

Politecnico di Torino

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

Misura sperimentale dello smorzamento e della rigidezza di diversi attacchi pala

Relatore
Prof. Daniele Botto

Candidato Veronica Iannotti

Anno Accademico 2021/2022

A me, che continuo a crederci nonostante tutto A mia nonna, che non smetterà mai di mancarmi

Sommario

La capacità di un sistema di dissipare l'energia di vibrazione è rilevante per la determinazione dei livelli di sollecitazione che possono essere raggiunti dal sistema stesso al fine di evitare danneggiamenti per fatica soprattutto in condizioni di risonanza. Nel presente lavoro è proposto un metodo per determinare i parametri modali di un disco palettato, quali frequenza di risonanza e smorzamento, investigando il comportamento dinamico del sistema in corrispondenza della zona di contatto tra la pala ed il disco.

In particolare, tale metodo si basa sull'utilizzo di un banco prova sperimentale e di un simulacro di pala in cui entrambe le estremità presentano un determinato tipo di geometria. Un sistema
di eccitazione è in grado di far vibrare il simulacro senza introdurre smorzamenti aggiuntivi. Un
vibrometro viene utilizzato per rilevare le oscillazioni dell'attacco pala ed il segnale di velocità
registrato viene manipolato ed analizzato utilizzando il metodo FreeVib, al fine di determinare i suddetti parametri modali istantanei. Le forze centrifughe, a cui le palette rotoriche sono
soggette, sono state simulate attraverso una forza assiale applicata tramite un sistema idraulico.

Due differenti geometrie, quali il giunto di tipo dovetail e di tipo fir-tree, sono state analizzate
in differenti condizioni di sollecitazione e due differenti forme modali sono state prese in considerazione. Infine, misure sperimentali in condizioni di basso attrito sono state effettuate per il
giunto dovetail attraverso l'utilizzo di un lubrificante in corrispondenza delle zone di contatto
tra la paletta ed i suoi alloggi.

Gli andamenti non lineari del fattore di perdita e delle frequenze naturali ottenuti dalle prove sperimentali hanno sottolineato una dipendenza di tali parametri con la forza assiale e l'ampiezza delle vibrazioni. Dall'andamento dei parametri modali al variare dell'ampiezza delle vibrazioni è possibile identificare gli stati di adesione e slittamento caratteristici del contatto stesso. Il procedimento sperimentale proposto, dunque, permette di valutare in modo qualitativo l'effetto dell'attacco pala-disco sulla dinamica del sistema. I risultati ottenuti in tale lavoro possono essere

utilizzati per ulteriori analisi o come validazione sperimentale di modelli numerici.

Abstract

The capability of a system to dissipate vibration energy is relevant for determining the stress levels that could be achieved by the system itself, in order to avoid damage due to fatigue especially in resonance conditions. In this work a method is proposed to define modal parameters of a bladed disk, such as resonant frequency and friction damping, investigating the dynamic behavior of the system on the contact area between blade and disk.

Particularly, this method is based on the use of an experimental test rig and a dummy blade in which both ends have a certain type of geometry. An excitation system is capable of vibrating the blade and its velocity signal has been manipulated and analyzed using the *FreeVib* method in order to determine the aforementioned instantaneous modal parameters. The centrifugal forces, to which the rotor blades are subjected, have been simulated through an axial force applied with a hydraulic system. Two different joint geometries, namely *dovetail* and *fir-tree*, were analyzed under different load conditions and two different mode shapes were considered. Finally, experimental measurements in low friction condition were carried out for the *dovetail* joint, using a lubrificant at the contact areas between the blade and its slots.

The non-linear trends of the loss factor and the natural frequencies obtained from the experimental tests show a dependence of these parameters with the axial force and the amplitude of vibrations. From the trend of the modal parameters to the variation of the amplitude of the vibrations, it is possible to identify the stick-slip condition characteristic of the contact itself. The proposed experimental procedure allows to evaluate the qualitative effect of the blade attachment on the dynamic of the system. The results obtained in this work can be used for futher analysis or as experimental validation of numerical models.

Indice

A	bstra	act	5
In	trod	uzione	15
1	Bar	aco prova sperimentale	19
	1.1	Sistema di supporto del provino	21
	1.2	Sistema di applicazione del carico	21
	1.3	Sistema di eccitazione	22
	1.4	Sistema di misurazione	24
	1.5	Acquisizione e visualizzazione dei segnali	25
	1.6	Conclusioni	26
2	Ana	alisi del segnale	28
	2.1	Importazione del segnale	28
	2.2	Pre-processamento	29
	2.3	Ricampionamento	30
	2.4	Filtraggio del segnale	30
	2.5	Elaborazione delle informazioni	33
	2.6	Risultati	33
3	Stu	dio del contatto per un sistema semplificato	36
	3.1	Metodo di integrazione di Newmark	38
		3.1.1 Effetto dell'attrito e del rapporto tra le rigidezze	43
	3.2	Metodo del bilanciamento armonico	44
4	Ana	alisi dei risultati	47
	4.1	Giunto di tipo dovetail	50
		4.1.1 Primo modo flessionale	50
		4.1.2 Secondo modo flossionalo	5/

	4.2	Giunto di tipo dovetail con basso attrito	56
		4.2.1 Primo modo flessionale	56
		4.2.2 Secondo modo flessionale	58
	4.3	Effetto dell'attrito per il giunto $dovetail$	59
	4.4	Giunto di tipo fir-tree	61
		4.4.1 Primo modo flessionale	61
		4.4.2 Secondo modo flessionale	64
5	Det	erminazione analitica delle rigidezze di contatto	67
	5.1	Determinazione delle forze applicate	68
	5.2	Geometria del contatto	69
	5.3	Distribuzione di pressione	71
	5.4	Distribuzione dello sforzo di taglio	72
	5.5	Spostamenti relativi e rigidezze	73
	5.6	Spostamenti relativi e rigidezza in direzione normale $\ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots$	74
	5.7	Rigidezze teoriche in condizione di $full\ stick\ \dots\dots\dots\dots\dots$	75
Co	onclu	sioni	77
\mathbf{A}	Met	codo FreeVib	80
	A.1	Trasformata di Hilbert	80
	A.2	Sistema SDOF con smorzamento isteretico	81
В	Met	odo di integrazione di Newmark	83
\mathbf{C}	Met	odo del bilanciamento armonico	85
D	Dev	iazione standard	88
\mathbf{E}	Mod	dello semplificato del contatto con attrito	96
	E.1	Geometria del contatto	96
	E.2	Distribuzione di pressione	97
	E.3	Distribuzione dello sforzo di taglio	98
	E.4	Spostamenti relativi e rigidezza in direzione tangenziale	98
	E.5	Spostamenti relativi e rigidezza in direzione normale	99
Bi	bliog	grafia	101
$\mathbf{R}^{\mathbf{i}}$	ingra	ziamenti	105

Elenco delle figure

1.1	Schema semplificato del banco prova	19
1.2	Rappresentazione del simulacro di pala con giunto di tipo dovetail	20
1.3	Schema del sistema di supporto	21
1.4	Sistema di supporto e trazione	22
1.5	Shaker: segnale di input	23
1.6	Shaker: drive rod	24
1.7	Puntatore e controllore laser	25
1.8	Blocco dei connettori (a); Generatore e sistema acquisizione dati (b)	25
2.1	Fasi di elaborazione del segnale	28
2.2	Segnali in input	29
2.3	Touch e Separazione	29
2.4	Decadimento libero	30
2.5	Filtro passabanda [27]	31
2.6	Componenti del decadimento libero	32
2.7	Decadimento libero - Componente principale	32
2.8	Frequenza e fattore di perdita	33
2.9	Parametri modali	34
3.1	Sistema SDOF con contatto strisciante	36
3.2	Modello di contatto con carico normale costante	37
3.3	Simulazione 1: Spostamenti (a), Velocità (b), Accelerazioni (c)	39
3.4	Simulazione 1: Forza di contatto	40
3.5	Simulazione 1: Spostamenti del ground	40
3.6	Simulazione 1: Ciclo di isteresi	41
3.7	Simulazione 1: Frequenza e fattore di perdita	41
3.8	Simulazione 1: Confronto con prova sperimentale	42
3.9	Simulazione 2: Effetto del coefficiente di attrito	43
3.10	Simulazione 3: Effetto del rapporto tra le rigidezze	44

3.11	Simulazione 4: Metodo del bilanciamento armonico	45
4.1	Geometria dei giunti analizzati	47
4.2	Frequenza: esempio	49
4.3	Loss factor: esempio	49
4.4	Dovetail - Primo modo flessionale: frequenza (1)	50
4.5	Dovetail - Primo modo flessionale: loss factor (1)	50
4.6	$Dovetail$ - Primo modo flessionale: frequenza e loss factor (2) $\ \ldots \ \ldots \ \ldots$	51
4.7	Dovetail - Primo modo flessionale: deviazione standard	52
4.8	Dovetail - Primo modo flessionale: confronto con FEM	53
4.9	$Dovetail$ - Primo modo flessionale: η_{stick} e η_{max}	53
4.10	Dovetail - Secondo modo flessionale: frequenza	54
4.11	$Dovetail$ - Secondo modo flessionale: deviazione standard $\dots \dots \dots \dots$	55
4.12	Dovetail - Secondo modo flessionale: confronto con FEM	55
4.13	Dovetail basso attrito - Primo modo flessionale: frequenza	56
4.14	$Dovetail$ basso attrito - Primo modo flessionale: loss factor $\dots \dots \dots$	57
4.15	Dovetail basso attrito - Primo modo flessionale: deviazione standard	57
4.16	$Dovetail$ basso attrito - Primo modo flessionale: η_{stick} e η_{max}	58
4.17	Dovetail basso attrito - Secondo modo flessionale: frequenza	58
4.18	Dovetail basso attrito - Secondo modo flessionale: deviazione standard	59
4.19	Dovetail - Primo modo flessionale: confronto attrito (2)	60
4.20	$Dovetail$ - Secondo modo flessionale: confronto attrito $\dots \dots \dots \dots$	61
4.21	$\it Fir-tree$ - Primo modo flessionale: frequenza	62
4.22	Fir-tree - Primo modo flessionale: loss factor	62
4.23	$\it Fir-tree$ - Primo modo flessionale: deviazione standard	63
4.24	Fir-tree - Primo modo flessionale: η_{stick} e η_{max}	64
4.25	Fir-tree - Secondo modo flessionale: frequenza e loss factor	64
4.26	Fir-tree - Secondo modo flessionale: deviazione standard	65
5.1	Contatto tra blade e slot (a) e contatto semplificato (b)	67
5.2	Forze di contatto	68
5.3	Forza normale e tangenziale al variare di k e F_{ax}	69
5.4	Geometria del contatto	69
5.5	Grandezze della regione di contatto	71
5.6	Regione di contatto al variare di k	71
5.7	Distribuzione di pressione al variare del carico	72
5.8	Distribuzione dello sforzo di taglio al variare del carico	79

5.9	Spostamenti relativi δ_x in direzione tangenziale	73
5.10	Rigidezza tangenziale K_t	74
5.11	Spostamenti relativi δ_z e rigidezza K_n in direzione normale	75
5.12	Rigidezze K_t e K_n in condizione di full stick	75
C.1	Ciclo di isteresi	86
D.1	Distribuzione normale con confidenza al 99.7 $\%$	89
E.1	Geometria del contatto	97

Elenco delle tabelle

1.1	Strumenti del banco prova	26
3.1	Simulazione 1: parametri e condizioni al contorno	38
5.1	Valori di riferimento: geometria e materiale	70
D.1	Dovetail - Primo modo flessionale: valori deviazione standard	90
D.2	$Dovetail$ - Secondo modo flessionale: valori deviazione standard $\dots \dots \dots$	91
D.3	$Dovetail$ basso attrito - Primo modo flessionale: valori deviazione standard \dots	92
D.4	Dovetail basso attrito - Secondo modo flessionale: valori deviazione standard $$	93
D.5	Fir-tree - Primo modo flessionale: valori deviazione standard	94
D.6	Fir-tree - Secondo modo flessionale: valori deviazione standard	95

Introduzione

Nei motori aeronautici il danneggiamento per fatica rappresenta uno degli aspetti più importanti e critici da dover considerare in fase di progettazione. Infatti, le condizioni operative a cui le palette di una turbomacchina devono operare sottopongono le stesse ad alti livelli di vibrazione e tensione. Differenti approcci sono stati studiati e validati nel corso degli anni ma uno dei metodi utilizzati per ovviare tale problema si basa sull'effetto dello smorzamento, inteso come la capacità di un componente di dissipare energia. Tale smorzamento può essere di origine aerodinamico e non-aerodinamico; quest'ultimo costituisce la principale fonte di dissipazione ed include lo smorzamento del materiale e quello per attrito. L'interfaccia tra la blade ed il disco rappresenta un esempio di smorzamento per attrito: in corrispondenza della zona di contatto, tra i due corpi si generano e si trasmettono delle forze che induco una dissipazione dell'energia del sistema.

Differenti studi, numerici e sperimentali, sono stati condotti al fine di valutare l'effetto dello smorzamento in corrispondenza di un attacco pala. Per esempio, un banco prova sperimentale è presentato in [31] in cui la forza centrifuga viene simulata attraverso un riscaldamento termico. In particolare, un provino a sezione rettangolare con estremità a forma di T è posizionato in un apposito alloggio e per prima cosa raffreddato ad una determinata temperatura attraverso l'impiego di aria liquida; successivamente espande alla temperatura ambiente simulando in tal modo la forza centrifuga e creando delle zone di contatto. Il carico applicato viene determinato attraverso l'uso di strain gauges, ovvero misurando le deformazioni del sistema.

In [7] l'obiettivo degli autori era quello di verificare che il metodo DLFT (dynamic lagrangian frequency time) fosse in grado di prevedere correttamente il comportamento dinamico non lineare di un disco palettato in presenza di attrito nei giunti. Il metodo numerico proposto si basava su una formulazione del bilanciamento armonico in cui gli spostamenti e le forze erano assunte periodiche. I risultati ottenuti numericamente, infine, furono validati sperimentalmente: il test rig proposto presentava un disco dotato di quattro pale, a coppia diametralmente opposte, calettato su un albero rotante mosso da motore elettrico. Le pale erano eccitate da attuatori piezoelettrici e attraverso degli estensimetri si misuravano le deformazioni e dunque la forza applicata.

In [41] viene utilizzato il banco prova del presente lavoro, in seguito descritto, ma con due dif-

ferenti tecniche di eccitazione: una eccitazione impulsiva ottenuta attraverso l'utilizzo di un martello ad impulsi e una tecnica basata sull'impiego di elettromagneti in grado di eccitare solo una determinata forma modale del sistema. Entrambi tali metodi non prevedono un contatto con la struttura e dunque non influenzano la massa, la rigidezza o lo smorzamento del sistema.

A differenza degli studi sopracitati, in tale lavoro la metodologia adottata per la determinazione dei parametri modali prevede l'utilizzo di una trave, le cui estremità presentano le geometrie tipiche di una paletta aeronautica. Tale simulacro di pala viene posizionato in appositi alloggi e trazionato al fine di simulare la forza centrifuga di un disco rotante e creare delle zone di contatto tra la pala ed i suoi slots. Il sistema così presentato viene eccitato alla sua frequenza di risonanza grazie all'utilizzo di uno shaker e alla generazione di un segnale di corrente per la movimentazione dello shaker stesso. Al fine di valutare il decadimento libero, la punta dello shaker viene successivamente rimossa dal suo alloggio, solidale alla trave, senza interferire sulla dinamica del sistema: tale metodo prende il nome di Detached Drive Rod Method (DDRM) in cui avviene un vero e proprio distacco fisico dell'asta dello shaker dal punto di eccitazione. La trave è ora libera di vibrare e la sua risposta, in termini di velocità di vibrazione in corrispondenza dell'antinodo della forma modale presa in esame, viene rilevata utilizzando un vibrometro Laser Doppler.

Il presente elaborato è articolato in cinque capitoli: nel primo capitolo viene descritto in dettaglio il banco prova sperimentale, progettato da M. Allara in [2], gli strumenti ed i software utilizzati per la registrazione e la visualizzazione del segnale di velocità del sistema preso in considerazione.

Nel secondo capitolo è analizzato in tutte le sue fasi principali il programma sviluppato in ambiente *Matlab* in grado di elaborare il segnale ottenuto dalla sperimentazione. In particolare, tale segnale viene prima manipolato per estrarre la componente principale del decadimento libero e poi analizzato attraverso il metodo Freevib al fine di determinare i valori istantanei di frequenza e smorzamento.

Nel capitolo successivo è proposto uno studio del contatto per un sistema semplificato ad un grado di libertà: tale modello permette di identificare le zone di adesione e di slittamento tipiche del contatto stesso utilizzando il modello di attrito di *Coulomb* e di prevedere l'andamento dei parametri modali in differenti condizioni di attrito e rigidezza.

Il quarto capitolo è dedicato alla presentazione ed all'analisi dei risultati ottenuti dalle prove sperimentali e dall'elaborazione dei segnali. I risultati presentati sono suddivisi in base alla geometria del giunto e alla forma modale prese in esame.

Nell'ultimo capitolo, infine, è stato implementato un metodo analitico, proposto in [1], per determinare i valori delle rigidezze di contatto a partire dalla geometria dei corpi, ed in particolare

della zona di contatto, e dalle forze applicate.

L'analisi dei risultati sperimentali, grazie anche allo studio del contatto semplificato, ha permesso di valutare l'influenza delle zone di contatto sulla dinamica del sistema; considerazioni finali saranno esposte dettagliatamente nel capitolo dedicato alle conclusioni.

Capitolo 1

Banco prova sperimentale

La determinazione dei parametri modali, oggetto del presente lavoro, si basa sull'utilizzo di un banco prova sperimentale rappresentato in modo schematico in figura 1.1 e di seguito descritto.

