



**Politecnico
di Torino**

POLITECNICO DI TORINO

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA MECCANICA E AEROSPAZIALE
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

TESI DI LAUREA MAGISTRALE

**Effetto dei carichi termo-meccanici sulle vibrazioni delle
strutture a guscio laminate in parete sottile**

Relatore:

Prof. Alfonso Pagani

Correlatori:

Prof. Erasmo Carrera

Prof. Matteo Filippi

Ing. Rodolfo Azzara

Candidato:

Rosario GRIFASI

Aprile 2022

Sommario

Una delle principali sfide che l'industria spaziale al giorno d'oggi è chiamata a fronteggiare consiste nella riduzione dei costi per l'accesso allo spazio riuscendo a garantire la sostenibilità e la competitività in un settore in forte ascesa.

Lo sviluppo di veicoli da lancio riutilizzabili fornisce una possibile soluzione per riuscire nell'intento. La riduzione della massa strutturale del lanciatore è sempre stato uno dei principali obiettivi del progetto strutturale, ma in un veicolo da lancio riutilizzabile assume un'importanza primaria.

In questo lavoro sono stati analizzati gli aspetti principali del progetto della struttura primaria di un veicolo da lancio; in particolare lo studio è incentrato sull'effetto che i carichi termo-meccanici inducono sulle vibrazioni e il buckling delle strutture a guscio laminate in parete sottile.

A tal fine sono state effettuate analisi numeriche su modelli semplificati, con lo scopo di proporre soluzioni alternative e più competitive grazie all'utilizzo di tecniche di analisi numeriche avanzate basate sull'implementazione della Carrera Unified Formulation (CUF).

L'efficacia di tali strumenti di analisi è stata verificata mediante l'utilizzo di codici di calcolo commerciali agli elementi finiti.

Abstract

One of the main challenges that the space industry today is called to face is the reduction of costs for access to space, managing to ensure sustainability and competitiveness in a rapidly growing sector.

The development of reusable launch vehicles provides a possible solution to succeed. The reduction of the structural mass of the launcher has always been one of the main objectives of the structural design, but in a reusable launch vehicle it is of primary importance.

In this work, the main aspects of the design of the primary structure of a launch vehicle were analyzed; in particular, the study focuses on the effect that thermo-mechanical loads induce on the vibrations and buckling of thin-walled laminated shell structures.

To this end, numerical analyzes were carried out on simplified models, with the aim of proposing alternative and more competitive solutions thanks to the use of advanced numerical analysis techniques based on the implementation of the Carrera Unified Formulation (CUF).

The effectiveness of these analysis tools was verified through the use of commercial finite element calculation codes.

Indice

Elenco delle figure	5
Elenco delle tabelle	10
1 Introduzione	13
1.1 Evoluzione dei veicoli da lancio riutilizzabili	13
1.2 Veicoli da lancio: strutture e materiali	23
1.2.1 Design strutturale di un LV	24
1.3 Materiali per il design strutturale di un LV	25
1.3.1 Serbatoi di propellente metallici	25
1.3.2 Serbatoi di propellente in composito	26
1.4 Ambiente di carico	27
1.4.1 Flight environments	27
1.5 Buckling di gusci cilindrici soggetti a compressione assiale	29
1.5.1 Stato dell'arte	33
1.6 Buckling di strutture soggette a carichi termici	40
2 Formulazioni avanzate per problemi geometrici non lineari	43
2.1 Leggi costitutive e relazioni geometriche non lineari per modelli 1D e 2D	44
2.1.1 Modelli 1D	44
2.1.2 Modelli 2D	46
2.2 Approssimazione tramite FEM e teoria CUF: modello 1D	47
2.3 Approssimazione tramite FEM e teoria CUF: modello 2D	50
2.4 Equazioni di governo non lineari e matrice di rigidezza secante	53
2.5 Linearizzazione di Newton-Raphson e metodo dell'arc-length	56
3 Vibration Correlation Technique (VCT)	59
3.1 Equazioni del moto	60
3.2 Approccio Full Non-linear (FNL) per la linearizzazione di δL_{int}	62
3.3 Approccio Trivial Linearized (TL) per la linearizzazione di δL_{int}	64

4	Analisi tramite virtual VCT di strutture soggette a carichi meccanici	65
4.1	Analisi tramite virtual VCT: strutture 1D	66
4.1.1	Trave isotropa	67
4.1.2	Trave in laminato composito $[90^\circ/0^\circ]$	74
4.1.3	Trave in laminato composito $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$	78
4.2	Analisi tramite virtual VCT: strutture 2D	82
4.2.1	Risultati numerici piastra	84
4.2.2	Risultati numerici pannello cilindrico ($1/R_\gamma = 0.3937$)	91
4.2.3	Risultati numerici pannello cilindrico ($1/R_\gamma = 1.937$)	100
5	Formulazioni avanzate per analisi termiche	105
5.1	Risultati numerici	107
5.1.1	Trave isotropa	109
5.1.2	Trave in laminato composito $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$	115
5.1.3	Piastra isotropa	119
5.1.4	Piastra in laminato composito	122
5.2	Studio parametrico su una piastra in laminato composito soggetta ad un carico termico uniforme	128
5.2.1	Andamento delle frequenze al variare della sequenza di laminazione della piastra in laminato composito	128
5.2.2	Andamento delle frequenze al variare dello spessore della piastra in laminato composito	131
6	Conclusioni	135
	Bibliografia	139

Elenco delle figure

1.1	Lancio dello Space Shuttle Discovery per la missione STS-120	14
1.2	DC-X al decollo e in volo (da [1])	15
1.3	Componenti tecnologici del dimostratore DC-XA (da [1])	16
1.4	Configurazione del dimostratore X-33 (da [3] con modifiche)	17
1.5	Dimostratore X-34 alla NASA Dryden ramp nel 1999 (fonte: NASA)	18
1.6	Overview del Falcon 9 (fonte: SpaceX)	19
1.7	Lancio del New Shepard (fonte: Blue Origin)	20
1.8	Configurazione del lanciatore New Glenn (fonte: Blue Origin)	20
1.9	SpaceShipTwo agganciato al centro del velivolo madre White Knight Two (fonte: Virgin Galactic)	21
1.10	Configurazione del veicolo Space Rider in orbita (fonte: European Space Agency)	22
1.11	Fattori di carico di progetto per i LV <i>Falcon 9</i> e <i>Falcon Heavy</i> con massa di payload "standard" (>4000 lb) (da [4])	28
1.12	Fattori di carico di progetto per il LV <i>Falcon 9</i> con massa di payload <4000 lb (da [4])	29
1.13	Vista schematica di un tipico banco di prova a deformazione controllata per compressione assiale (da [9])	30
1.14	Tipico processo di instabilità di un guscio cilindrico sotto compressione assiale; notare la grande differenza tra il carico di punta sperimentale (A) e quello previsto (F) per un guscio perfetto (da [9])	30
1.15	Forma postbuckling di un guscio cilindrico circolare (da [10])	32
1.16	Configurazione teorica a scacchiera per un guscio cilindrico lungo soggetto a compressione assiale (da [11])	32
1.17	Schema del setup sperimentale per la valutazione degli stress termici (da [40])	41
1.18	Distribuzione di temperatura a tenda e tensioni assiali della piastra analizzata da Heldenfels and Roberts (1952) (da [41])	41
2.1	Rappresentazione dell'approssimazione FEM lungo l'asse della trave (usando N_i e N_j), e dell'espansione CUF lungo la sezione trasversale (usando F_τ e F_s)	48

2.2	Discretizzazione di un pannello generico usando sia il modello 1D, sia il modello 2D (da [46] con modifiche)	52
2.3	Rappresentazione della procedura di assemblaggio secondo la teoria CUF	55
2.4	Geometria e notazione dello schema incrementale (da [45])	58
4.1	Geometria della trave a sbalzo con $\frac{L}{t} = 10$	67
4.2	Geometria della trave a sbalzo con $\frac{L}{t} = 100$	67
4.3	Forme modali dei primi 5 modi di una trave tozza ($L/t = 10$) isotropa C-F	68
4.4	Condizioni al contorno della trave a sbalzo isotropa con $L/t = 10$ soggetta a taglio trasversale	69
4.5	Andamento delle prime 5 frequenze proprie di una trave tozza ($L/t = 10$) isotropa C-F e soggetta ad un carico di taglio trasversale	69
4.6	Condizioni al contorno della trave a sbalzo isotropa con $\frac{L}{t} = 10$ soggetta a compressione assiale	70
4.7	Andamento delle prime 5 frequenze proprie di una trave tozza ($L/t = 10$) isotropa C-F e soggetta compressione assiale	71
4.8	Andamento della frequenza propria del primo modo di vibrare di una trave tozza ($L/t = 10$) isotropa C-F al variare del parametro di carico di compressione assiale ottenuto con MUL ² e Abaqus CAE	71
4.9	Forme modali dei primi 5 modi di una trave snella ($L/t = 100$) isotropa C-F	72
4.10	Condizioni al contorno della trave a sbalzo isotropa con $L/t = 100$ soggetta a compressione assiale	72
4.11	Andamento delle prime 5 frequenze proprie di una trave snella ($L/t = 100$) isotropa C-F e soggetta compressione assiale	73
4.12	Geometria della sezione trasversale della trave <i>cross-ply</i> asimmetrica [90°/0°]	74
4.13	Forme modali dei primi 5 modi di una trave tozza ($L/t = 10$) cross-ply [90°/0°] C-F	75
4.14	Andamento delle prime 5 frequenze proprie di una trave tozza ($L/t = 10$) cross-ply [90°/0°] C-F e soggetta compressione assiale	75
4.15	Andamento delle prime 3 frequenze proprie di una trave tozza ($L/t = 10$) cross-ply [90°/0°] C-F e soggetta compressione assiale	76
4.16	Forme modali dei primi 5 modi di una trave snella ($L/t = 100$) cross-ply [90°/0°] C-F	76
4.17	Andamento delle prime 5 frequenze proprie di una trave snella ($L/t = 100$) cross-ply [90°/0°] C-F e soggetta compressione assiale	77

4.18	Geometria della sezione trasversale della trave in laminato composito <i>cross-ply</i> simmetrico $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$	78
4.19	Forme modali dei primi 5 modi di una trave tozza ($L/t = 10$) <i>cross-ply</i> $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ C-F	79
4.20	Forme modali dei primi 5 modi di una trave snella ($L/t = 100$) <i>cross-ply</i> $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ C-F	79
4.21	Andamento delle prime 5 frequenze proprie di una trave tozza ($L/t = 10$) <i>cross-ply</i> $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ C-F e soggetta compressione assiale	80
4.22	Andamento delle prime 5 frequenze proprie di una trave snella ($L/t = 100$) <i>cross-ply</i> $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ C-F e soggetta compressione assiale	81
4.23	Geometria della struttura 2D piana	82
4.24	Geometria della struttura 2D cilindrica con curvatura $\frac{1}{R_\gamma} = 0.3937$	82
4.25	Geometria della struttura 2D cilindrica con curvatura $\frac{1}{R_\gamma} = 1.937$	83
4.26	Condizioni al contorno delle strutture 2D per analisi di <i>virtual</i> VCT	83
4.27	Forme modali dei primi 8 modi di una piastra isotropa appoggiata sui quattro lati	84
4.28	Andamenti delle prime 8 frequenze proprie di una piastra isotropa appoggiata sui 4 lati e soggetta a compressione assiale ottenute con MUL^2	86
4.29	Andamenti delle prime 4 frequenze proprie di una piastra isotropa appoggiata sui 4 lati e soggetta a compressione assiale al variare del parametro di carico λ ottenute con MUL^2 e Abaqus CAE	86
4.30	Forme modali dei primi 8 modi di una piastra <i>cross-ply</i> $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ appoggiata sui 4 lati	88
4.31	Andamenti delle prime 8 frequenze proprie di una piastra <i>cross-ply</i> $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ appoggiata sui 4 lati e soggetta a compressione assiale ottenuti con MUL^2	90
4.32	Andamenti delle prime 4 frequenze proprie di una piastra <i>cross-ply</i> $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ appoggiata sui 4 lati e soggetta a compressione assiale ottenuti con MUL^2 e Abaqus CAE	90
4.33	Forme modali dei primi 8 modi di un pannello isotropo con curvatura cilindrica $\frac{1}{R_\gamma} = 0.3937$ appoggiato sui 4 lati	92
4.34	Andamenti delle prime 8 frequenze proprie di un guscio cilindrico con curvatura $\frac{1}{R_\gamma} = 0.3937$ isotropo appoggiato sui 4 lati e soggetto a compressione assiale ottenuti con MUL^2	94
4.35	Andamenti delle prime 3 frequenze proprie del pannello isotropo con curvatura cilindrica $\frac{1}{R_\gamma} = 0.3937$ appoggiato sui 4 lati e soggetto a compressione assiale ottenuti con MUL^2 e Abaqus CAE	94
4.36	Forme modali dei primi 8 modi di un pannello in laminato composito <i>cross-ply</i> $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ con curvatura cilindrica $\frac{1}{R_\gamma} = 0.3937$ appoggiato sui 4 lati	96

4.37	Andamento delle prime 8 frequenze proprie del pannello in laminato composito cross-ply $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ con curvatura cilindrica $\frac{1}{R_\gamma} = 0.3937$ appoggiato sui 4 lati e soggetto a compressione assiale ottenuto con MUL ²	98
4.38	Andamento delle prime 5 frequenze proprie del pannello in laminato composito cross-ply $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ con curvatura cilindrica $\frac{1}{R_\gamma} = 0.3937$ appoggiato sui 4 lati e soggetto a compressione assiale ottenuto con MUL ² e Abaqus CAE	98
4.39	Forme modali di un pannello isotropo con curvatura cilindrica $\frac{1}{R_\gamma} = 1.937$ appoggiato sui 4 lati	100
4.40	Andamento delle frequenze proprie di un pannello isotropo con curvatura cilindrica $\frac{1}{R_\gamma} = 1.937$ appoggiato sui 4 lati e soggetto a compressione assiale	101
4.41	Valori del MAC tra $\lambda_1 = 0$ e 4 diversi step di carico di un pannello isotropo con curvatura cilindrica $\frac{1}{R_\gamma} = 1.937$ appoggiato sui 4 lati e soggetto a compressione assiale	102
4.42	Forme modali dei modi di un pannello in laminato composito cross-ply $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ con curvatura cilindrica $\frac{1}{R_\gamma} = 1.937$ appoggiato sui quattro lati	103
4.43	Andamento delle frequenze proprie di un pannello in laminato composito cross-ply $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ con curvatura cilindrica $\frac{1}{R_\gamma} = 1.937$ appoggiato sui 4 lati e soggetto a compressione assiale	104
5.1	Caratteristiche geometriche della trave e della piastra	108
5.2	Forme modali dei primi 3 modi di vibrare della trave tozza ($L/h = 10$) isotropa C-C	110
5.3	Forme dei primi 3 modi di buckling termico della trave tozza ($L/h = 10$) isotropa C-C	112
5.4	Andamento delle frequenze della trave tozza ($L/h = 10$) isotropa C-C al variare del parametro di carico termico ottenuto con MUL ² e Abaqus CAE	113
5.5	Andamento delle frequenze della trave isotropa snella ($L/h = 100$) C-C al variare del parametro di carico termico ottenuto con MUL ² e Abaqus CAE	114
5.6	Forme modali dei primi 6 modi di vibrare della trave tozza ($L/h = 10$) in laminato composito $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ C-C	115
5.7	Forme dei primi 4 modi di buckling termico della trave tozza ($L/h = 10$) in laminato composito $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ C-C	116
5.8	Andamento delle frequenze della trave tozza ($L/h = 10$) in laminato composito $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ C-C al variare del parametro di carico termico ottenuto con MUL ² e Abaqus CAE	117

5.9	Andamento delle frequenze della trave snella ($L/h = 100$) in laminato composito $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ C-C al variare del parametro di carico termico ottenuto con MUL ² e Abaqus CAE	118
5.10	Forme modali dei primi 4 modi di vibrare della piastra ($a/h = 100$) isotropa C-C	119
5.11	Forme dei primi 4 modi di buckling termico della piastra ($a/h = 100$) isotropa C-C	120
5.12	Andamento delle frequenze della piastra ($a/h = 100$) isotropa C-C al variare del parametro di carico termico ottenuto con MUL ² e Abaqus CAE	121
5.13	Forme modali dei primi 5 modi di vibrare della piastra ($a/h = 100$) in laminato composito $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ C-C	123
5.14	Forme dei primi 4 modi di buckling termico della piastra ($a/h = 100$) in laminato composito $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ C-C	124
5.15	Andamenti delle tensioni σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xz} , σ_{yz} lungo la coordinata di spessore z della piastra ($a/h = 100$) in laminato composito $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ soggetta ad una variazione uniforme della temperatura $\Delta T = 3\check{C}$ per $x = -0.25$ e $y = 0$ ottenuti con MUL ² considerando diverse espansioni lungo lo spessore	125
5.16	Andamento delle frequenze della piastra ($a/h = 100$) in laminato composito $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ C-C al variare del parametro di carico termico ottenuto con MUL ² e Abaqus CAE	126
5.17	Forme del primo modo di buckling termico della piastra ($a/h = 100$) in laminato composito per diverse sequenze di laminazione	129
5.18	Studio parametrico sulla frequenza del primo modo di buckling termico per diverse sequenze di laminazione della piastra ($a/h = 100$) in composito effettuato con MUL ² e Abaqus CAE	130
5.19	Andamento della frequenza del primo modo di buckling termico al variare della sequenza di laminazione della piastra ($a/h = 100$) in composito	131
5.20	Forme del primo modo di buckling termico della piastra in laminato composito $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ per diversi rapporti di spessore a/h	132
5.21	Studio parametrico sulla frequenza del primo modo di buckling termico per diversi rapporti di spessore a/h della piastra in laminato composito $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ effettuato con MUL ² e Abaqus CAE	133
5.22	Andamento della frequenza del primo modo di buckling termico al variare del rapporto di spessore a/h della piastra in laminato composito $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$	134

Elenco delle tabelle

2.1	Polinomi di Taylor modello CUF (da [44])	49
2.2	Polinomi di Taylor modello CUF 2D	50
4.1	Proprietà meccaniche del materiale isotropo e composito	66
4.2	Frequenze proprie dei primi 5 modi di vibrare di una trave tozza ($L/t = 10$) isotropa C-F	68
4.3	Carico critico del primo modo di buckling della trave tozza ($L/t = 10$) isotropa C-F soggetta a compressione assiale	70
4.4	Carico critico del primo modo di buckling della trave tozza e snella ($L/t = 10$ e $L/t = 100$) in laminato composito <i>cross-ply</i> simmetrico $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ C-F soggetta a compressione assiale	79
4.5	Frequenze proprie dei primi 8 modi di vibrare della piastra isotropa appoggiata sui 4 lati	85
4.6	Carico critico del primo modo di buckling della piastra isotropa appoggiata sui 4 lati soggetta a compressione assiale	85
4.7	Frequenze proprie dei primi 4 modi di vibrare della piastra isotropa appoggiata sui 4 lati al variare del parametro di carico di compressione assiale λ	87
4.8	Frequenze proprie dei primi 8 modi di vibrare della piastra cross-ply $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ appoggiata sui 4 lati	89
4.9	Carico critico del primo modo di buckling della piastra cross-ply $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ appoggiata sui 4 lati soggetta a compressione assiale	89
4.10	Frequenze proprie dei primi 4 modi di vibrare della piastra cross-ply $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ appoggiata sui 4 lati al variare del parametro di carico di compressione assiale λ	91
4.11	Frequenze proprie dei primi 8 modi di vibrare del pannello isotropo con curvatura cilindrica $\frac{1}{R_\gamma} = 0.3937$ appoggiato sui 4 lati	93
4.12	Carico critico del primo modo di buckling della piastra isotropa appoggiata sui 4 lati soggetta a compressione assiale	93
4.13	Frequenze proprie dei primi 4 modi di vibrare del pannello isotropo con curvatura cilindrica $\frac{1}{R_\gamma} = 0.3937$ appoggiato sui 4 lati al variare del parametro di carico di compressione assiale λ	95

4.14	Frequenze proprie dei primi 8 modi di vibrare del pannello in laminato composito cross-ply $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ con curvatura cilindrica $\frac{1}{R_\gamma} = 0.3937$ appoggiato sui 4 lati	97
4.15	Carico critico del primo modo di buckling del pannello in laminato composito cross-ply $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ con curvatura cilindrica $\frac{1}{R_\gamma} = 0.3937$ appoggiato sui 4 lati e soggetto a compressione assiale	97
4.16	Frequenze proprie dei primi 5 modi di vibrare del pannello in laminato composito cross-ply $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ con curvatura cilindrica $\frac{1}{R_\gamma} = 0.3937$ appoggiato sui 4 lati al variare del parametro di carico di compressione assiale λ	99
5.1	Caratteristiche geometriche della trave e della piastra	108
5.2	Proprietà meccaniche del materiale isotropo e composito	109
5.3	Analisi di convergenza per l'analisi modale della trave tozza ($L/h = 10$) isotropa C-C con teoria CUF	110
5.4	Frequenze proprie dei primi 3 modi di vibrare della trave tozza ($L/h = 10$) isotropa C-C	111
5.5	Variazione della temperatura ΔT_{cr} corrispondente al carico termico critico dei primi 3 modi di buckling della trave tozza ($L/h = 10$) isotropa C-C	112
5.6	Frequenze dei primi 3 modi di vibrare della trave isotropa tozza ($L/h = 10$) C-C al variare del parametro di carico termico λ	114
5.7	Frequenze proprie dei primi 6 modi di vibrare della trave tozza ($L/h = 10$) in laminato composito $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ C-C	116
5.8	Variazione della temperatura ΔT_{cr} corrispondente al carico termico critico dei primi 4 modi di buckling della trave tozza ($L/h = 10$) in laminato composito $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ C-C	117
5.9	Frequenze dei primi 3 modi di vibrare della trave tozza ($L/h = 10$) in laminato composito $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ C-C al variare del parametro di carico termico λ	118
5.10	Frequenze proprie dei primi 4 modi di vibrare della piastra ($a/h = 100$) isotropa C-C	120
5.11	Variazione della temperatura ΔT_{cr} corrispondente al carico termico critico dei primi 4 modi di buckling della piastra ($a/h = 100$) isotropa C-C	120
5.12	Frequenze dei primi 4 modi di vibrare della piastra ($a/h = 100$) isotropa C-C al variare del parametro di carico termico λ	122
5.13	Frequenze proprie dei primi 5 modi di vibrare della piastra ($a/h = 100$) in laminato composito $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ C-C	123
5.14	Variazione della temperatura ΔT_{cr} corrispondente al carico termico critico dei primi 4 modi di buckling della piastra ($a/h = 100$) in laminato composito $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ C-C	124

5.15	Frequenze dei primi 5 modi di vibrare della piastra ($a/h = 100$) in laminato composito $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ C-C al variare del parametro di carico termico λ	127
5.16	Variazione della temperatura ΔT_{cr} corrispondente al carico termico critico del primo modo di buckling della piastra ($a/h = 100$) in laminato composito per diverse sequenze di laminazione	129
5.17	Variazione della temperatura ΔT_{cr} corrispondente al carico termico critico del primo modo di buckling termico della piastra in laminato composito $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ per diversi rapporti di spessore a/h	133

Capitolo 1

Introduzione

Nel periodo immediatamente successivo alla Seconda Guerra Mondiale l'uomo ha iniziato ad esplorare l'ambiente oltre l'atmosfera terrestre. La conquista dello spazio è stata possibile principalmente grazie allo sviluppo di veicoli da lancio (LV) che hanno permesso di raggiungere tali obiettivi.

Un LV è, infatti, un sistema aviotrasportato che trasporta un carico utile, che può o meno comprendere un equipaggio, dal suolo allo spazio suborbitale, orbitale o interplanetario.

1.1 Evoluzione dei veicoli da lancio riutilizzabili

Effettuare una classificazione unica dei vari tipi di LV è molto difficile in quanto i parametri che potrebbero essere presi in considerazione sono molteplici: massa di carico utile che possono portare in orbita, numero di stadi, tipologia di propellente, la loro riutilizzabilità. In particolare è possibile effettuare una distinzione tra LV non riutilizzabile (inglese: *expendable launch vehicle*, ELV) e LV riutilizzabile (inglese: *reusable launch vehicle*, RLV), completamente o in parte.

Un ELV può essere utilizzato per portare in orbita un payload una sola volta, senza la possibilità di poter riutilizzare nessuno, o almeno la stragrande maggioranza, dei componenti per successive missioni. Nei primi anni della corsa allo spazio si fece largo uso degli ELV sebbene i costi in termini economici e umani furono ingenti. Nel corso degli anni sono stati fatti numerosi passi avanti per rendere il loro impiego il più possibile accessibile, aumentandone contemporaneamente l'affidabilità. Ciò portò l'impiego di LV ad una rapida diffusione fino al giorno d'oggi, diventando di importanza rilevante sia dal punto di vista scientifico ma anche strategico, militare e commerciale.

Ma, sin dallo sviluppo del lanciatore Saturn-V, primo ELV di categoria super heavy-lift, si intuì che il prossimo obiettivo logico dovesse essere quello di sviluppare un RLV, al fine di ridurre i costi dell'accesso allo spazio e promuovere la creazione e la sostenibilità di un nuovo servizio spaziale e altre attività per migliorare la competitività economica in svariati settori sia governativi che commerciali.

L'uso di RLV permette, infatti, di riciclare alcune parti o interi stadi di un LV, in modo da poterli utilizzare nuovamente, dopo un'opportuna manutenzione, in missioni successive.

Il primo esempio di RLV operativo si ebbe con il programma Space Transportation System (STS), più comunemente chiamato Space Shuttle, Fig.1.1. Lo Space Shuttle si componeva di un Orbiter riutilizzabile, di due Solid Rocket Booster parzialmente riutilizzabili e di un serbatoio esterno non riutilizzabile.



Figura 1.1: Lancio dello Space Shuttle Discovery per la missione STS-120

Lanciato per la prima volta in orbita il 12 aprile 1981, nei successivi 30' anni vennero realizzate 135 missioni, nonostante due tragici incidenti. Tra i grandi successi di questo programma spaziale si ricordano il lancio in orbita del Telescopio spaziale Hubble e il contributo fondamentale dato per la costruzione della più grande base orbitante, la Stazione Spaziale Internazionale (ISS). Nonostante i grandi traguardi raggiunti dal programma Space Shuttle, i costi ingenti e i lunghi tempi dovuti alla manutenzione dell'Orbiter, soprattutto per quanto riguarda lo scudo termico e i motori (SSME), portarono alla conclusione del programma nel 2011.

Come risposta al programma spaziale Space Shuttle della NASA, nel 1976 l'Unione Sovietica avviò un programma spaziale di spazionario riutilizzabile che fu chiamato Buran. Anche in questo caso l'Orbiter Buran era agganciato ad un sistema propulsivo a due stadi, l'Energiya. Il progetto del veicolo da lancio Buran/Energiya prevedeva il riutilizzo sia dell'orbiter che del razzo principale. Nonostante il successo del primo volo inaugurale dello Space Shuttle Sovietico nel 1988, il cui rientro avvenne in modo automatico senza equipaggio a bordo, il programma fu cancellato nel 1992 in seguito al crollo dell'Unione Sovietica.

Nel 1990 la Ballistic Missile Defense Organization (BMDO) avviò il programma SSRT (Single-Stage Rocket Technology) per dimostrare la praticità, l'affidabilità, le capacità operative e la sostenibilità dei costi di un razzo monostadio completamente riutilizzabile e di rapida manutenzione. La compagnia McDonnell-Douglas si aggiudicò il contratto, con l'enfasi principale sulla progettazione e produzione di un veicolo a razzo dimostrativo a bassa velocità denominato DC-X (Delta Clipper Experimental) [1].

Il progetto del DC-X, Fig. 1.2, si basava su un LV Singol-Stage To Orbit (SSTO) in grado di decollare e atterrare in assetto verticale (VTVL). Lo scopo principa-

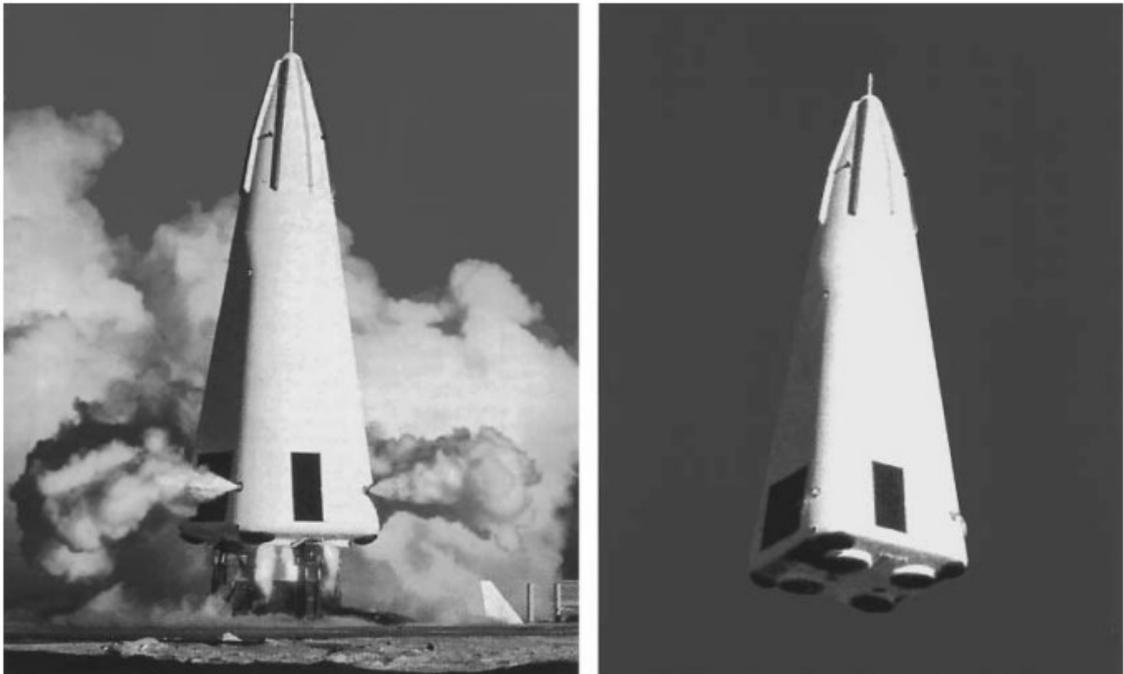


Figura 1.2: DC-X al decollo e in volo (da [1])

le del programma DC-X consisteva nel dimostrare il potenziale operativo di un RLV, la realizzabilità delle operazioni e della manutenzione a basso costo di un

lanciatore SSTO e inoltre nel dimostrare le caratteristiche di volo a bassa velocità di un sistema SSTO a decollo e atterraggio verticale [2]. Dall'agosto 1995 al luglio 1995 si effettuarono otto test di volo, in alcuni dei quali delle anomalie di sistema e dei cedimenti portarono a degli incidenti. Nonostante non fossero stati raggiunti alcuni obiettivi del programma, dal luglio 1995 il DC-X fu incorporato nel programma RLV della NASA, sotto il nome di DC-XA, Fig.1.3 ([1]). Furono apportate alcune importanti modifiche al progetto originale con l'introduzione della lega alluminio-litio per il serbatoio criogenico dell'ossigeno e l'utilizzo inedito di un serbatoio criogenico per l'idrogeno in materiale composito grafite a matrice epossidica (Gr-Ep) con isolamento interno in schiuma rinforzata a bassa densità; l'utilizzo del materiale composito Gr-Ep fu adottato anche per l'intertank. Non-

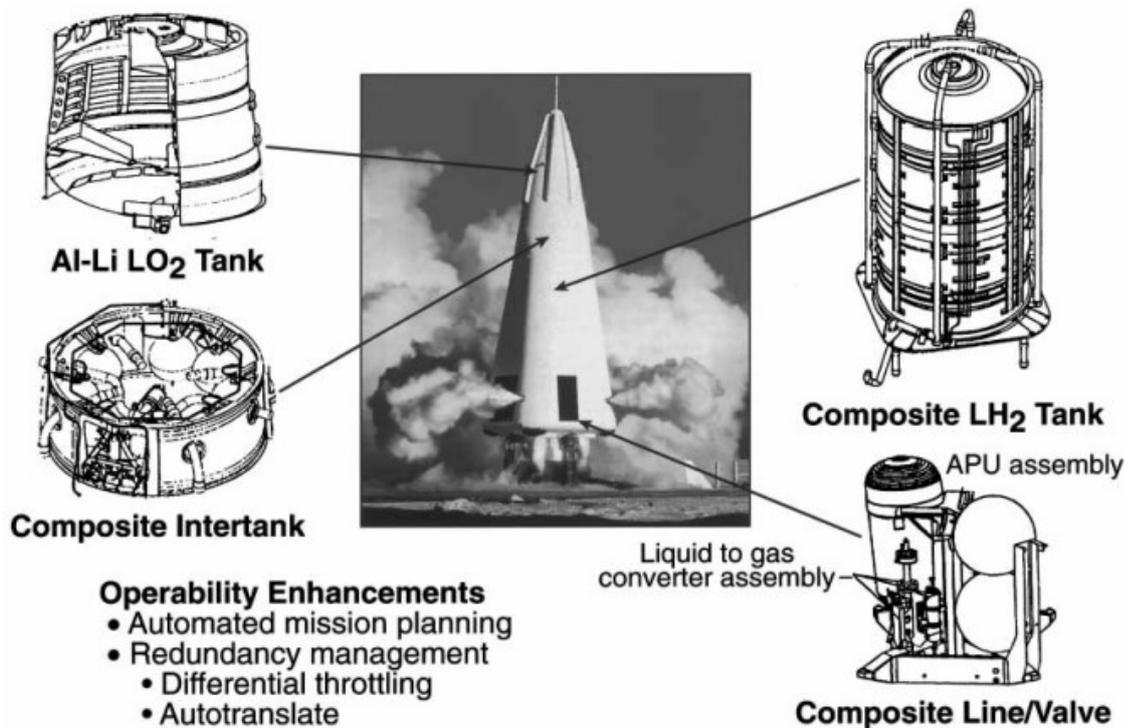


Figura 1.3: Componenti tecnologici del dimostratore DC-XA (da [1])

stante il programma DC-XA si concluse prematuramente, tramite i test di volo si dimostrò l'efficacia di alcune tecnologie chiave per i RLVs, aprendo la strada per futuri dimostratori tecnologici e veicoli operativi full-scale.

Dal 1996 al 2001, lo sforzo congiunto della NASA e della compagnia Lockheed Martin portò allo sviluppo del dimostratore X-33. L'X-33 doveva essere un dimostratore suborbitale a decollo verticale e atterraggio orizzontale in scala 1:2 di uno spaziplano riutilizzabile full-scale chiamato VentureStar, Fig. 1.4, con lo scopo

di dimostrare l'efficacia dell'impiego di tecnologie che includono serbatoi criogenici riutilizzabili, strutture composite, TPS riutilizzabile e durevole, avionica avanzata, operazioni di volo autonome, propulsione affidabile non tossica e capacità di operare in modo analogo ad un aereo, in uno scenario di volo realistico [3]. Una delle problematiche principali a cui gli ingegneri hanno dovuto far fronte ha riguardato il serbatoio di LH2 in materiale composito che non riuscì a completare con successo i test di verifica. I ritardi e il mancato approvvigionamento di ulteriori fondi portarono alla conclusione del programma nel marzo 2001.

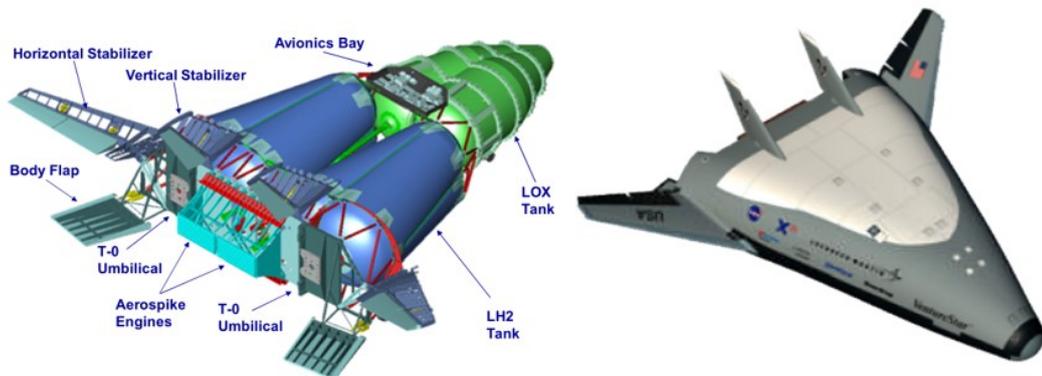


Figura 1.4: Configurazione del dimostratore X-33 (da [3] con modifiche)

All'inizio del 1995, come parte del programma tecnologico RLV della NASA, venne avviato lo sviluppo del dimostratore X-34, Fig. 1.5. Lo scopo della NASA era quello di progettare un veicolo per una dimostrazione in volo a metà strada tra i progetti del DC-XA e l'X-33, fornendo la dimostrazione dell'utilizzo di tecnologie essenziali per la riduzione del costo di accesso allo spazio. Durante il periodo di sviluppo emersero una serie di problemi tecnici, tra cui il raggiungimento di rapporti di massa accettabili, il ritardo nella selezione del propulsore, il design del sistema di protezione termica e problemi riguardanti i costi e la pianificazione [1]. Revisioni ai requisiti del progetto portarono alla crescita dei costi ed allo slittamento dei tempi previsti, così nel marzo 2001 la NASA cancellò il programma.



Figura 1.5: Dimostratore X-34 alla NASA Dryden ramp nel 1999 (fonte: NASA)

A partire dai primi anni 2000 alcune aziende del settore privato iniziarono dei programmi di sviluppo per RLVs che potessero competere in termini di affidabilità, costi e versatilità con i LVs fino a quel momento più utilizzati, tipicamente *expendable*.

Una delle aziende che più di altre pone lo sviluppo dei RLVs al centro della propria attività è la SpaceX. Il programma di sviluppo del sistema di lancio riutilizzabile di SpaceX è stato annunciato pubblicamente nel 2011 con lo scopo di sviluppare una serie di nuove tecnologie per un sistema di lancio orbitale che potesse essere riutilizzato molte volte in modo simile alla riutilizzabilità degli aerei. Dopo numerosi test di volo falliti, nel dicembre 2015 per la prima volta è stato ottenuto l'atterraggio e il recupero di un primo stadio di un LV. Il LV Falcon 9 della SpaceX, Fig. 1.6, possiede un'architettura classica composta da 2 stadi che utilizzano ossigeno liquido (LOX) e rocket-grade kerosene (RP-1), [4].

Il Falcon 9 può essere equipaggiato con un fairing per proteggere il carico utile oppure con la capsula riutilizzabile Dragon sviluppata dalla stessa SpaceX. Caratteristica principale di questo RLV è il recupero del primo stadio mediante un atterraggio controllato: la procedura di atterraggio del primo stadio prevede la riaccensione dei motori ad una certa quota dal suolo del sito di atterraggio e un sistema di controllo attivo dell'assetto sia aerodinamico sia tramite i propulsori.

Molti successi negli ultimi anni hanno portato alla conferma dell'affidabilità di questo RLV dimostrandone anche gli indubbi vantaggi dal punto di vista economico.

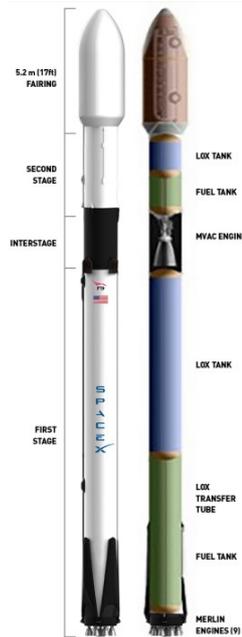


Figura 1.6: Overview del Falcon 9 (fonte: SpaceX)

Infatti, la missione SpaceX Crew Dragon Demo 2 lanciata il 30 maggio 2020 è stata la prima missione con equipaggio a bordo di un LV sviluppato da un ente privato aprendo le porte a futuri sviluppi per rendere lo spazio il più possibile accessibile.

Inoltre il 10 maggio 2021 il primo stadio di un razzo Falcon 9, al suo decimo volo, è riuscito a completare con successo il suo decimo atterraggio.

La SpaceX sta portando avanti il progetto di un LV super-pesante completamente riutilizzabile attualmente in fase di sviluppo, composto dal booster *Super Heavy* alimentato a metano e ossigeno liquido (CH_4/LOX) e un secondo stadio denominato *Starship* progettato per operare come uno spacecraft con equipaggio con integrata una sezione per il payload.

Oltre alla SpaceX, anche l'azienda privata Blue Origin sta impiegando numerose risorse per lo sviluppo di sistemi di lancio riutilizzabili che possano aprire le porte allo sviluppo del turismo spaziale.

Uno dei progetti più promettenti riguarda il lanciatore suborbitale riutilizzabile New Shepard, Fig. 1.7, che agli inizi del 2021 ha eseguito con successo un test di volo suborbitale senza equipaggio, e a luglio 2021 ha concluso con successo la prima missione con equipaggio. Il New Shepard è composto da un singolo stadio dotato di propulsori ad idrogeno e ossigeno liquido (LH_2/LOX) in grado di effettuare un atterraggio verticale controllato.

Nel 2012 la Blue Origin avviò anche un progetto per un RLV di categoria heavy-lift



Figura 1.7: Lancio del New Shepard (fonte: Blue Origin)

orbitale. Questo lanciatore, chiamato New Glenn, Fig. 1.8, sarà composto da due stadi: il primo stadio, in grado di atterrare verticalmente, sfrutterà ossigeno liquido (LOX) e metano, mentre il secondo stadio LH₂/LOX, [5].

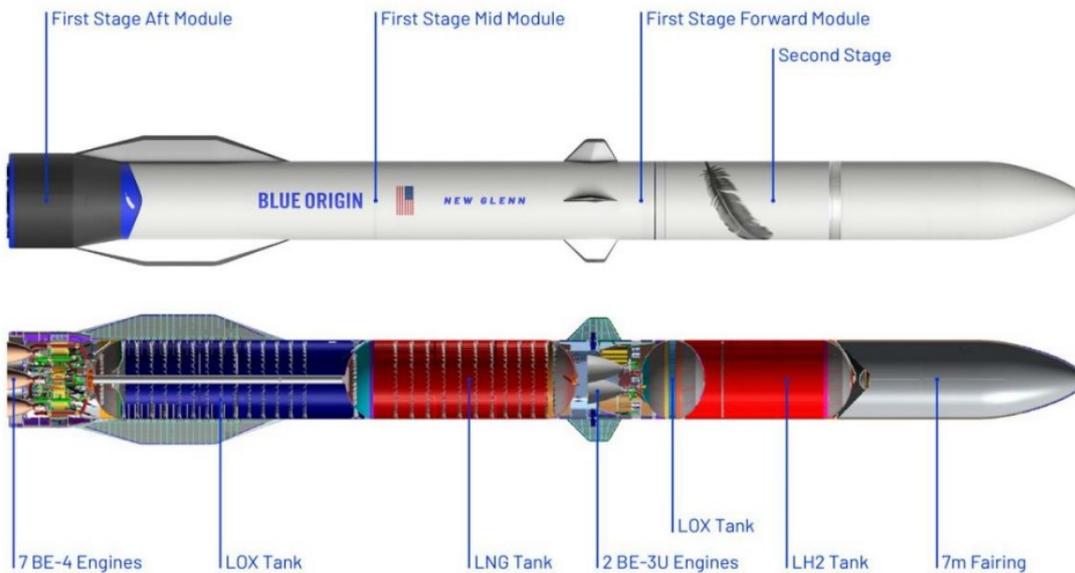


Figura 1.8: Configurazione del lanciatore New Glenn (fonte: Blue Origin)

In aggiunta alle aziende private già citate, anche la Virgin Galactic ha investito molte risorse per poter partecipare alla "folle corsa" della nuova *space economy*. I maggiori risultati sono stati ottenuti con lo sviluppo del velivolo SpaceShipTwo, Fig. 1.9, uno spaziplano sub-orbitale sperimentale dotato di un motore a propellente ibrido progettato per essere usato come vettore per il turismo spaziale. La navetta SpaceShipTwo viene trasportata fino alla parte alta dell'atmosfera attraverso l'aereo da trasporto quadrimotore White Knight Two, da cui si stacca per essere spinta dal suo endoreattore ibrido nello spazio, oltre la linea di Kármán (posta per convenzione a 100 km di altitudine), per poi rientrare planando con un atterraggio orizzontale convenzionale.

Dopo alcuni test di volo falliti, tra cui uno che portò alla morte del pilota, e numerosi ritardi, il 22 maggio 2021 è stato effettuato con successo un test di volo con equipaggio a bordo della SpaceShipTwo, chiamata Vss Unity. L'11 luglio 2021 la VSS Unity ha completato con successo il primo volo commerciale con a bordo dei passeggeri. Il successo di questi voli suborbitali permetterà ora di puntare a una nuova tabella di marcia che, se tutto andrà come previsto, consentirà di aprire a tutti gli effetti il servizio commerciale e di vedere i primi turisti spaziali.



Figura 1.9: SpaceShipTwo agganciato al centro del velivolo madre White Knight Two (fonte: Virgin Galactic)

A livello europeo, lo Space Rider, Fig. 1.10, è un progetto di veicolo spaziale automatizzato e riutilizzabile per il rientro senza equipaggio in fase di studio da parte dell'Agenzia Spaziale Europea e finanziato principalmente dall'Italia. Lanciata a bordo del vettore dell'ESA VEGA C, potrà rimanere nello spazio fino a due mesi, testando nuove tecnologie in volo e conducendo diversi esperimenti in microgravità; al termine del periodo della missione, la navicella spaziale sarà in grado di compiere un rientro atmosferico controllato dall'orbita terrestre bassa.



Figura 1.10: Configurazione del veicolo Space Rider in orbita (fonte: European Space Agency)

1.2 Veicoli da lancio: strutture e materiali

La configurazione classica e più semplice di un LV consiste in un certo numero di serbatoi disposti in serie l'uno sopra l'altro con un motore a razzo ad una estremità e un carico utile (payload) all'altra. Nel caso di endoreattori a propellenti liquidi, tra i più diffusi, il propellente è composto dal combustibile e dall'ossidante, contenuti in serbatoi separati. I serbatoi sono connessi tra loro tramite delle strutture cilindriche in parete sottile chiamate *skirts* o *intertanks*. Un LV può essere composto da più stadi le cui prestazioni sono ottimizzate per le diverse fasi della missione. I vari stadi sono connessi tra di loro attraverso strutture cilindriche o a forma conica troncata chiamate *interstages* o *adapters* [6].

L'ultimo stadio, in cui generalmente viene alloggiato il payload, viene generalmente protetto mediante una carenatura (*fairing*); una volta superati gli strati più densi dell'atmosfera, il fairing viene rilasciato lasciando esposto il payload all'ambiente esterno.

