Politecnico di Torino

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale
A.a. 2021/2022
Sessione di Laurea Aprile 2022

Ottimizzazione traiettoria Terra-Marte con propulsione a impulso specifico variabile (VASIMR®) ai fini della futura esplorazione umana

Tesi di Laurea Magistrale

Relatore:
prof. Lorenzo Casalino

Candidato:
Donato Russo

“Marte attira l’immaginazione umana come nessun altro pianeta. Con una forza più potente della gravità, attrae l’occhio con la sua scintillante presenza rossa nel limpido cielo notturno. È come una brace incandescente in un campo di luci eteree, che proietta energia e promesse.”

John Noble Wilford, New York Times

Sommario

Abstract/Introduzione

Sin dagli albori dell'esplorazione spaziale Marte ha sempre rappresentato qualcosa di estremamente promettente nell'ottica di una possibile futura colonizzazione umana, tanto che le idee e i concept di missione dietro questa ambizione sono innumerevoli. Tuttavia, raggiungere il pianeta rosso e successivamente sopravviverci, anche solo per qualche mese, porta con sé delle criticità enormi: assenza di gravità e radiazioni sono, sopra tutti gli altri, gli ostacoli principali da superare. L'elaborato va in questa direzione e mira all'ottimizzazione della traiettoria Terra – Marte al fine di ridurre il tempo di volo in spazio aperto e di massimizzare il carico utile da poter portare su Marte, per valutare la possibilità di stabilire dei primi insediamenti. Massimizzare il payload vuol dire altresì minimizzare la massa di propellente da portarsi dietro. È noto che con propulsione chimica si avrebbe bisogno di enormi quantità di propellente: prezzo da pagare per avere spinte alte e traiettorie veloci. Con propulsione elettrica invece, il prezzo da pagare per avere una quantità di propellente accettabile è un lungo tempo di volo e basse spinte. Volendo cercare una specie di compromesso, negli ultimi anni si è fatta strada l'idea della propulsione elettrica nucleare: aumentando la potenza disponibile allo S/C grazie ad una fonte di energia nucleare si riuscirebbe, almeno in linea teorica, a ridurre notevolmente i lunghi tempi tipici della propulsione elettrica (e quindi a salvaguardare il più possibile l'integrità dell'equipaggio) e ad avere un carico utile sufficiente per un primo insediamento sulla superficie marziana. VASIMR® si impone prepotentemente come un propulsore potenzialmente perfetto per impostare una missione con equipaggio umano alla volta di Marte. La variabilità dell'impulso specifico, e quindi la semplice regolazione delle prestazioni del propulsore, è la caratteristica chiave: si accetta di consumare di più per avere una grande spinta quando serve e, invece, si passa a un grande impulso specifico per entrare in modalità "risparmio" (fase eliocentrica).

Sfruttando la teoria del controllo ottimale, adattata a traiettorie spaziali, è stato utilizzato un codice in FORTRAN al fine di valutare la fattibilità di una possibile futura missione umana con VASIMR®.

Ringraziamenti

Desidero ringraziare in primis il mio relatore, il Professor Lorenzo Casalino, per la disponibilità, la pazienza, la dedizione e per tutte le conoscenze trasmessemi durante questo percorso di tesi e per l'interesse che ha suscitato in me, attraverso i suoi corsi, nell'arco di tutta la mia parentesi universitaria.

Ringrazio i miei genitori, per essere stati sempre presenti sotto tutti i punti di vista, per avermi sostenuto, per avermi spronato nei momenti difficili e per aver sempre creduto in me. Non sarò loro mai grato abbastanza.

Ringrazio mia sorella, mio fratello, mia nonna e tutta la mia famiglia, oltre che tutti i miei amici, per essere stati un supporto costante durante questi anni.

Acronimi e Abbreviazioni

BVP Boundary Value Problem

CONOPS Concept of Operations

DRA Design Reference Architecture

ICRH Ion Cyclotronic Resonant Heating

ISS International Space Station

MAWG Mars Architecture Working Group

ML Mars Lander

NEP Nuclear Electric Propulsion

OCT Optimal Control Theory

qdm quantità di moto

RF Radiofrequency

S/C Spacecraft

SEP Solar Electric Propulsion

SH/SS Super Heavy/Starship

SLS Space Launch System

SOI Sphere Of Influence

Indice delle figure

Indice delle tabelle

Capitolo 1
Alla conquista del pianeta rosso ♂

1.1 Perché Marte?

Citando solo alcune delle più recenti missioni con obiettivo Marte, come Curiosity o Perseverance (primo step del programma Mars Sample Return), e valutandone tutti gli aspetti, ci si rende conto di quanti miliardi di dollari si spendano per l'esplorazione di Marte. Dietro l'esplorazione spaziale ci sono sicuramente motivi pratici ed economici ma anche una ragione che è il vero motore di tutto: soddisfare il desiderio di conoscenza che caratterizza il genere umano da sempre.

Quanto a obiettivi scientifici, andiamo su Marte per comprenderne la geologia, l'evoluzione e per cercare tracce di vita, anche non propriamente basata sugli elementi che caratterizzano la vita sulla Terra. Marte è il posto ideale per far ciò, è il pianeta del sistema solare più simile al nostro ed è soprattutto ad una distanza tale da poter essere raggiunto abbastanza facilmente con la nostra tecnologia attuale. Anche se, come si analizzerà meglio nel prossimo paragrafo, quest'affermazione è tutt'altro che veritiera quando si parla di missioni con equipaggio.

Ci sono molte interessanti somiglianze con la Terra, ad esempio il ritmo giorno/notte è molto simile al nostro, il giorno marziano è di 24 ore, 39 minuti e 35 secondi e anche l'inclinazione degli assi di rotazione è più o meno simile. La gravità è più debole di quella terrestre di circa 2,6 volte ma questo valore potrebbe essere sufficiente affinché il corpo umano riesca comunque ad adattarsi. E poi c'è abbastanza luce, ad esempio per utilizzare pannelli solari; per non parlare dell'acqua idealmente disponibile.

Tutto ciò però non fa di Marte un pianeta "amichevole": l'atmosfera marziana, oltre ad essere completamente irrespirabile (perché composta quasi interamente da CO2), è molto più sottile di quella terrestre e, pertanto, se anche avesse la stessa composizione di quella terrestre, ci sarebbero comunque troppe poche molecole per permetterci di respirare. Un pianeta con un'atmosfera così ridotta (a causa del campo magnetico troppo debole) diventa un problema per gli umani, in quanto

non riesce a trattenere il calore e le temperature tendono ad essere piuttosto basse (tra 20°C e -150°C). Per non parlare dell'assenza di campo magnetico che porta sicuramente un livello di radiazioni insostenibile alla lunga.
Nonostante ciò, Marte resta l'obiettivo principe dell'esplorazione spaziale del futuro prossimo e, forse, anche una possibilità di salvezza per il genere umano.

1.2 Missioni umane: rischi e problematiche

La NASA punta a mandare i primi astronauti sul pianeta rosso o su una delle sue lune (Deimos e Phobos) entro il 2030. Elon Musk con la sua Space X sta progettando non solo di andare su Marte in 5 mesi (il presente lavoro va in questa direzione) anziché i canonici 7-9 mesi, ma anche di garantire un insediamento di 1.000.000 di persone entro la fine del secolo. Come si vedrà nel paragrafo 1.3 esistono anche tantissime proposte di architettura di missione possibili. Tuttavia, bisogna analizzare il perché non si è ancora riusciti a compiere una tale impresa e quali sono i principali ostacoli.

1.2.1 Gravità e radiazioni

Ovviamente la gravità manca durante il viaggio e su Marte è piccola. Si potrebbe pensare di crearla artificialmente ma un sistema a centrifuga sarebbe ingegneristicamente complicato. Se, invece, si ignorasse completamente questo problema e si lasciassero gli astronauti a gravità zero durante tutto il viaggio, ci sarebbero ovviamente ripercussioni sul piano fisico; ed è un grosso problema, soprattutto perché gli astronauti una volta su Marte dovrebbero svolgere delle attività. Secondo studi fisiologici recenti, la carenza di gravità può avere un impatto negativo sulle abilità cognitive e di comprensione delle emozioni degli astronauti. Senza contare i problemi alle ossa, ai muscoli, al sistema nervoso e alla vista.
Il secondo grosso problema è rappresentato dalle radiazioni (sia radiazione solare che raggi cosmici). Gli astronauti sarebbero esposti ad esse sia su Marte ma soprattutto nel viaggio. La ISS è ancora parzialmente protetta e schermata dal campo magnetico terrestre, il livello di radiazione è tutto sommato contenuto anche per lunghe permanenze. Per la luna i tempi di viaggio sono estremamente

brevi, quindi, il rischio di stare in spazio aperto è calcolato. Per una missione lunga la cosa sarebbe completamente diversa. Si può schermare gli astronauti ma schermare le radiazioni più penetranti non è facilissimo e comunque comporta costi e massa aggiuntiva. Per di più, le radiazioni minacciano anche, soprattutto, le apparecchiature elettroniche; oltre ad alterare cibi e farmaci.

Le conseguenze biologiche sarebbero significative: danni cardiovascolari, compromissione neuro-cognitiva, carcinogenesi. Secondo uno studio del 2020 [12], può essere utile mantenere un forte ritmo circadiano durante il volo spaziale. Questo non solo migliorerebbe gli effetti fisiologici legati a un ciclo sonno-veglia normalizzato, ma avrebbe anche un potenziale effetto radioprotettivo. Ciò può essere ottenibile durante uno stato di torpore per gli astronauti in missioni nello spazio profondo. L'evidenza suggerisce che gli animali, quando si ibernano, dimostrano una relativa radioprotezione rispetto al loro stato di veglia. Oltre a questo, lo stato di torpore ridurrebbe la quantità di approvvigionamenti necessari e quindi diminuirebbe il peso e il carburante richiesto per le missioni su Marte. Ovviamente, sistemi di propulsione più avanzati potrebbero limitare il tempo di transito e la conseguente esposizione alle radiazioni. Per un viaggio di 258 giorni con propulsione chimica si stima una dose di radiazione ricevuta pari a 165,9 mSv; per un viaggio ideale di 80 giorni con propulsione elettrica si stima una dose di radiazione ricevuta pari a 51,4 mSv.

Il VASIMR® si propone come candidato ideale per raggiungere questo obiettivo.

Una volta su Marte, i problemi non sarebbero finiti: la quasi totale assenza di campo magnetico ci lascerebbe completamente esposti alle radiazioni anche sulla superficie del pianeta rosso e questo è ovviamente un grosso problema per la nostra salute. Le tute spaziali, in questo senso, sono studiate per tutelare l'umano al meglio, anche per l'isolamento termico e la respirazione ovviamente.

Anche eventuali strutture abitative potrebbero essere attrezzate per resistere ai raggi cosmici, ad esempio sfruttando l'acqua. Alcune radiazioni, infatti, possono essere fermate dall'acqua (che è necessaria, comunque, per la sopravvivenza dell'equipaggio) e dal polietilene. La soluzione potrebbe essere quella di mettere acqua in speciali sacche di polietilene e di inserire queste ultime nelle pareti delle unità abitative. Nel caso di radiazioni più intense sono in fase di studio materiali innovativi capaci di respingerle e salvaguardare la salute degli astronauti: un esempio sono i nanotubi in nitruro di boro, difficilissimi però da produrre.

1.2.2 Altre “piccole” questioni

Sicuramente il fattore psicologico è molto importante, stare con pochi compagni per mesi o anni così lontano dalla Terra richiede una preparazione mentale eccellente. Le comunicazioni, peraltro, sono in ritardo di qualche minuto con la Terra e in alcune fasi addirittura impossibili. C’è poi un discorso legato al costo: con tutti i problemi da risolvere, stimare un costo è veramente proibitivo. Qualsiasi missione di questo tipo avrebbe bisogno di più governi che cooperino fra loro. Quindi, dietro al costo il vero problema è l’organizzazione.

1.3 Come arrivare su Marte? - Programmi attuali e futuri

1.3.1 DRA 5.0

Prendendo atto della necessità di un'architettura di riferimento aggiornata e unificata per l'esplorazione umana di Marte, nel gennaio 2007 il quartier generale della NASA ha incaricato il Mars Architecture Working Group (MAWG) di mettere a punto la Mars Design Reference Architecture 5.0 (DRA 5.0). Essa descrive i sistemi e le operazioni che verrebbero utilizzati per le prime tre missioni per esplorare la superficie di Marte da parte di esseri umani. Un equipaggio di sei persone verrebbe inviato in ciascuna di queste missioni, e ogni equipaggio visiterebbe un luogo diverso su Marte. La scelta di un equipaggio di queste dimensioni è stata ritenuta un compromesso ragionevole tra il mix di competenze e il livello di sforzo per missioni di questa complessità e durata, in equilibrio con la grandezza dei sistemi e delle infrastrutture necessarie per sostenere tale equipaggio.
Esistono due possibili visioni per il viaggio di andata e ritorno verso Marte, che dipendono dall’allineamento tra Marte, Terra e Sole. In entrambi i casi, il viaggio di andata ha la stessa durata, le differenze stanno nella permanenza su Marte e nel viaggio di ritorno. Si fa una distinzione tra Opposition Class (Short-Stay Mission)

e Conjunction Class (Long-Stay Mission). Di seguito un possibile esempio immaginato nella DRA 5.0 relativo a queste due possibilità:

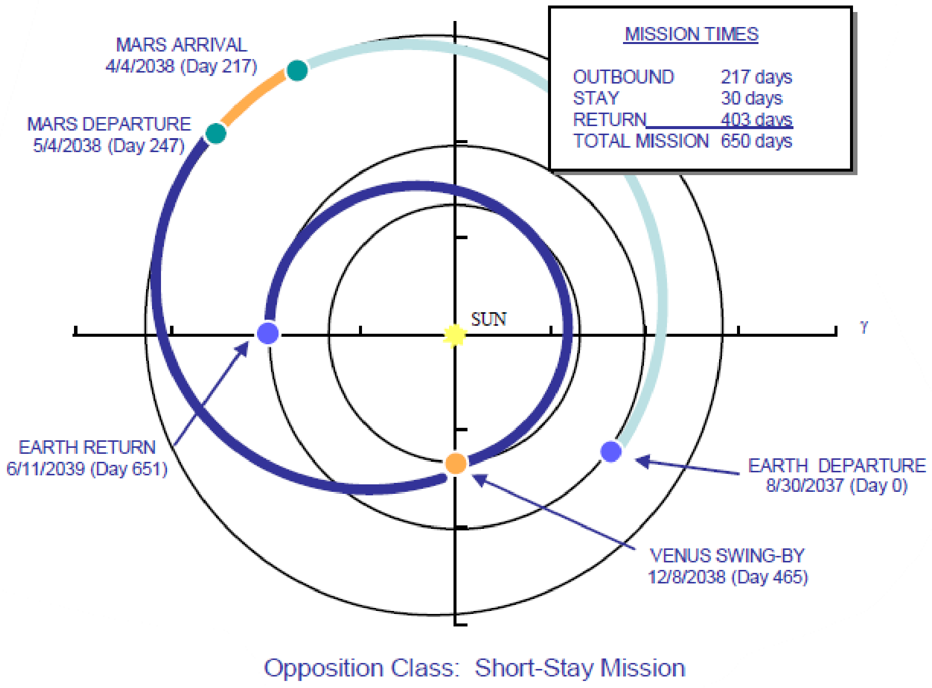

Figura 1 Short-Stay

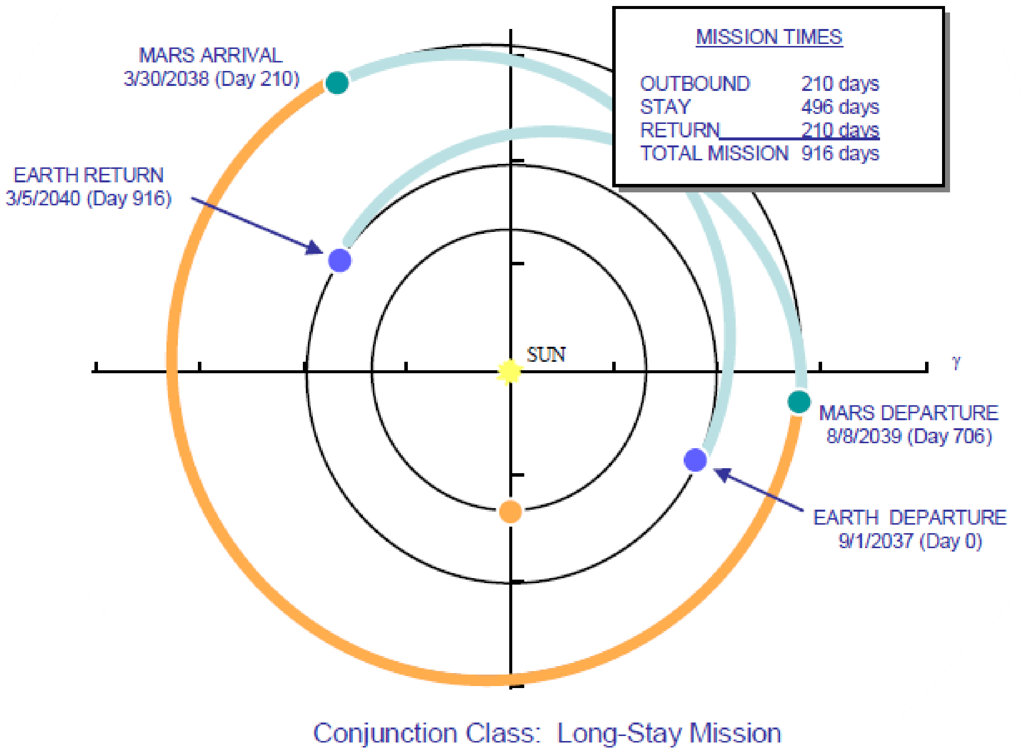

Figura 2 Long-Stay

Per il primo caso si ha una permanenza su Marte di soli 30 giorni e un viaggio di ritorno di circa 400 giorni con fionda gravitazionale attorno a Venere. Nel secondo, la permanenza è di circa 500 giorni e il ritorno ha la stessa durata del viaggio di andata, circa 7 mesi. Le missioni a breve permanenza sembrerebbero essere più interessanti perché si esauriscono in soli 650 giorni ma, in realtà, si passa la maggior parte del tempo in viaggio nello spazio e solo pochi giorni su Marte. Nelle missioni a lunga permanenza si passa invece più tempo su Marte e il prezzo da pagare è la maggiore durata complessiva. La maggior parte degli esperti propende per le missioni a lunga permanenza. In generale, è opportuno minimizzare il tempo di trasferimento perché stare nello spazio è scomodo, faticoso e pericoloso; tuttavia, come si è visto, esistono altri problemi legati alla lunga permanenza sulla superficie marziana.

Ciascuna delle tre missioni del DRA 5.0, alla fine, utilizzerebbe l'opzione di lunga permanenza. Una parte delle risorse di ogni missione verrebbe inviata su Marte prima dell'equipaggio (pre-deploy o split mission). Si potrebbe utilizzare una traiettoria a bassa energia e con tempi più lunghi in modo da aumentare il carico utile. In più c'è tutto un discorso relativo alla possibilità di produrre propellente in-situ in modo da non portarsi dietro altra massa per il viaggio di ritorno. E allora, considerando anche quanto payload servirebbe per stabilire un primo insediamento umano, sono necessari numerosi lanci cargo per Marte prima dello sbarco umano. Magari anche con l'avanzamento della robotica si potrebbe pensare di creare un'infrastruttura basica che renda lo sbarco umano e il successivo insediamento molto meno problematico di quanto sarebbe altrimenti.
Poi, ovviamente, per quanto riguarda lo S/C con equipaggio umano si pensa nell'ottica di una traiettoria veloce, ad alta energia che appunto vada a ridurre al minimo il rischio di esposizione a radiazioni e all'assenza di gravità.

Nel contesto del DRA 5.0 si parla anche di propulsione elettrica nucleare. Con la NEP ci sarebbero notevoli vantaggi rispetto alla SEP ad esempio. L'utilizzo di un generatore nucleare al posto dei pannelli solari permetterebbe di generare spinta in modo continuo e la spinta non calerebbe all'aumentare della distanza dal Sole. Dagli studi concettuali della NASA si pensa di valutare un veicolo NEP da 2,5

MW e 5000 s di impulso specifico che richiede due lanci con SLS (Space Launch System) in orbita LEO: uno per l'habitat e il sistema di propulsione elettrica, e l'altro per il sistema di alimentazione del reattore. Poi esistono diversi CONOPS e architetture di missione, che tipicamente terminano, almeno più recentemente, con il rientro della capsula Orion.