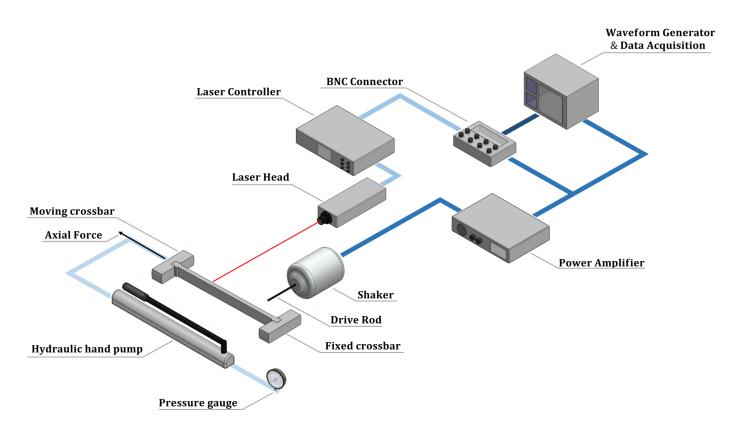


Figura 1.1: Schema semplificato del banco prova

L'elemento fondamentale del banco prova è sicuramente il sistema di supporto del provino concepito da *M. Allara* in [2], di cui sono riportate le principali scelte e caratteristiche progettuali. In sintesi, gli obiettivi del progetto erano quelli di:

- far vibrare un sistema dinamico simile ad un disco palettato reale;
- ricreare gli stessi stati di tensione e deformazione in corrispondenza dell'interfaccia di contatto di un giunto di tipo dovetail o fir-tree;
- valutare il comportamento dinamico con differenti ampiezze di vibrazione e differenti carichi di sollecitazione;
- evitare l'introduzione di smorzamenti aggiuntivi di natura differente da quello viscoso, del materiale e quello legato al contatto.

L'idea di base è stata quella di realizzare una trave a sezione rettangolare, in cui entrambe le estremità presentavano un giunto di tipo *dovetail* o *fir-tree* (fig. 1.2), e di simulare la forza centrifuga, legata alla velocità di rotazione del disco, con una forza di trazione.

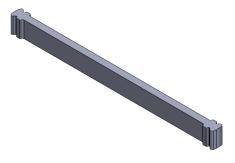


Figura 1.2: Rappresentazione del simulacro di pala con giunto di tipo dovetail

Come riportato in [2], le principali differenze tra una paletta reale e tale sistema sono legate al fatto che:

- la pala reale presenta un solo giunto e la sua forma modale è simile ad una trave a sbalzo, mentre il simulacro può essere approssimato ad una trave incastrata ai due estremi;
- la forza centrifuga nella pala reale diminuisce spostandosi verso l'estremità, a differenza della forza assiale nel simulacro di pala che rimane costante lungo il suo asse principale.

In definitiva, il sistema realizzato permette di ottenere dei risultati qualitativi circa lo smorzamento legato all'interfaccia di contatto: l'energia dissipata dai due sistemi risulta essere la stessa

in quanto funzione solo della forza che agisce in una sezione trasversale in prossimità del giunto. La lunghezza e lo spessore del simulacro di pala sono stati determinati in modo da ottenere delle frequenze di risonanza simili a quelle di una palettatura reale, mentre la sua larghezza è stata definita in modo da ottenere la stessa geometria di un attacco reale.

1.1 Sistema di supporto del provino

Il sistema di supporto del simulacro di pala è principalmente costituito da due elementi:

- *Slots*, supporti per la trave realizzati all'estremità di due elementi conici e che simulano l'attacco pala di un disco reale;
- Crossbars, ovvero i due blocchi laterali di cui uno fisso e l'altro libero di muoversi. Tali blocchi hanno la funzione di ospitare gli elementi conici e di garantire l'applicazione del carico statico attraverso lo spostamento della parte mobile.

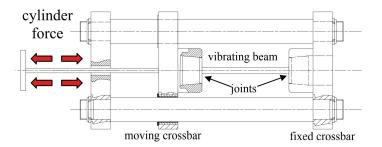


Figura 1.3: Schema del sistema di supporto

1.2 Sistema di applicazione del carico

Il simulacro di pala viene trazionato grazie all'utilizzo di un sistema idraulico il quale consente lo spostamento del *crossbar* mobile del sistema di supporto.

Innanzitutto, il provino viene fissato agli *slots* grazie ad una leva manuale in grado di imporre un basso carico di trazione. Una pompa a mano idraulica viene impiegata per incrementare la pressione nel sistema fino al valore desiderato. La forza assiale corrispondente all'aumento della pressione è funzione dell'area del cilindro della pompa stessa:

$$F_{ax} = p \cdot A_{cil}$$

dove, da specifiche tecniche, risulta $A_{cil} = 17.9$ cm^2 .

La lettura della pressione nel manometro rappresenta l'unico modo a disposizione per definire il valore del carico di trazione che si sta applicando.

Prima di azionare il braccio della pompa, una valvola di scarico consente di chiudere il circuito in modo da mantenere costante la pressione per tutta la durata della prova sperimentale.

Infine, un attuatore idraulico collegato alla pompa a mano si occupa della vera e propria movimentazione del *crossbar* e in definitiva del simulacro di pala.

Una volta terminata la prova bisogna per prima cosa aprire la valvola di scarico per ridurre la pressione e poi liberare la trave dai supporti utilizzando la stessa leva con la quale era stata fissata.



Figura 1.4: Sistema di supporto e trazione

1.3 Sistema di eccitazione

Il sistema di eccitazione è composto da uno shaker, la sua punta, l'amplificatore di potenza ed il generatore di segnali.

In ambiente Matlab viene generato il segnale di input per lo shaker definendo principalmente tre parametri: ampiezza minima A_{min} , ampiezza massima A_{max} e frequenza di vibrazione f_{shaker} . Quest'ultima, al fine di eccitare il provino alla sua frequenza di risonanza, viene impostata a partire dalla frequenza naturale di vibrazione del simulacro di pala ottenuta dall' Hammer Test, svolto appositamente per ogni carico di trazione.

Come mostrato in figura 1.5, il segnale è stato concepito definendo dei tempi, o ugualmente delle fasi, ben precisi:

- t_0 : tempo di inizio del segnale;
- t₁: inizio della fase di precarico, ovvero movimentazione della punta dello shaker dalla posizione iniziale fino al raggiungimento del suo alloggio sul provino;
- t_2 : fine della fase di precarico;
- t_3 : inizio della fase di eccitazione vera e propria. Tale fase è caratterizzata da una funzione armonica con ampiezza via via crescente fino al valore $\frac{A_{max}-A_{min}}{2}$ e frequenza pari a f_{shaker} ;
- t₄: istante finale dell'oscillazione e distacco della punta dello shaker;
- \bullet t_5 : tempo di inizio dello spostamento della punta fino alla posizione iniziale;
- t₆: termine del segnale con il raggiungimento della posizione di partenza.

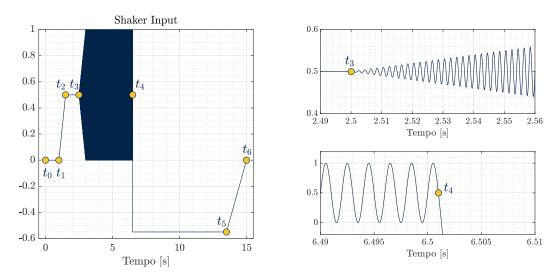


Figura 1.5: Shaker: segnale di input

Il segnale così definito viene salvato e importato nel software fGen, il quale rappresenta l'interfaccia del generatore di segnali. Tale programma consente di visualizzare, operare e avviare la generazione del segnale di tensione in uscita dal generatore. Da quest'ultimo il segnale viene inviato all'amplificatore, di cui bisogna definire manualmente il limite di corrente, il guadagno e la modalità di funzionamento. Infine, i segnali di corrente e tensione in uscita dall'amplificatore sono trasmessi sia al blocco dei connettori BNC che allo shaker.

Le prove sperimentali effettuate in tale lavoro sono state eseguite in modalità Voltage con limite di corrente e guadagno dell'amplificatore massimi. Il guadagno in fGen è stato modificato ad un valore maggiore o minore di 1 solo in un numero limitato di prove. Infatti, per determinati valori del carico di trazione sono state riscontrate ampiezze di vibrazione ridotte che sono state compensate con l'aumento del guadagno; in altre circostanze lo strisciamento indesiderato della punta dello shaker è stato eliminato con la diminuzione del guadagno e modificando il limite inferiore A_{min} del segnale di input in Matlab.

Infine, l'alloggio per la punta dello shaker solidale alla trave è stato posizionato in tutte le prove ad una distanza di 40 mm dall'attacco pala.

Rispetto alle prove sperimentali effettuate in precedenza, è stata modificata la punta dello shaker in quanto presentava fenomeni frequenti di strisciamento e flessione della stessa. In particolare, la lunghezza dell'asta è stata ridotta e la sua estremità resa tondeggiante. Inoltre, è stato utilizzato uno shaker differente per problemi legati al raggiungimento della temperatura massima durante l'eccitazione e, per sopperire alla diminuzione delle dimensioni dell'asta, è stato sostituito il supporto dello shaker in modo da ridurre la distanza tra la trave e la punta stessa. Tali piccoli accorgimenti sono stati sufficienti e vantaggiosi per la buona riuscita della sperimentazione.

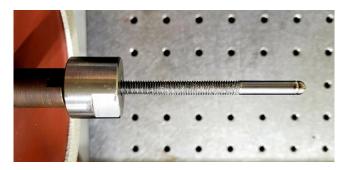


Figura 1.6: Shaker: drive rod

1.4 Sistema di misurazione

Per quanto riguarda il sistema di misurazione viene utilizzato un interferometro in grado di misurare la velocità di vibrazione del simulacro di pala per tutta la durata della singola prova. In base alla forma modale che si vuole analizzare il puntatore del laser deve essere direzionato verso l'antinodo, ovvero in corrispondenza del punto che presenta la massima ampiezza di vibrazione.

Le impostazioni del laser sono gestite manualmente attraverso il *Laser Controller* il quale genera un segnale di velocità in output che viene trasmesso al *BNC Connector*.



Figura 1.7: Puntatore e controllore laser

1.5 Acquisizione e visualizzazione dei segnali

I segnali di corrente, tensione e velocità derivanti dall'amplificatore e dal controllore del laser sono direzionati al blocco dei connettori BNC e da quest'ultimo trasmessi al sistema di acquisizione dati, mostrati in figura 1.8.

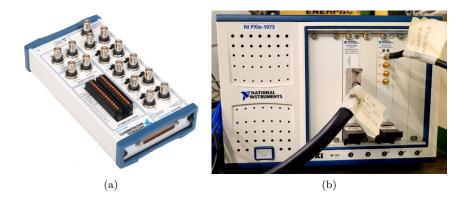


Figura 1.8: Blocco dei connettori (a); Generatore e sistema acquisizione dati (b)

La visualizzazione dei valori e dell'andamento dei segnali avviene attraverso l'utilizzo del software SignalExpress2015. La prova sperimentale termina con la registrazione di tali parametri e segue la fase di elaborazione del segnale, descritta nel capitolo successivo.

1.6 Conclusioni

In sintesi, effettuato l'*Hammer test* e settati tutti gli strumenti da utilizzare, la singola prova sperimentale è costituita da 5 fasi:

- 1. Posizionamento del provino e relativo aggancio ai supporti per mezzo di una leva manuale;
- 2. Applicazione del carico assiale tramite la pompa a mano e lettura della pressione attraverso il manometro;
- 3. Posizionamento della punta dello shaker in corrispondenza del suo alloggio sulla trave;
- 4. Generazione del segnale di input per lo shaker in ambiente Matlab e visualizzazione sul software fGen;
- 5. Avviamento dell'eccitazione da parte dello shaker e simultanea registrazione dei segnali tramite SignalExpress2015.

In tabella 1.1 sono riportati i modelli degli strumenti utilizzati durante la fase sperimentale.

	Casa produttrice	Modello
Shaker	Tira	TV 52122 -M
Amplificatore di potenza	Tira	BAA 500
Generatore di segnale	National Instruments	PXI 5412
Puntatore Laser	Polytec	OFV-525
Controllore Laser	Polytec	OFV-5000
Connettore BNC	National Instruments	BNC-2110
Acquisizione dati	National Instruments	PXIe-6356

Tabella 1.1: Strumenti del banco prova

Capitolo 2

Analisi del segnale

L'elaborazione del segnale rappresenta la fase più importante, ed allo stesso tempo critica, del presente lavoro in quanto una corretta analisi permette di ottenere delle informazioni interpretabili e attendibili.

Effettuata la misura sperimentale, il segnale viene elaborato in ambiente *Matlab* seguendo lo schema riportato in figura 2.1.

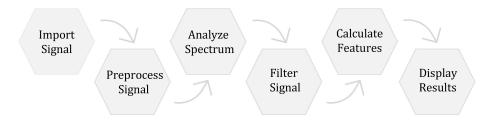


Figura 2.1: Fasi di elaborazione del segnale

2.1 Importazione del segnale

Il segnale registrato attraverso il software Signal Express 2015 viene in primis importato in Matlab. I dati a disposizione in tale fase (fig. 2.2) riguardano:

- $\bullet\,$ Tensione in ingresso allo shaker;
- Corrente in ingresso allo shaker;
- Velocità di vibrazione del simulacro di pala rilevata dal laser.

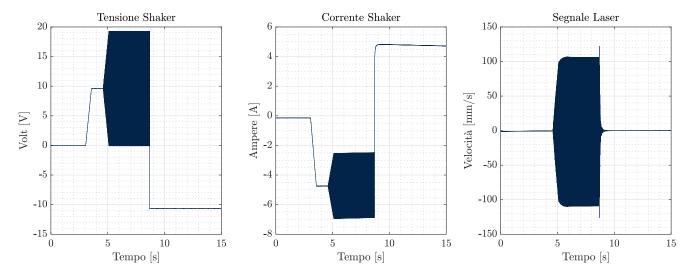


Figura 2.2: Segnali in input

2.2 Pre-processamento

Nella fase di *pre-processing* il segnale viene manipolato in modo tale da analizzare i dati solo nell'intervallo di interesse, ovvero quello di decadimento libero.

Dal segnale della tensione, o ugualmente della corrente, è facile determinare gli istanti di tempo in cui avvengono il contatto e la separazione della punta dello shaker dal simulacro di pala (fig. 2.3).

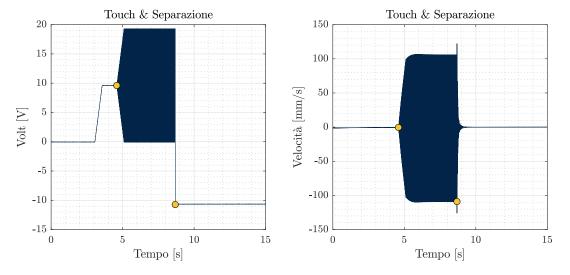


Figura 2.3: Touch e Separazione

Conoscendo il tempo di separazione è possibile desumere l'istante iniziale del decadimento libero nel rispettivo segnale della velocità. A causa dei successivi filtraggi e degli effetti di bordo associati si è deciso di considerare anche una piccola parte del segnale prima dell'istante di separazione; in questo modo il decadimento libero ha inizio nell'istante di tempo $t_{sep} - \Delta t$, come mostrato in figura 2.4.

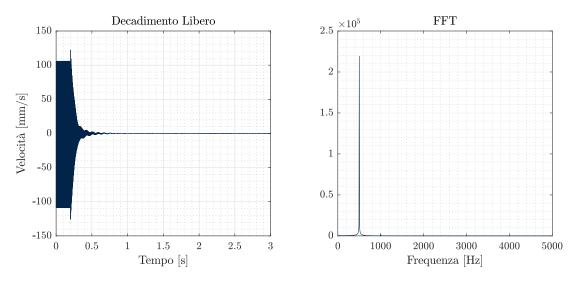


Figura 2.4: Decadimento libero

2.3 Ricampionamento

Il segnale finora elaborato presenta una frequenza di campionamento F_s pari al valore definito dalle caratteristiche del laser. Il prossimo step è quello di effettuare un ri-campionamento del segnale con una F_s funzione della frequenza massima del segnale stesso.

Effettuando tale operazione, il teorema del campionamento di Nyquist, secondo cui la minima frequenza di campionamento necessaria per non perdere informazioni deve essere almeno il doppio della massima frequenza del segnale, continua ad essere soddisfatto.

2.4 Filtraggio del segnale

Il decadimento libero ottenuto è dato dalla combinazione di tutti i modi di vibrare del sistema che si sta considerando. Per analizzare un determinato modo, in questo caso il primo o il secondo modo flessionale, è necessario decomporre il segnale andando ad estrarre la componente principale associata a tale forma modale.

La componente principale è stata ottenuta implementando la funzione bandpass in Matlab:

In particolare, come riportato in [27]:

- signal rappresenta il segnale da filtrare;
- f_{pass} è un vettore costituito da due elementi che definiscono il limite inferiore e superiore del range di frequenze della banda passante;
- \bullet F_s corrisponde alla frequenza di campionamento del segnale;
- Steepness rappresenta la pendenza della banda di transizione. Maggiore è tale valore più la risposta del filtro si avvicina a quella ideale, aumentando però il suo costo computazionale. Inoltre, valori maggiori definiscono una minore larghezza della banda di transizione. Il valore di default pari a 0.85 è stato preso in considerazione;
- *ImpulseResponse*, ovvero il tipo di risposta impulsiva del filtro. Si è considerato un filtro a risposta impulsiva finita FIR per la sua stabilità e facilità di sviluppo e progettazione;
- StopBandAttenuation, ovvero l'attenuazione della banda di arresto del filtro fissata a 40 dB.

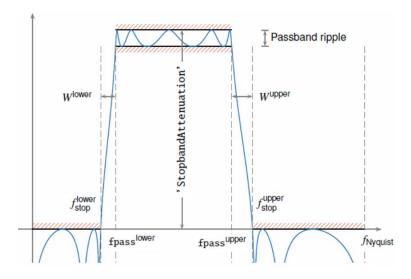


Figura 2.5: Filtro passabanda [27]

In figura 2.6 sono mostrati il segnale originale della velocità, la sua componente principale (ottenuta dalla fase di filtraggio descritta) e la derivante componente residua.