Molto spesso i serbatoi, di forma cilindrica, costituiscono la struttura primaria del LV: infatti, oltre a fornire l'alloggio del propellente, devono essere in grado di sopportare i carichi che agiscono durante l'intera missione.

Queste strutture cilindriche possono presentare degli irrigidimenti fissati meccanicamente oppure degli irrigidimenti lavorati integralmente con la parete della struttura primaria.

Come in altre applicazioni aerospaziali, le caratteristiche più importanti, che i materiali impiegati nei LVs devono avere, sono ([6]):

- la resistenza del materiale, in base a qualsiasi criterio di robustezza applicabile
- rigidità del materiale, quantificata dal modulo elastico o dai moduli di elasticità in generale che caratterizzano le proprietà meccaniche del materiale
- la densità di massa
- la natura dei cedimenti che possono verificarsi (graduali o improvvisi)
- compatibilità meccanica e chimica tra i vari materiali che compongono la struttura.

La resistenza ai danni provocati dalla fatica non è fondamentale per quanto riguarda i LVs non riutilizzabili; acquisisce un'importanza maggiore nel caso di RLVs, ma a livelli ancora inferiori se paragonati per esempio all'ambito dell'aviazione civile. Le proprietà dei materiali utilizzati nei LV devono rimanere in un certo intervallo di accettabilità sia a temperature molto alte o basse sia in presenza di ambienti umidi, corrosivi o di altro tipo che possano degradare le prestazioni dei materiali; infatti, dato che molti lanciatori impiegano dei propellenti criogenici, le proprietà

dei materiali a temperature molto basse diventano molto importanti così come le proprietà a temperature elevate a causa del calore che si sviluppa sulle superfici dei lanciatori soprattutto nella fase di ascesa in atmosfera, dove l'attrito aerodinamico con l'atmosfera produce molto calore. Per questo motivo anche le proprietà termiche dei materiali sono molto importanti, in quanto bisogna essere in grado di predire i fenomeni legati all'espansione termica in modo che componenti di un dato materiale siano compatibili con quelli adiacenti di materiale differente [6].

Una proprietà sicuramente da non sottovalutare è la densità di massa che un dato materiale possiede: questa proprietà è fondamentale per riuscire ad ottenere delle efficienze strutturali che consentano di compiere determinate missioni con il minor utilizzo di propellente o di riuscire a portare in orbita un carico utile maggiore.

Una buona caratterizzazione dei materiali permette l'impiego di fattori di sicurezza più bassi riuscendo a preservare l'affidabilità del sistema con strutture più leggere. Un aspetto che non bisogna trascurare, che impatta principalmente dal punto di vista economico e non solo, riguarda anche le tecniche di produzione, assemblaggio e verifica delle prestazioni delle differenti parti che compongono la struttura dei LVs.

1.2.1 Design strutturale di un LV

Per un RLV le caratteristiche di fatica, frattura e corrosione dei materiali sono molto più importanti rispetto al caso di ELV. Infatti, le caratteristiche di particolare importanza per l'impiego di un materiale in un RLV sono [6]:

- la resistenza alla frattura e la propagazione delle cricche sotto carichi variabili nel tempo
- duttilità del materiale
- resistenza alla tensocorrosione
- la facilità di individuare e caratterizzare un danno
- compatibilità chimica o elettrochimica con altri materiali o fluidi.

Le strutture di un RLV sono soggette infatti a più cicli di carico rispetto ad un lanciatore non riutilizzabile. Per un ELV infatti la vita operativa viene definita in base ad un numero fissato di cicli di carico sufficientemente alto da consentire il checkout e più tentativi di lancio, ciascuno dei quali può comportare un ciclo di carico dovuto alla pressurizzazione dei serbatoi durante le operazioni pre-lancio [6]. La struttura primaria dei vari stadi di un LV nella maggior parte dei casi coincide con i serbatoi di propellente (*tank*). I *tank* di un LV, oltre a contenere i propellenti fluidi a volte anche a pressioni importanti e spesso a temperature criogeniche, devono operare in ambienti di carico altamente variabili, mantenendo al contempo

una massa ridotta. I design dei *tank* di propellente sono principalmente di tre tipi: *stiffened metal shell*, “*steel balloon*” e *composite tank* [6].

I serbatoi metallici a guscio rinforzato (*stiffened metal shell*) sono tra i più comunemente usati per applicazioni su LV e sono strutturalmente stabili sotto il carico del proprio peso quando sono vuoti e non pressurizzati; gli irrigidimenti possono essere ricavati attraverso lavorazioni meccaniche (pannelli isogrid o orthogrid) piuttosto che fissati meccanicamente: in particolare, l'utilizzo di pannelli isogrid consente di preservare il comportamento isotropo su larga scala del pannello, permettendo di costruire un modello numerico con proprietà isotrope equivalenti [6].

Il design “*steel balloon*” consiste in una parete molto sottile e non strutturalmente stabile sotto il carico del proprio peso a meno che non si effettui una pressurizzazione o si applichino delle tensioni [6].

L'impiego di materiali compositi può rappresentare una valida alternativa per quanto riguarda la progettazione di strutture primarie ad altissima efficienza, soggette ai carichi di compressione e flessione quali gli inter-stadi dei lanciatori spaziali o i serbatoi stessi, grazie alle note proprietà di resistenza, rigidità e leggerezza [7]. Un serbatoio in materiale composito infatti offre potenzialmente un grande risparmio di massa attraverso una resistenza specifica del materiale molto alta in corrispondenza di direzioni di carico prestabilite; inoltre le strutture in materiale composito possiedono una migliore resistenza alla fatica e alla propagazione di difetti ([6]).

1.3 Materiali per il design strutturale di un LV

Uno degli aspetti più impegnativi nel progetto strutturale di un LV riguarda il design dei serbatoi dei propellenti e la scelta del materiale da impiegare. In base al tipo di propellente, infatti, i volumi dei serbatoi possono essere molto elevati e di conseguenza risulta necessario minimizzarne la massa mantenendo al contempo rispettati i requisiti di resistenza e sicurezza della struttura stessa.

1.3.1 Serbatoi di propellente metallici

Storicamente l'impiego dei materiali metallici è stato largamente il più diffuso per il progetto strutturale dei serbatoi dei LV. Ancora oggi si fa molto uso soprattutto di leghe di alluminio che riescono a combinare buone proprietà meccaniche con un'alta efficienza di massa.

Le leghe di alluminio della serie 2000 sono tra le più utilizzate; questo tipo di leghe sono caratterizzate da una percentuale di rame che varia da 0.9% al 6.3% con l'aggiunta di silicio e litio, per permettere l'invecchiamento a temperatura ambiente e migliorare la forgiabilità e la resistenza del materiale, e piccole quantità di manganese, magnesio e titanio, per rifinire il grano e inibire la corrosione da fatica; una delle più popolari leghe di alluminio per la costruzione di serbatoi per LV è la lega

2219 (Cu 6.3%) che, oltre ad avere buone caratteristiche meccaniche, risulta essere saldabile e con eccellenti proprietà a temperature criogeniche [6].

Un'altra lega abbastanza diffusa nelle applicazioni per serbatoi di propellente di un LV è la lega alluminio-litio (Al-Li) 2195, più leggera rispetto alla lega 2219, ma con tensione di snervamento il 20% più alta sia a temperatura ambiente che a temperature criogeniche; la lega Al-Li 2195 risulta però meno duttile e più suscettibile alle cricche a caldo dovute a determinati processi di saldatura [6].

Altre leghe di alluminio sono utilizzate per applicazioni su altre parti strutturali del LV.

1.3.2 Serbatoi di propellente in composito

L'efficienza strutturale, che dipende dal rapporto tra la resistenza ai carichi a cui è soggetta la struttura e la massa della struttura stessa, è uno degli aspetti di maggior importanza nel progetto di un LV e in particolare per i serbatoi di propellente, al fine di riuscire a portare in orbita la massa di payload più grande possibile o di permettere un ventaglio di scenari di missione più ampio. La leggerezza della massa strutturale assume maggiore importanza se si considerano dei lanciatori single-stage-to-orbit (SSTO) per cui è previsto il rientro e l'atterraggio (RLV) [6]. Molti sforzi di ricerca, per raggiungere questo scopo, sono orientati verso l'impiego di materiali compositi, e in particolare verso materiali compositi rinforzati con fibre.

Si tratta di materiali costituiti da fibre di materiale con caratteristiche meccaniche elevate (possono essere fatte di boro, carbonio, vetro ecc...) immerse in una matrice, tipicamente di natura polimerica (resine). La fibra e la resina possono essere considerati materiali omogenei isotropi ma la loro unione dà origine ad un materiale ortotropo.

Le fibre possiedono un rapporto tra resistenza alla trazione e peso molto elevato lungo la direzione che coincide con l'asse delle fibre. Immergendo le fibre in una matrice è possibile ottenere un layer o strato. Il prodotto finale possiede un certo numero di strati e da uno strato all'altro le fibre possono essere orientate diversamente. In questo modo, le caratteristiche meccaniche del laminato (cioè il risultato finale che deriva dalla giustapposizione dei vari layer) possono quindi essere facilmente variate dal progettista in base ai carichi a cui è soggetta la struttura.

Nonostante sia possibile progettare materiali compositi dalle caratteristiche meccaniche molto più elevate rispetto ai tradizionali materiali metallici, eventuali imperfezioni geometriche delle fibre o della matrice (spesso di non facile identificazione) facilitano il cedimento per buckling del materiale. Inoltre i materiali compositi a matrice polimerica presentano un limite superiore per la temperatura massima a cui possono operare. Per questo motivo i serbatoi in composito devono essere adeguatamente isolati o protetti, comportando delle limitazioni alle possibili traiettorie che il LV può seguire durante la fase di ascesa in atmosfera o, nel caso di

RLV, durante la fase di rientro [6].

Negli anni, i compositi sono stati impiegati nella costruzione di serbatoi di LH2 comportando una notevole riduzione in peso rispetto ai serbatoi in leghe metalliche; lo sviluppo di serbatoi di LOX in composito porta ad una serie di problematiche legate al fatto di dover applicare uno strato protettivo al materiale composito a contatto con l'ossidante per prevenire il rischio di accensione e il degrado chimico della matrice attraverso processi di ossidazione.

1.4 Ambiente di carico

Ogni evento nella vita operativa di un LV introduce dei carichi strutturali. Gli eventi chiave sono la produzione; assistenza a terra, test e trasporto; preparativi per il pre-lancio; lancio; separazione del payload; operazioni in orbita; rientro ed atterraggio (se si considera un RLV). In molti casi, non è possibile controllare i carichi; quindi bisogna stimarli usando metodi appropriati e progettare le strutture per resistere [8].

Infatti il requisito di base per una struttura spaziale è spesso espresso come:

"La struttura deve supportare il carico utile e i sottosistemi di veicoli spaziali con resistenza e rigidità sufficienti a precludere qualsiasi guasto (rottura, collasso o deformazione dannosa) che potrebbe impedire loro di lavorare con successo" [8].

1.4.1 Flight environments

Il lancio genera i carichi più severi per la maggior parte delle strutture spaziali, anche se qualsiasi altro evento può essere critico per diverse parti della struttura. Il lancio consiste in una serie di eventi, ognuno dei quali porta a diverse tipologie di carico indipendenti per il LV e il payload. Alcuni carichi sono relativamente stabili, o costanti nel tempo, come la spinta del motore dell'endoreattore. Alcuni sono transitori, come la spinta discontinua dovuta all'accensione e successivo spegnimento del motore.

Un'altra tipologia di notevole rilevanza sono i carichi acustici provocati da onde di pressione sonora causate dall'interazione della struttura con gli strati dell'atmosfera; poiché la maggior parte dell'acustica include onde con molte frequenze diverse, esse causano la vibrazione casuale delle strutture. L'interazione con gli strati dell'atmosfera durante le fasi di ascesa e rientro, nel caso di RLV, comporta anche la presenza di carichi termici la cui stima è fondamentale per il successo della missione.

Lo shock pirotecnico, è una vibrazione ad alta intensità e ad alta frequenza (> 1000 Hz) causata da dispositivi esplosivi comunemente usati per separare i vari stadi [8]. Nella maggior parte dei casi, i serbatoi, che costituiscono la struttura primaria degli stadi di un LV, devono sopportare carichi aerodinamici e inerziali, che si traducono in una combinazione di carichi di compressione assiale e flessione che è possibile

stimare mediante un modello semplificato che però descrive in maniera abbastanza accurata il fenomeno; infatti, durante il volo, un LV sarà soggetto ad accelerazioni assiali e laterali in un certo range: l'accelerazione assiale è dettata dall'inerzia della massa del LV, dalla spinta del motore e dalla resistenza aerodinamica (quest'ultima agisce principalmente negli strati più bassi dell'atmosfera); l'accelerazione laterale è dovuta principalmente a raffiche di vento, a manovre con controllo della direzione della spinta (*Thrust Vector Control*), spegnimento del motore di uno stadio e altri eventi di breve durata [4].

In Fig. 1.11 e Fig. 1.12 sono riportati gli involucri che riportano i fattori di carico di progetto dei LV *Falcon 9* e *Falcon Heavy* per payload "standard" con massa maggiore e inferiore a 4000 lb (1810 kg) [4].

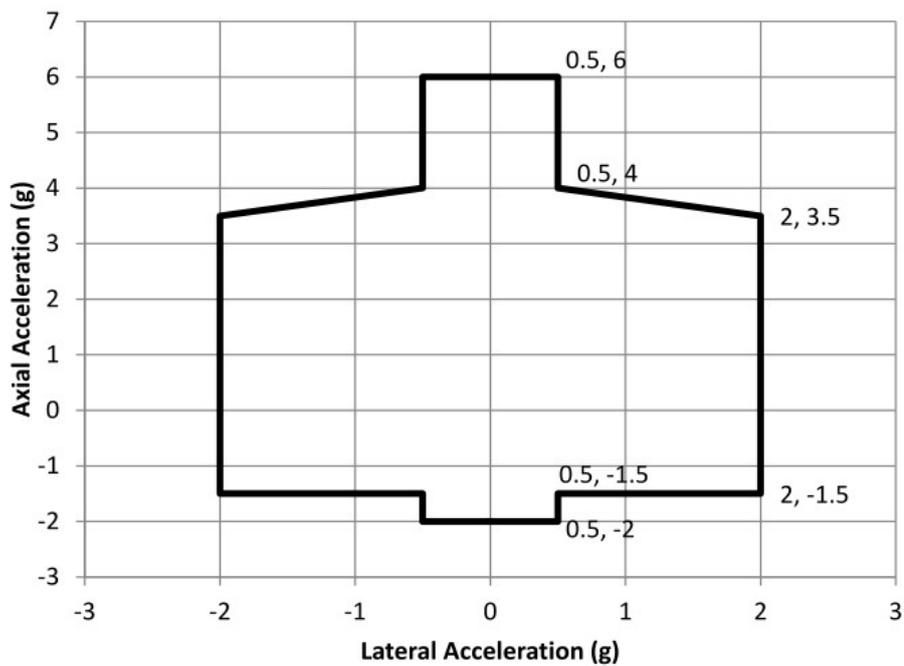


Figura 1.11: Fattori di carico di progetto per i LV *Falcon 9* e *Falcon Heavy* con massa di payload "standard" (>4000 lb) (da [4])

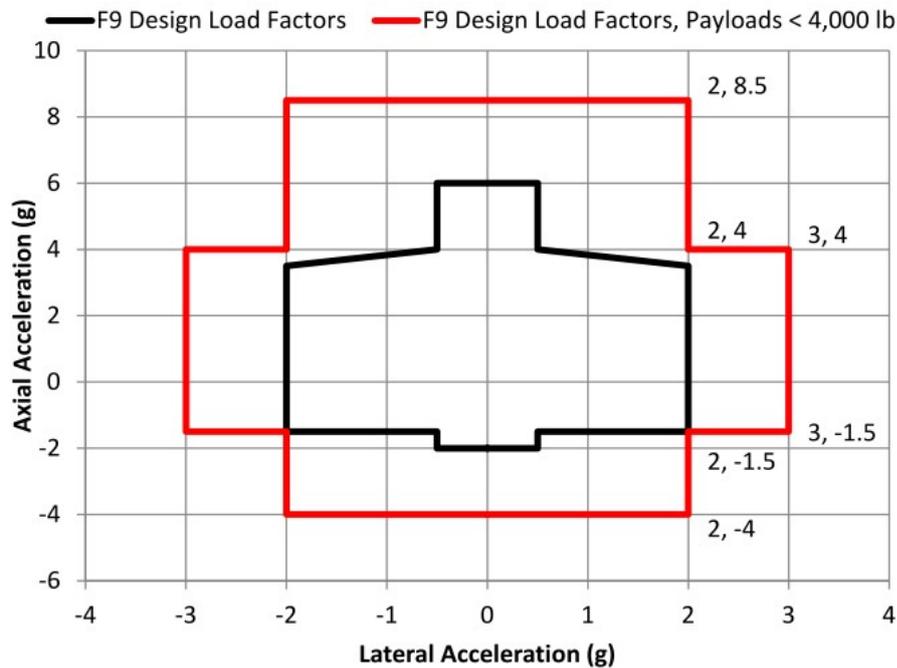


Figura 1.12: Fattori di carico di progetto per il LV *Falcon 9* con massa di payload <4000 lb (da [4])

1.5 Buckling di gusci cilindrici soggetti a compressione assiale

Molti studi sono stati condotti per determinare le leggi che governano la resistenza di strutture esposte a determinate forze esterne. In campo aerospaziale di particolare interesse risultano le strutture che presentano una curvatura cilindrica.

Uno degli aspetti cruciali del progetto delle strutture cilindriche in parete sottile è lo studio del buckling; data la tipologia di carichi a cui è soggetto un LV, risulta fondamentale lo studio del buckling di strutture a guscio cilindriche sotto un carico di compressione assiale, combinato eventualmente con carichi di flessione, pressurizzazione e termici.

Singer, Arbocz e Weller hanno riassunto in [9] quello che è possibile considerare come lo stato dell'arte per quanto riguarda i metodi sperimentali per le prove di buckling di strutture in parete sottile. In [9] infatti è descritta la sequenza degli eventi che si verificano durante un test sperimentale di compressione assiale su una struttura a guscio sottile cilindrica. Per questo tipo di test sperimentale si utilizza un dispositivo di prova come riportato in Fig. 1.13. Con questo tipo di prova sperimentale, è possibile ottenere un grafico con in ascissa la deformazione assiale e in ordinata il carico di compressione assiale come in Fig. 1.14: è possibile osservare un comportamento di prebuckling approssimativamente lineare per il quale il guscio

cilindrico mantiene la sua forma originale fino al carico di buckling A. Proseguendo il test si osserva che la deformazione di accorciamento del guscio cilindrico aumenta (il dispositivo di prova è considerato a controllo di spostamento) ma a ciò segue una brusca diminuzione del carico assiale fino ad una frazione B del carico di buckling, e il guscio cilindrico passa bruscamente alla tipica forma di postbuckling (forma a diamante) come mostrato in Fig. 1.15. In B il guscio cilindrico ha assunto il suo primo stato di equilibrio stabile di postbuckling.

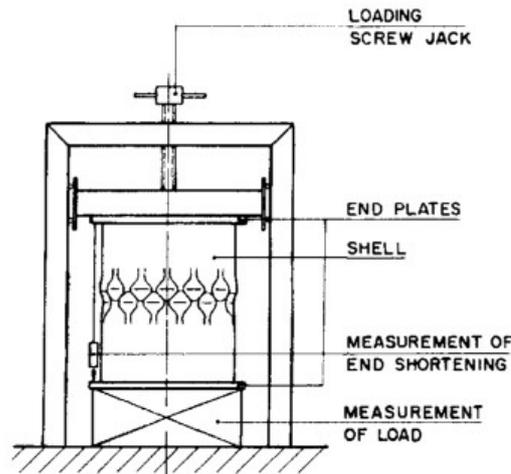


Figura 1.13: Vista schematica di un tipico banco di prova a deformazione controllata per compressione assiale (da [9])

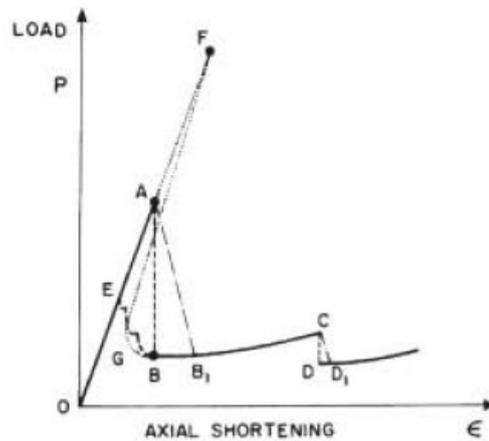


Figura 1.14: Tipico processo di instabilità di un guscio cilindrico sotto compressione assiale; notare la grande differenza tra il carico di punta sperimentale (A) e quello previsto (F) per un guscio perfetto (da [9])

Se adesso si prosegue il test con una diminuzione dell'accorciamento assiale, l'equilibrio stabile di postbuckling creato diventa instabile e il guscio cilindro segue a step la curva a tratti BE fino a ritornare alla forma prebuckling ad un carico E inferiore al carico di buckling iniziale A. In seguito è possibile ritornare alla configurazione a riposo 0 seguendo la curva iniziale E0.

Se al contrario, arrivati al primo stato di equilibrio stabile di postbuckling, la deformazione assiale di accorciamento viene aumentata, il carico sopportato dal guscio cilindrico sale leggermente fino a quando, ad un secondo valore critico dell'accorciamento assiale, il primo stato di equilibrio stabile di postbuckling diventa instabile, provocando, lungo CD, un "buckling secondario" che porta il guscio in una seconda configurazione di equilibrio stabile di postbuckling. Aumentando ancora l'accorciamento assiale si passerà successivamente ad altre configurazioni di equilibrio fintanto che la deformazione rimane elastica.

In Fig. 1.14 è riportata anche la curva teorica OFGB che corrisponde ad un guscio cilindrico perfetto. La principale causa della differenza tra il carico di buckling F, previsto mediante analisi teoriche per un guscio cilindrico perfetto, e il valore osservato tipicamente durante le prove sperimentali A è data dall'instabilità del comportamento del guscio nell'istante iniziale del fenomeno del buckling e la conseguente sensibilità all'imperfezione. Inoltre, la configurazione di buckling prevista dalla teoria lineare classica per un guscio perfetto è la configurazione a scacchiera in Fig. 1.16 che differisce considerevolmente dalla tipica forma a diamante osservabile in una tipica prova sperimentale. Infatti, la configurazione a scacchiera teorica (che in realtà si ottiene considerando un guscio cilindrico infinitamente lungo), sebbene chiaramente definita dalla soluzione delle equazioni che governano il fenomeno del buckling, rappresenta una configurazione altamente instabile difficilmente osservabile durante le prove sperimentali [11].

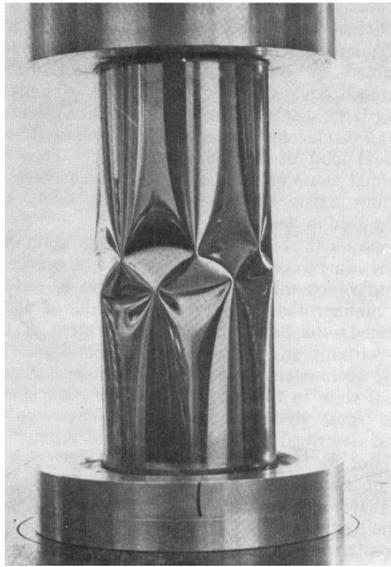


Figura 1.15: Forma postbuckling di un guscio cilindrico circolare (da [10])

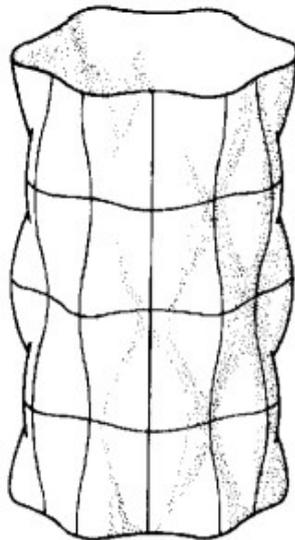


Figura 1.16: Configurazione teorica a scacchiera per un guscio cilindrico lungo soggetto a compressione assiale (da [11])

1.5.1 Stato dell'arte

Molti studi sono stati condotti per spiegare la grande discrepanza tra i risultati teorici e sperimentali per il carico di buckling di un guscio cilindrico soggetto a compressione assiale.

Uno dei primi tentativi di conciliare i risultati sperimentali con i risultati analitici fu portato avanti da Donnell [24]. Questa teoria è stata sviluppata considerando dei gusci geometricamente perfetti soggetti a condizioni di carico assiale ideale e semplicemente appoggiato. Il problema è descritto da un sistema di equazioni alle derivate parziali per cui è stata trovata una soluzione approssimata considerando una doppia serie di Fourier in modo da dover risolvere un classico problema lineare agli autovalori. In base a questa analisi, Donnell fornisce una teoria per prevedere il carico critico di buckling che, a causa delle numerose approssimazioni, fornisce risultati accettabili solo per cilindri di moderata lunghezza. Infatti la teoria di Donnell porta a risultati affetti da errori significativi nel momento in cui si considerano cilindri di maggiore lunghezza soggetti a compressione e/o pressione.

Un ulteriore approccio è fornito dagli studi condotti da von Karman e Tsien [15] che proposero delle teorie basate sui grandi spostamenti nel tentativo di giustificare questa discrepanza. Secondo queste teorie, ci sono configurazioni di equilibrio deformate che comportano un carico molto inferiore rispetto al carico di buckling previsto dalla teoria classica, e quindi se il provino è leggermente imperfetto, è ragionevole aspettarsi carichi di buckling molto inferiori. Tuttavia data la complessità del problema, quali per esempio il calcolo dell'energia elastica del guscio, la validità di tutte le equazioni ottenute per i grandi spostamenti, i risultati forniti in [15] possono essere considerati solo come un'approssimazione e la maggior parte delle affermazioni fatte sono qualitative piuttosto che quantitative. Infatti i carichi critici ottenuti tramite queste teorie risultano ancora maggiori rispetto ai dati sperimentali. Nonostante ciò, grazie a questo studio è stato possibile ottenere la prima evidenza di come le imperfezioni iniziali nella geometria di un guscio cilindrico possono essere considerate la principale causa della discrepanza tra le previsioni teoriche dei carichi di buckling e i risultati sperimentali.

Un'altra spiegazione del comportamento dei cilindri non pressurizzati in compressione è stata proposta da Donnell e Wan [16] con una teoria non lineare che include gli effetti delle irregolarità iniziali e tiene conto del comportamento plastico del guscio. Quest'ultimo approccio è sembrato offrire una migliore correlazione con i risultati sperimentali in cui erano note le caratteristiche iniziali del provino. I risultati suggeriscono anche che vi sia una dipendenza del coefficiente di sollecitazione critica dal rapporto r/t (raggio/spessore) perché è probabile che le imperfezioni iniziali di un cilindro non irrigidito siano maggiori all'aumentare del rapporto r/t . Nonostante la validità teorica di una teoria basata sui grandi spostamenti che include gli effetti delle imperfezioni iniziali, la procedura ha lo svantaggio di richiedere una conoscenza preliminare dell'imperfezione iniziale.

Questo tema è stato affrontato anche da Almroth, Holmes e Brush al Lockheed Palo Alto Research Laboratory [12]: sono state effettuate delle prove di compressione assiale su provini progettati per massimizzare la possibilità che i disturbi esterni dell'ambiente di prova influenzassero i risultati. Di conseguenza, è stato fatto ogni sforzo per ridurre al minimo le imperfezioni geometriche e le sollecitazioni residue nei cilindri di prova. Per i diversi provini il fenomeno del buckling si è presentato con la classica forma a diamante in una porzione limitata del provino localizzata circa al centro tra le due estremità. Il fatto che i risultati fossero riproducibili per un dato cilindro ma abbastanza diversi per i diversi cilindri nominalmente uguali, indica che il carico di buckling in normali condizioni di laboratorio dipende dalle proprietà del provino stesso piuttosto che dall'ambiente di prova. Inoltre, il fatto che siano stati ottenuti valori molto elevati del carico di buckling quando le imperfezioni iniziali sono state attentamente minimizzate indica fortemente che queste irregolarità sono la ragione principale della riduzione del carico critico di buckling per un guscio cilindrico isotropo.

Un ulteriore tentativo di fornire un approccio pratico per predire il carico critico di gusci cilindrici soggetti a compressione in accordo con i risultati sperimentali è stato fatto da Harris, Suer, Skene e Benjamin in [17] con uno studio condotto presso il Missile Division Laboratory della North American Aviation, California. In [17] è stata esposta una procedura semi-empirica che permette l'analisi di buckling a compressione di un guscio cilindrico nota solamente la geometria del cilindro. Questa analisi è ottenuta mettendo in correlazione statisticamente i dati sperimentali e parametri teorici. Per gusci cilindrici non pressurizzati venne osservata la classica configurazione a diamante e il coefficiente di carico di buckling critico risulta essere funzione del rapporto r/t e di un parametro di curvatura Z , che dipende dallo spessore, dal raggio, dalla lunghezza del cilindro e dal modulo di Poisson. Per gusci cilindrici pressurizzati l'instabilità è spesso preceduta dalla formazione di increspature assialsimmetriche molto superficiali; superato il carico critico di buckling si ha la formazione della configurazione a diamante in una zona limitata e ristretta del cilindro. In questo caso il carico critico risulta funzione della pressione interna e della geometria.

Nel corso degli anni sempre maggiore interesse è stato rivolto verso strutture in grado di aumentare la resistenza al buckling senza un aumento rilevante della massa della struttura; una delle tipiche soluzioni adottate consiste nelle strutture in parete sottile con irrigidimenti. Questo tipo di strutture permette di limitarne la massa mantenendo adeguate proprietà meccaniche lungo soprattutto particolari direzioni di carico.

Nel 1959 venne pubblicato un memorandum della NASA nel quale sono stati riportati i risultati dello studio sperimentale di Peterson e Dow condotto presso il Langley Research Center [20] su cilindri in lega di alluminio 7075-T6 con irrigidimenti longitudinali soggetti a compressione assiale. Sono stati scelti degli

irrigidimenti con sezione a Z con una spaziatura lungo la circonferenza ridotta in modo da evitare fenomeni di buckling locale della parete del cilindro. La configurazione di buckling di tutti i cilindri testati era molto simile; in particolare, nella direzione longitudinale il cilindro è andato in instabilità con una configurazione ad una semionda mentre lungo la circonferenza i diversi cilindri testati hanno presentato dalle 6 alle 11 onde. Inoltre, tramite la teoria delle piccole deformazioni applicata al problema del buckling di un guscio ortotropo è stato calcolato il carico di buckling dei cilindri che è risultato essere affetto approssimativamente dal 15% di errore rispetto ai risultati sperimentali, una discrepanza significativamente più piccola rispetto a ciò che è stato osservato per i cilindri non irrigiditi soggetti a compressione.

Anche in [18] è riportata un'analisi su cilindri irrigiditi ortotropi soggetti a compressione assiale per i quali è stata studiata l'instabilità elastica generale. I dati sperimentali sono stati confrontati con i risultati teorici ottenuti grazie alla teoria lineare della stabilità modificata per irrigidimenti ortotropi.

Di notevole rilevanza è lo studio sperimentale condotto da Weller e Singer presso il *Technion Aerospace Structures Laboratory* [19]. Durante questo programma sperimentale sono stati testati decine di gusci cilindrici circolari con irrigidimenti integrati ottenuti da lavorazioni meccaniche, con elementi longitudinali e soggetti a compressione assiale. Grazie a queste prove sperimentali è stata confermata l'accuratezza delle previsioni dei carichi di buckling di un guscio cilindrico con irrigidimenti longitudinali ottenuti con la teoria lineare, almeno come risultati di prima approssimazione, rispetto ai risultati sperimentali; inoltre bisogna tenere in considerazione le condizioni al contorno della struttura in esame anche nel caso di un'analisi di prima approssimazione. Secondo Weller e Singer, l'accordo tra i risultati sperimentali e le previsioni della teoria lineare dipende principalmente dalla spaziatura degli irrigidimenti, in modo da evitare fenomeni di buckling locale (per assicurare un buckling elastico), da un parametro che dipende dalla geometria del guscio cilindrico, e dal parametro di area che è definito come il rapporto tra la sezione trasversale dell'irrigidimento e il prodotto tra lo spessore del guscio e la spaziatura tra gli irrigidimenti. Inoltre le condizioni al contorno influenzano notevolmente i risultati soprattutto per gusci con irrigidimenti longitudinali. Oltre a ciò è stato possibile dimostrare che applicando un criterio di efficienza strutturale conservativo i gusci cilindrici irrigiditi sono strutturalmente più efficienti di un guscio isotropo di peso equivalente.

Per quanto riguarda cilindri irrigiditi, grazie ai risultati sperimentali di Singer et al. in [21] e ai risultati analitici di Thielemann in [22], è stato possibile concludere che le imperfezioni iniziali influiscono maggiormente sul buckling di cilindri con irrigidimenti longitudinali rispetto a cilindri che presentano irrigidimenti lungo la circonferenza del guscio e che è presente una maggiore sensibilità alle imperfezioni in cilindri leggermente irrigiditi rispetto a strutture con un numero più elevato

di irrigidimenti. Inoltre l'analisi di Thielemann ha portato a concludere che, considerando cilindri geometricamente perfetti con irrigidimenti assiali e soggetti a compressione, il carico critico di buckling risulta maggiore rispetto a cilindri con irrigidimenti lungo la circonferenza.

In [23] Singer riporta la conferma dell'importanza delle condizioni al contorno per quanto riguarda l'analisi e il test sperimentale a buckling di cilindri irrigiditi, che può risultare anche più rilevante rispetto all'influenza delle imperfezioni geometriche.

Come già è stato esposto, il progetto di LV, soprattutto riutilizzabili, richiede un'adeguata efficienza strutturale del design. Una possibile strada da poter percorrere prevede l'utilizzo per le strutture portanti di un LV di materiali compositi con fibre di rinforzo immerse in una matrice, in grado di fornire un elevato rapporto rigidità/peso. Inoltre anche in questo caso è possibile prevedere l'utilizzo di vari tipi di irrigidimenti come per le strutture in materiale metallico.

La difficoltà nell'impiego dei materiali compositi consiste nel dover considerare una grande quantità di parametri di progetto (quali per esempio la scelta del tipo di fibre e matrice, la stratificazione del laminato e lo spessore totale) e di modalità di rottura che si possono presentare (delaminazioni, rottura della fibra, distacco tra matrice e fibra, cedimento della matrice). Di conseguenza a causa della natura anisotropa di queste strutture, che si traduce in una variazione spaziale delle proprietà meccaniche del guscio dovuta alla possibilità di personalizzazione strutturale, e della complessità delle modalità di rottura, l'uso di metodi classici per determinare i carichi di buckling può risultare non adatto.

Infatti uno degli aspetti che caratterizza e contraddistingue maggiormente le strutture in laminati compositi rispetto ai classici materiali isotropi consiste nella possibilità che si verificano cedimenti intralaminari e interlaminari che influenzano il comportamento a buckling locale portando in seguito ad una instabilità globale della struttura soprattutto se presenti aperture [32].

Nel 1970 Khot condusse uno studio riguardante il comportamento a buckling di cilindri in composito soggetti a compressione assiale evidenziando l'effetto delle imperfezioni geometriche iniziali [24]. Da questi studi è emerso che i gusci isotropi risultano essere più sensibili alle imperfezioni rispetto ai gusci in composito. Inoltre, l'orientamento delle fibre e l'ordine della sequenza dei vari strati del laminato generalmente influenza la sensibilità alle imperfezioni della struttura in composito. In [25, 26] è stato approfondito lo studio sull'effetto delle imperfezioni iniziali, dell'orientamento delle fibre e della sequenza di impilamento dei vari strati del laminato sulle caratteristiche di buckling dei compositi, in particolare su compositi con matrice epossidica e fibre di vetro e boro.

L'effetto delle imperfezioni sulla risposta a buckling di un guscio cilindrico soggetto ad un carico di compressione è stato studiato da Hilburger e Starnes in [30, 31]. In questo studio sono state considerate imperfezioni tradizionali e non tradizionali.

Durante il processo di fabbricazione dei cilindri in materiale composito possono formarsi infatti delle imperfezioni della geometria della superficie media del cilindro che si discosta dalla geometria nominale del provino, variazioni dello spessore delle pareti del guscio cilindrico e possono crearsi localmente degli spazi vuoti tra i vari strati che compongono il laminato. L'ambiente di prova inoltre può introdurre ulteriori imperfezioni rispetto alla configurazione nominale dovute all'applicazione dei carichi non uniforme alle estremità, e alla differenza tra le condizioni al contorno considerate in un modello ideale e quelle che effettivamente si riescono ad ottenere con l'attrezzatura sperimentale, incluso l'effetto delle condizioni al contorno elastiche. Oltre a ciò è presente un certo grado di incertezza riguardo alcuni parametri che caratterizzano i cilindri, quali per esempio la frazione volumica delle fibre di rinforzo in una lamina oppure le proprietà della fibra e della matrice.

Almroth in [27] espone quelle che sono considerate le problematiche principali del progetto di strutture in composito in condizioni di buckling. In particolare si riporta come i parametri di accoppiamento tra il comportamento membranale e di taglio trasversale di un guscio influiscono sul carico critico e come le possibili imperfezioni iniziali influiscono sul comportamento del materiale composito; inoltre viene effettuato un confronto sull'efficacia dell'utilizzo dei materiali compositi anche in situazioni di postbuckling in cui le strutture metalliche offrono una considerevole resistenza. In particolare Almroth afferma che i cilindri in composito sono risultati essere meno sensibili alle imperfezioni rispetto a cilindri in materiale isotropo.

Interessante anche lo studio di Geier et al. che hanno dimostrato le difficoltà dell'impiego di materiali compositi, in particolare di un laminato a matrice polimerica con rinforzi in fibre di carbonio (CFRP), nel progetto strutturale di cilindri soggetti principalmente a compressione assiale [28]. Dalle prove sperimentali condotte durante questo studio è emerso che il carico di buckling dei provini cilindrici in CFRP testati risulta essere fortemente condizionato dall'orientamento delle fibre di carbonio e dalla sequenza di impilamento dei vari strati, presentando una differenza da una possibile configurazione all'altra di un fattore pari fino a tre. In [29] Geier et al. forniscono una possibile interpretazione analitica e fisica di come la sequenza di laminazione dei vari strati di un laminato composito può determinare carichi di buckling più o meno grandi.

In analogia con strutture in materiale isotropo, la presenza di elementi di irrigidimento in gusci cilindrici in materiale composito può migliorare le proprietà della struttura per quanto riguarda il fenomeno del buckling.

Lo studio di cilindri in composito con elementi di irrigidimento può essere condotto applicando un modello analitico nel quale si effettua il calcolo dei parametri di rigidezza equivalenti del guscio in composito irrigidito visto come un materiale omogeneo.

Nell'analisi condotta in [35] sono stati confrontati i risultati di strutture in composito irrigidite ottenuti considerando il metodo dell'irrigidimento spalmato per il

calcolo dei parametri di rigidità equivalenti, con i risultati ottenuti tramite un modello dettagliato agli elementi finiti; in questo studio si afferma che è possibile comparare i valori di carico di buckling globale della struttura, e che il modello di struttura omogenea equivalente dalla geometria semplice può essere adatto per un processo di ottimizzazione della struttura.

In [33] sono riportati i risultati di uno studio di ottimizzazione di cilindri in composito irrigiditi valutando l'influenza dei vari parametri di progetto; infatti al variare dell'inclinazione degli irrigidimenti rispetto alla direzione assiale del cilindro è stato osservato un massimo del carico di buckling in corrispondenza di un determinato angolo che rappresenta l'angolo di orientamento degli irrigidimenti ottimale per i particolari campioni testati. Si può anche notare che quando la spaziatura dell'irrigidimento viene man mano aumentata, la diminuzione del carico di buckling diventa sempre minore, il che significa che il contributo dell'irrigidimento diventa piccolo e il guscio esterno diventa il principale componente portante. Dai risultati dello studio è stato verificato inoltre che l'angolo di orientamento delle fibre che compongono i vari strati del guscio dei cilindri testati e lo spessore determinano variazioni considerevoli del carico di buckling a compressione assiale.

In letteratura per esempio è possibile reperire uno studio di ottimizzazione che conferma l'importanza dei vari parametri di progetto di un guscio cilindrico irrigidito in materiale composito [34]. In questo studio è stato adottato un processo di ottimizzazione basato su algoritmi genetici grazie al quale è stato possibile affermare che un cilindro con irrigidimenti a griglia, ottimizzato per l'applicazione di un carico di compressione assiale, presenta migliori caratteristiche di resistenza a carichi combinati rispetto ad un cilindro con irrigidimenti assiali.

Un ulteriore design interessante è dato da cilindri con irrigidimenti Isogrid gerarchici (HISC) in fibra di carbonio [36]. In questo caso sono presenti irrigidimenti Isogrid primari e secondari. Gli irrigidimenti della Isogrid primaria sono più alti e spessi e delimitano le celle interne caratterizzate da irrigidimenti sub-Isogrid più sottili e bassi. Gli irrigidimenti Isogrid primari contribuiscono ad aumentare la rigidità a flessione del cilindro contrastando i fenomeni di instabilità globale della struttura, mentre gli irrigidimenti Isogrid secondari si oppongono ai fenomeni di instabilità locale delle celle racchiuse dalla Isogrid primaria. In questo modo è possibile dotare la struttura cilindrica di notevole rigidità sia globale che locale, utile per applicazioni in gusci cilindrici caratterizzati da un grande diametro.

Oltre ai design e metodi di fabbricazione classici delle strutture in materiale composito, negli ultimi anni è stato possibile osservare un crescente interesse verso l'additive manufacturing. Questo nuovo metodo di fabbricazione e progettazione può permettere lo sviluppo di soluzioni innovative e più efficienti come per esempio i materiali compositi *variable angle-tow* (VAT) [37, 38]. Nei materiali compositi VAT le fibre (o tow) possono essere disposte seguendo un percorso curvilineo all'interno

dei vari strati di un laminato e ciò comporta una variazione delle proprietà del materiale in funzione della posizione che si sta considerando. L'utilizzo dei compositi VAT comporta ulteriori complicazioni a livello progettuale dato il grande numero di variabili di progetto presenti, ma può portare a soluzioni non convenzionali in grado di fornire prestazioni migliori rispetto alle soluzioni convenzionali.

La NASA a partire dal 1964 avviò un programma di ricerca che permise di sviluppare delle linee guida per i criteri di progetto di un LV. Tra questi i documenti della serie NASA SP-8000 riguardano il design strutturale di un lanciatore. In particolare la monografia NASA SP-8007 affronta il problema del buckling nel progetto di cilindri circolari in parete sottile. I risultati e i metodi di analisi proposti sono stati implementati con successo nello sviluppo e progettazione di numerosi LV. Tuttavia, nel corso del tempo, si è capito che i knockdown factors (KDFs), fattori di sicurezza applicati ai risultati teorici al fine di mitigare la discrepanza con i dati sperimentali, e le raccomandazioni riportate nelle prime versioni di questi manuali, portavano a considerare carichi di buckling eccessivamente conservativi e non fornivano risultati soddisfacenti per il progetto di moderne strutture per LV al fine di migliorarne l'efficienza strutturale, soprattutto in previsione di applicazioni per RLV. La monografia [39] consiste in un aggiornamento del report originale NASA SP-8007 (1965, revisionato nel 1968). In [39] è riportato il nuovo stato dell'arte per il progetto e l'analisi di strutture a guscio cilindriche circolari a parete sottile sottoposti a vari tipi di carico. In particolare i tradizionali KDFs, possono risultare utili ad effettuare un dimensionamento preliminare del design strutturale, data la natura fortemente conservativa; per ridurre l'aspetto conservativo dei tradizionali metodi di progettazione sono stati proposti anche approcci semi-empirici. Grazie allo sviluppo di potenti calcolatori, al giorno d'oggi, le tecniche di analisi tramite il metodo agli elementi finiti (FEM) e gli algoritmi di soluzione non lineare forniscono uno strumento veloce ed efficace per ottenere previsioni accurate del fenomeno del buckling. Quest'ultimi, insieme ad approcci che utilizzano dei database e dei metodi probabilistici, possono essere sfruttati per ottimizzare il design strutturale e raggiungere l'efficienza strutturale richiesta nei requisiti di progetto.

1.6 Buckling di strutture soggette a carichi termici

Le strutture di veicoli aerospaziali sono spesso soggette ad alte temperature durante diverse fasi della missione operativa.

Il calore infatti viene generato a causa dell'attrito della struttura con gli strati dell'atmosfera soprattutto in condizioni di volo ad alta velocità. Infatti, lo studio dei carichi termici e degli effetti indotti sulle strutture ha assunto un'importanza rilevante a partire dagli anni '40 e '50 con l'avvento dei voli supersonici e delle missioni che prevedevano un rientro atmosferico.

Per applicazioni in campo aerospaziale, risulta quindi di fondamentale importanza il progetto di un sistema di protezione termico (*thermal protection system, TPS*) e di materiali in grado di mantenere buone proprietà meccaniche anche ad alte temperature.

I principali effetti delle alte temperature nelle strutture aerospaziali, causate dal calore generato per attrito aerodinamico, possono essere classificati come segue [9]:

- degrado delle proprietà meccaniche dei materiali ad elevate temperature
- stato di tensione termico dovuto ai gradienti di temperatura, che possono indurre il fenomeno del buckling termico
- modifica delle proprietà di rigidità e vibrazione degli elementi strutturali a causa della presenza dello stato di tensione termico
- instabilità aeroelastiche risultanti dalla riduzione della rigidità indotta dallo stress termico o dall'accoppiamento aerotermodinamico.

Lo stato di tensione generato a seguito di un carico termico comporta la generazione di tensioni di compressione che possono provocare il fenomeno del buckling, principalmente per elementi strutturali allungati o in parete sottile specialmente in particolari condizioni di vincolo.

Heldenfels and Roberts [40] nel 1952 pubblicarono una serie di risultati teorici e sperimentali riguardo lo studio delle tensioni generate da particolari carichi termici su piastre di materiale isotropo.

Il setup sperimentale consisteva in una piastra rettangolare a cui è stata applicata una semplice distribuzione di temperatura "a tenda" in condizione stazionaria, ottenuta riscaldando la piastra lungo la linea centrale con un filo di resistenza elettrica e mantenendo la temperatura costante lungo bordi esterni paralleli mediante un flusso d'acqua attraverso dei tubi refrigeranti. Le superfici superiore e inferiore della piastra sono state isolate per produrre variazioni di temperatura lineari, uniformi e unidimensionali tra la linea centrale riscaldata e i bordi paralleli raffreddati, Fig. 1.17.