1.3.2 Super Heavy/StarShip

Pensando al futuro prossimo, in termini di sistemi di lancio e missioni ambiziose, la Space X è al lavoro per l'impressionante progetto SH/SS.

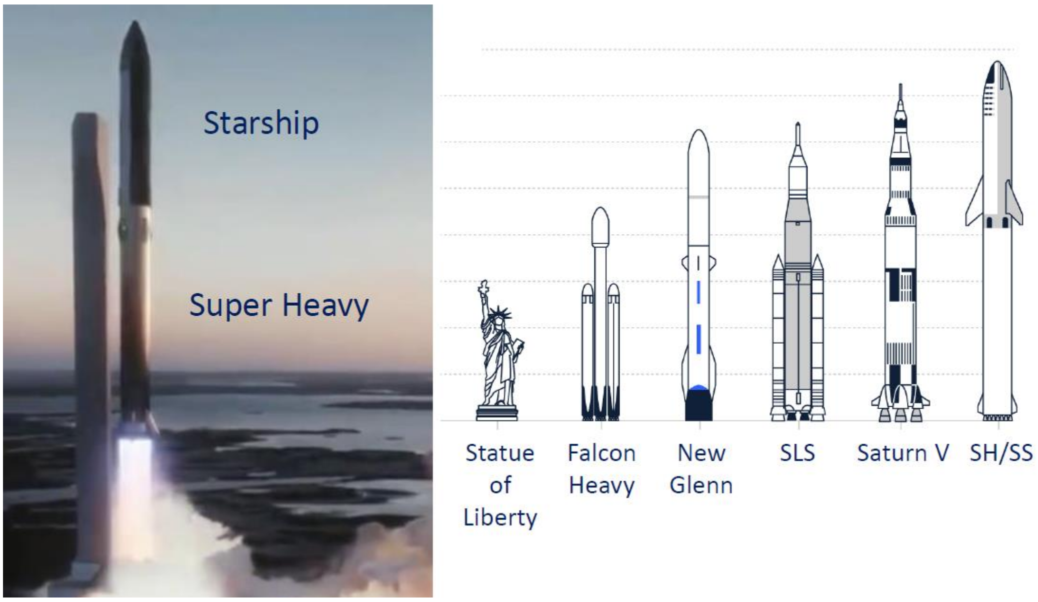

Figura 3 SH/SS

Sarà il vettore di lancio più alto e performante di sempre, più di SLS e Saturn V. Sarà inoltre il primo veicolo di lancio orbitale completamente riutilizzabile e quindi il costo per lancio sarà veramente molto basso.

La caratteristica che distingue il primo stadio, il SH, è sicuramente la presenza di 31-37 motori Raptor alla base del razzo e di una capacità di propellente di 3300 tonnellate. Il secondo stadio, la SS, ha delle alette per il controllo aerodinamico in atmosfera marziana o terrestre e 6 gambe per l'atterraggio che si aprono poco prima. Starship sarà realizzata in 3 versioni diverse: la prima usata per cargo, magari anche sulla superficie di Marte; la seconda per equipaggio e la terza per il rifornimento orbitale. Il rifornimento orbitale è una nuova tecnologia chiave che la Space X implementerà: una volta in orbita ellittica terrestre, lo S/C sarà rifornito da diversi veicoli "cisterna", tanker. Questo perché il rifornimento in orbita terrestre raddoppia o addirittura triplica la massa del carico utile che si può inviare sulla Luna o su Marte. La cosa più entusiasmante è che lo Starship è progettato in modo da poter rientrare sulla Terra, ma anche per atterrare sulla Luna, su Marte e su altri oggetti del nostro sistema solare.

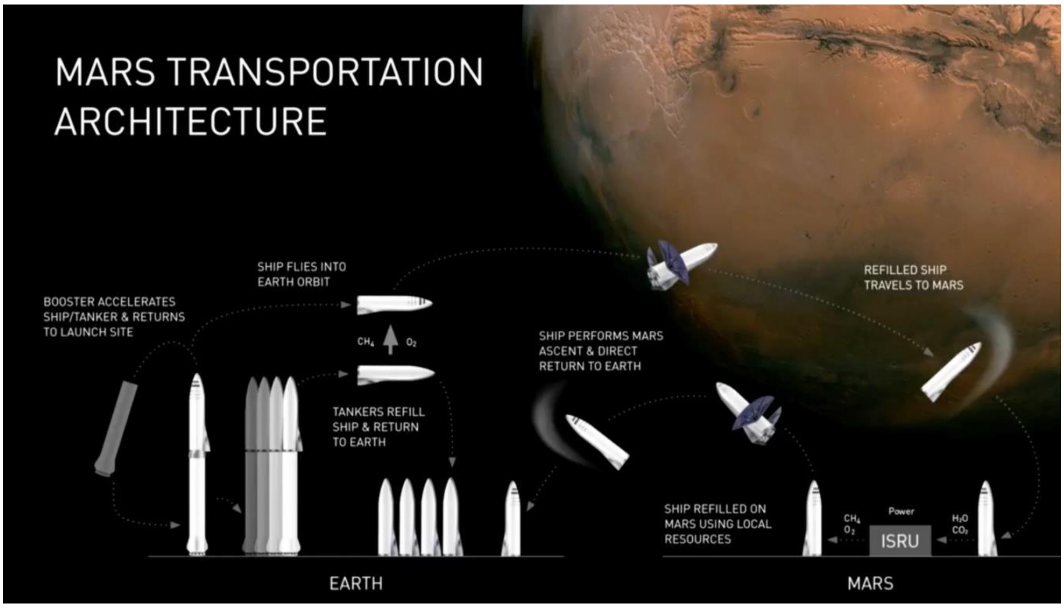

Figura 4 SH/SS Mars mission

Quindi si parla di refueling in LEO e una volta su Marte la SS dovrebbe essere rifornita con propellenti prodotti con le risorse in-situ. Una volta rifornita su Marte, la SS rientrerebbe sulla Terra, atterrando sulle 6 gambe, e sarebbe riutilizzabile per altre missioni su Marte.

C'è ottimismo su questo progetto perché i test negli ultimi anni sono stati molto frequenti e la Space X ha fatto intendere, sin dai suoi albori, di fare davvero sul serio.

Capitolo 2
Elementi di propulsione spaziale

2.1 Introduzione alla propulsione spaziale

Si può definire la propulsione come la spinta prodotta per muovere un sistema in una determinata direzione; viene cioè prodotta un'accelerazione che agisce sulla velocità iniziale v_0. In sostanza serve a "cambiare" il moto in senso generale. Esistono varie classificazioni possibili. Innanzitutto, si può distinguere la propulsione chimica da quella elettrica. Si parlerà più diffusamente di questo nel paragrafo 2.2 ma in generale la prima è di tipo aero-spaziale, ovvero può essere utilizzata sia in atmosfera che fuori, mentre la seconda è impiegata esclusivamente nello spazio, una volta sfuggiti dal campo gravitazionale terrestre. In termini di modifica dell'orbita invece si può fare una distinzione tra propulsione primaria e propulsione ausiliaria: la primaria è quella che permette di modificare i parametri orbitali, cioè una forza produce una velocità in grado di variare l'orbita percorsa; l'ausiliaria è quella che invece viene utilizzata per contrastare altre forze (resistenza aerodinamica, forza gravitazionale di un terzo corpo) o perturbazioni che tendono a cambiare l'orbita su cui invece si vuole mantenere lo S/C.

2.1.1 Grandezze di riferimento

La spinta è prodotta in base al principio di azione e reazione, scambio di quantità di moto con un corpo esterno che esercita, quindi, una forza. Dal momento che lo spazio è vuoto, è necessario portarsi dietro il mezzo con cui scambiare qdm. L'obiettivo diventa quindi la riduzione del propellente da portarsi dietro dalla Terra per avere ovviamente meno peso e meno costi.

Per determinare una relazione tra la massa di propellente consumato e la spinta si considera un sistema isolato (sistema S/C + propellente completamente isolato, l'unica forza scambiata è quella fra S/C e propellente), per cui la qdm si conserva, e ci si limita al caso unidimensionale. Dalla conservazione di qdm tra due istanti t e dt si ha, a seguito del rilascio di una massa di propellente dm_p, con velocità assoluta $c - V$ (c è la velocità relativa al sistema con cui il propellente viene espulso):

$$mV = (m - dm_p)(V + dV) - dm_p(c - V) \tag{2.1}$$

Da questa relazione si arriva, con alcune semplificazioni e assunzioni a:

$$m\frac{dV}{dt} = \dot{m}_p c = T \tag{2.2}$$

Tale relazione è analoga alla legge di Newton ma in questo caso la massa è variabile nel tempo. c è la velocità efficace di scarico, ovvero la velocità con cui si è correlato il propellente rispetto al sistema dello S/C.
Quando il propellente esce dall'ugello è ancora influenzato dal sistema, sta ancora interagendo con esso, per la presenza delle forze di pressione a monte. Pertanto:

$$T = \dot{m}_p u_e + A_e(p_e - p_0) = (SF)_e \tag{2.3}$$

Però, nello spazio, $p_0 \approx 0$ e p_e è trascurabile rispetto al primo termine: per semplicità si può porre $c \approx u_e$, e usare c ci fa più comodo.
Si definiscono ora 3 importanti grandezze che caratterizzano la propulsione spaziale:

- *Potenza della spinta*

Generare spinta richiede della potenza. La potenza della spinta è l'energia cinetica che si dovrebbe fornire al propellente per accelerarlo a una certa velocità c. A seconda di dove si prende questa energia si definiscono i diversi tipi di propulsione.

$$P_T = \frac{1}{2}\dot{m}_p c^2 = \frac{Tc}{2} \tag{2.4}$$

- *Impulso totale*

Usare una certa spinta per un secondo o per un anno dà effetti diversi. Definiamo l'integrale della spinta nel tempo, l'effetto cumulativo della spinta nel tempo, come impulso totale:

$$I_t = \int_{t_0}^{t_f} T dt = T\Delta t \tag{2.5}$$

Se la spinta è costante, chiaramente. Dato un effetto (cioè un I_t), posso ottenerlo con T alte e Δt piccoli o viceversa. L'impulso totale però non tiene in considerazione gli effetti della variazione di massa

- *Impulso specifico*

$$I_{sp} = \frac{I_t}{m_p g_0} \tag{2.6}$$

È la grandezza più importante insieme alla spinta nell'ambito della propulsione spaziale. Il denominatore rappresenta il peso che il propellente consumato avrebbe sulla Terra, a livello del mare. Quindi l'impulso specifico si può considerare come il rapporto tra effetto (spinta effettiva ottenuta) e spesa (massa necessaria a ottenere tale spinta). È fondamentalmente una misura di quanto il propellente sia sfruttato efficacemente.
Se T e $\dot{m}_p$ sono costanti, si ottiene:

$$I_{sp} = \frac{T\Delta t}{\dot{m}_p \Delta t g_0} = \frac{c}{g_0} \quad [s] \tag{2.7}$$

Si può altresì dire che l'impulso specifico identifica il tempo per cui un'assegnata massa di propellente è in grado di fornire una spinta pari al suo peso al livello del mare:

$$m_p = \frac{I_t}{g_0 I_{sp}} = \frac{I_t}{c} \tag{2.8}$$

La quantità di propellente richiesta diminuisce al crescere dell'impulso specifico, quindi minor peso e minor costo della missione.

2.1.2 Rocket equation (Tsiolkovsky)

L'obiettivo di una manovra è cambiare la velocità dello S/C.

$$\Delta V = \int_{t_0}^{t_f} \frac{T}{m} dt \tag{2.9}$$

ΔV è la variazione di velocità ideale che il motore fornirebbe ipotizzando un'unica forza agente, la spinta, e parallela alla velocità. Dalla (2.9), effettuando un cambio di variabili e assumendo c costante, si ricava:

$$\Delta V = c \ln\left(\frac{m_0}{m_f}\right) \tag{2.10}$$

O, analogamente:

$$\frac{m_f}{m_0} = e^{-\frac{\Delta V}{c}} \tag{2.11}$$

La (2.10) e la (2.11) sono due forme dell'equazione fondamentale in ambito propulsivo per stimare il budget di massa di una missione, partendo dal presupposto che ogni missione è caratterizzata da un particolare ΔV, l'equazione di Tsiolkovsky. Tale equazione mette in relazione la massa che è possibile portare a destinazione data m_0, il ΔV voluto e l'impulso specifico (sottoforma di c).
In altre parole:

$$m_p = m_0 - m_f = m_0\left(1 - e^{-\frac{\Delta V}{c}}\right) \tag{2.12}$$

La (2.12) è analoga alla (2.8): più alto è c, più piccola è la massa di propellente; fissato nel primo caso il ΔV e nel secondo l'impulso totale.

Il punto è che, come accennato, ogni missione è caratterizzata da un ΔV e il sistema propulsivo deve essere in grado di soddisfare la richiesta. Pertanto, ΔV elevati richiedono c e quindi I_{sp} elevati; viceversa sarebbe impossibile compiere la missione, bisogna tipicamente avere gli stessi ordini di grandezza.

$\Delta V/c$	m_f/m_0
1	0.35
2	0.1
4	0.01

Figura 5 Rapporti tipici

La propulsione chimica, come si vedrà di seguito, ha valori di c piuttosto limitati e non è adatta per missioni ambiziose poiché la quantità di propellente richiesta comincerebbe a diventare enorme; con la propulsione elettrica c assume valori maggiori.

2.2 Differenze tra propulsione chimica ed elettrica

- PROPULSIONE CHIMICA

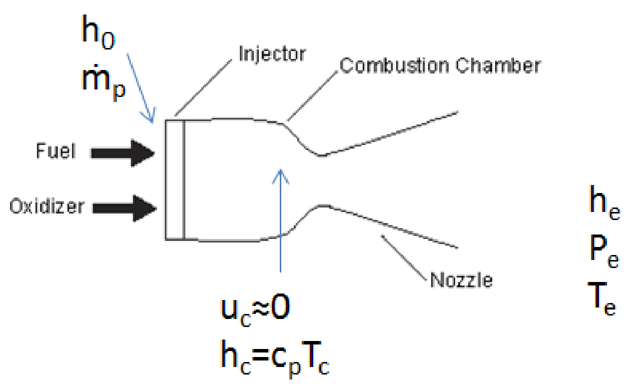

Figura 6 Propulsione chimica

$$c \cong u_e = \sqrt{2E_{ch}} = g_0 I_{sp} \tag{2.13}$$

$$T = \dot{m}_p \sqrt{2E_{ch}} \tag{2.14}$$

L’energia per accelerare il propellente viene da una combustione che avviene in seno al propellente stesso. Combustibile e ossidante bruciano, sviluppano energia, calore, usato per scaldare il propellente; poi questi gas caldi vengono espansi in un ugello. Essenzialmente conversione di energia chimica in termica e poi in cinetica. Il punto è che l’energia chimica liberata dai propellenti è fissa, una volta scelta la combinazione degli stessi e il rapporto di miscela. Di conseguenza si può ottenere un certo impulso specifico limitato dai propellenti stessi. Di per contro si ha una variabilità enorme in termini di spinta poiché sono propulsori facilmente scalabili (giocando sulla portata di propellente e sulle aree) e perché la spinta dipende essenzialmente da quanto velocemente si brucia il propellente.

- PROPULSIONE ELETTRICA

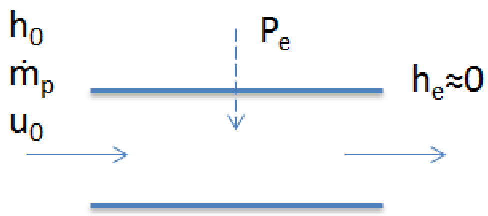

Figura 7 Propulsione elettrica

$$c \cong u_e = \sqrt{2\frac{\eta P_E}{\dot{m}_p}} = g_0 I_{sp} \tag{2.15}$$

$$T = \sqrt{2\eta \dot{m}_p P_E} \tag{2.16}$$

La principale differenza con la propulsione chimica è che qui la fonte di energia è separata dal propellente, non dipende da esso. Quindi, in teoria, il limite sull’impulso specifico qui non c’è. Ci sono però le variabili P_E ed $\dot{m}_p$, se si riuscisse a prendere una potenza sufficientemente grande e una portata sufficientemente piccola l’impulso specifico può diventare arbitrariamente grande. In realtà la P_E non può diventare arbitrariamente grande perché il generatore di potenza elettrica è a bordo dello S/C. Ad ogni modo si riescono ad ottenere valori

10-20 volte maggiori di impulso specifico rispetto ai propulsori chimici, che si pagano (sulla base della (2.4)) con spinte molto piccole.

Per quanto riguarda i generatori di potenza:

- Pannelli solari: forniscono direttamente potenza elettrica ($\alpha = 15\, kg/kW$);
- Energia da radioisotopi: richiede la conversione del calore in energia elettrica;
- Reattori a fissione nucleare: richiedono conversione dell'energia

La massa del generatore è considerata proporzionale alla potenza elettrica che lo stesso fornisce:

$$m_s = \alpha P_E = \frac{\alpha}{\eta}\frac{Tc}{2} \tag{2.17}$$

essendo α la massa specifica del generatore e:

$$\eta = \frac{P}{P_E} = \frac{Tc}{2P_E} \tag{2.18}$$

Per propulsione nucleare, con previsioni ottimistiche, si parla di $\alpha = 1\, kg/kW$.

Per riassumere le differenze:

System	Specific Impulse, s	Thrust, N
Liquid monopropellant (CP)	200-250	0.01-100
Liquid bipropellant (CP)	300-450	$0.01\text{-}10^7$
Solid propellant (CP)	200-300	$1\text{-}10^6$
Hybrid propellant (CP)	250-350	$1\text{-}10^6$
Resistojets (EP)	200-350	0.2-0.3
Arcjets (EP)	400-1000	0.2-1
Ion thrusters (EP)	2000-5000	<0.2
Hall thrusters (EP)	1500-2000	<2
Pulsed plasma thrusters (EP)	600-2000	<0.01
MPD thrusters (EP)	2000-5000	<2

Figura 8 Impulsi specifici e spinte tipiche per propulsori chimici ed elettrici

2.3 Tipi di propulsione elettrica

Esistono 3 grandi reami quando si parla di propulsione elettrica in senso generale. Propulsione elettrotermica, elettrostatica ed elettromagnetica. La distinzione spesso è veramente sottile poiché i meccanismi di accelerazione possono sovrapporsi. Di base o si scalda il propellente, o lo si accelera con una forza elettrostatica o lo si accelera con una forza elettromagnetica. La propulsione elettrotermica ha lo stesso meccanismo della propulsione chimica, una volta scaldati i gas vengono fatti espandere in ugello. È possibile anche fare una classificazione in base alle potenze in gioco e alle spinte disponibili distinguendo fra microthrusters, propulsori per station keeping, propulsori per grandi satelliti e propulsori per esplorazioni umane. In quest'ultima categoria rientra il propulsore oggetto di studio in questo lavoro.

