando, è pari a:

$$\Delta \Psi = \left[\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{p}} \right] \Delta \mathbf{p} \quad (4.23)$$

Dovendo annullare l'errore sulle condizioni al contorno (cioè volendo ottenere $\Delta \Psi = -\Psi^r$), a ogni iterazione i valori iniziali vengono corretti di una quantità

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{p}^{(r+1)} - \mathbf{p}^r = - \left[\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{p}} \right]^{-1} \Psi^r \quad (4.24)$$

fin a quando la 4.20 non è soddisfatta con la precisione voluta. La matrice che compare nell'equazione 4.24 è calcolata come prodotto di due matrici:

$$\left[\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{p}} \right] = \left[\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{s}} \right] \left[\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{p}} \right] \quad (4.25)$$

dove la prima può essere ottenuta derivando le condizioni al contorno rispetto alle grandezze che vi compaiono; la seconda contiene le derivate dei valori delle variabili ai contorni rispetto ai valori iniziali, cioè i valori che vengono assunti ai contorni $\varepsilon = 0, 1, \dots, n$ dalla matrice

$$\left[\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{p}} \right] = [\mathbf{g}(\varepsilon)] \quad (4.26)$$

ed è ottenuta integrando il sistema di equazioni differenziali che si ottiene derivando il sistema principale 4.18 rispetto a ciascuno dei valori iniziali:

$$[\dot{\mathbf{g}}] = \left[\frac{d\mathbf{g}}{d\varepsilon} \right] = \frac{d}{d\varepsilon} \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \left(\frac{d\mathbf{z}}{d\varepsilon} \right) \right] = \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}} \right] \quad (4.27)$$

Esplicitando lo Jacobiano del sistema principale 4.18, l'equazione precedente assume la forma:

$$[\dot{\mathbf{g}}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}} \\ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{p}} \\ \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}} \\ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}} \end{bmatrix} [\mathbf{g}] \quad (4.28)$$

I valori iniziali per il sistema omogeneo 4.28 si hanno derivando l'espressione 4.22; si ottiene così la matrice identità:

$$[\mathbf{g}(0)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{z}(0)}{\partial \mathbf{p}} \end{bmatrix} = [\mathbf{I}] \quad (4.29)$$

È da notare che questo metodo consente di trattare anche discontinuità nelle variabili. Infatti, per una discontinuità nel punto i è sufficiente aggiornare sia il vettore delle variabili \mathbf{z} che la matrice \mathbf{g} attraverso la relazione \mathbf{h} che lega i valori delle variabili prima e dopo la discontinuità:

$$\mathbf{z}_{i+} = \mathbf{h}(\mathbf{z}_{i-}) \quad (4.30)$$

$$[\mathbf{g}_{i+}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{z}} \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

Nel caso in cui alcuni dei valori iniziali delle variabili sono noti, il problema è semplificato, in quanto il vettore \mathbf{p} contiene solo i valori delle incognite di $\mathbf{z}(0)$ e il vettore Ψ alle sole condizioni al contorno non esplicite al tempo iniziale.

4.4 Implementazione del metodo

Per il calcolo della traiettoria è stato utilizzato un codice scritto in linguaggio Fortran derivato da [7], in cui è implementato il metodo di Newton per la soluzione di sistemi di equazioni non lineari, mentre per l'integrazione di tutte le equazioni differenziali, sia per il sistema principale 4.18 che per quello omogeneo 4.28, viene utilizzato un metodo a passo e ordine variabili basato sulle formule di Adams-Moulton, implementato e descritto in [8]. Nel codice la precisione richiesta è di 10^{-6} (cioè è richiesto che l'errore massimo $E_{max} = \max_i(\Psi_i)$ sia inferiore a questo valore). Il $\Delta \mathbf{p}$ dato dalla 4.24 da sommare ai valori \mathbf{p} della r -esima iterazione per il calcolo di \mathbf{p}^{r+1} è stato calcolato tramite una linearizzazione che potrebbe, in alcuni casi, compromettere il raggiungimento della convergenza, facendo aumentare

anzichè diminuire l'errore sulle condizioni al contorno. Sono state quindi apportate delle modifiche al codice:

- per evitare che di allontanarsi troppo dalla soluzione, la correzione apportata è in realtà una frazione di quella determinata, cioè:

$$\mathbf{p}^{r+1} = \mathbf{p}^r + K_1 \Delta \mathbf{p} \quad (4.32)$$

con $K_1 = 0.1 \div 1$, determinato empiricamente durante le prime prove dei codici, a seconda che la soluzione di partenza sia relativamente lontana o vicina da quella cercata.

- A ogni iterazione, calcolato il nuovo valore di tentativo \mathbf{p}^{r+1} e integrate le equazioni del moto, si confronta l'errore massimo sulle condizioni al contorno E_{max}^{r+1} : se l'errore è inferiore ad un multiplo dell'errore massimo calcolato all'iterazione precedente, cioè se $E_{max}^{r+1} < K_2 E_{max}^r$, si procede con la nuova iterazione. Poichè per convergere alla soluzione l'errore sulle condizioni al contorno può, nelle prime iterazioni, aumentare, il valore K_2 deve essere superiore all'unità: $K_2 = 2 \div 3$ garantisce buoni risultati.
- Se invece alla nuova iterazione l'errore è troppo grande rispetto al precedente, si procede alla bisezione della correzione apportata, dimezzandola: si integrano cioè le equazioni del moto con i valori di tentativo:

$$\mathbf{p}^{r+1} = \mathbf{p}^r + K_1 \Delta \mathbf{p} / 2 \quad (4.33)$$

verificando nuovamente che $E_{max}^{r+1} < K_2 E_{max}^r$ e, se necessario, ripetendo la bisezione. Si è fissato un numero massimo di 5 bisezioni, oltre le quali il procedimento si arresta significando che la soluzione di tentativo scelta non è in grado di portare alla convergenza.

Capitolo 5

Applicazione della teoria del controllo ottimale

Essendo stati esposti il modello del lander, i sistemi di riferimento e la teoria del controllo ottimale nei capitoli precedenti, si può procedere con la formulazione del problema di ottimo.

5.1 Funzionale di costo

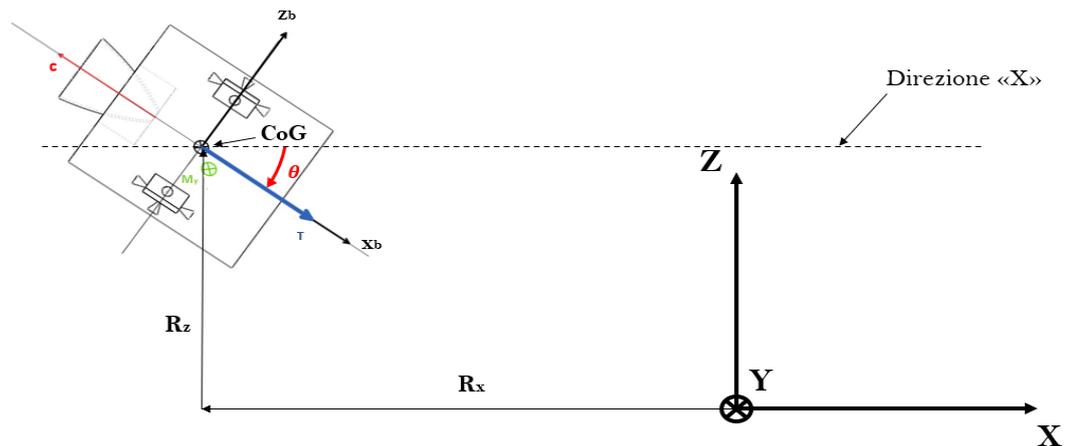
Dal momento che lo scopo di questa tesi è l'ottimizzazione del consumo di propellente, si pone il funzionale J da massimizzare uguale alla massa finale del lander:

$$J = m_f \tag{5.1}$$

ed essendo $m_f = m_0 - m_p$ con m_0 massa iniziale fissata e m_p massa di propellente consumata, massimizzare m_f equivale a minimizzare m_p . Facendo riferimento alla espressione 4.3 per il funzionale, per l'equazione 5.1 si è scelta la formulazione di Mayer, in cui $\varphi(x(t_f), t_f) = m_f$ e $\Phi = 0$.

5.2 Equazioni del Moto

Si definiscono le equazioni della dinamica, espresse nelle componenti X e Z per il moto traslazionale e Y per il moto di rotazione attorno all'asse di beccheggio. Si riporta nuovamente la figura 3.1:



$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{R}_x = V_x \\ \dot{R}_z = V_z \\ \dot{V}_x = \frac{T}{m} \cos \theta \\ \dot{V}_z = -\frac{T}{m} \sin \theta - g \\ \dot{\theta} = \omega_y \\ \dot{\omega}_y = \frac{M_y}{I_y} \\ \dot{m} = -\frac{T}{c_1} - \frac{|M_y|}{c_2 l_y} \end{array} \right. \quad (5.2)$$

5.3 Controlli

Dovendo ricercare quelli che minimizzano il consumo di propellente, sono stati scelti come controlli le grandezze che influiscono direttamente sul consumo stesso,

ovvero la spinta e la coppia. Tenendo poi conto che la spinta \mathbf{T} agisce nel piano X-Z mentre la coppia \mathbf{M} lungo l'asse y si ha:

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \mathbf{T}_x + \mathbf{T}_z; \\ \mathbf{M} &= \mathbf{M}_y;\end{aligned}$$

in cui, guardando le equazioni della dinamica 5.2,

$$\begin{cases} \mathbf{T}_x = T \cos\theta; \\ \mathbf{T}_z = -T \sin\theta; \end{cases} \quad (5.3)$$

Le componenti della spinta dipendono quindi da θ , una delle variabili di stato che, a sua volta, dipende dall'intensità della coppia. Quindi, i controlli sono **le intensità** di spinta e coppia:

$$\mathbf{u} = [T, M_y] \quad (5.4)$$

5.4 Condizioni al contorno

Si definiscono adesso le condizioni al contorno: il lander parte con una determinata velocità e un determinato assetto da una posizione nota e, ottimizzando il consumo, deve arrivare sulla superficie lunare con velocità (lineari e angolari) nulle e un determinato assetto. In particolare, le condizioni iniziali sono:

$$\begin{cases} R_{x0} = -500 \text{ km}; \\ R_{z0} = 15 \text{ km}; \\ V_{x0} = 1.692 \text{ km/s}; \\ V_{z0} = 0 \text{ km/s}; \\ m_0 = 1600 \text{ kg}. \end{cases} \quad (5.5)$$

Per le condizioni iniziali su θ e ω_y verranno fatte particolari considerazioni successivamente.

Le condizioni finali invece sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{xf} = 0 \text{ km}; \\ R_{zf} = 0 \text{ km}; \\ V_{xf} = 0 \text{ km/s}; \\ V_{zf} = 0 \text{ km/s}; \\ \theta_f = -\pi/2; \\ \omega_{yf} = 0 \text{ rad/s}; \end{array} \right. \quad (5.6)$$

5.5 Hamiltoniano ed equazioni differenziali per le variabili aggiunte

Definito il funzionale, il sistema differenziale per le variabili di stato, il vettore dei controlli e le condizioni al contorno, si può definire l'Hamiltoniano H :

$$H = \lambda^T \mathbf{f} \quad (5.7)$$

$$= \lambda_r^T \mathbf{V} + \lambda_v^T \left(\frac{\mathbf{T}}{m} + \mathbf{g} \right) + \lambda_\theta \omega_y + \lambda_{w_y} \frac{M_y}{I_y} + \lambda_m \left(-\frac{T}{c_1} - \frac{|M_y|}{c_2 l_y} \right); \quad (5.8)$$

che può essere riscritto riportando tutte le componenti:

$$\begin{aligned} H &= \lambda_{R_x} V_x + \lambda_{R_z} V_z \\ &+ \lambda_{V_x} \left(\frac{T}{m} \cos\theta \right) + \lambda_{V_z} \left(-\frac{T}{m} \sin\theta - g \right) \\ &+ \lambda_\theta \omega_y + \lambda_{w_y} \frac{M_y}{I_y} + \\ &+ \lambda_m \left(-\frac{T}{c_1} - \frac{|M_y|}{c_2 l_y} \right) \end{aligned} \quad (5.9)$$

Si introduce adesso quello che è stato definito *primer vector* $\mathbf{p}(t)$ da D.F.Lawden [9] e che tornerà utile nei capitoli successivi. Si vuole massimizzare la massa finale m_f e, per il principio di Pontryagin (4.10), il controllo che la massimizza è quello che rende massimo l'Hamiltoniano; dall'equazione 5.9 è facile notare come, se

la spinta è parallela alla variabile aggiunta $\lambda_{\mathbf{V}}$, allora H è massimo rispetto alla spinta. Si può quindi dire che, nel caso ottimale:

$$\begin{cases} p_x = \lambda_{V_x} = \cos\theta; \\ p_z = \lambda_{V_z} = -\sin\theta; \end{cases} \quad (5.10)$$

e, di conseguenza, esiste una direzione ottimale della spinta:

$$\theta_{ottimo} = \text{atan} \left(-\frac{\lambda_{V_z}}{\lambda_{V_x}} \right). \quad (5.11)$$

Successivamente si scrivono le *Equazioni di Eulero-Lagrange*: da

$$\frac{d\lambda}{dt} = - \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \quad (5.12)$$

tenendo presente che

$$\mathbf{x} = [R_x \ R_z \ V_x \ V_z \ \theta \ \omega_y \ m] \quad (5.13)$$

e che, di conseguenza,

$$\lambda = [\lambda_{R_x} \ \lambda_{R_z} \ \lambda_{V_x} \ \lambda_{V_z} \ \lambda_{\theta} \ \lambda_{\omega_y} \ \lambda_m] \quad (5.14)$$

le equazioni differenziali per le variabili aggiunte sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\lambda}_{R_x} = 0 \\ \dot{\lambda}_{R_z} = 0 \\ \dot{\lambda}_{V_x} = -\lambda R_x \\ \dot{\lambda}_{V_z} = -\lambda R_z \\ \dot{\lambda}_\theta = \lambda V_x \frac{T}{m} \sin\theta + \lambda V_z \frac{T}{m} \cos\theta \\ \dot{\lambda}_{w_y} = -\lambda_\theta \\ \dot{\lambda}_m = \lambda V_x \frac{T}{m^2} \cos\theta - \lambda V_z \frac{T}{m^2} \sin\theta + \lambda_{w_y} \frac{1}{12} \frac{M_y}{m^2(3r^2 + h^2)} \end{array} \right. \quad (5.15)$$

Si hanno quindi, in totale, $NY = 14$ equazioni differenziali. Per risolvere il problema, poi, sono state eseguite alcune semplificazioni:

- Il momento di inerzia $I_y = \frac{1}{12}m(3r^2 + h^2)$ rimane costante;
- la portata di propellente per il controllo dell'assetto non è considerata (la spinta complessiva di questi propulsori è circa 40 volte più piccola della spinta principale).