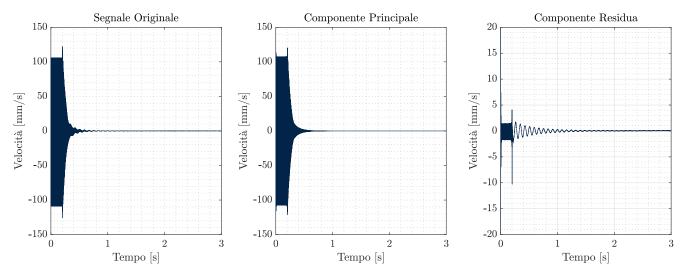


Figura 2.6: Componenti del decadimento libero

Infine, al termine di tale fase di elaborazione, il segnale viene limitato all'effettivo intervallo di decadimento a partire dal punto di separazione calcolato precedentemente t_{sep} e fino ad un valore della velocità pari ad 1/1000 del valore massimo (fig. 2.7).

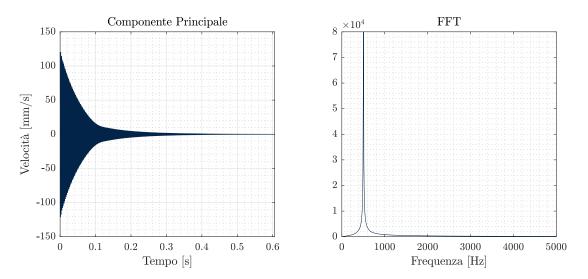


Figura 2.7: Decadimento libero - Componente principale

2.5 Elaborazione delle informazioni

Il segnale così ottenuto viene manipolato seguendo la procedura Free Vib proposta da M. Feldman in [15] e [16] di cui sono riportarti i procedimenti principali in Appendice A.

In sintesi, tale metodo consente di determinare i valori puntuali della frequenza naturale f_n e del fattore di perdita η a partire dalla conoscenza del vettore degli spostamenti, delle velocità e delle accelerazioni.

Le informazioni estrapolate dal suddetto procedimento sono ulteriormente manipolate attraverso una semplice media mobile sui dati per la presenza di *spikes* legati sopratutto alla creazione e alla propagazione degli errori. In figura 2.8 sono mostrati gli andamenti dei parametri calcolati dal metodo *FreeVib* (in grigio) e gli stessi in seguito ad una procedura di filtraggio (in blu).

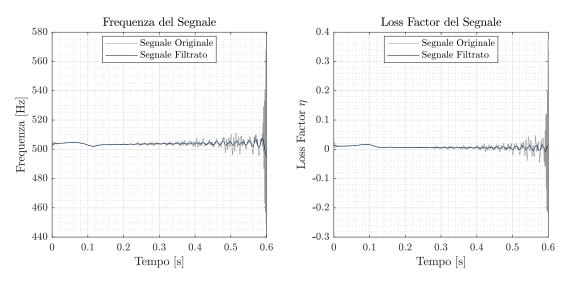


Figura 2.8: Frequenza e fattore di perdita

2.6 Risultati

Essendo le frequenze f_n , il fattore di perdita η e l'inviluppo degli spostamenti A grandezze istantanee, ovvero funzioni del tempo t, è possibile mettere in relazione i parametri modali con le ampiezze degli spostamenti:

$$\begin{cases} f_n = f_n(A) \\ \eta = \eta(A) \end{cases}$$

Si ottengo degli andamenti non lineari, presentati in figura 2.9, le cui analisi e interpretazioni saranno affrontate nei capitoli successivi.

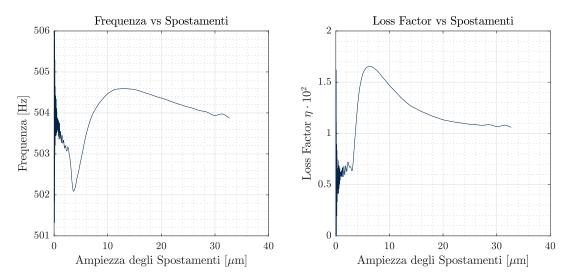


Figura 2.9: Parametri modali

Capitolo 3

Studio del contatto per un sistema semplificato

Il contatto tra la paletta ed il suo *slot*, o in generale tra due corpi, garantisce la creazione di interfacce di contatto che modificano il comportamento dinamico del sistema. Infatti, tali interfacce permettono ai corpi di interagire tra di loro scambiandosi delle forze in corrispondenza della zona di contatto. Esse garantiscono lo smorzamento dell'energia per effetto dell'attrito ed introducono delle *non linearità* nel sistema che non consentono di trattare il problema in modo lineare.

Si consideri un sistema ad un singolo grado di libertà con massa m, rigidezza k e smorzamento isteretico h. Sia N_0 il precarico normale costante che garantisce il contatto tra i due corpi o, per semplicità, tra un corpo ed una superficie (fig. 3.1.a). Per effetto delle vibrazioni della massa si generano delle forze di contatto tangenziali f_c che dipendono dal tempo, dallo spostamento relativo e dalla velocità relativa tra i due corpi (fig. 3.1.b).

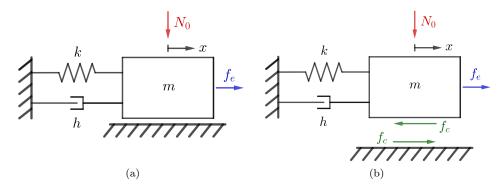


Figura 3.1: Sistema SDOF con contatto strisciante

Nel caso di spostamenti unidirezionali, il contatto tra i due corpi può essere modellato utilizzando

un elemento di *Jenkins*, ovvero interponendo tra di essi una rigidezza tangenziale k_c , applicando un carico normale N_0 e considerando un coefficiente di attrito della superficie μ , come mostrato in figura 3.2 e presentato in [40] e [41]. La forza di contatto risulta essere pari al prodotto tra la rigidezza k_c e lo spostamento relativo tra i due corpi:

$$f_c(t) = k_c \left(x(t) - x_c(t) \right) \tag{3.1}$$

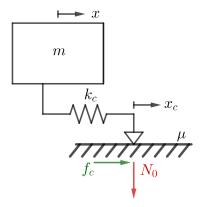


Figura 3.2: Modello di contatto con carico normale costante

Utilizzando il modello di attrito di Coulomb, il contatto può trovarsi in una condizione di adesione o di slittamento a seconda del valore della forza tangenziale e della cinematica del contatto.

Quando la forza di contatto f_c risulta minore, in modulo, del limite di Coulomb μN_0 , il contatto si trova in uno stato di adesione in cui lo spostamento $x_c(t)$ del ground rimane invariato. In tal caso, la forza $f_c(t)$ sarà proporzionale allo spostamento relativo tra i due corpi, definito dalla variazione di x(t).

La condizione di slittamento, invece, è caratterizzata da una forza $f_c(t)$ costante, in modulo pari al valore μN_0 e il suo verso definito in base alla velocità di scorrimento. Lo spostamento $x_c(t)$ varia al variare di x(t).

In definitiva,

$$f_c(t) = \begin{cases} k_c \left(x(t) - x_c(t) \right) & stick \\ \mu N_0 \, sgn(\dot{x_c}(t)) & slip \end{cases}$$
 (3.2)

In presenza di forzanti esterne f_e applicate alla massa, l'equazione del moto per un singolo grado di libertà si presenta nella forma:

$$m \ddot{x}(t) + \frac{h}{\omega} \dot{x}(t) + k x(t) = f_e(t) - f_c(x, \dot{x}, t)$$
 (3.3)

Per risolvere tale equazione differenziale è stato utilizzato il metodo di integrazione di *Newmark*, assegnate delle condizioni al contorno e dei parametri di primo tentativo. Un approccio differente per valutare la rigidezza e lo smorzamento del sistema in presenza di forze di contatto è rappresentato dal metodo del bilanciamento armonico (*HBM*). Tali metodi sono descritti in appendice B e C, rispettivamente.

3.1 Metodo di integrazione di Newmark

Al fine di descrivere il comportamento reale osservato nei risultati sperimentali, sono state effettuate delle simulazioni in grado di rappresentare la dinamica di un sistema ad un singolo grado di libertà in presenza di smorzamento per attrito.

Una prima simulazione ha permesso di produrre dei risultati paragonabili a quelli ottenuti per via sperimentale per un valore del carico di trazione corrispondente a circa 1800 N. In particolare, sono stati presi in considerazione i seguenti parametri:

Parametri e condizioni al contorno				
Massa [kg]	m	1100		
$\mathbf{Rigidezza}$ [N/m]	k	$8.23\cdot 10^9$		
Rigidezza di contatto [N/m]	k_c	$1.56\cdot 10^9$		
Frequenza [Hz]	f	475		
Loss factor	η	0.011		
Coefficiente di attrito	μ	0.4		
Spostamento limite $[\mu m]$	x_{lim}	2.5		
Spostamento iniziale $[\mu m]$	x_0	25		
Velocità iniziale [m/s]	\dot{x}_0	0		

Tabella 3.1: Simulazione 1: parametri e condizioni al contorno

Utilizzando il metodo di integrazione di Newmark è stato possibile ottenere le variazioni nel tempo degli spostamenti x(t), delle velocità $\dot{x}(t)$ e delle accelerazioni $\ddot{x}(t)$ (fig. 3.3).

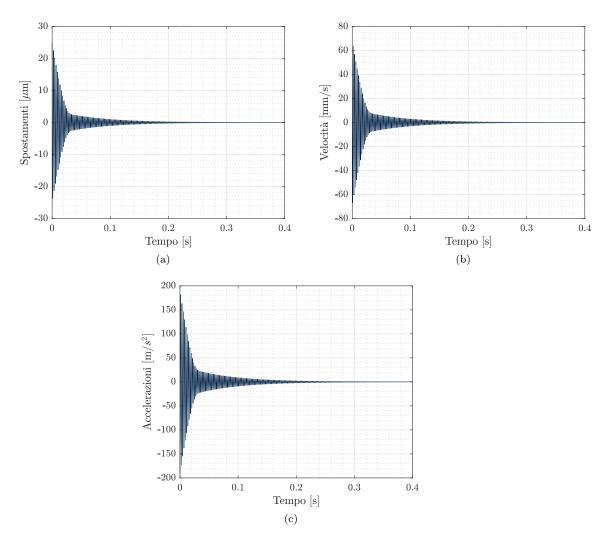


Figura 3.3: Simulazione 1: Spostamenti (a), Velocità (b), Accelerazioni (c)

In figura 3.4 è riportato l'andamento nel tempo della forza di contatto. Nella parte iniziale si alternano fasi di slip, in cui la forza risulta costante e pari al limite di Coulomb, a fasi di adesione, in cui la f_c varia in modo proporzionale allo spostamento relativo. Terminata la fase di stick - slip, il contatto si troverà in una condizione di piena adesione per cui la forza di contatto varia con la stessa legge degli spostamenti x(t).

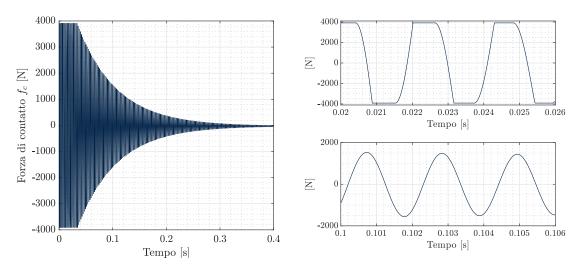


Figura 3.4: Simulazione 1: Forza di contatto

L'alternanza delle fasi di adesione e slittamento è visibile anche in figura 3.5 dove è mostrato l'andamento degli spostamenti del ground x_c al variare del tempo. Contrariamente a quanto visto per la forza di contatto, lo spostamento x_c è costante in fase di adesione e si modifica quando il corpo è in slittamento.

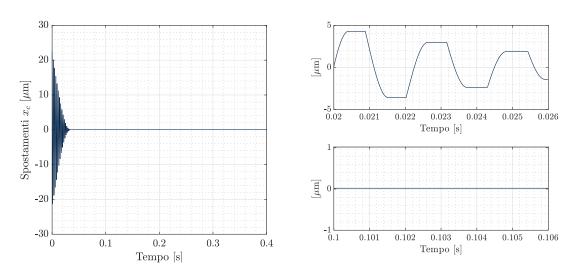


Figura 3.5: Simulazione 1: Spostamenti del ground

Il figura 3.6 è mostrato il ciclo di isteresi, ovvero l'evoluzione della forza di contatto in funzione degli spostamenti. I valori massimi e minimi dalla forza tangenziale rappresentano il

raggiungimento del limite di Coulomb il quale definisce le fasi di slittamento positivo e negativo, rispettivamente.

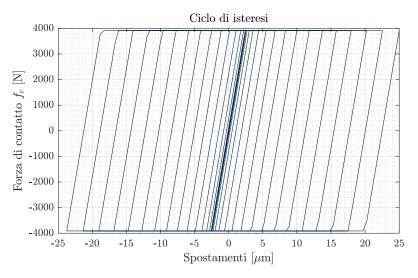


Figura 3.6: Simulazione 1: Ciclo di isteresi

Il segnale di velocità è stato analizzato attraverso la procedura $Free\,Vib$ al fine di determinare e confrontare i parametri modali del sistema semplificato con quelli della prova sperimentale. I risultati ottenuti sono mostrati in figura 3.7.

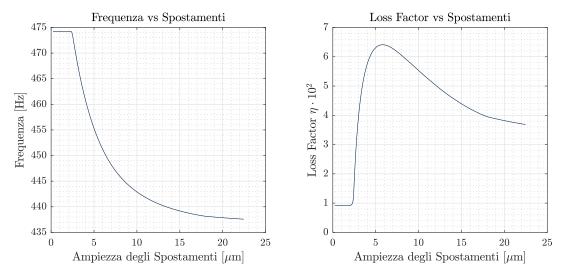


Figura 3.7: Simulazione 1: Frequenza e fattore di perdita

Dai grafici si evince come il contatto ha un effetto rilevante sull'evoluzione dei parametri. La rigidezza totale del sistema, legata alla frequenza di vibrazione, risulta essere massima e costante per basse ampiezze degli spostamenti. In corrispondenza di tali ampiezze il contatto si trova in una condizione di completa adesione, come analizzato precedentemente. All'aumentare degli spostamenti, invece, la frequenza di vibrazione tende a diminuire. Ciò è legato al fatto che si susseguono fasi di adesione a fasi di slittamento; queste ultime tendono progressivamente ad aumentare la loro durata provocando una riduzione della rigidezza complessiva.

Ugualmente, in condizioni di adesione lo smorzamento dato dal contatto è teoricamente nullo e il valore costante per basse ampiezze è legato al solo smorzamento strutturale del sistema. Nella fase di *stick-slip*, il fattore di perdita assume un andamento variabile con le ampiezze. In particolare, per definizione, tale parametro può essere valutato come il rapporto tra l'energia dissipata e l'energia potenziale del sistema. Entrambe, tendono ad aumentare all'aumentare degli spostamenti ma in proporzione differente, determinando di conseguenza l'andamento crescente e decrescente del *loss factor*.

L'andamento del coefficiente di perdita η determinato dalle prove sperimentali e dal modello semplificato ad un grado di libertà sono confrontati in figura 3.8.

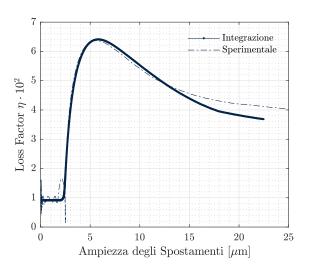


Figura 3.8: Simulazione 1: Confronto con prova sperimentale

La frequenza di vibrazione, invece, presenta una evoluzione differente rispetto ai risultati attesi, soprattutto per bassi carichi di trazione. Ciò potrebbe essere dovuto al fatto che il simulacro di pala presenta più zone di contatto e che, nello stesso istante di tempo, potrebbero trovarsi in stati differenti, generando complessivamente un andamento non decrescente della frequenza. Anche la variazione del precarico normale, che non si mantiene costante durante la vibrazione, potrebbe incidere sulla rigidezza di contatto e, di conseguenza, sulla rigidezza totale del sistema.

3.1.1 Effetto dell'attrito e del rapporto tra le rigidezze

Effettuando una serie di simulazioni è stato rilevata una dipendenza del sistema ad un singolo grado di libertà SDOF con il valore del coefficiente di attrito μ e del rapporto tra la rigidezza di contatto k_c e la rigidezza del sistema k.

In particolare, a parità di altre condizioni, l'attrito modifica il valore dello spostamento x_{lim} oltre il quale il contatto alterna fasi di slittamento e fasi di adesione:

$$x_{lim} = \frac{\mu N_0}{k_c}$$

All'aumentare del valore del coefficiente di attrito, aumenta lo spostamento limite portando il contatto ad aumentare la durata, in termini spaziali e temporali, della fase di completa adesione. I valori massimi raggiunti dal fattore di perdita non sembrano variare in modo significativo, mentre variano i valori di frequenza e smorzamento per elevati spostamenti.

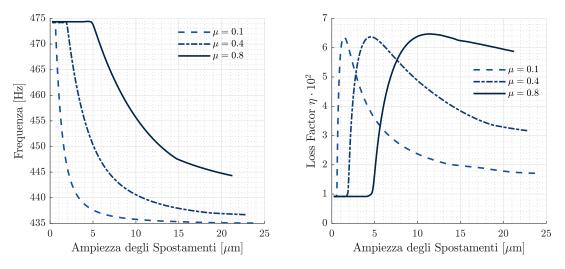


Figura 3.9: Simulazione 2: Effetto del coefficiente di attrito

Il valore dello spostamento limite varia anche per effetto della rigidezza di contatto k_c . Modificando il rapporto tra le rigidezze e mantenendo costanti gli altri parametri si nota anche una

variazione del valore massimo del fattore di perdita raggiunto. All'aumentare di tale rapporto, aumenta il valore del picco e diminuisce il valore dello spostamento x_{lim} . In figura 3.10 è stato valutato l'effetto del parametro k_c/k variando la sola rigidezza k_c .