La distribuzione di temperatura a tenda, Fig. 1.18, causa uno stato di tensione

di compressione nella porzione centrale della piastra. Nel caso di una piastra non vincolata, queste sollecitazioni di compressione generate nella parte centrale devono essere equilibrate da sollecitazioni di trazione lungo le regioni esterne della piastra. In particolare, proprio le tensioni di compressione che si vengono a generare possono indurre il fenomeno del buckling.

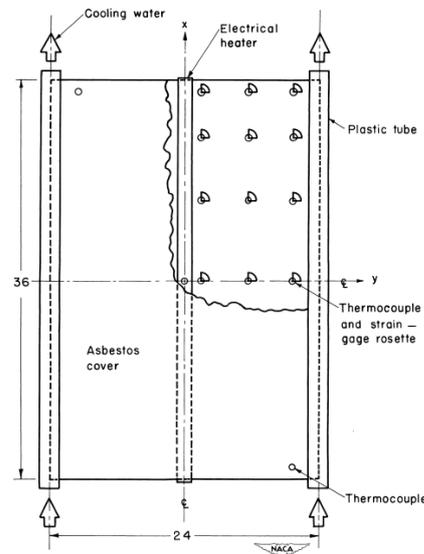


Figura 1.17: Schema del setup sperimentale per la valutazione degli stress termici (da [40])

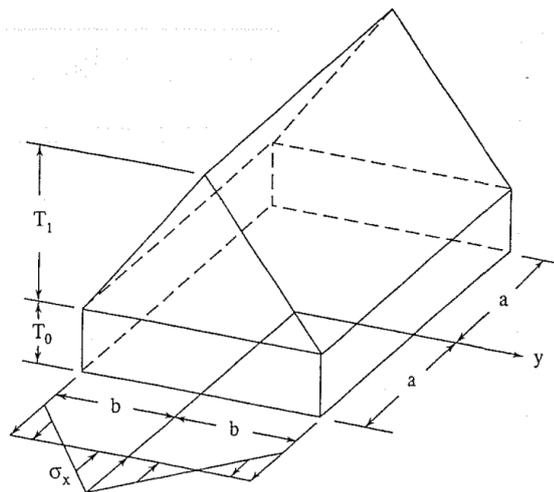


Figura 1.18: Distribuzione di temperatura a tenda e tensioni assiali della piastra analizzata da Heldenfels and Roberts (1952) (da [41])

Subito dopo, Gossard, Seide e Roberts [42] hanno descritto il comportamento a buckling e postbuckling della piastra semplicemente appoggiata analizzata da Heldenfels e Roberts. Il calcolo della deflessione e del comportamento in postbuckling della piastra è stato effettuato considerando una soluzione approssimata con il metodo di Galerkin per le equazioni dei grandi spostamenti di von Kármán, modificate per introdurre gli effetti di una distribuzione di temperatura non uniforme.

I risultati delle prove sperimentali si dimostrarono in ottimo accordo con i risultati numerici, tanto da definire un benchmark per la verifica della teoria negli anni seguenti.

Inoltre, un aspetto da tenere in considerazione nello studio del fenomeno del buckling termico è l'influenza delle condizioni al contorno, ancor più che nel caso di studi convenzionali sul buckling a seguito per esempio dell'applicazione di carichi meccanici.

Negli anni '90 sono stati pubblicati altri risultati sia analitici che sperimentali riguardo lo studio del fenomeno del buckling di pannelli strutturali soggetti a diverse condizioni di carico sia termico che meccanico.

In particolare Teare e Fields [43] cercarono di effettuare delle prove di verifica su pannelli con irrigidimenti a "omega" in Ti-6-4 con lo scopo di progettarli, fabbricarli e testarli in modo che potessero resistere ai carichi di volo rappresentativi di una missione operativa e a temperature fino a circa 650 °C, per possibili applicazioni su strutture per voli ad alta velocità.

Uno dei principali obiettivi dello studio era quello di verificare i risultati ottenuti per via numerica con i dati ottenuti dalle prove sperimentali. Le analisi infatti sono state condotte usando sia il metodo agli elementi finiti sia i tradizionali metodi di analisi, al fine di ottenere una previsione dei carichi di buckling.

I risultati mostrarono una buona correlazione tra i risultati dei test e delle analisi fornendo sia una validazione dei metodi analitici che una verifica del concetto strutturale.

Nonostante i limiti della strumentazione per temperature elevate, questo programma di test ha dimostrato che tali test, se progettati con attenzione, possono essere condotti con successo e possono fornire dati significativi.

Questo lavoro è incentrato sullo studio del comportamento a buckling e dell'effetto dei carichi termo-meccanici sulle vibrazioni di diversi elementi strutturali soggetti a differenti condizioni di carico e di vincolo, considerando metodi di analisi avanzati, mediante l'utilizzo di un codice di calcolo agli elementi finiti MUL² basato sulla Carrera Unified Formulation (CUF).

Capitolo 2

Formulazioni avanzate per problemi geometrici non lineari

Nel corso degli anni, con l'avvento di calcolatori sempre più potenti, il metodo degli elementi finiti (FEM) è diventato uno degli strumenti fondamentali per il calcolo strutture in diversi ambiti ingegneristici. Il FEM è stato introdotto per analizzare numericamente vari tipi di sistemi strutturali che possono essere ricondotti a modelli 3D, 2D o 1D.

Il FEM si basa sul processo discretizzazione dei sistemi strutturali complessi in un insieme, più o meno numeroso, di sistemi molto più semplici.

Sfruttando le potenze di calcolo dei calcolatori moderni, il FEM permette di risolvere in maniera approssimata il sistema di equazioni che descrive il comportamento di una struttura in modo da riuscire a prevedere, con buona approssimazione, il comportamento di sistemi strutturali anche molto complessi.

In particolare il FEM si basa sulla definizione di un sistema di equazioni lineari nella variabile di interesse a partire da un sistema di equazioni differenziali ordinarie, ODEs, oppure di equazioni differenziali alle derivate parziali, PDEs.

La matrice dei coefficienti del sistema lineare di equazioni, che si ottiene considerando il problema statico, prende il nome di matrice di rigidezza $[K]$ e viene definita in base alle proprietà meccaniche e geometriche della struttura in esame. Nel caso di problema dinamico viene introdotta anche la matrice delle masse $[M]$ per tenere conto delle inerzie del sistema strutturale.

In questo processo di modellizzazione del sistema strutturale si possono presentare delle complessità dettate dalla geometria del modello, dalle sue proprietà meccaniche, complessità dal punto di vista delle condizioni al contorno geometriche (che riguardano spostamenti o rotazioni di determinati punti del dominio) o ancora complessità legate alle condizioni al contorno meccaniche (carichi).

Nel seguente capitolo è presentata la teoria CUF (Carrera Unified Formulation), che fornisce un approccio alternativo per analizzare numericamente con il FEM in maniera efficace diversi sistemi strutturali. Lo studio dei sistemi strutturali presentati in questo lavoro è stato effettuato creando dei modelli agli elementi finiti e implementando la teoria CUF.

In particolare la teoria CUF fornisce un approccio alternativo per il calcolo delle matrici del sistema di equazioni ottenuto con il FEM. La CUF fornisce teorie 1D e 2D estendendo la formulazione indiciale, spesso utilizzata nelle procedure del FEM, alla teoria strutturale che si sta considerando (per esempio Eulero, Mindlin, Kirchhoff ecc.), ottenendo le matrici del sistema di equazioni mediante i fundamental nucleus (FN) espressi attraverso una formulazione con 4 indici (τ , s , i e j) [44].

Le strutture oggetto dello studio in questo lavoro riguardano principalmente strutture 1D e strutture 2D piane e con curvature cilindriche.

2.1 Leggi costitutive e relazioni geometriche non lineari per modelli 1D e 2D

2.1.1 Modelli 1D

Considerando un corpo continuo generico, ogni suo punto può essere soggetto a degli spostamenti nelle 3 direzioni dello spazio secondo un sistema di riferimento cartesiano. Si introduce di conseguenza il campo di spostamenti (2.1).

$$\mathbf{u} = \{u_x \quad u_y \quad u_z\}^T \quad (2.1)$$

Il campo di tensioni (2.2) e il campo di deformazioni (2.3) possono essere espressi in forma vettoriale.

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{xz} \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_{xy}\}^T \quad (2.2)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \{\epsilon_{xx} \quad \epsilon_{yy} \quad \epsilon_{zz} \quad \epsilon_{xz} \quad \epsilon_{yz} \quad \epsilon_{xy}\}^T \quad (2.3)$$

La legge di Hooke (2.4) esprime la relazione fisica tra le tensioni e le componenti di deformazione, mediante una matrice costituita dai coefficienti di rigidità del materiale.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\epsilon} \quad (2.4)$$

I coefficienti della matrice $[\mathbf{C}]$, di dimensioni 6×6 , riferiti al caso di materiale isotropo sono riportati nell'espressione (2.5),

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{21} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

in cui

$$C_{11} = 2G + \lambda, \quad C_{12} = C_{21} = \lambda, \quad C_{44} = G$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

Le grandezze E , G e ν sono le proprietà tipiche di un materiale, e rappresentano rispettivamente il modulo elastico, il modulo di taglio e il coefficiente di Poisson. L'Eq. (2.4) descrive una relazione lineare tra tensione e deformazione. Le ipotesi di applicabilità di questo tipo di relazione limitano i casi in cui è possibile ottenere risultati numericamente attendibili. In particolare, considerando un problema statico, la legge di Hooke risulta essere accurata nel caso in cui gli spostamenti a cui è soggetta la struttura risultano relativamente piccoli o almeno fin quando le tensioni all'interno della struttura non superano i valori limite caratteristici del materiale della struttura.

Un'analisi strutturale non lineare è necessaria, per esempio, nel caso in cui le deformazioni che la struttura subisce non possono essere considerate piccole o nel caso in cui la geometria sia complessa. In questo caso, è possibile esprimere le relazioni geometriche tra le deformazioni e gli spostamenti considerando le componenti di deformazione non lineari di Green-Lagrange [45]:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}_l + \boldsymbol{\epsilon}_{nl} = (\mathbf{b}_l + \mathbf{b}_{nl})\mathbf{u} = \mathbf{b}\mathbf{u}, \quad (2.6)$$

dove \mathbf{b}_l e \mathbf{b}_{nl} sono rispettivamente gli operatori differenziali lineari e non lineari .

$$\mathbf{b}_l = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z \\ \partial_z & 0 & \partial_x \\ 0 & \partial_z & \partial_y \\ \partial_y & \partial_x & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_{nl} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\partial_x)^2 & \frac{1}{2}(\partial_x)^2 & \frac{1}{2}(\partial_x)^2 \\ \frac{1}{2}(\partial_y)^2 & \frac{1}{2}(\partial_y)^2 & \frac{1}{2}(\partial_y)^2 \\ \frac{1}{2}(\partial_z)^2 & \frac{1}{2}(\partial_z)^2 & \frac{1}{2}(\partial_z)^2 \\ \partial_x\partial_z & \partial_x\partial_z & \partial_x\partial_z \\ \partial_y\partial_z & \partial_y\partial_z & \partial_y\partial_z \\ \partial_x\partial_y & \partial_x\partial_y & \partial_x\partial_y \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

In questo caso si ha che $\partial_x = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x}$, $\partial_y = \frac{\partial(\cdot)}{\partial y}$ e $\partial_z = \frac{\partial(\cdot)}{\partial z}$.

2.1.2 Modelli 2D

Prendendo in considerazione una generica struttura 2D che presenta raggi di curvatura R_α e R_β , la geometria può essere descritta usando un sistema di riferimento ortogonale curvilineo (α, β, z) , dove α e β rappresentano le coordinate nel piano curvo e z rappresenta la coordinata di spessore. Di conseguenza il campo di spostamenti in un dato punto di un pannello curvo può essere espresso come

$$\mathbf{u}(\alpha, \beta, z) = \{u_\alpha \ u_\beta \ u_z\}^T \quad (2.8)$$

È sempre possibile esprimere la relazione costitutiva tra campo di deformazione e campo di tensione mediante la legge di Hooke (2.4).

Ma il campo di deformazione (2.9) e il campo di tensione (2.10) devono essere espressi a loro volta nel sistema di riferimento ortogonale curvilineo.

$$\boldsymbol{\epsilon} = \{\epsilon_{\alpha\alpha} \ \epsilon_{\beta\beta} \ \epsilon_{zz} \ \epsilon_{\alpha z} \ \epsilon_{\beta z} \ \epsilon_{\alpha\beta}\}^T \quad (2.9)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{\alpha\alpha} \ \sigma_{\beta\beta} \ \sigma_{zz} \ \sigma_{\alpha z} \ \sigma_{\beta z} \ \sigma_{\alpha\beta}\}^T \quad (2.10)$$

Le relazioni costitutive tra campo di tensioni e campo di deformazioni sono date dalla legge di Hooke (2.4).

Data la complessità maggiore della struttura, in base al tipo di problema in esame, è possibile ottenere risultati più accurati considerando un modello che include le non-linearità geometriche.

Anche in questo caso si fa riferimento alle componenti di deformazioni non lineari di Green-Lagrange. La relazione spostamento-deformazione può essere espressa in maniera analoga al modello 1D come nell'Eq. (2.6), considerando le diverse componenti di deformazione e tensione nel sistema di riferimento ortogonale curvilineo. In questo caso, nell'operatore differenziale lineare \mathbf{b}_l e non lineare \mathbf{b}_{nl} , Eq. (2.11) e (2.12), bisogna tenere in considerazione la geometria curva della struttura in esame.

$$\mathbf{b}_l = \begin{bmatrix} \frac{\partial_\alpha}{H_\alpha} & 0 & \frac{1}{H_\alpha R_\alpha} \\ 0 & \frac{\partial_\beta}{H_\beta} & \frac{1}{H_\beta R_\beta} \\ 0 & 0 & \partial_z \\ \partial_z - \frac{1}{H_\alpha R_\alpha} & 0 & \frac{\partial_\alpha}{H_\alpha} \\ 0 & \partial_z - \frac{1}{H_\beta R_\beta} & \frac{\partial_\beta}{H_\beta} \\ \frac{\partial_\beta}{H_\beta} & \frac{\partial_\alpha}{H_\alpha} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{b}_{nl} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2H_\alpha^2} \left[(\partial_\alpha)^2 + \frac{2u_z \partial_\alpha}{R_\alpha} + \frac{u_\alpha}{R_\alpha^2} \right] & \frac{(\partial_\alpha)^2}{2H_\alpha^2} & \frac{1}{2H_\alpha^2} \left[(\partial_\alpha)^2 - \frac{2u_\alpha \partial_\alpha}{R_\alpha} + \frac{u_z}{R_\alpha^2} \right] \\ \frac{(\partial_\beta)^2}{2H_\beta^2} & \frac{1}{2H_\beta^2} \left[(\partial_\beta)^2 + \frac{2u_z \partial_\beta}{R_\beta} + \frac{u_\beta}{R_\beta^2} \right] & \frac{1}{2H_\beta^2} \left[(\partial_\beta)^2 - \frac{2u_\beta \partial_\beta}{R_\beta} + \frac{u_z}{R_\beta^2} \right] \\ \frac{1}{2} (\partial_z)^2 & \frac{1}{2} (\partial_z)^2 & \frac{1}{2} (\partial_z)^2 \\ \frac{1}{H_\alpha} \left(\partial_\alpha \partial_z + \frac{u_z \partial_z}{R_\alpha} \right) & \frac{\partial_\alpha \partial_z}{H_\alpha} & \frac{1}{H_\alpha} \left(\partial_\alpha \partial_z - \frac{u_\alpha \partial_z}{R_\alpha} \right) \\ \frac{\partial_\beta \partial_z}{H_\beta} & \frac{1}{H_\beta} \left(\partial_\beta \partial_z + \frac{u_z \partial_z}{R_\beta} \right) & \frac{1}{H_\beta} \left(\partial_\beta \partial_z - \frac{u_\beta \partial_z}{R_\beta} \right) \\ \frac{1}{H_\alpha H_\beta} \left(\partial_\alpha \partial_\beta + \frac{u_z \partial_\beta}{R_\alpha} + \frac{u_\beta}{R_\alpha R_\beta} \right) & \frac{1}{H_\alpha H_\beta} \left(\partial_\alpha \partial_\beta + \frac{u_z \partial_\alpha}{R_\beta} \right) & \frac{1}{H_\alpha H_\beta} \left(\partial_\alpha \partial_\beta - \frac{u_\alpha \partial_\beta}{R_\alpha} + \frac{u_\beta \partial_\alpha}{R_\beta} \right) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Nelle matrici (2.11) e (2.12) si ha che $\partial_\alpha = \frac{\partial(\cdot)}{\partial\alpha}$, $\partial_\beta = \frac{\partial(\cdot)}{\partial\beta}$, $H_\alpha = \left(1 + \frac{z}{R_\alpha}\right)$ e $H_\beta = \left(1 + \frac{z}{R_\beta}\right)$; si precisa che in questa trattazione è stato considerato il caso di pannelli che presentano una doppia curvatura lungo gli assi curvilinei α e β . Maggiori dettagli circa la derivazione di queste espressioni si possono trovare in [47].

2.2 Approssimazione tramite FEM e teoria CUF: modello 1D

Si consideri una trave la cui sezione trasversale Ω giace sul piano xz di un sistema di riferimento cartesiano; l'asse della trave coincide con l'asse y .

Secondo la teoria CUF è possibile approssimare il campo di spostamenti $\mathbf{u} = \{u_x \ u_y \ u_z\}^T$ con una generica espansione lungo la sezione trasversale nel piano xz ; tramite il FEM è possibile discretizzare la struttura lungo l'asse- y , Fig. 2.1.

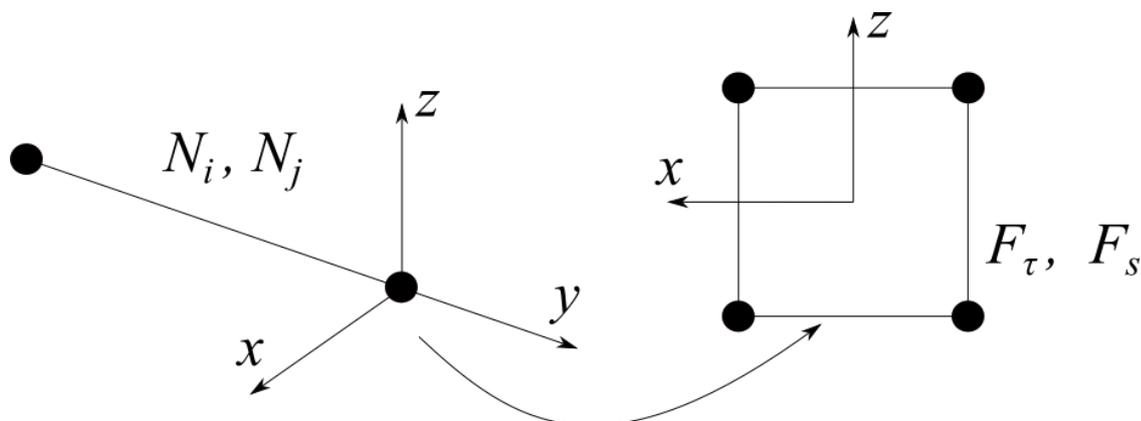


Figura 2.1: Rappresentazione dell'approssimazione FEM lungo l'asse della trave (usando N_i e N_j), e dell'espansione CUF lungo la sezione trasversale (usando F_τ e F_s)

Secondo la teoria CUF, il campo di spostamenti \mathbf{u} può essere espresso come

$$\mathbf{u}(x, y, z) = F_s(x, z)\mathbf{u}_s(y), \quad s = 1, 2, \dots, M, \quad (2.13)$$

dove F_s sono le funzioni nelle coordinate x e z dell'espansione lungo la sezione trasversale, \mathbf{u}_s è il vettore degli spostamenti dei punti che giacciono sull'asse- y della trave, M è il numero di termini utilizzati nell'espansione per approssimare l'andamento lungo la sezione trasversale del campo di spostamenti, e s è l'indice che indica la sommatoria secondo la notazione di Einstein. La scelta delle funzioni F_s determina la tipologia di modello 1D che si vuole adottare, e quindi in sostanza la teoria cinematica.

Lungo la sezione trasversale può essere adottata un'espansione polinomiale delle variabili incognite; questo significa che per una data coordinata y , lungo l'asse della trave, la distribuzione delle incognite lungo la sezione trasversale sarà data da un polinomio 2D nelle coordinate x e z .

La scelta di un particolare tipo di espansione caratterizza le potenzialità del modello strutturale: più ricca è l'espansione, più accurati saranno i risultati [44].

Una possibile scelta consiste nell'adottare l'espansione di Taylor (TE); in Tab. 2.1 sono riportati il numero di termini dell'espansione M e le funzioni F_s in funzione dell'ordine N del modello trave.

N	M	F_s
0	1	$F_1 = 1$
1	3	$F_2 = x \quad F_3 = z$
2	6	$F_4 = x^2 \quad F_5 = xz \quad F_6 = z^2$
3	10	$F_7 = x^3 \quad F_8 = x^2z \quad F_9 = xz^2 \quad F_{10} = z^3$
\vdots	\vdots	\vdots
N	$(N+1)(N+2)/2$	$F_{(N^2+N+2)/2} = x^N \quad \cdots \quad F_{(N+1)(N+2)/2} = z^N$

Tabella 2.1: Polinomi di Taylor modello CUF (da [44])

Una seconda classe di modelli 1D, basati sulla teoria CUF, implementa l’espansione polinomiale di Lagrange (LE). In questo caso le variabili incognite del problema sono delle componenti pure di spostamento. Nei modelli 1D LE, le funzioni F_s dell’espansione, lungo la sezione trasversale, coincidono con i polinomi di Lagrange, che dipendono dal numero di nodi degli elementi utilizzati per discretizzare la sezione trasversale.

Il FEM, come detto in precedenza, è adottato per discretizzare la struttura lungo l’asse-y. Di conseguenza, il vettore degli spostamenti lungo l’asse-y può essere approssimato come riportato nell’espressione (2.14),

$$\mathbf{u}_s(y) = N_j(y)\mathbf{q}_{sj}, \quad j = 1, 2, \dots, p + 1, \quad (2.14)$$

dove N_j rappresenta la j-esima funzione di forma, p è l’ordine delle funzioni di forma e j è l’indice della sommatoria. Il vettore \mathbf{q}_{sj} rappresenta il vettore dei gradi di libertà nodali del particolare elemento finito considerato.

Bisogna sottolineare che la scelta della teoria cinematica, secondo la teoria CUF, lungo la sezione trasversale (che consiste nella selezione del tipo, del numero, e della distribuzione delle funzioni F_s lungo la sezione trasversale) è completamente indipendente dalla scelta del tipo di elemento finito (e quindi delle funzioni di forma N_j) adottato per la discretizzazione della struttura lungo l’asse y in riferimento alla Fig. 2.1.

Attraverso la discretizzazione FEM e la teoria CUF è possibile quindi esprimere le componenti di deformazione della struttura secondo la teoria cinematica scelta in funzione dei gradi di libertà nodali.

Sostituendo le Eq. (2.13) e (2.14) nell’Eq. (2.6), che esprime la relazione geometrica tra deformazioni e spostamenti mediante le componenti di deformazione non lineari di Green-Lagrange, si giunge all’Eq. (2.15) che esprime le componenti di deformazione della struttura in funzione dei gradi di libertà nodali.

$$\boldsymbol{\epsilon} = (\mathbf{B}_l^{sj} + \mathbf{B}_{nl}^{sj})\mathbf{q}_{sj} \quad (2.15)$$

In particolare si ha che $\mathbf{B}_l^{sj} = \mathbf{b}_l(F_s(x, z) N_j(y))$ e $\mathbf{B}_{nl}^{sj} = \mathbf{b}_{nl}(F_s(x, z) N_j(y))$. Per brevità non sono riportate le espressioni dei termini delle matrici \mathbf{B}_l^{sj} e \mathbf{B}_{nl}^{sj} . La forma esplicita delle matrici \mathbf{B}_l^{sj} e \mathbf{B}_{nl}^{sj} per il modello 1D è riportata in [45].

2.3 Approssimazione tramite FEM e teoria CUF: modello 2D

Per il modello 2D, mediante la CUF, il campo di spostamenti $\mathbf{u}(\alpha, \beta, z)$ può essere espresso mediante un'espansione di funzioni $F_s(z)$, dipendenti solamente dalla coordinata di spessore z , e le corrispondenti variabili $u_s(\alpha, \beta)$ dipendenti dalle coordinate curvilinee α e β sul piano principale della struttura di riferimento, Eq. (2.16).

$$\mathbf{u}(\alpha, \beta, z) = F_s(z)\mathbf{u}_s(\alpha, \beta), \quad s = 0, 1, \dots, N, \quad (2.16)$$

Nell'Eq. (2.16), N è l'ordine dell'espansione nella direzione dello spessore che indica anche il tipo di teoria cinematica che si vuole adottare. Usando la notazione di Einstein, l'indice s indica la sommatoria. Si noti che l'indice s assume valori compresi tra 0 e N (differentemente dal modello 1D CUF); infatti, nel modello 2D, l'indice s coincide con l'ordine polinomiale delle corrispondenti funzioni di spessore. Anche in questo caso la scelta delle funzioni di spessore F_s è arbitraria.

Una possibile scelta è l'adozione dei polinomi di Taylor. In Tab. 2.2 sono riportate le funzioni F_s in base alla scelta dell'ordine N e del numero dei termini M dell'espansione.

N	M	F_s
0	1	$F_0 = 1$
1	2	$F_1 = z$
2	3	$F_2 = z^2$
3	4	$F_3 = z^3$
\vdots	\vdots	\vdots
N	N+1	$F_N = z^N$

Tabella 2.2: Polinomi di Taylor modello CUF 2D

La teoria CUF permette l'implementazione di differenti modelli per l'analisi di strutture bidimensionali variando la classe delle funzioni di spessore e l'ordine dell'espansione lungo la coordinata di spessore.

Oltre ai modelli 2D basati sull'espansione tramite polinomi di Taylor, è possibile considerare (come nel caso del modello CUF 1D) un'espansione lungo la coordinata di spessore basata sui polinomi di Lagrange (LE). In questo caso le variabili incognite del problema diventano le componenti di spostamenti pure dei nodi della discretizzazione lungo lo spessore.

Il FEM è usato per discretizzare la struttura nel piano α - β , ottenendo l'approssimazione (2.17) del vettore spostamento $\mathbf{u}_s(\alpha, \beta)$ dei punti del piano di riferimento del pannello.

$$\mathbf{u}_s(\alpha, \beta) = N_j(\alpha, \beta) \mathbf{q}_{sj}, \quad j = 1, 2, \dots, p+1, \quad (2.17)$$

Nell'Eq. (2.17) N_j indica la j -esima funzione di forma, p rappresenta l'ordine della funzione di forma e l'indice j indica la sommatoria secondo la notazione di Einstein. Il vettore \mathbf{q}_{sj} rappresenta il vettore dei gradi di libertà nodali:

$$\mathbf{q}_{sj} = \left\{ q_{\alpha_{sj}} \quad q_{\beta_{sj}} \quad q_{z_{sj}} \right\}^T$$

Sostituendo le Eq. (2.16) e (2.17), che esprimono il campo di spostamenti mediante l'espansione CUF e la discretizzazione FEM per un modello 2D, nella relazione geometrica spostamenti-deformazioni (2.6) si ottiene la relazione (2.18) che esprime la relazione tra le componenti di deformazione e gli spostamenti, approssimata mediante l'utilizzo del FEM e della teoria CUF, in funzione del vettore dei gradi di libertà nodali.

$$\boldsymbol{\epsilon} = \left(\mathbf{B}_l^{sj} + \mathbf{B}_{nl}^{sj} \right) \mathbf{q}_{sj}, \quad (2.18)$$

Nell'Eq. (2.18) le matrici sono pari a

$$\mathbf{B}_l^{sj} = \mathbf{b}_l(F_s(z) N_j(\alpha, \beta))$$

$$\mathbf{B}_{nl}^{sj} = \mathbf{b}_{nl}(F_s(z) N_j(\alpha, \beta))$$

e rappresentano rispettivamente le matrici algebriche lineare e non lineare ottenute con la teoria CUF e la discretizzazione FEM, considerando le componenti di deformazione di Green-Lagrange in un sistema di riferimento in coordinate curvilinee. Per brevità non sono riportate le espressioni dei termini delle matrici \mathbf{B}_l^{sj} e \mathbf{B}_{nl}^{sj} . La forma esplicita delle matrici \mathbf{B}_l^{sj} e \mathbf{B}_{nl}^{sj} per il modello 2D è riportata in [47].

In generale, per una determinata struttura, è possibile creare, con la teoria CUF, un modello numerico agli elementi finiti considerando un modello 1D o 2D, in base alla convenienza e alla semplicità di implementazione.

In Fig. 2.2 sono riportate, in maniera qualitativa, le approssimazioni di una generica struttura con curvatura cilindrica adottando un modello 1D e un modello 2D. Infatti, per le analisi numeriche di questo tipo di strutture, mediante la teoria CUF, è possibile adottare un modello trave trave monodimensionale (1D) o, in alternativa, un modello shell bidimensionale (2D).

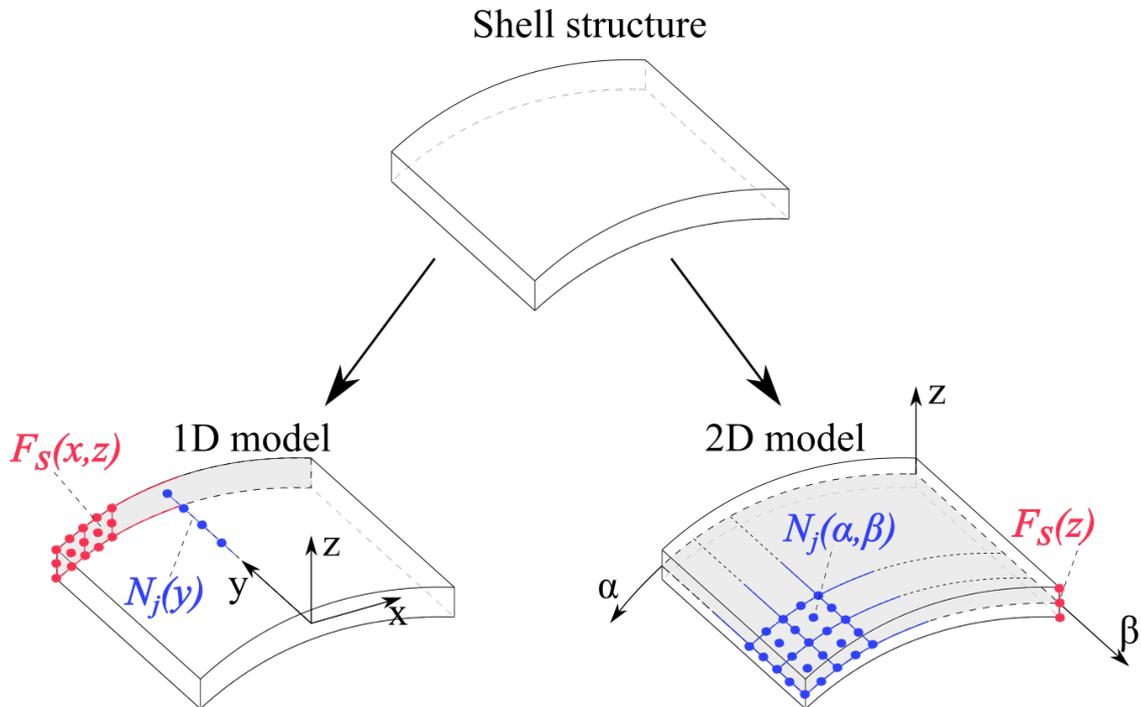


Figura 2.2: Discretizzazione di un pannello generico usando sia il modello 1D, sia il modello 2D (da [46] con modifiche)

2.4 Equazioni di governo non lineari e matrice di rigidezza secante

Il FEM e la teoria CUF vengono sfruttate per ricavare le equazioni di governo di un sistema per diversi problemi strutturali. In questo capitolo è riportato il caso di un problema statico.

Per ricavare le equazioni di governo non lineari di un sistema elastico in equilibrio con una forza applicata e determinati vincoli geometrici, si sfrutta il principio dei lavori virtuali (PLV): *la somma del lavoro virtuale complessivo fatto dalle forze interne ed esterne che agiscono sul sistema per ogni spostamento virtuale infinitesimo arbitrario, in modo che i vincoli geometrici siano rispettati, è pari a zero* [48].

Il PLV si può riassumere con la seguente equazione:

$$\delta L_{int} - \delta L_{ext} = 0, \quad (2.19)$$

dove L_{int} è l'energia di deformazione elastica, L_{ext} è il lavoro dei carichi esterni, e δ indica la variazione virtuale della corrispondente grandezza.

Come detto in precedenza, è necessario considerare il problema differenziale non lineare nel caso in cui siano presenti elevate deflessioni del sistema elastico; in questi casi una soluzione analitica è possibile solamente per casi che non presentano particolari complessità dal punto di vista della geometria, del materiale o ancora dei vincoli e dei carichi applicati al sistema. Le equazioni e i passaggi matematici presentati di seguito valgono sia per il modello 1D sia per il modello 2D.

L'espressione della variazione virtuale dell'energia di deformazione è riportata nell'Eq. (2.20),

$$\delta L_{int} = \int_V \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV, \quad (2.20)$$

dove V è il volume del corpo.

È possibile esprimere tensioni e deformazioni utilizzando le relazioni geometriche date dall'Eq. (2.18) per il campo di deformazioni e le relazioni costitutive (2.4) per il campo di tensioni.

In particolare la variazione virtuale del vettore delle deformazioni $\delta \boldsymbol{\epsilon}$ può essere scritta in termini di variabili nodali come nell'Eq. (2.21),

$$\delta \boldsymbol{\epsilon} = \delta \left((\mathbf{B}_l^{\tau i} + \mathbf{B}_{nl}^{\tau i}) \mathbf{q}_{\tau i} \right) = (\mathbf{B}_l^{\tau i} + 2\mathbf{B}_{nl}^{\tau i}) \delta \mathbf{q}_{\tau i} \quad (2.21)$$

da cui si ricava

$$\delta \boldsymbol{\epsilon}^T = \delta \mathbf{q}_{\tau i}^T (\mathbf{B}_l^{\tau i} + 2\mathbf{B}_{nl}^{\tau i})^T \quad (2.22)$$

L'Eq. (2.23) fornisce l'espressione della variazione virtuale dell'energia di deformazione mediante l'utilizzo dei nuclei fondamentali (FNs), secondo l'espansione della teoria CUF e la discretizzazione con il FEM.

$$\delta L_{int} = \delta \mathbf{q}_{\tau i}^T \left(\int_V (\mathbf{B}_l^{\tau i} + 2\mathbf{B}_{nl}^{\tau i})^T \mathbf{C} (\mathbf{B}_l^{sj} + \mathbf{B}_{nl}^{sj}) dV \right) \mathbf{q}_{sj}. \quad (2.23)$$

È possibile sintetizzare l'Eq. (2.23) introducendo la cosiddetta matrice di rigidezza secante $\mathbf{K}_S^{ij\tau s}$. Infatti si ha

$$\begin{aligned}\delta L_{int} &= \delta \mathbf{q}_{\tau i}^T \left\langle \left(\mathbf{B}_l^{\tau i} + \mathbf{B}_{nl}^{\tau i} \right)^T \mathbf{C} \left(\mathbf{B}_l^{sj} + \mathbf{B}_{nl}^{sj} \right) \right\rangle \mathbf{q}_{sj} \\ &= \delta \mathbf{q}_{\tau i}^T \mathbf{K}_0^{ij\tau s} \mathbf{q}_{sj} + \delta \mathbf{q}_{\tau i}^T \mathbf{K}_{lnl}^{ij\tau s} \mathbf{q}_{sj} + \delta \mathbf{q}_{\tau i}^T \mathbf{K}_{nll}^{ij\tau s} \mathbf{q}_{sj} + \delta \mathbf{q}_{\tau i}^T \mathbf{K}_{nlnl}^{ij\tau s} \mathbf{q}_{sj} \\ &= \delta \mathbf{q}_{\tau i}^T \mathbf{K}_S^{ij\tau s} \mathbf{q}_{sj},\end{aligned}\tag{2.24}$$

dove $\langle (\cdot) \rangle = \int_V (\cdot) dV$, e la matrice di rigidezza secante risulta pari a

$$\mathbf{K}_S^{ij\tau s} = \mathbf{K}_0^{ij\tau s} + \mathbf{K}_{lnl}^{ij\tau s} + \mathbf{K}_{nll}^{ij\tau s} + \mathbf{K}_{nlnl}^{ij\tau s}\tag{2.25}$$

Nell'Eq. (2.25), $\mathbf{K}_0^{ij\tau s}$ è il contributo lineare della matrice di rigidezza secante, $\mathbf{K}_{lnl}^{ij\tau s}$ e $\mathbf{K}_{nll}^{ij\tau s}$ rappresentano i contributi non lineari del primo ordine, e $\mathbf{K}_{nlnl}^{ij\tau s}$ contiene le non-linearità del secondo ordine. Queste rappresentano i FNs di dimensione 3×3 che possono essere espanse usando gli indici τ , s e i , j .

Per vedere nel dettaglio le espressioni delle matrici $\mathbf{K}_0^{ij\tau s}$, $\mathbf{K}_{lnl}^{ij\tau s}$, $\mathbf{K}_{nll}^{ij\tau s}$ e $\mathbf{K}_{nlnl}^{ij\tau s}$, date in termini di FN, si può consultare [45].

Omettendo alcuni passaggi matematici, che è possibile trovare in [44], il lavoro virtuale delle forze esterne risulta essere pari a

$$\delta L_{ext} = \delta \mathbf{q}_{sj}^T \mathbf{p}_{sj}\tag{2.26}$$

Andando a sostituire l'espressione della variazione virtuale dell'energia di deformazione (2.24) e del lavoro virtuale delle forze esterne (2.26) nel PLV (2.19), si ottiene il sistema (2.27) di 3 equazioni algebriche in termini di FNs.

$$\mathbf{K}_S^{ij\tau s} \mathbf{q}_{sj} - \mathbf{p}_{sj} = \mathbf{0}\tag{2.27}$$

La matrice $\mathbf{K}_S^{ij\tau s}$ e i vettori \mathbf{q}_{sj} e \mathbf{p}_{sj} sono i FNs rispettivamente della matrice di rigidezza secante, del vettore dei gradi di libertà nodali e del vettore dei carichi nodali.

Quindi, attraverso il FEM, è possibile esprimere le condizioni di equilibrio come un sistema di equazioni algebriche non lineari. Inoltre, con la formulazione CUF, è possibile scrivere lo stesso sistema di equazioni utilizzando una generica teoria strutturale (in base all'espansione delle funzioni F_τ , F_s sugli indici τ e s), in maniera semplice ed unificata.

Ottenuti i FNs delle grandezze che interessano il problema strutturale in esame è necessario effettuare la procedura di assemblaggio.

Come riportato in Fig. 2.3, la procedura di assemblaggio parte dai FNs che sono il cuore e il punto di partenza; tramite i cicli di sommatoria sugli indici τ e s si

costruisce la matrice per una data coppia di indici i e j relativa ad un nodo dell'elemento finito della discretizzazione; i cicli di sommatoria sugli indici i e j forniscono le grandezze del singolo elemento finito.

Infine è possibile effettuare l'assemblaggio globale degli elementi finiti che compongono la griglia con cui è discretizzata la struttura, ottenendo le matrici e i vettori globali del sistema strutturale in esame.

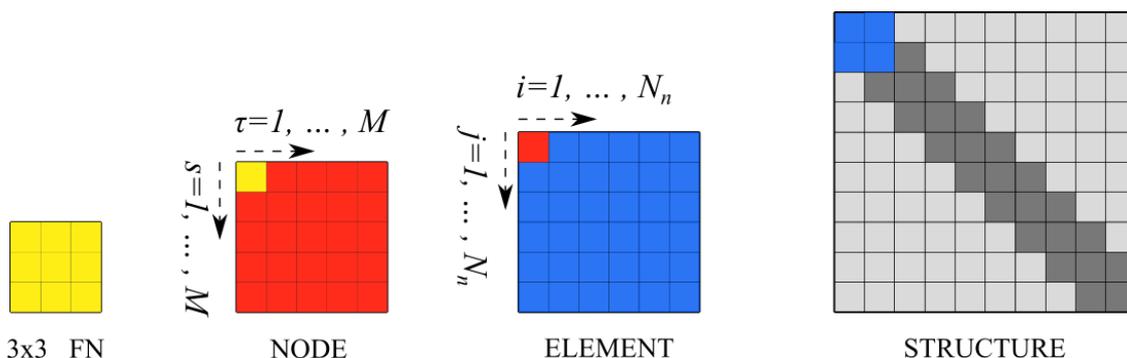


Figura 2.3: Rappresentazione della procedura di assemblaggio secondo la teoria CUF

In questo modo le equazioni di governo (2.28) della struttura completa, nel caso di problema statico, possono essere automaticamente ottenute, date le funzioni lungo la sezione trasversale ($F_\tau = F_s$ per $\tau = s$) e le funzioni di forma ($N_i = N_j$ per $i = j$), espandendo l'Eq. (2.27), e i relativi FNs, per ogni elemento finito della discretizzazione.

$$\mathbf{K}_S \mathbf{q} - \mathbf{p} = \mathbf{0} \tag{2.28}$$

In particolare \mathbf{K}_S , \mathbf{q} e \mathbf{p} sono la matrice e i vettori globali e assemblati della struttura completa discretizzata in elementi finiti mediante la teoria CUF. Inoltre il sistema di equazioni (2.28) rappresenta un sistema di equazioni algebriche non lineari.

2.5 Linearizzazione di Newton-Raphson e metodo dell'arc-length

Per risolvere il sistema di equazioni (2.28) non lineare è usuale utilizzare il metodo di Newton-Raphson (NR), uno schema incrementale linearizzato, chiamato anche metodo della tangente.

Il metodo di NR consiste nell'introduzione del vettore delle forze nodali residue φ_{res} , definito nell'Eq. (2.29), [49].

$$\varphi_{res} \equiv \mathbf{K}_S \mathbf{q} - \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (2.29)$$

È possibile linearizzare l'Eq. (2.29) effettuando una espansione in serie di Taylor rispetto a \mathbf{q} e \mathbf{p} . Trascurando i termini del secondo ordine (infinitesimi di ordine superiore) si ottiene l'Eq. (2.30),

$$\begin{aligned} \varphi_{res}(\mathbf{q} + \delta\mathbf{q}, \mathbf{p} + \delta\mathbf{p}) \\ = \varphi_{res}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \frac{\partial\varphi_{res}}{\partial\mathbf{q}} \delta\mathbf{q} + \frac{\partial\varphi_{res}}{\partial\mathbf{p}} \delta\lambda\mathbf{p}_{ref} = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

dove $\frac{\partial\varphi_{res}}{\partial\mathbf{q}} = \mathbf{K}_T$ è la matrice di rigidezza tangente, e $\frac{\partial\varphi_{res}}{\partial\mathbf{p}} = \mathbf{I}$ matrice unitaria. Nell'Eq. (2.30), la variazione del carico è stata assunta rispetto ad un vettore dei carichi di riferimento \mathbf{p}_{ref} mediante il parametro di carico λ .

In questo modo l'Eq. (2.30) può essere riscritta come segue,

$$\mathbf{K}_T \delta\mathbf{q} = \delta\lambda\mathbf{p}_{ref} - \varphi_{res}. \quad (2.31)$$

Si noti che è necessaria una relazione aggiuntiva in quanto il parametro di carico λ è incognito. Questa relazione aggiuntiva può essere di diverso tipo. In particolare si può considerare il metodo *path-following* secondo il quale si introduce una relazione di vincolo funzione sia dello spostamento sia del parametro di carico, Eq. (2.32).

$$\begin{cases} \mathbf{K}_T \delta\mathbf{q} = \delta\lambda\mathbf{p}_{ref} - \varphi_{res} \\ c(\delta\mathbf{q}, \delta\lambda) = 0 \end{cases} \quad (2.32)$$

Questo tipo di equazione di vincolo aggiuntiva non è l'unico possibile; infatti si possono considerare altri metodi per esplicitare la relazione di vincolo, tra cui il metodo a controllo di carico, $c(\delta\mathbf{q}, \delta\lambda) = \delta\lambda = 0$, oppure il metodo a controllo di spostamento $c(\delta\mathbf{q}, \delta\lambda) = \delta\mathbf{q} = 0$. Una trattazione più dettagliata delle differenze tra questi metodi, utili a definire la relazione di vincolo aggiuntiva, è riportata in [50].

La risoluzione del sistema di equazioni (2.32) si basa su un metodo a step incrementale; la soluzione ad ogni variazione globale dello step di carico, $m = 1, 2, \dots$,

è ottenuta mediante una serie di iterazioni locali, $n = 0, 1, 2, \dots$, a partire dalla soluzione dello step precedente.

In Fig. 2.4 i termini $\delta_m^n(\cdot)$ rappresentano delle variazioni finite; di conseguenza $\delta_m^n(\cdot) = (\cdot)_m^n - (\cdot)_m^{n-1}$ e $(\cdot)_m = (\cdot)_{m-1} - \sum_n \delta_m^n(\cdot)$, [45].

Per ogni step di carico globale m vanno effettuate una serie di iterazioni per soddisfare l'equilibrio (forze residue piccole), intersecando l'equazione di governo linearizzata e l'equazione di vincolo (sistema di equazioni (2.32)).

In particolare, per $n = 0$, $\delta_m^0 \mathbf{q}$ corrisponde alla soluzione dello step locale iniziale (nel caso in cui $m = 0$ è la soluzione lineare del problema); $\delta_m^0 \lambda$ è l'incremento iniziale del parametro di carico; \mathbf{q}_{m-1} e $\lambda_{m-1} \mathbf{p}_{ref}$ sono rispettivamente la soluzione del vettore di spostamento e del vettore dei carichi in corrispondenza dello step di carico globale precedente $m - 1$; $\boldsymbol{\varphi}_{m_{res}}^n$ è il vettore dei carichi residui alla corrispondente iterazione locale.

Ad ogni iterazione locale n , il vettore

$$\mathbf{t}_m^n = \mathbf{t}_m^{n-1} + \delta_m^n \mathbf{t} = \mathbf{t}_m^{n-1} + (\delta_m^n \mathbf{q} + \delta_m^n \lambda \mathbf{p}_{ref})$$

connette l'iterazione locale dell'equilibrio con la soluzione dello step di carico globale precedente $m - 1$, formando una serie di archi, Fig. 2.4.