Questo comporta la riformulazione delle equazioni differenziali per la massa e la corrispondente variabile aggiunta λ_m :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{m} = -\frac{T}{c_1} \\ \dot{\lambda}_m = \lambda V_x \frac{T}{m^2} \cos\theta - \lambda V_z \frac{T}{m^2} \sin\theta \end{array} \right.$$

L'Hamiltoniano assume quindi la forma:

$$\begin{aligned}
 H &= \lambda_{R_x} V_x + \lambda_{R_z} V_z \\
 &+ \lambda_{V_x} \left(\frac{T}{m} \cos\theta \right) + \lambda_{V_z} \left(-\frac{T}{m} \sin\theta - g \right) \\
 &+ \lambda_\theta \omega_y + \lambda_{w_y} \frac{M_y}{I_y} \\
 &+ \lambda_m \left(-\frac{T}{c_1} \right) ; \tag{5.16}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H &= \lambda_{R_x} V_x + \lambda_{R_z} V_z \\
 &+ \left(\frac{\lambda_{V_x} \cos\theta - \lambda_{V_z} \sin\theta}{m} - \frac{\lambda_m}{c_1} \right) T - \lambda_{V_z} g \\
 &+ \lambda_\theta \omega_y + \frac{\lambda_{w_y}}{I_y} M_y .
 \end{aligned}$$

Da quest'ultima espressione, si vede subito che l'Hamiltoniano è lineare rispetto ai due controlli: è possibile quindi definire una *switching function* per la spinta T

$$SF_1 = \left(\frac{\lambda_{V_x} \cos\theta - \lambda_{V_z} \sin\theta}{m} - \frac{\lambda_m}{c_1} \right) \tag{5.17}$$

e una per la coppia M_y

$$SF_2 = \frac{\lambda_{w_y}}{I_y} \tag{5.18}$$

Come detto già nel capitolo precedente, se il coefficiente che moltiplica il rispettivo controllo è non nullo, il suo segno determinerà il valore del controllo stesso; si avrà quindi che:

$$\begin{cases} T = T_{max} & se \ SF_1 > 0 \\ T = T_{min} & se \ SF_1 < 0 \\ M_y = M_y \ max & se \ SF_2 > 0 \\ M_y = M_y \ min & se \ SF_2 < 0 \end{cases} \tag{5.19}$$

Se, invece, la Switching Function è uguale a zero, allora è necessario annullare tutte le derivate del coefficiente rispetto al tempo fin quando il controllo non compare esplicitamente: sarà questo il controllo ottimale.

Capitolo 6

Risultati

Per la soluzione numerica delle equazioni differenziali, sono stati scelti dei valori iniziali di tentativo sia per le variabili i cui valori iniziali erano incogniti, sia per la durata della discesa stessa, anch'essa incognita. Tutti i risultati sono stati ottenuti tenendo in considerazione che θ e ω_y fossero liberi all'istante iniziale: dalla teoria del controllo ottimale consegue che siano nulli $\lambda_{\theta 0}$ $\lambda_{\omega_y 0}$. Per tutti i casi, si è posto anche $\lambda_{R_{xf}} = 0$, cioè si è lasciata libera la coordinata x . Poi, per rispettare il vincolo $R_{xf} = 0$, per ogni caso è stato seguito il seguente procedimento: ponendo R_{xf} libero (quindi $\lambda_{R_{xf}} = 0$) e $R_{x0} = -500km$, si è calcolato un primo valore di R_{xf} di tentativo, R_{xf}' . Si è quindi eseguito, sempre per ogni caso, un nuovo calcolo con $R_{x0} = -500 km + R_{xf}'$ appena trovato e si è posto il nuovo $R_{xf} = 0$. Nella pratica, la traiettoria ha la stessa forma, ma è traslata affinché si rispetti il vincolo $R_{xf} = 0$. Quello che succederebbe realmente, sarebbe uno sfasamento nell'inizio della trasferta di Hohmann - cioè un anticipo della *Descent Orbit Insertion* - per arrivare alla giusta posizione iniziale per la manovra di discesa. Si ricorda infatti che $R_{x0} = -500 km$ è un valore indicativo, che ha come riferimento le missioni Apollo. Sono state calcolate, mediante la risoluzione del rispettivo problema differenziale ai limiti, diverse traiettorie in ognuna delle quali si è aggiunto un vincolo da rispettare prima su θ_f , poi su ω_{yf} : si mostrerà come il rispetto di questi vincoli abbia delle conseguenze sulla ottimizzazione stessa della traiettoria. Per garantire una migliore convergenza è stata operata una adimensionalizzazione di tutte le grandezze scegliendo opportuni valori di riferimento, indicati con pedice "ref" nella

tabella 6.1:

Variabile	Valore
m_{ref}	1600 kg
r_{ref}	15 km
v_{ref}	1 km/s
a_{ref}	$v_{ref}^2/r_{ref} \simeq 0.0667km/s^2$
t_{ref}	$r_{ref}/v_{ref} = 15s$
T_{ref}	$m_{ref} \cdot a_{ref} \simeq 106.667kN$
M_{yref}	$T_{ref} \cdot r_{ref} = 1.6 \cdot 10^6kNm$
I_{yref}	$m_{ref} \cdot r_{ref}^2 = 360000kg(km)^2$

Tabella 6.1: Fattori di adimensionalizzazione

Per i diversi casi verranno definiti, facendo riferimento alla teoria esposta nel capitolo 4, i vettori dei parametri, dei valori incogniti allo stato iniziale e delle condizioni finali da rispettare.

6.1 Caso 1: θ_f e ω_f liberi

La prima traiettoria ottenuta è stata calcolata partendo dal caso più generale (e più semplice) in cui θ e ω_y fossero liberi all'inizio e alla fine. Avere θ_f e ω_f liberi implica avere $\lambda_{\theta f} = 0$ $\lambda_{\omega_y f} = 0$.

Seguendo la notazione del Capitolo 4, si avrà che

$$\mathbf{y} = [\mathbf{x}, \lambda] \tag{6.1}$$

dove \mathbf{x} e λ sono dati dalle 5.13 e 5.14 rispettivamente. Il vettore delle incognite al tempo iniziale \mathbf{p} , sarà composto da t_f , e dalle componenti di \mathbf{y} incognite a t_0 , che quindi devono essere scelte opportunamente. In sintesi:

Condizioni esplicite	Condizioni implicite	Incognite iniziali
R_{x0}	H_f ²	t_f
R_{z0}	$\lambda_{R_{xf}}$	$\lambda_{R_{x0}}$
V_{x0}	R_{zf}	$\lambda_{R_{z0}}$
V_{z0}	V_{xf}	$\lambda_{V_{x0}}$
m_0	V_{zf}	$\lambda_{V_{z0}}$
$\lambda_{\theta 0}$	λ_{θ_f}	θ_0
$\lambda_{\omega_y 0}$	$\lambda_{\omega_{yf}}$	ω_{y0}
λ_{m0} ¹		

Tabella 6.2: Caso 1 - Condizioni al Contorno e Valori iniziali di tentativo

Guardando poi l'espressione di SF_2 (Eq. 5.18), le espressioni di $\dot{\lambda}_\theta$ e di $\dot{\lambda}_{\omega_y}$, (Eq 5.15) e ricordando l'espressione del *primer vector* (Eq. 5.10) si può notare che SF2 è nulla lungo tutto l'arco, che è quindi **singolare**. Sono state calcolate quindi le derivate di SF2 e annullate fino all'ordine in cui la coppia compare esplicitamente:

- $SF_2 = \lambda_{\omega_y}/I_y$
- $\frac{\partial SF_2}{\partial t} = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\lambda_{\omega_y}}{I_y} \right) = 0 \xrightarrow{I_y=\text{costante}} \dot{\lambda}_{\omega_y} = 0 = -\lambda_\theta$;
- $\frac{\partial^2 SF_2}{\partial t^2} = 0 \rightarrow \dot{\lambda}_\theta = \frac{T}{m} (\lambda V_x \sin\theta + \lambda V_z \cos\theta) = 0 \rightarrow \lambda V_x \sin\theta + \lambda V_z \cos\theta = 0$;
- $\frac{\partial^3 SF_2}{\partial t^3} = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (\lambda V_x \sin\theta + \lambda V_z \cos\theta) = 0 \rightarrow \omega_y = \frac{\lambda_{R_z} \cos\theta + \lambda_{R_x} \sin\theta}{\lambda_{V_x} \cos\theta - \lambda_{V_z} \sin\theta}$;

¹Questo in realtà sostituisce la seconda condizione di trasversalità per cui $\lambda_{x_f} = \partial\varphi/\partial x_f = 1$, con $\varphi = m_f$ e $x_f = m_f$. Questo è possibile in quanto, introducendo un fattore α e volendo massimizzare il funzionale $J = \alpha m_f$, la formulazione del problema non cambia, quindi non cambia la soluzione cercata; soltanto gli altri λ_j verranno moltiplicati per questo fattore. Dalla seconda condizione di trasversalità si ha quindi $\lambda_{m_f} = \alpha$. Ponendo $\lambda_{m0} = 1$ si sta implicitamente scegliendo un valore α tale che $\lambda_{m_f} = \alpha$. E' facile verificare come, trovato un primo valore α di tentativo corrispondente a λ_{m_f} , se si pone $\lambda_{m0} = 1/\alpha$ si ottiene esattamente $\lambda_{m_f} = 1$.

²La condizione su H_f deriva dalla seconda condizione di trasversalità, per cui $H_f = -\partial\varphi/\partial t_f = 0$, con φ che è m_f per come è stata definita nel capitolo 3.

$$\bullet \frac{\partial^4 SF_2}{\partial t^4} = 0 \rightarrow \dot{\omega}_y = 2 \frac{\omega_y}{\lambda_{V_x}^2 + \lambda_{V_z}^2} (\lambda_{V_x} \lambda_{R_x} + \lambda_{V_z} \lambda_{R_z});$$

È quindi possibile calcolare la coppia:

$$M_y = \dot{\omega}_y I_y = 2 \frac{\omega_y}{\lambda_{V_x}^2 + \lambda_{V_z}^2} (\lambda_{V_x} \lambda_{R_x} + \lambda_{V_z} \lambda_{R_z}) I_y \quad (6.2)$$

Essendo di ordine 4 la derivata di SF_2 in cui compare esplicitamente il controllo (a meno del fattore I_y), l'arco singolare è di ordine 2 (l'ordine dell'arco singolare è sempre la metà dell'ordine della derivata).

Si riportano di seguito la traiettoria e gli andamenti di velocità orizzontale e verticale, dell'angolo di beccheggio, della velocità angolare, della massa e dell'Hamiltoniano.