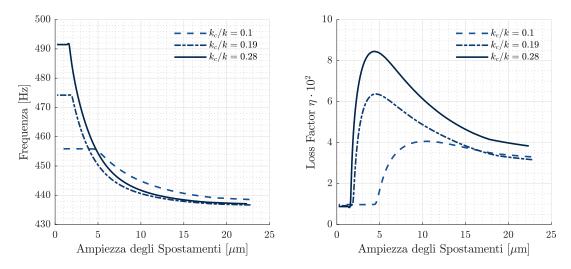


Figura 3.10: Simulazione 3: Effetto del rapporto tra le rigidezze

L'effetto dell'attrito e della rigidezza di contatto sulla dinamica del sistema è stato valutato anche da Li et al. in [24], ottenendo delle conclusioni simili. Il coefficiente di attrito influenza la forza di contatto e di conseguenza lo stato del contatto stesso: all'aumentare del valore di μ è sempre più difficile che si verifichi la condizione di sliding. Invece, la rigidezza di contatto influenza non solo lo stato del contatto ma anche la frequenza di risonanza che aumenta con l'incremento di k_c .

3.2 Metodo del bilanciamento armonico

La soluzione stazionaria dell'equazione del moto:

$$m \ddot{x}(t) + \frac{h}{\omega} \dot{x}(t) + k x(t) = f_e(t) - f_c(x, \dot{x}, t)$$
 (3.4)

può essere determinata utilizzando l'*Harmonic Balance Method (HBM)*, come proposto in [28] e descritto in appendice C. In sintesi, tale metodo si basa sull'ipotesi che la soluzione del sistema non lineare sia periodica e costituita da una somma di componenti armoniche, definite dal teorema di Fourier.

Considerando il modello di contatto di Coulomb per descrivere la forza di contatto, sono state

determinate le seguenti relazioni:

$$\frac{k_{tot}}{k} = 1 + \frac{1}{\pi} \frac{k_c}{k} \left[\theta_B - \frac{1}{2} \sin(2\theta_B) \right]$$
 (3.5)

$$\eta = \frac{h_{tot}}{k} = \eta_0 + \frac{4}{\pi} \frac{x_{lim}}{x} \frac{k_c}{k} \left[1 - \frac{x_{lim}}{x} \right]$$
 (3.6)

dove θ_B rappresenta la posizione angolare in corrispondenza della quale ha inizio la fase di slittamento negativo e η_0 rappresenta il valore del fattore di perdita associato al solo smorzamento strutturale del sistema.

Si noti come le equazioni 3.5 e 3.6 sono entrambe funzione del rapporto tra gli spostamenti (θ_B è funzione di tale parametro) e del rapporto tra le rigidezze. Al variare di tali rapporti si ottengono degli andamenti analoghi a quelli derivanti dal metodo di integrazione analizzato precedentemente. In particolare, all'aumentare del valore di x_{lim} si osserva uno spostamento delle curve di η verso ampiezze maggiori, ribadendo come l'effetto principale l'attrito non riguarda il valore del picco. Aumentando il solo rapporto delle rigidezze, invece, gli andamenti del fattore di perdita e della rigidezza totale si spostano entrambi verso valori maggiori.

Utilizzando tale metodo è stato valutato l'effetto combinato della variazione di entrambi i parametri, ottenendo i grafici in figura 3.11.

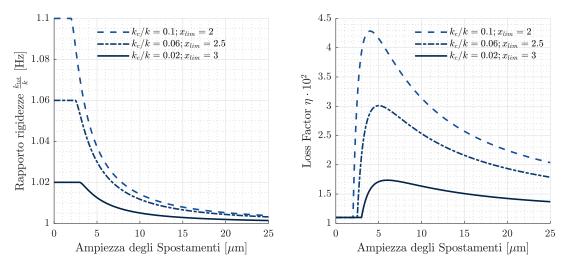


Figura 3.11: Simulazione 4: Metodo del bilanciamento armonico

Capitolo 4

Analisi dei risultati

Il presente lavoro, dunque, si basa sulla realizzazione di una serie di prove sperimentali, sulla successiva elaborazione del segnale per determinare i parametri modali e sull'analisi dei risultati ottenuti.

In particolare, le prove sperimentali sono state effettuate prendendo in considerazione due differenti tipologie di attacco pala: geometria dovetail e fir-tree (fig. 4.1).

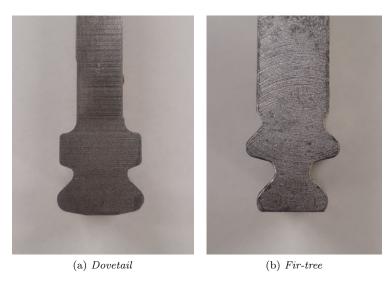


Figura 4.1: Geometria dei giunti analizzati

Per ogni simulacro di pala sono state analizzate due forme modali, ovvero il primo e il secondo modo flessionale, in diverse condizioni di carico assiale. Per ogni valore del carico di trazione sono state effettuate un determinato numero di prove in modo da poter ottenere una popolazione statistica dei parametri che fosse il più rappresentativa possibile.

Infine, prove sperimentali aggiuntive sono state effettuate per il giunto di tipo dovetail in condizioni di basso attrito, realizzato attraverso l'impiego di un lubrificante in corrispondenza della zona di contatto tra blade e slots.

Al termine di ogni test, il provino è stato liberato dai supporti e riposizionato per effettuare la prova successiva.

Nella successiva fase di elaborazione, le prove sperimentali relative ad una determinata geometria e ad una determinata forma modale sono state suddivise in base al valore della pressione applicata: per ogni carico di trazione corrispondente sono stati calcolati i parametri modali e rappresentati i loro andamenti.

Altri parametri, quali la frequenza e il fattore di perdita per bassi valori dell'ampiezza (ovvero in condizioni di piena adesione) e il valore massimo del loss factor raggiunto, sono stati determinati per successive analisi di confronto. Infine, una sola prova caratteristica è stata selezionata per ogni valore della forza assiale applicata al fine di rappresentare il trend sperimentale, come mostrato nelle figure 4.2 e 4.3.

In definitiva, è possibile sintetizzare l'attività svolta in due parti:

• Fase sperimentale

- 1. Analisi di due differenti attacchi pala;
- 2. Valutazione dell'effetto di:
 - (a) forma modale;
 - (b) carico assiale applicato;
 - (c) differenti valori di attrito (per geometria dovetail);

• Fase di analisi

- 1. Determinazione dei parametri modali per ogni prova effettuata;
- 2. Presentazione e commento dei risultati per:
 - (a) ogni attacco pala;
 - (b) ogni forma modale;
 - (c) ogni carico di trazione;

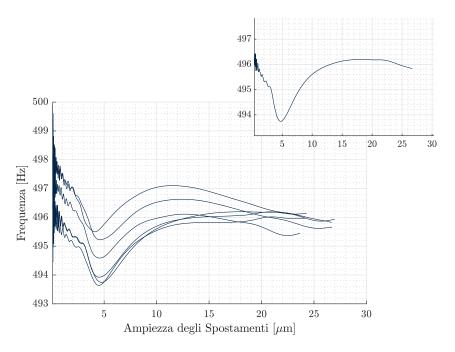


Figura 4.2: Frequenza: esempio

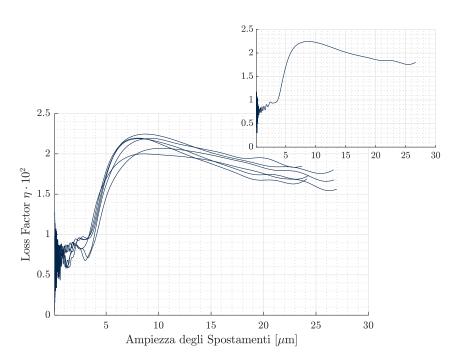


Figura 4.3: Loss factor: esempio

4.1 Giunto di tipo dovetail

4.1.1 Primo modo flessionale

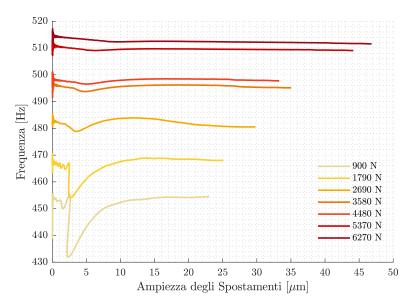


Figura 4.4: Dovetail - Primo modo flessionale: frequenza (1)

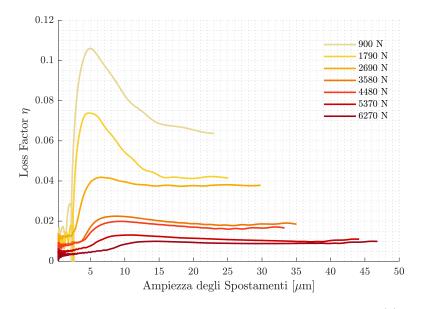


Figura 4.5: Dovetail - Primo modo flessionale: loss factor (1)

Sulla base dello studio del contatto per il singolo grado di libertà è stato verificato che, in corrispondenza di basse ampiezza, il contatto si trova in una condizione di piena adesione, presentando valori di frequenza e fattore di perdita costanti. Lo stesso andamento può essere individuato nelle prove sperimentali, soprattutto per bassi carichi di trazione. All'aumentare delle ampiezze di vibrazione, lo stato nel contatto alterna fasi di adesione a fasi di slittamento generando un andamento non costante del fattore di perdita.

Come mostrato in figura 4.5, risulta che all'aumentare del carico di sollecitazione:

- il valore massimo di η tende a diminuire;
- il valore massimo di η si sposta verso ampiezze di vibrazione maggiori;
- il valore critico degli spostamenti, ovvero il punto in cui avviene la transizione da stick a micro-slip, aumenta;
- le ampiezze degli spostamenti aumentano per effetto del minor smorzamento;

Le frequenze di risonanza aumentano all'aumentare del carico di sollecitazione (fig. 4.4) ma il loro andamento al variare delle ampiezze di vibrazione non può essere spiegato dal modello semplificato *SDOF*.

All'aumentare della sollecitazione, gli andamenti dei parametri modali sono circa costanti, come mostrato in figura 4.6. In questi casi, sono stati considerati i valori medi come caratteristici della condizione di *stick*.

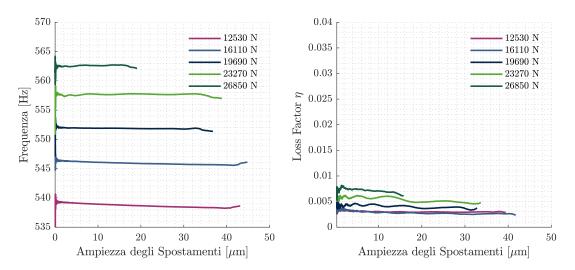


Figura 4.6: Dovetail - Primo modo flessionale: frequenza e loss factor (2)

In figura 4.7 è rappresentata la variazione standard di frequenza e fattore di perdita in stato di adesione per differenti valori del carico applicato. Una deviazione standard con confidenza al 99.7% è stata presa in considerazione (maggiori dettagli in appendice D).

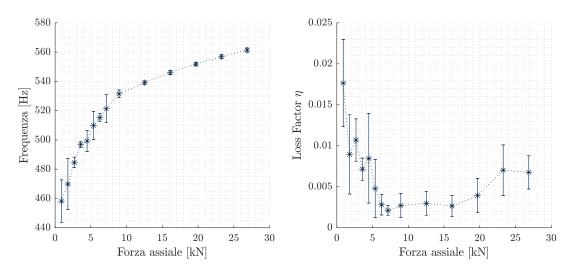


Figura 4.7: Dovetail - Primo modo flessionale: deviazione standard

Le forze centrifughe, legate alle velocità di rotazione delle macchine rotanti, hanno un effetto irrigidente sul sistema: all'aumentare della velocità di rotazione, aumentano le pulsazioni naturali del sistema stesso. Ugualmente nel simulacro di pala considerato, all'aumentare della forza assiale aumentano i valori delle frequenze.

Utilizzando il modello agli elementi finiti è stato possibile calcolare le frequenze di risonanza del simulacro di pala incastrato ai due *slots*. Dal confronto tra le frequenze ottenute sperimentalmente e quelle calcolate dal FEM (fig. 4.8) è possibile notare che per bassi valori del carico di trazione vi è una discreta differenza tra i due andamenti: lo slittamento che si verifica in corrispondenza delle zone di contatto genera una riduzione della rigidezza di contatto; tale differenza diminuisce all'aumentare della forza assiale. Per valori di sollecitazioni maggiori di circa 10000 N, le frequenze aumentano seguendo un andamento circa lineare.

Il fattore di perdita η in condizioni di adesione presenta un andamento decrescente man mano che la forza assiale applicata aumenta, come mostrato in figura 4.7: lo stato di adesione diventa sempre più preponderante, generando una diminuzione dello smorzamento. Oltre un certo valore del carico di trazione, però, il loss factor torna a crescere: ciò potrebbe essere spiegato considerando che l'aumento della sollecitazione potrebbe provocare una deformazione del giunto,

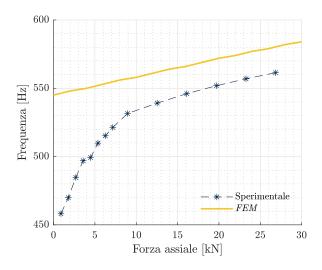


Figura 4.8: Dovetail - Primo modo flessionale: confronto con FEM

generare delle nuove aree di contatto e, in definitiva, determinare un aumento dello smorzamento [31].

In figura 4.9 sono confrontati gli andamenti del fattore di perdita in condizioni di stick e del valore massimo raggiunto dallo stesso: il picco dello smorzamento decresce all'aumentare del carico di trazione. Oltre un certo valore del carico non è più possibile identificare un valore massimo dello smorzamento essendo prettamente in condizioni di adesione.

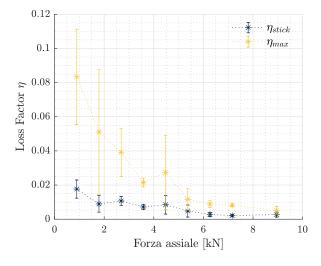


Figura 4.9: Dovetail - Primo modo flessionale: η_{stick} e η_{max}

Come analizzato in figura 3.11, la diminuzione di tale parametro potrebbe essere spiegata dalla diminuzione del rapporto tra la rigidezza di contatto k_c e la rigidezza del sistema considerato k. Essendo la frequenza di stick legata alla rigidezza totale del sistema (data dalla combinazione della k e k_c) e crescente con il carico assiale, si può dedurre che entrambe le rigidezze aumentino con la forza assiale ma con un rateo di crescita differente e tale da determinare una diminuzione di k_c/k .

4.1.2 Secondo modo flessionale

Il secondo modo flessionale presenta delle ampiezze di vibrazione ridotte nell'ordine di $4\mu m$ e il contatto, per alti carichi di trazione, è sempre in condizioni di adesione, come visibile dall'andamento costante delle frequenze in figura 4.10. Per basse sollecitazioni, invece, è possibile notare un leggero smorzamento dalla diminuzione delle frequenze con le ampiezze.

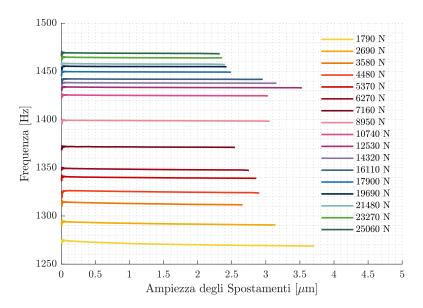


Figura 4.10: Dovetail - Secondo modo flessionale: frequenza

In figura 4.11 sono mostrati gli andamenti della frequenza e del fattore di perdita η al variare del carico di sollecitazione per il secondo modo flessionale.

Lo smorzamento assume un andamento variabile e differente da quello previsto: presenta un valore massimo nell'intorno di circa 8000 N per poi diminuire. Tale comportamento non presenta una spiegazione attendibile. I valori di smorzamento raggiunti per il secondo modo flessionale

sono comunque relativamente bassi e nel range di $0.2-0.6\,\%.$

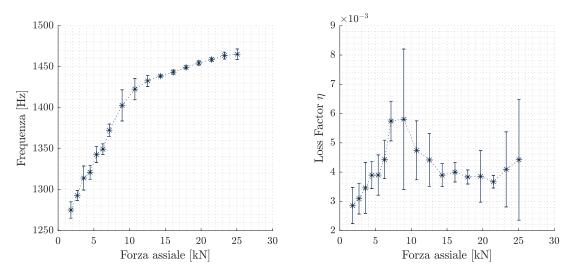


Figura 4.11: Dovetail - Secondo modo flessionale: deviazione standard

Confrontando i valori della frequenza con quelli calcolati dal modello FEM (fig. 4.12) si nota una maggiore differenza per bassi valori del carico, legata anche in questo caso ad un leggero slittamento nelle zone di contatto.

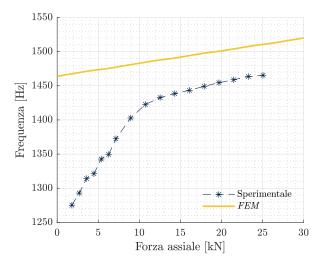


Figura 4.12: Dovetail - Secondo modo flessionale: confronto con FEM

4.2 Giunto di tipo dovetail con basso attrito

La condizione di basso attrito è stata ottenuta attraverso l'impiego di un lubrificante 5W - 40 in corrispondenza delle zone di contatto tra la blade e gli slots. In generale, l'utilizzo di un lubrificante permette di creare uno strato sottile di olio che separa le due superficie in contatto. Il valore del coefficiente di attrito risulta essere minore e genera, di conseguenza, un maggior slittamento tra le zone in contatto. Si riducono in tal modo i livelli di rumore e vibrazione del sistema considerato [26].