L'equazione di vincolo aggiuntiva può essere espressa considerando il metodo *arc-length* come proposto da Crisfield [51, 52], secondo il quale è possibile utilizzare una relazione corrispondente ad una sfera multi-dimensionale con raggio uguale al valore iniziale dato della lunghezza dell'arco Δl_m^0 , Eq. (2.33).

$$\begin{cases} \mathbf{K}_T \delta_m^n \mathbf{q} = \delta_m^n \lambda \mathbf{p}_{ref} - \boldsymbol{\varphi}_{m_{res}}^n \\ \mathbf{t}_m^{nT} \mathbf{t}_m^n = (\Delta l_m^0)^2 \end{cases} \quad (2.33)$$

Inoltre è possibile adottare delle strategie per rendere meno onerosa, dal punto di vista computazionale, la risoluzione del sistema di equazioni (2.33). In particolare, per esempio, la strategia proposta da Batoz and Dhatt [53] consiste nel calcolare il vettore della variazione incrementale degli spostamenti $\delta_m^n \mathbf{q}$ in funzione di quantità che si possono ottenere risolvendo dei sistemi lineari, Eqs. (2.34) e (2.35).

$$\delta_m^n \mathbf{q} = \delta_m^n \lambda \bar{\mathbf{q}}_m^n + \delta_m^n \hat{\mathbf{q}} \quad (2.34)$$

$$\begin{cases} \mathbf{K}_T \bar{\mathbf{q}}_m^n = \mathbf{p}_{ref} \\ \mathbf{K}_T \delta_m^n \hat{\mathbf{q}} = -\boldsymbol{\varphi}_{m_{res}}^n \end{cases} \quad (2.35)$$

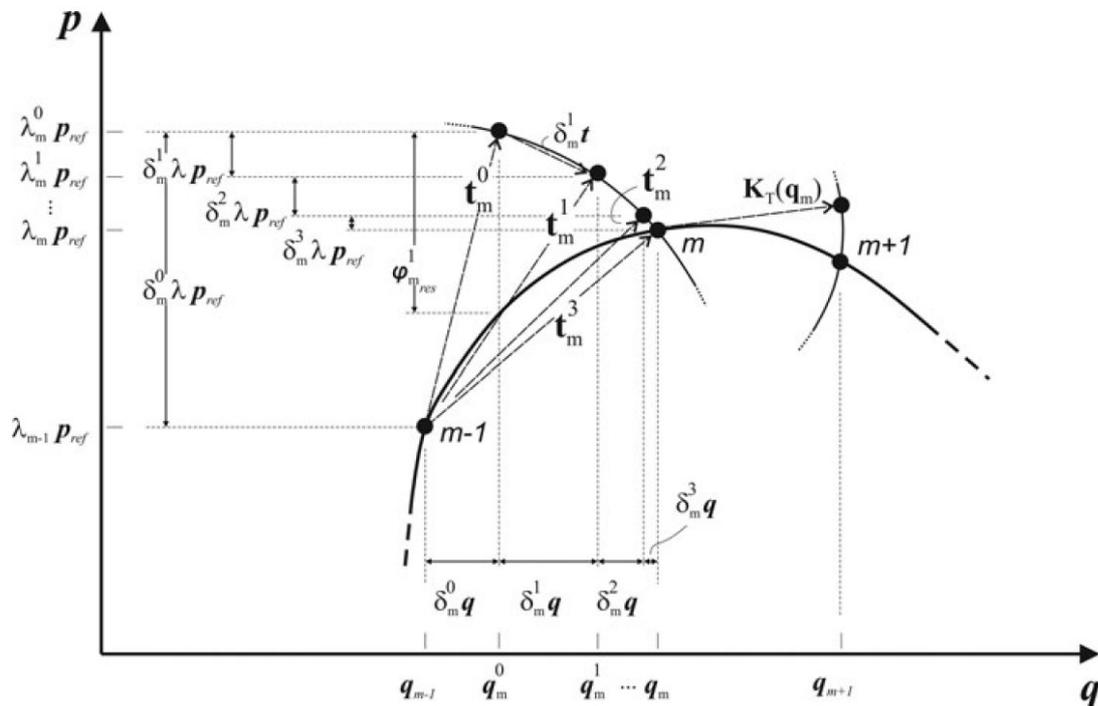


Figura 2.4: Geometria e notazione dello schema incrementale (da [45])

In questo modo si può ottenere una relazione di vincolo quadratica in funzione della variazione del parametro di carico $\delta_m^n \lambda$ (2.36) ([45]).

$$a (\delta_m^n \lambda)^2 + 2b \delta_m^n \lambda + c = 0. \quad (2.36)$$

Dato che l'Eq. (2.36) presenta due soluzioni, è necessario valutare quale delle due radici prendere in considerazione. A tal scopo si rimanda a [51, 50].

In questo modo è possibile ottenere le curve di equilibrio in campo non lineare della struttura in esame.

Capitolo 3

Vibration Correlation Technique (VCT)

Un campo interessante per l'applicazione della teoria CUF è rappresentato dallo studio del buckling mediante la *Vibration Correlation Technique* (VCT).

Questa tecnica di analisi è molto utilizzata, specialmente in campo sperimentale, poiché è una metodologia di analisi non distruttiva, che permette di ridurre possibili problemi legati alla sicurezza e i costi di manutenzione. In campo spaziale, infatti, le fasi di test e verifica sono di fondamentale importanza per confermare il soddisfacimento dei requisiti di progetto, ma al tempo stesso bisogna garantire che le performance della struttura e dei vari sottosistemi non siano degradate, in quanto lo stesso campione oggetto dei vari test, molto spesso, dovrà affrontare le varie fasi della missione operativa.

In particolare, la VCT permette di determinare condizioni al contorno equivalenti e i carichi di buckling per numerosi tipi di strutture: in sostanza, i carichi di instabilità vengono determinati interpolando, fino alla singolarità, la frequenza naturale della struttura sottoposta a carichi progressivamente maggiori, senza raggiungere il punto di instabilità [54].

Secondo questa filosofia, è possibile considerare un modello numerico su cui effettuare un'analisi basata *virtual* VCT: questo tipo di analisi numeriche sono importanti perché possono fornire uno strumento di verifica dei risultati sperimentali, consentendo anche l'ottimizzazione del progetto. Inoltre la *virtual* VCT permette di studiare l'influenza, in particolare sul fenomeno del buckling, di determinati fattori che sperimentalmente sarebbe di difficile realizzazione, quale per esempio l'effetto dei carichi termici sul buckling di strutture soggette a determinati carichi operativi. Infatti, la *virtual* VCT fornisce uno strumento numerico per determinare il carico critico di una struttura studiando la variazione delle frequenze naturali con un carico applicato progressivamente maggiore: in particolare il carico per cui si ha un annullamento della frequenza naturale corrisponde al carico critico della struttura.

Per effettuare questo tipo di analisi, la teoria CUF consente l'adozione di due possibili approcci: il primo, definito *Full Non-linear*, consiste nel valutare le frequenze naturali della struttura in diversi stati di equilibrio linearizzati considerando tutti gli effetti dati dalle non-linearità geometriche, definendo la matrice di rigidità tangente per ogni condizione carico; il secondo approccio, definito *Trivial Linearized*, consiste nel valutare la variazione delle frequenze naturali della struttura considerando la matrice di rigidità del problema statico lineare e i contributi non lineari dati dal calcolo delle tensioni, risolvendo il problema statico lineare, della struttura soggetta a determinate condizioni di vincolo e ad un carico di riferimento, considerando un fattore moltiplicativo dato da un parametro di carico.

In questo studio sono state effettuate delle simulazioni numeriche di *virtual VCT* implementando la teoria CUF, secondo la quale è possibile sviluppare una teoria cinematica generalizzata basata su un'espansione arbitraria di variabili generalizzate, includendo l'approssimazione agli elementi finiti; in base al tipo di approccio scelto è possibile utilizzare un metodo di risoluzione *path-following*, con lo scopo di ottenere risultati coerenti con quelli ottenuti per via sperimentale, soprattutto nel caso di grandi spostamenti o rotazioni, e geometrie più complesse.

3.1 Equazioni del moto

Le equazioni del moto per le vibrazioni libere non smorzate di una struttura elastica possono essere ricavate mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV), che stabilisce, in corrispondenza di un certo stato di equilibrio della struttura, che la variazione virtuale dell'energia di deformazione deve essere pari al lavoro virtuale dei carichi inerziali:

$$\delta L_{int} - \delta L_{ine} = 0 \quad (3.1)$$

In particolare la variazione virtuale dell'energia di deformazione, come riportato nel paragrafo 2.4, è pari all'espressione (2.20). Il vettore deformazione può essere espresso considerando le componenti di deformazioni non lineari di Green-Lagrange, attraverso la formulazione con FE e la teoria CUF, Eq. (2.15) o (2.18). La variazione virtuale del vettore deformazioni è data dall'espressione (2.21).

In questo modo è possibile ottenere l'espressione della variazione virtuale dell'energia di deformazione data dall'Eq. (2.24), dove $\mathbf{K}_S^{ij\tau s}$ è la matrice di rigidità secante espressa in termini di FNs.

Allo stesso modo è possibile ottenere la matrice di massa in termini di FNs, attraverso la variazione virtuale del lavoro delle forze d'inerzia [55], Eq. (3.2).

$$\delta L_{ine} = \langle \delta \mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} \rangle = \delta \mathbf{q}_{\tau i}^T \mathbf{M}^{ij\tau s} \ddot{\mathbf{q}}_{sj} \quad (3.2)$$

Al fine di calcolare i modi linearizzati riferiti alle vibrazioni libere della struttura nell'intorno di determinati stati di equilibrio è necessario linearizzare le equazioni

del moto, Eq. (3.1). Si ottiene in questo modo l'insieme di equazioni linearizzate (3.3).

$$\delta(\delta L_{int}) = -\delta(\delta L_{ine}) \quad (3.3)$$

Per ottenere le equazioni del moto linearizzate è necessario quindi effettuare la linearizzazione della variazione virtuale dell'energia di deformazione e la linearizzazione del lavoro virtuale delle forze d'inerzia.

La linearizzazione del primo termine dell'Eq. (3.3) può essere effettuata seguendo due diversi approcci: in particolare è possibile adottare un approccio *Full Non-linear* e un approccio *Trivial Linearized*, giungendo a due diverse definizioni della matrice di rigidità tangente \mathbf{K}_T .

I due approcci per il calcolo della matrice di rigidità tangente \mathbf{K}_T sono presentati nelle successive sezioni di questo capitolo (rispettivamente nella sezione 3.2 e 3.3).

La linearizzazione del lavoro virtuale delle forze d'inerzia richiede la necessità di effettuare delle ipotesi al fine di ottenere una trattazione semplificata.

In particolare è possibile assumere la massa della struttura costante e trascurare i termini non lineari di ordine più elevato, e attraverso opportune manipolazioni si ottiene l'Eq. (3.4) [55].

$$\begin{aligned} \delta(\delta L_{ine}) &= \delta \left(\langle \delta \mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} \rangle \right) = \delta \left(\delta \mathbf{q}_{\tau i}^T \mathbf{M}^{ij\tau s} \ddot{\mathbf{q}}_{sj} \right) \\ &= \delta \mathbf{q}_{\tau i}^T \mathbf{M}^{ij\tau s} \delta \ddot{\mathbf{q}}_{sj} \end{aligned} \quad (3.4)$$

La matrice $\mathbf{M}^{ij\tau s}$ è il FN della matrice di massa lineare elementare.

Esprimendo i vari contributi in termini di FNs si giunge all'Eq. (3.5).

$$\delta \mathbf{q}_{\tau i}^T \mathbf{K}_T^{ij\tau s} \delta \mathbf{q}_{sj} + \delta \mathbf{q}_{\tau i}^T \mathbf{M}^{ij\tau s} \delta \ddot{\mathbf{q}}_{sj} = 0 \quad (3.5)$$

Per risolvere l'equazione del moto (3.5) è possibile ipotizzare spostamenti armonici nell'intorno dello stato linearizzato lungo la curva di equilibrio, Eq. (3.6).

$$\begin{cases} \delta \mathbf{q}_{sj}(t) = \delta \bar{\mathbf{q}}_{sj} e^{i\omega t} \\ \delta \ddot{\mathbf{q}}_{sj}(t) = -\omega^2 \delta \bar{\mathbf{q}}_{sj} e^{i\omega t} \end{cases} \quad (3.6)$$

Le equazioni del moto assumono di conseguenza la forma di un classico problema lineare agli autovalori e autovettori, Eq. (3.7).

$$\left(\mathbf{K}_T^{ij\tau s} - \omega^2 \mathbf{M}^{ij\tau s} \right) \delta \bar{\mathbf{q}}_{sj} = 0 \quad (3.7)$$

Risolvendo il problema agli autovalori (3.7) per diversi stati di equilibrio è possibile ottenere l'andamento delle frequenze naturali all'aumentare del carico applicato e determinare, in prossimità del valore che annulla la frequenza, il carico di buckling della struttura.

3.2 Approccio Full Non-linear (FNL) per la linearizzazione di δL_{int}

L'implementazione di questo approccio prevede diversi passaggi [54]:

1. Il primo step consiste nel risolvere il problema statico con non-linearità geometriche utilizzando il metodo Newton-Raphson con l'approccio *arc-length* (si veda il paragrafo 2.5);
2. Data la curva di equilibrio non lineare, per i diversi stati di equilibrio di interesse, viene calcolata la corrispondente matrice di rigidezza tangente \mathbf{K}_T ;
3. Infine, nell'intorno dei vari stati di equilibrio non lineari considerati, si valutano le frequenze naturali e le relative forme modali attraverso un problema agli autovalori lineare, che richiede una linearizzazione delle equazioni del moto considerando, come forma delle soluzioni per gli spostamenti, delle funzioni armoniche.

Di seguito sono stati ricavati le espressioni dei termini dell'Eq. (3.3) in cui è necessario effettuare la linearizzazione della variazione virtuale dell'energia di deformazione e del lavoro virtuale delle forze d'inerzia.

La linearizzazione della variazione virtuale dell'energia di deformazione δL_{int} porta alla definizione della matrice di rigidezza tangente \mathbf{K}_T associata ad un determinato stato di equilibrio [45].

In particolare è necessario effettuare la linearizzazione di due termini, Eq. (3.8).

$$\delta(\delta L_{int}) = \langle \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \delta \boldsymbol{\sigma} \rangle + \langle \delta(\delta \boldsymbol{\epsilon}^T) \boldsymbol{\sigma} \rangle \quad (3.8)$$

Il primo termine $\langle \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \delta \boldsymbol{\sigma} \rangle$ comporta la linearizzazione delle relazioni costitutive del materiale, Eq. (2.4). Sotto l'ipotesi di materiale omogeneo con coefficienti di rigidezza costanti ($\delta \mathbf{C} = 0$), sostituendo l'Eq. (2.21), si ottiene l'Eq. (3.9).

$$\delta \boldsymbol{\sigma} = \delta(\mathbf{C}\boldsymbol{\epsilon}) = \mathbf{C}\delta\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{C} \left(\mathbf{B}_l^{sj} + 2\mathbf{B}_{nl}^{sj} \right) \delta \mathbf{q}_{sj} \quad (3.9)$$

Di conseguenza, considerando le Eqs. (2.22) e (3.9), il primo termine risulta essere dato dall'Eq. (3.10).

$$\begin{aligned} \langle \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \delta \boldsymbol{\sigma} \rangle &= \delta \mathbf{q}_{\tau i}^T \left\langle \left(\mathbf{B}_l^{\tau i} + 2\mathbf{B}_{nl}^{\tau i} \right)^T \mathbf{C} \left(\mathbf{B}_l^{sj} + 2\mathbf{B}_{nl}^{sj} \right) \right\rangle \delta \mathbf{q}_{sj} \\ &= \delta \mathbf{q}_{\tau i}^T \left(\mathbf{K}_0^{ij\tau s} + \mathbf{K}_{T_1}^{ij\tau s} \right) \delta \mathbf{q}_{sj} \end{aligned} \quad (3.10)$$

In particolare $\mathbf{K}_0^{ij\tau s}$ è il contributo lineare della matrice di rigidezza, mentre il termine

$$\mathbf{K}_{T_1}^{ij\tau s} = 2\mathbf{K}_{lnl}^{ij\tau s} + \mathbf{K}_{nll}^{ij\tau s} + 2\mathbf{K}_{nlnl}^{ij\tau s} \quad (3.11)$$

è il contributo non lineare del FN della matrice di rigidezza tangente dovuto alla linearizzazione della legge di Hooke. Per brevità non vengono riportate le espressioni estese dei termini delle matrici che è possibile trovare in [45].

Il secondo contributo $\langle \delta(\delta\epsilon^T)\boldsymbol{\sigma} \rangle$ nell'Eq. (3.8) richiede la linearizzazione delle relazioni geometriche non lineari $\delta(\delta\epsilon^T)$.

Linearizzando l'Eq. (2.22) è possibile giungere all'Eq. (3.12) in cui i termini della matrice \mathbf{B}_{nl}^* sono funzione delle funzioni di forma (N_i, N_j) e dell'espansione (F_τ, F_s) scelta lungo la cross-section per un modello 1D o la coordinata di spessore per un modello 2D.

$$\delta(\delta\epsilon^T) = \begin{Bmatrix} \delta q_{u_{x\tau i}} & \delta q_{u_{xsj}} \\ \delta q_{u_{y\tau i}} & \delta q_{u_{ysj}} \\ \delta q_{u_{z\tau i}} & \delta q_{u_{zsj}} \end{Bmatrix} (\mathbf{B}_{nl}^*)^T \quad (3.12)$$

Attraverso opportune manipolazioni, il secondo termine della variazione virtuale dell'energia di deformazione linearizzata è dato dall'Eq. (3.13) (per maggiori dettagli è possibile consultare [45]).

$$\begin{aligned} \langle \delta(\delta\epsilon^T)\boldsymbol{\sigma} \rangle &= \left\langle \begin{Bmatrix} \delta q_{u_{x\tau i}} & \delta q_{u_{xsj}} \\ \delta q_{u_{y\tau i}} & \delta q_{u_{ysj}} \\ \delta q_{u_{z\tau i}} & \delta q_{u_{zsj}} \end{Bmatrix} (\mathbf{B}_{nl}^*)^T \boldsymbol{\sigma} \right\rangle \\ &= \delta \mathbf{q}_{\tau i}^T \langle \text{diag}((\mathbf{B}_{nl}^*)^T \boldsymbol{\sigma}) \rangle \delta \mathbf{q}_{sj} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Il vettore delle tensioni $\boldsymbol{\sigma}$ è composto da un termine lineare e uno non lineare, come è possibile dedurre dalle relazioni costitutive (3.15).

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_l + \boldsymbol{\sigma}_{nl} \quad (3.14)$$

con

$$\boldsymbol{\sigma}_l = \mathbf{C}\boldsymbol{\epsilon}_l \quad \boldsymbol{\sigma}_{nl} = \mathbf{C}\boldsymbol{\epsilon}_{nl} \quad (3.15)$$

Sostituendo l'Eq. (3.14), si ottiene l'Eq. (3.16), in cui è presente il termine della matrice di rigidezza tangente $\mathbf{K}_\sigma^{ij\tau s} = \mathbf{K}_{\sigma_l}^{ij\tau s} + \mathbf{K}_{\sigma_{nl}}^{ij\tau s}$ che deriva dalla forma non lineare delle equazioni che legano deformazioni e spostamenti e prende il nome di matrice di rigidezza geometrica.

$$\begin{aligned} \langle \delta(\delta\epsilon^T)\boldsymbol{\sigma} \rangle &= \delta \mathbf{q}_{\tau i}^T (\mathbf{K}_{\sigma_l}^{ij\tau s} + \mathbf{K}_{\sigma_{nl}}^{ij\tau s}) \delta \mathbf{q}_{sj} \\ &= \delta \mathbf{q}_{\tau i}^T \mathbf{K}_\sigma^{ij\tau s} \delta \mathbf{q}_{sj} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Ottenuti entrambi i contributi è possibile esprimere la variazione virtuale dell'energia di deformazione linearizzata definendo il FN della matrice di rigidezza tangente

$\mathbf{K}_T^{ij\tau s}$ corrispondente ad un determinato stato di equilibrio non lineare, Eq. (3.17).

$$\begin{aligned}\delta(\delta L_{int}) &= \delta \mathbf{q}_{\tau i}^T (\mathbf{K}_0^{ij\tau s} + \mathbf{K}_{T_1}^{ij\tau s} + \mathbf{K}_\sigma^{ij\tau s}) \delta \mathbf{q}_{s j} \\ &= \delta \mathbf{q}_{\tau i}^T \mathbf{K}_T^{ij\tau s} \delta \mathbf{q}_{s j}\end{aligned}\quad (3.17)$$

La matrice di rigidezza tangente completa dei contributi non lineari è data dall'Eq. (3.18)

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_0 + 2\mathbf{K}_{lnl} + \mathbf{K}_{nll} + 2\mathbf{K}_{nlnl} + \mathbf{K}_\sigma \quad (3.18)$$

in cui

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} (\boldsymbol{\epsilon}_l + \boldsymbol{\epsilon}_{nl}) \longleftarrow \mathbf{K}_\sigma \quad (3.19)$$

3.3 Approccio Trivial Linearized (TL) per la linearizzazione di δL_{int}

L'approccio *Trivial Linearized* consiste nel risolvere il classico problema statico lineare di una struttura soggetta ad un carico di riferimento P_{ref} , Eq. (3.20).

$$\mathbf{K}_0 \mathbf{U} = \mathbf{P}_{ref} \quad (3.20)$$

Ottenute le tensioni dal problema statico lineare (3.20), successivamente, considerando l'Eq. (3.16), è possibile calcolare la matrice di rigidezza geometrica considerando solamente i contributi lineari $\mathbf{K}_\sigma = \mathbf{K}_{\sigma_l}$.

Infine si giunge all'Eq. (3.5) in cui la matrice di rigidezza tangente non presenta tutti i contributi non lineari, ma è data dall'Eq. (3.21), in cui il parametro di carico λ indica gli step di carico progressivamente maggiori applicati alla struttura.

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_T &\cong \mathbf{K}_0 + \lambda \mathbf{K}_{\sigma_l} \\ \mathbf{K}_{\sigma_l} &\longleftarrow \boldsymbol{\sigma}_l = \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon}_l\end{aligned}\quad (3.21)$$

Capitolo 4

Analisi tramite virtual VCT di strutture soggette a carichi meccanici

Nel seguente capitolo sono state effettuate le simulazioni numeriche di virtual VCT considerando l'approccio TL (sezione 3.3).

I casi analizzati comprendono strutture 1D (travi) e 2D (piastre e gusci cilindrici), considerando l'impiego di un materiale isotropo, dalle caratteristiche meccaniche paragonabili a quelle di una lega di alluminio classica, e di un materiale ortotropo, paragonabile ad un materiale composito composto da una matrice epossidica e fibre di rinforzo in grafite (AS4/3501-6), per il quale sono state considerate diverse laminazioni. Le caratteristiche meccaniche dei materiali presi in esame sono riportate in Tab. 4.1.

I risultati di seguito riportati, sono stati ottenuti con l'impiego del codice di calcolo agli elementi finiti MUL², mediante il quale è possibile implementare una discretizzazione con elementi finiti (1D o 2D) e una generica espansione in accordo con la teoria CUF.

La procedura adottata per ottenere l'andamento delle frequenze proprie della struttura al variare del parametro di carico λ consiste, come primo passo, in un'analisi a buckling linearizzata preliminare da cui è stato possibile determinare il valore del carico critico e il primo modo di buckling corrispondente, effettuando un confronto con i modi di vibrare propri della struttura ottenuti tramite un'analisi a vibrazioni libere.

In base al valore del carico critico di buckling trovato, è stata scelta la sequenza di valori del parametro di carico λ che rappresenta l'incremento progressivo del carico.

E	70 GPa
ν	0.3
ρ	$2700 \frac{kg}{m^3}$

(a) Materiale isotropo

E_1	144.8 GPa
$E_2 = E_3$	9.65 GPa
$G_{12} = G_{13}$	4.14 GPa
G_{23}	3.45 GPa
ν_{12}	0.3
ρ	$1450 \frac{kg}{m^3}$

(b) Materiale composito

Tabella 4.1: Proprietà meccaniche del materiale isotropo e composito

Secondo la formulazione esposta nella sezione 3.3, il calcolo della matrice di rigidezza lineare K_0 e della matrice delle rigidezze geometriche K_σ è stato effettuato considerando un carico di riferimento P_{ref} .

Infine, è stata effettuata un'analisi di *virtual* VCT in modo da ottenere la variazione delle frequenze proprie della struttura in funzione del parametro di carico λ e, in caso di buckling, confermare che la frequenza corrispondente al primo modo di buckling diminuisca progressivamente fino ad annullarsi. Per alcuni casi di esempio è stato effettuato un confronto con i risultati ottenuti utilizzando il software commerciale agli elementi finiti Abaqus CAE nella versione Student Edition.

4.1 Analisi tramite virtual VCT: strutture 1D

In questa sezione è mostrato come le frequenze naturali di una struttura 1D in materiale isotropo e composito, con le caratteristiche meccaniche riportate in Tab. 4.1, sono influenzate dall'applicazione di un carico meccanico esterno.

Le geometrie prese in esame sono composte da travi a sbalzo con due diversi *slender ratio* ($L/t = 10$ e $L/t = 100$), Fig. 4.1 e 4.2.

Il modello numerico è composto da una approssimazione agli elementi finiti data da 10 elementi B4 lungo l'asse trave y , mentre lungo la *cross-section* nel piano $x-z$ è stata scelta un'espansione di Lagrange con elementi Q9 a nove nodi, un singolo elemento nel caso isotropo e uno per ogni strato nei casi di laminati in materiale composito.

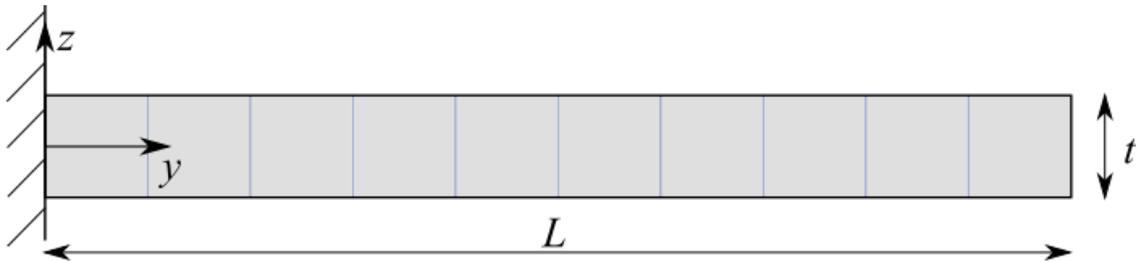


Figura 4.1: Geometria della trave a sbalzo con $\frac{L}{t} = 10$

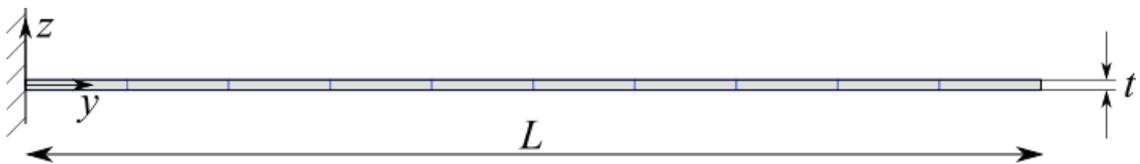


Figura 4.2: Geometria della trave a sbalzo con $\frac{L}{t} = 100$

4.1.1 Trave isotropa

Nel caso di trave isotropa tozza con *slender ratio* $\frac{L}{t} = 10$ sono state analizzate due differenti condizioni di carico: trave a sbalzo soggetta a taglio trasversale in direzione z applicato all'estremità libera e trave a sbalzo soggetta a compressione assiale. In Fig. 4.3 e in Tab. 4.2 sono riportate le prime 5 forme modali corrispondenti alle relative frequenze proprie della trave tozza con $\frac{L}{t} = 10$ in materiale isotropo. In Tab. 4.2 è riportato il confronto con i risultati ottenuti dall'analisi con il software Abaqus CAE su un modello discretizzato con elementi finiti solidi quadratici a 20 nodi.

Dal confronto dei risultati delle frequenze proprie della trave tozza in materiale isotropo si evince come la scelta di una discretizzazione di 10 elementi finiti B4 lungo l'asse e un'espansione di Lagrange con un elemento Q9, in accordo con la teoria CUF, fornisce risultati prossimi a quelli ottenuti mediante una discretizzazione con elementi solidi convenzionali, permettendo di ridurre il costo computazionale delle simulazioni.

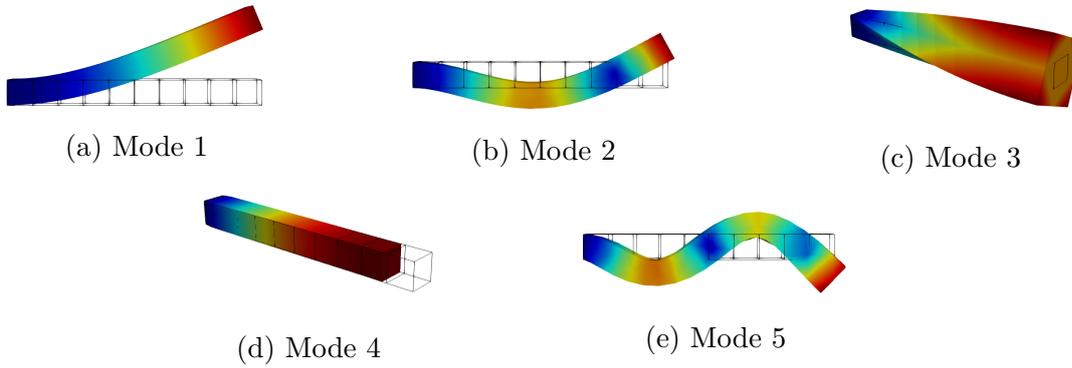


Figura 4.3: Forme modali dei primi 5 modi di una trave tozza ($L/t = 10$) isotropa C-F

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5
	[Hz]	[Hz]	[Hz]	[Hz]	[Hz]
MUL ²	82.32	495.4	780.5	1279.0	1310.0
Abaqus CAE	82.24	493.02	721.37	1278.4	1297.5

Tabella 4.2: Frequenze proprie dei primi 5 modi di vibrare di una trave tozza ($L/t = 10$) isotropa C-F

In Fig. 4.5 sono riportati gli andamenti delle frequenze proprie all'aumentare del parametro di carico λ di una trave con $\frac{L}{t} = 10$ isotropa soggetta a taglio trasversale lungo z , Fig. 4.4. In particolare le curve continue rappresentano l'andamento delle frequenze dei modi flessionali sul piano $y-z$, mentre le curve tratteggiate si riferiscono ai modi flessionali sul piano $y-x$.

Da questi andamenti si può notare come le frequenze corrispondenti ai modi flessionali sul piano $y-z$ non vengono influenzati dall'aumentare del parametro di carico (taglio trasversale), al contrario delle frequenze dei modi flessionali sul piano $y-x$ che tendono a diminuire.



Figura 4.4: Condizioni al contorno della trave a sbalzo isotropa con $L/t = 10$ soggetta a taglio trasversale

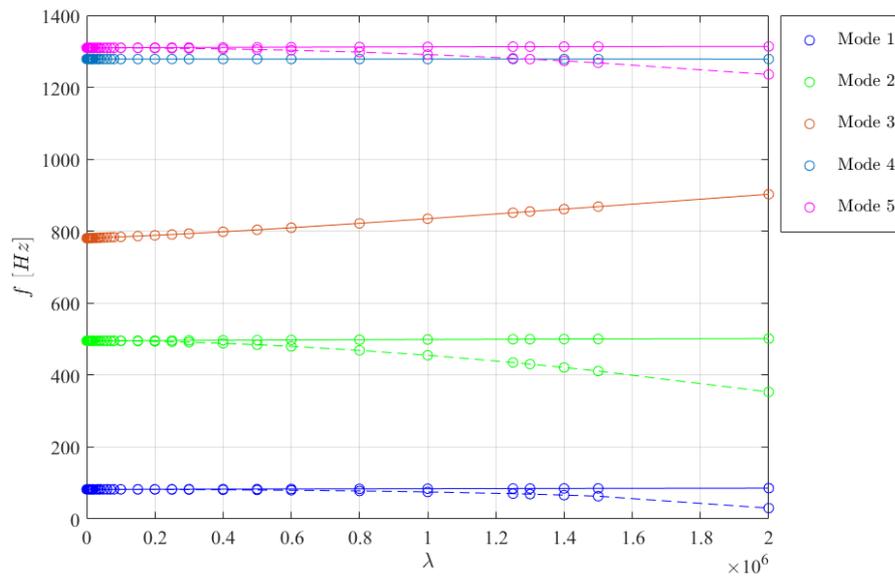


Figura 4.5: Andamento delle prime 5 frequenze proprie di una trave tozza ($L/t = 10$) isotropa C-F e soggetta ad un carico di taglio trasversale

In Fig. 4.7 sono riportati gli andamenti delle prime 5 frequenze proprie nel caso di trave isotropa tozza con $L/t = 10$ soggetta ad un carico di compressione assiale, Fig. 4.6, ottenuti tramite la virtual VCT utilizzando l'approccio TL.



Figura 4.6: Condizioni al contorno della trave a sbalzo isotropa con $\frac{L}{t} = 10$ soggetta a compressione assiale

In questo caso gli andamenti delle frequenze dei modi flessionali sul piano $y-z$ e $y-x$ coincidono.

In particolare, è stato possibile confermare i risultati ottenuti attraverso l'analisi a buckling linearizzata, secondo la quale il primo modo di buckling corrisponde alla prima forma modale della struttura, Fig. 4.3a, con il carico critico riportato in Tab. 4.3.

	MUL ²	Abaqus CAE
Mode 1 [N]	1439532.00	1441080.0

Tabella 4.3: Carico critico del primo modo di buckling della trave tozza ($L/t = 10$) isotropa C-F soggetta a compressione assiale

Infatti, in Fig. 4.7 in corrispondenza del valore del parametro di carico λ prossimo al valore del carico critico P_{cr} , la frequenza della prima forma modale tende ad annullarsi.

Inoltre, per $\lambda \approx 1.25 \cdot 10^6$ è possibile apprezzare un'intersezione tra gli andamenti corrispondenti alle frequenze della quarta e della quinta forma modale, fenomeno che prende il nome di *crossing*.

L'andamento della frequenza in funzione del parametro di carico ottenuto mediante il codice di calcolo MUL², che implementa la teoria CUF, è stato confrontato con i risultati ottenuti mediante una simulazione con il software commerciale agli elementi finiti Abaqus CAE ottenendo un'ottima corrispondenza dei risultati, Fig. 4.8.

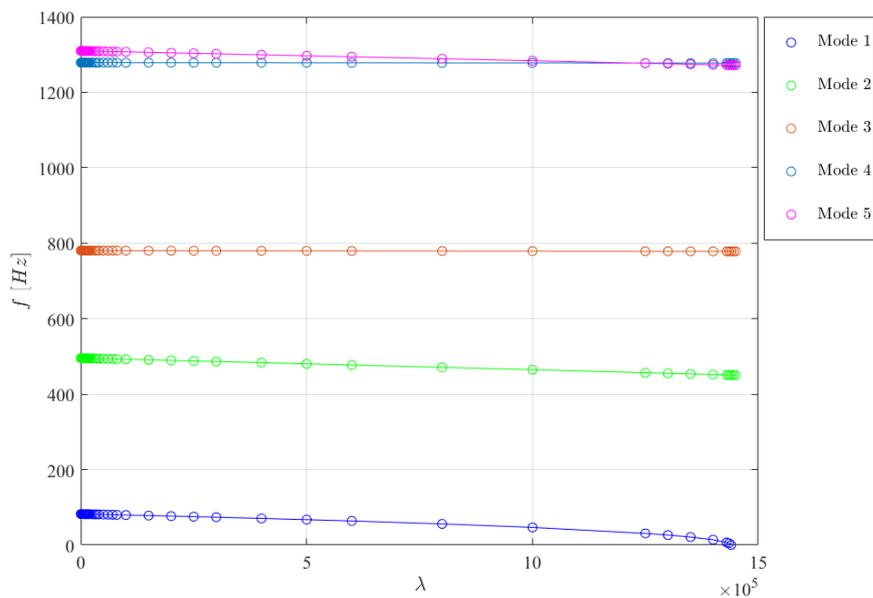


Figura 4.7: Andamento delle prime 5 frequenze proprie di una trave tozza ($L/t = 10$) isotropa C-F e soggetta compressione assiale

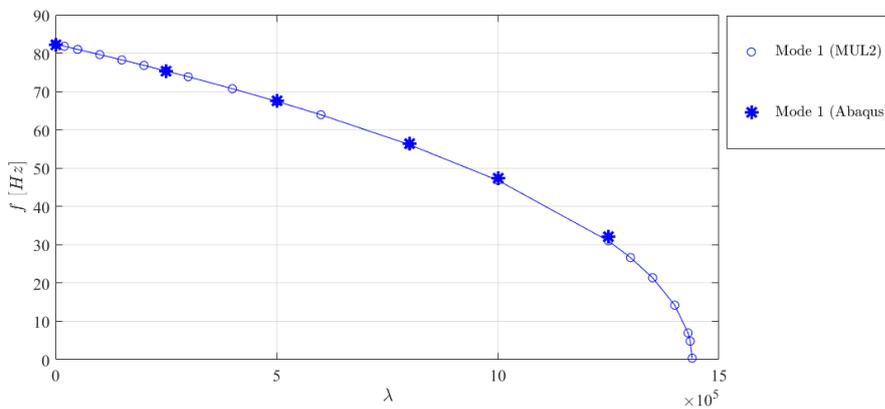


Figura 4.8: Andamento della frequenza propria del primo modo di vibrare di una trave tozza ($L/t = 10$) isotropa C-F al variare del parametro di carico di compressione assiale ottenuto con MUL^2 e Abaqus CAE

In Fig. 4.9 sono riportati i primi 5 modi di vibrare di una trave a sbalzo snella ($L/t = 100$) di materiale isotropo, Fig. 4.2.

La condizione di carico analizzata consiste nell'applicazione di un carico di compressione assiale applicato all'estremo libero della trave come mostrato in Fig. 4.10. Dall'analisi tramite *virtual VCT* è stato confermato che il primo modo di buckling corrisponde alla prima forma modale della trave, Fig. 4.9a; la prima frequenza propria, all'aumentare del parametro di carico λ , diminuisce fino ad annullarsi nell'intorno del valore trovato per il carico critico della struttura pari a $P_{cr} = 144.7 N$. In Fig. 4.11 sono riportati gli andamenti delle frequenze delle prime 5 forme modali in funzione del parametro di carico λ nel caso di trave a sbalzo snella ($L/t = 100$) isotropa soggetta a compressione assiale.

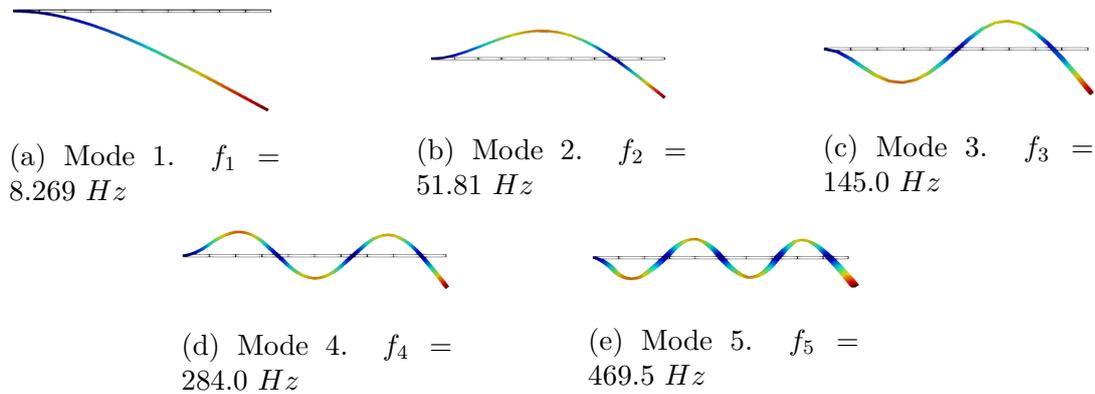


Figura 4.9: Forme modali dei primi 5 modi di una trave snella ($L/t = 100$) isotropa C-F

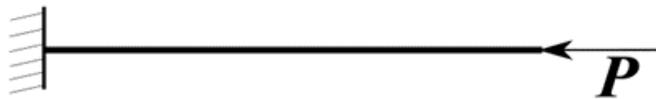


Figura 4.10: Condizioni al contorno della trave a sbalzo isotropa con $L/t = 100$ soggetta a compressione assiale

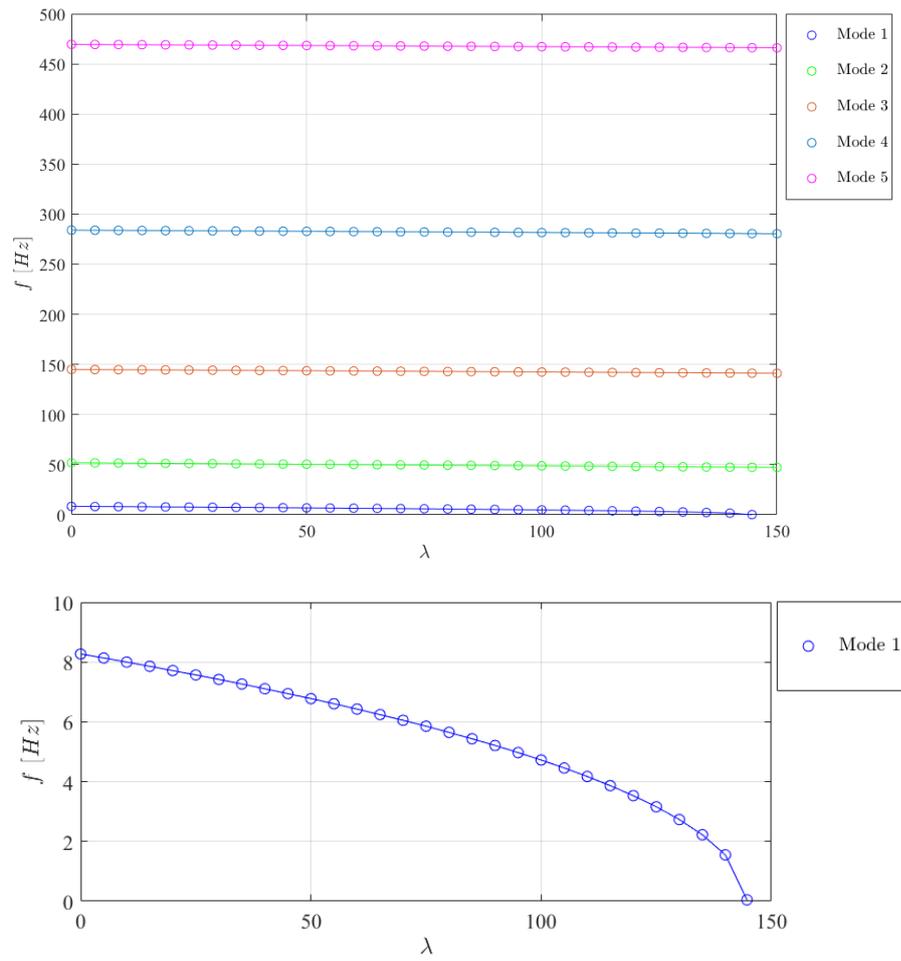


Figura 4.11: Andamento delle prime 5 frequenze proprie di una trave snella ($L/t = 100$) isotropa C-F e soggetta compressione assiale

4.1.2 Trave in laminato composito [90°/0°]

I seguenti risultati riguardano lo studio di travi a sbalzo (*clamped-free*, C-F) in laminato composito soggette a compressione assiale, considerando due diversi *slender ratio* pari a $L/t = 10$ e $L/t = 100$, Fig. 4.1 e 4.2.

Le travi sono composte da due strati di uguale spessore di materiale composito con le proprietà meccaniche riportate in Tab. 4.1. In Fig. 4.12 è riportata la geometria della sezione trasversale della trave *cross-ply* [90°/0°] mettendo in evidenza la sequenza dei vari strati del laminato.

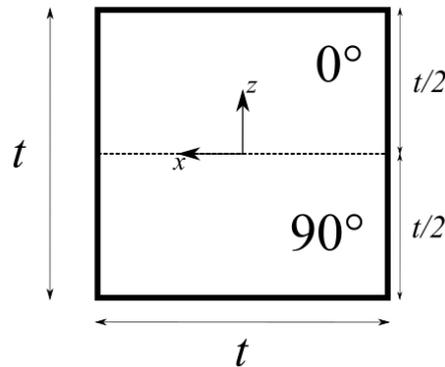


Figura 4.12: Geometria della sezione trasversale della trave *cross-ply* asimmetrica [90°/0°]

Le forme modali della trave a sbalzo con $L/t = 10$ in materiale composito a due strati sono riportate in Fig. 4.13.

Gli andamenti delle frequenze dei primi 5 modi di vibrare della trave in funzione del parametro di carico λ di compressione assiale sono riportati in Fig. 4.14 (in Fig. 4.15 è riportato uno zoom delle frequenze dei primi 3 modi di vibrare della trave tozza in laminato composito [90°/0°]).

La scelta di un laminato in materiale composito influenza il comportamento della struttura; in particolare, per quanto riguarda i modi flessionali, sono presenti delle differenze rispetto al caso di trave isotropa soggetta a compressione assiale. In questo caso infatti le frequenze corrispondenti ai modi flessionali sul piano $y-x$ risultano maggiori di quelle sul piano $y-z$.

Si ha anche una diversa evoluzione dell'andamento delle frequenze all'aumentare del parametro di carico λ . Infatti è possibile osservare il fenomeno del *crossing* tra il modo 2 torsionale e il modo 3 flessionale lungo il piano $y-z$.

Inoltre, osservando gli andamenti delle frequenze in funzione del parametro di carico, si può notare che il carico critico in prossimità del quale si ha l'annullamento della frequenza del modo 1 (Fig. 4.13a), che corrisponde al primo modo di buckling, risulti pari a $P_{cr} = 657834.6 \text{ N}$, inferiore rispetto al caso di trave isotropa

con lo stesso *slender ratio* e soggetta alle stesse condizioni di carico di compressione assiale.