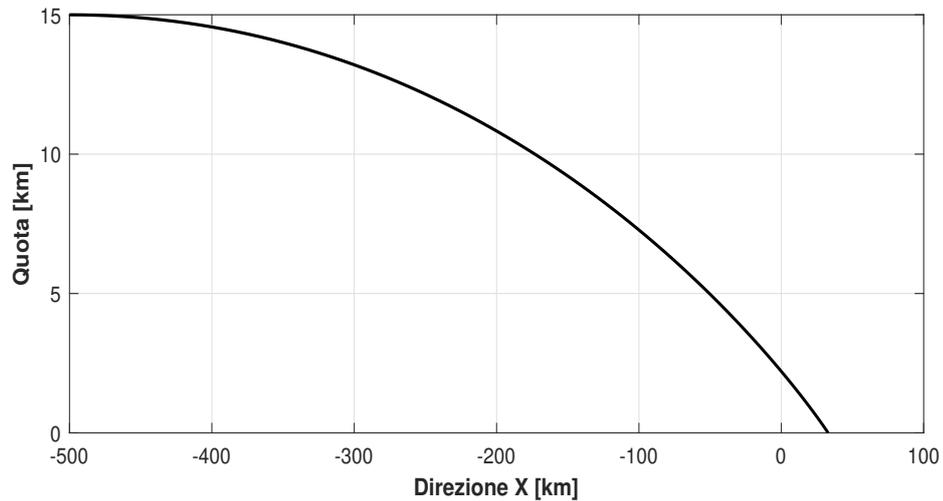


Figura 6.1: Caso 1: Traiettoria

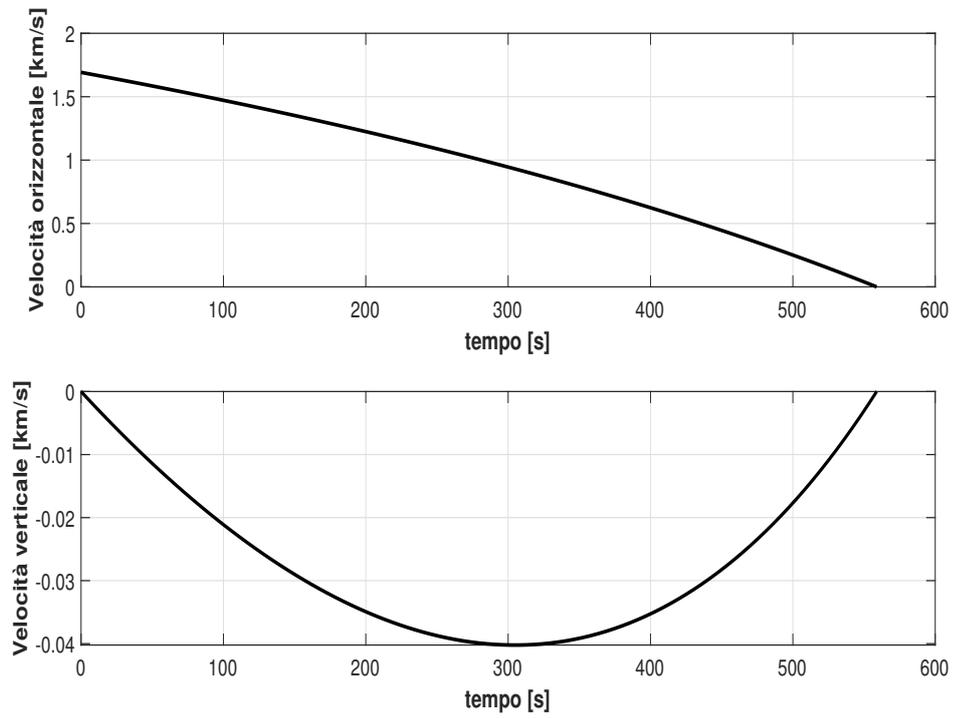


Figura 6.2: Caso 1: Velocità orizzontale e verticale

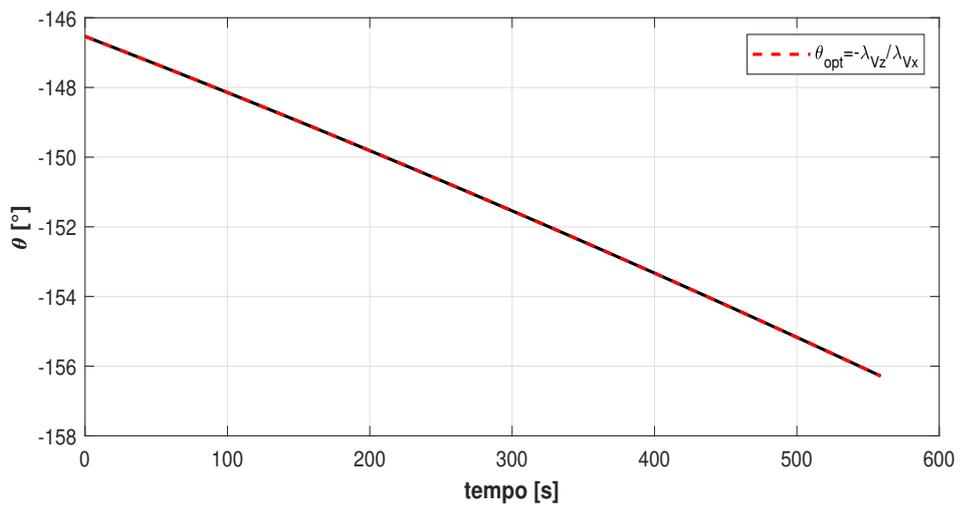


Figura 6.3: Caso 1: Angolo di beccheggio

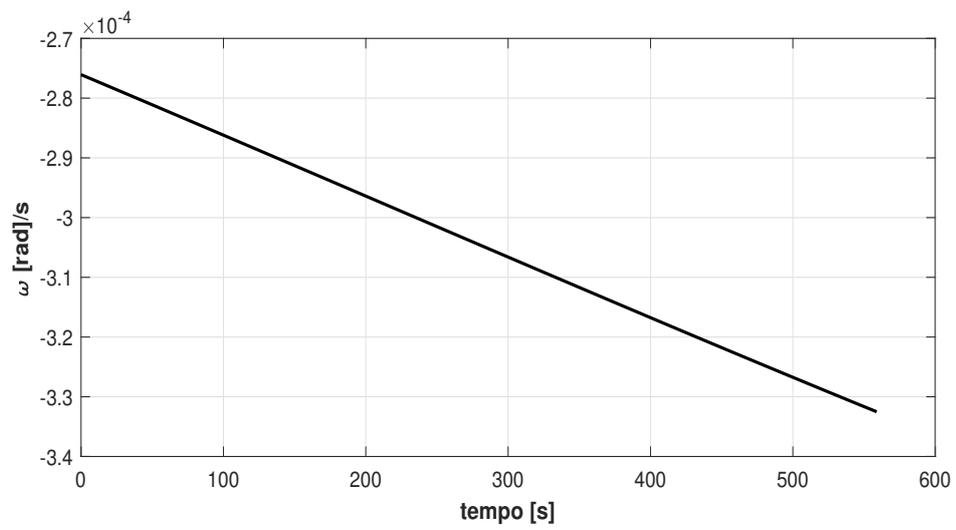


Figura 6.4: Caso 1: Velocità angolare

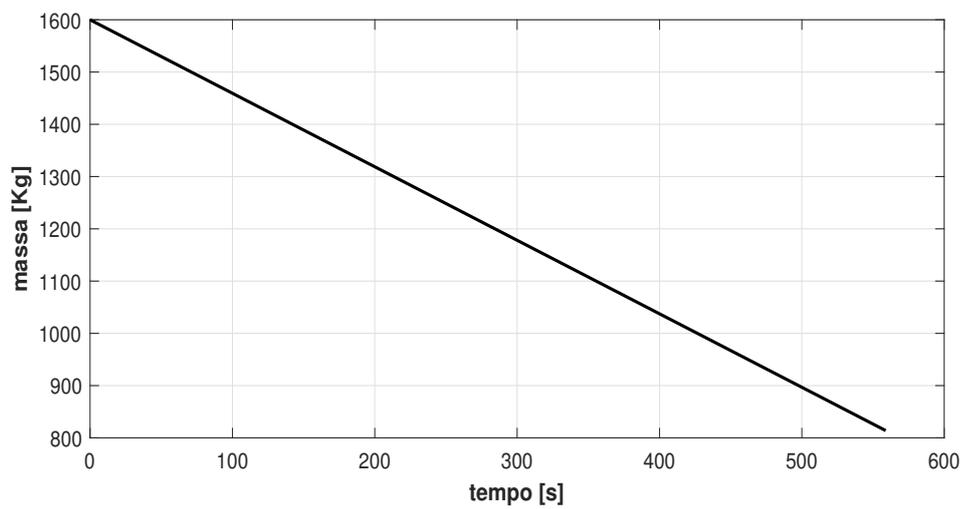


Figura 6.5: Caso 1: Massa

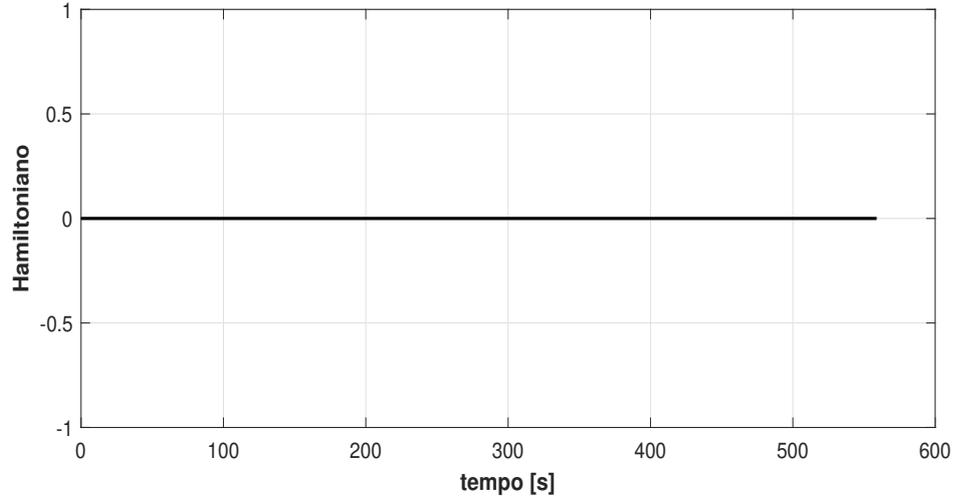


Figura 6.6: Caso 1: Hamiltoniano

Prima di riportare i prossimi risultati, si osservi quanto segue: com'è stato detto nel precedente capitolo, in una traiettoria ottimale la spinta e il vettore $\lambda_{\mathbf{v}}$ devono essere paralleli e quindi l'angolo θ ha, in ogni istante, un valore dato dalla 5.11. Inoltre, i risultati riportati in questa sezione hanno θ e ω liberi agli istanti iniziali e finali, si è mostrato come $\dot{\lambda}_{\theta}$ fosse nullo quindi, di conseguenza λ_{θ} e λ_{ω_y} sono nulli lungo tutto l'arco, che è quindi singolare per tutta la durata della discesa. Se però si impongono i vincoli $\theta_f = -\pi/2$ e $\omega_f = 0$, allora si può dedurre che esisterà un tratto della traiettoria in cui la spinta non sarà allineata al $\lambda_{\mathbf{v}}$, quindi non avrà la direzione che massimizzerà l'Hamiltoniano (Eq. 5.8). Inoltre, che $\theta_f = -\pi/2$ implica anche non valga più la condizione finale $\lambda_{\theta_f} = 0$, essendo λ_{θ_f} libero. Quindi, per il rispetto dei vincoli, prima per l'assetto e poi anche per la velocità angolare, il problema di ottimo è stato riformulato e la traiettoria ricalcolata di conseguenza. Si espone quindi il caso in cui θ_f è vincolato mentre ω_{yf} è, per il momento, ancora libero.

6.2 Caso 2: $\theta_f = -\pi/2$ e ω_f libero

Affinchè si avesse al suolo $\theta_f = -\pi/2$, è stato necessario suddividere la traiettoria in due archi: se si cercasse una traiettoria ottimale (quindi se il valore della spinta dipendesse dal segno della sua Switching Function) composta da un solo arco, si

otterrebbe una soluzione in cui il lander arriverebbe alle condizioni finali imposte con motore spento (cioè $T = 0$ in quanto $SF_1 < 0$) assumendo, in parte, una quota negativa e una V_z positiva, cioè arriverebbe a $z = 0$ dopo una salita da una quota negativa (fig 6.7).

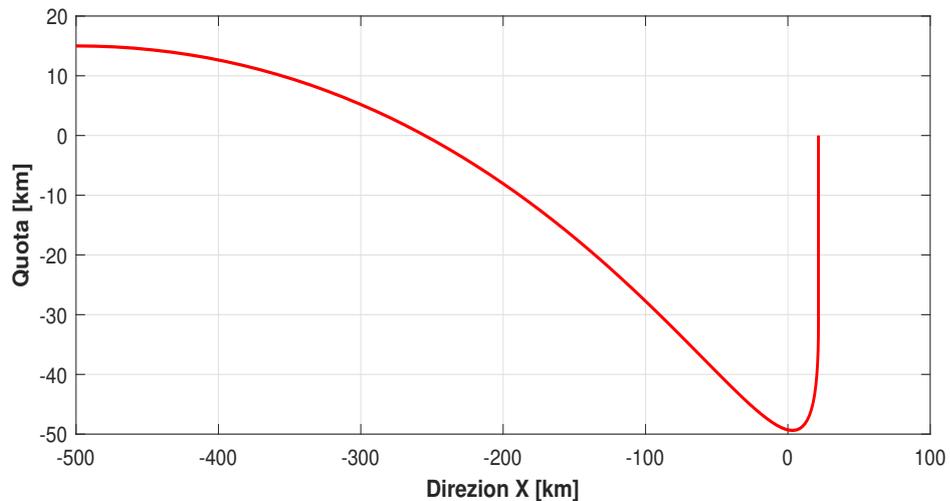


Figura 6.7: Caso 2: Traiettoria che risulterebbe se la spinta dipendesse dalla SF_1 anche nell'ultimo tratto

Per evitare che questo si verifichi, è necessario imporre che il veicolo arrivi da quote positive con velocità verticale verso il basso, quindi col motore acceso. È quindi necessario suddividere la traiettoria in due archi, di cui il primo è singolare e il secondo è vincolato tale da avere $T = T_{max}$. Dal punto di vista del codice di calcolo, è aumentata la dimensione del problema: al vettore \mathbf{p} si aggiunge la durata del secondo arco. In tabella 6.3 si può notare come cambiano le condizioni al contorno e il vettore delle incognite di tentativo:

Condizioni esplicite	Condizioni implicite	Incognite iniziali
R_{x0}	$H(t_f)$	t_1, \mathbf{t}_2
R_{z0}	$\lambda_{R_{xf}}$	$\lambda_{R_{x0}}$
V_{x0}	R_{zf}	$\lambda_{R_{z0}}$
V_{z0}	V_{xf}	$\lambda_{V_{x0}}$
m_0	V_{zf}	$\lambda_{V_{z0}}$
$\lambda_{\theta 0}$	θ_f	θ_0
$\lambda_{\omega_{y0}}$	$\lambda_{\omega_{yf}}$	ω_{y0}
λ_{m0}		

Tabella 6.3: Caso 2 - Condizioni al Contorno e Valori iniziali di tentativo

Il primo arco (di durata t_1) è un arco singolare e, analogamente a quanto succede nel paragrafo precedente, θ e ω sono liberi all'inizio e alla fine, la direzione della spinta è quella ottimale, il valore della coppia è quello dato dalla 6.2 e il propulsore principale rimane sempre acceso. Nel secondo che dura t_2 la coppia esercitata dai propulsori per il controllo d'assetto forza la rotazione fino a completarla per avere un angolo di 90° al suolo e la spinta è imposta pari al suo valore massimo: così facendo, il lander arriva correttamente al suolo rispettando le condizioni finali. Il codice va quindi a calcolare le durate dei due singoli archi che, sommate ($t_f = t_1 + t_2$), danno la durata totale della discesa ottimizzata. Alla fine del primo arco, inizia la rotazione fino al suolo, al termine della quale i vincoli di posizione, velocità e angolo θ sono rispettati. Si riportano anche in questo caso la traiettoria e gli andamenti per le velocità nel piano, per l'angolo di beccheggio, per la velocità angolare e per la massa. L'angolo θ verrà confrontato con il valore ottimale espresso dalla 5.11, e si noterà come i due valori differiscano lungo il secondo arco.