4.2.1 Primo modo flessionale

Nelle figure 4.13 e 4.14 sono riportati i risultati derivanti dall'utilizzo del lubrificante nelle stesse condizioni di sollecitazione del caso precedente.

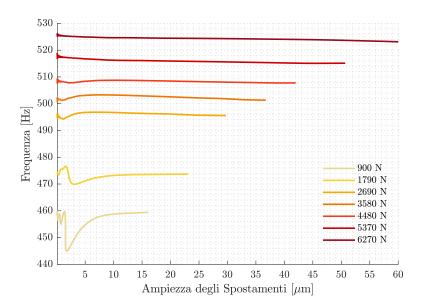


Figura 4.13: Dovetail basso attrito - Primo modo flessionale: frequenza

Si noti come per bassi valori del carico di trazione, le frequenze ed il fattore di perdita presentano degli andamenti simili a quelli attesi. Anche in questo caso, infatti, è possibile identificare una zona di adesione, caratterizzata da andamenti costanti, e una zona di slittamento in cui si verifica una variazione dei parametri.

All'aumentare del carico assiale, le frequenze e lo smorzamento tendono a rimanere costanti con

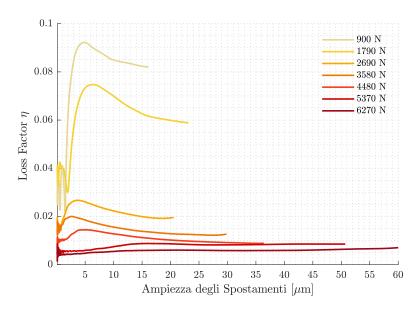


Figura 4.14: Dovetail basso attrito - Primo modo flessionale: loss factor

l'ampiezza delle vibrazioni, essendo prevalentemente in condizioni di adesione.

In figura 4.15 è mostrata la variazione standard delle frequenze e del loss factor in completa adesione al variare del carico di trazione. Il confronto tra tali parametri per differenti valori del coefficiente di attrito sarà affrontato nella sezione 4.3.

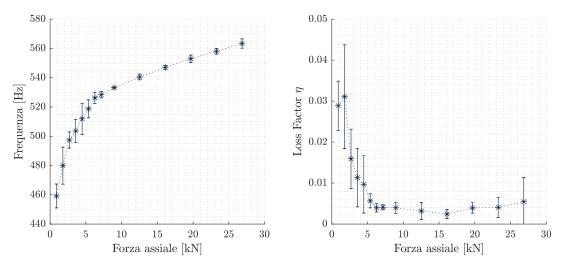


Figura 4.15: Dovetail basso attrito - Primo modo flessionale: deviazione standard

Il valore massimo raggiunto dal fattore di perdita tende a diminuire con l'aumentare delle sollecitazioni, come rappresentato in figura 4.16. La differenza tra il valore di η_{stick} e η_{max} decresce fino a diventare nullo per alti carichi di trazione.

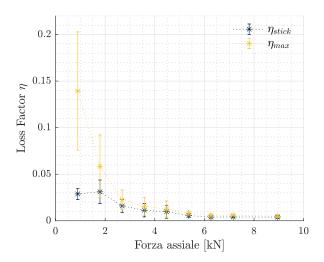


Figura 4.16: Dovetail basso attrito - Primo modo flessionale: η_{stick} e η_{max}

4.2.2 Secondo modo flessionale

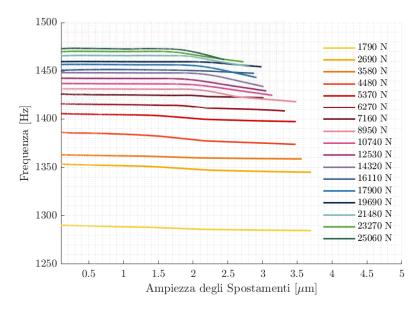


Figura 4.17: Dovetail basso attrito - Secondo modo flessionale: frequenza

Per la seconda forma modale è possibile notare dal grafico in figura 4.17 come il contatto tra il simulacro di pala e i rispettivi slots sia in condizioni di completa adesione. La frequenza, e analogamente il fattore di perdita, presenta un andamento costante per un ampio range, in relazione alla massima ampiezza raggiunta, per tutti i carichi di trazione esaminati. Per ampiezze nell'intorno di $2/3 \,\mu m$ si può notare un leggero slittamento tra i contatti dalla diminuzione della frequenza e l'aumento del parametro η .

In figura 4.18 è mostrato l'andamento della frequenza e del fattore di perdita in completa adesione al variare del carico assiale. In tal caso, lo smorzamento tende sempre a diminuire all'aumentare della sollecitazione.

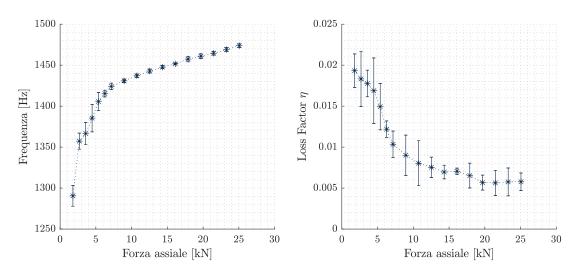


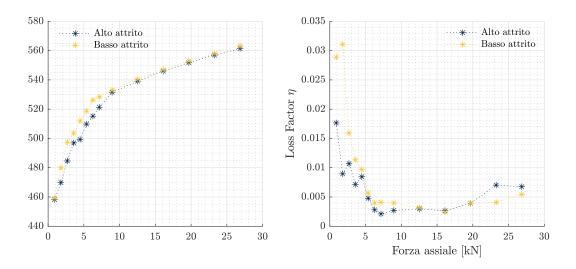
Figura 4.18: Dovetail basso attrito - Secondo modo flessionale: deviazione standard

4.3 Effetto dell'attrito per il giunto dovetail

In figura 4.3 è mostrato un confronto tra i valori medi dei parametri modali (in stato di adesione) per la prima forma modale del giunto *dovetail*, con e senza l'utilizzo del lubrificante.

In particolare, con un minor valore del coefficiente di attrito si registrano delle frequenze e dei valori del fattore di perdita maggiori. Tale differenza tende a diminuire con il carico assiale: ciò potrebbe essere spiegato considerando che, all'aumentare della sollecitazione, lo strato di olio che si interpone tra le interfacce di contatto diventa sempre più sottile, andando ad annullare i benefici del lubrificante stesso. Per bassi carichi di trazione, le maggiori frequenze naturali

determinano delle rigidezze di contatto più elevate delle precedenti.



L'aumento della k_c e la diminuzione del coefficiente di attrito μ dovrebbero determinare una diminuzione del valore critico x_{lim} , come effettivamente osservato a titolo esemplificativo in figura 4.19. A parità di carico assiale, il valore massimo raggiunto dal loss factor si verifica in corrispondenza di ampiezze di vibrazione minori, come analizzato anche nella sezione 3.1.1.

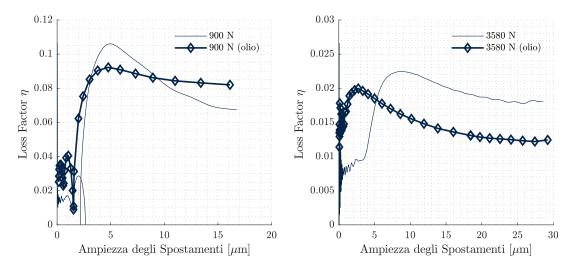


Figura 4.19: Dovetail - Primo modo flessionale: confronto attrito (2)

Anche il secondo modo flessionale presenta delle frequenze, e dunque delle rigidezze di contatto, maggiori nel caso di low friction. L'andamento del fattore di perdita, invece, presenta una

differenza sostanziale tra i due gruppi di prove effettuate: tale differenza tende a diminuire con il carico assiale per i motivi già esaminati in precedenza.

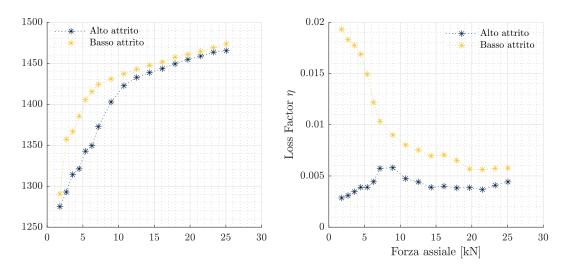


Figura 4.20: Dovetail - Secondo modo flessionale: confronto attrito

In definitiva, l'utilizzo del lubrificante consente di avere:

- frequenze di risonanza maggiori
- valori di smorzamento più elevati

in condizioni di piena adesione e soprattutto per bassi valori del carico di trazione.

4.4 Giunto di tipo fir-tree

Analogamente a quanto fatto per il giunto dovetail, anche per l'attacco pala di tipo fir-tree sono state effettuate delle prove sperimentali nelle stesse condizioni di sollecitazione per entrambi i modi flessionali. La geometria fir-tree differisce dall'altra esaminata per la presenza di un maggior numero di zone di contatto legate al numero di denti di cui è costituita.

4.4.1 Primo modo flessionale

In figura 4.21 è rappresentato l'andamento della frequenza in funzione dell'ampiezza di vibrazione per differenti valori del carico assiale. In figura 4.22, invece, è mostrato l'andamento del fattore di perdita η al variare del livello di sollecitazione.

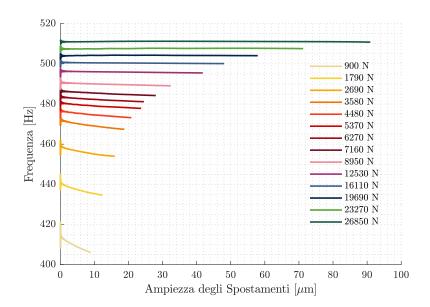


Figura 4.21: Fir-tree - Primo modo flessionale: frequenza

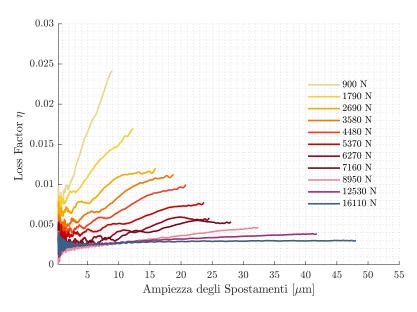


Figura 4.22: Fir-tree - Primo modo flessionale: loss factor

Si noti come, incrementando il carico di trazione, le ampiezze degli spostamenti tendono ad aumentare. Infatti, per bassi valori della forza assiale, il contatto produce uno smorzamento maggiore per effetto di uno slittamento parziale che riduce le vibrazioni del sistema considerato.

All'aumentare del carico, l'interfaccia di contatto si troverà sempre più in una condizione di adesione, motivo per cui diminuisce lo smorzamento per attrito. Per alti carichi il valore costante del loss factor è interamente riconducibile allo smorzamento viscoso e del materiale.

Per effetto dello slittamento tra le interfacce di contatto, le frequenze tendono a diminuire con le ampiezze di vibrazione. Ciò non si verifica per alti valori del carico in cui la frequenza rimane circa costate.

Considerando anche in questo caso i valori di frequenza e smorzamento a basse ampiezze come caratteristici della fase di stick, è possibile definire un valor medio μ di tutte le prove effettuate ed esaminate e una variazione standard con confidenza al 99.7%, come riportato in figura 4.23 e in tabella D.5 dell'appendice D.

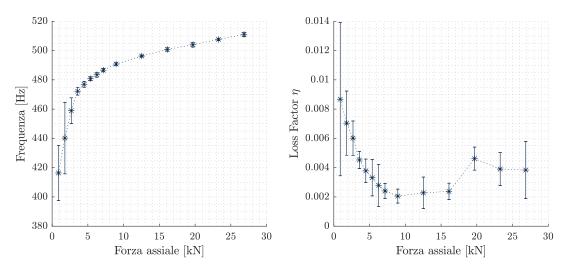


Figura 4.23: Fir-tree - Primo modo flessionale: deviazione standard

L'andamento della frequenza e dello smorzamento in condizione di adesione al variare della forza assiale è circa lo stesso ottenuto per i casi già esaminati; valgono, pertanto, le stesse considerazioni.

In figura 4.24 è mostrato l'andamento del valore massimo raggiunto dal fattore di perdita e il valore in stick. In questo caso, l'aumento dello smorzamento con le ampiezze di vibrazione è legato al *microslip* che si genera nelle zone di contatto: con il metodo di eccitazione utilizzato non è stato possibile raggiungere la condizione di macro-slittamento, osservato nell'attacco di tipo *dovetail*. Con l'aumentare del carico di sollecitazione il valore massimo raggiunto dallo smorzamento tende comunque a diminuire e a spostarsi verso ampiezze di vibrazione maggiori.

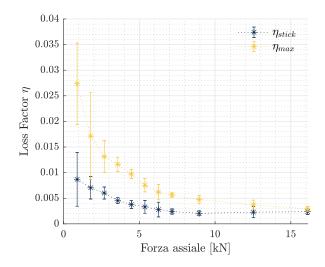


Figura 4.24: Fir-tree - Primo modo flessionale: η_{stick} e η_{max}

4.4.2 Secondo modo flessionale

La seconda forma modale del giunto di tipo *fir-tree* presenta delle ampiezze di vibrazione ridotte, come osservato anche per l'attacco *dovetail*. Per bassi valori di sollecitazione la frequenza di vibrazione tende a diminuire con le ampiezze, mentre lo smorzamento aumenta.

In figura 4.25 sono rappresentanti gli andamenti di frequenza e loss factor al variare dell'ampiezza per elevati valori del carico di trazione.

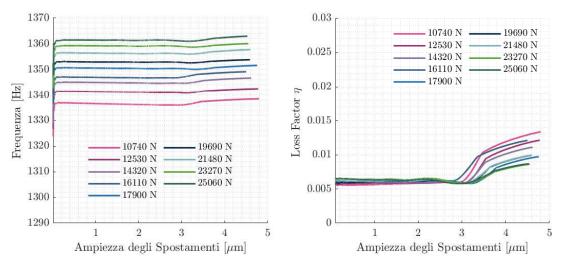


Figura 4.25: Fir-tree - Secondo modo flessionale: frequenza e loss factor

Dal grafico del loss factor è possibile distinguere una zona di stick, in cui lo smorzamento rimane circa costante, e una zona di microslip, caratterizzata da un aumento del valore di η .

In figura 4.26 è rappresentata l'evoluzione della frequenza e del loss factor in condizione di adesione al variare del carico di trazione. Mentre le frequenze mostrano un andamento analogo ai casi precedenti, lo smorzamento tende a crescere per valori di sollecitazione maggiori di circa 10000 N. Per bassi valori del carico, il fattore di perdita non presenta un andamento regolare.

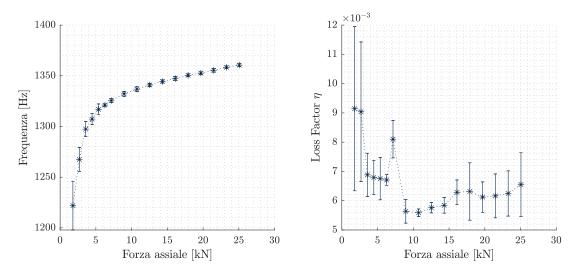


Figura 4.26: Fir-tree - Secondo modo flessionale: deviazione standard

Capitolo 5

Determinazione analitica delle rigidezze di contatto

Il contatto tra corpi non conformi come quello tra *blade* e *slot* può essere trattato, in prima approssimazione, come un contatto tra una superficie piana e un corpo con bordi arrotondati (fig. 5.1), come proposto in [1].

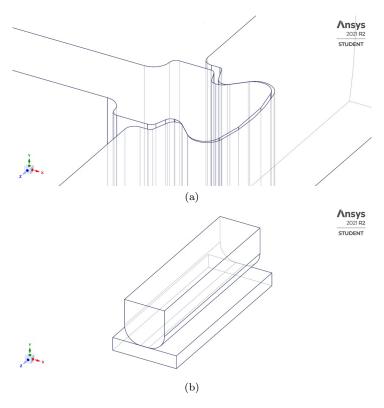


Figura 5.1: Contatto tra blade e slot (a) e contatto semplificato (b)

Il modello proposto permette di determinare:

- 1. Dimensioni della zona di contatto;
- 2. Distribuzioni delle pressioni e degli sforzi di taglio;
- 3. Spostamenti relativi tra i due corpi;
- 4. Rigidezze teoriche in direzione normale e tangenziale;

In Appendice E sono riportati procedimenti ed equazioni utilizzati per determinare tali parametri. Per maggiori dettagli si faccia riferimento a [3], [12], [13], [23] e [34].