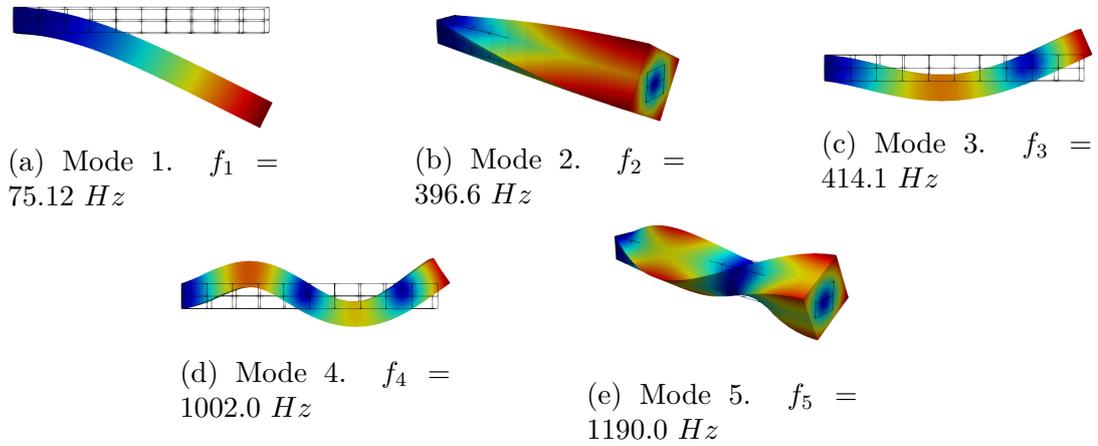


Figura 4.13: Forme modali dei primi 5 modi di una trave tozza ($L/t = 10$) cross-ply $[90^\circ/0^\circ]$ C-F

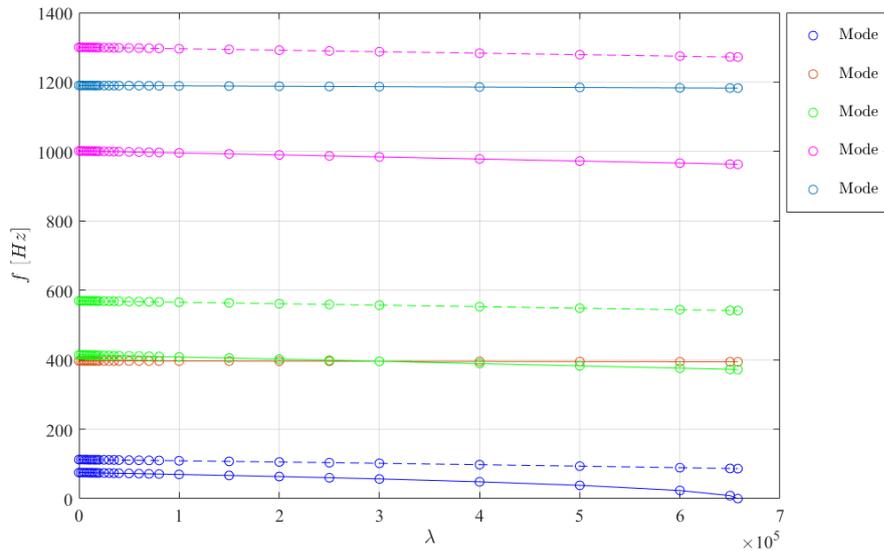


Figura 4.14: Andamento delle prime 5 frequenze proprie di una trave tozza ($L/t = 10$) cross-ply $[90^\circ/0^\circ]$ C-F e soggetta compressione assiale

Anche nel caso di trave snella ($L/t = 100$) in laminato composito cross-ply $[90^\circ/0^\circ]$ le frequenze dei modi flessionali sul piano $y-x$ risultano maggiori rispetto a quelle sul piano $y-z$, Fig. 4.17.

In questo caso gli eventuali effetti di *crossing* interessano i modi di ordine superiore.

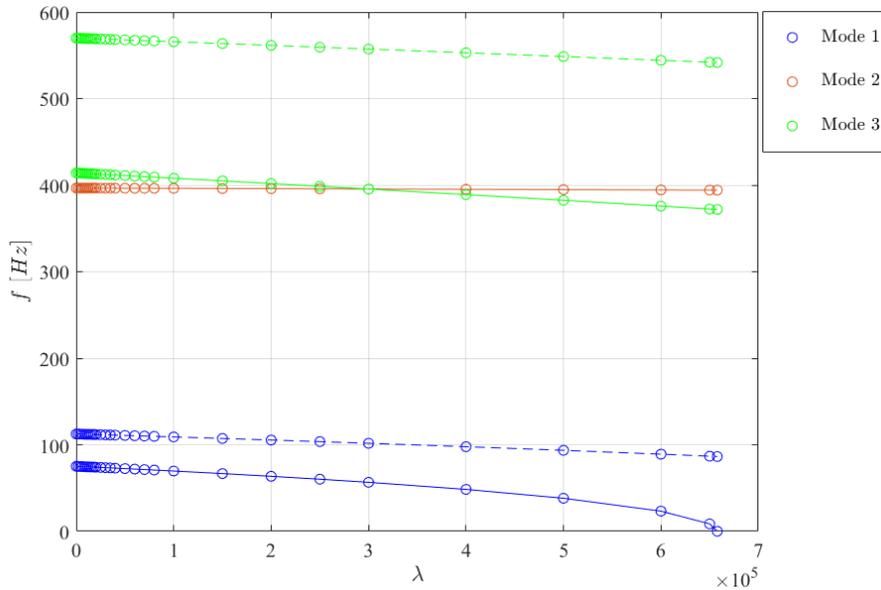


Figura 4.15: Andamento delle prime 3 frequenze proprie di una trave tozza ($L/t = 10$) cross-ply $[90^\circ/0^\circ]$ C-F e soggetta compressione assiale

In particolare, la prima forma modale flessionale sul piano $y-z$, Fig. 4.16a, corrisponde al primo modo di buckling della trave soggetta ad un carico di compressione, e la corrispondente frequenza propria si annulla in prossimità del valore del carico critico $P_{cr} = 67.73 \text{ N}$, valore ottenuto tramite l'analisi a buckling linearizzata.

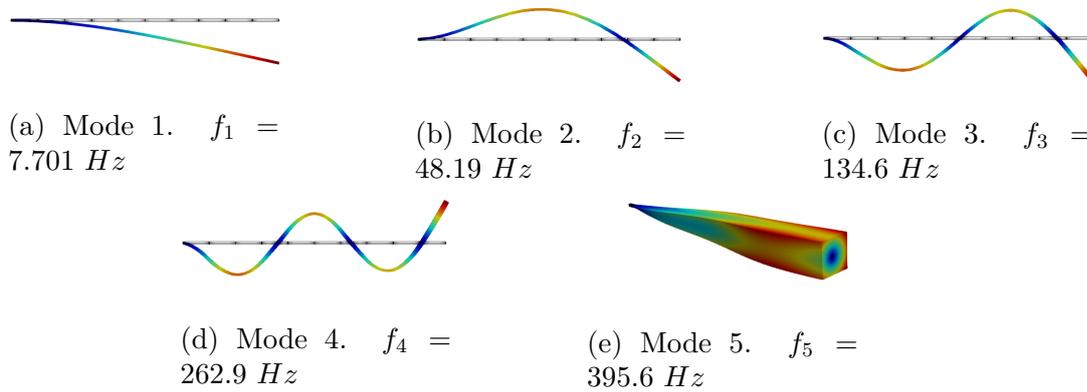


Figura 4.16: Forme modali dei primi 5 modi di una trave snella ($L/t = 100$) cross-ply $[90^\circ/0^\circ]$ C-F

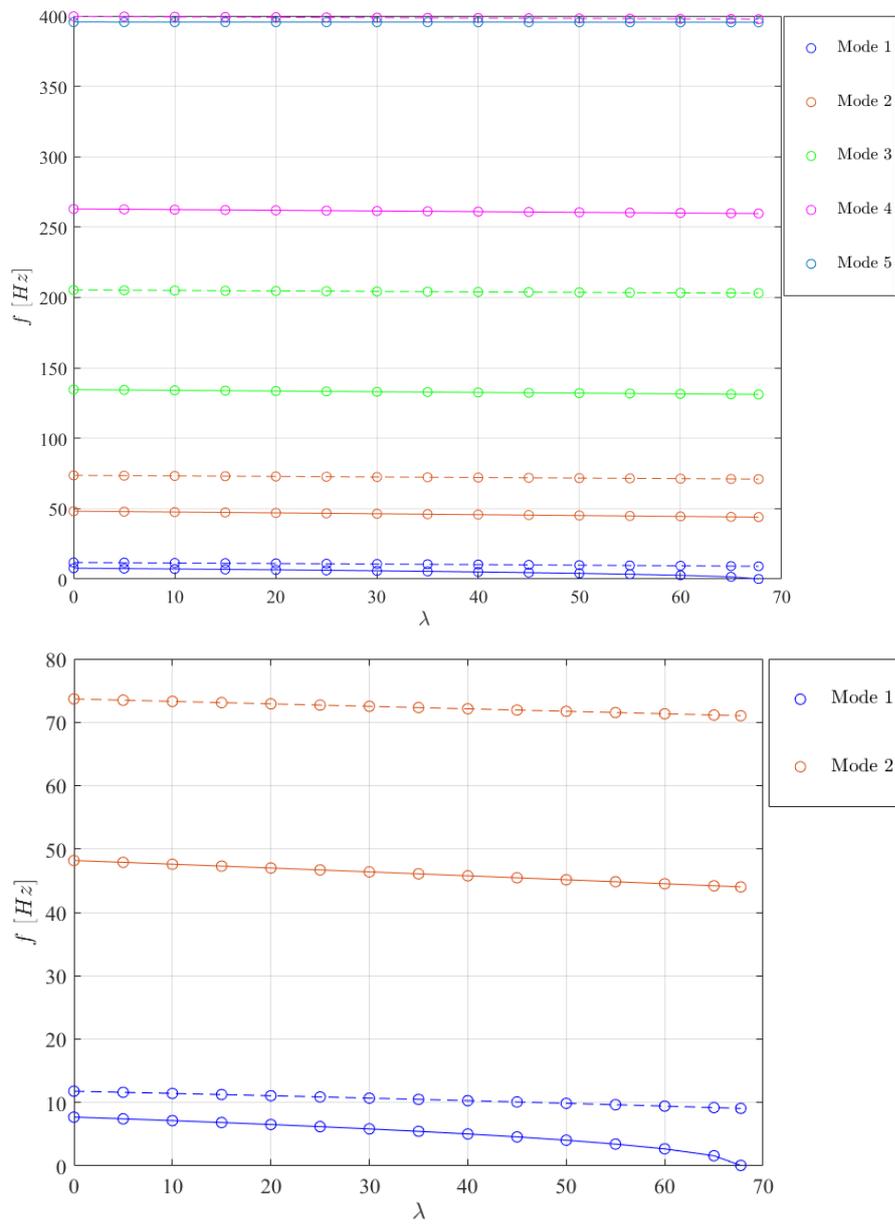


Figura 4.17: Andamento delle prime 5 frequenze proprie di una trave snella ($L/t = 100$) cross-ply $[90^\circ/0^\circ]$ C-F e soggetta compressione assiale

4.1.3 Trave in laminato composito $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$

Il comportamento di travi a sbalzo, con *slender ratio* pari a $L/t = 10$ e $L/t = 100$ e soggette a compressione assiale, è stato studiato considerando anche il caso di laminato in materiale composito simmetrico.

La geometria della sezione trasversale è composta da 3 strati di materiale composito con laminazione $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$, Fig. 4.18.

Le forme modali delle travi a sbalzo in laminato composito *cross-ply* simmetrico in assenza di carichi esterni applicati sono riportate in Fig. 4.19 e 4.20.

Gli andamenti delle frequenze delle prime 5 forme modali della trave tozza e snella sono riportati rispettivamente nei grafici in Fig. 4.21 e 4.22.

La scelta di questa sequenza di laminazione *cross-ply* simmetrica determina frequenze maggiori dei modi flessionali sul piano $y-z$ rispetto a quelle sul piano $y-x$.

In questo caso il primo modo di buckling coincide con la prima forma modale flessionale sul piano $y-x$ per entrambe le geometrie della trave con *slender ratio* $L/t = 10$ e $L/t = 100$, Fig. 4.19a e 4.20a. La frequenza del primo modo di buckling si annulla in prossimità del valore del parametro di carico corrispondente ai carichi critici di buckling P_{cr} , riportati in Tab. 4.4, relativi alla trave tozza e snella in laminato composito simmetrico.

Dai risultati ottenuti si può desumere quindi, che la sequenza di laminazione dei vari strati che compongono il laminato composito è determinante al fine di ottenere un valore di carico critico più alto, mantenendo un peso contenuto rispetto alla soluzione con materiale isotropo.

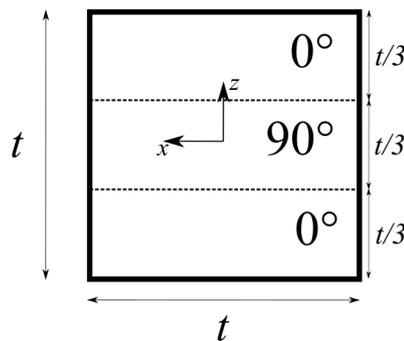


Figura 4.18: Geometria della sezione trasversale della trave in laminato composito *cross-ply* simmetrico $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$

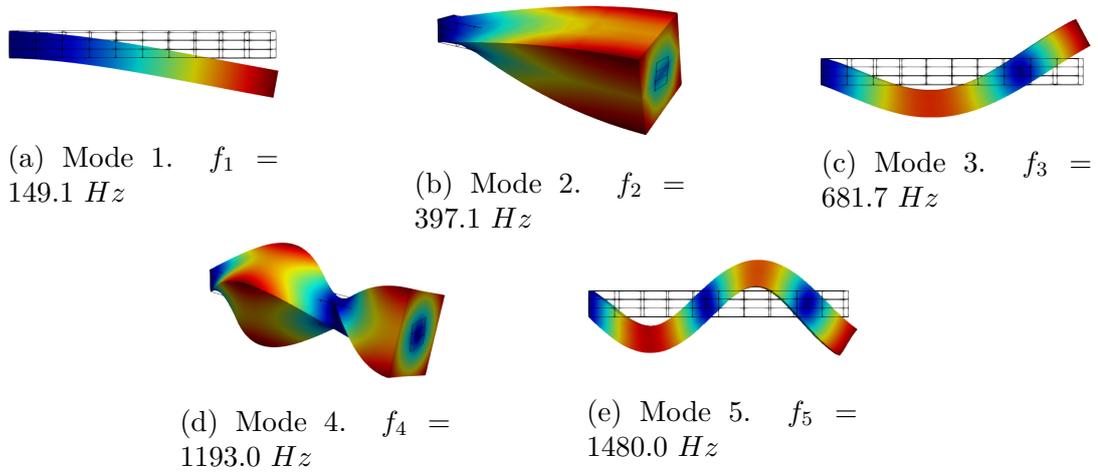


Figura 4.19: Forme modali dei primi 5 modi di una trave tozza ($L/t = 10$) cross-ply $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ C-F

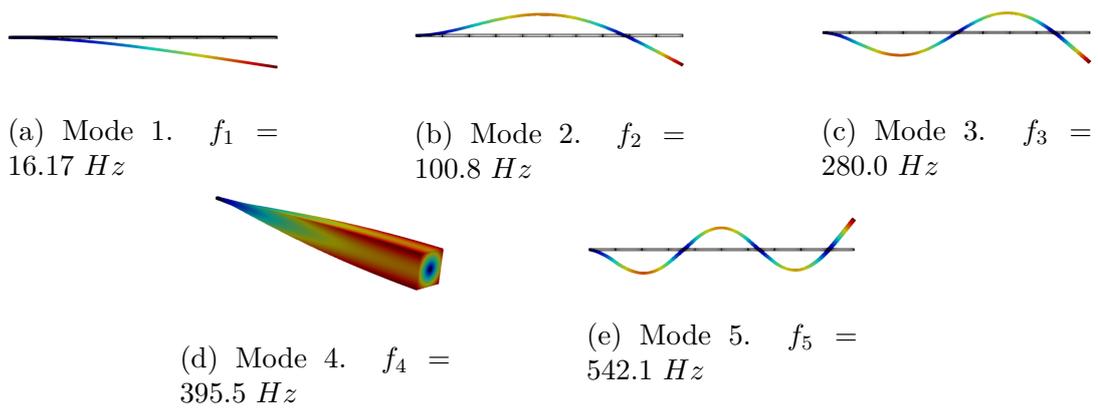


Figura 4.20: Forme modali dei primi 5 modi di una trave snella ($L/t = 100$) cross-ply $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ C-F

	$\frac{L}{t} = 10$	$\frac{L}{t} = 100$
Mode 1 (yx) [N]	2086348.0	222.0

Tabella 4.4: Carico critico del primo modo di buckling della trave tozza e snella ($L/t = 10$ e $L/t = 100$) in laminato composito *cross-ply* simmetrico $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ C-F soggetta a compressione assiale

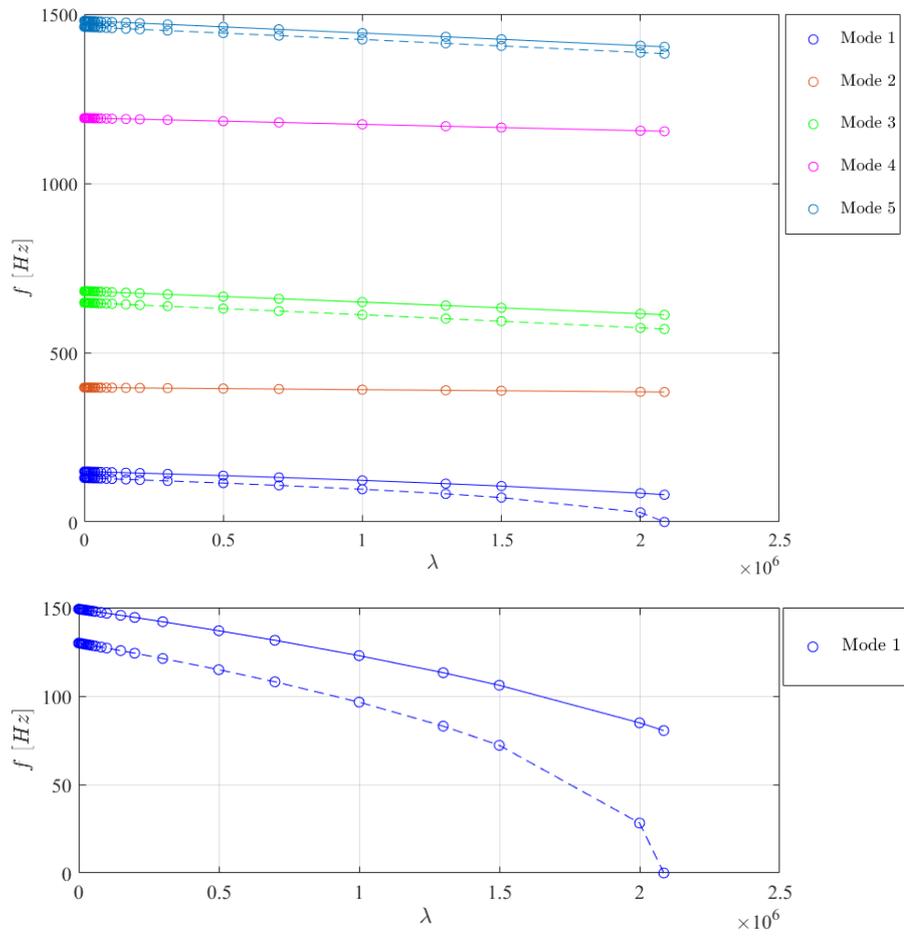


Figura 4.21: Andamento delle prime 5 frequenze proprie di una trave tozza ($L/t = 10$) cross-ply $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ C-F e soggetta compressione assiale

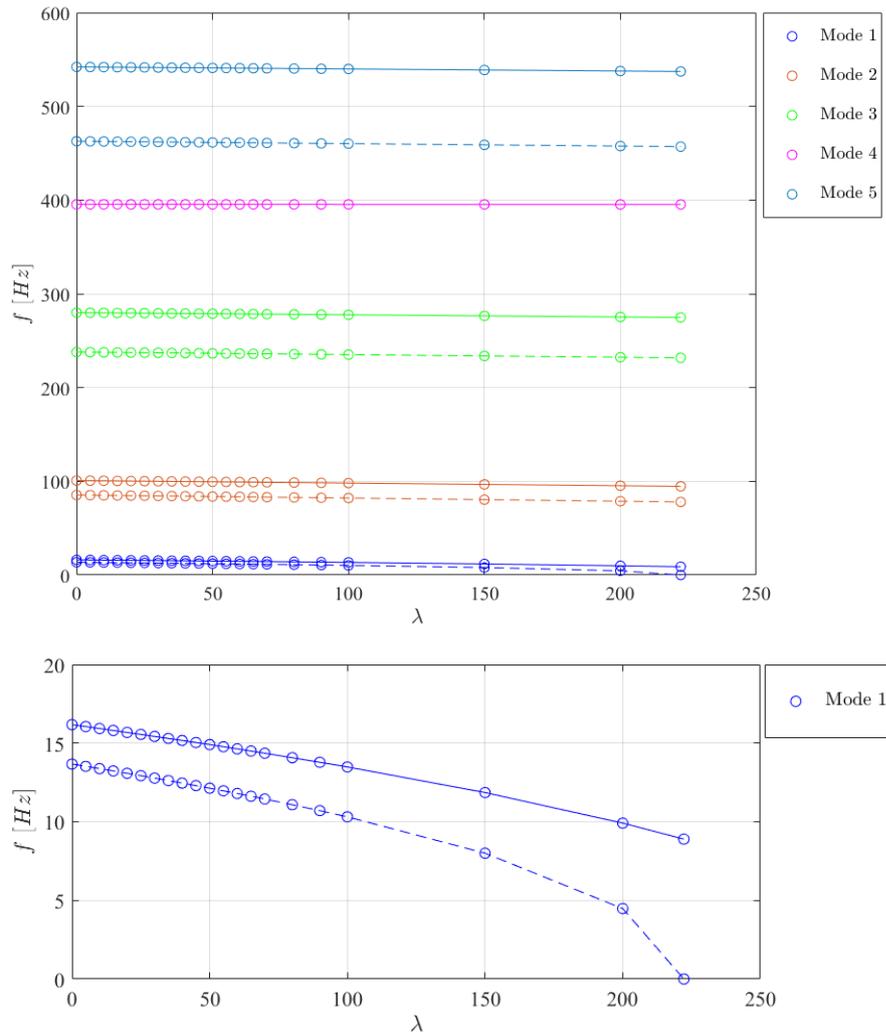


Figura 4.22: Andamento delle prime 5 frequenze proprie di una trave snella ($L/t = 100$) cross-ply $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ C-F e soggetta compressione assiale

I risultati riportati in questa sezione sono stati ottenuti considerando l'approccio TL, in cui vengono trascurati molti fattori determinanti che possono comportare un cedimento per buckling a carichi inferiori a quelli appena stimati; uno di questi fattori è dato dal fatto di non aver considerato i contributi dati da una trattazione *full non-linear*, attraverso la quale sarebbe possibile ottenere risultati più vicini a quelli che si possono ottenere attraverso delle prove sperimentali.

Inoltre nel caso di laminati compositi, questa trattazione non consente di tenere in considerazione alcuni fenomeni tipici del comportamento a rottura dei materiali compositi, quali per esempio fenomeni di delaminazione delle fibre di rinforzo o distacco dei vari strati del laminato.

4.2 Analisi tramite virtual VCT: strutture 2D

In questa sezione sono riportati i risultati relativi a strutture 2D soggette a carichi di compressione assiale.

I casi analizzati comprendono piastre e pannelli cilindrici con due differenti valori di raggio di curvatura lungo la coordinata curvilinea x ($1/R_\gamma = 0.3937$ e $1/R_\gamma = 1.937$), in materiale isotropo e laminato composito *cross-ply* simmetrico $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ formato da 3 strati di uguale spessore, Fig. 4.18. Le caratteristiche meccaniche dei materiali sono riportate in Tab. 4.1.

I modelli numerici sono caratterizzati dalle stesse dimensioni lungo la coordinata y e x , $a = 508 \text{ mm}$, e da uno spessore $t = 12.6 \text{ mm}$, Fig. 4.23, 4.24 e 4.25.

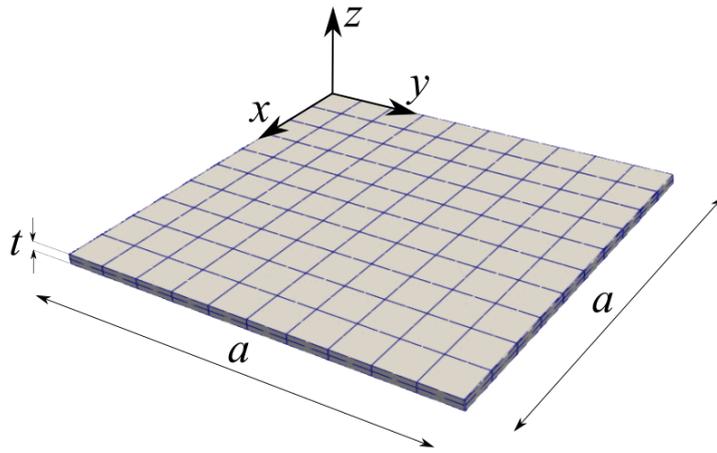


Figura 4.23: Geometria della struttura 2D piana

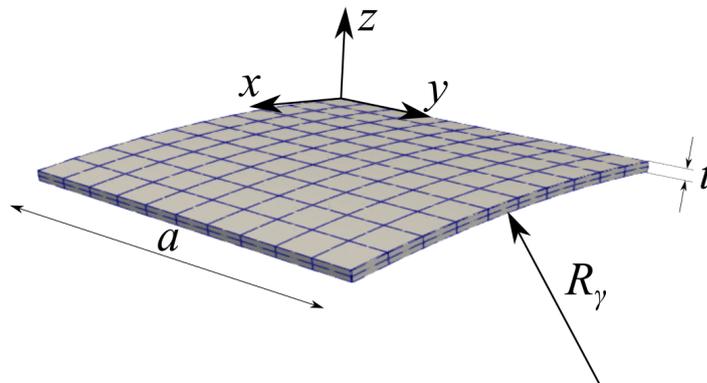


Figura 4.24: Geometria della struttura 2D cilindrica con curvatura $\frac{1}{R_\gamma} = 0.3937$

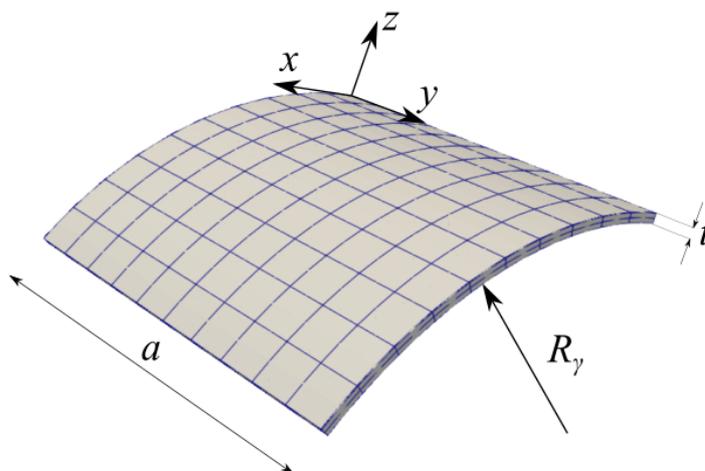


Figura 4.25: Geometria della struttura 2D cilindrica con curvatura $\frac{1}{R_\gamma} = 1.937$

Le condizioni al contorno sono date da semplici appoggi su tutti e 4 i lati delle strutture 2D (in particolare viene mantenuto il grado di libertà di traslazione lungo y dei punti sui lati paralleli alla direzione x su cui viene applicato il carico); per simulare un carico di compressione assiale uniforme sono state applicate delle forze concentrate lungo i bordi paralleli alla direzione x in modo da ottenere su ognuno dei due lati una forza complessiva unitaria, Fig. 4.26. Un altro accorgimento per simulare un carico di compressione uniforme consiste nel considerare nel modello numerico, in corrispondenza dei lati su cui sono stati applicati i carichi, una porzione di piastra dalle dimensioni molto ridotte rispetto alle dimensioni delle strutture considerate con modulo elastico due ordini di grandezza più elevato rispetto al valore considerato per l'intera piastra.

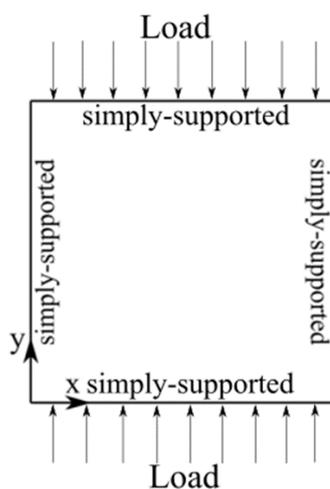


Figura 4.26: Condizioni al contorno delle strutture 2D per analisi di *virtual* VCT

La discretizzazione del modello è data da una griglia 10×10 di elementi finiti quadrati $Q9$ a nove nodi per l'approssimazione sul piano $x-y$; lungo la coordinata di spessore è stata utilizzata un'espansione di Lagrange con 2 elementi B3 a tre nodi nei casi di strutture 2D in materiale isotropo e un'espansione con un elemento B3 per ogni strato nel caso di strutture in laminato composito *cross-ply* simmetrico.

4.2.1 Risultati numerici piastra

In questa sezione sono riportati i risultati relativi allo studio delle piastre in materiale isotropo e laminato composito mediante la *virtual VCT*.

Piastra isotropa

In Fig. 4.27 sono riportate le forme modali della piastra isotropa con la geometria analizzata nella sezione 4.2.

In Tab. 4.5 sono riportati i valori delle frequenze proprie della piastra isotropa appoggiata sui quattro lati ottenuti tramite il codice di calcolo MUL^2 , che implementa la teoria CUF, e il codice commerciale agli elementi finiti Abaqus CAE, mostrando una buona corrispondenza tra i valori ottenuti.

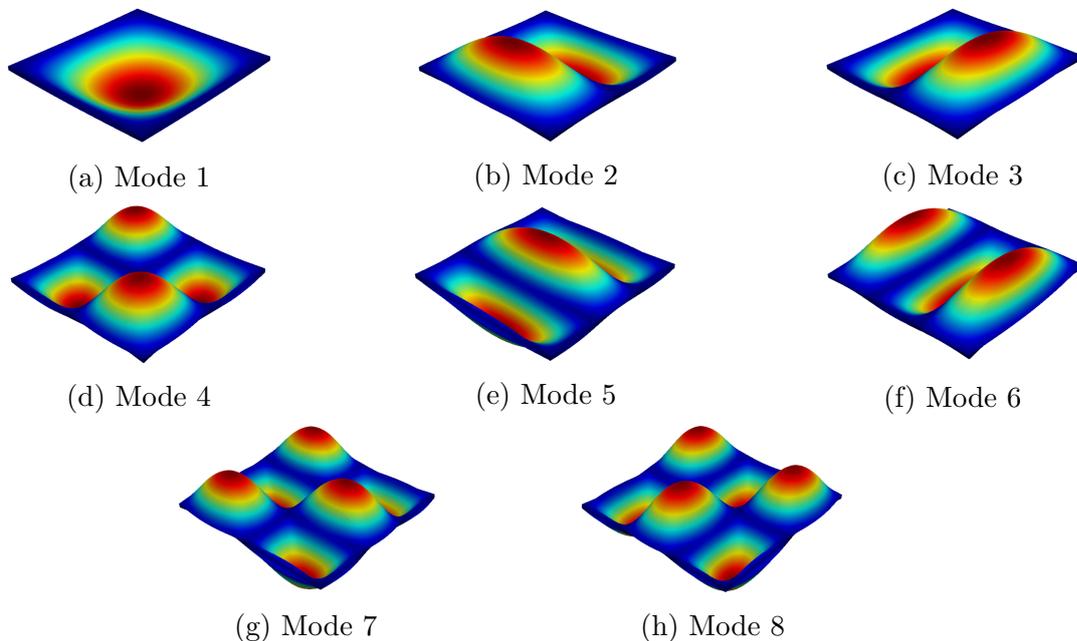


Figura 4.27: Forme modali dei primi 8 modi di una piastra isotropa appoggiata sui quattro lati

	MUL ² [Hz]	Abaqus CAE [Hz]
Mode 1	237.14	236.27
Mode 2	592.91	588.37
Mode 3	595.60	591.22
Mode 4	945.83	939.04
Mode 5	1192.42	1172.10
Mode 6	1199.33	1179.40
Mode 7	1537.09	1517.4
Mode 8	1541.41	1521.9

Tabella 4.5: Frequenze proprie dei primi 8 modi di vibrare della piastra isotropa appoggiata sui 4 lati

Dall'analisi a buckling linearizzata con condizione di carico di compressione assiale è stata ottenuto che il primo modo di buckling della piastra isotropa corrisponde alla prima forma modale, Fig. 4.27a; in Tab. 4.6 sono riportati i risultati dell'analisi a buckling linearizzata relativi al carico critico di compressione assiale P_{cr} ottenuti tramite i software MUL² e Abaqus CAE.

	MUL ²	Abaqus CAE
Mode 1 [N]	931660.0	921201.0

Tabella 4.6: Carico critico del primo modo di buckling della piastra isotropa appoggiata sui 4 lati soggetta a compressione assiale

I risultati dell'analisi a buckling linearizzata sono stati confermati dall'andamento delle frequenze al variare del parametro di carico λ come mostrato in Fig. 4.28 e 4.29; infatti, in accordo con la teoria su cui si basa la VCT, in corrispondenza del valore del parametro di carico λ relativo al carico critico di buckling della piastra soggetta a compressione assiale, la frequenza del primo modo tende ad annullarsi.

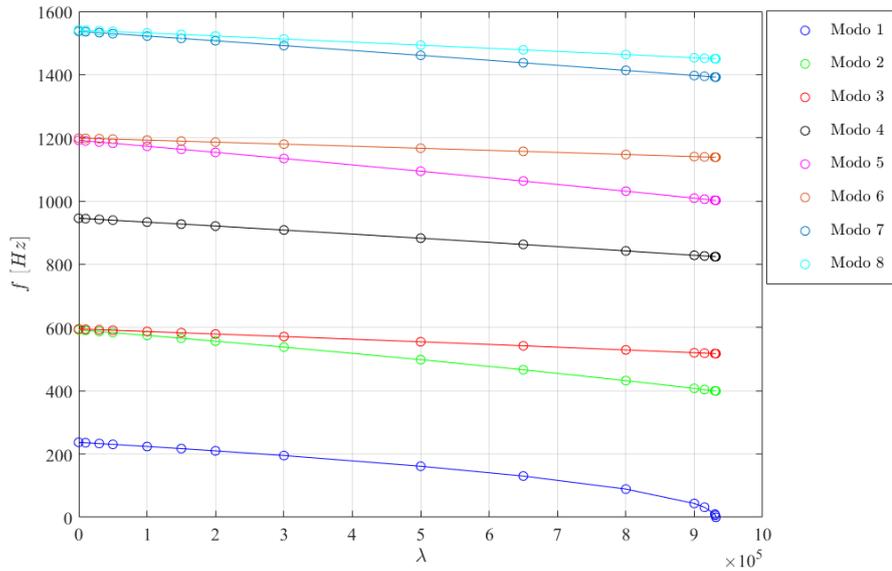


Figura 4.28: Andamenti delle prime 8 frequenze proprie di una piastra isotropa appoggiata sui 4 lati e soggetta a compressione assiale ottenute con MUL^2

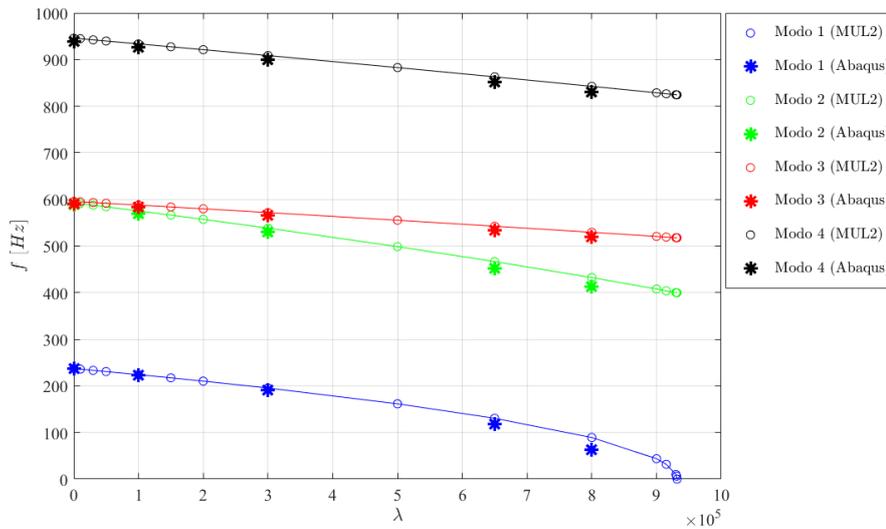


Figura 4.29: Andamenti delle prime 4 frequenze proprie di una piastra isotropa appoggiata sui 4 lati e soggetta a compressione assiale al variare del parametro di carico λ ottenute con MUL^2 e Abaqus CAE

Nelle Tab. 4.7 sono riportati i valori delle frequenze dei primi 4 modi di vibrare della piastra relativi a quattro diversi parametri di carico λ di compressione assiale. Dal confronto dei risultati si evince che, nonostante la differenza nella discretizzazione e gestione degli effetti non lineari tra i due modelli, in particolare in Abaqus

CAE sono stati considerati elementi shell quadratici a 8 nodi, ci sia un'ottima corrispondenza anche per valori di parametro di carico elevati prossimi al valore critico.

	MUL ² [Hz]	Abaqus CAE [Hz]
Mode 1	224.10	222.24
Mode 2	587.77	569.52
Mode 3	575.32	582.88
Mode 4	933.58	926.25

(a) $\lambda_5 = 1.0 \cdot 10^5$

	MUL ² [Hz]	Abaqus CAE [Hz]
Mode 1	195.40	191.03
Mode 2	538.39	529.76
Mode 3	571.76	565.78
Mode 4	908.56	900.08

(b) $\lambda_8 = 3.0 \cdot 10^5$

	MUL ² [Hz]	Abaqus CAE [Hz]
Mode 1	130.60	117.57
Mode 2	466.71	451.60
Mode 3	542.53	534.41
Mode 4	862.93	852.19

(c) $\lambda_{10} = 6.5 \cdot 10^5$

	MUL ² [Hz]	Abaqus CAE [Hz]
Mode 1	89.33	63.75
Mode 2	432.33	413.50
Mode 3	529.46	520.33
Mode 4	842.57	830.76

(d) $\lambda_{11} = 8.0 \cdot 10^5$

Tabella 4.7: Frequenze proprie dei primi 4 modi di vibrare della piastra isotropa appoggiata sui 4 lati al variare del parametro di carico di compressione assiale λ

Piastra in laminato composito

Gli stessi risultati per la piastra in laminato composito cross-ply $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ sono riportati nelle figure e tabelle seguenti.

In particolare in Fig. 4.30 e Tab. 4.8 sono riportate le forme modali e le corrispondenti frequenze proprie. Analogamente al caso di piastra isotropa, dall'analisi a buckling linearizzata, il primo modo di buckling della piastra in laminato composito soggetta a compressione assiale corrisponde alla prima forma modale, Fig. 4.30a. In Tab. 4.9 sono riportati i risultati dell'analisi a buckling linearizzata relativi al carico critico di compressione assiale P_{cr} ottenuti tramite i software MUL² e Abaqus CAE; in particolare il carico critico risulta essere molto inferiore rispetto al caso isotropo a fronte però di un peso molto più ridotto. Tramite un processo di ottimizzazione considerando come parametri la sequenza di laminazione e lo spessore sarebbe possibile ottenere prestazioni migliori rispetto alla scelta di un materiale isotropo.

In Fig. 4.31 e 4.32 sono riportati gli andamenti delle frequenze al variare del parametro di carico di compressione assiale λ .

Nelle Tab. 4.10 è riportato il confronto tra i valori delle frequenze dei primi 4 modi di vibrare della piastra relativi a quattro diversi parametri di carico λ ottenuti con i software MUL² e Abaqus CAE.

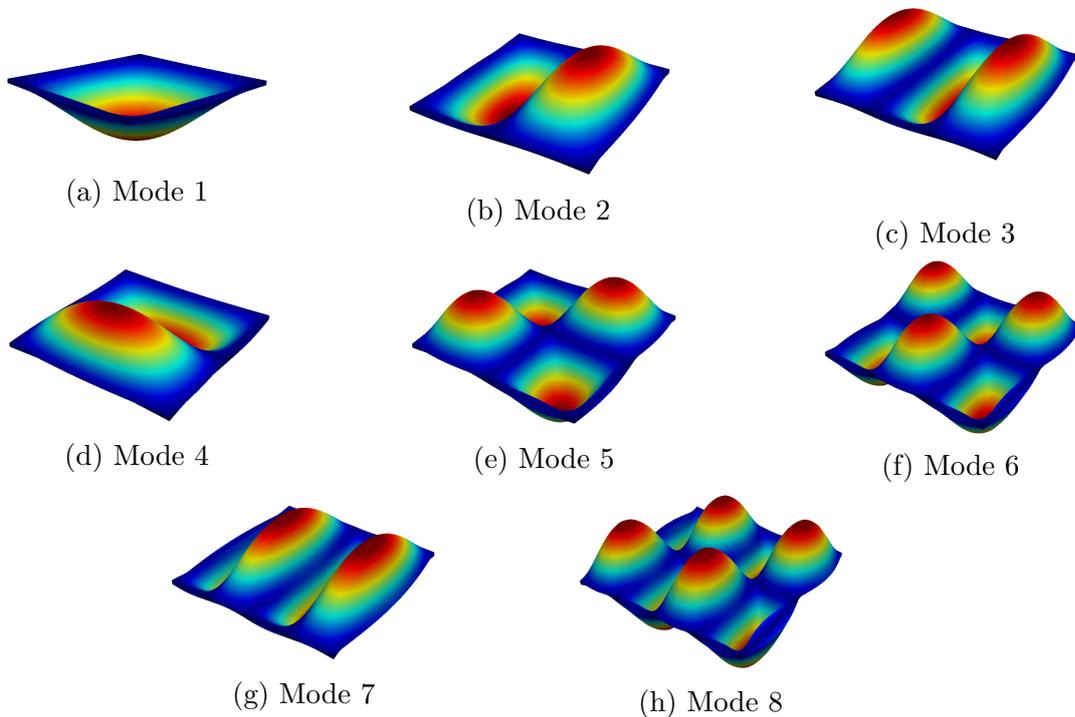


Figura 4.30: Forme modali dei primi 8 modi di una piastra cross-ply $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ appoggiata sui 4 lati

	MUL ² [Hz]	Abaqus CAE [Hz]
Mode 1	241.54	241.12
Mode 2	393.99	392.07
Mode 3	717.29	709.09
Mode 4	850.44	848.16
Mode 5	938.37	934.85
Mode 6	1156.47	1147.9
Mode 7	1198.30	1173.6
Mode 8	1545.80	1522.6

Tabella 4.8: Frequenze proprie dei primi 8 modi di vibrare della piastra cross-ply $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ appoggiata sui 4 lati

	MUL ²	Abaqus CAE
Mode 1 [N]	545912.0	542477.0

Tabella 4.9: Carico critico del primo modo di buckling della piastra cross-ply $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ appoggiata sui 4 lati soggetta a compressione assiale

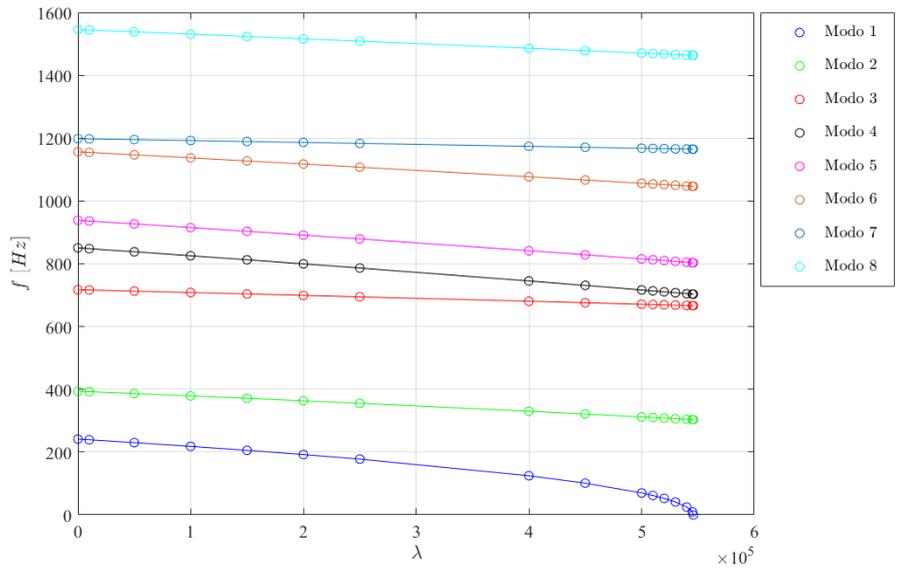


Figura 4.31: Andamenti delle prime 8 frequenze proprie di una piastra cross-ply $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ appoggiata sui 4 lati e soggetta a compressione assiale ottenuti con MUL^2

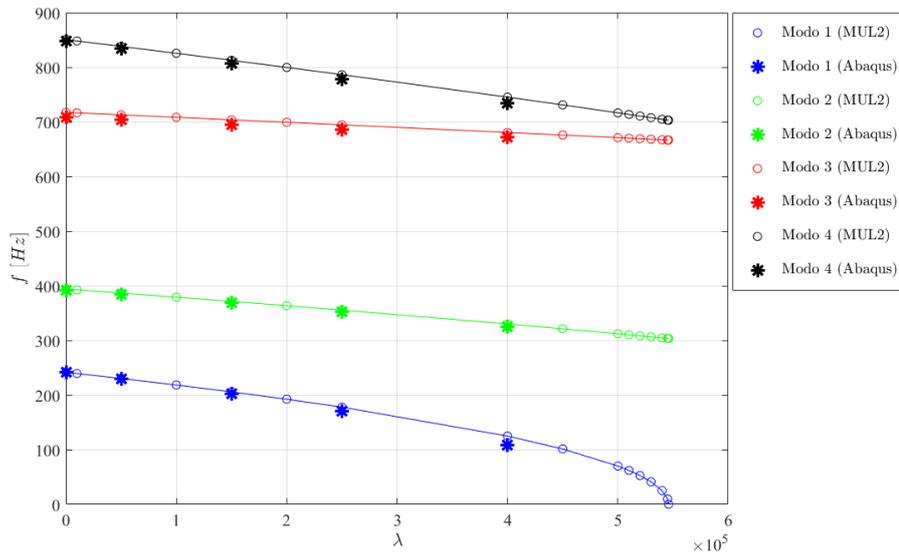


Figura 4.32: Andamenti delle prime 4 frequenze proprie di una piastra cross-ply $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ appoggiata sui 4 lati e soggetta a compressione assiale ottenuti con MUL^2 e Abaqus CAE

	MUL ² [Hz]	Abaqus CAE [Hz]
Mode 1	230.21	228.81
Mode 2	386.58	384.35
Mode 3	712.80	704.48
Mode 4	838.00	834.74

(a) $\lambda_3 = 5.0 \cdot 10^4$

	MUL ² [Hz]	Abaqus CAE [Hz]
Mode 1	205.70	201.96
Mode 2	371.33	368.42
Mode 3	703.73	695.18
Mode 4	812.57	807.20

(b) $\lambda_5 = 1.5 \cdot 10^5$

	MUL ² [Hz]	Abaqus CAE [Hz]
Mode 1	177.84	170.93
Mode 2	355.42	351.77
Mode 3	694.54	685.76
Mode 4	786.31	778.68

(c) $\lambda_7 = 2.5 \cdot 10^5$

	MUL ² [Hz]	Abaqus CAE [Hz]
Mode 1	124.88	108.87
Mode 2	330.12	325.18
Mode 3	680.52	671.36
Mode 4	745.19	733.79

(d) $\lambda_8 = 4.0 \cdot 10^5$

Tabella 4.10: Frequenze proprie dei primi 4 modi di vibrare della piastra cross-ply $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ appoggiata sui 4 lati al variare del parametro di carico di compressione assiale λ

4.2.2 Risultati numerici pannello cilindrico ($1/R_\gamma = 0.3937$)

Il successivo caso di studio consiste in un pannello, delle medesime dimensioni della struttura 2D piana del caso precedente, a cui è stata imposta una curvatura cilindrica $1/R_\gamma = 0.3937$, Fig. 4.24.