2.3.1 Propulsione elettrotermica

Il propellente è scaldato elettricamente ed espande termodinamicamente in un ugello. I principali tipi di propulsori che rientrano in questa categoria sono resistogetti e arcogetti. Nei primi il calore viene trasferito al propellente gassoso per convezione o irraggiamento tramite una resistenza elettrica alla quale è fornita potenza elettrica. I secondi sono invece stati creati per superare le limitazioni sull'impulso specifico dei resistogetti, nei quali il fluido è sempre a una temperatura inferiore rispetto alla resistenza. Gli arcogetti permettono di superare, inoltre, i limiti di temperatura che possono essere raggiunti dal materiale che costituisce la resistenza. Il calore è depositato direttamente all'interno del propellente (che deve essere, almeno parzialmente, ionizzato e che diventa esso stesso un conduttore) dove fluisce una corrente elettrica (arco elettrico). Il riscaldamento del fluido è non uniforme in modo tale che il flusso più caldo sia lontano dalle pareti del propulsore. Negli arcogetti, dunque, è possibile aumentare la temperatura del propellente mantenendo la temperatura di parete sostanzialmente più bassa.

propellant	N_2H_4	NH_3
I_{sp}, s	300	350
P_E, W	500-1500	500
η	0.8	0.8
voltage	28	28
thruster mass, kg/kW	1-2	1-2
PPU mass, kg/kW	1	1
feed system	blowdown	regulated
lifetime, h	500	-
missions	SK, insertion, deorbit	orbit corrections

Figura 9 Prestazioni resistogetti

propellant	N_2H_4	NH_3	H_2
I_{sp}, s	500-600	500-800	1000
P_E, W	300-2000	500-30k	5k-100k
η	0.35	0.3	0.4
voltage	100	100	200
thruster mass, kg/kW	0.7	0.7	0.5
PPU mass, kg/kW	2.5	2.5	2.5
feed system	regulated	regulated	regulated
lifetime, h	1000	1500	-
missions	SK	SK, orbit raising	medium ΔV transfers

Figura 10 Prestazioni arcogetti

2.3.2 Propulsione elettrostatica

Il propellente ionizzato (quindi gas ionizzato) è accelerato mediante forze elettrostatiche. Quindi il meccanismo di accelerazione è del tutto diverso, non si passa più dalla temperatura. I principali propulsori che rientrano in questa categoria sono i propulsori a ioni, il cui funzionamento è regolato da 3 aspetti fondamentali:

- Ionizzazione ed estrazione: gli ioni sono generati e separati dagli elettroni;
- Accelerazione: gli ioni sono accelerati da un forte campo elettrico
- Neutralizzazione: il fascio di ioni è neutralizzato da un opportuno fascio di elettroni

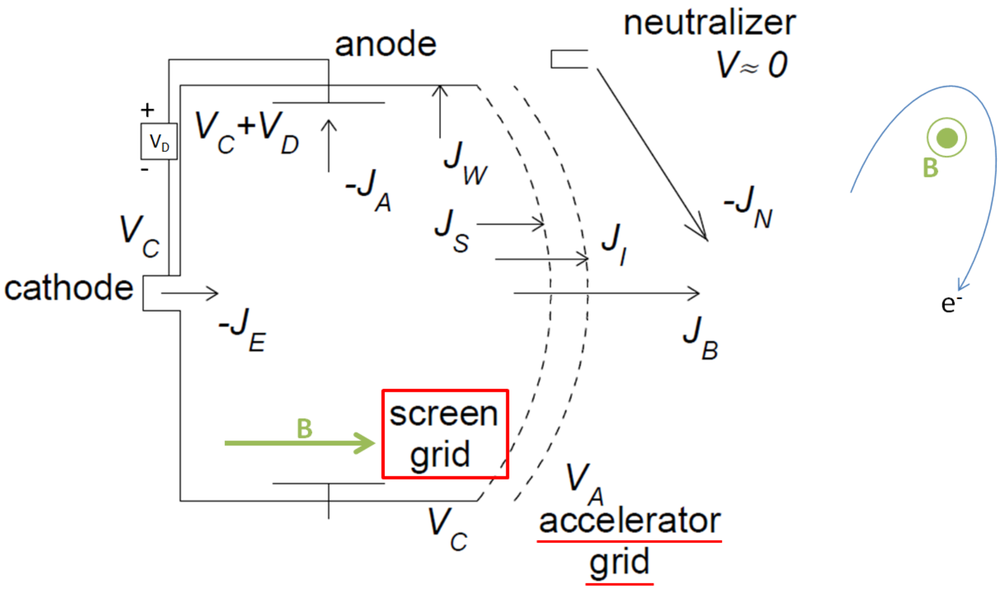

Figura 11 Schema propulsore a ioni

Il propellente (tipicamente Xeno, è un gas nobile molto stabile e non tossico) viene immerso tramite opportuni fori nella camera. Il catodo emette elettroni, i quali sono attratti dall'anodo. Nel loro cammino vanno a sbattere contro gli atomi di propellente e li ionizzano. In questo modo si crea nella camera una nube di plasma che si porta ad un potenziale di equilibrio per mantenere l'equilibrio della carica. Gli elettroni sono attratti dall'anodo mentre gli ioni sono attratti verso il potenziale basso fornito dalle due griglie forate che chiudono la camera. Tra le due griglie estrattrici, molto vicine, si ha l'accelerazione degli ioni e quindi la generazione della spinta. Dopo di che il fascio di ioni emesso deve essere neutralizzato attraverso un catodo neutralizzatore per evitare che lo S/C si carichi negativamente e per prevenire il riflusso degli ioni.

Esistono anche altri tipi di propulsori elettrostatici come i FEEP e i Colloidal Thruster.

Type	Hall	Ion	FEEP
propellant	Xe	Xe	Cs Ir
I_{sp}, s	1500-2500	2000-4000	6000
P_E, W	300-10000	200-5000	1
η	0.5	0.65	0.8
voltage, V	200-600	1000-2000	6000
thruster mass, kg/kW	2-3	3-6	?
PPU mass, kg/kW	6-10	6-10	?
feed system	regulated	regulated	no
lifetime, h	$>$ 7000	$>$ 10000	?
missions	SK, orbit transfer (med-ΔV)	SK, orbit transfer (large-ΔV)	precise corrections

Figura 12 Prestazioni propulsori elettrostatici

I propulsori a effetto Hall sono degli ibridi tra la propulsione elettrostatica e quella elettromagnetica. Sono a tutti gli effetti dei propulsori elettromagnetici ma da certi punti di vista realizzano qualcosa di simile ai propulsori elettrostatici, ovvero l'accelerazione di ioni.

2.3.3 Propulsione elettromagnetica

Il propellente ionizzato è accelerato mediante forze elettromagnetiche dovute all'interazione di campi magnetici interni e/o esterni con corrente elettrica nel flusso del propellente. Si può suddividere in propulsione stazionaria (funzionamento continuo) e instazionaria (funzionamento pulsato) oltre che a seconda che il campo magnetico sia autoindotto o applicato dall'esterno. In ogni caso il meccanismo è il medesimo: accelerazione di elettroni da parte del campo elettrico, creazione di una forza magnetica sugli elettroni tendenzialmente in una specifica direzione e, attraverso le collisioni, trasmissione di questa qdm, che gli elettroni acquisiscono, agli atomi e al resto del propellente. Quindi il campo elettrico accelera gli elettroni, il campo magnetico li direziona più o meno nella direzione della spinta e le collisioni trasferiscono la qdm a tutto il propellente. Sono propulsori che possono raggiungere impulsi specifici e densità di spinta molto più alti rispetto agli altri tipi di propulsori elettrici ma si basano su una fenomenologia piuttosto complessa e la loro realizzazione pratica è molto difficile.

Type	PPT	AF-MPD	SF-MPD
I_{sp}, s	500-1000	2000-5000	2000-5000
P_E, W	1-200	1k-100k	200k-4M
η	0.1	0.5	0.3
voltage, V	1000-2000	200	100
thruster mass, kg/kW	120	?	?
PPU mass, kg/kW	100	?	?
lifetime	10^7 pulse	?	?
I_t, Ns	4000	-	-
missions	precise corrections	large-ΔV (med-P_E)	large-ΔV (large-P_E)

Figura 13 Prestazioni propulsori elettromagnetici

2.4 Propulsione elettrica ibrida: VASIMR

Se i propulsori a effetto Hall sono un ibrido tra la propulsione elettrostatica e quella elettromagnetica, il VASIMR® (VAriable Specific Impulse Magnetoplasma Rocket) è invece un'altra tipologia di ibrido tra la propulsione elettrotermica e quella elettromagnetica. Se si ha un plasma caldo, in analogia ai propulsori elettrotermici, con esso si può cercare di trasformare l'energia termica in energia cinetica ma anziché farlo in un ugello fluidodinamico, come nei propulsori elettrotermici strettamente detti, lo si può fare con un ugello magnetico, quindi sfruttando una forza magnetica. Dunque, il concetto di base è quello di plasma che espande in ugello magnetico. Per riscaldare e ionizzare il propellente inerte (tipicamente argon, xeno o anche idrogeno) e formare il plasma che sarà poi accelerato dal campo magnetico si utilizzano radio frequenze.
VASIMR® è stato concepito per colmare il divario tra i razzi chimici ad alta spinta e basso impulso specifico e la propulsione elettrica a bassa spinta e alto impulso specifico. Il concetto VASIMR® è nato nel 1977 con l'ex astronauta della NASA Franklin Chang Díaz, fondatore della tutt'ora operante Ad Astra Rocket Company, la compagnia che sta studiando questo propulsore in collaborazione con NASA.

La caratteristica fondamentale del VASIMR® risiede nella prima parte dell'acronimo, ovvero il poter modulare l'impulso specifico a potenza costante ripartendo la potenza elettrica e la portata tra l'antenna di ionizzazione e l'antenna ICRH (si vedranno questi elementi nel dettaglio nei seguenti sotto-paragrafi):

$$P = \frac{1}{2}\dot{m}_+ u_+^2 + \frac{\dot{m}_+}{\dot{m}}\varepsilon_B = cost \tag{2.19}$$

Il vantaggio di questo tipo di propulsione è proprio quello di avere la possibilità di salire di temperatura e raggiungere quindi impulsi specifici che con una propulsione puramente elettrotermica non sono possibili; l'ambizione è quella di arrivare sui 10.000 s.

Tenendo in considerazione le problematiche analizzate nel Capitolo 1, questo propulsore si impone prepotentemente come una possibilità estremamente promettente in ottica trasferta interplanetaria umana. Ridurre il tempo di viaggio è fondamentale per evitare o comunque portare ai minimi termini le questioni inerenti alle radiazioni e, inoltre, avere un sistema con tale flessibilità consentirebbe di ottimizzare la massa utile o analogamente il consumo di propellente.

Si parla al condizionale perché attualmente si è ancora in stadi primordiali di sviluppo, il tempo di viaggio dipende fortemente dalla potenza disponibile e la potenza specifica diventa una problematica importante: al fine di condurre un ipotetico viaggio con equipaggio su Marte in 39 giorni [14], il VASIMR® richiederebbe un livello di potenza elettrica ben più elevato di qualsiasi cosa attualmente possibile o prevista. Oltre a ciò, qualsiasi tecnologia di generazione di energia (siano pannelli solari o nucleare) produrrà calore di scarto. Il necessario reattore da 200 Mega-Watt "con una densità di potenza per massa di 1.000 watt per chilogrammo" (citazione di Díaz) richiederebbe radiatori estremamente efficienti per evitare la necessità di "radiatori delle dimensioni di un campo da calcio" (citazione di Zubrin).

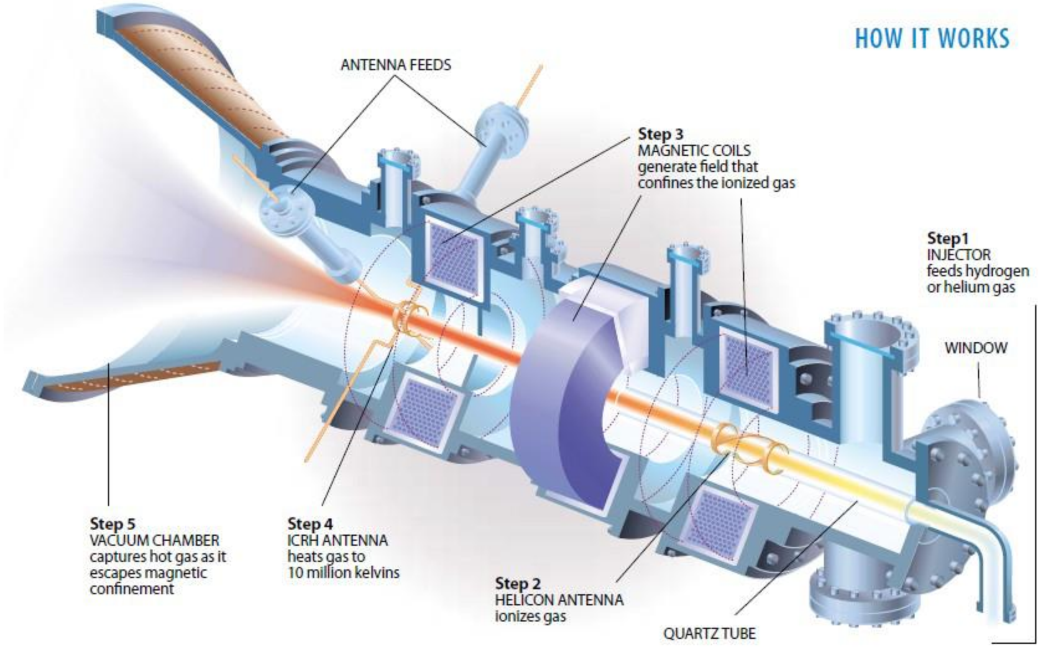

Figura 14 VASIMR concept

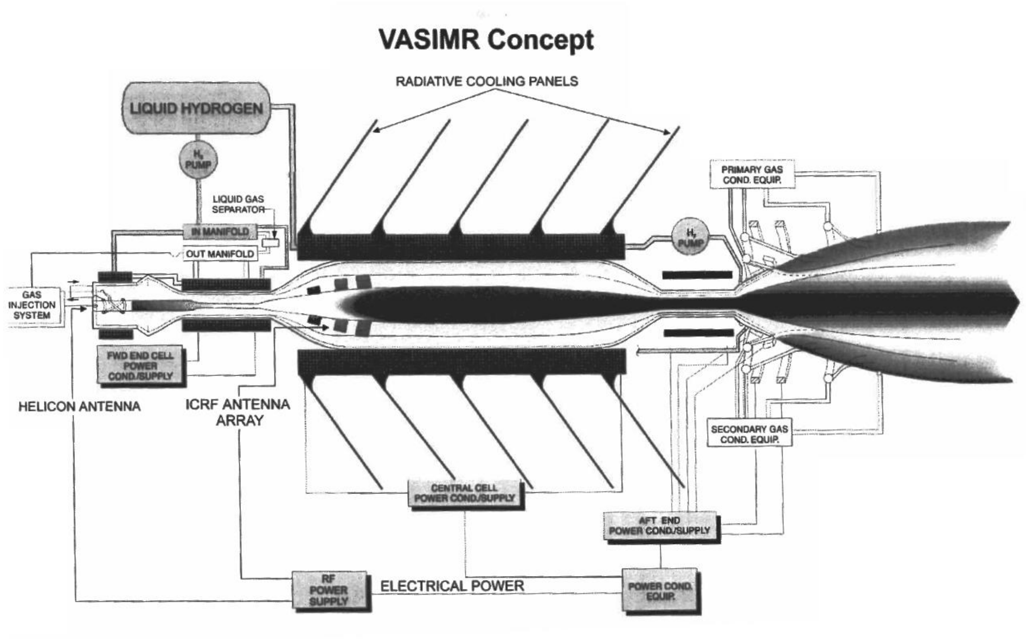

Figura 15 VASIMR concept

Abbiamo tre principali stadi: ionizzazione, riscaldamento ed espansione.

2.4.1 Ionizzazione - Helicon plasma source

Nel primo stadio avviene la ionizzazione del fluido. Il propellente, ovvero un gas neutro (argo, xeno o idrogeno), è iniettato in un cilindro cavo al quarzo circondato da antenne helicon RF. Un helicon (elicoidale) è un'onda elettromagnetica a bassa frequenza che può esistere nei plasmi in presenza di un campo magnetico. Una scarica helicon può essere definita come un'eccitazione del plasma dovuta ad onde helicon indotta attraverso riscaldamento a radiofrequenze. Il gas neutro è quindi scaldato da antenne a radiofrequenza (RF, da 10 a 50 MHz) che bombardano il gas con onde elettromagnetiche fino a farlo divenire un plasma freddo (circa 60000 K). Tali onde elettromagnetiche energizzano gli elettroni liberi nel gas e gli elettroni liberi si moltiplicano velocemente liberando altri elettroni attraverso collisioni con gli atomi vicini, generando una ionizzazione a cascata. Controllando la portata di propellente e la potenza dell'antenna si regola la ionizzazione. In questo stadio vi sono perdite di potenza per irraggiamento.

2.4.2 Riscaldamento – ICRH

Qui il concetto è relativamente semplice: si scalda il propellente sfruttando della radiazione elettromagnetica in risonanza con il moto degli ioni.
Avviene un ulteriore riscaldamento del plasma, che può raggiungere temperature elevatissime, dell'ordine di 1MK. L'energia per riscaldare il plasma è fornita sottoforma di un segnale RF polarizzato circolarmente generato da una seconda antenna, la ICRH (Ion Cycloctronic Resonant Heating); tale segnale è generato con la stessa frequenza della frequenza di ciclotrone dello ione. Si ricorda che gli ioni, in presenza di campo magnetico uniforme, si muovono perpendicolarmente alla direzione del campo magnetico. La traiettoria descritta è circolare, avente raggio pari al raggio di Larmor, r_b (che deve essere inferiore al raggio della camera di questo stadio – gli ioni devono rimanere confinati entro le linee di campo nella camera) e frequenza pari alla frequenza di Larmor o ciclotronica, ω_b:

$$r_b = \frac{m_+ v_\perp}{qB} \qquad \omega_b = \frac{v_\perp}{r_b} = \frac{qB}{m_+} \tag{2.20}$$

Quindi, l’onda elettromagnetica polarizzata circolarmente è in risonanza con il moto di Larmor degli ioni. Cioè, si ha risonanza tra il moto di Larmor degli ioni che ruotano e l’accelerazione (in direzione assiale) dovuta al campo elettrico rotante generato dall’antenna ICRH. Ioni ed elettroni avranno quindi traiettorie ad elica alla loro frequenza ciclotronica.

2.4.3 Specchio magnetico

In questa sezione del VASIMR sono inoltre presenti dei condotti magnetici detti specchi magnetici.

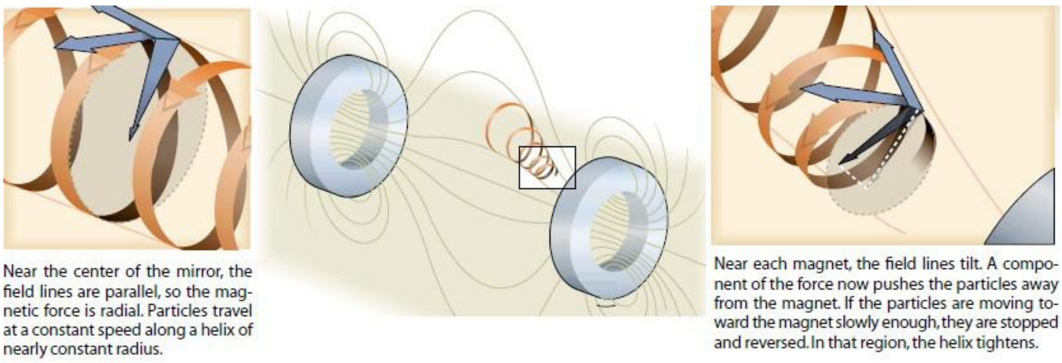

Figura 16 Specchio magnetico

Lo specchio magnetico è una particolare configurazione del campo magnetico e lo scopo di esso consiste nel favorire il trasferimento di energia alle particelle cariche, per poter scaldare gli ioni. Il più semplice specchio magnetico consiste in due elettromagneti percorsi da corrente elettrica avente la stessa direzione. Le linee del $\bar{B}$ sono più dense in corrispondenza degli elettromagneti e sono meno dense nella zona centrale compresa tra i due anelli (gli elettromagneti). Come detto in precedenza le particelle cariche descrivono una traiettoria a elica lungo le linee del campo $\bar{B}$ avente raggio di Larmor e con frequenza ciclotronica. Per una data intensità del $\bar{B}$, le particelle più pesanti, ovvero gli ioni, hanno una frequenza di ciclotrone più bassa e un raggio di Larmor maggiore rispetto alle particelle più piccole, ovvero gli elettroni. Inoltre, $\bar{B}$ intensi, sono sinonimo di alta frequenza di ciclotrone e piccoli raggi di Larmor. Nel VASIMR® la frequenza di ciclotrone degli ioni è dell’ordine di pochi MHz mentre quella degli elettroni è nell’ordine dei GHz. La velocità della particella carica (ione o elettrone) ha due componenti: una parallela $v_{\|}$ al $\bar{B}$ (corrispondente al moto lungo le linee di flusso del campo) e una perpendicolare $v_{\perp}$ (corrispondente al moto orbitale attorno alle linee di flusso del $\bar{B}$). Quando la particella è situata in una zona del campo $\bar{B}$ in cui le linee di flusso sono più dense, e, dunque, il campo è più intenso, la $v_{\perp}$ incrementa, mentre la $v_{\|}$ si riduce ma in modo tale da mantenere l'energia totale costante. Ciò è collegato alla direzione della forza esercitata dal campo $\bar{B}$ sulla particella. La forza di Lorentz è sempre perpendicolare sia alla velocità della particella sia alla direzione del campo. Nella zona centrale dello specchio, dove le linee del campo $\bar{B}$ sono parallele, la forza è radiale e non influenza $v_{\|}$. Ma, quando la particella si avvicina alla zona dove aumenta la densità delle linee di campo, la particella decelera. Se la particella esce dalla zona di elevata concentrazione delle linee di campo $\bar{B}$ si ha l'effetto opposto, ovvero la particella accelera. Non essendo stata trasferita energia alla particella, l'accelerazione avviene a spese del moto rotazionale della particella attorno alle linee di campo del $\bar{B}$. Il $\bar{B}$ non compie lavoro sulla particella. In questa fase è stato realizzato un moto caotico, l'obiettivo, infatti, è quello di riscaldare il plasma; non si è realizzata spinta. Gli ioni, in sintesi, ruotano attorno alle linee di $\bar{B}$ e si avvicinano all'uscita, grazie al moto assiale, diminuendo la loro velocità assiale e ruotando sempre più velocemente attorno alle linee di flusso fino a quando il $\bar{B}$ frena le particelle e le fa tornare indietro; le particelle riusciranno ad attraversare l'uscita solo quando avranno accumulato sufficiente energia → fenomeno dello specchio magnetico che confina, nella zona dove $\bar{B}$ è meno intenso, ovvero dove le linee di campo sono meno dense, le particelle a bassa energia. Per questo motivo tale fenomeno è chiamato anche *bottiglia magnetica*.