5.1 Determinazione delle forze applicate

Nota la forza di trazione F_{ax} applicata al simulacro di pala è possibile determinare le sue componenti normale N e tangenziale T considerando l'equilibrio delle forze:

$$F_{ax} = 2 \cdot (N \sin\theta + T \cos\theta) \tag{5.1}$$

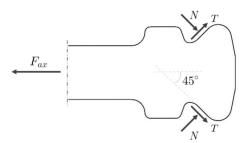


Figura 5.2: Forze di contatto

Considerando il modello di attrito di Coulomb la componente tangenziale della forza può essere espressa in funzione della componente normale e dell'attrito μ secondo la relazione:

$$T = k \cdot \mu N \tag{5.2}$$

 $con k = \frac{T}{\mu N}.$

Risulta che per la singola interfaccia di contatto:

$$N = \frac{F_{ax}}{2 \cdot (sin\theta + k \cdot \mu cos\theta)}$$
 (5.3)

Al fine di soddisfare l'equazione 5.1, all'aumentare del parametro k il precarico normale N tende a diminuire, mentre la forza tangenziale aumenta. Il medesimo comportamento è osservabile per forze assiali differenti, come mostrato in figura 5.3

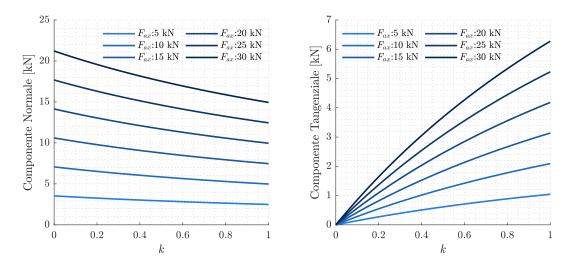


Figura 5.3: Forza normale e tangenziale al variare di ke ${\cal F}_{ax}$

5.2 Geometria del contatto

In riferimento alla figura 5.4 sono definite:

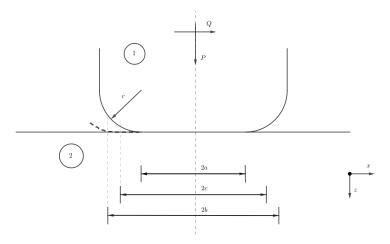


Figura 5.4: Geometria del contatto

- a, semi-larghezza della zona di contatto;
- b, semi-larghezza della regione di contatto dopo l'applicazione del carico normale;
- \bullet **c**, semi-larghezza della regione di adesione in seguito all'applicazione del carico normale e tangenziale;

- L, lunghezza della zona di contatto;
- r, raggio di raccordo del corpo arrotondato;

Sulla base di precedenti analisi per l'attacco pala di tipo dovetail sono stati presi in considerazione i seguenti valori:

Geometria e materiale				
Larghezza [mm]	2a	2.5665		
Lunghezza [mm]	L	26		
Raggio di raccordo [mm]	r	2.5		
Modulo di Young [GPa]	E	210		
Coefficiente di Poisson	ν	0.3		
Coefficiente di attrito	μ	0.42		

Tabella 5.1: Valori di riferimento: geometria e materiale

Noti i valori delle forze che agiscono sul sistema considerato è possibile determinare le grandezze caratteristiche del contatto. Per effetto del precarico N, i corpi tendono a deformarsi e a modificare le dimensioni effettive della regione in cui avviene il contatto, passando da una larghezza 2a ad una larghezza pari a 2b. Una conseguenza dell'aumento della forza tangenziale T è, invece, quello di variare lo stato del contatto definendo due situazioni limite:

- Full Stick, condizione in cui i corpi sono soggetti al solo carico normale definendo una regione di contatto di larghezza 2b in completa adesione. In tal caso c = b;
- Stick e Slip, condizione in cui la forza tangenziale è massima e il carico normale è minimo. La regione di contatto è caratterizzata da una zona di adesione 2a e una zona di slittamento di larghezza pari a $L_{slip} = 2(b-c)$ con c=a.

Dunque, come riportato in figura 5.5, all'aumentare del parametro k e per un dato valore della forza assiale, le grandezze b e c tendono a diminuire generando una regione di slip sempre più preponderante.

In figura 5.6 è mostrato lo stato del contatto al variare delle forze applicate definite da k in cui:

- Regione di adesione legata alla geometria dei corpi;
- Regione di adesione aggiuntiva in seguito all'applicazione del precarico;
- Regione di slittamento.

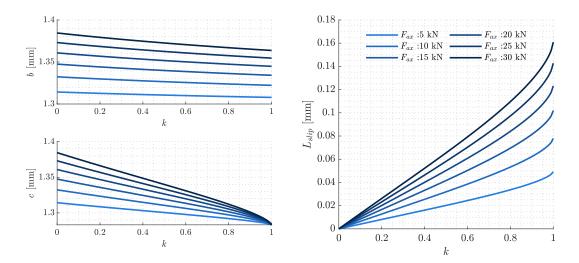


Figura 5.5: Grandezze della regione di contatto

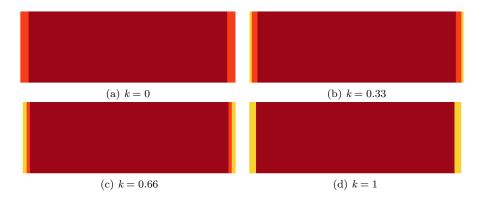


Figura 5.6: Regione di contatto al variare di k

5.3 Distribuzione di pressione

Definite le forze applicate e le dimensioni della regione di contatto, lo step successivo è quello di determinare la distribuzione delle pressioni che agiscono in direzione perpendicolare a tale regione. Per la natura del contatto e del modello utilizzato, il diagramma delle pressioni presenta un andamento simmetrico rispetto alla direzione normale con un minimo nella zona centrale e un valore massimo nelle vicinanze degli estremi del contatto, come visibile in figura 5.7.

Assegnata una determinata forza assiale l'andamento delle pressioni raggiunge valori maggiori all'aumentare del precarico N, ovvero al diminuire di k. Con forze F_{ax} più elevate, il diagramma mantiene la stessa evoluzione raggiungendo valori di pressioni sempre maggiori.

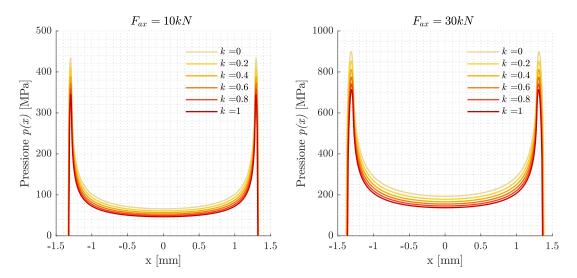


Figura 5.7: Distribuzione di pressione al variare del carico

5.4 Distribuzione dello sforzo di taglio

Ugualmente a quanto fatto per le pressioni, è possibile definire la distribuzione dello sforzo di taglio per effetto della forza tangenziale T. In particolare, tale distribuzione q_x è data dalla combinazione tra una condizione di full slidind e una sua perturbazione q^* legata alla presenza di una regione di adesione:

$$q_x(x) = \mu p(x) + q^*(x) \tag{5.4}$$

Nel caso in cui la regione aggiuntiva di contatto fosse in uno stato di completa adesione non sarà presente una distribuzione di taglio, ovvero risulta $q_x(x) = 0$.

All'aumentare del valore di k e quindi della forza tangenziale applicata, aumenterà la porzione di slittamento generando una certa distribuzione delle tensioni tangenziali.

Per un valore di k = 1, la zona di contatto aggiuntiva è interamente in slip per cui:

$$q_x(x) = \mu p(x)$$

L'espressione della perturbazione $q^*(x)$ ha validità solo nella regione di *stick* definita in $-c \le x \le c$. Al di fuori di tale intervallo, ovvero per $c \le |x| \le b$, analiticamente risulta $q^*(x) = 0$: ciò è legato al fatto che in tale zona si verifica una condizione di slittamento in cui localmente viene raggiunto il limite di Coulomb per cui $q_x(x) = \mu p(x)$ anche se globalmente $T < \mu N$.

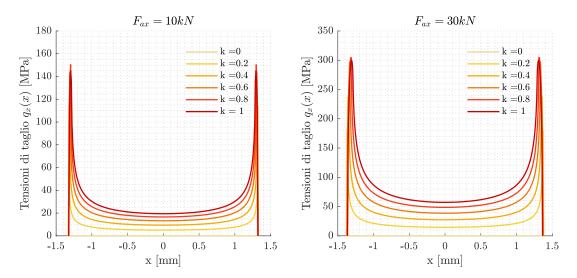


Figura 5.8: Distribuzione dello sforzo di taglio al variare del carico

5.5 Spostamenti relativi e rigidezze

In figura 5.9 è mostrato l'andamento teorico degli spostamenti relativi in direzione tangenziale all'aumentare del parametro k e per differenti valori della forza assiale: essi tendono ad aumentare con l'incremento della forza tangenziale.

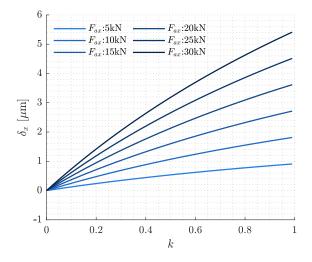


Figura 5.9: Spostamenti relativi δ_x in direzione tangenziale

In figura 5.10 viene presentato l'andamento degli spostamenti relativi in funzione del carico tangenziale, permettendo di definire il valore della rigidezza tangenziale come pendenza puntuale

di tali curve. Queste ultime differiscono leggermente al variare della forza assiale valutata e le linee tratteggiate orizzontali indicano il raggiungimento del limite di Coulomb $T = \mu N$ per ogni valore di F_{ax} .

La rigidezza tangenziale, come mostrato sempre in figura 5.10, cresce all'aumentare della forza assiale F_{ax} per un range di k abbastanza elevato: a parità di altre condizioni incrementando il valore di F_{ax} , aumenta anche il precarico N per cui il contatto dovrebbe trovarsi principalmente in condizioni di adesione, portando ad un irrigidimento del sistema.

L'andamento della K_t al variare del parametro k può essere spiegato considerando che, come affrontato precedentemente, le dimensioni della zona di *sliding* sono funzione di tale variabile (in particolare aumentano se k cresce) generando, di conseguenza, una riduzione della rigidezza per effetto dello slittamento.

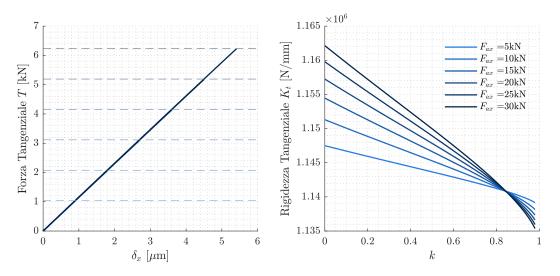


Figura 5.10: Rigidezza tangenziale K_t

5.6 Spostamenti relativi e rigidezza in direzione normale

Analogamente, sono stati calcolati gli spostamenti relativi in direzione normale alla superficie di contatto. Dalle analisi precedentemente effettuate e dalla figura 5.11, si evince come gli spostamenti δ_z diminuiscano all'aumentare di k, in quanto si riduce il valore del carico normale N.

Definendo la rigidezza come derivata della forza di contatto normale rispetto allo spostamento relativo nella stessa direzione è stato possibile valutare l'andamento della K_n , come riportato in figura 5.11.

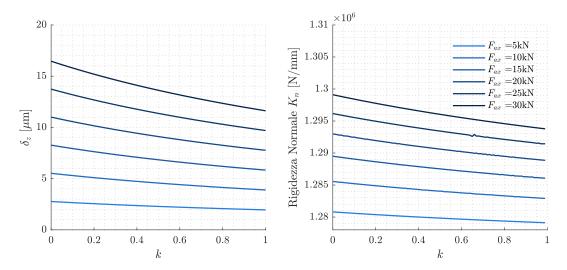


Figura 5.11: Spostamenti relativi δ_z e rigidezza K_n in direzione normale

5.7 Rigidezze teoriche in condizione di full stick

e K_n al variare della forza assiale applicata.

Come dimostrato precedentemente, per un valore di k=0 il carico normale N è massimo, la forza tangenziale T è nulla e nella regione di contatto non sono presenti zone di slittamento. Si consideri tale requisito come condizione caratteristica dello stato di completa adesione. Sulla base di tale ipotesi, in figura 5.12 è rappresentato l'andamento delle rigidezze teoriche K_t

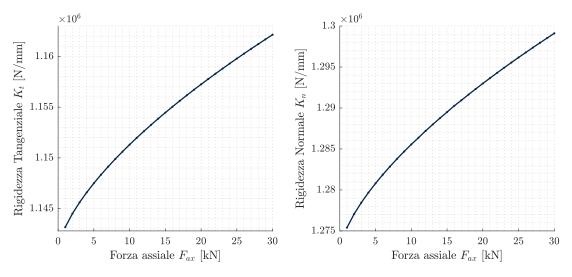


Figura 5.12: Rigidezze K_t e K_n in condizione di $full\ stick$

Conclusioni

Gli obiettivi del presente lavoro sono stati quelli di:

- validare le modifiche apportate ad un sistema esistente in grado eccitare e rilevare le vibrazioni di un simulacro di pala;
- fornire delle informazioni riguardanti i parametri modali di due differenti giunti ampiamente utilizzati in ambito aeronautico.

I risultati sperimentali ottenuti hanno mostrato una dipendenza di tali parametri non solo con la forza assiale applicata, ma anche con l'ampiezza delle vibrazioni. Inoltre, è stato possibile individuare una stato di adesione, in cui il comportamento del sistema ha una dipendenza lineare con le ampiezze, ed uno stato di slittamento, per il quale tale dipendenza è non lineare.

Considerando il comportamento lineare per entrambi i giunti analizzati e per entrambe le forme modali prese in esame si nota che:

- i valori delle frequenze di risonanza aumentano sempre con il carico di sollecitazione;
- i valori del fattore di perdita tendono a diminuire con l'incremento della forza assiale;
- il rapporto tra la rigidezza di contatto e la rigidezza del sistema diminuisce con la forza assiale;
- i risultati ottenuti differisco dal modello FEM soprattutto per bassi carichi di trazione;

Infatti, all'aumentare del carico di sollecitazione il contatto si troverà sempre più in uno stato di adesione generando un irrigidimento del sistema ed uno smorzamento per attrito sempre minore. Per bassi carichi di sollecitazione, invece, il comportamento non lineare dei parametri modali è predominante e ciò determina una maggiore differenza tra i valori ottenuti sperimentalmente e quelli derivanti dal modello agli elementi finiti.

Investigando il comportamento del sistema lubrificato è stato riscontrato che la creazione di un film sottile di olio in corrispondenza delle zone di contatto genera un maggior slittamento in termini spaziali. A parità di forza assiale applicata, il passaggio tra la condizione di *stick-slip* e quella di *full stick* avviene per ampiezze di vibrazioni minori rispetto al funzionamento senza lubrificante; dunque, prevale la condizione di *slip* nell'intervallo di decadimento libero. Inoltre, i valori raggiunti dallo smorzamento e dalle frequenze di risonanza in condizione di adesione risultano essere maggiori rispetto al caso nominale.

I risultati ottenuti per il giunto di tipo *Fir-tree* sono qualitativamente gli stessi del giunto *Dovetail*: gli andamenti dei parametri modali al variare della forza assiale sono i medesimi ma, a causa delle differenti masse e rigidezze dei simulacri di pala, non sono confrontabili.

In tale lavoro, dunque, è stato considerato solo l'andamento dei parametri modali in condizioni di adesione, ma le prove sperimentali effettuate per le due geometrie ed i relativi risultati ottenuti dall'analisi sono da considerarsi come database per sviluppi futuri. In particolare, tali informazioni potrebbero essere utilizzate non solo per investigare il comportamento non lineare dei parametri modali, ma anche per determinare i valori delle rigidezze di contatto in direzione normale e tangenziale, utilizzando modelli presenti in letteratura o proponendone dei nuovi. I segnali di velocità ridotti al tempo di decadimento libero, invece, potrebbero essere utilizzati come confronto con i risultati di una integrazione temporale riguardante il modello completo.

Appendice A

Metodo Free Vib

Il metodo *FreeVib* proposto da M. Feldman in [15] e [16] prevede l'applicazione della trasformata di Hilbert per caratterizzare la risposta di un sistema dinamico non lineare fornendo informazioni relative ai parametri modali istantanei.

A.1 Trasformata di Hilbert

Dato un segnale y(t), la trasformata di Hilbert associata $\tilde{y}(t)$ è definita come:

$$H[y(t)] = \tilde{y}(t) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(\tau)}{t - \tau} d\tau$$
(A.1)

Entrambe le funzioni y(t) e $\tilde{y}(t)$ sono funzioni reali che possono essere combinate per generare un segnale analitico Y(t) complesso:

$$Y(t) = y(t) + i\tilde{y}(t) = A(t) \cdot e^{i\varphi(t)}$$
(A.2)

con ampiezza A(t) e fase $\varphi(t)$.

Risulta:

$$A\left(t\right) = \sqrt{y^{2}\left(t\right) + \tilde{y}^{2}\left(t\right)} \tag{A.3}$$

$$\varphi(t) = \arctan\left[\frac{\tilde{y}(t)}{y(t)}\right]$$
 (A.4)

Conoscendo fase e ampiezza istantanee è possibile calcolare la frequenza angolare istantanea $\omega(t)$ e la derivata dell'ampiezza $\dot{A}(t)$:

$$\omega(t) = \dot{\varphi}(t) = \frac{y(t)\dot{\tilde{y}}(t) - \dot{y}(t)\tilde{y}(t)}{A^{2}(t)} = Im\left[\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)}\right]$$
(A.5)

$$\dot{A}\left(t\right) = \frac{y\left(t\right)\dot{y}\left(t\right) + \tilde{y}\left(t\right)\dot{\tilde{y}}\left(t\right)}{A\left(t\right)} = A\left(t\right)Re\left[\frac{\dot{Y}\left(t\right)}{Y\left(t\right)}\right] \tag{A.6}$$

A.2 Sistema SDOF con smorzamento isteretico

Si consideri un sistema libero ad un singolo grado di libertà con massa m e rigidezza k. Per analizzare l'effetto dello smorzamento strutturale e dello smorzamento per attrito, entrambi assunti indipendenti dalla frequenza, si fa riferimento allo smorzamento isteretico h come proposto in [21] per cui l'equazione del moto nel dominio del tempo può essere scritta come:

$$m\ddot{y}(t) + ky(t) - h\tilde{y}(t) = 0 \tag{A.7}$$

Applicando la trasformata di Hilbert e moltiplicando per i:

$$im\ddot{\tilde{y}}(t) + ik\tilde{y}(t) + ihy(t) = 0$$
(A.8)

Ricordando la A.2 e sommando le equazioni A.7 e A.8 si ottiene:

$$m\ddot{Y}(t) + kY(t) + ihY(t) = 0 \tag{A.9}$$

Dividendo per la massa m e introducendo la pulsazione naturale ω_n e il loss factor η

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} \qquad \eta = \frac{h}{k}$$

risulta:

$$\ddot{Y}(t) + \omega_n^2 (1+i\eta) Y(t) = 0 \tag{A.10}$$

Calcolando le derivate di Y

$$\dot{Y}(t) = Y(t) \cdot \left[\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} + i\omega(t) \right]$$
(A.11)

$$\ddot{Y}(t) = Y(t) \cdot \left[\frac{\ddot{A}(t)}{A(t)} - \omega^{2}(t) + 2i\omega(t) \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} + i\dot{\omega}(t) \right]$$
(A.12)

e sostituendo in A.10, si ottiene:

$$Y\left[\frac{\ddot{A}}{A} - \omega^2 + \omega_n^2\right] + iY\left[2\omega\frac{\dot{A}}{A} + \dot{\omega} + \eta\omega_n^2\right] = 0 \tag{A.13}$$

Ponendo, infine, parte reale e parte immaginaria uguale a zero si ottengono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases}
\omega_n^2 = \omega^2 - \frac{\ddot{A}}{A} \\
\eta = -\frac{1}{\omega_n^2} \left[2\omega \frac{\dot{A}}{A} + \dot{\omega} \right]
\end{cases}$$
(A.14)

Nel presente lavoro, avendo a disposizione il segnale della velocità $\dot{y}(t)$, i segnali relativi agli spostamenti y(t) e alle accelerazioni $\ddot{y}(t)$ sono ottenuti attraverso integrazione e differenziazione

numerica di $\dot{y}(t)$, rispettivamente.