Nei paragrafi successivi sono riportati i risultati relativi allo studio del pannello con curvatura cilindrica in materiale isotropo e in laminato composito con strati orientati secondo la sequenza $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$.

Pannello cilindrico ($1/R_\gamma = 0.3937$) isotropo

Le forme modali dei primi 8 modi di vibrare del pannello isotropo con curvatura cilindrica $1/R_\gamma = 0.3937$ appoggiato sui 4 lati sono riportate in Fig. 4.33; i valori

delle frequenze proprie dei modi di vibrare del pannello curvo riportate in Tab. 4.11 dimostrano la buona corrispondenza tra i risultati ottenuti attraverso il software MUL², che implementa la teoria CUF, e il software commerciale agli elementi finiti Abaqus CAE.

Dall'analisi a buckling linearizzata, con condizione di carico di compressione assiale, il primo modo di buckling coincide con la terza forma modale, Fig. 4.33c; in Tab. 4.12 sono riportati i risultati del carico critico di compressione assiale P_{cr} ottenuti tramite i software MUL² e Abaqus CAE.

Gli andamenti delle frequenze all'aumentare del parametro di carico di compressione assiale in Fig. 4.34 e 4.35 confermano la validità dei risultati ottenuti nell'analisi a buckling, dato che in corrispondenza del parametro di carico pari all'autovalore del primo modo di buckling, la corrispondente frequenza tende ad annullarsi.

Inoltre, la maggiore complessità geometrica, data dalla curvatura cilindrica, causa la comparsa del fenomeno del *crossing* tra i valori delle frequenze, in particolare tra quelle relative al terzo modo e i modi di ordine inferiore.

Nelle Tab. 4.16 sono riportate le frequenze dei primi 4 modi di vibrare del pannello isotropo con curvatura cilindrica $1/R_\gamma = 0.3937$ appoggiato sui 4 lati relative a diversi parametri di carico di compressione assiale λ .

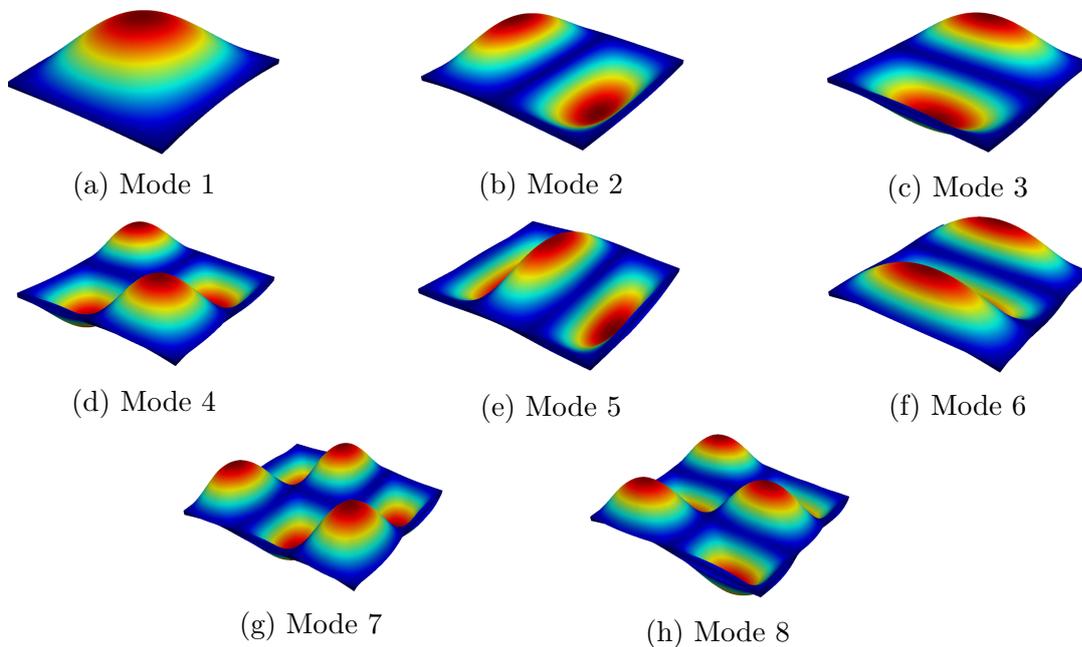


Figura 4.33: Forme modali dei primi 8 modi di un pannello isotropo con curvatura cilindrica $\frac{1}{R_\gamma} = 0.3937$ appoggiato sui 4 lati

	MUL ² [Hz]	Abaqus CAE [Hz]
Mode 1	378.34	380.13
Mode 2	610.11	606.17
Mode 3	663.45	660.47
Mode 4	970.74	964.91
Mode 5	1203.33	1183.60
Mode 6	1230.08	1210.90
Mode 7	1548.50	1529.30
Mode 8	1558.00	1539.30

Tabella 4.11: Frequenze proprie dei primi 8 modi di vibrare del pannello isotropo con curvatura cilindrica $\frac{1}{R_\gamma} = 0.3937$ appoggiato sui 4 lati

	MUL ²	Abaqus CAE
Mode 1 [N]	2217060	2207020

Tabella 4.12: Carico critico del primo modo di buckling della piastra isotropa appoggiata sui 4 lati soggetta a compressione assiale

Dal confronto dei risultati ottenuti con il software commerciale Abaqus CAE si può dedurre che per step di carico prossimi al valore di carico critico gli effetti delle non-linearità date dalla curvatura geometrica della struttura sono più intensi e ciò causa una discrepanza con i risultati ottenuti attraverso la teoria CUF con un'analisi di *virtual VCT* utilizzando un approccio TL.

Una minore discrepanza tra i risultati sarebbe possibile ottenerla effettuando un'analisi di *virtual VCT* utilizzando un approccio *full non-linear* (FNL), mediante il quale, con la definizione della matrice di rigidità tangente per ogni step di carico, è possibile tenere in considerazione tutti i contributi delle non-linearità geometriche del problema. Nonostante ciò è possibile riscontrare una buona corrispondenza

dei risultati relativi alla frequenza del modo 3, che rappresenta il primo modo di buckling della struttura.

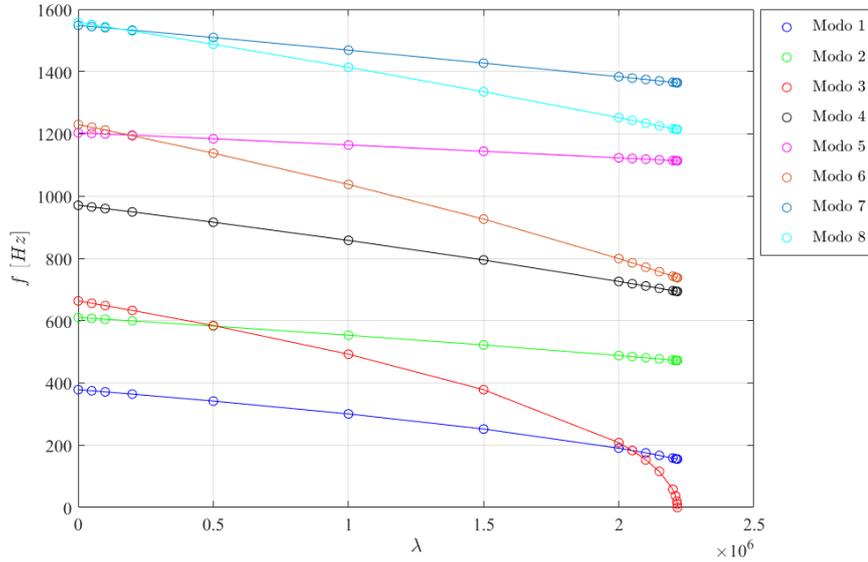


Figura 4.34: Andamenti delle prime 8 frequenze proprie di un guscio cilindrico con curvatura $\frac{1}{R_\gamma} = 0.3937$ isotropo appoggiato sui 4 lati e soggetto a compressione assiale ottenuti con MUL²

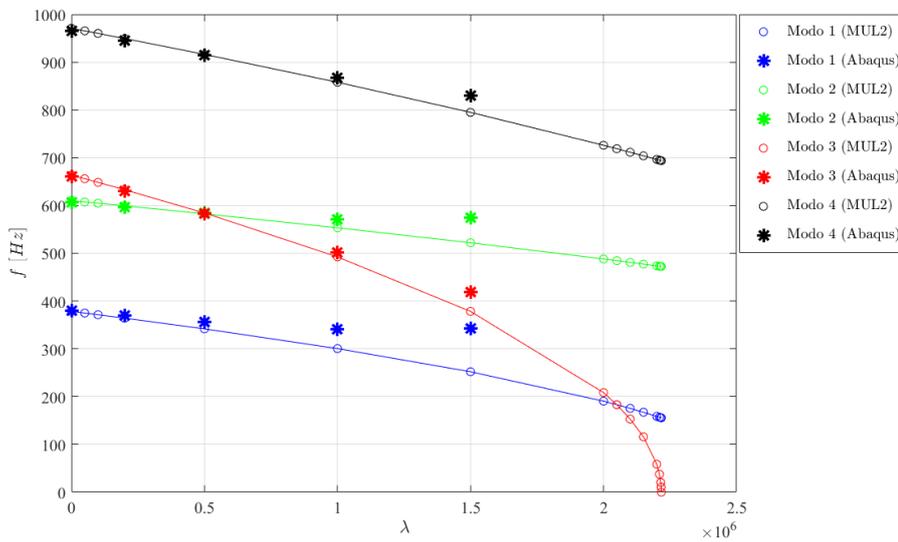


Figura 4.35: Andamenti delle prime 3 frequenze proprie del pannello isotropo con curvatura cilindrica $\frac{1}{R_\gamma} = 0.3937$ appoggiato sui 4 lati e soggetto a compressione assiale ottenuti con MUL² e Abaqus CAE

	MUL ² [Hz]	Abaqus CAE [Hz]
Mode 1	364.18	369.77
Mode 2	599.28	596.46
Mode 3	633.01	630.28
Mode 4	949.34	944.19

(a) $\lambda_4 = 2.0 \cdot 10^5$

	MUL ² [Hz]	Abaqus CAE [Hz]
Mode 1	341.78	356.16
Mode 2	582.58	583.94
Mode 3	584.32	583.45
Mode 4	916.22	913.78

(b) $\lambda_5 = 5.0 \cdot 10^5$

	MUL ² [Hz]	Abaqus CAE [Hz]
Mode 1	300.50	341.76
Mode 2	553.34	571.42
Mode 3	492.38	501.85
Mode 4	857.92	866.98

(c) $\lambda_6 = 1.0 \cdot 10^6$

	MUL ² [Hz]	Abaqus CAE [Hz]
Mode 1	252.03	342.81
Mode 2	522.03	574.02
Mode 3	378.32	417.94
Mode 4	794.96	830.09

(d) $\lambda_7 = 1.5 \cdot 10^6$

Tabella 4.13: Frequenze proprie dei primi 4 modi di vibrare del pannello isotropo con curvatura cilindrica $\frac{1}{R_\gamma} = 0.3937$ appoggiato sui 4 lati al variare del parametro di carico di compressione assiale λ

Pannello cilindrico ($1/R_\gamma = 0.3937$) in laminato composito

Nel caso di pannello cilindrico in laminato composito cross-ply simmetrico con curvatura $1/R_\gamma = 0.3937$, l'effetto combinato di curvatura e laminazione causa una variazione delle forme modali favorendo i modi con un numero maggiore di semionde lungo la coordinata curvilinea x , Fig. 4.36.

Il primo modo di buckling coincide con la prima forma modale, Fig. 4.36a; il valore del carico critico di compressione assiale è stato confrontato con il risultato dell'analisi a buckling linearizzata effettuata tramite il software Abaqus CAE, Tab. 4.15. La presenza di una curvatura nel pannello, seppur minima, influisce molto sul buckling di strutture 2D in parete sottile sia nel caso isotropo che composito; in particolare contribuisce ad aumentare il valore del carico critico di compressione assiale rispetto alla piastra.

Inoltre, come è possibile osservare in Fig. 4.37, anche nel caso di pannello in laminato composito cross-ply $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ con curvatura cilindrica si presentano fenomeni di *crossing* tra gli andamenti delle frequenze all'aumentare del parametro di carico. In Fig. 4.38 è possibile confrontare i risultati ottenuti con il software MUL², che implementa la teoria CUF, e il software commerciale agli elementi finiti Abaqus CAE; anche in questo caso gli effetti dovuti alle non-linearità geometriche del problema causano una leggera discrepanza tra i risultati per step di carico di compressione assiale prossimi al valore critico.

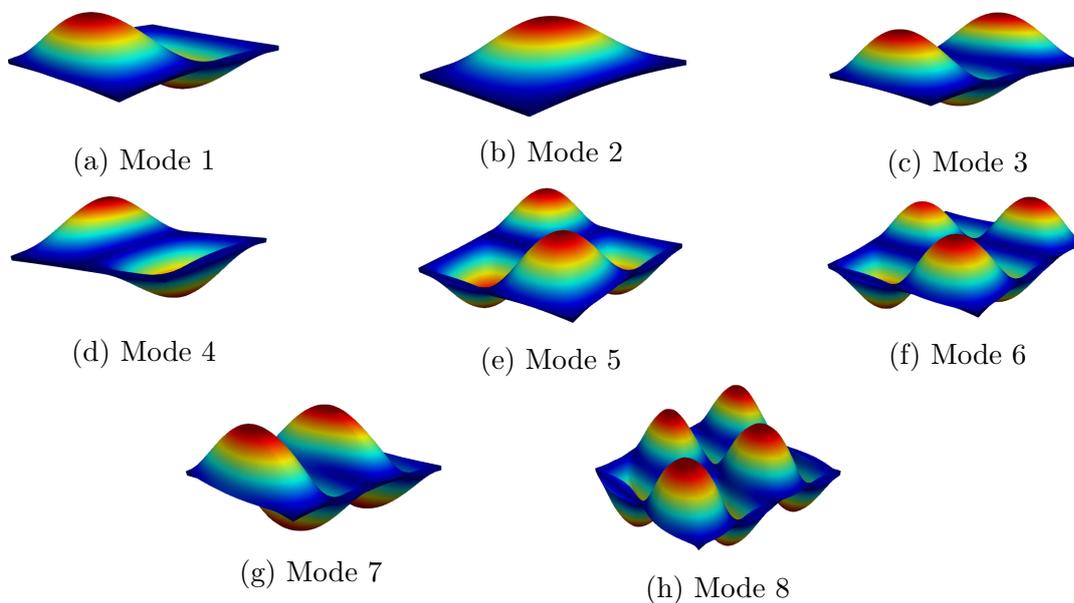


Figura 4.36: Forme modali dei primi 8 modi di un pannello in laminato composito cross-ply $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ con curvatura cilindrica $\frac{1}{R_\gamma} = 0.3937$ appoggiato sui 4 lati

	MUL ² [Hz]	Abaqus CAE [Hz]
Mode 1	402.63	400.90
Mode 2	416.16	417.70
Mode 3	729.91	722.12
Mode 4	917.12	915.86
Mode 5	950.95	947.77
Mode 6	1165.53	1157.2
Mode 7	1198.55	1173.7
Mode 8	1547.48	1524.2

Tabella 4.14: Frequenze proprie dei primi 8 modi di vibrare del pannello in laminato composito cross-ply $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ con curvatura cilindrica $\frac{1}{R_\gamma} = 0.3937$ appoggiato sui 4 lati

	MUL ²	Abaqus CAE
Mode 1 [N]	1487850.0	1470750.0

Tabella 4.15: Carico critico del primo modo di buckling del pannello in laminato composito cross-ply $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ con curvatura cilindrica $\frac{1}{R_\gamma} = 0.3937$ appoggiato sui 4 lati e soggetto a compressione assiale

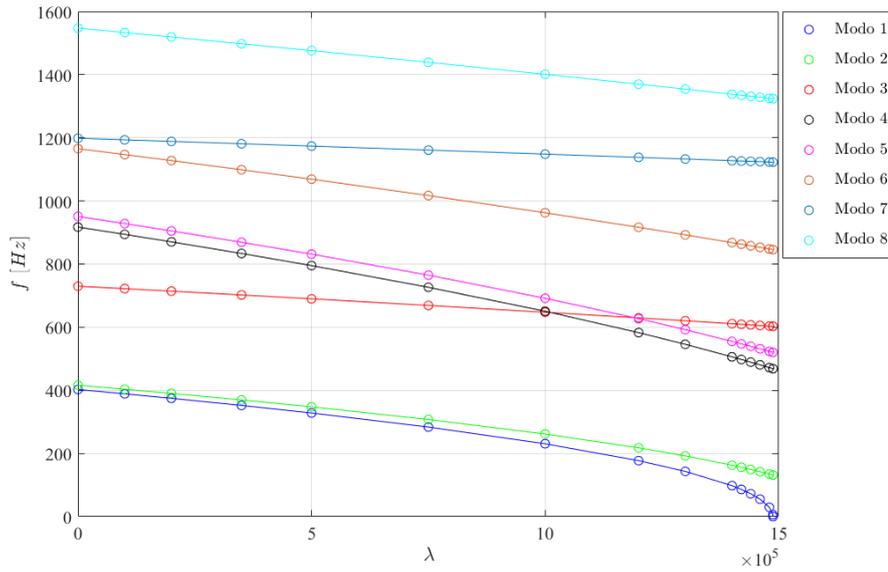


Figura 4.37: Andamento delle prime 8 frequenze proprie del pannello in laminato composito cross-ply $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ con curvatura cilindrica $\frac{1}{R_\gamma} = 0.3937$ appoggiato sui 4 lati e soggetto a compressione assiale ottenuto con MUL²

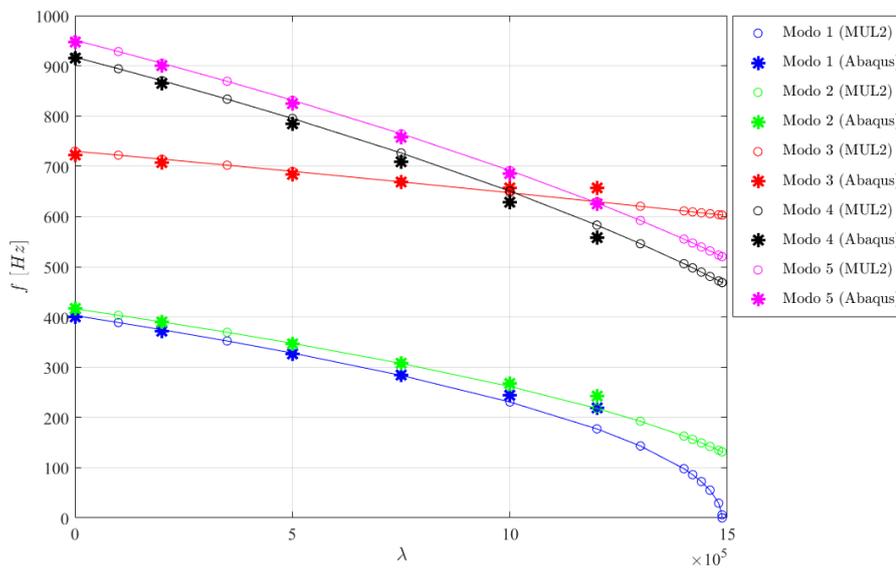


Figura 4.38: Andamento delle prime 5 frequenze proprie del pannello in laminato composito cross-ply $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ con curvatura cilindrica $\frac{1}{R_\gamma} = 0.3937$ appoggiato sui 4 lati e soggetto a compressione assiale ottenuto con MUL² e Abaqus CAE

	MUL ² [Hz]	Abaqus CAE [Hz]
Mode 1	374.6	372.06
Mode 2	390.2	390.30
Mode 3	714.2	706.65
Mode 4	870.4	865.38
Mode 5	905.1	900.52

(a) $\lambda_3 = 2.0 \cdot 10^5$

	MUL ² [Hz]	Abaqus CAE [Hz]
Mode 1	328.2	325.67
Mode 2	347.6	346.32
Mode 3	689.9	684.38
Mode 4	795.1	783.92
Mode 5	831.5	825.04

(b) $\lambda_5 = 5.0 \cdot 10^5$

	MUL ² [Hz]	Abaqus CAE [Hz]
Mode 1	283.6	284.49
Mode 2	307.6	307.23
Mode 3	668.9	668.01
Mode 4	726.4	709.68
Mode 5	764.8	757.31

(c) $\lambda_6 = 7.5 \cdot 10^5$

	MUL ² [Hz]	Abaqus CAE [Hz]
Mode 1	230.7	243.93
Mode 2	261.6	267.96
Mode 3	647.3	656.76
Mode 4	650.6	628.57
Mode 5	691.7	684.99

(d) $\lambda_7 = 1.0 \cdot 10^6$

	MUL ² [Hz]	Abaqus CAE [Hz]
Mode 1	177.2	219.50
Mode 2	217.9	241.64
Mode 3	629.4	656.44
Mode 4	582.8	558.62
Mode 5	627.0	624.83

(e) $\lambda_8 = 1.2 \cdot 10^6$

Tabella 4.16: Frequenze proprie dei primi 5 modi di vibrare del pannello in laminato composito cross-ply $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ con curvatura cilindrica $\frac{1}{R_\gamma} = 0.3937$ appoggiato sui 4 lati al variare del parametro di carico di compressione assiale λ

4.2.3 Risultati numerici pannello cilindrico ($1/R_\gamma = 1.937$)

Pannello cilindrico ($1/R_\gamma = 1.937$) isotropo

In questa sezione sono riportati i risultati relativi allo studio del fenomeno di buckling mediante la *virtual VCT* di un guscio cilindrico in materiale isotropo con curvatura pari a $1/R_\gamma = 1.937$, Fig. 4.25, con 4 lati appoggiati e soggetto a compressione assiale.

Attraverso un'analisi a buckling linearizzata preliminare è stato ottenuto il primo modo di buckling del guscio cilindrico in esame che corrisponde alla settima forma modale della struttura, Fig. 4.39g, e il corrispondente valore del carico critico $P_{cr} = 7919942 N$. Dallo studio del fenomeno del buckling mediante la *virtual VCT*,

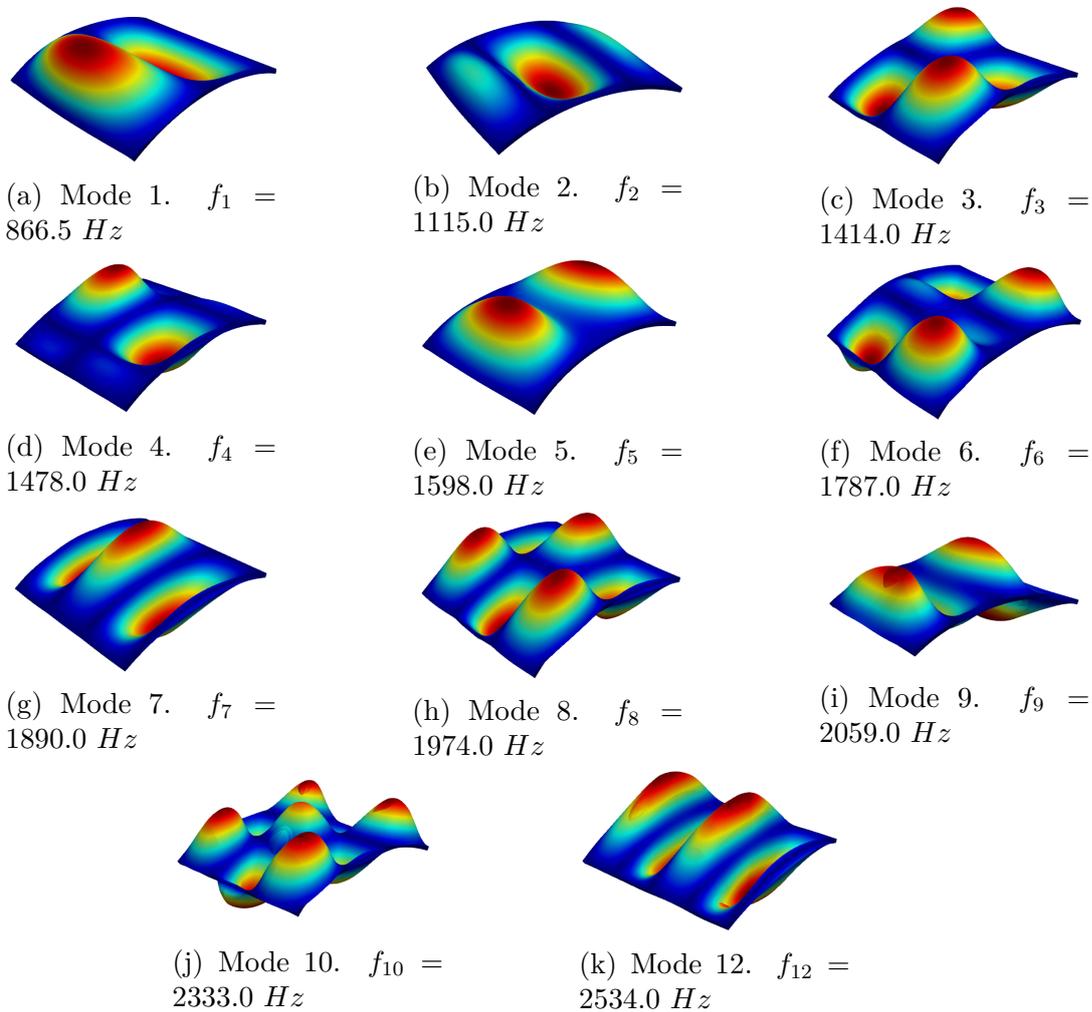


Figura 4.39: Forme modali di un pannello isotropo con curvatura cilindrica $\frac{1}{R_\gamma} = 1.937$ appoggiato sui 4 lati

è stato ottenuto l'andamento delle frequenze dei modi di vibrare all'aumentare del parametro di carico λ , Fig. 4.40.

I risultati ottenuti sono una conferma dello studio effettuato attraverso l'analisi a buckling linearizzata, in quanto la frequenza relativa al modo 7 diminuisce progressivamente fino a raggiungere un valore prossimo a 0 in corrispondenza del valore di carico critico P_{cr} calcolato.

Inoltre, il valore di curvatura $1/R_\gamma = 1.937$ comporta il verificarsi di numerosi fenomeni di *crossing* tra gli andamenti delle frequenze dei vari modi e in alcuni casi è possibile osservare un fenomeno di vero e proprio *mode change* dovuto alle interazioni con i modi di vibrare di ordine superiore; in particolare per $\lambda > 5.5 \times 10^6 N$ si hanno intense interazioni principalmente tra il modo 2 e il modo 7, tra il modo 4 e il modo 12 e tra il modo 5 e il modo 10.

Queste interazioni tra i modi di vibrare del guscio cilindrico sono ben visibili attraverso un'analisi del parametro MAC effettuata tra i risultati ottenuti per il valore del parametro di carico $\lambda_1 = 0$ e diversi livelli di carico, Fig. 4.41.

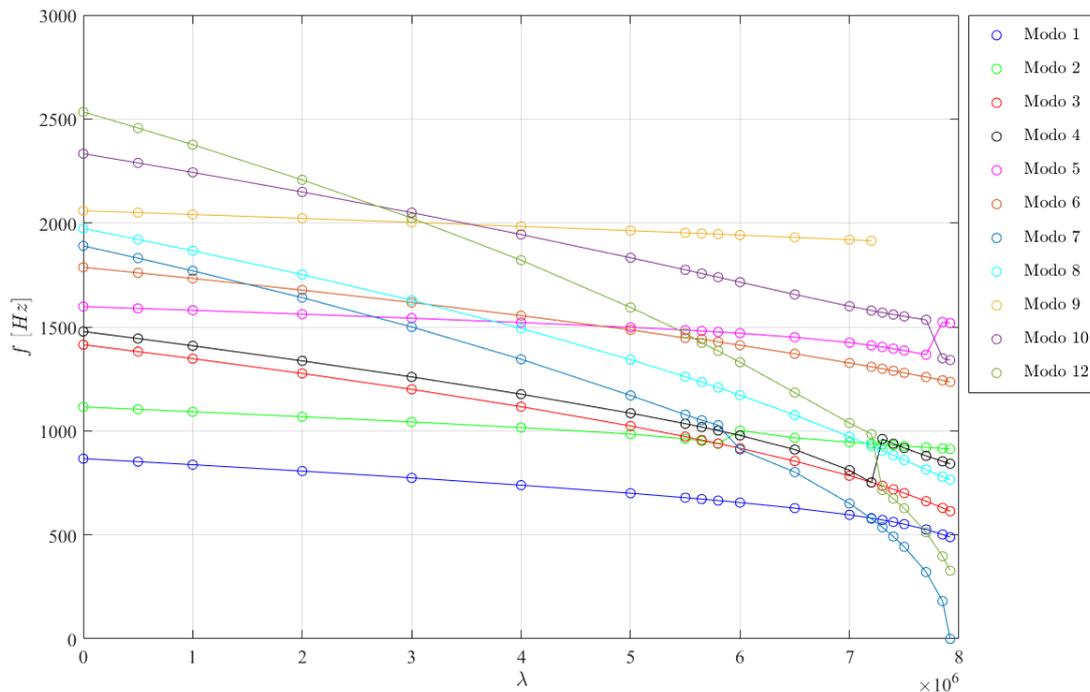


Figura 4.40: Andamento delle frequenze proprie di un pannello isotropo con curvatura cilindrica $\frac{1}{R_\gamma} = 1.937$ appoggiato sui 4 lati e soggetto a compressione assiale

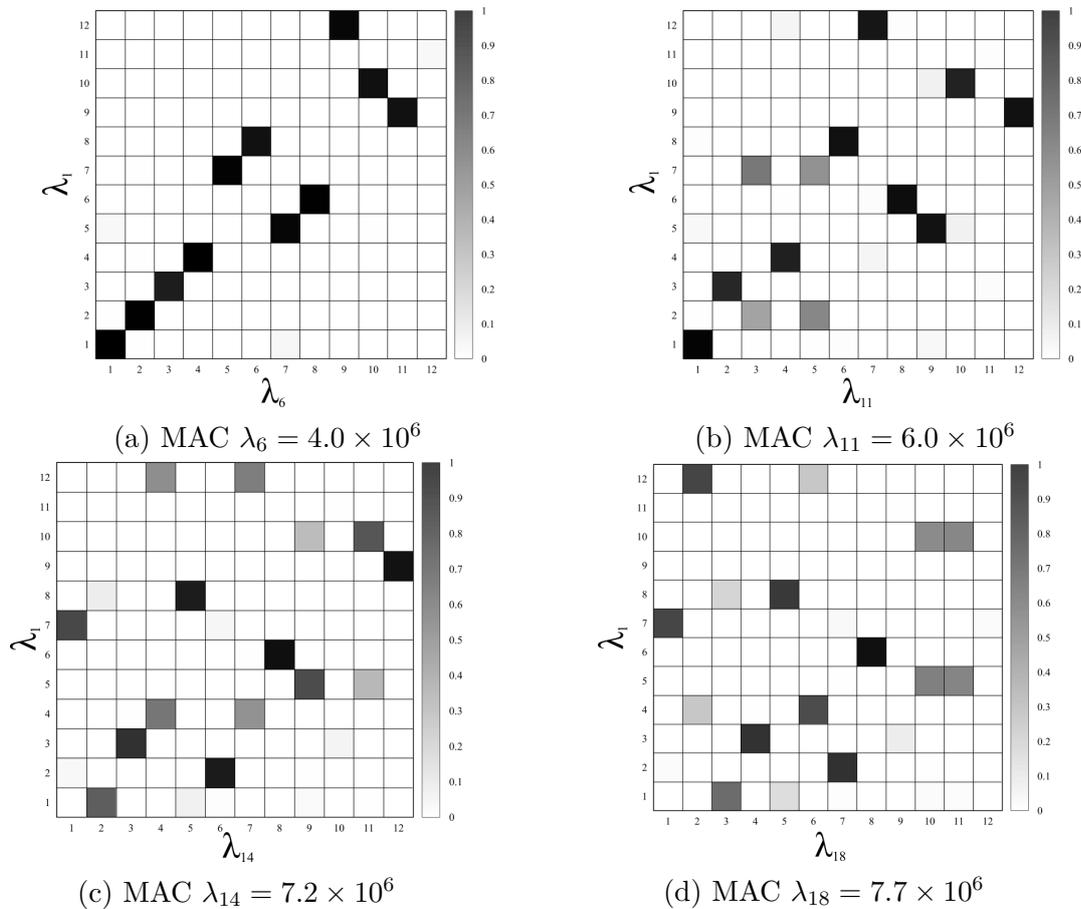


Figura 4.41: Valori del MAC tra $\lambda_1 = 0$ e 4 diversi step di carico di un pannello isotropo con curvatura cilindrica $\frac{1}{R_\gamma} = 1.937$ appoggiato sui 4 lati e soggetto a compressione assiale

Pannello cilindrico ($1/R_\gamma = 1.937$) in laminato composito

In ultimo è stata effettuata un'analisi a buckling mediante la *virtual VCT* del guscio cilindrico con curvatura $1/R_\gamma = 1.937$ in laminato composito simmetrico *cross-ply* $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$.

Il carico critico risultante dall'analisi buckling linearizzata è pari a $P_{cr} = 2923810 N$ e il corrispondente modo di buckling coincide con il primo modo di vibrare della struttura, Fig. 4.42a. Mediante una simulazione con *virtual VCT* sono stati ottenuti gli andamenti delle frequenze dei modi di vibrare della struttura in funzione del parametro di carico λ , Fig. 4.43. In prossimità del valore del carico critico P_{cr} calcolato, la frequenza relativa al primo modo di vibrare tende al valore nullo confermando i risultati ottenuti attraverso l'analisi a buckling linearizzata. Inoltre tra i modi di ordine superiore si verifica il fenomeno del *crossing*.

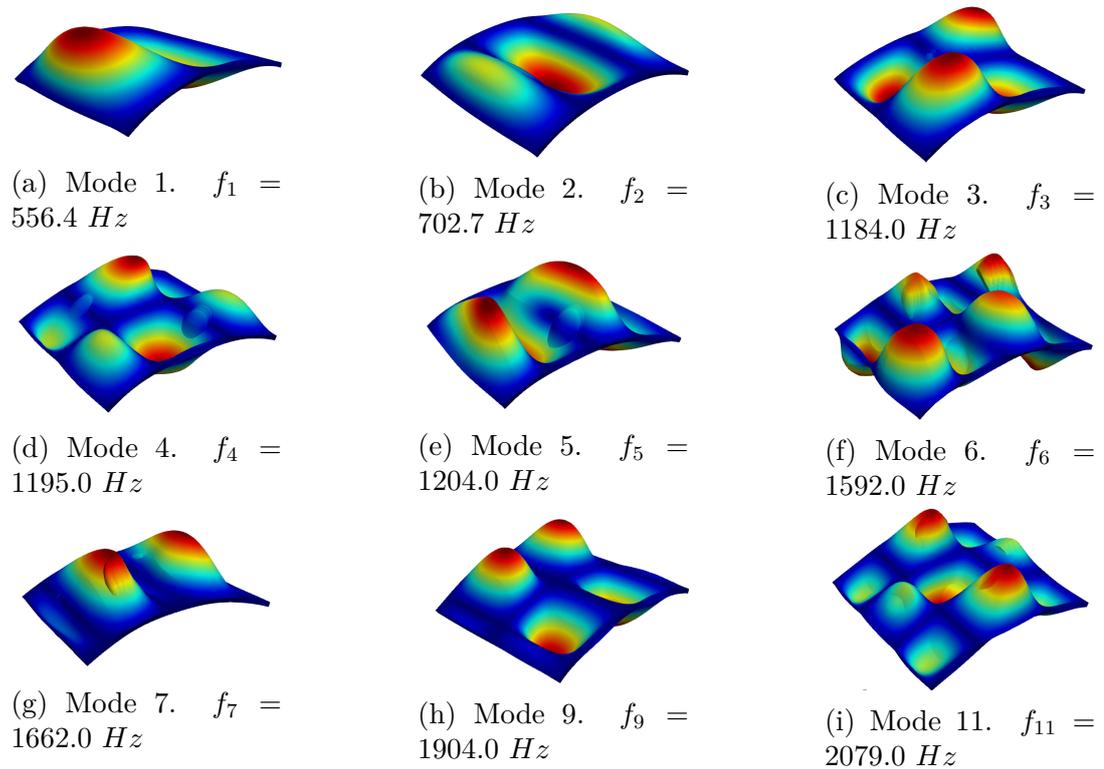


Figura 4.42: Forme modali dei modi di un pannello in laminato composito cross-ply $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ con curvatura cilindrica $\frac{1}{R_\gamma} = 1.937$ appoggiato sui quattro lati

Dai risultati ottenuti in queste analisi si può dedurre che il valore della curvatura cilindrica, in corrispondenza del lato su cui è applicato il carico di compressione assiale, assume un'importanza rilevante nel fenomeno del buckling, in quanto valori di curvatura elevati determinano, potenzialmente, un aumento del carico critico di buckling delle strutture considerate soggette a compressione assiale.

Inoltre, a parità di geometria, l'utilizzo di un materiale isotropo piuttosto che un laminato multistrato in materiale composito determina in generale modi di buckling differenti per strutture 2D e di conseguenza valori di carico critico differenti.

I risultati esposti sono stati ottenuti adottando l'approccio *trivial linearized* (TL) che può condurre a discrepanze con valori di carico critico ottenuti mediante prove sperimentali, ma fornisce una lettura semplificata dell'influenza dei vari parametri sul fenomeno di buckling e sul comportamento vibrazionale che caratterizzano le strutture considerate a fronte di un costo computazionale contenuto.

Per ottenere dei risultati con accuratezza migliore è necessario un approccio *full non-linear* (FNL) mediante il quale è possibile ottenere risultati più vicini ai risultati sperimentali soprattutto in casi con geometrie più complesse e in condizioni di carico più severe.

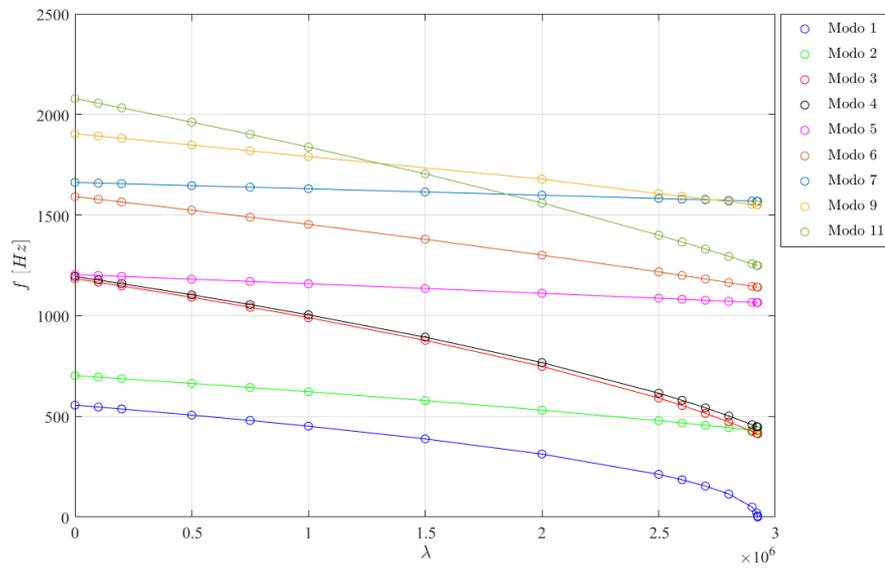


Figura 4.43: Andamento delle frequenze proprie di un pannello in laminato composito cross-ply $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ con curvatura cilindrica $\frac{1}{R_\gamma} = 1.937$ appoggiato sui 4 lati e soggetto a compressione assiale

Capitolo 5

Formulazioni avanzate per analisi termiche

Nei capitoli precedenti si è visto come il buckling di strutture soggette a determinate condizioni di carico e vincoli sia ancora oggi oggetto di intensi studi soprattutto per quanto riguarda i modelli numerici in grado di fornire una previsione accurata del fenomeno.

La conoscenza dell'ambiente di carico risulta fondamentale per ottenere risultati numerici prossimi a quelli di eventuali prove sperimentali, in modo da poter garantire la sopravvivenza del sistema strutturale nelle varie fasi della missione operativa. Nel capitolo 4 sono state effettuate dell'analisi di buckling tramite la *virtual* VCT considerando elementi strutturali soggetti a carichi meccanici, in particolare a carichi di compressione assiale.

Tuttavia durante le fasi di una missione operativa le fonti di carico possono essere diverse: in particolare per veicoli spaziali e aeronautici che operano in regime di volo supersonico, i carichi termici assumono un'importanza rilevante nel progetto strutturale. Senza un'adeguata previsione delle prestazioni della struttura a determinati carichi termici il rischio di cedimenti risulterebbe inaccettabile.

Le strutture in parete sottile, in particolari condizioni di vincolo, possono presentare, infatti, fenomeni di instabilità quando soggette a carichi termici che inducono particolari stati di tensione.

Le prove sperimentali per investigare le prestazioni a buckling di strutture soggette a determinati carichi termici sono molto difficili dal punto di vista applicativo e spesso molto costose. Per questa ragione, negli anni, i modelli numerici, in grado di prevedere il comportamento di strutture soggette a carichi termici, hanno fornito uno strumento utile per lo studio di tale fenomeno.

In questo capitolo è stato effettuato uno studio sul comportamento di varie strutture soggette a carichi termici, effettuando analisi statiche lineari, analisi a vibrazioni

libere e analisi per lo studio del buckling sfruttando la *virtual* VCT. Per le simulazioni numeriche sono stati considerati modelli agli elementi finiti di travi e piastre soggette a diversi condizioni di vincolo e carichi termici, sfruttando la teoria CUF implementata nel codice di calcolo MUL².

Per introdurre i carichi termici nel problema strutturale è necessario ricavare le equazioni di equilibrio mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV), Eq. (2.19). In particolare i carichi termici vengono introdotti nel lavoro virtuale delle forze interne della struttura ipotizzando di conseguenza il lavoro virtuale esterno nullo.

Per fare ciò, è necessario ridefinire le leggi costitutive del modello introducendo, in aggiunta alle classiche relazioni relative ai carichi meccanici, le grandezze relative all'applicazione dei carichi termici.

In particolare nel vettore delle deformazioni elastiche $\boldsymbol{\epsilon}^e$ è necessario introdurre il termine relativo alle deformazioni dovute all'espansione termica $\boldsymbol{\epsilon}_T$, Eq. (5.1), causata dal carico termico applicato alla struttura.

$$\boldsymbol{\epsilon}^e = \boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}_T \quad (5.1)$$

Di conseguenza è possibile definire una nuova legge costitutiva data dall'Eq. (5.2), [56].

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_H - \boldsymbol{\sigma}_T = \mathbf{C}\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\beta}\Delta T \quad (5.2)$$

dove con il pedice H sono indicate le grandezze relative alla legge di Hooke e con T quelle relative alla deformazione termica.

Nell'Eq. (5.2), $\boldsymbol{\beta}$ rappresenta il vettore dei coefficienti della relazione sforzo-temperatura.

In particolare è il prodotto tra il tensore dei moduli elastici del materiale \mathbf{C} e il vettore dei coefficienti di espansione termica lineari $\boldsymbol{\alpha}$, Eq. (5.3).

$$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{C}\boldsymbol{\alpha} \quad (5.3)$$

Sostituendo nell'Eq. (2.20), considerando le relazioni geometriche (2.6) tra spostamenti e deformazioni, si ottiene l'espressione del lavoro virtuale delle forze interne Eq. (5.4).

$$\begin{aligned} \delta L_{int} &= \int_V \delta \boldsymbol{\epsilon}^T (\mathbf{C}\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\beta}\Delta T) dV = \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b}^T (\mathbf{C}\mathbf{b}\mathbf{u} - \boldsymbol{\beta}\Delta T) dV = \\ &= \underbrace{\int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b}^T (\mathbf{C}\mathbf{b}\mathbf{u}) dV}_{\mathbf{K}_{ST}^{ij\tau s}} - \underbrace{\int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b}^T (\boldsymbol{\beta}\Delta T) dV}_{\mathbf{F}_T^{sj}} \end{aligned} \quad (5.4)$$

L'Eq. (5.4) può essere scritta utilizzando il metodo agli elementi finiti in accordo con la teoria CUF come visto nel capito 2. Prendendo in considerazione un modello 1D, l'Eq. (5.5) esprime l'approssimazione del vettore spostamento $\mathbf{u}(x, y, z)$ mediante una discretizzazione agli elementi finiti lungo la coordinata y e un'espansione generica lungo la cross section in accordo con la teoria CUF.

$$\mathbf{u}(x, y, z) = N_i(y)F_\tau(x, z)\mathbf{q}^{\tau i} \quad (5.5)$$

Usando l'Eq (5.5) all'interno dell'Eq. (5.4) è possibile ricavare il FN della matrice di rigidezza secante $\mathbf{K}_{ST}^{ij\tau s}$ per strutture soggette a carichi termici. L'Eq. (5.6) fornisce la definizione del FN del vettore dei carichi termici \mathbf{F}_T^{sj} .

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_T^{sj} &= \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b}^T (\boldsymbol{\beta} \Delta T) dV = \delta \mathbf{q}^{\tau i} \int_l N_i(y) dy \int_S \mathbf{b}^T (F_\tau \mathbf{I}) \boldsymbol{\beta} \Delta T dA = \\ &= \int_V \mathbf{B}_{\tau i}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\alpha} \Delta T dV\end{aligned}\quad (5.6)$$

Per effettuare le simulazioni numeriche mediante la *virtual* VCT è stato considerato l'approccio *trivial linearized* (TL) per la linearizzazione della variazione virtuale dell'energia di deformazione δL_{int} , come esposto nel paragrafo 3.3.

L'introduzione dei carichi termici determina una nuova definizione della matrice di rigidezza geometrica \mathbf{K}_σ . In particolare, riprendendo la definizione del FN della matrice di rigidezza geometrica dall'Eq. (3.16), si considerano solamente i contributi lineari (approccio TL) con l'aggiunta dei termini relativi ai carichi termici, Eq. (5.7).

$$\mathbf{K}_{\sigma T} \longleftarrow \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon}_l - \boldsymbol{\beta} \Delta T \quad (5.7)$$

5.1 Risultati numerici

In questa sezione sono riportati i risultati delle analisi numeriche di strutture soggette a carichi termici ottenuti mediante i software MUL² e Abaqus CAE.