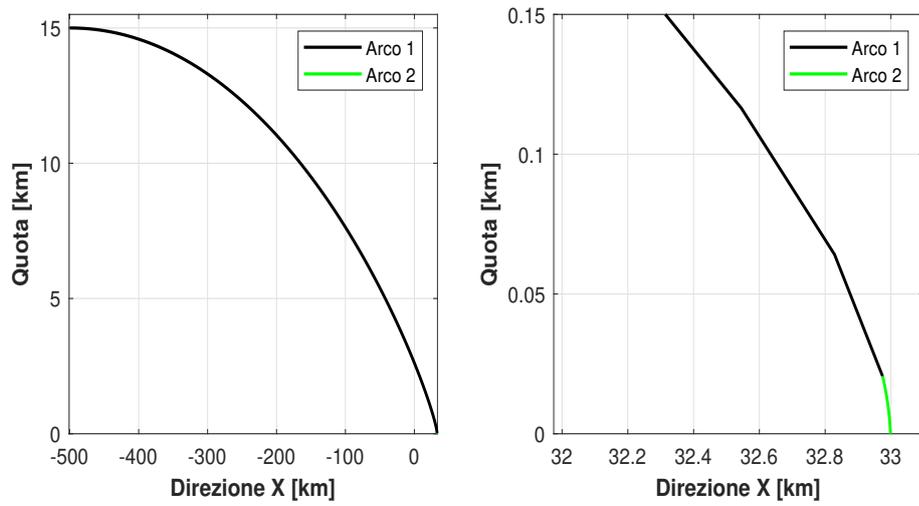


Figura 6.8: Caso 2: Traiettoria - Ingrandimento per l'arco 2 a destra

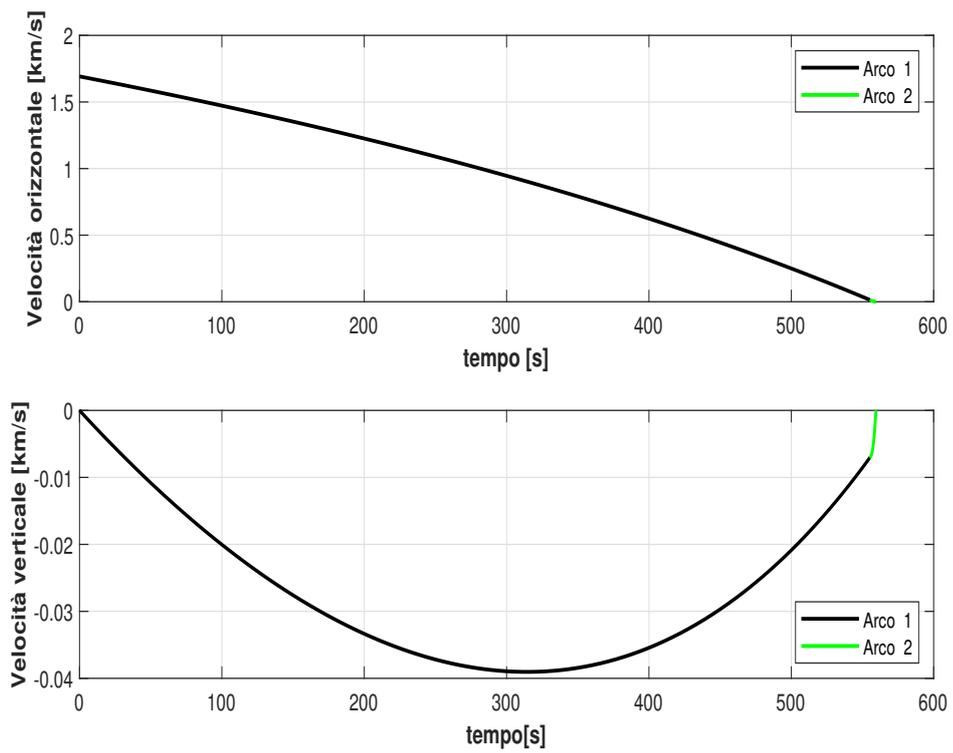


Figura 6.9: Caso 2: Velocità orizzontale e verticale

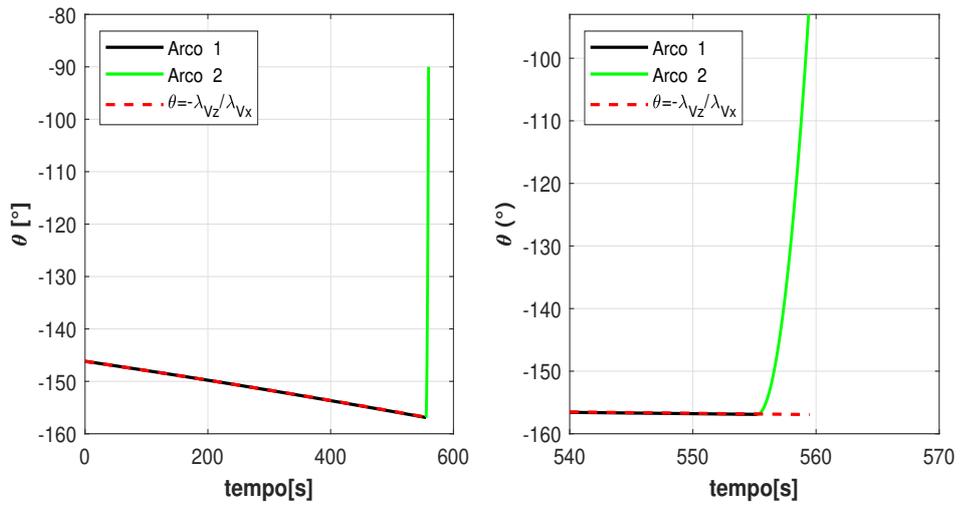


Figura 6.10: Caso 2: Angolo di beccheggio - Ingrandimento per l'arco 2 a destra

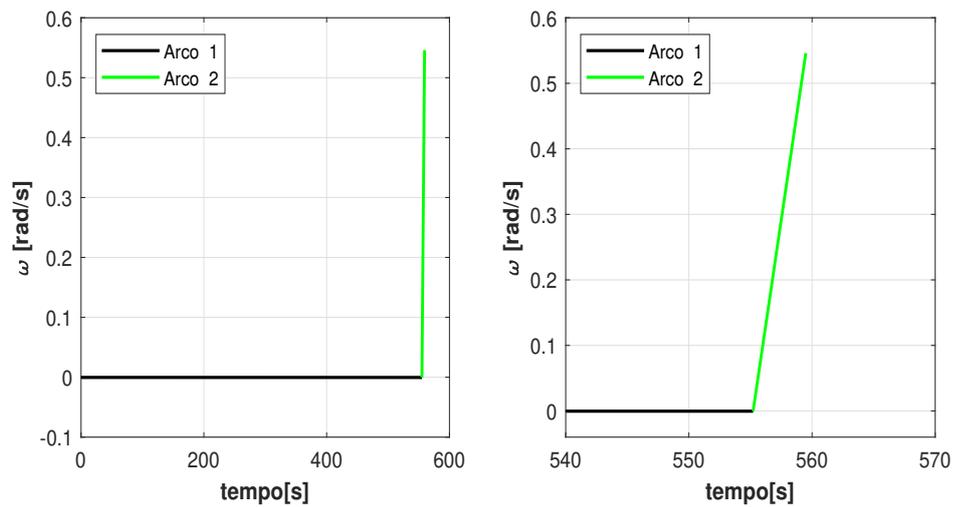


Figura 6.11: Caso 2: Velocità angolare - Ingrandimento per l'arco 2 a destra

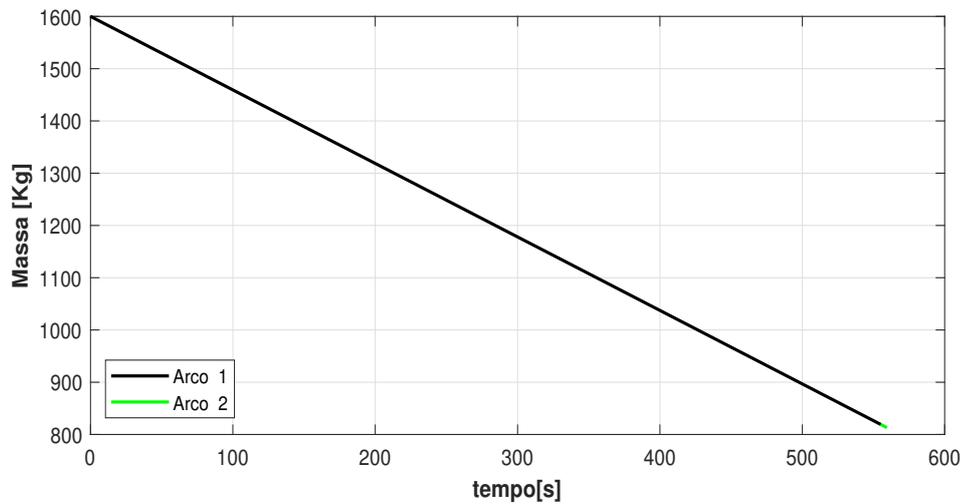


Figura 6.12: Caso 2: Massa

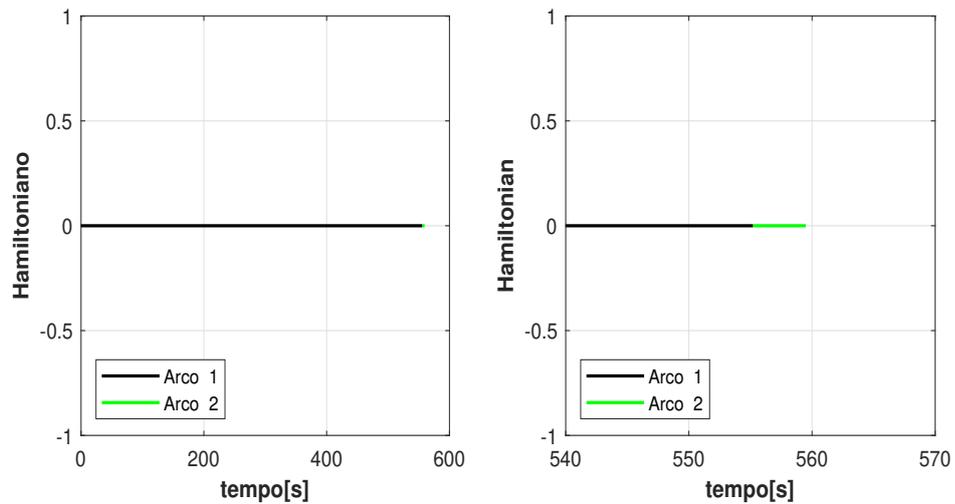


Figura 6.13: Caso 2: Hamiltoniano

Osservazione: Dalla figura 6.8 si può vedere come il secondo arco inizi a poco più di 20 metri dal suolo: per tutta la parte della discesa raffigurata in nero nelle figure, l'angolo di assetto è libero e uguale al valore ottimale (fig 6.10) come era già stato anticipato; poi, per arrivare al suolo col giusto θ , è stata forzata la rotazione che l'ha fatto discostare dal suo valore ottimale (fig 6.10). Se però si osserva l'Hamiltoniano, si può notare come questo rimanga nullo anche in questo tratto, che quindi si riesce

ad ottimizzare nel rispetto, però, del vincolo $\theta_f = -\pi/2$. È vero sì che la spinta non è più parallela al λ_V , ma adesso, nel secondo tratto i λ_θ e i λ_ω non sono più nulli e sono tali per cui la somma di tutti gli addendi dell'Hamiltoniano nella 5.8 continui ad essere zero. Se però si osserva l'andamento della massa (in tabella 6.6 sono riportati tutti i valori), si vede come questa effettivamente diminuisca di più: quello che succede adesso, rispetto al caso precedente, è che si riesce comunque ad ottimizzare fino alla fine ($H = 0$) un problema in cui però c'è un vincolo tale da avere una massa finale minore rispetto al caso senza vincoli (θ_f libero). Si noti poi come la manovra di rotazione sia impulsiva, in accordo con la modellizzazione del satellite, quindi con la definizione dei propulsori per il controllo di assetto. Infine, è evidente come, essendo la coppia discontinua tra primo e secondo arco e costante durante il secondo, la velocità angolare presenti un cambio di pendenza (quindi un punto angoloso) in t_1 , dopo il quale è lineare, quindi θ è parabolico e diverso dal valore ottimale fino alla fine della discesa.

6.3 Caso 3: $\theta_f = -\pi/2$ e $\omega_f = 0$

Come ultimo caso, è stata imposta la velocità angolare nulla. Per fare questo è stato introdotto un altro parametro, ovvero l'istante t^* in cui la coppia deve cambiare segno per avere al suolo una velocità angolare nulla e l'angolo di beccheggio di 90° . L'arco 2 del caso precedente adesso è diviso in due parti, una con coppia positiva e l'altro con coppia negativa. Si riporta la tabella con i valori iniziali, finali e di tentativo:

Condizioni esplicite	Condizioni implicite	Incognite iniziali
R_{x0}	$H(t_1)$	$t_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}^*$
R_{z0}	$\lambda_{R_{xf}}$	$\lambda_{R_{x0}}$
V_{x0}	R_{zf}	$\lambda_{R_{z0}}$
V_{z0}	V_{xf}	$\lambda_{V_{x0}}$
m_0	V_{zf}	$\lambda_{V_{z0}}$
$\lambda_{\theta 0}$	θ_f	θ_0
$\lambda_{\omega_{y0}}$	ω_{yf}	ω_{y0}
λ_{m0}		

Tabella 6.4: Caso 3 - Condizioni al Contorno e Valori iniziali di tentativo

Si raffigurano di seguito la traiettoria, le velocità lineari nel piano, l'angolo θ - verrà mostrato anche il θ ottimale, come nel caso 2 - , la velocità angolare, la massa e l'Hamiltoniano.