Per calcolare \ddot{A} e $\dot{\omega}$, la relazione A.12 può essere anche scritta come:

$$\ddot{Y} = \ddot{y} + i\ddot{\tilde{y}} = Y \cdot \left[\frac{\ddot{A}}{A} - \omega^2 + 2i\omega \frac{\dot{A}}{A} + i\dot{\omega} \right] = (y + i\tilde{y}) \cdot \left[\frac{\ddot{A}}{A} - \omega^2 + 2i\omega \frac{\dot{A}}{A} + i\dot{\omega} \right] =$$

$$= \left[y \left(\frac{\ddot{A}}{A} - \omega^2 \right) - \tilde{y} \left(2\omega \frac{\dot{A}}{A} + \dot{\omega} \right) \right] + i \left[\tilde{y} \left(\frac{\ddot{A}}{A} - \omega^2 \right) + y \left(2\omega \frac{\dot{A}}{A} + \dot{\omega} \right) \right] \quad (A.15)$$

Segue che:

$$\begin{cases}
\ddot{y} = y \left(\frac{\ddot{A}}{A} - \omega^2 \right) - \tilde{y} \left(2\omega \frac{\dot{A}}{A} + \dot{\omega} \right) \\
\ddot{\ddot{y}} = \tilde{y} \left(\frac{\ddot{A}}{A} - \omega^2 \right) + y \left(2\omega \frac{\dot{A}}{A} + \dot{\omega} \right)
\end{cases} \tag{A.16}$$

e manipolando tali equazioni risulta:

$$\begin{cases} \dot{\omega}\left(t\right) = \frac{y\,\ddot{\tilde{y}} - \tilde{y}\,\ddot{\tilde{y}}}{A^2} - 2\,\omega\frac{\dot{A}}{A} \\ \frac{\ddot{A}}{A}\left(t\right) = \frac{y\,\ddot{\tilde{y}} + \tilde{y}\,\ddot{\tilde{y}}}{A^2} + \omega^2 \end{cases}$$
(A.17)

Appendice B

Metodo di integrazione di Newmark

L'equazione del moto, in assenza di forze esterne f_e e in condizioni di contatto, assume la forma:

$$m \ddot{x}(t) + \frac{h}{\omega} \dot{x}(t) + k x(t) = -f_c(x, \dot{x}, t)$$
 (B.1)

Introducendo la pulsazione naturale ω_n e il fattore di perdita η come:

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} \qquad \eta = \frac{h}{k}$$

e dividendo la B.1 per la massa m, risulta:

$$\ddot{x}(t) + \eta \frac{\omega_n^2}{\omega} \dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = -\frac{f_c(x, \dot{x}, t)}{m}$$
(B.2)

Tale equazione differenziale può essere risolta utilizzando l'integrazione numerica che permette di determinare la soluzione all'istante temporale t_{i+1} conoscendo la soluzione nell'istante precedente t_i .

Nota la legge di variazione dell'accelerazione $\ddot{x}(t)$, il metodo di Newmark consente di calcolare la velocità $\dot{x}(t)$ e lo spostamento x(t) sulla base delle seguenti formulazioni:

$$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \ddot{x}(\tau) d\tau \qquad x_{i+1} = x_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{x}(\tau) d\tau$$

In particolare:

$$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + [(1 - \gamma)\Delta t] \ \ddot{x}_i + \gamma \Delta t \ \ddot{x}_{i+1}$$
(B.3)

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t \,\dot{x}_i + \left[(0.5 - \beta) \,\Delta t^2 \right] \,\ddot{x}_i + \beta \Delta t^2 \,\ddot{x}_{i+1} \tag{B.4}$$

in cui il passo di integrazione Δt è stato assunto costante e i parametri β e γ controllano sia la variazione dell'accelerazione all'interno del passo che la stabilità del metodo.

Ponendo $\beta = \frac{1}{6}$ e $\gamma = \frac{1}{2}$ si ottiene una accelerazione lineare nel passo di integrazione e il metodo risulta stabile se:

$$\frac{\Delta t}{T} \le \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\gamma - 2\beta}} \tag{B.5}$$

con T il periodo di vibrazione del sistema.

Sostituendo le relazioni B.3 e B.4 nella B.1 si ottiene una equazione in cui, note le grandezze al passo i-esimo, l'unica incognita risulta essere \ddot{x}_{i+1} .

Dunque, assegnate le condizioni iniziali x_0 e \dot{x}_0 , si procede in due fasi come proposto in [18]:

- Fase di previsione: si ipotizza che il contatto al passo t_{i+1} si trovi in una condizione di adesione in cui la posizione x_{ci+1} è nota e pari al valore nell'istante precedente. Con il metodo di Newmark si calcola l'accelerazione \ddot{x}_{i+1} e, di seguito, la velocità \dot{x}_{i+1} e lo spostamento x_{i+1} ;
- Fase di correzione: noto lo spostamento x_{i+1} , si calcola la forza tangenziale e si verifica la correttezza della previsione dello stato del contatto. Se la forza risulta minore del limite di Coulomb, il contatto si trova effettivamente in una condizione di stick in cui lo spostamento x_{ci+1} è pari al valore assegnato; altrimenti, il contatto è in slittamento e la forza assume il valore, in modulo, di μN_0 . In questo caso, viene nuovamente calcolata l'accelerazione con il valore esatto della forza di contatto e la nuova posizione x_c che ne deriva è pari a:

$$x_{ci+1} = x_{i+1} - \frac{f_{ci+1}}{k_c} \tag{B.6}$$

In questo modo è possibile valutare la cinematica e lo stato del contatto stesso nell'intervallo di tempo considerato.

Appendice C

Metodo del bilanciamento armonico

La soluzione stazionaria dell'equazione del moto:

$$m\ddot{x}(t) + \frac{h}{\omega}\dot{x}(t) + kx(t) = f_e(t) - f_c(x, \dot{x}, t)$$
 (C.1)

può essere determinata anche utilizzando l'Harmonic Balance Method (HBM). Supponendo che la forzante esterna sia una funzione armonica del tipo $f_e = F \cos(\omega t - \phi)$ e che la risposta x sia periodica con periodo pari a quello della forzante, tale metodo permette di assumere che la soluzione del sistema non lineare sia costituita da una somma di componenti armoniche, definite dal teorema di Fourier [37]:

$$x = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}$$
 (C.2)

Se si considera il primo termine dell'approssimazione è possibile definire:

$$x = a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) = X \cos(\theta)$$
 (C.3)

dove $\theta = \omega t$. Derivando e sostituendo nella C.1:

$$-m\omega^{2}X\cos(\omega t) - hX\sin(\omega t) + kX\cos(\omega t) = F\cos(\omega t - \phi) - f_{c}(x, \dot{x}, t)$$
 (C.4)

La forza di contatto, per come definita in 3.2 e di seguito riportata:

$$f_c(t) = \begin{cases} k_c \left(x(t) - x_c(t) \right) & stick \\ \mu N_0 \, sgn(\dot{x}_c(t)) & slip \end{cases}$$
 (C.5)

genera un ciclo di isteresi mostrato in figura C.1 e di cui è possibile definire dei punti caratteristici. Il punto A rappresenta la massima ampiezza raggiunta da x e, in accordo con la C.3, risulta

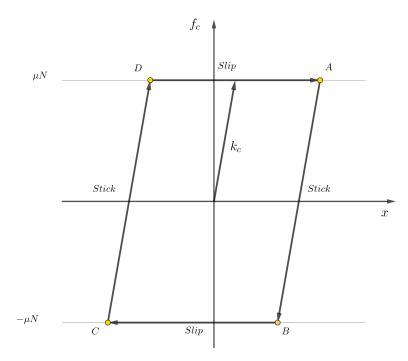


Figura C.1: Ciclo di isteresi

 $\theta_A=0.$ Durante la fase di stick (tratto AB) lo spostamento del ground è costante e pari a:

$$x_c = X - \frac{\mu N}{k_c} \tag{C.6}$$

ottenuta considerando entrambe le relazioni della forza di contatto nel punto A. Segue che, in corrispondenza del punto B valgono contemporaneamente le equazioni 3.2:

$$f_c = k_c \left(x - x_c \right) = -\mu N \tag{C.7}$$

Sostituendo le C.3 e C.6 nella C.7 risulta:

$$\theta_B = \cos^{-1}\left(1 - \frac{2\,\mu\,N}{k_c\,X}\right) \tag{C.8}$$

In corrispondenza del punto C si raggiunge la minima ampiezza dello spostamento per cui $\theta_C = \theta_A + \pi$. Assumendo che la risposta del sistema abbia una forma armonica, il tratto CDA del ciclo di isteresi risulta essere uguale al tratto ABC, dunque valgono le stesse relazioni e considerazioni. La forza di contatto f_c è dunque funzione della posizione angolare θ :

$$f_c = f_c(\theta) = \begin{cases} k_c \ (x(\theta) - x_c) & 0 \leqslant \theta \leqslant \theta_B \\ -\mu N & \theta_B \leqslant \theta \leqslant \pi \end{cases}$$
 (C.9)

e considerando lo sviluppo in serie di Fourier

$$f_c = F_c \cos(\theta) + F_s \sin(\theta) \tag{C.10}$$

risulta che le sue componenti possano essere calcolate come segue:

$$F_c = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f_c(\theta) \cos(\theta) d\theta = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\theta_B} f_c(\theta) \cos(\theta) d\theta + \int_{\theta_B}^{\pi} f_c(\theta) \cos(\theta) d\theta \right]$$
 (C.11)

$$F_s = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f_c(\theta) \sin(\theta) d\theta = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\theta_B} f_c(\theta) \sin(\theta) d\theta + \int_{\theta_B}^{\pi} f_c(\theta) \sin(\theta) d\theta \right]$$
 (C.12)

Dalla risoluzione di tali integrali le due componenti assumono la forma:

$$F_c = \frac{k_c X}{\pi} \left[\theta_B - \frac{1}{2} \sin(2\theta_B) \right] \tag{C.13}$$

$$F_s = -\frac{4\mu N}{\pi} \left[1 - \frac{\mu N}{k_c X} \right]$$
 (C.14)

Infine, sostituendo nella C.4 si ottiene:

$$-m\omega^2 X \cos(\omega t) - (hX - F_s)\sin(\omega t) + (kX + F_c)\cos(\omega t) = F\cos(\omega t - \phi)$$
 (C.15)

e dividendo per lo spostamento X:

$$-m\omega^{2}\cos(\omega t) - (h - \frac{F_{s}}{X})\sin(\omega t) + (k + \frac{F_{c}}{X})\cos(\omega t) = \frac{F}{X}\cos(\omega t - \phi)$$
 (C.16)

Il contatto, in definitiva, ha effetto sulla rigidezza e sullo smorzamento del sistema; infatti:

$$k_{tot} = k + \frac{F_c}{X} = (k + \frac{k_c}{\pi} \left[\theta_B - \frac{1}{2} \sin(2\theta_B) \right]$$
 (C.17)

$$h_{tot} = h - \frac{F_s}{X} = h + \frac{4\mu N}{\pi X} \left[1 - \frac{\mu N}{k_c X} \right]$$
 (C.18)

Tali equazioni possono essere normalizzate con la rigidezza del sistema k assumendo la seguente forma:

$$\frac{k_{tot}}{k} = 1 + \frac{1}{\pi} \frac{k_c}{k} \left[\theta_B - \frac{1}{2} \sin(2\theta_B) \right] \tag{C.19}$$

$$\eta = \frac{h_{tot}}{k} = \eta_0 + \frac{4\mu N}{\pi X k} \left[1 - \frac{\mu N}{k_c X} \right]$$
 (C.20)

Introducendo lo spostamento limite

$$x_{lim} = \frac{\mu N}{k_c}$$

risulta:

$$\frac{k_{tot}}{k} = 1 + \frac{1}{\pi} \frac{k_c}{k} \left[\theta_B - \frac{1}{2} \sin(2\theta_B) \right]$$
 (C.21)

$$\eta = \frac{h_{tot}}{k} = \eta_0 + \frac{4}{\pi} \frac{x_{lim}}{x} \frac{k_c}{k} \left[1 - \frac{x_{lim}}{x} \right] \tag{C.22}$$

Appendice D

Deviazione standard

La deviazione standard σ è un indice di dispersione dei dati relativi ad una determinata popolazione. Dati N il numero di campioni che definiscono la popolazione, A_i il valore della i-esimo dato e μ il valore medio delle osservazioni calcolato come:

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} A_i$$
 (D.1)

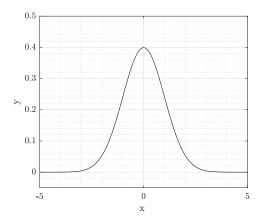
risulta:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} |A_i - \mu|^2}$$
 (D.2)

Se si considera una distribuzione normale di tipo gaussiano con media μ e deviazione standard σ , la curva normale corrispondente è del tipo:

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(A-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{D.3}$$

Per una curva normale standardizzata si utilizza $\mu = 0$ e $\sigma = 1$.



Nel presente lavoro è stata utilizzata una distribuzione normale con confidenza al 99.7 %, ovvero si è definito un intervallo $[\mu - \lambda \sigma, \mu + \lambda \sigma]$ in cui cade il 99.7 % delle misure. Dalle tabelle della distribuzione normale è possibile determinare il valore di λ in base al valore della probabilità che si vuole considerare; in tal caso risulta $\lambda = 3$.

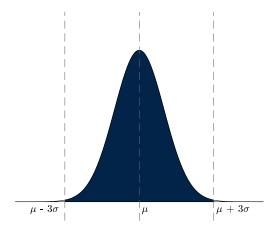


Figura D.1: Distribuzione normale con confidenza al $99.7\,\%$

Nelle tabelle seguenti sono riportati i valori ottenuti dalla procedura di deviazione standard per tutte le prove esaminate, suddivise per geometria analizzata e carico assiale applicato.

Pressione [bar]	Forza assiale [N]	$\mu_f [Hz]$	σ_f [Hz]	μ_{η}	σ_{η}
5	895	458.20	4.832	0.0177	0.0018
10	1790	469.87	5.814	0.0090	0.0016
15	2685	484.64	1.199	0.0107	0.00086
20	3580	496.94	0.721	0.0071	0.00045
25	4475	499.28	2.382	0.0085	0.0018
30	5370	509.81	3.184	0.0048	0.0012
35	6265	515.22	0.928	0.0028	0.00041
40	7160	521.33	3.202	0.0021	0.00019
50	8950	531.52	0.875	0.0027	0.00049
70	12530	539.15	0.385	0.0030	0.00048
90	16110	546.04	0.442	0.0027	0.00042
110	19690	551.84	0.413	0.0039	0.00069
130	23270	556.94	0.399	0.0070	0.0010
150	26850	561.38	0.480	0.0068	0.00067

Tabella D.1: Dovetail - Primo modo flessionale: valori deviazione standard

Pressione [bar]	Forza assiale [N]	$\mu_f [Hz]$	σ_f [Hz]	μ_{η}	σ_{η}
10	1790	1275.16	3.329	0.0039	0.00020
15	2685	1292.90	2.014	0.0031	0.00017
20	3580	1314.19	4.883	0.0035	0.00029
25	4475	1321.22	2.848	0.0039	0.00015
30	5370	1342.78	3.236	0.0039	0.00023
35	6265	1349.43	2.161	0.0044	0.00022
40	7160	1372.58	2.488	0.0057	0.00022
50	8950	1402.80	6.336	0.0058	0.000079
60	10740	1422.65	4.334	0.0047	0.00033
70	12530	1432.74	2.269	0.0044	0.00029
80	14320	1438.59	0.439	0.0039	0.00013
90	16110	1443.41	0.835	0.0040	0.00011
100	17900	1449.27	0.629	0.0038	0.00079
110	19690	1454.60	0.852	0.0039	0.00029
120	21480	1458.81	0.646	0.0037	0.00007
130	23270	1463.58	1.400	0.0041	0.00042
140	25060	1465.32	2.119	0.0044	0.00068

Tabella D.2: Dovetail - Secondo modo flessionale: valori deviazione standard

Pressione [bar]	Forza assiale [N]	$\mu_f [Hz]$	σ_f [Hz]	μ_{η}	σ_{η}
5	895	459.20	2.720	0.0289	0.0020
10	1790	479.91	4.217	0.0311	0.0042
15	2685	497.46	1.831	0.0159	0.0024
20	3580	503.58	2.668	0.0113	0.0024
25	4475	511.93	3.552	0.0097	0.0023
30	5370	518.70	2.042	0.0057	0.00057
35	6265	526.24	1.254	0.0040	0.00033
40	7160	528.37	0.712	0.0041	0.00019
50	8950	533.19	0.132	0.0040	0.00045
70	12530	540.51	0.653	0.0032	0.00069
90	16110	547.02	0.414	0.0025	0.00037
110	19690	552.94	0.843	0.0039	0.00042
130	23270	558.09	0.662	0.0041	0.00082
150	26850	563.34	1.064	0.0054	0.0020