Le strutture analizzate consistono in una trave a sezione quadrata incastrata alle due estremità e una piastra quadrata i cui lati risultano bloccati, come riportato in Fig 5.1.

Le strutture sono soggette ad un carico termico dato da una variazione uniforme della temperatura ΔT su tutto il modello; in Tab 5.1 sono riportate le caratteristiche geometriche delle strutture considerate.

Date le condizioni di carico termico e di vincolo considerate, è possibile prevedere la generazione di tensioni di compressione dovute alla tendenza delle strutture ad espandersi all'aumentare della temperatura, tendenza che però risulta ostacolata dalle condizioni di vincolo.

Per ognuno degli elementi strutturali analizzati sono stati considerati il caso di materiale isotropo che simula le caratteristiche di una lega di alluminio e un caso di materiale laminato composito; le caratteristiche meccaniche del materiale isotropo e del materiale composito, che compone i vari strati del laminato, sono riportate in Tab. 5.2.

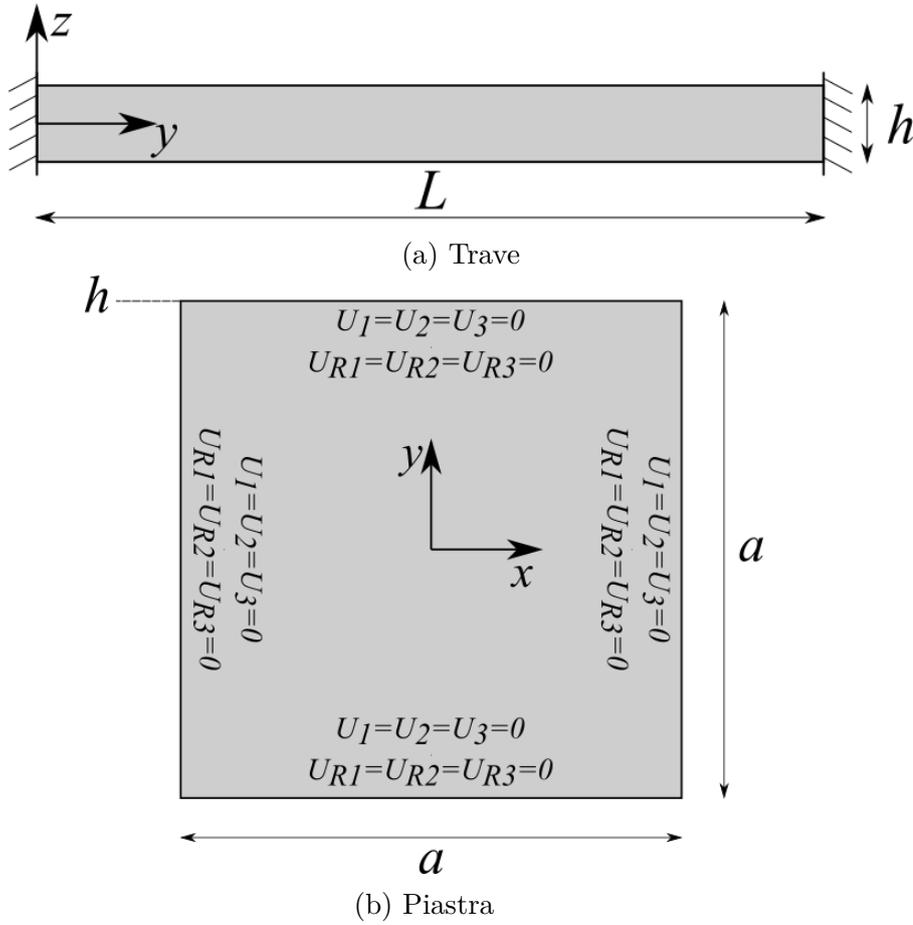


Figura 5.1: Caratteristiche geometriche della trave e della piastra

Trave		Piastra	
L	1 m	a	1 m
h	0.1 m	h	0.01 m

Tabella 5.1: Caratteristiche geometriche della trave e della piastra

E	73 <i>GPa</i>	E_1	144.8 <i>GPa</i>
ν	0.34	$E_2 = E_3$	9.65 <i>GPa</i>
α	$25.0 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$	$G_{12} = G_{13}$	4.14 <i>GPa</i>
ρ	$2700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	G_{23}	3.45 <i>GPa</i>
(a) Materiale isotropo		ν_{12}	0.3
		α_{11}	$-2.6279 \cdot 10^{-7} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$
		α_{12}	$30.535 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$
		ρ	$1450 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
		(b) Materiale composito	

Tabella 5.2: Proprietà meccaniche del materiale isotropo e composito

5.1.1 Trave isotropa

Il modello consiste in una trave tozza a sezione quadrata con rapporto di allungamento $L/h = 10$. Le simulazioni numeriche sono state effettuate considerando una condizione di vincolo di incastro in entrambe le estremità.

In Fig. 5.2 sono riportate le forme modali dei primi tre modi di vibrare della trave tozza in materiale isotropo.

Per questo modello è stata scelta una discretizzazione agli elementi finiti di tipo 1D. In particolare è stata effettuata un'analisi di convergenza considerando elementi finiti a 3 e 4 nodi e diverse tipologie di espansioni lungo la sezione trasversale in accordo con la teoria CUF. Dai risultati in Tab. 5.3 è possibile osservare che la frequenza del primo modo torsionale risulta essere molto più suscettibile all'ordine dell'espansione lungo la sezione trasversale rispetto ai primi due modi flessionali della trave. Al contrario al variare della discretizzazione con FE lungo l'asse della trave è possibile ottenere una migliore stima delle frequenze dei modi flessionali.

In base ai risultati ottenuti dall'analisi di convergenza, per le simulazioni successive è stata scelta una discretizzazione di FE di 10 elementi B4 lungo l'asse della trave e un'espansione di Lagrange lungo la sezione trasversale di 4 elementi Q9.

In questo modo è possibile ottenere risultati con accuratezza sufficiente a fronte di un costo computazionale ridotto.

L'accuratezza della discretizzazione scelta, secondo la teoria CUF, è stata verificata effettuando un confronto con i risultati dell'analisi modale ottenuti tramite il

software commerciale agli elementi finiti Abaqus CAE, Tab. 5.4; da questi risultati è possibile concludere che la discretizzazione scelta secondo la teoria CUF fornisce risultati prossimi a quelli ottenuti tramite Abaqus CAE mediante una discretizzazione con elementi finiti solidi quadratici a 20 nodi (Hex20).

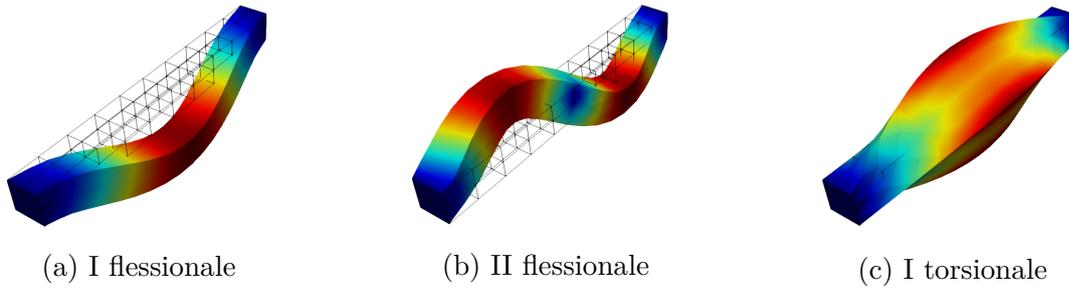


Figura 5.2: Forme modali dei primi 3 modi di vibrare della trave tozza ($L/h = 10$) isotropa C-C

FE / EXP	I flessionale [Hz]	II flessionale [Hz]	I torsionale [Hz]
10B3 / 4Q9	512.7	1314.0	1478.0
10B3 / 1Q16	512.5	1313.0	1468.0
10B4 / 4Q9	508.8	1303.0	1476.0
20B3 / 4Q9	508.7	1303.0	1476.0
20B3 / TE3	508.7	1302.0	1588.0
20B4 / 4Q16	506.9	1298.0	1464.0
20B4 / TE5	506.9	1298.0	1465.0

Tabella 5.3: Analisi di convergenza per l'analisi modale della trave tozza ($L/h = 10$) isotropa C-C con teoria CUF

Modello	I flessionale [Hz]	II flessionale [Hz]	I torsionale [Hz]
MUL ² 10B4 / 4Q9	508.8	1303.0	1476.0
Abaqus CAE Hex8	515.7	1327.3	1295.4
Abaqus CAE Tet10	515.46	1323.3	1589.4
Abaqus CAE Hex20	509.05	1303.9	1471.5

Tabella 5.4: Frequenze proprie dei primi 3 modi di vibrare della trave tozza ($L/h = 10$) isotropa C-C

L'applicazione di un carico termico ad una struttura in particolari condizioni di vincolo comporta la nascita di uno stato di tensione generato dall'espansione della struttura stessa.

In particolare, considerando le condizioni di vincolo della trave in esame con entrambe le estremità incastrate, l'applicazione di un carico termico, causato da una variazione uniforme della temperatura su tutto il modello, comporta uno stato di tensione di compressione che può portare al buckling della struttura.

Attraverso un'analisi a buckling linearizzata, sono stati ricavati i primi 3 modi di buckling della trave tozza ($L/h = 10$) C-C per effetto di un carico termico dato dalla variazione uniforme della temperatura su tutta la struttura, Fig. 5.3; in particolare il primo modo di buckling corrisponde al primo modo vibrazionale della trave, Fig. 5.2a.

In Tab. 5.5 sono riportati i valori del carico critico corrispondente ai primi tre modi di buckling della trave isotropa tozza considerando un carico termico di riferimento generato da una variazione uniforme della temperatura $\Delta T = 1^\circ\text{C}$.

Dai risultati ottenuti si può dedurre che per una trave isotropa con rapporto di snellezza $L/h = 10$, soggetta ad un carico termico costante, il fenomeno di buckling si presenta per un carico termico corrispondente a $\Delta T_{cr} = 1139.0^\circ\text{C}$. Dato il valore molto elevato di ΔT_{cr} ottenuto per la trave in materiale isotropo, assimilabile ad una lega di alluminio, in questo caso non si raggiungerà mai la configurazione di buckling. Tuttavia è possibile avere un effetto considerevole, seppur secondario, se si considera un ambiente di carico più complesso in cui il carico termico rappresenta solo uno dei contributi.

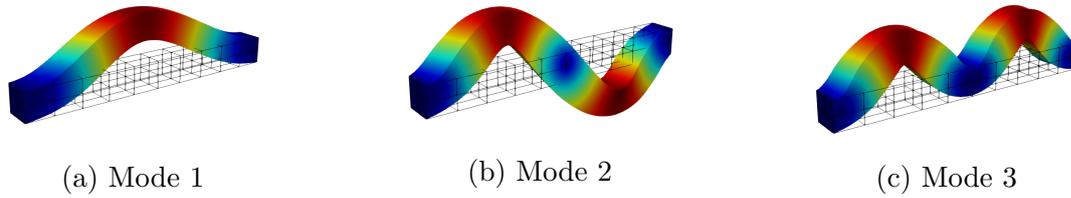


Figura 5.3: Forme dei primi 3 modi di buckling termico della trave tozza ($L/h = 10$) isotropa C-C

	MUL ² °C	Abaqus CAE °C
Modo 1	1139.0	1208.8
Modo 2	2052.2	2285.1
Modo 3	3429.8	4100.5

Tabella 5.5: Variazione della temperatura ΔT_{cr} corrispondente al carico termico critico dei primi 3 modi di buckling della trave tozza ($L/h = 10$) isotropa C-C

Analogamente a quanto esposto nel capitolo 4, la teoria CUF permette di valutare l'effetto del carico termico sulle vibrazioni di una struttura. Utilizzando l'approccio TL tramite il software MUL², che implementa la teoria CUF, è stato possibile ottenere l'andamento delle frequenze dei primi 3 modi di vibrare della trave isotropa tozza C-C al variare del parametro di carico termico λ , Fig. 5.4.

In particolare gli andamenti delle frequenze confermano i risultati dell'analisi a buckling linearizzata: in prossimità del parametro di carico $\lambda_{cr} = 1139.0$, corrispondente al carico critico dato dalla variazione uniforme di temperatura ΔT_{cr} , la frequenza del primo modo flessionale della trave tende ad annullarsi, in accordo con quanto esposto nel capitolo 3.

I risultati ottenuti tramite il software MUL² sono stati validati effettuando il confronto con i risultati ottenuti tramite il software commerciale Abaqus CAE per diversi step di carico termico. In particolare si può osservare come i risultati ottenuti siano in accordo per step di carico inferiori a circa $\lambda = 0.5\lambda_{cr}$; per step di carico prossimi al valore critico λ_{cr} , la differenza tra i risultati ottenuti inizia a diventare più marcata. Ciò è dovuto agli effetti delle non-linearità del problema dati dalla geometria della trave tozza e dalle condizioni di vincolo che diventano sempre più intensi all'aumentare del carico applicato.

L'effetto della geometria e delle condizioni di vincolo è stato verificato considerando una trave dello stesso materiale isotropo con rapporto di snellezza $L/h = 100$. In questo caso i risultati ottenuti tramite il software MUL² risultano essere molto prossimi a quelli ottenuti con il software Abaqus CAE, Fig. 5.5.

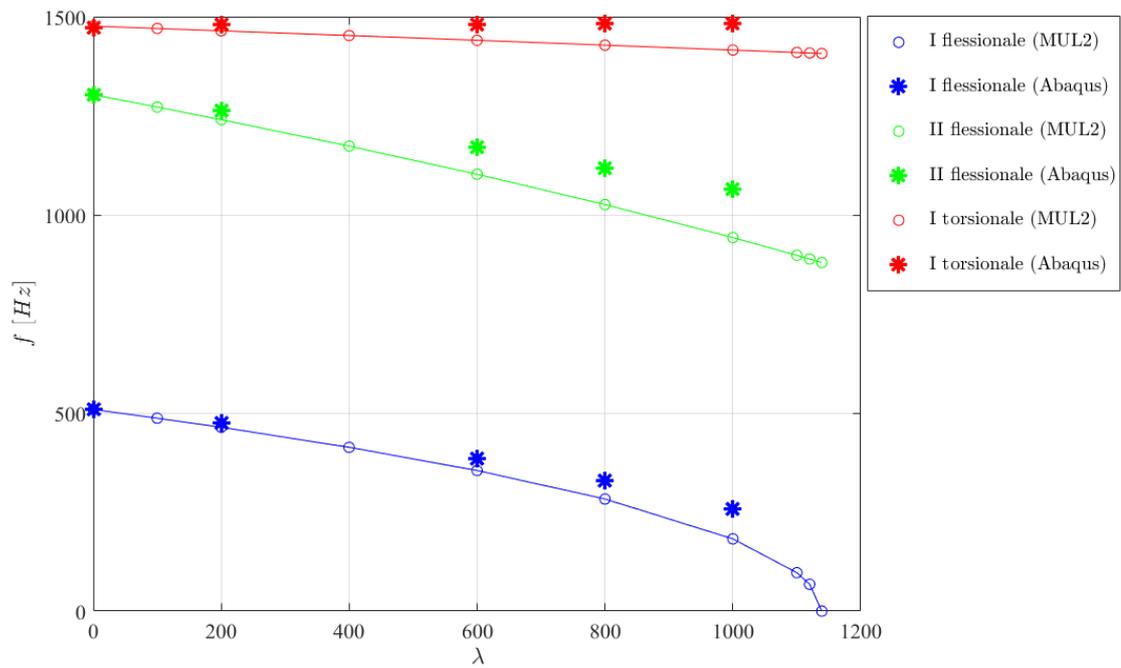


Figura 5.4: Andamento delle frequenze della trave tozza ($L/h = 10$) isotropa C-C al variare del parametro di carico termico ottenuto con MUL² e Abaqus CAE

	MUL ² [Hz]	Abaqus CAE [Hz]
I flessionale	463.9	473.8
II flessionale	1240.1	1264.5
I torsionale	1464.4	1480.8

(a) $\lambda_3 = 200.0$

	MUL ² [Hz]	Abaqus CAE [Hz]
I flessionale	354.9	385.31
II flessionale	1102.4	1170.2
I torsionale	1440.4	1479.2

(b) $\lambda_5 = 600.0$

	MUL ² [Hz]	Abaqus CAE [Hz]
I flessionale	283.00	329.44
II flessionale	1025.96	1119.0
I torsionale	1428.21	1481.7

(c) $\lambda_6 = 800.0$

	MUL ² [Hz]	Abaqus CAE [Hz]
I flessionale	182.4	258.68
II flessionale	942.7	1063.7
I torsionale	1415.9	1484.1

(d) $\lambda_7 = 1000.0$

Tabella 5.6: Frequenze dei primi 3 modi di vibrare della trave isotropa tozza ($L/h = 10$) C-C al variare del parametro di carico termico λ

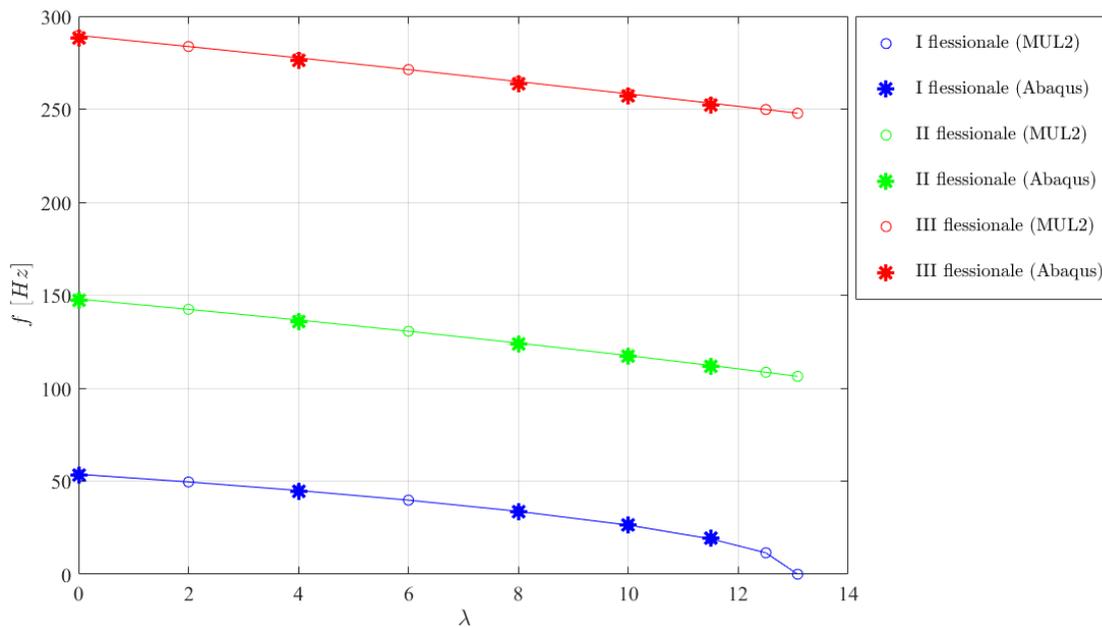


Figura 5.5: Andamento delle frequenze della trave isotropa snella ($L/h = 100$) C-C al variare del parametro di carico termico ottenuto con MUL² e Abaqus CAE

5.1.2 Trave in laminato composito $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$

A livello progettuale la scelta di un materiale composito è dettata dalla necessità di contenere i pesi mantenendo delle prestazioni meccaniche adeguate.

L'adozione di un materiale composito nei tre strati che compongono il laminato della struttura in esame, con sequenza di laminazione $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$, comporta una variazione del comportamento della struttura in funzione della direzione considerata.

Dai risultati dell'analisi modale, mantenendo le stesse caratteristiche geometriche e condizioni di vincolo del caso di trave isotropa con rapporto di snellezza $L/h = 10$, i modi flessionali presentano frequenze vibrazionali differenti in funzione del piano di riferimento considerato, come mostrato in Fig. 5.6 e Tab. 5.7.

Il modello numerico della trave prevede una discretizzazione composta da 10 elementi a quattro nodi B4 lungo l'asse trave y e un'espansione di Lagrange di elementi a nove nodi Q9, due per ogni strato del laminato composito, secondo la teoria CUF.

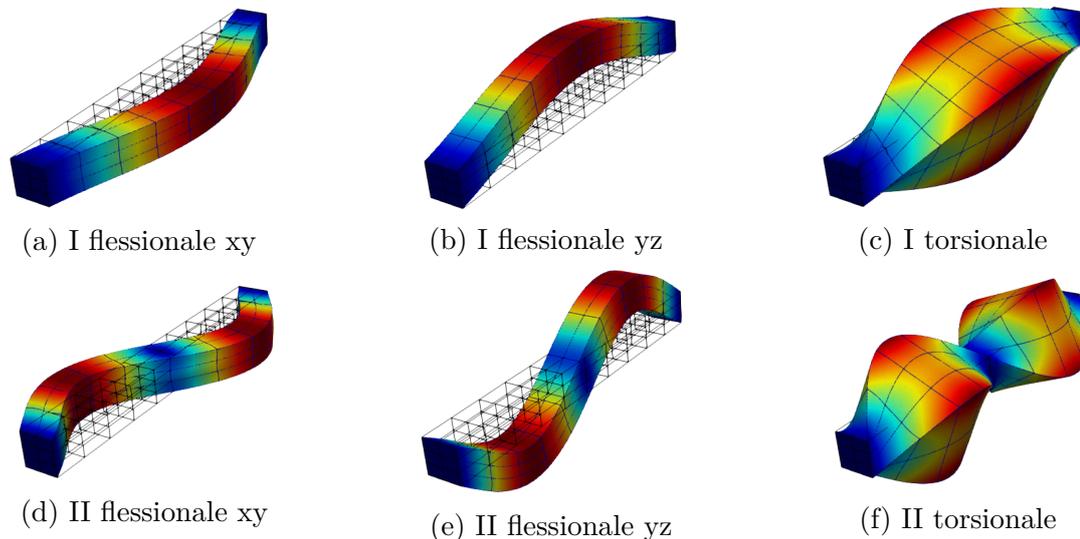


Figura 5.6: Forme modali dei primi 6 modi di vibrare della trave tozza ($L/h = 10$) in laminato composito $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ C-C

Anche in questo caso il comportamento a buckling della trave in laminato composito soggetta ad un carico termico dato dalla variazione uniforme della temperatura, Fig. 5.7 e Tab. 5.8, è stato confermato dall'andamento delle frequenze dei modi della trave al variare del parametro di carico termico λ , Fig. 5.8.

Dal confronto con i risultati ottenuti con il software Abaqus CAE, anche in questo caso gli effetti delle non-linearità e della discretizzazione del modello risultano intensi per parametri di carico prossimi al valore critico λ_{cr} , causando una discrepanza più evidente tra i risultati.

	MUL ² [Hz]	Abaqus [Hz]
I flessionale piano xy	571.35	571.83
I flessionale piano yz	605.34	605.16
I torsionale	773.82	773.20
II flessionale piano xy	1234.41	1235.9
II flessionale piano yz	1270.84	1273.80
II torsionale	1551.99	1552.1

Tabella 5.7: Frequenze proprie dei primi 6 modi di vibrare della trave tozza ($L/h = 10$) in laminato composito $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ C-C

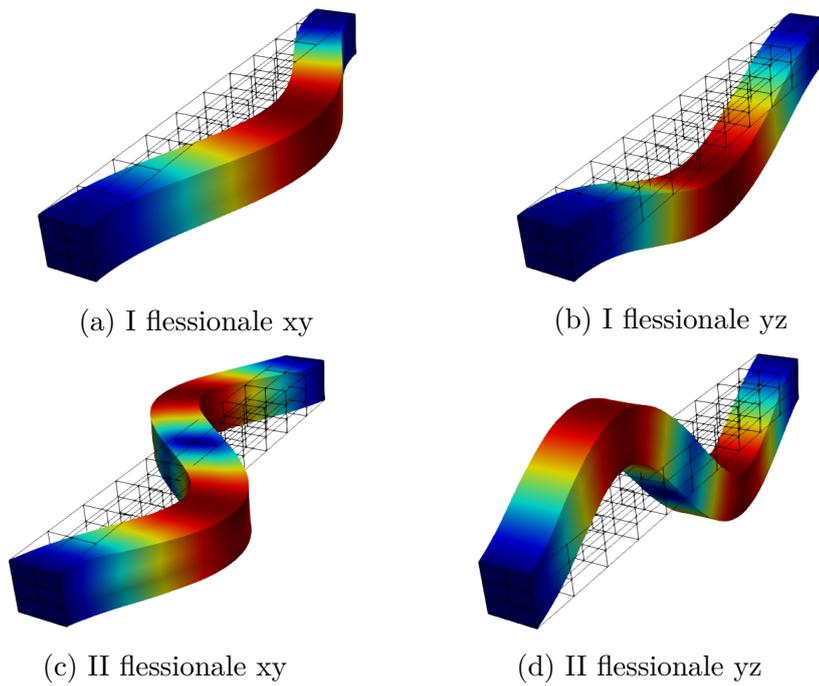


Figura 5.7: Forme dei primi 4 modi di buckling termico della trave tozza ($L/h = 10$) in laminato composito $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ C-C

	MUL ² °C	Abaqus CAE °C
I flessionale piano xy	555.57	627.36
I flessionale piano yz	642.60	699.11
II flessionale piano xy	714.77	876.22
II flessionale piano yz	773.96	884.63

Tabella 5.8: Variazione della temperatura ΔT_{cr} corrispondente al carico termico critico dei primi 4 modi di buckling della trave tozza ($L/h = 10$) in laminato composito $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ C-C

Una minore discrepanza tra i risultati ottenuti tramite il codice di calcolo MUL² e Abaqus CAE è visibile se si considera una trave snella ($L/h = 100$), anche per parametri di carico termico prossimi al valore critico, Fig. 5.9.

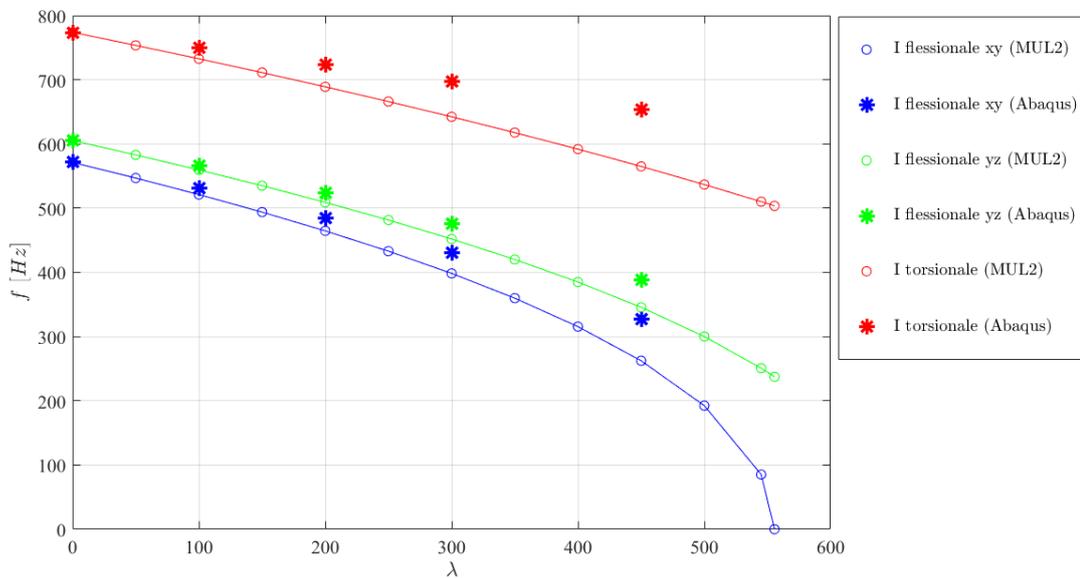


Figura 5.8: Andamento delle frequenze della trave tozza ($L/h = 10$) in laminato composito $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ C-C al variare del parametro di carico termico ottenuto con MUL² e Abaqus CAE

	MUL ² [Hz]	Abaqus CAE [Hz]
I flessionale xy	521.18	530.45
I flessionale yz	559.53	566.63
I torsionale	732.62	749.00

(a) $\lambda_3 = 100.0$

	MUL ² [Hz]	Abaqus CAE [Hz]
I flessionale xy	464.61	483.91
I flessionale yz]	509.03	523.91
I torsionale	688.94	723.69

(b) $\lambda_5 = 200.0$

	MUL ² [Hz]	Abaqus CAE [Hz]
I flessionale xy	398.41	430.10
I flessionale yz	452.00	475.72
I torsionale	642.28	696.90

(c) $\lambda_7 = 300.0$

	MUL ² [Hz]	Abaqus CAE [Hz]
I flessionale xy	262.32	326.61
I flessionale yz	345.62	387.92
I torsionale	565.02	653.67

(d) $\lambda_{10} = 450.0$

Tabella 5.9: Frequenze dei primi 3 modi di vibrare della trave tozza ($L/h = 10$) in laminato composito $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ C-C al variare del parametro di carico termico λ

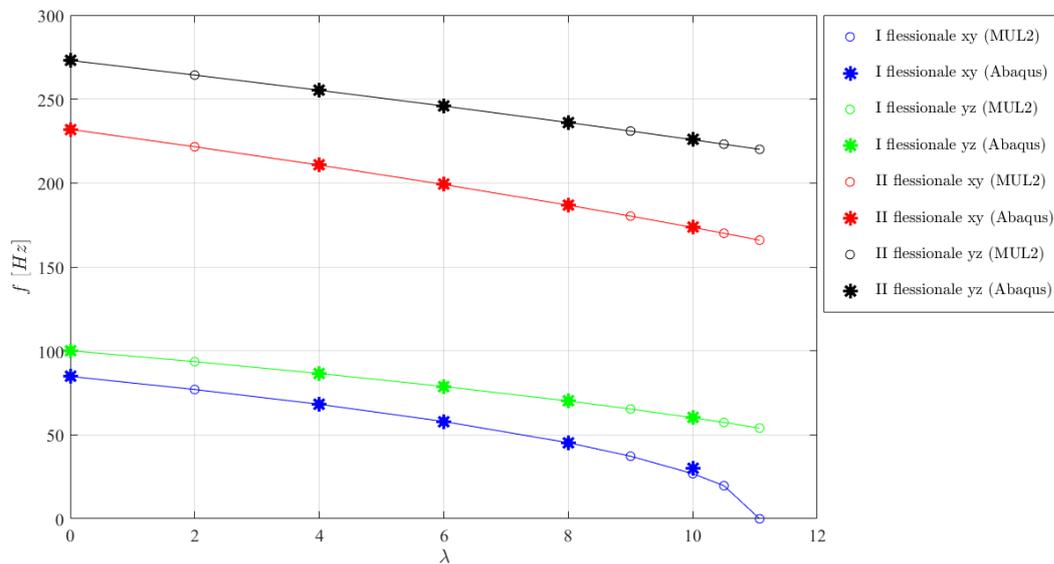


Figura 5.9: Andamento delle frequenze della trave snella ($L/h = 100$) in laminato composito $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ C-C al variare del parametro di carico termico ottenuto con MUL² e Abaqus CAE

5.1.3 Piastra isotropa

In questa sezione sono riportati i risultati relativi all'analisi di una piastra approssimata mediante un modello agli elementi finiti bidimensionale.

La geometria della piastra sottile è data dalla Fig. 5.1b, con un rapporto tra lunghezza del lato e spessore della piastra pari a $a/h = 100$. Le proprietà del materiale isotropo considerato sono riportate in Tab. 5.2.

I risultati dell'analisi a buckling linearizzata della piastra isotropa con tutti e quattro i lati incastrati e soggetta ad un carico termico di riferimento dato da una variazione uniforme della temperatura $\Delta T = 1^\circ\text{C}$ sono riportati in Fig. 5.11 e Tab. 5.11, da cui si evince che il primo modo di buckling della piastra, corrispondente ad una variazione di temperatura uniforme $\Delta T_{cr} = 13.2^\circ\text{C}$, coincide con il modo vibrazionale (1,1), Fig. 5.10a.

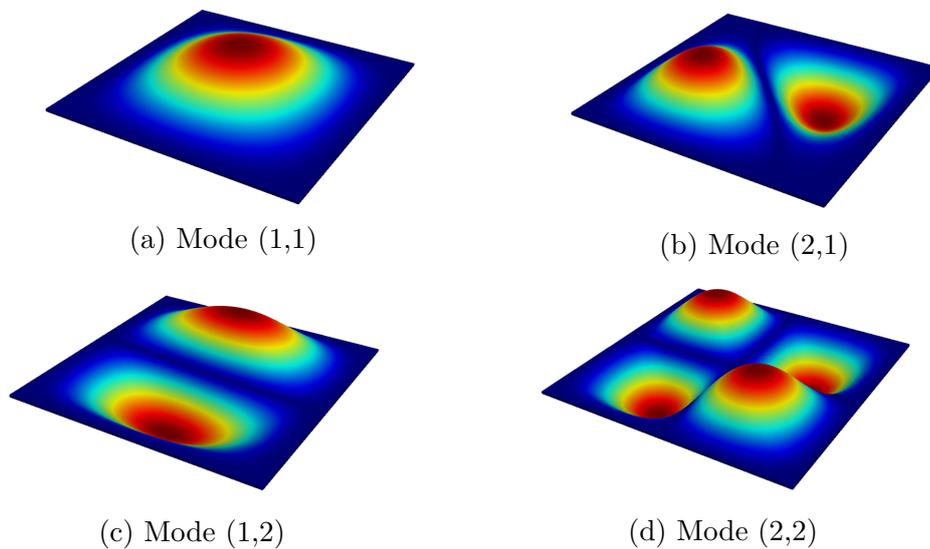


Figura 5.10: Forme modali dei primi 4 modi di vibrare della piastra ($a/h = 100$) isotropa C-C

	MUL ² [Hz]	Abaqus CAE [Hz]
Mode (1,1)	93.98	91.386
Mode (2,1)/(1,2)	194.9	186.47
Mode (2,2)	287.0	275.77

Tabella 5.10: Frequenze proprie dei primi 4 modi di vibrare della piastra ($a/h = 100$) isotropa C-C

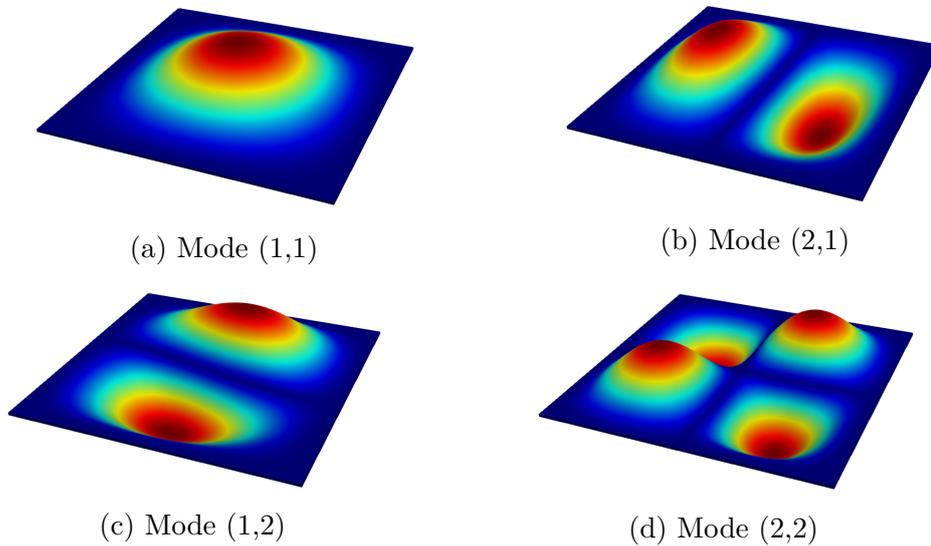


Figura 5.11: Forme dei primi 4 modi di buckling termico della piastra ($a/h = 100$) isotropa C-C

	MUL ² °C	Abaqus CAE °C
Mode (1,1)	13.156	13.021
Mode (2,1)/(1,2)	23.770	22.939
Mode (2,2)	32.782	32.109

Tabella 5.11: Variazione della temperatura ΔT_{cr} corrispondente al carico termico critico dei primi 4 modi di buckling della piastra ($a/h = 100$) isotropa C-C

Il comportamento a buckling della piastra è stato confermato dall'andamento delle frequenze, relative ai modi di vibrare della piastra, all'aumentare del parametro di carico termico λ ottenute mediante la *virtual* VCT considerando un approccio TL, con il codice di calcolo MUL².

In Fig. 5.12, infatti, è possibile osservare che all'aumentare del parametro di carico termico λ la frequenza del modo (1,1) tende a diminuire fino al quasi completo annullamento in corrispondenza del valore $\lambda_{cr} = 13.156$.

L'andamento delle frequenze è stato validato dai risultati ottenuti con simulazioni numeriche su un modello agli elementi finiti con il software Abaqus CAE utilizzando elementi *shell* quadratici a 8 nodi, Tab. 5.12.

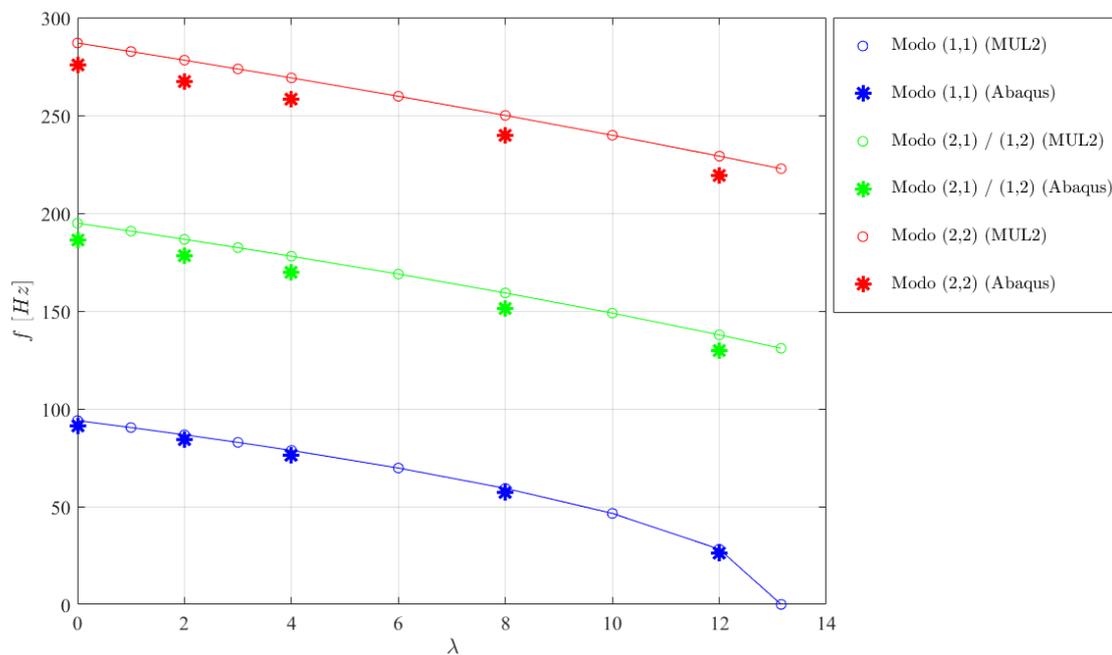


Figura 5.12: Andamento delle frequenze della piastra ($a/h = 100$) isotropa C-C al variare del parametro di carico termico ottenuto con MUL² e Abaqus CAE

	MUL ² [Hz]	Abaqus CAE [Hz]
Mode (1,1)	86.70	84.272
Mode (2,1)/(1,2)	186.62	178.33
Mode (2,2)	278.20	267.22

(a) $\lambda_3 = 2.0$

	MUL ² [Hz]	Abaqus CAE [Hz]
Mode (1,1)	78.70	76.435
Mode (2,1)/(1,2)	177.97	169.78
Mode (2,2)	269.13	258.36

(b) $\lambda_5 = 4.0$

	MUL ² [Hz]	Abaqus CAE [Hz]
Mode (1,1)	59.33	57.345
Mode (2,1)/(1,2)	159.21	151.14
Mode (2,2)	249.96	239.62

(c) $\lambda_7 = 8.0$

	MUL ² [Hz]	Abaqus CAE [Hz]
Mode (1,1)	28.24	26.026
Mode (2,1)/(1,2)	137.78	129.65
Mode (2,2)	229.14	219.17

(d) $\lambda_9 = 12.0$

Tabella 5.12: Frequenze dei primi 4 modi di vibrare della piastra ($a/h = 100$) isotropa C-C al variare del parametro di carico termico λ

5.1.4 Piastra in laminato composito

Analogamente allo studio della trave, in questa sezione sono riportati i risultati relativi allo studio del comportamento di una piastra in laminato composito a 3 strati con sequenza di laminazione $[0^\circ 90^\circ 0^\circ]$, con le stesse caratteristiche geometriche del caso isotropo precedente.

La direzionalità delle fibre all'interno degli strati del laminato determina una variazione nel comportamento dinamico della piastra sottile con condizioni di vincolo di incastro sui quattro lati.

In Fig. 5.13 e Tab. 5.13 sono riportati rispettivamente le forme modali e le relative frequenze proprie della piastra sottile con rapporto di spessore $a/h = 100$ in laminato composito. La discretizzazione adottata secondo la teoria CUF è composta da una discretizzazione sul piano principale della piastra di elementi 2D quadrati Q9 a 9 nodi e un'espansione di Lagrange tramite elementi 1D a 4 nodi B4 lungo la coordinata di spessore z . In Abaqus CAE il modello è costituito da elementi *shell* quadratici a 8 nodi.

La scelta del materiale laminato composito influisce anche sul comportamento a buckling della piastra: in particolare risulta che il primo modo di buckling della piastra composita corrisponde al modo vibrazionale (2,1), Fig. 5.13b.

In Tab. 5.14 sono riportati i valori critici di variazione di temperatura ΔT_{cr} relativi ai primi quattro modi di buckling della piastra sottile in laminato composito

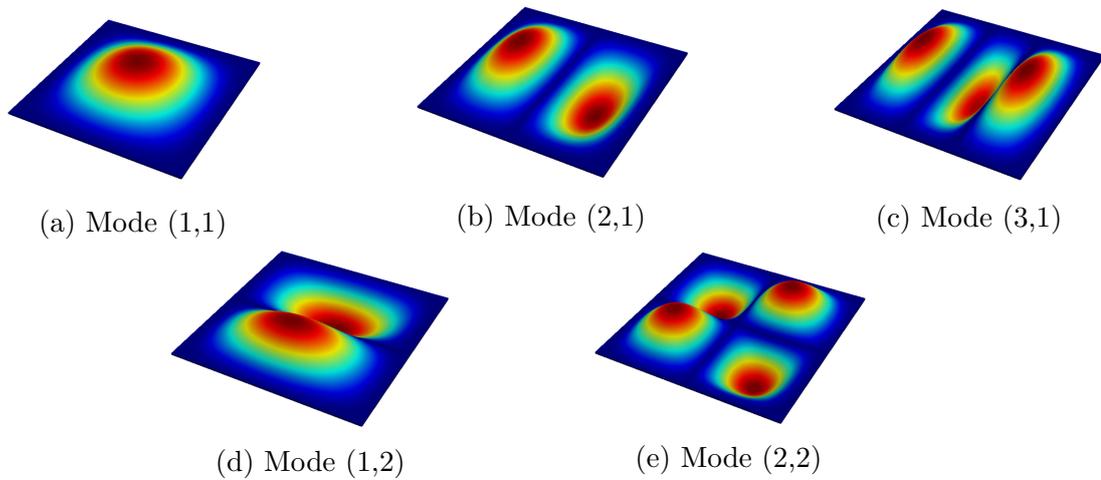


Figura 5.13: Forme modali dei primi 5 modi di vibrare della piastra ($a/h = 100$) in laminato composito $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ C-C

	MUL ² [Hz]	Abaqus CAE [Hz]
Mode (1,1)	108.67	107.76
Mode (2,1)	144.30	141.37
Mode (3,1)	222.98	212.54
Mode (1,2)	283.06	278.78
Mode (2,2)	304.53	299.43

Tabella 5.13: Frequenze proprie dei primi 5 modi di vibrare della piastra ($a/h = 100$) in laminato composito $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ C-C

incastrata sui quattro lati considerando un carico termico di riferimento dato dalla variazione uniforme di temperatura su tutto il modello $\Delta T = 1^\circ\text{C}$.

Il fenomeno del buckling è indotto dallo stato di tensione che si viene a generare in seguito all'applicazione del carico termico dato da una variazione uniforme della temperatura ΔT su tutto il modello. Considerando un sistema cartesiano con origine nel centro della piastra e posizionato nel piano mediano, come in Fig. 5.1b, è possibile diagrammare, in funzione della coordinata di spessore z , le tensioni per un determinato punto del piano fondamentale della piastra.

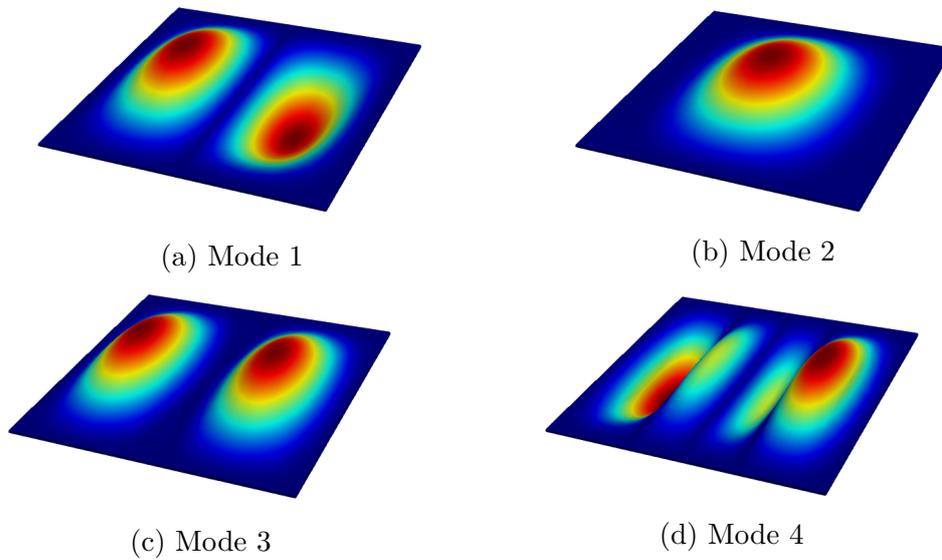


Figura 5.14: Forme dei primi 4 modi di buckling termico della piastra ($a/h = 100$) in laminato composito $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ C-C

	MUL ² °C	Abaqus °C
Mode 1	10.69	10.414
Mode 2	11.32	11.085
Mode 3	15.37	14.514
Mode 4	22.42	19.873

Tabella 5.14: Variazione della temperatura ΔT_{cr} corrispondente al carico termico critico dei primi 4 modi di buckling della piastra ($a/h = 100$) in laminato composito $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ C-C

Dai grafici in Fig. 5.15 è possibile dedurre che a seguito di un carico termico dovuto ad una variazione uniforme della temperatura su tutto il modello nei vari strati del laminato che compongono la piastra si generano delle tensioni di compressione.