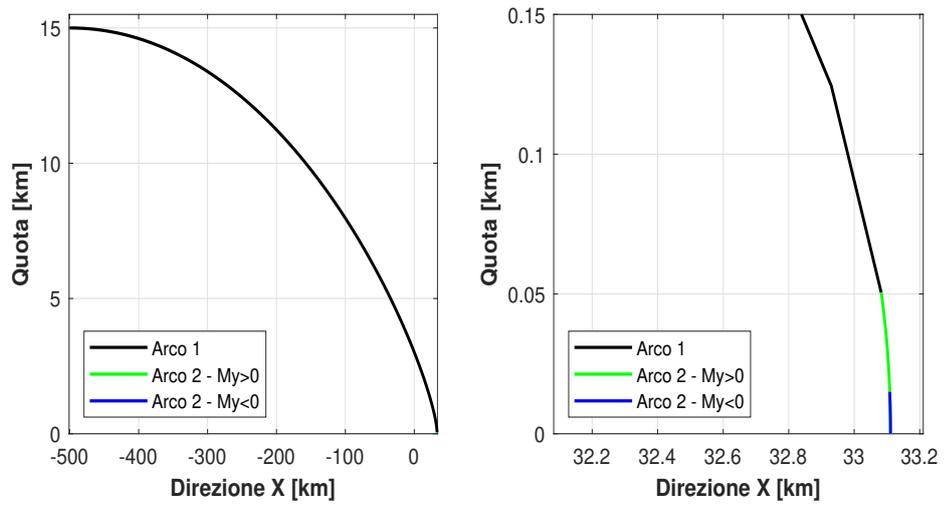


Figura 6.14: Caso 3: Traiettoria - Ingrandimento per l'arco 2 a destra

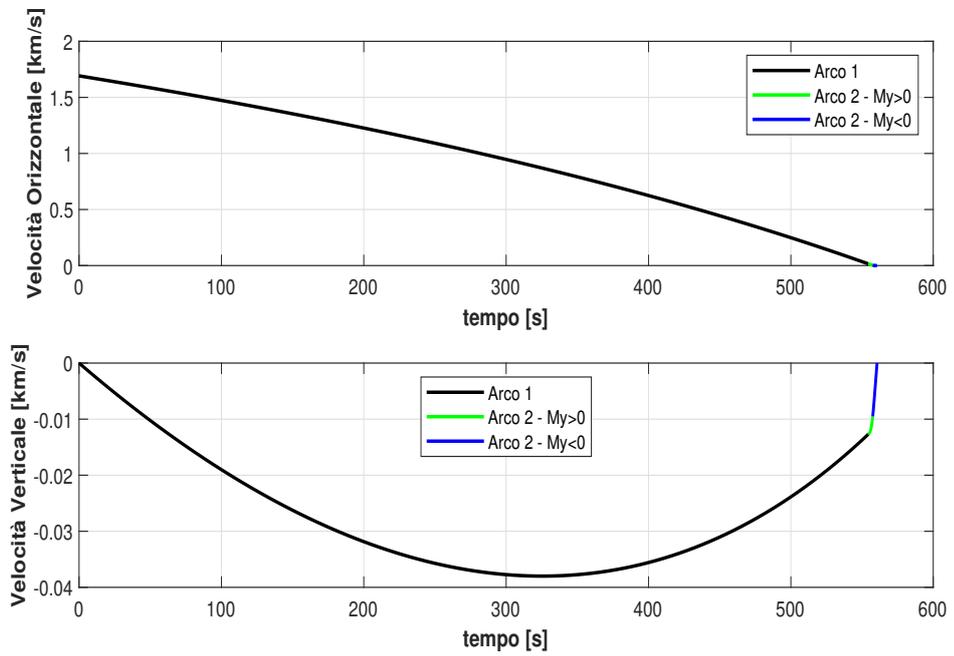


Figura 6.15: Caso 3: Velocità orizzontale e verticale

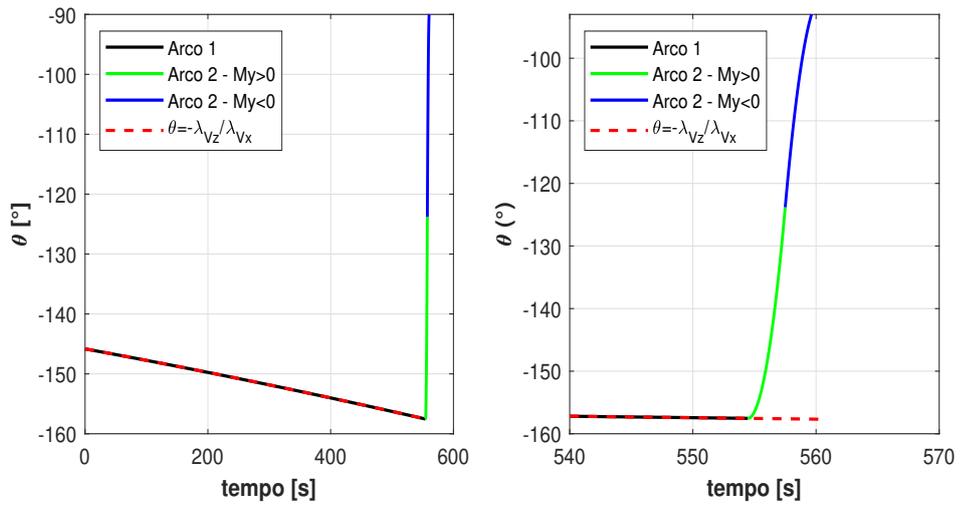


Figura 6.16: Caso 3: Angolo di beccheggio - Ingrandimento per l'arco 2 a destra

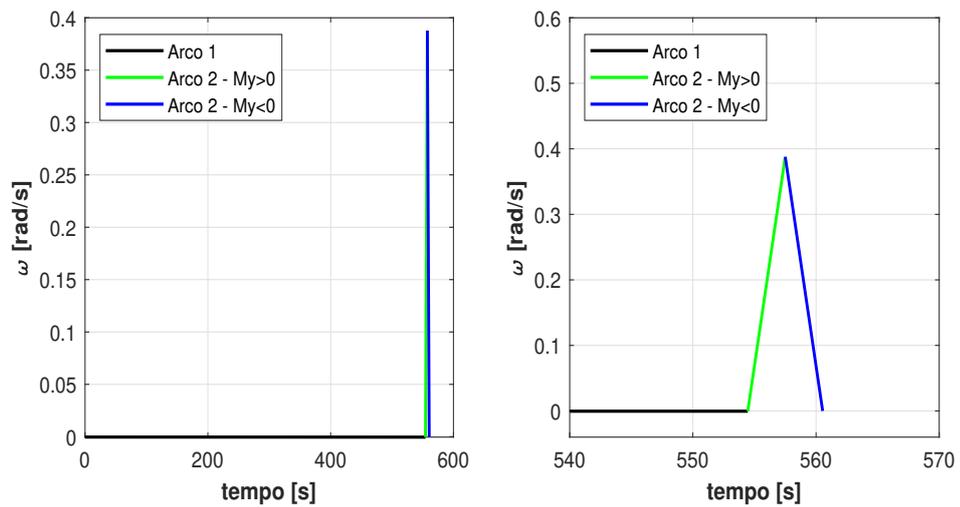


Figura 6.17: Caso 3: Velocità angolare - Ingrandimento per l'arco 2 a destra

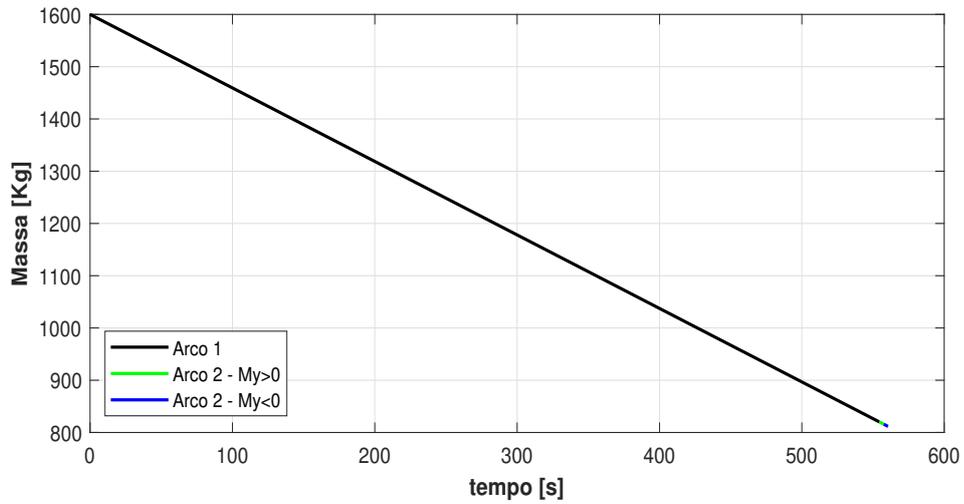


Figura 6.18: Caso 3: Massa

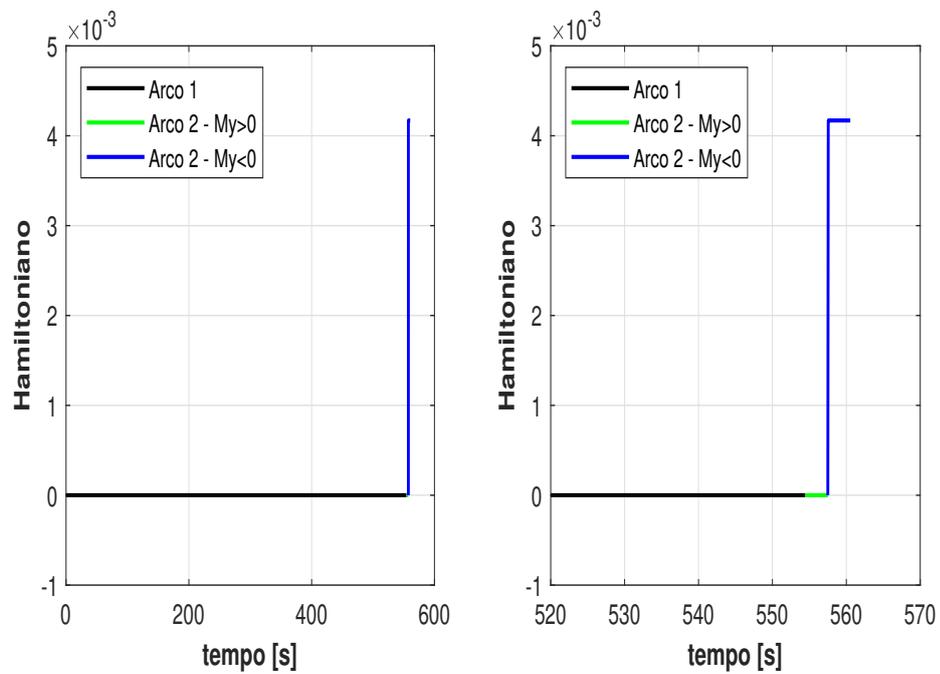


Figura 6.19: Caso 3: Hamiltoniano

Osservando l'andamento dell'Hamiltoniano, si osserva come questo presenti una discontinuità in corrispondenza dell'applicazione della coppia che forza la velocità angolare a zero. Va infatti precisato che nell'implementazione del codice la condizione $H(t_f) = 0$ è stata sostituita con $H(t_1) = 0$. Questo a causa del fatto che,

imponendo anche il vincolo su w_f , il problema è completamente vincolato: ci sono 5 parametri (t_1 , due tra $\lambda_{Rz}, \lambda_{Vx}$ e λ_{Vz} , t_2 e t^*) per 5 condizioni finali (R_z , V_x , V_z , θ e ω_y). Quindi, si pone $H = 0$ per tutto l'arco singolare, al quale segue il tratto vincolato che porta il satellite alle condizioni finali. Ad ogni modo, si è ottenuta la traiettoria cercata: il lander arriva a quota zero con velocità orizzontale e verticale nulle, con l'assetto desiderato e con la velocità angolare nulla. Se si osserva però la figura 6.20, si può notare come, quello che succede in realtà non è ancora fisicamente realistico:

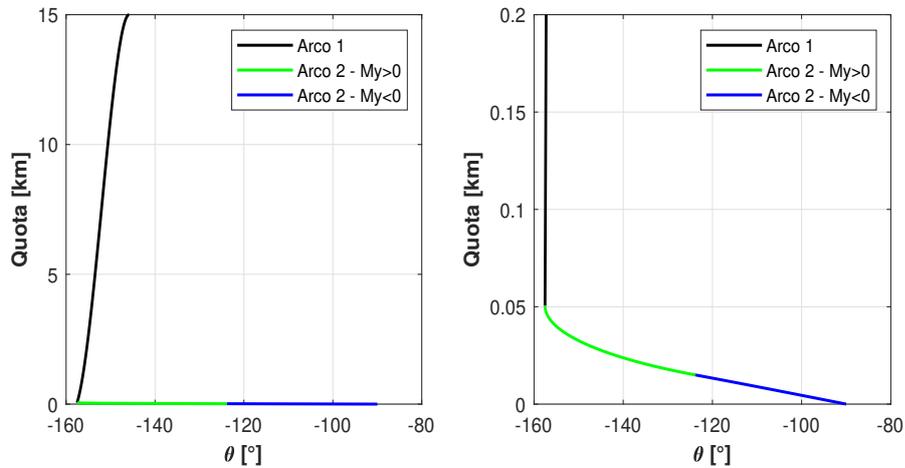


Figura 6.20: Caso 3: Variazione di θ con la quota - Ingrandimento per l'arco 2 a destra

Si vede infatti che la manovra di rotazione inizia a circa 50 metri dal suolo e anzi, non si completa mai prima di arrivare esattamente a quota zero. Ricordando però le dimensioni del satellite – $h = 2.13m$ e $d = 2.09m$ – in questa situazione toccherebbe il suolo prima che la rotazione venga completata; inoltre, in uno scenario più realistico, è probabile che venga richiesto al satellite di raggiungere le condizioni finali di assetto e velocità angolari a una certa distanza dal suolo, ad esempio per ragioni di sicurezza, da cui iniziare una discesa verticale. Si è scelto quindi di calcolare un'altra traiettoria che tenesse conto di questi aspetti.