2.4.4 Espansione - Ugello magnetico

Un $\bar{B}$ divergente è utilizzato per convertire l'energia termica del plasma in energia cinetica. Grazie all'ugello avviene l'espansione del flusso del plasma. Essendo $\bar{B}$ divergente diminuisce la densità del $\bar{B}$ e, pertanto, si ha un aumento della energia assiale del plasma, ovvero di $v_{\|}$, a discapito del moto rotazionale delle particelle, ovvero si ha una diminuzione di $v_{\perp}$. Inoltre, il $\bar{B}$ permette di confinare il plasma ad elevata T lontano dalle pareti del propulsore. Gli ugelli magnetici rappresentano un valido strumento di accelerazione di un plasma poiché non richiedono la presenza di elettrodi, i quali sono dei componenti spesso soggetti a usura e, quindi, limitano la vita del propulsore. Il propellente freddo può essere utilizzato per raffreddare le pareti dell'ugello portando ad una riduzione di impulso specifico. I $\bar{B}$ che sono generati all'interno del propulsore possono essere utilizzati come scudi antiradiazioni.

2.4.5 Scelta del propellente

I possibili propellenti sono Argon, Neon, Idrogeno e Xeno. Hanno diversi costi di ionizzazione e anche diversi costi al kg: l'Argon, con 2,35 EUR/kg, è sicuramente il più economico. Tuttavia, l'uso dell'idrogeno (21,73 EUR/kg) ha secondo Chang Diaz molti benefici collaterali:

- È probabile che si riesca a trovare idrogeno praticamente ovunque si andrà nel sistema solare. Ciò significa che un veicolo spaziale alimentato da VASIMR® potrebbe essere lanciato con solo abbastanza propellente per arrivare a destinazione, ad esempio Marte, e poi raccogliere più idrogeno all'arrivo per utilizzarlo come propellente per il viaggio di ritorno a casa. Le implicazioni in termini di massa utile in più da poter portare sarebbero enormi.
- l'idrogeno è il miglior scudo antiradiazioni conosciuto, quindi il propellente per il motore VASIMR® potrebbe anche essere usato per proteggere l'equipaggio dagli effetti nocivi dell'esposizione alle radiazioni durante il volo.

2.4.6 Prestazioni previste e stato di sviluppo

- VX-200

L'ultimo modello sperimentale sviluppato finora è il VASIMR VX 200, con argon come propellente e livelli di potenza fino a 200 kW. L'efficienza del propulsore è stata dimostrata al 72%, con un impulso specifico di 5000 secondi e una spinta di 5,7 N.

- VX-200 SS

SS sta per “steady state” e l’obiettivo del test a lunga durata è quello di dimostrare il funzionamento continuo allo stato stazionario termico. Nell'agosto 2019, Ad Astra ha annunciato il completamento con successo dei test di un'unità di elaborazione della potenza (PPU) a radiofrequenza (RF) di nuova generazione per il motore VASIMR®, costruita dalla canadese Aethera Technologies Ltd. Ad Astra ha dichiarato una potenza di 120 kW e che, con 52 kg, la nuova PPU RF è circa 10 volte più leggera delle PPU dei propulsori elettrici concorrenti (rapporto potenza-peso: 2,31 kW/kg). Nel luglio 2021, Ad Astra ha annunciato il completamento di un test da record per il motore, facendolo funzionare per 28 ore a un livello di potenza di 82,5 kW. Un secondo test, condotto dal 12 al 16 luglio, ha fatto funzionare con successo il motore per 88 ore a un livello di potenza di 80 kW.

Per quanto riguarda il presente lavoro, come si può notare nel Capitolo 5, sono stati ipotizzati valori ottimistici e futuribili, soprattutto per quel che riguarda le potenze in gioco e per le missioni con equipaggio.

Capitolo 3
Ottimizzazione della traiettoria

3.1 Trasferte interplanetarie

La base per l'analisi delle trasferte interplanetarie è costituita dall'approssimazione patched-conic.

3.1.1 Approssimazione patched-conic

L'approssimazione patched-conic si basa sul concetto di Sfera di Influenza (SOI). Ogni pianeta ha una sua sfera di influenza, definibile come la regione dello spazio in cui l'effetto del pianeta è predominante su quello di altri corpi celesti e il cui raggio varia a seconda della distanza del pianeta dal Sole. Cioè, all'interno di tale sfera il moto di un corpo attratto dal pianeta si può considerare non influenzato dagli altri corpi celesti. Si suddivide lo spazio in più regioni assegnando ad ognuna di esse la propria sfera di influenza. Quando la sonda transita nella sfera di influenza di un corpo, si considera unicamente la forza gravitazionale tra quel corpo e il satellite. Quindi, lo studio del moto della sonda viene effettuato sfruttando la meccanica del problema dei 2 corpi; si hanno letteralmente dei "pezzi di coniche", coniche raccordate.
È un metodo molto approssimato ma che permette di fare una prima valutazione di fattibilità della missione, cioè sostanzialmente di capire più o meno qual è l'ordine di grandezza del ΔV. Questo metodo può servire per andare ad individuare quella che può essere una condizione iniziale per un processo di ottimizzazione e poi per una integrazione numerica.

3.1.2 Terra-Marte

Quando si ragiona in ottica patched-conic bisogna mettere al centro la fase eliocentrica perché è quella in cui si spenderà sicuramente più tempo. L'analisi di

questa fase è sicuramente quella che permette di definire le specifiche per la parte del lancio e per la parte di arrivo al pianeta target.
Tra tutte le possibili trasferte tra due pianeti è noto che la trasferta di Hohmann sia quella che garantisce la minima spesa in termini di ΔV. Nel seguito sono esposti i concetti di rendez-vous, fasatura, periodo sinodico e tempo di attesa con riferimento alla trasferta di Hohmann interplanetaria, che però rientra nel modello di manovra impulsiva (spinta infinita applicata in un tempo infinitesimo). Per la propulsione elettrica l'ipotesi di manovra impulsiva è chiaramente non valida.
Si prenda comunque come riferimento la seguente trasferta di Hohmann Terra-Marte (considerando sfere di influenza puntiformi):

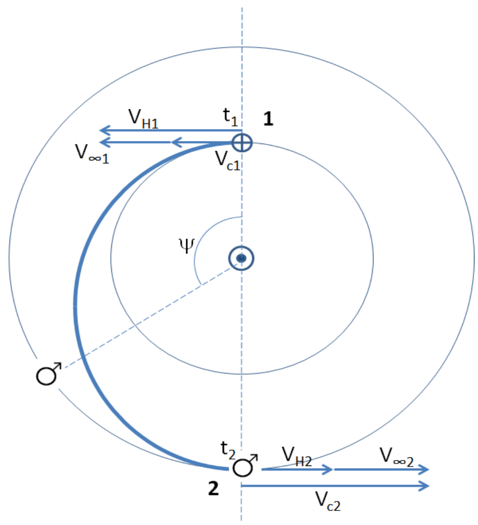

Figura 17 Trasferta di Hohmann Terra-Marte

Si studia una manovra di rendez-vous: l'obiettivo non consiste solo nell'immettersi in una determinata orbita ma di raggiungere un ben preciso oggetto su tale orbita. Per effettuare un rendez-vous è necessario che Marte si trovi esattamente in 2 per t_2. Quindi ci si chiede dove debba essere a t_1, cioè all'istante di partenza dalla Terra. Il periodo orbitale di Marte è pari circa a 687 giorni terrestri ed è quindi superiore al periodo di rivoluzione terrestre (1 anno, 320 giorni, 18 ore terrestri). L'angolo ψ rappresenta l'angolo tra il pianeta di arrivo e il pianeta di partenza all'istante t_1, ovvero è l'angolo di fase (quanto Marte è avanti rispetto alla Terra a t_1). In generale:

- $\psi > 0$: il target è avanti (in anticipo) al pianeta di partenza; (per $r_2 > r_1$)
- $\psi < 0$: il target è dietro (in ritardo) al pianeta di partenza; (per $r_2 < r_1$)

Per raggiungere pianeti più esterni, il pianeta di arrivo (il target) deve essere più avanti (poiché la sua velocità angolare è inferiore). Per la trasferta Terra-Marte, $\psi_{ott} \approx 44°$: tutte le volte che Marte si trova a 44° davanti alla Terra si può partire per fare Hohmann. Si ha:

$$\pi = \psi + \omega_2 \tau_H \tag{3.1}$$

Dove, $\omega_2 = \sqrt{\frac{\mu_\odot}{r_2^3}}$ è la velocità angolare di Marte e $\tau_H = t_2 - t_1 = \pi \sqrt{\frac{a_H^3}{\mu_\odot}}$ è il periodo della trasferta di Hohmann.

Se si perde l'attimo giusto, quindi il ψ giusto, la cosiddetta finestra di lancio, non sarà possibile effettuare la trasferta di Hohmann. Questo non vuol dire che non si possa effettuare lo stesso la trasferta, però sarà sicuramente più costosa della Hohmann. La Terra ruota più velocemente di Marte, quindi ψ si ripresenta pari al valore corretto quando, dopo un tempo τ_s, la differenza dell'angolo percorso dalla Terra e quello percorso da Marte sarà uguale a un numero intero di giri. Pertanto, si definisce periodo sinodico, τ_s, l'intervallo di tempo necessario affinché i pianeti assumano nuovamente la stessa configurazione relativa, ovvero lo stesso ψ:

$$\omega_1 \tau_s = \omega_2 \tau_s \pm 2k\pi$$

Si ricava (per Terra-Marte):

$$\tau_s = \frac{2\pi}{|\omega_1 - \omega_2|} \approx 2{,}13\ anni \tag{3.2}$$

Il periodo sinodico è tanto più grande per orbite aventi dei raggi poco differenti ("vicine"), infatti, se sono vicine avranno anche circa la stessa velocità e quindi occorrerà molto tempo prima che un pianeta doppi l'altro.

Un problema simile si presenta anche per il ritorno da Marte, cioè capire quanto bisogna aspettare su Marte affinché i due pianeti assumano una posizione relativa favorevole per effettuare una Hohmann. In questo caso si parla di tempo di waiting:

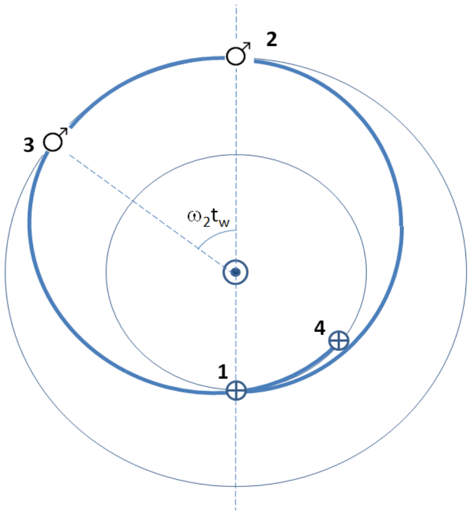

Figura 18 Tempo di waiting

Per il calcolo del tempo di waiting la condizione da imporre è che l'angolo che percorre lo S/C deve essere uguale a quello percorso dalla Terra mentre lei gira intorno al Sole a meno di un numero intero di giri:

$$\pi + \omega_2 \tau_w + \pi + 2k\pi = \omega_1 (\tau_H + \tau_w + \tau_H)$$

Si ricava:

$$\tau_w = \frac{2(k+1)\pi - 2\tau_w \omega_1}{\omega_1 - \omega_2} \qquad (3.3)$$

Si deve scegliere il valore di k che fornisce il minor (e positivo) tempo di waiting sul pianeta target. La costante k dipende da ω_1 e ω_2 e quindi non ha un valore tipico. Il tempo di attesa può essere relativamente elevato. Nel caso di Marte si avrebbe:

- $\tau_H \approx 6 \, mesi$
- $\tau_w \approx 2 \, anni$

Quindi la durata di andata, attesa e ritorno sarebbe circa pari a 3 anni. Questo mette nuovamente in guardia rispetto alle problematiche inerenti all'esplorazione umana. Certo, si può pensare di spedire un carico con una Hohmann mentre per una missione umana si deve pensare sicuramente a qualcosa di più costoso.

3.2 Ottimizzazione indiretta di Traiettorie Spaziali

Un problema di ottimizzazione consiste nella ricerca di una certa legge di controllo che vada a minimizzare o massimizzare un particolare indice di prestazione. Dati i costi, nel caso di una traiettoria interplanetaria ovviamente il focus è tutto sul consumo di propellente, cioè sulla capacità di minimizzare la quantità di propellente necessaria alla manovra o in maniera del tutto equivalente di massimizzare la massa finale, cioè quello che poi va portato a destinazione. L'ideale è chiaramente consumare il meno possibile portando a destinazione la massa utile più grande possibile.

Per un problema simile soluzioni analitiche si possono ricavare solo in pochi casi, che in realtà, a causa delle varie assunzioni e semplificazioni, non hanno poi un fine pratico. Per risolvere il problema di ottimo bisogna quindi ricercare soluzioni approssimate o utilizzare metodi numerici. Tra i metodi di ottimizzazione possiamo distinguere metodi diretti e metodi indiretti: i primi si basano sulla discretizzazione della traiettoria e i controlli sono descritti tramite un elevato numero di parametri; i secondi sfruttano i principi del calcolo variazionale e i controlli sono determinati dalla soluzione di un problema differenziale ai limiti (BVP). Nel presente lavoro ci si baserà sulla teoria del controllo ottimale (OCT) basata su metodi indiretti, i quali hanno il vantaggio di avere una elevata precisione numerica, un elevato contenuto teorico e consentono di arrivare alla soluzione di ottimo con un numero molto basso di parametri e in tempi limitati. Nonostante una scarsa robustezza e una certa difficoltà di convergenza.

3.2.1 Teoria del controllo ottimale

La OCT è basata sul calcolo variazionale e qui viene presentata nella maniera più conforme all'obiettivo, ovvero l'ottimizzazione di una traiettoria spaziale.

Un vettore di variabili di stato, $\boldsymbol{x}$, descrive un sistema generico a cui viene applicata la OCT. Le equazioni differenziali che descrivono l'evoluzione di tale sistema tra i contorni esterni (gli istanti iniziale e finale) sono funzioni di $\boldsymbol{x}$, di $\boldsymbol{u}$ (vettore dei controlli) e di t (variabile indipendente tempo) e hanno la forma generica:

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) \tag{3.4}$$

Nel caso dell'ottimizzazione di una traiettoria è opportuno suddividere la traiettoria in n sotto-intervalli, detti anche archi, in modo tale che all'interno di ognuno di essi le variabili siano continue. Pertanto, il j-esimo intervallo inizia al tempo $t_{(j-1)_+}$e finisce al tempo $t_{j\_}$, mentre le variabili assumono a questi estremi i valori $\boldsymbol{x}_{(j-1)_+}$ e $\boldsymbol{x}_{j\_}$; i segni – e + indicano i valori assunti subito prima o subito dopo il punto considerato, così si può tener conto delle eventuali discontinuità delle variabili (e anche del tempo) che si applicano ai punti di collegamento tra i vari archi (contorni interni).

Le condizioni al contorno imposte sono genericamente non lineari e generalmente di tipo misto, quindi, coinvolgono i valori delle variabili di stato e della variabile tempo sia ai contorni esterni che a quelli interni:

$$\boldsymbol{\chi}\left(\boldsymbol{x}_{(j-1)_+}, \boldsymbol{x}_{j\_}, t_{(j-1)_+}, t_{j\_}\right) = 0 \qquad j = 1, \dots, n \tag{3.5}$$

Il problema di ottimo consiste nella massimizzazione (nostro caso) o minimizzazione di un funzionale, J, che è la somma di due termini: la funzione φ, che dipende dai valori assunti dalle $\boldsymbol{x}$ e dal t ai contorni interni ed esterni, e l'integrale lungo tutta la traiettoria della funzione Φ, che dipende dal tempo e dai valori assunti in ogni punto da variabili e controlli.

$$J = \varphi\left(\boldsymbol{x}_{(j-1)_+}, \boldsymbol{x}_{j\_}, t_{(j-1)_+}, t_{j\_}\right) + \sum_j \int_{t_{(j-1)_+}}^{t_{j\_}} \Phi(x(t), u(t), t)\, dt \qquad j = 1, \dots, n \tag{3.6}$$

- $\varphi = 0$: formulazione di Lagrange
- $\Phi = 0$: formulazione di Mayer (qui utilizzata)

È molto utile riscrivere la (3.6) introducendo i moltiplicatori di Lagrange: quelli costanti, $\boldsymbol{\mu}$, associati alle condizioni al contorno, e quelli variabili, $\boldsymbol{\lambda}$, detti anche variabili aggiunte, associati alle equazioni di stato:

$$J^* = \varphi + \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\chi} + \sum_j \int_{t_{(j-1)_+}}^{t_{j_-}} \left(\Phi + \boldsymbol{\lambda}^T(\boldsymbol{f} - \dot{\boldsymbol{x}})\right) dt \qquad j = 1, \dots, n \tag{3.7}$$

Chiaramente se condizioni al contorno ed equazioni di stato sono soddisfatte, i due funzionali J e J^*, e quindi i loro valori estremali, coincidono, per ogni scelta dei moltiplicatori di Lagrange.

Integrando per parti e differenziando si ottiene la variazione prima del funzionale, δJ^*:

$$\begin{aligned}
\delta J^* = &\left(-H_{(j-1)_+} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{(j-1)_+}} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t_{(j-1)_+}}\right) \delta t_{(j-1)_+} \\
&+ \left(H_{j_-} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j_-}} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t_{j_-}}\right) \delta t_{j_-} \\
&+ \left(\boldsymbol{\lambda}^T_{(j-1)_+} + \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{x}_{(j-1)_+}} + \boldsymbol{\mu}^T \left[\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \boldsymbol{x}_{(j-1)_+}}\right]\right) \delta \boldsymbol{x}_{(j-1)_+} \\
&+ \left(-\boldsymbol{\lambda}^T_{j_-} + \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{x}_{j_-}} + \boldsymbol{\mu}^T \left[\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \boldsymbol{x}_{j_-}}\right]\right) \delta \boldsymbol{x}_{j_-} \\
&+ \sum_j \int_{t_{(j-1)_+}}^{t_{j_-}} \left(\left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}} + \dot{\boldsymbol{\lambda}}^{\boldsymbol{T}}\right) \delta \boldsymbol{x} + \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{u}} \delta \boldsymbol{u}\right) dt \qquad j \\
&= 1, \dots, n
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Dove l'Hamiltoniano del sistema è definito (considerando la formulazione di Mayer) come:

$$H = \Phi + \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{f} = \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{f} \tag{3.9}$$

La condizione di ottimo prevede la stazionarietà del funzionale, cioè l'annullamento della sua derivata prima per qualunque scelta di variazioni $\delta\boldsymbol{x}, \delta\boldsymbol{u}, \delta\boldsymbol{x}_{(j-1)_+}, \delta\boldsymbol{x}_{j_-}, \delta t_{(j-1)_+}, \delta t_{j_-}$ compatibile con le equazioni differenziali e le condizioni al contorno. L'introduzione di variabili e costanti aggiunte permette, con una loro opportuna scelta, di annullare contemporaneamente il coefficiente di ciascuna delle variazioni nell'espressione (3.8). Si ottengono le equazioni di Eulero-Lagrange per le variabili aggiunte:

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} = -\left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T \tag{3.10}$$

e le equazioni algebriche per i controlli:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{u}}\right)^T = 0 \tag{3.11}$$

Per quanto riguarda le condizioni al contorno di ottimo mancanti ci rifacciamo al j-esimo contorno:

$$-\boldsymbol{\lambda}_{j_-}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{x}_{j_-}} + \boldsymbol{\mu}^T \left[\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \boldsymbol{x}_{j_-}}\right] = 0 \qquad j = 1, \dots, n \tag{3.12}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{j_+}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{x}_{j_+}} + \boldsymbol{\mu}^T \left[\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \boldsymbol{x}_{j_+}}\right] = 0 \qquad j = 0, \dots, n-1 \tag{3.13}$$

$$H_{j_-} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j_-}} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t_{j_-}} = 0 \qquad j = 1, \dots, n \tag{3.14}$$

$$-H_{j_+} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j_+}} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t_{j_+}} = 0 \qquad j = 0, \dots, n-1 \tag{3.15}$$

Le equazioni (3.12) e (3.14) non hanno significato all'inizio della traiettoria ($j = 0$), mentre le (3.13) e (3.15) non hanno significato alla fine della traiettoria ($j = n$). Eliminando le costanti aggiunte $\boldsymbol{\mu}$ dalle ultime 4 equazioni si hanno le condizioni al contorno di ottimo del tipo:

$$\boldsymbol{\sigma}\left(\boldsymbol{x}_{(j-1)_+}, \boldsymbol{x}_{j_-}, \boldsymbol{\lambda}_{(j-1)_+}, \boldsymbol{\lambda}_{j_-}, t_{(j-1)_+}, t_{j_-}\right) = 0 \tag{3.16}$$

Le (3.16) con le condizioni assegnate (3.5) completano il sistema differenziale dato dalle equazioni (3.4) e (3.10).