Tabella D.3: Dovetail basso attrito - Primo modo flessionale: valori deviazione standard

Pressione [bar]	Forza assiale [N]	$\mu_f [Hz]$	σ_f [Hz]	μ_{η}	σ_{η}
10	1790	1290.58	4.243	0.0193	0.00068
15	2685	1357.28	3.278	0.0183	0.0011
20	3580	1366.49	4.542	0.0178	0.00054
25	4475	1385.37	5.591	0.0169	0.0013
30	5370	1405.51	3.689	0.0149	0.00094
35	6265	1415.34	1.366	0.0122	0.00033
40	7160	1424.12	1.309	0.0103	0.00054
50	8950	1430.86	0.712	0.0090	0.000082
60	10740	1437.07	0.681	0.0080	0.00091
70	12530	1442.83	0.794	0.0075	0.00041
80	14320	1447.56	0.651	0.0070	0.00027
90	16110	1451.60	0.363	0.0071	0.00013
100	17900	1457.44	1.122	0.0065	0.00050
110	19690	1460.98	0.947	0.0057	0.00030
120	21480	1464.59	0.792	0.0056	0.00051
130	23270	1469.09	0.883	0.0058	0.00056
140	25060	1473.79	0.740	0.0058	0.00035

Tabella D.4: Dovetail basso attrito - Secondo modo flessionale: valori deviazione standard

Pressione [bar]	Forza assiale [N]	$\mu_f [Hz]$	σ_f [Hz]	μ_{η}	σ_{η}
5	895	416.38	6.299	0.0087	0.0017
10	1790	440.19	8.136	0.0070	0.00073
15	2685	458.95	2.924	0.0060	0.00039
20	3580	472.24	0.890	0.0045	0.00019
25	4475	476.91	0.672	0.0038	0.00027
30	5370	480.79	0.446	0.0033	0.00041
35	6265	483.48	0.564	0.0028	0.00048
40	7160	486.63	0.374	0.0024	0.00017
50	8950	490.80	0.302	0.0021	0.00016
70	12530	496.28	0.219	0.0023	0.00036
90	16110	500.76	0.390	0.0024	0.00019
110	19690	504.06	0.542	0.0046	0.00026
130	23270	507.62	0.242	0.0039	0.00037
150	26850	511.05	0.481	0.0038	0.00065

Tabella D.5: $\mathit{Fir-tree}$ - Primo modo flessionale: valori deviazione standard

Pressione [bar]	Forza assiale [N]	$\mu_f [Hz]$	σ_f [Hz]	μ_{η}	σ_{η}
10	1790	1221.95	8.013	0.0091	0.00093
15	2685	1267.50	3.931	0.0090	0.00079
20	3580	1297.41	2.495	0.0069	0.00024
25	4475	1307.28	1.800	0.0068	0.00019
30	5370	1316.90	1.783	0.0068	0.00024
35	6265	1321.08	0.406	0.0067	0.00006
40	7160	1325.60	0.612	0.0081	0.00021
50	8950	1332.18	0.823	0.0056	0.000013
60	10740	1336.81	0.818	0.0056	0.00004
70	12530	1340.98	0.523	0.0058	0.00006
80	14320	1344.43	0.521	0.0058	0.00009
90	16110	1347.32	0.715	0.0063	0.00014
100	17900	1350.46	0.449	0.0063	0.00032
110	19690	1352.63	0.453	0.0061	0.00017
120	21480	1355.48	0.644	0.0062	0.00025
130	23270	1358.41	0.403	0.0062	0.00026
140	25060	1360.56	0.467	0.0066	0.00036

Tabella D.6: Fir-tree - Secondo modo flessionale: valori deviazione standard

Appendice E

Modello semplificato del contatto con attrito

E.1 Geometria del contatto

Si consideri il sistema semplificato costituito da un corpo con bordi arrotondati e una superficie piana, presentato in [1]. Una forza in direzione normale all'area di contatto è applicata ai corpi presi in considerazione. Tale forza genera una deformazione dei corpi stessi modificando le effettive dimensioni della regione di contatto e la relativa distribuzione di pressione. Viene in seguito applicata una forza di attrito tangenziale T via via crescente, fino al raggiungimento del limite di Coulomb in corrispondenza del quale si verifica strisciamento dei corpi. Siano P e Q le forze in direzione normale e tangenziale per unità di lunghezza e μ il coefficiente di attrito; risulta:

$$Q \le \mu P \tag{E.1}$$

In riferimento alla figura E.1, sono definite:

- $\bullet\,$ a, semi-larghezza originaria della zona di contatto;
- b, semi-larghezza della regione di contatto dopo l'applicazione del carico normale;
- c, semi-larghezza della regione di adesione in seguito all'applicazione del carico normale e tangenziale;
- L, lunghezza della zona di contatto;
- r, raggio di raccordo del corpo arrotondato;

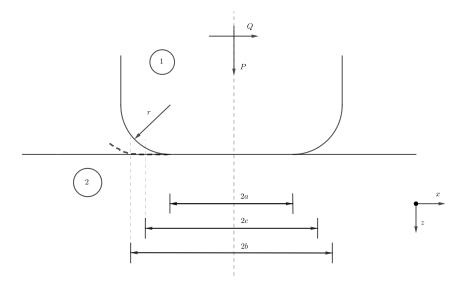


Figura E.1: Geometria del contatto

E.2 Distribuzione di pressione

Al fine di determinare la distribuzione di pressione nella zona di contatto in seguito all'applicazione del carico normale P bisogna, innanzitutto, calcolare la dimensione b:

$$\frac{a}{b} = \sin \varphi_0 \tag{E.2}$$

Il parametro φ_0 può essere determinato conoscendo il carico P dalla seguente equazione:

$$\frac{4rP}{a^2E^*} = \frac{\pi - 2\varphi_0}{2\sin^2\varphi_0} - \cot\varphi_0 \tag{E.3}$$

dove:

$$\frac{1}{E^{\star}} = \frac{1 - {\nu_1}^2}{E_1} + \frac{1 - {\nu_2}^2}{E_2}$$

Introducendo il parametro φ :

$$\frac{x}{b} = \sin\varphi \qquad -b \le x \le b \tag{E.4}$$

risulta:

$$\frac{bp(\varphi)}{P} = \frac{2/\pi}{\pi - 2\varphi_0 - \sin(2\varphi_0)} \left\{ (\pi - 2\varphi_0)\cos\varphi + \ln\left[\left|\frac{\sin(\varphi + \varphi_0)}{\sin(\varphi - \varphi_0)}\right|^{\sin\varphi} \cdot \left|\tan\frac{\varphi + \varphi_0}{2}\tan\frac{\varphi - \varphi_0}{2}\right|^{\sin\varphi_0}\right] \right\}$$
(E.5)

E.3 Distribuzione dello sforzo di taglio

Per effetto della forza tangenziale Q si genera una distribuzione di sforzo di taglio data dalla combinazione tra una condizione di full slidind $\mu p(x)$ e una sua perturbazione q^* legata alla presenza di una regione di adesione:

$$q_x(x) = \mu p(x) + q^*(x) \tag{E.6}$$

In particolare, bisogna determinare la dimensione caratteristica c che rappresenta il confine tra la zona di adesione e quella di slip:

$$\frac{a}{c} = \sin \theta_0 \tag{E.7}$$

dove:

$$\frac{4rP}{a^2E^{\star}}(1-\frac{Q}{\mu P}) = \frac{\pi-2\vartheta_0}{2sin^2\vartheta_0} - \cot\vartheta_0 \tag{E.8}$$

Definito ϑ come:

$$\frac{x}{c} = \sin\theta \tag{E.9}$$

è possibile valutare la perturbazione della distribuzione di taglio q^{\star} dalla seguente espressione:

$$\frac{cq^{\star}(\vartheta)}{\mu P - Q} = -\frac{2/\pi}{\pi - 2\vartheta_0 - \sin(2\vartheta_0)} \left\{ (\pi - 2\vartheta_0) \cos\vartheta + \ln \left[\left| \frac{\sin(\vartheta + \vartheta_0)}{\sin(\vartheta - \vartheta_0)} \right|^{\sin\vartheta} \cdot \left| \tan \frac{\vartheta + \vartheta_0}{2} \tan \frac{\vartheta - \vartheta_0}{2} \right|^{\sin\vartheta_0} \right] \right\}$$
(E.10)

Tale espressione ha validità solo nella regione di adesione definita in $-c \le x \le c$.

E.4 Spostamenti relativi e rigidezza in direzione tangenziale

Utilizzando la teoria del potenziale di Boussinesq-Cerruti [23] è stato possibile determinare lo spostamento tangenziale dei due corpi e il loro spostamento relativo al variare del carico normale e tangenziale. In particolare:

$$\delta_x = u_{x1} - u_{x2} = \frac{2}{\pi E^*} \left[-\int_{-b}^b q_x(r) ln \left| \frac{r}{b} \right| dr + Q \left(\left| \frac{L}{b} \right| + \frac{\nu}{1 - \nu} \right) \right]$$
 (E.11)

La rigidezza tangenziale può essere determinata come derivata della forza di contatto tangenziale rispetto allo spostamento relativo dei corpi nella stessa direzione:

$$k_t = \frac{\partial T}{\partial \delta_x} = \frac{\Delta T}{\Delta \delta_x} \tag{E.12}$$

E.5 Spostamenti relativi e rigidezza in direzione normale

Considerando la sola distribuzione di pressione è possibile determinare lo spostamento normale relativo tra i corpi in contatto utilizzando la stessa procedura riportata [23]. In definitiva:

$$\delta_z = u_{z1} - u_{z2} = \frac{1}{\pi E^*} \int_{-b}^b p(r) \cdot ln \left| \frac{\frac{L}{2} + \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + r^2}}{-\frac{L}{2} + \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + r^2}} \right| dr$$
 (E.13)

Analogamente a quanto fatto per la rigidezza tangenziale, la rigidezza normale può essere determinata come derivata della forza di contatto normale rispetto allo spostamento relativo nella stessa direzione:

$$k_n = \frac{\partial N}{\partial \delta_z} = \frac{\Delta N}{\Delta \delta_z} \tag{E.14}$$

Bibliografia

- [1] Allara, M. A model for the characterization of friction contacts in turbine blades. 527–544.
- [2] ALLARA, M., FILIPPI, S., AND GOLA, M. M. An experimental method for the measurement of blade-root damping, 2006.
- [3] Andresen, H., and Hills, D. A review of partial slip solutions for contacts represented by half-planes including bulk tension and moments. arXiv e-prints (2019).
- [4] ASADI, K., AHMADIAN, H., AND JALALI, H. Micro/macro-slip damping in beams with frictional contact interface. *Journal of Sound Vibration* 331, 21 (Oct. 2012), 4704–4712.
- [5] Beck, C. Evaluation of turbine blade root damping.
- [6] Bo, S., Xu, Z., Liu, Y., and Xu, A. Experimental investigation on damping characteristics of blade with loosely assembled dovetail attachment, 2010.
- [7] CHARLEUX, D., GIBERT, C., THOUVEREZ, F., AND DUPEUX, J. Numerical and experimental study of friction damping blade attachments of rotating bladed disks.
- [8] Chen, J., Zang, C., Zhou, B., and Petrov, E. P. A study of friction microslip modeling for dynamic analysis of bladed discs with root joints. 2599–2614.
- [9] Chen, J. T., and You, D. W. Hysteretic damping revisited. 165–171.
- [10] CHEN, J. T., AND YOU, D. W. An integral-differential equation approach for the free vibration of a sdof system with hysteretic damping. 43–48.
- [11] Chen, W., and Deng, X. Structural damping caused by micro-slip along frictional interfaces. 1191–1211.
- [12] Ciavarella, M. The generalized cattaneo partial slip plane contact problem. i—theory. 2349–2362.
- [13] CIAVARELLA, M., HILLS, D. A., AND MONNO, G. The influence of rounded edges on indentation by a flat punch. 319–327.

- [14] FASANA, A., AND MARCHESIELLO, S. Meccanica delle vibrazioni. Clut, 2006.
- [15] FELDMAN, M. Non-linear system vibration analysis using hilbert transform—i. free vibration analysis method 'freevib'. Mechanical Systems and Signal Processing 8, 2 (Mar. 1994), 119–127.
- [16] FELDMAN, M. Hilbert transform applications in mechanical vibration, 2011.
- [17] GAO, S., AND WANG, Y. An evaluation method for dry friction damping of ring damper in gas turbine engines under axial vibration. 302.
- [18] Gastaldi, C., and Berruti, T. M. Competitive time marching solution methods for systems with friction-induced nonlinearities. 291.
- [19] Griffin, J. H. Friction damping of resonant stresses in gas turbine engine airfoils. 329–333.
- [20] HE, B., OUYANG, H., HE, S., AND REN, X. Stick-slip vibration of a friction damper for energy dissipation. 168781401771392.
- [21] INAUDI, J. A., AND KELLY, J. M. Linear hysteretic damping and the hilbert transform. 626–632.
- [22] INAUDI, J. A., AND MAKRIS, N. Time-domain analysis of linear hysteretic damping. Earthquake Engineering Structural Dynamics 25 (06 1996), 529 – 545.
- [23] Johnson, K. L. Contact Mechanics. Cambridge University Press, 1985.
- [24] LI, C., SHEN, Z., CHEN, Z., AND SHE, H. A study on the vibration dissipation mechanism of the rotating blade with dovetail joint. 1271–1292.
- [25] LI, D., BOTTO, D., XU, C., LIU, T., AND GOLA, M. A micro-slip friction modeling approach and its application in underplatform damper kinematics.
- [26] Mang, T., and Dresel, W. Lubricants and lubrication, 2006.
- [27] MATHWORKS. Signal processing toolbox reference.
- [28] Nakhla, M., and Vlach, J. A piecewise harmonic balance technique for determination of periodic response of nonlinear systems. 85–91.
- [29] PACELLI, M. Contatto con attrito tra due corpi elastici di forma qualunque: Compressione e torsione. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Scienze Fisiche e Matematiche. III. Ser 10 (1957), 155–184.

- [30] Rajasekaran, R., and Nowell, D. Fretting fatigue in dovetail blade roots: Experiment and analysis. 1277–1285.
- [31] RAO, J. S. Interface damping in blade attachment region. In Proceedings of 3rd International Conference on Rotordynamics: September 10-12, 1990, Lyon, France (Paris, 1990), Editions du Centre national de la recherche scientifique.
- [32] RIBEIRO, A., MAIA, N., AND SILVA, J. Free and forced vibrations with viscous and hysteretic damping: a different perspective.
- [33] Rieger, N. F. Damping properties of steam turbine blades, 1988.
- [34] Sackfield, A. Mechanics of elastic contacts, 1993. Description based upon print version of record.
- [35] SZWEDOWICZ, J. Bladed disks: non linear dynamics. Structural design of aircraft engines: key objectives and techniques (2008).
- [36] Ungar, E. E. Energy dissipation at structural joints; mechanisms and magnitudes, 1964.
- [37] WANG, J. H., AND CHEN, W. K. Investigation of the vibration of a blade with friction damper by hbm, 1992.
- [38] WITEK, L. Failure analysis of turbine disc of an aero engine. 9–17.
- [39] Xu, Y., and Zhang, D. Modeling and simulation of the equivalent material damping loss factor of fixed joint interface. 168781401666555.
- [40] YANG, B. D., CHU, M. L., AND MENQ, C. H. Stick-slip-separation analysis and non-linear stiffness and damping characterization of friction contacts having variable normal load. 461–481.
- [41] Zucca, S., Firrone, C. M., and Gola, M. A method for the calculation of friction damping in blade root joints, 2010.

Ringraziamenti

In primo luogo desidero ringraziare il mio relatore Professore Daniele Botto non solo per la sua conoscenza, la sua disponibilità e pazienza, ma anche per la sua premura e simpatia fuori dal comune che hanno reso questi mesi sicuramente più leggeri.

Ringrazio Federica per le nostre mille pause caffè, le risate ed i pranzi ad orari strategici ma grazie soprattutto per il tutto il tuo supporto, senza te questa tesi non sarebbe stata la stessa.

Ringrazio i miei genitori ai quali dedicare questo lavoro sembrava fin troppo riduttivo. Vi ringrazio per tutti i vostri sacrifici, per accompagnarmi e appoggiarmi in ogni mia scelta e per avermi dato tutto quello di cui avevo bisogno senza farmi rinunciare a nulla. Grazie per tutti i vostri insegnamenti, per i valori che mi avete trasmesso e per tutto l'amore che mi avete dato.

Ringrazio Giulia per avermi supportato e, come si suol dire, sopportato non solo in questo percorso conclusivo, ma da almeno 10 lunghi anni: sei un punto di riferimento.

Ringrazio Daniele per esserci sempre stato in questi due anni nonostante la mia iniziale diffidenza e per il suo fallito tentativo di farmi amare un po' di più questa città!

Vorrei ringraziare Francesca ed Edoardo perché, anche se le nostre vite hanno preso strade diverse, siete parte di me e sono la persona che sono anche grazie a voi.

Ringrazio i miei amici più stretti e tutta la mia famiglia che, nonostante la distanza, non mi hanno mai fatta sentire sola.

Infine, ma non per importanza, ringrazio mia sorella Eleonora: la mia roccia e la mia compagna di vita. Grazie per aver sempre creduto in me, molto più di quanto abbia fatto io; grazie per avermi spronata e per avermi dato la forza di reagire nei miei periodi più difficili. Grazie per il legame forte che abbiamo sempre avuto e grazie perché so che, qualsiasi cosa la vita abbia in serbo per noi, io sarò con te e tu con me.