6.4 Caso 4: Discesa verticale da 20 metri

Il valore di 20 metri è stato scelto tenendo in considerazione che, nelle missioni Apollo, il lander iniziava la discesa verticale a 30 metri dal suolo (si veda [2]), per cui 20 metri possono essere un buon compromesso tra questioni legate alla sicurezza e il consumo di propellente. Dal punto di vista numerico, aumenta ulteriormente la dimensione del problema: c'è un parametro in più che è la durata della discesa verticale t_3 ; inoltre alcune delle condizioni al contorno sono imposte all'istante in cui inizia la discesa verticale t_{VD} , mentre altre alla fine della discesa (istante t_f). Si riportano tutte le condizioni al contorno e i valori iniziali di tentativo nella tabella 6.5.

Condizioni esplicite	Condizioni implicite	Incognite iniziali
R_{x0}	$H(t_1)$	$t_1, t_2, t^*, \mathbf{t}_3$
R_{z0}	$\lambda_{R_{xf}}$	$\lambda_{R_{x0}}$
V_{x0}	$\mathbf{R}_{\mathbf{z}(\mathbf{t}_{VD})}$	$\lambda_{R_{z0}}$
V_{z0}	$\mathbf{V}_{\mathbf{x}(\mathbf{t}_{VD})}$	$\lambda_{V_{x0}}$
m_0	V_{zf}	$\lambda_{V_{z0}}$
$\lambda_{\theta 0}$	$\theta(\mathbf{t}_{VD})$	θ_0
$\lambda_{\omega_{y0}}$	$\omega_{\mathbf{yf}}(\mathbf{t}_{VD})$	ω_{y0}
λ_{m0}	R_{zf}	

Tabella 6.5: Caso 4 - Condizioni al Contorno e Valori iniziali di tentativo

Viene imposto che il lander abbia raggiunto, ad una altezza di 20 metri, l'assetto e la velocità angolare desiderati e la velocità orizzontale nulla, così da avere dopo un tempo $t_1 + t_2$ una sola componente verticale di velocità. Trascorso anche t_3 , il lander si troverà sulla superficie lunare.

Analogamente ai capitoli precedenti, si riportano gli andamenti di posizione, velocità, assetto, velocità angolari, massa e Hamiltoniano.

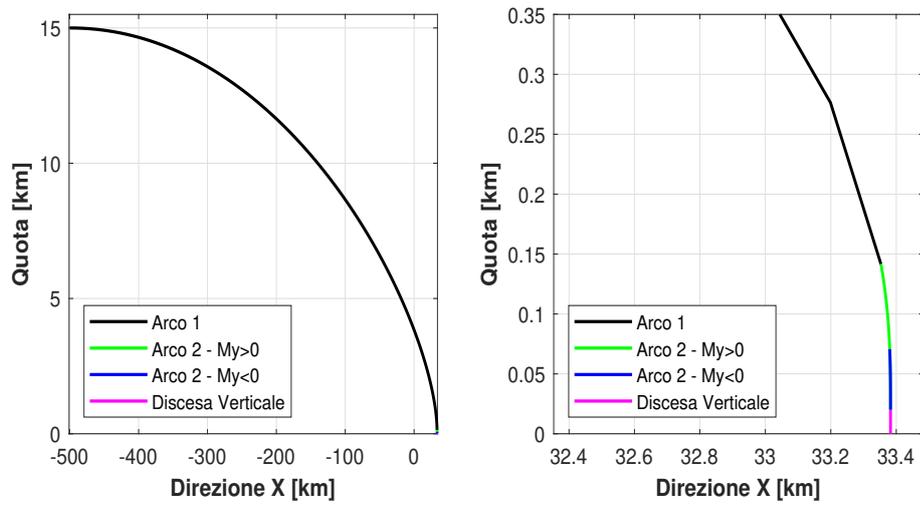


Figura 6.21: Caso 4: Traiettoria - Ingrandimento per gli archi 2 e 3 a destra

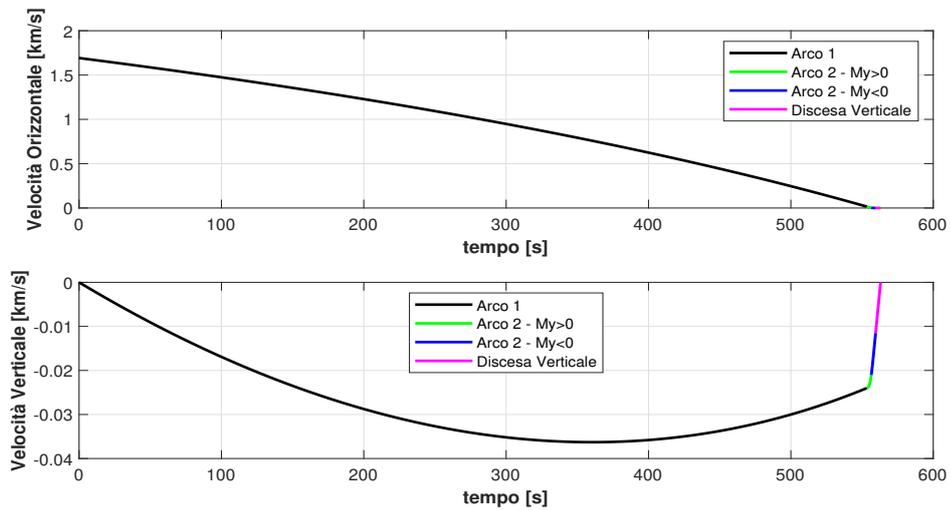


Figura 6.22: Caso 4: Velocità orizzontale e verticale

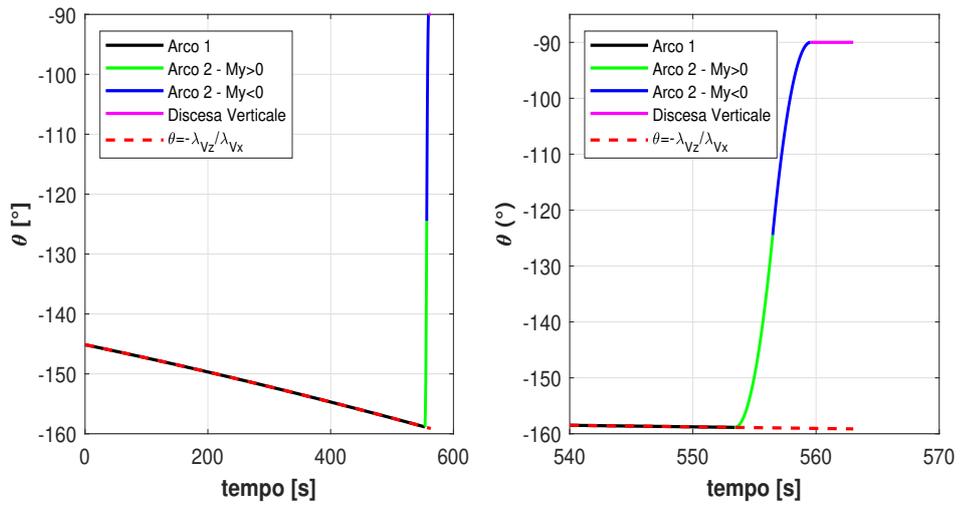


Figura 6.23: Caso 4: Angolo di beccheggio – Ingrandimento per gli archi 2 e 3 a destra

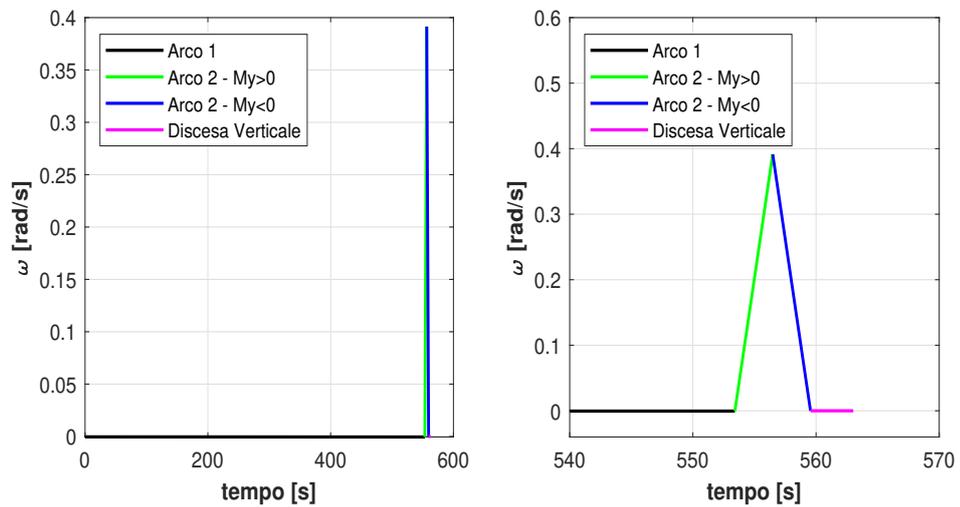


Figura 6.24: Caso 4: Velocità angolare – Ingrandimento per gli archi 2 e 3 a destra

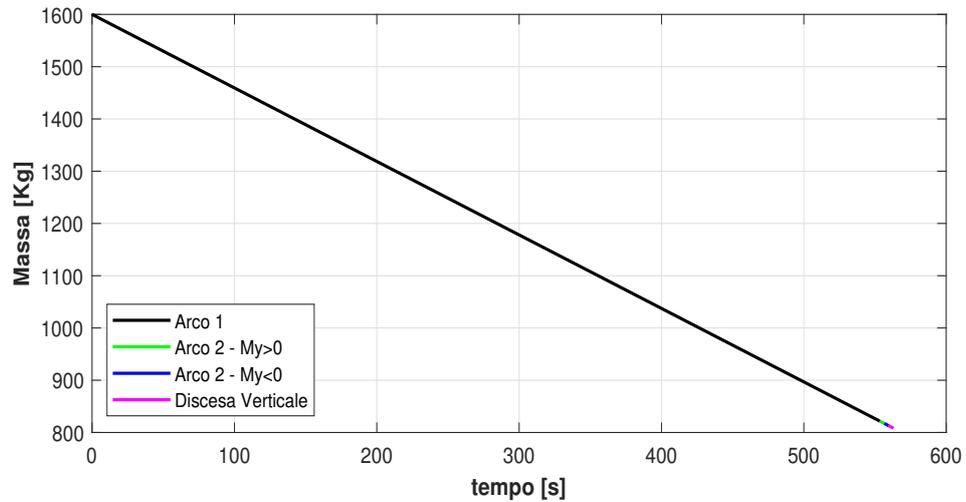


Figura 6.25: Caso 4: Massa

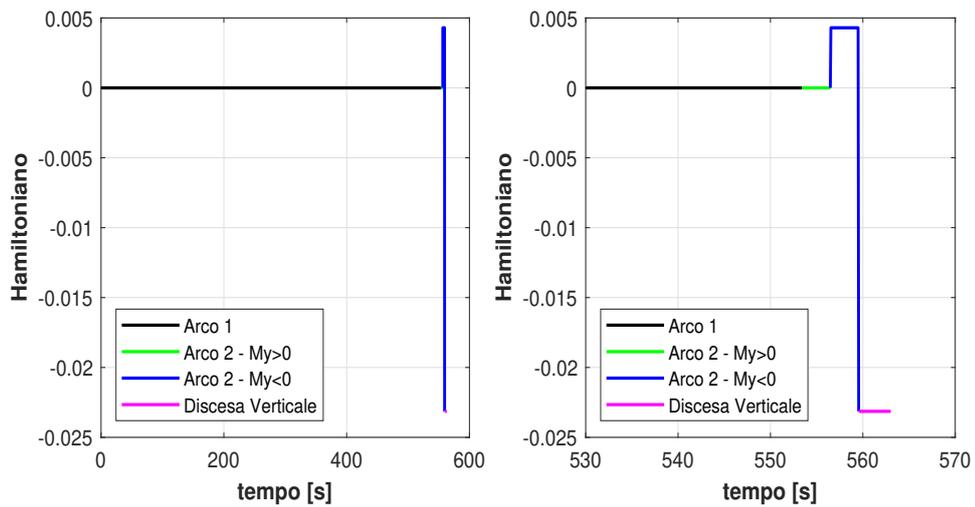


Figura 6.26: Caso 4: Hamiltoniano

Anche per questo caso H presenta delle discontinuità dovute al fatto che il problema è completamente vincolato: ai 5 parametri del paragrafo precedente si aggiunge la durata della discesa verticale e alle condizioni da rispettare si aggiunge che la quota alla fine del secondo arco debba essere di 20 metri. Tornando al capitolo 2 in cui è stata definita la missione, per la *Powered Descent Phase* si è detto che questa si compone di *Braking Phase*, *Approach Phase* e la *Terminal Vertical Descent*, fasi che possono essere associate in questo caso, rispettivamente, agli archi 1, 2 e 3.

6.5 Confronto tra i diversi casi

Nella tabella di seguito si confrontano le durate e i consumi nei diversi casi, evidenziando, dove opportuno, le durate dei singoli archi.