Considerando una generica variabile di stato, se sottoposta a particolari condizioni al contorno, le equazioni (3.12) e (3.13) forniscono particolari condizioni di ottimo per la variabile aggiunta corrispondente:

- se una variabile è assegnata a t_0 o t_f la corrispondente variabile aggiunta è libera in quel punto;

- se una variabile a t_0 o t_f non compare nelle condizioni la corrispondente variabile aggiunta è nulla in quel punto;
- se una variabile è continua e libera in un punto interno la corrispondente variabile aggiunta è anch'essa continua in quel punto;
- se una variabile è continua e assegnata in un punto interno la corrispondente variabile aggiunta ha una discontinuità libera in quel punto;

Analogamente, se H non dipende esplicitamente dal tempo, anche le equazioni (3.14) e (3.15) forniscono, in alcuni casi, particolari condizioni:

- se il tempo iniziale o finale è libero l'Hamiltoniano lì è nullo;
- se il tempo iniziale o finale è assegnato l'Hamiltoniano lì è libero;
- se un tempo intermedio è libero (e continuo) l'Hamiltoniano è continuo in quel punto;
- se un tempo intermedio è assegnato l'Hamiltoniano ha una discontinuità libera in quel punto;

Il controllo ottimale può essere determinato anche sfruttando il Principio di Massimo di Pontryagin: in presenza di un vincolo (variabile di controllo compresa tra un valore minimo e un valore massimo), il valore ottimale del controllo in ogni punto della traiettoria è quello che rende massimo, se si ricercano i massimi di J, o minimo, se si ricercano i minimi, l'Hamiltoniano in quel punto. A seconda del valore ottenuto risolvendo:

$$\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{u}} = 0$$

si ottiene:

- il valore ottenuto è nel dominio ammissibile ed è quindi quello ottimale
- il valore ottenuto non è ammissibile: il controllo ottimale è quello minimo o massimo (in base al Principio di Pontryagin)

Si ha invece un caso particolare se l'Hamiltoniano è lineare rispetto a uno dei controlli soggetto a vincoli (ad esempio la spinta). Sempre in accordo con Pontryagin, il valore ottimale è:

- il valore massimo se il coefficiente del controllo in H è positivo, e il valore minimo se il coefficiente del controllo in H è negativo (controllo *"bang-bang"*)
- un valore intermedio da determinarsi annullando le derivate del coefficiente (rispetto al tempo) nel caso il coefficiente sia nullo in un intervallo di tempo (arco singolare)

3.2.2 Problema differenziale ai limiti

La teoria del controllo ottimale formula un nuovo sistema di equazioni differenziali ai limiti (BVP) in cui alcuni dei valori iniziali delle variabili sono incogniti. La soluzione di questo problema consiste nel trovare quali valori iniziali consentono, integrando numericamente il sistema differenziale, di soddisfare tutte le condizioni al contorno, sia imposte che di ottimo. Il suddetto problema ha alcune peculiarità:

- l'intervallo di integrazione è suddiviso in sotto-intervalli in cui le equazioni differenziali possono avere differente espressione;
- la durata di ciascun sotto-intervallo è in generale incognita;
- le condizioni al contorno possono essere non-lineari e coinvolgere i valori delle variabili sia ai contorni esterni sia a quelli interni;
- le variabili possono essere discontinue ai contorni interni e il loro valore dopo la discontinuità può essere incognito;

La soluzione del BVP si ottiene riducendolo ad una successione di problemi ai valori iniziali che viene portata a convergenza secondo il metodo di Newton.

La variabile indipendente t viene sostituita con una nuova variabile ε, definita nel j-esimo intervallo, per risolvere l'incertezza sulla durata di ciascun sotto-intervallo:

$$\varepsilon = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{\tau_j} \tag{3.17}$$

dove τ_j è la durata, generalmente incognita, del sotto-intervallo. In questo modo i contorni interni ed esterni risultano fissati e corrispondono a valori interi consecutivi della nuova variabile indipendente. Con il cambio di variabile indipendente il sistema di equazioni differenziali assume la seguente forma:

$$\frac{d\boldsymbol{z}}{d\varepsilon} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, \varepsilon) \tag{3.18}$$

Esplicitando il secondo membro, per le variabili di stato e aggiunte si ha:

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{d\varepsilon} = \boldsymbol{\tau}_j \frac{d\boldsymbol{y}}{dt} \tag{3.19}$$

Invece per i parametri costanti:

$$\frac{d\boldsymbol{c}}{d\varepsilon} = 0 \tag{3.20}$$

Le condizioni imposte e di ottimo sono genericamente espresse come:

$$\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{s}) = 0 \tag{3.21}$$

Dove $\boldsymbol{s}$ è un vettore che contiene i valori che le variabili assumono a ogni contorno (interno o esterno) e i parametri incogniti.

I valori iniziali di alcune variabili sono in genere incogniti e la ricerca della soluzione si traduce nel determinare, attraverso un processo iterativo, quali valori devono assumere per soddisfare le (3.21). La r-esima iterazione inizia con l'integrazione delle equazioni (3.18) con i valori iniziali $\boldsymbol{p^r}$ trovati al termine dell'iterazione precedente. Cioè si va a fissare un $\boldsymbol{z}(0) = \boldsymbol{p^r}$ e si integrano le equazioni lungo tutta la traiettoria; per iniziare il procedimento alla prima iterazione bisogna scegliere dei valori di tentativo $\boldsymbol{p^1}$. In ogni contorno si determina il valore delle variabili di stato e al termine dell'integrazione si calcola l'errore sulle condizioni al contorno $\boldsymbol{\psi^r}$ alla r-esima iterazione. Siccome si vuole annullare l’errore sulle condizioni al contorno, a ogni iterazione i valori iniziali vengono corretti di una quantità:

$$\Delta \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}^{r+1} - \boldsymbol{p}^{r} = -\left[\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \boldsymbol{p}}\right]^{-1} \boldsymbol{\psi}^{r} \tag{3.22}$$

La matrice che compare nella (3.22) è calcolata come un prodotto fra due matrici:

$$\left[\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \boldsymbol{p}}\right] = \left[\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \boldsymbol{s}}\right]\left[\frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial \boldsymbol{p}}\right] \tag{3.23}$$

La prima può essere ottenuta derivando le condizioni al contorno rispetto alle grandezze che vi compaiono o anche numericamente. La seconda matrice contiene i valori assunti ai contorni da $[\partial z/\partial p]$, la quale si ottiene integrando il sistema omogeneo $[\partial \dot{z}/\partial p]$.

L’integrazione di tutte le equazioni differenziali viene svolta con un metodo a passo e ordine variabile basato sulle formule di Adams, come descritto da Shampine e Gordon [17].

Si richiede una precisione di 10^{-7}, cioè che l’errore massimo sulle condizioni al contorno sia inferiore a questo valore.

Quando si va ad introdurre la linearizzazione per la correzione da applicare ai valori di tentativo (3.22), si introducono errori che possono compromettere la convergenza.

Di seguito sono elencati alcuni accorgimenti per migliorare la procedura:

- Onde evitare un allontanamento elevato dalla soluzione, si apporta solo una frazione di correzione:

$$\boldsymbol{p}^{r+1} = \boldsymbol{p}^{r} + K_1 \Delta \boldsymbol{p} \tag{3.24}$$

Con $K = 0.1 \div 1$.

- Ad ogni iterazione l’errore massimo sulle condizioni al contorno viene confrontato con l’errore massimo ottenuto all’iterazione precedente: se l'errore massimo attuale è inferiore ad un multiplo di quello precedente (tipicamente $K_2 = 2 \div 3$) si procede con la nuova iterazione.

- Se invece, l'errore alla nuova iterazione è troppo grande rispetto al precedente, si procede con la bisezione della correzione apportata; si integrano quindi le equazioni del moto con i valori di tentativo. Il numero massimo di bisezioni è 5, dopo di che il processo viene arrestato e quindi la soluzione di tentativo non è in grado di portare alla convergenza.

3.3 Equazioni del moto

Come si vedrà più in dettaglio nel capitolo 4, le equazioni di stato, con riferimento al problema dei 2 corpi, sono:

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{v} \tag{3.25}$$

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{g} + \frac{\boldsymbol{T}}{m} \tag{3.26}$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{T}{c} \tag{3.27}$$

Esse descrivono lo stato di uno S/C di massa m puntiforme: $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{v}$ sono rispettivamente la posizione e la velocità, $\boldsymbol{g}$ è l'accelerazione gravitazionale solare, $\boldsymbol{T}$ è la spinta del motore e $c = g_0 I_{sp}$ è la velocità efficace di scarico. La (3.26) nella sua forma completa prevede la somma di altri due termini "atmosferici" dovuti a resistenza e portanza: $\boldsymbol{D}/m$ e $\boldsymbol{L}/m$.

3.3.1 Equazioni in coordinate sferiche

La forma vettoriale delle equazioni deve essere esplicita, proiettando le equazioni in un opportuno riferimento. Si sceglie un riferimento inerziale poiché più conveniente per l'assenza delle accelerazioni di trascinamento e di Coriolis (che andrebbero a complicare la valutazione dello Jacobiano del sistema che serve per la soluzione del BVP) e soprattutto per la corrispondenza tra le variabili aggiunte alle componenti della velocità nel sistema inerziale e le componenti del primer vector. Si adottano perciò coordinate sferiche in un sistema di riferimento inerziale basato sul piano equatoriale: la posizione del veicolo è descritta dal raggio r, dalla longitudine ϑ e dalla latitudine Φ, mentre la velocità dalle componenti radiale (cioè verso lo Zenit) u, in direzione Est v e Nord w in un riferimento locale. Per la velocità si preferisce proiettare l'equazione differenziale in questo riferimento, e non in uno con un asse parallelo alla velocità stessa, per avere una più semplice relazione tra velocità relativa e assoluta. Proiettando le equazioni di stato nel riferimento scelto si ha:

$$\frac{dr}{dt} = u \tag{3.28}$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{v}{r\cos\Phi} \tag{3.29}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{w}{r} \tag{3.30}$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{r^2} + \frac{v^2}{r} + \frac{w^2}{r} + \frac{T}{m}\sin\gamma_T + \frac{qS}{m}[-C_D\sin\gamma + C_L\cos\sigma\cos\gamma] \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} = -\frac{uv}{r} + \frac{vw}{r}\tan\Phi + \frac{T}{m}\cos\gamma_T\cos\psi_T \\ + \frac{qS}{m}[-C_D\cos\gamma\cos\psi \\ + C_L(-\cos\sigma\sin\gamma\cos\psi + \sin\sigma\sin\psi)]\end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{uw}{r} - \frac{v^2}{r}\tan\Phi + \frac{T}{m}\cos\gamma_T\sin\psi_T + \frac{qS}{m}[-C_D\cos\gamma\sin\psi + C_L(-\cos\sigma\sin\gamma\sin\psi - \sin\sigma\cos\psi)] \tag{3.33}$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{T}{c} \tag{3.34}$$

Dove γ e ψ sono gli angoli di elevazione (flight path angle) e di heading della velocità relativa $\boldsymbol{V}_r$, mentre γ_T e ψ_T sono gli stessi angoli per la spinta $\boldsymbol{T}$; σ è l'angolo di rollio, cioè l'angolo di cui è ruotata la portanza rispetto al piano della traiettoria. Per quanto riguarda questo lavoro tutti i termini aerodinamici delle equazioni precedenti vengono chiaramente trascurati.
Gli angoli γ e ψ dipendono solo dalle variabili di stato:

$$\sin\gamma = \frac{u}{V_r} \tag{3.35}$$

$$\cos\gamma\cos\psi = \frac{v - \omega r\cos\Phi}{V_r} \tag{3.36}$$

$$\cos\gamma\sin\psi = \frac{w}{V_r} \tag{3.37}$$

dove il modulo della velocità relativa è pari a:

$$V_r = \sqrt{u^2 + (v - \omega r\cos\Phi)^2 + w^2} \tag{3.38}$$

Gli angoli γ_T e ψ_T sono invece i controlli che determinano la direzione della spinta. Esplicitando l'espressione dell'Hamiltoniano, che per brevità non viene riportata, e annullandone le derivate parziali rispetto agli angoli γ_T e ψ_T si ottengono i valori ottimali per gli angoli di spinta:

$$\sin\gamma_T = \frac{\lambda_u}{\lambda_V} \tag{3.39}$$

$$\cos\gamma_T \cos\psi_T = \frac{\lambda_v}{\lambda_V} \tag{3.40}$$

$$\cos\gamma_T \sin\psi_T = \frac{\lambda_w}{\lambda_V} \tag{3.41}$$

dove

$$\lambda_V = \sqrt{\lambda_u^2 + \lambda_v^2 + \lambda_w^2} \tag{3.42}$$

è il modulo del primer vector che, come anticipato, è parallelo alla direzione ottimale di spinta.

Le equazioni differenziali per le variabili aggiunte sono fornite dalle equazioni di Eulero-Lagrange. Si ottiene (trascurando i termini aerodinamici per semplicità):

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_r = \frac{1}{r^2}\Bigg[\lambda_\vartheta \frac{v}{\cos\Phi} + \lambda_\Phi w + \lambda_u\left(-\frac{2}{r} + v^2 + w^2\right) \\ + \lambda_v(-uv + vw\tan\Phi) + \lambda_w(-uw - v^2\tan\Phi)\Bigg]\end{aligned} \tag{3.43}$$

$$\dot{\lambda}_\vartheta = 0 \tag{3.44}$$

$$\dot{\lambda}_\Phi = \frac{1}{rcos^2\Phi}(-\lambda_\vartheta v\sin\Phi - \lambda_v vw + \lambda_w v^2) \tag{3.45}$$

$$\dot{\lambda}_u = \frac{1}{r}(-\lambda_r r + \lambda_v v + \lambda_w w) \tag{3.46}$$

$$\dot{\lambda}_v = \frac{1}{r}\left[-\lambda_\vartheta \frac{1}{\cos\Phi} - 2\lambda_u v + \lambda_v(u - w\tan\Phi) + 2\lambda_w v\tan\Phi\right] \tag{3.47}$$

$$\dot{\lambda}_w = \frac{1}{r}(-\lambda_\Phi - 2\lambda_u w - \lambda_v v\tan\Phi + \lambda_w u) \tag{3.48}$$

$$\dot{\lambda}_m = \frac{T}{m^2}\lambda_V \tag{3.49}$$

Capitolo 4
Caso di studio

Quello che si vuole studiare nel presente lavoro è la fattibilità di una missione con equipaggio alla volta di Marte. Le seguenti considerazioni sono fondamentali per impostare il codice di calcolo in maniera tale da essere adatto a quello che si vuole cercare.

4.1 Ottimizzazione traiettoria con VASIMR

Con riferimento all'approssimazione patched-conic, si procede a suddividere la missione in 3 fasi.

4.1.1 Evasione da SOI

La prima fase consiste nell'evasione dalla sfera di influenza terrestre con VASIMR®. L'evasione è attuata con un'orbita a spirale basata sull'approssimazione di Edelbaum, in modo da avere un eccesso iperbolico di velocità nullo alla fine della manovra. Per semplicità, si trascurano tutte le forze tranne la spinta e l'accelerazione in questa fase è considerata costante:

$$\frac{T}{m} = K = \frac{\Delta V_{esc}}{\Delta t_{esc}} \tag{4.1}$$

Siccome:

$$P = \frac{Tc}{2} \tag{4.2}$$

È possibile scrivere la velocità efficace di scarico in funzione di K:

$$c = \frac{2P}{\frac{T}{m}m} = \frac{2P}{Km} \tag{4.3}$$

Sostituendo la c, l'equazione per la portata di propellente è:

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} = -\frac{T}{c} = -\frac{K^2 m^2}{2P} \tag{4.4}$$

Si ottiene allora l'equazione differenziale:

$$-\frac{dm}{m^2} = \frac{K^2}{2P} dt \tag{4.5}$$

Integrando fra punto di partenza (staging point, pedice ref) e punto di escape (pedice 0):

$$\frac{1}{m_0} = \frac{1}{m_{ref}} + \frac{\Delta V_{esc}^2}{2P\Delta t_{esc}} \tag{4.6}$$

Questa relazione permette di ottimizzare la massa m_0 all'uscita dalla SOI. Le condizioni al contorno sono:

$$\bar{r}_0 = \bar{r}_{\oplus}(t_0) \tag{4.7}$$

$$\bar{V}_0 = \bar{V}_{\oplus}(t_0) \tag{4.8}$$

4.1.2 Fase eliocentrica

Appena fuori dalla SOI terrestre inizia la fase eliocentrica. Il moto dello S/C di massa puntiforme variabile è regolato dalle equazioni del moto in un riferimento eliocentrico (3.25), (3.26) e (3.27). L'Hamiltoniano del sistema è:

$$H = \lambda_r^T V + \lambda_V^T g_{\odot} + T S_F \tag{4.9}$$

dove

$$S_F = \frac{\lambda_V^T \boldsymbol{T}}{mT} - \frac{\lambda_m}{c} \tag{4.10}$$

è la Switching function (coefficiente di spinta).

Nel caso di propulsori con Isp variabile (e di conseguenza c variabile), la traiettoria è regolata dalla direzione e dal modulo di spinta. Pertanto, la velocità efficace di scarico c e la potenza della spinta P sono variabili di controllo, con P che varia tra 0 e un valore massimo Pmax. Se $S_F > 0$ allora la potenza assume il suo massimo valore, altrimenti il suo minimo.

Differenziando l'Hamiltoniano rispetto a c e ponendolo pari a zero si ottiene il valore ottimale per la velocità efficace di scarico:

$$c_{opt} = 2m\frac{\lambda_m}{\lambda_V} \tag{4.11}$$

Come spiegato nel precedente capitolo, se il valore che si ottiene va oltre il dominio di ammissibilità, il c_{opt} assume il valore minimo o massimo del dominio stesso. A partire dalla (4.11), l'accelerazione può essere vista come:

$$\frac{T}{m} = P\frac{\lambda_V}{m^2\lambda_m} \tag{4.12}$$

Se non si applicano vincoli alla velocità efficace di scarico, allora il termine $m^2\lambda_m$ è costante. Ciò implica che l'accelerazione è proporzionale a λ_V, che è costante se non si considerano altre forze esterne. Sostituendo il valore di ottimo di c nella derivata dell'Hamiltoniano rispetto alla potenza:

$$\left(\frac{dH}{dP}\right)_{c_{opt}} = \eta\frac{\lambda_V^2}{2m^2\lambda_m} \tag{4.13}$$

Essa assume sempre valori positivi poiché λ_m è positivo. Ciò significa che la potenza impiegata è P_{max}.