In particolare le tensioni σ_{xx} risultano più intense nello strato centrale del laminato, mentre le tensioni σ_{yy} sono più intense nei strati esterni.

La piastra di conseguenza risulta soggetta ad uno stato di tensione di compressione

biassiale. In corrispondenza del valore critico di variazione della temperatura ΔT_{cr} le tensioni di compressione sono tali da indurre il fenomeno del buckling.

Gli andamenti delle tensioni in funzione della coordinata z sono stati ottenuti considerando diverse tipologie e ordini di espansioni lungo lo spessore della piastra, in accordo con la teoria CUF.

Le tensioni nel piano σ_{xx} e σ_{yy} risultano essere le tensioni di maggiore intensità e sono ben approssimate considerando sia espansioni di Lagrange sia espansioni di Taylor anche di ordine basso.

Le tensioni di taglio trasversale σ_{xz} e σ_{yz} lungo lo spessore risultano essere dai 3 a 5 ordini di grandezza meno intense rispetto alle tensioni nel piano x - y ; inoltre la stima delle tensioni di taglio trasversale è fortemente dipendente dal tipo di espansione considerata: in particolare si necessitano espansioni di Taylor di ordine elevato per ottenere risultati prossimi a quelli ottenuti con espansioni di Lagrange anche di ordine basso.

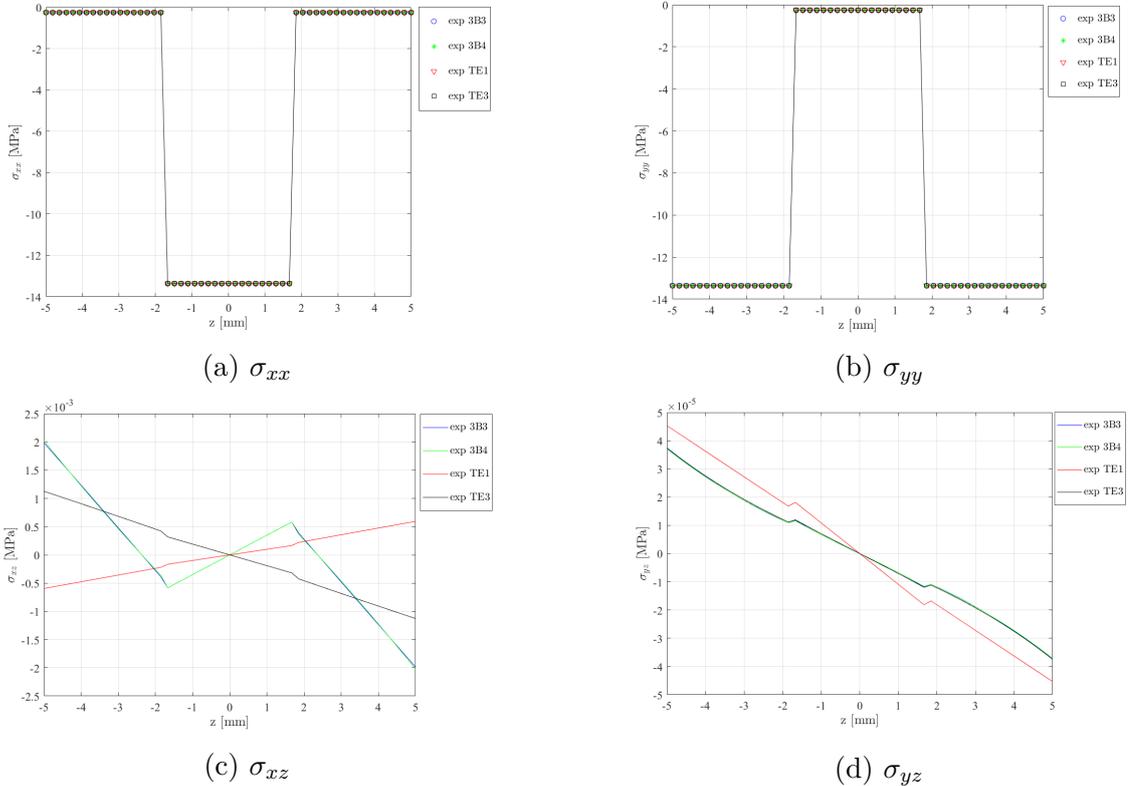


Figura 5.15: Andamenti delle tensioni σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xz} , σ_{yz} lungo la coordinata di spessore z della piastra ($a/h = 100$) in laminato composito $[0^\circ 90^\circ 0^\circ]$ soggetta ad una variazione uniforme della temperatura $\Delta T = 3^\circ\text{C}$ per $x = -0.25$ e $y = 0$ ottenuti con MUL^2 considerando diverse espansioni lungo lo spessore

Considerando un'espansione di Lagrange lungo la coordinata di spessore tramite l'utilizzo di un elemento a quattro nodi B4 per ogni strato del laminato, è stato possibile ricavare, con la *virtual* VCT, utilizzando l'approccio TL, l'andamento delle frequenze dei modi di vibrare della piastra sottile in laminato composito con sequenza di laminazione $[0^\circ 90^\circ 0^\circ]$ con i 4 lati incastrati al variare del parametro di carico termico λ , Fig. 5.16.

Anche in questo caso è stato possibile confermare i risultati dell'analisi a buckling linearizzata, ottenendo che il primo modo di buckling della piastra in laminato composito soggetta ad un carico termico dovuto ad una variazione uniforme di temperatura su tutto il modello coincide con il modo vibrazionale (2,1), Fig. 5.13b. I risultati sono stati validati effettuando delle simulazioni con il software commerciale agli elementi finiti Abaqus CAE, dimostrando un'ottima correlazione tra i risultati ottenuti, come è possibile osservare dal confronto delle frequenze dei modi di vibrare della piastra per diversi step di carico termico applicato riportati nelle Tab. 5.15.

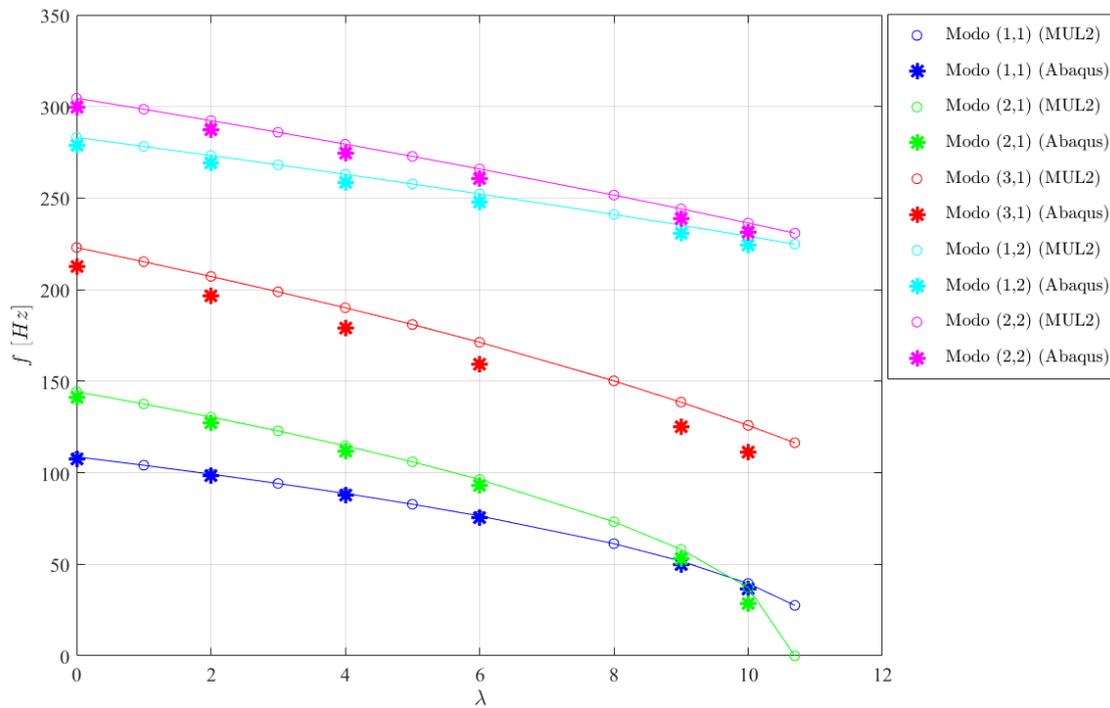


Figura 5.16: Andamento delle frequenze della piastra ($a/h = 100$) in laminato composito $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ C-C al variare del parametro di carico termico ottenuto con MUL² e Abaqus CAE

	MUL ² [Hz]	Abaqus CAE [Hz]
Mode (1,1)	99.26	98.365
Mode (2,1)	130.41	127.47
Mode (3,1)	207.20	196.49
Mode (1,2)	273.23	268.93
Mode (2,2)	292.28	287.20

(a) $\lambda_3 = 2.0$

	MUL ² [Hz]	Abaqus CAE [Hz]
Mode (1,1)	88.69	87.788
Mode (2,1)	114.72	111.68
Mode (3,1)	190.09	178.97
Mode (1,2)	263.00	258.66
Mode (2,2)	279.44	274.36

(b) $\lambda_5 = 4.0$

	MUL ² [Hz]	Abaqus CAE [Hz]
Mode (1,1)	76.43	75.438
Mode (2,1)	96.35	93.021
Mode (3,1)	171.29	159.51
Mode (1,2)	252.29	247.90
Mode (2,2)	265.92	260.83

(c) $\lambda_7 = 6.0$

	MUL ² [Hz]	Abaqus CAE [Hz]
Mode (1,1)	51.75	50.023
Mode (2,1)	58.18	53.031
Mode (3,1)	138.52	124.92
Mode (1,2)	235.20	230.66
Mode (2,2)	244.13	238.92

(d) $\lambda_9 = 9.0$

Tabella 5.15: Frequenze dei primi 5 modi di vibrare della piastra ($a/h = 100$) in laminato composito $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ C-C al variare del parametro di carico termico λ

5.2 Studio parametrico su una piastra in laminato composito soggetta ad un carico termico uniforme

In questa sezione sono riportati i risultati di uno studio parametrico al variare della sequenza di laminazione e dello spessore complessivo della piastra in laminato composito, con le proprietà del materiale riportate in Tab. 5.2b, incastrata sui quattro lati soggetta ad una variazione uniforme della temperatura ΔT su tutto il modello.

In particolare lo studio è incentrato sugli effetti della variazione della sequenza di laminazione e dello spessore sul comportamento a buckling e sulle frequenze dei modi di vibrare della piastra all'aumentare del parametro di carico termico λ .

5.2.1 Andamento delle frequenze al variare della sequenza di laminazione della piastra in laminato composito

La geometria della piastra in esame è la medesima dei casi precedenti, Fig. 5.1b, con un rapporto di spessore $a/h = 100$.

Sono state considerate tre diverse sequenze di laminazione: in particolare un laminato a tre strati $[0^\circ 90^\circ 0^\circ]$, un laminato a sei strati simmetrico $[0^\circ 45^\circ -45^\circ]_s$ e un laminato a 4 strati simmetrico $[45^\circ -45^\circ]_s$.

La variazione della sequenza di laminazione causa di conseguenza una variazione dello stato di tensione nei vari strati del laminato che compongono la piastra soggetta ad un carico termico dato da una variazione uniforme della temperatura su tutto il modello.

In Fig. 5.17 sono riportate i diversi modi di buckling termico della piastra al variare della sequenza di laminazione; passando da una laminazione *cross-ply* a laminazioni simmetriche con strati in cui si ha un orientamento delle fibre a $\pm 45^\circ$, il primo modo di buckling passa da una forma a due semionde ad una forma a singola semionda. Inoltre si ha una variazione del carico critico corrispondente alla configurazione di buckling, Tab. 5.16.

Una conferma dei risultati ottenuti dall'analisi a buckling della piastra in laminato composito, soggetta ad una variazione uniforme della temperatura, è fornita dagli andamenti delle frequenze proprie corrispondenti al primo modo di buckling termico per le diverse sequenze di laminazione considerate, riportati in Fig. 5.18 e 5.19. La scelta della sequenza di laminazione rappresenta di conseguenza una variabile di progetto aggiuntiva determinante nel processo di design di una struttura in laminato composito che permette o meno di rispettare i requisiti di progetto imposti.

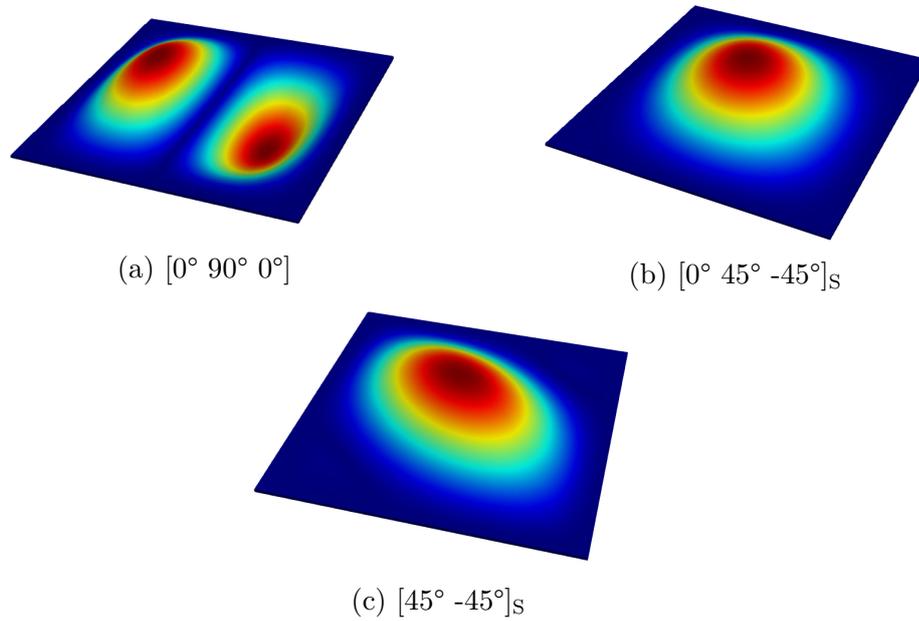
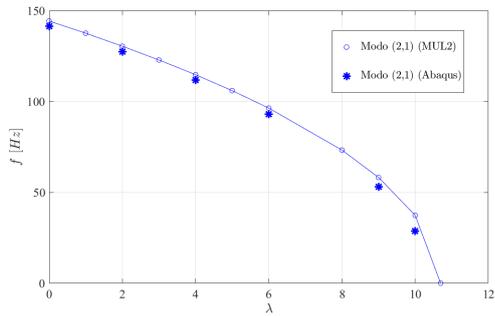


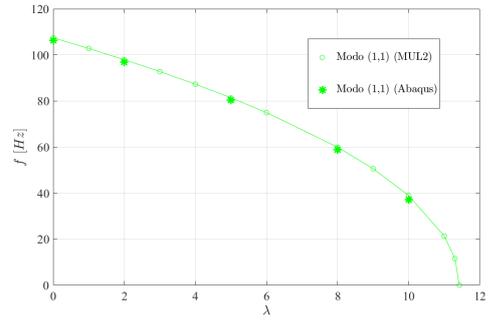
Figura 5.17: Forme del primo modo di buckling termico della piastra ($a/h = 100$) in laminato composito per diverse sequenze di laminazione

Laminazione	Modo di buckling	MUL ² °C	Abaqus °C
$[0^\circ 90^\circ 0^\circ]$	Modo (2,1)	10.69	10.414
$[0^\circ 45^\circ -45^\circ]_s$	Modo (1,1)	11.42	11.295
$[45^\circ -45^\circ]_s$	Modo (1,1)	9.02	8.905

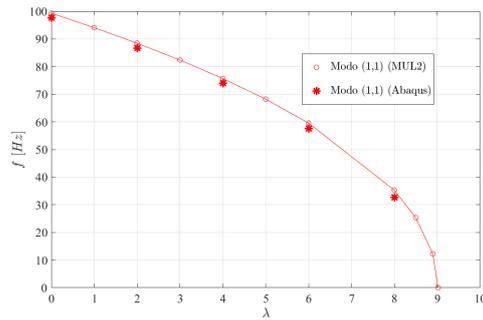
Tabella 5.16: Variazione della temperatura ΔT_{cr} corrispondente al carico termico critico del primo modo di buckling della piastra ($a/h = 100$) in laminato composito per diverse sequenze di laminazione



(a) [0° 90° 0°]



(b) [0° 45° -45°]s



(c) [45° -45°]s

Figura 5.18: Studio parametrico sulla frequenza del primo modo di buckling termico per diverse sequenze di laminazione della piastra ($a/h = 100$) in composito effettuato con MUL² e Abaqus CAE

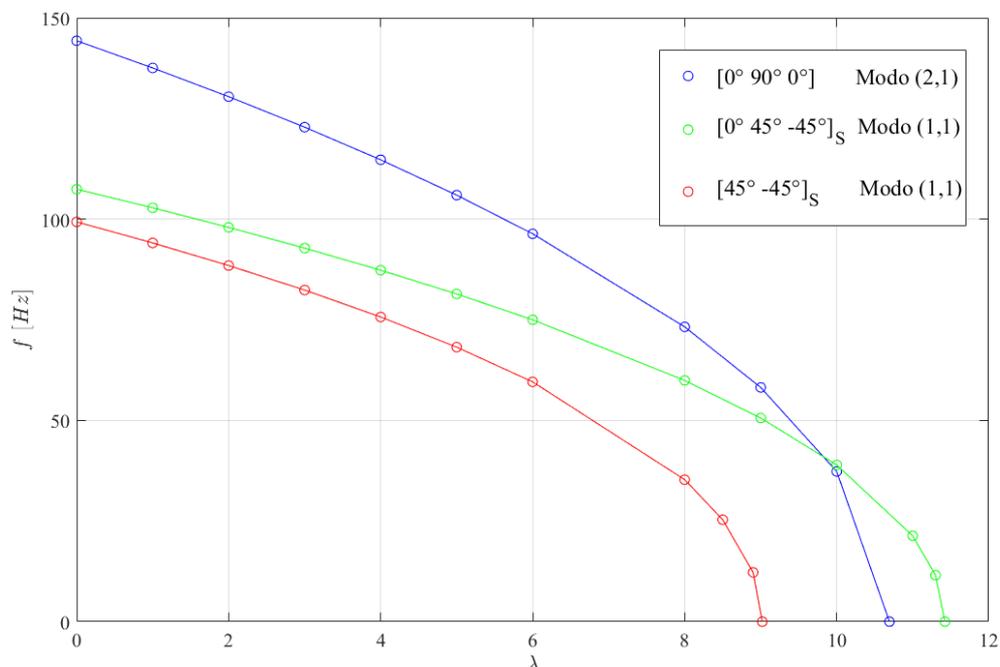


Figura 5.19: Andamento della frequenza del primo modo di buckling termico al variare della sequenza di laminazione della piastra ($a/h = 100$) in composito

5.2.2 Andamento delle frequenze al variare dello spessore della piastra in laminato composito

In questo caso è stata considerata una piastra in laminato composito a tre strati di uguale spessore con sequenza di laminazione $[0^\circ 90^\circ 0^\circ]$, incastrata sui quattro lati e soggetta ad una variazione uniforme della temperatura.

Lo studio parametrico ha riguardato il comportamento a buckling per effetto del carico termico e la variazione dell'andamento della frequenza corrispondente al primo modo di buckling considerando quattro diversi rapporti di spessore a/h della piastra: da $a/h = 100$ per una piastra molto sottile fino al valore $a/h = 10$ per una piastra molto spessa.

All'aumentare dello spessore della piastra in laminato composito si verifica un aumento considerevole delle frequenze proprie dovute alla crescente rigidità della piastra.

Un ulteriore effetto dell'aumento della rigidità della piastra dovuto allo spessore crescente è l'aumento del carico critico termico per il quale si verifica il fenomeno del buckling, Tab. 5.17, in seguito all'applicazione di una variazione uniforme della temperatura. La scelta di un rapporto di spessore pari a $a/h = 10$ causa, in aggiunta, la variazione della forma del primo modo di buckling della piastra, passando da

una forma a 2 semionde ad una forma a singola semionda, Fig. 5.20.

In Fig. 5.21 e 5.22 è riportato il confronto tra gli andamenti della frequenza del primo modo di buckling in funzione del parametro di carico termico λ al variare dello spessore della piastra.

In particolare i risultati ottenuti mediante il codice di calcolo MUL², che implementa la teoria CUF, sono coerenti con i risultati ottenuti con il software commerciale Abaqus CAE anche per il caso di piastra molto spessa.

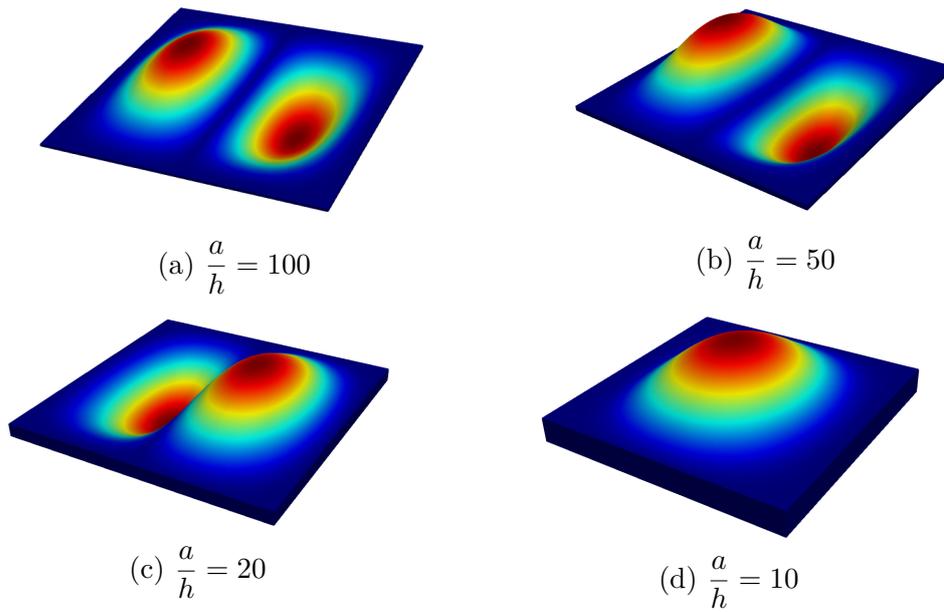
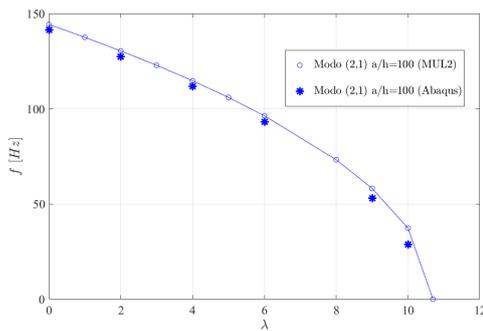


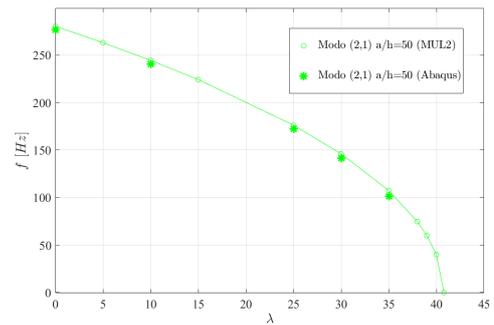
Figura 5.20: Forme del primo modo di buckling termico della piastra in laminato composito $[0^\circ 90^\circ 0^\circ]$ per diversi rapporti di spessore a/h

$\frac{a}{h}$	Modo di buckling	MUL ² °C	Abaqus °C
100	Modo (2,1)	10.69	10.414
50	Modo (2,1)	40.80	40.221
20	Modo (2,1)	206.01	206.96
10	Modo (1,1)	502.46	504.60

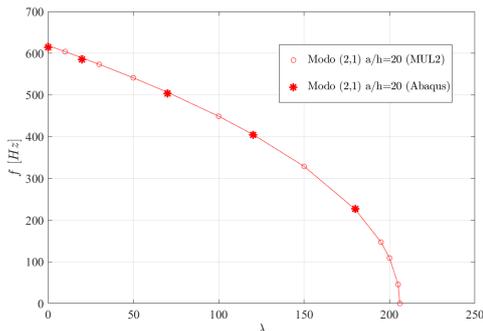
Tabella 5.17: Variazione della temperatura ΔT_{cr} corrispondente al carico termico critico del primo modo di buckling termico della piastra in laminato composito $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ per diversi rapporti di spessore a/h



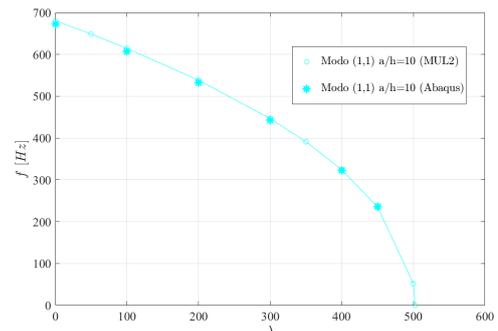
(a) $\frac{a}{h} = 100$



(b) $\frac{a}{h} = 50$



(c) $\frac{a}{h} = 20$



(d) $\frac{a}{h} = 10$

Figura 5.21: Studio parametrico sulla frequenza del primo modo di buckling termico per diversi rapporti di spessore a/h della piastra in laminato composito $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ effettuato con MUL² e Abaqus CAE

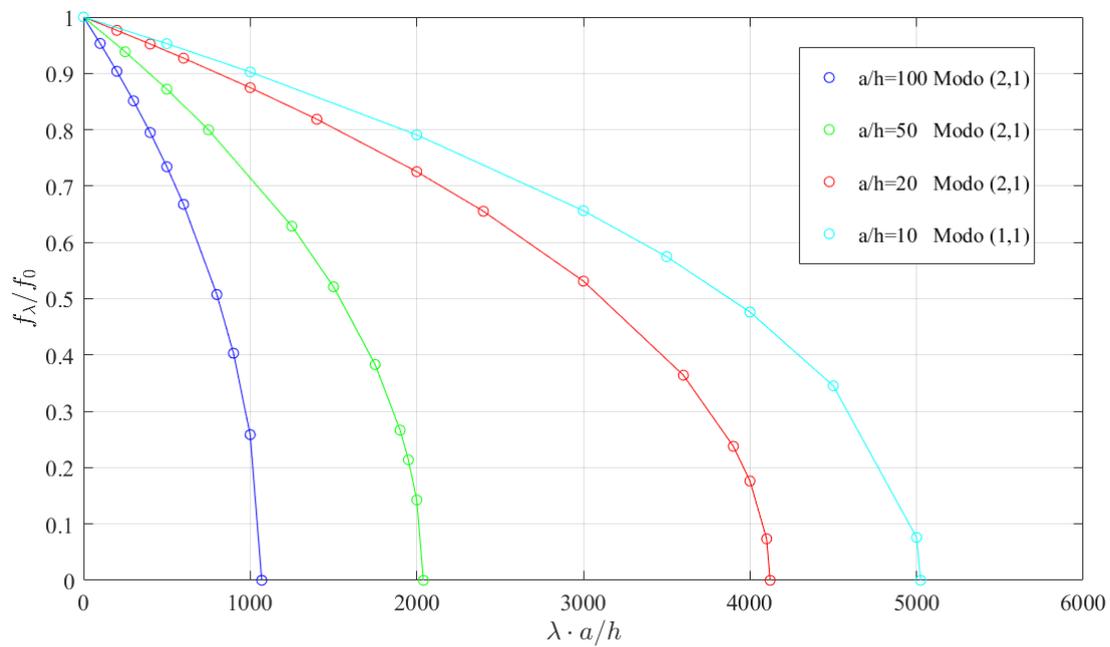


Figura 5.22: Andamento della frequenza del primo modo di buckling termico al variare del rapporto di spessore a/h della piastra in laminato composito $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$

Capitolo 6

Conclusioni

L'obiettivo di questo lavoro è stato quello di studiare, attraverso modelli numerici, le vibrazioni di strutture con geometrie differenti, soggette a condizioni di vincolo e di carico differenti utilizzando la *Vibration Correlation Technique* (VCT), attraverso l'approccio alternativo fornito dalla Carrera Unified Formulation (CUF).

Questo tipo di analisi rappresentano uno strumento potente, in particolare per lo studio del fenomeno del buckling: il vantaggio fondamentale della VCT in ambito sperimentale è rappresentato dal fatto che consiste in un metodo di analisi non distruttivo in grado di preservare l'integrità della struttura in esame ottenendo risultati soddisfacenti.

Attraverso questo tipo di analisi strutturali, infatti, è possibile verificare che le scelte progettuali applicate soddisfino i requisiti di progetto imposti, consentendo alla struttura di resistere all'ambiente di carico della missione, con un risparmio delle risorse da impiegare.

A tal fine, le simulazioni numeriche sono fondamentali per ottenere una stima del comportamento delle strutture soprattutto nei casi in cui le prove sperimentali risultano essere troppo costose o di difficile realizzazione.

In particolare in questo lavoro sono riportati i risultati relativi a simulazioni numeriche sfruttando la *virtual* VCT, effettuate con il codice di calcolo agli elementi finiti MUL², sviluppato dall'omonimo team di ricerca del Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale del Politecnico di Torino, che implementa la teoria CUF.

Parallelamente è stata effettuata una validazione dei risultati tramite simulazioni numeriche effettuate con il software commerciale agli elementi finiti Abaqus CAE. In questo lavoro, lo studio delle vibrazioni delle strutture, soggette a carichi di varia natura, è stato possibile considerando una matrice di rigidità nella quale sono inclusi gli effetti non lineari dello stato di tensione dato dalla configurazione di carico.

L'approccio *trivial linearized* (TL) consente di determinare gli effetti non lineari a partire dallo stato tensione lineare della struttura con un costo computazionale

inferiore rispetto al calcolo della matrice di rigidezza tangente \mathbf{K}_T per ogni step di carico.

I risultati ottenuti hanno permesso di dimostrare le potenzialità di modelli numerici basati sulla teoria CUF rispetto alle tradizionali teorie cinematiche implementate nei vari software di calcolo commerciali agli elementi finiti.

Infatti i risultati mostrano come la scelta della tipologia di materiale e della geometria influenza non solo il fenomeno del buckling ma anche il comportamento vibrazionale delle strutture, aspetto che è necessario tenere in considerazione per valutare le prestazioni delle strutture in tutte le fasi della missione operativa.

In particolare, dai risultati ottenuti si evince che, nel caso delle strutture considerate nello studio, l'impiego di laminati in materiale composito garantisce prestazioni confrontabili al caso di impiego di materiali isotropi classici, portando a vantaggi soprattutto in termini di peso, a parità di prestazioni, aspetto fondamentale per l'uso su veicoli da lancio riutilizzabili.

Inoltre, le analisi termiche effettuate sulle strutture considerate hanno dimostrato la capacità dei materiali compositi di poter resistere non solo a carichi meccanici, ma anche a carichi termici paragonabili a quelli relativi all'impiego di materiali metallici isotropi tradizionali.

L'impiego di materiali compositi nel progetto strutturale di veicoli da lancio riutilizzabili (RLV), il cui ambiente di carico è caratterizzato non solo da carichi meccanici, dati dalle severe accelerazioni e vibrazioni, ma anche da carichi acustici e termici dovuti all'interazione con gli strati dell'atmosfera, garantirebbe una diminuzione del peso della struttura garantendo allo stesso tempo i requisiti di affidabilità e sicurezza.

Ulteriori sforzi, infatti, possono essere diretti verso studio di serbatoi di propellenti criogenici in materiale composito che possono rappresentare un'alternativa alle leghe metalliche utilizzate fino ad oggi.

In questo modo sarebbe possibile diminuire i costi per l'accesso allo spazio e aumentare gli scenari di missione possibili.

Sebbene i risultati ottenuti siano promettenti, l'utilizzo di laminati in materiale composito comporta ulteriori problematiche legate soprattutto alle tecniche di realizzazione di componenti di grandi dimensioni e ai diversi tipi di *failure* che si possono verificare tra i vari strati del laminato.

Inoltre, nelle simulazioni effettuate, non è stata considerata la presenza di difetti nelle strutture, aspetto che influenza notevolmente il comportamento e le proprietà di un componente strutturale, causando una notevole discrepanza tra eventuali risultati sperimentali e i risultati ottenuti con un modello numerico che non descrive in maniera appropriata il fenomeno.

Si può affermare quindi che per quanto riguarda la progettazione di strutture in laminato composito i parametri da tenere in considerazione sono molteplici, ma nonostante ciò, tramite processi di ottimizzazione, è possibile ottenere prestazioni che soddisfano i requisiti di progetto della struttura in esame.

Un ulteriore spunto per successivi studi può riguardare l'impiego di materiali *Variable Angle Tow* (VAT), caratterizzati da un elevato numero di variabili di progetto e ottimizzazione; inoltre tramite l'utilizzo di materiali VAT è possibile esplorare nuove tecniche di realizzazione dei componenti quali ad esempio le tecniche additive di manifattura.

Per concludere, le analisi su modelli numerici forniscono un ausilio nella fase progettuale, permettendo di esplorare molteplici soluzioni con un notevole risparmio in termini di costo e tempo; le simulazioni numeriche permettono anche di ottenere maggiore sicurezza delle scelte progettuali nelle fasi di verifica, in cui sono previste prove sperimentali su componenti reali per garantire i requisiti di sicurezza e prestazioni imposti.

Questo lavoro lascia spazio a successive e approfondite ricerche di modelli numerici e tecniche di analisi e verifica in grado di fornire una stima accurata del comportamento di strutture a guscio laminate in parete sottile in accordo con i risultati sperimentali considerando geometrie più complesse in cui l'effetto delle non-linearità risulta essere più intenso.

Bibliografia

- [1] Delma C Freeman, Theodore A Talay, R.Eugene Austin, *Reusable launch vehicle technology program*, 11 Paper IAF.-96-V.4.01 presented at the 47th International Astronautical Congress, Beijing, China, 7–11 October 1996., Acta Astronautica, Volume 41, Issue 11, 1997, Pages 777-790, ISSN 0094-5765, DOI: 10.1016/S0094-5765(97)00197-5.
- [2] Gaubatz, W. A., *DC-X Results and the Next Step*, AIAA Paper 94-4674, 1994.
- [3] Letchworth, Gary. *X-33 reusable launch vehicle demonstrator, spaceport and range*. AIAA Space 2011 Conference & Exposition. 2011.
- [4] SpaceX, *Falcon user's guide*, April 2020.
- [5] Blue Origin, *New Glenn payload user's guide*, Revision C October 2018.
- [6] Henson G., Jone C. S., *Chapter 7: Materials for Launch Vehicle Structures* (AIAA), Retrieved from <https://ntrs.nasa.gov/api/citations/20170001809/downloads/20170001809.pdf>
- [7] Ludovico Vecchione, *Tecnologie italiane per i futuri lanciatori europei*, Compositi magazine, <https://www.compositimagazine.it/tecnologie-italiane-per-i-futuri-lanciatori-europei>, June 2013.
- [8] Sarafin, Thomas P., and Wiley J. Larson. *Spacecraft Structures and Mechanisms from Concept to Launch*. Torrance Dordrecht: Microcosm Kluwer, 1995. Print.
- [9] Singer, J., J. Arbocz, T. Weller, and JA Cheney. *Buckling Experiments: Experimental Methods in Buckling of Thin-Walled Structures. Shells, Built-up Structures, Composites and Additional Topics, Volume 2.*, John Wiley & Sons, Inc, 2002.
- [10] Hoff, N. (1969). *Some Recent Studies of the Buckling of Thin Shells*. The Aeronautical Journal (1968), 73(708), 1057-1070. DOI: 10.1017/S0001924000051289
- [11] Hoff, N.J., *The Perplexing Behavior of Thin Circular Cylindrical Shells in Axial Compression*, Israel Journal of Technology, 4, (1), 1966, 1-28.
- [12] Almroth, B.O., Holmes, A.M.C. & Brush, D.O. *An experimental study of the buckling of cylinders under axial compression*. Experimental Mechanics 4, 263–270 (1964), DOI: 10.1007/BF02323088

-
- [13] Yoshimura, Y., *On the Mechanism of Buckling of a Circular Cylindrical Shell under Axial Compression*, National Advisory Committee on Aeronautics, NACA TM (1390), 1955
- [14] Donnell, L. H., *A New Theory for the Buckling of Thin Cylinders Under Axial Compression and Bending*. A.S.M.E. Trans., vol. 56, no. U, NOV. 1934, pp. 795-En
- [15] Von Karman, Th., and Tsien, H. S., *The Buckling of Thin Cylindrical Shells Under Axial Compression*, J. Aeronaut. Sci., 8, 303-312 (1941), DOI: 10.2514/8.10722.
- [16] Donnell, L. H., and Wan, C. C., *Effect of Imperfections of Buckling of Thin Cylinders and Columns Under Axial Compression*, J. Appl. Mech., Vol. 17, No. 1, pp. 73-88, 1950, DOI: 10.1115/1.4010060
- [17] Harris, L., Suer, H.S., Skene, W.T., and Benjamin, R.J., *The Stability of Thin-Walled Unstiffened Circular Cylinders Under Axial Compression Including the Effects of Internal Pressure*, Journal of the Aeronautical Sciences, 24, (8), August 1957, 587-606, DOI: 10.2514/8.3911
- [18] George Gerard, C. Lakshmikantham, and Roger Milligan, *General instability of orthotropically stiffened cylinders under axial compression*, AIAA Journal 1966 4:11, 1906-1913, DOI: 10.2514/3.3817
- [19] Weller, T., and Singer, J. (December 1, 1977). *Experimental Studies on the Buckling Under Axial Compression of Integrally Stringer-Stiffened Circular Cylindrical Shells*. ASME. J. Appl. Mech. December 1977; 44(4): 721-730, DOI: 10.1115/1.3424163
- [20] Peterson, James P., and Dow, Marvin B., *Compression Tests on Circular Cylinders Stiffened Longitudinally by Closely Spaced Z-Section Stringers*, NASA MEMO 2-12-59L, 1959
- [21] J. Singer, J. Arbocz and C. D. Babcock, Jr., *Buckling of Imperfect Stiffened Cylindrical Shells under Axial Compression*, AIAA Journal, vol. 9, no. 1, pp. 68-75, January 1971, DOI: 10.2514/3.6125
- [22] W. F. Thielemann, *New Developments in the Nonlinear Theories of the Buckling of Thin Cylindrical Shells*, Aeronautics and Astronautics, pp. 76-120, 1960.
- [23] J. Singer and A. Rosen, *The Influence of Boundary Conditions on the Buckling of Stiffened Cylindrical Shells*, in *Buckling of Structures*, Proceedings of IUTAM Symposium, B. Budiansky, Ed., Springer-Verlag, 1976, pp. 227-250, DOI: 10.1007/978-3-642-50992-6_21
- [24] N. S. Khot, *On the influence of initial geometric imperfections on the buckling and postbuckling behavior of fiber-reinforced cylindrical shells under uniform axial compression*, Air Force Systems Command, Wright-Patterson Air Force Base, 1968.
- [25] N. S. Khot, *Buckling and Postbuckling Behavior of Composite Cylindrical Shells under Axial Compression*, AIAA Journal, vol. 8, no. 2, pp. 229-235,

- February 1970, DOI: 10.2514/3.5648
- [26] N. S. Khot and V. B. Venkayya, *Effect of fiber orientation on initial postbuckling behavior and imperfection sensitivity of composite cylindrical shells*, Air Force Systems Command, Wright-Patterson Air Force Base, 1970
- [27] B. O. Almroth, *Design of Composite Material Structures for Buckling - An Evaluation of the State-Of-The-Art*, Air Force Systems Command, Wright-Patterson Air Force Base, 1981
- [28] H. R. Meyer-Piening, M. Farshad, B. Geier and R. Zimmermann, *Buckling loads of CFRP composite cylinders under combined axial and torsion loading - experiments and computations*, Composite Structures, vol. 53, no. 4, pp. 427-435, September 2001, DOI: 10.1016/S0263-8223(01)00053-8
- [29] B. Geier, H. R. Meyer-Piening and R. Zimmermann, *On the influence of laminate stacking on buckling of composite cylindrical shells subjected to axial compression*, Composite Structures, vol. 55, pp. 467-474, March 2002, DOI: 10.1016/S0263-8223(01)00175-1
- [30] M. W. Hilburger and J. H. Starnes, Jr., *Effects of imperfections on the buckling response of compression-loaded composite shells*, International Journal of Non-Linear Mechanics, vol. 37, pp. 623-643, 2002, DOI: 10.1016/S0020-7462(01)00088-9
- [31] M. W. Hilburger and J. H. Starnes, Jr., *Effects of imperfections of the buckling response of composite shells*, Thin-Walled Structures, vol. 42, pp. 369-397, 2004, DOI: 10.1016/j.tws.2003.09.001
- [32] V. K. Goyal, N. R. Jaunky, E. R. Johnson and D. R. Ambur, *Intralaminar and Interlaminar Progressive Failure Analyses of Composite Panels with Circular Cutouts*, Composite Structures, pp. 91-105, 2004, DOI: 10.1016/S0263-8223(03)00217-4
- [33] S. Kidane, G. Li, J. Helms, S. Pang and E. Woldesenbet, *Buckling load analysis of grid stiffened composite cylinders*, Composites: Part B 34, pp. 1-9, 2003, DOI: 10.1016/S1359-8368(02)00074-4
- [34] N. Jaunky, N. F. Knight and D. R. Ambur, *Optimal design of general stiffened composite circular cylinders for global buckling with strength constraints*, Composite Structures, pp. 243-252, 1998, DOI: 10.1016/S0263-8223(98)00020-8
- [35] D. Wang and M. Abdalla, *Buckling Analysis of Grid-Stiffened Composite Shells*, in Design and Analysis of Reinforced Fiber Composites, P. Marcal and N. Yamagata, Eds., Springer, 2016, DOI: 10.1007/978-3-319-20007-1_1
- [36] M. Li, F. Sun, C. Lai, H. Fan, B. Ji, X. Zhang, D. Liu and D. Fang, *Fabrication and Testing of Composite Hierarchical Isogrid Stiffened Cylinder*, Composites Science and Technology, pp. 152-159, 2018, DOI: 10.1016/j.compscitech.2018.01.040
- [37] Catapano, A., Montemurro, M., Balcou, JA. et al, *Rapid Prototyping of Variable Angle-Tow Composites*, Aerotec. Missili Spaz. 98, 257-271 (2019), DOI:

- 10.1007/s42496-019-00019-0
- [38] José Humberto S. Almeida, Luc St-Pierre, Zhihua Wang, Marcelo L. Ribeiro, Volnei Tita, Sandro C. Amico, Saullo G.P. Castro, *Design, modeling, optimization, manufacturing and testing of variable-angle filament-wound cylinders*, Composites Part B, Vol. 225, 2021, DOI: 10.1016/j.compositesb.2021.109224
- [39] Hilburger M. W., *Buckling of Thin-Walled Circular Cylinders*, Langley Research Center Hampton, Virginia, United States, December 2020, NASA/SP-8007-2020/REV 2
- [40] Heldenfels R. R., Roberts W. M., *Experimental and Theoretical Determination of Thermal Stresses in a Flat Plate*, NACA TN 2769, 1952
- [41] Thornton E. A., *Thermal Buckling of Plates and Shells*, ASME. Appl. Mech. Rev. October 1993; 46(10): 485–506. DOI: 10.1115/1.3120310
- [42] Gossard M. L., Seide P., Roberts W. M., *Thermal Buckling of Plates*, NACA TN 2771, 1952
- [43] Teare W. P., and Fields R.A., *Buckling analysis and test correlation of high temperature structural panels*, in: Thermal Structures and Materials for High-Speed Flight, Thornton E. A., ed., Progress in Astronautics and Aeronautics, vol. 140, AIAA, 1992, 337-352
- [44] E. Carrera, M. Cinefra, M. Petrolo, and E. Zappino, *Finite element analysis of structures through unified formulation*. John Wiley & Sons, 2014
- [45] A. Pagani & E. Carrera (2018) *Unified formulation of geometrically nonlinear refined beam theories*, Mechanics of Advanced Materials and Structures, 25:1, 15-31, DOI: 10.1080/15376494.2016.1232458
- [46] E. Carrera, A. Pagani, R. Augello & B. Wu (2020) *Popular benchmarks of nonlinear shell analysis solved by 1D and 2D CUF-based finite elements*, Mechanics of Advanced Materials and Structures, 27:13, 1098-1109, DOI: 10.1080/15376494.2020.1728450
- [47] B. Wu, A. Pagani, W. Q. Chen & E. Carrera (2019): *Geometrically nonlinear refined shell theories by Carrera Unified Formulation*, Mechanics of Advanced Materials and Structures, DOI: 10.1080/15376494.2019.1702237.
- [48] Theocaris, P.S. *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*: By Kyuichiro Washizu, Pergamon Press, Oxford, 1982. ISBN 0-08-026723-9, Xv 630 Pages, Hard-cover. Journal of Mechanical Working Technology 9.3 (1984): 330-31. Web.
- [49] J.N. Reddy, *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis: With Applications to Heat Transfer, fluid Mechanics, and Solid Mechanics*, Oxford University Press, Oxford, UK, 2014.
- [50] Carrera, E. *A study on arc-length-type methods and their operation failures illustrated by a simple model*. Computers & structures 50.2 (1994): 217-229.
- [51] M.A. Crisfield, *A fast incremental/iterative solution procedure that handles "snap through"*, Comput. Struct., vol. 13, no. 1, pp. 55–62, 1981.

- [52] M.A. Crisfield, *An arc-length method including line searches and accelerations*, Int. J. Numer. Methods Eng., vol. 19, no. 9, pp. 1269–1289, 1983.
- [53] J.-L. Batoz and G. Dhatt, *Incremental displacement algorithms for nonlinear problems*, Int. J. Numer. Methods Eng., vol. 14, no. 8, pp. 1262–1267, 1979.
- [54] R. Azzara, E. Carrera, A. Pagani, *Nonlinear Vibration Correlation and Buckling Analysis of Flat Plates and Shells*, Proceedings of ASME 2021 International Mechanical Engineering Congress and Exposition, November 1–4, 2021, IMECE2021-69580.
- [55] E. Carrera, A. Pagani, R. Augello, *Effect of large displacements on the linearized vibration of composite beams*, International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 120, 2020, DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2019.103390
- [56] A. Robaldo, E. Carrera & A. Benjeddou (2005) *Unified Formulation for Finite Element Thermoelastic Analysis of Multilayered Anisotropic Composite Plates*, Journal of Thermal Stresses, 28:10, 1031-1065, DOI: 10.1080/01495730590964963