Caso	Durata Arco 1 [s]	Durata Arco 2 [s]	Durata Arco 3 [s]	Durata totale [s]	Massa finale [kg]
Caso 1	558.870	***	***	558.870	813.946
Caso 2	555.212	4.279	***	559.491	813.072
Caso 3	554.456	6.080	***	560.536	811.604
Caso 4	553.421	6.139	3.429	562.989	808.153

Tabella 6.6: Confronto per le durate e i consumi dei diversi casi

Si può notare come il rispetto dei vincoli vada a peggiorare il consumo rispetto al caso di angolo di assetto e velocità angolare finali liberi. Si può vedere anche che l'arco singolare dura sempre meno, sia in termini assoluti che relativamente alla durata totale.

A seguire, il confronto tra le traiettorie dei casi diversi:

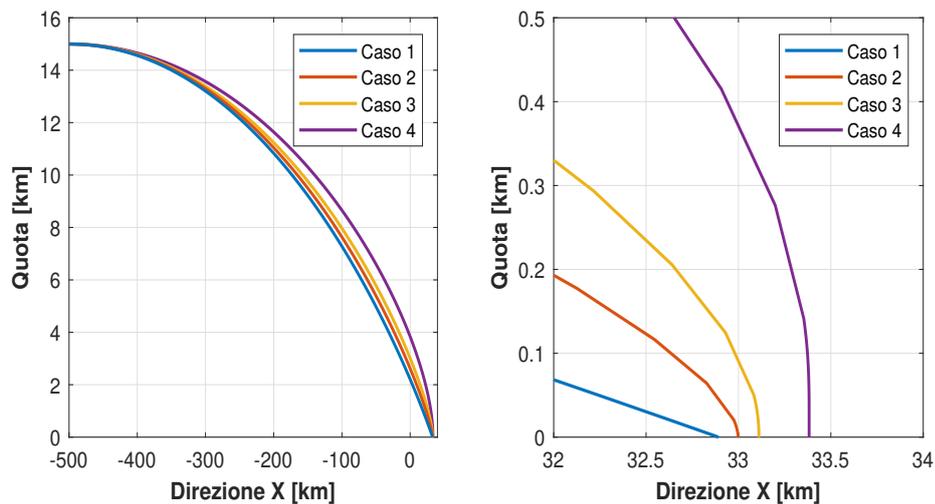


Figura 6.27: Confronto tra le traiettorie nel caso di R_{xf} libero

Quello che si può notare in figura 6.27 è come il rispetto dei vincoli vada, di volta in volta, ad allungare la traiettoria: la durata è maggiore perchè il satellite deve avere più tempo per compiere correttamente la rotazione e la discesa verticale (nel caso 4) quindi, a parità di condizioni iniziali di posizione e velocità, viene anche intuitivo che la traiettoria risulti più lunga nella direzione della velocità iniziale. Durando la discesa più tempo, la quantità di propellente consumato sarà maggiore. Tuttavia, osservando la tabella 6.6 confrontando il caso 1 e il caso 4 si vede che il propellente consumato per la rotazione e la discesa differisce nei due casi di poco meno di 6 kg, ovvero lo 0,004 % circa dei 1600 kg iniziali. Riguardo le componenti X e Z e il modulo della velocità (fig. 6.28) non sono apprezzabili differenze tra i casi su una scala del km/s: nei diversi casi, prima che avvenga la rotazione il valore dell'angolo θ (fig. 6.31) assume dei valori tutto sommato simili tra loro; è poi l'applicazione dei diversi vincoli che determina l'andamento dello stesso angolo e quindi delle velocità.

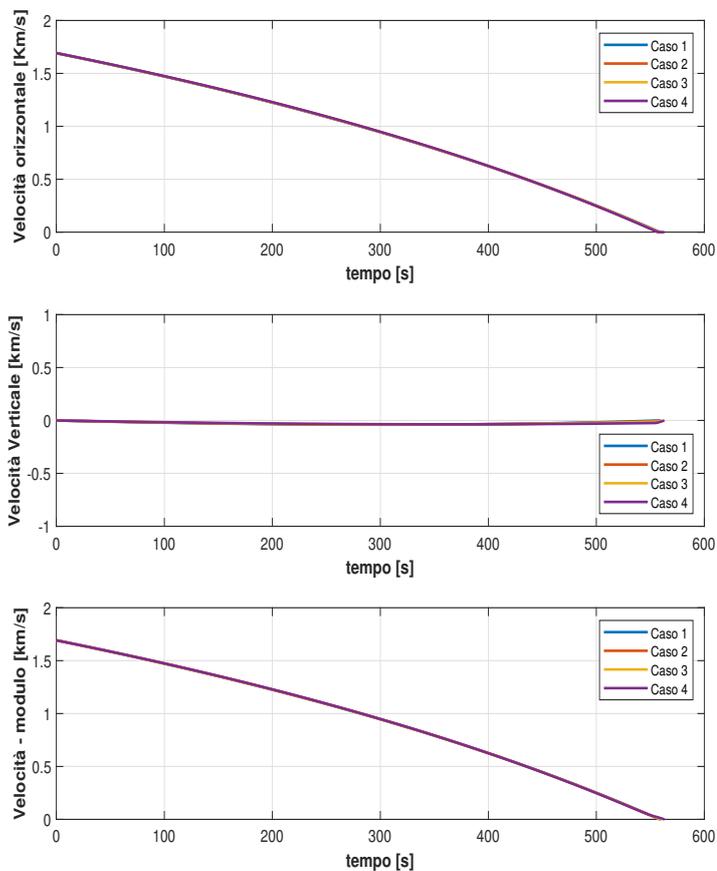


Figura 6.28: Confronto tra gli andamenti delle velocità nel caso di R_{xf} libero

Se infatti si visualizza l'andamento delle velocità nell'intervallo in cui avviene la rotazione (fig 6.29), le differenze tra i diversi casi sono più evidenti:

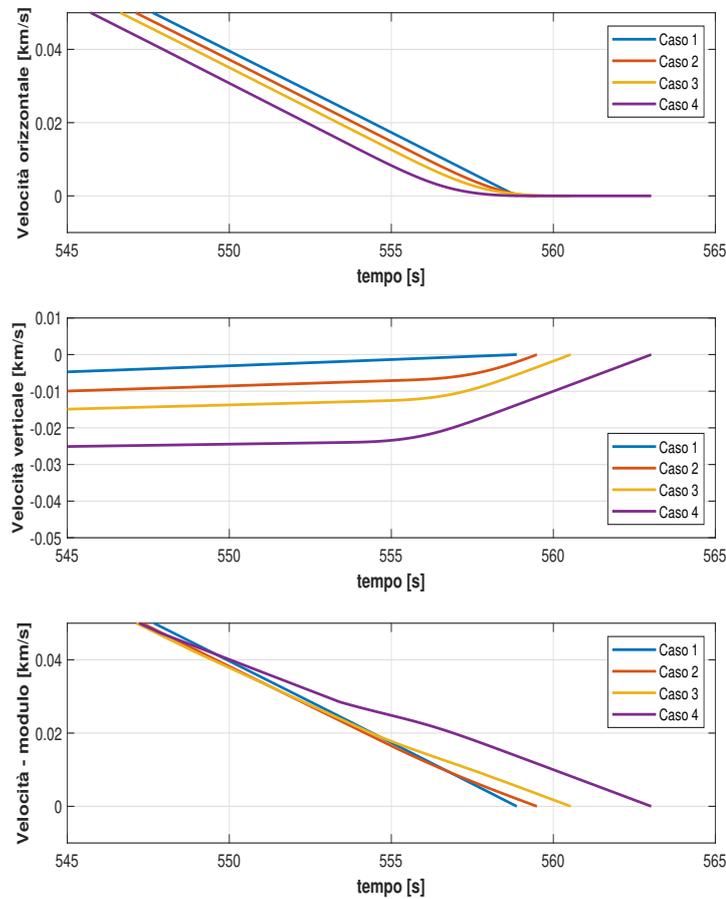


Figura 6.29: Confronto tra gli andamenti delle velocità nel caso di R_{xf} libero lungo l'ultimo tratto

Rispettando tutti i vincoli (curva *caso 4*), la V_x diventa nulla gradualmente in quanto diminuisce la componente x della spinta e, analogamente per la V_z , la curva cambia pendenza e diminuisce in modulo, in quanto aumenta la componente della spinta opposta alla velocità di caduta a causa della rotazione. Guardando infine il modulo della velocità, si può vedere come, per un generico istante t questo aumenti andando ad inserire i vincoli. A causa della rotazione, la frenata è più lenta (è osservabile un leggero cambio di pendenza in corrispondenza della rotazione) e questo conferma il fatto che la traiettoria sia progressivamente più lunga.

Visualizzando la V_z su un'altra scala, si può osservare che, essendo la quota pari

all'integrale nel tempo della V_z e sempre pari a 15 km, si può verificare come l'area sottesa dalle diverse curve non cambi. Il satellite, per coprire sempre 15 km, nel caso 4 subisce una minore accelerazione verticale durante la discesa perchè nel caso 4, a seguito della rotazione, aumenta rapidamente la componente verticale della spinta che esercita la frenata.

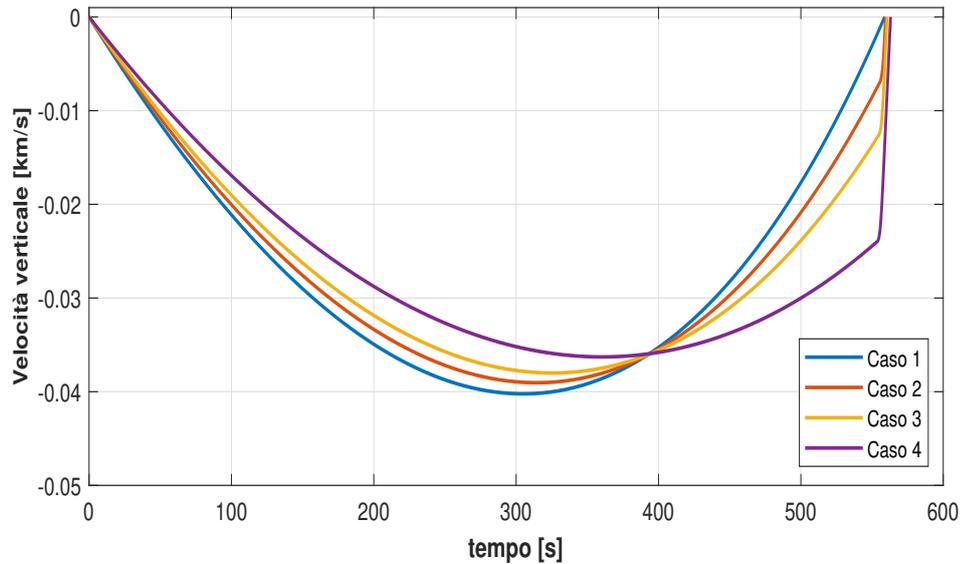


Figura 6.30: Confronto tra gli andamenti delle velocità verticali caso di R_{x_f} libero

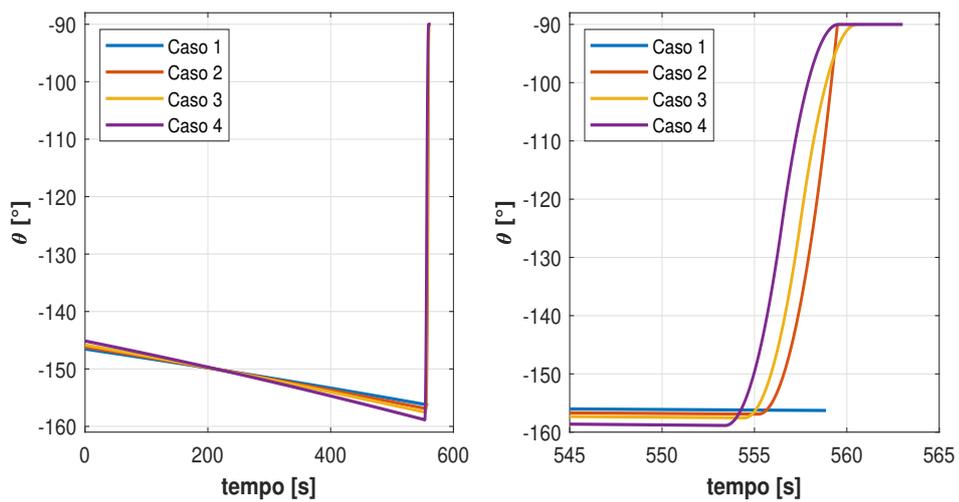


Figura 6.31: Confronto tra gli andamenti di θ nel caso di R_{x_f} libero

Per completezza, si riporta il confronto tra gli andamenti delle velocità angolari nei diversi casi:

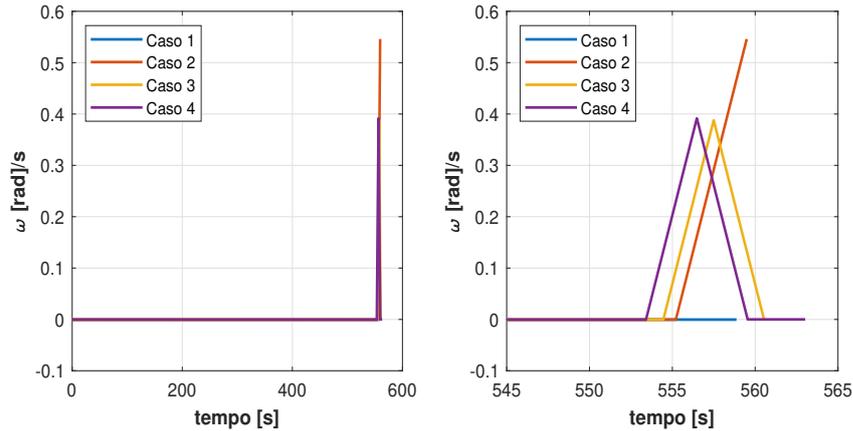


Figura 6.32: Confronto tra le velocità angolari nei diversi casi

Infine, si riportano in figura 6.33 le traiettorie per tutti i casi con un'attenzione ai punti iniziali e finali della traiettoria in cui anche il vincolo rimanente, $R_{xf} = 0$, è stato imposto. Facendo riferimento alle tabelle 6.2, 6.3, 6.4, 6.5, la condizione implicita $\lambda_{R_{xf}} = 0$ viene sostituita da $R_{xf} = 0$.