4.1.3 Cattura

Alla fine della fase eliocentrica della trasferta, lo S/C entra all'interno della sfera di influenza marziana. Come per la fase di evasione, l'inserimento nell'orbita desiderata è fatto con eccesso iperbolico di velocità nullo. Il parametro da massimizzare è il seguente (con procedimento simile a quello per l'evasione):

$$\varphi = m_{cap} = \frac{1}{\frac{1}{m_f} + \frac{\Delta V_{cap}^2}{2P\Delta t_{cap}}} \tag{4.14}$$

Le condizioni al contorno sono:

$$\bar{r}_f = \bar{r}_{\mars}(t_f) \tag{4.15}$$

$$\bar{V}_f = \bar{V}_{\mars}(t_f) \tag{4.16}$$

$$\Delta t_{esc} + \Delta t_{cap} + t_f - t_0 = \Delta t \tag{4.17}$$

4.2 Condizioni di ottimo

A partire dalle condizioni (4.6), (4.14) e (4.17) si ricavano ora le aggiuntive condizioni di ottimo per il problema, sfruttando le (3.12), (3.13), (3.14), (3.15). Si associa μ_1 alla (4.17) e μ_2 alla (4.6).

$$\lambda_{m_0} + \mu_2\left(-\frac{1}{m_0^2}\right) = 0 \tag{4.18}$$

Da cui:

$$\mu_2 = \lambda_{m_0} m_0^2 \tag{4.19}$$

E

$$-\lambda_{m_f} + \frac{\frac{1}{m_f^2}}{\left[\frac{1}{m_f} + \frac{\Delta V_{cap}^2}{2P\Delta t_{cap}}\right]^2} = 0 \tag{4.20}$$

Stessa cosa derivando J^*rispetto a Δt_{esc} e Δt_{cap} (solo che qui i λ non ci sono perché sono parametri costanti e quindi non hanno un λ associato):

$$\mu_1 + \mu_2\left(\frac{\Delta V_{esc}^2}{2P\Delta t_{esc}^2}\right) = 0 \tag{4.21}$$

$$\mu_1 + \frac{\frac{\Delta V_{cap}^2}{2P\Delta t_{cap}^2}}{\left[\frac{1}{m_f} + \frac{\Delta V_{cap}^2}{2P\Delta t_{cap}}\right]^2} = 0 \tag{4.22}$$

Infine:

$$-H_0 - \mu_1 = 0 \tag{4.23}$$

$$+H_f + \mu_1 = 0 \tag{4.24}$$

Da cui:

$$\mu_1 = -TS_F \tag{4.25}$$

Sostituendo (4.19) e (4.25) nella (4.21) si ottiene la prima condizione di ottimo:

$$\lambda_{m_0} m_0^2\left(\frac{\Delta V_{esc}^2}{2P\Delta t_{esc}^2}\right) - TS_F = 0 \tag{4.26}$$

Mentre da (4.20), (4.22) e (4.25) si ottiene la seconda:

$$\lambda_{m_f} m_f^2\left(\frac{\Delta V_{cap}^2}{2P\Delta t_{cap}^2}\right) - TS_F = 0 \tag{4.27}$$

Capitolo 5
Risultati

In questo ultimo capitolo verranno analizzati e commentati i risultati trovati con l'utilizzo di un codice FORTRAN che implementa la teoria del controllo ottimale adeguato al caso di studio. Abbiamo 14 variabili:

$$r \quad \vartheta \quad \Phi \quad u \quad v \quad w \quad \lambda_r \quad \lambda_\Phi \quad \lambda_u \quad \lambda_v \quad \lambda_w \quad m \quad \lambda_m \quad \Delta V$$

Il λ_ϑ è nullo, poiché costante. La sua derivata è zero e viene trattato come un parametro. ΔV è invece solo una variabile di comodo. Questi valori variano e vengono memorizzati nei 101 punti (100 intervalli) in cui si suddivide la traiettoria. I parametri sono invece:

$$t_0 \quad t_1 \quad \lambda_\vartheta \quad t^* \quad \Delta t_{esc} \quad \Delta t_{cap}$$

E sono in ordine: tempo di partenza, tempo di arrivo, λ_ϑ, parametro che serve per spostare arbitrariamente Marte sulla sua orbita in modo da trovare, se serve, la soluzione ottimale se Marte fosse nella posizione più favorevole o per fare un rendez-vous ($t^* = 0$), durata dell'evasione e durata della cattura.
Si hanno quindi complessivamente 18 incognite: 12 valori iniziali delle 12 variabili (essendo ΔV di comodo e $\lambda_m = 1$: uno dei lambda può essere scelto arbitrariamente essendo tutti scalabili con una costante arbitraria) più i 6 parametri costanti.
Due subroutine fondamentali sono la subroutine FUNZ e la subroutine BOUND che forniscono rispettivamente il sistema di equazioni differenziali in coordinate sferiche e il calcolo dell'errore sulle condizioni al contorno.

5.1 Assunzioni e parametri di riferimento

A partire da una soluzione di prova il codice gira fino a raggiungere l'errore più piccolo possibile sulle condizioni al contorno per arrivare alla convergenza. Sono stati utilizzati i seguenti parametri di riferimento e di ottimizzazione:

r_{ref}	Raggio medio orbita terrestre intorno al Sole	149 597 871 km
v_{ref}	Velocità orbitale della Terra, $v_{ref} = \sqrt{\frac{\mu_{\odot}}{r_{ref}}}$	29.78469 km/s
m_{ref}	Massa in L1	165 000 kg (Missione con equipaggio) 20 000 kg (Missione cargo)
t_{ref}	r_{ref}/v_{ref}	58.132821 giorni
r_{min}	Correction ratio	0.1
P_{bis}	Incremento di errore tollerato	2
J_{max}	Numero massimo di iterazioni	2000

Tabella 1 Parametri di riferimento e di ottimizzazione

Nel seguito sono presentati alcuni risultati: si è studiata una semplice missione cargo alla volta di Marte e successivamente una ipotetica missione umana. Entrambe propulse da VASIMR®, utilizzano come staging point il punto lagrangiano Terra-Luna L1, punto cis-lunare. La scelta è puramente ispirata a quanto suggerito dagli studi di NASA e Ad Astra Rocket Company ma ovviamente è variabile e influenza notevolmente la missione. I punti Lagrangiani sono punti particolari in cui le forze gravitazionali e le forze centrifughe sono esattamente in equilibrio, per cui, quando un corpo si trova in questi punti è in un equilibrio di forze, cioè ha accelerazioni e velocità angolari nulle.

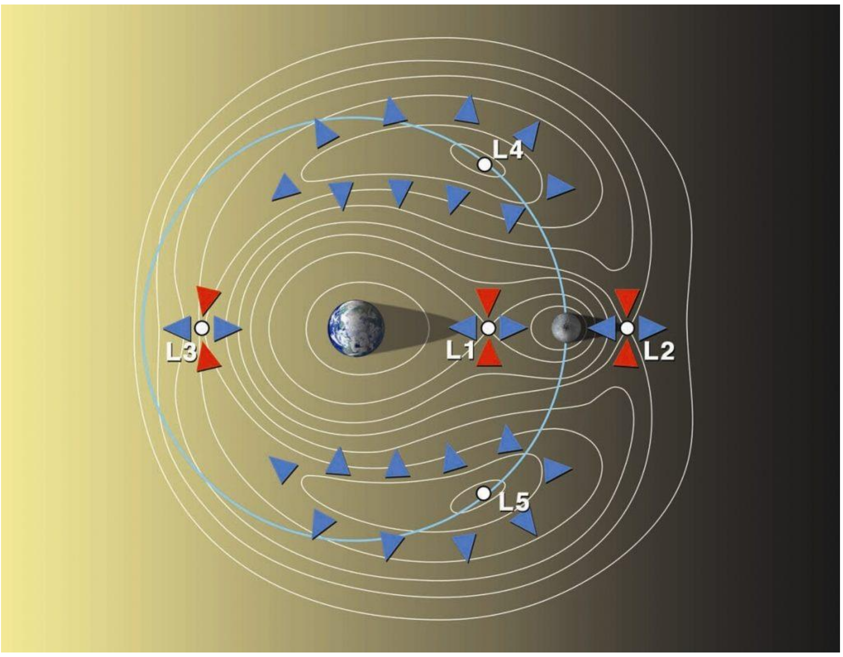

Figura 19 Punti Lagrangiani Terra-Luna

È interessante la scelta di uno di questi punti: si possono considerare come un "parcheggio" e pertanto si può pensare di assemblarci lo S/C completo. Ad esempio, per la missione umana si potrebbe lanciare tutto ciò che serve molto prima della missione: magari spiraling da LEO con propulsione elettrica con VASIMR® come payload e analogamente si porterebbe in L1 anche l'habitat e tutto ciò che fa parte di quello che si può definire Mars Lander (ML). E poi invece si potrebbe inviare con propulsione chimica l'eventuale equipaggio umano (per questioni di velocità), che andrebbe a completare in L1 lo S/C, il quale partirebbe successivamente, propulso da VASIMR®, alla volta del pianeta rosso.

In realtà, se si fanno cadere le ipotesi di traiettoria circolare di Terra e Luna, e si ipotizzano traiettorie ellittiche, non abbiamo più questi punti stazionari ma delle orbite stazionarie, che sono dette HALO orbit (per la loro forma ad aureola). Quindi abbiamo qualcosa di fermo non in un punto ma in un'orbita stazionaria attorno a queste ampie zone. Per semplicità di calcolo, nel seguito è stata considerata soltanto una stima della distanza tra Terra ed L1: approssimativamente 300000 km.

Per quanto riguarda invece l'orbita di arrivo, per entrambe le missioni è stata scelta un'orbita marziana con un raggio di 20483,58 km, essendo un'orbita aerosincrona con un periodo orbitale pari al giorno solare medio marziano, 1 sol.

5.2 Missione Cargo

Si considera una missione cargo alla volta di Marte. Missioni cargo saranno fondamentali nel futuro prossimo, sia nella prima fase di una ipotetica colonizzazione, sia nel mentre. Lo sviluppo della robotica potrebbe portare ad avere a disposizione macchine in grado di lavorare autonomamente, svolgendo attività essenziali in vista dell'arrivo dell'uomo e preparando il terreno per stabilire un avamposto in maniera più semplice. Oppure diventa essenziale anche avere delle missioni cargo molto rapide che consentano di velocizzare la colonizzazione, almeno nelle prime fasi, avendo aiuti più frequenti da Terra.
Nel simulare una missione simile si è immaginato di avere, sulla base di ipotetiche missioni future [1], uno S/C con una massa iniziale di 20 tonnellate, posto nel punto di staging L1 da un qualche lanciatore chimico o da una serie di missioni volte al suo assemblaggio e propulso da VASIMR®. Si è ipotizzato, inoltre, un impulso specifico variabile, nella fase eliocentrica, tra 2000 e 10000 secondi.
Il peso iniziale è ripartito tra propellente, carico utile e peso di generatore più sistema di propulsione. L'obiettivo è quello di portare almeno 5 tonnellate di payload a destinazione.

5.2.1 Effetti del tempo e della potenza su m_{cap}

Si sono ottenuti dei risultati per tre diversi livelli di potenza e diversi tempi di missione (multipli di t_{ref}):

2000 ≤ Isp ≤ 10000 (m_{ref} = 20 t)			
days	**m_{cap} [t] (500 kW)**	**m_{cap} [t] (1 MW)**	**m_{cap} [t] (1.5 MW)**
58	1.039	2.073	3.099
116	6.193	10.099	12.065
174	12.29	15.105	16.205
232	15.441	17.104	17.301
290	17	17.459	17.728

Tabella 2 Effetti della potenza e del tempo di missione sulla massa alla fine della fase di cattura

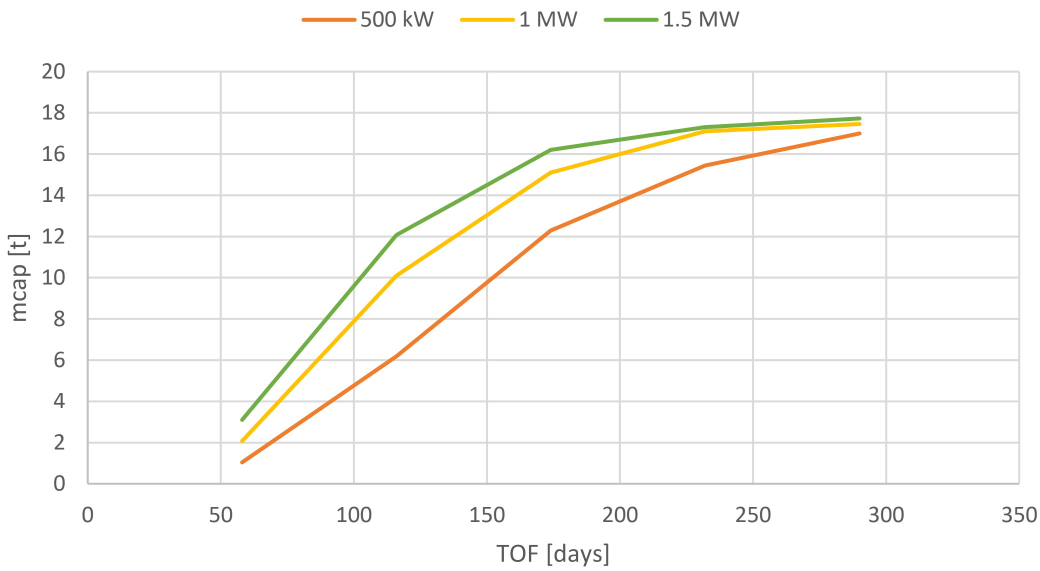

Figura 20 Effetti della potenza e del tempo di missione sulla massa alla fine della fase di cattura

Si nota molto bene come all'aumentare della potenza a disposizione la massa disponibile alla fine della fase di cattura tenda a valori sempre maggiori. Si arriva ad un asintoto che è molto prossimo alla massa iniziale. Allo stesso modo, all'aumentare del tempo di missione si hanno valori di massa sempre maggiori (a parità di potenza). Lunghi tempi e basse spinte (quindi grandi impulsi specifici) sono caratteristici della propulsione elettrica, come visto nel Capitolo 2. Per una missione cargo generica può ovviamente essere ininfluente il tempo di missione, soprattutto se si ha un payload insensibile all'ambiente spaziale: questo porterebbe a considerare solo la possibilità di avere una missione molto lunga con un consumo minimo di propellente e quindi un carico utile ottimizzato il più possibile. Tuttavia, la componentistica elettronica dello S/C soffre l'ambiente radiativo spaziale e, inoltre, in ottica futura sarebbe molto interessante avere a disposizione rifornimenti e attrezzature in un tempo decisamente più breve. Si pensi ad esempio ad una qualsiasi e probabilissima situazione di emergenza che occorra dal momento che degli esseri umani abbiano colonizzato un pianeta del tutto inospitale.

Nel seguito sono riportati più nel dettaglio altri risultati per ciascuna delle 3 scelte di potenza al variare del tempo di missione:

500 kW

500 kW					
	58 days	**116 days**	**174 days**	**232 days**	**290 days**
$m_{ref}\ [t]$	20	20	20	20	20
$m_0[t]$	3.835	14.604	18.546	19.164	19.462
$m_f[t]$	1.091	6.715	13.080	16.128	17.525
$m_{cap}[t]$	1.039	6.193	12.29	15.441	17.000
$m_{prop_{tot}}\ [t]$	18.961	13.807	7.71	4.559	3

Tabella 3 Effetti del tempo di volo con potenza costante (500 kW) sulle masse

500 kW					
	58 days	**116 days**	**174 days**	**232 days**	**290 days**
$\Delta t_{tot}\ [days]$	58	116	174	232	290
$\Delta t_{esc}\ [days]$	0.146	1.665	7.846	14.110	22.234
$\Delta t_{helio}\ [days]$	56.819	110.498	156.326	200.407	240.354
$\Delta t_{cap}\ [days]$	1.046	3.859	9.860	17.531	27.471

Tabella 4 Ripartizione durate

500 kW					
	58 days	**116 days**	**174 days**	**232 days**	**290 days**
$\Delta V_{tot}\ [km/s]$	38.832	20.283	13.514	11.039	9.962
$\Delta V_{esc}\ [km/s]$	1.153	1.153	1.153	1.153	1.153
$\Delta V_{helio}\ [km/s]$	36.233	17.685	10.915	8.440	7.363
$\Delta V_{cap}\ [km/s]$	1.446	1.446	1.446	1.446	1.446

Tabella 5 Effetti del tempo di volo con potenza costante (500 kW) sul ΔV

500 kW					
	58 days	**116 days**	**174 days**	**232 days**	**290 days**
$I_{sp_{esc}}\ [s]$	55.76	635.91	2996.63	5389.05	8491.86
$I_{sp_{helio_{avg}}}\ [s]$	4669.28	3744.94	5521.44	7055.64	9108.47
$I_{sp_{cap}}\ [s]$	5839.60	3500.30	4591.40	6620.68	9547.57

Tabella 6 Effetti del tempo di volo con potenza costante (500 kW) sull'Isp

500 kW					
	58 days	**116 days**	**174 days**	**232 days**	**290 days**
$T_{esc}\ [N]$	1828.07	160.30	34.02	18.91	12.00
$T_{helio_{avg}}\ [N]$	21.83	27.22	18.46	14.45	11.19
$T_{cap}\ [N]$	17.46	29.12	22.20	15.40	10.68

Tabella 7 Effetti del tempo di volo con potenza costante (500 kW) sulla spinta

1 MW

1 MW					
	58 days	**116 days**	**174 days**	**232 days**	**290 days**
$m_{ref}\ [t]$	20	20	20	20	20
$m_0 [t]$	7.626	18.379	19.276	19.616	19.828
$m_f [t]$	2.178	10.688	15.672	17.484	17.913
$m_{cap} [t]$	2.073	10.099	15.105	17.104	17.459
$m_{prop_{tot}}\ [t]$	17.927	9.901	4.895	2.896	2.541

Tabella 8 Effetti del tempo di volo con potenza costante (1 MW) sulle masse

1 MW					
	58 days	**116 days**	**174 days**	**232 days**	**290 days**
Δt_{tot} $[days]$	58	116	174	232	290
Δt_{esc} $[days]$	0.189	3.489	8.188	15.709	35.401
Δt_{helio} $[days]$	56.774	108.088	155.749	197.327	213.113
Δt_{cap} $[days]$	1.047	4.444	10.095	19.013	41.545

Tabella 9 Ripartizione durate

1 MW					
	58 days	**116 days**	**174 days**	**232 days**	**290 days**
ΔV_{tot} $[km/s]$	38.838	19.673	14.412	12.783	12.557
ΔV_{esc} $[km/s]$	1.153	1.153	1.153	1.153	1.153
ΔV_{helio} $[km/s]$	36.239	17.074	11.813	10.184	9.958
ΔV_{cap} $[km/s]$	1.446	1.446	1.446	1.446	1.446

Tabella 10 Effetti del tempo di volo con potenza costante (1 MW) sul ΔV

1 MW					
	58 days	**116 days**	**174 days**	**232 days**	**290 days**
$I_{sp_{esc}}$ $[s]$	144.37	2665.12	6254.51	11999.52	27041.51
$I_{sp_{helio_{avg}}}$ $[s]$	4685.73	5407.97	7572.17	9345.89	9996.54
$I_{sp_{cap}}$ $[s]$	5855.92	5065.05	7846.72	13246.96	28252.50

Tabella 11 Effetti del tempo di volo con potenza costante (1 MW) sull'Isp

1 MW					
	58 days	**116 days**	**174 days**	**232 days**	**290 days**
T_{esc} $[N]$	1412.16	76.50	32.60	16.99	7.54

$T_{helio_{avg}}$ $[N]$	43.51	37.70	26.92	21.81	20.39
T_{cap} $[N]$	34.81	40.25	25.98	15.39	7.22

Tabella 12 Effetti del tempo di volo con potenza costante (1 MW) sulla spinta

1.5 MW

1.5 MW					
	58 days	**116 days**	**174 days**	**232 days**	**290 days**
m_{ref} $[t]$	20	20	20	20	20
$m_0[t]$	11.291	18.942	19.541	19.843	19.923
$m_f[t]$	3.254	12.605	16.617	17.465	17.841
$m_{cap}[t]$	3.099	12.065	16.205	17.301	17.728
$m_{prop_{tot}}$ $[t]$	16.901	7.935	3.795	2.699	2.272

Tabella 13 Effetti del tempo di volo con potenza costante (1.5 MW) sulle masse

1.5 MW					
	58 days	**116 days**	**174 days**	**232 days**	**290 days**
Δt_{tot} $[days]$	58	116	174	232	290
Δt_{esc} $[days]$	0.266	3.671	8.734	25.855	52.93
Δt_{helio} $[days]$	56.695	107.811	154.739	176.439	176.773
Δt_{cap} $[days]$	1.05	4.539	10.559	29.755	60.355

Tabella 14 Ripartizione durate

1.5 MW					
	58 days	**116 days**	**174 days**	**232 days**	**290 days**
$\Delta V_{tot}\ [km/s]$	38.835	20.086	15.735	15.116	15.087
$\Delta V_{esc}\ [km/s]$	1.153	1.153	1.153	1.153	1.153
$\Delta V_{helio}\ [km/s]$	36.237	17.487	13.136	12.517	12.488
$\Delta V_{cap}\ [km/s]$	1.446	1.446	1.446	1.446	1.446

Tabella 15 Effetti del tempo di volo con potenza costante (1.5 MW) sul ΔV

1.5 MW					
	58 days	**116 days**	**174 days**	**232 days**	**290 days**
$I_{sp_{esc}}\ [s]$	304.78	4206.21	10007.37	29624.51	66046.90
$I_{sp_{helio_{avg}}}\ [s]$	4725.45	6528.87	8928.73	9996.54	9996.54
$I_{sp_{cap}}\ [s]$	5912.51	6579.83	11610.95	31130.71	63154.49

Tabella 16 Effetti del tempo di volo con potenza costante (1.5 MW) sull'Isp

1.5 MW					
	58 days	**116 days**	**174 days**	**232 days**	**290 days**
$T_{esc}\ [N]$	1003.66	72.70	30.56	10.32	5.04
$T_{helio_{avg}}\ [N]$	64.71	46.84	34.25	30.59	30.59
$T_{cap}\ [N]$	57.72	46.48	26.34	9.82	4.84

Tabella 17 Effetti del tempo di volo con potenza costante (1.5 MW) sulla spinta

Si può notare, oltre agli andamenti già visti della massa di cattura, come il ΔV eliocentrico diminuisca, indipendentemente dal livello di potenza, all'aumentare del tempo di volo. Come sappiamo, il ΔV è ciò che caratterizza una missione e ne dà un prima stima in termini di costo propulsivo. In riferimento a questo, la cosa fondamentale da notare è che la velocità efficace di scarico, e di conseguenza l'impulso specifico, aumentano all'aumentare del tempo di volo e anche della potenza. Riferendosi alle (2.4) e (2.8), è facile vedere come di conseguenza la massa di propellente necessario vada a ridursi enormemente all'allungarsi della missione e un po' anche all'aumentare minimo della potenza.

5.2.2 Effetti della massa specifica del generatore

A questo punto bisogna anche introdurre l'effetto del livello tecnologico su quello che sarà poi effettivamente il carico utile disponibile. α è definito come il peso specifico del generatore di potenza; tutto quello che rimane, tenendo conto dell'appena citato parametro, comprende anche la struttura e tutto ciò che non riguarda l'apparato di potenza:

$$m_u = m_{cap} - \alpha \cdot P \tag{5.1}$$

Quindi la massa del generatore si suppone essere proporzionale alla potenza tramite α. Al livello attuale si va dai 4 ai 10 kg/kW per α, ma si può iniziare a parlare anche di 2 kg/kW o addirittura, recentemente, si inizia a parlare della possibilità di poter raggiungere l'interessante livello di 1 kg/kW per generatori di tipo nucleare.

- $\alpha = 2\ kg/kW$

2000 ≤ Isp ≤ 10000 (m_{ref} = 20 t)			
days	m_u **[t] (500 kW)**	m_u **[t] (1 MW)**	m_u **[t] (1.5 MW)**
58	0.039	0.073	0.099
116	5.193	8.099	9.065
174	11.290	13.105	13.205
232	14.441	15.104	14.301
290	16	15.459	14.728

Tabella 18 2 kg/kW

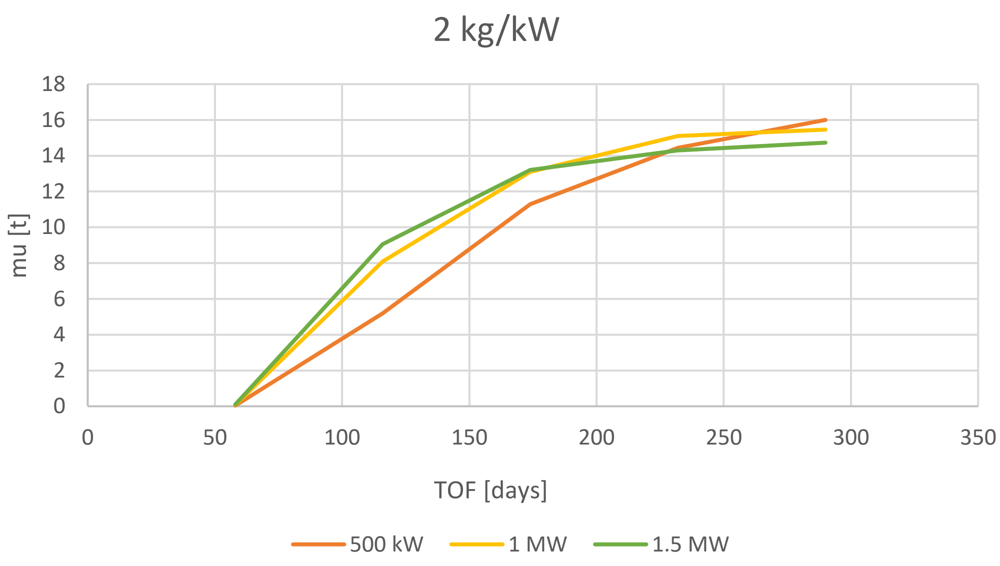

Figura 21 2 kg/KW

È interessante notare come si riuscirebbe ad avere una massa utile accettabile con soli 500 kW di potenza e in neanche 4 mesi di viaggio. Altrettanto interessante è che nello stesso arco temporale, con mezzo o un Mega-Watt in più si avrebbe a disposizione un carico utile maggiore e si avrebbe la sicurezza di riuscire a portare sulla superficie marziana le 5 tonnellate prefissate. Tutto sempre nell'ottica di voler fare una missione cargo veloce; tipicamente si può pensare di impiegare molto più tempo e quindi, come si vede bene, portare un carico utile molto grande consumando molto poco in termini di propellente.

- $\alpha = 4\, kg/kW$

2000 ≤ Isp ≤ 10000 (m_{ref} = 20 t)			
days	**m_u [t] (500 kW)**	**m_u [t] (1 MW)**	**m_u [t] (1.5 MW)**
58	-0.961	-1.927	-2.901
116	4.193	6.099	6.065
174	10.290	11.105	10.205
232	13.441	13.104	11.301
290	15	13.459	11.728

Tabella 19 4 kg/kW

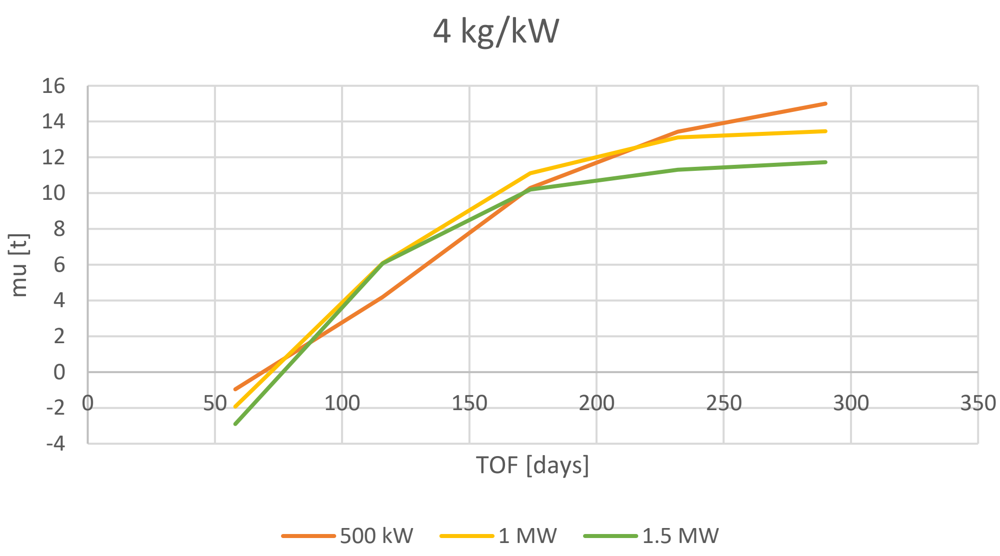

Figura 22 4 kg/kW

Qui invece si nota subito come per tempi brevi si abbia addirittura un valore negativo di massa. Oltre che un decremento marcato per tempi lunghi all'aumentare della potenza: questo è dovuto al peso del generatore che comincia a gravare sempre di più sullo S/C.

- $\alpha = 10\ kg/kW$

$2000 \leq Isp \leq 10000$ (m_{ref} = 20 t)			
days	m_u **[t] (500 kW)**	m_u **[t] (1 MW)**	m_u **[t] (1.5 MW)**
58	-3.961	-7.927	-11.901
116	1.193	0.099	-2.935
174	7.290	5.105	1.205
232	10.441	7.104	2.301
290	12	7.459	2.728

Tabella 20 10 kg/kW

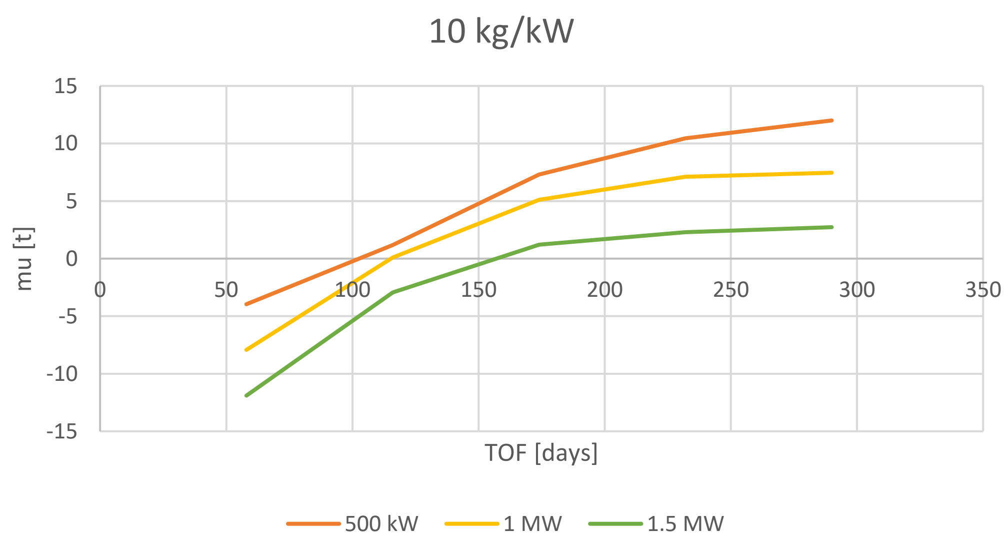

Figura 23 10 kg/kW

Con questa massa specifica si ha addirittura un valore negativo di massa per 1.5 MW e 116 giorni. Diventa ancora più marcato il decremento di massa all'aumentare della potenza per tempi lunghi. Un buon compromesso sembrano essere le circa 7 tonnellate che si riescono a portare in 174 giorni (meno di 6 mesi) con soli 500 kW.

5.3 Missione con equipaggio umano

Per quanto riguarda una missione con equipaggio umano, si è ipotizzata, sulla base della DRA 5.0, una massa iniziale pari a 165 tonnellate, di cui circa 61 tonnellate rappresentano il Mars Lander: 31 per l'habitat, 13.5 per l'Aeroshell e 16.5 per il sistema di discesa (ascesa). Salvo chiaramente un'ulteriore analisi approfondita sulle masse di tutta la componentistica dello S/C (è prevista una capacità di propellente di 42 tonnellate tenendo conto anche di struttura, tank etc.), l'obiettivo è quello di riuscire a portare questa massa utile in atmosfera marziana, e successivamente in superficie, bilanciando bene la quantità di propellente necessario e il tempo di missione impiegato. Si parte sempre da L1 con VASIMR® e si ha come obiettivo finale l'orbita aerosincrona marziana. L'eventuale fase di discesa è ovviamente oggetto di studio successivo. Nell'ottimizzazione l'impulso specifico è stato limitato sempre fra 2000 e 10000 secondi. Nel seguito sono riportati risultati analoghi alla missione cargo ma con differenti valori di potenza, avendo a che fare con una massa di partenza molto maggiore: 8 MW, 12 MW e 16 MW sono i valori di riferimento scelti, essendo la fascia 8 MW–18 MW quella indicata, da studi recenti [1], come adatta a ridurre in maniera sensibile il tempo di viaggio per Marte. Chiaramente non si sta parlando dei 39 giorni necessari con 200 MW [14] che è un obiettivo abbastanza utopico.

5.3.1 Effetti del tempo e della potenza su m_{cap}

2000 ≤ Isp ≤ 10000 (m_{ref} = 165 t)			
days	m_{cap} [t] (8 MW)	m_{cap} [t] (12 MW)	m_{cap} [t] (16 MW)
58	16.591	24.801	32.833
116	82.009	98.366	108.765
174	123.768	133.157	136.968
232	140.741	142.843	143.011
290	146.303	147.280	147.633

Tabella 21 Effetti della potenza e del tempo di missione sulla massa alla fine della fase di cattura

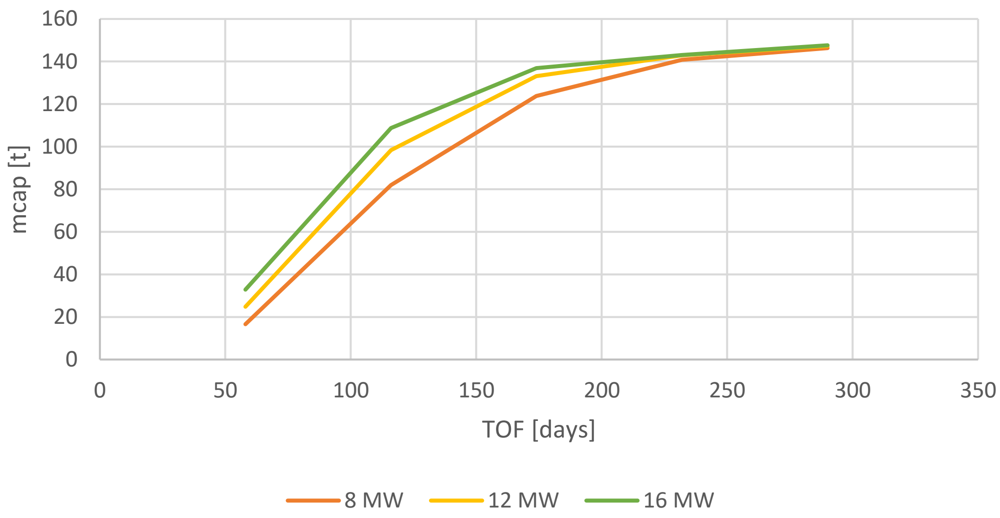

Figura 24 Effetti della potenza e del tempo di missione sulla massa alla fine della fase di cattura

Anche in questo caso si nota, come ovviamente prevedibile, un aumento della massa disponibile alla fine della fase di cattura all'aumentare del tempo di missione (a parità di potenza) e all'aumentare della potenza (a parità di tempo di missione). Si arriva per tutti e tre i valori di potenza ad un asintoto molto prossimo al valore della massa di partenza. È possibile notare come per tempi molto brevi (58 giorni) non ci sia, con questi livelli di potenza, la possibilità di avere una massa adeguata a quella di payload richiesto: come si può vedere dalle tabelle successive, avere una fase di evasione molto breve comporta un dispendio di propellente che rende pressoché esigua la massa finale. È il prezzo da pagare quando si cerca una traiettoria velocissima: si avrebbe il vantaggio a livello equipaggio, perché arrivare in meno di due mesi su Marte sarebbe perfetto, ma l'insostenibile svantaggio di non avere sufficiente propellente a bordo per soddisfare le richieste.
Già invece a partire da tempi inferiori ai 4 mesi si ha a che fare con valori ragionevoli di massa che, a seconda del livello tecnologico del generatore di potenza e del sistema propulsivo, possono diventare casi molto interessanti da approfondire.

Nel seguito sono presentati i risultati estesi per i 3 valori di potenza:

8 MW

8 MW					
	58 days	**116 days**	**174 days**	**232 days**	**290 days**
$m_{ref}\ [t]$	165	165	165	165	165
$m_0[t]$	61.037	151.121	158.833	161.696	163.473
$m_f[t]$	17.426	86.879	128.543	143.997	147.941
$m_{cap}[t]$	16.591	82.009	123.768	140.741	146.303
$m_{prop_{tot}}\ [t]$	148.409	82.991	41.232	24.259	18.697

Tabella 22 Effetti del tempo di volo con potenza costante (8 MW) sulle masse

8 MW					
	58 days	**116 days**	**174 days**	**232 days**	**290 days**
$\Delta t_{tot}\ [days]$	58	116	174	232	290
$\Delta t_{esc}\ [days]$	0.186	3.454	8.168	15.523	33.965
$\Delta t_{helio}\ [days]$	56.778	108.142	155.784	197.697	216.118
$\Delta t_{cap}\ [days]$	1.047	4.426	10.080	18.828	39.976

Tabella 23 Ripartizione durate

8 MW					
	58 days	**116 days**	**174 days**	**232 days**	**290 days**
$\Delta V_{tot}\ [km/s]$	38.838	19.671	14.344	12.655	12.389
$\Delta V_{esc}\ [km/s]$	1.153	1.153	1.153	1.153	1.153
$\Delta V_{helio}\ [km/s]$	36.239	17.073	11.745	10.057	9.791
$\Delta V_{cap}\ [km/s]$	1.446	1.446	1.446	1.446	1.446

Tabella 24 Effetti del tempo di volo con potenza costante (8 MW) sul ΔV

8 MW					
	58 days	**116 days**	**174 days**	**232 days**	**290 days**
$I_{sp_{esc}}$ $[s]$	137.77	2558.43	6050.16	11498.12	25158.40
$I_{sp_{helio_{avg}}}$ $[s]$	4684.32	5320.16	7472.28	9245.09	9996.54
$I_{sp_{cap}}$ $[s]$	618.38	4964.70	7642.03	12742.28	26333.41

Tabella 25 Effetti del tempo di volo con potenza costante (8 MW) sull'Isp

8 MW					
	58 days	**116 days**	**174 days**	**232 days**	**290 days**
T_{esc} $[N]$	11838.22	637.49	269.58	141.85	64.83
$T_{helio_{avg}}$ $[N]$	348.18	306.57	218.27	176.42	163.15
T_{cap} $[N]$	2637.49	328.52	213.42	127.99	61.94

Tabella 26 Effetti del tempo di volo con potenza costante (8 MW) sulla spinta

12 MW

12 MW					
	58 days	**116 days**	**174 days**	**232 days**	**290 days**
m_{ref} $[t]$	165	165	165	165	165
$m_0[t]$	90.489	156.003	161.068	163.596	164.328
$m_f[t]$	26.042	102.863	136.654	144.304	147.52
$m_{cap}[t]$	24.801	98.366	133.157	142.843	147.28
$m_{prop_{tot}}$ $[t]$	140.199	66.634	31.843	22.157	17.72

Tabella 27 Effetti del tempo di volo con potenza costante (12 MW) sulle masse

12 MW					
	58 days	**116 days**	**174 days**	**232 days**	**290 days**
Δt_{tot} $[days]$	58	116	174	232	290
Δt_{esc} $[days]$	0.257	3.667	8.661	24.641	51.684
Δt_{helio} $[days]$	56.705	107.818	154.877	178.952	179.323
Δt_{cap} $[days]$	1.049	4.537	10.494	28.456	59.049

Tabella 28 Ripartizione durate

12 MW					
	58 days	**116 days**	**174 days**	**232 days**	**290 days**
ΔV_{tot} $[km/s]$	38.873	20.039	15.600	14.904	14.873
ΔV_{esc} $[km/s]$	1.153	1.153	1.153	1.153	1.153
ΔV_{helio} $[km/s]$	36.238	17.433	13.001	12.305	12.274
ΔV_{cap} $[km/s]$	1.446	1.446	1.446	1.446	1.446

Tabella 29 Effetti del tempo di volo con potenza costante (12 MW) sul ΔV

12 MW					
	58 days	**116 days**	**174 days**	**232 days**	**290 days**
$I_{sp_{esc}}$ $[s]$	285.54	4074.30	9623.01	27377.96	57424.71
$I_{sp_{helio_{avg}}}$ $[s]$	4719.96	6444.78	8823.68	9996.54	9996.54
$I_{sp_{cap}}$ $[s]$	5888.28	6447.59	11225.51	28825.92	58512.59

Tabella 30 Effetti del tempo di volo con potenza costante (12 MW) sull'Isp

12 MW					
	58 days	**116 days**	**174 days**	**232 days**	**290 days**
T_{esc} $[N]$	8567.74	609.62	254.23	89.36	42.60

$T_{helio_{avg}}$ $[N]$	518.33	379.61	277.26	244.73	244.73
T_{cap} $[N]$	415.48	39.44	217.94	84.87	41.81

Tabella 31 Effetti del tempo di volo con potenza costante (12 MW) sulla spinta

16 MW

16 MW					
	58 days	**116 days**	**174 days**	**232 days**	**290 days**
m_{ref} $[t]$	165	165	165	165	165
$m_0[t]$	117.004	158.256	162.426	164.267	164.585
$m_f[t]$	34.449	112.823	139.421	144.767	148.024
$m_{cap}[t]$	32.833	108.765	136.968	143.011	147.633
$m_{prop_{tot}}$ $[t]$	132.167	56.235	28.032	21.989	17.367

Tabella 32 Effetti del tempo di volo con potenza costante (16 MW) sulle masse

16 MW					
	58 days	**116 days**	**174 days**	**232 days**	**290 days**
Δt_{tot} $[days]$	58	116	174	232	290
Δt_{esc} $[days]$	0.387	3.722	10.009	35.541	62.874
Δt_{helio} $[days]$	56.566	107.733	152.248	156.526	157.670
Δt_{cap} $[days]$	1.058	4.567	11.775	39.981	70.515

Tabella 33 Ripartizione durate

16 MW					
	58 days	**116 days**	**174 days**	**232 days**	**290 days**
$\Delta V_{tot}\ [km/s]$	38.796	20.661	17.186	17.044	17.029
$\Delta V_{esc}\ [km/s]$	1.153	1.153	1.153	1.153	1.153
$\Delta V_{helio}\ [km/s]$	36.198	18.062	14.588	14.446	14.430
$\Delta V_{cap}\ [km/s]$	1.446	1.446	1.446	1.446	1.446

Tabella 34 Effetti del tempo di volo con potenza costante (16 MW) sul ΔV

16 MW					
	58 days	**116 days**	**174 days**	**232 days**	**290 days**
$I_{sp_{esc}}\ [s]$	573.31	5513.89	14827.64	52651.54	93143.54
$I_{sp_{helio_{avg}}}\ [s]$	4818.04	7281.72	9780.06	9996.54	9996.54
$I_{sp_{cap}}\ [s]$	5985.92	7889.69	16461.11	53828.28	92848.69

Tabella 35 Effetti del tempo di volo con potenza costante (16 MW) sull'Isp

16 MW					
	58 days	**116 days**	**174 days**	**232 days**	**290 days**
$T_{esc}\ [N]$	5689.69	591.59	219.99	61.95	35.02
$T_{helio_{avg}}\ [N]$	677.03	447.97	333.53	326.31	326.31
$T_{cap}\ [N]$	544.94	413.45	198.16	60.60	35.13

Tabella 36 Effetti del tempo di volo con potenza costante (16 MW) sulla spinta

Per quanto riguarda questi dati completi è possibile fare gli stessi ragionamenti visti per la missione cargo. È interessante notare come nel caso con 16 MW e 116 giorni di durata si abbia una massa di propellente totale necessaria di poco superiore alla capacità massima ipotizzata per lo S/C nel DRA 5.0.