Come già anticipato all'inizio di questo capitolo, le traiettorie con $R_{xf} = 0$ sono uguali a quelle ottenute in precedenza ma traslate della quantità R_{xf}' calcolata nel caso di $\lambda_{R_{xf}} = 0$. Questo fa anche sì che per il caso $R_{xf} = 0$ gli andamenti e le considerazioni fatte per tutte le altre grandezze non cambino rispetto al caso precedente: che il satellite parta da -529 km e arrivi a 0 km, o che parta da -500 km e arrivi a +29 km in direzione x non cambia l'evoluzione delle velocità, dell'angolo e della velocità angolare di beccheggio, ma soprattutto non cambiano i tempi di discesa, quindi il consumo di propellente, che saranno ancora quelli indicati nella tabella 6.6.

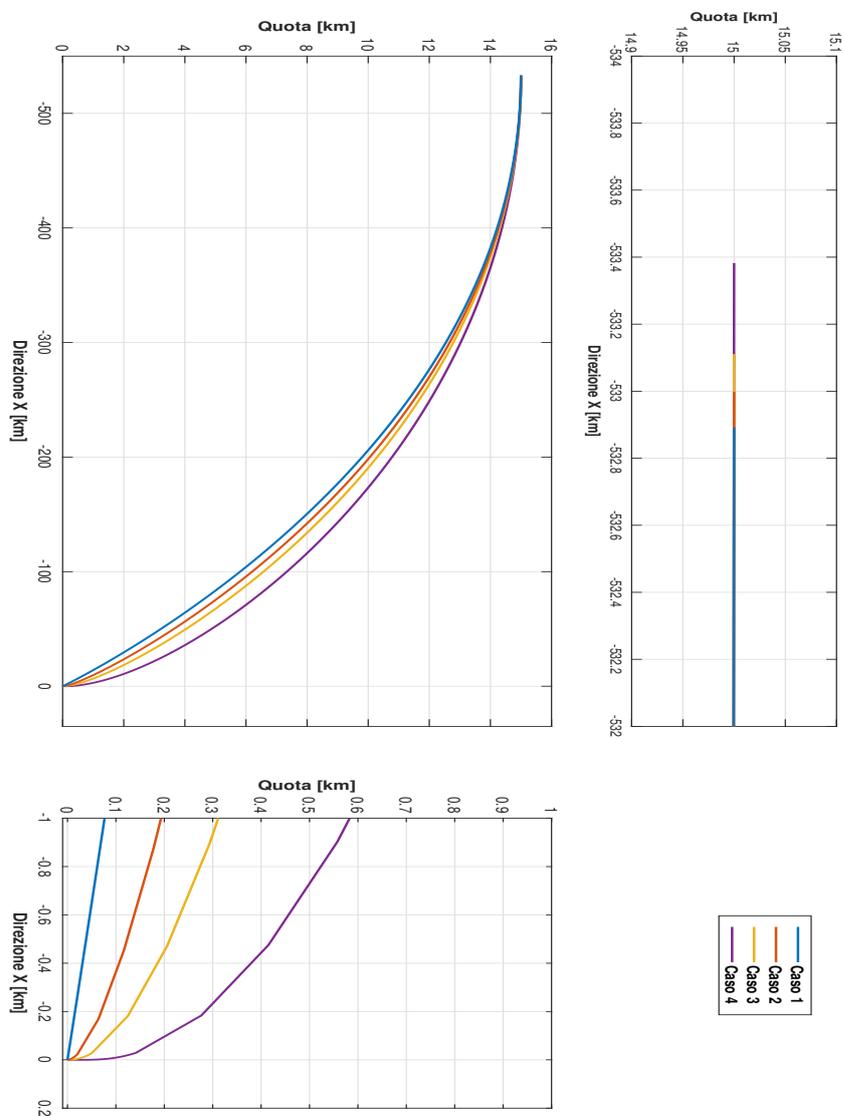


Figura 6.33: Confronto tra le traiettorie nel caso di $R_{xf} = 0$

6.6 Considerazioni sui controlli

Si riportano gli andamenti di spinta (figura 6.34) e coppia (figura 6.35) che sono i controlli per il problema in esame.

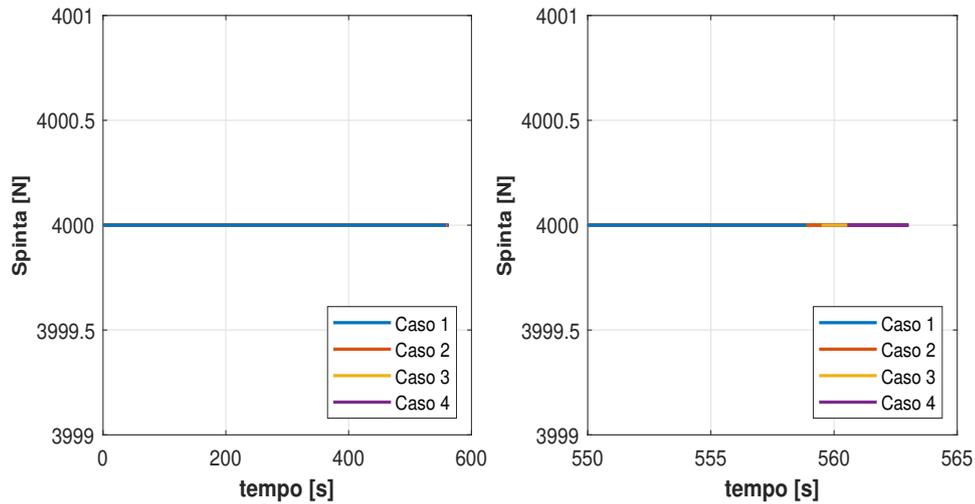


Figura 6.34: Confronto tra i livelli di spinta nei diversi casi

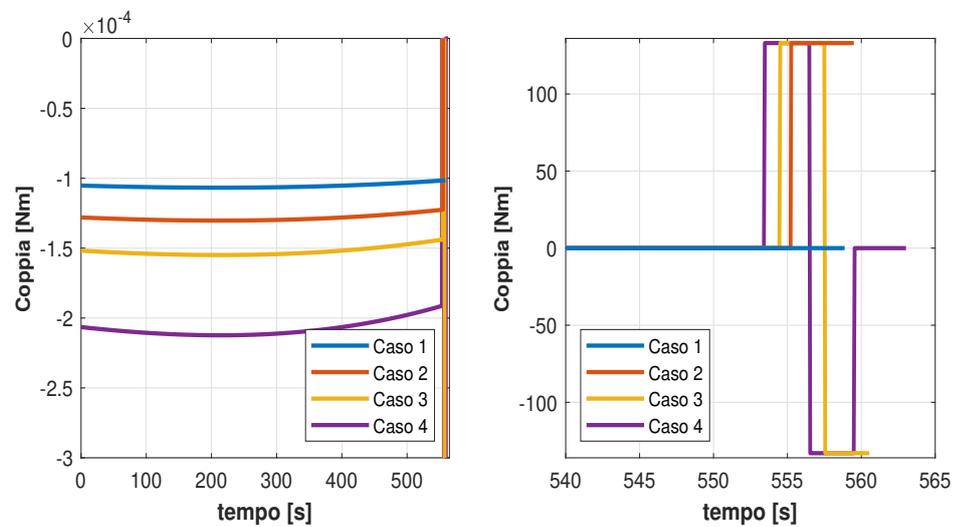


Figura 6.35: Confronto tra le coppie nei diversi casi

Per la teoria del controllo ottimale, essendo l'Hamiltoniano lineare rispetto alla spinta tramite il coefficiente SF_1 , la spinta può assumere i valori o 4000 N o 0 N : dalla figura 6.34 si può vedere come il propulsore rimanga sempre acceso, quindi

la corrispondente SF_1 si può dedurre essere sempre positiva. Guardando invece l'andamento della coppia, si può vedere come questa abbia dei valori dell'ordine di 10^{-4} lungo l'arco singolare (in cui quindi SF_2 è nulla), mentre nell'attuazione della rotazione per i vari casi assume i 133.01 Nm calcolati nel capitolo 3. Però, per come sono stati definiti, i propulsori per il controllo d'assetto non riuscirebbero a fornire una coppia dell'ordine di 10^{-4} ; è più probabile che in una situazione più realistica questo valore di coppia venga fornito da *Reaction Wheels* o da *Momentum Wheels*, dei rotori che, sotto l'azione di un motore elettrico, cambiano il loro numero di giri attuando delle coppie interne al satellite. Essendo elettrici, l'assunzione per cui la coppia non influisce sul consumo di propellente sarebbe esatta. La coppia quindi non agisce direttamente sul consumo di propellente, ma sulla direzione della spinta che agisce, questa volta direttamente, sul propellente consumato. Inoltre, la spinta è sempre di 4000 N quindi, piuttosto che parlare di spinta ottimale e di coppia ottimale, ha più senso parlare di direzione ottimale di un dato vettore spinta \mathbf{T} il cui modulo è fisso, determinata da un dato valore della coppia in ogni istante della discesa, al fine di minimizzare il propellente consumato nel rispetto dei vincoli di assetto, velocità angolare oltre che di posizione e velocità.

Capitolo 7

Conclusioni

Lo scopo di questa tesi è stato quello di ottimizzare una discesa sulla Luna per un lander a tre gradi di libertà, due traslazionali e uno rotazionale. Si può notare come l'imposizione progressiva dei vari vincoli vada a peggiorare il consumo di propellente. Tuttavia, si può anche constatare che questo peggioramento è, in fin dei conti, di poca rilevanza (si faccia riferimento ancora una volta alla tabella 6.6): eseguire un allunaggio rispettando i vincoli di assetto e velocità angolare peggiora il consumo di propellente dello 0.004% rispetto al caso in cui sono imposti i soli vincoli di posizione e velocità. Si è visto che la coppia influisce sul consumo di propellente attraverso la determinazione della direzione della spinta, lungo tutta la discesa, prima di assumere il valore imposto per eseguire la rotazione e raggiungere lo stato finale.

Sebbene il modello introdotto si basa su alcune assunzioni che semplificano il problema, i risultati ottenuti sono indicativi del reale consumo di propellente per un lander lunare e ciò lo rende un ottimo punto di inizio per futuri studi, dal momento che il metodo implementato si può applicare a problemi di ottimizzazione più complessi. Si potrebbe pensare, ad esempio, di implementare una dinamica rotazionale attorno a tutti e tre gli assi corpo del satellite: questo significherebbe utilizzare i quaternioni unitari per il controllo d'assetto, dal momento che, se si volesse adottare la stessa definizione dei sistemi di riferimento di questa tesi, la posizione finale comporterebbe la presenza di una singolarità se si volessero usare le rotazioni di Eulero per $\theta_f = -\pi/2$ [10]. Si potrebbe decidere di rendere la

spinta stessa una variabile di stato, cioè definire una legge di spinta che possa essere, ad esempio, polinomiale rispetto al tempo e, in questo caso, i controlli ottimali diverrebbero i coefficienti del polinomio. In riferimento al caso in cui è presente anche la discesa verticale, si può parametrizzare il valore minimo della quota diverso da zero che ottimizzerebbe l'intera manovra, piuttosto che imporre 20 metri, sebbene questo sia un valore piuttosto realistico. Si può pensare di imporre dei vincoli sul valore massimo di decelerazione del satellite e/o di accelerazioni angolari che subisce per azione delle coppie impulsive, vincoli che potrebbero essere richiesti ad esempio da una particolare strumentazione a bordo del satellite, oppure dalla presenza di un equipaggio il cui benessere deve essere garantito in ogni fase della missione. In conclusione, le migliorie che si potrebbero apportare a questo lavoro di tesi sono diverse e di diverso tipo e i risultati trovati sono un ottimo punto di inizio per lo studio di una nuova traiettoria.

Bibliografia

- [1] NASA - Office of Manned Space Flight. *Mission Operations Report - Apollo 11 Mission (Report N. M-932-69-11)*. 1969 (cit. a p. 9).
- [2] Allan R. Klumpp. *APOLLO - Guidance, Navigation and Control*. Massachusetts Institute of Tecnology, 1971 (cit. alle pp. 10, 58).
- [3] *NASA Space Science Data Coordinated Archive - Apollo 11 Lunar Module*. URL: <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/nmc/spacecraft/display.action?id=1969-059C> (cit. a p. 11).
- [4] «Apollo Operations Handbook - Lunar Module -LM 10 and Subsequent». In: 1 (1971) (cit. alle pp. 11, 17).
- [5] D.E. Kirk, D.N. Kirk e D.L. Kreider. *Optimal Control Theory: An Introduction*. Prentice-Hall, 1970 (cit. alle pp. 21, 25).
- [6] Powers W.F. MdDanell J. P. «Necessary Conditions for Joining Optimal Singular and Nonsingular Subarcs». In: *SIAM Journal of Control* () (cit. a p. 26).
- [7] M.G. Gasparo, M. Macconi e A Pasquali. *Risoluzione numerica di problemi ai limiti per equazioni differenziali ordinarie mediante problemi ai valori iniziali*. Università di Firenze, 1979 (cit. a p. 31).
- [8] D.F. Shampine e M.K. Gordon. *Computer Solution of Ordinary Differential Equation: the Initial Value Problem*. San Francisco: W.H. Freeman (cit. a p. 31).
- [9] D. F. Lawden. *Optimal Trajectories For Space Navigation*. London: Cambridge University Press, 1963 (cit. a p. 36).

- [10] G Avanzini. *Spacecraft Attitude Dynamics and Control - Dispense del Corso di Dinamica e Controllo di Assetto di Satelliti*. Politecnico di Torino - Dipartimento di Ingegneria Aeronautica e Spaziale, 2008 - 2009 (cit. a p. 71).