Sotto un dettaglio relativo all'andamento di velocità efficace di scarico e spinta, durante la fase eliocentrica, per una possibile missione con 16 W di potenza eseguibile in meno di 4 mesi.

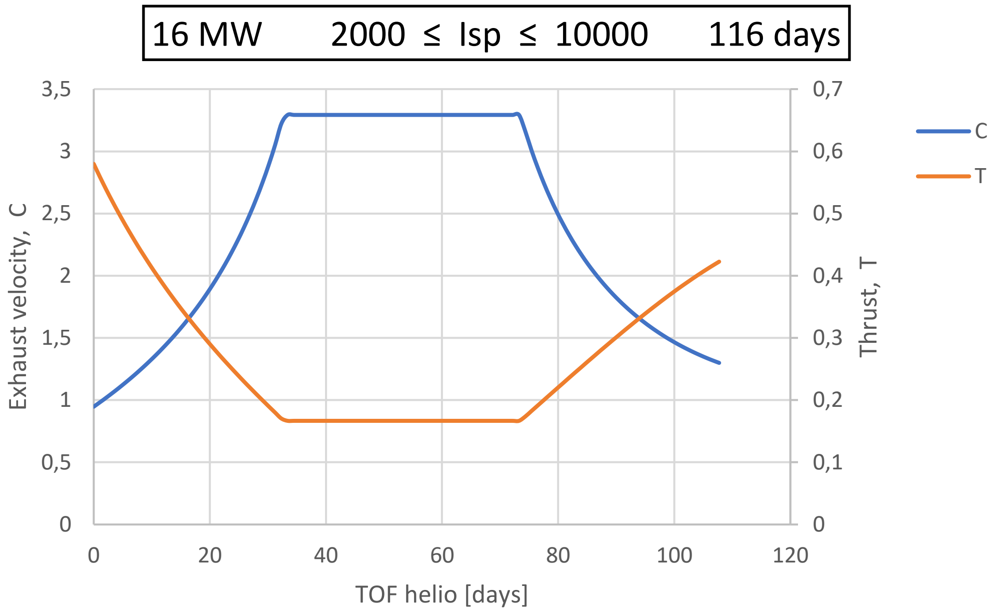

Figura 25 Andamento c e T per missione 116 giorni-16 MW

5.3.2 Effetti della massa specifica del generatore

Nel caso di missione umana si analizza l'impatto del generatore tenendo conto di un parametro tecnologico che varia tra 1 kg/kW e 4 kg/kW. Questo perché ci si vuol porre in una ottimistica visione futura e anche perché l'obiettivo 1 kg/kW non è visto come un'utopia. Si procede dunque con i dati di massa utile finale in funzione del peso specifico del generatore:

- $\alpha = 1\, kg/kW$

2000 ≤ Isp ≤ 10000 (m_{ref} = 165 t)			
days	m_u **[t] (8 MW)**	m_u **[t] (12 MW)**	m_u **[t] (16 MW)**
58	8.591	12.801	16.833
116	74.009	86.366	92.765
174	118.768	121.157	120.968
232	132.741	130.843	127.011
290	138.303	135.280	131.633

Tabella 37 1 kg/kW

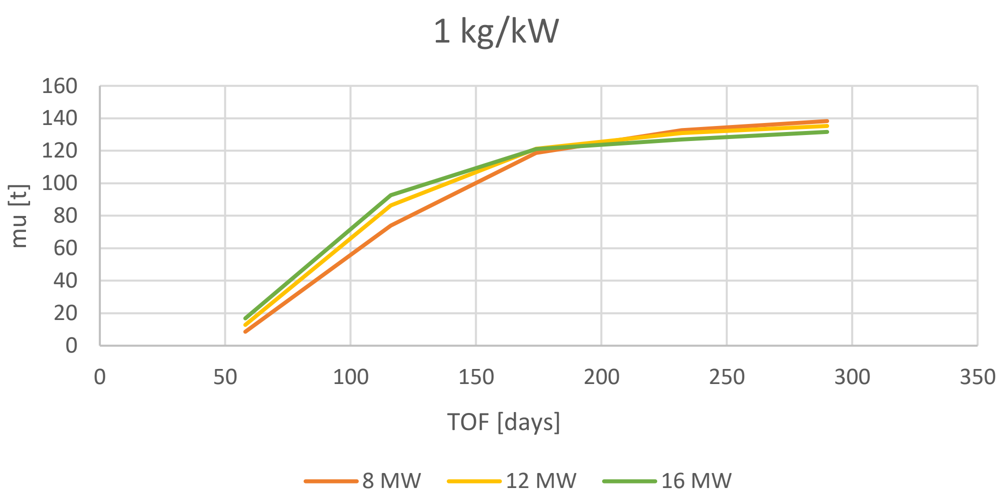

Figura 26 1 kg/kW

Si è sicuramente nella migliore situazione possibile dal punto di vista dell'avanzamento tecnologico. Missioni molto corte non garantirebbero una massa utile sufficiente ma già in 116 giorni si arriva a livelli più che buoni. È possibile, inoltre, già notare l'inversione delle curve a partire da quando si ipotizzano 232 giorni di missione.

- $\alpha = 2\ kg/kW$

2000 ≤ Isp ≤ 10000 (m_{ref} = 165 t)			
days	m_u **[t] (8 MW)**	m_u **[t] (12 MW)**	m_u **[t] (16 MW)**
58	0.591	0.801	0.833
116	66.009	74.366	76.765
174	107.768	109.157	104.968
232	124.741	118.843	111.011
290	130.303	123.280	115.633

Tabella 38 2 kg/kW

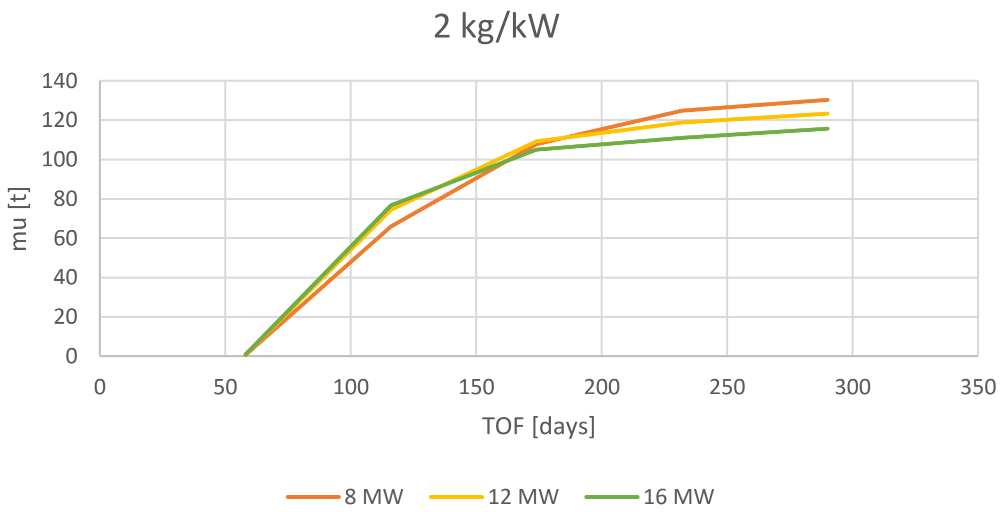

Figura 27 2 kg/kW

Solito discorso per tempi brevi, valori ancora accettabili per 116 giorni e inversione più marcata.

- $\alpha = 4\, kg/kW$

2000 ≤ Isp ≤ 10000 (m_{ref} = 165 t)			
days	**m_u [t] (8 MW)**	**m_u [t] (12 MW)**	**m_u [t] (16 MW)**
58	-15.409	-23.199	-31.167
116	50.009	50.366	44.765
174	91.768	85.157	72.968
232	108.741	94.843	79.011
290	114.303	99.280	83.633

Tabella 39 4 kg/kW

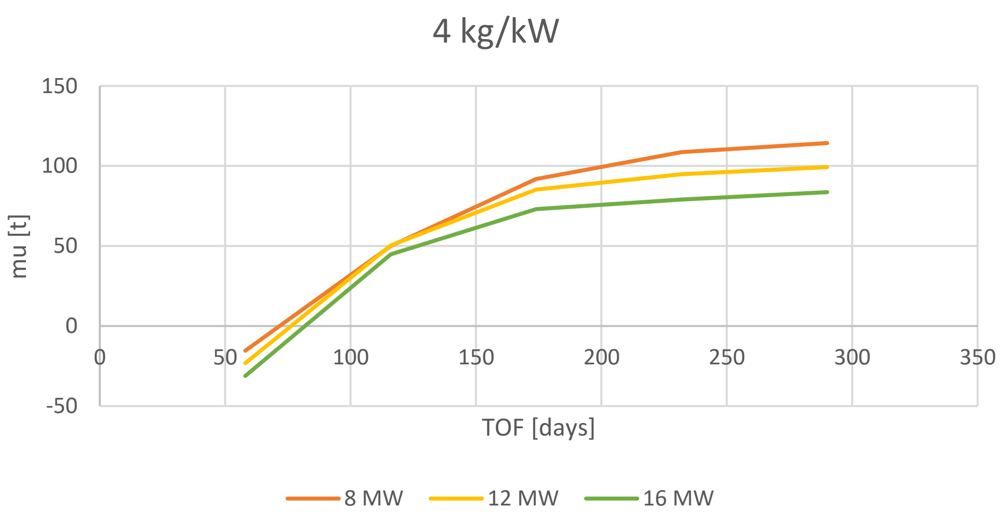

Figura 28 4 kg/kW

Per questo livello tecnologico abbiamo addirittura masse negative per tempi brevi, valori al limite per 116 giorni e inversione ancora aumentata.

5.3.3 Trade-off

È possibile fare una breve analisi di trade-off in considerazione di cosa sia fondamentale per realizzare, propulsivamente e logisticamente, una missione umana su Marte. Sicuramente, come largamente discusso, si vuole raggiungere l'orbita marziana nel tempo più breve possibile a causa di tutti danni che una simile trasferta può provocare ad esseri umani, ma è anche vero che bisogna tener conto del livello tecnologico a disposizione (e quindi della massa utile che effettivamente si riesce a far arrivare) e della quantità di propellente, nel senso che, una volta stabilita la massa iniziale dello S/C e la sua ripartizione, bisogna starci dentro.
Da quello che è emerso dalle analisi viste in precedenza è interessante valutare due casi:

1) **<u>8 MW – 174 giorni (5,71 mesi)</u>**

Caso molto interessante in termini di potenza e di massa di propellente necessaria. Anche scegliendo un valore di peso specifico del generatore pari a 4 kg/kW (sicuramente in linea con l'avanzamento attuale) si avrebbe un carico utile pari a 91,768 tonnellate (di gran lunga superiore alle 61 richieste per il payload) e una massa di propellente sufficiente di circa 41,232 tonnellate (esattamente il valore prestabilito dalla DRA 5.0 nel mass budget). Si avrebbe un generatore di potenza più leggero e quindi sarebbe più facile anche smaltire calore.
Rimane però il problema principale: circa 6 mesi di viaggio sono molto vicini a una Hohmann impulsiva e, inoltre, bisognerebbe capire come schermare adeguatamente l'equipaggio e come contrastare una così prolungata assenza di gravità. Infatti, si andrebbe verso una dose di radiazione assorbita dall'equipaggio [13] intorno ai 25 rem (radiation equivalent man), corrispondenti a circa 250 mSv, che sono ben oltre il limite di accettabilità di 20 mSv per avere un livello di radiazione tollerabile. E l'ultima cosa che si vuole è avere degli astronauti che una volta sul pianeta rosso abbiano seri problemi fisici.

2) <u>16 MW – 116 giorni (3,81 mesi)</u>

Questo altro caso è invece interessante soprattutto per il tempo di viaggio. Si ha sicuramente un generatore di potenza più pesante, sarà sicuramente previsto un sistema di dissipazione più oneroso ma, ipotizzando (molto ottimisticamente) un peso specifico del generatore pari a 1 kg/kW (anche 2 kg/kW potrebbero rientrare tranquillamente nell'avere una massa utile sufficiente) si avrebbe una massa utile di ben 92,765 tonnellate e soprattutto un tempo di volo quasi ridotto di un terzo. Questo consentirebbe di ridurre la dose di radiazione a cui viene esposto l'equipaggio a circa 15 rem (150 mSv), che è un dosaggio comunque alto, e in fascia di rischio moderato per lo sviluppo di patologie, ma sicuramente molto meglio gestibile in termini di capacità di schermatura. Ci sarebbero poi ovviamente altri piccoli vantaggi, come, ad esempio, la questione psicologica relativa a un viaggio più breve.
L'unico problema di questo caso, oltre al superamento dei limiti tecnologici, è che la massa di propellente necessaria sfora le 41 tonnellate previste dal DRA 5.0, attestandosi a circa 56,235 tonnellate necessarie. Però, allo stesso tempo, se si considera il vantaggio di avere circa 32 tonnellate di massa utile in più disponibili, si potrebbe pensare di usarne circa 15 per il propellente in eccesso e il restante per gli altri sistemi, ad esempio per il sistema di dissipazione, i tank e i dispositivi di schermatura.

Conclusioni

Nel presente lavoro è stata studiata l'ottimizzazione di una traiettoria Terra-Marte di sola andata utilizzando un codice in FORTRAN che si basa sulla teoria del controllo ottimale adattata al caso di traiettorie spaziali. Dopo aver esposto le questioni critiche inerenti lo sbarco degli esseri umani sul pianeta rosso, si sono richiamati gli elementi fondamentali della propulsione spaziale, si è introdotto il rivoluzionario propulsore ibrido VASIMR®, è stata richiamata la teoria del controllo ottimale, con particolare enfasi sul caso di interesse, e, infine, sono stati messi in luce alcuni interessanti risultati.

Si è dapprima studiata la possibilità di avere a disposizione missioni cargo molto veloci che siano di grande aiuto in una primissima fase di una futura e ipotetica colonizzazione di Marte. In seguito, entrando più nel merito di una missione con equipaggio umano, tenendo conto di tanti fattori (peso specifico del generatore, radiazioni etc.) si sono cercate delle soluzioni di trade-off per soddisfare tutte le necessità che una missione così ambiziosa comporta. Analizzando i risultati per tre diversi livelli di potenza disponibile (8 MW, 12 MW e 16 MW) e per cinque divere durate di missione (58, 116, 174, 232, 290 giorni) si è ritenuto opportuno fare considerazioni ulteriori riguardo a due interessanti possibilità: missione umana eseguibile in circa 6 mesi con 8 MW di potenza disponibile allo S/C dal generatore nucleare di potenza e missione umana eseguibile in meno di 4 mesi con 16 MW di potenza disponibile.

Tenendo sempre a mente tutte le difficoltà che un progetto così ambizioso comporta ma anche dell'inesauribile e ineguagliabile curiosità dell'uomo, solo il tempo ci dirà se un giorno saremo in grado di evolverci da "semplici" esseri umani, finalmente, in una specie interplanetaria.

Bibliografia

[1] https://www.nasa.gov

[2] https://www.adastrarocket.com

[3] https://www.marssociety.org

[4] Lorenzo Casalino, *Ottimizzazione Indiretta di Traiettorie Spaziali*, Politecnico di Torino.

[5] Lorenzo Casalino, Guido Colasurdo, *Optimization of Variable-Specific-Impulse Interplanetary Trajectories*, Politecnico di Torino, Journal od Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 27, No. 4, July-August 2004.

[6] Lorenzo Casalino, *Appunti del corso di Propulsione Spaziale*, anno 2020/2021.

[7] Lorenzo Casalino, *Equazioni in Coordinate Sferiche*, Politecnico di Torino.

[8] R.R. Bate, D.D. Mueller, J.E. White, *Fundamentals of Astrodynamics*, Dover, 1971.

[9] Mars Architecture Steering Group, NASA/SP-2009-566 – *Human Exploration of Mars, Design Reference Architecture 5.0*, July 2009

[10] Gerald Black, Mars Society Annual Convention, *SpaceX's Super Heavy and Starship*, October 18, 2019.

[11] MEPAG (2020), *Mars Scientific Goals, Objectives, Investigations, and Priorities: 2020*. D. Banfield, ed., 89 p. white paper posted March, 2020 by the Mars Exploration Program Analysis Group (MEPAG) at https://mepag.jpl.nasa.gov/reports.cfm.

[12] Tim Squire, A. Ryan, Samuel Bernard. *Radioprotective effects of induced astronaut torpor and advanced propulsion systems during deep space travel*. Life Sciences in Space Research, Elsevier 2020, 26, pp.105-113. 10.1016/j.lssr.2020.05.005. hal-02868066.

[13] F.R. Chang Díaz, M.D. Carter, T.W. Glover, A.V. Ilin, C.S. Olsen, J.P. Squire, R.J. Litchford, N. Harada, S.L. Koontz, *Fast and Robust Human Missions to Mars with Advanced Nuclear Electric Power and VASIMR® Propulsion*, Proceedings of Nuclear and Engineering Technologies for space 2013, Albuquerque (NM), 25 28 February 2013.

[14] A.V. Ilin, L.D. Cassady, T.W. Glover, F.R. Chang Diaz, *VASIMR Human Mission to Mars*, Space, Propulsion & Energy Sciences International Forum, University of Maryland (MD), 15-17 March 2011.

[15] Leonard D. Cassady, Benjamin W. Longmiery, Chris S. Olsen, Maxwell G. Ballenger, Greg E. McCaskill, Andrew V. Ilin, Mark D. Carter, Tim W. Glover, Jared P. Squire and Franklin R. Chang Dìaz, *VASIMR Performance Results*, 46th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit 25 - 28 July 2010, Nashville, TN.

[16] Alessandra Barco, *Human Mars Missions with Neuclear Electric Propulsion*, Tesi di Laurea Magistrale, Politecnico di Torino, 2014.

[17] Shampine, D.F., e Gordn, M.K., *Computer Solution of Ordinary Differential Equation: the Initial Value Problem*, 1° ed., W.H Freeman, San Francisco, CA, 1975.